ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Διδασκαλία επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων με χρήση επεισοδίων από την ιστορία των Μαθηματικών»

Παπαγερούδη Μαρίνα ΑΕΜ 1025

Επιβλέπων καθηγητής: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, καθηγητής

Τριμελής επιτροπή: Λεμονίδης Χαράλαμπος, καθηγητής

Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, καθηγητής

Χρήστου Κωνσταντίνος, επίκουρος καθηγητής

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2023

Περιεχόμενα

Λίστα εικόνων εργασίας

Λίστα πινάκων εργασίας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση αποτελεί αντικείμενο πολλών ερευνών τα τελευταία χρόνια. Στην παρούσα εργασία επιχειρείται η διδασκαλία επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων με τη χρήση της μεθόδου «συμπλήρωσης τετραγώνου» μέσα από ιστορικές προσεγγίσεις. Σκοπός της εργασίας είναι να γνωρίσουν και να κατανοήσουν οι μαθητές τους τρόπους επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων των Βαβυλωνίων και του Al-Khwarizmi και μέσω αυτών να γίνει σύνδεση της Άλγεβρας με τη Γεωμετρία.

Για την επίτευξη αυτού του στόχου συμμετείχαν στην έρευνα 44 μαθητές της Γ' τάξης ενός Γυμνασίου της Θεσσαλονίκης. Το ένα τμήμα αποτέλεσε την ομάδα ελέγχου στην οποία διδάχτηκε το κεφάλαιο της συμπλήρωσης τετραγώνου όπως ορίζεται στο Πρόγραμμα Σπουδών του Γυμνασίου, ενώ το δεύτερο τμήμα αποτέλεσε την πειραματική ομάδα στην οποία εφαρμόστηκε η προτεινόμενη διδασκαλία. Και στα δύο τμήματα δόθηκαν φύλλα εργασίας κατά τη διάρκεια των διδασκαλιών και στο τέλος μοιράστηκαν τα τελικά ερωτηματολόγια της έρευνας. Όλα τα αποτελέσματα της έρευνας, γραπτά και προφορικά, λήφθηκαν υπόψιν για την εξαγωγή των συμπερασμάτων.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι μαθητές της πειραματικής ομάδας κατανόησαν σε μεγαλύτερο βαθμό τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί η μέθοδος της συμπλήρωσης τετραγώνου, ενώ στο κομμάτι της αλγεβρικής επίλυσης, σημειώθηκαν λιγότερα λάθη από τους ίδιους σε σχέση με την ομάδα ελέγχου. Πρέπει ωστόσο να τονιστεί ότι η παρούσα έρευνα είχε διάρκεια 2 διδακτικών ωρών για κάθε ένα τμήμα επομένως οι διαφορές ανάμεσα στις απαντήσεις των δύο ομάδων δεν ήταν μεγάλες. Συνεπώς, ενδιαφέρον θα προκαλούσε η εφαρμογή της έρευνας σε μεγαλύτερο χρονικό πλαίσιο, καθώς επίσης και η εφαρμογή παρόμοιων διδακτικών προτάσεων και σε άλλα κεφάλαια των Μαθηματικών.

Λέξεις κλειδιά: Συμπλήρωση τετραγώνου, δευτεροβάθμια εξίσωση, ιστορία των Μαθηματικών, λάθη στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις

ABSTRACT

The integration of history of Mathematics into mathematics education has been the subject of much research in recent years. In the present paper the teaching of quadratic equation solving is attempted, by using the “completing the square” method through historical approaches. The goal of the paper is for the students to know and understand the ways the Babylonians and Al-Khwarizmi solved the quadratic equations and through them to make a connection between Algebra and Geometry.

In order to achieve this goal, 44 students of the 3rd grade of a junior high school in Thessaloniki participated in the research. One part of the students was the control group in which the chapter of completing the square was taught as defined in the Curriculum, while the second part of students was the experimental group in which the teaching intervention was applied. Both classes were given worksheets during the lessons and at the end the final survey questionnaires were distributed. All the results of the research, written and oral, were taken into account in drawing the conclusions.

The results of the research showed that the students of the experimental group understood to a greater extent how the method of completing the square works, while in the part of the algebraic solution, fewer mistakes were made by them compared to the control group. However, it must be emphasized that the present survey had a duration of 2 teaching hours for each group, so the differences between their responses were not large. Therefore, it would be interesting to apply the research in a longer time frame, as well as the application of similar teaching proposals in other chapters of Mathematics.

Key words: Completing the square, quadratic equation, history of Mathematics, misconceptions in quadratic equations

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εκμάθηση επίλυσης των εξισώσεων αποτελεί ένα από τα βασικότερα κεφάλαια των Μαθηματικών και ιδιαίτερα της Άλγεβρας. Το εκπαιδευτικό σύστημα ξεκινώντας από τις τάξεις του Δημοτικού μέχρι και την τριτοβάθμια εκπαίδευση, αφιερώνει πολλές ώρες στη διδασκαλία εννοιών και μεθόδων επίλυσης των εξισώσεων. Ειδικότερα, οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις παρουσιάζονται αναλυτικά στη Γ’ Γυμνασίου προσφέροντας γερή βάση για τη μετέπειτα εκμάθηση επίλυσης εξισώσεων μεγαλύτερων βαθμών. Ωστόσο, οι δυσκολίες και τα λάθη που συναντούν οι μαθητές κατά την προσπάθεια κατανόησης και χρήσης των εξισώσεων οδηγεί εκπαιδευτικούς και ερευνητές στην αναζήτηση τρόπων που θα βοηθήσουν τους μαθητές να ξεπεράσουν αυτά τα εμπόδια αλλά ταυτόχρονα να αυξήσουν και τη μαθηματική τους γνώση (Radford, 2002, Lakatos, 2015 & Swetz et al., 1995)

Μελετώντας τα ελληνικά προγράμματα σπουδών (Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών 2003, Νέο Πρόγραμμα Σπουδών 2011), σημειώνονται διδακτικοί στόχοι, οδηγίες και ενδεικτικές δραστηριότητες οι οποίες έχουν ως στόχο να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς να καθορίσουν την καλύτερη δυνατή προσέγγιση των διδακτικών κεφαλαίων για την αποτελεσματικότερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές. Παρόλα αυτά ερευνητές επισημαίνουν ότι η ενσωμάτωση της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση δεν προσφέρει μόνο καλύτερη κατανόηση και θετικότερη αντιμετώπιση του συγκεκριμένου μαθήματος, αλλά ταυτόχρονα οδηγεί στη συνειδητοποίηση του τι πραγματικά είναι τα μαθηματικά ως επιστημονικό πεδίο (Liu, 2003). Άλλωστε, όπως αναφέρει ο Radford (1995), για την καλύτερη κατανόηση της ιστορικής κατάστασης μιας μαθηματικής ιδέας είναι αναγκαία η ανασκόπηση στο παρελθόν της. Τέλος, η ιστορία των μαθηματικών είναι ικανή να δημιουργήσει ένα κατάλληλο περιβάλλον στο οποίο θα μπορούν να αναπτυχθούν δραστηριότητες που εστιάζουν στην αντιμετώπιση των προβλημάτων που παρουσιάζουν οι μαθητές στην ενασχόλησή τους με τα μαθηματικά (Liu, 2003).

Η παρούσα εργασία χωρίζεται σε 8 κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μία προσπάθεια να επισημανθεί ο ρόλος της ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση καθώς επίσης και να καταγραφούν τα πλεονεκτήματα αλλά και οι προβληματισμοί σχετικά με τη χρήση της στη σχολική τάξη. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στα ελληνικά προγράμματα σπουδών σχετικά με τη διδασκαλία των εξισώσεων στις τάξεις του Γυμνασίου και πιο συγκεκριμένα στην τάξη της Γ' Γυμνασίου. Τα λάθη και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με τις εξισώσεις και ειδικότερα στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις παρουσιάζονται στο τρίτο κεφάλαιο, στο οποίο επίσης γίνεται αναφορά στη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου η οποία αποτελεί και αντικείμενο της παρούσας εργασίας. Ενώ στο 4^{ο} κεφάλαιο της εργασίας γίνεται μία ιστορική ανασκόπηση σχετικά με τις μεθόδους επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων από τον πολιτισμό των Βαβυλωνίων και από τον Al-Khwarizmi.

Στα επόμενα τέσσερα κεφάλαια γίνεται ανάλυση της προτεινόμενης διδασκαλίας που σχεδιάστηκε και εφαρμόστηκε σε ένα Γυμνάσιο της Θεσσαλονίκης. Εξηγείται αναλυτικά η διδασκαλία που έγινε σε δύο τμήματα της Γ' Γυμνασίου ενώ στη συνέχεια αναλύονται τα αποτελέσματα των τελικών ερωτηματολογίων που δόθηκαν στους μαθητές. Η εργασία ολοκληρώνεται με τη συζήτηση και τις προτάσεις για μελλοντική έρευνα. Στο τέλος βρίσκονται η βιβλιογραφία και το παράρτημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

1.1 Ρόλος της ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση

Η ένταξη της Ιστορίας των Μαθηματικών μέσα στη σχολική τάξη αποτελούσε μία ιδέα ήδη από τις αρχές του 20^{ου} αιώνα. Η αξία της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών στο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών τονίζεται από οργανισμούς όπως το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) και τη Μαθηματική Ένωση Αμερικής (Mathematical Association of America), ενώ παράλληλα το συγκεκριμένο θέμα αποτελεί αντικείμενο πολλών συνεδριών και άρθρων. Στην πραγματικότητα όμως, πολύ λίγα έχουν εφαρμοστεί στα σχολεία (Fried, 2001).

Τα οφέλη της ένταξης της ιστορίας των Μαθηματικών στην εκπαίδευση έχουν συζητηθεί και σχολιαστεί επί δεκαετίες. Ωστόσο, είναι εύλογο να αναρωτηθεί κανείς το γιατί θα πρέπει να εισαχθεί στα σχολεία αυτό το μάθημα. Παρακάτω αναφέρονται και αναλύονται πέντε λόγοι σχετικά με τα θετικά οφέλη εισαγωγής της ιστορίας στη σχολική μαθηματική εκπαίδευση σύμφωνα με τον Liu (2003).

1) Η ιστορία βοηθάει στην αύξηση κινήτρου και στην ανάπτυξη μιας θετικότερης στάσης απέναντι στα Μαθηματικά και γενικότερα στη μάθηση.
2) Προβληματισμοί και δυσκολίες παλαιότερων ετών πάνω σε μαθηματικές έννοιες μπορούν να συσχετιστούν με τις τωρινές αντίστοιχες δυσκολίες των μαθητών.
3) Η ενασχόληση με ιστορικά προβλήματα μαθηματικών μπορεί να βοηθήσει στην ανάπτυξη και στην καλλιέργεια μαθηματικού τρόπου σκέψης
4) Η χρήση της ιστορίας δίνει μία πιο ανθρωπιστική ματιά στην επιστήμη των Μαθηματικών
5) Η ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να αποτελέσει οδηγό για τη διδασκαλία ενός διδακτικού κεφαλαίου.

Η ιστορία βοηθάει στην αύξηση κινήτρου και στην ανάπτυξη μιας θετικότερης στάσης απέναντι στα Μαθηματικά και γενικότερα στη μάθηση.

Είναι ευρέως γνωστό ότι τα Μαθηματικά θεωρούνται για τους μαθητές ως ένα «βαρετό μάθημα», ενώ επίσης σχετικές έρευνες έχουν δείξει ότι η επίδοση των μαθητών πέφτει από την ένταξή τους στο Γυμνάσιο και έπειτα. Η ιδέα της αύξησης του ενδιαφέροντος και η δημιουργία ενός θετικότερου κλίματος κατά την εκμάθηση των Μαθηματικών με τη χρήση της ιστορίας έχει κεντρίσει το ενδιαφέρον πολλών εκπαιδευτικών αλλά και ερευνητών. Πολλοί από αυτούς πιστεύουν ότι τα Μαθηματικά μπορούν να γίνουν πιο προσιτά με την ένταξη ιστορικών προσωπικοτήτων στο μάθημα καθώς επίσης και ότι η χρήση ιστορικών προβλημάτων έχει τη δυνατότητα να δώσει ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη διδασκαλία. Μέσα από έρευνα (McBride & Rollins, 1977) σχετικά με τα οφέλη της χρήσης της ιστορίας των Μαθηματικών, αποδείχθηκε ότι οι μαθητές έδειξαν σημαντική βελτίωση στην επίδοσή τους αλλά και στη στάση τους απέναντι στα Μαθηματικά.

Προβληματισμοί και δυσκολίες παλαιότερων ετών πάνω σε μαθηματικές έννοιες μπορούν να συσχετιστούν με τις τωρινές αντίστοιχες δυσκολίες των μαθητών.

Κατά τη διάρκεια κατασκευής και ανακάλυψης των μαθηματικών ιδεών στο πέρασμα της ιστορίας, πολλές μαθηματικές πτυχές άργησαν να κατανοηθούν από τους μαθηματικούς. Συνεπώς, είναι επόμενο και οι μαθητές να δυσκολεύονται αρχικά όταν έρχονται σε επαφή με νέες μαθηματικές έννοιες. Για παράδειγμα, η έννοια της συνάρτησης διδάσκεται για πρώτη φορά στο Γυμνάσιο, κι όμως υπάρχουν μαθητές που τελειώνουν το Λύκειο και έχουν λανθασμένη ή ελλιπή γνώση αυτής (Liu, 2003).

Ένα παράδειγμα από την ιστορία των Μαθηματικών που θα μπορούσε να εξηγήσει τη δυσκολία και την αποστροφή των μαθητών πάνω στη χρήση μαθηματικών συμβόλων προέρχεται από τους αρχαίους Έλληνες. Κατά κύριο λόγο οι αρχαίοι Έλληνες ανέπτυσσαν τη Γεωμετρία, πιθανώς επειδή δεν γνώριζαν ακόμα την τεράστια συνεισφορά που μπορεί να έχει η εισαγωγή της αλφαβήτου στην αλγεβρική μεθοδολογία (Kline, 1972), ενώ η παρακμή των κινέζικων μαθηματικών προκλήθηκε, εν μέρει, από την έλλειψη ενός απλού και αποτελεσματικού συστήματος συμβόλων. Επομένως, όταν ένας εκπαιδευτικός γνωρίζει αυτές τις ιστορικές δυσκολίες διαφόρων πολιτισμών, μπορεί με περισσότερη ευκολία να κατανοήσει και να δείξει εμπάθεια ως προς τις δυσκολίες των μαθητών να κατανοήσουν τα μαθηματικά σύμβολα.

Συνοψίζοντας, η γνώση της ιστορίας μπορεί να δώσει σε εκπαιδευτικούς και μαθητές την αίσθηση για την εξέλιξη των μαθηματικών κανόνων ανά τους αιώνες. Σε πολλές μαθηματικές πτυχές χρειάστηκαν αιώνες για την καλή κατανόησή τους από εξαίρετους μαθηματικούς της ιστορίας. Επομένως, είναι άστοχο και παράλογο να θεωρείται ότι οι μαθητές μπορούν να συλλάβουν πλήρως πολλές καινούριες μαθηματικές έννοιες σε μικρό χρονικό διάστημα.

Η ενασχόληση με ιστορικά προβλήματα μαθηματικών μπορεί να βοηθήσει στην ανάπτυξη και στην καλλιέργεια μαθηματικού τρόπου σκέψης

Η ιδέα χρήσης ιστορικών μαθηματικών προβλημάτων κατά τη διδασκαλία των σχολικών Μαθηματικών έχει λάβει την προσοχή πολλών μελετητών. Πέρα από την απλή αφήγηση ιστοριών για την προσέλκυση του ενδιαφέροντος των μαθητών, η ιστορία των Μαθηματικών έχει τη δυνατότητα να αυξήσει τις επιδόσεις των μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών, καθώς επίσης και να προσφέρει καλύτερη κατανόηση και θετικότερη αντιμετώπιση του συγκεκριμένου μαθήματος (Liu, 2003).

Η μαθηματική γνώση είναι ένας συνδυασμός από πολύπλοκες διαδικασίες: εικασία, επαγωγή, εξαγωγή, εξειδίκευση, γενίκευση, αναλογία, επαλήθευση και λοιπά. Ωστόσο, τα σύγχρονα σχολικά εγχειρίδια παρουσιάζουν συνήθως τις μαθηματικές έννοιες με έναν τρόπο αυστηρό χωρίς να αφήνει περιθώρια σκέψης, αποκλείοντας με αυτό τον τρόπο τη διαδικασία της ανακάλυψης (Lakatos, 2015). Με την παρουσίαση ιστορικών μαθηματικών προβλημάτων, καθώς επίσης και με την προσέγγιση μεγάλων μαθηματικών προσωπικοτήτων, οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν σε μεγαλύτερο βαθμό τη μαθηματική σκέψη και να εκτιμήσουν περισσότερο τη δομή αυτής της επιστήμης.

Επιπροσθέτως, σύμφωνα με τους Swetz et al. (1995), η παρουσίαση πολλαπλών μεθόδων επίλυσης ενός συγκεκριμένου αποτελεί έναν αποτελεσματικό τρόπο εξοικείωσης των μαθητών με την επίλυση προβλήματος ενώ επίσης παρέχει βάσεις για την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης. Η ενασχόληση και η γνωριμία των μαθητών με διαφορετικές λύσεις ιστορικών προβλημάτων από διαφορετικά ιστορικά πρόσωπα σε πολλαπλές χρονικές περιόδους δίνει στους ίδιους τη δυνατότητα να συγκρίνουν και να αντιπαραβάλλουν σκέψεις και ιδέες της κάθε εποχής. Μέσα από αυτή τη διαδικασία οι μαθητές περνούν από τη γνώση στην κατανόηση και τελικά στην εκτίμηση των σύγχρονων μεθόδων επίλυσης.

Η χρήση της ιστορίας δίνει μία πιο ανθρωπιστική ματιά στην επιστήμη των Μαθηματικών

Έρευνες έχουν δείξει ότι πολλοί μαθητές πιστεύουν πως τα Μαθηματικά είναι μία επιστήμη που βρίσκεται μέσα σε στενά όρια και αποτελείται μόνο από κανόνες, παρά ότι είναι ευέλικτα, σχετικά και με ανθρωπιστικό πλαίσιο (Liu, 2003). Ο τρόπος γραφής των μαθηματικών βιβλίων πολύ συχνά εξαλείφει την ανθρώπινη πλευρά των δυσκολιών, των αδιεξόδων και των προβληματισμών που βιώθηκαν για το τελικό επίτευγμα (Avital, 1995). Ωστόσο και οι μαθηματικοί εκπαιδευτικοί δεν κάνουν κάτι περισσότερο, αφού και οι ίδιοι τις περισσότερες φορές μεταδίδουν ξερούς κανόνες και μεθοδολογίες στους μαθητές τους χωρίς δικαιολογήσεις. Το εθνικό συμβούλιο των καθηγητών Μαθηματικών (National Council of Teachers of Mathematics) τονίζει ότι κυρίαρχος στόχος των σχολικών Μαθηματικών πρέπει να είναι η εκμάθηση της αξίας της μαθηματικής επιστήμης και ότι όλοι οι μαθητές θα πρέπει να κατανοήσουν και να εκτιμήσουν ότι τα Μαθηματικά αποτελούν ένα από τα μεγαλύτερα πολιτιστικά και πνευματικά επιτεύγματα της ανθρωπότητας (NCTM, 1989, σελ.4).

Ωστόσο, εκτός από την ενίσχυση της μαθηματικής σκέψης των μαθητών, η χρήση ιστορικών προβλημάτων εξανθρωπίζει τα Μαθηματικά μέσα από την απεικόνιση δυσκολιών και προβληματισμών που είχαν πολιτισμοί αλλά και μεγάλα πρόσωπα της μαθηματικής επιστήμης. Είναι πολύ μεγάλο το πλεονέκτημα για τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι τα ιστορικά προβλήματα δεν δημιουργήθηκαν αυθαίρετα, αλλά προέρχονται από δυσκολίες της καθημερινότητας. Το σημαντικότερο από όλα όμως είναι το γεγονός ότι οι μαθητές καταλαβαίνουν ότι και οι μεγαλύτεροι Μαθηματικοί της ιστορίας έχουν κάνει και αυτοί λάθη. Οι αναγνωρίσεις αυτές δεν έχουν μόνο γνωστική, αλλά και συναισθηματική αξία (Liu, 2003).

Η αξία της ένταξης της ανθρωπιστικής ματιάς των Μαθηματικών στην εκπαίδευση μπορεί να συνοψιστεί μέσα από τα λόγια του Tymoczko (1994). «Οι άνθρωποι χρειάστηκαν χιλιάδες χρόνια για να φτάσουν στο σημερινό μαθηματικό επίπεδο και ίσως οι δάσκαλοι θα έπρεπε να το αναφέρουν αυτό στους μαθητές. Οι εκπαιδευτικοί αγνοούν επικίνδυνα τα ανθρωπιστικά μαθηματικά. Χωρίς αυτή τη ματιά, οι εκπαιδευτικοί διδάσκουν στους μαθητές να υπολογίζουν και να λύνουν, όπως ακριβώς μπορούν να τους διδάξουν να διαβάζουν και να γράφουν. Αλλά χωρίς την ανθρωπιστική ματιά, οι εκπαιδευτικοί δεν μπορούν να διδάξουν στους μαθητές να αγαπούν ή ακόμα και να εκτιμούν και να κατανοούν τα Μαθηματικά.»

Η ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να αποτελέσει οδηγό για τη διδασκαλία ενός διδακτικού κεφαλαίου.

Ο εκπαιδευτικός των Μαθηματικών πρέπει πάντα να ερευνά και να καθορίζει την καλύτερη δυνατή προσέγγιση των διδακτικών κεφαλαίων με στόχο να βοηθήσει τους μαθητές να αντιμετωπίσουν και να κατανοήσουν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες. Η ιστορία αποτελεί πάντοτε μία έγκυρη προσέγγιση (Katz, 1997). Η ένταξη της ιστορίας στα σχολικά προγράμματα των Μαθηματικών δε βοηθάει απλώς στη βελτίωση της στάσης των μαθητών και στην ενίσχυση της μαθηματικής σκέψης, αλλά και στην διεύρυνση της κατανόησης των καθηγητών σχετικά με τη φύση των Μαθηματικών, ενώ επίσης αναμένεται οι ίδιοι να αναδιαρθρώσουν τα «πιστεύω» τους για την επιστήμη των Μαθηματικών. Αυτή η αναδιάρθρωση μπορεί με τη σειρά της να επηρεάσει τις ιδέες και τις σκέψεις των καθηγητών σχετικά με το σχεδιασμό του προγράμματος σπουδών και τη διδακτική τους συμπεριφορά. Ο Polya (1945) τονίζει ότι η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο ο ανθρώπινος πολιτισμός έχει αποκτήσει γνώση ορισμένων γεγονότων ή εννοιών είναι απολύτως σημαντική για την κατανόηση του τρόπου εκμάθησης αυτής της γνώσης από ένα παιδί, ενώ ταυτόχρονα ο Furinghetti (1997) επισημαίνει ότι η καλή γνώση της ιστορίας των Μαθηματικών μπορεί να ενισχύσει τη δημιουργικότητα των εκπαιδευτικών για την ενσωμάτωση της ιστορίας στις μαθηματικές δραστηριότητες.

1.2 Περιορισμοί και προβληματισμοί σχετικά με τη χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών στην εκπαίδευση

Ωστόσο, πέρα από τα θετικά στοιχεία της ενσωμάτωσης της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση, σύμφωνα με τον Ho (2008) υπάρχουν τρεις προβληματισμοί σχετικά με την ένταξή της στη σχολική τάξη.

1) Έλλειψη γνώσεων των εκπαιδευτικών πάνω στην ιστορία των Μαθηματικών
2) Μειωμένος χρόνος για περάτωση της σχολικής ύλης που ορίζεται από το Υπουργείο.
3) Δυσκολία στην αξιολόγηση των μαθητών πάνω στην ιστορία των Μαθηματικών.

Και οι τρεις προβληματισμοί αναλύονται στη συνέχεια.

Έλλειψη γνώσεων των εκπαιδευτικών πάνω στην ιστορία των Μαθηματικών

Σε έρευνά των Schubring et al. (2002) σημειώθηκε ότι σε αρκετά πανεπιστήμια Μαθηματικών δεν είναι υποχρεωτική από τους φοιτητές η παρακολούθηση μαθημάτων σχετικά με την ιστορία των Μαθηματικών. Επιπλέον, παρατήρησαν ότι σε πολλές χώρες, όπως για παράδειγμα το Χονγκ Κονγκ, αρκετοί μαθηματικοί με ισχυρή αγάπη για την ιστορία των Μαθηματικών, προσπαθούσαν να καταλάβουν υψηλές ακαδημαϊκές θέσεις προκειμένου να εισάγουν τη διδασκαλία της ιστορίας στα πανεπιστήμια. Τονίζουν δηλαδή ότι το μάθημα της ιστορίας των Μαθηματικών παρόλο που προσφέρεται στα πανεπιστήμια των Μαθηματικών, δεν αποτελεί υποχρεωτικό μάθημα για την ακαδημαϊκή εκπαίδευση, ενώ όσες ιστορικές πληροφορίες λαμβάνουν οι φοιτητές κατά τη διάρκεια της φοίτησής τους, είναι διασκορπισμένες μέσα στα άλλα πανεπιστημιακά μαθήματα.

Μειωμένος χρόνος για περάτωση της σχολικής ύλης που ορίζεται από το Υπουργείο

Μετά από συνέντευξη πολλών καθηγητών από τον Ho (2008), η πλειοψηφία αυτών δήλωσε ότι ένα κύριο πρόβλημα στη δουλειά τους είναι ο μειωμένος χρόνος που δίνεται για ολοκλήρωση της σχολικής ύλης όπως αυτή ορίζεται από το Υπουργείο. Είναι ευρέως γνωστό πως ένας καθηγητής Μαθηματικών, πέρα από τις ώρες εργασίας του στο σχολείο, ξοδεύει και μία σημαντική ποσότητα χρόνου πάνω στην προετοιμασία του μαθήματος, στη διαχείριση διοικητικών καθηκόντων, στη συμβουλευτική μαθητών και στη δημιουργία εμπλουτιστικών δραστηριοτήτων για τη διδασκαλία του. Ενώ στην ίδια έρευνα (Ho, 2008), ένα μεγάλο ποσοστό μαθηματικών αντιτάχθηκε στην εισαγωγή της ιστορίας των Μαθηματικών στο σχολείο καθώς, κατά τα λεγόμενά τους, μία τέτοια προσέγγιση θα απαιτούσε πολλούς πόρους, σχεδιασμό και αναπροσαρμογή των υπαρχόντων σχεδίων διδασκαλίας. Στην πραγματικότητα, παρόλο που σε πολλούς καθηγητές αρέσει η ιδέα της ένταξης της ιστορίας στην εκπαίδευση, ελάχιστοι από αυτούς είναι διατεθειμένοι να πάρουν το ρίσκο της χρήσης της, αφού οι περισσότεροι φοβούνται την πτώση των μαθητών τους στις τελικές ενδοσχολικές εξετάσεις.

Δυσκολία στην αξιολόγηση των μαθητών πάνω στην ιστορία των Μαθηματικών

Τέλος, υπάρχει έλλειψη κριτηρίων αξιολόγησης της απόδοσης ενός μαθητή πάνω στο μάθημα της ιστορίας των Μαθηματικών. Οι προβληματισμοί που έθεσαν καθηγητές πάνω σε αυτό το ζήτημα είναι αρχικά αν όντως μπορεί να μετρηθεί η απόδοση ενός μαθητή στο συγκεκριμένο μάθημα και κατά δεύτερον, ανέφεραν πως ακόμα και αν οριστεί ότι δεν θα αξιολογείται το μάθημα της ιστορίας δεν είναι σίγουρο αν θα συνεχίσουν οι μαθητές να δείχνουν ενδιαφέρον για αυτό το μάθημα ή αν θα αδιαφορήσουν (Ho, 2008).

1.3 Μαθητές και ιστορία των Μαθηματικών

Κάνοντας χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στην τάξη, οι μαθητές εκτιμούν τον πλούτο των μαθηματικών ιδεών, αλλά ταυτόχρονα και τον τρόπο με τον οποίο κάθε πολιτισμός έχει συνεισφέρει στον εμπλουτισμό και στην ανάπτυξή τους. (Σπηλιωτοπούλου, Διακογιώργη, & Παπαντωνίου, 2009). Η ιστορία είναι το μέσο για να καταλάβουν οι μαθητές ότι τα μαθηματικά είναι μια δημιουργική ανθρώπινη δραστηριότητα που στις περισσότερες περιπτώσεις ξεκίνησε για πρακτικούς λόγους. Επιπλέον, τα μαθηματικά δεν είναι άκαμπτα αλλά πολλές φορές έχουν υποστεί αλλαγές ανά τους αιώνες. Επομένως, κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, οι μαθητές μπορούν να δουν την ανάπτυξη μεθόδων και εργαλείων μέσω της ιστορίας καταφέρνοντας έτσι να δουλέψουν αλλά και να κατανοήσουν τα μαθηματικά (Ofir, 1991). Με τον τρόπο αυτό φαίνεται η εξέλιξη των μαθηματικών σε προηγούμενη εποχή και αναλύοντας με βάση τη σημερινή προοπτική, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να εμβαθύνουν στις μαθηματικές έννοιες. Μελέτες που ενσωματώνουν την ιστορία στα Μαθηματικά, έχουν δείξει ότι βελτιώνουν την ανάπτυξη ιδεών των μαθητών, καθώς και την ικανότητα κατανόησης της θεωρίας. Τέλος, τονίζεται ότι τα μαθήματα που περιλαμβάνουν την ιστορία των μαθηματικών, αυξάνουν το κίνητρο της ενασχόλησης των μαθητών με το μάθημα των μαθηματικών (Goktepe & Sukru Ozdemir, 2013).

Μέσα από την ιστορία των μαθηματικών γίνεται αντιληπτό ότι τα μαθηματικά δεν είναι μία στατική μάζα γνώσης, αλλά αντιθέτως εξελίσσονται συνεχώς. Κατά τη μελέτη της ιστορίας, γίνεται φανερό ότι τα μαθηματικά προσαρμόζονται συνεχώς στις ανθρώπινες ανάγκες (Smith, 1958). Ωστόσο, ο τρόπος με τον οποίο έχουν οικοδομηθεί τα μαθηματικά, σύμφωνα με ιστορικές πηγές, δε θα μπορούσε να επαναληφθεί με τον ίδιο τρόπο κατά τη διδασκαλία στην τάξη, καθώς οι μαθητές θα χρειάζονταν αρκετό χρόνο για να διαβούν από όλα τα μονοπάτια τη μαθηματικής επιστήμης. Είναι όμως σημαντικό να αναφερθεί ότι η μελέτη της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών που διδάσκονται ή πρόκειται να διδαχθούν, είναι ικανή να οδηγήσει στην εμφάνιση ερεθισμάτων που είναι ικανά να βοηθήσουν στο σχεδιασμό της διδασκαλίας τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

2.1 Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών του 2003

Σύμφωνα με το ΑΠΣ του 2003, ο σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών εντάσσεται στους γενικότερους σκοπούς της εκπαίδευσης και αφορά τη συμβολή στην ολοκλήρωση της προσωπικότητας του μαθητή και την επιτυχή κοινωνική ένταξή του. Τα Μαθηματικά ασκούν τον μαθητή στην μεθοδική σκέψη, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική και στις λογικές διεργασίες και τον διδάσκουν να διατυπώνει τα διανοήματά του με τάξη, σαφήνεια, λιτότητα και ακρίβεια. Ταυτόχρονα, αναπτύσσουν την παρατηρητικότητα, την προσοχή, τη δύναμη αυτοσυγκέντρωσης, την επιμονή, την πρωτοβουλία, τη δημιουργική φαντασία, την ελεύθερη σκέψη ενώ παράλληλα καλλιεργούν την αίσθηση της αρμονίας, της τάξης και του ωραίου και διεγείρουν το κριτικό πνεύμα. Είναι απαραίτητα στην καθημερινή ζωή και ιδιαίτερα στο χώρο εργασίας αλλά και για την ανάπτυξη και εξέλιξη των άλλων επιστημών και ιδιαίτερα της Τεχνολογίας, της Οικονομίας και των Κοινωνικών Επιστημών.

Πιο συγκεκριμένα, το ΑΠΣ για τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις προτείνει τα εξής:

Στόχοι	**Θεματικές Ενότητες (διατιθέμενος χρόνος)**	**Ενδεικτικές Δραστηριότητες**
Να λύνουν εξισώσεις δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων. Να βρίσκουν το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού και να υπολογίζουν τις λύσεις της με τη βοήθεια του τύπου. Να μετατρέπουν ένα τριώνυμο σε γινόμενο παραγόντων. Να λύνουν προβλήματα που οδηγούν σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού.	Εξισώσεις δεύτερου βαθμού. Προβλήματα εξισώσεων δεύτερου βαθμού (7 ώρες)	Η εισαγωγή της εξίσωσης δευτέρου βαθμού θα γίνει με κατάλληλες δραστηριότητες από την καθημερινή ζωή, τη Φυσική (ελεύθερη πτώση, βολή προς τα άνω, κτλ.), την Οικονομία (ανατοκισμός για δυο έτη, κτλ.).

2.2 Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών του 2011

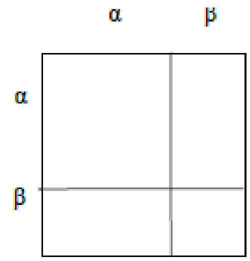
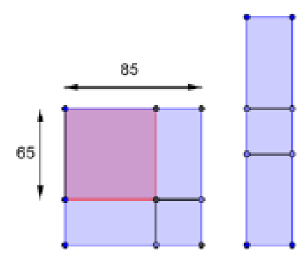
Το Πρόγραμμα Σπουδών για τα μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης επιδιώκει την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης δίνοντας έμφαση στα βασικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής γνώσης όπως της γενίκευσης, της αφαίρεσης, της ακρίβειας και της συντομίας. Παράλληλα επιδιώκεται η ανάπτυξη του μαθηματικού γραμματισμού που αφορά στην ικανότητα του ατόμου να αναλύει, να ερμηνεύει και να επεμβαίνει στο κοινωνικό του περιβάλλον και στον κόσμο γύρω του, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τα μαθηματικά και να αντιλαμβάνεται τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά για τη λήψη αποφάσεων στο κοινωνικό περιβάλλον. Το ΠΣ επιδιώκει κυρίαρχα οι μαθητές να αποκτήσουν την ικανότητα διατύπωσης και επίλυσης προβλημάτων καθώς και να διαμορφώσουν μια θετική στάση για τα μαθηματικά, εκτιμώντας το ρόλο τους στην ανάπτυξη του ανθρώπινου πολιτισμού. Η υλοποίηση των παραπάνω στόχων επιχειρείται να επιτευχθεί μέσα από τέσσερις βασικές διεργασίες: α) του μαθηματικού συλλογισμού και της επιχειρηματολογίας, β) της δημιουργίας συνδέσεων/ δεσμών, γ) της επικοινωνίας μέσω της χρήσης εργαλείων, με βασικότερο τη φυσική γλώσσα, αλλά και τα σύμβολα, τις διάφορες μορφές αναπαράστασης, τα τεχνουργήματα και τα εργαλεία της τεχνολογίας και δ) της μεταγνωστικής ενημερότητας. (Επιμορφωτικό υλικό για τους καθηγητές Μαθηματικών Γυμνασίου, 2011, σελ. 7)

Εξισώσεις:

Μια από τις πρώτες διαπιστώσεις του μεγάλου αριθμού ερευνών που έχουν ασχοληθεί με τις επιδόσεις μαθητών διαφόρων ηλικιών στις εξισώσεις αφορά στον τρόπο που αυτοί αντιλαμβάνονται το σύμβολο της ισότητας. Σύμφωνα με αυτές τις έρευνες, πολλοί μαθητές θεωρούν το «=» ως ένα σημάδι για «να κάνεις κάτι» και συχνά «να δώσεις την απάντηση, έναν αριθμό» και όχι ως το σύμβολο της ισοδυναμίας μεταξύ του δεξιού και του αριστερού μέλους της ισότητας. Ακόμη και μετά από αρκετά μαθήματα άλγεβρας, το σύμβολο της ισότητας δεν φαίνεται να γίνεται κατανοητό ως σύμβολο ισοδυναμία

Η επίλυση μιας εξίσωσης προϋποθέτει την ικανότητα του μαθητή να χειρίζεται την εξίσωση ως αντικείμενο και πιο συγκεκριμένα να είναι σε θέση να εκτελεί την ίδια πράξη και στις δύο πλευρές της. Ωστόσο, αυτή η φορμαλιστική διαδικασία δεν είναι η πρώτη ούτε και η μόνη που διδάσκονται οι μαθητές στη διάρκεια της φοίτησής τους στην υποχρεωτική εκπαίδευση. Ανάμεσα σε αυτές, οι πλέον δημοφιλείς είναι εκείνες της μεταφοράς των όρων με ταυτόχρονη αλλαγή του πρόσημου και της εφαρμογής της ίδιας πράξης και στα δύο μέλη της εξίσωσης. Η τελευταία θεωρείται και η πλέον αποτελεσματική από άποψη μάθησης, καθώς επιτρέπει στους μαθητές να λειτουργούν με αλγεβρικό τρόπο (επικέντρωση στα δομικά στοιχεία του συστήματος αρίθμησης και χειρισμό των αλγεβρικών οντοτήτων ως αντικειμένων). Γενικά, τα αποτελέσματα αρκετών ερευνών φανερώνουν ότι οι άπειροι στην επίλυση γραμμικών εξισώσεων μαθητές έχουν περιορισμένη αντίληψη των προϋποθέσεων κάτω από τις οποίες ένας μετασχηματισμός μιας εξίσωσης είναι επιτρεπτός.

Ενδεικτικές δραστηριότητες του ΑΠΣ 2011 με χρήση της συμπλήρωσης τετραγώνου

ΑΔ4	α) Ποια σχέση νομίζετε ότι έχουν οι παραστάσεις $(\alpha+\beta)^2$ και $\alpha^2+\beta^2$; Είναι ίσες ή άνισες; Με ποιο τρόπο μπορείτε να το διαπιστώσετε; β) Χρησιμοποιήστε το διπλανό σχήμα, για να υπολογίσετε το $(\alpha+\beta)^2$. γ) Διερευνήστε αν μπορεί ποτέ να ισχύει ο ισχυρισμός που κάνατε στο πρώτο ερώτημα.  	**Α11**
ΑΔ5	Ο Ανδρέας πειραματίζεται με ζεύγη διψήφιων αριθμών. Ψάχνει τη διαφορά των τετραγώνων διάφορων τέτοιων αριθμών και συγκεντρώνει κάποια αποτελέσματα που του κίνησαν την περιέργεια: α) $55^2 - 45^2 = 1000$, $105^2 - 95^2 = 2000$, $85^2 - 65^2 = 3000$ Μπορείτε να βρείτε άλλα ζευγάρια που η διαφορά των τετραγώνων τους να είναι πολλαπλάσιο του 1000; Μήπως παρατηρείτε κάτι ιδιαίτερο σε αυτά όλα αυτά τα ζευγάρια; β) Ο Ανδρέας με έκπληξη διαπίστωσε επίσης ότι: $89^2 - 12^2 = 7777$, $78^2 - 23^2 = 5555$ Μπορείτε να βρείτε άλλα ζευγάρια αριθμών που η διαφορά των τετραγώνων είναι αριθμός με επαναλαμβανόμενα ψηφία; Παρατηρείτε κάτι ιδιαίτερο σε αυτά τα ζευγάρια; γ) Θέλοντας να εξηγήσει τα εντυπωσιακά αποτελέσματα που παρατήρησε, ο Ανδρέας σχεδίασε μερικά διαγράμματα για να βοηθηθεί. Το διάγραμμα που σχεδίασε ,για να μελετήσει τη διαφορά $85^2 - 65^2$, φαίνεται στο διπλανό σχήμα.  Πώς συνδέεται το διάγραμμα του Ανδρέα με τον υπολογισμό της διαφοράς $85^2 - 65^2$; Πώς θα μπορούσε να υπολογιστεί η επιφάνεια του μακρόστενου μοβ ορθογωνίου (χωρίς τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης); Μπορείτε να σχεδιάσετε παρόμοια διαγράμματα για άλλους υπολογισμούς που έκανε ο Ανδρέας ή για υπολογισμούς που κάνατε εσείς; Πώς θα μπορούσαν αυτά τα διαγράμματα να βοηθήσουν τον Ανδρέα να αναπτύξει μία γρήγορη μέθοδο, για να υπολογίζει διαφορές τετραγώνων της μορφής $\alpha^2 - \beta^2$ για οποιαδήποτε α και β;	**Α11, Α12**

Εικόνα 1. Ενδεικτικές δραστηριότητες με συμπλήρωση τετραγώνου. ΑΠΣ 2011, σελ. 76-77.

2.3 Οδηγός για τον εκπαιδευτικό

Στον οδηγό Γυμνασίου για τον εκπαιδευτικό (2011), στη θεματική «Ισότητα-Ανισότητα» αναλύονται εκτενώς η σημασία της συγκεκριμένης ενότητας, οι γνώσεις που απέκτησαν και πρόκειται να αποκτήσουν οι μαθητές, οι δυσκολίες τους σχετικά με την επίλυση εξισώσεων, αλλά και κάποιες προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση. Παρακάτω θα γίνει επιγραμματική αναφορά για κάθε μία από αυτές τις κατηγορίες

Σημασία της ενότητας: Οι εξισώσεις κατέχουν σημαντική θέση σε κάθε πρόγραμμα σπουδών. Αποτελούν ισχυρά εργαλεία μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων που μπορεί να προέρχονται από πεδία των Μαθηματικών, από άλλες επιστήμες ή ακόμα και από την καθημερινή ζωή. Σε κάθε τάξη της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δίνεται έμφαση σε διαφορετικά επίπεδα των εξισώσεων. Όσο οι μαθητές περνούν σε επόμενες τάξεις, δίνεται όλο και μεγαλύτερη σημασία στην κατανόηση των εννοιών και στην ανάπτυξη συλλογισμών και διαδικασιών.

Προηγούμενη και επόμενη γνώση:

Ήδη από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού οι μαθητές συναντούν εξισώσεις χωρίς γράμματα όπου η επίλυσή τους απαιτεί μια πράξη (πχ. 2 + _ = 7, _ : 3 = 6, κ.ο.κ.), ενώ στην ΣΤ΄ τάξη χειρίζονται τις ίδιες μορφές εξισώσεων αλλά με χρήση γραμμάτων. Στη συνέχεια, στην Α΄ Γυμνασίου ασχολούνται με εξισώσεις που έχουν άγνωστο μόνο στο ένα μέλος (που δεν απαιτούν αλγεβρικούς χειρισμούς με τον άγνωστο και στα δύο μέλη) και στη Β΄ αντιμετωπίζουν εξισώσεις της μορφής $αx + β = γx + δ$ (που μπορεί να περιέχουν και ρητούς συντελεστές και παρενθέσεις). Στη Γ΄ τάξη του Γυμνασίου μαθαίνουν να διαπραγματεύονται ανισώσεις α΄ βαθμού, πολυωνυμικές εξισώσεις (που ανάγονται σε πρωτοβάθμιες μετά από παραγοντοποίηση) και γραμμικά συστήματα (δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους). Αργότερα, στο Λύκειο, θα ασχοληθούν και με άλλες μορφές εξισώσεων, ανισώσεων και συστημάτων (π.χ. εκθετικές εξισώσεις και ανισώσεις, μη γραμμικά συστήματα κ.λπ.) που απαιτούν κατανόηση των εννοιών και ευχέρεια στην επίλυση εξισώσεων πρώτου βαθμού.

Δυσκολίες των μαθητών

Α) Κατανόηση του « = »: Οι μαθητές συχνά κατανοούν το σύμβολο « = » ως προτροπή για να εκτελέσουν μια πράξη και να δώσουν ένα αποτέλεσμα, παρά ως σύμβολο ισότητας των δύο μελών μίας εξίσωσης.

Β) Κατανόηση έννοιας του αγνώστου: Για κάποιους μαθητές οι εξισώσεις $2α + 14 = 56$ και $2β + 14 = 56$ έχουν διαφορετικές λύσεις ενώ είναι συχνό φαινόμενο να συνδέουν οι μαθητές τις εξισώσεις μόνο με τον άγνωστο x και όχι με άλλες μεταβλητές.

Γ) Απομνημόνευση τεχνικών χωρίς κατανόηση: Ένα μεγάλο κομμάτι των μαθητικών δυσκολιών και παρανοήσεων βρίσκεται στην κατανόηση και στη δικαιολόγηση των διαδικασιών επίλυσης μιας εξίσωσης. Πολύ συχνά τα παιδιά απομνημονεύουν κανόνες χωρίς να δίνουν έμφαση στην κατανόηση αυτής της διαδικασίας (π.χ. αλλάζω μέλος έναν όρο της εξίσωσης αλλάζοντάς του πρόσημο) με αποτέλεσμα αυτό να οδηγεί σε σύγχυση και παρανοήσεις. Το πρόβλημα αυτό δημιουργείται και στην επέκταση των διαδικασιών επίλυσης εξισώσεων και στις ανισώσεις. Το γεγονός αυτό δημιουργεί δυσκολίες σχετικά με τις ιδιότητες αλλά και με το πλήθος λύσεων των ανισώσεων.

Δ) Επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων με παραγοντοποίηση: Στο συγκεκριμένο είδος εξισώσεων οι μαθητές αρκετές φορές δυσκολεύονται να κατανοήσουν πώς γίνεται μία εξίσωση να έχει παραπάνω από μία λύσεις. Για παράδειγμα στο συλλογισμό «αν $α·β=0$, τότε $α=0$ ή $β=0$», η ύπαρξη δύο λύσεων μπορεί να ερμηνευτεί ως ένα είδος αοριστίας.

Ε) Επίλυση προβλημάτων με εξισώσεις: Η δραστηριότητα αυτή αποτελεί μία από τις δυσκολότερες της Άλγεβρας για τους μαθητές του Γυμνασίου. Αυτό βασίζεται στο γεγονός ότι οι μαθητές σε όλη τη μαθητική τους πορεία έχουν πολύ λίγες ευκαιρίες να μοντελοποιήσουν μία κατάσταση και να εκφράσουν αλγεβρικά ένα πρόβλημα.

Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση:

Για τη μεγαλύτερη εξοικείωση των μαθητών με την αλγεβρική επίλυση μίας εξίσωσης προτείνονται τα εξής:

- Η χρήση μοντέλων, όπως για παράδειγμα αυτό της ζυγαριάς, βοηθάει στην καλύτερη εστίαση στις ιδιότητες της εξίσωσης αλλά και στην κατανόηση της έννοιας της εξίσωσης.

- Οι μέθοδοι δοκιμής – λάθους – βελτίωσης μπορούν να οδηγήσουν τους μαθητές στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής-αγνώστου, καθώς και της επίλυσης της εξίσωσης.

- Η χρήση της μεθόδου των αντίστροφων πράξεων προετοιμάζει τους μαθητές για τις μετέπειτα πιο ανεπτυγμένες αλγεβρικές μεθόδους που θα συναντήσουν.

- Η επίλυση προβλήματος είναι το πεδίο όπου αναδεικνύεται η αξία των εξισώσεων. Η χρήση εξισώσεων για τη μοντελοποίηση και την επίλυση απλών προβλημάτων ή προβλημάτων που έχουν αντιμετωπισθεί σε προηγούμενες τάξεις με απλούστερες μεθόδους (π.χ. προβλήματα τόκου, εκπτώσεων, αυξήσεων, ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά) έχουν την ικανότητα να εισάγουν τους μαθητές στις διαδικασίες γενίκευσης και αφαίρεσης.

- Θεωρείται αναγκαίο και σημαντικό να γίνεται επίλυση των εξισώσεων δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στις ιδιότητες που χρησιμοποιούνται (π.χ. πρόσθεση του ίδιου αριθμού και στα δύο μέλη της εξίσωσης) και όχι απλά στη διαδικασία (π.χ. διαχωρισμός γνωστών και αγνώστων με αλλαγή προσήμου κατά τη μεταφορά στο άλλο μέλος).

- Η γραφική επίλυση εξισώσεων με τη χρήση συναρτήσεων ενισχύει τη διαμόρφωση αναπαραστάσεων για τις έννοιες της εξίσωσης και της λύσης της. Παρόλο που οι αλγεβρικοί μέθοδοι επίλυσης υπερισχύουν στην ακρίβεια και τη γενικότητα, δεν πρέπει να παραβλέπεται η αξία της γραφικής αναπαράστασης μίας εξίσωσης.

- Κατά την εκμάθηση των πολυωνυμικών εξισώσεων, κρίνεται σημαντικό να αναφερθεί ο σκοπός της παραγοντοποίησης, καθώς και η ύπαρξη περισσότερων της μίας λύσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

3.1 Παρανοήσεις και δυσκολίες των μαθητών στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις

Ένα από τα κυριότερα κεφάλαια της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην τάξη της Γ’ Γυμνασίου αποτελεί το κεφάλαιο των δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Η κατανόησή τους αποτελεί κρίσιμο σημείο για την μετέπειτα σχολική πορεία των μαθητών (Nielsen, 2015) ενώ επίσης οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις θεωρούνται ως ένα πολύ σημαντικό κομμάτι, όχι μόνο των προγραμμάτων σπουδών σε όλο τον κόσμο αλλά και της ιστορικής ανάπτυξης της Άλγεβρας. Όσον αφορά τη σημαντικότητα αυτών των εξισώσεων στα σχολικά μαθηματικά, αποτελούν γέφυρα ανάμεσα στις γραμμικές εξισώσεις, τις συναρτήσεις και τα πολυώνυμα (Erbaş & Didis, 2015). Ωστόσο, οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά τη μελέτη των δευτεροβάθμιων εξισώσεων είναι αρκετές. Οι καθηγητές όμως γνωρίζοντας τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές σε αυτό τον τομέα, μπορούν με μεγαλύτερη ευκολία να βοηθήσουν και να καθοδηγήσουν τα παιδιά να ξεπεράσουν αυτά τα εμπόδια (Nielsen, 2015).

Α) Κατανόηση της φύσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων

Στις δύο πρώτες τάξεις του Γυμνασίου οι μαθητές εξοικειώνονται με τις πρωτοβάθμιες εξισώσεις, ενώ μαθαίνουν να λύνουν απλές δευτεροβάθμιες βρίσκοντας όμως μόνο τη θετική λύση. Στη Γ' Γυμνασίου διδάσκονται πιο αναλυτικά την επίλυση των συγκεκριμένων εξισώσεων, όμως το γεγονός ότι οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις έχουν δύο ρίζες, φαίνεται να μπερδεύει τους μαθητές. Πολλές φορές μάλιστα οι ίδιοι θεωρούν ότι κάθε x στην εξίσωση έχει διαφορετική τιμή. Πιο συγκεκριμένα, σε έρευνα που διεξήγαγαν οι Vaiyavutjamai & Clements (2006) παρατηρήθηκε ότι στις εξισώσεις της μορφής $(x-\rho)(x-\kappa)=0$, ορισμένοι μαθητές πίστευαν ότι το κάθε x στη συγκεκριμένη εξίσωση έχει διαφορετική τιμή. Πιο συγκεκριμένα, όταν ζητήθηκε από τους μαθητές της έρευνας να βρουν τις λύσεις της εξίσωσης $(x-3)(x-5)=0$ και να επαληθεύσουν τα αποτελέσματά τους, τα παιδιά ενώ βρήκαν σωστά τις λύσεις κατόπιν αντικατέστησαν ταυτόχρονα το $x = 3$ στην παρένθεση $(x–3)$ και $x = 5$ στην παρένθεση $(x-5)$ και επαλήθευσαν τις λύσεις τους κάνοντας $(3-3)(5-5) = 0·0 = 0$.

Επιπλέον, οι Tall et al. (2014) και Lima (2008) τεκμηριώνουν ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις ως απλούς υπολογισμούς, χωρίς να κατανοούν ότι ο άγνωστος είναι το θεμελιώδες χαρακτηριστικό της εξίσωσης. Οι μαθητές επικεντρώνονται κυρίως στο να εκτελούν πράξεις με τα σύμβολα χωρίς να εμβαθύνουν ποιοτικά στη λειτουργία τους. Παρόμοια άποψη εκφράζει και η Nielsen (2015) η οποία τονίζει ότι οι μαθητές δεν κατανοούν πλήρως τη φύση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Επηρεασμένοι από τις πρωτοβάθμιες εξισώσεις, στις οποίες η λύση είναι μία, μεταφέρουν αυτή την ιδιότητα και στις δευτεροβάθμιες, με αποτέλεσμα να δημιουργείται σύγχυση.

Τέλος, οι Erbaş & Didis (2015) στο άρθρο τους επισημαίνουν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να επιλύσουν εξισώσεις που έχουν μορφή διαφορετική από αυτή που έχουν συνηθίσει. Θεωρούν μάλιστα ότι αυτό συμβαίνει γιατί οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη δευτεροβάθμια εξίσωση σαν απλό αριθμητικό υπολογισμό χωρίς να κατανοούν τη σημασία της. Τα παιδιά απομνημονεύουν κανόνες, τύπους και αλγεβρικές διαδικασίες χωρίς να κατανοούν το νόημα αυτών. Ως αποτέλεσμα, όταν τους δοθεί μία παραλλαγμένη μορφή δευτεροβάθμιας εξίσωσης, οι μαθητές κολλάνε και δεν μπορούν να εφαρμόσουν τους κανόνες που γνωρίζουν. Ενώ επίσης, οι ίδιοι έχουν την τάση μετά από λίγο καιρό να ξεχνούν τους τύπους που έχουν απομνημονεύσει. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές έχουν πολύ μεγαλύτερη προτίμηση στις εξισώσεις της μορφής $αx^2 + βx + γ = 0$, παρά στις μορφές $α(x–κ)^2 + λ=0$ ή $α(x–ρ)(x–τ)=0$.

Β) Χρήση της τετραγωνικής ρίζας

Η δεύτερη κατηγορία δυσκολιών των μαθητών αφορά την επίλυση εξισώσεων της μορφής $x^2 = α$, με $α > 0$. Σύμφωνα με τους Erbaş & Didis (2015) και Thorpe (1989), οι μαθητές συνηθίζουν να βρίσκουν μόνο τη θετική λύση, ξεχνώντας και την αντίστοιχη αρνητική. Ένας λόγος ύπαρξης της συγκεκριμένης παρανόησης μπορεί να είναι είτε το γεγονός ότι οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει πλήρως πόσες ρίζες μπορεί να έχει μία δευτεροβάθμια εξίσωση είτε η ελλιπής κατανόηση σχετικά με τις ιδιότητες των ριζών (Vaiyavutjamai & Clements, 2006; Tall et al., 2014). Για παράδειγμα, όταν σε έρευνα δόθηκε στους μαθητές η εξίσωση $m^2 = 9$, την έλυσαν γράφοντας $m = \sqrt{9}$ αποτυγχάνοντας να αναγνωρίσουν και την άλλη ρίζα της εξίσωσης. Οι Vaiyavutjamai & Clements (2006) αναφέρουν πως μία ακόμη εξήγηση αυτού του φαινομένου μπορεί να είναι το γεγονός ότι οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει κάτω από ποιες συνθήκες μία τέτοια εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις. Ενώ επίσης είναι πιθανό οι ίδιοι να μην είναι εξοικειωμένοι με τις ιδιότητες των απολύτων τιμών και αυτό μπορεί να προκαλέσει μπέρδεμα και σύγχυση στους μαθητές κατά την επίλυση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων.

Γ) Μέθοδος της Διακρίνουσας

Η επόμενη κατηγορία παρανοήσεων σχετίζεται με τη χρήση του τύπου της Διακρίνουσας κατά την επίλυση μίας εξίσωσης. Σύμφωνα με την έρευνα που διεξήγαγαν οι Erbaş & Didis (2015), η συχνότερη δυσκολία των μαθητών κατά τη χρήση της

Διακρίνουσας, είναι η σωστή απομνημόνευση των τύπων επίλυσης. Ακόμη όμως και στις περιπτώσεις που οι μαθητές γράφουν σωστά τους τύπους, πολύ συχνά κάνουν αριθμητικά λάθη με αποτέλεσμα να μη βγαίνουν σωστά οι λύσεις. Ειδικότερα, ο Thorpe (1989) επισήμανε ότι η έννοια του συμβόλου συν ή πλην (±) στον τύπο εύρεσης των λύσεων μπορεί να μην είναι πλήρως κατανοητός από τους μαθητές. Τέλος, οι μαθητές έχουν την τάση να χρησιμοποιούν τον τύπο της Διακρίνουσας ως τη μόνη έγκυρη μέθοδο για την επίλυση κάθε δευτεροβάθμιας εξίσωσης ανεξαρτήτως της μορφής της. Ελάχιστοι μαθητές θα επέλεγαν τη χρήση παραγοντοποίησης για να επιλύσουν τις εξισώσεις της μορφής t^2- $2t = 0$ και $3k^2 - k = 0$, παρόλο που αυτός ο τρόπος επίλυσης είναι γρηγορότερος από τη χρήση της Διακρίνουσας. (Erbaş & Didis, 2015).

Δ) Μέθοδοι παραγοντοποίησης

Η τέταρτη κατηγορία σχετίζεται με τη χρήση ταυτοτήτων ή την εύρεση κοινού παράγοντα για την επίλυση της δοσμένης εξίσωσης. Τα αποτελέσματα της έρευνας των Erbaş & Didis (2015) έδειξαν ότι αρκετοί μαθητές δεν εφάρμοζαν σωστά την αλγεβρική ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων για να παραγοντοποιήσουν μία δευτεροβάθμια εξίσωση. Για παράδειγμα οι μαθητές παραγοντοποιούσαν το πολυώνυμο $9x^2 – 25$ ως $(9x – 5)(9x + 5)$ ή $(3x -5)^2$ με αποτέλεσμα να βρίσκουν λανθασμένες λύσεις. Η εξήγηση που δίνουν οι ίδιοι για το συγκεκριμένο λάθος των μαθητών είναι ότι τα παιδιά απλώς απομνημονεύουν τον τύπο της ταυτότητας και τον εφαρμόζουν μηχανικά χωρίς να σκεφτούν αναλυτικά αν αυτό που έχουν γράψει είναι σωστό ή όχι. Την ίδια εξήγηση δίνουν και για την παραγοντοποίηση εξισώσεων με τη χρήση του μέγιστου κοινού παράγοντα, όπου οι μαθητές μπορεί να βρίσκουν εύκολα τον κοινό παράγοντα, συχνά όμως γράφουν λανθασμένα την παράσταση μέσα στην παρένθεση (Erbaş & Didis, 2015).

Ακόμη, στις περιπτώσεις που οι μαθητές καλούνται να λύσουν εξισώσεις της μορφής $x^2 = αx$, οι μαθητές αρκετές φορές «διαγράφουν» μία μεταβλητή x και από τις δύο μεριές της εξίσωσης κρατώντας μόνο το $x =α$. Δεν παρατηρούν όμως ότι με τον τρόπο αυτό χάνουν τη μία λύση της αρχικής εξίσωσης, δηλαδή το $x = 0$. Στο σημείο αυτό οι Erbaş & Didis (2015) τονίζουν ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν τρόπους επίλυσης εξισώσεων που έχουν μάθει για τις πρωτοβάθμιες εξισώσεις, δίνοντας έτσι στις δευτεροβάθμιες λανθασμένες ιδιότητες.

Ε) Μέθοδος της συμπλήρωσης τετραγώνου

Η τελευταία κατηγορία σχετίζεται με την παραγοντοποίηση δευτεροβάθμιων εξισώσεων χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνων. Ο Otero (2019) σε άρθρο του τονίζει ότι ο καλύτερος τρόπος για την ορθή κατανόηση της εύρεσης λύσεων δευτεροβάθμιων εξισώσεων είναι η χρήση της μεθόδου «συμπλήρωσης τετραγώνου». Σε αυτή τη μέθοδο ο λύτης καλείται να ακολουθήσει μία σειρά βημάτων με στόχο τη δημιουργία ενός αναπτύγματος τετραγώνου στο ένα μέλος της εξίσωσης. Μάλιστα, ο ίδιος επισημαίνει ότι η μέθοδος αυτή είναι εξαιρετικά σημαντική για την ορθή αντίληψη του τρόπου παραγωγής του τύπου της Διακρίνουσας, καθώς επίσης και για την κατανόηση του λόγου για τον οποίο ο συγκεκριμένος τύπος δίνει πάντοτε σωστές λύσεις (Otero, 2019).

Αποτελέσματα έρευνας (Erbaş & Didis, 2015) έδειξαν ότι πολύ ελάχιστοι μαθητές επιλέγουν τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Ακόμα όμως και οι μαθητές που προσπαθούν να χρησιμοποιήσουν αυτή τη μέθοδο παραγοντοποίησης, αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες για να βρουν τη λύση της εξίσωσης. Για παράδειγμα, πολλοί από τους μαθητές στην έρευνα των Erbaş & Didis (2015) είχαν δυσκολία στο να προσθέσουν σωστά τον κατάλληλο αριθμό και στις δύο πλευρές της εξίσωσης έτσι ώστε να μετατρέψουν τη μία πλευρά της εξίσωσης σε μορφή τετραγώνου. Τα δεδομένα αυτής της έρευνας έδειξαν ότι ορισμένοι μαθητές θεώρησαν δύσκολη και επίπονη διαδικασία τη χρήση της ολοκληρωμένης τετραγωνικής μεθόδου και ως εκ τούτου δεν προσπάθησαν να τη χρησιμοποιήσουν για να λύσουν τις εξισώσεις.

Ένας λόγος για τη μεγαλύτερη προτίμηση των μαθητών της Διακρίνουσας σε σχέση με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου, είναι το γεγονός ότι ίσως οι ίδιοι δεν έχουν αναπτύξει πλήρως τις αλγεβρικές και αριθμητικές τους ικανότητες (Bossé & Nandakumar, 2005), ενώ επιπλέον ίσως οι μαθητές να νιώθουν μεγαλύτερη σιγουριά και ασφάλεια χρησιμοποιώντας απλώς τους τύπους της Διακρίνουσας για κάθε μορφή δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

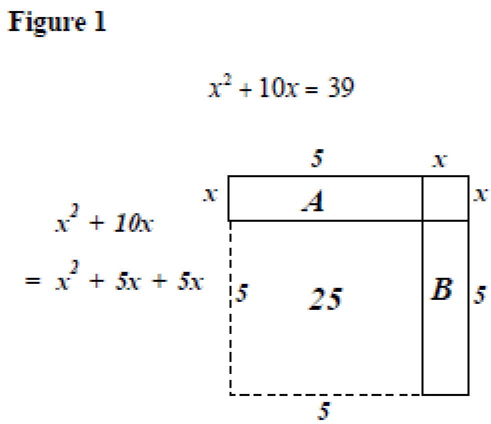
Στην έρευνα που διεξήγαγε ο Makgakga (2016) σε μαθητές Γ’ Γυμνασίου, παρατήρησε και κατέγραψε τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου. Τα αποτελέσματα της έρευνάς του έδειξαν ότι οι κυριότερες δυσκολίες των μαθητών πάνω στη συγκεκριμένη μέθοδο είναι η διαίρεση όλων των όρων της εξίσωσης με το συντελεστή του x^2 σε περίπτωση που αυτός είναι διάφορος του 1, ο πολλαπλασιασμός του συντελεστή του x με το $\frac{1}{2}$ και η εύρεση του αντίθετου του σταθερού όρου. Μάλιστα, ενδιαφέρον προκαλεί ότι οι περισσότεροι μαθητές της έρευνας αποτύγχαναν στην παραγοντοποίηση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης παρόλο που την είχαν φέρει σε ανεπτυγμένη μορφή τέλειου τετραγώνου ή απλώς μετέτρεπαν μόνο τη μία μεριά της εξίσωσης σε τετράγωνο, χωρίς να προσθέσουν και στην άλλη μεριά της εξίσωσης τον κατάλληλο αριθμό (Makgakga, 2016).

3.2 Σύνδεση Γεωμετρίας και Άλγεβρας κατά τη διδασκαλία της μεθόδου συμπλήρωσης τετραγώνου

Ο Maharaj (2005) σε άρθρο του τονίζει ότι κατά την εκπαίδευση καθηγητών που διεξήγαγε ο ίδιος κατά τα έτη 1992 έως 2022 συμπέρανε ότι πολλοί από τους εκπαιδευτικούς διδάσκουν τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου χρησιμοποιώντας τον «παραδοσιακό» αλγεβρικό αλγόριθμο. Επισημαίνει πως παρόλο που ο αλγόριθμος αυτός φαίνεται να δουλεύει αρκετά καλά, δεν είναι αυτός ο ιδανικός τρόπος διδασκαλίας της μεθόδου, καθώς ο αλγεβρικός αλγόριθμος είναι αρκετά αφηρημένος. Δεν δίνει δηλαδή στους μαθητές να καταλάβουν γιατί ακριβώς γίνονται αυτά τα βήματα κατ’ αυτό τον τρόπο. Επομένως, ο Maharaj προτείνει τη χρήση της γεωμετρικής επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης σύμφωνα με τον Al-Khwarizmi.

Σε εφαρμογή της γεωμετρικής επίλυσης που προτείνει ο ίδιος, τονίζει ότι πρώτα πρέπει να τεθούν κάποιες αρχικές ερωτήσεις στους μαθητές για να οριστεί το επίπεδό γνώσεών τους. Ερωτήσεις όπως «ποια εξίσωση ονομάζεται δευτεροβάθμια;», «ποιες μεθόδους γνωρίζετε για να λύσετε μία δευτεροβάθμια εξίσωση;». Στη συνέχεια, προτείνει να δοθούν στους μαθητές δευτεροβάθμιες εξισώσεις της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με σκοπό να σκεφτούν τρόπους για να τις λύσουν. Ένας πολύ καλός τρόπος είναι η παραγοντοποίηση, ωστόσο δε βολεύει πάντα αυτή η μέθοδος. Στο σημείο αυτό προτείνει να γίνει μία συζήτηση στην τάξη σχετικά με το γεγονός ότι χρειαζόμαστε μία καλύτερη μέθοδο για να λυθούν αυτές οι εξισώσεις, το οποίο αποτελεί μια πολύ καλή ευκαιρία για να εισαχθεί στο μάθημα η γεωμετρική επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων του Al-Khwarizmi.

Δίνοντας ένα παράδειγμα εφαρμογής αυτής της γεωμετρικής προσέγγισης μέσα στην τάξη, ο Maharaj (2005) τονίζει ότι η πλευρά x + 5 του μεγάλου τετραγώνου (εικόνα 2) δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές, ακριβώς επειδή παριστάνει μήκος πλευράς τετραγώνου. Επομένως, παρόλο που αυτή η χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών μπορεί να γεφυρώσει κενά ανάμεσα στην Άλγεβρα και στη Γεωμετρία, είναι πολύ σημαντικό ο εκπαιδευτικός να τονίσει σε αυτό το σημείο ότι το x + 5 πρέπει να μεταχειριστεί ως αριθμός και όχι ως πλευρά, με σκοπό να μπορέσει να εμφανιστεί και η δεύτερη λύση της εξίσωσης. Με αυτό τον τρόπο, σταδιακά οι μαθητές θα αποκτήσουν την ικανότητα να κατανοούν και να χρησιμοποιούν με ευχέρεια τον αλγεβρικό αλγόριθμο της συμπλήρωσης τετραγώνου και θα μπορούν να επιλύουν αλγεβρικά οποιαδήποτε δευτεροβάθμια εξίσωση.



Εικόνα 2. Εικονική αναπαράσταση επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης με τη χρήση της συμπλήρωσης τετραγώνου (Maharaj, 2005).

Ολοκληρώνοντας, η γεωμετρική προσέγγιση της μεθόδου συμπλήρωσης τετραγώνου προσφέρει οπτική αιτιολόγηση των βημάτων του αντίστοιχου αλγεβρικού αλγορίθμου. Η αιτιολόγηση αυτή είναι πολύ σημαντική καθώς δίνει νόημα στα βήματα του αλγορίθμου ενώ επίσης βοηθάει στην καλύτερη κατανόηση και εκτίμηση της αλγεβρικής επίλυσης. Επομένως, μέσα από τη σύνδεση Γεωμετρίας και Άλγεβρας παρέχονται εργαλεία χρήσιμα για τη σωστή κατανόηση των Μαθηματικών, όπως είναι για παράδειγμα η ορθή αιτιολόγηση. Τέλος, η σύνδεση αυτή μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να διώξουν την πεποίθηση ότι τα Μαθηματικά είναι μια αφηρημένη επιστήμη (Maharaj, 2005).

Σε παρόμοια έρευνά τους οι de Bruyn & Hanna (2014) τονίζουν ότι η μέθοδος της συμπλήρωσης τετραγώνου είναι μια αλγεβρική τεχνική την οποία πολλοί μαθητές χαρακτηρίζουν ως δύσκολη και πολύπλοκη λόγω της αφηρημένης φύσης της. Μέσα από την ανάλυση της έρευνας που διεξήγαγαν σε σχολική τάξη, καταγράφουν ότι η οπτική αναπαράσταση αυτής της μεθόδου με χρήση «πλακιδίων» μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατακτήσουν αυτή τη μέθοδο με λιγότερη δυσκολία. Η τεχνική διδασκαλίας που ακολουθούν είναι παρόμοια με του Maharaj (2005). Κάνουν χρήση δηλαδή της γεωμετρικής επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων με τη μέθοδο του Al-Khwarizmi. Ωστόσο επισημαίνουν ότι η μέθοδος της συμπλήρωσης τετραγώνου με τη χρήση οπτικών αναπαραστάσεων, παρόλο που αποτελεί μια πολύ δυναμική διαδικασία, είναι ταυτόχρονα και πολύ χρονοβόρα. Ενώ επίσης η μέθοδος αυτή δεν είναι βολική σε περιπτώσεις όπου ο συντελεστής του x είναι αρνητικός ή περιττός ακέραιος.

Στα αποτελέσματα της έρευνας των de Bruyn & Hanna (2014) αναφέρεται ότι πολλοί περισσότεροι μαθητές κατάφεραν να χρησιμοποιήσουν τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου όταν διδάχτηκαν τη γεωμετρική αναπαράστασή της, ενώ επίσης ήτανε οι ίδιοι σε θέση να λύσουν περισσότερα δύσκολα προβλήματα. Τέλος, οι μαθητές σχολίασαν ότι ήτανε ευκολότερο να θυμούνται τη διαδικασία της συμπλήρωσης τετραγώνου μέσα από τις οπτικές αναπαραστάσεις, ενώ επιπλέον οι μαθητές ήτανε λιγότερο επιρρεπείς σε λάθη.

Κλείνοντας την έρευνα, οι de Bruyn & Hanna (2014) τονίζουν ότι μοναδικός σκοπός της μοντελοποίησης της αλγεβρικής μεθόδου της συμπλήρωσης τετραγώνου είναι η κατανόηση των αντίστοιχων αλγεβρικών εννοιών και μεθόδων. Για το λόγο αυτό προτείνουν κατά τη χρήση αυτής της διαδικασία να διατηρηθεί η μοντελοποίηση όσο το δυνατόν απλούστερη. Δεν προτείνουν δηλαδή τη χρήση αρνητικών όρων κατά την εισαγωγική διδασκαλία της γεωμετρικής αναπαράστασης αυτή της μεθόδου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

4.1 Επίλυση «δευτεροβάθμιας εξίσωσης» κατά τους Βαβυλώνιους

Οι περισσότερες πληροφορίες για τα βαβυλωνιακά Μαθηματικά προέρχονται από πήλινες πλάκες που έχουν το μέγεθος ενός χεριού. Οι βαβυλώνιοι γραφείς χρησιμοποιούσαν τη λεγόμενη σφηνοειδή γραφή, χάραζαν δηλαδή σφήνες πάνω στον πηλό χρησιμοποιώντας καλάμια ως γραφίδες. Οι περισσότερες από τις πλάκες που έχουν βρεθεί χρονολογούνται γύρω στο 1800-1600 π.Χ. Ειδικότερα, έχουν βρεθεί δύο είδη μαθηματικών πλακών, αυτές που περιέχουν μαθηματικούς πίνακες και αυτές που περιέχουν μαθηματικά προβλήματα.

Το πρώτο είδος πλακών περιείχε πίνακες πολλαπλασιασμών, αντιστρόφων αλλά και τετραγωνικών ριζών. Οι πίνακες αυτοί ήταν για τους γραφείς κάτι σαν το δικιά μας σύγχρονη αριθμομηχανή. Μπορούσαν να ανατρέξουν σε αυτούς τους πίνακες και να εκτελέσουν γρήγορα αριθμητικές πράξεις. Ενδιαφέρον προκαλεί το γεγονός ότι τα προβλήματα στα οποία απαιτούνταν η χρήση τετραγωνικών ριζών, ήταν διατυπωμένα με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε οι ρίζες να βρίσκονται σε κάποιον πίνακα και να είναι ρητοί αριθμοί (Katz, 2014, σελ.33).

Αναφορικά με το δεύτερο είδος πλακών, έχουν βρεθεί πολλές βαβυλωνιακές πινακίδες που περιέχουν καταλόγους προβλημάτων. Οι Βαβυλώνιοι για να επιλύσουν κάποιο πρόβλημα, ακολουθούσαν μία συγκεκριμένη σειρά συλλογισμών. Είχαν αναπτύξει δηλαδή αλγορίθμους για κάθε είδος μαθηματικού προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, οι λύσεις τους πάντοτε τελείωναν με τη φράση «Αυτή είναι η μέθοδος» το οποίο δείχνει ότι στόχος τους ήταν η εύρεση μιας γενικής μεθόδου για την επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος (Bunt, 1981, σελ. 58).

Αναφορικά με τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις, φαίνεται ότι απασχολούσαν αρκετά τους Βαβυλώνιους. Ωστόσο πρέπει να αναφερθεί πως όταν αναφέρεται ο όρος «δευτεροβάθμιες εξισώσεις» για τους Βαβυλώνιους, δεν αναφέρεται στις εξισώσεις της γνωστής σημερινής μορφής. Οι τρόποι επίλυσης αυτών των μορφών εξισώσεων βασίζονταν σε γεωμετρικά τετράγωνα και ορθογώνια και όχι σε αριθμητικά τετράγωνα και γινόμενα (Katz, 2014, σελ. 33). Ωστόσο είναι ενδιαφέρον να αναφερθεί ότι κατά την αρχαιότητα, επικρατούσε η λανθασμένη αντίληψη ότι δύο ορθογώνια με την ίδια περίμετρο, έχουν και το ίδιο εμβαδόν. Σύμφωνα με τον Katz (2014), οι Βαβυλώνιοι γραφείς προκειμένου να διαψεύσουν αυτή την αντίληψη, κατασκεύαζαν πίνακες όπου κατέγραφαν περιπτώσεις ορθογωνίων με δεδομένη περίμετρο 2b και διαφορετικά εμβαδά c, αλλάζοντας κάθε φορά τις τιμές για το μήκος x και το πλάτος y. Έτσι λοιπόν τα περισσότερα «δευτεροβάθμια» βαβυλωνιακά προβλήματα αποτελούν συστήματα δύο γραμμικών εξισώσεων της μορφής x + y = b και xy = c οι οποίες ισοδυναμούν με τη δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2 + c = bx$.

Εκτός από τα συστήματα όμως, οι Βαβυλώνιοι μπορούσαν να επιλύουν και μεμονωμένες «δευτεροβάθμιες εξισώσεις», δηλαδή εξισώσεις της μορφής $x^2 + bx = c$. Παρακάτω παρουσιάζεται ένα βαβυλωνιακό πρόβλημα το οποίο βρέθηκε γραμμένο στην πινακίδα BM 13901.

«Το άθροισμα του εμβαδού ενός τετραγώνου και των 4/3 της πλευράς του είναι 11/12. Να βρεθεί η πλευρά.»

Με σύγχρονο συμβολισμό, το πρόβλημα αυτό ανάγεται στην εξίσωση $x^2 + \frac{4}{3}x = \frac{11}{12}$. Τα βήματα που ακολουθούν οι βαβυλώνιοι γραφείς για την επίλυση του προβλήματος είναι τα εξής:

1) Παίρνουμε το μισό του 4/3, που είναι 2/3

2) Υψώνουμε στο τετράγωνο το 2/3, το οποίο βγάζει 4/9

3) Προσθέτουμε το 11/12 στο 4/9 και βρίσκουμε 1 13/36

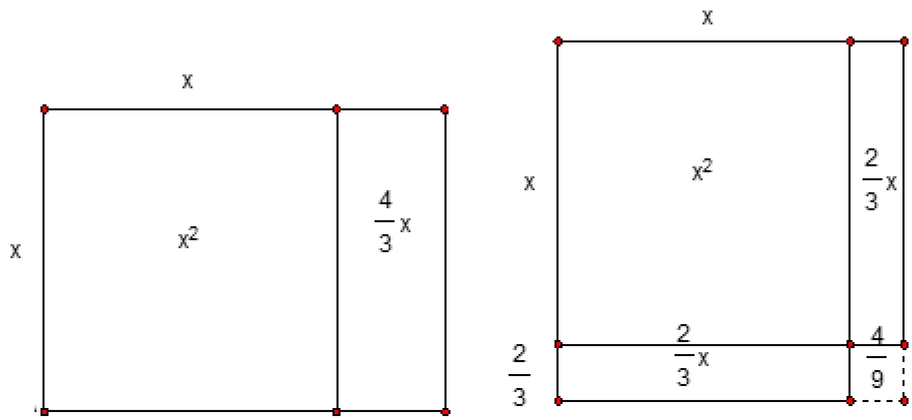
4) Η ρίζα του 1 13/36 είναι το 7/6.

5) Αφαιρούμε 2/3 από το 7/6 και βρίσκουμε ½ το οποίο είναι η ζητούμενη πλευρά.

Η διαδικασία αυτή με σύγχρονους συμβολισμούς μεταφράζεται ως:

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}.$$

Παρακάτω (εικόνα 3) φαίνεται η γεωμετρική αναπαράσταση της βαβυλωνιακής διαδικασίας επίλυσης της «δευτεροβάθμιας εξίσωσης» $x^2 + 4/3x = 11/12$.



Εικόνα 3. Γεωμετρική αναπαράσταση της βαβυλωνιακής επίλυσης της «δευτεροβάθμιας εξίσωσης» $x^2 + 4/3x = 11/12$.

Αξίζει να τονιστούν οι διαφορές του βαβυλωνιακού τρόπου διαχείρισης επίλυσης «δευτεροβάθμιων εξισώσεων» με τον αντίστοιχο σημερινό. Αρχικά, για τους βαβυλώνιους γραφείς οι εξισώσεις $x^2 + bx = c$ και $x^2 – bx = c$ απαιτούσαν διαφορετικό τρόπο χειρισμού καθώς η διατύπωση του προβλήματος αλλά και η γεωμετρική σημασία είναι διαφορετική για την κάθε μία από αυτές. Για τον σημερινό λύτη εξισώσεων όμως το πρόσημο του συντελεστή του χ δεν έχει καμία σημασία. Επιπλέον, είναι γνωστό ότι ο σύγχρονος τρόπος χειρισμού των δευτεροβάθμιων εξισώσεων είναι δυνατό να δώσει μία θετική και μία αρνητική λύση. Ωστόσο, για τους Βαβυλώνιους η αρνητική λύση αγνοούνταν καθώς δεν έχει κάποια γεωμετρική υπόσταση.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι οι Βαβυλώνιοι, στις περιπτώσεις όπου η εξίσωση $x^2 + c = bx$ έδινε δύο θετικές λύσεις, κρατούσαν μόνο τη μία. Τέτοιες μορφές εξισώσεων δεν έχουν βρεθεί στις βαβυλωνιακές πινακίδες που έχουν διασωθεί. Ίσως οι γραφείς δεν πίστευαν ότι μία εξίσωση μπορεί να επαληθεύεται από δύο διαφορετικές τιμές. Στις περιπτώσεις οπού χρειάζονταν οι ίδιοι να αντιμετωπίσουν τέτοιες εξισώσεις απλώς άλλαζαν τη διατύπωση του προβλήματος έτσι ώστε να προκύψουν οι αντίστοιχες εξισώσεις $x + y = b$ και $xy = c$. Με τον τρόπο αυτό κατάφερναν να αντιστοιχίσουν τις δύο διαφορετικές λύσεις της αρχικής δευτεροβάθμιας σε δύο διαφορετικούς αγνώστους.

Ολοκληρώνοντας, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι ο σκοπός των βαβυλωνιακών πινακίδων δεν ήταν απλώς η εύρεση και η καταγραφή της λύσης και της απάντησης, αλλά η εκμάθηση διαφόρων μεθόδων επίλυσης και τεχνικών απλοποίησης του προβλήματος. Δεν ήταν όμως πραγματικά τόσο σημαντική η επίλυση των «δευτεροβάθμιων εξισώσεων» για την καθημερινή τους ζωή. Αυτό που έπαιζε πολύ σημαντικό ρόλο για τους Βαβυλώνιους ήταν το να γνωρίζει ο ηγέτης της χώρας τους πολύ καλά Μαθηματικά και ιδιαίτερα να επιλύει «δευτεροβάθμιες εξισώσεις». Με τον τρόπο αυτό θα κατείχε ο ίδιος δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων που θα μπορούσαν να χρησιμεύσουν στην αντιμετώπιση των προβλημάτων της χώρας. Στις δεξιότητες αυτές συμπεριλαμβάνεται η ικανότητα ακολουθίας ενός αλγορίθμου αλλά και η ικανότητα επιλογής της κατάλληλης μεθόδου σε κάθε ένα πρόβλημα, καθώς και η απλοποίησή του. Θα λέγαμε λοιπόν ότι η εκμάθηση της άλγεβρας περιοριζόταν μόνο για την υψηλή κοινωνία, έχοντας ως στόχο την ανάδειξη ηγετών για το λαό τους.

4.2 Επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης κατά τον Al – Khwarizmi

Οι πληροφορίες που διαθέτουμε για τη ζωή του Al-Khwarizmi δεν είναι πολλές. Εκτιμάται ότι η χρονολογία γέννησής του ήταν γύρω στο 780 μ.Χ., ενώ ο θάνατός του χρονολογείται μεταξύ 830 και 850 μ.Χ. Ωστόσο, παρόλο που γνωρίζουμε ελάχιστα για τον ίδιο, η επιστημονική δουλειά του έγινε ευρέως γνωστή. Ο Al-Khwarizmi έγραψε πολλά βιβλία ενώ επίσης άφησε γραπτά κείμενα για τον αστρολάβο (αστρονομικό όργανο για την παρατήρηση του ήλιου και των αστεριών), το ηλιακό ρολόι και επεξεργάστηκε τη Γεωμετρία του Πτολεμαίου. Επιπλέον, είναι πιθανό να πήρε μέρος σε μια χρηματοδοτούμενη έρευνα του Al-Ma’mun για τη μέτρηση της περιφέρειας της γης έως ένα βαθμό. (Arndt, 1983)

Ήδη από τα πρώτα χρόνια της καριέρας του, ο Al-Khwarizmi είχε γίνει γνωστός σε όλο τον αραβικό κόσμο. Αιτία ήταν το έργο του γνωστό στα αραβικά ως Sindhind το οποίο περιείχε μία περιληπτική καταγραφή των ινδουιστικών αστρονομικών πινάκων. Ως συνέχεια αυτού, ο χαλίφης Al-Ma'mun ζήτησε από τον Al-Khwarizmi να δημιουργήσει ένα έργο πάνω στην επιστήμη των εξισώσεων και έτσι ο ίδιος συνέγραψε το διάσημο βιβλίο Al-Kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala. Οι λέξεις al-jabr και al-muqabala χρησιμοποιήθηκαν για να δηλώσουν τις δύο βασικές λειτουργίες κατά την επίλυση εξισώσεων. Ο όρος al-jabr αποδίδεται ως «αποκατάσταση», δηλαδή στη μεταφορά μίας ποσότητας που αφαιρείται στο ένα μέλος της εξίσωσης στο άλλο όπου προστίθεται. Ο όρος al-muqabala σημαίνει «σύγκριση-εξισορρόπηση» και αναφέρεται στην απαλοιφή ενός θετικού όρου από τη μία πλευρά της εξίσωσης με κατάλληλη αφαίρεση ίσων ποσοτήτων και στις δύο μεριές. Επομένως ο τίτλος του βιβλίου θα μπορούσε να μεταφραστεί ως «Συνοπτικό βιβλίο για το λογισμό της αποκατάστασης και της εξισορρόπησης» (Arndt, 1983, Katz, 2014, σελ.280). Μάλιστα, αξίζει να τονιστεί ότι η σημερινή λέξη «άλγεβρα» προέρχεται από το αραβικό al-jabr. Όταν το παραπάνω έργο άρχισε να γίνεται διεθνώς γνωστό, μεταφράστηκε στα λατινικά χωρίς να μεταφραστεί και η λέξη al-jabr και επομένως αυτή παρέμεινε και η ονομασία της συγκεκριμένης επιστήμης. (Katz, 2014, σελ.280)

Αναφορικά με το έργο του, ο Al-Khwarizmi είχε ως στόχο να συγγράψει ένα πρακτικό εγχειρίδιο για την επίλυση εξισώσεων καθώς, σύμφωνα με τον ίδιο, αυτό που αναζητούν οι άνθρωποι όταν κάνουν υπολογισμούς, είναι ένας αριθμός (Katz, 2014, σελ. 280). Ωστόσο, αυτό που παρατηρείται στα γραπτά κείμενά του, είναι η πλήρης χρήση λέξεων για την περιγραφή αριθμών και πράξεων, αντί για συμβολισμούς. Οι αριθμοί που χρησιμοποιούμε στη σημερινή εποχή αναπτύχθηκαν στην Ινδία δύο αιώνες αργότερα. (Arndt, 1983, Otero, 2019), ενώ οι αλγεβρικοί συμβολισμοί εισήχθησαν στην Άλγεβρα επτά αιώνες μετά από τη δημοσίευση του έργου του Al-Khwarizmi. Είναι περισσότερο κατανοητή η αξία αυτού του έργου λαμβάνοντας υπόψιν ότι για τη σημερινή άλγεβρα οι συμβολισμοί αποτελούν ένα αναπόσπαστο κομμάτι της. Ο Al-Khwarizmi ωστόσο κατάφερε να περιγράψει με μεγάλη ακρίβεια και λεπτομέρεια τις ίδιες πράξεις και σχέσεις χρησιμοποιώντας αποκλειστικά λέξεις. (Otero, 2019)

Ο Al-Khwarizmi ασχολείται με τρία είδη ποσοτήτων. Το τετράγωνο (x^2), η ρίζα του αγνώστου (x) και οι απόλυτοι αριθμοί, δηλαδή οι σταθεροί όροι. Ο ίδιος σημειώνει ότι υπάρχουν έξι διαφορετικοί τύποι εξισώσεων που είναι δυνατόν να γραφτούν με αυτά τα τρία είδη ποσοτήτων.

1. Τετράγωνα ίσα με ρίζες ($ax^2 = bx$)
2. Τετράγωνα ίσα με αριθμούς ($ax^2 = γc$)
3. Ρίζες ίσες με αριθμούς ($bx = c$)
4. Τετράγωνα και ρίζες ίσα με αριθμούς ($ax^2 + bx = c$)
5. Τετράγωνα και αριθμοί ίσα με τετράγωνα ($ax^2 + c = bx$)
6. Ρίζες και αριθμοί ίσα με τετράγωνα ($bx + c = ax^2$)

Η ταξινόμηση αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι τα Μαθηματικά του Ισλάμ δεν περιείχαν καθόλου αρνητικούς αριθμούς, ενώ επίσης οι συντελεστές και οι ρίζες των εξισώσεων έπρεπε να είναι θετικοί αριθμοί. Ιδιαίτερα σημειώνεται ότι για τον Al-Khwarizmi δεν είχε νόημα η κανονική μορφή της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, αφού αν οι συντελεστές a, b και c είναι θετικοί, τότε οι ρίζες της εξίσωσης δεν είναι θετικοί αριθμοί.

Παρακάτω παρουσιάζεται ο τρόπος επίλυσης της τέταρτης μορφής δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Τονίζεται ωστόσο ότι ο Al-Khwarizmi δε χρησιμοποιούσε σύμβολα. Αντί αυτών περιέγραφε τα πάντα με λέξεις, ακόμη και τους αριθμούς του προβλήματος (Otero, 2019).

Για την επίλυση της εξίσωσης $x^2 + 10x = 39$

1. Υποδιπλασιάζουμε το πλήθος των ριζών, που στο παράδειγμα αυτό είναι 5.

2. Πολλαπλασιάζουμε αυτό τον αριθμό με τον εαυτό του και το γινόμενο δίνει 25.

3. Προσθέτουμε το 25 στο 39 και το αποτέλεσμα είναι 64.

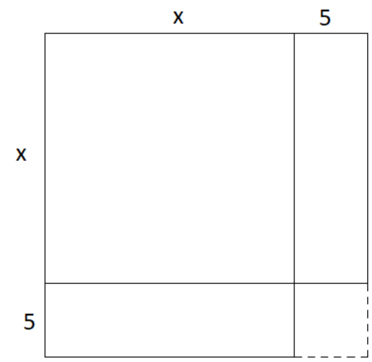
4. Παίρνουμε τη ρίζα του 64 η οποία είναι 8.

5. Από το 8 αφαιρούμε το μισό του πλήθους των ριζών. Το αποτέλεσμα είναι 3. Αυτή είναι η λύση του προβλήματος.

Χρησιμοποιώντας σύγχρονο συμβολισμό, η λύση που περιγράφει είναι η εξής:

$$x = \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + c} - \frac{b}{2}$$

Η γεωμετρική απεικόνιση αυτής της μεθόδου παραπέμπει στη μέθοδο που είχαν αναπτύξει και οι Βαβυλώνιοι (εικόνα 4).



Εικόνα 4. Γεωμετρική απεικόνιση της παράστασης x^2 + 10x

Ο Al-Khwarizmi ξεκινάει με την κατασκευή του τετραγώνου με εμβαδό x^2 και προσθέτει δύο ορθογώνια με μήκος x και πλάτος 5 (δηλαδή το μισό του «πλήθους των ριζών»). Το άθροισμα του τετραγώνου και των ορθογωνίων περιγράφεται ως $x^2 + 10x = 39$. Στη συνέχεια για να κατασκευάσει ένα μεγάλο τετράγωνο, προσθέτει και ένα μικρό τετράγωνο εμβαδού 25 και επομένως τώρα το συνολικό εμβαδόν γίνεται:

$x^2 + 10x +25 = 39 + 25$

$x^2 + 10x +25 = 64$

Για να βρει την πλευρά του μεγάλου τετραγώνου, υπολογίζει τη ρίζα του 64 που είναι το 8 και αφού $x + 5 = 8$ τότε για να βρει την άγνωστη πλευρά x, απλώς αφαιρεί 5 από το 8. Η ζητούμενη λύση είναι το $x = 3$.

Αν και η γεωμετρική επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης θυμίζει αυτή των Βαβυλωνίων, αυτό που κατάφερε ο Al-Khwarizmi ήταν να εστιάσει περισσότερο στην αλγεβρική επίλυση των εξισώσεων. Αντί να επικεντρώνεται δηλαδή στην εύρεση πλευρών τετραγώνων, δίνει έμφαση στην εύρεση αριθμών που ικανοποιούν συγκεκριμένες συνθήκες. Αυτό φαίνεται και από τις ονομασίες που έχει δώσει ο ίδιος στις ποσότητες των εξισώσεων. Για παράδειγμα χρησιμοποιώντας τον όρο «ρίζα», δεν αναφέρεται σε πλευρά τετραγώνου, αλλά σε «οτιδήποτε αποτελείται από μονάδες και μπορεί να πολλαπλασιαστεί επί τον εαυτό του, ή οποιονδήποτε αριθμό μεγαλύτερο από τη μονάδα που πολλαπλασιάζεται επί τον εαυτό του, ή αυτό που όταν το πολλαπλασιάζουμε επί τον εαυτό του το βλέπουμε να γίνεται μικρότερο από τη μονάδα». Επιπλέον, για τις εξισώσεις τετάρτου τύπου ($ax^2 + bx = c$), όπου ο συντελεστής a είναι διάφορος του 1, πολλαπλασιάζει ή διαιρεί με κατάλληλο αριθμό όλους τους όρους της εξίσωσης έτσι ώστε ο συντελεστής του x^2 να γίνει 1 και έπειτα εφαρμόζει τη μέθοδο που αναφέρθηκε παραπάνω.

Ο τρόπος επίλυσης αλλά και χειρισμού των δευτεροβάθμιων εξισώσεων από τον Al-Khwarizmi αποδεικνύει ότι σε αντίθεση με τους Βαβυλώνιους, ο ίδιος μπορούσε να αντιμετωπίζει και δευτεροβάθμιες εξισώσεις με δύο θετικές ρίζες (Otero, 2019). Η λύση μιας εξίσωσης για τον Al-Khwarizmi δεν αντιστοιχιζόταν απλά στην πλευρά ενός τετραγώνου, αλλά στην εύρεση ενός αριθμού που ικανοποιεί συγκεκριμένες συνθήκες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 - ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

5.1 Σκοπός και μέθοδος της έρευνας

Στόχος της παρούσας έρευνας ήταν να κατανοήσουν και να εξοικειωθούν οι μαθητές της Γ’ Γυμνασίου με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου, μέσω γεωμετρικής μεθόδου επίλυσης β’ βάθμιων εξισώσεων των Βαβυλωνίων και του Al-Khwarizmi. Για την επίτευξη του στόχου η έρευνα χωρίζεται σε δύο βασικούς άξονες: α) την κατανόηση της μεθόδου συμπλήρωσης τετραγώνου, β) τον έλεγχο των παρανοήσεων και δυσκολιών στη συγκεκριμένη μέθοδο. Για το λόγο αυτό τα δύο ερωτήματα της έρευνας είναι τα παρακάτω:

1) Βοηθάει η μελέτη της ιστορίας των Μαθηματικών τους μαθητές στην καλύτερη κατανόηση της μεθόδου "συμπλήρωση τετραγώνου";
2) Οι δυσκολίες των μαθητών γίνονται μικρότερης έκτασης μετά από την εφαρμογή της παρούσας προτεινόμενης διδασκαλίας;

Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων θα ακολουθήσει κατά βάση ποσοτική και εν μέρει ποιοτική έρευνα στα σημεία που χρήζουν σχολιασμού.

5.2 Δείγμα

Στην έρευνα συμμετείχαν δύο σχολικά τμήματα 44 μαθητών της Γ’ Γυμνασίου. Ο λόγος που χρειάστηκαν δύο τμήματα ήταν για να χρησιμοποιηθεί το ένα τμήμα ως ομάδα ελέγχου και στο δεύτερο εφαρμόστηκε η προτεινόμενη διδασκαλία. Η ομάδα ελέγχου απαρτιζόταν από 26 μαθητές, ενώ στην πειραματική ομάδα συμμετείχαν 18 μαθητές. Σημειώνεται ότι το δείγμα ήτανε βολικό.

5.3 Εργαλείο

Το ερευνητικό εργαλείο που επιλέχθηκε για τη διεξαγωγή της έρευνας χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος αποτελείται από τις ασκήσεις και τα φύλλα εργασίας που δούλευαν οι μαθητές μέσα στην τάξη αλλά και στο σπίτι τους τα οποία ήτανε βασισμένα στο μάθημα που έγινε σε κάθε τάξη αντίστοιχα. Το δεύτερο μέρος αποτελείται από το τελικό ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους μαθητές το οποίο περιλαμβάνει ερωτήσεις οι οποίες έχουν στόχο να αναδείξουν την κατανόηση του κάθε μαθητή πάνω στη συγκεκριμένη μέθοδο επίλυσης β’ βάθμιων εξισώσεων, καθώς επίσης και ερωτήσεις μέσα από τις οποίες εξετάζεται η εξάλειψη ή η παραμονή των δυσκολιών και των παρανοήσεων των μαθητών σε αυτό το κεφάλαιο των Μαθηματικών.

5.4 Μεθοδολογία

Πριν την έναρξη της διδασκαλίας σε κάθε τμήμα έγινε μια αρχική εκτίμηση των γνώσεων των μαθητών πάνω σε κομμάτια των Μαθηματικών τα οποία θα χρειάζονταν σε αυτό το κεφάλαιο. Πιο συγκεκριμένα, ελέγχθηκαν οι γνώσεις των μαθητών πάνω στις ταυτότητες, στην παραγοντοποίηση, στον υπολογισμό εμβαδού και στην επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων της μορφής $x^2 = α$, με $α>0$. Στη συνέχεια, η έρευνα πραγματοποιήθηκε στις αίθουσες διδασκαλίας των δύο τμημάτων και διήρκησε δύο διδακτικές ώρες συνολικά σε κάθε τμήμα. Η καθηγήτρια Μαθηματικών του σχολείου ήταν παρούσα σε κάθε διδασκαλία ως παρατηρήτρια. Οι πιο σημαντικές από τις παρατηρήσεις τις αναφέρονται στη συνέχεια, στα αποτελέσματα της έρευνας.

5.5 Ανάλυση των διδασκαλιών

1η ώρα διδασκαλίας στην ομάδα ελέγχου

Πριν ξεκινήσει η διδασκαλία στην τάξη που χρησιμοποιήθηκε ως ομάδα ελέγχου, ελέγχθηκαν οι γνώσεις των μαθητών πάνω σε συγκεκριμένα κομμάτια των Μαθηματικών που θα χρειαζόμασταν στη μετέπειτα διδασκαλία. Αρχικά οι μαθητές ρωτήθηκαν να εξηγήσουν τι ονομάζεται δευτεροβάθμια εξίσωση. Η απάντηση που δόθηκε από τους περισσότερους μαθητές ήταν ότι «Δευτεροβάθμια ονομάζεται η εξίσωση που βλέπουμε ένα x^2, ένα x και έναν σταθερό αριθμό». Στο σημείο αυτό τονίστηκε ότι δε χρειάζεται πάντοτε να υπάρχει ένα x ή ένας σταθερός αριθμός για να έχουμε δευτεροβάθμια εξίσωση, αλλά αρκεί η ύπαρξη του x^2. Στη συνέχεια δόθηκε στους μαθητές η εξίσωση $x^2 = 64$ για να τη λύσουν. Οι περισσότεροι μαθητές έλυσαν την εξίσωση με τη χρήση ταυτότητας, δηλαδή μετατρέποντας την εξίσωση σε $(x - 8)(x + 8) = 0$. Ίσως οι περισσότεροι να διάλεξαν αυτό τον τρόπο επίλυσης αφού πρόσφατα είχε αφιερωθεί αρκετός χρόνος από την καθηγήτριά τους πάνω στην εκμάθηση ταυτοτήτων. Ελάχιστοι μαθητές έλυσαν την εξίσωση κάνοντας χρήση ρίζας, αλλά κατέγραψαν μόνο μία λύση, τη θετική, αγνοώντας την ύπαρξη της αρνητικής λύσης. Στο σημείο αυτό έγινε μία συζήτηση με όλη την τάξη για να καταλάβουν γιατί υπάρχουν δύο λύσεις.

Κατόπιν, ελέγχθηκαν οι γνώσεις των μαθητών πάνω στις ταυτότητες. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, οι μαθητές πρόσφατα είχαν διδαχθεί και εξεταστεί από την καθηγήτριά τους πάνω στο συγκεκριμένο κεφάλαιο επομένως στο μεγαλύτερο ποσοστό τους οι μαθητές γνώριζαν πώς να παραγοντοποιούν ένα ανάπτυγμα ταυτότητας, ενώ τέλος εξετάστηκαν οι γνώσεις τους πάνω στον τρόπο υπολογισμού εμβαδού ενός τετραγώνου και ενός ορθογωνίου.

Αφού ολοκληρώθηκε ο έλεγχος των γνώσεων των μαθητών, ξεκίνησε η διδασκαλία της μεθόδους συμπλήρωσης τετραγώνου όπως ορίζεται από το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών. Χρησιμοποιήθηκε η σελίδα 91 του σχολικού βιβλίου των Μαθηματικών της Γ’ Γυμνασίου. Στην εικόνα 5 φαίνονται τα βήματα επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης με τη συγκεκριμένη μέθοδο όπως αναφέρονται και στο σχολικό βιβλίο. Δεν αναφέρθηκε κάτι παραπάνω στους μαθητές πέρα από τον συγκεκριμένο αλγόριθμο επίλυσης. Έγιναν κάποια παραδείγματα στον πίνακα και στη συνέχεια δόθηκε στους μαθητές το φύλλο εργασίας όπου δουλεύτηκε στην τάξη η 1η εφαρμογή. Δόθηκε δηλαδή χρόνος στους μαθητές να λύσουν μόνοι τους την εξίσωση ακολουθώντας τον αλγόριθμο που μόλις διδάχθηκε, έχοντας φυσικά οι ίδιοι τη δυνατότητα να εκφράσουν τις απορίες και τους προβληματισμούς τους, το οποίο και έγινε. Αρκετοί μαθητές ωστόσο δυσκολεύτηκαν στο να ακολουθήσουν σωστά τα βήματα. Τέλος, αφού δείχθηκε η σωστή λύση στον πίνακα από έναν μαθητή, δόθηκαν στους μαθητές κάποιες ασκήσεις για εξάσκηση στο σπίτι.

- Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με 4α, όπου α ο συντελεστής του x^2.
- Μεταφέρουμε στο β΄ μέλος το σταθερό όρο και στο α΄ μέλος δημιουργούμε παράσταση της μορφής $α^2 + 2αβ$ ή $α^2 - 2αβ$.
- Για να συμπληρωθεί το ανάπτυγμα τετραγώνου προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $β^2$.
- Χρησιμοποιούμε μία από τις ταυτότητες
  $α^2 + 2αβ + β^2 = (α + β)^2$
  $α^2 - 2αβ + β^2 = (α - β)^2$

$x^2 + 15x - 16 = 0$
$4x^2 + 60x - 64 = 0$
$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 15 = 64$
$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 15 + 15^2 = 64 + 15^2$
$(2x + 15)^2 = 289$
$2x + 15 = \sqrt{289}$ ή $2x + 15 = \sqrt{289}$
$2x + 15 = 17$ ή $2x + 15 = -17$
$2x = 2$ ή $2x = -32$
$x = 1$ ή $x = -16$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 1$ και $x = -16$

Εικόνα 5. Αλγόριθμος συμπλήρωσης τετραγώνου. Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου, σελ. 91, ΟΕΔΒ

2η ώρα διδασκαλίας στην ομάδα ελέγχου

Στη δεύτερη ώρα διδασκαλίας μαζεύτηκαν οι ασκήσεις που δούλεψαν οι μαθητές στο σπίτι και τους ζητήθηκε να εκφράσουν τις απορίες και τους προβληματισμούς τους. Μέσα από τη συζήτηση φάνηκε ότι ένα μέρος των μαθητών είχε παρερμηνεύσει το πρώτο βήμα του αλγορίθμου της συμπλήρωσης τετραγώνου. Αντί να πολλαπλασιάσουν με 4α όλους τους όρους της εξίσωσης, όπου α είναι ο συντελεστής του x^2, κάποιοι πολλαπλασίαζαν μόνο με 4 όλους τους όρους, ενώ κάποιοι προσπαθούσαν να κάνουν 4 τον συντελεστή του x^2 πολλαπλασιάζοντας κατάλληλα. Δυσκολίες επίσης εκφράστηκαν στο να συμπληρώσουν οι μαθητές το ανάπτυγμα τετραγώνου που δημιουργείται στη διαδικασία αυτής της μεθόδου. Δυσκολεύτηκαν δηλαδή στο να βρουν ποιος είναι ο όρος β έτσι ώστε να προσθέσουν και στα δύο μέλη της εξίσωσης το $β^2$.

Αφού σχολιάστηκαν τα λάθη και οι παρερμηνεύσεις, συνεχίστηκε η διδασκαλία με δευτεροβάθμιες εξισώσεις όπου όλοι οι συντελεστές έχουν κοινό διαιρέτη μεγαλύτερο του 1. Μέσα από καθοδήγηση οι μαθητές κατάλαβαν ότι μπορούν να διαιρέσουν όλους τους όρους της εξίσωσης με τον ίδιο αριθμό ώστε να απλοποιηθούν οι πράξεις που θα κάνουν στη συνέχεια. Αρχικά λύθηκε μία δευτεροβάθμια εξίσωση στον πίνακα με τη συμμετοχή μαθητών και στη συνέχεια κλήθηκαν οι ίδιοι να λύσουν μία παρόμοια στο τετράδιό τους. Όλη την ώρα που οι μαθητές εργάζονταν μόνοι τους υπήρχε επίβλεψη και προσωπική βοήθεια από τους διδάσκοντες. Το πιο σύνηθες λάθος των μαθητών ήταν ότι πολλαπλασίαζαν όλους τους όρους της εξίσωσης με το 4 και όχι με το 4α, παρόλο που τονίστηκε αυτό το λάθος στην αρχή του μαθήματος. Στο τέλος, ένας μαθητής θέλησε να εκφράσει την άποψή του πάνω στον αλγόριθμό της συμπλήρωσης τετραγώνου αναφέροντας ότι είναι πολύ δύσκολο να θυμάται όλα αυτά τα βήματα απ’ έξω χωρίς να τα έχει γραμμένα μπροστά του.

1η ώρα διδασκαλίας με χρήση ιστορίας των Μαθηματικών

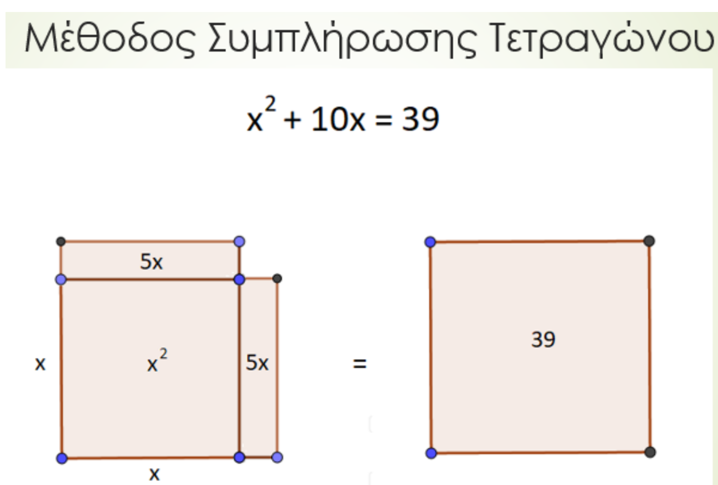
Η διδασκαλία στο δεύτερο τμήμα της Γ’ Γυμνασίου έγινε με χρήση γεγονότων από την ιστορία των Μαθηματικών. Αρχικά έγινε αναφορά στον πολιτισμό των Βαβυλώνιων ως προς τη χρονολογία και την περιοχή στην οποία αναπτύχθηκε αυτός ο πολιτισμός. Τονίστηκε επίσης η προσφορά τους στην επιστήμη των Μαθηματικών, ενώ έγινε και μια μικρή αναφορά στο 60αδικό τους σύστημα που χρησιμοποιείται μέχρι και σήμερα στη μέτρηση του χρόνου. Τέλος, σχολιάστηκε το γεγονός ότι οι Βαβυλώνιοι θεωρούσαν πολύ σημαντικό ο ηγέτης τους να γνωρίζει πώς να επιλύει μία δευτεροβάθμια εξίσωση, ενώ επίσης σχολιάστηκαν και όλα τα οφέλη που προσφέρει η γνώση χειρισμού αυτών των εξισώσεων σύμφωνα με γραφόμενα των Βαβυλωνίων.

Πριν γίνει η ιστορική αναφορά στον Al-Khwarizmi, αναλύθηκε στην τάξη η ετυμολογία της λέξης «Γεωμετρία». Τονίστηκε ότι η Άλγεβρα με τις μεταβλητές όπως τη γνωρίζουμε σήμερα εμφανίστηκε σχετικά πρόσφατα χρονολογικά σε σχέση με τη Γεωμετρία την οποία χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι πολιτισμοί, γεγονός το οποίο έκανε ιδιαίτερη εντύπωση στους μαθητές. Κατόπιν, αναφέρθηκαν κάποια ιστορικά στοιχεία για τη ζωή του Al-Khwarizmi, για το έργο αλλά και για τη συνεισφορά του στην επιστήμη των Μαθηματικών.

Αφού ολοκληρώθηκε η ιστορική ανασκόπηση, ελέγχθηκαν οι γνώσεις των μαθητών πάνω στα ίδια κομμάτια των Μαθηματικών με την ομάδα ελέγχου. Ρωτήθηκαν δηλαδή αρχικά οι μαθητές τι ονομάζεται δευτεροβάθμια εξίσωση, ενώ στη συνέχεια τους δόθηκε μία εξίσωση της μορφής $x^2 = α$ όπου τους ζητήθηκε να τη λύσουν. Οι απαντήσεις των μαθητών και στα δύο ζητούμενα ήτανε ακριβώς ίδιες με την ομάδα ελέγχου. Απάντησαν και αυτοί δηλαδή ότι δευτεροβάθμια ονομάζεται η εξίσωση όπου «έχουμε έναν άγνωστο στο τετράγωνο και δίπλα έχουμε τον ίδιο άγνωστο χωρίς δύναμη». Η ίδια συζήτηση έγινε κι εδώ σχετικά με το γεγονός ότι αρκεί η ύπαρξη και μόνο του x^2. Όσον αφορά τη επίλυση της εξίσωσης, τους δόθηκε η εξής $x^2 = 64$. Όμοια με την ομάδα ελέγχου, οι μαθητές την έλυσαν αρχικά κάνοντας χρήση της ταυτότητας «διαφορά τετραγώνων».

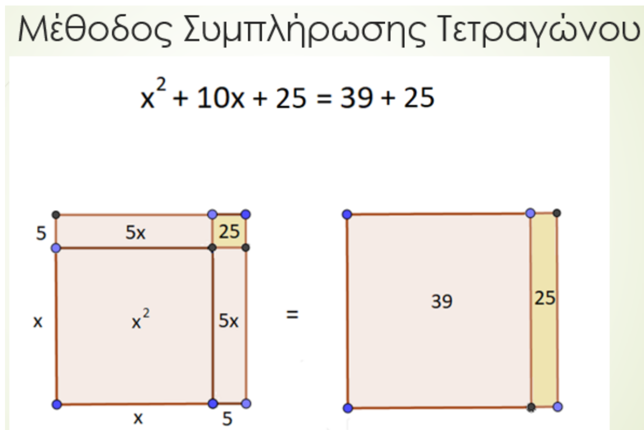
Μετά από ερώτηση αν υπάρχει άλλος τρόπος να λύσουμε αυτή την εξίσωση, δόθηκε η απάντηση ότι μπορούμε να βάλουμε ρίζα στον αριθμό 64 και να βρούμε το αποτέλεσμα 8. Η εύρεση της αρνητικής λύσης έγινε μετά από καθοδηγητικές ερωτήσεις. Τέλος, ελέγχθηκαν οι γνώσεις των μαθητών πάνω στην παραγοντοποίηση αναπτυγμάτων ταυτοτήτων, καθώς και στον υπολογισμό εμβαδού τετραγώνου και ορθογωνίου. Στα τελευταία οι μαθητές δεν παρουσίασαν δυσκολίες καθώς οι ταυτότητες ήταν κεφάλαιο που είχε διδαχθεί και εξεταστεί πρόσφατα από την καθηγήτρια του τμήματος.

Για την επίδειξη της βαβυλωνιακής μεθόδου επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων έγινε προβολή ενός σχετικού power point με τη χρήση προτζέκτορα. Χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση $x^2 + 10x = 39$. Αρχικά, πάντοτε με τη συμμετοχή και τη βοήθεια των μαθητών, αναπαραστήθηκε το x^2 ως ένα τετράγωνο με πλευρές x. Αφού το κατανόησαν αυτό οι μαθητές, ρωτήθηκαν πώς θα μπορούσε αντίστοιχα να αναπαρασταθεί το 10x. Εδώ δόθηκαν δύο απαντήσεις, ως ορθογώνιο με πλευρές 5 και 2x ή ως ορθογώνιο με πλευρές 10 και x, ενώ στη συνέχεια επισημάνθηκε ότι το άθροισμα του τετραγώνου και του ορθογωνίου είναι ακριβώς 39. Κατόπιν, σχολιάστηκε ότι εάν χωρίσουμε ένα ορθογώνιο σε δύο κομμάτια, το άθροισμα των δύο εμβαδών θα δίνει το εμβαδόν του αρχικού ορθογωνίου. Η χρήση εικόνων βοήθησε αρκετά τους μαθητές να παρατηρήσουν ότι η διάταξη αυτών των σχημάτων με συγκεκριμένο τρόπο οδηγεί στο σχηματισμό ενός τετραγώνου από το οποίο υπολείπεται ένα μικρό τετραγωνάκι. Στην εικόνα 6 φαίνεται το σχήμα στο οποίο γίνεται αναφορά.



Εικόνα 6. Γεωμετρική αναπαράσταση της επίλυσης της εξίσωσης $x^2 + 10x = 39$. Διαφάνεια από το power point.

Οι μαθητές εύκολα κατάλαβαν από το σχήμα ότι υπολείπεται ένα τετράγωνο εμβαδού 25 για να ολοκληρωθεί το αριστερό τετράγωνο. Τονίστηκε ωστόσο ότι αν προσθέσουμε ένα νέο τετράγωνο, θα επηρεαστεί φυσικά το συνολικό εμβαδόν όλου του τετραγώνου, δηλαδή από 39 θα γίνει 39 + 25, δηλαδή 64 (εικόνα 7).



Εικόνα 7. Γεωμετρική αναπαράσταση της επίλυσης της εξίσωσης $x^2 + 10x = 39$. Διαφάνεια από το power point.

Για να οδηγηθούν οι μαθητές στη λύση του προβλήματος, ζητήθηκε να υπολογίσουν πόσο θα ήτανε η πλευρά ενός τετραγώνου με εμβαδόν 64 και στη συνέχεια μέσα από τις εικόνες δείχθηκε ότι το τετράγωνο που σχηματίστηκε αριστερά, με πλευρά x + 5, θα πρέπει να έχει πλευρά συνολικού μήκους 8. Από κει και πέρα ήτανε εύκολο οι μαθητές να καταλάβουν ότι το x πρέπει να είναι 3 για να βγει 8 το μήκος της πλευράς.

Στο τέλος της προβολής ρωτήθηκαν οι μαθητές «γιατί τελικά η μέθοδος αυτή ονομάζεται συμπλήρωση τετραγώνου;» και σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα αρκετοί μαθητές απάντησαν «επειδή δημιουργούμε ένα τετράγωνο». Η διαδικασία αυτή ήτανε η γεωμετρική επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης των Βαβυλωνίων. Όπως φάνηκε και από την παραπάνω επίλυση, η διαδικασία αυτή βρίσκει μόνο τη μία από τις δύο λύσεις της εξίσωσης καθώς στη γεωμετρία δε νοείται πλευρά με αρνητικό μήκος. Αυτό ωστόσο δεν αναφέρθηκε από την αρχή στους μαθητές και αφέθηκε για προβληματισμό στη συνέχεια του μαθήματος.

Στη συνέχεια, λύθηκε με τη συμμετοχή των μαθητών ακόμα μία δευτεροβάθμια εξίσωση με γεωμετρικό τρόπο στον πίνακα χωρίς τη χρήση προτζέκτορα για να δουν οι μαθητές την κατασκευή του σχήματος ολοκληρωτικά από την αρχή. Μετά από τη διδασκαλία του γεωμετρικού τρόπου επίλυσης των Βαβυλωνίων δόθηκε μία ανάλογη εφαρμογή στους μαθητές για να δουλέψουν μόνοι τους μέσα στην τάξη. Συγκεκριμένα τους δόθηκε η εξίσωση $x^2 + 12x = 45$. Η εφαρμογή δουλεύτηκε με σχετική ευκολία από τους μαθητές.

Στο τέλος, αφού καταγράφτηκε η σωστή απάντηση στον πίνακα, γράφτηκε δίπλα βήμα-βήμα η αντίστοιχη αλγεβρική επίλυση των βημάτων που έγιναν για να καταλήξουμε στη σωστή λύση. Δηλαδή, έγινε επίλυση της εξίσωσης με τον αλγόριθμο της μεθόδου συμπλήρωσης τετραγώνου χωρίς ωστόσο να έχουν δειχθεί στην τάξη τα βήματα αυτού του αλγορίθμου. Όταν οι μαθητές έφτασαν αλγεβρικά στο σημείο $(x + 6)^2 = 81$, σχολιάστηκε ότι εδώ θα υπάρξουν δύο λύσεις, το $x + 6 = 9$ και το $x + 6 = -9$. Αφού υπολογίστηκαν αλγεβρικά οι δύο λύσεις της εξίσωσης, ρωτήθηκαν οι μαθητές γιατί στη γεωμετρική επίλυση βρήκαμε μόνο τη θετική λύση ενώ στην αντίστοιχη αλγεβρική βρέθηκε και μία αρνητική. Σε πολύ γρήγορο χρόνο δόθηκε η απάντηση από τους μαθητές ότι «σε ένα χωράφι δεν μπορούμε να έχουμε αρνητική απόσταση πλευράς». Βασισμένοι σε αυτή την παρατήρηση έγινε στην τάξη η συζήτηση ότι οι αρνητικοί αριθμοί που χρησιμοποιούνται σήμερα δεν υπήρχαν πάντοτε, αλλά ήρθαν πολύ πρόσφατα στην ιστορία των Μαθηματικών.

Ολοκληρώνοντας το μάθημα, ορίστηκαν κάποιες ασκήσεις για να δουλέψουν τα παιδιά μόνα τους στο σπίτι. Στις ασκήσεις αυτές ζητούμενο ήταν να λύσουν οι μαθητές γεωμετρικά κάποιες εξισώσεις και στη συνέχεια να «μεταφράσουν» αυτά τα βήματα με αλγεβρικούς συμβολισμούς. Κατόπιν, αφιερώθηκε λίγος χρόνος για να εκφράσουν οι μαθητές τις απορίες τους. Η πρώτη ερώτηση που έγινε από έναν μαθητή ήταν «όταν θα χρειαστεί να λύσω εξίσωση, θα πρέπει να χρησιμοποιούμε αυτό τον γεωμετρικό τρόπο ή μπορούμε να επιλέξουμε ποιον τρόπο θα χρησιμοποιήσουμε;». Η απάντηση που του δόθηκε ήταν ότι η γεωμετρική αναπαράσταση χρησιμοποιήθηκε για να αναλύσουμε τι συμβαίνει πίσω από τα βήματα της αλγεβρικής επίλυσης, ενώ πλέον για την επίλυση εξισώσεων χρησιμοποιούμε κυρίως τον αλγεβρικό τρόπο. Η δεύτερη ερώτηση που τέθηκε ήταν «δε θα μπορούσαμε στην εξίσωση $x^2 + 12x = 45$ να φέρουμε μπροστά το 45 και να τη λύσουμε ως ταυτότητα;». Εδώ εξηγήθηκε στο μαθητή πως το $x^2 + 12x – 45$ δεν είναι έτοιμη ταυτότητα και μόλις το είδε και ο ίδιος γραμμένο στον πίνακα το κατάλαβε αμέσως.

Κλείνοντας, τέθηκε στους μαθητές η ερώτηση «Ποια μέθοδο προτιμάτε; Τη γεωμετρική ή την αλγεβρική;». Η πλειοψηφία των μαθητών απάντησε πως προτιμάει τη γεωμετρική μέθοδο και όταν τους ζητήθηκε να εκφράσουν το λόγο που την προτιμούν οι απαντήσεις που εκφράστηκαν είναι ότι η γεωμετρική μέθοδος «είναι πιο απλή», «είναι πιο διαδραστική», «δεν έχει πολλές πράξεις», «είναι πιο βοηθητική» και «είναι πιο κατανοητή γιατί τη σχεδιάζουμε εμείς από την αρχή».

2η ώρα διδασκαλίας με χρήση ιστορίας των Μαθηματικών

Πριν ξεκινήσει η διδασκαλία της δεύτερης ώρας, ζητήθηκε από τους μαθητές να παραδώσουν τις ασκήσεις που είχαν δουλέψει στο σπίτι και να εκφράσουν τυχόν απορίες που τους δημιουργήθηκαν από την προσωπική μελέτη τους. Σημειώνεται ότι τους είχαν δοθεί ασκήσεις της μορφής $x^2 + αx = β$ όπου το ζητούμενο ήταν η γεωμετρική επίλυση των εξισώσεων και κατόπιν να γίνουν οι αντίστοιχες αλγεβρικές μεταφράσεις τους. Μέσα στις ασκήσεις ωστόσο είχαν δοθεί και κάποιες εξισώσεις της μορφής $x^2 + αx + β = 0$ όπου για να λυθούν αυτές γεωμετρικά έπρεπε απλώς ο όρος β να μεταφερθεί στο δεξί μέλος της εξίσωσης. Στις εξισώσεις αυτές εξέφρασαν οι μαθητές τη δυσκολία τους στο να τις χειριστούν. Όταν ωστόσο εξηγήθηκε στην τάξη ο τρόπος με τον οποίο έπρεπε να δουλευτεί αυτή η εξίσωση, οι μαθητές έδειξαν να το κατανοούν.

Συνεχίζοντας τη διδασκαλία, δόθηκαν στον πίνακα κάποιες δευτεροβάθμιες εξισώσεις και αυτή τη φορά ζητήθηκε από τους μαθητές να τις λύσουν απευθείας αλγεβρικά, χωρίς τη χρήση γεωμετρικής αναπαράστασης. Μετά από μία γρήγορη παρατήρηση των γραπτών, διαπιστώθηκε ότι κάποιοι μαθητές δεν μπορούσαν με την ίδια ευκολία να βρουν τον κατάλληλο όρο που έπρεπε να προστεθεί και στα δύο μέλη της εξίσωσης για να σχηματιστεί στο ένα μέλος μία ταυτότητα, ενώ κάποιοι ξεχνούσαν να προσθέσουν τον κατάλληλο όρο και στα δύο μέλη.

Αφού σχολιάστηκαν και συζητήθηκαν τα λάθη και οι δυσκολίες των μαθητών, παρουσιάστηκαν στους μαθητές οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις όπου όλοι οι συντελεστές έχουν κοινό διαιρέτη μεγαλύτερο του 1. Σχετικά γρήγορα οι μαθητές κατάλαβαν ότι μπορούν αυτές οι εξισώσεις να απλοποιηθούν με διαίρεση όλων των συντελεστών με τον κοινό τους διαιρέτη. Αρχικά λύθηκε μία δευτεροβάθμια εξίσωση στον πίνακα με τη συμμετοχή μαθητών και στη συνέχεια δόθηκε ακόμα μία για να τη δουλέψουν μόνοι τους οι μαθητές. Αξίζει να αναφερθεί πως κατά τη διάρκεια της εργασίας των μαθητών, ένας μαθητής εξέφρασε το σχόλιο «Με τα τετραγωνάκια το κατάλαβα πολύ καλά. Με τον αλγεβρικό τρόπο λίγο δυσκολεύομαι.»

Στο τέλος του μαθήματος, αφού δόθηκαν ασκήσεις για να δουλέψουν οι μαθητές μόνοι τους στο σπίτι, ζητήθηκε να εκφράσουν οι ίδιοι τις απόψεις τους σχετικά με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου. Στις απόψεις που ακούστηκαν υπερίσχυε η γνώμη ότι η γεωμετρική μέθοδος επίλυσης είναι καλύτερη, χωρίς ωστόσο να εκλείπουν και οι απόψεις προτίμησης της αλγεβρικής επίλυσης. Οι απόψεις υπέρ της γεωμετρικής μεθόδου ήτανε οι εξής. «Η γεωμετρική μέθοδος επίλυσης ήτανε πιο εύκολη στο να την κατανοήσουμε αλλά δεν μας δίνει και τις δυο λύσεις», «στο γεωμετρικό δε χρειάζονται πολλές πράξεις», «η γεωμετρία σου δείχνει το σχήμα μπροστά σου», ενώ ενδιαφέρον προκαλεί η άποψη ενός μαθητή όπου τόνισε ότι «παρόλο που δουλεύουμε πολύ καιρό με την άλγεβρα, νιώθω ότι δεν τα κατάφερα με την αλγεβρική επίλυση, ενώ τη γεωμετρική μέθοδο την κατάλαβα σε μισό μάθημα». Αντίθετα κάποιοι μαθητές εξέφρασαν ότι «η αλγεβρική μέθοδος επίλυσης είναι πιο εύκολη γιατί η άλγεβρα είναι ένα κομμάτι πιο γνώριμο σε εμάς».

Κλείνοντας την έρευνα και στο δεύτερο τμήμα της Γ’ Γυμνασίου, η καθηγήτρια θέλησε να μου εκφράσει τον ενθουσιασμό της σχετικά με μερικές παρατηρήσεις που έκανε η ίδια. Συγκεκριμένα αναφέρθηκε αρχικά σε έναν μαθητή ο οποίος από την αρχή της χρονιάς δεν είχε συμμετάσχει ποτέ στο μάθημα των Μαθηματικών. Ο μαθητής αυτός κατά τη διάρκεια της γεωμετρικής επίλυσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων συμμετείχε ενεργά στο μάθημα και στην επίλυση των ασκήσεων. Επιπλέον, αναφέρθηκε και σε έναν μαθητή ο οποίος παρόλο που είχε δείξει άριστη επίδοση στα Μαθηματικά από την αρχή της χρονιάς, έδειχνε ο ίδιος να δυσκολεύεται κατά την επίλυση με χρήση αποκλειστικά γεωμετρικών σχημάτων. Η καθηγήτρια σχολίασε πως ίσως ο μαθητής αυτός να έχει μάθει να δουλεύει με αλγεβρικούς αλγορίθμους και να του ήταν δύσκολο να σκεφτεί εξ αρχής μόνος του πώς θα βγει το γεωμετρικό σχήμα της εξίσωσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 - ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΦΥΛΛΩΝ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΩΝ

6.1 Φύλλο εργασίας για την ομάδα ελέγχου

Η χρήση μιας τάξης ως ομάδας ελέγχου ήταν σημαντική καθώς έπρεπε να ερευνηθεί η ανταπόκριση και η δεκτικότητα των μαθητών στο μάθημα όπως ακριβώς ορίζεται από τα σχολικά βιβλία και το Υπουργείο Παιδείας. Στη διδασκαλία δεν προστέθηκε τίποτα παραπάνω από όσα αναφέρονται στο βιβλίο της Γ' Γυμνασίου για τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου. Στόχος ήταν να σημειωθούν τα λάθη και οι παρανοήσεις αυτών των μαθητών πάνω στην επίλυση εξισώσεων με τη συγκεκριμένη μέθοδο και να γίνει σύγκριση με τα αποτελέσματα της άλλης τάξης, στην οποία θα γινόταν διδασκαλία με χρήση ιστορίας των Μαθηματικών.

Στο φύλλο εργασίας της ομάδας ελέγχου αρχικά έγινε παράθεση των βημάτων του αλγορίθμου της μεθόδου συμπλήρωσης τετραγώνου. Ακριβώς από κάτω σημειώθηκε και ένα παράδειγμα εφαρμογής αυτών των βημάτων με βοηθητικά σχόλια σε κάθε μία σειρά. Τονίζεται ότι για να μπορέσει ένας μαθητής να εφαρμόσει σωστά αυτή τη μέθοδο πρέπει να κατέχει τις εξής γνώσεις:

α) Να κατανοεί τι ονομάζεται συντελεστής του x^2.

β) Να γνωρίζει ότι κατά τη μεταφορά ενός όρου από τη μία πλευρά της εξίσωσης στην άλλη, πρέπει να υπάρχει αλλαγή προσήμου.

γ) Να είναι σε θέση να αναλύει μία παράσταση στη μορφή $α^2 + 2αβ$ και να κατανοεί ποιος είναι ο όρος β.

δ) Να μπορεί να βρει το $β^2$ και να καταλάβει ότι πρέπει να προστεθεί και στα δύο μέλη της εξίσωσης, όχι μόνο από τη μία μεριά.

ε) Να γνωρίζει τα αναπτύγματα τετραγώνων και να μπορεί να τα εφαρμόζει.

στ) Να κατανοεί ότι η εξίσωση της μορφής $x^2 = α$ έχει δύο λύσεις.

ζ) Να μπορεί να επιλύει εξισώσεις πρώτου βαθμού.

Στη συνέχεια, δίνονται εφαρμογές στους μαθητές όπου καλούνται να λύσουν οι ίδιοι τις εξισώσεις με τη χρήση αυτής της μεθόδου. Στις εφαρμογές αυτές αρχικά υπήρχε προσωπική βοήθεια σε όσους μαθητές το επιθυμούσαν μέσα στην τάξη, ενώ όσο περνούσε ο χρόνος η βοήθεια μειωνόταν για να δουλέψουν οι μαθητές μόνοι τους και να σημειωθούν τυχόν λάθη που θα προέκυπταν. Τονίζεται ότι λύθηκαν στην τάξη και δευτεροβάθμιες εξισώσεις όπου ο συντελεστής του x^2 είναι διάφορος του 1.

Το παράδειγμα 2 στο φύλλο εργασίας της ομάδας ελέγχου δουλεύτηκε τη δεύτερη μέρα διδασκαλίας. Στόχος του παραδείγματος ήταν να δείξει στους μαθητές πως υπάρχει δυνατότητα να απλοποιηθούν όλοι οι συντελεστές μίας εξίσωσης εάν είναι όλοι πολλαπλάσια του ίδιου αριθμού. Ειδικότερα, αυτό το παράδειγμα προστέθηκε αφού στο σχολικό βιβλίο υπάρχουν αντίστοιχες ασκήσεις προς επίλυση όπου οι συντελεστές απαιτούν απλοποίηση ώστε να δουλευτεί ευκολότερα η εξίσωση. Κατόπιν, στον φύλλο δίνονται πάλι εφαρμογές για τους μαθητές οι οποίες δουλεύτηκαν μέσα στην τάξη. Στο τέλος του φύλλου εργασίας δίνονται ασκήσεις για εξάσκηση στο σπίτι. Οι ασκήσεις αυτές δουλεύτηκαν από τους μαθητές και παραδόθηκαν προς εξέταση και διόρθωση.

6.2 Φύλλο εργασίας για την πειραματική ομάδα

Η διδασκαλία στο δεύτερο τμήμα της Γ' Γυμνασίου έγινε με τη χρήση γεγονότων από την ιστορία των Μαθηματικών. Στόχος ήταν να γνωρίσουν οι μαθητές τον πολιτισμό των Βαβυλωνίων, καθώς και τον Ινδό μαθηματικό Al-Khwarizmi και μέσα από τη δική τους γεωμετρική μέθοδο επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων να κατανοήσουν οι μαθητές τη σημασία της ονομασίας «συμπλήρωση τετραγώνου» και να τους βοηθήσει η γεωμετρική αναπαράσταση να μειώσουν τα λάθη που θα έκαναν αν έλυναν οι ίδιοι τις εξισώσεις ακολουθώντας απλώς κάποια στεγνά βήματα.

Στο φύλλο εργασίας αυτού του τμήματος έγινε αρχικά παράθεση κάποιων ιστορικών στοιχείων του Βαβυλωνιακού πολιτισμού, καθώς και κάποια σημεία από τη ζωή του Al-Khwarizmi. Ο λόγος που χρησιμοποιήθηκε ο πολιτισμός των Βαβυλωνίων ήταν γιατί αποτελούν έναν από τους αρχαιότερους πολιτισμούς που ασχολήθηκαν με την ανάπτυξη των Μαθηματικών, καθώς επίσης και με την καταγραφή τους σε πήλινες πλάκες. Στόχος της χρήσης αυτής ήταν να τονιστεί στους μαθητές πως τα Μαθηματικά είναι μια επιστήμη πολλών χιλιάδων χρόνων και η αρχική ανάπτυξή τους πήγαζε κυρίως από προβληματισμούς της καθημερινότητας. Να κατανοήσουν δηλαδή οι μαθητές πως όσα βλέπουμε και μαθαίνουμε σήμερα στα Μαθηματικά, δεν είναι απλώς στεγνές γνώσεις που κάποιος τις κατέγραψε, αλλά αντίθετα προέρχονται από ανθρώπους που θέλησαν να διευκολύνουν ή να επιλύσουν προβλήματα της εποχής τους. Ιδιαίτερη εντύπωση έκανε στους μαθητές το γεγονός ότι η γνώση επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων ήτανε απαραίτητη και πολύτιμη για τους ηγέτες των Βαβυλωνίων.

Στη συνέχεια του φύλλου αναφέρεται ο ινδός μαθηματικός Al-Khwarizmi όπου ο δικός του τρόπος επίλυσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων μοιάζει σε πολύ μεγάλο βαθμό με αυτό των Βαβυλωνίων. Ωστόσο η κύρια διαφορά τους ήταν ότι η λύση μιας εξίσωσης για τον Al-Khwarizmi δεν αντιστοιχιζόταν απλά στην πλευρά ενός τετραγώνου, αλλά στην εύρεση ενός αριθμού που ικανοποιεί συγκεκριμένες συνθήκες. Ο σκοπός της αναφοράς του κατά τη διδασκαλία του μαθήματος ήταν για να δουν οι μαθητές πως από το 1.700π.Χ, όπου κατατάσσονται τα ευρήματα των βαβυλωνιακών Μαθηματικών, μέχρι το 800μ.Χ όπου έχουμε το μεγάλο έργο του Al-Khwarizmi, η επίλυση των εξισώσεων δεν άλλαξε μορφή. Έχουμε δηλαδή μία περίοδο 2.500 χρόνων όπου η επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων γίνεται γεωμετρικά, με κάποιες αλλαγές από τον Al-Khwarizmi όπου ο ίδιος εστίασε περισσότερο στην αλγεβρική επίλυση των εξισώσεων. Αντί να επικεντρώνεται δηλαδή στην εύρεση πλευρών τετραγώνων, δίνει έμφαση στην εύρεση αριθμών που ικανοποιούν συγκεκριμένες συνθήκες. Η αναφορά αυτή έκανε ιδιαίτερη εντύπωση στους μαθητές καθώς, σύμφωνα με τα λεγόμενά τους, ήτανε κάτι το οποίο δεν είχαν αναλογιστεί ποτέ τους.

Αμέσως μετά δίνεται η γεωμετρική αναπαράσταση επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης από τους Βαβυλώνιους και τον Al-Khwarizmi. Δίπλα στην εικονική αναπαράσταση της επίλυσης βρίσκονται τα βήματα που επεξηγούν τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου με γεωμετρική επίλυση. Στο σημείο αυτό αξίζει να επισημανθεί ότι κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας της γεωμετρικής επίλυσης, χρησιμοποιήθηκε power point το οποίο έδειχνε βήμα-βήμα την κατασκευή του τετραγώνου, καθώς και τη διαδικασία εύρεσης του αγνώστου. Κατόπιν, δίνεται μία εφαρμογή στο φύλλο εργασίας στην οποία ζητείται από τους μαθητές να επιλύσουν και οι ίδιοι γεωμετρικά μία δευτεροβάθμια εξίσωση, χρησιμοποιώντας σχήματα δηλαδή.

Για να μπορέσει ένας μαθητής να λύσει σωστά την εφαρμογή 1 του φυλλαδίου θα πρέπει να γνωρίζει τα εξής:

α) Να γνωρίζει τον τρόπο υπολογισμού εμβαδών τετραγώνων και ορθογωνίων.

β) Να κατανοεί ότι το x^2 παριστάνει εμβαδόν τετραγώνου με πλευρά x, ενώ αντίστοιχα η μορφή αx παριστάνει ορθογώνιο με πλευρές α και x αντίστοιχα.

γ) Να κατανοεί ότι εάν προστεθεί ένα ακόμη τετράγωνο στο αρχικό σχήμα, το συνολικό εμβαδόν του σχήματος θα αυξηθεί.

δ) Να μπορεί να υπολογίσει την πλευρά ενός τετραγώνου με δοσμένο το εμβαδόν του.

ε) Να γνωρίζει να επιλύει πρωτοβάθμιες εξισώσεις.

Ωστόσο, είναι σημαντικό να τονιστεί και το αλγεβρικό κομμάτι της επίλυσης, αφού στο αλγεβρικό βλέπουμε ότι τελικά υπάρχουν δύο λύσεις και όχι μία. Επομένως, στη συνέχεια του φύλλου δίνεται η αλγεβρική επεξήγηση των γεωμετρικών βημάτων που προηγήθηκαν. Δίνεται δηλαδή ένας πίνακας όπου «μεταφράζει» τον αλγόριθμο της γεωμετρικής επίλυσης σε αλγεβρική εξίσωση η οποία λύνεται σταδιακά σε κάθε βήμα. Όμως ακριβώς επειδή στο αλγεβρικό μέρος έχουμε δύο λύσεις πλέον, ενώ στο γεωμετρικό είχε βρεθεί μόνο η μία, ακριβώς από κάτω υπάρχει ανάλογη παρατήρηση στην οποία αναφέρεται πως για τους Βαβυλώνιους και τον Al-Khwarizmi δεν είχαν νόημα οι αρνητικοί αριθμοί. Ειδικότερα για τους Βαβυλώνιους που τους απασχολούσε η μέτρηση της Γης, δεν είχε νόημα μία πλευρά με αρνητικό μήκος.

Στη συνέχεια του φύλλου εργασίας ζητείται από τους μαθητές να ξαναλύσουν τη δευτεροβάθμια εξίσωση που είχαν λύσει γεωμετρικά στην εφαρμογή 1, αυτή τη φορά όμως πρέπει να «μεταφράσουν» τα βήματα που έκαναν χρησιμοποιώντας αλγεβρικούς συμβολισμούς.

Για την ορθή επίλυση της εφαρμογής 2 του φυλλαδίου, ο μαθητής πρέπει να γνωρίζει τα εξής:

α) Αρχικά να έχει κατανοήσει τη γεωμετρική επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης με τη μέθοδο των Βαβυλωνίων.

β) Να γνωρίζει τα αναπτύγματα τετραγώνων.

γ) Να γνωρίζει ότι οι εξισώσεις της μορφής $x^2 = α$, όπου α είναι θετικός αριθμός, έχουν δύο λύσεις, μία θετική και μία αρνητική.

δ) Να γνωρίζει να επιλύει πρωτοβάθμιες εξισώσεις.

Στο τέλος του φύλλου εργασίας δίνονται ασκήσεις για εξάσκηση στο σπίτι. Οι ασκήσεις αυτές δουλεύτηκαν από τους μαθητές στο σπίτι και παραδόθηκαν προς εξέταση και διόρθωση.

6.3 Τελικό ερωτηματολόγιο για την ομάδα ελέγχου

Στόχος του τελικού ερωτηματολογίου ήταν να φανεί το κατά πόσο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη σημασία της έκφρασης «συμπλήρωση τετραγώνου», καθώς επίσης και να παρατηρηθούν τα λάθη και οι παρανοήσεις τους με σκοπό να συγκριθούν με τα αποτελέσματα του τμήματος της ιστορίας των Μαθηματικών.

1) «Γιατί η μέθοδος επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων που μάθαμε ονομάζεται συμπλήρωση τετραγώνου;».

Η 1η ερώτηση του ερωτηματολογίου είναι ξεκάθαρη ως προς το πρώτο ερευνητικό ερώτημα που έχουμε θέσει. Η απάντηση που αναμένεται από τους μαθητές να δώσουν είναι ότι ο όρος «τετράγωνο» αναφέρεται στη δεύτερη δύναμη που εμφανίζεται και μάλιστα η «συμπλήρωση τετραγώνου» έχει να κάνει με την κατασκευή του αναπτύγματος τετραγώνου. Πιο συγκεκριμένα, η συμπλήρωση του αναπτύγματος τετραγώνου γίνεται στο τρίτο βήμα του αλγορίθμου, όπου εκεί προστίθεται και στα δύο μέλη της εξίσωσης ο όρος $β^2$.

2) «Γιατί στο 3ο βήμα της μεθόδου χρειάζεται να προσθέσουμε και στα δύο μέλη της εξίσωσης το τετράγωνο του σταθερού όρου, δηλαδή το $β^2$;»

Όπως αναφέρθηκε και στο πρώτο ερώτημα, ο σκοπός της πρόσθεσης του όρου $β^2$ και στα δύο μέλη της εξίσωσης είναι για να συμπληρωθεί το ανάπτυγμα τετραγώνου. Επομένως αυτή η ερώτηση συνδέεται με την προηγούμενη, αφού οι απαντήσεις που πρέπει να δοθούν είναι παρόμοιες.

3) Μπορούμε να έχουμε και θετικές και αρνητικές λύσεις κατά την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου; Να δικαιολογήσετε.

Στην ερώτηση αυτή οι μαθητές πρέπει να απαντήσουν ότι όντως μπορούμε να έχουμε δύο λύσεις κατά την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων οι οποίες μπορούν να είναι είτε θετικές, είτε αρνητικές. Δεν υπάρχει δηλαδή κάποιος περιορισμός στο πρόσημο της λύσης. Η ερώτηση αυτή σχετίζεται με την αντίστοιχη ερώτηση 3 της πειραματικής ομάδας. Το τμήμα της ιστορίας των Μαθηματικών γνωρίζει ότι η γεωμετρική μέθοδος επίλυσης δίνει μόνο θετικές λύσεις και όχι αρνητικές.

4) Να επιλύσετε την εξίσωση $x^2 + 8x - 20 = 0$ *με τη χρήση της συμπλήρωσης τετραγώνου*

Στο σημείο αυτό καλούνται οι μαθητές να εφαρμόσουν τα βήματα του αλγορίθμου της μεθόδου συμπλήρωσης τετραγώνου που διδάχτηκαν. Σε αυτή την ερώτηση στόχος είναι να καταγραφούν τα λάθη και οι δυσκολίες των μαθητών κατά την επίλυση έτσι ώστε να δοθεί απάντηση στο 2^o ερευνητικό ερώτημα που τέθηκε.

5) Θα μπορούσαμε να λύσουμε το $x^2 + 6x = -8$ *με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου; Να δικαιολογήσετε.*

Η σωστή απάντηση εδώ είναι θετική. Όντως μπορεί η εξίσωση αυτή να λυθεί με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου, ακολουθώντας τα βήματα του αλγορίθμου. Οι δύο λόγοι ύπαρξης αυτής της ερώτησης είναι οι εξής. Αρχικά παρατηρήθηκε στην τάξη το γεγονός ότι όταν οι μαθητές δεν έβλεπαν την εξίσωση στη μορφή $αx^2 + βx + γ = 0$, αλλά αντίθετα δινόταν κάποιος όρος από τη δεξιά μεριά του ίσον, τότε θεωρούσαν ότι δεν μπορούν να τη λύσουν. Κατά δεύτερον, η ερώτηση αυτή σχετίζεται με την ερώτηση 6 του ερωτηματολογίου της ιστορίας των Μαθηματικών, όπου στο τμήμα εκείνο οι μαθητές γνωρίζουν πως μία τέτοια μορφή εξίσωσης, όπου ο σταθερός όρος δεξιά από το ίσον είναι αρνητικός, δεν μπορεί να λυθεί με τη βαβυλωνιακή μέθοδο επίλυσης.

6) Να επιλύσετε την εξίσωση $2x^2 + 10x = 48$ *με τη χρήση της συμπλήρωσης τετραγώνου*

Στην τελευταία ερώτηση του ερωτηματολογίου οι μαθητές καλούνται να λύσουν ξανά μία δευτεροβάθμια εξίσωση με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου, ωστόσο εδώ ο συντελεστής του x^2 είναι διάφορος του 1. Οι μαθητές μπορούν είτε να απλοποιήσουν όλους τους όρους της εξίσωσης με το 2 ώστε να έχουν πιο απλούς συντελεστές, ή μπορούν να δουλέψουν την εξίσωση όπως είναι, θεωρώντας ως συντελεστή α τον αριθμό 2. Σημειώνεται ότι κατά τη διάρκεια των μαθημάτων είχε παρατηρηθεί ότι οι μαθητές στις περιπτώσεις όπου ο συντελεστής α ήτανε διάφορος του 1, δεν πολλαπλασίαζαν όλους τους όρους με 4α, αλλά πολλαπλασίαζαν μόνο με 4.

6.4 Τελικό ερωτηματολόγιο για την πειραματική ομάδα

1) Γιατί η μέθοδος επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων των Βαβυλωνίων και του Al-Khwarizmi ονομάζεται «συμπλήρωση τετραγώνου»;

Στην 1η ερώτηση οι μαθητές καλούνται να αιτιολογήσουν γιατί ονομάστηκε κατ' αυτό τον τρόπο η συγκεκριμένη μέθοδος. Η απάντηση που αναμένεται είναι ότι κατά τη διάρκεια της γεωμετρικής επίλυσης σχηματίζεται ένα τετράγωνο σχήμα από το οποίο λείπει ένα μικρότερο τετραγωνάκι το οποίο συμπληρώνουμε εμείς με σκοπό τη «συμπλήρωση του τετραγώνου».

2) Είναι απαραίτητο στη γεωμετρική μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου να χωρίσουμε ακριβώς στη μέση τον συντελεστή του x; Π.χ. θα μπορούσαμε στην εξίσωση $x^2 + 10x = 39$ *να χωρίσουμε το 10x σε 7x και 3x αντί για 5x και 5x; Γιατί;*

Οι απαντήσεις που θα δοθούν σε αυτή την ερώτηση θα δείξουν εάν οι μαθητές όντως έχουν καταλάβει το λόγο για τον οποίο γίνονται τα βήματα της γεωμετρικής επίλυσης κατ' αυτό τον τρόπο. Η σωστή απάντηση σε αυτή την ερώτηση είναι ότι όντως είναι απαραίτητο να χωριστεί ακριβώς στη μέση ο συντελεστής του x αφού σκοπός είναι να δημιουργηθεί ένα τετράγωνο, δηλαδή όλες οι πλευρές του να είναι ίσες.

3) Μπορούμε να έχουμε αρνητικές λύσεις με τη γεωμετρική μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου; Ισχύει το ίδιο και με την αλγεβρική μέθοδο; Να αιτιολογήσετε τη σκέψη σας.

Κατά τη διάρκεια των μαθημάτων είχε αναφερθεί ο λόγος για τον οποίο δεν υπάρχουν αρνητικές λύσεις στη μέθοδο των Βαβυλώνιων και του Al-Khwarizmi, αφού δεν είχε νόημα γι' αυτούς μία πλευρά με αρνητικό μήκος. Ζητείται λοιπόν σε αυτή την ερώτηση να αιτιολογήσουν οι μαθητές γιατί δεν έχουμε αρνητικές λύσεις στη γεωμετρική μέθοδο, ενώ αντίθετα στην αλγεβρική έχουμε και θετικές και αρνητικές λύσεις.

4) Προσπαθήστε να επιλύσετε μόνο γεωμετρικά την εξίσωση $x^2 + 8x = 20$

Σε αυτό το σημείο του ερωτηματολογίου καλούνται οι μαθητές να λύσουν μία δευτεροβάθμια εξίσωση κάνοντας χρήση της γεωμετρικής μεθόδου επίλυσης της συμπλήρωσης τετραγώνου. Αρχικά οι απαντήσεις των μαθητών εδώ θα δείξουν αν όντως έχουν κατανοήσει τον τρόπο λειτουργίας της γεωμετρικής αναπαράστασης της μεθόδου και κατά δεύτερον η επίλυση αυτή θα τους βοηθήσει στη συνέχεια στην ερώτηση 5 στην οποία θα χρειαστεί οι μαθητές να λύσουν την ίδια εξίσωση αλλά με αλγεβρικούς συμβολισμούς.

5) Καταγράψτε την αλγεβρική επίλυση της εξίσωσης $x^2 + 8x = 20$ βασιζόμενοι στη γεωμετρική σας επίλυση

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι μαθητές πρέπει στην ερώτηση αυτή να «μεταφράσουν» τα βήματα του γεωμετρικού αλγόριθμου στον αντίστοιχο αλγεβρικό. Σημειώνεται πως εδώ οι μαθητές θα πρέπει να βρουν δύο λύσεις, ενώ στην προηγούμενη ερώτηση θα έχουν βρει μόνο μία λύση, τη θετική. Για τη σωστή λύση αυτής της εξίσωσης χρειάζεται οι μαθητές να γνωρίζουν καλά τα αναπτύγματα τετραγώνου, καθώς επίσης και το γεγονός ότι οι εξισώσεις της μορφής $x^2 = α$, όπου α θετικός, έχουν δύο λύσεις, μία θετική και μία αρνητική. Ωστόσο αν οι μαθητές έχουν καταλάβει επαρκώς τον τρόπο λειτουργίας του γεωμετρικού αλγορίθμου, η αλγεβρική επίλυση θα είναι μια απλή «μετάφραση».

6) Θα μπορούσαμε να λύσουμε το $x^2 + 6x = -8$ με αυτή τη γεωμετρική μέθοδο; Να δικαιολογήσετε.

Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα δεν σχολιάστηκε κατά τη διάρκεια των μαθημάτων. Η ερώτηση αυτή προστέθηκε στο τελικό ερωτηματολόγιο για να φανεί κατά πόσο οι μαθητές αντιλαμβάνονται το πώς λειτουργεί η γεωμετρική μέθοδος. Η απάντηση που αναμένεται να δοθεί εδώ είναι ότι δεν μπορούμε να λύσουμε τη συγκεκριμένη εξίσωση με αυτή τη μέθοδο καθώς ο σταθερός όρος δεξιά από το ίσον συμβολίζει εμβαδόν. Αφού ο σταθερός όρος είναι αρνητικός αριθμός και δεν γίνεται να έχουμε εμβαδόν με αρνητική μέτρηση, επομένως δεν μπορεί να λυθεί γεωμετρικά αυτή η εξίσωση.

7) Να λυθεί μόνο αλγεβρικά η εξίσωση $2x^2 + 10x = 48$.

Ως τελευταία ερώτηση αφήνεται ακόμα μία δευτεροβάθμια εξίσωση αλλά αυτή τη φορά ζητείται να λυθεί απευθείας αλγεβρικά, χωρίς γεωμετρική αναπαράσταση. Ο λόγος ύπαρξης της συγκεκριμένης ερώτησης είναι για να φανεί από τις απαντήσεις των μαθητών αν είναι οι ίδιοι σε θέση να λύσουν πλέον μία δευτεροβάθμια εξίσωση χωρίς να έχουν μπροστά τους κάποια αναπαράσταση. Μάλιστα, οι συντελεστές που δίνονται είναι όλοι πολλαπλάσια του 2, οπότε έχουν οι μαθητές τη δυνατότητα να απλοποιήσουν τους αριθμούς και να έρθει η εξίσωση στη μορφή που έχουν ήδη δουλέψει, δηλαδή ο συντελεστής του x^2 να είναι 1.

Σημειώνεται ότι η ίδια ερώτηση δόθηκε και στους μαθητές της ομάδας ελέγχου όπου εκείνοι είχαν τη δυνατότητα είτε να δουλέψουν την εξίσωση όπως είναι, είτε να απλοποιήσουν όλους τους συντελεστές με το 2. Επομένως η ίδια έπρεπε να δοθεί και στους μαθητές της ιστορίας των Μαθηματικών, γι' αυτό το λόγο οι συντελεστές είναι αριθμοί εύκολοι προς το χειρισμό τους, αφού οι δεύτεροι έχουν διδαχθεί να δουλεύουν εξισώσεις με τον συντελεστή του x^2 να είναι 1 και όλοι οι συντελεστές να είναι ακέραιοι αριθμοί.

Ολοκληρώνοντας και τα δύο ερωτηματολόγια δόθηκε η δυνατότητα στους μαθητές να καταγράψουν προαιρετικά κάποια σχόλια που θα ήθελαν να μοιραστούν. Οι σκέψεις που κατέγραψαν κάποιοι μαθητές είναι αρκετά ενδιαφέρουσες και θα αναφερθούν στη συνέχεια της εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΦΥΛΛΩΝ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται μία προσπάθεια καταγραφής των αποτελεσμάτων της έρευνας χωρισμένων σε δύο ενότητες. Στην πρώτη παρουσιάζονται επιγραμματικά τα αποτελέσματα από τις απαντήσεις των μαθητών στις ασκήσεις που τους ανατέθηκαν από τα φύλλα εργασίας. Στη δεύτερη ενότητα γίνεται αναλυτική καταγραφή των απαντήσεων που έδωσαν οι μαθητές και των δύο ομάδων στα τελικά ερωτηματολόγια.

Οι ασκήσεις που δούλεψαν οι μαθητές στο σπίτι μετά από κάθε διδασκαλία συλλέχτηκαν με σκοπό να παρακολουθηθεί η πορεία του μαθητή μέχρι το τελικό ερωτηματολόγιο. Συνολικά ανατέθηκαν δύο φορές ασκήσεις για εργασία στο σπίτι και στη συνέχεια δόθηκε το τελικό ερωτηματολόγιο. Σημειώνεται ότι η διεύθυνση του σχολείου έδωσε μόνο δύο διδακτικές ώρες για τη διεξαγωγή της έρευνας, επομένως τα τελικά ερωτηματολόγια δόθηκαν στους μαθητές από την καθηγήτρια του τμήματος σε ώρα διδασκαλίας χωρίς την παρουσία της ερευνήτριας.

7.1 Πειραματική ομάδα

Αρχικά, γίνεται μία επιγραμματική αναφορά στα λάθη που καταγράφηκαν από τους μαθητές κατά την επίλυση των ασκήσεων στο σπίτι. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, στην ανάλυση της διδασκαλίας, ως ασκήσεις ανατέθηκαν στους μαθητές κάποιες δευτεροβάθμιες εξισώσεις και σκοπός της άσκησης ήταν να λύσουν αρχικά οι μαθητές την εξίσωση γεωμετρικά, δηλαδή με τον τρόπο επίλυσης των Βαβυλωνίων, και στη συνέχεια την ίδια εξίσωση να την ξαναλύσουν «μεταφράζοντας» αυτή τη φορά τα βήματα που έκαναν σε αντίστοιχα αλγεβρικά. Στόχος αυτής της σύνδεσης ήταν να κατανοήσουν οι μαθητές τη διαδικασία πίσω από την αλγεβρική επίλυση, να καταλάβουν δηλαδή το νόημα των αλγεβρικών βημάτων κάνοντας τη αντιστοιχία με τη γεωμετρική επίλυση.

Τα λάθη που σημειώθηκαν στις ασκήσεις των μαθητών ήταν τα εξής:

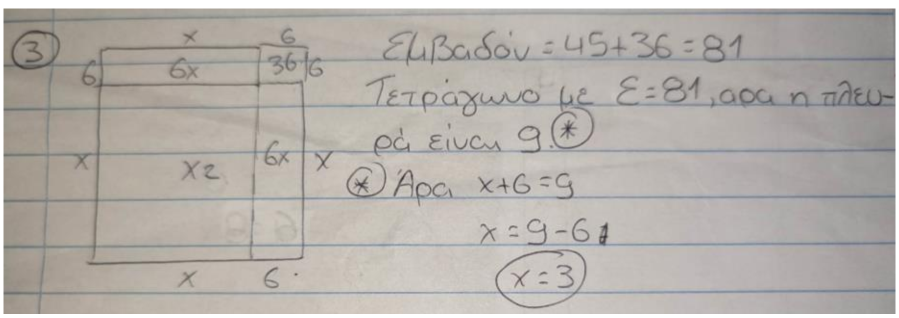
- Σχεδιασμός μόνο της γεωμετρικής μεθόδου επίλυσης χωρίς τη «μετάφραση» σε αλγεβρικούς συμβολισμούς.
- Σχεδιασμός της γεωμετρικής επίλυσης χωρίς να γράψει ο μαθητής την τελική απάντηση, δηλαδή να βρει τον άγνωστο x
- Κατά τη γεωμετρική επίλυση δεν άλλαξε το εμβαδόν του συνολικού σχήματος, κράτησε δηλαδή ο μαθητής το αρχικό εμβαδόν παρόλο που έγινε προσθήκη ενός τετραγώνου.
- Στις περιπτώσεις όπου ο σταθερός όρος της εξίσωσης δεν βρισκόταν μόνος του στο δεξί μέλος της εξίσωσης, η άσκηση δε λύθηκε.
- Λάθος υπολογισμός εμβαδού του μικρού τετραγώνου που προστίθεται στο αρχικό γεωμετρικό σχήμα.
- Κατά τη διάρκεια της αλγεβρικής επίλυσης έγινε λάθος κατασκευή αναπτύγματος τετραγώνου.
- Λάθος υπολογισμός ρίζας.

- Όταν δόθηκε εξίσωση της μορφής $αx^2 + βx + γ = 0$ με α διάφορο του 1, ο μαθητής δε διαίρεσε όλους τους όρους της εξίσωσης με το α προκειμένου το x^2 να έχει συντελεστή το 1 και να μπορέσει να σχεδιάσει τη γεωμετρική επίλυση.

Στη συνέχεια σημειώνονται οι αναλογίες για κάθε κατηγορία λάθους στις ασκήσεις των φύλλων εργασίας, ωστόσο γίνεται επικέντρωση στα λάθη που έγιναν στις αλγεβρικές επιλύσεις αφού αυτά θα συγκριθούν στη συνέχεια με τα λάθη της ομάδας ελέγχου.

Λάθη και δυσκολίες μαθητών στις ασκήσεις της πρώτης ημέρας:

Σε αρκετές περιπτώσεις (6/18) οι μαθητές κατά τη διάρκεια «μετάφρασης» των γεωμετρικών βημάτων σε αντίστοιχα αλγεβρικά απέφευγαν ή ξεχνούσαν να καταγράψουν το ανάπτυγμα τετραγώνου που έπρεπε να εμφανιστεί, ενώ έγραφαν απευθείας την τελική εξίσωση όπως στο παρακάτω παράδειγμα (εικόνα 8). Παρατηρείται δηλαδή ότι οι μαθητές δεν κατάλαβαν ή απέφυγαν να κάνουν καταγραφή όλων των γεωμετρικών τους βημάτων με αλγεβρικούς συμβολισμούς.



Εικόνα 8. Παράλειψη καταγραφής του αναπτύγματος τετραγώνου (Πειραματική ομάδα).

Οι μαθητές που έλυσαν σωστά τις ασκήσεις και με τους δύο τρόπους είναι 5/18 ενώ οι υπόλοιποι 6/18 δεν δούλεψαν καθόλου τις εξισώσεις. Σημειώνεται ότι την πρώτη μέρα δεν παρατηρήθηκαν λάθη στον αλγεβρικό αλγόριθμο επίλυσης από τις κατηγορίες που αναφέρει ο Makgakga (2016).

Λάθη και δυσκολίες μαθητών στις ασκήσεις της δεύτερης ημέρας:

Στις ασκήσεις των μαθητών μετά από τη δεύτερη διδασκαλία παρατηρήθηκαν περισσότερες κατηγορίες λαθών αφού πλέον οι μαθητές είχαν δουλέψει περισσότερο τις ασκήσεις τους. Τονίζεται ότι τη δεύτερη μέρα μειώθηκε ο αριθμός των ατόμων που δε δούλεψε τις ασκήσεις σε 3/18 ενώ αυξήθηκε ο αριθμός των μαθητών που έλυσε σωστά τις ασκήσεις σε 7/18.

Αναφορικά με τις κατηγορίες λαθών των μαθητών, 3/18 μαθητές δυσκολεύτηκαν στο σχηματισμό του αναπτύγματος τετραγώνου παρόλο που είχαν δουλέψει σωστά τη γεωμετρική τους επίλυση. Φαίνεται δηλαδή ότι οι μαθητές κατάλαβαν σαν διαφορετικές ασκήσεις τη γεωμετρική και την αλγεβρική επίλυση της ίδιας εξίσωσης και δεν κατάφεραν να κάνουν στο μυαλό τους τη σύνδεση Γεωμετρίας και Άλγεβρας. Επιπλέον, 3/18 μαθητές όταν είδαν εξίσωση με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου διάφορο του 1 δεν τη δούλεψαν καθόλου. Σημειώνεται ότι οι συντελεστές αυτής της εξίσωσης ήταν βολικοί έτσι ώστε να μπορούν οι μαθητές άνετα να διαιρέσουν με τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου και η εξίσωση να έρθει σε πιο απλοποιημένη μορφή. Τέλος, παρατηρήθηκαν 2/18 μαθητές όπου έκαναν λάθος υπολογισμό ριζών και 2/18 που υπολόγισαν λάθος το τετράγωνο που πρέπει να προσθέσουν στο αρχικό γεωμετρικό σχήμα τους και άρα δεν βρήκαν τον σωστό όρο $β^2$ για την αλγεβρική τους επίλυση.

Σύνοψη

Κάποιοι μαθητές έδειξαν βελτίωση από τις πρώτες ασκήσεις στις δεύτερες και κάποιοι όχι. Στον πίνακα 1 σημειώνονται οι αναλογίες των μαθητών που έλυσαν σωστά όλες τις ασκήσεις και τις δύο φορές, των μαθητών που παρουσίασαν βελτίωση, αυτών που δεν έδειξαν βελτίωση και αυτών που δεν δούλεψαν καθόλου τις ασκήσεις. Πιο αναλυτικά, στην κατηγορία «έδειξαν βελτίωση» περιλαμβάνονται οι μαθητές όπου τα λάθη τους μειώθηκαν τη δεύτερη φορά συγκριτικά με την πρώτη ή τα έκαναν τη δεύτερη φορά όλα σωστά. Στην κατηγορία «δεν έδειξαν βελτίωση» περιλαμβάνονται οι μαθητές όπου συνέχισαν να κάνουν τα ίδια λάθη στις λύσεις των ασκήσεών τους ή έκαναν περισσότερα λάθη απ’ ότι στις αρχικές τους ασκήσεις. Και τέλος στην κατηγορία «δεν έλυσαν τις ασκήσεις» βρίσκονται οι μαθητές όπου και τις δύο φορές που τους ανατέθηκαν ασκήσεις δεν τις δούλεψαν καθόλου.

Πίνακας 1. Αποτελέσματα απαντήσεων των μαθητών στα φύλλα εργασίας (Πειραματική ομάδα)

Σωστές όλες οι ασκήσεις	**Έδειξαν βελτίωση**	**Δεν έδειξαν βελτίωση**	**Δεν έλυσαν τις ασκήσεις**
4/18	6/18	5/18	3/18

Ανάλυση του τελικού ερωτηματολογίου πειραματικής ομάδας

1η ερώτηση: «Γιατί η μέθοδος επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων των Βαβυλωνίων και του Al-Khwarizmi ονομάζεται «συμπλήρωση τετραγώνου»

Οι απαντήσεις που δόθηκαν στην πρώτη ερώτηση ήτανε στην πλειοψηφία τους σωστές (11/18). Οι μαθητές δηλαδή απάντησαν ότι ονομάζεται η μέθοδος κατά αυτόν τον τρόπο αφού στο τέλος της γεωμετρικής διαδικασίας, προστίθεται ένα μικρό τετραγωνάκι για να «συμπληρώσει» ένα μεγαλύτερο τετράγωνο. Ωστόσο δόθηκαν και κάποιες λανθασμένες απαντήσεις (4/18), όπως:

- «Ονομάστηκε έτσι γιατί τα χωράφια είχανε σχήμα τετραγώνου»
- «Στα παλιά χρόνια οι άνθρωποι έλυναν Μαθηματικά πάνω σε σχήματα»
- «Χρησιμοποιούσαν αυτή τη μέθοδο για να μετράνε τα χωράφια τους»
- «Γιατί στη γεωμετρία δεν υπάρχουν μεταβλητές»

Τρεις μαθητές δεν απάντησαν καθόλου σε αυτή την ερώτηση

2η ερώτηση: «Είναι απαραίτητο στη γεωμετρική μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου να χωρίσουμε ακριβώς στη μέση τον συντελεστή του x; Π.χ. θα μπορούσαμε στην εξίσωση $x^2 + 10x = 39$ να χωρίσουμε το 10x σε 7x και 3x αντί για 5x και 5x; Γιατί;»

Η δεύτερη ερώτηση του ερωτηματολογίου εμβαθύνει ακόμα περισσότερο στην κατανόηση της διαδικασίας επίλυσης των Βαβυλωνίων. Τα αποτελέσματα εδώ ήτανε και πάλι στην πλειοψηφία τους σωστά. Οι περισσότεροι μαθητές (10/18) απάντησαν πως είναι απαραίτητο να χωριστεί στη μέση ακριβώς ο συντελεστής του x έτσι ώστε να μπορέσει να σχηματιστεί ένα τετράγωνο, να έχει δηλαδή ίσες πλευρές. Ωστόσο, υπήρχαν μαθητές που απλώς απάντησαν θετικά, ότι όντως πρέπει ο συντελεστής του x να χωριστεί στη μέση, αλλά δεν έδωσαν δικαιολόγηση ή έδωσαν λανθασμένη δικαιολόγηση (4/18). Δύο μαθητές επίσης απάντησαν λανθασμένα, ότι δηλαδή δε χρειάζεται ο συντελεστής να χωριστεί στη μέση και οι απαντήσεις τους καταγράφονται στη συνέχεια:

Θετική απάντηση αλλά λανθασμένη δικαιολόγηση:

\- «Είναι πιο βολικό να χωριστεί στη μέση ο συντελεστής του x, γιατί αλλιώς θα αλλάξει το αποτέλεσμα»

Λανθασμένη απάντηση:
- «Δεν είναι απαραίτητο να χωρίσουμε ακριβώς στη μέση το συντελεστή του x. Όπως και να χωριστεί δεν αλλάζει η επίλυση.»
- «Μπορούμε να χωρίσουμε το συντελεστή όπως θέλουμε γιατί μετά μπορούμε να φτιάξουμε και το τετράγωνο όπως θέλουμε»

Τέλος, δύο μαθητές δεν απάντησαν καθόλου στην ερώτηση.

3η ερώτηση: Μπορούμε να έχουμε αρνητικές λύσεις με τη γεωμετρική μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου; Ισχύει το ίδιο και με την αλγεβρική μέθοδο; Να αιτιολογήσετε τη σκέψη σας.

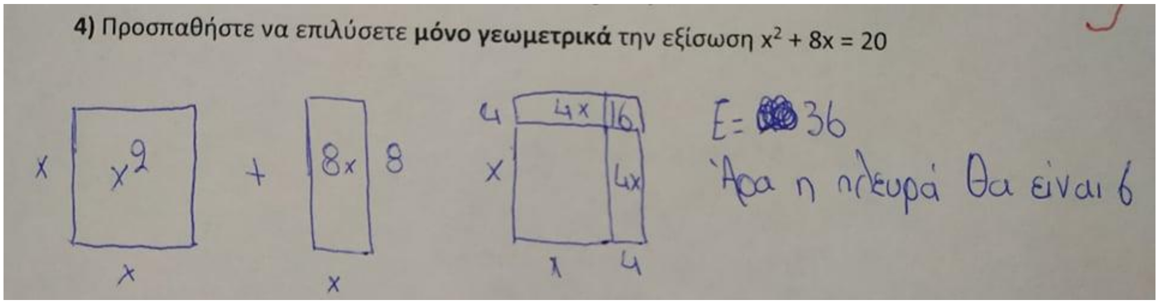
Οι περισσότερες απαντήσεις που δόθηκαν στην τρίτη ερώτηση ήτανε σωστές (11/18). Η πλειοψηφία των μαθητών έδωσε την απάντηση πως δεν μπορούμε να έχουμε αρνητικές λύσεις στη γεωμετρική μέθοδο αφού δεν υφίσταται πλευρά σχήματος με μέγεθος αρνητικό. Αντίστοιχα στην αλγεβρική μέθοδο μπορούμε να έχουμε αρνητικές απαντήσεις αφού στην άλγεβρα χρησιμοποιούμε και θετικούς και αρνητικούς αριθμούς.

Στην ερώτηση αυτή κάποιοι μαθητές (3/18) έδωσαν απάντηση μόνο για μία από τις δύο μεθόδους, ωστόσο οι απαντήσεις που έδωσαν ακόμα και για τη μία μέθοδο μόνο ήτανε σωστές, ενώ επίσης δύο μαθητές (2/18) απάντησαν σωστά και για τις δύο μεθόδους, όμως χωρίς να αιτιολογήσουν τη σκέψη τους. Οι υπόλοιποι 2/18 μαθητές δεν απάντησαν καθόλου.

4η ερώτηση: Προσπαθήστε να επιλύσετε μόνο γεωμετρικά την εξίσωση $x^2 + 8x = 20$

Στην 4η ερώτηση θα μπορούσαμε να κατατάξουμε τα αποτελέσματα σε 3 κατηγορίες. Στους μαθητές που σχεδίασαν σωστά τη γεωμετρική επίλυση και κατέγραψαν σωστά το αποτέλεσμα της εξίσωσης, σε αυτούς που σχεδίασαν μεν σωστά τη γεωμετρική επίλυση αλλά έκαναν λάθος ή δεν έγραψαν καθόλου την τελική λύση και στους μαθητές που δεν δούλεψαν καθόλου την ερώτηση.

Οι μισοί από τους μαθητές αυτής της τάξης (9/18) ανήκουν στη δεύτερη κατηγορία, σε αυτούς δηλαδή που κατασκεύασαν σωστά το γεωμετρικό αλγόριθμο, αλλά δε βρήκαν τη σωστή λύση της εξίσωσης. Μάλιστα, από αυτούς τους εννιά, οι έξι κατέγραψαν λάθος λύση. Παρακάτω δίνεται ένα παράδειγμα αυτών των απαντήσεων (εικόνα 9).



Εικόνα 9. Σωστή γεωμετρική κατασκευή της εξίσωσης με λανθασμένη τελική λύση (Πειραματική ομάδα).

Ενώ βρήκαν οι μαθητές σωστά ότι η πλευρά του μεγάλου τετραγώνου είναι 6, δεν συνειδητοποίησαν πως αυτό που ζητείται είναι η πλευρά του αρχικού τετραγώνου, Θα έπρεπε δηλαδή να αφαιρεθεί από το 6 το κομμάτι μήκους 4 και επομένως η σωστή απάντηση θα ήταν $x = 2$.

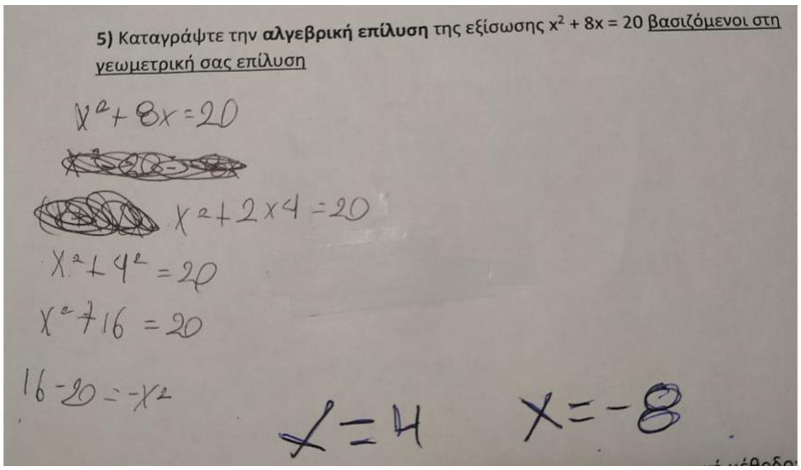
Σημειώνεται ότι 7/18 μαθητές απάντησαν σωστά στην ερώτηση, ενώ 2 δεν απάντησαν καθόλου.

5η ερώτηση: Καταγράψτε την αλγεβρική επίλυση της εξίσωσης $x^2 + 8x = 20$ βασιζόμενοι στη γεωμετρική σας επίλυση.

Στόχος της ερώτησης αυτής είναι να κατανοήσουν οι μαθητές τη σύνδεση ανάμεσα στο γεωμετρικό και στον αλγεβρικό αλγόριθμο επίλυσης με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου. Στην ερώτηση αυτή παρατηρείται ότι ο αριθμός των μαθητών που δε δούλεψαν την εξίσωση αυξήθηκε σε 5/18 άτομα σε σχέση με την προηγούμενη ερώτηση. Σημειώνεται ότι οι δύο από τους πέντε ήτανε οι ίδιοι μαθητές που δεν είχανε λύσει και την ερώτηση 3, ενώ οι υπόλοιποι τρεις είχανε σχεδιάσει σωστά τη γεωμετρική επίλυση αλλά είχανε βρει λάθος αποτέλεσμα.

Επιπλέον, 8/18 μαθητές απάντησαν σωστά στην ερώτηση. Το ενδιαφέρον εδώ έγκειται στο γεγονός ότι δύο μαθητές από αυτούς τους οχτώ είχαν βρει λάθος λύση στην ερώτηση 3, ενώ στην ερώτηση 4 βρήκανε σωστά το αποτέλεσμα. Δεν συνέδεσαν δηλαδή στο νου τους ότι δεν έχουν βρει το ίδιο αποτέλεσμα και στις δύο επιλύσεις παρόλο που πρόκειται για την ίδια ακριβώς εξίσωση.

Τέλος, οι υπόλοιποι 5/18 μαθητές δούλεψαν την αλγεβρική επίλυση κάνοντας λάθος στο σχηματισμό αναπτύγματος τετραγώνου όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα (εικόνα 10).



5) Καταγράψτε την **αλγεβρική επίλυση** της εξίσωσης $x^2 + 8x = 20$ βασιζόμενοι στη γεωμετρική σας επίλυση

$x^2+8x=20$

$x^2+2x4=20$

$x^2+4^2=20$

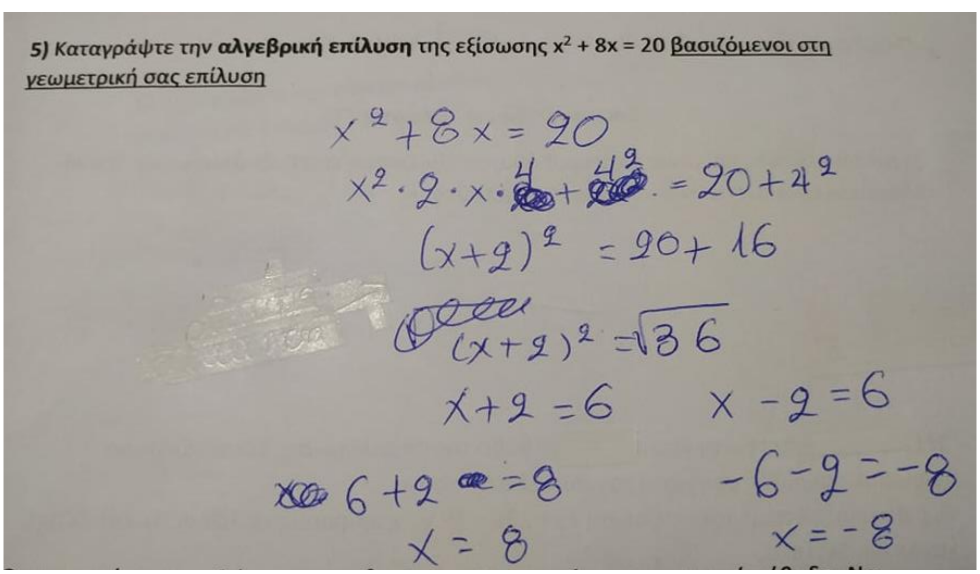
$x^2+16=20$

$16-20=-x^2$

$x=4 \quad x=-8$

Εικόνα 10. Λανθασμένος σχηματισμός αναπτύγματος τετραγώνου και λανθασμένη εύρεση τελικών λύσεων (Πειραματική ομάδα).

Σημειώνεται επίσης ότι όλοι οι μαθητές που δούλεψαν την ερώτηση έβγαλαν 2 λύσεις, μία θετική και μία αρνητική, χωρίς όμως αυτό να σημαίνει ότι τις βρήκανε όλοι σωστά. Ωστόσο, παρατηρείται ότι οι μαθητές κράτησαν στο μυαλό τους ότι στην αλγεβρική επίλυση οι λύσεις θα είναι δύο (εικόνες 10 και 11).



5) Καταγράψτε την **αλγεβρική επίλυση** της εξίσωσης $x^2 + 8x = 20$ βασιζόμενοι στη γεωμετρική σας επίλυση

$x^2+8x=20$

$x^2\cdot 2\cdot x\cdot 4+4^2=20+4^2$

$(x+2)^2=20+16$

$(x+2)^2=\sqrt{36}$

$x+2=6 \quad x-2=6$

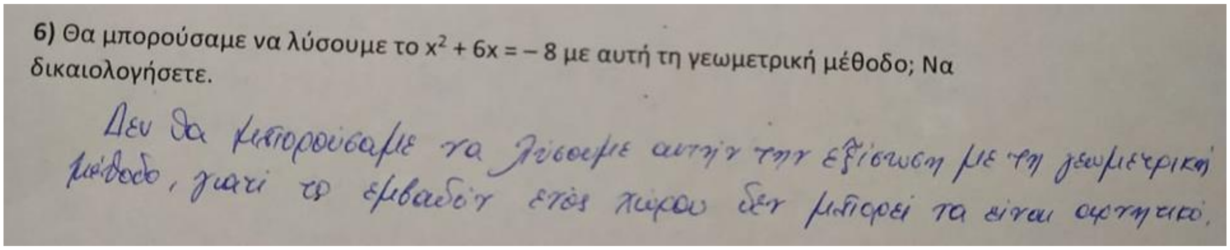
$6+2=8 \quad -6-2=-8$

$x=8 \quad x=-8$

Εικόνα 11. Λανθασμένη εύρεση τελικών λύσεων (Πειραματική ομάδα).

6η ερώτηση: Θα μπορούσαμε να λύσουμε το $x^2 + 6x = -8$ με αυτή τη γεωμετρική μέθοδο; Να δικαιολογήσετε.

Οι απαντήσεις που λαμβάνονται ως σωστές στην ερώτηση αυτή είναι παρόμοιες με την απάντηση που φαίνεται στην εικόνα 12.

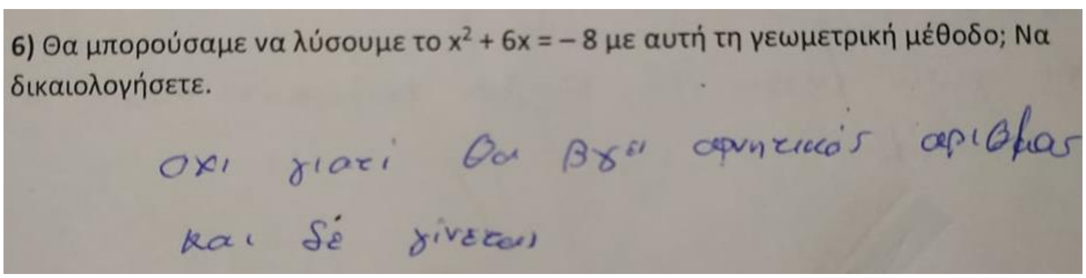


6) Θα μπορούσαμε να λύσουμε το $x^2 + 6x = -8$ με αυτή τη γεωμετρική μέθοδο; Να δικαιολογήσετε.

Δεν θα μπορούσαμε να λύσουμε αυτήν την εξίσωση με τη γεωμετρική μέθοδο, γιατί το εμβαδόν ενός χώρου δεν μπορεί να είναι αρνητικό.

Εικόνα 12. Παράδειγμα σωστής απάντησης στην 6η ερώτηση (Πειραματική ομάδα)

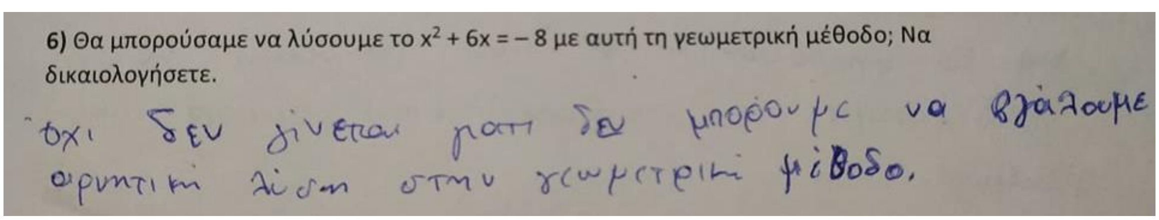
Οι μισοί μαθητές (9/18) απάντησαν σωστά. Οι 6/18 απάντησαν σωστά στη μισή ερώτηση, ότι δηλαδή δεν μπορεί να λυθεί αυτή η εξίσωση με τη γεωμετρική μέθοδο, αλλά έδωσαν λάθος δικαιολογήσεις κάποιες εκ των οποίων φαίνονται παρακάτω (εικόνες 13 και 14).



6) Θα μπορούσαμε να λύσουμε το $x^2 + 6x = -8$ με αυτή τη γεωμετρική μέθοδο; Να δικαιολογήσετε.

όχι γιατί θα βγει αρνητικός αριθμος και δέ γίνεται

Εικόνα 14. Λανθασμένη δικαιολόγηση μαθητή στην 6η ερώτηση (Πειραματική ομάδα).



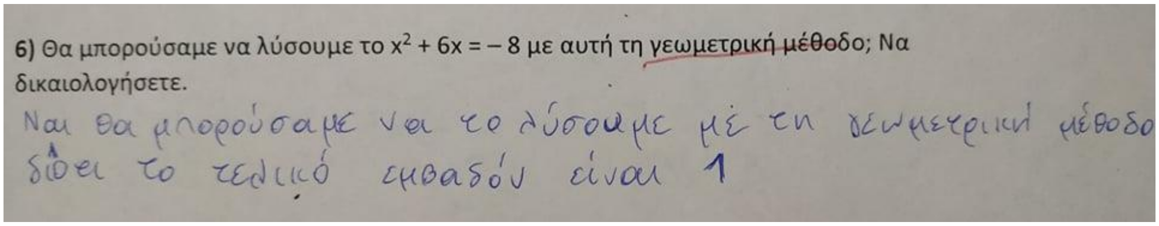
6) Θα μπορούσαμε να λύσουμε το $x^2 + 6x = -8$ με αυτή τη γεωμετρική μέθοδο; Να δικαιολογήσετε.

όχι δεν γίνεται γιατί δεν μπορούμε να βγάλουμε αρνητική λύση στην γεωμετρική μέθοδο.

Εικόνα 13. Λανθασμένη δικαιολόγηση μαθητή στην 6η ερώτηση (Πειραματική ομάδα).

Οι απαντήσεις αυτών των 6 μαθητών κυμαίνονταν στο γεγονός ότι με τη γεωμετρική μέθοδο δεν μπορούμε να βρούμε αρνητικές λύσεις, πράγμα το οποίο δε χρειαζόταν να αναφερθεί στη συγκεκριμένη ερώτηση. Εδώ έπρεπε απλώς οι μαθητές να παρατηρήσουν τον αρνητικό αριθμό δεξιά του συμβόλου «ίσον» ο οποίος παριστάνει το εμβαδόν και να δικαιολογήσουν ότι δεν υφίσταται εμβαδόν με αρνητικό μέγεθος.

Τέλος, 2/18 μαθητές δεν απάντησαν καθόλου την ερώτηση, ενώ ένας μαθητής έδωσε την εξής απάντηση (εικόνα 15).



Εικόνα 15. Απάντηση μαθητή που εφάρμοσε στο μυαλό του την αλγεβρική μέθοδο επίλυσης (Πειραματική ομάδα).

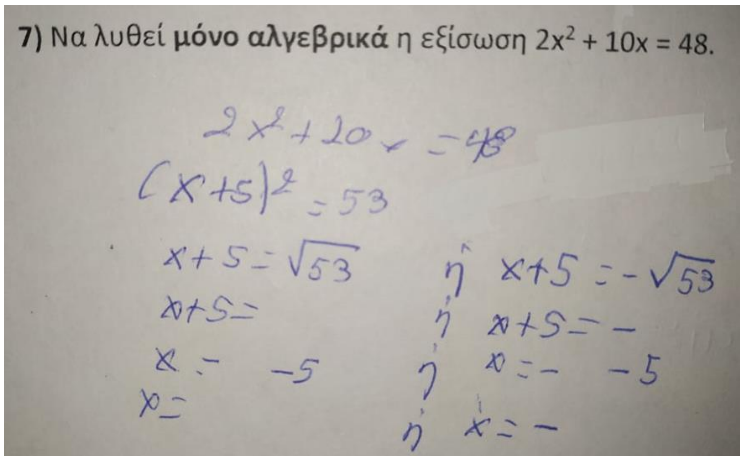
Φαίνεται από την απάντησή του ότι σκέφτηκε να προσθέσει και στα δύο μέλη τον όρο $β^2$, ο οποίος στην προκειμένη περίπτωση είναι το 9, και στο δεξί μέλος της εξίσωσης θα σχηματιστεί ο αριθμός 9 – 8 = 1. Φυσικά με την αλγεβρική μέθοδο μπορεί να λυθεί οποιαδήποτε δευτεροβάθμια εξίσωση, όμως με τη γεωμετρική υπάρχουν κάποιοι περιορισμοί, όπως το συγκεκριμένο παράδειγμα. Αξίζει να σημειωθεί, όπως θα αναφερθεί και στη συνέχεια, ότι ο συγκεκριμένος μαθητής δήλωσε στο τέλος της έρευνας ότι η γεωμετρική διαδικασία τον μπέρδεψε, ενώ αντίθετα κατάλαβε πολύ καλά την αλγεβρική διαδικασία. Τόνισε μάλιστα πως γενικότερα του αρέσει η άλγεβρα αφού εκεί απλώς ακολουθεί κάποιους κανόνες και αλγορίθμους.

$7^η$ ερώτηση: Να λυθεί μόνο αλγεβρικά η εξίσωση $2x^2 + 10x = 48$.

Στην τελευταία ερώτηση του ερωτηματολογίου στόχος ήταν να φανεί αν οι μαθητές έχουν κατανοήσει το πώς λειτουργεί η μέθοδος της συμπλήρωσης τετραγώνου και πλέον χωρίς τη βοήθεια της γεωμετρικής επίλυσης, κλήθηκαν να λύσουν μόνο αλγεβρικά μία δευτεροβάθμια εξίσωση. Παρατηρείται ότι ο συντελεστής του x^2 είναι διάφορος του 1, ωστόσο όλοι οι συντελεστές της εξίσωσης είναι πολλαπλάσια του 2. Επομένως ο μαθητής για λόγους ευκολίας μπορεί να τους απλοποιήσει και τελικά ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου να γίνει 1. Η διαδικασία αυτή είχε δειχθεί και δουλευτεί μέσα στην τάξη κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας.

Ωστόσο με μια παρατήρηση στα αποτελέσματα των ερωτηματολογίων φαίνεται ότι ο αριθμός των μαθητών που δε δούλεψαν καθόλου τη συγκεκριμένη ερώτηση αυξήθηκε στους μισούς (9/18). Από αυτούς τους εννιά, οι δύο είχαν δουλέψει σωστά την ερώτηση 5, στην οποία τους ζητήθηκε να λύσουν αλγεβρικά μία εξίσωση βασιζόμενοι στη γεωμετρική τους επίλυση, ενώ δύο ακόμη είχαν δουλέψει την ερώτηση 5 χωρίς να βρουν σωστά αποτελέσματα. Οι υπόλοιποι 5 δεν είχαν δουλέψει καθόλου ούτε την ερώτηση 5.

Συνεχίζοντας με τα αποτελέσματα, μόνο 2/18 μαθητές έλυσαν σωστά την άσκηση ενώ 5/18 μαθητές δοκίμασαν να λύσουν την εξίσωση, ωστόσο έκαναν λάθος στο σχηματισμό αναπτύγματος τετραγώνου όπως φαίνεται στην εικόνα 16.



Εικόνα 16. Λανθασμένος σχηματισμός αναπτύγματος τετραγώνου (Πειραματική ομάδα)

Ολοκληρώνοντας, σημειώνεται ότι δύο μαθητές (2/18) επέλεξαν να λύσουν την εξίσωση χρησιμοποιώντας τύπους διακρίνουσας, κάτι το οποίο δεν είχε διδαχθεί στη σχολική τάξη, αλλά ίσως να τους είχε διδαχθεί σε φροντιστηριακό μάθημα.

7.2 Ομάδα ελέγχου

Περνώντας στην ομάδα ελέγχου, γίνεται αρχικά μία επιγραμματική αναφορά στα λάθη που καταγράφηκαν από τους μαθητές κατά την επίλυση των ασκήσεων στο σπίτι. Τονίζεται ότι στους μαθητές είχαν δοθεί τα βήματα του αλγεβρικού αλγορίθμου της μεθόδου «συμπλήρωσης τετραγώνου» όπως ακριβώς αναφέρονται και στο σχολικό βιβλίο Μαθηματικών της Γ’ Γυμνασίου.

Τα λάθη που σημειώθηκαν στις ασκήσεις των μαθητών ήταν τα εξής:

- Πολλαπλασιασμός όλων των όρων με 4 και όχι με 4α
- Αδυναμία εύρεσης του όρου $β^2$
- Ο όρος $β^2$ δεν προστέθηκε και στα δύο μέλη της εξίσωσης, αλλά μόνο στο ένα.
- Λανθασμένη κατασκευή αναπτύγματος τετραγώνου

- Κατά την επίλυση της εξίσωσης $x^2 = α$ δεν σημειώθηκαν δύο λύσεις, αλλά μόνο μία
- Κατά την επίλυση της εξίσωσης $x^2 = α$ ο μαθητής σημείωσε ότι οι λύσεις είναι οι $x = α$ και $x = -α$. Δεν χρησιμοποίησε δηλαδή ρίζες στις απαντήσεις του.
- Όταν ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου ήτανε διάφορος του 1, ο μαθητής δε δούλεψε καθόλου την άσκηση.
- Ο σταθερός όρος δεν άλλαξε πρόσημο όταν «μεταφέρθηκε» στο άλλο μέλος της εξίσωσης.
- Η εξίσωση λύθηκε με τη χρήση της διακρίνουσας, κεφάλαιο το οποίο δεν είχε διδαχθεί στη σχολική τάξη.

Στη συνέχεια σημειώνονται οι αναλογίες λαθών σε κάθε κατηγορία και για τις δύο φορές που παρέδωσαν οι μαθητές ασκήσεις μετά από τις διδασκαλίες.

Λάθη και δυσκολίες μαθητών στις ασκήσεις της πρώτης ημέρας:

Σε σχέση με τους μαθητές της πειραματικής ομάδας, εδώ σημειώθηκαν πολλά περισσότερα λάθη αφού η ομάδα ελέγχου έπρεπε να δουλέψει αποκλειστικά με την αλγεβρική μέθοδο επίλυσης ακολουθώντας τα βήματα που τους είχαν δοθεί. Ο αριθμός των μαθητών που έκαναν λάθη σε κάθε κατηγορία είναι οι εξής:

- Λάθος σχηματισμός αναπτύγματος τετραγώνου: 7/26
- Λάθος εύρεση του όρου $β^2$ και πρόσθεσή του και στα δύο μέλη της εξίσωσης: 9/26
- Εύρεση μόνο μίας λύσης αντί για δύο: 4/26
- Πολλαπλασιασμός όρων αρχικής εξίσωσης με το 4 και όχι με το 4α: 6/26
- Όταν ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου ήταν διάφορος του 1 δεν δούλεψαν την εξίσωση: 3/26
- Δεν δούλεψαν καθόλου τις ασκήσεις: 7/26
- Χρήση Διακρίνουσας: 1/26

Λάθη και δυσκολίες μαθητών στις ασκήσεις της δεύτερης ημέρας:

- Λάθος σχηματισμός αναπτύγματος τετραγώνου: 8/26
- Λάθος εύρεση του όρου β2 και πρόσθεσή του και στα δύο μέλη της εξίσωσης: 3/26
- Εύρεση μόνο μίας λύσης αντί για δύο: 1/26

- Πολλαπλασιασμός όρων αρχικής εξίσωσης με το 4 και όχι με το 4α: 8/26
- Όταν ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου ήταν διάφορος του 1 δεν δούλεψαν την εξίσωση: 1/26
- Δεν δούλεψαν καθόλου τις ασκήσεις: 3/26
- Χρήση Διακρίνουσας: 2/26

Όπως φαίνεται, σε αρκετές από τις κατηγορίες μειώθηκε ο αριθμός των μαθητών που έκανε λάθη, αλλά ταυτόχρονα υπάρχουν και κάποιες κατηγορίες στις οποίες αυξήθηκαν οι λανθασμένες απαντήσεις. Αυτές είναι ο σχηματισμός ταυτότητας, ο πολλαπλασιασμός των όρων με 4 αντί για 4α και η χρήση της Διακρίνουσας η οποία, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, δεν είχε διδαχθεί στη σχολική τάξη.

Σύνοψη

Όπως και στην πειραματική ομάδα, κάποιοι μαθητές έδειξαν βελτίωση από τις πρώτες ασκήσεις στις δεύτερες και κάποιοι όχι. Στον πίνακα 2 σημειώνονται οι αναλογίες των μαθητών που έλυσαν σωστά όλες τις ασκήσεις και τις δύο φορές, των μαθητών που παρουσίασαν βελτίωση, αυτών που δεν έδειξαν βελτίωση και αυτών που δεν δούλεψαν καθόλου τις ασκήσεις. Ακόμη, προστίθεται και μία στήλη για τους μαθητές που έλυσαν στις ασκήσεις τους τις εξισώσεις με τη χρήση δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Πιο αναλυτικά, στην κατηγορία «έδειξαν βελτίωση» περιλαμβάνονται οι μαθητές όπου τα λάθη τους μειώθηκαν τη δεύτερη φορά συγκριτικά με την πρώτη ή τα έκαναν τη δεύτερη φορά όλα σωστά. Στην κατηγορία «δεν έδειξαν βελτίωση» περιλαμβάνονται οι μαθητές όπου συνέχισαν να κάνουν τα ίδια λάθη στις λύσεις των ασκήσεών τους ή έκαναν περισσότερα λάθη απ’ ότι στις αρχικές τους ασκήσεις.

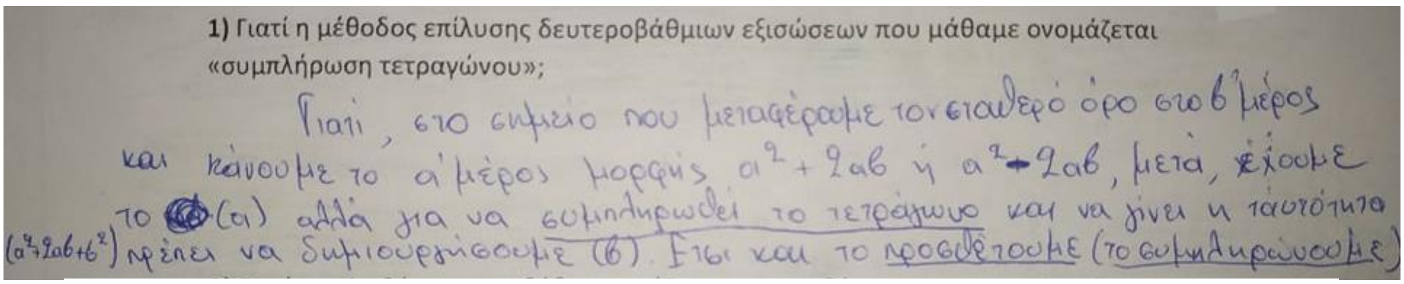
Πίνακας 2. Αποτελέσματα απαντήσεων των μαθητών στα φύλλα εργασίας (Ομάδα ελέγχου)

Σωστές όλες οι ασκήσεις	**Έδειξαν βελτίωση**	**Δεν έδειξαν βελτίωση**	**Δεν έλυσαν τις ασκήσεις**	**Χρήση διακρίνουσας**
4/26	9/26	9/26	2/26	2/26

Ανάλυση του τελικού ερωτηματολογίου της ομάδας ελέγχου

1η ερώτηση: «Γιατί η μέθοδος επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων που μάθαμε ονομάζεται συμπλήρωση τετραγώνου;»

Η πρώτη ερώτηση, ξεκάθαρη ως προς το πρώτο ερευνητικό ερώτημα της έρευνας, έχει ως στόχο να δείξει εάν οι μαθητές όντως κατανοούν τι σημαίνει αυτή η φράση. Οι μισοί μαθητές της τάξης (13/26) απάντησαν σωστά. Στην εικόνα 17 φαίνεται ένα παράδειγμα σωστής απάντησης μαθητή.


1) Γιατί η μέθοδος επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων που μάθαμε ονομάζεται «συμπλήρωση τετραγώνου»;

Γιατί, στο σημείο που μεταφέρουμε τον σταθερό όρο στο β' μέρος και κάνουμε το α' μέρος μορφής $α^2+2αβ$ ή $α^2-2αβ$, μετά, έχουμε το (α) αλλά για να συμπληρωθεί το τετράγωνο και να γίνει η ταυτότητα $(α^2+2αβ+β^2)$ πρέπει να δημιουργήσουμε (β). Έτσι και το προσθέτουμε (το συμπληρώνουμε)

Εικόνα 17. Παράδειγμα σωστής απάντησης μαθητή στην 1η ερώτηση (Ομάδα ελέγχου).

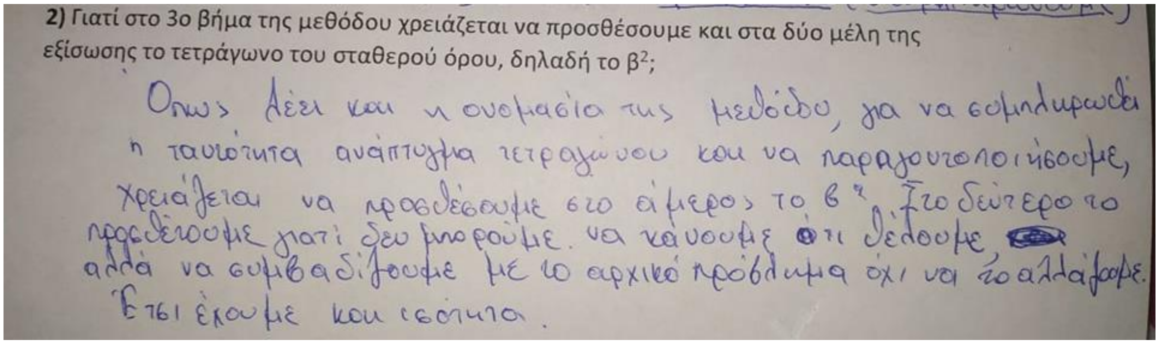
Τρεις μαθητές απάντησαν λανθασμένα δίνοντας τις παρακάτω απαντήσεις:

- «Επειδή πολλαπλασιάζουμε τον κάθε όρο με το 4α»
- «Για να συμπληρώσουμε το $β^2$»

Οι υπόλοιποι μαθητές (10/26) δεν απάντησαν καθόλου σε αυτή την ερώτηση.

2η ερώτηση: Γιατί στο $3^ο$ βήμα της μεθόδου χρειάζεται να προσθέσουμε και στα δύο μέλη της εξίσωσης το τετράγωνο του σταθερού όρου, δηλαδή το $β^2$;

Η δεύτερη ερώτηση σχετίζεται πάλι με το 1ο ερευνητικό ερώτημα της έρευνας. Στόχος είναι να δειχθεί κατά πόσο οι μαθητές αντιλαμβάνονται το λόγο ύπαρξης αυτών των αλγεβρικών βημάτων επίλυσης. Στην ερώτηση αυτή η πλειοψηφία των μαθητών απάντησε σωστά (18/26). Στην εικόνα 18 φαίνεται μία από τις σωστές απαντήσεις των μαθητών.



2) Γιατί στο 3ο βήμα της μεθόδου χρειάζεται να προσθέσουμε και στα δύο μέλη της εξίσωσης το τετράγωνο του σταθερού όρου, δηλαδή το $β^2$;

Όπως λέει και η ονομασία της μεθόδου, για να συμπληρωθεί η ταυτότητα ανάπτυγμα τετραγώνου και να παραγοντοποιήσουμε, χρειάζεται να προσθέσουμε στο α' μέρος το $β^2$. Στο δεύτερο το προσθέτουμε γιατί δεν μπορούμε να κάνουμε ό,τι θέλουμε, αλλά να συμβαδίζουμε με το αρχικό πρόβλημα όχι να το αλλάζουμε. Έτσι έχουμε και ισότητα.

Εικόνα 18. Παράδειγμα σωστής απάντησης μαθητή στη 2η ερώτηση (Ομάδα ελέγχου).

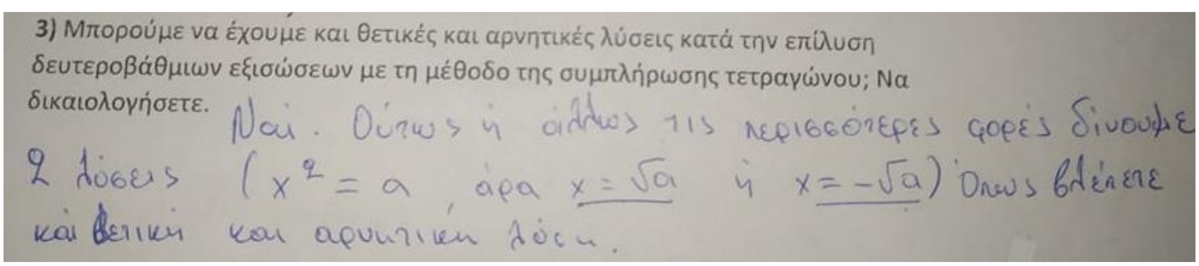
Οι λάθος απαντήσεις των μαθητών (4/26) ήταν οι εξής:

- «Για να βοηθήσει το επόμενο βήμα και να βγάλουμε το αποτέλεσμα»
- «Για να βρούμε τη λύση της ταυτότητας»

Τέσσερις μαθητές δεν απάντησαν καθόλου στην ερώτηση.

3η ερώτηση: «Μπορούμε να έχουμε και θετικές και αρνητικές λύσεις κατά την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου; Να δικαιολογήσετε.»

Στην ερώτηση αυτή οι μαθητές κατατάσσονται σε τρεις κατηγορίες. Σε αυτούς που απάντησαν σωστά στην ερώτηση και έδωσαν σωστή δικαιολόγηση, σε αυτούς που απάντησαν σωστά αλλά η δικαιολόγησή τους ήτανε λανθασμένη ή ανύπαρκτη και σε αυτούς που δεν απάντησαν καθόλου. Σε μεγάλο ποσοστό οι μαθητές απάντησαν σωστά (18/26) δίνοντας δικαιολογήσεις όπως αυτή παρακάτω (εικόνα 19).



3) Μπορούμε να έχουμε και θετικές και αρνητικές λύσεις κατά την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου; Να δικαιολογήσετε.

Ναι. Ούτως ή άλλως τις περισσότερες φορές δίνουμε 2 λύσεις ($x^2 = α$, άρα $x = \sqrt{α}$ ή $x = -\sqrt{α}$) Όπως βλέπετε και θετική και αρνητική λύση.

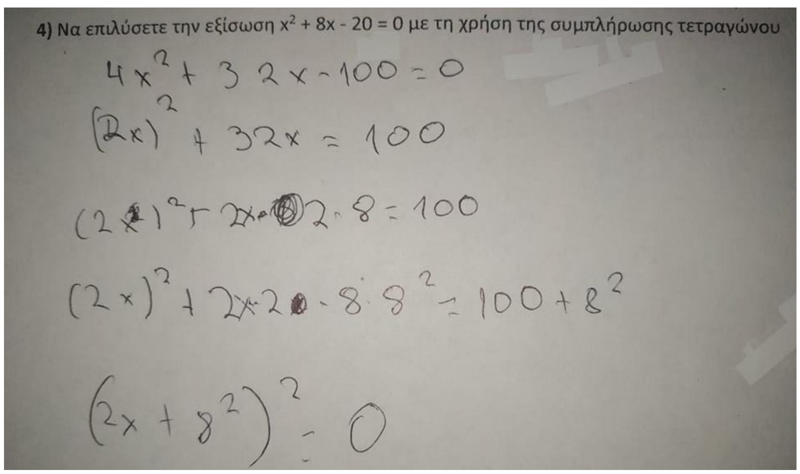
Εικόνα 19. Σωστή απάντηση μαθητή στην 3η ερώτηση (Ομάδα ελέγχου).

Έξι μαθητές (6/26) απάντησαν μεν σωστά, ότι δηλαδή όντως μπορούν να υπάρχουν και θετικές και αρνητικές λύσεις κατά την επίλυση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, αλλά οι τέσσερις δεν έδωσαν καμία δικαιολόγηση. Οι άλλοι δύο από τους έξι αυτούς μαθητές έδωσαν λανθασμένες δικαιολογήσεις. Η πρώτη μαθήτρια σημείωσε ότι «μπορούμε να έχουμε θετικές και αρνητικές λύσεις γιατί αλλάζουμε τους όρους» ενώ η δεύτερη μαθήτρια δικαιολόγησε με την πρόταση «Γιατί μπορεί να απλοποιηθεί». Δεν είναι γνωστό τι ακριβώς εννοούσε η μαθήτρια με αυτά τα λόγια αφού δεν υπήρχε δυνατότητα συζήτησης κατά πρόσωπο με τους μαθητές σχετικά με τις απαντήσεις που έδωσαν. Οι υπόλοιποι 2/18 μαθητές δεν απάντησαν καθόλου στην ερώτηση.

4η ερώτηση: Να επιλύσετε την εξίσωση $x^2 + 8x - 20 = 0$ με τη χρήση της συμπλήρωσης τετραγώνου

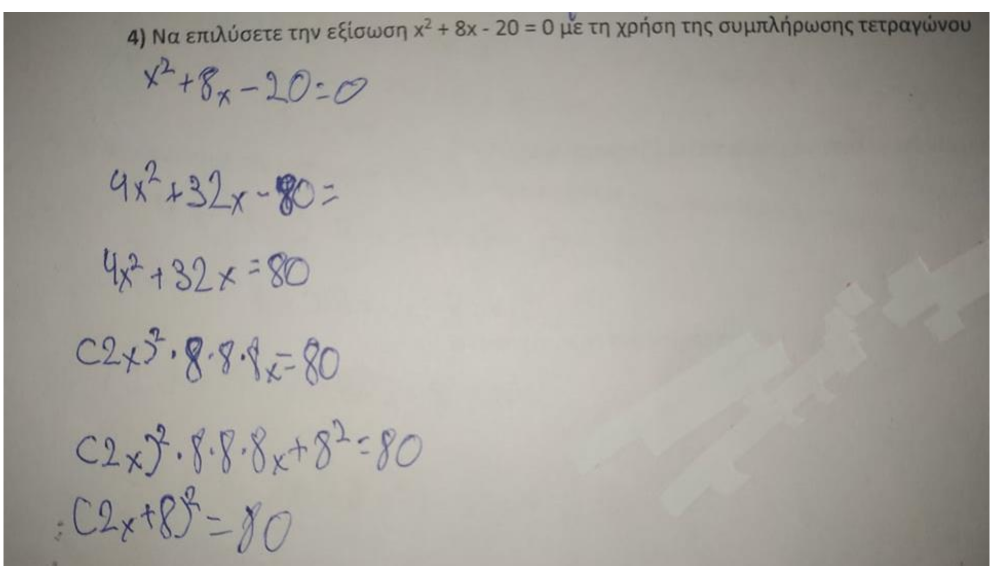
Οι περισσότερες απαντήσεις που δόθηκαν σε αυτή την ερώτηση ήτανε σωστές (17/26). Τα λάθη που σημειώνονται σε 7/26 μαθητές κατατάσσονται στις εξής κατηγορίες:

- Λανθασμένη κατασκευή αναπτύγματος τετραγώνου



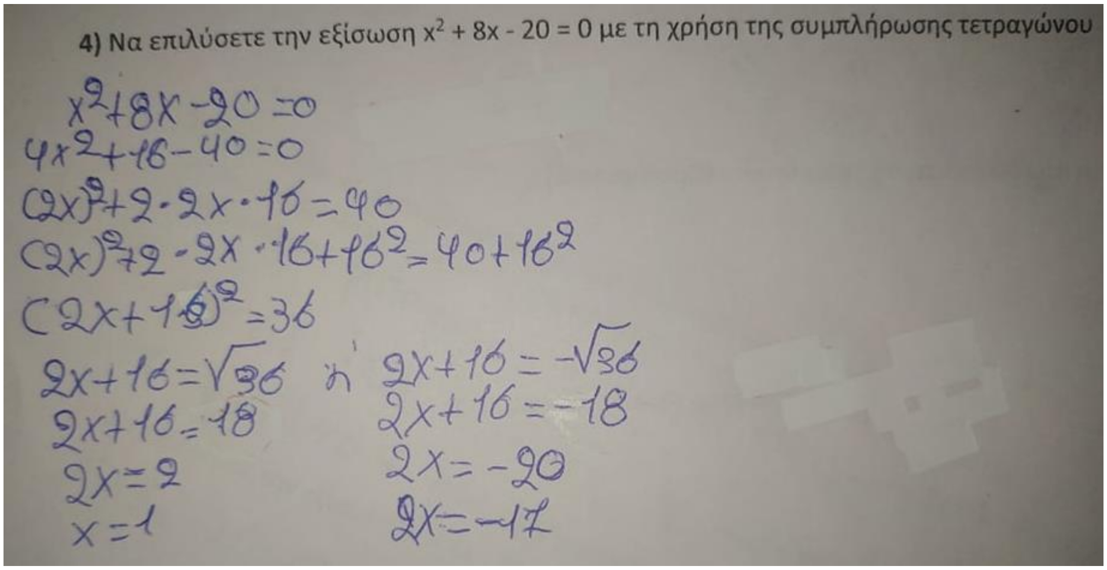
Εικόνα 20. Λανθασμένη κατασκευή αναπτύγματος τετραγώνου (Ομάδα ελέγχου)

- Πρόσθεση του β^2 μόνο στο ένα μέλος της εξίσωσης



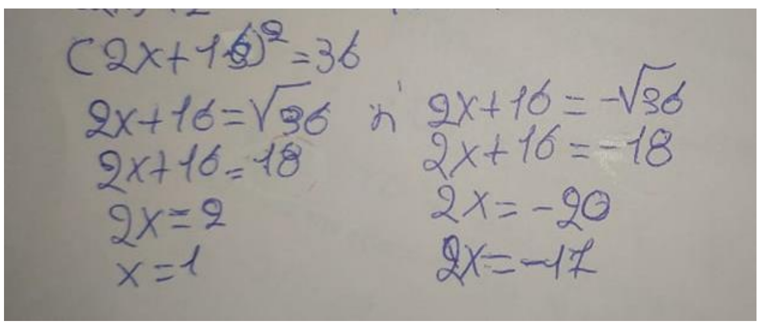
Εικόνα 21. Πρόσθεση του β^2 μόνο στο ένα μέλος της εξίσωσης (Ομάδα ελέγχου)

- Λανθασμένος πολλαπλασιασμός όλων των όρων με το 4α.



Εικόνα 22. Λανθασμένος πολλαπλασιασμός όλων των όρων με το 4α (Ομάδα ελέγχου).

- Λανθασμένος υπολογισμός ρίζας

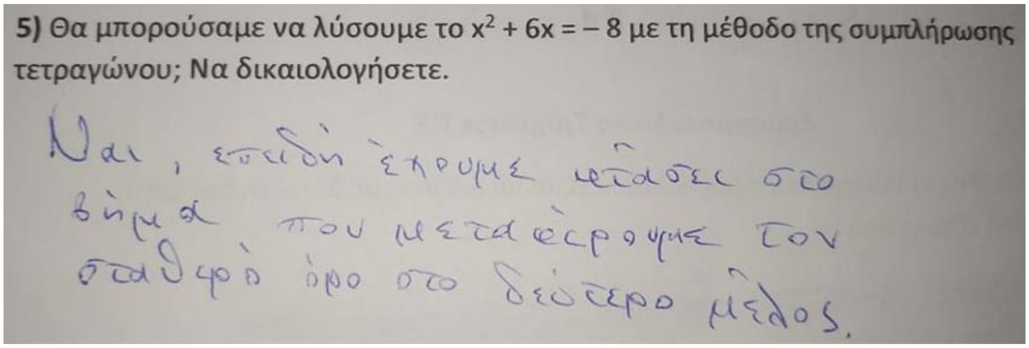


Εικόνα 23. Λανθασμένος υπολογισμός ρίζας (Ομάδα ελέγχου)

Τέλος, δύο μαθητές (2/26) δεν έλυσαν καθόλου την εξίσωση.

5η ερώτηση: Θα μπορούσαμε να λύσουμε το $x^2 + 6x = -8$ με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου; Να δικαιολογήσετε.

Η ερώτηση αυτή φαίνεται να μπέρδεψε τους μαθητές αφού ο αριθμός των μαθητών που δεν απάντησαν καθόλου αυξήθηκε στους 7/26. Οι υπόλοιποι μαθητές (19/26) απάντησαν όλοι θετικά, δηλαδή ότι όντως θα μπορούσαμε να λύσουμε τη συγκεκριμένη εξίσωση με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου, όμως μόνο οι 11 από αυτούς έδωσαν δικαιολόγηση. Στην εικόνα 24 φαίνεται μία από τις δικαιολογήσεις που δόθηκαν για αυτή την ερώτηση:


5) Θα μπορούσαμε να λύσουμε το $x^2 + 6x = -8$ με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου; Να δικαιολογήσετε.

Ναι, επειδή έχουμε φτάσει στο βήμα που μεταφέρουμε τον σταθερό όρο στο δεύτερο μέλος.

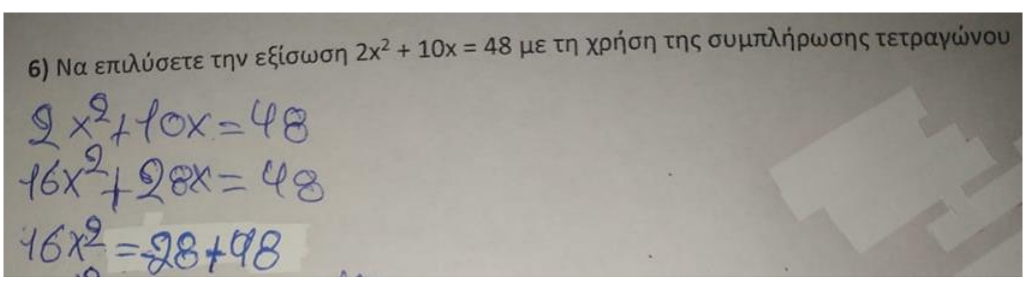
Εικόνα 24. Σωστή δικαιολόγηση μαθητή στην 5η ερώτηση (Ομάδα ελέγχου).

6η ερώτηση: Να επιλύσετε την εξίσωση $2x^2 + 10x = 48$ με τη χρήση της συμπλήρωσης τετραγώνου

Οι σωστές απαντήσεις της τελευταίας ερώτησης του ερωτηματολογίου ήτανε 16/26. Οι μαθητές που απάντησαν σωστά ήτανε όλοι αυτοί που είχανε λύσει και την εξίσωση στην ερώτηση 4.

Συγκριτικά με την ερώτηση 4, την οποία δεν απάντησαν δύο μαθητές, ο αριθμός κενών απαντήσεων αυξήθηκε σε 8/26. Υπήρξαν δηλαδή 6 μαθητές οι οποίοι δούλεψαν την ερώτηση 4 αλλά όχι την ερώτηση 6. Είναι πιθανό οι μαθητές να μπερδεύτηκαν ή να φοβήθηκαν όταν είδαν ότι ο συντελεστής του x^2 είναι διάφορος του 1.

Ολοκληρώνοντας, δύο μαθητές (2/26) ενώ φαίνεται στο γραπτό τους ότι υπολόγισαν σωστά το 4α με το οποίο θα έπρεπε να πολλαπλασιάσουν όλους τους όρους της εξίσωσης, έκαναν λάθος πολλαπλασιασμούς σε κάποιους όρους ή δεν τα πολλαπλασίασαν όλα με τον κατάλληλο αριθμό. Δίνεται ένα παράδειγμα απάντησης


6) Να επιλύσετε την εξίσωση $2x^2 + 10x = 48$ με τη χρήση της συμπλήρωσης τετραγώνου

$2x^2+10x=48$

$16x^2+28x=48$

$16x^2=-28+48$

Εικόνα 25. Λανθασμένος πολλαπλασιασμός όλων των όρων με το 4α (Ομάδα ελέγχου).

μαθητή στην εικόνα 25.

Παρατηρείται ότι ο μαθητής κατάλαβε ότι ο συντελεστής α είναι το 2, άρα το 4α είναι το 8, και πολλαπλασίασε το μεγιστοβάθμιο όρο όντως με το 8. Τους επόμενους δύο όρους της εξίσωσης δεν τους πολλαπλασίασε σωστά αφού το 10x γίνεται 28x και ο σταθερός όρος 48 παραμένει ο ίδιος.

7.3 Σχόλια και παρατηρήσεις από τη διδασκαλία

Παρακάτω αναφέρονται κάποια από τα σχόλια που εξέφρασαν οι μαθητές στο τέλος των ερωτηματολογίων τους όπου τους δόθηκε η ευκαιρία να καταγράψουν προαιρετικά τις απόψεις τους για τη διδασκαλία. Παρόλο που οι απαντήσεις τους δεν αποτελούν κομμάτι της παρούσας έρευνας, κάποια από τα σχόλιά τους είναι ενδιαφέροντα και αξίζει να αναφερθούν. Στα σχόλια που καταγράφηκαν από την ομάδα ελέγχου, παρατηρείται ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών που γράφει φράσεις αγανάκτησης προς τα Μαθηματικά όπως «δεν ξέρω τίποτα», «δεν ξέρουμε Μαθηματικά!», «Γιατί!». Σε αντίθεση με τους μαθητές οι οποίοι εργάστηκαν με την ιστορία των Μαθηματικών οι οποίοι έχουν αφήσει σχόλια όπως «Η παρουσίασή σας με τους Βαβυλωνίους ήταν αρκετά κατανοητή», «η επίλυση με τη μέθοδο των Βαβυλωνίων είναι καλύτερη γιατί κάνουμε λιγότερες πράξεις», «το μάθημα ήταν πιο κατανοητό». Όπως έχει αναφέρει και ο Liu (2003), παρατηρήθηκε αύξηση ενδιαφέροντος των μαθητών ενώ επίσης είναι φανερό πόσο θετικά έχει επιδράσει η εφαρμογή της ιστορίας των Μαθηματικών στην ψυχολογία τους μόνο από τις δύο διδακτικές ώρες χρήσης της.

Κλείνοντας αξίζει να αναφερθούν δύο παραδείγματα μαθητών από την ομάδα στην οποία έγινε χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών. Ο πρώτος είναι ένας μαθητής άριστος στα Μαθηματικά με πολύ καλές προφορικές και γραπτές αποδόσεις όπως φάνηκε από τη στάση του μέσα στην τάξη αλλά και από τις λυμένες ασκήσεις που παρέδωσε. Στο τέλος της διδασκαλίας, κατά τη διάρκεια συζήτησης μέσα στην τάξη, ο ίδιος ανέφερε ότι η μέθοδος επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων των Βαβυλωνίων δεν του άρεσε καθώς έπρεπε να σκεφτεί μόνος του τι να κάνει ενώ προτιμάει ο ίδιος να έχει στην άλγεβρα κανόνες και μεθοδολογίες σχετικά με το πώς να επιλύσει μία εξίσωση. Φαίνεται λοιπόν μία κατηγορία μαθητή όπου ο ίδιος έχει «βολευτεί» με τη χρήση κανόνων και αλγορίθμων στα Μαθηματικά καθώς αυτό του εξασφαλίζει υψηλές βαθμολογίες. Ωστόσο από τα λεγόμενά του υπάρχει αμφιβολία για το αν όντως ο μαθητής αυτός κατανοεί τον τρόπο με τον οποίο λειτουργούν και διαμορφώνονται οι κανόνες και οι μεθοδολογίες των Μαθηματικών.

Το δεύτερο παράδειγμα είναι για έναν μαθητή με αδύναμες σχολικές επιδόσεις σύμφωνα με την καθηγήτρια της τάξης ο οποίος κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας έδειχνε το ενδιαφέρον του είτε προφορικά είτε λύνοντας σωστά στο τετράδιό του τις ασκήσεις που τους είχαν ανατεθεί μέσα στην τάξη. Το τελικό του ερωτηματολόγιο ήταν λευκό, όμως οι ασκήσεις που δούλευε μέσα στην τάξη πάνω στη γεωμετρική επίλυση ήταν σωστές. Στο τέλος της έρευνας η καθηγήτρια σχολίασε το γεγονός αυτό ως «θαύμα» αφού, σύμφωνα με τα λεγόμενά της, ο μαθητής αυτός δεν είχε συμμετάσχει ποτέ του από την αρχή της χρονιάς στο μάθημα των Μαθηματικών.

Ας είναι επομένως αυτά τα δύο παραδείγματα μαθητών έναυσμα για σχεδιασμό διδασκαλιών με πολλαπλές αναπαραστάσεις και με περισσότερες εφαρμογές της ιστορίας των Μαθηματικών. Είναι σημαντικό να κατανοήσουν οι μαθητές ότι τα Μαθηματικά δεν είναι μία αφηρημένη επιστήμη γεμάτη με κανόνες και στενά όρια, αλλά αντίθετα το μάθημα αυτό συμβάλλει στην καλλιέργεια της κριτικής και συνδυαστικής σκέψης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

8.1 Απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα

Η διδακτική εφαρμογή που αναλύθηκε είχε ως στόχο την κατανόηση και την εξοικείωση των μαθητών της Γ’ Γυμνασίου με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου μέσω της γεωμετρικής μεθόδου επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων των Βαβυλωνίων και του Al-Khwarizmi. Τα ερευνητικά ερωτήματα ήτανε τα εξής:

1) Βοηθάει η μελέτη της ιστορίας των Μαθηματικών τους μαθητές στην καλύτερη κατανόηση της μεθόδου "συμπλήρωση τετραγώνου";
2) Οι δυσκολίες των μαθητών γίνονται μικρότερης έκτασης μετά από την εφαρμογή της παρούσας προτεινόμενης διδασκαλίας;

Σχετικά με τον τρόπο διεξαγωγής της έρευνας, πραγματοποιήθηκε σε δύο τάξεις της Γ’ Γυμνασίου ενός σχολείου της Θεσσαλονίκης. Η μία τάξη χρησιμοποιήθηκε ως ομάδα ελέγχου, στην οποία η διδασκαλία της συγκεκριμένης μεθόδου έγινε όπως ακριβώς ορίζεται από το Υπουργείο Παιδείας , ενώ στη δεύτερη τάξη εφαρμόστηκε η διδακτική πρόταση. Χρησιμοποιήθηκαν δύο διδακτικές ώρες σε κάθε τάξη για τη διδασκαλία, ενώ τα τελικά ερωτηματολόγια συμπληρώθηκαν από τους μαθητές μέσα στην τάξη τους σε επόμενη διδακτική ώρα με απουσία της ερευνήτριας. Τα ερωτηματολόγια παραδόθηκαν αργότερα από την καθηγήτρια του τμήματος στην ερευνήτρια. Λόγω της κατάστασης της πανδημίας Covid δεν επιτράπηκε η αφιέρωση περισσότερων ωρών για τη διεξαγωγή της έρευνας από τη διεύθυνση του σχολείου.

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων και η εξαγωγή των συμπερασμάτων βασίζεται σε 2 άξονες:

Α) Στην εννοιολογική κατανόηση της μεθόδου «συμπλήρωσης τετραγώνου» η οποία έγινε μέσω διαφορετικών αναπαραστάσεων, με τη χρήση αλγεβρικών αλλά και γεωμετρικών αναπαραστάσεων, τα οποία αντλήθηκαν από την ιστορία των Μαθηματικών (Katz, 2014, Otero, 2019)

Β) Στη χρήση συμπερασμάτων προηγούμενων ερευνών σχετικά με τα λάθη και τις δυσκολίες των μαθητών στην επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων (Erbaş & Didis, 2015, Thorpe, 1989, Otero, 2019 & Makgakga, 2016).

1ο ερευνητικό ερώτημα

«Βοηθάει η μελέτη της ιστορίας των Μαθηματικών τους μαθητές στην καλύτερη κατανόηση της μεθόδου "συμπλήρωση τετραγώνου";»

Σχετικά με τις απαντήσεις των μαθητών που δόθηκαν στις πρώτες τρεις ερωτήσεις των ερωτηματολογίων τους, τα αποτελέσματα είναι σχεδόν ίδια και στις δύο ομάδες με μικρές, αλλά όχι ασήμαντες, διαφορές. Όσον αφορά την πρώτη ερώτηση και των δύο ομάδων, κατά πόσο δηλαδή αντιλαμβάνονται οι μαθητές το λόγο για τον οποίο η μέθοδος της έρευνας ονομάζεται «συμπλήρωση τετραγώνου», τα σωστά αποτελέσματα είναι υπέρ της πειραματικής ομάδας. Παραπάνω από τους μισούς μαθητές (11/18) κατανόησαν τι σημαίνει η φράση «συμπλήρωση τετραγώνου». Ωστόσο είναι σημαντικό να σημειωθεί πως και οι μισοί μαθητές της ομάδας ελέγχου (13/26) κατανόησαν και αυτοί από τη δικιά τους αλγεβρική οπτική τι σημαίνει η φράση αυτή.

Αναφορικά με τη δεύτερη ερώτηση, στην οποία κλήθηκαν οι μαθητές να εξηγήσουν τον λόγο για τον οποίο γίνονται συγκεκριμένα βήματα του αλγεβρικού ή του γεωμετρικού αλγορίθμου αντίστοιχα, δόθηκαν τα εξής αποτελέσματα. Ένα μεγάλο ποσοστό (14/18) των μαθητών της ιστορίας απάντησε σωστά ή μερικώς σωστά στην ερώτηση, ενώ ένα επίσης μεγάλο ποσοστό σωστών απαντήσεων δόθηκε και από την ομάδα ελέγχου (18/26).

Τέλος, στην ερώτηση σχετικά με την ύπαρξη αρνητικών λύσεων κατά την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων με τη συγκεκριμένη μέθοδο, όλες οι απαντήσεις που καταγράφτηκαν (16/18) ήταν σωστές είτε και για τους δύο τρόπους επίλυσης (αλγεβρικό και γεωμετρικό), είτε για έναν από τους δύο τρόπους, ενώ στην ομάδα ελέγχου, το 22/26 των μαθητών απάντησε σωστά για τον αλγεβρικό τρόπο λύσης.

Συμπερασματικά μέχρι στιγμής, δεν υπάρχουν πολύ μεγάλες διαφορές ανάμεσα στα ποσοστά σωστών απαντήσεων και των δύο ομάδων. Ωστόσο σε κάθε ερώτηση παρατηρούνται περισσότερες σωστές απαντήσεις στην πειραματική ομάδα. Για να δοθεί όμως απάντηση στο 1^{ο} ερευνητικό ερώτημα, πρέπει να αναφερθούν και κάποια σημεία από τις γεωμετρικές και αλγεβρικές επιλύσεις των μαθητών.

Ενδιαφέρον προκαλούν τα αποτελέσματα των δύο ομάδων στις ερωτήσεις αλγεβρικής και γεωμετρικής επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Ξεκινώντας από την πειραματική ομάδα, στη γεωμετρική επίλυση 7/18 μαθητές βρήκαν σωστά την απάντηση, ενώ ακόμη 9/18 μαθητές σχεδίασαν σωστά τη γεωμετρική αναπαράσταση αλλά δε βρήκαν καθόλου ή βρήκαν λανθασμένα την τελική απάντηση της εξίσωσης. Θα μπορούσε δηλαδή να σημειωθεί ότι 16/18 μαθητές αυτής της ομάδας κατάλαβαν πώς θα απεικονίσουν την επίλυση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης γραφικά, αλλά ένα μεγάλο ποσοστό αυτών δεν κατανόησε τον τρόπο με τον οποίο βγαίνει η τελική απάντηση ή απλώς αγνόησαν το γεγονός ότι πρέπει να καταγράψουν την λύση της εξίσωσης.

Στη συνέχεια, θα συνδυαστούν και οι απαντήσεις της ερώτησης 5 της πειραματικής ομάδας, στην οποία κλήθηκαν οι μαθητές να λύσουν την ίδια δευτεροβάθμια εξίσωση με αλγεβρικό τρόπο βασισμένοι στην προηγούμενη γεωμετρική επίλυσή τους. Στόχος εδώ ήταν να δειχθεί εάν όντως οι μαθητές κατανόησαν τη λειτουργία του αλγεβρικού αλγορίθμου της συμπλήρωσης τετραγώνου. Εδώ ο αριθμός των μαθητών που έδωσαν πλήρως σωστές απαντήσεις ήτανε 8/18. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι ο αριθμός αυτός είναι μεγαλύτερος από το πλήθος των μαθητών που έλυσαν σωστά την εξίσωση με τη γεωμετρική αναπαράσταση. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι υπήρξαν μαθητές που δεν έλυσαν σωστά, ή έλυσαν μερικώς σωστά, την εξίσωση με τη γεωμετρική μέθοδο, αλλά χρησιμοποίησαν ολόσωστα τον αλγεβρικό αλγόριθμο. Ωστόσο, το πλήθος των μαθητών που δεν δούλεψαν την αλγεβρική μέθοδο αυξήθηκε από 3/18 (μαθητές που δεν δούλεψαν τη γεωμετρική μέθοδο) σε 5/18.

Αναφορικά με την ομάδα ελέγχου, οι μαθητές αυτοί έπρεπε να λύσουν την ίδια δευτεροβάθμια εξίσωση με τα βήματα του αλγεβρικού αλγορίθμου που διδάχτηκαν. Το πλήθος των μαθητών που έδωσαν πλήρως σωστές απαντήσεις ήτανε 17/26, αρκετά μεγαλύτερο δηλαδή από το ποσοστό των μαθητών της ιστορίας που έλυσαν αλγεβρικά την ίδια εξίσωση. Εικάζεται ότι υπάρχουν περισσότερες σωστές απαντήσεις στην ομάδα ελέγχου καθώς οι μαθητές αυτοί είχαν στη διάθεσή τους κάποια βήματα αλγεβρικού αλγορίθμου τα οποία έπρεπε να εφαρμόσουν την εξίσωση για να λυθεί. Επομένως δεν χρειάστηκε κάποια ιδιαίτερη σκέψη από τους ίδιους για την επίλυση της εξίσωσης.

Το ερώτημα που τίθεται όμως εδώ είναι εάν οι μαθητές κατανοούν τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί αυτή η μέθοδος επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Αυτό κυρίως φαίνεται από την πειραματική ομάδα. Πρέπει δηλαδή να παρατηρηθούν οι μαθητές που σχεδίασαν σωστά τη γεωμετρική αναπαράσταση και να ελεγχθούν οι απαντήσεις που δώσανε στην αλγεβρική επίλυση. Το πλήθος των μαθητών που φαίνεται να κατανόησαν τον τρόπο σύνδεσης της γεωμετρικής με την αλγεβρική επίλυση είναι 5/18. Αυτοί είναι οι μαθητές που σχεδίασαν σωστά και έδωσαν τη σωστή λύση της εξίσωσης μέσα από τη γεωμετρική αναπαράσταση και επιπλέον έλυσαν σωστά την ίδια εξίσωση με τον αλγεβρικό αλγόριθμο. Μόνο ένας μαθητής παρατηρήθηκε ο οποίος έλυσε σωστά την εξίσωση χρησιμοποιώντας τον γεωμετρικό τρόπο, αλλά έδωσε λανθασμένες απαντήσεις στην αλγεβρική επίλυση. Δεν μπήκε δηλαδή ο μαθητής στη διαδικασία να συγκρίνει και να παρατηρήσει ότι σε κάθε περίπτωση έδωσε διαφορετικές λύσεις για την ίδια εξίσωση. Ωστόσο είναι σημαντικό να γίνει αναφορά και σε ακόμα έναν μαθητή ο οποίος έδωσε λανθασμένη απάντηση κατά τη γεωμετρική επίλυση της εξίσωσης, όμως έλυσε ολόσωστα την εξίσωση με την αλγεβρική μέθοδο. Μία ακόμα περίπτωση μαθητή που δεν συνειδητοποίησε ότι κατέγραψε διαφορετικές λύσεις σε κάθε περίπτωση. Οι υπόλοιποι μαθητές έδωσαν λανθασμένες ή καθόλου απαντήσεις είτε μόνο στη μία ή και στις δύο ερωτήσεις. Ως συμπέρασμα, λίγοι ήταν οι μαθητές που μπόρεσαν να καταλάβουν τη συσχέτιση της γεωμετρίας με την άλγεβρα.

Επιστρέφοντας επομένως στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα της παρούσας εργασίας, αν δηλαδή η μελέτη της ιστορίας των Μαθηματικών μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στην καλύτερη κατανόηση της μεθόδου "συμπλήρωσης τετραγώνου", η απάντηση είναι μερικώς θετική. Μέσα από τις πρώτες ερωτήσεις κατανόησης φάνηκε η διαφορά στις απαντήσεις των μαθητών και των δύο τάξεων με τους μαθητές της ιστορίας των μαθητών να υπερτερούν στα ποσοστά σωστών απαντήσεων. Παρόλα αυτά το πλήθος των μαθητών που κατάφερε να κατανοήσει τη σύνδεση της γεωμετρικής και της αλγεβρικής επίλυσης είναι αρκετά μικρό, λίγο περισσότερο από το 1/4 των μαθητών της τάξης. Σύμφωνα με έρευνες που αναλύθηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας (Makgakga, 2016) τα αποτελέσματα αναμενόταν να είναι περισσότερο θετικά. Σημειώνεται όμως ότι έπαιξαν ρόλο και οι ώρες που αφιερώθηκαν για τη συγκεκριμένη προτεινόμενη διδασκαλία καθώς επίσης και το γεγονός ότι οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι σε αυτή τη μορφή επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, κάτι το οποίο δεν είναι εύκολο να διδαχθεί σε δύο διδακτικές ώρες.

2ο ερευνητικό ερώτημα

«Οι δυσκολίες των μαθητών γίνονται μικρότερης έκτασης μετά από την εφαρμογή της παρούσας προτεινόμενης διδασκαλίας;»

Για να δοθεί απάντηση στο $2^{ο}$ ερευνητικό ερώτημα της εργασίας, αρχικά θα σημειωθούν τα λάθη και οι δυσκολίες που καταγράφτηκαν στα ερωτηματολόγια και των δύο ομάδων. Πιο συγκεκριμένα, θα ληφθούν υπόψιν οι απαντήσεις που δόθηκαν στις ερωτήσεις σχετικές με επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Σημειώνεται ότι για την ομάδα τις ιστορίας των Μαθηματικών χρησιμοποιούνται οι ερωτήσεις που αφορούν τον αλγεβρικό τρόπο επίλυσης καθώς σύμφωνα με τα λάθη και τις δυσκολίες που αναφέρουν οι Erbaş & Didis (2015), Thorpe (1989), Otero (2019) και Makgakga (2016), κατατάσσονται όλα στο κομμάτι της άλγεβρας.

Οι κατηγορίες λαθών κατά την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων που αναφέρθηκαν παραπάνω είναι οι εξής:

- Αδυναμία διαίρεσης όλων των όρων με τον συντελεστή του x^2
- Πολλαπλασιασμός με 1/2 του συντελεστή του x

- Εύρεση αντίθετου του σταθερού όρου (μεταφορά του σταθερού όρου στο δεξί μέλος της εξίσωσης)
- Σχηματισμός αναπτύγματος τετραγώνου
- Εύρεση και πρόσθεση του όρου $β^2$ και στα δύο μέλη της εξίσωσης για τον σχηματισμό του αναπτύγματος τετραγώνου
- Εύρεση δύο λύσεων

Επισημαίνεται ότι στην πρώτη κατηγορία λαθών για την ομάδα ελέγχου εντάσσεται και ο πολλαπλασιασμός όλων των όρων με 4α, όπου α είναι ο συντελεστής του x^2. Στις έρευνες που προηγήθηκαν αναφέρεται η κατηγορία «Αδυναμία διαίρεσης όλων των όρων με τον συντελεστή του x^2» διότι με αυτό τον τρόπο δείχνουν οι ερευνητές στους μαθητές να δουλεύουν τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου. Ωστόσο, σύμφωνα με τα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια, το πρώτο βήμα για την εφαρμογή της μεθόδου είναι ο πολλαπλασιασμός με τον αριθμό 4α. Αντίθετα, στην πειραματική ομάδα, στις εξισώσεις όπου ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι μεγαλύτερος του 1, οι μαθητές διδάχτηκαν να διαιρούν όλους τους όρους με το συντελεστή του μεγιστοβάθμιου. Επομένως σε αυτή την ομάδα δεν είχε διδαχθεί ο πολλαπλασιασμός με 4α αφού εδώ στόχος είναι η σύνδεση της γεωμετρικής αναπαράστασης με την αλγεβρική επίλυση.

Ξεκινώντας από την ομάδα ελέγχου, καταγράφονται στον πίνακα 3 οι αναλογίες λαθών σε κάθε μία κατηγορία, ενώ επίσης στον πίνακα 4 σημειώνεται ο αριθμός των μαθητών που δε δούλεψαν καθόλου τις εξισώσεις και των μαθητών που χρησιμοποίησαν διαφορετικό τρόπο για να λύσουν την εξίσωση.

Πίνακας 3. Αναλογίες απαντήσεων σε κάθε κατηγορία λάθους (Ομάδα ελέγχου).

Διαίρεση/ Πολλαπλασιασμός όλων των όρων με συγκεκριμένο αριθμό	Πολλαπλασιασμός με 1/2 του συντελεστή του x	Μεταφορά του σταθερού όρου στο δεξί μέλος	Σχηματισμός αναπτύγματος τετραγώνου	Εύρεση και πρόσθεση του $β^2$ και στα δύο μέλη	Εύρεση δύο λύσεων
7/26	2/26	3/26	4/26	0/26	0/26

Πίνακας 4. Αναλογίες κενών ή διαφορετικών απαντήσεων (Ομάδα ελέγχου).

Καμία απάντηση	Χρήση διαφορετικού τρόπου λύσης
3/26	4/26

Όμοια καταγράφονται στον πίνακα 5 και τα ποσοστά λαθών της πειραματικής ομάδας, ενώ στον πίνακα 6 σημειώνεται ο αριθμός των μαθητών που δε δούλεψαν καθόλου τις εξισώσεις και των μαθητών που χρησιμοποίησαν διαφορετικό τρόπο για να λύσουν την εξίσωση.

Πίνακας 5. Αναλογίες απαντήσεων σε κάθε κατηγορία λάθους (Πειραματική ομάδα).

Διαίρεση όλων των όρων με συγκεκριμένο αριθμό	Πολλαπλασιασμός με 1/2 του συντελεστή του x	Μεταφορά του σταθερού όρου στο δεξί μέλος	Σχηματισμός αναπτύγματος τετραγώνου	Εύρεση και πρόσθεση του β^2 και στα δύο μέλη	Εύρεση δύο λύσεων
2/18	1/18	1/18	7/18	4/18	3/18

Πίνακας 6. Αναλογίες κενών ή διαφορετικών απαντήσεων (Πειραματική ομάδα).

Καμία απάντηση	Χρήση διαφορετικού τρόπου λύσης
6/18	2/18

Στα αποτελέσματα της έρευνας παρατηρείται στις περισσότερες κατηγορίες μία μικρή μείωση ποσοστών λαθών ανάμεσα στις δύο ομάδες. Δεν παρατηρούνται μεγάλες διαφορές όπως αναφέρονται στις έρευνες των Makgakga, (2016) και Maharaj (2005), ωστόσο αναφέρεται ξανά ότι ίσως έπαιξαν ρόλο οι ελάχιστες διδακτικές ώρες που δόθηκαν για την εκπόνηση της έρευνας. Δεν μπορεί ωστόσο να παραλειφθεί το γεγονός ότι στις δύο τελευταίες κατηγορίες λαθών παρατηρήθηκαν λανθασμένες απαντήσεις μόνο από τους μαθητές της ιστορίας των Μαθηματικών. Σημειώνεται ότι οι μαθητές που έδωσαν αυτές τις απαντήσεις δε φάνηκε να ακολουθούν τα βήματα της αντίστοιχης γεωμετρικής τους επίλυσης. Δεν μπόρεσαν δηλαδή να κάνουν σύνδεση της Γεωμετρίας με το κομμάτι της

Άλγεβρας παρόλο που είχαν δουλέψει τη γεωμετρική τους επίλυση εν μέρει ή εξ’ ολοκλήρου σωστά. Παρατηρείται λοιπόν μία αύξηση λαθών όσον αφορά την κατηγορία της πρόσθεσης του όρου $β^2$ και στα δύο μέλη της εξίσωσης. Οι μαθητές αυτοί προσπαθούσαν να δημιουργήσουν ανάπτυγμα τετραγώνου χωρίς να προσθέσουν τον όρο $β^2$ ή τον πρόσθεταν μόνο από το ένα μέλος της εξίσωσης. Είναι πιθανό οι μαθητές της ομάδας ελέγχου να απέφυγαν αυτό το λάθος αφού στα βήματα αλγορίθμου που ακολουθούσαν, τονιζόταν ότι ο όρος $β^2$ πρέπει να προστεθεί και στα δύο μέλη. Τέλος, όσοι μαθητές έφτασαν μέχρι τέλους την αλγεβρική επίλυσή τους έδειξαν να καταλαβαίνουν ότι πρέπει να εμφανιστούν δύο λύσεις. Κάποιοι από αυτούς μάλιστα δεν είχαν βγάλει δύο λύσεις από τη στιγμή που είχαν τη μορφή εξίσωσης $(x + α)^2 = β$, δηλαδή συνέχισαν γράφοντας $x + α = \sqrt{\beta}$ αγνοώντας την αρνητική λύση $-\sqrt{\beta}$, όπως έχουν αναφέρει οι Erbaş & Didis (2015) και Thorpe (1989). Παρόλα αυτά όμως στο τέλος της επίλυσής τους οι μαθητές έγραφαν δύο λύσεις, μία θετική και μία αρνητική ακόμα και αν δεν ήτανε αυτές αριθμητικά σωστές.

Ακόμη, είναι σημαντικό να παρατηρηθεί το ποσοστό των μαθητών που δεν έδωσε καμία απάντηση σε κάθε ομάδα. Αρκετά περισσότεροι είναι οι μαθητές της ιστορίας των Μαθηματικών που δεν έλυσαν καθόλου μία ή και τις δύο εξισώσεις που τους δόθηκαν. Το συμβάν αυτό μπορεί να δικαιολογηθεί με το γεγονός ότι οι μαθητές της ιστορίας των Μαθηματικών διέθεταν μία σειρά βημάτων που μπορούσαν να ακολουθήσουν. Επομένως ίσως ήταν ευκολότερο για αυτούς να γνωρίζουν πώς να ξεκινήσουν την επίλυση της εξίσωσης σε αντίθεση με την άλλη ομάδα η οποία δεν διέθετε κάτι ανάλογο αλλά έπρεπε να σκεφτούν μόνοι τους οι μαθητές τα γεωμετρικά βήματα και να τα «μεταφράσουν» σε αντίστοιχα αλγεβρικά.

Τέλος, αξίζει να σχολιαστεί ότι υπάρχει ένα ποσοστό μαθητών που δούλεψε τις εξισώσεις με χρήση διαφορετικού τρόπου από το ζητούμενο. Οι διαφορετικοί τρόποι που καταγράφτηκαν ήταν η χρήση της ομαδοποίησης και του τύπου της Διακρίνουσας, παρόλο που το δεύτερο δεν είχε διδαχθεί στη σχολική τάξη. Εικάζεται ότι ίσως οι μαθητές θεώρησαν δύσκολη και επίπονη τη διαδικασία της συμπλήρωσης τετραγώνου, όπως αναφέρουν και οι Erbaş & Didis (2015) και Thorpe (1989), και στράφηκαν στη χρήση του τύπου που εφαρμόζεται εύκολα σε όλες τις περιπτώσεις. Ωστόσο δε θα μπορούσε να ειπωθεί ότι αυτή η στάση των μαθητών είναι απαραίτητα «κακή» αφού με αυτό τον τρόπο εξελίχθηκαν ιστορικά και οι μέθοδοι επίλυσης εξισώσεων οι οποίοι με το πέρασμα των χρόνων γίνονταν όλο και πιο απλοί.

Ως απάντηση λοιπόν στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, θα μπορούσε να σημειωθεί ότι όντως υπάρχει μία μικρή μείωση δυσκολιών και λαθών στις απαντήσεις των μαθητών. Είναι πιθανό στην περίπτωση αφιέρωσης περισσότερων ωρών στη συγκεκριμένη προτεινόμενη διδασκαλία να υπήρχαν μεγαλύτερες διαφορές στα αποτελέσματα. Αυτό αναφέρεται διότι στο σύγχρονο σχολικό περιβάλλον δεν συνηθίζεται η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων για την ανάλυση και τη διδασκαλία μίας μαθηματικής έννοιας, επομένως οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι σε αυτού του είδους τη διδασκαλία. Παράλληλα, δεν προωθείται και η χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών αφού η μόνη αναφορά που γίνεται σε αυτήν από τα σχολικά εγχειρίδια είναι από κάποιες ιστορικές αναφορές στο τέλος ορισμένων κεφαλαίων.

8.2 Περιορισμοί έρευνας

Η παρούσα έρευνα έλαβε χώρα σε περίοδο προσπαθειών κατάπαυσης της νόσου Covid με αποτέλεσμα να μην μπορεί να δοθεί από τη διεύθυνση του σχολείου επαρκής χρόνος για την εφαρμογή της διδασκαλίας. Ο χρόνος που δόθηκε ήταν 2 διδακτικές ώρες για κάθε τμήμα. Επομένως τα τελικά ερωτηματολόγια μοιράστηκαν από την καθηγήτρια του τμήματος σε τρίτη ώρα χωρίς την παρουσία της ερευνήτριας και συμπληρώθηκαν από τους μαθητές μέσα στην τάξη. Αυτό ωστόσο είχε ως αποτέλεσμα να μην υπάρχει ο απαραίτητος έλεγχος ως προς την απάντηση των ερωτηματολογίων. Το γεγονός αυτό αναφέρεται γιατί σε κάποια ερωτηματολόγια παρατηρήθηκαν φαινόμενα αντιγραφής τα οποία φυσικά επηρεάζουν την αποτελεσματικότητα της έρευνας. Τέλος, το δείγμα των 44 μαθητών των δύο τμημάτων της Γ’ Γυμνασίου δεν μπορεί να καταστεί αντιπροσωπευτικό για να βγουν αξιόπιστα αποτελέσματα έρευνας, ενώ επίσης οι μαθητές δεν ήτανε χωρισμένοι ισόποσα σε κάθε τμήμα, γεγονός που επηρεάζει και αυτό την εξαγωγή των αποτελεσμάτων.

8.3 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Στην παρούσα έρευνα έγινε χρήση μίας προτεινόμενης διδασκαλίας που είχε ως στόχο την προώθηση της ανάπτυξης της εννοιολογικής κατανόηση της μεθόδου συμπλήρωσης τετραγώνου. Αδιαμφισβήτητα η ένταξη της ιστορίας της δευτεροβάθμιας εξίσωσης στη διδασκαλία της παρακίνησε το ενδιαφέρον των μαθητών. Παρουσιάστηκαν δύο από τις πρώτες μεθόδους γεωμετρικής επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων, οι οποίες βοήθησαν στην εξέλιξή της μέχρι να φτάσουμε στο σύγχρονο τρόπο επίλυσης. Επομένως, με τη βοήθεια καινούριων και διαφορετικών ερεθισμάτων ενισχύθηκε η μαθηματική γνώση των μαθητών (Radford, 2002, Lakatos, 2015 & Swetz et al., 1995), ενώ παράλληλα επηρεάστηκε θετικά η διάθεσή τους απέναντι στο μάθημα των μαθηματικών (Liu, P. H. (2003). Εάν λοιπόν οι μαθητές καταφέρουν να κατακτήσουν αυτή την εννοιολογική κατανόηση, θα αποκτήσουν οι ίδιοι μία βαθιά εκτίμηση για την επιστήμη των Μαθηματικών η οποία από πολλούς θεωρείται ως ένα αφηρημένο και μηχανοποιημένο κομμάτι. Ωστόσο, επειδή το δείγμα και ο χρόνος υλοποίησης της έρευνας ήταν μικρής έκτασης, η πραγματοποίησή της με περισσότερους μαθητές διαφόρων επιδόσεων σε μεγαλύτερο χρονικό διάστημα κρίνεται αναγκαία.

Επιπλέον, στην έρευνα κλήθηκαν οι μαθητές να αντιμετωπίσουν εξισώσεις όπου κατά κύριο λόγο ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου ήτανε 1 ή στις περιπτώσεις όπου ήταν διάφορος του 1, οι αριθμοί ήτανε βολικοί έτσι ώστε με μία απλή διαίρεση οι συντελεστές όλων των όρων να βγαίνουν και πάλι ακέραιοι αριθμοί. Θα μπορούσε σε επόμενη έρευνα να γίνει χρήση εξισώσεων με όχι τόσο βολικούς αριθμούς. Αυτό ωστόσο σημαίνει ότι θα πρέπει προηγουμένως οι μαθητές να έχουν κατακτήσει πολύ καλά τη λειτουργία της συμπλήρωσης τετραγώνου.

Ολοκληρώνοντας, μέσα από την υλοποίηση αυτής της έρευνας φάνηκε η αξία της χρήσης της ιστορίας των Μαθηματικών κατά τη διδασκαλία. Ενδιαφέρον θα προκαλούσε η εφαρμογή παρόμοιας έρευνας και σε άλλα κεφάλαια των Μαθηματικών. Όχι μόνο στα κεφάλαια τα οποία έχουν μία φαινομενική σχέση με την ιστορία, όπως για παράδειγμα το Πυθαγόρειο Θεώρημα το οποίο παραπέμπει εύκολα στον Πυθαγόρα και την ιστορία του, αλλά και σε μαθηματικές ενότητες στις οποίες δεν υπάρχουν καν ιστορικές αναδρομές στα σχολικά εγχειρίδια.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arndt, A. B. (1983). Al-Khwarizmi. *The Mathematics Teacher, 76*(9), 668-670.

Avital, S. (1995). History of mathematics can help improve instruction and learning. *Learn from the Masters,* 3-12.

Bossé, M. J., & Nandakumar, N. R. (2005). The factorability of quadratics: Motivation for more techniques. *Teaching Mathematics and its Applications*, *24*(4), 143-153.

Bunt, L. N. H., Jones, P. S., & Bedient, J. D. (1988). *The historical roots of elementary mathematics*. Courier Corporation.

De Bruyn, Y., & Hanna, G. (2014). Modelling with Algebra Tiles and Areas in Completing the Square of a Quadratic. In A. Rogerson, *Proceedings of the 12th International Conference*. Montenegro: The Mathematics Education for the future project.

Didis, M. G., & Erbas, A. K. (2015). Performance and difficulties of students in formulating and solving quadratic equations with one unknown. *Educational Sciences: Theory & Practice*, *15*(4).*Educational Sciences : Theory & Practice*, *15*(4), 1137.

Fried, M. N. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist?. *Science & Education*, *10*(4), 391-408.

Furinghetti, F. (1997). History of mathematics, mathematics education, school practice: Case studies in linking different domains. *For the learning of mathematics*, *17*(1), 55-61.

Goktepe, S., & Ozdemir, A. S. (2013). An Example of Using History of Mathematics in Classes. *European Journal of Science and Mathematics Education, 1*(3), 125-136.

Ho, W. K. (2008). Using history of mathematics in the teaching and learning of mathematics in Singapore. *1st RICE, Singapore: Raffles Junior College*.

Katz, V. J. (1997). Some ideas on the use of history in the teaching of mathematics. *For the learning of mathematics*, *17*, 62-63.

Katz, V. J. (2014). *History of mathematics*. New York: Pearson.

Kline, M. (1972). Mathematical thought from ancient to modern times. New York: Oxford University Press

Lakatos, I. (2015). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge university press.

Lima, R. N. (2008, July). Procedural embodiment and quadratic equations. *Paper presented at the 11th International Congress on Mathematical Education (ICME-11)*, Monterrey, México

Liu, P. H. (2003). Connecting Research to Teaching: Do Teachers Need to Incorporate the History of Mathematics in Their Teaching?. *The Mathematics Teacher*, *96*(6), 416-421.

Maharaj, A. (2005). A geometrical introduction to the method of completing the square. *Learning and Teaching Mathematics*, *2005*(2), 7-9.

Makgakga, S. (2016). Errors and misconceptions in solving quadratic equations by completing a square. *Mathematics Education. (Online),(http://www. amesa. org. za), diakses*, *8*.

McBride, C. C., & Rollins, J. H. (1977). The effects of history of mathematics on attitudes toward mathematics of college algebra students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *8*(1), 57-61.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 4). Reston, Va.: NCTM, 2000.

Nielsen, L. E. J. (2015). *Understanding quadratic functions and solving quadratic equations: An analysis of student thinking and reasoning.*

Ofir, R. (1991). Historical happenings in the mathematical classroom. *For the learning of mathematics*, *11*(2), 21-23.

Otero, D. (2019). Completing the Square: From the Roots of Algebra.

Pólya, G. (1945) How to Solve It. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Schubring, G., Cousquer, É., Fung, C. I., Idrissi, A. E., Gispert, H., Heiede, T., ... & Weeks, C. (2002). History of mathematics for trainee teachers. In *History in mathematics education* (pp. 91-142). Springer, Dordrecht.

Smith, D. (1958). *History of Mathematics.* New York: Dover Publications, Inc.

Swetz, F., Fauvel J., Bekken O., Johansson B. & Katz V. (1995) *Learn from the Masters.* Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Tall, D., de Lima, R. N., & Healy, L. (2014). Evolving a three-world framework for solving algebraic equations in the light of what a student has met before. *The Journal of Mathematical Behavior*, *34*, 1-13.

Thorpe, J. A. (2018). Algebra: What should we teach and how should we teach it?. In *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 11-24). Routledge

Tymoczko, T. (1994). Humanistic and utilitarian aspects of mathematics. In Essays in Humanistic Mathematics, edited by Alvin M. White, pp. 11–14. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1993.

Vaiyavutjamai, P., & Clements, M. K. (2006). Effects of classroom instruction on students' understanding of quadratic equations. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(1), 47–77.

Α.Π.Σ. (2011) *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου*. ΥΑ 59614/Γ2, ΦΕΚ 1168/8– 6–2011.

Δ.Ε.Π.Π.Σ (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών,* Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, ΦΕΚ 303Β/13-3-2003.

Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (2011). *Επιμορφωτικό Υλικό για τους Καθηγητές Μαθηματικών Γυμνασίου.*

Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (2011). *Μαθηματικά στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (Γυμνάσιο). Οδηγός για τον εκπαιδευτικό, «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων».*

Ο.Ε.Δ.Β. (2007) *Μαθηματικά Γ΄ γυμνασίου.*

Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο για το σχολικό έτος 2021-2022. Σχετ.: Το με αρ. πρωτ. εισ. Υ.ΠΑΙ.Θ. 155215/ΓΔ4/13-11-2020 έγγραφο.

Σπηλιωτοπούλου, Β., Διακογιώργη, Κ., & Παπαντωνίου, Β. (2009). Χαρακτηριστικά Ιστορικών Στοιχείων στα Βιβλία Μαθηματικών Γυμνασίου. *3ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών* (σσ. 393-402). Ρόδος: ΕΝΕΔΙΜ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Φύλλο εργασίας Ομάδας ελέγχου

Συμπλήρωση τετραγώνου

Για να λύσουμε εξισώσεις της μορφής $αx^2 + βx + γ$ ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1) Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με 4α, όπου α είναι ο συντελεστής του x^2.

2) Μεταφέρουμε στο δεξιό μέλος της εξίσωσης τον σταθερό όρο και στο αριστερό μέλος δημιουργούμε παράσταση της μορφής $α^2 + 2αβ$ ή $α^2 - 2αβ$.

3) Για να συμπληρωθεί το ανάπτυγμα τετραγώνου προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $β^2$.

4) Χρησιμοποιούμε μία από τις ταυτότητες:
$α^2 + 2αβ + β^2 = (α + β)^2$ ή $α^2 - 2αβ + β^2 = (α - β)^2$

Παράδειγμα 1:

$x^2 + 3x – 10 = 0$

$4x^2 + 12x – 40 = 0$ (πολλαπλασιάσαμε με 4α, δηλαδή με $4·1 = 4$)

$4x^2 + 12x = 40$ (μεταφέρουμε στο δεξιό μέλος τον σταθερό όρο)

$(2x)^2 + 2·2x·3 = 40$ (δημιουργούμε παράσταση της μορφής $α^2 + 2αβ$)

$(2x)^2 + 2·2x·3 + 3^2 = 40 + 3^2$ (προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $β^2$, δηλαδή το 3^2)

$(2x + 3)^2 = 49$ (χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $α^2 + 2αβ + β^2 = (α + β)^2$)

$2x + 3 = \sqrt{49}$ ή $2x + 3 = -\sqrt{49}$

$2x + 3 = 7$ ή $2x + 3 = -7$

$2x = 10$ ή $2x = -4$

$x = 5$ ή $x = -2$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις $x = 5$ και $x = -2$.

Εφαρμογή 1: Προσπαθήστε να λύσετε την εξίσωση $x^2 – x – 12 = 0$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου.

Παράδειγμα 2: Με την ίδια μέθοδο θα επιλύσουμε την εξίσωση $2x^2 + 6x – 36 = 0$. Παρατηρούμε ωστόσο ότι εδώ όλοι οι συντελεστές είναι πολλαπλάσια του 2. Πριν ξεκινήσουμε την επίλυση, μπορούμε να διαιρέσουμε όλους τους όρους με το 2, έτσι ώστε να απλοποιηθούν οι αριθμοί με τους οποίους θα δουλέψουμε.

$2x^2 + 6x – 36 = 0$

$x^2 + 3x – 18 = 0$ (διαιρέσαμε όλους τους όρους με τον συντελεστή του x^2)

$4x^2 + 12x – 72 = 0$ (πολλαπλασιάσαμε με 4α, δηλαδή με $4 \cdot 2 = 8$)

$4x^2 + 12x = 72$ (μεταφέρουμε στο δεξιό μέλος τον σταθερό όρο)

$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 = 72$ (δημιουργούμε παράσταση της μορφής $\alpha^2 + 2\alpha\beta$)

$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 72 + 3^2$ (προσθέτουμε και στα δύο μέλη το β^2, δηλαδή το 3^2)

$(2x + 3)^2 = 81$ (χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$)

$2x + 3 = \sqrt{81}$ ή $2x + 3 = -\sqrt{81}$

$2x + 3 = 9$ ή $2x + 3 = -9$

$2x = 9 – 3$ ή $2x = – 9 – 3$

$2x = 6$ ή $2x = –12$

$x = 3$ ή $x = –6$

Εφαρμογή 2: Με τον ίδιο τρόπο προσπαθήστε να λύσετε την εξίσωση $3x^2 - 27x + 60 = 0$

Ασκήσεις για εξάσκηση

Ήρθε η ώρα για προσωπική εξάσκηση! Αφού μελετήσεις πολύ καλά όσα κάναμε στην τάξη, προσπάθησε να λύσεις μόνος σου τις παρακάτω εξισώσεις.

Άσκηση: Χρησιμοποιώντας τα βήματα της μεθόδου «συμπλήρωση τετραγώνου», λύσε αναλυτικά τις παρακάτω εξισώσεις.

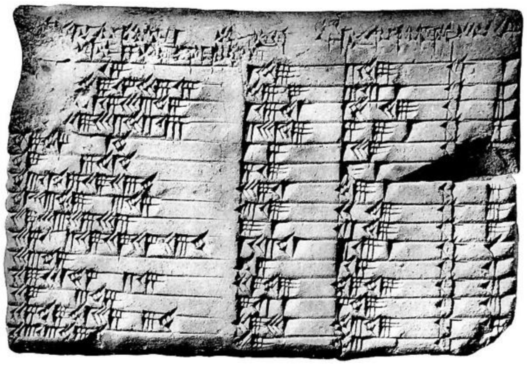
α) $x^2 + 2x - 80 = 0$

β) $x^2 - 10x + 9 = 0$

γ) $3x^2 - 12x - 180 = 0$

Φύλλο εργασίας Πειραματικής ομάδας

Βαβυλώνιοι



Ο πολιτισμός των Βαβυλωνίων αναδύθηκε στις κοιλάδες των ποταμών Τίγρη και Ευφράτη γύρω στη 2η χιλιετία π.Χ. και αποτελεί έναν από τους αρχαιότερους πολιτισμούς στον κόσμο. Οι περισσότερες πληροφορίες για τα βαβυλωνιακά Μαθηματικά, τα οποία κατατάσσονται στο 1.700π.Χ, προέρχονται από πήλινες πλάκες που έχουν το μέγεθος ενός χεριού. Κάποιες από αυτές τις πλάκες περιείχαν μαθηματικούς πίνακες, όπως πίνακες πολλαπλασιασμών και ριζών, ενώ άλλες περιέχουν μαθηματικά προβλήματα.

Οι Βαβυλώνιοι είχαν αναπτύξει αλγορίθμους επίλυσης προβλημάτων τους οποίους ακολουθούσαν κάθε φορά που ήθελαν να βρουν τη λύση ενός προβλήματος. Ιδιαίτερα οι «δευτεροβάθμιες εξισώσεις» φαίνεται ότι τους απασχολούσαν αρκετά. Ο τρόπος επίλυσής τους ωστόσο βασιζόταν σε γεωμετρικά τετράγωνα και ορθογώνια και όχι σε αριθμητικά τετράγωνα και γινόμενα.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι για τους Βαβυλώνιους ήταν πολύ σημαντικό να γνωρίζει ο ηγέτης της χώρας τους πολύ καλά Μαθηματικά και ιδιαίτερα να επιλύει «δευτεροβάθμιες εξισώσεις». Με τον τρόπο αυτό θα κατείχε ο ίδιος δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων που θα μπορούσαν να χρησιμεύσουν στην αντιμετώπιση των προβλημάτων της χώρας.

Al-Khwarizmi

Οι πληροφορίες που διαθέτουμε για τη ζωή του Al-Khwarizmi δεν είναι πολλές. Εκτιμάται ότι η χρονολογία γέννησής του ήταν γύρω στο 780 μ.Χ., ενώ ο θάνατός του χρονολογείται μεταξύ 830 και 850 μ.Χ. Το διασημότερο έργο του αποτελεί το βιβλίο «Al-Kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala» όπου ο τίτλος του θα μπορούσε να μεταφραστεί ως «Συνοπτικό βιβλίο για το λογισμό της αποκατάστασης και της εξισορρόπησης». Από το αραβικό al-jabr (που σημαίνει «συμπλήρωση») προέρχεται η σημερινή λέξη «άλγεβρα».

Ο Al-Khwarizmi είχε ως στόχο να συγγράψει ένα πρακτικό εγχειρίδιο για την επίλυση εξισώσεων καθώς, σύμφωνα με τον ίδιο, αυτό που αναζητούν οι άνθρωποι όταν κάνουν υπολογισμούς, είναι ένας αριθμός. Ωστόσο, αυτό που παρατηρείται στα γραπτά κείμενά του, είναι η πλήρης χρήση λέξεων για την περιγραφή αριθμών και πράξεων, αντί για συμβολισμούς. Οι αριθμοί που χρησιμοποιούμε στη σημερινή εποχή αναπτύχθηκαν στην Ινδία δύο αιώνες αργότερα.

Αν και η γεωμετρική επίλυση του Al-Khwarizmi για τη δευτεροβάθμια εξίσωση θυμίζει αυτή των Βαβυλωνίων, αυτό που κατάφερε ο ίδιος ήταν να εστιάσει περισσότερο στην αλγεβρική επίλυση των εξισώσεων. Η διαφορά του με τους Βαβυλώνιους ήταν ότι μπορούσε να αντιμετωπίζει και δευτεροβάθμιες εξισώσεις με δύο θετικές ρίζες.

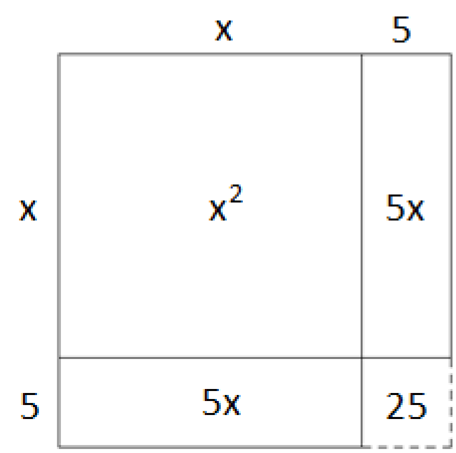
Γενικότερα, τα Βαβυλωνιακά μαθηματικά καθώς και τα Μαθηματικά του Ισλάμ στην περίοδο του Al-Khwarizmi δεν περιείχαν καθόλου αρνητικούς αριθμούς αφού οι αρνητικοί δεν έβγαζαν νόημα για αυτούς.

Γεωμετρική μέθοδος επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης από τους Βαβυλώνιους και τον Al – Khwarizmi

Ας δούμε πώς έλυναν γεωμετρικά οι Βαβυλώνιοι και ο Al-Khwarizmi τη δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2 + 10x = 39$. Υπενθυμίζουμε ότι και οι δύο πολιτισμοί έλυναν τις εξισώσεις εφαρμόζοντας μία σειρά βημάτων σε μορφή αλγορίθμου.

1. Κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο με εμβαδόν x^2

2. Προσθέτουμε δύο ορθογώνια με μήκος x και πλάτος 5 (δηλαδή το μισό του συντελεστή του x). Το σχήμα μέχρι στιγμής έχει εμβαδόν 39, αφού $x^2 + 10x = 39$.



3. Για να σχηματιστεί ένα μεγαλύτερο τετράγωνο, προσθέτουμε ένα μικρό τετράγωνο εμβαδού 25. Επομένως το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου είναι ίσο με 39+25=64.

4. Αφού το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου είναι 64, η κάθε πλευρά του θα είναι η ρίζα του 64, δηλαδή το 8.

5. Για κάθε πλευρά του μεγάλου τετραγώνου ισχύει ότι $x + 5 = 8$. Δηλαδή $x = 3$, το οποίο είναι η λύση της εξίσωσης.

Εφαρμογή 1: Προσπαθήστε με τον ίδιο τρόπο να επιλύσετε γεωμετρικά την εξίσωση $x^2 + 12x = 45$.

Αλγεβρική επίλυση

Ας ρίξουμε άλλη μια ματιά στη γεωμετρική επίλυση της εξίσωσης από τους Βαβυλώνιους και τον Al-Khwarizmi, αλλά αυτή τη φορά «μεταφράζοντας» τα βήματα με αλγεβρικούς συμβολισμούς.

<table>
<tr><th>Γεωμετρική επίλυση</th><th>Αλγεβρική επίλυση</th></tr>
<tr><td>Κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο με εμβαδόν x^2</td><td rowspan="2">$x^2 + 10x = 39$</td></tr>
<tr><td>Προσθέτουμε δύο ορθογώνια με μήκος x και πλάτος 5. Το σχήμα μέχρι στιγμής έχει εμβαδόν 39, αφού $x^2 + 10x = 39$.</td></tr>
<tr><td>Για να σχηματιστεί ένα μεγαλύτερο τετράγωνο, προσθέτουμε ένα μικρό τετράγωνο εμβαδού 25.</td><td>$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$
$x^2 + 10x +25 = 64$
$(x + 5)^2 = 64$</td></tr>
<tr><td>Η κάθε πλευρά του μεγάλου τετραγώνου θα είναι η ρίζα του 64, δηλαδή το 8.</td><td>$x + 5 = \sqrt{64}$ ή $x + 5 = -\sqrt{64}$
$x + 5 = 8$ ή $x + 5 = -8$</td></tr>
<tr><td>Για κάθε πλευρά του μεγάλου τετραγώνου ισχύει ότι $x + 5 = 8$. Δηλαδή $x = 3$.</td><td>$x = 3$ ή $x = -13$</td></tr>
</table>

Παρατηρούμε ότι με την αλγεβρική επίλυση βρήκαμε δύο λύσεις.
Για τους Βαβυλώνιους και τον Al-Khwarizmi δεν είχαν νόημα οι αρνητικοί αριθμοί καθώς δεν υπάρχει μήκος με αρνητική τιμή.

Εφαρμογή 2: Με βάση τη γεωμετρική σας επίλυση για την εξίσωση $x^2 + 12x = 45$ να «μεταφράσετε» τα βήματα που κάνατε χρησιμοποιώντας αλγεβρικούς συμβολισμούς.

Ασκήσεις για εξάσκηση

Ήρθε η ώρα για προσωπική εξάσκηση! Αφού μελετήσεις πολύ καλά όσα κάναμε στην τάξη, προσπάθησε να λύσεις μόνος σου τις παρακάτω εξισώσεις.

Άσκηση: Λύσε κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις με δύο τρόπους. Αρχικά γεωμετρικά (με τη μέθοδο των Βαβυλωνίων και του Al-Khwarizmi) και στη συνέχεια θα «μεταφράσεις» τα βήματά σου με αλγεβρικούς συμβολισμούς.

α) $x^2 + 4x = 5$

β) $x^2 + 2x – 80 = 0$

γ) $2x^2 + 6x – 36 = 0$

Ερωτηματολόγιο Τμήματος Γ’2 – Ομάδα ελέγχου

1) Γιατί η μέθοδος επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων που μάθαμε ονομάζεται «συμπλήρωση τετραγώνου»;

2) Γιατί στο 3ο βήμα της μεθόδου χρειάζεται να προσθέσουμε και στα δύο μέλη της εξίσωσης το τετράγωνο του σταθερού όρου, δηλαδή το β^2;

3) Μπορούμε να έχουμε και θετικές και αρνητικές λύσεις κατά την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου; Να δικαιολογήσετε.

4) Να επιλύσετε την εξίσωση $x^2 + 8x - 20 = 0$ με τη χρήση της συμπλήρωσης τετραγώνου

5) Θα μπορούσαμε να λύσουμε το $x^2 + 6x = -8$ με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου; Να δικαιολογήσετε.

6) Να επιλύσετε την εξίσωση $2x^2 + 10x = 48$ με τη χρήση της συμπλήρωσης τετραγώνου

Σχόλια που θα θέλατε να μοιραστείτε (Προαιρετικά) :

Σας ευχαριστώ για τη συνεργασία!

Ερωτηματολόγιο Τμήματος Γ'1 – Ιστορία Μαθηματικών

1) Γιατί η μέθοδος επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων των Βαβυλωνίων και του Al-Khwarizmi ονομάζεται «συμπλήρωση τετραγώνου»;

2) Είναι απαραίτητο στη γεωμετρική μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου να χωρίσουμε ακριβώς στη μέση τον συντελεστή του x;
Π.χ. θα μπορούσαμε στην εξίσωση $x^2 + 10x = 39$ να χωρίσουμε το 10x σε 7x και 3x αντί για 5x και 5x; Γιατί;

3) Μπορούμε να έχουμε αρνητικές λύσεις με τη γεωμετρική μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου; Ισχύει το ίδιο και με την αλγεβρική μέθοδο; Να αιτιολογήσετε τη σκέψη σας.

4) Προσπαθήστε να επιλύσετε **μόνο γεωμετρικά** την εξίσωση $x^2 + 8x = 20$

5) Καταγράψτε την **αλγεβρική επίλυση** της εξίσωσης $x^2 + 8x = 20$ <u>βασιζόμενοι στη γεωμετρική σας επίλυση</u>

6) Θα μπορούσαμε να λύσουμε το $x^2 + 6x = -8$ με αυτή τη γεωμετρική μέθοδο; Να δικαιολογήσετε.

7) Να λυθεί **μόνο αλγεβρικά** η εξίσωση $2x^2 + 10x = 48$ με τη χρήση της συμπλήρωσης τετραγώνου.

Σχόλια που θα θέλατε να μοιραστείτε (Προαιρετικά) :

Σας ευχαριστώ για τη συνεργασία!