ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Μαθηματική Εκπαίδευση Α' Ηλικιακού Κύκλου (5– 12 χρονών)

<u>Διπλωματική Εργασία</u>

«Μαθηματική Γνώση για τη Διδασκαλία εκπαιδευτικών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης για τη Διαίρεση Κλασμάτων»

ΠΑΥΛΙΔΟΥ ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ (1068)

Θεσσαλονίκη, 2023

«Μαθηματική Γνώση για τη Διδασκαλία εκπαιδευτικών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης για τη Διαίρεση Κλασμάτων»

ΠΑΥΛΙΔΟΥ ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Βαμβακούση Ξένια, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Εξεταστές: Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Χρήστου Κωνσταντίνος, Επίκουρος Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Η παρούσα διπλωματική εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Διατμηματικού – Διαπανεπιστημιακού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτική των Μαθηματικών» του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης της Παιδαγωγικής Σχολής του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας.

Φύλλο Εξέτασης

1. Επόπτης: ____

   Βαθμός: ______________

   Υπογραφή: Ημερομηνία:

2. Δεύτερος Βαθμολογητής: ____

   Βαθμός: ______________

   Υπογραφή: Ημερομηνία:

3. Τρίτος Βαθμολογητής: ____

   Βαθμός: ______________

   Υπογραφή: Ημερομηνία:

Γενικός Βαθμός: _____________________

Η συγγραφέας ____________________________________ βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος έργου είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας και ότι έχει γίνει η κατάλληλη αναφορά στις εργασίες τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

Υπογραφή:

Ημερομηνία:

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτρια της διπλωματικής εργασίας μου κα Ξένια Βαμβακούση, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων για τις συμβουλές, τις γνώσεις που μου προσέφερε και την καθοδήγησή της προκειμένου να διεξαχθεί επιτυχώς αυτή η έρευνα. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κυρίους Χαράλαμπο Λεμονίδη, Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας και Χρήστου Κωνσταντίνο, Επίκουρο Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών, του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας, για τις γνώσεις που μου προσέφεραν κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών και για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή μου. Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στους συναδέλφους δάσκαλους που δέχτηκαν να μου παραχωρήσουν τη συνέντευξη και να μοιραστούν τις εμπειρίες τους μαζί μου, καθώς επίσης και στην οικογένειά μου που με στήριξε σε αυτήν μου την προσπάθεια.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μια ποιοτική έρευνα με στόχο τη διερεύνηση της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία των εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης για τη διαίρεση κλασμάτων. Η έρευνα διεξήχθη σε 13 εν ενεργεία εκπαιδευτικούς χρησιμοποιώντας ημι- δομημένες συνεντεύξεις, οι οποίες περιείχαν επτά υποθετικά σενάρια τάξης που είτε προήλθαν από τη βιβλιογραφία, είτε κατασκευάστηκαν για τις ανάγκες της έρευνας. Ειδικότερα, η έρευνα διερεύνησε την Κοινή Γνώση Περιεχομένου των εκπαιδευτικών μέσω της αξιολόγησης απαντήσεων υποθετικών μαθητών και την Εξειδικευμένη Γνώση του Περιεχομένου μέσω της κατασκευής προβλημάτων και αναπαραστάσεων για τη διαίρεση κλασμάτων, καθώς και την εξήγηση του παραδοσιακού αλγορίθμου «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω». Τέλος, διερευνήθηκε η Γνώση του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας, μέσω του αιτήματος για ανατροφοδότηση. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι κατά πλειονότητα οι εκπαιδευτικοί αξιολογούν σωστά τις απαντήσεις των μαθητών, ιδιαίτερα όταν πρόκειται για διαδικαστικά λάθη (Κοινή Γνώση Περιεχομένου). Επιπλέον, φάνηκε ότι ενώ προβλέπουν και εντοπίζουν τα λάθη των μαθητών, αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην εξήγηση του τρόπου σκέψης τους (Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών) και η ανατροφοδότηση που επιλέγουν να δώσουν έχει κυρίως διαδικαστικό χαρακτήρα και δεν εξυπηρετεί την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας (Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας). Σχετικά με την Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου, η πλειονότητα των συμμετεχόντων εμφάνισε αδυναμίες ή δεν κατάφερε να κατασκευάσει προβλήματα και εικονικές αναπαραστάσεις προκειμένου να νοηματοδοτήσουν μια πράξη διαίρεσης κλασμάτων. Επιπλέον, παρά την ευχέρεια που επέδειξαν για τον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω», φάνηκε να μη γνωρίζουν, αλλά και να μην μπορούν να αξιολογήσουν εναλλακτικές μεθόδους υπολογισμού ενός πηλίκου κλασμάτων. Τέλος, η εξήγηση του αλγορίθμου, η οποία απαιτεί κατανόηση της αντίστροφης σχέσης μεταξύ του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, αλλά και της έννοιας του «αντίστροφου αριθμού» δεν ήταν εφικτή για τους συμμετέχοντες, με μία εξαίρεση. Συνολικά, τα αποτελέσματα αναδεικνύουν περιορισμούς σε κάθε μία από τις διαστάσεις της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία που διερευνήθηκαν, αλλά και στο συνδυασμό τους.

Λέξεις κλειδιά: γνώση εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία, διαίρεση κλασμάτων, αλγόριθμος «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω», «διπλή αντιστροφή»

Abstract

In this paper, a qualitative research study is presented with the aim of investigating the Mathematical Knowledge for Teaching of primary school teachers on the division of fractions. The research was conducted on 13 in service teachers using semi-structured interviews, comprising seven hypothetical teaching scenarios that were either derived from the literature or constructed for the purposes of the study. Specifically, the study explored Common Content Knowledge via teachers' assessment of students' responses; Specialized Content Knowledge through the request for posing related problems, constructing representations, and explaining the "invert and multiply" algorithm; Knowledge of Content and Students through teachers' explanations for student errors; and Knowledge of Content and Teaching through teachers' feedback to the hypothetical students. The findings point to limitations regarding these components of Content Knowledge and Pedagogical Content Knowledge. The results showed that for the most part the teachers evaluate the students' answers correctly, mostly with respect to procedural errors (Common Content Knowledge).. However, they face difficulties in explaining students' way of thinking (Content and Student Knowledge) and the feedback they choose to give is mainly procedural in nature and does not support students' conceptual understanding of fraction division (Content and Teaching Knowledge). Regarding Specialized Content Knowledge, the majority of teachers faced great difficulty in posing word problem as well as to construct representations for fraction division. In addition, although they all knew the "invert and multiply" algorithm, the majority were unaware of alternatives methods, and were not able to evaluate them. Finally, the participants, with one exception were not able to explain the "invert and multiply" algorithm. Taken together, the findings indicate limitations across all the components of Mathematical Knowledge for Teaching that were investigated, as well as in their combination.

Key Words: knowledge for teaching of primary school teachers, fraction division, "invert and multiply" algorithm, "double inversion"

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μια από τις βασικές αρχές των σχολικών μαθηματικών είναι η αρχή που προβλέπει ότι οι μαθητές και οι μαθήτριες πρέπει να μάθουν μαθηματικά μέσω της κατανόησης, οικοδομώντας ενεργά την καινούργια γνώση από εμπειρίες και προηγούμενες γνώσεις (NCTM, 2000, σελ 20, στο Van de Walle, 2007). Τα μαθηματικά σήμερα απαιτούν όχι μόνο υπολογιστικές ικανότητες αλλά και τη δυνατότητα να σκέφτεται κανείς με μαθηματικό τρόπο. Καθώς σκοπός είναι ο κάθε μαθητής να φτάσει στην κατανόηση των μαθηματικών ιδεών, το ενδιαφέρον μας πρέπει να εστιάσει στους παράγοντες που συντελούν σε αυτή την επίτευξη.

Αναμφισβήτητα, ο εκπαιδευτικός είναι από τους πιο σημαντικούς συντελεστές που επηρεάζουν και δομούν τη διαδικασία της μάθησης τόσο σχετικά με το γνωστικό αντικείμενο που πραγματεύεται όσο και με την εμπλοκή των μαθητών σε αυτήν. Ο ρόλος του είναι να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν το αντικείμενο διδασκαλίας και να θέλουν να συμμετάσχουν στη διδασκαλία. Για να το καταφέρει αυτό πρέπει να έχει βαθιά γνώση του αντικειμένου ή αλλιώς βαθιά Γνώση Περιεχομένου, όπως έχει οριστεί στη βιβλιογραφία. Δεν αρκεί μόνο η μαθηματική γνώση για το εκάστοτε αντικείμενο αλλά και η γνώση για το πώς θα δομήσει τη διδασκαλία του (Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας) προκειμένου να είναι αποτελεσματική. Είναι εμφανής η άμεση αλληλεπίδρασή τους. Έρευνες έχουν επισημάνει πως αρκετοί εκπαιδευτικοί ενώ γνώριζαν επαρκώς το μαθηματικό αντικείμενο που δίδασκαν, αντιμετώπιζαν αρκετές δυσκολίες στη διδασκαλία του που αφορούσαν την περιγραφή διαδικασιών, την ερμηνεία και επεξήγηση ερωτήσεων των μαθητών, τη χρήση αναπαραστατικών μέσων και την προσέγγιση με ποικίλους τρόπους. Αφορμώμενη από αυτά τα ευρήματα, η παρούσα μελέτη επιχειρεί να διερευνήσει τις μαθηματικές γνώσεις για τη διδασκαλία που κατέχουν οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με τη διαίρεση κλασμάτων.

Η γνώση για τα κλάσματα αποτελεί προγνωστικό παράγοντα για την ικανοποιητική πορεία στα μαθηματικά στη συνέχεια της σχολικής ζωής ενός μαθητή. Η κατανόηση αυτών δεν είναι απαραίτητη μόνο για τα μαθηματικά αλλά για ένα ευρύ φάσμα επαγγελμάτων και επιστημών, για τη τεχνολογία και τη μηχανική (Siegler and Lortie-Forgues, 2015). Εδώ και αρκετές δεκαετίες ο τομέας της έρευνας ασχολείται συστηματικά με τη μαθηματική ενότητα των κλασμάτων τόσο για το σημαντικό ρόλο τους όσο και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν και δάσκαλοι κατά την ενασχόλησή τους με αυτά. Οι δυσκολίες αυτές είναι εντονότερες όταν πρόκειται για αριθμητικές πράξεις με κλάσματα και ειδικότερα για την πράξη της διαίρεσης.

Η διαίρεση κλασμάτων συνδυάζει δύο από τις πιο δύσκολες έννοιες στα μαθηματικά του Δημοτικού. Αρχικά, η διαίρεση θεωρείται η πιο απαιτητική και δυσνόητη από τις υπόλοιπες αριθμητικές πράξεις, ακόμα και με φυσικούς αριθμούς, ενώ την έννοια του κλάσματος περιβάλλουν πολλές παρανοήσεις που πηγάζουν από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού και των διαισθητικών μοντέλων που σχηματίζονται για κάθε πράξη. Ωστόσο, η έννοια του κλάσματος αποτελεί μία από τις βασικότερες μαθηματικές έννοιες και η κατανόησή της απαραίτητη για μαθηματική πορεία κάθε μαθητή.

Έρευνες έχουν δείξει πως η διδασκαλία της διαίρεσης κλασμάτων βασίζεται στη διαδικαστική γνώση, στην απομνημόνευση του παραδοσιακού αλγορίθμου «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» (Α&Π), αφιερώνοντας λιγότερο χρόνο και προσοχή στην κατανόηση της έννοιας. Δεν γίνονται προσπάθειες να ερμηνευτούν η προέλευση και η δομή του αλγορίθμου προκειμένου να αποκτήσει νόημα για τους μαθητές. Αυτή η τάση δεν είναι ανεξάρτητη από την ελλιπής εννοιολογική γνώση που διαθέτουν οι εκπαιδευτικοί για το θέμα αυτό και η οποία επιδρά στις πρακτικές που εφαρμόζουν στη διδασκαλία. Δηλαδή, αν χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις και παραδείγματα, πώς ερμηνεύουν του ορισμούς και τις διαδικασίες και αν συνδέουν τις μαθηματικές ενότητες μεταξύ τους. Η βιβλιογραφία αναφέρει ότι πολλές φορές ενώ απαντούν σωστά σε μαθηματικά προβλήματα διαίρεσης (Κοινή Γνώση Περιεχομένου) δυσκολεύονται να περιγράψουν και να εξηγήσουν τις διαδικασίες των αλγορίθμων και να απαντήσουν στα ερωτήματα των μαθητών και να δώσουν την κατάλληλη ανατροφοδότηση στα λάθη τους (Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου). Οι μέχρι τώρα έρευνες εστίασαν στην εκτέλεση πράξεων διαίρεσης και στην επίλυση ή και κατασκευή προβλημάτων με δοσμένη διαίρεση. Ωστόσο, τα ευρήματα για τις προσεγγίσεις διδασκαλίας της διαίρεσης κλασμάτων και τις ποικίλες μεθόδους εκτέλεσης της πράξης παραμένουν περιορισμένα.

Η παρούσα μελέτη επιχειρεί να ερευνήσει ποιες μαθηματικές γνώσεις διαθέτουν οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης για τη διδασκαλία της διαίρεσης κλασμάτων μεταθέτοντας το κέντρο προσοχής κυρίως στο νόημα της διαίρεσης, στην εξήγηση των διαδικασιών επίλυσης που ακολουθούνται, στη χρήση αναπαραστατικών μέσων και στην επιλογή της κατάλληλης ανατροφοδότησης. Η έρευνα διεξήχθη με ημι-δομημένες συνεντεύξεις σε μορφή υποθετικών σεναρίων τάξης σε εν ενεργεία δασκάλους της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, τα οποία διερευνούσαν πτυχές της μαθηματικής γνώσης (Κοινή Γνώση Περιεχομένου, Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου και Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών).

Η εργασία αποτελείται από έξι κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο αναπτύσσεται το θεωρητικό υπόβαθρο στο οποίο βασίστηκε η έρευνα και αφορά τα διάφορα είδη γνώσης που είναι απαραίτητα για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Στο δεύτερο κεφάλαιο προσεγγίζεται η έννοια της διαίρεσης παρουσιάζοντας τα μοντέλα ερμηνείας της, τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν μαθητές και δάσκαλοι και το «πακέτο γνώσης» που πρέπει να διαθέτει ένας εκπαιδευτικός για την αποτελεσματική διδασκαλία της διαίρεσης κλασμάτων. Επίσης, παρουσιάζονται τα ερευνητικά ευρήματα για τις γνώσεις των εκπαιδευτικών. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται ορισμένες προσεγγίσεις για τη διδασκαλία της διαίρεσης κλασμάτων και προσεγγίσεις για την εξήγηση του αλγορίθμου Α&Π και το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την κριτική αποτίμηση των σχολικών βιβλίων Ε' και Στ' δημοτικού σχετικά με το θέμα που πραγματευόμαστε. Στο τέταρτο κεφάλαιο αναπτύσσεται η μεθοδολογία της έρευνας ξεκινώντας με το στόχο, τα ερευνητικά ερωτήματα και το δείγμα και στη συνέχεια παρουσιάζεται αναλυτικά το εργαλείο της έρευνας. Στο πέμπτο κεφάλαιο περιλαμβάνονται τα αποτελέσματα της έρευνας και στο έκτο κεφάλαιο αναπτύσσονται τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε. Στο τέλος, η εργασία συνοδεύεται από το παράρτημα στο οποίο παρουσιάζεται το εργαλείο με τη μορφή που δόθηκε στους συμμετέχοντες στην έρευνα εκπαιδευτικούς.

1 Κεφάλαιο 1^{ο}: Γνώση εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία

1.1 Εισαγωγή

Στο πρώτο κεφάλαιο θα παρουσιαστούν κάποιες θεωρητικές προσεγγίσεις σχετικά με τα είδη της γνώσης που είναι απαραίτητα στους εκπαιδευτικούς για τη διδασκαλία γενικά, αλλά και ειδικά για τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Σε όλη την διάρκεια της εκπαιδευτικής έρευνας, έχουν γίνει προσπάθειες για την περιγραφή και την ανάλυση της γνώσης που χρειάζεται ένας εκπαιδευτικός προκειμένου να διδάξει αποτελεσματικά (Shulman,1986, 1987˙ Ball, 1990˙ Fenema & Franke, 1992˙ Olanoff, 2011). Στην παρούσα έρευνα θα παρουσιαστούν τα μοντέλα γνώσης του Shulman (1986) και της Ball και των συνεργατών της (2008) υιοθετώντας το μοντέλο των τελευταίων που είναι προσαρμοσμένο στα μαθηματικά και τις ιδιαιτερότητές τους.

Ο δάσκαλος είναι από τους πιο σημαντικούς παράγοντες που επηρεάζουν τη διαδικασία της μάθησης και όχι μόνο σε ό,τι αφορά τη γνωστική συνιστώσα αλλά και τη συναισθηματική εμπλοκή των μαθητών: δημιουργία στάσεων, αντιλήψεων και πεποιθήσεων απέναντι στα Μαθηματικά (Κολέζα, 2017). «Κανείς δεν αμφισβητεί την ιδέα ότι όσα ξέρει ένας δάσκαλος είναι μια από τις σημαντικότερες επιρροές γι’ αυτό που γίνεται στις τάξεις και τελικά γι’ αυτό που μαθαίνουν οι μαθητές: δεν μπορεί κάποιος να διδάξει αυτό που δεν ξέρει» (Fennema & Franke, 1992).

Εδώ και αρκετές δεκαετίες, αρκετοί ερευνητές μελέτησαν τα χαρακτηριστικά των εκπαιδευτικών και της διδασκαλίας τους, τα οποία καθιστούν τη δεύτερη αποτελεσματική για τους μαθητές. «Η αποτελεσματική διδασκαλία των μαθηματικών απαιτεί κατανόηση του τι γνωρίζουν οι μαθητές και οι μαθήτριες, τι χρειάζεται να μάθουν και στη συνέχεια εξασφάλιση της πρόκλησης και της υποστήριξης για να το μάθουν» (NCTM, 2000).

1.2 Γνώση εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία- Το μοντέλο του Shulman

Ο Shulman (1986) ήταν ο πρώτος που υπογράμμισε την ανάγκη για να ποιοτικό καθορισμό της γνώσης που διαθέτουν οι δάσκαλοι για να διδάξουν Μαθηματικά (Κολέζα, 2017) εισάγοντας δύο βασικές έννοιες που θα επικρατήσουν μέχρι σήμερα στη βιβλιογραφία, τη Γνώση Περιεχομένου και τη Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου. Ο Shulman εντόπισε πως υπήρχε μια μεγάλη έλλειψη στο τότε υπάρχον ερευνητικό έργο που να αφορά τη γνώση εκπαιδευτικών για το ειδικό περιεχόμενο διδασκαλίας καθώς προγενέστερες έρευνες επικεντρωνόντουσαν κυρίως στα χαρακτηριστικά του δασκάλου ή σε πολύ γενικά χαρακτηριστικά της διδασκαλίας (π.χ. την οργάνωση της τάξης). Επισήμανε ότι ένας εκπαιδευτικός προκειμένου να ανταποκριθεί στον ρόλο του, πρέπει να διαθέτει βαθιά γνώση του αντικειμένου.

Η γνώση του περιεχομένου επηρεάζει άμεσα τον τρόπο, τα μέσα και τις πρακτικές της διδασκαλίας, συνεπώς επηρεάζει την παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου. Οι παιδαγωγικές αποφάσεις ενός εκπαιδευτικού (οι ερωτήσεις που θα υποβάλλει, οι πρακτικές που θα εφαρμόσει και οι δραστηριότητες που θα προτείνει) εξαρτώνται από το πόσο καλά γνωρίσει το θέμα που επρόκειτο να διδάξει (Κολέζα, 2017). Έτσι, η μεγάλη ώθηση προς αυτή την κατεύθυνση δόθηκε τη δεκαετία του ‘80, όταν ο Shulman (1986) και η ομάδα του μετατόπισαν το κέντρο της προσοχής στις ειδικές γνώσεις που πρέπει να έχει ο εκπαιδευτικός για το περιεχόμενο που διδάσκει. Επιχείρησαν να προσδιορίσουν και να περιγράψουν τις απαραίτητες γνώσεις και ικανότητες ενός εκπαιδευτικού που καθιστούν μία διδασκαλία αποτελεσματική και τις κατηγοριοποίησαν σε τρεις διαστάσεις, φτιάχνοντας ένα θεωρητικό μοντέλο:

- τη Γνώση του Περιεχομένου (Subject Matter Content Knowledge) (Θ.Γ.Π), που περιλαμβάνει τις γνώσεις για το εκάστοτε επιστημονικό πεδίο και τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται και οργανώνονται οι έννοιες. Ο Shulman, (1986) αναφέρει ότι ο δάσκαλος πρέπει όχι μόνο να κατανοεί αυτό που διδάσκει, αλλά να γνωρίζει και γιατί ισχύει αυτό που διδάσκει, γιατί είναι σημαντικό να διδαχθεί και πως συνδέεται με άλλες έννοιες. Επιπλέον, είναι σημαντικό να αναγνωρίζει γιατί μια συγκεκριμένη θεματική ενότητα έχει κεντρικό ρόλο στο πρόγραμμα σπουδών, ενώ κάποια άλλη λιγότερο σημαντικό.
- την Παιδαγωγική Γνώση του Περιεχομένου (Pedagogical Content Knowledge) (Π.Γ.Π) που συνδυάζει τις γνώσεις του περιεχομένου και της παιδαγωγικής για τον μετασχηματισμό της επιστημονικής γνώσης, σε όσο πιο κατανοητή γίνεται για τους μαθητές. Σύμφωνα με τον Shulman (1986) η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου περιλαμβάνει τις πιο χρήσιμες μορφές αναπαράστασης αυτών των ιδεών, τις πιο ισχυρές αναλογίες, απεικονίσεις, παραδείγματα, εξηγήσεις και επιδείξεις για την κατανόηση συγκεκριμένων θεμάτων, τα πιθανά λάθη και προκαταλήψεις που φέρνουν οι μαθητές και την ικανότητα του εκπαιδευτικού να παίρνει τη σωστή απόφαση για τις κατάλληλες διδακτικές πρακτικές και στρατηγικές.
- τη Γνώση του Αναλυτικού Προγράμματος (Curricular Content Knowledge) (Γ.Α.Π) που περιλαμβάνει όλα τα προγράμματα που έχουν σχεδιαστεί για τη διδασκαλία κάθε μαθήματος για μια συγκεκριμένη βαθμίδα εκπαίδευσης, το εύρος του διαθέσιμου εκπαιδευτικού υλικού και το σύνολο των χαρακτηριστικών που χρησιμεύουν ως ενδείξεις και αντενδείξεις για τη χρήση συγκεκριμένων μαθημάτων ή υλικών προγραμμάτων σε συγκεκριμένες καταστάσεις. Η Κολέζα (2017) επισημαίνει πως η

καλή γνώση του προγράμματος σπουδών μπορεί να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό να αναδιατάξει τις ενότητες ώστε να δημιουργήσει κύκλους ενοτήτων που θα εστιάζουν σε μια «μεγάλη ιδέα» των μαθηματικών.

Αργότερα ο Shulman (1987) επιχείρησε να εμπλουτίσει το αρχικό του μοντέλο προσθέτοντας και κάποια νέα είδη γνώσης που έκρινε εξίσου απαραίτητα για τη διδασκαλία. Έτσι, οι συνιστώσες της Γνώσης Περιεχομένου διαμορφώθηκαν ως εξής:

- Γνώση Περιεχομένου
- Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου
- Γνώση Αναλυτικού Προγράμματος
- Γενική Παιδαγωγική Γνώση: αφορά τη σωστή οργάνωση της τάξης αξιοποιώντας τις κατάλληλες στρατηγικές διαχείρισης
- Γνώση του εκπαιδευτικού πλαισίου: αφορά τις γνώσεις για τον τρόπο λειτουργίας στις ομάδες και στην τάξη, για τη διαχείριση και τη χρηματοδότηση των σχολικών περιφερειών, για τον χαρακτήρα της κοινωνίας και του πολιτισμού.
- Γνώση των μαθητών και των χαρακτηριστικών τους προκειμένου να μπορεί ο εκπαιδευτικός να προσαρμόσει το μάθημα στις ανάγκες τους
- Γνώση των εκπαιδευτικών σκοπών και αξιών, ιστορικών και φιλοσοφικών θεμελίων, αρχές δηλαδή της φιλοσοφίας και ιστορίας της εκπαίδευσης

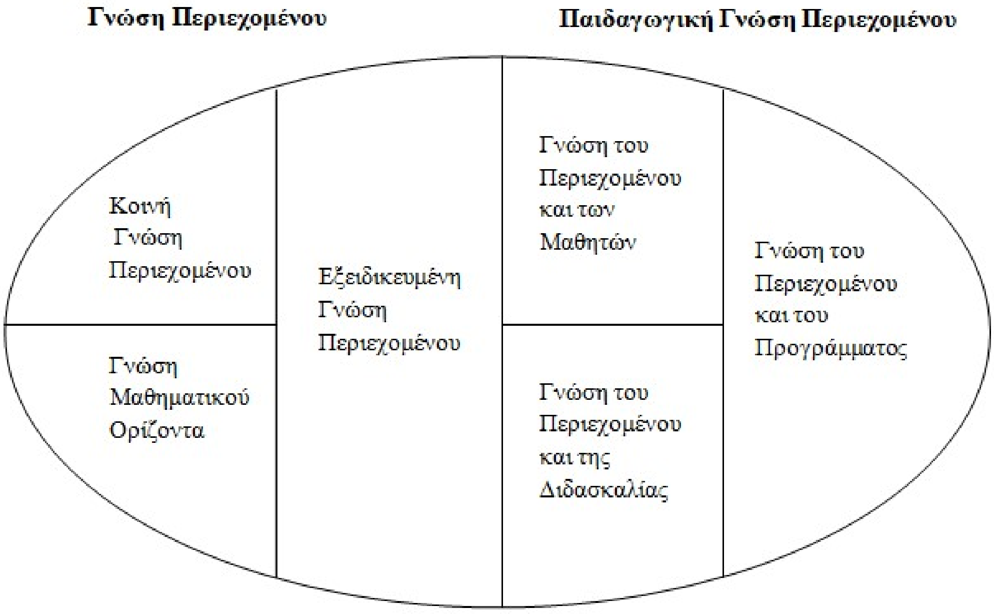
Το μοντέλο του Shulman σήμανε την αρχή για να αναπτυχθούν πολλά μοντέλα για τις συνιστώσες της αποτελεσματικής διδασκαλίας. Στο μοντέλο τους οι Fennema και Franke (1992) για την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου που περιλάμβανε τη Γνώση Περιεχομένου (Content Knowledge), την Παιδαγωγική Γνώση (Pedagogical Knowledge) και την γνώση του τι κατανοούν οι μαθητές και πως μαθαίνουν (Knowledge of Learners Cognitions), επισήμαναν πως η ποιότητα εννοιολογικής κατανόησης που διαθέτει ο κάθε δάσκαλος, επηρεάζει και την ποιότητα διδασκαλίας του. Ένας εκπαιδευτικός δεν αρκεί μόνο να γνωρίζει το αντικείμενο, αλλά πρέπει να γνωρίζει και πώς, με ποια μέσα θα το διδάξει και ποιες δυσκολίες μπορεί να προκύψουν.

1. 3 Μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία- Το μοντέλο της Ball (MKT)

Το έργο του Shulman επηρέασε αρκετά την επιστημονική έρευνα για την διδασκαλία και την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών, κυρίως τη μαθηματική εκπαίδευση και εκείνη των φυσικών επιστημών (Depaepe, Verschaffel, & Kelchtermans, 2013). Κάποια χρόνια αργότερα, η Ball με την ομάδα της (Hill, Rowan & Ball, 2005· Ball, Themes & Phelps, 2008) επισήμαναν ότι ήταν ελάχιστα γνωστό ποιες γνώσεις χρειάζονται οι εκπαιδευτικοί για τη διδασκαλία ειδικά για τα μαθηματικά προκειμένου να είναι αποτελεσματική και να επιτυγχάνεται η κατανόηση του περιεχομένου, εισάγοντας τον όρο *«Μαθηματική Γνώση για τη Διδασκαλία»*(Mathematical Knowledge for Teaching- MKT). Σύμφωνα με τους ίδιους, οι απαιτήσεις μια διδασκαλίας δεν περιλαμβάνουν μόνο την επίλυση προβλημάτων, τον έλεγχο των ασκήσεων των μαθητών και την επίλυση των αποριών τους. Αντίθετα, υποστήριξαν ότι η διδασκαλία είναι μια σύνθετη διαδικασία, η οποία περιλαμβάνει τη λήψη αποφάσεων σχετικά με μια μεγάλη ποικιλία δράσεων. Το ενδιαφέρον τους λοιπόν, εστίασε στην ίδια τη διδασκαλία και όχι στον δάσκαλο καθώς υποστήριξαν ότι ήταν προφανές ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γνωρίζουν τις απαραίτητες μαθηματικές έννοιες, αλλά δεν ήταν σαφές πώς θα μπορούσαν να τις εφαρμόσουν στην πράξη και αν χρειαζόταν να διαθέτουν και άλλες γνώσεις πέρα από αυτές για τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Ξεκινώντας από το μοντέλο του Shulman, αποπειράθηκαν να το προσαρμόσουν ώστε να προσδιορίσουν το φάσμα των απαραίτητων γνώσεων για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Και οι ερευνητές αυτή τόνισαν πως η γνώση των εκπαιδευτικών για τα μαθηματικά κατέχει ουσιώδη ρόλο για την αποτελεσματική διδασκαλία στην τάξη (Ball, Hill, &Bass. 2005).

Στην παρούσα έρευνα υιοθετείται το μοντέλο των Ball et al. (2008), το οποίο αποτελείται από δύο βασικές ενότητες, τη Γνώση Περιεχομένου (Subject Matter Knowledge) και Παιδαγωγική Γνώση του Περιεχομένου (Pedagogical Content Knowledge) (Ball et al., 2008).



Σχήμα 1: Απόδοση στα ελληνικά του σχήματος για τη Μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία (Balletal. 2008, σελ. 403)

Η Γνώση Περιεχομένου περιλαμβάνει τρεις υπο- κατηγορίες. Η Κοινή Γνώση Περιεχομένου (Common Content Knowledge- CCK) που περιλαμβάνει γνώσεις και δεξιότητες μαθηματικών που χρησιμοποιούνται σε πολλά περιβάλλοντα και όχι μόνο στη διδασκαλία τους, για αυτό και χρησιμοποιείται ο όρος «κοινή». Οι δάσκαλοι γνωρίζουν επαρκώς το υλικό τους, χρησιμοποιούν σωστά τις ορολογίες και τους συμβολισμούς και μπορούν να διακρίνουν πότε οι μαθητές τους δίνουν λανθασμένες απαντήσεις και πότε τα σχολικά εγχειρίδια αναφέρουν ανακρίβειες. Στην περίπτωση τις διαίρεσης κλασμάτων, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να εκτελούν σωστά πράξεις διαίρεσης και να επιλύουν προβλήματα, καθώς και να εντοπίζουν τι λάθη κάνουν οι μαθητές όταν διαιρούνε με κλάσματα..Η Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου (Specialized Content Knowledge- SCK) περιλαμβάνει τις γνώσεις που είναι απαραίτητες αποκλειστικά για τη διδασκαλία. Το καθαρά μαθηματικό περιεχόμενο είναι πολύ «συμπυκνωμένο» και η Εξειδικευμένη Γνώση για τη Διδασκαλία αφορά εκείνες τις γνώσεις που απαιτούνται για την «από-συμπύκνωσή» του. Σε αυτό το είδος γνώσης εντάσσεται και η σωστή χρήση της μαθηματικής ορολογίας. Ανάμεσα σε άλλα, οι Ball και συνεργάτες (2008) αναφέρουν ως παράδειγμα τη γνώση για τα διαφορετικά «νοήματα» των αριθμητικών πράξεων. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της διαίρεσης, υπάρχει το μοντέλο της διαίρεσης μέτρησης και αυτό της διαίρεσης μερισμού. Το να έχεις ρητή επίγνωση για τα δύο αυτά μοντέλα δεν είναι απαραίτητο αν θέλεις να λύσεις ένα πρόβλημα. Είναι, όμως απαραίτητο, αν θες να διδάξεις τη διαίρεση. Πρέπει επίσης, να μπορείς να αναγνωρίσεις καταστάσεις στις οποίες ταιριάζει το κάθε μοντέλο και να μπορείς να διατυπώσεις αντίστοιχα προβλήματα. Η επιλογή και χρήση κατάλληλων αναπαραστάσεων για την ερμηνεία μια πράξης διαίρεσης εντάσσεται στο φάσμα της Εξειδικευμένης Γνώσης

Περιεχομένου, όπως εντάσσεται και η ικανότητα να εξηγεί κανείς τους κανόνες και τις διαδικασίες. Ενδιαφέρον είναι ότι οι Ball και οι συνεργάτες της (2008) αναφέρουν τον αλγόριθμο της διαίρεσης κλασμάτων ως ένα παράδειγμα διαδικασίας που απαιτεί Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου για να εξηγηθεί γιατί αντιστρέφουμε και πολλαπλασιάζουμε. Επιπλέον, σύμφωνα με τους ίδιους η Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου είναι, ίσως, η πιο ενδιαφέρουσα προσαρμογή που έκαναν στο μοντέλο του Schulman. Ταυτόχρονα, αυτό το είδος γνώσης είναι αρκετά δύσκολο να οριοθετηθεί.

Η Γνώση του Μαθηματικού Ορίζοντα (Horizon Content Knowledge) αναφέρεται στη γνώση των εκπαιδευτικών για το ευρύτερο πλαίσιο που εντάσσεται το κάθε μαθηματικό αντικείμενο μέσα στο πρόγραμμα σπουδών και στην ικανότητά τους να δημιουργούν συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών περιοχών.

Η Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου αποτελείται εξίσου από τρεις υπό- κατηγορίες. Η Γνώση του Περιεχομένου και των Μαθητών (Knowledge of Content and Student- KCS) αναφέρεται στην ικανότητα του εκπαιδευτικού να κατανοεί και να ερμηνεύει τη μαθηματική σκέψη των μαθητών του και να μπορεί να προβλέψει τις δυσκολίες που θα προκύψουν κατά τη διαπραγμάτευση των εννοιών. Να μπορεί δηλαδή να εντοπίσει την αιτία των λαθών που κάνουν οι μαθητές κατά την εκτέλεση μιας πράξης διαίρεσης και τις παρανοήσεις που έχουν για την ίδια την έννοια. Η Γνώση του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας (Knowledge of Content and Teaching- KCT) σχετίζεται με την επιλογή των κατάλληλων αποφάσεων και υλικών που θα καταστήσουν μια διδασκαλία αποτελεσματική λαμβάνοντας υπόψη το εκάστοτε μαθηματικό αντικείμενο και τα ζητήματα που επηρεάζουν τη μάθηση των μαθητών. Απαιτείται συνδυασμός της Εξειδικευμένης Γνώσης Περιεχομένου και των παιδαγωγικών ζητημάτων. Τέλος, η Γνώση του Περιεχομένου και του Προγράμματος (Knowledge of Content and Curriculum) αναφέρεται στη γνώση του αναλυτικού προγράμματος, στους στόχους και στο σύνολο των διαθέσιμων πόρων (π.χ. δραστηριότητες, εκπαιδευτικά λογισμικά, κλπ).

Το επίπεδο εννοιολογικής κατανόησης των εκπαιδευτικών επηρεάζει τις παιδαγωγικές πρακτικές που χρησιμοποιούν (Shulman, 1987) και την ποιότητα της διδασκαλίας τους, καθώς ο τρόπος με τον οποίο κατανοούν ή όχι τους κανόνες και τους αλγόριθμους διαμορφώνει και τις αντίστοιχες δυνατότητες των μαθητών να συλλάβουν τις έννοιες (Borko et al., 1992). Σε αντίστοιχο συμπέρασμα καταλήγει και η Tirosh (2000) με την έρευνά της, επιβεβαιώνοντας την ισχυρή αλληλεξάρτηση της γνώσης των εκπαιδευτικών, των απόψεών τους και των πρακτικών που εφαρμόζουν. Αν και η Γνώση Περιεχομένου είναι απαραίτητη για την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου, αυτό όμως δεν σημαίνει πως όσοι εκπαιδευτικοί διαθέτουν την πρώτη, έχουν αναπτύξει πλήρως και τη δεύτερη (Depaepe, Torbeyns, Vermeersch, Janssens, Janssen, Kelchtermans, Verschaffel & Dooren, 2015).

Προηγούμενες έρευνες που εξέτασαν τις μαθηματικές γνώσεις των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία κλασμάτων, συμπεριέλαβαν έργα που ήλεγχαν τόσο την Γνώση Περιεχομένου όσο και την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου καθώς βρίσκονται σε άμεση αλληλεπίδραση μεταξύ τους και επιπλέον, τόνισαν την επιρροή των αντιλήψεων και των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών προς τις πρακτικές που εφαρμόζουν στη διδασκαλία (Li & Kulm, 2008· Li & Huang, 2008· Li, Ma, & Pang, 2008). Τα ευρήματα των ερευνών θα παρουσιαστούν στη συνέχεια της εργασίας.

2 Κεφάλαιο 2°: Η Διαίρεση Κλασμάτων

2. 1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό, το κέντρο προσοχής εστιάζεται στην υπό διαπραγμάτευση έννοια. Αρχικά, παρουσιάζονται τα μοντέλα ερμηνείας της διαίρεσης, έπειτα οι δυσκολίες που προκαλεί η διαίρεση κλασμάτων και το «πακέτο γνώσης» που πρέπει να διαθέτει ένας εκπαιδευτικός σύμφωνα με τη Μα (1999). Επιπλέον, το κεφάλαιο περιλαμβάνει τα ευρήματα της βιβλιογραφίας για τις γνώσεις των εκπαιδευτικών για τη διαίρεση κλασμάτων.

Η διαίρεση θεωρείται η πιο περίπλοκη αριθμητική πράξη και τα κλάσματα οι πιο περίπλοκοι αριθμοί για τα μαθηματικά των τάξεων του δημοτικού, για αυτό και βρίσκεται στην κορυφή των ζητημάτων που προκαλούν δυσκολίες, τόσο στους μαθητές, όσο και στους εκπαιδευτικούς (Ma, 1999· Olanoff, 2011). Ωστόσο, πριν την εκμάθηση και την εκτέλεση των αλγορίθμων, κρίνεται αναγκαίο να προσδιοριστεί το νόημα της διαίρεσης, τί σημαίνει διαίρεση και πώς ερμηνεύεται. Η ερμηνεία της εκάστοτε πράξης πηγάζει από το πρόβλημα στο οποίο εμπλέκεται. Έτσι, μέσα από την ενασχόληση με διάφορα προβλήματα διαίρεσης κλασμάτων και τη διερεύνηση στρατηγικών επίλυσής τους μπορούν να δοθούν διάφορες ερμηνείες και φυσικά να εφαρμοστούν διαφορετικές διαδικασίες από τον κλασικό αλγόριθμο.

2. 2 Το νόημα της Διαίρεσης

Το νόημα της διαίρεσης αποδίδεται μέσα από δύο διαφορετικά πλαίσια. Δίνεται είτε σε καθαρά αριθμητικό πλαίσιο μέσω της σχέσης της με άλλες πράξεις, όπως «*η διαίρεση ως επαναλαμβανόμενη αφαίρεση*» ή *«η διαίρεση ως αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού»,* είτε σε πλαίσιο καταστάσεων που αναφέρονται σε ποσότητες και σχέσεις ποσοτήτων (Greer,1992 όπ. αν. στο Κόπτση, Χρήστου & Βαμβακούση, 2022).

Στην πρώτη περίπτωση, η διαίρεση νοηματοδοτείται ως η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού. Αυτή η σχέση έχει δύο (συνδεόμενες, αλλά διακριτές) εκφάνσεις: α) από μια σχέση της μορφής αxβ= γ προκύπτουν δύο ισοδύναμες σχέσεις και, συγκεκριμένα, α= γ/β και β= γ/α, εφόσον α, β ≠0 και β) μια πράξη πολλαπλασιασμού επί β αναιρείται από μια πράξη διαίρεσης με το β, δηλαδή $α x β : β = α$, με β≠0, και αντίστροφα (Βαμβακούση, Κόπτση, Χρήστου & Λεμονίδης, 2022). Κατά τη μετάβαση από τους φυσικούς στους ρητούς αριθμούς, η διαίρεση παύει να θεωρείται απαραίτητη ως αυτόνομη πράξη καθώς μπορεί να αντικατασταθεί από την αντίστροφη πράξη, με τον αντίστροφο του διαιρέτη (Κόπτση, Χρήστου & Βαμβακούση, 2022). Με αυτό το νόημα μπορεί να εξηγηθεί ο τυπικός αλγόριθμος της διαίρεσης («αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω»), όπως αναλύεται σε επόμενη ενότητα (βλ. 3.3).

Στη δεύτερη περίπτωση, το νόημα της διαίρεσης προσδιορίζεται μέσω της πολλαπλασιαστικής κατάστασης στην οποία εμπλέκεται.. Ίσως η πιο βασική διάκριση στο δεύτερο πλαίσιο είναι αυτή μεταξύ *«διαίρεσης μερισμού»* και *«διαίρεσης μέτρησης».* Η πιο τυπική τέτοια πολλαπλασιαστική κατάσταση είναι αυτή των «ισοπληθών ομάδων». Για παράδειγμα, *η δασκάλα είχε 20 μαρκαδόρους και έδωσε 4 στο καθένα από τα 5 παιδιά μιας ομάδας (5 παιδιά x 4 μαρκαδόροι/ανά παιδί = 20 μαρκαδόροι).* Η διαίρεση αποκτά την ερμηνεία του μερισμού αν το ζητούμενο είναι *πόσους μαρκαδόρους πήρε το κάθε παιδί* όπου μοιράζεται το 20 σε 5 ίσα μέρη ή της μέτρησης, αν το ζητούμενο είναι *πόσα παιδιά πήραν μαρκαδόρους* όπου μετριέται πόσες φορές χωράει το 4 στο 20 (Κόπτση, Χρήστου & Βαμβακούση, 2022). Πιο αναλυτικά, στη διαίρεση μέτρησης υπάρχει μια ποσότητα αντικειμένων που είναι μοιρασμένη σε υποσύνολα. Είναι γνωστό πόσα αντικείμενα βρίσκονται σε κάθε υποσύνολο αλλά ζητείται το πλήθος των υποσυνόλων που σχηματίζονται (Greer,1992). Οι αριθμοί που διαιρούνται δείχνουν όμοια πράγματα, επομένως το πηλίκο είναι «καθαρός» αριθμός. Για παράδειγμα, *η Μάρθα έχει 20 καραμέλες και τις βάζει σε δοχεία που χωράνε 5 καραμέλες το καθένα. Πόσα δοχεία θα χρησιμοποιήσει;* Από την άλλη μεριά, στη διαίρεση μερισμού υπάρχει μια ποσότητα αντικειμένων που μοιράζεται σε υποσύνολα και ζητούμενο είναι το πλήθος αντικειμένων του κάθε υποσυνόλου (Greer, 1992). Οι αριθμοί που διαιρούνται δείχνουν ανόμοια πράγματα. Για παράδειγμα, *ο Αντρέας έχει 15 αυτοκόλλητα και θέλει να τα μοιράσει σε τρεις φίλους του. Πόσα αυτοκόλλητα θα πάρει ο καθένας*; Σύμφωνα με τον Van De Walle (2007), στα προβλήματα μερισμού το θεμελιώδης ερώτημα είναι «πόσο είναι το ένα;».

Το μοντέλο μερισμού που, όταν ο διαιρέτης είναι ακέραιος αριθμός, ερμηνεύεται και ως «δίκαιη μοιρασιά» (fair shairing) είναι το παραδοσιακό μοντέλο που χρησιμοποιείται για τη διδασκαλία της διαίρεσης με φυσικούς αριθμούς, με το οποίο έρχονται πρώτα σε επαφή οι μαθητές, για αυτό και οι ερευνητές Fischbein et al. (1985) το ονόμασαν ως πρωταρχικό μοντέλο μερισμού (primitive, partitive model of division). Πρώτος, ο Fischbein (1987) είχε επισημάνει ότι οι μαθητές δημιουργούν διαισθητικά από πολύ νωρίς ορισμένα μοντέλα για κάθε αριθμητική πράξη, συνδέοντας τη διαίρεση με τη δίκαιη μοιρασιά. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να σκέφτονται πρωτίστως με το μοντέλο μερισμού. Ωστόσο, το μοντέλο αυτό διαθέτει ορισμένους περιορισμούς σύμφωνα με τους οποίους, ο διαιρέτης πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός και μικρότερος από τον διαιρετέο και το πηλίκο μικρότερο από τον διαιρετέο (Tirosh, 2000). Γίνεται φανερό λοιπόν, πως η έννοια της δίκαιης μοιρασιάς καταρρέει όταν ο διαιρέτης είναι κλάσμα και μπορεί να προκαλέσει εμπόδιο στην διαίρεση κλασμάτων (Rizvi and Lawson, 2007), γιατί δεν είναι εφικτό να μιλάμε, για παράδειγμα, για το $\frac{1}{3}$ ατόμου (Van De Walle 2007· Gregg &Gregg, 2007· Lo and Luo, 2012) και άρα το μοντέλο μερισμού δεν δύναται να χρησιμοποιείται με την ίδια ερμηνεία στη διαίρεση κλασμάτων. Ωστόσο, ορισμένοι ερευνητές διατηρούν την ονομασία «διαίρεση μερισμού» και σε περιπτώσεις που ο διαιρέτης είναι κλασματικός, τροποποιώντας το νόημα του όρου. Για παράδειγμα, σε καταστάσεις όπου δίνεται μια πληροφορία για την αξία του «μέρους» και ζητείται η αξία του «όλου» θεωρείται ότι αντιστοιχούν σε διαίρεση μερισμού (Ma, 1999· Gregg & Gregg, 2007). Παράδειγμα τέτοιας κατάστασης είναι η εξής «το ένα τρίτο του α είναι 5, πόσο είναι το α;». Ένας τρόπος να εξηγηθεί γιατί αυτή η κατάσταση θεωρείται «μερισμού» είναι να αναπαραστήσει π.χ. με μια ράβδο το άγνωστο α. Τότε, για να αναπαρασταθεί η πληροφορία «το ένα τρίτο του α είναι 5», θα πρέπει η ράβδος να χωριστεί σε 3 ίσα μέρη, με το ένα (άρα και τα υπόλοιπα) μέρη να αντιστοιχούν στο 5. Σε κάθε περίπτωση, δεν πρόκειται ακριβώς για το ίδιο νόημα του «μερισμού» που ισχύει στην περίπτωση της «δίκαιης μοιρασιάς».

Αντιθέτως, το μοντέλο της μέτρησης μπορεί να μεταφραστεί καλύτερα σε διαιρέσεις που εμπλέκονται κλάσματα καθώς διατηρεί το νόημα που έχει στους φυσικούς αριθμούς και ακόμη περισσότερο στις περιπτώσεις που ο διαιρέτης είναι κλάσμα μικρότερο της μονάδας. Ο Λεμονίδης (2016) επισημαίνει πως για την καλύτερη κατανόηση της διαίρεσης κλασμάτων $\frac{α}{β} : \frac{γ}{δ}$ μπορεί αυτή να διατυπωθεί ως η μέτρηση του διαιρετέου $\frac{α}{β}$ με μέτρο τον διαιρέτη $\frac{γ}{δ}$. Δηλαδή πόσες φορές μετράει το μέτρο $\frac{γ}{δ}$ στο μετρούμενο μέγεθος $\frac{α}{β}$ ή πόσες φορές χωράει το $\frac{γ}{δ}$ στο $\frac{α}{β}$. Ορισμένοι ερευνητές συμπεριλαμβάνοντας αυτό το μοντέλο ερμηνείας της διαίρεσης σε εκπαιδευτικά προγράμματα εκπαιδευτικών, διαπίστωσαν πως οι εκπαιδευτικοί βοηθήθηκαν αρκετά στο να κατανοήσουν τη διαίρεση κλασμάτων (Borko et al., 1992· Newton, 2008· Son & Crespo, 2009).

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι ερμηνείες της διαίρεσης ως μέτρηση και ως μερισμός δεν είναι οι μοναδικές. Οι Sinicrope, Mick και Kolb (2002) αναφέρουν επιπλέον α) το μοντέλο του «μοναδιαίου λόγου» (unit rate), όπου διαιρείται ο αριθμητής από τον παρανομαστή, ώστε ο παρανομαστής να γίνει 1. Για παράδειγμα, «ένας εκτυπωτής εκτυπώνει 100 φύλλα σε τρεισήμισι λεπτά, πόσα φύλλα εκτυπώνει σε ένα λεπτό;» (Carvalho and PedrodaPonte, 2019) και β) το μοντέλο του αντίστροφου του Καρτεσιανού γινομένου (inverse of a Cartesian product) στο οποίο ζητείται να βρεθεί η μία διάσταση ενός ορθογωνίου ενώ η άλλη διάσταση και το συνολικό εμβαδόν είναι γνωστά.

2. 3 Τα αίτια δυσκολιών στη Διαίρεση Κλασμάτων

Η διαίρεση κλασμάτων συνδυάζει δύο από τις πιο δυσνόητες, για τα σχολικά μαθηματικά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, μαθηματικές έννοιες, αυτήν της διαίρεσης και αυτήν του κλάσματος. Η διαίρεση φαίνεται πως δυσκολεύει μαθητές και εκπαιδευτικούς, ενώ υπάρχει πλήθος ερευνητικών δεδομένων που τεκμηριώνει τη δυσκολία στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος (Lamon, 2001). Ένας μεγάλος παράγοντας δυσκολίας είναι η συνθετότητα της έννοιας του κλάσματος, αλλά και της διαίρεσης. Άλλες δυσκολίες προκύπτουν από τον τρόπο που διδάσκεται η διαίρεση και τα κλάσματα στο σχολείο, καθώς συγκροτούν τη βάση της προϋπάρχουσας γνώσης, στη βάση της οποίας χτίζουν τα υποκείμενα της μάθησης τη γνώση τους για τη διαίρεση κλασμάτων..

Ορισμένες από τις παρανοήσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών πηγάζουν από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού (Christou, 2015· Vamvakoussi, Van Dooren, & Verschaffel, 2012), την αδυναμία δηλαδή να διακρίνουν τη διαφορετική μαθηματική φύση των φυσικών και των ρητών αριθμών. Η διαίρεση με φυσικούς αριθμούς θέτει ως περιορισμό ο διαιρέτης να είναι ακέραιος και μικρότερος του διαιρετέου, αυτό όμως δεν ισχύει στους ρητούς αριθμούς. Επιπλέον, σε συνδυασμό με τα διαισθητικά μοντέλα που διαμορφώνονται για κάθε πράξη, σχετικά με τη διαίρεση ως μια πράξη που πάντα μικραίνει (Fischbein, 1978) στους φυσικούς αριθμούς, δεν αποδέχονται ένα πηλίκο που είναι μεγαλύτερο γιατί θεωρούν πως έχουν κάνει λάθος ή εφαρμόζουν πολλαπλασιασμό αντί για διαίρεση σε κάποιο πρόβλημα, για τον ίδιο λόγο (Borko et al, 1992· Ma, 1999· Ball, 1990· Unlu & Ertekin, 2012). Το λάθος αυτό στη βιβλιογραφία διατυπώνεται και ως «λάθος στην κατεύθυνση επίδρασης της πράξης», όπου εξαιτίας ελλιπής εννοιολογικής κατανόησης της πράξης της διαίρεσης στο πλαίσιο των ρητών, δεν γίνεται αντιληπτό ότι το αποτέλεσμα καθορίζεται από τους αριθμούς που εμπλέκονται (Siegler and Lortie-Forgues, 2015).

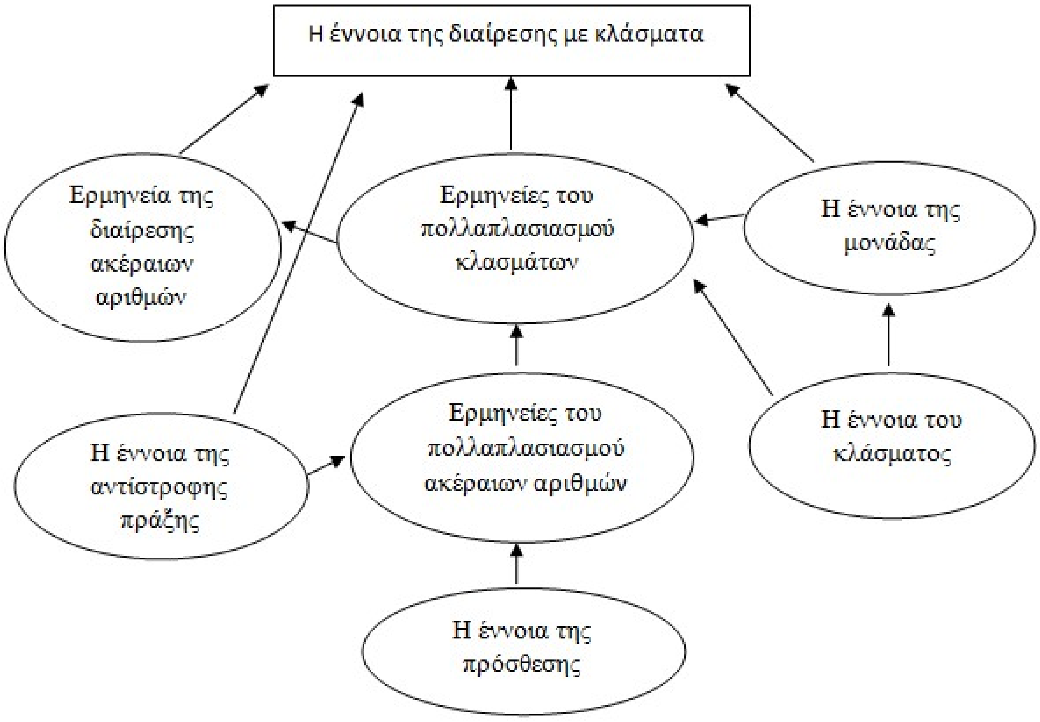
Σύμφωνα με την Tirosh (2000), ορισμένα λάθη οφείλονται στην ερμηνεία της διαίρεσης κλασμάτων με το πρωταρχικό μοντέλο μερισμού που όπως προαναφέρθηκε, δημιουργεί εννοιολογικά εμπόδια. Κάποια άλλα λάθη που αφορούν τη λάθος εκτέλεση των βημάτων του τυπικού αλγόριθμου «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω», οφείλονται στη απομνημόνευσή του και στην έλλειψη εννοιολογικής κατανόησής του. Η ίδια η φύση του αλγόριθμου προκαλεί δυσκολίες για την κατανόηση και τη διδασκαλία του (Borko et al, 1992).

Η Tirosh (2000) επισήμανε ότι ο αλγόριθμος της διαίρεσης κλασμάτων θεωρείται αυτός που είναι λιγότερο κατανοητός καθώς παρουσιάζεται στους μαθητές ως μια σειρά βημάτων που πρέπει να συγκρατήσουν στο μυαλό τους προκειμένου να εκτελεστεί σωστά η πράξη και γι' αυτό εκτελείται μηχανικά από τους μαθητές. Έτσι, οι μαθητές συχνά μπερδεύουν τα βήματα του αλγόριθμου και αντιστρέφουν τον διαιρέτη αντί για τον διαιρετέο ή και τους δύο και έπειτα πολλαπλασιάζουν. Σύμφωνος με την Tirosh, υπήρξε και ο Van De Walle (2007) που τον χαρακτήρισε τον πιο μυστηριώδη από όλους τους κανόνες στα μαθηματικά του Δημοτικού. Είναι αρκετά περίπλοκος και παρουσιάζεται στους μαθητές με «αδιαφανή» τρόπο καθιστώντας τον μη κατανοητό, προκαλώντας σύγχυση και λάθη κυρίως όταν ο διαιρέτης είναι μικρότερος της μονάδας (Siegler and Lortie-Forgues, 2015). Το ερώτημα που τίθεται είναι πως θα μπορούσε να διδαχτεί ο τυπικός αλγόριθμος στους μαθητές προκειμένου να αποκτήσει ουσία και λογική αλληλουχία.

Επιπλέον, ένας ακόμη παράγοντας που προκαλεί δυσκολίες είναι το υπόλοιπο της ακέραιας διαίρεσης και τι προσδιορίζει αυτός ο αριθμός. Για παράδειγμα, στη διαίρεση του ¾ με το ½ το ζητούμενο είναι πόσα ½ υπάρχουν μέσα στο ¾. Το ½ χωράει μία φορά και κατά ένα *μέρος **του,*** ακόμα στο ¾ . Στο σημείο αυτό, .πρέπει να προσδιοριστεί ποιο είναι αυτό το *μέρος του* ½ (δηλαδή, του διαιρέτη). Μια συχνή απάντηση είναι «1//4», που προκύπτει όταν η αντίστοιχη ποσότητα εκφραστεί ως μέρος της μονάδας (δηλαδή, του διαιρετέου). Επομένως, η σωστή απάντηση στη διαίρεση ¾ : ½ είναι 1 ½ (Olanoff, 2011). Είναι κρίσιμο να κατανοηθεί πως το πηλίκο έχει μονάδα αναφοράς το μέγεθος του διαιρέτη (Klemer et al., 2017).

2. 4 «Πακέτο γνώσης» για την κατανόηση της Διαίρεσης Κλασμάτων- Το μοντέλο της Ma

Ειδικεύοντας τις γνώσεις στη διαίρεση κλασμάτων που πραγματεύεται η παρούσα εργασία, η Ma (1999) βασιζόμενη σε συνεντεύξεις με Αμερικανούς και Κινέζους δασκάλους, συγκέντρωσε όλες τις απαραίτητες γνώσεις σε ένα «πακέτο γνώσης» που πρέπει να διαθέτουν οι εκπαιδευτικοί προκειμένου να διδάξουν τη διαίρεση κλασμάτων. Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, η βαθιά εννοιολογική γνώση για τη διαίρεση κλασμάτων δομείται σε ένα δίκτυο προηγούμενων γνώσεων. Η ίδια γνώση όμως, αυτή παίζει σημαντικό ρόλο στην ενίσχυση και εμβάθυνση των προηγουμένων. Έτσι, η Ma συγκρότησε όλες τις γνώσεις σε ένα «πακέτο». Αλληλοσυνδεόμενες με τη διαίρεση κλασμάτων είναι η έννοια της μονάδας, η σημασία του πολλαπλασιασμού με κλάσματα, η σημασία της διαίρεσης ακέραιων αριθμών και η έννοια των αντίστροφων πράξεων πολλαπλασιασμού- διαίρεσης. Αυτές οι γνώσεις, με τη σειρά τους, δομούνται στις πιο βασικές γνώσεις, δηλαδή στην έννοια των κλασμάτων και στη σημασία του πολλαπλασιασμού αριθμών, η οποία στηρίζεται στη σημασία της πρόσθεσης ακέραιων αριθμών (Σχήμα 2). Με το μοντέλο της Ma συμφωνούν κι άλλοι ερευνητές (π.χ. Flores, 2002).



Σχήμα 2: Απόδοση στα ελληνικά του "Πακέτου Γνώσης" για την κατανόηση της σημασίας της διαίρεσης κλασμάτων (Ma, 1999, σελ. 77)

Για να κατανοήσει κάποιος τη διαίρεση κλασμάτων και την αντίστροφη σχέση μεταξύ πολλαπλασιασμού και διαίρεσης πρέπει πρώτα να έχει συλλάβει την έννοια του πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Η Ma (1999) υποστηρίζει ότι αν οι μαθητές αντιληφθούν ότι πολλαπλασιάζοντας με ένα κλάσμα σημαίνει ότι βρίσκουν ένα μέρος του όλου, θα μπορέσουν να ακολουθήσουν αυτή τη λογική για να καταλάβουν πως λειτουργεί η αντίστροφη πράξη.

2.5 Ευρήματα για τη Μαθηματική Γνώση των εκπαιδευτικών για τη Διαίρεση κλασμάτων

Η διαίρεση κλασμάτων απασχόλησε και συνεχίζει να απασχολεί τον ερευνητικό χώρο, για αυτό και πραγματοποιήθηκαν αρκετές έρευνες που εξετάζουν τη γνώση υποψήφιων και εν ενεργεία εκπαιδευτικών στο θέμα αυτό. Όλες κάνουν λόγο για ελλιπή εννοιολογική κατανόηση των εκπαιδευτικών για την έννοια της διαίρεσης, τη διαίρεση κλασμάτων και την εφαρμογή της σε καθημερινές καταστάσεις. Κρίνεται αναγκαίο να προηγηθεί μια βιβλιογραφική παρουσίαση σχετικά με την Γνώση Περιεχομένου των εκπαιδευτικών αναφορικά με τη διαίρεση κλασμάτων και στη συνέχεια τα ευρήματα να συγκεκριμενοποιηθούν στη Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας λόγω της άμεσης αλληλεξάρτησής τους που ήδη έχει τονιστεί.

Κοινή Γνώση Περιεχομένου

Κάνοντας μια ανασκόπηση στη σχετική βιβλιογραφία, η πλειονότητα των εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης κατέχει καλή διαδικαστική γνώση καθώς εκτελεί σωστά πράξεις διαίρεσης και καταφέρνει να επιλύσει προβλήματα διαίρεσης, τουλάχιστον αυτά με τα οποία είναι εξοικειωμένοι (Tirosh, 2000· Olanoff, 2011· Klemer et al., 2017). Ωστόσο, φαίνεται ότι υπάρχουν μεγάλες διαφορές ανάμεσα στους εκπαιδευτικούς από διαφορετικά εκπαιδευτικά συστήματα. Πράγματι, με σημαντικό σημείο την έρευνα της Ma (1999) με Αμερικανούς και Κινέζους εκπαιδευτικούς, ένα επαναλαμβανόμενο εύρημα είναι ότι εκπαιδευτικοί από ασιατικές χώρες φαίνεται να έχουν ισχυρότερη Κοινή Γνώση Περιεχομένου, σε σχέση με εκπαιδευτικούς από δυτικές χώρες (αυτή η διαφορά ισχύει και για την Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου).

Για παράδειγμα, στην έρευνα των Lo και Luo (2012) οι Ταϊβανέζοι εκπαιδευτικοί κατάφεραν να λύσουν επιτυχώς τα μαθηματικά προβλήματα που τους τέθηκαν, χρησιμοποιώντας πολλαπλές στρατηγικές και επεξηγώντας τον τρόπο σκέψης τους με αναφορές στη μονάδα, στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος- όλου και στην αναλογία. Οι ίδιοι ερευνητές ισχυρίστηκαν πως οι συμμετέχοντες διέθεταν το «πακέτο γνώσης» που διατυπώθηκε από τη Ma (1999) και υψηλή Κοινή Γνώση Περιεχομένου (CCK).

Αντιθέτως, στην έρευνα των (Unlu & Ertekin, 2012), οι Τούρκοι εκπαιδευτικοί απέτυχαν στην επίλυση προβλήματος συγχέοντας τις πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Φάνηκε πως δυσκολεύονται αρκετά να εκτιμήσουν το αποτέλεσμα της πράξης κυρίως, όταν το κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας, που το αποτέλεσμα είναι μη αναμενόμενο, καθώς έχουν συνδυάσει τη διαίρεση ως μια πράξη που μικραίνει και άρα περιμένουν ένα πηλίκο μικρότερο από τον διαιρετέο. Όπως έχει ήδη διατυπωθεί, πρόκειται για ένα από τα πιο συχνά λάθη διαισθητικού τύπου στη διαίρεση κλασμάτων.

Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου

Ένα επαναλαμβανόμενο εύρημα είναι ότι οι εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν δυσκολία στην κατασκευή αναπαραστάσεων και λεκτικών προβλημάτων. Σύμφωνα με τους Rizvi και Lawson (2007), οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται στην κατασκευή προβλήματος με μια δοσμένη διαίρεση καθώς δεν μπορούν να συσχετίσουν τη διαίρεση κλασμάτων με καταστάσεις της καθημερινής ζωής και να σκεφτούν με κλασματικούς αριθμούς. Στην έρευνά τους, κανείς από τους υποψήφιους δασκάλους δεν μπόρεσε να σχηματίσει ένα λεκτικό πρόβλημα που να αναπαριστά μια δοσμένη διαίρεση, όπου ο διαιρέτης και ο διαιρετός ήταν κλάσματα και ένας εκ των οποίων ισχυρίστηκε μάλιστα ότι *«για εμάς είναι σύμβολα - μαθηματικά σύμβολα. Δεν μπορούμε να τα συσχετίσουμε με την καθημερινή ζωή»*. Παρόμοιες απαντήσεις διατύπωσαν και οι συμμετέχοντες στην έρευνα της Ball (1990) υποστηρίζοντας ότι *«είναι δύσκολο να συσχετίσεις κλασματικούς αριθμούς στην καθημερινή ζωή»* ή ότι *«δεν σκεφτόμαστε με κλάσματα, αλλά περισσότερο με φυσικούς αριθμούς»*.

Ούτε στην έρευνα των Son and Crespo (2009) που συμμετείχαν εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ήταν ικανοποιητικά τα αποτελέσματα, καθώς λίγοι μόνο καθηγητές κατάφεραν να σχηματίσουν κάποιο πρόβλημα και κανένας δάσκαλος. Αντίστοιχη δυσκολία επισήμαναν και οι Klemer et al. (2017), οι οποίοι ανέφεραν ότι ενώ οι εκπαιδευτικοί έδειχναν ευελιξία στην επίλυση προβλημάτων, δυσκολεύτηκαν αρκετά στην κατασκευή. Σε έρευνα των Unlu & Ertekin (2012) κάποιοι συμμετέχοντες διατύπωναν προβλήματα που λύνονταν με πολλαπλασιασμό αντί για διαίρεση φανερώνοντας ελλιπή εννοιολογική κατανόηση των πράξεων αυτών.

Με τη διαίρεση κλασμάτων ασχολήθηκε και η Ma (1999), η οποία διεξήγε έρευνα με Αμερικανούς και Κινέζους εκπαιδευτικούς. Οι Κινέζοι σημείωσαν υψηλά ποσοστά επιτυχίας στην κατασκευή προβλημάτων, ενώ από τους Αμερικανούς μόνο το 46% ανταποκρίθηκε δείχνοντας να συγχέουν προβλήματα που απαιτούσαν διαίρεση κλασμάτων με εκείνα που απαιτούσαν διαίρεση με ένα ακέραιο ή πολλαπλασιασμό με ένα κλάσμα. Ειδικότερα, η δοσμένη διαίρεση ήταν $1\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ ενώ εκείνοι διατύπωναν προβλήματα που ανταποκρίνονταν στις πράξεις $1\frac{3}{4} : 2$ ή $1\frac{3}{4}\text{x}\frac{1}{2}$.Όπως προαναφέρθηκε, οι Κινέζοι και, γενικότερα, εκπαιδευτικοί από ασιατικές χώρες, έχουν πιο υψηλή κατανόηση για τη διαίρεση κλασμάτων (Ma, 1999· Li & Huang, 2008· Li & Klum 2008).Για παράδειγμα, και στην έρευνα των Lo και Luo (2012), οι περισσότεροι Ταϊβανέζοι εκπαιδευτικοί κατάφεραν να σχηματίσουν κάποιο πρόβλημα χρησιμοποιώντας συστηματικά το μοντέλο μέτρησης. Και αυτοί οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύτηκαν να διατυπώσουν πρόβλημα μερισμού στην περίπτωση των κλασμάτων, παρόμοια με τους εκπαιδευτικούς στις έρευνες των Leung&Carbone, 2013) και της Copur-Gentcturk (2021). Η αδυναμία στη χρήση του μοντέλου μερισμού οφείλεται στο ότι η ερμηνεία αυτού του μοντέλου αλλάζει όταν πρόκειται για διαίρεση κλασμάτων (όπως αναφέρθηκε ήδη στην ενότητα 2.1.1).Η βιβλιογραφία αναφέρει ότι οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται επίσης να χρησιμοποιήσουν διαγράμματα για να εξηγήσουν μια πράξη δύο ρητών αριθμών. Οι Borko et al. (1992) κατά την παρακολούθηση μιας διδασκαλίας, εντόπισαν την αδυναμία μιας δασκάλας να αναπαραστήσει εικονικά μια πράξη διαίρεσης, η οποία σχεδίασε μια αναπαράσταση γινομένου. Το γεγονός αυτό καταδεικνύει τη καίρια σημασία της χρήσης κατάλληλων αναπαραστάσεων για την κατανόηση των εννοιών. Επιπλέον, στην έρευνα των Rizvi & Lawson (2007) μόνο 5 από τους 17 συμμετέχοντες κατάφεραν να δημιουργήσουν μια εικονική αναπαράσταση για διαίρεση με κλασματικούς όρους. Αντίστοιχα, στην έρευνα των Lo & Luo (2012), μόνο 26 από τους 45 εκπαιδευτικούς τα κατάφεραν, ενώ μεγάλο ποσοστό παρουσίασε αδυναμία χρήσης οπουδήποτε μοντέλου. Τα ευρήματα αυτά παρουσιάσουν ελλιπή γνώση για τη διδασκαλία.

Μία από τις πτυχές της Εξειδικευμένης Γνώσης όπως αναφέρθηκε, είναι η εξήγηση διαδικασιών. Η Tirosh (2000) στην έρευνα της επιχείρησε να εξετάσει τον τρόπο που θα εξηγούσαν οι εκπαιδευτικοί στους μαθητές τους ένα πηλίκο μεγαλύτερο από τον διαιρετέο, θέτοντας το εξής ερώτημα: « *Πώς θα εξηγούσατε στους μαθητές σας γιατί 2/3 : 1/3 = 2; Γιατί 2/3 : 1/6 = 4;»*. Να σημειωθεί ότι ένα από τα επικρατέστερα λάθη στη διαίρεση κλασμάτων είναι η απόρριψη ενός πηλίκου μεγαλύτερου από τον διαιρέτη ή τον διαιρετέο. Σύμφωνα με τα ευρήματα λοιπόν, η πλειονότητα των συμμετεχόντων ισχυρίστηκε πως η ερμηνεία με το μοντέλο μέτρησης θα τους βοηθούσε να αποδώσουν νόημα σε αυτές τις πράξεις, ενώ οι υπόλοιποι βασίστηκαν σε αλγεβρικές- διαδικαστικές επεξηγήσεις εκτελώντας την αντίστροφη πράξη, φτιάχνοντας σύνθετα κλάσματα ή εφαρμόζοντας τον κλασικό αλγόριθμο δίχως εξηγήσεις. Εμπνευσμένοι από την προαναφερθείσα ερευνήτρια, εφάρμοσαν το ίδιο παράδειγμα κι άλλοι ερευνητές. Στην έρευνα των Li, Ma, & Pang (2008), δεν κατάφεραν να απαντήσουν όλοι οι υποψήφιοι δάσκαλοι και κάποιοι ως εξήγηση επέλεξαν την περιγραφή της διαδικασίας του αλγορίθμου «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» που καταλήγει σε πηλίκο 4. Στην έρευνα των Li & Huang (2008) όλοι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί κατάφεραν να απαντήσουν με κάποιο τρόπο και κάποιοι δίνοντας παραπάνω από μία εξηγήσεις. Η επικρατούσα απάντηση των εκπαιδευτικών αναφερόταν στην εκτέλεση του αλγορίθμου, ενώ κάποιοι χρησιμοποίησαν εικονικές αναπαραστάσεις για να εξηγήσουν τις διαιρέσεις. Ωστόσο, η απλή εκτέλεση του αλγορίθμου δεν αποτελεί μια απάντηση που θα βοηθήσει τον μαθητή να κατανοήσει το αποτέλεσμα.

Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών

Η Tirosh (2000) αναφέρει ότι οι εκπαιδευτικοί πολλές φορές δεν γνωρίζουν τις παρανοήσεις που κατέχουν οι μαθητές ή δεν μπορούν να προβλέψουν τις δυσκολίες που θα αντιμετωπίσουν. Σε κάποιες περιπτώσεις, αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί διατηρούν παρανοήσεις παρόμοιες με αυτές των μαθητών. Σε άλλες περιπτώσεις, όμως, οι εκπαιδευτικοί ενδέχεται να υποτιμούν τη δυσκολία που παρουσιάζει η διαίρεση κλασμάτων για τους μαθητές, ακριβώς επειδή οι ίδιοι την καταλαβαίνουν.

Τα παραπάνω ερευνητικά δεδομένα αναδεικνύουν ότι η Μαθηματική Γνώση για τη Διδασκαλία των εκπαιδευτικών σχετικά με τη διαίρεση κλασμάτων συχνά υπόκειται σε περιορισμούς Βέβαια, αρκετοί αποδίδουν την ελλιπή εννοιολογική γνώση τους στα δικά τους μαθητικά χρόνια, όπως τα διδάχτηκαν εκείνοι (Ball, 1990· Borko et al., 1992· Slattery & Fitzmaurice, 2014), ενώ για την αποκλειστική χρήση του παραδοσιακού αλγόριθμου, όπως παρουσιάζεται παρακάτω, υποστηρίζουν πως και εκείνοι μόνο αυτόν τον τρόπο έχουν διδαχθεί (Unlu & Ertekin, 2012).

2.6 Γνώση εκπαιδευτικών για τον Αλγόριθμο Α&Π

Η γνώση για τον αλγόριθμό μιας πράξης αναμφισβήτητα διευκολύνει και επιταχύνει την εκτέλεση της, καθώς δεν χρειάζεται επιπλέον σκέψη για τη σημασία κάθε βήματος. Ωστόσο, αυτό δεν σημαίνει ότι το άτομο έχει κατανοήσει την έννοια που πραγματεύεται ή δύναται να δημιουργήσει συνδέσεις με προηγούμενες γνώσεις. Η γνώση του αλγορίθμου συνδέεται με την απομνημόνευση και τη συχνή εξάσκησή του για καλύτερες επιδόσεις (Klemer et al., 2017).

Σχετικά με τη διαίρεση κλασμάτων, πιο πρόσφατες έρευνες έχουν δείξει πως οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν και εκτελούν σωστά τον παραδοσιακό αλγόριθμο Α&Π (Tirosh, 2000· Klemer et al., 2017), σε σχέση με παλαιότερες έρευνες που είχαν επισημάνει την αδυναμία των συμμετεχόντων να θυμηθούν τα βήματα του αλγορίθμου (Ball, 1990· Ma, 1999). Διαχρονική ωστόσο, παραμένει η δυσκολία των δασκάλων για τη διδασκαλία του, πλην ελαχίστων εξαιρέσεων, σχετικά με την κατανόηση, την ερμηνεία και την αιτιολόγηση των βημάτων αυτής της διαδικασίας και πόσο μάλλον για την εξήγησή της στους μαθητές (Ball, 1990· Ma, 1999· Tirosh, 2000·, Lo and Luo, 2012· Copur- Gencturk, 2021). Συνήθως οι εξηγήσεις που δίνουν για τον τρόπο εκτέλεσης της διαίρεσης δεν πηγάζουν από μαθηματική αιτιολογία αλλά βασίζονται στην περιγραφή του αλγόριθμου. Οι εκπαιδευτικοί, δηλαδή, δίνουν «διαδικαστικές εξηγήσεις» που απλώς επαναλαμβάνουν τα βήματα του αλγορίθμου (Ma, 1999· Tirosh, 2000· Son & Crespo, 2009).

Αυτό σημαίνει πως οι εκπαιδευτικοί ενώ κατέχουν τη διαδικαστική γνώση της διαίρεσης κλασμάτων, στερούνται της εννοιολογικής κατανόησης. Η γνώση τους πηγάζει αποκλειστικά από την απομνημόνευση του κανόνα και οι εξηγήσεις τους δεν βασίζονται στην έννοια της διαίρεσης και στην πολλαπλασιαστική σχέση (Ball, 1990), στη σχέση δηλαδή που συνδέει τον διαιρετέο, τον διαιρέτη και το πηλίκο και αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για τη νοηματοδότηση της διαίρεσης (Rizvi & Lawson, 2007).

Σε έρευνα των Borko et al. (1992), κατά την παρακολούθηση μιας διδασκαλίας όταν μια μαθήτρια ζήτησε από τη δασκάλα της να της εξηγήσει γιατί συμβαίνει αυτή η αντιστροφή στον αλγόριθμο, εκείνη προσπάθησε να το κάνει χρησιμοποιώντας μια αναπαράσταση εμβαδού τετραγώνου. Στην πορεία όμως, συνειδητοποίησε ότι το μοντέλο που έφτιαξε αντιστοιχούσε σε πράξη πολλαπλασιασμού $\frac{3}{4}x\frac{1}{2}$ και όχι σε διαίρεση. Δεδομένου ότι δεν μπορούσε και ούτε ήταν προετοιμασμένη να απαντήσει σε μια τέτοια απορία, της είπε *«χρησιμοποίησε τώρα τον κανόνα και θα βρω άλλο τρόπο να σου το εξηγήσω»*. Ωστόσο, αργότερα στη συνέντευξη της με τους ερευνητές φάνηκε πως δεν σκόπευε να επανέλθει εκ νέου με μία νέα εξήγηση γιατί θεωρούσε πως οι μαθητές έχουν συλλάβει τη διαδικασία του αλγορίθμου και δεν χρειάζεται, ενώ αντιμετώπισε δυσκολία εξήγησης και προς εκείνους παραδεχόμενη πως ούτε η ίδια γνώριζε το «γιατί». Φαίνεται λοιπόν, πως οι δάσκαλοι επικεντρώνονται περισσότερο στην αποστήθιση του αλγορίθμου και αφιερώνουν λιγότερο χρόνο, ή και καθόλου, στην κατανόησή του (Siegler & Lortie-Forgues, 2015).

Από την άλλη πλευρά, θετικότερα αποτελέσματα έδειξε η έρευνα των Li&Huang (2008). Προκειμένου να εντοπιστούν οι πρακτικές διδασκαλίας, συμπεριλήφθησαν έργα που εξετάζουν την ικανότητα των δασκάλων να δικαιολογούν πώς συμβαίνει μια διαδικασία υπολογισμού. Έτσι, ζητήθηκε από τους Κινέζους εκπαιδευτικούς να διατυπώσουν το πώς θα ερμήνευαν στους μαθητές τα βήματα του αλγορίθμου Α&Π. Όλοι οι συμμετέχοντες έδωσαν κάποια εξήγηση είτε με τη μέθοδο των Κοινών Παρανομαστών είτε αξιοποιώντας τη γνώση ότι το γινόμενο δύο αντίστροφων αριθμών ισούται με ένα και πολλαπλασιάζοντας και τους δύο όρους με τον αντίστροφο.

Ο τυπικός αλγόριθμος είναι η πρώτη επιλογή για πολλούς εκπαιδευτικούς για την επίλυση μιας πράξης διαίρεσης, δίνοντας την εντύπωση πως δεν γνωρίζουν ή πράγματι δεν γνωρίζουν άλλες στρατηγικές επίλυσης. Σύμφωνα με την βιβλιογραφία, υπάρχει πληθώρα μεθόδων επίλυσης, πέραν του αλγόριθμος Α&Π, και αυτού των Κοινών Παρανομαστών, για παράδειγμα: η στρατηγική της επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης, η μετατροπή των κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς, η διαίρεση ως αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού με τη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας για τους μεικτούς αριθμούς, η διαίρεση αριθμητή με αριθμητή και παρανομαστή με παρανομαστή, η χρήση του σύνθετου κλάσματος, και η διαίρεση που εκφράζεται με έναν *λόγο της μορφής Ποσό Α ανά μοναδιαία τιμή Ποσού Β* όπου πρόκειται για λόγο δύο, συνήθως ετεροειδών, ποσών που το ένα (τυπικά, αυτό που αναγράφεται ως παρονομαστής) ισούται με τη αντίστοιχη μονάδα. (unit rate) (Son & Crespo, 2009).

Σχετικά με τη γνώση άλλων στρατηγικών επίλυσης, τα ευρήματα είναι ποικίλα για αυτό και θα παρουσιαστούν δύο πτυχές. Αρχικά, ορισμένοι δάσκαλοι φάνηκε να μην αποδέχονται εναλλακτικούς τρόπους επίλυσης πέρα από τον αλγόριθμο Α&Π και να τους χαρακτηρίζουν ως λάθος, σύμφωνα με την έρευνα της Tirosh (2000), στην οποία μία μερίδα υποψήφιων εκπαιδευτικών χαρακτήρισαν λανθασμένη την προσπάθεια ενός μαθητή να διαιρέσει δύο κλάσματα διαιρώντας αριθμητή με αριθμητή και παρανομαστή με παρονομαστή, $\frac{2}{9}$: $\frac{1}{3} = \frac{2:1}{9:3} = \frac{2}{3}$. Στη συνέχεια ακολούθησε παρέμβαση μέσω επιμορφωτικών μαθημάτων που περιλάμβανε το παρακάτω έργο ζητώντας από τους εκπαιδευτικούς να αποκριθούν για το πώς θα απαντούσαν. Στην ουσία το έργο αυτό, προσπαθεί να εξετάσει τις πρακτικές που θα εφάρμοζαν οι εκπαιδευτικοί. Στόχο είχε την ενίσχυση της Εξειδικευμένης Γνώσης Περιεχομένου για τη διδασκαλία της διαίρεσης κλασμάτων.

Can Fractions Be Divided in an Easier Way?

1. You are discussing operations with fractions in your class. During this discussion, Ron says

   It is easy to multiply fractions; you just multiply the numerators and the denominators. I think that we should define the other operations on fractions in a similar way:

   Addition $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

   Subtraction $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$

   Division $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$

   How will you respond to Ron's suggestions? (Deal with each separately.)

2. Sally agrees with Ron and adds, "I don't understand why they decided to define addition, subtraction, and division in such complicated ways. Why didn't they decide to define the operations in the way that Ron suggested?" How will you respond to Sally's question?

Εικόνα 1: Δραστηριότητα ενίσχυσης της ΕΓΠ των εκπαιδευτικών από την έρευνα της Tirosh (2000, σελ 14)

Καθώς εργάστηκαν σε ομάδες ανταλλάζοντας απόψεις και ιδέες, αρκετοί εκπαιδευτικοί αναθεώρησαν της αρχικής τους άποψη, υποστηρίζοντας πως η μέθοδος είναι σωστή, αλλά θα εξηγούσαν στους μαθητές πως δεν μπορεί να εφαρμοστεί πάντοτε γιατί δεν ενδείκνυται για περιπτώσεις που οι αριθμητές ή παρανομαστές δεν διαιρούνται ακριβώς, για παράδειγμα $\frac{1}{4} : \frac{3}{5}$. Το ίδιο παράδειγμα ακριβώς, χρησιμοποιήθηκε και στην έρευνα των Li & Huang (2008) που όλοι οι συμμετέχοντες, όσον αναφορά της πράξης της διαίρεσης, κατάφεραν να δώσουν εξηγήσεις για την ορθότητα της πράξης είτε αντικαθιστώντας τον τύπο με αριθμούς είτε χρησιμοποιώντας αλγεβρικούς μετασχηματισμούς. Όταν όμως, επιχείρησαν να το δώσουν σε υποψήφιους εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μόνο 2 από τους 46 κατάφεραν να απαντήσουν (Li & Kulm, 2008). Γίνεται αντιληπτή λοιπόν, η διάσταση του θέματος καθώς αφορά εκπαιδευτικούς και στις δύο σχολικές βαθμίδες. Η αδυναμία ερμηνείας των εκπαιδευτικών έχει αποτελέσματα στη διδασκαλία τους, καθώς και οι μαθητές απομνημονεύουν μηχανικά τη διαδικασία του αλγορίθμου αυξάνοντας τις πιθανότητες να κάνουν λάθη.

Από την άλλη πλευρά, η βιβλιογραφία καταγράφει περιπτώσεις δασκάλων που γνώριζαν παραπάνω από μια στρατηγικές επίλυσης. Οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί στην έρευνα των Klemer et al. (2017) έλυσαν μια πράξη διαίρεσης με διαφορετικούς τρόπους χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των κοινών παρανομαστών και διαιρώντας αριθμητή με αριθμητή και παρανομαστή με παρανομαστή, εφαρμόζοντας τη μέθοδο του κοινού παρανομαστή και πολλαπλασιάζοντας με τον αντίστροφο, μετατρέποντας τα κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς κ.α., χωρίς όμως, να δίνουν κάποια εξήγηση παρόλο που τους ζητήθηκε. Παρόμοια και στην έρευνα της Ma (1999) οι κινέζοι συμμετέχοντες μόνο, κατάφεραν να προτείνουν εναλλακτικούς τρόπους.

Εμπνευσμένοι από το έργο που χρησιμοποίησε η Tirosh και από τις απαντήσεις των συμμετεχόντων, οι Son & Crespo (2009) ζήτησαν από δασκάλους να αξιολογήσουν αν είναι ορθή η προσπάθεια ενός μαθητή να διαιρέσει δύο κλάσματα διαιρώντας τους αριθμητές και τους παρανομαστές μεταξύ τους και να κρίνουν αν λειτουργεί για κάθε διαίρεση εξηγώντας σε κάθε περίπτωση το «γιατί». Η πλειοψηφία των συμμετεχόντων χαρακτήρισε τη στρατηγική ως μαθηματικά ορθή και υποστήριξε πως μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε περίπτωση, σε αντίθεση με τα λεγόμενα των συμμετεχόντων στην έρευνα της Tirosh. Δεν υπάρχουν «ιδανικά» κλάσματα, απλώς χρειάζεται να αξιοποιηθεί η ιδιότητα της διαίρεσης ότι 2 : 1 είναι ίδιο με 2/1. Στη συνέχεια, τους ζητήθηκε να εξηγήσουν πως θα δίδασκαν στα παιδιά την ορθότητα αυτής της στρατηγικής. Κάποιοι χρησιμοποίησαν παραδείγματα, άλλοι το μοντέλο της μέτρησης και ορισμένοι εικονικές αναπαραστάσεις.

Συνοψίζοντας τα ερευνητικά ευρήματα για τη γνώση των εκπαιδευτικών σχετικά με τον αλγόριθμο Α&Π συμπεραίνουμε αρχικά, ότι η πλειονότητα των συμμετεχόντων έχει αναπτύξει τη διαδικαστική γνώση και εκτελεί σωστά τον παραδοσιακό αλγόριθμο, ωστόσο υστερεί σε εννοιολογική κατανόηση και αυτό φαίνεται και από τις πρακτικές που εφαρμόζει στη διδασκαλία. Δυσκολεύεται να ερμηνεύσει και να αναπαραστήσει πράξεις διαίρεσης καθώς επίσης να αιτιολογήσει τη φύση του παραδοσιακού αλγόριθμου για τη διδασκαλία, για αυτό και η διδασκαλία του γίνεται μηχανικά προωθώντας την απομνημόνευσή του. Καλύτερα αποτελέσματα εμφανίζουν οι έρευνες που διεξήχθησαν σε Ασιατικές χώρες, δείχνοντας πως οι Ασιάτες δάσκαλοι διαθέτουν περισσότερες γνώσεις για τη διδασκαλία της διαίρεσης κλασμάτων, μπορούν να ερμηνεύσουν και να αιτιολογήσουν τον τρόπο σκέψης τους (Ma, 1999· Li & Huang, 2008), χρησιμοποιήσουν αναπαραστάσεις (Lo & Luo, 2012), ωστόσο οι πρακτικές διδασκαλίας τους επικεντρώνονται κυρίως, στον αλγόριθμο.

3 Κεφάλαιο 3ο: Η Διδασκαλία Διαίρεσης Κλασμάτων

3.1 Εισαγωγή

Στο τρίτο κεφάλαιο θα παρουσιαστούν ορισμένες προτάσεις και προσεγγίσεις για τη διδασκαλία της διαίρεσης που στόχο έχουν την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας. Επιπλέον, συμπεριλαμβάνονται προσεγγίσεις που επιχειρούν να ερμηνεύουν τη «διπλή αντιστροφή» του παραδοσιακού αλγορίθμου ενώ τέλος γίνεται μια κριτική αποτίμηση στο περιεχόμενο των σχολικών βιβλίων της Ε’ και Στ’ δημοτικού ως προς τον τρόπο που παρουσιάζουν τις ερμηνείες της διαίρεσης κα στη νοηματοδότηση ή όχι του αλγορίθμου Α&Π.

3.2 Προσεγγίσεις για τη Διδασκαλία της Διαίρεσης Κλασμάτων

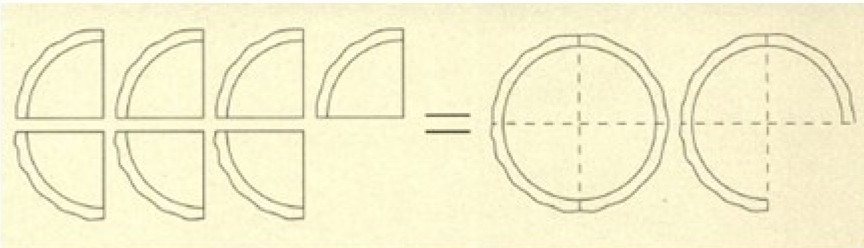
Η βιβλιογραφία έχει επισημαίνει ότι η διδασκαλία της διαίρεσης κλασμάτων πρέπει να γίνεται ως συνέχεια της διαίρεσης των φυσικών αριθμών και η Ball (1990) τόνισε ότι κάθε τύπος διαίρεσης πρέπει να διδάσκεται σε αλληλουχία με τους υπολοίπους (διαίρεση φυσικών αριθμών, διαίρεση με το μηδέν, διαίρεση κλασμάτων, αλγεβρικές εξισώσεις που περιέχουν διαίρεση). Ωστόσο, κατά τη μετάβαση από τους φυσικούς στους ρητούς αριθμούς χρειάζεται να αναπλαισιωθεί το νόημα της διαίρεσης και η σχέση μεταξύ πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, (Βαμβακούση, Κόπτση, Χρήστου & Λεμονίδης, 2022) προκειμένου να αποφευχθούν τα λάθη των μαθητών που οφείλονται στην προκατάληψη των φυσικών αριθμών.

Ο Van de Walle (2007) επισημαίνει πως είναι σημαντικό να αξιοποιηθούν μέσα από προβλήματα και οι δύο ερμηνείες της διαίρεσης και στην περίπτωση της διαίρεσης μερισμού με διαιρέτη κλασματικό αριθμό, όπου δεν γίνεται λόγος για «δίκαιη μοιρασιά» καθώς δεν είναι ορθό, το ερώτημα που πρέπει να τίθεται είναι: *«Πόσο είναι το ένα;»*. Επιπλέον, καθώς ο τρόπος που διδάσκεται η διαίρεση κλασμάτων φαίνεται πως παίζει καθοριστικό ρόλο για τα λάθη και τις παρανοήσεις, αρκετοί ερευνητές (Ma,1999) αναφέρουν πως η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων και ποικίλων προσεγγίσεων θα συμβάλλει στην καλύτερη εννοιολογική κατανόηση (Gregg&Gregg, 2007· Li, 2008· Van de Walle, 2007).

Οι Cavey & Kinzel (2014) υποστηρίζουν ότι η διδασκαλία πρέπει να ξεκινάει με διαιρέσεις φυσικών αριθμών χρησιμοποιώντας και τα δύο μοντέλα ερμηνείας και να προσδιορίζεται από νωρίς η σημασία του υπολοίπου προκειμένου να μη δημιουργηθούν δυσκολίες κατά τη μετάβαση στους ρητούς αριθμούς. Ο διαιρετέος και ο διαιρέτης αναφέρονται στην ίδια μονάδα μέτρησης ενώ το πηλίκο στο μέγεθος του διαιρέτη (Gregg&Gregg, 2007). Στη συνέχεια, σύμφωνα με τους Cavey & Kinzel (2014), χρειάζεται οι μαθητές να αποκτήσουν εμπειρία μέσα από ποικίλες αναπαραστάσεις (αριθμογραμμή, επιφάνειες εμβαδού, κύκλους κλπ.) που θα τους βοηθήσουν να σκέφτονται με κλασματικούς αριθμούς και να αντιληφθούν ότι το ίδιο κλάσμα μπορεί να αναπαρασταθεί με ποικίλους τρόπους ανάλογα με την επιλογή της μονάδας.

Πριν προχωρήσουμε στον αλγόριθμο κρίνεται αναγκαίο να διευκρινιστεί γιατί η διαίρεση θεωρείται η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού. Η Flores (2002) αναφέρει πως για να κατακτήσουν βαθιά εννοιολογική κατανόηση της διαίρεσης κλασμάτων, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να αντιληφθούν την αντιστροφή μεταξύ των πράξεων, ότι δηλαδή, διαιρώντας με έναν αριθμό είναι ίδιο με το να πολλαπλασιάσεις με τον αντίστροφό του.

Η Li (2008) στην έρευνά, της επιχειρεί να νοηματοδοτήσει αυτή την αντιστροφή μέσα από ένα λεκτικό πρόβλημα που κάθε φορά αλλάζει το ζητούμενο. Επιλέγει για διαιρέτη έναν φυσικό αριθμό που δεν προκαλεί μεγάλη δυσκολία σους μαθητές.



1. Αν κάποιος φάει το ¼ της πίτσας, οι 7 θα φάνε 1 ¾ της πίτσας.

$$\frac{1}{4} \times 7 = 1\frac{3}{4} \text{ (πίτσα)}$$

2. Αν 1 ¾ της πίτσας μοιραστούν ισάξια σε 7 άτομα, ο καθένας θα πάρει το ¼ της πίτσας.

$$1\frac{3}{4} : 7 = \frac{1}{4} \text{ (πίτσα)}$$

3. Αν 1 ¾ της πίτσας διανέμονται σε κομμάτια των ¼ της πίτσας για κάθε άτομο, 7 άτομα θα πάρουν κομμάτι.

$$1\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 7 \text{ (άτομα)}$$

Συμπερασματικά: Η σημασία της διαίρεσης κλασμάτων είναι ίδια με τη σημασία της διαίρεσης φυσικών αριθμών. Η διαίρεση είναι η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού δεδομένου ότι από το γινόμενο δύο αριθμών και τον ένα από αυτούς τους δύο αριθμούς, βρίσκεται ο άλλος αριθμός.

Εικόνα 2: Η σημασία της διαίρεσης ως αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού μέσα από τρία λεκτικά προβλήματα (Li, 2008, σελ.548).

Έπειτα, επεκτείνοντας τη διαίρεση των φυσικών στους κλασματικούς αριθμούς, είναι προτιμότερο στην αρχή να χρησιμοποιούνται ομώνυμα κλάσματα των οποίων οι αριθμητές είναι «βολικοί» να διαιρεθούν μεταξύ τους, π.χ. 6/10 : 2/10 καθώς ο μαθητής χρειάζεται απλώς να υπολογίσει πόσες φορές χωράει το 2 στο 6 (Li, 2008· Klemer et al., 2017) ή κλάσματα που μπορούν να διαιρεθούν αριθμητής με αριθμητής και παρανομαστής με παρανομαστής. Βασιζόμενοι στην έννοια της μέτρησης, μπορεί να γίνει η εισαγωγή στον αλγόριθμο του Κοινού Παρανομαστή κατά τον οποίο *«για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα, τα κάνουμε ομώνυμα και έπειτα διαιρούμε τους αριθμητές»,* με μια διαδικασία που είναι αρκετά εξοικειωμένοι οι μαθητές από την πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων.

Καθόλου εξοικειωμένοι όμως, δεν είναι με τον τυπικό αλγόριθμο διαίρεσης Α&Π και την ερμηνεία αυτής της διαδικασίας. Στη βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετές προσεγγίσεις που επιχειρούν να ερμηνεύσουν τη φύση του αλγορίθμου και μπορούν να αξιοποιηθούν στη διδασκαλία για την καλύτερη εννοιολογική κατανόηση των μαθητών. Αυτές οι προσεγγίσεις παρουσιάζονται στην επόμενη ενότητα (βλ. 3.3).

Αξίζει να σημειωθεί ότι με τους παραπάνω ερευνητές φαίνεται να συμφωνούν ορισμένοι δάσκαλοι, στους οποίους ζητήθηκε να περιγράψουν τα βήματα της διδασκαλίας τους (Klemer et al., 2017). Εκείνοι ανέφεραν ότι είναι κρίσιμη η χρήση οπτικών αναπαραστάσεων που δείχνουν την πράξη της διαίρεσης, δομούν σταδιακά τη διδασκαλία τους και επιτρέπουν τους μαθητές να παρουσιάσουν διαφορετικές μεθόδους λύσεις πριν την εκμάθηση του παραδοσιακού αλγορίθμου.

3. 3 **Προσεγγίσεις για την ερμηνεία για τον αλγόριθμο Α&Π**

Όπως ήδη σημειώθηκε, τυπικά στα σχολικά μαθηματικά χρησιμοποιούνται δύο αλγόριθμοι για τη διαίρεση κλασμάτων, ο αλγόριθμός των Κοινών Παρανομαστών και ο αλγόριθμος του Αντιστρέφω και Πολλαπλασιάζω (Van de Walle, 2007). Ο επικρατέστερος όμως και παραδοσιακός αλγόριθμος για τη διαίρεση κλασμάτων είναι ο δεύτερος, τον οποίο θα επιχειρήσουμε να διασαφηνίσουμε στη συγκεκριμένη ενότητα. Στις κρίσιμες γνώσεις που πρέπει να διαθέτει ο εκπαιδευτικός για τη διδασκαλία της διαίρεσης κλασμάτων είναι η γνώση για την προέλευση και τα βήματα που εφαρμόζονται για την επίλυση μιας τέτοιας πράξης (Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου). Είναι απαραίτητο να συμπεριληφθεί στη διδασκαλία η προέλευση του αλγορίθμου προκειμένου να αποκτήσει νόημα για τους μαθητές.

Διπλή Αντιστροφή

Ο αλγόριθμος Α&Π διδάσκεται στους μαθητές με τη φράση «αντιστρέψτε τους όρους του διαιρέτη (ή του δεύτερου κλάσματος) και έπειτα πολλαπλασιάστε τα κλάσματα μεταξύ τους». Από μαθηματική σκοπιά όμως, δεν είναι τόσο απλό καθώς περιέχει μια σημαντική μαθηματική ιδέα. Η προέλευση του αλγόριθμου βασίζεται στη διπλή αντιστροφή. Καθώς η διαίρεση είναι η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού, η διαίρεση κλασμάτων εκτελείται με μια διπλή αντιστροφή, δηλαδή με την αντίστροφη πράξη και τον αντίστροφο αριθμό (του διαιρέτη). Έστω x διαιρείται με y, αυτό ισοδυναμεί με x επί τον αντίστροφο του y (*δηλαδή* $x : y = x x\frac{1}{y}$) (Li, 2008b· Tirosh, 2000). Μάλιστα αυτή την εξήγηση χρησιμοποίησαν οι Κινέζοι εκπαιδευτικοί στην έρευνα της Ma (1999), οι οποίοι υποστήριζαν ότι «διαιρώντας με έναν αριθμό, ισοδυναμεί με το να πολλαπλασιάζεις με τον αντίστροφό του, αρκεί να μην είναι μηδέν».

Οι Copur- Gencturk (2021) και Fredua-Kwarteng&Ahia (2006), ένας από τους τρόπους ερμηνείας που προτείνουν, είναι επίσης, η διπλή αντιστροφή δηλαδή η αντίστροφη σχέση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης και ο αντίστροφος αριθμός .Επιχειρούν μια αλγεβρική προσέγγιση θέτοντας μια εξίσωση κατά την οποία μια πράξη διαίρεσης μπορεί να διδαχθεί ως ένα άγνωστο γινόμενο ενός πολλαπλασιαστικού προβλήματος. Έστω $\frac{3}{2}$: $\frac{1}{4}$= ω ισοδυναμεί με ω x$\frac{1}{4}$= $\frac{3}{2}$.Δεδομένου ότι το γινόμενο δύο αντίστροφων αριθμών είναι 1, πολλαπλασιάζουν και τα δύο μέρη της εξίσωσης με τον αντίστροφο του$\frac{1}{4}$, δηλαδή $\frac{4}{1}$και άρα $\frac{3}{2}$x$\frac{4}{1}$= ω και άρα$\frac{3}{2}$: $\frac{1}{4}$ = $\frac{3}{2}$x$\frac{4}{1}$.

<u>Διαίρεση Μέτρησης</u>

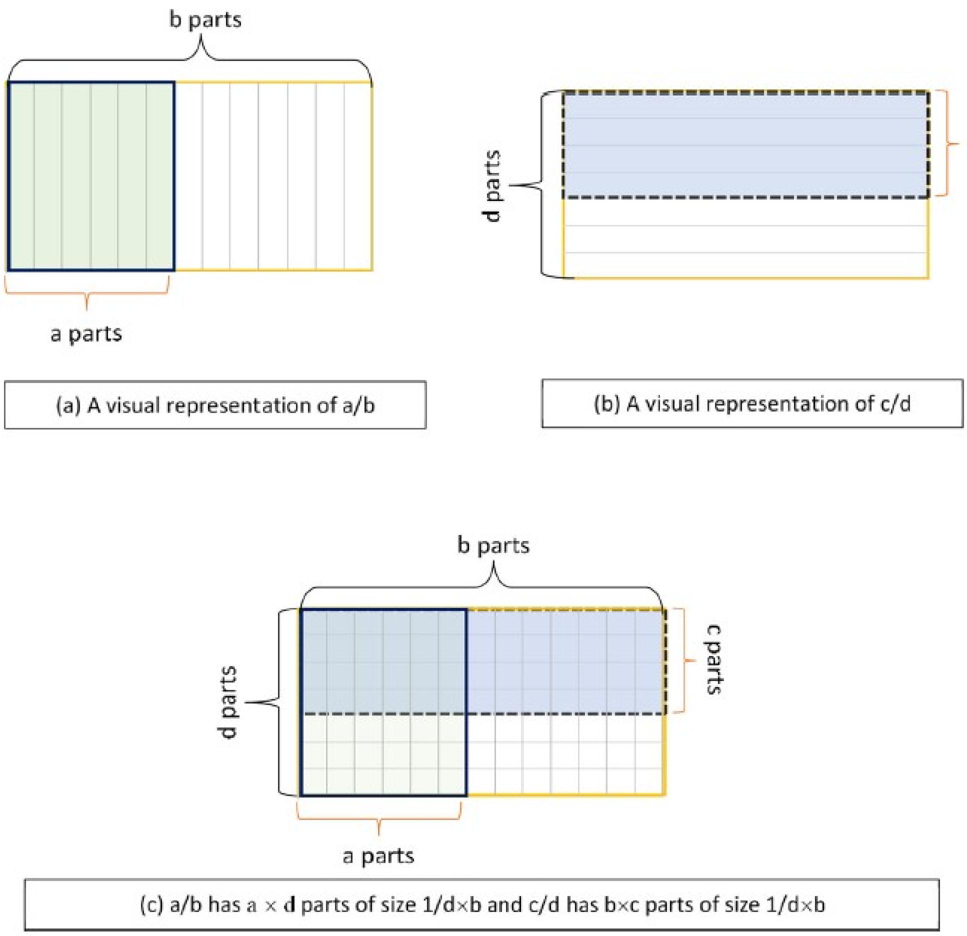
Χρησιμοποιώντας το μοντέλο της διαίρεσης μέτρησης και την προσέγγιση «πόσες φορές χωράει ο διαιρέτης στον διαιρετέο» οι Cavey και Kinzel (2014) επισημαίνουν ότι ο αντίστροφος αριθμός του n, $\frac{1}{n}$ δείχνει πόσα ίσα μέρη ν χωράνε στη μονάδα. Δηλαδή, 1 : $\frac{1}{n}$ = n, για κάθε ν φυσικό αριθμό.

> Έστω, 15 : $\frac{2}{3}$ = . Ο αντίστροφος αριθμός του $\frac{2}{3}$ (δηλαδή ο $\frac{3}{2}$) δείχνει πόσες φορές χωράει στη μονάδα. Στο 15 όμως, πόσες φορές θα χωράει; Για να το βρούμε, θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε 15 x $\frac{3}{2}$.
>
> Άρα, 15 : $\frac{2}{3}$ = 15 x $\frac{3}{2}$.

Το μοντέλο μέτρησης, σύμφωνα με τους ερευνητές, ενδείκνυται περισσότερο για την κατανόηση του αλγορίθμου Α&Π και φανερώνει την αντίστροφη σχέση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Για αυτό οι εκπαιδευτικοί πρέπει να δείχνουν παράλληλη τη σχέση αυτή, 1 : $\frac{1}{n}$ = n και n x $\frac{1}{n}$ = 1 (Cavey και Kinzel, 2014). Ωστόσο και στις δύο περιπτώσεις εξήγησης του αλγορίθμου προϋποθέτει ότι οι μαθητές έχουν διδαχτεί την έννοια των αντίστροφων αριθμών. Στα ισχύοντα σχολικά βιβλία μαθηματικών του Δημοτικού, η εισαγωγή των αντίστροφων αριθμών γίνεται στην Ε' τάξη, στο κεφάλαιο

«Πολλαπλασιασμός φυσικού αριθμού ή κλάσματος με κλάσμα – Αντίστροφοι αριθμοί» (Κακαδιάρη, Μπελίστου, Στεφανίδης &Χρονοπούλου, 2010).

Η Copur- Gencturk (2021) επιλέγει το μοντέλο μέτρησης σε συνδυασμό με την προσέγγιση του κοινού παρανομαστή και τη χρήση εικονικών αναπαραστάσεων. Ορίζοντας τον διαιρέτη ως μονάδα αναφοράς (ολόκληρο) και χρησιμοποιώντας το μοντέλο μέτρησης μπορεί να εξηγηθεί οποιαδήποτε διαίρεση της μορφής $\frac{a}{b}$: $\frac{c}{d}$ ως πόσες φορές ο διαιρέτης $\frac{c}{d}$ χωράει στον διαιρετέο $\frac{a}{b}$, προωθώντας την εννοιολογική κατανόηση του αλγορίθμου Α&Π (Εικόνα 4). Καθώς η έννοια του κλάσματος βασίζεται στα ισομερή μερίδια, η δημιουργία κοινών παρανομαστών για τα δύο κλάσματα είναι απαραίτητη για την εικονική αναπαράσταση της διαίρεσης. Σύμφωνα με το σχήμα (Εικόνα 3c), ο διαιρέτης $\frac{c}{d}$ αποτελείται από *bxc* ίσα κομμάτια και ο διαιρετέος $\frac{a}{b}$ από *axd* ίσα κομμάτια. Το πηλίκο προκύπτει διαιρώντας τον συνολικό αριθμό των μεριδίων *axd* με τον αριθμό των μεριδίων που βρίσκονται στη μονάδα αναφοράς *bxc.* Δηλαδή $\frac{axd}{b\,x\,c}$ = $\frac{a}{b}$x$\frac{d}{c}$. Επιπλέον, επικεντρώνοντας στο γεγονός ότι η μονάδα αναφοράς για το πηλίκο είναι το μέγεθος του διαιρέτη, μπορεί να εξηγηθεί και ο παρανομαστής του πηλίκου.



Εικόνα 3: Ερμηνεία για τον αλγόριθμο της διαίρεσης βασισμένη στο μοντέλο μέτρησης και στη μονάδα αναφοράς (Copur- Gencturk, 2021, σελ 7)

Διαίρεση Μερισμού

Μία ακόμη εξήγηση είναι αυτή του Van de Walle (2007), ο οποίος επιχειρεί να ερμηνεύσει τον αλγόριθμο με την προσέγγιση της διαίρεσης μερισμού, αξιοποιώντας την πληροφορία για το μέρος ώστε να βρει το όλο, κάνοντας αναγωγή στη μονάδα. *«Ο παρανομαστής ενός κλάσματος διαιρεί το όλο σε ίσα μέρη, δείχνει τον τύπο του μέρους και άρα είναι ο διαιρέτης. Ο αριθμητής προσδιορίζει τον αριθμό αυτών των μερών, άρα είναι ο πολλαπλασιαστής».* Στη διαίρεση $\frac{2}{5} : \frac{6}{8}$, χρειάζεται να πολλαπλασιάσουμε με το 8 και να διαιρέσουμε με το 6, επομένως πολλαπλασιάζουμε $\frac{2}{5}$ με $\frac{8}{6}$. Σύμφωνοι με αυτή την ερμηνεία και η Ma (1999 και οι Gregg & Gregg (2007).

Αλγεβρικοί Μετασχηματισμοί

Υπάρχουν κι αλγεβρικοί τρόποι που ερμηνεύουν τον αλγόριθμο και βασίζονται σε διαδοχικούς μετασχηματισμούς της αρχικής παράστασης μέχρι να φτάσουν στην τελική μορφή αυτού (Tirosh, 2000· Li, 2008b· Copur- Gencturk, 2021). Η κατανόηση του αλγορίθμου μέσω αλγεβρικών μετασχηματισμών απαιτεί την κατανόηση των συμβολικών παραστάσεων και την ευχέρεια στο χειρισμό τους

Σύνθετα κλάσματα και αντίστροφος αριθμός:

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\frac{\alpha}{\beta} x \frac{\delta}{\gamma}}{\frac{\gamma}{\delta} x \frac{\delta}{\gamma}} = \frac{\frac{\alpha}{\beta} x \frac{\delta}{\gamma}}{1} = \frac{\alpha}{\beta} x \frac{\delta}{\gamma}$$

Κοινός παρανομαστής και διαίρεση αριθμητή με αριθμητή και παρανομαστή με παρανομαστή:

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\delta} : \frac{\beta\gamma}{\beta\delta} = \frac{\alpha\delta : \beta\gamma}{\beta\delta : \beta\delta} = \frac{\alpha\delta : \beta\gamma}{1} = \alpha\delta : \beta\gamma = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

Η προσέγγιση του κοινού παρανομαστή εξυπηρετεί την εξήγηση της διαίρεσης ως διαδικασία επαναλαμβανόμενες αφαίρεσης, δηλαδή με το μοντέλο μέτρησης (Li, 2008b). Σύμφωνα Fredua-Kwarteng & Ahia (2006), πρόκειται για μια εύκολη πρακτική γιατί οι μαθητές διαιρούν πλέον με φυσικούς αριθμούς και αξιοποιούν την ιδιότητα των κοινών παρανομαστών που είναι ήδη εξοικειωμένοι από την πρόσθεση και αφαίρεση ετερώνυμων κλασμάτων. Η Copur- Gencturk (2021) υποστήριξε ότι μέσω των Κοινών Παρανομαστών, μια πρακτική που χρησιμοποίησε η ίδια και με οπτική απεικόνιση, όπως σημειώθηκε παραπάνω, είναι εύκολο να εξηγηθεί ότι ο διαιρέτης και ο διαιρετέος έχουν ως μονάδα αναφοράς το ίδιο όλο ενώ το πηλίκο έχει ως μονάδα αναφοράς τον διαιρέτη, εξού και ότι ο παρανομαστής του είναι *βγ* όπως ο διαιρέτης.

Οι Van de Walle (2007) και Gregg and Gregg (2007) υποστήριξαν ότι ο αλγόριθμος των Κοινών Παρανομαστών σχετίζεται με το μοντέλο μέτρησης, ενώ ο αλγόριθμος «αντιστρέφω & πολλαπλασιάζω» ερμηνεύεται καλύτερα με το μοντέλο δίκαιης μοιρασιάς, δηλαδή μοντέλο μερισμού.

3. 4 **Κριτική στα βιβλία μαθηματικών της Ε' και Στ' τάξης**

Στα ελληνικά σχολεία η διδασκαλία της διαίρεσης των κλασμάτων ξεκινά από στην Ε΄ Δημοτικού με την εισαγωγή της έννοιας και επίλυση πράξεων με τη χρήση του αλγορίθμου Α&Π, έπειτα στην ΣΤ΄ Δημοτικού συνεχίζει με την επίλυση περισσότερων προβλημάτων και τέλος στην Α΄ Γυμνασίου συνεχίζει με μία σύνοψη των εννοιών και διαδικασιών που έχουν προηγηθεί στο Δημοτικό.

Στην ενότητα αυτή επιχειρείται μια κριτική στο περιεχόμενο των βιβλίων μαθηματικών της Ε' τάξης και Στ' τάξης για τη διαίρεση κλασμάτων, η οποία βασίζεται στο συλλογικό έργο των Βαμβακούση, Κόπτση, Χρήστου και Λεμονίδη (2022) και στα ευρήματα αυτών, με τίτλο *«Διαίρεση κλασμάτων: μια κριτική ματιά στην οργάνωση του περιεχομένου στα σχολικά εγχειρίδια»*.

Η εισαγωγή στη διαίρεση κλασμάτων στο βιβλίο της Ε' γίνεται με το μοντέλο μέτρησης δίνοντας ένα πρόβλημα του οποίου η λύση υπολογίζεται ως *«Πόσες φορές χωράει το 1/6 στα 2/3 της ακέραιης μονάδας»* ((Κεφ. 20, Βιβλίο Μαθητή, Ε΄ Δημοτικού, σελ. 53).Στο βιβλίο της Στ', στη Δραστηριότητα 2 χρησιμοποιείται το μοντέλο μερισμού με την προσέγγιση της «δίκαιης μοιρασιάς» (Κεφ. 24, Βιβλίο Μαθητή, Στ' Δημοτικού, σελ. 55). Μια ποσότητα που μοιράζεται σε ίσα μέρη. Το μοντέλο αυτό αποκτά νόημά του στη διαίρεση φυσικών αριθμών, όμως προκαλεί δυσκολίες όταν πρόκειται για διαίρεση κλασμάτων. Αντιθέτως, το μοντέλο που ενδείκνυται είναι εκείνο της μέτρησης.

Στο βιβλίο της Ε' προτείνεται ως βασικός τρόπος διαίρεσης κλασμάτων η μέθοδος των Κοινών Παρανομαστών, ενώ τον αλγόριθμο του Α&Π τον παρουσιάζει ως δεύτερο τρόπο επίλυσης (Εικόνα 4). Στην «Εφαρμογή» συνοψίζει τους τρόπους επίλυσης προσθέτοντας και την αριθμογραμμή με τη χρήση του μοντέλου μέτρησης. Επιπλέον, στο πεδίο του «Αναστοχασμού» υπάρχει η εξής πρόταση: *«Συζητάμε τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα. Δημιουργούμε μια αφίσα με τους τρόπους αυτού»*. Αντιθέτως, στο βιβλίο της Στ' ο μοναδικός αλγόριθμος που πραγματεύεται είναι ο Α&Π.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Για να διαιρέσουμε δυο **ομώνυμα κλάσματα**, διαιρούμε τους αριθμητές τους.	$\frac{3}{5} : \frac{4}{5} = 3 : 4 = \frac{3}{4}$, $\quad \frac{6}{8} : \frac{3}{8} = 6 : 3 = 2$
Για να **διαιρέσουμε** δυο **ετερώνυμα κλάσματα**, τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα και έπειτα διαιρούμε τους αριθμητές τους.	$\frac{2}{3} : \frac{6}{5} = \frac{10}{15} : \frac{18}{15} = 10 : 18 = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$
Όταν σε μια διαίρεση οι αριθμοί είναι διαφορετικής μορφής, τους μετατρέπουμε όλους στην ίδια μορφή.	$2{,}5 : 3\frac{1}{2} = \frac{25}{10} : \frac{7}{2} = \frac{25}{10} : \frac{35}{10} = 25 : 35 = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$
Πρόσθετη μαθηματική ιδέα Ένας άλλος τρόπος για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα είναι να αντιστρέψουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος και, αντί για διαίρεση, να κάνουμε πολλαπλασιασμό. π.χ. $\frac{2}{3} : \frac{5}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$, $6 : \frac{3}{4} = \frac{6}{1} \times \frac{4}{3} = \frac{6 \times 4}{3} = \frac{24}{3} = 8$	**Εξήγηση του κανόνα** *Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις: Π.χ. Μοιράζω 6 μπαλόνια σε 3 παιδιά.* *α. Κάνω διαίρεση: 6 : 3 = 2 μπαλόνια.* *β. Κάνω πολλαπλασιασμό: Αφού τα παιδιά είναι 3, το καθένα θα πάρει το $\frac{1}{3}$ των μπαλονιών:* *$6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 6 : 3 = 2$ μπαλόνια.* *γ. Επομένως: $6 : 3 = 6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 6 : 3 = 2$* **Σημείωση:** *Ο διαιρετέος μπορεί να είναι και κλάσμα.*

Εικόνα 4: Κεφ. 20, Βιβλίο Μαθητή, Ε' Δημοτικού (σελ 54)

Οι Βαμβακούση, Κόπτση, Χρήστου και Λεμονίδης (2022) επισημαίνουν πως ο τρόπος που παρουσιάζεται ο τυπικός αλγόριθμος Α&Π στα σχολικά βιβλία στερείται εννοιολογικής εξήγησης της διπλής αντιστροφής που συμβαίνει, γιατί δηλαδή, αντιστρέφουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος και πολλαπλασιάζουμε. Ο τρόπος διατύπωσής του αποτελεί περιγραφή της διαδικασίας και όχι νοηματοδότηση αυτής. Συγκεκριμένα, στο βιβλίο της Ε' τάξης ο αλγόριθμος παρουσιάζεται ως *«αντιστρέφουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος και αντί για διαίρεση κάνουμε πολλαπλασιασμό»* (Κεφ. 20, Βιβλίο Μαθητή, Ε΄ Δημοτικού) και στης Στ' ως *«για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα, αντιστρέφουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος και κάνουμε πολλαπλασιασμό» (*Κεφ. 24, Βιβλίο Μαθητή, Στ' Δημοτικού). Μάλιστα στο Βιβλίο του Δασκάλου της Ε' (σελ. 72) χαρακτηρίζεται ο αλγόριθμος ως «μηχανιστικός κανόνας» παραμερίζοντας τη μαθηματική ιδέα σχετικά με τη φύση του.

Ελλείψεις στη διατύπωση του αλγορίθμου παρουσιάζονται όχι μόνο στο Βιβλίο του Μαθητή, αλλά και στο Βιβλίο του Δασκάλου και συγκεκριμένα της Στ' τάξης. Στις οδηγίες που δίνονται για τη Δραστηριότητα 2 (Κεφάλαιο 24, σελ. 65), περιγράφεται η διαδικασία του αλγορίθμου δίχως να προσδιορίζεται ποιανού κλάσματος από τα δυο θα αντιστραφούν οι όροι:

> *«ο τρόπος που εργαζόμαστε για να κάνουμε τη διαίρεση είναι ο εξής: Αντί να κάνουμε διαίρεση, <u>αντιστρέφουμε τους όρους στο ένα από τα δύο κλάσματα</u> και κάνουμε πολλαπλασιασμό»*

Δεδομένου αυτού του εννοιολογικού κενού στη διατύπωση, η παρούσα έρευνα έχει συμπεριλάβει στα ερευνητικά ερωτήματά της τον τρόπο που διατυπώνουν οι εκπαιδευτικοί τον αλγόριθμο, θέλοντας να ερευνήσει αν και εκείνοι προβαίνουν σε τέτοια λάθη.

Όσο αναφορά τη σημασία των αντίστροφων πράξεων για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση και το πώς παρουσιάζεται η διπλή αντιστροφή, παρατηρούνται ορισμένα εννοιολογικά ελλείμματα και γλωσσικές ασάφειες στα σχολικά βιβλία. Στο βιβλίο της Ε' δημοτικού, υπάρχει ένα κομμάτι για την εξήγηση των αντίστροφων πράξεων, στο οποίο ένα πρόβλημα διαίρεσης διατυπώνεται και ως πρόβλημα πολλαπλασιασμού. Ωστόσο, κατά την εξήγηση δεν γίνεται καμία αναφορά ότι ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις και ούτε στην έννοια του αντίστροφου αριθμού (Εικόνα 5). Η σωστότερη διατύπωση της διαδικασίας θα έπρεπε να εκφράζεται ως «πολλαπλασιάζω με τον αντίστροφο αριθμό του διαιρέτη». Η φράση «αντιστρέφω το δεύτερο κλάσμα και πολλαπλασιάζω» παραπέμπει σε διαδικασία, ενώ η φράση «πολλαπλασιάζω με τον αντίστροφο αριθμό του διαιρέτη» παραπέμπει σε έννοια.

Εξήγηση του κανόνα

Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις: Π.χ. Μοιράζω 6 μπαλόνια σε 3 παιδιά.α. Κάνω διαίρεση: 6 : 3 = 2 μπαλόνια. β. Κάνω πολλαπλασιασμό: Αφού τα παιδιά είναι 3, το καθένα θα πάρει το $\frac{1}{3}$ των μπαλονιών:

$6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 6 : 3 = 2$ μπαλόνια.

γ. Επομένως: $6 : 3 = 6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 6 : 3 = 2$

***Σημείωση:** Ο διαιρετέος μπορεί να είναι και κλάσμα.*

Εικόνα 5: Κεφ. 20, Βιβλίο Μαθητή, Ε΄ Δημοτικού

Αντιθέτως, στο βιβλίο της Στ' δεν επιχειρείται η εξήγηση των αντίστροφων πράξεων αλλά έχει ενδιαφέρον ο τρόπος που διατυπώνεται στη Δραστηριότητα 2 (σελ 55) η διαδικασία του αλγορίθμου καθώς κάνει την απαραίτητη αναφορά στον αντίστροφο αριθμό:

Δραστηριότητα 2η

Πήγα σε ένα γαλακτοκομικό αγρόκτημα και αγόρασα γάλα σε ένα δοχείο 10 λίτρων. Το δοχείο δεν χωράει στο ψυγείο μου. Έτσι θέλω να το μεταγγίσω σε δοχεία των 2 λίτρων.

- Πόσα δοχεία χρειάζομαι; ....
- Γράψε την πράξη που έκανες: ....

Ας υποθέσουμε τώρα ότι αγόρασα το $\frac{1}{2}$ λίτρο γάλα και θέλω να το μεταγγίσω σε μικρές ατομικές κανάτες του $\frac{1}{8}$ λίτρου για να τις σερβίρω με τον καφέ.

- Πόσες ατομικές κανάτες χρειάζομαι; ....
- Γράψε την πράξη που πρέπει να κάνεις: ....
- Γνωρίζεις ότι η διαίρεση και ο πολλαπλασιασμός είναι αντίστροφες πράξεις. Άρα, αντί να διαιρέσεις δύο αριθμούς μπορείς να πολλαπλασιάσεις τον πρώτο με τον αντίστροφο του δεύτερου.
- Δοκίμασε τώρα να κάνεις την προηγούμενη πράξη αντιστρέφοντας το δεύτερο κλάσμα.

....

- Είναι λογικό το αποτέλεσμα; ....

Εικόνα 6: Κεφ. 24, Βιβλίο Μαθητή, Στ' Δημοτικού (σελ 55)

Τέλος, κρίνεται αναγκαίο να επισημανθεί ένα ακόμα στοιχείο των βιβλίων που προκαλεί εννοιολογική ασάφεια. Σύμφωνα με τους ερευνητές (Βαμβακούση, Κόπτση, Χρήστου και Λεμονίδης, 2022), στα δύο βιβλία υπάρχει μια φράση στα συμπεράσματα που θέτει έναν αχρείαστο περιορισμό. *«Η <u>τέλεια</u> διαίρεση είναι πράξη αντίστροφη του πολλαπλασιασμού»,* όπου με τον όρο «τέλεια» τίθεται ένας περιορισμός που δυσκολεύει τη μετάβαση από τους φυσικούς στους ρητούς αριθμούς (Κεφ.12, Βιβλίο Μαθητή, Ε΄ Δημοτικού και Κεφ. 7, Βιβλίο Μαθητή, Στ' Δημοτικού).

Συμπερασματικά, η οργάνωση του περιεχομένου των σχολικών βιβλίων αναφορικά με τη διαίρεση κλασμάτων δεν λαμβάνει επαρκώς υπόψη τις αλλαγές και αναπλαισιώσεις που απαιτούνται στο νόημα της διαίρεσης κατά τη μετάβαση από τους φυσικούς, στους ρητούς αριθμούς (Βαμβακούση, Κόπτση, Χρήστου και Λεμονίδης, 2022). Επιπλέον, ο αλγόριθμος Α&Π παρουσιάζεται ως «κόλπο» και περιγράφεται ρητά ως «μηχανιστική διαδικασία» που απλώς πρέπει να απομνημονευθεί από τους μαθητές. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι λεκτικές περιγραφές του αλγορίθμου χαρακτηρίζονται από ασάφεια (επιεικώς), ενώ η ιδέα των «αντίστροφων αριθμών» δεν αξιοποιείται επαρκώς. Τέλος, η εξήγηση του αλγορίθμου με βάση την αντίστροφη σχέση μεταξύ πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, αν και τυπικά σωστή, δεν είναι σαφές σε ποια έκφανση της σχέση αυτής βασίζεται, ούτε αν λαμβάνεται υπόψη η αλλαγή που προκαλεί η δυνατότητα του «αντίστροφου αριθμού» με την εισαγωγή στους ρητούς. Είναι, λοιπόν, ενδιαφέρον να διερευνηθεί κατά πόσο η παρουσίαση και «εξήγηση» του αλγορίθμου στα σχολικά εγχειρίδια υποστηρίζει την κατανόηση των εκπαιδευτικών για τον τρόπο που αυτός λειτουργεί.

Κριτική αποτίμηση- Στόχος της νέας έρευνας

Το ενδιαφέρον για τη διαίρεση κλασμάτων και για τις γνώσεις των εκπαιδευτικών είναι ιδιαίτερα αναπτυγμένο σε διεθνές επίπεδο. Συνοψίζοντας τα ευρήματα των προηγούμενων ερευνών, γίνεται αντιληπτό ότι υπάρχουν περιορισμοί στην εννοιολογική κατανόηση για την έννοια της διαίρεσης κλασμάτων εφαρμόζοντας ελλιπείς στρατηγικές διδασκαλίας. Η Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου που είναι απαραίτητη για τη διδασκαλία κάθε γνωστικού αντικειμένου παρουσιάζει ελλείψεις καθώς φαίνεται οι εκπαιδευτικοί να δυσκολεύονται αρκετά ή και να δείχνουν απρόθυμοι για τη δημιουργία αναπαραστάσεων που να ερμηνεύουν τη διαίρεση δύο κλασμάτων, να αδυνατούν να εξηγήσουν την προέλευση της διαδικασίας του αλγόριθμου Α&Π, τον οποίο χρησιμοποιούν αποκλειστικά απορρίπτοντας άλλους τρόπους επίλυσης και να επικεντρώνονται στην κατάκτηση της διαδικαστικής γνώσης. Επιπλέον, φάνηκε πως οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να απαντήσουν στα ερωτήματα των μαθητών τους και πολλές φορές δεν γνωρίζουν τις παρανοήσεις που διατηρούν ή δεν μπορούν να προβλέψουν τις δυσκολίες που θα αντιμετωπίσουν. Από την άλλη μεριά, φαίνεται να υπάρχουν και αρκετές διαφορές ανάμεσα στους εκπαιδευτικούς, με ευρέως τεκμηριωμένη τη διαφορά μεταξύ εκπαιδευτικών από ασιατικές χώρες που υπερτερούν σε σχέση με τους εκπαιδευτικούς από δυτικές χώρες.

Οι περισσότερες έρευνες εστιάζουν στις μαθηματικές γνώσεις των εκπαιδευτικών, ή καλύτερα, στη Γνώση Περιεχομένου (Κοινή και Εξειδικευμένη) που πλαισιώνει την έννοια της διαίρεσης κλασμάτων ευρύτερα. Εξετάζονται κατά κύριο λόγο η κατασκευή ρεαλιστικών προβλημάτων διαίρεσης και σύνδεσής της με καθημερινές καταστάσεις, η ικανότητα επίλυσης προβλήματος και η εκτέλεση του παραδοσιακού αλγορίθμου Α&Π.

Στην παρούσα εργασία εξετάζονται ταυτόχρονα διάφορες πτυχές της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία, ενώ δίνεται έμφαση στην επιλογή κατάλληλης ανατροφοδότησης και στην ερμηνεία της διαδικασίας του παραδοσιακού αλγορίθμου Α&Π, με δεδομένο τον τρόπο που αυτός παρουσιάζεται και εξηγείται στα σχολικά εγχειρίδια, όπως συζητήθηκε στην προηγούμενη ενότητα.

4 Κεφάλαιο 4ο: Μεθοδολογία

Έχοντας ορίσει την σημασία της Μαθηματικής Γνώσης για τη διδασκαλία της διαίρεσης κλασμάτων, στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν το ερευνητικό πρόβλημα, οι στόχοι και τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στην παρούσα έρευνα. Ακολουθεί η παρουσίαση του δείγματος της έρευνας καθώς επίσης η περιγραφή της διαδικασία διεξαγωγής της έρευνας και του τρόπου ανάλυσης των δεδομένων.

4.1 Ορισμός

Ως Μαθηματική Γνώση για τη διδασκαλία της διαίρεσης κλασμάτων ορίζονται οι γνώσεις για το νόημα της διαίρεσης, η χρήση ποικίλων μεθόδων επίλυσης διαίρεσης κλασμάτων σε συνδυασμό με τη βαθιά κατανόηση της μαθηματικής λογικής αυτών, η χρήση αναπαραστατικών μέσων στη διδασκαλία και η γνώση των δυσκολιών και των παρανοήσεων των μαθητών για το συγκεκριμένο θέμα.

4.2 Στόχος και Ερευνητικά ερωτήματα

Στόχος της παρούσας έρευνας είναι να διερευνήσει πτυχές της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία εν ενεργεία εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με τη διαίρεση κλασμάτων. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζονται:

α) Η Κοινή Γνώση Περιεχομένου, διερευνώντας την ικανότητα των εκπαιδευτικών να αξιολογούν απαντήσεις υποθετικών μαθητών σε εννοιολογικά και διαδικαστικά έργα διαίρεσης κλασμάτων

β) Η Εξειδικευμένη Γνώση του Περιεχομένου, διερευνώντας την ικανότητα των εκπαιδευτικών να χρησιμοποιούν τα μοντέλο μερισμού και το μοντέλο μέτρησης, να σχηματίζουν τις κατάλληλες αναπαραστάσεις και να κατασκευάζουν προβλήματα, να εξηγούν διαδικασίες και κανόνες γ) Η Γνώστη Περιεχομένου και Μαθητών, διερευνώντας την ικανότητα των εκπαιδευτικών να προβλέπουν τα λάθη των μαθητών, να εξηγούν τη σκέψη τους, να αξιολογούν τις απαντήσεις υποθετικών μαθητών σε εννοιολογικά και διαδικαστικά έργα διαίρεσης κλασμάτων (Κοινή Γνώση Περιεχομένου)

Το κεντρικό μας ερευνητικό ερώτημα αφορούσε το επίπεδο στο οποίο βρίσκονται οι εκπαιδευτικοί σε σχέση με τις διάφορες πτυχές των συνιστωσών της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία που εξετάστηκαν; Πιο ειδικά:

- Αξιολογούν σωστά τις απαντήσεις των μαθητών;

- Μπορούν να ανταποκριθούν με κατάλληλη ανατροφοδότηση στη δυσκολία που αντιμετωπίζει ο μαθητής;
- Μπορούν να αναπαραστήσουν τη διαίρεση κλασμάτων και να κατασκευάσουν κατάλληλα σχετικά προβλήματα; Και τι χαρακτηριστικά έχουν οι αναπαραστάσεις και τα προβλήματα που κατασκευάζουν;
- (Ανα)γνωρίζουν εναλλακτικές μεθόδους διαίρεσης κλασμάτων;
- Μπορούν να εξηγήσουν τον αλγόριθμου «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω»;
- Μπορούν να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης του μαθητή;

Με βάση τη βιβλιογραφία που έχει ανασκοπηθεί, αναμέναμε μεγαλύτερη ευχέρεια στις διαδικαστικές, παρά στις εννοιολογικές όψεις της διαίρεσης κλασμάτων, σε όλες τις συνιστώσες της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία.

4. 3 Συμμετέχοντες

Στην έρευνα πήραν μέρος 13 εν ενεργεία εκπαιδευτικοί της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης που εργάζονται σε δημόσια σχολεία σε διάφορες περιοχές της Ελλάδας. Η επιλογή του δείγματος έγινε με κριτήριο την ύπαρξη διδακτικής εμπειρίας στις Ε' και Στ' τάξεις. Το φύλο δεν αποτέλεσε κριτήριο, αν και η συντριπτική πλειοψηφία ήταν γυναίκες (μόλις 3 άντρες). Ως δημογραφικά χαρακτηριστικά, λήφθηκαν υπόψη τα έτη προϋπηρεσίας του καθενός που κυμαίνονται από 4 ως 30 και η κατοχή ή όχι μεταπτυχιακού/ διδακτορικού διπλώματος .Η πλειονότητα των συμμετεχόντων έχει περισσότερα από 10 έτη προϋπηρεσίας και κάποιοι διέθεταν μεταπτυχιακό τίτλο, εκ των οποίων δύο στη Διδακτική των Μαθηματικών και δύο στην Ειδική Αγωγή. Μια συμμετέχουσα διέθετε και τους δύο τίτλους και προσμετρήθηκε μία φορά. Διδακτορικό δίπλωμα δεν διέθετε κανείς.

Κρίνεται αναγκαίο να αναφερθεί ότι υπήρχε δυσκολία για την εύρεση του δείγματος, καθώς η μέθοδος συλλογής των δεδομένων (μαγνητοφωνημένη συνέντευξη) φάνηκε να αποθαρρύνει τους υποψήφιους να συμμετάσχουν. Υπήρξε περιστατικό που ένας υποψήφιος συμμετέχοντας ζήτησε να διακοπεί η συνέντευξη, λόγω αδυναμίας απόκρισης. Η συνέντευξη αυτή δεν συμπεριλήφθηκε στην έρευνα.

4. 4 Επιλογή Μεθόδου

Στην παρούσα έρευνα επιλέχθηκε ως μέθοδος συλλογής δεδομένων η συνέντευξη βασισμένη σε έργα (task- based interview). Συγκεκριμένα, οι εκπαιδευτικοί συμμετείχαν ατομικά σε ημι- δομημένη συνέντευξη, κατά τη διάρκεια της οποίας τους δόθηκαν 7 σενάρια τάξης που είτε κατασκευάστηκαν εξ ολοκλήρου από την ερευνήτρια είτε προέρχονται από τη βιβλιογραφία και προσαρμόστηκαν στις ανάγκες της παρούσας έρευνας. Αυτή η μέθοδος δίνει την ευελιξία μέσω διευκρινιστικών ή πρόσθετων ερωτήσεων να εμβαθύνουμε περισσότερο σε πτυχές της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία των συμμετεχόντων σχετικά με τη διδασκαλία της διαίρεσης κλασμάτων και αποφεύγονται οι γενικές απαντήσεις ή απαντήσεις που δεν αντιστοιχούν στις πραγματικές διδακτικές πρακτικές, οι οποίες θα μπορούσαν να διατυπωθούν στην περίπτωση του ερωτηματολογίου. Προκειμένου να εντοπιστούν οι Γνώσεις Περιεχομένου και Διδασκαλίας, ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς να αξιολογήσουν τις απαντήσεις των μαθητών, να ερμηνεύσουν γιατί κατέληξαν στο λάθος, να προτείνουν διδακτικές προσεγγίσεις και να δώσουν την κατάλληλη ανατροφοδότηση προκειμένου οι μαθητές να κατανοήσουν το περιεχόμενο.

Έπειτα από βιβλιογραφική αναζήτηση (αναλυτικότερα βλ. 2.5) και εντοπίζοντας τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι δάσκαλοι στη διδασκαλία της διαίρεσης κλασμάτων, κατασκευάστηκαν υποθετικά διδακτικά σενάρια στα οποία ζητείται από τους μαθητές να απαντήσουν σε ένα μαθηματικό ερώτημα και εκείνοι δίνουν λάθος ή ασαφής απάντηση.

4. 5 **Περιγραφή Εργαλείου**

Αρχικά, ζητείται από τους εκπαιδευτικούς να συμπληρώσουν ορισμένα δημογραφικά χαρακτηριστικά που θεωρούμε σημαντικά για την αξιολόγηση των ευρημάτων. Τα χαρακτηριστικά αυτά αφορούν τα έτη προϋπηρεσίας και την κατοχή ή όχι μεταπτυχιακού/ διδακτορικού διπλώματος. Έπειτα, ακολουθούν τα διδακτικά σενάρια, όπως περιγράφονται παρακάτω. Τα πρώτα έξι περιλαμβάνουν κάποιο πρόβλημα προς επίλυση, ενώ το έβδομο εστιάζει στην γνώση των συμμετεχόντων για τη φύση του αλγόριθμου της διαίρεσης κλασμάτων και στον τρόπο διδασκαλίας του.

Έργο 1

Το πρώτο έργο επιχειρεί να εξετάσει ένα συνδυασμό γνώσεων σχετικά με την κατανόηση της σημασίας της διαίρεσης. Πέρα από τη σωστή εκτέλεση των πράξεων, καίριας σημασίας είναι η κατανόηση του τι εκφράζει η κάθε πράξη. Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να αξιολογήσουν την απάντηση ενός μαθητή σε ένα πρόβλημα που επιλύονταν με την πράξη της διαίρεσης, ενώ εκείνος εφήρμοσε πολλαπλασιασμό (Κοινή Γνώση Περιεχομένου). Σε όσους αξιολογήσουν σωστά, ζητείται από την ερευνήτρια να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης του μαθητή (Ε.1.2) (Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών) και να δώσουν την κατάλληλη ανατροφοδότηση (Ε.1.3) (Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας). *«Γιατί πιστεύετε πως έκανε λάθος; Τι ανατροφοδότηση θα του δίνατε;».* Το συγκεκριμένο έργο δόθηκε ως πρόβλημα επίλυσης σε 40 πτυχιούχους της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης κατά τη διάρκεια κατατακτήριων εξετάσεων για την εισαγωγή τους στο Παιδαγωγικό Τμήμα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου).

Έργο 1

Σε μια σχολική τάξη της Στ' Δημοτικού δόθηκε το εξής το πρόβλημα: *Ένας ξυλουργός μετράει το μήκος μιας σανίδας με ένα ραβδί και βρίσκει ότι είναι ίσο με 18 ραβδιά. Τι θα έβρισκε αν μετρούσε το μήκος της σανίδας με τα $\frac{2}{3}$ του ραβδιού;*

Ο Παύλος έγραψε στο τετράδιό του το εξής:

$$\frac{2}{3} x\ 18 = \frac{36}{3} = 12.$$

Με άριστα το 5, τι βαθμό θα δίνατε στην απάντηση του Παύλου; Γιατί; (Ε.1.1)

Γιατί πιστεύετε πως έκανε λάθος; (Ε.1.2)

Τι ανατροφοδότηση θα του δίνατε; (Ε.1.3)

Έργο 2

Το επόμενο έργο επικεντρώνεται στη Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών. Στόχος του έργου είναι να ελέγξει αφενός αν γνωρίζουν τα σωστά βήματα για την εκτέλεση των πράξεων και αφετέρου τα λάθη που κάνουν συνήθως οι μαθητές. Ζητείται από τους εκπαιδευτικούς αρχικά να προβλέψουν λάθη που κάνουν οι μαθητές κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου της διαίρεσης (Ε.2.1) (Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών). Για παράδειγμα, να αντιστρέφουν δηλαδή, τους όρους και του πρώτου κλάσματος και όχι μόνο του δεύτερου ή να τα κάνουν ομώνυμα και να διαιρέσουν μόνο τους αριθμητές και όχι τους παρανομαστές. Στη συνέχεια, τους δίνετε το υπο-ερώτημα 2 που περιέχει δύο παραδείγματα (α και β)με λάθη των μαθητών και τους ζητείτε να αξιολογήσουν τις απαντήσεις των μαθητών (Κοινή Γνώση Περιεχομένου). Στο έργο (Ε.2.2) το λάθος αφορά την αντιστροφή και του πρώτου κλάσματος, ενώ στο έργο (Ε.2.3) το λάθος αφορά τη μη διαίρεση των παρανομαστών. Σε όσους συμμετέχοντες εντόπιζαν το λάθος, η ερευνήτρια τους υπέβαλλε και τα ακόλουθα ερωτήματα: *«Ποιος είναι ο τρόπος σκέψης του μαθητή;»(*Γνώση Περιεχομένου και των Μαθητών)*«Τι ανατροφοδότηση θα του δίνατε;»*(Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας. Δεν δίνονταν εξαρχής στο φύλλο συνέντευξης για να μη προδιαθέσουν τον συνεντευξιαζόμενο σχετικά με την ύπαρξη λάθους.

Έργο 2

Ο δάσκαλος ενός τμήματος της Στ' Δημοτικού για να ελέγξει όσα θυμούνται οι μαθητές του από την προηγούμενη τάξη σχετικά με τη διαίρεση κλασμάτων, τους ζήτησε να εκτελέσουν την πράξη $\frac{2}{3}:\frac{4}{12}$.

1) Η Ελπίδα χρησιμοποίησε τον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» και έκανε λάθος στην εκτέλεση της πράξης. Με βάση την εμπειρία σας, τι λάθος μπορεί να έκανε η Ελπίδα;(Ε.2.1)

2) α) Ο Μάριος έγραψε στο τετράδιό του:

$\frac{2}{3}:\frac{4}{12}=\frac{3}{2}x\frac{12}{4}=\frac{36}{8}=\frac{9}{2}$

β) Ο Αντώνης έγραψε στο τετράδιό του:

$\frac{2}{3}:\frac{4}{12}=\frac{8}{12}:\frac{4}{12}=\frac{2}{12}$

Είναι σωστή η λύση του Μάριου; Του Αντώνη; (Ε.2.2)

Ποιος είναι ο τρόπος σκέψης κάθε μαθητή; (Ε.2.3)

Τι ανατροφοδότηση θα του δίνατε; (Ε.2.4)

Έργο 3

Αφορμή για το έργο 3 υπήρξαν τα ευρήματα της βιβλιογραφίας για μία ισχυρή παρανόηση των παιδιών για τη διαίρεση (Borko et al, 1992· Ma, 1999· Ball, 1990· Unlu & Ertekin, 2012). Συγκεκριμένα, το έργο αυτό εξετάζει αν οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν τις παρανοήσεις των μαθητών για την κατεύθυνση του αποτελέσματος και συγκεκριμένα για τη διαίρεση, την παρανόηση ότι η διαίρεση «μικραίνει». Ειδικότερα, στο συγκεκριμένο έργο ο μαθητής επιλύοντας τη διαίρεση 3: $\frac{5}{10}$ βρίσκει πηλίκο 6, που είναι μεγαλύτερο από το διαιρέτη και το διαιρετέο, για αυτό ξαφνιασμένος πιστεύει πως έχει κάνει λάθος. Ζητείται λοιπόν, από τους εκπαιδευτικούς να αξιολογήσουν την απάντηση του μαθητή (Ε.3.1) (Κοινή Γνώση Περιεχομένου), να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης του (Ε.3.2) (Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών) και να δώσουν την κατάλληλη ανατροφοδότηση (Ε.3.3) (Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας).

Έργο 3

Σε μια σχολική τάξη της Στ’ Δημοτικού η δασκάλα της τάξης ζητάει από τους μαθητές να επιλύσουν τη διαίρεση 3 :$\frac{5}{10}$. Ο Ηλίας ξεκινάει να επιλύει τη διαίρεση, γράφοντας:

3 : $\frac{5}{10} = 3x\frac{10}{5} = \frac{30}{5} = 6$. Ξαφνικά ακούγεται η φωνή του Ηλία, δυνατά: *«Ε όχι, αποκλείεται! Σίγουρα έχω κάνει λάθος»* και σβήνει ό,τι έχει γράψει.

Α) Είναι σωστό ή λάθος το αποτέλεσμα που βρήκε ο Ηλίας; (Ε.3.1)

Β) Σύμφωνα με την άποψη σας, γιατί ο Ηλίας πιστεύει πως έκανε λάθος ; (Ε.3.2)

Γ) Τι ανατροφοδότηση θα του δίνατε αν ήσασταν η δασκάλα του τμήματος; (Ε.3.3)

Έργο 4

Το έργο αυτό επιχειρεί να ελέγξει τη Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου των εκπαιδευτικών για τις πολλαπλές μεθόδους διαίρεσης κλασμάτων, πέρα του παραδοσιακού αλγορίθμου Α&Π. Αρχικά, ζητάει από τους εκπαιδευτικούς την αξιολόγηση μιας μεθόδου διαίρεσης, κατά την οποία διαιρούνται αριθμητής με αριθμητή και παρανομαστής με παρανομαστή (Ε.4.1) (Κοινή Γνώση Περιεχομένου). Το ερώτημα αυτό πάρθηκε από έργο της έρευνας της Tirosh (2000) και χρησιμοποιήθηκε και στην έρευνα των Son&Crespo (2005). Το δεύτερο υπο- ερώτημα διερευνά τις μεθόδους διαίρεσης που οι ίδιοι εφαρμόζουν στην τάξη τους (Ε.4.2) (Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας), ενώ το τρίτο υπο- ερώτημα που αποτελεί συνέχεια του πρώτου, περιέχεται στην έρευνα των Klemer et al. (2017) και διερευνά αν γνωρίζουν ή όχι άλλες μεθόδους επίλυσης που υπάρχουν (Ε.4.3) (Κοινή Γνώση Περιεχομένου). Μέσα από αυτό το ερώτημα, οι δάσκαλοι θα επιβεβαιώσουν την απάντηση που έδωσαν στο πρώτο, αν γνωρίζουν ή όχι τη συγκεκριμένη μέθοδο. Να σημειωθεί πως το τρίτο υπο- ερώτημα *«Γνωρίζετε άλλες μεθόδους επίλυση;»* δεν αναγράφεται στο φύλλο συνέντευξης, αλλά τίθεται από την ερευνήτρια στους συμμετέχοντες μετά το δεύτερο.

Έργο 4

Σε μια σχολική τάξη της Ε' Δημοτικού, οι μαθητές καλούνται να εκτελέσουν την πράξη $\frac{2}{9} : \frac{1}{3}$. Μια μαθήτρια, η Άννα λέει: «έχω ανακαλύψει έναν πολύ απλό τρόπο για να το κάνω αυτό». Σηκώνεται στον πίνακα και γράφει $\frac{2}{9} : \frac{1}{3} = \frac{2:1}{9:3} = \frac{2}{3}$. Κάποιοι από τους συμμαθητές της όμως, αντιδρούν και υποστηρίζουν πως είναι λανθασμένος αυτός ο τρόπος για τη διαίρεση κλασμάτων.

Α) Ισχύει ή όχι η πρακτική της Άννας; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Ε.4.1)

Β) Εσείς ποια μέθοδο επίλυσης θα προτείνατε στους μαθητές σας; (Ε.4.2)

Γ) Γνωρίζετε άλλες μεθόδους επίλυσης; (Ε.4.3)

Έργο 5

Το πέμπτο έργο αποτελείται από δύο υπο- ερωτήματα. Το πρώτο υπο- ερώτημα (Ε.5.1) διερευνά τις γνώσεις των δασκάλων σχετικά με την ερμηνεία της διαίρεσης μέσω των δύο κυριότερων μοντέλων, του μοντέλο μέτρησης και του μοντέλο μερισμού, την ικανότητά χειρισμού αυτών και τη γνώση των δυσκολιών των μαθητών να σκέφτονται με το μοντέλο μέτρησης (Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών). Ο λόγος έγκειται στο γεγονός ασχολούνται σχεδόν, αποκλειστικά με το μοντέλο μερισμού- δίκαιης μοιρασιάς. Για το σκοπό αυτό κατασκευάστηκε το εν λόγω υποθετικό σενάριο κατά το οποίο ένας μαθητής αδυνατεί να εξηγήσει τη διαίρεση 12 : $\frac{1}{3}$ γιατί σκεπτόμενος με το μοντέλο της δίκαιης μοιραίας δεν μπορεί να μοιράσει 12 καραμέλες σε $\frac{1}{3}$ παιδιά (δυσκολία που αναφέρθηκε στην Tirosh, 2000). Το πρώτο κομμάτι του έργου πάρθηκε από την έρευνα (Κόπτση, Χρήστου & Βαμβακούση, 2022), με μια τροποποίηση στους αριθμούς. Στο δεύτερο υπό- ερώτημα, ερευνάται ο τρόπος θα εξηγούσαν στους μαθητές δύο πράξεις διαίρεσης (Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου). Εδώ εξετάζεται η δυνατότητα χρήσης αναπαραστατικών μέσων. Στην περίπτωση που ο συμμετέχων χρησιμοποιήσει ένα λεκτικό πρόβλημα, η ερευνήτρια του ζητάει να κατασκευάσει και μια αναπαράσταση ή και αντίστροφα. Επιλέχθηκαν δύο πράξεις, η μία με ακέραιο διαιρέτη και η άλλη με κλασματικό.

Έργο 5

Ένας μαθητής της Στ΄ Δημοτικού ρωτήθηκε πώς θα εξηγούσε τι σημαίνει 12:3 σε ένα μικρό παιδί. Εκείνος απαντά: *«Είναι σαν να έχω 12 καραμέλες και να θέλω να τις μοιράσω σε τρία παιδιά – δώδεκα δια τρία ίσον τέσσερα, τέσσερις καραμέλες παίρνει το καθένα».*

Στη συνέχεια, ρωτήθηκε πώς θα εξηγούσε τι σημαίνει 12 : $\frac{1}{3}$ και λέει: *«Είναι όπως πριν, έχω 12 καραμέλες και…. Ωχ όχι! Δεν γίνεται να έχω 1/3 παιδί. Δεν μπορώ να το εξηγήσω αυτό».*

Α) Ποια δυσκολία πιστεύετε ότι αντιμετωπίζει ο μαθητής;(Ε.5.1)

Β) Με ποιον τρόπο θα εξηγούσατε στον μαθητή τι σημαίνει α) 12 : $\frac{1}{3}$ (Ε.5.2.1), β) $\frac{5}{6}$: $\frac{1}{3}$ (Ε.5.2.2)

Έργο 6

Σκοπός του έκτου έργου είναι να εξετάσει την ικανότητα κατασκευής και αξιολόγησης ενός μαθηματικού προβλήματος (Κοινή Γνώση Περιεχομένου). Μέσω ενός υποθετικού σεναρίου, οι δάσκαλοι καλούνται να αξιολογήσουν αν τα δοσμένα προβλήματα αποτελούν προβλήματα διαίρεσης που επιλύονται με την πράξη 5 : $\frac{1}{2}$. Το πρώτο είναι πρόβλημα διαίρεσης μερισμού (Ε.6.1), το δεύτερο είναι ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού 5 x $\frac{1}{2}$ (Ε.6.1) και το τρίτο ένα πρόβλημα διαίρεσης μέτρησης (Ε.6.3). Η αρχική ιδέα του έργου πάρθηκε από την έρευνα των Luo, Lo & Leu (2011), με μια τροποποίηση στο περιεχόμενο των προβλημάτων.

Έργο 6

Σε μια τάξη της Ε’ Δημοτικού, η δασκάλα ζήτησε από τους μαθητές να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα διαίρεσης που να περιλαμβάνει την πράξη 5 :$\frac{1}{2}$. Παρακάτω δίνονται τρία από τα προβλήματα που κατασκεύασαν οι μαθητές.

Α) Ελένη: Έχω μία σοκολάτα που έχει 5 κομμάτια. Κόβω όλα τα κομμάτια στη μέση. Πόσα κομμάτια σοκολάτα έχω τώρα; (Ε.6.1)

Β) Μανώλης: Ένα κιλό κασέρι κοστίζει 5 ευρώ. Πόσο κοστίζει το μισό κιλό; (Ε.6.2)

Γ) Ηλίας: Οι γονείς μου με αφήνουν να παίζω μόνο μισή ώρα playstation κάθε μέρα. Σε πόσες μέρες θα έχω παίξει 5 ώρες playstation;(Ε.6.3)

Με άριστα το 5, πώς θα βαθμολογούσατε καθένα από τα παραπάνω προβλήματα και γιατί;

<u>Έργο 7</u>

Το τελευταίο έργο εξετάζει τη Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας σχετικά με τη φύση του παραδοσιακού αλγορίθμου Α&Π. Αποτελείται από δύο υπό- έργα. Το πρώτο επικεντρώνεται στη διαδικαστική γνώση του αλγορίθμου ζητώντας από τους συμμετέχοντες α) να ανταποκριθούν σε έναν μαθητή που δυσανασχετεί με τη διαδικασία του αλγορίθμου (Ε.7.1.1) (Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας), β) να δώσουν μια προσωπική εξήγηση για τον αλγόριθμο (Ε.7.1.2) (Κοινή Γνώση Περιεχομένου) και γ) να διατυπώσουν τον τρόπο που παρουσιάζουν τον αλγόριθμο στην τάξη (Ε.7.1.3) (Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας). Το συγκεκριμένο έργο πάρθηκε από την έρευνα των Li & Huang (2008).

Το δεύτερο υπο- έργο αποτελεί προέκταση του πρώτου, ωστόσο δεν δίνεται εξαρχής για να μη προδιαθέσει τον συνεντευξιαζόμενο. Στοχεύει στο να εμβαθύνει και να εξαγάγει συμπεράσματα για τη «διπλή αντιστροφή» που συμβαίνει στον αλγόριθμο. Στα σχολικά εγχειρίδια η διαίρεση παρουσιάζεται ως η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού, χωρίς να εξηγείται κατ' ουσίαν που οφείλεται αυτή η αντιστροφή. Αυτή την εξήγηση επιδιώκει να αντλήσει το συγκεκριμένο έργο από τους συμμετέχοντες εκπαιδευτικούς. Μέχρι τώρα στη βιβλιογραφία, δεν έχει συμπεριληφθεί κάποιο αντίστοιχο. Αρχικά λοιπόν, ζητείται α) να εξηγήσουν στους μαθητές τι σημαίνει «αντίστροφες πράξεις» για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση (Ε.7.2.1) (Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας), β) να προσπαθήσουν να προσεγγίσουν και να ερμηνεύσουν τον αλγόριθμο Α&Π με βάση τη σημασία των αντίστροφων πράξεων (Ε.7.2.2) (Κοινή Γνώση Περιεχομένου) και τέλος δεδομένης της εμπλοκής των αντίστροφων αριθμών στη «διπλή αντιστροφή» ζητείται γ) να απαντήσουν αν και κατά πόσο συμπεριλαμβάνουν στη διδασκαλία τους αντίστροφους αριθμούς (Ε.7.2.3) (Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας).

Έργο 7

1) Κατά τη διδασκαλία του αλγορίθμου για τη διαίρεση κλασμάτων («αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω»), ένας μαθητής σας λέει: *«Πραγματικά δεν μπορώ καθόλου να καταλάβω τι κάνουμε εδώ και γιατί το κάνουμε».*

Α)Πώς θα αποκρινόσασταν σε αυτόν το μαθητή; (Ε.7.1.1)

Β)Ποια είναι η δική σας εξήγηση για τη διαδικασία του αλγορίθμου αυτού;(Ε.7.1.2)

Γ) Εσείς πώς διατυπώνετε τον αλγόριθμο στην τάξη;(Ε.7.1.3)

2) Στα βιβλία της Ε' και Στ' τάξης αναγράφεται ως εξήγηση του αλγορίθμου ότι «ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις».

Α) Πώς θα εξηγούσατε στους μαθητές σας τι σημαίνει «αντίστροφες πράξεις» για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση; (Ε.7.2.1)

Β) Με βάση το παραπάνω, πώς εξηγείται ο αλγόριθμος «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω;» (Ε.7.2.2)

Γ)Στη διδασκαλία σας, ασχολείστε με τους αντίστροφους αριθμούς; Πόσο χρόνο αφιερώνετε; (Ε.7.2.3)

4. 6 **Περιγραφή Ερευνητικής Διαδικασίας**

Η πλειοψηφία των συνεντεύξεων πραγματοποιήθηκε μέσω της πλατφόρμας Skype δεδομένου ότι η ερευνήτρια εργάζεται σε σχολείο σε δυσπρόσιτο νησί των Κυκλάδων και ήταν αδύνατη η δια ζώσης επικοινωνία με τους συμμετέχοντες. Η συλλογή των δεδομένων διήρκησε περίπου ένα μήνα (Νοέμβριος 2022) και η διάρκεια των συνεντεύξεων κυμάνθηκε από 40 έως 55 λεπτά. Η κάθε συνέντευξη μαγνητοφωνήθηκε, έπειτα από συγκατάθεση του συμμετέχοντα και έπειτα απομαγνητοφωνήθηκε και αναλύθηκε από την ερευνήτρια.

Ο κάθε συμμετέχων είχε στη διάθεσή του το φύλλο συνέντευξης με τα σενάρια τάξης και στις περιπτώσεις των Έργων 2 και των Έργων 7 που υπήρξαν συμπληρωματικά έργα και δεν δόθηκαν εξαρχής προκειμένου να μην επηρεάσουν την απάντηση του συμμετέχοντα, δόθηκαν από την ερευνήτρια στο αντίστοιχο στάδιο της συνέντευξης. Δεν υπήρχαν χρονικοί περιορισμοί και όλοι οι συμμετέχοντες είχαν στη διάθεσή τους όσο χρόνο χρειαζόντουσαν για να κατανοήσουν το έργο και σκεφτούν την απάντηση που θα δώσουν.

4. 7 **Περιγραφή/ Τεχνική Ανάλυσης Δεδομένων**

Σε κάθε έργο ή/και υποέργο, προσδιορίστηκαν τα ερωτήματα προς τους εκπαιδευτικούς (π.χ. αξιολόγηση, εξήγηση)έτσι ώστε καθένα να συνδέεται με μια συνιστώσα της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία. Οι αποκρίσεις των εκπαιδευτικών κατηγοριοποιήθηκαν, ανάλογα με το ζητούμενο. Η κατηγοριοποίηση παρουσιάζεται ανά υποέργο αναλυτικά στην αντίστοιχη ενότητα.

5 Κεφάλαιο 5ο: Αποτελέσματα

5.1 Παρουσίαση αποτελεσμάτων ανά έργο

Έργο 1

Στο πρώτο υπο- έργο (Ε.1.1) τα ερωτήματα προς τους εκπαιδευτικούς ήταν Αξιολόγηση (της απάντησης του μαθητή), Εξήγηση (του τρόπου σκέψης του μαθητή) και Ανατροφοδότηση (στο συγκεκριμένο μαθητή). Για την Αξιολόγηση, οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών κατηγοριοποιηθήκαν ως Ορθή και Λανθασμένη. Ως Ορθές συμπεριλήφθησαν οι απαντήσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν στη λανθασμένη επιλογή της πράξης από το μαθητή και ως Λανθασμένες όλες οι υπόλοιπες. Όσοι αξιολόγησαν ορθά κλήθηκαν να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης του μαθητή και οι κατηγορίες αποκρίσεων που προέκυψαν είναι οι εξής: «Διαδικαστική» για όσους απλώς περιέγραψαν τι έκανε ο μαθητής, δηλαδή ότι εκτέλεσε μια διαδικασία πολλαπλασιασμού, σε «Μη διαδικαστική» για όσους αναφέρθηκαν στην εννοιολογική κατανόηση του μαθητή για τη συγκεκριμένη κατάσταση και σε «Καμία/ Μη εξήγηση» για όσους δεν απάντησαν. Τέλος, για την Ανατροφοδότηση, σχηματίστηκαν οι κατηγορίες «Μη Διαδικαστική» όπου εντάχθηκαν οι απαντήσεις αυτών που προσέγγισαν την κατανόηση της αλλαγής της μονάδας μέτρησης και σε «Καμία Ανατροφοδότηση» σε όσους δεν μπόρεσαν να δώσουν απάντηση.

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζεται η συχνότητα της κάθε κατηγορίας, καθώς και οι εκπαιδευτικοί που εμπίπτουν στην κάθε κατηγορία.

Υποέργα	Κατηγορία Απάντησης	Ν	Συμμετέχοντες
Αξιολόγηση (Ε1.1)	Ορθή	6	Σ5, Σ6, Σ7*, Σ9, Σ10,Σ12
	Λανθασμένη	7	Σ1, Σ2, Σ3, Σ4, Σ8, Σ11, Σ13
Εξήγηση (Ε1.2)	Διαδικαστική	2	Σ5, Σ9
	Μη διαδικαστική	2	Σ6, Σ10
	Καμία/ Μη εξήγηση	2	Σ7, Σ12
Ανατροφοδότηση (Ε1.3)	Μη διαδικαστική	4	Σ5, Σ6, Σ9, Σ10

	Καμία ανατροφοδότηση	2	Σ7, Σ12
Σημείωση: ** Ο Σ7 αξιολόγησε ορθά αλλά δεν μπόρεσε να προτείνει μέθοδο επίλυσης*			

Πίνακας 1: Συχνότητα των κατηγοριών απόκρισης στο Ε.1ανά ερώτημα και εκπαιδευτικοί ανά κατηγορία

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 1, 7 συμμετέχοντες αξιολόγησαν λανθασμένα την απάντηση του μαθητή κρίνοντας ότι η επιλογή της πράξης πολλαπλασιασμού είναι σωστή καθώς, όπως φάνηκε από την τεκμηρίωσή τους, επικεντρώθηκαν στη διαδικασία εκτέλεσης της πράξης και όχι στην κατανόηση του προβλήματος,

Οι υπόλοιποι 6 εκπαιδευτικοί αξιολόγησαν σωστά, επισημαίνοντας την επίδραση της αλλαγής στη μονάδα μέτρησης. Πέντε από τους εκπαιδευτικούς αυτούς αναφέρθηκαν στην πράξη της διαίρεσης, είτε άμεσα, είτε έμμεσα, μέσω του μοντέλου της μέτρησης για τη διαίρεση.

> *«Δεν είναι λογική απάντηση. Η μονάδα μέτρησης είναι μικρότερη (2/3) άρα περισσότερα ραβδιά. Θα έπρεπε να ήταν 18 δια 2/3…»* Σ5 (και, παρόμοια, οι Σ6, Σ10)

> *«Πόσα 2/3 του ραβδιού χρειάζονται για να φτάσουν τα 18»* Σ9

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η απάντηση του Σ12, παρακάτω, που προτείνει την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ως μέθοδο υπολογισμού, χωρίς να αναφέρεται ρητά στη διαίρεση ή στη μέτρηση («πόσες φορές χωράει»), αλλά και χωρίς να φαίνεται σίγουρος για την απάντησή του.

> *«Η μονάδα αναφοράς πλέον δεν είναι η σανίδα αλλά τα 2/3 της αρχικής σανίδας. Άρα, ένα κομμάτι πιο μικρό από το αρχικό. Οπότε δεν γίνεται να βρίσκει 12 που είναι λιγότερο από το 18, θα έπρεπε να βρει κάτι περισσότερο. Βέβαια ο πολλαπλασιασμός του είναι σωστός γιατί με την απλοποίηση βγαίνει 12. Μήπως αν προσθέσουμε 2/3 και 2/3 και 2/3 κ.ο.κ. μέχρι να φτάσουμε στο 18;»* Σ12

Τέλος, ο Σ7, παρά το γεγονός ότι αναγνώρισε ότι η απάντηση του μαθητή ήταν λανθασμένη, δε φάνηκε να είναι σε θέση να εντοπίσει τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος. Κατά τον συλλογισμό του, αρχικά προτείνει την πράξη του πολλαπλασιασμού, εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού (2/3 της κάθε σανίδας). Στη συνέχεια, επικεντρώνεται στο 1/3 της κάθε σανίδας, για το οποίο δυσκολεύεται να αποφασίσει τι να το κάνει:

«Είναι τα 2/3 του κάθε ραβδιού και όχι των 18. Θα πρέπει να βρει σε κάθε ραβδί τι μέρος. Εε… πρέπει να βρει τα 2/3 της κάθε σανίδας; Ότι υπολείπεται άλλο 1/3 και να το προσθέσει στην απάντηση;» Σ7

Οι συμμετέχοντες που αξιολόγησαν ορθά το Ε.1.1, χρειάστηκε να ερμηνεύσουν τον τρόπο σκέψης του μαθητή (Ε.1.2). Δύο από αυτούς (Σ5, Σ9) περιορίστηκαν απλώς στην περιγραφή της διαδικασίας επίλυσης του μαθητή και δεν έδωσαν κάποια εξήγηση για το τι οδήγησε το μαθητή στην επιλογή της πράξης του πολλαπλασιασμού.

«Υπολόγισε τα 2/3 του 18 για αυτό έκανε πολλαπλασιασμό» Σ9

Αντιθέτως, ο συμμετέχοντας Σ6 ανέφερε τον αναλογικό τρόπο σκέψης που επιλέγουν συνήθως οι μαθητές σε τέτοιου είδους προβλήματα *«έχουν συνηθίσει να κάνουν τον πολλαπλασιασμό (σκεφτόμενοι) ότι αν αυτά ήταν τόσα, πόσα θα ήταν… αναλογικά»* και ο Σ10 αναφέρθηκε σε ελλιπή εννοιολογική κατανόηση *«Δεν κατάλαβε εννοιολογικά τι του ζητάει το πρόβλημα και απλά υπολόγισε τα 2/3 του 18»*. Οι εκπαιδευτικοί Σ7 και Σ12 δεν μπόρεσαν να δώσουν κάποια εξήγηση.

Σχετικά με το είδος ανατροφοδότησης που θα έδιναν οι εκπαιδευτικοί (Ε.1.3), και οι τέσσερις θα επέλεγαν να πραγματευτούν την αλλαγή της μονάδας μέτρησης, στοχεύοντας στο να κατανοήσει ο μαθητής την κατάσταση, με χρήση αναπαραστάσεων. Σημειώνουμε ότι οι Σ5, Σ6 και Σ9 περιέγραψαν μια διαδικασία ανατροφοδότησης στην οποία οι ίδιοι ανάλαβαν εξ ολοκλήρου την ευθύνη της αναπαράστασης και εξήγησης της κατάστασης, ενώ ο Σ10 εμπλούτισε στοιχειωδώς τη διαδικασία με προκαταρκτικές ερωτήσεις:

«Θα του εξηγούσα ότι πλέον το μέτρο μας είναι το 2/3. Θα σχεδίαζα μια μπάρα με 18 ραβδιά, κάθε ραβδί θα το χώριζα 2/3 και θα προσπαθούσα να του δείξω πόσα χωράνε» Σ9

«Θα τον ρωτούσα ποια είναι η μονάδα αναφοράς τώρα. Τι παρατηρεί; Μεγάλωσε ή μίκρυνε; Αν μου έλεγε πως είναι πιο μικρή, θα του εξηγούσα ότι μετρώντας με κάτι μικρότερο, χρειάζομαι πιο πολλά κομμάτια. Ίσως κάναμε και ένα παράδειγμα με μολύβια» Σ10

Τα ευρήματα του Έργου 1 δείχνουν ότι η πλειονότητα των εκπαιδευτικών δεν μπόρεσε να αξιολογήσει ορθά την απάντηση του μαθητή, παρουσιάζοντας έλλειμμα Κοινής Γνώσης Περιεχομένου. Ακόμα, ένας (Σ7) που αξιολόγησε σωστά, δεν ήταν σε θέση να επιλύσει το πρόβλημα, πράγμα που επίσης δείχνει έλλειμμα Κοινής Γνώσης Περιεχομένου. Από τους έξι εκπαιδευτικούς που αξιολόγησαν σωστά, μόνο δύο ήταν σε θέση να δώσουν μια ουσιαστική εξήγηση της λανθασμένης επιλογής της πράξης από το μαθητή. Αυτό υποστηρίζει τη θέση ότι η Κοινή Γνώση Περιεχομένου δε συμβαδίζει απαραίτητα με τη Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών. Από την άλλη μεριά, οι περισσότεροι (αλλά όχι όλοι) ήταν σε θέση να προτείνουν ανατροφοδότηση για το μαθητή, με στόχο να τον υποστηρίξουν στο να αναγνωρίσει την επίδραση της αλλαγής της μονάδας μέτρησης. Φαίνεται ότι αξιοποιούν τη δική τους κατανόηση της κατάστασης για να υποστηρίξουν το μαθητή. Ωστόσο, από τις περιγραφές τους δε φαίνεται να προβλέπεται μια ουσιαστική εμπλοκή του μαθητή στη διαδικασία της ανατροφοδότησης.

Έργο 2

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται τα πιθανά λάθη των μαθητών στην διαδικασία εκτέλεσης του αλγορίθμου Α&Π (Ε2.1), όπως αναφέρθηκαν από τους εκπαιδευτικούς, η συχνότητα αναφοράς για κάθε τύπο, καθώς και το πλήθος των λαθών που προέβλεψε κάθε εκπαιδευτικός. Από τα στοιχεία του Πίνακα 2, προκύπτει ότι τα λάθη με τη μεγαλύτερη συχνότητα αναφοράς είναι η αντιστροφή του πρώτου κλάσματος αντί του δευτέρου, η μη αντιστροφή του δευτέρου κλάσματος ή η αντιστροφή και των δύο κλασμάτων. Διατυπώθηκαν και λάθη που δεν έχουν αναφερθεί στη βιβλιογραφία, όπως ο πολλαπλασιασμός χιαστί ή αλλαγή θέσεων των κλασμάτων. Τρεις εκ των συμμετεχόντων ανέφεραν ως λανθασμένη τη μέθοδο της διαίρεσης «αριθμητή με αριθμητή και παρανομαστή με παρανομαστή», που όμως είναι σωστή. Ένας εκ των τριών (Σ3) ανέφερε ως λάθος τη μετατροπή των κλασμάτων σε ομώνυμα, που δεν είναι αυτός καθαυτός λανθασμένος μετασχηματισμός.

Τύπος λάθους	Συμμετέχοντες	Συχνότητα Αναφοράς
Αντιστροφή του πρώτου κλάσματος	Σ8, Σ9, Σ10, Σ11, Σ12, Σ13	6
Μη αντιστροφή του δευτέρου κλάσματος	Σ1, Σ3, Σ4, Σ5, Σ6, Σ13	6
Αντιστροφή και των δύο κλασμάτων	Σ7, Σ8, Σ9, Σ10, Σ11	5
Να μη γίνει πολλαπλασιασμός των παρανομαστών	Σ4, Σ6, Σ10	3
*Διαίρεση αριθμητή με αριθμητή και παρανομαστή με παρανομαστή	Σ3, Σ7, Σ8	3
Πολλαπλασιασμός Χιαστί	Σ1, Σ2	2
Μετατροπή σε ομώνυμα κλάσματα όπως στην πρόσθεση/ αφαίρεση	Σ3	1
Αλλαγή θέσεων των κλασμάτων 4/12 επί 2/3	Σ5	1
Πλήθος λαθών ανά εκπαιδευτικό		
1	Σ2, Σ3,Σ7, Σ12	
2	Σ1, Σ4, Σ5, Σ6, Σ8, Σ9, Σ11	
3	Σ10	
Σημειώσεις: ** Πρόκειται για σωστή μέθοδο*		

Πίνακας 2: Πιθανά λάθη μαθητών κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου Α&Π και πλήθος λαθών που αναφέρθηκαν ανά εκπαιδευτικό (Ε2.1)

Όλοι οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν τουλάχιστον ένα (πράγματι) πιθανό λάθος και οι περισσότεροι ανέφεραν δύο. Ένας εκπαιδευτικός ανέφερε τρία πιθανά λάθη, που ήταν και το μεγαλύτερο πλήθος λαθών που σημειώθηκε. Κρίνεται σημαντικό να διατυπωθεί ότι οι συμμετέχοντες Σ5, Σ11 και Σ13 σχολίασαν κατά τη συνέντευξη ότι οι μαθητές συνήθως δεν κάνουν λάθη στην εκτέλεση του αλγορίθμου και πως πρόκειται για μια εύκολη διαδικασία, ενώ ο Σ5 υποστήριξε ότι τα λάθη που ανέφερε είναι πιο πιθανόν να γίνουν από μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα για τα υπόλοιπα υπο-έργα του Έργου 2, συγκεκριμένα για την αξιολόγηση των απαντήσεων των μαθητών (Ε2.2α, Ε2.2β), για την εξήγηση του τρόπου σκέψης των μαθητών (Ε2.3α, Ε2.3β) και για την ανατροφοδότηση (Ε3.3α, Ε3.3β). Όσον αφορά την αξιολόγηση, υπάρχουν δύο κατηγορίες απαντήσεων (Ορθή/ Λανθασμένη). Εξετάζοντας τις εξηγήσεις που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί, υπάρχουν 3 αδρές κατηγορίες: Οι εξηγήσεις που αποδίδουν το λάθος σε διαδικαστικές δυσκολίες των μαθητών («μπέρδεψε/ ξέχασε τα βήματα», «μπέρδεψε τη μέθοδο της διαίρεσης με τη μέθοδο της πρόσθεσης») (Διαδικαστική), αυτές που επικεντρώνονται (και) σε άλλες δυσκολίες, κυρίως εννοιολογικού τύπου (Μη Διαδικαστική). Υπάρχουν, τέλος, και οι περιπτώσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί δεν μπόρεσαν να δώσουν εξήγηση, ή έδωσαν μια τόσο γενική εξήγηση, που ήταν τετριμμένη (π.χ. «δεν έχει καταλάβει τίποτα»). Παραδείγματα των εξηγήσεων για κάθε κατηγορία θα παρουσιαστούν στη συνέχεια.

Παρόμοια, το είδος της ανατροφοδότησης που πρότειναν οι εκπαιδευτικοί μπορεί να ταξινομηθεί σε δύο αδρές κατηγορίες, την ανατροφοδότηση που επικεντρώνεται αποκλειστικά στη διαδικασία (Διαδικαστική), και αυτήν που περιλαμβάνει (και) άλλα στοιχεία (Μη Διαδικαστική). Όσον αφορά την πρώτη κατηγορία, οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν ότι θα επαναλάμβαναν τον κανόνα, θα έδειχναν παραδείγματα και θα ζητούσαν εξάσκηση. Ενδεικτικά:

> *«Θα έκανα καινούργια παραδείγματα με τη διαδικασία της διαίρεσης που δείχνουν ότι το πρώτο κλάσμα μένει ίδιο, αλλάζω το πρόσημο στη μέση και βάζω το επί και αντιστρέφω τα κλάσματα τούμπα. Και αρκετά παραδείγματα, για εξάσκηση μέσα από ασκήσεις εφόσον είναι πρακτικό κομμάτι και αντίστοιχα προβλήματα.»* Σ3α
>
> *«Θα τους έδειχνα ξανά τη διαδικασία και μετά θα λύναμε πολλά παραδείγματα μέχρι να δω ότι το έπιασαν»* Σ9, Σ11, Σ12
>
> *«Θα του έλεγα ότι αντιστρέφουμε μόνο το δεύτερο κλάσμα στη διαίρεση, θα τους έδειχνα τον αλγόριθμο»* Σ2α
>
> *«Θα τον επικροτούσα που χρησιμοποίησε το δεύτερο τρόπο διαίρεσης κλασμάτων απλώς θα του επισήμανα ότι δεν διαιρούμε μόνο τους αριθμητές αλλά και τους παρανομαστές»* Σ10β
>
> *«Θα του έδειχνα τον αλγόριθμο και θα έδινα παραδείγματα για εξάσκηση ακόμα και με ακέραιο τον έναν από τους δύο διαιρέτες»* Σ13

Τα παραδείγματα της δεύτερης κατηγορίας (Όχι Διαδικαστική) ήταν ελάχιστα, προήλθαν από λίγους εκπαιδευτικούς και θα παρουσιαστούν στη συνέχεια.

Τέλος, στο Ε2.2α εξετάστηκε αν οι εκπαιδευτικοί αναγνώρισαν το ενδεχόμενο ο μαθητής να εφαρμόζει (λανθασμένα) τη μέθοδο των «κοινών παρονομαστών» για τη διαίρεση κλασμάτων (Ναι/ Όχι). Στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται οι συχνότητες της κάθε κατηγορίας ανά τύπο υπο-έργου:

		Κατηγορίες αποκρίσεων	**Ν**	**Εκπαιδευτικοί**
Ε2.α	**Αξιολόγηση**	Ορθή	12	Σ1, Σ2, Σ3, Σ4, Σ5, Σ7, Σ8, Σ9, Σ10, Σ11, Σ12, Σ13
		Λανθασμένη	1	Σ6
	Εξήγηση	Διαδικαστική	8	Σ1, Σ3, Σ4, Σ7, Σ9, 10, Σ11, Σ13
		Μη διαδικαστική	1	Σ5
		Καμία/Μη εξήγηση	3	Σ2, Σ8, 12
	Ανατροφοδότηση	Διαδικαστική	10	Σ1, Σ2, Σ3, Σ4, Σ8, Σ9, Σ10, Σ11, Σ12, Σ13
		Μη διαδικαστική	2	Σ5, Σ7
Ε2.β	**Αξιολόγηση**	Ορθή	13	Σ1, Σ2, Σ3, Σ4, Σ5, Σ6, Σ7, Σ8, Σ9, Σ10, Σ11, Σ12, Σ13
		Λανθασμένη	0	-
	Εξήγηση	Διαδικαστική	8	Σ1, Σ2, Σ6, Σ7, Σ9, Σ10, Σ11, Σ13
		Μη διαδικαστική	1	Σ5
		Καμία/Μη εξήγηση	4	Σ3, Σ4, Σ8, Σ12
	Ανατροφοδότηση	Διαδικαστική	10	Σ1, Σ3, Σ4, Σ6, Σ8, Σ9, Σ10, Σ11, Σ12, Σ13
		Μη διαδικαστική	3	Σ2, Σ5, Σ7
	"Κοινοί Παρονομαστές"	Ναι	2	Σ5, Σ10
		Όχι	11	Σ1, Σ2, Σ3, Σ4, Σ6, Σ7, Σ8, Σ9, Σ11, Σ12, Σ13

Πίνακας 3: Κατηγοριοποίηση των απαντήσεων ως προς την ορθότητα της αξιολόγησης, τον τύπο εξήγησης και τον τύπο ανατροφοδότησης για το Ε2.2

Σύμφωνα με τα στοιχεία του Πίνακα 3 προκύπτει ότι, κατά την αξιολόγηση του έργου Ε2.2α, η πλειονότητα του δείγματος αξιολόγησε ορθά αναφέροντας ότι το λάθος του μαθητή βρίσκεται στην αντιστροφή και του πρώτου κλάσματος. Ένας μόνο συμμετέχοντας (Σ6) αξιολόγησε λάθος και ένας αρχικά λάθος και έπειτα ορθά (Σ8) και ελήφθη υπόψη η τελική του απάντηση.

Περνώντας στο έργο Ε2.2β, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι όλοι οι συμμετέχοντες αξιολόγησαν ορθά το δεύτερο παράδειγμα. Ωστόσο, μόνο δύο (Σ5, Σ10) εντόπισαν ότι το λάθος του μαθητή έγκειται στο γεγονός ότι διαίρεσε μόνο τους αριθμητές, αλλά κράτησε σταθερό τον παρονομαστή, αναγνωρίζοντας τη μέθοδο των «κοινών παρονομαστών»:

«Εφάρμοσε την μέθοδο Κοινών Παρανομαστών που υπάρχει στο βιβλίο, αλλά δεν διαίρεσε και τους παρανομαστές» Σ10

Αντίθετα, η πλειονότητα των συμμετεχόντων θεώρησε ότι το λάθος ήταν ότι μετέτρεψε τα κλάσματα σε ομώνυμα, νομίζοντας πως ο μαθητής παρασύρθηκε από τη μέθοδο επίλυσης πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων. Μάλιστα, οι συμμετέχοντες υποστήριξαν ότι η δημιουργία κοινών παρανομαστών δεν ενδείκνυται για τη διαίρεση κλασμάτων, δείχνοντας ότι δεν τους είναι οικεία η μέθοδος των «κοινών παρονομαστών:

«Ο Αντώνης έχει πολλαπλασιάσει με το 4 το πρώτο και το δεύτερο το έχει αφήσει.. αα πάει να τα κάνει ομώνυμα. Έχει μπερδέψει τον αλγόριθμο σε σχέση με την πρόσθεση. Προσπάθησε να κάνει κοινούς παρανομαστές αλλά είναι λάθος» Σ7

«Ο Αντώνης προσπαθεί να τα κάνει ομώνυμα. Βρήκε ότι το ΕΚΠ είναι το 12 για αυτό και πολλαπλασίασε το 2/3 με το 4 και βγήκε 8/12. Είναι λάθος γιατί ομώνυμα κλάσματα κάνουμε στην πρόσθεση και στην αφαίρεση» Σ13

Όσον αφορά την εξήγηση του λάθους (Ε2.3), από τα στοιχεία του Πίνακα 3 φαίνεται ότι και για τα δύο παραδείγματα λαθών η συχνότερη αιτιολογία που πρόβαλαν οι εκπαιδευτικοί, αφορούσε διαδικαστικές δυσκολίες του μαθητή. Τυπικά αναφέρθηκαν στην αδυναμία του μαθητή να θυμηθεί τα βήματα του αλγορίθμου, ενώ αναφέρθηκαν και στη σύγχυση των αλγορίθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης με αυτήν της διαίρεσης κλασμάτων..

«Μπέρδεψε τη διαδικασία» Σ1

«Μη εμπέδωση της διαδικασίας» Σ3

«Δεν θυμάται καλά τα βήματα του αλγορίθμου» Σ4, Σ9, 10, Σ11, Σ13

«Προσπάθησε να τα κάνει ομώνυμα που αυτό το κάνουμε μόνο στην πρόσθεση και στην αφαίρεση. Μπέρδεψε τις διαδικασίες. Τα έκανα ομώνυμα, διαίρεσε τους αριθμητές και άφησε τους παρανομαστές ως έχουν, κλασική τακτική της πρόσθεσης» Σ1, Σ2, Σ6, Σ7, Σ11

«Δεν έχει μάθει σωστά τη διαδικασία διαίρεσης κλασμάτων» Σ9, Σ10, Σ13

Μόνο ένας συμμετέχοντας (Σ5), και στις δύο περιπτώσεις, προσπάθησε να προσεγγίσει την αιτία του λάθος εννοιολογικά, υποστηρίζοντας πως οι μαθητές δεν κατανοούν τι σημαίνει η διαίρεση κλασμάτων και γιατί γίνεται με αυτό τον τρόπο, με αποτέλεσμα να κάνουν λάθη:

> *«(Τα παιδιά) δυσκολεύονται εννοιολογικά για το τι σημαίνει διαιρώ το κλάσμα… όταν διαιρώ το κλάσμα σημαίνει προσπαθώ να δω πόσες φορές χωράει το ένα κλάσμα μέσα στο άλλο»* Σ5α

> *Υπάρχει πάλι έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης της διαίρεσης. Εδώ ο μαθητής ίσως δεν κατανοεί τι σημάνει ο παρανομαστής και τι δείχνει, για αυτό και ασχολείται αποκλειστικά με τους αριθμητές.* Σ5β

Ωστόσο, υπήρξαν και ασαφείς/ γενικόλογες απαντήσεις της μορφής *«Έκανε λάθος από απροσεξία»* (Σ2) και *«Δεν έχουν κατανοήσει τίποτα»* (Σ8), ενώ ένας συμμετέχοντας δεν μπόρεσε να δώσει καμία εξήγηση (Σ12).

Όσον αναφορά το είδος ανατροφοδότησης που θα έδιναν στον συγκεκριμένο μαθητή (Ε2.4), όπως φαίνεται από τον Πίνακα 3, η μεγάλη πλειοψηφία των απαντήσεων βρέθηκε στην κατηγορία «Διαδικαστική» και, όπως προαναφέρθηκε, οι απαντήσεις αυτές κινήθηκαν είτε προς την χρήση παραδειγμάτων είτε προς την παραπομπή στον κανόνα με κάποιες παραλλαγές.

Στην κατηγορία «Όχι διαδικαστική», βρέθηκαν πολύ λιγότερες απαντήσεις, οι οποίες προήλθαν από 3 εκπαιδευτικούς (Σ1, Σ5, Σ7). Οι Σ5 και Σ7 ανέφεραν ότι θα προσέγγιζαν καταρχήν εννοιολογικά τη διαίρεση κλασμάτων και θα εξηγούσαν πάλι τον αλγόριθμο:

> *«Αν το πάμε αλγοριθμικά τότε πρέπει να εξηγήσουμε και πάλι τον αλγόριθμο. Εννοιολογικά θα πρέπει να κάνουμε μια μορφή αναπαράστασης του τι σημαίνει 2/3 δια 4/12, μια εικόνα ή κάτι τέτοιο»* Σ7α

> *«Να πιάσω εννοιολογικά ξανά τη διαίρεση και μετά να ξανά δούμε τα βήματα του αλγορίθμου»* Σ5β

Ο Σ1, από την άλλη μεριά, ήταν η μόνη περίπτωση που αναφέρθηκε στο μαθητή, υπογραμμίζοντας την ανάγκη να αναλάβει και ο μαθητής ευθύνη στην ανατροφοδότηση, ελέγχοντας ο ίδιος την απάντησή του, ή εκφράζοντας τι δεν έχει καταλάβει:

«Θα τον παρότρυνα να ξανά κοιτάξει αυτό που έχει γράψει στη συνέχεια αν δεν μπορούσε να εντοπίσει το λάθος του, τότε θα τον κατεύθυνα ας πούμε ότι έχει κάνει ένα λάθος στο πρώτο κλάσμα. Δεν θα του έδινα έτοιμη τη λύση σε καμία περίπτωση» Σ1α

«Θα τον ρωτούσα τι δεν έχει καταλάβει για να ξέρω πως θα κινηθώ» Σ1β

Τα παραπάνω ευρήματα δείχνουν πως οι εκπαιδευτικοί έχουν επαρκή διαδικαστική γνώση, γνωρίζουν και εκτελούν σωστά τα βήματα του αλγορίθμου, ωστόσο προσεγγίζουν τη διαίρεση κλασμάτων κατά κύριο λόγο διαδικαστικά και όχι εννοιολογικά. Η πλειοψηφία θεωρεί πως η γνώση για τον αλγόριθμο βασίζεται μόνο στη σωστή εκτέλεση της διαδικασίας και όχι στην κατανόηση του τι κάνουν και γιατί το κάνουν. Αυτό άλλωστε φαίνεται και από το είδος της ανατροφοδότησης που επιλέγουν να δώσουν.

Ελάχιστες εξαιρέσεις υπήρχαν σε αυτή τη «διαδικαστική» προσέγγιση. Μόνο ένας συμμετέχοντας (Σ5) αναφέρθηκε στην εννοιολογική κατανόηση του μαθητή για να εξηγήσει τα λάθη. Ο ίδιος και άλλοι δύο (Σ2, Σ7) διαφοροποιήθηκαν κατά την ανατροφοδότηση από τους υπόλοιπους.

Τέλος, ο αλγόριθμος των «κοινών παρονομαστών» δε φάνηκε να είναι οικείος στην πλειοψηφία των συμμετεχόντων, γεγονός που δείχνει έλλειψη Εξειδικευμένης Γνώσης του Περιεχομένου, για ένα θέμα, μάλιστα, που πραγματεύεται το εγχειρίδιο της Ε΄ Δημοτικού.

Από το Έργο 2 φαίνεται ότι οι συμμετέχοντες γνωρίζουν τον τυπικό αλγόριθμο της διαίρεσης, με την εξαίρεση μίας μόνο λανθασμένης αξιολόγησης (Κοινή Γνώση Περιεχομένου) και μπορούν να προβλέψουν πιθανά λάθη των μαθητών τα οποία, όμως, τα αποδίδουν σχεδόν αποκλειστικά σε διαδικαστικές δυσκολίες, ενώ κάποιοι δηλώνουν ότι δεν αναμένουν δυσκολίες και λάθη από τους μαθητές. Αυτό δείχνει περιορισμούς στη Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών για το συγκεκριμένο θέμα. Από την άλλη μεριά, στην πλειοψηφία τους οι συμμετέχοντες φαίνεται να μη (ανα)γνωρίζουν άλλες μεθόδους εκτέλεσης του αλγόριθμου, και αυτό τους οδηγεί να προβλέψουν ή να αξιολογήσουν ως λανθασμένη μια ορθή μέθοδο. Εδώ φαίνεται μια επικάλυψη της Εξειδικευμένης, με την Κοινή Γνώση Περιεχομένου.

Έργο 3

Στο έργο 3 όλοι οι συμμετέχοντες αξιολόγησαν με επιτυχία την ορθότητα της απάντησης του μαθητή (Ε.3.1), κάποιοι επιλύοντας γραπτώς τη διαίρεση και άλλοι υπολογίζοντάς την νοερά. Ικανοποιητικές υπήρξαν και οι απαντήσεις τους σχετικά με τον τρόπο σκέψης του μαθητή (Ε.3.2). Σχηματίστηκαν 4 κατηγορίες εξηγήσεων, αυτές που αναφέρθηκαν:

α) στην παρανόηση «η διαίρεση μικραίνει», με το πηλίκο να είναι μικρότερο από το διαιρετέο. Για παράδειγμα:

> *«Περίμενε για πηλίκο έναν αριθμό μικρότερο από τους διαιρέτες»* Σ4

β) στην προσδοκία ότι η διαίρεση ενός ακεραίου με ένα κλάσμα πρέπει να έχει κλασματικό πηλίκο. Για παράδειγμα:

> *«Επειδή το αποτέλεσμα είναι ακέραιος αριθμός, ενώ εκείνος περίμενε κάποιο κλάσμα»* Σ3

γ) στη δυσκολία που δημιουργεί το γεγονός ότι ο διαιρετέος είναι ακέραιος, ενώ ο διαιρέτης κλασματικός αριθμός. Για παράδειγμα:

> *«Δυσκολεύτηκε επειδή ο διαιρετέος είναι ακέραιος και όχι κλάσμα. Πιστεύει ότι δεν μπορεί να βρει το σωστό αποτέλεσμα αν δεν είναι και τα δυο κλάσματα. Ίσως πιστεύει ότι θα είναι διαφορετικός ο τρόπος επίλυσης.»* Σ1

δ) και τέλος, υπήρχε και η περίπτωση «Καμία εξήγηση» για όσους δεν μπόρεσαν να απαντήσουν (π.χ. *«Δεν ξέρω τι τον μπερδεύει. Δεν μπορώ να καταλάβω»*).

Όσον αφορά την ανατροφοδότηση, ταξινομήσαμε τις απαντήσεις σε δύο αδρές κατηγορίες, παρόμοια με το προηγούμενο έργο. Στην πρώτη (Διαδικαστική) τοποθετήθηκαν οι περιπτώσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν σε κανόνες και διαδικασίες, παρόμοια παραδείγματα και εξάσκηση. Στη δεύτερη (Μη διαδικαστική) τοποθετήθηκαν οι περιπτώσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν σε στρατηγικές αντιμετώπισης της δυσκολίας που διέγνωσαν, ενώ υπήρξαν συμμετέχοντες που δεν έδωσαν καμία απάντηση (Καμία Ανατροφοδότηση). Πιο λεπτομερής αναφορά με παραδείγματα θα γίνει στη συνέχεια. Στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται οι συχνότητες των κατηγοριών απαντήσεων ανά υποέργο.

	Κατηγορίες αποκρίσεων	N	Εκπαιδευτικοί
Αξιολόγηση (Ε3.1)	Ορθή	13	Σ1, Σ2, Σ3, Σ4, Σ5, Σ6, Σ7, Σ8, Σ9, Σ10, Σ11, Σ12, Σ13
	Λανθασμένη	0	
Εξήγηση (Ε3.2)	Μεγαλύτερο πηλίκο	6	Σ4, Σ5, Σ6, Σ7, Σ11, Σ13
	Κλασματικό πηλίκο	2	Σ3, Σ12
	Ακέραιος διαιρετέος, Κλασματικός διαιρέτης	3	Σ1, Σ2, Σ8
	Καμία εξήγηση	2	Σ9, Σ10
Ανατροφοδότηση (Ε3.3)	Διαδικαστική	6	Σ1, Σ2, Σ3, Σ6,Σ8, Σ12,
	Μη Διαδικαστική	4	Σ5, Σ7, Σ11, Σ13
	Καμία Ανατροφοδότηση	3	Σ4,Σ9, Σ10

Πίνακας 4: Κατηγοριοποίηση των απαντήσεων ως προς την ορθότητα της αξιολόγησης, τον τύπο εξήγησης και τον τύπο ανατροφοδότησης για το Ε3

Σύμφωνα με τα στοιχεία του Πίνακα 4, η επικρατέστερη εξήγηση που δόθηκε αφορούσε τη διάψευση της προσδοκίας ότι το πηλίκο θα είναι μικρότερο από το διαιρετέο. Η επικρατέστερη κατηγορία, όσον αφορά την ανατροφοδότηση είναι και πάλι η Διαδικαστική. Πιο αναλυτικά, τέσσερις εκπαιδευτικοί εστίασαν στην ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκο με δύο διαφορετικούς τρόπους:

«Θα του έλεγα ότι το κλάσμα είναι διαίρεση και άμα διαιρέσει 30:5, θα βγει 6»
Σ1 (και, παρόμοια, Σ3, Σ12)

«Αρχικά θα τον ρωτούσα γιατί πιστεύει ότι έκανε λάθος για να δω που υπάρχει παρανόηση. Μετά θα του έλεγα ότι το 5/10 είναι το μισό άρα 3 δια μισό ίσον 6»
Σ6

Στο πρώτο παράδειγμα, οι εκπαιδευτικοί αναφέρονται στο τελευταίο βήμα που έκανε το παιδί και επί της ουσίας δεν αντιμετωπίζουν το πρόβλημα, καθώς το ίδιο το παιδί ήταν σε θέση να υπολογίσει αυτό το πηλίκο. Στο δεύτερο παράδειγμα, ο Σ6 μετατρέπει το κλάσμα σε μια πιο οικεία μορφή («μισό»), αλλά φαίνεται να θεωρεί ότι αυτό αρκεί για να γίνει αποδεκτό το πηλίκο 6.

Οι εκπαιδευτικοί (Σ1, Σ2, Σ8) που αναφέρθηκαν στην ακέραιη μορφή του διαιρετέου ως αιτία θα ακολουθούσαν αποκλειστικά, διαδικαστικές πρακτικές που εστιάζουν στην εκτέλεση του αλγορίθμου:

«Θα τον ρωτούσα σε ποιο σημείο πιστεύει ότι έκανε λάθος και για ποιο λόγο. Θα του έδειχνα ότι το 3, μπορεί να γραφτεί και ως 3/1 για να φαίνεται πιο ξεκάθαρα η πράξη» Σ2

«Θα του έδινα παραπλήσια παραδείγματα. Σίγουρα θα έδινα αρκετά και πάντα αυτό κάνω» Σ8

Τέσσερις εκπαιδευτικοί βρέθηκαν στην κατηγορία Μη Διαδικαστικοί. Όλοι είχαν εντοπίσει την παρανόηση «μεγαλύτερο πηλίκο» ως εξήγηση της δυσκολίας του μαθητή και πρότειναν προσεγγίσεις για την αντιμετώπισή της, είτε μέσω (αντι)παραδειγμάτων, είτε με αναπαραστατικά μέσα είτε προσεγγίζοντας τη διαίρεση με το μοντέλο μέτρησης.

*«Θα του ξεκαθάριζα πως αυτή η σκέψη τους είναι λάθος, ο πολλαπλασιασμός δεν δίνει πάντα μεγαλύτερο αποτέλεσμα και ούτε η διαίρεση πάντα μικρότερο. Παραδείγματα που έρχονται σε σύγκρουση με αυτή την αντίληψη. Πχ. 6 x ½ που θα δώσει 3 ή 6: ½ που θα δώσει 12»*Σ11

«Θα το έπιανα από την αρχή.. δηλαδή θα έδειχνα παράδειγμα πολλαπλασιασμού που βγαίνει μικρότερο αποτέλεσμα κι μετά μια διαίρεση που βγαίνει μεγαλύτερο, όπως αυτό» Σ13

«Θα του έκανα μια αναπαράσταση με 3 ολόκληρα μέρη και θα τα χωρίζαμε σε 5/10 με το πλαίσιο των δεκάδων για να δει ότι αυτό μπορεί να χωριστεί σε 6 ομάδες και άρα το μέγεθος του πηλίκου να έχει λογική» Σ7

«Θα του εξηγούσα ότι προσπαθούμε να δούμε πόσες φορές χωράει το 5/10 στο 3 και επειδή το 5/10 είναι το μισό, θα δούμε πόσα μισά έχει μέσα του ο αριθμός 3 και έτσι βγαίνει το συμπέρασμα ότι έχει 6 μισά» Σ5

Σημειώνεται ότι στα δύο πρώτα παραδείγματα, οι εκπαιδευτικοί αναφέρονται ρητά στις παρανοήσεις «ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει / η διαίρεση μικραίνει», εκφράζουν την πρόθεσή τους να δώσουν (αντι)παραδείγματα για την παρανόηση του μαθητή παράλληλα και για τις δύο περιπτώσεις, αλλά δεν εξηγούν με ποιο τρόπο θα γίνουν αυτά πειστικά για τους μαθητές. Αντίθετα, στα δύο τελευταία παράδειγμα, οι εκπαιδευτικοί σκιαγραφούν από μια στρατηγική, η οποία θα μπορούσε να γίνει κατανοητή από τα παιδιά.

Ολοκληρώνοντας το συγκεκριμένο έργο, να επισημάνουμε ότι από το σύνολο των ανατροφοδοτήσεων, δύο (Σ2, Σ6) επιχειρούν να εντάξουν έμμεσα τον μαθητή στη διαδικασία. Συγκεκριμένα, θα προσπαθούσαν πρώτα να δουν που πιστεύει ότι έκανε λάθος ο μαθητής, επιδιώκοντας την εμπλοκή του. Τέλος, υπήρξαν εκπαιδευτικοί που δεν μπόρεσαν να δώσουν κάποια ανατροφοδότηση (Σ4, Σ9, Σ10) και δύο από αυτούς (Σ9, Σ10) δεν είχαν δώσει ούτε εξήγηση για τον προβληματισμό του μαθητή.

Συνοψίζοντας, στο Έργο 3 η αξιολόγηση του υπολογισμού του μαθητή έγινε σωστά από όλους τους εκπαιδευτικούς, όπως θα ήταν αναμενόμενο ήδη από την επίδοσή τους στο Έργο 2. Με την εξαίρεση δύο εκπαιδευτικών που δεν μπόρεσαν να εξηγήσουν τη δυσκολία που αντιμετώπιζε ο μαθητής, ούτε να δώσουν ανατροφοδότηση, οι υπόλοιποι εκπαιδευτικοί έδωσαν εύλογες εξηγήσεις, με τους περισσότερους να εστιάζουν στην παρανόηση «η διαίρεση μικραίνει» και τους υπόλοιπους να αναφέρονται σε διάφορες πιθανές επιδράσεις του είδους των εμπλεκόμενων αριθμών. Όσον αφορά την ανατροφοδότηση, μόνο όσοι (αλλά όχι όλοι) εστίασαν στην παρανόηση ότι «η διαίρεση μικραίνει», στόχευσαν στην εννοιολογική κατανόηση του μαθητή, ενώ οι υπόλοιποι εστίασαν στη διαδικασία της εκτέλεσης της πράξης.

Έργο 4

Στον Πίνακα 5 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα για το Έργο 4. Συγκεκριμένα αφορούν την αξιολόγηση της μεθόδου διαίρεσης αριθμητή με αριθμητή και παρανομαστή με παρανομαστή, τον τρόπο εξήγησης της παραπάνω θέσης, την προτεινόμενη μέθοδο διαίρεσης κλασμάτων στους μαθητές και τη γνώση άλλης μεθόδου. Όσον αφορά την αξιολόγηση, υπάρχουν δύο κατηγορίες απαντήσεων (Ορθή/ Λανθασμένη). Εξετάζοντας τις εξηγήσεις που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί, υπάρχουν 4 αδρές κατηγορίες: *«Δεν είναι ο τρόπος διαίρεσης που έχει διδαχτεί», «Ισχύει μόνο όταν τα επιμέρους πηλίκα είναι ακέραιοι αριθμοί», «Ισχύει και για (κάποια) μη ακέραια επιμέρους πηλίκα, αλλά ίσως όχι γενικά», «Λανθασμένη εξήγηση* και *«Καμία/ Μη εξήγηση».* Οι απαντήσεις για την προτεινόμενη μέθοδο κατηγοριοποιήθηκαν προς τη χρήση του παραδοσιακού αλγορίθμου «Α&Π» και κάποιας «άλλης μεθόδου». Τέλος, για τη γνώση άλλης μεθόδου διαίρεσης οι κατηγορίες είναι «Ναι» ή «Όχι» και ακολουθούν οι απαντήσεις εκείνων που δήλωσαν «Ναι». Παραδείγματα των εξηγήσεων για κάθε κατηγορία θα παρουσιαστούν στη συνέχεια.

	Κατηγορίες αποκρίσεων	Ν	Εκπαιδευτικοί
Αξιολόγηση (Ε4.1)	Ορθή	1	Σ5
	Λανθασμένη	12	Σ1, Σ2, Σ3, Σ4, Σ6, Σ7, Σ8, Σ9, Σ10, Σ11, Σ12, Σ13
Εξήγηση (Ε4.2)	Δεν είναι ο τρόπος διαίρεσης που έχει διδαχτεί	4	Σ2, Σ4, Σ7, Σ13
	Ισχύει μόνο όταν τα επιμέρους πηλίκα είναι ακέραιοι αριθμοί	6	Σ3, Σ9, Σ8, Σ10, Σ11, Σ12
	Ισχύει και για (κάποια) μη ακέραια επιμέρους πηλίκα, αλλά ίσως όχι γενικά	1	Σ6
	Λανθασμένη εξήγηση	1	Σ5
	Καμία/ Μη εξήγηση	1	Σ1
Ποια μέθοδο προτείνουν (Ε4.3)	Α&Π	13	Σ1, Σ2, Σ3, Σ4, Σ5, Σ6, Σ7, Σ8, Σ9, Σ10, Σ11, Σ12, Σ13
	Άλλη μέθοδο	0	
Γνώση άλλης μεθόδου	Ναι	3	Σ5, Σ10, Σ11
	Όχι	10	Σ1, Σ2, Σ3, Σ4, Σ6, Σ7, Σ8, Σ9, Σ12, Σ13
Γνώση άλλης μεθόδου διαίρεσης κλασμάτων			
Κοινοί Παρανομαστές		2	Σ5, Σ10
Σύνθετο Κλάσμα		1	Σ11
Διαδοχική Αφαίρεση		1	Σ5

Πίνακας 5: Κατηγοριοποίηση των απαντήσεων σχετικά με τη γνώση άλλων μεθόδων διαίρεσης κλασμάτων (Ε4)

Σύμφωνα με τα στοιχεία του Πίνακα 5, όλοι οι συμμετέχοντες αξιολόγησαν την πρακτική της Άννας ως λανθασμένη, εκτός από τον Σ5. Σχετικά με την εξήγηση που έδωσαν, κάποιοι (Σ2, Σ4, Σ7, Σ13) υποστήριξαν ότι ««*Δεν είναι ο τρόπος διαίρεσης που έχει διδαχτεί η μαθήτρια και που εφαρμόζουμε όλοι*», χωρίς να επιχειρήσουν να κάνουν δοκιμές και με άλλους αριθμούς.

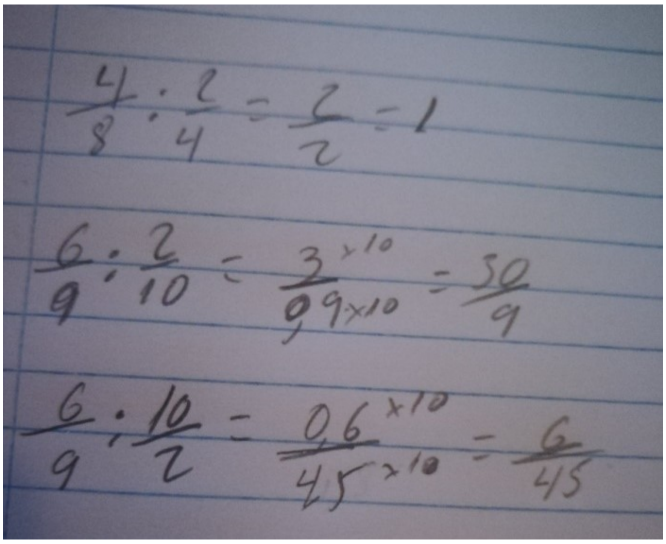
Σε αντίθεση με τους Σ3, Σ8 και Σ9 που έκαναν κάποιες δοκιμές και δήλωσαν ότι μπορεί να εφαρμοστεί μόνο με συγκεκριμένους αριθμούς, όταν τα επιμέρους πηλίκα είναι ακέραιοι αριθμοί δηλαδή, όταν οι όροι του πρώτου κλάσματος είναι πολλαπλάσια του δευτέρου, ενώ οι Σ10 και Σ11 έδωσαν κάποια (αντί)παραδείγματα.

«Με άλλους αριθμούς δεν θα μπορούσαμε να διαιρέσουμε έτσι. Στα μαθηματικά δεν μπορεί να ισχύει κάτι υπό περιπτώσεις» Σ3, Σ9

«Έτυχε να βγει σωστό, γιατί τα κλάσματα είναι τέτοια. Το 2 είναι το διπλάσιο του ένα και το 9 το τριπλάσιο του τρία, άρα είναι πολλαπλάσια τους και έτυχε να βγουν» Σ8 (και, παρόμοια, Σ12)

Ο Σ1 δεν μπόρεσε να δώσει κάποια εξήγηση, ενώ ο Σ6 αποδέχεται τις περιπτώσεις όπου τα επιμέρους πηλίκα δεν είναι ακέραιοι αριθμοί (Εικόνα 7) αλλά δεν μπορεί να δώσει κάποια εξήγηση. Καταλαβαίνει ότι από το ειδικό (κάποια παραδείγματα) δεν μπορεί να βγάλει ένα γενικό συμπέρασμα, γι' αυτό και καταλήγει ότι δεν το δέχεται γιατί δεν υπάρχει στο βιβλίο.

«Ισχύει απλά πχ θα βγει μικρότερος παρανομαστής της μονάδας, δηλαδή θα έχουμε δεκαδικό ως παρανομαστή και θα πρέπει ας πούμε να τον πολλαπλασιάσεις με το 10 ας πούμε για να τα μεγαλώσεις [...].Το αποτέλεσμα είναι σωστό αλλά μπορεί να τυχαίνει. Αν υπήρχε στο βιβλίο, θα το δεχόμουν» Σ6



Εικόνα 3: Η Εξήγηση του Σ6 για την ορθότητα πρακτικής της Άννας (Ε4.1)

Ο Σ5 ήταν ο μοναδικός που επιβεβαίωσε την εγκυρότητα της συγκεκριμένης μεθόδου και μάλιστα δήλωσε πως γνωρίζει και άλλες μεθόδους διαίρεσης κλασμάτων, όπως οι Κοινοί Παρανομαστές και η Διαδοχική Αφαίρεση. Ωστόσο, φάνηκε πως αντιμετώπισε δυσκολία κατά την εξήγησή του καθώς έδωσε ένα λάθος παράδειγμα. Συγκεκριμένα, περιέγραψε ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού και όχι διαίρεσης:

«Το σκέφτηκε εμπειρικά/ πρακτικά. Εγώ ήθελα να κάνω μια συνταγή στο μισό της και έλεγε ένα ποτήρι αλεύρι ¾ και εγώ για να κάνω τη μισή συνταγή είπα ¾

διά ½ και έκανα ακριβώς αυτό ενάμισι δεύτερο" Είναι ένας νοερός τρόπος υπολογισμού» Σ5

Στην ερώτηση ποια μέθοδο επίλυσης προτείνουν στους μαθητές τους (Ε4.2) όλοι απάντησαν τον παραδοσιακό αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω».

Τέλος, στο υπο- έργο Ε4.3, που ήλεγχε τη γνώση άλλης μεθόδου επίλυσης διαίρεσης κλασμάτων (Ναι/ Όχι), 10 στους 13 συμμετέχοντες δήλωσαν ότι δεν γνωρίζουν άλλη. Οι υπόλοιποι τρεις ανέφεραν τη μέθοδο των Κοινών Παρανομαστών (Σ5, Σ10), το Σύνθετο Κλάσμα (Σ11) και τη Διαδοχική Αφαίρεση (Σ5).

Συνοψίζοντας, όλοι οι συμμετέχοντες γνωρίζουν τον αλγόριθμο Α&Π, που είναι και ο μοναδικός που προτείνουν στους μαθητές τους. Τρεις εκπαιδευτικοί διαφοροποιούνται από τους υπόλοιπους ως προς τη γνώση εναλλακτικών αλγορίθμων, καθώς γνωρίζουν έναν ή δύο διαφορετικούς από τον Α&Π. Όλοι οι εκπαιδευτικοί εμφανίζουν δυσκολίες στην αξιολόγηση της χρήσης από τη μαθήτρια της μεθόδου «διαιρώ τους αντίστοιχους όρους». Οι εκπαιδευτικοί διαφέρουν ως προς τις αποκρίσεις τους, συνολικά όμως φαίνεται να μην έχουν την προδιάθεση ή την ικανότητα να ελέγξουν την ισχύ της μεθόδου στη γενικότητά της.

Έργο 5

Στον Πίνακα 6 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα ευρήματα για το Έργο 5, τα οποία αφορούν την εξήγηση της δυσκολίας ενός μαθητή να ερμηνεύσει μια διαίρεση με κλασματικό διαιρέτη, καθώς και τη δημιουργία αναπαράστασης και προβλήματος με δοσμένες διαιρέσεις. Για το πρώτο έργο (Ε5.1) οι απαντήσεις κατηγοριοποιηθήκαν ως *«Μοιρασιά», «Μοιρασιά έναντι μέτρησης»*, και *«Δυσκολίες με τον κλασματικό διαιρέτη»*. Στην πρώτη περίπτωση, οι εκπαιδευτικοί αντιπαρέβαλαν τα δύο διαφορετικά νοήματα της διαίρεσης ρητά στην απάντησή τους. Στη δεύτερη, αναφέρθηκαν μόνο στη διαίρεση ως μερισμό. Τέλος, στην τρίτη, αναφέρθηκαν σε δυσκολίες των μαθητών με τον κλασματικό διαιρέτη ως αριθμό. Για το δεύτερο υπο-έργο (Ε5.2), έχουμε τις κατηγορίες «Σωστό», «Λάθος» και «Αδυναμία Κατασκευής», τόσο όσον αφορά τις αναπαραστάσεις, όσο και τα προβλήματα. Σχετικά με τα προβλήματα, ως «Σωστά» θεωρήθηκαν και προβλήματα τα οποία είχαν αδυναμίες στη διατύπωση ή αναφέρονταν σε μια κατάσταση «μη ρεαλιστική», αν η δομή τους ήταν σωστή, Για παράδειγμα, ένας συμμετέχων αντιστοίχισε το 1/3 στο «1*/3 ενός μολυβιού» και έθεσε το ερώτημα «Πόσα τέτοια κομμάτια χρειάζομαι για να φτιάξω 12 μολύβια;»* (μη ρεαλιστική κατάσταση). Παράδειγμα μη ακριβούς διατύπωσης είναι «*μοιράζω 12 σοκολάτες σε κομματάκια ένα τρίτο*».

Έργο	Υποέργο	Κατηγορία απάντησης	Ν	Εκπαιδευτικοί
Ε5.1	**Εξήγηση**	Μοιρασιά	8	Σ1, Σ2, Σ3, Σ4, Σ6, Σ9, Σ11, Σ13
		Μοιρασιά έναντι μέτρησης	2	Σ7, Σ10
		Δυσκολίες με τον κλασματικό διαιρέτη	3	Σ5, Σ8, Σ12
Ε5.2α	**Πρόβλημα**	Σωστό	8	Σ3, Σ5, Σ6, Σ7, Σ9, Σ10, Σ11, Σ12
		Λάθος	0	
		Αδυναμία Κατασκευής	5	Σ1, Σ2, Σ4, Σ8, Σ13
	Αναπαράσταση	Σωστή	5	Σ5, Σ6, Σ7, Σ10, Σ13
		Λανθασμένη	5	Σ1, Σ3, Σ8, Σ9, Σ12
		Αδυναμία Κατασκευής	3	Σ2, Σ4, Σ11
Ε5.2β	**Πρόβλημα**	Σωστό	4	Σ5, Σ10, Σ11, Σ12
		Λάθος	2	Σ3, Σ7
		Αδυναμία Κατασκευής	7	Σ1, Σ2, Σ4, Σ6, Σ8, Σ9, Σ13
	Αναπαράσταση	Σωστή	4	Σ5, Σ6, Σ9, Σ13
		Λανθασμένη	4	Σ3, Σ7, Σ10, Σ11
		Αδυναμία Κατασκευής	5	Σ1, Σ2, Σ4, Σ8, Σ12

Πίνακας 6: Συχνότητα των κατηγοριών απάντησης στα υπο-έργα του Ε5 και εκπαιδευτικοί ανά κατηγορία

Στο έργο Ε5.1, οι περισσότεροι συμμετέχοντες ανέφεραν ως αιτία το γεγονός ότι τα παιδιά έχουν ταυτίσει την πράξη της διαίρεσης με την ερμηνεία της «δίκαιης» μοιρασιάς, μία ποσότητα που μοιράζεται σε ισομερή μεγέθη και ο διαιρέτης είναι ακέραιος. Σύμφωνα με τους ίδιους, πρόκειται για μια αντίληψη που ενισχύεται και από τα σχολικά βιβλία, τα οποία περιλαμβάνουν κυρίως αναπαραστάσεις ή προβλήματα μοιρασιάς. Οι εκπαιδευτικοί ισχυρίστηκαν ότι ο μαθητής στο συγκεκριμένο έργο δυσκολεύεται καθώς δεν μπορεί να μοιράσει σε κλασματικό διαιρέτη. Κάποιοι από αυτούς δεν αναφέρθηκαν καθόλου στο εναλλακτικό μοντέλο μέτρησης:

> *«Έχουν συνηθίσει ότι η διαίρεση ίσον μοίρασμα και έχουν συνηθίσει σε ακέραιους αριθμούς 2, 3.. το ½ τους δυσκολεύει»* Σ1 (και παρόμοια Σ2, Σ3, Σ4, Σ9, Σ11, Σ13)

> *«Τον μπερδεύει ο κλασματικός διαιρέτης. Από πολύ μικρή ηλικία διδάσκονται τη διαίρεση ως μοίρασμα με ακέραιους αριθμούς και τώρα δεν μπορεί να το μοιράσει. Εξάλλου και τα βιβλία μόνο παραδείγματα μοιρασιάς έχουν»*Σ6

Πιο ολοκληρωμένη απάντηση έδωσαν οι Σ7 και Σ10, καθώς αναφέρθηκαν και στο μοντέλο μέτρησης και στη δυσκολία των μαθητών να σκέφτονται με αυτό, δείχνοντας να γνωρίζουν επαρκώς και τις δυο ερμηνείες της διαίρεσης:

«Τα παιδιά έχουν συνδέσει τη διαίρεση με το μοίρασμα και μάλιστα με το ίσο μοίρασμα [...] Εκτός από τη λέξη μοίρασμα πρέπει να χρησιμοποιούμε και τη σημασία της μέτρησης δηλαδή του πόσες φορές χωράει το δεύτερο κλάσμα στο πρώτο. Αν ο μαθητής ήξερε και αυτή την ερμηνεία θα μπορούσε να απαντήσει»
Σ7 και παρόμοια, Σ10

Υπήρξαν και εκπαιδευτικοί που δεν αναφέρθηκαν καθόλου στις ερμηνείες της διαίρεσης. Αναφέρθηκαν στη δυσκολία του μαθητή να αναγνωρίσει τον κλασματικό διαιρέτη ως αριθμό που μπορεί να λειτουργήσει ως διαιρέτης, είτε γιατί τον βλέπει ως δύο ασύνδετους μεταξύ τους φυσικούς αριθμούς, είτε γιατί τον βλέπει ως μια πράξη διαίρεσης.

*«Δεν αντιμετωπίζει το 1/3 ως έναν αριθμό αλλά ως 1 διά 3»*Σ5

*«Δεν αντιμετωπίζουν τα κλάσμα ως αριθμούς ενιαίους, θεωρούν ως έναν αριθμό τον αριθμητή και ως έναν άλλο τον παρανομαστή»*Σ12

Το έργο Ε5.2 διερευνούσε τις πρακτικές που θα εφάρμοζαν οι εκπαιδευτικοί προκειμένου να εξηγήσουν δύο πράξεις διαίρεσης, τη $12 : \frac{1}{3}$ (Ε5.2.1) και τη $\frac{5}{6} : \frac{1}{3}$(Ε5.2.2) και κατ' επέκταση τις ικανότητές τους για τη δημιουργία αναπαράστασης και κατασκευή προβλήματος. Σημειώνεται ότι πρόκειται για το έργο που απασχόλησε χρονικά περισσότερο κατά τη συνέντευξη.

Προκειμένου να αναδειχθούν πιο καθαρά τα σχετικά ευρήματα, εξετάστηκαν το πλήθος των σωστών προβλημάτων και το πλήθος των σωστών αναπαραστάσεων ανά εκπαιδευτικό. Προέκυψαν όλες οι δυνατές κατηγορίες (0, 1, 2). Η συχνότητα της κάθε κατηγορίας και οι εκπαιδευτικοί ανά κατηγορία παρουσιάζονται στον Πίνακα 7.

Πλήθος Σωστών Προβλημάτων	N	Εκπαιδευτικοί
2	5	Σ5, Σ10, Σ11, Σ12
1	3	Σ3, Σ6, Σ7, Σ9,
0	5	Σ1, Σ2, Σ4, Σ8, Σ13
Πλήθος Σωστών Αναπαραστάσεων		
2	3	Σ5, Σ6, Σ13
1	3	Σ7, Σ9, Σ10
0	7	Σ1, Σ2, Σ3, Σ4, Σ8, Σ11, Σ12

Πίνακας 7: Συχνότητα των κατηγοριών με κριτήριο το πλήθος σωστών αποκρίσεων για την κατασκευή προβλήματος και αναπαράστασης και εκπαιδευτικοί ανά κατηγορία

Σύμφωνα με τα στοιχεία του Πίνακα 7, η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών κατασκεύασε το πολύ ένα σωστό πρόβλημα, και το πολύ μια σωστή αναπαράσταση, τυπικά για τη διαίρεση με τον ακέραιο διαιρετέο. Φαίνεται επίσης ότι η κατασκευή αναπαράστασης δυσκόλεψε περισσότερο τους συμμετέχοντες σε σχέση με την κατασκευή προβλήματος. Επιπλέον, με μια προσεκτικότερη εξέταση των εκπαιδευτικών ανά κατηγορία προκύπτει ότι η κατασκευή σωστού προβλήματος δεν εξασφαλίζει απαραίτητα την κατασκευή σωστής αναπαράστασης και αντίστροφα: Οι εκπαιδευτικοί Σ11 και Σ12 κατασκεύασαν σωστά προβλήματα και για τις δύο πράξεις, αλλά καμία αναπαράσταση. Το αντίστροφο συνέβη με τον εκπαιδευτικό Σ13. Σημειώνεται, τέλος, ότι μόνο ο εκπαιδευτικός Σ5 κατασκεύασε σωστά 2 αναπαραστάσεις και 2 προβλήματα.

<u>Πρόβλημα</u>

Στη συνέχεια θα εξεταστούν πιο αναλυτικά τα προβλήματα που πρότειναν οι συμμετέχοντες. Στην πρώτη στήλη του Πίνακα 8, παρουσιάζονται τα σωστά προβλήματα που διατυπώθηκαν από τους συμμετέχοντες στο Ε5.2α (ακέραιος διαιρετέος) και στο Ε5.2β (κλασματικός διαιρετέος). Στη δεύτερη στήλη παρουσιάζεται η ενέργεια που γίνεται επί του διαιρετέου. Τέλος, στην τρίτη στήλη, όπου είναι κατάλληλο, παρουσιάζεται, όπου είναι δυνατόν, ένα πρόβλημα στο πλαίσιο των φυσικών αριθμών, από το οποίο μπορεί να προκύψει με προσαρμογή το πρόβλημα που διατυπώθηκε από τον εκπαιδευτικό. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 8, 4 από το 8 προβλήματα που διατυπώθηκαν στο Ε5.2α μπορούν να προκύψουν προσαρμόζοντας ένα πρόβλημα που εμπλέκει μόνο φυσικούς αριθμούς. Η προσαρμογή γίνεται εκφράζοντας μια απόλυτη ποσότητα (πλαίσιο φυσικών αριθμών), σε μια σχετική ποσότητα (πλαίσιο κλασμάτων). Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι το πρόβλημα που διατύπωσε ο Σ7 είναι εξαρχής ένα πρόβλημα στο πλαίσιο των φυσικών αριθμών και η δυνατότητα μοντελοποίησης με διαίρεση με το 1/3 είναι τυπική μάλλον, παρά ουσιαστική. Να σημειωθεί, επιπλέον, ότι η διατύπωση των προβλημάτων που περιγράφουν ισομερισμό του διαιρετέου είναι προβληματική (π.χ. «*μοιράζω σε ένα τρίτο κομματάκια*», «*χωρίζω σε* *κομμάτια ένα τρίτο»*). Όλα τα υπόλοιπα προβλήματα που διατυπώθηκαν αναφέρονταν στη μέτρηση του διαιρετέου με συνεχή μονάδα, τόσο στο Ε5.2α, όσο και στο Ε5.2β. Στην περίπτωση του Σ6, η μετατροπή σε δεκαδικό αριθμό δεν μπορεί να θεωρηθεί λάθος, καθώς χρησιμοποιεί μια στρατηγική αντικατάστασης του κλάσματος με βολικό γι' αυτόν αριθμό.

	Πρόβλημα	**Ενέργεια**	**Προσαρμόσιμο από**	**Εκπ/κός**
12:1/3 (Ε5.2α)	Έχω 12 κομμάτια πίτσα θέλω να τα μοιράσω σε 1/3 κομματάκια για να φάνε κάποια παιδιά. Πόσα παιδιά θα φάνε;	Ισομερισμός του Διαιρετέου με επιμερισμό	Έχω 12 κομμάτια πίτσα και τα χωρίζω σε τρία ίσα μέρη το καθένα. Πόσα κομμάτια έχω τώρα; (Πολλαπλασιασμός, αλλαγή μονάδας)	Σ3
	Έχω 12 σοκολάτες και χωρίζω την κάθε σοκολάτα σε κομμάτια 1/3 και παίρνω 36 κομμάτια	Ισομερισμός του Διαιρετέου με επιμερισμό	Έχω 12 σοκολάτες και χωρίζω την κάθε σοκολάτα σε 3 ίσα μέρη. Πόσα κομμάτια παίρνω; (Πολλαπλασιασμός, αλλαγή μονάδας)	Σ10
	Ο Μιχάλης έχει 12 σοκολάτες και θέλει να τις μοιράσει στους φίλους του. Αν ο καθένας πάρει το 1/3 από τις σοκολάτες. Πόσοι φίλοι θα φάνε;	Μέτρηση του Διαιρετέου με σύνθετη μονάδα	Έχω 12 σοκολάτες και θέλω να τις μοιράσω στους φίλους μου. Κάθε φίλος παίρνει 4 σοκολάτες. Πόσοι είναι οι φίλοι; (Διαίρεση μέτρησης)	Σ12
	Έχω 12 πίτσες που χωρίστηκαν η καθεμία σε 3 ίσα μέρη, πόσα άτομα θα μπορούν να φάνε;	Ισομερισμός του Διαιρετέου με επιμερισμό	Έχω 12 πίτσες που χωρίστηκαν η καθεμία σε 3 ίσα μέρη, πόσα άτομα θα μπορούν να φάνε; (Πολλαπλασιασμός, αλλαγή μονάδας)	Σ7
	Να μοιράσεις 12 κιλά αλεύρι σε σακούλες των 0,3 κιλών. Πόσες σακούλες θα χρειαστούν; ... άρα αντί να βάλεις το 0,3 βάζεις το 1/3	Μέτρηση του Διαιρετέου με συνεχή μονάδα		Σ6
	Έχω 12 μέτρα κορδέλας και θέλω να φτιάξω φιογκάκια, το κάθε φιογκάκι θα έχει το 1/3 μήκος της κορδέλας. Πόσα φιογκάκια θα φτιάξω;	Μέτρηση του Διαιρετέου με συνεχή μονάδα		Σ5
	Έχω ένα πάρτι γενεθλίων και κάθε παιδί θα φάει το 1/3 μιας πίτσας. Αν έχω 12 πίτσες, πόσα παιδιά θα μπορέσουν να φάνε;	Μέτρηση του Διαιρετέου με συνεχή μονάδα		Σ11
	Έχω 1/3 μολυβιού.. πόσα τέτοια χρειάζομαι για να φτιάξω 12 ολόκληρα μολύβια;	Μέτρηση του Διαιρετέου με συνεχή μονάδα		Σ9
5/6: 1/3 (Ε5.2β)	Έχω 5/6 του λίτρου λεμονάδα και θέλω να τη μοιράσω σε μερίδες του 1/3 του λίτρου. Πόσες μερίδες θα πάρω;	Μέτρηση του Διαιρετέου με συνεχή μονάδα		Σ5

	Έχω 1/3 φλιτζάνι ρύζι, πόσες τέτοια φλιτζάνια χρειάζομαι για να φτάσω τα 5/6 μιας μεγαλύτερης κούπας;	Μέτρηση του Διαιρετέου με συνεχή μονάδα		Σ10
	Έχω 5/6 του λίτρου γάλα και θέλω να το μοιράσω σε μπουκάλια του 1/3 του λίτρου. Πόσα τέτοια μπουκάλια θα γεμίσω;	Μέτρηση του Διαιρετέου με συνεχή μονάδα		Σ11
	Έχω 5/6 της κούπας ζάχαρη και θέλω να τη μοιράσω σε 1/3 κούπες, πόσες κούπες θα χρειαστώ;	Μέτρηση του Διαιρετέου με συνεχή μονάδα		Σ12

Πίνακας 8: Παρουσίαση σωστών προβλημάτων ανά έργο

Ενδιαφέρον έχουν τα δύο λανθασμένα προβλήματα που διατυπώθηκαν στο Ε5.2β από τους συμμετέχοντες Σ3 και Σ7.

Ο Σ7 διατύπωσε ένα πρόβλημα για την πράξη 5/6 :3 (αντί της 5/6 :1/3):

*«Τα 5/6 ενός κιλού αλεύρι, χωρίστηκαν σε 3 ίσες ποσότητες. Πόσες μπορούμε να πάρουμε;»*Σ7

Ο Σ3, από την άλλη μεριά, διατύπωσε το εξής πρόβλημα:

«Έχω 6 σοκολάτες θα πάρω τις 5 από τις 6 και μετά θα τις χωρίσω στο 1/3, θα τις μοιράσω διά 1/3. Πόσοι θα πάρουν σοκολάτα;» Σ3

Υποθέτοντας ότι με τις εκφράσεις «*χωρίζω στο 1/3*» «*και μοιράζω δια 1/3*» ο Σ3 εννοεί «χωρίζω σε κομμάτια του ενός τρίτου» (σύμφωνα και με την απάντησή του στο Ε5.2α), το πρόβλημα που διατυπώνει παρουσιάζει ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά. Επιχειρώντας να λύσει κανείς το πρόβλημα αυτό, ξεκινάει με 6 σοκολάτες, βάζει στην άκρη τη μία, διαμερίζει κάθε μία από τις υπόλοιπες 5 σοκολάτες σε 3 ίσα μέρη, και μετράει πόσα τέτοια μέρη υπάρχουν συνολικά. Το σύνολο είναι 15, που δεν είναι σύμφωνο με το αποτέλεσμα που θα έβρισκε κανείς μέσω του αλγορίθμου (5/2). Το πρόβλημα που υπάρχει εδώ βρίσκεται στις μονάδες αναφοράς: Στην πράξη 5/6 : 1/3, η μονάδα αναφοράς των δύο κλασμάτων είναι κοινή, και είναι η αφηρημένη μονάδα «ένα». Μεταφέροντας την πράξη σε πραγματικό πλαίσιο, ο Σ3 πήρε ως μονάδα Μ τις 6 σοκολάτες (σύνθετη μονάδα, 6 απλές, 6x1 σοκολάτα). Τώρα η πράξη θα έπρεπε να είναι 5/6Μ : 1/3Μ (ή, πόσες φορές «χωρούν» οι 2 σοκολάτες στις 5 σοκολάτες). Ο Σ3, όμως, περιγράφει την πράξη 5/6Μ : 1/3x(1 σοκολάτα) (πόσες φορές χωράει στις 5 σοκολάτες το 1/3 της σοκολάτας).

Τέλος, από τους συμμετέχοντες που δεν κατάφεραν να διατυπώσουν πρόβλημα, χρειάζεται να συμπεριληφθεί η άποψη του Σ8 σχετικά με τη χρήση ενός προβλήματος για την εξήγηση της ερμηνείας της διαίρεσης 12 : $\frac{1}{3}$. Ο συμμετέχων δήλωσε:

«Πρόβλημα δεν θα έδινα γιατί δεν θεωρώ ότι είναι χρήσιμο στο να εξηγήσουμε τι σημαίνει μια πράξη. Προτιμώ τα απτά αντικείμενα γιατί αλλιώς δεν κατανοούν τα παιδιά. Άλλο να βλέπει, να πιάνει κάτι και άλλο απλώς με λόγια»

Σύμφωνα με τα στοιχεία του Πίνακα 8, η πιο συνήθης ενέργεια των εκπαιδευτικών για την κατασκευή προβλήματος διαίρεσης ήταν η μέτρηση του διαιρετέου με συνεχή μονάδα, τόσο στο Ε5.2α, όσο και στο Ε5.2β. Τις περισσότερες φορές οι συμμετέχοντες δημιουργούσαν καταστάσεις σκεφτόμενοι το πλαίσιο των φυσικών αριθμών και τις προσάρμοζαν στο πλαίσιο των κλασματικών αριθμών.

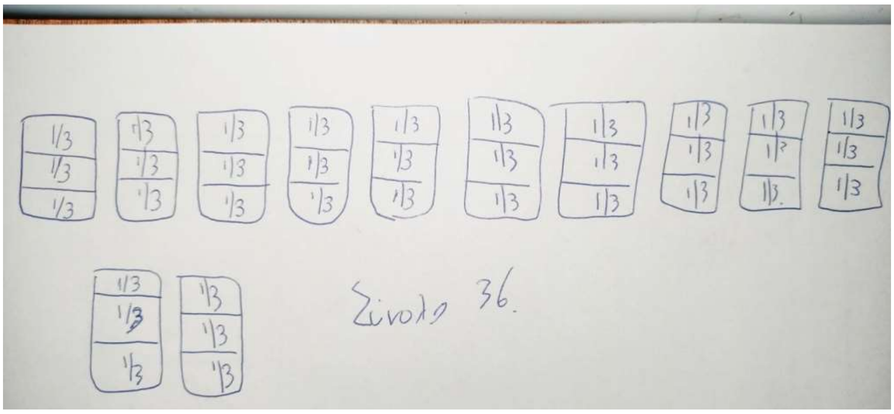
Αναπαράσταση

	Κατηγορία Απάντησης	**Μορφή Αναπαράστασης**	**Ν**	**Συμμετέχοντες**
12:1/3 (Ε5.2α)	**Ορθή**	Αριθμογραμμή	1	Σ6
		Πίτες/ μπάρες/ ορθογώνια	4	Σ5, Σ7, Σ10, Σ13
	Λανθασμένη	Γινόμενο με τους ίδιους όρους	3	Σ1, Σ9, Σ12
		Γινόμενο με τους ίδιους όρους-ημιτελής	2	Σ3, Σ8
5/6: 1/3 (Ε5.2β)	**Ορθή**	Αριθμογραμμή	1	Σ6
		Πίτες/ μπάρες	2	Σ5, Σ9
		Ομώνυμα Κλάσματα	1	Σ13
	Λανθασμένη	Γινόμενο με τους ίδιους όρους	1	Σ3
		Γινόμενο με τους ίδιους όρους-ημιτελής	2	Σ7, Σ10
		Πηλίκο με άλλους διαιρέτες	1	Σ11

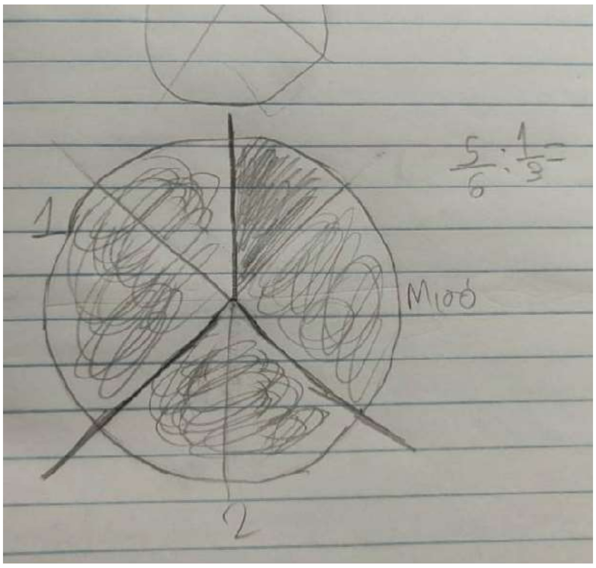
Πίνακας 9: Συχνότητα των κατηγοριών με κριτήριο το πλήθος σωστών αποκρίσεων για την κατασκευή αναπαράστασης και εκπαιδευτικοί ανά κατηγορία

Σύμφωνα με τα στοιχεία του Πίνακα 9, μόνο 3 συμμετέχοντες κατασκεύασαν ορθά και τις δύο αναπαραστάσεις (Σ5, Σ6, Σ13) και ένας (Σ3) δεν κατάφερε να σχηματίσει καμία. Οι υπόλοιποι συμμετέχοντες σχημάτισαν έστω μία ορθή αναπαράσταση.

Ανάμεσα στις σωστές απαντήσεις, η επικρατούσα μορφή αναπαράστασης ήταν η χρήση πίτας/ μπάρας/ ορθογωνίου. Στο Ε5.2α όλοι οι συμμετέχοντες ενέργησαν με τον ίδιο τρόπο ισομερίζοντας τον διαιρετέο. Χώρισαν δηλαδή τις 12 μονάδες σε τρίτα και μέτρησαν πόσα τρίτα σχηματίζονται (Εικόνα 8). Για το Ε5.2β, ο Σ5 χρησιμοποιεί αναπαράσταση πίτας και χωρίζει τη μονάδα σε 6 κομμάτια από τα οποία κρατάει τα 5. Μετά έχοντας βρει το 1/3 της μονάδας (των 6 κομματιών), χωρίζει ξανά την πίτα και υπολογίζει πόσα 1/3 χωράνε στα 5/6 (Εικόνα 9).

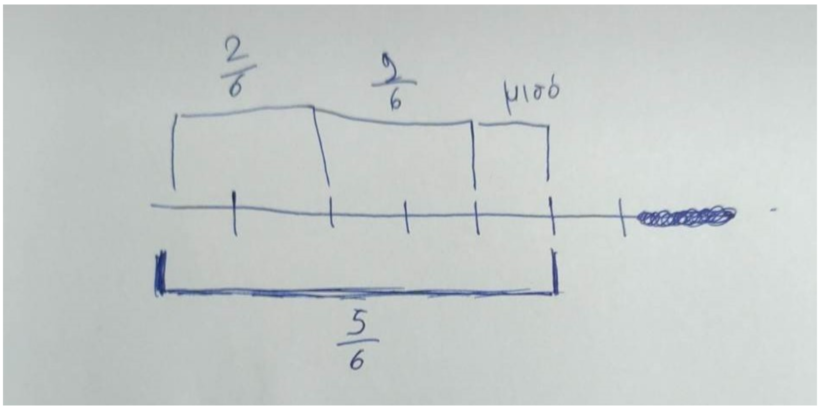


Εικόνα 8: Αναπαράσταση της διαίρεσης 12: 1/3 με τη χρήση ορθογωνίου που αναπαριστά τη μονάδα και ισομερισμό του διαιρετέου, του Σ10 (Ε5.2α)



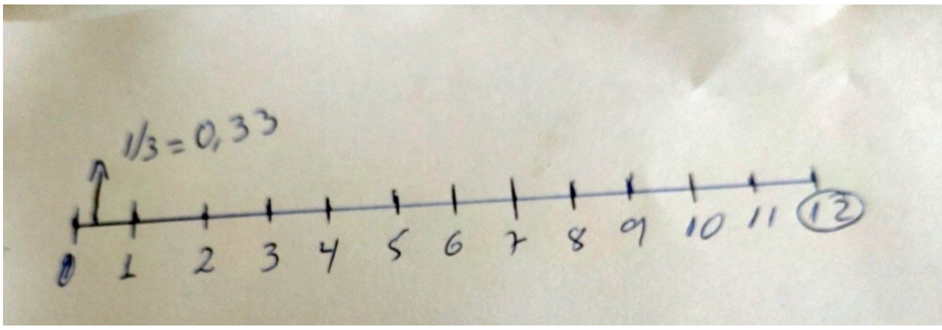
Εικόνα 9: Αναπαράσταση της διαίρεσης 5/6: 1/3 του Σ5 (Ε5.2β)

Ενδιαφέρουσα είναι η αναπαράσταση του Σ13 στο Ε5.2β (Εικόνα 10) που μετέτρεψε τα κλάσματα σε ομώνυμα προκειμένου να σχηματιστούν ίδιοι παρανομαστές και να υπάρξει κοινή μονάδα αναφοράς. Έτσι, προέκυψαν τα κλάσματα 5/3 και 2/6. Υποστήριξε ότι με τους *«κοινούς παρανομαστές είναι πιο κατανοητό στα παιδιά πόσες φορές το 1/3 μπορεί να χωρέσει στο 5/6».*



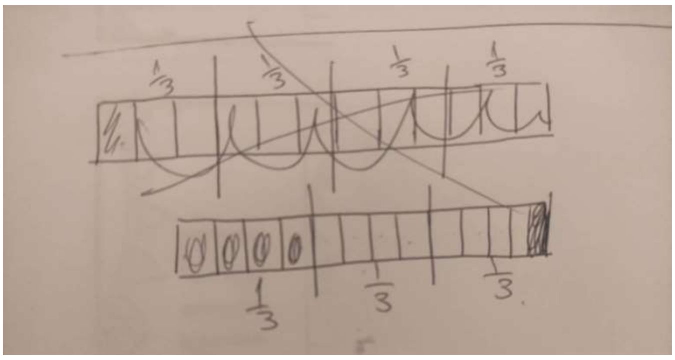
Εικόνα 10: Αναπαράσταση της διαίρεσης 5/6: 1/3 με μετατροπή των κλασμάτων σε ομώνυμα, του Σ13 (Ε5.2β)

Ο Σ6 εφάρμοσε την τακτική που ακολούθησε και στα προβλήματα, μετατρέποντας τα κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς, σε μια μορφή πιο βολική για εκείνον. Πρότεινε λοιπόν, την τοποθέτηση των αριθμών πάνω στην αριθμογραμμή. Μετρώντας τον διαιρετέο με συνεχή μονάδα, θα έδειχνε πόσες φορές ο διαιρέτης χωράει στον διαιρετέο. Στην περίπτωση της διαίρεσης 12: 1/3, πόσες φορές το 0,33 χωράει στο 12 (Εικόνα 11). Να σημειωθεί πως πρόκειται για μια προσεγγιστική πρακτική καθώς 3 τέτοια διαστήματα με μήκος 0,33 δεν θα φτάσουν στο 1 και θα αναγκαστεί να πει ότι πρέπει το διάστημα 0-1 να ισομεριστεί στα 3.

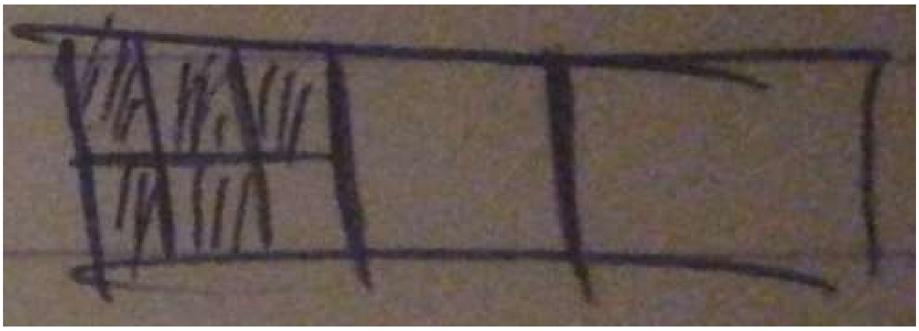


Εικόνα 11: Αναπαράσταση της διαίρεσης 12: 1/3 με τη χρήση αριθμογραμμής του Σ6 (Ε5.2α)

Το λάθος που έκαναν οι περισσότεροι ήταν ότι σχεδίασαν μια αναπαράσταση γινομένου με τους ίδιους αριθμούς αντί για διαίρεσης. Στο Έργο Ε5.2α, ο Σ9 χωρίζει το 12 σε τρία ίσα μέρη και η αναπαράσταση του (Εικόνα 12) εκφράζει το 1/3 του 12, όπου πρόκειται για μια πράξη πολλαπλασιασμού. Στο Έργο Ε5.2β, ο Σ3 χωρίζει τη μονάδα σε τρία ίσα μέρη και βρίσκει τα 5/6 του μέρους. (Εικόνα 13). Υπολογίζει δηλαδή, τα 5/6 του 1/3 της μονάδας και βρίσκει το μέρος του μέρους, άρα πολλαπλασιάζει (αναπαριστά γινόμενο).



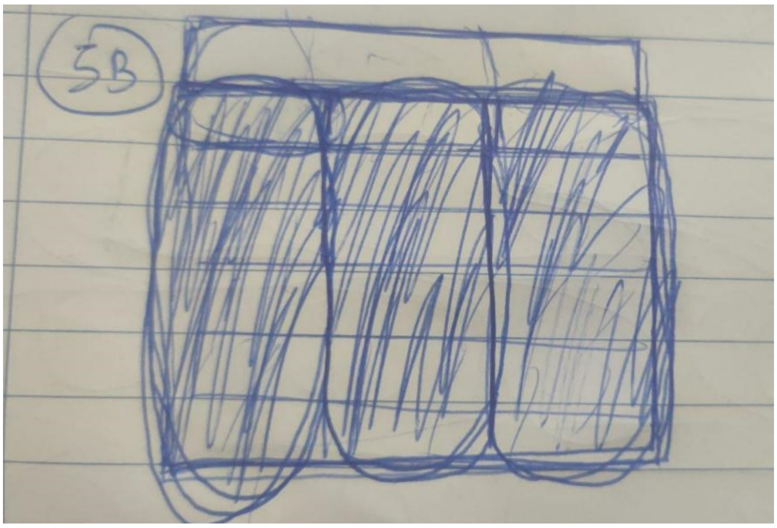
Εικόνα 12: Αναπαράσταση γινομένου 12x 1/3 του Σ9 (Ε5.2α)



Εικόνα 13:Αναπαράσταση γινομένου 5/6 x 1/3 του Σ3 (Ε5.2β)

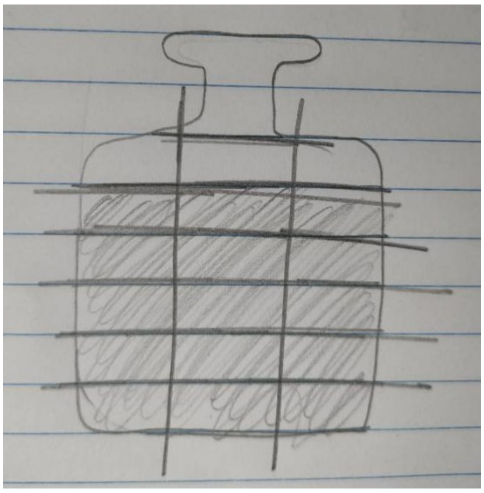
Στην κατηγορία «Γινόμενο με τους ίδιους όρους- ημιτελής», εντάσσονται οι απαντήσεις όσων ξεκίνησαν να σχεδιάζουν μια αναπαράσταση γινομένου αλλά δεν ολοκλήρωσαν τον συλλογισμό τους γιατί κατάλαβαν ότι κάτι δεν «πήγαινε» καλά. Αυτές οι αναπαραστάσεις χαρακτηρίζονται από ασάφεια. Ο Σ7 βρίσκει το 5/6 του 1, σημειώνει το 1/3 του 5/6 (κάθετος χωρισμός), αλλά τελικά γραμμοσκιάζει όλη την αναπαράσταση και δεν είναι σαφές τι ήθελε να εκφράσει (Εικόνα 14).

Ωραία έκανα το 5/6 αλλά αυτό τώρα πως χωρίζεται σε τρίτα; Δεν χωρίζεται όλο σε τρίτα αλλά έτσι όπως είναι γιατί το θεωρείς σαν ακέραια μονάδα… τα τρίτα σαν αναφορά δεν έχουν την μονάδα αλλά τα 5/6, σωστά; Έτσι νομίζω… Σίγουρα κάτι λείπει από αυτό που σχεδίασα.. είναι 2 κόμμα κάτι η απάντηση αλλά..



Εικόνα 14: Αναπαράσταση γινομένου 5/6 x 1/3- ημιτελής του Σ7 (Ε5.2β)

Στην τελευταία κατηγορία λάθους, εντάσσεται η αναπαράσταση του Σ11 που δείχνει πηλίκο με άλλους διαιρέτες (Εικόνα 15). Πιο συγκεκριμένα, ο Σ11 βρίσκει τα 5/6 της μονάδας, κάνει τη διαδικασία που απαιτείται για να βρει το 1/3 του 5/6 της μονάδας και μετά μετράει όλα του κουτάκια που σχηματίστηκαν μέσα στο 5/6. Επειδή το κουτάκι αυτό είναι το 1/18 της μονάδας , στην ουσία αυτό που αναπαριστά είναι το 5/6: 1/18 (πόσες φορές χωράει το 1/18 στο 5/6 του).



Εικόνα 15: Αναπαράσταση πηλίκου με διαφορετικούς διαιρέτες του Σ11 (Ε5.2β)

Συνοψίζοντας τα ευρήματα του έργου, είναι φανερό πως η πλειονότητα των εκπαιδευτικών αντιμετωπίζει δυσκολίες στο σχηματισμό προβλήματος και στην κατασκευή αναπαράστασης, παρουσιάζοντας ελλείψεις στην Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου. Σε πολλές περιπτώσεις συγχέουν καταστάσεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης ή εφαρμόζουν πρακτικές που είναι προβληματικές (ισομερισμός διαιρετέου, «χωρίζω σε κομμάτια 1/3»).

Έργο 6

Στο έργο 6 δόθηκαν τρία προβλήματα και οι εκπαιδευτικοί έπρεπε να αξιολογήσουν ποια από αυτά λύνονται με την πράξη διαίρεσης 5: ½ τεκμηριώνοντας την αξιολόγηση τους. Παρακάτω παρατίθεται ο πίνακας των αξιολογήσεων και το πλήθος των σωστών απαντήσεων ανά εκπαιδευτικό:

	Υποέργο	**Κατηγορία Απάντησης**	**N**	**Συμμετέχοντες**
Αξιολόγηση	**Ε6.1**	Ορθή	12	Σ1, Σ3, Σ4, Σ5, Σ6, Σ7, Σ8, Σ9, Σ10, Σ11, Σ12, Σ13
		Λανθασμένη	1	Σ2
	Ε6.2	Ορθή	11	Σ1, Σ2, Σ3, Σ6, Σ7, Σ8, Σ9, Σ10, Σ11, Σ12, Σ13
		Λανθασμένη	2	Σ4, Σ5
	Ε6.3	Ορθή	10	Σ2, Σ3, Σ4, Σ6, Σ7, Σ8, Σ9, Σ10, Σ11, Σ13
		Λανθασμένη	3	Σ1, Σ5, Σ12
Πλήθος σωστών αξιολογήσεων ανά εκπαιδευτικό				
		3 Σωστές	8	Σ3, Σ6, Σ7, Σ8, Σ9, Σ10, Σ11, Σ13
		2 Σωστές	4	Σ1, Σ2, Σ4, Σ12
		1 Σωστή	1	Σ5

Πίνακας 10: Πλήθος σωστών αξιολογήσεων ανά εκπαιδευτικό (Ε6)

Σχετικά με το έργο Ε6.1 η πλειονότητα των συμμετεχόντων αξιολόγησε ορθά πως πρόκειται για ένα πρόβλημα διαίρεσης που επιλύεται με την πράξη 5: 1/2. Μόνο ο Σ2 έκρινε ότι είναι λάθος, δίνοντας μια τετριμμένη εξήγηση (*«δεν είναι σωστό το πρόβλημα γιατί κόβει όλα τα κομμάτια στη μέση»*).

Το πρόβλημα στο έργο Ε6.2 ήταν ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού και όχι διαίρεσης. Όσοι αξιολόγησαν ορθά το έργο αιτιολόγησαν την άποψή τους λέγοντας ότι *«είναι ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού με το ½»* (Σ1, Σ6, Σ7, Σ9, Σ10, Σ13), ενώ άλλοι το προσέγγισαν αξιοποιώντας την ευχέρειά τους με υπολογισμούς με το «μισό». *«Το μισό του 5 είναι δυόμιση, άρα λύνεται με 5:2 και όχι 5:1/2»* (Σ8, Σ11, Σ12) και *«Το μισό του 5 είναι το δυόμιση»* (Σ2, Σ3).

Οι περισσότερες λάθος αξιολογήσεις σημειώθηκαν στο τρίτο πρόβλημα (Ε6.3), στο οποίο οι περισσότεροι συνεντευξιαζόμενοι στάθηκαν περισσότερο χρόνο συλλογιζόμενοι. Ειδικότερα, τρεις συμμετέχοντες έκριναν λανθασμένα ότι δεν πρόκειται πρόβλημα διαίρεσης.

Όπως φαίνεται από τα παραδείγματα που ακολουθούν, ο ένας (Σ1) δεν εξήγησε επί της ουσίας την κρίση του. Αντίθετα, ο Σ5 δήλωσε ρητά ότι πρόκειται για ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού, ενώ ο Σ12 επαναδιατύπωσε το πρόβλημα ως πρόβλημα ανάλογων ποσών, τοποθετώντας τον άγνωστο στη σωστή θέση, αλλά το απέρριψε, ενδεχομένως γιατί δεν αναγνώρισε τη διαίρεση ως σχετική με τη «μέθοδο των τριών» :

*«Δεν είναι σωστή η ερώτηση στο τέλος και δεν λύνεται με διαίρεση»*Σ1

*«Είναι ξεκάθαρα ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού»*Σ5

«Θα πω ότι δεν λύνεται με διαίρεση γιατί θεωρώ ότι είναι πρόβλημα αναλογίας.
Τη μία μέρα μισή ώρα, τις πόσες μέρες 5 ώρες;» Σ12

Σημειώνεται ότι το Έργο 6 φάνηκε να δυσκολεύει τους συμμετέχοντες, οποίοι χρειάστηκαν αρκετό χρόνο για να σκεφτούν και κάποιοι άλλαξαν αρκετές φορές την απάντησή τους μέχρι να καταλήξουν. Οι περισσότεροι κατέληξαν σε ορθές επιλογές, αλλά πέντε έκαναν μία τουλάχιστον λανθασμένη επιλογή συνολικά στα τρία προβλήματα. Επιπλέον, το γεγονός ότι μόνο 8 συμμετέχοντες κατάφεραν να αξιολογήσουν σωστά και τα τρία προβλήματα, δείχνει μια αδυναμία των υπολοίπων στο να αναγνωρίσουν προβλήματα διαίρεσης και κατ’ επέκταση στη σημασία της έννοιας.

Έργο 7

Το τελευταίο έργο ήταν εξ ολοκλήρου αφιερωμένο στη γνώση για τον τυπικό αλγόριθμο Α&Π και η αλληλουχία των ερωτημάτων στόχευε στη σταδιακή εμβάθυνση του θέματος. Οι απαντήσεις στο πρώτο υπο- έργο (Ε7.1.1) (που ζητούσε από τους εκπαιδευτικούς να ανταποκριθούν σε έναν μαθητή που δυσανασχετεί με τη διαδικασία του αλγορίθμου γιατί δεν κατανοεί γιατί αντιστρέφουμε το δεύτερο κλάσμα και κάνουμε πολλαπλασιασμό), ταξινομήθηκαν σε 4 αδρές κατηγορίες: «Δεν απαιτείται εξήγηση» για όσους υποστήριξαν ότι δεν υπάρχει λόγος να εξηγηθεί η διαδικασία, σε «Διαδικαστική» για όσους επανέλαβαν τα βήματα του αλγορίθμου, σε «Μη Διαδικαστική» για όσους αναφέρθηκαν (και) σε άλλα στοιχεία και σε «Αποφυγή/ αδυναμία εξήγησης» για όσους δεν απάντησαν.

	Κατηγορία απάντησης	N	Συμμετέχοντες
Ανατροφοδότηση	Δεν απαιτείται εξήγηση	5	Σ3, Σ4, Σ10, Σ11, Σ12
	Διαδικαστική	5	Σ1, Σ2, Σ8, Σ9, Σ13
	Μη Διαδικαστική	1	Σ7
	Αποφυγή/ αδυναμία εξήγησης	2	Σ5, Σ6

Πίνακας 11: Είδος ανατροφοδότησης για τη μη κατανόηση της διαδικασίας του αλγορίθμου Α&Π (Ε7.1.1)

Σύμφωνα με τον Πίνακα 11, κάποιοι συμμετέχοντες ισχυριστήκαν πως δεν χρειάζεται να εξηγηθούν τα βήματα του αλγορίθμου, μια τοποθέτηση που γεννά ερωτήματα για το αν θεωρούν πασιφανή την αιτία της διπλής αντιστροφής ή απλώς προωθούν στη διδασκαλία τους την αποστήθισή του.

«Έτσι είναι ο αλγόριθμος και απλά τον μαθαίνουμε απ' έξω για να λύνουμε ασκήσεις» Σ3, Σ4, Σ10, Σ12

«Θα του έλεγα ότι είναι πολύ απλό προσπαθώντας να το δει σαν παιχνίδι του στυλ τα μαθηματικά είναι παιχνιδάκι αρκεί να είσαι παρατηρητικός. Έτσι και στη διαίρεση κλασμάτων, αντί να διαιρέσουμε, αντιστρέφουμε και πολλαπλασιάζουμε» Σ11

Κάποιοι ακολούθησαν διαδικαστική προσέγγιση και επέμειναν στην αποστήθιση των βημάτων της διαδικασίας, χωρίς να δίνουν ουσιαστική ανατροφοδότηση. Επανέλαβαν τα βήματα του αλγορίθμου και αγνόησαν το ερώτημα για το πώς λειτουργεί:

*«Θα έδινα κι άλλα παραδείγματα για εξάσκηση»*Σ8, Σ13

«Θα ξανά έδειχνα τον αλγόριθμο» Σ2

«Θα τον ρωτούσα τι δεν κατάλαβε και θα τον ξανά έδειχνα από την αρχή» Σ1, Σ9

Ενδιαφέρουσα ωστόσο, είναι η απάντηση του Σ7 που ακολούθησε εννοιολογική προσέγγιση συνδυάζοντας τη χρήση χειραπτικού υλικού:

«Θα του το εξηγούσα με χειραπτικό υλικό, θα έπαιρνα μια διαίρεση εύκολη του τύπου 5 : ½ το πώς χωρίζω το μισό για να καταλάβει τι σημαίνει. Πόσες φορές

το ½ χωράει στο 5. Το αποτέλεσμα είναι 10 όπως και αν το λύσουμε με Α&Π» Σ7

Ο Σ6 παραδέχτηκε πως δεν γνωρίζει γιατί ακολουθούνται αυτά τα βήματα στη διαδικασία του Α&Π για αυτό και δεν θα μπορούσε να δώσει κάποια ανατροφοδότηση στον μαθητή. Σύμφωνα με τα λεγόμενά του, θα κρατούσε μια πιο ασφαλή για αυτόν στάση και θα έψαχνε στη συνέχεια στη βιβλιογραφία.

«Θα σου εξηγήσω στο επόμενο μάθημα» Σ6

Σχεδόν όλες οι απαντήσεις, πλην του Σ7, είναι ασαφής ως προς το ζητούμενο, καθώς δεν στοχεύουν στην κατανόηση (πώς και γιατί λειτουργεί η μέθοδος) αλλά αντιθέτως παρουσιάζουν τα βήματα.

Εμβαθύνοντας στο θέμα για τη φύση του αλγόριθμου, στην ερώτηση Ε7.1.2 για την εξήγηση της διαδικασίας του αλγορίθμου, οι απαντήσεις κατηγοριοποιήθηκαν ανάλογα με το πού αναφέρθηκαν, σε: «Αντίστροφες πράξεις και Αντίστροφος Αριθμός», «Αντίστροφες Πράξεις», «Λανθασμένη Εξήγηση» και «Καμία/ Μη εξήγηση».

	Κατηγορία Απάντησης	**N**	**Συμμετέχοντες**
Εξήγηση	Αντίστροφες πράξεις και Αντίστροφος Αριθμός	1	Σ8
	Αντίστροφες Πράξεις	4	Σ7, Σ10, Σ11, Σ12
	Καμία/ Μη εξήγηση	8	Σ1, Σ2, Σ3, Σ4, Σ5, Σ6, Σ9, Σ13

Πίνακας 12: Εξήγηση της «διπλής αντιστροφής» του αλγορίθμου Α&Π (Ε7.1.2)

Σύμφωνα με τα στοιχεία του Πίνακα 12, η πλειοψηφία των συμμετεχόντων δεν μπόρεσε να δώσει κάποια απάντηση, γιατί όπως ισχυρίστηκαν δεν γνωρίζουν τον λόγο. Ο Σ5 υπέθεσε ότι *«έχει να κάνει με το μέρος- όλου»,* αλλά θα το έψαχνε στη βιβλιογραφία προκειμένου να μπορέσει να απαντήσει σε κάποιον μαθητή.

Κάποιοι συμμετέχοντες έκαναν μια προσπάθεια ερμηνείας του αλγορίθμου επικαλούμενοι τις αντιστροφές πράξεις για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, ωστόσο η απάντησή τους ήταν ελλιπής γιατί δεν εξηγούσε τον λόγο αντιστροφής του δευτέρου κλάσματος:

«Ξέρω ότι έχει να κάνει με τις αντίστροφες πράξεις, το γράφει και στο βιβλίο εξάλλου. Αλλά γιατί αντιστρέφουμε το δεύτερο κλάσμα.. Δεν ξέρω» Σ10, Σ11, Σ12

«Είναι σαν να διαιρούμε μέρος του μέρους... το κλάσμα είναι και διαίρεση οπότε επειδή η αντίστροφη πράξη είναι ο πολλαπλασιασμός .. κοιτάμε πόσες φορές χωράει το ένα στο άλλο που είναι η πολλαπλασιαστική αρχή.. άρα αντί να πολλαπλασιάζω, διαιρώ» Σ7

Αντιθέτως, ο συμμετέχοντας Σ8 έδωσε μια πλήρη απάντηση αναφερόμενος στη «διπλή αντιστροφή», όπως διατυπώθηκε στη βιβλιογραφία, δηλαδή και στις αντίστροφες πράξεις και στους αντίστροφους αριθμούς, συνοδεύοντας τα λεγόμενα του με ένα παράδειγμα:

«Ο πολλαπλασιασμός είναι η αντίστροφη πράξη της διαίρεσης, για παράδειγμα αν θέλω να διαιρέσω με το 2, θα πω 4:2 = 2… εε μπορώ να διαιρέσω με το 2 το 4 ή να πολλαπλασιάσω με το ½ που είναι ο αντίστροφος του 2 και να πω 4 x ½ = 2»

Το επόμενο ερώτημα διερευνούσε τον τρόπο που διατυπώνουν οι εκπαιδευτικοί τον αλγόριθμο Α&Π στην τάξη τους (Ε7.1.3). Οι απαντήσεις κατηγοριοποιήθηκαν ανάλογα με το πόσο ολοκληρωμένες ήταν ώστε να διατυπωθούν με σαφήνεια τα βήματα της διαδικασίας. Οι κατηγορίες είναι οι εξής: «Μη διευκρίνιση του κλάσματος που αντιστρέφεται», «Αναφορά στην αντιστροφή του δευτέρου κλάσματος» και «Αναφορά στην αντιστροφή του δευτέρου κλάσματος και στις αντίστροφες πράξεις».

	Κατηγορία Απάντησης	**N**	**Συμμετέχοντες**
Διατύπωση του αλγορίθμου Α&Π	Μη διευκρίνιση του κλάσματος που αντιστρέφεται	3	Σ5, Σ10, Σ13
	Αναφορά στην αντιστροφή του δευτέρου κλάσματος	7	Σ1, Σ2, Σ3, Σ4, Σ6, Σ7, Σ9
	Αναφορά στην αντιστροφή του δευτέρου κλάσματος και στις αντίστροφες πράξεις	3	Σ8, Σ11, Σ12

Πίνακας 13: Πώς διατυπώνουν τον αλγόριθμο Α&Π κατά τη διδασκαλία της διαίρεσης κλασμάτων (Ε7.1.3)

Σύμφωνα με τον Πίνακα 13, η πλειονότητα των συμμετεχόντων διατυπώνει ορθά τον αλγόριθμο προκειμένου να καταστούν σαφή τα βήματα. Ωστόσο, χρειάζεται να αναφερθούν κάποιες φράσεις διατύπωσης, όπως για παράδειγμα, «*φέρνω τούμπα το δεύτερο κλάσμα*» (Σ3) και «*γυρνάμε το δεύτερο κλάσμα ανάποδα*» (Σ4) που θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως «πρόχειρες».

Ο Σ7 δήλωσε πως σχηματίζει παράλληλα μια αναπαράσταση προκείμενου να γίνει πιο σαφές.

«Χωρίζω τον Διαιρετέο σε κομμάτια, όσα λέει ο διαιρέτης για να το δουν πρακτικά και μετά από κάτω γράφω τον αλγόριθμο της διαίρεσης και τους λέω πως κάνουμε πολλαπλασιασμό αφού αντιστρέψουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος» Σ7

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η τοποθέτηση των Σ8, Σ11, Σ12, οι οποίοι δήλωσαν πως αναφέρονται και στις αντίστροφες πράξεις προκειμένου να αιτιολογήσουν την αντικατάσταση της διαίρεσης με τον πολλαπλασιασμό:

«Ξεκινάω και λέω.. ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις, τους δίνω το παράδειγμα που είπα πριν για να καταλάβουν για ποιο λόγο θα γίνει η αντιστροφή και μετά το κλασικό αντιστρέφω το δεύτερο κλάσμα και πολλαπλασιάζω» Σ8 (και, παρόμοια, Σ11, Σ12)

Παρατηρούμε ότι κατά τη διατύπωση του αλγορίθμου, κανείς δεν αναφέρεται στον αντίστροφο αριθμό και κυρίως, κανείς δεν χρησιμοποιεί τη φράση «πολλαπλασιάζω με τον αντίστροφο αριθμό του διαιρέτη». Ο εκπαιδευτικός Σ8 αν και αναφέρθηκε στον αντίστροφο αριθμό κατά την εξήγηση της διαδικασίας του Α&Π (Ε7.1.2), δεν έκανε το ίδιο και στη διατύπωση του αλγορίθμου. Επιπλέον, δεν μπορούμε να παραλείψουμε το γεγονός ότι 3 εκπαιδευτικοί δεν προσδιόρισαν ποιανού κλάσματος οι όροι αντιστρέφονται.

Το δεύτερο μέρος του Ε7 προσπαθεί να εμβαθύνει και να εξαγάγει συμπεράσματα για τη «διπλή αντιστροφή» του αλγορίθμου. Όπως έχει ειπωθεί ήδη πολλές φορές, η διπλή αντιστροφή οφείλεται στις αντίστροφες πράξεις και στον αντίστροφο αριθμό. Προκειμένου να δομηθεί σταδιακά η έννοια χρειάζεται αρχικά να προσδιοριστεί η σημασία των «αντίστροφων πράξεων» για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση (Ε7.2.1). Οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών κατηγοριοποιήθηκαν σε 2 αδρές κατηγορίες. Η πρώτη με τίτλο «από έναν πολλαπλασιασμό προκύπτουν δύο διαιρέσεις» συγκεντρώνει όλες τις απαντήσεις εκείνων που έδωσαν παραδείγματα με ακέραιους αριθμούς ή κλάσματα, χωρίς να εξηγείται η αντιστροφή του δευτέρου κλάσματος. Η δεύτερη κατηγορία έχει ως τίτλο «Η διαίρεση μπορεί να μετατραπεί σε πολλαπλασιασμό και το αντίστροφο» και περιλαμβάνει τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών που ένα πρόβλημα διαίρεσης το διατύπωσαν και ως πρόβλημα πολλαπλασιασμού.

	Κατηγορία Απάντησης	N	Συμμετέχοντες
Εξήγηση	Από έναν πολλαπλασιασμό προκύπτουν δύο διαιρέσεις	10	Σ1, Σ3, Σ3, Σ4, Σ5, Σ6, Σ7, Σ9, Σ11, Σ13
	Η διαίρεση μπορεί να μετατραπεί σε πολλαπλασιασμό και το αντίστροφο	3	Σ8, Σ10, Σ12

Πίνακας 14: Εξήγηση ερμηνείας των αντίστροφων πράξεων για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση (Ε7.2.1)

Σύμφωνα με τον Πίνακα 14, οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί απάντησαν σκεπτόμενοι ότι «από έναν πολλαπλασιασμό προκύπτουν δύο διαιρέσεις», δηλαδή $α \times β = γ$ συνεπάγεται $α = γ : β, β \neq 0$ και $β = γ : α, α \neq 0$. Πρόκειται για μια θεμελιωμένη άποψη στη σκέψη των περισσοτέρων, ειδικά αν σκεφτούμε και την αντίστροφη σχέση μεταξύ πρόσθεσης και αφαίρεσης, ωστόσο μια τέτοια οπτική δεν μπορεί να ερμηνεύσει την αντιστροφή του δευτέρου κλάσματος. Έτσι, οι απαντήσεις των συμμετεχόντων βασίστηκαν σε παραδείγματα με ακεραίους (Σ1, Σ5, Σ9, Σ11) ή προβλήματα με ακεραίους αριθμούς που φαινόταν αυτή η οπτική.

> *«Θα έδειχνα ότι 2 x 3 = 6 άρα 6 :2 = 3 και πάνω σε αυτό θα κάναμε κάποια παραδείγματα με αντικείμενα»* Σ5

> *«Θα έδειχνα πως ένα σύνολο χωρίζεται σε μέρη (διαίρεση) και μετά από τα μέρη πώς φτιάχνεται πάλι το σύνολο (πολλαπλασιασμός). Πχ 9 ροδάκινα χωρίζονται σε ομάδες των τριών, πόσα παιδιά θα πάρουν; Και μετά τα 3 παιδιά παίρνουν 3 ροδάκινα, πόσα ροδάκινα έχουν συνολικά;»* Σ7

> *«Από έναν πολλαπλασιασμό μπορεί να προκύψει μια διαίρεση και το αντίστροφο. Για παράδειγμα, 3 x 20 = 60 και 60 : 20 = 3. Μιλώντας όμως για κλάσματα πιο σωστό θα ήταν ένα παράδειγμα του τύπου 2/3 x 4/7 = 8/21 και 8/21 : 2/3 = 4/7»* Σ13

Από την άλλη πλευρά, τρεις συμμετέχοντες (Σ8, Σ10, Σ12) εξήγησαν την ερμηνεία των αντίστροφων πράξεων διατυπώνοντας αρχικά ένα πρόβλημα διαίρεσης και στη συνέχεια μετατρέποντας το ίδιο πρόβλημα σε πρόβλημα πολλαπλασιασμού, πολλαπλασιάζοντας με τον αντίστροφο αριθμό του διαιρέτη. Κατά τη διατύπωση του συλλογισμού τους, οι Σ10 και Σ12 δεν αναφέρθηκαν στον όρο «αντίστροφος αριθμός».

> *«Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις γιατί έχω 10 μολύβια και θέλω να τα μοιράσω σε δύο παιδιά άρα 10:2 = 5, το κάθε παιδί θα*

πάρει 5 μολύβια δηλαδή τα μισά και το αντίστροφο έχω 10 μολύβια και το κάθε παιδί θα πάρει το ½ των μολυβιών, πόσα μολύβια θα πάρουν; 10 x ½ = 5» Σ10

«Ας πούμε..έχω 12 κέικ θέλω να τα μοιράσω στη μέση, πόσοι θα φάνε; Άρα 12: 2 =6 ή αλλιώς θα το γράψω 12 x 1/2 (που είναι το μισό) και θα μου βγάλει πάλι 6» Σ12

Χρειάζεται να επισημάνουμε ότι ο Σ8 κατά την Εξήγηση της «διπλής αντιστροφής» του αλγορίθμου στο Ε7.1.2, ήταν ο μοναδικός που αναφέρθηκε στον αντίστροφο αριθμό και επιπλέον, κατά τη διατύπωση του Α&Π, δήλωσε πως αναφέρεται και στις αντίστροφες πράξεις για να δομηθούν εννοιολογικά τα βήματα της διαδικασίας.

Έχοντας γίνει αναφορά στις «αντίστροφες πράξεις», επιχειρείται μια εκ νέου προσέγγιση της ερμηνείας της διαδικασίας Α&Π με το σκεπτικό ότι το προηγούμενο ερώτημα έχει προδιαθέσει τους συμμετέχοντες ώστε να σκεφτούν αντίστοιχα (Ε7.1.2), προσπαθώντας να εκμαιεύσουμε μια πλήρη εξήγηση. Οι απαντήσεις ταξινομήθηκαν σε 3 αδρές κατηγορίες: «Επειδή η μία πράξη είναι επαλήθευση της άλλης», «Επειδή είναι αντίστροφες πράξεις» και «Καμία/ Μη εξήγηση».

	Κατηγορία Απάντησης	**Ν**	**Συμμετέχοντες**
Εξήγηση	Η μία πράξη είναι επαλήθευση της άλλης		Σ1
	Επειδή είναι αντίστροφες πράξεις		Σ3, Σ5, Σ9, Σ10, Σ11, Σ12, Σ13
	Καμία/ Μη εξήγηση		Σ2, Σ4, Σ6

Πίνακας 15: Εξήγηση του αλγορίθμου Α&Π με βάση την έννοια των «αντίστροφων πράξεων» (Ε7.2.2)

Από τον Πίνακα 15, λείπει ο Σ8 ο οποίος είχε δώσει μια πλήρη απάντηση από την πρώτη προσέγγιση ερμηνείας της διαδικασίας.

Στο έργο Ε7.1.2 οι συμμετέχοντες Σ3, Σ9, Σ13 δεν μπόρεσαν να δώσουν κάποια εξήγηση, ενώ σε αυτό το έργο ανέφεραν τις αντίστροφες πράξεις καθώς επηρεάστηκαν από το προηγούμενο έργο. Όλοι οι συμμετέχοντες που αναφέρθηκαν στις αντίστροφες πράξεις, δήλωσαν πως δεν μπορούν να εξηγήσουν ή δεν ξέρουν γιατί αντιστρέφονται οι όροι του δεύτερου κλάσματος. Αντιθέτως, οι Σ2, Σ4 και Σ6 συνέχισαν να μη μπορούν να δώσουν κάποια εξήγηση, ενώ ο Σ1 που δεν είχε δώσει καμία εξήγηση, εδώ υποστήριξε ότι αντιστρέφουμε τους όρους του κλάσματος γιατί:

«Επειδή η μία είναι επαλήθευση της άλλης και το κλάσμα είναι από μόνο του μια διαίρεση, αντιστρέφουμε τους όρους σαν να κάνουμε μια μικρή επαλήθευση» Σ1

Σύμφωνα με τε ευρήματα του συγκεκριμένου υπο- έργου παρατηρούμε σημαντική έλλειψη στην Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου. Η πλειονότητα των συμμετεχόντων δεν μπορεί να εξηγήσει που οφείλεται η «διπλή αντιστροφή» και ειδικότερα να εξηγήσει γιατί αντιστρέφονται οι όροι του δεύτερου κλάσματος. Κάποιοι που αναφέρθηκαν στις αντίστροφες πράξεις ενδεχομένως επηρεάστηκαν από το προηγούμενο έργο. Ειδικότερα, κανείς από τους συμμετέχοντες δεν αναφέρθηκε στην έννοια του αντίστροφου αριθμού για να δικαιολογήσει την αντιστροφή του δεύτερου κλάσματος και πολύ πιθανόν να αγνοούν ότι έχει να κάνει με αυτό.

Η έρευνα ολοκληρώνεται με το τελευταίο ερώτημα που διερευνούσε αν και κατά πόσο συμπεριλαμβάνονται οι αντίστροφοι αριθμοί στη διδασκαλία του κάθε εκπαιδευτικού (Ε7.2.3). Δημιουργήθηκαν 4 αδρές κατηγορίες ανάλογα με το αν τους συμπεριλαμβάνουν ή όχι και πόσο σημασία αποδίδουν στην έννοια. Συγκεκριμένα, οι κατηγορίες διαρθρώθηκαν ως εξής: «Ναι, είναι σημαντικό», για όσους θεωρούν ότι είναι απαραίτητοι για τη διδασκαλία, «Ναι, αλλά δεν επιμένω» για όσους δήλωσαν ότι απλώς αναφέρονται στον όρο και προσεγγίσουν την έννοια εννοιολογικά, «Όχι» και «Όχι, αλλά θα έπρεπε» για όσους αναθεώρησαν για την τακτική που ακολουθούν.

	Κατηγορία Απάντησης	**Ν**	**Συμμετέχοντες**
Αντίστροφοι Αριθμοί στη διδασκαλία	Ναι, είναι σημαντικό	2	Σ7, Σ8
	Ναι, αλλά δεν επιμένω	3	Σ5, Σ9, Σ10
	Όχι	5	Σ2, Σ4, Σ6, Σ11, Σ13
	Όχι, αλλά θα έπρεπε	3	Σ1, Σ3, Σ12

Πίνακας 16: Οι αντίστροφοι αριθμοί στη διδασκαλία (Ε7.2.3)

Σύμφωνα με τα στοιχεία του Πίνακα 16, η πλειοψηφία των συμμετεχόντων δεν αναφέρεται στην έννοια του «αντίστροφου αριθμού» κατά τη διδασκαλία του Α&Π. Ο Σ4 ισχυρίστηκε ότι δεν επαρκεί ο διδακτικός χρόνος για να γίνει κάτι τέτοιο, ο Σ2 είπε ότι είναι αντικείμενο διδασκαλίας για το γυμνάσιο και ο Σ3 αναρωτήθηκε αν υπάρχει η έννοια στο σχολικό βιβλίο. Ανάμεσα σε εκείνους που έδωσαν αρνητική απάντηση, υπήρξαν κάποιοι εκπαιδευτικοί που διαπίστωσαν ότι είναι καίριο κομμάτι για αυτό και αναθεώρησαν για τις μελλοντικές πρακτικές τους:

«Εε όχι.. Αλλά ίσως θα έπρεπε να κάνουμε κάποια παραδείγματα» Σ1, Σ3

«Όχι, μέχρι τώρα δεν το έχω κάνει. Αλλά βλέπω πως βγαίνει νόημα για την αντιστροφή του κλάσματος... επειδή είναι ο αντίστροφος αριθμός» Σ12

Κάποιοι συμμετέχοντες (Σ9, Σ10) δήλωσαν πως αναφέρονται απλώς στους αντίστροφους αριθμούς στη διδασκαλία τους χωρίς να αποδίδουν μεγάλη βαρύτητα στην έννοια:

*«Κατά τη διδασκαλία θα αναφέρω ότι το κλάσμα 5/8 θα γίνει 8/5 με την αντιστροφή γιατί το 8/5 είναι ο αντίστροφος του 5/8. Αλλά δεν δίνω μεγάλη έκταση.. Αν συγκρατήσουν τον όρο καλώς αλλιώς...»*Σ9 (και, παρόμοια ο Σ10)

Ενδιαφέρον προκαλεί η απάντηση του Σ5, σύμφωνα με τον οποίο, τα παιδιά μπορούν εύκολα να βρίσκουν τους αντίστροφους αριθμούς αλλά δεν είναι βέβαιο αν τους κατανοούν σαν έννοια προκείμενου να αποδώσουν νόημα στην αντιστροφή του δεύτερου κλάσματος:

«Τα παιδιά το καταλαβαίνουν εύκολα. Αν τους πεις κάντε το 3 κλάσμα θα πουν 3/1, ποιο είναι το αντίστροφό του; Γράφουν 1/3. Βέβαια δεν ξέρω αν το κατανοούν, τι σημαίνει δηλαδή αντίστροφοι αριθμοί σαν έννοια προκειμένου να καταλάβουν ότι όταν αντιστρέφουμε το δεύτερο κλάσμα, στην ουσία γράφουμε τον αντίστροφό του. Δεν αφιερώνω ξεχωριστό μάθημα στους αντίστροφους, απλά τους αναφέρω όταν δείχνω τον αλγόριθμο της διαίρεσης, την αντιστροφή δηλαδή» Σ5

Αντιθέτως, μόλις δύο (Σ7 και Σ8) τόνισαν την αναγκαιότητα να περιλαμβάνονται οι αντίστροφοι αριθμοί στη διδασκαλία του αλγορίθμου για την καλύτερη εννοιολογική δόμηση της αντιστροφής και για την αποφυγή παρανοήσεων. Ο Σ8 έχει ήδη αναφερθεί στην έννοια σε προηγούμενα έργα, ενώ ο Σ7 παρόλο που δεν αναφέρθηκε, το θεωρεί σημαντικό:

«Είναι σημαντικό να διδάσκονται για να μην υπάρχουν παρανοήσεις γιατί άλλη ποσότητα εκφράζει το 3 και άλλη ποσότητα το 1/3. Οπότε μέσα από παραδείγματα δείχνω αυτό ακριβώς.. διαίρεση με διαιρέτη το 3 και αντίστοιχα με το 1/3» Σ7

«Χρησιμοποιώ τον όρο αντίστροφοι αριθμοί για να ξέρουν τα παιδιά ότι γιατί το 2/3 έγινε 3/2 όχι έτσι στην τύχη, αλλά γιατί το 3/2 είναι ο αντίστροφος αριθμός του 2/3. Δεν αφιερώνω ξεχωριστή διδακτική ώρα αλλά το λέω εξαρχής και το επαναλαμβάνω στα πρώτα παραδείγματα» Σ8

Εύλογα προκύπτει από τα παραπάνω στοιχεία ότι η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών παραλείπει μία σημαντική έννοια κατά τη διδασκαλία της διαίρεσης κλασμάτων, η οποία μπορεί να νοηματοδοτήσει και να συμβάλει στην εξήγηση του Α&Π. Η αντιστροφή του δεύτερου κλάσματος βασίζεται στην έννοια του αντίστροφου αριθμού και πρέπει να διευκρινίζεται στους μαθητές προκειμένου να αποφεύγονται ασάφειες και παρανοήσεις.

Συμπερασματικά, τα ευρήματα από όλα τα ερωτήματα του Έργου 7 αναδεικνύουν εμφανίζουν σημαντικές ελλείψεις στην Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου που αφορούν τον αλγόριθμό Α&Π.

5. 2 **Προφίλ Εκπαιδευτικών**

Στην ενότητα αυτή, θα επιχειρήσουμε να δημιουργήσουμε το προφίλ των εκπαιδευτικών ανάλογα με τις απαντήσεις που συλλέξαμε για τα διάφορα είδη γνώσης. Σε κάθε πίνακα, αριστερά βρίσκονται οι συμμετέχοντες και ακλουθούν τα δημογραφικά χαρακτηριστικά τους, στο κέντρο τα υποέργα και δεξιά και κάτω (Σύνολο ανά έργο/ Σύνολο ανά άτομο) εμφανίζεται το πλήθος των σωστών αποκρίσεων ανά εκπαιδευτικό και ανά έργο Ε1-Ε6. Το έργο Ε7, το οποίο διέφερε ως προς τον τύπο των ερωτημάτων που έγινε στους εκπαιδευτικούς, δε συμπεριλαμβάνεται σε αυτόν τον πίνακα.

Προφίλ εκπαιδευτικών για την Κοινή Γνώση Περιεχομένου, τη Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών και τη Γνώση Περιχεομένου και Διδασκαλίας

Ο Πίνακας 16 συγκεντρώνει τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών που αφορούν την αξιολόγηση των έργων (*Κοινή Γνώση Περιεχομένου)*, την εξήγηση του τρόπου σκέψης του μαθητή (*Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών)* και το είδος της ανατροφοδότησης που επιλέγουν *(Γνώση Περιχεομένου και Διδασκαλίας)*.

Για την αξιολόγηση των απαντήσεων των μαθητών, οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών έχουν κωδικοποιηθεί ως 0 και 1, όπου το 0 συμβολίζει τη Λάθος Αξιολόγηση και το 1 την Ορθή Αξιολόγηση. Σχετικά με την εξήγηση και την ανατροφοδότηση, έπειτα από λεπτομερή παρατήρηση των αποτελεσμάτων, δημιουργήθηκαν οι εξής συνδυασμοί: α) Κόκκινο: Διαδικαστική Εξήγηση- Διαδικαστική Ανατροφοδότηση, β) Πορτοκαλί: Διαδικαστική Εξήγηση- Μη Διαδικαστική Ανατροφοδότηση, γ) Μπλε: Μη διαδικαστική Εξήγηση- Διαδικαστική Ανατροφοδότηση, δ) Πράσινο: Μη Διαδικαστική Εξήγηση- Μη Διαδικαστική Ανατροφοδότηση, ε) Γκρι: Αδυναμία απόκρισης είτε στην εξήγηση είτε στην ανατροφοδότηση και στ) Σκούρο Γκρι: Αδυναμία απόκρισης και στα δύο. Να διευκρινιστεί ότι το έργο 6 ζητούσε μόνο αξιολόγηση για αυτό και δεν υπάρχει η αντίστοιχη επισήμανση για εξήγηση- ανατροφοδότηση.

			Έργα								
	Κάτοχος Μεταπτυχιακού	Έτη προϋπηρεσίας	Έργο 1	Έργο 2		Έργο 3	Έργο 6			
			Ε1.1	Ε2.2α	Ε2.2β	Ε3.1	Ε6.1	Ε6.2	Ε6.3	**Σύνολο ανά άτομο**
Σ1	όχι	0 - 5	0	1	1	1	1	1	0	**5**
Σ2	όχι	0 - 5	0	1	1	1	0	1	1	**5**
Σ3	όχι	0 - 5	0	1	1	1	1	1	1	**6**
Σ4	όχι	>10	0	1	1	1	1	0	1	**5**
Σ5	ναι	>10	1	1	1	1	1	0	0	**5**
Σ6	όχι	>10	1	0	1	1	1	1	1	**6**
Σ7	ναι	6 - 10	1	1	1	1	1	1	1	**7**
Σ8	όχι	>10	0	1	1	1	1	1	1	**6**
Σ9	ναι	6 - 10	1	1	1	1	1	1	1	**7**
Σ10	όχι	6 - 10	1	1	1	1	1	1	1	**7**
Σ11	όχι	>10	0	1	1	1	1	1	1	**6**
Σ12	ναι	>10	1	1	1	1	1	1	0	**6**
Σ13	όχι	>10	0	1	1	1	1	1	1	**6**
Σύνολο ανά έργο			**6**	**12**	**13**	**13**	**12**	**11**	**10**	

Πίνακας 9: Προφίλ Εκπαιδευτικών ως προς τη ΚΓΠ, τη ΓΠΜ και τη ΓΠΔ

Όσο αναφορά την αξιολόγηση των έργων, με μια πρώτη ανάγνωση φαίνεται πως οι εκπαιδευτικοί έχουν καλή Κοινή Γνώση Περιεχομένου, ωστόσο εμβαθύνοντας στα στοιχεία του Πίνακα 17, παρατηρούμε ότι μόνο 3 από τους 13 συμμετέχοντες κατάφεραν να αξιολογήσουν ορθά όλα τα έργα. Οι υπόλοιποι έκαναν ένα ή δύο λάθη. Επιπλέον, τα έργα που συγκέντρωσαν τις περισσότερες σωστές απαντήσεις, ήταν έργα που αξιολογούσαν την διαδικαστική γνώση (Έργο 2, Έργο 3). Αντιθέτως, στα έργα που απαιτούνταν εννοιολογική κατανόηση της διαίρεσης (Έργο 1) και ερμηνεία για το τι εκφράζει μια πράξη διαίρεσης (Έργο 6), σημειώθηκαν οι λιγότερες σωστές απαντήσεις. Θα λέγαμε επομένως, ότι η πλειονότητα των συμμετεχόντων κατέχει ισχυρή διαδικαστική γνώση για τη διαίρεση κλασμάτων, αλλά εμφανίζει ελλείμματα στην εννοιολογική.

Σύμφωνα με τα στοιχεία του Πίνακα 17, υπερέχει με μεγάλη διαφορά, η διαδικαστική εξήγηση της σκέψη του μαθητή σε συνδυασμό με τη διαδικαστική ανατροφοδότηση (19 στα 45). Υπάρχουν συμμετέχοντες που σημείωσαν μόνο αυτό το είδος απόκρισης (Σ1, Σ3, Σ4, Σ12). Ακολουθεί η επιλογή Μη Διαδικαστική Εξήγηση και Ανατροφοδότηση (8 στα 45), με τις περισσότερες απαντήσεις να συγκεντρώνει ο Σ5 και έπειτα ακολουθεί η επιλογή

Διαδικαστική Εξήγηση- Μη Διαδικαστική Ανατροφοδότηση (5 στα 45). Βλέπουμε ότι οι Σ5 και οι Σ7 σε όλες τους τις απαντήσεις επιλέγουν μη διαδικαστική ανατροφοδότηση. Υπάρχουν αρκετές απαντήσεις όπου οι εκπαιδευτικοί δεν κατάφεραν να ανταποκριθούν σε ένα από τα δύο ζητούμενα (8 στα 45). Το πιο συχνό ήταν να δώσουν κάποια ανατροφοδότηση, αλλά να μη μπορέσουν να εξηγήσουν πώς σκέφτηκε ο μαθητής και γιατί έκανε λάθος, για αυτό και η ανατροφοδότησή κυρίως είχε να κάνει με το να ξανά δείξουν τα βήματα του αλγορίθμου. Οι Σ4, Σ9 και Σ10 το επανέλαβαν δύο φορές. Τέλος, βλέπουμε πως υπήρξαν έργα στα οποία οι εκπαιδευτικοί δεν μπόρεσαν ούτε να εξηγήσουν ούτε να δώσουν κάποια ανατροφοδότηση (4 στα 45).

Συγκεκριμένα, για το Έργο 1 όπου υπήρχαν οι λιγότερες σωστές αξιολογήσεις βλέπουμε ότι 2 από τους 4 εκπαιδευτικούς ενώ το αξιολόγησαν ορθά, δεν μπόρεσαν να δώσουν κάποια ανατροφοδότηση και στο έργο Ε2.2β, πάλι 4 εκπαιδευτικοί δεν μπόρεσαν να προτείνουν ανατροφοδότηση. Όλα αυτά τα στοιχεία μας δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί μπορούν και αξιολογούν σωστά τις απαντήσεις των μαθητών (Κοινή Γνώση Περιεχομένου), ωστόσο πολλές φορές δυσκολεύονται να ερμηνεύσουν τη σκέψη του μαθητή και να εντοπίσουν την αιτία του λάθους του (Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών) και όσες φορές τα καταφέρνουν, επιλέγουν κυρίως διαδικαστική προσέγγιση ισχυριζόμενοι ότι μπερδεύουν τις διαδικασίες. Διαδικαστική είναι επίσης, και η ανατροφοδότηση που επιλέγουν να δώσουν βασιζόμενοι σε διαδικασίες και κανόνες.

Σχετικά με τα δημογραφικά χαρακτηριστικά του κάθε εκπαιδευτικού, είναι φανερό ότι τα έτη προϋπηρεσίας δεν αποτελούν ειδοποιό διαφορά για το πλήθος των σωστών αξιολογήσεων. Τις περισσότερες ορθές αξιολογήσεις σημείωσαν εκπαιδευτικοί που ανήκουν στην κατηγορία 6- 10 χρόνια προϋπηρεσίας, ενώ συμμετέχοντες με πάνω μια δεκαετία προϋπηρεσία συγκέντρωσαν 6 ή και 5 ορθές αξιολογήσεις. Ο Σ5 και ο Σ7 που υπήρξαν φοιτητές του μεταπτυχιακού προγράμματος Διδακτικής των Μαθηματικών, αποδίδουν μεγάλη σημασία στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της διαίρεσης και προτείνουν μη διαδικαστική ανατροφοδότηση.

Προφίλ εκπαιδευτικών για την Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου

Ο επόμενος πίνακας που ακολουθεί (Πίνακας 18), παρουσιάζει τα αποτελέσματα των εκπαιδευτικών σχετικά με την Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου. Οι λανθασμένες απαντήσεις έχουν κωδικοποιηθεί ως 0, οι σωστές απαντήσεις ως 1 και η καμία απάντηση ως 2. Στην Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου ανήκουν και τα ερωτήματα του Έργου 7 σχετικά με τον αλγόριθμο Α&Π, ωστόσο επειδή μας δίνουν ποιοτικά ευρήματα δεν μπορούν να κωδικοποιηθούν σε λανθασμένη ή ορθή απάντηση για αυτό δεν συμπεριλαμβάνονται σε αυτόν τον πίνακα.

			Έργα								
			Έργο 2	Έργο 4		Έργο 5				Έργο 7	
	Κάτοχος Μεταπτυχιακού	Έτη προϋπηρεσίας	Ε2β	Ε4.1	Ε4.3	Ε5.2.1		Ε5.2.2			**Σύνολο ανά άτομο**
			Κοιν. Παραν	Διαίρεση αντίστοιχων όρων	Άλλη μέθοδο	Αναπαράσταση	Πρόβλημα	Αναπαράσταση	Πρόβλημα	«Διπλή Αντιστροφή»	
Σ1	όχι	0 - 5	0	0	0	0	2	2	2	2	**0**
Σ2	όχι	0 - 5	0	0	0	2	2	2	2	2	**0**
Σ3	όχι	0 - 5	0	0	0	0	1	0	1	2	**2**
Σ4	όχι	>10	0	0	0	2	2	2	2	2	**0**
Σ5	ναι	>10	1	1	1	1	1	1	1	2	**7**
Σ6	όχι	>10	0	0	0	1	1	1	2	2	**3**
Σ7	ναι	6 - 10	0	0	0	1	1	0	0	2	**2**
Σ8	όχι	>10	0	0	0	0	2	2	2	1	**1**
Σ9	ναι	6 - 10	0	0	0	0	1	1	2	2	**2**
Σ10	όχι	6 - 10	1	0	1	1	1	0	1	2	**5**
Σ11	όχι	>10	0	0	1	2	2	0	1	2	**2**
Σ12	ναι	>10	0	0	0	0	1	2	1	2	**2**
Σ13	όχι	>10	0	0	0	1	1	1	2	2	**3**
Σύνολο ανά έργο			**2**	**1**	**3**	**5**	**8**	**4**	**5**	**1**	

Πίνακας 10: Προφίλ εκπαιδευτικών ως προς την ΕΓΠ

Παρατηρώντας τα στοιχεία του Πίνακα 18, συμπεραίνουμε ότι οι ελλείψεις στην Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου είναι αρκετές και πολύ σημαντικές. Ειδικά όσο αναφορά τη γνώση άλλων μεθόδων διαίρεσης κλασμάτων εκτός του τυπικού αλγόριθμου. Όπως ήδη διατυπώθηκε και στα «Αποτελέσματα», η πλειονότητα των εκπαιδευτικών δεν γνωρίζει τη μέθοδο των Κοινών Παρανομαστών που υπάρχει στο βιβλίο της Ε’ δημοτικού και μόλις ένας εκπαιδευτικός (Σ5) γνώριζε τη μέθοδο διαίρεσης με τους αντίστοιχους όρους. Στο σύνολο, καλύτερα αποτελέσματα σημείωσαν στη δημιουργία προβλήματος (Έργο 5).

Σε ατομικό επίπεδο, υπάρχουν συμμετέχοντες που δεν έδωσαν καμία σωστή απάντηση και οι περισσότεροι συγκέντρωσαν μία με δύο σωστές απαντήσεις. Όσο αναφορά τον Σ8, που όπως είδαμε, ήταν ο μοναδικός συμμετέχοντας που εμφάνισε ισχυρή Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου για τη φύση του αλγόριθμου Α&Π και ο μοναδικός που αιτιολόγησε τη «διπλή αντιστροφή» του αλγορίθμου (Έργο 7), στα υπόλοιπα έργα εξειδικευμένης γνώσης της έρευνας (Πίνακας 18) δεν μπόρεσε να ανταποκριθεί.. Ο Σ5 φαίνεται να έχει καλή ΕΓΠ σε σύγκριση με τους υπόλοιπους, αν και στο Έργο 7 εμφάνισε σημαντικά ελλείμματα.

Ως προς τα δημογραφικά χαρακτηριστικά δεν είναι εφικτό να εξαχθούν συμπεράσματα για την Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου σε συνάρτηση με την κατοχή μεταπτυχιακού διπλώματος και τα έτη προϋπηρεσίας, καθώς όπως φαίνεται και στον Πίνακα 18, οι δύο απόφοιτοι της Διδακτικής των Μαθηματικών (Σ5, Σ7) εμφάνισαν διαφορές ως προς την Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου, ενώ δεν είναι ξεκάθαρο αν τα έτη προϋπηρεσίας επηρεάζουν τις εξειδικευμένες γνώσεις τους.

6 Κεφάλαιο 6^{ο}: Συμπεράσματα- Συζήτηση

Στην ενότητα αυτή, θα παρουσιαστούν τα πιο σημαντικά ευρήματα που προέκυψαν από την έρευνα, με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν. Συγχρόνως θα γίνει ο συσχετισμός αποτελεσμάτων της παρούσας έρευνας με όσα έχουν ειπωθεί από την υπάρχουσα βιβλιογραφία. Όπως έχει ήδη επισημανθεί και στο θεωρητικό πλαίσιο, οι εκπαιδευτικοί χρειάζεται να κατέχουν ένα πακέτο γνώσεων που σχετίζεται τόσο με τη μαθηματική γνώση της διαίρεσης κλασμάτων όσο και με τη γνώση της διδασκαλία της προκειμένου να είναι σε θέση να προσφέρουν στους μαθητές τους μια ουσιαστική και αποτελεσματική διδασκαλία της έννοιας.

Κοινή Γνώση Περιεχομένου

Μέσω της αξιολόγησης των απαντήσεων των υποθετικών μαθητών διερευνήθηκαν πτυχές της Κοινής Γνώσης Περιεχομένου των συμμετεχόντων. Αν και στο σύνολο των υποέργων, η ορθή αξιολόγηση ήταν η επικρατούσα κατηγορία απόκρισης των συμμετεχόντων, εμβαθύνοντας περισσότερο στην υπό διαπραγμάτευση έννοια θα παρατηρήσουμε κάποιες αδυναμίες. Τα ευρήματα της παρούσας έρευνας δείχνουν πως η πλειονότητα των συμμετεχόντων έχει αναπτύξει τη διαδικαστική γνώση και εκτελεί σωστά τον παραδοσιακό αλγόριθμο, ωστόσο στερείται εννοιολογικής γνώσης για τη διαίρεση κλασμάτων. Ειδικότερα, οι συμμετέχοντες αξιολόγησαν σωστά τα έργα που αφορούσαν την εκτέλεση πράξεων με τον παραδοσιακό αλγόριθμο Α&Π και διέκριναν ορθά, οι περισσότεροι, ποια από τα δοσμένα προβλήματα επιλύονταν με διαίρεση. Ανάλογα ήταν τα ευρήματα και στην έρευνα των Luo, Lo & Leu (2011). Η επιμονή στο διαδικαστικό τρόπο προσέγγισης της έννοιας φαίνεται και στα αποτελέσματα του πρώτου έργου που απαιτούνταν εννοιολογική κατανόηση της διαίρεσης, στο οποίο περισσότεροι από τους μισούς, έκριναν ως σωστή την πράξη του πολλαπλασιασμού ως επίλυση σε ένα πρόβλημα διαίρεσης. Ο λόγος είναι ότι οι επικεντρώθηκαν στην αξιολόγηση της διαδικασίας του πολλαπλασιασμού και αγνόησαν το ζητούμενο του προβλήματος, πράγμα που φαίνεται και από τις απαντήσεις τους.

Γνώση περιεχομένου και μαθητών

Μέσω της εξήγησης του τρόπου σκέψης των μαθητών από τους συμμετέχοντες διερευνήθηκαν πτυχές της Γνώση του Περιεχομένου και των Μαθητών, που αποτελεί μια από τις κατηγορίες της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου που πρέπει να κατέχει ο εκπαιδευτικός προκειμένου να είναι σε θέση να διδάξει μαθηματικά Οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην έρευνα φαίνεται ότι οι περισσότεροι είναι σε θέση να προβλέπουν και να εντοπίζουν τα λάθη των μαθητών και κάποιοι γνωρίζουν και τις παρανοήσεις που κατέχουν, ωστόσο δυσκολεύονται να ερμηνεύσουν τον τρόπο σκέψης και να εντοπίσουν από πού πηγάζει το εκάστοτε λάθος. Τα ευρήματα αυτά έρχονται σε αντίθεση με τους συμμετέχοντες της Tirosh (2000) που δεν γνώριζαν πιθανές παρανοήσεις των μαθητών. Επιπλέον, σχετικά με την ερμηνεία της σκέψης του μαθητή, στην παρούσα έρευνα οι εξηγήσεις των εκπαιδευτικών κατά πλειονότητα ήταν γενικόλογες, τις προσέγγισαν με διαδικαστικό τρόπο οπότε έλεγαν πως δεν έχουν μάθει σωστά τη διαδικασία και κάποιοι απέφυγαν να απαντήσουν. Κρίνεται σκόπιμο να επισημανθεί η αντιπαράθεση μεταξύ της Κοινής Γνώσης Περιεχομένου και της Γνώσης Περιεχομένου και Μαθητών, καθώς ενώ αξιολογούν σωστά τις απαντήσεις των μαθητών, δεν μπορούν να τις εξηγήσουν.

<u>Γνώση περιεχομένου και διδασκαλίας</u>

Μία ακόμη πτυχή που εξετάστηκε μέσω της συγκεκριμένης έρευνας είναι το είδος της ανατροφοδότησης που θα έδιναν οι εκπαιδευτικοί στον υποθετικό μαθητή του διδακτικού σεναρίου. Πρόκειται για μια πτυχή της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου και αφορά τη Γνώση του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας, η οποία βρίσκεται σε άμεση σχέση με τη Γνώση για τους Μαθητές. Σύμφωνα με τα ευρήματα, οι εκπαιδευτικοί επιλέγουν ως ανατροφοδότηση για τα λάθη και τις απορίες των μαθητών τη στρατηγική των διαδικασιών και τον κανόνων. Παραπέμπουν τους μαθητές να δουν τον κανόνα και μετά να εξασκηθούν σε παραδείγματα ωσότου να τον απομνημονεύσουν και να λύνουν μηχανικά. Αυτή η τακτική, σύμφωνα με τους ίδιους, τους κρατάει σε μία ασφαλή θέση προκειμένου να αποφεύγουν τα «γιατί» των μαθητών. Επιπλέον, στην πλειονότητά τους οι απαντήσεις ανατροφοδότησης χαρακτηρίζονταν από τη μη εμπλοκή του μαθητή στη διαδικασία. Ήταν δασκαλοκεντρικές, κατευθυντήριες για το πώς θα έπρεπε να λύσουν την άσκηση δίχως εννοιολογικές διευκρινίσεις και ο μαθητής σε ρόλο ακροατή και δίχως να θέτουν ερωτήματα σε εκείνον ή να του ζητούν να διατυπώσει τον τρόπο που σκέφτηκε. Αντιθέτως, προωθούν και στους μαθητές την υιοθέτηση μιας διαδικαστικής προσέγγισης για τη διαίρεση κλασμάτων. Στα ευρήματα για τη διδασκαλία θα μπορούσαμε να συμπεριλάβουμε και την αποκλειστική χρήση μιας μεθόδου διαίρεσης κλασμάτων, πράγμα που επιβεβαιώνουν και οι Unlu & Ertekin (2012). Ακόμα και οι εκπαιδευτικοί που δήλωσαν ότι ξέρουν κι άλλη μέθοδο πέρα της παραδοσιακής, εφαρμόζουν στην τάξη και προτείνουν στους μαθητές του τον αλγόριθμο Α&Π.

<u>Εξειδικευμένη γνώση Περιεχομένου</u>

Η μεγαλύτερη έλλειψη στην Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου εντοπίζεται στη γνώση για τον αλγόριθμο Α&Π. Δεν μπορούν να ερμηνεύσουν και να εξηγήσουν για ποιο λόγο συνέβη αυτή η διπλή αντιστροφή στον αλγόριθμο. Πληθώρα ερευνών αναφέρει ότι η πλειονότητα των εκπαιδευτικών δεν μπορεί να εξηγήσει γιατί ο μαθηματικός αυτός κανόνας ισχύει (Ball, 1990· Li και Kulm, 2008· Lo and Luo, 2012). Οι εξηγήσεις που έδωσαν για τον τρόπο εκτέλεσης της διαίρεσης δεν πραγματεύονται με σαφήνεια τις μαθηματικές ιδέες που βρίσκονται στη βάση του αλγόριθμου (αντίστροφες πράξεις, αντίστροφοι αριθμοί). Με το εύρημα αυτό φαίνεται να συμφωνούν και άλλοι ερευνητές (Ma, 1999· Tirosh, 2000· Son & Crespo, 2009). Ειδικότερα, μόνο ένας συμμετέχοντας αναφέρθηκε στις αντίστροφες πράξεις και στους αντίστροφους αριθμούς, ενώ ελάχιστοι μόνο στις αντίστροφες πράξεις. Στην έλλειψη εννοιολογικής γνώσης είχε αναφερθεί και η Tirosh (2000) που συμπέρανε ότι οι εκπαιδευτικοί ξέρουν καλά να εκτελούν τον αλγόριθμο αλλά δεν ξέρουν γιατί το κάνουν και πώς να το ελέγξουν. Επιπλέον, οι περισσότεροι ερμήνευσαν την έννοια «αντίστροφες πράξεις» δίνοντας παραδείγματα με φυσικούς αριθμούς που ανταποκρίνονται στην έκφανση της διαίρεσης ότι από έναν «πολλαπλασιασμό» προκύπτουν δύο «διαιρέσεις», κάτι το οποίο είναι ανεπαρκές για να ερμηνεύσει την αντιστροφή του δεύτερου κλάσματος. Επίσης, έχει ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι κανείς δεν αναφέρθηκε και στις δύο εκφάνσεις της αντίστροφης σχέσης μεταξύ των δύο πράξεων. Λίγοι ήταν εκείνοι που αναφέρονται στην έννοια των αντίστροφων αριθμών κατά τη διδασκαλία του αλγορίθμου Α&Π και αυτό φάνηκε και από τον τρόπο που διατυπώνουν τη διαδικασία, καθώς επιλέγουν τη φράση «αντιστρέφω το δεύτερο κλάσμα και πολλαπλασιάζω» και όχι «πολλαπλασιάζω με τον αντίστροφο αριθμό του διαιρέτη».

Οι εκπαιδευτικοί της παρούσας έρευνας αρνήθηκαν την ορθότητα της διαίρεσης αριθμητή με αριθμητή και παρανομαστή με παρανομαστή (πρόκειται για ένα εκ των δύο έργων που συγκέντρωσε τις περισσότερες λανθασμένες αξιολογήσεις), ανάλογα αποτελέσματα υπήρξαν και στην Tirosh (2000), και δεν αναγνώρισαν την μέθοδο των Κοινών Παρανομαστών για τη διαίρεση κλασμάτων που υπάρχει και στο βιβλίο της Ε’ δημοτικού, αλλά θεώρησαν ότι ο μαθητής μπερδεύτηκε από τον αλγόριθμο της πρόσθεσης κλασμάτων. Η έλλειψη στην Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου επιβεβαιώνεται και από την τακτική τους να εφαρμόζουν στην τάξη τους και να προτείνουν στους μαθητές τους να χρησιμοποιούν αποκλειστικά τον παραδοσιακό αλγόριθμο, ενώ μόλις 3 δήλωσαν πως γνωρίζουν κι άλλη μέθοδο επίλυσης κλασμάτων πέρα του παραδοσιακού αλγορίθμου. Στη βιβλιογραφία αναφέρονται και διαφορετικά ευρήματα σχετικά με αυτό το ζήτημα. Για παράδειγμα, στην έρευνα των Klemer et al. (2017), οι εκπαιδευτικοί έλυσαν μια πράξη διαίρεσης με διαφορετικούς τρόπους.

Τα ευρήματα για το είδος της ανατροφοδότησης που θα έδιναν, έρχονται σε άμεση συνάρτηση με τις δυσκολίες που εντοπίζονται στην Εξειδικευμένη γνώση Περιεχομένου και ειδικότερα στην αδυναμία χειρισμού αναπαραστατικών μέσων, όπου η αδυναμία αυτή θα μπορούσε να αιτιολογήσει την επιμονή στις διαδικασίες και τους κανόνες. Αναλυτικότερα, μεγάλη δυσκολία εντοπίστηκε στην κατασκευή εικονικής αναπαράστασης με δοσμένη διαίρεση, και παρόμοια στην κατασκευή προβλήματος. καθώς λιγότεροι από τους μισούς συμμετέχοντες κατάφεραν να αναπαραστήσουν ορθά. Συγκεκριμένα, μόνο ένας εκπαιδευτικός ανταποκρίθηκε ορθά και στα τέσσερα υποέργα. Η δυσκολία στην κατασκευή προβλήματος και αναπαράστασης είναι ένα εύρημα που συμφωνεί με τα ευρήματα πλήθους ερευνών (π.χ. Lo & Luo, 2012· Rizvi & Lawson, 2007· Son & Crespo, 2009). Αξίζει να σημειωθούν ορισμένα χαρακτηριστικά των λεκτικών προβλημάτων και των αναπαραστάσεων που κατασκεύασαν οι εκπαιδευτικοί: Αρκετά από τα προβλήματα που θεωρήθηκαν σωστά (με διατυπωμένες επιφυλάξεις) στην περίπτωση της διαίρεσης με κλασματική μονάδα (1/3) φαίνεται να είναι προσαρμογές αντίστοιχων προβλημάτων από το πλαίσιο των φυσικών, και βασίστηκαν κυρίως στο μοντέλο μερισμού («χωρίζω σε ίσα μέρη») και όχι με το «πόσες φορές χωράει ο διαιρέτης στον διαιρετέο», δηλαδή με το μοντέλο μέτρησης. Κατά την προσαρμογή, το «χωρίζω σε ίσα μέρη» τροποποιήθηκε στο (κακώς διατυπωμένο) «χωρίζω σε ένα τρίτο κομμάτια». Η προσαρμογή αυτή ίσως εξηγεί και γιατί η διατύπωση του προβλήματος με μη μοναδιαίο κλάσμα ήταν πιο απαιτητική. Από την άλλη μεριά, η αναπαράσταση των ίδιων διαιρέσεων αποδείχτηκε πιο απαιτητική, από τη διατύπωση προβλήματος. Στο έργο αυτό παρουσιάστηκαν δυσκολίες τεκμηριωμένες στη βιβλιογραφία, όπως η σύγχυση του πολλαπλασιασμού με τη διαίρεση (Ma, 1999), αλλά και το μεγάλο ζήτημα της μονάδας αναφοράς, κυρίως του διαιρέτη (Olanoff, 2011·Klemer et al., 2017)

Τέλος, τα ευρήματα της έρευνας δείχνουν ότι υπάρχουν δι-ατομικές διαφορές μεταξύ των συμμετεχόντων σε διάφορες συνιστώσες της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία, αλλά και ενδο-ατομικές διαφορές σε έργα που αφορούσαν την ίδια συνιστώσα (π.χ., την Εξειδικευμένη Γνώση του Περιεχομένου). Δηλαδή, υπήρχαν συμμετέχοντες που εμφάνισαν πολύ καλύτερες επιδόσεις σε έργα, για παράδειγμα, Κοινής ή Εξειδικευμένης Γνώσης Περιεχομένου, σε σχέση με άλλους. Παράλληλα, υπήρχαν συμμετέχοντες που τα πήγαν πολύ καλά σε κάποια έργα π.χ. για την Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου, αλλά όχι σε άλλα έργα που αφορούσαν την ίδια συνιστώσα. Αυτά τα ευρήματα αναδεικνύουν την αναγκαιότητα για μια πιο λεπτομερή χαρτογράφησης της κάθε μιας συνιστώσας ξεχωριστά, με περισσότερα έργα.

Συνοψίζοντας τα ευρήματα της συγκεκριμένης έρευνας, γίνεται φανερό ότι υπάρχουν εννοιολογικές κυρίως, ελλείψεις σε διάφορες κατηγορίες της γνώσης περιεχομένου και της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου για τη διαίρεση κλασμάτων, όπως τις εξειδικεύουν για τα μαθηματικά οι Ball και οι συνεργάτες της (2008). Ωστόσο, λόγω του μικρού δείγματος των συμμετεχόντων (13) δεν είναι εφικτό να προβούμε με ασφάλεια σε γενικεύσεις και συμπεράσματα.

Η συγκεκριμένη έρευνα ενέχει κάποιους περιορισμούς σχετικά με το μέγεθος του δείγματος καθώς υπήρξε δυσκολία στην εύρεση εκπαιδευτικών που ήταν πρόθυμοι να συμμετάσχουν. Μια μελλοντική έρευνα με μεγαλύτερο και πιο αντιπροσωπευτικό δείγμα θα ήταν απαραίτητη για τη γενίκευση των συμπερασμάτων. Θα ήταν επίσης, χρήσιμο να δοθεί μεγαλύτερο ενδιαφέρον στην ερμηνεία της διαδικασίας του αλγορίθμου και στις αντίστροφες πράξεις για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, καθώς όπως είδαμε δεν υπάρχουν αρκετές έρευνες στη βιβλιογραφία που να επιχειρούν να ερμηνεύσουν τη διπλή αντιστροφή.

7 Βιβλιογραφικές Αναφορές

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for research in mathematics education*, 132-144.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59,* 398-407.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C. A., Underhill, R. G., Jones, D., &Agard, P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(3), 194-222.

Carvalho, R., & Ponte, J. P. D. (2019). Mental computation: An opportunity to develop students' strategies in rational number division. In *CERME 11, 11th Congress of European Research in Mathematics Education*.

Cavey, L. O., &Kinzel, M. T. (2014). From whole numbers to invert and multiply. *Teaching children mathematics*, *20*(6), 374-383.

Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM*, *47*(5), 747-758.

Copur-Gencturk, Y. (2021). Teachers' conceptual understanding of fraction operations: results from a national sample of elementary school teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(3), 525-545.

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., Verschaffel, L., &Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education*, 47, 82-92.

Depaepe, F., Verschaffel, L., &Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and teacher education*, *34*, 12-25.

Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 147-164). New York: Macmillan.

Fischbein, E. (1978). Intuition and mathematical education. In E. Cohors- Fresenborg& I. Washsmuth (Eds.), *Proccedings of the 2nd PME Conference.*(pp. 148- 176). Osnabruck, Germany

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Eduacation, 16*(1), 3-17.

Fredua-Kwarteng, E., &Ahia, F. (2006). Understanding division of fractions: an alternative view. Ανατήθηκεαπόhttps://eric.ed.gov/?id=ED493746στις 19/7/2022.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. Στο D. A. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (σσ. 276-295). New York: Macmillan Publishing Company.

Gregg, J., & Gregg, D. U. (2007). Measurement and fair-sharing models for dividing fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *12*(9), 490-496.

Klemer, A., Rapoport, S., & Lev-Zamir, H. (2019). The missing link in teachers' knowledge about common fractions division. *International Journal of mathematical education in science and technology*, *50*(8), 1256-1272.

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. *The roles of representation in school mathematics*, 146-165.

Li, Y. (2008b). What do students need to learn about division of fractions? *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(9), 546-552.

Li, Y., & Huang, R. (2008). Chinese elementary mathematics teachers' knowledge in mathematics and pedagogy for teaching: The case of fraction division. *ZDM*, *40*(5), 845-859.

Li, Y., & Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: The case of fraction division. *ZDM*, *40*(5), 833-843.

Li, Y., Ma, Y., & Pang, J. (2008). Mathematical preparation of prospective elementary teachers. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education: Vol. 1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (pp. 37–62). Rotterdam: Sense.

Lo, J. J., & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(6), 481-500.

Luo, F., Lo, J. J., & Leu, Y. C. (2011). Fundamental fraction knowledge of preservice elementary teachers: A cross-national study in the United States and Taiwan. *School Science and Mathematics*, *111*(4), 164-177.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Rizvi, N. F., & Lawson, M. J. (2007). Prospective Teachers' Knowledge: Concept of Division. *International Education Journal*, *8*(2), 377-392.

Olanoff, D. E. (2011). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The case of multiplication and division of fractions*. Syracuse University.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: A conception of teacher knowledge. *10, 1*. American Educator.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57, 1*, 1-22.

Siegler, R. S., &Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, *107*(3), 909–918.

Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics education*, 233-254.

Slattery, J., & Fitzmaurice, O. (2014). ‘Ours is not to reason why, just invert and multiply’: an insight into Irish prospective secondary teachers' conceptual understanding of the division of fractions. *Irish Educational Studies*, *33*(4), 467-488.

Son, J., & Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. *Journal of Mathematics TeacherEducation*, *12*(4), 235-261.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for research in Mathematics Education*, *31*(1), 5-25.

Unlu, M., &Ertekin, E. (2012). Why do pre-service teachers pose multiplication problems instead of division problems in fractions?. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *46*, 490-494.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., &Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(3), 344-355.

Van De Walle, J.A. (2007). *Διδάσκοντας Μαθηματικά για το Δημοτικό και για το Γυμνάσιο: Μια αναπτυξιακή διαδικασία*. Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.

Βαμβακούση, Ξ., Κόπτση, Ι., Χρήστου, Κ. & Λεμονίδης, Χ. *Διαίρεση κλασμάτων: μια κριτική ματιά στην οργάνωση του περιεχομένου στα σχολικά εγχειρίδια.*

Κακαδιάρη, Χ., Μπελίστου, Ν., Στεφανίδης , Γ., & Χρονοπούλου, Γ. (2010). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού, Βιβλίο Δασκάλου.* Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ: Αθήνα.

Κακαδιάρη, Χ., Μπελίστου, Ν., Στεφανίδης , Γ., & Χρονοπούλου, Γ. (2010). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού, Βιβλίο Μαθητή.* Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ: Αθήνα.

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π. & Οικονόμου, Θ.(2006). *Μαθηματικά Στ’ Δημοτικού. Βιβλίο Δασκάλου.* Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ: Αθήνα

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π. & Οικονόμου, Θ.(2006). *Μαθηματικά Στ’ Δημοτικού. Βιβλίο Μαθητή.* Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ: Αθήνα

Κολέζα, Ε. (2017). *Θεωρία & Πράξη στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.

Κόπτση, Ι., Χρήστου, Κ. & Βαμβακούση, Ξ. (2002). Διαίρεση Κλασμάτων: Μια εναλλακτική προσέγγιση. Στο *9ο Πανελλήνιο Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (3- 5) Ιουνίου 2022*.(σσ. 326- 335). Βόλος: ΕΝ.ΕΔ.ΙΜ.

Λεμονίδης, Χ. (2016). *Στην τροχιά των ρητών* . Θεσσαλονίκη: Κυριακίδη.

8 Παράρτημα: Ερευνητικό Εργαλείο

<u>Δημογραφικά Χαρακτηριστικά</u>

Πόσα έτη διδακτικής εμπειρίας έχετε; Α) 0 – 5 έτη Β) 6 – 10 Γ) περισσότερα από 10

Είστε κάτοχος μεταπτυχιακού διπλώματος; Αν ναι, σε ποιον τομέα;

Είστε κάτοχος διδακτορικού διπλώματος; Αν ναι, σε ποιον τομέα;

<u>Έργο 1</u>

Σε μια σχολική τάξη της Στ’ Δημοτικού δόθηκε το εξής το πρόβλημα: *Ένας ξυλουργός μετράει το μήκος μιας σανίδας με ένα ραβδί και βρίσκει ότι είναι ίσο με 18 ραβδιά. Τι θα έβρισκε αν μετρούσε το μήκος της σανίδας με τα* $\frac{2}{3}$ *του ραβδιού;*

Ο Παύλος έγραψε στο τετράδιό του το εξής:

$$\frac{2}{3}\, x\ 18 = \frac{36}{3} = 12.$$

Με άριστα το 5, τι βαθμό θα δίνατε στην απάντηση του Παύλου; Γιατί;

Γιατί πιστεύετε πως έκανε λάθος; Τι ανατροφοδότηση θα του δίνατε;

<u>Έργο 2</u>

Ο δάσκαλος ενός τμήματος της Στ’ Δημοτικού για να ελέγξει όσα θυμούνται οι μαθητές του από την προηγούμενη τάξη σχετικά με τη διαίρεση κλασμάτων, τους ζήτησε να εκτελέσουν την πράξη $\frac{2}{3} : \frac{4}{12}$.

Α) Η Ελπίδα χρησιμοποίησε τον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» και έκανε λάθος στην εκτέλεση της πράξης. Με βάση την εμπειρία σας, τι λάθος μπορεί να έκανε η Ελπίδα;

Β) Ο Μάριος έγραψε στο τετράδιό του:

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{12} = \frac{3}{2}\, x\, \frac{12}{4} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$

Ο Αντώνης έγραψε στο τετράδιό του:

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{12} = \frac{8}{12} : \frac{4}{12} = \frac{2}{12}$$

Είναι σωστή η λύση του Μάριου; Του Αντώνη; Αν όχι, ποιος είναι ο τρόπος σκέψης κάθε μαθητή; Τι ανατροφοδότηση θα του δίνατε;

Έργο 3

Σε μια σχολική τάξη της Στ’ Δημοτικού η δασκάλα της τάξης ζητάει από τους μαθητές να επιλύσουν τη διαίρεση 3 : $\frac{5}{10}$. Ο Ηλίας ξεκινάει να επιλύει τη διαίρεση, γράφοντας:

3 : $\frac{5}{10}$ *= 3 x* $\frac{10}{5}$ = $\frac{30}{5}$ *= 6.* Ξαφνικά ακούγεται η φωνή του Ηλία, δυνατά: *«Ε όχι, αποκλείεται! Σίγουρα έχω κάνει λάθος»* και σβήνει ό,τι έχει γράψει.

Α) Είναι σωστό ή λάθος το αποτέλεσμα που βρήκε ο Ηλίας;

Β) Σύμφωνα με την άποψη σας, γιατί ο Ηλίας πιστεύει πως έκανε λάθος;

Γ) Τι ανατροφοδότηση θα του δίνατε αν ήσασταν η δασκάλα του τμήματος;

Έργο 4

Σε μια σχολική τάξη της Ε’ Δημοτικού, οι μαθητές καλούνται να εκτελέσουν την πράξη $\frac{2}{9}$: $\frac{1}{3}$. Μια μαθήτρια, η Άννα λέει: «έχω ανακαλύψει έναν πολύ απλό τρόπο για να το κάνω αυτό». Σηκώνεται στον πίνακα και γράφει $\frac{2}{9}$: $\frac{1}{3}$ = $\frac{2:1}{9:3}$ = $\frac{2}{3}$. Κάποιοι από τους συμμαθητές της όμως, αντιδρούν και υποστηρίζουν πως είναι λανθασμένος αυτός ο τρόπος για τη διαίρεση κλασμάτων.

Α) Ισχύει ή όχι την πρακτική της Άννας; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Β) Εσείς ποια μέθοδο επίλυσης θα προτείνατε στους μαθητές σας;

Γ) Γνωρίζετε άλλες μεθόδους επίλυσης;

Έργο 5

Ένας μαθητής της Στ΄ Δημοτικού ρωτήθηκε πώς θα εξηγούσε τι σημαίνει 12:3 σε ένα μικρό παιδί. Εκείνος απαντά: *«Είναι σαν να έχω 12 καραμέλες και να θέλω να τις μοιράσω σε τρία παιδιά – δώδεκα δια τρία ίσον τέσσερα, τέσσερις καραμέλες παίρνει το καθένα».*

Στη συνέχεια, ρωτήθηκε πώς θα εξηγούσε τι σημαίνει 12 : $\frac{1}{3}$ και λέει: *«Είναι όπως πριν, έχω 12 καραμέλες και…. Ωχ όχι! Δεν γίνεται να έχω 1/3 παιδί. Δεν μπορώ να το εξηγήσω αυτό».*

Α) Ποια δυσκολία πιστεύετε ότι αντιμετωπίζει ο μαθητής;

Β) Με ποιον τρόπο θα εξηγούσατε στον μαθητή τι σημαίνει α) $12 : \frac{1}{3}$, β) $\frac{5}{6} : \frac{1}{3}$

<u>Έργο 6</u>

Σε μια τάξη της Ε’ Δημοτικού, η δασκάλα ζήτησε από τους μαθητές να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα διαίρεσης που να περιλαμβάνει την πράξη $5 : \frac{1}{2}$. Παρακάτω δίνονται τρία από τα προβλήματα που κατασκεύασαν οι μαθητές.

Α) Ελένη: Έχω μία σοκολάτα που έχει 5 κομμάτια. Κόβω όλα τα κομμάτια στη μέση. Πόσα κομμάτια σοκολάτα έχω τώρα;

Β) Μανώλης: Ένα κιλό κασέρι κοστίζει 5 ευρώ. Πόσο κοστίζει το μισό κιλό;

Γ) Ηλίας: Οι γονείς μου με αφήνουν να παίζω μόνο μισή ώρα playstation κάθε μέρα. Σε πόσες μέρες θα έχω παίξει 5 ώρες playstation;

Με άριστα το 5, πώς θα βαθμολογούσατε καθένα από τα παραπάνω προβλήματα και γιατί;

<u>Έργο 7</u>

1) Κατά τη διδασκαλία του αλγορίθμου για τη διαίρεση κλασμάτων («αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω»), ένας μαθητής σας λέει: *«Πραγματικά δεν μπορώ καθόλου να καταλάβω τι κάνουμε εδώ και γιατί το κάνουμε».*

Α) Πώς θα αποκρινόσασταν σε αυτόν τον μαθητή;

Β) Ποια είναι η δική σας εξήγηση για τη διαδικασία του αλγορίθμου αυτού;

Γ) Εσείς πώς διατυπώνετε τον αλγόριθμο;

2) Στα βιβλία της Ε’ και Στ’ τάξης αναγράφεται ως εξήγηση του αλγορίθμου ότι «ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις».

Α) Πώς θα εξηγούσατε στους μαθητές σας τι σημαίνει «αντίστροφες πράξεις» για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση

Β) Με βάση το παραπάνω, πώς εξηγείται ο αλγόριθμος «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω;»

Γ) Στη διδασκαλία σας, ασχολείστε με τους αντίστροφους αριθμούς; Πόσο χρόνο αφιερώνετε;