ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ:
Μαθηματική εκπαίδευση Β΄ Ηλικιακού Κύκλου (13-18 χρόνων)

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η   Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

«ΜΙΑ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΩΝ, Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ»

Καραλιάς Θωμάς (Α.Μ.: 1054)

Επιβλέπων: Χ. Λεμονίδης

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2023

Ευχαριστίες

Επιθυμώ να ευχαριστήσω δημοσίως τον διευθυντή του Μεταπτυχιακού προγράμματος καθηγητή κ. Λεμονίδη για την ευκαιρία που μου έδωσε να συμμετάσχω στο κορυφαίο επίπεδο εξειδίκευσης στη διδακτική των Μαθηματικών, καθώς και για την πολύτιμη εμπειρία που αποκόμισα από την άψογη συνεργασία μαζί του στη συγγραφή αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Ευχαριστώ επίσης τους καθηγητές της ελεγκτικής επιτροπής , την κ. Βαμβακούση και τον κ. Χρήστου που συνέβαλλαν καθοριστικά στην παρούσα μελέτη με την ανατροφοδότηση και την ηθική ενθάρρυνση που μου παρείχαν.

Τέλος ευχαριστώ τη Χρύσα, το Σάκη, το Νίκο, τη Νίκη και τους άλλους συναδέρφους που συνεργαστήκαμε εποικοδομητικά κατά τη διάρκεια των μαθημάτων αλλά και στις ενδιάμεσες εργασίες και βεβαίως την οικογένεια μου για την κατανόηση και την υποστήριξη της και σε αυτό το εγχείρημά μου.

«I believe that mathematical reality lies outside us, that our function is to discover or observe it, and that the theorems which we prove, and which we describe grandiloquently as our "creations," are simply the notes of our observations»

G.H. Hardy, A Mathematician's Apology

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Σελ.

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΧΑΡΤΩΝ

Περίληψη

Η κριτική παρατήρηση των σχολικών βιβλίων των Μαθηματικών σε ένα ευρύτερο πλαίσιο, αποτελεί σχετικά πρόσφατο πεδίο της Διδακτικής έρευνας το οποίο συντελεί στην εξαγωγή πολύτιμων συμπερασμάτων για το είδος και την ποιότητα της διδασκαλίας του μαθήματος στη σχολική τάξη.

Οι άρρητοι αριθμοί αν και κατέχουν σημαντικό ρόλο στα Μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, δεν έχουν διερευνηθεί ιδιαίτερα ως προς τον τρόπο παρουσίασής τους στα σχολικά εγχειρίδια. Η παρούσα έρευνα επιχειρεί μια πολυδιάστατη ανάλυση της παρουσίασης τους στα ελληνικά σχολικά βιβλία των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου. Τα βασικά συμπεράσματα αυτής της μελέτης είναι τα εξής: Υπάρχει μεγάλος αριθμός υπολογιστικών ασκήσεων στο Γυμνάσιο και έργων βασισμένων στην «Άλγεβρα των ριζών» στο Λύκειο. Είναι ελλιπής η οργάνωση της παρουσίασης των αρρήτων στα σχολικά βιβλία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Υπάρχει συσσώρευση έργων με συλλογιστική και επιχειρηματολογία μέτριας δυσκολίας. Δίνονται κυρίως αποδείξεις χωρίς επιχειρηματολογία σε Γυμνάσιο και Λύκειο.

Λέξεις – Κλειδιά: *άρρητοι αριθμοί*, *ανθρωπολογική θεωρία, επιχειρηματολογία και απόδειξη, ανάλυση σχολικών εγχειριδίων*

Abstract

The critical observation of Mathematics textbooks in a wider context is a relatively recent field of Didactic research which contributes to the derivation of valuable conclusions about the type and quality of the teaching of the subject in the school classroom.

Although irrational numbers have an important role in secondary school Mathematics, they have not been particularly explored in terms of how they are presented in school textbooks. The present research attempts a multidimensional analysis of their presentation in the Greek textbooks of Mathematics of the 2nd grade of Junior High School and 1st of High School. The main conclusions of this study are as follows: There are a large number of calculus exercises in Lower Secondary Education and projects based on “Algebra of Roots” in High School. The organization of the presentation of verbs in secondary school textbooks is rather incomplete. There is an accumulation of reasoning and argumentative works of moderate difficulty. Proofs are mainly given without argumentation in middle school and high school.

Keywords: *irrational numbers, anthropological theory, reasoning and proof, textbook analysis*

Εισαγωγή

Οι Rezat & Sträßer (2015), επισημαίνουν τη διάσταση των Μαθηματικών ως μιας «μη υλικής επιστήμης» που για τη διδασκαλία της κρίνεται απαραίτητη η αποτύπωση του θέματος που διαπραγματεύεται. Ουσιαστικά, τα σχολικά βιβλία συνιστούν ένα κομβικό σημείο στην εκπαίδευση των μαθηματικών, προσφέροντας μια «σκόπιμη διάταξη» των αναπαραστάσεων του γνωστικού αντικειμένου σε δασκάλους και μαθητές. Δημιουργείται με αυτό τον τρόπο ένας επιστημολογικός μικρόκοσμος, που περικλείει μεγάλο μέρος των ενοτήτων που αφορούν τη μαθηματική εκπαίδευση (Rezat & Sträßer, 2015, σελ.248).

Οι αριθμοί αντιπροσωπεύουν διαχρονικά ένα σημαντικό τμήμα της επιστήμης και της φιλοσοφίας των Μαθηματικών. Ως θεματικός κύκλος καταλαμβάνουν ιδιαίτερη θέση στη διδασκαλία τους η οποία είναι απαραίτητη για την ανάπτυξη του γνωστικού αντικειμένου καθώς και άλλων επιστημονικών κλάδων (Pommer, 2013).

Για τους Πυθαγόρειους οι αριθμοί ήταν η ουσία όλων των πραγμάτων (Katz, 2008) και για τον Πλάτωνα όπως συνοψίζει ο Pommer (2013), καμία τέχνη ή γνώση δεν μπορούσε να ανθίσει χωρίς την αριθμητική. Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα ο Frege (2009) σύνδεσε τον αριθμό ως επέκταση μιας έννοιας και οι Russel & Whitehead (1910) εισάγοντας τη θεωρία τους στη Λογική παρουσίασαν μια μνημειώδη απόδειξη για την στοιχειώδη αριθμητική σχέση «1+1=2».

Η ανακάλυψη των αρρήτων προκάλεσε την πρώτη μεγάλη κρίση στα θεμέλια των Μαθηματικών, η οποία για αρκετούς δεν ξεπεράστηκε γρήγορα (Σκούρας 1998, Katz, 2008). Μάλιστα πολλούς αιώνες μετά, στα τέλη του 19^{ου} αιώνα ο Kronecker διατύπωσε την άποψη ότι ο Θεός δημιούργησε τους ακέραιους αριθμούς, ενώ οι άλλοι είναι έργο των ανθρώπων (Henry 2006). Στον αντίποδα ο Russel (όπως αν. στο Wittgenstein, 1978, σελ.17) εξέφρασε την πεποίθηση ότι «καμιά λογική δεν είναι δυνατό να θεωρηθεί επαρκής, αν δεν αποδείξει τελικά πώς είναι ικανή να πραγματευθεί τους υπερπεπερασμένους αριθμούς».

Στα σύγχρονο οικοδόμημα της αριθμητικής, οι άρρητοι αριθμοί αποτελούν τη βάση για την εισαγωγή τόσο των πραγματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση όσο και για την κατανόηση των μιγαδικών σε ανώτερα ακαδημαϊκά επίπεδα.

Οι περισσότερες μελέτες (Arcavi et al. 1987, Βόσκογλου & Κόσσυβας 2012, Fischbein et al. 1995) των αρρήτων αριθμών περιορίζονται στις δυσκολίες και στις παρανοήσεις που αντιμετωπίζουν στην ενότητα αυτή οι μαθητές αλλά και οι διδάσκοντες κατά τη εκπαιδευτική διαδικασία της μάθησης. Πρόσφατες έρευνες στα βραζιλιάνικα σχολικά εγχειρίδια (González-Martín et al. 2013, Souto 2010) ανέδειξαν τη συμβολή μιας βαθύτερης διερεύνησης των αρρήτων αριθμών μέσα από τα σχολικά βιβλία στην αρτιότερη διδακτική τους προσέγγιση.

Στην παρούσα εργασία στο **πρώτο κεφάλαιο** αναπτύσσεται **το θεωρητικό μέρος.** Αρχικά παρουσιάζεται συνοπτικά ο ρόλος των αρρήτων αριθμών στην ανάπτυξη των πραγματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Επισημαίνονται τα διδακτικά εμπόδια από προηγούμενες έρευνες που αναδεικνύουν τους άρρητους ως «ανώτερη μαθηματική γνώση». Στη συνέχεια προσεγγίζεται η Παιδαγωγική γνώση περιεχομένου των αριθμών αυτών με βάση το ελληνικό Α.Π.Σ. χρησιμοποιώντας το μοντέλο των Otto et al. (2013). Ταυτόχρονα ιεραρχούνται οι διδακτικοί στόχοι με βάση την ταξινομία του Bloom (1956).

Έπειτα γίνεται μια προσέγγιση της ανθρωπολογικής θεωρίας (ATD) του Chevallard (1999) και υλοποιείται μια βιβλιογραφική ανασκόπηση προηγουμένων ερευνών (González-Martín et al. 2013, Souto 2010, Licera 2017 όπως αν. στο Gascón et al. 2022) με την Ανθρωπολογική Θεωρία της Διδακτικής (ATD) στους πραγματικούς και στους άρρητους. Ακολουθεί η εννοιολογική προσέγγιση της συλλογιστικής και απόδειξης (Reasoning-Proving) στη μαθηματική εκπαίδευση.

Αναπτύσσονται τα βασικά θεωρητικά πλαίσια της συλλογιστικής και απόδειξης (Stylianides 2009, Thompson et al. 2012) καθώς και τα αποτελέσματα των σχετικών ερευνών στη ανάλυση των σχολικών βιβλίων. Επιπλέον εξετάζεται η επιχειρηματολογία και απόδειξη στη διδασκαλία των αρρήτων με κριτήριο τη γνωστική –αισθητική τους προσέγγιση (Dreyfus & Eisenberg 1986, Tall 1979). Στη συνέχεια διερευνώνται οι κυριότερες αναπαραστατικές αποδείξεις των αρρήτων με βάση την Ιστορία Μαθηματικών. Στο τέλος του κεφαλαίου καταγράφονται τα στοιχεία της βιβλιογραφικής ανασκόπησης που οδηγούν στην παρούσα έρευνα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται το **εμπειρικό μέρος** της μελέτης**.** Παρατίθεται ο σκοπός της έργου και αναπτύσσονται οι ερευνητικές υποθέσεις οι οποίες συνδέονται με τα ευρήματα της βιβλιογραφικής ανασκόπησης. Πραγματοποιείται προέρευνα των αρρήτων στα σχολικά βιβλία με βάση το ATD. Γίνεται αντιστοίχιση των έργων, επιλέγονται οι θεματικές ενότητες από τα σχολικά βιβλία και το κατάλληλο δείγμα. Ακολουθεί η ανάλυση των αποτελεσμάτων και η σύγκριση τους με τα ευρήματα των προαναφερθεισών ερευνών. Στη συνέχεια ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογική πορεία, υλοποιείται η έρευνα των έργων των αρρήτων με βάση το πλαίσιο του R-P του Στυλιανίδης (2009) όπως το κωδικοποίησαν οι Zhang & Qi (2019). Έπειτα διερευνώνται διεξοδικά οι ερευνητικές υποθέσεις που τέθηκαν στο θεωρητικό μέρος. Τέλος παρατίθεται η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε κατά την υλοποίηση της έργου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1.1 Η διδασκαλία των αρρήτων

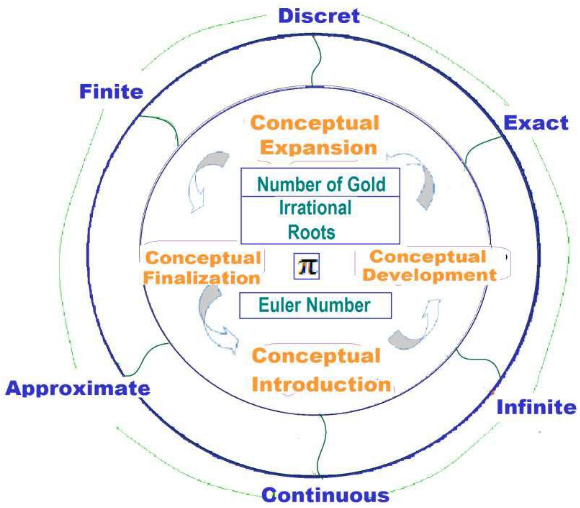
1.1.1 Εννοιολογική προσέγγιση

Από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση, οι περισσότερες αναφορές στη διδακτική των αρρήτων επικεντρώνουν στην ανάπτυξη τους μέσα από τη γενίκευση των ρητών αριθμών καθώς στην ιδιαιτερότητα της φύσης τους και την ιστορική διάσταση της ύπαρξης των ασύμμετρων αριθμών.

Ο Russell (1903) θέτει ως προτεραιότητα για τη μελέτη τους τη συνειδητοποίηση των «λογικών λόγων» για τους οποίους κρίνεται αναγκαία μια αριθμητική θεωρία των αρρήτων. Σε αυτό το πλαίσιο τονίζει ότι: «Η ύπαρξη τους έχει συναχθεί στο παρελθόν, από προβλήματα της μορφής η εξίσωση $x^2 - 2 = 0$ πρέπει να έχει ρίζα». Επιπλέον επισημαίνει ότι οι αλγεβρικές και γεωμετρικές τεχνικές που αναπτύχθηκαν σε αυτές τις επιλύσεις δεν κατάφεραν να αποδείξουν ότι ο x είναι πραγματικά ένας αριθμός. Αλλά: «αν μπορούμε να περάσουμε από την Αριθμητική στην Ανάλυση, από τους ρητούς στους άρρητους, πρέπει να δείξουμε εκ των προτέρων πώς μπορεί να γίνει αυτό. Οι γενικεύσεις του αριθμού – με εξαίρεση την εισαγωγή των φανταστικών, που πρέπει να πραγματοποιούνται ανεξάρτητα – είναι συνέπειες της παραδοχής ότι οι φυσικοί αριθμοί σχηματίζουν μια εξέλιξη. Σε αυτή την εξέλιξη, οι όροι έχουν δύο είδη σχέσεων, αυτή που αποτελεί το γενικό ανάλογο των θετικών και αρνητικών ακεραίων και η άλλη των ρητών αριθμών» (Russell 1903, σελ.280). Παρόμοια, ο Spivac (1992), παρατηρεί ότι «η χρήση του συμβόλου $\sqrt{2}$ προϋποθέτει την ύπαρξη κάποιου αριθμού του οποίου το τετράγωνο είναι 2» και θεωρεί αδύνατη ως τώρα την απόδειξη ύπαρξης τέτοιου αριθμού.

Για τους Accavi et. al (1987, σελ.21) «η έννοια της αρρητότητας προκύπτει από τη γεωμετρία και παραμένει συνδεδεμένη σε αυτή μέχρι που οι άρρητοι άρχισαν να αναγνωρίζονται ως αριθμοί. Οι άρρητοι περνούν στους πραγματικούς της αριθμητικής και Άλγεβρας, ρητές προσεγγίσεις σε άρρητες, διαφορετικά είδη άρρητων αριθμών». Επιπλέον αναφέρουν – όπως και ο Russell – ότι υφίσταται μια «σύγχρονη» ανάγκη για έναν επίσημο ορισμό των άρρητων. Προτείνουν την «ενίσχυση της μαθηματικής γνώσης που σχετίζεται με την έννοια των άρρητων μέσα από τη διερεύνηση του ιστορικού πλαισίου και τη δημιουργία μιας λογικής εικόνας των μαθηματικών και της μαθηματική δραστηριότητα ως ανθρώπινης, δημιουργικής και δυναμικής προσπάθειας».

Για τον Pommer (2010, σελ.24): «ο τρόπος παρουσίασης των αρρήτων που επιλέγουν τα σχολικά βιβλία αποτελεί μια προσπάθεια να δοθούν επεξηγήσεις ή να εισαχθούν εννοιολογικά οι άρρητοι αριθμοί με αντίστοιχο τρόπο με τους ρητούς». Επιπλέον ισχυρίζεται ότι για να παραχθεί μια αξιόπιστη διδακτική μεταφορά των αρρήτων αριθμών της μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης είναι απαραίτητη η αναπαράσταση γνώσης σε έναν εννοιολογικό χάρτη (σχήμα 1). Ο χάρτης αυτός λαμβάνει υπόψη τις συνδέσεις μεταξύ των ζευγών Διακριτό –Συνεχές, Ακριβές – Κατά προσέγγιση και Πεπερασμένο – Άπειρο και ενσωματώνει τα συνηθισμένα σχολικά θέματα της ενότητας των αρρήτων: «ρίζες», «π», «χρυσή τομή», «e».



Σχήμα 1: Η διαδρομή των νοημάτων στον χώρο των αρρήτων Pommer (2013, σελ. 66)

Προς αυτή την κατεύθυνση ο «χώρος της σημασιοδότησης» των αρρήτων διαπερνά πολλά στάδια για να καταστεί δυνατή η «νοηματοδότηση» της. Γεγονός που ισοδυναμεί με μια «εννοιολογική εισαγωγή» των αρρήτων, χρησιμοποιώντας μαθηματικές γλώσσες και διδακτικό υλικό. Η διαδρομή αυτή επιτρέπει την προώθηση της αρχικής παρουσίασης σε μια «εννοιολογική ανάπτυξη και επέκταση» των αρρήτων, με άρθρωση μεταξύ των μαθηματικών γλωσσών (αριθμητική, αλγεβρική, λειτουργική, γεωμετρική, γράφημα και κείμενο), καθώς και την εκ νέου χρήση της σε διαφορετικά πλαίσια και καταστάσεις που διαπερνούν τα μαθηματικά και άλλα επιστημονικά πλαίσια» (Pommer, 2013).

Για τους González-Martín et. al (2013) η ανάγκη εισαγωγής αυτών των «νέων» αριθμών δεν είναι «προβληματική και δεν παρουσιάζονται σε σημαντικό πλαίσιο ή σε σχέση με τη χρησιμότητά της ως μαθηματικού εργαλείου».

Σύμφωνα με τους Sirotic & Zaskis (2007a) «η έννοια του αριθμού είναι από τις πλέον βασικές που διέπουν το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών και εγγενώς δύσκολη». Ωστόσο, η κατανόηση των αρρήτων είναι απαραίτητη για την επέκταση και ανακατασκευή της αριθμητικής έννοιας από το σύστημα των ρητών στο σύστημα των πραγματικών αριθμών. Επομένως, είναι απαραίτητη η προσεκτική διδακτική της προσέγγιση για την ορθή ανάπτυξη της έννοιας.

Ο Bronner (1997) χρησιμοποιεί τον όρο θεσμικό διδακτικό κενό για να αναφερθεί στην έλλειψη ρητής διαπραγμάτευσης, τόσο στα προγράμματα σπουδών όσο και στα σχολικά βιβλία, σχετικά με την επέκταση από τους ρητούς αριθμούς στους πραγματικούς.

Στα σύγχρονα εκπαιδευτικά συστήματα, οι ρητοί αριθμοί $\frac{\alpha}{\beta}, \alpha, \beta \in Z$ και οι άρρητοι συνθέτουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Η εκπροσώπηση των δύο αριθμοσυνόλων στην ανάπτυξη των πραγματικών δεν είναι «ισότιμη». Σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη & Φαρμάκη (2006) υπάρχουν απείρως περισσότεροι άρρητοι από τους ρητούς, το δε σύνολο των ρητών είναι αμελητέο ως προς αυτό των πραγματικών. Μάλιστα αν επιλέξουμε τυχαία ένα σημείο στο συνεχές των πραγματικών αριθμών, τότε η πιθανότητα να είναι άρρητος είναι ένα, ενώ να είναι ρητός είναι μηδέν (Νεγρεπόντης & Φαρμάκη, 2006).

Ο Κόσυβας (2018) αναφέρει ότι η διαγώνιος απόδειξη του Cantor απέδειξε την υπεραριθμήσιμη απειρία των άρρητων. Αλλά ακόμα και μεταξύ των αρρήτων, υπάρχουν οι λεγόμενοι «υπερβατικοί άρρητοι» (π.χ. ο π και ο e) οι οποίοι είναι απείρως περισσότεροι από τους «βολικούς» αλγεβρικούς άρρητους, (π.χ. η ρίζα 2 και η χρυσή τομή) που είναι επίσης αμελητέοι (Νεγρεπόντης & Φαρμάκη, 2006). Νεώτεροι ερευνητές (Feldman, 2000 & Αντωνίου, 2002) καταγράφουν την έλλειψη διδακτικής γνώσης σχετικά με το σύνολο των αρρήτων, γεγονός που αποδίδουν στη μη αντίστοιχη ανάπτυξη των υπερβατικών. Προς αυτή την κατεύθυνση ο Βόσκογλου (2011) παρομοιάζει τους υπερβατικούς σαν μια «μαύρη τρύπα» μέσα στο «σύμπαν» των πραγματικών αριθμών.

1.1.2 Οι Άρρητοι ως «ανώτερη μαθηματική γνώση»

Ο Harel (2000) προσεγγίζοντας την ανώτερη μαθηματική σκέψη υιοθετεί τη διάκριση του Brousseau (1997) μεταξύ διδακτικών εμποδίων τα οποία οφείλονται σε λανθασμένη διδασκαλία και επιστημολογικών που αποτελούν προϊόν της ανάπτυξης της ανθρώπινης γνώσης. Στη συνέχεια απαριθμεί τρεις προϋποθέσεις που σύμφωνα με τον Duroux (1982, όπως αν. στο Brousseau, 1997) πρέπει να συγκεντρώνει μια γνώση για να θεωρείται επιστημολογικό εμπόδιο:

I. Να έχει ίχνη στην ιστορία των μαθηματικών
II. Να μην οφείλεται σε ελλιπή γνώση
III. Να εμφανίζει ανθεκτικότητα «τόσο σε περιστασιακές αντιφάσεις όσο και στην εδραίωση μιας καλύτερης γνώσης»

Τέλος ορίζει ως «ανώτερη» τη μαθηματική σκέψη που η ανάπτυξή της περιλαμβάνει τουλάχιστον μία από τις τρεις παραπάνω προϋποθέσεις για να είναι ένα εμπόδιο επιστημολογικό.

Από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση διαπιστώνουμε ότι η έννοια των αρρήτων δημιουργεί διαχρονικά επιστημολογικά εμπόδια με εμφανή ίχνη στην ιστορία των μαθηματικών, όπως καταδεικνύει και ο περίφημος διάλογος του Μένονα. Επιπλέον, οι μαθητές δεν εστιάζουν στη σύνδεση των αρρήτων αριθμών και της ασυμμετρίας (fisbein et al. 1994), παρουσιάζουν μη διαισθητικές δυσκολίες διαφορετικής προέλευσης στην κατανόηση της αρρητότητας που οφείλονται σε παρανόησεις στο άπειρο, στη φύση των αριθμών και στην ασυμμετρία (fisbein, et al. 1994). Για πολλούς ερευνητές (Pommer 2010, Bronner 1997, Sirotic & Zaskis 2007a), οι άρρητοι εισάγονται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση με αντίστοιχο τρόπο με τους ρητούς. Αποτέλεσμα αυτών, είναι η παραγωγή ενός εμποδίου που δεν αποτελεί προϊόν έλλειψης γνώσης αλλά μη εγκυρότητας εκτός του ισχύοντος πλαισίου. Ακόμη, αρκετές έρευνες όπως των fisbein (1994, 1995) και Voskoglou & Kosyvas (2012) έδειξαν ότι μαθητές, φοιτητές αλλά και δάσκαλοι με προϋπηρεσία αντιμετωπίζουν παρόμοια προβλήματα όσον αφορά τον ορισμό και τη διάκριση των αρρήτων αριθμών. Το γεγονός αυτό τεκμηριώνει την ανθεκτικότητα του εμποδίου σε πρόσκαιρες μεταβολές και στην όποια βελτίωση της αναγκαίας γνώσης.

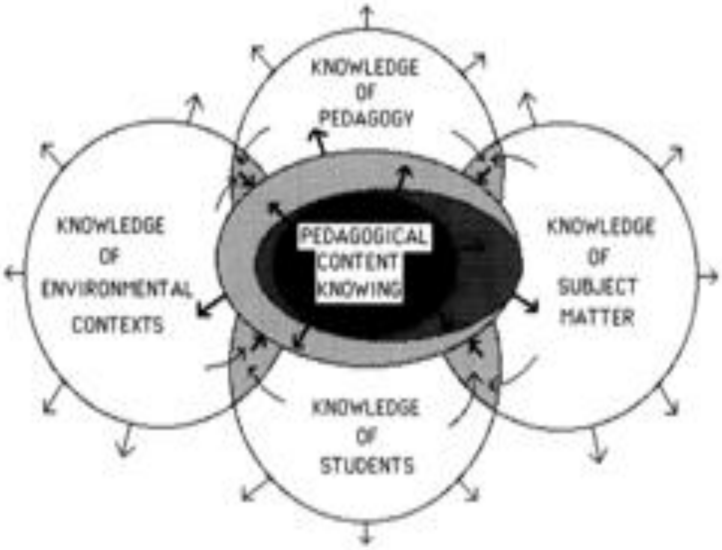
Από τα ανωτέρω συμπεραίνουμε ότι ικανοποιούνται και οι τρεις προϋποθέσεις για τις οποίες ένα εμπόδιο χαρακτηρίζεται επιστημολογικό. Οπότε σύμφωνα με την προσέγγιση του Harel (2000), η ανάπτυξη της έννοιας των αρρήτων προϋποθέτει ανώτερη μαθηματική σκέψη. Το συμπέρασμα αυτό έρχεται σε συμφωνία και με την έρευνα των Fischbein et al. (1995) που αποδίδει τις δυσκολίες των μαθητών στους αρρήτους στο προαπαιτούμενο υψηλό επίπεδο μαθηματικής σκέψης.

1.1.3 Η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου των αρρήτων με βάση το ελληνικό Α.Π.Σ.

Για τους Chang & Silalahi (2017, σελ.1199): «για να παρουσιάσουμε αποτελεσματικά το περιεχόμενο των μαθηματικών, χρειαζόμαστε γνώση παιδαγωγικού περιεχομένου». Για τον Shulman (1986, σελ.9) η Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου (ΠΓΠ ή PCK) προσδιορίζει «τα διακριτά σώματα γνώσης για διδασκαλία και αντιπροσωπεύει την ανάμειξη περιεχομένου και παιδαγωγικής συντελώντας στην κατανόηση σε ποιο βαθμό τα ιδιαίτερα θέματα, προβλήματα ή ζητήματα οργανώνονται, αντιπροσωπεύονται και προσαρμόζονται στα διαφορετικά ενδιαφέροντα και στις ικανότητες των μαθητών και παρουσιάζονται για διδασκαλία».

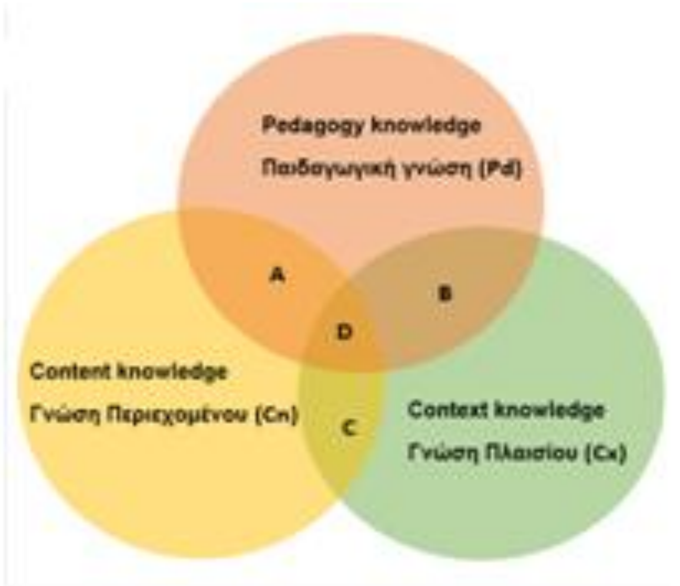
Οι Cochran et al. (1993) ανέπτυξαν ένα μοντέλο με την PCK ως πυρήνα 4 παραμέτρων (Εικόνα 1):

1. τη γνώση περιεχομένου,
2. τις παιδαγωγικές γνώσεις,
3. τη γνώση των μαθητών και
4. τη γνώση του περιβαλλοντικού πλαισίου.



Εικόνα 1: Model of PCK (Cochran et al. 1993, σελ. 268)

Οι Otto & Everett (2013) αναλύουν και επεκτείνουν το ενοποιητικό μοντέλο των Cochran et al. (1993) σε ένα σύστημα όπου η Παιδαγωγική γνώση (Pd), η Γνώση Περιεχομένου (Cn) και η γνώση πλαισίου (Cx) αλληλεπιδρούν ανά δύο μεταξύ τους με τελικό προϊόν τη PCK (Εικόνα 2).



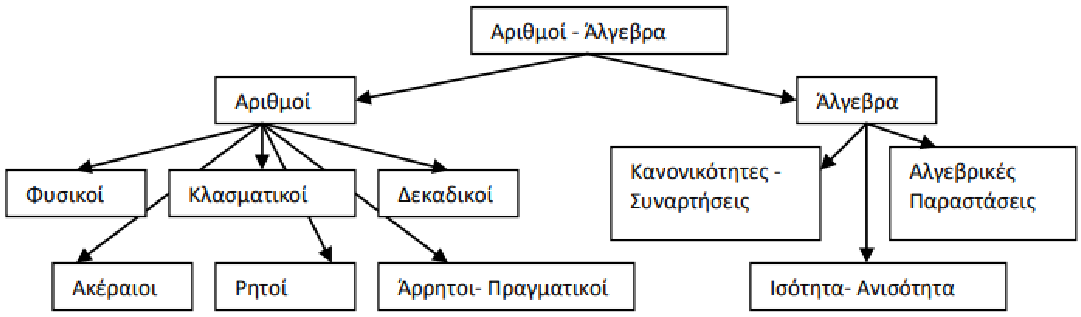
Εικόνα 2: Professional Development In PCK (Otto & Everett, 2013, σελ. 398)

Οι κατηγορίες γνώσης και των αλληλεπιδράσεών τους με τα αντίστοιχα στοιχεία τους, αποτυπώνονται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1: Κατηγορίες γνώσης και των αλληλεπιδράσεών τους Otto & Everett (2013, σελ. 396)

Κατηγορίες	**Στοιχεία**
Παιδαγωγική γνώση (Pd)	Γνώση της κύριας διδασκαλίας Στρατηγικές Πρακτικές δραστηριότητες Παρουσιάσεις Ερευνητικές μεθόδους Οπτικοακουστικά μέσα Διδακτικά μοντέλα.
Γνώση Πλαισίου (Cx)	Μαθησιακοί στόχοι
Γνώση Περιεχομένου (Cn)	Περιγραφή τάξης Απαιτούμενοι πόροι Περιορισμοί Πολιτισμικό υπόβαθρο μαθητών Εμπειρία με συνεργατική μάθηση
Παιδαγωγική/Περιεχόμενο (A=Pd∩Cn)	Τροποποίηση διδακτικών μεθόδων για την επίτευξη ειδικών μαθησιακών αποτελεσμάτων
Παιδαγωγική/Πλαίσιο (B= Pd∩Cx)	Πόροι (εκπαιδευτικό υλικό/υλικοτεχνική υποδομή/χρόνος)για την επιλεγμένη στρατηγική διδασκαλίας
Περιεχόμενο/Πλαίσιο(C=Cn∩Cx)	Γνώση μαθησιακού προφίλ των μαθητών(αντιλήψεις, παρανοήσεις) Γνώση των εμπειριών μάθησης και του πλαισίου των μαθητών
Περιεχόμενο/Πλαίσιο/Παιδαγωγική (D=A∩B∩C)	Πόροι &μέθοδοι για τη διδασκαλία Μέθοδοι αξιολόγησης Γνώση Αναλυτικού Προγράμματος

Στην υποχρεωτική ελληνική εκπαίδευση οι άρρητοι αριθμοί είναι τμήμα της τροχιάς «Αριθμοί – Άλγεβρα» στο Γυμνάσιο όπως αποτυπώνεται στο επόμενο σχήμα 2.



Σχήμα 2: Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα της θεματικής περιοχής Αριθμοί-Άλγεβρα, ΥΠΑΙΘ (2004, σελ. 14)

Εισάγονται στη Β΄ Γυμνασίου, όπου η στοχοθεσία της διδασκαλίας από το ΑΠΣ (ΥΠΑΙΘ, 2003) παρουσιάζεται στον επόμενο πίνακα 2 σύμφωνα με την ταξινομία των εκπαιδευτικών στόχων (educational objectives) του Bloom (1956).

Πίνακας 2: Ταξινομία εκπαιδευτικών στόχων των αρρήτων-πραγματικών στη Β΄ Γυμνασίου (ΑΠΣ)

Γνώση	Κατανόηση	Εφαρμογή	Ανάλυση	Σύνθεση	Αξιολόγηση
Ταξινομούν συγκεκριμένους αριθμούς στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών		Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες γινομένου& πηλίκου ν-οστών ριζών	Διακρίνουν τους ρητούς από τους άρρητους αριθμούς		
Αναγνωρίζουν τη ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού ως τη μοναδική μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^{\nu} = \alpha$		Επιλύουν απλές εξισώσεις της μορφής $x^{\nu} = \alpha$			

Στο ισχύον Α.Π.Σ. του Γυμνασίου (ΥΠΑΙΘ, 2003) αναγνωρίζεται ο περιορισμός όσον αφορά «τους τρόπους που οι μαθητές της υποχρεωτικής εκπαίδευσης ανταποκρίνονται στις νοητικές διεργασίες που απαιτούνται για την επιτυχή ανάπτυξη των ρητών και των πραγματικών αριθμών, σε σύγκριση με τους υπόλοιπους αριθμούς, με αποτέλεσμα να μην είναι εύκολη η ανίχνευση συγκλίσεων ή ενός κεντρικού προσανατολισμού στα σχετικά ευρήματα».

Στην πρώτη Λυκείου οι μαθητές/τριες «επαναλαμβάνουν και εμβαθύνουν στους άρρητους στα πλαίσια των ιδιοτήτων του συνόλου των πραγματικών αριθμών με στόχο να βελτιώσουν την κατανόηση της δομής του» (Υ.ΠΑΙ.Θ., 2022). Οι διδακτικοί στόχοι της ενότητας των πραγματικών-αρρήτων παρουσιάζονται στον πίνακα σύμφωνα με την ταξινομία των εκπαιδευτικών στόχων του Bloom (1956).

Πίνακας 3: Ταξινομία εκπαιδευτικών στόχων των αρρήτων-πραγματικών στη Α΄ Λυκείου (ΑΠΣ)

Γνώση (knowledge)	**Κατανόηση (comprehension)**	**Εφαρμογή (application)**	**Ανάλυση (analysis)**	**Σύνθεση (synthesis)**	**Αξιολόγηση (evaluation)**
Αναγνωρίζουν με προβλήματα, την αναγκαιότητα εισαγωγής &χρήσης των τετραγωνικών ριζών και των άρρητων αριθμών	Κατανοούν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των άρρητων& τα κοινά με τους ρητούς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών	Επεκτείνουν τις πράξεις των ρητών και τις ιδιότητές τους στους πραγματικούς	Συγκρίνουν& διατάσσουν πραγματικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας την πραγματική ευθεία		
Υπολογίζουν τετραγωνικές ρίζες με δοκιμές, διαδοχικές προσεγγίσεις και χρήση υπολογιστή τσέπης		Αναπαριστούν γεωμετρικά και να τοποθετούν στην ευθεία αριθμούς της μορφής $\sqrt{\alpha}$	Διερευνούν την ύπαρξη αριθμών που δεν είναι ρητοί και να αναγνωρίζουν τους άρρητους		
			Διερευνούν τις σχέσεις των συνόλων των φυσικών, των ακεραίων, των ρητών, των άρρητων &των πραγματικών.		

Επιπρόσθετα στον Οδηγό Λυκείου για τον εκπαιδευτικό (Παπασταυρίδης και συν., 2016) τονίζεται ότι οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους, εξ αιτίας των διαφορετικών αναπαραστάσεων των πραγματικών αριθμών, καθώς και στην κατανόηση των εννοιών της διαδοχικότητας και της πυκνότητας τους.

Οι διαπιστώσεις αυτές συμπίπτουν με τα συμπεράσματα προηγουμένων ερευνών (fisbein et.al 1995, Sirotic & Zaskis, 2007a) όπου πολλοί μαθητές δεν γνωρίζουν την ουσιαστική διάκριση μεταξύ περιοδικών και μη περιοδικών δεκαδικών, θεωρούν τους αρρήτους ως «μη ακέραιους» με άπειρα δεκαδικά, ή ακόμα και αρνητικούς. Τέτοιες παρανοήσεις δημιουργούνται από την ερμηνεία του όρου «άρρητος» υπό το πρίσμα της καθημερινής σημασίας του. Επιπλέον, οι μαθητές θεωρούν ότι σε έναν ρητό αντιστοιχεί ένας άρρητος (fisbein et.al, 1995) ή ότι η πιθανότητα να επιλέξουμε τυχαία έναν αριθμό από το διάστημα [0,1] είναι 50% (Sirotic & Zaskis, 2007a). Τέλος οι Βόσκογλου & Κόσσυβας (2012), καταγράφουν οκτώ δυσκολίες για την εννοιολογική κατανόηση των πραγματικών εξαιτίας της διδασκαλίας των αρρήτων:

1) Οι παρανοήσεις στους άρρητους από την ελλιπή γνώση των ρητών.
2) Τα επιστημολογικά εμπόδια των ασύμμετρων μεγεθών.
3) Η αδυναμία παρουσίασης των άρρητων στο σχολείο και κυρίως των υπερβατικών.
4) Οι αδιαφανείς δεκαδικές αναπαραστάσεις ρητών και αρρήτων.
5) Η συχνή ταύτιση αρρήτων αριθμών με ρητές προσεγγίσεις τους.
6) Η ύπαρξη των υπερβατικών αριθμών.
7) Η αξιωματική/προσεγγιστική αντιστοίχιση με κανόνα και διαβήτη ασύμμετρων μεγεθών στον πραγματικό άξονα.
8) Ο ορισμός των ριζών ως θετικών μόνο αριθμών.

Με βάση τις οδηγίες διδασκαλίας και των ισχυόντων Α.Π.Σ., καταγράφουμε στον πίνακα 4 τις τρεις βασικές συνιστώσες της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου για τους αρρήτους στη Β’ Γυμνασίου και Α’ Λυκείου.

Πίνακας 4: Παιδαγωγική Γνώση περιεχομένου των αρρήτων-πραγματικών στη Β/θμια εκπαίδευση

Κατηγορίες	**Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**	**Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**
Παιδαγωγική γνώση (Pd)	● Κονστρουκτιβισμός ● Προσέγγιση του ρίζα 2. ● Η συμπλήρωση της ευθείας των ρητών με άρρητους αριθμούς ● Προβλήματα υπολογισμού περιμέτρων και εμβαδών πολυγώνων στα οποία απαιτείται η χρήση του πυθαγόρειου θεωρήματος ● Μικροπείραμα από το φωτόδεντρο ● Δραστηριότητες από την καθημερινότητα ● Προφορικός /γραπτός λόγος και χρήση Τ.Π.Ε.	● Κονστρουκτιβισμός ● Εύρεση ρητών προσεγγίσεων του ρίζα 2. ● Η απόδειξη της αρρητότητας του ρίζα 2 με την εις άτοπον απαγωγή ● Επίλυση προβλημάτων από τη φυσική ● Δραστηριότητες στην αναγνώριση των αριθμών και στην πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων ● Προφορικός και γραπτός λόγος
Γνώση Πλαισίου (Cx)	Οι μαθησιακοί στόχοι ικανοποιούν καλύπτουν τέσσερις από τις έξι βαθμίδες της ταξινομίας του Bloom	Οι μαθησιακοί στόχοι καλύπτουν τρεις από τις έξι βαθμίδες της ταξινομίας του Bloom
Γνώση Περιεχομένου (Cn)	Προτείνονται 4 διδακτικές ώρες Εμπειρία σε συνεργατική μάθηση Πίνακας/προτζέκτορας /ταμπλέτες	Προτείνονται 4 διδακτικές ώρες Εμπειρία σε συνεργατική μάθηση Πίνακας/προτζέκτορας/ταμπλέτες

1.2 Η ανθρωπολογική θεωρία (ATD)

1.2.1 Παρουσίαση της ανθρωπολογικής θεωρίας του Chevallard

Η Ανθρωπολογική Θεωρία της Διδακτικής (ATD) παρουσιάστηκε και αναπτύχθηκε στον ερευνητικό τομέα της Διδακτικής των Μαθηματικών (Garcia et al., 2016) αλλά προσφέρει ένα γενικότερο επιστημολογικό πλαίσιο με βάση το οποίο «κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα που εκτελείται τακτικά μπορεί να υπαχθεί σ' ένα μοναδικό μοντέλο, το οποίο συνοψίζεται με τον όρο «πραξεολογική οργάνωση» (Chevallard, 1999). Για τους Artigue & Winsløw (2010) η ανθρωπολογική θεωρία της διδακτικής (ATD) παρέχει «ένα τολμηρό όραμα της ανθρώπινης δραστηριότητας».

Οι Kieran et al. (2015) κατατάσσουν το ATD στα θεωρητικά «πλαίσια μεσαίου επιπέδου» μεταξύ των μεγάλων κοινωνικό-κατασκευαστικών θεωριών και των πιο τοπικών, που εξειδικεύονται σε «τομείς που αφορούν συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες ή διαδικασίες». Οι Shinno & Mizoguchi (2021) χαρακτηρίζουν το ATD «ως ένα πλαίσιο μεγάλου επιπέδου που δημιουργεί θεωρίες γνώση και πρακτική σε ένα δεδομένο ίδρυμα».

Για τον Chevallard (2019) «Οι πρώτοι οφθαλμοί της ανθρωπολογικής θεωρίας της διδακτικής βρίσκονται σε αυτό που είναι γνωστό με την ονομασία διδακτική θεωρία μεταφοράς, που είναι τώρα υποθεωρία του ATD». Για τον Putra (2019) «η διαδικασία μεταφοράς της γνώσης μπορεί να χαρακτηριστεί σε κάποιο αντικείμενο γνώσης (O) και σε κάποιο υποκείμενο X που υποτίθεται ότι μελετά το O σε ένα ίδρυμα I». O Chevallard (2019) ορίζει το σύνολο R (x, o) για να συμπεριλάβει όλους τους πιθανούς τρόπους με τους οποίους το x σχετίζεται με το O. Επιπλέον ο X γνωρίζει το O όταν το R δεν είναι κενό, δηλαδή αν $R(x, o) \neq \emptyset$ (Chevallard, 2019).

Σύμφωνα με τους González-Martín et al. (2013, σελ.8): «ο Chevallard αναγνωρίζει ότι τα μαθηματικά αντικείμενα δεν είναι απόλυτα, αλλά οντότητες που προκύπτουν από τις πρακτικές του δεδομένου θεσμού». Αυτές οι πρακτικές μπορούν να περιγραφούν ως:

- Έργα (t, είναι T ένας τύπος έργων) γράφουμε: $t \in T$, όταν μια εργασία t εμπίπτει σε έναν τύπο έργου T.
- Τεχνικές (τ) που χρησιμοποιούνται για την ολοκλήρωση αυτών των έργων $t \in T$ (από το ελληνικό τέχνη/εξειδίκευση).
- Τεχνολογίες (θ) ο λόγος που δικαιολογεί και εξηγεί τις τεχνικές, επιτρέποντας τη σκέψη ή την παραγωγή αυτών των τεχνικών και
- θεωρία (Θ) που περιλαμβάνει τη δεδομένη τεχνολογία.

Στη συνέχεια μεταβαίνουμε σε υψηλότερο επίπεδο στην αιτιολόγηση-εξήγηση-παραγωγή, αυτής της θεωρίας, Θ, που επαναλαμβάνεται, σε σχέση με την τεχνολογία, ο ρόλος που παίζει σε σχέση με την τεχνική. Αυτή η επεξηγηματική παλινδρόμηση συνεχίζεται επ' άπειρον (Cevallard, 1999). Το πλαίσιο αυτό υποστηρίζει ότι κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα δημιουργεί έναν οργανισμό που ο

Chevallard (1999), ορίζει ως «πραξεολογία» (González-Martín et. al, 2013) όπως επισημαίνουν οι Barbé et al. (2005) ο όρος «πραξεολογία» υποδηλώνει ότι η «πρακτική και ο λόγος για την πρακτική συμβαδίζουν».

Μια τέτοια πρακτική οργάνωση – αποτελείται επομένως από δύο αλληλένδετες πτυχές της μαθηματικής δραστηριότητας:

- ένα πρακτικό-τεχνικό μπλοκ, Π = [Τ / τ] που συνιστά μια τεχνογνωσία και

σχηματίζεται από τους τύπους των προβλημάτων ή των έργων Τ και μιας τεχνικής τ για την εκτέλεση έργων t ∈ Τ. Για τον Chevallard (2019) μια σημαντική πτυχή ενός μπλοκ πράξης Π = [Τ / τ] είναι η «αξιοπιστία» του τ.

- ένα θεωρητικό μπλοκ γνώσης, με τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την

επίλυσή τους και συνήθως προσδιορίζεται ως γνώση. Η συσχέτιση μιας τεχνολογίας θ και μιας θεωρίας Θ αποτελεί ένα θεωρητικό μπλοκ, το οποίο συμβολίζεται

Λ = [θ / Θ] (Chevallard, 2019).

Πίνακας 5: Πραξεολογία περιγραφές προσαρμοσμένες από Chevallard & Sensevy (2014, σελ. 40)

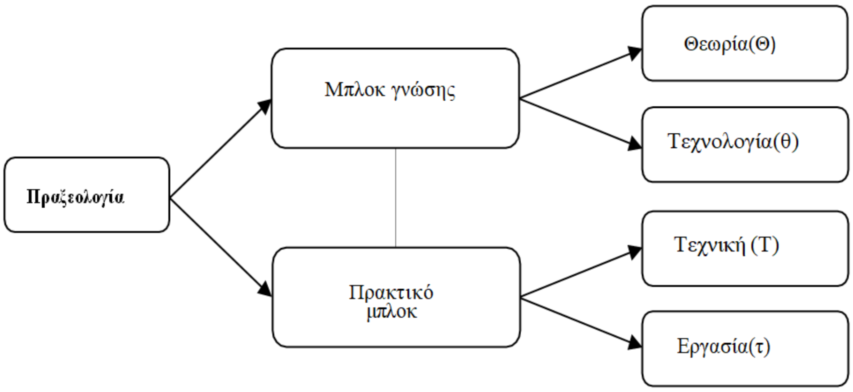
ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΜΠΛΟΚ		**ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΠΛΟΚ**	
Τύπος έργου (Τ)	**Τεχνική (τ)**	**Τεχνολογία (θ)**	**Θεωρία (Θ)**
Προβλήματα δεδομένου τύπου	Τρόπος εκτέλεσης του έργου	Τρόπος εξήγησης & δικαιολόγησης (ή σχεδίασης) της τεχνικής	Να εξηγήσει, δικαιολογήσει ή δημιουργήσει οποιοδήποτε ασαφές ή ελλιπές μέρος της τεχνολογίας

Για τον Chevallard (1999), η γνώση του μπλοκ Λ επιτρέπει δομικά τη δημιουργία των τ (για δεδομένο Τ). Για το λόγο αυτό, η τεχνογνωσία Π, θα μπορούσε να παρουσιαστεί, στο κείμενο της γνώσης, ως απλή εφαρμογή του «savoir faire» Λ. Στην πράξη το θεωρητικό μπλόκ Λ = [θ / Θ] που συνδέεται με το πρακτικό μπλοκ

Π = [Τ / τ] είναι «συγχωνευμένο» σε μια πραξεολογία,

$\wp = \Pi \oplus \Lambda = [T / \tau] \oplus [\theta / \Theta] = [T / \tau / \theta / \Theta]$ η οποία αποτυπώνεται στο επόμενο

Δενδροδιάγραμμα



Σχήμα 3: Διάγραμμα πραξεολογίας Putra & Witri (2017, σελ. 222)

Ο Chevallard (1999, 2019) στα πλαίσια της «οικολογίας και της οικονομίας» των πραξεολογιών, τις ταξινομεί σε ακριβείς, τοπικές, περιφερειακές και παγκόσμιες

- «ακριβής» ονομάζεται μια πραξεολογία $\wp$ = [Τ / τ / θ / Θ] επειδή επικεντρώνει σε ένα συγκεκριμένο τύπο έργων Τ
- «τοπική» είναι η πραξεολογία $\wp'$ = $\Sigma_i[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]$ που προκύπτει από τη συγκέντρωση των «ακριβών» με το ίδιο θεωρητικό μπλοκ σε έναν αριθμό μπλοκ πρακτικής $\Pi_i = [T_i / \tau_i]$
- «περιφερειακή» η πραξεολογία $\wp''$ = Σj,i [Tji / τji / θj / Θ] που προκύπτει από τη συγχώνευση των «τοπικών» που μοιράζονται μια κοινή μαθηματική θεωρία
- παγκόσμια η πραξεολογία $\wp'''$ = $\Sigma k_{ji}[Tk_{ji} / \tau k_{ji} / \theta k_j / \Theta_k]$ που δημιουργείται από τη συνένωση περιφερειακών πραξεολογιών.

Τα διαφορετικά είδη των πραξεολογικών οργανισμών προσεγγίζονται με μια άλλη δομή του ATD, η οποία είναι γνωστή ως κλίμακα του διδακτικού συνκαθορισμού και «υπογραμμίζει τη θεσμική σχετικότητα της γνώσης»(Takeuchi, & Shinno, 2020). Η μελέτη της οικολογίας των μαθηματικών και διδακτικών πραξεολογιών εστιάζει στους μη άμεσα ορατούς παράγοντες που επηρεάζουν τη συνεργασία δασκάλου μαθητών σε ένα θέμα στην τάξη. Όπως για παράδειγμα η πρακτική του δασκάλου και των μαθητών, οι διαθέσιμοι πόροι, ο τρόπος οργάνωσης των δραστηριοτήτων κ.α. (Bosch & Gascón, 2014).

Στην ουσία αποτελεί μια ταξινομία των θεσμικών επιπέδων που καθορίζουν «το τι συμβαίνει στην τάξη» (Wijayanti & Aufa, 2020). Για τον Chevallard (2019) τα διδακτικά συστήματα είναι το κατώτερο επίπεδο του συνκαθορισμού. Ανερχόμενοι συναντούμε την παιδαγωγική και το σχολείο ενώ στα υψηλότερα κλιμάκια τοποθετούνται η κοινωνία, ο πολιτισμός και η ανθρωπότητα, όπως αποτυπώνονται και στο ακόλουθο διάγραμμα:

Humanity

⇂↾

Civilization

⇂↾

Society

⇂↾

…

⇂↾

School

↾⇂

Pedagogy

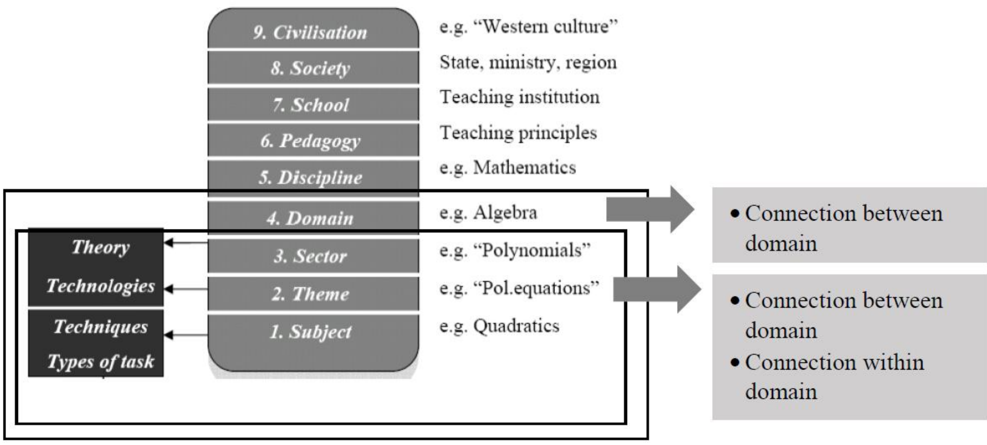
⇂↾

Didactic system

…

Σχήμα 4: Η κλίμακα του διδακτικού συνκαθορισμού Chevallard (2019, σελ. 96)

Οι Artigue & Winsløw (2010) με βάση την εισαγωγή του Chevallard (2002), καταγράφουν εννέα θεσμικά επίπεδα για τον τρόπο που αλληλεπιδρούν οι συνθήκες και οι περιορισμοί μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Εικόνα 3: έννοια του διδακτικού συνκαθορισμού (Artigue & Winsløw, 2010, σελ. 6)

Σύμφωνα με τους Barbe et.al (2005), στην Ανθρωπολογική Θεωρία της Διδακτικής, η διαδικασία της δημιουργίας ή αναδημιουργίας ενός μαθηματικού οργανισμού (ΜΟ) μοντελοποιείται από την έννοια διαδικασίας μελέτης ή διδακτικής διαδικασίας σε έξι διακριτές στιγμές:

- Η πρώτη στιγμή είναι αυτή της αρχικής επαφής με συγκεκριμένο τύπο έργων.
- Η δεύτερη στιγμή αφορά την εξερεύνηση του είδους των έργων Ti και την επεξεργασία μιας τεχνικής τ_i σε σχέση με αυτές τις έργα.
- Η Τρίτη στιγμή συνίσταται στη συγκρότηση του τεχνολογικού-θεωρητικού περιβάλλοντος ως προς τις τεχνικές τ_i που εξηγεί και αιτιολογεί τη χρήση τους και επιπλέον επιτρέπει την παραγωγή νέων τεχνικών.
- Η τέταρτη στιγμή αφορά το τεχνικό έργο, το οποίο έχει ταυτόχρονα να βελτιώσει την τεχνική καθιστώντας την πιο ισχυρή και αξιόπιστη.
- Η Πέμπτη στιγμή περιλαμβάνει τη θεσμοθέτηση, που περιλαμβάνει την ανάλυση και την οριοθέτηση των συνιστωσών των πραξεολογιών προσδιορίζοντας ποια ακριβώς είναι η μαθηματική οργάνωση.
- Η έκτη στιγμή συνεπάγεται την αξιολόγηση, η οποία συνδέεται με τη στιγμή της ιδρυματοποίησης.

Μια «πλήρης» πραγμάτωση των έξι στιγμών οδηγεί στη δημιουργία ενός Μαθηματικού Οργανισμού που υπερβαίνει την απλή επίλυση μιας μεμονωμένης μαθηματικής έργου ή τουλάχιστον των πρώτων βασικών στοιχείων ενός τοπικού ΜΟ, δομημένου γύρω από ένα τεχνολογικό μπλοκ.

Η ανθρωπολογική θεωρία με χρήση της οργάνωσης της πραξεολογίας έχει καταστεί τα τελευταία χρόνια ένα σημαντικό ερευνητικό εργαλείο για την ανάλυση σχολικών βιβλίων των μαθηματικών. Ειδικά για τη σύγκριση σχολικών βιβλίων από διαφορετικές χώρες, μπορούν να αξιοποιηθούν τα επίπεδα συνκαθορισμού που αναπτύχθηκαν ανωτέρω.

1.2.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση προηγουμένων ερευνών με την ανθρωπολογική θεωρία (ATD) στους πραγματικούς και στους αρρήτους

Ο Souto (2010) χρησιμοποιεί ως θεωρητικό πλαίσιο την ATD στην έρευνα του για την εισαγωγή των αρρήτων στα σχολικά βιβλία με την πεποίθηση ότι συμβάλλει στην κατανόηση του τρόπου πραγματοποίησης της μαθηματικής δραστηριότητας. Επιπλέον αξιοποιεί τη «Θεωρία των Μητρώων Σημειωτικής Αναπαράστασης» του Duval πιστεύοντας ότι καθορίζει σημαντικά τη δυνατότητα μαθηματικής επεξεργασίας.

Θέτει ως στόχους:

- Τη διερεύνηση εάν τα σχολικά βιβλία παρέχουν στη χρήση τους μια ποικιλία εγγραφών σχετικά με την έννοια του άρρητου/πραγματικού αριθμού.
- Τον προσδιορισμό και την ανάλυση των έργων που προτείνονται από τα σχολικά βιβλία ως προς την έννοια του άρρητου.
- Την κατανόηση εάν οι προτεινόμενες έργα προωθούν την άρθρωση μεταξύ των εγγραφών.

Σε αυτό το πλαίσιο διατυπώνει τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

- Πώς οργανώνεται η έννοια του αρρήτου αριθμού στα εγχειρίδια βασικής εκπαίδευσης στη Βραζιλία;
- Ποια μητρώα εκπροσώπησης χρησιμοποιούνται και πως;
- Πώς προτείνεται η απόκτηση γνώσης των Αρρήτων αριθμών στα βραζιλιάνικα σχολικά εγχειρίδια;

Επιπλέον καθορίζει τέσσερις θεματικές ενότητες ανάλυσης. Στην πρώτη εξετάζονται οι ορισμοί που χρησιμοποιούνται για την έννοια του άρρητου και οι πιθανές συνδέσεις τους με άλλες ορολογίες. Στη δεύτερη οι τύποι αναπαράστασης που «παρουσιάζονται στα σχολικά βιβλία και πώς προάγουν την παραγωγή γνώσης με βάση το πλαίσιο του Duval». Στην Τρίτη αναλύονται τα είδη έργων με τη θεωρία του Chevalard και τέλος οι τύποι ιστορικής προσέγγισης που ενσωματώθηκαν. Όσον αφορά τις μεθοδολογικές διαδικασίες για την ανάλυση των σχολικών βιβλίων, ο Souto (2010) προχωράει σε μια πρώτη αξιολόγηση ενός δείγματος δεκατεσσάρων βιβλίων– εννέα γυμνασίου και πέντε λυκείου-που κρίθηκαν τα πλέον κατάλληλα, έπειτα σε «επεξεργασία πινάκων αξιολόγησης και τέλος στην τελική ανάλυση των εγχειριδίων.

Οι ορισμοί που παρουσιάστηκαν για τους άρρητους αριθμούς ήταν:

D_A: «άρρητος είναι ένας αριθμός που δεν μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα»
D_B: «Μεταξύ των αριθμών που αναπαρίστανται σε δεκαδική μορφή υπάρχουν μη δεκαδικοί περιοδικοί, που ονομάζονται άρρητοι».

Πέντε βιβλία υιοθέτησαν τον ορισμό D_A οκτώ τον ορισμό D_B και ένα χρησιμοποίησε προβλήματα για την εισαγωγή της έννοιας. Όλα τα βιβλία παρατηρήθηκε ότι ορίζουν τον πραγματικό αριθμό με τον ίδιο τρόπο, D_c: «οποιοσδήποτε ρητός ή άρρητος αριθμός είναι πραγματικός αριθμός».

Κατά την ανάλυση κάθε έργου με βάση το ATD, ο Souto ακολουθεί τις έξι στιγμές που περιγράφει ο Chevallard στο θεωρητικό του πλαίσιο, και καταλήγει σε μια κατηγοριοποίηση που παρουσιάζουμε στον επόμενο πίνακα:

Πίνακας 6: Ταξινομία έργων αρρήτων με βάση το ATD, Souto (2010, σελ.53)

Κωδικοποίηση	**Κατηγορία**	**Επεξήγηση**
T_{CE}	Έργα με κατάταξη χρησιμοποιώντας τη σχέση μέλους	Ταξινόμηση κάθε πραγματικού αριθμού χρησιμοποιώντας τη σχέση μέλους που δημιουργείται μεταξύ του δεδομένου στοιχείου και του δεδομένου συνόλου
T_{cc}	Έργα που συνεπάγονται την κατάταξη μεταξύ ρητού ή αρρήτου	Ταξινόμηση οποιουδήποτε αριθμού ως ρητού ή αρρήτου
T_{cv}	Έργα που περιλαμβάνουν την κατάταξη μεταξύ Σωστό ή Λάθος	Χαρακτηρισμός μιας μαθηματικής πρότασης που περιλαμβάνει ένα αριθμητικό σύνολο ως αληθής ή ψευδής
T_G	Έργα που συνεπάγονται τη δημιουργία κλάσματος ρητών αριθμών	μετατροπή ενός ρητού αριθμού στη δεκαδική του μορφή σε κλάσμα
T_E	Έργα που περιλαμβάνουν τη λήψη αρρήτου μεταξύ δύο αριθμών	Εύρεση αρρήτου μεταξύ δυο πραγματικών
T_{CAL}	Έργα που περιλαμβάνουν υπολογισμό με χρήση προσέγγισης	Υπολογισμός της κατά προσέγγιση τιμής ενός αρρήτου ή εκτέλεση υπολογισμών με κατά προσέγγιση τιμές αρρήτων .
T_{ES}	Έργα που περιλαμβάνουν γραφή «ακολουθίας» αρρήτων	Διάταξη μεταξύ δεδομένων άρρητων ή πραγματικών αριθμών
T_R	Έργα που περιλαμβάνουν την αναπαράσταση αριθμών στην πραγματική γραμμή	αντιστοιχία μεταξύ σημείων στην πραγματική ευθεία και πραγματικών αριθμών και αντίστροφα.
T_I	Έργα που περιλαμβάνουν αριθμητικά εύρη	αναπαράσταση αριθμητικών διαστημάτων στην πραγματική γραμμή και αντίστροφα

Συνολικά αναλύθηκαν 234 έργα με τίτλους «λυμένες ασκήσεις», «προτεινόμενες ασκήσεις», «συμπληρωματικές ασκήσεις», «τεστ». Ταξινόμησε τα αποτελέσματα ανά κατηγορία έργων και βαθμίδα εκπαίδευσης στον επόμενο πίνακα:

Πίνακας 7: Αποτελέσματα ανάλυσης έργων αρρήτων με βάση το ATD, Souto (2010, σελ. 69)

Είδη	**Γυμνάσιο**	**Λύκειο**	**Σύνολο**	**Ποσοστό**
T_{CE}	27	3	30	13%
T_{cc}	18	4	22	9%
T_{cv}	6	11	17	7%
T_{G}	7	4	11	5%
T_{E}	14	6	20	9%
T_{CAL}	60	3	63	27%
T_{ES}	12	2	14	6%
T_{R}	18	6	24	10%
T_{I}	5	28	33	14%
Σύνολο	185	43	234	100

Διαπιστώνει μια μεγάλη συγκέντρωση ασκήσεων στην κατηγορία T_{CAL} στο Γυμνάσιο που αφορά κυρίως έργα υπολογιστικού τύπου με προσεγγίσεις αρρήτων και στην κατηγορία T_I στο Λύκειο που πραγματεύεται ασκήσεις με σύνολα. Στο Γυμνάσιο εξάλλου προτιμάται στην διαπραγμάτευση των αρρήτων η δεκαδική/κλασματική εγγραφή και η έκφραση στη φυσική γλώσσα, ενώ στο λύκειο οι εικονικές/αλγεβρικές αναπαραστάσεις με ρίζες.

Επιπλέον, ο Souto (2010) παρατηρεί ότι η έννοια της ασυμμετρίας αναφέρεται μόνο σε δύο σχολικά βιβλία χωρίς καμία περαιτέρω επέκταση. Παράλληλα, καταγράφεται μικρός αριθμός παραδειγμάτων σχετικά με τον ορισμό και τις ιδιότητες των αρρήτων και των πραγματικών αριθμών. Επομένως, από «μαθηματική οπτική γωνία» κανένας από τους δύο προτεινόμενους ορισμούς των αρρήτων δεν παρουσιάζεται με επαρκώς κατανοητό τρόπο.

Οι έργα που εντοπίστηκαν στα βιβλία παρουσίασαν ένα εκτενές μπλοκ τεχνογνωσίας [Τ/τ] τόσο εννοιολογικά όσο και σε τεχνικές επίλυσης. Το θεωρητικό μπλοκ [Θ/θ] ήταν επίσης μεγάλης έκτασης, χωρίς όμως να αποδειχθούν οι ιδιότητες των αρρήτων που αξιοποιήθηκαν στην επίλυση των ασκήσεων. Το γεγονός αυτό οδηγεί τον Souto (2010) να χαρακτηρίσει ως ελλιπή την «πραξεολογία που σχετίζεται με έργα που περιλαμβάνουν άρρητους».

Οι González-Martín et al. (2013) στην έρευνα τους για την παρουσίαση των αρρήτων και των πραγματικών στα σχολικά εγχειρίδια της Βραζιλίας ακολουθούν ομοίως τη θεσμική προσέγγιση της ανθρωπολογικής θεωρίας του Chevallard (1999). Θέτουν ως βασικό στόχο της μελέτης τους την ανάλυση του τρόπου εισαγωγής των πραγματικών και αρρήτων αριθμών σε σχολικά βιβλία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Προς αυτή την κατεύθυνση ενσωματώνουν ως ερευνητικά ερωτήματα αν οι άρρητοι/πραγματικοί:

1. έχουν βασικό θεωρητικό ρόλο στα σύγχρονα μαθηματικά,
2. αποτελούν τη βάση για άλλα μαθηματικά αντικείμενα,
3. αν και τους δόθηκε λιγότερη προσοχή στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση θεωρείται ότι είναι κατανοητοί όταν διδάσκονται πιο προχωρημένα θέματα.

Η ανάλυση των δεδομένων αναπτύχθηκε σε δύο συμπληρωματικά στάδια. Στην πρώτη φάση διερευνήθηκε η εισαγωγή αρρήτων και πραγματικών αριθμών μέσα από τη λεγόμενη «θεωρία» δηλαδή τους ορισμούς, τα παραδείγματα και τις ιδιότητες. Στη δεύτερη φάση έγινε η χαρτογράφηση έργων. Εντοπίστηκαν οι έργα που προτείνονται στα σχολικά βιβλία. Προσδιορίστηκαν οι προτεινόμενες τεχνικές για την επίλυσή τους, καθώς και το απαραίτητο θεωρητικό πλαίσιο.

Ως δείγμα, επιλέχθηκαν τυχαία 9 από τα 16 βιβλία που έχουν εγκριθεί από το Υπουργείο Παιδείας της Βραζιλίας για το γυμνάσιο και 5 από τα 8 για το Λύκειο.

Οι ορισμοί ταξινομήθηκαν σε δύο κατηγορίες ακολουθώντας την έρευνα του Souto (2010).

D_A: ένας άρρητος αριθμός είναι ένας αριθμός που δεν μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα.

D_B : μεταξύ των αριθμών που γράφονται με δεκαδικό συμβολισμό, αυτοί που γράφονται με άπειρο και μη περιοδικό συμβολισμό ονομάζονται άρρητοι.

Όλα τα σχολικά βιβλία εισάγουν τους πραγματικούς αριθμούς με τον ίδιο τρόπο: «οποιοσδήποτε ρητός ή άρρητος αριθμός είναι πραγματικός αριθμός».

Όπως παρατηρούν οι González-Martín et al. (2010): «τα αναλυόμενα βιβλία αρχίζουν να προσφέρουν συγκεκριμένους ορισμούς, χωρίς να προβληματίζουν για το νέο περιεχόμενο ή να δικαιολογούν την ανάγκη τους».

Προσδιορίστηκαν έξι τύποι έργων (T_{CR}, T_{FR}, T_{ENT}, T_{AA}, T_{ORD}, T_{RR}), οι οποίοι εμφανίζονται σε ενότητες με τίτλους «ασκήσεις αποτελέσματος», «προτεινόμενες ασκήσεις», «συμπληρωματικές ασκήσεις» και «δοκιμές». Η ταξινόμηση των έργων παρατίθεται στον επόμενο πίνακα.

Πίνακας 8: Ταξινόμηση έργων González-Martín et al. (2010, σελ. 14)

κωδικοποίηση	**Κατηγορία**	**Επεξήγηση**
T_{CR}	Ταξινόμηση ενός αριθμού ως ρητού ή αρρήτου	Χαρακτηρισμός πραγματικών αριθμών με διαφορετικές μορφές
T_{FR}	Προσδιορισμός κλάσματος ίσου με ρητό αριθμό που δίνεται σε δεκαδική γραφή	εύρεση με γενικές μεθόδους κλάσματος ίσου με περιοδικό αριθμό
T_{BET}	Εύρεση ρητού ή άρρητου μεταξύ δύο αριθμών	Χρήση αριθμητικών μέσων τιμών ή προσαρμογή δεκαδικών αναπαραστάσεων
T_{APP}	Χρήση πεπερασμένης δεκαδικής προσέγγισης για έναν άρρητο αριθμό	χρήση πεπερασμένων δεκαδικών προσεγγίσεων σε αριθμητικές παραστάσεις με άρρητους
T_{ORD}	Ταξινόμηση πραγματικών αριθμών	Κατάταξη αριθμών σε κλάσματα ή δεκαδικές παραστάσεις
T_{RL}	Αναπαράσταση αριθμών στην πραγματική γραμμή	Παράσταση αριθμών σε κλασματική ή δεκαδική μορφή σε σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών

Αναλύθηκαν συνολικά 184 έργα,156 από το Γυμνάσιο και 28 από το Λύκειο. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα

Πίνακας 9: Αποτελέσματα ανάλυσης έργων González-Martín et al. (2013, σελ. 20)

Έργα	**Γυμνάσιο**	**Λύκειο**	**Σύνολο**	**Ποσοστό**
T_{CR}	45	7	52	28%
T_{FR}	7	4	11	6%
T_{BET}	14	6	20	11%
T_{APP}	60	3	63	34%
T_{ORD}	12	2	14	8%
T_{RL}	18	6	24	13%
Σύνολο	156	28	184	100%

Διαπιστώνουμε και σε αυτή την έρευνα μια μεγάλη συγκέντρωση ασκήσεων στην κατηγορία T_{APP} στο Γυμνάσιο που αφορά κυρίως έργα υπολογιστικού τύπου με προσεγγίσεις αρρήτων. Στο Λύκειο δεν διακρίνεται κάποια κατηγορία, απόρροια ενδεχομένως του μικρού δείγματος έργων που συλλέχθηκε.

Οι González-Martín et al. (2013) δομούν την εισαγωγή των αρρήτων και πραγματικών αριθμών σε τρείς μαθηματικούς οργανισμούς (Ο.Μ.) (Εικόνα 4) με βάση παρόμοια τεχνολογικά και θεωρητικά στοιχεία:

- Στον OM_1 που χαρακτηρίζεται ως τοπολογία του R. Περιλαμβάνει

έργα από τις κατηγορίες T_{APP}, T_{BET}, T_{ORD}, T_{RL}. Κρίνεται ως ημιτελής οργάνωση που επικεντρώνει στο πρακτικό μπλοκ

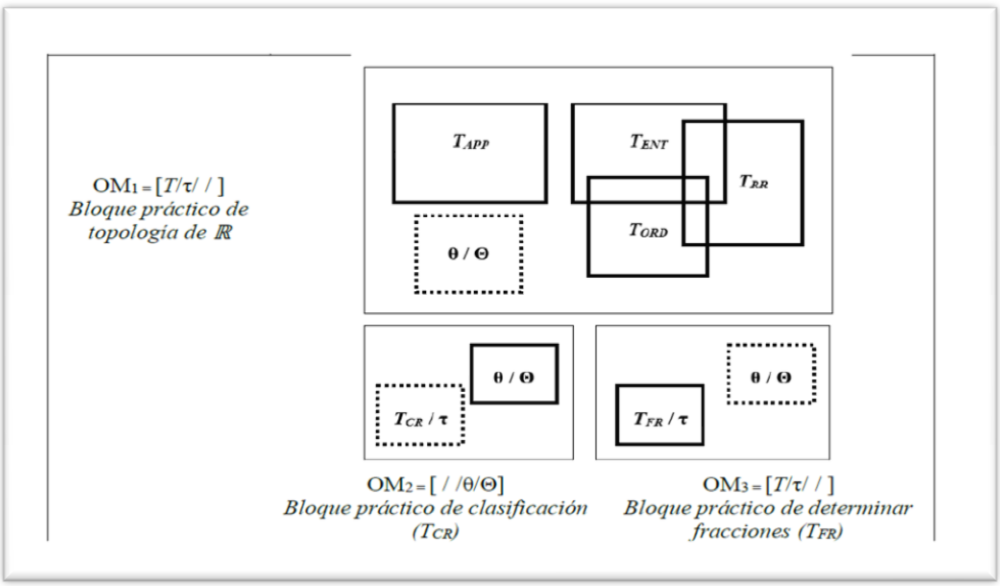
- Στον OM_2 που προσδιορίζεται ως ταξινόμηση. Αποτελείται από ασκήσεις

του τύπου T_{CR}. Δίνεται βαρύτητα στο θεωρητικό τμήμα σε ορισμούς και ιδιότητες των πραγματικών και των αρρήτων. Η κατηγοριοποίηση αριθμών που ζητείται στο πρακτικό μπλοκ φαίνεται όμως αποκομμένη από την καθημερινή εμπειρία των μαθητών με συνέπεια τα θεωρητικά στοιχεία ν' ακολουθούν ένα φορμαλιστικό πλαίσιο επίλυσης.

- Στον OM_3 που απαρτίζεται από έργα της ταξινομίας T_{FR}. Πραγματεύεται

την εύρεση ισοδύναμων κλασμάτων με μια περιοδική μορφή χωρίς όμως να έχει αναπτυχθεί σχετικά κάποιο θεωρητικό πλαίσιο.

Επιπλέον, επισημαίνουν ότι «αυτοί οι τρείς Ο.Μ. φαίνεται να είναι αποσυνδεδεμένοι και τα κοινά στοιχεία που θα επέτρεπαν τη σύνδεση απουσιάζουν από τα σχολικά βιβλία». (González-Martín et al. 2013 & González-Martín**,** 2020).



Εικόνα 4: Πραξεολογική ανάλυση εισαγωγής των αρρήτων (González-Martín 2020, σελ. 19)

Στο ίδιο πλαίσιο η Licera (2017), όπως αν. στο Gascón et al. (2022, σελ.22) διερευνά «Τι και πώς διδάσκεται σε σχέση με πραγματικούς αριθμούς στα τελευταία χρόνια της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης».

Προς αυτή την κατεύθυνση θέτει τα εξής ερευνητικά ερωτήματα :

1. Πώς διδάσκονται σήμερα οι πραγματικοί αριθμοί στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση;
2. Ποιες είναι οι σχέσεις που δημιουργούνται μεταξύ πραγματικών αριθμών, δραστηριοτήτων μέτρησης και υπολογισμών με αριθμητικές προσεγγίσεις;
3. Ποιο είναι το επίσημο σκεπτικό;

Με τη μελέτη διαφορετικών σχολικών συστημάτων (Γαλλία, Αργεντινή Χιλή, Ισπανία) διαπιστώνει:

- Την ύπαρξη τεχνικών προβλημάτων στον λογισμό με αριθμητικές προσεγγίσεις
- Ένα μη ρεαλιστικό σκεπτικό για τη μελέτη των πραγματικών αριθμών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση
- Την υποεκπροσώπηση των αρρήτων από τις σε υπολογισμούς ακριβών μετρήσεων
- Τον περιορισμό των ορισμών των αρρήτων/πραγματικών αριθμών που δεν λαμβάνουν υπόψη τη χρησιμότητα τους

Οι απαντήσεις που καταλήγει η έρευνα της Licera (2017), όπως αν. στο Gascón et al. (2022, σελ. 24) μπορεί συνοψιστούν στα εξής σημεία:

(1) οι πραγματικοί αριθμοί διδάσκονται ως «ημιτελής» μαθηματική πραξεολογία:
   i) υπάρχουν θεωρητικά στοιχεία που διαχωρίζονται από τους τύπους έργων που αναλύθηκαν,
   ii) δεν καταγράφονται τεχνικές και θεωρητικές αναφορές όσον αφορά τα προβλήματα των αριθμητικών προσεγγίσεων των σφαλμάτων τους
(2) οι άρρητοι αριθμοί προσδιορίζονται με γραφή (μη επαναλαμβανόμενοι δεκαδικοί αριθμοί ή σημεία της πραγματικής ευθείας) και
(3) δεν αναπτύσσεται κάποια μαθηματική λογική για πραγματικούς άρρητους αριθμούς εκτός από το π ή τις ρίζες.

Τέλος η συγκεκριμένη έρευνα αναδεικνύει δύο διδακτικά φαινόμενα στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση:

- τη διάρρηξη της σχέσης μεταξύ αριθμών και μέτρηση συνεχών μεγεθών αφού απουσιάζουν οι δραστηριότητες μέτρησης.
- Το φαινόμενο της αποφυγής των αρρήτων, με την καταγραφή τριών στρατηγικών:
  (1) Τον προσδιορισμό ενός αρρήτου με μια ρητή προσέγγιση.
  (2) Η αντικατάσταση του αρρήτου με αυθαίρετη προσέγγιση και
  (3) Την αναίρεση των ιδιοτήτων τους

1.3 Η συλλογιστική και απόδειξη (Reasoning and proving) στη μαθηματική εκπαίδευση

1.3.1 Εννοιολογική προσέγγιση της συλλογιστικής και απόδειξης (R-P)

Αν αναλογιστούμε τον ιστορικό ρόλο που διαδραματίζει η απόδειξη στην εννοιολογική διαμόρφωση των αρρήτων, δεν μπορούμε να προσπεράσουμε τη σημασία του R-P στην εισαγωγή αυτών των αριθμών. Επιπλέον, σύμφωνα με τον Στυλιανίδη (2009, σελ.260): «Αν και τα εγχειρίδια μαθηματικών μπορούν να διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο στις ευκαιρίες που έχουν οι μαθητές να ασχοληθούν με το R-P, μέχρι σήμερα, δεν γνωρίζουμε πώς προωθείται το R-P στις σύγχρονες σειρές μαθηματικών εγχειριδίων».

Για τους Zhang & Qi (2019) ο «συλλογισμός» και η «απόδειξη» πρέπει να αποτελούν σαφώς διακριτές έννοιες. Στο σημείο αυτό ο Stylianides (2009, σελ. 259), υπενθυμίζει ότι: «ο όρος συλλογισμός έχει συσχετιστεί με πολλές διαφορετικές πτυχές της μαθηματικής δραστηριότητας που δεν σχετίζονται απαραίτητα με την απόδειξη (π.χ. αλγεβρικός συλλογισμός, αναλογικός συλλογισμός, κ.α.)». Επομένως αποσαφηνίζει ότι η μη διάκριση των δυο εννοιών (R-P) αφορά στοιχεία του συλλογισμού που σχετίζονται με την απόδειξη.

Ο Stylianides (2008, σελ.9) χρησιμοποιεί τον όρο συλλογισμός-και απόδειξη για να «περιγράψει την πρωταρχική δραστηριότητα που περιλαμβάνει τις ακόλουθες κύριες δραστηριότητες που εμπλέκονται συχνά στη διαδικασία κατανόησης και δημιουργίας μαθηματικών γνώσεων: εντοπισμός προτύπων, εικασίες, παροχή μη αποδεικτικών επιχειρημάτων και παροχή αποδείξεων».

Επιπλέον ορίζει ως:

- **Μοτίβο (pattern)** μια γενική μαθηματική σχέση που ταιριάζει σε ένα δεδομένο σύνολο δεδομένων η οποία υπερβαίνει τις περιοχές περιεχομένου και τις μορφές αναπαράστασης (π.χ. αλγεβρικές, εικονογραφικές).

- **Εικασία (conjecture)** μια αιτιολογημένη υπόθεση σχετικά με μια γενική μαθηματική σχέση που βασίζεται σε ελλιπή στοιχεία. Όπου ο όρος «αιτιολογημένη» υπογραμμίζει τον μη αυθαίρετο χαρακτήρα της υπόθεσης. Ο όρος «υπόθεση» υποδηλώνει ένα επίπεδο αβεβαιότητας σχετικά με την αλήθεια μιας εικασίας και υποδηλώνει ότι απαιτείται περαιτέρω δράση για την αποδοχή ή την απόρριψή της (Cañadas & Castro 2005, Reid 2002, Arzarello et al. 1998).

- **Απόδειξη (proof)** ένα μαθηματικό επιχείρημα, μια συνδεδεμένη ακολουθία ισχυρισμών υπέρ ή κατά ενός μαθηματικού ισχυρισμού, με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

1. Χρησιμοποιεί δηλώσεις αποδεκτές από την κοινότητα της τάξης (σύνολο) αποδεκτών δηλώσεων) που είναι αληθή και διαθέσιμα χωρίς περαιτέρω αιτιολόγηση·
2. Χρησιμοποιεί μορφές συλλογισμού (τρόποι επιχειρηματολογίας) που είναι έγκυρα και γνωστά στην κοινότητα της τάξης ή εντός της εννοιολογικής εμβέλειας και
3. Επικοινωνεί με μορφές έκφρασης (τρόποι αναπαράστασης επιχειρημάτων) που είναι κατάλληλα και γνωστά ή εντός της εννοιολογικής εμβέλειας της κοινότητας της τάξης (Stylianides, 2007).

Όπως παρατηρούν οι Stylianides et al (2022): «Αυτός ο ορισμός είναι αρκετά ευέλικτος για να περιγράψει την απόδειξη σε όλα τα επίπεδα εκπαίδευσης και εξισορροπεί μαθηματικές και μαθητικές εκτιμήσεις, άρα είναι κατάλληλος για χρήση στο πλαίσιο μιας ευρύτερης εννοιολόγησης, μιας αυθεντικής μαθηματικής δραστηριότητας».

- **μη αποδεικτικό επιχείρημα** το επιχείρημα υπέρ ή κατά ενός μαθηματικού ισχυρισμού που δεν πληροί τις προϋποθέσεις της απόδειξης.

Οι Thompson, et al (2012, σελ.258) ορίζουν το «συλλογισμό που σχετίζεται με την απόδειξη» ο οποίος «περιλαμβάνει τη δημιουργία και τη διερεύνηση εικασιών, την ανάπτυξη και την αξιολόγηση επαγωγικών επιχειρημάτων και άλλες εμπειρίες, όπως η εύρεση αντιπαραδειγμάτων ή η διόρθωση λαθών σε λογικά επιχειρήματα, που αποτελούν θεμελιώδη στοιχεία του μαθηματικού συλλογισμού».

Επιπλέον χρησιμοποιούν τους όρους

- **Εικασία (conjecture)** ως «ένας ισχυρισμός που γίνεται από ένα άτομο που είναι αβέβαιο για την αλήθεια του» (Harel & Sowder, 2007, σ. 808).

- **Επιχείρημα (argument)** ως μια «συνδεδεμένη ακολουθία ισχυρισμών» (Στυλιανίδης, 2008β, σ. 195).

- **Απόδειξη (proof)** ως ένα «λογικό επιχείρημα που κάνει κανείς για να δικαιολογήσει έναν ισχυρισμό στα μαθηματικά και να πείσει τον εαυτό του και τους άλλους» (Στυλιανού, Blanton & Knuth 2009, σελ.12). Balacheff (1988) και Miyazaki (2000).

1.3.2 Βασικά θεωρητικά πλαίσια της συλλογιστικής και απόδειξης (R-P)

Α) Το πλαίσιο του Stylianides (2009)

Το θεωρητικό πλαίσιο του Stylianides (2009) διακρίνεται σε δύο διαστάσεις:

Η διάσταση 1 περιλαμβάνει:

- την ενότητα «κάνοντας μαθηματικές γενικεύσεις» με δύο από τις δραστηριότητες που περιέχει το R-P «προσδιορισμός μοτίβου» και «κάνοντας μια εικασία» και
- την «παροχή υποστήριξης σε μαθηματικούς ισχυρισμούς» για την καταγραφή των άλλων δύο δραστηριοτήτων του R-P «παροχή απόδειξης» και «παροχή μη αποδεικτικού επιχειρήματος». Η διάσταση 1 περιλαμβάνει επίσης μια περαιτέρω ανάλυση ορισμένων από τις δραστηριότητες RP για την καταγραφή σημαντικών διακρίσεων.

Η διάσταση 2 αποτελεί συμπλήρωμα της πρώτης και «αφορά τους σκοπούς που μπορούν να αξιοποιηθούν τα μοτίβα, οι εικασίες και οι αποδείξεις στην εμπλοκή των μαθητών στο RP».

Πίνακας 10: Αναλυτικό πλαίσιο R-P, Στυλιανίδης (2009, σελ.262)

	Συλλογισμός και απόδειξη			
	Κάνοντας μαθηματικές γενικεύσεις		Παροχή υποστήριξης σε μαθηματικούς ισχυρισμούς	
	Προσδιορισμός μοτίβου	Κάνοντας μια εικασία	παροχή αποδείξεων	Παροχή μη αποδεικτικού επιχειρήματος
Διάσταση 1 Περιεχόμενα& υποπεριεχόμενα του'R-P''	*Αληθοφανές μοτίβο *Σαφές μοτίβο	εικασία	*Γενικό παράδειγμα *επίδειξη	*εμπειρικό επιχείρημα *σκεπτικό
Διάσταση 2 Σκοποί του μοτίβου Εικασία & απόδειξη	*Εικασία Πρόδρομος *Εικασία μη-Πρόδρομος	*Απόδειξη πρόδρομος *Απόδειξη μη πρόδρομος	*εξήγηση *επαλήθευση *διάψευση *δημιουργία νέας γνώσης	

Το πλαίσιο διακρίνει στον προσδιορισμό του μοτίβου δυο είδη προτύπων τα «αληθοφανή» και τα «σαφή» — ανάλογα με το αν τα μοτίβα καθορίζονται ή όχι μοναδικά. Στα σαφή μοτίβα, είναι μαθηματικά δυνατή η παροχή πειστικών στοιχείων για την επιλογή ενός συγκεκριμένου προτύπου. Στα αληθοφανή μοτίβα, δεν είναι μαθηματικά εφικτή η εκτίμηση επαρκών στοιχείων και η επιλογή ενός συγκεκριμένου μοτίβου αντιπροσωπεύει την απλούστερη ή την πιο εμφανή σχέση που ταιριάζει στα δεδομένα.

Στην παροχή απόδειξης, ο Στυλιανίδης διακρίνει δύο είδη: Τα γενικά παραδείγματα και τις επιδείξεις.

Ένα γενικό παράδειγμα «είναι μια απόδειξη που χρησιμοποιεί μια συγκεκριμένη περίπτωση που θεωρείται αντιπροσωπευτική της γενικής περίπτωσης» (παρόμοια με την «transformational proof» της Harel and Sowder's, 1998, και την «transparent ψευδο-απόδειξη» της Movshovitz-Hadar, 1988) και βοηθάει τους μαθητές να «αποδείξουν μαθηματικούς ισχυρισμούς ακόμη και όταν δεν έχουν μαθηματική γλώσσα για να εκφράσουν τις αποδείξεις τους με πιο περίπλοκους τρόπους».

Μια επίδειξη είναι μια απόδειξη που δεν στηρίζεται στην «αντιπροσωπευτικότητα» μιας συγκεκριμένης περίπτωσης (παρόμοιο με την «αξιωματική απόδειξη» Harel & Sowder (1998) και το «πείραμα σκέψης» του Balacheff (1988). Παραδείγματα επιδείξεων είναι το αντιπαράδειγμα, η αντίφαση, η εις άτοπον απαγωγή, η μαθηματική επαγωγή, η αντίθεση και η εξάντληση.

Ένα εμπειρικό επιχείρημα σκοπεύει να αναδείξει την αλήθεια ενός μαθηματικού ισχυρισμού επικυρώνοντας τον ισχυρισμό σε ένα κατάλληλο υποσύνολο όλων των πιθανών περιπτώσεων που καλύπτονται από τον ισχυρισμό (αυτό είναι παρόμοιο με του Balacheff (1988), «αφελής εμπειρισμός» και του Harel & Sowder (1998), «εμπειρική αιτιολόγηση»). Το σκεπτικό εισήχθη στο πλαίσιο για να αποτυπώσει έγκυρα επιχειρήματα υπέρ ή κατά μαθηματικών ισχυρισμών που δεν πληρούν τις προϋποθέσεις ως αποδείξεις.

Ο σκοπός του μοτίβου είναι να οδηγεί στην ανάπτυξη εικασιών

Μοτίβο → εικασία

Προκύπτει η διάκριση εάν οι μαθητές μπορούν να εντοπίσουν μοτίβα που προηγούνται της δημιουργίας εικασιών που σχετίζονται με αυτά τα πρότυπα (πρόδρομοι εικασίες) ή όχι (εικασίες μη πρόδρομοι).

Ένας βασικός ρόλος που παίζουν οι εικασίες στα μαθηματικά είναι να οδηγούν στην ανάπτυξη αποδείξεων.

«εικασία → απόδειξη»

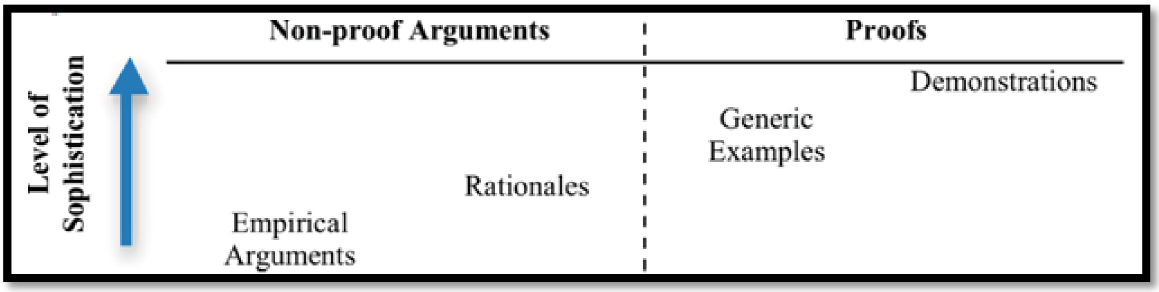
Δημιουργούνται ομοίως με το προηγούμενο σχήμα, δυο κατηγορίες εάν προηγούνται της ανάπτυξης αποδείξεων που σχετίζονται με αυτές (πρόδρομες απόδειξης) ή όχι (αποδείξεις μη πρόδρομες).

Σύμφωνα με τον Στυλιανίδη (2009, σελ. 269) οι αποδείξεις μπορούν να απευθύνονται σ’ έναν ή περισσότερους από τους επόμενους σκοπούς:

1. Εξήγηση, όταν παρέχει μια εικόνα γιατί ένας ισχυρισμός είναι αληθής ή ψευδής (Bell 1976, de Villiers 1999, Hanna 1990).
2. Επαλήθευση, όταν αποδεικνύει την αλήθεια ενός δεδομένου ισχυρισμού (Bell 1976, de Villiers 1999). Οι άμεσες μέθοδοι απόδειξης και η απόδειξη με αντίφαση ταιριάζουν στον επαληθευτικό σκοπό της απόδειξης.
3. Διάψευση, όταν διαπιστώνει την αναλήθεια ενός δεδομένου ισχυρισμού. Η εις άτοπο απαγωγή και η απόδειξη μέσω αντιπαραδείγματος σχετίζονται με τον σκοπό της διάψευσης.

4 Δημιουργία νέας γνώσης, όταν συμβάλλει στην ανάπτυξη νέων αποτελεσμάτων (Davis & Hersh 1981, de Villiers 1999 παρόμοια επίσης με του Lakatos 1976, έννοια «παραγωγή απόδειξης»).

Ο Στυλιανίδης (2009, σελ. 280) οργάνωσε τα τέσσερα διαφορετικά είδη επιχειρημάτων σε μια ιεραρχία με βάση το επίπεδο πολυπλοκότητάς τους.



Σχήμα 5: Μια ιεραρχία επιχειρημάτων με βάση το επίπεδο μαθηματικής τους πολυπλοκότητας Στυλιανίδης (2009, σελ. 280)

Β) Το θεωρητικό πλαίσιο Thompson, Senk, & Johnson (2012)

Οι Thompson et al. (2012) ανέπτυξαν επίσης ένα πλαίσιο R-P. Χρησιμοποίησαν ορολογία που εμφανίζει ορισμένες ομοιότητες με το πλαίσιο του Στυλιανίδη, και περιλαμβάνει «τη δημιουργία και διερεύνηση εικασιών, την ανάπτυξη και την αξιολόγηση επαγωγικών επιχειρημάτων και την απόκτηση άλλων εμπειριών, όπως η εύρεση αντιπαραδειγμάτων ή η διόρθωση λαθών σε λογικά επιχειρήματα» Thompson et al. 2012, σελ. 258). Ουσιαστικά, προτάθηκαν από τους Thompson et al. (2012) δύο πλαίσια, από τα οποία το ένα εφαρμόστηκε στην ανάλυση των ασκήσεων στα σχολικά βιβλία και το άλλο των αφηγήσεων. Το πλαίσιο για τη διερεύνηση του συλλογισμού που σχετίζεται με την απόδειξη στα σχολικά βιβλία αποτελείται από κώδικες τόσο για την αφήγηση όσο και για τις ασκήσεις.

Για την ανάπτυξη του πλαισίου καταγράφουν τις εξής θεμελιώδεις παραδοχές:

1. Το πλαίσιο πρέπει να είναι αρκετά ευρύ ώστε να καταγράφει διάφορες μορφές τόσο απόδειξης όσο και απόρριψης σε διαφορετικούς τομείς περιεχομένου.

2. Το πλαίσιο θα πρέπει να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση οποιουδήποτε εγχειριδίου μαθηματικών γυμνασίου, είτε ευθυγραμμίζεται περισσότερο με τους στόχους της μεταρρύθμισης είτε με παραδοσιακές προσεγγίσεις στη διδασκαλία.

3. Το πλαίσιο θα πρέπει να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση θεμελιωδών χαρακτηριστικών τόσο της αφήγησης όσο και των συνόλων ασκήσεων (π.χ. έργα για το σπίτι) των σχολικών βιβλίων.

4. Το πλαίσιο θα πρέπει να βασίζεται στην υπάρχουσα σχετική έρευνα.

Για τα σύνολα ασκήσεων, οι τρεις διαστάσεις στο πλαίσιο που αναφέρθηκαν παραπάνω χωρίστηκαν περαιτέρω σε επτά υποκατηγορίες:

- κάνω μια εικασία,
- ερευνώ μια εικασία όπου ζητείται από τους μαθητές να αποφανθούν & να τεκμηριώσουν εάν ένας ισχυρισμός ή μια εικασία είναι αληθής ή όχι,
- αναπτύξτε ένα επιχείρημα, όπου ζητείται οι μαθητές να αποδείξουν έναν ισχυρισμό,
- αξιολογήστε ένα όρισμα, οι μαθητές καλούνται να αποφασίσουν για την εγκυρότητα ενός επιχειρήματος,
- αντιπαράδειγμα, οι μαθητές καλούνται μέσω ενός αντιπαραδείγματος να αποδείξουν ότι ένας ισχυρισμός είναι ψευδής,
- διορθώστε ή εντοπίστε ένα λάθος, και
- αρχές της απόδειξης, οι μαθητές καλούνται να δώσουν ερμηνεία ενός επιχειρήματος χωρίς όμως να παρέχουν ολοκληρωμένη απόδειξη.

Τα ανωτέρω συνοψίζονται από τους Thompson et al. (2012) στον επόμενο πίνακα:

Πίνακας 11: Αναλυτικό πλαίσιο R-P Thompson et al. (2012, σελ. 262)

Κωδικοποίηση	Περιγραφή
Κάντε ή διερευνήστε μια εικασία	
MG/MS	Κάντε μια εικασία: Ζητείται από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν ένα μοτίβο για να δημιουργήσουν μια εικασία, είτε γενικής περίπτωσης (π.χ. ο όρος μιας ακολουθίας) μια συγκεκριμένη περίπτωση (π.χ. περίπου ο 100^{ος} όρος μιας ακολουθίας)
IG/IS	Εξετάστε μια εικασία : Δηλώνεται μια εικασία ή ένας ισχυρισμός. Ο μαθητής καλείται να προσδιορίσει αν είναι αληθής ή λάθος και να παράσχει μια αιτιολογία. Η ερώτηση δεν χρησιμοποιεί απαραίτητα τη λέξη εικασία.
Αναπτύξτε ή αξιολογήστε ένα επιχείρημα	
DG/DS	Αναπτύξτε ένα επιχείρημα: Ο μαθητής καλείται να γράψει μια απόδειξη μιας δήλωσης, είτε για μια γενική περίπτωση είτε για μια συγκεκριμένη περίπτωση.
EG/ES	Αξιολογήστε ένα επιχείρημα: Ο μαθητής καλείται να προσδιορίσει εάν ένα επιχείρημα που αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο είναι έγκυρο ή όχι
Άλλος συλλογισμός που σχετίζεται με την απόδειξη	
CX	Αντιπαράδειγμα: Ο μαθητής αναμένεται να βρει ένα αντιπαράδειγμα σε μια δεδομένη δήλωση ή να αποδείξει ότι μια πρόταση είναι ψευδής.
CG/CS	Διορθώστε ή εντοπίστε ένα λάθος: Δηλώνεται μια ελαττωματική λύση σε ένα πρόβλημα ή ένα μη έγκυρο όρισμα. Λέγεται στον μαθητή ότι υπάρχει ένα λάθος και του ζητείται να προσδιορίσει το σφάλμα στη συλλογιστική ή να το διορθώσει
PP	Αρχές απόδειξης :Ο μαθητής καλείται να εξηγήσει πώς να περιγράψει ένα όρισμα συγκεκριμένου τύπου, αλλά όχι να γράψει μια πλήρη απόδειξη

Επιπλέον, το πλαίσιο που χρησιμοποιήθηκε στις αφηγήσεις κατηγοριοποιήθηκε σε

- γενικό επιχείρημα ή απόδειξη,
- συγκεκριμένο επιχείρημα το οποίο χρησιμοποιεί ως αιτιολόγηση μια συγκεκριμένη περίπτωση και μπορεί να θεωρηθεί ως συγκεκριμένο παράδειγμα γενικού επιχειρήματος,
- αφήνεται στον μαθητή όπου οι μαθητές θα κληθούν να δικαιολογήσουν και
- καμία δικαιολογία δεν δόθηκε για να υποστηρίξει ένα ισχυρισμό.

Πίνακας 12: Κατηγοριοποίηση αφηγήσεων Thompson et al. (2012, σελ.261)

G	Γενικός: Η ιδιότητα δικαιολογείται με απόδειξη.
S	Ειδικός: Η ιδιότητα δικαιολογείται χρησιμοποιώντας ένα απαγωγικό επιχείρημα που βασίζεται σε συγκεκριμένη περίπτωση ή περιπτώσεις
L	Αφήνεται στον μαθητή: Μια αιτιολόγηση της ιδιότητας αφήνεται να συμπληρώσει ο μαθητής, συνήθως με πρόβλημα στις ασκήσεις για τις οποίες απαιτείται αιτιολόγηση κάποιου τύπου.
N	Καμία δικαιολογία: Δεν παρέχεται καμία αιτιολογία και δεν γίνεται ρητή αναφορά ότι η αιτιολόγηση αφήνεται στον μαθητή.

1.3.3 Ανάλυση σχολικών βιβλίων με βάση τη συλλογιστική και απόδειξη

Σύμφωνα με τους Zhang & Qi (2019) και τους Thompson et al. (2012) η ανάλυση σχολικών βιβλίων αποσαφηνίζει τον τρόπο παρουσίασης του συλλογισμού και της απόδειξης στα εγχειρίδια, και επομένως είναι ένα πρώτο, αλλά σημαντικό, βήμα για την κατανόηση των ευκαιριών των μαθητών να μάθουν R-P και τη βελτίωση των ικανοτήτων τους στον τομέα αυτό. Σε κάθε περίπτωση όμως αναφέρουν οι Thompson et al. (2012) «αν δεν υπάρχουν ευκαιρίες στο προβλεπόμενο πρόγραμμα σπουδών του σχολικού βιβλίου, είναι λιγότερο πιθανό να εμφανιστούν στο θεσπισμένο πρόγραμμα σπουδών της τάξης». Στο ίδιο πλαίσιο ο Stylianides (2014) επισημαίνει ότι τα κατάλληλα σχεδιασμένα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών μπορούν να δώσουν τη δυνατότητα στους μαθητές να εμπλακούν στο συλλογισμό και στην απόδειξη με συνεκτικό και συνεπή τρόπο. Επιπλέον, μπορούν να προσφέρουν καθοδήγηση στους διδάσκοντες σχετικά με τον τρόπο αντιμετώπισης συγκεκριμένων μαθηματικών και παιδαγωγικών ζητημάτων που ενδεχομένως θα ανακύψουν στην τάξη από τη συμμετοχή των μαθητών στο R-P (Stylianides, 2014).

Ο Στυλιανίδης (2014) διαπιστώνει περιορισμένο αριθμό ερευνών στο συλλογισμό και την απόδειξη στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών και τον αποδίδει κατά κύριο στη μη ανάπτυξη των κατάλληλων μεθοδολογικών τεχνικών. Καταγράφει τρεις κύριες μεθοδολογικές προκλήσεις για αναλύσεις σχολικών βιβλίων σχετικά με τη συλλογιστική και την απόδειξη:

- Η πρώτη πρόκληση αφορά το πεδίο αναζήτησης ευκαιριών συλλογιστικής και απόδειξης σε ένα σχολικό βιβλίο και σχετίζεται με το γεγονός ότι ο συλλογισμός και η απόδειξη είναι μια μαθηματική δραστηριότητα και όχι ένα μαθηματικό θέμα και, ως εκ τούτου, μπορεί να εκτείνεται σε διάφορα θέματα και περιοχές περιεχομένου,
- η δεύτερη ποιος πρέπει να είναι ο ρόλος των οδηγών των εκπαιδευτικών στην ανάλυση και αφορά την πιθανή συνεκτίμηση των οδηγών των εκπαιδευτικών στις αναλύσεις,
- η Τρίτη από ποια οπτική γωνία γίνεται η ανάλυση και καταγράφει τέσσερις περιπτώσεις:

(1) προοπτική μαθητή, (Τι είδους λύση θα μπορούσε να παράγει ένας «τυπικός»/«χαμηλής επίδοσης»/«υψηλών επιδόσεων» μαθητής ως απάντηση σε αυτήν την εργασία;)

(2) μαθηματική προοπτική, (Ποιες ευκαιρίες για μαθηματική δραστηριότητα προσφέρει αυτή η εργασία;)

(3) προοπτική δασκάλου (Τι ευκαιρίες για μαθηματική δραστηριότητα, για τον συγκεκριμένο μαθητικό πληθυσμό, προσφέρει αυτό το έργο;) ή

(4) προοπτική του συγγραφέα σχολικού βιβλίου. (Πώς σκόπευε ο συγγραφέας του σχολικού βιβλίου να υλοποιηθεί κάθε εργασία στην τάξη;)

Σύμφωνα με τους Zhang & Qi (2019 οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δεν φαίνεται να ασχολούνται με τη συλλογιστική και την απόδειξη, κάτι που σχετίζεται με τις ευκαιρίες του R-P που παρέχουν τα εγχειρίδια των μαθηματικών τους.

Οι Zhang & Qi (2019) απλοποίησαν και κωδικοποίησαν το πλαίσιο του Στυλιανίδη (2009). Χρησιμοποίησαν τις κατηγορίες «προσδιορισμός ενός προτύπου», «παροχή απόδειξης» και «παροχή μη αποδεικτικού επιχειρήματος» και επέκτειναν την έννοια του «κάνοντας μια εικασία». Οι υποκατηγορίες του «γενικό παράδειγμα», «επίδειξη», «εμπειρικό επιχείρημα» και «σκεπτικό» στην τέταρτη στήλη ήταν επίσης ίδια με εκείνα στο πλαίσιο του. Επιπλέον, η έννοια του «γενικεύω» ήταν παρόμοιο με την «εικασία».

Για να καταστήσουν το πλαίσιο εύχρηστο για όλα τα είδη πιθανών ευκαιριών R-P στις ασκήσεις και στις αφηγήσεις των κινεζικών βιβλίων μαθηματικών, πρόσθεσαν το αντιπαράδειγμα ως έναν ακόμη τύπο απόδειξης. Επιπλέον, ορισμένες ασκήσεις και αφηγήσεις στα σχολικά βιβλία απαιτούν από τους μαθητές να κρίνουν εάν το επιχείρημα είναι έγκυρο. Ως εκ τούτου, σημείωσαν την «αξιολόγηση ενός επιχειρήματος». Τέλος, κάποιες ασκήσεις και αφηγήσεις που δεν περιείχαν R-P και τις κωδικοποίησαν ως «άλλες». Με βάση τα υπάρχοντα πλαίσια και την ανάλυσή που αναφέραμε παραπάνω, συνοψίζουμε την κωδικοποίηση του επόμενου πίνακα 13.

Πίνακας 13 : Κωδικοποίηση πλαισίου Stylianidis (2009) από τους Zhang& Qi (2019, σελ. 80)

(IP)	Προσδιορισμός μοτίβου		
(MC)	Κάνοντας μια εικασία	(G)	Γενικεύω
		(P)	Προλέγω
(PP)	Παρέχοντας μια απόδειξη	(GE)	Γενικό παράδειγμα
		(D)	Επίδειξη
		(C)	Αντιπαράδειγμα
(PNP)	Παρέχοντας ένα μη αποδεικτικό επιχείρημα	(EA)	Εμπειρικό επιχείρημα
		(R)	Σκεπτικό
(EVA)	Αξιολογώντας ένα επιχείρημα		

Όσον αφορά τα αποτελέσματα των ερευνών στο R-P, πάνω από το 30% των ασκήσεων στα κινέζικα βιβλία προσέφεραν ευκαιρίες στους μαθητές-τριες να συμμετάσχουν σε δραστηριότητες R-P, ποσοστό μικρότερο από το 43% στις ΗΠΑ. Ο Stylianides (2009) καταγράφει μικρή συμμετοχή έργων που εμπλέκουν τους μαθητές σε εμπειρικά επιχειρήματα, εικασίες και γενικά παραδείγματα και μεγάλη όσων στοχεύουν να συνδέσουν τους μαθητές-τριες με συλλογισμούς. Οι Thompson et al. (2012) και Stylianides (2009) προσδιορίζουν στο 5% το ποσοστό των ασκήσεων ή έργων που συνδέονται με την απόδειξη στα μαθηματικά του γυμνασίου. Περίπου στα ίδια επίπεδα, στο 5,4 % κινείται και το αντίστοιχο ποσοστό του λυκείου. Τέλος επιβεβαιώνεται το συμπέρασμα προηγουμένων ερευνών (Bao 2002, Harel & Sowder 1998, Herbst 2002, όπως αν. στο Zhang & Qi 2019) για συσχέτιση της απόδειξης στα σχολικά βιβλία κυρίως με τη Γεωμετρία.

1.3.4 Η συλλογιστική και απόδειξη στη διδασκαλία των αρρήτων

Α) Γνωστική –αισθητική προσέγγιση σχολικών αποδείξεων των αρρήτων

Ο Tall (1979) διαπραγματεύοντας την αρρητότητα του δυο σε πρωτοετείς φοιτητές διερευνά ποια από τα διάφορα είδη αποδείξεων κρίνονται πιο κατανοητά. Προς αυτή την κατεύθυνση προτείνει τρεις αποδείξεις:

I. Την κλασσική απόδειξη με την εις άτοπο απαγωγή, η οποία διδάσκεται στα αγγλικά αλλά και στα σύγχρονα ελληνικά σχολεία και αποτελεί παραλλαγή της πρώτης από τις δυο αποδείξεις για την ασσυμετρία του ρίζα 2 που περιλαμβάνει ο Heiberg στο παράρτημα του 10^{ου} βιβλίου των στοιχείων,

II. μία γενική που σύμφωνα με τους Hardy (1938) και Steiner (1976), λειτουργεί σε επίπεδο παραδείγματος η επιλογή του οποίου όμως καλύπτει όλο το φάσμα των ζητούμενων παραδειγμάτων και ως εκ τούτου η απόδειξη μπορεί να γενικευτεί

III. και μια «τυπική» απόδειξη που πρότεινε ο Hardy (1921) που αποτελεί συνδυασμό των δυο προηγουμένων περιπτώσεων.

Σε δεύτερο βήμα ο Tall αντικαθιστά το 2 με το 5/8 και εξετάζει εκ νέου το βαθμό κατανόησης. Οι αρχικές αποδείξεις και τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον επόμενο πίνακα.

Πίνακας 14: Γνωστική –αισθητική προσέγγιση αποδείξεων αρρήτων Tall (1979, σελ. 3)

Στόχος	**Υπόθεση**	**Απόδειξη**	**Αποτελέσματα**
Ν.δ.ο. ότι η υπόθεση ότι ένας ρητός p/q υπάρχει έτσι ώστε η $p^2/q^2 = 2$ οδηγεί σε άτοπο	$p^2/q^2 = 2$ όπου p, q ακέραιοι χωρίς κοινό παράγοντα	Έχουμε $p^2 = 2q^2$ και p^2 άρτιος. Αλλά αν p περιττός, τότε και p^2 περιττός, άρα p άρτιος, της μορφής p = 2r,r ακέραιος. Αντικαθιστώντας στην $p^2 =2q^2$, έχουμε $4r^2 = 2q^2$ ή $2r^2 = q^2$. Ομοίως το q πρέπει να είναι άρτιος. Άρα p &q έχουν κοινό παράγοντα 2, άτοπο	* η πρότερα διδακτική της γνώση δημιουργεί εξοικείωση * έχει αισθητική κομψότητα * προκαλεί σύγχυση αίσθηση κενού, έλλειψη εξήγησης για την αρρητότητα του αριθμού * απαιτεί υψηλότερο επίπεδο αφαίρεσης
Ν.δ.ο. για οποιοδήποτε ρητό p/q το τετράγωνο του δεν μπορεί να είναι 2.	Με τον τετραγωνισμό ενός ακέραιου n, ο αριθμός των φορών που εμφανίζεται οποιοσδήποτε πρώτος παράγοντας στην παραγοντοποίηση του n^2 διπλασιάζεται , ώστε κάθε πρώτος παράγοντας εμφανίζεται άρτιες φορές στο n^2 (π.χ. αν n = 12 = 2^2*3, τότε $12^2 = 2^4$*3^2)	Στο λόγο p^2/q^2 παραγοντοποιούμε τον αριθμητή p^2 και τον παρονομαστή q^2, ακυρώνοντας τους όποιους κοινούς παράγοντες. Τότε κάθε παράγοντας είτε ακυρώνεται ακριβώς, είτε μένει ένα άρτιος αριθμός εμφανίσεων εκείνου του παράγοντα στον αριθμητή ή τον παρονομαστή . Το κλάσμα p^2/q^2 δεν μπορεί να απλοποιηθεί για να δώσει 2/1 γιατί ο τελευταίος έχει περιττό αριθμό δυάδων στον αριθμητή. Άρα το τετράγωνο ενός ρητού p/q δεν είναι ποτέ ίσο με 2.	* γενικεύει την αρρητότητα των τετραγωνικών ριζών * προσφέρει ποιοτική εξήγηση που ενισχύει την κατανόηση * προτιμάται από τις άλλες δυο για την εισαγωγή της έννοιας σε αρχάριους
Ν.δ.ο. δεν υπάρχει ρητός αριθμός του οποίου το τετράγωνο είναι m/n, εκτός αν το m και το n είναι και τα δύο τέλεια τετράγωνα.	Έστω p^2/q^2 = m/n, Το p δεν έχει κοινό παράγοντα με το q και το m κανένα κοινό παράγοντα με n.	Έχουμε $np^2 = mq^2$. Κάθε παράγοντας του q^2 πρέπει να διαιρεί το np^2 ,και αφού p και q δεν έχουν κοινό παράγοντα, κάθε παράγοντας του q^2 πρέπει να διαιρεί το n. Άρα $n=rq^2$ όπου r ακέραιος αριθμός. Αλλά αυτό περιλαμβάνει m = rp^2 και καθώς το m και το n δεν έχουν κοινό παράγοντα, το r πρέπει να είναι μονάδα. Έτσι $m = p^2$, $n = q^2$. Για m = 2, n = l, προκύπτει ότι το 2 δεν μπορεί να είναι το τετράγωνο ενός ρητού αριθμού.	* απαιτείται υψηλότερο επίπεδο Αφαίρεσης * δεν παρέχει μεγάλη ερμηνεία στους μαθητές, *προσφέρει μεγαλύτερη γενικότητά

Οι Dreyfus & Eisenberg (1986) παρουσιάζουν πέντε έμμεσες αποδείξεις που αποτυπώνονται στον πίνακα (2) για την αρρητότητα του 2 σε μαθηματικούς που κλήθηκαν να τις κατατάξουν με κριτήριο την κομψότητα τους και να αποφασίσου ποια θα διδάξουν σε μαθητές γυμνασίου. Τα κριτήρια επιλογής της αισθητικής αξιολόγησης των αποδείξεων επικεντρώθηκαν στην απλότητα και στη συσχέτιση της κατανόησης τους με το μικρότερο απαιτούμενο μαθηματικό υπόβαθρο. Παρατηρήθηκε επιπλέον ότι θεωρήθηκαν πιο κομψές οι αποδείξεις 1 , 3 που χρησιμοποιούν παλαιότερες τεχνικές και υποκείμενες έννοιες. Τέλος οι Dreyfus & Eisenberg (1986) επισημαίνουν ότι «οι κύριοι παράγοντες που θα πρέπει να μας καθοδηγήσουν στην ανάπτυξη μιας εκτίμησης για τη αισθητική έλξη της μαθηματικής σκέψης είναι η συνοπτικότητα, η σαφήνεια και η απλότητα του επιχειρήματος , αλλά και η δομή, η δύναμη, η εξυπνάδα και η έκπληξη».

Πίνακας 15: Γνωστική –αισθητική προσέγγιση αποδείξεων αρρήτων Dreyfus & Eisenberg (1986, σελ. 7)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
1. Ας υποθέσουμε ότι το $\sqrt{2}$ είναι ρητός αριθμός. Τότε υπάρχουν δύο ακέραιοι p και q≠0 έτσι ώστε $\sqrt{2}$= p/q όπου p και q είναι πρώτοι μεταξύ τους: (p,q) = 1. Αφού $\sqrt{2}$= p/q τότε $2q^2=p^2$(1) και το 2 διαιρεί το αριστερό μέλος της (1) , οπότε πρέπει να διαιρεί το δεξιό και μέλος της (1). Δηλαδή: το 2 διαιρεί το p^2, οπότε το p πρέπει να είναι άρτιο και p = 2k για κάποιο ακέραιο k. Με αντικατάσταση στην (1): $2q^2 = (2k)^2$ ή $q^2 = 2k^2$. Επομένως το 2 διαιρεί το q^2 άρα και έτσι το q. Με άλλα λόγια, το κλάσμα p/q ανάγωγο, άτοπο.	Χρησιμοποίει τη συνθήκη ότι ένας ακέραιος αριθμός διαιρείται με το 2 είτε άρτιο αριθμό επαναλήψεων είτε περιττό, αλλά όχι και τα δύο. Η αντίφαση εμφανίζεται με την υπόθεση ότι τα p και q δεν έχουν κοινούς διαιρέτες. Οπότε το 2 διαιρεί και το p και το q. Το αποτέλεσμα διαιρετότητας που χρησιμοποιείται είναι άμεση συνέπεια της μοναδικότητας της αποσύνθεσης των πρώτων αριθμών της απόδειξης (2)
2. Αν το πολυώνυμο της μορφής $\alpha_0\chi^{\nu}+ \alpha_1\chi^{\nu-1}+ ...+ \alpha_{\nu-1}\chi + \alpha_\nu$ έχει ρητή ρίζα p/q (q≠0, (p,q) = 1), τότε το p διαιρεί το α_ν και το q διαιρεί το α_0. Έστω x=$\sqrt{2}$, και το πολυώνυμο $x^2 – 2 = 0$. Εάν έχει μια ρητή ρίζα της μορφής p/q, τότε το p πρέπει να έχει τιμή ± l ή ± 2 και το q ± 1. Διερευνώντας τις πιθανές τιμές για το κλάσμα p/q, συμπεραίνουμε ότι η ρίζα p/q δεν ικανοποιεί την εξίσωση $x^2 – 2 = 0$. Επομένως, η $x^2 – 2 = 0$ δεν έχει ρητή ρίζα, και άρα το $\sqrt{2}$, δεν είναι ρητός.	Σύντομη απόδειξη βασίζεται σε ένα εύκολο αλλά σχετικά άγνωστο αποτέλεσμα από τη θεωρία των πολυωνύμων
3.Ας υποθέσουμε ότι το $\sqrt{2}$ είναι ρητός αριθμός της μορφής p/q όπου τα p και q ακέραιοι, q≠0. Δεδομένου ότι τα p και q είναι ακέραιοι, μπορούν να εκφραστούν ως γινόμενο πρώτων αριθμών υψωμένων σε κατάλληλη δύναμη $p = 2^{a_1}3^{a_2}5^{a_3}$ ….. , $p^2 = 2^{2a_1}3^{2a_2}5^{2a_3}$ ....ομοίως $q = 2^{\beta_1}3^{\beta_2}5^{\beta_3}$ … ..και $q^2 = 2^{2\beta_1}3^{2\beta_2}5^{2\beta_3}$ αφού $2q^2=p^2$: $2^{2a_1+1}3^{2a_2}5^{2a_3}$…=$2^{2\beta_1}3^{2\beta_2}5^{2\beta_3}$ .... Και $2\beta_1=2a_1+1$, άτοπο, οπότε το $\sqrt{2}$ $\delta\varepsilon\nu$ είναι ρητός.	Χρησιμοποιεί το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής, που σε αντίθεση με τη θεωρητική βάση (2), είναι διαισθητικά κατανοητό από τους μαθητές. Πιο γενική από τη (1) (δεν απαιτεί ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης των p και q να είναι 1)
4. Ας υποθέσουμε ότι $\sqrt{2}$= p/q όπου p και q ακέραιοι και q≠0 . Η σχέση $2q^2=p^2$ δεν μπορεί να έχει μη μηδενική λύση στους ακέραιους, γιατί το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο ενός τετραγώνου που γράφεται στη βάση τρία πρέπει να είναι ένα, αλλά το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο διπλασιασμού ενός τετραγώνου , γραμμένο σε βάση 3, είναι 2. Άρα το $\sqrt{2}$ είναι ρητός, άτοπο (Gauntt & Gustave, 1956).	Σύντομη απόδειξη χρησιμοποιεί ξένη γνώση, πιο εύκολα όμως προσβάσιμη από τη (2).Διαφοροποιημένη ως προς την προσέγγισή της, βασίζεται στις ιδιότητες της αναπαράστασης αριθμών με βάση 3.
5.Ας υποθέσουμε ότι $\sqrt{2}$= p/q όπου p και q ακέραιοι και q≠0. Αφού p>q υπάρχει ένας ακέραιος a μεγαλύτερος του 0 έτσι ώστε p = q + a και $2q^2 = q^2 + 2qa +a^2$, οπότε q>a Συνεπώς, υπάρχει ένας ακέραιος c > 0 τέτοιος ώστε q = a + c. Άρα p = 2a + c και $2(a + c)^2 = (2a + c)^2$. Αυτή η τελευταία ισότητα συνεπάγεται $c^2 = 2a^2$, επομένως ολόκληρη η διαδικασία μπορεί να επαναλαμβάνεται επ ‘αόριστον, δίνοντας μια ακολουθία ακεραίων p > q> c> a> .... Αλλά κάθε μη κενό υποσύνολο των θετικών ακεραίων πρέπει να έχει ένα ελάχιστο στοιχείο Άτοπο, άρα το $\sqrt{2}$= δεν είναι ρητός .	Χρησιμοποιεί την αρχή της καλής διάταξης (σε κάθε μη κενό υποσύνολο οι φυσικοί αριθμοί πρέπει να έχουν ένα ελάχιστο στοιχείο). Αυτή η αρχή, αν και βαθιά, είναι πολύ διαισθητική και επομένως χρησιμοποιείται εύκολα από τους μαθητές.

Β) «Απλές αποδείξεις» της αρρητότητας με βάση την Ιστορία των Μαθηματικών

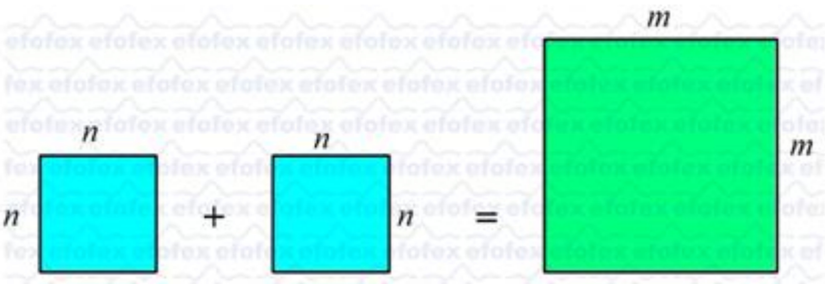
I. Απόδειξη με οπτικοποίηση των αρρήτων

Για την Sierpinska (2003, σελ. 1): «στα μαθηματικά, αν κάποιος συλλάβει μια ιδέα οπτικά στην αρχή, νιώθει την ανάγκη να την αναπαραστήσει σε συμβολική και προτασιακή μορφή και αν η πρώτη συνάντηση με μια ιδέα γίνεται μέσα από μια τέτοια μορφή (π.χ. επίσημο ορισμό), προσπαθεί κανείς να την οπτικοποιήσει». Επιπλέον, δεν έχουμε πραγματικά επιλογή μεταξύ οπτικοποίησης και μη κατά τη μάθηση και την εκτέλεση μαθηματικών. Η οπτικοποίηση δεν είναι θέμα επιλογής, είναι «γνωστική αναγκαιότητα».

Για τον Hardy (1940, σελ.35): «η μαθηματική πραγματικότητα βρίσκεται έξω από εμάς και η λειτουργία μας είναι να την ανακαλύψουμε ή να την παρατηρήσουμε, και ότι τα θεωρήματα που αποδεικνύουμε και τα οποία περιγράφουμε μεγαλοπρεπώς ως «δημιουργίες» μας είναι απλώς οι νότες των παρατηρήσεών μας».

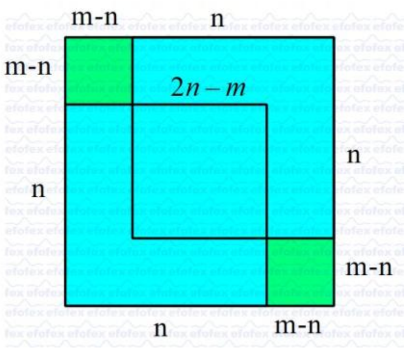
Ο Conway (2006) τονίζοντας τη σημασία των απλών ιδεών στα μαθηματικά που μετατρέπουν κάτι περίπλοκο σε κατανοητό και προσβάσιμο για τον καθένα, επιχειρεί μια διαφορετική προσέγγιση στο κλασσικό ερώτημα της αρρητότητας: «η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι ανάλογη με την πλευρά»; Ή με τη σύγχρονη ορολογία, «η τετραγωνική ρίζα του 2 είναι λόγος δύο ακέραιων αριθμών»;

Μέσω της λεγόμενης απόδειξης Tenenbaum ανασκευάζει το προηγούμενο ερώτημα στην υπόθεση: «Θα μπορούσαν να υπάρχουν δύο τετράγωνα με πλευρά ίση με έναν ακέραιο αριθμό n, του οποίου το συνολικό εμβαδόν είναι ίδιο με αυτό ενός απλού τετραγώνου με πλευρά ίση με έναν άλλο ακέραιο αριθμό, Μ»; Δηλαδή αν μπορούμε να βρούμε ακέραιους αριθμούς m και n που να ικανοποιούν επακριβώς τη σχέση $m^2 = 2n^2$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ελάχιστοι ακέραιοι m,n για τους οποίους ισχύει η ζητούμενη συνθήκη. Το αρχικό μας ερώτημα οπτικοποιείται με τη βοήθεια του επόμενου σχήματος:



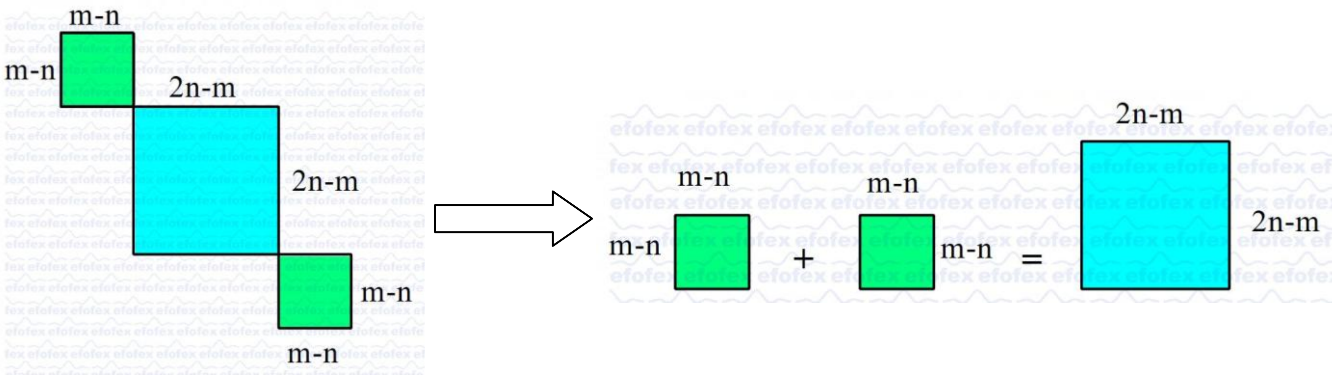
Εικόνα 5: Οπτικοποίηση υπόθεσης Tenenbaum, Conway (2006, σελ. 2)

Αν κολλήσουμε τα δύο μικρά μπλε τετράγωνα στην επάνω δεξιά και κάτω αριστερή γωνία του μεγάλου τετραγώνου όπως φαίνεται στην επόμενη εικόνα



Εικόνα 6:Επικάλυψη τετραγώνων, Conway (2006, σελ. 2)

Τότε, το κεντρικό τετράγωνο με μπλε χρώμα καλύπτεται δύο φορές, και μέρος του τετραγώνου δεν καλύπτεται καθόλου που εμφανίζονται με πράσινο. Με βάση ότι η περιοχή του αρχικού μεγάλου μπλε τετραγώνου είναι ακριβώς ίσο με το συνολικό εμβαδόν των πράσινων τετραγώνων, το εμβαδόν του μπλε τετραγώνου πρέπει να είναι ακριβώς ίσο με το εμβαδόν των πράσινων τετραγώνων



Σχήμα 6: Ανακατασκευή αρχικής υπόθεσης Conway (2006, σελ.3)

Άρα υπάρχουν τετράγωνα με μικρότερες διαστάσεις από τα αρχικά που ικανοποιούν τη βασική συνθήκη, άτοπο.

Οι Miller & Montague (2010, σελ.2) σε αυτό το σημείο δίνουν και μια αλγεβρική ερμηνεία για να ενισχύσουν το άτοπο.

$$(m-n)^2 + (m-n)^2 = (2n-m)^2 \qquad \text{ή}$$

$$2(m-n)^2 = (2n-m)^2 \qquad \text{ή}$$

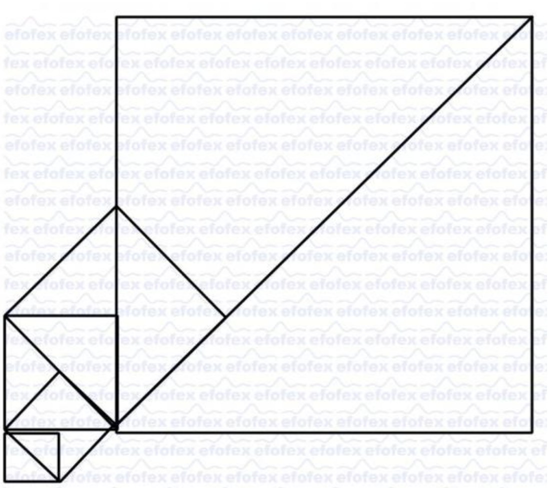
$\sqrt{2}$= (2n – m)/(m – n) , οι οποίοι είναι μικρότεροι των m, n γιατί

n<m και 2n−m = n−(m−n) < n < m ομοίως m− n < n

Σύμφωνα με τον Conway (2006) το συγκεκριμένο είδος απόδειξης γενικεύεται σχετικά δύσκολα και βασίζεται αλγεβρικά στον αλγόριθμο διαίρεσης που αποτελεί τον πυρήνα του Θεωρήματος της Μοναδικής Παραγοντοποίησης (Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής). Αυτός ο τύπος επιχειρημάτων ακολουθεί τη λεγόμενη «απόδειξη με άπειρη κάθοδο» γνωστή και ως μέθοδο καθόδου του Fermat (Proof by infinite descent) που βασίζεται στην αρχή «ότι οποιοδήποτε μη κενό σύνολο θετικών ακεραίων έχει ένα ελάχιστο στοιχείο» .

II. Απόδειξη με «Ανταναίρεση –ανθυφαίρεση»

Όπως αναφέρει η Sierpinska (2019) για να βρούμε το κοινό μέτρο δυο τμημάτων όπως η διαγώνιος και η πλευρά ενός τετραγώνου, αρκεί να σκεφτούμε «τον αλγόριθμο του Ευκλείδη για την εύρεση του ΜΚΔ δύο φυσικών αριθμών και να το προσαρμόσουμε βρίσκοντας το μεγαλύτερο τμήμα που ταιριάζει ακέραιο αριθμό φορές σε δύο τμήματα». Ο Burton (2008) παρουσιάζοντας την απόδειξη του Chrystal (1889) για την ασσυμετρία της πλευράς και της διαγωνίου ενός τετραγώνου τονίζει ότι «η βασική ιδέα είναι να δείξουμε ότι μπορούμε να αξιοποιήσουμε ένα αυθαίρετο τετράγωνο μια ακολουθία ολοένα και μικρότερων τετραγώνων» κάτι που είναι στο πνεύμα της επιχειρηματολογίας που βρέθηκαν στα Στοιχεία του Ευκλείδη.



Εικόνα 7: Ακολουθία τετραγώνων Chrystal (1889, σελ. 270)

Ο Fawler (1999) παρατηρώντας ότι η «πρώιμη ελληνική γεωμετρία είναι σε μεγάλο βαθμό μη αριθμητικοποιημένη» χρησιμοποιεί για την απόδειξη της ασσυμετρίας της διαγωνίου και πλευράς ενός τετραγώνου τη μέθοδο της ανταναίρεσης / ανθυφαίρεσης όπως καταγράφεται στο περίφημο χωρίο των Τοπικών (1581) 29 κ.ε. του Αριστοτέλη. Η μέθοδος αυτή κάνει χρήση του λεγόμενου αλγορίθμου του Ευκλείδη (fowler 1999 & Becker 1933):

«Δεδομένων δύο αριθμών ή δύο ευθειών (ή, αν έχουμε στη διάθεση μας κάποια τεχνική, δύο πιο σύνθετων γεωμετρικών αντικειμένων), τότε δες:

- πόσες φορές μπορεί να αφαιρεθεί το δεύτερο από το πρώτο;
- πόσες φορές το υπόλοιπο μπορεί να αφαιρεθεί από το δεύτερο;
- πόσες φορές το επόμενο υπόλοιπο μπορεί να αφαιρεθεί από αυτό το υπόλοιπο;

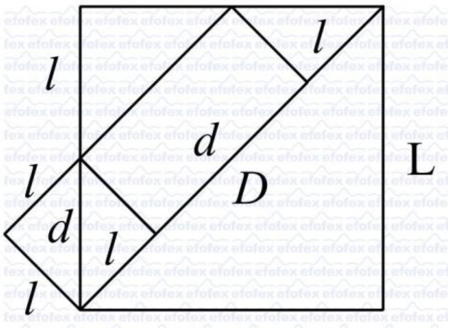
Προκύπτει έτσι μια σειρά αριθμών που χαρακτηρίζει τη σχέση μεγέθους των δύο αντικειμένων» (Fowler, 2000). Για παράδειγμα (Gonçalves & Possani, 2011) αν πάρουμε το λόγο μεταξύ 12 και 7, και εφαρμόσουμε την προηγούμενη διαδικασία καταλήγουμε ότι η ακολουθία των αποτελεσμάτων 1 φορά, 1 φορά, 2 φορές, 2 φορές όπως καταγράφεται στα δεδομένα του επόμενου πίνακα:

Πίνακας 16: Παράδειγμα ανθυφαίρεσης του 7 από το 12 (Gonçalves & Possani 2011, σελ. 22)

αφαιρέστε όσο το δυνατόν περισσότερες φορές	**φορές**	**υπόλοιπο**	**Αλγόριθμος Ευκλείδη**
το 7 από το 12	1	5	12=7*1+5
Το 5 από το 7	1	2	7=5*1+2
Το 2 από το 5	2	1	5=2*2+1
Το 1 από το 2	2	1	2=1*2+1

Επιπλέον Fowler (1999) υποστηρίζει ότι μέσω αυτής της διαδικασίας, θα μπορούσε κανείς να αντιμετωπίσει το πρόβλημα της ασυμμετρίας χωρίς να προκαλέσει κρίση στα θεμέλια των μαθηματικών. Σχεδιάζει ένα μικρό τετράγωνο με πλευρά l και διαγώνιο d, που είναι διαγωνίως τοποθετημένο στην αριστερή γωνία, και ένα μεγαλύτερο τετράγωνο του οποίου η πλευρά είναι ίση με

$L=l + d$, και η διαγώνιός του $D = 2l + d$.



Σχήμα 7: Ανθυφαίρεση πλευράς-διαγωνίου τετραγώνου Fowler (1999, σελ. 368)

Οπότε D = 2l + $d = l + d + l = L + l$ και η πλευρά L του τετραγώνου χωράει μία φορά στη διαγώνιο D και αφήνει υπόλοιπο l. Αναζητούμε τώρα πόσες φορές το l χωράει στο L, ή πόσες φορές το l χωράει στο l+d ‘η ισοδύναμα το L στο L+D. Αλλά L+D = 2L+l με υπόλοιπο 2. Άρα το L ταιριάζει δύο φορές στο D+L Αν συνεχίσουμε την ίδια διαδικασία δημιουργώντας με τον ίδιο τρόπο συνεχώς μικρότερα τετράγωνα όπως ο Crystal (εικόνα 7), παρατηρούμε ότι η ανθυφαίρεση της πλευράς από τη διαγώνιο δημιουργεί μια ακολουθία με άπειρους όρους 1, 2, 2, ..., γεγονός που αποδεικνύει ότι τα δύο μεγέθη είναι ασύμμετρα.

1.4 Ευρήματα της βιβλιογραφικής ανασκόπησης που οδηγούν στην παρούσα έρευνα

Από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση που αναπτύχθηκε ανωτέρω διαπιστώνεται ότι η διδασκαλία των αρρήτων αριθμών ακολουθεί στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση μια γνωστική προσέγγιση. Δεν αποτυπώνεται η αναγκαιότητα εισαγωγής αυτών των αριθμών στα σχολικά βιβλία καθώς και η σημασία τους ως μαθηματικό εργαλείο. Δεν τονίζεται η ιστορική σημασία της ασσυμετρίας στην εννοιολογική τους ανάπτυξη. Προκρίνονται δραστηριότητες που παραβλέπουν τη μέτρηση μεγεθών και χρησιμοποιούν συνήθως δεκαδικές προσεγγίσεις στους υπολογισμούς τους. Όσον αφορά το θεωρητικό πλαίσιο, όπως πολύ εύστοχα επισημαίνουν οι González-Martín et al. (2013): «Τα σχολικά βιβλία δεν παρουσιάζουν συνεκτικούς και λειτουργικούς ορισμούς των αρρήτων αριθμών, σε γλώσσα συμβατή με το δευτεροβάθμιο επίπεδο. Υπάρχουν πολλές σιωπηρές υποθέσεις και η αιτιολόγηση των ιδιοτήτων βασίζεται αποκλειστικά σε παραδείγματα».

Πιο συγκεκριμένα, η εκτεταμένη χρήση υπολογιστικών ασκήσεων στο Γυμνάσιο με ρητές προσεγγίσεις των αρρήτων έχουν ως αποτέλεσμα, οι μαθητές-τριες να μην εργάζονται με τους ίδιους τους άρρητους αριθμούς αλλά με ρητές προσεγγίσεις τους. Δημιουργείται με αυτό τον τρόπο η παρανόηση ότι πρόκειται για μια ακόμη μορφή ρητών και καλλιεργείται η εντύπωση της ύπαρξης «μη ακριβών αριθμών» (Bronner, 1997).

Στα σχολικά βιβλία του λυκείου παρατηρείται συσσώρευση μεγάλου αριθμού ασκήσεων στους αρρήτους που βασίζεται στη λεγόμενη «άλγεβρα των ριζών». Επικρατεί η χρήση αλγορίθμων και η φορμαλιστική προσέγγιση των εννοιών. Η κυρίαρχη παρουσίαση των αρρήτων είναι αλγεβρική, που αποφεύγει τη μέτρηση των αντικειμένων. Σ' αυτό το πλαίσιο ο όρος «άρρητος αριθμός» χρησιμοποιείται σπάνια στο λύκειο σε αντίθεση με το Γυμνάσιο (Bronner, 1997).

Επιπλέον οι στόχοι του Α.Π.Σ. για τους άρρητους στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση εξαντλούνται στις τέσσερις πρώτες σκάλες της κλίμακας του Bloom χωρίς καμία πρόβλεψη για «ανώτερο» συνθετικό ή μεταγνωστικό προσανατολισμό της διδακτικής αυτής ενότητας. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει το φορμαλιστικό χαρακτήρα που διατρέχει όλα τα μαθηματικά σχολικά βιβλία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Λεμονίδης, 2019).

Η χρήση του θεωρητικού πλαισίου Chevallard (1999) στη μελέτη της εισαγωγής των αρρήτων στα σχολικά βιβλία της Λατινικής Αμερικής αναδεικνύει ως ελλιπή την διδακτική οργάνωση αυτής της ενότητας. Ευνοείται η ανάπτυξη του πρακτικού μέρους, χωρίς όμως τη δικαιολόγηση των τεχνικών που χρησιμοποιούνται για την επίλυση των δραστηριοτήτων και χωρίς τη σύνδεση τους με άλλα μαθηματικά αντικείμενα.

Κατά τους González-Martín et al. (2013, σελ.25): «η χρήση της προσέγγισης του Chevallard (1999) αποδεικνύεται χρήσιμη και παραγωγική στην ανάλυση περιεχομένου και την οργάνωσή της στα σχολικά βιβλία». Δεν εξετάζεται όμως βαθύτερα το είδος των έργων και της επιχειρηματολογίας που αναπτύσσεται κατά την επίλυση των ασκήσεων. Το γεγονός αυτό κρίνεται απαραίτητο αν λάβουμε υπόψη μας και την ιστορική σημασία της απόδειξης στην ανάπτυξη των αρρήτων καθώς και την ανάδειξη τους ως «ανώτερη μαθηματική γνώση».

Τέλος η βιβλιογραφική ανασκόπηση έδειξε υποεκπροσώπηση αν όχι έλλειψη αντιστοίχων ερευνών στην ελληνική βιβλιογραφία τη διδακτικής των μαθηματικών στο κεφάλαιο των αρρήτων που να προσμετρούν τις ανωτέρω παραμέτρους και να βασίζονται στα θεωρητικά πλαίσια της ανθρωπολογικής θεωρίας, και της απόδειξης και επιχειρηματολογίας. Η παρούσα μελέτη επιχειρεί να καλύψει αυτό το κενό κινούμενη στις προαναφερθείσες διαστάσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο} : ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

2.1Μεθοδολογία έρευνας

2.1.1 Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η πολυδιάστατη ανάλυση της παρουσίασης των αρρήτων αριθμών στα ελληνικά σχολικά βιβλία των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου**.**

Από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση συμπεραίνουμε ότι η εισαγωγή των αρρήτων αριθμών τόσο στα ελληνικά όσο και στα βραζιλιάνικα εγχειρίδια συμπίπτει με τη διαπραγμάτευση των πραγματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Το γεγονός αυτό με βάση το ελληνικό Α.Π.Σ., όπως μελετήσαμε στο θεωρητικό μέρος της παρούσης έρευνας, γίνεται για πρώτη φορά στη Β΄ Γυμνασίου. Στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου ακολουθεί μια συνοπτική επανεξέταση της ενότητας με τις κατάλληλες συμπληρώσεις και εννοιολογικές επεκτάσεις.

Επιπλέον με βάση την ανάλυση των αρρήτων στα σχολικά βιβλία της Βραζιλίας καταγράφουμε αξιόλογα ευρήματα τα οποία συνοψίζουμε στα εξής:

- πλήθος υπολογιστικών ασκήσεων στο Γυμνάσιο,
- εκτεταμένη χρήση μαθηματικών έργων στο Λύκειο βασισμένων στη λεγόμενη «Άλγεβρα των ριζών»,
- ελλιπή οργάνωση της παρουσίασης των αρρήτων στα σχολικά βιβλία,
- υποβάθμιση της έννοιας των αρρήτων στο Λύκειο.

Από τη στοχοθεσία της έργου μας και τα ανωτέρω ευρήματα της βιβλιογραφικής ανασκόπησης που πραγματοποιήσαμε στο θεωρητικό μέρος της παρούσης μελέτης παρουσιάζουμε προς περαιτέρω επεξεργασία τα επόμενα ερευνητικά ερωτήματα**:**

1. Ποια είδη έργων προτείνονται από τα ελληνικά σχολικά βιβλία για τη διδασκαλία των αρρήτων;
2. Ποια διδακτική δομή χρησιμοποιείται στα ελληνικά εγχειρίδια για την οργάνωση και παρουσίαση των άρρητων αριθμών;
3. Ποια είδη του συλλογισμού και απόδειξης χρησιμοποιούνται στο κεφάλαιο των αρρήτων στα ελληνικά εγχειρίδια μαθηματικών;
4. Η προσέγγιση του συλλογισμού και της απόδειξης των αρρήτων αριθμών διαφοροποιείται στα βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου;

2.1.2 Μεθοδολογικό εργαλείο

Όσο αφορά την επιλογή του μεθοδολογικού εργαλείου, η ανάλυση των αρρήτων με τη βοήθεια της ανθρωπολογικής θεωρίας του Chevallard (1999) στα βραζιλιάνικα σχολικά βιβλία αποδείχτηκε σύμφωνα με τους González-Martín et al. (2013) «χρήσιμη και παραγωγική στη μελέτη του περιεχομένου και την οργάνωσή τους». Το γεγονός αυτό αποδίδεται σύμφωνα με την ίδια πάντα έρευνα (González-Martín et al., 2013) στη δομημένη εργαλειοθήκη που παρέχει το πλαίσιο του ATD για την ανάλυση των πρακτικών, το οποίο της δίνει προβάδισμα σε σχέση με τις γνωστικές προσεγγίσεις που ακολουθούν αντίστοιχες έργα στους αρρήτους. Δεν φαίνεται όμως να προσεγγίζονται με το ATD ορισμένες σημαντικές παράμετροι για την ιδιαίτερη φύση αυτών των αριθμών, όπως το επίπεδο πολυπλοκότητας των μαθηματικών δραστηριοτήτων καθώς και το prove and reasoning που αναπτύσσεται κατά την επίλυσή τους. Κρίνουμε λοιπόν ότι απαιτείται μια πολυδιάστατη ανάλυση των αρρήτων που να λαμβάνει υπόψη τα προαναφερθέντα στοιχεία.

Τέλος η έρευνα της παρούσας έργου για την ανάλυση των αρρήτων στα σχολικά εγχειρίδια αξιοποιεί δύο μεθοδολογικά εργαλεία:

1) Την ανθρωπολογική θεωρία (ATD) του Chevallard με την οποία διερευνούμε τα δυο πρώτα ερευνητικά ερωτήματα που διατυπώσαμε και αποτελεί την «προέρευνα» τη μελέτης μας. Σε αυτή την ερευνητική φάση αναμένουμε να συναντήσουμε τα τέσσερα βασικά ευρήματα της βιβλιογραφικής ανασκόπησης των αντίστοιχων αναλύσεων με το ATD ως προς το είδος των έργων και τη διδακτική οργάνωση της ενότητας.

2) Το πλαίσιο του Stylianides (2009) για την ανάλυση των αποδείξεων των αρρήτων στα σχολικά βιβλία της Β Γυμνασίου και Α λυκείου και αποτελεί το κύριο ερευνητικό μέρος της έργου μας. Αφορά τις δυο επόμενες ερευνητικές υποθέσεις. Αποσκοπούμε να διερευνήσουμε βαθύτερα μέσω του R-P το είδος των έργων και την ελλιπή διαπραγμάτευση των αρρήτων που καταγράφεται από τη βιβλιογραφία στα σχολικά εγχειρίδια της Β΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου.

2.2 Προέρευνα

2.2.1 Το δείγμα της προέρευνας

Για την επιλογή του δείγματος μας σε πρώτη φάση αντιστοιχήσαμε τα βασικά παραδείγματα ανά ταξινομία που δίνουν οι González-Martín et al. (2013) και Souto (2010) με παρόμοια τους στα ελληνικά εγχειρίδια της Β Γυμνασίου και Α Λυκείου καθώς και στην ψηφιακή βάση της τράπεζας θεμάτων της Άλγεβρας της Α Λυκείου ως «υποστηρικτικό υλικό της μάθησης και της διδασκαλίας» εναρμονισμένο με το ισχύον Α.Π..

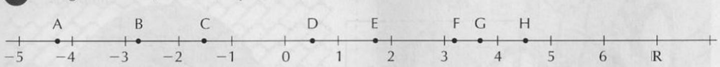
Πίνακας 17: Εξεταζόμενα ελληνικά εγχειρίδια

Τίτλος	Εκδότης	Συγγραφείς	Έτος	Κωδικός
Μαθηματικά Β' Γυμνασίου	**Διόφαντος**	**Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης, Ρεκούμης**	**2018**	**Α**
Άλγεβρα Α' Λυκείου	**Διόφαντος**	**Αργυράκης Κατσαργύρης, Παπασταυρίδης, Πολύζος, Σβέρκος**	**2017**	**Β1**
Τράπεζα θεμάτων	**ΙΕΠ**	**Συλλογικό έργο**	**2022**	**Β2**

Συγκρίναμε και συγχωνεύσαμε όπου κρίναμε απαραίτητο τις κατηγοριο-ποιήσεις των δυο ερευνών. Στα βασικά παραδείγματα των βραζιλιάνικων βιβλίων που βρήκαμε αντιστοιχία στα ελληνικά, παραθέσαμε τα παρόμοια έργα. Σημειώσαμε ως «καμία» τις περιπτώσεις όπου δεν πετύχαμε κάποια αντιστοίχιση. Με βάση τα ανωτέρω δημιουργήσαμε τον επόμενο πίνακα

Πίνακας 18: Αντιστοίχιση βασικών παραδειγμάτων

<table>
<tr><th>ΤΑΞΙΝΟΜΙΑ</th><th>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ/ΒΡΑΖΙΛΙΑ</th><th>ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ/ΕΛΛΑΔΑ</th></tr>
<tr><td>1. Ταξινόμηση ενός αριθμού ως ρητού ή αρρήτου</td><td>36 Identifique como número racional ou c[...] número irracional:
a) 4,25 racional
b) $\sqrt{81}$ racional
c) $\sqrt{50}$ irracional
d) −76 racional
e) $\frac{1}{3}$ racional
f) 0,0061 racional
g) $-\sqrt{18}$ irracional
h) 48 799 racional
i) 7,171771777... irra[...]
j) 8,434343... racional</td><td>Ποιοι από τους επόμενους αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι;
α) $\sqrt{2}$, $(\sqrt{2})^2$ β) $-\sqrt{\frac{4}{9}}$, $\sqrt{\frac{4}{5}}$
γ) $\sqrt{18}$, $\sqrt{\frac{18}{2}}$, $\sqrt{18^2}$</td></tr>
<tr><td>2. Έργα με τη δημιουργία κλάσματος ρητών αριθμών</td><td>Transforme em fração irredutível os números racionais:
a) 2,5
b) 3,81
c) 0,03
d) 4,222... (dízima periódica)
e) 3,4555... (Para obter a geratriz dessa dízima, faça $g = 3,4555...$; a seguir, multiplique por 10 e por 100 ambos os membros dessa igualdade; finalmente, efetue $100g - 10g$.)</td><td>καμία</td></tr>
<tr><td>3.Έργα με λήψη αρρήτου μεταξύ δύο αριθμών</td><td>Obtenha dois números irracionais da forma $\sqrt[n]{a}$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $a \in \mathbb{N}$, que estejam compreendidos entre 5 e 6.</td><td>ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ
α) $4 < \sqrt{4,5} < 5$
β) $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$
γ) $7 < \sqrt{15} < 8$</td></tr>
<tr><td>4.Έργα υπολογισμών με χρήση προσέγγισης</td><td>6 Responda às questões no caderno.
O raio de uma bicicleta aro 26 mede 30 cm.

a) Qual é o comprimento de cada roda dessa bicicleta? (Adote π = 3,14.) 188,4 cm
b) Quantas voltas cada roda dessa bicicleta dará a cada 1 km? aproximadamente 530 voltas</td><td>Ένας ποδηλάτης, που προετοιμάζεται για τους αγώνες, προπονείται σε στίβο σχήματος κύκλου με ακτίνα ρ = 30 m. Πόσες στροφές θα κάνει σε 3 ώρες προπόνησης, αν κινείται με ταχύτητα 20km/h;
</td></tr>
<tr><td>5.Έργα με «ακολουθία» αρρήτων</td><td>35 Escreva os cinco termos seguintes da qüência:
$\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \ldots$ $\sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}, \sqrt{11}$
Quais deles são irracionais?
$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}$</td><td>Δίνονται οι αριθμοί: $A=(\sqrt{2})^6$ και $B=(\sqrt[3]{2})^6$
α) Να δείξετε ότι: $A-B=4$
β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:
$\sqrt{2}$, 1, $\sqrt[3]{2}$</td></tr>
<tr><td>6. Έργα με αναπαράσταση αριθμών στην πραγματική γραμμή</td><td>48 Na figura abaixo, as letras representam números:


Complete os quadros, no caderno, indicando a letra que melhor representa cada número.
$\frac{5}{10}$ D | 3,666... G | $\sqrt{20}$ H | π F | $-\sqrt{8}$ B | $-\frac{3}{2}$ C | −4,3 A | $\frac{8}{5}$ E</td><td>Να τοποθετήσετε στην ευθεία των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς:
-4, $-2,38$, $\frac{4}{9}$, $-\sqrt{13}$, 4,13, 3,6, $\frac{1}{\sqrt{5}}$, 1, 2.</td></tr>
<tr><td>7.Έργα με αριθμητικά εύρη</td><td>Considere os infinitos intervalos:
$A_1 = [0, 1]$; $A_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$; $A_3 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$; $A_4 = \left[0, \frac{1}{4}\right]$; ...; $A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$; ...; $n \in \mathbb{N}^*$
a) Determine $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.
b) Determine $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$.
c) Pode-se estender a definição de intersecção de conjuntos para um número infinito de conjuntos, da seguinte maneira:
$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots = \{x \mid x \in A_1 \text{ e } x \in A_2 \text{ e } x \in A_3 \text{ e } \ldots\}$
Determine a intersecção de **todos** os intervalos do tipo $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, com $n \in \mathbb{N}^*$.</td><td>καμία</td></tr>
</table>

Από τον προηγούμενο πίνακα συμπεραίνουμε την ύπαρξη μαθηματικών έργων της πέμπτης κλάσης που αφορούν ερωτήσεις με διάταξη των αρρήτων που τις συναντάμε κυρίως στην τράπεζα θεμάτων της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου. Επιπλέον οι ασκήσεις της τέταρτης κατηγορίας διαπραγματεύονται στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών στη Γεωμετρία της Β΄ Γυμνασίου. Όπως παρατηρούν και οι González-Martín et al. (2013), αυτό το είδος έργων περιλαμβάνει συνήθως τον υπολογισμό στοιχείων μιας περιφέρειας ενός κύκλου, όπως για παράδειγμα την ακτίνα, δεδομένου του μήκους ή του εμβαδού , το μήκος ή το εμβαδόν, δεδομένης της ακτίνα κ.ά.

Οι τεχνικές επίλυσης περιορίζονται στην αντικατάσταση των δεδομένων με μια ρητή τους αντικατάσταση. Οι τεχνολογίες είναι απλοί κανόνες που αφορούν την αλγεβρική χρήση αριθμητικών και συμβολικών εκφράσεων. Τέτοιες έργα συνήθως προϋποθέτουν σιωπηρά τη θεώρηση ότι «π = 3,14».

Θεωρούμε την ύπαρξη ασκήσεων από την ενότητα της Γεωμετρίας ιδιαίτερα ευνοϊκή για τη μελέτη του R-P λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα προηγουμένων ερευνών που αναπτύχθηκαν στη βιβλιογραφική ανασκόπηση. Οι θεματικές ενότητες που εξετάζονται πιο αναλυτικά στον επόμενο πίνακα:

Πίνακας 19: Εξεταζόμενες θεματικές ενότητες

Εγχειρίδιο	ΕΝΟΤΗΤΕΣ	
	Α΄ ΜΕΡΟΣ ΑΛΓΕΒΡΑ	Β ΜΕΡΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου	2.2 – Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί 2.3 – Προβλήματα	3.3 Μήκος κύκλου 3.4 Μήκος τόξου 3.5 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου 3.6 Εμβαδόν κυκλικού τομέα 4.2 Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου 4.3 Όγκος πρίσματος & κυλίνδρου 4.5 Ο κώνος και τα στοιχεία του 4.6 Η σφαίρα και τα στοιχεία της
Μαθηματικά Α΄ Λυκείου	2.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητές τους 2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού 2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	
Τράπεζα Θεμάτων	Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού Ρίζες Πραγματικών Αριθμών	

Σε δεύτερη φάση προσλάβαμε ως μονάδα ανάλυσης με βάση τη μεθοδολογία που έχει αναπτυχτεί σε προγενέστερες έργα ανάλυσης σχολικών βιβλίων Stylianides (2009) & Thompson et al. (2012), κάθε άσκηση, πρόβλημα ή και υποερώτημά τους που οδηγεί σε ανεξάρτητη απάντηση.

Τέλος εξετάσαμε τις έργα από τα προαναφερθέντα εγχειρίδια που παρουσιάζουν συνάφεια με τα βασικά παραδείγματα όπως καταγράψαμε στον πίνακα 15.

Αυτά τα έργα εμφανίζονται σε θεματικές ενότητες με τα ονόματα:

«εφαρμογές», «ερωτήσεις κατανόησης», «ασκήσεις», «ασκήσεις Α ομάδας», «ασκήσεις Β ομάδας », «ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ $2^{ου}$ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ».

Συνολικά, εξετάστηκαν 240 έργα. Από αυτές,

οι 162 προέρχονται από το σχολικό βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου με τον κωδικό $ΒΓ_1$,

οι 51 από το βιβλίο της Α΄ Λυκείου με κωδικό ΑΛ και

οι 27 από την ψηφιακή βάση της τράπεζας θεμάτων της Α΄ Λυκείου με κωδικό ΤΑΛ.

Παρουσιάζουμε αναλυτικά τα αποτελέσματα της δειγματοληψίας στον πίνακα.

Πίνακας 20: Κατανομή Πλήθους έργων

Εγχειρίδιο	**Κωδικός**		**Άλγεβρα**	**Γεωμετρία**	
			Πλήθος Έργων	Πλήθος Έργων	Σύνολο
Β ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	$ΒΓ_1$		44	118	162
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ	ΑΛ		51	0	51
ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ	ΤΑΛ		27	0	27
		Σύνολο	122	118	240

2.2.2 Ανάλυση έργων προέρευνας

Εφαρμόσαμε το πλαίσιο της Ανθρωπολογικής θεωρίας του Chevallard (1999) κατά το πρότυπο των González-Martín et al. (2013) & Souto (2010). Σύμφωνα με αυτές τις μελέτες, η ανάλυση δεδομένων κινείται σε δύο συμπληρωματικά επίπεδα: στο πρώτο αναλύουμε τη δομή των θεωρητικών μερών των σχολικών βιβλίων, ενώ στο δεύτερο εστιάζουμε στις έργα και τους τρόπους επίλυσής τους. Ταυτόχρονα σε κάθε φάση της ανάλυσης ενσωματώνουμε τα έξι στοιχεία του ATD σύμφωνα με τους González-Martín et al. (2013) το οποίο διαφοροποιείται μεθοδολογικά ως προς την επιλογή του Souto να εφαρμόσει τις «στιγμές» του ATD σωρευτικά στα αποτελέσματα της έρευνάς του.

Επίπεδο 1: Ανάλυση ορισμών & παραδειγμάτων

Όπως παρατηρούν οι González-Martín et al. (2013), σύμφωνα με την πρώτη στιγμή της ανθρωπολογικής θεωρίας, ερχόμενοι σε επαφή με την υπό εξέταση έννοια, μελετούμε πώς εισάγονται θεωρητικά οι άρρητοι αριθμοί. Σε αυτό το στάδιο εξετάζουμε τους ορισμούς καθώς και τα παραδείγματα που σύμφωνα με τον Souto (2010) επιτελούν υποστηρικτικό ρόλο τόσο ως προς την επεξήγηση των ορισμών όσο και ως προς την αιτιολόγηση των ιδιοτήτων.

Στα ελληνικά σχολικά βιβλία (Βλάμος κ.ά. 2008 και Ανδρεαδάκης κ.ά. 2018), οι ορισμοί που προτείνονται για την εισαγωγή των άρρητων αριθμών ταξινομούνται σε δύο τύπους. Πιο συγκεκριμένα, ένας άρρητος αριθμός είναι ένας αριθμός:

- «που δεν μπορεί να γραφτεί με τη μορφή κλάσματος δυο ακεραίων», και
- «δεκαδικός με άπειρα ψηφία τα οποία δεν προκύπτουν με συγκεκριμένη διαδικασία.».

Ο πρώτος τύπος ορισμού εμφανίζεται στην Άλγεβρα της Β΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου. Ο δεύτερος τύπος ορισμού εμφανίζεται έμμεσα στην εισαγωγή του αριθμού π στη Γεωμετρία της Β΄ Γυμνασίου.

Επιπλέον όλα τα σχολικά βιβλία παρουσιάζουν τους άρρητους αριθμούς ως υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, με τη γενική διατύπωση: «Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται όχι μόνο από τους ρητούς αλλά και όλους τους άρρητους».

Στον πίνακα 20 παρουσιάζουμε αναλυτικότερα την ταξινόμηση των ορισμών των αρρήτων βασιζόμενοι στην κωδικοποίηση των González-Martín et al. (2013) & Souto (2010) με τα αντίστοιχα παραδείγματα (όπου παρουσιάζονται).

Πίνακας 21: Κωδικοποίηση Ορισμών

ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ	ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ
D_1	Κάθε αριθμός που δεν μπορεί να πάρει τη μορφή μ/ν, όπου μ, ν ακέραιοι με $\nu \neq 0$, ονομάζεται άρρητος αριθμός	$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$, κτλ
D_2	άρρητος αριθμός, είναι ένας δεκαδικός με άπειρα ψηφία, τα οποία δεν προκύπτουν με συγκεκριμένη διαδικασία.	Τα πρώτα 40 δεκαδικά ψηφία είναι: π = 3,14159 26535 89793 23846 2643383279 50288 41971
D_3	οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα, του άξονα των πραγματικών αριθμών.	

Επίπεδο 2: Ανάλυση έργων

Σε αυτό το στάδιο, όπως αναφέρεται στο δεύτερο βήμα του θεωρητικού πλαισίου της ανθρωπολογικής θεωρίας, εξερευνούμε αρχικά το είδος των έργων Ti που προτείνονται στα σχολικά βιβλία και τις βασικές τεχνικές που απαιτούν αυτά τα έργα. Ακολουθούμε την κωδικοποίηση των πέντε τύπων έργων που παρουσιάζουμε στον πίνακα 18 με τα βασικά παραδείγματα των ερευνών των González-Martín et al. (2013) & Souto (2010). Επιπλέον, εισάγουμε μια κατηγορία που δεν συναντήσαμε στα βραζιλιάνικα εγχειρίδια και αφορά έργα με εφαρμογές των αρρήτων.

Καταλήξαμε στην επόμενη ταξινόμηση των κύριων έργων των αρρήτων στα εξεταζόμενα σχολικά εγχειρίδια:

T_1 Ταξινόμηση ενός δεδομένου αριθμού ως ρητού ή άρρητου.

Η κατηγορία αυτή αφορά ασκήσεις που ζητούν τον χαρακτηρισμό πραγματικών αριθμών που εκφράζονται σε διαφορετικές μορφές π.χ. κλάσματα, δεκαδικοί, περιοδικοί, ρίζες κτλ ως «ρητών» ή «αρρήτων».

T_2 Έργα προσδιορισμού αρρήτου που βρίσκεται μεταξύ δύο αριθμών

Πρόκειται για δραστηριότητες που ζητούν με αναλυτικές μεθόδους τον προσδιορισμό κατά προσέγγιση ενός αρρήτου.

T_3 Έργα που περιλαμβάνουν υπολογισμό με χρήση προσεγγίσεων

Αφορούν ασκήσεις με εφαρμογές ρητών προσεγγίσεων των αρρήτων, με κλασσικότερο παράδειγμα την αντικατάσταση π=3,14.

T_4 Αναπαράσταση άρρητων αριθμών στην πραγματική ευθεία

Σε αυτά τα έργα εργαζόμαστε με δύο κυρίως τρόπους:

- Αλγεβρικά με τη βοήθεια κλασμάτων ή δεκαδικών προσεγγίσεων συσχετίζουμε τους ζητούμενους αριθμούς με σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών.
- Γεωμετρικά, κατασκευάζουμε την εικόνα του ζητούμενου αριθμού με κανόνα και διαβήτη και τη χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος.

T_5 Διάταξη-σύγκριση άρρητων αριθμών

Η κλάση αυτή περιλαμβάνει έργα που αφορούν τη δημιουργία «ακολουθίας» αρρήτων λαμβάνοντας υπόψη τη διάταξη μεταξύ δεδομένων άρρητων/πραγματικών αριθμών, εκτελώντας συγκρίσεις όπου χρειάζονται.

T_6 Έργα με μετασχηματισμό παραστάσεων που περιέχουν αρρήτους.

Πρόκειται για έργα όπου ζητείται η απλοποίηση ή απόδειξη παραστάσεων με αρρήτους, ή η μετατροπή κλάσματος με άρρητο παρονομαστή σε ρητό.

2.2.3 Παραδείγματα ανάλυσης έργων προέρευνας

Επιπλέον για κάθε ταξινόμηση εργασίας ,παραθέτουμε τα αντιπροσωπευτικά έργα. Σύμφωνα με το τρίτο βήμα της θεωρίας του Chevallard (1999) προσδιορίσαμε τις τεχνικές τ_i που προτείνονται για την επίλυσή τους, καθώς και όλες τις δυνατές τεχνολογίες θ_i που χρησιμοποιούνται για την επεξήγηση αυτών των τεχνικών σύμφωνα με την τέταρτη στιγμή του πλαισίου της ανθρωπολογικής θεωρίας. Για να καταγράψουμε μια τεχνική ως προς κάθε τύπο εργασίας, εξετάσαμε αρχικά τις δυνατές λύσεις για την επίλυση των προτεινόμενων έργων. Ένας τύπος εργασίας ενδέχεται να περιέχει διαφορετικά είδη τεχνικών.

T_1: 1) Ενδεικτικά έργα

t_1: Ποιοι από τους επόμενους αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι;

$$\sqrt{18}, \sqrt{18}^2, \sqrt{\frac{18}{2}}$$

- Τεχνικές

$τ_1$: Είναι ρητός, γιατί η τετραγωνική ρίζα ενός τέλειου τετραγώνου φυσικού αριθμού είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός.

$Τ_2$: Είναι άρρητος, γιατί η τετραγωνική ρίζα ενός ακέραιου που δεν είναι τέλειο τετράγωνο είναι άρρητος αριθμός.

$Τ_3$: Είναι άρρητος γιατί δεν μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα ακεραίων.

$Τ_4$: Είναι άρρητος, καθώς έχει άπειρη και μη επαναλαμβανόμενη δεκαδική παράσταση.

T_2: Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος

- Τεχνικές

$τ_2$: Είναι άρρητος, γιατί η τετραγωνική ρίζα ενός φυσικού αριθμού που δεν είναι τέλειο τετράγωνο είναι άρρητος.

$Τ_3$: Είναι άρρητος καθώς δεν μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα ακεραίων..

$τ_4$: Είναι άρρητος, καθώς έχει άπειρη και μη επαναλαμβανόμενη δεκαδική παράσταση

$τ_5$: Είναι άρρητος, γιατί η τετραγωνική ρίζα ενός πρώτου αριθμού είναι άρρητος.

2.. Τεχνολογικό-θεωρητικό μπλοκ

$θ_1$: Χρήση των ορισμών των αριθμών

$θ_2$: Χρήση ιδιοτήτων ρητών.

$Θ_3$: Χρήση ιδιοτήτων ριζών.

$Θ_4$: Χρήση ιδιοτήτων που σχετίζονται με πράξεις αριθμητικών συνόλων

1. Κάθε φυσικός αριθμός είναι ακέραιος.
2. Κάθε ακέραιος είναι ρητός.

$Θ_5$: Χρήση ιδιοτήτων που σχετίζονται με την αναπαράσταση αριθμών.

1. Κάθε δεκαδικός αριθμός μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα ακεραίων.

2. Κάθε κλάσμα ακεραίων έχει μια περιοδική πεπερασμένη ή άπειρη δεκαδική αναπαράσταση.

3. Κάθε πραγματικός αριθμός έχει δεκαδική αναπαράσταση

θ_6: Απόδειξη αρρητότητας με την εις άτοπο απαγωγή .

Τ$_2$: 1) Ενδεικτικά έργα

t_1: Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις του αριθμού $\sqrt{13}$ έως και τρία δεκαδικά ψηφία

- Τεχνικές

τ_6: χρησιμοποιούμε για την επίλυση ρητή προσέγγιση

(χρήση αλγορίθμου: Αναζητούμε έναν ρητό αριθμό που όταν τετραγωνιστεί, δίνει την υψηλότερη τιμή κοντά στο 13, το οποίο εξαρτάται άμεσα από τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων που θέλουμε για την προσέγγιση όπως φαίνεται στην εικόνα 2).

Με διαδοχικές δοκιμές έχουμε:

Επειδή	$3^2 = 9$	και	$4^2 = 16$	είναι	$3 < \sqrt{13} < 4$.
Επειδή	$(3,6)^2 = 12,96$	και	$(3,7)^2 = 13,69$	είναι	$3,6 < \sqrt{13} < 3,7$.
Επειδή	$(3,60)^2 = 12,960$	και	$(3,61)^2 = 13,032$	είναι	$3,60 < \sqrt{13} < 3,61$.
Επειδή	$(3,605)^2 = 12,996$	και	$(3,606)^2 = 13,003$	είναι	$3,605 < \sqrt{13} < 3,606$.

Άρα η ρητή προσέγγιση του $\sqrt{13}$ είναι 3,605.

Σχόλιο: *Για την ακρίβεια λέμε ότι $\sqrt{13} = 3,605$ με έλλειψη και $\sqrt{13} = 3,606$ με υπερβολή.*

Εικόνα 8: Προσέγγιση$\sqrt{13}$ με τρία δεκαδικά ψηφία Βλάμος και συν. (2008, σελ. 47)

2.. Τεχνολογικό-θεωρητικό μπλοκ

θ_2: Χρήση ιδιοτήτων ρητών.

Θ_3: Χρήση ιδιοτήτων ριζών.

(για α, β θετικούς πραγματικούς αν $\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta}$)

θ_5: Χρήση ιδιοτήτων που σχετίζονται με την αναπαράσταση αριθμών.

Θ_7: Προσέγγιση ρητού (με έλλειψη και υπερβολή).

Τ$_3$: Ενδεικτικά έργα

1) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

Ακτίνα ρ	5cm		4cm	3cm		9cm
Μήκος κύκλου L		37,68 cm			12,56 cm	

Προτεινόμενη λύση

Με χρήση του τύπου L = 2πρ, όπου π = 3,14, ο ζητούμενος πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

Ακτίνα ρ	5 cm	6	4 cm	3cm	2	9 cm
Μήκος κύκλου L	31,4	37,68 cm	25,12	18,84	12,56 cm	56,52

2.. Ένας ποδηλάτης που προετοιμάζεται για τους αγώνες, προπονείται σε στίβο σχήματος κύκλου με ακτίνα ρ=30m. Πόσες στροφές θα κάνει σε 3 ώρες προπόνησης, αν κινείται με ταχύτητα 20 km/h.

Προτεινόμενη λύση

Σε κάθε πλήρη στροφή του στίβου ο ποδηλάτης διανύει διάστημα

L = 2π30 = 60π m = 0,060π = 0,1884 km

Σε 3 ώρες ο αθλητής με ταχύτητα 20km/h καλύπτει απόσταση 60 km

Για το οποίο θα χρειαστεί να τρέξει 60 : 0,1884 = 318,47 γύρους

- Τεχνικές

$τ_6$: χρησιμοποιούμε για την επίλυση ρητή προσέγγιση

(χρήση σε αλγεβρικές πράξεις)

2.. Τεχνολογικό-θεωρητικό μπλοκ

$θ_7$: Προσέγγιση ρητών (με αποκοπή).

$Θ_8$: Ιδιότητες πράξεων στο σύνολο των ρητών .

$θ_9$: Χρήση της έννοιας της αριθμητικής τιμής.

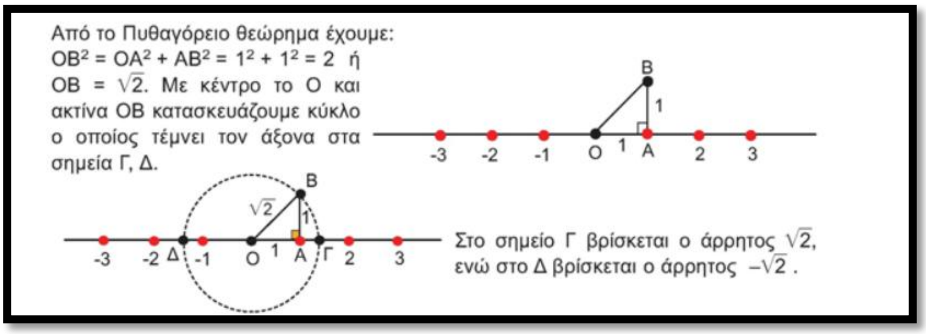
T_4 : 1)Ενδεικτικά έργα

t_1: Να κατασκευάσετε γεωμετρικά τον άρρητο αριθμό $\sqrt{2}$

- Τεχνικές

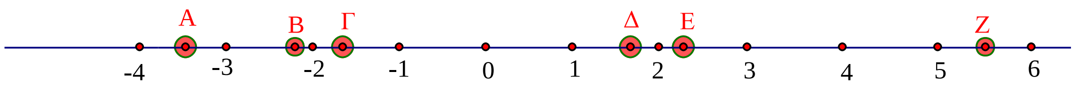
$τ_7$: Γεωμετρική κατασκευή με κανόνα και διαβήτη και αξιοποίηση Πυθαγορείου θεωρήματος

(Θεωρούμε τον άξονα των πραγματικών αριθμών και στο σημείο 1 φέρνουμε κάθετο τμήμα ΑΒ στον άξονα μήκους 1,οπότε σχηματίζεται τρίγωνο ΟΑΒ ορθογώνιο και ισοσκελές. Όπως φαίνεται στην εικόνα 3).



Εικόνα 9: Γεωμετρική αναπαράσταση του $\sqrt{2}$, Βλάμος και συν. (2008, σελ. 48)

t_2: Στον άξονα των πραγματικών αριθμών έχουμε τοποθετήσει τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ. Στις παρακάτω προτάσεις να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.



α) Ο αριθμός $\sqrt{3}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο Α Ε Γ Δ

β) Ο αριθμός $\sqrt{6}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο Γ Δ Ε Ζ

γ) Ο αριθμός $-\sqrt{3}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο Γ Β Δ Α

δ) Ο αριθμός $-\sqrt{5}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο Γ Δ Β Α

τ_6: χρησιμοποιούμε ρητές προσεγγίσεις δύο ψηφίων για τους άρρητους

(γράφουμε όλους τους αριθμούς σε δεκαδική μορφή)

Απάντηση στο παράδειγμα

$\alpha \to \Delta$, $\beta \to E$, $\gamma \to \Gamma$, $\delta \to B$

2.. Τεχνολογικό-θεωρητικό μπλοκ

θ_5: Χρήση ιδιοτήτων που σχετίζονται με την αναπαράσταση αριθμών.

Θ_7: Προσέγγιση ρητών

θ_{10}: Χρήση ιδεών που σχετίζονται με τη γεωμετρία:

- Πρόσθεση/αφαίρεση δύο ευθύγραμμων τμημάτων.
- Πολλαπλασιασμός τμήματος με φυσικό αριθμό.
- Διαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος σε n ίσα μέρη.
- Σύγκριση ευθυγράμμων τμημάτων.
- Πυθαγόρειο θεώρημα.
- Κατασκευή τμήματος με κανόνα και διαβήτη

T_5 : Ενδεικτικά έργα

t_1: Τοποθέτησε σε μία σειρά από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς

$\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{3}$, 1, $\sqrt{2}$.

- Τεχνικές

τ_6: (β1) Χρησιμοποιώντας ρητή προσέγγιση(με υπολογιστή τσέπης)

$\sqrt{5} \approx 2{,}23$, $\sqrt{7} \approx 2{,}64$, $\sqrt{3} \approx 1{,}73$, $\sqrt{2} \approx 1{,}41$

και αφού $1 < 1{,}41 < 1{,}73 < 2{,}23 < 2{,}64$ άρα $1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{5} < \sqrt{7}$

τ_8(β2): Επέκταση διάταξης ρητών $1<2<3<5<7$ άρα $1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{5} < \sqrt{7}$

t_2: Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές. I) $|\pi - 3|$, ii) $|\pi - 4|$,

2.. $|3 - \pi| + |4 - \pi|$, iv) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |\sqrt{3} - \sqrt{2}|$

- Τεχνικές

τ_9:σύγκριση αριθμών για εξαγωγή απολύτων τιμών π.χ. $\pi>3 \Rightarrow \pi-3>0$

t_3: Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$

- Τεχνικές

τ_{10}:η απαλοιφή ριζών οδηγεί σε μια ανισότητα ρητών

π.χ. $3 < \sqrt[3]{30} < 4$ ή

$3^3 < \sqrt[3]{30}^3 < 4^3$ ή

$27 < 30 < 64$, ισχύει

2.. Τεχνολογικό-θεωρητικό μπλοκ

θ_5: Χρήση ιδιοτήτων που σχετίζονται με την αναπαράσταση αριθμών

(κάθε κλάσμα ακεραίων έχει μια δεκαδική παράσταση)

θ_1: Χρήση των ορισμών των αριθμών

(Χρήση του ορισμού D_2)

θ_3: Χρήση ιδιοτήτων ριζών.

(για α, β θετικούς πραγματικούς αν α < β⇔ $\sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta}$)

θ_7: Προσέγγιση ρητών

T_6: 1)Ενδεικτικά έργα

t_1: Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρανομαστές: $\frac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

- Τεχνικές

τ_{11}: ανάπτυγμα ταυτότητας και εκτέλεση αλγεβρικών πράξεων

(δημιουργούμε το ανάπτυγμα της διαφοράς τετραγώνων, οπότε ο παρονομαστής είναι ρητός, γιατί η τετραγωνική ρίζα τέλειων τετραγώνων φυσικών αριθμών είναι φυσικοί αριθμοί).

Π.χ. $\frac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{8(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{8(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{\sqrt{7}^2-\sqrt{5}^2} = \frac{8(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{7-5} = \frac{8(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{2} = 4(\sqrt{7}+\sqrt{5})$

2) Τεχνολογικό-θεωρητικό μπλοκ

θ_2: Χρήση ιδιοτήτων ρητών.

(δημιουργία συζυγών παραστάσεων , ταυτότητα διαφοράς τετραγώνων)

θ_3: Χρήση ιδιοτήτων ριζών.

(ιδιότητα $\sqrt{\alpha}^2 = \alpha$ για α θετικό)

θ_8: Ιδιότητες πράξεων στο σύνολο των ρητών .

2.2.4 Αξιοπιστία και εγκυρότητα προέρευνας

Για τη διεξαγωγή της έρευνας προηγήθηκε αντιστοίχιση των ενδεικτικών έργων των ταξινομιών των ερευνών González-Martín et al. (2013) και Souto(2010) στα βραζιλιάνικα εγχειρίδια με παρόμοια στα ελληνικά σχολικά βιβλία . Ορίστηκαν οι κατηγορίες ταξινόμησης, επιλέχθηκε ισοδύναμο πλήθος έργων και κάθε εξεταζόμενη δραστηριότητα δηλώθηκε σε μια μόνο κλάση.

Προσδιορίστηκε μονάδα ανάλυσης με βάση τις προαναφερθείσες μελέτες η οποία επιλέχθηκε να συμφωνεί και με τις έρευνες στην συλλογιστική και απόδειξη των Stylianides(2009), Thompson et al. (2012). Η εργασία μας στην παρουσίαση των αρρήτων στα ελληνικά εγχειρίδια ακολούθησε τα δύο ερευνητικά επίπεδα των González-Martín et al. (2013) και Souto (2010) όσον αφορά τους ορισμούς, τα παραδείγματα και τις προτεινόμενες δραστηριότητες και συμπεριέλαβε τα έξι βασικά στοιχεία της ανθρωπολογικής θεωρίας (Chevallard, 1999). Παρατέθηκαν ενδεικτικά έργα ανά ταξινομία της ανάλυσης που υλοποιήσαμε. Οι κλάσεις της ταξινόμησης εντάχθηκαν σε μαθηματικές οργανώσεις με βάση τις τεχνολογίες και τις τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση των έργων τους σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο του Chevallard (1999). Τα αποτελέσματα ταξινομήθηκαν και παρουσιάστηκαν σε πίνακες συνολικά ανά τάξη και ανά εγχειρίδιο και συγκρίθηκαν με αυτά των προηγούμενων ερευνών (González-Martín et al. 2013, Souto 2010, Licera 2017 όπως αν. στο Gascón et al. 2022).

2.2.5 Αποτελέσματα προέρευνας

Σχετικά με το πρώτο επίπεδο ανάλυσης, ο ορισμός D_1 εμφανίζεται δύο φορές στα εξεταζόμενα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια. Μία στην εισαγωγή των αρρήτων στο Α μέρος άλγεβρα της Β γυμνασίου και δεύτερη στο βιβλίο άλγεβρα Α Λυκείου. Ο ορισμός D_2 αξιοποιείται μια φορά στη Γεωμετρία της Β Γυμνασίου. Ο ορισμός D_3 εμφανίζεται από μια φορά στην εισαγωγή των πραγματικών αριθμών και στα δύο σχολικά βιβλία.

Για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της ανάλυσης των έργων του δευτέρου επιπέδου ακολουθούμε την πορεία αξιολόγησης όπως την υλοποιήσαμε ανά κεφάλαιο σε κάθε σχολική τάξη.

Στον πίνακα 22 παραθέτουμε τα αποτελέσματα της ανάλυσης του σχολικού βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου.

Πίνακας 22: Αποτελέσματα ανάλυσης αρρήτων στη Β Γυμνασίου με ATD

Βιβλίο/Ενότητα	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	ΣΥΝΟΛΟ
ΑΛΓΕΒΡΑ Β Γυμνασίου							
Πλήθος έργων	3	11	10	7	4	9	44
ΠΟΣΟΣΤΟ(%)	6,8	25	22,7	15,9	9,1	20,5	100
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β Γυμνασίου							
Πλήθος έργων	0	0	117	0	1	0	118
ΠΟΣΟΣΤΟ (%)	0	0	99,2	0	0,8	0	100
ΣΥΝΟΛΟ							
Πλήθος έργων	3	11	127	7	5	9	162
ΠΟΣΟΣΤΟ (%)	1,9	6,8	78,4	4,3	3,1	5,5	100

Με βάση τα δεδομένα του ανωτέρω πίνακα παρατηρούμε εκπροσώπηση από όλες τις κατηγορίες έργων όσον αφορά τον τομέα της άλγεβρας. Το μεγαλύτερο τμήμα δραστηριοτήτων στο Α΄ μέρος του σχολικού βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου σε ποσοστό 25% των ασκήσεων πραγματεύεται την εύρεση ρητών προσεγγίσεων αυτών των αριθμών και το 22,7% αφορά προβλήματα και ασκήσεις που αξιοποιούν σε υπολογισμούς τους άρρητους αριθμούς. Πρόκειται κυρίως για ρεαλιστικά προβλήματα με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος. Το 15,9% καταγράφει ερωτήματα σχετικά με την αναπαράσταση των αρρήτων στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Τέλος μονοψήφια ποσοστά που κυμαίνονται από 7% έως 9% εμφανίζουν τα έργα από τις κατηγορίες T_1 και T_5 στα οποία ζητείται είτε ο χαρακτηρισμός ενός πραγματικού αριθμού ως ρητού ή αρρήτου είτε η σύγκριση του με άλλους πραγματικούς αριθμούς.

Όσον αφορά τα στοιχεία που προκύπτουν από την ανάλυση των έργων της Γεωμετρίας το συντριπτικό μέρος τους αφορά υπολογιστικές ασκήσεις με τη χρήση προσεγγίσεων των αρρήτων, γεγονός που συντελεί στη διαμόρφωση του ποσοστού 78,4% αυτής της ταξινομίας στο σύνολο της διδακτικής ενότητας του βιβλίου. Στη γενική αποτίμηση εμφανίζουν ίδια περίπου συχνότητα οι κατηγορίες T_2 και T_6 σχετικά με τη ρητή προσέγγιση των αρρήτων και τις υπολογιστικές εφαρμογές τους καθώς και οι κλάσεις T_1, T_4, T_5 που αφορούν άμεσα το εννοιολογικό πλαίσιο των πραγματικών αριθμών δηλαδή τη διάκριση, την αναπαράσταση και τη διάταξη τους.

Στη συνέχεια στον πίνακα 23 παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της ανάλυσης στο σχολικό βιβλίο της Α΄ Λυκείου.

Πίνακας 23: Αποτελέσματα ανάλυσης αρρήτων στην Α΄ Λυκείου με ATD

Βιβλίο	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	ΣΥΝΟΛΟ
Άλγεβρα Α Λυκείου							
Πλήθος έργων	7	0	0	2	8	34	51
ΠΟΣΟΣΤΟ (%)	13,7	0	0	3,9	15,7	66.7	100
Τράπεζα Θεμάτων Α Λυκείου							
Πλήθος έργων	0	0	1	0	7	19	27
ΠΟΣΟΣΤΟ (%)	0	0	3,7	0	25,9	70,4	100
Σύνολο							
Πλήθος έργων	7	0	1	2	15	53	78
ΠΟΣΟΣΤΟ (%)	9	0	1,3	2,6	19,2	67,9	100

Με βάση τον προηγούμενο πίνακα το μεγαλύτερο μέρος των έργων στο εγχειρίδιο της άλγεβρας της Α΄ Λυκείου με ποσοστό 66,7% επικεντρώνεται σε ασκήσεις που προϋποθέτουν αλγεβρικούς χειρισμούς όπως η ρητοποίηση παρονομαστών και το 15,7% σε έργα με διάταξη πραγματικών αριθμών. Σε ποσοστό 13,7% παρατίθενται έργα του τύπου T_1 που ζητείται ο χαρακτηρισμός αριθμών ως ρητών ή αρρήτων, ενώ υποεκπροσωπείται η κατηγορία T_5 με αντικείμενο την αναπαράσταση των αρρήτων στον πραγματικό άξονα. Τέλος δεν παρουσιάζονται καθόλου έργα του τύπου T_2 με λήψη ρητών προσεγγίσεων των αριθμών αυτών ή από την κλάση T_3 που αφορά τη χρήση αυτού του είδους προσεγγίσεων σε υπολογισμούς. Σχετικά με τα αποτελέσματα της ανάλυσης της τράπεζας θεμάτων στη Α Λυκείου όπως αποτυπώνεται στον πίνακα 23 οι περισσότερες ασκήσεις αφορούν τη λεγόμενη άλγεβρα ριζών και συγκεκριμένα το 70,4% προέρχεται από την κατηγορία T_6 και το 25,9% από την κλάση T_5. Ένα μόλις έργο χρησιμοποιεί υπολογισμούς με ρητές προσεγγίσεις των αρρήτων του τύπου T_3. Δεν εκπροσωπούνται καθόλου οι κλάσεις T_1 ,T_2 ,T_4 που αφορούν την εννοιολογική προσέγγιση της ενότητας.

Η αποτίμηση της ανάλυσης των έργων των αρρήτων στην Α Λυκείου εμφανίζει πολύ μεγάλο ποσοστό σχεδόν 87% σε αλγεβρικές πράξεις και εφαρμογές των ιδιοτήτων των ριζών από τις κατηγορίες T_5,T_6. Οι υπόλοιπες κατηγορίες είτε υποεκπροσωπούνται όπως συμβαίνει με την κλάση T_1 που καταγράφεται στο 9% και τις T_3 ,T_4 που κυμαίνονται σε μικρά ποσοστά 1,5% έως 2,5% είτε δεν εμφανίζονται καθόλου όπως γίνεται με την T_2.

Στη γενική αποτίμηση της ανάλυσης που παρουσιάζουμε στον πίνακα 24, παρατηρούμε μεγάλη συγκέντρωση έργων στην ταξινομία T_3 που οφείλεται κατά κύριο λόγο στις υπολογιστικές ασκήσεις της Γεωμετρίας της Β Γυμνασίου. Έπονται τα έργα με προσανατολισμό στην άλγεβρα των ριζών που αποτελούν αθροιστικά περίπου το ένα τρίτο των έργων. Οι υπολειπόμενες τρείς κατηγορίες T_1,T_2,T_4 που κατ' ουσία αποτελούν την άμεση εφαρμογή της θεωρίας, εμφανίζονται σε μονοψήφια επίπεδα της τάξης του 4 %.

Πιο αναλυτικά, τα αποτελέσματα μας δείχνουν ποσοστό 53,3 % στην κατηγορία της κλάσης T_3 των υπολογιστικών ασκήσεων με χρήση ρητών προσεγγίσεων των αρρήτων ποσοστό υψηλότερο από το 34% που παρουσιάζεται στην αντίστοιχη κλάση T_{APP} στην έρευνα των González-Martín et al. (2013) και το 27% της κλάσης T_{cal} στην έρευνα του Souto (2010). Αντίθετα οι κατηγορίες T_1,T_2,T_4 που έχουν άμεση συνάφεια με το εννοιολογικό πλαίσιο των αρρήτων, στην έρευνα μας συγκεντρώνουν αθροιστικά 12,6% ποσοστό υποτριπλάσιο από το 42% που καταγράφουν μαζί οι αντίστοιχες κλάσεις T_{cc}, T_E,T_R,T_I στην έρευνα του Souto (2010) και υποτετραπλάσιο του 52% που συγκεντρώνουν οι κατηγορίες T_{CR} , T_{BET}, T_{RL} στην έρευνα των González-Martín et al. (2013).

Πίνακας 24: Συνολικά αποτελέσματα ανάλυσης αρρήτων με ATD

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	ΣΥΝΟΛΟ
ΠΛΗΘΟΣ ΕΡΓΩΝ	10	11	128	9	20	62	240
ΠΟΣΟΣΤΟ(%)	4,2	4,6	53,3	3,8	8,3	25,8	100

2.2.6 Θεσμοθέτηση διδακτικών οργανισμών των αρρήτων με βάση την ανθρωπολογική θεωρία

Σύμφωνα με την Πέμπτη στιγμή της ανθρωπολογικής θεωρίας του Cevallard (1999) θεσμοθετούμε τις μαθηματικές οργανώσεις (Μ.Ο.) των ταξινομήσεων και παράλληλα με την έκτη τις αξιολογούμε κατά τη φάση της ιδρυματοποίησης τους. Οι González-Martín et al. (2013) και Souto (2010) ελέγχουν αν οι τεχνικές τi είναι συναφείς ως προς τις τεχνολογίες θi, ή πιο απλά σε ποιο βαθμό οι μεθοδολογίες των επιλύσεων των προτεινόμενων έργων υποστηρίζονται θεωρητικά στα σχολικά βιβλία. Καταλήγουν σε τρείς μορφές διδακτικών οργανώσεων : «ελλιπείς ως προς τη θεωρία» , «ελλιπείς ως προς τις τεχνικές» και «πλήρεις πραξεολογίες» όταν «λόγος και έργο» συμβαδίζουν. Το τελικό συμπέρασμα αφορά αν το τεχνικό και θεωρητικό μπλοκ που χρησιμοποιείται για την εισαγωγή των αρρήτων στα σχολικά βιβλία είναι κατάλληλα ή όχι για τη διδακτική οργάνωση της ενότητας.

Σε πρώτη φάση καταγράφουμε τις τεχνικές και τις τεχνολογίες που αναπτύχθηκαν κατά την ανάλυση των βασικών έργων, βάση των οποίων καταρτίσαμε τον επόμενο πίνακα 25.

Πίνακας 25: Τεχνικές και τεχνολογίες αρρήτων στα ελληνικά σχολικά βιβλία

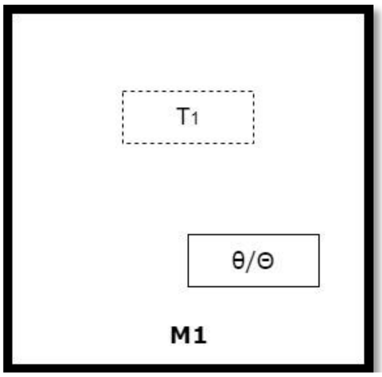
Τεχνική τ_i	Τεχνολογία θ_i
τ_1: τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού τ_2: ακέραιος που δεν είναι τέλειο τετράγωνο . τ_3: ακέραιος που δεν μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα ακεραίων. T_4: αριθμός με άπειρη και μη επαναλαμβανόμενη δεκαδική παράσταση. T_5: τετραγωνική ρίζα πρώτου αριθμού. T_6: χρήση ρητής προσέγγισης τ_7: Γεωμετρική κατασκευή με κανόνα και διαβήτη τ_8: Επέκταση διάταξης ρητών τ_9:σύγκριση αριθμών για εξαγωγή απολύτων τιμών τ_{10}:απαλοιφή ριζών που οδηγεί σε ανισότητα ρητών τ_{11}: ανάπτυγμα ταυτότητας και εκτέλεση αλγεβρικών πράξεων	θ_1: Χρήση των ορισμών των αριθμών θ_2: Χρήση ιδιοτήτων ρητών. Θ_3: Χρήση ιδιοτήτων ριζών. Θ_4:Χρήση ιδιοτήτων που σχετίζονται με πράξεις αριθμητικών συνόλων θ_5: Χρήση ιδιοτήτων που σχετίζονται με την αναπαράσταση αριθμών. Θ_6: Απόδειξη αρρητότητας με την εις άτοπο απαγωγή . θ_7: Προσέγγιση ρητού θ_8: Ιδιότητες πράξεων στο σύνολο των ρητών . θ_9: Χρήση της έννοιας της αριθμητικής τιμής. Θ_{10}: Χρήση ιδεών που σχετίζονται με τη γεωμετρία

Στη συνέχεια συσχετίσαμε τις ταξινομίες των έργων των αρρήτων με τις τεχνολογίες και τις τεχνικές που αναπτύχθηκαν κατά την επίλυση τους, όπως παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα 26

Πίνακας 26: Τεχνικές και τεχνολογίες ανά ταξινομία έργων των αρρήτων στα ελληνικά σχολικά βιβλία

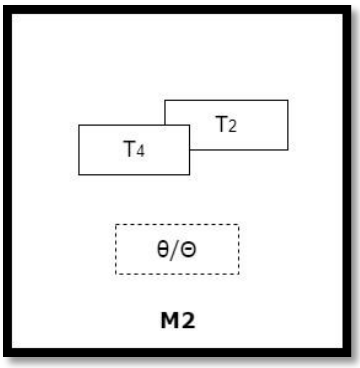
ΤΑΞΙΝΟΜΙΑ ΕΡΓΩΝ	Τεχνική τ_i	Τεχνολογία θ_i
Ταξινόμηση ενός δεδομένου αριθμού ως ρητού ή άρρητου.(T_1)	$\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5$	$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5,\theta_6$
Εργασίες με λήψη αρρήτου μεταξύ δύο αριθμών(T_2)	τ_6	$\theta_2,\theta_3,\theta_5,\theta_7$
Εργασίες που περιλαμβάνουν υπολογισμό με χρήση προσεγγίσεων(T_3)	τ_6	$\theta_7,\theta_8,\theta_9$
Αναπαράσταση άρρητων αριθμών στην πραγματική ευθεία (T_4)	τ_6,τ_7	$\theta_5,\theta_7,\theta_{10}$
Διάταξη-σύγκριση άρρητων αριθμών (T_5)	$\tau_6,\tau_8,\tau_9,\tau_{10}$	θ_1,θ_3 ,θ_5 ,θ_7,θ_8
Εργασίες με μετασχηματισμό παραστάσεων που περιέχουν αρρήτους (T_6)	τ_{11}	$\theta_2,\theta_3,\theta_8$

Ακολουθώντας την ιδρυματοποίηση που πρότειναν οι González-Martín et.al, (2013) η κατηγορία έργων T_1 συνιστά μια Μαθηματική οργάνωση την οποία καλούμε M_1 ταξινομία όπως φαίνεται στο χάρτη 1. Πρόκειται για μια «ακριβή» πραξεολογία επειδή εστιάζει σε ένα μόνο συγκεκριμένο τύπο έργων Τ. Παρατηρούμε στον πίνακα 26 ότι δημιουργείται ένα εκτενές μπλοκ τόσο ως προς τις τεχνικές τi όσο και ως προς τις τεχνολογίες θi που χρησιμοποιούνται για την επίλυση των έργων. Όπως διαπιστώνει ο Souto(2010, σελ.75) σε αυτή την κατηγορία έργων «καμία από τις ιδιότητες που χρησιμοποιήθηκαν ως θεωρία για την επίλυση προβλημάτων δεν αποδείχθηκε στα βιβλία που αναλύθηκαν». Προσφέρονται ανούσια πολλές παραπλήσιες τεχνικές που δεν εξυπηρετούν το γνωστικό στόχο των έργων. Γεγονός που καθιστά την πραξεολογία αυτή ελλιπή ως προς τον πρακτικό τομέα.



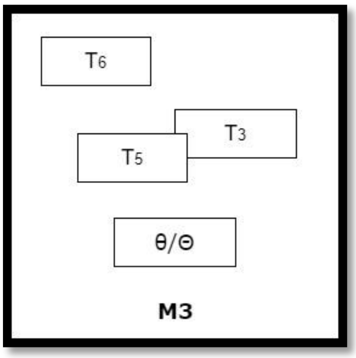
Χάρτης 1: Μαθηματική Οργάνωση M_1-ταξινομία

Τα έργα T_2, T_4 δημιουργούν μια Μαθηματική οργάνωση την οποία καλούμε M_2 τοπολογία. Αφορά μια «τοπική» πραξεολογία που προκύπτει από δυο «ακριβείς» μαθηματικές οργανώσεις που επικεντρώνονται στην εννοιολογική προσέγγιση των αρρήτων. Παρουσιάζει μεγάλης έκτασης θεωρητικό πλαίσιο [θ/Θ], το οποίο όμως δεν αναπτύσσεται και δεν επεξηγείται σαφώς στα σχολικά βιβλία. Προτείνονται δηλαδή οι κατάλληλες τεχνικές στους μαθητές οι οποίες όμως δεν έχουν αναπτυχθεί θεωρητικά. Επομένως μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η M_2 είναι ατελής ως προς το θεωρητικό μπλοκ, το οποίο αποτυπώνουμε και στο χάρτη 2.



Χάρτης 2: Μαθηματική Οργάνωση M_2-Τοπολογία

Τέλος τα έργα των τύπων T_3, T_5 και T_6 συγκροτούν μια τοπική μαθηματική οργάνωση, την οποία αναφέρουμε ως Μ3 – άλγεβρα. Κυριαρχούν οι αλγεβρικές πράξεις και οι μετασχηματισμοί. Αποσκοπούν στον υπολογισμό ή στην απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων, στη σύγκριση αρρήτων μεταξύ τους ή με πραγματικούς αριθμούς ή στη ρητοποίηση του παρονομαστή ενός κλάσματος. Όπως επισημαίνει ο Souto (2010), το θεωρητικό μπλοκ συνίσταται από έννοιες που σχετίζονται με τις πράξεις στο σύνολο των ρητών αριθμών και τις ιδιότητες των ριζών. Όσον αφορά τους υπολογισμούς με τις ρητές προσεγγίσεις πρόκειται για τύπο έργων που «το φαινόμενο της συνάφειας ξεχωρίζει όπου εισάγονται και εξάγονται αριθμοί με ακριβή δεκαδική μορφή» (Souto 2010, σελ.84). Επομένως θεωρούμε ότι η συγκεκριμένη πραξεολογία είναι πλήρης, «αφού οι έννοιες που σχετίζονται με τις πράξεις σε συλλογισμούς είναι καλά καθορισμένες» (Souto 2010, σελ. 84).



Χάρτης 3: Μαθηματική Οργάνωση Μ3-Άλγεβρα

2.3 Έρευνα

2.3.1 Το δείγμα της έρευνας

Για την επιλογή του δείγματος εξετάσαμε αρχικά τα ελληνικά εγχειρίδια της Β΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου καθώς και την ψηφιακή βάση της τράπεζας θεμάτων της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου ανά θεματική ενότητα όπως καταγράψαμε στον πίνακα 17 της παρούσης μελέτης.

Σε δεύτερη φάση στο ίδιο δείγμα με την προέρευνα ερευνήσαμε αν τα 240 έργα που προέκυψαν κατά την πραγματοποίηση της παρείχαν στους μαθητές ευκαιρίες για επιχειρηματολογία και απόδειξη. Αναλύσαμε τα έργα που περιλαμβάνουν τις εκφράσεις «να αποδείξετε ότι», «να συγκρίνετε», «να κατασκευάσετε», «να σχολιάσετε το αποτέλεσμα».

Αυτά τα έργα εμφανίζονται σε θεματικές ενότητες με «Δραστηριότητες», «εφαρμογές», «ερωτήσεις κατανόησης», «ασκήσεις», «ασκήσεις Α ομάδας», «ασκήσεις Β ομάδας», «ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 2^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ», καθώς και αποδείξεις τύπων.

Καταλήξαμε σε 111 έργα:

οι 52 προέρχονται από το σχολικό βιβλίο της Β Γυμνασίου με τον κωδικό $ΒΓ_1$,

οι 39 από το βιβλίο της Α’ Λυκείου με κωδικό ΑΛ και

οι 20 από την ψηφιακή βάση της τράπεζας θεμάτων της Α Λυκείου με κωδικό ΤΑΛ.

Στον πίνακα 27 παρουσιάζουμε το πλήθος και το ποσοστό των έργων των αρρήτων αριθμών που παρέχουν ευκαιρίες για συλλογιστική και επιχειρηματολογία (R-P) συνολικά και ανά σχολικό εγχειρίδιο στη Β Γυμνασίου και στην Α Λυκείου. Παρατηρούμε ότι το 46,3% των συνολικών έργων που εξετάσαμε προσφέρει στους μαθητές μια τουλάχιστον ευκαιρία για συλλογιστική και επιχειρηματολογία (R-P). Το αποτέλεσμα αυτό βρίσκεται εντός του πλαισίου των αποτελεσμάτων προηγουμένων ερευνών. Πιο συγκεκριμένα κυμαίνεται μεταξύ του 43% της αντίστοιχης έρευνας του Stylianidis (2005) και του 50,7% των Thompson et al. (2012). Όλες οι έρευνες κινούνται πάνω του 32,4% που σημειώνει η έρευνα των Zhang & Qi (2019) για το R-P στα κινέζικα σχολικά εγχειρίδια.

Όσον αφορά τη δειγματοληψία ανά σχολικό εγχειρίδιο, στην Β΄ Γυμνασίου το 32,1% συνολικά των αναλυμένων έργων του σχολικού εγχειριδίου παρουσιάζει ασκήσεις με συλλογιστική και επιχειρηματολογία (R-P). Σε απόλυτους αριθμούς εμφανίζεται ισορροπία μεταξύ του πλήθους των έργων στην Άλγεβρα (25) και στη Γεωμετρία (27). Αν συγκρίνουμε όμως τα αντίστοιχα ποσοστά διαπιστώνουμε ότι τα έργα στην Άλγεβρα παρουσιάζουν περισσότερες ευκαιρίες για R-P σε σχέση με τη Γεωμετρία. Το γεγονός αυτό έρχεται σε αντίθεση με τα ευρήματα άλλων ερευνών (Stylianidis 2019 & Zhang & Qi, 2019) που παρουσιάζουν τη Γεωμετρία ως «προνομιακό χώρο» για ανάπτυξη R-P. Σχετικά με το δείγμα στην Α΄ Λυκείου το 75,6% συνολικά των εξεταζόμενων έργων που αντιστοιχούν στο βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου και της ψηφιακής τράπεζας θεμάτων, σχεδιάστηκαν με προοπτική επιχειρηματολογίας και απόδειξης.

Πίνακας 27: Δείγμα ανάλυσης έργων αρρήτων με R-P

Εγχειρίδιο	**Κωδικός**		**Πλήθος εξεταζόμενων έργων**	**Πλήθος έργων με R-P(%)**
Β ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	$ΒΓ_1$	Άλγεβρα	44	25 (56,8)
		Γεωμετρία	118	27 (22,9)
		Σύνολο (%)	162	52 (32,1)
Α ΛΥΚΕΙΟΥ	ΑΛ		51	39 (76,5)
ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Α ΛΥΚΕΙΟΥ	ΤΑΛ		27	20 (74,1)
		Σύνολο (%)	78	59 (75,6)
		Γενικό Σύνολο (%)	240	111 (46,3)

2.3.2 Ανάλυση Έργων

Για την ανάλυση των επιλεγμένων έργων των αρρήτων ως προς το Reasoning and Prove στα σχολικά βιβλία της Β Γυμνασίου και Α Λυκείου, χρησιμοποιούμε το θεωρητικό πλαίσιο του Stylianidis (2009) με αξιοποίηση της επεξεργασίας που πρότειναν οι Zhang & Qi (2019). Με βάση την βιβλιογραφική ανασκόπηση που αναπτύχθηκε στο θεωρητικό μέρος, καταλήξαμε στην επόμενη ταξινόμηση των κύριων έργων των αρρήτων στα εξεταζόμενα σχολικά εγχειρίδια ανά κατηγορίες και υποκατηγορίες όπου εμφανίζονται:

- Κατηγορία IP: Προσδιορισμός Μοτίβου

Πρόκειται για έργα που οι μαθητές καλούνται να συμπεράνουν μια γενική σχέση που ταιριάζει σε ένα συγκεκριμένο σύνολο δεδομένων.

- Κατηγορία MC: Πραγματοποίηση μιας εικασίας

1) Υποκατηγορία G: Γενίκευση

Ζητείται από τους μαθητές να γενικεύσουν τους ενδεχόμενους κανόνες που συνδέουν τα δεδομένα της άσκησης.

2) Υποκατηγορία P: Πρόγνωση

Στις περιπτώσεις αυτές ερωτάται η πρόβλεψη του αποτελέσματος χωρίς αιτιολόγηση.

- Κατηγορία PP: Παροχή απόδειξης

1) Υποκατηγορία GE:Γενικό Παράδειγμα

Πρόκειται για αποδείξεις που χαρακτηρίζονται ως αντιπροσωπευτικές της γενικής περίπτωσης.

2) Υποκατηγορία D: Απόδειξη

Ταξινομούνται έργα που ζητείται η διατύπωση «έγκυρης επιχειρηματολογίας» η οποία δεν στηρίζεται σε κάποιο γενικό παράδειγμα.

3) Υποκατηγορία C: Αντιπαράδειγμα

Οι μαθητές πρέπει να εντοπίσουν το κατάλληλο παράδειγμα για να αποδείξουν ότι η ζητούμενη πρόταση είναι αναληθής.

4) Υποκατηγορία O: Άλλη

Η κατηγορία αυτή αφορά ασκήσεις και αφηγήσεις που δεν περιέχουν R-P.

- Κατηγορία PNP: Παροχή μη αποδεικτικού επιχειρήματος.

1) Υποκατηγορία EA: Εμπειρικό επιχείρημα

Πρόκειται για έργα που οι μαθητές καλούνται να αιτιολογήσουν με βάση την «εμπειρία» τους για την εγκυρότητα ή μη ενός μαθηματικού ισχυρισμού

2) Υποκατηγορία R: Σκεπτικό

Αφορά έργα που ζητείται η διατύπωση λογικοφανών επιχειρημάτων εκτός αυστηρού μαθηματικού πλαισίου υπέρ ή κατά μαθηματικών ισχυρισμών.

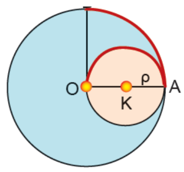
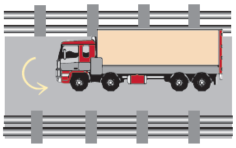
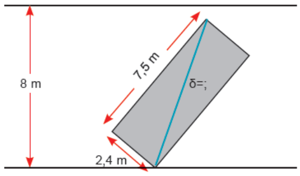
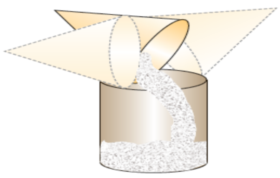
- Κατηγορία EVA: Αξιολόγηση ενός επιχειρήματος

Περιλαμβάνει ασκήσεις και αφηγήσεις στα σχολικά βιβλία που απαιτούν από τους μαθητές να κρίνουν την εγκυρότητα του επιχειρήματος στη διαδικασία επίλυσης που ακολουθήθηκε.

2.3.3 Παραδείγματα ανάλυσης έργων έρευνας

Παραθέτουμε στον επόμενο πίνακα χαρακτηριστικά παραδείγματα κάθε κατηγορίας που συναντήσαμε στην ανάλυση των έργων.

Πίνακας 28: Παραδείγματα ανάλυσης έργων αρρήτων με R-P

<table>
<tr><th>Έργο</th><th>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</th><th>ΚΩΔΙΚΟΣ</th><th>ΤΑΞΙΝΟΜΙΑ</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Να αποδείξετε ότι τα μήκη των τόξων $\overset{\frown}{AO}$ και $\overset{\frown}{AB}$ στο διπλανό σχήμα είναι ίσα. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.

</td><td>D, G</td><td>Απόδειξη
Γενίκευση</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:<table><tr><th>Ακτίνα ρ</th><th>Μήκος L</th><th>Εμβαδόν Ε</th></tr><tr><td>1 cm</td><td></td><td></td></tr><tr><td>2 cm</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3 cm</td><td></td><td></td></tr><tr><td>4 cm</td><td></td><td></td></tr><tr><td>ρ cm</td><td></td><td></td></tr><tr><td>2ρ cm</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3ρ cm</td><td></td><td></td></tr><tr><td>4ρ cm</td><td></td><td></td></tr></table>Τι παρατηρείτε;</td><td>IP</td><td>Προσδιορισμός Μοτίβου</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Οι μπάρες που είναι τοποθετημένες στις δύο άκρες του δρόμου απέχουν μεταξύ τους 8 m. Ένα φορτηγό έχει περίγραμμα ορθογωνίου με μήκος 7,5 m και πλάτος 2,4 m. Είναι δυνατόν ο οδηγός του να εκτελέσει ελιγμούς, ώστε το φορτηγό να κάνει αναστροφή;


</td><td>P,EA,D</td><td>Πρόγνωση,
Απόδειξη
Αξιολόγηση επιχειρήματος,</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.</td><td>GE</td><td>Γενικό Παράδειγμα</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Το γινόμενο α . β δύο άρρητων αριθμών α και β είναι άρρητος αριθμός</td><td>C</td><td>Αντιπαράδειγμα
Αξιολόγηση επιχειρήματος</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$ είναι ρητός.</td><td>O</td><td>Άλλη</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Κατασκευάζουμε με χαρτόνι έναν κώνο και έναν κύλινδρο, έτσι ώστε να έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος. Γνωρίζουμε ότι ο όγκος του κυλίνδρου είναι ίσος με $\pi\rho^2\upsilon$.
Αν γεμίσουμε διαδοχικά με αλεύρι τρεις φορές τον κώνο και αδειάσουμε το αλεύρι μέσα στον κύλινδρο, θα δούμε ότι ο κύλινδρος γεμίζει τελείως.

Επομένως, ο όγκος του κώνου είναι το $\frac{1}{3}$ του όγκου του κυλίνδρου. Δηλαδή:
$V = \frac{1}{3}\pi\rho^2\upsilon$</td><td>R</td><td>Σκεπτικό</td></tr>
</table>

Με βάση τα στοιχεία του ανωτέρω πίνακα, το πρώτο παράδειγμα που αντιστοιχεί στην εφαρμογή 3 σελ. 191 από τη Γεωμετρία της Β΄ Γυμνασίου, ζητείται η απόδειξη μιας πρότασης και η εξαγωγή συμπεράσματος. Η γενίκευση οδηγεί σε άρνηση της πρότασης της απόδειξης γεγονός που μπορεί ενδεχομένως να υποστηριχθεί καλύτερα με την αξιοποίηση αντιπαραδείγματος. Η επίλυση που προτείνεται στο σχολικό βιβλίο καταλήγει στο συμπέρασμα με «χρήση της θεωρίας», όπως φαίνεται και στην εικόνα 10.

Εικόνα 10: Επίλυση εφαρμογής 3, Βλάμος κ.ά. (2008, σελ. 191)

Λύση: Στον κύκλο (Κ, ρ) το τόξο $\overset{\frown}{ΑΟ}$ είναι ημικύκλιο, επομένως έχει μήκος:
$\ell_1 = 2πρ\dfrac{180}{360}$ = πρ. Στον κύκλο (Ο, 2ρ) το τόξο $\overset{\frown}{ΑΒ}$ αντιστοιχεί σε τεταρτοκύκλιο,

οπότε έχει μήκος: $\ell_2 = 2π \cdot (2ρ)\dfrac{90}{360}$ = πρ. Άρα, τα δύο τόξα έχουν ίδιο μήκος.

Συμπεραίνουμε ότι δύο τόξα με ίσα μήκη δεν είναι απαραίτητα ίσα, αφού μπορεί να ανήκουν σε κύκλους με διαφορετικές ακτίνες.

Στο δεύτερο έργο ζητείται ο προσδιορισμός ενός μοτίβου για τον τρόπο μεταβολής του μήκους της περιφέρειας του κύκλου και του εμβαδού του κυκλικού δίσκου ως προς την ακτίνα του.

Το τρίτο παράδειγμα είναι ένα αξιόλογο πρόβλημα της Άλγεβρας της Β΄ Γυμνασίου το οποίο μπορεί να διδαχθεί στη σχολική τάξη και μέσω της μοντελοποίησης. Για την προσέλκυση του ενδιαφέροντος των μαθητών μπορεί στην αρχή της επίλυσης να ζητηθεί η πρόβλεψη του αποτελέσματος και στη συνέχεια μέσω της εφαρμογής του πυθαγορείου θεωρήματος να ελεγχθεί η ακρίβεια ή μη του επιχειρήματος.

Η τέταρτη δραστηριότητα είναι η «κλασσική» απόδειξη της αρρητότητας του 2 με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής όπως καταγράφεται στο βιβλίο της άλγεβρας της Α΄ Λυκείου και αποτελεί γενικό παράδειγμα για την απόδειξη της αρρητότητας ζητούμενων αριθμών.

Στην επόμενη εργασία ο χαρακτηρισμός μιας πρότασης ως «Αληθής» ή «Ψευδής» επιτυγχάνεται με τη χρήση αντιπαραδείγματος. Στο έκτο παράδειγμα διατυπώνεται μια απόδειξη στην οποία δεν απαιτείται ανάπτυξη R-P αλλά εκτέλεση αλγεβρικών πράξεων. Τέλος στο έβδομο ενδεικτικό έργο αποδεικνύεται «πειραματικά» ένας τύπος της Γεωμετρίας της Β΄ Γυμνασίου με τη χρήση απλής «πρακτικής σκέψης».

2.3.4 Αξιοπιστία και εγκυρότητα έρευνας

Η διεξαγωγή της έρευνας της ανάπτυξης της συλλογιστικής και επιχειρηματολογίας στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια βασίστηκε στις μελέτες των Stylianides(2009) & Zhang & Qi (2019). Ορίστηκαν οι κατηγορίες ταξινόμησης, και το δείγμα επιλέχτηκε σύμφωνα με αυτές τις έρευνες. Κάθε εξεταζόμενο έργο μπορούσε να δηλωθεί σε περισσότερες από μια κλάσεις.

Προσδιορίστηκε μονάδα ανάλυσης η οποία επιλέχθηκε να συμφωνεί με τις προαναφερθείσες έρευνες στην συλλογιστική και απόδειξη των Stylianides(2009), Thompson et al. (2012)& Zhang & Qi (2019). Παρατέθηκαν ενδεικτικά έργα ανά κατηγορία της ανάλυσης που υλοποιήσαμε. Τα αποτελέσματα ταξινομήθηκαν και παρουσιάστηκαν σε πίνακες συνολικά ανά τάξη και ανά εγχειρίδιο και συγκρίθηκαν με αυτά των προηγούμενων ερευνών (Stylianides 2009 , Zhang & Qi 2019).

2.3.5 Αποτελέσματα έρευνας

Στη συνέχεια εξετάζουμε αναλυτικά τα αποτελέσματα ανά σχολική τάξη. Παρουσιάζουμε στον πίνακα 29 τα ευρήματα της ανάλυσης του εγχειριδίου της Β΄ Γυμνασίου. Σχετικά με τις περιοχές περιεχομένου τα έργα στη Γεωμετρία ήταν πιο πιθανό να προσφέρουν ερωτήματα για προσδιορισμό μοτίβων από αυτές στην Άλγεβρα. Τα έργα στην Άλγεβρα παρουσιάζουν περισσότερες αποδείξεις από αυτά στη Γεωμετρία, που κατά συντριπτική πλειοψηφία αφορούν την κατηγορία «άλλη» και πιο συγκεκριμένα, την ανάπτυξη αλγεβρικών μεθόδων ή την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος. Εμφανίζεται παρόμοια εικόνα στο πλήθος ασκήσεων που ζητούν ανάπτυξη επιχειρήματος. Οι υπόλοιπες κατηγορίες είτε υποεκπροσωπούνται όπως το «σκεπτικό», η «γενίκευση» και το «αντιπαράδειγμα» που δηλώθηκαν από μία φορά είτε δεν εμφανίζονται καθόλου όπως γίνεται με τις κλάσεις «πρόγνωση», «γενικό παράδειγμα», «απόδειξη» και «εμπειρικό επιχείρημα». Επιπλέον μόλις τρία έργα στην άλγεβρα και ένα στη Γεωμετρία ταξινομήθηκαν σε περισσότερες από μια δηλώσεις, γεγονός που αποτελεί σαφή ένδειξη για το χαμηλό επίπεδο πολυπλοκότητας που κινείται η πλειοψηφία των εξεταζόμενων έργων.

Πίνακας 29: Αποτελέσματα ανάλυσης έργων αρρήτων με R-P στη Β΄ Γυμνασίου

Κατηγορία R-P	**Άλγεβρα**	**Γεωμετρία**
	Πλήθος έργων	Πλήθος Έργων
Προσδιορισμός Μοτίβου	0	5
Πραγματοποίηση μιας εικασίας		
1) Γενίκευση	0	1
2) Πρόγνωση	2	0
Σύνολο	2	1
Παροχή απόδειξης		
1) Γενικό Παράδειγμα	0	0
2) Απόδειξη	2	0
3) Αντιπαράδειγμα	0	1
4) Άλλη	23	17
Σύνολο	25	18
Παροχή μη αποδεικτικού επιχειρήματος		
1) Εμπειρικό επιχείρημα	0	0
2) Σκεπτικό	0	1
Σύνολο	0	1
Αξιολόγηση ενός επιχειρήματος	3	5
ΓΕΝΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ	30	30

Για τα αποτελέσματα της ανάλυσης έργων των αρρήτων ως προς το R-P της Α΄ Λυκείου παραθέτουμε τον πίνακα 30. Η πλειοψηφία των έργων απαιτεί αποδείξεις που βασίζονται στις ιδιότητες των ριζών και στην εκτέλεση αλγεβρικών πράξεων. Εννέα έργα ζητούν απόδειξη, 2 αποτελούν γενικά παραδείγματα και 2 προϋποθέτουν τη χρήση αντιπαραδείγματος. Οι υπόλοιπες κατηγορίες δεν εμφανίζονται καθόλου. Επιπρόσθετα και στην Α Λυκείου κανένα έργο δεν δηλώθηκε σε παραπάνω από μια ταξινομία.

Πίνακας 30: Αποτελέσματα ανάλυσης έργων αρρήτων με R-P στην Α΄ Λυκείου

Κατηγορία R-P	**Άλγεβρα Α Λυκείου**	**Τράπεζα Θεμάτων Α Λυκείου**
	Πλήθος έργων	Πλήθος έργων
Προσδιορισμός Μοτίβου	0	0
Σύνολο	0	0
Πραγματοποίηση μιας εικασίας		
1) Γενίκευση	0	0
2) Πρόγνωση	0	0
Σύνολο	0	0
Παροχή απόδειξης		
1) Γενικό Παράδειγμα	2	0
2) Απόδειξη	9	0
3) Αντιπαράδειγμα	2	0
4) Άλλη	26	20
Σύνολο	39	20
Παροχή μη αποδεικτικού επιχειρήματος		
1) Εμπειρικό επιχείρημα	0	0
2) Σκεπτικό	0	0
Σύνολο	0	0
Αξιολόγηση ενός επιχειρήματος	0	0
ΓΕΝΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ	39	20

Συνοψίζοντας, παρουσιάζουμε στον πίνακα 30 τα αποτελέσματα όλων των έργων στη διδακτική ενότητα των αρρήτων που προσφέρουν ευκαιρίες για συλλογιστική και επιχειρηματολογία στα σχολικά βιβλία της Α Γυμνασίου και Α Λυκείου. Το μεγαλύτερο πλήθος έργων σε ποσοστό 85,75% απαιτεί από τους μαθητές την παροχή απόδειξης. Εκπροσωπούνται όλες οι κλάσεις της κατηγορίας. Υπερτερεί με ποσοστό 72,3% η κατηγορία «άλλη» που δεν χρειάζεται την ανάπτυξη επιχειρηματολογίας. Ακολουθεί με 9,2% η απόδειξη και στα ίδια περίπου επίπεδα υποεκπροσωπούνται το γενικό παράδειγμα και το αντιπαράδειγμα. Οι υπόλοιπες κλάσεις του R-P δηλαδή ο προσδιορισμός μοτίβου, η αξιολόγηση επιχειρήματος και η πραγματοποίηση εικασίας, κινούνται σε χαμηλά επίπεδα από 3 έως 6% .

Τα ευρήματα αυτά συμβαδίζουν ως προς τις τάσεις αλλά όχι ως προς τις τιμές με τα ευρήματα των αντίστοιχων ερευνών στα κινέζικα σχολικά εγχειρίδια που δεν περιορίζονται όμως μόνο στη μελέτη των αρρήτων. Στη μελέτη των Zhang & Qi (2019) για το R-P οι έργα με απόδειξη περιλάμβαναν το μεγαλύτερο μέρος και συγκεκριμένα πάνω από το ένα τρίτο των έργων, ακολουθούσαν τα έργα που ζητούσαν εικασία και το χαμηλότερο ποσοστό (0,3%) αφορούσε την αξιολόγηση ενός επιχειρήματος.

Πίνακας 31: Αποτελέσματα ανάλυσης έργων αρρήτων με R-P στα σχολικά βιβλία

Κατηγορία R-P	**Πλήθος έργων(%)**
Προσδιορισμός Μοτίβου	5 (4,2%)
Σύνολο(%)	5 (4,25%)
Πραγματοποίηση μιας εικασίας	
3) Γενίκευση	1 (0,85%)
4) Πρόγνωση	2 (1,7%)
Σύνολο(%)	3 (2,55%)
Παροχή απόδειξης	
5) Γενικό Παράδειγμα	2 (1,7%)
6) Απόδειξη	11(9,2%)
7) Αντιπαράδειγμα	3 (2,55%)
8) Άλλη	86 (72,3%)
Σύνολο(%)	102 (85,75%)
Παροχή μη αποδεικτικού επιχειρήματος	
3) Εμπειρικό επιχείρημα	0 (0%)
4) Σκεπτικό	1 (0,85%)
Σύνολο(%)	1 (0,85%)
Αξιολόγηση ενός επιχειρήματος	8 (6,6%)
ΓΕΝΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ (%)	119 (100%)

2.4 Συμπεράσματα – συζήτηση

Η παρουσίαση των αρρήτων στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια όσον αφορά το είδος των έργων που προτείνονται, φαίνεται να κινείται σε ένα γενικότερο φορμαλιστικό πλαίσιο που προσλαμβάνει τα σχολικά μαθηματικά ουσιαστικά ως ένα «σύνολο τεχνικών επίλυσης» (Fischbein et al, 1995).

Παρακάτω παρουσιάζουμε συγκεντρωτικά και συζητούμε τα αποτελέσματα της παρούσης μελέτης απαντώντας παράλληλα στα ερευνητικά ερωτήματα που θέσαμε.

Σχετικά με το **Πρώτο ερευνητικό ερώτημα,** αναλύσαμε διεξοδικά με βάση την ανθρωπολογική προσέγγιση του Chevallard (1999) το είδος των έργων που προτείνονται από τα ελληνικά σχολικά βιβλία για τη διδασκαλία των αρρήτων.

Στο σύνολο των εξεταζόμενων δραστηριοτήτων της διδακτικής ενότητας διαπιστώνουμε έναν «καταιγισμό» μαθηματικών έργων που αγγίζει το 75% τα οποία κατευθύνουν τους μαθητές σε εκτέλεση αλγεβρικών πράξεων ή μετασχηματισμών. Αντίστοιχα υψηλά ποσοστά ασκήσεων υπολογιστικού χαρακτήρα που προσεγγίζουν το 60% καταγράφουν και οι έρευνες στα βραζιλιάνικα εγχειρίδια των González-Martín et. al (2013) & Souto (2010).

Επιπλέον υποβαθμίζονται οι δραστηριότητες που επεξηγούν το εννοιολογικό πλαίσιο, εκπροσωπούνται ελάχιστα τα ρεαλιστικά προβλήματα και απουσιάζουν εντελώς τα αυθεντικά που ενδεχομένως θα μπορούσαν να συνδέσουν τη διδασκαλία των αρρήτων με τον πραγματικό κόσμο. Ομοίως λείπουν τα μαθηματικά έργα με μετρήσεις μεγεθών ως συνδετικός εννοιολογικός κρίκος μεταξύ των ρητών και των αρρήτων.

Στον αντίποδα η υπερβολική αξιοποίηση πεπερασμένων ρητών προσεγγίσεων αντί των αρρήτων σε ασκήσεις με υπολογισμούς, δημιουργεί την αίσθηση της υπερεπάρκειας των ρητών αριθμών στην ανάπτυξη του αριθμητικού μας συστήματος. Καλλιεργείται έτσι η παρανόηση στους μαθητές ότι οι άρρητοι είναι ένα κομμάτι των ρητών, γεγονός που τους δυσκολεύει στη εννοιολογική προσέγγιση αυτού του είδους των αριθμών (Pommer, 2013).

Για το **Δεύτερο ερευνητικό ερώτημα** χρησιμοποιήσαμε ομοίως την ανθρωπολογική προσέγγιση του Chevallard (1999) στη μελέτη της διδακτικής δομής αυτής της ενότητας, η οποία μας οδηγεί σε παρόμοια συμπεράσματα με τις έρευνες των González-Martín et al. (2013) & Souto (2010).

Πιο συγκεκριμένα, τα ευρήματα μας σχετικά με τη θεωρητική προσέγγιση των αρρήτων στα ελληνικά σχολικά βιβλία συμφωνούν με τη γενική διαπίστωση των González-Martín et. al (2013, σελ.26) ότι: «οι ορισμοί, οι ιδιότητες και τα παραδείγματα αρθρώνονται, κυρίως ως λίστες χωρίς ενθάρρυνση της ανάπτυξης τεχνολογιών για την αιτιολόγηση των τεχνικών που χρησιμοποιούνται για την επίλυση των προτεινόμενων έργων».

Οι ίδιοι ορισμοί των αρρήτων επαναλαμβάνονται σε Γυμνάσιο και Λύκειο. Απουσιάζει μια εναλλακτική θεωρητική προσέγγιση όπως για παράδειγμα των θετικών αρρήτων αριθμών ως «τμήματα μετρήσεων ασύγκριτων με το τμήμα της επιλεγόμενης μονάδας» (Pommer, σελ.21) καθώς και η ιδιότητα της πυκνότητας των αρρήτων (Souto, 2010). Το θεωρητικό μέρος υποστηρίζεται κυρίως από την παράθεση παραδειγμάτων. Η ανάπτυξη της έννοιας στα σχολικά εγχειρίδια ακολουθεί την κλασσική φορμαλιστική δομή:

«θεωρία» → «παράδειγμα» → «άσκηση».

Εφαρμόζεται το διδακτικό μοντέλο όπου η θεωρία διδάσκεται μέσω αφαιρετικών διαδικασιών και ακολουθούν οι εφαρμογές, σε μια διαδοχή που ο Freudenthal ορίζει ως «αντιδιδακτική αντιστροφή» (Κολέζα,1997).

Οι προτεινόμενες ασκήσεις καταλαμβάνουν το μεγαλύτερο μέρος των δραστηριοτήτων της εξεταζόμενης διδακτικής ενότητας. Παρατηρείται η επανάληψη των ίδιων τεχνικών επίλυσης ακόμη και μεταξύ διαφορετικών κατηγοριών έργων. Καταγράφεται όπως και στις έρευνες στα βραζιλιάνικα εγχειρίδια ένα εκτενέστατο μπλοκ μεθοδολογίας και τεχνικών επίλυσης ασκήσεων με βάση κυρίως τις αλγεβρικές ιδιότητες των ριζών και την εκτέλεση πράξεων.

Από τις τρεις πραξεολογίες που προέκυψαν κατά την ανάλυση των έργων, οι δυο κρίθηκαν ελλιπείς ως προς τη θεωρία ή τις τεχνικές επίλυσης και μόνο η μαθηματική οργάνωση της «άλγεβρας των αρρήτων» παρουσίασε πληρότητα ως προς το θεωρητικό και πρακτικό μπλοκ. Συνεπώς αν συνενώσουμε τις τρεις μαθηματικές οργανώσεις που χαρτογραφήσαμε σε μια «κεντρική» περιφερειακή πραξεολογία των αρρήτων, δεν υποστηρίζεται η σύνδεση μεταξύ θεωρητικού και πρακτικού μέρους καθώς και η επικοινωνία ανάμεσα στις τοπικές πραξεολογίες που τη συνιστούν. Το γεγονός αυτό επηρεάζει άμεσα την ποιότητα διδασκαλίας της ενότητας.

Όπως διαπιστώνουν οι Barbé et al. (2005, σελ.237) «εάν η γνώση που διδάσκεται αποτελείται από μια συλλογή από ακριβείς μαθηματικούς οργανισμούς που δεν συνδέονται μεταξύ τους μέσω ενός λειτουργικού τεχνολογικού-θεωρητικού μπλοκ, τότε οι πιθανές αντίστοιχες αυθόρμητες διδακτικές οργανώσεις που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο δάσκαλος δεν θα είναι σε θέση να ενσωματώσουν πραγματικά τις έξι διαφορετικές στιγμές της διδακτικής διαδικασίας».

Στην πράξη, ο/η δάσκαλος/α καλείται να εισάγει την έννοια των αρρήτων μέσα από σύντομα παραδείγματα επεξηγηματικού χαρακτήρα και υπολογιστικές εφαρμογές στους τύπους και στους κανόνες της θεωρίας που δεν συνδέονται άμεσα με τις προτεινόμενες ασκήσεις. Επιπλέον ζητείται να παρουσιάσει έργα που συνήθως δεν υποστηρίζονται από τα απαραίτητα θεωρητικά εργαλεία, και μάλιστα πολλές φορές επαναλαμβάνονται με μικρές διαφορές στην εκφώνηση.

Καλλιεργείται έτσι μια επιστημονική ομογενοποίηση όπου: «οι έννοιες και οι ορισμοί συρρικνώνονται σε διαδικασίες χειρισμού κατασκευής και αναγνώρισης με βάση κυρίως μορφολογικά και διαδικαστικά χαρακτηριστικά, τα θεωρήματα δεν διαφοροποιούνται ούτε από τους ορισμούς ούτε από τις διαδικασίες αλλά είναι μέθοδοι επίλυσης και αποτελούν μία τυπική και μη διαπραγματεύσιμη διαδικασία» (Καλδρυμίδου, 2003, σελ.146).

Από τα ανωτέρω διαπιστώνουμε συμφωνία με τις προηγούμενες έρευνες (González-Martín et.al, 2013, σελ.27) όσον αφορά το συμπέρασμα ότι οι άρρητοι αριθμοί καλούνται να εκτελέσουν έργα με περιορισμένες τεχνικές και πρακτικές στα σχολικά εγχειρίδια που «δεν ευνοούν την ανάπτυξη ενός συνεκτικού λόγου ή μιας μαθηματικά ορθής θεωρίας. Γεγονός που επιτείνει τις δυσκολίες στην εκμάθηση των πραγματικών και αρρήτων αριθμών και ορισμένων από τις αριθμητικές και τοπολογικές τους ιδιότητες».

Όσον αφορά το **Τρίτο ερευνητικό ερώτημα**, το μεγαλύτερο μέρος των έργων που προσφέρουν ευκαιρίες για συλλογιστική και απόδειξη, παρέχουν τη δυνατότητα απόδειξης. Περίπου τα τρία τέταρτα των δραστηριοτήτων ταξινομούνται στην υποκατηγορία «άλλη» που δεν προϋποθέτει επιχειρηματολογία αλλά στηρίζεται στην ανάπτυξη αλγεβρικών μεθόδων ή μετασχηματισμών παραστάσεων με αρρήτους. Το ποσοστό αυτό συμφωνεί με το 75% των δραστηριοτήτων που ταξινομήθηκαν με την ανθρωπολογική θεωρία του Chevallard (1999) σε αντίστοιχες κατηγορίες υπολογιστικών ασκήσεων στην προέρευνα μας.

Οι υπόλοιπες κλάσεις της συλλογιστικής και απόδειξης που διερευνήθηκαν στην μελέτης μας όπως ο προσδιορισμός μοτίβου, η αξιολόγηση επιχειρήματος και η πραγματοποίηση εικασίας, κινούνται σε χαμηλά επίπεδα στην περιοχή του 5%.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης σε γενικές γραμμές συμβαδίζουν με τις έρευνες του Stylianidis (2019) στα αμερικάνικα βιβλία και των Zhang& Qi (2019) στα κινέζικα ως προς τις πρώτες και τελευταίες κλάσεις της ταξινομίας. Δεν δίνεται στα ελληνικά εγχειρίδια η αντίστοιχη έμφαση στη δημιουργία εικασίας και στην επιλογή μοτίβου που θα έδινε ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη διδακτική διαδικασία, όπως για παράδειγμα στην επίλυση προβλημάτων μέσω μοντελοποίησης.

Ιδιαίτερα, οι κατηγορίες «σκεπτικό» και «εμπειρικό επιχείρημα» που βρίσκονται στη βάση της ιεραρχίας επιχειρημάτων με κριτήριο το επίπεδο της μαθηματικής τους πολυπλοκότητας (Στυλιανίδης, 2009, σελ. 280) εμφανίζουν από καμία ως μια δηλώσεις. Σε χαμηλά ποσοστά κινούνται και οι υψηλόβαθμες κατηγορίες στην ίδια κλίμακα «γενικό παράδειγμα» (1,7%) και «απόδειξη» (9,2 %). Στην ουσία παρατηρούμε συσσώρευση στα έργα με συλλογιστική και επιχειρηματολογία μέτριας δυσκολίας. Λείπουν οι «απλές» εφαρμογές που θα κεντρίσουν το ενδιαφέρον όλων των μαθητών καθώς και οι «σύνθετες» ασκήσεις που θα αναπτύξουν τη μεταγνωστική τους ικανότητα.

Επιπλέον η «ηγεμονία» του είδους των αποδείξεων στα ελληνικά βιβλία που δεν απαιτεί επιχειρηματολογία σε συνδυασμό με το γεγονός ότι δηλώθηκαν μόλις πέντε έργα σε περισσότερες από μια ταξινομίες, συνηγορούν στο έντονο φορμαλιστικό πνεύμα που διατρέχει τα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Τέλος σχετικά με το **Τέταρτο ερευνητικό ερώτημα,** και την ανάπτυξη της συλλογιστικής και απόδειξης στην ενότητα των αρρήτων στα εξεταζόμενα εγχειρίδια, στο βιβλίο της Β Γυμνασίου εκπροσωπούνται και οι πέντε κατηγορίες που αφορούν την «επιλογή μοτίβου», την «παροχή μη αποδεικτικού επιχειρήματος», την «παροχή απόδειξης», την «παροχή εικασίας» και την «αξιολόγηση επιχειρήματος». Στο εγχειρίδιο της Άλγεβρας της Α Λυκείου οι ευκαιρίες για συλλογιστική και απόδειξη περιορίζονται στην «παροχή απόδειξης». Και στα δυο εγχειρίδια των δύο βαθμίδων υπερτερούν κατά μεγάλη πλειοψηφία οι αποδείξεις που δεν απαιτούν συλλογιστική αλλά στηρίζονται σε υπολογισμούς ή μετατροπές αλγεβρικών παραστάσεων και εφαρμογή ιδιοτήτων των πράξεων ή των ριζών.

Τα προτεινόμενα έργα της τράπεζας θεμάτων στην εξεταζόμενη ενότητα της Α Λυκείου δρουν μεν αθροιστικά, αλλά δεν μεταβάλλουν ποιοτικά τη συνολική εικόνα αφού προσφέρουν μόνο αποδείξεις χωρίς επιχειρηματολογία. Ενισχύεται έτσι στους μαθητές η αίσθηση της επανάληψης της «ίδιας εικόνας», που στοιχειοθετεί «μια διδασκαλία που βασίζεται κυρίως στις δομές και στην ανάπτυξη των μαθηματικών περιεχομένων χωρίς να λαμβάνεται υπόψη ο μαθητής και ο τρόπος που μαθαίνει» (Λεμονίδης, 2019, σελ.142).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η εξεταζόμενη ενότητα των αρρήτων φαίνεται να κατανέμεται σε περισσότερες κατηγορίες συλλογιστικής και απόδειξης στο σχολικό βιβλίο της Β Γυμνασίου και μάλιστα σε όλο το φάσμα των κατηγοριών της που μελετούμε σε σχέση με το αντίστοιχο τη άλγεβρας της Α Λυκείου, στην ουσία όμως δίνεται η ίδια βαρύτητα στο ίδιο είδος της απόδειξης που δεν προϋποθέτει τεκμηρίωση.

Αναδεικνύεται έτσι η φορμαλιστική λογική που είναι γραμμένα τα ελληνικά σχολικά βιβλία των Μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης από τα οποία σύμφωνα με τον Λεμονίδη (2019) απουσιάζει η «σύνδεση των μαθηματικών με τη χρήση τους και την καθημερινή ζωή, τον πολιτισμό, την ιστορία και την τέχνη. Προτείνονται πολλά μαθηματικά περιεχόμενα, συχνά επιφανειακά χωρίς εμβάθυνση και κατανόηση». Και το βασικότερο ίσως σημείο «δεν απαντούν στο ερώτημα γιατί διδασκόμαστε αυτά τα μαθηματικά». Αποτέλεσμα αυτών είναι η αύξηση του μαθησιακού επιπέδου δυσκολίας, η οποία οδηγεί στην παραπαιδεία και εν τέλει στην απομάκρυνση των μαθητών από τα Μαθηματικά (Λεμονίδης, 2019)

Επιπλέον η υποβάθμιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών σε απλή εκμάθηση διαδικασιών και τεχνικών επίλυσης ασκήσεων δεν είναι συμβατή με τους διδακτικούς στόχους που θέτει το Αναλυτικό Πρόγραμμα σπουδών .

Τα εγχειρίδια ως φορείς πολιτισμικής μετάδοσης συνδυάζουν το «τι και το πώς» πρέπει να διδαχθεί (Stray, όπως αν στο Κολέζα, 2006). Είναι συγχρόνως «αποτελέσματα πολιτικών, οικονομικών και πολιτισμικών δραστηριοτήτων, αντιπαραθέσεων και συμβιβασμών» (Apple, 1992).

Στην Ελλάδα, οι διαχρονικές επιλογές των πολιτικών ηγεσιών του ΥΠΑΙΘ τις τελευταίες δεκαετίες προέκριναν τις αναμορφώσεις των βιβλίων, τα «ανεβοκατεβάσματα κεφαλαίων» της σχολικής ύλης και τα copy paste αντί της συγγραφής νέων βιβλίων & Α.Π.Σ.. Ειδικά το σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου έχει κλείσει ένα διδακτικό κύκλο πλέον των 30 ετών και πρέπει άμεσα να αντικατασταθεί.

2.5 Περιορισμοί-Επεκτάσεις της έρευνας

Η μελέτη μας απευθύνεται στο ελληνικό παιδαγωγικό σύστημα που επί του παρόντος δεν έχει υιοθετήσει το θεσμό του πολλαπλού βιβλίου όπως η Βραζιλία.

Ως εκ τούτου απευθύνεται σε μικρότερο δείγμα εγχειριδίων από τις αντίστοιχες που ακολουθούν την ανθρωπολογική προσέγγιση (González-Martín et al. 2013 & Souto 2010) στα βραζιλιάνικα εγχειρίδια.

Επιπλέον οι έρευνες με βάση το R-P των Stylianidis (2019) στα αμερικάνικα και των Zhang & Qi (2019) κινέζικα βιβλία έγιναν σε όλο το φάσμα των μαθηματικών ενοτήτων των βιβλίων και σε μεγαλύτερο σαφώς δείγμα. Ως εκ τούτου τα ευρήματα μας είναι μεν αντιπροσωπευτικά αλλά δεν μπορούν να γενικευτούν σε άλλους τομείς των Μαθηματικών.

Δεν προτιμήθηκε μεθοδολογικά η ανάλυση από δεύτερο αξιολογητή.

Τα αποτελέσματα μας έδειξαν συμφωνία ως προς τα βασικά συμπεράσματα των προηγούμενων ερευνών, και ικανοποιητική επικοινωνία μεταξύ των επιλεγμένων μεθοδολογικών εργαλείων. Επομένως θα μπορούσε μελλοντικά να επαναληφθεί μια έρευνα με μεγαλύτερο δείγμα έργων και από άλλες χώρες όπως για παράδειγμα την Κύπρο στην ίδια διδακτική ενότητα των αρρήτων που να συγκρίνει τα μεταξύ τους αποτελέσματα ή και σε περισσότερες θεματικές περιοχές των Μαθηματικών.

Επίλογος

«Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty—a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show. The true spirit of delight, the exaltation, the sense of being more than man, which is the touchstone of the highest excellence, is to be found in mathematics as surely as in poetry. What is best in mathematics deserves not merely to be learnt as a task, but to be assimilated as a part of daily thought, and brought again and again before the mind with ever-renewed encouragement» (Russell, 1910).

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Ελληνόγλωσση

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α. (2018). Άλγεβρα Α΄ Λυκείου. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος»

Αντωνίου, Α. (2002). Οι αριθμοί e και π και το σύνολο των υπερβατικών αριθμών. Ευκλείδης Γ, (57), 79-90.

Βόσκογλου, Μ. & Κόσσυβας, Γ. (2012). Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην κατανόηση των πραγματικών αριθμών. Ευκλείδης γ΄ τεύχος 76, σσ.11–49

Βόσκογλου, Μ. (2011), Υπερβατικοί αριθμοί: Μια «μαύρη τρύπα» στο «σύμπαν» των πραγματικών αριθμών, Ευκλείδης Α΄, 81

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2008). Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου. Βιβλίο μαθητή. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2008). Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου. Βιβλίο καθηγητή. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Δημάκος, Γ., & Δούναβης, Α. (2002). Η ανακάλυψη και ο ρόλος του φαινομένου της Ασσυμετρότητας. Στόχος και Μαθηματική Επιθεώρηση, (58), 69-79.

Καλδρυμίδου, Μ. (2005). Επιστημολογική και διδακτική οργάνωση του μαθηματικού περιεχομένου στα σχολικά βιβλία. Στο: Ε. Σταυρίδου, Β. Βέμη & Θ. Κάββουρα (Επιμ.), Βιβλία, υλικά, λογισμικά για την εκπαίδευση). Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Π.Τ.Δ.Ε.:Βόλος, 145-152.

Κολέζα, Ε. (1997). Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Πρακτικά 14ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, σσ.71–81. Ε.Μ.Ε., Μυτιλήνη (14–16 Νοεμβρίου 1997).

Κολέζα, Ε. (2006). Σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών: Α' Μέρος: Ένα θεωρητικό πλαίσιο αξιολόγησης. Ευκλείδης Γ', 65, σελίδες 3-27. Αθήνα: ΕΜΕ

Κόσυβας, Γ. (2018). αριθμητική προσέγγιση ή γεωμετρική ακρίβεια; αυθόρμητες αντιλήψεις δωδεκάχρονων που αγγίζουν την αρρητότητα. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (7), 9–48.

Λαμνής, Σ. (2006) «Τα Προ - Ευκλείδεια Μαθηματικά», Επιμ.Κηπουρός Χ. Περιοδικό «Ευκλείδης» Β΄ τ.62

Λεμονίδης, Χ. (2019). ΟΙ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΦΥΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΕΠΙΡΡΟΕΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥΣ. Πρακτικά 2ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Επιστημολογίας. Διδακτική των Επιστημών. Ο εκδημοκρατισμός της γνώσης: γνωστικά τείχη, εκλαΐκευση, προκλήσεις και διαχείριση (σ. 135-144) Καβάλα.

Μουζάλα, Μ. (2018). Αριστοτέλης, Θέων ο Σμυρναίος, Συριανός: μαθηματικοί ἢ μοναδικοί και είδητικοί ἀριθμοί, στο: Μουζάλα (Επιμ.), ΘΕΜΑΤΑ ΟΝΤΟΛΟΓΙΑΣ-ΜΕΤΑΦΥΣΙΚΗΣ, ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΛΟΓΙΚΗΣ, Αθήνα: Gutenberg.

Νεγρεπόντης, Σ. , Φαρμάκη, Β. (2006). «Η «παράλογη» αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις άλλες επιστήμες» Ανακτήθηκε 11/05/22 από: http://thalesandfriends.org/wp-content/uploads/2012/03/efficiency.pdf

Παπασταυρίδης, Σ., Ζαχαριάδης, Θ. Α. Κ., Ευγενία Αξιολόγηση Μπάραλος, Γ., Πολύζος, Γ. Α. Σ., & Ανδρέας Αξιολόγηση Σκούρας, Α. (2016). Οδηγός για τον εκπαιδευτικό: Μαθηματικά (Τάξεις: Α΄, Β΄, Γ΄): Γενικό Λύκειο.

Σκούρας, Θ. (1998). Μετά από τους ρητούς... οι άρρητοι. Μια εναλλακτική πρόταση εισαγωγής. Μαθηματική Επιθεώρηση, (49-50), 219-228.

Σταμάτης, Ε. (1975). Ευκλείδου Γεωμετρία, Στοιχεία, Ι, ΙΙ, ΙΙΙ. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Τράπεζα Θεμάτων (2022). Ανακτήθηκε από:

https://trapeza.iep.edu.gr/public/subjects.php

Τουμάσης, Μ.(1994). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg

ΥΠΑΙΘ (2003). Δ.Ε.Π.Π.Σ. – Α.Π.Σ. ΦΕΚ, τ. Β΄, 303/13-3-2003 Ανακτήθηκε 11/05/22

από:http://ebooks.edu.gr/info/newps/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC%20%E2%80%94%20%CE%93%CF%85%CE%BC%CE%BD%CE%AC%CF%83%CE%B9%CE%BF.pdf

Ξενόγλωσση

Apple, M. W. (1992). The text and cultural politics. Educational researcher, 21(7), 4-19.

Arcavi, A., Bruckheimer, M. & Ben-Zvi, R. (1987). History of mathematics for teachers: The case of irrational numbers. For the Learning of Mathematics, 7 (2), 18–23.

Artigue, M., & Winsløw, C. (2010). International comparative studies on mathematics education: A viewpoint from the anthropological theory of didactics. *Recherches en didactique des mathématiques*, *30*(1), 47-82.

Barbé, J., M. Bosch, L. Espinoza and J. Gascón. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions in Spanish high schools. Educational Studies in Mathematics 59: 235-268.

Bloom B. S. (1956). Taxonomy of Educational Objectives, Handbook I: The ognitive Domain. New York: David McKay Co Inc.

Bronner, A. (1997). Les rapports d'enseignants de troisième et de seconde aux objet nombre réel» et « racine carrée ». Recherches en Didactique des Mathématiques 17, n. 3: 55-80.

Brunner, E., & Reusser, K. (2019). Type of mathematical proof: personal preference or adaptive teaching behavior?. *ZDM*, *51*(5), 747-758.

Burton, D. M. (2011). The history of mathematics: An introduction. New York: McGraw-Hill.

Chaitidou, M., Spyrtou, A., Kariotoglou, P. (2017). Developing Pedagogical Content Knowledge (PCK) in primary teachers: The introduction of an explicit PCK cource. In D. M. Kakana & P. Manoli (Eds.), Digital Proceedings of the 3rd International Symposium on New Issues on Teacher Education-ISNITE, 2015, (pp. 403-411). Volos: University of Thessaly.

Chang, C. C., & Silalahi, S. M. (2017). A review and content analysis of mathematics textbooks in educational research. *Problems of Education in the 21st Century*, *75*(3), 235.

Chevallard, Y. (1992). A theoretical approach to curricula. *Journal fuer Mathematik-didaktik*, *13*(2), 215-230.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques 19, n. 2: 221 266.

Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: An attempt at a principled approach. *Hiroshima journal of mathematics education*, *12*, 71-114.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Kim, S. (2015). What is a theory according to the anthropological theory of the didactic?. In *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2614-2620).

Chrystal, G. (1889). *Algebra, An elementary text-book, part I.* A. & C. Black.

Cochran, K. F., DeRuiter, J. A., & King, R. A. (1993). Pedagogical content knowing: An integrative model for teacher preparation. *Journal of Teacher Education*, *44*(4), 263-272.

Conway J. H. (2006). *The power of mathematics*. In Power (A. Blackwell and D. MacKay, editors), Darwin College Lectures 16, Cambridge University Press.

Conway J. H. & Guy R. K., (1996). *The Book of Numbers,* Copernicus.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1986). 'On the Aesthetics of Mathematical Thought', *For the Learning of Mathematics*, 6 (1), 2–10.

Feldman, N. (2000). Αλγεβρικοί και υπερβατικοί αριθμοί. *Quantum, 7*(5), 18-22.

Fischbein, E. (1994). The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles, in Proceedings of PME-XVIII, Lisbon, 2, 352–359.

Fischbein, E., Jehiam, R. & Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics, 29*(1), 29-44.

Fowler, D. (1999). The Story of the discovery of incommensurability. Στο D. Fowler, The Mathematics of Platos Academy (σσ. 356-401). Oxford: Clarendon Press.

Garcia, F. J., Pérez, J. G., Higueras, L. R., & Casabó, M. B. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM, 38*(3), 226-246.

Gascón, J., Nicolás, P. (2022). ATD on Relationships Between Research and Teaching. The Case of a Didactic Problem Concerning Real Numbers. In: *et al.* Advances in the Anthropological Theory of the Didactic. Birkhäuser, Cham

GONÇALVES, C. H. B., & Possani, C. (2010). Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia antiga. *Matemática Universitária*, (47), 16-24.

González-Martín, A. S., Giraldo, V., & Souto, A. M. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: an institutional analysis of textbooks. *Research in Mathematics Education, 15*(3), 230-248.

González, A. S. (2020). La introducción de los números reales en la enseñanza secundaria: un análisis institucional de libros de texto. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 105*, 7-24.

Hardy, G. H. (1940). A mathematician's apology. Cambridge University Press.

Harel, G. (2000). Advanced mathematical thinking across the grades. Paper presented at the *22nd annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* – North American Chapter. Tucson, AZ.

Heath, T. (1928). A history of Greek Mathematics. Cambridge: Cambridge.

Henry, M. (2006). Διδακτική των Μαθηματικών, μτφρ. Γ. Κοντογιάννης, Γ. Πρίντεζης, Π. Σπύρου. Αθήνα: ΕΚΠΑ, Τμήμα Μαθηματικών.

Katz, V.J. (2008). A History of Mathematics: An Introduction. New York: Harper Collins.

Kieran, C., Doorman, M., & Otani, M. (2015). Frameworks and principles for task design. In A. Watson & M. Otani (Eds.), *Task design in mathematics education.* (pp. 19–81). Springer.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior* 23, 405-427.

Miller, S. J., & Montague, D. (2009). Irrationality from the book. *arXiv preprint arXiv: 0909.4913*.

Otto, Charlotte A., and Susan A. Everett.(2013). An Instructional Strategy to Introduce Pedagogical Content Knowledge Using Venn Diagrams. *Journal of Science Teacher Education 24*(2), 391–403.

Pommer, W.M.(2013). Irrational Numbers A Constructive approach at Elementary and High School. Author's Edition.

Putra, Z. H., & Witri, G. (2017). Anthropological theory of the didactic (ATD) a new research perspectİve on didactic mathematics in indonesia. *Jurnal Pendidikan Guru*, *2*(1), 221-227.

Putra, Z. H. (2019). Elementary teachers' knowledge on fraction multiplication: An anthropological theory of the didactic approach. *Journal of teaching and learning in elementary education (JTLEE)*, *2*(1), 47-52.

Rezat, S., & Sträßer, R. (2015). Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. Nordic Studies in Mathematics Education, 20(3-4), 247-266.

Rizos, I., & Adam, M. (2022). Mathematics students' conceptions and reactions to questions concerning the nature of rational and irrational numbers. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *17*(3), em0686.

Russell, B. (1903). The principles of mathematics. Cambridge :at the university press.

Russell, B. (1910). Philosophical Essays: The Study of Mathematics.

Shinno, Y., & Mizoguchi, T. (2021). Theoretical approaches to teachers' lesson designs involving the adaptation of mathematics textbooks: two cases from kyouzai kenkyuu in Japan. *ZDM–Mathematics Education*, *53*(6), 1387-1402.

ανακτήθηκε 15/5/2022 από: https://people.umass.edu/klement/pom/

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *In Educational Researcher*, *15*(2), 4 – 14.

Sierpinska, A. (2019). Materials for teaching a course on research in mathematics education about students' difficulties in mathematics. Retrieved from Academia.edu:Mhttps://www.academia.edu/39941494/Materials_for_teaching_a_course_on_research_in_mathematics_education_about_students_difficulties_in_mathematics.

Sierpinska, A. (2003). Visualization is in the mind of the beholder. *New Zealand Journal of Mathematics*, *32*(1), 173-194.

Sirotic, N. & Zazkis, R. (2007a). Irrational numbers: the gap between formal and intuitive knowledge, Educational Studies in Mathematics 65, 49–76.

Sirotic, N. & Zazkis, R. (2007b). Irrational numbers on a number line – Where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(4), 477-488.

Souto, A. M. (2010). Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica. Master Thesis, Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Spivak, M. (1991). Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning*, *11*(4), 258-288.

Stylianides, A. J., **Komatsu, K., Weber, K., & Stylianides, G. J. (2022).** Teaching and learning authentic mathematics: the case of proving. In M. Danesi (Ed.), *Handbook of Cognitive Mathematics*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-44982-7_9-1

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2022). Introducing students and prospective teachers to the notion of proof in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, *66*, 100957. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100957

Stylianides, G. J. (2014). Textbook analyses on reasoning-and-proving: Significance and methodological challenges. *International Journal of Educational Research*, *64*, 63-70.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 38, 289–321.

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. For the Learning of Mathematics, 28(1), 9–16

Takeuchi, H., & Shinno, Y. (2020). Comparing the lower secondary textbooks of Japan and England: A praxeological analysis of symmetry and transformations in geometry.*International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(4), 791-810.

Tall, D. O., (1979).'Cognitive aspects of proof, with special reference to the irrationality of 2,' *Proceedings of PME 3*, Warwick, 203–205.

Thompson, D. R., Senk, S. L., & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. Journal for Research in Mathematics Education, 43(3), 253-295.

Voskoglou, M., & Kosyvas, G. (2012). Analyzing students' difficulties in understanding real numbers. *REDIMAT*, *1*(3), 301-226.

Voskoglou, M. G., & Kosyvas, G. (2011). A study on the comprehension of irrational numbers. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, *21*, 127-141.

Vygotsky, L. S., & Cole, M. (1978). Mind in society: Development of higher psychological processes. Harvard university press.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. Educational Studies in Mathematics, 48, 101–119.

Whitehead, A. N., & Russell, B. (1910). Principia Mathematica Vol. I.

Wijayanti, D., & Aufa, D. N. (2020, March). Picturing Textbook on Exponent Equations Based on Praxeology Organization. In *2nd Social and Humaniora Research Symposium (SoRes 2019)* (pp. 494-498). Atlantis Press.

Wittgenstein, L. (1978). Tractatus logico-philosophicus (1921). Αθήνα: Παπαζήση.

Zhang, D., & Qi, C. (2019). Reasoning and proof in eighth-grade mathematics textbooks in China. *International Journal of Educational Research*, *98*, 77-90.