ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Α΄ ΗΛΙΚΙΑΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

<u>ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ</u>

«ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝ ΜΑΘΗΤΕΣ ΕΙΔΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ ΣΤΗΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΚΑΙ Η ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΟΜΗΧΑΝΗΣ»

της **Αριστούλας Ταρπάγκου** (Α.Μ. 1075)

Επιβλέπων Καθηγητής: Λεμονίδης Χαράλαμπος

Εξεταστές Καθηγητές: Αγαλιώτης Ιωάννης

Χρήστου Κωνσταντίνος

Θεσσαλονίκη, 2023

Ευχαριστίες

Η εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας έγινε στο πλαίσιο ολοκλήρωσης των σπουδών μου στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών «Επιστήμες της αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών» με κατεύθυνση τον α' ηλικιακό κύκλο.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ολόψυχα τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Χαράλαμπο Λεμονίδη, για την υπέροχη συνεργασία μας και την καθοδήγηση του καθόλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας, καθώς και για τις πολύτιμες συμβουλές και γνώσεις που μου πρόσφερε. Επίσης, ευχαριστώ θερμά τον κ. Αγαλιώτη Ιωάννη και τον κ. Χρήστου Κωνσταντίνο για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή εξέτασης της εργασίας μου, καθώς και όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος, οι οποίοι με αγάπη για τη Διδακτική των Μαθηματικών μάς προσέφεραν νέες πολύτιμες γνώσεις.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω εκ βαθέων καρδιάς τη διεύθυνση, το διδακτικό προσωπικό και τους μαθητές του Ειδικού Σχολείου του Αγίου Δημητρίου που συμμετείχαν πρόθυμα στην έρευνα και διέθεσαν τον πολύτιμο χρόνο τους. Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένεια και τους φίλους μου για τη συμπαράσταση και τη στήριξή τους.

Περίληψη

Η υπολογιστική εκτίμηση αποτελεί μια από τις κύριες συνιστώσες της αίσθησης του αριθμού και είναι πολύ σημαντική για την υπολογιστική ευχέρεια ενός ατόμου στην καθημερινή του ζωή. Η χρήση στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης είναι ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά αυτής της έννοιας. Τις τελευταίες δεκαετίες έχουν πραγματοποιηθεί αρκετές έρευνες στον χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης που μελετούν τις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης μαθητών και ενηλίκων. Πολύ περιορισμένες είναι, όμως, εκείνες που αφορούν στις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές Ειδικού Σχολείου σε έργα υπολογιστικής εκτίμησης και το βαθμό επίδρασης της αριθμομηχανής. Σκοπός της παρούσας μελέτης είναι να διερευνηθούν, μέσω του τροποποιημένου μοντέλου IHMCES των Lemonidis & Likidis (2019),οι αλλαγές που επιφέρει μια διδακτική παρέμβαση και η δυνατότητα χρήσης της αριθμομηχανής στις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης, στα προφίλ, στην ευελιξία, καθώς και στην προσαρμοστικότητα των μαθητών με αναπηρίες. Τα αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι παρόλο που η παρέμβαση, επέφερε σημαντική βελτίωση στη γνώση των στρατηγικών, ωστόσο δεν βελτίωσε την ευελιξία, την προσαρμοστικότητα, καθώς και τη χρήση στρατηγικών από τα επίπεδα 3 και 4 της ιεραρχικής κατάταξης. Τέλος, η αριθμομηχανή επηρέασε έντονα τους μαθητές κατά την επίλυση προβλημάτων υπολογιστικής εκτίμησης.

Λέξεις – κλειδιά: υπολογιστική εκτίμηση, αριθμομηχανή, στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης, στρατηγικό προφίλ, ευελιξία, προσαρμοστικότητα

Abstract

Computational estimation constitutes one of the major components of the number sense and it is essential for the computational fluency of an individual in his daily routine. The use of computational estimation strategies is one of the basic characteristics of this meaning. During the last few decades several researches have been conducted in the field of mathematical education which study both the adults' and the students' strategies of computational estimation. Very limited, though, are those related to the strategies used by special education school students in projects of computational estimation or the rate of influence of the calculator. The aim of this study is to investigate, through the modified model IHMCES of Lemonidis & Likidis (2019), the changes made by an educational intervention and the ability to use the calculator in the strategies of computational estimation, the profiles, the flexibility and the disabled students' adaptivity. The results demonstrate that although the intervention resulted in a significant improvement in the strategies learning, nevertheless, it didn't improve the flexibility, the adaptivity or even the use of strategies from levels 3 and 4 of the hierarchical rank. Finally, the calculator strongly influenced the students when solving computational estimation problems.

Keywords: computational estimation, calculator, computational estimation strategies, strategic profile, flexibility, adaptivity

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Αντικείμενο και αναγκαιότητα της εργασίας

Η τεχνολογία αποτελεί σημαντικό μέρος της διδασκαλίας και της μάθησης των Μαθηματικών για όλους τους μαθητές και υποστηρίζεται από το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών (Boyle & Kennedy, 2019; NCTM, 2015). Ταυτόχρονα, μπορεί να υποστηρίξει αποτελεσματικά και τους μαθητές με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες στην πρόσβαση στη μαθηματική εκπαίδευση, καθώς και στην αύξηση της εμπλοκής τους (Boyle & Kennedy, 2019; Ok et al., 2019).

Πιο συγκεκριμένα, η αριθμομηχανή είναι ένα κοινό εργαλείο στην καθημερινή ζωή των ανθρώπων, καθώς οι περισσότεροι έχουν πρόσβαση σ' αυτήν ανά πάσα στιγμή, είτε ως λειτουργία στα κινητά τηλέφωνα ή τους υπολογιστές τους είτε ως πραγματική φορητή συσκευή. Συνεπώς, η γνώση της χρήσης της είναι μια από τις βασικότερες δεξιότητες που πρέπει να έχει κανείς στον κόσμο σήμερα.

Στο παρελθόν, η αριθμομηχανή έπαιζε ελάχιστο ρόλο στο πρόγραμμα σπουδών των Δημοτικών Σχολείων. Τοποθετούνταν σε μια ξεχωριστή ενότητα, όπου οι μαθητές τη χρησιμοποιούσαν για να κάνουν μεγάλους υπολογισμούς ή για να ελέγχουν τις απαντήσεις τους. Ωστόσο, το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM, 1989, 2000) στις Ηνωμένες Πολιτείες αναθεώρησε τα αρχικά πρότυπα του προγράμματος σπουδών και υποστήριξε ότι η αριθμομηχανή πρέπει πλέον να ενσωματωθεί σ' αυτό. Ήδη από το 1976, το NCTM πρότεινε ότι «οι καθηγητές μαθηματικών πρέπει να αναγνωρίσουν τη δυνητική συμβολή της αριθμομηχανής ως διδακτικού βοηθήματος» (NCTM,1976).

Τα τελευταία χρόνια συνιστά μια σημαντική διδακτική πρακτική κατά την παρουσίαση νέου μαθηματικού περιεχομένου στη σχολική τάξη και στην εκμάθηση τρόπων επίλυσης προβλημάτων, η οποία δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να εστιάσουν στην κατανόηση της εργασίας τους και στην ανάπτυξη επιχειρηματολογίας σχετικά με τις μεθόδους που αξιοποίησαν και τα αποτελέσματα που εξήγαν.

Σύμφωνα με τον Suydam (1976), η αξία των αριθμομηχανών έχει απαριθμηθεί ως εξής: «βοηθούν την αλγοριθμική διδασκαλία, διευκολύνουν την ανάπτυξη εννοιών, μειώνουν την απαίτηση για απομνημόνευση, διευρύνουν το πεδίο της επίλυσης προβλημάτων, παρέχουν κίνητρα και ενθαρρύνουν την εκτίμηση, την ανακάλυψη, την εξερεύνηση και τη δημιουργικότητα».

Ειδικότερα, η εκτίμηση αποδεικνύεται ως ένας πολύ κομβικός παράγοντας στη μάθηση των Μαθηματικών και η χρήση της είναι απαραίτητη σε μεγάλο βαθμό στην καθημερινή ζωή. Στην πραγματικότητα, οι ενήλικες χρησιμοποιούν την υπολογιστική εκτίμηση περισσότερο από τον ακριβή υπολογισμό (Northcote & McIntosh, 1999).

Έρευνες έχουν αποδείξει ότι η εκτίμηση συνδέεται στενά με βασικές μαθηματικές ικανότητες, όπως με την αίσθηση του αριθμού, την ευελιξία στην χρήση κατάλληλων τεχνικών και την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων. Ακόμη, η εκτίμηση δεν στηρίζεται στην τυφλή εφαρμογή κανόνων και αλγορίθμων συμβάλλοντας έτσι στην ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων και στη καθημερινή ζωή, γεγονός που αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους στόχους της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Επίσης, η σπουδαιότητα της υπολογιστικής εκτίμησης αυξάνεται όλο και περισσότερο μέσα στη σύγχρονη τεχνολογική κοινωνία που ζούμε. Πιο συγκεκριμένα, είναι χρήσιμη ως «έλεγχος λογικής»: για να αξιολογήσει το άτομο γρήγορα αν το αποτέλεσμα που προκύπτει με τη χρήση αριθμομηχανής σε σύγκριση με τον νοερό υπολογισμό είναι λογικό, διότι η ικανότητα εκτίμησης ενός καλού εκτιμητή μπορεί να τον βοηθήσει να αντιληφθεί κάποιο πιθανό λάθος στην πληκτρολόγηση των δεδομένων στα ηλεκτρονικά υπολογιστικά εργαλεία.

Ιδιαίτερα, όπως τονίζει το National Research Council (1989), «*στη σημερινή κοινωνία, αλλαγές στην τεχνολογία καταφέρνουν να αναδείξουν τις ικανότητες στην εκτίμηση πιο σημαντικές από ποτέ στην ανάπτυξη της μαθηματικής δύναμης*» (αναφορά στο Dolma, 2003). Σε συγκλίνουσα κατεύθυνση κινείται και ο Usiskin (1986) (όπως αναφέρει ο Dolma, 2003) που επισημαίνει ότι «…*ακόμα και με τις αριθμομηχανές και τους υπολογιστές να αναλαμβάνουν τη δουλειά των υπολογισμών, η εκτίμηση μπορεί να κάνει τα πράγματα ευκολότερα χωρίς σημαντικό σφάλμα στην ποιότητα των απαντήσεων. Συγκεκριμένα απαντήσεις που προκύπτουν μέσω κατάλληλης εκτίμησης μπορεί να είναι πιο λογικές και πιο ρεαλιστικές από αυτές που επιχειρούν ακρίβεια*».

Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί, παρά την αναμφισβήτητη σημασία της εκτίμησης στα σύγχρονα Μαθηματικά, διδάσκεται πολύ περιορισμένα στο σχολείο τόσο στη γενική αγωγή όσο και στην ειδική αγωγή. Οι περισσότεροι άνθρωποι στηρίζονται σε τεχνικές, τις οποίες έχουν διαμορφώσει μόνοι τους σύμφωνα με το περιβάλλον και τις γνώσεις τους. Έτσι, δεν διαθέτουν μια ευρεία γκάμα στρατηγικών, ώστε να είναι σε θέση να αξιοποιήσουν την κατάλληλη που θα τους φέρει πιο γρήγορα και πιο κοντά στο ακριβές αποτέλεσμα.

Χαρακτηριστικά είναι τα αποτελέσματα των ερευνών των Bana & Dolma, (2004), σύμφωνα με τα οποία οι μαθητές δυσκολεύονται πολύ όταν πρέπει να κάνουν εκτιμήσεις. Αντίθετα, επισημαίνεται ότι οι μαθητές εμφανίζουν συγκριτικά καλύτερες επιδόσεις όταν καλούνται να υπολογίσουν βασιζόμενοι στους αλγορίθμους που διδάσκονται στο σχολείο.

Όμως, είναι απορίας άξιο, δεδομένης της σημασίας της εκτίμησης στην καθημερινή ζωή και της διαθεσιμότητας των αριθμομηχανών στην κοινωνία, το γεγονός ότι υπάρχουν ελάχιστες έρευνες σχετικά με τους μαθητές με ή χωρίς αναπηρίες και τη χρήση αριθμομηχανών τόσο στη διεθνή όσο και στην ελληνική βιβλιογραφία (Maccini & Gagnon, 2005) στο συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο.

Ειδικότερα, η περιορισμένη υπάρχουσα έρευνα σχετικά με τις αριθμομηχανές και τους μαθητές με αναπηρίες τείνει να επικεντρώνεται σε αριθμομηχανές ως διευκολυντές στις αξιολογήσεις, παρά στη διερεύνηση των επιπτώσεών τους στους μαθητές κατά τη χρήση τους σε διάφορα μαθηματικά αντικείμενα, όπως η υπολογιστική εκτίμηση (Bouck, 2009; Bouck & Bouck, 2008; Fuchs, Fuchs, Eaton, Hamlett, & Karns, 2000; Shaftel, Belton - Kocher, Glasnapp, & Poggio, 2003).

Συνεπώς, η εστίαση της προσοχής στην επίδραση της χρήσης των αριθμομηχανών στην ανάπτυξη της υπολογιστικής εκτίμησης σε μαθητές με αναπηρίες είναι απαραίτητη, λόγω της απουσίας τεκμηριωμένης άποψης για την αξία των αριθμομηχανών για τον συγκεκριμένο πληθυσμό, γεγονός που αναδεικνύει την αναγκαιότητα και σπουδαιότητα της παρούσας έρευνας.

1.2 Σκοπός της εργασίας και ερευνητικά ερωτήματα

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να διερευνηθούν, μέσω του τροποποιημένου μοντέλου IHMCES των Lemonidis & Likidis (2019), οι αλλαγές που επιφέρει μια διδακτική παρέμβαση και η δυνατότητα χρήσης της αριθμομηχανής στις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης, στα προφίλ, στην ευελιξία και στην προσαρμοστικότητα των μαθητών με αναπηρίες.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που τίθενται είναι τα εξής:

1. Με βάση το μοντέλο IHMCES ποιες είναι οι στρατηγικές εκτίμησης, το εύρος των στρατηγικών (strategy range), το προφίλ και η ευελιξία των μαθητών πριν τη διδακτική παρέμβαση;
2. Πόσο άλλαξε ή εξελίχθηκε το εύρος των στρατηγικών, το προφίλ και η ευελιξία του κάθε μαθητή μετά την παρέμβαση;
3. Πώς κατηγοριοποιούνται τα προφίλ των μαθητών μετά την παρέμβαση;
4. Κατά πόσο χρησιμοποιούνται οι κατάλληλες στρατηγικές εκτίμησης (προσαρμοστικότητα) πριν και μετά την διδακτική παρέμβαση;
5. Σε τι βαθμό και για ποιο λόγο χρησιμοποίησε ο κάθε μαθητής την αριθμομηχανή στα έργα υπολογιστικής εκτίμησης;

1.3 Δομή της εργασίας

Η εργασία αυτή περιλαμβάνει έξι κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο προβάλλονται το αντικείμενο και η αναγκαιότητα της παρούσας εργασίας, ο σκοπός και τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν και τέλος καταγράφεται η δομή της παρούσας μελέτης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται το σχετικό θεωρητικό υπόβαθρο. Ειδικότερα, στο κεφάλαιο αυτό παρατίθεται το εννοιολογικό περιεχόμενο της εκτίμησης, τονίζεται η σημασία της και υπογραμμίζεται η αναγκαιότητα της διδασκαλίας της. Ακόμη, αναφέρονται συνοπτικά τα είδη της εκτίμησης, εμβαθύνοντας ιδιαίτερα στην υπολογιστική εκτίμηση και παραθέτοντας τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές κατά τη διαδικασία της εκτίμησης. Καταληκτικά, γίνεται μια εννοιολογική αποσαφήνιση των εννοιών της ευελιξίας και της προσαρμοστικότητας στη διαδικασία της εκτίμησης.

Στο τρίτο κεφάλαιο επιχειρείται μια βιβλιογραφική ανασκόπηση των ερευνών που έχουν πραγματοποιηθεί σχετικά με την επίδραση της χρήσης της αριθμομηχανής στην ανάπτυξη της υπολογιστικής εκτίμησης τόσο σε μαθητές τυπικής ανάπτυξης όσο και σε μαθητές με αναπηρίες. Το κεφάλαιο αυτό ολοκληρώνεται με την κριτική αποτίμηση της βιβλιογραφικής ανασκόπησης και την τεκμηρίωση της πρωτοτυπίας της εργασίας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναπτύσσεται η μεθοδολογία της έρευνας, η οποία περιέχει τη μέθοδο της έρευνας, την περιγραφή της ερευνητικής διαδικασίας και της διδακτικής παρέμβασης, το δείγμα, το εργαλείο συλλογής των δεδομένων, και, τέλος την ανάλυση του προτεινόμενου μοντέλου IHMCES.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα, όπως αυτά προέκυψαν από τις απαντήσεις των μαθητών του ειδικού σχολείου σε έργα υπολογιστικής εκτίμησης στις δυο φάσεις αξιολόγησης πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση.

Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο συζητούνται τα σημαντικότερα ευρήματα της εργασίας, διατυπώνονται οι περιορισμοί της, καθώς και προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

2.1 Εισαγωγή

Το δεύτερο κεφάλαιο περιλαμβάνει το θεωρητικό μέρος της εργασίας, στο οποίο επιχειρείται μια βιβλιογραφική επισκόπηση σχετική με τους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς. Αρχικά, παρουσιάζεται το εννοιολογικό περιεχόμενο της εκτίμησης, τονίζεται η σημασία της και υπογραμμίζεται η αναγκαιότητα της διδασκαλίας της. Στη συνέχεια, αναφέρονται συνοπτικά τα είδη της εκτίμησης, εμβαθύνοντας ιδιαίτερα στην υπολογιστική εκτίμηση και παραθέτοντας τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές κατά τη διαδικασία της εκτίμησης. Τέλος, γίνεται μια εννοιολογική αποσαφήνιση των εννοιών της ευελιξίας και της προσαρμοστικότητας στη διαδικασία της εκτίμησης.

2.2. Η έννοια της εκτίμησης

Η εκτίμηση αποτελεί μια διαδικασία υψίστης σημασίας στη καθημερινή ζωή τόσο των παιδιών όσο και των ενηλίκων. Χωρίς τη δυνατότητα παραγωγής μιας λογικής εκτίμησης, η ζωή μας θα ήταν πολύ πιο δύσκολη (Star, Rittle–Johnson, Lynch, & Perova, 2009). Είναι σύνηθες, λοιπόν, φαινόμενο να προβαίνει ένας άνθρωπος σε εκτιμήσεις για καταστάσεις της καθημερινότητας.

Αναλυτικότερα, ο προσδιορισμός του πόσα δημητριακά θα ρίξουμε σε ένα μπολ, η επιλογή του κατάλληλου μεγέθους σακακιού σε ένα κατάστημα ρούχων, η απόφαση για το πόσα χρήματα θα πάρουμε μαζί μας σ' ένα ταξίδι, ο προσδιορισμός του φιλοδωρήματος για ένα γεύμα σ' ένα εστιατόριο, καθώς και η διαπίστωση του κατά πόσον ένα αποτέλεσμα σε μια αριθμομηχανή είναι λογικό είναι παραδείγματα υπολογιστικής εκτίμησης και απαιτούν νοερούς υπολογισμούς ή κρίσεις χωρίς τη βοήθεια αριθμομηχανής ή του χαρτιού και του μολυβιού (Reys & Bestgen, 1981).

Στη βιβλιογραφία, πληθώρα ερευνητών έχει επιχειρήσει να αποσαφηνίσει την έννοια της εκτίμησης τα τελευταία χρόνια. Πιο συγκεκριμένα, το NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) αναφέρεται στην έννοια της εκτίμησης ως έναν κατά προσέγγιση υπολογισμό, επικεντρώνοντας παράλληλα και στη διαδικασία εύρεσης αυτού του υπολογισμού (NCTM, 2006, στο Δεσλή, 2021).

Ακόμη, οι Siegler και Booth (2005) διατύπωσαν τον ορισμό της εκτίμησης, επισημαίνοντας ότι η *«εκτίμηση είναι μία διαδικασία μετάφρασης μεταξύ ξεχωριστών ποσοτικών αναπαραστάσεων, εκ των οποίων η μία τουλάχιστον είναι προσεγγιστική»* (σελ. 198). Παράλληλα, οι Luwel και Verschafel (2008), ενστερνίζοντας την οπτική του Reys (1986), υποστηρίζουν ότι η εκτίμηση είναι μια *«σύνθετη δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος»* (σ. 320), που καταλήγει σε κρίση ή υπολογισμό κατά προσέγγιση, για την οποία απαιτούνται διάφορες δεξιότητες υπολογισμού και μαθηματικές διαδικασίες (Sowder, 1992).

Επιπρόσθετα, οι Segovia & Castro (2009) παρουσιάζουν τη γενική διάσταση της έννοιας της εκτίμησης μέσα από τα παρακάτω γνωρίσματα:

1. Προτείνεται η εκτίμηση της αξίας μιας ποσότητας ή του αποτελέσματος μιας αριθμητικής λειτουργίας.

2. Το υποκείμενο που πραγματοποιεί την αξιολόγηση διαθέτει ορισμένες πληροφορίες, αναφορές ή εμπειρίες σχετικά με την κατάσταση που είναι απαραίτητο να αποτιμηθεί.

3. Η διαδικασία γίνεται με νοερό και γρήγορο τρόπο, κάνοντας χρήση των απλούστερων όσο το δυνατόν αριθμών.

4. Η τιμή που επιτυγχάνεται δεν είναι ακριβής, αλλά αρκετά πλησίον της ακριβούς, ώστε να ληφθούν αποφάσεις.

5. Η επιτευχθείσα τιμή μπορεί να ποικίλλει ανάλογα με το πρόσωπο που εκτελεί την εκτίμηση.

Επιπλέον, ο Λεμονίδης (2013) υποστηρίζει πως η εκτίμηση είναι μία άτυπη μέτρηση που έχει ως βάση τις γνώσεις και την εμπειρία των ατόμων και ενισχύει την ανάπτυξη της σημασίας των αριθμών, των πράξεων και των υπολογιστικών ικανοτήτων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η έννοια της εκτίμησης δεν πρέπει να ταυτίζεται ή συγχέεται με την έννοια της προσέγγισης, καθώς αμφότερες μπορούν να αποδοθούν με τη λέξη «περίπου». Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον Λεμονίδη (2020) η εκτίμηση και η προσέγγιση δεν είναι έννοιες συνώνυμες, αφού η προσέγγιση συνήθως πραγματοποιείται με ένα αλγόριθμο με χαρτί και μολύβι ή μια αριθμομηχανή ή ένα εργαλείο μέτρησης, ενώ η εκτίμηση είναι μία νοερή δραστηριότητα και δεν απαιτείται η χρήση εξωτερικών μέσων υπολογισμού. Ακόμη, η προσέγγιση ξεκινά και τελειώνει με αριθμούς, σε αντίθεση με την εκτίμηση η οποία έχει ως αφετηρία ένα πρόβλημα από τον πραγματικό κόσμο και καταλήγει σε μια μη ακριβή ποσοτική δήλωση. Ωστόσο, η προσέγγιση συχνά αποτελεί συστατικό σε περίπλοκα προβλήματα εκτίμησης.

Τέλος, είναι σημαντικό να διαχωριστεί η έννοια των κατ' εκτίμηση υπολογισμών με την έννοια των νοερών υπολογισμών. Ειδικότερα, σύμφωνα με τον Sowder (1988), (όπως αναφέρεται στο Λεμονίδης, 2013), όταν η διατύπωση ενός νοερού αριθμητικού προβλήματος στοχεύει σε μια ακριβής απάντηση, τότε απαιτείται ένας νοερός υπολογισμός. Αντίθετα, εάν στοχεύει σε μια απάντηση κατά προσέγγιση ή εάν οι αριθμοί έχουν μεγάλο μέγεθος, τότε απαιτείται ένας κατ' εκτίμηση υπολογισμός. Ωστόσο, τόσο οι κατ' εκτίμηση όσο και οι νοεροί υπολογισμοί συμβάλλουν στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού (McIntosh, 2004), με άμεσο επακόλουθο να συνίσταται η διδασκαλία τους από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου.

2.3 Η σπουδαιότητα της εκτίμησης και η αναγκαιότητα της διδασκαλίας της

Η εκτίμηση είναι ένα σημαντικό μαθηματικό περιεχόμενο που ενσωματώνεται σε πολλά ευρωπαϊκά και μη προγράμματα σπουδών, όπως της Αγγλίας, των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής, της Ιαπωνίας κ.α. Ιδιαίτερα, στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα μόλις το 2003 συμπεριλήφθηκε στα αναλυτικά προγράμματα των Μαθηματικών και δόθηκε βαρύτητα στην ανάπτυξη της μετά το σχολικό έτος 2006, όταν χρησιμοποιήθηκαν τα νέα σχολικά βιβλία (Δ.Ε.Π.Π.Σ – Α.Π.Σ. 2003).

Η σπουδαιότητα της εκτίμησης και η αναγκαιότητα της διδασκαλίας της είναι αδιαμφισβήτητη στη σύγχρονη εποχή, αφού είναι αναγκαίο ο άνθρωπος, τόσο σε μικρή ηλικία όσο και στην ενήλικη ζωή του, να έχει ανεπτυγμένη την ικανότητα εκτέλεσης εκτιμήσεων αναφορικά με το μήκος, τη χωρητικότητα, την ποσότητα, καθώς και τον χρόνο χωρίς την αξιοποίηση εξωτερικών εργαλείων (Desli & Giakoumi, 2017; Lemonidis & Kaimakani, 2013; Phares & O'Daffer, 2014).

Αναλυτικότερα, οι Segovia & Castro (2009) διατυπώνουν τέσσερις λόγους σχετικά με την πρακτική χρησιμότητα της εκτίμησης:

I. δεν είναι πάντοτε εφικτό να κατέχουμε τη γνώση της ακριβούς απάντησης π.χ. τον αριθμό των αυτοκινήτων που ταξιδεύουν κάθε Σαββατοκύριακο
II. δεν είναι πάντοτε δυνατό να διατυπώσουμε με ακρίβεια το αποτέλεσμα (π.χ. στην περίπτωση πράξης με έναν περιοδικό δεκαδικό αριθμό)
III. ορισμένες φορές προτιμάται η αριθμητική σαφήνεια (π.χ. είναι πιο κατανοητή η φράση « 150 εκατομμύρια πεσέτες για σχολικό πληθυσμό 63 χιλιάδων μαθητών, αντί για 148.739.426 πεσέτες για σχολικό πληθυσμό 62.879 μαθητών»)
IV. αρκετές φορές μια κατ’ εκτίμηση απάντηση είναι επαρκής και εξίσου χρήσιμη, ώστε να ληφθεί κάποια απόφαση.

Επιπροσθέτως, σύμφωνα με την Δεσλή (2021) τρεις είναι οι κυριότερες αιτίες που αναδεικνύουν τη σημασία της εκτίμησης. Αρχικά, ο πρώτος λόγος είναι η ευχρηστία της εκτίμησης, δηλαδή το πόσο εύκολο και απλό είναι να πραγματοποιήσει κάποιος μια εκτίμηση σε σχέση με την υλοποίηση ενός υπολογισμού με ακρίβεια (Reys & Bestgen, 1981· LeFevre, Greenham, & Waheed, 1993). Δεύτερον, υπάρχει μια ευρεία γκάμα στρατηγικών εκτίμησης που μπορούν να οδηγήσουν σε εκτιμήσεις με μικρότερο ή μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας. Η επίτευξη εγγύτητας στον ακριβή υπολογισμό είναι ανάλογη της χρησιμοποίησης των στρατηγικών εκτίμησης (Reys, Ryblot, Bestgen, & Wyatt, 1982; LeFevre, Greenham, & Waheed, 1993; Levine, 1982). Τρίτον, οι καταστάσεις που κρίνεται αναγκαίο η εφαρμογή εκτιμήσεων ποτέ δεν καταλήγουν σε μόνο μία σωστή απάντηση, αλλά είναι αποδεκτό ένα πεδίο τιμών (Van de Walle et al., 2017).

Παράλληλα, εκτός από τα πρακτικά οφέλη της η εκτίμηση παίζει σπουδαίο ρόλο στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού (Bana & Dolma, 2006; Segovia & Castro, 2009), η οποία συσχετίζεται σε πολύ μεγάλο βαθμό με τη γενική επίδοση των παιδιών στα Μαθηματικά (Yang, Li & Lin, 2008). Όπως χαρακτηριστικά επισημαίνει ο Greeno (1991), η εκτίμηση δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να καλλιεργούν την ικανότητα αναπαράστασης των αριθμών και των πράξεων με πολλούς τρόπους – ιδιότητα που είναι χαρακτηριστικό της αίσθησης του αριθμού –, να αποκτήσουν επαρκέστερη αντίληψη της σημασίας των πράξεων και της αίσθησης του αριθμού, καθώς και να κάνουν χρήση των μαθηματικών διαδικασιών με ευελιξία.

Ακόμη, η εκτίμηση λειτουργεί και ως στρατηγική ελέγχου ή ως μέσο πρόβλεψης, προκειμένου να αξιολογηθεί αν η απάντηση είναι λογική (Siegler & Booth, 2005; Dowker, 2003; Yang, 2019; Ganor - Stern, 2016; Van den Heuvel-Panhuizen, 2001a; Levin, 1981, όπως αναφέρεται στο Δεσλή, 2021). Πιο συγκεκριμένα, ο O' Daffer (2014) επισημαίνει ότι εάν τα παιδιά ενθαρρύνονται να ελέγξουν την ορθότητα ενός αποτελέσματος σε ένα λεκτικό μαθηματικό πρόβλημα εκτιμώντας την απάντηση, τότε αποκτούν μια υψίστης σημασίας τεχνική ελέγχου των απαντήσεων.

Επιπρόσθετα, οι Dehaene et al. (1999) υποστηρίζουν την σπουδαιότητα της εκτίμησης, επειδή παρέχει πληροφορίες για το επίπεδο των μαθηματικών γνώσεων των μαθητών. Ακόμη, τονίζουν ότι υπάρχει στενή σύνδεση της με ποίκιλλες διαστάσεις της μαθηματικής ικανότητας, όπως η αριθμητική δεξιότητα και οι επιδόσεις σε δοκιμασίες, καθώς και με την ανάπτυξη σημαντικών γνωστικών διεργασιών, όπως η μνήμη, η χρήση μαθηματικής γλώσσας και η ταχύτητα επεξεργασίας (Reys et al., 1982).

Ακόμη, σύμφωνα με ευρήματα των Sowder (1984), Bana & Dolma (2004), Alajmi (2009) και Desli & Lioliou (2020), η εκτίμηση συνδέεται στενά με την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων. Ειδικότερα, ο Reys (1986) παραλληλίζει την εκτίμηση με την επίλυση προβλημάτων, γιατί και αυτή χρειάζεται ένα σύνολο δεξιοτήτων και στάσεων, ενώ δύναται να καλλιεργηθεί και να βελτιωθεί στο πέρασμα του χρόνου. Επίσης, ένας καλός εκτιμητής διαλέγει τη στρατηγική του σε συμφωνία με το πλαίσιο του προβλήματος (Lemonidis, Nolka & Nikolantonakis, 2014), αναπτύσσει βαθιά αντίληψη των αριθμών και των πράξεων, κατανοεί τη διαδικασία εκτίμησης και αναγνωρίζει την αξία της (Alajmi, 2009).

Τέλος, η εκτίμηση διαδραματίζει σημαντικό ρόλο και στην ανάπτυξη μεταγνωστικών διαδικασιών, οι οποίες συμβάλλουν στη διαμόρφωση θετικής στάσης απέναντι στην επίλυση προβλημάτων (Δεσλή, 2021). Σύμφωνα με τη Sowder (1992, όπως αναφέρεται στο Δεσλή, 2021), τα άτομα που έχουν υψηλό ποσοστό επιτυχίας στις εκτιμήσεις διακρίνονται από αυτοπεποίθηση, ευελιξία και ανοχή στη διαφορά μεταξύ των εκτιμήσεων τους και των υπολογισμών με ακρίβεια. Επίσης, μπορούν να νοηματοδοτήσουν τα Μαθηματικά στα οποία αφοσιώνονται και ψάχνουν την λογικότητα κατά τον έλεγχο των αποτελεσμάτων των μαθηματικών έργων που συμμετέχουν (Δεσλή, 2021). Συνεπώς, η μεγάλη σημασία που δείχνουν στην εκτίμηση και τον έλεγχο τους δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να διαθέτουν ευρεία γκάμα μεταγνωστικών στρατηγικών.

Όσον αφορά την αναγκαιότητα της διδασκαλίας της, χαρακτηριστική είναι η άποψη του Trafton (1986), ο οποίος επισήμανε ότι *«κορυφαία προτεραιότητα όσων φτιάχνουν τα προγράμματα σπουδών πρέπει να είναι η κατασκευή ενός ισχυρού σκελετού διδασκαλίας της υπολογιστικής εκτίμησης»*.

Ωστόσο, πολύ περιορισμένος είναι ο αριθμός των μαθητών που μπορεί να αποδεχτεί πολλές αριθμητικές τιμές ως έγκυρα αποτελέσματα για το ίδιο πρόβλημα εκτίμησης (Sowder & Wheeler, 1989), γεγονός που πιθανόν μπορεί να ερμηνευθεί από την εστίαση των περισσότερων αναλυτικών προγραμμάτων να λαμβάνουν μία και μοναδική σωστή απάντηση σε ένα υπολογιστικό πρόβλημα. Για αυτό, είναι απαραίτητο οι μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι στη διαδικασία της εκτίμησης δεν υπάρχει μια μόνο σωστή απάντηση, να ξεφύγουν από την εφαρμογή των μαθηματικών διαδικασιών με μηχανικό τρόπο και να προχωρήσουν στην αποτελεσματική υλοποίηση της μαθηματικής γνώσης με ευέλικτους τρόπους (Δεσλή, 2021).

Επίσης, η ικανότητα γρήγορης και σωστής εκτίμησης είναι μια αναγκαία δεξιότητα του ανθρώπου σε μια σύγχρονη μοντέρνα κοινωνία (Lemonidis & Kaimakami, 2013), καθώς αποτελεί πεδίο εφαρμογής σε πολλές καταστάσεις της καθημερινής του ζωή τόσο στα μαθητικά χρόνια όσο και αργότερα ως πολίτες εκτός σχολικού πλαισίου. Πολλές φορές, όταν δεν έχει ο άνθρωπος όλα τα απαραίτητα δεδομένα για να υπολογίσει με ακρίβεια ή όταν οι καταστάσεις στις οποίες εμπλέκεται δεν απαιτούν υπολογισμούς με ακρίβεια, καταφεύγει σε μια εκτίμηση. Συνεπώς, ένας ισχυρός παράγοντας για τον οποίο πρέπει να ενσωματωθεί αποτελεσματικά η διδασκαλία της εκτίμησης στο περιβάλλον του σχολείου αποτελεί η ύπαρξη δυσκολιών που παρουσιάζουν τόσο οι μαθητές όσο και πολλοί ενήλικες κατά τη διαδικασία της στην καθημερινή τους ζωή, γεγονός που αποδεικνύεται από πολλές έρευνες (Bana & Dolma, 2004; Siegler & Booth, 2005; Alajmi, 2009; Lemonidis et al., 2014).

Τέλος, λόγω της αλλαγής νοοτροπίας αναφορικά με την εκτέλεση υπολογισμών που επήλθε με τη συστηματική χρήση των υπολογιστών σε προσωπικό και επαγγελματικό επίπεδο, η αναγκαιότητα της διδασκαλίας της εκτίμησης αυξήθηκε. Αναλυτικότερα, είναι σημαντικό οι μαθητές να αποκτήσουν από μικρή ηλικία την ικανότητα εκτίμησης, για να είναι σε θέση να αντιληφθούν την εγκυρότητα της απάντησης που εξήγε ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής, καθώς και να μπορούν να ελεγχθούν τυχόν σφάλματα κατά την πληκτρολόγηση ή στη σειρά εκτέλεσης των πράξεων (Siegel, Goldsmith, Mason, 1982; Hope, 1986).

Συνοψίζοντας, παρά τα αναγνωρισμένα οφέλη από την έκθεση των μαθητών σε δραστηριότητες εκτίμησης, όπως χαρακτηριστικά διαπίστωσε ο Buchanan (1978),*«η εκτίμηση συνεχίζει να γλιστρά μέσα από τις δομικές ρωγμές των Σχολικών Μαθηματικών»*. Από τα παραπάνω επιβεβαιώνεται η αναγκαιότητα εκπόνησης «*μιας μακροπρόθεσμης στρατηγικής για συνεχή χρήση και εφαρμογή της διαδικασίας της εκτίμησης… που θα εκτείνεται για αρκετά χρόνια στη διδασκαλία των Μαθηματικών»* (Buchanan, 1978).

2.4 Είδη εκτίμησης

Ανάλογα με τις καταστάσεις εκτίμησης, που οι άνθρωποι έρχονται αντιμέτωποι στην καθημερινή τους ζωή, αξιοποιούνται και τα αντίστοιχα είδη εκτίμησης που απαιτούν διαφορετική κατανόηση και αλλιώτικες δεξιότητες και ικανότητες από τον εκτιμητή (Sowder, 1992; Hogan & Brezinski, 2003; Van den Heuvel-Panhuizen, 2001a; Van de Walle et al., 2017, όπως αναφέρεται στο Δεσλή, 2021). Το μοναδικό κοινό τους χαρακτηριστικό είναι ότι καταλήγουν σε μια απάντηση κατά προσέγγιση (Booth & Siegler, 2006).

Από την υπάρχουσα βιβλιογραφία προκύπτουν τέσσερα βασικά είδη της εκτίμησης: α) Η εκτίμηση σε αριθμογραμμή (number line estimation) β) Η εκτίμηση μέτρησης (estimating measures) γ) Η εκτίμηση πλήθους (estimating numerosity) δ) Η υπολογιστική εκτίμηση (computational estimation) (Segovia & Castro, 2009; Λεμονίδης, 2020)

Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον Λεμονίδη (2020) με τον όρο εκτίμηση σε αριθμογραμμή εννοείται *«η ερμηνεία ενός αριθμού πάνω σε μια αριθμογραμμή ή η αντιστοίχιση ενός σημείου του χώρου της αριθμογραμμής σε έναν αριθμό»*. Ακόμη, η εκτίμηση μέτρησης αναφέρεται στον προσδιορισμό της μέτρησης κατά προσέγγιση *«ενός χαρακτηριστικού σε ένα αντικείμενο ή μια κατάσταση, όπως είναι το μήκος, το βάρος, ο όγκος και ο χρόνος, χωρίς τη χρήση συγκεκριμένων τυπικών οργάνων μέτρησης»* (Δεσλή, 2021).

Επιπλέον, η εκτίμηση πλήθους σχετίζεται με τον υπολογισμό κατά προσέγγιση αντικειμένων ενός συνόλου χωρίς καταμέτρηση με ακρίβεια (Hogan & Brezinki, 2003), όπως ο αριθμός των μπισκότων σε ένα βάζο, ο αριθμός των φιλάθλων σε ένα γήπεδο ή ο αριθμός των κουκίδων σε μια σελίδα. Τέλος, η υπολογιστική εκτίμηση ορίζεται ως *«η εύρεση μιας κατά προσέγγιση απάντησης σε ένα αριθμητικό πρόβλημα ή πράξη χωρίς να γίνει υπολογισμός της ακριβούς απάντησης »* (Sowder, 1992, όπως αναφέρεται στο Tsao & Pan, 2013). Η υπολογιστική εκτίμηση έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα χρήσης στη καθημερινή ζωή των ανθρώπων (Lemonidis & Likidis, 2019) και σ’ αυτή θα εμβαθύνουμε στη παρούσα εργασία.

Τέλος, οι Siegler και Booth (2005) ταξινομούν τις εκτιμήσεις σε μη αριθμητικές και αριθμητικές. Ειδικότερα, στις μη αριθμητικές εκτιμήσεις γίνεται η μετάφραση από ένα μη αριθμητικό μέγεθος σ’ ένα άλλο μη αριθμητικό, όπως η φωτεινότητας μιας λάμπας, η χωροταξία μιας περιοχής. Αντίθετα, στις αριθμητικές εκτιμήσεις, στη μία ή και στις δύο πλευρές της μετάφρασης περιλαμβάνονται αριθμοί, όπως η εκτίμηση μέτρησης, η εκτίμηση πλήθους και η υπολογιστική εκτίμηση.

2.4.1 Υπολογιστική Εκτίμηση

Η εκτίμηση ενός υπολογισμού αναφέρεται στον προσεγγιστικό καθορισμό του αποτελέσματος ενός αριθμητικού υπολογισμού που δεν δύναται ή δεν μας ενδιαφέρει να πράξουμε με ακρίβεια (Δεσλή, 2021).

Διαθέτει τέσσερα διακριτά γνωρίσματα (Reys, 1984):

1) Πραγματοποιείται με το μυαλό, χωρίς τη χρήση χαρτιού και μολυβιού.
2) Εκτελείται με μεγάλη ταχύτητα.
3) Παράγει απαντήσεις, οι οποίες δεν είναι ακριβείς, αλλά είναι επαρκείς για να ληφθούν αποφάσεις.
4) Αντανακλά τις περισσότερες φορές μεμονωμένες προσεγγίσεις και εξάγει ποικιλία αριθμητικών τιμών ως εκτιμήσεις - απαντήσεις.

Επίσης, εφαρμόζεται σε καταστάσεις που απαντούν στην ερώτηση «Πόσο περίπου κάνει το…;» όπως, για παράδειγμα, όταν θέλουμε να υπολογίσουμε κατά προσέγγιση νοερά το γινόμενο 21 × 8 ή το άθροισμα 4.578 + 3.547 + 1.936 (Δεσλή, 2021). Όσον αφορά τον τύπο των προβλημάτων που μπορεί να ζητηθεί, η Sowder (1992) τονίζει ότι «*Ο πιο συνηθισμένος τύπος προβλήματος υπολογιστικής εκτίμησης απαιτεί την εκτίμηση του αποτελέσματος ενός υπολογισμού με την παράλληλη εκτέλεση κάποιου νοερού υπολογισμού που βασίστηκε σε προσεγγίσεις των αρχικών αριθμών. Για να είναι σωστή η απάντηση θα πρέπει να εμπίπτει σε ένα καθορισμένο διάστημα το οποίο καθορίζεται είτε από το ίδιο το πρόβλημα είτε από μια εξωτερική πηγή όπως είναι ο εκπαιδευτικός*».

Επιπρόσθετα, οι Sowder & Wheeler (1989), όπως αναφέρεται στο Siegler & Booth (2005), επισήμαναν τη συμβολή πολλών παραγόντων στην εκτέλεση μιας αποτελεσματικής υπολογιστικής εκτίμησης από ένα άτομο. Πιο συγκεκριμένα, είναι απαραίτητοι διάφοροι τύποι εννοιολογικής κατανόησης: α) ο σκοπός της εκτίμησης είναι η παραγωγή λογικών απαντήσεων σε κοντινή απόσταση με την ακριβή, β) απαιτείται η χρήση προσεγγιστικών αριθμών για την επίτευξη του συγκεκριμένου σκοπού, γ) η εκτίμηση μπορεί να συνεπάγεται πολλαπλές έγκυρες προσεγγίσεις και πολλαπλές λογικές απαντήσεις, δ) το παραπάνω πλαίσιο προσδιορίζει την επάρκεια των αποκρίσεων (Siegler & Booth, 2005).

Τέλος, η υπολογιστική εκτίμηση αποτελεί ένα σπουδαίο συστατικό της μαθηματικής γνώσης και της καλλιέργειας του αριθμητικού γραμματισμού του ατόμου (Lemaire, 2000), επειδή δίνει πληροφορίες αναφορικά με τη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και των στρατηγικών. Παράλληλα, οι Heirdsfield & Cooper (2004) θεωρούν ότι η υπολογιστική εκτίμηση εξαρτάται από την ανάπτυξη νοερών υπολογισμών και συνιστά σημαντικό δείκτη της αίσθησης του αριθμού. Σε μελέτη των ίδιων ερευνητών εξήχθη το συμπέρασμα ότι τα παιδιά που διέθεταν ευελιξία στον νοερό υπολογισμό, είχαν ακόμη ανεπτυγμένη ικανότητα και στην υπολογιστική εκτίμηση, ενώ τα παιδιά που δεν ήταν ευέλικτα, εμφάνιζαν σημαντικά ελλείμματα και στην ικανότητα εκτίμησης των αποτελεσμάτων.

2.4.2 Στρατηγικές Εκτίμησης

Οι στρατηγικές που εφαρμόζουν τα παιδιά κατά τη λύση προβλημάτων υπολογιστικής εκτίμησης είναι φανερό ότι διαφέρουν ως προς τη συχνότητα χρήσης τους και την αποτελεσματικότητά τους, η οποία εμφανίζει βελτίωση στο πέρασμα του χρόνου (Lemaire & Lecacheur, 2002). Όσο τα παιδιά μεγαλώνουν, επιλέγουν τεχνικές που τους δίνουν τη δυνατότητα να κινούνται με ταχύτητα και να παραθέτουν αποκρίσεις πιο κοντά στις ακριβείς.

Το 1982, οι Reys et al. πρότειναν μια γενική ταξινόμηση των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης σύμφωνα με τα διάφορα επίπεδα γενίκευσης τους σε τρεις ομάδες: (α) ανασύνθεση (reformulation): πρόκειται για στρατηγική μετατροπής των αριθμητικών δεδομένων σε μορφή που μπορούν να διαχειριστούν πιο εύκολα νοερά (για παράδειγμα στρογγυλοποιώντας τους όρους στην πλησιέστερη δεκάδα), (β) μετάφραση (translation): για την περίπτωση μεταβολής της μαθηματικής δομής του προβλήματος σε μορφή που θα είναι υπολογιστικά πιο βολική και (γ) αντιστάθμιση (compensation): πραγματοποιείται όταν κάποιος επανέρχεται και διορθώνει το αποτέλεσμα της αρχικής εκτίμησης.

Έπειτα, οι Segovia et al., (1989) δημιούργησαν ένα διάγραμμα στο οποίο παρουσιάζουν συνοπτικά τις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης που προσδιορίστηκαν στο έργο των Reys et al. (1982). Συγκεκριμένα, αυτό το διάγραμμα προέβαλε_ένα μοντέλο για την περιγραφή των συγκεκριμένων στρατηγικών, οι οποίες συνδέονται με δεξιότητες προσέγγισης, αλγορίθμους νοερού υπολογισμού, γνωστικές και μεταγνωστικές διαδικασίες. Ακόμη, ταξινόμησαν τις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης σε τρία επίπεδα. Ειδικότερα, στο πρώτο επίπεδο τοποθετήθηκαν οι στρατηγικές ανασύνθεσης, στο δεύτερο επίπεδο οι στρατηγικές μετάφρασης και στο τρίτο επίπεδο οι στρατηγικές αντιστάθμισης. Τέλος, σύμφωνα με το συγκεκριμένο μοντέλο, οι στρατηγικές αντιστάθμισης μπορούν να συνδυαστούν με τις στρατηγικές ανασύνθεσης και μετάφρασης (Λεμονίδης, 2020).

Ακόμη, οι Castro & Castro (2002), βασιζόμενοι στο μοντέλο των Segovia et al., (1989), στην ομάδα των στρατηγικών αναδόμησης ενσωμάτωσαν τις στρατηγικές της στρογγυλοποίησης, της περικοπής, της ανασύνθεσης και της αλλαγής της μορφής του αριθμού. Παράλληλα, στην ομάδα των στρατηγικών της μετάφρασης ενσωμάτωσαν τις στρατηγικές του μέσου όρου και των σημείων αναφοράς. Τέλος, στην ομάδα των στρατηγικών της αντιστάθμισης διαχώρισαν την τελική και την ενδιάμεση αντιστάθμιση.

Ωστόσο, η Dowker (2003) τόνισε ότι αυτές οι 3 κατηγορίες δεν επαρκούν για τον ορισμό και την περιγραφή των «βασικών συστατικών της εκτίμησης» (Dowker, 2003, p.256) και είναι πολύ γενικοί, γεγονός το οποίο καθιστά δύσκολη τη δουλειά των μαθητών και των δασκάλων.

Μέσα από μια ανασκόπηση της βιβλιογραφίας (Reys et al., 1982; Sowder & Wheeler, 1989; Reys et al., 1991b; Dowker, 1992; LeFevre et al., 1993, Λεμονίδης, 2013, 2020), οι κυριότερες στρατηγικές που αξιοποιούνται στους υπολογισμούς κατ΄ εκτίμηση παρουσιάζονται αναλυτικά παρακάτω. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι στρατηγικές αυτές εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τις πράξεις που δίνονται στην εκτίμηση. Επίσης, αρκετές φορές διαφέρουν οι ονομασίες των στρατηγικών που τους αποδίδουν οι διάφοροι συγγραφείς –ερευνητές.

1. Διαίσθηση (intuition): στρατηγική που χρησιμοποιείται κυρίως από πιο νέους και άπειρους εκτιμητές και μπορεί να ενισχύσει την πεποίθηση ότι οι κατά προσέγγιση απαντήσεις δύναται να είναι πολύτιμες. Για παράδειγμα, ένας μαθητής μπορεί να απαντήσει ότι ο μέσος όρος των 3, 5, 8 και 10 είναι περίπου 6, αλλά δεν μπορεί να εξηγήσει την συλλογιστική πορεία που ακολούθησε (Λεμονίδης, 2020).

2. Στρογγυλοποίηση (rounding), όπου το 1 ή και τα 2 μέλη μετατρέπονται στον κοντινότερο αριθμό, ο οποίος τελειώνει σε ένα ή περισσότερα μηδενικά (π.χ. 378 + 827 μπορούν να υπολογιστούν περίπου στο 1200). Μπορεί να ακολουθήσει και η προσαρμογή της εκτίμησης, αν είναι απαραίτητη μεγαλύτερη ακρίβεια (Λεμονίδης, 2020). Μπορούμε να διακρίνουμε δυο τύπους στρογγυλοποίησης:

i. **Στρογγυλοποίηση με τη χρήση του κανόνα**: διαδικασία που βασίζεται στον γνωστό μαθηματικό κανόνα. Πιο συγκεκριμένα, καθορίζουμε τη θέση του ψηφίου στην οποία θέλουμε να στρογγυλοποιήσουμε και αν το ψηφίο που βρίσκεται στα δεξιά είναι 0, 1, 2, 3 ή 4 τότε αντικαθιστούμε το ψηφίο στρογγυλοποίησης καθώς και όλα όσα ακόμη βρίσκονται στα δεξιά του με μηδενικά, ενώ αν το ψηφίο που βρίσκεται στα δεξιά είναι 5, 6, 7, 8 ή 9 τότε αυξάνουμε το ψηφίο στο οποίο θέλουμε να κάνουμε στρογγυλοποίηση κατά μία μονάδα και μετά αντικαθιστούμε τα ψηφία στα δεξιά του με μηδενικά.

ii. **Στρογγυλοποίηση χωρίς τη χρήση του κανόνα**: Στην περίπτωση αυτή λαμβάνεται υπόψη το πλαίσιο του αριθμητικού προβλήματος και μια συγκεκριμένη κατάσταση υπολογισμού. Δεν είναι απαραίτητη ούτε επιθυμητή η προσκόλληση στον κανόνα της στρογγυλοποίησης. Αντιθέτως, η διαδικασία πρέπει να διακρίνεται από ευελιξία και να πραγματοποιείται με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, ώστε να διευκολυνθεί ο νοερός υπολογισμός. Για παράδειγμα, για το γινόμενο 45 x 33 οι στρογγυλοποιήσεις 40 x 30, 50 x 30 ή 50 x 33 είναι όλες δεκτές. (Λεμονίδης, 2020)

3. Στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου (front – end strategy): Εφαρμόζεται κυρίως στην πρόσθεση, παρόλο που έχει χρησιμότητα και στις τέσσερις πράξεις. Μπορεί να πραγματοποιηθεί σε δυο βήματα. Αναλυτικότερα, εστιάζει αρχικά στο αριστερό άκρο των αριθμών, αφήνοντας το υπόλοιπο π.χ. 6,3 + 2,4 + 5,7. Υπολογίζεται στο περίπου: 6 + 2 + 5 = 13 . Στη συνέχεια, γίνεται μια ρύθμιση, υπολογίζοντας το άθροισμα των υπολοίπων: 0,3 + 0,4 + 0,7 = 1,4. Άρα στο σύνολο γίνεται: 13 + 1,4 = 14,4.

4. Περικοπή (truncating): Η στρατηγική αυτή έχει ως βάση το σχετικό μέγεθος των αριθμών και τη θεσιακή αξία του πρώτου ψηφίου. Στον αριθμό που περικόπτεται, το πρώτο ψηφίο ή ψηφία με τη μεγαλύτερη θεσιακή αξία παραμένει το ίδιο και μετατρέπονται τα υπόλοιπα ψηφία σε 0 π.χ. στο άθροισμα 358 + 767 μετατρέπονται σε 360 ο ένας και 770 ο δεύτερος αριθμός για να βρεθεί το τελικό αποτέλεσμα.

5. Συσσώρευση (clustering) / Μέσος όρος (averaging): Εφαρμόζεται κατά κύριο λόγο στην πρόσθεση πολλών αριθμών. Χρησιμοποιείται όταν μια πληθώρα αριθμών βρίσκεται γύρω από μία συγκεκριμένη αριθμητική τιμή π.χ. στο άθροισμα 23 + 18+ 19 + 22, υπολογίζεται ως 4 x 20.

6. Αντιστάθμιση: Μπορούμε να διακρίνουμε δυο τύπους αντιστάθμισης, την προγενέστερη και τη μεταγενέστερη αντιστάθμιση.

i) Προγενέστερη αντιστάθμιση (prior compensation): Στρογγυλοποιείται ο δεύτερος όρος αντίθετα από τον πρώτο, πριν πραγματοποιηθεί οποιαδήποτε πράξη, π.χ. $54 \times 67 \simeq 60 \times 60$.

ii) Μεταγενέστερη αντιστάθμιση (post compensation). Είναι μια διαδικασία που διεκπεραιώνεται μετά τη χρήση μιας στρατηγικής υπολογιστικής εκτίμησης για να διορθώσει την αρχική εκτίμηση, όταν επιθυμείται μεγαλύτερη ακρίβεια. Συναντάται επίσης στη βιβλιογραφία και ως στρατηγική προσαρμογής (Reys, 1984). Για παράδειγμα, στο $57 \times 56 \simeq 60 \times 60 = 3.600$ αφαιρούμε το $3 \times 60 = 180$ και $4 \times 60 = 240$, δηλαδή αφαιρούμε περίπου 400 από το 3.600 και βρίσκουμε 3.200.

7. Στρατηγική συμβατών αριθμών (compatible numbers strategy): Εδώ χρησιμοποιούνται αριθμοί που διευκολύνουν την εύρεση αποτελέσματος και δίνουν μια καλή εκτίμηση του αρχικού προβλήματος, π..χ. στο άθροισμα 35 + 46 + 60 + 71 $\rightarrow 35 + 71 \simeq 100$, $46 + 60 \simeq 100$. Το άθροισμα, λοιπόν, είναι περίπου 200. Αυτά τα ζεύγη των αριθμών είναι «συμβατά».

8. Στρατηγική ειδικών αριθμών (special numbers strategy): Σε πολλές περιπτώσεις, οι μαθητές εκπαιδεύονται να ξεχωρίζουν τους αριθμούς που είναι κοντά σε ειδικές τιμές, όπως 0, ½ και 1, ώστε να διευκολυνθούν στην εύρεση του αποτελέσματος.

9. **Ανασύνθεση ή αντικατάσταση (reformulation or substitution):** Αλλάζει η μορφή είτε του ενός είτε του άλλου αριθμού, για να γίνει πιο εύκολα ο υπολογισμός, π.χ. 0,52 x 0,35 μπορεί να γίνει ½ x 1/3)

10. Παραγοντοποίηση (factorization): Αναλύονται οι αριθμοί σε απλούστερη μορφή, π.χ. 128 x 152 γίνεται 130 x 10x 15.

11. Επιμεριστικότητα (distributivity): Γίνεται χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας, π.χ. 38 x 91 μπορούμε να έχουμε (38 x 100) – (38 x 10) = 3800 - 380≃ 3.400.

12. Με αλγόριθμο (proceeding algorithmically): Χρησιμοποιείται κάποιος συγκεκριμένος αλγόριθμος για να εξαχθεί αποτέλεσμα στο περίπου και μετά να υπολογιστεί η απάντηση.

13. Εύρος (range): Στρατηγική κατά την οποία υπολογίζεται το εύρος μέσα στο οποίο αναμένεται να βρίσκεται η ακριβής απάντηση. Για παράδειγμα, το αποτέλεσμα του γινομένου 3,6 x 11 αναμένεται να βρίσκεται μεταξύ των 33 και 44, με κατώτατο όριο το 3 x 11 = 33 και ανώτατο το 4 x 11 = 44.

Τέλος, η στρατηγική με την υψηλότερη συχνότητα χρήσης είναι η στρογγυλοποίηση, η οποία βέβαια είναι η μοναδική που βασίζεται σε μαθηματικό κανόνα και αναφέρεται στα σχολικά εγχειρίδια (Levine, 1982), με άμεσο αποτέλεσμα οι μαθητές ή οι ενήλικες να έρχονται σε επαφή κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο σχολείο. Αντίθετα η στρατηγική με τη χαμηλότερη συχνότητα χρήσης είναι η αντιστάθμιση (Lemaire et al., 2002; Lefevre et al., 1993; Reys et al., 1982 , 1991a). Χαρακτηριστικά είναι τα ευρήματα της μελέτης των Lemaire et al. (2000), όπου οι μαθητές της 5ης τάξης χρησιμοποίησαν την στρατηγική της στρογγυλοποίησης για να επιλύσουν έργα υπολογιστικής εκτίμησης με πολυψήφιους αριθμούς σε ποσοστό 64%, ενώ την αντιστάθμιση σε ποσοστό μόνο 2%.

2.5 Ευελιξία

Το να διαθέτει κάποιος ευελιξία σημαίνει να γνωρίζει ένα πλήθος τρόπων για να λύσει ένα πρόβλημα, καθώς και να έχει την ικανότητα εφαρμογής αυτών των μεθόδων σε ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων. Η έννοια της μαθηματικής ευελιξίας (flexibility) είναι ένα διαδεδομένο αντικείμενο έρευνας παγκοσμίως. Οι διαφορετικοί όροι, οι οποίοι έχουν χρησιμοποιηθεί σε έρευνες, είναι η προσαρμοστικότητα (adaptivity) (Siegler & Lemaire, 1997), η ευελιξία στη χρήση στρατηγικών (strategic flexibility) και η ευχέρεια (fluency). Στην παρούσα μελέτη θα διαχωριστούν οι έννοιες της ευελιξίας και της προσαρμοστικότητας.

Αναφορικά με τη μελέτη της ικανότητας της ευελιξίας, κατά τους Star et al. (2006) παρουσιάζονται πολλά προβλήματα λόγω: α) της ύπαρξης πολλαπλών στρατηγικών επίλυσης, β) της μη ύπαρξης σημαντικών διαφορών ανάμεσα στις ιδιότητες των πολλαπλών στρατηγικών, γ) της αξιολόγησης της επιλογής της στρατηγικής αν είναι η κατάλληλη, δ) της εφαρμογή της ευελιξίας σε περιπτώσεις που είναι πιθανή η ύπαρξη στρατηγικής. Γι' αυτό το λόγο η ευελιξία είναι αναγκαίο να προσδιορίζεται σύνθετα.

Ειδικότερα, οι Verschaffel et al. (2009) διατυπώνουν τρία διαφορετικά είδη μεταβλητών που επηρεάζουν και προσδιορίζουν την ευελιξία (Λεμονίδης, 2016): α) μεταβλητές της κατάστασης ή τα χαρακτηριστικά του προβλήματος (δηλαδή η φύση των αριθμών στο πρόβλημα, το είδος της πράξης του προβλήματος), β) μεταβλητές του υποκειμένου ή ταχύτητα και αποτελεσματικότητα (δηλαδή με πόση ακρίβεια και πόσο γρήγορα δύναται να κάνουν εκτέλεση των στρατηγικών για το συγκεκριμένο πρόβλημα, με δεδομένο την ηλικία, τις προσωπικές γνώσεις και τις δεξιότητές τους για την εφαρμογή αυτών των στρατηγικών), γ) μεταβλητές του πλαισίου (μεταβλητές που σχετίζονται με το κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο).

Επιχειρώντας τον ορισμό της έννοιας της ευελιξίας. σύμφωνα με το NTCM Principle and Standards of School Mathematics (2000), η ευελιξία έχει σχέση με τη χρήση ποικίλων τρόπων για την επίλυση προβλημάτων, την εύρεση της πλέον ενδεδειγμένης μεθόδου, καθώς και την αξιοποίηση της προϋπάρχουσας γνώσης που διαθέτει ένα άτομο για την αντιμετώπιση ενός νέου προβλήματος.

Ακόμη, ο Threlfall (2000) ορίζει την ικανότητα του ατόμου να επιλύσει ένα πρόβλημα με την αξιοποίηση διαφόρων στρατηγικών που ταιριάζουν σε αυτό ως ευελιξία, ενώ ο Λεμονίδης (2020) ως ευελιξία (flexibility) επισημαίνει τη «*δυνατότητα του ατόμου να κινείται μεταξύ διαφορετικών στρατηγικών και να τις εναλλάσσει»*.

Τέλος, η ευελιξία είναι μια έννοια που συνδέεται στενά με την έννοια της εκτίμησης. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τους Lemonidis & Likidis (2019) οι διαφορετικές στρατηγικές που κάνει χρήση ένα άτομο είναι κομβικός παράγοντας καθορισμού της ποιότητας της υπολογιστικής εκτίμησης και της αίσθησης του αριθμού. Τα άτομα που κρίνονται επιτυχημένα στην υπολογιστική εκτίμηση χαρακτηρίζονται συνήθως ως ευέλικτα και γεμάτα αυτοπεποίθηση, διαθέτουν ανοχή ως προς τα λάθη και ψάχνουν τη λογικότητα του αποτελέσματος (Sowder, 1984).

Συνοψίζοντας, όπως αναφέρει η Sowder (1992) *«οι καλοί εκτιμητές είναι ευέλικτοι στον τρόπο σκέψης τους και χρησιμοποιούν μία ποικιλία από στρατηγικές. Επιδεικνύουν μία βαθιά κατανόηση των αριθμών και των πράξεων και διαρκώς εμπνέονται από αυτή την κατανόηση»*

2.6. Προσαρμοστικότητα

Αρχικά, αξίζει να σημειωθεί ότι ορισμένοι συγγραφείς διακρίνουν τους όρους ευελιξία και προσαρμοστικότητα (π.χ. Baroody, 2003; Feltovich, Spiro & Coulson, 1997; Selter, 2009), ενώ άλλοι συγγραφείς θεωρούν τους όρους ευελιξία και προσαρμοστικότητα ως συνώνυμους (π.χ. Heinze, Star & Verschaffel, 2009; Verschaffel, Luwel, Torbeyns, &Van Dooren, 2009).

Ειδικότερα, οι συγγραφείς που διακρίνουν τους δύο όρους θεωρούν την ευελιξία ως την ικανότητα των ατόμων να μετακινούνται μεταξύ διαφορετικών στρατηγικών και να εναλλάσσονται. Αντίθετα, χαρακτηρίζουν την προσαρμοστικότητα ως την ικανότητα ενός ατόμου να χρησιμοποιεί την καταλληλότερη στρατηγική που γνωρίζει, εστιάζοντας στην ταχύτητα και την ακρίβεια της απάντησης. Συνεπώς, όσον αφορά τη δυαδικότητα των όρων ευελιξία/προσαρμοστικότητα, η χρήση πολλαπλών στρατηγικών αποδίδεται στην ευελιξία, ενώ η επιλογή των κατάλληλων στρατηγικών αποδίδεται στην προσαρμοστικότητα.

Αντίθετα, οι συγγραφείς που ταυτίζουν τους όρους, όπως ο Rezat (2011), επισημαίνουν ότι *«η προσαρμοστικότητα σημαίνει ευελιξία»* αφού για να κάνει το άτομο χρήση της κατάλληλης στρατηγικής πρέπει πρωτίστως να κατέχει ένα ευρύ φάσμα στρατηγικών. Ακόμη, οι Verschaffel et al. (2009) χαρακτηρίζουν την ευελιξία ως απότοκο της «λογικής» επιλογής στρατηγικών ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του προβλήματος που πρέπει το άτομο να λύσει κι έτσι προτείνουν ένα πιο λειτουργικό όρο την «προσαρμοστική - ευέλικτη» επιλογή μιας στρατηγικής, εννοώντας τη *«συνειδητή ή ασυνείδητη επιλογή και αξιοποίηση της πλέον ενδεδειγμένης στρατηγικής λύσης σε μια δεδομένη μαθηματική κατάσταση ή πρόβλημα, για ένα δεδομένο άτομο, σε ένα δεδομένο κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο».*

Τέλος, σύμφωνα με τους Siegler & Booth (2005) οι άνθρωποι διαλέγουν στρατηγικές και αναπαραστάσεις με προσαρμοστικό τρόπο, δηλαδή προσαρμόζουν τις επιλογές τους στα χαρακτηριστικά κάθε προβλήματος με τρόπους που θα συμβάλλουν στην παραγωγή γρήγορων και περισσότερων ακριβών αποτελεσμάτων, σε αντίθεση με την παραγωγή αυτών από τυχαία επιλογή μεταξύ όλων των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης που έχουν γνώση. Ιδιαίτερα, στην υπολογιστική εκτίμηση η προσαρμοστικότητα του ατόμου και η αξιολόγηση του αποτελέσματος αποτελούν μέσα αυτοελέγχου, διαδικασία που αποτελεί μεταγνωστική ικανότητα κατά τον De Castro (2002).

Συνοψίζοντας, για τον De Castro (2002) ένας καλός εκτιμητής δεν πρέπει να διαθέτει μόνο ευελιξία, αλλά έχει την ικανότητα να επιλέξει την κατάλληλη στρατηγική για το έργο υπολογιστικής εκτίμησης που τίθεται για επίλυση, καθώς και να αξιολογήσει το αποτέλεσμα εξετάζοντας τη λογικότητα του.

Στη μελέτη μας, αποδεχόμαστε τους ορισμούς που παρουσιάστηκαν προηγουμένως και εξετάζουμε αυτές τις ιδιότητες ξεχωριστά για να συγκρίνουμε την ευελιξία και την προσαρμοστικότητα που επιδεικνύουν οι μαθητές του ειδικού σχολείου κατά τη χρήση στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΧΡΗΣΗ ΑΡΙΘΜΟΜΗΧΑΝΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΚΤΙΜΗΣΗ

3.1Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό επιχειρείται μια παρουσίαση ερευνών με επίκεντρο την επίδραση της χρήσης των αριθμομηχανών στην ανάπτυξη της υπολογιστικής εκτίμησης. Συγκεκριμένα, στη πρώτη υποενότητα γίνεται μια βιβλιογραφική ανασκόπηση ερευνών για την επίδραση της χρήσης των αριθμομηχανών στην ανάπτυξη της υπολογιστικής εκτίμησης τόσο σε μαθητές τυπικής ανάπτυξης όσο και σε μαθητές με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες. Μετά την καταγραφή των ερευνών διατυπώνεται μια κριτική αποτίμηση αυτών, ώστε να αποδειχθεί η πρωτοτυπία της παρούσας ερευνητικής πρότασης .

Αξίζει να σημειωθεί ότι η εκτίμηση είναι μια πρακτική δεξιότητα που χρησιμοποιείται στην καθημερινή ζωή, όπως για παράδειγμα για να αποφασίσει κανείς πόσο φιλοδώρημα θα δώσει για ένα γεύμα σε ένα εστιατόριο. Συνεπώς, η ευρεία χρήση των τεχνολογιών για τον υπολογισμό αυξάνει την ανάγκη για καλλιέργεια δεξιοτήτων υπολογιστικής εκτίμησης. Τα σφάλματα πληκτρολόγησης μπορούν να επηρεάσουν το αποτέλεσμα που εμφανίζεται από τις αριθμομηχανές. Ως εκ τούτου, οι χρήστες πρέπει να είναι σε θέση να προσδιορίζουν το εύλογο της απάντησης (Alajm, 2009).

3.2 Ανασκόπηση ερευνών για την επίδραση της χρήσης της αριθμομηχανής στην ανάπτυξη της υπολογιστικής εκτίμησης τόσο σε μαθητές τυπικής ανάπτυξης όσο και σε μαθητές με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες

Στη σύγχρονη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι αναγκαίο να υπάρχει ισορροπία ανάμεσα στην κατάλληλη χρήση χαρτιού και μολυβιού και της αριθμομηχανής σε τακτική βάση (Waits & Demana, 2001). Όπως χαρακτηριστικά αναφέρεται από την Koay (2006) οι αριθμομηχανές δεν προορίζονται να αντικαταστήσουν τους υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, αλλά το χαρτί, το μολύβι και οι αριθμομηχανές μπορούν να αλληλοσυμπληρώνονται.

Είναι σημαντικό να γνωρίζουν οι μαθητές πώς να εκτιμούν μια απάντηση πριν κάνουν έναν υπολογισμό χρησιμοποιώντας είτε αριθμομηχανή είτε χαρτί και μολύβι, να έχουν επαρκής αίσθηση των αριθμών για να αναγνωρίζουν πότε οι απαντήσεις είναι σωστές, να γνωρίζουν μεθόδους ελέγχου των απαντήσεων χωρίς να επαναλαμβάνουν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας είτε αριθμομηχανή είτε χαρτί και μολύβι και, τέλος, να κατανοούν τουλάχιστον σε διαισθητικό επίπεδο γιατί οι διαδικασίες λειτουργούν και πότε εφαρμόζονται (Waits & Demana, 2001)

Ωστόσο, τα ερευνητικά ευρήματα σχετικά με την επίδραση της αριθμομηχανής στην ανάπτυξη της υπολογιστικής εκτίμησης τόσο σε μαθητές τυπικής ανάπτυξης όσο και σε μαθητές με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες είναι μικτά. Αναδεικνύεται μια διαμάχη ανάμεσα στους ερευνητές που πιστεύουν ότι η χρήση της αριθμομηχανής επηρεάζει θετικά την καλλιέργεια της ικανότητας εκτίμησης των μαθητών, εναντίον εκείνων που υποστηρίζουν είτε ότι η χρήση της αριθμομηχανής καταστρέφει την υπολογιστική εκτίμηση είτε ότι δεν υπάρχουν σημαντικές διαφορές στην ανάπτυξης της εκτίμησης των μαθητών με την αξιοποίηση του συγκεκριμένου εργαλείου.

Αναλυτικότερα, πολλοί είναι οι ερευνητές που υποστηρίζουν ότι η χρήση της αριθμομηχανής έχει συσχετιστεί θετικά με την ανάπτυξη της υπολογιστικής εκτίμησης. Πιο συγκεκριμένα, οι Mereku, Donkor, Sokpe, Addo, Klaye, Incoom, & Wilson (2007) στο άρθρο τους «Report of the Ghana National Working Party on the Use of Calculators in the Basic Education Certificate Examination (BECE)

Mathematics Paper» αναφέρουν ότι οι αριθμομηχανές μπορούν να είναι αρκετά αποτελεσματικά βοηθήματα όσον αφορά την επίλυση προβλημάτων, την ενίσχυση των υπολογιστικών δεξιοτήτων, την αναγνώριση μοτίβων και την ανάπτυξη της αίσθησης των αριθμών. Με την ενσωμάτωση του συγκεκριμένου εργαλείου στη καθημερινή διδασκαλία λιγότερος χρόνος δαπανάται σε κουραστικούς υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι και αλγεβρικούς χειρισμούς, πράγμα που σημαίνει ότι απομένει περισσότερος διδακτικός χρόνος για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών, την επίλυση προβλημάτων, τη νοερή αριθμητική, καθώς και την ανάπτυξη της εκτίμησης.

Παρόμοια ευρήματα παρουσιάζονται και σε έρευνες των Engelhard, Fincher & Domalesk (2010), των Parvaneh et al., (2011) , των Mbugua, Muthomi & Okere (2011), των Bouck& Yakubova (2014) και των Yang & Lin (2015), όπου διαπιστώθηκε η δυνητική αξία της αριθμομηχανής στην εκτέλεση υπολογισμών, στη διερεύνηση μοτίβων, στην επίλυση προβλημάτων με τέσσερις πράξεις, καθώς και στην ανάπτυξη δεξιοτήτων εκτίμησης σε μαθητές με και χωρίς αναπηρίες, μειώνοντας έτσι την έμφαση στην εκμάθηση υπολογιστικών αλγορίθμων, με άμεσο αποτέλεσμα τη βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών.

Μια τέτοια άποψη παρουσιάζει και η έρευνα των Bouck, Joshi & Johnson (2012), όπου η χρήση της αριθμομηχανής σχετιζόταν με την ορθότητα των απαντήσεων των ερωτήσεων κατά την επίλυση προβλημάτων. Για να γίνω πιο σαφής, οι μαθητές με και χωρίς αναπηρίες είχαν περισσότερες πιθανότητες να απαντήσουν σωστά στις ερωτήσεις όταν δήλωναν ότι χρησιμοποιούσαν αριθμομηχανή.

Για να επιτευχθεί η αποτελεσματική χρήση της αριθμομηχανής σε έργα υπολογιστικής εκτίμησης, κομβικό ρόλο παίζει και ο εκπαιδευτικός. Σε έρευνα των Close, Oldham, Surgenor, Shiel, Dooley & O'Learyto (2004), οι εκπαιδευτικοί ρωτήθηκαν αν και πότε δίδασκαν τις διάφορες λειτουργίες της αριθμομηχανής, τους νοερούς αριθμητικούς υπολογισμούς αντί για την αριθμομηχανή και τον έλεγχο των απαντήσεων που προκύπτουν από την αριθμομηχανή με εκτίμηση. Σχεδόν το 90% των μαθητών διδάσκονταν από καθηγητές που δήλωσαν ότι δίδαξαν δεξιότητες εκτίμησης και περίπου το 67% από εκπαιδευτικούς που δήλωσαν ότι δίδαξαν δεξιότητες λειτουργίας αριθμομηχανής.

Ακόμη, στην ίδια έρευνα στους εκπαιδευτικούς δόθηκε ένας κατάλογος με 13 δραστηριότητες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη των αριθμητικών εννοιών ή/και για την εμπέδωση των δεξιοτήτων. Περιλάμβαναν τη χρήση αριθμομηχανής, αλλά μπορεί, επίσης, να απαιτούσαν εκτίμηση και νοερή αριθμητική. Οι εκπαιδευτικοί ρωτήθηκαν αν χρησιμοποιούσαν κάποια από τις δραστηριότητες στο μάθημα των Μαθηματικών. Περισσότεροι από τους μισούς (52%) μαθητές διδάσκονταν από καθηγητές που δήλωσαν ότι "μερικές φορές" χρησιμοποιούσαν δραστηριότητες «Εκτίμησε και μετά έλεγξε»

Από την άλλη πλευρά, πληθώρα ερευνών τονίζει ότι η χρήση των αριθμομηχανών δεν έχει κανέναν άλλο σκοπό εκτός από το να είναι ένα υπολογιστικό εργαλείο, με πιθανό αρνητικό αντίκτυπο στους μαθητές (Sumardyono & Padmi, 2020).

Ειδικότερα, η Rubenstein (2001) επισημαίνει ότι αν οι αριθμομηχανές αφεθούν ως μέσο υποκατάστασης της νοερής αριθμητικής, εμποδίζουν την ανάπτυξη της αίσθησης των αριθμών και της λογικής σκέψης, καθώς και της χρήσης των εκτιμήσεων και των υπολογιστικών διαδικασιών. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει «Αν οι μαθητές δεν έχουν κληθεί ποτέ να λύσουν προβλήματα χωρίς αριθμομηχανές και αν δεν έχουν μάθει στρατηγικές χωρίς αριθμομηχανές, τότε η νοερή αριθμητική δεν θα είναι ποτέ μια επιλογή που θα επιλέξουν» (Rubenstein, 2001, σ. 443).

Επίσης, σε έρευνα των Abdullah, Abdullah & Tap (2005), παρότι οι συμμετέχοντες μαθητές είχαν παρόμοια άποψη για τα θετικά αποτελέσματα της χρήσης των αριθμομηχανών, υποστήριξαν (σε ποσοστό 80%) ότι η χρήση του συγκεκριμένου εργαλείου θα προκαλέσει μείωση των δεξιοτήτων εκτίμησης των μαθητών.

Σε συγκλίνουσα κατεύθυνση κινούνται και τα ευρήματα των Bridgeman, Harvey & Braswel (1995) και Bouck & Bouck (2008), όπου κανένας μαθητής με ή χωρίς αναπηρίες που είχε δικαίωμα χρήσης της αριθμομηχανής σε δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων δεν πραγματοποίησε εκτίμηση, σε αντίθεση με την πλειοψηφία των ατόμων που δεν είχαν δικαίωμα χρήσης της αριθμομηχανής, η οποία επιχείρησε να εκτιμήσει την απάντηση ιδιαίτερα μέσω της στρογγυλοποίησης κατά την επίλυση του προβλήματος, αφού δεν είχαν χρόνο ή δεν είχαν την ικανότητα να ολοκληρώσουν τους επίπονους υπολογισμούς που αναφέρονταν.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι Woodward και Montague (2002), σε μια ανασκόπηση για τον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες διαπίστωσαν πώς οι εκπαιδευτικοί συχνά απαιτούν από τους μαθητές με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες να αφιερώνουν περισσότερο χρόνο σε άσκηση και εξάσκηση στους ακριβείς υπολογισμούς σε σχέση με τους μαθητές χωρίς αναπηρίες, -παρόλο που η έρευνα αμφισβητεί τα οφέλη αυτής της προσέγγισης,- αντί να ενσωματώσουν την εκτίμηση και την αριθμομηχανή στη μαθησιακή διαδικασία.

Συνοψίζοντας, αυτή η αρνητική στάση των μαθητών προς τη διαδικασία των εκτιμήσεων είναι απλά μια αντανάκλαση της έλλειψης προσοχής που λαμβάνει στα σύγχρονα Μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα, το πρόγραμμα σπουδών, οι οδηγίες και τα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών επικεντρώνονται κυρίως στον γραπτό υπολογισμό και δεν επαρκούν για να δώσουν τη δυνατότητα στα παιδιά της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (ακόμη και στα παιδιά με υψηλές επιδόσεις) να αναπτύξουν την αίσθηση του αριθμού και ιδιαίτερα την δεξιότητα της εκτίμησης (Ghazali et al., 2010). Παράλληλα, στα ισχύοντα Αναλυτικά Προγράμματα η διατύπωση της υπολογιστικής εκτίμησης εντοπίζεται στις προσδοκίες, παράλληλα με τις επικλήσεις για στρογγυλοποίηση, που επικεντρώνονται μόνο στον έλεγχο των υπολογισμών ιδίως όσον αφορά το σφάλμα της αριθμομηχανής (Sunde, Petersson, Nosrati, Rosenqvist & Andrews ,2022).

Τέλος, υπάρχουν και μελέτες στις οποίες αν και τα παιδιά διδάχθηκαν να εκτιμούν με την αριθμομηχανή δεν ανέφεραν σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις τους λόγω της χρήσης της (Sutherlin, 1976 ; Suydam, 1982). Ειδικότερα, σε έρευνα της Bruder (2008) δεν βρέθηκε σαφής συσχέτιση μεταξύ του είδους της χρήσης της αριθμομηχανής και της ανάπτυξης της ικανότητας εκτίμησης.

3.3 Κριτική αποτίμηση της βιβλιογραφικής ανασκόπησης

Από την επισκόπηση της σχετικής υπάρχουσας βιβλιογραφίας σε σχέση τη χρήση της αριθμομηχανής κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών, προκύπτει ότι η αριθμομηχανή είναι μια από τις πιο αμφιλεγόμενες διδακτικές παρεμβάσεις στη Μαθηματική εκπαίδευση (Close, Oldham, Shiel, Dooley, & O'Leary, 2012; Lazarus, Thurlow, Lail, & Christensen, 2009), γεγονός που προκαλεί έκπληξη, δεδομένου του ρόλου των αριθμομηχανών ως εργαλείου που βοηθά στις μαθηματικές δραστηριότητες στην τάξη, της καθημερινής χρήσης των αριθμομηχανών εκτός σχολείου και, τέλος, της αξιοποίησης των αριθμομηχανών ως μέσο τροποποίησης τόσο για εργασίες εντός της τάξης όσο και για τυποποιημένες αξιολογήσεις για μαθητές με αναπηρίες (Lai & Berkeley, 2012; Maccini & Gagnon, 2000; Tindal & Ketterlin-Geller, 2004; Thurlow, Lazarus, Thompson, & Morse, 2005).

Επιπλέον, η πλειοψηφία των ερευνών για τη χρήση της αριθμομηχανής επικεντρώνεται στη διδασκαλία μαθητών τυπικής ανάπτυξης στο αντικείμενο των Μαθηματικών (ενδεικτικά: Loveless, 2004; Pomerantz, 1997; Ruthven, 1996; Woodward, Baxter, & Robinson, 1999; Porter, 1990; Miller, 2004), ενώ είναι πολύ περιορισμένη η έρευνα που είναι εστιασμένη στη χρήση της αριθμομηχανής από μαθητές με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες στο διδακτικό αντικείμενο των Μαθηματικών τόσο σε διεθνή όσο και σε ελληνικό επίπεδο (Maccini & Gagnon, 2005).

Η περιορισμένη βιβλιογραφία επικεντρώνεται στις αριθμομηχανές ως διευκολυντές στις αξιολογήσεις παρά στη διερεύνηση των επιπτώσεών τους στους μαθητές (Bouck, 2009; Bouck & Bouck, 2008; Fuchs, Fuchs, Eaton, Hamlett, &Karns, 2000; Shaftel, Belton-Kocher, Glasnapp, &Poggio, 2003). Η εστίαση αυτή μπορεί να συσχετίζεται με την έλλειψη συνεπούς χρήσης του εργαλείου για διδακτικούς σκοπούς στις τάξεις των μαθηματικών για μαθητές με αναπηρίες (Hasselbring, Lott, & Zydney, 2006).

Ειδικότερα, για την εκτίμηση οι έρευνες σχετικά με την υπολογιστική εκτίμηση έχουν κυρίως εστιάσει στις δεξιότητες που απαιτούνται και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν τα παιδιά και οι ενήλικες, συνδέοντας την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης με διαδικασίες όπως, για παράδειγμα, αυτές που καλλιεργούν τη σημασία των αριθμητικών πράξεων (Δεσλή & Ανεστάκης, 2014).

Ωστόσο, πολύ περιορισμένα είναι τα ευρήματα για την εκτίμηση σε σχέση με άλλες ικανότητες, όπως η ικανότητα χρήσης της αριθμομηχανής τόσο από μαθητές τυπικής ανάπτυξης όσο και από μαθητές με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες. Παρατηρείται, δηλαδή, μια έλλειψη συναφών ερευνητικών προσπαθειών που να διερευνούν την επίδραση της χρήσης της αριθμομηχανής στην ανάπτυξη της εκτίμησης σε μαθητές με αναπηρίες.

Αναδύεται, λοιπόν, η αναγκαιότητα και η πρωτοτυπία διεξαγωγής μιας έρευνας που να μελετά το βαθμό επίδρασης της ενσωμάτωσης των αριθμομηχανών στην επίλυση προβλημάτων υπολογιστικής εκτίμησης σε παιδιά, τα οποία φοιτούν σε ειδικό σχολείο. Το επίπεδο των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης που κατέχουν, η συχνότητα και οι λόγοι χρήσης της αριθμομηχανής και ο βαθμός διαφοροποίησης της ικανότητας υπολογιστικών εκτιμήσεων με την αξιοποίηση της αριθμομηχανής είναι καίρια ζητήματα που χρήζουν διερεύνησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

4.1 Εισαγωγή

Στο παρακάτω κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά τα στοιχεία αναφορικά με το σχεδιασμό, τη διεξαγωγή και την ολοκλήρωση του ερευνητικού μέρους της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Αναλυτικότερα, περιγράφεται η μέθοδος της έρευνας, το δείγμα της, το εργαλείο συλλογής δεδομένων, καθώς και οι άξονες ανάλυσης τους.

4.2 Μέθοδος της έρευνας

Ως μέθοδος της παρούσας έρευνας επιλέχθηκε η ποιοτική βολική μέθοδος, η οποία συνέλεξε δεδομένα προκειμένου να απαντήσει τα ερευνητικά ερωτήματα. Ως εργαλείο συλλογής δεδομένων χρησιμοποιήθηκε η προσωπική συνέντευξη.

4.2.1 Δείγμα της έρευνας

Για τη διεξαγωγή της έρευνας επιλέχθηκε η μέθοδος της βολικής δειγματοληψίας και το δείγμα θεωρείται ευκολίας. Πιο συγκεκριμένα, οι συμμετέχοντες επιλέχθηκαν για να συμμετέχουν στη παρούσα έρευνα με βάση τα ακόλουθα κριτήρια: (α) επίπεδο γνωστικής λειτουργικότητας (IQ 50-69), (β) παρόμοια χρονολογική ηλικία (γ) προθυμία συμμετοχής στη μελέτη (δ) παρόμοιο μαθησιακό επίπεδο στα Μαθηματικά και (ε) μπορούν να δώσουν αρκετά πλούσιες πληροφορίες (information-rich cases).

Ειδικότερα, συμμετείχαν 8 μαθητές ηλικίας 11-12 ετών με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες, που φοιτούν στο Ειδικό Σχολείο Αγίου Δημητρίου και ειδικότερα στην Έκτη τάξη, της οποίας οι δασκάλες ήταν πρόθυμες να συνεργαστούν για την υλοποίηση της έρευνας.

Η επιλογή του δείγματος έγινε στη συγκεκριμένη σχολική μονάδα, γιατί υπήρχε πιο εύκολη πρόσβαση από μέρους μου και θεώρησα ότι μ' αυτόν τον τρόπο θα εξασφάλιζα εύκολα τη συμμετοχή του αντίστοιχου αριθμού συμμετεχόντων.

Πριν τη χορήγηση του pre-test δεν τους έγινε κανενός είδους διδασκαλία υπολογιστικής εκτίμησης και η μοναδική γνώση που μπορεί να είχαν προερχόταν από πιθανή προηγούμενη γνώση κατά τη φοίτησή τους στο σχολείο, καθώς και από εμπειρίες από την πραγματική ζωή.

Τέλος, ο αριθμός των συμμετεχόντων, αν και μικρός θεωρώ ότι είναι επαρκής για την ανάδειξη του βαθμού επίδρασης της χρήσης της αριθμομηχανής στην ανάπτυξη της υπολογιστικής εκτίμησης, ωστόσο δεν μπορεί να θεωρηθεί αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού. Συνεπώς, λόγω της έκτασης και του χρονικού πλαισίου πραγματοποίησης αυτής της έρευνας δεν μπορεί να γίνει γενίκευση των αποτελεσμάτων που καταγράφονται στο σύνολο των μαθητών των Ειδικών σχολείων.

4.2.2 Παρουσίαση του εργαλείου συλλογής δεδομένων

Το εργαλείο συλλογής δεδομένων της παρούσας έρευνας ήταν η προσωπική συνέντευξη, η οποία περιελάμβανε προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης τα οποία διατυπώθηκαν για τις ανάγκες της παρούσας έρευνας, προκειμένου να απαντήσουν τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν.

Αναλυτικότερα, τόσο το pre-test όσο και το post-test περιείχαν 7 απλά προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης που αναφέρονταν σε έργα της καθημερινής ζωής, ώστε να ελκύσουν το ενδιαφέρον του μαθητή και να έχουν νόημα για εκείνον να δώσει μια απάντηση κατ' εκτίμηση.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν στην συνέντευξη, το είδος της πράξης που απαιτείται, και μια σύντομη ανάλυση της ενδεδειγμένης κατά περίπτωση στρατηγικής.

Pre-test

Α/Α	ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	ΕΙΔΟΣ ΠΡΑΞΗΣ	ΕΝΔΕΔΕΙΓΜΕΝΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ
Π1	Ένας ποδηλάτης διάνυσε την πρώτη μέρα 29,6 χιλιόμετρα. Τη δεύτερη μέρα διάνυσε 30,5 χιλιόμετρα και την τρίτη μέρα διάνυσε 28,9χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε, περίπου, ο ποδηλάτης και τις τρεις μέρες μαζί ;	ΠΡΟΣΘΕΣΗ	Ομαδοποίηση / Μέσος όρος (30 Χ 3) Εφαρμόζεται στην πρόσθεση πολλών αριθμών και όταν οι συγκεκριμένοι αριθμοί βρίσκονται γύρω από μία ειδική τιμή.
Π2	Μια νοικοκυρά αγόρασε από το μανάβη πατάτες αξίας 3,25 ευρώ. Πόσα ρέστα πήρε από ένα χαρτονόμισμα των 5 €;	ΑΦΑΙΡΕΣΗ	Στρογγυλοποίηση χωρίς τη χρήση κανόνα (3,25 => 3) Μετατρέπονται το ένα ή και τα δύο μέλη στον κοντινότερο αριθμό
Π3	Η Μαρίνα αγόρασε από το βιβλιοπωλείο μια συσκευασία αυτοκόλλητα που κοστίζει 1,40€, μια σβήστρα που κοστίζει 1,70€ και ένα μολύβι σχεδίασης που κοστίζει 2,40€. Πόσα ευρώ πλήρωσε συνολικά;	ΠΡΟΣΘΕΣΗ	Εμπρόσθιο άκρο (2+1+1 =4, 0,40 +0,40 +0,70 ≃ 2 → 4+2=6) Επικεντρώνεται αρχικά στα ψηφία στο αριστερό άκρο των αριθμών αγνοώντας τα υπόλοιπα. Έπειτα,

			γίνεται μια προσαρμογή, κάνοντας μια εκτίμηση για το μέρος του αριθμού, που αρχικά αγνοήθηκε.
Π4	Η Μαρία είχε στο πορτοφόλι της 53€. Πλήρωσε στο σουπερμάρκετ 37,5€. Πόσα χρήματα της απέμειναν;	ΑΦΑΙΡΕΣΗ	Αντιστάθμιση (53=> 50 και 37,50 =>40) Πραγματοποιείται όταν κάποιος επανέρχεται και διορθώνει το αποτέλεσμα της αρχικής εκτίμησης. (53-37,5 $\simeq$ 10 και στη συνέχεια επανέρχεται και προσθέτει ακόμη 5 και βρίσκει 10+5=15)
Π5	Σε ένα φούρνο χρησιμοποίησαν 71 κιλά άσπρο αλεύρι, 52 κιλά καλαμποκάλευρο, 51 κιλά αλεύρι ολικής άλεσης και 32 κιλά αλεύρι κριθαριού . Πόσα κιλά αλεύρι χρησιμοποίησαν συνολικά;	ΠΡΟΣΘΕΣΗ	Συμβατοί αριθμοί (32+71$\simeq$100, 52+51 $\simeq$ 100 $\rightarrow$ 100+100 =200) Επιλέγονται οι αριθμοί που καθιστούν τον υπολογισμό εύκολο και δίνουν μία καλή εκτίμηση του

			αρχικού προβλήματος.
Π6	Ο Μάριος ξεκίνησε να διαβάζει ένα λογοτεχνικό βιβλίο 85 σελίδων. Την πρώτη μέρα διάβασε 37 σελίδες. Πόσες σελίδες του έμειναν;	ΑΦΑΙΡΕΣΗ	Περικοπή (85=> 80, 37=>30, → 80-30 Αντικαθιστούμε ένα ή δυο ψηφία στο δεξί άκρο των αριθμών με μηδενικά
Π7	Η κυρία Άννα αγόρασε από τη λαϊκή αγορά 3,500 κιλά πορτοκάλια και 0,950 κιλά αχλάδια. Πόσα κιλά φρούτα αγόρασε συνολικά;	ΠΡΟΣΘΕΣΗ	Ειδικοί αριθμοί (0,950 =>1) Οι μαθητές έχουν μάθει να ξεχωρίζουν αριθμούς που είναι κοντά σε ειδικές τιμές (0, ½, 1)

Post-test

Α/Α	ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	ΕΙΔΟΣ ΠΡΑΞΗΣ	ΕΝΔΕΔΕΙΓΜΕΝΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ
Π1	Ο κύριος Νίκος, ο μελισσοκόμος, μάζεψε φέτος τον Ιούνιο από τις κυψέλες του 39,5 κιλά μέλι , τον Ιούλιο 37,7 κιλά μέλι και τον Αύγουστο 42,2 κιλά μέλι. Πόσα κιλά μέλι μάζεψε συνολικά και τους τρεις	ΠΡΟΣΘΕΣΗ	Ομαδοποίηση / Μέσος όρος (3 Χ 40) Εφαρμόζεται στην πρόσθεση πολλών αριθμών και όταν οι συγκεκριμένοι

	μήνες;		αριθμοί βρίσκονται γύρω από μία ειδική τιμή.
Π2	Η κυρία Ευτυχία είχε 4 κιλά ζάχαρη. Από αυτή την ποσότητα χρησιμοποίησε 1,8 κιλά για να φτιάξει μια τούρτα και δυο κέικ. Πόση ζάχαρη περίσσεψε;	ΑΦΑΙΡΕΣΗ	Στρογγυλοποίηση χωρίς τη χρήση κανόνα (1,8 => 2) Μετατρέπονται το ένα ή και τα δύο μέλη στον κοντινότερο αριθμό.
Π3	Ο Νίκος έτρεξε σήμερα 5,6 χιλιόμετρα, ο Γιώργος 4,7 χιλιόμετρα και ο Κώστας 6,9 χιλιόμετρα. Περίπου πόσα χιλιόμετρα έτρεξαν όλοι μαζί;	ΠΡΟΣΘΕΣΗ	Εμπρόσθιο άκρο (5+4+6=15, 0,6 +0,7+0,9 $\simeq$ 2 $\rightarrow$ 15+2=17) Επικεντρώνεται αρχικά στα ψηφία στο αριστερό άκρο των αριθμών αγνοώντας τα υπόλοιπα. Έπειτα, γίνεται μια προσαρμογή, κάνοντας μια εκτίμηση για το μέρος του αριθμού, που αρχικά αγνοήθηκε.
Π4	Η Νικολέτα είχε στο πορτοφόλι της 94€. Πλήρωσε τον λογαριασμό της ΔΕΗ 68,50€.	ΑΦΑΙΡΕΣΗ	Αντιστάθμιση (94 => 90 και 68,50 => 70)

	Πόσα χρήματα της απέμειναν;		Πραγματοποιείται όταν κάποιος επανέρχεται και διορθώνει το αποτέλεσμα της αρχικής εκτίμησης. (94-68,5 ≃ 90-70 = 20 και στη συνέχεια προσθέτουμε ακόμη 5 και βρίσκουμε 20+5=25)
Π5	Το πρώτο κιβώτιο αναψυκτικών ζυγίζει 42 κιλά, το δεύτερο κιβώτιο 57 κιλά, το τρίτο κιβώτιο 61 κιλά και το τέταρτο κιβώτιο 51 κιλά. Πόσο περίπου ζυγίζουν και τα τέσσερα κιβώτια αναψυκτικών μαζί;	ΠΡΟΣΘΕΣΗ	Συμβατοί αριθμοί (57+51≃100, 42+61 ≃ 100 → 100+100 =200) Επιλέγονται οι αριθμοί που καθιστούν τον υπολογισμό εύκολο και δίνουν μία καλή εκτίμηση του αρχικού προβλήματος.
Π6	Ένα τρένο ξεκίνησε από τη Θεσσαλονίκη με προορισμό την Αθήνα με 245 επιβάτες. Στη Λάρισα κατέβηκαν 137 επιβάτες. Πόσοι επιβάτες	ΑΦΑΙΡΕΣΗ	Περικοπή (245 → 200, 137→100, → 200-100 Αντικαθιστούμε

	έμειναν στο τρένο;		ένα ή δυο ψηφία στο δεξί άκρο των αριθμών με μηδενικά
Π7	Ένας αθλητής του μήκους, πήδηξε την περσινή αγωνιστική περίοδο 3,8 μέτρα. Αν φέτος βελτίωσε την επίδοσή του κατά 0,8 μέτρα, ποια είναι η φετινή του επίδοση;	ΠΡΟΣΘΕΣΗ	Ειδικοί αριθμοί (0,8 => 1) Οι μαθητές έχουν μάθει να ξεχωρίζουν αριθμούς που είναι κοντά σε ειδικές τιμές (0, ½, 1)

4.2.3 Περιγραφή της ερευνητικής διαδικασίας

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε το χρονικό διάστημα 11-24 Ιανουαρίου. Ο συνολικός αριθμός των συμμετεχόντων ήταν 8 μαθητές της Έκτης Τάξης του Ειδικού Σχολείου του Αγίου Δημητρίου.

Οι μαθητές εξετάστηκαν με συνέντευξη σε δυο γραπτές δοκιμασίες: ένα pre –test και ένα post-test στη σχολική τους τάξη, όπου είναι οικείο το περιβάλλον και επικρατεί μια σχετική ησυχία, με σκοπό τη διατήρηση της συγκέντρωσής τους κατά τη διάρκεια της διαδικασίας και την ελεύθερη έκφραση της σκέψης τους. Η διαδικασία πραγματοποιήθηκε εντός του σχολικού ωραρίου, χωρίς ωστόσο να παρεμποδιστεί η ομαλή ροή του σχολικού προγράμματος.

Το κάθε ένα τεστ αποτελούνταν από 7 προβλήματα καθημερινής ζωής. Ειδικότερα, το pre-test, το οποίο δόθηκε στους μαθητές πριν γίνει οποιαδήποτε παρέμβαση αναφορικά με τις εκτιμήσεις, ζητούσε από τους μαθητές να κάνουν υπολογιστικές εκτιμήσεις χωρίς την πραγματοποίηση ακριβών υπολογισμών, σε αντίθεση με το post –test το οποίο δόθηκε μετά τη διδακτική παρέμβαση.

Και στις δυο γραπτές δοκιμασίες οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα χρήσης της αριθμομηχανής στις περιπτώσεις που δεν μπορούσαν να βρουν τη λύση νοερά, με σκοπό να διαπιστωθεί η συχνότητα χρήσης της σε έργα υπολογιστικής εκτίμησης, καθώς και ο λόγος αξιοποίησης της (έλεγχος απαντήσεων, εκτέλεση ακριβούς υπολογισμού, πραγματοποίηση εκτίμησης). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η αριθμομηχανή που χρησιμοποιήθηκε στη συγκεκριμένη μελέτη ήταν μια αριθμομηχανή απλών λειτουργιών που μπορεί να προσθέτει, να αφαιρεί, να πολλαπλασιάζει και να διαιρεί.

Στο post – test χρησιμοποιήθηκαν τα ίδια ουσιαστικά προβλήματα με το pre – test, έχοντας απλώς διαφορετική διατύπωση και ελαφρά παραλλαγμένους αριθμούς ώστε να μπορεί να γίνει η σύγκριση των επιδόσεων με τα ίδια κριτήρια.

Ειδικότερα, πριν από την καθορισμένη ημερομηνία πραγματοποίησης των συνεντεύξεων οι μαθητές με τη βοήθεια της ειδικής παιδαγωγού του σχολείου εξασκήθηκαν στις βασικές λειτουργίες της αριθμομηχανής, όπως η ενεργοποίηση και η απενεργοποίηση της, η εισαγωγή αριθμών και η εκτέλεση πράξεων.

Πριν από τη συνέντευξη στη προ-δοκιμασία έγινε συζήτηση με τον κάθε μαθητή αναφορικά με την έννοια της εκτίμησης και τη χρήση της στην καθημερινή ζωή, ενώ δόθηκαν λεπτομερείς εξηγήσεις σχετικά με την διαδικασία που θα ακολουθηθεί. Η διαδικασία περιελάμβανε αρχικά την παρουσίαση σε χαρτί του προβλήματος από την ερευνήτρια και μετά από 2 λεπτά, την καταγραφή της απάντησης του μαθητή. Μετά την εκφώνηση του προβλήματος από την ερευνήτρια, ο μαθητής αν το επιθυμούσε, μπορούσε να το επαναλάβει ή να το ξαναδιαβάσει σιωπηλά.

Ο χρόνος των δύο λεπτών κρίθηκε αρκετός, ώστε να έχει ο μαθητής το χρονικό περιθώριο για να επιλέξει τη στρατηγική και να κάνει τους απαραίτητους νοερούς υπολογισμούς με ή χωρίς την αριθμομηχανή. Ωστόσο, δεν υπήρχε η άνεση χρόνου για να εκτελέσει νοερά κάποιον αλγόριθμο για ακριβή υπολογισμό. Η φύση των αριθμών στα προβλήματα ήταν τέτοια που καθιστά ιδιαίτερα δύσκολη αν όχι αδύνατη τη χρήση κάποιου αλγόριθμου.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο μαθητής κατά τη διάρκεια των δύο λεπτών δεν είχε στη διάθεσή του χαρτί και μολύβι, καθώς, όπως του επισημάνθηκε, οι απαντήσεις έπρεπε να δοθούν υπολογίζοντας με το μυαλό ή με την αριθμομηχανή.

Μετά την απάντηση του, η ερευνήτρια ζητούσε να σκιαγραφήσει κάτω από το πρόβλημα τη σκέψη που ακολούθησε για να δώσει την απάντηση, χωρίς να τεθούν αυστηροί χρονικοί περιορισμοί. Ο μαθητής δεν είχε τη δυνατότητα να τροποποιήσει την αρχική του εκτίμηση. Στη συνέχεια η ερευνήτρια παρουσίασε το επόμενο πρόβλημα.

Η διαδικασία αυτή επαναλήφθηκε εφτά φορές για κάθε μαθητή, μία για κάθε πρόβλημα, με αποτέλεσμα η διάρκεια των test να ήταν περίπου 20 λεπτά για κάθε μαθητή. Καθ' όλη τη διάρκεια της συνέντευξης, η ερευνήτρια κρατούσε σημειώσεις, έτσι ώστε η ίδια να έχει και μετέπειτα την ευκαιρία να αξιολογήσει και να καταγράψει την εκτίμηση και τις στρατηγικές του καθενός στα 7 έργα της προ-δοκιμασίας.

Τέλος, η διεξαγωγή της μετά-δοκιμασίας πραγματοποιήθηκε με την ίδια διαδικασία.

4.2.4 Η διδακτική παρέμβαση

Μεταξύ pre-test και post-test μεσολάβησε μία περίοδος 5 ημερών. Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου πραγματοποιήθηκε 40λεπτη διδακτική παρέμβαση την ώρα των Μαθηματικών. Συνολικά πραγματοποιήθηκαν 4 σαραντάλεπτα μαθήματα.

Κατά τη διδακτική παρέμβαση, οι 8 μαθητές χωρίστηκαν σε τρεις ομάδες. Η κάθε ομάδα είχε ένα τετράδιο που λειτουργούσε ως χαρτοφυλάκιο και χρησιμοποιήθηκε αποκλειστικά για την καταγραφή των σκέψεων και των στρατηγικών κάθε μέλους της ομάδας σε περίπτωση που υπήρχαν διαφορετικές απόψεις για την επίλυση των προβλημάτων εκτίμησης, καθώς και επιχειρημάτων ή συμπερασμάτων που προέκυψαν από τις συζητήσεις στην τάξη σχετικά με τις στρατηγικές εκτίμησης.

Επίσης, χρησιμοποιήθηκε ένα φύλλο εργασίας με 14 προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης, τα οποία ήταν παρόμοια με εκείνα που χρησιμοποιήθηκαν στο pre-test. Οι διατυπώσεις των προβλημάτων ήταν σε διαφορετικό πλαίσιο και με μικρές αλλαγές στα αριθμητικά δεδομένα που όμως δεν επηρέασαν την επιλογή της ενδεδειγμένης στρατηγικής.. Παράλληλα, οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα αξιοποίησης της αριθμομηχανής, όταν το έκριναν απαραίτητο οι ίδιοι είτε κατά τον υπολογισμό είτε κατά τον έλεγχο της απάντησης τους.

Ειδικότερα, κατά τη διάρκεια της κάθε παρέμβασης η ερευνήτρια έδωσε σε κάθε μαθητή ένα φυλλάδιο με τέσσερα προβλήματα για κάθε μία στρατηγική από αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στο pre-test. Κάθε μαθητής έγραψε τη λύση του στο τετράδιο, και στις περιπτώσεις που υπήρχαν περισσότερες από μία λύσεις τα μέλη της ομάδας συζήτησαν το πρόβλημα και κατέληξαν στην καλύτερη απάντηση. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε κάθε ομάδα υπήρχε ένας μαθητής που πραγματοποίησε σωστή εκτίμηση σε 3 ή 4 προβλήματα του pretest, ώστε να λειτουργήσουν ως καταλύτες σε περίπτωση που τα υπόλοιπα μέλη δεν πρότειναν κάποια απάντηση.

Χαρακτηριστικά επισημαίνεται η εξήγηση μιας ομάδας πως «μετά από συζήτηση καταλήξαμε στο πρώτο τρόπο γιατί νομίζουμε πως οι αριθμοί είναι πιο λογικοί και πιθανόν να βρούμε πιο σωστό αποτέλεσμα», η άλλη ομάδα ανέφερε πως «η ομάδα μας επέλεξε το δεύτερο τρόπο, γιατί οι αριθμοί τελειώνουν σε μηδενικά και η πράξη είναι πιο εύκολη» και « η ομάδα μας επέλεξε το δεύτερο τρόπο γιατί πιστεύουμε ότι οι συνδυασμοί των αριθμών που έκανε ο Α. είναι καλύτεροι και άρα θα βρούμε πιο εύκολα αποτέλεσμα».

Ειδικότερα, τα προβλήματα, που προτάθηκαν στο φύλλο εργασίας, συζητήθηκαν από κάθε ομάδα ξεχωριστά για 3-5 λεπτά και προσπάθησαν να τα λύσουν με όσο το δυνατόν περισσότερους τρόπους. Όταν η ερευνήτρια παρατηρούσε ότι μια ομάδα δεν μπορεί να ανακαλύψει κάποιο τρόπο επίλυσης, παρενέβη στο έργο της παρέχοντας κάποιου είδους καθοδήγηση και διδασκαλία των στρατηγικών εκτίμησης.

Ενδεικτικά παρατίθενται ορισμένες ερωτήσεις καθοδήγησης της ερευνήτριας: «Πώς μπορείτε να κάνετε πιο απλό και πιο στρογγυλό τον αριθμό 27,60 , έτσι ώστε να μπορέσετε να κάνετε μια γρήγορη εκτίμηση του αποτελέσματος στο μυαλό σας;», « Το 9,2 σε ποιον στρογγυλό αριθμό είναι κοντά;», «Το 300 ή το 320 είναι πιο βολικό για να υπολογίσετε στο περίπου;» και «Σκεφτήκατε πολύ σωστά ότι όλοι οι αριθμοί είναι κοντά στο 20, τι πράξη μπορείτε να κάνετε, ώστε να βρείτε με τον πιο γρήγορο τρόπο το αποτέλεσμα στο μυαλό σας;»

Έπειτα, η κάθε ομάδα παρουσίασε την απάντηση που κατέληξε στην ερευνήτρια και την στρατηγική που χρησιμοποίησε. Στη συνέχεια, ακολούθησε συζήτηση για τη λογικότητα της απάντησης, καθώς και τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της στρατηγικής, προκειμένου να προσανατολιστούν προς την κατάλληλη σε κάθε περίπτωση στρατηγική ανάλογα με τα δεδομένα και το ζητούμενο του προβλήματος. Στις περιπτώσεις που οι ομάδες δεν μπορούσαν να ανακαλύψουν την ενδεδειγμένη στρατηγική υπολογιστικής εκτίμησης, όπως την αντιστάθμιση, την ομαδοποίηση και τη στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου, η ερευνήτρια πρότεινε τη νέα στρατηγική που δεν είχαν σκεφτεί οι μαθητές.

Στο τέλος, μετά από συζήτηση κάθε ομάδα κατέγραψε τη στρατηγική που θεώρησε καταλληλότερη για τη συγκεκριμένη περίπτωση, προκαλώντας με αυτό τον τρόπο προβληματισμό και παραγωγή επιχειρηματολογίας με σκοπό την ενεργοποίηση της κριτικής σκέψης. Σε περίπτωση που κάποια ομάδα είχε επιλέξει την ενδεδειγμένη στρατηγική, προηγήθηκε στην ανάλυση των επιχειρημάτων. Παράλληλα, η ερευνήτρια παρενέβη πάλι όταν διαπιστώθηκαν λάθη στον εντοπισμό της καταλληλότερης στρατηγικής, όπως στη περίπτωση που η μια ομάδα θεώρησε ως ενδεδειγμένη στρατηγική την στρογγυλοποίηση χωρίς τη χρήση του κανόνα αντί για τη στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου στο αντίστοιχο πρόβλημα.

Με τη λήξη της παρέμβασης ζητήθηκε από τους μαθητές να σχολιάσουν τα προβλήματα της διδακτικής παρέμβασης ως προς το βαθμό δυσκολίας και να αναφέρουν τις εντυπώσεις τους από τη διαδικασία. Παρατίθενται ορισμένα σχόλια των ομάδων: «Μας δυσκόλεψαν τα προβλήματα αλλά γενικά περάσαμε ωραία.», «Αν και στην αρχή μαλώναμε μεταξύ μας, μετά τα βρήκαμε και στο τέλος καταφέραμε να λύσουμε αρκετά από τα δύσκολα προβλήματα με τη βοήθεια της αριθμομηχανής και της κυρίας» και «Στην αρχή δεν μπορούσα να καταλάβω τίποτα, αλλά μέσα από τη συζήτηση με τους συμμαθητές μου έμαθα παρά πολλά πράγματα, που από ότι κατάλαβα από την κυρία θα μας βοηθήσουν πολύ»

Τέλος, αναφορικά με τη συμπεριφορά των μαθητών συμμετείχαν ενεργά και με μεγάλο ενθουσιασμό στη διδακτική παρέμβαση που μεσολάβησαν μεταξύ pre-test και post-test, προτείνοντας τρόπους λύσης, συζητώντας και αναλύοντας τις ενδεδειγμένες στρατηγικές ανάλογα με το πρόβλημα. Στην αρχή παρουσιάστηκαν ορισμένες εντάσεις κατά τη συνεργασία ανάμεσα στα μέλη μιας ομάδας, οι οποίες όμως ξεπεράστηκαν πολύ γρήγορα.

Την επόμενη μέρα της λήξης της διδακτικής παρέμβασης οι μαθητές εξετάστηκαν με το post-test, διάρκειας 20 λεπτών ανά μαθητή, με παρόμοια προβλήματα με το pre-test και κάτω από τις ίδιες συνθήκες με τη προ-δοκιμασία.

4.2.5 Το προτεινόμενο μοντέλο (IHMCES)

Το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα μελέτη είναι μια τροποποίηση του αρχικού μοντέλου IHMCES των Lemonidis & Likidis (2019) (Integrated Hierarchical Model of Computational Estimation Strategies) (Lemonidis, 2022).

Το συγκεκριμένο μοντέλο επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί επειδή είναι απλό και εφαρμόσιμο στην καθημερινή πρακτική και δεν απαιτεί περίπλοκες ή ειδικές συνθήκες για την υλοποίηση του. Δεν αποσκοπεί στην ολοκλήρωση μιας ψυχολογικής ανάλυσης της συμπεριφοράς του υποκειμένου, αλλά στην καταγραφή των γνώσεών του σχετικά με το εύρος, την ευελιξία και την προσαρμοστικότητα των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης. Το μοντέλο εφαρμόζεται συνήθως σε καταστάσεις όπου υπάρχουν πολλές στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης και είναι κατάλληλο για να υποδείξει την αλλαγή των στρατηγικών μετά από μια παρέμβαση.

Αναφορικά με την ιεραρχία των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης, προτείνεται μια ταξινόμηση των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης σε πέντε επίπεδα ή ομάδες στρατηγικών: Για κάθε ομάδα στρατηγικών δίνεται ένας κωδικός (0-4): Μη εκτίμηση (0), Ανασύνθεση 1 (1), Ανασύνθεση 2 (2), Μετάφραση (3) και Αντιστάθμιση (4). Οι πιο ανώτερες στρατηγικές ανήκουν στο επίπεδο 4 και οι πιο κατώτερες στρατηγικές στο επίπεδο 0. Σύμφωνα με την υιοθετούμενη έννοια της ιεραρχίας, όσο περισσότερο σχετίζεται μια στρατηγική με την ιδέα της εκτίμησης, τόσο υψηλότερα τοποθετείται στην ιεραρχία.

Η ταξινόμηση των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης βασίζεται σε πέντε κριτήρια: (1) διενέργεια ή μη εκτίμησης - (2) αντιμετώπιση των αριθμών του προβλήματος με βάση τη θεσιακή αξία, αντικαθιστώντας τους με πιο βολικούς για τον υπολογισμό (ανασύνθεση 1) - (3) αντικατάσταση ενός ή περισσότερων αριθμών του προβλήματος με πιο βολικούς για τον υπολογισμό (ανασύνθεση 2) - (4) αλλαγή της δομής του προβλήματος σε μια πιο βολική μορφή υπολογισμού (μετάφραση) - και (5) προσαρμογές για μια καλύτερη εκτίμηση (αντιστάθμιση).

Αναλυτικότερα, η ιεράρχηση των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης ορίζεται ως εξής:

Επίπεδο (0): Μη εκτίμηση

Για να πραγματοποιήσει ο μαθητής μια εκτίμηση, θα πρέπει να γνωρίζει τη διαδικασία εκτίμησης. Το επίπεδο αυτό καθορίζεται με βάση το κριτήριο (1), δηλαδή την πραγματοποίηση ή όχι μιας εκτίμησης, και περιλαμβάνει δύο τύπους απαντήσεων: μη απάντηση και λάθη. Σε αυτό το επίπεδο υπάρχουν απαντήσεις που φανερώνουν ότι το άτομο έχει ανεπαρκή ή ελλιπή εννοιολογική κατανόηση της διαδικασίας της εκτίμησης.

Έτσι, σύμφωνα με το κριτήριο 1, στο επίπεδο 0 περιλαμβάνονται οι παρακάτω στρατηγικές:

- Τυχαία απάντηση (κωδικός 0.0), όταν το άτομο δίνει μία τυχαία απάντηση, δίχως λογική και σκέψη.
- Ακριβής υπολογισμός (κωδικός 0.1), όταν το άτομο πραγματοποιεί τον αριθμητικό αλγόριθμο νοερά και με ακρίβεια.
- Ακριβής υπολογισμός κι έπειτα στρογγυλοποίηση του αποτελέσματος (κωδικός 0.2), όταν το άτομο εκτελεί με ακρίβεια τον αλγόριθμο της πράξης στο νου του κι έπειτα στρογγυλοποιεί το αποτέλεσμα, ώστε να φανεί ως εκτίμηση,
- Διαίσθηση (κωδικός 0.3), όταν το άτομο δίνει μία σωστή απάντηση, αλλά δεν μπορεί να εξηγήσει τη σκέψη του.

Επιπλέον, σε αυτό το επίπεδο, πέρα από τις απαντήσεις μη ανταπόκρισης, σύμφωνα με το κριτήριο 1 περιλαμβάνονται και τα λάθη, τα οποία αναλύονται παρακάτω.

Επίπεδο 1: Ανασύνθεση (1): αλλαγή ή επεξεργασία των αριθμών με βάση τη θεσιακή αξία (στρογγυλοποίηση).

Το πρώτο επίπεδο ανασύνθεσης καθορίζεται με βάση το κριτήριο (2), αντιμετώπιση των αριθμών του προβλήματος με βάση την αξία θέσης και μετατροπή τους σε πιο βολικούς που εξυπηρετούν περισσότερο τον υπολογισμό. Περιλαμβάνει τέσσερις στρατηγικές στρογγυλοποίησης: στρογγυλοποίηση με χρήση του κανόνα (1.1), στρογγυλοποίηση χωρίς χρήση του κανόνα (1.2), περικοπή (1.3) και εμπρόσθιο άκρο (1.4). Κατά τη διαδικασία στρογγυλοποίησης, οι αριθμοί του προβλήματος αντικαθίστανται με τους πλησιέστερους στρογγυλούς αριθμούς και παράγονται αριθμοί με ένα ή περισσότερα μηδενικά στο δεξιό άκρο.

Η στρογγυλοποίηση με τη χρήση του κανόνα (κωδικός 1.1) βασίζεται στον γνωστό κανόνα: αρχικά προσδιορίζεται ποιο είναι το ψηφίο στρογγυλοποίησης και έπειτα ελέγχεται το ψηφίο στα δεξιά του. Εάν το δεξιό ψηφίο είναι ίσο ή μεγαλύτερο του 5, το ψηφίο στρογγυλοποίησης αυξάνεται κατά ένα. Αντίθετα, αν είναι μικρότερο του 5, το ψηφίο στρογγυλοποίησης παραμένει το ίδιο. Στη συγκεκριμένη στρατηγική, το πλαίσιο ή η κατάσταση του προβλήματος συνήθως δεν λαμβάνεται υπόψη.

Αντίθετα, στη στρογγυλοποίηση χωρίς τη χρήση του κανόνα (κωδικός 1.2), λαμβάνεται υπόψη το πλαίσιο του προβλήματος που απαιτεί γρήγορο και εύκολο υπολογισμό και αντιστοιχεί σε μια πιο ουσιαστική χρήση της στρογγυλοποίησης.

Στη στρατηγική της περικοπής (κωδικός 1.3), ένα ή δύο ψηφία στα δεξιά του αριθμού αντικαθίστανται με μηδενικά. Τέλος, η στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου (κωδικός 1.4) εστιάζει στο πρώτο ψηφίο στα αριστερά του αριθμού και αγνοεί τα υπόλοιπα ψηφία. Στη συνέχεια, το άτομο επιστρέφει για να κάνει μια προσαρμογή, κάνοντας μια εκτίμηση για το τμήμα του αριθμού που αγνοήθηκε αρχικά.

Επίπεδο 2 (Ανασύνθεση 2): αντικατάσταση ενός ή περισσότερων αριθμών

Το δεύτερο επίπεδο ανασύνθεσης καθορίζεται με βάση το κριτήριο (3), αντικατάσταση ενός ή περισσότερων αριθμών του προβλήματος με πιο κατάλληλους για τον υπολογισμό. Τέσσερις στρατηγικές περιλαμβάνονται σε αυτό το επίπεδο: η στρατηγική των συμβατών αριθμών (2.1), η στρατηγική των ειδικών αριθμών (2.2), η στρατηγική της παραγοντοποίησης (2.3) και η στρατηγική της επιμεριστικότητας (2.4).

Στη στρατηγική των συμβατών αριθμών (κωδικός 2.1) επιλέγονται οι συμβατοί αριθμοί που καθιστούν τον υπολογισμό πιο εύκολο και δίνουν μία καλή εκτίμηση του αρχικού προβλήματος.

Στη στρατηγική των ειδικών αριθμών (κωδικός 2.2), ο μαθητής θα πρέπει να έχει μάθει να αντιλαμβάνεται βασικές ιδιότητες αριθμών και να ξεχωρίζει τους αριθμούς που είναι κοντά σε ειδικές τιμές (0, ½, 1), για να είναι σε θέση να κάνει τις απαραίτητες αντικαταστάσεις στη διαδικασία της εκτίμησης.

Στη στρατηγική της παραγοντοποίησης (κωδικός 2.3), οι αριθμοί αναλύονται σε απλούστερη μορφή και έτσι το γινόμενο μετατρέπεται σε γινόμενο μικρότερων παραγόντων.

Στη στρατηγική της επιμεριστικότητας (κωδικός 2.4) γίνεται χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας: $α \bullet (β + γ) = α \bullet β + α \bullet γ$, με σκοπό το άτομο να υπολογίσει πιο γρήγορα και εύκολα.

Επίπεδο 3: Μετάφραση

Το τρίτο επίπεδο στρατηγικών καθορίζεται με βάση το κριτήριο (4), αλλαγή της δομής του προβλήματος σε μια πιο βολική μορφή υπολογισμού. Μια στρατηγική αυτού του επιπέδου είναι η ομαδοποίηση ή η στρατηγική της μέσης τιμής, η οποία εφαρμόζεται κατά την πρόσθεση πολλών αριθμών που έχουν κοντινή τιμή.

Επίπεδο 4: Αντιστάθμιση

Το επίπεδο αυτό καθορίζεται με βάση το κριτήριο (5), πραγματοποίηση προσαρμογών για καλύτερη εκτίμηση. Η αντιστάθμιση αποτελεί το ανώτερο επίπεδο στην ιεράρχηση των στρατηγικών, επειδή δηλώνει ότι το άτομο χρησιμοποιεί σωστά μία από τις προηγούμενες στρατηγικές αλλά επιδιώκει μεγαλύτερη ακρίβεια, οπότε αντισταθμίζει την εκτίμησή του με μία καλύτερη. Στο ανώτατο επίπεδο των στρατηγικών εκτίμησης τοποθετούνται οι στρατηγικές της προγενέστερης και μεταγενέστερης αντιστάθμισης οι οποίες λειτουργούν συμπληρωματικά στις προηγούμενες στρατηγικές.

Επίπεδα Στρατηγικών		Στρατηγικές	
Ονομασία	**Κωδικός**	**Κωδικός**	**Ονομασία**
Αντιστάθμιση	4	4	Αντιστάθμιση
Μετάφραση	3	3	Ομαδοποίηση / Μέσος όρος
Ανασύνθεση 2	2	2.4	Επιμεριστικότητα
		2.3	Παραγοντοποίηση
		2.2	Στρατηγική των ειδικών αριθμών
		2.1	Στρατηγική των συμβατών αριθμών
Ανασύνθεση 1	1	1.4	Στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου
		1.3	Περικοπή
		1.2	Στρογγυλοποίηση χωρίς τη χρήση του κανόνα
		1.1	Στρογγυλοποίηση με τη χρήση του κανόνα
Μη εκτίμησης	0	0.3	Διαίσθηση
		0.2	Ακριβής υπολογισμός κι έπειτα στρογγυλοποίηση του αποτελέσματος
		0.1	Ακριβής υπολογισμός
		0.0	Τυχαία απάντηση

Πίνακας 1: Ιεραρχική ταξινόμηση των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης

Προφίλ μαθητών

Τα στρατηγικά προφίλ των μαθητών ορίζονται βάσει των στρατηγικών που επέλεξαν οι ίδιοι να χρησιμοποιήσουν στα έργα προκειμένου να πραγματοποιήσουν μια εκτίμηση. Για τη σκιαγράφηση του προφίλ των μαθητών αξιοποιήθηκε η τροποποιημένη έκδοση του αρχικού μοντέλου IHMCES (Lemonidis, 2022), η οποία είναι πιο οικονομική και λιγότερο περίπλοκη.

Αναλυτικότερα, μειώθηκε ο αριθμός των προφίλ σε πέντε αντί για έξι, όπως προτείνεται στο αρχικό μοντέλο. Γίνεται αλλαγή, επίσης, της ονομασίας των προφίλ και των κριτηρίων, ώστε να είναι απλούστερα και πιο αντιπροσωπευτικά για όλες τις ομάδες των εξεταζόμενων μαθημάτων. Με αυτόν τον τρόπο, το τροποποιημένο μοντέλο ταιριάζει καλύτερα με τα προφίλ των μαθητών και είναι πιο εφαρμόσιμο.

Ως εκ τούτου, διακρίθηκαν πέντε τύποι προφίλ: μη εκτίμησης, εκκίνησης, βασικό, προηγμένο και διευρυμένο προφίλ, τα οποία παρουσιάζονται λεπτομερώς παρακάτω. Στη συνέχεια, περιγράφονται τα κριτήρια με τα οποία καθορίζουμε τα πέντε προφίλ.

Προφίλ μη εκτίμησης (0): Οι μαθητές χρησιμοποιούν στρατηγικές "μη εκτίμησης" (επίπεδο 0) στην πλειονότητα των προβλημάτων που τίθενται. Στην έρευνά μας θα τεθούν επτά προβλήματα και οι μαθητές που δεν θα απαντήσουν ή θα κάνουν λάθος σε τέσσερις ή περισσότερες απαντήσεις θα θεωρηθούν ότι έχουν προφίλ μη εκτίμησης. Το προφίλ αυτό έχει τον κωδικό 0.

Προφίλ εκκίνησης (1): Όλες οι στρατηγικές που χρησιμοποιούνται είναι από το επίπεδο 1 (ανασύνθεση 1). Αυτό το προφίλ έχει τον κωδικό 1.

Βασικό προφίλ (2): Όλες οι στρατηγικές που χρησιμοποιούνται προέρχονται από τα επίπεδα 1 (ανασύνθεση 1) και 2 (ανασύνθεση 2). Αυτό το προφίλ έχει τον κωδικό 2.

Προηγμένο προφίλ (3): Οι στρατηγικές που χρησιμοποιούνται είναι από τα επίπεδα 1, 2 και 3. Αυτό το προφίλ έχει τον κωδικό 3.

Διευρυμένο προφίλ (4): Οι στρατηγικές που χρησιμοποιούνται προέρχονται και από τα τέσσερα επίπεδα (1,2,3 και 4). Αυτό το προφίλ έχει τον κωδικό 4.

Εύρος στρατηγικών – Μετατόπιση των στρατηγικών Προφίλ

Η εστίαση στο επίπεδο του εύρους στρατηγικής μας δίνει τη δυνατότητα να εντοπίσουμε αφενός τη μετατόπιση του εύρους στρατηγικής ενός μαθητή και αφετέρου τη μετατόπιση του στρατηγικού προφίλ από το προ-τεστ στο μετά-τεστ. Αυτό επιτυγχάνεται με τον υπολογισμό της διαφοράς των κωδικών των προφίλ του μαθητή στο προ- και στο μετά-τεστ: (κωδικός εύρους στρατηγικής μετά-τεστ) - (κωδικός εύρους στρατηγικής προ-τεστ). Έτσι, διατυπώνονται τρεις κατευθύνσεις μετατόπισης: κατεύθυνση +, κατεύθυνση 0, ή κατεύθυνση -.

Μέτρηση της ευελιξίας

Μια τροποποίηση του αρχικού μοντέλου IHMCES των Lemonidis & Likidis (2019) αξιοποιήθηκε και για τον τρόπο μέτρησης της ευελιξίας των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, διακρίθηκαν δύο τύποι ευελιξίας που αποδίδονται σε δύο διαφορετικές μεταβλητές.

Ο πρώτος τύπος ευελιξίας αντιστοιχεί στην ευελιξία 1 (DSN) και αφορά στον αριθμό των διαφορετικών στρατηγικών (Different Strategies Number) που χρησιμοποίησε κάθε μαθητής στα 7 έργα υπολογιστικής εκτίμησης που κλήθηκε να απαντήσει.

Ο δεύτερος τύπος ευελιξίας θεωρείται η ευελιξία 2 και αντιστοιχεί στη μεταβλητή SP (Strategic Power), η οποία ορίζεται ως το άθροισμα των γινομένων του κωδικού κάθε επιπέδου επί τον αριθμό των στρατηγικών που χρησιμοποιήθηκαν και άνηκαν σε αυτό. Έτσι, καθώς έχουμε 5 επίπεδα στρατηγικών (0ο , 1ο , 2ο , 3ο , 4ο), αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των στρατηγικών που χρησιμοποίησε το άτομο σε κάθε επίπεδο είναι a, b, c, d και e αντίστοιχα, δημιουργείται η εξίσωση $SP = 0 \cdot a + 1 \cdot b + 2 \cdot c + 3 \cdot d + 4 \cdot e$.

Τέλος, ο δείκτης αυτός μας έδωσε τη δυνατότητα να μετρήσουμε την ποικιλία των στρατηγικών που χρησιμοποιεί το άτομο συναρτήσει του επιπέδου αυτών. Έτσι, όσο μεγαλύτερη η ποικιλία των στρατηγικών που χρησιμοποιεί το άτομο και όσο υψηλότερου επιπέδου αυτές, τόσο υψηλότερη και η τιμή της μεταβλητής SP.

Μέτρηση Προσαρμοστικότητας

Η ικανότητα προσαρμοστικότητας των μαθητών, δηλαδή η ικανότητα να χρησιμοποιούν την πιο κατάλληλη στρατηγική, επικεντρώνοντας στην ταχύτητα και την ακρίβεια της απάντησης, μετρήθηκε με τη μεταβλητή ADSN (Appropriate Different Strategies Number), η οποία αφορά στον αριθμό κατάλληλων στρατηγικών που αντιστοιχούν στα 7 έργα της παρούσας έρευνα, όπως παρουσιάζονται στο παρακάτω πίνακα. Αυτές αποτελούν τον γρηγορότερο και καταλληλότερο τρόπο με τον οποίο μπορεί το άτομο να πραγματοποιήσει μια καλή εκτίμηση με την επιθυμητή ακρίβεια.

Π1	Π2	Π3	Π4	Π5	Π6	Π7
3	1.2	1.4	4	2.1	1.3	2.2

Πίνακας 2: Οι ενδεδειγμένες στρατηγικές στα 7 έργα υπολογιστικής εκτίμησης

Σύμφωνα με τον αριθμό των κατάλληλων στρατηγικών που χρησιμοποιεί κάθε μαθητής, μπορούμε να διαχωρίσουμε τους μαθητές σε προσαρμοστικούς και μη προσαρμοστικούς. Θεωρούμε ότι οι μαθητές είναι "προσαρμοστικοί" όταν χρησιμοποιούν έναν αριθμό κατάλληλων στρατηγικών ≥ ADSN-1, ο οποίος στην περίπτωσή μας είναι 7-1 = 6. Θεωρούμε "μη προσαρμοστικούς" τους μαθητές που χρησιμοποιούν αρκετές κατάλληλες στρατηγικές <ADSN-1, που στην περίπτωσή μας είναι<6 (Lemonidis, 2022).

Με τον ίδιο τρόπο, με βάση την τιμή της μεταβλητής ADSN = 7, μπορούμε να χωρίσουμε τους μαθητές της έρευνάς μας σε ευέλικτους και μη ευέλικτους ανάλογα με τον αριθμό των διαφορετικών σωστών στρατηγικών που χρησιμοποίησαν, δηλαδή ευελιξία 1. Έτσι, μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τους μαθητές ως ευέλικτους αν έχουν χρησιμοποιήσει αρκετές σωστές και διαφορετικές στρατηγικές ≥ 6 και μη ευέλικτους αν έχουν χρησιμοποιήσει λιγότερες από 6 στρατηγικές.

4.3 Διαχείριση Λαθών

Στα έργα υπολογιστικής εκτίμησης της παρούσας μελέτης έγκυρες απαντήσεις θα θεωρηθούν οποιεσδήποτε απαντήσεις είναι μικρότερες από το 15% της σωστής λύσης (+/-15%), ή αλλιώς, το σφάλμα εκτίμησης δεν ξεπερνάει το 15% της ακριβούς απόκρισης (Lemonidis, 2022).

Τα λάθη των μαθητών διαχωρίστηκαν σε 4 κατηγορίες (Lemonidis, 2022):

Πρώτη κατηγορία Λ1: Λανθασμένη επιλογή πράξης. Σε αυτή τη κατηγορία κατατάσσονται τα λάθη που προκύπτουν εξαιτίας εκτέλεσης πράξης διαφορετικής από ότι απαιτεί το πρόβλημα.

Δεύτερη κατηγορία Λ2: Σωστή εκτίμηση, λανθασμένη εκτέλεση πράξης. Σε αυτή τη κατηγορία κατατάσσονται τα λάθη που προκύπτουν επειδή ο μαθητής εφάρμοσε λανθασμένα τις ιδιότητες μιας πράξης, με άμεσο επακόλουθο να δώσει μη έγκυρη απάντηση.

Τρίτη κατηγορία Λ3: Εκτίμηση εκτός ορίων. Σε αυτή τη κατηγορία ο μαθητής στρογγυλοποιεί τους αριθμούς πέρα από το προκαθορισμένο όριο 15%, με απότοκο το αποτέλεσμα της εκτίμησης να ξεπερνάει το όριο του +/- 15%.

Τέταρτη κατηγορία Λ4: Τυχαία απάντηση. Σε αυτή τη κατηγορία ο μαθητής δίνει μια τυχαία απάντηση που δεν μπορεί να ερμηνευτεί.

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα λάθη και οι μη απαντήσεις δεν υπολογίζονται στον προσδιορισμό του προφίλ του κάθε μαθητή αναφορικά με τις στρατηγικές που χρησιμοποιεί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

1. Στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης που χρησιμοποιούν οι μαθητές του ειδικού σχολείου

Από την ανάλυση των απαντήσεων των συμμετεχόντων στο pre-test και στο post-test, που σχεδιάστηκαν ειδικά για τις ανάγκες της παρούσας μελέτης, προκύπτει ότι η πλειοψηφία των μαθητών του ειδικού σχολείου επηρεάστηκε έντονα από τη χρήση της αριθμομηχανής και δεν διαθέτει αναπτυγμένη την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης.

Αναλυτικότερα, ο Πίνακας 3 παρουσιάζει αναλυτικά τη συχνότητα και το ποσοστό χρήσης κάθε στρατηγικής υπολογιστικής εκτίμησης του τροποποιημένου μοντέλου IHMCES, που χρησιμοποιήθηκε από τους 8 μαθητές στο pre-test και post-test, καθώς και τα ποσοστά των διαφόρων λαθών και των μη απαντήσεων των μαθητών.

Επίπεδο Στρατηγικής / Στρατηγική	Pre test N = 56	Post test N = 56	Διαφορά
	Συχνότητα (%)	Συχνότητα (%)	Συχνότητα (%)
4. Αντιστάθμιση	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
3. Μετάφραση	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
3. Ομαδοποίηση/Μέσος Όρος	0 (0%)	0 (%)	0(0%)
2. Ανασύνθεση 2	1 (1,8%)	3 (5.4%)	+2(3,6%)
2.4 Επιμεριστικότητα	0 (0%)	0(0%)	0(0%)
2.3 Παραγοντοποίηση	0 (0%)	0(0%)	0(0%)
2.2 Ειδικοί Αριθμοί	1 (1.8%)	3 (5,4%)	+2(3,6%)
2.1 Συμβατοί Αριθμοί	0 (0%)	0 (0%)	0(0%)
1. Ανασύνθεση 1	16 (28.6%)	22 (39,3%)	+6 (10,7%)
1.4 Εμπρόσθιο Άκρο	0 (0%)	0(0%)	0(0%)
1.3 Περικοπή	2 (3,6%)	3(5,4%)	+1(1,8%)
1.2 Στρογγυλοποίηση χωρίς τη χρήση κανόνα	14 (25%)	19(33,9%)	+5(8,9%)
1.1 Στρογγυλοποίηση με τη χρήση κανόνα	0 (0%)	0 (0%)	0(0%)
0. Μη εκτίμησης	39 (69,6%)	31 (55,3%)	-8 (14,3%)
0.3 Διαίσθηση	4(7,1%)	4(7,1%)	0(0%)

0.2Ακριβής υπολογισμός και έπειτα στρογγυλοποίηση	6(10,7%)	11(19,6%)	+5(8,9%)
0.1Ακριβής υπολογισμός	8(14,3%)	8(14,3%)	0(0%)
0.0Τυχαία Απάντηση	10(17,9%)	2(3,6%)	-8(14,3%)
Λ1 Λανθασμένη επιλογή πράξης	2 (3.6%)	1(1.8%)	-1(1,8%)
Λ2 Σωστή εκτίμηση, λανθασμένη εκτέλεση πράξης	0 (0%)	0 (0%)	0(0%)
Λ3 Εκτίμηση εκτός ορίων	5(8,9%)	5 (8,9%)	0(0%)
Καμία απάντηση	4 (7,1%)	0(0%)	-4 (7,1%)

Πίνακας 3: Εξέλιξη του ποσοστού χρήσης κάθε στρατηγικής μεταξύ pre-test και post-test.

Από τα δεδομένα του Πίνακα 3 είναι εύκολα αντιληπτό ότι υπάρχει μια αξιοσημείωτη διαφορά (14,3%) στο επίπεδο 0 (μη εκτίμηση), το οποίο αποτελείται από λανθασμένες απαντήσεις και μη απαντήσεις μεταξύ των επιδόσεων πριν και μετά τις δοκιμασίες. Αναλυτικότερα, στο pre-test ο αριθμός των απαντήσεων, όπου χρησιμοποιήθηκαν στρατηγικές μη εκτίμησης, ήταν 39 (ποσοστό 69,6 %), ενώ στο post-test το αντίστοιχο πλήθος ήταν 31 (ποσοστό 55,3%). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μια ομάδα μαθητών να μετακινήθηκε από το επίπεδο 0 στο επίπεδο 1.

Ακόμη παρατηρείται σημαντική μείωση του αριθμού των απαντήσεων που βασίστηκαν στην στρατηγική 0.0 (τυχαία απάντηση) μεταξύ pre-test και post-test (17,9% έναντι 3,6%). Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μαθητές κατά τη διάρκεια του post-test διατύπωσαν κάποια εκτίμηση σε όλα τα έργα ανεξαρτήτως αν ήταν λογική ή όχι. Μια πιθανή εξήγηση των παραπάνω ευρημάτων αποτελεί το γεγονός ότι πολλοί μαθητές δεν γνώριζαν την έννοια της εκτίμησης στο pre-test, καθώς δεν είχαν δεχθεί συστηματική διδασκαλία της κατά τη σχολική τους φοίτηση και έτσι έδιναν τυχαίες απαντήσεις, ενώ στο post-test επέλεξαν να χρησιμοποιήσουν κάποια στρατηγική εκτίμησης από αυτές που συζητήθηκαν στη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης.

Σημαντική αύξηση παρατηρείται στον αριθμό των μαθητών που πραγματοποίησαν ακριβείς υπολογισμούς, αξιοποιώντας τη δυνατότητα χρήσης της αριθμομηχανής (25% έναντι 33,9), στοιχείο που δείχνει την εξοικείωση που απέκτησαν οι μαθητές με αναπηρία με το συγκεκριμένο εργαλείο κατά τη διάρκεια της παρέμβασης. Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι σε αρκετές περιπτώσεις η τυχαία απάντηση στο pre-test αντικαταστάθηκε με ακριβή υπολογισμό στο post-test. Επιπλέον, σημαντικό ποσοστό μαθητών (19,6) συνδύασε τον ακριβή υπολογισμό με την αριθμομηχανή με τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης, που είναι η προτιμώμενη στρατηγική αφού είναι η μοναδική που μπορούν να την επινοήσουν μόνοι τους.

Η στρατηγική της στρογγυλοποίησης χωρίς τη χρήση κανόνα (1.2) είναι η στρατηγική που χρησιμοποιήθηκε συνολικά στις περισσότερες περιπτώσεις (14 στο pre-test, ποσοστό 25%) ενώ σημειώθηκε σημαντική αύξηση του πλήθους (5, ποσοστό 8,9%) που χρησιμοποιήθηκε και στο post-test (19 περιπτώσεις, ποσοστό 33,9%). Το γεγονός αυτό ενισχύει την υπόθεση ότι χρησιμοποιείται στις περισσότερες περιπτώσεις επειδή είναι μια άτυπη ή ιδιοσυγκρασιακή στρατηγική, καθώς είναι προσωπική επινόηση των μαθητών με αναπηρία και όχι προϊόν διδασκαλίας (Lemonidis, 2020). Παράλληλα, κανένας μαθητής δεν χρησιμοποίησε τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης με κανόνα, καθώς δεν έχουν διδαχτεί τους κανόνες στρογγυλοποίησης. Στο σημείο αυτό είναι αναγκαίο να επισημανθεί ότι τα προβλήματα που τέθηκαν στους μαθητές και στο pre-test και στο post-test σχεδιάστηκαν με τέτοιο τρόπο που να απαιτούν την χρήση πολλών διαφορετικών στρατηγικών εκτίμησης και όχι μόνον της στρογγυλοποίησης.

Από τις υπόλοιπες στρατηγικές του επιπέδου 1, ελάχιστες είναι οι περιπτώσεις που χρησιμοποιήθηκε η περικοπή είτε στο pre-test (συνολικά 2 περιπτώσεις) είτε στο post-test (συνολικά 3 περιπτώσεις), ενώ κανένας μαθητής δεν εφάρμοσε τη στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου.

Μια πολύ μικρή αύξηση παρατηρείται στις στρατηγικές του επιπέδου 2 μετά την παρέμβαση, όπου ο 1 μαθητής (1,8%) του προ-τεστ αυξάνεται σε 3 (5,4%). Τέλος, αναφορικά με τις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης του 3^{ου} & 4^{ου} επιπέδου κανένας μαθητής δεν ήταν σε θέση να χρησιμοποιήσει στρατηγικές που απαιτούν βαθιά εννοιολογική κατανόηση της εκτίμησης, όπως η στρατηγική της αντιστάθμισης, η στρατηγική της ομαδοποίησης και η στρατηγική των συμβατών αριθμών. Το αποτέλεσμα αυτό εξηγεί την ιεράρχηση τους στο υψηλότερο επίπεδο των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης, καθώς ο συνδυασμός δύο ή περισσότερων στρατηγικών, με στόχο μια εκτίμηση κοντά στο ακριβές αποτέλεσμα, είναι δύσκολος για τους μαθητές με ή χωρίς αναπηρίες, καθώς δεν είναι εύκολο να αναπτυχθεί ιδιοσυγκρασιακά και πιθανόν είναι αναγκαίο να προηγηθεί συστηματική διδασκαλία και εξάσκηση.

2. Κατάταξη των μαθητών του Ειδικού Σχολείου σε στρατηγικά προφίλ στο pre-test και στο post-test ανάλογα με τις επιδόσεις τους.

Στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται τα στρατηγικά προφίλ των μαθητών του Ειδικού Σχολείου, όπως αυτά προέκυψαν από την ανάλυση των απαντήσεων τους στις προφορικές συνεντεύξεις στο pre-test και στο post-test.

Στην προ-δοκιμασία, πριν από την παρέμβαση η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών, (87,5%), έχουν προφίλ μη εκτίμησης, όπως φαίνεται στον Πίνακα 4. Δηλαδή, σε τέσσερα ή περισσότερα από τα επτά προβλήματα οι μαθητές δεν μπόρεσαν να κάνουν σωστή εκτίμηση, μπορεί να μην έδωσαν καμία απάντηση ή να έκαναν λάθος στις πράξεις, ή να προσπάθησαν να απαντήσουν με ακριβή υπολογισμό ή και να απάντησαν λανθασμένα για άλλους διάφορους λόγους. Μετά την παρέμβαση, στο post-test, το ποσοστό των μαθητών που παρουσιάζουν αυτό το προφίλ μη εκτίμησης μειώνεται σημαντικά κατά 25%.

	Στρατηγικά Προφίλ					
	0	1	2	3	4	Σύνολο
Test	Μη εκτίμησης	Εκκίνησης	Βασικό	Προηγμένο	Διευρυμένο	
Pre	7 (87,5%)	1(12,5%)	0 (0%)	0 (0%)	0(0%)	8 (100%)
Post	5(62,5%)	2(25%)	1 (12,5%)	0 (0%)	0 (0%)	8 (100%)

Πίνακας 4: Στρατηγικά προφίλ μαθητών του Ειδικού σχολείου

Μια πολύ μικρή αύξηση παρατηρήθηκε στο πλήθος των μαθητών που έχουν προφίλ εκκίνησης μετά την παρέμβαση (12,5% έναντι 25%), ενώ αξίζει να σημειωθεί ότι ένας μαθητής κατετάγη στο βασικό προφίλ μετά την παρέμβαση, καθώς αξιοποίησε 2 στρατηγικές από το επίπεδο 1 και μια στρατηγική από το επίπεδο 2 κατά την επίλυση τεσσάρων προβλημάτων. Τέλος, κανένας μαθητής δεν κατατάχθηκε στο προηγμένο και διευρυμένο προφίλ, καθώς απαιτούνται στρατηγικές από τα επίπεδα 3 & 4, τις οποίες δεν διαθέτουν.

3. Εύρος στρατηγικών –Μετατοπίσεις του εύρους στρατηγικών

Η εστίαση στο επίπεδο του εύρους στρατηγικής μας δίνει τη δυνατότητα να εντοπίσουμε αφενός τη μετατόπιση του εύρους στρατηγικής ενός μαθητή και αφετέρου τη μετατόπιση του στρατηγικού προφίλ από το προ-τεστ στο μετά-τεστ. Αυτό επιτυγχάνεται με τον υπολογισμό της διαφοράς των κωδικών των προφίλ του μαθητή στο προ- και στο μετά-τεστ: (κωδικός εύρους στρατηγικής μετά-τεστ) - (κωδικός εύρους στρατηγικής προ-τεστ). Έτσι, διατυπώνονται τρεις κατευθύνσεις μετατόπισης: κατεύθυνση +, κατεύθυνση 0, ή κατεύθυνση -.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, στην προ-δοκιμασία, πριν από την παρέμβαση, η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών, (87,5%), έχουν προφίλ μη εκτίμησης. Ωστόσο, μετά την παρέμβαση, στο post-test, το ποσοστό των μαθητών που παρουσιάζουν αυτό το προφίλ μη εκτίμησης μειώνεται σημαντικά κατά 25%. Επιπλέον, μια πολύ μικρή αύξηση παρατηρείται στο πλήθος των μαθητών που έχουν προφίλ εκκίνησης μετά την παρέμβαση (12,5% έναντι 25%), ενώ αξίζει να σημειωθεί ότι ένας μαθητής (12,5%) κατετάγη στο βασικό προφίλ μετά την παρέμβαση,

Στον πίνακα 5 αποτυπώνεται το εύρος στρατηγικών δυο μαθητών (Μ5 και Μ8) στα 7 έργα υπολογιστικής εκτίμησης τόσο στο pre-test όσο και στο post-test.

		Εύρους Στρατηγικών							
Μαθητής	Test	0 Μη εκτίμησης	1 Ανασύνθεση 1	2 Ανασύνθεση 2	3 Μετάφραση	4 Αντιστάθμιση.	Εύρος Στρατηγικών Προφίλ	Μετατόπιση Εύρους	Τροχιά
5	Pre	5	2	0	0	0	Μη εκτίμησης (0)	1-0	1
	Post	3	4	0	0	0	Εκκίνησης (1)		
8	Pre	4	1	0	0	0	Μη εκτίμησης (0)	0-0	0
	Post	5	2	0	0	0	Μη εκτίμησης (0)		

Πίνακας 5: Παραδείγματα εύρους στρατηγικών προφίλ δύο μαθητών, μετατοπίσεις εύρους στρατηγικών και τιμή τροχιάς

Όπως φαίνεται, ο Μ5 στο pre-test χρησιμοποίησε πέντε φορές στρατηγική του επιπέδου Μη εκτίμησης και 2 φορές στρατηγικές του επιπέδου Ανασύνθεση 1, με αποτέλεσμα στο pre-test να έχει προφίλ Μη εκτίμησης με κωδικό προφίλ 0. Στο post-test χρησιμοποίησε τρεις φορές στρατηγική του επιπέδου Μη εκτίμησης και τέσσερις φορές στρατηγικές του επιπέδου 1, με αποτέλεσμα να έχει προφίλ εκκίνησης με κωδικό προφίλ 1.

Ακόμη, ο Μ8 στο pre-test, έκανε δυο λάθη, χρησιμοποίησε τέσσερις φορές στρατηγική του επιπέδου Μη εκτίμησης και 1 φορά στρατηγική του επιπέδου Ανασύνθεση 1, με αποτέλεσμα στο pre-test να έχει προφίλ Μη εκτίμησης με κωδικό προφίλ 0. Στο post-test χρησιμοποίησε πέντε φορές στρατηγική του επιπέδου Μη εκτίμησης και δύο φορές στρατηγικές του επιπέδου 1, με αποτέλεσμα να έχει πάλι προφίλ Μη εκτίμησης με κωδικό προφίλ 0. Το εύρος, που κυμάνθηκε το προφίλ του Μ8, ήταν αντιπροσωπευτικό για πολλούς μαθητές αυτής της μελέτης.

Ως προς τη μετατόπιση εύρους, ο Μ5 που κατατάχθηκε στο pre-test στο προφίλ μη εκτίμησης (0) και στο post-test στο προφίλ εκκίνησης (1) έχει θετική πορεία, καθώς δείχνει η διαφορά 1 – 0 = 1. Ο Μ8 που στο pre-test όπως και στο post-test κατατάχθηκε στο προφίλ μη εκτίμησης (0) έχει σταθερή πορεία.

Συνολικά, η κατεύθυνση της μετατόπισης του εύρους των στρατηγικών των μαθητών παρουσιάζεται στον παρακάτω Πίνακα.

Κατεύθυνση	**Συχνότητα**	**Ποσοστό (%)**
Θετική	3	37,5%
Σταθερή	5	62,5%
Αρνητική	0	0(0%)

Πίνακας 6: Μετατόπιση Εύρους Στρατηγικών

Από τα δεδομένα του Πίνακα 6, διαπιστώνεται ότι η πλειοψηφία του δείγματος (62,5%) δεν άλλαξε το προφίλ της, δηλαδή το επίπεδο στρατηγικών που χρησιμοποιούσαν. Ωστόσο, ένα σημαντικό ποσοστό μαθητών (37,5%) είχε θετική αλλαγή στα εύρη στρατηγικών, δηλαδή ανέπτυξε στρατηγικές υψηλότερου επιπέδου μετά την παρέμβαση. Κανένας μαθητής δεν παρουσίασε αρνητική εξέλιξη στο προφίλ του.

4. Ευελιξία των μαθητών του ειδικού σχολείου

Κατά την επίλυση ενός συνόλου αριθμητικών προβλημάτων είναι ενδιαφέρουσα η προοπτική να αναδείξουμε εάν τα άτομα επιλέγουν κάθε φορά την ίδια στρατηγική προκειμένου να πραγματοποιήσουν μια εκτίμηση ή αν διαθέτουν ευελιξία στον τρόπο σκέψης και υπολογισμού, δηλαδή αν διαθέτουν μια ευρεία γκάμα στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης.

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων αρχικά διερευνήθηκε η ευελιξία 1 (DSN), δηλαδή ο αριθμός των διαφορετικών στρατηγικών (Different Strategies Number) που χρησιμοποίησε κάθε συμμετέχοντας στα 7 έργα της προ-δοκιμασίας και της μετά-δοκιμασίας. Στον Πίνακα 7 αποτυπώνεται ο αριθμός των διαφορετικών στρατηγικών που χρησιμοποίησε ο κάθε μαθητής στη παρούσα έρευνα και στις δυο δοκιμασίες.

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
Pre-Test DSN	1	2	1	2	2	1	1	1
Post-Test DSN	1	2	1	3	2	2	1	2

Πίνακας 7: Αριθμός διαφορετικών στρατηγικών (DSN) ανά μαθητή

Από τα παραπάνω εξάγεται το συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει σημαντική αύξηση της ευελιξίας 1 μεταξύ του pre-test και του post-test. Πιο συγκεκριμένα, το σύνολο του δείγματος της παρούσας έρευνας δεν αύξησε σημαντικά τον αριθμό των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν μετά την παρέμβαση και επομένως εντάσσεται στην κατηγορία Μη ευέλικτοι.

Πέρα από τον αριθμό των στρατηγικών που κάνουν χρήση οι μαθητές του ειδικού σχολείου, είναι πολύ σημαντικός και ο εντοπισμός του επιπέδου αυτών. Για το λόγο αυτό, η ευελιξία 2 εξετάστηκε με τον δείκτη SP (Strategic Power), μια μεταβλητή που εκφράζει αφενός τον αριθμό των διαφορετικών στρατηγικών που χρησιμοποιήθηκαν σωστά από κάθε συμμετέχοντα και αφετέρου το επίπεδο στο οποίο αυτές ανήκουν. Υπολογίστηκε με την εξίσωση $SP = 0 \cdot a + 1 \cdot b + 2 \cdot c + 3 \cdot d + 4 \cdot e$, όπου a, b, c, d και e, ο αριθμός των στρατηγικών που χρησιμοποίησε το άτομο σε κάθε επίπεδο αντίστοιχα.

Στον Πίνακα 8, όπου παρουσιάζονται οι τιμές της μεταβλητής SP και από τις δυο δοκιμασίες, παρατηρούμε ότι το πλήθος των συμμετεχόντων κινήθηκε σε πολύ χαμηλά επίπεδα.

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
Pre-Test SP	1	3	1	2	2	1	1	1
Post –Test SP	1	3	1	4	2	3	1	2

Πίνακας 8: Δείκτης SP ανά μαθητή

Από τα παραπάνω ευρήματα φαίνεται ότι η διδακτική παρέμβαση δεν αύξησε σημαντικά τον αριθμό των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές και το επίπεδο αυτών.

5. Προσαρμοστικότητα των μαθητών του Ειδικού Σχολείου

Πέρα, όμως, από τη γκάμα των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης που αξιοποιούν οι μαθητές του Ειδικού Σχολείου και το επίπεδο αυτών, η μελέτη αυτή σχεδιάστηκε έτσι ώστε να αναδείξει επιπλέον το κατά πόσο οι συμμετέχοντες έχουν την ικανότητα να χρησιμοποιούν την πιο κατάλληλη στρατηγική, επικεντρώνοντας στην ταχύτητα και την ακρίβεια της απάντησης. Η παράμετρος αυτή διερευνήθηκε μέσω της μεταβλητής ADSN (Appropriate Different Strategies Number).

Στον Πίνακα 9 παρουσιάζεται ο αριθμός των κατάλληλων διαφορετικών στρατηγικών που χρησιμοποιεί ο κάθε μαθητής και στις δυο δοκιμασίες.

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
Pre-Test ADSN	1	2	1	2	2	1	1	0
Post-Test ADSN	1	2	1	3	2	1	1	1

Πίνακας 9: Αριθμός των κατάλληλων διαφορετικών στρατηγικών (ADSN) ανά μαθητή

Από τα παραπάνω εξάγεται το συμπέρασμα ότι το σύνολο του δείγματος της παρούσας έρευνας και στις δυο δοκιμασίες δεν κατάφερε να εντοπίσει την κατάλληλη στρατηγική εκτίμησης του εκάστοτε προβλήματος σε 6 τουλάχιστον από τα έργα της προ- και μετά - δοκιμασίας και επομένως εντάσσεται στην κατηγορία Μη προσαρμοστικοί. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να εξηγηθεί και από τα προηγούμενα στοιχεία της ευελιξίας. Αφού οι μαθητές του ειδικού σχολείου δεν διαθέτουν ποικιλία στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης, δεν έχουν στη φαρέτρα τους αρκετά «όπλα», ώστε να ανακαλύψουν την καταλληλότερη για κάθε περίπτωση. Ακόμη, είναι πολύ δύσκολο έως ανέφικτο σε τόσο σύντομο χρονικό διάστημα να αναγνωρίσουν το πεδίο εφαρμογής της καθεμίας στρατηγικής. Όλα τα παραπάνω ευρήματα αναδεικνύουν όλο και πιο έντονα την ανάγκη συστηματικής διδακτικής παρέμβασης στην υπολογιστική εκτίμηση στη γενική και ειδική αγωγή.

6. Συχνότητα και Λόγοι χρήσης της αριθμομηχανής από τους μαθητές του Ειδικού Σχολείου

Στο πλαίσιο επίλυσης των προβλημάτων υπολογιστικής εκτίμησης από μαθητές με αναπηρίες, ένα πολύ ενδιαφέρον στοιχείο που αναδεικνύει η παρούσα έρευνα είναι ο βαθμός αξιοποίησης της δυνατότητας χρήσης της αριθμομηχανής και ο λόγος χρήσης της.

Από την ανάλυση των δεδομένων της προφορικής συνέντευξης, προκύπτει ότι η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών του Ειδικού Σχολείου χρησιμοποίησε την αριθμομηχανή κατά την πραγματοποίηση εκτιμήσεων και στις δυο δοκιμασίες.

Αναλυτικότερα, οι Πίνακες 10 και 11 παρουσιάζουν αναλυτικά τη συχνότητα χρήσης της αριθμομηχανής ανά μαθητή και ανά πρόβλημα αντίστοιχα και στις δυο δοκιμασίες.

Μαθητές	**Συχνότητα Χρήσης (%)**	
	Pre-test	**Post-test**
M1	5(71,4%)	5(71,4%)
M2	5(71,4%)	6(85,7%)
M3	5(71,4%)	5(71,4%)
M4	4(57,1%)	5(71,4%)
M5	4(57,1%)	6(87,5%)
M6	4(57,1%)	4(57,1%)
M7	5(71,4%)	5(71,4%)
M8	4(57,1%)	6(87,5%)

Πίνακας 10: ***Συχνότητες και ποσοστά της χρήσης της αριθμομηχανής ανά μαθητή***

Προβλήματα	Συχνότητα Χρήσης (%)	
	Pre-Test	**Post-Test**
Π1	4(50%)	6(75%)
Π2	0(0%)	0(0%)
Π3	8(100%)	8(100%)
Π4	8(100%)	8(100%)
Π5	3(37,5%)	5(62,5%)
Π6	8(100%)	8(100%)
Π7	5(62,5%)	6(75%)

Πίνακας 11: ***Συχνότητες και ποσοστά της χρήσης της αριθμομηχανής ανά πρόβλημα***

Από τα δεδομένα του Πίνακα 10 είναι εύκολα αντιληπτό ότι και στις δυο δοκιμασίες τα υψηλότερα ποσοστά χρήσης της αριθμομηχανής εντοπίζονται σε προβλήματα με δεκαδικούς αριθμούς ή με διψήφιους αριθμούς. Σημαντική αύξηση της χρήσης της αριθμομηχανής εμφανίζεται στο post-test σε προβλήματα με πολλά αριθμητικά δεδομένα. Μια πιθανή εξήγηση αποτελεί το γεγονός ότι σε αρκετές περιπτώσεις η τυχαία απάντηση ή μη απάντηση που προτίμησαν οι μαθητές στο pre-test αντικαταστάθηκε με ακριβή υπολογισμό στο post-test λόγω της μεγαλύτερης εξοικείωσης των μαθητών με το συγκεκριμένο εργαλείο μετά τη διδακτική παρέμβαση.

Τέλος, οι κυριότεροι λόγοι χρήσης της αριθμομηχανής από τους μαθητές του ειδικού σχολείου, όπως διαπιστώθηκε από τα δεδομένα των προσωπικών συνεντεύξεων, ήταν ο ακριβής υπολογισμός του αποτελέσματος του προβλήματος, ο υπολογισμός του αποτελέσματος της εκτίμησης, ειδικότερα όταν απαιτούνταν αφαίρεση διψήφιων αριθμών ή πράξη με δεκαδικό αριθμό, ο πειραματισμός μαθητών με τους αριθμούς και τις πράξεις, η διατύπωση εικασιών και η καλύτερη ερμηνεία των απαντήσεων τους.

Χαρακτηριστικά αναφέρονται σχόλια μαθητών: «Δεν ξέρω τι πράξη θα κάνω για να το λύσω… Λοιπόν θα δοκιμάσω στην αριθμομηχανή… Αν κάνω 80+30 θα βρω 110, δύσκολα να του έμειναν τόσες πολλές σελίδες αφού λέει ότι διάβασε μια μέρα… Θα κάνω 80-30 και θα βρω 50… Μου φαίνεται πιο σωστό», «Σίγουρα πρέπει να κάνω αφαίρεση γιατί μου λέει να βρω πόσα έμειναν. Πόσο δεν με αρέσουν αυτές οι αφαιρέσεις!! Πήρα την αριθμομηχανή για να την κάνω σίγουρα σωστά. », «Με αυτά τα κόμματα δεν μπορώ να κάνω πράξη με το μυαλό ... Για αυτό χρησιμοποίησα την αριθμομηχανή ... Ξέρω από την κυρία μου το κόμμα είναι αυτή η τελίτσα κάτω ... Βρήκα πόσο κάνει. Για περίπου που με ρωτάει, είπα τον αριθμό μπροστά από το κόμμα χωρίς να ξέρω γιατί..» και « Λέει συνολικά, άρα μαζί όλα άρα κάνω πρόσθεση. Αυτά τα κόμματα με δυσκολεύουν για αυτό θα δοκιμάσω κάποιους αριθμούς. Αν κάνω το 39,5 → 40, το 37,6 → 30 και το 42,2 → 50 θα βρω 40+30+50=….. Καλύτερα να πάρω την αριθμομηχανή γιατί δυσκολεύομαι … Μας κάνει 120 … Μου φαίνεται πολύ να μάζεψε σε τρεις μήνες. Ας κάνω το 40→ 30 και το 50→40 30+30+40=…. Πάλι με την αριθμομηχανή γιατί δεν μπορώ αλλιώς…. Μας κάνει 100 … Αυτό το νούμερο μου φαίνεται καλύτερο. Θα απαντήσω 100»

Συνοψίζοντας, η παρουσία της αριθμομηχανής επηρέασε έντονα τους μαθητές του Ειδικού Σχολείου τόσο στη διατύπωση της συλλογιστικής πορείας όσο και στον τρόπο υπολογισμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

6.1 Συζήτηση – Συμπεράσματα

Στην παρούσα έρευνα έγινε προσπάθεια να διερευνηθεί η ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης των μαθητών του Ειδικού Σχολείου σε προβλήματα που περιελάμβαναν προσθέσεις και αφαιρέσεις. Μέσω προφορικών συνεντεύξεων οι μαθητές κλήθηκαν να πραγματοποιήσουν εκτιμήσεις σε 7 έργα. Η ιεραρχική ταξινόμηση των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης βάσει του τροποποιημένου μοντέλου IHMCES των Lemonidis & Likidis (2019) βοήθησε να διαμορφωθεί αφενός μια συνολική εικόνα του τύπου των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές, του στρατηγικού προφίλ τους, της ικανότητας ευελιξίας τους και της ικανότητας προσαρμοστικότητάς τους και αφετέρου τις αλλαγές που μπορούν να επέλθουν στα παραπάνω μετά από μια σύντομη παρέμβαση.

Το γενικό συμπέρασμα που προκύπτει από τη παρούσα έρευνα είναι ότι παρόλο που οι οχτώ μαθητές πριν από τη συμμετοχή τους σε αυτή τη μελέτη δεν γνώριζαν στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης, μετά το πέρας της παρέμβασης και με τη βοήθεια της αριθμομηχανής απέκτησαν σημαντική γνώση των στρατηγικών αυτών. Ακόμη, η παρουσία της αριθμομηχανής άσκησε μεγάλη επιρροή τόσο στη διατύπωση της συλλογιστικής τους πορείας όσο και στον τρόπο υπολογισμού των μαθητών του Ειδικού Σχολείου.

Αναλυτικότερα, αναφορικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα η αρχική γνώση των στρατηγικών των μαθητών με αναπηρίες, όπως αναλύθηκε με την ιεραρχική ταξινόμηση των στρατηγικών του τροποποιημένου μοντέλου IHMCES των Lemonidis & Likidis (2019) , παρουσιάζεται παρακάτω.

Σχεδόν, τα τρίτα τέταρτα των μαθητών του δείγματος (69,6%) βρίσκονταν στο επίπεδο 0 της μη εκτίμησης: απάντησαν τυχαία ή διαισθητικά ή έκαναν ακριβείς υπολογισμούς κυρίως με τη χρήση της αριθμομηχανής ή δεν απάντησαν. Ο μεγάλος αριθμός λανθασμένων απαντήσεων, ιδίως στην προ-δοκιμασία, είναι απλά μια αντανάκλαση της έλλειψης προσοχής που λαμβάνει το μαθηματικό αντικείμενο της εκτίμησης κατά τη σύγχρονη μαθησιακή διαδικασία (Ghazali et al., 2010). Πιο συγκεκριμένα, το πρόγραμμα σπουδών, οι οδηγοί εκπαιδευτικών και το προσβάσιμο εκπαιδευτικό υλικό των Μαθηματικών επικεντρώνονται κυρίως στον γραπτό υπολογισμό και δεν επαρκούν για να δώσουν τη δυνατότητα στους μαθητές ειδικής αγωγής να αναπτύξουν την αίσθηση του αριθμού και ιδιαίτερα την δεξιότητα της εκτίμησης

Ως εκ τούτου, οι μαθητές που προσπάθησαν να υπολογίσουν με ακριβή υπολογισμό αξιοποίησαν την αριθμομηχανή, γεγονός που ενισχύει την άποψη των Sumardyono & Padmi (2020) ότι η αριθμομηχανή είναι ένα καθαρά και μόνο υπολογιστικό εργαλείο.

Αρκετοί μαθητές (25%) χρησιμοποίησαν τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης χωρίς τη χρήση του κανόνα επειδή είναι μια στρατηγική εκτίμησης που μπορεί να την επινοήσουν μόνοι τους και να την χρησιμοποιήσουν, παρόλο που δεν την έχουν διδαχτεί. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η έντονη χρήση της στρατηγικής της στρογγυλοποίησης χωρίς τη χρήση κανόνα ερμηνεύεται από το γεγονός ότι η υπολογιστική εκτίμηση και οι στρατηγικές της δε διδάσκονται στο ελληνικό ειδικό σχολείο. Συνεπώς οι μαθητές του ειδικού σχολείου δεν διαθέτουν μεγάλο ρεπερτόριο στρατηγικών.

Πολύ μικρό ποσοστό μαθητών (3,2%) αξιοποίησε τη στρατηγική της περικοπής (αντικατάσταση ενός ή περισσότερων ψηφίων στο δεξί άκρο των αριθμών με μηδενικά), η οποία αποτελεί μέρος των στρατηγικών στρογγυλοποίησης. Ακόμη, ένας μόλις μαθητής (1,6%) χρησιμοποίησε τη στρατηγική των ειδικών αριθμών (αντικατάσταση ενός ή περισσότερων αριθμών με αυτούς που είναι κοντά σε ειδικές τιμές), την οποία δεν διδάχθηκε στο σχολείο και φαίνεται ότι χρησιμοποίησε μέσω των γενικών γνώσεων και της προσωπικής του εμπειρίας στις καθημερινές αγορές («το 0,950 κιλά είναι κοντά στο 1 κιλό. Το έχω ακούσει στο μανάβικο που πάω»).

Όσον αφορά τα προφίλ του εύρους των στρατηγικών, διαπιστώσαμε ότι ένας μόλις μαθητής του δείγματος εμφανίζει προφίλ εκκίνησης, σε αντίθεση με τους υπολοίπους που κατέχουν προφίλ Μη εκτίμησης. Αυτό φαίνεται, επίσης, και από το γεγονός ότι το σύνολο του δείγματος της παρούσας έρευνας εντάσσεται στην κατηγορία Μη ευέλικτοι, καθώς κανένας δεν ήξερε να χρησιμοποιεί 6 ή περισσότερες στρατηγικές. Ακόμη, η προσαρμοστικότητα των μαθητών ήταν παρά πολύ χαμηλή, καθώς δεν μπορούσαν να εντοπίσουν τις κατάλληλες στρατηγικές στα συγκεκριμένα προβλήματα.

Τα παραπάνω αποτελέσματα της προ δοκιμασίας δύναται να θεωρηθούν αναμενόμενα, καθότι ήταν εξ αρχής γνωστό ότι οι συμμετέχοντες φοιτούν σε ένα παραδοσιακό περιβάλλον διδασκαλίας, όπου κυριαρχεί η απλή εφαρμογή των αλγόριθμων και η επίλυση απλών προβλημάτων. Συνεπώς, δεν έχουν διδαχθεί τις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης (όσες χρησιμοποίησαν, αποτελούν προϊόν δημιουργικής σκέψης των ίδιων) και επομένως δεν αναμένονταν επιδόσεις υψηλότερου επιπέδου.

Στη συνέχεια, θα γίνει η παρουσίαση των γνώσεων των μαθητών σχετικά με τις στρατηγικές μετά την παρέμβαση. Πριν την αναφορά των ευρημάτων, είναι σημαντικό να αναφέρουμε τα κυριότερα χαρακτηριστικά της διδακτικής παρέμβασης. Πιο συγκεκριμένα, τα σημαντικότερα γνωρίσματα της παρέμβασης, η οποία πραγματοποιήθηκε στην παρούσα έρευνα, ήταν ότι είχε μικρή διάρκεια, ότι υπήρχε η δυνατότητα χρήσης της αριθμομηχανής και ότι επρόκειτο για μια διδασκαλία στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης με παρέμβαση της ερευνήτριας. Υπήρχε, επίσης, συζήτηση και διαπραγμάτευση μεταξύ των μαθητών σχετικά με την καταλληλότητα της χρήσης κάθε στρατηγικής, γεγονός που φαίνεται να έχει βελτιώσει σε μικρό βαθμό το ρεπερτόριο στρατηγικών των μαθητών του Ειδικού Σχολείου.

Ειδικότερα, όσον αφορά το δεύτερο και τρίτο ερευνητικό ερώτημα, σχετικά με τα αποτελέσματα της μετά-δοκιμασίας, ο αριθμός των μαθητών που βρίσκονταν στο επίπεδο 0 (μη εκτίμηση) και δεν μπορούσαν να πραγματοποιήσουν εκτιμήσεις υπέστη σημαντική μείωση. Πιο συγκεκριμένα, το μεγαλύτερο ποσοστό μαθητών (69,6%), που εμφάνιζαν αυτό το επίπεδο, μειώθηκε κατά 14,3% κατά τη διάρκεια του post - test.

Ακόμη, το μεγαλύτερο ποσοστό των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές (39,3%) ανήκει στο επίπεδο 1, το οποίο χαρακτηρίζεται από την αλλαγή ή επεξεργασία των αριθμών με βάση τη θεσιακή τους αξία (στρογγυλοποίηση). Το παραπάνω εύρημα επιβεβαιώνεται και από την έρευνα των Bouck & Bouck (2008), όπου οι μαθητές με ή χωρίς αναπηρίες, που επιχείρησαν να εκτιμήσουν τα αποτελέσματα κατά την επίλυση προβλημάτων, έκαναν χρήση κυρίως της στρογγυλοποίησης.

Μετά την παρέμβαση, σημαντικό ποσοστό μαθητών (25%) βελτίωσε το προφίλ της υπολογιστικής εκτίμησης και το 75% των μαθητών δεν παρουσίασε καμία αλλαγή στο προφίλ του. Αξίζει να αναφερθεί ότι κανένας από τους μαθητές δεν χειροτέρεψε. Αναλυτικότερα, το κυρίαρχο προφίλ (62,5%) που εμφανίζεται και μετά την παρέμβαση είναι το Προφίλ Μη Εκτίμησης, στο οποίο οι μαθητές δεν μπόρεσαν να κάνουν σωστή εκτίμηση σε τέσσερα ή περισσότερα προβλήματα. Σημαντική αύξηση, όμως, παρουσιάστηκε στο ποσοστό μαθητών (25%), που εμφανίζει το προφίλ Εκκίνησης, όπου οι μαθητές χρησιμοποιούν στρατηγικές από το επίπεδο 1. Αξιοσημείωτο αποτελεί το γεγονός ότι ένας μαθητής κατετάγη στο Βασικό προφίλ, αξιοποιώντας στρατηγικές από το επίπεδο 1 και 2.

Επομένως, φαίνεται ότι ενώ η παρέμβαση είχε γενικά θετικά αποτελέσματα όσον αφορά τη βελτίωση του επιπέδου των στρατηγικών, εντούτοις οι μαθητές δεν χρησιμοποίησαν μαζικά το $2^{ο}$ ή ειδικά το $3^{ο}$ και το $4^{ο}$ επίπεδο. Ιδιαίτερα, το $3^{ο}$ και το 4ο επίπεδο στρατηγικών δεν χρησιμοποιήθηκε από κάποιον μαθητή. Συνεπώς, η παρέμβαση δεν βελτίωσε καθόλου τη χρήση των στρατηγικών της ομαδοποίησης και της αντιστάθμισης από τους μαθητές. Βέβαια, όπως προκύπτει από τη βιβλιογραφία, η στρατηγική της αντιστάθμισης είναι η πιο δύσκολη τόσο για τους μαθητές όσο και για τους ενήλικες, καθώς απαιτεί βαθιά εννοιολογική κατανόηση της εκτίμησης (Lemonidis & Likidis, 2019).

Παρατηρήσαμε, επίσης, σχετικά με το τέταρτο ερευνητικό ερώτημα, ότι η ευελιξία (η ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν σωστά μια ποικιλία στρατηγικών) και η προσαρμοστικότητα (η ικανότητα να χρησιμοποιούν την κατάλληλη στρατηγική σε κάθε πρόβλημα) παρέμειναν αμετάβλητες στο σύνολο των μαθητών. Ειδικότερα, η διδακτική παρέμβαση δεν αύξησε σημαντικά τον αριθμό των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές και το επίπεδο αυτών, ώστε να είναι σε θέση να εντοπίσουν την ενδεδειγμένη σε συγκεκριμένα προβλήματα.

Αναφορικά με τη χρήση της αριθμομηχανής στην ανάπτυξη ικανοτήτων υπολογιστικής εκτίμησης των μαθητών του ειδικού σχολείου, είναι εύκολα αντιληπτό ότι μια αριθμομηχανή είναι ένα πολύτιμο εργαλείο που οι μαθητές, ακόμη και οι μαθητές με αναπηρίες, μπορούν να εύκολα να χειριστούν. Για αυτούς τους οχτώ συμμετέχοντες, η χρήση της αριθμομηχανής στην διδασκαλία των Μαθηματικών ήταν μια ολοκαίνουρια εμπειρία. Και οι οχτώ ενθουσιάστηκαν πολύ με τον νέο τρόπο μάθησης, εκφράζοντας, συγκεκριμένα, ότι «η χρήση της αριθμομηχανής κάνει τα δύσκολα προβλήματα των μαθηματικών να φαίνονται παιχνιδάκι».

Παράλληλα, η παρουσία της αριθμομηχανής ενίσχυσε τη διάθεση εμπλοκής των μαθητών σε ένα μαθηματικό αντικείμενο άγνωστο για αυτούς, γιατί, όπως ανέφεραν, μπορούσαν να υπολογίσουν το αποτέλεσμα εύκολα και γρήγορα ανεξαρτήτως αν ο αριθμός έχει κόμμα ή όχι ή αν έχει πολλά ψηφία.

Επιπρόσθετα, το συγκεκριμένο εργαλείο συνέβαλε, πέρα από τον ακριβή υπολογισμό, στον πειραματισμό των μαθητών με τους αριθμούς και τις πράξεις, στη διατύπωση εικασιών και στην καλύτερη ερμηνεία των απαντήσεων τους. Τα αποτελέσματα αυτά ενδέχεται να επιβεβαιώνουν ότι η παρουσία της αριθμομηχανής παρέχει ένα πλουσιότερο μαθησιακό περιβάλλον για την προώθηση της εκμάθησης της εκτίμησης από τα παιδιά με αναπηρίες, καθώς και για την άρση της ανάγκης εστίασης στις διαδικασίες αρίθμησης (Walcott & Stickles, 2012).

Τέλος, είναι πολύ σημαντικό να αναφέρουμε το ενδιαφέρον που έδειξαν οι μαθητές για τη συμμετοχή τους στην έρευνα, παρόλο που δεν είχαν εξοικείωση με τη διαδικασία της εκτίμησης. Ήταν, όμως, πρόθυμοι να έρθουν σε επαφή με ένα αντικείμενο που δεν είχαν διδαχθεί στο σχολείο. Στην αρχή της συνέντευξης στην προ-δοκιμασία ήταν λίγο αγχωμένοι, αλλά όσο περνούσε ο χρόνος εξοικειωνόταν με τη διαδικασία. Κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, οι μαθητές ήταν αρκετά προσηλωμένοι στο στόχο της εργασίας και διατύπωσαν εύστοχες παρατηρήσεις για τις στρατηγικές κατά τη διάρκεια των συζητήσεων. Πολύ μικρές εντάσεις παρουσιάστηκαν στην συνεργασία μεταξύ των ομάδων, οι οποίες αντιμετωπίστηκαν άμεσα. Μετά το τέλος της διδακτικής παρέμβασης, η πλειοψηφία των μαθητών ήθελε να ξεκινήσει πρώτη το post-test, για να δοκιμάσει τις νέες της γνώσεις.

6.2 Περιορισμοί της έρευνας

Ως περιορισμό της έρευνας θεωρούμε τη δειγματοληψία μας, η οποία αφενός είναι περιορισμένη σε έκταση καθώς απευθυνθήκαμε μόνο σε μαθητές που φοιτούν σε ένα συγκεκριμένο ειδικό σχολείο, και, αφετέρου, δεν πληροί τους κανόνες της τυχαίας δειγματοληψίας. Ακόμη, η επιλογή των συμμετεχόντων έγινε με βάση τις πληροφορίες που συλλέξαμε από τις δασκάλες, και όχι μέσω αξιολόγησης της μαθηματικής τους επίδοσης από κάποιο σταθμισμένο τεστ. Παράλληλα, έγινε προσπάθεια και οι οχτώ μαθητές να προέρχονται από παραπλήσιο κοινωνικό και μορφωτικό επίπεδο, ώστε να είναι σε θέση να μας δώσουν πλούσιες πληροφορίες για την έρευνα μας. Συνεπώς, τα αποτελέσματα της έρευνας δεν μπορούν να γενικευθούν για το σύνολο των Ελλήνων μαθητών με αναπηρίες, ωστόσο τα δεδομένα που συλλέξαμε από τις προσωπικές συνεντεύξεις μπορούν να αναδείξουν γενικότερες τάσεις που επικρατούν σχετικά με τα ζητήματα που εξετάζουμε και να αποτελέσουν αφορμή για περαιτέρω έρευνες σε εθνικό επίπεδο.

Επιπλέον, ως προς τη διδακτική παρέμβαση, ένας από τους περιορισμούς της είναι ο περιορισμός της διδασκαλίας κυρίως σε τύπους προβλημάτων παρόμοιους με αυτούς που δόθηκαν στο προ- και μετα-τεστ. Τα προβλήματα και των τεσσάρων επιπέδων είναι πιθανό να απαιτούν μεγαλύτερη ποικιλία στρατηγικών από αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στα προβλήματα των δοκιμασιών.

Ένας, ακόμη, περιορισμός της διδακτικής παρέμβασης είναι το επίπεδο κατάρτισης των μαθητών του ειδικού σχολείου στις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης. Ειδικότερα, οι μαθητές προέρχονταν, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, από ένα περιβάλλον διδασκαλίας, στο οποίο δεν χρησιμοποιούνταν οι εκτιμήσεις. Είναι εύκολα αντιληπτό ότι οι μαθητές χρειαζόταν περισσότερη εκπαίδευση στην αναγνώριση και τη διδακτική διαχείριση των στρατηγικών και ιδιαίτερα των στρατηγιών της αντιστάθμισης και της ομαδοποίησης ($3^{ου}$ και $4^{ου}$ επιπέδου).

Τέλος, λόγω του περιορισμένου χρόνου η διάρκεια της παρέμβασης ήταν σύντομη. Για την εξαγωγή ασφαλέστερων συμπερασμάτων, απαιτούνται έρευνες σε μεγαλύτερο δείγμα και για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα

6.3 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Είναι επιτακτική ανάγκη η συνεχής έρευνα πάνω στην αξιολόγηση της επίδρασης της χρήση της αριθμομηχανής στα διάφορα μαθηματικά αντικείμενα και ιδιαίτερα στην υπολογιστική εκτίμηση σε μαθητές με ή χωρίς αναπηρίες.

Στη παρούσα έρευνα, το δείγμα που συμμετείχε ήταν μικρό. Για αυτό το λόγο, προτείνεται, λοιπόν, η μελλοντική διεξαγωγή της έρευνας σε πιο αντιπροσωπευτικό και μεγαλύτερο δείγμα μαθητών των Ειδικών Σχολείων μέσω της απλής τυχαίας δειγματοληψίας, προκειμένου τα ευρήματα να γενικευθούν στο σύνολο του συγκεκριμένου μαθητικού πληθυσμού.

Ακόμη, υπάρχουν περιθώρια για μελλοντικές έρευνες, οι οποίες στο πλαίσιο της συστηματικής διδασκαλίας των μαθητών με αναπηρίες σε στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης με τη χρήση της αριθμομηχανής, θα εξετάσουν την ανάπτυξη αυτής της γνώσης και την αξιοποίηση της στη διδακτική πράξη.

Μελλοντικές έρευνες θα μπορούσαν, επίσης, να διερευνήσουν με ποια κριτήρια επιλέγει το άτομο με αναπηρίες τη στρατηγική υπολογιστικής εκτίμησης που θα χρησιμοποιήσει. Τέλος, είναι σημαντικό να αναδειχθούν μελλοντικά οι γνώσεις των Ελλήνων εκπαιδευτικών ειδικής αγωγής σχετικά με την υπολογιστική εκτίμηση και ιδιαίτερα τις στρατηγικές της.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abdullah, M. L., Abdullah, W. S. W., &Tap, A. O. M. (2005). A new look at the students' attitudes toward scientific calculators. *Malaysian Online Journal of Instructional Technology*, Vol. 2, No.2, 17-26.

Alajmi, A. (2009). Addressing computational estimation in the Kuwaiti curriculum: teachers' views. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(4), 263-283

Bana, J., & Dolma, P. (2004). The relationship between the estimation and computation abilities of Year 7 students. In I. Putt, R. Faragher & M. McLean (Eds.), *Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematic Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 63-70). Townsville: MERGA. (9)

Booth, J., & Siegler, R.S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, Vol 42(1), Jan 2006, 189-201

Bouck, E. C., & Bouck, M. K. (2008).*Does it add up? Calculator use by middle school students with and without disabilities*. Manuscript submitted for publication.https://doi.org/10.1177/016264340802300202

Bouck, E. C., Joshi, G. S., & Johnson, L. (2012). Examining calculator use among students with and without disabilities educated with different mathematical curricula. *Educational Studies in Mathematics*, 83(3), 369–385. doi:10.1007/s10649-012-9461-3

Boyle, J. R., & Kennedy, M. J. (2019).Innovations in classroom technology for students with disabilities.*Intervention in School and Clinic*, 55(2), 67–70. https://doi.org/10.1177/1053451219837716

Bridgeman, B., Harvey, A., & Braswell, J. (1995). Effects of calculator use on scores on a test of mathematical reasoning. Journal of Educational Measurement, 32(4), 323–340. https://doi.org/10.1111/j.1745-3984.1995.tb00470.x

Bruder, R. (2008) Tim – a two-year Model test on the calculator use from class 7 and 9. In Figueras, O. & Sepúlveda, A. (Eds.*). Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics*

Education, and the XX North American Chapter Vol. 1, pp. XXX-YYY. Morelia, Michoacán, México: PME.

Castro, C. & Castro, I. (2002). An alternative model for the description of computational estimation strategies. In A. D. Cockburn, & E. Nardi, (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol.2, 193-200. Norwick, UK.

Close, S., Oldham, E., Shiel, G., Dooley, T., & O'Leary, M. (2012). Effects of calculators on mathematics achievement and attitudes of ninth-grade students. *The Journal of Educational Research,* 105, 377–390. doi:10.1080/00220671.2011.629857

Dehaene, S., Spelke, E., Pinel, P., Stanescu, R., & Tsivkin, S. (1999). Sources of mathematical thinking: Behavioral and brain-imaging evidence. *Science,* 284(5416), 970-974.

Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003). *Διαθεματικό ενιαίο πλαίσιο προγραμμάτων σπουδών* .Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, ΦΕΚ 303Β/13- 3-2003.

Δεσλή, Δ., &Ανεστάκης, Π. (2014). Υπολογιστικές εκτιμήσεις και η διδασκαλία τους: επιδόσεις, στρατηγικές και στάσεις υποψηφίων εκπαιδευτικών. Στα *Πρακτικά του 5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών*. Φλώρινα: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας και Εν.Ε.Δι.Μ.

Desli, D., &Giakoumi, M. (2017).Children's length estimation performance and strategies in standard and non-standard units of measurement. *International Journal for Research in Mathematics Education*, 7*,* 61-84.

Desli, D., & Lioliou, A. (2020). Relationship between computational estimation and problem solving. *International Electronic Journal of Mathematical Education,* 15(3).

Δεσλή, Δ. (2021). *Οι εκτιμήσεις στη μαθηματική εκπαίδευση: Είδη και εφαρμογές τους*.Αθήνα: Gutenberg.

Dolma, P. (2003).The relationship between estimation skills and computational ability of students in Years 5, 7 and 9 for whole and rational numbers.*RABSEL, the Cerd Educational Journa*l, 2, 31-60.

Dowker, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1), 45- 55.

Dowker, A. (2003). Young children estimating for addition: The zone for practical knowledge and understanding. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds), *The development of arithmetic concepts and skills* (pp243-266). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Engelhard G. Jr. , Fincher M., & Domaleski C. S. (2010) Mathematics Performance of Students With and Without Disabilities Under Accommodated Conditions Using Resource Guides and Calculators on High Stakes Tests, *Applied Measurement in Education*, 24:1, 22-38, DOI: 10.1080/08957347.2010.485975

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Eaton, S. B., Hamlett, C. L., &Karns, K. M. (2000). Supplementing teacher judgments of mathematics test accommodations with objective data sources. *School Psychology Review*, 29, 65–85.

Ghazali, M., Othman, A. R., Alias, R., & Saleh, F. (2010). Development of Teaching Models for Effective Teaching of Number Sense in the Malaysian Primary Schools. *Procedia-Social and Behavioral Sciences* 8: 344–350. doi:10.1016/j.sbspro.2010. 12.048

Greeno, J. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 170-218

Hall Jr, L. T. (1984). Estimation and Approximation--Not Synonyms. *Mathematics Teacher*, 77(7), 516-17.

Heinze, A., Star, J., &Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education (2009), 41*, 535–540.

Heirdsfield, A. M., & Cooper, T. J. (2004). Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: Case studies of flexible and inflexible computers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 23(4), 443-463.

Hogan, T. P., & Brezinski, K. L. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities?. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(4), 259-280.

Hope, J. A. (1986). Mental calculation: Anachronism or basic skill. *Estimation and mental computation*, 45-54.

Koay, P. L. (2006). Calculator use in primary school mathematics: A Singapore perspective. *The mathematics educator*, 9(2), 97-11

Lai, S. A., & Berkeley, S. (2012). High-states test accommodations: Research and practice. *Learning Disability Quarterly*, 35, 158–169

Lazarus, S. S., Thurlow, M. L., Lail, K. E., Eisenbraun, K. D., & Kato, K. (2006). *2005 state policies on assessment participation and accommodations for students with disabilities* (Synthesis Report 64). Minneapolis: University of Minnesota, National Center on Educational Outcomes.

Lazarus, S. S., Thompson, S. J., & Thurlow, M. L. (2006). How students access accommodations in assessment and instruction: Result of a survey of special education teacher. *Educational Policy Reform Research Institute*, 7.

LeFevre, J. A., Greenham, S. L., & Waheed, N. (1993). The development of procedural and conceptual knowledge in computational estimation. *Cognition and Instruction*, 11, 95-132.

Lemaire, P., Lecacheur, M., (2002). Children's strategies in computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 82, 281–304.

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής: νοεροί υπολογισμοί*. Θεσσαλονίκη: Ζυγός

Lemonidis, Ch., & Kaimakami, A. (2013). Prospective elementary teachers' knowledge in computational estimation. *Menon: Journal of Educational Research*, 2b, 86-98.

Lemonidis, Ch., Nolka, E., Nikolantonakis, K., (2014). Students' behaviors in computational estimation correlated with their problem-solving ability. *MENON: Journal Of Educational Research.* 1st Thematic Issue, 46-60

Lemonidis, Ch., Mouratoglou, A. &Pnevmatikos D. (2014) Elementary teachers' efficiency in computational estimation problems. Menon: Journal of Educational Research, 1st Thematic Issue, 147-158

Lemonidis, Ch. (2015). *Mental Computation and Estimation: Implications for mathematics education research, teaching and learning.* Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315675664

Lemonidis, Ch. & Likidis, N. (2019). Integrated hierarchical model of computational estimation strategies of 5th grade students. *International Journal of Mathematical Education In Science and Technology.*Issue 1, 84-106.

Λεμονίδης, Χ. (2020). *Νοεροί Υπολογισμοί και Εκτιμήσεις, Από την έρευνα στη διδασκαλία και τη μάθηση*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζυγός

Lemonidis, C. (2022).*Study to Monitor the Progress of Middle School Students' Computational Estimation Strategies.* (To Be Published)

Levine, DR. (1982). Strategy Use and Estimation Ability of College Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 13, no. 5, 1982, pp. 350–359. (36)

Loveless, T. (2004, April).*Computation skills, calculators, and achievement gaps: An analysis of NAEP items.* Paper presented at the annual conference of the American Educational Research Association, San Diego, CA.

Maccini, P., & Gagnon, J. C. (2005). Mathematics and technology-based interventions. In D. Edyburn, K. Higgins, & R. Boone (Eds.), *Handbook of special education research and practice* (pp. 599–622). Whitefish Bay: Knowledge by Design.

Maccini, P., Gagnon, J. C., Mulcah, C. A., & Leon, P. E. (2006). Math instruction for committed within juvenile correctional schools. *The Journal of Correctional Education*, 57, 210-229.

Mbugua, Z. K., Muthomi, M. W., &Okere, M. O.(2011). Effect of using scientific calculators in learning mathematics by secondary school students in Embu district in Kenya. *Journal of Technology and Education in Nigeria (JOTEN)*, Vol. 16, No. 1.

McIntosh, A. (2004). Where we are today. In A. McIntosh & L. Sparrow (Eds.), *Beyond written computation* (pp.3-14). Perth: MASTEC.

Mereku, D. K., Donkor, J., Sokpe, B., Addo, G. K., Klaye, M. K., Incoom, P.K. & Wilson, R. (2007). Report of the Ghana National Working Party on the Use of Calculators in the Basic Education Certificate Examination (BECE) Mathematics Paper. Reproduced with permission from WAEC.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., & Foy, P. (2009). *TIMSS 2007 International Mathematics report: Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth grades*. Boston: TIMSS and PIRLS International Study Center.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

National Council of Teachers of Mathematics, (2010).*Math Fact Fluency : How and why we teach for flexible thinking.* IDMT Boise State University, VA: Author.

Northcote, M. & McIntosh, A. (1999). What mathematics do adults really do in everyday life.*Australian Primary Mathematics Classroom*, 4 (1), p. 19—21

Ok, M. W., Bryant, D. P., & Bryant, B. (2019). Effects of computer-assisted instruction on the mathematics performance of students with learning disabilities: A synthesis of the research. *Exceptionality*, 28(1), 30–44. https://doi.org/10.1080/093628 35.2019.1579723

Parvaneh, A., Mohammad H. Bijan-zadeh, P., Pezeshki & Maryam N. (2011). Effects of assistive technology instruction on increasing motivation and capacity of mathematical problem solving in dyscalculia students. *Educational ResearchInternational Research Journals*, 2(10):1611-1618.

Pomerantz, H. (1997). *The role of calculators in math education.*Educalc.net.

Porter, Priscilla H. (1990). Perceptions of Elementary School Teachers toward the Status of Calculator Use in the Irvine Unified School District.

Reys, R. E., &Bestgen, B.J. (1981). Teaching and assessing computational estimation skills. *The Elementary School Journal*, 82(2), 117-127.

Reys, R. E. (1984). Mental computation and estimation: Past, present, and future. *The Elementary School Journal*, 84(5), 547-557

Reys, B. J., Reys, R. W., & Penafiel, A., F., (1991). Estimation performance and strategies use of Mexican fifth- and eighth-grade student sample. *Educational Studies in Mathematics*, 22, p. 353-375.

Reys, R. W., Reys, B. J., Nohda, N., & Ishida, J. (1991b). Computational estimation performance and strategies used by fifth- and eighth-grade Japanese students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(1), 39–58.

Ruthven, K. (1996). Calculators in the mathematics curriculum: The scope of personal computational technology. In *International handbook of mathematics education* (pp. 435–468). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Segovia, I. & Castro, E. (2009). Computational and measurement estimation curriculum foundations and research carried out at the University of Granada, Mathematics Didactics Department. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), 499-513.

Shaftel, J., Belton-Kocher, E., Glasnapp, D. R., &Poggio, J. P. (2003). *The differential impact of accommodations in statewide assessment: Research summary.* Minneapolis: University of Minnesota, National Center on Educational Outcomes

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation: A review. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 197–212). New York: Psychology Press.

Sowder, J. T., & Wheeler, M. M. (1989). The development of concepts and strategies used in computational estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 130-146

Sowder, J. T. (1992). Estimation and number sense. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-389). New York: Macmillan

Star, J. R., & Seifert, C. (2006). The development of flexibility in equation solving. *Contemporary Educational Psychology*, 31, 280-300

Star, J., Rittle-Johnson, B., Lynch, K., & Perova, N. (2009). The role of prior knowledge in the development of strategy flexibility: The case of computational estimation. *ZDM Mathematics Education*, 41, 569–579.

Suydam, M. N. (1976). Electronic hand calculators: The implication for precollege education. *Final Report*. Washington, D. C: National Science Foundation

Threlfall, J. (2000). Mental calculation strategies. *Research in Mathematics Education*, 2(1), 77-90

Thurlow, M. L., Lazarus, S. S., Thompson, S. J., & Morse, A. B. (2005). State policies on assessment participation and accommodations for students with disabilities. *Journal of Special Education*, 38, 232–240.

Tindal, G., &Ketterlin-Geller, L. R. (2004, January). *Research on mathematics test accommodations relevant to NAEP testing.* Paper presented at the NAGB Conference on Increasing the Participation of SD and LEP Students in NAEP.

Trafton, P. R. (1986). Teaching computational estimation: Establishing an estimation mind-set. *Estimation and mental computation*, 16-30. 7

Tsao, Y-L. & Pan T-R. (2013). The computational estimation and instructional perspectives of elementary school teachers. *Journal of Instructional Pedagogies,* 11, 1-15.

Van De Walle, J. A. (2007). *Elementary and middle school mathematics. Teaching Developmentally* (6th Edition). Boston: Pearson.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, 24(3), 335–359*.

Waits, B.K. & Demana, F. (2001) *Calculators in Mathematics Teaching and Learning: Past, Present, and Future. Part 2: Technology and the Mathematics Classroom*. ERIC Document Reproduction Service No. ED482731.

Walcott, C., & Stickles, P. R. (2012). Calculator use on NAEP: A look at fourth- and eighth-grade mathematics achievement. *School Science and Mathematics*, *112*(4), 241-254

Woodward, J., Baxter, J., & Robinson, R. (1999). Rules and reasons: Decimal instruction for academically low achieving students. *Learning Disabilities Research & Practice*, 14, 5–24

Woodward, J., & Montague, M. (2002). Meeting the challenge of mathematics reform for students with LD. *The Journal of Special Education*, 36, 89–101

Yakubova, G., & Bouck, E. C. (2014). Not all created equally: Exploring calculator use by students with mild intellectual disability. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, 49(1), 111–126.

Yang, D. C., & Lin, Y. C. (2015). Using Calculator-Assisted Instruction to Enhance Low-Achievers in Learning Number Sense: A Case Study of Two Fifth Graders in Taiwan. *Journal of Education and Learning*, *4*(2), 64-72.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1.Pre Test

1. Ένας ποδηλάτης διάνυσε την πρώτη μέρα 29,6 χιλιόμετρα. Τη δεύτερη μέρα διάνυσε 30,5 χιλιόμετρα και την τρίτη μέρα διάνυσε 28,2 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε, περίπου, ο ποδηλάτης και τις τρεις μέρες μαζί ;
2. Μια νοικοκυρά αγόρασε από το μανάβη πατάτες αξίας 3,25 ευρώ. Πόσα ρέστα πήρε από ένα χαρτονόμισμα των 5 €**;**
3. Η Μαρίνα αγόρασε από το βιβλιοπωλείο μια συσκευασία αυτοκόλλητα που κοστίζει 1,40€, μια σβήστρα που κοστίζει 1,70€,και ένα μολύβι σχεδίασης που κοστίζει 2,40€.Πόσα ευρώ πλήρωσε συνολικά;
4. Η Μαρία είχε στο πορτοφόλι της 53€. Πλήρωσε στο σουπερμάρκετ 37,5€. Πόσα χρήματα της απέμειναν;
5. Σε ένα φούρνο χρησιμοποίησαν 71 κιλά άσπρο αλεύρι, 52 κιλά καλαμποκάλευρο, 51 κιλά αλεύρι ολικής άλεσης και 32 κιλά αλεύρι κριθαριού. Πόσα κιλά αλεύρι χρησιμοποίησαν συνολικά;
6. Ο Μάριος ξεκίνησε να διαβάζει ένα λογοτεχνικό βιβλίο 85 σελίδων. Την πρώτη μέρα διάβασε 37 σελίδες. Πόσες σελίδες του έμειναν;
7. Η κυρία Άννα αγόρασε από τη λαϊκή αγορά 3,5 κιλά πορτοκάλια και 0,950 κιλά αχλάδια. Πόσα κιλά φρούτα αγόρασε συνολικά;

2. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1.Ο Μιχάλης έχει στο πορτοφόλι του 21,30€, η Άννα έχει 18,40€, η Μαρία έχει 19,09€. Περίπου πόσα χρήματα έχουν όλοι μαζί;

2.Μια μοδίστρα έχει 5 μέτρα ύφασμα. Για να ράψει ένα φόρεμα χρειάστηκε 3,7 μέτρα ύφασμα. Πόσα μέτρα ύφασμα περίσσεψαν;

3. Μια μέρα ένας ψαράς έπιασε 4,8 κιλά γαύρο, 3,4 κιλά σαρδέλες και 5,9 κιλά γόπες. Πόσα κιλά ψάρια έπιασε συνολικά;

4.Το ρεζερβουάρ ενός φορτηγού έχει χωρητικότητα 63 λίτρα πετρελαίου. Αν έχουν μείνει στο ρεζερβουάρ 8,80 λίτρα πετρελαίου, πόσα λίτρα χρειάζονται για να γεμίσει;

5. Τέσσερις ομάδες μαθητών έφτιαξαν ανθοδέσμες για τη γιορτή του σχολείου. Η πρώτη ομάδα έφτιαξε 49 ανθοδέσμες, η δεύτερη 56, η τρίτη 38 ανθοδέσμες και η τέταρτη 65 ανθοδέσμες. Πόσες ανθοδέσμες έφτιαξαν συνολικά;

6.Ο Πύργος Αθηνών έχει ύψος 103 μέτρα και ο Λευκός Πύργος στη Θεσσαλονίκη έχει ύψος 33 μέτρα. Πόσο πιο ψηλός είναι ο Πύργος Αθηνών;

7.Η Μαρία, για να φτιάξει μια μους σοκολάτας, αγόρασε μια ζάχαρη αξίας 0,85€ και τρεις κουβερτούρες αξίας 3,5€. Πόσα χρήματα πλήρωσε;

8.Ένα βαρέλι μπύρας περιέχει 30,1 λίτρα, ένα βαρέλι κρασιού 28,9 λίτρα και ένα βαρέλι τσίπουρου 29,8 λίτρα. Περίπου πόσα λίτρα έχουν όλα τα βαρέλια μαζί;

9.Ο ηλεκτρολόγος έχει ένα κομμάτι καλώδιο μήκους 3 μέτρων. Από αυτό έκοψε ένα κομμάτι που είχε μήκος 1,2 μέτρα; Πόσα μέτρα καλώδιο του περίσσεψαν;

10. Ένα πρωινό ο μανάβης πούλησε 6,7 κιλά μπανάνες, 7,5 κιλά μήλα και 8,9 κιλά πορτοκάλια. Πόσα περίπου κιλά φρούτα πούλησε ο μανάβης το πρωί;

11.Η Φωτεινή μάζεψε 12,80 €. Πόσα περίπου χρήματα πρέπει να μαζέψει ακόμα, ώστε να συγκεντρώσει 27,60€ για να αγοράσει ένα πληκτρολόγιο για τον υπολογιστή της;

12. Ο Νίκος φύτεψε στο χωράφι του 55 ντοματιές, ο Παύλος 47 ντοματιές, ο Αποστόλης 52 ντοματιές και ο Γιάννης 61 ντοματιές. Πόσες περίπου ντοματιές φύτεψαν και οι τέσσερις μαζί;

13. Φέτος το σχολείο συγκέντρωσε 323 ευρώ για τη UNICEF, ενώ πέρυσι είχε συγκεντρώσει 145 ευρώ λιγότερα. Πόσα ευρώ είχε συγκεντρώσει πέρυσι;

14. Ο Γιώργος αγόρασε από το μανάβη δυο καρπούζια. Το πρώτο καρπούζι ζυγίζει 8 κιλά και το δεύτερο καρπούζι ζυγίζει 9,2 κιλά. Πόσα κιλά ζυγίζουν και τα δυο καρπούζια μαζί;

3. PostTest

1. Ο κύριος Νίκος, ο μελισσοκόμος, μάζεψε φέτος τον Ιούνιο από τις κυψέλες του 39,5 κιλά μέλι , τον Ιούλιο μάζεψε 37,9 κιλά μέλι και τον Αύγουστο 42,2 κιλά μέλι. Πόσα κιλά μέλι μάζεψε συνολικά και τους τρεις μήνες;
2. Η κυρία Ευτυχία είχε 4 κιλά ζάχαρη. Από αυτή την ποσότητα χρησιμοποίησε 1,8 κιλά για να φτιάξει μια τούρτα και δυο κέικ. Πόση ζάχαρη περίσσεψε;
3. Ο Νίκος έτρεξε σήμερα 5,6 χιλιόμετρα, ο Γιώργος 4,7 χιλιόμετρα και ο Κώστας 6,9 χιλιόμετρα. Περίπου πόσα χιλιόμετρα έτρεξαν όλοι μαζί;
4. Η Νικολέτα είχε στο πορτοφόλι της 94€. Πλήρωσε τον λογαριασμό της ΔΕΗ 68,50€. Πόσα χρήματα της απέμειναν;
5. Το πρώτο κιβώτιο αναψυκτικών ζυγίζει 42 κιλά, το δεύτερο κιβώτιο 57 κιλά, το τρίτο κιβώτιο 61 κιλά και το τέταρτο κιβώτιο 51 κιλά. Πόσο περίπου ζυγίζουν και τα τέσσερα κιβώτια αναψυκτικών μαζί;
6. Ένα τρένο ξεκίνησε από τη Θεσσαλονίκη με προορισμό την Αθήνα με 245 επιβάτες. Στη Λάρισα κατέβηκαν 137 επιβάτες. Πόσοι επιβάτες έμειναν στο τρένο;
7. Ένας αθλητής του μήκους, πήδηξε την περσινή αγωνιστική περίοδο 3,8 μέτρα. Αν φέτος βελτίωσε την επίδοσή του κατά 0,8 μέτρα, ποια είναι η φετινή του επίδοση;