



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ**  
**ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ- ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ**  
**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ -**  
**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ – ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ**  
**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ**

**ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ**  
**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

**«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»**

***ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β' Ηλικιακού Κύκλου (13-18 χρονών)***

Διπλωματική εργασία

**Διερεύνηση της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου των  
εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που διδάσκουν  
μαθηματικά**

του

**Λιθαρή Κωνσταντίνου**  
**Α.Ε.Μ. 1062**

Επιβλέπων Καθηγητής:  
Εξεταστές:

Χαράλαμπος Σακονίδης, Καθηγητής  
Θεοδόσιος Ζαχαριάδης, Καθηγητής  
Σωτήριος Ζωιτσάκος, Μαθηματικός

Φλώρινα, Μάρτιος 2023

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία διερευνά τα χαρακτηριστικά του περιεχομένου και της οργάνωσης της παιδαγωγικής γνώσης των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που διδάσκουν μαθηματικά. Για τους σκοπούς της έρευνας πραγματοποιήθηκαν ημι-δομημένες συνεντεύξεις με δύο εκπαιδευτικούς που διδάσκουν μαθηματικά σε Γυμνάσια της Βορείου Ελλάδος, καθώς και ημι-δομημένες παρατηρήσεις μαθημάτων των μαθηματικών στις τάξεις τους. Οι δύο συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί διαθέτουν ικανοποιητική διδακτική εμπειρία αλλά έχουν διαφορετικές επαγγελματικές διαδρομές, καθώς η Ελένη είναι μαθηματικός, ενώ ο Αντώνης είναι φυσικός που διδάσκει για πρώτη φορά μαθηματικά. Η ανάλυση των δεδομένων έδειξε ότι η ΠΓΠ των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών είναι αρκετά περιορισμένη, κατά κανόνα ανελαστική, διαδικαστικού τύπου και διακρίνεται για το χαμηλό επίπεδο οργάνωσης, συνοχής και δημιουργικής αξιοποίησης στην πράξη.

**Λέξεις κλειδιά:** Μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών, μαθηματική γνώση, παιδαγωγική γνώση περιεχομένου, εκπαιδευτικοί, δευτεροβάθμια εκπαίδευση

## ABSTRACT

This master's thesis explores the characteristics of the content and organization of the pedagogical knowledge of secondary school teachers who teach mathematics. For the purposes of the research, semi-structured interviews were conducted with two teachers who teach mathematics in secondary schools in Northern Greece, as well as semi-structured observations of mathematics lessons in their classrooms. The two participating teachers have sufficient teaching experience but have different professional paths, as Eleni is a mathematician, while Antonis is a physicist who teaches mathematics for the first time in his career so far. The data analysis showed that the pedagogical content knowledge of the participating teachers is quite limited, generally inflexible, procedural in nature and is distinguished for its low level of organisation, coherence and creative use in practice.

**Key words:** learning and teaching of mathematics, mathematical knowledge, pedagogical content knowledge, teachers, secondary education

## Περιεχόμενα

<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b> .....	5
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΜΕΡΟΣ</b> .....	7
<b>Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup>: Θεωρητικά μοντέλα για τη γνώση του εκπαιδευτικού</b> .....	7
1.1 Βασικά μοντέλα για τη γνώση του εκπαιδευτικού που διδάσκει μαθηματικά ..	7
1.2 Ο ορίζοντας της γνώσης του περιεχομένου .....	13
<b>Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>: Η εξέλιξη και τα χαρακτηριστικά της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου</b> .....	15
2.1 Η εξέλιξη της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου .....	15
2.2 Τρόποι εκμάθησης των Μαθηματικών από τους μαθητές.....	19
2.3 Το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών .....	20
2.4 Διδασκαλία και διδακτικές πρακτικές στην τάξη .....	21
<b>Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>: Γνώσεις των εκπαιδευτικών για αποτελεσματική διδασκαλία</b> .....	24
<b>ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΜΕΡΟΣ</b> .....	31
<b>Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup>: Η μελέτη</b> .....	31
4.1 Στόχος της έρευνας -Ερευνητικά ερωτήματα .....	31
4.2 Εννοιολογικό πλαίσιο .....	31
4.3 Ερευνητική διαδικασία και συλλογή δεδομένων.....	32
4.4 Αποτελέσματα της ανάλυσης δεδομένων.....	36
4.4.1 Ανάλυση των σημειώσεων πεδίου από τις παρατηρήσεις.....	36
4.4.1α Πρώτη παρατήρηση.....	36
4.4.1β Δεύτερη παρατήρηση .....	38
4.4.2 Ανάλυση των απαντήσεων στις ερωτήσεις των συνεντεύξεων.....	40
4.4.2α Πρώτη συνέντευξη .....	41
4.4.2β Δεύτερη συνέντευξη.....	57
4.5 Συζήτηση και συμπεράσματα.....	75
4.6 Περιορισμοί και μελλοντική έρευνα .....	79
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b> .....	81
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</b> .....	86

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια η επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά έχει αποκτήσει ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον. Έρευνες στη μαθηματική εκπαίδευση έδειξαν πόσο καθοριστικός είναι ο ρόλος του εκπαιδευτικού στη μάθηση των μαθητών (Lerman, 2001). Ειδικότερα η γνώση των εκπαιδευτικών για τα μαθηματικά και τον τρόπο διδασκαλίας τους βρίσκεται τις τελευταίες δεκαετίες στο επίκεντρο του ερευνητικού ενδιαφέροντος. Η γνώση αυτή περιλαμβάνει τόσο την παιδαγωγική γνώση που έχουν αναπτύξει οι εκπαιδευτικοί όσο και τη γνώση τους για το περιεχόμενο των μαθηματικών. Στόχος της παρούσας έρευνας είναι να εντοπίσει και να αναδείξει χαρακτηριστικά του περιεχομένου αλλά και της οργάνωσης της παιδαγωγικής γνώσης των εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, και, στο βαθμό που είναι δυνατό, να ανιχνεύσει τους τρόπους που ενεργοποιείται στη διδακτική πράξη.

Το βιβλιογραφικό μέρος της εργασίας περιλαμβάνει τρία κεφάλαια. Στο πρώτο παρουσιάζονται τα βασικότερα θεωρητικά μοντέλα για τη γνώση του εκπαιδευτικού, με πρωτοπόρο αυτό του Shulman το 1986, ο οποίος διαχώρισε τη γνώση του περιεχομένου, δηλαδή, του αντικειμένου διδασκαλίας, από τη γνώση του τρόπου διδασκαλίας του αντικειμένου αυτού (παιδαγωγική γνώση περιεχομένου).

Το δεύτερο κεφάλαιο εστιάζει στην εξέλιξη και στα χαρακτηριστικά της έννοιας της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου (ΠΓΠ). Η έννοια της ΠΓΠ έχει χρησιμοποιηθεί αρκετά στη βιβλιογραφία και θεωρείται η ειδική επαγγελματική γνώση που πρέπει να κατέχει ένας εκπαιδευτικός για να χαρακτηριστεί 'καλός εκπαιδευτικός' (Kind, 2009). Παρά τη σημασία της ΠΓΠ και το ερευνητικό ενδιαφέρον που έλκυσε τις τελευταίες δεκαετίες, η οριοθέτηση του περιεχομένου της και τα στοιχεία που την καθορίζουν δεν έχουν ακόμα συμφωνηθεί.

Στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο του βιβλιογραφικού μέρους γίνεται σύγκριση των εκπαιδευτικών με διδακτική εμπειρία και αυτών που δεν έχουν καθόλου ή έχουν ελάχιστη αναφορικά με την ΠΓΠ που έχουν αναπτύξει. Σύμφωνα με κάποιους ερευνητές όπως ο Krauss et al. (2008), οι επαγγελματικές γνώσεις που διαθέτουν οι εκπαιδευτικοί με διδακτική εμπειρία διαφέρουν από εκείνων με περιορισμένη εμπειρία όχι μόνο στην ποσότητα αλλά κυρίως στον τρόπο που είναι οργανωμένες.

Όσον αφορά το εμπειρικό μέρος της μελέτης, για τη διερεύνηση της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου των εκπαιδευτικών επιλέχθηκε η ποιοτική προσέγγιση και συγκεκριμένα η πολλαπλή μελέτη περίπτωσης. Ειδικότερα, ο ερευνητικός φακός εστίασε σε δυο εκπαιδευτικούς που διδάσκουν μαθηματικά σε Γυμνάσιο, με διαφορετική επαγγελματική διαδρομή και ικανοποιητική διδακτική εμπειρία. Για τη συλλογή των δεδομένων διαμορφώθηκαν και αξιοποιήθηκαν δυο ερευνητικά εργαλεία, μια ημι-δομημένη παρατήρηση και μια ημι-δομημένη συνέντευξη, τα οποία εστίαζαν σε τρεις βασικούς άξονες: (α) γνώσεις για το μαθηματικό περιεχόμενο, (β) γνώσεις για τη μάθηση και (γ) γνώσεις για τη διδασκαλία. Τα δυο αυτά ερευνητικά εργαλεία

αξιοποιήθηκαν σε διαφορετικές χρονικές περιόδους προσφέροντας τα δεδομένα της έρευνας.

Μετά τα ζητήματα των μεθοδολογικών επιλογών, το κεφάλαιο που εστιάζει στο εμπειρικό μέρος της εργασίας προχωρά στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων της ανάλυσης των δεδομένων, τη συζήτησή τους και τη διατύπωση των συμπερασμάτων. Τέλος, υποδεικνύονται οι βασικοί περιορισμοί της μελέτης και προτείνονται κάποια εστιάσεις που θα είχαν ενδιαφέρον για μελλοντική έρευνα ως επέκταση ή περαιτέρω ανάπτυξη της συγκεκριμένης μελέτης.

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΜΕΡΟΣ**

### **Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup>: Θεωρητικά μοντέλα για τη γνώση του εκπαιδευτικού**

Το πρώτο κεφάλαιο εστιάζει στα βασικότερα θεωρητικά μοντέλα της γνώσης του εκπαιδευτικού καθώς και στις έννοιες ‘ορίζοντας της γνώσης περιεχομένου’ και ‘ανώτερη μαθηματική γνώση’. Στην πρώτη ενότητα αναλύονται τα 3 βασικότερα θεωρητικά μοντέλα για τη γνώση του εκπαιδευτικού. Σημείο εκκίνησης αποτελεί το μοντέλο του Shulman του 1986, που ήταν ο πρώτος που μίλησε για διαχωρισμό της γνώσης σε παιδαγωγική γνώση και γνώση του αντικειμένου διδασκαλίας. Ακολουθεί το μοντέλο της Ball του 2009 το οποίο στηρίζεται σε αυτό του Shulman και προσπαθεί να κατανοήσει καλύτερα την παιδαγωγική γνώση για τη μαθηματική εκπαίδευση. Η ενότητα καταλήγει στο μοντέλο ‘Κουαρτέτο της γνώσης’ του 2005 όπου ο Rowland και οι συνεργάτες του κατηγοριοποιούν τη γνώση σε τέσσερις ομάδες, εστιάζοντας όχι πλέον στο είδος της γνώσης, αλλά στον αναστοχασμό πάνω στη διδασκαλία, στοχεύοντας με έναν περιγραφικό τρόπο στη βελτίωση της διδασκαλίας των εκπαιδευτικών. Η δεύτερη ενότητα του κεφαλαίου επιχειρεί να οριοθετήσει την έννοια ‘ορίζοντας της γνώσης του περιεχομένου’, την οποία όρισαν αρχικά οι Ball & Bass το 2009 και στη συνέχεια επικεντρώνεται στις έννοιες ‘μαθηματικός ορίζοντας’ και ‘ανώτερη μαθηματική γνώση’ των Zazkis & Leikin (2010).

#### **1.1 Βασικά μοντέλα για τη γνώση του εκπαιδευτικού που διδάσκει μαθηματικά**

Εδώ και πολλές δεκαετίες, το τί γνωρίζουν οι εκπαιδευτικοί και πώς χρησιμοποιούν τις γνώσεις τους για να επιτελέσουν το έργο της διδασκαλίας αποτελεί αντικείμενο ενδιαφέροντος για τους ερευνητές της εκπαίδευσης, τους εκπαιδευτές εκπαιδευτικών και τους υπεύθυνους χάραξης της εκπαιδευτικής πολιτικής (Guerriero, 2017). Σε αυτήν την κατεύθυνση, ένα από τα σημαντικότερα ερευνητικά θέματα είναι η γνώση των εκπαιδευτικών αναφορικά με τη διδασκαλία.

Ο πρώτος που προσπάθησε να διερευνήσει αυτή τη γνώση ήταν ο Shulman το 1986, μελετώντας τις ετήσιες εκθέσεις των κρατικών επιθεωρητών εκπαίδευσης πριν από έναν αιώνα στην Αμερική, στις οποίες βρίσκουμε αντίγραφα των τεστ για τους εκπαιδευτικούς που χρησιμοποιούνταν για την αδειοδότηση υποψήφιων εκπαιδευτικών. Σκοπός αυτής της μελέτης ήταν η διερεύνηση της γνώσης των εκπαιδευτικών σε μια πληθώρα γνωστικών αντικειμένων, τα οποία αφορούσαν κυρίως την γνώση περιεχομένου παρά την παιδαγωγική γνώση. Τις επόμενες δεκαετίες παρατηρήθηκε στροφή προς την αντίθετη κατεύθυνση, την εστίαση στην παιδαγωγική γνώση των εκπαιδευτικών, παραμελώντας τις γνώσεις τους ως προς το αντικείμενο διδασκαλίας τους. Στη συνέχεια αναφέρονται δύο από τις πιο γνωστές και συνάμα καθοριστικές προσπάθειες διερεύνησης της γνώσης των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των μαθηματικών που καταγράφονται στη βιβλιογραφία.

**Μοντέλο του Shulman:** Κατά τον Shulman (1986), ο διαχωρισμός της γνώσης του περιεχομένου από την γνώση του τρόπου διδασκαλίας του μαθήματος δεν υπήρχε πάντα. Είναι ο πρώτος που εστίασε τη σχετική έρευνα στον συνδυασμό μελέτης τόσο του γνωστικού αντικειμένου όσο και της διδασκαλίας, θέλοντας μέσα από κάποια ερωτήματα που έθεσε να υποστηρίξει την αλληλεπίδραση και αλληλεξάρτηση μεταξύ της γνώσης του περιεχομένου και των διδακτικών πρακτικών. Το μοντέλο του Shulman, που αναλύεται παρακάτω, για την παιδαγωγική συλλογιστική και δράση αποτέλεσε το κυριότερο μοντέλο εκείνης της εποχής. Σύμφωνα με αυτό, ο εκπαιδευτικός αντιμετωπίζει την πρόκληση να θεωρήσει αυτό που ήδη κατανοεί και μέσα από συγκεκριμένα στάδια να το καταστήσει έτοιμο για αποτελεσματική διδασκαλία.

Το πρώτο στάδιο είναι αυτό της *κατανόησης*. Ο εκπαιδευτικός αναμένεται να κατανοεί αυτό που διδάσκει και αν είναι δυνατό με περισσότερους από έναν τρόπους. Επίσης, χρειάζεται να κατανοεί τις ιδέες και τους στόχους του μαθήματος, οι οποίοι οφείλουν να εξισσοροπούν την ατομική αριστεία με την ισότητα των ευκαιριών που παρέχονται σε μαθητές διαφορετικής προέλευσης και κουλτούρας. Το επόμενο στάδιο είναι αυτό του *μετασχηματισμού*, όπου αφού έχουν κατανοηθεί οι έννοιες που θα διδάξει, τις μετασχηματίζει με τρόπο ώστε να γίνουν κατανοητές από τους μαθητές σύμφωνα με τις ανάγκες και τις ιδιαιτερότητές τους. Για να γίνει αυτό πρέπει να ακολουθηθούν κάποια βήματα. Το πρώτο βήμα είναι η *προετοιμασία*, κατά την οποία ο εκπαιδευτικός ερμηνεύει το περιεχόμενο αυτών που θέλει να διδάξει, προσαρμόζοντάς το σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα και ταξινομεί τους στόχους. Δεύτερο βήμα είναι η *χρήση αναπαραστάσεων* για την εισαγωγή των νέων ιδεών που θα διδάξει. Επόμενο βήμα είναι η *επιλογή διδακτικών μοντέλων* και στρατηγικών για τη διδασκαλία (π.χ. απόδειξη, συνεργατική μάθηση, ανακαλυπτική μάθηση). Το τελευταίο βήμα αφορά στην προσαρμογή των διδακτέων ιδεών στα χαρακτηριστικά των μαθητών, όπως για παράδειγμα τις ικανότητές τους, την κουλτούρα, τη γλώσσα, τις προηγούμενες γνώσεις, τις παρανοήσεις κ.α. Το τρίτο στάδιο είναι αυτό της *διδασκαλίας* και περιλαμβάνει όλα τα παρατηρήσιμα στοιχεία μιας αποτελεσματικής διδασκαλίας. Μερικά από αυτά είναι οργάνωση και διαχείριση της τάξης, η παρουσίαση σαφών εξηγήσεων και ζωντανών περιγραφών, η ανάθεση και ο έλεγχος εργασιών καθώς και η αποτελεσματική αλληλεπίδραση με τους μαθητές. Ακολουθεί το στάδιο της *αξιολόγησης* που περιλαμβάνει τον έλεγχο εκ μέρους του εκπαιδευτικού για την κατανόηση ή μη από τους μαθητές του περιεχομένου της διδασκαλίας καθώς και την πιο τυπική αξιολόγησή τους για να μπορέσουν να λάβουν ανατροφοδότηση και κάποια βαθμολογία. Επίσης, στο ίδιο στάδιο περιλαμβάνεται και η αξιολόγηση του τρόπου οργάνωσης της διδασκαλίας από τον εκπαιδευτικό και τα εργαλεία που χρησιμοποίησε. Το πέμπτο στάδιο είναι ο *αναστοχασμός* και περιλαμβάνει την ανάλυση της διδασκαλίας από τον εκπαιδευτικό όσον αφορά στις μεθόδους που χρησιμοποίησε, τα γεγονότα που συνέβησαν καθώς και τα μαθησιακά αποτελέσματα αυτής. Είναι η διαδικασία με την οποία μαθαίνει ο εκπαιδευτικός από την εμπειρία του. Τελευταίο είναι το στάδιο της *νέας κατανόησης* όπου ο εκπαιδευτικός μέσα από



συγκεκριμένες στρατηγικές ανάλυσης και συζήτησης φτάνει σε νέα κατανόηση του περιεχομένου της διδασκαλίας, των στόχων, των μαθητών και του εαυτού του.

Κεντρική θέση στο εργαλείο του Shulman κατέχει η γνώση περιεχομένου του γνωστικού αντικειμένου, σκοπός της οποίας είναι η σύνδεση της γνώσης του εκπαιδευτικού για τους μαθητές με τη διδασκαλία. Σύμφωνα με τον Shulman (1986), η γνώση περιεχομένου αποτελείται από *τρεις* κατηγορίες: α) τη γνώση του γνωστικού αντικειμένου, β) την παιδαγωγική γνώση του γνωστικού αντικειμένου και γ) τη γνώση των αναλυτικών προγραμμάτων.

Η πρώτη κατηγορία γνώσης περιεχομένου, η *γνώση του γνωστικού αντικειμένου* περιγράφεται ως το σύνολο της γνώσης και ο τρόπος που αυτή είναι οργανωμένη στο μυαλό του εκπαιδευτικού. Επίσης, ο εκπαιδευτικός καλείται να γνωρίζει τις βασικές έννοιες και αρχές που διέπουν τον εκάστοτε επιστημονικό κλάδο, καθώς και την 'συντακτική δομή' του, δηλαδή, να γνωρίζει πότε ένας ισχυρισμός είναι αληθής ή ψευδής καθώς και να ελέγχει την εγκυρότητά του. Ο εκπαιδευτικός, ακόμη, αναμένεται να είναι σε θέση όχι μόνο να αναφέρει στους μαθητές κάποιες προτάσεις που θεωρούνται ότι ισχύουν στον τομέα του (π.χ στα μαθηματικά είναι τα αξιώματα) αλλά να μπορεί να εξηγήσει τον λόγο που συμβαίνει αυτό, γιατί είναι σημαντικό να το γνωρίζουν οι μαθητές και πώς αυτές συνδέονται με άλλες προτάσεις τόσο του ίδιου τομέα όσο και άλλων. Ακόμα είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να μπορεί να ξεχωρίζει μια κεντρική έννοια από μια λιγότερο θεμελιώδη.

Η *παιδαγωγική γνώση περιεχομένου* είναι ένα δεύτερο είδος γνώσης περιεχομένου η οποία είναι απαραίτητη για τη διδασκαλία. Ουσιαστικά πρόκειται για εκείνες τις γνώσεις που έχει ο εκπαιδευτικός και του επιτρέπουν να αναπαραστήσει-διατυπώσει μια έννοια με ποικίλους τρόπους, ώστε να γίνει κατανοητή από τους μαθητές. Κύριο χαρακτηριστικό της είναι ότι συνδυάζει τον γνωστικό τομέα ενός αντικειμένου με τον παιδαγωγικό. Επίσης, περιλαμβάνει τις προϋπάρχουσες γνώσεις τον μαθητών οποιασδήποτε ηλικίας επιτρέποντας έτσι στον εκπαιδευτικό να κατανοήσει γιατί κάποια θέματα φαίνονται εύκολα στους μαθητές ενώ άλλα δυσκολότερα. Επιπλέον εδώ ανήκουν και οι γνώσεις στρατηγικών και μεθόδων για την αναδιοργάνωση της προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών ώστε να υπερνικήσουν τυχόν παρανοήσεις.

Η *γνώση του αναλυτικού προγράμματος σπουδών* αποτελεί την τρίτη και τελευταία κατηγορία γνώσης περιεχομένου κατά τον Shulman. Αποτελείται από τη γνώση των προγραμμάτων σπουδών που έχουν σχεδιαστεί για τη διδασκαλία των διάφορων γνωστικών αντικειμένων σε μια τάξη και από την ορθή χρήση διδακτικών εργαλείων για μια ποιοτικότερη διδασκαλία. Η γνώση του προγράμματος σπουδών χωρίζεται σε δύο κατηγορίες, στην παράπλευρη γνώση του προγράμματος σπουδών (*lateral curriculum knowledge*) και στην κάθετη γνώση του προγράμματος σπουδών (*vertical curriculum knowledge*). Στην πρώτη κατηγορία ανήκει η ικανότητα του εκπαιδευτικού να συνδέσει το περιεχόμενο ενός γνωστικού αντικειμένου με το περιεχόμενο άλλων γνωστικών αντικειμένων που διδάσκονται στην ίδια τάξη, ενώ στη δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνονται οι γνώσεις του εκπαιδευτικού πάνω στο ίδιο γνωστικό αντικείμενο

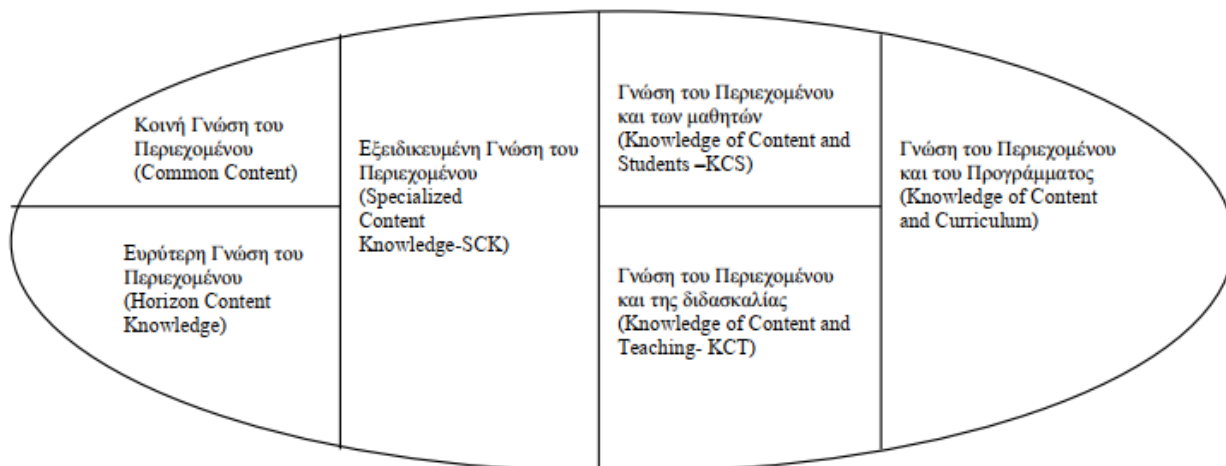
αλλά σε όλες τις τάξεις που έχει διδαχθεί ή θα διδαχθεί, όπως και η γνώση για τη χρήση των αντίστοιχων εκπαιδευτικών εργαλείων.

Σύμφωνα με το μοντέλο του Shulman η γνωστική βάση των εκπαιδευτικών θα μπορούσε να αναλυθεί τουλάχιστον στις εξής κατηγορίες: (α) γνώση περιεχομένου, (β) γενική παιδαγωγική γνώση, με ιδιαίτερη αναφορά σε εκείνες τις γενικές αρχές και στρατηγικές διαχείρισης και οργάνωσης της τάξης που φαίνεται να υπερβαίνουν το γνωστικό αντικείμενο, (γ) γνώση του προγράμματος σπουδών, περιλαμβανομένων διδακτικών προγραμμάτων και εργαλείων, (δ) παιδαγωγική γνώση περιεχομένου, που αφορά στον συνδυασμό της γνώσης ενός γνωστικού αντικειμένου και της παιδαγωγικής και αφορά αποκλειστικά τους εκπαιδευτικούς, (ε) γνώση των μαθητών και των χαρακτηριστικών τους, (στ) γνώση των εκπαιδευτικών πλαισίων, που κυμαίνονται από τις εργασίες της τάξης, τη διακυβέρνηση και τη χρηματοδότηση των σχολικών περιφερειών, μέχρι τα κοινωνικά και πολιτισμικά χαρακτηριστικά και (ζ) η γνώση των εκπαιδευτικών σκοπών και αξιών και το φιλοσοφικό και ιστορικό τους υπόβαθρο.

Ο Shulman, μέσα από έρευνες που πραγματοποίησε προσπάθησε να επιβεβαιώσει αυτό το μοντέλο και να το προσαρμόσει κατάλληλα ώστε να αποτελέσει τη γνωστική βάση για τον προσδιορισμό της αποτελεσματικής διδασκαλίας. Ωστόσο, οι κατηγορίες που έχει αναπτύξει είναι δομημένες με τέτοιο τρόπο που προκαλούνται ασάφειες και πολλαπλές ερμηνείες. Τα τελευταία χρόνια γίνονται προσπάθειες εξέλιξης αυτού του μοντέλου με τη δημιουργία νέων θεωρητικών μοντέλων για τη γνώση του εκπαιδευτικού τα οποία στηρίζονται στην 4<sup>η</sup> κατηγορία γνώσης του μοντέλου του Shulman, την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου (ΠΓΠ).

**Μοντέλο της Ball:** Η Ball και οι συνεργάτες της (2008), στηριζόμενοι στο μοντέλο και τις ιδέες του Shulman, επιχείρησαν να διαλευκάνουν την έννοια της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου ειδικά στη μαθηματική εκπαίδευση. Ενώ αυτή η έννοια ήταν ευρέως διαδεδομένη και πολλοί θεωρούσαν τη φύση και το περιεχόμενό της γνωστά, δεν είχε οριστεί με ακρίβεια ούτε είχε ερευνηθεί εμπειρικά, περιορίζοντας έτσι τη χρησιμότητά της. Παρά τις διαφορές που παρατηρήθηκαν σε έρευνες για τη σημασία της έννοιας της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου, υπήρξαν σημαντικές διαφορές στον τρόπο που χρησιμοποιούνταν για να συσχετίσει τη γνώση περιεχομένου με τη διδασκαλία. Η Ball, λοιπόν, και η ομάδα της προσπάθησαν να διερευνήσουν νέες κατηγορίες γνώσης από αυτές που ήδη είχε αναφέρει ο Shulman, εστιάζοντας στον ορισμό τους με μεγαλύτερη σαφήνεια και μελέτησε τη φύση της μαθηματικής γνώσης που είναι απαραίτητη για τη διδασκαλία της.

Έτσι, μετά από έρευνες, η ομάδα της Ball χώρισε τη μαθηματική γνώση σε δύο μεγάλες κατηγορίες που αντιστοιχούν στις δύο πρώτες του μοντέλου του Shulman, στη *Γνώση του γνωστικού αντικειμένου* (subject matter knowledge) και στην *Παιδαγωγική γνώση του γνωστικού αντικειμένου* (pedagogical content knowledge). Κάθε κατηγορία χωρίστηκε σε τρεις υποκατηγορίες όπως φαίνεται στο σχήμα παρακάτω.



**Σχεδιάγραμμα 1.1** Μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία Ball et al. (2009a)

Η 1<sup>η</sup> κατηγορία, η *Γνώση του γνωστικού αντικείμενου υποδιαιρείται* (α) στην *Κοινή γνώση του αντικείμενου* (CCK), (β) στην *Εξειδικευμένη γνώση του περιεχομένου* (SCK) και (γ) στη *Γνώση του μαθηματικού ορίζοντα* (knowledge at the mathematical horizon) (Ball et al., 2009a). Η πρώτη υποκατηγορία ορίζεται ως οι μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες που χρησιμοποιούνται σε περιβάλλοντα διαφορετικά της διδασκαλίας. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει, για παράδειγμα, να γνωρίζουν αυτό που διδάσκουν, να μπορούν να εντοπίζουν τα λάθη των μαθητών ή όταν τα εγχειρίδια δίνουν κάποιον ασαφή ορισμό. Επίσης, πρέπει να χρησιμοποιούν τις έννοιες και τους μαθηματικούς συμβολισμούς σωστά όταν παραδίδουν το μάθημα, καθώς και να είναι σε θέση να λύσουν τις ασκήσεις που οι ίδιοι θέτουν στους μαθητές τους. Αυτά βέβαια απαιτούν μαθηματική γνώση που μπορεί και κάποιος άλλος που δεν είναι μαθηματικός να κατέχουν γι' αυτό χρησιμοποίησαν τον όρο 'κοινή'. Η επόμενη υποκατηγορία περιλαμβάνει την *Εξειδικευμένη γνώση του περιεχομένου* που αποτελεί τη μαθηματική γνώση που απαντάται αποκλειστικά στη διδασκαλία. Περιλαμβάνει την ικανότητα εύρεσης μοτίβων στα λάθη των μαθητών, την εξακρίβωση αν μια μη-συνηθισμένη μέθοδος επίλυσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί γενικά στην επίλυση ασκήσεων, την κατάλληλη επιλογή αναπαραστάσεων, καθώς και τον τρόπο που αυτές συγκροτούνται και χρησιμοποιούνται σωστά για την επίτευξη του εκάστοτε στόχου. Τέλος, γνώση του 'μαθηματικού ορίζοντα' είναι η κατανόηση του ευρύτερου συνόλου των μαθηματικών ιδεών με τις οποίες συνδέεται μια συγκεκριμένη ιδέα. Είναι το είδος της κατανόησης που προσφέρει στους εκπαιδευτικούς μια περιφερειακή όραση, γνωρίζοντας πού βρίσκονται οι ίδιοι και πού κατευθύνονται οι μαθητές τους, ώστε να έχουν συνείδηση των συνεπειών του τρόπου που θα αναπαραστήσουν τις μαθηματικές ιδέες και την μετέπειτα θετική ή αρνητική επίδραση που θα έχει στην κατανόηση των μαθητών.

Η 2<sup>η</sup> κατηγορία είναι η *Παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου* και υποδιαιρείται (α) στη *Γνώση του γνωστικού αντικείμενου και των μαθητών* (KCS), (β) στη *Γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας* (KCT) και (γ) στη *Γνώση του προγράμματος σπουδών* (Ball et al., 2009a). Η πρώτη υποκατηγορία ορίζεται ως η γνώση που συνδυάζει τη γνώση για τους μαθητές και τη γνώση για τα μαθηματικά. Οι εκπαιδευτικοί χρειάζεται

να προβλέπουν τι είναι πιθανό να σκεφτούν οι μαθητές και τι θα τους μπερδέψει. Κατά την επιλογή ενός παραδείγματος, οφείλουν να προβλέψουν τι θα βρουν οι μαθητές ενδιαφέρον και τι θα τους κινητοποιήσει. Όταν αναθέτουν ένα έργο, οι εκπαιδευτικοί είναι σημαντικό να προβλέπουν τι είναι πιθανό να κάνουν οι μαθητές με αυτό και αν θα το βρουν εύκολο ή δύσκολο. Κεντρική θέση εδώ η γνώση των παρανοήσεων που εμφανίζουν οι μαθητές σε συγκεκριμένα μαθηματικά θέματα. Η *Γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας* συνδυάζει τη γνώση για τη διδασκαλία και τη γνώση για τα μαθηματικά. Οι εκπαιδευτικοί επιλέγουν το διδακτικό υλικό και τα κατάλληλα εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουν για τη διδασκαλία μιας έννοιας. Επιλέγουν τα παραδείγματα και την σειρά με την οποία θα τα διδάξουν, χρησιμοποιώντας πολλαπλές αναπαραστάσεις γνωρίζοντας τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα καθεμιάς από αυτές. Η τελευταία υποκατηγορία είναι η *Γνώση του προγράμματος σπουδών* που υπάρχει και στο μοντέλο του Shulman. Το ενδιαφέρον αυτής της κατηγορίας είναι ότι οι ερευνητές δεν έχουν καταλήξει ακόμα αν αποτελεί ανεξάρτητη υποκατηγορία ή αν είναι μέρος κάποιας άλλης.

**Μοντέλο ‘Κουαρτέτο της Γνώσης’:** Η εργασία των Rowland et al. (2005) βασίζεται στην ανάλυση βιντεοσκοπημένων μαθημάτων που προετοιμάστηκαν και διεξήχθησαν από εκπαιδευτικούς δημοτικής εκπαίδευσης προς το τέλος της αρχικής τους κατάρτισης σε ένα πανεπιστήμιο της Αγγλίας. Στόχος ήταν να εντοπιστούν οι τρόποι με τους οποίους αξιοποιούσαν τις γνώσεις τους για τα μαθηματικά και τη μαθηματική παιδαγωγική στη διδασκαλία τους. Ακόμα η έρευνα στόχευε στην ανάπτυξη ενός εμπειρικά τεκμηριωμένου εννοιολογικού πλαισίου για την παραγωγική συζήτηση της γνώσης του μαθηματικού περιεχομένου μεταξύ εκπαιδευτών εκπαιδευτικών, εκπαιδευομένων και εκπαιδευτικών-μεντόρων, στο πλαίσιο της σχολικής πρακτικής άσκησης. Ένα τέτοιο πλαίσιο θα έπρεπε να είναι διαχειρίσιμο και να μην επιβαρύνεται με δομική πολυπλοκότητα. Επίσης, όφειλε να καταγράφει έναν αριθμό σημαντικών ιδεών και παραγόντων σχετικά με τις γνώσεις περιεχομένου μέσα σε έναν μικρό αριθμό εννοιολογικών κατηγοριών. Αυτό το θεωρητικό πλαίσιο το ονόμασαν Κουαρτέτο της Γνώσης (Knowledge Quartet) και, σε αντίθεση με το μοντέλο του Shulman, δεν προσδιορίζει τη ποσότητα και το είδος της γνώσης που θα πρέπει να διαθέτει ένας εκπαιδευτικός αλλά εστιάζει στον αναστοχασμό πάνω στη διδασκαλία και στη γνώση των εκπαιδευτικών μέσω ενός περιγραφικού πλαισίου, με στόχο τη βελτίωσή τους. Το μοντέλο περιλαμβάνει τέσσερις κατηγορίες γνώσης: (α) *Θεμελιώδεις Γνώσεις*, (β) *Μετασχηματισμοί*, (γ) *Συνδέσεις* και (δ) *Απροσδόκητη Εξέλιξη*, οι οποίες αναλύονται στη συνέχεια.

Οι *Θεμελιώδεις Γνώσεις* περιλαμβάνουν τις γνώσεις, την κατανόηση και τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών που αποκτούνται στο πλαίσιο της προετοιμασίας τους για να διδάξουν στη σχολική τάξη. Η κατοχή αυτών των γνώσεων αποτελεί θεμέλιο λίθο για τη διαμόρφωση των παιδαγωγικών πρακτικών και στρατηγικών τους. Οι θεμελιώδεις γνώσεις περιλαμβάνουν δύο κατευθύνσεις, την μαθηματική γνώση και τις πεποιθήσεις. Όσον αφορά στην μαθηματική γνώση, περιλαμβάνονται ικανότητες τεκμηρίωσης και κατάλληλης χρήσης της μαθηματικής ορολογίας, καθώς και η γνώση

βασικών διδακτικών αρχών. Οι πεποιθήσεις αποτελούνται από τρεις κατηγορίες. Η πρώτη αφορά στις πεποιθήσεις για την φύση των μαθηματικών και διαφορετικές φιλοσοφικές θέσεις σχετικά με την μαθηματική γνώση. Η δεύτερη έχει να κάνει με τους σκοπούς της διδασκαλίας και η τρίτη με τις πεποιθήσεις σχετικά με τις πρακτικές διδασκαλίας.

Ενώ οι *Θεμελιώδεις Γνώσεις* αφορούν στη γνώση που κατέχουν οι εκπαιδευτικοί, ανεξάρτητα εάν τη χρησιμοποιούν ή όχι στην τάξη, η δεύτερη κατηγορία, οι *Μετασχηματισμοί* αναφέρονται σε τρόπους και πλαίσια με τα οποία η γνώση εφαρμόζεται στην προετοιμασία και τη διεξαγωγή της διδασκαλίας. Αυτή η κατηγορία γνώσης περιλαμβάνει την διαμορφωμένη γνώση που συντελείται κατά την αλληλεπίδραση εκπαιδευτικού-μαθητών. Ο εκπαιδευτικός, για να μπορέσει να διδάξει καλύτερα πρέπει να μετασχηματίσει, δηλαδή να παρουσιάσει τις προσωπικές του γνώσεις με τέτοιο τρόπο ώστε να γίνουν πιο προσιτές στους μαθητές. Περιλαμβάνει τη χρήση παραδειγμάτων, αναπαραστάσεων και επεξηγήσεων για να επιτευχθεί εννοιολογική κατανόηση των εννοιών από τη μεριά των μαθητών.

Η κατηγορία των *Συνδέσεων* αναφέρεται στο σύνολο των αποφάσεων και των επιλογών που κάνει ο εκπαιδευτικός για τη διδασκαλία μιας μαθηματικής έννοιας. Αφορά στην συνοχή του σχεδιασμού ή της διδασκαλίας ενός ή περισσότερων μαθημάτων. Πιο συγκεκριμένα, αφορά στη σύνδεση των διαφορετικών νοημάτων μιας έννοιας, στη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων για την διδασκαλία μιας έννοιας, στη διαχείριση του μαθηματικού διαλόγου μέσα στην τάξη και στην ιεράρχηση ασκήσεων και δραστηριοτήτων καθώς και στην επίγνωση των γνωστικών απαιτήσεών τους.

Η *Απροσδόκητη Εξέλιξη*, η τελευταία κατηγορία του κουαρτέτου της γνώσης, αφορά απροσδόκητα γεγονότα που συμβαίνουν στην τάξη κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας και τα οποία είναι σχεδόν αδύνατο να τα προβλέψει εξ αρχής ο εκπαιδευτικός. Αποτελείται από δύο βασικά στοιχεία, πρώτον από την ετοιμότητα του εκπαιδευτικού να απαντήσει με επιτυχία σε ερωτήματα, ιδέες και απορίες των μαθητών καθώς και να είναι σε θέση να παρεκκλίνει από τον αρχικό προγραμματισμό του μαθήματος εάν χρειαστεί κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Οι μέθοδοι ανταπόκρισης του εκπαιδευτικού στα ερωτήματα των μαθητών αποτελούν τους άξονες του μαθήματος και είναι σημαντικές για την αλληλουχία και τη δόμησή του.

## **1.2 Ο ορίζοντας της γνώσης του περιεχομένου**

Ο Ορίζοντας της Γνώσης του Περιεχομένου αποτελεί μία από τις τρεις κατηγορίες της γνώσης του γνωστικού αντικειμένου. Το περιεχόμενο αυτής της κατηγορίας γνώσης έχει προσεγγιστεί με διάφορους τρόπους. Αρχικά οι Ball et al. (2008) όρισαν τον Ορίζοντα της Γνώσης (Horizon Knowledge) ως την επίγνωση του τρόπου με τον οποίο οι μαθηματικές έννοιες συνδέονται μεταξύ τους σε όλο το φάσμα των μαθηματικών που περιλαμβάνονται στο πρόγραμμα σπουδών. Στην έρευνά τους οι Ball & Bass (2009) ορίζουν τη Γνώση του Μαθηματικού Ορίζοντα ως «την επίγνωση - περισσότερο

ως έμπειρος και εκτιμητικός τουρίστας παρά ως ξεναγός - του ευρύτερου μαθηματικού τοπίου στο οποίο εντάσσεται η παρούσα εμπειρία και διδασκαλία». Ενεργοποιεί έτσι εκείνες τις πτυχές των μαθηματικών που, ενώ ίσως δεν περιέχονται στο πρόγραμμα σπουδών, είναι ωστόσο χρήσιμες για την 'τρέχουσα' μάθηση των μαθητών, φωτίζουν και δίνουν μια κατανοητή αίσθηση της ευρύτερης σημασίας αυτού που μπορεί να αποκαλύπτεται μόνο εν μέρει στα μαθηματικά της στιγμής. Σύμφωνα με τους ίδιους, ο Ορίζοντας της Γνώσης περιλαμβάνει τέσσερα στοιχεία: (α) την έννοια του 'μαθηματικού περιβάλλοντος' που περιβάλλει την τρέχουσα θέση στη διδασκαλία, (β) τις μεγάλες επιστημονικές ιδέες και δομές, (γ) τις σημαντικότερες μαθηματικές πρακτικές και (δ) τον πυρήνα των μαθηματικών αξιών και ευαισθησιών.

Οι Zazkis & Leikin (2010) όρισαν την Ανώτερη Μαθηματική Γνώση ως τη «γνώση του αντικειμένου που αποκτήθηκε κατά τις προπτυχιακές σπουδές στο πανεπιστήμιο». Ειδικότερα, οι Zazkis & Mamolo (2011) αναγνωρίζουν τη χρήση από έναν εκπαιδευτικό της γνώσης του μαθηματικού αντικειμένου που απέκτησε στις προπτυχιακές σπουδές ως ενσάρκωση της γνώσης στον μαθηματικό ορίζοντα, όταν η γνώση αυτή εφαρμόζεται σε μια κατάσταση διδασκαλίας στη δευτεροβάθμια ή πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Η θέασή τους επηρεάζεται από τον μεταφορικό ορισμό του ορίζοντα ως του σημείου "όπου η γη φαίνεται να συναντά τον ουρανό" και το ερμηνεύουν ως το σημείο όπου η Ανώτερη Μαθηματική γνώση ενός εκπαιδευτικού (ο ουρανός) φαίνεται να συναντάει τις μαθηματικές γνώσεις που αντικατοπτρίζονται στο σχολικό μαθηματικό περιεχόμενο (η γη). Στην προσέγγισή τους για τον ορίζοντα έχουν επηρεαστεί από τη φιλοσοφική ιδέα του Husserl, ο οποίος υιοθετεί τη διάκριση μεταξύ εσωτερικού (inner) και εξωτερικού (outer) ορίζοντα. Όταν ένα άτομο ασχολείται με ένα αντικείμενο γνώσης, η εστίασή του επικεντρώνεται στο ίδιο το αντικείμενο, ενώ στην περιφέρεια του αντικειμένου βρίσκεται ο υπόλοιπος κόσμος. Ως εκ τούτου, ο ορίζοντας ενός αντικειμένου, μπορεί να χωριστεί σε έναν "εσωτερικό ορίζοντα" και έναν "εξωτερικό ορίζοντα". Ο εσωτερικός ορίζοντας ενός αντικειμένου γνώσης αντιστοιχεί σε πτυχές του αντικειμένου οι οποίες δεν είναι στην εστίαση της προσοχής του υποκειμένου μάθησης. Αντίθετα ο εξωτερικός ορίζοντας ενός αντικειμένου γνώσης περιλαμβάνει στοιχεία τα οποία δεν είναι τα ίδια πτυχές του αντικειμένου αλλά συνδέονται με τον κόσμο στον οποίο το αντικείμενο υπάρχει (Zoitsakos, 2019). Επιπλέον, ο εξωτερικός ορίζοντας ενός μαθηματικού αντικειμένου δεν περιλαμβάνει μόνο τις γενικεύσεις των συγκεκριμένων στοιχείων που χαρακτηρίζουν το αντικείμενο αλλά και τις συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών πλαισίων στα οποία μπορεί να υπάρχει το αντικείμενο αυτό, αντιπροσωπεύει τον 'ευρύτερο κόσμο' στον οποίο ανήκει μια μαθηματική έννοια. Οι γνώσεις ενός εκπαιδευτικού στο μαθηματικό ορίζοντα περιλαμβάνουν στοιχεία τόσο στον εσωτερικό όσο και στον εξωτερικό ορίζοντα ενός αντικειμένου, ενώ μόνο ορισμένα από αυτά τα στοιχεία είναι προσβάσιμα στους μαθητές. Ο εκπαιδευτικός μπορεί, λοιπόν, να αναγνωρίσει περισσότερα στοιχεία και ιδιότητες ενός αντικειμένου και να αποκτήσει μια πιο βαθιά εκτίμηση για το μαθηματικό αντικείμενο και τον περίγυρό του.

## **Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>: Η εξέλιξη και τα χαρακτηριστικά της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου**

Το δεύτερο κεφάλαιο εστιάζει στην εξέλιξη της Παιδαγωγικής Γνώσης του Περιεχομένου (ΠΓΠ) των εκπαιδευτικών, καθώς και στα χαρακτηριστικά αυτής. Πιο συγκεκριμένα, στην πρώτη ενότητα αυτού του κεφαλαίου γίνεται αναφορά σε έρευνες σχετικά με τη σημασία της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου. Η δεύτερη ενότητα εξετάζει τον τρόπο σκέψης των μαθητών και τρόπους εκμάθησης των μαθηματικών, ενώ η τρίτη αφορά το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών και το πώς αυτό διαμορφώνεται από τον εκπαιδευτικό και εντάσσεται στη διδασκαλία του. Στην τέταρτη και τελευταία ενότητα συζητώνται τα χαρακτηριστικά που αναμένεται να έχει ένας ‘καλός’ εκπαιδευτικός, καθώς και οι στρατηγικές διδασκαλίας που είναι σημαντικό να ακολουθεί.

### **2.1 Η εξέλιξη της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου**

Κάθε επάγγελμα έχει ένα σώμα γνώσεων που το διαφοροποιεί από τα άλλα και καθιστά τους ανθρώπους που κατέχουν αυτές τις δεξιότητες κατάλληλους επαγγελματίες για να ασκήσουν το επάγγελμα. Είναι ενδιαφέρον ότι για το επάγγελμα που εκπαιδεύει όλους τους άλλους, αυτό των εκπαιδευτικών, δεν υπάρχει συναίνεση σχετικά με το σώμα γνώσεων που είναι απαραίτητο για να γίνει κανείς εκπαιδευτικός, ακόμη και για την ύπαρξή του. Η κοινή λογική λέει ότι για να είσαι δάσκαλος αρκεί να γνωρίζεις κάποιο συγκεκριμένο περιεχόμενο. Κατά συνέπεια, είναι ευρέως διαδεδομένη η ιδέα ότι δεν απαιτούνται άλλες δεξιότητες πέραν του συγκεκριμένου περιεχομένου, για να μπορεί να θεωρηθεί κάποιος ‘δάσκαλος’. Η συνθήκη αυτή απαξιώνει συχνά το επάγγελμα του εκπαιδευτικού τόσο κοινωνικά όσο και οικονομικά.

Παρόλο που η γνώση του συγκεκριμένου περιεχομένου είναι το πρωταρχικό καθήκον του εκπαιδευτικού, οι ειδικές δεξιότητες για τη διδασκαλία έχουν αναγνωριστεί από καιρό ως απαραίτητες (Kind, 2009). Υπό αυτή την έννοια, ο Montero (2001) αναφέρει ότι η διδασκαλία υπερβαίνει κατά πολύ την απλή απαγγελία του μαθήματος από τον εκπαιδευτικό και περιλαμβάνει μια σειρά από λιγότερο ορατές και λιγότερο κοινωνικά αναγνωρισμένες δραστηριότητες που εκτελούνται από αυτούς. Οι δραστηριότητες αυτές περιλαμβάνουν πτυχές του σχεδιασμού και της αξιολόγησης, και αυτές είναι οι δραστηριότητες που χρειάζεται να ληφθούν υπόψη κατά την προετοιμασία αλλά και κατά την ανάλυση των γνώσεων των εκπαιδευτικών.

Ο Bucat (2005) ακολουθεί την ίδια κατεύθυνση, για να αναφέρει ότι υπάρχει τεράστια διαφορά μεταξύ της γνώσης ενός θέματος (γνώση περιεχομένου) και της γνώσης για τη διδασκαλία και τη μάθηση του θέματος αυτού (παιδαγωγική γνώση περιεχομένου). Σήμερα, η διδασκαλία ως επαγγελματική δραστηριότητα συνδέεται με το σύνολο των ενεργειών που δρομολογεί σκόπιμα ο εκπαιδευτικός, για να προωθήσει τη μάθηση εννοιών, διαδικασιών και στάσεων των μαθητών στο πλαίσιο του σχολικού περιβάλλοντος που επηρεάζει και επηρεάζεται από τη διδακτική δραστηριότητα (Montero, 2001).

Η Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου (ΠΓΠ) είναι μια έννοια που έχει καταλήξει να αντιπροσωπεύει τη γνώση που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί κατά τη διαδικασία της διδασκαλίας (Kind, 2009). Αν μπορούσαμε λοιπόν να προσδιορίσουμε το περιεχόμενό της, η κατανόηση του τί σημαίνει να είσαι καλός εκπαιδευτικός θα μπορούσε να ενισχυθεί και να προωθήσει την ανάπτυξη της ΠΓΠ στους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς πιο οργανωμένα και συστηματικά.

Η ΠΓΠ είναι μια έννοια που έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως στη βιβλιογραφία για να περιγράψει τις γνώσεις των εκπαιδευτικών. Θεωρείται η ειδική επαγγελματική γνώση που χρειάζεται να κατέχει ένας εκπαιδευτικός για να χαρακτηριστεί 'καλός εκπαιδευτικός'. Παρά την κρίσιμη σημασία της, δεν έχουν συμφωνηθεί ακόμα ποια είναι τα επιμέρους στοιχεία της. Πολλές έρευνες προτείνουν διαφορετικά μοντέλα/προσεγγίσεις και έννοιες, μερικές φορές αντικρουόμενες.

Στο πλαίσιο της εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών ένα κεντρικό ζήτημα είναι ο ορισμός των δεξιοτήτων που πρέπει να αναπτύξει ένας εκπαιδευτικός για να διδάξει αποτελεσματικά (Knowledge base). Για πολλές δεκαετίες υπήρχε η αντίληψη ότι αυτό που έπρεπε να γνωρίζει ο εκπαιδευτικός για να διδάξει ήταν το περιεχόμενο της ειδικότητάς του (Μαθηματικά, Βιολογία κλπ). Στην πράξη, όμως, δεν είναι μόνο το περιεχόμενο αυτό που χαρακτηρίζει έναν καλό εκπαιδευτικό. Αν ήταν έτσι, όλοι οι πανεπιστημιακοί, ερευνητές και ειδικοί στην ειδικότητά τους θα έπρεπε να είναι άριστοι δάσκαλοι. Είναι όμως γνωστό ότι αυτό δεν είναι αλήθεια (Kind, 2009).

Η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου (ΠΓΠ) έχει οριστεί από τους μελετητές ως ένα μοναδικό σύνολο γνώσεων για το σκοπό της διδασκαλίας και έχει χρησιμοποιηθεί για να διακρίνει τις γνώσεις που έχουν οι εκπαιδευτικοί του γνωστικού αντικειμένου από τις γνώσεις που έχουν οι ειδικοί του γνωστικού αντικειμένου (Berliner, 1986; Gudmundsdotti, 1987). Το μοντέλο του Shulman (1986) περιλαμβάνει δύο συνιστώσες της ΠΓΠ: τη γνώση των διδακτικών στρατηγικών και της αναπαράστασης, καθώς και τη γνώση των αντιλήψεων και των παρανοήσεων των μαθητών. Αρκετοί ερευνητές έχουν έκτοτε ασχοληθεί με την έννοια αυτή τόσο στα μαθηματικά όσο και σε άλλες ειδικότητες, μερικοί από αυτούς προσθέτοντας περισσότερες συνιστώσες στην ΠΓΠ. Για παράδειγμα, η Grossman (1990) πρότεινε να προστεθούν δύο επιπλέον συνιστώσες: οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη διδασκαλία του γνωστικού αντικειμένου και η γνώση του αναλυτικού προγράμματος. Με βάση τα δύο προηγούμενα μοντέλα, κάποιοι ερευνητές πρόσθεσαν επιπλέον συνιστώσες. Οι Park & Oliver (2008b) ανέφεραν την αποτελεσματικότητα των εκπαιδευτικών, ενώ οι Park & Chen (2012) την γνώση της αξιολόγησης.

Ο Marks (1990) χρησιμοποίησε τον όρο 'επαγγελματική γνώση' για να αναφερθεί σε τρεις υποκατηγορίες της γνώσης που αναμένεται να συγκροτήσει ένας εκπαιδευτικός: (α) τη γνώση του εκπαιδευτικού αναφορικά με την κατανόηση από τους μαθητές του αντικειμένου διδασκαλίας, (β) τη γνώση του περιεχομένου του μαθήματος και (γ) τη γνώση των μέσων για τη διδασκαλία αυτού του περιεχομένου. Όπως ο Shulman, ο Marks δίνει έμφαση στη γνώση του περιεχομένου στην ΠΓΠ, η οποία



θεωρεί πως αποτελείται από ένα σύνολο διαφορετικών μεταβλητών, όπως η κατανόηση των βασικών μαθηματικών ιδεών και η γνώση των διδακτικών πρακτικών και υλικών. Η ΠΓΠ, σύμφωνα με τον Marks, είναι το αποτέλεσμα γνωστικών αλληλεπιδράσεων που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια του μαθήματος και έτσι επιτυγχάνεται η ενσωμάτωση της γνώσης και της πράξης εκπαιδευτικών και μαθητών.

Ο Hashweh (2005), με βάση τα αποτελέσματα έρευνας, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η ΠΓΠ έχει έναν αλληλεπιδραστικό χαρακτήρα και προσπάθησε να διασαφηνίσει τα επιμέρους στοιχεία της. Χρησιμοποίησε ως ερευνητικό εργαλείο τη συνέντευξη εκπαιδευτικών και κατασκεύασε εννοιολογικούς πίνακες αξιοποιώντας τις απαντήσεις τους, ώστε να εξάγει τη γνωστική βάση της διδασκαλίας τους. Υποστηρίζει ότι η ΠΓΠ είναι το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης αρκετών μεταβλητών, όπως η γνώση του αντικείμενου διδασκαλίας, ο σκοπός και οι στόχοι διδασκαλίας μιας έννοιας, καθώς και τα χαρακτηριστικά των μαθητών, του τρόπου διδασκαλίας, του αναλυτικού προγράμματος και του πλαισίου μέσα στο οποίο πραγματοποιείται η διδασκαλία. Σύμφωνα με τον ίδιο η ΠΓΠ έχει προσωπικό χαρακτήρα, καθώς σχηματίζεται από την επανάληψη του σχεδιασμού και της διδασκαλίας συγκεκριμένων θεμάτων τα οποία ο εκπαιδευτικός σχεδίασε και δίδαξε ξανά στο παρελθόν. Γι' αυτό θεωρεί ότι βασίζεται σε γεγονότα και ιστορίες (event-based, story-based) χωρίς αυτό να σημαίνει ότι είναι εξειδικευμένη, καθώς μπορεί η ίδια παιδαγωγική γνώση που αναπτύχθηκε με βάση κάποια γεγονότα κάτω από ένα συγκεκριμένο πλαίσιο να χρησιμοποιηθεί και σε άλλες καταστάσεις. Ο Hashweh αντιλαμβάνεται την ΠΓΠ ως μια σύνθετη μορφή γνώσης, βάση της οποίας αποτελούν οι λεγόμενες παιδαγωγικές δομές. Πρόκειται για βασικά γνωστικά σχήματα που έχουν εμπειρικό χαρακτήρα, προκύπτουν τόσο από την αλληλεπίδραση αρκετών κατηγοριών γνώσης όσο και από τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών και εξειδικεύονται ανάλογα με τη γνωστική περιοχή της γνώσης που αφορούν. Οι παιδαγωγικές δομές αποτελούν ένα είδος γενικευμένης γνώσης και είναι αποτέλεσμα της εμπειρίας του εκπαιδευτικού. Αν και είναι συνδεδεμένες με συγκεκριμένες διδακτικές εμπειρίες, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και σε διδασκαλίες άλλων μαθηματικών εννοιών. Η γενικευμένη αυτή γνώση αποτελεί μια εσωτερική διδακτική γνώση που δεν είναι εύκολα αναγνωρίσιμη παρά μόνο κατά τη διάρκεια του αναστοχασμού των εκπαιδευτικών, δηλαδή, μέσω απαντήσεων σε ερωτήσεις που σκόπιμα οι ίδιοι θέτουν στον εαυτό τους. Αυτές οι ερωτήσεις σχετίζονται με τη διδασκαλία και τη μάθηση και αφορούν στις δυνατότητες των μαθητών, στη σύνδεση των μαθηματικών εννοιών με άλλες και στον τρόπο διεύρυνσης της κατανόησης των μαθητών για όλη τη γνωστική περιοχή.

Ενώ έχουν εντοπιστεί επιπλέον συνιστώσες της ΠΓΠ, ορισμένοι μελετητές, όπως η Abell (2008) και ο Nilsson (2008) υποστήριξαν ότι θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ως κάτι περισσότερο από το άθροισμα των διακριτών συνιστωσών της. Ισχυρίστηκαν ότι τα συστατικά στοιχεία της ΠΓΠ αλληλοεπιδρούν με έναν εξαιρετικά πολύπλοκο τρόπο και οι αλληλεπιδράσεις αυτές χρήζουν μελέτης. Η Abell αναφέρει χαρακτηριστικά ότι οι εκπαιδευτικοί κατά τη σχεδίαση και υλοποίηση της διδασκαλίας αναμειγνύουν ασυνείδητα τα επιμέρους στοιχεία της ΠΓΠ.

Χαρακτηρίζοντάς το ως Πενταγωνικό μοντέλο της ΠΓΠ (pentagon model), οι Magnusson et al. (1999) θεώρησαν 5 πτυχές της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου για τη διδασκαλία ενός γνωστικού αντικειμένου. Η πρώτη πτυχή, *Κατευθύνσεις για τη Διδασκαλία*, αναφέρεται στις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τους σκοπούς και τους στόχους της διδασκαλίας, καθώς και τις πεποιθήσεις τους για τη διδασκαλία και την εκμάθηση του γνωστικού αντικειμένου που διδάσκουν. Έτσι, καθορίζεται ο τρόπος που ο εκπαιδευτικός κάνει τη διδασκαλία, τα εργαλεία που χρησιμοποιεί, οι στρατηγικές διδασκαλίας και η αξιολόγηση της μάθησης των μαθητών. Η *Γνώση της Κατανόησης των Μαθητών* είναι η δεύτερη πτυχή και αναφέρεται στη γνώση σχετικά με το τί οι μαθητές γνωρίζουν για ένα θέμα και τις πιθανές δυσκολίες ή παρανοήσεις αντιμετώπιζουν. Η επόμενη είναι η *Γνώση του Αναλυτικού Προγράμματος* και περιλαμβάνει τη γνώση του εκπαιδευτικού για τα προτεινόμενα εργαλεία του αναλυτικού προγράμματος, καθώς και τις σημαντικές έννοιες για το γνωστικό αντικείμενο και τη σχέση τους με άλλες έννοιες που είτε τις γνωρίζουν είτε θα τις μάθουν αργότερα οι μαθητές. Η τέταρτη πτυχή είναι η *Γνώση Στρατηγικών για τη Διδασκαλία* και η τελευταία η *Γνώση για την Αξιολόγηση της Μάθησης* που αναφέρεται στις γνώσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με το τί είναι σημαντικό να αξιολογηθεί στο πλαίσιο ενός συγκεκριμένου θέματος και στις δραστηριότητες ή τα εργαλεία που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την αξιολόγηση της μάθησης των μαθητών. Οι Magnusson et al. (1999) δήλωσαν ότι είναι σημαντικό όχι μόνο να κατανοήσουμε κάθε συστατικό της ΠΓΠ ξεχωριστά, αλλά και να κατανοήσουμε πώς οι συνδέσεις αυτών των συνιστωσών επηρεάζουν τη διδασκαλία. Οι Park και Oliver (2008a) πρότεινα μια τροποποίηση του μοντέλου του Magnusson υποστηρίζοντας ότι είναι σημαντικές οι συνδέσεις των πτυχών της παιδαγωγικής γνώσης όχι ιεραρχικά αλλά από και προς καθεμία από αυτές.

Σε μια πιο πρόσφατη έρευνα, οι Depaere et al (2013) συνέλεξαν 60 ερευνητικά άρθρα που αφορούσαν την ΠΓΠ σχετικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών και ασχολήθηκαν με δύο ερευνητικά ερωτήματα: πώς ορίζεται η ΠΓΠ στις εμπειρικές έρευνες σχετικά με την μαθηματική εκπαίδευση και πώς αυτήν διερευνάται σε αυτού του είδους τις έρευνες. Όσον αφορά στο πρώτο ερώτημα παρατήρησαν ότι όλες οι έρευνες που μελέτησαν συμφωνούσαν στα εξής χαρακτηριστικά της ΠΓΠ: αφορά τη γνώση των εκπαιδευτικών, συνδέει περιεχόμενο και παιδαγωγική, εξαρτάται από το αντικείμενο διδασκαλίας και ότι η γνώση περιεχομένου είναι ένα σημαντικό και απαραίτητο προ-απαιτούμενο. Επίσης, διαπίστωσαν πως υπάρχει συμφωνία των ερευνητών στα κύρια χαρακτηριστικά της ΠΓΠ και ειδικότερα στη γνώση των παρανοήσεων των μαθητών και στη γνώση διδακτικών στρατηγικών και μεθόδων αναπαράστασης. Παρόλα αυτά, εντοπίστηκαν και διαφωνίες για το αν κάποια άλλα χαρακτηριστικά πρέπει να θεωρούνται μέρος της ΠΓΠ, όπως για παράδειγμα η γνώση του αναλυτικού προγράμματος σπουδών, η γνώση περιεχομένου και η γνώση των εκπαιδευτικών στόχων. Οι μισές από τις έρευνες που εξετάστηκαν από τους Depaere et al. (2013) ακολουθούσαν το μοντέλο του Shulman στην εννοιολόγηση της ΠΓΠ, ενώ άλλες το μοντέλο των Ball et al. και παραδόξως σε αρκετές έρευνες δεν αναφερόταν τα χαρακτηριστικά της ΠΓΠ. Μια διαμάχη που εντόπισαν οι ερευνητές αφορά στο 'εάν

η μαθηματική γνώση στη διδασκαλία βρίσκεται στο μυαλό του εκάστοτε εκπαιδευτικού ή είναι ένα κοινωνικό χαρακτηριστικό, που έχει σημασία μόνο στο πλαίσιο εφαρμογής του' (Rowland & Ruthven, 2011, σελ....). Έτσι, έχουμε τους υποστηρικτές μιας *γνωστικής αντίληψης* (cognitive perspective), σύμφωνα με την οποία η ΠΓΠ θεωρείται μια κατηγορία της γνώσης του εκπαιδευτικού που περιέχει συγκεκριμένο αριθμό χαρακτηριστικών και διαφοροποιείται από άλλες κατηγορίες γνώσης, όπως η γνώση του περιεχομένου και η γενική παιδαγωγική γνώση. Αντίθετα, η *πλαισιοθετημένη αντίληψη* (situated perspective) της ΠΓΠ αφορά ένα συγκεκριμένο σχολικό πλαίσιο, αναγνωρίζει τη πολυδιάστατη φύση της διδασκαλίας και ότι οι επιλογές του εκπαιδευτικού αντανακλούν ταυτόχρονα μαθηματικές και παιδαγωγικές σκέψεις.

Οι ανωτέρω δύο διαφορετικές αντιλήψεις για την νοηματοδότηση της ΠΓΠ επηρεάζουν και τον τρόπο που αυτήν ερευνάται, εστίαση που αποτέλεσε το δεύτερο αντικείμενο διερεύνησης των Depaere et al. Οι υποστηρικτές της *γνωστικής αντίληψης* της ΠΓΠ πιστεύουν ότι μπορεί να μετρηθεί μέσω ενός τεστ ανεξάρτητα από το πλαίσιο της τάξης στην οποία εφαρμόζεται. Συνήθως επικεντρώνονται στα ατομικά κενά των εκπαιδευτικών στην ΠΓΠ, στο πώς αυτή σχετίζεται ή διαφοροποιείται από άλλες κατηγορίες γνώσης των εκπαιδευτικών, πώς σχετίζεται με τα μαθησιακά αποτελέσματα και πώς μπορεί να βελτιωθεί. Από την άλλη πλευρά, οι υποστηρικτές της *πλαισιοθετημένης αντίληψης* θεωρούν ότι η διερεύνηση της ΠΓΠ έχει νόημα μόνο μέσα στο πλαίσιο στο οποίο υλοποιείται η διδασκαλία. Συνεπώς, συχνά στηρίζονται στην παρατήρηση της διδασκαλίας στη τάξη και στόχος τους είναι να ξεδιαλύνουν τη φύση της ΠΓΠ μέσα σε ένα ορισμένο πλαίσιο.

## **2.2 Τρόποι εκμάθησης των Μαθηματικών από τους μαθητές**

Η Maher (2004) πραγματοποίησε μακροχρόνια έρευνα με σκοπό την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές σκέφτονται και μαθαίνουν μαθηματικά όταν συνεργάζονται μεταξύ τους και με ελάχιστη παρέμβαση από τον εκπαιδευτικό. Στους μαθητές ανατέθηκαν ανοιχτές και σαφώς καθορισμένες εργασίες από 4 μαθηματικούς τομείς σε συνεδρίες που δεν αποτελούσαν μέρος της κανονικής διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο. Οι μαθητές κλήθηκαν να εργαστούν από κοινού, μερικές φορές για μεγάλα χρονικά διαστήματα, και να παρουσιάσουν τις ιδέες τους με κατάλληλες αιτιολογήσεις που θα ήταν πειστικές για τους ίδιους. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η μετάθεση της ευθύνης στους μαθητές υπήρξε επιτυχής, καθώς ανταποκρίθηκαν οδηγούμενοι από την επιθυμία να δώσουν νόημα στη μαθηματική τους δραστηριότητα. Στην πραγματικότητα, η σημασία που έδιναν οι ίδιοι οι μαθητές, στο να δώσουν νόημα στη δραστηριότητά τους οδήγησε σε προσεκτικούς συλλογισμούς και στην οικοδόμηση επιχειρημάτων. Η κουλτούρα της δημιουργίας νοήματος που αναδύθηκε στις αρχές της μελέτης οδήγησε σε επιχειρήματα και αιτιολογήσεις. Ο διάλογός τους, όπως ήταν φυσικό, περιελάμβανε επιχειρηματολογία για τις ιδέες και την παροχή πειστικών αποδείξεων από τον ένα στον άλλον. Αυτό, με τη σειρά του, οδήγησε στη ανάπτυξη αποδείξεων και στη γενίκευση. Η μικρή

παρέμβαση του καθηγητή σε συνάρτηση με την ομαδική δουλειά ώθησε τους μαθητές να αναζητήσουν μόνοι τους την απάντηση του προβλήματος, χρησιμοποιώντας επιχειρήματα και ψάχνοντας λογικές εξηγήσεις για την απάντησή τους. Το να δώσουν μια απάντηση δεν ήταν αρκετό, έπρεπε να παρέχουν γραπτή εξήγηση για να υποστηρίξουν το σκεπτικό τους και οι λεπτομέρειες στα επιχειρήματα ήταν σημαντικές. Οι μαθητές είχαν έντονη επίγνωση ότι οι ίδιοι ήταν υπεύθυνοι για τη μαθηματική τους δράση. Όπως προκύπτει από τα σχόλιά τους, ανέλαβαν, σταδιακά, την ευθύνη για τη δική τους μάθηση και για τη διατήρηση της επικοινωνίας και της συνεργασίας μέσα στις ομάδες εργασίας και διατήρησαν υψηλές προσδοκίες για τους εαυτούς τους και για τους άλλους. Αυτές οι προσδοκίες μπορεί να εξηγούν τον τρόπο με τον οποίο συνεργάστηκαν και τη δέσμευσή τους στο έργο που τους ανατέθηκε για τόσο μεγάλο χρονικό διάστημα.

### **2.3 Το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών**

Σύμφωνα με τους Lloyd, Remillard & Beth (2008), το επίσημο αναλυτικό πρόγραμμα (Α.Π.) δεν χρησιμοποιείται αυτούσιο κατά τη διδασκαλία. Οι εκπαιδευτικοί διαμορφώνουν τη δομή και τους στόχους του προγράμματος κατά το στάδιο του σχεδιασμού της διδασκαλίας τους σύμφωνα με τους προσωπικούς τους στόχους μάθησης αλλά και το επίπεδο των μαθητών. Αναζητούν από τις προτεινόμενες δραστηριότητες του Α.Π. τα κρυμμένα μαθηματικά νοήματα και τα εξατομικεύουν στη δικιά τους διδασκαλία. Η διδασκαλία, σύμφωνα με τον Brown, M. W. (2008), χαρακτηρίζεται ως σχεδιαστική διαδικασία στην οποία ο εκπαιδευτικός αντιλαμβάνεται και μεταφράζει το υπάρχον υποστηρικτικό υλικό συνεκτιμώντας ένα σύνολο παραγόντων: τους περιορισμούς που υπάρχουν στην τάξη του, τη γνώση των μαθητών του και τις προσωπικές του επιδιώξεις. Χαράσσει στρατηγικές με βασική επιδίωξη την ικανοποίηση των διδακτικών του στόχων. Έτσι, η σχέση μεταξύ του εκπαιδευτικού και των πηγών του αναλυτικού προγράμματος είναι δυναμική και αλληλοεξαρτώμενη, με την έννοια ότι το ένα διαμορφώνει το άλλο και μαζί συμβάλλουν στη διαμόρφωση της διδασκαλίας. Το αναλυτικό πρόγραμμα και το υποστηρικτικό υλικό, όπως έχουν αναδιαμορφωθεί από τον εκπαιδευτικό στο στάδιο του σχεδιασμού της διδασκαλίας, έρχονται έπειτα σε επαφή με τους μαθητές κατά τη διάρκεια του μαθήματος, διαμορφώνοντάς τους συγκεκριμένο τρόπο σκέψης και στρατηγικές επίλυσης προβλήματος. Όμως, με τη σειρά τους, ο τρόπος σκέψης και η απόκριση των μαθητών σε αυτά που έχει σχεδιάσει ο εκπαιδευτικός αναπροσαρμόζουν το έργο του εκπαιδευτικού, όπως, για παράδειγμα, την στρατηγική προσέγγισης που είχε αρχικά επιλέξει ή ακόμα και το υλικό των δραστηριοτήτων που επιλέγει. Κατά τη διάρκεια του μαθήματος οι εκπαιδευτικοί καλούνται να αξιολογούν άμεσα την κατανόηση των μαθητών, να την συγκρίνουν με την επιθυμητή απάντηση και μετά να δίνουν μια απάντηση, η οποία θα βοηθά τόσο το μαθητή που ερωτήθηκε όσο και την υπόλοιπη τάξη στην καλύτερη κατανόηση του θέματος της ερώτησης (Stein & Kim, 2008).

Η έρευνα των Remillard & Bryans (2004) έδειξε ότι οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν διαφορετικά το Α.Π στη διδασκαλία τους ανάλογα με τη διδακτική τους εμπειρία. Αυτοί με μικρή εμπειρία ακολουθούν συνήθως κατά γράμμα τις οδηγίες και τις διδακτικές στρατηγικές του Α.Π., ενώ οι πιο έμπειροι εκπαιδευτικοί στηρίζονται στις δραστηριότητες που υποδεικνύει το Α.Π. αλλά χρησιμοποιούν δικές τους διδακτικές μεθόδους και εξηγήσεις. Οι Sahin & Soyulu (2017) εξέτασαν την ανάπτυξη της γνώσης του αναλυτικού προγράμματος υποψήφιων εκπαιδευτικών δημοτικής εκπαίδευσης στον τομέα της Άλγεβρας και διαπίστωσαν ότι με το πέρασ κάθε ακαδημαϊκού έτους οι γνώσεις των υποψήφιων εκπαιδευτικών για το Α.Π. αυξανόταν.

Στη μελέτη των Behm & Lloyd (2008), που αφορούσε τον τρόπο που τρεις εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν τις πηγές του προγράμματος, αναδεικνύεται ο ρόλος που διαδραματίζουν οι γνώσεις τους για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους στις διδακτικές αποφάσεις τους. Οι δυο εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην έρευνα και είχαν ισχυρή γνώση των μαθηματικών και άνεση στη διδασκαλία τους προτιμούσαν να χρησιμοποιούν τις πηγές του προγράμματος και να κάνουν αλλαγές έχοντας ως σκοπό να εκπληρώσουν τους μαθησιακούς στόχους που είχαν θέσει. Αντίθετα, ο εκπαιδευτικός της έρευνας που δεν είχε καλή γνώση του αντικειμένου προτιμούσε να χρησιμοποιεί κατά γράμμα τις οδηγίες και τις προτάσεις του προγράμματος.

Οι στόχοι που θέτει ο εκπαιδευτικός έχουν μεγάλη σημασία στη διδασκαλία των μαθηματικών και αποτελούν ένα αναπόσπαστο κομμάτι της διδασκαλίας. Προϋπόθεση για μια καλή διδασκαλία είναι να έχουν τεθεί κατά τον σχεδιασμό της με σαφήνεια οι διδακτικοί στόχοι. Ο Porpham (2004) αναφέρει ότι είναι πολύ σημαντικό να υπάρχουν σαφώς διατυπωμένοι μαθησιακοί στόχοι γιατί περιγράφουν τι θα κάνει ο μαθητής και τι πρέπει να μπορεί να κάνει μέχρι το τέλος της διδασκαλίας. Επίσης, αποτελούν τους θεμέλιους λίθους πάνω στους οποίους μπορεί κανείς να διαμορφώσει μια διδασκαλία ή ακόμα και να εξετάσει αν τελικά εκπληρώθηκε ο συνολικός στόχος μιας ενότητας (Eisner, 2004).

#### **2.4 Διδασκαλία και διδακτικές πρακτικές στην τάξη**

Το περιβάλλον της τάξης συνιστά ένα ιδιαίτερα πολύπλοκο περιβάλλον και οι εκπαιδευτικοί, προκειμένου να ανταπεξέλθουν στις προκλήσεις που αναδεικνύονται σε αυτό κατασκευάζουν μοντέλα πραγματικότητας πάνω στα οποία βασίζουν τις διδακτικές αποφάσεις τους. Ένα άτομο ξεκινά με συγκεκριμένο περιεχόμενο, πηγές και καθορισμένους στόχους και προσανατολισμούς. Έπειτα, λαμβάνοντας υπόψη την κατάσταση, συγκεκριμένα κομμάτια των γνώσεών του ενεργοποιούνται, οι στόχοι του ορίζονται και οι αποφάσεις του συνάδουν με αυτούς τους στόχους είτε συνειδητά είτε ασυνείδητα.

Στην έρευνά τους οι Wilson et al. (2005) εξέτασαν τις απόψεις εννιά έμπειρων εκπαιδευτικών για τα χαρακτηριστικά εκείνα που θεωρούν ότι πρέπει να έχει ο εκπαιδευτικός για να πραγματοποιήσει μια αποτελεσματική διδασκαλία στα μαθηματικά. Οι ερωτηθέντες ανέφεραν ότι οι καθηγητές μαθηματικών οφείλουν να

διαθέτουν εκτεταμένες γνώσεις τόσο για τα μαθηματικά όσο και για τους μαθητές τους προκειμένου να διδάξουν καλά. Χρειάζονται γνώσεις μαθηματικών προκειμένου να διδάσκουν έχοντας κατανοήσει το περιεχόμενο της διδασκαλίας, για να βάζουν σε σωστή σειρά τα μαθήματα, να κάνουν μεταβάσεις μεταξύ των θεμάτων, να κατανοούν τις ερωτήσεις των μαθητών, να παρέχουν καλά παραδείγματα και να διατηρούν την απαραίτητη αυτοπεποίθηση μπροστά σε μια τάξη μαθητών. Επτά από τους εννέα εκπαιδευτικούς εξήγησαν πώς οι μαθηματικές γνώσεις υποστηρίζουν την αποτελεσματική διδασκαλία. Ορισμένοι ανέφεραν ότι πέρα από την ποσότητα των μαθηματικών γνώσεων σημασία έχει να γνωρίζουν και τον τρόπο με τον οποίο υποστηρίζονται οι στρατηγικές διδασκαλίας που θέλουν να χρησιμοποιήσουν. Οι εκπαιδευτικοί τόνισαν επίσης την ανάγκη να γνωρίζουν τους μαθητές τους. Έτειναν να δίνουν έμφαση στην προσωπική γνώση του μαθητή ή στη γνώση των δεξιοτήτων του σε αντίθεση με τη γνώση του πώς ένας μαθητής μαθαίνει ή κατασκευάζει μαθηματικές ιδέες. Ακόμη, ανέφεραν ότι στόχος τους ήταν να διδάσκουν έτσι ώστε οι μαθητές τους να κατανοούν τα μαθηματικά και να είναι σε θέση να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά τους και εκτός της τάξης. Και οι εννέα εκπαιδευτικοί ενδιαφέρονταν για την κατανόηση των μαθητών που ξεπερνούσε την χρήση ενός τύπου ή την εξήγηση μιας μαθηματικής διαδικασίας.

Επιπλέον, οι στρατηγικές διδασκαλίας που πρότειναν αφορούσαν (α) στη σύνδεση των μαθηματικών, (β) στην οπτικοποίησή τους και (γ) στην αξιολόγηση της κατανόησης των μαθητών. Σχετικά με τη σύνδεση των μαθηματικών, υπήρχαν διαφορετικές απόψεις. Κάποιοι θεωρούσαν σημαντικό να υπάρχουν μαθηματικές συνδέσεις (π.χ. γραφική/αλγεβρική αναπαράσταση μιας έννοιας) και ομαλές μεταβάσεις από τη μια μαθηματική έννοια στην άλλη. Άλλοι μίλησαν για τη σύνδεση των μαθηματικών με τον κόσμο των μαθητών εφαρμόζοντας τα μαθηματικά στην καθημερινότητά τους. Η δεύτερη στρατηγική, αυτή της οπτικοποίησης, αφορά στην οπτικοποίηση των μαθηματικών χρησιμοποιώντας υπολογιστές, αριθμομηχανές, γραφικές αναπαραστάσεις ή συγκεκριμένα αντικείμενα. Τέλος, σχετικά με την αξιολόγηση της κατανόησης των μαθητών, οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν ότι η διαδικασία της αξιολόγησης είναι σημαντική αλλά θα πρέπει να πραγματοποιείται με σύντομες διαδικασίες. Υποστήριξαν δε την ανάγκη για συχνή και γρήγορη αξιολόγηση, η οποία θα τους ενημέρωνε για το αν πρέπει να προχωρήσουν σε κάποια άλλη ενότητα ή πρέπει να παραμείνουν στην ίδια λύνοντας τις απορίες των μαθητών.

Οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν επίσης ότι οι μαθητές πρέπει από μόνοι τους να ανακαλύψουν μαθηματικές ιδιότητες και ιδέες και γι' αυτό είναι απαραίτητη η χρήση κατάλληλων δραστηριοτήτων και ο σχεδιασμός των μαθημάτων έτσι ώστε να οδηγούν σε ένα συγκεκριμένο συμπέρασμα. Σύμφωνα με τους Wilson et al. (2005) οι εκπαιδευτικοί προσπαθούσαν να εξισορροπήσουν τι έπρεπε να ειπωθεί και τι μπορούσε να ανακαλυφθεί, αλλά ο στόχος ήταν σαφώς να μάθουν οι μαθητές αυτό που είχε αποφασιστεί κατά τον σχεδιασμό του μαθήματος. Ένα άλλο χαρακτηριστικό της αποτελεσματικής διδασκαλίας είναι ο εκπαιδευτικός να μπορέσει να κινήσει το ενδιαφέρον των μαθητών (engaging students) για το μάθημα και να τους παρακινήσει

να συμμετέχουν στη διδασκαλία. Αυτό σίγουρα δεν επιτυγχάνεται με μια δασκαλοκεντρική διδασκαλία, όπου ο εκπαιδευτικός απλά απαγγέλει το μάθημα. Κάποιες από τις προτεινόμενες στρατηγικές είναι οι μαθητές να μπουν στη διαδικασία να συγγράψουν, να εκπονήσουν ομαδική εργασία, να ασχοληθούν με πρακτικές δραστηριότητες, όπως π.χ. τη μέτρηση αποστάσεων και την εφαρμογή των μαθηματικών. Ένας από τους πιο δημοφιλείς τρόπους διαφοροποίησης της διδασκαλίας ήταν η αξιοποίηση ομάδων εργασίας μαθητών. Οι εκπαιδευτικοί υποστήριζαν την ομαδική εργασία ως έναν τρόπο για τους μαθητές (α) να βοηθούν ο ένας τον άλλον, (β) να μοιράζονται ιδέες, (γ) να επιλύουν προβλήματα και (δ) να συγκεντρώνουν και να επικυρώνουν δεδομένα. Ένας άλλος τρόπος που προτάθηκε για να εμπλακούν οι μαθητές ευκολότερα στην εκπαιδευτική δραστηριότητα ήταν με την μετακίνησή τους μέσα στην αίθουσα, όπως για παράδειγμα να μετακινηθούν μέχρι τον πίνακα για να εξηγήσουν μια άσκηση ή μέχρι κάποιον άλλον συμμαθητή τους για να εργαστούν ομαδικά. Καθώς οι εκπαιδευτικοί περιέγραφαν την αποτελεσματική διδασκαλία ανέφεραν συνήθως την αναγκαιότητα της καλής διαχείρισής της για την επίτευξη των στόχων τους. Για τους περισσότερους από τους εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν στην έρευνα, η διαχείριση αυτή κάλυπτε ένα πλήθος δεξιοτήτων και ιδεών για να διατηρείται η ροή του μαθήματος και οι μαθητές υπό έλεγχο. Μερικές από αυτές αφορούν στη διαχείριση του χρόνου, των μαθητών και στην επίτευξη των στόχων του μαθήματος. Μια άλλη πτυχή των αποτελεσματικών δεξιοτήτων διαχείρισης είναι η έννοια της ευελιξίας των εκπαιδευτικών. Για παράδειγμα, το να είναι καλά προετοιμασμένοι για τη διδασκαλία και να γνωρίζουν όσο το δυνατόν περισσότερους τρόπους για να περιγράψουν το αντικείμενο διδασκαλίας.

### Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>: Γνώσεις των εκπαιδευτικών για αποτελεσματική διδασκαλία

Το τρίτο κεφάλαιο εστιάζει στις διδακτικές πρακτικές εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά, καθώς και στις γνώσεις εκείνες που αναμένεται να έχει ένας εκπαιδευτικός για μια αποτελεσματική/ποιοτική διδασκαλία.

Οι γνώσεις των εκπαιδευτικών που καθορίζουν την αποτελεσματική διδασκαλία μπορούν να χωριστούν σε τρεις διαφορετικές γνωστικές βάσεις, σύμφωνα με τους Borke & Putnam (1996). Πρώτον, η γνώση του περιεχομένου, που χαρακτηρίζει τη βαθιά κατανόηση του διδακτικού αντικειμένου από τον εκπαιδευτικό. Δεύτερον, η γενική παιδαγωγική γνώση που περιλαμβάνει γνώσεις σχετικά με τη φύση της μάθησης, τις μαθησιακές διαδικασίες και τις ανεξάρτητες από τον τομέα διδακτικές μεθόδους, όπως η άμεση διδασκαλία (direct instruction) ή η μάθηση με βάση το πρόβλημα (problem-based learning). Τρίτον, η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου, περιλαμβάνει τη γνώση σχετικά με τον καλύτερο τρόπο εξήγησης του γνωστικού αντικείμενου της διδασκαλίας στους μαθητές, καθώς και τη γνώση σχετικά με τις πιθανές παρανοήσεις των μαθητών.

Οι Krauss et al. (2008) αναφέρουν ότι οι γνώσεις των έμπειρων εκπαιδευτικών (expert teachers) δεν μπορούν να χαρακτηριστούν μόνο με αναφορά στην ποσότητα, αλλά κυρίως στη διαφορετική τους οργάνωση. Καθώς οι εκπαιδευτικοί αποκτούν εμπειρία στη διδασκαλία, τείνουν να οργανώνουν τις γνώσεις τους γύρω από διάφορες καταστάσεις που αντιμετωπίζουν και εμπειρίες που αποκτούν από το σχολικό περιβάλλον. Γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε πιο επεξεργασμένες και συνεκτικά οργανωμένες δομές γνώσης. Ο Putnam (1987) ονόμασε αυτό το ξεχωριστό είδος οργάνωσης της γνώσης "σενάρια προγραμμάτων σπουδών" (curriculum scripts). Πρόκειται για δομές γνώσης που ενσωματώνουν τη γνώση του γνωστικού αντικείμενου που πρέπει να διδαχθεί, μαζί με τη παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου, όπως για παράδειγμα κατάλληλες αναπαραστάσεις εννοιών ή πιθανές παρανοήσεις των μαθητών, και με τη γενική παιδαγωγική γνώση σχετικά με τις διαδικασίες μάθησης και τις στρατηγικές διδασκαλίας. Οι δομές αυτές επιτρέπουν στους εκπαιδευτικούς να αναγνωρίζουν νοηματικά μοτίβα στην τάξη και να λαμβάνουν τεκμηριωμένες και ευέλικτες διδακτικές αποφάσεις.

Οι Wolff et al. (2015) διερεύνησαν την επαγγελματική ικανότητα των εκπαιδευτικών στον τομέα της διαχείρισης της τάξης. Συνέκριναν τον τρόπο με τον οποίο οι έμπειροι και οι αρχάριοι εκπαιδευτικοί παρατηρούν και ερμηνεύουν διαφορετικά τις προβληματικές καταστάσεις στην τάξη. Οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι οι εκπαιδευτικοί με εκτεταμένη διδακτική εμπειρία ήταν πιο πιθανό να παρατηρήσουν τα κρίσιμα στοιχεία της τάξης και να τα ερμηνεύσουν σε σχέση με ζητήματα διαχείρισης της τάξης από ό,τι οι αρχάριοι εκπαιδευτικοί. Αντίθετα, η προσοχή των αρχάριων εκπαιδευτικών ήταν πιο διάσπαρτη και περιέγραφαν πιο επιφανειακά σημαντικές ενδείξεις. Τα ευρήματα αυτά υποδηλώνουν ότι ο συλλογισμός των έμπειρων εκπαιδευτικών καθοδηγούνταν περισσότερο από τα σενάρια του προγράμματος σπουδών για τις



καταστάσεις ρουτίνας στην τάξη σε σύγκριση με τη συλλογιστική των αρχάριων εκπαιδευτικών.

Οι Herppich et al. (2018) διερεύνησαν τον τρόπο με τον οποίο η διδακτική εμπειρία επηρεάζει τα επίπεδα διαδραστικότητας των εκπαιδευτικών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας στον τομέα της βιολογίας. Οι συγγραφείς διαπίστωσαν ότι οι καθηγητές με μεγάλη διδακτική εμπειρία ήταν λιγότερο διαδραστικοί στους διαλόγους τους, βασίζονταν κυρίως στην εξήγηση του αντικειμένου μεθοδολογικά και παρουσίαζαν λιγότερες συνδέσεις της μιας έννοιας με την άλλη, σε σύγκριση με τους καθηγητές με μικρή διδακτική εμπειρία. Το πιο σημαντικό είναι ότι όσο λιγότερο διαδραστικό ήταν το στυλ διδασκαλίας ενός καθηγητή, τόσο λιγότερο μάθαιναν οι μαθητές από την διδασκαλία αυτή. Έτσι, οι έμπειροι καθηγητές δεν χρησιμοποίησαν στη διδασκαλία τους την έννοια της σκαλωσιάς (scaffolding), δηλαδή την σύνδεση μιας ήδη γνωστής για τους μαθητές έννοια με την καινούρια που ήθελαν να τους διδάξουν ώστε η μετάβαση στην καινούρια να γίνει πιο ομαλά. Αλλά επέλεξαν να καθοδηγήσουν τον μαθητή, γεγονός που είχε ως αποτέλεσμα λιγότερο διαδραστική και τελικά λιγότερο αποτελεσματική διδασκαλία.

Οι Lachner & Nuckles (2016) αντιπαραβάλλουν έμπειρους καθηγητές μαθηματικών με ερευνητές μαθηματικών ως προς την ικανότητά τους να δώσουν μια διδακτική εξήγηση για ένα πρόβλημα με ακρότητα στους μαθητές. Παραδόξως, διαπίστωσαν ότι οι ερευνητές μαθηματικών παρήγαγαν διδακτικές εξηγήσεις που υποστήριζαν καλύτερα την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών από τις εξηγήσεις των καθηγητών. Το αποτέλεσμα αυτό οφειλόταν κυρίως στο γεγονός ότι οι καθηγητές μαθηματικών είχαν την τάση να παρουσιάζουν μόνο τα μαθηματικά βήματα επίλυσης, κάτι που αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως “product oriented explanations”, ενώ οι ερευνητές μαθηματικών παρείχαν επίσης εννοιολογικές πληροφορίες για να τονίσουν τη λογική που διέπει ένα συγκεκριμένο βήμα επίλυσης (“process-oriented explanations”). Προφανώς, η κατάσταση της παροχής εξήγησης για έναν μαθητή οδήγησε τους εκπαιδευτικούς να επικεντρωθούν στα βήματα επίλυσης και να παραλείψουν σχετικές εννοιολογικές πληροφορίες που θα ήταν απαραίτητες για την προώθηση της εννοιολογικής κατανόησης των μαθητών. Από κοινού, τα ευρήματα των Herppich et al. και Lachner & Nuckles υποδηλώνουν ότι, παρά την εκτεταμένη διδακτική τους εμπειρία, οι εκπαιδευτικοί διδάσκουν λιγότερο διαδραστικά και παρέχουν λιγότερο ‘προσανατολισμένες στη διαδικασία’ εξηγήσεις από ό,τι θα ήταν επιθυμητό για τη μάθηση των μαθητών.

Οι Housner & Griffey (1985) υποστήριξαν ότι υπάρχουν σημαντικές διαφορές στον τρόπο που οργανώνουν το μάθημα οι έμπειροι σε σχέση με τους άπειρους εκπαιδευτικούς. Και αυτό οφείλεται στο ότι οι εκπαιδευτικοί χωρίς μεγάλη διδακτική εμπειρία αντιλαμβάνονται τη σχολική τάξη ως ‘ένα’ και δεν δίνουν βαρύτητα στη σημασία της ατομικότητας του κάθε μαθητή. Επίσης, από την έρευνα διαπιστώθηκε ότι οι έμπειροι εκπαιδευτικοί προσάρμοζαν τη διδασκαλία τους σύμφωνα με τις ικανότητες και τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών, καθώς παρουσίαζαν και μια πληθώρα

στρατηγικών για τη διδασκαλία μιας έννοιας και ευελιξίας σε περίπτωση που κάποιος μαθητής δυσκολευόταν στην κατανόηση.

Αναφορικά με την προετοιμασία του μαθήματος, οι Borko & Livingston (1989) διαπίστωσαν ότι οι εκπαιδευτικοί με εμπειρία οργάνωναν τη διδασκαλία λαμβάνοντας υπόψιν τόσο τους βραχυπρόθεσμους στόχους όσο και τους μακροπρόθεσμους σκοπούς του μαθήματος, σε αντίθεση με τους άπειρους εκπαιδευτικούς που περιορίζονταν στους στόχους του αμέσως επόμενου μαθήματος. Επίσης, οι έμπειροι εκπαιδευτικοί οργάνωναν τη διδασκαλία στο μυαλό τους, υπογραμμίζοντας τις βασικές έννοιες που θα διδαχθούν και τον τύπο των παραδειγμάτων που θα χρησιμοποιήσουν, ενώ αυτοί χωρίς διδακτική εμπειρία προετοίμαζαν τη διδασκαλία με μεγαλύτερη λεπτομέρεια, όπως καταγράφοντας μέρος αυτών που θα αναπτύξουν στο μάθημα και τις ερωτήσεις που θα θέσουν. Το να ακολουθούν ένα τόσο συγκεκριμένο πλάνο μαθήματος αποδείχθηκε αρνητικό καθώς δεν ήταν σε θέση να απαντήσουν σε ερωτήσεις μαθητών για περισσότερη επεξήγηση όσων ισχυρίζονται, καθώς κάτι τέτοιο τους 'έβγαζε από το πλάνο' που είχαν φτιάξει πριν τη διδασκαλία και δεν είχαν προετοιμαστεί για επιπλέον αποσαφηνίσεις, με αποτέλεσμα να προσφέρουν λανθασμένες εξηγήσεις και παραδείγματα. Αντίθετα, οι εκπαιδευτικοί με διδακτική εμπειρία επέτυχαν τους στόχους που είχαν θέσει κατά τον προγραμματισμό της διδασκαλίας, απάντησαν στις ερωτήσεις των μαθητών χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα παραδείγματα για να εξηγήσουν τις έννοιες και ήταν σε θέση να επιτύχουν ισορροπία μεταξύ της μαθητοκεντρικής και της δασκαλοκεντρικής συζήτησης.

Οι Borko & Livingston (1989) διαπίστωσαν ότι οι έμπειροι καθηγητές μαθηματικών, όταν τους ζητήθηκε να αναστοχαστούν σχετικά με το μάθημα της ημέρας, επικεντρώθηκαν κυρίως στη μάθηση των μαθητών και στην κατανόηση των εννοιών που παρουσιάστηκαν. Η διαχείριση της τάξης σπάνια αναφέρθηκε και μόνο σε περιπτώσεις στις οποίες κάποιο γεγονός επηρέαζε τους διδακτικούς σκοπούς και στόχους του μαθήματος. Οι αρχάριοι ανησυχούσαν περισσότερο για τη δική τους αποτελεσματικότητα ως εκπαιδευτικοί. Έτσι, εξέφραζαν ανησυχίες σχετικά με τον τρόπο που χρησιμοποιούσαν παραδείγματα και ερωτήσεις. Αναφέρθηκαν επίσης ασήμαντες ανησυχίες, όπως η χρήση του πίνακα και άλλες μεμονωμένες συμπεριφορές διδασκαλίας. Επίσης, οι αρχάριοι έκαναν ελάχιστες αναφορές για τη συμπεριφορά των μαθητών και τα προβλήματα πειθαρχίας, καταδεικνύοντας περαιτέρω ότι επικεντρώνονται περισσότερο στις δικές τους συμπεριφορές ως εκπαιδευτικοί.

Στην έρευνα των Clarridge & Berliner (1991) εξετάστηκε η αλληλεπίδραση καθηγητή-μαθητή. Οι έμπειροι εκπαιδευτικοί ανέφεραν ότι μεγάλο μέρος της ανάρμοστης συμπεριφοράς των μαθητών ήταν συνηθισμένο φαινόμενο και συζήτησαν τις διάφορες στρατηγικές που χρησιμοποιούσαν στις δικές τους τάξεις για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων συμπεριφοράς. Αντίθετα, σε πολλές περιπτώσεις οι αρχάριοι εκπαιδευτικοί δεν ήταν σε θέση να αναγνωρίσουν τις ανάρμοστες συμπεριφορές ή αυτοί που γνώριζαν έλεγαν πως ήταν απροετοίμαστοι να χειριστούν αποτελεσματικά αυτά τα περιστατικά.

Οι Borko and Livingston (1989) αναφέρουν ότι οι εκπαιδευτικοί χωρίς διδακτική εμπειρία είχαν την ανάγκη να λύσουν λεπτομερώς τις ασκήσεις που θα δίδασκαν για να νοιώσουν έτοιμοι και σίγουροι ότι θα τα καταφέρουν. Επίσης, δεν μπορούσαν να προβλέψουν τις δυσκολίες που πιθανώς θα αντιμετώπιζαν οι μαθητές, καθώς και δεν ήταν σε θέση να δοκιμάσουν διαφορετικές μεθόδους διδασκαλίας αλλά παρέμεναν στον παραδοσιακό δασκαλοκεντρικό τρόπο διδασκαλίας.

Μία από τις πλέον κρίσιμες διαδικασίες σκέψης του εκπαιδευτικού είναι η λήψη μιας ‘διδακτικής’ απόφασης, δηλαδή, απόφασης σχετική με την ανάπτυξη της μαθησιακής διαδικασίας στην τάξη. Η ποιότητα της μάθησης που υποστηρίζει ο εκπαιδευτικός εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη διαδικασία σκέψης του κατά τη λήψη αποφάσεων και συνδέεται εν πολλοίς με τον καθορισμό δραστηριοτήτων από μια σειρά εναλλακτικών λύσεων κατά το σχεδιασμό και την ανάπτυξη της μάθησης. Μία από τις αποφάσεις που λαμβάνει ο εκπαιδευτικός κατά το σχεδιασμό και την εφαρμογή της μάθησης των μαθηματικών είναι οι αποφάσεις σχετικά με τις μαθηματικές δραστηριότητες. Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί επικεντρώνονται στο σχεδιασμό των εργασιών, ενώ πολλές διαδραστικές διδασκαλίες επικεντρώνονται στην ομαλή εκτέλεση των εργασιών σύμφωνα με τον τρόπο που έχουν προγραμματιστεί. Οι μαθηματικές εργασίες επηρεάζουν τη σκέψη και την κατανόηση των μαθηματικών από τους μαθητές. Οι εργασίες που σχεδιάζονται από τον εκπαιδευτικό εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τους στόχους που θέτει για την ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών, σύμφωνα με το ισχύον πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών. Οι εργασίες καλό είναι να έχουν τη μορφή προβλημάτων, δηλαδή, ερωτήσεων που δεν επιδέχονται απαντήσεις ρουτίνας, οι οποίες μπορούν να υποστηρίξουν τους μαθητές να αναπτύξουν τις επιθυμητές δεξιότητες (Cai & Lester, 2010). Οι καθηγητές μαθηματικών σπάνια δίνουν ερωτήσεις με τη μορφή μαθηματικών προβλημάτων στους μαθητές τους. Από την άλλη πλευρά, οι εκπαιδευτικοί που παρέχουν διαρκώς μαθηματικά προβλήματα στους μαθητές βρέθηκε να διαφοροποιούνται με αξιοσημείωτο τρόπο ανάλογα με το αν ήταν έμπειροι ή αρχάριοι. Συγκεκριμένα, οι έμπειροι εκπαιδευτικοί έτειναν να παρέχουν προβλήματα με πραγματικό πλαίσιο, οικείο στους μαθητές σε αντίθεση με τους αρχάριους τα προβλήματα των οποίων αναφέρονταν σε πλαίσια λιγότερο οικεία στους μαθητές (Wasilatul Murtafiah et al, 2020).

Στην έρευνα των Amador et al. (2022) οι αρχάριοι εκπαιδευτικοί προγραμματίζουν το μάθημα που επρόκειτο να διδάξουν. Αν και στο πλάνο τους δεν αναφερόταν η χρήση αναπαραστάσεων, παρόλα αυτά η ανάλυση των μαθημάτων που πραγματοποίησαν έδειξε ότι είχε γίνει κάποια σκέψη για τη χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων για την πλαisiώση των μαθηματικών εννοιών. Πέρα αυτών, οι ερευνητές έστρεψαν την προσοχή τους σε μια συγκεκριμένη συνιστώσα της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου, την αξιολόγηση. Σύμφωνα με τους Chan & Hume (2019), η αξιολόγηση λαμβάνει ελάχιστη προσοχή στη βιβλιογραφία, ειδικά όσον αφορά τους αρχάριους εκπαιδευτικούς. Ωστόσο, αναφέρονται κάποιες στρατηγικές αξιολόγησης από κάποιους εκπαιδευτικούς, όπως για παράδειγμα η αξιολόγηση ‘εκείνης της στιγμής’ (in the moment), κατά την οποία η εκπαιδευτικός με ερωτήσεις προσπαθεί να διαπιστώσει

αν και πόσοι από τους μαθητές έχουν κατανοήσει τα όσα έχει πει. Σε μια άλλη περίπτωση, η εκπαιδευτικός μοίρασε στους μαθητές φυλλάδια δραστηριοτήτων για να αξιολογήσει την κατανόησή τους στις έννοιες που είχε διδάξει. Η αξιολόγηση της κατανόησης των μαθητών είχε προγραμματιστεί ελάχιστα πριν από τη διδασκαλία και ελάχιστα έλαβε χώρα με οποιονδήποτε τρόπο κατά τη διάρκεια του μαθήματος.

Το περιβάλλον της τάξης είναι μια κρίσιμη συνιστώσα της μαθησιακής διαδικασίας. Ένα βασικό στοιχείο του περιβάλλοντος είναι η διαχείριση της τάξης, η οποία περιλαμβάνει τους καθημερινούς κανόνες και τις ρουτίνες της τάξης, τις σχέσεις των εκπαιδευτικών με τους μαθητές και τη φυσική οργάνωση της τάξης. Ο εκπαιδευτικός διαδραματίζει σημαντικό ρόλο σε όλες αυτές τις περιβαλλοντικές πτυχές, οι οποίες ενδέχεται να επηρεάσουν τη μάθηση και την ανάπτυξη των μαθητών καθ' όλη τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς. Αν και υπάρχουν πηγές οι οποίες παρέχουν καθοδήγηση για την ανάπτυξη ενός αποτελεσματικού περιβάλλοντος στην τάξη (Marshall, 2015), κάθε εκπαιδευτικός υιοθετεί διαφορετικές προσεγγίσεις για τη διαχείριση της τάξης του. Αυτές οι διαφορές έχουν τη δυνατότητα να επηρεάσουν την αποτελεσματικότητα του εκπαιδευτικού καθ' όλη τη διάρκεια του έτους.

Σύμφωνα με την έρευνα των Pressley et al. (2020), που πραγματοποιήθηκε σε εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, ένα βασικό στοιχείο που διαθέτουν οι αποτελεσματικοί εκπαιδευτικοί σε σύγκριση με τους λιγότερο αποτελεσματικούς συναδέλφους τους είναι η ικανότητα διαχείρισης της τάξης (εστίασε στη συμπεριφορά του εκπαιδευτικού μέσα στην τάξη, ώστε να εμπλέκει τους μαθητές στη διδασκαλία και να προωθεί τη μάθηση). Παρατηρήθηκε ότι οι πρώτοι παρακολουθούσαν τους μαθητές καθ' όλη τη διάρκεια της ημέρας και εστίαζαν τη διδασκαλία στις ανάγκες και τα ενδιαφέροντα των μαθητών και προσπαθούσαν να δημιουργήσουν ένα καλό κλίμα μέσα στην τάξη που βοηθούσε στη μάθηση. Οι συμπεριφορές στην τάξη και η διαχείριση των συμπεριφορών αντιμετωπίστηκαν και διαχειρίστηκαν με διαφορετικό τρόπο από τους εκπαιδευτικούς ανάλογα με την εμπειρία τους. Οι νέοι εκπαιδευτικοί επικεντρώνονταν στους μαθητές που ήταν αμέτοχοι στη διαδικασία της διδασκαλίας και στα προβλήματα πειθαρχίας και οι ιδιαίτερα αποτελεσματικοί εκπαιδευτικοί στην εμπλοκή των μαθητών και στη μαθησιακή διαδικασία αυτή καθαυτή. Γενικά, επισημαίνουν οι ερευνητές, ένα επιτυχημένο σύστημα διαχείρισης της τάξης αρχίζει από την πρώτη ημέρα του σχολείου, καθώς αυτή είναι κρίσιμη για την πιθανή επιτυχία ή αποτυχία της σχολικής χρονιάς.

Η διεθνής βιβλιογραφία σχετικά με την ευαισθητοποιημένη διδασκαλία (responsive teaching) υποδηλώνει ότι η ποιοτική διδασκαλία είναι σε μεγάλο βαθμό αυτοσχεδιαστική, καθώς οι εκπαιδευτικοί θέτουν στους μαθητές ερωτήσεις με βάση τη σκέψη τους " εκείνη τη στιγμή" (thinking in the moment) (Sawyer, 2004). Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί χρειάζεται να ακούν ερμηνευτικά και να ανταποκρίνονται εποικοδομητικά στις αντιδράσεις των μαθητών, αντί να αγνοούν ή να απορρίπτουν άκριτα τη οποιαδήποτε συμμετοχή ενός μαθητή στη μαθησιακή διαδικασία (Davis, 1997- Jacobs & Empson, 2016). Οι Borko και Livingston (1989) σημειώνουν ότι η ανταπόκριση σε απροσδόκητες ιδέες των μαθητών είναι μια σημαντική αν και δύσκολη

πτυχή της αποτελεσματικής διδασκαλίας. Η έρευνα των Moodliar et al. (2021) αφορούσε μια ποιοτική μελέτη περίπτωσης για τη διερεύνηση των αντιδράσεων των αρχάριων και έμπειρων εκπαιδευτικών στις απροσδόκητες ερωτήσεις/απαντήσεις των μαθητών της τρίτης Γυμνασίου στα μαθηματικά. Η έμπειρη εκπαιδευτικός που συμμετείχε στην έρευνα ανταποκρίθηκε αυτοσχεδιάζοντας σε απροσδόκητα γεγονότα κατά τη διδασκαλία της άλγεβρας, επέδειξε ανοιχτό πνεύμα στο να ακούει ερμηνευτικά τους μαθητές και επέτρεψε στις ιδέες και στις απαντήσεις τους να κατευθύνουν την πορεία του μαθήματος. Αυτό αποδείχθηκε γόνιμο και παρείχε μέγιστες ευκαιρίες μάθησης για την τάξη. Επίσης, όταν κάποιος μαθητής δεν καταλάβαινε μια έννοια, μέσω διαδοχικών ερωτήσεων και ακολουθώντας την σκέψη του, του έδειχνε τον δρόμο για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας αυτής. Αντίθετα, η δεύτερη εκπαιδευτικός χωρίς διδακτική εμπειρία που, επίσης συμμετείχε στην έρευνα, απέτυχε να βοηθήσει τους μαθητές, όταν η σκέψη τους ήταν ασαφής και επέλεξε να αγνοήσει ή έδωσε λανθασμένη απάντηση όταν βρέθηκε αντιμέτωπη με μια απροσδόκητη απάντηση μαθητή.

Οι έρευνες σχετικά με τη φύση της εμπειρογνωμοσύνης (expertise) των εκπαιδευτικών στη μαθηματική εκπαίδευση είναι πολύ περιορισμένες (Li & Kaiser, 2011). Μάλιστα, συνδέονται ελάχιστα ή καθόλου με τους πόρους των εκπαιδευτικών και τον τρόπο με τον οποίο τους αξιοποιούν στην καθημερινή τους πρακτική. Οι πόροι (resources) των εκπαιδευτικών αποτελούνται από το αναλυτικό πρόγραμμα, τα υλικά και άλλους προσωπικούς πόρους που χρησιμοποιούν και αναπτύσσουν στην καθημερινή τους πρακτική, στη διδασκαλία τους και για τη διδασκαλία τους. Στην έρευνα των Perin et al. (2017) το 87,6 % των Κινέζων εκπαιδευτικών του δείγματος συμμετείχε σε δραστηριότητες διδακτικής έρευνας τουλάχιστον μία φορά το μήνα, ενώ το 54,4 % συμμετείχε σε τέτοιες δραστηριότητες τουλάχιστον μία φορά την εβδομάδα. Τα τελευταία χρόνια στην Κίνα σχεδόν όλα τα σχολεία έχουν αναπτύξει τέτοιου είδους ομάδες (ειδικές για κάθε γνωστικό αντικείμενο), έτσι ώστε οι εκπαιδευτικοί να μπορούν να αναπτύσσουν και να βελτιώνουν τη διδασκαλία τους, συζητώντας με συναδέλφους και εμπειρογνώμονες. Οι 'ομάδες διδακτικής έρευνας' είναι επαγγελματικές κοινότητες μάθησης σε επίπεδο σχολείου, για τη συλλογική προετοιμασία του μαθήματος και την αξιολόγηση της διδασκαλίας στην τάξη. Η βελτίωση της επικοινωνίας μέσω του διαδικτύου οδήγησε στην ανάπτυξη αντίστοιχων διαδικτυακών ομάδων συζήτησης. Στην πραγματικότητα, όλοι οι εκπαιδευτικοί έχουν ανάγκη να συνεργαστούν για να αναπτυχθούν επαγγελματικά. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τους αρχάριους εκπαιδευτικούς, καθώς δεν γνωρίζουν το περιεχόμενο ολόκληρου του διδακτικού κύκλου (όλων των τάξεων). Όσον αφορά την προετοιμασία του μαθήματος ο Jiang, ένα από τους έμπειρους συμμετέχοντες εκπαιδευτικούς, εξήγησε ότι σκιαγραφούσε-σχεδίαζε το μάθημα μόνος του, γνωρίζοντας τις οδηγίες του αναλυτικού προγράμματος, πριν στραφεί σε άλλες πηγές. Ο Jiang είχε καταφέρει να συλλέξει και να οργανώσει τους πόρους του όλα αυτά τα χρόνια, τους είχε τροποποιήσει και τους είχε οικειοποιηθεί. Για παράδειγμα, ανέφερε ότι είχε συλλέξει από τα προηγούμενα γραπτά εξετάσεων, τα "σύνολα λαθών" των μαθητών (τόσο από τις ασκήσεις για το σπίτι όσο και από τις εξετάσεις) επί αρκετά εξάμηνα - είχε

ταξινομήσει τα έγγραφα στον υπολογιστή τού σπιτιού του, καθώς και τα σχέδια των γραπτών εξετάσεων και τα σχέδια μαθήματος που σχετίζονται με τα μαθήματα προετοιμασίας για τις εξετάσεις. Ένας άλλος έμπειρος εκπαιδευτικός, ο Ji, θεώρησε τα εγχειρίδια (και τους οδηγούς για τους εκπαιδευτικούς) ως πηγές άντλησης στόχων για τη διδασκαλία και όχι ως κάτι που είναι απαραίτητο για έναν έμπειρο εκπαιδευτικό. Μάλιστα υποστήριξε ότι οι νέοι εκπαιδευτικοί είχαν την τάση να βασίζονται υπερβολικά στα εγχειρίδια και τους οδηγούς διδασκαλίας και ότι συχνά δεν ήταν αρκετά ευέλικτοι. Στην καθημερινή του διδασκαλία, ο Ji δήλωσε ότι δεν επικοινωνούσε πολύ με τους μαθητές, αλλά έπαιρνε ανατροφοδότηση από τις γραπτές εργασίες τους, ιδίως τις εργασίες για το σπίτι. Ως παραδοσιακός δάσκαλος βασίστηκε στη διδακτική του εμπειρία, σύμφωνα με όσα είτε στη συνέντευξη, περισσότερο από ό,τι σε άλλες πηγές. Οι δικές του εμπειρίες, η ανατροφοδότηση από τις γραπτές εργασίες των μαθητών και τα σχόλια των συναδέλφων του έπαιζαν πολύ πιο σημαντικό ρόλο από οποιουδήποτε άλλους παράγοντες συνιστώντας το δικό του σύστημα πόρων. Τέλος, ένας άλλος εκπαιδευτικός που συμμετείχε στην έρευνα, ο Zhang μίλησε περισσότερο για τους μαθητές και τα μαθησιακά τους χαρακτηριστικά, για τον τρόπο με τον οποίο συμπεριέλαβε την ανατροφοδότησή τους στην προετοιμασία του μαθήματός του συγκριτικά με τους άλλους δύο εκπαιδευτικούς. Ήταν ξεκάθαρος ότι οι μέθοδοι διδασκαλίας είναι διαφορετικές από τις μεθόδους μάθησης και ότι η επικοινωνία μεταξύ δασκάλου και μαθητών αποτελεί σημαντικό μέρος της μάθησης: επικοινωνία με τους μαθητές όσον αφορά τις εργασίες για το σπίτι και άμεση επικοινωνία στην τάξη σχετικά με τις μεθόδους μάθησης. Κατά την άποψη του Zhang, αυτά τα είδη επικοινωνίας είναι απαραίτητα για τη μάθηση. Ο Zhang σχεδίασε το σύστημα πόρων του με πολύ συστηματικό τρόπο, χωρίζοντάς τους σε τρία μέρη: ψηφιακούς, διαπροσωπικούς και έντυπους. Σε αντίθεση με τους άλλους εκπαιδευτικούς, χρησιμοποιούσε το κινητό του τηλέφωνο κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας για υπολογισμούς, για να κάνει διαδικτυακές αναζητήσεις ή για να τραβήξει φωτογραφίες.

## ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

### Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup>: Η μελέτη

Έχοντας παρουσιάσει τα είδη γνώσης του εκπαιδευτικού και τη σημασία της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου, η παρούσα έρευνα αποσκοπεί στη διερεύνηση αυτής της γνώσης των εκπαιδευτικών που διδάσκουν Μαθηματικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Για τους σκοπούς της έρευνας επιλέχθηκαν δυο εκπαιδευτικοί με επαρκή διδακτική εμπειρία και διακριτή επαγγελματική πορεία που διδάσκουν μαθηματικά σε Γυμνάσια αστικών περιοχών της Βορείου Ελλάδος και αξιοποιήθηκαν δυο ερευνητικά εργαλεία για να αντληθούν δεδομένα που θα επέτρεπαν την ανίχνευση της ΠΓΠ που διαθέτουν.

Οι πρώτες ενότητες του κεφαλαίου περιγράφουν και επιχειρούν να τεκμηριώσουν τις μεθοδολογικές επιλογές της εμπειρικής διερεύνησης, ενώ οι τελευταίες παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της ανάλυσης δεδομένων, τα συνδέουν με τη βιβλιογραφία και καταλήγουν στη διατύπωση των συμπερασμάτων. Τέλος, υποδεικνύονται κάποιοι περιορισμοί της έρευνας και προτείνονται ενδεχόμενα ενδιαφέρουσες επεκτάσεις της μελλοντικής έρευνας στο συγκεκριμένο αντικείμενο μελέτης.

#### 4.1 Στόχος της έρευνας -Ερευνητικά ερωτήματα

Η παρούσα έρευνα στοχεύει στη διερεύνηση της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου των εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Ερευνητικό Ερώτημα 1: Ποια είναι τα χαρακτηριστικά του περιεχομένου και της οργάνωσης της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου (ΠΓΠ) των εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά στο Γυμνάσιο;

Ερευνητικό Ερώτημα 2: Ποιοι είναι οι παράγοντες που καθορίζουν την ΠΓΠ και πώς διαφοροποιείται με βάση την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών;

#### 4.2 Εννοιολογικό πλαίσιο

Βασική έννοια της παρούσας εργασίας και των ερευνητικών ερωτημάτων που μελετώνται είναι η Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου και οι παράμετροι που την οριοθετούν.

Ο λειτουργικός ορισμός της ΠΓΠ που υιοθετείται είναι αυτός που προσφέρεται από τον Shulman (1987), σύμφωνα με τον οποίο με τον όρο *Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου (Π.Γ.Π.)* εκφράζεται ο συνδυασμός του περιεχομένου της γνώσης με την παιδαγωγική γνώση, έτσι ώστε ένα συγκεκριμένο θέμα ή πρόβλημα του περιεχομένου που πρόκειται να διδαχθεί, να μετασχηματίζεται και να οργανώνεται με βάση το

πλαίσιο διδασκαλίας, όπως για παράδειγμα τα ενδιαφέροντα και τις ικανότητες των μαθητών (Shulman, 1987).

Η ανίχνευση της ΠΓΠ των εκπαιδευτικών εστιάζει στη γνώση τους για τις πρωταρχικές γνώσεις των μαθητών, για τα λάθη τους και τη συμμετοχή όλων των μαθητών (δυνατών και αδύνατων) στην εκπαιδευτική διαδικασία. Εστιάζει ακόμα στη διαδραστικότητα και τη προσαρμογή της διδασκαλίας στο επίπεδο των μαθητών, στον τρόπο επιλογής των μαθηματικών δραστηριοτήτων, στη διαφοροποίηση της διδασκαλίας από τμήμα σε τμήμα, στη διαχείριση των ερωτήσεων/ απαντήσεων των μαθητών και τέλος στον τρόπο αξιολόγησης της κατανόησης των μαθηματικών ιδεών από τους μαθητές.

### 4.3 Ερευνητική διαδικασία και συλλογή δεδομένων

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται και υποστηρίζονται οι βασικές μεθοδολογικές επιλογές που πραγματοποιήθηκαν σε επίπεδο σχεδιασμού και υλοποίησης της ερευνητικής διαδικασίας και αφορούν την ερευνητική μέθοδο, τους συμμετέχοντες, το ερευνητικό εργαλείο και τη διαδικασία παραγωγής των δεδομένων.

**Μέθοδος έρευνας:** Για την διερεύνηση των ερευνητικών ερωτημάτων επιλέχθηκε η πολλαπλή μελέτη περίπτωσης και, για την ακρίβεια, η επικέντρωση στους τρόπους που δυο εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, με αντίστοιχη διδακτική εμπειρία αλλά αρκετά διαφορετικά χαρακτηριστικά επαγγελματικής ανάπτυξης, αντιλαμβάνονται και νοηματοδοτούν την ΠΓΠ.

**Συμμετέχοντες:** Το δείγμα της έρευνας αποτελείται από 2 εκπαιδευτικούς, έναν άντρα και μια γυναίκα, που διδάσκουν μαθηματικά σε δημόσια γυμνάσια του νομού Σερρών. Ο εκπαιδευτικός, ο Αντώνης, είναι μόνιμος φυσικός που, ενώ έχει αρκετά χρόνια διδακτικής εμπειρίας στο αντικείμενό του και στη δημόσια εκπαίδευση, είναι μόλις η πρώτη χρονιά που διδάσκει μαθηματικά. Αντίστοιχα η εκπαιδευτικός, η Ελένη, είναι μαθηματικός με μικρότερη διδακτική εμπειρία σε σχολική τάξη καθώς δίδασκε για χρόνια σε φροντιστηριακές τάξεις. Η συμμετοχή των εκπαιδευτικών στην ερευνητική διαδικασία ήταν εθελοντική και οι σχολικές μονάδες επιλέχθηκαν με βάση την ευκολία πρόσβασης σε αυτές από τον ερευνητή και την προθυμία που εξέφρασαν οι εκπαιδευτικοί να συμμετέχουν στην έρευνα.

Πιο συγκεκριμένα, η Ελένη βρίσκεται στην πέμπτη δεκαετία της ζωής της και είναι καθηγήτρια μαθηματικών με δεκαετή προϋπηρεσία σε φροντιστήρια του νομού Θεσσαλονίκης. Δίδασκε μαθηματικά σε μαθητές Γυμνασίου τα πρώτα 2-3 χρόνια της φροντιστηριακής της καριέρας, τα επόμενα 2 χρόνια ανέλαβε τους μαθητές της Α και Β λυκείου και μετά ασχολήθηκε με την προετοιμασία για τις πανελλήνιες εξετάσεις των μαθητών της Β και Γ λυκείου. Τα τελευταία 6 χρόνια εργάζεται σε γυμνάσια νομού της Βορείου Ελλάδος, τρία από τα οποία στο ίδιο Γυμνάσιο μέχρι σήμερα. Πρόκειται για σχολική μονάδα στην πρωτεύουσα νομού της Βόρειας Ελλάδας με 90 μαθητές και 18 εκπαιδευτικούς εκ των οποίων οι δύο είναι μαθηματικοί. Υπάρχουν δύο τμήματα στην Α γυμνασίου με 20 μαθητές το καθένα, από τους οποίους στο πρώτο τμήμα 9



είναι αγόρια και 11 τα κορίτσια ενώ το δεύτερο περιλαμβάνει 8 αγόρια και 12 κορίτσια. Οι επιδόσεις των μαθητών στα μαθηματικά είναι χαμηλές για τους περισσότερους μαθητές, με κάποιες εξαιρέσεις καλών μαθητών. Το μορφωτικό επίπεδο των γονέων των μαθητών είναι κατά το πλείστον χαμηλό, με ελάχιστους να έχουν πτυχίο τριτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Πέρα από το πτυχίο του Μαθηματικού Τμήματος, στην κατοχή της έχει η Ελένη από το 2021 και μεταπτυχιακό τίτλο στη Διοίκηση Εκπαιδευτικών Μονάδων του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής. Επίσης, συμμετέχει ενεργά, όπως ανέφερε, στις σχολικές δραστηριότητες, όπως για παράδειγμα ως συνοδός των μαθητών σε εκπαιδευτικές εκδρομές. Με τους συναδέλφους της δηλώνει πως έχει καλές-φιλικές σχέσεις και συζητούν συχνά για θέματα που αφορούν τη διδασκαλία των μαθηματικών και την πρόοδο -συμπεριφορά των μαθητών.

Ο Αντώνης βρίσκεται στην έκτη δεκαετία της ζωής του και κατέχει πτυχίο φυσικής. Πριν διοριστεί δίδασκε σε φροντιστήρια για 10 χρόνια τα μαθήματα της Φυσικής και της Χημείας. Διδάσκει πλέον περισσότερα από 15 χρόνια το μάθημα της Φυσικής στη Β' βάρθμια εκπαίδευση, διορίστηκε το 2006 με τον ΑΣΕΠ και έκτοτε έχει εργαστεί μόλις τρία χρόνια σε Λύκειο και τις υπόλοιπες χρονιές σε Γυμνάσιο. Ωστόσο, είναι η πρώτη χρονιά που του ανατέθηκε να διδάξει Μαθηματικά και αυτό λόγω υπηρεσιακών υποχρεώσεων (συμπλήρωση ωραρίου). Αυτός είναι και ο λόγος, όπως αναφέρει, που δυσκολεύτηκε (ιδίως στην αρχή) στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Όμως, δηλώνει πως του αρέσει να διδάσκει Μαθηματικά, καθώς το μάθημα είναι τέσσερις ώρες την εβδομάδα και έχει χρόνο να γνωρίσει τους μαθητές και να κάνει ουσιαστική δουλειά, σε αντίθεση με τη Φυσική που είναι μόλις 1 ώρα στην Α' τάξη του Γυμνασίου.

Το σχολείο που υπηρετεί ο Αντώνης είναι κεντρικό σχολείο της πρωτεύουσας του ίδιου νομού με αυτόν της Ελένης, με 270 μαθητές και 30 καθηγητές εκ των οποίων 4 μαθηματικοί, δύο μόνιμοι και δύο που διατίθενται από άλλα σχολεία για κάποιες ώρες. Οι σχολικές επιδόσεις των μαθητών ποικίλουν, ενώ οι γονείς πολλών είναι πτυχιούχοι της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης και εργάζονται ως γιατροί, δικηγόροι, πολιτικά πρόσωπα. Ωστόσο, υπάρχουν και μαθητές των οποίων οι γονείς έχουν τελειώσει την υποχρεωτική εκπαίδευση, δεν εργάζονται και έχουν οικονομικά προβλήματα.

Ο Αντώνης χαρακτηρίζει τη σχέση του με τους μαθητές ως καλή, είναι μια σχέση τόσο καθηγητή-μαθητών όσο και πατέρα-παιδιών πολλές φορές, λόγω της διαφοράς ηλικίας που έχουν. Με τους συναδέλφους επικοινωνεί για διάφορα εκπαιδευτικά ζητήματα, όπως για τις επιδόσεις των μαθητών και τα ενδιαφέροντά τους, για τον τρόπο διδασκαλίας κάποιας έννοιας, καθώς και κριτική των προγραμμάτων σπουδών και των οδηγιών που στέλνονται σχεδόν καθημερινά από το υπουργείο. Συμμετέχει επίσης στις ενημερωτικές ημερίδες που διοργανώνονται στο σχολικό πλαίσιο, είτε αφορούν το αντικείμενο διδασκαλίας του είτε έχουν έναν πιο παιδαγωγικό χαρακτήρα.

**Ερευνητικό εργαλείο:** Τα δεδομένα συλλέχθηκαν πρωτίστως μέσω ημι-δομημένων συνεντεύξεων με τους δυο εκπαιδευτικούς αλλά και δευτερευόντως μέσω παρατήρησης διδασκαλιών τους σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.

Ειδικότερα, η πρώτη παρατήρηση για κάθε εκπαιδευτικό είχε διερευνητικό χαρακτήρα και στόχευε στο να τροφοδοτήσει με ερωτήματα την πρώτη συνέντευξη που ακολούθησε για τον καθένα. Η δεύτερη παρατήρηση ήταν ημι-δομημένη και στηρίχθηκε στους άξονες/ερωτήματα που διατυπώνονται στο 'Πρωτόκολλο παρατήρησης' το οποίο βρίσκεται στο αντίστοιχο Παράρτημα στο τέλος της εργασίας. Το Πρωτόκολλο στηρίχθηκε με τη σειρά του σε τρεις βασικούς άξονες που προέκυψαν από τη βιβλιογραφία. Ο *πρώτος άξονας* εστιάζει στη γνώση των εκπαιδευτικών για το μαθηματικό περιεχόμενο, ο *δεύτερος* στον τρόπο διαχείρισης των 'δυνατών' και των 'αδύνατων' μαθητών από τον εκπαιδευτικό, στην ύπαρξη ενεργής συμμετοχής των μαθητών και αν ακολουθείται κάποιο/α μοντέλο/α μάθησης, όπως αυτό του κονστρουκτιβισμού, της ανακαλυπτικής μάθησης (Bruner) ή της συλλογικής μάθησης (Vygotsky). Ο  *τρίτος άξονας* αφορά τις κυρίαρχες διδακτικές πρακτικές που αξιοποιεί ο εκπαιδευτικός και κυρίως τη διαχείριση του λάθους, τα ερωτήματα που θέτει ο εκπαιδευτικός στους μαθητές ή το αντίστροφο, τα έργα που αναθέτει ο εκπαιδευτικός στους μαθητές, καθώς και τον τρόπο αξιολόγησης των μαθητών.

Οι ημι-δομημένες συνεντεύξεις περιλαμβάνουν ερωτήσεις ανοικτού τύπου οργανωμένες σε τρεις άξονες:

(α) γνώσεις μαθηματικού περιεχομένου/αναλυτικό πρόγραμμα,

(β) γνώσεις για τη μάθηση και

(γ) γνώσεις για τη διδασκαλία.

*1<sup>η</sup> συνέντευξη:* Οι ερωτήσεις του πρώτου άξονα εστιάζουν στο εάν και πώς συμβουλευονται οι εκπαιδευτικοί το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών για την οργάνωση της διδασκαλίας τους. Όσον αφορά στο δεύτερο άξονα οι ερωτήσεις επικεντρώθηκαν στη γνώμη των εκπαιδευτικών για τις πρωταρχικές γνώσεις που αναμένεται να 'κατέχουν' οι μαθητές ώστε να αντιλαμβάνονται αποτελεσματικά τις έννοιες που διδάσκονται, τα πιο συνηθισμένα λάθη και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες, καθώς και τον τρόπο που ενθαρρύνεται η ενεργή συμμετοχή όλων των μαθητών. Στον τελευταίο άξονα που αφορά τη διδασκαλία, οι ερωτήσεις που τέθηκαν στους εκπαιδευτικούς του δείγματος είχαν να κάνουν με τις διδακτικές πρακτικές που χρησιμοποιούν, τις μαθηματικές δραστηριότητες που επιλέγουν, τη διαχείριση των ερωτήσεων/απαντήσεων των μαθητών και τέλος στον τρόπο αξιολόγησής τους.

*2<sup>η</sup> συνέντευξη:* Οι ερωτήσεις της 2<sup>ης</sup> συνέντευξης είναι και πάλι οργανωμένες στους τρεις άξονες και περιλαμβάνουν ερωτήσεις της 1<sup>ης</sup> συνέντευξης που κρίθηκε πως χρήζουν περαιτέρω διερεύνησης ή επέκτασης, καθώς και επιπλέον ερωτήσεις η ανάγκη για τις οποίες επιβλήθηκε και τροφοδοτήθηκε τόσο με βάση την πρώτη συνέντευξη όσο και τη 2<sup>η</sup> παρατήρηση.

**Διαδικασία Συλλογής Δεδομένων:** Έγιναν συνολικά για κάθε εκπαιδευτικό δύο παρατηρήσεις της διδασκαλίας τους, η μία κατά τον μήνα Νοέμβριο και η δεύτερη τον μήνα Ιανουάριο. Η πρώτη παρατήρηση ήταν διερευνητική ενώ η δεύτερη ήταν ημι-

δομημένη. Μετά από την πρώτη παρατήρηση διενεργήθηκε η πρώτη συνέντευξη για κάθε εκπαιδευτικό, η οποία στηριζόταν στην παρατήρηση που είχε προηγηθεί καθώς και σε βιβλιογραφικά ευρήματα. Η δεύτερη παρατήρηση έγινε μετά από κάποιους μήνες και αφότου είχε γίνει η ανάλυση των αποτελεσμάτων της πρώτης συνέντευξης. Στη συνέχεια, διενεργήθηκε δεύτερη συνέντευξη με κάθε εκπαιδευτικό που στηριζόταν στα αποτελέσματα της πρώτης συνέντευξης και σε στοιχεία που παρατηρήθηκαν από τη δεύτερη παρατήρηση της διδασκαλίας των εκπαιδευτικών. Οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν διαδικτυακά μετά από συνεννόηση με τους εκπαιδευτικούς και προφορική συμφωνία για την τήρηση της ανωνυμίας τους, καθώς και την ηχογράφησή τους. Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει το χρονοδιάγραμμα πραγματοποίησης των παρατηρήσεων και των συνεντεύξεων.

**Πίνακας 4.1** Χρονοδιάγραμμα συλλογής δεδομένων

Εκπαιδευτικοί	Παρατήρηση		Συνέντευξη	
	1η	2η	1η	2η
Ελένη	7/11/2022	23/1/2023	12/11/2022	29/1/2023
Αντώνης	11/11/2022	20/1/2023	15/11/2022	25/1/2023

**Αξιοπιστία και εγκυρότητα:** Τέλος, αναφορικά με τα θέματα εγκυρότητας και αξιοπιστίας, τόσο το περιεχόμενο όσο και η οργάνωση των ερωτήσεων των συνεντεύξεων όσο και της δεύτερη παρατήρησης διαμορφώθηκαν με όσο γινόταν συστηματικό τρόπο με βάση τα βιβλιογραφικά δεδομένα, ενώ για την ανάλυση των δεδομένων υιοθετήθηκε η προσέγγιση της αξιοπιστίας μεταξύ ερευνητών. Συγκεκριμένα, σε κάθε ανάγνωση των δεδομένων, επιλέγονταν (με χρωματικούς κωδικούς) τα σημεία του λόγου των συμμετεχόντων που κρίνονταν πως είχαν ενδιαφέρον ως ψηφίδες που πρόσφεραν στην απάντηση στα ερευνητικά ερωτήματα από τον εκπονητή της εργασίας. Στη συνέχεια, τα σημεία αυτά συζητούνταν μεταξύ εκπονητή και επόπτη της εργασίας και προτεινόταν μια πρώτη ομαδοποίηση, η οποία ελέγχονταν με εμπειρικά δεδομένα από τον εκπονητή και γινόταν αντικείμενο ενός νέου κύκλου συζητήσεων έως ότου υπάρξει σύγκλιση για την ευστοχία της ψηφίδας πληροφορίας που κάθε κατηγορία παρείχε, καθώς και για τον χαρακτηρισμό, την ερμηνεία και την τεκμηρίωσή της με αντιπροσωπευτικά αποσπάσματα του λόγου των συμμετεχόντων.

#### 4.4 Αποτελέσματα της ανάλυσης δεδομένων

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται η επεξεργασία και η ανάλυση των δεδομένων της έρευνας, δηλαδή, α) των σημειώσεων πεδίου που τηρούσε ο ερευνητής κατά τις παρατηρήσεις των διδασκαλιών αλλά και κατά τις άτυπες επικοινωνίες με τους συμμετέχοντες στην έρευνας και β) των απαντήσεων των δυο εκπαιδευτικών στις ερωτήσεις της συνέντευξης.

Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε η θεματική ανάλυση, η οποία αφορά «στη συστηματική αναγνώριση, οργάνωση και κατανόηση επαναλαμβανόμενων μοτίβων νοήματος εντός ενός συνόλου δεδομένων» που είναι σχετικά με το θέμα που μελετάται και στοιχειοθετούν μια απάντηση στα ερευνητικά ερωτήματα. Η διαδικασία της ανάλυσης προϋποθέτει τον ενεργητικό και δημιουργικό ρόλο του ερευνητή, ο οποίος, αναπτύσσοντας μια διαλογική σχέση με τα δεδομένα του, περισσότερο συγκροτεί τα θέματα παρά τα ανακαλύπτει (Τσιώλης, 2016). Στην περίπτωση της παρούσας μελέτης, τα ‘μοτίβα νοήματος’ αφορούσαν κυρίως στοιχεία των σημειώσεων πεδίου ή / και των απαντήσεων που δόθηκαν και κρίθηκε ότι αντανακλούσαν τον τρόπο ή τους τρόπους που οι συμμετέχοντες νοηματοδοτούσαν το αντικείμενο της ερώτησης είτε αντλώντας από τη διδακτική τους πρακτική είτε παραπέμποντας σε κάποια πεποίθηση που προερχόταν από την επαγγελματική τους δράση και πορεία. Η διαδικασία κωδικοποίησης και ομαδοποίησης των δεδομένων, συγκρότησης κατηγοριών/χαρακτηρισμών, ερμηνείας και τεκμηρίωσής τους περιγράφονται με συντομία στο τέλος της ενότητας 4.3.

##### 4.4.1 Ανάλυση των σημειώσεων πεδίου από τις παρατηρήσεις

Όπως έχει αναφερθεί, πραγματοποιήθηκαν δύο παρατηρήσεις για κάθε εκπαιδευτικό, η πρώτη τον Νοέμβριο του 2022, ενώ η δεύτερη στα τέλη Ιανουαρίου του 2023 (βλ. Πίνακας 4.1). Η πρώτη παρατήρηση ήταν διερευνητική και δεν στηρίχτηκε σε κάποιο πρωτόκολλο ενώ για τη δεύτερη δημιουργήθηκε πρωτόκολλο παρακολούθησης που εστίασε σε συγκεκριμένες πτυχές της γνώσης του εκπαιδευτικού όσον αφορά τη γνώση περιεχομένου, τη μάθηση και τους μαθητές και τέλος τη διδασκαλία. Για καθέναν από τους συμμετέχοντες παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης δεδομένων αρχικά της πρώτης και, στη συνέχεια, της δεύτερης παρατήρησης.

##### 4.4.1α Πρώτη παρατήρηση

---

(i) Τάξη του Αντώνη (11 Νοεμβρίου 2022, 3<sup>η</sup> ώρα διδασκαλίας)

---

Η πρώτη παρακολούθηση της διδασκαλίας του Αντώνη πραγματοποιήθηκε τον Νοέμβριο σε ένα από τα τρία τμήματα της Α΄ γυμνασίου όπου φοιτούσαν 25 μαθητές, 10 αγόρια και 15 κορίτσια. Οι μαθηματικές επιδόσεις των μαθητών ποικίλουν, υπάρχουν από μέτριοι μαθητές μέχρι πολύ καλοί. Η παρακολούθηση αφορούσε το κεφάλαιο των κλασμάτων. Ο μήνας που πραγματοποιήθηκε η παρατήρηση έχει σημασία καθώς είναι ο τρίτος μήνας που διδάσκει ο Αντώνης μαθηματικά στην

εκπαιδευτική του καριέρα. Το μάθημα ξεκίνησε με τον εκπαιδευτικό να ρωτάει τους μαθητές αν έχουν απορίες από την προηγούμενη διδασκαλία που αφορούσε την εισαγωγή στην ενότητα της ισοδυναμίας κλασμάτων του σχολικού βιβλίου, κανένας μαθητής δεν απάντησε καταφατικά. Στη συνέχεια ακολούθησαν ερωτήσεις του εκπαιδευτικού στους μαθητές σχετικά με τη θεωρία και τις έννοιες που είχαν διδαχθεί στο προηγούμενο μάθημα. Όταν κάποιος μαθητής δεν γνώριζε και φαινόταν να δυσκολεύεται να καταλάβει την ερώτηση, ο Αντώνης διατύπωνε την ίδια ερώτηση με διαφορετικό τρόπο ή δίνοντας κάποιο παράδειγμα. Ακολούθησε η επίλυση ασκήσεων του σχολικού βιβλίου στον πίνακα, όπου οι μαθητές σηκώνονταν αλφαβητικά. Αρκετοί μαθητές είχαν δυσκολίες στην επίλυση των ασκήσεων και ο Αντώνης αφιέρωσε λίγα λεπτά της ώρας για να τους εξηγήσει τον τρόπο που πρέπει να ακολουθούν για να διαπιστώσουν αν δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα, καθώς και την έννοια της ισοδυναμίας κλασμάτων. Το κλίμα ήταν γενικά καλό, με τους μαθητές να διατυπώνουν τις απορίες τους και να μην διστάζουν να απαντάνε ακόμα και αν δεν ήταν σίγουροι ότι θα απαντήσουν σωστά. Λίγο πριν χτυπήσει το κουδούνι για διάλειμμα ο εκπαιδευτικός τους είπε να ξαναδιαβάσουν για την επόμενη φορά τα ίδια και να ξαναγράψουν τα παραδείγματα που έλυσαν στον πίνακα.

---

**(ii) Τάξη της Ελένης (7 Νοεμβρίου 2022, 1<sup>η</sup> και 2<sup>η</sup> ώρα διδασκαλίας)**

---

Η πρώτη παρακολούθηση διδασκαλίας της Ελένης αφορούσε στα δύο τμήματα της Α γυμνασίου, από μία διδακτική ώρα στο καθένα, την ίδια μέρα. Οι μαθητές δεν δείχνουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά. Ωστόσο, παρακολουθούν τη διδασκαλία χωρίς να δημιουργούν εντάσεις και προσπαθούν να απαντούν σε τυχόν ερωτήσεις της εκπαιδευτικού. Το μάθημα αφορά την ισοδυναμία κλασμάτων και ακολουθήθηκε το ίδιο μοτίβο και στα δύο τμήματα. Η εκπαιδευτικός ξεκίνησε το μάθημα εξετάζοντας προφορικά τους μαθητές για το πότε δύο κλασματικοί αριθμοί είναι ισοδύναμοι και πώς μπορούμε να το διαπιστώσουμε, ποια κλάσματα λέγονται ομώνυμα και ποια ετερόνυμα. Αυτοί που γνώριζαν την απάντηση σήκωναν το χέρι και η εκπαιδευτικός επέλεγε κάποιον από αυτούς για να απαντήσει. Από την αρχή επισήμανε σε όλη την τάξη ότι ‘γνώση της θεωρίας’ είναι κάτι πολύ σημαντικό που όλοι θα πρέπει να γνωρίζουν και ότι στο διαγώνισμα και στις εξετάσεις τα ερωτήματα θεωρίας αντιστοιχούν σε αρκετές μονάδες. Στη συνέχεια πέρασε στη διόρθωση των ασκήσεων που είχαν οι μαθητές να λύσουν στο σπίτι. Η εκπαιδευτικός έκανε κάποιες διορθώσεις σε μαθητές που είχαν δυσκολίες στην ανάγνωση της εκφώνησης της άσκησης και μετά ρώτησε ποιοι θέλουν να σηκωθούν στον πίνακα για την επίλυσή τους. Κάποιοι φάνηκαν ιδιαίτερα πρόθυμοι να λύσουν την άσκηση, ενώ άλλοι φαινόταν να διστάζουν. Η εκπαιδευτικός ‘διάλεξε’ τόσο δυνατούς όσο και αδύνατους μαθητές για την επίλυση των ασκήσεων, υπενθύμιζε τη θεωρία, αν δυσκολευόταν κάποιος μαθητής, ή τον τρόπο που είχαν λύσει άλλη παρόμοια άσκηση. Τέλος, η Ελένη υπέδειξε κάποιες ασκήσεις από το σχολικό εγχειρίδιο τις οποίες χαρακτήρισε ‘sos’ για το διαγώνισμα που θα ακολουθούσε τις επόμενες μέρες.

#### 4.4.1β Δεύτερη παρατήρηση

---

(i) Τάξη Αντώνη (20 Ιανουαρίου 2023, 3<sup>η</sup> ώρα διδασκαλίας)

---

**Άξονας 1: Γνώσεις για το μαθηματικό περιεχόμενο:** Η 2η παρατήρηση διδασκαλίας του Αντώνη πραγματοποιήθηκε στα τέλη Ιανουαρίου, δηλαδή δύο μήνες μετά την πρώτη παρατήρηση, στο ίδιο τμήμα με αυτό της πρώτης παρατήρησης της Α΄ Γυμνασίου. Θέμα της διδασκαλίας ήταν τα ‘ποσοστά’ (επί τοις εκατό). Δεν παρατηρήθηκε κάποια διαχείριση της μαθηματικής γνώσης που να την αλλοιώνει κατά τη διδασκαλία. Ο Αντώνης ξεκίνησε αναφέροντας μέρη όπου συναντάμε ποσοστά, όπως οι βιτρίνες των καταστημάτων, τα δελτία ειδήσεων κλπ. Στη συνέχεια έδωσε τον μαθηματικό ορισμό του ποσοστού επί τοις εκατό θέλοντας έτσι να εστιάσει στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας. Βέβαια, στη συνέχεια του μαθήματος προσπάθησε να εξηγήσει στους μαθητές πώς να υπολογίζουν το ποσοστό επί τοις εκατό ενός αριθμού διαδικαστικά, γράφοντας στον πίνακα αρκετά παραδείγματα όπως ‘Υπολόγισε το 50% του 20, το 20% του 10’ κλπ. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι υπήρχε ιεράρχηση του μαθηματικού περιεχομένου από τον εκπαιδευτικό όσον αφορά την εισαγωγή της καινούριας έννοιας, με τρόπο που να την συνδέει με την καθημερινότητα των μαθητών και στη συνέχεια περνούσε στο μαθηματικό κομμάτι.

**Άξονας 2: Μάθηση και μαθητές:** Η πλειοψηφία των μαθητών έδειξαν ενδιαφέρον καθόλη τη διάρκεια του μαθήματος. Φάνηκε να τους κεντρίζει το ενδιαφέρον η έννοια του ποσοστού, καθώς ο Αντώνης την είχε συνδέσει με την καθημερινότητά τους. Προσπαθούσε να ‘κρατήσει στο μάθημα’ τόσο τους δυνατούς όσο και τους αδύνατους μαθητές, δίνοντας ως παραδείγματα καθημερινές καταστάσεις που συναντάμε τις μαθηματικές έννοιες που διαπραγματευόταν. Στους δυνατούς μαθητές έδινε παραδείγματα μεγαλύτερης δυσκολίας, τα οποία περιείχαν κυρίως δυσκολότερες αριθμητικές πράξεις. Στους αδύνατους περιοριζόταν στα ‘βασικά’ επιχειρώντας να τους βοηθήσει να κατανοήσουν τις έννοιες με απλούστερα αριθμητικά δεδομένα. Για παράδειγμα, σε κάποιους μαθητές που δυσκολευόταν στις αριθμητικές πράξεις έδωσε να υπολογίσουν το 50% του 60, ενώ στους άλλους το 32% του 40. Επίσης, όταν κάποιος μαθητής δυσκολευόταν ή είχε μια απορία έλεγε στο συμμαθητή που καθόταν δίπλα του να τον βοηθήσει, βάζοντάς τον σε ρόλο δασκάλου, και αν η δυσκολία παρέμενε πήγαινε και ο ίδιος να βοηθήσει. Πέρα από αυτήν την περίπτωση συνεργασίας των συμμαθητών, για την επίλυση των δυσκολιών τους οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να μοιραστούν τις σκέψεις τους και τον τρόπο επίλυσης μιας δραστηριότητας καθόλη τη διάρκεια της διδακτικής ώρας προφορικά, μιλώντας από τη θέση τους και απευθυνόμενοι σε όλη την τάξη.

**Άξονας 3: Διδασκαλία:** Για να εισάγει την καινούρια έννοια ο Αντώνης ανέφερε παραδείγματα από την καθημερινότητα των μαθητών και τους έδωσε χρόνο να σκεφτούν και οι ίδιοι κάποια. Έθετε στους μαθητές προφορικές ερωτήσεις που αφορούσαν στον τρόπο επίλυσης κάποιας δραστηριότητας του σχολικού εγχειριδίου ή στηριζόταν σε κάποια παρανόηση μαθητή. Το λάθος κάποιου μαθητή δεν το διόρθωνε ο εκπαιδευτικός ‘από μόνος του’ αλλά προσπαθούσε να κάνει τον ίδιο το μαθητή να το

καταλάβει και να βρει τη σωστή απάντηση, είτε μέσω της βοήθειας ενός συμμαθητή είτε θέτοντας την ερώτηση σε όλη την τάξη. Για παράδειγμα, ένας μαθητής ρώτησε πόσο θα έπρεπε να πληρώσει για ένα παιχνίδι που είδε σε ένα ηλεκτρονικό κατάστημα, το οποίο είχε έκπτωση 35%. Ενθάρρυνε κουβέντα μέσα στην τάξη και οι μαθητές έλεγαν την άποψή τους για το πώς θα μπορούσαν να απαντήσουν στο ερώτημα που έθεσε ο συμμαθητής τους. Τις λανθασμένες απαντήσεις τις διαχειριζόταν κάνοντας διευκρινιστικές ερωτήσεις, όπως ‘πώς το συμπέρανες αυτό;’, ‘πώς θα το έγραφε;’. Για να αξιολογήσει ο Αντώνης τις γνώσεις που έλαβαν οι μαθητές για τα ποσοστά, στο τέλος του μαθήματος έγραψε κάποια παραδείγματα στον πίνακα και ζήτησε από τους μαθητές να τα λύσουν στο τετράδιό τους. Στη συνέχεια περνούσε και έλεγχε ποιος ασχολείται και τί απαντήσεις δίνονται. Τα παραδείγματα αφορούσαν στην εύρεση της τελικής τιμής ενός προϊόντος με δοσμένο το ποσοστό της έκπτωσης ή της αύξησης και την αρχική του τιμή. Μέσω της προφορικής επικοινωνίας και των ερωτημάτων που έθετε, επιδίωκε τη συμμετοχή όλων των μαθητών, χωρίς όμως να καταφέρει να ενεργοποιήσει και να εμπλέξει όλους στην εκπαιδευτική διαδικασία.

---

**(ii) Τάξη Ελένης (23 Ιανουαρίου 2023, 1<sup>η</sup> και 2<sup>η</sup> ώρα διδασκαλίας)**

---

**Άξονας 1: Γνώσεις για το μαθηματικό περιεχόμενο:** Η δεύτερη παρατήρηση της διδασκαλίας της Ελένης πραγματοποιήθηκε στο τέλος του πρώτου σχολικού τετραμήνου, λίγο πριν οι μαθητές λάβουν τις βαθμολογίες τους. Η παρατήρηση αφορούσε δύο τμήματα της Α Γυμνασίου, τα ίδια στα οποία διενεργήθηκε και η πρώτη παρατήρηση. Η διδασκαλία αυτή τη φορά αφορούσε τις εξισώσεις (πρώτου βαθμού), με την εκπαιδευτικό να ‘ακολουθεί’ εν πολλοίς το σχολικό εγχειρίδιο. Ωστόσο, θέλοντας να ορίσει την έννοια της εξίσωσης ανέφερε πως πρόκειται για κάτι που έχει αριθμούς, το ίσον και ένα γράμμα, τον άγνωστο, τον οποίο και ψάχνουμε να υπολογίσουμε. Αμέσως έγραψε στον πίνακα και μερικά παραδείγματα εξισώσεων για να καταλάβουν καλύτερα οι μαθητές τι εννοεί ( $x+3=8$ ,  $1+2x=2$ ). Παρατηρήθηκε να αναφέρεται στον ‘ $x$ ’ άλλοτε ως άγνωστο και άλλοτε ως μεταβλητή. Επίσης, ανέφερε πως ο άγνωστος παίρνει μια μόνο τιμή. Η Ελένη ξεκίνησε επιλύοντας ‘απλές’ εξισώσεις με αθροίσματα και διαφορές π.χ.  $x+2=7$ ,  $x-4=10$  και μετά προχώρησε σε εξισώσεις με γινόμενο και πηλίκο π.χ.  $2x=6$ ,  $x:5=2$ , ιεραρχώντας έτσι το μαθηματικό περιεχόμενο. Η εκπαιδευτικός εστίασε στη διαδικαστική επίλυση των εξισώσεων λέγοντας ότι όταν έχουμε πρόσθεση για να βρούμε τον ‘ $x$ ’ κάνουμε αφαίρεση και όταν έχουμε πολλαπλασιασμό κάνουμε διαίρεση. Υπήρχε ευχέρεια σε αυτά που έλεγε και σε αυτά που έγραφε στον πίνακα, παρόλα αυτά υπήρχε μια διαρκής βιασύνη σε ό,τι έκανε.

**Άξονας 2: Μάθηση και μαθητές**

Κάποιοι από τους μαθητές παρακολουθούσαν τα όσα παρέδιδε η εκπαιδευτικός και σημείωναν στα τετράδιά τους τα παραδείγματα του πίνακα, ενώ άλλοι αδιαφορούσαν και μιλούσαν μεταξύ τους. Η Ελένη έγραψε τρία παραδείγματα εξισώσεων στον πίνακα και ρώτησε τους μαθητές ποιος θέλει να σηκωθεί, για να λύσει κάποιο παράδειγμα,

ενώ οι υπόλοιποι να τα λύσουν στο τετράδιό τους (ο καθένας μόνος του). Σήκωσαν πέντε μαθητές το χέρι τους εκ των οποίων οι 3 φάνηκαν αρκετά πρόθυμοι. Τότε βλέποντας τη μικρή συμμετοχή η εκπαιδευτικός ρώτησε «κανείς άλλος;» και τότε άλλοι δύο μαθητές σήκωσαν διστακτικά το χέρι τους. Τελικά, επέλεξε τους δύο ‘πρόθυμους’ μαθητές και έναν από τους άλλους, ενθαρρύνοντάς τον λέγοντας ότι θα τα καταφέρει, και ότι και να κάνει λάθος δεν πειράζει, θα τον βοηθήσει η ίδια. Πράγματι, αποδείχθηκε ότι ο τελευταίος μαθητής δεν θυμόταν τον κανόνα για να λύσει την εξίσωση  $3x=75$  και η Ελένη απευθυνόμενη σε όλη την τάξη επανέλαβε τον κανόνα και έγραψε η ίδια  $x=75:3$ , με τον μαθητή να απαντάει 25 και αυτήν να του λέει μπράβο και ότι τελικά δεν ήταν και τόσο δύσκολο όσο πίστευε. Στους άλλους δύο μαθητές έδωσε συγχαρητήρια για τη σωστή απάντηση. Μεταξύ των μαθητών υπήρχε κάποιου είδους επικοινωνία αλλά μάλλον δεν αφορούσε τη διδασκαλία, όσο για την επικοινωνία εκπαιδευτικού-μαθητή ήταν περιορισμένη στις ερωτήσεις που έθετε ο εκπαιδευτικός και τις απαντήσεις των μαθητών. Μια ενδιαφέρουσα πρόκληση που δόθηκε στους μαθητές ήταν να εκφράσουν με λόγια τις παραστάσεις  $x+3$  και  $2x-5$ . Επίσης, ως στιγμή ‘ανακαλυπτικής μάθησης’ θα μπορούσαμε να αναφέρουμε τον υπολογισμό της έκφρασης  $3a+2a$  που ζήτησε η Ελένη από όλη την τάξη. Οι μαθητές αρχικά δυσκολεύτηκαν να καταλάβουν αυτή την έκφραση, με κάποιους να λένε ότι κάνει 6a και άλλους 5. Η εκπαιδευτικός προσπάθησε να εξηγήσει ότι το ‘α’ θα μπορούσε να δηλώνει ‘αυτοκίνητα’ άρα 3 αυτοκίνητα και άλλα δύο αυτοκίνητα μας κάνουν 5 αυτοκίνητα.

### **Άξονας 3: Διδασκαλία**

Η κυρίαρχη διδακτική πρακτική που αξιοποιεί η εκπαιδευτικός θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι η ‘επανάληψη’, καθώς επαναλάμβανε πολλές φορές τον τρόπο-μέθοδο επίλυσης μιας εξίσωσης και έβαζε τους μαθητές να λύνουν παρόμοια παραδείγματα. Η διαχείριση του λάθους του μαθητή περιλάμβανε κυρίως τη ‘διόρθωση’ του λάθους και μετά την προσπάθεια σύνδεσης της σωστής απάντησης με τη ‘θεωρία’. Η εκπαιδευτικός έθετε ερωτήσεις κυρίως κλειστού τύπου σχετικά με τον τρόπο επίλυσης μιας εξίσωσης. Οι μαθητές δεν ρωτούσαν. Τα έργα που ανέθετε η Ελένη ήταν ασκήσεις διαδικαστικού τύπου από το σχολικό εγχειρίδιο ή παρόμοιες από εξωσχολικό βιβλίο. Η αξιολόγηση γινόταν κυρίως με προφορικές ερωτήσεις και σηκώνοντας τους μαθητές στον πίνακα. Όσον αφορά τη συμμετοχή των μαθητών, λίγοι ήταν αυτοί που έδειχναν ενδιαφέρον για το μάθημα, η εκπαιδευτικός όμως προσπαθούσε να θέτει προφορικά ερωτήματα σε όλους.

#### **4.4.2 Ανάλυση των απαντήσεων στις ερωτήσεις των συνεντεύξεων**

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι συνεντεύξεις ήταν δύο για κάθε εκπαιδευτικό και ακολούθησαν τις παρατηρήσεις. Τα ερωτήματα της πρώτης συνέντευξης ήταν κοινά για τους δύο εκπαιδευτικούς, ενώ για τη δεύτερη δημιουργήθηκαν δύο διαφορετικά πρωτόκολλα συνέντευξης.



#### 4.4.2α Πρώτη συνέντευξη

##### (i) Ελένη (1<sup>η</sup> συνέντευξη)

#### **Άξονας 1: Γνώσεις για το μαθηματικό περιεχόμενο**

Η Ελένη, ενώ αναφέρει αρχικά ότι ακολουθεί συστηματικά το Πρόγραμμα Σπουδών (ΠΣ) και βασίζεται στις σχετικές οδηγίες διδασκαλίας του υπουργείου, στην αμέσως επόμενη τοποθέτησή της υποστηρίζει πως ‘οδηγός’ της διδασκαλίας της είναι ‘να μάθουν να σκέφτονται οι μαθητές’.

*«...ακολουθάμε το ΠΣ, οπότε κάθε μέρα βλέπουμε που βρισκόμαστε και τι πρέπει να κάνουμε. Πέρα από το ΠΣ έχουμε τις οδηγίες διδασκαλίας από το ΙΕΠ. Εμάς τους μαθηματικούς εκείνο που μας ενδιαφέρει είναι οι μαθητές πρώτα να μάθουν να σκέφτονται και μετά να λύνουν ασκήσεις».*

Στη συνέχεια, αναφέρει μια σειρά από στοιχεία που παραπέμπουν σε μια ιδιαίτερα ‘συμβατική’ διδακτική προσέγγιση με έντονα συμπεριφοριστικά χαρακτηριστικά, όπου η έμφαση βρίσκεται στο αποτέλεσμα, την εξάσκηση και τη μάλλον παθητική εμπλοκή των μαθητών στη διαδικασία μάθησης. Παραδίδει το μάθημα με μορφή διάλεξης, ακολουθώντας γραμμικά το σχολικό εγχειρίδιο (‘σύνδεση με προηγούμενα’) και περιμένει από τους μαθητές ‘να μάθουν τη θεωρία’ και ‘να επιλύουν τις ασκήσεις όπως τους έδειξε’, έτσι ώστε να ασκηθούν και αυτοματοποιημένα να επιλύουν τις ασκήσεις όχι μόνο του σχολικού εγχειριδίου αλλά και των φυλλαδίων που ετοιμάζει ενίοτε γι’ αυτούς, έχοντας κατά νου την ‘κάλυψη όσο γίνεται περισσότερων μαθητών’.

*«Ξεκινάω το μάθημα με πολύ απλά πράγματα, και επειδή φέτος είμαι σε Γυμνάσιο με ενδιαφέρει οι μαθητές να μάθουν τη θεωρία και την ορολογία. Επομένως, ξεκινάω με πολύ βασικά πράγματα, συνδέω το μάθημα με το προηγούμενο μάθημα- με προηγούμενες γνώσεις και πατάω πάνω σε αυτές για να περάσω στο καινούριο μάθημα. Λέω τη θεωρία, κάνω παραδειγματάκια και αρχίζω να λύνω απλές ασκήσεις. Αν έχω έτοιμο φυλλάδιο ξεκινάω με τις ασκήσεις του βιβλίου και μετά βάζω παρόμοιες από το φυλλάδιο, αλλά διαβαθμισμένης δυσκολίας για να μπορώ να καλύψω ένα μεγαλύτερο φάσμα παιδιών».*

Η εκπαιδευτικός διαχωρίζει την ύλη σε αυτήν που προβλέπεται να καλυφθεί και σε αυτήν που καλύπτεται ουσιαστικά και ρεαλιστικά. Αναφέρει ότι σε αντίθεση με άλλες χρονιές, φέτος είναι πιο αυστηροί οι κανονισμοί και ότι πρέπει να διδαχτεί όλη η προβλεπόμενη ύλη, στόχος που δεν της δημιουργεί δυσκολίες. Ωστόσο, υπάρχει μια ευελιξία στην βαρύτητα που πρέπει να δοθεί στο κάθε κεφάλαιο και έτσι ο/η εκπαιδευτικός μπορεί να πάρει πρωτοβουλίες για τη διδασκαλία του.

*«Τί εννοείτε με το ‘καλύπτεται’; Ότι γίνεται κτήση στους μαθητές ή ότι εγώ έχω βγάλει την ύλη; Μας έχουν πει ότι πρέπει να βγάλουμε όλη την ύλη στο Γυμνάσιο, πέρυσι ήταν πιο ελαστικοί. Ξέραμε ότι και να μην κάναμε κάποια κεφάλαια δεν πείραζε γιατί δεν υπήρχαν στο Λύκειο. Φέτος όμως πρέπει να βγάλουμε όλη την ύλη, για μένα δεν είναι τόσο μεγάλη όπως λένε πολλοί. Εγώ την ύλη θα την καλύψω, θα φτάσω μέχρι το τέλος. Κάποια κεφάλαια που θεωρώ ότι δεν χρειάζονται, που ξέρω ότι δεν θα τα ξαναδοούν οι μαθητές στο Λύκειο θα τα περάσω πιο γρήγορα, τα υπόλοιπα πιο αργά».*

Όσον αφορά το επίπεδο κατανόησης της ύλης από τους μαθητές η εκπαιδευτικός, αν και δηλώνει πως θα φροντίσει οι περισσότεροι να την καταλάβουν, επισημαίνει πως θα υπάρχουν και αυτοί που θα αδυνατούν να ανταποκριθούν και στα πλέον βασικά: « Θα φροντίσω να καλυφθεί όλη η ύλη και οι περισσότεροι μαθητές να καταλάβουν την ύλη, να μπορούν να κάνουν τα βασικά τουλάχιστον. Βέβαια θα υπάρχουν και μαθητές που δεν θα έχουν μάθει ακόμα ούτε την προπαίδεια».

## **Άξονας 2: Γνώσεις για τη μάθηση**

Μιλώντας για το πως μαθαίνουν/ κατανοούν οι μαθητές τις μαθηματικές έννοιες η Ελένη εστίασε κατ' αρχήν στις αριθμητικές έννοιες. Ισχυρίστηκε έντονα ότι η αξιοποίηση συγκεκριμένων παραδειγμάτων από την καθημερινή ζωή συνιστά τον πλέον εγγυημένο τρόπο κατανόησης, προσφέροντας μια 'πρωταρχική γνώση'. Ειδικότερα, εστιάζοντας στην ενότητα των κλασμάτων που διδασκόταν την εποχή της συνέντευξης, η Ελένη είναι απόλυτη στο ότι μία μόνο 'πρωταρχική γνώση' αρκεί για να προσεγγίσουν οι μαθητές αποτελεσματικά την έννοια του κλάσματος. Και αυτή είναι η 'γνώση της πίτσας', την οποία κατέχουν όλοι οι μαθητές. Η πίτσα και κατ'επέκταση η 'έννοια του κομματιού' είναι αυτή που θα βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια του κλάσματος, σύμφωνα με την ίδια.

*«Για την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος νομίζω ότι όλοι οι μαθητές έχουν τις πρωταρχικές γνώσεις που χρειάζονται, την πίτσα. (...)Συνήθως λεν να κάνουμε παραδείγματα με ορθογώνια και τετράγωνα, το βιβλίο έχει κάποιες δραστηριότητες αλλά θεωρώ ότι το καλύτερο παράδειγμα για να καταλάβουν οι μαθητές το κλάσμα είναι η πίτσα. Τίποτα άλλο. Για να καταλάβουν οι μαθητές την έννοια του κλάσματος, δηλαδή ότι παίρνουμε 'κ' κομμάτια από τα 'ν' ίσα κομμάτια, το παράδειγμα τις πίτσας θεωρώ ότι είναι το καλύτερο, καθώς είναι κάτι που γνωρίζουν οι μαθητές και τους είναι πιο βιωματικό».*

Αναφερόμενη σε μια άλλη σημαντική μαθηματική έννοια, της εξίσωσης, η Ελένη υποστηρίζει ότι οι πρωταρχικές γνώσεις των μαθητών θα πρέπει να περιλαμβάνουν σε αυτήν την περίπτωση την έννοια της μεταβλητής, που λαμβάνει μία μόνο τιμή' (!), της παραμέτρου και 'της ζυγαριάς'.

*«Για την έννοια της εξίσωσης οι μαθητές θα πρέπει πρώτα να γνωρίσουν την έννοια της μεταβλητής, την οποία την μαθαίνουν μέσω παραδειγμάτων και στη συνέχεια με τη βοήθεια της 'ζυγαριάς'. Για την μεταβλητή πρέπει να τους εξηγήσουμε ότι είναι ένα γραμματάκι που παίρνει κάποιες τιμές, ότι όταν αυτό είναι απλά μια παράσταση με μεταβλητές τότε κάνουμε κάποιες πράξεις και εκεί βάζουμε και την επιμεριστική ιδιότητα και μετά όταν αυτό πάμε να το εξισώσουμε με κάτι άλλο, δηλαδή  $A$  μέλος ίσον με  $B$  μέλος τότε λέμε με τη ζυγαριά ότι αυτά τα δύο είναι το ίδιο. Από εκεί και πέρα θα πρέπει να καταλάβουν ότι η μεταβλητή αυτή παίρνει μία μόνο τιμή. Το πρόβλημα δεν είναι μόνο στην έννοια της μεταβλητής αλλά και όταν μπαίνει η έννοια της παραμέτρου».*

Υποστηρίζει ότι στο Δημοτικό Σχολείο οι μαθητές ‘μαθαίνουν τυποποιημένα’, χωρίς να καταλαβαίνουν τις έννοιες. Προσφέρεται, επίσης, πληθώρα διαφορετικών μεθόδων εκμάθησης της ίδιας μαθηματικής διαδικασίας, προσέγγιση που καθιστά τελικά τη μάθηση δυσκολότερη κατά την άποψή της.

*«Είναι πολύ δύσκολο για τους μαθητές να μάθουν τις μαθηματικές έννοιες γιατί έχουν μάθει να παπαγαλίζουν και να μαθαίνουν τυποποιημένα πράγματα. Από το Δημοτικό ξεκινάει αυτό, δεν γίνεται βιωματικά η διδασκαλία, τα μαθηματικά πρέπει να γίνονται με άλλον τρόπο. Δεν γίνεται στο Δημοτικό να είναι αυτό το ‘εκτιμώ’ και να μαθαίνουν με πάρα πολλούς τρόπους τον πολλαπλασιασμό. Πρέπει το κάθε παιδί να τον μάθει με τον δικό του τρόπο γιατί όλα τα παιδιά δεν μπορούν να μάθουν πέντε τρόπους».*

Όσον αφορά τις δυσκολίες των μαθητών του Γυμνασίου στη Γεωμετρία αναφέρει ότι αντιμετωπίζουν δυσκολίες που συνδέονται με ζητήματα κατασκευής γεωμετρικών οντοτήτων και εξοικείωσης με τον τρόπο συμβολισμού τους «για παράδειγμα, στο πως να κάνουν ένα ευθύγραμμο τμήμα, πως να βάλουν τα σημεία, πως να κάνουν τις γωνίες, πως γράφουμε τις ευθείες». Κάποιες άλλες δυσκολίες τους αφορούν την αδυναμία κατανόησης των εκφωνήσεων και την έλλειψη συνδυαστικής σκέψης.

*«Δεν μπορούν να δουν μια άσκηση ολοκληρωμένα, δεν έχουν μάθει να σκέφτονται, αυτά προσπαθώ να τους μάθω. Δεν έχουν μάθει να διαβάζουν εκφωνήσεις, γιατί προφανώς τους τα έδιναν έτοιμα, δεν καταλαβαίνουν ελληνικά. Αν και οι περισσότεροι μαθητές είναι Έλληνες, δεν καταλαβαίνουν ελληνικά, ακόμα και στο Λύκειο και στις πανελλήνιες».*

Σε άλλο σημείο της συνέντευξης η εκπαιδευτικός επισημαίνει ότι οι μαθητές στο Δημοτικό Σχολείο δεν ασχολούνται όπως θα έπρεπε επαρκώς με τη Γεωμετρία εξαιτίας ‘των περιορισμένων μαθηματικών γνώσεων των δασκάλων’ και προτιμούν ασκήσεις Άλγεβρας διαδικαστικού τύπου που δεν απαιτούν αναλυτικο-συνθετική σκέψη.

*«Δεν ασχολούνται στο Δημοτικό με τη γεωμετρία. Δεν θέλω να πω κάτι άσχημο για τους δασκάλους αλλά έχει πολλούς που δεν ξέρουν μαθηματικά και δεν ασχολούνται με την γεωμετρία. Μου το λένε συνέχεια οι μαθητές ότι δεν τους αρέσει η γεωμετρία και ότι θέλουν να κάνουμε άλγεβρα, επειδή είναι πιο τυποποιημένα στην άλγεβρα σε αντίθεση με τη γεωμετρία που θέλει σκέψη, θέλει σύνθεση. Δεν τους αρέσει καθόλου. Οι μαθητές δεν έχουν μάθει να σκέφτονται, να γράφουν, δεν είναι χαζοί οι μαθητές απλά δεν έχουν πάρει χαρτί και μολύβι για να κάνουν το σχήμα».*

Σε ερώτηση για τον τρόπο που οι μαθητές επιλύουν μια άσκηση, η Ελένη αναφέρει ότι οι μαθητές τείνουν να ακολουθούν τη μέθοδο που έμαθαν στο Δημοτικό Σχολείο.

*«Υπάρχουν μαθητές που έχουν μάθει έναν τρόπο από το Δημοτικό και συνεχίζουν με τον ίδιο τρόπο. Στα δύο τμήματα που έχω στην Α Γυμνασίου, το ένα τμήμα έχει μάθει να κάνει τα κλάσματα ομώνυμα πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με αυτό που προκύπτει από το πηλίκο του ΕΚΠ με τον παρονομαστή, ενώ το δεύτερο τμήμα το κάνει με ‘καπελάκια’».*

Οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου δεν μελετούν ‘θεωρία’, σύμφωνα με την εκπαιδευτικό. Επίσης, πολλοί είναι εκείνοι που έχουν βοήθεια εκτός σχολείου, γεγονός που θεωρεί πως αντανακλάται στη δυσκολία του να διαβάσουν την ίδια τους τη λύση. Καταβάλλει προσπάθειες να αλλάξει αυτήν τη νοοτροπία, ενθαρρύνοντας τους μαθητές να παρουσιάζουν τις απαντήσεις τους ‘με δικά τους λόγια’ που, όμως, συχνά έχουν λάθη. Γενικά, υποστηρίζει πως οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου έχουν βοήθεια, ενώ στη Β΄ Γυμνασίου υπάρχουν και μαθητές που είτε προσπαθούν να ανταποκριθούν με βάση τη δουλειά που γίνεται στο σχολείο είτε είναι αδιάφοροι.

*«Σχεδόν κανένας μαθητής στην Α Γυμνασίου δεν διαβάζει θεωρία. (...)Τις πρώτες 3 εβδομάδες παρατήρησα ασκήσεις που ήταν γραμμένες από τους μαθητές ευτυχώς, γιατί στο Δημοτικό τις γράφουν οι μαμάδες πολλές φορές, αλλά ήταν τέτοιο το λεξιλόγιο που οι μαθητές συλλάβιζαν, άρα κάποιος τους τα είπε. Τους είπα λοιπόν ότι αυτά που γράφετε πρέπει να τα καταλαβαίνετε, να σας τα εξηγούν καλά και να είναι με δικά σας λόγια. Βέβαια το άλλαξα την άλλη μέρα αυτό γιατί πολλές φορές τα δικά τους λόγια δεν είναι σωστά, πρέπει να στηρίζετε στο βιβλίο και να μάθετε να τα γράφετε απλά. Στη Β Γυμνασίου υπάρχουν τρεις κατηγορίες μαθητών. Υπάρχουν οι μαθητές που ξέρουν, που πάνε φροντιστήριο και τα ξέρουν και το παίζουν έξυπνοι ότι ξέρουν το Πυθαγόρειο απ’ έξω αλλά μπορεί να το ξέρουν αλλά δεν ξέρουν πώς να το χειρίζονται σωστά. Υπάρχουν μαθητές που προσπαθούν από το σχολείο και οι άλλοι που είναι αδιάφοροι».*

Η Ελένη ισχυρίζεται ότι χρησιμοποιεί τη ‘θεωρία της διαφοροποιημένης διδασκαλίας’ στην προσπάθειά της να εμπλακούν όλοι οι μαθητές στη μαθησιακή διαδικασία. Οι μαθησιακοί στόχοι που θέτει δεν είναι ίδιοι για όλους τους μαθητές αλλά εξαρτώνται από τις δυνατότητές τους.

*«Τώρα τελευταία έχει βγει αυτή η θεωρία της διαφοροποιημένης μάθησης. Να προσεγγίζουμε δηλαδή την ύλη ανάλογα με τις δυνατότητες των μαθητών. Αυτό κάνουμε χρόνια οι καθηγητές. Εννοείται ότι δεν περιμένουμε από όλους τους μαθητές τα ίδια».*

Γι’ αυτό το σκοπό, μοιράζει σε όλους τους μαθητές τα ίδια φυλλάδια ασκήσεων, οι οποίες είναι διαβαθμισμένης δυσκολίας. Θέτει ερωτήματα στους αδύνατους μαθητές που ξέρει ότι γνωρίζουν να απαντήσουν, γιατί πιστεύει ότι έτσι τους προσφέρει κίνητρο συμμετοχής στο μάθημα. Από την άλλη, ωστόσο, η στήριξη που τους προσφέρει είναι μάλλον χαμηλού επιπέδου, καθώς αφορά στην επανάληψη των ίδιων ασκήσεων, χωρίς επιπλέον καθοδήγηση-υποστήριξη ώστε να υπερβούν οι ίδιοι τις δυσκολίες τους. Αντίθετα, στους δυνατούς μαθητές, για να διατηρήσει το ενδιαφέρον τους για το μάθημα, αναθέτει απλώς επιπλέον ασκήσεις. Γενικά, η Ελένη μοιάζει να έχει διαμορφώσει μια απλοϊκή κατανόηση του όρου ‘διαφοροποιημένη διδασκαλία στα μαθηματικά’ και μάλλον θεωρεί ανέφικτη την υιοθέτησή της στην πράξη πέραν της προσέγγισης ‘επανάληψη για όλους και ανάλογα με τις δυνατότητές τους’.

*«Στα φυλλάδια που τους δίνουμε υπάρχουν ασκήσεις διαβαθμισμένης δυσκολίας. Στους αδύνατους μαθητές ρωτάμε πράγματα που θεωρούμε ότι μπορούν να απαντήσουν για να τους δώσουμε λίγο θάρρος για να προχωρήσουν. Σίγουρα το διαγώνισμα θα πρέπει να είναι διαβαθμισμένης δυσκολίας, όπως μας λένε και οι σύμβουλοι, πρέπει το 10 με 12 να*

το πιάνουν σχεδόν όλοι, δεν γίνεται όμως αυτό γιατί τα θέματα θα είναι πάρα πολύ απλά. Τα φυλλάδια που τους δίνουμε ή τα θέματα στο διαγώνισμα δεν μπορούν να είναι διαφορετικά σύμφωνα με τον νόμο. Ούτε μπορώ σε ένα τμήμα να δώσω ένα φυλλάδιο και να πω σε κάποιους μαθητές (σε αυτούς με δυσκολίες) να κάνουν και 10 ασκήσεις παραπάνω. Θα κάνω πολλές ασκήσεις και θα πω ξεκινήστε και επαναλάβετε τις ασκήσεις που κάνουμε και φτάστε μέχρι εκεί που μπορείτε. Επειδή κάποιοι μαθητές σε ένα τμήμα είναι πολύ καλοί, αναγκάστηκα και τους βάζω ασκήσεις με πολλές πράξεις μόνο και μόνο για να μην βαριούνται, γιατί οι καλοί βαριούνται».

Η εκπαιδευτικός, αν και αρχικά φαίνεται να δυσκολεύεται να νοηματοδοτήσει την έννοια ‘ενεργή συμμετοχή’, στη συνέχεια αναφέρει ότι χρησιμοποιεί το διάλογο και τις ερωτήσεις για να την επιτύχει. Επιπλέον, σηκώνει μαθητές στον πίνακα για να λύσουν ασκήσεις ή ζητά να τις λύσει ο καθένας μόνος του στο τετράδιό του και περνάει η ίδια και τους βοηθάει, όταν χρειάζεται και όταν υπάρχει διαθέσιμος χρόνος.

«Τι εννοείτε ‘ενεργή συμμετοχή’; ... Με διάλογο, με ερωτήσεις. Όταν υπάρχει χρόνος σηκώνω και μαθητές στον πίνακα για να λύσουν ασκήσεις, αλλά τώρα για παράδειγμα στη Β Γυμνασίου που είμαι πίσω στην ύλη δεν σηκώνω τακτικά. Μπορώ όμως να βάζω στα παιδιά ασκησούλες και να περνάω για να βλέπω τί κάνουν και να τα βοηθάω. Στην Α Γυμνασίου έβαζα στη γεωμετρία κάποια άσκηση στη μέτρηση γωνιών και περνούσα από τους μαθητές για να δω και να τους βοηθήσω όπου χρειαστεί. Γενικά, στην τάξη μου έχουμε ένα κλίμα που μπορεί να ρωτήσει ο καθένας ότι θέλει».

### **Άξονας 3: Γνώσεις για τη διδασκαλία**

Η Ελένη δηλώνει αρχικά ότι ακολουθεί το Αναλυτικό Πρόγραμμα και τις επίσημες οδηγίες για να επιλέξει τις κατάλληλες δραστηριότητες. Ωστόσο, προσθέτει πως μπορεί να αξιοποιήσει και κάποιες που δεν προτείνονται, αν θεωρήσει ότι θα βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τους στόχους του μαθήματος. Ακόμη, επιχειρεί να ενθαρρύνει την εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών ιδεών. Παρουσιάζει, πιο συγκεκριμένα, τι κάνει στην Άλγεβρα και στη Γεωμετρία ως παράδειγμα.

«Από το ΑΠ ξέρω σε κάθε κεφάλαιο τί πρέπει να ξέρουν οι μαθητές. (...) Από εκεί και πέρα διαφοροποιούνται οι ασκήσεις μου ανάλογα με το τι κρίνω ότι πρέπει να μάθουν επιπλέον οι μαθητές για να κατανοήσουν καλύτερα αυτά που ζητάει το ΙΕΠ. Στο κεφάλαιο των εξισώσεων συγκεκριμένα, θα έβαζα σαν φυλλάδιο εργασίας ασκήσεις θεωρίας, τί είναι αόριστη, αδύνατη εξίσωση και τί είναι λύση μιας εξίσωσης. (...) Δεν θα δουλέψω δύσκολες εξισώσεις, και το ΙΕΠ μας λέει να μην βάζουμε με πολλές παρενθέσεις, δύσκολους παρονομαστές, συντελεστές. Όπως δεν προτείνει και εξισώσεις με παραμέτρους, εγώ τους έκανα ενδεικτικά 1-2 για να δουν πώς είναι. (...)».

Η Ελένη υποστήριξε σε αρκετά σημεία της συνέντευξης ότι δίνει έμφαση στην εκμάθηση της θεωρίας στο Γυμνάσιο, καθώς έχει παρατηρήσει ότι στο Λύκειο οι μαθητές έχουν σοβαρά κενά στην ορολογία των μαθηματικών.

*«Στο Γυμνάσιο εξετάζω πάρα πολύ θεωρία γιατί είδα ότι στο Λύκειο τα παιδιά δεν ξέρουν ορολογία ... Δεν ξέρουν πολλά πράγματα, έρχονται στο Λύκειο με μηδενικές γνώσεις».*

Σύμφωνα με τα όσα υποστηρίζει η Ελένη, η εκμάθηση της θεωρίας από τους μαθητές γίνεται με τη μέθοδο της αποστήθισης, ώστε 'να μην χάσουν μονάδες στις τελικές εξετάσεις', ενώ για την εμπέδωσή της είναι απαραίτητη η επίλυση πολλών ασκήσεων.

*«Τον ορισμό παπαγαλία θα τον μάθει, δεν μπορεί να τον μάθει διαφορετικά. Πρέπει να μάθουν την θεωρία γιατί θα εξεταστούν σε αυτήν στο τέλος και οι 6 μονάδες είναι πολύ μεγάλο (βοήθημα) για τους αδύνατους μαθητές για να μπορέσουν να πάρουν βαθμό αλλά από εκεί και πέρα μέσα από τις ασκήσεις μαθαίνουν να εμπεδώνουν τη θεωρία. Τα (σχολικά) βιβλία σε αυτό είναι πάρα πολύ καλά, ιδίως της Γ Γυμνασίου έχει μεγάλη γκάμα ασκήσεων και της Α (Γυμνασίου) δεν είναι πολύ δύσκολο, αλλά δεν έχει πολλές ασκήσεις και αναγκάζομαι για τους καλούς μαθητές να βγάζω ασκήσεις από φυλλάδια και ιστοσελίδες».*

Εστιάζοντας σε μια άλλη διάσταση της μαθησιακής διαδικασίας στα μαθηματικά, στο πώς διαχειρίζεται τις απαντήσεις των μαθητών, η εκπαιδευτικός απάντησε ότι εξαρτάται τόσο από τον μαθητή όσο και από την ερώτηση που θα τεθεί.

*«Εξαρτάται από τον μαθητή που απάντησε. Αν είναι ένας αδύνατος μαθητής και απαντήσει σωστά, φυσικά θα του πω μπράβο. Εξαρτάται και από την ερώτηση που θα κάνω, αν είναι δύσκολη και μου απαντήσει σωστά κάποιος καλός μαθητής πάλι θα πω μπράβο».*

Επισημαίνει ότι ενθαρρύνει τη συμμετοχή των μαθητών στο μάθημα ακόμα κι αν η απάντησή τους είναι λανθασμένη.

*«Το θέμα είναι αν απαντήσουν λάθος τί κάνουμε. Υπάρχουν πολλοί μαθητές που κάνουν λάθη, τους έχω πει ότι δεν έχω κάποιον κατάλογο που να σημειώνω ποιος απαντάει σωστά ή λάθος, με ενδιαφέρει να υπάρχει βελτίωση και τους το έχω πει. Σημασία έχει η προσπάθεια και η βελτίωση. Εγώ χαίρομαι όταν βλέπω να κάνουν λάθη στα διαγωνίσματα γιατί μετά το καταλαβαίνουν και δεν θα το ξανακάνουν ποτέ. Υπάρχει μαθητής που δεν γύρισε την κόλλα και έκανε μόνο τα 3 από τα 4 θέματα».*

Η Ελένη αναφέρει ότι τα 40 λεπτά μιας διδακτικής ώρας δεν είναι αρκετά, δηλώνοντας την πρότασή της για διδακτική ώρα 60 λεπτών και αναλύοντας τη δόμησή της που δεν περιλαμβάνει κάποιο πιο ευέλικτο πλαίσιο εμπλοκής των μαθητών αλλά περισσότερο χρόνο επίλυσης ασκήσεων από αυτούς.

*«Θα έκανα 5-10 λεπτά μια εξέταση, 15' θα λύνουμε τις ασκήσεις που είχαν για το σπίτι, απορίες κλπ, θα παρέδιδα 15' το επόμενο μάθημα με ασκήσεις και στο τέλος θα μοίραζα ένα φύλλο εργασίας για να δω τι κατάλαβαν από την παράδοση, όχι για να τα εξετάσω αλλά για να δω αν προσέχουν μέσα στην τάξη και αν καταλαβαίνουν. Στα 40' δεν μπορούμε να κάνουμε τίποτα».*

Παρόλα αυτά υποστηρίζει ότι δεν χρειάζονται περισσότερες ώρες μαθηματικών εβδομαδιαία και ότι η διδασκαλία πρέπει να αλλάξει χαρακτήρα «και να μην

χανόμαστε σε ορισμούς» (ενώ έχει δηλώσει πως οι μαθητές χρειάζεται να μαθαίνουν τη θεωρία και την ορολογία των μαθηματικών).

*«Δεν νομίζω ότι χρειάζονται περισσότερες ώρες μαθηματικά την εβδομάδα, μια χαρά είναι 4 ώρες. Απλά πιστεύω ότι πρέπει να διδάσκονται με άλλον τρόπο. Θα έπρεπε να διδάσκουμε την κουλτούρα και τη φιλοσοφία. Οι ασκήσεις θέλω να είναι διαφορετικές, να είναι στην πραγματικότητα, δηλαδή να είναι με χωράφια, με τούβλα, κάτι που να το βλέπουν (οι μαθητές), όχι γενικά αριθμοί. Εγώ γι' αυτό πιστεύω ότι πρέπει να αλλάξει και η ύλη, πρέπει να διδάσκονται λιγότερη ύλη και με διαφορετικό τρόπο».*

Όσον αφορά τους αδύνατους μαθητές και το αν διαφοροποιεί τη διδασκαλία της, η εκπαιδευτικός αναφέρει ότι υπάρχει μια ανομοιομορφία στις επιδόσεις των μαθητών του Γυμνασίου που, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, αποδίδει σε 'διαφορετικές προτιμήσεις ύλης' των δασκάλων στο Δημοτικό σχολείο. Ωστόσο, δηλώνει πως ακολουθεί την ίδια μέθοδο διδασκαλίας σε όλα τα τμήματα, ισχυριζόμενη ότι διαφοροποιεί τη διδασκαλία της με βάση τις δυνατότητες των μαθητών.

*«Οι μαθητές, επειδή προέρχονται από διαφορετικά δημοτικά, τα τμήματα στο Γυμνάσιο είναι τελείως διαφορετικά, καθώς ο κάθε δάσκαλος έχει κάνει διαφορετική ύλη, δίνοντας έμφαση στο μάθημα που είναι καλύτερος. Φροντίζω να κάνω σε όλα τα τμήματα τις ίδιες ασκήσεις αλλά στους αδύνατους μαθητές εστιάζω περισσότερο. Δεν είναι διαφοροποίηση από τμήμα σε τμήμα γιατί κάνω τα ίδια φυλλάδια και τις ίδιες ασκήσεις βιβλίου, αλλά από μαθητή σε μαθητή...».*

Ειδικότερα, στους πολύ αδύνατους μαθητές, όπως αυτοί 'που δεν γνωρίζουν ούτε την προπαίδεια', δίνει ένα είδος βοηθήματος/ εργαλείου, όπως τον 'πίνακα της προπαίδειας', ορίζοντας και συγκεκριμένο χρονικό διάστημα χρήσης του, κατά το οποίο τους αφήνει να το διαχειριστούν μόνοι τους χωρίς κάποια επιπλέον βοήθεια από την ίδια.

*«...υπάρχουν μαθητές με πολύ διαφορετικό επίπεδο, κάποιοι με καλή μαθηματική σκέψη αλλά με προβλήματα στην ορθογραφία, υπάρχουν μαθητές στην Α' Γυμνασίου που δεν ξέρουν ούτε την προπαίδεια στους οποίους έχω δώσει ένα σκονάκι προπαίδειας για να το έχουν δίπλα τους και να το χρησιμοποιούνε μέχρι το τέλος του τετραμήνου ... αν δεν την μάθουν μέχρι τότε θα το πάρω. Πρέπει να βάλουμε ένα deadline για να την μάθουν, δεν μπορούν να δουλεύουν σε όλο το Γυμνάσιο με σκονάκι. Αυτό, δεν κάνω κάτι διαφορετικό».*

Η Ελένη υποστηρίζει, επιπλέον, πως υπάρχουν και μαθητές οι οποίοι «δεν θέλουν να μάθουν, βλέπουν το Γυμνάσιο ως κάτι το υποχρεωτικό», τους οποίους δεν γνωρίζει πώς να διαχειριστεί: «δεν ξέρω τί θα κάνω, είναι η πρώτη χρονιά που δουλεύω σε Γυμνάσιο μετά από 10 χρόνια στο Λύκειο και θα δούμε».

Στην ίδια κατηγορία μαθητών είναι και αυτοί που δείχνουν να αδιαφορούν για την εκπαιδευτική διαδικασία «είναι κάποιοι μαθητές οι οποίοι δεν καταλαβαίνουν αλλά δεν ρωτάνε κιόλας. Δεν έχουν απορίες, δεν μπαίνουν καν στη διαδικασία της τάξης». Παρόλο που σύμφωνα με την εκπαιδευτικό «το μάθημα δεν γίνεται από μένα σαν εξέταση, ούτε

είναι μια διδασκαλία στον πίνακα, μια διάλεξη». Το χαρακτηρίζει ως μάθημα που γίνεται «καθαρά φροντιστηριακά αλλά με πολύ μεγάλο τμήμα φροντιστηρίου, κάπως έτσι να το σκεφτούμε. Μπορούν (οι μαθητές) να ρωτήσουν οτιδήποτε, ούτε εξετάζονται καθημερινά».

Τέλος, η εκπαιδευτικός υποστηρίζει ότι ελέγχει την κατανόηση των εννοιών του μαθήματος από τους μαθητές μέσω της συμμετοχής τους στο μάθημα και από τις γραπτές επιδόσεις τους σε τεστ, διαγωνίσματα και ασκήσεις. Αναφέρει, μάλιστα, χαρακτηριστικά ότι δεν βάζει ποτέ γραπτή εξέταση χωρίς να έχει προηγουμένως ενημερώσει τους μαθητές, γιατί μπορεί 'να μην έχουν διαβάσει και να μην πάρουν καλό βαθμό', κάτι που, κατά την κρίση της απαξιώνει το ρόλο μιας δοκιμασίας ως οδηγού και ταυτόχρονα μέσου ελέγχου του ποιος στόχος και σε ποιο βαθμό έχει προσεγγιστεί.

*«Με την καθημερινή παρουσία τους μέσα στην τάξη και τη συμμετοχή τους στο μάθημα. Επίσης μαζεύω τα τετράδια των μαθητών, δίνω φύλλα εργασίας, υπάρχει και το διαγώνισμα τετραμήνου και 3-4 άτυπα τεστάκια για να δω τι γίνεται. Δεν βάζω όμως ποτέ απροειδοποίητο τεστ γιατί δεν θέλω να τους πιάνω αδιάβαστους, θέλω να διαβάζουν πριν γράψουν. Δεν υπάρχει αξία για μένα να βάλω ένα τεστ και ο μαθητής να μην γράψει. Σημασία έχει να βάλω ένα τεστ, να τους πω τί να μάθουν και να δω ότι το έμαθε και ότι το κατάλαβε».*

Ο Πίνακας που ακολουθεί αποτυπώνει τα βασικά δομικά στοιχεία των απαντήσεων της 1<sup>ης</sup> συνέντευξης της Ελένης ανά ερευνητικό άξονα.

**Πίνακας 4.2** Περιεχόμενο και δομικά στοιχεία της 1ης συνέντευξης της Ελένης

<b>Ερευνητικοί Άξονες</b>	<b>Συνιστώσες</b>	<b>Χαρακτηριστικά στοιχεία</b>
<b>1<sup>ος</sup></b>  <i>Γνώσεις για το μαθηματικό περιεχόμενο</i>	Προετοιμασία της διδασκαλίας	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Πρόγραμμα σπουδών</li> <li>• Οδηγίες διδασκαλίας</li> <li>• Σχολικό εγχειρίδιο</li> <li>• Φυλλάδια ασκήσεων</li> </ul>
	Κάλυψη της 'ύλης' που προτείνεται από τις επίσημες οδηγίες και κατανόηση από τους μαθητές	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Προβλεπόμενη- διδασκόμενη 'ύλη'</li> <li>• Αδυναμία κατανόησης από όλους τους μαθητές</li> <li>• Ευελιξία στο τι θα διδαχθεί</li> </ul>
<b>2<sup>ος</sup></b>	Πρωταρχικές γνώσεις μαθητών για την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και της εξίσωσης	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 'Γνώση της πίτσας'</li> <li>• 'Έννοια του κομματιού'</li> <li>• Έννοια μεταβλητής</li> <li>• Έννοια παραμέτρου</li> <li>• Έννοια 'ζυγαριάς'</li> </ul>



<b>Γνώσεις για τη μάθηση</b>	Συχνότερες δυσκολίες-λάθη των μαθητών	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Κατασκευή γεωμετρικών οντοτήτων</li> <li>• Συμβολισμός γεωμετρικών οντοτήτων</li> <li>• Αδυναμία κατανόησης της εκφώνησης</li> <li>• Έλλειψη συνδυαστικής σκέψης</li> <li>• Δεν μελετούν θεωρία</li> </ul>
	Εμπλοκή μαθητών στην εκπαιδευτική διαδικασία	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Διαφοροποιημένη διδασκαλία</li> <li>• Διαφοροποίηση των στόχων για κάθε μαθητή ανάλογα με τις δυνατότητές του</li> <li>• Φυλλάδια διαβαθμισμένης δυσκολίας</li> <li>• Ερωτήματα στους αδύνατους μαθητές που ξέρει ότι γνωρίζουν να απαντήσουν</li> <li>• Ανάθεση επιπλέον ασκήσεων στους αδύνατους μαθητές</li> </ul>
	Ενθάρρυνση των μαθητών για ενεργή συμμετοχή	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Διάλογος</li> <li>• Προφορικές ερωτήσεις</li> <li>• Μαθητές στον πίνακα</li> <li>• Επίλυση ασκήσεων στο τετράδιο</li> </ul>
<b>3<sup>ος</sup></b>	Τρόπος επιλογής δραστηριοτήτων	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Από Α.Π. / επίσημες οδηγίες</li> <li>• Και ασκήσεις που δεν προτείνονται από τις επίσημες οδηγίες</li> </ul>
	Διδακτικές πρακτικές	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Εκμάθηση θεωρίας με τη μέθοδο της αποστήθισης</li> <li>• Επίλυση ασκήσεων</li> <li>• Κοινή μέθοδο διδασκαλίας σε όλους</li> <li>• Στους αδύνατους δίνει ένα είδος βοηθήματος εργαλείου</li> <li>• Ενθάρρυνση συμμετοχής</li> </ul>
	Έλεγχος της κατανόησης των εννοιών από τους μαθητές	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Συμμετοχή στο μάθημα</li> <li>• Γραπτές επιδόσεις</li> <li>• Μόνο προειδοποιημένη γραπτή εξέταση</li> </ul>
<b>Γνώσεις για τη διδασκαλία</b>		

### **Άξονας 1: Γνώσεις για το μαθηματικό περιεχόμενο**

Ο Αντώνης αναφέρει ότι συμβουλευεται το Αναλυτικό Πρόγραμμα για να αποφασίσει τί θα διδάξει σε κάθε τάξη, καθώς από εκεί ενημερώνεται για τους σκοπούς του μαθήματος. Αν και για το μάθημα της ημέρας του δίνεται η ελευθερία να επιλέξει τι θα διδάξει, νοιώθει δεσμευμένος από το ΠΣ κάτι που του προκαλεί άγχος.

*«Κάθε μάθημα στο ελληνικό σχολείο έχει ένα Πρόγραμμα Σπουδών, το οποίο δεν είναι υποχρεωτικό να το ακολουθήσεις κατά γράμμα αλλά είναι δεσμευτικό κατά κάποιο τρόπο. Πρέπει δηλαδή να κινείσαι στα πλαίσια αυτού του προγράμματος που το στέλνει το ΙΕΠ. Το τί θα κάνεις κάθε μέρα εξαρτάται από τον ατομικό σου προγραμματισμό, ο οποίος βέβαια γίνεται μέσα στα πλαίσια του κεντρικού προγράμματος. Όλο αυτό αν και δεν είναι υποχρεωτικό, είναι δεσμευτικό όπως προανέφερα με αποτέλεσμα να είναι αγχωτικό. Καθώς δεν μπορείς να ξεφύγεις πολύ από αυτά τα όρια που σου θέτει».*

Για την προετοιμασία της διδασκαλίας δηλώνει ότι συμβουλευεται *«πρωτίστως τα σχολικά εγχειρίδια, αλλά και άλλες πηγές. Όσο πιο καλά θέλει να είναι προετοιμασμένος ο εκπαιδευτικός τόσο περισσότερες πηγές πρέπει να συμβουλευεται. Γίνεται έτσι πιο καταρτισμένος και πιο έτοιμος για το μάθημα»*. Συνεχίζει λέγοντας ότι, όταν κρίνει το σχολικό εγχειρίδιο κατάλληλο, τότε το χρησιμοποιεί κατ' αποκλειστικότητα. Αλλά δεν βρίσκει όλα τα σχολικά εγχειρίδια κατάλληλα για τη διδασκαλία, καθώς θεωρεί ότι εμφανίζουν ασυνέχειες το ένα με το άλλο και ότι είναι αντιπαιδαγωγικά.

*«(...) Θέλω να πω ότι αν το εγχειρίδιο μιας τάξης είναι κατάλληλο για το τμήμα που κάνουμε μάθημα το παίρνουμε σχεδόν σαν αποκλειστικό και απόλυτο μέσο διδασκαλίας. (...) Παίρνοντας υπόψιν ότι δεν έχουν επιστημονικά λάθη, είναι όμως αντιπαιδαγωγικά γιατί δεν λαμβάνουν υπόψιν τον ίδιο το μαθητή. Κάνουν άλματα γνώσεων, το ένα κεφάλαιο με το άλλο δεν συμβαδίζει καθόλου, το ένα βιβλίο με το άλλο (της επόμενης τάξης) δεν συμβαδίζει καθόλου, δεν μπορούν να συνδυαστούν. (...) Βέβαια, αυτό που λέω ότι δεν υπάρχει αυτή η σειρά και αυτή η ομαλή μετάβαση από το ένα εγχειρίδιο στο άλλο παρατηρείται και από τάξη σε τάξη αλλά περισσότερο από βαθμίδα σε βαθμίδα, τα βιβλία της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας δεν έχουν καμία μα καμία σχέση το ένα με το άλλο, ενώ θα έπρεπε το ένα να είναι σε σειρά με το άλλο».*

Ο Αντώνης, προσπαθώντας να δώσει ένα παράδειγμα της ασυνέχειας που ανέφερε προηγουμένως, σχολιάζει και τις οδηγίες διδασκαλίας στις οποίες *«υπάρχουν τρομερές τέτοιες αστοχίες οι οποίες δεν είναι του τελευταίου χρόνου αλλά δεκαετιών»*.

*«Δεν ξέρω, αυτήν τη στιγμή δεν μου έρχεται κάτι συγκεκριμένο αλλά είναι σχεδόν ανέκδοτο μεταξύ των εκπαιδευτικών που διδάσκουν, είναι μια ιστορία που τη λένε και γελάνε πικρά, οι οδηγίες του ΙΕΠ. Για παράδειγμα στην Α Γυμνασίου λένε αυτήν την παράγραφο κάντε την περιληπτικά γιατί είναι δύσκολη για τα παιδιά της πρώτης, θα την ξανακάνουν στη δεύτερα ή στην τρίτη τάξη. Οπότε δεν του δίνουμε και πολλή σημασία και περνάμε στα άλλα. Όταν την ίδια έννοια την βρίσκουμε στη δεύτερα τάξη, το ΙΕΠ λέει*

ότι αυτό οι μαθητές το έχουν διδαχθεί στην πρώτη τάξη οπότε δεν χρειάζεται να επιμείνετε πολύ τα ξέρουν τα παιδιά, οπότε βάση αυτού μπορείτε να χτίσετε τις επόμενες γνώσεις. Πώς να γίνει όμως αυτό από τη στιγμή που αυτές οι γνώσεις που ήταν πρωταρχικές και έπρεπε να διδαχτούν στην πρώτη τάξη μας είπαν να μην τις δώσουμε σημασία γιατί θα τις διδαχτούν στη δεύτερα, και στη δεύτερα να μην τις δώσουμε σημασία γιατί έχουν διδαχθεί στην πρώτη».

Ο εκπαιδευτικός αναφέρει ότι αν καλυφθεί αλλά και σε ποιόν βαθμό και με ποιόν τρόπο (ουσιαστικό ή μη) η προβλεπόμενη ύλη εξαρτάται αποκλειστικά από τις δυνατότητες των μαθητών μιας τάξης.

«Το αν καλυφτεί η ύλη εξαρτάται από το τί παιδιά έχεις απέναντί σου. Υπάρχουν τμήματα με τα οποία μπορούμε να δουλέψουμε πολύ καλά και να προχωράμε την ύλη χωρίς πρόβλημα, υπάρχουν όμως και τμήματα όπου τα παιδιά δεν καταλαβαίνουν, έχουν τρομερές ελλείψεις. Οπότε κάθε φορά προσαρμοζόμαστε για να καλυφθεί αυτή η ύλη. Το σχολικό έτος χωρίζεται σε τετράμηνα, το καθένα έχει και υποχρεωτικό διαγώνισμα. Έτσι προσπαθούμε να προσαρμόσουμε την ύλη κόβοντάς την σε κομμάτια και αποφασίζοντας τί θα διδάξουμε σε κάθε τετράμηνο. Μπορεί η ύλη να βγει σωστά, να την κατανοήσουν οι μαθητές και να χαρούν και αυτοί και εμείς ως εκπαιδευτικοί, αλλά όταν το τμήμα είναι «προβληματικό» η ύλη δεν βγαίνει, απλώς γράφεται στο βιβλίο ύλης ότι την κάναμε, χωρίς να την έχουμε κάνει».

Επίσης τονίζει ότι η διάρκεια μιας διδακτικής ώρας δεν είναι αρκετή, καθώς και ότι η προβλεπόμενη ύλη σε ορισμένες τάξεις είναι υπερβολική με αποτέλεσμα να αναγκάζονται οι εκπαιδευτικοί να διδάσκουν επιλεκτικά κάποια κεφάλαια που θεωρούν περισσότερο σημαντικά από τα υπόλοιπα. Ως λύση αυτού του προβλήματος υποστηρίζει 'την ελάττωση της διδακτέας ύλης ή αύξηση των ωρών διδασκαλίας των μαθηματικών'.

«Δηλαδή, το να πεις στα παιδιά μέσα σε 40' πώς γίνεται η διαίρεση, για παράδειγμα, και να κάνεις και δυο παραδείγματα στον πίνακα γίνεται αλλά δεν καλύπτεται η έννοια της διαίρεσης, οι μαθητές δεν θα μάθουν, απλώς θα δουν πώς γίνεται. Ας πάρουμε την Γ λυκείου για παράδειγμα, η ύλη εκεί πέρα είναι πάρα πολύ για να βγει μέσα σε ένα σχολικό έτος, κι όμως όλα τα Λύκεια την τελειώνουν. Ενώ ξέρουμε όλοι ότι από τον Απρίλιο, Μάιο τα παιδιά της Γ Λυκείου δεν πατάνε στο σχολείο γιατί πηγαίνουν στα φροντιστήρια, παρόλα αυτά η ύλη "τελειώνει". Επειδή η ύλη που προτείνεται από το πρόγραμμα σπουδών είναι πολλές φορές πάρα πολύ μεγάλη, προσπαθούμε από μόνοι μας να κάνουμε εκπτώσεις. Δηλαδή, να μάθουμε στα παιδιά αυτές τις έννοιες που θα τους είναι απαραίτητες για να ακολουθήσουν και να μάθουν τα επόμενα. Κάποια άλλα που τα θεωρούμε ότι είναι δευτερεύοντα, δηλαδή ότι δεν θα χρειαστούν άμεσα στις επόμενες τάξεις, τα αφήνουμε στην άκρη. Αυτό είναι όπως προανέφερα, έκπτωση, δηλαδή φτώχεια, γιατί για να αντιληφθεί ο μαθητής καλά την ουσία των μαθηματικών πρέπει να διδάσκεται τα πάντα. Όλα αυτά που έχει το σχολικό εγχειρίδιο είναι πάρα πολύ καλά, αλλά είναι πάρα πολλά για να διδαχτούν μέσα σε ένα σχολικό έτος. Στην Α Γυμνασίου η ύλη είναι καλή, αυτό που πρέπει όμως να γίνει είναι να διπλασιαστούν οι ώρες διδασκαλίας των

μαθηματικών και είμαι σίγουρος ότι όλοι οι μαθητές θα τελειώσουν την τάξη έχοντας ένα πολύ καλό επίπεδο στα μαθηματικά».

## **Άξονας 2: Γνώσεις για τη μάθηση**

Ο Αντώνης αναφέρει ότι ως εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τη συμμετοχή όλων των μαθητών. Αυτό βέβαια δεν είναι πάντα εύκολο, καθώς σύμφωνα με τον ίδιο, όταν προσπαθεί να κάνει τη διδασκαλία προσιτή στους αδύνατους μαθητές αυτόματα απομακρύνεται από τους δυνατούς μαθητές και το αντίστροφο.

*«(...) Όταν έχουμε καλούς μαθητές προσπαθούμε να ανεβάσουμε το επίπεδο και για να κρατήσουν το ενδιαφέρον τους για το μάθημα λέμε και κάτι παραπάνω, οι αδύνατοι όμως την ίδια στιγμή δεν καταλαβαίνουν, δεν μπορούν να συνεχίσουν και αδιαφορούν. Αν πάμε να πλησιάσουμε τους αδύνατους μαθητές, για να τους βοηθήσουμε πραγματικά θα πρέπει να αρχίσουμε να εξηγούμε από την αρχή τι είναι ο τροχός, ποιο είναι το Α και ποιο το Β ανεξάρτητα σε ποιά τάξη βρίσκονται. Και αν θέλουμε να τους βοηθήσουμε πραγματικά, αυτό ακριβώς πρέπει να κάνουμε, να αρχίσουμε από τα βασικά. Τότε όμως χάνουμε τους καλούς μαθητές, οι οποίοι βρίσκουν το μάθημα ανούσιο και βαρετό.(...)».*

Για να ενθαρρύνει την ενεργή συμμετοχή όλων των μαθητών στο μάθημα, ο εκπαιδευτικός αναθέτει στους δυνατούς μαθητές την επίλυση των αποριών των συμμαθητών τους. Υποστηρίζει έτσι ότι μέσω της επικοινωνίας που αναπτύσσεται μεταξύ τους διευκολύνεται και η διαδικασία της μάθησης.

*«Εγώ εδώ και καιρό προσπαθώ από την αρχή της χρονιάς κάποιες απορίες των αδύναμων μαθητών να τις επιλύσω σηκώνοντας στον πίνακα ή δίνοντας τον λόγο σε μέτριους ή καλούς μαθητές. Κάνοντας έτσι τους καλούς μαθητές δασκάλους των αδύναμων. Με αποτέλεσμα να νοιώθουν και οι καλοί μαθητές ότι κάτι κάνουν, να νοιώθουν αυτήν την καταξίωση και από την άλλη μεριά οι αδύνατοι μαθητές να καταλαβαίνουν ίσως καλύτερα αυτό που ρώτησα γιατί μεταβιβάζεται από έναν συνομήλικό τους. Αυτό μου αρέσει και είναι κάτι πολύπλευρο, παίρνουν κάτι περισσότερο από απλές γνώσεις μαθηματικών ή φυσικής μέσω της συνδιαλλαγής μεταξύ τους. Αυτό όμως δεν μπορεί να γίνεται κάθε φορά, δεν μπορεί να γίνει πανάκεια, ούτε μπορεί να γίνεται για όλες τις ερωτήσεις. Δεν μπορούμε να κάνουμε τους καλούς μαθητές δασκάλους σε όλα τα μαθήματα, τι θα μάθουν τότε; Πρέπει και οι ίδιοι να διδαχτούν».*

Αναφερόμενος στα πιο συχνά λάθη των μαθητών του στα κλάσματα, ο Αντώνης υποστηρίζει ότι δυσκολεύονται στην εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων. Επίσης, αναφέρει ότι τα λάθη διαφοροποιούνται από μαθητή σε μαθητή, έχοντας ως κοινή βάση την αντιμετώπιση των μαθηματικών ως «ξερούς αριθμούς» αποκομμένους από την πραγματικότητα. Αυτήν τη ψυχρή εικόνα που έχουν οι μαθητές για τα μαθηματικά την προσδίδει στον πολύ περιορισμένο χρόνο διδασκαλίας που δεν επιτρέπει στους μαθητές να εμπεδώσουν την καινούρια γνώση. Καταλήγει λέγοντας ότι λόγω περιορισμένου χρόνου επιλέγει με ποιους μαθητές θα κάνει μάθημα και ποιους θα αφήσει στην τύχη τους (!)

«Όποια παράγραφο και αν πάρουμε νομίζω θα πούμε τα ίδια. Οι μαθητές δυσκολεύονται σε πολλά, ανάλογα με τον μαθητή. Υπάρχουν μαθητές που ενώ έχουν διδαχθεί τα κλάσματα στο Δημοτικό και ενώ έχουμε αφιερώσει και μαζί αρκετά μαθήματα, δεν μπορούν ακόμα να ξεχωρίσουν τον αριθμητή από τον παρονομαστή. Δεν έχουν ξεκάθαρο τι δείχνει το ένα και τι το άλλο. (...) Οι περισσότεροι μαθητές ωστόσο βλέπουν τα μαθηματικά ως ξερούς αριθμούς, δηλαδή μπορεί να καταλαβαίνουν ότι δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα επειδή τα γινόμενα χιαστί είναι ίσα αλλά από εκεί και πέρα, αν τους ρωτήσεις αν τα  $\frac{2}{3}$  ενός χρηματικού ποσού είναι ίσα με τα  $\frac{3}{6}$ , τότε δυσκολεύονται γιατί ακούν χρηματικό ποσό και ξεχνούν τα ισοδύναμα κλάσματα ή έχουν την εντύπωση ότι τα ισοδύναμα κλάσματα είναι εντελώς ξένα με το χρηματικό ποσό. Θέλω να πω ότι πολλά παιδιά δεν έχουν κατανοήσει ότι τα μαθηματικά έχουν άμεση σχέση με την καθημερινότητά τους και με τον κόσμο γύρω τους. Και αυτό συμβαίνει γιατί όλα τα μαθήματα γίνονται πολύ γρήγορα και δεν προλαβαίνουν οι μαθητές να κατανοήσουν τις έννοιες. (...) Είναι αδύνατο να προλάβουμε. Οπότε έρχεται η στιγμή που πρέπει να επιλέξουμε με ποιους μαθητές θα κάνουμε μάθημα και ποιους θα αφήσουμε».

Ο Αντώνης υποστηρίζει ότι οι μεταβάσεις από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο και από το Γυμνάσιο στο Λύκειο δεν γίνονται ομαλά. Αποτέλεσμα αυτού όπως αναφέρει, πολλοί μαθητές για να ανταπεξέλθουν στις αυξημένες καινούριες απαιτήσεις να καταφεύγουν σε υποστηρικτικά μαθήματα εκτός του σχολικού ωραρίου.

«Τα παιδιά παθαίνουν ένα σοκ όταν έρχονται από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Το σκαλί μεταξύ δημοτικού και Γυμνασίου είναι πάρα πολύ υψηλό και δύσκολο να το ανέβουν με αποτέλεσμα πολλοί μαθητές να χάνονται. Όπως πολύ υψηλό σκαλί υπάρχει και μεταξύ Γυμνασίου και λυκείου. Μπαίνουν στην πρώτη Γυμνασίου ή στην πρώτη λυκείου τα παιδιά, και οι καθηγητές που τους υποδέχονται έχουν την εντύπωση ότι αυτά τα παιδιά δεν πήγαν ποτέ σχολείο. Έχουμε στην πρώτη Γυμνασίου τη συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών να μην ξέρουν τις τέσσερις πράξεις και την προπαίδεια. Αυτή η ασυνέχεια αποκαρδιώνει τα παιδιά και τα κάνει να πιστεύουν ότι δεν μπορούν να συνεχίσουν το σχολείο και τα κάνει αδιάφορους τελικά. Ίσως εδώ πέρα να πρέπει να το προσέξουμε πάρα πολύ γιατί τελικά για να καλυφθούν αυτά τα πολύ υψηλά σκαλοπάτια που υπάρχουν μεταξύ δημοτικού-Γυμνασίου και Γυμνασίου-λυκείου οι μαθητές πηγαίνουν σε φροντιστήρια».

### **Άξονας 3: Γνώσεις για τη διδασκαλία**

Σχετικά με τις μαθηματικές δραστηριότητες και τον τρόπο που τις επιλέγει, ο Αντώνης αναφέρει ότι πιο συχνά επιλέγει από το σχολικό εγχειρίδιο παρά από άλλες πηγές. Αρχικά αναφέρει τη σύντομη διάρκεια μιας διδακτικής ώρας ως παράγοντα αυτής της επιλογής ενώ αργότερα κάνει λόγω για αδιαφορία και κούραση των μαθητών κατά την αξιολόγησή τους. Ωστόσο, οι δραστηριότητες που επιλέγει εκτός του σχολικού εγχειριδίου φροντίζει να είναι διαβαθμισμένης δυσκολίας και να συνδέουν την επιστήμη των μαθηματικών με την καθημερινότητα των μαθητών.

*«Λόγω έλλειψης χρόνου οι περισσότερες ασκήσεις είναι από το σχολικό βιβλίο. Προσπαθώ βέβαια με τις ασκήσεις που δίνω για το στίτι να καλύψω αυτό που λείπει από τα παιδιά. Προσπαθώ να ενεργοποιήσω τους μαθητές με τις εργασίες που τους αναθέτω και να τους αναγκάσω να συνδυάσουν τα μαθηματικά με την καθημερινότητά τους έτσι ώστε να δουν ότι τα μαθηματικά δεν είναι κάτι το ξένο. Επίσης οι εργασίες πρέπει να είναι διαβαθμισμένης δυσκολίας ώστε όλοι οι μαθητές να τις φτάσουν μέχρι ένα επίπεδο. Δίνω ασκήσεις και από το σχολικό εγχειρίδιο αλλά και εκτός αυτού. Στη δεύτερη περίπτωση είναι ασκήσεις που έρχονται να δώσουν κάτι καινούριο στους μαθητές. Γενικά δεν δίνω πολλές ασκήσεις εκτός του σχολικού βιβλίου. Και αυτό γιατί κάθε φορά που δίνω υπάρχουν οι πολύ καλοί μαθητές που τις φέρνουν λυμένες και οι άλλοι που αδιαφορούν ή αδυνατούν να τις κάνουν. Έτσι, όταν παρουσιάζαμε τις ασκήσεις αυτές στον πίνακα οι περισσότεροι μαθητές δεν τις καταλάβαιναν, οπότε άρχισα να τις βλέπω στο διάλειμμα και όλο αυτό λειτουργούσε ως επιβράβευση για τους καλούς μαθητές. Κατάλαβα όμως ότι ακόμα και αυτοί οι καλοί μαθητές άρχισαν να κουράζονται και να μην θέλουν να συμμετέχουν».*

Ο Αντώνης, μιλώντας για τον τρόπο που διαχειρίζεται τις απαντήσεις των μαθητών, κάνει λόγο για κατηγορίες λαθών που έχουν να κάνουν με το γνωσιακό επίπεδο του μαθητή και αναφέρει ότι ανάλογα με το λάθος που υπάρχει ενεργεί και διαφορετικά. Αναφέρει ότι υπάρχουν απαντήσεις 'στην τύχη' από τους αδιάφορους μαθητές στους οποίους αρκείται λέγοντας να διαβάζουν περισσότερο. Σε λανθασμένες απαντήσεις που θεωρεί όμως ότι δημιουργούνται κατόπιν κάποιας σκέψης, αναδιατυπώνει την αρχική του ερώτηση με άλλον τρόπο προσδοκώντας τη σωστή απάντηση.

*«Καταρχάς κάνουμε διαβάθμιση του πόσο λάθος είναι μια απάντηση που δίνει ο μαθητής. Δεν είναι όλα τα λάθη της ίδιας μορφής. Λανθασμένα απαντάνε και οι καλοί μαθητές πολλές φορές αλλά και οι αδιάφοροι μαθητές. Οι αδιάφοροι απαντάνε στην τύχη, έτσι μόνο και μόνο για να πουν κάτι, εκεί πώς να το διαχειριστείς. Εξαρτάται και από την στιγμή, κάνεις επίκληση στο φιλότιμό του, να διαβάξει πιο πολύ, να προσέχει στην τάξη γιατί αυτά που λέει είναι τελείως ξένα με αυτό που ρωτήθηκε. Αν τώρα είναι λάθος λογικής ή λάθος λόγω κάποιας παρανόησης ή λόγω έλλειψης γνώσεων κλπ τότε με μια δεύτερη ερώτηση που θα έχει το ίδιο νόημα αλλά θα την αποδώσω διαφορετικά, προσπαθώ να δώσω μια δεύτερη ευκαιρία και να εκμαιεύσω τη σωστή απάντηση. Αν πρόκειται για παρανόηση προσπαθώ να διδάξω και να περάσω αν γίνεται στην αντίληψή τους τη σωστή πλευρά».*

Ο εκπαιδευτικός αναφέρει ότι κάποιοι μαθητές έχουν φτωχό λεξιλόγιο κάτι που τον δυσκολεύει να κατανοήσει τις ερωτήσεις που θέτουν. Για να αποκωδικοποιήσει και να κατανοήσει καλύτερα τις ερωτήσεις των μαθητών, λαμβάνει υπόψιν όχι μόνο τα λόγια του μαθητή αλλά και ποιες μαθηματικές έννοιες έχει διδαχθεί ο μαθητής μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή ανάλογα με την ηλικία του. Κάποιες φορές οι ενέργειες του εκπαιδευτικού έχουν να κάνουν με τη συμπεριφορά του μαθητή και άλλες φορές με το να εξηγήσει πως σκέφτεται ο ίδιος για να λύσει ένα ερώτημα.

«Πολλές φορές οι μαθητές έχουν μια απορία και δεν μπορούν να την εκφράσουν σωστά είτε επειδή έχουν φτωχό λεξιλόγιο, είτε επειδή διστάζουν να μιλήσουν. Γι' αυτό πρέπει ως εκπαιδευτικοί να μην ακούμε απλά τί ρωτάει ο μαθητής αλλά να προσπαθούμε να καταλάβουμε τί εννοεί με βάση τις γνώσεις του και γιατί μας έκανε αυτήν την ερώτηση. Υπάρχουν μαθητές που κάνουν μια ερώτηση απλά για να την κάνουν, επειδή τους λένε από το σπίτι να σηκώνουν το χέρι και να ρωτάνε. Χωρίς να περιμένουν απάντηση και αρχίζουν να μιλάνε με τον διπλανό τους. Σε αυτές τις περιπτώσεις δεν διαχειριζόμαστε την ερώτηση σε γνωσιακό επίπεδο αλλά σε θέμα συμπεριφοράς του μαθητή. Είναι σπάνιο ιδίως στο Γυμνάσιο να πιαστεί ένας καθηγητής προετοιμαστος στην ερώτηση ενός μαθητή, λόγω εμπειρίας κυρίως είναι προετοιμασμένος. Μπορεί παρόλα αυτά να τύχει να μην μπορείς για κάποιον λόγο να απαντήσεις σε μια ερώτηση, τότε πρέπει χωρίς να είναι κακό να μπεις στη θέση του μαθητή και να εξηγήσεις πώς δουλεύεις μπροστά σε κάτι άγνωστο, με ποιόν τρόπο σκέφτεσαι, ποια είναι τα δεδομένα, τα ζητούμενα, τί εργαλεία έχουμε στη διάθεσή μας».

Ο Αντώνης αναφέρει ότι ελέγχει αν και σε ποιον βαθμό οι μαθητές κατάφεραν να κατανοήσουν τις ιδέες που προσεγγίζει στο μάθημα τόσο με προφορική όσο και με γραπτή εξέταση. Πρόκειται για το κλασικό μοντέλο αξιολόγησης που περιλαμβάνει τα υποχρεωτικά διαγωνίσματα, κάποια επαναληπτικά τεστ και τις προφορικές ερωτήσεις του καθηγητή προς τους μαθητές.

«Με την προφορική εξέταση καθ' όλη τη διάρκεια της διδακτικής ώρας, τόσο για τα προηγούμενα όσο και για τις έννοιες του μαθήματος της ημέρας. Με την καθημερινή λοιπόν επικοινωνία με τους μαθητές, με γραπτά τεστ στο τέλος κάθε ενότητας αλλά και με το διαγώνισμα του τετραμήνου. Πρέπει λοιπόν η αξιολόγηση να γίνεται τόσο προφορικά όσο και γραπτά γιατί έχει παρατηρηθεί σε πολλούς μαθητές να υπάρχει μια διαφοροποίηση όσον αφορά την απόδοση στις δύο αυτές μεθόδους».

Ο Αντώνης υποστηρίζει ότι πρέπει να διπλασιαστούν οι ώρες διδασκαλίας των μαθηματικών καθώς δεν του αρκούν οι ήδη υπάρχουσες για την επίλυση των αποριών που έχουν οι μαθητές και τη διδασκαλία καινούριων εννοιών. Επίσης, αναφέρει ότι πρέπει να δοθεί μεγαλύτερη έμφαση απ' ότι δίνεται στην 'πράξη', στην επίλυση ασκήσεων δηλαδή και να υπάρχει ωστόσο συνδυασμός θεωρίας και ασκήσεων.

«(...) θα έπρεπε να κάνουμε τη θεωρία και τη διάλεξή μας αλλά να μην τρέχουμε. Και εκτός αυτού, να μας διπλασιάσουν τις ώρες έτσι ώστε να έχουμε μετά χρόνο για εμπέδωση αυτών των πραγμάτων που είπαμε θεωρητικά. (...) Θα διαθέσουμε δηλαδή μια ώρα για θεωρία και 1-2 ώρες για ασκήσεις και μετά θα πάμε παρακάτω. Προβλέπει το ΠΣ να κάνουμε ένα σύνολο ασκήσεων και δραστηριοτήτων, καλό στα χαρτιά αλλά στην πράξη πώς γίνεται; Αν ένας μαθητής ενώ είμαστε για παράδειγμα στο Πυθαγόρειο θεώρημα κολλήσει κάπου, δεν καταλαβαίνει πχ γιατί 52 κάνει 25 ή ποιά είναι η υποτείνουσα ή κάτι πιο σημαντικό τότε χρειάζομαι 1-2 ώρες για να του εξηγήσω τις απορίες του και να τα κατανοήσει. Πριν μπω στη δημόσια εκπαίδευση ήμουν σε φροντιστήρια, και εκεί αυτό που κάνουν είναι να προσπαθούν οι μαθητές τους να κατανοήσουν κάποια πράγματα, κάνοντας πράξη-πράξη-πράξη. Μπορούμε να ενώσουμε αυτό που γίνεται σε μια σχολική

τάξη και αυτό που γίνεται σε μια τάξη φροντιστηρίου; Τότε θα έχουμε ένα πολύ καλό αποτέλεσμα, αλλά όχι χωριστά, αυτό που γίνεται τώρα χωριστά στο σχολείο και στο φροντιστήριο, να γίνει εξολοκλήρου στο σχολείο. Και για να γίνει αυτό χρειάζεται περισσότερος χρόνος διδασκαλίας».

Ο Πίνακας 4.3 που ακολουθεί αποτυπώνει τα βασικά δομικά στοιχεία των απαντήσεων της πρώτης συνέντευξης του Αντώνη ανά ερευνητικό άξονα.

**Πίνακας 4.3** Περιεχόμενο και δομικά στοιχεία της 1ης συνέντευξης του Αντώνη

Ερευνητικοί Άξονες	Συνιστώσες	Χαρακτηριστικά στοιχεία
<b>1<sup>ος</sup></b> <i>Γνώσεις για το μαθηματικό περιεχόμενο</i>	Προετοιμασία της διδασκαλίας	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Σχολικό εγχειρίδιο, κατ' αποκλειστικότητα όταν θεωρείται κατάλληλο</li> <li>• Πρόγραμμα σπουδών</li> <li>• Οδηγίες διδασκαλίας</li> <li>• Φυλλάδια ασκήσεων</li> <li>• Διαδίκτυο</li> </ul>
	Κάλυψη της 'ύλης' που προτείνεται από τις επίσημες οδηγίες και κατανόηση από τους μαθητές	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Προβλεπόμενη- διδασκόμενη 'ύλη'</li> <li>• Υπερβολική σε ορισμένες τάξεις</li> <li>• Αδυναμία κατανόησης από όλους</li> <li>• Ευελιξία στο τι θα διδαχθεί</li> </ul>
<b>2<sup>ος</sup></b> <i>Γνώσεις για τη μάθηση</i>	Πρωταρχικές γνώσεις μαθητών για την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 'Γνώση της πίτσας'</li> <li>• Έννοια του κομματιού'</li> </ul>
	Πιο συχνές δυσκολίες-λάθη των μαθητών	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Αδυναμία εννοιολογικής κατανόησης του κλάσματος</li> <li>• Έλλειψη συνδυαστικής σκέψης</li> <li>• Προβληματική πορεία μετάβασης από το Δημοτικό σχολείο στο Γυμνάσιο</li> </ul>
	Εμπλοκή μαθητών στην εκπαιδευτική διαδικασία	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Προφορικές ερωτήσεις κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας</li> <li>• Ερωτήματα στους αδύνατους μαθητές που είναι σε θέση να απαντήσουν</li> </ul>



		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ανάθεση του ρόλου του δασκάλου στους δυνατούς μαθητές, για να λύσουν τις απορίες των αδύναμων</li> </ul>
	Ενθάρρυνση των μαθητών για ενεργή συμμετοχή	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Διάλογος</li> <li>• Προφορικές ερωτήσεις</li> <li>• Μαθητές στον πίνακα</li> <li>• Επίλυση ασκήσεων στο τετράδιο</li> </ul>
3 <sup>ος</sup>	Τρόπος επιλογής δραστηριοτήτων	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Α.Π. / Επίσημες οδηγίες</li> <li>• Από σχολικό εγχειρίδιο κατά κύριο λόγο, εξαιτίας της σύντομης διάρκειας μιας διδακτικής ώρας</li> <li>• Εξωσχολικές δραστηριότητες διαβαθμισμένης δυσκολίας που συνδέουν τα μαθηματικά με την καθημερινότητα των μαθητών</li> </ul>
	Διδακτικές πρακτικές	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Επιλογή των μαθητών που θα εμπλακούν και αυτών που θα αφεθούν στην τύχη τους</li> <li>• Έμφαση στην επίλυση ασκήσεων παρά στη θεωρία</li> <li>• Συνδυασμός θεωρίας-ασκήσεων</li> </ul>
	Έλεγχος της κατανόησης των εννοιών από τους μαθητές	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Συμμετοχή στο μάθημα</li> <li>• Γραπτές και προφορικές επιδόσεις</li> <li>• Κλασικό μοντέλο αξιολόγησης (διαγώνισμα, τεστ, προφορικές ερωτήσεις)</li> </ul>
	Διαχείριση του λάθους	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Αναδιατύπωση της αρχικής ερώτησης με άλλον τρόπο, όταν δημιουργούνται κατόπιν κάποιας σκέψης</li> <li>• Συμβουλή για περισσότερη μελέτη σε 'τυχαίες' απαντήσεις</li> <li>• Εξήγηση 'πώς θα σκεφτόμουν για να απαντήσω'</li> </ul>
<b>Γνώσεις για τη διδασκαλία</b>		

#### 4.4.2β Δεύτερη συνέντευξη

(i) Ελένη (2<sup>η</sup> συνέντευξη)

#### Άξονας 1: Γνώσεις για το μαθηματικό περιεχόμενο

Η εκπαιδευτικός, θέλοντας να εξηγήσει τί είδους ευελιξία υιοθετεί στη διδασκαλία των μαθηματικών, αναφέρει ότι μερικές φορές διδάσκει κάποιες έννοιες νωρίτερα ή αργότερα από ό,τι προτείνουν οι επίσημες οδηγίες διδασκαλίας. Αυτό το κάνει καθώς υποστηρίζει ότι οι γνώσεις των μαθητών δεν είναι πάντα επαρκείς για την επίλυση των δραστηριοτήτων του σχολικού εγχειριδίου, αν πρώτα δεν διδαχθούν έννοιες που εμφανίζονται νωρίτερα σε αυτό. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι οι εξισώσεις στην Α΄ Γυμνασίου και οι τετραγωνικές ρίζες στη Β΄ Γυμνασίου.

*«Στην Α Γυμνασίου, το 5ο κεφάλαιο “τα ποσοστά” διδάσκονται σύμφωνα με τις οδηγίες διδασκαλίας πριν από το 4ο κεφάλαιο “τις εξισώσεις”. Επομένως εγώ μπήκα στα ποσοστά, όμως για να λύσουμε ορισμένες ασκήσεις χρειάζονται εξισώσεις. Οπότε, τελειώνω τις ασκήσεις στα ποσοστά που μπορούν να λύσουν οι μαθητές με τη θεωρία αυτού του κεφαλαίου, μετά διδάσκω τις εξισώσεις, και επιστρέφω στα ποσοστά για να κάνω τις ασκήσεις που απόμειναν. Για παράδειγμα, στην Α Γυμνασίου στα ποσοστά, υπάρχει μια άσκηση που λέει ότι “ένα προϊόν κοστίζει αρχικά 100 ευρώ, μετά από έκπτωση 40%, ποια είναι η τελική του τιμή;” Αυτό λύνεται πολύ εύκολα και χωρίς εξισώσεις, αν όμως θέλουμε να βρούμε την αρχική τιμή ενός προϊόντος αν ξέρουμε ότι η έκπτωση ήταν 45% και η τελική του τιμή είναι 120 ευρώ αυτό είναι πολύ δύσκολο να λυθεί με ποσοστά χωρίς τη χρήση εξισώσεων. Αυτό εννοώ ότι υπάρχει ευελιξία. Προσαρμόζω την ύλη ώστε να την κάνω όσο το δυνατόν πιο κατανοητή για τα παιδιά. Ένα άλλο παράδειγμα, για τη Β Γυμνασίου, είναι το Πυθαγόρειο θεώρημα (Π.Θ.) και οι τετραγωνικές ρίζες. Τελειώνουμε τις εξισώσεις, και μπορεί να πούμε ότι δεν μπαίνουμε στο Π.Θ., συνεχίζουμε με τις τετραγωνικές ρίζες και μετά μπαίνουμε Π.Θ.»*

Η Ελένη εξηγεί ότι είναι σίγουρη ότι θα καλύψει την ύλη μέχρι το τέλος της χρονιάς καθώς δεν ακολουθάει τον προτεινόμενο, από τις επίσημες οδηγίες, χρόνο διδασκαλίας του κάθε κεφαλαίου του σχολικού εγχειριδίου και αφιερώνει όσο χρόνο θεωρεί η ίδια κατάλληλο για τη διδασκαλία μιας έννοιας. Επίσης, ενώ αναφέρει ότι θεωρεί όλη την ‘ύλη’ σημαντική και απαραίτητη για την πορεία του μαθητή, αναφέρει χαρακτηριστικά ότι δεν επιδιώκει όλοι οι μαθητές να φτάσουν στο επιθυμητό επίπεδο γνώσεων και αφήνει κάποιους να ανταπεξέλθουν μόνοι τους.

*«Εγώ δεν ακολουθώ αυτό που λεν οι οδηγίες για το πόσες ώρες πρέπει να αφιερώσουμε σε κάθε κεφάλαιο, αλλά ξέρω από την αρχή της χρονιάς ποια είναι η ύλη, τι είναι εκτός σε κάθε κεφάλαιο και έτσι υπολογίζω τον χρόνο μου. Για μένα που δούλευα σε Λύκειο δεν είναι δύσκολο να καλύψω την ύλη του Γυμνασίου, δεν μπορώ βέβαια να περιμένω τους αδύνατους μαθητές να μάθουν την προπαίδεια για να προχωρήσω παρακάτω, γι’ αυτό και τους δίνω αυτό το “σκονάκι” και κάθονται και την διαβάζουν μόνοι τους, δεν μπορώ να περιμένω όλα τα παιδιά να μάθουν να λύνουν προβλήματα με εξισώσεις στη Β γυμνασίου, προχωράω. Η ύλη πρέπει να βγει οπότε προχωράω σύμφωνα με το Α.Π. και βγάζω την ύλη. Στο τέλος αφήνω πάντα ένα δεκαπενθήμερο για επανάληψη, όπου δίνω φυλλάδια προσομοίωσης εξετάσεων, εξηγώντας πώς πρέπει να τα λύνουν. Η ύλη πάντως πρέπει να βγει γιατί χρειάζονται όλα παρακάτω».*

Η εκπαιδευτικός θεωρεί ότι για να είναι ένας μαθητής της Α΄ Γυμνασίου έτοιμος ώστε να μπορέσει να συνεχίσει στην επόμενη τάξη, θα πρέπει να γνωρίζει ‘τέλεια’ την προπαίδεια. Επίσης, άλλες σημαντικές μαθηματικές γνώσεις που θα πρέπει να έχει ένας

μαθητής τελειώνοντας την Α΄ Γυμνασίου είναι η γνώση των τεσσάρων πράξεων μεταξύ κλασμάτων και 'θετικών-αρνητικών' αριθμών, οι ιδιότητες των δυνάμεων, καθώς και η χάραξη και ονομασία ευθειών, ευθυγράμμων τμημάτων και σημείων. Ενώ θεωρεί δευτερεύουσας σημασίας τη συμμετρία και την κατασκευή μεσοκαθέτου σε ένα τρίγωνο.

*«Για να μπει στην Α΄ Γυμνασίου πρέπει να ξέρει προπαίδεια, άρα αν δεν την ξέρει θα πρέπει να την μάθει τέλεια. Επίσης, θα πρέπει να μάθει να κάνει πράξεις με κλάσματα και για να μπορέσει να συνεχίσει και στις επόμενες τάξεις θα πρέπει να μάθει καλά το 7ο κεφάλαιο, 'θετικούς-αρνητικούς αριθμούς' και πράξεις μεταξύ αυτών. Θα χρειαστεί επίσης ιδιότητες δυνάμεων και στη Γεωμετρία θα πρέπει να ξέρει οπωσδήποτε να κατασκευάζει ευθ. τμήματα, ευθείες, σημεία και να γράφει τα σημεία με κεφαλαίο γράμμα, τις ευθείες με μικρά. Να ξέρει τι είναι η απόσταση σημείου από ευθεία και σημείου από σημείο, τη συμμετρία όχι τόσο ούτε την κατασκευή μεσοκαθέτου».*

Την ιδιαίτερη σημασία που έδωσε η εκπαιδευτικός στην έννοια του κλάσματος κατά την 1η μας συνάντηση, την αποδίδει στο γεγονός ότι συνδέεται και με άλλες μαθηματικές έννοιες, όπως τα ποσοστά και οι δεκαδικοί αριθμοί. Κυρίως όμως ισχυρίζεται ότι οι μαθητές πρέπει να μαθαίνουν 'αυτολεξεί' τους ορισμούς και αυτός είναι ο λόγος που αφιέρωσε αρκετό χρόνο σε αυτήν την έννοια.

*«Εννοούσα ότι πρέπει να δώσουν έμφαση στον ορισμό του κλάσματος. Ένας ορισμός πρέπει να λέγεται αυτολεξεί όπως τον δίνει το βιβλίο, γι' αυτό κι εγώ ασχολήθηκα πάρα πολύ με τη θεωρία στα κλάσματα, ίσως να είναι από τις πρώτες θεωρίες που μαθαίνουν καλά τα παιδιά. Επίσης, τα κλάσματα συνδέονται και με άλλα κεφάλαια, όπως τα ποσοστά και τους δεκαδικούς αριθμούς. Σύμφωνα με τις οδηγίες θα πρέπει να αφιερώσουμε 2 ώρες για να καταλάβουν οι μαθητές ότι το κλάσμα είναι δεκαδικός αριθμός και το αντίστροφο».*

Σε ερώτηση για το ποιες μαθηματικές γνώσεις πιστεύει ότι θα έπρεπε οπωσδήποτε όλοι οι μαθητές να γνωρίζουν με την αποφοίτησή τους από το Γυμνάσιο, παραθέτει ορισμένες μαθηματικές ιδέες από τα πεδία της αριθμητικής-άλγεβρας, της γεωμετρίας και των στοχαστικών μαθηματικών, με κριτήριο οργάνωσης την αναγκαιότητά τους για το Λύκειο: *«θα πρέπει να μάθουν σίγουρα πράξεις με ρητούς αριθμούς, εξισώσεις και μεταβλητές, μονώνυμα, πολώνυμα και πράξεις αυτών και οπωσδήποτε ταυτότητες. Παραγοντοποίηση όχι τόσο πολύ, αλλά να ξέρουν τις τέσσερις βασικές ομάδες παραγοντοποίησης, καθώς και δευτεροβάθμιες εξισώσεις γιατί στην Α΄ Λυκείου τις θεωρούν γνωστές και προχωράνε σε εξισώσεις με συντελεστές παραμέτρους. Τα συστήματα όχι τόσο πολύ γιατί δεν πολυ-χρειάζονται στο Λύκειο. Θα πρέπει επίσης να γνωρίζουν και στοχαστικά μαθηματικά, αυτά, δεν νομίζω κάτι άλλο, τα υπόλοιπα επαναλαμβάνονται στο Λύκειο».*

## **Άξονας 2: Γνώσεις για τη μάθηση**

Όσον αφορά τον τρόπο που διδάσκονται τα μαθηματικά στο Δημοτικό Σχολείο, η εκπαιδευτικός είναι ιδιαίτερα επικριτική. Αναφέρει ότι διαφέρει ανάλογα με τον

δάσκαλο. Κάποιοι δάσκαλοι δεν γνωρίζουν καθόλου μαθηματικά, ενώ αυτοί που γνωρίζουν εστιάζουν στην εκτέλεση αριθμητικών πράξεων και όχι στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης του μαθητή, ενώ όλοι βαθμολογούν χαριστικά και αγνοούν τη «θεωρία».

*«Έχω δύο τμήματα που είναι από δύο διαφορετικά δημοτικά σχολεία και βλέπω ότι είναι εντελώς διαφορετικός ο τρόπος διδασκαλίας των μαθηματικών από τους δύο δασκάλους. Κάποιοι δάσκαλοι δεν ξέρουν καθόλου μαθηματικά, κάποιοι άλλοι είναι πιο προχωρημένοι ξέρουν μαθηματικά αλλά τους μαθαίνουν πιο πολύ πράξεις, όχι τόσο να σκέφτονται. Βέβαια κανένας δάσκαλος δεν κάθεται να ασχοληθεί με την προπαίδεια, κανείς δάσκαλος δεν βάζει χαμηλούς βαθμούς, όλοι έρχονται στο Γυμνάσιο με 9 και 10. Δεν μαθαίνουν επίσης καθόλου θεωρία, δεν φταίνε οι δάσκαλοι γι' αυτό, φταίει το βιβλίο του Δημοτικού που δεν έχει θεωρία».*

Η Ελένη υποστηρίζει ότι για να βελτιωθεί η διδασκαλία των μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο πρέπει όλοι οι υποψήφιοι για τις Παιδαγωγικές Σχολές να εξετάζονται στα μαθηματικά, ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό που επέλεξαν στο Λύκειο. Έτσι, θα γνωρίζουν τις βασικές έννοιες των μαθηματικών, κάτι που θεωρεί αρκετό για τη διδασκαλία των μαθηματικών, και σε συνδυασμό με το μάθημα της Νεοελληνικής Γλώσσας «ο μαθητής θα μάθει να σκέφτεται και όχι να παπαγαλίζει».

*«Αυτό που θα έπρεπε να αλλάξει είναι οι φοιτητές για να περάσουν στην ακαδημία να δίνουν μαθηματικά. Δεν μπορεί δηλαδή να περνάει κάποιος στην Ακαδημία χωρίς να γνωρίζει βασικές έννοιες μαθηματικών. Θα έπρεπε, όπως ήταν και παλιότερα, αυτοί που δηλώνουν Ακαδημία να δίνουν και μαθηματικά, όχι κατεύθυνσης, της γενικής παιδείας. Δεν σημαίνει ότι επειδή τώρα υπάρχει στο Λύκειο η τράπεζα θεμάτων ότι θα μάθουν όλοι οι μαθητές μαθηματικά, πρέπει να δίνουν εξετάσεις και στα μαθηματικά. Πρέπει, για μένα, τα μαθηματικά να είναι σε όλα τα πεδία δηλαδή σε όποια σχολή και αν θέλει να περάσει ένας μαθητής να πρέπει να δώσει Γλώσσα και μαθηματικά».*

Η εκπαιδευτικός υποστηρίζει ότι για να τα καταφέρει στα μαθηματικά ένας μαθητής του Γυμνασίου και να γίνει 'άριστος' χρειάζεται να ακολουθήσει κάποια προκαθορισμένα 'βήματα' που αντανakλούν ένα ισχυρά συμπεριφοριστικό πρότυπο μάθησης των μαθηματικών. Αρχικά, πρέπει να μάθει θεωρία, να λύσει τις ήδη λυμένες ασκήσεις που έχει καταγράψει στο τετράδιό του κατά τη διδασκαλία και τέλος να ασχοληθεί με αυτές που έχει προς επίλυση για το επόμενο μάθημα.

*«Ένας μαθητής στο Γυμνάσιο πρέπει να μαθαίνει θεωρία, το δεύτερο είναι όταν πηγαίνει στο σπίτι να ξαναλύνει τις ασκήσεις που κάναμε στην τάξη και μετά να ξεκινάει με τις ασκήσεις που έβαλε ο καθηγητής για το σπίτι. Γιατί αν δεν μάθει πως λύνονται, τότε όσες ασκήσεις και να λύσει δεν θα κάνει καμία σωστά. Με αυτόν τον τρόπο ένας μαθητής θα γίνει άριστος, το βασικό είναι να ξαναλύνει το λυμένο. Παρατηρείται το φαινόμενο στην Γ' Λυκείου φροντιστήρια να έχουν κάνει τα θέματα και ο μαθητής να μην τα έχει καταλάβει γιατί ο μαθητής το έγραψε στο τετράδιο αλλά δεν το ξαναδιάβασε ποτέ, γιατί ασχολήθηκε με τις ασκήσεις που είχε να λύσει. Εγώ ποτέ δεν εξετάζω αν ένας μαθητής*

*έχει λύσει τις ασκήσεις που είχε για το σπίτι, σίγουρα θα δω αν έχει προσπαθήσει αλλά αν δεν μπόρεσε να λύσει μια άσκηση δεν σημαίνει ότι είναι κακός μαθητής».*

Η εκπαιδευτικός, για να βοηθήσει τους μαθητές να περάσουν από την έννοια ‘κλάσμα’ που διδάσκονται στο Δημοτικό σχολείο στην έννοια ‘ρητός’, χρησιμοποιεί ως μέσο αναπαράστασης – μετάβασης τον άξονα των πραγματικών αριθμών. Τους ρητούς αριθμούς τους διακρίνει σε θετικούς και αρνητικούς, διδάσκει στους μαθητές πώς να τους τοποθετούν στον άξονα και τους αρνητικούς αριθμούς τους παρουσιάζει ως αυτούς που απέχουν ίση απόσταση από το μηδέν με τους αντίστοιχους θετικούς αλλά στην ‘αντίθετη κατεύθυνση’.

*«Οι μαθητές στο Δημοτικό δεν έχουν δει αρνητικούς αριθμούς από όσο ξέρω, οπότε για να καταλάβουν τι γίνεται με τους ρητούς τους ξεκινάω από τον άξονα. Ενώ, δηλαδή, ξέρουν τον άξονα από το μηδέν προς τα θετικά, μαθαίνουν τώρα τον άξονα από το μηδέν προς τα αριστερά. Έχουμε μάθει αρχικά να βάζουμε τους αριθμούς 0, 1, 2, 5/3, 1/2 κλπ και τώρα μαθαίνουμε ότι κάθε αριθμός είναι απόσταση από το μηδέν. Και λέμε ότι όπως υπάρχει η απόσταση του 2/3 από το μηδέν έτσι υπάρχει και η απόσταση του -2/3 από το μηδέν, η απόσταση όμως είναι ένα θετικό μέγεθος. Τους δίνω το παράδειγμα ότι αν προχωρήσω από την έδρα προς το παράθυρο της τάξης είναι για παράδειγμα 3-4 μέτρα και αν πάω από την έδρα προς την άλλη μεριά πάλι θα είναι η ίδια απόσταση. Και τους λέω ότι υπάρχουν οι αρνητικοί αριθμοί που θα τους χρειαστούν αργότερα για τη Φυσική προσανατολισμού».*

Η Ελένη αναφέρει ότι, προκειμένου να διευκολυνθεί το πέρασμα των μαθητών από τα μαθηματικά του Δημοτικού Σχολείου σε αυτά του Γυμνασίου, ο εκπαιδευτικός πρέπει αρχικά να δείξει στους μαθητές τον τρόπο με τον οποίο ‘διαβάζουμε’ μαθηματικά. Αυτός περιλαμβάνει μεταξύ άλλων και την ‘αποστήθιση ορισμών’. Μια διαφορά των μαθηματικών στις δύο αυτές εκπαιδευτικές βαθμίδες είναι, σύμφωνα με την ίδια, η έλλειψη ορισμών στο Δ.Σ. καθώς και ότι οι μαθητές ‘δεν μαθαίνουν να σκέφτονται’, όπως επισήμανε πολλές φορές. Υποστηρίζει ότι για να μάθουν να σκέφτονται οι μαθητές στο Γυμνάσιο χρειάζεται να απαντάνε σε ερωτήσεις ‘Σωστού-Λάθους’ αλλά και να χρησιμοποιούν την ελληνική γλώσσα ορθά.

*«Ο καθηγητής στην αρχή θα πρέπει να έχει ανοχή, πρέπει να μάθει σιγά σιγά στα παιδιά πώς να διαβάζουν στο Γυμνάσιο. Είπαμε τα μαθηματικά του Δημοτικού είναι το ‘εκτιμώ’, δεν υπάρχει αποτέλεσμα, δεν έχει θεωρία και μαθαίνουν τα βασικά. Στο Γυμνάσιο μπαίνουμε στις έννοιες των μαθηματικών, πρέπει να μάθουμε ορισμούς. Πρέπει να μάθουμε ότι ο ορισμός δεν αλλάζει, δεν μπορώ να τον πω με δικό μου τρόπο. (...) Πρέπει στο Γυμνάσιο οι μαθητές να μάθουν να σκέφτονται, στο Δημοτικό δεν τους το μαθαίνουν αυτό. (...) Το πρόβλημα στο Γυμνάσιο είναι ότι οι μαθητές δεν καταλαβαίνουν αυτά που διαβάζουν, υπάρχει μεγάλο πρόβλημα στην ανάγνωση, αλλάζουν τόνους, λέξεις και λογικό είναι να μην καταλάβει τι λέει η άσκηση. Το πρόβλημα λοιπόν δεν είναι τόσο τα μαθηματικά, κάποιους μηχανισμούς στα μαθηματικά τους μαθαίνουν, δεν ξέρουν όμως τι ζητάν οι ασκήσεις, υπάρχει δηλαδή ένα γενικό*

*πρόβλημα και όχι μόνο στα μαθηματικά. Εγώ και σε καλούς μαθητές εντοπίζω το πρόβλημα στη Γλώσσα...».*

Η εκπαιδευτικός εξηγεί ότι ιδίως για τους αδύνατους μαθητές, η προσέγγιση μιας έννοιας με πολλούς τρόπους μπορεί να αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμη. Αυτό που μπορεί όμως να έχει αρνητικές συνέπειες στην κατανόηση είναι η υποχρεωτική εκμάθηση πολλών τρόπων προσέγγισης του ίδιου πράγματος.

*«Όταν κάποιο παιδί αντιμετωπίζει δυσκολίες, και στην εποχή μας πάρα πολλά παιδιά έχουν μαθησιακά προβλήματα, το να δείξεις πολλούς τρόπους είναι πολύ καλό. Μπορεί και βλέπει μια λύση από διάφορες πλευρές, αλλά το να τον αναγκάσεις να μάθει όλους αυτούς τους τρόπους για μένα είναι απαράδεκτο. Το κάθε παιδί μπορεί να δει τους διάφορους τρόπους και να καταλήξει να χρησιμοποιεί αυτόν που του ταιριάζει καλύτερα. Είδα ότι αυτά τα παιδιά δημιουργούν δικούς τους μηχανισμούς για να ανταπεξέλθουν, δηλαδή βρίσκουν τρόπους για να μπορέσουν να προχωρήσουν παρακάτω. Καλοί οι πολλοί τρόποι αλλά όχι υποχρεωτικοί, και εγώ δείχνω ασκήσεις με πολλούς τρόπους λύσης, αλλά αφήνω τον κάθε μαθητή να κάνει αυτό που θέλει, δέχομαι όλες τις λύσεις. Στο Δημοτικό τα μεπερδεύουν τα παιδιά».*

Η Ελένη θεωρεί απαραίτητη την εξωσχολική βοήθεια για τους μαθητές του Λυκείου καθώς όπως αναφέρει στο σχολείο είναι αδύνατο να ολοκληρωθεί η απαιτούμενη ύλη λόγω έλλειψης χρόνου. Θετική φαίνεται να είναι και για τη συμβολή της εξωσχολικής βοήθειας σε αδύνατους μαθητές που έχουν 'κενά' από προηγούμενες τάξεις και τα οποία πρέπει να καλυφθούν. Βέβαια μπορεί να έχει και αρνητικό αντίκτυπο η εξωσχολική βοήθεια για ορισμένους μαθητές, κάποιοι επαναπαύονται στην επίλυση των ασκήσεων από την εξωσχολική βοήθεια χωρίς οι ίδιοι να την κατανοούν και κάποιοι αδιαφορούν κατά τη διδασκαλία στη σχολική τάξη.

*«Πάρα πολλά παιδιά έχουν εξωσχολική βοήθεια στο Γυμνάσιο, για το Λύκειο δεν το συζητάω, είναι απαραίτητο γιατί ο καθηγητής δεν προλαβαίνει στην τάξη να βγάλει την ύλη που πρέπει, όσο και αν προσπαθήσει. Καμιά φορά οι μαθητές που έχουν εξωσχολική βοήθεια δεν προσέχουν στο σχολείο, κάποιοι αδύνατοι μαθητές νομίζω ότι είναι καλό να έχουν βοήθεια για να τους καλύψουν τα κενά τους από προηγούμενες τάξεις. Δηλαδή, εγώ στη Β', Γυμνασίου έκατσα δύο εβδομάδες για να κάνω τα 'πρόσημα' και κάποια παιδιά δεν τα μάθανε, πώς θα προχωρήσουν παρακάτω; Δεν είναι κακό να έχει ένα παιδί εξωσχολική βοήθεια, απλά θα πρέπει να μάθει να συνδιάζει και το σχολείο και την εξωσχολική βοήθεια. Υπάρχουν και τα παιδιά που έχουν εξωσχολική βοήθεια και στο τετράδιό τους απλά αντιγράφουν αυτά που τους λέει η βοήθεια».*

Σχετικά με τη 'διαφοροποιημένη διδασκαλία' και την εφαρμογή της στην πράξη, η Ελένη αναφέρει πως η ίδια αντιμετωπίζει κάποια πρακτικά ζητήματα λόγω ύπαρξης τμήματος ένταξης στο σχολείο της. Ωστόσο, στους αδύνατους μαθητές προτείνει την επεξήγηση με 'πιο απλό τρόπο' και στις γραπτές δοκιμασίες την ύπαρξη διαβαθμισμένων δραστηριοτήτων.

*«Επειδή στο σχολείο έχουν τμήμα ένταξης, έχουμε πρόβλημα με αυτό. Δηλαδή, τα παιδιά του τμήματος ένταξης φεύγουν από την τάξη στα μαθηματικά και πάνε στο τμήμα ένταξης. Στα διαγωνίσματα ο νόμος δεν λέει αν θα πρέπει να δώσω διαφορετικά θέματα στα παιδιά. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε σαν διαφοροποιημένη διδασκαλία είναι να εξηγήσουμε με πιο απλό τρόπο στα παιδιά που δεν καταλαβαίνουν. Στα θέματα μπορώ να βάλω κάποια εύκολα ώστε να μπορέσουν να φτάσουν μέχρι ένα σημείο και τα παιδιά με δυσκολίες».*

Επίσης, υποστηρίζει ότι θα έπρεπε και οι πολύ καλοί μαθητές να έχουν μέσα από 'τμήματα για προχωρημένους' την ευκαιρία να πάνε ακόμα πέρα.

*«Βέβαια γιατί βλέπουμε τη διαφοροποιημένη διδασκαλία μόνο για τους αδύνατους μαθητές; Εγώ φροντίζω στην τάξη μου να δουλεύω και προβλήματα δύσκολα για τους πολύ καλούς μαθητές. Δεν πρέπει να τους ξεχνάμε. Έχουμε τμήμα ένταξης και ειδικής αγωγής, γιατί δεν έχουμε και τμήματα για προχωρημένα παιδιά; Τα παιδιά που είναι πιο μπροστά γιατί πρέπει να χάνουν τόσες ώρες για να εξηγή ο καθηγητής απλά πράγματα σε αυτούς που δεν διαβάζουν και δεν μπορούν;».*

### **Άξονας 3: Γνώσεις για τη διδασκαλία**

Όσον αφορά τις μαθηματικές δραστηριότητες που επιλέγει, η Ελένη αναφέρει ότι συμβουλευεται εξωσχολικά βιβλία και ιστοσελίδες για να βρει τις δραστηριότητες που θεωρεί κατάλληλες για την κατανόηση της θεωρίας. Επίσης, πέρα από αυτές του σχολικού εγχειριδίου αξιοποιεί και άλλες δραστηριότητες κυρίως υπολογιστικού-διαδικαστικού τύπου για μεγαλύτερη εξάσκηση των μαθητών.

*«Εκεί που νομίζω ότι πρέπει να ξεκαθαρίσουν τα παιδιά κάποια πράγματα από τη θεωρία, δίνω περισσότερες ασκήσεις με πράξεις κλασμάτων, ασκήσεις με πρόσημα κλπ. Όλα αυτά θέλουν εξάσκηση και οι ασκήσεις του βιβλίου είναι ελάχιστες. Τα φυλλάδια που δίνω τα λύνω όλα στον πίνακα, είναι επιλεγμένες ασκήσεις από βιβλία και ιστοσελίδες».*

Η Ελένη στηρίζεται στην επιβράβευση των αδύναμων μαθητών και προσπαθεί να τους βοηθήσει με τα μαθηματικά παρέχοντάς τους περισσότερες εξηγήσεις και θέτοντάς τους περισσότερες ερωτήσεις. Από τους δυνατούς μαθητές έχει περισσότερες απαιτήσεις και τους θέτει δυσκολότερα ερωτήματα και δραστηριότητες για να ελκύσει το ενδιαφέρον τους.

*«Τους αδύνατους μαθητές τους κάνουμε να αγαπήσουν τα μαθηματικά, ακόμα και να πουν δύο λάθη και ένα σωστό θα πούμε "μπράβο", η επιβράβευση βοηθάει πάρα πολύ. Εξηγούμε περισσότερες φορές, τους κάνουμε περισσότερες ερωτήσεις, απλά πράγματα για να καταλάβει ότι μπορεί και να πάρει θάρος. Τους δυνατούς προσπαθώ να τους κεντρίσω το ενδιαφέρον με δυσκολότερες ασκήσεις, δυσκολότερες ερωτήσεις, και έχω περισσότερες απαιτήσεις από αυτούς. Θα πρέπει να πάει πιο μακριά από εκεί που ήδη βρίσκεται».*

Η Ελένη υποστηρίζει ότι όλοι οι μαθητές σηκώνονται στον πίνακα και συνήθως η επιλογή είναι αλφαβητική. Διαχωρίζει τα ερωτήματα-δραστηριότητες που αναθέτει στους μαθητές ανάλογα με τις επιδόσεις τους στα μαθηματικά και φροντίζει ο βαθμός δυσκολίας να είναι αντίστοιχος με τις επιδόσεις του μαθητή, αποσκοπώντας βέβαια ο καθένας να είναι σε θέση να επιλύσει δυσκολότερες δραστηριότητες στο μέλλον.

*«Φροντίζω στη διάρκεια ενός μήνα να έχουν σηκωθεί όλοι οι μαθητές τουλάχιστον μια φορά στον πίνακα. Δεν δουλεύω ούτε με 2-3 αδύνατους ούτε με 2-3 καλούς. Συνήθως στα επαναληπτικά φυλλάδια τους σηκώνω με τη σειρά. Σε κάποιον αδύναμο μαθητή που δεν ξέρει πράξεις με κλάσματα, θα τον σηκώσω σε κάτι απλό. Θα του βάλω μια άσκηση με πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων, με πολλαπλασιασμό κλασμάτων και μετά με πρόσθεση δύο ετερόνυμων κλασμάτων. Σε έναν καλό μαθητή μπορώ να βάλω πρόσθεση και αφαίρεση τριών κλασμάτων, επιλέγω δηλαδή τις ασκήσεις ανάλογα με τις δυνατότητες του καθενός. Δεν θα σηκώσω έναν αδύναμο μαθητή να λύσει μια πολύ δύσκολη άσκηση, αλλά σε βάθος χρόνου θέλω και ο αδύνατος να μπορεί να λύσει μια δύσκολη άσκηση».*

Κύριο μέλημα της εκπαιδευτικού δεν είναι αν ένας μαθητής απάντησε σωστά στις εργασίες που είχε για το σπίτι, αλλά εάν ασχολήθηκε. Τους αδύνατους που κάνουν 'βασικά' λάθη τους σηκώνει στον πίνακα ως τρόπο εκμάθησης του λάθους τους.

*«Κοιτάζω αν έχουν λύσει τις ασκήσεις, δεν με ενδιαφέρει τόσο αν τις έχουσε λύσει σωστά αλλά αν έχουν ασχοληθεί. Εξετάζω την προσπάθεια του παιδιού. Για μένα είναι δεδομένο αν είναι κάποιος καλός μαθητής και τη λύσει, αλλά αν είναι κάποιος αδύνατος, προσπαθήσει και κάνει κάποιο βασικό λάθος, θα τον σηκώσω στον πίνακα, θα μάθει το λάθος του, θα το διορθώσει και θα γίνει καλύτερος. Φυσικά πάρα πολλοί μαθητές δεν ασχολούνται καθόλου».*

Για να μπορέσει η διδασκαλία των μαθηματικών να είναι αποτελεσματική για τους μαθητές, η εκπαιδευτικός υποστηρίζει ότι πρέπει να ελαττωθεί η διδακτέα ύλη. Επίσης, ο εκπαιδευτικός δεν θα πρέπει να κάνει διάλεξη αλλά να συμβουλευεται εργαλεία που οπτικοποιούν τις διάφορες μαθηματικές έννοιες και τις κάνουν πιο προσιτές στον μαθητή. Παρόλα αυτά στο τέλος καταλήγει στο μοτίβο 'θεωρία-ασκήσεις-φύλλο εργασίας' ως προτεινόμενο τρόπο διδασκαλίας.

*«Καταρχάς για να μπορεί να γίνει αυτό θα πρέπει να ελαττωθεί η ύλη για να μπορέσουμε να δουλέψουμε καλύτερα. Ο καθηγητής ξεκινώντας ένα καινούριο κεφάλαιο, θα έπρεπε να μην είναι στον πίνακα και να γράφει, θα έπρεπε να μπει στο 'φωτόδεντρο' και να δείξει κάποια πράγματα. Για παράδειγμα, στα συστήματα εξισώσεων θα έπρεπε να μπει στο 'φωτόδεντρο', να δείξει τις ευθείες να δείξει πότε ταυτίζονται, πότε είναι παράλληλες, πότε τέμνονται έτσι ώστε να έχει το παιδί μια εικόνα, να καταλάβει τι είναι η ευθεία ( $y=ax+b$ ) και μετά να μπορέσουμε να πούμε τη θεωρία, να ξεκινήσουμε με ασκήσεις και να υπάρχει περιθώριο για ένα φύλλο εργασίας στο τέλος της ώρας που θα το μαζέψει ο καθηγητής και θα δει πόσο έχει κατακτηθεί η γνώση και πόσο έχει επιτευχθεί ο στόχος του μαθήματος. Αυτό με την ύλη που υπάρχει τώρα είναι πολύ δύσκολο να γίνει,*



δεν προλαβαίνεις μέσα σε 40' να εξετάσεις, να δεις τα τετράδια, να σηκώσεις μαθητές, να μπεις στο 'φωτόδεντρο', να δείξεις, να παραδώσεις, να κάνεις φύλλο εργασίας».

Σχετικά με την αξιολόγηση των μαθητών η εκπαιδευτικός ισχυρίζεται ότι λαμβάνει υπόψιν τη συμμετοχή τους στο μάθημα, τις προφορικές απαντήσεις κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, τις απαντήσεις όταν σηκώνετε στον πίνακα καθώς και τις επιδόσεις σε γραπτές δοκιμασίες.

«Λαμβάνω υπόψιν τη συμμετοχή τους στο μάθημα, από τις προφορικές ερωτήσεις βλέπω αν έχει διαβάσει τη θεωρία, από το αν έχει ένα οργανωμένο τετράδιο για να μπορεί να διαβάσει στην επανάληψη, από τον πίνακα που σηκώνετε για να λύσει ασκήσεις, από τεστάκια τα οποία φροντίζω να είναι τουλάχιστον τέσσερα κατά τη διάρκεια του τετραμήνου».

Ο Πίνακας 4.4 παρακάτω παρουσιάζει τα βασικά δομικά στοιχεία των απαντήσεων της δεύτερης συνέντευξης της Ελένης ανά ερευνητικό άξονα.

**Πίνακας 4.4** Περιεχόμενο και δομικά στοιχεία της 2ης συνέντευξης της Ελένης

Ερευνητικοί Άξονες	Συνιστώσες	Χαρακτηριστικά στοιχεία
<b>1<sup>ος</sup></b>  <i>Γνώσεις για το μαθηματικό περιεχόμενο</i>	Ευελιξία στη διδασκαλία κάθε κεφαλαίου	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Διδασκαλία μιας έννοιας νωρίτερα/αργότερα απ' ό τι προτείνει το ΑΠ</li> <li>• Ελεύθερη κατανομή του χρόνου διδασκαλίας μιας ενότητας</li> </ul>
	Ελάχιστες μαθηματικές γνώσεις που πρέπει να έχει ένας μαθητής τελειώνοντας την Α Γυμνασίου	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Άριστη γνώση προπαίδειας</li> <li>• 4 πράξεις με ρητούς αριθμούς</li> <li>• Ιδιότητες δυνάμεων</li> <li>• Χάραξη και ονομασία γεωμετρικών οντοτήτων</li> </ul>
	Μαθηματικές γνώσεις που πρέπει να έχουν όλοι οι μαθητές τελειώνοντας το Γυμνάσιο	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Πράξεις με ρητούς αριθμούς</li> <li>• Εξισώσεις α' και β' βαθμού</li> <li>• Μονώνυμα/πολυνύμα</li> <li>• Οπωσδήποτε ταυτότητες</li> </ul>
<b>2<sup>ος</sup></b>  <i>Γνώσεις για τη μάθηση</i>	Χαρακτηριστικά της διδασκαλίας των μαθηματικών στο Δημοτικό	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Αδυναμία εκμάθησης της προπαίδειας</li> <li>• Εκμάθηση πράξεων, όχι μαθηματικής λογικής</li> </ul>
	Τρόποι μετάβασης από της έννοια 'κλάσμα' στον 'ρητό'	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Άξονας των πραγματικών αριθμών</li> <li>• Διάκριση σε θετικούς και αρνητικούς</li> <li>• Έννοια της απόστασης από το μηδέν</li> </ul>

	Διαφορές μαθηματικών ΔΣ από αυτά του Γυμνασίου	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Αποστήθιση ορισμών στο Γυμνάσιο</li> <li>• Εκμάθηση μαθηματικών εννοιών</li> <li>• Υπολογισμοί</li> <li>• Απουσία εκμάθησης του ‘πώς να σκέφτονται’ στο ΔΣ</li> <li>• Προσεγγιστικές λύσεις στο ΔΣ (‘εκτίμηση’)</li> </ul>
	Τρόπος σκέψης στα μαθηματικά του Γυμνασίου	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Εκμάθηση θεωρίας</li> <li>• Επίλυση ήδη λυμένων ασκήσεων</li> <li>• Επίλυση άλυτων ασκήσεων</li> </ul>
	Δυνατότητα εφαρμογής της ‘Διαφοροποιημένης Διδασκαλίας’ στην τάξη	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Διαβαθμισμένες δραστηριότητες</li> <li>• Προσωπική επεξήγηση των δυσκολιών των αδύνατων μαθητών</li> </ul>
<b>3<sup>ος</sup></b>  <i>Γνώσεις για τη διδασκαλία</i>	Τρόπος αξιοποίησης δραστηριοτήτων εκτός των σχολικών πηγών	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Υπολογιστικές ασκήσεις για εξάσκηση</li> </ul>
	Πρακτικές για μια αποτελεσματική διδασκαλία	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ελάττωση της διδακτέας ύλης</li> <li>• Χρήση τεχνολογίας για οπτικοποίηση των μαθηματικών εννοιών</li> </ul>
	Έλεγχος της κατανόησης των εννοιών από τους μαθητές	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Συμμετοχή στο μάθημα</li> <li>• Γραπτές και προφορικές επιδόσεις</li> </ul>
	Διαχείριση των προς επίλυση εργασιών	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Έλεγχος αν ασχολήθηκαν οι μαθητές</li> <li>• Αδιάφορη η απάντηση (σωστή ή λανθασμένη)</li> <li>• Αδύνατοι μαθητές στον πίνακα</li> </ul>

---

**(ii) Αντώνης (2η συνέντευξη)**

---

**Άξονας 1: Γνώσεις για το μαθηματικό περιεχόμενο**

Ο Αντώνης αναφέρει ότι η κύρια πηγή που συμβουλευεται για τη διδασκαλία του είναι το σχολικό εγχειρίδιο. Ίσως να είναι και η μοναδική, καθώς τα εξωσχολικά βιβλία και

το διαδίκτυο που αναφέρει ως εναλλακτικές πηγές όταν το σχολικό εγχειρίδιο δεν το κρίνει 'επαρκές', αποφεύγει να τα χρησιμοποιεί για να μην ζορίζει τους μαθητές με μεγαλύτερο φόρτο εργασίας.

*«Η βασική πηγή είναι το σχολικό βιβλίο από το οποίο βλέπω τη θεωρία, τις λυμένες εφαρμογές, τα παραδείγματα που προτείνει και από εκεί και πέρα αν χρειαστεί βλέπω και κάποιο εξωσχολικό βοήθημα. Τα τελευταία χρόνια είναι και το διαδίκτυο το οποίο έχει πάρα πολλές πληροφορίες γύρω από τα μαθηματικά και για κάθε κεφάλαιο συγκεκριμένα. Αν δω ότι το σχολικό βιβλίο δεν είναι επαρκές σε αυτό που πάω να διδάξω και χρειάζεται και λίγο ακόμη τότε χρησιμοποιώ και εξωσχολικές πηγές, κάτι όμως που το αποφεύγω γιατί δεν θέλω να δίνω περισσότερη δουλειά στα παιδιά από αυτή που απαιτεί το σχολικό βιβλίο».*

Ο Αντώνης θέτει διαφορετικά κριτήρια για να κρίνει αν ένα σχολικό ή ένα εξωσχολικό εγχειρίδιο είναι κατάλληλο για τη διδασκαλία του. Το σχολικό εγχειρίδιο πρέπει να είναι 'διδακτικό', δηλαδή ένας μαθητής που το διαβάζει να κατανοεί από μόνος του τις μαθηματικές έννοιες που διαπραγματεύεται και τις δραστηριότητες που περιλαμβάνει. Αντίθετα, το εξωσχολικό εγχειρίδιο υποστηρίζει ότι αναφέρεται μόνο στον εκπαιδευτικό, και ότι θα πρέπει να αποτελεί συμπλήρωμα του σχολικού εγχειριδίου που θα εμβαθύνει τη γνώση και θα προτείνει διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών, υποβοηθώντας τον εκπαιδευτικό στη διδασκαλία του.

*«Μεταξύ σχολικού και εξωσχολικού εγχειριδίου υπάρχουν διαφορετικά κριτήρια. Ένα σχολικό εγχειρίδιο θεωρώ ότι είναι κατάλληλο για τον μαθητή, όταν ο μαθητής διαβάζοντάς το μόνος του να μπορέσει να κατακτήσει την καινούρια γνώση, να μπορέσει να καταλάβει τα παραδείγματα ή μέρος αυτών και να μπορέσει να λύσει λυμένες και άλυτες ασκήσεις. Από εκεί και πέρα να έχει και κάτι παραπάνω ώστε να μεταφέρει τις απορίες και να τις συζητήσει με τον εκάστοτε δάσκαλό του. Αυτό είναι ένα διδακτικό εγχειρίδιο, γιατί τα σχολικά εγχειρίδια πρέπει να είναι διδακτικά. Για τα εξωσχολικά εγχειρίδια τώρα, είναι ένα βοήθημα του δασκάλου για να πάμε την γνώση λίγο πιο πέρα τη γνώση που προσφέρει το σχολικό εγχειρίδιο. Από το εξωσχολικό εγχειρίδιο θέλω λίγο περισσότερο 'βάθος' και έναν διαφορετικό ίσως δρόμο προσέγγισης της ιδέας που διδάσκω. Έτσι ώστε να μπορέσω να δώσω στα παιδιά και έναν άλλο δρόμο για την κατάκτηση της ίδιας γνώσης».*

Ο Αντώνης αποδίδει την ασυνέχεια στα μαθηματικά μεταξύ πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στον 'τρόπο διδασκαλίας' τους. Αναφέρει ότι οι δάσκαλοι στο Δημοτικό σχολείο για να μεταλαμπαδεύσουν τη γνώση την υπεραπλουστεύουν εκφυλίζοντας έτσι κάποιες έννοιες. Επίσης διδάσκουν στους μαθητές διαδικαστικά κάποια πράγματα χωρίς να τους μαθαίνουν τον τρόπο σκέψης και τη μαθηματική λογική που κρύβεται πίσω από αυτά. Τέλος, υποστηρίζει ότι ιδίως στις δύο τελευταίες τάξεις του Δημοτικού σχολείου θα έπρεπε τα μαθηματικά να διδάσκονται από μαθηματικούς, καθώς αυτοί κατέχουν καλύτερα τη μαθηματική γνώση και μπορούν να διδάξουν με περισσότερο 'επιστημονικό' τρόπο κάτι που θα βοηθήσει τους μαθητές να μεταβούν αργότερα στα μαθηματικά του Γυμνασίου.

«(...)Για μένα αυτή η ασυνέχεια ωφείλεται στον τρόπο διδασκαλίας, οι δάσκαλοι 'παιδίαρίζουν' με τις γνώσεις από την Α μέχρι την ΣΤ Δημοτικού. Θα έπρεπε να είναι λίγο πιο επιστημονική η διδασκαλία τους. 'Παιδίαρίζουν' με την έννοια ότι βοηθούν υπερβολικά τους μαθητές, δεν θέλουν να τους στεναχωρήσουν, δεν θέλουν να τους ζορίσουν, και κάνουν ιδίως τα μαθηματικά πολύ 'απλά' με την έννοια ότι τα 'γυμνώνουν'. Μαθαίνουν στα παιδάκια πράγματα παπαγαλίστικα, την προπαίδεια για παράδειγμα, ή τον αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού, χωρίς όμως να τους εμφυσήσουν τι είναι αυτή η μαθηματική λογική. (...) Γι' αυτό και η Μαθηματική Εταιρεία υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά της Ε και ΣΤ Δημοτικού να γίνονται από μαθηματικούς, για να κάνουν τους μαθητές να καταλάβουν τη μαθηματική λογική».

Ο Αντώνης αποδίδει τις αστοχίες που επισήμανε ότι υπάρχουν στις οδηγίες διδασκαλίας στα μαθηματικά του Γυμνασίου στην έλλειψη σύνδεσης των οδηγιών αυτών με την πραγματικότητα της τάξης. Αναφέρει ότι οι οδηγίες θα πρέπει να συντάσσονται από εκπαιδευτικούς που έχουν διδάξει σε σχολική τάξη γιατί αυτοί είναι που γνωρίζουν εκ των έσω το σχολικό περιβάλλον. Ως παράδειγμα αστοχίας αναφέρει ότι στη φυσική της Α' Γυμνασίου οι οδηγίες διδασκαλίας προτείνουν την εισαγωγή των μαθητών στον νόμο του Χουκ μέσω της έννοιας των ανάλογων ποσών κάτι το οποίο δεν έχουν ακόμα διδαχθεί οι μαθητές στα μαθηματικά.

«Δυστυχώς όλες οι οδηγίες που έρχονται, διαβάζοντάς 'τες κάποιος με ψυχραιμία και με ένα ουδέτερο μάτι, καταλαβαίνει ότι αυτοί που τις γράφουν τις γράφουν μέσα από κάποια στεγνή βιβλιογραφία που δεν έχει καμία σχέση με την πραγματικότητα. Βλέπουμε δηλαδή ότι οι οδηγίες που έρχονται είναι από ανθρώπους που δεν έχουν μεγάλη ή και καθόλου εμπειρία από την τάξη, δεν είναι δηλαδή αυτό που λέμε 'μάχιμος' εκπαιδευτικός. Αν βάλουμε 'μάχιμους' εκπαιδευτικούς, δηλαδή εκπαιδευτικούς που δουλεύουν μέσα στην τάξη, όχι που απλά πληρώνονται, αλλά που δουλεύουν καθημερινά μέσα στην τάξη, αν τους βάλουμε να δώσουν οδηγίες για κάποια τάξη, θα δώσουν 2-3 πραγματάκια, όχι όλα ίσως και ίσως να μην συμφωνούμε με όλα αλλά θα είναι οδηγίες που τις έχουν αντιμετωπίσει οι ίδιοι και προφανώς θα τις αντιμετωπίσει και ένας νέος καθηγητής ή ένας καθηγητής που δεν έχει μεγάλη εμπειρία. Θα είναι όμως οδηγίες πραγματικές, αυτές που στέλνει το υπουργείο είναι οδηγίες 'επί χάρτου'. Θα αναφέρω ένα παράδειγμα αστοχίας στη Φυσική, λένε κάντε τη γραφική παράσταση της διαφοράς δυναμικού και της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος σε έναν αντιστάτη και αφού θα βγει ευθεία έτσι θα καταλάβουν τα παιδιά ότι είναι ανάλογα τα ποσά. Κάτι όμως που τα παιδιά δεν το έχουν διδαχθεί ακόμα στα μαθηματικά, αυτό είναι αστοχία, γιατί προτείνουν κάτι που εννοείται ότι θα το ανακαλύψουν οι μαθητές βασιζόμενοι στο μαθηματικό υπόβαθρο που έχουν και αυτό το μαθηματικό υπόβαθρο δεν υπάρχει. Αυτό υπάρχει και στην Α Γυμνασίου με τον νόμο του Χουκ, η επιμήκυνση είναι ανάλογη της δύναμης».

Ο εκπαιδευτικός αρχικά αναφέρει ότι διδάσκει την ίδια 'ύλη' σε όλα τα τμήματα, «Εκ των πραγμάτων είμαστε υποχρεωμένοι να κάνουμε την ίδια ύλη σε όλα τα τμήματα. Όταν τα τμήματα έχουν διαφορά στην απόδοση των μαθητών, πάλι γίνεται η ίδια ύλη αλλά δεν βγαίνει με τον ίδιο εύκολο τρόπο». Μετά όμως διαφοροποιείται λέγοντας ότι «συνήθως,

θα την καλύψουμε μεν αλλά όχι εμβαθύνοντας τόσο πολύ με τόσες ασκήσεις όπως θα κάναμε σε ένα καλό και αποδοτικό τμήμα».

Όσον αφορά τη σημασία που έχει να γνωρίζουν οι μαθητές του Γυμνασίου την προπαίδεια, ο Αντώνης αναφέρει ότι δεν είναι αυτοσκοπός η εκμάθησή της. Αν, ωστόσο, ένας μαθητής ασχολείται με τα μαθηματικά τότε είναι θέμα χρόνου να την μάθει. Θα την μάθει όχι αποστηθίζοντάς την αλλά επειδή θα την χρησιμοποιεί για την επίλυση μαθηματικών δραστηριοτήτων και γενικότερα λόγω της ενασχόλησής του με τα μαθηματικά. Συνεχίζει λέγοντας ότι είναι ανησυχητικό να μην γνωρίζει ένας μαθητής την προπαίδεια και ότι αυτό συνεπάγεται την μη ενασχόλησή του με τα μαθηματικά από το Δημοτικό σχολείο.

*«Την προπαίδεια οι μαθητές την μαθαίνουν από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού, όταν λοιπόν ένας μαθητής Γυμνασίου δεν ξέρει την προπαίδεια αμέσως έχει την έξωθεν μαρτυρία ότι είναι μαθηματικά αμόρφωτος (...). Δεν δείχνει και πολλά αν ένας μαθητής ξέρει την προπαίδεια, αλλά είναι απορίας άξιο και ανησυχητικό που δεν την ξέρει.(...) Ένας καλός τεχνίτης, ξέρει τα εργαλεία του απ'έξω, τα οποία τα έμαθε μέσω της ενασχόλησης με την τέχνη του, εκ των πραγμάτων χωρίς να θέλει τα μαθαίνει τα εργαλεία του (πχ προπαίδεια) χωρίς να το κάνει αυτοσκοπό. Δεν είναι αυτοσκοπός να μάθουμε την προπαίδεια, είναι ένα εργαλείο και στην προσπάθειά μας να κάνουμε το 'έργο' μας, αφού ασχολούμαστε με τα μαθηματικά μαθαίνουμε και την προπαίδεια».*

Ο Αντώνης αναφέρει ότι «το Γυμνάσιο είναι δευτεροβάθμια υποχρεωτική εκπαίδευση και στόχος της θα έπρεπε να είναι να βγάλει ολοκληρωμένους πολίτες». Οπότε σύμφωνα με αυτό, οι μαθητές που αποφοιτούν από το Γυμνάσιο, δηλαδή από την υποχρεωτική εκπαίδευση, θα πρέπει να έχουν όλες εκείνες τις γνώσεις που θα τους καταστήσουν αυριανούς σκεπτόμενους πολίτες. Κάποια παραδείγματα τέτοιας γνώσης σημειώνει ότι είναι η έννοια του ποσοστού και πώς αυτό εντάσσεται σε ρεαλιστικά προβλήματα, και η έννοια και σημασία του τετραγωνικού μέτρου και κατ' επέκταση του εμβαδού.

*«Δεν θα μπλεχτούμε σε μαθηματικές έννοιες απαριθμώντας συναρτήσεις, τριγωνομετρία κλπ. Να μπορεί με ευκολία να εξυπηρετείται ο ίδιος και να μετέχει κοινωνικά σε όλες τις εκφάνσεις της ζωής του. Δηλαδή να πηγαίνει στο σούπερ μάρκετ και να καταλαβαίνει τι θα πει έκπτωση στο ρύζι 5%, να καταλαβαίνει ότι αν το 1ο κόμμα πήρε το 23% των ψήφων και το άλλο 22% τι διαφορά υπάρχει, όχι μόνο 1% αλλά πόσοι αριθμητικά είναι αυτοί οι ψηφοφόροι, να ξέρει ότι αύριο μεθαύριο αγοράζοντας ένα σπίτι είναι διαφορετικά τα 100m<sup>2</sup> από τα 80m<sup>2</sup>, όχι μόνο επειδή το 100 είναι μικρότερος αριθμός από το 80 αλλά να ξέρει και τί είναι τα τετραγωνικά μέτρα. Δεν μπορεί να βλέπουμε δηλαδή διαφημίσεις που να λεν ελάτε έχουμε το τάδε προϊόν 10% φθηνότερα και να τρέχουν όλοι να το αγοράσουν χωρίς να ξέρουν την αρχική τιμή, αυτό είναι κοροϊδία, που την πατάνε πολλές φορές και άτομα που ξέρουν μαθηματικά. Αυτά λοιπόν θα πρέπει να ξέρει ένας αυριανός πολίτης, να μην τον κοροϊδεύουν».*

## **Άξονας 2: Γνώσεις για τη μάθηση**

Ο εκπαιδευτικός εξηγεί ότι κάνοντας τους καλούς μαθητές ‘δασκάλους’ των αδύνατων με το σωστό τρόπο, δηλαδή χωρίς να επισημαίνει ποιός είναι καλός και ποιος αδύνατος, τότε οι αδύνατοι δέχονται χωρίς πρόβλημα τη βοήθεια των συμμαθητών τους. Αυτό το αποδίδει στο γεγονός ότι τα παιδιά έχουν ‘κοινό λεξιλόγιο’ και ακόμα κι αν είναι φτωχότερο από εκείνο του εκπαιδευτικού τα βοηθάει να κάνουν μια πρώτη προσέγγιση στην καινούρια έννοια.

*«Ναι νομίζω ότι αν γίνει αυτό ήρεμα στην τάξη και με τρόπο που δεν θα το πάρουμε ότι σηκώνουμε τον καλό μαθητή και ότι όλοι οι άλλοι δεν αζίζουν, τότε περνάει. Και αυτό γιατί ένας συμμαθητής τους έχει το εξής απλό, έχει το ίδιο λεξιλόγιο, είναι παιδιά. Το λεξιλόγιο του μπορεί να είναι πιο φτωχό σε λέξεις απ’ότι το λεξιλόγιο ενός δασκάλου, αλλά είναι κοινό λεξιλόγιο. Έχω παρατηρήσει πολλές φορές ότι οι μαθητές μπορούν να δώσουν τέτοιου είδους παραδείγματα με τον δικό τους τρόπο, που τελικά σε πρώτο στάδιο η είσοδος της έννοιας που θέλουμε να περάσουμε περνάει στα μυαλά των μαθητών που στην αρχή δεν το είχαν καταλάβει. Οι αδύνατοι μαθητές σίγουρα δέχονται εξηγήσεις και βοήθεια από συμμαθητές τους αρκεί να μην γίνει αυτό με τρόπο που να προσβάλει τους αδύνατους μαθητές, το οποίο γίνεται όταν υπερ-φωτίζουμε τον καλό μαθητή».*

Ο Αντώνης αναφέρει ότι ο ‘καλός μαθητής’ στα μαθηματικά «φαίνεται από το ενδιαφέρον που δείχνει για το μάθημα και τον τρόπο που παρακολουθεί και προσέχει αυτά που λέει ο καθηγητής και οι συμμαθητές του». Σύμφωνα με τα όσα λέει ένας αδύνατος μαθητής για να βελτιωθεί η επίδοσή του εξαρτάται μόνο από τον ίδιο και το αν προσέχει στη διδασκαλία. Και αυτός είναι ο μονόδρομος της επιτυχίας όπως φαίνεται και παρακάτω.

*«Εάν ένας μαθητής τα κάνει αυτά τότε είναι θέμα χρόνου να αποκτήσει τη γνώση και να γίνει ένας πολύ καλός μαθητής. Βασικό λοιπόν είναι η προσοχή στο μάθημα, από εκεί και πέρα ένας έξυπνος μαθητής με προσοχή 5 λεπτών θα καταλάβει και θα χτίσει εκεί πάνω 3 πράγματα και ένας λιγότερο έξυπνος θα χρειαστεί 10 λεπτά και θα χτίσει 1 πράγμα, θα χτίσει όμως, και αυτό είναι πολύ ενθαρρυντικό γιατί όταν μάθουν οι μαθητές να προσέχουν για να χτίζουν, έχουμε βάλει ένα πολύ καλό θεμέλιο στα παιδιά αυτά, ανεξάρτητα από τον βαθμό ευφυίας τους. Μην ξεχνάμε τώρα στο Γυμνάσιο αυτοί οι μαθητές μεγαλώνουν, αναπτύσσονται πνευματικά, οπότε αν έχουν προσοχή και επιμονή το μέλλον είναι δικό τους».*

Ο εκπαιδευτικός εκφράζει την αδυναμία του να εμπλέξει όλους τους μαθητές στην εκπαιδευτική διαδικασία. Παρά την προσπάθειά του να εμπλέξει όλους τους μαθητές, ο περιορισμένος διδακτικός χρόνος δεν του το επιτρέπει.

*«Προσπαθώ να μην αποκλείω κανέναν, αλλά εκ των πραγμάτων δεν μπορώ να τα καταφέρω γιατί λείπει ο χρόνος. Τα 40 λεπτά δεν φτάνουν, είναι λίγα τα λεπτά της διδακτικής ώρας για 25 μαθητές που υπάρχουν μέσα στην τάξη. Δεν γίνεται μέσα σε 40 λεπτά να κάνουμε διαφοροποιημένη διδασκαλία. Και το ότι προσπαθώ να κάνω μάθημα με όλους είναι γιατί δεν θέλω να απογοητεύσω κανέναν μαθητή».*

Ο Αντώνης αναφέρει ότι για την αδιαφορία των μαθητών για το σχολείο δεν φταίει μόνο η ασυνέχεια μεταξύ των εκπαιδευτικών βαθμίδων. Δεν γνωρίζει και ο ίδιος με σιγουριά τα αίτια αυτής της αδιαφορίας αλλά ένας άλλος λόγος είναι ότι έχουν να ασχοληθούν με πολλά μαθήματα.

*«Δεν μπορούμε να κατηγορήσουμε ότι φταίει μόνο ένα πράγμα για την αδιαφορία των μαθητών. Οι μαθητές γενικώς αδιαφορούν για το σχολείο, δεν τους αρέσει. Δεν είμαστε αρεστοί, αν είμασταν ιδιωτική επιχείρηση θα είχαμε φαλιρίσει εδώ και πολύ καιρό. Δεν ξέρω ακριβώς γιατί. Είναι πολλά πράγματα που φταίνε για αυτήν την αδιαφορία, δεν είναι μόνο αυτή η ασυνέχεια που φταίει, δεν είναι μόνο ότι έχουν πολλά αντικείμενα ή πολλές ώρες. Δυστυχώς όμως δεν υπάρχει μια ολιστική αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος με κοινωνιολόγους, παιδαγωγούς που θα είναι κοντά στα παιδιά».*

Ο εκπαιδευτικός αναφέρει ότι οι μαθητές θεωρούν το σχολείο βαρετό και ότι αυτήν την εικόνα φέρνουν στο μυαλό τους στην αρχή κάθε σχολικής χρονιάς με αποτέλεσμα να αντιμετωπίζουν το σχολείο εκ νέου με τον ίδιο τρόπο. Δεν εξηγεί ωστόσο τον λόγο που πιστεύει ότι συμβαίνει αυτό.

*«Θα έλεγα ότι είναι αυτή η ιδέα που αποτυπώνεται στους μαθητές από τα πρώτα χρόνια ότι πάμε στο σχολείο, λέει ο καθηγητής διάφορα, το μάθημα είναι βαρετό, περιμένουμε να σχολάσουμε κλπ. Αυτό συνεχίζεται σε όλες τις τάξεις και βλέπουμε τα παιδιά από την 1η μέρα, από τη μέρα του αγιασμού να είναι βαριεστημένα, να μην θέλουν να παρακολουθήσουν. Γιατί; Όχι επειδή έχουν γνωρίσει την καινούρια τάξη ή τον καινούριο δάσκαλο-α, αλλά έχουν στο μυαλό τους την περσινή τάξη ότι ήταν βαρετή και ότι το ίδιο θα είναι και η φετινή».*

### **Άξονας 3: Γνώσεις για τη διδασκαλία**

Ο Αντώνης έδωσε δύο παραδείγματα, ένα που συνδέει τα Μαθηματικά και ένα με τη Φυσική με την καθημερινότητα των μαθητών. Η μαθηματική δραστηριότητα αφορά την έννοια των ποσοστών ενώ αυτή στη φυσική, την έννοια της μέσης ταχύτητας.

*«Υπάρχουν πολλά παραδείγματα, εξαρτάται πόσο θέλεις να φωτίσεις μια δραστηριότητα. Στην Α Γυμνασίου, μόλις κάναμε τα ποσοστά, είπα στους μαθητές καθώς πηγαίνουν στο σπίτι τους να δουν τις βιτρίνες των καταστημάτων, είμαστε σε περίοδο εκπτώσεων. Θα δουν κάποια ποσοστά, 20%, 30% και να σκεφτούν τί σημαίνει αυτό ή να συγκρίνουν μαζί με τον μπαμπά ή τη μαμά τους τις τιμές δύο προϊόντων που βρίσκονται σε προσφορά. Οι δραστηριότητες πρέπει να είναι άμεσα συνδεδεμένες με την καθημερινότητα των παιδιών έτσι ώστε να καταλάβουν ότι αυτά που μαθαίνουν στο σχολείο δεν είναι ξένα αλλά έχουν άμεση σχέση με την καθημερινότητά μας. Είχα πει επίσης στους μαθητές στο μάθημα της φυσικής, να βρουν τη μέση ταχύτητά τους κατά τη μετάβασή τους από το σπίτι στο σχολείο».*

Ο εκπαιδευτικός θεωρεί ότι οι ερωτήσεις των μαθητών είναι προβλέψιμες και ότι σπάνια ένας εκπαιδευτικός πιάνεται απροετοίμαστος σε ερώτηση μαθητή. Παρόλα

αυτά μερικές φορές υπάρχουν και ερωτήσεις που όχι μόνο δεν είναι προβλέψιμες αλλά και ο εκπαιδευτικός αδυνατεί να τις απαντήσει. Ο Αντώνης αυτές τις τελευταίες ερωτήσεις τις διαχειρίζεται βάζοντας όλη την τάξη στη διαδικασία να σκεφτούν τον τρόπο που θα μπορούσαν να απαντήσουν ακόμα και αν δεν γνωρίζουν εξ αρχής την απάντηση. Δίνει, επίσης, ένα παράδειγμα από τη διδασκαλία της φυσικής για τον τρόπο που διαχειρίστηκε την κατάσταση όταν ένας μαθητής τον ρώτησε ποια είναι η μεγαλύτερη διαφορά μεταξύ της μικρότερης και της μεγαλύτερης διάρκειας της ημέρας κατά τη διάρκεια του έτους και δε γνώριζε την απάντηση.

*«Συνήθως είναι προβλέψιμες οι ερωτήσεις, και ένας εκπαιδευτικός με εμπειρία μπορεί να απαντήσει. Υπάρχουν βέβαια και ερωτήσεις μη προβλέψιμες και φορές που δεν μπορείς να απαντήσεις, οπότε δεν είναι κακό να πεις στους μαθητές ότι δεν ξέρεις και να τους ρωτήσεις και τους ίδιους πώς θα μπορούσατε να το μάθετε. Το αφήνω και σαν εργασία για το επόμενο μάθημα και το ψάχνω και εγώ. Για παράδειγμα, τους είχα πει ότι στις 21 Δεκεμβρίου είναι το χειμερινό ηλιοστάσιο, δηλαδή έχουμε μικρότερη διάρκεια μέρας απ'ότι νύχτα, και ότι η διάρκεια μέρας και νύχτας αυξομειώνεται κατά τη διάρκεια του έτους. Ένας μαθητής με ρώτησε ποια είναι η διαφορά της μικρότερης διάρκειας της ημέρας που είναι 21 Δεκεμβρίου από τη μεγαλύτερη διάρκεια της ημέρας που είναι 21 Ιουνίου. Δεν μπορούσα να το απαντήσω (...). Και τους ρώτησα πως θα μπορούσαμε να απαντήσουμε σε αυτήν την ερώτηση. Τα ίδια τα παιδιά δώσαν απαντήσεις, εγώ δεν είπα κάτι άλλο, ότι θα ψάξουν στο διαδίκτυο, θα ανοίξουν τους χάρτες και ένας μαθητής είπε ότι έχει ένα βιβλίο αστρονομίας με πολλές πληροφορίες που μπορεί να συμβουλευτεί».*

Ο Αντώνης αναφέρει ότι είναι εξίσου σημαντικές και η γραπτή και η προφορική εξέταση των μαθητών.

*«Για να δούμε αν ένας μαθητής έχει 'κατακτήσει' τη γνώση πρέπει να τον εξετάσουμε και προφορικά και γραπτά. Μόνο το ένα είδος εξέτασης νομίζω πως δεν αρκεί. Έχω την εντύπωση πως η μία εξέταση συμπληρώνει την άλλη».*

Εξηγεί ότι η προφορική εξέταση χαρακτηρίζεται από την αμεσότητά της και ο εκπαιδευτικός μπορεί να δίνει κάποιου είδους βοήθεια στον μαθητή που βλέπει ότι δυσκολεύεται να απαντήσει. Αντίθετα, στη γραπτή εξέταση το ερώτημα είναι διατυπωμένο γραπτά και ο εκπαιδευτικός δεν πρέπει να δώσει περαιτέρω εξηγήσεις. Τα πλεονεκτήματα της γραπτής εξέτασης είναι ότι φαίνεται αν ο μαθητής καταλαβαίνει τον γραπτό λόγο, ο τρόπος έκφρασής του που είναι πολύ σημαντικός στα μαθηματικά και ο τρόπος σκέψης του.

*«Η προφορική εξέταση είναι πιο άμεση, ρωτάς και ο μαθητής μπορεί να κάνει μια ερώτηση για να αποσαφηνίσει το ερώτημα, μπορεί να δώσει μισή απάντηση και να δει πως φέρεσαι και να το αλλάξει, είναι όμως πολύ σοβαρή η προφορική εξέταση. Η γραπτή εξέταση είναι πιο σοφιστική θα έλεγα, δεν πρέπει να δίνουμε ούτε διευκρινήσεις ούτε τίποτα, υπάρχει ένα γραπτό κείμενο και την απαντά. Εκεί, στη γραπτή εξέταση δεν φαίνεται μόνο αν έχει ο μαθητής γνώση του αντικειμένου στο οποίο εξετάζεται αλλά φαίνεται ακόμα αν κατανοεί το κείμενο. (...)Επίσης από τη γραπτή εξέταση φαίνονται και άλλα πράγματα, τον τρόπο με τον οποίο εκφράζεται, το πώς γράφει, το αν κάνει*



*ορθογραφικά λάθη και όλα αυτά έχουν σημασία καθώς βλέπουμε τον τρόπο σκέψης του μαθητή».*

Ο εκπαιδευτικός θεωρεί ότι είναι εξίσου σημαντικές τόσο η γνώση της θεωρίας όσο και η εφαρμογή της στην πράξη. Αναφέρει ότι ο μαθητής, τελειώνοντας την υποχρεωτική εκπαίδευση θα πρέπει να είναι σε θέση να εφαρμόζει τις μαθηματικές του γνώσεις στην πράξη.

*«Δεν προκρίνω την πράξη, αλλά την βρίσκω απαραίτητη μιας και είναι η εφαρμογή της θεωρίας. Στο Γυμνάσιο, δηλαδή στην υποχρεωτική εκπαίδευση, πρέπει να οχυρώνουμε τους μαθητές και να τους προετοιμάζουμε για αυριανούς πολίτες. Έναν απόφοιτο της υποχρεωτικής εκπαίδευσης δεν νομίζω να τον βοηθήσει σε πολλά πράγματα η γνώση της θεωρίας χωρίς να μπορεί να την εφαρμόσει και στην πράξη. Όχι ότι δεν είναι σημαντική, αλλά σε άλλο στάδιο στην εκπαίδευση του μαθητή. Θα του πούμε για παράδειγμα τί είναι το πολυώνυμο, η συνάρτηση, το Πυθαγόρειο θεώρημα αλλά θα του δείξουμε και πώς τα χρησιμοποιούμε στην πράξη δηλαδή ποια είναι η εφαρμογή της θεωρίας».*

Ο Αντώνης συμβουλεύει έναν νέο εκπαιδευτικό να έχει υπομονή, καθώς η διδασκαλία «είναι κάτι που σε γεμίζει χαρά αλλά και το πολύ δύσκολο συγχρόνως». Επίσης αναφέρει ότι θα πρέπει να έχει πάντα στο μυαλό του το καλό των μαθητών, οπότε δεν θα πρέπει να μεταφέρει τις δικές του ανησυχίες ή τους προβληματισμούς στη σχολική τάξη, είτε αυτοί προέρχονται από το σχολικό περιβάλλον είτε από τις οδηγίες του υπουργείου. Προτρέπει ακόμα τον νέο μαθηματικό να μην τηρήσει ‘‘κατά γράμμα’’ τις επίσημες οδηγίες διδασκαλίας των μαθηματικών. Τέλος, υπενθυμίζει ότι ο εκπαιδευτικός στα μάτια των παιδιών είναι πρότυπο και τον μιμούνται, οπότε θα πρέπει να αποτελέσει ένα θετικό πρότυπο για τους μαθητές οι οποίοι είναι οι αυριανοί του συμπολίτες.

*«Σε έναν νέο εκπαιδευτικό θα του έλεγα να μην μπερδεύει τους μαθητές με όλα τα άλλα. Δηλαδή, ένας εκπαιδευτικός πολλές φορές βρίσκεται μεταξύ μαθητών από τη μια μεριά και από την άλλη μεριά ένα τοίχος που λέγεται γονείς, διευθυντής, υπουργείο παιδείας, νόμοι κλπ. Δεν πρέπει ένας εκπαιδευτικός να μεταφέρει το άγχος ή τους προβληματισμούς που παίρνει από τη μια μεριά στους μαθητές. Πρέπει να διαφυλάξει τα παιδιά, να δει τους μαθητές σας δικά του παιδιά, σαν αυριανούς συμπολίτες. Ειδικά σε κάποιον νέο μαθηματικό θα συμβούλευα να κάνει το μάθημα με μεγάλη προσοχή και υπομονή και χωρίς να βιάζεται, χωρίς να δίνει και μεγάλη σημασία σε όλες τις οδηγίες που θα του στείλουν, χωρίς δηλαδή να προσπαθήσει να τις εκπληρώσει πλήρως στην τάξη του, γιατί θα ‘‘χάσει’’ τους μαθητές. Εκείνο που πρέπει να βλέπει ένας νέος μαθηματικός είναι το τί καταλαβαίνουν τα παιδιά και αργά-αργά, και ας του πάρει περισσότερο χρόνο και ας βγάλει λιγότερη ύλη. Και να μην ξεχνά ότι πέρα από μαθηματικός είναι και παιδαγωγός, και αποτελεί πρότυπο για όλους τους μαθητές, ό,τι και να κάνει ένας εκπαιδευτικός, από τον τρόπο που θα πιεί νερό, που θα συμπεριφερθεί, οι μαθητές τον παρακολουθούν και τον μιμούνται, τους επιρεάζει γενικότερα, θετικά ή αρνητικά».*

Ο Πίνακας 4.5 που ακολουθεί αποτυπώνει τα βασικά δομικά στοιχεία των απαντήσεων της δεύτερης συνέντευξης του Αντώνη ανά ερευνητικό άξονα.

**Πίνακας 4.5** Περιεχόμενο και δομικά στοιχεία της 2ης συνέντευξης του Αντώνη

<b>Ερευνητικοί Αξονες</b>	<b>Συνιστώσες</b>	<b>Χαρακτηριστικά στοιχεία</b>
<b>1<sup>ος</sup></b>  <i>Γνώσεις για το μαθηματικό περιεχόμενο</i>	Κριτήρια καταλληλότητας σχολικών και εξωσχολικών εγχειριδίων	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Αυτόνομη ανάγνωση με κατανόηση του σχολικού εγχειριδίου από το μαθητή</li> <li>• Τα εξωσχολικά βιβλία αφορούν τους εκπαιδευτικούς και είναι συμπληρώματα των σχολικών εγχειριδίων</li> </ul>
	Λόγοι ασυνέχειας μεταξύ ΔΣ και Γυμνασίου	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Υπεραπλούστευση των μαθηματικών εννοιών στο ΔΣ</li> <li>• Διαδικαστική μάθηση στο ΔΣ</li> <li>• Απουσία άσκησης της μαθηματικής σκέψης στο ΔΣ</li> </ul>
	Σημασία της προπαίδειας στο Γυμνάσιο	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Αναγνώριση πως δεν συνιστά αυτοσκοπό</li> <li>• Η εκμάθηση των μαθηματικών απαιτεί ενασχόληση με αυτά στο Γυμνάσιο</li> </ul>
<b>2<sup>ος</sup></b>  <i>Γνώσεις για τη μάθηση</i>	Εμπλοκή μαθητών στο μάθημα	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Αδυναμία του εκπαιδευτικού να εμπλέξει όλους τους μαθητές λόγω περιορισμένου χρόνου</li> </ul>
	Αίτια αδιαφορίας των μαθητών για την εκπαιδευτική διαδικασία	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Απουσία σιγουριάς</li> <li>• Ενασχόληση με πολλά αντικείμενα</li> </ul>
	Τρόπος διάκρισης ‘καλού’ από ‘αδύνατο’ μαθητή	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ενδιαφέρον για το μάθημα</li> <li>• Παρακολούθηση εκπαιδευτικού και συμμαθητών</li> </ul>
<b>3<sup>ος</sup></b>	Παραδείγματα δραστηριοτήτων που συνδέουν τα μαθηματικά/φυσική με την καθημερινότητα	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ποσοστά με τις εκπτώσεις στα καταστήματα</li> <li>• Μέση ταχύτητα του μαθητή κατά τη μετάβαση από το σπίτι στο σχολείο</li> </ul>
	Ερωτήσεις μαθητών	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Συνήθως προβλέψιμες</li> <li>• Ενδεχόμενες οι απροσδόκητες</li> </ul>

<i><b>Γνώσεις για τη διδασκαλία</b></i>	Έλεγχος της κατανόησης των εννοιών από τους μαθητές	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Προφορικά (άμεση και ο εκπαιδευτικός μπορεί να δίνει κάποιου είδους βοήθεια στο μαθητή)</li> <li>• Γραπτώς (χωρίς περαιτέρω εξηγήσεις από τον εκπαιδευτικό)</li> </ul>
	Συμβουλές στον νέο εκπαιδευτικό	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Υπομονή, καθώς είναι μια δύσκολη δουλειά</li> <li>• Δράση πάντα με σκοπό το καλό των μαθητών</li> <li>• Ευέλικτη εφαρμογή των οδηγιών διδασκαλίας</li> <li>• Θετικό πρότυπο για τους μαθητές</li> </ul>

#### **4.5 Συζήτηση και συμπεράσματα**

Στην παρούσα έρευνα αναζητήθηκαν απαντήσεις σχετικά με τις γνώσεις των εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά, στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και πιο συγκεκριμένα σε δύο Γυμνάσια του νομού Σερρών, σε τρεις κύριους άξονες προσέγγισης.

Στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα, αναφορικά με την παιδαγωγική γνώση των εκπαιδευτικών, διερευνήθηκαν ερωτήματα από τρεις άξονες όπως φαίνεται παρακάτω:

Στον πρώτο ερευνητικό άξονα που αφορά τις γνώσεις των εκπαιδευτικών για το μαθηματικό περιεχόμενο και το Α.Π. διερευνήθηκαν τα εξής βασικά ερωτήματα:

1. Ποιες **πηγές** συμβουλευέστε συνήθως για την προετοιμασία της διδασκαλίας σας και πώς τις επιλέγετε;
2. Καλύπτεται η **ύλη** που προτείνουν οι επίσημες οδηγίες;
3. Ποιες πιστεύετε ότι είναι οι **μαθηματικές γνώσεις** που πρέπει οπωσδήποτε να έχουν όλοι οι μαθητές τελειώνοντας το Γυμνάσιο;

Στο πρώτο ερώτημα, που αφορά τις **πηγές** που συμβουλεύονται οι εκπαιδευτικοί για την προετοιμασία της διδασκαλίας τους, δόθηκαν οι εξής απαντήσεις:

- Αναλυτικό πρόγραμμα
- Οδηγίες διδασκαλίας
- Σχολικό εγχειρίδιο
- Εξωσχολικά εγχειρίδια
- Φυλλάδια ασκήσεων
- Διαδίκτυο

Οι λόγοι επιλογής αυτών των πηγών όπως προκύπτει από τις συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών είναι:

- Το αναλυτικό πρόγραμμα πρέπει να ακολουθείται αλλά ο εκπαιδευτικός μπορεί να παίρνει πρωτοβουλίες έως έναν βαθμό
- Οι δραστηριότητες από εξωσχολικές πηγές στοχεύουν σε κάποια συγκεκριμένη παράμετρο της μαθηματικής γνώσης που θεωρεί ο εκπαιδευτικός ότι χρειάζεται
- Όσες περισσότερες πηγές συμβουλευεται κάποιος εκπαιδευτικός τόσο καλύτερα είναι προετοιμασμένος

Η μη δεσμευτικότητα του ΑΠ συμφωνεί με την άποψη των Lloyd, Remillard & Beth (2008), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι το αναλυτικό πρόγραμμα δεν χρησιμοποιείται αυτούσιο κατά τη διδασκαλία αλλά οι εκπαιδευτικοί είναι εκείνοι που διαμορφώνουν τη δομή της διδασκαλίας κατά την σχεδιάσή της. Επίσης, τα ευρήματα συμφωνούν και με τον Brown, M. W. (2008) σχετικά με τη διδασκαλία ως μιας σχεδιαστικής διαδικασίας στην οποία ο εκπαιδευτικός αντιλαμβάνεται και μεταφράζει το υπάρχον υποστηρικτικό υλικό συνεκτιμώντας ένα σύνολο παραγόντων: τους περιορισμούς που υπάρχουν στην τάξη του, τη γνώση των μαθητών του και τις προσωπικές του επιδιώξεις.

Στο δεύτερο ερώτημα, για την κάλυψη ή μη της προτεινόμενης ύλης, οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών αναφέρουν ότι:

- Ο βαθμός στον οποίο θα καλυφθεί η ύλη εξαρτάται από το επίπεδο των μαθητών
- Εξαρτάται και από τους στόχους που θέτει ο εκπαιδευτικός
- Αδυναμία κατανόησης από όλους τους μαθητές

Τα ευρήματα συμφωνούν με τον Brown, M. W. (2008) ο οποίος υποστηρίζει ότι ο τρόπος σκέψης και η απόκριση των μαθητών αναπροσαρμόζουν το έργο του εκπαιδευτικού πχ τη στρατηγική προσέγγισης που είχε αρχικά επιλέξει ή ακόμα και το είδος των δραστηριοτήτων που επιλέγει.

Στο τρίτο ερώτημα του άξονα αυτού σχετικά με τις μαθηματικές γνώσεις που θα έπρεπε να έχουν οι μαθητές που τελειώνουν το Γυμνάσιο, δόθηκαν οι εξής απαντήσεις:

- Πράξεις με ρητούς αριθμούς
- Εξισώσεις α' και β' βαθμού
- Μονώνυμα/πολυώνυμα και πράξεις αυτών
- Ταυτότητες
- Παραγοντοποίηση
- Στοχαστικά μαθηματικά
- Ποσοστά
- Εμβαδόν

Οι απαντήσεις των δύο εκπαιδευτικών διέφεραν σε αυτό το ερώτημα. Η Ελένη που είναι μαθηματικός ανέφερε συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες που θα πρέπει να γνωρίζουν οι μαθητές τελειώνοντας το Γυμνάσιο, έχοντας κατά νου αυτά που θα διδαχθούν οι μαθητές στο μάθημα των μαθηματικών στο Λύκειο. Από την άλλη ο

Αντώνης, που είναι φυσικός, έθεσε άλλα κριτήρια λέγοντας ότι αυτό που έχει σημασία είναι τελειώνοντας την υποχρεωτική εκπαίδευση οι μαθητές να μπορούν να είναι σκεπτόμενοι πολίτες. Αν και δεν υπάρχει κάτι αντίστοιχο στην ελληνική βιβλιογραφία, μπορούμε να το συνδέσουμε με την άποψη του Popham (2004) ότι οι διδακτικοί στόχοι που θέτει ο εκπαιδευτικός έχουν μεγάλη σημασία για μια καλή διδασκαλία και περιγράφουν τι θα πρέπει να μπορεί να κάνει ο μαθητής μέχρι το τέλος της διδασκαλίας.

Στον δεύτερο ερευνητικό άξονα, που αφορά τις γνώσεις των εκπαιδευτικών για τη μάθηση και τους μαθητές, διερευνήθηκαν τέσσερα βασικά ερωτήματα:

1. Συμμετέχουν όλοι οι μαθητές στην εκπαιδευτική διαδικασία;
2. Πώς ενθαρρύνει ο εκπαιδευτικός την **ενεργή συμμετοχή** των μαθητών;
3. Ποιες είναι οι **πρωταρχικές γνώσεις** που πρέπει να γνωρίζουν οι μαθητές για να προσεγγίσουν αποτελεσματικά κάποια έννοια;
4. Ποια είναι τα πιο συχνά **λάθη** των μαθητών;

Όσον αφορά τη μάθηση και κατανόηση των μαθηματικών ο Maher (2004) και ο Wilson et al. (2015) προτείνουν τη συνεργασία μεταξύ των μαθητών και τη γραπτή εξήγηση της επίλυσης της δραστηριότητας που τους ανατίθεται με ελάχιστη παρέμβαση από τον εκπαιδευτικό. Κάτι τέτοιο δεν διακρίνεται στη διδασκαλία της Ελένης, αλλά ο Αντώνης ανέφερε ότι αναθέτει τον ρόλο του ‘δασκάλου’ στους δυνατούς μαθητές για να βοηθήσουν και να εξηγήσουν, με τον δικό τους τρόπο, τις μαθηματικές έννοιες στους συμμαθητές τους. Τόσο ο Shulman (1986) όσο και οι Magnusson et al (1999) υποστηρίζουν ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γνωρίζουν τις πρωταρχικές γνώσεις των μαθητών για τις μαθηματικές έννοιες που διδάσκουν καθώς και τις δυσκολίες που μπορεί να αντιμετωπίσουν οι μαθητές στην κατανόηση των εννοιών αυτών. Η Ελένη και ο Αντώνης αναφέρουν κάποιες δυσκολίες/λάθη των μαθητών στην έννοια των κλασμάτων και στη γεωμετρία.

Στον τρίτο ερευνητικό άξονα, που αφορά τις γνώσεις των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία, διερευνήθηκαν τα εξής τέσσερα βασικά ερωτήματα:

1. Πώς διαχειρίζεται ο εκπαιδευτικός τις **ερωτήσεις** που θέτουν οι μαθητές και τις απαντήσεις τους (σωστές ή λανθασμένες) σε δικές του πιθανές ερωτήσεις;
2. Πώς **αξιολογεί** ο εκπαιδευτικός αν και σε ποιο βαθμό οι μαθητές κατάφεραν να κατανοήσουν τις ιδέες που πραγματεύονται στο μάθημα;
3. Πώς επιλέγει ο εκπαιδευτικός τις **μαθηματικές δραστηριότητες**;
4. Με ποιον τρόπο θα έπρεπε να γίνεται η διδασκαλία των μαθηματικών ώστε να είναι **αποτελεσματική**;

Σε πιθανές ερωτήσεις των μαθητών οι Modliar et al. (2021) και Sawyer (2004) τονίζουν την ανάγκη εστίασης της διδασκαλίας στις ιδέες των μαθητών, που χρειάζεται να προσεγγίζονται με ερμηνευτικό πνεύμα, καθώς και στη σημασία εξήγησης κάποιας δυσκολίας μέσω διαδοχικών ερωτήσεων. Αυτήν τη στρατηγική, αν και ο Αντώνης

ισχυρίστηκε ότι την ακολουθεί, δεν εντοπίστηκε κατά την παρατήρηση της διδασκαλίας του, ενώ η Ελένη είτε έδινε η ίδια τη σωστή απάντηση είτε επαναλάμβανε διαδικαστικά τα βήματα επίλυσης μιας άσκησης.

Η αξιολόγηση της κατανόησης των μαθητών διενεργείται από τους δύο εκπαιδευτικούς προφορικά αλλά και γραπτώς. Η προφορική είναι ‘αξιολόγηση εκείνης της στιγμής’ (in the moment), κατά την οποία ο εκπαιδευτικός με ερωτήσεις προσπαθεί να διαπιστώσει αν και πόσοι από τους μαθητές έχουν κατανοήσει τα όσα έχει πει. Οι Chan & Hume (2019) αναφέρονται σε αυτόν τον τρόπο αξιολόγησης όπως και μέσω φύλλων εργασίας-δραστηριοτήτων, πρακτική που υποστηρίζει ότι υιοθετεί και η Ελένη.

Σύμφωνα με τους Cai & Lester (2010), οι εργασίες καλό είναι να έχουν τη μορφή προβλημάτων, δηλαδή, ερωτήσεων που δεν επιδέχονται απαντήσεις ρουτίνας, οι οποίες μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν τις επιθυμητές δεξιότητες. Στην έρευνά μας οι εκπαιδευτικοί επιλέγουν κυρίως κλειστές μαθηματικές δραστηριότητες διαδικαστικού τύπου. Ωστόσο, ο Αντώνης σχολιάζει στη συνέντευξη δυο παραδείγματα προβλημάτων με πραγματικό πλαίσιο αναφοράς, οικείο στους μαθητές, καθώς υποστηρίζει ότι η σύνδεση των μαθηματικών με την καθημερινότητα των μαθητών θα τους βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών ιδεών που διαπραγματεύονται στη σχολική τάξη (Wilson et al., 2005).

Σχετικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα που αφορά τους παράγοντες που καθορίζουν την ΠΓΠ και το πώς διαφοροποιείται με βάση την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών, ο Αντώνης εστιάζει σε προβλήματα με πραγματικό πλαίσιο, ενώ η Ελένη δείχνει να έχει μικρότερη ευελιξία στο τί θα διδάξει. Σύμφωνα με τους Wasilatul Murtafiah et al. (2020), οι εκπαιδευτικοί με εμπειρία που συμμετείχαν στην έρευνά τους έτειναν να χρησιμοποιούν προβλήματα με πραγματικό πλαίσιο σε αντίθεση με τους αρχάριους που αναφέρονταν σε πλαίσια λιγότερο οικεία. Ο Αντώνης εμφανίζεται να ακολουθεί ένα αρκετά διαδραστικό στυλ διδασκαλίας με περισσότερο διάλογο μεταξύ εκπαιδευτικού-μαθητή και μεταξύ των μαθητών και δείχνει να προσπαθεί να αλλάξει τις στρατηγικές διδασκαλίας του, όταν αυτές που χρησιμοποιεί δεν έχουν τα επιθυμητά αποτελέσματα. Σύμφωνα με τους Pressley et al. (2020) οι συμμετέχοντες στη μελέτη τους εκπαιδευτικοί που εστίαζαν τη διδασκαλία στις ανάγκες και τα ενδιαφέροντα των μαθητών και προσπαθούσαν να δημιουργήσουν ένα καλό κλίμα μέσα στην τάξη που βοηθούσε στη μάθηση, είχαν ως αποτέλεσμα μια περισσότερο αποτελεσματική διδασκαλία.

Τα παραπάνω αποτελέσματα της έρευνας οδηγούν στα ακόλουθα **συμπεράσματα** ανά ερευνητικό ερώτημα:

**Αναφορικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα**, τα αποτελέσματα της ανάλυσης δεδομένων δείχνουν ότι η ΠΓΠ των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών είναι αρκετά περιορισμένη, κατά κανόνα ανελαστική, διαδικαστικού τύπου και διακρίνεται για το χαμηλό επίπεδο οργάνωσης, συνοχής και δημιουργικής αξιοποίησης στην πράξη. Δεν

τροφοδοτείται από το Α.Π. αλλά οριοθετείται από το σχολικό εγχειρίδιο. Οι γνώσεις για τη μάθηση και τους μαθητές βασίζονται στην εμπειρία, είναι ανεπεξέργαστες, αποκλειστικά γνωστικού προσανατολισμού και ασαφείς σε ό,τι αφορά ζητήματα συλλογικής μάθησης των μαθηματικών. Αναφορικά με τη διδασκαλία, οι γνώσεις συνδέονται με το κλασικό δασκαλοκεντρικό μοντέλο, ενώ η αξιολογική διαδικασία γίνεται κατανοητή εν πολλοίς με όρους ποσοτικής αποτίμησης των επιτευγμάτων των μαθητών, με τη διαμορφωτική εκδοχή της να εμφανίζεται επιθυμητή αλλά άγνωστη σε θεωρητικό και εμπειρικό επίπεδο.

**Όσον αφορά το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα**, ένας από τους πλέον κρίσιμους παράγοντες που καθορίζουν την ΠΓΠ των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών με την τόσο διαφορετική πορεία επαγγελματικής ανάπτυξης είναι η διδακτική τους εμπειρία. Η Ελένη, με αρκετά χρόνια εμπειρίας στη διδασκαλία των μαθηματικών σε φροντιστήρια και στην προετοιμασία των μαθητών για τις πανελλήνιες εξετάσεις, δίνει ιδιαίτερη σημασία στην εκμάθηση των ορισμών και της ‘θεωρίας’ του σχολικού εγχειριδίου από όλους τους μαθητές. Και στις δύο παρακολουθήσεις επισήμανε στους μαθητές ότι η γνώση της θεωρίας είναι πολύ σημαντική και αυτό γιατί τόσο στις γραπτές εξετάσεις όσο και στα γραπτά διαγωνίσματα στο σχολείο υπάρχουν θεωρητικές ασκήσεις που αντιστοιχούν σε σημαντικό αριθμό μονάδων. Επίσης, η διδασκαλία της Ελένης είναι δασκαλοκεντρική και ο τρόπος επίλυσης και εκμάθησης των μαθηματικών στους μαθητές γίνεται με διαδικαστικό τρόπο, ακολουθώντας συγκεκριμένα βήματα. Αντίθετα, ο Αντώνης που διδάσκει για πρώτη φορά μαθηματικά φαίνεται να προσπαθεί να συνδέσει τη μαθηματική γνώση με την καθημερινότητα των μαθητών. Αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι είναι φυσικός, η Φυσική στηρίζεται στο πείραμα και στην παρατήρηση και όχι σε διαδικαστικές μεθόδους. Επίσης, επειδή διδάσκει για πρώτη φορά τα μαθηματικά αρχικά δυσκολεύτηκε, ανέτρεξε στο Α.Π. αλλά και συμβουλευτήκε συναδέλφους μαθηματικούς με αποτέλεσμα να μοιάζει να έχει διαμορφώσει μια πιο ευέλικτη αντίληψη για τους στόχους και τον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών. Όσον αφορά στις δυσκολίες των μαθητών κατά τη διάρκεια του μαθήματος, η Ελένη εξηγούσε είτε διαδικαστικά την επίλυση μιας δραστηριότητας είτε λέγοντας η ίδια τη σωστή απάντηση. Ο Αντώνης από την άλλη μεριά εστίαζε περισσότερο στην εννοιολογική κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές. Σε απροσδόκητες ερωτήσεις ο Αντώνης ανταποκρίθηκε με αυτοσχεδιασμό και επέδειξε ανοιχτό πνεύμα στο να ακούει ερμηνευτικά τους μαθητές και επέτρεψε στις ιδέες και στις απαντήσεις τους να κατευθύνουν την πορεία του μαθήματος. Επίσης, όταν κάποιος μαθητής δεν καταλάβαινε μια έννοια, μέσω διαδοχικών ερωτήσεων και ακολουθώντας την σκέψη του, του έδειχνε τον δρόμο για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας αυτής.

#### **4.6 Περιορισμοί και μελλοντική έρευνα**

Ολοκληρώνοντας την παρούσα εργασία είναι σημαντικό να αναφέρουμε κάποιους **περιορισμούς** που οφείλονται στον τρόπο σχεδιασμού και στο είδος της έρευνας που υιοθετήθηκαν. Αρχικά, το εύρος των συμμετεχόντων στην έρευνα είναι περιορισμένο.

Το ιδανικό θα ήταν να έχουμε περισσότερες περιπτώσεις εκπαιδευτικών ώστε να καταγραφεί ένα ευρύτερο φάσμα εκδοχών της ΠΓΠ. Για παράδειγμα, θα ήταν χρήσιμο να έχουμε εκπαιδευτικούς με πολύ μικρή διδακτική εμπειρία και άλλους με πολύ μεγάλη (>25 χρόνια). Επίσης, ένας άλλος περιορισμός είναι ο μικρός αριθμός παρατηρήσεων και συνεντεύξεων που πραγματοποιήθηκαν λόγω δυσκολιών προσβασιμότητας, που δεν επιτρέπουν μια πιο ενδελεχή και ίσως πιο ολοκληρωμένη αποτύπωση του περιεχομένου και της οργάνωσης του ΠΓΠ των συμμετεχόντων.

Τέλος, όσον αφορά τις **ερευνητικές προεκτάσεις** της παρούσας μελέτης, θα είχε ενδιαφέρον να μελετηθεί αν και πώς μεταβάλλεται η ΠΓΠ των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών αναφορικά με τα μαθηματικά κατά τη διάρκεια των σπουδών τους αλλά και με βάση τα χρόνια υπηρεσίας τους. Μια δεύτερη προέκταση θα ήταν να διερευνηθεί πως αντιλαμβάνονται και κρίνουν/ αποτιμούν οι μαθητές την ΠΓΠ των εκπαιδευτικών που τους διδάσκουν μαθηματικά. Επίσης, ερευνητικό ενδιαφέρον θα είχε και η μελέτη της ΠΓΠ των εκπαιδευτικών πριν και μετά από ένα επιμορφωτικό πρόγραμμα και η σύνδεσή τους με τη διδακτική τους πράξη. Τέλος, μια ακόμη ενδιαφέρουσα προέκταση της παρούσας μελέτης θα ήταν η διερεύνηση της σχέσης ΠΓΠ και διδακτικής σε ένα αστικό σχολείο και σε ένα σχολείο της επαρχίας.



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abell, S. K. (2008). Twenty Years Later: Does pedagogical content knowledge remain a useful idea? *International Journal of Science Education*, 30(10), σ.σ. 1405–1416.

Amador, J. M., Rogers, M. A. P., Hudson, R., Phillips, A., Carter, I., Galindo, E., & Akerson, V. L. (2022). Novice teachers' pedagogical content knowledge for planning and implementing mathematics and science lessons. *Teaching and Teacher Education*, 115, 103736.

Ball, D. L., & Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. Paper presented at the 43rd Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Oldenburg, Germany. Retrieved 15 May 2011 from [www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2009/BzMU2009 Inhalt-fuer-Homepage.htm](http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2009/BzMU2009%20Inhalt-fuer-Homepage.htm)

Ball, D., Thames, M.H., Bass, H., Sleep, L., Lewis, J. & Phelps, G. (2009a). A practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. Στο M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 1), σ.σ. 95-98. Thessaloniki, Greece: PME.

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), σ.σ. 389-407.

Behm, S. L., & Lloyd, G. M. (2008). Factors Influencing Student Teachers' Use of Mathematics Curriculum Materials. Στο J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann, & G. M. Lloyd, *Mathematics Teachers at Work* (σ.σ. 205-222). New York and London: Routledge, Taylor and Francis.

Berliner, D. C. (1986). In pursuit of the expert pedagogue. *Educational researcher*, 15(7), 5-13.

Borko, H., & Livingston, C. (1989). Cognition and improvisation: Differences in mathematics instruction by expert and novice teachers. *American educational research journal*, 26(4), 473-498.

Borko, H., & Putnam, R. (1996). Learning to teach. In D. Berliner & R. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 673–708). New York: Macmillan.

Brown, M. W. (2008). The Teacher–Tool Relationship. Στο J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann, & G. M. Lloyd, *Mathematics Teachers at Work* (σ.σ. 38-56). Routledge.

Bucat, R. (2005). Implications of chemistry education research for teaching practice: Pedagogical content knowledge as a way forward. *Chemistry Education International*, 6 (1), 1–2.

Cai, J., & Lester, F. (2010). Why is teaching with problem solving important to student learning. *National council of teachers of mathematics*, 13(12), 1-6.

Chan, K. K. H., & Hume, A. (2019). Towards a consensus model: Literature review of how science teachers' pedagogical content knowledge is investigated in empirical studies. *Repositioning pedagogical content knowledge in teachers' knowledge for teaching science*, 3-76.

Clarridge, P. B., & Berliner, D. C. (1991). Perceptions of student behavior as a function of expertise. *The Journal of Classroom Interaction*, 1-8.

Depaepe, F., Verschaffel, L., & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and teacher education*, 34, 12-25.

Eisner, E. W. (2004). Educational Objectives—Help or Hindrance? Στο D. J. Flinders, & S. J. Thornton, *The curriculum studies reader* (σσ. 85-92). RoutledgeFalmer.

Grossman, P. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York, NY: Teachers College Press.

Gudmundsdottir, S. (1987). Pedagogical Content Knowledge: Teachers' Ways of Knowing.

Hashweh, M., Z. (2005). Teacher pedagogical constructions: A reconfiguration of pedagogical content knowledge. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 11, σ.σ. 273-292.

Herppich, S., Praetorius, A. K., Förster, N., Glogger-Frey, I., Karst, K., Leutner, D., ... & Südkamp, A. (2018). Teachers' assessment competence: Integrating knowledge-, process-, and product-oriented approaches into a competence-oriented conceptual model. *Teaching and Teacher education*, 76, 181-193.

Housner, L. D., & Griffey, D. C. (1985). Teacher cognition: Differences in planning and interactive decision making between experienced and inexperienced teachers. *Research quarterly for exercise and sport*, 56(1), 45-53.

Kind, V. (2009). pedagogical content knowledge in science education: perspectives and potential for progress. *Studies in Science Education*, 45 (2), 169-204.

Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., & Jordan, A. (2008). Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers. *Journal of educational psychology*, 100(3), 716.

Lachner, A., & Nückles, M. (2016). Tell me why! Content knowledge predicts process-orientation of math researchers' and math teachers' explanations. *Instructional Science*, 44(3), 221-242.

Li, Y., & Kaiser, G. (2011). Expertise in mathematics instruction: Advancing research and practice from an international perspective. In *Expertise in mathematics instruction* (pp. 3-15). Springer, Boston, MA.

Lloyd, G. M., Remillard, J. T., & Beth, A. (2008). Teachers' Use of Curriculum Materials. Στο J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann, & G. M. Lloyd, *Mathematics Teachers at Work* (σσ. 24-33). Routledge

Magnusson, S., Krajcik, J., & Borko, H. (1999). Nature, sources, and development of pedagogical content knowledge for science teaching. In *Examining pedagogical content knowledge* (pp. 95-132). Springer, Dordrecht.

Maher, C. A. (2004). The development of mathematical reasoning: 16-year study. In *Invited lecture at the 10th International Congress of Mathematics Education*.

Marks, D. (1990). Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education*, 41(3), σ.σ. 3-11.

Marshall, J. C. (2016). *The highly effective teacher: 7 classroom-tested practices that foster student success*. ASCD.

Montero, L. (2001). la construcción del conocimiento en la enseñanza. In: Marcelo, C. (Ed.) *La función docente (The teaching role)*. Madrid: Ed. Síntesis, 47-83.

Moodliar, J., & Abdulhamid, L. (2021). Novice and expert Grade 9 teachers' responses to unexpected learner offers in the teaching of algebra. *Pythagoras*, 42(1), 624.

Murtafiah, W., Sa'dija, C., Chandra, T. D., & Zayyadi, M. (2020, February). Novice and experienced mathematics teachers' decision making process in designing math problem. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1464, No. 1, p. 012030). IOP Publishing.

Nilsson, P. (2008). Teaching for understanding: The complex nature of pedagogical content knowledge in pre-service education. *International Journal of Science Education*, 30 (10), 1281-1299.

Park, S., & Chen, Y. C. (2012). Mapping out the integration of the components of pedagogical content knowledge (PCK): Examples from high school biology classrooms. *Journal of Research in Science Teaching*, 49(7), 922e941.

Park, S., & Oliver, J. S. (2008b). Revisiting the conceptualization of pedagogical content knowledge (PCK): PCK as a conceptual tool to understand teachers as professionals. *Research in Science Education*, 38(3), 261e284.

Pepin, B., Xu, B., Trouche, L., & Wang, C. (2017). Developing a deeper understanding of mathematics teaching expertise: an examination of three Chinese mathematics teachers' resource systems as windows into their work and expertise. *Educational studies in Mathematics*, 94(3), 257-274.

Popham, W. J. (2004). Objectives. Στο D. J. Flinders, & S. J. Thornton, *The Curriculum Studies Reader* (σσ. 71-85). Great Britain: RoutledgeFalmer.

Pressley, T., Croyle, H., & Edgar, M. (2020). Different approaches to classroom environments based on teacher experience and effectiveness. *Psychology in the Schools*, 57(4), 606-626.

Putnam, R. T. (1987). Structuring and adjusting content for students: A study of live and simulated tutoring of addition. *American Educational Research Journal*, 24(1), 13–48.

Remillard, J. T., & Bryans, M. B. (2004). Teachers' orientations toward mathematics curriculum materials: implications for teacher learning. 35(5), 352-388.

Rowland, T., & Ruthven, K. (2011). Introduction: Mathematical knowledge in teaching. In *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 1-5). Springer, Dordrecht.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, σ.σ. 255-281.

Şahin, Ö. & Soylu, Y. (2017). Examining development of curriculum knowledge of prospective mathematics teachers. *Journal of Education and Practice*, 8(2), 142-152. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1131599>

Sawyer, R. K. (2004). Creative teaching: Collaborative discussion as disciplined improvisation. *Educational researcher*, 33(2), 12-20.

Shulman, L., S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 75(2), σ.σ. 4-14.

Shulman, L., S. (1986b). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research*, 15(2), σ.σ. 4-14.

Stein, M. K., & Kim, G. (2008). The Role of Mathematics Curriculum Materials in Large-Scale Urban Reform. Στο J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann, & G. M. Lloyd, *Mathematics Teachers at Work*. Routledge, Taylor and Francis.

Τσιώλης Γ. (2016). Ανάλυση ποιοτικών δεδομένων: διλήμματα, δυνατότητες, Η θεματική ανάλυση ποιοτικών δεδομένων 125 διαδικασίες. Στο Γ. Πυργιωτάκης, Χρ. Θεοφιλίδης (επιμ.), *Ερευνητική μεθοδολογία στις κοινωνικές επιστήμες και στην εκπαίδευση. Συμβολή στην επιστημολογική θεωρία και την ερευνητική πράξη* (473-498), Αθήνα: Πεδίο.

Wilson, P. S., Cooney, T. J., & Stinson, D. W. (2005). What constitutes good mathematics teaching and how it develops: Nine high school teachers' perspectives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(2), 83-111.

Wolff, C. E., van den Bogert, N., Jarodzka, H., & Boshuizen, H. P. (2015). Keeping an eye on learning: Differences between expert and novice teachers' representations of classroom management events. *Journal of teacher education*, 66(1), 68-85.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(4), 263–281.

Zazkis, R., & Mamolo, A. (2011). Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning of Mathematics*, 31(2), 8–13

Zoitsakos, S. (2019). Μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των ανώτερων μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Doctoral dissertation, National and Kapodistrian University of Athens; Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ)).

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

### Πρωτόκολλο 2ης παρατήρησης (κοινό)

#### ΑΞΟΝΑΣ 1: Γνώσεις για το μαθηματικό περιεχόμενο

- 1) Παρατηρείται αλλοίωση της μαθηματικής γνώσης ;
- 2) Υπάρχει κάποια ιεράρχηση του μαθηματικού περιεχομένου από τον εκπαιδευτικό κατά τη διδασκαλία; (εύκολο → δύσκολο)
- 3) Υπάρχει εστίαση της μαθηματικής γνώσης που είναι υπό διαπραγμάτευση σε συγκεκριμένα στοιχεία/ χαρακτηριστικά (διαδικαστική/ εννοιολογική γνώση);
- 4) Παρατηρείται ευχέρεια στη διαπραγμάτευση του μαθηματικού νοήματος από τον/την εκπαιδευτικό;

#### ΑΞΟΝΑΣ 2: Μάθηση και μαθητές

##### Μαθητής

- 1) Υπάρχει ενεργή συμμετοχή των μαθητών στην εκπαιδευτική διαδικασία; Πώς εμπλέκονται στη διαδικασία μάθησης;
  - 2) Πώς προμοδοτεί/ υποστηρίζει ο εκπαιδευτικός τους δυνατούς μαθητές; Πώς διαχειρίζεται / υποστηρίζει τους αδύνατους μαθητές;
  - 3) Υπάρχει επικοινωνία μεταξύ των μαθητών και μεταξύ εκπαιδευτικού-μαθητή; Τι είδους;
- 

##### Μάθηση

- 1) Δίνονται προκλήσεις στους μαθητές στο πλαίσιο της διδασκαλίας; Τι είδους; Σε ποιους; (Κονστрукτιβισμός)
- 2) Υπάρχουν στιγμές ‘ανακαλυπτικής μάθησης’; Τι είδους (Bruner); Ποιοι μαθητές και πως ενεργοποιούνται;
- 3) Υπάρχει συλλογική μάθηση; Δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές να συνεργαστούν; Να αλληλοεπιδράσουν; Να μοιραστούν σκέψεις και τρόπους εργασίας; (Vygotsky)

#### ΑΞΟΝΑΣ 3: Διδασκαλία

- 1) Ποιες είναι οι κυρίαρχες διδακτικές πρακτικές που αξιοποιεί ο εκπαιδευτικός;
- 2) Πώς διαχειρίζεται ο εκπαιδευτικός το λάθος;
- 3) Τι είδους ερωτήσεις θέτει ο εκπαιδευτικός στους μαθητές; Ρωτάνε οι μαθητές; Τί είδους ερωτήσεις θέτουν;
- 4) Πώς απαντώνται οι απορίες των μαθητών;
- 5) Τί είδους έργα (tasks) αναθέτει ο εκπαιδευτικός στους μαθητές ;
- 6) Πως αξιολογεί το αν και πως μαθαίνουν οι μαθητές;
- 7) Διασφαλίζει ο εκπαιδευτικός τη συμμετοχή όλων των μαθητών; Πως;

## Ερωτήματα 1ης Συνέντευξης (κοινά)

### ΑΞΟΝΑΣ 1: Γνώσεις για το μαθηματικό περιεχόμενο

- 1) Πως αποφασίζετε τι θα διδάξετε την κάθε μέρα; Συμβουλευέστε το ΠΣ για να προετοιμάσετε τη διδασκαλία σας; Τα σχολικά εγχειρίδια; Πώς;
- 2) Διαφοροποιείτε τη διδασκαλία ενός μαθήματος από τμήμα σε τμήμα; Γιατί; Πώς;
- 3) Πώς διασφαλίζετε ότι 'καλύπτεται' η ύλη που πρέπει; Πώς το γνωρίζετε;

### ΑΞΟΝΑΣ 2: Γνώσεις για τη μάθηση

- 1) Κατά τη γνώμη σας ποιές είναι οι πρωταρχικές γνώσεις και οι έννοιες που πρέπει να γνωρίζουν οι μαθητές ώστε να είναι σε θέση να προσεγγίσουν αποτελεσματικά την έννοια του κλάσματος;
- 2) Που δυσκολεύονται περισσότερο στη συγκεκριμένη ιδέα κτλ; Ποια είναι τα πιο συχνά λάθη των μαθητών σας στην έννοια της ισοδυναμίας κλασμάτων;
- 3) Εμπλέκονται όλοι οι μαθητές; Πώς συμμετέχουν οι μαθητές με δυσκολίες; Οι δυνατοί μαθητές;
- 4) Πώς ενθαρρύνετε την ενεργή συμμετοχή των μαθητών στο μάθημα;

### ΑΞΟΝΑΣ 3: Γνώσεις για τη διδασκαλία

- 1) Πώς προσαρμόζετε τη διδασκαλία στις ανάγκες και στο επίπεδο των μαθητών; Χρειάζεται να αλλάξετε τις διδακτικές σας επιλογές στη διάρκεια της διδασκαλίας στην τάξη; Πότε; Γιατί; Πώς το καταφέρνετε αυτό;
- 2) Πως επιλέγετε μαθηματικές δραστηριότητες; Πως γνωρίζετε ότι είναι κατάλληλες για το αντικείμενο μάθησης (στόχος μάθησης) αλλά και για τους μαθητές σας (με βάση το τι μπορούν και τι δεν είναι σε θέση να διεκπεραιώσουν);  
Ποια χαρακτηριστικά θεωρείτε εσείς σημαντικά να υπάρχουν σε μια δραστηριότητα που αναπτύσσεται στην τάξη στην (τάδε) ενότητα ;
- 3) Πώς διασφαλίζετε ότι η δραστηριότητα που προκύπτει με βάση τις εργασίες που αναθέτετε στους μαθητές στην τάξη είναι 'μαθηματική δραστηριότητα';
- 4) Πώς επιλέγετε τα παραδείγματα που χρησιμοποιείτε και τις εργασίες που αναθέτετε στους μαθητές στην τάξη και για το σπίτι;  
Από πού; Εκτός από το σχολικό βιβλίο χρησιμοποιείτε άλλες πηγές ή εκπαιδευτικό υλικό; Σε αυτή την περίπτωση ως προς τι διαφοροποιείται το υλικό σας από το σχολικό βιβλίο;
- 5) Πώς διαχειρίζεστε τις ερωτήσεις που θέτουν οι μαθητές και τις απαντήσεις τους (σωστές ή λανθασμένες) σε δικές σας πιθανές ερωτήσεις;
- 6) Συνήθως αξιοποιείτε όλες τις εργασίες που έχετε προγραμματίσει για ένα μάθημα; Γιατί ναι ή όχι; Τι κάνετε σε αυτήν την περίπτωση;
- 7) Πώς ελέγχετε αν και σε ποιο βαθμό οι μαθητές κατάφεραν να κατανοήσουν τις ιδέες που προσεγγίζετε σε ένα μάθημα (αξιολόγηση);

## Ερωτήματα 2ης συνέντευξης (ΕΛΕΝΗ)

### ΑΞΟΝΑΣ 1: Γνώσεις για το μαθηματικό περιεχόμενο

- 1) Τί εννοείτε πως υπάρχει ευελιξία στη διδασκαλία κάθε κεφαλαίου; Τί είδους ενέργειες / πρωτοβουλίες έχετε λάβει στην κατεύθυνση αυτή; Μπορείτε να δώσετε κάποιο παράδειγμα;
- 2) Αναφέρατε ότι 'είστε σίγουρη πως θα καταφέρετε μέχρι το τέλος της σχολικής χρονιάς να καλύψετε όλη την ύλη'. Πως θα γίνει αυτό;
- 3) Ποιες θεωρείτε ότι είναι οι πλέον σημαντικές μαθηματικές γνώσεις στην Α Γυμνασίου (στην Αριθμητική/Άλγεβρα/Γεωμετρία/Στοχαστικά μαθηματικά) ; Αυτές που είναι το ελάχιστο που χρειάζεται να καταφέρει κάθε μαθητής, καλός ή αδύνατος, ώστε να μπορέσει να συνεχίσει στην επόμενη τάξη;
- 4) Στο μάθημα που παρακολούθησα την πρώτη φορά αλλά και στην πρώτη μας συνάντηση δώσατε ιδιαίτερη σημασία στην έννοια του κλάσματος. Γιατί; Πώς;
- 5) Αν θα έπρεπε να αναφέρετε πέντε – έξι μαθηματικές γνώσεις που θα έπρεπε ΟΠΩΣΔΗΠΟΤΕ να έχουν μάθει όλοι οι μαθητές τελειώνοντας το Γυμνάσιο, ποιες θα ήταν αυτές και γιατί; (να τις αναφέρει μία – μία αν είναι δυνατό)

### ΑΞΟΝΑΣ 2: Γνώσεις για τη μάθηση

- 1) Ποια θεωρείτε πως είναι τα χαρακτηριστικά του τρόπου που μαθαίνουν/διδάσκονται μαθηματικά οι μαθητές στο ΔΣ; Πώς το διαπιστώνετε; Τι θα θέλατε να αλλάξει, εσείς, ως εκπαιδευτικός των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης; Γιατί;
- 2) Πως νομίζετε ότι πρέπει να σκέφτεται ένας μαθητής του Γυμνασίου για να τα καταφέρει στα μαθηματικά;
- 3) Με δεδομένη τη σημασία που θεωρείτε πως πρέπει να δίνεται στη μάθηση των κλασμάτων, πώς νομίζετε ότι μπορεί ο εκπαιδευτικός να βοηθήσει τους μαθητές για να περάσουν από την έννοια 'κλάσμα' που διδάσκεται στο ΔΣ στην έννοια 'ρητός' που μνείται στην Α Γυμνασίου; Από την εμπειρική κατανόηση της γεωμετρίας στην θεωρητικοποίησή της; Στην αποδεικτική διαδικασία;
- 4) Γενικά, πως νομίζετε ότι μπορεί να διευκολυνθεί το πέρασμα των μαθητών από τα μαθηματικά του Δημοτικού Σχολείου (ΔΣ) στα μαθηματικά του Γυμνασίου; Πώς διαφέρουν τα μεν από τα δε;
- 5) Σχολιάσατε .... Γιατί το να μάθεις κάτι να το προσεγγίζεις με πολλούς τρόπους είναι προβληματικό; Πώς το ξέρετε;
- 6) Ποια είναι η άποψή σας για το πως οι μαθητές επικοινωνούν τη μαθηματική τους σκέψη στην τάξη; Πως το αντιμετωπίζετε διδακτικά;



- 7) Θεωρείτε πως οι μαθητές χρειάζεται να έχουν εξωσχολική βοήθεια στα μαθηματικά; Πώς διαμορφώνει αυτό τις επιδόσεις και τη συμπεριφορά-συμμετοχή τους στην τάξη;
- 8) Ποια είναι η γνώμη σας για τη 'διαφοροποιημένη διδασκαλία'; Μπορεί να εφαρμοστεί στην πράξη;
- 9) Πώς πιστεύετε ότι ένας μαθητής Γυμνασίου μαθαίνει μαθηματικά; Τι χρειάζεται; Διαφέρει αυτός ο τρόπος από τάξη σε τάξη;  
Σήμερα λέμε ότι ο μαθητής θα πρέπει να κατασκευάζει τη γνώση με ενεργό τρόπο. Τί νομίζετε γι' αυτό; Συμβαίνει στο Γυμνάσιο; Μπορεί να συμβεί; Πώς;
- 10) Αν θα έπρεπε να αναφέρετε πέντε – έξι χαρακτηριστικά της μαθηματικής σκέψης που θα έπρεπε ΟΠΩΣΔΗΠΟΤΕ να αναπτύξουν όλοι οι μαθητές τελειώνοντας το Γυμνάσιο, ποια θα ήταν αυτά και γιατί;

### **ΑΞΟΝΑΣ 3: Γνώσεις για τη διδασκαλία**

- 1) Επισημάνετε στην πρώτη μας συνάντηση πως ακολουθείτε τις επίσημες οδηγίες για την επιλογή των μαθηματικών δραστηριοτήτων. Αξιοποιείτε πέρα από αυτές και άλλες δραστηριότητες; Πώς; Μπορείτε να δώσετε κάποιο παράδειγμα;
- 2) Πώς θα συμβουλευάτε έναν νέο εκπαιδευτικό πώς πρέπει να διαχειρίζεται ο καθηγητής τους αδύνατους και πώς τους δυνατούς μαθητές; Πώς διαχειρίζεστε τα λάθη τους;
- 3) Στην προηγούμενη συνάντησή μας είπατε πως σηκώνετε στον πίνακα τους μαθητές για να εκθέσουν τη σκέψη τους. Πώς επιλέγετε ποιος θα κληθεί να συμμετέχει στα διάφορα μέρη της ανάπτυξης του μαθήματος;
- 4) Πώς διαχειρίζεστε τις εργασίες που αναθέσατε να επιλύσουν οι μαθητές στο σπίτι;
- 5) Γενικά, κατά τη γνώμη σας με ποιον τρόπο θα έπρεπε να γίνεται η διδασκαλία των μαθηματικών ώστε να είναι αποτελεσματική για τους μαθητές; Μπορεί να είναι αποτελεσματική για όλους τους μαθητές; Πώς;
- 6) Μια σημαντική συνιστώσα της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι η αξιολόγησή τους, των γνώσεων που αναπτύσσουν και πόσο είναι συμβατές με τις προσδοκώμενες. Θα ήταν χρήσιμο να μας δίνετε περισσότερες πληροφορίες για τον τρόπο που αξιολογείτε τους μαθητές. Πώς ακριβώς, για παράδειγμα, κατασκευάζετε τις δοκιμασίες;
- 7) Τι θα συμβουλευάτε ένα νέο εκπαιδευτικό που έρχεται να διδάξει μαθηματικά στο Γυμνάσιο; Τι πρωτίστως θα του συνιστούσατε να προσέξει; Να υιοθετήσει;

## Ερωτήματα 2ης συνέντευξης (ΑΝΤΩΝΗ)

### ΑΞΟΝΑΣ 1: Γνώσεις για το Μαθηματικό περιεχόμενο

- 1) Ποιές πηγές συμβουλευέστε συνήθως για την προετοιμασία της διδασκαλίας σας; Πώς τις επιλέγετε; Παράδειγμα;
- 2) Ποια κριτήρια χρησιμοποιείτε για να κρίνετε αν ένα σχολικό ή εξωσχολικό εγχειρίδιο είναι κατάλληλο για τη διδασκαλία σας;
- 3) Αναφέρατε ότι δεν υπάρχει ομαλή μετάβαση από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Τι εννοείτε; Πώς το διαπιστώσατε; Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα αυτής της ασυνέχειας;
- 4) Επισημάνετε πως υπάρχουν κάποιες αστοχίες στις οδηγίες που δίνονται για τη διδασκαλία. Μπορείτε να εξηγήσετε τι είδους αστοχίες παρατηρήσατε στις οδηγίες διδασκαλίας; Παράδειγμα;
- 5) Σε κάθε τμήμα κάνετε την ίδια 'ύλη' ανεξάρτητα από το επίπεδο των μαθητών; Αν ναι, πώς προσαρμόζετε τη διδασκαλία σας για να καλυφθεί αυτή η ύλη; Αν όχι, πώς αποφασίζετε τι θα συμπεριλάβετε στη διδασκαλία σας και τι όχι;
- 6) Θεωρείτε ότι η γνώση της προπαίδειας είναι σημαντική για ένα μαθητή του Γυμνασίου; Γιατί;
- 7) Αναφέρατε ότι κάποιες έννοιες τις θεωρείτε δευτερεύουσες και δεν εστιάζετε σε αυτές στη διδασκαλία σας. Μπορείτε να δώσετε κάποιο παράδειγμα; Στο Λύκειο τί θα αφήνατε για αργότερα; Πότε αργότερα;
- 8) Αν θα έπρεπε να αναφέρετε πέντε – έξι μαθηματικές γνώσεις που θα έπρεπε ΟΠΩΣΔΗΠΟΤΕ να έχουν μάθει όλοι οι μαθητές τελειώνοντας το Γυμνάσιο, ποιες θα ήταν αυτές και γιατί;

### ΑΞΟΝΑΣ 2: Γνώσεις για τη μάθηση

- 1) Πώς πιστεύετε ότι ένας μαθητής Γυμνασίου μαθαίνει μαθηματικά; Τί χρειάζεται; Διαφέρει αυτός ο τρόπος από τάξη σε τάξη;  
  
Σήμερα λέμε ότι ο μαθητής θα πρέπει να κατασκευάζει τη γνώση με ενεργό τρόπο. Τί νομίζετε γι' αυτό; Συμβαίνει στο Γυμνάσιο; Μπορεί να συμβεί; Πώς;
- 2) Αναφέρατε ότι κάνετε τους καλούς μαθητές 'δασκάλους' των αδύναμων. Για ποιον λόγο πιστεύετε ότι αυτό βοηθά τους αδύνατους στην καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών; Οι 'αδύνατοι' δέχονται χωρίς πρόβλημα αυτή τη βοήθεια από τον 'καλό' συμμαθητή τους;
- 3) Πώς αποφασίζει ένας εκπαιδευτικός ποιος είναι ο 'καλός μαθητής' και ποιος ο 'αδύνατος μαθητής' στα μαθηματικά;
- 4) Στο Γυμνάσιο δεν πρέπει να πάμε και λίγο στο 'καθαρό μαθηματικό πεδίο'; Όλες οι δραστηριότητες πρέπει να είναι με αναφορά στην πραγματικότητα; Γιατί; Πώς θα καταλάβουν για παράδειγμα το κλάσμα ως ρητό, τότε, ώστε να προχωρήσουν σε πιο προχωρημένο τρόπο σκέψης;

- 5) Ποιους μαθητές επιλέγετε πιο συχνά για να εμπλακούν στο μάθημα; Είναι πιο συχνά οι καλοί, οι μέσης επίδοσης ή οι αδύνατοι; Υπάρχουν φορές που εμπλέκετε τους καλούς αφήνοντας τους αδύνατους ή το αντίστροφο;
- 6) Γιατί πιστεύετε ότι η μετάβαση από την μια εκπαιδευτική βαθμίδα στην άλλη ή από τη μια τάξη στην άλλη δεν γίνεται ομαλά; Υπάρχει κάτι που αφορά τον τρόπο σκέψης των μαθητών της συγκεκριμένης ηλικίας που δεν βοηθά;
- 7) Σε ποιο βαθμό θεωρείτε πως για την αδιαφορία των μαθητών για την εκπαιδευτική διαδικασία στα μαθηματικά φταίει η ασυνέχεια μεταξύ των εκπαιδευτικών βαθμίδων; Ο ρόλος του εκπαιδευτικός σε αυτό;
- 8) Αν θα έπρεπε να αναφέρετε πέντε – έξι χαρακτηριστικά της μαθηματικής σκέψης που θα έπρεπε ΟΠΩΣΔΗΠΟΤΕ να αναπτύξουν όλοι οι μαθητές τελειώνοντας το Γυμνάσιο, ποια θα ήταν αυτά και γιατί;

### **ΑΞΟΝΑΣ 3: Γνώσεις για τη διδασκαλία**

- 1) Μπορείτε να δώσετε κάποιο παράδειγμα δραστηριότητας που συνδυάζει τα μαθηματικά με την καθημερινότητα των μαθητών και θα ήταν αντιπροσωπευτικό αυτού του είδους των δραστηριοτήτων που ενθαρρύνετε;
- 2) Αναφέρατε ότι στις λανθασμένες απαντήσεις αναδιατυπώνετε την αρχική σας ερώτηση με άλλον τρόπο προσδοκώντας τη σωστή απάντηση. Το κάνετε αυτό για όλα τα λάθη; Όλων των μαθητών; Πώς νομίζετε ότι τους βοηθά να ‘διορθώνουν τα λάθη τους’;
- 3) Υποστηρίζατε ότι σπάνια ο εκπαιδευτικός πιάνεται απροετοίμαστος σε ερώτηση μαθητή. Θεωρείτε ότι οι ερωτήσεις των μαθητών είναι απόλυτα προβλέψιμες; Πού το αποδίδετε αυτό;
- 4) Έχει τύχει να μην μπορείτε να απαντήσετε σε ερώτηση κάποιου μαθητή; Κάποιο παράδειγμα;
- 5) Πώς αξιολογείτε, πώς αναγνωρίζετε ότι οι μαθητές σας έχουν ‘κατακτήσει’ ή προσεγγίσει αποτελεσματικά τη γνώση που τους προσφέρετε; Τον τρόπο μαθηματικής σκέψης που επιδιώκετε να αναπτύξουν; Τί προσφέρει κατά την άποψή σας η προφορική και τί η γραπτή αξιολόγηση των μαθητών;
- 6) Χρησιμοποιήσατε στην προηγούμενη συνομιλία μας τους όρους ‘θεωρία’ και ‘πράξη’; Πως τους διακρίνετε στα μαθηματικά; Στη Φυσική; Ποια είναι σημαντικότερη, η θεωρία ή η πράξη σε κάθε ηλικία; Πώς βλέπετε τη σύνδεσή τους; Αν κατάλαβα καλά από την προηγούμενη κουβέντα μας προκρίνετε την ‘πράξη’; Γιατί; Και στο Λύκειο;
- 7) Συγκρίνατε τη διδασκαλία στο σχολείο με αυτήν στο φροντιστήριο όπου η εστίαση είναι στο «πράξη-πράξη-πράξη» και προτεινάτε η διδακτική προσέγγιση στο σχολείο να εντάξει αυτήν του φροντιστηρίου, θα ήταν ιδανικό. Άρα, στο σχολείο θεωρείτε ότι γίνεται «θεωρία-θεωρία-θεωρία»;
- 8) Τί θα συμβουλεύατε σε ένα νέο εκπαιδευτικό που έρχεται να διδάξει μαθηματικά στο Γυμνάσιο; Τί πρωτίστως θα του συνιστούσατε να προσέξει; Να υιοθετήσει;

9) Θεωρείτε ότι η διδασκαλία των Μαθηματικών διαφέρει από αυτήν της Φυσικής; Πώς; / Γιατί;