ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ-ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΣ ΦΟΙΤΗΤΗΣ: ΜΠΑΤΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ (Α.Μ. 1065)

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΖΩΙΤΣΑΚΟΣ ΣΩΤΗΡΙΟΣ

ΜΕΛΗ ΤΡΙΜΕΛΟΥΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ: ΖΑΧΑΡΙΑΔΗΣ ΘΕΟΔΟΣΙΟΣ
ΣΑΚΟΝΙΔΗΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2023

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας, η οποία εκπονήθηκε στο πλαίσιο της φοίτησής μου στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών με τίτλο «Διδακτική των Μαθηματικών», του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας, οφείλω να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν με οποιονδήποτε τρόπο στην ολοκλήρωσή της.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον κύριο Ζωιτσάκο Σωτήριο, επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας, για τη σημαντικότατη καθοδήγηση και στήριξη που μου παρείχε και σαν επιστήμονας και σαν άνθρωπος, για το αμείωτο ενδιαφέρον του από την αρχή μέχρι και την ολοκλήρωση της εργασίας, και για τις πολύτιμες συμβουλές του κατά τη συγγραφή της. Ήταν χαρά μου να συνεργαστώ μαζί του και η εκπόνηση ετούτης της εργασίας θα ήταν αδύνατη χωρίς την υποστήριξή του.

Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω θερμά τον κύριο Σακονίδη Χαράλαμπο και τον κύριο Ζαχαριάδη Θεοδόσιο, μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής, για τις εποικοδομητικές υποδείξεις τους και την πολύτιμη συμβολή τους στην ολοκλήρωση της εργασίας.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τους υπόλοιπους καθηγητές του Μεταπτυχιακού Προγράμματος, οι οποίοι με βοήθησαν να διευρύνω τις γνώσεις μου στα θεματικά πεδία στα οποία ειδικεύονται.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένειά μου για τη στήριξη, τη συμπαράσταση και την κατανόηση καθ’ όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία ξεκινά με μια βιβλιογραφική ανασκόπηση σχετικά με την μαθηματική και την παιδαγωγική γνώση απαραίτητη για τη διδασκαλία, και συνεχίζει με κάποια συχνά επιστημολογικά εμπόδια και την κατανόηση της έννοιας της σύγκλισης. Έπειτα, αναλύει τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών των τριών τάξεων του Λυκείου του ελλαδικού χώρου καθώς και το σχολικό βιβλίο των μαθηματικών της Β’ Λυκείου της Κύπρου ως προς την έννοια της σύγκλισης. Η ανάλυση αυτή γίνεται με τη βοήθεια του εργαλείου τεσσάρων διαστάσεων της Brändström (2005), η χρήση του οποίου περιλαμβάνει μελέτη των ασκήσεων των εγχειριδίων των δύο χωρών ως προς τις εικόνες, τις απαραίτητες ενέργειες, τις γνωστικές διαδικασίες και τις γνωστικές απαιτήσεις. Στα παραδείγματα ανάλυσης που αναφέρονται στο σώμα της εργασίας γίνεται σύνδεση με το θεωρητικό πλαίσιο αναφέροντας την απαραίτητη μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία της εκάστοτε άσκησης. Από τα αποτελέσματα της ανάλυσης, γίνεται αντιληπτό πως η διδασκαλία της σύγκλισης και στις δύο χώρες παρουσιάζει ιδιαίτερα μικρή συχνότητα οπτικοποίησεων με χαμηλά ποσοστά γραφικών παραστάσεων ή σχημάτων. Ακόμη, προκύπτουν μεγάλες διαφορές ως προς τις απαραίτητες ενέργειες για την επίλυση των ασκήσεων των εγχειρίδιων των δύο χωρών. Επιπλέον, διαφορές εμφανίζονται και στις γνωστικές διαδικασίες με τα ελληνικά εγχειρίδια να εστιάζουν ελαφρώς περισσότερο στη διαδικαστική γνώση, ενώ το κυπριακό εγχειρίδιο φαίνεται να διατηρεί καλύτερη ισορροπία μεταξύ διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης. Τέλος, τα ελληνικά εγχειρίδια εμφανίζουν περισσότερες ασκήσεις υψηλών γνωστικών απαιτήσεων σε σχέση με το κυπριακό εγχειρίδιο.

Λέξεις-κλειδιά: μαθηματική γνώση περιεχομένου, παιδαγωγική γνώση περιεχομένου, σύγκλιση συναρτήσεων, σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών, ανάλυση εγχειριδίων

Abstract

This paper begins with a literature review on the mathematical and pedagogical knowledge necessary for teaching, and continues with some common epistemological barriers and an understanding of the concept of convergence. Then, it analyses the mathematics textbooks of the three grades of the Greek High School as well as the mathematics textbook of the second grade of High School in Cyprus with regard to the concept of convergence. This analysis is done with the help of Brändström's (2005) four-dimensional tool, the use of which involves studying the exercises in the two countries' textbooks in terms of pictures, necessary actions, cognitive processes and cognitive demands. In the examples of analysis given in the body of the paper, a link to the theoretical framework is made by indicating the necessary mathematical knowledge for the teaching of each exercise. From the results of the analysis, it can be seen that the teaching of convergence in both countries shows a particularly low frequency of visualizations with low percentages of graphs or shapes. Furthermore, large differences emerge in terms of the actions necessary to solve the exercises in the textbooks of the two countries. Moreover, differences also appear in cognitive processes with the Greek manuals focusing slightly more on procedural knowledge, while the Cypriot manual seems to maintain a better balance between procedural and conceptual knowledge. Finally, the Greek manuals show more exercises of high cognitive demands than the Cypriot manual.

Keywords: mathematical content knowledge, pedagogical content knowledge, convergence of functions, mathematics school textbooks, textbook analysis

Περιεχόμενα

Περίληψη 3
Abstract 4
Λίστα εικόνων 7
Λίστα πινάκων 8
Λίστα γραφημάτων 9
Λίστα συντομογραφιών 10
Εισαγωγή 11
Κεφάλαιο 1. Γνώσεις περιεχομένου 15
1.1 Μαθηματική γνώση περιεχομένου 15
1.1.1 Μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία 15
1.1.2 Κατηγορίες μαθηματικής γνώσης περιεχομένου 16
1.2 Παιδαγωγική γνώση περιεχομένου 20
1.2.1 Κατηγορίες παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου 20
1.2.2 Μαθηματική παιδαγωγική γνώση 22
1.3 Η σχέση των γνώσεων των εκπαιδευτικών με την αποτελεσματικότητα των μαθητών 24
Κεφάλαιο 2. Η έννοια της σύγκλισης 25
2.1 Επιστημολογικά εμπόδια και αντιλήψεις σχετικά με το άπειρο και το όριο 25
2.2 Σύγκλιση ακολουθίας 27
2.3 Κατανόηση της έννοιας της σύγκλισης ακολουθιών 28
Κεφάλαιο 3. Σχολικά εγχειρίδια/βιβλία και προγράμματα σπουδών 29
3.1 Σχετικά με τα σχολικά εγχειρίδια/βιβλία 29
3.2 Σχέση μεταξύ σχολικού εγχειριδίου/βιβλίου και προγράμματος σπουδών 30
3.3 Τα προγράμματα σπουδών 32
3.3.1 Η έννοια της σύγκλισης στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών 33
Κεφάλαιο 4. Ερευνητικό μέρος 35
4.1 Ανάλυση σχολικών εγχειριδίων/βιβλίων 35
4.2 Υλικό ανάλυσης 36
4.3 Εργαλείο ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων 38
4.4 Μέθοδος ανάλυσης 43
4.5 Παραδείγματα ανάλυσης ελληνικών σχολικών βιβλίων 44
4.5.1 Σχολικό βιβλίο της Α’ Λυκείου 44

4.5.2 Σχολικό βιβλίο της Β’ Λυκείου 47
4.5.3 Σχολικό βιβλίο της Γ’ Λυκείου 50
4.5.4 Κυπριακό βιβλίο 55
Κεφάλαιο 5. Αποτελέσματα 57
5.1 Αποτελέσματα ανά κατηγορία του εργαλείου 57
5.2 Αποτελέσματα ανάλυσης σχολικών βιβλίων της Ελλάδας ανά ενότητα 59
5.2.1 Αποτελέσματα της ενότητας «5.1 Ακολουθίες», σχολικό βιβλίο Α’ Λυκείου 59
5.2.2 Αποτελέσματα της ενότητας «3.5 Άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου», σχολικό βιβλίο Β’ Λυκείου 59
5.2.3 Αποτελέσματα των ενοτήτων του σχολικού βιβλίου της Γ’ Λυκείου 60
5.2.4 Συνολικά αποτελέσματα από τα αναλυθέντα έργα των ελληνικών βιβλίων 62
5.3 Αποτελέσματα ανάλυσης σχολικού βιβλίου της Κύπρου ανά ενότητα 63
5.4 Σύγκριση μεταξύ ελληνικού και κυπριακού σχολικού βιβλίου 65
Κεφάλαιο 6. Συζήτηση 68
Βιβλιογραφικές αναφορές 71
Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία 71
Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία 72

Λίστα εικόνων

Εικόνα 1: Κατηγορίες μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία σύμφωνα με τους Ball, Thames & Phelps (2008) 22
Εικόνα 2: Αναθεώρηση του τριμερούς μοντέλου προγράμματος σπουδών με την προσθήκη του σχολικού εγχειριδίου σαν γέφυρα μεταξύ του προοριζόμενου και του εφαρμοσμένου προγράμματος σπουδών (Valverde et al., 2002, p. 13)........ 32
Εικόνα 3: Δομή του θεματικού πεδίου: Αριθμός, Άλγεβρα και Ανάλυση 34
Εικόνα 4: Ποιο είναι το 1/6 του 1/2 πάνω στο σχήμα; 41
Εικόνα 5: Εργαλείο ανάλυσης της Brandstorm (p.47), το οποίο θα χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση των ελληνικών σχολικών εγχειριδίων 42
Εικόνα 6: Άσκηση 1, σελίδα 124, Άλγεβρα Α' Λυκείου 45
Εικόνα 7: Άσκηση 3, σελίδα 124, Άλγεβρα Α' Λυκείου 46
Εικόνα 8: Άσκηση 4, σελίδα 124, Άλγεβρα Α' Λυκείου 46
Εικόνα 9: Άσκηση 1, σελίδα 46, Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου........ 50
Εικόνα 10: Άσκηση 2, σελίδα 46, Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου........ 51
Εικόνα 11: Άσκηση 3, σελίδα 64, Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου........ 52
Εικόνα 12: Άσκηση 1, σελίδα 79, Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου........ 53
Εικόνα 13: Άσκηση 7, σελίδα 82, Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου........ 54
Εικόνα 14: Δραστηριότητα 1, σελίδα 136, Μαθηματικά Κοινού Κορμού Β' Λυκείου........ 55
Εικόνα 15: Δραστηριότητα 2, σελίδα 168, Μαθηματικά Κοινού Κορμού Β' Λυκείου........ 55
Εικόνα 16: Δραστηριότητα 10, σελίδα 184, Μαθηματικά Κοινού Κορμού Β' Λυκείου........ 56

Λίστα πινάκων

Πίνακας 1: Ενότητες ελληνικού σχολικού βιβλίου προς ανάλυση 37
Πίνακας 2: Ενότητες κυπριακού σχολικού βιβλίου προς ανάλυση 37
Πίνακας 3: Κωδικοποίηση διαστάσεων του εργαλείου ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων 38
Πίνακας 4: Σύνοψη των γνωστικών διαδικασιών, Brändström, p. 49 41
Πίνακας 5: Πίνακας αποτελεσμάτων για την κατηγορία των εικόνων 57
Πίνακας 6: Πίνακας αποτελεσμάτων για την κατηγορία των απαιτούμενων ενεργειών 57
Πίνακας 7: Πίνακας αποτελεσμάτων για την κατηγορία των γνωστικών διαδικασιών 58
Πίνακας 8: Πίνακας αποτελεσμάτων για την κατηγορία των γνωστικών απαιτήσεων 58
Πίνακας 9: Πίνακας συνολικών αποτελεσμάτων 59
Πίνακας 10: Πίνακας αποτελεσμάτων για την ενότητα του ελληνικού σχολικού βιβλίου Α' Λυκείου 59
Πίνακας 11: Πίνακας αποτελεσμάτων για την ενότητα του ελληνικού σχολικού βιβλίου Β' Λυκείου 60
Πίνακας 12: Πίνακας αποτελεσμάτων ελληνικού σχολικού βιβλίου Γ' Λυκείου ανά ενότητα.... 61
Πίνακας 13: Πίνακας αποτελεσμάτων για τα ελληνικά σχολικά βιβλία 62
Πίνακας 14: Πίνακας αποτελεσμάτων κυπριακού σχολικού βιβλίου Β' Λυκείου ανά ενότητα... 64
Πίνακας 15: Πίνακας αποτελεσμάτων για το κυπριακό σχολικό βιβλίο Β' Λυκείου 65

Λίστα γραφημάτων

Γράφημα 1: Σύγκριση εμφανιζόμενων εικόνων στα σχολικά εγχειρίδια των δύο χωρών 66
Γράφημα 2: Σύγκριση απαιτούμενων ενεργειών στα σχολικά εγχειρίδια των δύο χωρών 66
Γράφημα 3: Σύγκριση απαιτούμενων διαδικασιών στα σχολικά εγχειρίδια των δύο χωρών 67
Γράφημα 4: Σύγκριση γνωστικών απαιτήσεων στα σχολικά εγχειρίδια των δύο χωρών 68

Λίστα συντομογραφιών

Συντομογραφίες	**Περιγραφή**
CCK	Common Content Knowledge
HCK	Horizon Content Knowledge
KCS	Knowledge of Content and Students
KCT	Knowledge of Content and Teaching
MCK	Mathematical Content Knowledge
PCK	Pedagogical Content Knowledge
SCK	Specialized Content Knowledge

Εισαγωγή

Το ευρύτερο ερευνητικό πλαίσιο

Κατά τη δεκαετία του 1980, οι σχεδιαστές της εκπαιδευτικής πολιτικής των ΗΠΑ θεωρούν πως είναι απαραίτητο να εφαρμοστούν ορισμένες αλλαγές ώστε να αναβαθμιστεί η διδασκαλία ως επαγγελματική δραστηριότητα. Για να υλοποιηθεί αυτό, απαραίτητη προϋπόθεση ήταν να αναβαθμιστούν τα πρότυπα σύμφωνα με τα οποία κρίνονταν οι εκπαιδευτικοί καθώς και να είναι πιο ευδιάκριτα. Στην προσπάθεια αυτή, οι αρμόδιοι φορείς υπεύθυνοι για την εκπαιδευτικοί πολιτική, αρχίζουν να λαμβάνουν αποφάσεις σχετικά με την αξιολόγηση των εκπαιδευτικών βασιζόμενοι σε έρευνες από τις οποίες παραλείπονταν σημαντικά χαρακτηριστικά και δυσκολίες της διδασκαλίας.

Σημαντικό ρόλο σε αυτό έπαιξε το γεγονός πως δεν υπήρχε ένα σώμα γνώσης σύμφωνα με το οποίο κρίνονταν οι εκπαιδευτικοί (Shulman, 1987). Ο Lee Shulman είναι ένας επιστήμονας ο οποίος έχει σημαντικότατη συνεισφορά στον τομέα της διδακτικής μέσα από έρευνες οι οποίες, με τη βοήθεια συνεργατών του, είχαν σκοπό να αναδείξουν συγκεκριμένα στοιχεία απαραίτητα για έναν ικανό εκπαιδευτικό καθώς και χαρακτηριστικά που συμβάλλουν σε μια αποτελεσματική διδασκαλία. Είναι ευρύτερα γνωστός για την εδραίωση του όρου «Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου» στην εκπαιδευτική κοινότητα και το έργο του είχε σημαντική επιρροή στον τομέα της εκπαίδευσης.

Ο Shulman διαπιστώνει ότι στο τέλος του 19ου αιώνα η γνώση του γνωστικού αντικειμένου θεωρούνταν σημαντική για τη διδασκαλία και η γνώση των θεωριών και μεθόδων διδασκαλίας είχαν υποδεέστερο ρόλο. Τη δεκαετία του 1980 το κλίμα αλλάζει ριζικά και πολλές πολιτείες αναθεωρούν την προσέγγισή τους στο τι πρέπει να ξέρει ένας εκπαιδευτικός. Προτάθηκαν κατηγορίες όπως «αναγνώριση ατομικών διαφορών» και «κατανόηση των νέων» οι οποίες βασίζονταν σε μια ανερχόμενη, τότε, θεματική ερευνών με στόχο την αναγνώριση μοτίβων καθηγητικής συμπεριφοράς που συνεισφέρουν στη βελτιωμένη απόδοση των μαθητών. Η αλλαγή αυτή ήταν τόσο έντονη που πλέον η γνώση του γνωστικού αντικειμένου απουσίαζε ή είχε δευτερεύοντα ρόλο στην ερευνητική δραστηριότητα. Την απουσία εστίασης στη γνώση του γνωστικού αντικειμένου στις έρευνες της διδακτικής ο Shulman την ονομάζει το πρόβλημα του «απολεσθέντος παραδείγματος (missing paradigm problem)» (Shulman, 1986, p. 6). Αναγνωρίζεται πως υπάρχει ανάγκη για ένα πιο συνεκτικό θεωρητικό πλαίσιο για τη γνώση περιεχομένου και προτείνει να γίνει διαχωρισμός σε τρεις κατηγορίες (Shulman, 1986, p. 9):

- Γνώση περιεχομένου (subject matter content knowledge)
- Παιδαγωγική γνώση περιεχομένου (pedagogical content knowledge)
- Γνώση του Προγράμματος Σπουδών (curricular knowledge)

Η Γνώση Περιεχομένου αναφέρεται στη γνώση και στη δομή της γνώσης στο μυαλό του εκπαιδευτικού. Περιλαμβάνει περισσότερα από την απλή κατανόηση των γεγονότων και εννοιών του πεδίου. Περιέχει τόσο την κατανόηση του θέματος από τον εκπαιδευτικό όσο και την ικανότητά του να οργανώνει αυτή τη γνώση ώστε να την μεταδίδει στους μαθητές. Είναι κομβικής σημασίας οι εκπαιδευτικοί να μην περιορίζονται στη γνώση ορισμών και μεθόδων, αλλά να είναι σε θέση να αποδείξουν γιατί μια πρόταση είναι πλέον έγκυρη, γιατί αξίζει να την γνωρίζουν οι μαθητές και με ποιο τρόπο σχετίζεται με άλλες προτάσεις. Επιπλέον, αναμένεται από τον εκπαιδευτικό να γνωρίζει τον λόγο για τον οποίο ένα θέμα είναι βασικό και ένα άλλο πιο επικουρικό.

Η Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου είναι ένα άλλο είδος γνώσης περιεχομένου η οποία περιλαμβάνει τα χαρακτηριστικά του περιεχομένου που σχετίζονται με τη διδασκαλία. Αυτή αποτελείται από τους τρόπους με τους οποίους η διατύπωση, η αναπαράσταση και η παρουσίαση του υλικού κάνει κατανοητό ένα ζήτημα σε άλλους (π.χ. χρήσιμες αναπαραστάσεις, αναλογίες, παραδείγματα, επεξηγήσεις). Περιέχει επίσης την αντίληψη του τι κάνει δύσκολη ή εύκολη την μάθηση ενός θέματος. Αυτό συνήθως σχετίζεται με την προηγούμενη γνώση την οποία διαθέτουν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της μάθησης. Αν αυτή η γνώση χαρακτηρίζεται από παρανοήσεις, είναι απαραίτητο οι εκπαιδευτικοί να γνωρίζουν τις καλύτερες στρατηγικές οι οποίες θα επιτρέψουν στους μαθητές να αναδιοργανώσουν αποτελεσματικά τη δομή της γνώσης τους.

Η Γνώση του Προγράμματος Σπουδών περιλαμβάνει την ικανότητα του εκπαιδευτικού να αναγνωρίζει τις διαθέσιμες εναλλακτικές με σκοπό τη διευκόλυνση της διδασκαλίας. Είναι η κατανόηση όλων των διαθέσιμων εργαλείων των οποίων η ενσωμάτωση είναι εφικτή για τη διδασκαλία όπως η χρήση ΤΠΕ, οι επισκέψεις σε εργαστήρια όπου το επιτρέπει η φύση του μαθήματος κ.α. Πέρα από τα παραπάνω, η γνώση αυτή έχει δύο επιπρόσθετες πτυχές τις οποίες ο Shulman αναμένει από έναν επαγγελματία εκπαιδευτικό να διαθέτει. Η πρώτη ονομάζεται Παράλληλη Γνώση του Προγράμματος Σπουδών (Lateral Curriculum Knowledge) και περιγράφει την ικανότητα του εκπαιδευτικού να συνδέει το υλικό ενός μαθήματος με θέματα που συναντώνται και σε διαφορετικές τάξεις. Η δεύτερη ονομάζεται Κατακόρυφη Γνώση του Προγράμματος Σπουδών (Vertical Curriculum Knowledge) και πρόκειται για εξοικείωση με θέματα τα οποία έχουν διδαχθεί τα προηγούμενα χρόνια ή θα διδαχθούν στα επόμενα.

Την επόμενη χρονιά κάνει μια πιο λεπτομερή αναφορά, αυτή τη φορά με στόχο να περιγράψει γενικότερα την επαγγελματική γνώση των εκπαιδευτικών λέγοντας πως αν γινόταν μια κατηγοριοποίηση των απαραίτητων γνώσεων ενός εκπαιδευτικού, θα έπρεπε να περιείχε τουλάχιστον επτά κατηγορίες οι οποίες θα χωρίζονταν ως εξής (Shulman, 1987, p. 8):

- γνώση περιεχομένου
- γενική παιδαγωγική γνώση, με ειδική αναφορά σε αρχές και στρατηγικές οργάνωσης και διαχείρισης της τάξης
- γνώση προγράμματος σπουδών, με ιδιαίτερη κατανόηση των υλικών και των προγραμμάτων που είναι διαθέσιμα για τους εκπαιδευτικούς
- παιδαγωγική γνώση περιεχομένου, το ειδικό αμάλγαμα περιεχομένου και παιδαγωγικής η οποία είναι ιδιαιτερότητα που συναντάται αποκλειστικά στους εκπαιδευτικούς και στην ειδική μορφή επαγγελματικής τους υπόστασης
- γνώση των μαθητών και των χαρακτηριστικών τους
- γνώση των εκπαιδευτικών πλαισίων, από τη λειτουργία των ομάδων στην τάξη, τη διοίκηση και τα οικονομικά της σχολικής μονάδας, μέχρι το χαρακτήρα των κοινοτήτων και της εκπαιδευτικής κουλτούρας

- γνώση των εκπαιδευτικών περιορισμών, σκοπών, αξιών καθώς και γνώση του φιλοσοφικού και ιστορικού υπόβαθρού τους

Αναγκαιότητα της εργασίας

Η έννοια της σύγκλισης μελετάται κυρίως στο πανεπιστήμιο όπου δίνονται οι τυπικοί ορισμού των εννοιών που συνδέονται με αυτή με μεγαλύτερη έμφαση στην αποδεικτική διαδικασία και στην αυστηρότητα αυτής. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, δίνεται έμφαση στη διαισθητική μελέτη και στην μελέτη των διαδικαστικών πτυχών των σχετικών εννοιών (Elias & Dreyfus, 2022).

Λόγω της φύσης της έννοιας αλλά και της διδακτικής της προσέγγισης, συχνά διαπιστώνονται από την έρευνα αρκετές παρανοήσεις στους μαθητές. Για τον λόγο αυτό, υπάρχει ενδιαφέρον να μελετηθούν οι ασκήσεις με τις οποίες έρχονται σε επαφή σχεδόν όλοι οι μαθητές της ελληνικής επικράτειας οι οποίοι θα ακολουθήσουν τον συγκεκριμένο προσανατολισμό. Ακόμη μεγαλύτερο ποσοστό της μαθητικής κοινότητας της Κύπρου θα κληθεί να αντιμετωπίσει τις ασκήσεις που μελετώνται στην εργασία, καθώς η έννοια συναντάται στο βιβλίο κοινού κορμού.

Από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικά με την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων φαίνεται ο σημαντικός ρόλος τους στη διδασκαλία και ο τρόπος που οι μαθητές υποστηρίζονται προκειμένου να ανταποκριθούν στους στόχους του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών. Εξίσου σημαντικό ρόλο διαδραματίζει το σχολικό βιβλίο και για τους εκπαιδευτικούς, με την πλειοψηφία των ίδιων να βασίζονται στα εγχειρίδια για τη διεκπεραίωση της εκπαιδευτικής διαδικασίας (Okeeffe, 2013). Ιδιαίτερα σημαντικός είναι ο ρόλος των παραδειγμάτων και των ασκήσεων που προτείνονται στο σχολικό εγχειρίδιο.

Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας δείχνει ένα έλλειμα σχετικά με την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ιδιαίτερα στη χώρα μας. Επιπρόσθετα η έννοια της σύγκλισης μελετάται στο μεταίχμιο από τη δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια εκπαίδευση και η διδασκαλία της έχει ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Έτσι η παρούσα έρευνα έρχεται να συμβάλλει στο σχετικό κενό που εντοπίζεται στη βιβλιογραφία μελετώντας τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών για την έννοια της σύγκλισης με έμφαση στις προτεινόμενες ασκήσεις.

Σκοπός και ερευνητικοί στόχοι

Με την παρούσα εργασία γίνεται μια προσπάθεια μελέτης των ασκήσεων των σχολικών εγχειριδίων της Ελλάδας και της Κύπρου για την έννοια της σύγκλισης. Η πραγματοποίηση της έρευνας σκοπεύει σε μια περιγραφή της κατάστασης των σχολικών εγχειριδίων σχετικά με την έννοια. Κύριος στόχος της εργασίας είναι να εξετάσει τις επιλεγμένες ασκήσεις σύμφωνα με τις τέσσερις διαστάσεις του εργαλείου ανάλυσης και να συγκρίνει τα αποτελέσματα μεταξύ των δύο χωρών. Προσπαθεί να παρουσιάσει τα διαφορετικά είδη έργων που εμφανίζονται στα σχολικά εγχειρίδια.

Επισκόπηση της εργασίας

Η παρούσα εργασία αποτελείται από έξι κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο επιχειρείται μια ανασκόπηση ερευνών οι οποίες αφορούν την μαθηματική και παιδαγωγική γνώση περιεχομένου καθώς και τη σχέση των γνώσεων των καθηγητών με την αποδοτικότερη μάθηση. Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάται η έννοια της σύγκλισης κάνοντας αναφορά στις δυσκολίες και τα εμπόδια που συναντούν οι μαθητές σχετικά με το άπειρο, και στην περίπτωση της σύγκλισης ακολουθιών. Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μια αναφορά στα σχολικά βιβλία, στα προγράμματα σπουδών και μια σύντομη μελέτη για την έννοια της σύγκλισης στο νέο πρόγραμμα σπουδών. Στο τέταρτο κεφάλαιο περιγράφεται η μέθοδος, το υλικό της ανάλυσης, το εργαλείο που χρησιμοποιείται για την ανάλυση και δίνονται κάποια ενδεικτικά παραδείγματα από τις δραστηριότητες που αναλύονται. Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης των σχολικών βιβλίων των δύο χωρών και γίνεται μια σύγκριση. Στο έκτο και τελευταίο κεφάλαιο αναφέρονται τα συμπεράσματα της έρευνας.

Κεφάλαιο 1. Γνώση περιεχομένου

1.1 Μαθηματική γνώση περιεχομένου

Το έργο ενός εκπαιδευτικού είναι πολυδιάστατο και πολλές φορές δύσκολο να περιγραφεί με ακρίβεια. Παρόλο που το έργο του Shulman (1986) έθεσε τα θεμέλια για την μελέτη του περιεχομένου της διδασκαλίας, ακόμη υπάρχει η ανάγκη για καλύτερη θεωρητική πλαισίωση και εμπειρική έρευνα. Η έρευνα του Shulman και των συνεργατών του ήταν ιδιαίτερα σημαντική επειδή ανέδειξε τη σημασία της γνώσης του κάθε γνωστικού αντικειμένου στην αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας. Λόγω της πολυπλοκότητας της διδασκαλίας, θεωρήθηκε ότι δεν προσφέρει ιδιαίτερα ένας κατάλογος που περιλαμβάνει τα απαραίτητα στοιχεία που πρέπει να έχει μία αποτελεσματική διδασκαλία. Έτσι αρκετοί ερευνητές προσπάθησαν να αναπτύξουν ένα θεωρητικό πλαίσιο για τη γνώση που αφορά, συγκεκριμένα, τη διδασκαλία του μαθήματος των μαθηματικών.

1.1.1 Μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία

Στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης θεωρείται αυτονόητο ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γνωρίζουν το γνωστικό τους αντικείμενο. Όμως η γνώση του γνωστικού αντικειμένου δεν εξασφαλίζει από μόνη της μια ικανοποιητική διδασκαλία (Ball, 2003). Οι γνώσεις για τη διδασκαλία μαθηματικών απαιτούν μεγαλύτερο βάθος και λεπτομέρεια από αυτή που είναι απαραίτητη για την απλή εφαρμογή αλγορίθμων (Ball, Hill & Bass, 2005). Ένας εκπαιδευτικός, «δεν αρκεί απλά να κατανοεί ότι κάτι είναι έτσι, αλλά πρέπει να αντιλαμβάνεται γιατί είναι έτσι »(Shulman, 1986, p. 9). Προκειμένου να είναι σε θέση να απαντήσει κατάλληλα στα ερωτήματα των μαθητών, πρέπει εκτός από το να κατανοεί τις μαθηματικές ιδέες πίσω από τα ερωτήματα, να γνωρίζει και πως να εξηγήσει αυτές τις ιδέες ώστε να γίνουν κατανοητές από τους μαθητές (Krauss et al., 2008). Πίσω από την μαθηματική γνώση περιεχομένου κρύβεται βαθύτατη κατανόηση των αντικειμένων που διδάσκονται. Το πόσο καλά μαθηματικά γνωρίζει ένας/μία εκπαιδευτικός έχει κομβική σημασία στην ικανότητά του/της να επεξηγεί, να αξιολογεί την πρόοδο των μαθητών και να παίρνει αποτελεσματικές αποφάσεις κατά τη διδασκαλία (π.χ. αναγνώριση σημείων που χρήζουν έμφασης) (Ball, Hill & Bass, 2005).

Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γνωρίζουν το αντικείμενο το οποίο διδάσκουν και να είναι σε θέση να κάνουν υπολογισμούς και να επιλύουν προβλήματα. Δεν υπάρχει αμφισβήτηση πως αν οι γνώσεις για το αντικείμενο που διδάσκεται από τον/την εκπαιδευτικό είναι ανεπαρκείς, τότε ο ίδιος δε θα είναι σε θέση να ανταπεξέλθει στις απαιτήσεις της διδασκαλίας. Επίσης, ιδιαίτερα προσεκτικοί πρέπει να είναι οι εκπαιδευτικοί με τους όρους και τους συμβολισμούς που χρησιμοποιούν. Έρευνες δείχνουν πως η ευχέρεια στη χρήση της μαθηματικής γλώσσας είναι σημαντική για την ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων και μπορεί να προβλέψει την μαθηματική απόδοση (Riccomini et al., 2015). Ακόμη, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να αναγνωρίζουν τα λάθη των μαθητών αλλά και των σχολικών εγχειριδίων. Συστήνεται να είναι ιδιαίτερα προσεκτικοί σε σημεία που μπορεί να αναπτυχθούν λανθασμένα μοτίβα τα οποία πρέπει να γίνονται αντιληπτά άμεσα και να διορθώνονται προτού ενισχυθούν από λανθασμένη επανάληψη (Dean, 1982).

Μάλιστα, η διαδικασία αυτή είναι απαραίτητο να συμβαίνει γρήγορα και χωρίς καθυστερήσεις καθώς σε μία τάξη δεν είναι εφικτό κάθε μαθητής που κάνει λάθος να περιμένει για μεγάλο χρονικό διάστημα μέχρι ο εκπαιδευτικός να το εντοπίσει και να το επεξεργαστεί (Βαϊνάς, 2007; Ball, 2003; Ball et al., 2008). Η διαχείριση του λάθους είναι μια τεράστια θεματική, συνεπώς, για την αντιμετώπισή του προτείνεται ενδεικτικά και με συντομία το εξής μοντέλο, το οποίο αποτελείται από τρία στάδια (Βαϊνάς, 2007):

- Στο πρώτο στάδιο, γίνεται το λάθος και αναγνωρίζεται από το πρόσωπο που κάνει το λάθος, τους συμμαθητές του, ή τον εκπαιδευτικό. Προτιμάται η αναγνώριση να γίνει από τον μαθητή που κάνει το λάθος. Αν η αναγνώριση γίνει από συμμαθητές, δίνεται προσοχή στην αντίδραση τους σε περίπτωση που δεν είναι πρέπουσα.
- Στο δεύτερο στάδιο ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να εντοπίσει τις αιτίες που κρύβονται πίσω από το λάθος και να το εντάξει στην κατάλληλη κατηγορία.
- Στο τρίτο και κρισιμότερο στάδιο, διορθώνεται το λάθος με γνώση της αιτίας που το δημιούργησε και με στόχο την μέγιστη αξιοποίησή του.

1.1.2 Κατηγορίες μαθηματικής γνώσης περιεχομένου

Όπως είδαμε, η διδασκαλία των μαθηματικών απαιτεί περισσότερη γνώση από αυτή που συναντάται στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών (Ball, Hill & Bass, 2005). Φυσικό επακόλουθο, λοιπόν, είναι να γίνει προσπάθεια μελέτης σχετικά με το τι περιλαμβάνει αυτή η γνώση, τι πρέπει να γνωρίζει ένας εκπαιδευτικός προκειμένου να είναι σε θέση να διδάσκει αποτελεσματικά. Οι Ball, Thames & Phelps (2008) προσπαθούν να ρίξουν φως στους τρόπους με τους οποίους τα μαθηματικά εμπλέκονται στις καθημερινές απαιτήσεις της διδασκαλίας με στόχο να ερευνήσουν τη φύση της επαγγελματικά προσανατολισμένης γνώσης του γνωστικού αντικειμένου των μαθηματικών. Αναπτύσσουν μια ερευνητική προσέγγιση (βιβλιογραφική ανασκόπηση, εμπειρίες της ερευνητικής ομάδας, συλλογή αναλυτικών εργαλείων για το συντονισμό μαθηματικής και παιδαγωγικής οπτικής) η οποία εστιάζει στην εργασία που κάνουν οι εκπαιδευτικοί κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Επιπλέον, μελετούν το περιεχόμενο της γνώσης για τη διδασκαλία των μαθηματικών, προκειμένου να εδραιώσουν εννοιολογικά τις γνωστικές απαιτήσεις και δεξιότητες της διδασκαλίας τους.

Η ερευνητική ομάδα της Ball διακρίνει την μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία σε δύο μέρη. Την *γνώση του γνωστικού αντικειμένου* (Subject Matter Knowledge - SMK) και την *παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου* (Pedagogical Content Knowledge - PCK). Η γνώση του γνωστικού αντικειμένου υποδιαιρείται στην α) Κοινή Γνώση Περιεχομένου (Common Content Knowledge - CCK), β) Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου (Specialized Content Knowledge-SCK), και γ) στη Γνώση του Ορίζοντα του Περιεχομένου (Horizon Content Knowledge - HCK). Η Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου περιλαμβάνει α) τη Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών (Knowledge of Content and Students - KCS), β) Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας (Knowledge of Content and Teaching - KCT) και γ) τη Γνώση του Περιεχομένου και του Προγράμματος Σπουδών (Knowledge of Content and Curriculum).

Το πρώτο πεδίο της μαθηματικής γνώσης περιεχομένου ονομάζεται Κοινή Γνώση Περιεχομένου. Ορίζουν την κοινή γνώση περιεχομένου ως «τις μαθηματικές γνώσεις που είναι γνωστές από κοινού με άλλους που γνωρίζουν και χρησιμοποιούν τα μαθηματικά» (Ball, Thames & Phelps, 2008, p. 403). Πρόκειται για την μαθηματική γνώση και δεξιότητα που χρησιμοποιείται και σε συνθήκες διαφορετικες από τη διδασκαλία. Είναι απαραίτητο οι εκπαιδευτικοί να γνωρίζουν το υλικό το οποίο διδάσκουν και να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών ή λανθασμένες υποδείξεις ενός σχολικού βιβλίου. Πρέπει, επίσης, να χρησιμοποιούν ορθά την ορολογία και τον συμβολισμό των εννοιών για τις οποίες μιλούν. Εν συντομία, απαιτείται από τους εκπαιδευτικούς να έχουν την ικανότητα να ανταπεξέλθουν στις απαιτήσεις του υλικού του οποίου αναθέτουν οι ίδιοι στους μαθητές. Πολλές από τις μαθηματικές δεξιότητες και γνώσεις των εκπαιδευτικών δε συναντώνται αποκλειστικά στο επάγγελμά του καθώς και άλλα επαγγέλματα απαιτούν μαθηματικούς υπολογισμούς, μαθηματική μοντελοποίηση κ.λ.π. Για παράδειγμα, αναμένεται από έναν αποφοιτο πολυτεχνικής σχολής να γνωρίζει πως οι διαγώνιοι ενός ρόμβου τέμνονται κάθετα. Για τον λόγο αυτό, αξίζει να σημειωθεί πως με τη λέξη «κοινή» δεν σημαίνει πως οποιοσδήποτε έχει ετούτη τη γνώση, αλλά εννοείται το γεγονός πως χρησιμοποιείται και σε άλλα πλαίσια, χωρίς να είναι μοναδική στο πλαίσιο της διδασκαλίας.

Το δεύτερο πεδίο παρουσιάζει το μεγαλύτερο ενδιαφέρον και ονομάζεται Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου, το οποίο πρόκειται για «την μαθηματική γνώση και δεξιότητα που απαιτείται ειδικά για τη διδασκαλία» (Ball, Thames & Phelps, 2008, p. 400). Τέτοιου είδους γνώση δε συναντάται, ούτε είναι απαραίτητη σε άλλα πλαίσια πέρα από την εκπαίδευση. Γενικότερα, είναι γεγονός πως οι καθηγητές έχουν διαφορετικές υποχρεώσεις από άλλους επαγγελματίες που χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στην εργασία τους. Κάποιες από τις μαθηματικές δραστηριότητες της διδασκαλίας από τις συνολικά δεκαέξι από τις οποίες αναφέρει η ομάδα της Ball είναι:

1. παρουσίαση νέων ιδεών
2. απάντηση στα «γιατί» των μαθητών
3. εύρεση παραδείγματος για δικαιολόγηση
4. αναγνώριση του τι περιλαμβάνει η χρήση μιας συγκεκριμένης αναπαράστασης
5. σύνδεση αναπαραστάσεων με άλλες ιδέες και άλλες αναπαραστάσεις
6. σύνδεση θεμάτων με θέματα που προηγήθηκαν ή θα ακολουθήσουν
7. παροχή μαθηματικών επεξηγήσεων
8. παραγωγικές ερωτήσεις προς τους μαθητές

Οι δραστηριότητες αυτές απαιτούν μοναδική μαθηματική κατανόηση πέρα από τα όρια του υλικού που διδάσκονται οι μαθητές στην τάξη. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να είναι σε θέση να μιλούν για τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιείται η μαθηματική γλώσσα, να επιλέγουν και να χρησιμοποιούν τις κατάλληλες αναπαραστάσεις, να προσφέρουν επεξηγήσεις. Η εκπαιδευτική διαδικασία απαιτεί ένα ξεδίπλωμα (unpacking) των μαθηματικών μοναδικό, το οποίο δε συναντάται σε άλλο περιβάλλον. Περιλαμβάνει τη χρήση αποσυμπιεσμένης (decompressed) μαθηματικής γνώσης η οποία μπορεί να διδαχθεί κατευθείαν στους μαθητές καθώς αναπτύσσουν κατανόηση. Ο στόχος είναι οι μαθητές να αναπτύξουν ευχέρεια με συμπιεσμένη (compressed) μαθηματική γνώση και να έχουν την ικανότητα να χρησιμοποιούν εκλεπτυσμένες μαθηματικές ιδέες και διαδικασίες. Συνεπώς, πέρα από την εξοικείωση με την συμπιεσμένη μαθηματική γνώση, είναι απαραίτητο οι εκπαιδευτικοί να κατέχουν και την αποσυμπιεσμένη μαθηματική γνώση, καθώς η διδασκαλία περιλαμβάνει τη διαδικασία του να γίνονται ορατά συγκεκριμένα στοιχεία του περιεχομένου από τους μαθητές.

Σε αυτό το σημείο κρίνεται αναγκαία η επεξήγηση των εννοιών συμπιεσμένη και αποσυμπιεσμένη μαθηματική γνώση. Οι Feikes & Schwingendorf (2008), αναφέρονται στη συμπίεση της μαθηματικής γνώσης λέγοντας πως «είναι η ιδέα σύμφωνα με την οποία, για την ανάπτυξη πολύπλοκης μαθηματικής σκέψης, είναι απαραίτητο το υποκείμενο να συμπτύξει προηγούμενες ιδέες σε συμπαγή και πιο ακριβή μαθηματικά αντικείμενα» (p. 3). Για να μπορέσει ο ανθρώπινος εγκέφαλος να μετατρέψει την πληροφορία σε διαχειρίσιμα κομμάτια, είναι χρήσιμο να γίνει μια σύμπτυξη των μαθηματικών διαδικασιών ώστε να μπορούν να θεωρηθούν ως νοητικά μαθηματικά αντικείμενα, με στόχο να γίνονται υπολογισμοί χωρίς να αναδημιουργείται η διαδικασία κάθε φορά.

Όσον αφορά την έννοια της αποσυμπιεσμένης μαθηματικής γνώσης, οι Ball & Bass (2000, p. 98) την περιγράφουν ως «την ικανότητα της αποδόμησης της μαθηματικής γνώσης σε λιγότερο εκλεπτυσμένη, με τελική μορφή ένα αποτέλεσμα στο οποίο τα στοιχειώδη συστατικά είναι προσβάσιμα και ορατά». Σύμφωνα με τους ίδιους, μεγάλη πρόκληση για τους εκπαιδευτικούς είναι να αποσυμπιέζουν την μαθηματική τους γνώση ώστε να είναι κατάλληλη για ένα συγκεκριμένο πλαίσιο διδασκαλίας και μάθησης. Οι Ball & Bass (2003), αναφέρονται με λεπτομέρεια στις έννοιες αυτές λέγοντας πως ένα κύριο στοιχείο της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία είναι η αποσυμπίεση της μαθηματικής γνώσης. Σημαντικό χαρακτηριστικό της επιστήμης των μαθηματικών είναι η συμπίεση της πληροφορίας σε χρήσιμες μορφές της, καθώς η δομή της γίνεται ξεκάθαρη και κατανοητή.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και ένα τρίτο πεδίο για το οποίο υπάρχει, όμως, επιφύλαξη για το αν είναι μέρος της γνώσης περιεχομένου ή διαχέεται σε άλλες κατηγορίες. Το πεδίο αυτό ονομάζεται Γνώση του Ορίζοντα του Περιεχομένου και πρόκειται για μια συνειδητοποίηση του πως οι μαθηματικές έννοιες εξελίσσονται στο πρόγραμμα σπουδών (Ball, Thames & Phelps, 2008). Περιλαμβάνει, επίσης, την ικανότητα εύρεσης συνδέσεων με μεταγενέστερες και πιο προηγμένες μαθηματικές ιδέες. Η κατοχή αυτού του είδους γνώσης μπορεί να βοηθήσει στην επιχειρηματολογία μιας έννοιας λαμβάνοντας υπόψη το τι θα ακολουθήσει στις επόμενες τάξεις.

Οι Ball και Bass μελετούν εκτενέστερα την έννοια του μαθηματικού ορίζοντα (Ball & Bass, 2009) έχοντας σαν στόχο να γίνουν καλύτερα κατανοητές οι μαθηματικές απαιτήσεις για την υποστήριξη των μαθητών να μάθουν μαθηματικά. Γίνεται μελέτη παραδειγμάτων/επεισοδίων διδασκαλίας, με την υπόθεση πως αυτός είναι ένας χρήσιμος τρόπος για την κατανόηση αυτών των απαιτήσεων. Αναφέρουν πως «η διδασκαλία απαιτεί μια αίσθηση του πως τα μαθηματικά του τώρα συνδέονται με πιο προχωρημένες μαθηματικές ιδέες, δομές και αρχές» (Ball & Bass, 2009, p. 6). Αναφέρουν, επίσης, πως η γνώση του ορίζοντα του περιεχομένου περιλαμβάνει αυτά τα στοιχεία των μαθηματικών τα οποία, παρόλο που δεν περιέχονται στο πρόγραμμα σπουδών, είναι χρήσιμα για την μάθηση και μπορούν νοηματοδοτήσουν τη σημασία του μαθηματικού αντικειμένου με το οποίο ασχολείται η τάξη. Τα χαρακτηριστικά αυτά περιλαμβάνουν την κρίση της μαθηματικής σημασίας του υλικού, την αναγνώριση της μαθηματικής σημασίας στα λεγόμενα των μαθητών, την επισήμανση σημείων μεγαλύτερης σημασίας, τη δημιουργία συνδέσεων με παλαιότερες ή/και καινούριες έννοιες, την αναγνώριση μαθηματικών ευκαιριών και την αντίληψη μαθηματικών στρεβλώσεων που είναι πιθανό μεταγενέστερα να οδηγήσουν σε σύγχυση. Θεωρούν, λοιπόν, πως όταν οι εκπαιδευτικοί έχουν αντίληψη όλων των κατευθύνσεων, και του τι προηγείται και του τι ακολουθεί για τους μαθητές, η διδασκαλία χαρακτηρίζεται από μεγαλύτερη επιδεξιότητα. Αυτού του είδους η γνώση αποτελείται από τέσσερα δομικά στοιχεία (Ball & Bass, 2009, p. 6):

- Αίσθηση του μαθηματικού περιβάλλοντος γύρω από το σημείο στο οποίο βρίσκεται η διδασκαλία
- Κυρίαρχες ιδέες και δομές
- Σημαντικές μαθηματικές πρακτικές
- Θεμελιώδεις μαθηματικές αξίες και ευαισθησίες

Η Γνώση του Ορίζοντα του Περιεχομένου θεωρείται, λοιπόν, σαν μια στοιχειώδης οπτική της πιο προχωρημένης γνώσης η οποία παρέχει στους εκπαιδευτικούς βάθος και προσανατολισμό για την εργασία τους (Ball & Bass, 2009).

Οι Jakobsen, Thames, Ribeiro & Delaney (2012) μελετούν τον μαθηματικό ορίζοντα καθώς αναφέρουν πως υπάρχει ανάγκη για κατανόηση του πως ο μαθηματικός ορίζοντας συμβάλλει στη διδασκαλία. Για την μελέτη αυτή αντλούν επεισόδια διδασκαλίας από προηγούμενες έρευνες στα οποία συναντάται η χρήση γνώσης μαθηματικού ορίζοντα. Η ομάδα του Jakobsen συμμερίζεται την ίδια άποψη με τους Ball & Bass, βλέποντας τη γνώση του ορίζοντα του περιεχομένου σαν μια στοιχειώδη οπτική προχωρημένης γνώσης. Είναι πεπεισμένοι πως τα ανώτερα μαθηματικά πρέπει να σχετίζονται με τη διδασκαλία στο σχολείο. Πιο συγκεκριμένα, υποστηρίζουν πως η HCK τοποθετεί τον εκπαιδευτικό σε θέση να πράττει και να ομιλεί με προσοχή στην αυστηρότητα και να έχει οικειότητα με προχωρημένα μαθηματικά, με τρόπο που ενισχύεται η διδασκαλία. Η φύση της HCK περιλαμβάνει διαισθητική κατανόηση της ιδέας που μελετάται και οικειότητα με βασικές τεχνικές ώστε να είναι σε θέση να ανταποκριθεί ο εκπαιδευτικός, χωρίς, όμως, να είναι απαραίτητο να την μελετά επίσημα μέσα στην τάξη. Ακόμα, η HCK απαιτεί τρόπους σκέψης ιδεών με πιο ευρύ φακό και κατανόηση προχωρημένων μαθηματικών δομών, ιδιαίτερα αυτών που είναι σχετικές με το σχολικό πρόγραμμα σπουδών.

Οι Zazkis & Mamolo (2011) μελετούν, μέσα από κάποια παραδείγματα διδασκαλίας, πως η γνώση του εκπαιδευτικού για το γνωστικό αντικείμενο μπορεί να συμβάλλει στις επιλογές των τρόπων με τον οποίο θα εξηγήσουν κάτι αλλά και να αποδειχθεί ωφέλιμο για την μάθηση των μαθητών. Η γνώση αυτή ξεπερνά το επίπεδο του σχολικού προγράμματος σπουδών και αποκτάται κατά τη φοίτηση στο πανεπιστήμιο ή στο κολλέγιο, Θεωρούν τον μαθηματικό ορίζοντα σαν προχωρημένη οπτική της στοιχειώδους γνώσης. Σύμφωνα με τη δική τους άποψη, η HCK συνδέεται με την ανώτερη μαθηματική γνώση, την οποία ανώτερη μαθηματική γνώση ορίζουν ως «γνώση του γνωστικού αντικειμένου η οποία αποκτάται κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών σπουδών σε κολλέγια ή πανεπιστήμια». Την εφαρμογή γνώσεων που αποκτώνται στο πανεπιστήμιο ή κολλέγιο στα πλαίσια της πρωτοβάθμιας ή δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, την αναγνωρίζουν σαν παράδειγμα της γνώσης του μαθηματικού ορίζοντα (Zazkis & Mamolo, 2011).

Βλέπουν, δηλαδή, την HCK σαν προχωρημένη γνώση όσον αφορά τις έννοιες, τις συνδέσεις μεταξύ εννοιών, κυρίαρχες ιδέες και δομές, η οποία ακουμπά στις ιδέες του αναλυτικού προγράμματος της πρωτοβάθμιας ή/και της δευτεροβάθμιας.

1.2 Παιδαγωγική γνώση περιεχομένου

Ο όρος παιδαγωγική γνώση περιεχομένου έχει χρησιμοποιηθεί από διάφορους ερευνητές με διαφορετικό τρόπο για να περιγράψει πτυχές της γνώσης περιεχομένου αλλά και της σχέσης της με τη διδασκαλία Ball, Thames & Phelps (2008). Η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου εκφράζει τον συνδυασμό του περιεχομένου και της παιδαγωγίας ώστε να γίνει κατανοητό το πως συγκεκριμένα ζητήματα ή προβλήματα οργανώνονται και μετασχηματίζονται στα διαφορετικά ενδιαφέροντα και στις γνώσεις των μαθητών (Shulman, 1987). Περιλαμβάνει τρόπους αναπαραστάσεων και διατυπώσεων που θα κάνουν το αντικείμενο το οποίο διδάσκεται κατανοητό σε άλλους, όπως χρήσιμες αναλογίες, επεξηγήσεις και παραδείγματα καθώς και την κατανόηση του τι κάνει την μάθηση εύκολη ή δύσκολη (Shulman, 1986). Το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών των Ηνωμένων Πολιτειών (NCTM, 2000, p. 17) αναφέρει πως «η αποδοτική διδασκαλία απαιτεί γνώση και κατανόηση των μαθηματικών, των μαθητών, και παιδαγωγικών στρατηγικών». Δεν επαρκεί μονάχα η γνώση μονάχα του περιεχομένου, είναι απαραίτητο οι εκπαιδευτικοί να είναι εξοικειωμένοι με τις ιδέες και τις έννοιες των μαθηματικών αλλά και να έχουν την ικανότητα να αναπαραστήσουν τα μαθηματικά σαν ένα συνεκτικό και συνδεδεμένο σύνολο (NCTM, 2000).

1.2.1 Κατηγορίες παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου

Συνεχίζοντας με την έρευνα των Ball, Thames & Phelps (2008) οι οποίοι στηρίζονται στο έργο του Shulman, ο όρος Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου διακρίνεται στη Γνώση του Περιεχομένου και των Μαθητών καθώς και στη Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας, προσθέτοντας με δισταγμό και μια τρίτη κατηγορία, την Γνώση Περιεχομένου και Προγράμματος Σπουδών.

Το πρώτο πεδίο της παιδαγωγικής γνώσης το ονομάζουν Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών και πρόκειται για «τη γνώση του εκπαιδευτικού που συνδυάζει το να γνωρίζει για τους μαθητές και για τα μαθηματικά» (Ball, Thames & Phelps, 2008, p. 401). Οι καθηγητές πρέπει να καταλαβαίνουν το συλλογισμό των μαθητών και τα σημεία που τους δυσκολεύουν. Πρέπει να είναι σε θέση να προβλέψουν τι θα κεντρίσει το ενδιαφέρον των μαθητών καθώς και να κατανοούν τις μη ολοκληρωμένες σκέψεις που προσπαθούν να εκφράζουν οι μαθητές. Για να επιτευχθούν τα παραπάνω, είναι απαραίτητη η γνώση της προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών, ανεξάρτητα από το αν χαρακτηρίζεται από παρανοήσεις ή όχι. Απαιτείται, λοιπόν, από τον εκπαιδευτικό να γνωρίζει κατάλληλους τρόπους και στρατηγικές για να αναδιοργανώσει τη γνώση αυτών των μαθητών (Shulman, 1986). Πως όμως διαφοροποιείται από τις υπόλοιπες μορφές γνώσεων; Η αναγνώριση ενός λάθους εντάσσεται στην Κοινή Γνώση Περιεχομένου, η εκτίμηση της φύσης του λάθους, ιδιαίτερα εάν πρόκειται για μη συνηθισμένο λάθος, συνήθως απαιτεί ευελιξία στη σκέψη και προσοχή σε μοτίβα με τρόπους που είναι χαρακτηριστικοί στην Εξειδικευμένη Γνώση

Περιεχομένου, ενώ η εξοικείωση με συχνά λάθη και η εκτίμηση σχετικά με το ποια λάθη είναι πιο πιθανό να κάνουν οι μαθητές είναι παράδειγμα της Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών.

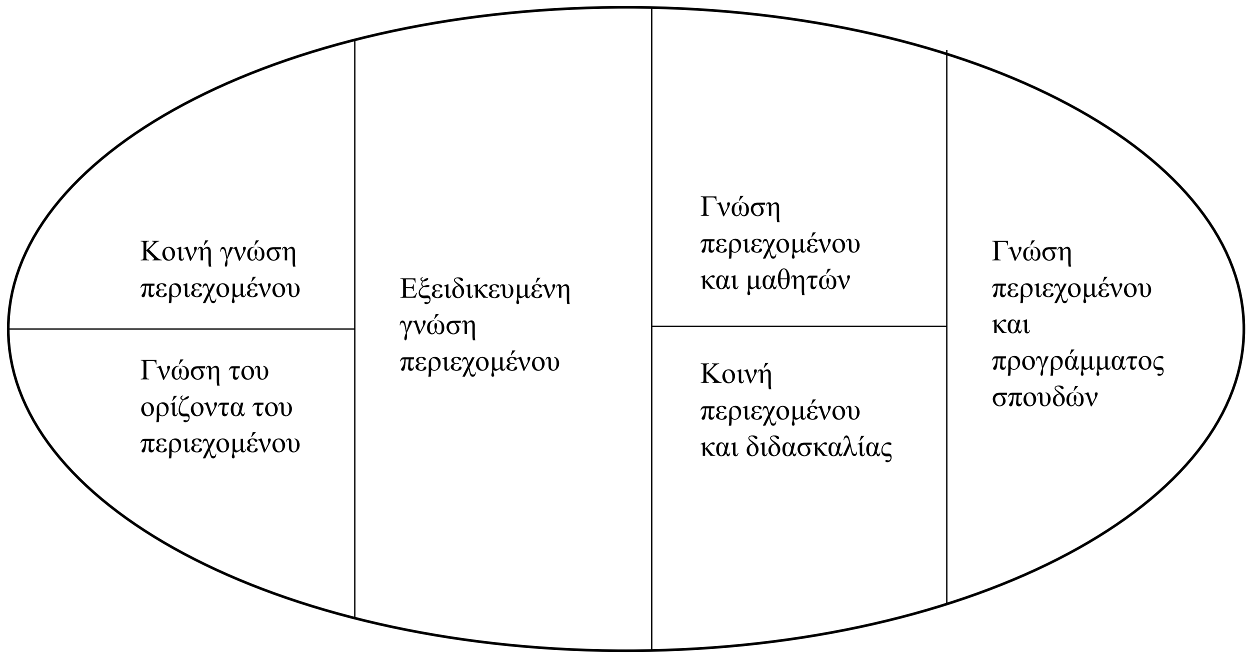
Το δεύτερο πεδίο ονομάζεται Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας και πρόκειται για «το συνδυασμό γνώσεων για τη διδασκαλία αλλά και για τα μαθηματικά» (Ball, Thames & Phelps, 2008, p. 401). Περιλαμβάνει το σχεδιασμό της διδασκαλίας, την επιλογή παραδειγμάτων τα οποία θα χρησιμοποιήσουν για να ξεκινήσουν ή να εμβαθύνουν σε ένα θέμα, την αξιολόγηση πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία μιας ιδέας, την αναγνώριση των επεξηγηματικών μεθόδων που μπορούν να αξιοποιηθούν, την εκμετάλλευση σχολίων ενός μαθητή ως έναυσμα για περαιτέρω συζήτηση. Όλα τα παραπάνω απαιτούν αλληλεπίδραση μεταξύ ειδικής μαθηματικής κατανόησης και κατανόησης παιδαγωγικών ζητημάτων. Η διαδικασία της διδασκαλίας απαιτεί γνώσεις στην τομή μεταξύ περιεχομένου και διδασκαλίας. Πρόκειται για ένα αμάλγαμα μαθηματικών ιδεών ή διαδικασιών και παιδαγωγικών αρχών για τη διδασκαλία του περιεχομένου.

Τέλος, χωρίς απόλυτη βεβαιότητα, οι Ball, Thames & Phelps τοποθετούν σαν τρίτη κατηγορία τη Γνώση του Περιεχομένου και του Προγράμματος σπουδών, ως κομμάτι της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου. Με επιφύλαξη, ωστόσο, αναφέρουν πως είναι πιθανό να ανήκει και σε άλλη κατηγορία ή να είναι και μια ξεχωριστή κατηγορία (Ball, Thames & Phelps, 2008). Σύμφωνα με τον Shulman, το πρόγραμμα σπουδών εκπροσωπείται από το πλήρες εύρος των προγραμμάτων σχεδιασμένων για διδασκαλία συγκεκριμένων μαθημάτων, το διαθέσιμο εκπαιδευτικό υλικό για αυτά τα προγράμματα και τα χαρακτηριστικά που λειτουργούν σαν ενδείξεις και αντενδείξεις για τη χρήση του συγκεκριμένου προγράμματος σπουδών. Αναμένεται από έναν ώριμο εκπαιδευτικό να κατανοεί το αναλυτικό πρόγραμμα και τις εναλλακτικές λύσεις που είναι διαθέσιμες σε αυτό. Τέλος, αναφέρει πως η Γνώση του Περιεχομένου και του Προγράμματος σπουδών έχει δύο διαστάσεις (Shulman, 1986, p. 10):

- Παράλληλη γνώση προγράμματος σπουδών: η ικανότητα του εκπαιδευτικού να συσχετίζει το περιεχόμενο ενός μαθήματος με μαθήματα που συζητώνται ταυτόχρονα σε άλλες τάξεις
- Κάθετη γνώση προγράμματος σπουδών: η οικειότητα με θέματα του ίδιου αντικειμένου που έχουν διδαχθεί σε προγενέστερα σχολικά έτη και θα διδαχθούν στα επόμενα

Κάνοντας μία σύνοψη των παραπάνω, γίνεται εμφανές πως απαραίτητο στοιχείο της επάρκειας ενός εκπαιδευτικού είναι η γνώση του γνωστικού αντικειμένου. Εάν ο ίδιος ο εκπαιδευτικός δεν έχει την ικανότητα να χειρίζεται με ευχέρεια και άνεση το αντικείμενο το οποίο διδάσκει, είναι σχεδόν βέβαιο πως θα βρεθεί σε δύσκολη θέση όταν θα κληθεί να μεταδώσει τη γνώση στους μαθητές. Από την άλλη όμως, μονάχα η γνώση του γνωστικού αντικειμένου δεν είναι αρκετή για την αποτελεσματική διεκπεραίωση της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Τα μαθηματικά που χρησιμοποιεί ένας εκπαιδευτικός στη σχολική τάξη διαφέρουν από τα μαθηματικά που χρησιμοποιούν άλλα επαγγέλματα τα οποία περιλαμβάνουν μαθηματικά. Στο παρακάτω διάγραμμα αναπαρίστανται οι κατηγορίες της μαθηματικής γνώσης απαραίτητες για τη διδασκαλία από τους Ball, Thames & Phelps (2008).

Γνώση του γνωστικού αντικειμένου Παιδαγωγική γνώση περιεχομένου



Εικόνα 1: Κατηγορίες μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία σύμφωνα με τους Ball, Thames & Phelps (2008)

1.2.2 Μαθηματική παιδαγωγική γνώση

Οι Krauss et al. (2008), μέσα από μια εμπειρική έρευνα, αξιολογούν τη γνώση Γερμανών καθηγητών μαθηματικών της δευτεροβάθμιας και ερευνούν αν ο θεωρητικός διαχωρισμός γνώσης περιεχομένου και παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου μπορεί να επιβεβαιωθεί εμπειρικά. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζουν αν η σύνδεση γνώσης περιεχομένου και παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου ποικίλλει ανάλογα με το επίπεδο μαθηματικών γνώσεων, υποθέτοντας πως η σύνδεση θα είναι πιο έντονη σε καθηγητές που εμφανίζουν υψηλό επίπεδο γνώσεων, με αποτέλεσμα να δημιουργείται ακόμα και ένα ενιαίο σώμα γνώσης. Έτσι, προσπαθώντας να προσεγγίσουν την έννοια της παιδαγωγικής γνώσης από μαθηματική σκοπιά, αναφέρουν τρεις κατηγορίες μαθηματικής παιδαγωγικής γνώσης:

- Γνώση για τις δυνατότητες των μαθηματικών δραστηριοτήτων
- Γνώση των γνώσεων και των παρανοήσεων των μαθητών
- Γνώση κατάλληλων επεξηγηματικών μεθόδων

Η σημασία αυτών των τριών κατηγοριών επιβεβαιώνεται και από ευρήματα άλλων ερευνών. Όσον αφορά την πρώτη κατηγορία, τα παραδείγματα και οι δραστηριότητες που τίθενται στην τάξη έχουν μεγάλη σημασία καθώς η επιλογή των κατάλληλων δραστηριοτήτων προσφέρει μεγάλες ευκαιρίες μάθησης και προάγει τη δημιουργική σκέψη των μαθητών (Williams, 2002). Συνεπώς, η γνώση για τις δυνατότητες των μαθηματικών δραστηριοτήτων σχετικά με την μάθηση είναι ένα σημαντικό κομμάτι της μαθηματικής παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου (Krauss, Brunner, Kunter, Baumert, Blum, Neubrand, & Jordan, 2008). O Chapman αναφέρει πως η γνώση περί μαθηματικών δραστηριοτήτων για τη διδασκαλία είναι πολυδιάστατη (Chapman, 2013). Ο εκπαιδευτικός παίζει κομβικό ρόλο στη διαχείριση της δραστηριότητας με τέτοιο τρόπο ώστε οι μαθητές να είναι σε θέση να εμπλακούν ουσιαστικά με αυτή. Η γνώση αυτή περιλαμβάνει (Chapman, 2013, p. 1-2):

- κατανόηση της φύσης των σημαντικών δραστηριοτήτων (σημαντικό περιεχόμενο, περισσότερες από μια λύσεις, πολλαπλές αναπαραστάσεις, σύνδεση με άλλες μαθηματικές ιδέες, απαιτεί από τους μαθητές να ερμηνεύσουν, να υποθέσουν, να επιχειρηματολογήσουν, να χαρακτηρίζεται από υψηλές γνωστικές απαιτήσεις)
- ικανότητα αναγνώρισης, επιλογής και δημιουργίας δραστηριοτήτων πλούσιων σε περιεχόμενο οι οποίες επιτρέπουν βαθύτερη κατανόηση, κεντρίζουν το ενδιαφέρον και λαμβάνουν υπόψη τις ανάγκες των μαθητών
- γνώση των γνωστικών απαιτήσεων της δραστηριότητας και της σχέσης αυτών των απαιτήσεων με τους στόχους της δραστηριότητας όσον αφορά την μάθηση και την κατανόηση μαθηματικών που μπορεί η δραστηριότητα να επιφέρει
- γνώση των χαρακτηριστικών των μαθητών, δηλαδή, της υπάρχουσας γνώσης, των ενδιαφερόντων και των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μαθαίνει μαθηματικά κάθε μαθητής
- κατανόηση του ότι ο τρόπος με τον οποίο επιλέγονται οι δραστηριότητες επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται και εφαρμόζουν τα μαθηματικά και
- γνώση των στοιχείων μιας δραστηριότητας που είναι απαραίτητο να τονιστούν, του πως να οργανωθεί η δουλειά των μαθητών, των κατάλληλων ερωτήσεων ανάλογα με το επίπεδο του κάθε μαθητή και του πως να βοηθούν τους μαθητές χωρίς όμως να δίνουν έτοιμες απαντήσεις και να τερματίζουν τη διαδικασία σκέψης του μαθητή

Σχετικά με τη δεύτερη κατηγορία, είναι απαραίτητο ο εκπαιδευτικός να έχει την ικανότητα να αντιλαμβάνεται την υπάρχουσα γνώση των μαθητών και να αλληλεπιδρά με αυτή (Shulman, 1986). Η ανάλυση του λάθους μπορεί να αποκαλύψει τα σφάλματα που εμποδίζουν τον μαθητή να αντιληφθεί συγκεκριμένες ιδέες, τεχνικές, προβλήματα και να παρέχει πληροφορίες για την κατανόηση και τη στάση απέναντι σε μαθηματικά προβλήματα. Και αυτό διότι, η πλειοψηφία των λαθών που κάνουν οι μαθητές δεν είναι περιστασιακά λάθη, ούτε οφείλονται σε απροσεξία, αλλά είναι αποτέλεσμα προηγούμενων εμπειριών στην τάξη (Radatz, 1980). Μπορεί, επίσης, να οδηγήσει στο να γίνουν αντιληπτά μοτίβα και πιθανές αιτίες υπεύθυνες για τα λάθη και τις παρανοήσεις που εμφανίζει ο μαθητής (Sarwadi & Shahrill, 2014). Ο εκπαιδευτικός πρέπει να έχει την ικανότητα να δομεί τη διδασκαλία γύρω από τις ατομικές διαφορές του κάθε μαθητή και να μπορεί να συνδέσει την προϋπάρχουσα γνώση με την νέα πληροφορία. Για τον λόγο αυτό, ιδιαίτερα χρήσιμη είναι η υιοθέτηση στρατηγικών με στόχο την καλύτερη οργάνωση της γνώσης (χρήση παιχνιδιών και δραστηριοτήτων στις μικρότερες ηλικίες, χρήση μνημονικών κανόνων) (Ningsih & Retnowati, 2020)

Τέλος, για την τρίτη κατηγορία, όπως και στα χαρακτηριστικά της γενικότερης παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου, έτσι και πιο συγκεκριμένα για την μαθηματική παιδαγωγική γνώση περιεχομένου, σημαντικό στοιχείο αποτελεί η γνώση κατάλληλων επεξηγηματικών μεθόδων.

Έρευνες έχουν δείξει πως η καθοδηγούμενη μάθηση υπερτερεί της ατομικής ανακάλυψης και οι μαθητές που έχουν καθοδήγηση μαθαίνουν πιο αποδοτικά και με καλύτερα αποτελέσματα. Η καθοδηγούμενη μάθηση είναι αποδοτική διότι βοηθά τους μαθητές με το να ενεργοποιείται ή να δημιουργείται η γνώση η οποία είναι απαραίτητη για την κατανόηση της νέας γνώσης αλλά και με το να δέχονται οι μαθητές την νέα γνώση έχοντας κατανοήσει την προαπαιτούμενη γνώση (Mayer, 2004). Επιπρόσθετα, έρευνες δείχνουν πως οι επεξηγηματικές μέθοδοι και οι διδακτικές στρατηγικές που χρησιμοποιεί ένας εκπαιδευτικός επηρεάζουν τη στάση των μαθητών η οποία με τη σειρά της έχει άμεση σύνδεση με τις επιδόσεις των μαθητών. Οι αποτελεσματικές μέθοδοι μπορούν να συμβάλλουν στη δημιουργία θετικής στάσης απέναντι στο αντίστοιχο μάθημα. Συγκεκριμένα για το μάθημα των μαθηματικών, η ποιότητα των επεξηγηματικών μηνυμάτων που παρέχει ο εκπαιδευτικός στους μαθητές επηρεάζει τη συμμετοχή στην τάξη και την μάθηση (Akinsola & Olowojaiye, 2008).

1.3 Η σχέση των γνώσεων των εκπαιδευτικών με την αποτελεσματικότητα των μαθητών

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το πως οι γνώσεις των εκπαιδευτικών σχετίζονται με τα επιτεύγματα των μαθητών. Ένα σημείο στο οποίο ασκείται κριτική στις έρευνες σχετικά με τις γνώσεις των εκπαιδευτικών, είναι το ότι βασίζονται, κατά κύριο λόγο, στα τυπικά προσόντα όπως πιστοποιητικά, πτυχία, μαθήματα, σεμινάρια τα οποία έχει στην κατοχή του ο/η εκπαιδευτικός, με αποτέλεσμα να λείπει το εμπειρικό κομμάτι. Σε αυτήν την ενότητα, γίνεται μια προσπάθεια ανασκόπησης εμπειρικών ερευνών οι οποίες συνδέουν τις γνώσεις των καθηγητών με τα επιτεύγματα των μαθητών.

Οι Hill, Rowan & Ball (2005) ερευνούν αν και πως η Μαθηματική Γνώση για τη Διδασκαλία συνεισφέρει σε βελτιώσεις στην απόδοση των μαθητών στα μαθηματικά. Σε αντίθεση με άλλες έρευνες, ένα σημαντικό στοιχείο σχετικά με την μέτρηση της Μαθηματικής Γνώσης στο έργο του Hill και των συνεργατών του είναι πως κατά την μέτρηση αυτή, δίνεται έμφαση στη γνώση που χρησιμοποιούν οι καθηγητές μέσα στην τάξη, χωρίς να παραλείπονται οι παράγοντες εμπειρία αλλά και γενικές μαθηματικές γνώσεις όπως πτυχία, πιστοποιητικά, σεμινάρια ή μαθήματα που έχουν παρακολουθήσει. Οι Ball, Thames & Phelps (2008) ορίζουν ως Μαθηματική Γνώση για τη Διδασκαλία «την μαθηματική γνώση την οποία απαιτείται για την πραγματοποίηση της διδασκαλίας των μαθηματικών». Πρόκειται για μια έρευνα η οποία περιλαμβάνει δεδομένα από 1190 μαθητές και 334 καθηγητές της αντίστοιχης Α’ Δημοτικού καθώς και 1773 μαθητές και 365 καθηγητές της αντίστοιχης Γ’ Δημοτικού από συνολικά 115 Δημοτικά Σχολεία κατά το διάστημα 2000-2001 έως 2003-2004. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως η Μαθηματική Γνώση των καθηγητών συνδέεται με την καλύτερη απόδοση των μαθητών και για τις δύο ομάδες. Οι καθηγητές μπορούν να επηρεάσουν θετικά και ουσιαστικά την μάθηση των μαθηματικών από τους μαθητές.

Οι Baumert, Kunter, Blum, Brunner, Voss, Jordan, Klusmann, Krauss, Neubrand, & Tsai (2010), μελετούν τη σημασία που έχει η γνώση περιεχομένου και η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου για την υψηλής ποιότητας διδασκαλία και την πρόοδο των μαθητών. Το δείγμα αποτελείται από καθηγητές και μαθητές της δέκατης τάξης (grade 10) σε σχολείο της Γερμανίας. Για την αξιολόγηση της γνώσης περιεχομένου χρησιμοποιήθηκε τεστ αποτελούμενο από 13 αντικείμενα το περιλάμβανε αριθμητική, άλγεβρα, γεωμετρία, συναρτήσεις και πιθανότητες. Για την αξιολόγηση της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου, μελετήθηκαν τρεις διαστάσεις, της δραστηριότητας (ικανότητα αναγνώρισης πολλών λύσεων), του μαθητή (αναγνώριση παρανοήσεων, δυσκολιών και στρατηγικών του μαθητή) και της επεξήγησης (γνώση πολλαπλών αναπαραστάσεων και επεξηγήσεων μαθηματικών προβλημάτων). Τα αποτελέσματα δείχνουν συσχέτιση μεταξύ των γνώσεων και της υψηλότερης ποιότητας στη διδασκαλία και στην μάθηση.

Μια άλλη έρευνα η οποία εξετάζει τη σχέση ανάμεσα στις γνώσεις των καθηγητών και τις επιδόσεις των μαθητών στα μαθηματικά είναι αυτή της Campbell και των συνεργατών της (Campbell et al., 2014). Το δείγμα αποτελείται από καθηγητές στα πρώτα έξι χρόνια της καριέρας τους οι οποίοι διδάσκουν από την Δ’ Δημοτικού έως την όγδοη τάξη (grade 8) σε τρεις πολιτείες των Η.Π.Α. Επίσης, οι μετρήσεις της μαθηματικής και παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου συμβαδίζουν με τις μετρήσεις των επιδόσεων των μαθητών, κάτι το οποίο δε συμβαίνει στις προηγούμενες έρευνες. Τελευταία διαφορά είναι και το γεγονός πως ενδιαφέρον της έρευνας αποτελεί και η σχέση των επιδόσεων των μαθητών με τις πεποιθήσεις των καθηγητών σχετικά με τη διδασκαλία και την μάθηση των μαθηματικών αλλά και σχετικά με την επίγνωση των καθηγητών για την κλίση των μαθητών στα μαθηματικά. Οι ορισμοί περί μαθηματικής (p. 425) και παιδαγωγικής γνώσης αντλούνται από το άρθρο των Ball, Thames & Phelps (2008).στο οποίο έχουμε προηγουμένως αναφερθεί. Η Cambpell και οι συνεργάτες της (2014) κατέληξαν στο ότι η γνώση και οι απόψεις των καθηγητών μπορούν να επηρεάσουν τις επεξηγηματικές πρακτικές, οι οποίες με τη σειρά τους επηρεάζουν την απόδοση των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, υπήρξε στατιστικά σημαντική θετική σχέση μεταξύ της γνώσης περιεχομένου των καθηγητών και των επιδόσεων των μαθητών και των δύο βαθμίδων (Δημοτικού και Γυμνασίου) σε σταθμισμένα τεστ.

Κεφάλαιο 2. Η έννοια της σύγκλισης

2.1 Επιστημολογικά εμπόδια και αντιλήψεις σχετικά με το άπειρο και το όριο

Η Sierpinska πραγματοποιεί έρευνα με στόχο τη διαμόρφωση διδακτικών καταστάσεων που επιτρέπουν στους μαθητές να ξεπεράσουν επιστημολογικά εμπόδια που σχετίζονται με την έννοια του ορίου και του απείρου (Sierpinska, 1987). Αρχικά, αναφέρει τα επιστημολογικά εμπόδια των μαθητών σχετικά με την έννοια του ορίου, στηριζόμενη σε παλαιότερες έρευνές της καθώς και στους ομοεθνείς της, τον φιλόσοφο Bachelard και τον μαθηματικό Brousseau.

Η έρευνα γίνεται σε εφήβους που φοιτούν σε λύκεια της Βαρσοβίας και περιλαμβάνουν τέσσερις συνεδρίες των 45 λεπτών. Σύμφωνα με την ίδια, τα εμπόδια αυτά πηγάζουν κυρίως από την επιστημονική γνώση, το άπειρο, τη συνάρτηση και τους πραγματικούς αριθμούς. Αντλώντας στοιχεία από τη θεωρία του Brousseau, θεωρεί πως για να ξεπεραστούν αυτά τα εμπόδια είναι απαραίτητη η γνωστική σύγκρουση. Η συγγραφέας επιλέγει την έννοια της άπειρης σειράς, με στόχο να κάνει τη σύγκλιση να φαίνεται σαν ειδική συμπεριφορά σειρών ή ακολουθιών και όχι μοναδική που αξίζει μελέτης. Η πρώτη συνεδρία ξεκινάει με τη σειρά του Grandi (1-1+1-1+….)

κατά την οποία οι μαθητές αποδέχονται το αποτέλεσμα ½ καθώς θεωρούν τα μαθηματικά μακριά από την πραγματικότητα. Στη δεύτερη συνεδρία, στόχος είναι να δειχθεί πως οι δεκαδικές αναπαραστάσεις δεν είναι τίποτε άλλο παρά άπειρα αθροίσματα. Δίνονται παραδείγματα μετατροπής περιοδικών απειροψήφιων δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα. Η ισότητα 0,99… = 1 προκαλεί αντιδράσεις από τους μαθητές οι οποίοι έχουν διαφορετικές αντιλήψεις για το άπειρο με αποτέλεσμα να αρνούνται την απόδειξη και το αποτέλεσμα, να δέχονται/αρνούνται ένα από τα δύο ή να δέχονται και τα δύο. Εξάγεται συνεπώς το συμπέρασμα πως τα αντιπαραδείγματα δεν είναι αρκετά για να αλλάξουν τις αντιλήψεις των μαθητών αν δεν αλλάξει η στάση τους απέναντι στην μαθηματική γνώση. Η τρίτη συνεδρία ξεκινάει με δύο σχόλια της συγγραφέα σχετικά με το προηγούμενο μάθημα τα οποία δίνουν τροφή για συζήτηση. Από τους τρεις παρόντες μαθητές, οι δύο είναι αντίθετοι με την εγκυρότητα της ισότητας 0,99… = 1, ενώ ο ένας την υποστηρίζει. Φαίνεται η στάση των μαθητών απέναντι στην μαθηματική γνώση να επηρεάζει τη διαίσθησή τους για το άπειρο και τα όρια. Η τέταρτη και τελευταία συνεδρία είναι ένα debate μεταξύ τριών μαθητών, με τους άλλους μαθητές να παρακολουθούν και να κάνουν σχόλια. Μέσα από αυτή τη «λογομαχία» γεννάται μια νέα έννοια, το φραγμένο άπειρο. Η Sierpinska καταλήγει, λοιπόν, στο συμπέρασμα πως υπάρχουν δύο ειδών αντιλήψεις για το άπειρο.

Οι μαθητές της πρώτης ομάδας (finitists) αντιλαμβάνονται το άπειρο σαν κάτι χωρίς όρια, ατέρμονο, το οποίο έρχεται σε αντιδιαστολή με παραδείγματα του τύπου 0,999… = 1. Στην ομάδα αυτή συναντώνται δύο προσεγγίσεις, η διαισθητική εμπειρική (intuitive empiricist attitude), η οποία περιλαμβάνει την πεποίθηση πως τα μαθηματικά πρέπει να είναι εμπειρική επιστήμη, και η παρεκβατική φορμαλιστική (discursive formalist attitude) η οποία περιλαμβάνει την πεποίθηση πως τα μαθηματικά είναι παιχνίδι συμβόλων το οποίο στερείται ουσίας. Πιο συγκεκριμένα, εντοπίζει τέσσερα μοντέλα προσέγγισης του απείρου από τους συγκεκριμένους μαθητές (p. 384):

- Η διαισθητική καθορισμένη (intuitive definitist) προσέγγιση, όπου όλες οι ακολουθίες είναι πεπερασμένες και το πλήθος των όρων του προσδιορισμένο. Το 0,99… γίνεται αντιληπτό ως 0,99…9, και δεν είναι ίσο με το 1, αλλά λίγο μικρότερο, δηλαδή $0{,}99\ldots = 1 - e$, $e > 0$
- Η διαισθητική ακαθόριστη (intuitive indefinitist) προσέγγιση, όπου όλες οι ακολουθίες είναι πεπερασμένες αλλά κάποιες φορές είναι αδύνατο να προσδιοριστεί το πλήθος των όρων. Το πραγματικό όριο της ακολουθίας είναι ο τελευταίος όρος και αν είναι αδύνατο να προσδιοριστεί, τότε γίνεται εκτίμηση.
- Η παρεκβατική οριστική (discursive definitist) προσέγγιση, όπου ακολουθείται η ίδια στάση με την πρώτη προσέγγιση, με τη διαφορά ότι όλες οι φραγμένες ακολουθίες είναι πεπερασμένες
- Η ακαθόριστη συλλογιστική (discursive indefinitist) προσέγγιση, όπου ακολουθείται η ίδια στάση με την δεύτερη προσέγγιση, με τη διαφορά ότι όλες οι φραγμένες ακολουθίες είναι πεπερασμένες

Η δεύτερη ομάδα (infinitists) θεωρεί πως υπάρχουν δύο ειδών άπειρα, το φραγμένο άπειρο (bounded infinity) και το μη φραγμένο άπειρο (boundless infinity). Υπάρχουν τέσσερα μοντέλα σχετικά με την αντίληψη της έννοιας του ορίου από τη συγκεκριμένη ομάδα:

- Το δυνητικό (potentialist) μοντέλο του ορίου, κατά το οποίο το όριο μιας ακολουθίας είναι αυτό που η ακολουθία πλησιάζει οσοδήποτε κοντά χωρίς να το φτάνει.
- Το δυνητικό πραγματιστικό (potential actualist) μοντέλο, κατά το οποίο μετά από άπειρο χρονικό διάστημα, η ακολουθία ολοκληρώνεται και όλοι οι όροι της είναι διαθέσιμοι.
- Το οριακό (boundist) μοντέλο, κατά το οποίο μια ακολουθία είναι ένα σύνολο το οποίο μπορεί να είναι ή να μην είναι φραγμένο.
- Το απειροελάχιστο (infinitesimalist) μοντέλο, κατά το οποίο αν h είναι το όριο μιας ακολουθίας $α_ν$ και το h είναι απείρως μικρό, τότε η ισότητα 0,99… = 1 είναι μια σύμβαση η οποία προέρχεται από προηγούμενες συμβάσεις.

Στις δύο τελευταίες προσεγγίσεις, η σημαντική ιδέα είναι πως ανάμεσα στο 0,99… και το 1, εξακολουθεί να υπάρχει ένα τμήμα το οποίο πρέπει να διανυθεί.

2.2 Σύγκλιση ακολουθίας

Μετά την μελέτη της γενικότερης έννοιας του ορίου, γινόμαστε πιο συγκεκριμένοι και προχωράμε στο όριο ακολουθιών. Η Przenioslo (2005), στηριζόμενη σε αποτελέσματα ερευνών σχετικά με τις λανθασμένες αντιλήψεις των μαθητών για τη σύγκλιση, παρουσιάζει ένα διδακτικό εργαλείο το οποίο μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα την έννοια. Μέσα από τη δική της βιβλιογραφική ανασκόπηση, συχνές δυσκολίες τις οποίες συναντούν οι μαθητές αποτελούν οι παρακάτω πεποιθήσεις (p. 71):

- οι όροι μιας συγκλίνουσας ακολουθίας προσεγγίζουν το όριο, φτάνοντάς το σε ορισμένες περιπτώσεις
- οι όροι προσεγγίζουν το όριο αλλά δεν πρέπει να το φτάσουν
- οι όροι είτε μεγαλώνουν, είτε μικραίνουν
- είναι αρκετό το ότι πολλοί όροι προσεγγίζουν το άπειρο
- ένα φράγμα της ακολουθίας είναι το όριό της
- το όριο μιας ακολουθίας είναι ο τελευταίος της όρος
- μια συγκλίνουσα ακολουθία πρέπει να ακολουθεί κάποιο μοτίβο
- σύγχυση μεταξύ «άπιαστου» απείρου που αφορά το πλήθος των όρων και της προσεγγίσιμης πεπερασμένης τιμής του ορίου

Η συγγραφέας προσπαθεί να αντιμετωπίσει ορισμένες από αυτές με τη επιλογή των παραδειγμάτων, εστιάζοντας στις πεποιθήσεις ότι οι όροι της ακολουθίας δεν μπορούν να φτάνουν το όριο, ότι μια ακολουθία είναι απαραίτητο να είναι μονότονη από ένα σημείο και μετά για να συγκλίνει, ότι η συμπεριφορά της ακολουθίας συμβαδίζει πάντα με τη συμπεριφορά κάποιων αρχικών όρων. Στην αναζήτησή της για αποδοτικές μεθόδους διδασκαλίας της έννοιας της σύγκλισης, η Przenioslo υιοθετεί πιο γενικές αρχές, θεωρώντας τις γραφικές αναπαραστάσεις σημαντικό εργαλείο. Τονίζει, επίσης, τη σημασία των παραδειγμάτων αναφέροντας τον κίνδυνο τα πρωταρχικά παραδείγματα να γίνουν και κυρίαρχα, δημιουργώντας, έτσι, εμπόδια στην μάθηση. Θεωρεί σημαντικό να λαμβάνονται υπόψη οι ικανότητες και οι κλίσεις των μαθητών δίνοντας σημασία και στην ψυχολογική σκοπιά της διδασκαλίας. Είναι σύμφωνη με την Κονστρουκτιβιστική θεωρία, πιστεύοντας πως η μάθηση δεν έρχεται από την απλή ανάγνωση του ορισμού, αλλά από τη σταδιακή προσαρμογή των γνωστικών δομών μέσα από τα προβλήματα με τα οποία έρχονται αντιμέτωποι, με τον εκπαιδευτικό, όμως, να έχει κύριο ρόλο στη διαδικασία της μάθησης. Αντλώντας, λοιπόν, στοιχεία από αυτές τις αρχές, δομεί την κύρια συλλογή παραδειγμάτων με τέτοιο τρόπο ώστε να μην προωθεί τις δυσκολίες τις οποίες αναφέρονται παραπάνω. Εκμεταλλεύεται τη συζήτηση σχετικά με την ιδέα της λωρίδας γύρω από μια ευθεία για να εισάγει τον αυστηρό ορισμό. Καταλήγει στο συμπέρασμα πως το διδακτικό εργαλείο που παρουσιάζει φαίνεται να είναι αποτελεσματικό και οι απόψεις που σχηματίζουν οι μαθητές για την έννοια του ορίου μιας ακολουθίας να πλησιάζουν τον αυστηρό ορισμό.

2.3 Κατανόηση της έννοιας της σύγκλισης ακολουθιών

Η Sierpinska (1990) παρουσιάζει ένα άρθρο το οποίο μπορεί να χωριστεί σε δύο μέρη, με το πρώτο να πραγματεύεται την έννοια της κατανόησης σε γενικότερο πλαίσιο και το δεύτερο μέρος να γίνεται πιο συγκεκριμένο πάνω στην έννοια της σύγκλισης ακολουθιών. Συνολικά, αναφέρει 25 μέρη στη διαδικασία της κατανόησης με 6 από αυτά να αφορούν τον ορισμό της σύγκλισης αριθμητικών ακολουθιών. Αυτά είναι:

- *Αναγνώριση των όρων της ακολουθίας σαν κάτι που προσεγγίζει.*
  Κατά την κατανόηση της έννοιας του ορίου γενικότερα, είναι ιδιαίτερα επικίνδυνη η πεποίθηση πως ότι είναι άπειρο είναι και μη φραγμένο. Όλες οι συγκλίνουσες ακολουθίες είναι και φραγμένες.
- *Σύνθεση της ιδέας της προσέγγισης με τις μαθηματικές έννοιες απόσταση και χρόνος.*
  Η σημασία του όρου «προσέγγιση» εξαρτάται από το περιεχόμενο. Υπάρχει διαφορά όταν προσεγγίζουμε την απόσταση στο πλαίσιο των αριθμών με όταν πρόκειται για φυσικά μεγέθη.
- *Διάκριση μεταξύ ακολουθιών Cauchy και συγκλινουσών ακολουθιών.*
  Πολλές φορές οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται τη λέξη «προσεγγίζει» σαν να προσεγγίζει κάτι αλλά σαν να προσεγγίζουν ο ένας τον άλλον οι όροι της ακολουθίας καθώς το n μεγαλώνει. Πιστεύουν, δηλαδή, πως οι όροι της ακολουθίας έρχονται πιο κοντά μεταξύ τους, μια πεποίθηση η οποία τείνει να συναντάται κυρίως στις ακολουθίες Cauchy.
- *Αναγνώριση του στόχου της προσέγγισης, του ορίου δηλαδή της ακολουθίας*
- *Διάκριση μεταξύ του «προσεγγίζω» και του «προσεγγίζω οσοδήποτε κοντά».*
  Οι πρώτες εντυπώσεις των μαθητών πιθανόν να μη διαφοροποιούν την προσέγγιση της ακολουθίας 0,8, 0,88, 0,888, … στο 0,9 και της ακολουθίας 0,9, 0,99, 0,999, … στο 1.
- *Διάκριση μεταξύ του «άπειροι όροι προσεγγίζουν το όριο» και «σχεδόν όλοι οι όροι πλησιάζουν το όριο».*
  Η Sierpinska θεωρεί πως είναι απαραίτητο να γίνει διάκριση μεταξύ ακολουθιών του τύπου: 1, ½, $^1/_3$, ¼,… και 1, ½, 2, ¼, 3, $^1/_8$, … καθώς και στις δύο, άπειροι όροι πλησιάζουν το 0, αλλά μόνο στην πρώτη μπορούμε να πούμε πως σχεδόν όλοι οι όροι τείνουν στο 0, καθώς στη δεύτερη υπάρχουν άπειροι όροι που απομακρύνονται από το 0.

Ο Schüler-Meyer (2018) πραγματοποιεί έρευνα η οποία έχει σκοπό να ωθήσει μαθητές οι οποίοι βρίσκονται στην προτελευταία τάξη της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης να δημιουργήσουν οι ίδιοι τον ορισμό των συγκλινουσών ακολουθιών. Η έρευνα αυτή περιλαμβάνει 5 μαθητές στη Γερμανία, οι οποίοι παρακολουθούν 5 μαθήματα 90 λεπτών με στόχο την προετοιμασία για την μετάβαση από τη Δευτεροβάθμια στην Τριτοβάθμια εκπαίδευση για STEM σπουδές. Οι μαθητές καλούνται να δημιουργήσουν οι ίδιοι τον ορισμό των συγκλινουσών ακολουθιών αφού, πρώτα, έχει προηγηθεί μελέτη της έννοιας με τη χρήση λωρίδων μια εβδομάδα πριν πραγματοποιηθεί η έρευνα και ενώ έχουν μια ανεπίσημη εξοικείωση με την έννοια της συνέχειας και του ορίου. Οι μαθητές έχουν την τάση να προτιμούν τη δική τους πιο ανεπίσημη κατανόηση παρά τον ορισμό διότι οι ορισμοί περιγράφουν αντικείμενα με αυθαίρετο τρόπο αλλά και επειδή συνήθως τους συναντούν σε αποδείξεις (Schüler-Meyer, 2018). Ο συγγραφέας υποστηρίζει πως κάνοντας τους μαθητές να συμμετέχουν σε τέτοιου είδους δραστηριότητες, να μεταβαίνουν από το ερευνητικό ή πειραματικό κομμάτι στο φορμαλιστικό, μπορεί να θεραπεύσει την τάση να μη χρησιμοποιούν τον ορισμό σαν σημείο αφετηρίας για να επιχειρηματολογήσουν. Ένα σημείο το οποίο φαίνεται να προκαλεί προβλήματα σε αυτήν την μετάβαση είναι η διαίσθηση των μαθητών για το άπειρο. Ένα άλλο σημείο το οποίο μπορεί να φέρει σε δύσκολη θέση τους μαθητές είναι η προϋπάρχουσα γνώση που έχουν. Για να επιτευχθεί ομαλά και αποτελεσματικά αυτή μετάβαση, είναι απαραίτητη η καθοδήγηση των μαθητών από τον/την εκπαιδευτικό με τη χρήση φράσεων και σκαλωσιών οι οποίες θα επιτρέψουν στους μαθητές να αναδιοργανώσουν τη γνώση τους (Schüler-Meyer, 2018).

Κεφάλαιο 3. Σχολικά εγχειρίδια/βιβλία και προγράμματα σπουδών

3.1 Σχετικά με τα σχολικά εγχειρίδια/βιβλία

Ξεκινώντας με την ορολογία, ο Stray (1994) επισημαίνει τη διαφορά μεταξύ της έννοιας «σχολικό βιβλίο» και «σχολικό εγχειρίδιο». Σύμφωνα με τον ίδιο, το σχολικό εγχειρίδιο είναι ένα βιβλίο σχεδιασμένο ώστε να παρέχει μια έγκυρη παιδαγωγική έκδοση μιας περιοχής γνώσης. Τα σχολικά εγχειρίδια μεταφέρουν στους μαθητές την πληροφορία για ένα πεδίο γνώσης έχοντας μέσα τους στοιχεία παιδαγωγίας, πως δηλαδή να γίνει η μάθηση ή η διδασκαλία ενός αντικειμένου. Από την άλλη, το σχολικό βιβλίο είναι ένα βιβλίο που δημιουργήθηκε για χρήση σε διαδικασίες διδασκαλίας, αλλά σε λιγότερο κεντρικό και συστηματικό τρόπο. Τον διαχωρισμό αυτό επιβεβαιώνει και ο Ξωχέλλης (2009), αναφέροντας πως το σχολικό εγχειρίδιο φιλοδοξεί να προσφέρει μια πλήρη και συστηματική εικόνα για ένα γνωστικό αντικείμενο, ενώ το σχολικό βιβλίο έχει μεγαλύτερο σημασιολογικό εύρος και συμπεριλαμβάνει και άλλους συγγενείς όρους που χρησιμοποιούνται στη βιβλιογραφία και στην καθημερινή εκπαιδευτική πράξη όπως π.χ. διδακτικό βιβλίο ή διδακτικό εγχειρίδιο, βιβλίο μαθητή κ.λπ. Για αυτόν, το σχολικό εγχειρίδιο ή βιβλίο περιέχει, σε έντυπη μορφή και με σημείο αναφοράς το επίσημο Αναλυτικό Πρόγραμμα, τη διδακτέα ύλη ενός γνωστικού αντικειμένου ή μαθήματος για μια συγκεκριμένη τάξη ή σχολική βαθμίδα.

Οι Sosniak & Perlman (1990) αναφέρονται στη σημασία του σχολικού βιβλίου λέγοντας πως το βιβλίο έχει τη δύναμη να εισάγει τους μαθητές σε κόσμους οι οποίοι δεν είναι άμεσα εμφανείς ή δεν μπορούμε να βιώσουμε άμεσα. Πιο συγκεκριμένα, τονίζουν πως, σε συνδυασμό με τα προηγούμενα, η δύναμη του σχολικού βιβλίου να παρέχει καθοδήγηση στο να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο σκεφτόμαστε και αισθανόμαστε, και να προσφέρει πρόσβαση σε γνώση υψηλής σημασίας σε προσωπικό και πολιτικό επίπεδο, είναι κάτι το οποίο δεν πρέπει να απορρίπτεται χωρίς σχετική έρευνα. Τη σημασία του βιβλίου πέρα από το διδακτικό κομμάτι τονίζει και ο Ξωχέλλης (2009) αναφέροντας πως μεταβιβάζει στην νέα γενιά αξίες και πρότυπα συμπεριφοράς και καλλιεργεί στάσεις σε ό,τι αφορά την επικοινωνία μεταξύ ατόμων, κοινωνικών ομάδων και λαών καταλήγοντας στο συμπέρασμα πως το σχολικό βιβλίο επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό την κοινωνικοποίηση των μαθητών. Σε ό,τι αφορά τη διδακτική διάσταση του βιβλίου, επισημαίνει πως προσφέρει πρόσβαση σε σημαντική γνώση η οποία παρουσιάζεται με διαφορετικούς τρόπους (κείμενο, εικόνες, γραφικές παραστάσεις, κ.λπ.), δημιουργεί κίνητρα στους μαθητές να μελετήσουν αυτόνομα παρακινώντας τους με διάφορους τρόπους (περιλήψεις, ασκήσεις-ερωτήσεις, παραδείγματα, κ.λπ.) και κατευθύνει σε μεγάλο βαθμό το έργο του εκπαιδευτικού παρέχοντας οργάνωση και διάταξη της σχολικής ύλης.

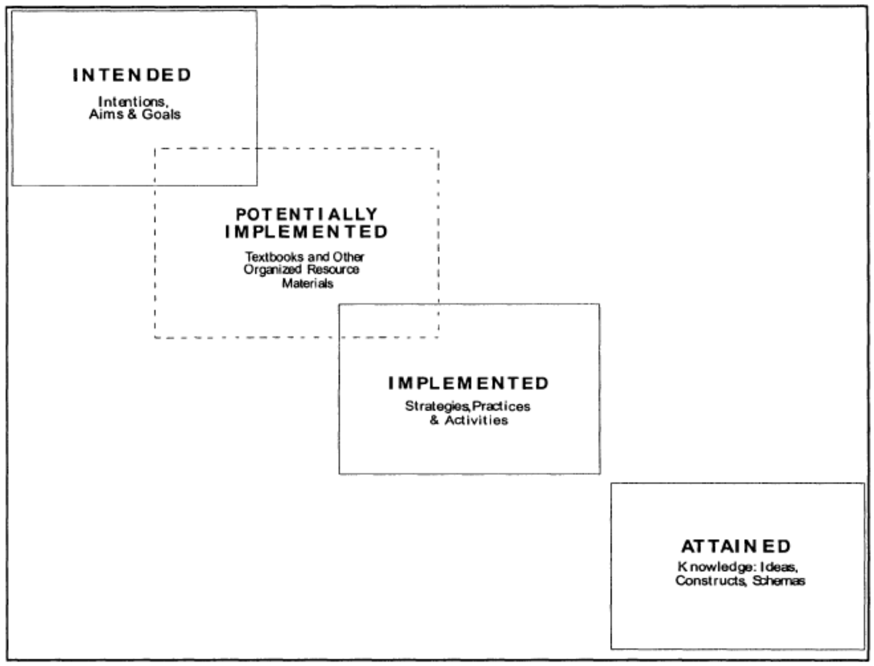
Το σχολικό βιβλίο διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη διαδικασία της διδασκαλίας και είναι αναπόσπαστο κομμάτι της ελληνικής και όχι μόνο τάξης. Ασκεί ισχυρή επίδραση στο μαθηματικό περιεχόμενο που μαθαίνουν οι μαθητές κατά τη διδασκαλία στην τάξη (Pepin, 2008). Σπάνια στην ελληνική τάξη ο εκπαιδευτικός θα παρεκκλίνει πέρα από τα πλαίσια του σχολικού βιβλίου, και όχι άδικα αν ληφθούν υπόψη ο μικρός βαθμός ελευθερίας και το μικρό χρονικό περιθώριο που υπάρχει για να διδαχθεί όλη η σχολική ύλη με αποκορύφωμα την τελευταία τάξη του Λυκείου και τη διαδικασία των Πανελληνίων. Το σχολικό βιβλίο είναι συνυφασμένο με την ελληνική εκπαίδευση και αυτό αποδεικνύεται από το γεγονός πως μέχρι πρόσφατα αποτελούσε αφετηρία για τη σύνταξη του Αναλυτικού Προγράμματος (Ξωχέλλης, 2009). Ξεφεύγοντας από τα ελληνικά σύνορα, και οι Fan, Zhu και Miao (2013) αναφέρονται στη σύνδεση της εκπαιδευτικής διαδικασίας με το σχολικό βιβλίο στο μάθημα των μαθηματικών καθώς, επικαλούμενοι τους Robitaille και Travers (1992), υποστηρίζουν πως «η εξάρτηση από τα σχολικά βιβλία είναι ίσως περισσότερο χαρακτηριστική στη διδασκαλία των Μαθηματικών από ότι σε οποιοδήποτε άλλο μάθημα».

3.2 Σχέση μεταξύ σχολικού εγχειριδίου/βιβλίου και προγράμματος σπουδών

Σύμφωνα με το έργο του Remillard (1999), τα σχολικά εγχειρίδια θεωρούνταν μια ακριβής αναπαράσταση του προγράμματος σπουδών στην τάξη. Έρευνες, όμως έδειξαν πως οι εκπαιδευτικοί δε χρησιμοποιούσαν το υλικό των προγραμμάτων σπουδών με τον τρόπο τον οποίο υπολόγιζαν οι συγγραφείς. Το γεγονός αυτό οδήγησε σε περεταίρω έρευνα, κατά την οποία διαπιστώθηκε πως οι εκπαιδευτικοί αφιέρωναν τον περισσότερο χρόνο στις ασκήσεις για τους μαθητές χωρίς να εκμεταλλεύονται πλήρως και τα άλλα εργαλεία τα οποία είχαν στη διάθεση τους, (δραστηριότητες εμπλουτισμού, διδακτικές προτάσεις, κ.λπ.). Διαπιστώθηκε, επίσης, πως πολλοί εκπαιδευτικοί δήλωναν πως εξηγούν το θέμα που θέλουν να συζητήσουν στην τάξη ελεύθερα στον πίνακα, παρόλο που ακολουθούσαν στενά το σχολικό βιβλίο. Γίνεται, λοιπόν, εμφανής ο ρόλος του σχολικού βιβλίου ως ένα από τα πιο σημαντικά εργαλεία για την διεκπεραίωση των στόχων του αναλυτικού προγράμματος.

Το σχολικό βιβλίο αποτελεί, μέχρι και σήμερα, αναπόσπαστο κομμάτι της σχολικής τάξης και χρησιμοποιείται από τους εκπαιδευτικούς ώστε να αντλήσουν πληροφορίες και να διεξάγουν την εκπαιδευτική διαδικασία. Σύμφωνα με τον Χασάπη (2008), κάθε σχολικό βιβλίο γράφεται με σκοπό την επιδίωξη της υλοποίησης συγκεκριμένων διδακτικών στόχων, οι οποίοι είναι σαφώς διατυπωμένοι και προτάσσονται του αντίστοιχου αναλυτικού προγράμματος, το οποίο επίσης καθορίζουν. Μαζί με τη διδασκαλία, και ως μέσα διδασκαλίας, τα σχολικά βιβλία υλοποιούν τις επιλογές του αναλυτικού προγράμματος των σχολικών μαθημάτων. Το δεδομένο αυτό σημαίνει ότι κάθε σχολικό - διδακτικό βιβλίο επιλέγει, οργανώνει και μεταβιβάζει τις αξιολογημένες ως σημαντικές - από μια συγκεκριμένη βεβαίως οπτική - γνώσεις και πρακτικές και ως εκ τούτου αναγκαίες για τη διδασκαλία τους στο σχολείο. Ακόμη, τα σχολικά βιβλία των μαθηματικών υποστηρίζουν την εφαρμογή του εκάστοτε Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών, τον σχεδιασμό της διδασκαλίας του εκπαιδευτικού και καλούνται να προετοιμάζουν τους μελλοντικούς πολίτες για έναν μεταβαλλόμενο κόσμο (Καραβασίλης & Κόσυβας, 2016). Σύμφωνα με τους Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt, & Houang (2002, p. 2), «τα σχολικά εγχειρίδια έχουν σχεδιαστεί ώστε να μεταφράζουν τις αφηρημένες σκέψεις των αρμόδιων φορέων για τη λήψη αποφάσεων (policymakers) στην εκπαιδευτική κοινότητα σε δράσεις οι οποίες μπορούν να πραγματοποιηθούν και από τους εκπαιδευτικούς αλλά κα από τους μαθητές και προορίζονται για διαμεσολαβητές μεταξύ των προθέσεων των σχεδιαστών της πολιτικής των Αναλυτικών Προγραμμάτων και των εκπαιδευτικών, οι οποίοι διεξάγουν τη διδασκαλία στην τάξη». Με τη σειρά του, ένα αναλυτικό πρόγραμμα για το μάθημα των μαθηματικών δεν μεταφέρει πληροφορίες μόνο για το τι μαθηματικά πρέπει να μάθουν οι μαθητές, αλλά και για το πως πρέπει να διδαχθούν (Wang, & Paine, 2003).

Οι Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt, & Houang (2002) εκμεταλλεύονται τα αποτελέσματα του ερευνητικού κύκλου TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) του έτους 1999. Πρόκειται για ένα σώμα ερευνών το οποίο διεξάγεται από το International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) με θέμα το μάθημα των Μαθηματικών και της Φυσικής, είναι παγκοσμίου κλίμακας με δεδομένα από μεγάλο αριθμό χωρών (περίπου 40 σε αυτόν τον κύκλο), το οποίο επαναλαμβάνεται ανά τέσσερα χρόνια ξεκινώντας από το 1995, με στόχο την βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών μέσα από τις κατάλληλες αλλαγές στην εκπαιδευτική πολιτική. Οι Valverde et al. (2002), χρησιμοποιούν το τριμερές μοντέλο των αναλυτικών προγραμμάτων του IEA, το οποίο αποτελείται από το προοριζόμενο (intended curriculum), το εφαρμοσμένο (implemented curriculum) και το πραγματοποιημένο πρόγραμμα σπουδών (attained curriculum). Το προοριζόμενο πρόγραμμα σπουδών αποτελείται από τη γνώση την οποία το σύστημα θέλει να γνωρίζουν οι μαθητές. Αυτό σημαίνει πως το γεγονός πως ένας μαθησιακός στόχος συμπεριλαμβάνεται στο προοριζόμενο πρόγραμμα σπουδών, δε σημαίνει απαραίτητα πως θα παρέχονται οι ευκαιρίες ώστε να επιτευχθεί αυτός ο στόχος. Το εφαρμοσμένο σπουδών πρόγραμμα αποτελείται από τον συνδυασμό πρακτικής που εφαρμόζεται στην τάξη και τον εκπαιδευτικό, τι διδάσκεται δηλαδή στην τάξη. Το πραγματοποιημένο πρόγραμμα σπουδών αποτελείται από τη γνώση που οι μαθητές μπορούν να αποδείξουν ότι κατέκτησαν. Στην εργασία τους ορίζουν σαν μια επιπλέον κατηγορία των προγραμμάτων σπουδών το δυνητικά εφαρμοσμένο πρόγραμμα σπουδών (potentially implemented curriculum), το οποίο είναι το ίδιο το σχολικό εγχειρίδιο και λειτουργεί σαν συνδετικός κρίκος μεταξύ του προοριζόμενου και του εφαρμοσμένου προγράμματος σπουδών. Περιγράφουν το βιβλίο ως το σύνδεσμο μεταξύ των ιδεών στο προοριζόμενο πρόγραμμα σπουδών και τον διαφορετικό κόσμο των τάξεων και αναφέρουν πως έχουν σημαντική επιρροή στη διδασκαλία. Έτσι, το μοντέλο TIMSS ενισχύει τον δεσμό μεταξύ του σχολικού βιβλίου και του προγράμματος σπουδών και αποδεικνύει επίσης, τη σημασία του σχολικού βιβλίου όσον αφορά την επιρροή στη διδασκαλία και την μάθηση των Μαθηματικών.



Εικόνα 2: Αναθεώρηση του τριμερούς μοντέλου προγράμματος σπουδών με την προσθήκη του σχολικού εγχειριδίου σαν γέφυρα μεταξύ του προοριζόμενου και του εφαρμοσμένου προγράμματος σπουδών (Valverde et al., 2002, p. 13)

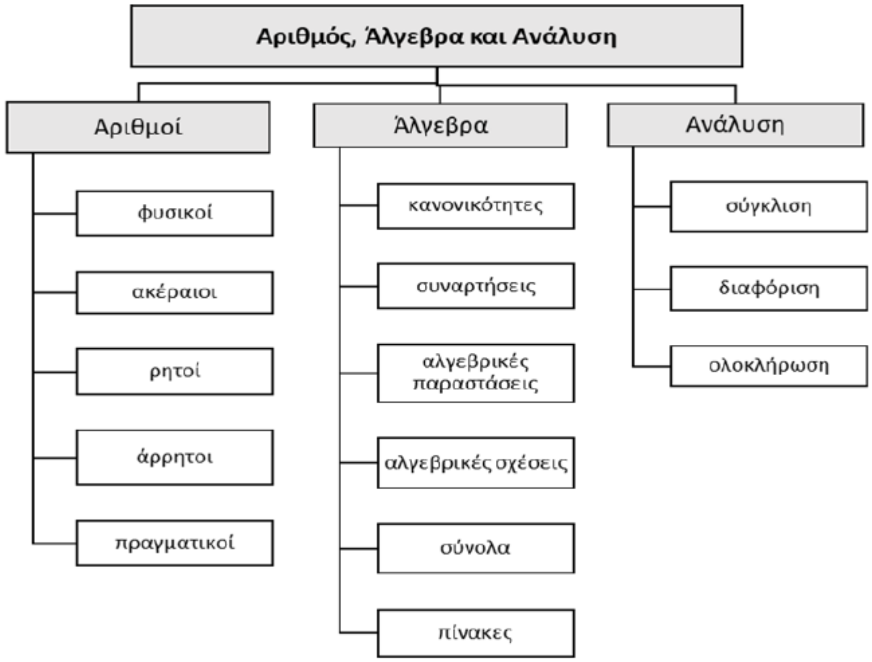
3.3 Τα προγράμματα σπουδών

Ο όρος αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών είναι ένας όρος για τον οποίο είναι δύσκολο να βρεθεί ένας ομόφωνα αποδεκτός ορισμός. Ένας από τους πρωτεργάτες της δόμησης των αναλυτικών προγραμμάτων ήταν ο Dewey. Σύμφωνα με τον ίδιο, το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών είναι «ένας κύκλος μελέτης ο οποίος συναντάται στο σχολείο και παρουσιάζει υλικό το οποίο εκτείνεται απεριόριστα πίσω στο χρόνο και απεριόριστα προς τα έξω στο χώρο» (Dewey, 1902, p.9). Σύμφωνα με τον Hirst (1969), το πρόγραμμα σπουδών δίνει απαντήσεις σε βασικά ερωτήματα του εκπαιδευτικού σχετικά με τη διεξαγωγή της εκπαιδευτικής διαδικασίας όπως το τι θα διδάξει, με ποιο τρόπο θα το διδάξει και για ποιο σκοπό θα το διδάξει. Σημαντική συνεισφορά στην ανάπτυξη των αναλυτικών προγραμμάτων είχε η Hilda Taba με το έργο της Curriculum development: Theory and practice (1962). Σύμφωνα με την ίδια (όπως αναφέρεται στον Okon, 2018), «Όλα τα προγράμματα σπουδών, ανεξάρτητα από τη σχεδίασή τους, αποτελούνται από συγκεκριμένα στοιχεία. Ένα πρόγραμμα σπουδών συνήθως περιέχει μια συλλογή συγκεκριμένων στόχων.

Υποδεικνύει κάποια επιλογή και οργάνωση του περιεχομένου, υπονοεί ή εκδηλώνει ορισμένα μοτίβα μάθησης και διδασκαλίας, είτε επειδή το απαιτούν οι στόχοι τους είτε επειδή το απαιτεί η οργάνωση του περιεχομένου. Τέλος, περιλαμβάνει ένα πρόγραμμα αξιολόγησης των αποτελεσμάτων». Οι Saylor, Alexander και Lewis (1974), (όπως αναφέρεται στον Okon, 2018) ορίζουν ένα πρόγραμμα σπουδών ως «ένα πλάνο το οποίο παρέχει συλλογές μαθησιακών ευκαιριών για την επίτευξη ευρέων και συναφών συγκεκριμένων στόχων για έναν πληθυσμό, ο οποίος εξυπηρετείται από ένα σχολικό κέντρο». Οι Trafton, Reys, & Wasman αναφέρονται συγκεκριμένα στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών επισημαίνοντας το εξής: «με τον όρο υλικό αναλυτικού προγράμματος, θεωρούμε όλους εκείνους τους πόρους οι οποίοι δρουν σαν καθημερινοί καθοδηγητές για τους μαθητές και τους καθηγητές στην οργάνωση δραστηριοτήτων σχετικών με την μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών» (2001, p.1). Στις παρακάτω υποενότητες, γίνεται μια ανασκόπηση των προγραμμάτων σπουδών, από τη σκοπιά της σύγκλισης ή εννοιών οι οποίες είναι παρεμφερείς με την έννοια της σύγκλισης.

3.3.1 Η έννοια της σύγκλισης στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών

Καθώς τα βιβλία που αντιστοιχούν στο νέο πρόγραμμα σπουδών δεν έχουν εκδοθεί κατά την περίοδο συγγραφής της εργασίας, θα αρκεστούμε στην μελέτη του αναλυτικού προγράμματος. Το νέο, λοιπόν, πρόγραμμα σπουδών περιλαμβάνει τρία θεματικά πεδία: α) Αριθμός, Άλγεβρα και Ανάλυση, β) Γεωμετρία, Μέτρηση και Αναλυτική Γεωμετρία και γ) Στοχαστικά Μαθηματικά (Στατιστική και Πιθανότητες). Η δική μας μελέτη θα επικεντρωθεί στο πρώτο θεματικό πεδίο, ώστε να δοθεί έμφαση στο αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας, την έννοια της σύγκλισης. Στην Ανάλυση, με την εισαγωγή της σύγκλισης, της διαφόρισης και της ολοκλήρωσης συναρτήσεων δίνεται η δυνατότητα της πλήρους και ακριβούς μελέτης των συναρτήσεων, καθώς και της επίλυσης προβλημάτων τα οποία δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν με πεπερασμένες διαδικασίες στο πλαίσιο της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας (Ι.Ε.Π., 2021).



Εικόνα 3: Δομή του θεματικού πεδίου: Αριθμός, Άλγεβρα και Ανάλυση

Παρόλο που, μελετώντας την αναλυτική απεικόνιση του προγράμματος σπουδών, είναι εμφανές πως η έννοια της σύγκλισης δε διδάσκεται στην Α’ Λυκείου, ενδιαφέρον παρουσιάζει το θεματικό πεδίο των Αριθμών καθώς υπάρχουν ενδεικτικές δραστηριότητες, η πρώτη για την ακρίβεια, οι οποία έχει σαν θέμα τους απειροψήφιους δεκαδικούς αριθμούς, λέγοντας συγκεκριμένα: «για την κατάταξη των αριθμών στα διάφορα αριθμητικά σύνολα προτείνεται να ερωτηθούν σε ποια από τα βασικά σύνολα ανήκουν συγκεκριμένοι περιοδικοί δεκαδικοί όπως ο 0,999… και να εξηγήσουν τη σκέψη τους» (p. 10). Η συγκεκριμένη δραστηριότητα προτείνεται για ταξινόμηση και αναγνώριση ρητών και άρρητων αριθμών στα βασικά υποσύνολα πραγματικών αριθμών, παρόλα αυτά δεν παύει να είναι μια καλή εισαγωγή στην έννοια του ορίου και του απείρου. Ακόμη, κοιτώντας και τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα, είναι άξιο αναφοράς το προσδοκώμενο αποτέλεσμα με κωδικό Αρ.Π.10.2., το οποίο κάνει λόγο για διερεύνηση της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Οι συγκεκριμένες έννοιες δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερες δυσκολίες σε διακριτά σύνολο όπως αυτό των ακεραίων ή των φυσικών, όπου ο επόμενος ή ο προηγούμενος αριθμός ενός αριθμού είναι εύκολο να βρεθεί. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση του συνόλου των ρητών αριθμών και οι απαντήσεις που θα προκύψουν από μαθητές εάν κληθούν να βρουν έναν αριθμό που βρίσκεται ανάμεσα σε δύο φαινομενικά διαδοχικά κλάσματα π.χ. ½ και 1/3. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τις σχετικές ενδεικτικές δραστηριότητες οι οποίες αφορούν την περιγραφή ενός τρόπου για τον εντοπισμό κάποιου ρητού ανάμεσα στο 1/100 και στο 1/99 καθώς και τον επόμενο ρητό του 1/3.

Στη Β’ Λυκείου, στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας, στην ενότητα της Άλγεβρας, εισάγεται η έννοια της ακολουθίας σαν ειδική περίπτωση συνάρτησης (p. 24). Τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα περιλαμβάνουν την αναγνώριση της ακολουθίας σαν συνάρτηση από τους φυσικούς στους πραγματικούς (Αλ.Κ.11.1.), τη γραφική τους αναπαράσταση (Αλ.Κ.11.2.), τον υπολογισμό όρων από γενικό ή αναδρομικό τύπο (Αλ.Κ.11.3.), τον ορισμό αριθμητικής (Αλ.Κ.11.4.) και γεωμετρικής (Αλ.Κ.11.7.) προόδου, υπολογισμό ν-οστού όρου και αθροίσματος ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής (Αλ.Κ.11.5) και γεωμετρικής (Αλ.Κ.11.8) προόδου και αξιοποίησή τους (Αλ.Κ.11.6 και Αλ.Κ.11.9) για την επίλυση προβλημάτων (p. 25). Μένοντας στη Β' Λυκείου, τώρα όμως στα Μαθηματικά Προσανατολισμού, στην ενότητα της Ανάλυσης εισάγεται και επίσημα η έννοια της σύγκλισης, όπου διερευνούν την αναγκαιότητα εισαγωγής των άπειρων διαδικασιών (Αν.Σ.11.Π.1.), μελετούν αριθμητικά και γραφικά τη σύγκλιση ορισμένων ακολουθιών (Αν.Σ.11.Π.2.), συμπεραίνουν εμπειρικά πως μια μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει (Αν.Σ.11.Π.3.), συμπεραίνουν διαισθητικά πως η ακολουθία $(1 + {}^{1}\!/_{\nu})^{\nu}$ συγκλίνει και συμβολίζουν το όριο με e (Αν.Σ.11.Π.4.), προσδιορίζουν αθροίσματα απείρων όρων γεωμετρικών προόδων (Αν.Σ.11.Π.5.) και εφαρμόζουν την μέθοδο του Ήρωνα για να προσεγγίσουν την τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού (Αν.Σ.11.Π.6.) (p. 42-43).

Στην Γ' Λυκείου, όσον αφορά το μάθημα της Γενικής Παιδείας, ο τομέας της Ανάλυσης ασχολείται μόνο με τη Διαφόριση. Στο μάθημα Προσανατολισμού, μελετάται η έννοια της σύγκλισης σε ένα ευρύτερο φάσμα από ότι η ειδική περίπτωση της ακολουθίας που μελετήθηκε στην Β' Λυκείου. Οι μαθητές αναμένεται να αναπτύξουν μια διαισθητική αντίληψη για το πεπερασμένο και μη πεπερασμένο όριο συνάρτησης (Αν.Σ.12.Π.1.), να αναγνωρίζουν γραφικά τη σύγκλιση και την μη σύγκλιση συναρτήσεων (Αν.Σ.12.Π.2.), να είναι σε θέση να υπολογίζουν όρια συναρτήσεων (Αν.Σ.12.Π.3.), να συνδέουν τη σύγκλιση με τοπικές ιδιότητες της συνάρτησης (Αν.Σ.12.Π.4.), να συνδέουν τη σύγκλιση με τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης (Αν.Σ.12.Π.5.), να ελέγχουν με τη βοήθεια του ορισμού ή/και των ιδιοτήτων τη συνέχεια συναρτήσεων (Αν.Σ.12.Π.6.) και να αναγνωρίζουν γραφικά τη συνέχεια και την ασυνέχεια συναρτήσεων(Αν.Σ.12.Π.7.).

Κεφάλαιο 4. Ερευνητικό μέρος

4.1 Ανάλυση σχολικών εγχειριδίων/βιβλίων

Το ζήτημα των σχολικών εγχειριδίων έχει απασχολήσει έντονα τα τελευταία χρόνια τους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης, καθώς θεωρείται ο ενδιάμεσος κρίκος ανάμεσα στο Αναλυτικό Πρόγραμμα και την παιδαγωγική πρακτική στη σχολική τάξη. Οι Fan, Zhu & Miao (2013) διεξήγαγαν μια εκτενή μελέτη στην οποία εξετάζουν και αναλύουν προηγούμενες έρευνες που βρίσκονται στην ψηφιακή βιβλιοθήκη Education Resource and Information Centre (ERIC) ή είναι δημοσιευμένες σε περιοδικά παγκοσμίου κύρους (π.χ. ZDM, Journal for Research in Mathematics Education, κ.α.), καθώς και σε άλλες σχετικές πηγές όπως βιβλία, διδακτορικές διατριβές και papers που παρουσιάζονται σε συνέδρια, με κύριο θέμα τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών. Το υλικό της έρευνας χωρίστηκε, ανάλογα με το αντικείμενο της έρευνας, σε τέσσερις κατηγορίες: α) τον ρόλο των σχολικών βιβλίων, β) ανάλυση και σύγκριση σχολικών βιβλίων, γ) χρήση σχολικών βιβλίων και δ) άλλα θέματα, με πολυπληθέστερη θεματική ερευνών να είναι η ανάλυση σχολικών βιβλίων.

Σύμφωνα με τους ίδιους, η ανάλυση σχολικού εγχειριδίου είναι ένας ευρύς όρος ο οποίος αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος περιλαμβάνει την ανάλυση ενός ή πολλών σχολικών βιβλίων, η οποία εστιάζει στο πως μία έννοια προσεγγίζεται ή στο πως μια συγκεκριμένη ιδέα αποτυπώνεται στο σχολικό εγχειρίδιο. Το δεύτερο μέρος περιλαμβάνει την ανάλυση διαφορετικών βιβλίων από την ίδια ή και διαφορετική χώρα η οποία δίνει έμφαση στην αναγνώριση των ομοιοτήτων και διαφορών ανάμεσά τους, δηλαδή τη σύγκρισή τους (Fan, Zhu & Miao, 2013). Πιο συγκεκριμένα, αναφέρουν πέντε χαρακτηριστικά τα οποία χρησιμοποιούνται για την ανάλυση ενός σχολικού βιβλίου: α) μαθηματικό περιεχόμενο, β) γνωστική λειτουργία και παιδαγωγία, γ) φύλο, εθνικότητα, ισότητα, κουλτούρα και αξίες, δ) σύγκριση διαφορετικών σχολικών εγχειριδίων και ε) εννοιολόγηση και μαθηματικά ζητήματα. Αξίζει να σημειωθεί πως μια έρευνα είναι πιθανό να μελετά ένα συνδυασμό αυτών των χαρακτηριστικών, για παράδειγμα μια συγκριτική έρευνα μπορεί να αφορά το μαθηματικό περιεχόμενο ή μαθηματικές έννοιες σε διαφορετικά σχολικά βιβλία. Όσον αφορά την πρώτη πτυχή της ανάλυσης, οι περισσότερες έρευνες εστιάζουν στο πως αντιμετωπίζονται συγκεκριμένα θέματα στα εγχειρίδια τα οποία αναλύονται.

Σχετικά με το δεύτερο μέρος της ανάλυσης, οι Charalambous, Delaney, Hsu & Mesa (2010) στην προσπάθειά τους να μελετήσουν την δομή γύρω από το ζήτημα της πρόσθεσης και την αφαίρεσης κλασμάτων στα σχολικά βιβλία τριών χωρών, της Κύπρου, της Ιρλανδίας και της Ταϊβάν, αναφέρουν τρεις γενικές κατηγορίες: α) την οριζόντια ανάλυση, β) την κάθετη ανάλυση και γ) την ανάλυση συνάφειας. Στην οριζόντια προσέγγιση, η ανάλυση εστιάζει στα γενικά χαρακτηριστικά του εγχειριδίου (π.χ. εμφάνιση, οργάνωση του περιεχομένου κατά μήκος του βιβλίου). Πρόκειται για μια ανάλυση που παραλείπει βασικές διαφορές καθώς τα διαφορετικά βιβλία δεν προσεγγίζουν με τον ίδιο τρόπο ένα θέμα ούτε δίνουν την ίδια έμφαση σε αυτό. Η κάθετη ανάλυση εξετάζει το πως διαφορετικά βιβλία προσεγγίζουν μια συγκεκριμένη μαθηματική έννοια. Αυτή η προσέγγιση παραλείπει το πως η έννοια που μελετάται σχετίζεται με τις άλλες έννοιες του αντίστοιχου σχολικού βιβλίου. Η ανάλυση της συνάφειας μελετά τους τρόπους με τους οποίους τα εγχειρίδια χρησιμοποιούνται σε εκπαιδευτικές δραστηριότητες, είτε από τους εκπαιδευτικούς, είτε από τους μαθητές. Για να είναι εφικτή η ανάλυση της συνάφειας είναι απαραίτητος ο συνδυασμός της οριζόντιας και της κάθετης ανάλυσης καθώς δίνει τη δυνατότητα να αποκαλυφθούν χαρακτηριστικά τα οποία πιθανόν να μην γίνονται εμφανή προσεγγίζοντάς τα με μια κατηγορία ανάλυσης.

4.2 Υλικό ανάλυσης

Για την παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκε, από τα ελληνικά σχολικά βιβλία, το σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας Α’ Λυκείου (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Παπασταυρίδης, Πολύζος, Σβέρκος Α, 2010). Το βιβλίο αυτό αποτελείται από 7 κεφάλαια, από τα οποία δόθηκε βάση στο πέμπτο κεφάλαιο, τις Προόδους και συγκεκριμένα την πρώτη ενότητα του πέμπτου κεφαλαίου, στην οποία γίνεται εισαγωγή των ακολουθιών. Χρησιμοποιήθηκε, επίσης, η παλαιότερη έκδοση του σχολικού βιβλίου της Άλγεβρας της Β’ Λυκείου, από το οποίο μελετήθηκε η ενότητα 3.5 με τίτλο «Άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου». Τέλος, χρησιμοποιήθηκε, επίσης, και το βιβλίο των Μαθηματικών Προσανατολισμού της Γ’ Λυκείου Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Μέτης, Μπρουχούτας, Παπασταυρίδης, Πολύζος, 2010). Το συγκεκριμένο βιβλίο αποτελείται από δύο μέρη, το Α’ μέρος, το οποίο χωρίζεται σε 2 κεφάλαια και έχει ως αντικείμενο την Άλγεβρα, και το Β’ μέρος, το οποίο χωρίζεται σε 3 κεφάλαια και έχει ως αντικείμενο την Ανάλυση. Από το βιβλίο της Γ’ Λυκείου η μελέτη εστιάζει στο πρώτο κεφάλαιο του Β’ μέρους, το οποίο έχει να κάνει με τα όρια και τη συνέχεια συναρτήσεων, στις ενότητες 1.4 με τίτλο «Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in R$, 1.5 με τίτλο «Ιδιότητες των ορίων», 1.6 με τίτλο «Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in R$», 1.7 με τίτλο «Όρια συνάρτησης στο άπειρο» και 1.8 με τίτλο «Συνέχεια συνάρτησης» Από κάθε ενότητα μελετήθηκαν οι ασκήσεις της Α’ Ομάδας και Β’ Ομάδας.

Χώρα	**Τάξη**	**Ενότητα-Τίτλος**
Ελλάδα	Α’ Λυκείου	5.1 Ακολουθίες
Ελλάδα	Β’ Λυκείου	3.5 Άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου
Ελλάδα	Γ’ Λυκείου	1.4 Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in R$
Ελλάδα	Γ’ Λυκείου	1.5 Ιδιότητες των ορίων
Ελλάδα	Γ’ Λυκείου	1.6 Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in R$
Ελλάδα	Γ’ Λυκείου	1.7 Όρια συνάρτησης στο άπειρο
Ελλάδα	Γ’ Λυκείου	1.8 Συνέχεια συνάρτησης

Πίνακας 1: Ενότητες ελληνικού σχολικού βιβλίου προς ανάλυση

Μελετήθηκε, επίσης, το κυπριακό βιβλίο των μαθηματικών κοινού κορμού της Β’ Λυκείου (Δημητρίου – Καραντάνου, Ιωάννου, Καραντάνος, Κωνσταντινίδης, Λοϊζιάς, Ματθαίου, Παπαγιάννης, Παραγυίου, Σεργίδης, Στυλιανού, Τιμοθέου, Χατζηγεωργίου, 2017). Το βιβλίο αποτελείται από 7 κεφάλαια, από τα οποία δίνεται έμφαση σε δύο κεφάλαια, στο τέταρτο, που ασχολείται με όρια και παραγώγους, και στο πέμπτο, με θέμα τις ακολουθίες. Από το τέταρτο κεφάλαιο αναλύονται οι ενότητες που αφορούν την έννοια του ορίου, δηλαδή, η ενότητα 4.2 με τίτλο «Η έννοια του ορίου - Πλευρικά όρια συνάρτησης», η ενότητα 4.3 με τίτλο «Όριο πολυωνυμικής-ρητής συνάρτησης» και η ενότητα 4.4 με τίτλο «Όριο συνάρτησης στο άπειρο». Από το πέμπτο κεφάλαιο αναλύονται οι ενότητες 5.2 με τίτλο «Η έννοια της ακολουθίας» καθώς και η ενότητα 5.3 με τίτλο «Ειδικές ακολουθίες». Σημειώνεται πως, καθώς στην ενότητα των ειδικών ακολουθιών το βιβλίο αναφέρεται στην αριθμητική και στη γεωμετρική πρόοδο, για λόγους συνάφειας με το θέμα της εργασίας, αναλύθηκαν οι αποκλειστικά οι ασκήσεις οι οποίες αφορούν το άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου.

Χώρα	**Τάξη**	**Ενότητα-Τίτλος**
Κύπρος	Β’ Λυκείου	4.2 Η έννοια του ορίου - Πλευρικά όρια συνάρτησης
Κύπρος	Β’ Λυκείου	4.3 Όριο πολυωνυμικής-ρητής συνάρτησης
Κύπρος	Β’ Λυκείου	4.4 Όριο συνάρτησης στο άπειρο
Κύπρος	Β’ Λυκείου	5.2 Η έννοια της ακολουθίας
Κύπρος	Β’ Λυκείου	5.3 Ειδικές ακολουθίες

Πίνακας 2: Ενότητες κυπριακού σχολικού βιβλίου προς ανάλυση

4.3 Εργαλείο ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων

Η Brändström (2005) μελετά τις δραστηριότητες τριών σχολικών βιβλίων των μαθηματικών στην πρώτη τάξη της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στη Σουηδία προκειμένου να αναλύσει το πως τα βιβλία και οι δραστηριότητες διαφοροποιούνται, διδάσκονται δηλαδή, με διαφορετικό τρόπο με στόχο να παρέχονται οι ίδιες ευκαιρίες μάθησης σε όλους τους μαθητές. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να είναι σε θέση να προσαρμόζουν το περιεχόμενο, τις διαδικασίες και τις δραστηριότητες στο επίπεδο του κάθε μαθητή. Στόχοι της έρευνας ήταν α) να γίνει περιγραφή των κεφαλαίων ώστε να γίνει κατανοητός ο διαχωρισμός των δραστηριοτήτων ανάλογα με το επίπεδο δυσκολίας, β) η δημιουργία ενός εργαλείου ανάλυσης για την μελέτη των σημαντικών χαρακτηριστικών των δραστηριοτήτων και γ) ανάλυση των δραστηριοτήτων και σύγκριση των επιπέδων με τη χρήση του εργαλείου. Η ανάλυση εστιάζει σε τέσσερα χαρακτηριστικά, τις εικόνες, τις απαιτούμενες πράξεις, τις γνωστικές διαδικασίες και τις γνωστικές απαιτήσεις για τα οποία παρέχονται λεπτομέρειες παρακάτω.

Κατηγορία	Υποκατηγορία	Κωδικοί
Εικόνες	Καμία	Ε1
	Διακοσμητική	Ε2
	Σχήμα	Ε3.1
	Γραφική Παράσταση	Ε3.2
Ενέργειες	Μία	ΕΝ1
	Πολλές	ΕΝ2
Διαδικασίες	Ανάκληση	Δ1
	Κατανόηση	Δ2
	Εφαρμογή	Δ3
	Ανάλυση	Δ4
	Αξιολόγηση	Δ5
	Δημιουργία	Δ6
Απαιτήσεις	Αποστήθιση	Α1
	Με Συνδέσεις	Α2
	Χωρίς Συνδέσεις	Α3
	Κάνοντας Μαθηματικά	Α4

Πίνακας 3: Κωδικοποίηση διαστάσεων του εργαλείου ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων

Εικόνες: Όσον αφορά τις εικόνες, γίνεται ο διαχωρισμός ανάμεσα στις δραστηριότητες χωρίς εικόνες, στις δραστηριότητες με διακοσμητικές εικόνες και στις δραστηριότητες με λειτουργικές εικόνες. Οι διακοσμητικές εικόνες δεν παρέχουν καμία βοήθεια ή καθοδήγηση και βρίσκονται στη δραστηριότητα καθαρά για διακοσμητικό λόγο. Οι λειτουργικές εικόνες αποτελούν μια εικονογράφηση της δραστηριότητας που παρουσιάζεται γραπτώς και είναι απαραίτητες για την επίλυση της δραστηριότητας. Σχετικά με τις λειτουργικές εικόνες, διαφοροποιούμε ελαφρώς το εργαλείο και κάνουμε τον διαχωρισμό ανάμεσα σε σχήματα και γραφήματα.

Ενέργειες: Σχετικά με τις απαιτούμενες ενέργειες, οι δραστηριότητες χωρίζονται σε αυτές που για την επίλυσή τους είναι αναγκαία μια ενέργεια και σε αυτές που χρειάζονται περισσότερες από μια ενέργειες. Είναι σημαντικό να μη γίνει σύγχυση μεταξύ των ενεργειών και των πράξεων. Πρόκειται για ακόμη μια διαφοροποίηση του εργαλείου της Brändström. Θεωρούμε πως υπάρχει μεγαλύτερο ερευνητικό ενδιαφέρον στην ανάλυση των ενεργειών που απαιτούνται για την επίλυση μιας δραστηριότητας. Αυτό διότι, από την ανάλυση των δραστηριοτήτων από τη σκοπιά των απαραίτητων πράξεων, δεν προκύπτουν ισχυρά αποτελέσματα. Το γεγονός πως για την επίλυση μιας άσκησης απαιτούνται πολλές αριθμητικές πράξεις, δεν την καθιστά δύσκολη άσκηση ή μια άσκηση που έχει ως στόχο να εμβαθύνουν οι μαθητές στην έννοια στην οποία εξασκούνται. Στον αντίποδα, οι ενέργειες είναι ένας πιο ευρύς όρος ο οποίος περιέχει τις αριθμητικές πράξεις αλλά και άλλες διαδικασίες όπως χάραξη μιας γραφικής παράστασης, εφαρμογή τύπου ή ορισμού, κ.α.

Γνωστικές διαδικασίες: Έπειτα, οι γνωστικές διαδικασίες που απαιτούνται για την επίλυση μιας δραστηριότητας στηρίζονται στο έργο των Anderson & Krathwohl (2001), το οποίο πρόκειται για μια αναθεωρημένη εκδοχή της ταξινομίας του Bloom (1956) και χωρίζονται σε έξι κατηγορίες: ανάκληση (remembering), η κατανόηση (understanding), η εφαρμογή (applying), η ανάλυση (analyzing), η αξιολόγηση (evaluating) και η δημιουργία (creating).

- Η *ανάκληση* αφορά δραστηριότητες των οποίων ο στόχος είναι οι μαθητές να συγκρατήσουν το υλικό που τους παρουσιάζεται. Περιλαμβάνει την ανάκτηση πληροφορίας από την μακροπρόθεσμη μνήμη. Τέτοιου είδους γνώση είναι απαραίτητη για την ουσιαστική μάθηση και την επίλυση προβλημάτων καθώς χρησιμοποιείται σε πιο πολύπλοκες δραστηριότητες. Ο μαθητής, μέσα από ερωτήσεις, καλείται να συγκρίνει τη σχετική γνώση, η οποία είναι ίδια ή παρόμοια, με την πληροφορία με την οποία έρχεται αντιμέτωπος. Όταν παρουσιάζεται στον μαθητή νέα πληροφορία, αυτός αποφασίζει αν η καινούρια πληροφορία αντιστοιχεί με προηγούμενη γνώση. Περιλαμβάνει, επίσης, την ανάκληση γνώσης όταν ζητηθεί ρητά αυτό, για παράδειγμα, να γίνει ερώτηση σε κάποιον μαθητή αν θυμάται τον πολλαπλασιασμό ακεραίων και κατ' επέκταση να πει το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού 7×8. Όταν ο στόχος της διδασκαλίας είναι η μεταφορά νοήματος, η προσοχή εστιάζεται στις υπόλοιπες πέντε διαδικασίες.
- Η *κατανόηση* περιλαμβάνει δημιουργία νοήματος μέσα από καθοδηγητικά μηνύματα. Σύμφωνα με τους συγγραφείς, οι μαθητές καταλαβαίνουν όταν είναι σε θέση να δημιουργούν συνδέσεις μεταξύ της προηγούμενης και της καινούριας γνώσης και έχουν την ικανότητα να κατασκευάζουν νόημα μέσα από διαφορετικά μηνύματα (γραπτά, προφορικά, γραφικά). Πιο συγκεκριμένα, η νέα γνώση ενσωματώνεται στα ήδη υπάρχοντα σχήματα και γνωστικά πλαίσια. Σε αυτό το στάδιο, ο μαθητής καλείται να αλλάξει την αναπαράσταση της πληροφορίας που δέχεται από μια μορφή σε μια άλλη (εικόνες σε λέξεις, λέξεις σε αλγεβρικές παραστάσεις, κ.λπ.), να αναγνωρίσει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά της έννοιας και να τα χρησιμοποιήσει (π.χ. ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει δύο πλευρές ίσες), να αναγνωρίσει αν κάτι ανήκει σε μια συγκεκριμένη κατηγορία (π.χ. σε ποιο από τα βασικά σύνολα αριθμών ανήκει ένας αριθμός), να αντιλαμβάνεται μοτίβα (π.χ. η εύρεση του επόμενου αριθμού της ακολουθίας 1, 2, 3, 5, 8, 13), να εντοπίζει ομοιότητες,

διαφορές και αντιστοιχίες μεταξύ προβλημάτων, καταστάσεων, ιδεών και αντικειμένων γενικότερα.

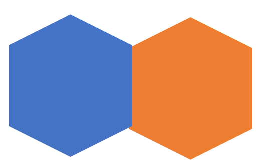
- Η *εφαρμογή* περιλαμβάνει τη χρήση διαδικασιών για την επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων και είναι στενά συνδεδεμένη με την διαδικαστική γνώση. Υπάρχει, όμως πιθανότητα, ο μαθητής να αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα για το οποίο δεν είναι σίγουρος ποια διαδικασία θα χρησιμοποιήσει, οπότε, ή θα πρέπει να γνωρίζει ποια μέθοδο θα χρησιμοποιήσει ή θα πρέπει να είναι σε θέση να τροποποιήσει κάποια γνωστή μέθοδο. Για παράδειγμα, αν ζητηθεί από έναν μαθητή να λύσει τη δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2+2x-3=0$ με την μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου, αυτό εξετάζει τη διαδικαστική γνώση του μαθητή. Αυτό σημαίνει πέρα από το σωστό αποτέλεσμα, δίνεται σημασία και στην εκτέλεση του αλγορίθμου.
- Η *ανάλυση* περιλαμβάνει διαίρεση της πληροφορίας σε κομμάτια και κατανόηση του πως αυτά τα κομμάτια συνδέονται μεταξύ τους. Περιέχει την ικανότητα της αναγνώρισης του σχετικού και σημαντικού μέρους ενός μηνύματος από το μικρότερης σημασίας μέρος, των τρόπων με τους οποίους οργανώνονται τα κομμάτια ενός μηνύματος και συνενώνονται σε μια συνεκτική δομή, και των βαθύτερων στόχων του μηνύματος.
- Η *αξιολόγηση* περιλαμβάνει την λήψη αποφάσεων με βάση συγκεκριμένα κριτήρια και πρότυπα. Τα πρότυπα αυτά μπορούν να είναι είτε ποσοτικά είτε ποιοτικά. Αυτή η διαδικασία είναι απαραίτητη όταν οι μαθητές καλούνται να ελέγξουν εάν ένα συμπέρασμα προκύπτει ή όχι από τις προϋποθέσεις του, εάν τα δεδομένα υποστηρίζουν ή απορρίπτουν μια υπόθεση, εάν η πληροφορία που τους παρουσιάζεται περιέχει στοιχεία τα οποία αντιφάσκουν. Πρόκειται για μια διαδικασία στενά συνδεδεμένη με την κριτική σκέψη. Μια τέτοια άσκηση θα μπορούσε εξετάζει την κρίση του μαθητή να στην εύρεση του πιο αποτελεσματικού τρόπου επίλυσής της. Για παράδειγμα, αν είχαμε ένα σύστημα και η ερώτηση προς τους μαθητές πέρα από την επίλυση του ήταν να λυθεί με τον βέλτιστο τρόπο.
- Τέλος, η *δημιουργία* περιλαμβάνει την ένωση κομματιών πληροφορίας για τη δημιουργία ενός συνεκτικού και λειτουργικού συνόλου. Οι μαθητές πρέπει να δημιουργήσουν ένα νέο προϊόν αναδιοργανώνοντας κάποια στοιχεία σε δομές οι οποίες δεν υπήρχαν προηγουμένως. Σε αυτήν την κατηγορία, ο μαθητής προσπαθεί να κατανοήσει την άσκηση και να βρει πιθανές λύσεις. Είναι πιθανό η διαφορετική αναπαράσταση ενός προβλήματος να οδηγήσει στην εύρεση νέων πιθανών λύσεων. Προσπαθεί, επίσης, να κατασκευάσει ένα πλάνο διαιρώντας το αρχικό πρόβλημα σε μικρότερα υποπροβλήματα. Τέλος, υλοποιεί αυτό το πλάνο λύνοντας επιτυχώς την άσκηση. Για παράδειγμα, θα μπορούσε να ζητηθεί από τους μαθητές να αναφέρουν τα βήματα που πρέπει να ακολουθήσουν για την επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος.

Διαδικασίες	Περιγραφή
Ανάκληση	Ανάκληση γνώσης από μακροπρόθεσμη μνήμη
Κατανόηση	Δημιουργία νοήματος από διδακτικά μηνύματα
Εφαρμογή	Χρήση διαδικασιών σε συγκεκριμένες καταστάσεις
Ανάλυση	Διαίρεση σε κομμάτια και προσδιορισμός του πως συνδέονται αυτά τα κομμάτια
Αξιολόγηση	Κρίση με βάση κριτήρια και πρότυπα
Δημιουργία	Ένωση κομματιών σε σύνολο

Πίνακας 4: Σύνοψη των γνωστικών διαδικασιών, Brändström, p. 49

Γνωστικές απαιτήσεις: Τέλος, οι γνωστικές απαιτήσεις χωρίζονται σε τέσσερις κατηγορίες: αποστήθιση, συνδέσεις, χωρίς συνδέσεις και μαθηματικές πράξεις και στηρίζονται στο έργο των Smith & Stein (1998).

- Σύμφωνα με τους ίδιους, η κατηγορία της *αποστήθισης* περιλαμβάνει την αναπαραγωγή προηγούμενης γνώσης, όπως κανόνες, φόρμουλες ή ορισμούς. Χαρακτηρίζεται ως μειωμένων απαιτήσεων κατηγορία καθώς για τα έργα που έχουν την αποστήθιση σαν γνωστική απαίτηση, δε χρησιμοποιούνται διαδικασίες, πρόκειται, δηλαδή, για σύντομη δραστηριότητα για την οποία γίνεται αναπαραγωγή υλικού το οποίο έχει ξαναδεί ο μαθητής σχεδόν αυτούσιο. Δεν υπάρχουν συνδέσεις με τις έννοιες που μαθαίνει ο μαθητής. Ένα παράδειγμα θα ήταν να ερωτηθεί κάποιος μαθητής «Ποιος είναι ο κανόνας για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων;».
- Οι *δραστηριότητες με συνδέσεις* εστιάζουν στη χρήση διαδικασιών με στόχο να αναπτύξουν βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και ιδεών, για αυτό και θεωρείται μια κατηγορία υψηλότερων γνωστικών απαιτήσεων. Τέτοιου είδους δραστηριότητες συνήθως συνοδεύονται από οπτικές αναπαραστάσεις όπως γραφήματα και εικόνες καθώς οι συνδέσεις με πολλαπλές αναπαραστάσεις βοηθούν στην ανάπτυξη νοήματος. Απαιτείται ένας υπολογίσιμος βαθμός γνωστικής προσπάθειας προκειμένου ο μαθητής να ολοκληρώσει αποτελεσματικά τη δραστηριότητα. Παρόλο που χρησιμοποιούνται διαδικασίες, δεν εφαρμόζονται μηχανικά και είναι απαραίτητο να προηγηθεί σκέψη. Οι μαθητές πρέπει να ασχοληθούν με ιδέες οι οποίες αποτελούν τη βάση των διαδικασιών απαραίτητων για την ολοκλήρωση της εργασίας με επιτυχία, και που αναπτύσσουν την κατανόηση. Ένα παράδειγμα που προτείνουν οι συγγραφείς είναι: «Να βρεθεί το 1/6 του 1/2. Αποτυπώστε την απάντηση πάνω στο σχήμα 1».

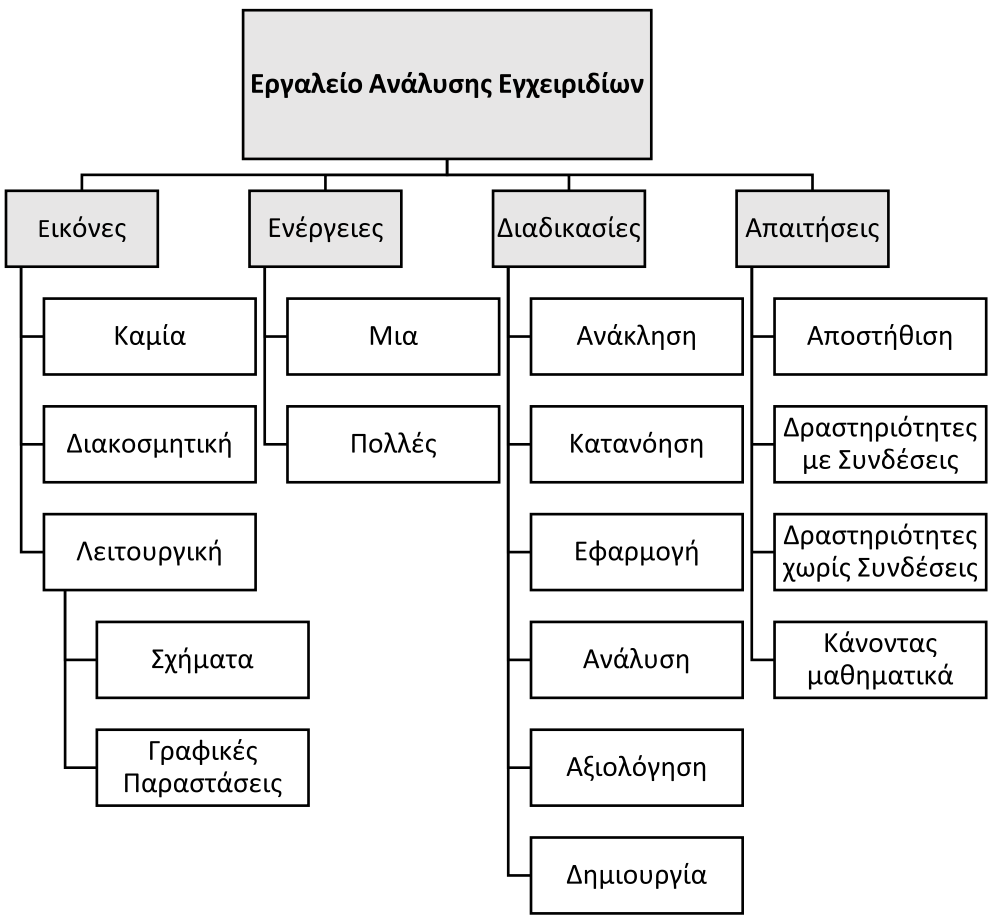


Εικόνα 4: Ποιο είναι το 1/6 του 1/2 πάνω στο σχήμα;

- Οι *δραστηριότητες χωρίς συνδέσεις* χαρακτηρίζονται ως δραστηριότητες χαμηλών γνωστικών απαιτήσεων. Είναι αλγοριθμικές και η χρήση διαδικασιών είτε ζητείται είτε είναι εμφανής από προηγούμενες εμπειρίες. Έχουν περιορισμένες γνωστικές απαιτήσεις όπως ειπώθηκε στην αρχή και δεν υπάρχει ιδιαίτερη αμφιβολία για το τι πρέπει να γίνει και πως για να λυθεί η άσκηση. Εστιάζουν περισσότερο στην παραγωγή σωστών απαντήσεων και σε μικρότερο βαθμό στην ανάπτυξη μαθηματικής κατανόησης. Δεν είναι απαραίτητες οι επεξηγήσεις ή, αν είναι, αφορούν την περιγραφή της διαδικασίας που χρησιμοποιείται. Για παράδειγμα, «Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις.»

i) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ ii) $\frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$ iii) $\frac{4}{9} \times \frac{3}{5}$

- Τέλος, στη διάσταση *κάνοντας μαθηματικά*, η οποία χαρακτηρίζεται ως κατηγορία υψηλών γνωστικών απαιτήσεων, απαιτείται πολύπλοκη και μη αλγοριθμική σκέψη. Σε αυτό το στάδιο, είναι απαραίτητο οι μαθητές να εξερευνούν και να κατανοούν τη φύση των εννοιών, των διαδικασιών και των σχέσεων που συναντούν, καθώς και να χειρίζονται με ευχέρεια τη σχετική γνώση και την εμπειρία την οποία διαθέτουν. Απαιτείται, επίσης από τους μαθητές να αναλύσουν τη δραστηριότητα και να εξετάσουν στοιχεία τα οποία πιθανόν να περιορίσουν συγκεκριμένες στρατηγικές επίλυσης. Πρόκειται για την κατηγορία με τις υψηλότερες γνωστικές απαιτήσεις, και μια δραστηριότητα τέτοιου είδους ενδέχεται να προκαλέσει άγχος στους μαθητές λόγω της απρόβλεπτης φύσης της κατά την επίλυσή της. Για παράδειγμα, «Να δοθεί ένα παράδειγμα μέσα από την πραγματική ζωή το οποίο αναπαρίσταται από την παράσταση $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ »



Εικόνα 5: Εργαλείο ανάλυσης της Brandstorm (p.47), το οποίο θα χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση των ελληνικών σχολικών εγχειριδίων

4.4 Μέθοδος ανάλυσης

Η παρούσα εργασία προσπαθεί να μελετήσει τις ασκήσεις τις οποίες αφορούν την έννοια της σύγκλισης στα σχολικά βιβλία του Λυκείου της Ελλάδος και της Κύπρου και επιδιώκει να αναδείξει τις γνωστικές απαιτήσεις που απαιτούνται για την επίλυση των ασκήσεων αλλά και στοιχεία της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία που απαιτούνται από τον εκπαιδευτικό για την ανάδειξη σημαντικών ζητημάτων που σχετίζονται με την έννοια της σύγκλισης. Συγκεκριμένα, επιχειρεί να δώσει απαντήσεις στα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

1. Με ποια συχνότητα συναντώνται ασκήσεις οι οποίες περιέχουν κάποια μορφή οπτικοποίησης στα δεδομένα τους (π.χ. φωτογραφίες, σχήματα, γραφικές παραστάσεις);
2. Πόσες μαθηματικές ενέργειες είναι απαραίτητες για την επίλυση των συγκεκριμένων ασκήσεων;
3. Ποιες είναι οι γνωστικές διαδικασίες που καλείται να χρησιμοποιήσει ο μαθητής προκειμένου να λύσεις τις ασκήσεις;
4. Ποιες είναι οι γνωστικές απαιτήσεις των ασκήσεων που συναντούν οι μαθητές στα σχολικά εγχειρίδια;
5. Υπάρχουν ομοιότητες ή/και διαφορές σχετικά με τα τέσσερα προηγούμενα ερωτήματα ανάμεσα στα σχολικά εγχειρίδια της Ελλάδας και της Κύπρου;
6. Ποια είναι τα απαραίτητα είδη μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία των ασκήσεων που μελετώνται;

Για τον λόγο αυτό μελετώνται: α) το βιβλίο της Άλγεβρας της Α' Λυκείου (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Παπασταυρίδης, Πολύζος, Σβέρκος, 2010), β) το παλαιότερο σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Β' Λυκείου (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Παπασταυρίδης, Πολύζος, Σβέρκος, 1992) καθώς από το υπάρχον βιβλίο έχουν αφαιρεθεί κάποιες σχετικές έννοιες, γ) το βιβλίο της Γ' Λυκείου (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Μέτης, Μπρουχούτας, Παπασταυρίδης, Πολύζος, 2010), καθώς και δ) το σχολικό βιβλίο μαθηματικών κοινού κορμού της Κύπρου για την τάξη της Β' Λυκείου (Δημητρίου – Καραντάνου et al., 2017), ώστε να γίνει μια σύγκριση μεταξύ των ελληνικών και κυπριακών εγχειριδίων. Για την ανάλυση των ασκήσεων και των δραστηριοτήτων του υλικού που μελετάται, χρησιμοποιείται το εργαλείο της Brandstorm (2005), το οποίο περιγράφεται στην αμέσως προηγούμενη παράγραφο.

Σε κάθε άσκηση αποδίδεται ένας κωδικός σχετικά με τις τέσσερις διαστάσεις του εργαλείου και τις υποκατηγορίες αυτών. Οι κωδικοί που ανατίθενται, δημιουργήθηκαν λαμβάνοντας υπόψη το αρχικό γράμμα της κάθε διάστασης, και προσθέτοντας έναν αριθμό, προκειμένου να γίνει διάκριση των υποκατηγοριών της κάθε διάστασης. Σημειώνεται πως για τη διάσταση των ενεργειών, οι αντίστοιχοι κωδικοί χρησιμοποιούν τα δύο πρώτα γράμματα και όχι μόνο το πρώτο, για να αποφευχθεί σύγχυση με τη διάσταση των εικόνων, με την οποία έχουν το ίδιο αρχικό γράμμα. Με τη βοήθεια του λογισμικού Excel, δημιουργήθηκαν οι πίνακες αποτελεσμάτων που χρησιμοποιούνται μεταγενέστερα στην ενότητα των αποτελεσμάτων. Οι πρώτες δύο διαστάσεις του εργαλείου (εικόνες, ενέργειες) μελετήθηκαν χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες. Για τις υπόλοιπες διαστάσεις (γνωστικές διαδικασίες, γνωστικές απαιτήσεις) μετά από μία πρώτη ταξινόμηση, συζητήθηκαν τα πρώτα αποτελέσματα και στη συνέχεια έγινε εκ νέου ανάλυση. Επιπρόσθετα, αναφέρονται ενδεικτικά παραδείγματα από τα διαφορετικά βιβλία τα οποία εντάσσονται σε διαφορετικές κατηγορίες. Στα ενδεικτικά παραδείγματα περιγράφεται το είδος της μαθηματικής γνώσης περιεχομένου το οποίο απαιτείται για τη διδασκαλία της κάθε άσκησης και γίνεται επισήμανση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών.

4.5 Παραδείγματα ανάλυσης ελληνικών σχολικών βιβλίων

Βλέποντας το Αναλυτικό Πρόγραμμα για το μάθημα των Μαθηματικών στις τάξεις του Γυμνασίου (ΔΕΠΠΣ & ΑΠΣ, 2003) γίνεται εμφανές πως δεν υπάρχει κάποια αναφορά σχετικά με τη σύγκλιση ακολουθιών. Και στις τρεις τάξεις, το περιεχόμενο χωρίζεται σε δύο άξονες Άλγεβρα η οποία συνδυάζεται με Αριθμητική ή Στατιστική και την Γεωμετρία. Εισάγεται η έννοια της Συνάρτησης αλλά μέχρι και την Γ’ Γυμνασίου οι μαθητές θα μελετήσουν γραμμικές και τετραγωνικές συναρτήσεις και θα ασχοληθούν με τον ορισμό και τη γραφική παράσταση, χωρίς να εισάγεται η ειδική περίπτωση της ακολουθίας. Συνεπώς, αμέσως το ενδιαφέρον στρέφεται στα σχολικά βιβλία και στα προγράμματα σπουδών τα οποία αφορούν τις τάξεις του Λυκείου. Στις παρακάτω υποενότητες, ακολουθούν κάποια παραδείγματα της ανάλυσης που έγινε με το εργαλείο το οποίο μελετήθηκε προηγουμένως. Τα παραδείγματα αυτά αποτελούν οι ασκήσεις από τις ενότητες των ελληνικών σχολικών βιβλίων που μελετήθηκαν. Κύριος στόχος για την επιλογή των παρακάτω παραδειγμάτων είναι να δει ο αναγνώστης παραδείγματα τα οποία είναι αντιπροσωπευτικά και των ενοτήτων που μελετήθηκαν κατά τη διάρκεια της ανάλυσης, αλλά και των κατηγοριών του εργαλείου ανάλυσης.

4.5.1 Σχολικό βιβλίο της Α’ Λυκείου

Ξεκινώντας με το βιβλίο της Άλγεβρας της Α’ Λυκείου, το βιβλίο αποτελείται από επτά κεφάλαια: τη Θεωρία των Πιθανοτήτων, τους Πραγματικούς Αριθμούς, τις Εξισώσεις, τις Ανισώσεις, τις Προόδους, τις βασικές έννοιες των Συναρτήσεων και την μελέτη βασικών Συναρτήσεων. Ενδιαφέρον σχετικά με το θέμα μας παρουσιάζει το πέμπτο κεφάλαιο, οι Πρόοδοι, στο οποίο γίνεται εισαγωγή στην έννοια της ακολουθίας πραγματικών αριθμών, και εξετάζονται η αριθμητική και η γεωμετρική πρόοδος ως ειδικές περιπτώσεις κανονικότητας (pattern) σε ακολουθίες (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Παπασταυρίδης, Πολύζος & Σβέρκος, 2010).

Α' Ομάδας, 5.1 Ακολουθίες

1. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών:

i) $\alpha_\nu = 2\nu + 1$ **ii)** $\alpha_\nu = 2^\nu$ **iii)** $\alpha_\nu = \nu^2 + \nu$ **iv)** $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^2 - 1}{\nu + 1}$

v) $\alpha_\nu = \left(-\dfrac{1}{10}\right)^{\nu-1}$ **vi)** $\alpha_\nu = 1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{\nu}$ **vii)** $\alpha_\nu = |5 - \nu|$ **viii)** $\alpha_\nu = \eta\mu\dfrac{\nu\pi}{4}$

ix) $\alpha_\nu = \dfrac{2^\nu}{\nu^2}$ **x)** $\alpha_\nu = (-1)^{\nu+1} \cdot \dfrac{1}{\nu}$ **xi)** $\alpha_\nu = (-1)^{\nu+1}$.

Εικόνα 6: Άσκηση 1, σελίδα 124, Άλγεβρα Α' Λυκείου

Ε1 Ξεκινώντας με την πρώτη άσκηση της ενότητας 5.1, γίνεται εύκολα αντιληπτή η απουσία των εικόνων.

ΕΝ1 Απαιτείται μόνο μια ενέργεια καθώς πρόκειται για απλή εφαρμογή αριθμών σε τύπο.

Δ3 Οι απαραίτητες γνωστικές διαδικασίες για την επίλυση της άσκησης είναι μόνο η εφαρμογή, καθώς για την κάθε ακολουθία ο μαθητής θα βρει τα α_1, α_2, α_3, α_4 και α_5 βάζοντας για κάθε όρο το αντίστοιχο ν στους τύπους των ακολουθιών.

Α2 Παρόλο που κάθε ερώτημα πρόκειται για μια απλή εφαρμογή τύπου για την εύρεση των πέντε πρώτων όρων της ακολουθίας, εμφανίζεται η σύνδεση μεταξύ του γενικού όρου της ακολουθίας και των όρων της ακολουθίας.

Εάν ζητηθεί από τους μαθητές να κάνουν μια απλή αντικατάσταση, απαιτείται η κοινή γνώση περιεχομένου για τη διδασκαλία της άσκησης καθώς πρόκειται για μια ενέργεια που ενδέχεται να πραγματοποιηθεί και σε πλαίσια πέρα από αυτά της διδασκαλίας.
Στη συγκεκριμένη άσκηση εμφανίζονται διαφορετικές περιπτώσεις ακολουθιών όπως γραμμικές, τετραγωνικές, εκθετικές και εναλλάσουσες ακολουθίες. Συνεπώς, απαιτείται η εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου εάν ο εκπαιδευτικός επιλέξει να επισημάνει αυτές τις περιπτώσεις, αν θα ζητήσει π.χ. από τους μαθητές παραδείγματα διαφορετικών ειδών ακολουθιών.
Επιπλέον, απαραίτητο είδος μαθηματικής γνώσης περιεχομένου για τη διδασκαλία της άσκησης αυτής, είναι η γνώση του ορίζοντα του περιεχομένου καθώς, εκτός του ότι υπάρχει σύνδεση μεταξύ εννοιών που μαθαίνουν οι μαθητές στην ενότητα αυτή, είναι στην κρίση του εκπαιδευτικού να αναγνωρίσει την μαθηματική ευκαιρία και να αξιολογήσει εάν θα διακρίνει τις ακολουθίες συγκλίνουν από αυτές που αποκλίνουν..

Α' Ομάδας, 5.1 Ακολουθίες

3. Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες:

i) $\alpha_\nu = \nu + 5$ **ii)** $\alpha_\nu = 2^\nu$ **iii)** $\alpha_\nu = 2^\nu - 1$ **iv)** $\alpha_\nu = 5\nu + 3$.

Εικόνα 7: Άσκηση 3, σελίδα 124, Άλγεβρα Α' Λυκείου

Ε1 Στην άσκηση 3 δεν εμφανίζονται εικόνες.

ΕΝ2 Για την επίλυσή της απαιτούνται η εμφάνιση του προηγούμενου ή του επόμενου όρου από τον ν-οστό και οι αριθμητικές πράξεις για την εύρεση του αναδρομικού τύπου, οπότε χρειάζονται περισσότερες από μια ενέργειες.

Δ3 Για την επίλυση της άσκησης δεν είναι απαραίτητη καμία άλλη διαδικασία πέραν της εφαρμογής, καθώς εξετάζεται η διαδικαστική γνώση για την έννοια της ακολουθίας.
Δ2 Επίσης, είναι απαραίτητη η διαδικασία της κατανόησης προκειμένου να γίνει η σύνδεση γενικού και αναδρομικού τύπου.

Α2 Πρόκειται για μία άσκηση η οποία χαρακτηρίζεται από συνδέσεις καθώς συνδέει τον γενικό τύπο της ακολουθίας με τον αναδρομικό της τύπο.

Για τη διδασκαλία της συγκεκριμένης άσκησης απαιτείται η εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου διότι πραγματοποιείται σύνδεση μιας έκφρασης της ακολουθίας (γενικός τύπος), με μια διαφορετική της έκφραση (αναδρομικός τύπος). Στα πλαίσια της ίδιας γνώσης, μπορεί να γίνει διάκριση πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων για κάθε τύπο ή/και γραφική αναπαράσταση των όρων της ακολουθίας για να γίνουν συγκρίσεις με άλλες γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων που ορίζονται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Α' Ομάδας, 5.1 Ακολουθίες

4. Να βρείτε το ν όρο των ακολουθιών:

i) $\alpha_1 = 1, \quad \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2$ **ii)** $\alpha_1 = 3, \quad \alpha_{\nu+1} = 5\alpha_\nu$.

Εικόνα 8: Άσκηση 4, σελίδα 124, Άλγεβρα Α' Λυκείου

Ε1 Στην άσκηση 4 δεν εμφανίζονται εικόνες.

ΕΝ2 Απαιτούνται περισσότερες από μια ενέργειες καθώς, είναι απαραίτητη η εμφάνιση του πρώτου όρου της ακολουθίας στον αναδρομικό τύπο και έπειτα πρόσθεση ή πολλαπλασιασμός κατά μέλη.

Δ3 Περιλαμβάνει τη διαδικασία της εφαρμογής καθώς απαιτούνται διαδοχικές εφαρμογές του αναδρομικού τύπου μέχρι να εμφανιστούν οι δύο πρώτοι όροι της ακολουθίας.

Δ4 Αφού ο μαθητής εμφανίσει όλους τους όρος της ακολουθίας μέσω του αναδρομικού τύπου, καλείται να τους συνδέσει, προσθέτοντας ή πολλαπλασιάζοντας τους κατά μέλη. Πρόκειται, δηλαδή, για τη διαδικασία της ανάλυσης καθώς σε πρώτη φάση γίνεται διαίρεση του αναδρομικού τύπου σε πολλούς τύπους και, έπειτα, γίνεται η σύνδεση των τύπων αυτών μεταξύ τους για την έκφραση του ν-οστού όρου της ακολουθίας της κάθε περίπτωσης.

Α2 Πρόκειται για μια δραστηριότητα με υψηλές γνωστικές απαιτήσεις καθώς για τη λύση της απαιτούνται πρόσθεση και πολλαπλασιασμός κατά μέλη, και η μετάβαση από τον αναδρομικό στον τύπο του ν-οστού όρου, κάτι το οποίο δε συναντάται στα λυμένα παραδείγματα που υπάρχουν στην ενότητα. Συνεπώς, πρόκειται για μια δραστηριότητα η οποία, όπως και η προηγούμενη άσκηση, συνδέει τον αναδρομικό με τον γενικό τύπο.

Για τη διδασκαλία της άσκησης αυτής, είναι απαραίτητη η κοινή γνώση περιεχομένου διότι χρησιμοποιούνται διαδικασίες που δε συναντώνται μονάχα στα πλαίσια της διδασκαλίας.
Επιπλέον, παρόμοια με την προηγούμενη άσκηση αν δοθεί προσοχή στα πλεονεκτήματα/μειονεκτήματα των δύο τύπων και στη σύγκριση της γραφικής παράστασης της ακολουθίας με άλλες γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, εμφανίζεται η εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου.

4.5.2 Σχολικό βιβλίο της Β’ Λυκείου

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου της Β’ Λυκείου στην έκδοση του 1992 επειδή στην παρούσα έκδοση έχει αφαιρεθεί η ενότητα του αθροίσματος των άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου που συνδέεται άμεσα με την έννοια της σύγκλισης.

Α' Ομάδας, 3.5 Άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου

Άσκηση 1: Να υπολογίσετε το άθροισμα των παρακάτω όρων καθεμιάς από τις ακόλουθές γεωμετρικές προόδους:

i) $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ ii) $27, 9, 3, \frac{1}{3}, \dots$ iii) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \dots$ iv) $3, \frac{9}{5}, \frac{29}{25}, \dots$

v) $16, 8, 4, \dots$ vi) $9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \dots$ vii) $-8, 4, -2, \dots$ viii) $7, \frac{14}{5}, \frac{28}{25}, \dots$

Σχόλια:

Ε1 Στη πρώτη άσκηση δεν εμφανίζονται εικόνες.

ΕΝ2 Απαιτούνται περισσότερες από μια ενέργειες καθώς είναι απαραίτητη η αναγνώριση του λόγου της γεωμετρικής προόδου και η εφαρμογή του τύπου για το άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου.

Δ3 Όσον αφορά τις γνωστικές διαδικασίες, είναι απαραίτητη η εφαρμογή του τύπου για το άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου.

Δ2 Απαραίτητη διαδικασία είναι επίσης η διαδικασία της κατανόησης καθώς, πριν εφαρμόσει τον τύπο για την εύρεση του αθροίσματος, ο μαθητής πρέπει να ελέγξει αν ο λόγος είναι μικρότερος του 1.

Α3 Ετούτη η άσκηση δε χαρακτηρίζεται από συνδέσεις διότι, πρόκειται για μια άσκηση χωρίς υψηλές γνωστικές απαιτήσεις. Περιλαμβάνει ενέργειες (εύρεση λόγου, εύρεση αθροίσματος) οι οποίες είναι εμφανείς από προηγούμενες εμπειρίες καθώς υπάρχει παρόμοιο παράδειγμα λυμένο στο θεωρητικό μέρος του βιβλίου. Επομένως, δεν υπάρχει ιδιαίτερη αμφιβολία για τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να λυθεί η άσκηση.

Η διδασκαλία της συγκεκριμένης άσκησης απαιτεί κοινή μαθηματική γνώση περιεχομένου καθώς πρόκειται για έναν μαθηματικό υπολογισμό ο οποίος δεν απαιτεί στρατηγικές που συναντώνται αποκλειστικά στα πλαίσια της διδασκαλίας. Όμως ο εκπαιδευτικός οφείλει να επισημάνει ότι ο τύπος για το άθροισμα των άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου ισχύει με κατάλληλες προϋποθέσεις και όχι σε κάθε περίπτωση.

Α' Ομάδας, 3.5 Άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου

Άσκηση 3: Κάθε έναν από τους παρακάτω δεκαδικούς περιοδικούς να τον γράψετε στην μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν φυσικοί:

i) $0,\overline{4}$ ii) $0,\overline{26}$ iii) $0,1\overline{6}$ $0,5\overline{14}$

Σχόλια:

Ε1 Στη συγκεκριμένη άσκηση δεν υπάρχουν εικόνες.

ΕΝ2 Απαιτούνται περισσότερες από μια ενέργειες καθώς πρέπει ο κάθε απειροψήφιος δεκαδικός αριθμός να γραφεί σαν άθροισμα δεκαδικών άπειρων σε πλήθος, να γίνει η μετατροπή των δεκαδικών σε κλάσματα και έπειτα, αφού βρεθεί ο λόγος της γεωμετρικής προόδου, να βρεθεί το αυτό το άθροισμα απείρων όρων.

Δ3 Η εφαρμογή είναι απαραίτητη διαδικασία καθώς πρόκειται για μια εφαρμογή ενός αλγορίθμου στον οποίο γίνεται αναφορά και στο θεωρητικό μέρος του κεφαλαίου.

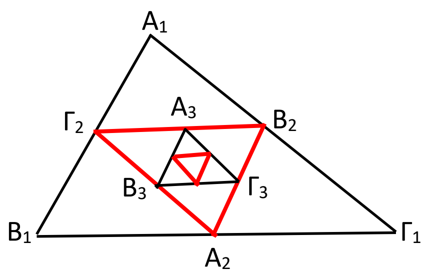
Δ2 Επιπλέον, είναι απαραίτητη και η διαδικασία της κατανόησης προκειμένου ο μαθητής να αντιληφθεί το μοτίβο της ακολουθίας και να τη συνδέσει με την έννοια του αθροίσματος απείρων όρων γεωμετρικής προόδου.

Α2 Πρόκειται για μια δραστηριότητα με περισσότερες από μια συνδέσεις. Αρχικά, υπάρχει σύνδεση μεταξύ της δεκαδικής και της κλασματικής αναπαράστασης ενός ρητού αριθμού. Επίσης, υπάρχει η σύνδεση του απειροψήφιου δεκαδικού αριθμού με την έννοια του αθροίσματος απείρων όρων.

Για τη διδασκαλία της συγκεκριμένης άσκησης είναι απαραίτητη η εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου διότι περιλαμβάνει σύνδεση αναπαραστάσεων. Εκτός αυτού, υπάρχει σύνδεση με θέματα που έχουν αντιμετωπίσει στο παρελθόν οι μαθητές καθώς, συνδέει την έννοια την οποία μαθαίνουν οι μαθητές στην ενότητα αυτή (άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου) με την έννοια των ρητών αριθμών η οποία διδάσκεται σε προηγούμενα έτη. Επιπρόσθετα, πέρα από την εξειδικευμένη γνώση, εμφανίζεται και η γνώση του ορίζοντα του περιεχομένου καθώς εμφανίζονται μαθηματικές ευκαιρίες τις οποίες μπορεί να αναγνωρίσει ο εκπαιδευτικός. Πιο συγκεκριμένα, είναι στην κρίση του εκπαιδευτικού να εκμεταλλευτεί αυτήν την ευκαιρία και να αναφέρει στην τάξη την ισότητα 0,99… = 1, η οποία δε διαφέρει από αυτές που συναντώνται στη συγκεκριμένη άσκηση, αλλά πρόκειται για ένα θέμα με μεγάλο ενδιαφέρον το οποίο προκαλεί σύγχυση και δυσπιστία στους μαθητές οδηγώντας στη δημιουργία λανθασμένων προσεγγίσεων και παρανοήσεων στους ίδιους (Sierpinska, 1987).

Β’ Ομάδας, 3.5 Άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου

Άσκηση 3: Έστω ένα τρίγωνο $Α_1Β_1Γ_1$, $Ρ_1$ η περίμετρός του και $Ε_1$ το εμβαδό του. Συνδέουμε τα μέσα $Α_2$, $Β_2$, $Γ_2$ των πλευρών τριγώνου $Α_1Β_1Γ_1$ και έστω $Ρ_2$, $Ε_2$ η περίμετρος και το εμβαδό αντιστοίχως του τριγώνου $Α_2Β_2Γ_2$. Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί επ’ άπειρον.



i) Να βρείτε αναδρομικούς τύπους για τις ακολουθίες $(Ρ_ν)$ και $(Ε_ν)$ των περιμέτρων και των εμβαδών των τριγώνων.

ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα των απείρων όρων των ακολουθιών αυτών αν το τρίγωνο $Α_1Β_1Γ_1$ είναι ισόπλευρο πλευράς α.

Σχόλια:

Ε3.1 Στην άσκηση 3 της Β’ Ομάδας εμφανίζεται εικόνα η οποία είναι λειτουργική και συγκεκριμένα πρόκειται για σχήμα.

ΕΝ2 Για την επίλυσή της απαιτούνται περισσότερες από μια ενέργειες καθώς πρέπει να βρεθούν οι αναδρομικοί τύποι, να υπολογιστούν οι πρώτοι όροι τους για την περίπτωση του ισόπλευρου τριγώνου, και να βρεθούν τα αθροίσματα απείρων όρων των δύο ακολουθιών.

Δ6 Απαραίτητη διαδικασία για το πρώτο ερώτημα είναι η διαδικασία της δημιουργίας καθώς απαιτείται από τον μαθητή να ενώσει τις γνώσεις του για τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα μέσα των πλευρών με τις γνώσεις σχετικά αθροίσματα απείρων όρων.

Δ3 Η δεύτερη διαδικασία που απαιτείται είναι η διαδικασία της εφαρμογής καθώς στο δεύτερο ερώτημα ο μαθητής καλείται να βρει το άθροισμα απείρων όρων των περιμέτρων και των εμβαδών κάνοντας εφαρμογή του τύπου.

A2 Πρόκειται για μια άσκηση αυξημένης δυσκολίας με υψηλές γνωστικές απαιτήσεις. Χαρακτηρίζεται από συνδέσεις μεταξύ ιδιοτήτων τριγώνου και του αθροίσματος απείρων όρων γεωμετρικής προόδου.

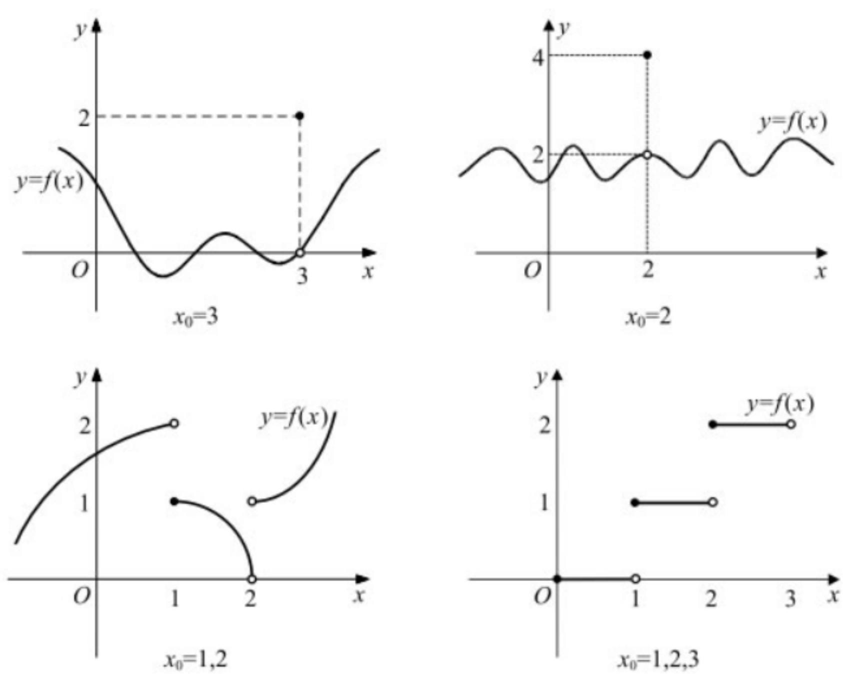
Απαραίτητο είδος γνώσης είναι η εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου για τη διδασκαλία της συγκεκριμένης γνώσης είναι απαραίτητη η σύνδεση της έννοιας που πραγματεύεται η ενότητα με θέματα που έχουν αντιμετωπίσει οι μαθητές στο παρελθόν.

4.5.3 Σχολικό βιβλίο της Γ’ Λυκείου

Στο σχολικό βιβλίο της Γ’ Λυκείου εισάγεται η έννοια του ορίου συνάρτησης σε πραγματικό αριθμό και έπειτα στο άπειρο και δίνονται οι πιο χαρακτηριστικές ιδιότητές του (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Μέτης, Μπρουχούτας, Παπασταυρίδης, Πολύζος, 2010). Από το βιβλίο θα αναλυθούν οι ασκήσεις των κεφαλαίων 1.4 Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \in R$, 1.5 Ιδιότητες των Ορίων, 1.6 Μη Πεπερασμένο Όριο στο $x_0 \in R$, 1.7 Όρια Συνάρτησης στο Άπειρο και 1.8 Συνέχεια Συνάρτησης.

Α' Ομάδας, 1.4 Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \in R$

1. Να βρείτε το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και το $f(x_0)$, εφόσον υπάρχουν, όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι :



Εικόνα 9: Άσκηση 1, σελίδα 46, Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ’ Λυκείου

Ε3.2 Ξεκινώντας με την πρώτη άσκηση από την ενότητα 1.4, υπάρχουν εικόνες και συγκεκριμένα γραφικές παραστάσεις οι οποίες είναι λειτουργικές καθώς για την εύρεση των ορίων σε κάθε περίπτωση, είναι απαραίτητη η αντίστοιχη γραφική παράσταση.

ΕΝ1 Για την επίλυση της άσκησης απαιτείται μόνο μια ενέργεια, η εφαρμογή της διαισθητικής προσέγγισης του ορισμού.

Δ3 Για την επίλυση της άσκησης είναι απαραίτητη η διαδικασία της εφαρμογής της διαισθητικής προσέγγισης του ορισμού της σύγκλισης.

Δ6 Απαραίτητη είναι, επίσης, και η διαδικασία της ανάκλησης καθώς στο θεωρητικό μέρος συναντώνται παρόμοια παραδείγματα.

Α2 Πρόκειται για μια δραστηριότητα με συνδέσεις μεταξύ της έννοιας του ορίου και της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης καθώς μέσα από την εφαρμογή της διαισθητικής προσέγγισης του ορισμού, στόχος είναι η βαθύτερη κατανόηση της έννοιας του ορίου.

Απαραίτητη μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία της άσκησης είναι η γνώση του ορίζοντα του περιεχομένου διότι είναι στην κρίση του εκπαιδευτικού να αδράξει την μαθηματική ευκαιρία και να αναδείξει πότε το σημείο x_0 ανήκει ή δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ώστε να κατανοήσουν οι μαθητές πότε υπάρχει νόημα στην εξέταση της συνέχειας σε ένα σημείο. Παρόμοια, απαιτείται η ίδια μορφή γνώσης αν ο εκπαιδευτικός επιλέξει να αναφερθεί και στο πότε η τιμή του ορίου είναι ίση με την τιμή της συνάρτησης

Α' Ομάδας, 1.4 Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \in R$

2. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim_{x\to x_0} f(x)$, όταν:

i) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$, $x_0=2$

ii) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x>1 \end{cases}$, $x_0=1$

iii) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ -x+1, & x>1 \end{cases}$, $x_0=1$

iv) $f(x)=x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$, $x_0=0$.

Εικόνα 10: Άσκηση 2, σελίδα 46, Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

Ε1 Δεν υπάρχουν εικόνες στην δεύτερη άσκηση.

ΕΝ2 Απαιτούνται περισσότερες από μια ενέργειες καθώς ο μαθητής καλείται να σχεδιάσει τη γραφική παράσταση της κάθε συνάρτησης και έπειτα να βρει το όριο στο ζητούμενο σημείο.

Δ3 Στην επίλυση της άσκησης εμφανίζεται η διαδικασία της κατανόησης καθώς για την επίλυση της απαιτείται η δημιουργία νοήματος, συγκεκριμένα την εύρεση του ορίου, μέσα από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Δ6 Απαραίτητη διαδικασία για τη συγκεκριμένη άσκηση είναι η διαδικασία της δημιουργίας καθώς η γραφική παράσταση δε δίνεται, ο μαθητής καλείται να την σχεδιάσει, και έπειτα να βρει το όριο το συνάρτησης.

Α2 Πρόκειται για μια δραστηριότητα με συνδέσεις μεταξύ της έννοιας του ορίου και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

Απαραίτητη μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία της άσκησης είναι η εξειδικευμένη μαθηματική γνώση καθώς κύρια ιδέα της άσκησης είναι σύνδεση αναπαράστασης με έννοια, συγκεκριμένα σύνδεση γραφικής αναπαράστασης συνάρτησης με την έννοια του ορίου συνάρτησης.

Β' Ομάδας, 1.6 Μη Πεπερασμένο Όριο στο $x_0 \in R$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{(\lambda-1)x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \frac{x^2 + 2x + \mu}{x}.$$

Να βρείτε τις τιμές των λ, μ ϵ **R** για τις οποίες υπάρχουν στο **R** τα όρια

$$\lim_{x \to 1} f(x) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to 0} g(x).$$

Εικόνα 11: Άσκηση 3, σελίδα 64, Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

Ε1 Στη συγκεκριμένη άσκηση δεν εμφανίζονται εικόνες.

ΕΝ1 Για την επίλυση της άσκησης απαιτούνται περισσότερες από μια ενέργειες καθώς ο μαθητής πρέπει να βρει πως συμπεριφέρονται τα όρια αριθμητή και παρονομαστή της κάθε συνάρτησης στο δοσμένο x_0, και έπειτα να πάρει περιπτώσεις για τις διάφορες τιμές του λ και του μ αντίστοιχα και πως αυτές συνδυασμό με την παρονομαστή επηρεάζουν το όριο όλης της συνάρτησης.

Δ3 Απαραίτητη είναι η διαδικασία της εφαρμογής καθώς στην άσκηση χρησιμοποιούνται αλγεβρικές ιδιότητες του ορίου.

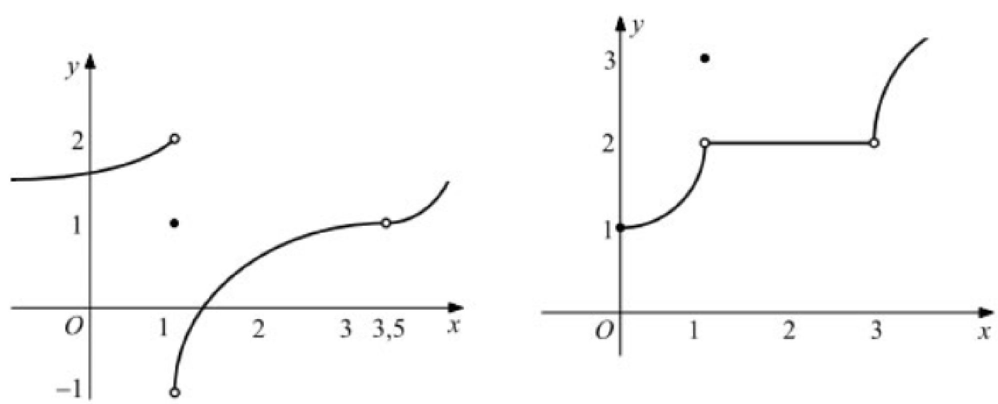
Δ4 Επίσης, απαιτείται και η διαδικασία ης ανάλυσης καθώς ο μαθητής καλείται, όπως ειπώθηκε και στα σχόλια για τις ενέργειες, να χωρίσει σε κομμάτια την πληροφορία παίρνοντας περιπτώσεις και έπειτα να τις ενώσει σε ένα συνεκτικό σύνολο για την εύρεση τιμών των παραμέτρων λ και μ για τις οποίες τα όρια των συναρτήσεων υπάρχουν.

Α4 Πρόκειται για μια δραστηριότητα υψηλών γνωστικών απαιτήσεων για την οποία απαιτείται μη αλγοριθμική σκέψη καθώς οι μαθητές πρέπει να πάρουν περιπτώσεις για τις τιμές της παραμέτρου και στα δύο ερωτήματα, μια διαδικασία που δεν υπάρχει στα παραδείγματα και ούτε πρόκειται για μια συνηθισμένη μεθοδολογία η οποία διδάσκεται αυτούσια σε κάποια τάξη. Για τον λόγο αυτό η συγκεκριμένη άσκηση εντάσσεται στην τελευταία κατηγορία των γνωστικών απαιτήσεων, «κάνοντας μαθηματικά».

Για τη διδασκαλία της εν λόγω άσκησης, είναι απαραίτητη η γνώση του ορίζοντα του περιεχομένου καθώς είναι απαραίτητο ο εκπαιδευτικός να προσεγγίσει με αυστηρότητα την άσκηση και να εξετάσει κάθε περίπτωση προσήμου των παραμέτρων προκειμένου να βρει τις τιμές για τις οποίες υπάρχουν τα όρια, μια διαδικασία η οποία παραπέμπει σε ανώτερα μαθηματικά.

Α’ Ομάδας 1.8 Συνέχεια Συνάρτησης

1. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δυο συναρτήσεων. Να βρείτε τα σημεία στα οποία αυτές δεν είναι συνεχείς.



Εικόνα 12: Άσκηση 1, σελίδα 79, Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ’ Λυκείου

Ε3.2 Η πρώτη άσκηση της ενότητας που αφορά τη συνέχεια συναρτήσεων χαρακτηρίζεται από λειτουργικές εικόνες απαραίτητες για την επίλυση της άσκησης. Οι εικόνες αυτές είναι γραφικές παραστάσεις.

ΕΝ1 Για την επίλυση της άσκησης απαιτείται μια ενέργεια, η εύρεση των ορίων της συνάρτησης στα σημεία που παρουσιάζουν ενδιαφέρουν μέσα από τη γραφική παράσταση και η σύγκρισή των ορίων με τις τιμές της συνάρτησης στα σημεία αυτά προκειμένου να διαπιστωθεί αν η συνάρτηση είναι συνεχής ή όχι.

Δ2 Απαραίτητη διαδικασία για την άσκηση είναι η διαδικασία της κατανόησης καθώς απαιτείται η δημιουργία νοήματος μέσα από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Δ6 Απαραίτητη είναι, επίσης, και η εφαρμογή του ορισμού της συνέχειας συνάρτησης στα σημεία που εξετάζεται η συνέχεια.

Α2 Η άσκηση αυτή περιέχει συνδέσεις μεταξύ της έννοιας του ορίου, της γραφικής παράστασης και της συνέχειας μιας συνάρτησης.

Απαραίτητη μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία της άσκησης είναι η γνώση του ορίζοντα του περιεχομένου καθώς περιλαμβάνει την αναγνώριση μαθηματικών ευκαιριών. Πιο συγκεκριμένα, είναι στην κρίση του εκπαιδευτικού να ρωτήσει τους μαθητές για την συνέχεια στα σημεία $x_0 = 3{,}5$ και $x_0 = 3$ της πρώτης και δεύτερης συνάρτησης αντίστοιχα, προκειμένου να γίνει κατανοητό πως δεν τίθεται θέμα εξέτασης συνέχειας καθώς τα συγκεκριμένα σημεία δεν ανήκουν στα πεδία ορισμού των αντίστοιχων συναρτήσεων.

Β' Ομάδας 1.8 Συνέχεια Συνάρτησης

7. i) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-1,1]$, για την οποία ισχύει

$$x^2 + f^2(x) = 1 \quad \text{για κάθε} \quad x \in [-1,1]$$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα $(-1,1)$.

γ) Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f και ποια η γραφική της παράσταση;

ii) Με ανάλογο τρόπο να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f στο σύνολο **R**, για την οποία ισχύει

$$f^2(x) = x^2 \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbf{R}$$

Εικόνα 13: Άσκηση 7, σελίδα 82, Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

Ε1 Η συγκεκριμένη άσκηση δεν περιέχει εικόνες.

ΕΝ2 Είναι εμφανές πως για την επίλυσή της απαιτούνται περισσότερες από μία ενέργειες διότι κάθε υποερώτημα είναι μιας συγκεκριμένης δυσκολίας.

Δ2 Απαιτείται η διαδικασία της κατανόησης καθώς πρόκειται για μια άσκηση η οποία συνδυάζει προηγούμενη με επόμενη γνώση.

Δ6 Απαραίτητη είναι και η διαδικασία της δημιουργίας διότι οι μαθητές καλούνται να σχεδιάσουν τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων.

Α2 Πρόκειται για μια άσκηση με συνδέσεις μεταξύ της έννοιας του ορίου, το πρόσημο συνεχούς συνάρτησης και τη γραφική παράσταση συνάρτησης.

Για τη διδασκαλία της άσκησης απαιτείται εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου λόγω της ύπαρξης συνδέσεων μεταξύ ιδεών και αναπαραστάσεων, συγκεκριμένα μεταξύ της έννοιας του ορίου συνάρτησης και της γραφικής παράστασης συνάρτησης. Ακόμη, απαραίτητη είδος μαθηματικής γνώσης είναι και η γνώση του ορίζοντα του περιεχομένου καθώς πρόκειται για μια ιδιαίτερα σύνθετη άσκηση η οποία συνδυάζει ιδέες ανώτερων μαθηματικών (εύρεση ριζών συνάρτησης, μελέτη προσήμου συνάρτησης, σχεδίαση γραφικής παράστασης μη γραμμικής συνάρτησης)

4.5.4 Κυπριακό βιβλίο

4.4 Όριο συνάρτησης στο άπειρο

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \to -\infty} x^4$ (β) $\lim_{x \to +\infty} x^5$

(γ) $\lim_{x \to -\infty} (5x^4 + 3x^2 - 4x - 3)$ (δ) $\lim_{x \to +\infty} (2x - 3x^4)$

Εικόνα 14: Δραστηριότητα 1, σελίδα 136, Μαθηματικά Κοινού Κορμού Β' Λυκείου

Ε1 Η συγκεκριμένη άσκηση δεν περιέχει εικόνες.

ΕΝ1 Για την επίλυσή της είναι απαραίτητη μια ενέργεια, η εφαρμογή σχετικής πρότασης.

Δ3 Απαιτείται η διαδικασία της εφαρμογής καθώς η άσκηση απαιτεί την εφαρμογή της ιδιότητας, σύμφωνα με την οποία, η εύρεση του ορίου της πολυωνυμικής συνάρτησης όταν το x τείνει στο άπειρο, ανάγεται στην εύρεση του μεγιστοβάθμιου όρου, όταν το x τείνει στο άπειρο.

Α2 Επίσης, πρόκειται για μια άσκηση χωρίς συνδέσεις και με μικρές γνωστικές απαιτήσεις καθώς απαιτείται η εφαρμογή μιας πρότασης.

Απαραίτητο είδος μαθηματικής γνώσης είναι η κοινή γνώση περιεχομένου καθώς για τη διδασκαλία της άσκησης απαιτείται ένας μαθηματικός υπολογισμός ο οποίος δε συναντάται αποκλειστικά στα πλαίσια της εκπαίδευσης.

5.2 Η έννοια της ακολουθίας

2. Να παραστήσετε γραφικά τις ακολουθίες με γενικό όρο:

(α) $\alpha_\nu = 3\nu - 2$

(β) $\alpha_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu}$

(γ) $\alpha_\nu = \eta\mu\frac{\nu\pi}{4}$

Εικόνα 15: Δραστηριότητα 2, σελίδα 168, Μαθηματικά Κοινού Κορμού Β' Λυκείου

Ε1 Η συγκεκριμένη άσκηση δεν περιέχει εικόνες.

ΕΝ2 Για την επίλυση της άσκησης απαιτούνται περισσότερες από μια ενέργειες καθώς ο μαθητής πρέπει να βρει κάποιες ενδεικτικές τιμές τη ακολουθίας και έπειτα να σχεδιάσει τη γραφική της παράσταση.

Δ3 Απαιτείται η διαδικασία της εφαρμογής καθώς ο μαθητής να βάλει τιμές στον γενικό τύπο της ακολουθίας για να βρει τιμές της.

Δ6 Απαραίτητη είναι και η διαδικασία της δημιουργίας διότι οι μαθητές καλούνται να σχεδιάσουν τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων.

Α2 Πρόκειται για μια άσκηση με συνδέσεις μεταξύ της έννοιας της ακολουθίας και της γραφικής παράστασης συνάρτησης.

Για τη διδασκαλία της άσκησης είναι απαραίτητη η εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου λόγω της ύπαρξης συνδέσεων μεταξύ αναπαραστάσεων και εννοιών, συγκεκριμένα μεταξύ της έννοιας της ακολουθίας και της γραφικής παράστασης μιας ακολουθίας.

5.3 Ειδικές ακολουθίες

10. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα των άπειρων όρων των πιο κάτω Γεωμετρικών Προόδων:

(α) $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\cdots$

(β) $2+\frac{6}{5}+\frac{18}{5}+\frac{54}{5}+\cdots$

Εικόνα 16: Δραστηριότητα 10, σελίδα 184, Μαθηματικά Κοινού Κορμού Β' Λυκείου

Ε1 Η συγκεκριμένη άσκηση δεν περιέχει εικόνες.

ΕΝ2 Απαιτούνται περισσότερες από μια ενέργειες διότι ο μαθητής πρέπει να βρει τον λόγο της γεωμετρικής προόδου και αν είναι μικρότερος του 1, να εφαρμόσει τον τύπο για το άθροισμα απείρων όρων.

Δ2 Απαιτείται η διαδικασία της κατανόησης καθώς πρόκειται για μια άσκηση στην οποία δεν εφαρμόζεται και στις δύο περιπτώσεις ο τύπος του αθροίσματος απείρων όρων. Ο μαθητής πρέπει να διακρίνει πως η δεύτερη ακολουθία έχει σαν πρώτο όρο το 6/5 και όχι το 2 με τη χρήση του τύπου $β^2 = αγ$ για τρεις διαδοχικούς όρους. Επίσης, ο λόγος αυτής της ακολουθίας είναι μεγαλύτερος του 1 και ίσος με τρία οπότε δεν εφαρμόζεται ο γνωστός τύπος.

Δ3 Απαραίτητη είναι και η διαδικασία της εφαρμογής του τύπου για την εύρεση του αθροίσματος απείρων όρων της πρώτης γεωμετρικής προόδου.

Α3 Πρόκειται για μια άσκηση η οποία δεν περιέχει συνδέσεις, απαιτεί την εφαρμογή του τύπου του αθροίσματος απείρων όρων μετά τον έλεγχο ότι ο λόγος είναι μικρότερος του 1. Περιλαμβάνει ενέργειες (εύρεση λόγου, εύρεση αθροίσματος) οι οποίες είναι εμφανείς από προηγούμενες εμπειρίες καθώς υπάρχει παρόμοιο παράδειγμα λυμένο στο θεωρητικό μέρος του βιβλίου. Επομένως, δεν υπάρχει ιδιαίτερη αμφιβολία για τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να λυθεί η άσκηση.

Η διδασκαλία της συγκεκριμένης άσκησης απαιτεί κοινή μαθηματική γνώση περιεχομένου καθώς πρόκειται για έναν μαθηματικό υπολογισμό ο οποίος δεν απαιτεί στρατηγικές που συναντώνται αποκλειστικά στα πλαίσια της διδασκαλίας.

Κεφάλαιο 5. Αποτελέσματα

5.1 Αποτελέσματα ανά κατηγορία του εργαλείου

Εικόνες

Βλέποντας τον πίνακα 5, η στην συντριπτική πλειοψηφία (85%) των ασκήσεων των κεφαλαίων που μελετήθηκαν δεν υπάρχουν εικόνες. Στις ασκήσεις στις οποίες υπάρχουν εικόνες, καμία δεν είναι διακοσμητική. Έτσι, το υπόλοιπο 15% αφορά τις λειτουργικές εικόνες, για τις οποίες έχει γίνει διαχωρισμός σε σχήματα, τα οποία εμφανίζονται στο 6,25% των ασκήσεων, και σε γραφικές παραστάσεις, οι οποίες εμφανίζονται στο 8,75% των ασκήσεων. Ιδιαίτερα μικρό είναι το ποσοστό των ασκήσεων στο οποίο εμφανίζονται γραφικές παραστάσεις όταν έρευνες δείχνουν πως οι μαθητές έχουν χαμηλές δεξιότητες οπτικοποίησης στον τομέα της μαθηματικής ανάλυσης, το οποίο οδηγεί σε έλλειψη νοήματος στις τυπικές γνώσεις του ίδιου τομέα (Tall, 1991).

Κατηγορία	Ε1	Ε2	Ε3.1	Ε3.2
Πλήθος	69	0	5	7
Ποσοστό	85,00	0	6,25	8,75

Ε1: Καμία, Ε2: Διακοσμητική, Ε3.1: Σχήμα, Ε3.2: Γράφημα

Πίνακας 5: Πίνακας αποτελεσμάτων για την κατηγορία των εικόνων

Ενέργειες

Στον πίνακα έξι διακρίνονται οι απαραίτητες ενέργειες για την επίλυση των ασκήσεων που μελετήθηκαν. Σύμφωνα με αυτόν, οι ασκήσεις οι οποίες απαιτούν περισσότερες από μία ενέργεια για την επίλυσή τους υπερισχύουν των ασκήσεων που λύνονται με μία μόνο ενέργεια.

Κατηγορία	ΕΝ1	ΕΝ2
Πλήθος	36	44
Ποσοστό	45	55

ΕΝ1: Μια ενέργεια, ΕΝ2: Πολλές ενέργειες

Πίνακας 6: Πίνακας αποτελεσμάτων για την κατηγορία των απαιτούμενων ενεργειών

Διαδικασίες

Όσον αφορά τις γνωστικές διαδικασίες, σύμφωνα με τον πίνακα 7, για τις περισσότερες ασκήσεις απαιτείται η διαδικασία της εφαρμογής με ποσοστό 71,25%, με αποτέλεσμα να δίνεται μεγάλη έμφαση στην πραγματοποίηση υπολογισμών και πράξεων με τα όρια. Λιγότερες από τις μισές ασκήσεις περιλαμβάνουν τη γνωστική διαδικασία της κατανόησης, μια διαδικασία ιδιαίτερα σημαντική η οποία σχετίζεται με την εννοιολογική γνώση, κατά την οποία λαμβάνουν χώρα συνδέσεις μεταξύ της υπάρχουσας και της νέας γνώσης (Anderson & Krathwohl, 2001, p. 70). Η διαδικασία της ανάκλησης εμφανίζεται με χαμηλή συχνότητα, κάτι το οποίο είναι αναμενόμενο καθώς, παρόλο που είναι σημαντική διαδικασία, κατά την μελέτη μιας έννοιας όπως η σύγκλιση, ενσωματώνεται στην γενικότερη προσπάθεια κατασκευής νέας γνώσης ή λύσης νέων προβλημάτων (Anderson & Krathwohl, 2001). Σε χαμηλά επίπεδα κυμαίνεται η διαδικασία της ανάλυσης παρόλο που αποτελεί στόχο πολλών εκπαιδευτικών διαφόρων γνωστικών αντικειμένων ειδίκευσης (Anderson & Krathwohl, 2001). Η διαδικασία της δημιουργίας δε συναντάται σε πολλές ασκήσεις, μονάχα σε επτά, συχνότητα η οποία δεν είναι ιδιαίτερα ενθαρρυντική καθώς η βαθιά κατανόηση είναι πιθανό να απαιτήσει γνωστικές διαδικασίες που σχετίζονται με την δημιουργία (Anderson & Krathwohl, 2001).

Κατηγορία	Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ5	Δ6
Πλήθος	7	38	57	11	0	7
Ποσοστό	8,75	47,50	71,25	13,75	0	8,75

Δ1: Ανάκληση, Δ2: Κατανόηση, Δ3: Εφαρμογή, Δ4: Ανάλυση, Δ5: Αξιολόγηση, Δ6: Δημιουργία

Πίνακας 7: Πίνακας αποτελεσμάτων για την κατηγορία των γνωστικών διαδικασιών

Γνωστικές απαιτήσεις

Τέλος, προκύπτει πως η πλειοψηφία των ασκήσεων είναι δραστηριότητες που περιέχουν συνδέσεις με ποσοστό 52,50%. Έπειτα, οι ασκήσεις οι οποίες δε χαρακτηρίζονται από συνδέσεις, αποτελούν ένα σημαντικό κομμάτι, το 37,50% όλων των ασκήσεων. Η τελευταία κατηγορία, κάνοντας μαθηματικά, η οποία είναι και η πιο απαιτητική κατηγορία καθώς περιλαμβάνει περίπλοκη και μη αλγοριθμική σκέψη, συναντάται σε επτά ασκήσεις, με ποσοστό 8,75% από τα δύο βιβλία σχετικά με την έννοια της σύγκλισης. Όπως ειπώθηκε και στην περιγραφή του εργαλείου ανάλυσης, οι κατηγορίες «δραστηριότητες με συνδέσεις» και «κάνοντας μαθηματικά» περιγράφουν ασκήσεις υψηλών γνωστικών απαιτήσεων, οι οποίες σύμφωνα με τα αποτελέσματα της ανάλυσης φαίνεται να επικρατούν έναντι των ασκήσεων με χαμηλότερες γνωστικές απαιτήσεις, οι οποίες περιλαμβάνουν τη διαδικασία της αποστήθισης ή/και δε χαρακτηρίζονται από συνδέσεις. Η κατηγορία γνωστικών απαιτήσεων με την μικρότερη συχνότητα ήταν η διαδικασία της αποστήθισης με συνολικά δύο ασκήσεις.

Κατηγορία	Α1	Α2	Α3	Α4
Πλήθος	2	42	30	7
Ποσοστό	2,50	52,50	37,50	8,75

Α1: Αποστήθιση, Α2: Με συνδέσεις, Α3: Χωρίς συνδέσεις, Α4: Κάνοντας μαθηματικά

Πίνακας 8: Πίνακας αποτελεσμάτων για την κατηγορία των γνωστικών απαιτήσεων

Στον πίνακα 9 γίνεται μια συνολική ανασκόπηση των αποτελεσμάτων με βάση τις διαστάσεις του εργαλείου που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση. Για την ανάλυση των ασκήσεων των σχολικών εγχειριδίων μελετήθηκαν συνολικά 80 ασκήσεις.

Κατηγορία	Ε1	Ε2	Ε3.1	Ε3.2	ΕΝ1	ΕΝ2	Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ5	Δ6	Α1	Α2	Α3	Α4
Πλήθος	68	0	5	7	36	44	7	38	57	11	0	7	2	42	30	7
Ποσοστό	85	0	6,25	8,75	45	55	8,75	47,50	71,25	13,75	0	8,75	2,50	52,50	37,50	8,75

Ε1: Καμία, Ε2: Διακοσμητική, Ε3.1: Σχήμα, Ε3.2: Γράφημα, ΕΝ1: Μια ενέργεια, ΕΝ2: Πολλές ενέργειες, Δ1: Ανάκληση, Δ2: Κατανόηση, Δ3: Εφαρμογή, Δ4: Ανάλυση, Δ5: Αξιολόγηση, Δ6: Δημιουργία, Α1: Αποστήθιση, Α2: Με συνδέσεις, Α3: Χωρίς συνδέσεις, Α4: Κάνοντας μαθηματικά

Πίνακας 9: Πίνακας συνολικών αποτελεσμάτων

5.2 Αποτελέσματα ανάλυσης σχολικών βιβλίων της Ελλάδας ανά ενότητα

5.2.1 Αποτελέσματα της ενότητας «5.1 Ακολουθίες», σχολικό βιβλίο Α’ Λυκείου

Όσον αφορά τα σχολικά βιβλία της Ελλάδας, αναλύθηκαν ασκήσεις από τα εγχειρίδια και των τριών τάξεων του Λυκείου. Από το βιβλίο της Α’ Λυκείου μελετήθηκε μόνο η ενότητα 5.1, η οποία έχει σαν αντικείμενο την έννοια της ακολουθίας. Στην ενότητα αυτή υπάρχουν μονάχα τέσσερις ασκήσεις. Από τις ασκήσεις του βιβλίου της Α’ Λυκείου, σε καμία δεν υπάρχουν εικόνες. Το ποσοστό των απαιτούμενων ενεργειών είναι ισομερώς μοιρασμένο στο 50% με τις μισές ασκήσεις να χρειάζονται μία ενέργεια για την επίλυσή τους, και τις άλλες μισές να χρειάζονται περισσότερες από μία ενέργειες. Από τις έξι συνολικά διαστάσεις των γνωστικών διαδικασιών που περιέχει το εργαλείο, οι απαραίτητες γνωστικές διαδικασίες για την επίλυση των ασκήσεων της ενότητας είναι η διαδικασίες της κατανόησης, με ποσοστό 50%, και της εφαρμογής, με ποσοστό 100%. Τέλος, όσον αφορά τις γνωστικές απαιτήσεις, οι ασκήσεις της ενότητας χωρίζονται σε αυτές που έχουν συνδέσεις, με ποσοστό 75%, και σε αυτές που δεν χαρακτηρίζονται από συνδέσεις, με ποσοστό 25%.

Κατηγορία	Ε1	Ε2	Ε3.1	Ε3.2	ΕΝ1	ΕΝ2	Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ5	Δ6	Α1	Α2	Α3	Α4
Πλήθος	4	0	0	0	2	2	0	2	4	1	0	0	0	3	1	0
Ποσοστό	100	0	0	0	50	50	0	50	100	25	0	0	0	75	25	0

Ε1: Καμία, Ε2: Διακοσμητική, Ε3.1: Σχήμα, Ε3.2: Γράφημα, ΕΝ1: Μια ενέργεια, ΕΝ2: Πολλές ενέργειες, Δ1: Ανάκληση, Δ2: Κατανόηση, Δ3: Εφαρμογή, Δ4: Ανάλυση, Δ5: Αξιολόγηση, Δ6: Δημιουργία, Α1: Αποστήθιση, Α2: Με συνδέσεις, Α3: Χωρίς συνδέσεις, Α4: Κάνοντας μαθηματικά

Πίνακας 10: Πίνακας αποτελεσμάτων για την ενότητα του ελληνικού σχολικού βιβλίου Α' Λυκείου

5.2.2 Αποτελέσματα της ενότητας «3.5 Άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου», σχολικό βιβλίο Β’ Λυκείου

Από την παλαιότερη έκδοση του σχολικού βιβλίου της Άλγεβρας Β’ Λυκείου μελετήθηκε η ενότητα 3.5, η οποία έχει σαν αντικείμενο το Άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου. Σύμφωνα με τον πίνακα 11, σχετικά με τις εικόνες, πρόκειται για την ενότητα με τα περισσότερα σχήματα αναλογικά, με ποσοστό 33,33%. Με μεγάλη διαφορά οι περισσότερες ασκήσεις (77,78%) έχουν σαν προϋπόθεση τη χρήση περισσότερων από μία ενεργειών για τη λύση τους. Σχεδόν όλες οι ασκήσεις περιλαμβάνουν τη διαδικασία της εφαρμογής, οκτώ από της εννιά, για την ακρίβεια ασκήσεις της ενότητας. Χαμηλό είναι το ποσοστό της διαδικασίας της κατανόησης με λιγότερες από τις μισές ασκήσεις (44,44%) να την απαιτούν. Ακόμη χαμηλότερα είναι τα ποσοστά των διαδικασιών της ανάλυσης (22,22%) και της δημιουργίας (11,11%). Όσον αφορά τις γνωστικές απαιτήσεις, οι ασκήσεις μοιράζονται σε τρεις από τις τέσσερις διαθέσιμες κατηγορίες με το ένα μέρος των ασκήσεων (44,44%) να χαρακτηρίζεται από συνδέσεις, πανομοιότυπο ποσοστό να μην εμφανίζει συνδέσεις (44,44%), και μια άσκηση η οποία εντάσσεται στην τελευταία και πιο απαιτητική κατηγορία «κάνοντας μαθηματικά».

Κατηγορία	Ε1	Ε2	Ε3.1	Ε3.2	ΕΝ1	ΕΝ2	Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ5	Δ6	Α1	Α2	Α3	Α4
Πλήθος	6	0	3	0	2	7	0	4	8	2	0	1	0	4	4	1
Ποσοστό	66,67	0	33,33	0	22,22	77,78	0	44,44	88,89	22,22	0	11,11	0	44,44	44,44	11,11

Ε1: Καμία, Ε2: Διακοσμητική, Ε3.1: Σχήμα, Ε3.2: Γράφημα, ΕΝ1: Μια ενέργεια, ΕΝ2: Πολλές ενέργειες, Δ1: Ανάκληση, Δ2: Κατανόηση, Δ3: Εφαρμογή, Δ4: Ανάλυση, Δ5: Αξιολόγηση, Δ6: Δημιουργία, Α1: Αποστήθιση, Α2: Με συνδέσεις, Α3: Χωρίς συνδέσεις, Α4: Κάνοντας μαθηματικά

Πίνακας 11: Πίνακας αποτελεσμάτων για την ενότητα του ελληνικού σχολικού βιβλίου Β' Λυκείου

5.2.3 Αποτελέσματα των ενοτήτων του σχολικού βιβλίου της Γ’ Λυκείου

Από το βιβλίο της Γ’ Λυκείου μελετήθηκαν πέντε ενότητες. Η πρώτη ενότητα που μελετήθηκε ήταν η ενότητα 1.4 και αφορά το όριο συνάρτησης όταν το x τείνει σε έναν πραγματικό αριθμό. Η δεύτερη ενότητα που μελετήθηκε ήταν η 1.5 και είχε ως αντικείμενο τις ιδιότητες των ορίων. Η τρίτη ενότητα που μελετήθηκε ήταν η 1.6 και πραγματεύεται τα μη πεπερασμένα όρια όταν το x τείνει σε έναν πραγματικό αριθμό. Η τέταρτη ενότητα που μελετήθηκε ήταν η 1.7 με αντικείμενο τα όρια συναρτήσεων όταν το x τείνει στο άπειρο. Η πέμπτη και τελευταία ενότητα που μελετήθηκε από το ελληνικό βιβλίο της Γ’ Λυκείου ήταν η 1.8 και αφορά τη συνέχεια συναρτήσεων.

Ο πίνακας 12 διαβάζεται από αριστερά προς τα δεξιά ανά γραμμή και δίνει τις συχνότητες των χαρακτηριστικών των ασκήσεων σε σχέση με την αντίστοιχη ενότητα, με τους αριθμούς που εμφανίζονται να αποτελούν ποσοστά. Πιο συγκεκριμένα, στην ενότητα 1.4 (Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in R$), στο 60% των ασκήσεων δεν υπάρχουν εικόνες. Δεν υπάρχει καμία άσκηση με διακοσμητικές εικόνες ή σχήματα. Επομένως το υπόλοιπο 40% αποτελεί ασκήσεις οι οποίες περιέχουν λειτουργικές εικόνες οι οποίες είναι γραφικές παραστάσεις. Έπειτα, σχετικά με τις ενέργειες, το 60% των ασκήσεων απαιτούν μία ενέργεια για την επίλυσή τους ενώ το υπόλοιπο 40% απαιτεί περισσότερες από μία ενέργειες. Όσον αφορά τις γνωστικές διαδικασίες, αξίζει να σημειωθεί πως τα ποσοστά δεν αθροίζονται στο 100% διότι μεγάλο μέρος των ασκήσεων απαιτούν περισσότερες από μια διαδικασίες. Η πλειοψηφία των ασκήσεων της ενότητας (80%) έχει ως απαραίτητη τη διαδικασία της ανάκλησης πληροφορίας. Η διαδικασία της κατανόησης είναι απαραίτητη για το 20% των ασκήσεων. Μεγάλο μέρος των ασκήσεων απαιτεί τη διαδικασία της δημιουργίας, με ποσοστό 40%. Τέλος, οι γνωστικές απαιτήσεις των ασκήσεων περιορίζονται στις δύο από τις τέσσερις κατηγορίες με την αποστήθιση να είναι απαραίτητη στο 20% των ασκήσεων, ενώ το 80% αποτελεί ασκήσεις με συνδέσεις.

Στην ενότητα 1.5 (Ιδιότητες των ορίων) σχεδόν καμία άσκηση δεν περιέχει εικόνες (92,31%) εκτός από μία η οποία περιέχει σχήμα. Για την επίλυση του μεγαλύτερου μέρους των ασκήσεων απαιτείται μία ενέργεια (61,54%). Όλες οι ασκήσεις της ενότητας απαιτούν τη διαδικασία της εφαρμογής, κάτι το οποίο θεωρείται αναμενόμενο καθώς η συγκεκριμένη ενότητα έχει ως αντικείμενο τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων. Πιθανότατα, για τον ίδιο λόγο το μεγαλύτερο μέρος των ασκήσεων (69,23%) δε χαρακτηρίζεται από συνδέσεις. Μικρό είναι το ποσοστό ασκήσεων με συνδέσεις (23,08%). Φαίνεται να είναι μια ενότητα που εστιάζει στη διαδικαστική γνώση μέσω της εφαρμογής των ιδιοτήτων του ορίου.

Καμία από τις ασκήσεις τις ενότητας 1.6 (Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in R$) δεν περιέχει εικόνες. Η πλειοψηφία των ασκήσεων (83,33%) απαιτεί περισσότερες από μια ενέργειες για την επίλυσή τους. Το 16,67% απαιτούν τη διαδικασία της ανάκλησης πληροφορίας, ποσοστό ίδιο με την κατηγορία της κατανόησης. Οι περισσότερες ασκήσεις (83,33%) περιλαμβάνουν τη διαδικασία της εφαρμογής. Υψηλό σχετικά ποσοστό ασκήσεων έχει ως απαραίτητη τη διαδικασία της ανάλυσης (33,33%). Οι ασκήσεις της ενότητας είναι ισομερώς μοιρασμένες στις τρείς κατηγορίες των γνωστικών απαιτήσεων, πέρα από αυτή της αποστήθισης.

Κατηγορία	Ε1	Ε2	Ε3.1	Ε3.2	ΕΝ1	ΕΝ2	Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ5	Δ6	Α1	Α2	Α3	Α4
Ενότητα 1.4	60	0	0	40	60	40	0	80	20	0	0	40	20	80	0	0
Ενότητα 1.5	92,31	0	7,69	0	61,54	38,46	23,08	15,38	100	0	0	0	7,69	23,08	69,23	0
Ενότητα 1.6	100	0	0	0	16,67	83,33	16,67	33,33	83,33	33,33	0	0	0	33,33	33,33	33,33
Ενότητα 1.7	100	0	0	0	28,57	71,43	0	42,86	57,14	42,86	0	0	0	42,86	14,29	42,86
Ενότητα 1.8	84,21	0	0	15,79	21,05	78,95	10,53	63,16	68,42	10,53	0	10,53	0	73,68	26,32	5,26
Σύνολο	88	0	2	10	36	64	12	46	72	14	0	8	4	52	34	12

Ε1: Καμία, Ε2: Διακοσμητική, Ε3.1: Σχήμα, Ε3.2: Γράφημα, ΕΝ1: Μια ενέργεια, ΕΝ2: Πολλές ενέργειες, Δ1: Ανάκληση, Δ2: Κατανόηση, Δ3: Εφαρμογή, Δ4: Ανάλυση, Δ5: Αξιολόγηση, Δ6: Δημιουργία, Α1: Αποστήθιση, Α2: Με συνδέσεις, Α3: Χωρίς συνδέσεις, Α4: Κάνοντας μαθηματικά

Πίνακας 12: Πίνακας αποτελεσμάτων ελληνικού σχολικού βιβλίου Γ' Λυκείου ανά ενότητα

Παρόμοια με την προηγούμενη ενότητα, στην ενότητα 1.7 (Όρια συνάρτησης στο άπειρο) καμία άσκηση δεν περιλαμβάνει τη χρήση εικόνων. Με μεγάλη διαφορά οι ασκήσεις με περισσότερες από μια απαιτούμενες ενέργειες (71,43%) υπερτερούν των ασκήσεων που απαιτούν μία ενέργεια για την επίλυσή τους. Για το την επίλυση των ασκήσεων είναι απαραίτητη η διαδικασία της κατανόησης (42,86%), η διαδικασία της εφαρμογής (57,14%) και η διαδικασία της ανάλυσης (42,86%). Πρόκειται για μια ενότητα η οποία περιλαμβάνει υψηλό ποσοστό μη αλγοριθμικών ασκήσεων οι οποίες εντάσσονται στην τελευταία και πιο απαιτητική κατηγορία

Στην ενότητα 1.8 (Συνέχεια συνάρτησης), η πλειοψηφία των ασκήσεων δεν περιέχει εικόνες (84,21%). Οι ασκήσεις που υπολείπονται περιέχουν λειτουργικές εικόνες, οι οποίες είναι γραφικές παραστάσεις (15,79%). Για τις περισσότερες ασκήσεις απαιτούνται περισσότερες από μια ενέργειες (78,95%). Στην ενότητα αυτή συναντάται ποικιλία απαιτούμενων γνωστικών διαδικασιών και απαιτήσεων. Επικρατέστερη διαδικασία είναι η διαδικασία της εφαρμογής με ποσοστό 68,42%. Υψηλό ποσοστό εμφανίζει και η διαδικασία της κατανόησης (63,16%) ενώ υπάρχει και ένα μέρος ασκήσεων που απαιτεί τη διαδικασία της ανάκλησης (10,53%), της ανάλυσης (10,53%), και της δημιουργίας (10,53%). Οι ασκήσεις της συγκεκριμένης ενότητας έχουν περισσότερες από μια γνωστικές απαιτήσεις. Το μεγαλύτερο μέρος αυτών πρόκειται για ασκήσεις με συνδέσεις (73,68%), ποσοστό το οποίο πιθανόν να συνδέεται και με το σχετικά υψηλό ποσοστό της διαδικασίας της κατανόησης.

Συνολικά το 88% των ασκήσεων που αναλύθηκαν από τις πέντε ενότητες που αναφέρονται παραπάνω, δεν περιέχουν εικόνες. Οι υπόλοιπες ασκήσεις περιέχουν λειτουργικές εικόνες οι οποίες χωρίζονται σε ασκήσεις με σχήμα (2%) και με γραφική παράσταση (10%). Το 64% των ασκήσεων απαιτεί περισσότερες από μία ενέργειες έναντι του 36% που απαιτεί μία ενέργεια. Η πλειοψηφία απαιτεί τη διαδικασία της εφαρμογής (72%) με τις υπόλοιπες κατηγορίες να κυμαίνονται σε χαμηλότερα ποσοστά. Μεγάλο μέρος δε χαρακτηρίζεται από συνδέσεις (34%), οι περισσότερες περιέχουν συνδέσεις (52%) και υπάρχει μικρός αριθμός περίπλοκων και μη αλγοριθμικών ασκήσεων (12%).

5.2.4 Συνολικά αποτελέσματα από τα αναλυθέντα έργα των ελληνικών βιβλίων

Κοιτώντας συνολικά τις ασκήσεις που επιλέχθηκαν από τα ελληνικά σχολικά βιβλία, αναλύθηκαν στο σύνολο 63 ασκήσεις Α και Β ομάδας. Σύμφωνα με τον πίνακα 13, από αυτές τις ασκήσεις, το μεγαλύτερο μέρος δεν είχε εικόνες (85,71%). Καθώς δεν υπήρχαν ασκήσεις με διακοσμητικές εικόνες το υπόλοιπο 14,29% μοιράζεται ισομερώς στα σχήματα (6,35%) και στις γραφικές παραστάσεις (7,94%). Όσον αφορά τις απαιτούμενες ενέργειες, είναι περισσότερες οι ασκήσεις οι οποίες απαιτούν περισσότερες από μια ενέργειες για την επίλυση τους, με ποσοστό 65,08%, έναντι των ασκήσεων για τις οποίες απαιτείται μία ενέργεια, με ποσοστό 34,92%.

Κατηγορία	Ε1	Ε2	Ε3.1	Ε3.2	ΕΝ1	ΕΝ2	Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ5	Δ6	Α1	Α2	Α3	Α4
Πλήθος	54	0	4	5	22	41	6	29	48	10	0	5	2	33	22	7
Ποσοστό	85,71	0	6,35	7,94	34,92	65,08	9,52	46,03	76,19	15,87	0	7,94	3,17	52,38	34,92	11,11

Ε1: Καμία, Ε2: Διακοσμητική, Ε3.1: Σχήμα, Ε3.2: Γράφημα, ΕΝ1: Μια ενέργεια, ΕΝ2: Πολλές ενέργειες, Δ1: Ανάκληση, Δ2: Κατανόηση, Δ3: Εφαρμογή, Δ4: Ανάλυση, Δ5: Αξιολόγηση, Δ6: Δημιουργία, Α1: Αποστήθιση, Α2: Με συνδέσεις, Α3: Χωρίς συνδέσεις, Α4: Κάνοντας μαθηματικά

Πίνακας 13: Πίνακας αποτελεσμάτων για τα ελληνικά σχολικά βιβλία

Σχετικά με τις απαιτούμενες γνωστικές διαδικασίες, μικρό ποσοστό των ασκήσεων (9,52%) απαιτεί τη γνωστική διαδικασία της ανάκλησης πληροφορίας. Μεγάλο τμήμα των ασκήσεων καθιστά αναγκαία τη γνωστική διαδικασία της κατανόησης για την επίλυσή τους με ποσοστό 46,03%. Κυρίαρχη απαιτούμενη γνωστική διαδικασία είναι και πάλι η διαδικασία της εφαρμογής με ποσοστό 76,19%, ακολουθεί η κατηγορία της ανάλυσης με ποσοστό 9,52% και τελευταία είναι η κατηγορία της δημιουργίας με ποσοστό 7,94%. Η διάσταση της αξιολόγησης δεν απαιτείται για την επίλυση κάποιας άσκησης. Τέλος, οι ασκήσεις οι οποίες έχουν σαν γνωστική απαίτηση αυτήν της αποστήθισης αποτελούν το 3,17% των ασκήσεων που αναλύθηκαν από τα ελληνικά βιβλία.

Μεγάλο μέρος των ασκήσεων χαρακτηρίζονται από συνδέσεις με ποσοστό 52,38%. Ένα μικρότερο μέρος των ασκήσεων πρόκειται για δραστηριότητες χωρίς συνδέσεις με ποσοστό 34,92%. Υπάρχει ένα μικρό ποσοστό ασκήσεων (11,11%) το οποίο αντιστοιχεί στην τελευταία κατηγορία της διάστασης των γνωστικών απαιτήσεων, κάνοντας μαθηματικά.

5.3 Αποτελέσματα ανάλυσης σχολικού βιβλίου της Κύπρου ανά ενότητα

Από το σχολικό βιβλίο μαθηματικών κοινού κορμού της Β' λυκείου της Κύπρου μελετήθηκαν πέντε ενότητες. Η πρώτη ενότητα ήταν η 4.2 με αντικείμενο την έννοια του ορίου και τα πλευρικά όρια. Η δεύτερη ενότητα που μελετήθηκε ήταν 4.3 και αφορά τα όρια πολυωνυμικών και ρητών συναρτήσεων. Η τρίτη ενότητα που μελετήθηκε ήταν η 4.4 με θέμα τα όρια συναρτήσεων όταν το x τείνει στο άπειρο. Η τέταρτη ενότητα που μελετήθηκε είναι από το πέμπτο κεφάλαιο, η 5.2 η οποία έχει ως αντικείμενο την έννοια της ακολουθίας. Η πέμπτη και τελευταία ενότητα που μελετήθηκε από το σχολικό βιβλίο της Κύπρου είναι η 5.3 η οποία αναφέρει τις έννοιες της αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. Από την ενότητα αυτήν, μελετήθηκαν μονάχα οι ασκήσεις οι οποίες αφορούν άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου.

Σύμφωνα με τον πίνακα 14 και ξεκινώντας με την ενότητα 4.2 (Η έννοια του ορίου - Πλευρικά όρια συνάρτησης), μόνο μία από τις τρεις ασκήσεις της ενότητας περιέχει εικόνα η οποία είναι γραφική παράσταση. Πρόκειται για ασκήσεις που λύνονται με μία ενέργεια αλλά και με μία διαδικασία με μία άσκηση να απαιτεί τη διαδικασία της κατανόησης και τις άλλες δύο τη διαδικασία της εφαρμογής. Έτσι, η άσκηση που απαιτεί κατανόηση χαρακτηρίζεται από συνδέσεις με τις άλλες δύο να μην περιέχουν συνδέσεις.

Η ενότητα 4.3 (Όριο πολυωνυμικής-ρητής συνάρτησης) περιέχει μονάχα μία άσκηση συνεπώς στη γραμμή που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη ενότητα όλα τα ποσοστά είναι 100%.

Η ενότητα 4.4 (Όριο συνάρτησης στο άπειρο) περιλαμβάνει δύο ασκήσεις από τις οποίες η μία περιέχει μια λειτουργική εικόνα, η οποία είναι γραφική παράσταση ενώ η άλλη δεν έχει εικόνες. Και οι δύο ασκήσεις λύνονται με μία ενέργεια. Η μία άσκηση απαιτεί τη διαδικασία της κατανόησης και είναι αυτή που χαρακτηρίζεται από συνδέσεις ενώ η δεύτερη άσκηση απαιτεί τη διαδικασία της εφαρμογής και δεν περιλαμβάνει συνδέσεις.

Κατηγορία	Ε1	Ε2	Ε3.1	Ε3.2	ΕΝ1	ΕΝ2	Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ5	Δ6	Α1	Α2	Α3	Α4
Ενότητα 4.2	66,67	0	0	33,33	100	0	0	33,33	66,67	0	0	0	0	33,33	66,67	0
Ενότητα 4.3	100	0	0	0	100	0	0	0	100	0	0	0	0	0	100	0
Ενότητα 4.4	50	0	0	50	100	0	0	50	50	0	0	0	0	50	50	0
Ενότητα 5.2	100	0	0	0	83,33	16,67	0	83,33	16,67	0	0	33,33	0	83,33	16,67	0
Ενότητα 5.3	80	0	20	0	60	40	0	40	80	20	0	0	0	40	60	0
Σύνολο	82,35	0	5,88	11,76	82,35	17,65	0	52,94	52,94	5,88	0	11,76	0	52,94	47,06	0

Ε1: Καμία, Ε2: Διακοσμητική, Ε3.1: Σχήμα, Ε3.2: Γράφημα, ΕΝ1: Μια ενέργεια, ΕΝ2: Πολλές ενέργειες, Δ1: Ανάκληση, Δ2: Κατανόηση, Δ3: Εφαρμογή, Δ4: Ανάλυση, Δ5: Αξιολόγηση, Δ6: Δημιουργία, Α1: Αποστήθιση, Α2: Με συνδέσεις, Α3: Χωρίς συνδέσεις, Α4: Κάνοντας μαθηματικά

Πίνακας 14: Πίνακας αποτελεσμάτων κυπριακού σχολικού βιβλίου Β' Λυκείου ανά ενότητα

Μπαίνοντας στις ακολουθίες, καμία από τις ασκήσεις της ενότητας 5.2 (Η έννοια της ακολουθίας) δεν περιέχουν εικόνες. Για την πλειοψηφία των ασκήσεων (83,33%) απαιτείται μία ενέργεια. Για το 83,33% είναι απαραίτητη η διαδικασία της κατανόησης, για το 16,67% η διαδικασία της εφαρμογής ενώ στο 33,33% των ασκήσεων εμφανίζεται και η διαδικασία της δημιουργίας. Η πλειοψηφία των ασκήσεων (83,33%) χαρακτηρίζονται από συνδέσεις.

Τέλος, στην ενότητα 5.3 (Ειδικές ακολουθίες) το 20% των περιέχουν λειτουργική εικόνα και συγκεκριμένα σχήμα. Για ακόμη μια φορά οι ασκήσεις για τις οποίες είναι απαραίτητη μία ενέργεια υπερτερούν των ασκήσεων με περισσότερες από μία απαιτούμενες ενέργειες με αναλογία 60-40%. Για το 40% είναι αναγκαία η διαδικασία της κατανόησης, για το 80% της εφαρμογής και για το 20% της ανάλυσης. Όσον αφορά τις γνωστικές απαιτήσεις, οι ασκήσεις χωρίζονται σε αυτές που περιέχουν (40%) και σε αυτές που δεν περιέχουν συνδέσεις (60%).

Στον πίνακα 15 προβάλλονται συνολικά τα αποτελέσματα της ανάλυσης του κυπριακού βιβλίου. Σύμφωνα με τον πίνακα αναλύθηκαν στο σύνολο 17 ασκήσεις. Ξεκινώντας με τις εικόνες, για ακόμη μια φορά η πλειοψηφία των ασκήσεων (82,35%) δε χαρακτηρίζεται από εικόνες. Από τις ασκήσεις που περιέχουν εικόνες, καμία δεν διακοσμητική. Οι υπόλοιπες ασκήσεις χαρακτηρίζονται από λειτουργικές εικόνες οι οποίες είναι σχήματα με ποσοστό 5,88% και γραφικές παραστάσεις με ποσοστό 11,76%. Με μεγάλη διαφορά το μεγαλύτερο μέρος των ασκήσεων (82,35%) απαιτεί μονάχα μία ενέργεια για την επίλυση τους, αφήνοντας ένα σχετικά μικρό ποσοστό (17,65%) για τις ασκήσεις για τις οποίες απαιτούνται περισσότερες από μια ενέργειες.

Κατηγορία	Ε1	Ε2	Ε3.1	Ε3.2	ΕΝ1	ΕΝ2	Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ5	Δ6	Α1	Α2	Α3	Α4
Πλήθος	14	0	1	2	14	3	1	9	9	1	0	2	0	9	8	0
Ποσοστό	82,35	0	5,88	11,76	82,35	17,65	5,88	52,94	52,94	5,88	0	11,76	0	52,94	47,06	0

Ε1: Καμία, Ε2: Διακοσμητική, Ε3.1: Σχήμα, Ε3.2: Γράφημα, ΕΝ1: Μια ενέργεια, ΕΝ2: Πολλές ενέργειες, Δ1: Ανάκληση, Δ2: Κατανόηση, Δ3: Εφαρμογή, Δ4: Ανάλυση, Δ5: Αξιολόγηση, Δ6: Δημιουργία, Α1: Αποστήθιση, Α2: Με συνδέσεις, Α3: Χωρίς συνδέσεις, Α4: Κάνοντας μαθηματικά

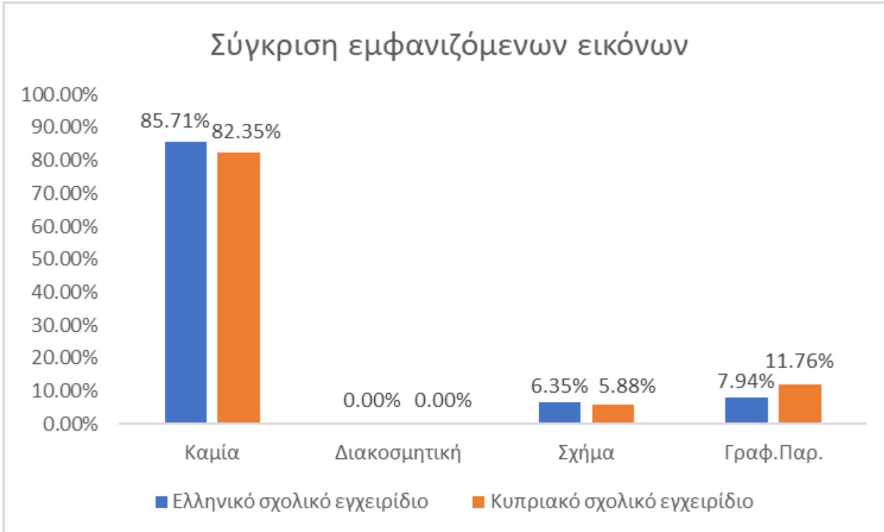
Πίνακας 15: Πίνακας συνολικών αποτελεσμάτων για το κυπριακό σχολικό βιβλίο Β' Λυκείου

Σχετικά με τις απαιτούμενες γνωστικές διαδικασίες, δε συναντάται καμία άσκηση που να απαιτεί τη διαδικασία της ανάκλησης πληροφορίας. Σημαντικό μέρος των ασκήσεων, συγκεκριμένα πάνω από το μισό (52,94%), απαιτεί τη διαδικασία της κατανόησης για την επίλυσή της. Ίδιο ποσοστό ασκήσεων απαιτεί τη γνωστική διαδικασία της εφαρμογής. Για τις υπόλοιπες ασκήσεις (5,88%), είναι αναγκαία η διαδικασία της ανάλυσης. Και στο σχολικό εγχειρίδιο της Κύπρου δε συναντώνται ασκήσεις σχετικές με την έννοια της σύγκλισης που να απαιτούν τη διαδικασία της αξιολόγησης ενώ μικρό για μικρό πλήθος ασκήσεων είναι απαραίτητη η γνωστική διαδικασία της δημιουργίας. Τέλος, για τη διάσταση των γνωστικών απαιτήσεων, οι ασκήσεις μοιράζονται σε δύο κατηγορίες, τις ασκήσεις με συνδέσεις οι οποίες επικρατούν με ποσοστό 52,94%, ποσοστό πανομοιότυπο με τη διαδικασία της κατανόησης, και τις ασκήσεις χωρίς συνδέσεις με ποσοστό 47,06%. Δεν εμφανίζονται ασκήσεις που να απαιτούν τη γνωστική απαίτηση της αποστήθισης ή της λεγόμενης «κάνοντας μαθηματικά».

5.4 Σύγκριση μεταξύ ελληνικού και κυπριακού σχολικού βιβλίου

Εικόνες

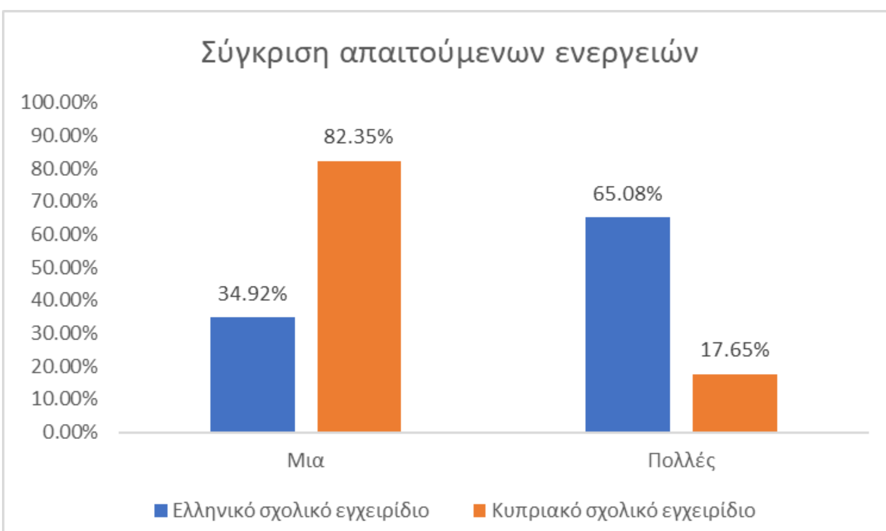
Με βάση τα ευρήματα από τους παραπάνω πίνακες, επιχειρείται μια σύγκριση των ευρημάτων ανάμεσα στα σχολικά εγχειρίδια των δύο χωρών ως προς τις τέσσερις διαστάσεις του εργαλείου που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση. Βλέποντας το γράφημα 1, η από τη σύγκριση των σχολικών εγχειριδίων των δύο χωρών φαίνεται πως οι κατηγορίες της διάστασης των εικόνων έχουν παρόμοιες συχνότητες. Πιο συγκεκριμένα, στα σχολικά βιβλία των δύο χωρών στο μεγαλύτερο μέρος των ασκήσεων δεν εμφανίζεται καμία εικόνα. Επίσης, σε κανένα βιβλίο δεν υπάρχουν διακοσμητικές στις ασκήσεις σχετικές με την έννοια της σύγκλισης. Τέλος, όσον αφορά τις λειτουργικές εικόνες, οι δύο χώρες έχουν σχεδόν ίδιο ποσοστό ασκήσεων με σχήματα, με 6,35% των ασκήσεων των ελληνικών σχολικών βιβλίων έναντι του 5,38% των ασκήσεων του κυπριακού βιβλίου. Στο κυπριακό βιβλίο παρατηρείται μεγαλύτερο ποσοστό ασκήσεων με γραφικές παραστάσεις (11,76%), έναντι των ασκήσεων των ελληνικών βιβλίων στις οποίες υπάρχουν γραφικές παραστάσεις για το 7,94% αυτών.



Γράφημα 1: Σύγκριση εμφανιζόμενων εικόνων στα σχολικά εγχειρίδια των δύο χωρών

Ενέργειες

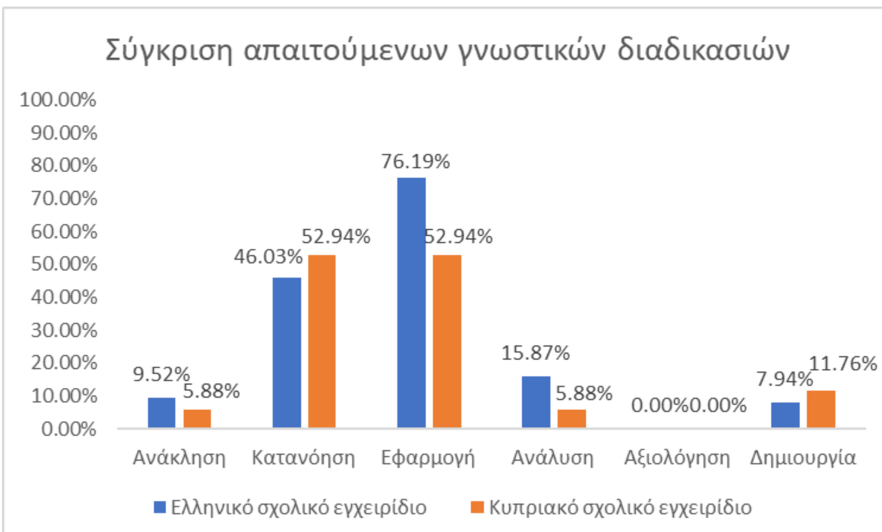
Μεγάλες διαφορές εντοπίζονται ανάμεσα στις ασκήσεις των δύο χωρών αναφορικά με τις απαιτούμενες ενέργειες για την επίλυση των ασκήσεων που μελετήθηκαν. Αναφορικά με τις ασκήσεις των ελληνικών σχολικών βιβλίων, σχεδόν το ένα τρίτο (34,92%) που μελετήθηκαν απαιτούν μια ενέργεια για την επίλυσή τους, όταν στο κυπριακό σχολικό βιβλίο, για το μεγαλύτερο μέρος των ασκήσεων (82,35%) είναι απαραίτητη μια ενέργεια. Αντίστοιχα και στην κατηγορία των πολλών απαραίτητων ενεργειών, το 65,08% των ασκήσεων των ελληνικών σχολικών βιβλίων απαιτεί περισσότερες από μια ενέργειες όταν μόνο για το 17,65% των ασκήσεων του κυπριακού βιβλίου που μελετήθηκαν είναι απαραίτητες περισσότερες από μια ενέργειες.



Γράφημα 2: Σύγκριση απαιτούμενων ενεργειών στα σχολικά εγχειρίδια των δύο χωρών

Γνωστικές διαδικασίες

Τα δεδομένα για τα βιβλία των δύο χωρών έχουν μικρές διαφορές όσον αφορά τις απαραίτητες γνωστικές διαδικασίες για την επίλυση των ασκήσεων. Βλέποντας το γράφημα 2, ξεκινώντας με τη διαδικασία της ανάκλησης πληροφορίας, στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια το 6,35% των ασκήσεων που μελετήθηκαν και αναλύθηκαν απαιτούν τη διαδικασία της ανάκλησης, όταν στο κυπριακό σχολικό βιβλίο καμία άσκηση δεν απαιτεί τη διαδικασία της ανάκλησης. Προχωρώντας στη διαδικασία της κατανόησης, τα ποσοστά είναι σχεδόν ίδια με το 23,81% των ασκήσεων των ελληνικών σχολικών βιβλίων να απαιτεί τη διαδικασία της κατανόησης έναντι του 23,53% για της ασκήσεις του κυπριακού σχολικού βιβλίου. Όπως είδαμε και στους παραπάνω πίνακες, η γνωστική διαδικασία της εφαρμογής ήταν η συχνότερη απαραίτητη διαδικασία για την επίλυση των ασκήσεων που μελετήθηκαν. Στις ασκήσεις του κυπριακού βιβλίου εμφανίζεται με μεγαλύτερη συχνότητα με ποσοστό 70,59% έναντι του επίσης μεγάλου ποσοστού 63,49% για τις ασκήσεις των ελληνικών βιβλίων. Η διαδικασία της ανάλυσης ήταν απαραίτητη σε περισσότερες ασκήσεις του ελληνικού σχολικού βιβλίου με σχεδόν διπλάσιο ποσοστό (9,52%) όταν στις ασκήσεις του κυπριακού βιβλίου ήταν απαραίτητη στο 5,88% των ασκήσεων. Οι διαδικασίες της αξιολόγησης και της δημιουργίας δεν ήταν απαραίτητες σε καμία άσκηση κανενός βιβλίου.

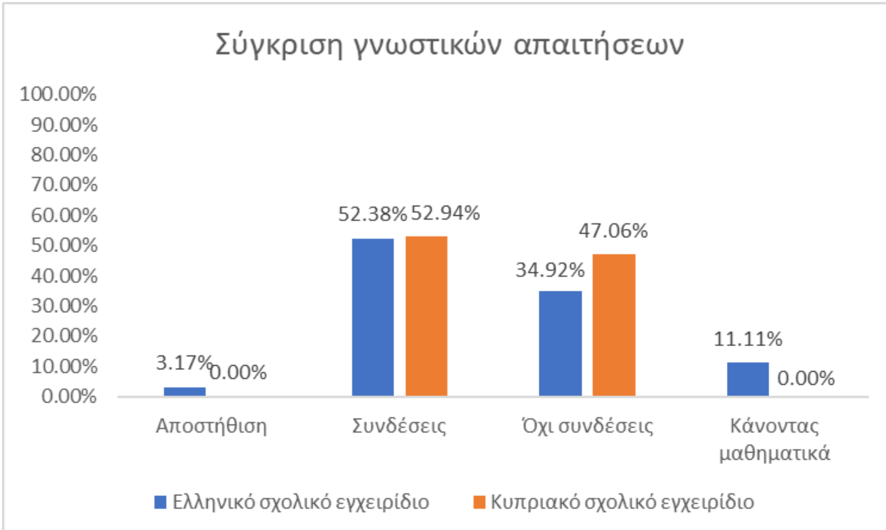


Γράφημα 3: Σύγκριση απαιτούμενων διαδικασιών στα σχολικά εγχειρίδια των δύο χωρών

Γνωστικές απαιτήσεις

Όπως είδαμε και στα προηγούμενα κεφάλαια, η τελευταία διάσταση του εργαλείου που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση αφορά τις γνωστική απαιτήσεις για την επίλυση των ασκήσεων που μελετήθηκαν. Για τις ασκήσεις των ελληνικών σχολικών βιβλίων, το 4,76% των ασκήσεων έχει σαν απαραίτητη γνωστική απαίτηση αυτή της αποστήθισης όταν το κυπριακό δεν έχει καμία άσκηση που να εντάσσεται σε αυτήν την κατηγορία. Περισσότερες αναλογικά είναι οι ασκήσεις με συνδέσεις στα ελληνικά βιβλία με ποσοστό 33,33%, όταν στο κυπριακό βιβλίο το 29,41% των δραστηριοτήτων που αναλύθηκαν αποτελούν ασκήσεις με συνδέσεις. Διαφορές εμφανίζονται και στην κατηγορία με τις περισσότερες ασκήσεις σχετικά με τις απαραίτητες γνωστικές απαιτήσεις.

Συγκεκριμένα, το 61,90% των ασκήσεων των ελληνικών βιβλίων είναι ασκήσεις χωρίς συνδέσεις όταν στο κυπριακό βιβλίο το 70,59% χαρακτηρίζονται ως ασκήσεις χωρίς συνδέσεις. Η τελευταία κατηγορία έχει πολύ μικρό πλήθος ασκήσεων, ένα για την ακρίβεια, το οποίο συναντάται στα ελληνικά βιβλία ενώ στο κυπριακό βιβλίο δεν υπάρχει τέτοιου είδους άσκηση.



Γράφημα 4: Σύγκριση γνωστικών απαιτήσεων στα σχολικά εγχειρίδια των δύο χωρών

Κεφάλαιο 6. Συζήτηση

Βλέποντας, λοιπόν, τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας και από τα ελληνικά αλλά και από το κυπριακό εγχειρίδιο μαθηματικών, γίνεται εμφανές πως η συντριπτική πλειοψηφία των ασκήσεων που καλούνται να λύσουν οι μαθητές στα πλαίσια της εξάσκησης για την κατανόηση της έννοιας της σύγκλισης, δε χαρακτηρίζεται από εικόνες. Ετούτη η έλλειψη εικόνων έρχεται σε αντίθεση με τα συμπεράσματα διακεκριμένων επιστημόνων στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών (Tall, 1991), σύμφωνα με τον οποίο, οι καταλλήλως περίπλοκες οπτικοποιήσεις μαθηματικών ιδεών στον τομέα της ανάλυσης μπορούν να δώσουν μια αρκετά πιο σφαιρική εικόνα μιας έννοιας και να οδηγήσουν σε ισχυρότερη διαίσθηση. Με τη διερεύνηση παραδειγμάτων που λειτουργούν και που αποτυγχάνουν, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να εξοικειωθούν με την οπτική διαίσθηση απαραίτητη για την προσέγγιση των αντίστοιχων εννοιών με μεγαλύτερη αυστηρότητα και κατανόηση.

Μεγάλες διαφορές συναντώνται στο κομμάτι των απαιτούμενων ενεργειών για την επίλυση των ασκήσεων που μελετήθηκαν από τα εγχειρίδια των δύο χωρών. Στα ελληνικά εγχειρίδια το μεγαλύτερο μέρος των ασκήσεων απαιτεί περισσότερες από μία ενέργειες για την επίλυση του όταν η συντριπτική πλειοψηφία των ασκήσεων του κυπριακού εγχειριδίου είναι εφικτό να λυθούν με μια μονάχα ενέργεια. Είναι ενδεικτικό πως, σύμφωνα με τον πίνακα 14, όλες οι ασκήσεις τριών από τις πέντε ενότητες που μελετήθηκαν από το κυπριακό εγχειρίδιο, απαιτούν μία ενέργεια για την επίλυσή τους. Παρόλο που δε σημαίνει απαραίτητα πως μια σύντομη άσκηση είναι και εύκολη άσκηση, όταν οι ασκήσεις που λύνονται με μία ενέργεια κυριαρχούν, γίνεται πιο δύσκολο να προωθηθεί η δημιουργική και η συνδυαστική σκέψη των μαθητών.

Σχετικά με τις απαραίτητες γνωστικές διαδικασίες για την επίλυση των ασκήσεων που μελετήθηκαν, επισημαίνουμε ξανά πως τα ποσοστά δεν αθροίζονται στο 100% διότι πολλές ασκήσεις χαρακτηρίζονται από περισσότερες από μια διαδικασίες. Η διαδικασία της εφαρμογής φαίνεται να κυριαρχεί στα ελληνικά εγχειρίδια καθώς είναι απαραίτητη για πάνω από τα τρία τέταρτα (76,19%) των ασκήσεων. Σε σύγκριση με τις γνωστικές διαδικασίες της κατανόησης, της ανάλυσης, και της δημιουργίας οι οποίες έχουν ομοιότητες και συνδέονται μεταξύ τους η διαδικασία της εφαρμογής επικρατεί. Ως αποτέλεσμα, μέσα από την ανάλυση προκύπτει το γεγονός πως δίνεται μεγαλύτερη προσοχή στις υπολογιστικές διαδικασίες, τη διαδικαστική γνώση και την άλγεβρα των ορίων. Τα αποτελέσματα έρχονται σε αντίθεση με τη βιβλιογραφία, η οποία προτείνει την ενσωμάτωση πρακτικών από τους εκπαιδευτικούς που χαρακτηρίζονται και από διαδικαστική αλλά και από εννοιολογική γνώση για τη διδασκαλία των μαθηματικών (Hurrell, 2021), στόχος ο οποίος γίνεται πιο δύσκολος να επιτευχθεί όταν το σχολικό βιβλίο δεν περιέχει δραστηριότητες που προάγουν και τα δύο είδη γνώσης. Υπάρχουν διαφορές μεταξύ των δύο χωρών, με τις ασκήσεις του κυπριακού εγχειριδίου να έχουν παρόμοιο ποσοστό ως προς τις κατηγορίες της κατανόησης, της ανάλυσης και της δημιουργίας με τα ελληνικά εγχειρίδια, έχοντας όμως σαφώς λιγότερες ασκήσεις αναλογικά στις οποίες εμφανίζεται η διαδικασία της εφαρμογής (52,94%). Φαίνεται, δηλαδή, πως δίνεται περισσότερες έμφαση στην ενίσχυση της εννοιολογικής γνώση των μαθητών, έχοντας όμως το μειονέκτημα του ιδιαίτερα μικρού αριθμού ασκήσεων αφιερωμένων στην έννοια της σύγκλισης (17 στο σύνολο), το οποίο επισημαίνεται σε επόμενη παράγραφο.

Όσον αφορά την τελευταία κατηγορία του εργαλείου, τις γνωστικές απαιτήσεις των ασκήσεων των οποίων μελετήθηκαν, ίδιο σχεδόν ποσοστό ασκήσεων των βιβλίων της κάθε χώρας (52,38% τα ελληνικά, 52,94% το κυπριακό) χαρακτηρίζονται από συνδέσεις. Καθώς οι ασκήσεις που περιέχουν ασκήσεις κυμαίνονται στα ίδια επίπεδα, προκύπτει πως στα ελληνικά εγχειρίδια υπάρχουν περισσότερες ασκήσεις υψηλών γνωστικών απαιτήσεων καθώς περιέχουν ασκήσεις που απαιτούν πολύπλοκη και μη αλγοριθμική σκέψη (κατηγορία «κάνοντας μαθηματικά»), σε αντίθεση με το κυπριακό βιβλίο στο οποίο δεν υπάρχει καμία άσκηση τέτοιου είδους. Το εύρημα αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία καθώς, κατά την έρευνα των Stein & Lane, (1996), η μεγαλύτερη βελτίωση στην επίδοση των μαθητών στο εργαλείο αξιολόγησης που χρησιμοποιήθηκε, σχετίζεται με τη χρήση δραστηριοτήτων υψηλών γνωστικών απαιτήσεων, ιδιαίτερα με εκείνες που ενθαρρύνουν την μη αλγοριθμική σκέψη. Αντίθετα, οι μαθητές έδειξαν μικρή βελτίωση όταν οι δραστηριότητες ήταν χαμηλών γνωστικών απαιτήσεων, χωρίς συνδέσεις, με εύκολα προσβάσιμες στρατηγικές. Συνεπώς, παρόλο που, σύμφωνα με το συμπέρασμα της προηγούμενης παραγράφου, στο κυπριακό εγχειρίδιο εμφανίζονται πιο πολλές ασκήσεις οι οποίες ενισχύουν την εννοιολογική γνώση, υπάρχουν λιγότερες ασκήσεις υψηλών γνωστικών απαιτήσεων. Βλέποντας την ανάλυση συνολικά, οι ασκήσεις υψηλών γνωστικών απαιτήσεων υπερισχύουν των ασκήσεων χαμηλών γνωστικών απαιτήσεων.

Πέρα από τα συμπεράσματα τα οποία πηγάζουν από την μελέτη των αποτελεσμάτων της προηγούμενης ενότητας, αξίζει να σημειωθεί και η σημαντική διαφορά στην έμφαση την οποία δίνουν τα προγράμματα σπουδών των δύο χωρών στην έννοια της σύγκλισης. Πιο συγκεκριμένα, στο ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα, ήδη από την πρώτη τάξη του Λυκείου τίθενται οι βάσεις της έννοιας της σύγκλισης με την εισαγωγή στην έννοια της ακολουθίας, με αποκορύφωμα την τελευταία τάξη του Λυκείου, όπου οι μαθητές αντιμετωπίζουν και επίσημα πλέον την έννοια του ορίου, και από την οποία προέρχεται και το μεγαλύτερος μέρος των ασκήσεων που μελετήθηκαν (55 το πλήθος). Από την άλλη, όσον αφορά τα κυπριακά εγχειρίδια, οι έννοιες και της ακολουθίας αλλά και του ορίου μελετώνται στην Β' Λυκείου στο βιβλίο κοινού κορμού, αφιερώνοντας μονάχα 17 δραστηριότητες συνολικά και για τις δύο έννοιες.

Κλείνοντας, αξίζει να αναφερθεί πως η μελέτη και ανάλυση περισσότερου υλικού χωρίς να περιορίζεται μονάχα στα εγχειρίδια της Ελλάδας και της Κύπρου θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον και θα έδειχνε πως προσεγγίζεται η έννοια της σύγκλισης και από άλλα εκπαιδευτικά συστήματα ανά τον κόσμο. Ενδιαφέρον θα είχε, επίσης, και η μελέτη πιθανής συσχέτισης μεταξύ διαστάσεων του εργαλείου, όπως για παράδειγμα εάν οι ασκήσεις που απαιτούν περισσότερες από μία ενέργειες χαρακτηρίζονται από υψηλότερες γνωστικές απαιτήσεις, ή εάν οι ασκήσεις για τις οποίες είναι απαραίτητη μόνο η γνωστική διαδικασία της εφαρμογής δεν περιέχουν συνδέσεις.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος Γ. (2010), Μαθηματικά Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής Β΄ Μέρος. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος»

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α. (1992), Άλγεβρα Β΄ Λυκείου. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α. (2010), Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος»

Βαϊνάς, Κ. (2007), Προς μια διδακτική αντιμετώπιση από τον εκπαιδευτικό του λάθους του μαθητή στη διαδικασία διδασκαλία-μάθηση. Στο συνέδριο: Τα λάθη των μαθητών: δείκτες αποτελεσματικότητας ή κλειδιά για τη βελτίωση της ποιότητας της εκπαίδευσης;, Αθήνα 1-2 Νοεμβρίου 2007, Θεσσαλονίκη 13-14 Δεκεμβρίου 2007. Available at http://www.kee.gr/attachments/file/praktika/praktika_lathi.pdf

ΔΕΠΠΣ & ΑΠΣ (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών και Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Ανακτήθηκε από http://ebooks.edu.gr/info/cps/11deppsaps_math.pdf

Δημητρίου – Καραντάνου, Τ., Ιωάννου, Ι., Καραντάνος, Δ., Κωνσταντινίδης, Κ., Λοϊζιάς, Σ., Ματθαίου, Κ., Παπαγιάννης, Κ., Παραγυίου, Θ., Σεργίδης, Μ., Στυλιανού, Α., Τιμοθέου, Σ., Χατζηγεωργίου, Ε. (2017), Μαθηματικά Β΄ Λυκείου Κοινού Κορμού, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου

Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (2021), Πρόγραμμα Σπουδών για το Μάθημα των Μαθηματικών στις Α', Β' και Γ' Λυκείου. Ανακτήθηκε από https://iep.edu.gr/services/eduguide/iframes/education-guide/view-file?fid=6947c3b732bf63dd327e5d668255f26f8797657c876b4e0242af6f453e4c1636

Καραβασίλης, Γ., & Κόσυβας, Γ. (2016). Όψεις κριτικής αποτίμησης του σχολικού βιβλίου μαθηματικών της Β ΄ Γυμνασίου : το εγχειρίδιο υποστηρίζει δραστηριότητες υψηλής γνωστικής βαρύτητας ; *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών– Επιστημονικών Θεμάτων*, *10*, 68–84.

Ξωχέλλης, Π. (2009). Το σχολικό βιβλίο ως μέσο διδασκαλίας και αντικείμενο εκπαιδευτικής έρευνας. *Πρακτικά του 10ου Συνεδρίου του Εκπαιδευτικού Ομίλου Κύπρου*, σ. 27-34. Λευκωσία.

Pepin, B. (2008). Μια διεθνής σύγκριση των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών και της χρήσης τους από τους εκπαιδευτικούς – ποια εικόνα των μαθηματικών παρουσιάζουν στους μαθητές τα σχολικά βιβλία στην Αγγλία, Γαλλία και Γερμανία. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.) Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών, 7ο διήμερο διαλόγου για διδασκαλία των μαθηματικών 15 & 16 Μαρτίου 2008 (σσ. 21-54). Θεσσαλονίκη

Χασάπης, Δ. (2008). Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών: Γενικά ζητήματα και προβληματισμοί. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.) Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών, 7ο διήμερο διαλόγου για διδασκαλία των μαθηματικών 15 & 16 Μαρτίου 2008 (σ. 11-20). Θεσσαλονίκη.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

Akinsola, M. K., & Olowojaiye, F. B. (2008). Teacher instructional methods and student attitudes towards mathematics. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *3*(1), 60–73. https://doi.org/10.29333/iejme/218

Anderson, L.W., & Krathwohl, D. R. (Eds.). (2001). A taxonomy for learning, teaching, and assessing. New York: Longman.

Ball, D. L. (2003). What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics? Secretary's Summit on Mathematics, US Department of Education, 3(3), 30-40.

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), Multiple perspectives on mathematics teaching and learning (pp. 83-104). Ablex Publishing.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis & E. Simmt (Eds.), Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group, (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.

Ball, D. L., & Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. Paper presented at 43rd Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik in Oldenburg, Germany, March 1–4, 2009

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching. *American Educator*, 14–46.

Ball, D. L, Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., & Tsai, Y. M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, *47*(1), 133–180. https://doi.org/10.3102/0002831209345157

Bloom, B. S. (1956). Taxonomy of educational objectives. Vol. 1: Cognitive domain. New York: McKay, 20, 24.

Brändström, A. (2005). Differentiated tasks in mathematics textbooks an analysis of the levels of difficulty. Doctoral Dissertation, 1–97.

Campbell, P. F., Nishio, M., Smith, T. M., Clark, L. M., Conant, D. L., Rust, A. H., DePiper, J. N., Frank, T. J., Griffin, M. G., & Choi, Y. (2014). The relationship between teachers' mathematical content and pedagogical knowledge, teachers' perceptions, and student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(4), 419–459. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.4.0419

Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(1), 1–6. https://doi.org/10.1007/s10857-013-9234-7

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three Countries. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(2), 117–151. https://doi.org/10.1080/10986060903460070

Dean, P. (1982). Teaching and Learning Mathematics. London, The Woburn Press.

Dewey, J. (1902). The child and the curriculum. Chicago: University of Chicago Press.

Elias, D., & Dreyfus, T. (2022). High school students constructing knowledge about convergence and limits. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *41*(2), 167–181. https://doi.org/10.1093/teamat/hrab035

Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *45*(5), 633–646. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x

Feikes, D., & Schwingendorf, K. (2008). The Importance of Compression in Children`s Learning of Mathematics and Teacher's Learning to Teach Mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *7*(2), 1–11.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371–406. https://doi.org/10.3102/00028312042002371

Hirst, P. (1969). The logic of the Curriculum. *Journal of Curriculum Studies*, 1, pp. 142 - 158.

Hurrell, D. (2021). Conceptual Knowledge OR Procedural Knowledge or Conceptual Knowledge AND Procedural Knowledge: Why the Conjunction is Important to Teachers.

Australian Journal of Teacher Education, *46*(2), 57–71. https://doi.org/10.14221/ajte.2021v46n2.4

Jakobsen, A., Thames, M. H., Ribeiro, C. M., & Delaney, S. (2012). Using Practice to Define and Distinguish Horizon Content Knowledge. Paper presented at 12th International Congress in Mathematics Education (12th ICME), 4635–4644.

Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., & Jordan, A. (2008). Pedagogical Content Knowledge and Content Knowledge of Secondary Mathematics Teachers. *Journal of Educational Psychology*, *100*(3), 716–725. https://doi.org/10.1037/0022-0663.100.3.716

Mayer, R. E. (2004). Should There Be a Three-Strikes Rule against Pure Discovery Learning? The Case for Guided Methods of Instruction. *American Psychologist*, *59*(1), 14–19. https://doi.org/10.1037/0003-066X.59.1.14

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

Ningsih, E. F., & Retnowati, E. (2020). Prior Knowledge in Mathematics Learning. *Proceedings of the SEMANTIK Conference of Mathematics Education*, *467* (Semantik 2019), 61–66. https://doi.org/10.2991/assehr.k.200827.118

Okeeffe, L. (2013). A Framework for Textbook Analysis. *International Review of Contemporary Learning Research*, *2*(1), 1–13. https://doi.org/10.12785/irclr/020101

Okon, S. (2018). Curriculum definition: A misleading philosophy. *International Journal of Advancement in Development Studies*, *13*(2), 27–34.

Przenioslo, M. (2005). Introducing the Concept of Convergence of a Sequence in Secondary School. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(1), 71–93. https://doi.org/10.1007/s10649-005-5325-4

Radatz, H. (1980). Students´ Errors in the Mathematical Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics*, *1*(1), 16–20.

Remillard, J. T. (1999). Curriculum materials in mathematics education reform: A framework for examining teachers' curriculum development. *Curriculum Inquiry*, *29*(3), 315–342. https://doi.org/10.1111/0362-6784.00130

Riccomini, P. J., Smith, G. W., Hughes, E. M., & Fries, K. M. (2015). The Language of Mathematics: The Importance of Teaching and Learning Mathematical Vocabulary. *Reading and Writing Quarterly*, *31*(3), 235–252. https://doi.org/10.1080/10573569.2015.1030995

Sarwadi, H. R. H., & Shahrill, M. (2014). Understanding Students' Mathematical Errors and Misconceptions: The Case of Year 11 Repeating Students. *Mathematics Education Trends and Research*, *2014*, 1–10. https://doi.org/10.5899/2014/metr-00051

Schüler-Meyer, A. (2018). Defining as discursive practice in transition – Upper secondary students reinvent the formal definition of convergent sequences. *Proceedings of INDRUM 2018 - Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*, 537–546. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01849923/document

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1–23. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Sierpińska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(4), 371–397. https://doi.org/10.1007/BF00240986

Sierpińska, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *10*(3), 24–36.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. Mathematics Teaching in the Middle School, 3 (5), 344–350.

Sosniak, L. A., & Perlman, C. L. (1990). Secondary education by the book. *Journal of Curriculum Studies*, *22*(5), 427–442. https://doi.org/10.1080/0022027900220502

Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional Tasks and the Development of Student Capacity to Think and Reason: An Analysis of the Relationship between Teaching and Learning in a Reform Mathematics Project. *Educational Research and Evaluation*, *2*(1), 50–80. https://doi.org/10.1080/1380361960020103

Stray, C. (1994). Paradigms regained: Towards a historical sociology of the textbook. *Journal of Curriculum Studies*, *26*(1), 1–29. https://doi.org/10.1080/0022027940260101

Tall, D. (1991). Intuition and rigour: The role of visualization in the calculus. *Visualization in Mathematics*, *119*(19), 105–119.

Trafton, P. R., Reys, B. J., & Wasman, D. G. (2001). *Standards-Based Mathematics Curriculum Materials: A Phrase in Search of a Definition*. *83*(3), 259–264.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). According to the Book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0844-0

Wang, J., & Paine, L. (2003). Learning to teach with mandated curriculum and public examination of teaching as contexts. Teaching and Teacher Education, 19(1), 75–94.

Williams, G. (2002). Identifying Tasks that Promote Creative Thinking in Mathematics: A Tool. *Mathematical Education Redsearch Group of Australisia Conference*, *July*, 1–8.

Zazkis, R., & Mamolo, A. (2011). Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning of Mathematics*, *31*(2), 8–13.