ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Μαθηματική εκπαίδευση Β΄ Ηλικιακού κύκλου (13-18 χρόνων)

Διπλωματική εργασία

Εγγραφή τετραγώνου σε τρίγωνο- Διερεύνηση του προβλήματος από μαθητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.

Σαχίνη Ευαγγελία Α.Μ: 1071

Επιβλέπων καθηγητής: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής.

Εξεταστές: Τζεκάκη Μαριάννα, Καθηγήτρια.

Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής

Θεσσαλονίκη

Μάρτιος 2023

Φύλλο Εξέτασης

1. Επόπτης: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος

Βαθμός: ....

Υπογραφή: Ημερομηνία:

2. Δεύτερος εξεταστής: ....

Βαθμός: ....

Υπογραφή: Ημερομηνία:

3. Τρίτος εξεταστής: ....

Βαθμός: ....

Υπογραφή: Ημερομηνία:

Γενικός βαθμός: ....

Η συγγραφέας Σαχίνη Ευαγγελία βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος έργου είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας και ότι έχει γίνει η κατάλληλη αναφορά στις εργασίες τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

Υπογραφή:

Ημερομηνία:

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά :

- Πρωτίστως τον καθηγητή μου, Νικολαντωνάκη Κωνσταντίνο, για την επιλογή του θέματος, τη στήριξη , το ενδιαφέρον και την καθοδήγηση που μου προσέφερε καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας.
- Τους συν-επιβλέποντες καθηγητή κ. Λεμονίδη Χαράλαμπο και καθηγήτρια κα. Τζεκάκη Μαριάννα που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.
- Την από καρδιάς φίλη μου Σουσουγκέλη Αναστασία, που με ενθάρρυνε και με παρότρυνε να δηλώσω συμμετοχή από την πρώτη στιγμή.
- Το φίλο και συνάδελφο Μαργίδη Τριαντάφυλλο για τη βοήθεια που προσέφερε στην επιμέλεια του κειμένου, αλλά και την ψυχολογική στήριξη κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.
- Τις κόρες μου που με στήριξαν και για την υπομονή που έδειξαν.

Αφιερώνεται στη μνήμη του πατέρα μου

για όσα του οφείλω!

Περιεχόμενα

Κατάλογος εικόνων

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος πινάκων

Κατάλογος διαγραμμάτων

«Δεν υπάρχει βασιλικός (σύντομος) δρόμος για να μάθεις γεωμετρία»

Ευκλείδης

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αφορά μια διδακτική παρέμβαση που βασίζεται στη γεωμετρική κατασκευή τετραγώνου εγγεγραμμένου σε τρίγωνο, με πέντε διαφορετικές αποδείξεις, όπως αναπτύχθηκαν από τους μαθηματικούς al -Khwarizmi, Chuquet, Marolois, Bourdon και Pólya. Η έρευνα διεξήχθη σε 22 μαθητές της Β΄ τάξης ενός Γενικού Λυκείου και είχε διάρκεια 10 διδακτικές ώρες. Ο μαθητές ήταν χωρισμένοι κατά ζεύγη, εργάζονταν με φύλλα εργασίας με κανόνα και διαβήτη και εφάρμοσαν τη μέθοδο του Pólya στο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geogebra. Μετά το πέρας της παρέμβασης εξετάστηκαν ατομικά σε ένα γνωστικό τεστ με δύο θέματα, το πρώτο ήταν το γνωστό θέμα που πραγματευτήκαμε, ενώ το δεύτερο ήταν η εγγραφή τετραγώνου σε ημικύκλιο. Το μαθηματικό έργο αναλύθηκε ως προς τις τρεις διαστάσεις του μοντέλου του Γεωμετρικού Χώρου Εργασίας, σημειωτικής, εργαλειακής και συλλογιστικής γένεσης. Συμπληρωματικά δόθηκαν τρία ερωτηματολόγια που αφορούσαν στις απόψεις και στάσεις των μαθητών σε σχέση με τη γεωμετρία και τις γεωμετρικές κατασκευές, πριν και μετά την παρέμβαση, οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να εκδηλώσουν ποια μέθοδος τους άρεσε περισσότερο και κατέγραψαν σε ποιο βαθμό θεώρησαν ενδιαφέρουσα την ενσωμάτωση της ιστορίας στη γεωμετρία και τα μαθηματικά γενικά.

Λέξεις κλειδιά: Γεωμετρία, Γεωμετρικές κατασκευές, Γεωμετρικός Χώρος Εργασίας, Γεωμετρική Απόδειξη, Τετράγωνο, Τρίγωνο, Θεώρημα Θαλή, Ιστορία, Άλγεβρα, Chuquet, Marolois, Lefrancois, al-Khwarizmi, Bourdon, da Cunha, Pólya.

Abstract

This paper concerns a teaching intervention based on the geometric construction of a square inscribed in a triangle, with five different proofs, as developed by the mathematicians al -Khwarizmi, Chuquet, Marolois, Bourdon and Pólya. Each intervention was preceded by a brief reference to the life and work of these mathematicians, followed by a discussion on the contribution of geometry to the development of the culture and technology of those times. The role of integrating of the history of geometry was also developed by studying the original texts concerning the specific geometric problem, translated from each original book. The study was carried out with 22 students of the second grade of a general high school and lasted 10 teaching hours. The students were divided into pairs, worked with rule and compass, worksheets and they applied Pólya's method in the environment of a dynamic geometry software, Geogebra. At the end of the intervention, the students were tested individually in a cognitive test with two problems. The first one was to construct a square in s triangle, following any method they preferred and the second was to construct a square in a semicircle with straightedge and compass. The mathematical task was analyzed in terms of the three dimensions of the Geometric Working Space model, semiotic, instrumental and discursive genesis. After finishing the intervention, they had to answer to three questionnaires. The first was related to their views and attitudes towards geometry and geometric constructions, before and after the lessons, in the second questionnaire they had to choose which method they liked the most and in the third one they had to answer to what extent they found the integration of history into geometry interesting.

Key words: Geometry, Geometric Constructions, Geometric Working Space, Geometrical Proof, Square, Triangle, Thales Theorem, History, Algebra, Chuquet, Marolois, Lefrancois, al-Khwarizmi, Bourdon, da Cunha, Pólya.

Εισαγωγή

Η λέξη γεωμετρία προέρχεται από τις λέξεις «γῆ» και «μέτρον» δηλαδή μέτρηση της γης και αποτελούν μαζί με την αριθμητική, έναν από τους αρχαιότερους κλάδους των μαθηματικών. Ασχολείται με τις ιδιότητες του χώρου, όπως η απόσταση, το σχήμα, το μέγεθος και η σχετική θέση των σχημάτων. Η γεωμετρία εμπλέκεται σε διάφορες πτυχές της ανθρώπινης ζωής, την αρχιτεκτονική, τη μηχανική, ακόμα και στην ιατρική και τη βιολογία. Η αξιωματική απόδειξη αναδύθηκε από την αρχαία Ελλάδα και πήρε ολοκληρωμένη και ώριμη μορφή από τον Ευκλείδη, τον Αρχιμήδη, και τον Απολλώνιο. Η αξία της Ευκλείδειας γεωμετρίας είναι αδιαμφισβήτητη, και κατείχε εξέχουσα θέση μέχρι τον $19^{ο}$ αιώνα, οπότε και έκαναν την εμφάνισή τους οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες.

Οι γεωμετρικές κατασκευές κατέχουν ιδιαίτερη θέση στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά. Ως γεωμετρική κατασκευή ορίζουμε την κατασκευή ενός γεωμετρικού αντικειμένου (ευθεία, κύκλο, τρίγωνο, κτλ.) αποκλειστικά με κανόνα και διαβήτη.

Δυστυχώς όμως το μάθημα της γεωμετρίας και των γεωμετρικών κατασκευών έχει υποβαθμιστεί κατά την τελευταία εικοσαετία σε ευρωπαϊκό επίπεδο. Οι μαθητές σήμερα δεν είναι τόσο αφοσιωμένοι σε θέματα γεωμετρίας και δεν είναι εξοικειωμένοι με γεωμετρικές κατασκευές. Τους λείπει η αυτοπεποίθηση και η επαρκής εμπειρία ώστε να χρησιμοποιήσουν γεωμετρικές αποδείξεις όταν κατασκευάζουν ένα γεωμετρικό αντικείμενο.

Με δεδομένα τα παραπάνω, θεωρήθηκε απαραίτητο να υιοθετήσουμε νέες διδακτικές προσεγγίσεις που να παρουσιάζουν περισσότερο ενδιαφέρον και να είναι συγχρόνως πιο ελκυστικές προς τους μαθητές.

Το θέμα μας σχετίζεται με την εγγραφή τετραγώνου σε τρίγωνο, ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον πρόβλημα γεωμετρικής κατασκευής, καθώς αναλύονται και δύο αλγεβρικές μέθοδοι.

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια διδακτική παρέμβαση του προβλήματος που περιγράψαμε, στα πλαίσια της διδασκαλίας του θεωρήματος του Θαλή και της ομοιότητας τριγώνων, όπως ορίζει το Αναλυτικό Πρόγραμμα για το μάθημα της γεωμετρίας στη Β΄ Λυκείου. Σκοπός είναι να μπορούν οι μαθητές να εφαρμόσουν τις παραπάνω έννοιες ώστε να εγγράψουν ένα τετράγωνο σε τρίγωνο και να τεκμηριώσουν την εγκυρότητα της κατασκευής τους. Το πλαίσιο στο όποιο εργάζονται οι μαθητές κάθε φορά αξιολογείται με βάση το μοντέλο του Γεωμετρικού Χώρου Εργασίας.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή της γεωμετρίας και την προέλευσή της, γίνεται αναφορά στην έννοια της απόδειξης που αποδίδεται στον Θαλή τον Μιλήσιο και ολοκληρώνεται με τα «Στοιχεία του Ευκλείδη». Περιγράφεται το αντικείμενο και η αξία της Ευκλείδειας γεωμετρίας καθώς και τη υποβάθμιση του μαθήματος από το 1960, η οποία οφείλεται σε μια μεταρρυθμιστική κίνηση των λεγόμενων «Νέων Μαθηματικών» που προώθησε ο Γάλλος μαθηματικός Jean Dieudonne΄, ένα από τα ιδρυτικά μέλη της ομάδας Bourbaki (Θωμαΐδης, Πούλος, 2006).

Επιπρόσθετα αναφερόμαστε στην προέλευση, τη σημασία των γεωμετρικών κατασκευών και τα τέσσερα στάδια που περιλαμβάνει : ανάλυση, σύνθεση, απόδειξη και διερεύνηση. Το κεφάλαιο αυτό ολοκληρώνεται με μια σύντομη περιγραφή συμπερασμάτων προηγούμενων ερευνών με θέμα κυρίως τις γεωμετρικές κατασκευές.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσεται το μοντέλο του Γεωμετρικού Χώρου Εργασίας που σχετίζεται με τη μάθηση των γεωμετρικών εννοιών και την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης που εισήχθη από τους Kuhn, Houdement και Kuzniak (2006), στην προσπάθεια να εξηγήσουν τον μετασχηματισμό της γεωμετρικής γνώσης (Kuzniak, Gagatsis, Ludwig & Marchini, 2007; Kuzniak, 2008). Η θεωρία τους στηρίζεται στα τρία πλαίσια γεωμετρίας (Φυσική Γεωμετρία, Φυσική Αξιωματική Γεωμετρία και Τυπική Αξιωματική Γεωμετρία) στα οποία εργάζεται ο μαθητής κατά την ενασχόλησή του με γεωμετρικά προβλήματα.

Ακολουθεί μια σύντομη περιγραφή των δύο οριζόντιων επιπέδων, του επιστημολογικού και του γνωστικού και οι γενέσεις του (εργαλειακή, σημειωτική και συλλογιστική) που συνδέουν τα δύο αυτά επίπεδα και σχηματίζουν τα τρία λεγόμενα κατακόρυφα επίπεδα. Κατόπιν παρουσιάζουμε συνοπτικά τι ορίζει το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών για τη γεωμετρία της Β΄ τάξης του Λυκείου.

Στο τρίτο κεφάλαιο συζητείται η ενσωμάτωση της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση, για τα οφέλη που αποκομίζουν οι μαθητές θεωρώντας την ιστορία ως πηγή πληροφοριών, παραδειγμάτων και καταστάσεων, τονίζεται η αξιοποίηση των πρωτότυπων κειμένων με αποδείξεις κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, αλλά και τα εμπόδια με τα οποία έρχονται αντιμέτωποι οι εκπαιδευτικοί κατά την εφαρμογή της ιδέας αυτής.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τη ζωή και το έργο των επτά μαθηματικών και τις διαφορετικές προσεγγίσεις του θέματος που έχει έρθει στο προσκήνιο μέσα από το πέρασμα των αιώνων και δύο επιπλέον ενδιαφέρουσες λύσεις που προέκυψαν μετά από αναζήτηση της συγγραφέως.

Οι δύο πρώτες είναι αλγεβρικές μέθοδοι και περιλαμβάνουν υπολογισμούς με αλγεβρικές εξισώσεις και παραστάσεις. Η πρώτη είναι του al- Khwarizmi (780-850 μ.Χ.) που έζησε στη Βαγδάτη και περιγράφει τον υπολογισμό του τετραγώνου σε ισοσκελές τρίγωνο με δεδομένα τα μήκη των πλευρών του, ενώ η δεύτερη του Nicolas Chuquet (1440 μ.Χ.) περιγράφει τον υπολογισμό της πλευράς ισόπλευρου τριγώνου που είναι περιγεγραμμένο σε τετράγωνο πλευράς 4. Στην επόμενη ενότητα αναλύονται δύο γεωμετρικές προσεγγίσεις του Γάλλου μηχανικού και γεωμέτρη Samuel Marolois (1572-1627 μ.Χ.) κατά τις οποίες εφαρμόζεται το θεώρημα του Θαλή και απαιτούν αυστηρή γεωμετρική κατασκευή της πλευράς του τετραγώνου. Οι επόμενες δύο μέθοδοι είναι επίσης γεωμετρικής φύσεως και απαιτούν επίσης τη γεωμετρική κατασκευή της πλευράς του ζητούμενου τετραγώνου, ως τέταρτη ανάλογο τριών ευθυγράμμων τμημάτων. Η πρώτη είναι του Πορτογάλου Jose Anastacio da Cunha που έζησε στη Λισσαβόνα (1774- 1787μ.Χ.), ενώ η δεύτερη του Γάλλου Louis Bourdon που γεννήθηκε στη Νορμανδία το 1779 και πέθανε στο Παρίσι το 1854. Μια διαφορετική προσέγγιση του προβλήματος αναλύεται στο εγχειρίδιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας από τον Frédéric Louis Lefrançois γύρω στα 1804. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί αναλυτική γεωμετρία, είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη, απαιτεί υψηλό επίπεδο μαθηματικής γνώσης από μέρους των μαθητών και δεν περιλαμβάνεται στη διδακτική παρέμβαση. Από τις πιο ενδιαφέρουσες και κατανοητές μεθόδους, σύμφωνα με τη συγγραφέα που αναλύεται στην επόμενη ενότητα, είναι η μέθοδος του Ούγγρου George Pólya (1887-1985 μ.Χ.) η οποία περιλαμβάνεται στο βιβλίο του «*How to solve it*». Το κεφάλαιο κλείνει με δύο επιπλέον λύσεις που προέκυψαν μετά από αναζήτηση της ερευνήτριας.

Στο πέμπτο κεφάλαιο αναλύεται η μεθοδολογία της έρευνας, περιγράφονται η σημασία της, οι στόχοι της και τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν καθώς και οι συμμετέχοντες στην έρευνα. Επίσης αναλύεται ο σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης, το διαγνωστικό τεστ, τα φύλλα εργασίας και το τελικό διαγώνισμα αξιολόγησης.

Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα, γίνεται η ανάλυση των διδακτικών παρεμβάσεων που πραγματοποιήθηκαν, συζητείται η υλοποίηση του κατάλληλου Γεωμετρικού Χώρου Εργασίας, περιγράφεται η επίδοση των μαθητών στο post -test και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των τριών ερωτηματολογίων.

Στο κεφάλαιο επτά καλύπτεται η συζήτηση και ερμηνεύονται τα ευρήματα της έρευνάς μας, συγκρίνονται με τα αντίστοιχα άλλων ερευνών και δίνονται απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα. Στις επόμενες ενότητες παρουσιάζονται τα γενικά συμπεράσματα της έρευνας, οι περιορισμοί και οι προτάσεις για νέες έρευνες.

Στο τέλος ακολουθούν οι βιβλιογραφικές αναφορές που πλαισίωσαν το κείμενο, το παράρτημα που περιέχει τα τεστ αξιολόγησης, τα φύλλα εργασίας, το ερωτηματολόγιο καθώς και τη λύση του δεύτερου προβλήματος του γνωστικού τεστ.

Είναι σημαντικό να επισημάνουμε τη σημασία και την πρωτοτυπία της έρευνάς μας, καθώς δεν υπάρχει κάτι αντίστοιχο στη βιβλιογραφία. Η μοναδική έρευνα που έχει γίνει σχετικά με την εγγραφή τετραγώνου σε τρίγωνο είναι εκείνη των Barbin, Guichard, Moyon, Guyot, Morice-Singh, Métin & Hamon (2018) σε μαθητές 16-18 ετών, η οποία είχε διάρκεια μόλις τριών ωρών. Ορμώμενοι επομένως από τα ευρήματα της παραπάνω μελέτης θα παρουσιάσουμε τα δικά μας ευρήματα και θα τα συγκρίνουμε με παρόμοιες έρευνες που αφορούν γεωμετρικές κατασκευές.

Κεφάλαιο 1ο Η Ευκλείδεια Γεωμετρία

1.1 Εισαγωγή

Η Γεωμετρία είναι η επιστήμη της μελέτης των σχημάτων, επίπεδων και στερεών και ασχολείται με τη σύνθεση του χώρου στον οποίο ζούμε. Είναι ο πρώτος κλάδος της ανθρώπινης γνώσης που θεωρείται ως επιστήμη και για πολλούς αιώνες ήταν ο μοναδικός (Αργυρόπουλος, Βλάμος, Κατσούλης, Μαρκάτης, Σιδέρης, 2001). Αναπτύχθηκε εμπειρικά από τους Βαβυλώνιους που κατείχαν έννοιες της γεωμετρίας, όπως παράλληλες ευθείες, τρίγωνα, τετράγωνα, ενώ ανέπτυξαν τις αρχές της τριγωνομετρίας διαιρώντας τον κύκλο και τις γωνίες σε 360 μοίρες και υπολογίζοντας τον αριθμό π. Οι Αιγύπτιοι μετά τις πλημμύρες του Νείλου, χρησιμοποιούσαν εμπειρική γεωμετρία, για να υπολογίσουν τα όρια των χωραφιών τους. Η μελέτη όμως των διάφορων προβλημάτων ήταν εμπειρική καθώς έλλειπε το στοιχείο της απόδειξης που συνίσταται στη συστηματική χρήση της λογικής, αποτελεί το θεμέλιο των γνώσεών μας για το χώρο και είναι το κύριο γνώρισμα της μαθηματικής επιστήμης. Με τη γεωμετρία ήρθαν σε επαφή οι Έλληνες κυρίως με το Θαλή το Μιλήσιο, ο οποίος είναι και ο πρώτος που εισάγει την έννοια της *«απόδειξης»* ως μέσον επαλήθευσης μιας γεωμετρικής πρότασης. Η Γεωμετρία παίρνει πρώτη φορά την έννοια της καθαρής γνώσης και επιστήμης από τους Έλληνες και ολοκληρώνεται με τον Ευκλείδη (Στάμου, 1997 ; Αργυρόπουλος, κ.α., 2001).

1.2 Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Το αντικείμενο του μαθήματος της Γεωμετρίας στις τρείς τάξεις του Γυμνασίου ήταν τα γεωμετρικά σχήματα (ευθύγραμμο τμήμα, γωνία, τρίγωνο τετράπλευρο παραλληλόγραμμο, κύκλος, κανονικό πολύγωνο, πρίσμα, πυραμίδα, κύλινδρος, κώνος, σφαίρα) καθώς επίσης και οι ορισμοί και οι ιδιότητές τους. Ο τρόπος μελέτης των γεωμετρικών σχημάτων συνιστά την Πρακτική Γεωμετρία (Θωμαΐδης, Ξένος, Παντελίδης, Πούλος, Στάμου, 1999). Με τις μεθόδους όμως της Πρακτικής Γεωμετρίας δεν γενικεύονται τα συμπεράσματά μας και δεν μας παρέχουν απόλυτη βεβαιότητα για τις ιδιότητες των σχημάτων.

Σύμφωνα με τον Θωμαΐδη κ.ά. (1999) «*η Ευκλείδεια Γεωμετρία (ή Θεωρητική Γεωμετρία) είναι μια μαθηματική θεωρία που χρησιμοποιεί την αποδεικτική διαδικασία για να οργανώσει και να ταξινομήσει τις γνώσεις μας για τα σχήματα του επιπέδου και του χώρου. Με τον τρόπο αυτό οι γνώσεις μας δε στηρίζονται πλέον στην παρατήρηση και στις μετρήσεις , αλλά θεμελιώνονται σε ορισμένες βασικές και απλές προτάσεις (τα αξιώματα), από τις οποίες συνάγονται με λογικούς συλλογισμούς οι συνέπειές τους».*

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία βρίσκει επίσης πολλές εφαρμογές σε προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών με κανόνα και διαβήτη που βασίζονται σε θεμελιώδεις κατασκευές και αυστηρά δομημένες προτάσεις.

1.3 Η αξία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας – Υποβάθμιση του μαθήματος της Γεωμετρίας

Τα μαθηματικά κατέχουν κεντρική θέση στα Προγράμματα Σπουδών όλων των εκπαιδευτικών συστημάτων. Ο σχεδιασμός ενός Προγράμματος Σπουδών για τα μαθηματικά πραγματοποιείται λαμβάνοντας κυρίως υπόψιν την επιλογή του περιεχομένου του μαθήματος και τους στόχους που ορίζει το εκάστοτε εκπαιδευτικό σύστημα και σχετίζεται με τις μαθηματικές γνώσεις των μελλοντικών πολιτών και την επαγγελματική τους ανέλιξη.

Η αξία της διδασκαλίας της Γεωμετρίας σύμφωνα με τον Τουμάση (2004) και ΙΕΠ (2021) είναι αναμφισβήτητη για τους εξής λόγους:

- Συμβάλλει στην ανάπτυξη αντίληψης του χώρου.
- Λειτουργεί ως μέσο σύνδεσης του πραγματικού κόσμου με τα μαθηματικά.
- Αναπτύσσει τη δημιουργική σκέψη σε πολλούς τομείς.
- Βοηθάει τους μαθητές να αναπτύσσουν τη λογική επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση.
- Καλλιεργεί την ικανότητα της νοερής σύλληψης των αντικειμένων.
- Αξιοποιώντας γεωμετρικά μοντέλα, βοηθάει στη μελέτη προβλημάτων σε άλλους τομείς των μαθηματικών.

Δυστυχώς όμως η θέση της Ευκλείδειας γεωμετρίας στη διεθνή εκπαίδευση έχει αλλάξει από το 1960. Το γεγονός αυτό οφείλεται σε μια μεταρρυθμιστική κίνηση των λεγόμενων «Νέων Μαθηματικών» που προώθησε τα επιφανειακά μαθηματικά και οδήγησε στην κατάργηση του μαθήματος. Το ζήτημα της μεταρρύθμισης στον τομέα της Γεωμετρίας το έθεσε ο Γάλλος μαθηματικός Jean Dieudonne΄, ένα από τα ιδρυτικά μέλη της ομάδας Bourbaki (Θωμαΐδης, Πούλος, 2006).

Στην Ελλάδα ποτέ δεν καταργήθηκε το μάθημα της Γεωμετρίας λόγω της ιστορικής και πολιτιστικής μας κληρονομιάς, ωστόσο έχει υποβαθμιστεί σημαντικά, έχει συρρικνωθεί και διδάσκεται αποσπασματικά. Αυτό αποδίδεται εν μέρει στο γεγονός ότι δεν αποτελεί πλέον εξεταζόμενο μάθημα στις εισαγωγικές εξετάσεις των ΑΕΙ.

Επιπλέον, σύμφωνα με τους Θωμαΐδη και Πούλο (2006), έρευνες έχουν δείξει ότι η πλειοψηφία των αποφοίτων του Γυμνασίου δεν αποκτούν τις απαραίτητες βάσεις και γνώσεις ώστε να ανταπεξέλθουν ικανοποιητικά στις απαιτήσεις της Θεωρητικής Γεωμετρίας. Από την άλλη μεριά, η διδακτέα ύλη στις Α και Β τάξεις του Λυκείου έχει εξαιρετικά μεγάλη έκταση και ο διαθέσιμος διδακτικός χρόνος είναι ανεπαρκής. Ένα ζήτημα που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι κατά τη διδασκαλία της Γεωμετρίας στην Α΄ Λυκείου δεν υπάρχει η δυνατότητα απόδειξης γεωμετρικών προτάσεων με αλγεβρικές ή τριγωνομετρικές ιδιότητες και έννοιες, σα να είναι η γεωμετρία αποκομμένη από άλλους τομείς των μαθηματικών.

Τέλος, οι Θωμαΐδης και Πούλος (2006) θεωρούν ότι από τα προγράμματα σπουδών απουσιάζει ένα υβριδικό μοντέλο διδασκαλίας που θα ενσωματώνει στο μάθημα της γεωμετρίας τη χρήση των Τεχνολογιών Πληροφοριών και Επικοινωνίας (ΤΠΕ).Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο, τόσο για τον εκπαιδευτικό όσο και για το μαθητή, με το οποίο μπορεί να συνδέσει την άλγεβρα με τη γεωμετρία, καθώς μέσα από τις αναπαραστάσεις αλγεβρικών εννοιών με μορφή γεωμετρικών αντικειμένων δίνει μια διαφορετική προσέγγιση του μαθηματικού περιεχομένου (Καλογερία, Κυνηγός, Περισυνάκη, 2014). Επιπρόσθετα η συστηματική χρήση ειδικού λογισμικού βοηθάει στην αλλαγή της μάθησης από παθητική σε ενεργητική (Κρητικός 2004, όπως αναφ. ο Νικολουδάκης, 2008).

1.4 Η προέλευση και η σημασία των γεωμετρικών κατασκευών με κανόνα και διαβήτη.

Η αναμφισβήτητη ομορφιά των «Στοιχείων» του Ευκλείδη έχει επηρεάσει όλους τους κλάδους της επιστήμης, κυρίως όμως τα μαθηματικά και τις θετικές επιστήμες. Ένα σημαντικό πεδίο εφαρμογής των προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αποτελούν τα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών. Στα «*Στοιχεία*», ο Ευκλείδης προσεγγίζει πολλές προτάσεις που δεν είναι θεωρήματα, αλλά μοιάζουν με κατασκευαστικά προβλήματα. Με τον όρο κατασκευή στη γεωμετρία εννοούμε τη σχεδίαση γεωμετρικών στοιχείων, όπως γραμμές και κύκλοι, χωρίς μετρήσεις, χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα (αβαθμολόγητος χάρακας) και διαβήτη με τη βοήθεια θεμελιωδών κατασκευών, ακολουθώντας συγκεκριμένα πρωτογενή βήματα, κανόνες και στρατηγικές. Η μέτρηση γωνιών με γωνιόμετρο ή η μέτρηση μηκών με χάρακα δεν επιτρέπεται (Θωμαΐδης, κ.α.,1999; Stankova, 2014). Οι αρχαίοι Έλληνες δεν μπορούσαν εύκολα να κάνουν αριθμητική, είχαν μόνο ακέραιους αριθμούς, χωρίς το μηδέν και χωρίς τους αρνητικούς . Το αρχαίο ελληνικό σύστημα αρίθμησης δεν ήταν θεσιακό όπως το δικό μας, με μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες κ.λπ., αλλά περισσότερο έμοιαζε με το ρωμαϊκό. Η διαίρεση ενός περιττού με το 2, για παράδειγμα, ήταν αδύνατη. Τέτοιου είδους προβλήματα τα έλυναν γραφικά, σχεδιάζοντας σχήματα αντί να χρησιμοποιούν αριθμητική. Επινόησαν τις κατασκευές επιτρέποντας τη χρήση αυστηρά μόνο του κανόνα (για τη χάραξη ευθειών) και του διαβήτη (για το σχεδιασμό κύκλων), ώστε να απαλλαγούν από περιττά βήματα και υποθέσεις (Sarhangi, 2007). Οι Sarhangi (2007) και Francis (1996) αναφέρουν βέβαια ότι το 1979 ένας Ιταλός καθηγητής, ο Lorenzo Mascheroni[1], στο έργο του *Geometria del Compasso* (Pavia, 1797) απέδειξε ότι όλα τα προβλήματα που επιλύονται με τη βοήθεια διαβήτη και κανόνα μπορούν επίσης να επιλυθούν με ακρίβεια μόνο με το διαβήτη (Θωμαΐδης, κ.α. 1999; Sarhangi, 2007; Stankova, 2014). Με τη χρήση αυτών των δύο οργάνων και των γεωμετρικών προτάσεων κατασκεύαζαν πολύπλοκα σχήματα με ακρίβεια. Επομένως η κατασκευή του ζητούμενου σχήματος δεν είναι ο μοναδικός σκοπός, αλλά προτείνεται με αυτόν τον τρόπο η λύση ενός προβλήματος (Erduran & Yeşildere, 2010; Karakuş , 2014), όπως αναφ. η Demiray (2019). Ο Ευκλείδης στα «Στοιχεία» προσεγγίζει πολλές προτάσεις όχι ως θεωρήματα αλλά ως κατασκευαστικά προβλήματα (Demiray, 2019).

Η διαχρονικότητα και η δημοτικότητα της Ευκλείδειας κατασκευής στην ιστορία των μαθηματικών, θεωρείται υψίστης σημασίας στη διδασκαλία τους μέχρι σήμερα (Karakuş, 2014; Sarhangi, 2007), όπως αναφ. η Demiray (2019). Ο επαγωγικός συλλογισμός, η χρήση αυστηρής γλώσσας, η μεθοδολογία που δομείται με συγκεκριμένα βήματα, είναι απαραίτητες προϋποθέσεις όταν εργαζόμαστε με γεωμετρικές κατασκευές. Τη σημασία της εμπλοκής των μαθητών με την αποδεικτική διαδικασία μέσα από τις γεωμετρικές κατασκευές τόνισαν επίσης και οι Stupel και Ben-Chaim (2013) (όπως αναφ. η Demiray, 2019), επισημαίνοντας ότι: «*το να προσπαθείς να μάθεις γεωμετρία χωρίς γεωμετρικές κατασκευές είναι σαν να προσπαθείς να μάθεις χημεία ή βιολογία χωρίς εργαστήρια*».

Η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης έχει άμεση σχέση με την ικανότητα των μαθητών να κατασκευάζουν γεωμετρικά σχήματα (Francis, 1996; Lim-Teo, 1997; Köse

[1] Ο Lorenzo Mascheroni (1750-1800) αρχικά ενδιαφερόταν κυρίως για τις ανθρωπιστικές επιστήμες (ποίηση και ελληνική γλώσσα), αλλά τελικά έγινε καθηγητής μαθηματικών στην Παβία.

et al., 2012; Stupel & Ben-Chaim,2013; Demiray, 2019), καθώς είναι απαραίτητο να εντοπίσουν και να περιγράψουν ιδιότητες και σχέσεις που χαρακτηρίζουν το γεωμετρικό σχήμα.

Όσο περισσότερο συμμετέχουν οι μαθητές σε εργασίες που σχετίζονται με την οπτικοποίηση και την κατασκευή, τόσο περισσότερο διεγείρεται το ενδιαφέρον και συγχρόνως μπορεί να αναπτυχθεί η αντίληψή τους σε σχέση με τα γεωμετρικά προβλήματα (Francis, 1996; Sinclair et al., 2012a).

Ένα πρόβλημα γεωμετρικής κατασκευής περιλαμβάνει 4 στάδια.

1. Ανάλυση. Θεωρούμε ότι το πρόβλημα έχει κατασκευαστεί και αναζητούμε τις στοιχειώδεις γεωμετρικές κατασκευές που γνωρίζουμε.

2. Σύνθεση. Κάνουμε την αντίστροφη διαδικασία της ανάλυσης κατασκευάζοντας με κανόνα και διαβήτη βασικά σχήματα.

3. Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε γνωστές προτάσεις για να αποδείξουμε ότι το σχήμα που κατασκευάσαμε είναι το ζητούμενο.

4. Διερεύνηση. Αναζητούμε τις προϋποθέσεις ώστε το σχήμα να μπορεί να κατασκευαστεί καθώς και το πλήθος των λύσεων.

Στις απλές κατασκευές δε χρειάζονται και τα τέσσερα στάδια, γίνεται μόνο η σύνθεση (Θωμαΐδης, κ.α., 1999, σελ. 83).

Η μέθοδος της Ανάλυσης - Σύνθεσης χρησιμοποιήθηκε συστηματικά από τους Έλληνες γεωμέτρες. Ο Πάππος ο Αλεξανδρινός (4^{ος} αιώνας μ.Χ.) αναφέρεται στο έργο του για τη μέθοδο αυτή και συγκεκριμένα ότι η *Ανάλυσις* σημαίνει «*Ανάπαλιν λύση»* (ανάποδη, αντίστροφη λύση) (Θωμαΐδης , κ.α., 1999, σελ.157). Ο φιλόσοφος Πλάτων θεώρησε τη μέθοδο αυτή ως βασική για την επιστημονική έρευνα. Πολύ αργότερα ο François Viète[2] (1540-1603) όρισε την άλγεβρά του ως «Αναλυτική τέχνη**»**, καθώς για να λύσουμε ένα αλγεβρικό πρόβλημα θεωρούμε τις άγνωστες ποσότητες ως γνωστές (ο άγνωστος x) και εργαζόμαστε με αυτές μέχρι να φτάσουμε σε κάποιο αποτέλεσμα (Θωμαΐδης, κ.α., 1999, σελ. 157) .

Η κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων δεν είναι εύκολη υπόθεση και δεν είναι πάντα εφικτή. Τα τρία διάσημα προβλήματα που δε λύνονται αποκλειστικά με κανόνα και

[2] Ο François Viète ήταν νομικός, σύμβουλος του βασιλιά και Γάλλος μαθηματικός του 16ου αιώνα, χωρίς αμφιβολία ο πρώτος μεγάλος Γάλλος μαθηματικός στην ιστορία.

διαβήτη και ενδεχομένως ευθύνονται για τη δημοτικότητα της Ευκλείδειας γεωμετρίας είναι :

- Η τριχοτόμηση της γωνίας, η διαίρεση δηλαδή, τυχαίας γωνίας σε τρείς ίσες γωνίες.
- Ο τετραγωνισμός του κύκλου, η κατασκευή δηλαδή, τετραγώνου που να έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν δεδομένου κύκλου.
- Ο διπλασιασμός του κύβου, δηλαδή η κατασκευή ενός κύβου που έχει διπλάσιο όγκο από δοθέντα κύβο (το «Δήλιο πρόβλημα»).

Μέσα από την προσπάθεια επίλυσης των παραπάνω προβλημάτων, οι αρχαίοι γεωμέτρες επινόησαν και άλλα είδη γραμμών εκτός του κύκλου και της ευθείας, όπως είναι οι κωνικές τομές, η τετραγωνίζουσα του Ιππία, η κογχοειδής του Νικομήδη, η κισσοειδής του Διοκλή, η έλικα του Αρχιμήδη (Θωμαΐδης, κ.α., 1999, σελ. 88).

Στη μεταγενέστερη ελληνική εποχή και στο δυτικό πολιτισμό οι γεωμετρικές κατασκευές σταμάτησαν σιγά σιγά να κερδίζουν το ενδιαφέρον των Μαθηματικών, μέχρι που σχεδόν εξαφανίστηκε κατά την περίοδο του Μεσαίωνα.

Για αιώνες, το θέμα παρέμεινε αδρανές, εκτός από περιστασιακές αναφορές σε περιβάλλοντα της Εγγύς Ανατολής (π.χ. από τον Abul-Wefa του δέκατου αιώνα). Στην Ευρώπη παρατηρείται ελάχιστο ενδιαφέρον που περιοριζόταν στις στοιχειώδεις ευκλείδειες κατασκευές (διχοτομήσεις τμημάτων και γωνιών, κατασκευές κάθετων και παραλλήλων, κ.λπ.). Σταδιακά τον 15^{ο} και 16^{ο} αιώνα εμφανίστηκε στη Δύση εκ νέου ένα θετικό κλίμα για τα κλασικά μαθηματικά αριστουργήματα. Αργότερα οι μαθηματικοί του 17^{ου} αιώνα (όπως ο Gregoire de Saint Vincent[3] και ο Rene Descartes[4]) θα χαράξουν το δρόμο προς την αναγέννηση των κατασκευών. Ο Carl Friedrich Gauss (1777-1855) έδειξε ιδιαίτερο ενδιαφέρον προς αυτή την κατεύθυνση αλλά και πολλοί ακόμη μαθηματικοί εκείνης της περιόδου, όπως ο Ιταλός

[3] Ο Gregoire de Saint Vincent (1584-1667) ήταν Φλαμανδός Ιησουίτης που έγραψε ένα βιβλίο που καλύπτει πολλές πτυχές των σύγχρονων μαθηματικών.

[4] Ο Rene Descartes (1596-1650) ήταν ένας Γάλλος φιλόσοφος του οποίου το έργο La géométrie περιλαμβάνει την εφαρμογή της άλγεβρας στη γεωμετρία, από την οποία έχουμε σήμερα την καρτεσιανή γεωμετρία

μαθηματικός Lorenzo Mascheroni (1750-1800) και οι Jean-Victor Poncelet[5] και Jacob Steiner[6] (1798-1867).

Μέσα από τις γεωμετρικές κατασκευές και την έμφαση της θέσης τους στην ιστορία των μαθηματικών, ο μαθητής μπορεί να διευρύνει την αντίληψή του για το μάθημα, να αποκτήσει περισσότερη αυτοπεποίθηση, να γίνει πιο δημιουργικός, να αναπτύξει νέες στρατηγικές και να αφεθεί στη γοητεία του (Francis, 1996; Stupel & Ben-Chaim, 2013).

1.5. Η βιβλιογραφική ανασκόπηση-Συμπεράσματα προηγούμενων ερευνών

Οι γεωμετρικές κατασκευές αποτελούν ένα βασικό κομμάτι της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ωστόσο καλύπτουν ένα ελάχιστο μέρος του αναλυτικού προγράμματος σπουδών.

Η βιβλιογραφική ανασκόπηση έδειξε την έλλειψη μελετών που σχετίζονται με τη γεωμετρική κατασκευή με τη χρήση κανόνα και διαβήτη και τη συμβολή της στη διδασκαλία και την κατανόηση των γεωμετρικών θεωρημάτων από μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Ενδεικτικά παρουσιάζονται τα ευρήματα κάποιων ερευνών που σχετίζονται με γεωμετρικές κατασκευές σε μαθητές, φοιτητές αλλά και νέους εκπαιδευτικούς.

Η έρευνα που διεξήχθη από τους Barbin, Guichard, Moyon, Guyot, Morice-Singh, Métin & Hamon (2018) σε μαθητές 16-18 ετών που εργάστηκαν ομαδικά για την εγγραφή τετραγώνου σε τρίγωνο, έδειξε την αδυναμία των μαθητών να κάνουν αυστηρή κατασκευή του τετραγώνου, δηλαδή με κανόνα και διαβήτη, ενώ μερικοί έκαναν εντελώς λάθος σχήμα. Παρόμοιες δυσκολίες επισημαίνονται στα ευρήματα των ερευνών των Marchis & Molnár (2009), Fujita, Jones & Kunimune (2010) και Cheung (2011) που έγιναν σε μαθητές ηλικίας από δώδεκα έως δεκαπέντε ετών και ασχολήθηκαν με απλές γεωμετρικές κατασκευές. Οι περισσότεροι μαθητές δεν έχουν συγκροτημένη τη σκέψη τους όσον αφορά τις γεωμετρικές αποδείξεις, δεν αντιλαμβάνονται τη σημασία τους και θεωρούν εξίσου δύσκολο να περιγράψουν

[5] O Jean-Victor Poncelet (Γαλλία, 1788-1867) ήταν ένας από τους θεμελιωτές της σύγχρονης προβολικής γεωμετρίας.

[6] O Jakob Steiner (Ελβετία, 1798-1867) ήταν ένας από τους μεγαλύτερους συντελεστές της προβολικής γεωμετρίας.

αυτό που σκέφτονται, ενώ σε πολλές περιπτώσεις το αποτέλεσμα είναι να τους δημιουργηθεί επιπλέον άγχος.

Παρόμοιες τεχνικές δυσκολίες αναδείχθηκαν μέσα από την έρευνα του Massarwe (2022), που διεξήχθη μεταξύ 50 μαθητών της έκτης τάξης του δημοτικού σχολείου, όπως ο χειρισμός του διαβήτη και ο ακριβής σχεδιασμός σχημάτων. Δυσκολίες αντιμετώπισαν και στην κατανόηση της αφηρημένης γεωμετρικής γλώσσας, οπότε και υιοθετήθηκε μια απλοποιημένη της μορφή.

Ανάλογα αποτελέσματα προέκυψαν από μια διαφορετική έρευνα που πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο του μαθήματος «Ιστορία των Μαθηματικών» του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, και είχε κύριο θέμα τις γεωμετρικές κατασκευές και τον ρόλο των αρχαιοελληνικών φιλοσοφικών ρευμάτων στη διαμόρφωση της μαθηματικής σκέψης. Στις συναντήσεις αυτές συμμετείχαν περίπου 40 φοιτητές που πραγματεύθηκαν συγκεκριμένα προβλήματα σε φύλλα εργασίας που τους διανεμήθηκαν, ξεκινώντας από απλές έως πιο πολύπλοκες γεωμετρικές κατασκευές. Πολλοί φοιτητές αντιμετώπισαν δυσκολία στη μετάβαση από τη φορμαλιστική Άλγεβρα στην αξιωματική Γεωμετρία επιχειρώντας να επιλύσουν τα γεωμετρικά προβλήματα εφαρμόζοντας αλγεβρικές μεθόδους (Ρίζος, Κολοκοτρώνης & Παπανικολάου, 2020).

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι ο τρόπος διδασκαλίας των γεωμετρικών κατασκευών παίζει σημαντικό ρόλο στη θετική ανταπόκριση των μαθητών όπως επισημαίνουν οι Chikwere & Ayama (2016).

Από τις μελέτες των Aktas & Mumcu (2019) και Demiray (2019) που διεξήχθησαν σε μελλοντικούς εκπαιδευτικούς μαθηματικών μέσης εκπαίδευσης και προσφέρθηκαν να εκτελέσουν γεωμετρικές κατασκευές, έδειξαν ότι αντιμετώπισαν δυσκολίες σχετικά με την έννοια της τυπικής απόδειξης, δεν ήταν εξοικειωμένοι με την έννοια της γεωμετρικής κατασκευής, καθώς σε κανένα από τα προπτυχιακά μαθήματα που παρακολούθησαν δεν απέκτησαν τις κατάλληλες γνώσεις. Επίσης ο Wong (2005), όπως αναφ. ο Cheung (2011), σημειώνει ότι λίγοι καθηγητές μπορούν να διδάξουν την κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων˙ ως εκ τούτου οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όταν κάνουν γεωμετρικές κατασκευές οφείλονται, ενδεχομένως, στην ανεπαρκή εμπειρία των δασκάλων οι οποίοι δεν έχουν ξεκαθαρίσει το νόημα και το στόχο της γεωμετρικής κατασκευής, αλλά και στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών που δε δίνει έμφαση στις γεωμετρικές κατασκευές, με αποτέλεσμα να αφιερώνεται ελάχιστος χρόνος από το πρόγραμμα διδασκαλίας.

Από τις παραπάνω μελέτες προέκυψε ότι οι συμμετέχοντες (μαθητές, φοιτητές, εκπαιδευτικοί) δεν εμβαθύνουν, ενώ παράλληλα τους λείπει η αυτοπεποίθηση, η εμπειρία και η γνώση ώστε να διεξάγουν γεωμετρικές αποδείξεις. Οι περισσότεροι δεν αντιλαμβάνονται τη σημασία των γεωμετρικών αποδείξεων, αλλά θεωρούν εξίσου δύσκολο να περιγράψουν αυτό που σκέφτονται (Lim-Teo, 1997; Cheung, 2011; Massarwe, 2022).

Εντούτοις, σε όλες τις παραπάνω έρευνες τονίζονται τα οφέλη της εργασίας σε ομάδες, η ανταλλαγή ιδεών και η θετική διάθεση να ακούσουν και να εκφράσουν επιχειρήματα. Οι μαθητές ενθαρρύνονταν επίσης να συζητούν με τους συμμαθητές τους καθώς εργάζονταν στις κατασκευαστικές εργασίες, ώστε να μαθαίνουν πώς να επικοινωνούν με άλλους χρησιμοποιώντας τη μαθηματική γλώσσα, να πείθουν τους άλλους για τη σκέψη τους και να εργάζονται συνεργατικά (Gokhale, 1995, όπως αναφ. ο Cheung, 2011). Η συλλογή άμεσης ανατροφοδότησης από τον εκπαιδευτικό και ο μη παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας ωφέλησε τόσο τους μαθητές όσο και τους δασκάλους, ώστε να κατανοήσουν την αντίληψη των μαθητών τους για τις γεωμετρικές κατασκευές (Cheung, 2011).

Επιπλέον τα ευρήματα των ερευνών έκαναν σαφές ότι οι μαθητές που μελέτησαν γεωμετρικές έννοιες μέσα από την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη αύξησαν τα κίνητρα, ενώ οι μέθοδοι διδασκαλίας βοήθησαν να βελτιώσουν τα επιτεύγματά τους. Με την εμπλοκή τους στις γεωμετρικές κατασκευές μπόρεσαν να αναπτύξουν τη γεωμετρική σκέψη και τις κατάλληλες δεξιότητες επιχειρηματολογίας και όχι μόνο να ακολουθήσουν προκατασκευασμένες αποδείξεις. Οι μαθητές στο τέλος των εργασιών τους εκτίμησαν περισσότερο την αξία προηγούμενων θεωριών και προτάσεων, τις αξιοποίησαν στο μέγιστο βαθμό, ώστε να εξελίσσουν τις μαθηματικές δεξιότητές τους. Ανέπτυξαν θετική στάση απέναντι στη γεωμετρία και θεώρησαν τις γεωμετρικές κατασκευές ενδιαφέρουσες και χρήσιμες για την εκμάθηση της γεωμετρίας (Fujita, Jones & Kunimune, 2010; Cheung,2011; Demiray, 2019; Ρίζος, κ.α., 2020; Massarwe, 2022).

Επίσης τονίζεται ότι οι γεωμετρικές κατασκευές με κανόνα και διαβήτη συντέλεσε στην επίτευξη της εγκυρότητας των προσεγγίσεων της κατασκευής (Demirey, 2019; Aktas & Mumcu, 2019).

Στη γεωμετρία πολύ συχνά χρησιμοποιούμε σύμβολα, σχέσεις και τύπους, όταν για παράδειγμα χρειάζεται να εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα, μετρικές σχέσεις σε τρίγωνα ή σε κύκλο, είτε να αντιμετωπίσουμε προβλήματα εμβαδών και περιμέτρων. Οπότε είναι φανερό ότι ακόμα και η αξιωματική γεωμετρία περιλαμβάνει αλγεβρικά αντικείμενα (όπως μεταβλητές, εξισώσεις κτλ.). Επομένως η χρήση της αλγεβρικής σκέψης στο πλαίσιο της γεωμετρίας είναι απαραίτητη.

Από τις μελέτες των Pozio & Bolondi (2019) και Barana (2021) προέκυψε ότι οι δραστηριότητες που εμπλέκουν την άλγεβρα στο πλαίσιο της γεωμετρίας μπορεί να διεγείρει τη δημιουργικότητα, να βοηθήσει τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων και να βοηθήσουν στην κατανόηση των αλγεβρικών σχέσεων μέσω της οπτικοποίησης. Η χρήση ωστόσο των αλγεβρικών ιδιοτήτων σε γεωμετρικά προβλήματα, ενδέχεται να δυσκολέψει τους μαθητές, αναδεικνύει παρανοήσεις, διαδικαστικά λάθη, τυπικά λάθη και την αδυναμία συντονισμού διαφορετικών μορφών αναπαράστασης.

Οι δραστηριότητες που απασχόλησαν τους μαθητές περιλαμβάνουν εργασίες και ερωτήσεις που απαιτούσαν να μεταβούν από μια γεωμετρική κατάσταση στην αλγεβρική της μοντελοποίηση, όπως να υπολογιστεί η περίμετρος, το εμβαδόν ή ο όγκος ενός σχήματος του οποίου τα μέτρα δίνονται μέσω μεταβλητών.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές συχνά έχουν δυσκολίες στην αντιμετώπιση αλγεβρικών εργασιών στο πλαίσιο της γεωμετρίας, παρουσιάστηκαν θεμελιώδεις παρανοήσεις σε αριθμητικές έννοιες όπως $α + α = α^2$, λάθη που έχουν τις ρίζες τους στην κατανόηση της γεωμετρίας, όπως η εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος για τον υπολογισμό του εμβαδού του τριγώνου, προβλήματα που προέρχονται από τη μελέτη των διαφόρων μαθηματικών κλάδων χωριστά, που οδηγεί τους μαθητές να σταματήσουν να σκέφτονται αλγεβρικά όταν ασχολούνται με τη γεωμετρία.

Τα μεγαλύτερα προβλήματα που αντιμετώπιζαν οι μαθητές με την εκμάθηση της άλγεβρας μπορούν να αποδοθούν στην υιοθέτηση των διδακτικών πρακτικών που αφιερώνουν τη μεγαλύτερη προσοχή στη διαδικαστική κατανόηση, και αποδίδουν δευτερεύουσα σημασία στην εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών έργων

(Malara & Navarra, 2003, όπως αναφ. στο Pozio & Bolondi, 2019). Επιπρόσθετα, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας των μεταβλητών και των αλγεβρικών εκφράσεων (Jupri & Drijvers, 2016). Ανάλογες ήταν οι δυσκολίες των μαθητών, όπως έδειξε η μελέτη του Jupri (2017) συμπεριλαμβανομένων των δυσκολιών στη μαθηματικοποίηση και στη συσχέτιση διάφορων μαθηματικών εννοιών.

Συνοψίζοντας τονίζουμε ότι η διαδικασία των γεωμετρικών κατασκευών, απαιτεί από τα άτομα να μπορούν να σχεδιάζουν ένα σχήμα ακολουθώντας ακριβή αλγοριθμικά βήματα με κανόνα και διαβήτη και να προβαίνουν σε ενέργειες όπως η εξήγηση, αιτιολόγηση και η απόδειξη των ενεργειών τους και όχι απομνημόνευση βημάτων (Köse, Tanışlı, Erdoğan & Ada, 2012, όπως αναφ. οι Deniz & Kabael, 2021). Ωστόσο η διαδικασία δεν είναι και τόσο εύκολη υπόθεση (Erduran & Yeşildere, 2010), καθώς τα άτομα αντιμετωπίζουν δυσκολίες τόσο στο να κάνουν μια αυστηρά δομημένη κατασκευή αντικειμένων, όσο και στο να τεκμηριώσουν τις ενέργειές τους. Οι Köse et al. (2012) σημειώνουν ότι οι γεωμετρικές έννοιες, τα σχήματα, τα χαρακτηριστικά και οι αποδείξεις απομνημονεύονται χωρίς να έχουν νόημα, και αυτό προκαλεί δυσκολίες στη μάθηση της γεωμετρίας, και ότι οι δραστηριότητες γεωμετρικών κατασκευών μπορούν να παρέχουν μια σημαντική ευκαιρία για να ξεπεραστεί αυτή η αρνητικότητα.

Από την άλλη μεριά τονίζεται ότι οι γεωμετρικές κατασκευές συμβάλλουν θετικά στην ανάπτυξη γεωμετρικής σκέψης των μαθητών αλλά και στην ψυχολογία τους (Napitupulu, 2001; Güven, 2006; Cheung, 2011; Uygun, 2016 , όπως αναφ. οι Deniz & Kabael, 2021).

Κεφάλαιο 2ο Το μοντέλο του Γεωμετρικού Χώρου Εργασίας

2.1 Γεωμετρικά Παραδείγματα

Τα θεωρητικά εργαλεία που έχουν αναπτυχθεί για τη μελέτη της διδασκαλίας της γεωμετρίας και θα μας απασχολήσουν στην παρούσα εργασία είναι τα γεωμετρικά παραδείγματα και οι γεωμετρικοί χώροι εργασίας.

Τα τελευταία χρόνια με την εμφάνιση των λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας τα νέα τεχνουργήματα και εργαλεία έχουν αλλάξει τη διδασκαλία του μαθήματος. Οι νέες μέθοδοι γεωμετρικών κατασκευών έχουν διαφοροποιήσει τον τρόπο εργασίας των μαθητών, δίνοντας έμφαση στην οπτικοποίηση, στους πειραματισμούς και στη δημιουργία εικασιών (Kuzniak & Nechache, 2015). Ακολουθώντας τον Gonseth[7], ο οποίος τοποθετεί τη γεωμετρία σε σχέση με το πρόβλημα του χώρου και εφαρμόζοντας την έννοια του παραδείγματος του Kuhn, οι Houdement και Kuzniak (2006), επιχείρησαν να εξηγήσουν τον μετασχηματισμό της γεωμετρικής γνώσης εισάγοντας ένα νέο μοντέλο μελέτης του Γεωμετρικού Χώρου Εργασίας (Kuzniak, Gagatsis, Ludwig & Marchini, 2007 ; Kuzniak, 2008).

Με τον όρο Γεωμετρικό Χώρο Εργασίας (ΓΧΕ) οι Houdement & Kuzniak (2006) εννοούν τον κατάλληλο και αποτελεσματικό χώρο μέσα στον οποίο ο μαθητής, ο φοιτητής, ή ο μαθηματικός εργάζεται ώστε να κατανοήσει και να επιλύσει γεωμετρικά προβλήματα. Για να μπορέσουν οι άνθρωποι να διατυπώσουν τις λύσεις και να βρουν διαφορετικές μεθόδους επικοινωνίας, όπως χρησιμοποιώντας σχέδια, εικόνες, παραδείγματα, πρέπει να μοιράζονται ένα κοινό σύνολο πεποιθήσεων. Αυτό το κοινό σύνολο πεποιθήσεων ονομάζεται παράδειγμα (Kuhn, 1966), όπως αναφ. στο Gómez-Chacón & Kuzniak (2015). Τα γεωμετρικά προβλήματα ερμηνεύονται με τα τρία γεωμετρικά παραδείγματα που σχετίζονται με το αναλυτικό πρόγραμμα κάθε χώρας. Τα τρία γεωμετρικά παραδείγματα είναι η Γεωμετρία Ι : Φυσική Γεωμετρία (G I), η Γεωμετρία ΙΙ: Φυσική Αξιωματική Γεωμετρία (G II) και η Γεωμετρία ΙΙΙ: Τυπική Αξιωματική Γεωμετρία (G III).

Φυσική Γεωμετρία Ι

Η Φυσική Γεωμετρία Ι συνδέεται με τον πραγματικό φυσικό κόσμο ως πηγή της επικύρωσης. Τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούνται ώστε να δικαιολογηθεί ένας ισχυρισμός βασίζονται στη διαίσθηση, σε πειράματα και συμπεράσματα. Τα αντικείμενα είναι γραμμές σε ένα φύλλο χαρτιού ή στην οθόνη του υπολογιστή. Οι αποδείξεις κυρίως βασίζονται στην αντίληψη μέσω συγκρίσεων ή μετρήσεων (Παναούρα, 2007). Οι πειραματισμοί γίνονται μέσα από τα σχήματα (πραγματικά γεωμετρικά αντικείμενα), ενώ οι τεχνικές που εφαρμόζονται είναι τεχνικές σχεδίασης με διάφορα εργαλεία κατασκευής και μέτρησης, όπως ο βαθμονομημένος χάρακας, διαβήτης, μοιρογνωμόνιο αλλά και δίπλωμα, κοπή, επικάλυψη (Νικολαντωνάκης, 2021). Η κίνηση προς τα πίσω και προς τα εμπρός μεταξύ του μοντέλου και του

[7] Ο Ferdinand Gonseth (1890–1975) ήταν Ελβετός μαθηματικός και φιλόσοφος

πραγματικού είναι μόνιμη και επιτρέπει την απόδειξη των ισχυρισμών: το πιο σημαντικό πράγμα είναι να πείσεις (Houdement & Paris, 2007; Kuzniak, 2008).

Φυσική Αξιωματική Γεωμετρία II

Η Φυσική Αξιωματική Γεωμετρία II βασίζεται στο μοντέλο της Γεωμετρίας του Ευκλείδη. Ονομάστηκε αξιωματική διότι πηγή της επικύρωσης είναι οι υποθετικοί-απαγωγικοί νόμοι που σχετίζονται με ένα σύνολο αξιωμάτων. Ονομάστηκε και φυσική γιατί οι ορισμοί και τα αξιώματα είναι όσο γίνεται πιο κοντά στη διαίσθηση του χώρου. Τα σχήματα βασίζονται σε ορισμούς, αλλά οι ορισμοί αυτοί συμβαδίζουν με την πραγματικότητα, αποτελούν στήριγμα για το συλλογισμό, ενώ η μέτρηση πάνω σε αυτά δεν είναι αποδεκτή ως μορφή απόδειξης .Οι κατασκευές, ενώ έχουν τη μορφή ελεύθερου σχεδίου, είναι κωδικοποιημένα σχέδια με γράμματα και σύμβολα. Έτσι καθώς ο εμπειρογνώμονας εργάζεται, γνωρίζει πως να διαβάζει τις ενδείξεις που τοποθετούνται στο σχέδιο επικυρώνοντας το κείμενο (Kuzniak, 2008; Νικολαντωνάκης, 2021).

Η Τυπική και Αξιωματική Γεωμετρία III

Το τελευταίο παράδειγμα είναι η Τυπική και Αξιωματική Γεωμετρία στην οποία το σύστημα αξιωμάτων είναι πλήρες και ανεξάρτητο από τις πιθανές εφαρμογές του στον πραγματικό κόσμο. Επίσης έχει τη μικρότερη σημασία στην υποχρεωτική εκπαίδευση, ενώ συναντάται περισσότερο στο Πανεπιστήμιο (Παναούρα, 2007˙ Νικολαντωνάκης, 2021). Η γεωμετρία που διδάσκεται στα σχολεία δεν είναι μόνο ένα σύνολο ιδιοτήτων και αντικειμένων που χειρίζονται από φορμαλιστικά συστήματα: είναι πάνω από όλα μια ανθρώπινη δραστηριότητα που εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο μια κοινότητα ατόμων, αλλά και συγκεκριμένα άτομα, χρησιμοποιούν τα γεωμετρικά παραδείγματα στην καθημερινή πρακτική της επιστήμης (Kuzniak, 2008, 2014; Kuzniak & Nechache, 2015).

Η διδασκαλία της γεωμετρίας έχει ως στόχο να καταφέρουν οι μαθητές να κατασκευάσουν τον ΓΧΕ ώστε να κατανοήσουν και να λύσουν γεωμετρικά προβλήματα κατάλληλα και αποτελεσματικά. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται αναλυτικά τα χαρακτηριστικά των δύο ειδών Γεωμετρίας που διαπραγματεύονται οι μαθητές στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση σύμφωνα με τους Houdement και Kuzniak (2003), όπως αναφέρει η Παναούρα (2007).

Πίνακας 1. Τα χαρακτηριστικά της Γεωμετρίας Ι και ΙΙ

	Γεωμετρία Ι	Γεωμετρία ΙΙ
Χώρος	Διαισθητικός- Φυσικός χώρος.	Χώρος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.
Αντικείμενα	Υλικά αντικείμενα (ή ψηφιακά). Σχέδια, μοντέλα, προϊόντα δραστηριότητας με όργανα.	Μη πραγματικά αντικείμενα. Σχήματα (εμβαδόν χωρίων, σχέσεις μεταξύ μεταβλητών), ορισμοί, θεωρήματα.
Τεχνουργήματα	Διάφορα εργαλεία (γεωμετρικά όργανα, αναδίπλωση χαρτιού). Λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας.	Φυσικά εργαλεία(κανόνας και διαβήτης) χρησιμοποιώντας επιχειρήματα που βασίζονται σε λογικό και παραγωγικό συλλογισμό.
Απόδειξη	Γίνεται έλεγχος των αποδεικτικών στοιχείων με τα όργανα ή της αποτελεσματικής κατασκευής (ή με το σύρσιμο σε λογισμικό περιβάλλον).	Ιδιότητες και φορμαλιστικές αποδείξεις ή αξιώματα.
Μετρήσεις	Μέτρηση Επιτρεπτή: παράγει γνώση.	Μη επιτρεπτή για την παραγωγή γνώσης αλλά επιτρεπτή για τις ευρετικές μεθόδους.
Οφέλη	Αυτό- απόδειξη και κατασκευή.	Ιδιότητες και επίδειξη.

Η ποικιλία των γεωμετρικών παραδειγμάτων και η ερμηνεία τους εξαρτάται από τα διάφορα γεωμετρικά παραδείγματα που σχετίζονται με το σχολικό περιβάλλον, οπότε για τον ορισμό του ΓΧΕ εισήχθησαν δύο επίπεδα που συνδέονται μεταξύ τους. Το πρώτο επίπεδο είναι το Επιστημολογικό και το δεύτερο το Γνωστικό (Houdement & Kuzniak, 2006).

2.2 Τα επίπεδα του ΓΧΕ

Επιστημολογικό επίπεδο

Σύμφωνα με τον Kuzniak (2014), το πρώτο επιστημολογικό επίπεδο ορίζει τις εκ των προτέρων προσδοκίες σχετικά με τη γεωμετρική δραστηριότητα, η οποία χαρακτηρίζεται από τρεις συνιστώσες που αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους και είναι οι ακόλουθες:

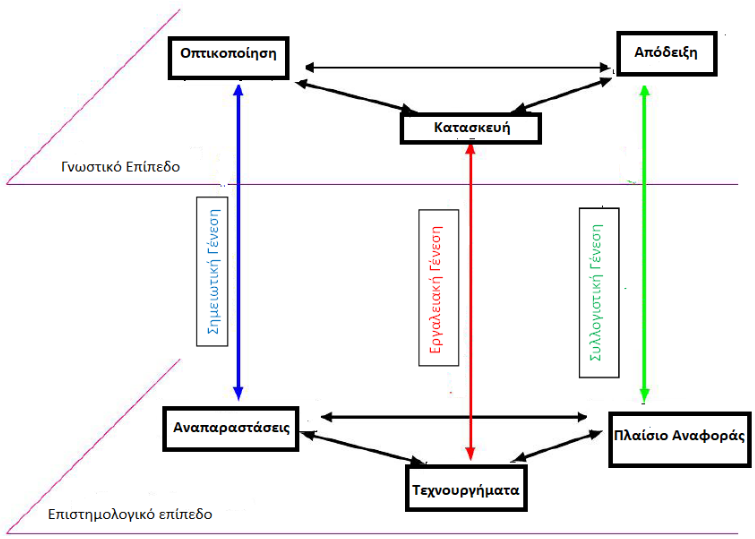
- Ένας πραγματικός και τοπικός χώρος μαζί με ένα σύνολο συγκεκριμένων και απτών αντικειμένων όπως είναι σχήματα και σχέδια.
- Ένα σύνολο τεχνουργημάτων, όπως όργανα σχεδίασης ή λογισμικό.
- Ένα θεωρητικό πλαίσιο αναφοράς που βασίζεται σε ορισμούς και ιδιότητες, το οποίο πρέπει να είναι καλά οργανωμένο.

Γνωστικό Επίπεδο

Το δεύτερο, γνωστικό επίπεδο επικεντρώνεται στον τρόπο που κατανοούν και οικειοποιούνται τα άτομα τις γεωμετρικές γνώσεις. Βασίζεται στην ιδέα του Duval (2005) που προσαρμόστηκε κατάλληλα, όπως επισημαίνει ο Kuzniak (2014). Σύμφωνα με την ιδέα αυτή οι γνωστικές διαδικασίες που εμπλέκονται στη Γεωμετρία διακρίνονται στην οπτικοποίηση, δηλαδή την οπτική αναπαράσταση ενός σχήματος, την κατασκευή με χρήση εργαλείων και το συλλογισμό.

- Η οπτικοποίηση συνδέεται με την αναπαράσταση του χώρου και την υλική υποστήριξη.
- Η κατασκευή εξαρτάται από τα αντικείμενα που χρησιμοποιούνται (π.χ. χάρακες, διαβήτης).
- Ο συλλογισμός παράγει επιχειρήματα και αποδείξεις.

Στο παρακάτω διάγραμμα (1) φαίνεται αναλυτικά πως συνδέονται τα δύο επίπεδα μεταξύ τους.



Διάγραμμα 1. Η σύνδεση των επιπέδων Γνωστικό-Επιστημολογικό

2.3 Οι γενέσεις του ΓΧΕ

Όταν ο φοιτητής, μαθηματικός ή μαθητής έρθει αντιμέτωπος με ένα γεωμετρικό πρόβλημα θα εργαστεί στον προσωπικό του γεωμετρικό χώρο. Η γεωμετρική εργασία στο σχολείο αναλύεται σε τρία επίπεδα ΓΧΕ ώστε κάθε μαθητής να εργάζεται στο πλαίσιο του δικού του χώρου εργασίας (Kuzniak, 2015). Τα δύο επίπεδα συνδέονται μεταξύ τους μέσω τριών γενετικών εξελίξεων που ονομάζονται γενέσεις : σημειωτική, εργαλειακή και διαλεκτική όπως φαίνεται στο διάγραμμα (1) (Kuzniak, 2015).

Η εργαλειακή γένεση μετασχηματίζει τα τεχνουργήματα σε εργαλεία στο πλαίσιο της κατασκευαστικής διαδικασίας. Η ανοδική κίνηση ανάμεσα στα δύο επίπεδα του ΓΧΕ που αναφέρεται σε αυτό το μετασχηματισμό, περιγράφει το χειρισμό και τη γνώση των εργαλείων σχεδίασης. Αντίστροφα όταν το άτομο είναι έτοιμο να κατασκευάσει ένα σχήμα η καθοδική διαδικασία του ΓΧΕ σχετίζεται με την κατάλληλη επιλογή και τη σωστή χρήση ενός εργαλείου (Gómez-Chacón & Kuzniak, 2015).

Η σημειωτική γένεση προσδίδει στα απτά αντικείμενα την ιδιότητά τους ως λειτουργικά μαθηματικά αντικείμενα, η οποία είναι σημαντική στην περίπτωση της γεωμετρίας. Επίσης τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας έχουν τροποποιήσει το ρόλο των εργαλείων στα μαθηματικά προσφέροντας τη δυνατότητα δυναμικών αποδείξεων. Τα οπτικά στηρίγματα της γεωμετρίας είναι τα σχήματα. Ο Duval (2005) έδωσε το παράδειγμα του βοτανολόγου, ο οποίος αναγνωρίζει και ταξινομεί τα φύλλα των φυτών ως γεωμετρικά αντικείμενα (Kuzniak, 2015; Νικολαντωνάκης, χ. χ.).

Η συλλογιστική γένεση της απόδειξης δίνει νόημα στις ιδιότητες που χρησιμοποιούνται στο πλαίσιο της μαθηματικής συλλογιστικής. Ο σκοπός αυτής της γένεσης είναι να εμπλακεί σε μια αμφίδρομη διαδικασία επικύρωσης. Στην ανοδική κίνηση αξιοποιούνται ορισμοί και ιδιότητες ώστε να προκύψει ένας αποδεικτικός λόγος. Αντίστροφα, ελέγχεται η εγκυρότητα μιας απόδειξης ενώ διατυπώνονται νέοι ορισμοί και ιδιότητες (Gomez et al., 2015; Νικολαντωνάκης, χ.χ.).

Οι διαφορετικές γενέσεις δεν λειτουργούν ξεχωριστά αλλά αλληλοεπιδρούν καθώς διαρθρώνονται τρία κατακόρυφα όπως εμφανίζονται στο διάγραμμα (1) που έχουν αναδείξει οι Coutat & Richard (2011), όπως αναφ. στο Gomez et al. (2015).

Επίπεδο [Sem-Dis] που σχετίζεται με τη σημειωτική και τη συλλογιστική γένεση

Υπάρχει άρρηκτη σχέση μεταξύ της σημειωτικής και της συλλογιστικής γένεσης και συμβάλει στην ανάπτυξη μιας γεωμετρίας που δε βασίζεται μόνο στην απλή εικονική θεώρηση των αντικειμένων (διάγραμμα 2).

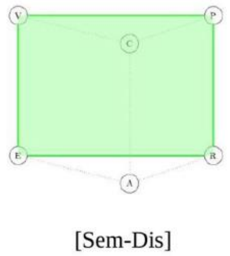
Ανάλογα με την προτεραιότητα που δίνεται στη σημειωτική ή στη συλλογιστική (ή λεκτική), δύο προσεγγίσεις υπάρχουν. Όταν δίνεται έμφαση στη σημειωτική πλευρά οι οπτικοί μετασχηματισμοί δομούν την περιγραφή των σχημάτων και οργανώνουν το συλλογισμό. Αντίθετα στη συλλογιστική δίνεται έμφαση σε μια υποθετική και επαγωγική απόδειξη με βάση τις ιδιότητες, όπου τα σχήματα και οι οπτικοποιήσεις παίζουν ευρετικό ρόλο (Gomez et al., 2015).

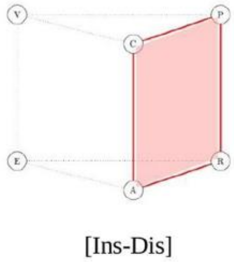
Επίπεδο [Ins-Dis] που σχετίζεται με τη συλλογιστική και την εργαλειακή γένεση

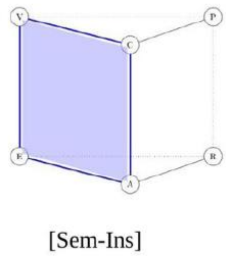
Σε αυτό το επίπεδο αναπτύσσεται ο μαθηματικός συλλογισμός. Αν τα αποτελέσματα προκύπτουν από δεδομένα βάσει των εργαλείων, μιλάμε για πειραματική απόδειξη. Διαφορετικά αν οι μαθητές κάνουν γεωμετρικές κατασκευές με κανόνα και διαβήτη τα επιχειρήματα που δίνουν βασίζονται στο θεωρητικό πλαίσιο αναφοράς (Gomez et al., 2015) (διάγραμμα 3).

Επίπεδο 3 [Sem-Ins] που σχετίζεται με τη σημειωτική και την εργαλειακή γένεση.

Το επίπεδο αυτό έχει μεγάλη σημασία τα τελευταία χρόνια εξαιτίας των Λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας. Τα σύγχρονα μέσα διδασκαλίας μας δίνουν τεράστιες δυνατότητες πειραματισμού και οπτικοποίησης του θέματος. Με τη βοήθεια της ψηφιακής τεχνολογίας αναδεικνύονται συγκεκριμένες δράσεις που δεν μπορούν να υλοποιηθούν με τα συμβατικά μέσα αναπαράστασης όπως βιβλίο, χαρτί , μολύβι. Με αυτόν τον τρόπο, ενώ διατηρούνται οι γεωμετρικές σχέσεις **,** με την παρατήρηση των χαρακτηριστικών που μεταβάλλονται και αυτών που διατηρούνται αμετάβλητα, η κάθε κατασκευή οδηγεί σε γενικεύσεις (Gomez et al., 2015) (διάγραμμα 4).







Διάγραμμα 2 Διάγραμμα 3 Διάγραμμα 4

2.4 Το Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση

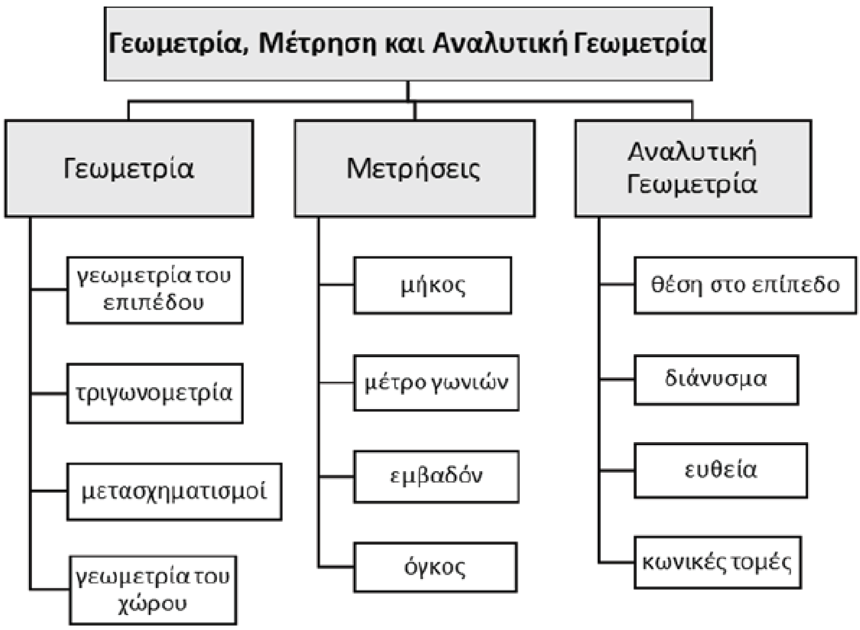
Σύμφωνα με το ΦΕΚ 5390/19.11.2021, σ.σ. 69381-69407 το Π.Σ. το περιεχόμενο περιλαμβάνει τρία θεματικά πεδία :

1)Αριθμός, Άλγεβρα και Ανάλυση

2) Γεωμετρία, Μέτρηση και Αναλυτική Γεωμετρία

3) Στοχαστικά Μαθηματικά (Στατιστική - Πιθανότητες)

Συγκεκριμένα το περιεχόμενο της Γεωμετρίας φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα



Διάγραμμα 5. Το περιεχόμενο της Γεωμετρίας σύμφωνα με το Α.Π.

Το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών για τη Γεωμετρία Β΄ Λυκείου

Το ωρολόγιο πρόγραμμα σπουδών ορίζει για το μάθημα της Γεωμετρίας στη Β΄ Λυκείου 2 ώρες εβδομαδιαίως.

Η Γεωμετρία της Β΄ Λυκείου αποτελεί συνέχεια της Γεωμετρίας της Α΄ Λυκείου, η ύλη της οποίας ολοκληρώνεται με το Κεφάλαιο 6 : «Εγγεγραμμένα σχήματα».

Σύμφωνα με το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (ΙΕΠ), τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα της διδασκαλίας της Γεωμετρίας της Β ΄ Λυκείου για το έτος 2021-2022 είναι οι μαθητές :

Κεφάλαιο 7 (προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

- να κατανοήσουν την έννοια του λόγου ευθυγράμμου τμήματος
- να μπορούν να διαιρούν ευθύγραμμο τμήμα σε ν ίσα μέρη
- να μπορούν να διατυπώνουν και να εφαρμόζουν το Θεώρημα του Θαλή και το αντίστροφό του σε δοσμένα σχήματα ή σε σχήματα που απαιτούν να σχεδιαστούν βοηθητικές ευθείες
- να μπορούν να κάνουν απλές εφαρμογές των θεωρημάτων των διχοτόμων
- να μπορούν να κατασκευάζουν ευθύγραμμο τμήμα με την ιδιότητα της 4ης αναλόγου
- να μπορούν να αξιοποιούν τα παραπάνω στην επίλυση μαθηματικών και ρεαλιστικών προβλημάτων

Κεφάλαιο 8 (προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

- να μπορούν να ορίζουν τα όμοια τρίγωνα και πολύγωνα
- να κατανοήσουν τη λειτουργία κριτηρίων ομοιότητας τριγώνων
- να χρησιμοποιούν την ομοιότητα τριγώνων για να επιλύουν μαθηματικά και ρεαλιστικά προβλήματα
- να μπορούν να συσχετίσουν την ισότητα με την ομοιότητα τριγώνων και να εντοπίζουν διαφορές.

Κεφάλαιο 9 (Προτείνεται να διατεθούν 8 διδακτικές ώρες)

- να μπορούν να σχεδιάζουν ορθές προβολές
- να ερμηνεύουν τις μετρικές σχέσεις με προβολές ως αποτέλεσμα ομοιότητας τριγώνων και να τις χρησιμοποιούν σε επίλυση προβλημάτων

- να εφαρμόζουν το Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφό του στην επίλυση μαθηματικών και ρεαλιστικών προβλημάτων
- να μπορούν να χρησιμοποιούν το Γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα για τον προσδιορισμό του είδους του τριγώνου ως προς τις γωνίες του και να υπολογίζουν τα μέτρα των πλευρών και των γωνιών του

Κεφάλαιο 10 (προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες)

- να μπορούν να διακρίνουν τα ισοδύναμα (ισεμβαδικά) από τα ίσα σχήματα
- να μπορούν να υπολογίζουν εμβαδά σχημάτων αξιοποιώντας τους τύπους για το εμβαδόν τετραγώνου ορθογωνίου και τριγώνου
- να μπορούν να χρησιμοποιούν τους νόμους των ημιτόνων και συνημιτόνων για την επίλυση τριγώνου
- να μετατρέπουν πολύγωνα σε ισοδύναμα με λιγότερες πλευρές
- να συσχετίσουν το λόγο ομοιότητας δύο όμοιων σχημάτων με το λόγο των περιμέτρων τους και των εμβαδών τους.

Κεφάλαιο 11 (προτείνεται να διατεθούν 11 διδακτικές ώρες)

- να κατανοήσουν τις ιδιότητες των κανονικών πολυγώνων και να μπορούν να κατασκευάζουν με κανόνα και διαβήτη το ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο και το κανονικό εξάγωνο
- να προσεγγίζουν το μήκος του κύκλου με τις περιμέτρους των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων σε αυτόν πολυγώνων
- να υπολογίζουν το μήκος τόξου μ μοιρών σε σχέση με την ακτίνα του
- να προσεγγίζουν το εμβαδόν κυκλικού δίσκου με τα εμβαδά των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων σε αυτόν κανονικών πολυγώνων
- να υπολογίζουν το εμβαδόν κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί σε τόξο μ μοιρών σε σχέση με την ακτίνα του
- να υπολογίζουν εμβαδά μεικτόγραμμων χωρίων

Κεφάλαιο 3ο Η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία.

Η διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών δεν μπορεί να περιορίζεται μόνο στην παρουσίαση και ανάπτυξη θεωριών και να παρέχει μόνο τυποποιημένες λύσεις σε κάθε είδους προβλήματα (Van Maanen, 1997; Θωμαΐδης, Μιχαηλίδης, Πάσχος, Φαρμάκη, Χριστιανίδης, 2009). Είναι μια ζωντανή επιστήμη που συνεχώς εξελίσσεται, ενώ οι ρίζες τους συνδέονται με την έναρξη της δημιουργίας του ανθρώπινου πολιτισμού.

Η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να μας διδάξει σχετικά με τους σύνθετους υπολογισμούς που χρησιμοποιήθηκαν για να χτιστούν οι Πυραμίδες, ποια ήταν τα κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία που επινοήθηκαν για να βρίσκονται τα όρια των χωραφιών από τις πλημμύρες του Νείλου, πως έγινε ο υπολογισμός του ύψους της πυραμίδας από το Θαλή, τον υπολογισμό της περιμέτρου της γης από τον Ερατοσθένη και πολλά άλλα επιτεύγματα της αρχαιότητας και των νεότερων χρόνων. Σύμφωνα με την έρευνα του Thomaidis (1993): «*Η μελέτη των εμποδίων που συνάντησαν οι μαθηματικοί στο παρελθόν, μας δίνει την ευκαιρία να ερμηνεύσουμε τα λάθη που κάνουν οι μαθητές σήμερα*». Μελετώντας τις "παλιές μεθόδους" δίνεται η δυνατότητα στο δάσκαλο και τους μαθητές να αξιολογήσουν το πρόβλημα με το οποίο έρχονται αντιμέτωποι, να αποστασιοποιηθούν από αυτό, να προβληματιστούν και στη συνέχεια να ασχοληθούν με αυτό πιο συνειδητά (Van Maanen, 1997).

Η ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση ήταν μια ιδέα που υποστήριξαν από το τέλος του 19ου αιώνα, αρχές του 20ου οι De Morgan, Poincare, Klein και άλλοι κορυφαίοι μαθηματικοί εκείνης της εποχής. Οι διάφορες επιστημολογικές προσεγγίσεις όπως η γενετική επιστημολογία του Piaget για τη νοητική ανάπτυξη, η προσέγγιση με βάση τη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων του Brousseau και η ιστορική επιστημολογία του Bachelard που σχετίζονται με τα επιστημολογικά εμπόδια, καθώς και η φαινομενολογική επιστημολογία του Freudenthal, που ως βασικό αξίωμά της έχει την «αρχή της εκ νέου επινόησης», βοήθησαν προς σ' αυτή την κατεύθυνση (Clark, Kjeldsen, Schorcht & Tzanakis, 2018; Θωμαΐδης, 2021).

Αργότερα η αξία της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση κέρδισε έδαφος μέσα από τη μελέτη της IMCI (International Commission on Mathematics Instruction) (Van Maanen, 1997; Tzanakis, Arcavi, de Sá, Isoda, Lit, Niss, ... & van Maanen 2000, όπως αναφ. στο Θωμαΐδης, 2009). Η μελέτη ξεκίνησε το 1997 με ένα έγγραφο συζήτησης από τους Fauvel και Van που αφορούσε την ενσωμάτωση της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών (Van Maanen, 1997).

Η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών και η γνώση της ανάπτυξης των εννοιών μπορεί να τονίσει και να αναδείξει την εξελικτική πορεία τους στο χώρο και το χρόνο. Βοηθά να αντιληφθούν οι μαθητές ότι τα μαθηματικά έχουν εφευρεθεί από ανθρώπους για να λύσουν προβλήματα και ότι δεν υπήρχαν πάντα.

Μπορεί να μας διδάξει τους διαφορετικούς ρόλους που έχουν παίξει οι διάφοροι πολιτισμοί στην ανάπτυξη των μαθηματικών, ενώ η ένταξή της στη διδασκαλία μπορεί να συμβάλλει στην καλλιέργεια σεβασμού μεταξύ των μαθητών μέσα σε πολυεθνικές τάξεις (Gulikers & Blom, 2001; Jankvist, 2009).

Η ιστορία ως πηγή πληροφοριών, παραδειγμάτων και καταστάσεων μπορεί να εμπλουτίσει τη διαδικασία της μάθησης, να δώσει ιδέες στον εκπαιδευτικό για διαφορετικές προσεγγίσεις της διδασκαλίας προσδίδοντας έτσι μια δυναμική μέσα στην τάξη και να επηρεάσει τη στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά, ώστε να τα βρουν πιο ενδιαφέροντα και πιο ελκυστικά. Δίνει την ευκαιρία να εμπλακούν όλοι οι μαθητές στη μαθησιακή διδασκαλία και επιτρέπει στους πιο έξυπνους μαθητές να «*κοιτάξουν παραπέρα*» (Gulikers & Blom, 2001). Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές αποκτούν κίνητρο ώστε να εμβαθύνουν στις νέες γνώσεις και να αναζητούν περισσότερες λεπτομέρειες που αφορούν τις μαθηματικές έννοιες και την ιστορική εξέλιξή τους (Van Maanen,1997 ; Gulikers, & Blom, 2001; Boyé, Demattè, Lakoma & Tzanakis, 2011). Επιπλέον μπορούν να κατανοήσουν ότι τα μαθηματικά είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με άλλες επιστήμες και ότι η ιστορία τούς παρέχει ευκαιρίες για διαθεματικές εργασίες.

Ένας από τους διάφορους τρόπους που αξιοποιούμε την ιστορία των μαθηματικών είναι η χρήση πρωτότυπων κειμένων με αποδείξεις. Προτείνεται να διαβάζουν οι μαθητές αρχαία κείμενα, να σχολιάζουν και να συζητούν για τον τρόπο γραφής του κειμένου, το λεξιλόγιό του, για τα σύμβολα που χρησιμοποιούσαν και να κάνουν συγκρίσεις με τα σύγχρονα μαθηματικά. Η μελέτη των πρωτότυπων κειμένων εισάγει την ιστορία στα μαθηματικά κεντρίζοντας το ενδιαφέρον των μαθητών αλλά και των εκπαιδευτικών. Δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να κατασκευάσουν, να σχεδιάσουν και να εφαρμόσουν τις αποδεικτικές διαδικασίες ακολουθώντας τα βήματα των παλαιότερων επιστημόνων. Η ενημέρωση σχετικά με τη ζωή και το έργο των σπουδαίων μαθηματικών στα πλαίσια του μαθήματος, δίνει επιπλέον αξία στο μάθημα των μαθηματικών πέρα από αυτό που περιλαμβάνει το αναλυτικό πρόγραμμα.

Παρ' όλα αυτά, πολλά είναι τα εμπόδια που χρειάζεται να ξεπεράσει ο εκπαιδευτικός ώστε να αξιοποιηθεί η Ιστορία των Μαθηματικών στο μέγιστο βαθμό. Οι δάσκαλοι δεν έχουν πάντα πρόσβαση σε υποστηρικτικό διδακτικό υλικό ή δεν έχουν αρκετό διαθέσιμο χρόνο εξαιτίας της πίεσης του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών. Η ιστορική προσέγγιση στα μαθηματικά απαιτεί απαραίτητες ιστορικές γνώσεις και διαφοροποίηση του παραδοσιακού τρόπου διδασκαλίας, ώστε να διεγείρει το ενδιαφέρον των μαθητών (Fauvel, 1991; Fowler, 1991, όπως αναφ. στο Gulikers & Blom, 2001).

Κεφάλαιο 4^{ο} Διερεύνηση του προβλήματος από Μαθηματικούς διαφορετικών εποχών : Chuquet, Marolois, Lefrancois, al-Khwarizmi, Bourdon, da Cunha, Pólya.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε εν συντομία τη ζωή και το έργο των σπουδαίων Μαθηματικών που επέλυσαν το γεωμετρικό πρόβλημα της παρούσας εργασίας, καθώς και την ανάπτυξη της διαφορετικής προσέγγισης του καθενός που ενδεχομένως να επηρεάζεται από την εποχή, την καταγωγή και το πολιτιστικό υπόβαθρο του.

4.1.1 Η ζωή και το έργο του Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi (780–850 μ.Χ.)

Ο πατέρας της Άλγεβρας.

Εικόνα 1. Muhammad Ibn Musa ai-Khwarizmi

Ο Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi γεννήθηκε στην Περσία γύρω στο 780 μ.Χ. και ήταν μαθηματικός, αστρονόμος, αστρολόγος και γεωγράφος. Το όνομά του «al-Khwarizmi» δείχνει ότι κατάγεται από από το Khwarizm, τη σημερινή Khiva μια περιοχή νότια της θάλασσας Αράλης (Aral Sea) της κεντρικής Ασίας. Ωστόσο ο ιστορικός al- Tabari πιστεύει ότι κατάγεται από μια περιοχή ανάμεσα στον Τίγρη και τον Ευφράτη κοντά στη Βαγδάτη. Υπό την ηγεσία του Χαλίφη al-Ma'mun, ο al-Khwarizmi έγινε μέλος του «Οίκου της Σοφίας» (Dar al-Hikma), ένα κέντρο επιστημονικής έρευνας και διδασκαλίας που ιδρύθηκε στη Βαγδάτη από τον χαλίφη Rarün al-Rashld (Van der Waerden, 1985). Σε αυτόν οφείλεται η τεράστειας σημασίας πραγματεία του και η Άλγεβρά του είναι αφιερωμένη σε αυτόν τον ηγεμόνα. Τα καθήκοντά τους στον «Οίκο της Σοφίας» περιλάμβαναν τη μετάφραση ελληνικών επιστημονικών χειρόγραφων και επίσης μελετούσαν και έγραφαν για την άλγεβρα, τη γεωμετρία και την αστρονομία. Η πραγματεία για την άλγεβρα Hisab al-jabr w'al-muqabala ήταν το πιο διάσημο και σημαντικό από όλα τα έργα του al-Khwarizmi. Είναι ο τίτλος αυτού του κειμένου που μας δίνει τη λέξη «Άλγεβρα» και με μια έννοια που θα διερευνήσουμε πιο διεξοδικά παρακάτω, είναι το πρώτο βιβλίο που γράφτηκε για την άλγεβρα.

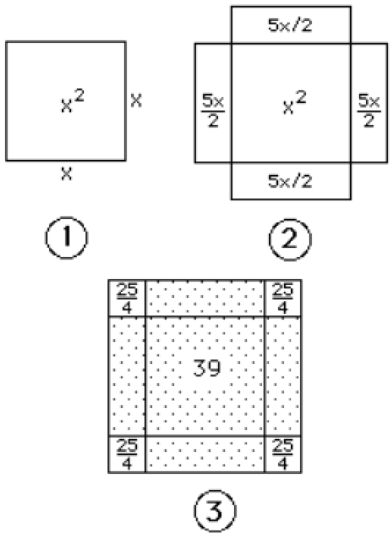
Ο Gandz[8] εκφράζει την άποψή του για την άλγεβρα του al- Khwarizmi λέγοντας ότι : «*Η άλγεβρα του al- Khwarizmi θεωρείται το θεμέλιο και ο ακρογωνιαίος λίθος των επιστημών. Κατά μία έννοια, διακαιούται να αποκαλείται 'ο πατέρας της άλγεβρας', περισσότερο από τον Διόφαντο, διότι ο al- Khwarizmi είναι ο πρώτος που διδάσκει την άλγεβρα σε στοιχειώδη μορφή ενώ, ο Διόφαντος ασχολείται κυρίως με τη θεωρία των αριθμών*» (O' Connor & Robertson, 1999).

Σύμφωνα με τον Van der Waerden (2013), ο βιογράφος Haji Khalfa αναφέρει στο βιογραφικό του λεξικό (εκδ. Flügel, Τόμος 5, σ. 67) ότι «ο *al-Khwarizmi ήταν ο πρώτος ισλαμιστής συγγραφέας που έγραψε για την επίλυση των προβλημάτων με το al-jabr και το al-muqabala. Η έννοια της λέξης al-jabr στις μαθηματικές πραγματείες είναι η προσθήκη ίσων όρων και στα δύο μέλη μιας εξίσωσης προκειμένου να εξαλειφθούν οι αρνητικοί όροι. Μια άλλη ερμηνεία είναι ο πολλαπλασιασμός και των δύο πλευρών μιας εξίσωσης με τον ίδιο αριθμό για την εξάλειψη των κλασμάτων». Από τη λέξη al-jabr προέρχεται η λέξη «Άλγεβρα». Η συνήθης έννοια της muqabala είναι η μείωση των θετικών όρων με αφαίρεση ίσων ποσών και από τις δύο πλευρές μιας εξίσωσης. Αλλά ο al-Karaji χρησιμοποιεί επίσης τη λέξη με την έννοια εξισώνω. Η κυριολεκτική σημασία της λέξης είναι: συγκρίνω, θέτοντας το αντίθετο. Ο συνδυασμός των δύο λέξεων: al-jabr wal-muqabala χρησιμοποιείται μερικές φορές με μια πιο γενική έννοια: εκτέλεση αλγεβρικών πράξεων ή πιο απλά : Η επιστήμη της άλγεβρας».*

Το βασικό έργο του για τη στοιχειώδη Άλγεβρα που σώζεται ακόμη είναι το «*Al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr waʾl-muqābala*» (Συνοπτικό Βιβλίο για τον Υπολογισμό με Μεταφορά και Απλοποίηση) γράφτηκε στη Βαγδάτη γύρω στο 825 (Katz & Barton, 2007) και μεταφράστηκε στα λατινικά τον 12ο αιώνα από το οποίο προέρχεται ο τίτλος και όρος «Άλγεβρα» που σημαίνει «επανένωση σπασμένων μερών-αποκατάσταση» (Britannica, 2022). Είναι μια συλλογή κανόνων για την εύρεση λύσεων γραμμικών και τετραγωνικών εξισώσεων που βασίζεται σε γεωμετρικά επιχειρήματα και διαπραγματεύεται γεωμετρικούς υπολογισμούς, όπως μέτρηση εμβαδών και όγκων γεωμετρικών σχημάτων, καθώς και την επίλυση κληρονομικών προβλημάτων όπως όριζε ο ισλαμικός νόμος.

---

[8]S. Grandz, The sources of al-Khwarizmi's algebra, Osiris, I, (1936), 263-77



Εικόνα 2. Ο al-Khwarizmi συμπληρώνει το τετράγωνο

Εικόνα 3.Μια σελίδα από το Al-Kitāb al-mukhtaṣar *fī ḥisāb al-jabr wa'l-muqābala*

Στο πρώτο μέρος αυτού του βιβλίου που ασχολείται με την επίλυση γραμμικών και τετραγωνικών εξισώσεων, ο Al-Khwarizmi κατηγοριοποιεί τις εξισώσεις σε έξι τύπους, τρεις από τους οποίους είναι μικτές τετραγωνικές εξισώσεις. Η επίλυση κάθε εξίσωσης βασίζεται σε έναν αλγόριθμο ανάλογα με τον τύπο της (Katz & Barton, 2007)**.** Ονομάζει τον άγνωστο «πράγμα» (shay) και το τετράγωνο του «πράγματος» «αγαθό» ή «πλούτος» (mal) (Van der Waerden, 2013 ; Barbin et al., 2018), όπως περιγράφεται στην παρακάτω εξίσωση:

«Το τετράγωνο του *πράγματος είναι ίσο με σαράντα πράγματα μείον τέσσερα τετράγωνα»* που με το σημερινό συμβολισμό έχουμε την εξίσωση : $x^2=40x-4x^2$.
Ο al-Khwarizmi εφαρμόζει την πράξη “al-jar” προσθέτοντας και στα δύο μέλη το $4x^2$ οπότε έχουμε: $5x^2 =40x$ ή $x^2 =8x$ και προκύπτει x=8. Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν χρησιμοποιούνται καθόλου σύμβολα καθώς και ότι το μηδέν δεν αποτελεί λύση της εξίσωσης (Van der Waerden, 2013).
Από το όνομα του al-Khwarizmi προέρχεται η λέξη «Αλγόριθμος» και το έργο του είχε μεγάλη συμβολή στην εξέλιξη των μαθηματικών. Το όνομα αυτό προέρχεται από τη λατινική μετάφραση Algoritmi de numero Indorum του μουσουλμάνου μαθηματικού του 9ου αιώνα και στο βιβλίο του υπάρχουν αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται για τις πράξεις της διαίρεσης με μεγάλους αριθμούς. Η εισαγωγή των Ινδουιστικών -

Αραβικών αριθμητικών συμβόλων 0,1,2,3,4,5,,6,7,8,9 στη Δύση, οφείλεται στον al-Khwarizmi και έγινε μέσω των συγγραμμάτων του.

Ένα εξίσου σημαντικό έργο είναι αφιερωμένο στην αστρονομία (Zij al-sindhind), το οποίο καλύπτει ημερολόγια, τον υπολογισμό της πραγματικής θέσης του ήλιου, της σελήνης και των πλανητών, πίνακες ημιτόνων και εφαπτομένων, σφαιρική αστρονομία, αστρολογικούς πίνακες, υπολογισμούς παράλλαξης και έκλειψης και ορατότητα της σελήνης (Famous Scientist, χ. χ).

4.1.2 Η διερεύνηση του προβλήματος από τον al- Khwarizmi

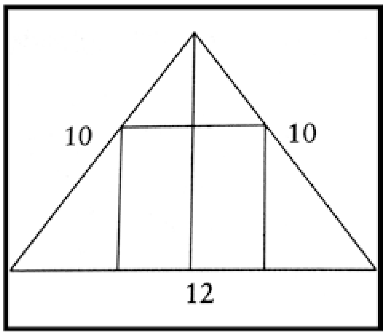
Ο al- Khwarizmi, όπως αναφέρουμε παραπάνω, χαρακτηρίζεται ως «ο πατέρας της Άλγεβρας», αναμενόμενο είναι λοιπόν να προσεγγίσει το πρόβλημα της παρούσας εργασίας στα πλαίσια της άλγεβρας.

Παρακάτω περιγράφεται η λύση όπως παρουσιάζεται μεταφρασμένο από τους Barbin et al. (2018), η οποία συνδυάζει αλγεβρικές μεθόδους στα πλαίσια της γεωμετρίας. Συγκεκριμένα η λύση αυτή απαιτεί την κατάστρωση μιας εξίσωσης με άγνωστο την πλευρά του τετραγώνου εφαρμόζοντας προτάσεις-θεωρήματα από τη γεωμετρία όπως το Πυθαγόρειο θεώρημα και το εμβαδόν τετραγώνου και τριγώνων.

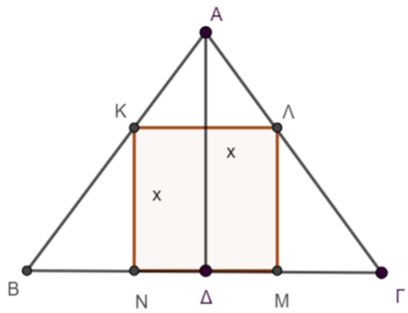
Τοπογραφικό πρόβλημα

Αν πούμε: ένα τριγωνικό κομμάτι γης, οι δύο πλευρές του (μετρούν) δέκα πήχες και η βάση δώδεκα πήχες, και μέσα στην κοιλιά του υπάρχει ένα τετράγωνο κομμάτι γης. Ποιο είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου;

Η μέθοδος γι' αυτό συνίσταται στο να γνωρίζουμε το ύψος του τριγώνου (της γης) και είναι με τον πολλαπλασιασμό του μισού της βάσης - και αυτό είναι έξι - με τον εαυτό του- προκύπτει τριάντα έξι. Αφαιρέστε αυτό από το τετράγωνο μιας από τις κοντές πλευρές - και αυτό είναι εκατό- εξήντα τέσσερα παραμένουν. Πάρτε την τετραγωνική ρίζα, οκτώ, και αυτό είναι το ύψος. Το εμβαδόν του είναι σαράντα οκτώ πήχες και αυτό είναι ο πολλαπλασιασμός του ύψους επί το μισό της βάσης, που είναι έξι. Θεωρούμε μια από τις πλευρές του τετραγώνου (γη) (ίση με) ένα «πράγμα» [x] και εμείς την τετραγωνίζουμε- γίνεται το αγαθό [x^2]. Το κρατάμε. Τότε βλέπουμε ότι έχουμε δύο τρίγωνα στις δύο πλευρές του τετραγώνου (γη) και ένα τρίγωνο πάνω από αυτό. Όσο για τα δύο τρίγωνα που βρίσκονται στις δύο πλευρές, είναι ίσα και τα ύψη τους είναι τα ίδια και βρίσκονται σε ορθή γωνία. Το εμβαδόν τους βρίσκεται *πολλαπλασιάζοντας ένα πράγμα [x] με το έξι μείον το μισό αγαθό, με αποτέλεσμα έξι πράγματα μείον το μισό από τα αγαθά [6x - 1/2x²]. Και είναι το εμβαδόν των δύο τριγώνων μαζί που βρίσκονται στις πλευρές του τετραγώνου. Όλο αυτό είναι το εμβαδόν του τετραγώνου και το εμβαδόν των τριών τριγώνων, και είναι δέκα πράγματα, (που) είναι ίσο με σαράντα οκτώ, και αυτό είναι το εμβαδόν του μεγάλου τριγώνου. Από αυτό, το πράγμα είναι τέσσερις πήχεις και τέσσερα πέμπτα του πήχεως, και είναι κάθε μία από τις πλευρές του του τετραγώνου (γης). Και εδώ είναι το διάγραμμά του:*



Εικόνα 4. Το πρωτότυπο σχήμα



Σχήμα 1. Προσέγγιση του al- Khwarizmi

Επεξήγηση

- Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ=12 και ΑΒ=ΑΓ=10. Το ύψος του ΑΔ μπορεί να υπολογιστεί εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ. $ΑΔ^2 = ΑΒ^2 - (\frac{1}{2}ΒΓ)^2$=100-36=64, ΑΔ=$\sqrt{64}$ =8.
- Το εμβαδόν του τριγώνου είναι ίσο με Ε= $\frac{1}{2}ΒΓ \cdot ΑΔ$ =48. Αν θεωρήσουμε x (πράγμα) την πλευρά του τετραγώνου και x^2 (αγαθό).
- Τα τρίγωνα ΚΒΝ και ΛΜΓ που σχηματίζονται είναι ίσα και το εμβαδό του καθένα είναι ίσο με $Ε_1 = \frac{1}{2}ΒΝ \cdot ΚΝ = \frac{1}{2}(6 - \frac{x}{2}) \cdot x = \frac{1}{2}(6x - \frac{x^2}{2})$
- Το εμβαδό του τριγώνου ΑΚΛ είναι ίσο με

  $Ε_2 = \frac{1}{2} ΑΖ \cdot ΚΛ = \frac{1}{2}(8-x) \cdot x = 4x - \frac{x^2}{2}$
- Το άθροισμα του τετραγώνου και των τριών τριγώνων μας δίνει το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ : $Ε_{ΑΒΓ} = 2 Ε_1 + Ε_2 + Ε_{ΚΛΜΝ}$
- Οπότε προκύπτει $48 = 6x - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{x^2}{2} + x^2 \Leftrightarrow x=4{,}8$ ή $4\frac{4}{5}$.

Παρατηρήσεις που σημειώνονται από τους Barbin et al. (2018) είναι ότι το εμβαδόν του τριγώνου καταγράφεται από τον al- Khwarizmi 48 πήχεις και όχι τετραγωνικές πήχεις, το αρχικό τρίγωνο είναι ισοσκελές και όχι τυχαίο, οπότε είναι πιο εύκολη η λύση του λόγω συμμετρίας και τέλος δεν παρουσιάζεται η κατασκευή του τετραγώνου παρά γίνεται ο υπολογισμός του μήκους της πλευράς.

4.2.1 Η ζωή και το έργο του Nicolas Chuquet (1440 μ.Χ. περίπου).

Εικόνα 5. Nicolas Chuquet

Ελάχιστα γνωρίζουμε για τη ζωή του Nicolas Chuquet. Δεν υπάρχουν αρκετά στοιχεία ώστε να προσδιορίσουμε με βεβαιότητα το έτος γέννησής του, πιθανολογείται ότι γεννήθηκε στις αρχές της δεκαετίας του 1440, δηλώνει ότι ήταν Παριζιάνος και ότι ήταν πτυχιούχος της ιατρικής, χωρίς να μπορεί να επιβεβαιωθεί κάτι τέτοιο. Ο Chuquet περιγράφεται ως «escripvain», εργαζόταν δηλαδή ως αντιγραφέας ή δάσκαλος γραφής. Πιθανόν να πέθανε στη Λυών γύρω στο 1488**,** καθώς το όνομά του εμφανίζεται στα φορολογικά μητρώα της Λυών το 1480**,** όπου περιγράφεται ως "Nicolas Chuquet, algoriste[9]" που ζούσε στην «rue de la Grenette» (Ulff-Møller, 1520; Moss, Hay & Flegg, 1985). Ήταν από τους λίγους αξιομνημόνευτους Γάλλους μαθηματικούς του δέκατου πέμπτου αιώνα. Στα περισσότερα έργα για την ιστορία των μαθηματικών αναφέρεται ως ο μεγαλύτερος Γάλλος εκπρόσωπος των μαθηματικών αυτής της περιόδου. Είναι γνωστός από το χειρόγραφό του «*Triparty en la science des nombres*» («Η επιστήμη των αριθμών σε τρία μέρη»), που εκδόθηκε

[9] Το άτομο ειδικευμένο στην τεχνική εκτέλεσης βασικών δεκαδικών αριθμητικών πράξεων, γνωστή ως αλγόριθμος.

από τον Aristide Marre[10] το 1880 και φυλάσσεται στη Bibliothèque nationale de France με την ένδειξη Fonds Γαλλική συλλογή 1346 (Spiesser, 1976, 2006). Σύμφωνα με την Spiesser (1976), *ο Jean Itard το 1972, έγραψε το άρθρο «Chuquet» για το Λεξικό της Επιστημονικής Βιβλιογραφίας, ενώ ο Hervé L'Huillier[11] επιμελήθηκε το γεωμετρικό μέρος το 1979. Το 1984, διοργανώθηκε στην Οξφόρδη συμπόσιο για τα μαθηματικά της Αναγέννησης προς τιμήν των πεντακοσίων χρόνων από τη δημοσίευση του «Triparty en la science des nombres».*

Η Τριλογία του συνδυάζει την αριθμητική, άλγεβρα και γεωμετρία. Ο Chuquet αρχίζει την αριθμητική του εισάγοντας τα Ινδουιστικά-Αραβικά ψηφία. Το πρώτο μέρος καλύπτει τους ακεραίους, τα κλάσματα, την πρόοδο, την αναλογία και ορίζει τους κανόνες για την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων (Moss et al., 1985).

Το δεύτερο μέρος διαπραγματεύεται την εξαγωγή ριζών και εργάζεται με σύνθετες ρίζες όπως για παράδειγμα $\sqrt{14+\sqrt{180}}$. Σκοπίμως δεν χρησιμοποιεί τους όρους «τετραγωνική ρίζα» ή «κυβική ρίζα» παρά δεύτερη και τρίτη ρίζα αντίστοιχα καθώς θεωρεί ότι δεν μπορεί να προστεθεί γεωμετρικά ένα τετράγωνο σε έναν κύβο. Δηλώνει ξεκάθαρα ότι οι άρρητοι είναι επίσης αριθμοί όπως οι ακέραιοι και τα κλάσματα. Αρκετά γεωμετρικά προβλήματα λύνονται χάρη στην άλγεβρα, γι' αυτό και ο H. L' Huillier αποκάλεσε αυτό το κείμενο ως "αλγεβρική γεωμετρία" (Flegg & Moss, 1985).

Το τρίτο μέρος ασχολείται με την άλγεβρά του, την οποία αποκαλεί «*La rigle des premiers*» ως «ο κανόνας των πρώτων». Η λέξη «πρώτος» δηλώνει μια άγνωστη ποσότητα που είχε σχεδιαστεί νωρίτερα και σήμερα γράφεται συμβατικά ως x. Σε αυτό το τρίτο μέρος, η πρωτοτυπία του γίνεται όλο και πιο εμφανής και δικαιολογεί τον τίτλο «πατέρας της γαλλικής άλγεβρας» (Spiesser, 1976).

Αξίζει να σημειωθεί ότι επινόησε τη δική του σημειογραφία για τις αλγεβρικές έννοιες και ίσως ήταν ο πρώτος μαθηματικός που αναγνώρισε το μηδέν και τους αρνητικούς αριθμούς ως εκθέτες δυνάμεων.

---

[10] Ο Eugène Aristide Marre (1823-1918) ήταν Γάλλος γλωσσολόγος.

[11] Ο *Hervé L'Huillier (1951,-)είναι συγγραφέας* ειδικός στην ιστορία της επιστήμης και των μαθηματικών.

Στο έργο του με τη γεωμετρία, φαίνεται να μετέφρασε όρους από τα ελληνικά ή τα λατινικά στα γαλλικά καθώς είχε μελετήσει τον Βοήθιο[12] - τον οποίο όλοι γνώριζαν εκείνη την εποχή - τον Ευκλείδη και τον Καμπανό της Νοβάρα.[13]

Ο Nicolas Chuquet θα μπορούσε να είχε μεγαλύτερη επιρροή στο μαθηματικό κόσμο νωρίτερα, αν η πραγματεία του δεν είχε δημοσιευτεί με καθυστέρηση. Το έργο του παραμερίστηκε εξαιτίας της κλοπής των ιδεών του από τον La Roche[14]. Οι Barbin et al. (2018) αναφέρουν ότι στο βιβλίο του Nicolas Chuquet «*La Géométrie»*, γραμμένο το 1484 (Chuquet, 1979), υπάρχουν δύο προσεγγίσεις του προβλήματος: η εγγραφή τετραγώνου σε ισόπλευρο τρίγωνο. Παρακάτω παρουσιάζεται η μία μέθοδος, αναλυτικά, όπως έχει μεταφραστεί από τους Barbin et al. (2018), ενώ γίνεται μια απλή αναφορά στη δεύτερη μέθοδο. Με τον όρο «cathetuse» εννοείται το ύψος he τριγώνου, το σύμβολο R^2 δηλώνει την τετραγωνική ρίζα, ενώ το σύμβολο $\bar{p}$ (plus) αντιστοιχεί στο +. Καθώς η Τριλογία του συνδυάζει την αριθμητική με την άλγεβρα και τη γεωμετρία, με τη μέθοδο του εφαρμόζει αλγεβρικές εργασίες στη γεωμετρία, κάνοντας χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος και του θεωρήματος του Θαλή.

4.2.2 Η διερεύνηση του προβλήματος από το N. Chuquet

Εγγραφή τετραγώνου γνωστής πλευράς σε ισόπλευρο τρίγωνο

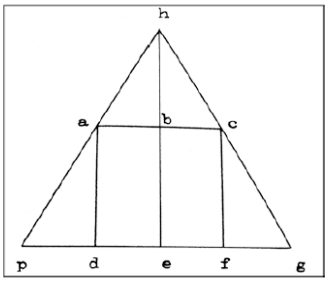
Δίνεται το τετράγωνο acfd το οποίο περιέχεται συνεχόμενα, δηλαδή είναι εγγεγραμμένο, σε ισόπλευρο τρίγωνο hgp με ύψος he . Αν η πλευρά του τετραγώνου έχει μήκος 4, θέλουμε να βρούμε το μήκος των πλευρών του τριγώνου που το περιβάλλει. Για να επιτύχουμε έναν τέτοιο συλλογισμό, πρέπει να κατανοήσουμε ότι το μικρό τρίγωνο hac είναι ισόπλευρο άρα οι πλευρές του είναι ίσες με αυτές του τετραγώνου, οι οποίες είναι 4, επομένως το hc θα είναι 4, και συνεπώς το hb θα είναι $R^2.12.$*, που προστίθεται στο be και δίνει αποτέλεσμα* $4 + R^2.12.$ *για το he, το οποίο αν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του δίνει* $28\ \bar{p}\ R^2.728$*, για το τετράγωνο του ύψους he. Ισχύει ότι σε ισόπλευρα τρίγωνα, το τετράγωνο του ύψους και το τετράγωνο της*

[12] Ο Βοήθιος (*Anicius Manlius Severinus Boëthius*, 477 - 524) ήταν Ρωμαίος συγκλητικός , ύπατος μάγιστρος των οφίκιων και φιλόσοφος στις αρχές του 6ου αιώνα.

[13] Ο Καμπάνους της Νοβάρα (1220 - 1296) ήταν Ιταλός μαθηματικός, αστρονόμος, αστρολόγος, και γιατρός, που ασχολήθηκε κυρίως με τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη.

[14] Ο Estienne de La Roche (1470–1530) ήταν Γάλλος μαθηματικός.

υποτείνουσας είναι πάντα σε τετράγωνη αναλογία 3 προς 4 (από τη Μέση Γαλλική γλώσσα η τετράγωνη αναλογία περιέχει τον αριθμό συν το ένα τρίτο του), και έτσι από το ένα προκύπτει το άλλο, πολλαπλασιάζοντας το τετράγωνο του ύψους (he) με το $1\frac{1}{3}$ ή εφαρμόζοντας τον κανόνα των τριών θεωρώντας ότι αν τα 3 αξίζουν 4, πόσα θα αξίζουν τα 28 $\bar{p}$ R^2.728.; Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας σύμφωνα με τον κανόνα των τριών έχουμε 37 $\frac{1}{3}$ $\bar{p}$ R^2.1365 $\frac{1}{3}$ για το τετράγωνο της υποτείνουσας hg ή hp. Οπότε R^2. 37 $\frac{1}{3}$ $\bar{p}$ R^2.1365$\frac{1}{3}$ ισούται με την υποτείνουσα. Η πρώτη μέθοδος που περιγράφεται εδώ συνίσταται στον υπολογισμό της πλευράς του ισόπλευρου τριγώνου γνωρίζοντας ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι 4 (που δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα στη σύγχρονη $\sqrt{37\frac{1}{3}+\sqrt{1365\frac{1}{3}}}$.



Σχήμα 2. Το σχήμα του N. Chuquet (1979, p. 347).

Ακολουθεί παρακάτω η προηγούμενη μέθοδος χρησιμοποιώντας σύγχρονους συμβολισμούς.

Με δεδομένο ότι το τετράγωνο acfd πλευράς 4 είναι εγγεγραμμένο το τρίγωνο hpg είναι ισόπλευρο (η αc είναι παράλληλη προς τη pg), οπότε ah=hc=ac=4. Εφαρμόζοντας πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο hbc, έχουμε

$hb^2=hc^2-(\frac{bc}{2})^2$ ή $hb^2=16-4 \Leftrightarrow hb=\sqrt{12}$ και

$he= hb+ be$ ή $he=4+\sqrt{12}$

Από το Θεώρημα του Θαλή ισχύει : $\frac{he}{hg}=\frac{hb}{hc}$ ή $\frac{he}{hg}=\frac{\sqrt{12}}{4}$ άρα

$\frac{he^2}{hg^2}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow hg^2=\frac{4}{3}(2\sqrt{3}+4)^2 \Leftrightarrow hg=\sqrt{\frac{4}{3}(28+\sqrt{768})}$ ή

$$hg = \sqrt{37\frac{1}{3} + \sqrt{1365\frac{1}{3}}}$$

Η δεύτερη μέθοδος (η οποία χρησιμοποιεί παρόμοια τεχνική με το κείμενο που δεν αναπαράγεται σε αυτό το κεφάλαιο) επιτρέπει τον υπολογισμό της πλευράς του τετραγώνου που σχεδιάζεται μέσα σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο του οποίου η πλευρά είναι 8 (και δίνει αποτέλεσμα $\sqrt{768}$ -24 για την πλευρά του τετραγώνου).

4.3.1 Η ζωή και το έργο του Samuel Marolois (1572-1627)

O Samuel Marolois (1572-1627) ήταν Γάλλος στρατιωτικός μηχανικός και γεωμέτρης που πέρασε μεγάλο μέρος της ζωής του στην υπηρεσία των Ολλανδών. Ο πατέρας του ήταν προτεστάντης που εξορίστηκε από την Γαλλία λόγω της θρησκευτικής καταπίεσης και μετανάστευσε στη φιλελεύθερη Ολλανδία όπου υπηρέτησε το Πριγκιπάτο της Οράγγης (Prince of Orange). Ο Marolois, έγραψε έργα για τα μαθηματικά, τη γεωμετρία και την προοπτική, τα οποία έχουν στόχο να δείξουν στους αρχιτέκτονες πώς να σχεδιάζουν για παράδειγμα, ένα τετράγωνο σε ένα τρίγωνο. Έδωσε τεχνικές συμβουλές στην κυβέρνηση και έγραψε μια σειρά εικονογραφημένων βιβλίων που περιείχαν σχήματα και κατασκευές με κανόνα και διαβήτη. Σε αυτό οφείλεται η διατήρηση της φήμης του πολύ μετά το θάνατό του το 1620. Επηρεάστηκε από τους προκατόχους του που ασχολήθηκαν με την προοπτική κυρίως από τους Dürer[15], Serlio[16] και Lencker[17], χωρίς όμως να αναφέρει το συμπατριώτη του Stevin[18], αν και είχαν επιθεωρήσει μαζί μια οχύρωση. Πάντως ούτε ως προς το ύφος ούτε ως προς το περιεχόμενο δεν παρουσιάζει στην πραγματεία του Marolois «*La Prespective*» ίχνος έμπνευσης από τον Stevin (Andersen, 2008).

[15] O Albrecht Dürer (1471 – 1528) ήταν Γερμανός ζωγράφος, μια από τις σημαντικότερες μορφές της Βόρειας Αναγέννησης. Αυτό ενισχύεται από τις θεωρητικές πραγματείες του, οι οποίες περιλαμβάνουν αρχές των μαθηματικών, της προοπτικής και των ιδανικών αναλογιών.

[16] O Sebastiano Serlio (1475 - 1554) ήταν Ιταλός αρχιτέκτονας. Η πραγματεία του είναι γνωστή ως I sette libri dell'architettura ("Επτά βιβλία αρχιτεκτονικής") ή Tutte l'opere d'architettura et prospetiva ("Όλα τα έργα για την αρχιτεκτονική και την προοπτική").

[17]O Johannes Lencker (1523-1585), ήταν Γερμανός καλλιτέχνης (Perspective literaria)

[18] O Simon Stevin (1548-1620), ήταν Φλαμανδός μαθηματικός, επιστήμονας και θεωρητικός της μουσικής.

Ήταν πρωτοπόρος στη χρήση της προοπτικής στο σχεδιασμό, την αρχιτεκτονική και την κατασκευή οχυρώσεων. Τα συγγράμματά του για τα θέματα αυτά μεταφράστηκαν σε πολλές γλώσσες και διανεμήθηκαν ευρέως, συχνά εκδόθηκαν ως συλλογές: *Opera mathematica* (λατινικά), *Oeuvres mathématique* (γαλλικά) και *Mathematische Wercke* (γερμανικά). Μια συλλογή στα γερμανικά εκδόθηκε το 1629 και αποτελούνταν από τρεις τόμους: *Geometria, Fortification* και *Perspectiva*. Ενώ η σελίδα τίτλου του συλλογικού τόμου δεν είναι διαθέσιμη, καθένας από τους επιμέρους τόμους διέθετε χαραγμένη πινακίδα τίτλου. Η σελίδες των τίτλων για τα έργα του παρουσιάζονται στην εικόνα 6.

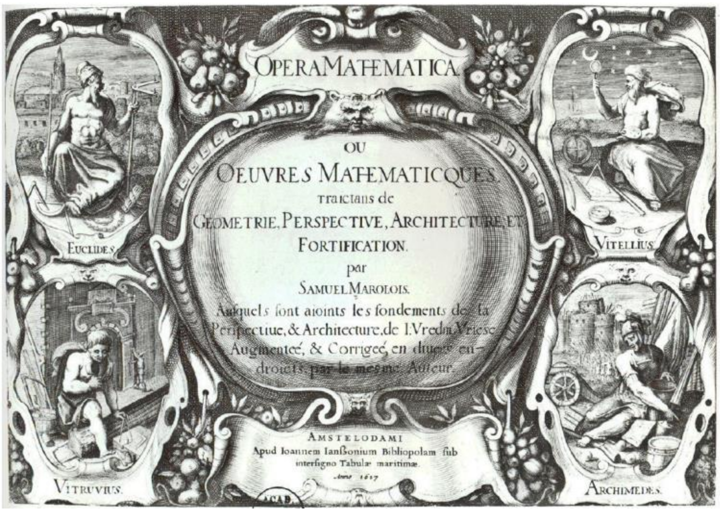
Τα βιβλία του επανεκδόθηκαν από τον Albert Girard[19] αναθεωρημένα, μεγεθυσμένα και διορθωμένα, με αριθμούς.

Εικόνα 6. Η συλλογή του Marolois : Geometria, Fortification και Perspectiva (1629)

Τα μαθηματικά είχαν πάντα διακεκριμένη θέση στις ολλανδικές αρχιτεκτονικές πραγματείες και τα εγχειρίδια του δέκατου έβδομου αιώνα. Ήταν απαραίτητα για την ολλανδική εμπορική και ναυτιλιακή κοινωνία, καθώς και την οικοδόμηση και την οχύρωση. Η αρχιτεκτονική και ο σχεδιασμός είχε θεωρηθεί εκεί ως ένα είδος εφαρμοσμένων μαθηματικών. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα έξι πρώτα βιβλία του Ευκλείδη αποτέλεσαν σημείο αναφοράς για την αρχιτεκτονική εκείνη την εποχή. Στο εξώφυλλο του έργου Marolois 'Opera Mathematica', Άμστερνταμ (1617), υπάρχουν

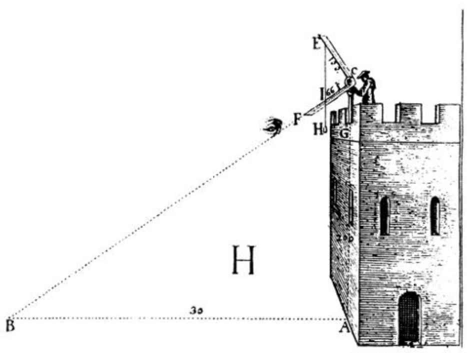
[19] Ο Albert Girard (159 France – 1632 in The Netherlands) ήταν μαθηματικός Γαλλικής καταγωγής

τα ονόματα του Βιτρούβιου[20] μαζί με του Ευκλείδη (γεωμετρία), Βιτέλιο (τοπογραφία) και Αρχιμήδη (οχύρωση) (Ottenheym, 2014).

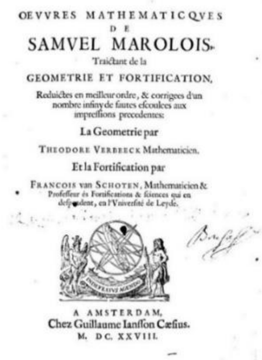


Εικόνα 7. Εξώφυλλο του έργο του Marolois "Opera Mathematica".

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα που προέρχεται από τις στρατιωτικές επιχειρήσεις το έτος 1629 στην Ολλανδία είναι το παρακάτω˙ εξαιτίας των πολλαπλών πολεμικών διενέξεων μεταξύ των κρατών εκείνη την εποχή σημαντικό ήταν να γνωρίζουν οι στρατιώτες που βρισκόταν ο εχθρός. Με τη μέθοδο του Marolois και χρησιμοποιώντας δύο ράβδους που σχηματίζουν ορθή γωνία υπολογίζεται η απόσταση του εχθρού από την κορυφή του πύργου, όπως φαίνεται στην εικόνα 8 (Van Maanen, 1997).



Εικόνα 8. Υπολογισμός του ύψους των τειχών



Εικόνα 9. Το εξώφυλλο του βιβλίου "Geometrie"

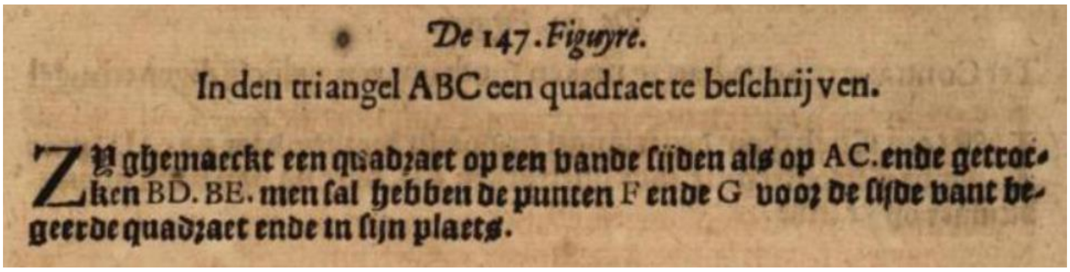
[20] Βιτρούβιος, ή Μάρκος Βιτρούβιος Πολλίωνας (Marco Vitruvio Pollione, 1ος αιώνας π.Χ.) ήταν Ρωμαίος συγγραφέας, αρχιτέκτονας και μηχανικός.

Μέχρι το 1968 (εκείνη τη χρονιά, τα «*Στοιχεία»* του Ευκλείδη έπαψαν να αποτελούν τη βάση του ολλανδικού προγράμματος σπουδών γεωμετρίας, οπότε και αναμορφώθηκε το πρόγραμμα σπουδών) οι μαθητές διδάσκονταν με τον τρόπο του Marolois, όμοιο με τον τρόπο του Ευκλείδη (Van Maanen, 1997).

Στο έργο του Marolois «*Geometrie*» (1614) περιγράφονται δύο κατασκευές (147, 148) για την εγγραφή τετραγώνου σε ισόπλευρο τρίγωνο όπως αναφέρουν οι Barbin et al. (2018). Ως γεωμέτρης, ο Marolois, ακολουθεί μεθόδους στο πλαίσιο της γεωμετρίας, εφαρμόζει το θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα τριγώνων, ενώ με το τρόπο αυτό γίνεται ταυτόχρονα και η κατασκευή του τετραγώνου.

Παρακάτω περιγράφεται το πρόβλημα και η μέθοδος της κατασκευής 147 μεταφρασμένο.

4.3.2 Η διερεύνηση του προβλήματος από τον Samuel Marolois.

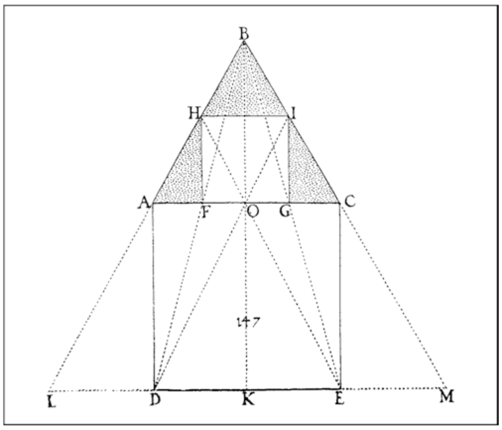


De 147. Figuyre.
In den triangel ABC een quadraet te beſchrijven.

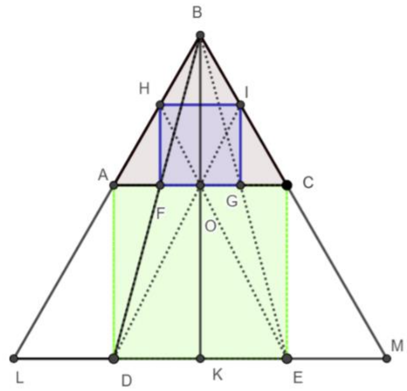
Zy ghemaeckt een quadraet op een vande ſijden als op AC. ende getrocken BD. BE. men ſal hebben de punten F ende G voor de ſijde vant begeerde quadraet ende in ſijn plaets.

Εικόνα 10. Το πρωτότυπο κείμενο του Marolois- η κατασκευή 147

Έστω ABC το τρίγωνο στο οποίο θέλουμε να εγγράψουμε ένα τετράγωνο, ας πούμε ότι από τη βάση AC σχεδιάζουμε το τετράγωνο ACDE (εικ.11). Στη συνέχεια, έστω οι ευθείες BE και BD οι οποίες θα τέμνουν το τρίγωνο μέσω της βάσης AC στα σημεία FG. Λέω ότι η FG είναι η πλευρά του τετραγώνου που πρόκειται να εγγραφεί στο προαναφερθέν τρίγωνο και θα φανεί ότι έτσι πρέπει να είναι, έχοντας επεκτείνει τις πλευρές AB, BC μέχρι να συναντήσουν τη βάση του τετραγώνου DL στα σημεία L, και M, καθώς είναι προφανές ότι η EK είναι ανάλογη με την KB όπως η GO είναι προς τη OB από το 4. προς το 6. Αλλά η EK είναι το μισό της πλευράς του τετραγώνου που εγγράφεται στο τρίγωνο BLM η πλευρά GO θα είναι επομένως επίσης η μισή πλευρά του τετραγώνου που εγγράφεται στο τρίγωνο ABC καθώς τα εν λόγω τρίγωνα είναι *ανάλογα, πράγμα που ήταν το ζητούμενο (Marolois, 1616, fol. G).*



Εικόνα 11. Η λύση του Marolois στο βιβλίο του.



Σχήμα 3. Η 1η λύση του Marolois

Απόδειξη

Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ABC και κατασκευάζουμε τετράγωνο ACED, με πελυρά την AC, εξωτερικά του τριγώνου. Ενώνουμε τα σημεία BD και BE που τέμνουν τιην AC στα F και G αντίστοιχα. Προεκτείνουμε τις AB , BC και DE ώστε να σχηματιστεί το ισόπλευρο τρίγωνο BLM. Έστω BO το ύψος του ABC που τέμνει την LM στο K. Οπότε η BO είναι μεσοκάθετος της AC και επομένως και της DE (ACED: τετράγωνο λόγω κατασκευής). Από τα σημεία F και G φέρουμε κάθετες προς τις AC που τέμνουν τις AB και BC στα H και I αντίστοιχα. Οπότε σχηματίζεται το τεράπλευρο FGIH.

Από το Θ. του Θαλή (FG//DE) ισχύει : $\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{BK}} = \frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{KE}} = \frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{BE}} = \frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{DE}}$, (Σχ. 3)

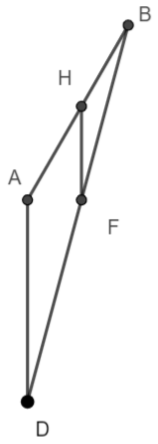
Όμως KE=$\frac{1}{2}$ DE και επειδή $\frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{KE}} = \frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{DE}}$ ή $\frac{DE}{\mathrm{KE}} = \frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{OG}} = 2$ οπότε OG=$\frac{1}{2}FG$.

Παρατηρούμε ότι το τετράγωνο ACED είναι εγγεγραμμένο στο τρίγωνο BLM. Επομένως όμοια το το τετράπλευρο FGIH εγγεγραμμένο στο τρίγωνο ABC.

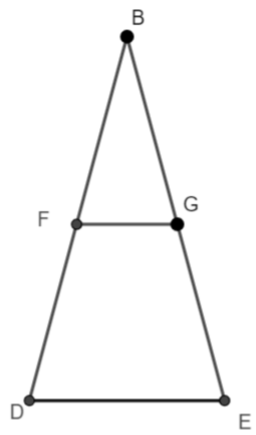
Η ιδιότητα που αναφέρεται είναι η τέταρτη πρόταση του έκτου βιβλίου των «*Στοιχείων*» του Ευκλείδη. Θεωρεί ότι στα ισόπλευρα τρίγωνα, οι πλευρές γύρω από τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες. Αυτό είναι ένα γενικότερο θεώρημα από το σημερινό μας θεώρημα του Θαλή το οποίο αφορά μόνο τρίγωνα με παράλληλες πλευρές και όχι το σύνολο των όμοιων τριγώνων (Barbin et al.,2018).

Το ζητούμενο στο πρόβλημα είναι να αποδείξουμε ότι το FGIH είναι τετράγωνο.

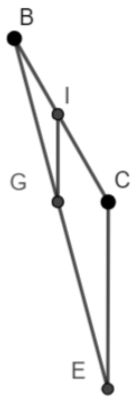
Η λύση που ακολουθεί βασίζεται αποκλειστικά στο θεώρημα του Θαλή.



Σχήμα 4



Σχήμα 5



Σχήμα 6

Απομονώνοντας τα παραπάνω τρίγωνα από το σχήμα έχουμε τα εξής:

Για το σχήμα 4 ισχύει: $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{HF}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{HB}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BF}}$ (1)

Για το σχήμα 5 ισχύει: $\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{FG}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BF}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BG}}$ (2)

Για το σχήμα 6 ισχύει : $\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{IG}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BI}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BG}}$ (3)

Επίσης ισχύει ότι : AB=AC=BC= AD=DE=CE=α

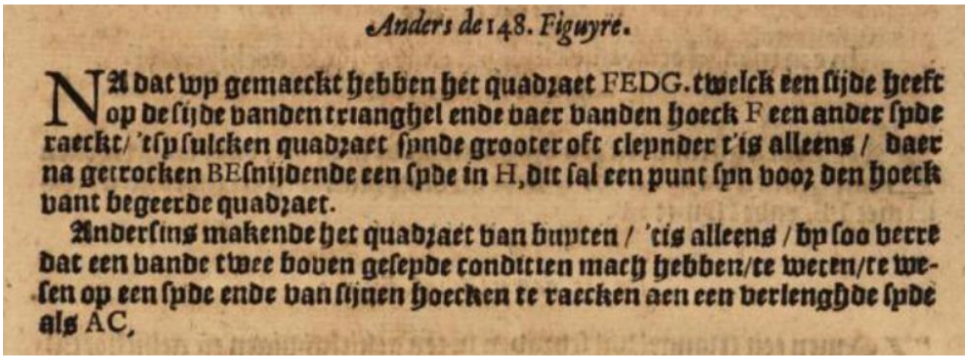
Από (1) και (2) έχουμε : $\frac{\alpha}{\mathrm{HF}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BF}}$ και $\frac{\alpha}{\mathrm{FG}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BF}}$ $\Rightarrow$ HF=FG

$\Rightarrow$ **HF=FG=IG**

Από (2) και (3) έχουμε : $\frac{\alpha}{\mathrm{IG}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BG}}$ και $\frac{\alpha}{\mathrm{FG}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BG}}$ $\Rightarrow$ IG=FG

Έτσι αποδείχθηκε ότι το FGIH είναι τετράγωνο καθώς HF=// IG άρα ορθογώνιο και FG=HF.

Η δεύτερη κατασκευή 148 όπως περιγράφεται στο ίδιο βιβλίο



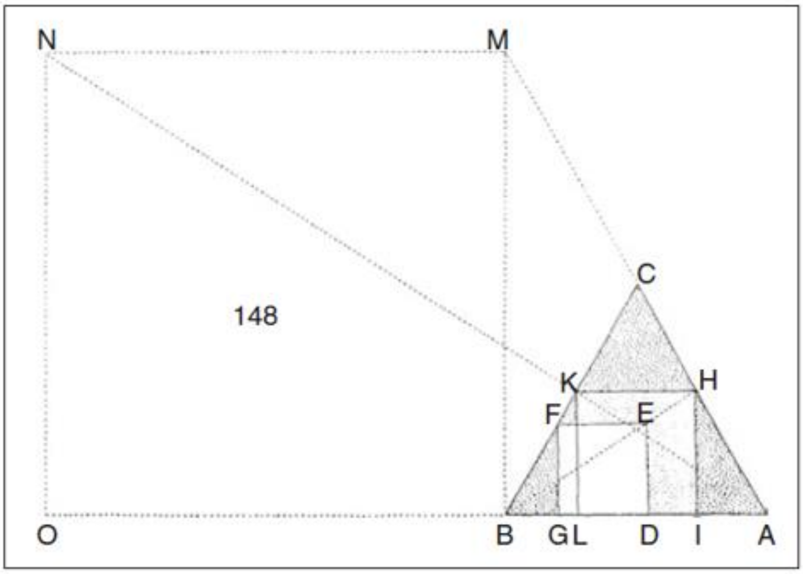
Anders de 148. Figuyre.

NA dat wy gemaeckt hebben het quadraet FEDG. twelck een sijde heeft op de sijde vanden trianghel ende vaer vanden hoeck F een ander syde raeckt/ 'tsy sulcken quadraet synde grooter oft cleynder t'is alleens / daer na getrocken BE snijdende een syde in H, dit sal een punt syn voor den hoeck vant begeerde quadraet.

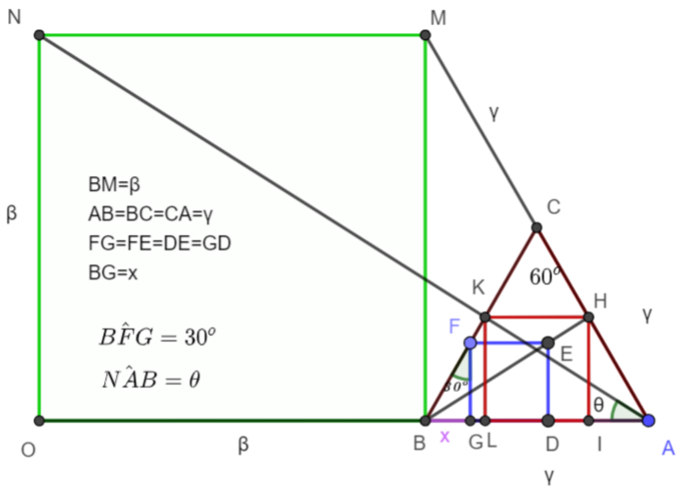
Andersins makende het quadraet van buyten / 'tis alleens / by soo verre dat een vande twee boven geseyde conditien mach hebben/te weten/te wesen op een syde ende van sijnen hoecken te raecken aen een verlenghde syde als AC,

Εικόνα.12 Κατασκευή 148. Το πρωτότυπο κείμενο στο βιβλίο του 'Geometrie'.

Η μέθοδος αυτή είναι αρκετά ενδιαφέρουσα και ακολουθεί μια ανεξάρτητη τεχνική σε σχέση με την πρώτη. Είναι μεγαλύτερη σε έκταση και απαιτεί τη σχεδίαση ενός εξωτερικού τετραγώνου που έχει μόνο το σημείο B κοινό με το τρίγωνο (εικ. 13). Η πρόταση του Marolois να χαραχτεί η κάθετη GF "όπως θέλετε", δηλαδή σε τυχαίο σημείο G της AB δεν μπορεί παρά να είναι ένα κίνητρο με πρόσθετο ενδιαφέρον για τους μαθητές που θα θελήσουν να ελέγξουν τη σωστή λειτουργία της μεθόδου σε διάφορες περιπτώσεις με βάση το ίδιο σχήμα.



Εικόνα 13. Σχήμα της κατασκευής 148 όπως είναι στο βιβλίο του Marolois



Σχήμα 7. Η 2$^{\eta}$ λύση σύμφωνα με την κατασκευή 148.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται μια απόδειξη της παραπάνω μεθόδου, μια προσπάθεια της συγγραφέως της παρούσας εργασίας, καθώς δε βρέθηκε η πρωτότυπη απόδειξη ή κάποια υπόδειξή της.

Ανάλυση της κατασκευής 148 (σχ. 7)

Θεωρούμε τρίγωνο ισόπλευρο τρίγωνο ABC πλευράς γ (AB=BC=AC=γ).

Φέρουμε FG κάθετη στην AB και σχηματίζουμε το τετράγωνο FGDE. Ενώνουμε το BE που τέμνει την AC στο H. Από το B φέρουμε ημιευθεία Βζ κάθετη στην AB και προεκτείνουμε την AC. Έστω M το σημείο τομής της AC με την Βζ και συμβολίζουμε BM=β. Κατασκευάζουμε τετράγωνο BMNO εξωτερικό του τριγώνου ABC (με μοναδικό κοινό σημείο τους το B), οπότε BM=MN=NO=OB=β (σχ. 7).

Φέρουμε το τμήμα AN που τέμνει την BC στο K. Από τα K και H φέρουμε KL και HI κάθετες στην AB, οπότε σχηματίζεται το τετράπλευρο KHLI. Το KH είναι η πλευρά του ζητούμενου τετραγώνου.

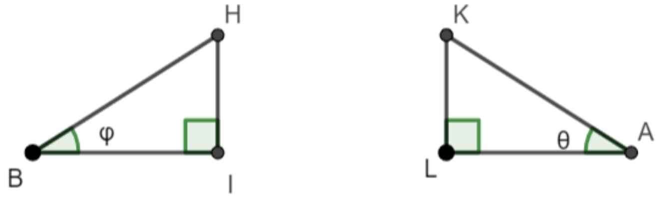
Απόδειξη

Έστω **BG=x.** Το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο, οπότε η γωνία $\widehat{FBG} = 60^o\ \kappa\alpha\iota$

$\widehat{BFG} = 30^o$,

- Στο τρίγωνο BFG : BG=x , $\widehat{BFG} = 30^o$,BF= 2x και FG = $x\sqrt{3}$
- BD= BG+GD=x+ FG=x+ $x\sqrt{3}$ (γιατί FGDE= τετράγωνο) και ED= $x\sqrt{3}$.

- Στο τρίγωνο AMB, η πλευρά β= BM= AM ημ 60° = AM$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ή αποδεικνύεται με πυθαγόρειο θεώρημα θεωρώντας ότι AB είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας AM). Επίσης AM=2 AC=2γ, γιατί στο ABM η AB= $\frac{AM}{2}$ ($\widehat{BMA}$= 30°) ή AM=2γ.
- Οπότε β= 2γ$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ή β= γ$\sqrt{3}$
- Τα τρίγωνα KLA και ONA είναι όμοια γιατί είναι ορθογώνια και έχουν την γωνία $\widehat{NAO}$ κοινή. Οπότε έχουμε : $\frac{\mathrm{KL}}{\mathrm{LA}} = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OA}} = \frac{\beta}{\beta+\gamma} = \frac{\gamma\sqrt{3}}{\gamma\sqrt{3}+\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ (1)
- Τα τρίγωνα BHI και BED είναι όμοια γιατί είναι ορθογώνια και έχουν τη γωνία $\widehat{HBI}$ κοινή οπότε έχουμε : $\frac{HI}{BI} = \frac{ED}{BD}$ ή $\frac{HI}{BI} = \frac{x\sqrt{3}}{\mathrm{x}\sqrt{3}+\mathrm{x}}$ ή $\frac{\mathrm{HI}}{\mathrm{BI}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ (2)
- Από (1) και (2) προκύπτει ότι : $\frac{\mathrm{KL}}{\mathrm{LA}} = \frac{\mathrm{HI}}{\mathrm{BI}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$



Σχήμα 8. Ισότητα τριγώνων (μέρος του σχ. 7)

Οπότε τα τρίγωνα BHI και KLA είναι όμοια (έχουν ανάλογες πλευρές και οι περιεχόμενες γωνίες είναι ίσε με 90° . Επομένως θ=φ.

- Τα τρίγωνα ABK και ABH είναι ίσα (AB είναι κοινή, B=A=60°, και θ=φ)

άρα BK=AH και επομένως CK=CH ⇒ KH//AB ⇒ KHIL είναι ορθογώνιο (έχουν τις πλευρές τους παράλληλες και τις γωνίες L, I ορθές).

Αρκεί να δείξουμε ότι KH=KL

- Ισχύει : MN// AB//KH οπότε : $\frac{\mathrm{KH}}{\mathrm{HA}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{MA}}$ ή $\frac{\mathrm{KH}}{\mathrm{HA}} = \frac{\beta}{2\gamma} = \frac{\gamma\sqrt{3}}{2\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (3)
- Επίσης : Τα BFG και BKL είναι όμοια : $\frac{KL}{BK} = \frac{FG}{BF} = \frac{x\sqrt{3}}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (4)

Επίσης : BK=HA , άρα από (3) και (4) έχουμε KH=KL, επομένως KHIL είναι τετράγωνο.

4.4.1 Η ζωή και το έργο του Jose Anastacio da Cunha

Εικόνα 14. Ο Jose Anastacio da Cunha

Ο Jose Anastacio da Cunha γεννήθηκε και έζησε στη Λισσαβόνα (1744-1787). Θεωρείται ένας από τους σημαντικότερους Πορτογάλους μαθηματικούς. Αν και καταγόταν από ταπεινή οικογένεια, σπούδασε σε ένα σχολείο Ορατορίων στη Λισαβόνα. Στα δεκαεννέα του χρόνια κατατάχτηκε στο στρατό και τοποθετήθηκε σε ένα σύνταγμα πυροβολικού στη Valenca do Minho (στα βόρεια σύνορα με την Ισπανία). Έχοντας ήδη αναγνωρίσει το ταλέντο που είχε ως μαθηματικός, ο Μαρκήσιος του Πομπάλ, πρωθυπουργός του βασιλιά Ιωσήφ, το 1773 του έκανε πρόταση να γίνει καθηγητής στη νέα Σχολή Μαθηματικών, που είχε ιδρυθεί στο Πανεπιστήμιο της Κοΐμπρα το προηγούμενο έτος. Δυστυχώς το πολιτικό κλίμα δεν ήταν σταθερό και το 1778 ο Cunha συνελήφθη και καταδικάστηκε από την Ιερά Εξέταση, με την κατηγορία ελευθεριότητας, ανοχής και αδιαφορίας (πίστευε ότι όλες οι θρησκείες είναι ισοδύναμες). Το 1781 αφέθηκε ελεύθερος με τη βοήθεια επιφανών προσώπων της εποχής και διορίστηκε στην Casa Pia (σχολείο για φτωχά αγόρια στη Λισαβόνα) ως διευθυντής σπουδών και αναπληρωτής καθηγητής μαθηματικών. Πέθανε την 1η Ιανουαρίου 1787, σε ηλικία σαράντα δύο ετών εξαιτίας προβλημάτων υγείας.

Το μόνο έργο του Cunha που δημοσιεύθηκε κατά τη διάρκεια της ζωής του ήταν το «*Principios mathematicos*» (1790). Αυτό ήταν επίσης το μόνο έργο που δημοσιεύθηκε πριν από τη σύγχρονη εποχή σε οποιαδήποτε άλλη γλώσσα εκτός της πορτογαλικής. Το έργο του «*Principios mathematicos*» αποτέλεσε ένα είδος «στοιχείων» όπως τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη με μια αυστηρή μαθηματική δομή. Η παρουσίασή του είναι συνήθως συνθετική, παρά αναλυτική δηλαδή, τα αποτελέσματα διατυπώνονται και στη συνέχεια γίνεται η απόδειξη , ενώ δεν υπάρχει η διερεύνηση.

Είναι ένα βιβλίο 302 σελίδων χωρισμένο σε 21 κεφάλαια, τα οποία αποκαλεί "βιβλία". Υπάρχουν διαφορετικά επίπεδα αυστηρότητας και βάθους σε αυτό το έργο, από το στοιχειώδες έως το ιδιαίτερα εξειδικευμένο και καινοτόμο. Τα θέματα που καλύπτει επεκτείνονται από την ευκλείδεια έως την αναλυτική γεωμετρία, από το διαφορικό λογισμό έως τις διαφορικές εξισώσεις, από τις αλγεβρικές εξισώσεις έως τη θεωρία των αριθμητικών σειρών (de Lurdes Ferraz, Rodrigues & Saraiva, 1990; Domingues, 2014).

Το έργο του απέκτησε φήμη στη διεθνή σκηνή και βασίζεται σε τρεις μόνο πτυχές

- Η πρώτη αυστηρή αντιμετώπιση των συγκλινουσών σειρών, στο βιβλίο IX, χρησιμοποιώντας αυτό που σήμερα ονομάζεται κριτήριο Cauchy ως ορισμός της σύγκλισης.
- Μια εκπληκτικά μοντέρνα αντιμετώπιση των δυνάμεων $α^b$ στη μορφή δύναμης με βάση το e : e^{bloga}, συμπεριλαμβάνοντας έτσι σε έναν ορισμό τις περιπτώσεις των ακέραιων, ρητών, πραγματικών και μιγαδικών εκθετών, λογαρίθμων και εκθετικών.
- Δίνεται ο ορισμός της έννοιας «ροή» που περιγράφεται από τον Youschkevitch[21] *«ως ο πρώτος αναλυτικός και αυστηρός ορισμός του διαφορικού λογισμού»* (Domingues, 2014).

O Da Cunha είχε μελετήσει γεωμετρία από Ισπανούς, Φλαμανδούς και Γάλλους συγγραφείς (Tosca, Tacquet, Clairaut), ενώ πραγματεύεται τα θέματά του χρησιμοποιώντας την ελληνική μεθοδολογία, δηλαδή χρησιμοποιεί συστηματικά μια ακολουθία των αξιωμάτων-ορισμών-προτάσεων-αποδείξεων και επιχειρεί να είναι όσο το δυνατόν πιο συνοπτικός. Αυτό δεν ήταν κάτι συνηθισμένο για την εποχή εκείνη, με αποτέλεσμα να γίνει το βιβλίο του δύσκολο για τους φοιτητές του Πανεπιστημίου της εποχής του, η κατανόησή του προϋπέθετε ότι ο αναγνώστης έπρεπε να σκεφτεί με μαθηματικό συλλογισμό (Saraiva, 2017).

[21] O Adolph-Andrei Pavlovich Yushkevich (1906 - 1993) ήταν σοβιετικός ιστορικός των μαθηματικών, κορυφαίος ειδικός στα μεσαιωνικά μαθηματικά της Ανατολής και στο έργο του Leonhard Euler.

Επηρεάστηκε από την βρετανική παράδοση, όμως οι δύο μεγάλοι μαθηματικοί ήρωές του ήταν ο D'Alembert[22] και ο Newton[23] (Domingues, 2014). Ήταν επίσης ένας ποιητής κάποιας σημασίας και μετέφρασε έργα του Alexander Pope[24]και του Βολταίρου.[25]

Έγραψε το Δοκίμιο για τα ορυχεία «Ensaio sobre es Minas» (εικ. 16) και το 1769 τη Φυσικομαθηματική Επιστολή (εικ. 15). Η χειρόγραφη επιστολή βρέθηκε στα αρχεία της περιοχής της Braga και δημοσιεύτηκε σε βιβλίο από την Maria Fernanda Estrada το 1994. Έγραψε επίσης το έργο «*Σχετικά με τη θεωρία της σκόνης γενικά* κλπ.» (*Carta Fisico- Mathematica, sobre a Theorica da Polvora em Geral, etc*). Κανένα από αυτά δεν δημοσιεύθηκε κατά τη διάρκεια της ζωής του (de Lurdes Ferraz, Rodrigues & Saraiva, 1990) και το έργο του δεν φαίνεται να ήταν ιδιαίτερα διαδεδομένο εκτός Πορτογαλίας. Αν και το *«Principios mathematicos»* (Λισαβόνα, 1790) μεταφράστηκε στα γαλλικά, είχε πολύ περιορισμένη απήχηση.

Σε ένα αγγλικό εγχειρίδιο, περιείχε μια απόδειξη του Anastacio da Cunha (μιας πρότασης για τις παραλληλίες) και έναν ορισμό της αναλογίας επηρεασμένο από τον ίδιο. Αυτή η απόδειξη για τις παραλληλίες υπάρχει επίσης σε ένα αμερικανικό εγχειρίδιο και αυτές οι δύο είναι οι μόνες γνωστές περιπτώσεις στο εξωτερικό, όπου γίνεται πραγματική χρήση του έργου του, αντί για απλή αναφορά (Domingues, 2014).

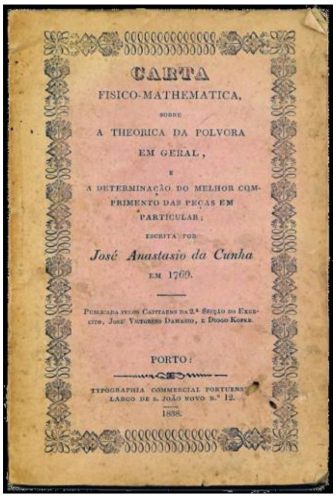
---

[22] O Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717 - 29 Οκτωβρίου 1783) ήταν Γάλλος μαθηματικός, μηχανικός, φυσικός, φιλόσοφος και θεωρητικός της μουσικής. Η εξίσωση για τα κύματα αναφέρεται μερικές φορές ως εξίσωση του d'Alembert

[23] Ο Σερ Ισαάκ Νεύτων (Sir Isaac Newton (1643 – 1727), ήταν Άγγλος φυσικός, μαθηματικός, αστρονόμος, φιλόσοφος, αλχημιστής και θεολόγος. Θεωρείται πατέρας της Κλασικής Φυσικής, καθώς ξεκινώντας από τις παρατηρήσεις του Γαλιλαίου αλλά και τους νόμους του Κέπλερ για την κίνηση των πλανητών διατύπωσε τους τρεις μνημειώδεις νόμους της κίνησης και τον περισπούδαστο «νόμο της βαρύτητας»

[24] O Alexander Pope (1688 - 1744) ήταν Άγγλος ποιητής, μεταφραστής και σατιρικός της εποχής του Διαφωτισμού, ο οποίος θεωρείται ένας από τους σημαντικότερους Άγγλους ποιητές των αρχών του 18ου αιώνα.

[25] Ο Φρανσουά Μαρί Αρουέ (*François-Marie Arouet* (1694 – 1778), ευρύτερα γνωστός με το ψευδώνυμο Βολταίρος (*Voltaire*), ήταν Γάλλος συγγραφέας, ιστορικός και φιλόσοφος, διάσημος για το πνεύμα του, τις επιθέσεις του εις βάρος της Καθολικής Εκκλησίας και την υπεράσπιση της ανεξιθρησκίας, της ελευθερίας του λόγου και του διαχωρισμού εκκλησίας και κράτους.


CARTA
FISICO-MATHEMATICA,
SOBRE
A THEORICA DA POLVORA
EM GERAL,
E
A DETERMINAÇÃO DO MELHOR COMPRIMENTO DAS PEÇAS EM PARTICULAR;
ESCRITA POR
José Anastasio da Cunha
EM 1769.
PORTO:
TYPOGRAPHIA COMMERCIAL PORTUENSE
LARGO DE S. JOÃO NOVO N.º 12.
1838.

Εικόνα 15. Φυσικομαθηματική επιστολή


ENSAIO
sobre
AS MINAS
Por
JOZE ANASTACIO
da
CUNHA.

Εικόνα 16. Δοκίμιο για τα ορυχεία


PRINCIPIOS MATHEMATICOS
PARA INSTRUCÇAÕ
DOS ALUMNOS DO COLLEGIO
DE
SAÕ LUCAS,
DA REAL CASA PIA DO CASTELLO
DE
SAÕ JORGE:
OFFERECIDOS
AO SERENISSIMO SENHOR
D. JOAÕ,
PRINCIPE DO BRAZIL:
COMPOSTOS PELO DOUTOR
JOSE' ANASTACIO DA CUNHA,
DE ORDEM DO DESEMBARGADOR DO PAÇO
DIOGO IGNACIO DE PINA MANIQUE,
Intendente Geral da Policia da Corte,
e Reino, &c, &c, &c.
LISBOA
NA OFFIC. DE ANTONIO RODRIGUES GALHARDO.
Impressor do Eminentissimo Senhor Cardeal Patriarca.
ANNO M.DCC.XC.
Com licença da Real Meza da Commissaõ Geral
sobre o Exame, e Censura dos Livros.

Εικόνα 17. Μαθηματικές αρχές

(Principios mathematicos)

Εικόνα 18. Η υπογραφή του da Cunha

O da Cunha (1822), όπως αναφ. οι Barbin et al. (2018), δίνει την ακόλουθη αλγεβρική μέθοδο για την εγγραφή του τετραγώνου, αλλά όχι για τον υπολογισμό της λύσης, αφού καταλήγει σε μια δύσκολη εξίσωση. Δεν παρέχονται ούτε οι λεπτομέρειες της περιγραφόμενης κατασκευής ούτε η αιτιολόγησή της.

4.4.2 Η διερεύνηση του προβλήματος από τον Jose Anastacio da Cunha

Έστω τρίγωνο ABC με AB=α, BC=b, AC=c και x η πλευρά του τετραγώνου DEFG (σχ. 9). Τα τρίγωνα ADG και ABC είναι όμοια, οπότε από το Θεώρημα του Θαλή ισχύει

$\frac{b}{a} = \frac{x}{AD} \Leftrightarrow \frac{b}{b-x} = \frac{a}{a-AD} \Leftrightarrow \frac{b-x}{b} = \frac{DB}{a}$ (1)

Επίσης από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο BDE, έχουμε

$BE^2=DB^2- DE^2 \Leftrightarrow \frac{BE^2}{a^2} = \frac{DB^2}{a^2} - \frac{DE^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{BE^2}{a^2} = (\frac{b-x}{b})^2 - \frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow$

$BE^2= (a - \frac{ax}{b})^2 - x^2$ (2)

Όμοια :

$CF^2 = (c - \frac{cx}{b})^2 - x^2$ (3)

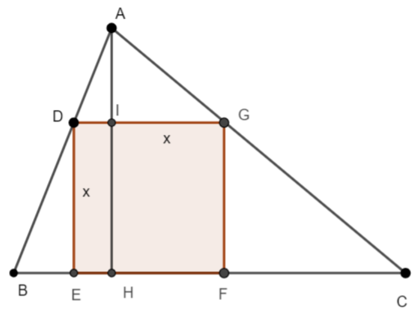
Επίσης ισχύει :

$b-x=BE+FC$ ή $b-x= \sqrt{(a - \frac{ax}{b})^2 - x^2} + \sqrt{(c - \frac{cx}{b})^2 - x^2}$ (4)

Καθώς ο υπολογισμός του x από την εξίσωση (4) είναι ιδιαίτερα δύσκολος, δίνεται παρακάτω μια πιο αποτελεσματική μέθοδος.

Έστω AH= d κάθετη στην πλευρά BC. Ισχύει ότι $\frac{b}{x} = \frac{d}{AI} \Leftrightarrow AI= \frac{xd}{b}$

Επίσης AH=AI+x οπότε $d= \frac{xd}{b} +x \Leftrightarrow x=\frac{bd}{b+d}$.

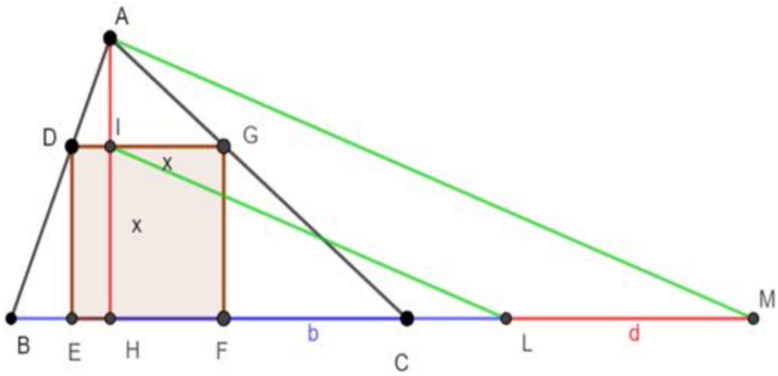


Σχήμα 9. Λύση του da Cunha

Το επόμενο βήμα είναι να κατασκευαστεί το τμήμα x ως τέταρτη ανάλογος των τμημάτων b, d, b+d.

Θεωρούμε τα τμήματα HL =BC=b, LM=AH=d πάνω στην ευθεία BC όπως φαίνεται στο σχήμα 3. Ενώνουμε το AM και φέρουμε από το L ευθεία παράλληλη προς την AM που τέμνει την AH στο I . Το τμήμα IH είναι το ζητούμενο τμήμα x. Πράγματι από το θεώρημα του Θαλή ισχύει :

$$\frac{IH}{AH} = \frac{HL}{HM} \Leftrightarrow \frac{x}{d} = \frac{b}{b+d} \Leftrightarrow x = \frac{db}{b+d}$$



Σχήμα 10. Κατασκευή του x ως $4^{η}$ ανάλογος

Εύκολα κατασκευάζεται το τετράγωνο DGFE αν φέρουμε από το I ευθεία παράλληλη προς τη BC. Τα σημεία τομής της ευθείας με τις πλευρές AB και AC είναι τα D και G αντίστοιχα (η απόδειξη περιγράφεται παρακάτω στη μέθοδο του L. Bourdon).

4.5.1 Η ζωή και το έργο του Pierre Louis Marie Bourdon (1779-1854 μ. Χ.)

Εικόνα 19. O Pierre Louis Marie Bourdon

O Pierre Louis Marie Bourdon ήταν Γάλλος μαθηματικός που γεννήθηκε στην επαρχία της Νορμανδίας το 1779 και πέθανε στο Παρίσι το 1854. Σπούδασε στην Πολυτεχνική σχολή του Παρισιού (École polytechnique) το 1796, ήταν διδάκτορας επιστημών και καθηγητής μαθηματικών στο Βασιλικό Κολλέγιο του Henry IV[26], καθηγητής στη Στρατιωτική Ακαδημία του Compiègne, του Saint-Cyr , στο Λύκειο του Καρλομάγνου και στο Λύκειο Ναπολέοντα .

[26] O Henry IV (1553 - 1610), γνωστός και με το επίθετο Καλός Βασιλιάς Ερρίκος ή Ερρίκος ο Μέγας, ήταν βασιλιάς της Ναβάρρας.

Διορίστηκε εξεταστής για την εισαγωγή στην École polytechnique, επιθεωρητής της Académie de Paris το 1821, γενικός επιθεωρητής σπουδών το 1835, μέλος του Βασιλικού Συμβουλίου του Πανεπιστημίου. Είναι ένας από τους κύριους εκπροσώπους της αναλυτικής Άλγεβρας.

Τα έργα του ήταν :

- Ροπές αδράνειας και κύριοι άξονες. Διατριβές που παρουσιάστηκαν στη Σχολή Επιστημών του Παρισιού (Παρίσι, 1811).
- Εφαρμογή της Άλγεβρας στην Αναλυτική Γεωμετρία σε δύο και τρεις διαστάσεις.
- Στοιχεία αριθμητικής (Élémens d'Arithmétique).
- Στοιχεία άλγεβρας (Elèments d' Algèbre).
- Εφαρμογή της άλγεβρας στη γεωμετρία, συμπεριλαμβανομένης της δισδιάστατης και τρισδιάστατης αναλυτικής γεωμετρίας (Application De L'Algebre À La Géométrie, Comprenant La Géométrie Analytique À Deux Et À Trois Dimensions).

Το 1828 ο Auguste De Morgan[27] επιμελήθηκε μια μετάφραση του έργου «*Elèments d' Algèbre*» στα αγγλικά ενώ αργότερα στις Ηνωμένες Πολιτείες έγιναν κι άλλες αγγλικές μεταφράσεις λόγω της έντονης γαλλικής επιρροής στη διδασκαλία της άλγεβρας στα κολλέγια της Αμερικής (Cajori, 1890), όπως αναφέρεται στο Kanbir, Clements & Ellerton (2018).

4.5.2. Η διερεύνηση του προβλήματος από τον Pierre Louis Marie Bourdon

Ο Bourdon (1837) περιγράφει μια μέθοδο εγγραφής τετραγώνου σε τρίγωνο παρόμοια με εκείνη του da Cunha, δίνοντας με λεπτομέρεια τα βήματα της κατασκευής. Το κείμενο προέρχεται από τη δεύτερη παράγραφο του πρώτου κεφαλαίου με τίτλο: "*Η ανάλυση διαφόρων ζητημάτων που αφορούν την ευθεία γραμμή και τον κύκλο*" (Barbin et al., 2018) . Ακολουθεί γεωμετρική προσέγγιση εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή και κατασκευάζει την πλευρά του τετραγώνου ως τέταρτη ανάλογος τριών ευθυγράμμων τμημάτων.

Το πρώτο πρόβλημα έχει ως εξής:

---

[27] Ο Augustus De Morgan (1806-1871) ήταν Βρετανός μαθηματικός, γεννημένος στην Ινδία . Είναι ο ιδρυτής με τον Boole της σύγχρονης λογικής, διατύπωσε κυρίως τους νόμους του De Morgan.

Σημειώστε ένα τετράγωνο σε ένα δεδομένο τρίγωνο ABC δηλαδή, βρείτε στην πλευρά AB ένα σημείο E τέτοιο ώστε αν σχεδιάσουμε το EF παράλληλα προς το BC, και τα EG, FH κάθετα στη BC, το σχήμα GEFH θα πρέπει να είναι τετράγωνο. Ας υποθέσουμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και ας χαράξουμε από το άκρο A το ύψος AD του τριγώνου. Είναι προφανές ότι αν το σημείο I ήταν σταθερό στη θέση του, θα ήταν το ίδιο και για το EF και κατά συνέπεια η πλευρά του απαιτούμενου τετραγώνου (εικόνα 20).

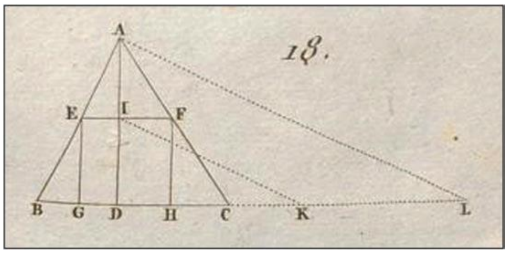
Απόδειξη

Θεωρούμε δεδομένο ότι το EFHG είναι τετράγωνο (σχ. 11)

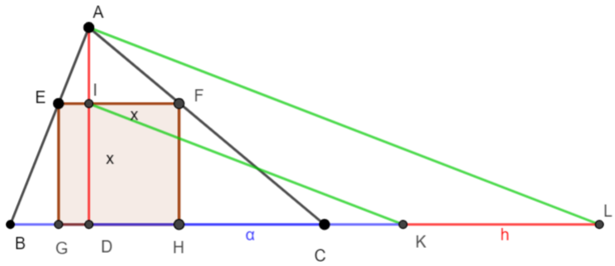
Έστω DI=EG=EF=x , BC=α και AD =h . (Σχήμα 11).

Τα τρίγωνα ABC και AEF είναι όμοια (EF//BC) οπότε

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AD}{AI} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{h}{h-x} \Leftrightarrow \alpha(h-x)=xh \Leftrightarrow \alpha h-\alpha x=xh \Leftrightarrow x=\frac{ah}{a+h} \quad (1)$$



Εικόνα 20. Προσέγγιση του Lois Bourdon όπως φαίνεται στο έργο του



Σχήμα 11. Η προσέγγιση του πρωτότυπο Lois Bourdon

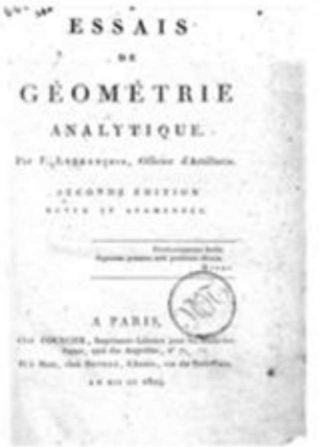
Το επόμενο βήμα είναι να κατασκευάσουμε το τμήμα x. Το τμήμα x αντιστοιχεί στην τέταρτη ανάλογο των τμημάτων α, h, και α+h, οπότε η κατασκευή του βασίζεται στα παρακάτω βήματα. Στην προέκταση της BC παίρνουμε τμήμα DK=α και KL=h, οπότε DL=α+h. Ενώνουμε τα σημεία A και L και από το σημείο K φέρουμε παράλληλη στην AL που τέμνει την AD στο I. Από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε :

$$\frac{\mathrm{ID}}{\mathrm{DK}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DL}} \Rightarrow \frac{\mathrm{ID}}{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{a+h}} \Leftrightarrow \mathrm{ID} = \frac{\mathrm{ah}}{\mathrm{a+h}} \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι η ζητούμενη πλευρά του τετραγώνου x είναι το ID.

Εφόσον ορίσαμε το σημείο I , φέρουμε παράλληλη EF προς την πλευρά BC και EG, FH κάθετες προς τη BC. Έτσι προκύπτει το τετράγωνο EFHG.

4.6.1 Η ζωή και το έργο του Frédéric Louis Lefrançois (αρχές 19ου αιώνα)



Εικόνα 21. Το εξώφυλλο του βιβλίου του Lefrançois

Μία διαφορετική προσέγγιση του προβλήματος βρίσκεται στο εγχειρίδιο της αναλυτικής γεωμετρίας που εκδόθηκε το 1804 από τον Frédéric Louis Lefrançois. Σύμφωνα με τους Barbin et al. (2018), ο Lefrançois (1804) αναφέρει ότι «*σκοπός του βιβλίου του «Essais de géométrie analytique» (Δοκίμια της Αναλυτικής Γεωμετρίας) είναι να αναδείξει τις αρχές της αναλυτικής γεωμετρίας, ή τη μέθοδο κατά την οποία αντιμετωπίζονται ερωτήματα ως μοναδικά εργαλεία που παρέχει η ανάλυση παίρνοντας από τη γεωμετρία μόνο τα απαραίτητα στοιχεία ανάλογα με το πρόβλημα*».

4.6.2. Η διερεύνηση του προβλήματος από τον Frédéric Louis Lefrançois

Η κατασκευή του τετραγώνου εγγεγραμμένου σε τρίγωνο λύνεται από τον Lefrançois στα πλαίσια της Αναλυτικής Γεωμετρίας, αναφέρεται ως παράδειγμα, περιέχεται στο πρώτο κεφάλαιο: «*Στις ευθείες γραμμές*» του βιβλίου του (Lefrançois, 1804) και περιγράφεται ως εξής:

Ένα τρίγωνο AMB είναι περιγεγραμμένο, από το σημείο A που επιλέγεται ως αρχή, σχεδιάζουμε δύο άξονες που σχηματίζουν ένα πλέγμα. Σε αυτό το πλέγμα ονομάζουμε την τετμημένη του M ως x′ και την τετμημένη του B ως x″. Το σημείο B βρίσκεται πάνω στο πλέγμα (εδώ εννοεί στον άξονα των *χ, θεωρούμε έτσι τα σημεία M(x′, y′) και B(x′′, 0)). Το ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός των εξισώσεων των τριών ευθειών (AM), (BM) και* (AB).

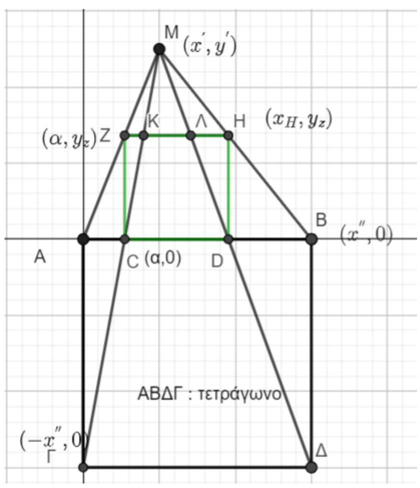
Οι Barbin et al. (2018) προτείνουν ένα άλλο παράδειγμα, την εγγραφή ενός τετραγώνου σε ένα τρίγωνο AMB που βασίζεται στη μέθοδο του Frederic Louis Lefrancois

*Έστω A εξακολουθεί να είναι η αρχή των συντεταγμένων. AB ο άξονας για x΄ x, και (x′, y′) οι συντεταγμένες του M, και x″ η τετμημένη του σημείου B. Οι εξισώσεις των πλευρών AM, BM και AB θα είναι οι ίδιες όπως και στα προηγούμενα προβλήματα. Έχοντας τα παραπάνω ως δεδομένα είναι σαφές ότι το πρόβλημα συνίσταται στην εύρεση ενός σημείου c στην AB τοποθετημένο με τέτοιο τρόπο ώστε κατά τη χάραξη της κάθετης ac, και στη συνέχεια της παράλληλη***ς** *ab στην AB, έχουμε ac = ab (ώστε να σχηματιστεί τετράγωνο) . Αν ορίσουμε, λοιπόν, με α την τετμημένη ενός τέτοιου σημείου η τιμή του ac θα είναι η ίδια με την y που είναι η ίδια με την x = α στην εξίσωση της πλευράς AM.*

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ABM στο οποίο θέλουμε να εγγράψουμε ένα τετράγωνο.

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή των αξόνων το σημείο A(0,0), και τα σημεία M (x′ y′) και B(x΄΄, 0). Πρέπει να βρούμε σημείο C(α,0) της AB τέτοιο ώστε φέροντας κάθετο τμήμα CZ στην AB και από το Z παράλληλο τμήμα ZH να ισχύει CZ =ZH , ώστε να σχηματιστεί τετράγωνο όπως φαίνεται στο σχήμα 14.



Σχήμα 12. Η προσέγγιση του Lefrancois

- Η εξίσωση της ευθείας AM είναι : $y= \frac{y'}{x'} x$
- Το σημείο Z(α, y_Z) είναι σημείο της ευθείας AM , οπότε ισχύει : $y_Z = \frac{y'}{x'} \alpha$, (1)

- Η εξίσωση της ευθείας ΒΜ είναι : $y=\frac{y'}{x'-x''}(x-x'')$
- Το σημείο Η (x_H, y_H) (ΖΗ//ΑΒ, άρα $y_H= y_Z$) ανήκει στην ΒΜ οπότε :

$$y_H = \frac{y'}{x'-x''}(x_H - x'') \quad \text{με } y_H = y_Z$$

$$y_H (x' - x'') = y'(x_H - x'') \quad \Leftrightarrow$$

$$x_H = \frac{y_Z}{y'}(x' - x'') + x'' \quad \Leftrightarrow$$

που λόγω της (1) είναι

$$x_H = \frac{\alpha}{x'}(x' - x'') + x'' \quad \Leftrightarrow$$

$$x_H = \frac{a(x'-x'')+x''x'}{x'}$$

- Το μήκος του τμήματος $ZH = x_H - \alpha$

Άρα

$$ZH = \frac{a(x'-x'')+x''x'}{x'} - \alpha \qquad (2)$$

Το μήκος του τμήματος ZC= y_Z και ισχύει ότι ZH=ZC ή $y_H = y_Z$ (3)

Από (1) και (2) και (3) προκύπτει ότι $\frac{y'}{x'}\alpha = \frac{a(x'-x'')+x''x'}{x'} - \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{x''x'}{y'+x''}$

Αντικαθιστούμε στην (1) το α και προκύπτει $y_Z = \frac{y'}{x'} \cdot \frac{x''x'}{y'+x''} \Leftrightarrow y_Z = \frac{y'x''}{y'+x'}$ που είναι το μήκος της πλευράς του ζητούμενου τετραγώνου.

Στη συνέχεια θα χρειαστεί να κατασκευαστεί το ευθύγραμμο τμήμα ZC $=y_Z$ ως η τέταρτη ανάλογος των τμημάτων y', x'' , y'+x'' με όμοιο τρόπο που έχει αναλυθεί παραπάνω.

Οι Barbin et al.(2018) προτείνουν μια ίσως πιο εύκολη μέθοδο που αναλύεται ως εξής: Ενώνουμε τη MC που τέμνει τον άξονα των y στο Γ. Κατόπιν βρίσκουμε την τεταγμένη του Γ που είναι ίση με - x''. Αναλυτικά έχουμε :

Η εξίσωση της MC είναι $y-y' = \frac{y'}{x'-a}(x - x')$ ή $y-y' = \frac{y'}{x' - \frac{x''x'}{y'+x''}}(x - x')$ ή

MC: $y-y' = \frac{y'+x'}{x'}(x - x')$. Θέτουμε x=0 και έχουμε y=-x'' .

Άρα το σημείο Γ έχει συντεταγμένες (-x'' ,0).

Οπότε με δεδομένο ότι ΑΓ=ΑΒ προεκτείνουμε τον αρνητικό ημιάξονα Oy' και κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΑΓΔΒ (με μήκος πλευράς x'') εκτός του τριγώνου. Το σημείο τομής της ΜΓ με τον άξονα των x είναι το ζητούμενο C . Ενώνουμε το Μ με το

Δ που τέμνει την AB στο D . Στη συνέχεια θα σχεδιάζουμε τις κάθετες CZ , DH και ZH. Το τετράπλευρο CZHD είναι το ζητούμενο τετράγωνο.

Η αιτιολόγηση είναι παραπλήσια με αυτή του Marolois που αναπτύχθηκε παραπάνω.

Αιτιολόγηση:

CZ// ΑΓ, για τα τρίγωνα ισχύει: $\frac{\mathrm{MZ}}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{CZ}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{M\Gamma}}$ (4)

Αρκεί να δείξουμε ότι HD// ΒΔ και ότι για τα τρίγωνα MDB και ΜΔΒ ισχύει :

$$\frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{M\Delta}} \qquad (5)$$

επίσης ΚΛ// CD//ΓΔ : $\frac{\mathrm{MZ}}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{MK}}{\mathrm{MC}} = \frac{\mathrm{K\Lambda}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{M\Lambda}}{\mathrm{MD}} = \frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{MB}}$ (6) και επειδή τα τρίγωνα MCD και ΜΓΔ είναι όμοια : $\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{M\Gamma}} = \frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{M\Delta}}$ (7)

Από (4), (6) και (7) έχουμε : $\frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{M\Delta}}$ και επομένως HD//ΒΔ , οπότε σχηματίζεται το τετράγωνο ZHDC.

4.7.1 Η ζωή και το έργο του George Pólya (1887-1985)

Εικόνα 22. George Pólya

Ο George Pólya (1887-1985) γεννήθηκε στην Βουδαπέστη και ήταν ένα από τα πέντε παιδιά της οικογένειας. Αν και είχε Εβραϊκή καταγωγή βαπτίστηκε στη Ρωμαιοκαθολική Εκκλησία μετά τη γέννησή του. Φοίτησε σε δημοτικό σχολείο στη Βουδαπέστη και στη συνέχεια εισήλθε στο Γυμνάσιο Dániel Berzsenyi, όπου σπούδασε τις κλασικές γλώσσες Ελληνικά και Λατινικά, καθώς και τη σύγχρονη γλώσσα Γερμανικά και Ουγγρικά. Στο σχολείο τα αγαπημένα μαθήματά του ήταν η βιολογία, η λογοτεχνία και η γεωγραφία. Είχε καλύτερους βαθμούς στην αριθμητική παρά στη γεωμετρία, γεγονός που το απέδωσε αργότερα στους καθηγητές του στο Γυμνάσιο (Shirali, 2014).

Ο Pólya εισήχθη στο Πανεπιστήμιο της Βουδαπέστης το 1905 όπου ξεκίνησε τις σπουδές του στα νομικά, όμως σύντομα τα εγκατέλειψε για να σπουδάσει γλώσσα και λογοτεχνία ενώ αργότερα άρχισε να διδάσκει λατινικά και ουγγρικά σε ένα γυμνάσιο. Με την παρότρυνση του καθηγητή του, παρακολούθησε μαθήματα φυσικής και μαθηματικών, οπότε και σπούδασε μαθηματικά.

Το 1910-1911 σπούδασε στο Πανεπιστήμιο της Βιέννης όπου και έδειξε ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη φυσική παρακολουθώντας διαλέξεις πάνω στη σχετικότητα, την οπτική και άλλα θέματα. Όταν επέστρεψε στη Βουδαπέστη ανακηρύχθηκε διδάκτωρ μαθηματικών καθώς είχε ασχοληθεί με ένα πρόβλημα της θεωρίας των γεωμετρικών πιθανοτήτων. Αργότερα στο Göttingen ήρθε σε επαφή με τους σημαντικούς μαθηματικούς εκείνης της εποχής.

Από το 1914 έως το 1940 ήταν καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Ζυρίχης στην Ελβετία και από το 1940 έως το 1953 στο Πανεπιστήμιο του Στάνφορντ. Παρέμεινε ομότιμος καθηγητής στο Στάνφορντ για το υπόλοιπο της καριέρας του, ασχολούμενος με ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών θεμάτων, όπως σειρές, θεωρία αριθμών, μαθηματική ανάλυση, γεωμετρία, άλγεβρα, συνδυαστική και πιθανότητες. Το 1925 έγραψε το βιβλίο: «*Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*» (*Προβλήματα και Θεωρήματα στην ανάλυση)* με τη βοήθεια του συμφοιτητή του Ούγγρου Gabor Szegő .

Αφιέρωσε μέρος της καριέρας του στο να εντοπίσει συστηματικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων που θα βοηθούσε τους μαθητές, καθηγητές και ερευνητές.

Έγραψε πέντε βιβλία για την κατανόηση, τη μάθηση και τη διδασκαλία του προβλήματος : *Πώς να το λύσετε* (*How to solve it*,1945), *Μαθηματικά και Εύλογη Επιχειρηματολογία (Mathematics and Plausible Reasoning*, 1954), *Μαθηματική ανακάλυψη (Mathematical discovery*, 1962). Στο «*How to solve it»*, ο Pólya παρέχει γενικές ευρετικές μεθόδους για την επίλυση μιας σειράς μαθηματικών και μη μαθηματικών προβλημάτων που εξακολουθούν να χρησιμοποιούνται στη μαθηματική εκπαίδευση. Μεταφράστηκε σε πολλές γλώσσες και έχει πουλήσει πάνω από ένα εκατομμύριο αντίτυπα. Στο βιβλίο αυτό εξήγησε ότι για την επίλυση προβλημάτων απαιτείται η μελέτη της ευρετικής:

«Στόχος της ευρετικής είναι η μελέτη των μεθόδων και των κανόνων ανακάλυψης και εφεύρεσης .... Η ευρετική, "εξυπηρετεί την ανακάλυψη". ... σκοπός της είναι να ανακαλύψει τη λύση του παρόντος προβλήματος. ... Τι είναι η καλή εκπαίδευση; Το να δίνεται συστηματικά η ευκαιρία στο μαθητή να ανακαλύψει τα πράγματα μόνος του». Έδωσε επίσης τη σοφή συμβουλή: «*Αν δεν μπορείτε να λύσετε ένα πρόβλημα, τότε υπάρχει ένα ευκολότερο πρόβλημα που μπορείτε να λύσετε, βρείτε το»* (Pólya, 1945, foreword by John H. Conway, 2004).

Προτεινόμενα βήματα για την προσέγγιση ενός προβλήματος.

1. Κατανοήστε το πρόβλημα (ποιο είναι το άγνωστο, τι πρέπει να αποδειχθεί).

2. Κατασκευάστε ένα σχέδιο.

3. Εκτελέστε το σχέδιο.

4. Κοιτάξτε πίσω στην εργασία σας. Ρωτήστε τον εαυτό σας: Πώς θα μπορούσε να είναι καλύτερη;

4.7.2 Η διερεύνηση του προβλήματος από τον George Pólya

Ο Pólya επέλυσε το πρόβλημα της εγγραφής τετράγωνου σε τρίγωνο ακολουθώντας βήματα που καθιστούν πιο εύκολο το πρόβλημα. Η προσέγγισή του είναι καθαρά γεωμετρική, απαιτεί γεωμετρική κατασκευή τετραγώνου και εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή.

Εγγραφή τετραγώνου σε τρίγωνο.

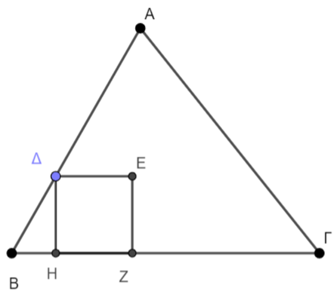
Πώς θα μπορούσε κανείς να εγγράψει ένα τετράγωνο σε ένα αυθαίρετο τρίγωνο, με δύο κορυφές στη μία πλευρά του τριγώνου, και από μία κορυφή στις υπόλοιπες δύο πλευρές, χρησιμοποιώντας διαβήτη και χάρακα; (Το πρόβλημα προέρχεται από το *«Πώς να το λύσετε»,* Ενότητα 18, σελίδες 23-25).

Για να γίνει πιο απλό θα θεωρήσουμε ότι το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

Ποια θα ήταν η πρόταση του Pólya; "Χαλαρώστε τους όρους", θα έλεγε. "Ας ικανοποιήσουμε μέρος της συνθήκης". "Γιατί να μην εγκαταλείψουμε τη συνθήκη ότι το Ε βρίσκεται στην πλευρά ΑΓ;" Αυτή η αλλαγή μετατρέπει ένα δύσκολο πρόβλημα σε απλό! Το πρόβλημα είναι τώρα: Κατασκευάστε ένα τετράγωνο ΔΕΖΗ έτσι ώστε το Δ να βρίσκεται στην ΑΒ, και τα Η και Ζ να βρίσκονται στην ΒΓ. Πόσα τέτοια τετράγωνα μπορούν να κατασκευαστούν; Τι μοτίβο δίνουν και τι μπορεί να συμπεράνει κανείς *από αυτή την παρατήρηση; Πώς επιλύεται έτσι το συγκεκριμένο πρόβλημα;* (Pólya, 1945; Lopez-Real & Leung, 2006).

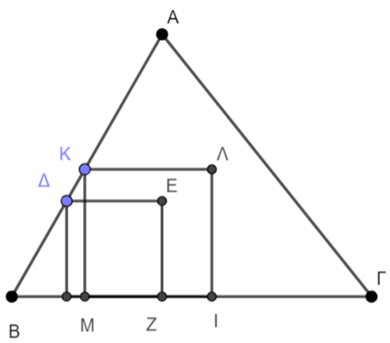
Απόδειξη

Θεωρούμε ΑΒΓ οξυγώνιο τρίγωνο και σημείο Δ στην ΑΒ. Κατασκευάζουμε τετράγωνο ΔΕΖΗ τέτοιο ώστε οι κορυφές ΗΖ να βρίσκονται πάνω στην ΒΓ (η κατασκευή γίνεται με κανόνα και διαβήτη) (Σχ. 13).

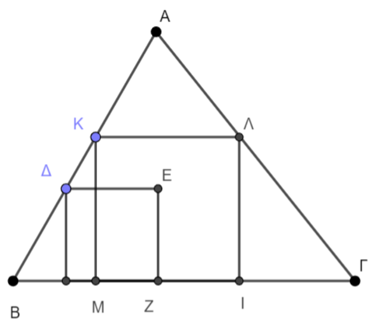


Σχήμα 13

Το σημείο Δ είναι τυχαίο οπότε με αυτόν τον τρόπο μπορούν να κατασκευαστούν διαφορετικά τετράγωνα (Σχ. 13). Το ζητούμενο είναι να βρεθεί το τετράγωνο τέτοιο ώστε η τέταρτη κορυφή να βρίσκεται πάνω στην ΑΓ (Σχ. 15).

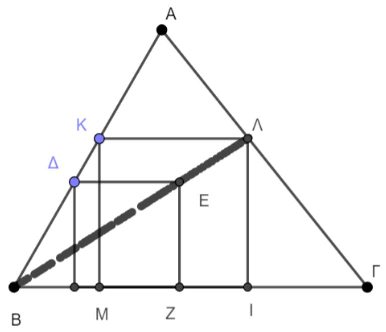


Σχήμα 14

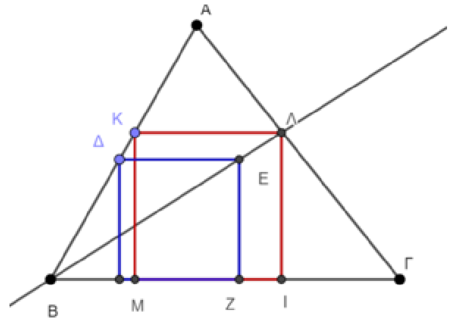


Σχήμα 15

Αν πειραματιστούμε σε ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας (π.χ. Geogebra) μπορούμε σύρουμε το σημείο Δ πάνω στην ΑΒ και να ενεργοποιήσουμε το ίχνος του Ε διαπιστώνουμε ότι η ζητούμενη κορυφή βρίσκεται πάνω στην ευθεία ΒΕ



Σχήμα 16



Σχήμα 17

Φέρουμε την ΒΕ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Λ και από το Λ σχεδιάζουμε τα τμήματα ΛΙ ⊥ΒΓ , ΛΚ //ΒΓ και ΚΜ ⊥ ΒΓ (Σχ. 17). Από το Θ. Θαλή έχουμε

ΚΛ//ΔΕ , $\frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΚΛ}} = \frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΒΛ}}$ (1) ΕΖ//ΛΙ , $\frac{EZ}{\Lambda I} = \frac{BE}{B\Lambda}$ (2)

και ΔΕ=ΕΖ (3)

Από τις (1), (2), και (3) προκύπτει ότι ΚΛ=ΛΙ και άρα ΚΛΙΜ είναι τετράγωνο.

4.8 Σύγκριση των μεθόδων

Οι προσεγγίσεις που αναπτύχθηκαν παραπάνω, θεωρούμε ότι έχουν να προσφέρουν κάτι διαφορετικό η καθεμία χωριστά. Οι αλγεβρικές μέθοδοι των al- Khwarizmi και Chuquet αναπτύσσουν το θέμα επιχειρώντας να υπολογιστεί το μήκος μιας πλευράς έχοντας αριθμητικά δεδομένα. Στην περίπτωση του al-Khwarizmi, γνωρίζουμε τις πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου και ζητούμε την πλευρά του τετραγώνου, ενώ αντίθετα στην προσέγγιση του Chuquet, είναι δεδομένη η πλευρά του τετραγώνου και ζητείται η πλευρά του περιγεγραμμένου ισόπλευρου τριγώνου στο τετράγωνο αυτό. Καμία από τις δύο μεθόδους δεν απαιτεί γεωμετρική κατασκευή.

Οι λύσεις που αναπτύσσονται από τους Marolois και Pólya είναι καθαρά γεωμετρικές και απαιτούν γεωμετρικές κατασκευές. Η διαφορά έγκειται στο ότι το τρίγωνο του Marolois είναι ισόπλευρο, ενώ του Pólya είναι τυχαίο.

Οι μέθοδοι που ακολουθούν ο da Cunha και ο Bourdon είναι παραπλήσιες, θεωρούν την πλευρά του τετραγώνου ίση με x, μία πλευρά του τριγώνου και το αντίστοιχο ύψος προς την πλευρά αυτή ίσα με μια μεταβλητή α και h αντίστοιχα και στη συνέχεια εκφράζεται η μεταβλητή x ως συνάρτηση της πλευράς και του αντίστοιχου ύψους. Δεν περιέχει αριθμητικά δεδομένα, ενώ στο τέλος απαιτείται η γεωμετρική κατασκευή του x, ως τέταρτη ανάλογος τριών τμημάτων. Η προσέγγιση του Louis Lefrançois κινείται στο πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας, μεταφέροντας το τρίγωνο σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με τη μία κορυφή του στην αρχή των αξόνων. Οπότε το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση των συντεταγμένων των κορυφών του τετραγώνου.

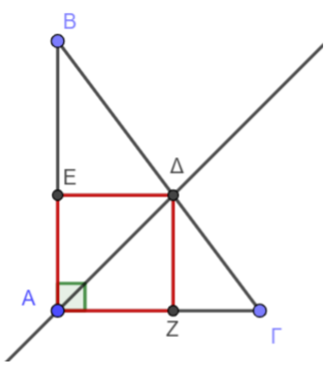
Κατά την άποψη της ερευνήτριας, οι μέθοδοι των Marolois, Lefrançois, Bourdon και da Cunha είναι ιδιαίτερα δύσκολες, τα σχήματα είναι πολύπλοκα και απαιτούν μία σχετικά υψηλή γεωμετρική ευχέρεια από το άτομο που θα τις μελετήσει. Ένας μέσος μαθητής της Β΄ Λυκείου, για παράδειγμα, θα παρουσίαζε αρκετές δυσκολίες στην κατανόηση των λύσεων αυτών, πόσο μάλλον αν επιχειρούσε να τις ανακαλύψει μόνος του. Η μέθοδος του Pólya, αν και θεωρείται εύκολη στην κατανόηση όταν κάποιος μελετήσει τη λύση, είναι ιδιαίτερα ευφυής, και δύσκολη στη σύλληψή της καθώς χρειάζεται να κατασκευαστεί βοηθητικό τετράγωνο και βοηθητική ευθεία. Αντίθετα, οι αλγεβρικές μέθοδοι των al- Khwarizmi και Chuquet είναι πιο κατανοητές και εύκολες στη σύλληψη, καθώς χρησιμοποιούνται αριθμητικά δεδομένα με τα οποία είναι πιο εξοικειωμένοι μαθητές και εκπαιδευτικοί.

4.9 Δύο επιπλέον προσεγγίσεις του προβλήματος

Ακολουθούν δύο προσεγγίσεις του προβλήματος που αξίζουν να αναπτυχθούν στην παρούσα εργασία

4.9.1 Εγγραφή τετραγώνου σε ορθογώνιο τρίγωνο

Η εγγραφή τετραγώνου σε ορθογώνιο τρίγωνο είναι απλή αν η μία κορυφή του είναι η κορυφή της ορθής γωνίας του τριγώνου, αρκεί να φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και από το Δ κάθετες στις πλευρές του τριγώνου (Σχ. 18).



Σχήμα 18. Εφαρμογή της μεθόδου σε ορθογώνιο τρίγωνο

4.9.2 . Μια διαφορετική προσέγγιση του προβλήματος που βασίζεται επίσης στο θεώρημα του Θαλή.

Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε την ημιευθεία Βχ ⊥ΒΓ και από το Α τμήμα ΑΔ⊥Βχ. Η διχοτόμος της γωνίας ΓΒΔ τέμνει την ΓΔ στο Ε. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει τις ΒΔ, ΑΒ, ΑΓ στο Ζ , στο Η και στο Θ αντίστοιχα. Αν από τα Η, Ε και Θ φέρουμε κάθετες προς την ΒΓ σχηματίζονται τα ορθογώνια ΒΖΕΜ και ΗΘΛΚ.

Το ΒΖΕΜ είναι το εγγεγραμμένο τετράγωνο του τριγώνου ΒΓΔ.

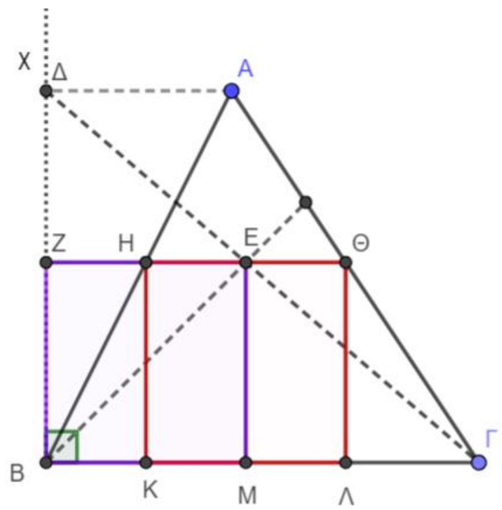
Από το Θ. Θαλή :

$$\left.\begin{array}{ll} ΖΗ//ΑΔ \ : \dfrac{BZ}{BΔ} = \dfrac{BH}{BA} = \dfrac{ZH}{AΔ} & (1) \\ ΕΘ//ΔΑ : \dfrac{EΓ}{ΓΔ} = \dfrac{ΘΓ}{AΓ} = \dfrac{EΘ}{ΔA} & (2) \\ ΗΘ//ΒΓ : \dfrac{BH}{BA} = \dfrac{ΓΘ}{ΓA} & (3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

οπότε ΖΗ=ΕΘ

ΖΕ=ΗΚ ή ΖΗ+ ΗΕ=ΗΚ ή ΕΘ+ΗΕ=ΗΚ ή ΗΘ=ΗΚ

οπότε ΗΘΛΚ είναι τετράγωνο (Σχ. 19)



Σχήμα 19

Η ιδέα προήλθε από την πλατφόρμα mathematica.gr

https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?t=11855#p64557

Κεφάλαιο 5ο Μεθοδολογία της έρευνας

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τη σημασία και τους σκοπούς της έρευνας, τα ερευνητικά ερωτήματα, το δείγμα της έρευνας, τα έργα που χορηγήθηκαν στους μαθητές και τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για την πραγματοποίηση της.

5.1 Η σημασία της έρευνας

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι μια μαθηματική θεωρία που βασίζεται στην αποδεικτική διαδικασία και την τεκμηρίωση γεωμετρικών προτάσεων. Διαπραγματεύεται γεωμετρικά προβλήματα και γεωμετρικές κατασκευές.

Ο συλλογισμός και η απόδειξη στη γεωμετρία παίζουν σπουδαίο ρόλο στα Ελληνικά προγράμματα σπουδών, παρά το γεγονός ότι το μάθημα έχει υποβαθμιστεί και οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες.

Οι γεωμετρικές κατασκευές ενισχύουν την κατανόηση των μαθητών για διάφορες γεωμετρικές ιδιότητες και τους ενθαρρύνουν να σκεφτούν τους συλλογισμούς τους (Beckmann, 2010), όπως αναφ. ο Cheung (2011). Οι κατασκευές με κανόνα και διαβήτη σε συνδυασμό με το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας βοηθούν τους μαθητές να οπτικοποιήσουν τα σχέδιά τους και χρησιμοποιώντας λογικούς συλλογισμούς να κατανοήσουν καλύτερα τις γεωμετρικές προτάσεις και ιδιότητες, αναδεικνύοντας έτσι την Ευκλείδεια Γεωμετρία σε ένα βασικό και παιδαγωγικό εργαλείο (Θωμαΐδης, Ξένος, Παντελίδης, Πούλος, Στάμου, 1999, σελ.7). Ορμώμενοι από τις διαφορετικές γεωμετρικές μεθόδους εγγραφής τετραγώνου σε τρίγωνο από επιφανείς μαθηματικούς του παρελθόντος και καθοδηγούμενοι από τα πρωτότυπα κείμενα με αποδείξεις, επιχειρήσαμε να αξιοποιήσουμε την ιστορία των μαθηματικών μέσα από μια διδακτική παρέμβαση. Ο σκοπός της ενσωμάτωσης της ιστορίας στη διδακτική πράξη είναι να γίνει ενδιαφέρον και πρωτότυπο το μάθημα της γεωμετρίας δημιουργώντας ένα θετικό κλίμα για τους μαθητές. Μέσα στα πλαίσια της διδασκαλίας του θεωρήματος του Θαλή και της ομοιότητας τριγώνων που ορίζει το αναλυτικό πρόγραμμα, έγινε μια προσπάθεια προσέγγισης της διδακτέας ύλης υπό το πρίσμα της ιστορίας και των γεωμετρικών κατασκευών. Οι μαθητές κλήθηκαν να εργαστούν όπως ο Pólya, ο Marolois, ο Lefrancois ο Chuquet, και ο al-Khwarizmi.

Οι μαθητές εργάστηκαν στο Γεωμετρικό Χώρο Εργασίας που περιλαμβάνει το χώρο με τα σχήματα, τα εργαλεία- τεχνουργήματα και εκείνον που απαιτεί την αποδεικτική διαδικασία με λογικούς συλλογισμούς. Στη συνέχεια αναλύθηκαν και ερμηνεύτηκαν τα αποτελέσματα στη βάση της θεωρίας του Γεωμετρικού Χώρου Εργασίας.

Η διδακτική παρέμβαση εστιάζει στην γεωμετρική κατασκευή τετραγώνου εγγεγραμμένο σε τρίγωνο εφαρμόζοντας κυρίως το θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα τριγώνων, το Πυθαγόρειο θεώρημα καθώς και τη μέτρηση εμβαδών επίπεδων σχημάτων.

5.2 Σκοποί της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να διερευνήσουμε τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκαν οι μαθητές για την εγγραφή τετραγώνου σε τρίγωνο προσεγγίζοντας το πρόβλημα με διαφορετικές μεθόδους και με ιστορική προοπτική, δίνοντας έμφαση στη γεωμετρική κατασκευή. Η μελέτη αποσκοπεί επίσης στο να διαπιστωθεί εάν οι εν λόγω κατασκευαστικές εργασίες είχαν θετική επίδραση στους μαθητές όσον αφορά την εκμάθηση της γεωμετρίας.

Η διδακτική παρέμβαση που εφαρμόστηκε στα πλαίσια του μαθήματος της Β΄ τάξης του Γενικού Λυκείου βασίζεται στη θεωρία του Freudenthal καθώς οι μαθητές βρίσκονται αντιμέτωποι με ένα γεωμετρικό πρόβλημα που δεν έχουν συναντήσει στο παρελθόν. Βασιζόμαστε δηλαδή στην αρχή της «εκ νέου επινόησης» (Freudenthal 1973, όπως αναφ. ο Θωμαΐδης, 2021), όπου οι μαθητές καλούνται να ανακαλύψουν τη λύση του προβλήματος από την αρχή ως «μικροί μαθηματικοί».

Στα πλαίσια της διδασκαλίας της γνωστικής ενότητας που περιλαμβάνει το θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα τριγώνων (κεφάλαια 7,8) σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, οι μαθητές επιχείρησαν να λύσουν το πρόβλημα ακολουθώντας τα βήματα των Μαθηματικών που αναπτύχθηκαν στο κεφάλαιο 6.

Μέσα από την διδακτική πρόταση επιχειρούμε να διαπιστώσουμε αν μπορούμε να κινητοποιήσουμε τους μαθητές και να αυξήσουμε το ενδιαφέρον τους, καθώς εμπλέκονται στην αποδεικτική διαδικασία είτε ακολουθούν τη γεωμετρική είτε την αλγεβρική προσέγγιση του προβλήματος. Με τον τρόπο αυτό ευελπιστούμε ότι θα αλλάξουν τη στάση τους απέναντι στη γεωμετρία και στα μαθηματικά γενικότερα.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που τίθενται στην παρούσα έρευνα είναι:

1. Σε ποιο βαθμό μπορούν οι μαθητές να κατασκευάσουν με κανόνα και διαβήτη ένα τετράγωνο εγγεγραμμένο σε τρίγωνο και να αποδείξουν την εγκυρότητα της κατασκευής τους;
2. Οι μαθητές έχουν την ικανότητα να επιλύουν το πρόβλημα της εγγραφής τετραγώνου σε τρίγωνο συνδυάζοντας αλγεβρικές και γεωμετρικές μεθόδους;

5.3 Το δείγμα της έρευνας

Η παρούσα εργασία αφορά μια έρευνα διδακτικού σχεδιασμού και τα αποτελέσματά της αναλύθηκαν ποιοτικά. Το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στον τρόπο σκέψης και στις απαντήσεις που δίνουν οι μαθητές.

Η παρούσα διδακτική παρέμβαση έλαβε χώρα τον Οκτώβριο του 2022 σε 22 μαθητές της Β΄ Λυκείου του 2ου Γενικού Λυκείου Καλαμαριάς και αφιερώθηκαν 10 με 11 διδακτικές ώρες, όσο ορίζει το Αναλυτικό πρόγραμμα για τη διδασκαλία των κεφαλαίων που αφορούν στο θεώρημα Θαλή και την ομοιότητα τριγώνων. Οι μαθητές ήταν μεσαίας επίδοσης, στην πλειοψηφία τους είχαν αρκετές αδυναμίες στο μάθημα της γεωμετρίας, με εξαίρεση μερικών μονάδων που ήταν άριστοι. Θεωρήθηκε αναγκαίο να χωριστούν σε ομάδες των δύο ατόμων και όχι παραπάνω, ώστε να εργάζονται όλοι και να μη δίνεται η ευκαιρία σε κάποιους να μένουν αμέτοχοι· στόχος ήταν να εμπλακούν όλοι οι μαθητές, ο καθένας ανάλογα με τις δυνατότητές του.

5.4 Ερευνητικά εργαλεία

Ως γεωμετρικό πρόβλημα θεωρείται η σχεδίαση γεωμετρικών στοιχείων, όπως γραμμές και κύκλοι, εγγραφή και περιγραφή πολυγώνων σε κύκλο και σε άλλα πολύγωνα, χωρίς μετρήσεις, χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα και διαβήτη ακολουθώντας πεπερασμένο πλήθος βημάτων με τη βοήθεια προτάσεων, ιδιοτήτων και θεωρημάτων. Το γεωμετρικό πρόβλημα που μας απασχόλησε στην παρούσα εργασία είναι η εγγραφή τετραγώνου σε τρίγωνο.

Οι Barbin et al. (2018) έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην συγκεκριμένη γεωμετρική κατασκευή για την οποία έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι και λύσεις ανά τους αιώνες. Με αφορμή την προαναφερθείσα μελέτη, μας κινήθηκε το ενδιαφέρον να διερευνήσουμε πόσο ικανοί είναι οι μαθητές μας να κάνουν γεωμετρικές κατασκευές και να συνδυάζουν αλγεβρικές εργασίες στο πλαίσιο της γεωμετρίας.

Για τη συλλογή των δεδομένων της έρευνας, σχεδιάστηκαν και δόθηκαν στους μαθητές φύλλα εργασίας, όπως παρατίθενται στο Παράρτημα.

Τα επτά φύλλα εργασίας αποτέλεσαν τα ερευνητικά εργαλεία της έρευνας μαζί με ένα διαγνωστικό τεστ (pre-test) και ένα τελικό διαγώνισμα (post-test).

Καθώς δεν υπάρχει παρόμοια μελέτη που αφορά στο συγκεκριμένο πρόβλημα, τα φύλλα εργασίας σχεδιάστηκαν από την ερευνήτρια σύμφωνα με τις προσεγγίσεις του προβλήματος από τους μαθηματικούς που αναφέρθηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο, λαμβάνοντας υπόψη το σκοπό της έρευνας, τη σύνδεση με τα ερευνητικά ερωτήματα, πάντα όμως με γνώμονα το γνωστικό αντικείμενο του μαθήματος. Οι εργασίες επιλέχθηκαν προσεκτικά για να διευκολύνουν τους μαθητές στη διεκπεραίωση του εκάστοτε έργου, την κατασκευαστική διαδικασία και την απόδειξή της.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, το πρόβλημα που μας απασχολεί είναι ιδιαίτερα απαιτητικό, σε πολλές λύσεις χρειάζεται να χαραχθούν βοηθητικές ευθείες, να απομονωθούν επιμέρους σχήματα, να κατασκευαστεί η τέταρτη ανάλογος σε υπάρχον τρίγωνο και να καταστρωθεί κατάλληλη εξίσωση ώστε να υπολογιστεί το ζητούμενο. Για τους παραπάνω λόγους θεωρήθηκε απαραίτητο να δοθούν αναλυτικά τα βήματα της κάθε προσέγγισης σε κάθε φύλλο εργασίας, ώστε να μπορέσουν να εμπλακούν όλοι οι μαθητές.

Κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης σημείωσαν οι μαθητές τις απαντήσεις τους στα φύλλα εργασίας, ενώ συγχρόνως η εκπαιδευτικός κρατούσε σημειώσεις και σχόλια των μαθητών.

Αφού συμπληρώθηκαν όλα τα φύλλα εργασίας, δόθηκε ένα post-test με δύο προβλήματα, την εγγραφή τετραγώνου σε τρίγωνο και την εγγραφή τετραγώνου σε ημικύκλιο, ώστε να ελεγχθεί σε ποιο βαθμό υπήρχε βελτίωση στην επίδοση των μαθητών σε ότι αφορά την γεωμετρική κατασκευή, αλλά και να δούμε ποια μέθοδο προτίμησαν τελικά οι μαθητές. Μετά το τέλος της διδακτικής παρέμβασης δόθηκαν τρία ερωτηματολόγια, που διαμορφώθηκαν από την ερευνήτρια και απαντήθηκαν ανώνυμα από τους μαθητές. Το πρώτο αφορούσε στη σχέση τους με τη γεωμετρία και τις γεωμετρικές κατασκευές, στο δεύτερο είχαν την ευκαιρία να εκφράσουν ποια μέθοδο θεώρησαν πιο ενδιαφέρουσα και ποια πιο απαιτητική, ενώ στο τρίτο σημείωσαν την άποψή τους για την ενσωμάτωση της ιστορίας στο μάθημα των μαθηματικών.

5.5 Σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης

Σύμφωνα με το Αναλυτικό πρόγραμμα, στα κεφάλαια 7 και 8 του δεύτερου τεύχους του σχολικού βιβλίου της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, οι μαθητές διδάσκονται το θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα τριγώνων. Έχουν ήδη διδαχθεί στην Α΄ Λυκείου τα είδη των παραλληλογράμμων και τις ιδιότητές τους καθώς και τα εγγράψιμα -εγγεγραμμένα και περιγράψιμα- περιγεγραμμένα τετράπλευρα σε κύκλο.

Η διδακτική παρέμβαση έχει σχεδιαστεί από την ερευνήτρια με βάση τις διαφορετικές προσεγγίσεις του προβλήματος και τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Με τον τρόπο που εξελίχθηκε μέσα στην τάξη ευνοήθηκε η ομαδοσυνεργατική εργασία των μαθητών, τους δόθηκε η ευκαιρία να ανταλλάξουν απόψεις, ενώ δούλευαν στις κατασκευαστικές εργασίες μέσα από ομάδες (Gokhale, 1995), να συμφωνήσουν ή να διαφωνήσουν, να εργαστούν σε συγκεκριμένες δραστηριότητες και έτσι να επιτευχθούν οι στόχοι.

Επιπλέον στο εργαστήριο πληροφορικής ήρθαν σε επαφή με το λογισμικό Geogebra όπου πειραματίστηκαν χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα εργαλεία. Η ενσωμάτωση της ιστορίας στη διδακτική παρέμβαση επιτεύχθηκε με τη χρήση των πρωτότυπων κειμένων με αποδείξεις, καθώς ορίζει το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών κατά τη διδακτική προσέγγιση μιας έννοιας (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2003).

Οι μαθητές εργάστηκαν κατά ζεύγη και χρησιμοποιήθηκαν φύλλα εργασίας, κανόνας και διαβήτης, καθώς και το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geogebra. Η διδακτική παρέμβαση έλαβε χώρα κυρίως στην αίθουσα διδασκαλίας και κάποιες ώρες στο εργαστήριο πληροφορικής. Στα φύλλα εργασίας συμπεριλήφθηκε ένα διαγνωστικό τεστ και στο τέλος της διδακτικής παρέμβασης δόθηκε ένα διαγώνισμα που περιλάμβανε δύο προβλήματα, το πρώτο ήταν το εν λόγω πρόβλημα και το δεύτερο ήταν η εγγραφή τετραγώνου σε ημικύκλιο. Η ερευνήτρια διεξήγαγε αυτό το γνωστικό τεστ, μετά την παρέμβαση, ώστε να αξιολογηθεί σε ποιο βαθμό υπήρχε βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών, αν ακολουθήθηκαν οι μέθοδοι που διδάχθηκαν, ποια μέθοδος ήταν πιο προσιτή ή πιο κατανοητή στους μαθητές και φυσικά σε ποιο βαθμό είχαν μελετήσει οι μαθητές μόνοι τους. Τα θέματα ήταν κοινά για όλους και εργάστηκαν ατομικά. Σχετικά με το πρώτο θέμα, δόθηκε η ελευθερία να επιλέξουν όποια μέθοδο επιθυμούσαν, ενώ για το δεύτερο, παρ' όλο που ήταν ένα εντελώς άγνωστο πρόβλημα, δεν δόθηκε καμία καθοδήγηση ή βοήθεια.

Πριν από την έναρξη της διδακτικής παρέμβασης έγινε μια συζήτηση σχετικά με τη γεωμετρία και τις γεωμετρικές κατασκευές ως εισαγωγή της εργασίας που θα ακολουθούσε. Οι μαθητές εξέφρασαν επίσης τα συναισθήματά τους και τη στάση τους απέναντι στη γεωμετρία, καταγράφηκε ότι δεν είναι από τα αγαπημένα τους μαθήματα, δεν είναι εξοικειωμένοι με τα γεωμετρικά όργανα και δεν έχουν ασχοληθεί στο παρελθόν με γεωμετρικές κατασκευές. Ακολούθησαν τέσσερις διδακτικές ώρες για τη διδασκαλία του θεωρήματος του Θαλή, την ομοιότητα τριγώνων, την κατασκευή τέταρτης αναλόγου και την εκμάθηση κάποιων βασικών εργαλείων του λογισμικού Geogebra.

Οι Διδακτικοί στόχοι είναι: Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν:

1.να εφαρμόζουν το θεώρημα του Θαλή

2.να συγκρίνουν όμοια τρίγωνα και να βρίσκουν τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους

3. να κατασκευάζουν την τέταρτη ανάλογο ευθυγράμμων τμημάτων

4. να αποδεικνύουν ότι ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο

5. να καταστρώνουν αλγεβρικές εξισώσεις που προκύπτουν από σχέσεις μεταξύ γεωμετρικών εννοιών.

5.5.1 Pre-test

Αρχικά δόθηκε ένα διαγνωστικό τεστ, σύμφωνα με το οποίο οι μαθητές έπρεπε να σχεδιάσουν ένα τετράγωνο εγγεγραμμένο σε τρίγωνο με όποιο τρόπο επιθυμούσαν και να προσπαθήσουν να αποδώσουν τον ορισμό ενός εγγεγραμμένου τετραγώνου σε τρίγωνο. Το ίδιο τεστ εφάρμοσαν στην έρευνά τους και οι Barbin et al. (2018), οπότε επιλέχθηκε σκόπιμα, ώστε να μπορούν να συγκριθούν τα αντίστοιχα ευρήματά μας. Επιπλέον στην Α΄ Λυκείου έχουν διδαχθεί εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα τρίγωνα και τετράπλευρα σε κύκλο. Οπότε θεωρήθηκε δεδομένο ότι θα μπορούσαν να συνδυάσουν την προηγούμενη γνώση τους, ώστε να είναι ικανοί να απαντήσουν. Στόχος ήταν να έρθουν σε πρώτη επαφή με την άσκηση, να ελέγξουμε σε ποιο βαθμό μπορούν να κατανοήσουν ένα απλό λεκτικό γεωμετρικό πρόβλημα και να τους προετοιμάσουμε για την εργασία που θα ακολουθούσε.

Η δραστηριότητα κινείται από το Γνωστικό επίπεδο στο Επιστημολογικό, από την οπτικοποίηση στην αναπαράσταση και επομένως κινείται προς τη σημειωτική γένεση. Εδώ είμαστε στο παράδειγμα Γεωμετρία Ι καθώς οι μαθητές δεν κάνουν αποδείξεις.

Στα φύλλα εργασίας που ακολουθούν αναμέναμε οι μαθητές να εργαστούν στη Γεωμετρία ΙΙ.

5.5.2 Τα φύλλα εργασίας

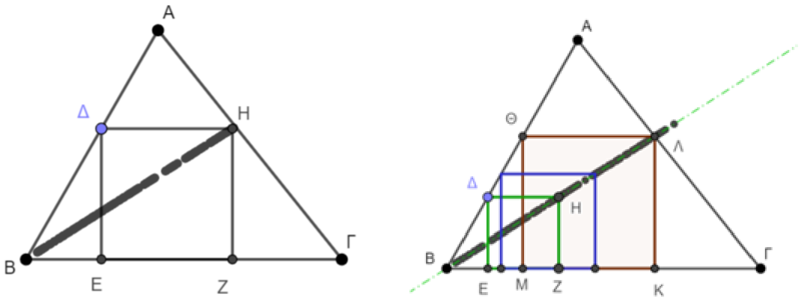
Στο πρώτο φύλλο εργασίας, διάρκειας περίπου 40 λεπτών, ζητήθηκε να κατασκευάσουν με κανόνα και διαβήτη την τέταρτη ανάλογο δοσμένων ευθυγράμμων τμημάτων α, β, γ και την τέταρτη ανάλογο των τμημάτων α, β, α + β. Ως τέταρτη ανάλογος των ευθυγράμμων τμημάτων α, β, γ ορίζεται το ευθύγραμμο τμήμα δ για το οποίο ισχύει : $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$. Η κατασκευή της τέταρτης αναλόγου είναι αφενός μεν εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, αφετέρου χρειάζεται να γνωρίζουν τη διαδικασία, ώστε να την εφαρμόσουν στη μέθοδο του Louis Bourdon. Εδώ η δραστηριότητα κινείται από το Επιστημολογικό Επίπεδο στο Γνωστικό μέσα από τα τεχνουργήματα (κανόνας και διαβήτης) που μετασχηματίζονται σε εργαλεία στο πλαίσιο της κατασκευαστικής διαδικασίας και επομένως προς την εργαλειακή γένεση. Στη συνέχεια έπρεπε να τεκμηριώσουν την κατασκευή του ζητούμενου τμήματος εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή, οπότε βρισκόμαστε τη Γεωμετρία ΙΙ. Οι μαθητές θα έπρεπε να κινηθούν στο επίπεδο [Ins-Dis] από την εργαλειακή γένεση στη συλλογιστική γένεση.

Η διδακτική παρέμβαση είχε αφετηρία τη γεωμετρική κατασκευή του προβλήματος με τη μέθοδο του Pólya και περιγράφεται στο δεύτερο φύλλο εργασίας.

Στην πρώτη φάση οι μαθητές εργάστηκαν στο εργαστήριο πληροφορικής, ακολουθώντας τα βήματα του φύλλου εργασίας και με την καθοδήγηση της εκπαιδευτικού κατασκεύασαν ένα τυχαίο τρίγωνο και ένα τετράγωνο με τις τρεις κορυφές σημεία των πλευρών του, ενώ η τέταρτη κορυφή είναι εσωτερικό σημείο του. Η κατασκευή του τετραγώνου έγινε αυστηρά με κανόνα και διαβήτη των εργαλείων του Geogebra και δε χρησιμοποιήθηκε το εργαλείο σχεδιασμού κανονικού πολυγώνου με δοσμένο πλήθος πλευρών. Με το λογισμικό πειραματιζόμαστε σε διερευνητική κατεύθυνση και αξιοποιούμε τις δυνατότητές του για δυναμικό χειρισμό των σχημάτων με αξιοποίηση των εργαλείων της σχεδίασης ίχνους σημείων. Αναδεικνύονται έτσι συγκεκριμένες δράσεις που δεν μπορούν να υλοποιηθούν με τα συμβατικά μέσα αναπαράστασης όπως βιβλίο, χαρτί, μολύβι ενώ συγχρόνως δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να διευρύνουν τους γνωστικούς τους ορίζοντες σχετικά με την έννοια του τετραγώνου, της παραλληλίας, και των ιδιοτήτων τους μέσω πολλαπλών αναπαραστάσεων, με διερεύνηση, ανακάλυψη, και δυναμικών μετασχηματισμών. Στόχος της συγκεκριμένης δραστηριότητας είναι να επιτευχθεί η εμπλοκή του μαθητή στη διαδικασία λύσης και ανακάλυψης από τον ίδιο βήμα-βήμα οπότε και γίνεται πειραματική-ενεργητική κατασκευή της γνώσης.

Η Mariotti (1999) αναφέρει ότι το κύριο χαρακτηριστικό των λογισμικών της γεωμετρίας είναι η δυναμική τους ιδιότητα, οι εικόνες μπορούν να σύρονται και να αλλάζουν υπό την επίδραση της σύρσης (dragging) διατηρώντας όμως κάποιες από τις σχέσεις που χαρακτηρίζουν τις αρχικές εικόνες, ιδίως εκείνες τις σχέσεις που καθορίζουν την κατασκευή τους. Ο μαθητής καθοδηγούμενος από τον καθηγητή μπορεί να κάνει έλεγχο και να διορθώσει άμεσα τυχόν λάθη και να κατασκευάσει μια απόδειξη.

Στη δεύτερη φάση οι μαθητές κλήθηκαν να πειραματιστούν με το σημείο Δ καθώς μπορεί και κινείται ελεύθερα πάνω στην ΑΒ, ενώ ενεργοποιώντας το ίχνος του σημείου Η εμφανίζεται η ευθεία πάνω στην οποία κινείται το Η (σχήμα 20) . Στο σημείο αυτό οι μαθητές θα έπρεπε να διαπιστώσουν ότι τι τετράγωνο γίνεται εγγεγραμμένο όταν το Η είναι σημείο της ΑΓ.



Σχήμα 20

Στόχος ήταν να επιβεβαιώσουν ότι η τέταρτη κορυφή βρίσκεται πάνω στην ευθεία ΒΗΛ ανεξαρτήτως της θέσης του Δ. Απαραίτητο ήταν να επαληθεύσουν την ορθότητα της κατασκευής, καθώς το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας δίνει την δυνατότητα να διατηρεί τις ιδιότητες του σχήματος όταν μεταβάλλεται ένα αντικείμενό του. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, όταν το σημείο Δ κινείται πάνω στην πλευρά ΑΒ το τετράγωνο ΔΗΖΕ δεν αλλάζει το σχήμα του. Οι μαθητές αναμέναμε να κινηθούν ανοδικά μεταξύ των δύο επιπέδων μέσω της εργαλειακής γένεσης και να εργαστούν στο επίπεδο [Sem-Ins]. Το λογισμικό Geogebra δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα πειραματισμού και οπτικοποίησης του θέματος. Επίσης δε ζητήθηκε να αιτιολογήσουν την απόδειξη της κατασκευής, κινήθηκαν στη Γεωμετρία Ι.

Στην παραπάνω δραστηριότητα το αρχείο Geogebra αποτέλεσε το εργαλείο με τη βοήθεια του οποίου δόθηκε έμφαση στην εγκυρότητα της κατασκευής του Pólya. Στη συνέχεια η δραστηριότητα κινείται στο σημειωτικό – λεκτικό επίπεδο, καθώς οι μαθητές έπρεπε να αναπτύξουν το συλλογισμό τους βασιζόμενοι στο σχήμα που βλέπουν, και να πειραματιστούν με το ελεύθερο μαθηματικό αντικείμενο, οπότε μετακινούμαστε στην εργαλειακή διάσταση και τέλος στη λεκτική διάσταση καθώς έπρεπε να περιγράψουν τις προϋποθέσεις, ώστε το τετράγωνο να γίνει εγγεγραμμένο.

Στην πρώτη φάση του τρίτου φύλλου εργασίας περιείχε τα βήματα της κατασκευής του τετραγώνου με τη μέθοδο Pólya, αυτή τη φορά με τη χρήση του κανόνα και διαβήτη. Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές να αποδείξουν ότι το τετράπλευρο που κατασκεύασαν με αυτόν τον τρόπο είναι τετράγωνο, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή και λαμβάνοντας υπόψιν τις ιδιότητες του τετραγώνου. Στόχος του ήταν να εμπλακούν οι μαθητές με τις γεωμετρικές κατασκευές και να αιτιολογήσουν την ακρίβεια της κατασκευής τους βασιζόμενοι σε γεωμετρικές προτάσεις και θεωρήματα.

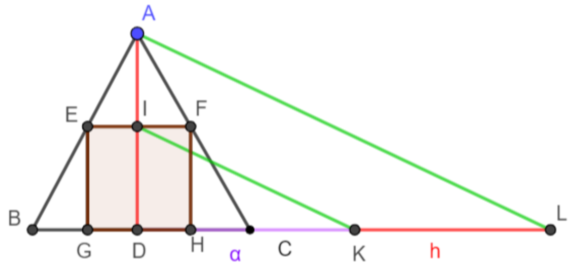
Η δραστηριότητα κινείται από την εργαλειακή γένεση, εφόσον τα τεχνουργήματα (κανόνας και διαβήτης) γίνονται εργαλεία για την κατασκευή, ενώ στη συνέχεια κινείται στη συλλογιστική γένεση και την απόδειξη στα πλαίσια της αιτιολόγησης της κατασκευής με τη βοήθεια του θεωρήματος. Εδώ οι μαθητές αναμέναμε να εργαστούν στο παράδειγμα Γεωμετρία ΙΙ.

Στο τέταρτο φύλλο εργασίας δίνεται ένα απόσπασμα από το μεταφρασμένο κείμενο το N. Chuquet που περιλαμβάνεται στο έργο του «*La Géométrie*» και απαιτείται η ερμηνεία του από τους μαθητές. Ζητείται να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς του ισόπλευρου τριγώνου στο οποίο έχει εγγραφεί τετράγωνο πλευράς μήκους 4. Η προσέγγιση του προβλήματος είναι συνδυασμός γεωμετρίας και άλγεβρας, εφαρμόζεται το Πυθαγόρειο θεώρημα και το θεώρημα Θαλή, επομένως μετά από αλγεβρικές πράξεις, το πρόβλημα ανάγεται σε πρόβλημα επίλυσης εξίσωσης πρώτου βαθμού. Η δυσκολίες που αντιμετωπίζουν συχνά οι μαθητές έγκειται στη διάκριση των δεδομένων από τα ζητούμενα, ιδίως όταν πρόκειται να χειριστούν αλγεβρικές παραστάσεις με αγνώστους και μεταβλητές, για το λόγο κρίθηκε απαραίτητο να γίνει η καθοδήγηση βήμα – βήμα ώστε να μπορούν να συμμετέχουν όλοι. Ακολουθεί ο σχεδιασμός του ισόπλευρου τριγώνου και του τετραγώνου, χωρίς να απαιτείται η αυστηρή κατασκευή του και η κατάστρωση της εξίσωσης από την οποία θα προκύψει η λύση του προβλήματος. Μέσα από τις απαντήσεις των μαθητών μπορεί να διαπιστωθεί σε ποιο βαθμό είναι ικανοί να εφαρμόζουν την άλγεβρα στο πλαίσιο της γεωμετρίας, να μπορούν να χειρίζονται αλγεβρικές πράξεις, γεωμετρικές σχέσεις, σχέσεις μηκών ευθυγράμμων τμημάτων και εμβαδών επιφανειών. Η δραστηριότητα που είναι κατά κύριο λόγο αλγεβρικής φύσεως, κινείται από το Επιστημολογικό επίπεδο στο Γνωστικό, από ένα συγκεκριμένο πλαίσιο αναφοράς προς την αποδεικτική διαδικασία μέσω της συλλογιστικής γένεσης. Εδώ είμαστε στο παράδειγμα Γεωμετρία ΙΙ.

Στο πέμπτο φύλλο εργασίας περιγράφεται η γεωμετρική κατασκευή του Louis Bourdon. Δίνονται τα δεδομένα του προβλήματος, που δεν είναι συγκεκριμένοι αριθμοί αλλά μεταβλητές, δηλαδή μια πλευρά του τριγώνου είναι ίση με α, το αντίστοιχο ύψος ίσο με h και ζητείται η πλευρά x του εγγεγραμμένου τετραγώνου συναρτήσει του α και του h. Οι μαθητές αναμέναμε να κινηθούν από το Επιστημολογικό επίπεδο στο Γνωστικό σε συγκεκριμένο πλαίσιο αναφοράς στην απόδειξη μέσω της συλλογιστικής γένεσης, στη Γεωμετρία ΙΙ.

Ακολουθεί η κατασκευή της πλευράς x ως η τέταρτη ανάλογος των α, h, α+h , μια δύσκολη κατασκευή καθώς απαιτείται να γίνει πάνω στο υπάρχον σχήμα· η τέταρτη ανάλογος είναι το τμήμα ID (σχ. 21). Εδώ λαμβάνει χώρα η εργαλειακή γένεση, από το τεχνούργημα στην κατασκευή, χρησιμοποιώντας επιχειρήματα που βασίζονται σε λογικό και παραγωγικό συλλογισμό, επομένως η δραστηριότητα κινείται και προς τη συλλογιστική γένεση. Εδώ βρισκόμαστε στο παράδειγμα Γεωμετρία ΙΙ.

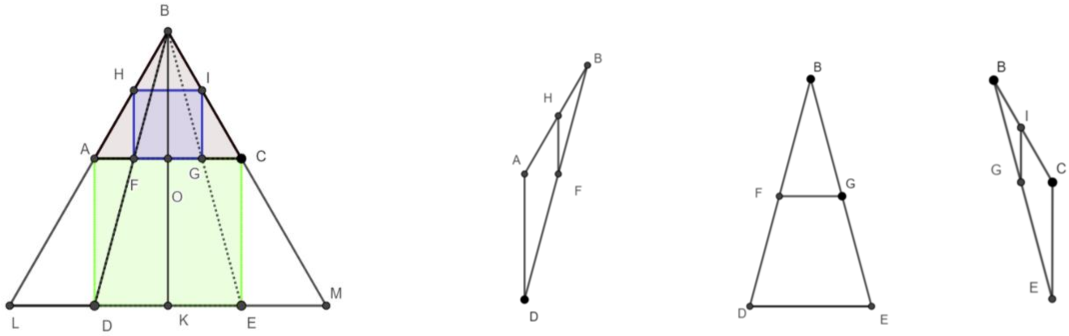
Στόχος του συγκεκριμένου φύλλου εργασίας είναι να διαπιστωθεί σε ποιο βαθμό είναι ικανοί οι μαθητές να κάνουν γεωμετρικές κατασκευές με κανόνα και διαβήτη και να τεκμηριώνουν την κατασκευή τους.



Σχήμα 21. Κατασκευή τέταρτης αναλόγου (L. Bourdon)

Η κατασκευή του τετραγώνου εγγεγραμμένου σε ισόπλευρο τρίγωνο, σύμφωνα με τη μία από τις δύο προσεγγίσεις του Samuel Marolois, περιγράφεται μεταφρασμένη από το έργο του «*Géométrie*» στο έκτο φύλλο εργασίας, απλοποιημένη ως ένα βαθμό, ώστε να είναι κατανοητό από τους μαθητές. Η κατασκευή του ζητούμενου τετραγώνου βασίζεται κυρίως στον κανόνα και η λύση του στο θεώρημα του Θαλή, την ομοιότητα τριγώνων και τις ιδιότητες του τετραγώνου. Στόχος είναι να διαπιστωθεί σε ποιο βαθμό είναι ικανοί οι μαθητές να διαχειριστούν πολύπλοκα γεωμετρικά σχήματα ώστε να αποδείξουν το ζητούμενο.

Δίνεται το μεταφρασμένο κείμενο, οπότε οι μαθητές αναμέναμε να κατασκευάσουν το σχήμα ακολουθώντας τις οδηγίες, συγκεκριμένα το ισόπλευρο τρίγωνο**,** ένα τετράγωνο εξωτερικό του τριγώνου με πλευρά την πλευρά του τριγώνου, ώστε να προκύψουν παράλληλες ευθείες, να φέρουν κάθετες στην AC στα σημεία F και G και να σχηματίσουν το τετράπλευρο HIGF το οποίο πρέπει να αποδείξουν ότι είναι τετράγωνο. Το σχήμα που προκύπτει είναι αρκετά πολύπλοκο, οπότε απομονώθηκαν τα επιμέρους σχήματα ώστε να αναγνωριστούν καλύτερα οι παράλληλες ευθείες. Στόχος του έκτου φύλλου εργασίας είναι να διερευνηθεί αν οι μαθητές μπορούν να αποδείξουν ότι το τετράπλευρο που κατασκευάστηκε με τον συγκεκριμένο τρόπο είναι τετράγωνο.



Εδώ οι μαθητές θα έπρεπε να κινηθούν από την εργαλειακή στη σημειωτική και τη συλλογιστική γένεση. Αρκεί να κατασκευάσουν το σχήμα και στη συνέχεια με τη βοήθεια της αναπαράστασης του σχήματος να προχωρήσουν στην απόδειξη του προβλήματος. Εδώ βρισκόμαστε στο παράδειγμα Γεωμετρία ΙΙ.

Η επίλυση του προβλήματος από τον Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi αναπτύσσεται στο έβδομο φύλλο και περιγράφεται μεταφρασμένο από το βιβλίο του συγγραφέα. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ένα ισοσκελές τρίγωνο με δεδομένα τα μήκη των πλευρών του και θεωρούμε ένα τετράγωνο πλευράς x εγγεγραμμένο στο τρίγωνο του οποίου η πλευρά ζητείται να υπολογιστεί.

Αρχικά ζητείται να υπολογιστεί το ύψος του τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση του και το εμβαδόν του. Στη συνέχεια αφού αποδειχθεί η ισότητα των δύο ορθογωνίων τριγώνων, ζητείται να υπολογιστούν τα εμβαδά των σχημάτων στα οποία έχει διαμεριστεί το αρχικό τρίγωνο. Η λύση του βασίζεται στην κατάστρωση εξίσωσης δευτέρου βαθμού με άγνωστο x την πλευρά του τετραγώνου που τελικά ανάγεται σε εξίσωση πρώτου βαθμού.

Η μέθοδος είναι υπολογιστική, η όλη διαδικασία θεωρείται σχετικά εύκολη και δεν απαιτείται η κατασκευή του τετραγώνου παρά μόνο υπολογίζεται η πλευρά του. Με τη μέθοδο αυτή διαπιστώνουμε τις δυνατότητες και τις αδυναμίες των μαθητών να συνδυάζουν άλγεβρα και γεωμετρία στην επίλυση ενός προβλήματος.

Σε αυτήν την δραστηριότητα η κίνηση είναι στη σημειωτική και στη συλλογιστική γένεση με έμφαση στην αποδεικτική διαδικασία. Βρισκόμαστε στο παράδειγμα Γεωμετρία ΙΙ.

5.5.3 Post-test

Μετά το πέρας της διδακτικής παρέμβασης δόθηκε στους μαθητές ένα γνωστικό διαγώνισμα (post-test) με δύο εργασίες. Η πρώτη εργασία αφορούσε στο πρόβλημα που διαπραγματευτήκαμε καθ’ όλη τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, ενώ η δεύτερη αφορούσε στην κατασκευή τετραγώνου εγγεγραμμένου σε ημικύκλιο, ένα πρόβλημα για το οποίο δεν είχε προηγηθεί κάποια διδασκαλία, αλλά ούτε είχε γίνει κάποια σχετική αναφορά. Ζητείται η επίλυση του πρώτου γνωστού προβλήματος ώστε να διαπιστωθεί εάν και κατά πόσο υπάρχει βελτίωση των μαθητών στη διαχείριση του προβλήματος που διαπραγματευτήκαμε, ποια μέθοδο θεώρησαν πιο προσιτή για τον καθένα, καθώς και αν μελέτησαν όσα είχαν διδαχθεί. Ο στόχος του δεύτερου προβλήματος είναι να δούμε αν τελικά οι μαθητές αποκόμισαν κάποια οφέλη από τη διδακτική παρέμβαση, αν κατανόησαν τι σημαίνει εγγραφή τετραγώνου σε επίπεδο σχήμα (εδώ ημικύκλιο), αν είχαν κάποιες ιδέες για την επίλυσή του και αν επιχείρησαν να εφαρμόσουν κάποια μέθοδο παρόμοια με αυτές που προηγήθηκαν ώστε να αιτιολογήσουν την κατασκευή τους.

5.5.4 Ερωτηματολόγια

Αφού ολοκληρώθηκαν όλες οι εργασίες, δόθηκαν στους μαθητές τρία ερωτηματολόγια (παρατίθενται στο παράρτημα) τα οποία απαντήθηκαν ατομικά και ανώνυμα σε μία διδακτική ώρα.

Το πρώτο ερωτηματολόγιο περιείχε ερωτήσεις σχετικά με τη γεωμετρία, τις επιδόσεις τους, σε ποιο βαθμό αντιμετωπίζουν δυσκολίες στο μάθημα αυτό, αν είναι εξοικειωμένοι με τις γεωμετρικές κατασκευές και πόσο συνέβαλε η διδακτική παρέμβαση στη βελτίωσή τους.

Το δεύτερο ερωτηματολόγιο αφορά στην προτίμηση που έδειξαν για τις διαφορετικές προσεγγίσεις του προβλήματος, ενώ το τρίτο αποτελείται από δύο ερωτήσεις που σχετίζονται με την ενσωμάτωση της ιστορίας στη συγκεκριμένη παρέμβαση και σε άλλα μαθήματα των μαθηματικών.

5.6 Εγκυρότητα, αξιοπιστία

Στην έρευνα συμμετείχαν μαθητές διαφορετικών επιδόσεων στα μαθηματικά. Το δείγμα δεν είναι τυχαίο, έγινε δειγματοληψία ευκολίας, το δείγμα προσφέρθηκε εύκολα διότι έχουμε άμεση πρόσβαση σ' αυτό, καθώς η ερευνήτρια διδάσκει στο συγκεκριμένο τμήμα. Λόγω του μικρού μεγέθους του δείγματος, η παρούσα έρευνα δεν επιτρέπει την εξαγωγή γενικευμένων συμπερασμάτων. Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν έχει διεξαχθεί παρόμοια έρευνα στην Ελλάδα και η έρευνά μας βασίζεται σε εργαλεία και ευρήματα της έρευνας των Barbin et al. (2018).

Κεφάλαιο 6ο Αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε συνοπτικά τα ευρήματα της έρευνας που προέκυψαν από τη διδακτική παρέμβαση για τα 11 ζευγάρια του δείγματός μας, για κάθε φύλλο εργασίας και για τα δύο τεστ χωριστά. Περιγράφουμε τις προσπάθειές τους, τις αδυναμίες, τις δυσκολίες τους, και αξιολογούμε τα έργα τους σύμφωνα με τον προσωπικό ΓΧΕ τους. Οι μαθητές, που εργάστηκαν με βάση το θεωρητικό πλαίσιο της γνωστικής ενότητας, μετασχημάτισαν το τεχνούργημα (το λογισμικό ή τον κανόνα και διαβήτη) σε εργαλείο ώστε να κάνουν κατασκευές και τεκμηρίωσαν με αποδείξεις τα συμπεράσματά τους, κινήθηκαν στο παράδειγμα Γεωμετρία ΙΙ. Όσοι δεν κατάφεραν να αποδείξουν το ζητούμενο του προβλήματος με παραγωγική σκέψη, αλλά αρκέστηκαν στη διαίσθησή τους κινήθηκαν στη Γεωμετρία Ι.

Στο τέλος καταγράφουμε τα αποτελέσματα των τριών ερωτηματολογίων που αφορούν το μάθημα της γεωμετρίας και τις γεωμετρικές κατασκευές γενικότερα, αλλά και ειδικότερα σε σχέση με το πρόβλημά μας, την ενσωμάτωση της ιστορίας στα μαθηματικά και την γνώμη τους για τις διαφορετικές προσεγγίσεις του προβλήματος.

6.1 Αποτελέσματα του pre-test

Στους μαθητές δόθηκε ένα διαγνωστικό τεστ, όπου αρχικά ζητήθηκε να σχεδιάσουν ελεύθερα ένα τετράγωνο εγγεγραμμένο σε τρίγωνο, χωρίς να τους δοθεί κάποια επιπλέον πληροφορία ή διευκρίνηση. Στη συνέχεια ζητήθηκε να απαντήσουν στην ερώτηση : « *Τι ονομάζουμε εγγεγραμμένο τετράγωνο σε τρίγωνο*».

Έδρασαν αυθόρμητα, χωρίς καμία παρέμβαση ή κάποιο σχόλιο από την εκπαιδευτικό για την κατασκευή τους. Αυτή η ελευθερία κινήσεων χωρίς άγχος, ωφέλησε τους μαθητές και απέκτησαν διάθεση για συμμετοχή και εμπλοκή στη διαδικασία.

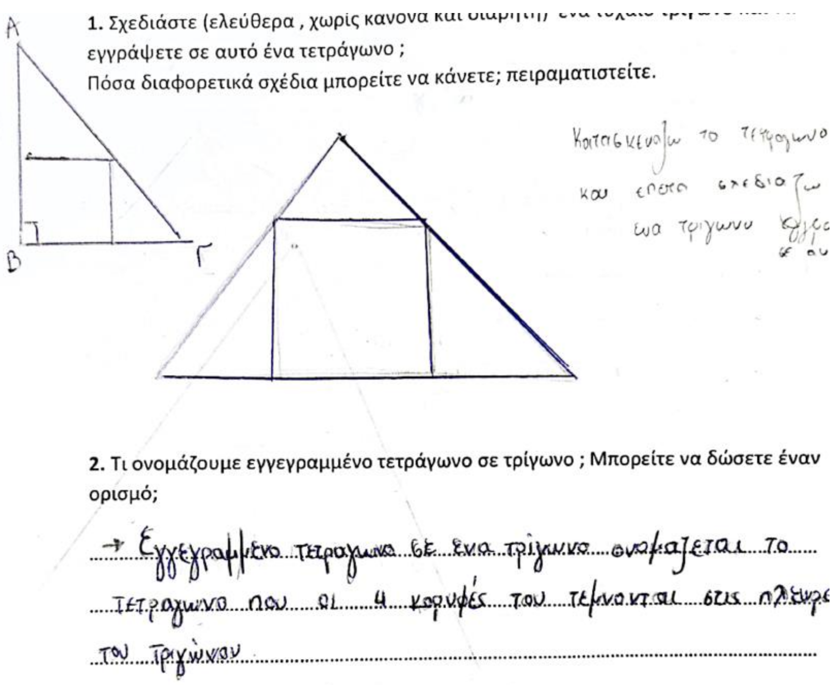
Αυτό που παρατηρήθηκε είναι ότι υπάρχει σύγχυση μεταξύ των εννοιών της κορυφής και της γωνίας ενός σχήματος και επίσης ότι δεν είναι ξεκάθαρο ποια σχήματα είναι εγγεγραμμένα, εγγράψιμα , περιγεγραμμένα και περιγράψιμα σε άλλα σχήματα. Μια ομάδα μαθητριών (ομάδα 2) καλής επίδοσης στα μαθηματικά, η Δέσποινα και η Άρτεμις, σχεδίασε διάφορα σχήματα όπως εγγεγραμμένο κύκλο σε τετράγωνο, εγγεγραμμένο τετράγωνο σε κύκλο, σε ορθογώνιο, σε ρόμβο και σε τρίγωνο. Όταν ρωτήθηκαν γιατί σχεδίασαν και κύκλους η απάντηση ήταν: «*Σκεφτήκαμε να σχεδιάσουμε εγγεγραμμένο και περιγεγραμμένο κύκλο γιατί έχουμε μάθει να σχεδιάζουμε εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σχήματα χρησιμοποιώντας τον κύκλο*». Ωστόσο έδωσαν το σωστό ορισμό του εγγεγραμμένου τετραγώνου σε τρίγωνο.

Η Κάτια και η Έλενα (ομάδα 1), επίσης μαθήτριες καλής επίδοσης και με άνεση στα μαθηματικά, σημείωσαν ότι: «*κατασκευάζω πρώτα ένα τετράγωνο και στη συνέχεια ένα τρίγωνο εγγράψιμο σε αυτό»*. Η κατασκευή είναι φυσικά σωστή, όμως υπάρχει παρανόηση στις έννοιες εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου σχήματος. Αυτή τη μέθοδο ακολούθησαν και οι μαθήτριες Ρεβέκκα και Αργυρώ, οι οποίες χαρακτηριστικά σημείωσαν: «*Για να κατασκευάσουμε ένα σωστό τετράγωνο μέσα σε ένα τρίγωνο, θα σχεδιάσουμε πρώτα το τετράγωνο (για να είμαστε σίγουροι ότι όλες οι πλευρές είναι ίσες) και ύστερα το τρίγωνο*». Εδώ παρατηρούμε ότι οι δύο μαθήτριες θεωρούν βασικό στοιχείο της κατασκευής να είναι όλες οι πλευρές ίσες.

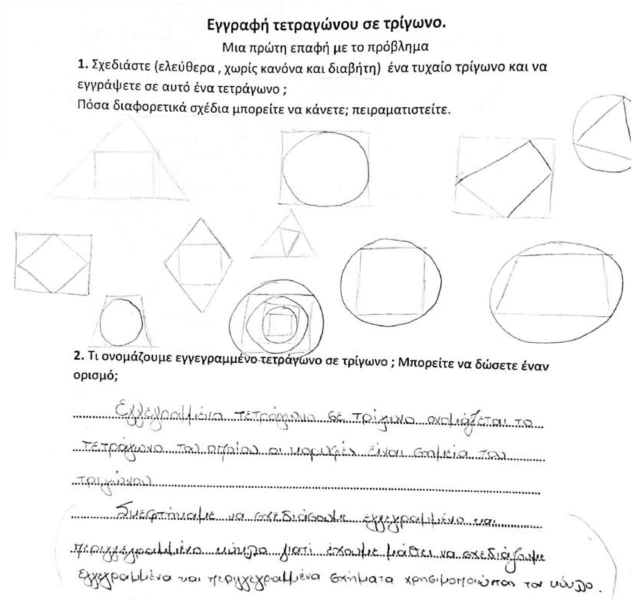
Επίσης στη δεύτερη ερώτηση δόθηκε μια λανθασμένη έκφραση : «…….*οι κορυφές του τετραγώνου τέμνονται στις πλευρές του τριγώνου».* Παρόμοιες απαντήσεις δόθηκαν στην ερώτηση αυτή όπως : «……….*οι γωνίες και οι πλευρές του τέμνουν το τρίγωνο*» ή «*οι κορυφές εφάπτονται στις πλευρές του τριγώνου*». Επί του συνόλου των ομάδων , τρείς ομάδες απάντησαν σωστά, ενώ οι υπόλοιπες δεν διατύπωσαν σωστά τη σκέψη τους. Είναι φανερό ότι οι μαθητές παρουσιάζουν πρόβλημα στην έκφραση προτάσεων, ορισμών, θεωρημάτων και γενικά δεν μπορούν να διακρίνουν τα μαθηματικά αντικείμενα. Υπήρχαν δύο ομάδες, με κάποιους καλούς μαθητές, που δεν είχαν διάθεση για συνεργασία, ωστόσο με την επιμονή της εκπαιδευτικού ασχολήθηκαν και ανέκτησαν το ενδιαφέρον τους.

Συνοψίζοντας, 7 ομάδες σχεδίασαν μόνο σωστά σχήματα, 4 ομάδες σχεδίασαν και σωστά και λανθασμένα σχήματα, ενώ 8 από τις 11 ομάδες δεν κατάφεραν να δώσουν ένα σωστό ορισμό για το εγγεγραμμένο τετράγωνο σε τρίγωνο.

Στο στάδιο αυτό οι μαθητές δεν κατάφεραν να κινηθούν από τη σημειωτική γένεση στην εργαλειακή μέσα από την κατασκευαστική διαδικασία, καθώς περιορίστηκαν στα πλαίσια της οπτικοποίησης και αναπαράστασης. Ο ΓΧΕ των μαθητών είναι η Γεωμετρία Ι, γιατί η πηγή της επικύρωσης των αποτελεσμάτων τους ήταν η αντίληψη που έχουν από την εμπειρία τους. Βλέποντας το σχήμα που έχουν σχεδιάσει, αρκούνται στην οπτική απόδειξη ότι είναι τετράγωνο.



Εικόνα 23. Απαντήσεις στο pre-test της ομάδας 1 (Κάτια – Έλενα)



Εγγραφή τετραγώνου σε τρίγωνο.

Μια πρώτη επαφή με το πρόβλημα

1. Σχεδιάστε (ελεύθερα , χωρίς κανόνα και διαβήτη) ένα τυχαίο τρίγωνο και να εγγράψετε σε αυτό ένα τετράγωνο ;

Πόσα διαφορετικά σχέδια μπορείτε να κάνετε; πειραματιστείτε.

2. Τι ονομάζουμε εγγεγραμμένο τετράγωνο σε τρίγωνο ; Μπορείτε να δώσετε έναν ορισμό;

Εγγεγραμμένο τετράγωνο σε τρίγωνο ονομάζεται το τετράγωνο του οποίου οι κορυφές είναι σημεία του τριγώνου.

Σκεφτήκαμε να σχεδιάσουμε εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα κύκλο γιατί έχουμε μάθει να σχεδιάζουμε εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σχήματα χρησιμοποιώντας τον κύκλο.

Εικόνα 24. Απαντήσεις στο pre-test της ομάδας 2 (Δέσποινα – Άρτεμις)

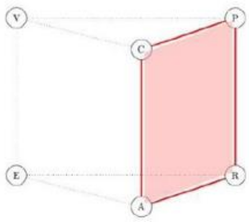
6.2 Αποτελέσματα του 1ου φύλλου εργασίας

Στην πρώτη ερώτηση οι μαθητές δίστασαν να ορίσουν την τέταρτη ανάλογο (δ) των α, β, και γ παρόλο που προηγήθηκε η διδασκαλία της κατασκευής της στην τάξη. Στην επόμενη ερώτηση έπρεπε να κατασκευάσουν το τμήμα που ορίζεται ως η τέταρτη ανάλογος των τμημάτων α, β και γ. Η δυσκολία που αντιμετώπισαν δεν ήταν αναμενόμενη, για το λόγο αυτό ήταν αναγκαία η επέμβαση της εκπαιδευτικού σε κάθε βήμα. Το μεγαλύτερο πρόβλημα παρατηρήθηκε στην έναρξη της κατασκευής, δεν ήξεραν πως να ξεκινήσουν. Κάποιοι δυσκολεύτηκαν να χρησιμοποιήσουν το διαβήτη και επιχείρησαν να μετρήσουν τα μήκη των τμημάτων με το χάρακα ώστε να κατασκευάσουν ίσα τμήματα. Τους δόθηκαν επιπλέον οδηγίες για το χειρισμό του διαβήτη, πως να αξιοποιήσουν τα τμήματα α, β και γ, χωρίς να μετρήσουν τα μήκη τους και πως να «μεταφέρουν» τα τμήματα αυτά στις αντίστοιχες ημιευθείες, ώστε να εφαρμόσουν το θεώρημα του Θαλή. Στο τέλος τα κατάφεραν όλοι με επιτυχία αλλά χρειάστηκαν αρκετό χρόνο.

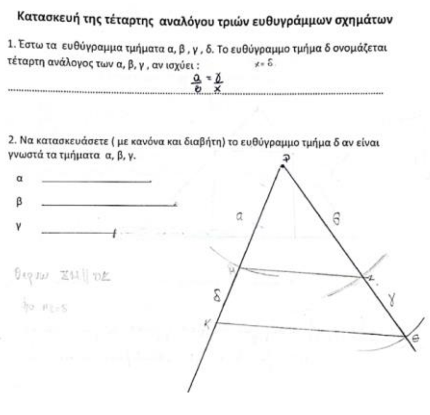
Στη δεύτερη φάση οι μαθητές πραγματεύτηκαν την κατασκευή της τέταρτης αναλόγου των τμημάτων α, β, α + β (χρειάζεται στις κατασκευές που θα ακολουθούσαν), όπου παρατηρείται σημαντική βελτίωση σε σχέση με την πρώτη κατασκευή. Οι μαθητές είχαν αντιληφθεί τι έπρεπε να κάνουν, ενώ η δυσκολία τους περιορίστηκε στο πως να ορίσουν το τμήμα α + β στο σχήμα που θα κατασκεύαζαν.

Συνοψίζοντας, όλες οι ομάδες έκαναν την πρώτη κατασκευή με επιτυχία μόνο κατόπιν της παρέμβασης της εκπαιδευτικού. Αντιμετώπισαν δυσκολία στον τρόπο έναρξης, στη χρήση του διαβήτη, κάποιοι έκαναν μετρήσεις με βαθμονομημένο χάρακα. Όσον αφορά τη δεύτερη κατασκευή, όλες οι ομάδες (εκτός από τις 1 και 2) δυσκολεύτηκαν στο σημείο που έπρεπε να ορίσουν το άθροισμα: α + β στο σχήμα που θα κατασκεύαζαν.

Με παρότρυνση και καθοδήγηση (τονίστηκε ότι αντί για το τμήμα γ έχουμε το τμήμα α + β), κατάφεραν τελικά, να κινηθούν στο επίπεδο [Ins-Dis], δηλαδή να κινηθούν από το γνωστικό στο επιστημολογικό επίπεδο και από την εργαλειακή γένεση (με εργαλεία τον κανόνα και διαβήτη) στη συλλογιστική, κάνοντας μια γεωμετρική κατασκευή με συγκεκριμένα μεθοδολογικά βήματα και εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή απέδειξαν την αναλογία : $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{x}$ που ήταν το ζητούμενο στις κατασκευές αυτές· δύο ομάδες τα κατάφεραν χωρίς καμία παρέμβαση.



[Ins-Dis]


Κατασκευή της τέταρτης αναλόγου τριών ευθυγράμμων σχημάτων

1. Έστω τα ευθύγραμμα τμήματα α, β , γ , δ. Το ευθύγραμμο τμήμα δ ονομάζεται τέταρτη ανάλογος των α, β, γ , αν ισχύει : $x = \delta$

$\frac{a}{b} = \frac{\gamma}{x}$

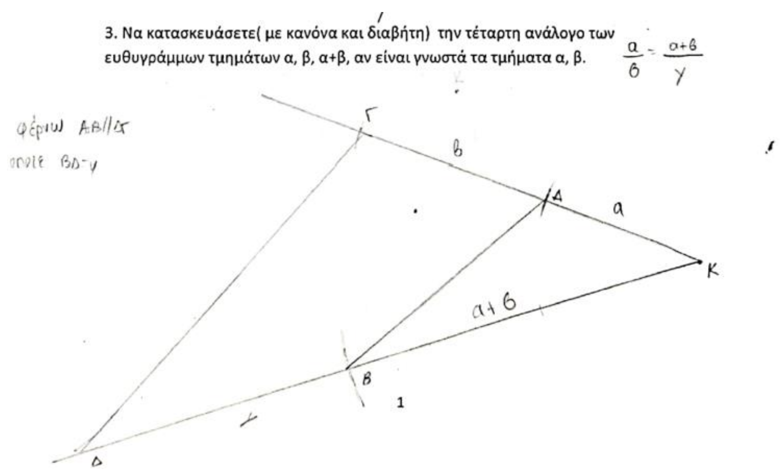
2. Να κατασκευάσετε (με κανόνα και διαβήτη) το ευθύγραμμο τμήμα δ αν είναι γνωστά τα τμήματα α, β, γ.

α

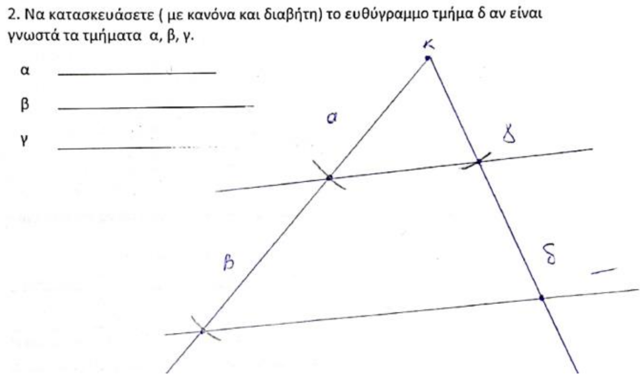
β

γ

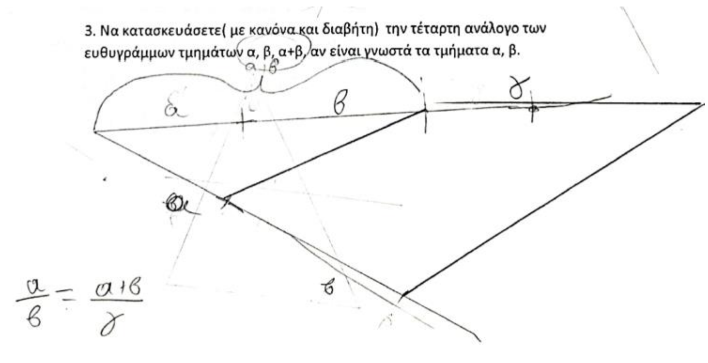
Εικόνα 25. Κατασκευή της $4^{ης}$ αναλόγου των α, β, γ (ομάδα 1)



Εικόνα 26. Κατασκευή της 4ης αναλόγου των α, β, α + β (ομάδα 1)



Εικόνα 27. Κατασκευή της 4ης αναλόγου των α, β, γ (ομάδα 6, Νίκος- Ορέστης)



Εικόνα 28. Κατασκευή της 4ης αναλόγου των α, β, α + β (ομάδα 6)

6.3 Αποτελέσματα του 2ου φύλλου εργασίας

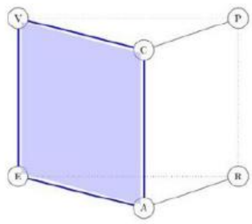
Το 2ο φύλλο εργασίας συμπληρώθηκε στο εργαστήριο πληροφορικής. Κάθε ζευγάρι είχε τη δυνατότητα να εργαστεί στον υπολογιστή και συγκεκριμένα με το λογισμικό Geogebra. Στόχος ήταν να εγγραφεί τετράγωνο σε τυχαίο τρίγωνο με τη μέθοδο του Pólya. Ακολουθώντας τα βήματα του φύλλου εργασίας, εύκολα κατασκεύασαν αρχικά ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ, αντιμετώπισαν ωστόσο δυσκολίες στην αυστηρή κατασκευή του πρώτου τετραγώνου, όπου η μία κορυφή του είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου. Τρείς ομάδες ξεκίνησαν την κατασκευή του χρησιμοποιώντας το έτοιμο εργαλείο κατασκευής κανονικών πολυγώνων, ενώ κάποιες ομάδες δε σημείωσαν σωστά το σημείο Δ πάνω στην ΑΒ με αποτέλεσμα να προκύπτει λάθος κατασκευή. Σε γενικές γραμμές καταγράφεται ελάχιστη ευχέρεια χρήσης του λογισμικού, παρά το γεγονός ότι προηγήθηκαν κάποια μαθήματα. Δύο μαθήτριες της ίδιας ομάδας θεώρησαν ότι κατασκεύασαν το τετράγωνο, εφόσον όλες οι πλευρές του ήταν ίσες, παρέλειψαν όμως το ότι απαιτείται οι γωνίες του να είναι ορθές. Οι περισσότεροι θεώρησαν ότι η κατασκευή που έκαναν προσεγγίζει το τετράγωνο χωρίς να τεκμηριώνουν, απλά γιατί «*έτσι φαίνεται*». Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι η λανθασμένη κατασκευή διαπιστώθηκε κατά την μετακίνηση του ελεύθερου σημείου Δ πάνω στην ΑΒ. Αυτό το πλεονέκτημα μας παρέχει το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, σε αντίθεση με το σχεδιασμό με χαρτί και μολύβι.

Οι ομάδες που δυσκολεύτηκαν, έλαβαν βοήθεια από την καθηγήτρια, η οποία στο τέλος τους υποδείκνυε τα βήματα εξατομικευμένα, δείχνοντας ποια εργαλεία του λογισμικού που έπρεπε να αξιοποιήσουν, ώστε να σχεδιαστεί το βοηθητικό τετράγωνο˙ διαφορετικά θα ήταν αδύνατο να ολοκληρώσουν τη δραστηριότητα.

Στην ερώτηση αν η κατασκευή πληροί όλες τις προϋποθέσεις ώστε το τετράγωνο να είναι εγγράψιμο, όλοι απάντησαν σωστά, ότι η τέταρτη κορυφή (Η) δεν είναι σημείο κάποιας πλευράς του τριγώνου και επομένως το τετράγωνο δεν είναι εγγεγραμμένο. Στο επόμενο βήμα τους ζητήθηκε να ενεργοποιήσουν το ίχνος του σημείου Η και να παρατηρήσουν τι συμβαίνει με το τετράγωνο. Εύκολα διαπίστωσαν όλοι ότι το τετράγωνο γίνεται εγγεγραμμένο όταν το Η είναι σημείο της πλευράς ΑΓ, με αυτόν τον τρόπο παρακινήθηκε το ενδιαφέρον των μαθητών καθώς δόθηκε κίνηση στο σχήμα. Έτσι ήταν εύκολο να διαπιστώσουν ότι το σημείο Η κινείται πάνω σε ευθεία που διέρχεται από το Β.

Συνοψίζοντας παρατηρήσαμε ότι όλες οι ομάδες αντιμετώπισαν δυσκολίες στην αυστηρή κατασκευή του πρώτου τετραγώνου, τρείς ομάδες χρησιμοποίησαν έτοιμο εργαλείο κατασκευής κανονικών πολυγώνων, ενώ παρακινήθηκε το ενδιαφέρον των μαθητών καθώς δόθηκε κίνηση στο σχήμα.

Οι μαθητές κατάφεραν με επιτυχία να κινηθούν ανοδικά μεταξύ των δύο επιπέδων μέσω της εργαλειακής γένεσης, το λογισμικό αποτέλεσε το εργαλείο για τη συγκεκριμένη δραστηριότητα, ενώ εργάστηκαν στο επίπεδο [Sem-Ins] που σχετίζεται με τη σημειωτική και την εργαλειακή γένεση, καθώς δεν είχε ζητηθεί να κάνουν αποδείξεις βάσει κάποιου θεωρητικού πλαισίου. Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας προσφέρουν τη δυνατότητα δυναμικών αποδείξεων. Εδώ τα οπτικά στηρίγματα της γεωμετρίας είναι τα σχήματα (Duval, 2005).



[Sem-Ins]

6.4 Αποτελέσματα του 3ου φύλλου εργασίας

Στην πρώτη φάση του τρίτου φύλλου εργασίας αναλύεται η κατασκευή του Pólya με κανόνα και διαβήτη. Αφού γνωρίζουν τη διαδικασία από την προηγούμενη δραστηριότητα κατάφεραν να σχεδιάσουν το τετράπλευρο ΘΛΚΜ, ενώ στη δεύτερη φάση και στο πρώτο βήμα, οι ομάδες έπρεπε να βρουν το είδος του τετραπλεύρου ΘΛΚΜ και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Λόγω κατασκευής το ΘΛΚΜ είναι ορθογώνιο, και έπρεπε να αποδείξουν ότι έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες ώστε να είναι τετράγωνο. Οι απαντήσεις που έδωσαν φανερώνουν ότι υπήρξε αδυναμία να εξηγήσουν ότι είναι τετράγωνο ή το θεώρησαν δεδομένο, λόγω της οπτικής τους αντίληψης.

Αφού συμφωνήσαμε μετά από συζήτηση ότι είναι ορθογώνιο και χρειάζεται να αποδείξουν ότι έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες ώστε να είναι τετράγωνο, διαπιστώθηκε ότι παρουσίασαν δυσκολίες στη στρατηγική που έπρεπε να ακολουθήσουν. Παρόλο που οι οδηγίες ήταν σαφείς και η εκπαιδευτικός επενέβη όπου ήταν απαραίτητο, ελάχιστοι μαθητές κατάφεραν να ολοκληρώσουν την απόδειξη μόνοι τους.

Η Έλενα και η Κάτια (ομάδα 1) απέδειξαν ότι το τετράπλευρο ΘΛΚΜ είναι ορθογώνιο λόγω κατασκευής (σχ. 29) και επιχείρησαν να αποδείξουν ότι είναι ρόμβος, όμως χωρίς επιτυχία. Συγκεκριμένα σύγκριναν τα τρίγωνα ΘΛΜ και ΛΚΜ, απέδειξαν ότι είναι ίσα, όμως θεώρησαν ότι οι γωνίες $\widehat{ΜΛΚ}$ και $\widehat{ΜΛΘ}$ είναι ίσες, χωρίς να προσέξουν ότι οι γωνίες αυτές δεν βρίσκονται απέναντι από τις αντίστοιχες ίσες πλευρές των τριγώνων. Συγκεκριμένα η Κάτια επέμενε στον ισχυρισμό της λέγοντας: « *Μα εφόσον τα τρίγωνα ΘΛΜ και ΛΚΜ είναι ορθογώνια και ίσα, πως γίνεται να μην είναι τετράγωνο;*» Στο σημείο αυτό δόθηκε έμφαση από την καθηγήτρια στην ιδιότητα του τετραγώνου (είναι ορθογώνιο και έχει τις διαδοχικές πλευρές του ίσες), οπότε και πείστηκαν οι δύο μαθήτριες και προχώρησαν στην απόδειξη εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή.

Η ομάδα 2 της Δέσποινας και της Άρτεμης απέδειξε ότι το ΘΛΚΜ είναι ορθογώνιο και στη συνέχεια μετρώντας με το χάρακα διαπίστωσαν ότι έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Δεν σκέφτηκαν ότι έπρεπε να χρησιμοποιήσουν ως δεδομένο ότι το αρχικό τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι τετράγωνο. Στο σημείο αυτό η εκπαιδευτικός τους εφιστά την προσοχή στην ισότητα των πλευρών του ΔΕΖΗ για να τη χρησιμοποιήσουν κατάλληλα και εφαρμόζοντας τη σωστή αποδεικτική μέθοδο, να αποδείξουν το ζητούμενο, δηλαδή ότι το ΘΛΚΜ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, όπως και έγινε. Παρόμοια βήματα ακολούθησαν οι Νίκη και η Βίβιαν (ομάδα 3) και συγκεκριμένα έγραψαν: «*Αρχικά μοιάζει με τετράγωνο, όμως είναι σίγουρα ορθογώνιο*», αιτιολογώντας την απάντησή τους λόγω κατασκευής.

Όμοια εργάστηκε και η Αμιρσώ με τη Φωτεινή (ομάδα 5), οι οποίες απέδειξαν ότι είναι ορθογώνιο και ανέφεραν τις προϋποθέσεις ώστε να είναι τετράγωνο.

Και οι δύο ομάδες έφτασαν περίπου στο ίδιο σημείο, έγραψαν σωστά τις αναλογίες που προκύπτουν από τις παραλληλίες, όμως δυσκολεύτηκαν να συνδυάσουν τα αποτελέσματά τους με το τετράγωνο ΕΔΖΗ, τελικά κατάφεραν να αποδείξουν το ζητούμενο.

Ο Χάρης και ο Μάριος (ομάδα 4) έγραψαν ότι αρκεί να αποδείξουν, ότι το τετράπλευρο έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, χωρίς όμως να επισημαίνουν ότι είναι ορθογώνιο. Έγραψαν σωστά τις αναλογίες**,** όμως δεν κατάφεραν να αποδείξουν έως τέλος το ζητούμενο.

Ο Ορέστης και ο Νικόλας (ομάδα 6) έδωσαν την εξής ενδιαφέρουσα απάντηση: « *Είναι σίγουρα τετράγωνο γιατί το καινούργιο τετράγωνο είναι το ίχνος του παλιού*». Δεν εφάρμοσαν το θεώρημα Θαλή, οπότε και δεν κατάφεραν να φτάσουν στη λύση.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης η απάντηση των κοριτσιών Ρεβέκκας και Αργυρώς (ομάδα7): « *Είναι τετράγωνο γιατί είδαμε στο Geogebra ότι είχε βγει τετράγωνο*». Ακολούθησαν τα βήματα του φύλλου εργασίας ως ένα σημείο και εφάρμοσαν το θεώρημα Θαλή χωρίς όμως να καταλήξουν στο σε κάποιο αποτέλεσμα.

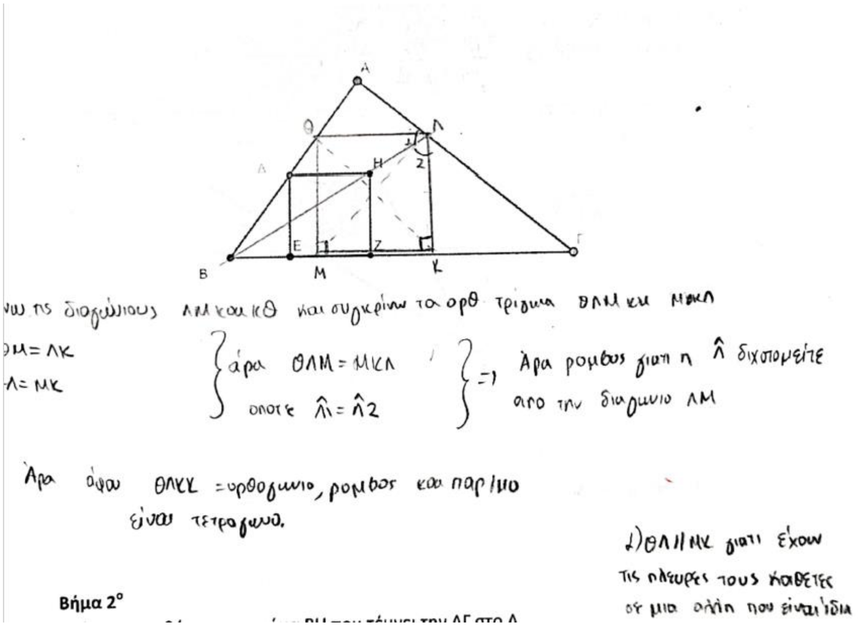
Η ομάδα 8 (Βασίλης -Ελένη) έδωσε την ελλιπή απάντηση ότι το ΘΛΚΜ είναι τετράγωνο γιατί έχει όλες τις γωνίες ορθές έγραψαν τις αναλογίες, όμως δεν κατέληξαν σε κάποιο συμπέρασμα.

Η Κορίνα και η Ιωάννα (ομάδα 9) αιτιολόγησαν σωστά ότι είναι ορθογώνιο γιατί έχει τις πλευρές του παράλληλες και δύο ορθές γωνίες, έγραψαν τις αναλογίες χωρίς να γράψουν κάποιο συμπέρασμα.

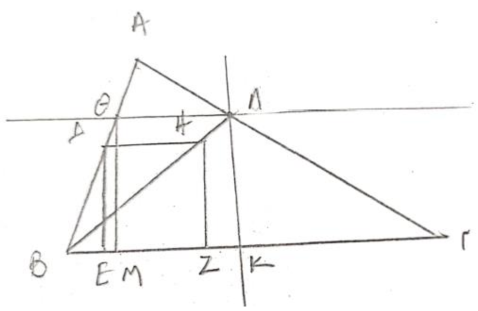
Ο Ιάκωβος και ο Γιώργος (ομάδα 10) σημείωσαν ότι το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο επειδή έχει παράλληλες πλευρές, έγραψαν τις αναλογίες, όμως δεν συνέχισαν στην απόδειξη του ζητούμενου.

Η Μαρία και η Άννα (ομάδα 11) έκαναν σωστά το σχήμα και απέδειξαν ότι είναι ορθογώνιο όμως δεν προχώρησαν σωστά στις αναλογίες.

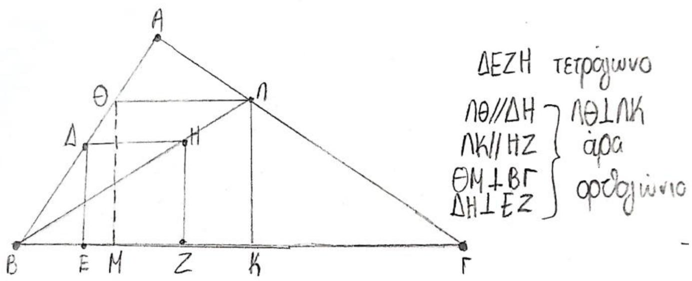
Επίσης τρεις ομάδες (2, 4, 5) έγραψαν: «*Το τετράπλευρο που σχηματίστηκε είναι τετράγωνο καθώς μετρώντας με το χάρακα οι πλευρές είναι ίσες*».



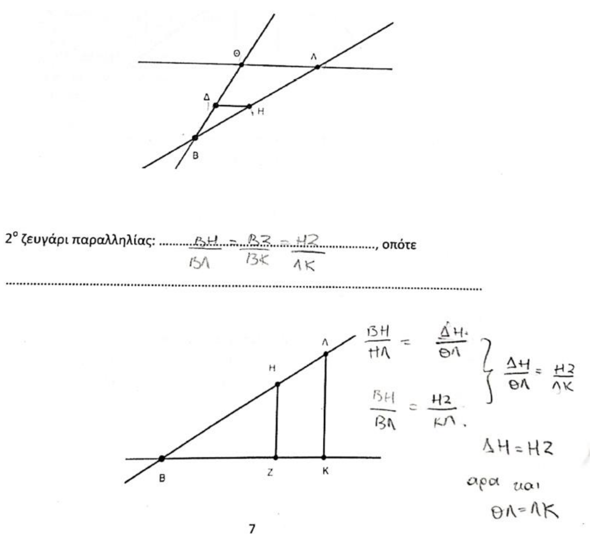
Εικόνα 29. Σχήμα της ομάδας 1



Εικόνα 30. Σχήμα της ομάδας 4



Εικόνα 31. Σχήμα της ομάδας 11

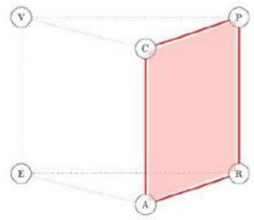


Εικόνα 32. Απόδειξη της ομάδας 2

Συνοψίζοντας, παρατηρούμε ότι καμία ομάδα δεν έκανε ολοκληρωμένη την απόδειξη χωρίς βοήθεια, έξι ομάδες κατάφεραν να ολοκληρώσουν την απόδειξη με τη βοήθεια της καθηγήτριας, τρεις ομάδες έγραψαν μόνο τις αναλογίες των πλευρών και δεν έλαβαν υπόψη την ισότητα των πλευρών του βοηθητικού τετραγώνου, μία ομάδα έγραψε λάθος τις αναλογίες, ενώ τέλος μία ομάδα δεν έκανε καμία προσπάθεια.

Οι μαθητές που κατέληξαν μέσα από μαθηματικούς συλλογισμούς και μεθοδικότητα στο ζητούμενο του προβλήματος, εργάστηκαν στο παράδειγμα Γεωμετρία ΙΙ, κατάφεραν όλοι να κινηθούν με επιτυχία στο επίπεδο [Ins-Dis] που σχετίζεται με την λεκτική και την εργαλειακή γένεση. Συγκεκριμένα κατασκεύασαν το τετράγωνο όπως όριζε η μέθοδος του Pólya και απέδειξαν βασιζόμενοι σε προτάσεις και ιδιότητες το ζητούμενο.

Όσοι δεν κατάφεραν να ολοκληρώσουν την κατασκευή και να τεκμηριώσουν τις ενέργειές τους κινήθηκαν στη Γεωμετρία Ι.



[Ins-Dis]

6.5 Αποτελέσματα του 4ου φύλλου εργασίας

Στο τέταρτο φύλλο εργασίας περιγράφεται η επίλυση του προβλήματος με την αλγεβρική προσέγγιση του Chuquet. Στην πρώτη φάση γίνεται συζήτηση για τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος. Η προσέγγιση είναι διαφορετική, απαιτεί κυρίως αλγεβρικές πράξεις και δε χρειάζεται γεωμετρική κατασκευή, η λύση βασίζεται στον υπολογισμό του μήκους της πλευράς του ισόπλευρου τριγώνου όταν είναι γνωστή η πλευρά του τετραγώνου. Υπάρχει αρχικά μια σύγχυση όσον αφορά τα δεδομένα και τα ζητούμενα, ένα φαινόμενο που παρατηρείται πολύ συχνά σε λεκτικά προβλήματα. Μετά από συζήτηση έγινε σαφές τι ζητάει το πρόβλημα και συνέχισαν οι μαθητές στη δεύτερη φάση με την επίλυσή του ακολουθώντας τις οδηγίες του φύλλου. Για οικονομία χρόνου δόθηκε έτοιμο το σχήμα, οπότε στο 2ο βήμα έπρεπε να αιτιολογήσουν γιατί το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο βασιζόμενοι στην ομοιότητα τριγώνων. Τέσσερις ομάδες απέδειξαν ότι τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΔΓΖ είναι ίσα οπότε προκύπτει ότι ΑΕ = ΑΔ, στην πορεία της απόδειξης όμως παρατηρήθηκαν ασάφειες και ελλείψεις. Μια ομάδα έγραψε μόνο τις αναλογίες των πλευρών των δύο τριγώνων χωρίς να αιτιολογεί ότι είναι όμοια και χωρίς να καταφέρει να αποδείξει ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο. Στα επόμενα ερωτήματα έπρεπε να υπολογίσουν τις πλευρές του τριγώνου και τα τμήματα ΑΚ και ΑΜ. Όλες οι ομάδες, εκτός από μία, απάντησαν σωστά αφού έκαναν τις απαραίτητες πράξεις και εφάρμοσαν το

Πυθαγόρειο θεώρημα. Στο επόμενο βήμα, αφού οι μαθητές θεώρησαν ότι η ΔΓ είναι ίση με x έπρεπε να εφαρμόσουν το θεώρημα του Θαλή, ώστε να υπολογίσουν τον άγνωστο και κατ' επέκταση την πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ.

Συγκεκριμένα:

Η ομάδα 1 (Κάτια, Έλενα) απέδειξε ότι τα τρίγωνα ΕΗΒ και ΔΓΖ είναι ίσα και εφόσον οπότε ΕΒ=ΔΓ οπότε και ΑΕ=ΑΔ και η γωνία $\widehat{A}$ =60°, άρα ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

Η ομάδα 2 (Δέσποινα, Άρτεμις) απέδειξε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές καθώς η ΑΚ είναι διχοτόμος και ύψος και έχει Α=60°, άρα ισόπλευρο.

Και οι δύο ομάδες υπολόγισαν το τμήμα ΑΚ εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα χωρίς κάποια δυσκολία και στη συνέχεια υπολόγισαν με το θεώρημα του Θαλή τη ζητούμενη πλευρά του τριγώνου. Ο μοναδικός ενδοιασμός τους ήταν το αποτέλεσμα που προέκυψε καθώς ήταν ένας άρρητος αριθμός. Συνηθίζουν οι μαθητές να μην είναι σίγουροι για τη μέθοδο που ακολούθησαν ή για τις πράξεις που έχουν κάνει τους όταν το αποτέλεσμα δεν είναι ακέραιος αριθμός, πόσο μάλλον αν είναι άρρητος.

Η Βίβιαν και η Νίκη (ομάδα 3) απέδειξαν ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο βασιζόμενες στην ομοιότητα τριγώνων, με σωστά βήματα και σωστή αιτιολόγηση, εφάρμοσαν το Πυθαγόρειο θεώρημα και υπολόγισαν το μήκος του ΑΚ. Εφάρμοσαν δεύτερη φορά το θεώρημα του Θαλή, παρ' όλα αυτά δεν ολοκλήρωσαν τη λύση καθώς δυσκολεύτηκαν στην αντικατάσταση των μηκών των τμημάτων στην αναλογία που προέκυψε.

Οι ομάδες 4 (Χάρης, Μάριος), 5 (Αμιρσώ, Φωτεινή) και 11 (Μαρία, Άννα) ακολούθησαν τον ίδιο συλλογισμό με την ομάδα 1, υπολόγισαν το μήκος ΑΚ και το ΑΜ, ωστόσο δεν κατάφεραν να υπολογίσουν το μήκος x=ΔΓ και κατ' επέκταση το μήκος της πλευράς του τριγώνου ΑΒΓ.

Η ομάδα 6 (Ορέστης, Νίκος) επιχείρησαν να κάνουν σύγκριση των τριγώνων ΔΓΖ και ΒΕΗ χωρίς να είναι πλήρης η αιτιολόγησή τους, περιορίστηκαν να γράψουν ότι τα τρίγωνα είναι ορθογώνια και το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, οπότε το τρίγωνο είναι ΑΔΕ είναι ισοσκελές. Στη συνέχεια υπολόγισαν το μήκος ΑΚ, αλλά δε συνέχισαν παρακάτω.

Παρόμοια δούλεψαν τα κορίτσια Ρεβέκκα και Αργυρώ (ομάδα 7), σημείωσαν ότι τα τρίγωνα ΕΒΗ και ΔΖΓ είναι ίσα χωρίς αιτιολόγηση, και προχώρησαν στον υπολογισμό του ΔΓ. Θεώρησαν επίσης ότι τα Η και Ζ είναι μέσα των ΒΜ και ΜΓ αντίστοιχα, οπότε αφού ΗΜ=ΜΖ=2, προκύπτει ότι ΒΓ =8 και άρα ΑΓ=ΑΒ=8.

Η ομάδα 8 (Ελένη, Βασίλης) υπολόγισαν το ΑΚ με το Πυθαγόρειο θεώρημα και έγραψαν την αναλογία που προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ, χωρίς αιτιολόγηση.

Η ομάδα 9 (Κορίνα , Ιωάννα) προσπάθησαν να εξηγήσουν ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, όμως ο λόγος τους δεν ήταν σαφής και κατανοητός. Θεωρώντας ότι ΑΕ=4 δηλαδή όσο η πλευρά του τετραγώνου και υπολόγισαν το ΑΚ με Πυθαγόρειο θεώρημα. Έγραψαν τις σωστές αναλογίες που προκύπτουν, καθώς το ΕΔ//ΒΓ αλλά δεν κατάφεραν να υπολογίσουν το ΔΓ.

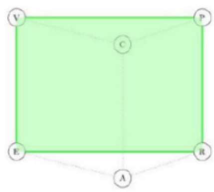
Ο Ιάκωβος και ο Γιώργος (ομάδα 10) απέδειξαν ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή και επομένως τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια. Επισήμαναν ότι η πλευρά του ΑΔΕ είναι ίση με 4, ίση με την πλευρά του τετραγώνου και στη συνέχεια εφάρμοσαν το Πυθαγόρειο θεώρημα για να υπολογίσουν το ΑΚ. Δυστυχώς δεν κατάφεραν να προχωρήσουν στο επόμενο βήμα εξαιτίας της έλλειψης χρόνου.

Συνοπτικά επτά ομάδες απέδειξαν ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο, όλες υπολόγισαν το ύψος ΑΜ εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα, όλες εκτός από την ομάδα 6 εφάρμοσαν το θεώρημα του Θαλή, ενώ μόνο δύο ομάδες υπολόγισαν την πλευρά του τετραγώνου.

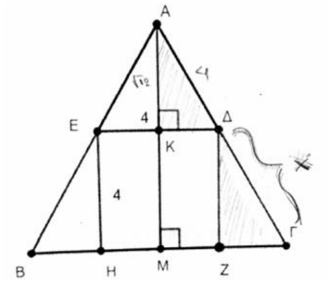
Οι ομάδες που κατάφεραν να αναπτύξουν έγκυρους συλλογισμούς και να αποδείξουν με μεθοδικότητα το ζητούμενο κινήθηκαν στη Γεωμετρία ΙΙ και συγκεκριμένα στο επίπεδο [Sem-Dis] που σχετίζεται με τη σημειωτική και τη συλλογιστική γένεση, δίνοντας έμφαση στη συλλογιστική. Η ανάπτυξη της λύσης του προβλήματος βασίστηκε στην εικονική θεώρηση των αντικειμένων ώστε να παραχθεί παραγωγικός συλλογισμός που συντελεί στην αποδεικτική διαδικασία.

Οι υπόλοιποι που δεν κατάφεραν να κάνουν την απόδειξη εργάστηκαν στη Γεωμετρία Ι.

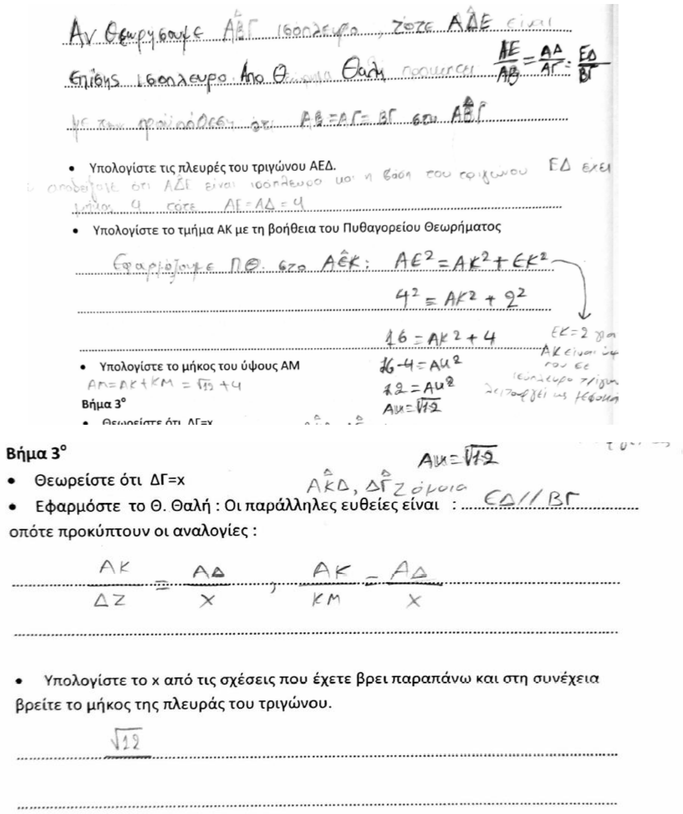
Ακολουθούν μερικές εικόνες από τις εργασίες των παιδιών.



[Sem-Dis]



Εικόνα 33. Το σχήμα της ομάδας 3



Αν θεωρήσουμε ΑΒ̂Γ ισόπλευρο, τότε ΑΔ̂Ε είναι επίσης ισόπλευρο. Από Θ. ... Θαλή προκύπτει $\frac{AE}{AB}=\frac{A\Delta}{A\Gamma}=\frac{E\Delta}{B\Gamma}$ με την προϋπόθεση ότι ΑΒ=ΑΓ=ΒΓ στο ΑΒ̂Γ

- Υπολογίστε τις πλευρές του τριγώνου ΑΕΔ.

αποδείξαμε ότι ΑΔΓ είναι ισόπλευρο και η βάση του τριγώνου ΕΔ έχει μήκος 4 τότε ΑΕ=ΑΔ=4

- Υπολογίστε το τμήμα ΑΚ με τη βοήθεια του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Εφαρμόζουμε ΠΘ στο ΑΕ̂Κ: $AE^2=AK^2+EK^2$

$4^2=AK^2+2^2$

$16=AK^2+4$

$16-4=AK^2$

$12=AK^2$

$AK=\sqrt{12}$

ΕΚ=2 γιατί ΑΚ είναι ύψος του ισόπλευρου τριγώνου λειτουργεί ως διάμεσος

- Υπολογίστε το μήκος του ύψους ΑΜ

$AM=AK+KM=\sqrt{12}+4$

Βήμα 3°

Βήμα 3°

$AK=\sqrt{12}$

- Θεωρείστε ότι ΔΓ=x

ΑΚ̂Δ, ΔΓ̂Ζ όμοια

- Εφαρμόστε το Θ. Θαλή : Οι παράλληλες ευθείες είναι : ΕΔ//ΒΓ

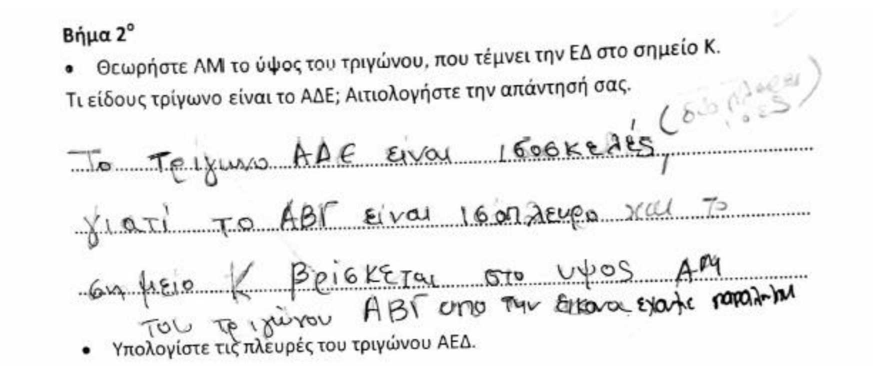
οπότε προκύπτουν οι αναλογίες :

$\frac{AK}{\Delta Z}=\frac{A\Delta}{x}$, $\frac{AK}{KM}=\frac{A\Delta}{x}$

- Υπολογίστε το x από τις σχέσεις που έχετε βρει παραπάνω και στη συνέχεια βρείτε το μήκος της πλευράς του τριγώνου.

$\sqrt{12}$

Εικόνες 34-35. Οι απαντήσεις της ομάδας 3



Βήμα 2°

- Θεωρήστε ΑΜ το ύψος του τριγώνου, που τέμνει την ΕΔ στο σημείο Κ.

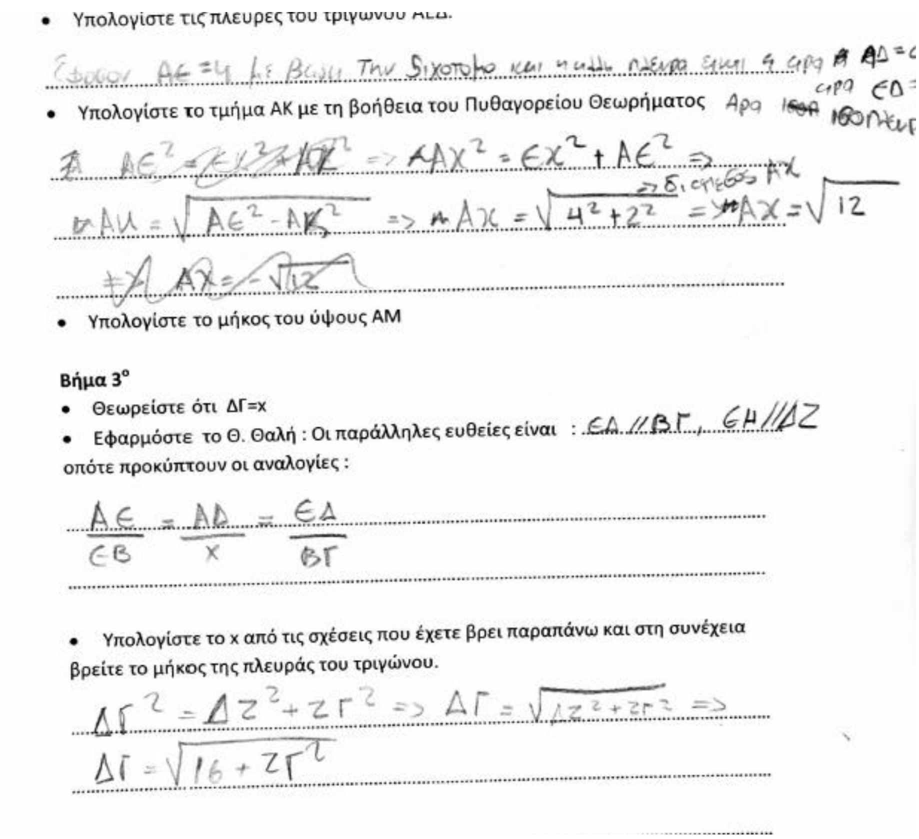
Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΔΕ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(δύο πλευρές ίσες)

Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, γιατί το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο και το σημείο Κ βρίσκεται στο ύψος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ από την εικόνα έχουμε παράλληλη

- Υπολογίστε τις πλευρές του τριγώνου ΑΕΔ.

Εικόνα 36. Οι απαντήσεις της ομάδας 9



- Υπολογίστε τις πλευρές του τριγώνου ΑΕΔ.

Εφόσον ΑΕ=4 με βάση την διχοτόμο και κάθε πλευρά είναι 4 άρα ΑΔ=... άρα ΕΔ=... Άρα ίσα ισόπλευρο

- Υπολογίστε το τμήμα ΑΚ με τη βοήθεια του Πυθαγορείου Θεωρήματος

$AE^2 = \cancel{KX^2 + AK^2} \Rightarrow AX^2 = EX^2 + AE^2 \Rightarrow$ διχοτόμος ΑΧ

$AK = \sqrt{AE^2 - AK^2} \Rightarrow AX = \sqrt{4^2 + 2^2} \Rightarrow AX = \sqrt{12}$

$\cancel{AX = \sqrt{12}}$

- Υπολογίστε το μήκος του ύψους ΑΜ

Βήμα 3°

- Θεωρείστε ότι ΔΓ=x
- Εφαρμόστε το Θ. Θαλή : Οι παράλληλες ευθείες είναι : ΕΔ // ΒΓ , ΕΗ // ΔΖ

οπότε προκύπτουν οι αναλογίες :

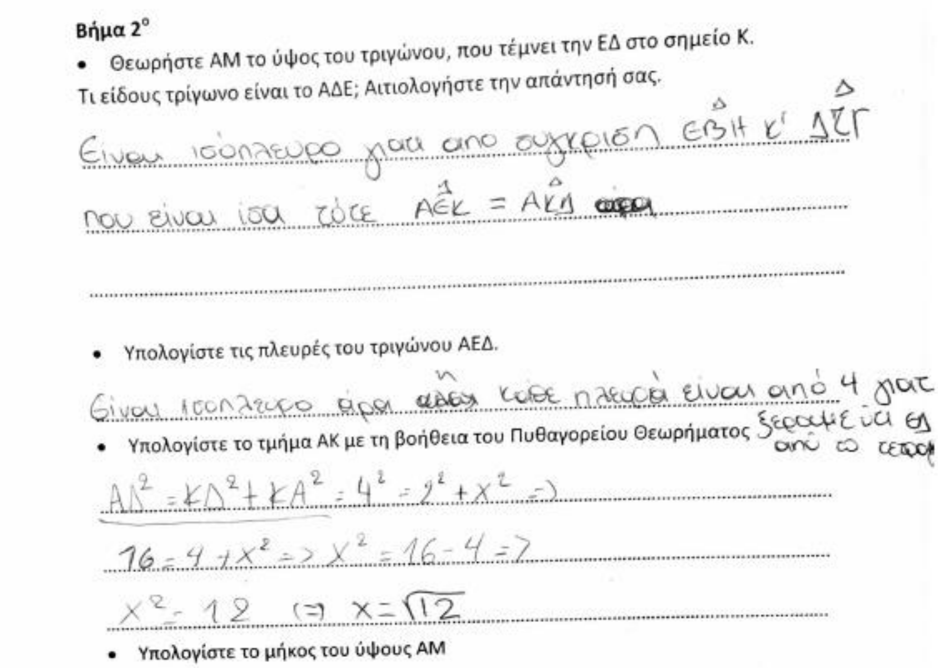
$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{x} = \frac{E\Delta}{B\Gamma}$

- Υπολογίστε το x από τις σχέσεις που έχετε βρει παραπάνω και στη συνέχεια βρείτε το μήκος της πλευράς του τριγώνου.

$\Delta\Gamma^2 = \Delta Z^2 + Z\Gamma^2 \Rightarrow \Delta\Gamma = \sqrt{\Delta Z^2 + Z\Gamma^2} \Rightarrow$

$\Delta\Gamma = \sqrt{16 + Z\Gamma^2}$

Εικόνα 37. Οι απαντήσεις της ομάδας 9.



Βήμα 2°

- Θεωρήστε ΑΜ το ύψος του τριγώνου, που τέμνει την ΕΔ στο σημείο Κ.

Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΔΕ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Είναι ισόπλευρο γιατί από σύγκριση $\overset{\triangle}{EBH}$ κ' $\overset{\triangle}{\Delta Z\Gamma}$ που είναι ίσα τότε $\hat{AEK} = \hat{AK\Delta}$ ~~άρα~~

- Υπολογίστε τις πλευρές του τριγώνου ΑΕΔ.

Είναι ισόπλευρο άρα ~~αλλά~~ η κάθε πλευρά είναι από 4 γιατί ξέρουμε ότι ... από το τετράγωνο

- Υπολογίστε το τμήμα ΑΚ με τη βοήθεια του Πυθαγορείου Θεωρήματος

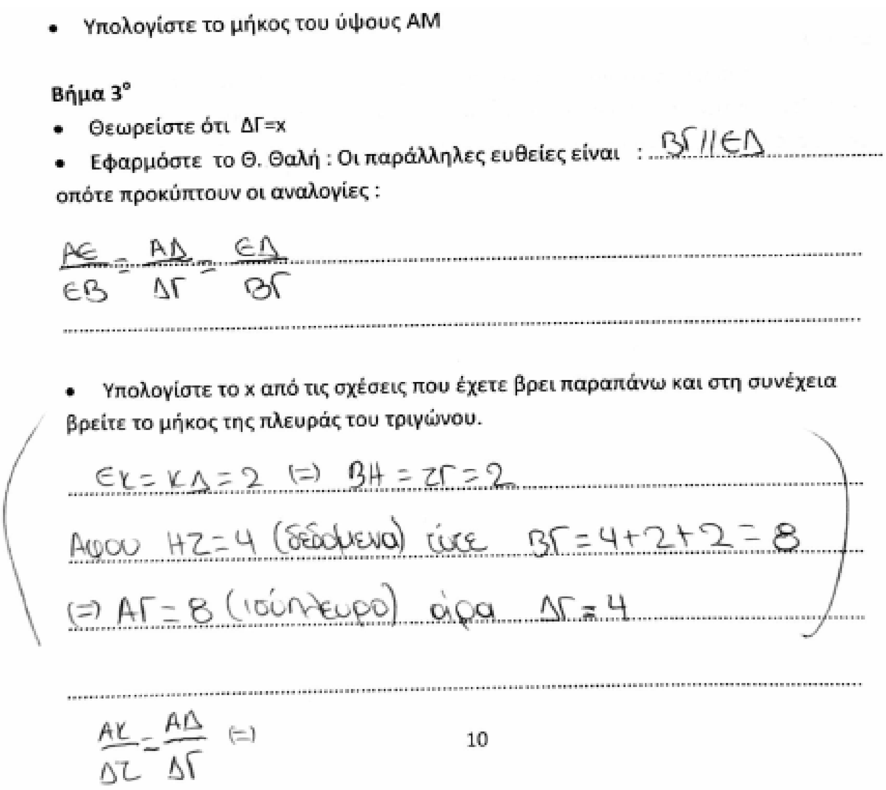
$A\Delta^2 = K\Delta^2 + KA^2 = 4^2 = 2^2 + x^2 \Rightarrow$

$16 = 4 + x^2 \Rightarrow x^2 = 16 - 4 = ?$

$x^2 = 12 \Leftrightarrow x = \sqrt{12}$

- Υπολογίστε το μήκος του ύψους ΑΜ

Εικόνα 38 . Η λύση της ομάδας 7



- Υπολογίστε το μήκος του ύψους ΑΜ

Βήμα 3°

- Θεωρείστε ότι ΔΓ=x
- Εφαρμόστε το Θ. Θαλή : Οι παράλληλες ευθείες είναι : ΒΓ//ΕΔ

οπότε προκύπτουν οι αναλογίες :

$\frac{AE}{EB}=\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{E\Delta}{B\Gamma}$

- Υπολογίστε το x από τις σχέσεις που έχετε βρει παραπάνω και στη συνέχεια βρείτε το μήκος της πλευράς του τριγώνου.

ΕΚ=ΚΔ=2 ⇔ ΒΗ=ΖΓ=2

Αφου ΗΖ=4 (δεδομενα) τοτε ΒΓ=4+2+2=8

⇔ ΑΓ=8 (ισόπλευρο) άρα ΔΓ=4

$\frac{AK}{\Delta Z}=\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$ ⇔

10

Εικόνα 39 . Η λύση της ομάδας 7

6.6 Αποτελέσματα του 5ου φύλλου εργασίας

Η μέθοδος του Lois Bourdon αναλύθηκε στο πέμπτο φύλλο εργασίας. Η δραστηριότητα ξεκίνησε με την ανάγνωση του μεταφρασμένου κειμένου, οι μαθητές κλήθηκαν να διακρίνουν τα δεδομένα από τα ζητούμενα και απάντησαν με επιτυχία στις αντίστοιχες ερωτήσεις.

Στην επόμενη φάση, όλες οι ομάδες έγραψαν σωστά τις αναλογίες που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων, αλλά μόνο οι επτά ομάδες (1,2,3,4,5,9,7) έδωσαν αιτιολόγηση, αποδεικνύοντας την ισότητα των αντίστοιχων γωνιών των δύο τριγώνων, λόγω της παραλληλίας. Δυσκολίες αντιμετώπισαν όλες οι ομάδες όταν τους ζητήθηκε να εκφράσουν την πλευρά x του τετραγώνου συναρτήσει των α και h. Η επίλυση εξίσωσης χωρίς αριθμητικά δεδομένα εμπόδισε μερικούς να καταλήξουν σε κάποιο αποτέλεσμα. Στο σημείο αυτό ήταν απαραίτητη η παρέμβαση της εκπαιδευτικού, ώστε να προχωρήσουν οι μαθητές στην επίλυση του προβλήματος.

Έχοντας ως δεδομένα μεταβλητές, για κάποιους ήταν δύσκολο να καταλάβουν πως θα αντικαταστήσουν τα τμήματα στις αναλογίες. Η καθηγήτρια τόνισε τη σχέση των γνωστών τμημάτων με το άγνωστο τμήμα x, ώστε να μπορέσουν να ορίσουν τη σχέση που θα έπρεπε να μετασχηματίσουν για να βρουν το x συναρτήσει των α και h.

Οι ομάδες 1,2,3,4,5, 6, 8 και 9 εφάρμοσαν το θεώρημα του Θαλή και στην αναλογία $\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AD}}$ αντικατέστησαν τα x, h-x, α και h, και την έγραψαν ως εξής: $\frac{x}{\alpha} = \frac{h-x}{h}$ έκαναν χιαστί και τις επιμεριστικές και κατέληξαν στο σωστό αποτέλεσμα.

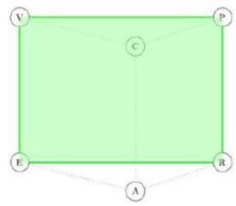
Η ομάδα 7 έκανε τις πράξεις έως ένα σημείο: «-αx -x=h-αh» που προφανώς είναι λάθος και δεν κατάφερε να συμπληρώσει το 3^{ο} βήμα.

Η ομάδα 10, έγραψε τις αναλογίες, όμως παρέλειψε να βάλει παρένθεση στην παράσταση h-x , οπότε και δεν κατέληξε σε αποτέλεσμα.

Η ομάδα 11 έφτασε έως το σημείο xh +αx=αh και δεν προχώρησε παραπάνω, οι μαθήτριες δεν σκέφτηκαν να βγάλουν κοινό παράγοντα το x.

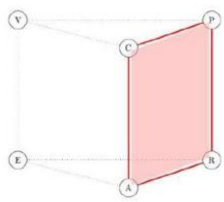
Από τα παραπάνω προκύπτουν ότι επτά ομάδες έδωσαν αιτιολόγηση για την ομοιότητα τριγώνων, πέντε ομάδες δεν αιτιολόγησαν, οχτώ ομάδες κατέληξαν στη σχέση $\frac{x}{\alpha} = \frac{h-x}{h}$ (1) , ενώ όλες οι ομάδες αντιμετώπισαν δυσκολίες στο μετασχηματισμό της (1) ώστε να εκφράσουν το x = $\frac{ah}{h+a}$.

Εδώ οι παραπάνω ομάδες, ακόμα και εκείνες που έκαναν λάθος στις πράξεις, κινήθηκαν αρχικά στο επίπεδο [Sem-Dis] βασιζόμενοι στην εικόνα αλλά με έμφαση στη συλλογιστική γένεση.



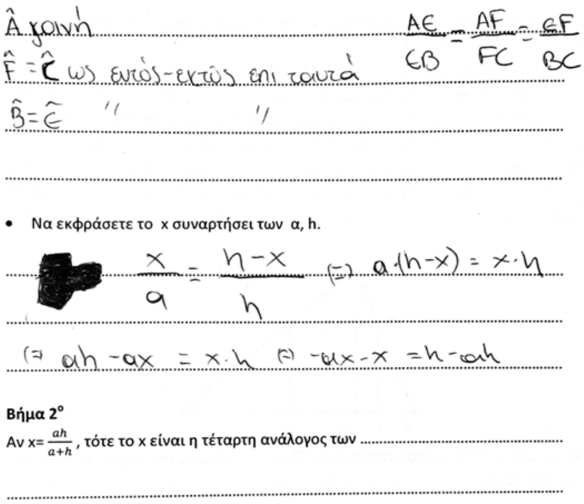
[Sem-Dis]

Τέλος έπρεπε να κατασκευάσουν την πλευρά x του τετραγώνου ως τέταρτη ανάλογο των α , h και α+h. Τρείς ομάδες μόνο κατάφεραν να ολοκληρώσουν την κατασκευή (ομάδες 1,2,και 4) παρά το γεγονός ότι υπήρχε υπόδειξη της κατασκευής και επίσης είχε προηγηθεί ένα μάθημα για την τέταρτη ανάλογο πριν τη διδακτική παρέμβαση. Οι ομάδες αυτές κινήθηκαν στο επίπεδο [Ins-Dis] που σχετίζεται με τη λεκτική και την εργαλειακή γένεση καθώς ήταν αναγκαίο να γίνει η



[Ins-Dis]

κατασκευή βάσει των εργαλείων και κατόπιν να αναπτυχθούν επιχειρήματα που βασίζονται στο θεωρητικό πλαίσιο. Εδώ βρισκόμαστε επίσης στη Γεωμετρία ΙΙ. Οι υπόλοιποι έχασαν χρόνο και δεν κατάφεραν να προχωρήσουν στην κατασκευή του x. Παρακάτω παρουσιάζονται μερικές εικόνες από τα γραπτά κάποιων μαθητών.



$\hat{A}$ γωνία $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} = \frac{EF}{BC}$

$\hat{F} = \hat{C}$ ως εντός-εκτός επί ταυτά

$\hat{B} = \hat{E}$ '' ''

• Να εκφράσετε το x συναρτήσει των α, h.

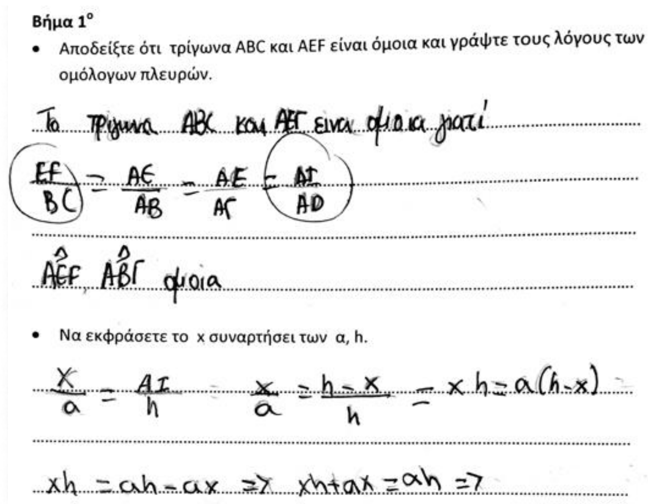
[redacted] $\frac{x}{a} = \frac{h-x}{h} \Leftrightarrow a(h-x) = x \cdot h$

$\Leftrightarrow ah - ax = x \cdot h \Leftrightarrow -ax - x = h - ah$

Βήμα 2°

Αν x= $\frac{ah}{a+h}$, τότε το x είναι η τέταρτη ανάλογος των ...

Εικόνα 40. απάντηση της ομάδας 11 (η λύση του Bourdon)



Βήμα 1°

• Αποδείξτε ότι τρίγωνα ABC και AEF είναι όμοια και γράψτε τους λόγους των ομόλογων πλευρών.

Τα τρίγωνα ABC και AEF είναι όμοια γιατί

$\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{AI}{AD}$

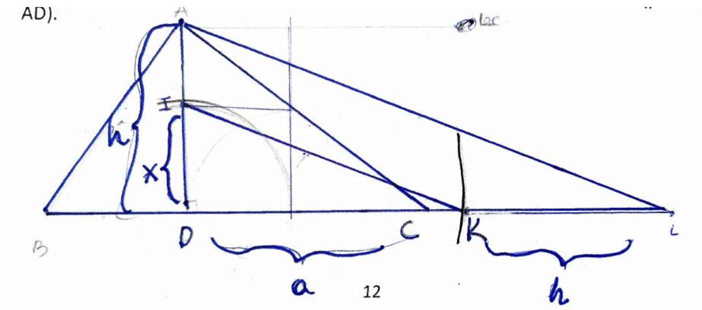
$\hat{A}EF$ $\hat{A}B\Gamma$ όμοια

• Να εκφράσετε το x συναρτήσει των α, h.

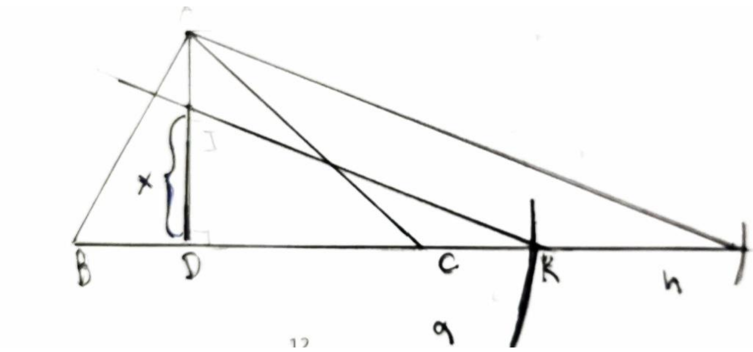
$\frac{x}{a} = \frac{AI}{h}$ $\frac{x}{a} = \frac{h-x}{h}$ $\Rightarrow xh = a(h-x)$

$xh = ah - ax \Rightarrow xh + ax = ah \Rightarrow$

Εικόνα 41. απάντηση της ομάδας 7 (λύση του Bourdon)



Εικόνα 42 Κατασκευή της ομάδας 1 (κατασκευή του Bourdon)



Εικόνα 43. Η κατασκευή της ομάδας 2 (κατασκευή του Bourdon)

6.7 Αποτελέσματα του 6ου φύλλου εργασίας

Στο έκτο φύλλο εργασίας οι μαθητές αντιμετώπισαν το πρόβλημα με τη μέθοδο του Marolois. Ακολούθησαν τα βήματα της κατασκευής καθοδηγούμενοι από το μεταφρασμένο κείμενο του συγγραφέα με τη βοήθεια της εκπαιδευτικού. Αρχικά ένωσαν τα σημεία BD και BE που τέμνουν την AC στα F και G αντίστοιχα, έως το σημείο αυτό συμμετείχαν όλοι χωρίς βοήθεια. Ωστόσο οι περισσότεροι δεν αντιλήφθηκαν ότι έπρεπε να σχεδιάσουν κάθετες στην AC στα F και G, πράγμα που δεν ήταν σαφές μέσα από το κείμενο.

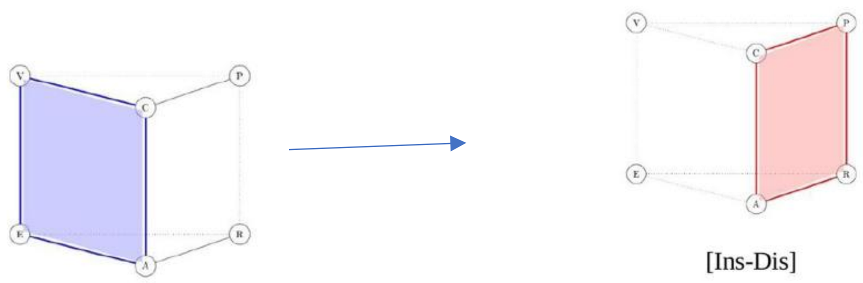
Στο ερώτημα τι είδους τετράπλευρο σχηματίστηκε με αυτόν τον τρόπο, όλοι απάντησαν αυθόρμητα τετράγωνο χωρίς δεύτερη σκέψη. Κάποιες από τις απαντήσεις που έδωσαν είναι: «μοιάζει με τετράγωνο», « αφού αυτό θέλουμε να αποδείξουμε», «έχει όλες τις γωνίες του ορθές», «φαίνεται από το σχήμα».

Στη συνέχεια τέθηκε το ερώτημα ποιο τετράπλευρο είναι τετράγωνο, μόνο τρεις ομάδες απάντησαν σωστά (1,4 και 5). Έξι ομάδες (2,3,7,9,10 και 11) έδωσαν ελλιπή απάντηση ενώ δύο ομάδες (6 και 8) δεν έδωσαν καμία απάντηση.

Αφού έγινε συζήτηση σχετικά με ποιο τετράπλευρο είναι τετράγωνο και ποια είναι τα δεδομένα λόγω κατασκευής, διαπιστώθηκε ότι είναι ορθογώνιο. Παρ' όλα αυτά υπήρξε δυσκολία από όλους τους μαθητές να κατανοήσουν ποιος είναι ο στόχος της άσκησης. Οι συνηθισμένη απάντηση τους ήταν : «αρκεί να αποδείξουμε ότι όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες είναι ίσες, χωρίς να δίνουν πιο συγκεκριμένες απαντήσεις, δηλαδή πρέπει να αποδείξουν ότι FG=HF=HI=IG. Η παρέμβαση της εκπαιδευτικού ήταν απαραίτητη, ώστε να προχωρήσουν παρακάτω.

Στο επόμενο βήμα τα αποτελέσματα ήταν βελτιωμένα.

Σχεδόν όλες οι ομάδες, εκτός από την ομάδα 9, έγραψαν σωστά τις αναλογίες εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή βασιζόμενοι στα σχήματα του φύλλου εργασίας. Είναι ξεκάθαρη η ευχέρεια που έδειξαν στο να εφαρμόσουν το θεώρημα συγκριτικά με το πρώτο φύλλο εργασίας. Στη φάση αυτή, ωστόσο, καμία ομάδα δεν κατάφερε να συνδυάσει τις αναλογίες και τις ισότητες AC=CE=ED=DA (ACED = τετράγωνο λόγω κατασκευής) χωρίς βοήθεια, ώστε να καταλήξει στο ζητούμενο. Στο σημείο αυτό κρίθηκε αναγκαία η βοήθεια της καθηγήτριας, η οποία τόνισε την ισότητα AC=CE=ED=DA. Παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές δεν μπορούν να προχωρήσουν χωρίς βοήθεια όταν φτάνουν σε κάποιο σημείο που δυσκολεύονται, δεν έχουν αναπτύξει την αυτοπεποίθησή τους και κυρίως δεν έχουν υπομονή και επιμονή. Έξι ομάδες (1,2,3,4,5 και 7) απέδειξαν τελικά το ζητούμενο, οπότε εργάστηκαν στη Γεωμετρία II και κινήθηκαν αρχικά στο επίπεδο σημειωτική προς την εργαλειακή γένεση [Sem-Ins] αναπτύσσοντας την κατασκευαστική διαδικασία όπως ορίζει η μέθοδος του Marolois. Στη συνέχεια κινήθηκαν στο επίπεδο εργαλειακή – συλλογιστική γένεση [Ins-Dis], καθώς οι οπτικοί μετασχηματισμοί δομούν την περιγραφή των σχημάτων και οργανώνουν το συλλογισμό για να αποδείξουν ότι το τετράπλευρο που σχηματίστηκε είναι τετράγωνο. (Gomez et al., 2015).

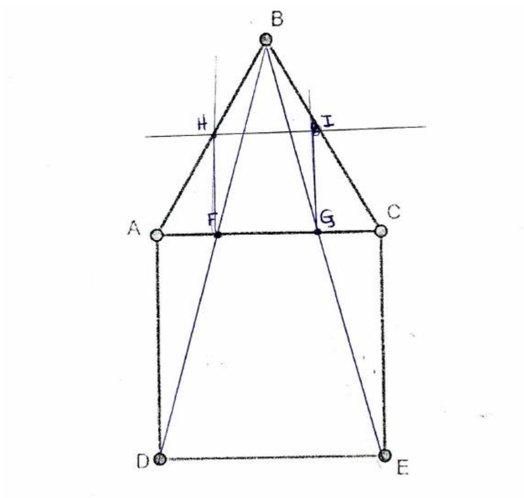


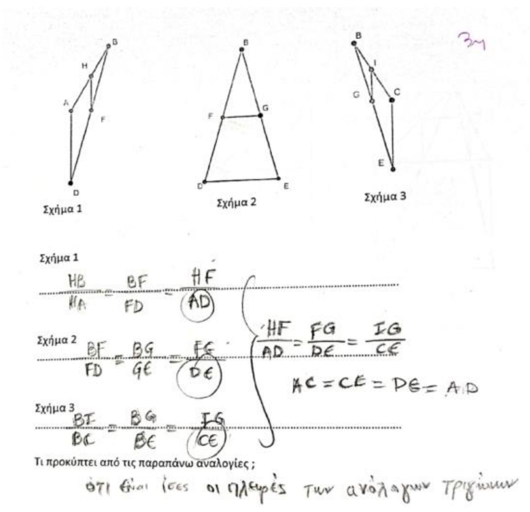
[Sem-Ins] [Ins-Dis]

Οι υπόλοιπες παραιτήθηκαν ή δεν πρόλαβαν στον προβλεπόμενο χρόνο έγραψαν τις αναλογίες που προκύπτουν από τα τρία σχήματα, αλλά δεν προχώρησαν παραπάνω ώστε να αποδείξουν τελικά ότι το τετράπλευρο είναι τετράγωνο, οπότε και εργάσθηκαν στο παράδειγμα Γεωμετρία I.

Τέλος, όλοι κατασκεύασαν το τετράγωνο χωρίς να αντιμετωπίσουν κάποιο πρόβλημα (κάποιοι μόνο με τον κανόνα).

Συνοψίζοντας, στην ερώτηση : «πότε το FGIH είναι τετράγωνο» τρείς ομάδες έδωσαν σωστή απάντηση, έξι έδωσαν ελλιπή απάντηση και δύο καμία απάντηση. Όλες οι ομάδες εκτός της 9 έγραψαν τις αναλογίες εφαρμόζοντας τρεις φορές το θεώρημα του Θαλή, καμία ομάδα δεν κατάφερε να συνδυάσει τις αναλογίες με την ισότητα των πλευρών του τετραγώνου χωρίς βοήθεια, στο τέλος όλες κατασκεύασαν το τετράγωνο.





Εικόνα 44. Το σχήμα της ομάδας 7 (λύση του Marolios)

Εικόνα 45. Επίλυση της ομάδας 3 (η λύση του Marolois)

6.8 Αποτελέσματα του 7ου φύλλου εργασίας

Στο έβδομο φύλλο εργασίας οι μαθητές διαπραγματεύτηκαν το πρόβλημα με την μέθοδο του al-Khwarizmi. Στην πρώτη φάση της διδακτικής παρέμβασης διάβασαν το πρόβλημα όπως είναι μεταφρασμένο στο βιβλίο του συγγραφέα χωρίς να αντιμετωπίσουν δυσκολίες στην κατανόηση του κειμένου, καθώς ήταν γραμμένο σε απλή γλώσσα, ενώ στη δεύτερη φάση οι μαθητές κλήθηκαν να ακολουθήσουν τις αναλυτικές οδηγίες του φύλλου βήμα – βήμα.

Στο πρώτο βήμα έπρεπε να βρουν το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση και στη συνέχεια να υπολογίσουν το εμβαδό του.

Τρεις ομάδες (οι 1,2 και 3) δε χρειάστηκαν καμιά βοήθεια και με ευκολία υπολόγισαν τα δύο μεγέθη εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα και στη συνέχεια τον γνωστό τύπο του εμβαδού τριγώνου : Ε= $\frac{1}{2}\beta\upsilon$. Οι ομάδες 5,6,7, 8 και 11 χρειάστηκαν μια μικρή βοήθεια (τονίστηκε ότι θα έπρεπε να εφαρμόσουν το Πυθαγόρειο θεώρημα) ώστε να υπολογίσουν το ύψος ΑΔ και στη συνέχεια το εμβαδόν του, ενώ οι ομάδες 9 και 10 υπολόγισαν μόνο το ύψος ΑΔ . Η ομάδα 10 επιχείρησε να βρει το εμβαδόν του χρησιμοποιώντας το λανθασμένο τύπο: Ε= $\frac{\beta+\upsilon}{2}$. Η ομάδα 4 προσπάθησε να υπολογίσει το ύψος ΑΔ θεωρώντας ότι ΑΔ= $\frac{AB+A\Gamma}{2}$, κάτι που διορθώθηκε άμεσα μετά από παρατήρηση της καθηγήτριας, οπότε και συνέχισε κανονικά στην εύρεση του εμβαδού. Όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να εξηγήσουν πως το σκέφτηκαν, απάντησαν ότι αυτό τον τύπο εφαρμόζουν στα μαθηματικά προσανατολισμού, δηλαδή στην αναλυτική γεωμετρία. Προφανώς υπάρχει σύγχυση των εννοιών ευθυγράμμου τμήματος και διανύσματος και στο ό,τι ισχύει σε ένα πλαίσιο δεν ισχύει απαραίτητα σε ένα άλλο.

Στο δεύτερο βήμα χρειάστηκε να κάνουν σύγκριση των τριγώνων ΚΒΝ και ΛΜΓ και να υπολογίσουν τα εμβαδά τους συναρτήσει του x=ΚΛ. Τέσσερις ομάδες (3,7,8 και 11) αιτιολόγησαν την ισότητα βρίσκοντας σωστά μόνο τις δύο προϋποθέσεις των κριτηρίων (βρήκαν δύο γωνίες μία μπρος μία, αλλά δεν έλαβαν υπόψιν τους τις κάθετες πλευρές που είναι πλευρές του τετραγώνου).

Η Ρεβέκκα και η Αργυρώ (ομάδα 7) έγραψαν ότι ΚΒ=ΛΓ επειδή ΑΒ=ΑΓ, δεν εξήγησαν ότι ΑΚ=ΑΛ.

Η Βίβιαν και η Νίκη (ομάδα 3) θεώρησαν ότι ΒΝ=ΜΓ επειδή ΒΔ=ΔΓ και ΛΓ=ΚΒ ως τμήματα ίσων πλευρών.

Ο Βασίλης και η Ελένη (ομάδα 8) σημείωσαν ότι «*ΒΝ=ΜΓ από άθροισμα ίσων πλευρών*», χωρίς να εξηγήσουν ποιων πλευρών.

Η Άννα και η Μαρία (ομάδα 11) δεν αιτιολόγησαν γιατί ΚΝ=ΛΜ.

Πέντε ομάδες (1,2,4,5 και 6) δεν παρουσίασαν κανένα πρόβλημα και αξίζει να σημειωθεί ότι η Δέσποινα και η Άρτεμις απέδειξαν την ισότητα των πλευρών ΚΒ και ΛΓ εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή, ενώ αντιθέτως, δύο ομάδες η 9 και η 11 δεν επιχείρησαν να αποδείξουν την ισότητα των τριγώνων.

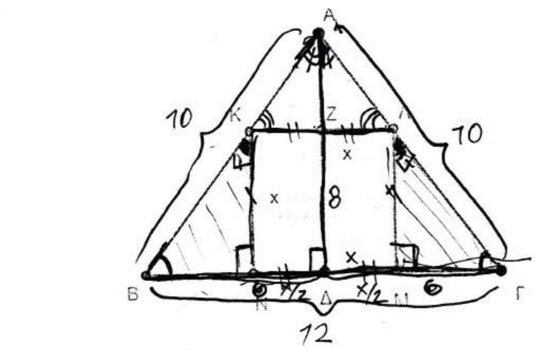
Στη συνέχεια του δεύτερου βήματος έπρεπε να εκφράσουν τα εμβαδά των τριγώνων ΚΒΝ και ΛΜΓ συναρτήσει του x. Στο σημείο αυτό καταγράφηκε μεγάλη δυσκολία στο να διαχειριστούν τη μεταβλητή x. Καμία ομάδα δεν κατάφερε να προχωρήσει χωρίς παρέμβαση της καθηγήτριας. Έγραψαν τον τύπο για το εμβαδόν των τριγώνων, όμως υπήρχε αδυναμία να κάνουν αντικατάσταση των μηκών των πλευρών εφόσον δεν υπήρχαν αριθμητικά δεδομένα. Συγκεκριμένα η Αργυρώ είπε: «*Πως θα βρω το εμβαδόν αφού δεν γνωρίζω το μήκος των πλευρών*;». Ήταν εύκολο για όλους να διαπιστώσουν ότι ΒΔ=6 και πολλοί παρασύρθηκαν και θεώρησαν ότι ΝΔ=3, ενώ είναι ίσο με το μισό του x. Παρόμοια εμπόδια αντιμετώπισαν και την εύρεση του εμβαδού του τριγώνου ΑΚΛ, επίσης πολλοί αγνόησαν το δεδομένο ότι ΖΔ=x. Μάλιστα ένας καλός μαθητής, ο Χάρης, είχε την εξής απορία: «Το ύψος του τετραγώνου είναι ίσο με την πλευρά του;». Προφανώς δεν ήταν σίγουρος ότι ΖΔ=x. Θεωρήθηκε απαραίτητο να τονιστεί από την καθηγήτρια ότι θα έπρεπε να εκφραστούν τα τμήματα ως συνάρτηση του x και δόθηκε ως παράδειγμα το εμβαδόν ενός από τα τρίγωνα, οπότε και συνέχισαν με παρόμοιο τρόπο.

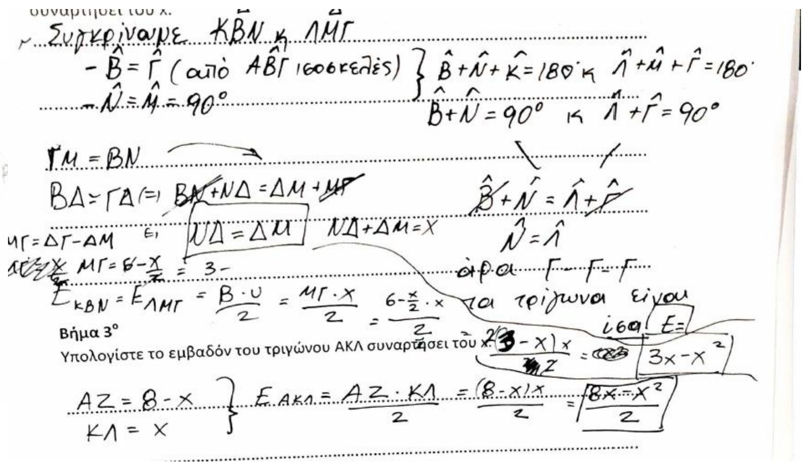
Το μεγαλύτερο πρόβλημα παρουσιάστηκε στο επόμενο βήμα όπου έπρεπε να καταστρώσουν την εξίσωση που προκύπτει θεωρώντας ότι το εμβαδόν του ΑΒΓ ισούται με το άθροισμα των σχημάτων στα οποία έχει διαμεριστεί. Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι οι μαθητές δε διαβάζουν τις οδηγίες. Περιμένουν από τον καθηγητή να τους καθοδηγήσει και αν βρουν εμπόδια σταματούν να εργάζονται μέχρι να τους δοθεί βοήθεια. Οκτώ ομάδες (1,2,3,4,5,6,7 και 8) κατάφεραν και κατέστρωσαν με επιτυχία την εξίσωση, οι τρεις ομάδες (1,2 και 3) χωρίς βοήθεια. Η βοήθεια που τους παρασχέθηκε στο σημείο στόχευε στο να καταλάβουν ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των επιμέρους εμβαδών των τριγώνων. Αφού έγραψαν την εξίσωση, όλες έκαναν λάθη στις πράξεις. Η ομάδα 1 αντικατέστησε εκ παραδρομής το ΒΓ=24 αντί για 12, η ομάδα 2 ,4 και 5 αφού κατέστρωσε την εξίσωση δεν έκανε σωστά την απαλοιφή παρονομαστών. Η ομάδα 3 και 8 έκαναν λάθος αντικατάσταση των εμβαδών, έγραψαν στον παρονομαστή των κλασμάτων τον αριθμό 4 αντί για 2. Η ομάδα 6 έγραψε : $\frac{6-\frac{x}{2}}{2}$ =3-x, οπότε προέκυψε λάθος εξίσωση. Μόνο η ομάδα 7 κατάφερε να γράψει την ισότητα των εμβαδών και να αντικαταστήσει τα αποτελέσματα που βρήκε στα προηγούμενα βήματα. Προχώρησε σε πράξεις καταλήγοντας στην εξίσωση :96=8x+6x+6x ⇔ 96=8+ 12x ⇔ 12 x=96-8 ⇔ x=$\frac{82}{12}$=6,8. Η ομάδα 9 βρήκε τα εμβαδά των τριγώνων συναρτήσει του x, αλλά δεν έγραψαν την εξίσωση. Η ομάδα 10 δεν κατάφερε να βρει κανένα εμβαδόν, εξαιτίας της έλλειψης χρόνου, ενώ η ομάδα 11 κατέστρωσε την εξίσωση χωρίς να συνεχίσει τις πράξεις ώστε να καταλήξει σε αποτέλεσμα. Καθ' όλη τη διάρκεια του μαθήματος η καθηγήτρια παρέμβαινε και εφιστούσε την προσοχή των μαθητών στα λάθη απροσεξίας τους και σε λάθος πράξεις. Κάποιοι κατάφεραν να τα διορθώσουν, οπότε και κατέληξαν σε σωστό αποτέλεσμα.

Εν περιλήψει καταλήγουμε στα εξής: τρεις ομάδες υπολόγισαν το ύψος ΑΔ και το εμβαδόν του χωρίς βοήθεια, ενώ πέντε με βοήθεια, δύο ομάδες υπολόγισαν μόνο το ύψος και μία ομάδα υπολόγισε το ύψος με λάθος τρόπο.

Επίσης πέντε ομάδες απέδειξαν την ισότητα των τριγώνων ΚΒΝ, ΛΜΓ χωρίς πρόβλημα. Καμία ομάδα δεν κατάφερε να εκφράσει τα εμβαδά συναρτήσει του x χωρίς παρέμβαση, ενώ μία ομάδα δεν βρήκε κανένα εμβαδόν. Οχτώ ομάδες κατάφεραν να καταστρώσουν την εξίσωση, δύο χωρίς βοήθεια, ενώ τέλος όλες έκαναν λάθη στις πράξεις

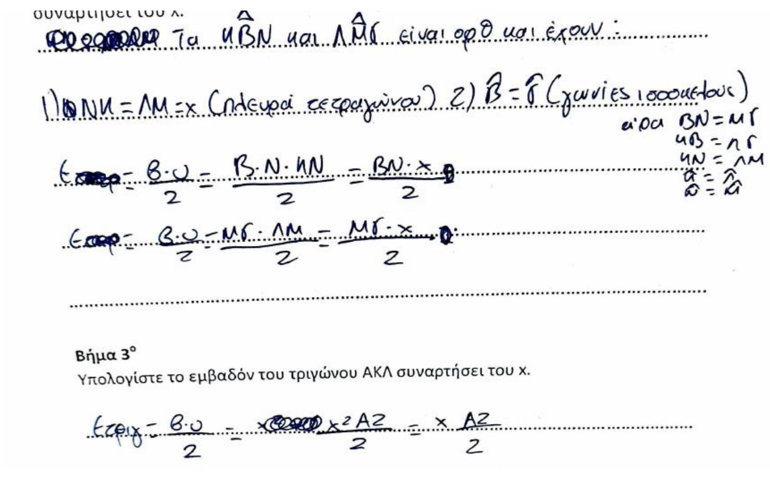
Μόνο τέσσερις ομάδες έκαναν τις διορθώσεις και βρήκαν το σωστό αποτέλεσμα.



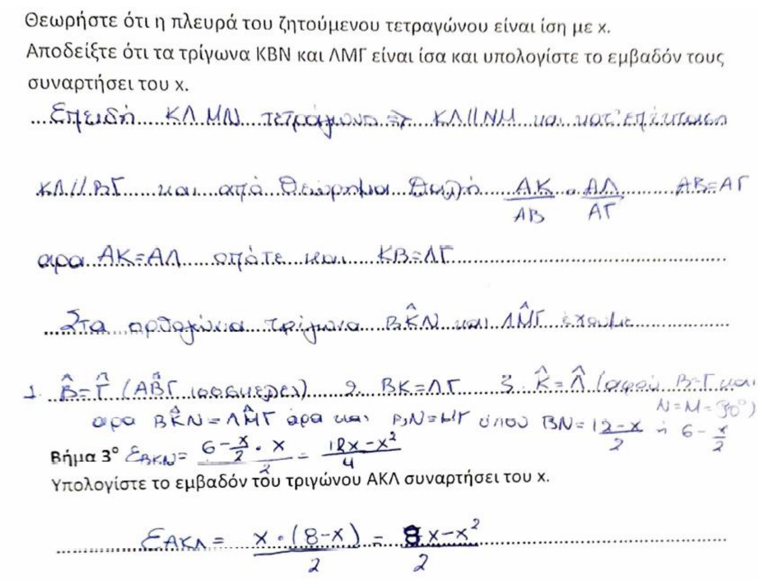


Εικόνα 46. Το σχήμα της ομάδας 6 (al Khwarizmi)

Εικόνα 47. Η λύση της ομάδας 6 (al- Khwarizmi)



Εικόνα 48. Η λύση της ομάδας 5 (μέθοδος al- Khwarizmi)



Θεωρήστε ότι η πλευρά του ζητούμενου τετραγώνου είναι ίση με x.
Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ΚΒΝ και ΛΜΓ είναι ίσα και υπολογίστε το εμβαδόν τους συναρτήσει του x.

Επειδή ΚΛΜΝ τετράγωνο => ΚΛ//ΝΜ και κατ' επέκταση ΚΛ//ΒΓ και από θεώρημα Θαλή $\frac{AK}{AB} = \frac{A\Lambda}{A\Gamma}$ $AB = A\Gamma$

άρα $AK = A\Lambda$ οπότε και $KB = \Lambda\Gamma$

Στα ορθογώνια τρίγωνα $B\hat{K}N$ και $\Lambda\hat{M}\Gamma$ έχουμε

1. $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ($A\hat{B}\Gamma$ ισοσκελές) 2. $BK = \Lambda\Gamma$ 3. $\hat{K} = \hat{\Lambda}$ (αφού $B = \Gamma$ και $N = M = 90^\circ$)

άρα $B\hat{K}N = \Lambda\hat{M}\Gamma$ άρα και $BN = M\Gamma$ όπου $BN = \frac{12-x}{2}$ ή $6 - \frac{x}{2}$

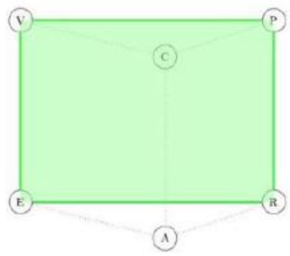
Βήμα 3° $E_{BKN} = \frac{6-\frac{x}{2} \cdot x}{2} = \frac{12x-x^2}{4}$

Υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΛ συναρτήσει του x.

$E_{AK\Lambda} = \frac{x \cdot (8-x)}{2} = \frac{8x-x^2}{2}$

Εικόνα 49. Η λύση της ομάδας 3 (al- Khwarizmi)

Όσοι μαθητές κατάφεραν επιλύσουν με επιτυχία το πρόβλημα με τη μέθοδο του al-Khwarizmi εργάστηκαν στη Γεωμετρία ΙΙ και κινήθηκαν στο επίπεδο σημειωτική-συλλογιστική γένεση [Sem-Dis] με έμφαση στη συλλογιστική, καθώς αξιοποίησαν τις προηγούμενες γνώσεις τους (όπως το Πυθαγόρειο θεώρημα και το εμβαδόν τριγώνου) και κατέστρωσαν την εξίσωση που οδηγεί στη λύση. Οι ομάδες 9,10 και 11 ανέπτυξαν ελάχιστα την απόδειξη της άσκησης, οπότε κινήθηκαν στη Γεωμετρία Ι.



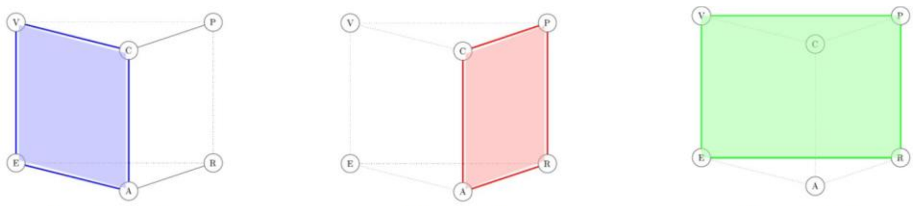
[Sem-Dis]

6.9 Αποτελέσματα του Post-test

Μετά το πέρας της διδακτικής παρέμβασης, διαμοιράστηκαν στους μαθητές οι αναλυτικές λύσεις του προβλήματος για να μελετήσουν μόνοι τους στο σπίτι ό,τι είχαμε αναλύσει στην αίθουσα διδασκαλίας. Ορίστηκε προγραμματισμένο διαγώνισμα ώστε να προετοιμαστούν κατάλληλα και εξετάστηκαν γραπτώς σε δύο προβλήματα κατασκευής. Το πρώτο ήταν το γνωστό πρόβλημα της εγγραφής του τετραγώνου σε τρίγωνο εφαρμόζοντας τη μέθοδο της επιλογής τους, ενώ η δεύτερη εργασία αφορούσε την εγγραφή τετραγώνου σε ημικύκλιο.

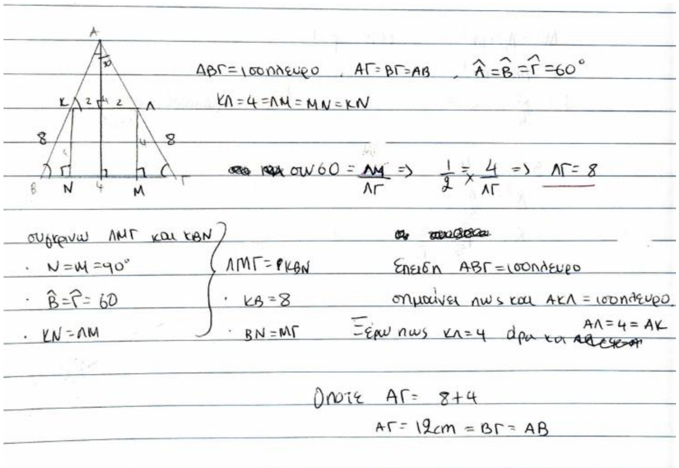
Σε ότι αφορά το πρώτο πρόβλημα, η πλειοψηφία των μαθητών ανταποκρίθηκε με επιτυχία. Εκείνοι που ασχολήθηκαν με συνέπεια, κατάφεραν να ολοκληρώσουν τη συλλογιστική διαδικασία που απαιτεί η προσέγγιση που επέλεξαν, ωστόσο υπήρχαν κάποιοι που το μόνο που κατάφεραν ήταν να σχεδιάσουν το σχήμα.

Συγκεκριμένα επτά μαθητές, η Κάτια, η Δέσποινα, ο Χάρης, ο Ιάκωβος, ο Γιώργος, η Μαρία και ο Ορέστης επέλεξαν τη μέθοδο του Pólya ακολουθώντας τα βήματα που είχαν διδαχθεί, σχεδίασαν το τετράγωνο με κανόνα και διαβήτη και αιτιολόγησαν την κατασκευή τους εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή. Η δραστηριότητα προϋποθέτει την κατασκευή του εσωτερικού τετραγώνου με εργαλεία όπως ο κανόνας και ο διαβήτης και την περιγραφή της διαδικασίας αφού γίνει η χάραξη βοηθητικών γραμμών. Οπότε οι μαθητές κινήθηκαν και στα τρία επίπεδα του ΓΧΕ ξεκινώντας από την εργαλειακή γένεση προς τη σημειωτική, δηλαδή στο επίπεδο [Sem-Ins]. Στη συνέχεια διευθέτησαν το πρόβλημα βασιζόμενοι στις ιδιότητες που έχουν οι παράλληλες ευθείες και επιχειρηματολόγησαν εφαρμόζοντας κατάλληλες προτάσεις, οπότε κινήθηκαν στο επίπεδο [Sem-Dis] που σχετίζεται με τη σημειωτική και τη συλλογιστική γένεση. Στο τρίτο στάδιο της κατασκευής τους κινήθηκαν στο επίπεδο [Ins-Dis], που σχετίζεται με τη συλλογιστική και την εργαλειακή γένεση, καθώς χρειάζεται η κατασκευή του ζητούμενου εγγεγραμμένου τετραγώνου.



[Sem-Ins] [Ins-Dis] [Sem-Dis]

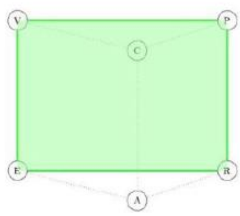
Τέσσερις μαθητές, η Έλενα, η Νίκη, η Αργυρώ και η Ιωάννα επέλεξαν τη μέθοδο Chuquet, όμως μόνο μία μαθήτρια, η Νίκη, κατάφερε να ολοκληρώσει το πρόβλημα επιτυχώς. Η Έλενα έκανε ένα λάθος στην εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΔΚ : προσπαθώντας να βρει το τετράγωνο της κάθετης πλευράς υπολόγισε το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών. Στη συνέχεια επιχείρησε να υπολογίσει το τμήμα ΛΓ χρησιμοποιώντας το συνημίτονο της γωνίας Γ, αλλά αντί να γράψει στον αριθμητή την προσκείμενη κάθετη πλευρά έγραψε την απέναντι.



Εικόνα 50. Η επίλυση της του προβλήματος 1 από την ΄Ελενα

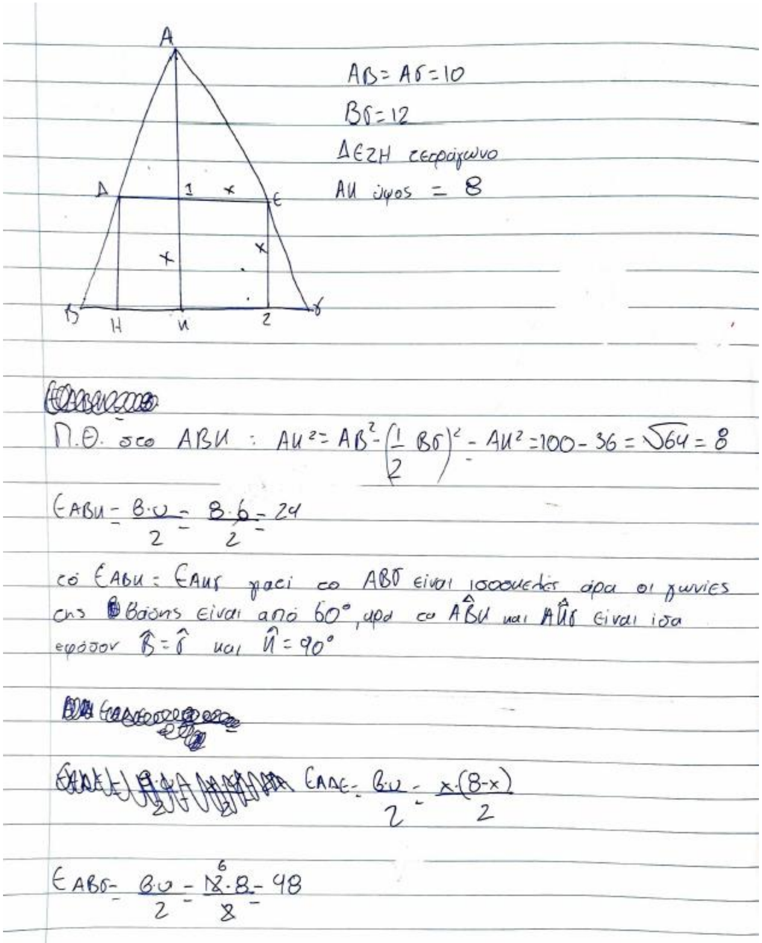
Οι άλλες δύο μαθήτριες έκαναν το σχήμα, εφάρμοσαν το Πυθαγόρειο θεώρημα και υπολόγισαν την ΑΚ, όμως σταμάτησαν τις προσπάθειές τους εκεί.

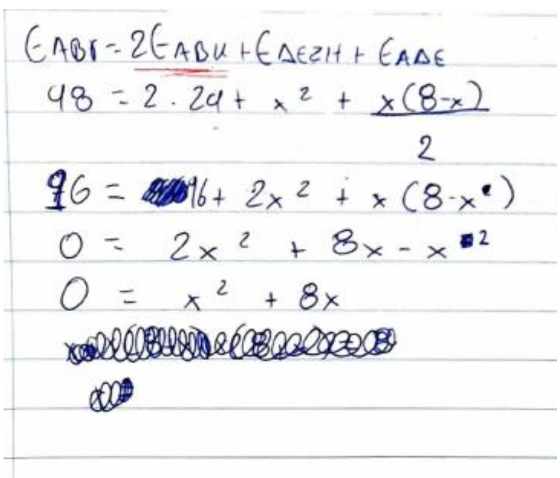
Οι μαθητές έπρεπε να κινηθούν από τη σημειωτική γένεση με έμφαση στη συλλογιστική γένεση, καθώς η μέθοδος απαιτεί καλή γνώση και εφαρμογή των προτάσεων, ιδιοτήτων, θεωρημάτων και αλγεβρικών πράξεων. Από τα αποτελέσματα προκύπτει ότι μόνο η Νίκη και η Έλενα κατάφεραν να κινηθούν στο επίπεδο [Sem-Dis] με επιτυχία.



[Sem-Dis]

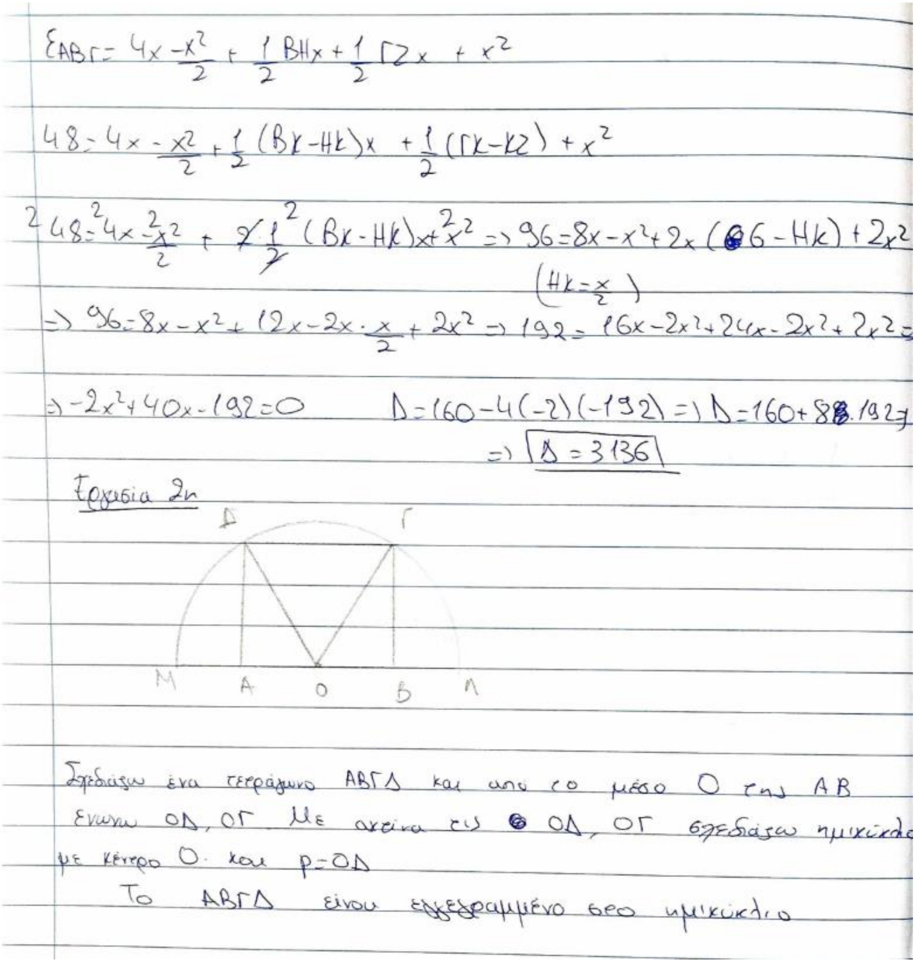
Από τους επτά μαθητές, τη Φωτεινή, την Αμιρσώ, τον Βασίλη, την Ελένη, την Άρτεμη, το Νίκο και την Άννα που επιχείρησαν να επιλύσουν το πρόβλημα με τη μέθοδο του al-Khwarizmi, μόνο μία μαθήτρια, η Άρτεμις κατάφερε να υπολογίσει το μήκος της πλευράς του τετραγώνου με σωστούς υπολογισμούς, ακολουθώντας το συλλογισμό που είχε διδαχθεί στην τάξη. Η Φωτεινή υπολόγισε το ύψος του τριγώνου και το εμβαδόν του, καθώς και το εμβαδό του τριγώνου συναρτήσει του x. Έγραψε το εμβαδόν του ΑΒΓ ως το άθροισμα των επιμέρους εμβαδών των σχημάτων, αλλά κατέληξε σε αδιέξοδο, καθώς έκανε λάθος αντικατάσταση.





Εικόνα 51-52 . Η λύση της Φωτεινής

Η Ελένη ακολούθησε τα σωστά βήματα, υπολόγισε το ύψος και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ καθώς και τα εμβαδά των υπόλοιπων σχημάτων συναρτήσει του x, κατέστρωσε την εξίσωση, όμως στην απαλοιφή παρονομαστών παρέλειψε να πολλαπλασιάσει με έναν όρο και τελικά δεν κατάφερε να λύσει την εξίσωση έως τέλος.



$E_{ΑΒΓ} = 4x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}BHx + \frac{1}{2}ΓZx + x^2$

$48 = 4x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}(BK - HK)x + \frac{1}{2}(ΓK - KZ) + x^2$

$2\cdot 48 = 2\cdot 4x - 2\frac{x^2}{2} + 2\frac{1}{2}(BK - HK)x + 2x^2 \Rightarrow 96 = 8x - x^2 + 2x(6 - HK) + 2x^2$

$(HK = \frac{x}{2})$

$\Rightarrow 96 = 8x - x^2 + 12x - 2x\cdot\frac{x}{2} + 2x^2 \Rightarrow 192 = 16x - 2x^2 + 24x - 2x^2 + 2x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x^2 + 40x - 192 = 0 \quad Δ = 160 - 4(-2)(-192) \Rightarrow Δ = 160 + 8\cdot 192 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{Δ = 3136}$

Εργασία 2η

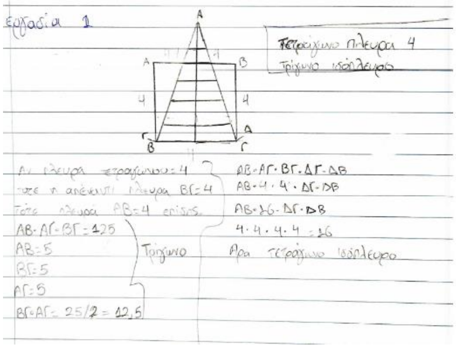
Σχεδιάζω ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ και από το μέσο Ο της ΑΒ
Ενώνω ΟΔ, ΟΓ. Με ακτίνα τις ΟΔ, ΟΓ σχεδιάζω ημικύκλιο
με κέντρο Ο και ρ=ΟΔ
Το ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο

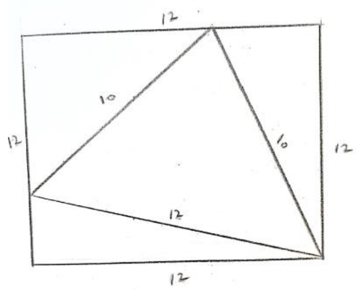
Εικόνα 53. Η λύση της Ελένης στο 1ο πρόβλημα

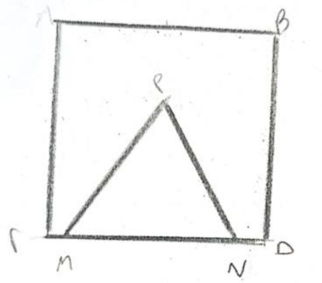
Η Άννα έκανε το σχήμα, υπολόγισε το ύψος και το εμβαδόν του τριγώνου, όμως δεν κατάφερε να συνεχίσει στην επίλυση. Οι υπόλοιποι έκαναν μόνο το σχήμα και έγραψαν τα δεδομένα της άσκησης.

Όπως και στην μέθοδο του Chuquet, οι μαθητές έπρεπε να κινηθούν στο επίπεδο [Sem-Dis] από τη σημειωτική γένεση δίνοντας έμφαση στη συλλογιστική γένεση, καθώς η μέθοδος απαιτεί καλή γνώση και εφαρμογή των προτάσεων, ιδιοτήτων, θεωρημάτων και αλγεβρικών πράξεων. Τρεις μαθήτριες τα κατάφεραν, οι υπόλοιποι δεν ολοκλήρωσαν τη συλλογιστική διαδικασία, οπότε εργάστηκαν στη Γεωμετρία Ι.

Τέλος τρείς μαθητές η Κορίνα, η Ρεβέκκα και ο Μάριος έκαναν εντελώς λάθος σχήμα σα να μην είχε προηγηθεί η διδακτική παρέμβαση. Αξιοσημείωτο είναι ότι τρεις μαθητές συμμετείχαν ενεργά καθ' όλη τη διάρκεια της συγκεκριμένης διδασκαλίας. Παρόλα αυτά έκαναν σωστά το σχήμα που ζητήθηκε στο δεύτερο ερώτημα.







Εικόνα 54. Η απάντηση του Μάριου

Εικόνα 55.Το σχήμα της Κορίνας

Εικόνα 56. Το σχήμα της Ρεβέκκα

Σημειώνεται επίσης ότι δεν αναπτύχθηκε από κανένα μαθητή η μέθοδος του Marolois και του Lefrancois.

Συνοψίζοντας, επτά μαθητές έλυσαν με επιτυχία το πρώτο πρόβλημα με τη μέθοδο του Pólya, πέντε μαθητές με τη μέθοδο Chuquet (μόνο μία με επιτυχία), επτά μαθητές με τη μέθοδο του al- Khwarizmi (μόνο μία μαθήτρια με επιτυχία), ενώ τρεις μαθητές δεν επιχείρησαν να λύσουν το πρόβλημα με καμία μέθοδο.

Όσον αφορά το δεύτερο πρόβλημα πέντε μαθητές δεν έκαναν σωστό σχήμα, οι υπόλοιποι δεκαεπτά κατανόησαν τι έπρεπε να σχεδιάσουν, αλλά μόνο οι οκτώ από αυτούς επιχείρησαν να αποδείξουν την κατασκευή τους. Δύο μαθήτριες, η Δέσποινα και η Νίκη, προσπάθησαν να εφαρμόσουν τη μέθοδο Pólya. Ο συλλογισμός τους ήταν σωστός, όμως η θέση που κατασκεύασαν το αρχικό τετράγωνο δεν ήταν η σωστή. Έπρεπε η πλευρά που κείται πάνω στη διάμετρο να έχει μέσο το κέντρο του κύκλου. Η Έλενα επιχείρησε να υπολογίσει την πλευρά του τετραγώνου θεωρώντας γνωστή την ακτίνα του κύκλου ρ=1 και τελικά υπολόγισε την πλευρά του τετραγώνου. Ο Ορέστης σχεδίασε ημικύκλιο με ακτίνα R=1 και σχημάτισε αυθαίρετα ισόπλευρα τρίγωνα με μία κορυφή το κέντρο του κύκλου. Η κατασκευή είναι ασαφής και αβάσιμη. Η Βίβιαν σχεδίασε πρώτα ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ και ένωσε το μέσο Ο της μιας πλευράς ΑΒ με τις δύο απέναντι κορυφές Γ και Δ. Στη συνέχεια σχεδίασε ημικύκλιο με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΓ. Θεώρησε ότι το ΑΒ=4 και έπρεπε να υπολογίσει την ακτίνα του κύκλου. Δεν κατάφερε να συνεχίσει ώστε να φτάσει στη λύση.

Κάτι ανάλογο σχεδίασαν η Άρτεμις και η Ελένη, δεν αιτιολόγησαν όμως το συλλογισμό τους.

Η Κάτια σχεδίασε ένα ημικύκλιο και πάνω στη διάμετρο, πήρε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ τέτοιο ώστε το κέντρο Ο του κύκλου να είναι το μέσο του ΑΒ. Στη συνέχεια κατασκεύασε ορθογώνιο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο. Έφερε τις διαγώνιους και επιχείρησε να αποδείξει, χωρίς επιπλέον στοιχείο, ότι το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. Παρασύρθηκε από την κατασκευή που έκανε, το ορθογώνιο προσέγγιζε οπτικά το τετράγωνο, με αποτέλεσμα να μην μπορέσει να αντιληφθεί ότι ήταν ελλιπή τα στοιχεία που είχε.

Είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι οι μαθητές είχαν ελάχιστο χρόνο να πραγματευτούν το δεύτερο πρόβλημα και δεν προηγήθηκε καμία προετοιμασία.

Οι παραπάνω μέθοδοι που ακολούθησαν οι μαθητές είναι όλες επηρεασμένες από τις διαφορετικές προσεγγίσεις που αναπτύχθηκαν στη διδακτική παρέμβαση.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του pre-test με το post-test, διαπιστώνουμε σημαντική βελτίωση στον τρόπο αντιμετώπισης του κάθε προβλήματος. Γνώριζαν τι σημαίνει εγγραφή τετραγώνου σε άλλο σχήμα και ότι ήταν αναγκαίο να περιγράψουν και να τεκμηριώσουν την κατασκευαστική διαδικασία.

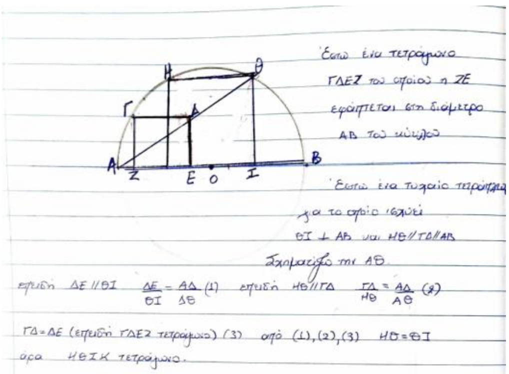
Όσοι μαθητές σχεδίασαν σωστά το σχήμα, αλλά δεν ανέπτυξαν κανένα συλλογισμό εργάστηκαν στη Γεωμετρία Ι.

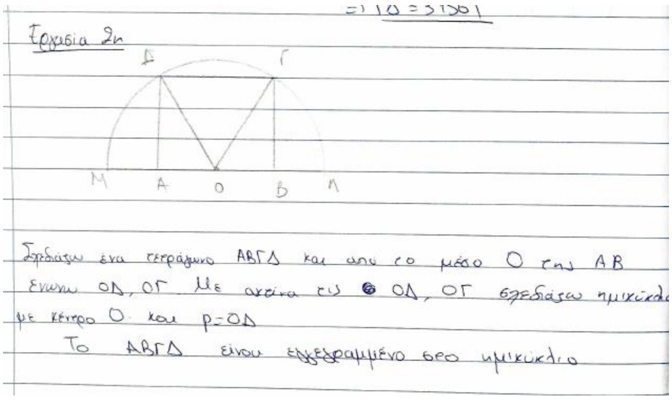
Οι μαθητές που ασχολήθηκαν με το δεύτερο πρόβλημα και προσπάθησαν να αιτιολογήσουν τις ενέργειές τους κινήθηκαν αρχικά στο επίπεδο [Sem-Ins], ξεκινώντας από την εργαλειακή γένεση στη σημειωτική, καθώς επιχείρησαν να κατασκευάσουν το τετράγωνο στο ημικύκλιο. Στη συνέχεια προσπάθησαν να αιτιολογήσουν την κατασκευή τους, ώστε να κινηθούν στο επίπεδο [Ins-Dis] που σχετίζεται με τη συλλογιστική και την εργαλειακή γένεση, δίνοντας έμφαση στη συλλογιστική γένεση. Δεν κατάφεραν ωστόσο να κινηθούν στο επίπεδο [Sem-Dis] από τη σημειωτική γένεση στη συλλογιστική γένεση, καθώς η μέθοδος απαιτεί εφαρμογή προτάσεων, ιδιοτήτων, θεωρημάτων και αλγεβρικών πράξεων.

Συγκεφαλαιώνοντας, οχτώ μαθητές επιχείρησαν να κάνουν την απόδειξη αλλά κανείς δεν κατάφερε να καταλήξει σε κάποια λύση. Οι στρατηγικές που ακολούθησαν ήταν

οι εξής: α) μέθοδος παρόμοια με του Pólya, β) υπολογισμός της πλευράς του τετραγώνου θεωρώντας ότι η ακτίνα του ημικυκλίου είναι ίση με 1, γ) σύγκριση τριγώνων, δ) κατασκευή τετραγώνου και στη συνέχεια κατασκευή του ημικυκλίου.
Τέλος πέντε μαθητές έκαναν εντελώς λάθος σχήμα.

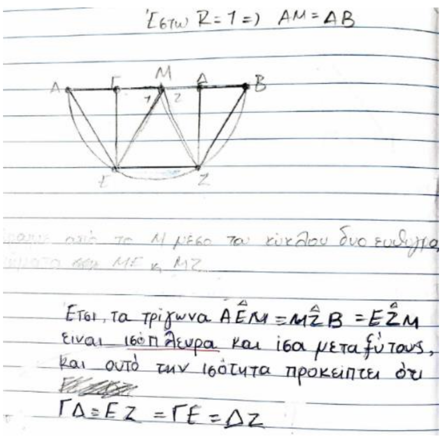
Από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει μια συνολική εικόνα για τις ομάδες. Συγκεκριμένα οι ομάδες 1,2 και 3 ξεχωρίζουν συγκριτικά με τις υπόλοιπες, έχουν μια σταθερή στάση καθ' όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας, είναι συνεπείς και επιμελείς, ομαδικά αλλά και ατομικά και προετοιμάστηκαν στο μέγιστο βαθμό για το τεστ που ακολούθησε. Έδειξαν διάθεση και ζήλο στην επίλυση του δεύτερου προβλήματος, παρά το γεγονός ότι δε θα επηρέαζε τη βαθμολογία τους. Η ομάδες 4 και 5 έδειξαν επίσης ενδιαφέρον κατά τη διδακτική παρέμβαση, όμως με κάποιες αδυναμίες, ενώ στο διαγώνισμα δεν τα πήγαν όλοι εξίσου καλά. Οι υπόλοιποι μαθητές κυμαίνονται περίπου στο ίδιο μέτριο επίπεδο και προφανώς δεν προετοιμάστηκαν αρκετά. Σημαντικό είναι ωστόσο, ότι όλοι συμμετείχαν με θετική διάθεση και είχαν εμπλακεί στις εργασίες**,** ακόμα και οι πιο αδύνατοι.
Ακολουθούν παρακάτω μερικές ενδεικτικές εικόνες από την εργασία των παιδιών.



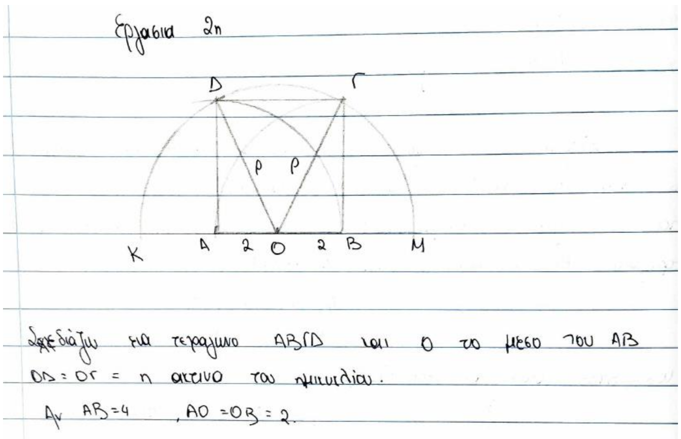


Εικόνα 57. Η λύση της Δέσποινας

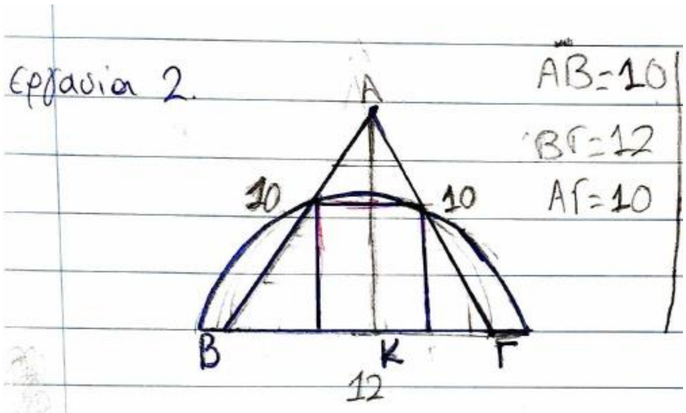
Εικόνα 58. Η λύση της Ελένης



Εικόνα 59. Η λύση του Ορέστη



Εικόνα 60. Η λύση της Βίβιαν



Σχήμα 61. Το σχήμα του Μάριου

6.10 Αποτελέσματα ερωτηματολογίου 1

Ερωτήσεις που αφορούν τη μάθηση της γεωμετρίας και τις γεωμετρικές κατασκευές

Πίνακας 2. Αποτελέσματα του 1ου ερωτηματολογίου

Ερώτηση	Διαφωνώ απολύτως	Διαφωνώ	Ούτε διαφωνώ ούτε συμφωνώ	Συμφωνώ	Συμφωνώ απολύτως
1. Μου αρέσει περισσότερο η γεωμετρία απ' ότι η άλγεβρα	10	5	4	3	0
2. Αντιμετωπίζω δυσκολίες στα γεωμετρικά προβλήματα.	2	2	5	10	3
3. Θεωρώ ότι οι γεωμετρικές κατασκευές είναι εύκολες	7	7	5	2	1
4. Θεωρώ ότι οι γεωμετρικές κατασκευές είναι ενδιαφέρουσες	3	8	5	5	1
5.Μαθαίνω καλύτερα τη γεωμετρία μέσα από τις γεωμετρικές κατασκευές.	3	7	4	7	1
6.Δυσκολεύτηκα με τις συγκεκριμένες γεωμετρικές κατασκευές	0	5	3	9	5
7.Μετά τη διδακτική παρέμβαση απέκτησα περισσότερο ενδιαφέρον για τη γεωμετρία και τις γεωμετρικές κατασκευές.	9	6	2	4	1
8. Οι γεωμετρικές κατασκευές της διδακτικής παρέμβασης με βοήθησαν ώστε να κατανοήσω τις γεωμετρικές έννοιες της ενότητας (Θεώρημα Θαλή, ομοιότητα τριγώνων).	1	6	2	8	5

Από τον πίνακα 2, προκύπτει ότι πάνω από τους μισούς μαθητές, περίπου 15 στο σύνολο, προτιμούν την άλγεβρα από τη γεωμετρία και 13 μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στα γεωμετρικά προβλήματα . 14 από τους 22 θεωρούν ότι οι γεωμετρικές κατασκευές δεν είναι εύκολες και 11 δηλώνουν ότι δεν βρίσκουν κάποιο ενδιαφέρον, ενώ μόνο ένας σημείωσε ότι τον ενδιαφέρουν οι γεωμετρικές κατασκευές σε αρκετά μεγάλο βαθμό, οι υπόλοιποι μάλλον τους είναι αδιάφορο. 10 μαθητές δήλωσαν ότι δε μαθαίνουν καλύτερα γεωμετρία μέσα από τις γεωμετρικές κατασκευές, ενώ 8 θεωρούν ότι μπορούν να βελτιωθούν στη γεωμετρία μέσα από τις γεωμετρικές κατασκευές. Οι περισσότεροι μαθητές, 14 στο σύνολο, δυσκολεύτηκαν με τις διαφορετικές προσεγγίσεις της κατασκευής του τετραγώνου σε τρίγωνο, σε διαφορετικό βαθμό ο καθένας, ενώ ελάχιστοι, 5 στο σύνολο, απέκτησαν περισσότερο ενδιαφέρον για τη γεωμετρία μετά τη διδακτική παρέμβαση. Ωστόσο 13 μαθητές σημείωσαν ότι η διδασκαλία του θεωρήματος του Θαλή και της ομοιότητας τριγώνων με τον τρόπο που περιγράψαμε, τους βοήθησε στην κατανόηση των νέων εννοιών και προτάσεων.

6.11 Αποτελέσματα ερωτηματολογίου 2

Ερωτήσεις που αφορούν τις διαφορετικές προσεγγίσεις του προβλήματος που διαπραγματευτήκαμε.

Πίνακας 3. Αποτελέσματα του 2ου ερωτηματολογίου

Ερώτηση	Pólya	Chuquet	Bourdon	Marolois	al-Khwarizmi
1. Ποια μέθοδο θεωρείτε πιο ενδιαφέρουσα	8	7	1	2	4
2. Ποια μέθοδος σας δυσκόλεψε πιο πολύ	2	7	6	3	9

Από τον πίνακα 3 βλέπουμε ότι το ενδιαφέρον των μαθητών κλίνει προς τη μέθοδο Pólya και Chuquet, καθώς την προτίμησαν 8 και 7 μαθητές αντίστοιχα, ενώ η λύση που δυσκόλεψε αρκετά 6 μαθητές είναι του Bourdon, που πραγματικά ήταν η πιο πολύπλοκη στην κατασκευή του τετραγώνου, ενώ αξιοπερίεργο είναι ότι 9 μαθητές θεώρησαν τη μέθοδο του al-Khwarizmi την πιο δύσκολη.

6.12 Αποτελέσματα ερωτηματολογίου 3

Ερωτήσεις σχετικά με την ενσωμάτωση της Ιστορίας στη διδασκαλία

Πίνακας 4. Απαντήσεις του 3ου ερωτηματολογίου

Ερώτηση	Διαφωνώ απολύτως	Διαφωνώ	Ούτε διαφωνώ ούτε συμφωνώ	Συμφωνώ	Συμφωνώ απολύτως
1. Καθ' όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας, σε ποιο βαθμό σας άρεσε η ενσωμάτωση της ιστορίας μέσα από τις διαφορετικές προσεγγίσεις των μαθηματικών του παρελθόντος ;	1	2	3	10	6
2. Θα επιθυμούσατε να γίνεται χρήση της ιστορίας και σε άλλα μαθήματα που αφορούν τα μαθηματικά;	2	3	4	9	4

Από τις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές στο 3ο ερωτηματολόγιο είναι φανερό ότι τους άρεσε η καινοτομία του μαθήματος με την ένταξη ιστορικών στοιχείων που έχουν σχέση με το αντικείμενο διδασκαλίας. Συγκεκριμένα 16 μαθητές εκφράζουν θετική στάση απέναντι στην ενσωμάτωση της ιστορίας στη συγκεκριμένη διδασκαλία και 13 μαθητές θα επιθυμούσαν να επαναληφθεί και σε άλλα μαθήματα των μαθηματικών.

Κεφάλαιο 7ο Συζήτηση – Συμπεράσματα

7.1 Συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τα συμπεράσματα της έρευνας βάσει των αποτελεσμάτων και λαμβάνοντας υπόψιν το ΓΧΕ των μαθητών σε κάθε στάδιο της παρέμβασης. Το έργο διεκπεραιώθηκε στο χώρο του σχολείου στα πλαίσια του μαθήματος της Γεωμετρίας της Β΄ Λυκείου και το γνωστικό αντικείμενο αφορούσε κυρίως το θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα τριγώνων. Οι μαθητές επίσης έπρεπε να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους από προηγούμενες τάξεις, όπως τις ιδιότητες αναλογιών, το Πυθαγόρειο θεώρημα, τα κριτήρια ισότητας τριγώνων, την κατασκευή και την επίλυση εξισώσεων πρώτου βαθμού και τον τύπο για το εμβαδό τριγώνου και τετραγώνου. Προηγήθηκε μια σύντομη αναφορά για την ιστορία της γεωμετρίας και των γεωμετρικών κατασκευών, έγινε συζήτηση για τη ζωή και το έργο των μαθηματικών των οποίων τη μέθοδο παρουσιάσαμε και αξιοποιήσαμε τα πρωτότυπα κείμενα με αποδείξεις.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναλύθηκε η ροή της διδακτικής παρέμβασης, που ολοκληρώθηκε σε 10 με 11 διδακτικές ώρες συμπεριλαμβανομένων του διαγνωστικού τεστ και του τελικού διαγωνίσματος. Πριν την διδακτική παρέμβαση, όπως έχει αναφερθεί παραπάνω, δόθηκε στους μαθητές ένα pre-test, όπου οι μαθητές επιχείρησαν να σχεδιάσουν ένα τετράγωνο εγγεγραμμένο σε τρίγωνο χωρίς καθοδήγηση και χωρίς να προηγηθεί σχετική διδασκαλία. Ακολούθησαν τα φύλλα εργασίας με κατάλληλες οδηγίες, δόθηκε ένα προγραμματισμένο διαγώνισμα ώστε να αξιολογηθούν για τη γνωστή άσκηση της εγγραφής τετραγώνου σε τρίγωνο και να διαπιστωθεί αν μπορούν να λύσουν μόνοι τους το άγνωστο πρόβλημα της εγγραφής τετραγώνου σε ημικύκλιο.

Τέλος διαμοιράστηκε στους μαθητές ένα ερωτηματολόγιο αξιολόγησης, όπου είχαν την ευκαιρία να εκφράσουν την άποψη τους, τις ιδέες τους, να περιγράψουν τη στάση τους απέναντι στη γεωμετρία πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση και να κάνουν μια κριτική αποτίμηση των εμπειριών που απέκτησαν καθ’ όλη τη διάρκεια της παρέμβασης.

Μέσα από τα φύλλα εργασίας, που ήταν το εργαλείο μας, διδάχθηκε η κατασκευή της τέταρτης αναλόγου τριών δοσμένων ευθυγράμμων τμημάτων με κανόνα και διαβήτη, διερευνήθηκε η μέθοδος του Pólya με χρήση του λογισμικού Geogebra και αναλύθηκαν διεξοδικά στο χαρτί με κανόνα και διαβήτη, πέντε διαφορετικές προσεγγίσεις του προβλήματος μεγάλων Μαθηματικών που έζησαν σε διαφορετικές εποχές (Pólya, Marolois, Chuquet, al-Khwarizmi και Bourdon). Εστιάσαμε τόσο στις γεωμετρικές κατασκευές όσο και στην εγκυρότητα των προσεγγίσεων αυτών ανάλογα με τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν, όπως για παράδειγμα η προσέγγιση του Pólya διερευνήθηκε με τη χρήση του Geogebra αλλά και με κανόνα και διαβήτη.

Η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στην παρούσα παρέμβαση έγκειται στην παρουσίαση και διερεύνηση του προβλήματος που είδε τη λύση του να εμφανίζεται με διαφορετικές προσεγγίσεις από τις μεγάλες μορφές των μαθηματικών του παρελθόντος, αλλά και στην παρουσίαση της ζωής και του έργου των προσωπικοτήτων αυτών. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν οι Barbin et al. (2018), «*ο καθηγητής μαθηματικών πρέπει να διδάσκει τα μαθηματικά ως μια ιστορική διαδικασία με πολιτιστικό στόχο. Αλλά εδώ δεν πρόκειται να διαμορφώσει τη διδασκαλία με βάση την ιστορία, αλλά να λάβει από την ιστορία τα προβλήματα που προσδίδουν νόημα στη γνώση».*

Κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας οι μαθητές εργάστηκαν κατά ζεύγη, και συμπλήρωσαν τα φύλλα εργασίας σύμφωνα με τις οδηγίες και τη συχνή παρέμβαση της διδάσκουσας.

Ο διαφορετικός τρόπος προσέγγισης του μαθήματος σημείωσε επιτυχία ως προς την εμπλοκή των μαθητών στην πρακτική εμπειρία. Παρόλο που οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι να εργάζονται ομαδικά και να συζητούν μεταξύ τους, ο εναλλακτικός τρόπος μάθησης τους βοήθησε γιατί αντάλλαξαν ιδέες, ανέπτυξαν δεξιότητες κριτικής σκέψης, ενώ ταυτόχρονα οι καλύτεροι μαθητές βοηθούσαν τους πιο αδύναμους (Cheung, 2011; Barbin et al., 2018). Κάποιοι, μάλιστα, εκδήλωναν τον ενθουσιασμό τους όταν κατάφεραν να φτάσουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα ή ακόμα και όταν ολοκλήρωναν με επιτυχία ένα βήμα.

Κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων, οι μαθητές έπρεπε να προτείνουν σχέδια, να πειραματιστούν, να ελέγξουν αν τα σχήματά τους πληρούν τις προϋποθέσεις του προβλήματος, να αξιοποιούν όλες τις ιδιότητες των αντικειμένων της κατασκευής, να επικυρώσουν τις κατασκευές τους και να περιγράψουν τα βήματα που ακολούθησαν. Μετά το τέλος της διδακτικής παρέμβασης, δόθηκε ένα τελικό φύλλο αξιολόγησης με τα δύο προβλήματα που έχουμε ήδη περιγράψει.

Συγκρίνοντας την έρευνα και τα αποτελέσματά της με τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στο 5^{ο} κεφάλαιο, παρατηρούμε ότι τα ερευνητικά εργαλεία κάλυψαν όλο το εύρος και δόθηκαν απαντήσεις και στα δύο ερωτήματα. Τα ερευνητικά ερωτήματα και τα αντίστοιχα ευρήματα παρουσιάζονται παρακάτω.

1ο Ερευνητικό ερώτημα

Σε ποιο βαθμό μπορούν οι μαθητές να κατασκευάσουν με κανόνα και διαβήτη ένα τετράγωνο εγγεγραμμένο σε τρίγωνο και να αποδείξουν την εγκυρότητα της κατασκευής τους;

Σχετικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, από την ανάλυση των δεδομένων συμπεραίνουμε ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να κάνουν κατασκευές με κανόνα και διαβήτη και να τις επικυρώσουν με αποδείξεις.

Όταν οι μαθητές ήρθαν για πρώτη φορά σε επαφή με το πρόβλημα της εγγραφής τετραγώνου σε τρίγωνο παρατηρήθηκε η αμηχανία τους σε ότι αφορά την γεωμετρική κατασκευή, έως ότου να καταλάβουν τι ακριβώς έπρεπε να σχεδιάσουν. Δεδομένου ότι η ελάχιστη επαφή με εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σχήματα περιορίζεται στον κύκλο και δεν έχουν έρθει αντιμέτωποι με παρόμοια προβλήματα στο παρελθόν, υπήρχε σύγχυση και δεν μπορούσαν να ερμηνεύσουν τις διαφορετικές έννοιες, πόσο μάλλον να τις εφαρμόσουν σε γεωμετρικά προβλήματα. Η έλλειψη προηγούμενης εμπειρίας, τους έκανε να αισθάνονται απογοητευμένοι και αποθαρρημένοι ώστε να προχωρήσουν στο έργο που τους δόθηκε. Παρόμοιες παρατηρήσεις σημειώνουν στην έρευνά τους και οι Cheung (2011) και Demiray (2019).

Με το συμπέρασμα αυτό συμφωνούν επίσης και οι έρευνες των Fujita, Jones & Kunimune (2010) και Barbin et al. (2018), η οποίες αναφέρονται στο φόβο που ενδέχεται να έχουν οι μαθητές όταν πρόκειται να λύσουν το πρόβλημα, επειδή δεν είχαν κατανοήσει το νόημά του. Η αυστηρότητα της γλώσσας που χρησιμοποιείται στη γεωμετρία είναι επίσης ένα σημαντικό ζήτημα που παρατηρήθηκε καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας των μαθητών, όπως επίσης επισημαίνει στην έρευνά του ο Massarwe (2022), τονίζοντας ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να εφαρμόσουν τις οδηγίες και αντιμετωπίζουν προβλήματα κατανόησης της ανάγνωσης.

Εργαζόμενοι, ωστόσο, κατά ζεύγη πειραματίστηκαν, σχεδίασαν διάφορα σχήματα και όλοι τελικά κατάφεραν να σχεδιάσουν ένα τετράπλευρο, που «μοιάζει» με τετράγωνο, εγγεγραμμένο σε τρίγωνο βασιζόμενοι στη διαίσθησή τους, χωρίς να αιτιολογήσουν την κατασκευή. Στην πραγματικότητα όλοι σχεδίασαν ένα ορθογώνιο, ενώ κάποιοι επικύρωσαν την κατασκευή τους κάνοντας μετρήσεις με βαθμονομημένο χάρακα. Βέβαια υπήρχαν και οι περιπτώσεις που κατασκεύασαν πρώτα το τετράγωνο και στη συνέχεια περιέγραψαν το τρίγωνο που δε θεωρείται απόλυτα σωστό.

Κανένας μαθητής δεν κατάφερε να κατασκευάσει τετράγωνο ακολουθώντας αυστηρά μεθοδολογικά βήματα, αλλά και καμία ομάδα δεν αναρωτήθηκε για την εγκυρότητα της κατασκευής. Η εικόνα του σχήματος που μοιάζει με τετράγωνο ήταν αρκετή, περιορίστηκαν στη διαίσθησή τους, σε αυτό που φαίνεται, δεν αμφέβαλαν για τις ενέργειές τους, δεν προβληματίστηκαν και δεν ένιωσαν την ανάγκη να εμβαθύνουν. Τα ευρήματα αυτά συμφωνούν απόλυτα με εκείνα των Barbin et al. (2018), καθώς και με τα συμπεράσματα που αναφέρονται στην βιβλιογραφική ανασκόπηση (Marchis & Molnár, 2009; Fujita, et al., 2010; Cheung, 2011; Aktas & Mumcu, 2019; Demiray, 2019; Ρίζος, κ.α., 2020; Massarwe, 2022).

Παρόμοια συμπεράσματα προκύπτουν και κατά την διαδικασία κατασκευής της τέταρτης αναλόγου τριών δεδομένων ευθυγράμμων τμημάτων α, β, και γ. Είναι η πρώτη επαφή των μαθητών με μια αυστηρή γεωμετρική κατασκευή ευθυγράμμου τμήματος με δεδομένη ιδιότητα. Η δυσκολία που αντιμετώπισαν ήταν αναμενόμενη και σύμφωνη με προηγούμενες έρευνες (Marchis & Molnár, 2009; Cheung, 2011; Aktas & Mumcu, 2019; Demiray, 2019; Ρίζος κ.α., 2020; Massarwe, 2022). Η απουσία προηγούμενων παρόμοιων δραστηριοτήτων, καθ' όλη τη διάρκεια της σχολικής τους ζωής, κατέστησε ακόμα πιο δύσκολο το έργο που είχαν να διεκπεραιώσουν. Η πλειοψηφία των μαθητών δεν εστίασε στις οδηγίες του φύλλου εργασίας, αλλά περίμεναν την παρέμβαση της εκπαιδευτικού. Επιχείρησαν να κάνουν μετρήσεις με τον βαθμονομημένο χάρακα αντί να χρησιμοποιήσουν το διαβήτη. Δεν κατανόησαν την έννοια της κατασκευής και δυσκολεύτηκαν ακόμα και στη χρήση του διαβήτη. Στο σημείο αυτό παρατηρούμε συμφωνία με την έρευνα του Massarwe (2022), που διαπίστωσε ότι οι περισσότεροι από τους συμμετέχοντες είχαν τεχνικές δυσκολίες, που σχετίζονται με το κράτημα του διαβήτη.

Στη δεύτερη φάση οι μαθητές πραγματεύτηκαν την κατασκευή της τέταρτης αναλόγου των τμημάτων α, β, α + β (χρειαζόταν στις κατασκευές που θα ακολουθούσαν), όπου παρατηρήθηκε σημαντική βελτίωση σε σχέση με την πρώτη κατασκευή. Οι μαθητές είχαν αντιληφθεί τι έπρεπε να κάνουν, ενώ η δυσκολία τους περιορίστηκε στο πως να ορίσουν το τμήμα α + β στο σχήμα που θα κατασκεύαζαν , η οποία ξεπεράστηκε με την παρέμβαση της εκπαιδευτικού, παρέχοντας εξατομικευμένα βοήθεια, ενθαρρύνοντάς τους και υποδεικνύοντάς τους πως να προχωρήσουν κάνοντας η ίδια κάποια σχέδια στο φύλλο τους.

Η κατασκευή του τετραγώνου ξεκίνησε με τη μέθοδο του Pólya με τη χρήση του λογισμικού Geogebra, ενώ στο επόμενο μάθημα έγινε με κανόνα και διαβήτη στο χαρτί.

Οι περισσότεροι μαθητές δε γνώριζαν αρκετά το περιβάλλον του λογισμικού, αν και προηγήθηκαν κάποια μαθήματα για την εκμάθησή του. Δυσκολία παρουσιάστηκε κατά την κατασκευή του αρχικού τετραγώνου με τη χρήση του διαβήτη και των κατάλληλων ευθειών από τα εργαλεία του Geogebra. Εύκολα διαπίστωσαν αρκετοί, ότι είχαν κάνει λάθος στην κατασκευή τους εξ' αρχής, καθώς όταν μεταβαλλόταν ένα σημείο στο σχήμα τους, το τετράγωνο άλλαζε σχήμα και μορφή.

Πολλοί όμως πειραματίστηκαν ακολουθώντας τα βήματα του φύλλου εργασίας και τελικά κατάφεραν να επιτύχουν το στόχο. Αξίζει να σημειωθεί ότι υπήρχε έντονος ενθουσιασμός, θετική διάθεση, ακόμη και σε μαθητές χαμηλής επίδοσης στα μαθηματικά. Η ενεργοποίηση κίνησης και ίχνους (dragging) σε κάποια αντικείμενα, χωρίς να μεταβάλλεται η δομή του τετραγώνου, προκάλεσε ακόμη περισσότερο το ενδιαφέρον τους. Η συστηματική χρήση ειδικού λογισμικού βοηθάει στην αλλαγή από παθητική σε ενεργητική μάθηση (Κρητικός 2004, όπως αναφ. ο Νικολουδάκης, 2008). Το Geogebra είναι ένα εργαλείο που μπορεί αφενός να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να δημιουργήσουν ένα αποτελεσματικό και ουσιαστικό μαθησιακό περιβάλλον, αφετέρου να βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν μεγαλύτερη ευχέρεια στα θέματα των μαθηματικών (Faggiano & Ronchi, 2011; Haciomeroglu; 2011).

Η παραπάνω δραστηριότητα προηγήθηκε της κλασικής γεωμετρικής κατασκευής, ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τη φιλοσοφία της μεθόδου, οπότε και ακολούθησε στο 3^{ο} φύλλο εργασίας η μέθοδος του Pólya με μολύβι και χαρτί .

Η δραστηριότητα με το λογισμικό συνέβαλε θετικά στην κατανόηση αυτής της προσέγγισης, αλλά και στο συναισθηματικό τομέα, αν λάβουμε υπόψιν μας τη δυνατότητα διάδρασης των μαθητών με τη χρήση του, στοιχείο που συμφωνεί με την έρευνα των Aktas & Mumcu (2019) όπου επισημαίνεται η αξία του διαδραστικού πίνακα και η κατανόηση της κατασκευής των σχημάτων. Βέβαια στην παρούσα εργασία δε χρησιμοποιήθηκε διαδραστικός πίνακας, όμως η τεχνολογία σε συνδυασμό με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας επέφερε θετικά αποτελέσματα. Αντιλήφθηκαν τη σημασία της βοηθητικής ευθείας στα προβλήματα γεωμετρίας, μολονότι εκδήλωσαν αδυναμία να συνδέσουν την γεωμετρική κατασκευή με την αποδεικτική διαδικασία. Θεώρησαν ότι είναι αυτονόητη η κατασκευή του τετραγώνου, αφού προκύπτει ως μεγέθυνση του αρχικού. Η αιτιολόγησή τους βασίστηκε στην εικόνα του σχήματος και δεν μπόρεσαν να καταλάβουν την αναγκαιότητα της απόδειξης. Οι μαθητές αν και κατάφεραν να κατασκευάσουν το τετράγωνο, έδειξαν αδυναμία στο να τεκμηριώσουν την κατασκευή του. Οι περισσότεροι συμμετέχοντες θεώρησαν δεδομένο ότι το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο και όχι τετράγωνο και ότι ήταν απαραίτητο να αποδείξουν ότι έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. Η δυσκολία αυτή μπορεί να ερμηνευτεί εξαιτίας της έλλειψης των γνωστικών εννοιών, των ιδιοτήτων και θεωρημάτων που χρειάζονται στην επικύρωση της κατασκευής.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι παράλληλο με τα αποτελέσματα ορισμένων ερευνών στη βιβλιογραφία (Marchis & Molnár, 2009; Demiray, 2019; Cheung, 2011; Barbin et al., 2018; Fujita, Jones & Kunimune, 2010).

Η Demiray (2019) αναφέρει ότι η έλλειψη ανάπτυξης εικασιών έχει ενδεχομένως ως συνέπεια οι μαθητές να χρειαστεί να καταβάλουν μεγαλύτερη προσπάθεια ώστε να παράγουν έγκυρα επιχειρήματα (Antonini & Mariotti, 2008). Η εξοικείωση των μαθητών με τις έννοιες των μαθηματικών συντελούν στη διεξαγωγή έγκυρων αποδείξεων (Barrier et al., 2009). Ένα άλλο κρίσιμο σημείο είναι η οπτικοποίηση στη διαδικασία επιχειρηματολογίας. Οι γεωμετρικές εικόνες βοηθούν στην παρατήρηση των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων και κατ' επέκταση στην σωστή τεκμηρίωση (Sinclair κ.ά., 2012a), όπως αναφέρει η Demiray, 2019).

Απ' την άλλη, όμως, ένα ακριβές σχήμα μπορεί να παραπλανήσει το μαθητή και να θεωρήσει ότι δε χρειάζεται απόδειξη επειδή έτσι «φαίνεται» από το σχήμα. Στην παρούσα έρευνα οι μαθητές έδωσαν πολλές φορές τέτοιου είδους απαντήσεις και δεν κατάφεραν να προχωρήσουν στην επικύρωση της κατασκευής τους. Αξίζει να αναφέρουμε σε αυτό το σημείο ότι υπάρχει μια παγίδα στο θέμα των γεωμετρικών κατασκευών, όταν ο εκπαιδευτικός δίνει απευθείας τα βήματα κατασκευής στους μαθητές (Kuzle, 2013, όπως αναφ. η Demiray, 2019).

Η γεωμετρική κατασκευή έχει προστιθέμενη αξία, όταν οι ίδιοι μαθητές εμπλέκονται ώστε να αναπτύξουν την επίλυση του προβλήματος «*μέσω της συλλογιστικής διαδικασίας*» (Pandisico, 2002, όπως αναφ. η Demiray, 2019). Η κατασκευή του προβλήματός μας είναι ιδιαίτερα απαιτητική και προϋποθέτει καλή γνώση της κατασκευαστικής διαδικασίας. Οι μαθητές που συμμετείχαν δεν είχαν κανένα υπόβαθρο σε ότι αφορά τις ευκλείδειες κατασκευές από προηγούμενες τάξεις, συνεπώς ήταν απαραίτητο να δίνονται αναλυτικά οι οδηγίες από την διδάσκουσα.

Οι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες και με τη μέθοδο του Marolois καθώς δεν είναι συνηθισμένοι σε συνδυαστικές ασκήσεις με πολύπλοκα σχήματα. Αρχικά οι σκέψεις τους ήταν συγκεχυμένες, δεν μπορούσαν να περιγράψουν το συλλογισμό τους και ήταν φανερή η έλλειψη αυτοπεποίθησης. Το μεγαλύτερο πρόβλημα παρουσιάστηκε όταν έπρεπε να αποδείξουν ότι δύο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες . Για το λόγο αυτό δόθηκαν βοηθητικά σχήματα στο φύλλο εργασίας, ώστε να μπορέσουν να εφαρμόσουν τις κατάλληλες ιδιότητες, να συσχετίσουν τα αποτελέσματα που προέκυψαν από κάθε σχήμα και να αποδείξουν το ζητούμενο. Η ομαδική εργασία συνέβαλε θετικά ώστε να αντιμετωπίσουν τα εμπόδια ανταλλάσσοντας ιδέες και απόψεις. Τα ευρήματα αυτά συμφωνούν με εκείνα των Cheung (2011), Demiray (2019) και Massarwe (2022), όπου περιγράφουν τη σύγχυση των συμμετεχόντων στην έρευνά τους σχετικά με την έννοια της τυπικής απόδειξης και τη σημασία της ομαδικής εργασίας. Εξαιτίας της δυσκολίας της μεθόδου αυτής, αλλά και του Lois Bourdon που αναλύθηκε παραπάνω, ήταν απαραίτητο να δοθούν τα βήματα της κατασκευής. Οπότε κλήθηκαν να ακολουθήσουν τις οδηγίες ως ένα βαθμό και στη συνέχεια να αναπτύξουν μόνοι τους τη συλλογιστική διαδικασία προκειμένου να καταλήξουν στην επίλυση του προβλήματος. Όπως αναφέρει ο Kuzle (2013), «*παρά τα οφέλη των γεωμετρικών κατασκευών για τη γεωμετρία, μπορεί να υπάρξει μια παγίδα στην πράξη στην περίπτωση που οι εκπαιδευτικοί δίνουν απευθείας τα κατασκευαστικά βήματα στους μαθητές*». Ωστόσο καμία ομάδα δεν κατάφερε να ολοκληρώσει χωρίς βοήθεια.

Ο ακριβής σχεδιασμός με κανόνα και διαβήτη του ζητούμενου τετραγώνου, με τη μέθοδο του Louis Bourdon απαιτούσε αρκετή εξάσκηση προκειμένου οι μαθητές να αποκτήσουν άνεση και να περιοριστούν οι τεχνικές δυσκολίες. Αν και υπήρχε σημαντική αλλαγή στη στάση των μαθητών απέναντι στις γεωμετρικές κατασκευές, από την έναρξη της διδασκαλίας, επιδέχεται περεταίρω βελτίωση, εύρημα που συμφωνεί με προηγούμενες έρευνες (Cheung , 2011 ; Aktas & Mumcu, 2019; Demiray, 2019; Ρίζος, κ.α., 2020; Massarwe, 2022). Παρά το γεγονός ότι προηγήθηκε σε ξεχωριστό μάθημα η κατασκευή της τέταρτης αναλόγου τριών ευθυγράμμων τμημάτων, δεν κατάφεραν να αιτιολογήσουν την εγκυρότητα της κατασκευής τους μέσα από κατάλληλες αποδεικτικές διαδικασίες. Κάποιοι μάλιστα θεώρησαν ότι δεν είναι αναγκαία η απόδειξη της κατασκευής, γεγονός που επιβεβαιώνει και η έρευνα των Fujita, Jones & Kunimune (2010), όπου σημειώνεται ότι οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν με επιτυχία απλές αποδείξεις στη γεωμετρία, όμως ενδέχεται να μην γνωρίζουν την αναγκαιότητα της απόδειξης και να μην είναι ικανοί να κάνουν διάκριση μεταξύ πειραματικής επαλήθευσης και της τυπικής απόδειξης.

Η επιλογή της μεθόδου του Pólya από την πλειοψηφία των μαθητών στο τελικό διαγώνισμα δικαιολογείται ως ένα βαθμό, αφενός εξαιτίας της ευκολίας της, αφετέρου λόγω της προσέγγισης της μεθόδου με τη χρήση του λογισμικού Geogebra. Όσοι επέλεξαν τη μέθοδο αυτή, κατάφεραν να την διεκπεραιώσουν χωρίς λάθη και ακολούθησαν με ακρίβεια τα βήματα κατασκευής και απόδειξης. Επομένως στο συγκεκριμένο έργο μπόρεσαν να κάνουν τη γεωμετρική κατασκευή και τεκμηρίωσαν τις ενέργειές τους.

Όσον αφορά το δεύτερο πρόβλημα του διαγωνίσματος, δηλαδή την εγγραφή τετραγώνου σε ημικύκλιο, μολονότι έκαναν ένα σωστό σχήμα και πολλοί επιχείρησαν να κάνουν την απόδειξη, αντιμετώπισαν δυσκολίες με τις γεωμετρικές αποδείξεις και έδειξαν αδυναμία χρήσης των κατάλληλων μαθηματικών για την σωστή κατασκευή και τη διεξαγωγή συμπερασμάτων.

Παρατηρείται ωστόσο μια αισθητή διαφορά συγκριτικά με το pre-test σχετικά με την αντίληψη που έχουν για την εγγραφή σχημάτων σε άλλα επίπεδα σχήματα, αλλά και την αναγκαιότητα της απόδειξης της κατασκευής. Σε παρόμοια συμπεράσματα καταλήγει η έρευνα των Chinnappan, Ekanayake & Brown (2012), που τονίζουν ότι οι μαθητές χρειάζονται σωστή υποδομή και προετοιμασία ώστε να αντιμετωπίσουν προβλήματα απόδειξης γεωμετρίας. Τα προβλήματα αυτά έχουν μια μοναδική δομή και η επίλυσή τους απαιτεί κατανόηση και χρήση κατάλληλων στρατηγικών και ως εκ τούτου προϋποθέτει χρόνο και επιμονή.

2ο ερευνητικό ερώτημα

Οι μαθητές έχουν την ικανότητα να επιλύουν το πρόβλημα της εγγραφής τετραγώνου σε τρίγωνο συνδυάζοντας αλγεβρικές και γεωμετρικές μεθόδους;

Τα ευρήματά μας φαίνεται να συνάδουν με εκείνα των Pozio & Bolondi (2019) και Barana (2021), όπου επισημαίνεται ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν συχνά δυσκολίες όταν κάνουν αλγεβρικές εργασίες στο πλαίσιο της γεωμετρίας.

Η προσέγγιση του Chuquet στο τέταρτο φύλλο εργασίας συνδύαζε άλγεβρα και γεωμετρία. Απαιτούσε πράξεις με ριζικά, σύγκριση ίσων και όμοιων τριγώνων και εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος. Η δυσκολία στην κατανόηση του προβλήματος ήταν εμπόδιο ώστε να ξεκινήσουν στην επίλυσή του και υπήρχε σύγχυση στο να ξεκαθαρίσουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα, στοιχείο που τονίζει στην έρευνά του ο Massarwe (2022)*, λέγοντας ότι «οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν την αφηρημένη γεωμετρική γλώσσα».* Παρά το γεγονός ότι τα βήματα του συλλογισμού δόθηκαν αναλυτικά στο φύλλο εργασίας, δεν ανέπτυξαν κριτική σκέψη ώστε να εργαστούν συνδυαστικά και να φτάσουν στη λύση με επιτυχία. Είναι επίσης φανερό πως δεν είχαν ευχέρεια στις πράξεις με ρίζες και δεν μπόρεσαν να αποδεχτούν ως λύση έναν άρρητο αριθμό.

Παρόμοια ήταν τα ευρήματα από την εμπλοκή των μαθητών με τη μέθοδο του Lois Bourdon η οποία ήταν εξαιρετικά δύσκολη στη σύλληψη αλλά και στην κατασκευή. Αρχικά απαιτούσε την εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή και στη συνέχεια την αντικατάσταση των τμημάτων με τα αντίστοιχα μήκη τους εκφρασμένα σε συνάρτηση με το x, α, και h και όχι με αριθμητικές τιμές.

Οι μαθητές φάνηκε να εξοικειώνονται με την εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, εντούτοις δυσκολεύτηκαν σε δύο σημεία: να εκφράσουν ένα άγνωστο ευθύγραμμο τμήμα ως συνάρτηση δύο γνωστών και να το κατασκευάσουν στο σχήμα που διαπραγματεύονται. Η εφαρμογή της άλγεβρας στη γεωμετρία τους δημιούργησε σύγχυση και προβλήματα, κυρίως όταν τα δεδομένα δεν είναι αριθμοί, αλλά αλγεβρικές παραστάσεις. Οι μαθητές δεν ήταν αρκετά ικανοί να συνδυάσουν την άλγεβρα στα γεωμετρικά προβλήματα.

Η προσέγγιση του al Khwarizmi, που βασίζεται στη κατάστρωση μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού λαμβάνοντας υπόψιν ιδιότητες από τη γεωμετρία και απαιτεί συνδυασμό γεωμετρίας και άλγεβρας, φαίνεται να δυσχέραινε την κατάσταση, η διαχείριση ενός γεωμετρικού προβλήματος που έπρεπε να επιλυθεί αλγεβρικά θεωρώντας x το ζητούμενο άγνωστο, στιγμιαία τους εμπόδισε στο να προχωρήσουν. Οι μαθητές έχουν συνηθίσει από το Δημοτικό και το Γυμνάσιο να υπολογίζουν εμβαδά περισσότερο με αριθμητικά δεδομένα και λιγότερο με αλγεβρικές παραστάσεις όπου εμφανίζεται ό άγνωστος x. Η έκφραση του εμβαδού τριγώνου συναρτήσει του x, τους προβλημάτισε και για το λόγο αυτό χρειάστηκε η παρέμβαση της εκπαιδευτικού δίνοντας αριθμητικά παραδείγματα ώστε να κατανοήσουν το ρόλο του x. Και σε αυτό το σημείο φαίνεται η δυσκολία στην κατάστρωση της εξίσωσης όταν πρόκειται για λεκτικά προβλήματα και μάλιστα προβλήματα που εμπλέκουν γεωμετρικές έννοιες. Η λύση του al -Khwarizmi απαιτεί την έκφραση των ευθυγράμμων τμημάτων του σχήματος συναρτήσει του x και κατόπιν την κατάλληλη αντικατάσταση στην ισότητα με τα εμβαδά. Στο σημείο αυτό παρατηρήθηκαν πολλές αδυναμίες, όπως και στο χειρισμό αλγεβρικών πράξεων που περιέχουν έναν άγνωστο x, όπως στην απαλοιφή παρονομαστών, αναγωγή ομοίων όρων, κτλ.. Παραπλήσια ήταν τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις εργασίες των μαθητών που ασχολήθηκαν με τη μέθοδο του Chuquet και του al- Khwarizmi στο γνωστικό τεστ. Δεν κατάφεραν να ολοκληρώσουν το έργο τους και φάνηκαν τα προβλήματα που έχουν στη μαθηματικοποίηση των λεκτικών γεωμετρικών προβλημάτων. Έδειξαν αδυναμία να χειριστούν τη μεταβλητή x και να εκφράσουν τα εμβαδά των τριγώνων ως συνάρτηση του αγνώστου (Jupri & Drijvers, 2016; Jupri, 2017).
Οι μαθητές δεν παρουσίασαν βελτίωση και είχαν αδυναμίες να κάνουν αλγεβρικές πράξεις στο γεωμετρικό πρόβλημα που μας απασχόλησε.

Συμπεράσματα των ερωτηματολογίων

Το πρώτο ερωτηματολόγιο αφορούσε στις επιδόσεις των μαθητών απέναντι στη γεωμετρία και τις γεωμετρικές κατασκευές, όπως εκείνοι έκριναν, καθώς και την προτίμησή τους σε σχέση με την άλγεβρα.

Από τις απαντήσεις που έδωσαν σε αυτό το ερωτηματολόγιο, διαπιστώνουμε ότι τους αρέσει περισσότερο η άλγεβρα παρά η γεωμετρία και σε γενικές γραμμές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στα γεωμετρικά προβλήματα καθώς επίσης και στις γεωμετρικές κατασκευές, αφού δεν είναι εξοικειωμένοι με αυτές. Μόλις τρεις μαθητές δείχνουν την προτίμησή τους στη γεωμετρία έναντι της άλγεβρας, ενώ τέσσερις δεν προτιμούν κανένα μάθημα από τα δύο. Οι περισσότεροι συμφωνούν ότι οι γεωμετρικές κατασκευές δεν παρουσιάζουν ενδιαφέρον και ότι είναι δύσκολες. Κάποιοι θεωρούν ότι δεν είναι ούτε εύκολες, αλλά ούτε δύσκολες, ενώ μόνο ένας σημείωσε ότι είναι εύκολες. Επίσης οι περισσότεροι σημείωσαν ότι δυσκολεύτηκαν με τις συγκεκριμένες γεωμετρικές κατασκευές της διδακτικής παρέμβασης.

Ενθαρρυντικό είναι ωστόσο, ότι μέσα από τις διαφορετικές προσεγγίσεις του προβλήματος που αναλύθηκαν στα μαθήματα, κατανόησαν καλύτερα το θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα τριγώνων. Κάποιοι από αυτούς συμφώνησαν ότι οι εργασίες κατασκευής συνδέονται με τη γεωμετρία και ενισχύουν την ανάπτυξη γεωμετρικών αποδείξεων, επίσης βοηθούν τους μαθητές να αναλύσουν τα σχήματα και, επομένως, να χειριστούν τα προβλήματα ευκολότερα (Cheung, 2011; Köse et al., 2012; Sinclair et al., 2012a). Ελάχιστοι μαθητές, πέντε στο σύνολο, απέκτησαν μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τις γεωμετρικές κατασκευές και τη γεωμετρία γενικά**,** μετά το πέρας της διδακτικής παρέμβασης. Η στάση των μαθητών απέναντι στη γεωμετρία δεν είναι εύκολο να αλλάξει και μάλιστα στη Β΄ τάξη του Λυκείου. Ο διαφορετικός τρόπος σκέψης που απαιτεί η γεωμετρία, κάνει το μάθημα ιδιαίτερα απαιτητικό και χρειάζεται συνεχή ενασχόληση από τις μικρές τάξεις του Δημοτικού. Όπως ήταν αναμενόμενο οι ελάχιστες ώρες που αφιερώθηκαν σε αυτή την εργασία, δεν επαρκούν ώστε να αποκτήσουν οι μαθητές κίνητρα και μεγαλύτερο ενδιαφέρον, εκτός από κάποιες εξαιρέσεις επιμελών μαθητών.

Στο δεύτερο ερωτηματολόγιο επέλεξαν την πιο ενδιαφέρουσα προσέγγιση και τη μέθοδο που τους δυσκόλεψε περισσότερο. Οι μέθοδοι του Pólya και του Chuquet τους φάνηκαν πιο ενδιαφέρουσες και ακολουθεί η μέθοδος του al- Khwarizmi. Η λύση που βρήκαν πιο δύσκολη και πολύπλοκη ήταν του al- Khwarizmi και του Lois Bourdon.

Το τρίτο ερωτηματολόγιο αφορά στην ενσωμάτωση της ιστορίας στο συγκεκριμένο μάθημα αλλά και γενικά στο μάθημα των μαθηματικών. Οι περισσότεροι μαθητές έδειξαν ενδιαφέρον για τη ζωή και το έργο των Μαθηματικών που αναφέρουμε στην παρούσα εργασία και μάλιστα κάποιοι εκδήλωσαν αυτό το ενδιαφέρον και κατά τη διάρκεια των μαθημάτων κάνοντας ερωτήσεις για τη ζωή τους και την πανεπιστημιακή τους κατάρτιση. Ιδιαίτερη εντύπωση τους έκαναν οι γνώσεις του Marolois για το σχεδιασμό και την κατασκευή των οχυρώσεων και η συμβολή των μαθηματικών στο στρατό. Σε γενικές γραμμές καταγράφηκε ότι υπάρχει θετική στάση στη χρήση της ιστορίας στα μαθηματικά γενικότερα.

7.2 Συμπεράσματα

Το αντικείμενο της παρούσας μελέτης ήταν α) να διερευνηθεί σε ποιο βαθμό μπορούν οι μαθητές να κατασκευάσουν ένα τετράγωνο σε τρίγωνο και να τεκμηριώσουν την κατασκευή τους εφαρμόζοντας θεωρήματα, προτάσεις και ιδιότητες της γεωμετρίας και β) να εξεταστεί αν οι μαθητές είναι ικανοί να εφαρμόζουν αλγεβρικές εργασίες στα γεωμετρικά προβλήματα όταν διαπραγματεύονται το πρόβλημα της εγγραφής τετραγώνου σε τρίγωνο.

Συνοπτικά παρουσιάζονται παρακάτω τα συμπεράσματα που προέκυψαν :

Το μάθημα της γεωμετρίας λόγω της υποβάθμισής του τις τελευταίες δεκαετίες, είναι ιδιαίτερα δύσκολο και «αντιπαθές» στους μαθητές. Οι γεωμετρικές κατασκευές είναι ένα άγνωστο κομμάτι της γεωμετρίας. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν ιδιαίτερη δυσκολία ακόμα και στο χειρισμό του κανόνα και του διαβήτη. Αδυνατούν να κατασκευάσουν κάθετες ευθείες, ισοσκελή, ισόπλευρα τρίγωνα και τετράγωνα. Δεν γνωρίζουν τι είναι εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σχήματα, δεν γνωρίζουν τι είναι κανόνας και τη διαφορά του από το βαθμονομημένο χάρακα, πολλοί δυσκολεύονται στην εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος αλλά και στη σύγκριση τριγώνων. Με δεδομένες αυτές τις συνθήκες, επιχειρήσαμε να μελετήσουμε τις ικανότητες των μαθητών να φέρουν σε πέρας ένα ιδιαίτερο πρόβλημα, απαιτητικό τόσο για τους μαθητές όσο και για τους εκπαιδευτικούς που δε συναντάται στα σχολικά εγχειρίδια. Σε κάθε διδακτική ώρα το μάθημα προχωρούσε με αργούς ρυθμούς, με πολλές επαναλήψεις, διευκρινήσεις και παρεμβάσεις της καθηγήτριας. Αφιερώθηκε αρκετός χρόνος για τη διδασκαλία της κατασκευής ενός τυχαίου τετραγώνου και της κατασκευής της τέταρτης αναλόγου. Επιπρόσθετα η αποδεικτική διαδικασία δυσκόλευε τους μαθητές με αποτέλεσμα να χαθεί πολύτιμος χρόνος.

Επομένως αναφορικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, είναι φανερό ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στις γεωμετρικές κατασκευές σε τέτοιο βαθμό που ήταν απαραίτητη η παρέμβαση της ερευνήτριας σχεδόν σε κάθε βήμα. Αξιοσημείωτο είναι ότι οι περισσότεροι δεν κατανοούσαν την αναγκαιότητα της επικύρωσης της κατασκευής με αποδεικτικό συλλογισμό, αλλά βασίζονταν στην εικόνα ενός καλού σχήματος. Επιπλέον τα αποτελέσματα του τελικού διαγωνίσματος δεν ήταν τα αναμενόμενα, αρκετοί μαθητές δεν μελέτησαν αρκετά και επομένως δεν ανέπτυξαν το πρώτο θέμα όπως θα έπρεπε.

Ενθαρρυντικό είναι παρ' όλα αυτά ότι υπήρχε μια βελτίωση κατά τη διάρκεια των δέκα διδακτικών ωρών της διδασκαλίας, κυρίως στους μαθητές με καλή επίδοση στα μαθηματικά. Άρχισαν να εξοικειώνονται με τη διαδικασία της κατασκευής και της αιτιολόγησης, στοιχείο που φαίνεται από τον τρόπο που διαπραγματεύτηκαν το άγνωστο πρόβλημα της εγγραφής του τετραγώνου σε ημικύκλιο. Παρά το γεγονός ότι δεν το έλυσαν έως το τέλος, έκαναν το σωστό σχήμα και επιχείρησαν να αιτιολογήσουν την κατασκευή τους.

Σχετικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, είναι φανερή η δυσκολία των μαθητών να αναπτύξουν συνδυαστικό συλλογισμό, ώστε να καταστρώσουν αλγεβρικές εξισώσεις σε γεωμετρικά προβλήματα. Αν και έχουν έρθει αντιμέτωποι με ρεαλιστικά γεωμετρικά προβλήματα που απαιτούν δημιουργία σχέσεων μεταξύ αγνώστων σε προηγούμενες τάξεις, αδυνατούσαν να ακολουθήσουν μια στρατηγική ώστε να δημιουργήσουν τις κατάλληλες εξισώσεις.

Η συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση ωστόσο, δεν μπορεί να καλύψει τα κενά των προηγούμενων ετών και μάλιστα μέσα από τη διαπραγμάτευση ενός θέματος που δεν είναι οικείο προς τους μαθητές. Οι δέκα διδακτικές ώρες που αφιερώθηκαν για τη διδασκαλία των πέντε διαφορετικών προσεγγίσεων, δεν ήταν αρκετές ώστε να αλλάξουν τη στάση των μαθητών απέναντι στη γεωμετρία και τις γεωμετρικές κατασκευές. Παρ' όλα αυτά τους δόθηκε το έναυσμα για κινητοποίηση, ενεπλάκησαν

όλοι εργαζόμενοι σε ομάδες, υπήρχε ανταλλαγή ιδεών, ενώ παράλληλα οι πιο αδύναμοι είχαν τη βοήθεια τόσο των συμμαθητών τους όσο και της καθηγήτριας.
Επιπρόσθετα η ενσωμάτωση της ιστορίας κατά τη διάρκεια της παρέμβασης έδωσε ένα διαφορετικό ύφος στο μάθημα που δεν είχαν συνηθίσει. Η ανάγνωση των πρωτότυπων προβλημάτων από μετάφραση και ο διαφορετικός τρόπος γραφής και έκφρασης των κειμένων προκάλεσε την περιέργεια των μαθητών και έδωσε έναυσμα για συζήτηση επί του θέματος, όπως για παράδειγμα για το διαφορετικό συμβολισμό των αριθμών, των τετραγωνικών ριζών και για το γεγονός ότι δεν είχαν επινοηθεί ακόμα οι δεκαδικοί αριθμοί. Αν και δυσκολεύτηκαν στην αρχή στην κατανόηση κάποιων κειμένων, ένιωσαν την επιθυμία να αναλύσουν πιο διεξοδικά το κείμενο ώστε να καταλάβουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα. Βρήκαν αρκετά ενδιαφέρουσα τη συζήτηση σχετικά με τη ζωή και το έργο των Μαθηματικών (Marolois, Chuquet, Bourdon, Pólya, al-Khwarizmi), προβληματίστηκαν σε πολιτισμικό επίπεδο και εκτίμησαν περισσότερο τη γεωμετρία αφού διαπίστωσαν πόσο χρήσιμη και εφαρμόσιμη είναι σε κάποιους τομείς της ζωής μας.
Δυστυχώς ο χρόνος διδασκαλίας που ορίζει το Αναλυτικό Πρόγραμμα δεν επιτρέπει να γίνονται συχνά παρόμοιες διδακτικές παρεμβάσεις.

7.3 Περιορισμοί της έρευνας- Προτάσεις.

Η μελέτη αυτή κλείνει με μια σύντομη αναφορά σε μελλοντικές έρευνες. Η παρούσα εργασία βασίστηκε σε συγκεκριμένα φύλλα εργασίας που αποτέλεσαν τα εργαλεία και αφορούν ένα ιδιαίτερο και άγνωστο γεωμετρικό πρόβλημα.
Τα φύλλα εργασίας σχεδιάστηκαν σύμφωνα με τις προσεγγίσεις των πέντε μαθηματικών του παρελθόντος, όπως έχουν αναπτυχθεί στα πρωτότυπα έργα τους, επιλέγοντας εκείνες τις λύσεις που είναι σχετικές με τη διδακτέα ύλη της Γεωμετρίας της Β΄ Λυκείου, οπότε το γνωστικό αντικείμενο περιορίστηκε στο θεώρημα του Θαλή, την ομοιότητα τριγώνων το Πυθαγόρειο θεώρημα και εύρεση εμβαδών τετραγώνου και τριγώνου.
Το δείγμα μας είναι εξαιρετικά μικρό, 22 μαθητές ενός τμήματος της Β΄ Λυκείου, όπως έχει αναφερθεί παραπάνω, καθώς η συγγραφέας της εργασίας διδάσκει στο τμήμα αυτό και ήταν εύκολη η πρόσβαση.

Η διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης ήταν περίπου δέκα διδακτικές ώρες και προγραμματίστηκε ώστε να λάβει χώρα στα πλαίσια της διδακτέας ύλης σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα, οπότε δεν ήταν δυνατό να παραταθεί για επιπλέον ώρες.

Επομένως τα συμπεράσματά μας δεν μπορούν να γενικευτούν. Προτείνεται να σχεδιαστούν εκ νέου γεωμετρικές δραστηριότητες και κατασκευές κλιμακούμενης δυσκολίας, ξεκινώντας από τις στοιχειώδεις έως και τις πιο πολύπλοκες όπως της παρούσας εργασίας, ώστε να εξοικειωθούν οι μαθητές με την όλη διαδικασία. Επίσης προτείνεται να εφαρμοστεί σε μεγαλύτερο δείγμα μαθητών των δύο τάξεων του Λυκείου Α και Β και φυσικά να έχει μεγαλύτερη διάρκεια.

Η παρούσα εργασία αποτελεί το έναυσμα για μελλοντικές εργασίες που αφορούν τις γεωμετρικές κατασκευές στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Βιβλιογραφία

- Aktas, M. C., & Mumcu, H. Y. (2019). Pre-Service Elementary Mathematics Teachers' Views on Geometric Constructions: Building on the Paper or Interactive Whiteboard?. *Online Submission*, *6*(3), 598-611.
- Andersen, K. (2008). *The geometry of an art: the history of the mathematical theory of perspective from Alberti to Monge*. Springer Science & Business Media. Αναρτήθηκε από: https://books.google.gr/books?id=8B_JeMxNUIkC&pg=PA297&lpg=PA297&dq=Marolois&source=bl&ots=IrYvJhOdD&sig=ACfU3U3xZTdIydLtyRWK57M6qdfTsBzOcw&hl=el&sa=X&ved=2ahUKEwiB3_XMnbz5AhV7X_EDHdqjDiUQ6AF6BAgDEAM#v=onepage&q=Marolois&f=false
- Antonini, S., & Mariotti, M. A. (2008). Indirect proof: What is specific to this way of proving? ZDM, 40(3), 401-412.
- Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ. & Σιδέρης, Π. (2001).*Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου.* Αθήνα: ΟΕΔΒ.
- Barana, A. (2021). From formulas to functions through geometry: A path to understanding algebraic computations. European Journal of Investigation in Health, Psychology and Education, 11(4), 1485-1502.
- Barbin, É., Guichard, J. P., Moyon, M., Guyot, P., Morice-Singh, C., Métin, F., ... & Hamon, G. (2018). *Let history into the mathematics classroom*. Springer international publishing,
- Barrier, T., Mathé, A. C., & Durand-Guerrier, V. (2009). Argumentation and Proof: A discussion about Toulmin's and Duval's models. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 191-200). Lyon, France.
- Beckmann, C. E. et al. (2010). Teaching and Learning High School Mathematics. John Wiley & Sons, Inc.
- Boyé, A., Demattè, A., Lakoma, E., & Tzanakis, C. (2011). The history of mathematics in school textbooks. *Proc. of the 6th ESU*, 153-163.
- Britannica, T. Editors of Encyclopaedia (2022, June 6). al-Khwārizmī. Encyclopedia Britannica. https://www.britannica.com/biography/al-Khwarizmi

- Cajori, F. (1928). *A history of mathematical notations.* La Salle, IL: The Open Court Publishing Co.
- Cheung, L. H. (2011). Enhancing students' ability and interest in geometry learning through geometric constructions. *Yayınlanmamış Doktora Tezi, The University of Hong Kong, Hong Kong, Çin.*
- Chikwere, P., & Ayama, K. (2016). Teaching of geometric construction in junior high school: An intervention. *Journal of Elementary Education*, *26*(1), 139-146.
- Chinnappan, M., Ekanayake, M. B., & Brown, C. (2012). Knowledge use in the construction of geometry proof by Sri Lankan students. International Journal of Science and Mathematics Education, 10(4), 865-887.
- Chuquet, N. (1979). In H. L'Huillier (Ed.), *La géométrie, première géométrie algébrique enlangue française*. Paris, France: Vrin.
- Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., & Tzanakis, C. (2018). Mathematics, education and history. *Towards a harmonious partnership. ICME-13 monographs. Cham: Springer*.
- Coutat, S. & Richard, P. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16, 97–126.
- da Cunha, J.-A. (1822). *Principles mathématiques* (Trans. J. M. d'Abreu). Bordeaux, France: Racle.
- de Lurdes Ferraz, M., Rodrigues, J. F., & Saraiva, L. (1990). *Anastácio da Cunha, 1744-1787: o matemático e o poeta*. Impr. Nacional-Casa da Moeda.
- Demiray, E. (2019). An investigation of prospective middle school mathematics teachers' argumentation, proof, and geometric construction processes in the context of cognitive unity.
- Deniz, Ö., & Kabael, T. (2021). Investigation of Sixth-Grade Students' Cognitive Processes in a Learning Trajectory Designed for Basic Geometric Constructions. *Egitim ve Bilim*, *46*(206).
- Domingues, J. C. (2014). The repercussion of José Anastácio da Cunha in Britain and USA in the nineteenth century. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*, *29*(1), 32-50.

- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnements. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10, 5–53.
- Erduran, A., & Yeşildere, S. (2010). The use of a compass and straightedge to construct geometric structures. *Elementary Education Online, 9*(1), 331-345.
- Θωμαΐδης Γ. (2014). Θεωρητικό Πλαίσιο ενός Μεταπτυχιακού Μαθήματος με Θέμα: «Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους. Επιστήμες Αγωγής : Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση, σ. 16.
- Θωμαΐδης, Γ. (2021). Θεωρητικό πλαίσιο μαθήματος: « Αξιοποίηση της Ιστορίας των μαθηματικών στη Διδακτική τους». Διατμηματικό- Διαπανεπιστημιακό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών : Διδακτική των Μαθηματικών. Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας. Θεσσαλονίκη.
- Θωμαΐδης, Ι., Μιχαηλίδης, Τ., Πάσχος, Θ., Φαρμάκη, Β.& Χριστιανίδης, Ι.(2009). *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Θεσσαλονίκη :ΖΗΤΗ.*
- Θωμαΐδης, Γ., Ξένος, Θ., Παντελίδης, Γ., Πούλος, Α., Στάμου, Γ.(1999). *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου.* Αθήνα: ΟΕΔΒ.
- Θωμαΐδης, Γ., Πούλος, Α. (2006). *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.* Θεσσαλονίκη: Ζήτη.
- Faggiano, E., & Ronchi, P. (2011). GeoGebra as a methodological resource: Guiding Teachers to Use GeoGebra for the Construction of Mathematical Knowledge. *Model-centered learning: Pathways to mathematical understanding using GeoGebra*, 183-189.
- Fauvel, J.: 1991, 'Using history in mathematics education', *For the Learning of Mathematics* 11(2), 3–6.
- Flegg, G., Hay, C., & Moss, B. (1985). The Triparty—First Part. In *Nicolas Chuquet, Renaissance Mathematician* (pp. 27-92). Springer, Dordrecht
- Fowler, D.: 1991, 'Perils and pitfalls of history', *For the Learning of Mathematics* 11(2),15–16.

- Francis, R. L. (1996). A Renaissance of Geometric Constructions. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, *8*(3), 113-124.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel
- Fujita, T., Jones, K., & Kunimune, S. (2010). Students' geometrical constructions and proving activities: A case of cognitive unity?
- Gokhale, A. A. (1995). *Collaborative Learning Enhances Critical Thinking.* Journal of Technology Education, Volume 7, No. 1.
- Gómez-Chacón, I. M., & Kuzniak, A. (2015). Spaces for geometric work: figural, instrumental, and discursive geneses of reasoning in a technological environment. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(1), 201-226
- Graziani, P. (2021). Geometric Constructions: a Tentative Taxonomy.
- Gulikers, I., & Blom, K. (2001). A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational studies in mathematics*, *47*(2), 223-258.
- Güven, Y. (2006). Farklı geometrik çizim yöntemleri kullanımının öğrencilerin başarı, tutum ve van Hiele geometri anlama düzeylerine etkisi (Unpublished master's thesis) Karadeniz Technical University, Trabzon.
- Guyot, P. (2018). A Square in a Triangle. In *Let History into the Mathematics Classroom* (pp. 31-45). Springer, Cham.
- Haciomeroglu, E. S. (2011). Visualization through dynamic GeoGebra illustrations. In *Model-Centered Learning* (pp. 133-144). Brill.
- Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. In *Annales de didactiques et de sciences cognitives* (Vol. 11, pp. 175-193).
- Houdement, C., & Paris, D. I. D. I. R. E. M. (2007). Geometrical working space, a tool for comparison. *WORKING GROUP 7. Geometrical Thinking 954*, 972.
- Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (2021). Προγράμματα Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στις Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεις Λυκείου. ΦΕΚ Β΄ 5390/19,11,2021, σ.σ.69381-69407.

- Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational studies in Mathematics*, *71*(3), 235-261.
- Jupri, A. (2017, April). From geometry to algebra and vice versa: Realistic mathematics education principles for analyzing geometry tasks. In AIP Conference Proceedings (Vol. 1830, No. 1, p. 050001). AIP Publishing LLC.
- Jupri, A., & Drijvers, P. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *12*(9), 2481-2502.
- Καλογερία, Ε. Κυνηγός, Χ., Περυσινάκη,Ε. (2014). Ανακαλύπτοντας 'νέα' σχολικά μαθηματικά με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων. Πρακτικά του 5ου ΕΝ.Ε.ΔΙΜ, Φλώρινα.
- Kanbir, S., Clements, M. A., & Ellerton, N. F. (2018). Historical Reflections on How Algebra Became a Vital Component of Middle-and Secondary-School Curricula. In *Using Design Research and History to Tackle a Fundamental Problem with School Algebra* (pp. 11-58). Springer, Cham.
- Karakuş, F. (2014). Pre-service elementary mathematics teachers' views about geometric construction. *Journal of Theoretical Educational Science, 7*(4), 408-435.
- Katz, V. J., & Barton, B. (2007). Stages in the history of algebra with implications for teaching. *Educational studies in mathematics*, *66*(2), 185-201.
- Köse, N. Y., Tanışlı D., Erdoğan, E. & Ada, T. (2012). İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Teknoloji Destekli Geometri Dersindeki Geometrik Oluşum Edinimleri [Pre-service elementary mathematics teachers' geometric construction acquisitions in technology ıntegrated geometry course]. *Mersin University Journal of the Faculty of Education, 8*(3), 102-121.
- Κρητικός Μ., (2004). Διδασκαλία των Μαθηματικών : Η στρατηγική της Ενεργητικής Διδασκαλίας με τη βοήθεια της Νέας Τεχνολογίας, Πρακτικά 21ου Παν. Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας, ΕΜΕ, 260-272 Αθήνα.
- Kuhn, T. S. (1966). The structure of scientific revolutions (2nd ed.). Chicago: University of Chicago Press.
- Kuzle, A. (2013). Construction with various tools in two geometry courses in the United States and Germany. In B. Ubuz, C. Haser, M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th*

Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 675-685). Ankara, Turkey: Middle East Technical University and ERME.

- Kuzniak, A. (2008). Personal geometrical working space: a didactic and statistical approach. *Statistical Implicative Analysis*, 185-202.
- Kuzniak, A. (2014). Understanding geometric work through its development and its transformations. In *Transformation-A Fundamental Idea of Mathematics Education* (pp. 311-325). Springer, New York, NY.
- Kuzniak, A. (2015). Understanding the nature of the geometric work through its development and its transformations. In *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 1-15). Springer, Cham.
- Kuzniak, A., Gagatsis, A., Ludwig, M., & Marchini, C. (2007). WG 7 REPORT FROM GEOMETRICAL THINKING TO GEOMETRICAL WORK. *WORKING GROUP 7. Geometrical Thinking 954*, 955
- Kuzniak, A., & Nechache, A. (2015, February). Using the geometric working spaces to plan a coherent teaching of geometry. In *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 543-549).
- Lim-Teo, S. K. (1997). Compass constructions: a vehicle for promoting relational understanding and higher order thinking skills.
- Lopez-Real, F., & Leung, A. (2006). Dragging as a conceptual tool in dynamic geometry environments. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37*(6), 665-679.
- Malara, N.A., Navarra G. (2003), *ArAl Project: Arithmetic Pathways Towards Pre-Algebraic Thinking*. Bologna, Pitagora Editrice.
- Marchis, I., & Molnár, A. É. (2009). Research on How Secondary School Pupils Do Geometrical Constructions. *Acta Didactica Napocensia*, *2*(3), 119-126.
- Mariotti, M. A. (1999). Geometry: dynamic intuition and theory.
- Massarwe, K. H. (2022). Studying geometric concepts in elementary school through construction by compass and straightedge. *International Journal on Studies in Education*, *5*(1),42-63.
- Moss, B., Hay, C., & Flegg, G. (1985). The Triparty—Third Part. In *Nicolas Chuquet, Renaissance Mathematician* (pp. 143-196). Springer, Dordrecht.

- Napitupulu, B. (2001). An exploration of students' understanding and van hiele levels of thinking on geometric constructions (Unpublished master's thesis). Simon Fraser University, Indonesia.
- Νικολαντωνάκης , Κ. Η Θεωρία των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας και η Διδασκαλία της Γεωμετρίας. Ανακτήθηκε από: https://slideplayer.gr/slide/11944095/
- Νικολαντωνάκης, Κ. (2021). *Θεωρία του Γεωμετρικού Χώρου Εργασίας.* Στα πλαίσια του μαθήματος: Ιστορία και Επιστημολογία των Μαθηματικών και της Μαθηματικής Εκπαίδευσης Διδακτικής των Μαθηματικών. Διδακτική των Μαθηματικών. Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.
- Νικολουδάκης, Ε. (2008). Η διδασκαλία της εσωτερικής διχοτόμου με τη βοήθεια του συνδυασμού της θεωρίας van Hiele και της Γνωστικής Μαθητείας στα πλαίσια των ΤΠΕ. *Αστρολάβος. Επιστημονικό Περιοδικό Νέων Τεχνολογιών τ. 10,*47-68. Εκδόσεις Ε.Μ.Ε. Αθήνα.
- O'Connor, J. J. & Robertson, E. F. (1999, July). Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi. *MacTutor.* Ανακτήθηκε από *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Khwarizmi/*.
- Ottenheym, K. (2014). Proportional Design Systems in Seventeenth-Century Holland. *Architectural Histories*, *2*(1).
- Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2003): Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών Δημοτικού – Γυμνασίου, Μαθηματικά, ΦΕΚ Β΄ 303, σ.σ. 3983 – 4038.
- Παναούρα, Γ. (2007). *Οι γεωμετρικές γνώσεις και ικανότητες των μαθητών στο τέλος της Δημοτικής Εκπαίδευσης . Συγκρίνοντας τη γεωμετρική σκέψη μαθητών και μέσης εκπαίδευσης.* Διδακτορική Διατριβή στη Μαθηματική Παιδεία. Πανεπιστήμιο Κύπρου, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής.
- Pandiscio, E. A. (2002). Exploring the link between pre-service teachers' conception of proof and the use of dynamic geometry software. *School Science & Mathematics, 102*(5), 212–221.
- Pólya, G. (1945). *How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method.* With a new foreword by John H. Conway.

- Pólya, G. new foreword by John H. Conway, 2004. How to Solve It? A new aspect of mathematical method.

  Ανακτήθηκε από :http://www.im.ufrj.br/~monica/funcoes/Polya.pdf
- Pozio, S., & Bolondi, G. (2019). Difficulties in formulating a geometric situation algebraically: hints from a large-scale assessment. In *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Volume 3 (Research Reports LZ)* (pp. 225-232). PME.
- Ρίζος, Ι., Κολοκοτρώνης, Γ., Παπανικολάου, Α.(2020). Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των γεωμετρικών κατασκευών στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση. Ανακοίνωση στο 37ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας. Θέμα : *Τα Μαθηματικά ως πυλώνας της διεπιστημονικής προσέγγισης στα σύγχρονα οικουμενικά προβλήματα*. Τόμος Α΄. Ανακτήθηκε από https://www.researchgate.net/publication/357314019_Axiopoiese_tes_Istorias_ton_Mathematikon_ste_didaskalia_ton_geometrikon_kataskeuon_sten_Tritobathmia_Ekpaideuse/citations.
- Saraiva, L. (2017, December). In *Buttelin Journal :* CIUHCT- CMAF-CIO Universidade de Lisboa (pp.41-45). Ανακτήθηκε από http://www.cim.pt/magazines/bulletin/1/article/11/pdf
- Sarhangi, R. (2007, July). Geometric constructions and their arts in historical perspective. In *Bridges Donostia: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture* (pp. 233-240).
- Shirali, S. A. (2014). George Pólya & problem solving... An appreciation. *Resonance*, *19*(4), 310-322.
- Sinclair, N., Pimm, D., Skelin, M., & Zbiek, R. M. (2012a). *Developing essential understanding of geometry for teaching mathematics in grades 6-8*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics
- Spiesser, M. (1976). L'oeuvre de Nicolas Chuquet dans le contexte des savoirs mathématiques de la fin du XVe siècle. *sciences*, *19*, 347-350.
- Spiesser, M. (2006). L'algèbre de Nicolas Chuquet dans le contexte français de l'arithmétique commerciale. *Revue d'histoire des mathématiques*, *12*(1), 7-33.

- Στάμου, Γ. (1997). "Ευκλείδεια Γεωμετρία και κριτική ικανότητα των μαθητών." Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας ,σελ. 337-341. Ανακτήθηκε από https://hdml.di.ionio.gr/pdfs/conferences/888.pdf.
- Stankova, Z. (2014). Geometric Constructions: What, Why, and Bits of History. Ανακτήθηκε από: https://mathcircle.berkeley.edu/sites/default/files/archivedocs/2014_2015/lectures/1415lecturespdf/Beg%20-%202014.09.30%20(Session%202,%20Handout).pdf
- Stewart, D. (2022).Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi. *Famous scientists*. Ανακτήθηκε από : https://www.famousscientists.org/.
- Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013). A fascinating application of Steiner's theorem for trapezium: geometric constructions using straightedge alone. *Australian Senior Mathematics Journal*, *27*(2), 6-24.
- Thomaidis, Y. (1993). Aspects of negative numbers in the early 17th century: An approach for didactic reasons. *Science & Education*, *2*, 69-86.
- Τουμάσης, Μ. (2004). Σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών. Αθήνα: Gutenberg
- Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sá, C., Isoda, M., Lit, C., Niss, M., ... & van Maanen, J. (2000). History in mathematics education: the ICMI study.
- Ulff-Møller, J. Estienne de la Roche Larismethique nouellement composee. Lyon, 1520, and Second Edition 1538.
- Uygun, T. (2016). Developing mathematical practices in a social context: A hypothetical learning trajectory to support preservıce middle school mathematics teachers’ learning of triangles (Unpublished master’s thesis). Middle East Technical University, Ankara.
- Van der Waerden, B.L. (1985). Three Muslimic Authors. In: A History of Algebra. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-51599-6_1
- Van der Waerden, B. L. (2013). A history of algebra: From al-Khwārizmī to Emmy Noether.
- Van Maanen, J. (1997). New maths may profit from old methods. *For the Learning of Mathematics*, *17*(2), 39-46.

- Wong, K. L. (2005). Geometric Construction: From Traditional Construction Methods to Alternative Options in Modern Classrooms. *Welcoming the New Century: Reexamining Mathematics Education in Hong Kong*.

Δικτυακές πηγές

- https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Chuquet/
- https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-009-6502-7_2
- https://www.maa.org/book/export/html/2080633
- https://en.wikipedia.org/wiki/Samuel_Marolois
- https://www.famousscientists.org/muhammad-ibn-musa-al-khwarizmi/
- ΙΕΠ. Προγράμματα Σπουδών http://iep.edu.gr/el/nea-ps-provoli
- https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Polya/
- https://en.wikipedia.org/wiki/George_P%C3%B3lya

Παράρτημα

Pre-test

Ομάδα……………………………………………………………………………………………..

Εγγραφή τετραγώνου σε τρίγωνο.

Μια πρώτη επαφή με το πρόβλημα

1. Δραστηριότητα

Σχεδιάστε (ελεύθερα , χωρίς κανόνα και διαβήτη) ένα τυχαίο τρίγωνο και να εγγράψετε σε αυτό ένα τετράγωνο.

Πόσα διαφορετικά σχέδια μπορείτε να κάνετε; πειραματιστείτε.

2. Ερώτηση

Τι ονομάζουμε εγγεγραμμένο τετράγωνο σε τρίγωνο; Μπορείτε να δώσετε έναν ορισμό;

……

…….

……

…….

$1^{ο}$ φύλλο εργασίας

Ομάδα…………………………………………………………………………………………………..

Κατασκευή της τέταρτης αναλόγου τριών ευθυγράμμων τμημάτων

$1^{η}$ φάση .

Έστω τα ευθύγραμμα τμήματα α, β , γ , δ. Το ευθύγραμμο τμήμα δ ονομάζεται τέταρτη ανάλογος των α, β, γ , αν ισχύει :

……

$2^{η}$ φάση.

Να κατασκευάσετε (με κανόνα και διαβήτη) το ευθύγραμμο τμήμα δ αν είναι γνωστά τα τμήματα α, β, γ.

α

β

γ

$3^{η}$ φάση.

Να κατασκευάσετε (με κανόνα και διαβήτη) την τέταρτη ανάλογο των ευθυγράμμων τμημάτων α, β, α+β, αν είναι γνωστά τα τμήματα α, β.

2ο φύλλο εργασίας

Ομάδα……………………………………………………………………………………………..

Η γεωμετρική κατασκευή του προβλήματος

1η κατασκευή (Pólya, από το βιβλίο του: *«How to solve it»*)

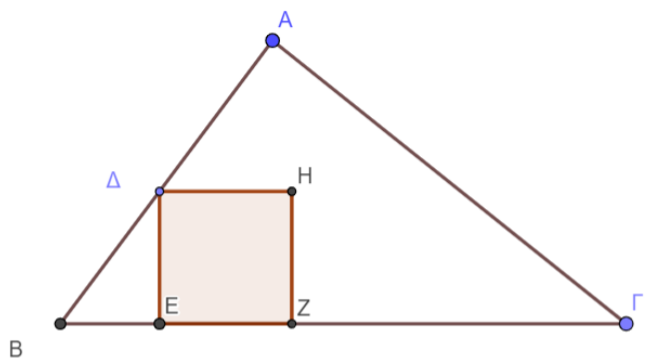
Να εγγραφεί τετράγωνο σε τυχαίο τρίγωνο με χρήση του λογισμικού

Βήμα 1ο

Ανοίξτε το λογισμικό Geogebra και κατασκευάστε ένα τρίγωνο ΑΒΓ.

Βήμα 2ο

Θεωρήστε τυχαίο σημείο Δ πάνω στην ΑΒ και κατασκευάστε τετράγωνο ΔΕΖΗ, έτσι ώστε η μία του πλευρά να βρίσκεται πάνω σε μια πλευρά του τριγώνου (έστω στη ΒΓ), η κορυφή Δ στην ΑΒ και να βρίσκεται εξ' ολοκλήρου μέσα στο τρίγωνο.



Σχήμα 1

Η κατασκευή που έχετε κάνει πληροί όλες τις προϋποθέσεις; μπορείτε να θεωρήσετε ότι το τετράγωνο είναι εγγεγραμμένο στο τρίγωνο ; Αν όχι προχωρήστε στο επόμενο βήμα.

…….

…….

Βήμα 3ο

Το σημείο Δ μπορεί να κινηθεί ελεύθερα πάνω στην ΑΒ. Ενεργοποιήστε το ίχνος στο σημείο Η και μετακινήστε το σημείο Δ. Τι παρατηρείτε για το σημείο Η;

……….

……….

Ποια είναι η θέση του Η ώστε το τετράγωνο να είναι εγγεγραμμένο; Πόσα τέτοια τετράγωνα κατασκευάζονται όταν η μία πλευρά του κείται στην ΒΓ; Η ευθεία που κινείται το Η από ποιο σημείο διέρχεται ;

……

……

……

……

3ο φύλλο εργασίας

Ομάδα………………………………………………………………………………………………..

Κατασκευή και απόδειξη του προβλήματος ακολουθώντας την ίδια μέθοδο του Pólya με κανόνα και διαβήτη.

1η φάση (Η κατασκευή)

Βήμα 1ο

Κατασκευάστε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ και ένα τετράγωνο ΔΗΖΕ με μία κορυφή Δ στην ΑΒ και τις άλλες δύο , Ε και Ζ στην ΒΓ και έστω Η η τέταρτη κορυφή.

Βήμα 2ο

Ενώστε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΗ που τέμνει την ΑΓ στο Λ.

Από το Λ να σχεδιάσετε το τετράπλευρο ΛΘΜΚ έτσι ώστε τα τμήματα ΛΚ⊥ΒΓ , ΛΘ//ΒΓ και ΘΜ⊥ΒΓ. Τι είδους τετράπλευρο σχηματίστηκε ; Αιτιολογήστε.

……

……

2^{η} Φάση (Η απόδειξη)

Βήμα 1^{ο}

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΛΘΜΚ είναι τετράγωνο.

Αρκεί να αποδείξετε ότι :

………

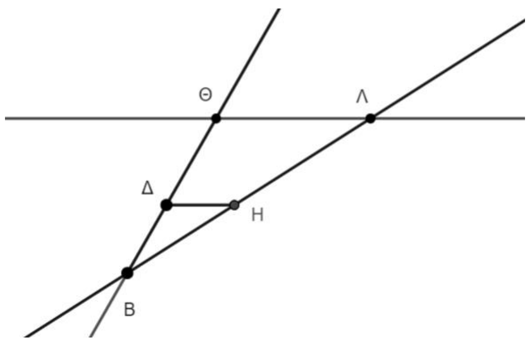
……….

Βήμα 2^{ο}

Εφαρμόστε το θεώρημα του Θαλή για τα τμήματα που σχηματίζονται μεταξύ των παραλλήλων.

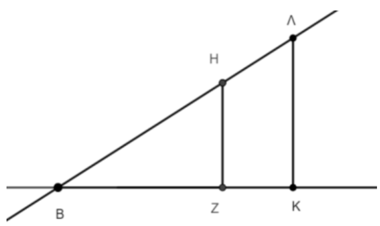
1^{ο} ζευγάρι παραλληλίας : …………………………………………………, οπότε

……



2^{ο} ζευγάρι παραλληλίας: ……………………………………………………., οπότε

……



Συμπέρασμα: ……………………………………………………………………………………………..

$4^{ο}$ φύλλο εργασίας

Ομάδα……………………………………………………………………………………………….

$2^{η}$ Κατασκευή (Chuquet) (Αλγεβρική επίλυση)

Δίνεται ένα απόσπασμα από το μεταφρασμένο κείμενο του N. Chuquet στο έργο του «*La Géométrie*».

«Δίνεται το τετράγωνο ΕΔΖΗ το οποίο είναι εγγεγραμμένο, σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με ύψος ΑΜ . Αν η πλευρά του τετραγώνου έχει μήκος 4, θέλουμε να βρούμε το μήκος των πλευρών του τριγώνου που το περιβάλλει….»

Να εγγραφεί τετράγωνο πλευράς 4 σε ισόπλευρο τρίγωνο.

$1^{η}$ φάση

- Ποιο είναι το δεδομένο του προβλήματος

……

- Ποιο είναι το ζητούμενο του προβλήματος

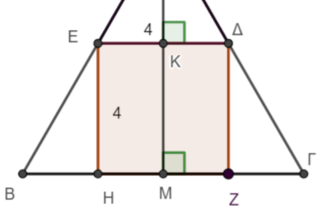
……

(Θεωρούμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί, δηλαδή ότι έχουμε εγγράψει το τετράγωνο σε ισόπλευρο τρίγωνο του οποίου ζητείται η πλευρά).

$2^{η}$ φάση

Βήμα $1^{ο}$

Σχεδιάστε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και το εγγεγραμμένο στο τρίγωνο τετράγωνο ΕΔΖΗ θεωρώντας ότι η πλευρά του είναι 4. (*Στην ουσία το τετράγωνο είναι δεδομένο και πρέπει να σχεδιάσετε το περιγεγραμμένο τρίγωνο στο τετράγωνο*).



Βήμα 2ο

- Θεωρήστε ΑΜ το ύψος του τριγώνου, που τέμνει την ΕΔ στο σημείο Κ.

Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΔΕ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

………

………

- Υπολογίστε τις πλευρές του τριγώνου ΑΕΔ.

………

- Υπολογίστε το τμήμα ΑΚ με τη βοήθεια του Πυθαγορείου Θεωρήματος

……..

……..

- Υπολογίστε το μήκος του ύψους ΑΜ

…….

Βήμα 3ο

- Θεωρείστε ότι ΔΓ=x
- Εφαρμόστε το θεώρημα του Θαλή: Οι παράλληλες ευθείες είναι: ……….

οπότε προκύπτουν οι αναλογίες :

……….

……….

- Υπολογίστε το x από τις σχέσεις που έχετε βρει παραπάνω και στη συνέχεια βρείτε το μήκος της πλευράς του τριγώνου.

………

5ο φύλλο εργασίας

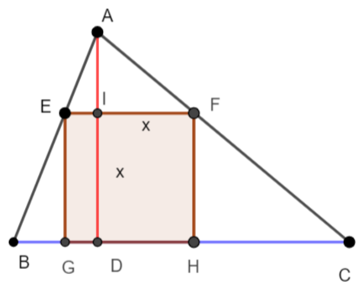
Ομάδα……………………………………………………………………………………………………..

3η Κατασκευή (Γεωμετρική επίλυση)

Εγγραφή τετραγώνου σε τρίγωνο με γνωστές πλευρές (Louis Bourdon, 1837)

Δίνεται το πρόβλημα ως εξής:

Σημειώστε ένα τετράγωνο σε ένα δεδομένο τρίγωνο ABC δηλαδή, βρείτε στην πλευρά AB ένα σημείο E τέτοιο ώστε αν σχεδιάσουμε το EF παράλληλο προς το BC, και τα EG, FH κάθετα στη BC, το σχήμα GEFH θα πρέπει να είναι τετράγωνο. Ας υποθέσουμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και ας χαράξουμε από το άκρο A το ύψος AD του τριγώνου. Είναι προφανές ότι αν το σημείο I ήταν σταθερό στη θέση του, θα ήταν το ίδιο και για το EF και κατά συνέπεια η πλευρά του απαιτούμενου τετραγώνου.



1η φάση (ανάλυση δεδομένων- ζητούμενων)

Θεωρείστε την πλευρά του τετραγώνου EF= x , την πλευρά του τριγώνου BC=α και το ύψος AD=h.

- Ποια είναι τα δεδομένα;

…….

…….

- Ποια είναι τα ζητούμενα;……………………………………………………………………………

…….

$2^η$ φάση (αλγεβρική απόδειξη)

Βήμα $1^ο$

- Αποδείξτε ότι τρίγωνα ABC και AEF είναι όμοια και γράψτε τους λόγους των ομόλογων πλευρών.

……….

……….

……….

……….

- Να εκφράσετε το x συναρτήσει των α, h.

………..

………..

Βήμα $2^ο$

Αν x= $\frac{ah}{a+h}$, τότε το x είναι η τέταρτη ανάλογος των …………………………………………..

$3^η$ φάση (γεωμετρική κατασκευή του τμήματος x)

Να κατασκευάσετε το ευθύγραμμο τμήμα x πάνω στην AD.

- Σχεδιάστε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ABC και χαράξτε το ύψος AD.
- Στην προέκταση της ευθείας BC προς το C, σχεδιάστε το ευθύγραμμο σχήμα DK=BC=α και KL=h.Συνεχίστε την κατασκευή όπως στο $1^ο$ φύλλο εργασίας.

(Βοήθεια : ενώστε το A με το L και από το K να φέρετε KI//AL, I είναι το σημείο στην AD).

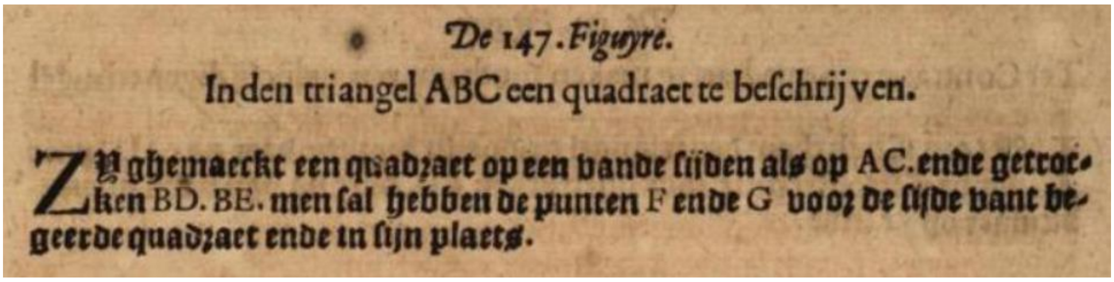
6ο φύλλο εργασίας

Ομάδα……………………………………………………………………………………………………..

4η Κατασκευή (Γεωμετρική επίλυση)

Εγγραφή τετραγώνου σε ισόπλευρο τρίγωνο(Samuel Marolois, 1616)

Μετάφραση πρωτότυπου κειμένου από το έργο του *Géométrie*



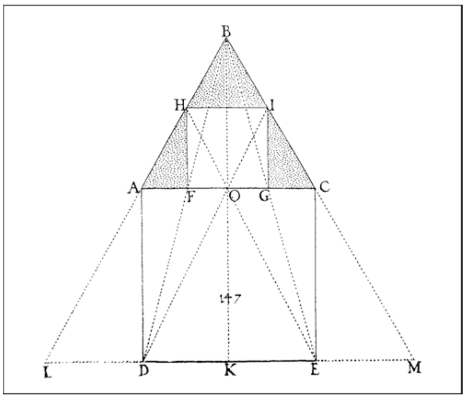
De 147. Figuyre.

In den triangel ABC een quadraet te beſchrijven.

Zy ghemaeckt een quadraet op een vande ſijden als op AC. ende getrocken BD. BE. men ſal hebben de punten F ende G voor de ſijde vant begeerde quadraet ende in ſijn plaets.

Έστω ABC το ισόπλευρο τρίγωνο στο οποίο θέλουμε να εγγράψουμε ένα τετράγωνο, ας πούμε ότι από τη βάση AC σχεδιάζουμε το τετράγωνο ACED. Στη συνέχεια, έστω οι ευθείες BE και BD οι οποίες θα τέμνουν το τρίγωνο μέσω της βάσης AC στα σημεία F, G αντίστοιχα. Λέω ότι η FG είναι η πλευρά του τετραγώνου που πρόκειται να εγγραφεί στο προαναφερθέν τρίγωνο, έχοντας επεκτείνει τις πλευρές AB, BC μέχρι να συναντήσουν τη βάση του τετραγώνου DL στα σημεία L, και M.

Αλλά η EK είναι το μισό της πλευράς του τετραγώνου που εγγράφεται στο τρίγωνο BLM η πλευρά GO, θα είναι επομένως επίσης η μισή πλευρά του τετραγώνου που εγγράφεται στο τρίγωνο A, B, C, καθώς τα εν λόγω τρίγωνα είναι όμοια, πράγμα που ήταν το ζητούμενο.



Διάγραμμα από το έργο του Samuel Marolois *Géométrie*

$1^{η}$ φάση

Πρέπει να αποδείξετε ότι το FGIH είναι τετράγωνο, αρκεί να αποδείξετε ότι

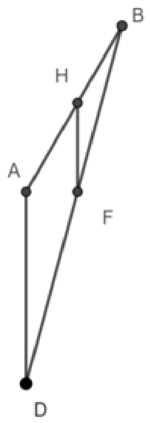
………

Βήμα $1^{ο}$

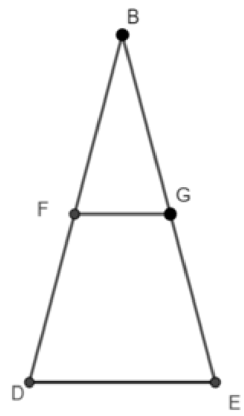
Επιχειρήστε να κάνετε την κατασκευή του τετραγώνου FHIG ακολουθώντας τις οδηγίες του κειμένου και του παρακάτω διαγράμματος και να εξηγήσετε τα επιχειρήματα που αναφέρονται στο κείμενο. Ενώστε το BD και το BE και σημειώστε τα σημεία F και G πάνω στην AC όπως το παραπάνω σχήμα.

Βήμα $2^{ο}$

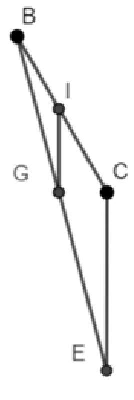
Αν απομονώσουμε από το σχήμα τα παρακάτω σχήματα , εφαρμόστε το θεώρημα του Θαλή και γράψτε τις αναλογίες που προκύπτουν σε κάθε περίπτωση.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Σχήμα 1

……

Σχήμα 2

……

Σχήμα 3

……

Τι προκύπτει από τις παραπάνω αναλογίες ;

$7^{ο}$ φύλλο εργασίας

Ομάδα…………………………………………………………………………………………………..

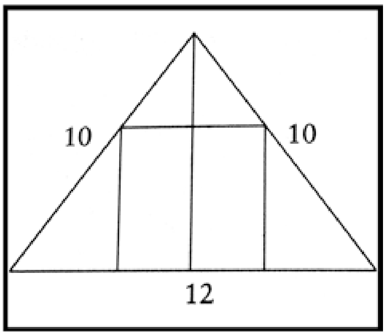
$5^{η}$ κατασκευή (αλγεβρική μέθοδος)

Εγγραφή τετραγώνου σε ισοσκελές τρίγωνο(Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi, ο πατέρας της Άλγεβρας, 780–850μ. Χ.)

Το πρόβλημα όπως είναι γραμμένο στο βιβλίο του συγγραφέα μεταφρασμένο:

«Αν πούμε: ένα τριγωνικό κομμάτι γης, οι δύο πλευρές του (μετρούν) δέκα πήχες και η βάση δώδεκα πήχες, και μέσα στην κοιλιά του υπάρχει ένα τετράγωνο κομμάτι γης. Ποιο είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου;»

Η μέθοδος γι' αυτό συνίσταται στο να γνωρίζουμε το ύψος του τριγώνου (της γης) και είναι με τον πολλαπλασιασμό του μισού της βάσης - και αυτό είναι έξι - με τον εαυτό του- προκύπτει τριάντα έξι. Αφαιρέστε αυτό από το τετράγωνο μιας από τις κοντές πλευρές - και αυτό είναι εκατό- εξήντα τέσσερα παραμένουν. Πάρτε την τετραγωνική ρίζα, οκτώ, και αυτό είναι το ύψος. Το εμβαδόν του είναι σαράντα οκτώ πήχες και αυτό είναι ο πολλαπλασιασμός του ύψους επί το μισό της βάσης, που είναι έξι. Θεωρούμε μια από τις πλευρές του τετραγώνου (γη) (ίση με) ένα «πράγμα» [x] και εμείς την τετραγωνίζουμε- γίνεται το αγαθό [x^2]. Το κρατάμε. Τότε βλέπουμε ότι έχουμε δύο τρίγωνα στις δύο πλευρές του τετραγώνου (γη) και ένα τρίγωνο πάνω από αυτό. Όσο για τα δύο τρίγωνα που βρίσκονται στις δύο πλευρές, είναι ίσα και τα ύψη τους είναι τα ίδια και βρίσκονται σε ορθή γωνία. Το εμβαδόν τους βρίσκεται πολλαπλασιάζοντας ένα πράγμα [x] με το έξι μείον το μισό αγαθό, με αποτέλεσμα έξι πράγματα μείον το μισό από τα αγαθά [$6x - 1/2x^2$]. Και είναι το εμβαδόν των δύο τριγώνων μαζί που βρίσκονται στις πλευρές του τετραγώνου. Όλο αυτό είναι το εμβαδόν του τετραγώνου και το εμβαδόν των τριών τριγώνων, και είναι δέκα πράγματα, (που) είναι ίσο με σαράντα οκτώ, και αυτό είναι το εμβαδόν του μεγάλου τριγώνου. Από αυτό, το πράγμα είναι τέσσερις πήχεις και τέσσερα πέμπτα του πήχεως, και είναι κάθε μία από τις πλευρές του του τετραγώνου (γης). Και εδώ είναι το διάγραμμά του:

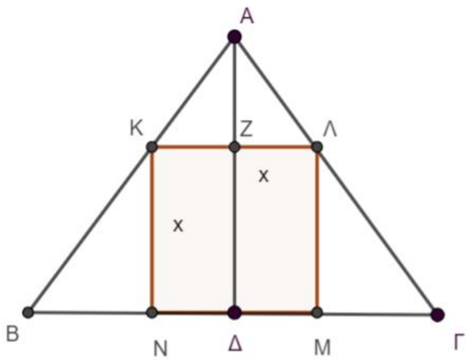


1η φάση

Θα προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε και να μεταφράσουμε τη λύση του προβλήματος με σύγχρονη ορολογία και συμβολισμούς. Ακολουθεί η λύση από τους μαθητές με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού.

2η φάση (απόδειξη)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ=12 και ΑΒ=ΑΓ=10.



Βήμα 1ο

Υπολογίστε το ύψος ΑΔ του τριγώνου και κατόπιν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

………

………

………

Βήμα 2ο

Θεωρήστε ότι η πλευρά του ζητούμενου τετραγώνου είναι ίση με x.

Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ΚΒΝ και ΛΜΓ είναι ίσα και υπολογίστε το εμβαδόν τους συναρτήσει του x.

………

………

………

Βήμα 3ο

Υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΛ συναρτήσει του x.

………

………

………

Βήμα 4ο

Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει διαμεριστεί σε τέσσερα σχήματα. Οπότε το εμβαδόν του ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους σχημάτων.

Γράψτε την σχέση που συνδέει τα εμβαδά και λύστε την εξίσωση που προκύπτει ως προς την πλευρά x του τετραγώνου.

………

………

Post-test

Εργασία 1η

Να εγγράψετε τετράγωνο σε τρίγωνο εφαρμόζοντας μία από τις μεθόδους που αναπτύχθηκαν κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης (Pólya, Marolois, Chuquet, Bourdon, al-Khwarizmi).

- Σε περίπτωση που επιλέξετε τη μέθοδο του Chuquet, δίνεται ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι 4 και το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.
- Σε περίπτωση που επιλέξετε τη μέθοδο του Bourdon, δίνεται ότι η μία πλευρά του τριγώνου είναι ίση με α και το αντίστοιχο ύψος ίσο με h.
- Σε περίπτωση που επιλέξετε τη μέθοδο του al- Khwarizmi το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση ίση με 12 και οι ίσες πλευρές ίσες με 10 .

Εργασία 2^{η}

Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη ένα τετράγωνο εγγεγραμμένο σε ημικύκλιο.

Ερωτηματολόγιο 1

	Ερωτήσεις που αφορούν τη μάθηση της γεωμετρίας και τις γεωμετρικές κατασκευές	1	2	3	4	5
1	Μου αρέσει περισσότερο η γεωμετρία απ' ότι η άλγεβρα					
2	Αντιμετωπίζω δυσκολίες στη γεωμετρία.					
3	Θεωρώ ότι οι γεωμετρικές κατασκευές είναι εύκολες .					
4	Θεωρώ ότι οι γεωμετρικές κατασκευές είναι ενδιαφέρουσες.					
5	Μαθαίνω καλύτερα τη γεωμετρία μέσα από τις γεωμετρικές κατασκευές.					
6	Δυσκολεύτηκα με τις συγκεκριμένες γεωμετρικές κατασκευές.					
7	Μετά τη διδακτική παρέμβαση απέκτησα περισσότερο ενδιαφέρον για τη γεωμετρία και τις γεωμετρικές κατασκευές.					
8	Οι γεωμετρικές κατασκευές της διδακτικής παρέμβασης με βοήθησαν ώστε να κατανοήσω τις γεωμετρικές έννοιες της ενότητας (Θ. Θαλή, ομοιότητα τριγώνων).					

Συμφωνώ απολύτως=5, Συμφωνώ=4, Ούτε συμφωνώ , ούτε διαφωνώ=3,
Διαφωνώ=2, Διαφωνώ απολύτως=1

Ερωτηματολόγιο 2

	Ερωτήσεις που αφορούν τις διαφορετικές προσεγγίσεις του προβλήματος που διαπραγματευτήκαμε	1	2	3	4	5
1	Ποια μέθοδο θεωρείτε πιο ενδιαφέρουσα					
2	Ποια μέθοδος σας δυσκόλεψε πιο πολύ					

Pólya =1, Chuquet=2, Lois Bourdon=3, Marolois=4, al- Khwarizmi=5

Ερωτηματολόγιο 3

	Ερωτήσεις σχετικά με την ενσωμάτωση της Ιστορίας στη διδασκαλία	1	2	3	4	5
1	Καθ' όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας, σε ποιο βαθμό σας άρεσε η ενσωμάτωση της ιστορίας μέσα από τις διαφορετικές προσεγγίσεις των μαθηματικών του παρελθόντος ;					
2	Θα επιθυμούσατε να γίνεται χρήση της ιστορίας και σε άλλα μαθήματα που αφορούν τα μαθηματικά;					

Πάρα πολύ=5, Αρκετά=4, Μέτρια=3, Λίγο=2, Καθόλου=1

Εγγραφή τετραγώνου σε ημικύκλιο

Λύση

Θεωρούμε ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ και κέντρο Ο. Κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΓΔΕΖ τέτοιο ώστε η πλευρά ΓΔ να βρίσκεται στη διάμετρο ΑΒ και το κέντρο του κύκλου να είναι το μέσο της ΓΔ. Φέρουμε τις ευθείες ΟΖ και ΟΕ που τέμνουν το ημικύκλιο στα Κ και Λ αντίστοιχα. Από τα Κ και Λ φέρουμε ΚΝ και ΛΜ κάθετες στην ΑΒ. Το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι το ζητούμενο εγγεγραμμένο τετράγωνο στο ημικύκλιο.

Απόδειξη

Ισχύει ότι ΚΝ //ΖΓ και ΛΜ//ΕΔ οπότε από το Θ. Θαλή έχουμε:

$$\frac{\mathrm{KN}}{\mathrm{Z\Gamma}} = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{O\Gamma}} = \frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{OZ}} = \frac{\rho}{\mathrm{OZ}} \quad (1)$$

$$\frac{\mathrm{\Lambda M}}{\mathrm{E\Delta}} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{O\Delta}} = \frac{\mathrm{O\Lambda}}{\mathrm{OE}} = \frac{\rho}{\mathrm{OE}} \quad (2)$$

Επίσης τα τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΔΕ είναι ίσα γιατί:

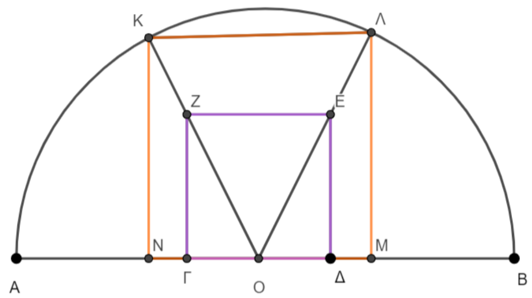
- είναι ορθογώνια
- ΟΓ=ΟΔ
- ΖΓ=ΕΔ (ΓΔΕΖ= τετράγωνο)

οπότε ΟΖ=ΟΕ (3) και οι γωνίες $\widehat{\mathrm{KON}} = \widehat{\mathrm{\Lambda OM}}$

Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΟΜ=ΟΝ και ΚΝ=ΛΜ

Άρα το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Έχουμε ότι ΚΛ//ΜΝ//ΑΒ//ΖΕ , οπότε από το Θ. Θαλή τα τρίγωνα ΟΚΛ και ΟΖΕ είναι όμοια και ισχύει : $\frac{\mathrm{K\Lambda}}{\mathrm{ZE}} = \frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{OZ}} = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{O\Gamma}} = \frac{\mathrm{KN}}{\mathrm{Z\Gamma}}$ (λόγω (1) και επειδή ΖΕ=ΖΓ προκύπτει ότι και ΚΛ=ΚΝ. Επομένως το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.



Σχήμα 22. Εγγραφή τετραγώνου σε ημικύκλιο