ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: Α΄ Ηλικιακός Κύκλος (5-12 ετών)

Διπλωματική Εργασία

« **Μαθηματική Γνώση για τη Διδασκαλία: η περίπτωση του Πολλαπλασιασμού Κλασμάτων** »

Κιοσέ Δέσποινα, Α.Μ. 5710

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Βαμβακούση Ξανθή, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια
Εξεταστές: Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής
Χρήστου Κωνσταντίνος, Επίκουρος Καθηγητής

Φλώρινα, 2023

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα της διπλωματικής μου εργασίας κα Βαμβακούση Ξένια, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, για την υποστήριξη και τη βοήθεια που μου πρόσφερε.

Τις ευχαριστίες μου εκφράζω επίσης στον κο Λεμονίδη Χαράλαμπο, Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας, και στον κο Χρήστου Κωνσταντίνο, Επίκουρο Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας, που δέχτηκαν να είναι μέλη της Επιτροπής Αξιολόγησης της εργασίας μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα κλάσματα και οι πράξεις με κλάσματα θεωρούνται από τα πιο πολύπλοκα μαθηματικά θέματα στο δημοτικό σχολείο και παράλληλα κρίνονται απαραίτητα για τη μετέπειτα εξέλιξη των μαθητών στα μαθηματικά. Σκοπός της έρευνας είναι η διερεύνηση των πτυχών της Μαθηματικής Γνώσης για Διδασκαλία εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Για τη συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκαν 15 συνεντεύξεις βασισμένες σε έργα με τη μορφή σεναρίων τάξης. Οι συμμετέχοντες κλήθηκαν μεταξύ άλλων να εξηγήσουν και να αξιολογήσουν τις απαντήσεις και τις αναπαραστάσεις υποθετικών μαθητών, να προβλέψουν τις δυσκολίες τους και να κατασκευάσουν λεκτικά προβλήματα σχετικά με τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Τα ευρήματα της έρευνας ανέδειξαν σημαντικές προκλήσεις που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί σε διάφορες συνιστώσες της Μαθηματικής Γνώσης για Διδασκαλία στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, ακόμα και στην Κοινή Γνώση του Περιεχομένου.

Λέξεις κλειδιά: κλάσματα, πολλαπλασιασμός κλασμάτων, εκπαιδευτικοί, μαθηματική γνώση για διδασκαλία

ABSTRACT

Fractions and operations with fractions are considered among the most complex mathematical topics in primary school and are also considered essential for the further development of students in mathematics. The purpose of this research is to investigate the aspects of Mathematical Knowledge for Teaching of Primary School Teachers in multiplication of fractions. To collect data, 15 task-based interviews were conducted based on tasks in the form of classroom scenarios. Participants were asked, among other things, to explain and evaluate students' responses and representations, predict their difficulties, and construct word problems about fraction multiplication. The findings highlight the fact that primary teachers face many challenges with various components of the Mathematical Knowledge for Teaching, even with Common Content Knowledge.

Key words: fractions, multiplication of fractions, teachers, mathematical knowledge for teaching

Περιεχόμενα

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μετά από περίπου 30 χρόνια τέτοιας δουλειάς (αναλύοντας τη διδασκαλία), έχω καταλήξει στο συμπέρασμα ότι η διδασκαλία στην τάξη -ιδιαίτερα στο δημοτικό και το γυμνάσιο- είναι η πιο απαιτητική, λεπτομερής, διαφοροποιημένη και τρομακτική δραστηριότητα που έχει εφεύρει ποτέ το είδος μας. Στην πραγματικότητα, όταν συνέκρινα την πολυπλοκότητα της διδασκαλίας με το πολύ πιο υψηλά αμειβόμενο επάγγελμα, το "να κάνεις ιατρική", κατέληξα στο συμπέρασμα ότι η μόνη φορά που η ιατρική πλησιάζει ποτέ την πολυπλοκότητα μιας μέσης ημέρας για έναν εκπαιδευτικό στην τάξη είναι στα επείγοντα περιστατικά κατά τη διάρκεια μιας φυσικής καταστροφής... Όταν 30 ασθενείς θέλουν την προσοχή σου ταυτόχρονα, μόνο τότε πλησιάζεις την πολυπλοκότητα της μέσης τάξης σε μια μέση ημέρα.

Lee S. Shulman

Οι μαθηματικές γνώσεις των εκπαιδευτικών έχουν αναγνωριστεί ως ένα από τα βασικά στοιχεία της αποτελεσματικότητας των εκπαιδευτικών και της ποιοτικής μάθησης (Hill, Rowan, & Ball, 2005, Newton, 2008). Η βαθιά κατανόηση των εννοιών από τους εκπαιδευτικούς συνδέεται με την αποτελεσματική διδασκαλία και τη μάθηση των μαθητών, ενώ η έλλειψη κατανόησης από τους εκπαιδευτικούς συνδέεται με λάθη στη διδασκαλία και χειρότερη επίδοση των μαθητών (Hill, Ball & Schilling, 2008). Διάφορες μελέτες προσπάθησαν να προσδιορίσουν ποια συγκεκριμένα είδη γνώσεων των εκπαιδευτικών παράγουν καλύτερα αποτελέσματα για τους μαθητές (π.χ. Hill κ.ά., 2005, Hill, Schilling, & Ball, 2004).

Πολύ συχνά, η απογοήτευση των παιδιών από τα μαθηματικά αρχίζει από το δημοτικό, όταν δεν μπορούν να θυμηθούν πώς να «κάνουν» τα κλάσματα ή όταν μπορούν να εκτελέσουν βήματα, αλλά βαριούνται, επειδή δεν ξέρουν τι σημαίνουν ή γιατί τα κάνουν (Lamon, 2012). Πολλοί μαθητές δεν διαθέτουν τις μαθηματικές δεξιότητες που απαιτούνται για να ακολουθήσουν μια καριέρα στους τομείς της επιστήμης, της τεχνολογίας, της μηχανικής ή των μαθηματικών εξαιτίας μιας ανεπαρκούς κατανόησης των κλασμάτων (Siegler, Carpenter, Fennell, Geary, Lewis, Okamoto, Thompson, & Wray, 2010). Όπως διαπίστωσαν οι Brown και Quinn (2007), η κατανόηση της γνώσης των κλασμάτων από τους μαθητές είναι συνδεδεμένη με την αλγεβρική σκέψη, και συνεπώς οι δυσκολίες στα κλάσματα οδηγούν σε δυσκολίες στην άλγεβρα, η οποία είναι σημαντική για την μετέπειτα εκμάθηση μαθηματικών.

Η βαθιά εννοιολογική κατανόηση των ρητών αριθμών είναι αναμφισβήτητα ένας από τους πιο θεμελιώδεις μαθηματικούς στόχους για τους μαθητές όλων των βαθμίδων της εκπαίδευσης και όχι μόνο (Elias, Ribeiro & Savioli, 2020). Τα κλάσματα και οι πράξεις με κλάσματα θεωρούνται ένα από τα πιο σύνθετα θέματα (Brown & Quinn, 2007, Ma, 1999), τα οποία συχνά αποτελούν μεγάλο μαθηματικό και ψυχολογικό εμπόδιο για τους μαθητές του δημοτικού (Lamon, 2012). Οι απώλειες που προκύπτουν λόγω των κενών στην εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων είναι ανυπολόγιστες (Lamon, 2012).

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν πολλά προβλήματα ιδιαίτερα στις πράξεις των κλασμάτων (Stafylidou & Vosniadou, 2004). Οι Simon, Kara και Placa (2018) υποστηρίζουν ότι, ενδεχομένως, ο πιο δύσκολος από εννοιολογική άποψη αριθμητικός αλγόριθμος είναι αυτός που χρησιμοποιείται συνήθως για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων α/β x $\gamma/\delta = (\alpha$ x $\gamma)/(\beta$ x $\delta)$.

Οι εκπαιδευτικοί επωμίζονται το μεγαλύτερο μέρος της ευθύνης για τη διδασκαλία του αντικειμένου των κλασμάτων (Hill & Ball, 2004). Η διδασκαλία των κλασμάτων απαιτεί ένα κατάλληλο επίπεδο γνώσεων από τους εκπαιδευτικούς για να αντιμετωπίσουν σωστά τις δυσκολίες των μαθητών (Depaepe, Torbeyns, Vermeersch, Janssens, Janssen, Verschaffel & Van Dooren, 2015). Οι έρευνες δείχνουν ότι όχι μόνο οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τα κλάσματα, αλλά και οι υποψήφιοι και οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί του δημοτικού σχολείου παρουσιάζουν δυσκολίες (π.χ. Ma, 1999, Newton, 2008, Olanoff, Lo, & Tobias, 2014). Μεγάλο μέρος της έρευνας σχετικά με τους εκπαιδευτικούς έχει δείξει ότι δυσκολεύονται ιδιαίτερα να κατανοήσουν τις έννοιες των πράξεων των κλασμάτων (Olanoff κ.ά., 2014) και ειδικότερα τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων (Ball, 1990a, Isık, 2011, Luo 2009, Tirosh, 2000).

Στην προεδρική του ομιλία το 1985 στην ετήσια συνάντηση της Αμερικανικής Ένωσης Εκπαιδευτικής Έρευνας (AERA), ο Lee Shulman εντόπισε αυτό που αποκάλεσε «*το παράδειγμα που λείπει*» από την έρευνα για τη διδασκαλία, εννοώντας την έλλειψη ερευνητικής εστίασης στις γνώσεις περιεχομένου που απαιτούνται για τη διδασκαλία (Shulman, 1986, στο Olanoff, 2011). Έκτοτε έχει γίνει εκτεταμένη έρευνα στο συγκεκριμένο τομέα, η οποία έδειξε ότι οι εκπαιδευτικοί του δημοτικού, τόσο οι υποψήφιοι όσο και οι εν ενεργεία, μπορεί να μην είναι καλά εξοπλισμένοι με τις βαθύτερες γνώσεις που απαιτούνται για τη διδασκαλία των μαθηματικών (Ball, 1990b, Ma, 1999).

Οι μαθηματικές γνώσεις των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία έχουν σημαντικό αντίκτυπο στη μάθηση των μαθητών (Hill κ.ά., 2005). Η εξέταση του εννοιολογικού υπόβαθρου των εκπαιδευτικών στην αριθμητική των κλασμάτων έχει σημαντικές επιπτώσεις στη μάθηση των μαθητών, στην έρευνα και στην εκπαίδευση των εκπαιδευτικών (Copur – Gencturk, 2021).

Η παρούσα μελέτη επιδιώκει να διερευνήσει το επίπεδο της ΜΓΔ 15 εν ενεργεία εκπαιδευτικών Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Ο τομέας του πολλαπλασιασμού κλασμάτων επιλέχθηκε επειδή προηγούμενες έρευνες δείχνουν ότι η κατανόηση των πράξεων κλασμάτων από τους υποψήφιους και τους εν ενεργεία εκπαιδευτικούς είναι περιορισμένη (Ball, 1990a, Ball, Thames & Phelps, 2008, Thompson & Saldanha, 2003, Tirosh, 2000).

Η έρευνα θα βοηθήσει να γίνει καλύτερα κατανοητό ποιες ευκαιρίες μάθησης παρέχουν οι εκπαιδευτικοί στους μαθητές για να κατανοήσουν ένα από τα δυσκολότερα θέματα του προγράμματος σπουδών, αυτό του πολλαπλασιασμού κλασμάτων.

Οι ερευνητικές μελέτες σχετικά με τις γνώσεις των εκπαιδευτικών για τα κλάσματα επικεντρώνονται κυρίως στη διαίρεση κλασμάτων και όχι στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων (π.χ. Ma, 1999, Newton, 2008, Olanoff κ.ά., 2014, Tirosh, 2000). Επιπλέον, οι μελέτες που έχουν διεξαχθεί για τις γνώσεις στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων εστιάζουν στην κατανόηση των υποψήφιων εκπαιδευτικών και όχι των εν ενεργεία εκπαιδευτικών.

Η συμβολή της παρούσας έρευνας είναι να διαλευκάνει το μαθηματικό υπόβαθρο εν ενεργεία εκπαιδευτικών σε αυτόν τον τομέα της αριθμητικής των κλασμάτων. Οι ερευνητικοί στόχοι που θέτονται αφορούν στις ικανότητες των εκπαιδευτικών να αξιολογούν τις απαντήσεις των μαθητών, να προβλέπουν τις απαντήσεις των μαθητών, να προβλέπουν τις δυσκολίες των μαθητών, να ερμηνεύουν τις παρανοήσεις των μαθητών, να δημιουργούν αναπαραστάσεις και να δημιουργούν λεκτικά προβλήματα πολλαπλασιασμού κλασμάτων.

Η εργασία αποτελείται από οχτώ κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζει την αναγκαιότητα της μελέτης και τη συμβολή που αποσκοπεί να έχει στο ερευνητικό πεδίο. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύεται το θεωρητικό υπόβαθρο στο οποίο βασίζεται η έρευνα. Στο τρίτο κεφάλαιο πραγματοποιείται μια αποσαφήνιση των εμπλεκόμενων ορισμών και παρουσιάζεται μια βιβλιογραφική ανασκόπηση σχετικά με την έννοια του κλάσματος, του πολλαπλασιασμού, του πολλαπλασιασμού κλασμάτων, των αναπαραστάσεων του πολλαπλασιασμού κλασμάτων και τις παρανοήσεις των μαθητών στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, ενώ στο τέταρτο κεφάλαιο πραγματοποιείται μια βιβλιογραφική ανασκόπηση αναφορικά με τις δυσκολίες των εκπαιδευτικών στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Στο πέμπτο κεφάλαιο αναλύεται η μεθοδολογία της παρούσας έρευνας. Στη συνέχεια, στο έκτο κεφάλαιο, γίνεται η ανάλυση των δεδομένων και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα. Στο έβδομο κεφάλαιο αναπτύσσονται τα συμπεράσματα της έρευνας και στο όγδοο κεφάλαιο ακολουθεί η συζήτηση. Στο τέλος της εργασίας υπάρχουν τα παραστήματα, τα οποία περιέχουν τις απομαγνητοφωνήσεις και το εργαλείο της έρευνας.

2. ΓΝΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι θεωρητικές προσεγγίσεις αναφορικά με τις γνώσεις που πρέπει να έχουν οι εκπαιδευτικοί για τη διδασκαλία ενός μαθηματικού θέματος. Ο Shulman (1986) πρώτος έκανε λόγο για την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου, που ξεπερνάει απλά τη Γνώση του Περιεχομένου, και στη συνέχεια η Ball και οι συνεργάτες της (Ball & Bass, 2003, Ball, Hill & Bass, 2005, Ball, Lubienski & Mewborn, 2001, Ball κ.ά., 2008, Hill κ.ά., 2008, Hill κ.ά., 2005, Hill κ.ά., 2004) εξειδίκευσαν τον ορισμό του Shulman παρουσιάζοντας τη Μαθηματική Γνώση για Διδασκαλία. Η παρούσα εργασία υιοθετεί τον ορισμό της Ball για να διερευνήσει τη Μαθηματική Γνώση για Διδασκαλία εκπαιδευτικών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, ο οποίος παρουσιάζεται παρακάτω.

2.1 Είδη γνώσης των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των μαθηματικών

Ο Shulman (1986) προσδιόρισε τρεις διαφορετικούς τύπους γνώσεων που χρειάζονται οι εκπαιδευτικοί: τη Γνώση Περιεχομένου (ΓΠ), την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου (ΠΓΠ) και τη γνώση του αναλυτικού προγράμματος. Ο Shulman (1986:9) προσδιόρισε τη ΓΠ ως την ποσότητα και την οργάνωση της γνώσης για το γνωστικό αντικείμενο στο μυαλό του εκπαιδευτικού, ενώ η ΠΓΠ κατά τον Shulman (1987:8) γίνεται κατανοητή ως η γνώση, με ειδική αναφορά σε εκείνες τις γενικές αρχές και στρατηγικές διαχείρισης και οργάνωσης της τάξης που φαίνεται να υπερβαίνουν το γνωστικό αντικείμενο. Η ΠΓΠ, όπως την αντιλαμβάνεται ο Shulman (1986, 1987), προσδιορίζει το ειδικό είδος γνώσης των εκπαιδευτικών που συνδέει το περιεχόμενο με την παιδαγωγική (Ball & Bass, 2002). Η Ma (1996) για τη διάκριση των δύο ειδών γνώσης δήλωσε ότι η ΓΠ ασχολείται με το «τι» πρέπει να διδαχθεί και η ΠΓΠ ασχολείται με το «πώς» πρέπει να διδαχθεί.

Η Ball (1991) υιοθετεί μια αντίστοιχη διάκριση με τον Schulman. Παρατηρώντας τη διδασκαλία στην τάξη στις ΗΠΑ, η Ball και οι συνεργάτες της (Ball & Bass, 2003, Ball κ.ά., 2005, Ball κ.ά., 2001, Ball κ.ά., 2008, Hill κ.ά., 2008, Hill κ.ά., 2005, Hill κ.ά., 2004) εντόπισαν επαναλαμβανόμενα έργα και προβλήματα που εμπλέκονται στη διδασκαλία των μαθηματικών και κατ' αυτόν τον τρόπο εξέτασαν τη γνώση για τη διδασκαλία υπό το πρίσμα των έργων διδασκαλίας τα οποία αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί στην καθημερινή τους πρακτική. Η διαφορά με τον Schulman είναι ότι οι αναλύσεις της Ball και των συνεργατών της θέτουν τα θεμέλια για μια θεωρία της *Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία* (ΜΓΔ, Mathematical Knowledge for Teaching - MKT) που βασίζεται στην πράξη, δηλαδή επικεντρώνεται στην εργασία και τις απαιτήσεις της, και όχι απλώς στο τι γνωρίζουν οι εκπαιδευτικοί (Ball, Thames, Bass, Sleep, Lewis & Phelps, 2009). Με τον όρο *διδασκαλία* εννοούνται όλα όσα κάνουν οι εκπαιδευτικοί για να υποστηρίξουν τη μάθηση των μαθητών τους (Ball κ.ά., 2005).

Το μοντέλο ΜΓΔ ορίζεται ως η μαθηματική γνώση που είναι απαραίτητη ώστε να διδάξουν αποτελεσματικά οι εκπαιδευτικοί μαθηματικά στην τάξη και να υποστηρίζουν τη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών (Hill κ.ά., 2008:374) και συνεπάγει τις μαθηματικές γνώσεις που απαιτούνται για την εκτέλεση των επαναλαμβανόμενων έργων της διδασκαλίας των μαθηματικών στους μαθητές (Ball κ.ά., 2009).

Το τεστ που ανέπτυξαν οι Hill, Rowan και Ball (2005) για τη μέτρηση της ΜΓΔ στους εκπαιδευτικούς παρείχε ενδείξεις ότι η ΜΓΔ έχει επίδραση στην επίδοση των μαθητών. Το μοντέλο ΜΓΔ έχει χρησιμοποιηθεί από ερευνητές για τη μέτρηση της ποιότητας των εκπαιδευτικών (Ball & Hill, 2008, Ball κ.ά., 2005) και τη μέτρηση των γνώσεων των εκπαιδευτικών στη διδασκαλία των κλασμάτων (Izsak, 2008, Izsak, Jacobson, de Araujo & Orrill, 2012).

Το πλαίσιο της Ball και των συνεργατών της βασίζεται στις κατηγορίες του Shulman και τις χωρίζει σε επιμέρους κατηγορίες. Η Γνώση Περιεχομένου περιλαμβάνει:

(α) την Κοινή Γνώση Περιεχομένου (ΚΓΠ, common content knowledge - CCK) (Ball κ.ά., 2008). Η ΚΓΠ αναφέρεται στις μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες που χρησιμοποιούνται και σε περιβάλλοντα διαφορετικά από τη διδασκαλία (Ball κ.ά., 2008), όπως για παράδειγμα η μαθηματική γνώση που χρησιμοποιεί ένας μορφωμένος ενήλικας στο επάγγελμά του. Είναι δηλαδή η γνώση των μαθηματικών που δεν είναι χρήσιμη αποκλειστικά και μόνο στο πλαίσιο της διδασκαλίας (Ball κ.ά., 2009). Παραδείγματα:

- η εκτέλεση ενός αλγορίθμου,
- η επίλυση ενός λεκτικού προβλήματος,
- η αναγνώριση των λανθασμένων απαντήσεων, και
- η χρήση σωστής μαθηματικής ορολογίας και συμβολισμού (Ball κ.ά., 2008).

Για τη μέτρηση της ΚΓΠ, οι ερευνητές ανέπτυξαν ερωτήσεις που, αν και τοποθετούνται σε σενάρια τάξης, απαιτούν την κατανόηση που έχουν οι περισσότεροι ενήλικες (Ball κ.ά., 2005).

(β) την Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου (ΕΓΠ, specialized content knowledge - SCK) (Ball κ.ά., 2008). Η ΕΓΠ αναφέρεται στις μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες που απαιτούνται αποκλειστικά για τη διδασκαλία (Ball κ.ά., 2008). Είναι το είδος των καθημερινών εργασιών που κάνουν μόνο οι εκπαιδευτικοί και περιλαμβάνει την *αποσυμπίεση* των μαθηματικών, η οποία δεν είναι απαραίτητη σε περιβάλλοντα εκτός διδασκαλίας (Ball κ.ά., 2008). Η μαθηματική γνώση είναι συμπιεσμένη σε πιο αφηρημένες και εύχρηστες μορφές, μέσω των οποίων όμως δυσχεραίνεται η κατανόηση των μαθητών (Ball & Bass, 2002) και γι' αυτόν τον λόγο ο εκπαιδευτικός πρέπει να αποσυμπιέσει τη μαθηματική γνώση κατά τη διδασκαλία. Ωστόσο, όσο αναπτύσσεται η κατανόηση των μαθητών, τόσο λιγότερο απαραίτητη είναι η αποσυμπίεση των μαθηματικών ιδεών (Ball κ.ά., 2008). Επιπλέον, η ΕΓΠ περιλαμβάνει την εννοιολογική κατανόηση των αριθμητικών δεδομένων, κανόνων και εννοιών, που προϋποθέτει η ΚΓΠ, καθώς και τη γνώση του γιατί αυτά τα γεγονότα, οι κανόνες και οι έννοιες είναι σωστά (Ball, 1988). Ο εκπαιδευτικός πρέπει δηλαδή να γνωρίζει όχι μόνο το «πώς» αλλά και το «γιατί» (Ball κ.ά., 2008). Παραδείγματα:

- ο προσδιορισμός πολλαπλών αναπαραστάσεων (Hill κ.ά., 2005),
- η παρουσίαση και εξήγηση μαθηματικών ιδεών,
- η ανταπόκριση στις ερωτήσεις των μαθητών,
- η γνώση των συνδέσεων των διάφορων εννοιών και θεμάτων,
- η χρήση αναπαράστασης για κάποιο συγκεκριμένο μαθηματικό στόχο,
- η γνώση των δυνατοτήτων και των περιορισμών των διαφόρων αναπαραστάσεων για την ανάπτυξη ενός θέματος,
- η σύνδεση των αναπαραστάσεων με μαθηματικές έννοιες και άλλες αναπαραστάσεις,
- η ερμηνεία και η αξιολόγηση των μη τυποποιημένων μαθηματικών ιδεών των μαθητών (να καταλάβουν αν οι εναλλακτικές μέθοδοι των μαθητών έχουν μαθηματικό νόημα και μπορούν να εφαρμοστούν σε άλλο πλαίσιο),
- η ανάπτυξη χρήσιμων ορισμών (Ball κ.ά., 2008),
- η δημιουργία ενός λεκτικού προβλήματος (Son & Crespo, 2009).

Κάθε ένα από αυτά τα παραδείγματα αντιστοιχεί σε ενέργειες που οι εκπαιδευτικοί κάνουν συνήθως καθημερινά στην τάξη τους. Για τη μέτρηση της ΕΓΠ οι ερευνητές σχεδίασαν στοιχεία που ζητούν από τους εκπαιδευτικούς να δείξουν ή να αναπαραστήσουν αριθμούς ή πράξεις χρησιμοποιώντας εικόνες ή χειριστικά μέσα και να δώσουν εξηγήσεις για κοινούς μαθηματικούς κανόνες, όπως επίσης ερωτώνται για τις εναλλακτικές μεθόδους επίλυσης, το οποίο αντιπροσωπεύει μια σημαντική δεξιότητα για την αποτελεσματική διδασκαλία (Ball κ.ά, 2005).

Οι Lin, Chin και Chiu (2011) πρότειναν ότι υπάρχουν τα εξής τρία στοιχεία της ΕΓΠ: *αιτιολόγηση* (πώς εξηγεί και δικαιολογεί ο εκπαιδευτικός τις μαθηματικές του ιδέες με αυστηρά επιχειρήματα που βασίζονται σε μαθηματικούς ορισμούς και θεωρήματα), *επεξήγηση* (πώς παρέχει μαθηματικές εξηγήσεις για κοινούς κανόνες και διαδικασίες) και *αναπαράσταση* (πώς επιλέγει, φτιάχνει και χρησιμοποιεί μαθηματικές αναπαραστάσεις). Το θεωρητικό πλαίσιο των Lin κ.ά. (2011) έχει χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο ανάλυσης της ΕΓΠ σε διάφορες έρευνες (π.χ. Ho & Lai, 2012).

(γ) τη γνώση του μαθηματικού ορίζοντα (knowledge at the mathematical horizon) (Ball κ.ά, 2009). Η γνώση του μαθηματικού ορίζοντα είναι η κατανόηση του ευρύτερου συνόλου των μαθηματικών ιδεών με το οποίο συνδέεται μία συγκεκριμένη ιδέα (Ball κ.ά., 2009). Η σύνδεση των ιδεών που μαθαίνουν οι μαθητές μεταξύ διαφορετικών ενοτήτων του μαθηματικού περιεχομένου που διδάσκονται είναι μια σημαντική πτυχή της γνώσης για τη διδασκαλία που τους βοηθάει να οικοδομήσουν συνοχή στις γνώσεις τους (Ball & Bass, 2002). Η διδασκαλία απαιτεί επίσης από τους εκπαιδευτικούς να προβλέπουν πώς οι μαθηματικές ιδέες αλλάζουν και αναπτύσσονται (Ball & Bass, 2002). Για παράδειγμα, ο δάσκαλος δεν πρέπει να αναφέρει στους μαθητές της Β΄ δημοτικού την πρόταση «ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει», γνωρίζοντας ότι αυτό είναι ψευδές και πρόκειται σύντομα να ανατραπεί. Παραδείγματα της γνώσης του μαθηματικού ορίζοντα:

- γνώση για το πού βρίσκονται τώρα οι μαθητές και προς τα πού κατευθύνονται,
- γνώση για τις συνέπειες που έχει ο τρόπος αναπαράστασης των μαθηματικών ιδεών,
- γνώση για το γεγονός ότι οι αποφάσεις που λαμβάνονται καθημερινά επηρεάζουν τη μελλοντική ανάπτυξη των μαθητών,
- γνώση των μαθησιακών στόχων των μαθηματικών σε όλες τις τάξεις που διδάσκει (Ball κ.ά., 2008).

Η Γνώση Παιδαγωγικού Περιεχομένου περιλαμβάνει:

(α) τη Γνώση του Περιεχομένου και των Μαθητών (ΓΠΜ, knowledge of content and students - KCS) (Ball κ.ά., 2008). Η ΓΠΜ είναι η γνώση που συνδυάζει τη γνώση για τους μαθητές και τη γνώση για τα μαθηματικά (Ball κ.ά., 2008). Με άλλα λόγια, η ΓΠΜ είναι ένα αμάλγαμα, που περιλαμβάνει μια συγκεκριμένη μαθηματική ιδέα ή διαδικασία και την εξοικείωση με το τι σκέφτονται ή κάνουν συχνά οι μαθητές (Ball κ.ά., 2008). Παραδείγματα:

- να γνωρίζει ο εκπαιδευτικός τις αναμενόμενες δυσκολίες και παρανοήσεις των μαθητών για συγκεκριμένα μαθηματικά θέματα,
- να γνωρίζει τι κάνει ένα θέμα δύσκολο για τους μαθητές,
- να προβλέπει τις επιδόσεις των μαθητών,
- να γνωρίζει τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές τείνουν να αναπτύσσουν την κατανόηση του θέματος (Ball κ.ά., 2009),
- να προβλέπει τους παράγοντες που θα υποστηρίξουν την κατανόηση των μαθητών,
- να σχεδιάζει τρόπους αντιμετώπισης των παρανοήσεων των μαθητών,

- να προβλέπει τις προτιμήσεις των μαθητών (Hill κ.ά., 2005).

Κάθε ένα από αυτά τα παραδείγματα είναι ένα διδακτικό έργο που απαιτεί αλληλεπίδραση μεταξύ της ειδικής μαθηματικής κατανόησης και της κατανόησης παιδαγωγικών ζητημάτων που επηρεάζουν τη μάθηση των μαθητών (Ball κ.ά., 2008).

Οι Ball κ.ά. (2008) εξηγούν τον τρόπο που η ΓΠΜ διαφέρει από τις δύο παραπάνω βασικές κατηγορίες αναφορικά με τα λάθη. Η αναγνώριση μιας λανθασμένης απάντησης αποτελεί ΚΓΠ, η εκτίμηση της φύσης του λάθους αποτελεί ΕΓΠ, ενώ η εξοικείωση με τα συνήθη λάθη και η απόφαση για το ποιο από τα διάφορα λάθη είναι πιθανότερο να κάνουν οι μαθητές είναι παραδείγματα ΓΠΜ (Ball κ.ά., 2008).

(β) τη Γνώση του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας (ΓΠΔ, knowledge of content and teaching - KCT) (Ball κ.ά., 2008). Η ΓΠΔ συνδυάζει τη γνώση για τη διδασκαλία και τη γνώση για τα μαθηματικά (Ball κ.ά., 2008). Απαιτεί μια αλληλεπίδραση μεταξύ της κατανόησης των ίδιων των μαθηματικών και παιδαγωγικών ζητημάτων που επηρεάζουν τη μάθηση των μαθητών (Hill κ.ά., 2008). Επί της ουσίας, η ΓΠΔ αφορά τα διδακτικά έργα που απαιτούν από τον εκπαιδευτικό βαθιά κατανόηση του αντικειμένου των μαθηματικών, καθώς και κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι ενέργειες και οι αποφάσεις του θα επηρεάσουν τη μάθηση των μαθητών (Olanoff, 2011). Παραδείγματα:

- η επιλογή του με ποια παραδείγματα ή δραστηριότητες θα ξεκινήσει η διδασκαλία, με ποια θα συνεχίσει και με ποια θα επιτευχθεί η εμβάθυνση της κατανόησης (κατάλληλη επιλογή και αλληλουχία των παραδειγμάτων,
- κατάλληλη επιλογή και αλληλουχία θεμάτων διδασκαλίας,
- επιλογή ερωτήσεων και σχεδιασμός των κατάλληλων δραστηριοτήτων για την αξιολόγηση, την επέκταση και τη μεταβολή της κατανόησης των μαθητών,
- κατανόηση της δύναμης και της αξίας των διαφόρων μαθηματικών αναπαραστάσεων,
- καθορισμός της κατάλληλης αναπαράστασης για το εκάστοτε αντικείμενο της διδασκαλίας,
- αξιολόγηση των διδακτικών πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία μιας συγκεκριμένης ιδέας,
- εξοικείωση με τις παιδαγωγικές αρχές για τη διδασκαλία συγκεκριμένων θεμάτων,
- αντίληψη για το τι προσφέρουν διδακτικά οι διαφορετικές μέθοδοι και διαδικασίες,
- λήψη αποφάσεων για το πότε θα γίνει παύση για περισσότερες διευκρινίσεις, πότε θα χρησιμοποιηθεί μια παρατήρηση ενός μαθητή για να γίνει μια μαθηματική διαπίστωση και πότε θα τεθεί μια νέα ερώτηση ή μια νέα εργασία για να προωθηθεί η μάθηση των μαθητών (Ball κ.ά., 2008).

Κάθε ένα από αυτά τα παραδείγματα απαιτεί συντονισμό μεταξύ των μαθηματικών που διακυβεύονται και των διδακτικών επιλογών και σκοπών που υπάρχουν, καθώς και την εξοικείωση με τις παιδαγωγικές αρχές για τη διδασκαλία του συγκεκριμένου περιεχομένου. (Ball κ.ά., 2008). Για τη μέτρηση της ΓΠΔ θέτονται συχνά ερωτήματα στους συμμετέχοντες αναφορικά με το καταλληλότερο μοντέλο για την ανάπτυξη ενός συγκεκριμένου μαθηματικού θέματος, καλούνται να επιλέξουν ανάμεσα σε διάφορα παραδείγματα τα πιο κατάλληλα για ένα θέμα και τίθενται ερωτήματα σχετικά με το πώς η γλώσσα και οι αναλογίες/μεταφορές μπορούν να βοηθήσουν ή να παρεμποδίσουν τη μάθηση των μαθητών (Ball κ.ά., 2008).

(γ) τη γνώση του προγράμματος σπουδών (knowledge of curriculum) (Ball κ.ά., 2009). Η γνώση του προγράμματος σπουδών αναφέρεται στην αντιμετώπιση της πορείας του προγράμματος σπουδών (Ball κ.ά., 2008). Παράδειγμα αποτελεί η επιλογή ενός κατάλληλου θέματος ή μιας ενότητας από το πρόγραμμα σπουδών για τη διδασκαλία.

3. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό επιχειρείται η παρουσίαση βασικών στοιχείων της βιβλιογραφίας αναφορικά με τους τύπους προβλημάτων του πολλαπλασιασμού, την έννοια και τις λειτουργίες του κλάσματος και τις ερμηνείες που προτείνουν οι ερευνητές για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Επιπρόσθετα, γίνεται εκτενής παρουσίαση της μελέτης περίπτωσης των Simon, Kara, Norton και Placa (2018) για να διαλευκανθεί ο τρόπος σκέψης και οι δυσκολίες ενός μαθητή κατά τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Επιπλέον, γίνεται λόγος για τη σχέση συλλογισμού σε τρία επίπεδα και τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Τέλος, παρουσιάζονται βιβλιογραφικά στοιχεία για τις αναπαραστάσεις, τις παρανοήσεις και τις στρατηγικές διδασκαλίας στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων.

3.1 Πολλαπλασιασμός

Υπάρχουν πέντε τύποι προβλημάτων πολλαπλασιασμού (Κολέζα, 2009):

(α) *δημιουργία ισοδύναμων ομάδων* (ή επαναλαμβανόμενη πρόσθεση), στην οποία ο ένας παράγοντας δείχνει τον αριθμό των ομάδων και ο άλλος το πλήθος κάθε ομάδας, και αναζητείται το πλήθος όλων των μονάδων, π.χ. στο «Αν 3 ταξί έχουν 4 επιβάτες το καθένα, πόσοι επιβάτες υπάρχουν συνολικά;», το 3x4 μπορεί να μεταφραστεί ως το άθροισμα τριών τεσσάρων,

(β) *λόγος*, π.χ. «Αν πλένετε 3 παράθυρα σε 1 λεπτό, πόσα πλένετε σε 4 λεπτά;»,

(γ) *σύγκριση*, κατά την οποία υπάρχουν δύο διαφορετικά σύνολα και το ένα σύνολο αποτελείται από αντίγραφα του άλλου συνόλου (Greer, 1992), π.χ. «Ο Γ. έχει 4 μαρκαδόρους και ο Π. έχει τους τριπλάσιους. Πόσους έχει ο Π.;», όπου οι δύο ποσότητες μαρκαδόρων συγκρίνονται και η μία είναι 3 φορές μεγαλύτερη από την άλλη,

(δ) *καρτεσιανό γινόμενο*, ο οποίος ορίζει τον διακριτό αριθμό διατεταγμένων ζευγών που μπορούν να βρεθούν κατά τη σύζευξη δύο συνόλων (Greer, 1992), π.χ. «Αν ο Π.

έχει 3 μπλούζες και 4 σορτς, πόσες διαφορετικές εμφανίσεις μπορεί να κάνει;», όπου επιτυγχάνεται ο συνδυασμός στοιχείων από δύο σύνολα, και

(ε) *εμβαδόν*, π.χ. «Ποιο είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου με πλευρές μήκους 3 και 5 μέτρα;», όπου ο πολλαπλασιασμός ερμηνεύεται ως το εμβαδόν μιας ορθογώνιας περιοχής. Η διαφορά εδώ σε σχέση με τις παραπάνω καταστάσεις είναι ότι το γινόμενο είναι ένας διαφορετικός τύπος μονάδας από τους δύο συντελεστές (π.χ. $3 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 15\, m^2$) (Greer, 1992).

Όπως αναφέρει η Lamon (2012), ο πολλαπλασιασμός συνδέεται με καταστάσεις που περιλαμβάνουν διαδικασίες, όπως η συρρίκνωση (shrinking), η μεγέθυνση (enlarging), η κλιμάκωση (scaling), ο διπλασιασμός (dublicating), ο εκθετικός (exponentiating) και ο δίκαιος διαμοιρασμός (fair sharing). Η ερευνήτρια ισχυρίζεται ότι, καθώς οι μαθητές αλληλοεπιδρούν με πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, αναλύοντας τις ποσοτικές τους σχέσεις, τελικά καταλαβαίνουν γιατί οι προσθετικοί μετασχηματισμοί δεν λειτουργούν, όπως για παράδειγμα το πρόβλημα «Για το πάρτι σας, είχατε προγραμματίσει να αγοράσετε 2 κιλά ανάμεικτους ξηρούς καρπούς για 8 άτομα, αλλά τώρα έρχονται 10 άτομα. Πόσα κιλά πρέπει να αγοράσετε;», όπου ένας προσθετικός μετασχηματισμός δεν εξυπηρετεί την αναλογία.

Σε ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού ο πολλαπλασιαστής είναι ο πρώτος αριθμός και θεωρείται ο παράγοντας που εκτελεί την πράξη (Taber, 1999). Η Taber (1999) αναπαριστά τα προβλήματα πολλαπλασιασμού σε διαφορετικές μορφές, ανάλογα με το αν ο πολλαπλασιαστής είναι ακέραιος αριθμός ή κλάσμα:

α) *προβλήματα σύγκρισης* (πολλαπλασιαστής ακέραιος ή κλάσμα), όπου συγκρίνονται δύο ποσότητες και η μία είναι πολλαπλάσια (πολλαπλασιαστής ακέραιος) ή ένα μέρος του μεγέθους της άλλης (πολλαπλασιαστής κλάσμα)

β) *προβλήματα με πολλαπλασιαστική αλλαγή* (πολλαπλασιαστής ακέραιος ή κλάσμα), όπου επεκτείνεται ή μειώνεται μια ποσότητα,

γ) *προβλήματα συνδυασμού* (πολλαπλασιαστής ακέραιος), όπου ο πολλαπλασιαστής καθορίζει τον αριθμό στο συνδυασμό ίσων τμημάτων,

δ) *προβλήματα μέρος-όλου* (πολλαπλασιαστής κλάσμα), όπου το ζητούμενο είναι το κλασματικό μέρος μιας ποσότητας.

3.2 Κλάσμα

Ο συνήθης τρόπος αριθμητικής αναπαράστασης ενός κλάσματος είναι η έκφραση α/β, όπου α είναι ένας ακέραιος αριθμός και β ένας ακέραιος αριθμός διαφορετικός του 0. Ένα κλάσμα έχει δηλαδή τρία μέρη -έναν αριθμητή, έναν παρονομαστή και μια γραμμή που χωρίζει τους δύο αριθμούς- γεγονός που καθιστά τη σημειογραφία του δύσκολη στην κατανόηση (Lortie-Forques, Tian & Siegler, 2015). Όπως αναφέρει ο Λεμονίδης (2016), το κλάσμα εκφράζει μια σχέση δύο αριθμών σε μορφή λόγου, σε αντίθεση με τους ακέραιους, οι οποίοι εκφράζουν τον πληθάριθμο μιας ποσότητας.

Το κλάσμα είναι μια σύνθετη έννοια, διότι ανάλογα με την κατάσταση που βρίσκεται έχει άλλη λειτουργία. Ο Kieren (1976) παρουσίασε πέντε επιμέρους λειτουργίες για τον ορισμό των κλασμάτων: μέρος-όλου, μέτρο, πηλίκο, λόγος και τελεστής.

Στην έννοια μέρος-όλου ορίζεται η μονάδα αναφοράς, ο παρονομαστής υποδηλώνει τον αριθμό των ίσων κομματιών στα οποία χωρίζεται η μονάδα και ο αριθμητής υποδεικνύει πόσα από αυτά τα κομμάτια επιλέγονται. Για παράδειγμα, το 3/5 σημαίνει 3 μέρη από τα 5 ίσα μέρη της μονάδας. Η λειτουργία του μέρος-όλου χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό ποσοτήτων και γι' αυτό συνδέεται στενά με την καθημερινή ζωή.

Το κλάσμα *α/β* ως μέτρο προκύπτει ως επανάληψη του μοναδιαίου κλάσματος *1/β* για τον καθορισμό μιας απόστασης (π.χ. το 3/5 σημαίνει 3 1/5 μονάδων από το 0 σε μια αριθμογραμμή) ή εκφράζει την ποσότητα του μεγέθους σε σχέση με μια μονάδα μέτρησης (π.χ. τα 3/5 λίτρου νερό σημαίνει 3 από 1/5 λίτρου νερό).

Στο κλάσμα *α/β* ως πηλίκο, το *α* αναπαριστά την ποσότητα που θα διαιρεθεί, το *β* αναπαριστά σε πόσα μέρη θα διαιρεθεί και το κλάσμα εκφράζει το αποτέλεσμα της κατανομής των ποσοτήτων, δηλαδή το μερίδιο (π.χ. σε μια κατάσταση όπου 5 παραλήπτες μοιράζονται μια τριάδα από κάτι, όπως 3 πίτσες).

Το κλάσμα ως λόγος εκφράζει τη σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων (π.χ. το 3:5 είναι μια σχέση που 3*x συγκρίνονται πολλαπλασιαστικά με* 5y).

Τέλος, στη λειτουργία του τελεστή ένα κλάσμα θεωρείται ως μια συνάρτηση που εφαρμόζεται σε έναν αριθμό, ένα αντικείμενο ή ένα σύνολο (Post, Behr, Harel & Lesh, 1993). Οι τελεστές είναι μετασχηματιστές που επιμηκύνουν ή συντομεύουν τμήματα γραμμών, αυξάνουν ή μειώνουν τον αριθμό των στοιχείων σε ένα σύνολο διακριτών αντικειμένων, ή παίρνουν ένα σχήμα στο γεωμετρικό επίπεδο, όπως ένα τρίγωνο ή ένα ορθογώνιο, και το αντιστοιχίζουν σε ένα μεγαλύτερο ή μικρότερο σχήμα του ίδιου σχήματος (Lamon, 2007), χρησιμοποιούνται δηλαδή για να υποδηλώσουν τις πολλαπλασιαστικές μεταβολές που πρέπει να εφαρμοστούν σε μια ποσότητα.

Η Ball (1993) τονίζει ότι για να γίνουν κατανοητά σε βάθος τα κλάσματα, οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί πρέπει να είναι εξοικειωμένοι με όλες αυτές τις λειτουργίες των κλασμάτων. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να είναι σε θέση να βλέπουν τους ρητούς αριθμούς μεταξύ άλλων ως τελεστές σε σύνολα παίρνοντας το μέρος ενός συνόλου αντικειμένων, ως πηλίκο βρίσκοντας το ποσό ενός μεριδίου όταν άτομα μοιράζονται κάτι και ως λόγους συγκρίνοντας έναν αριθμό μιας ποσότητας με έναν άλλο αριθμό μιας διαφορετικής ποσότητας (Olanoff, 2011).

Ωστόσο, η ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου, η οποία κυριαρχεί στη διδασκαλία των τάξεων του δημοτικού (Ni & Zhou, 2005, Olanoff κ.ά., 2014), ευθύνεται για την αδυναμία των μαθητών να δουν το κλάσμα ως αριθμό (Λεμονίδης, 2016) και συχνά λειτουργεί ως εμπόδιο στην επίλυση ενός προβλήματος που περιλαμβάνει πολλαπλασιασμό με κλάσματα. Ένας βασικός λόγος γι' αυτό είναι ότι η ερμηνεία αυτή δεν είναι λειτουργική όταν ο πολλαπλασιαστής είναι καταχρηστικό κλάσμα.

3.3 Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

Διάφοροι ερευνητές παρουσίασαν προσεγγίσεις για την εννοιολόγηση του πολλαπλασιασμού που να έχει νόημα τόσο στους φυσικούς όσο και στους ρητούς αριθμούς. Πολλοί ερευνητές έχουν επισημάνει ότι η αντίληψη ότι «ο πολλαπλασιασμός κάνει το αποτέλεσμα μεγαλύτερο» πρέπει να αναθεωρηθεί ως «ο πολλαπλασιασμός μπορεί να κάνει το αποτέλεσμα μικρότερο, ίσο ή μεγαλύτερο» (Stafylidou & Vosniadou, 2004). Αυτή η προσέγγιση συνεπάγεται να κατανοήσει ο μαθητής ότι ο πολλαπλασιασμός γενικότερα έχει να κάνει με την εύρεση μιας ποσότητας που είναι τόσες φορές μεγαλύτερη ή μικρότερη από μια άλλη ποσότητα.

Ομοίως, οι Chval, Lannin και Jones (2013) ορίζουν τον πολλαπλασιασμό ως μια κλιμακωτή διαδικασία που περιλαμβάνει δύο ποσότητες, όπου η μία ποσότητα χρησιμεύει ως παράγοντας κλιμάκωσης και προσδιορίζει τον τρόπο με τον οποίο η πράξη αλλάζει το μέγεθος στην άλλη ποσότητα. Αυτό σημαίνει ότι, ακόμη και ο πολλαπλασιασμός ακέραιων αριθμών περιλαμβάνει δύο διαφορετικές μονάδες, όπου η μία ποσότητα χρησιμοποιεί την άλλη ποσότητα ως μονάδα αναφοράς. Η μονάδα αναφοράς για τον πολλαπλασιαστή είναι ο πολλαπλασιαστέος, για τον πολλαπλασιαστέο είναι ολόκληρη η μονάδα και για το γινόμενο είναι ολόκληρη η μονάδα (Caglayan & Olive, 2011). Παράλληλα, αν και το *α/β x γ/δ* και το *γ/δ x α/β* δίνουν την ίδια αριθμητική απάντηση, η σειρά έχει σημασία αν θέλουμε να εννοιολογήσουμε τις μονάδες αναφοράς που εμπλέκονται (Caglayan & Olive, 2011).

Βασισμένοι στο σκεπτικό μιας εννοιολόγησης του πολλαπλασιασμού που να έχει νόημα στα δύο συστήματα αριθμών, οι Thompson και Saldanha (2003) προτείνουν την έννοια του πολλαπλασιασμού ως κλιμάκωση, η οποία προϋποθέτει την αντίληψη ενός κλάσματος ως περιγραφή μιας πολλαπλασιαστικής σχέσης μεταξύ δύο ποσών, ότι δηλαδή ο πολλαπλασιασμός σημαίνει κάποιος αριθμός (ή κλάσμα) κάποιου ποσού. Οι Thompson και Saldanha (2003) τόνισαν τη σημασία της αντίληψης των κλασμάτων με την οπτική του σχετικού μεγέθους, δηλαδή πολλαπλασιαστικά, όχι μόνο ως μέρος-όλου. Με άλλα λόγια, καλούνται οι μαθητές να αντιληφθούν «το *α* είναι το *μ/ν* του *β*» ως «το *α* είναι *μ* φορές μεγαλύτερο από το *1/ν* του *β*», διότι, όπως συγκεκριμένα περιέγραψε ο Steffe (2010), οι μαθητές πρέπει να βλέπουν τα 3/5 όχι μόνο ως 3 μέρη από 5 ίσα μέρη, αλλά και ως 3 από 1/5, δηλαδή ως μια επανάληψη ενός μοναδιαίου κλάσματος (το κλάσμα ως μέτρο).

Σύμφωνα με αυτό το σκεπτικό, για τον πολλαπλασιασμό δύο κλασμάτων, το ένα κλάσμα λειτουργεί ως τελεστής, προσδιορίζοντας ένα κλασματικό μέρος του άλλου κλάσματος. Συνεπώς, για το *α/β × γ/δ* σημαίνει να χωριστεί *το γ/δ* σε *β* μέρη και να επαναληφθεί η αντίστοιχη κλασματική μονάδα του γ/δ (1/β x γ/δ) *α* φορές.

Σύμφωνα με τη Lamon (2012), ένας μαθητής κατανοεί τους ρητούς αριθμούς ως τελεστές όταν (α) ο μαθητής μπορεί να ερμηνεύσει έναν κλασματικό πολλαπλασιαστή με διάφορους τρόπους, όπως για παράδειγμα ότι το 3/4 σημαίνει 3 φορές το 1/4 μιας μονάδας ή 1/4 των 3 φορών της μονάδας, (β) στην περίπτωση που δύο πράξεις (πολλαπλασιασμός και διαίρεση) εκτελούνται η μία επί του αποτελέσματος της άλλης, ο μαθητής μπορεί να ονομάσει ένα ενιαίο κλάσμα για να περιγράψει τη σύνθετη πράξη, όπως για παράδειγμα ότι ο πολλαπλασιασμός μιας μονάδας με το 3/4 είναι το ίδιο με το να διαιρέσεις τη μονάδα με το 4 και να την πολλαπλασιάσεις με το 3, (γ) ο μαθητής μπορεί να προβλέψει την επίδραση ενός τελεστή και (δ) ο μαθητής μπορεί να χρησιμοποιήσει μοντέλα για να προσδιορίσει μια μοναδική σύνθεση που χαρακτηρίζει μια σύνθεση συνθέσεων, όπως για παράδειγμα ότι τα 2/3 των 3/4 μιας μονάδας ισούνται με το 1/2 της μονάδας.

Στο πλαίσιο του πολλαπλασιασμού κλασμάτων οι Post, Behr, Harel, και Lesh (1993, στο Iszak, 2008) χώρισαν τη λειτουργία του τελεστή σε τρεις υποκατασκευές: *αναπαραγωγέας και διαμεριστής* (duplicator and partition-reducer), *τεντωτής και συρρικνωτής* (stretcher and shrinker), και *πολλαπλασιαστής και διαιρέτης*. Στην περίπτωση του αναπαραγωγέα/διαμεριστή, ο αριθμητής καθορίζει πόσα αντίγραφα θα γίνουν από την αρχική μονάδα αναφοράς και ο παρονομαστής καθορίζει σε πόσα ίσα μέρη διαμερίζεται το προϊόν της αναπαραγωγής, με την αντίστοιχη κλασματική μονάδα να είναι η απάντηση στο πρόβλημα (δηλ. το γινόμενο). Για παράδειγμα, στην περίπτωση που η αρχική μονάδα αναφοράς είναι μια διακριτή ποσότητα, π.χ. 8 αντικείμενα, για το 3/4 x 8 δημιουργούνται 3 σύνολα των 8 αντικειμένων, αυτά τα 24 αντικείμενα διαμερίζονται σε 4 ισοπληθή σύνολα και 1 από αυτά τα σύνολα των 6 αντικειμένων προκύπτει ως απάντηση. Σε αυτή την περίπτωση αλλάζει το μέγεθος των σύνθετων μονάδων, όχι των μονάδων. Αντιθέτως, οι λειτουργίες του τεντώματος και της συρρίκνωσης επιδρούν στα μεγέθη των μονάδων, καθώς ο αριθμητής «τεντώνεται», ανταλλάσσοντας καθένα από τα αντικείμενά του σε σύνθετες μονάδες αντικειμένων όσων και ο τελεστής, ενώ ο παρονομαστής καθορίζει το μέγεθος των ομάδων στις οποίες αναδιατάσσονται τα μεμονωμένα αντικείμενα που προκύπτουν. Στο παράδειγμα 3/4 x 8 δημιουργούνται 8 σύνολα των 3 αντικειμένων και ύστερα αυτά τα 24 αντικείμενα χωρίζονται σε τόσα σύνολα ώστε κάθε σύνολο να περιέχει 4 αντικείμενα. Το πλήθος των συνόλων (εδώ 6) καθορίζει την απάντηση του προβλήματος.

Στην έρευνα των Behr, Khoury, Harel, Post & Lesh, (1997) για την εύρεση των 3/4 μιας ποσότητας 8 δεσμών αποτελούμενων από 4 ράβδους η κάθε μία, οι περισσότερες από τις απαντήσεις ανήκαν στη υποκατασκευή αναπαραγωγέας/διαμεριστής, με το διαμερισμό να προηγείται της αναπαραγωγής, διότι όπως ισχυρίζονται οι ίδιοι οι ερευνητές η αναπαραγωγή μιας ποσότητας είναι ψυχολογικά πιο απαιτητική από ότι ο διαμερισμός αυτής της ποσότητας. Θα μπορούσε κανείς να κάνει πρώτα διαμερισμό και μετά αναπαραγωγή, ή αντίστοιχα, να συρρικνώσει πρώτα και μετά να τεντώσει (Post κ.ά., 1993, στο Iszak, 2008), αλλά το τελικό αποτέλεσμα της διαδικασίας είναι ή συρρίκνωση ή μεγέθυνση, ανάλογα με το ποιο από τα δύο έχει επικρατήσει στη διαδικασία (Lamon, 2007). Αυτό σημαίνει ότι σε περίπτωση που ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, πρόκειται για πράξη τεντώματος ενός αντικειμένου, ενός αριθμού ή ενός συνόλου, ενώ σε περίπτωση που ο παρονομαστής είναι μεγαλύτερος από τον αριθμητή, θεωρείται πράξη συρρίκνωσης (Steenbrugge, Lesage, Valcke & Desoete, 2013). Ωστόσο, οι Hackenberg και Tillema (2009) επισημαίνουν ότι το μοντέλο του τεντωτή/συρρικνωτή είναι μια ανάλυση ενηλίκων και δεν μπορεί να αποδοθεί εύκολα στους μαθητές.

Μία εναλλακτική πρόταση για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων έκανε ο Davydov (1975), ο οποίος πρότεινε ο πολλαπλασιασμός να διδάσκεται ως αλλαγή μονάδων. Οι *μονάδες* αναφέρονται σε διαφορετικές ποσοτικές μονάδες που σχηματίζονται κατά τη διαδικασία κατασκευής μιας σύνθεσης κλασμάτων (Hackenberg & Tillema, 2009). Η ομοιότητα της προσέγγισης του Davydov (1975) για τον πολλαπλασιασμό με την προσέγγιση που προτείνεται από τους Thompson και Saldanha (2003) είναι η ιδέα ότι ο πολλαπλασιαστής εξειδικεύει τον αριθμό των ενδιάμεσων μονάδων (στο Simon, Kara, Norton & Placa, 2018).

Με τη σειρά τους, οι Simon, Kara, Norton και Placa (2018) εξηγούν τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων ως αλλαγή μονάδων, μέσα από την αναδρομική διαδικασία κατασκευής μιας ποσότητας από μια μονάδα μέσω μιας ενδιάμεσης μονάδας που κατασκευάζεται από την αρχική μονάδα, δίνοντας έμφαση στη σχέση μεταξύ ποσότητας και μονάδας. Ο μαθητής γνωρίζει τον αριθμό των ενδιάμεσων μονάδων στην ποσότητα και τον αριθμό των μονάδων στην ενδιάμεση μονάδα, και πρέπει να ανακαλύψει πόσες μονάδες περιέχει η ποσότητα. Ο συμβολισμός $\alpha \times \beta$ σημαίνει ότι υπάρχουν α μονάδες στην ενδιάμεση μονάδα, β ενδιάμεσες μονάδες στην ποσότητα και $\alpha \times \beta$ μονάδες στην ποσότητα.

Οι Simon, Kara, Norton και Placa (2018) προσπάθησαν να προωθήσουν μια έννοια του πολλαπλασιασμού, η οποία να αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έννοιας του πολλαπλασιασμού που να περιλαμβάνει τον πολλαπλασιασμό τόσο με ακέραιους αριθμούς όσο και με κλάσματα, και να κατασκευάζεται από μαθητές που έχουν προηγουμένως αναπτύξει μια αντίληψη του πολλαπλασιασμού ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Ο αρχικός σχεδιασμός τους βασίστηκε στην εικασία ότι οι μαθητές που έχουν αναπτύξει μια έννοια του πολλαπλασιασμού με πολλαπλές ομάδες για τον πολλαπλασιασμό με ακέραιους αριθμούς, μέσω της *γενικευτικής αφομοίωσης* (Piaget, 1952, στο Simon, Kara, Norton & Placa, 2018) θα μπορούσαν να επεκτείνουν την έννοια του πολλαπλασιασμού, ώστε να περιλαμβάνει τον πολλαπλασιασμό με έναν μικτό αριθμό και στη συνέχεια να επεκτείνουν την έννοια, ώστε να περιλαμβάνει τον πολλαπλασιασμό με κλάσματα. Υπέθεσαν δηλαδή ότι, μόλις οι μαθητές κατακτήσουν τον πολλαπλασιασμό με έναν μικτό αριθμό, θα είναι σε θέση να επιδείξουν πολλαπλασιασμό με κλάσμα ως μια δεύτερη περίπτωση γενικευτικής αφομοίωσης.

Η μαθήτρια του πειράματος διδασκαλίας στη μελέτη των Simon, Kara, Norton και Placa (2018), χρησιμοποιώντας γραφικές αναπαραστάσεις με ράβδους κλασμάτων μέσω συγκεκριμένου λογισμικού, είχε γενικεύσει την έννοια του πολλαπλασιασμού με έναν ακέραιο αριθμό και κατάφερε να συμπεριλάβει τον πολλαπλασιασμό με έναν μικτό αριθμό, όμως δεν μπόρεσε να επεκτείνει την αφομοιωτική της δομή, ώστε να συμπεριλάβει τους κλασματικούς πολλαπλασιαστές. Αυτό συνέβη, διότι ο πολλαπλασιασμός για τη μαθήτρια ήταν μια πράξη δημιουργίας πολλαπλών αντιγράφων μιας ποσότητας και, ενώ κατάφερε να επεκτείνει την αντίληψή της ώστε να περιλαμβάνει την κατασκευή πολλαπλών αντιγράφων που περιλάμβαναν ένα μερικό αντίγραφο, το κλάσμα ως πολλαπλασιαστής δεν ταίριαζε με την αντίληψη αυτή για την κατασκευή πολλαπλών αντιγράφων. Η μαθήτρια σκεφτόταν τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων α/β *x* γ/δ ως εξής: Έκοβε το καθένα από τα β κομμάτια δ φορές και από αυτά έπαιρνε κάθε φορά α κομμάτια γ φορές. Το νόημα της μαθήτριας για τον πολλαπλασιασμό με κλασματικούς πολλαπλασιαστές βασιζόταν στη σκέψη της δημιουργίας μιας ποσότητας αντιμετωπίζοντας το ένα κλάσμα ως μονάδα και τον άλλο ως αριθμό μονάδων. Στη συνέχεια του πειράματος διδασκαλίας, όταν οι ερευνητές άρχισαν να θέτουν λεκτικά προβλήματα πολλαπλασιασμού κλασμάτων, οι απαντήσεις της μαθήτριας αποκάλυψαν δυσκολίες με τις εμπλεκόμενες μονάδες, όπου ενώ μπορούσε να βρει σωστά το γινόμενο της πράξης, δεν μπορούσε να δηλώσει σε τι αναφερόταν αυτός ο αριθμός. Μέσω εξάσκησης σε πολλαπλασιασμούς κλασμάτων εκτός πλαισίου και ταυτόχρονη επεξήγηση του πώς σκεφτόταν, η μαθήτρια φάνηκε ότι μπορούσε να εξηγήσει στον πολλαπλασιασμό *α/β x γ/δ,* ότι το *γ/δ* είναι το *γ/δ* μιας μονάδας και ότι το *α/β* είναι το *α/β* του *γ/δ*, αλλά δεν μπορούσε να συνδέσει το *αγ/βδ* με την αρχική μονάδα.

Αυτό συνέβη όπως επισημαίνουν οι ερευνητές, διότι η μαθήτρια ναι μεν συντόνιζε με επιτυχία τρία επίπεδα μονάδων στη δραστηριότητα, αλλά δεν είχε εσωτερικεύσει τρία επίπεδα μονάδων. Ο Steffe (2003) όρισε ως λειτουργία συντονισμού μονάδων, τη δραστηριότητα συντονισμού τουλάχιστον δύο σύνθετων μονάδων με τέτοιο τρόπο, ώστε η μία σύνθετη ομάδα να είναι διανεμημένη στα στοιχεία της άλλης σύνθετης μονάδας. Μια σύνθετη μονάδα είναι μια μονάδα που αποτελείται από μονάδες (Steffe, 1994), όπως για παράδειγμα το ότι το 8 έχει 4 δυάρια. Μέσω της εσωτερίκευσης και του συντονισμού των σύνθετων μονάδων, το άτομο μπορεί να παράγει τρία επίπεδα μονάδων με την τοποθέτηση σύνθετων μονάδων μέσα σε σύνθετες μονάδες. Ένα άτομο μπορεί να σχηματίσει σύνθετες μονάδες, όταν μπορεί να σχηματίσει δύο επίπεδα μονάδων, δηλαδή όταν μπορεί να κατανοήσει έναν ακέραιο αριθμό ταυτόχρονα ως ξεχωριστή μονάδα (ένα επίπεδο μονάδας) και μια ομάδα ατόμων ως μια ενιαία οντότητα (ολόκληρη η ομάδα είναι ένα δεύτερο επίπεδο μονάδας) (Steffe, 1994).

Όταν πολλαπλασιάζονται μοναδιαία κλάσματα είναι δυνατό να προσδιοριστεί το αποτέλεσμα της λήψης μέρους ενός μέρους από ένα μέρος με συλλογισμό σε δύο μόνο επίπεδα μονάδων (Izsák, 2008). Ωστόσο, για τον πολλαπλασιασμό δύο μη μοναδιαίων κλασμάτων οι Simon, Kara και Placa (2018) εντοπίζουν πέντε επίπεδα μονάδων. Πιο συγκεκριμένα, οι ερευνητές αναφέρουν ότι στο *γ/δ x α/β* υπάρχουν τα εξής επίπεδα μονάδων: η αρχική μονάδα, το *1/β* της αρχικής μονάδας, τα *α/β* της αρχικής μονάδας, το *1/δ* των *α/β* της αρχικής μονάδας και τα *γ/δ* των *α/β* της αρχικής μονάδας.

Τα συμπεράσματα της έρευνας των Simon, Kara, Norton και Placa (2018) είναι ότι η γενίκευση της αφομοίωσης σε μαθητές προερχόμενοι από την αντίληψη του πολλαπλασιασμού ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση φαίνεται να είναι αποτελεσματική για τη δημιουργία νοήματος μόνο για τους πολλαπλασιαστές που είναι μικτοί αριθμοί, οι οποίοι αφομοιώνονται ως αντίγραφα. Όπως άλλωστε υπογράμμισαν οι Van de Walle, Karp και Bay-Williams (2008), οι εκπαιδευτικοί θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν την κατανόηση του ότι στο *α x β* υπάρχουν *α* ομάδες των *β* ως αφετηρία για την επεξεργασία προβλημάτων πολλαπλασιασμού μικτών αριθμών. Το ζητούμενο εδώ όμως είναι ο πολλαπλασιασμός κλασμάτων.

Η δραστηριότητα της μαθήτριας στο πείραμα διδασκαλίας των Simon, Kara, Norton και Placa (2018) υποδηλώνει ότι μία βάση για τη δημιουργία νοήματος για τον πολλαπλασιασμό με κλάσματα μπορεί να είναι η αναδρομική παραγωγή μιας ποσότητας από μια μονάδα, δηλαδή η παραγωγή μιας ποσότητας από μια μονάδα και στη συνέχεια η χρήση αυτής της ποσότητας ως νέας μονάδας (ενδιάμεση μονάδα) για την παραγωγή μιας νέας ποσότητας. Ωστόσο, οι Simon, Kara, Norton και Placa (2018) αναφέρουν ότι δεν αρκεί να αντιληφθούν οι μαθητές την παραγωγή της ενδιάμεσης μονάδας από την ποσότητα, τη σχέση μεταξύ της μονάδας και της ενδιάμεσης μονάδας και τη σχέση μεταξύ της ενδιάμεσης μονάδας και της ποσότητας, αλλά να αντιληφθούν και τη σχέση μεταξύ ποσότητας και μονάδας. Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν την αλλαγή των μονάδων που αντιπροσωπεύει ο πολλαπλασιασμός, ότι δηλαδή ο πολλαπλασιασμός παίρνει μια ποσότητα που μετριέται από την ενδιάμεση μονάδα και βρίσκει την τιμή της ποσότητας που μετριέται από τη μονάδα.

Συνεπώς, οι Simon, Kara, Norton και Placa (2008) προχώρησαν στον επανασχεδιασμό της διδασκαλίας τους, διότι, πρώτον, η μαθήτρια δεν ανέπτυξε μια ενιαία συνεκτική αντίληψη του πολλαπλασιασμού που να περιλαμβάνει τον πολλαπλασιασμό με ακέραιο αριθμό και με κλάσμα, δεύτερον, η μαθήτρια μπόρεσε να προσδώσει νόημα στον πολλαπλασιασμό με κλάσμα, μόνο όταν από το ένα κλάσμα προσπάθησε να δει την αρχική μονάδα και να το θεωρήσει μέρος της, και τρίτον, διότι η μαθήτρια δεν ήταν ξεκάθαρη σχετικά με τις αναφορές του προϊόντος σε εργασίες που αφορούσαν πολλαπλασιασμό με κλάσμα εξαιτίας του περιορισμού του αριθμού των επιπέδων μονάδων που μπορούσε να συντονίσει.

Στην αναθεωρημένη διδασκαλία τους οι Simon, Kara, Norton και Placa (2018) προωθούν την έννοια του πολλαπλασιασμού ως σχέση μεταξύ τριών επιπέδων μονάδων: της μονάδας, της ενδιάμεσης μονάδας και της ποσότητας. Στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων το ζητούμενο είναι η εύρεση της ποσότητας με αναφορά στην αρχική μονάδα, δηλαδή συντονίζοντας το γινόμενο με την αρχική μονάδα και αναγνωρίζοντας το σημείο αναφοράς του. Για να φτάσει ο μαθητής σε αυτό το σημείο, πρέπει να γνωρίζει την ενδιάμεση μονάδα με αναφορά στην αρχική μονάδα και την ποσότητα με αναφορά στην ενδιάμεση μονάδα.

Οι Lee και Shin (2011) περιγράφουν τον διαφορετικό τρόπο συλλογισμού των μαθητών στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων ανάλογα με το επίπεδο μονάδων που σκέφτονται. Για τον πολλαπλασιασμό μεταξύ δύο μοναδιαίων κλασμάτων, οι μαθητές με συλλογισμό δύο επιπέδων χωρίζουν μια μονάδα μήκους σε τόσα κομμάτια όσα και ο παρονομαστής του ενός κλάσματος, περιορίζουν την προσοχή τους στο πρώτο από αυτά τα κομμάτια και χωρίζουν πάλι το πρώτο κομμάτι σε τόσα επιμέρους κομμάτια όσα και ο παρονομαστής του άλλου κλάσματος. Από την άλλη πλευρά, ο μαθητής που σκέφτεται σε τρία επίπεδα μπορεί να εφαρμόσει αναδρομικό ισομερισμό (recursive partitioning) υποδιαιρώντας κατευθείαν όλα τα κομμάτια σε επιμέρους κομμάτια. Ο ισομερισμός αναφέρεται στη διαδικασία διαίρεσης μιας μονάδας σε μέρη ίσου μεγέθους (Hackenberg & Tillema, 2009). Η συγκεκριμένη λύση του αναδρομικού ισομερισμού περιλαμβάνει τρία επίπεδα μονάδων, διότι υπάρχει επίγνωση ότι οι μικρότερες μονάδες είναι φωλιασμένες μέσα σε κάθε μονάδα μεσαίου επιπέδου και υπάρχουν όλες οι μονάδες στο σύνολο της μονάδας (Lee & Shin, 2011). Ο Steffe (2003) τόνισε τη σημασία του αναδρομικού ισομερισμού για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων.

Πέρα από τον αναδρομική ισομερισμό, οι Simon, Kara και Placa (2018) τονίζουν τη σημασία του διανεμητικού ισομερισμού για την κατανόηση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Ο αναδρομικός ισομερισμός μαζί με τον διανεμητικό ισομερισμό στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων περιγράφεται ως *σύνθεση κλασμάτων* από τη Steffe

(2003). Οι Simon, Kara και Placa (2018) ορίζουν τον αναδρομικό ισομερισμό ως μια μαθημένη πρόβλεψη των αποτελεσμάτων της λήψης ενός μοναδιαίου κλάσματος από ένα μοναδιαίο κλάσμα και τον διανεμητικό ισομερισμό ως μια μαθημένη πρόβλεψη ότι *1/β* από *α* μονάδες μπορεί να παραχθεί με τον ισομερισμό *α* μονάδων σε *β* μέρη και την εξαγωγή ενός μέρους από κάθε μονάδα. Οι Simon, Kara, Norton και Placa (2018) εξηγούν ότι ο αναδρομικός ισομερισμός εμπλέκεται στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, επειδή επιτρέπει στους μαθητές να είναι σε θέση να προβλέψουν το μέγεθος των επιμέρους τμημάτων που δημιουργούνται με τη λήψη ενός κλάσματος από ένα κλάσμα, και ο διανεμητικός ισομερισμός εμπλέκεται, επειδή αποτελεί τη βάση για τη λήψη ενός κλάσματος από μη μοναδιαία κλασμάτα.

Η εκμάθηση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων από τους Simon, Kara και Placa (2018) βασίζεται στη λειτουργία του κλάσματος ως μέτρο, στον αναδρομικό ισομερισμό και στον διανεμητικό ισομερισμό. Η λειτουργία του μέτρου συμβάλλει στην ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος ως μια *σχέση μεγέθους* και όχι ως σχέση *μέρους-όλου* (Hackenberg & Lee, 2016). Οι Simon, Kara και Placa (2018) προτείνουν λοιπόν ότι η επιδιωκόμενη κατανόηση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων είναι ότι *α/β x γ/δ = α x γ / β x δ*, επειδή η λήψη *1/δ* από τα μέρη μεγέθους *1/β* δίνει υποτμήματα μεγέθους *1/(βxδ)* (αναδρομικός ισομερισμός) και υπάρχουν *α x γ* των εν λόγω υποτμημάτων, διότι η λήψη *1/δ* από *α* μέρη παράγει *α* υποτμήματα (διανεμητικός ισομερισμός), οπότε παίρνοντας *γ/δ* από *το α* μέρη παράγει *α* x *γ* υποτμήματα. Έτσι, το αποτέλεσμα είναι *α* x *γ* υποτμήματα μεγέθους *β* x *δ*.

Παρομοίως οι Izsak και Beckman (2019) προτείνουν έναν ορισμό για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων που να ισχύει και για τους ακέραιους με βάση τη λειτουργία του κλάσματος ως μέτρο, στον οποίο ο πολλαπλασιαστής δηλώνει πόσα στοιχεία κάνουν μια ομάδα, ο πολλαπλασιαστέος δηλώνει πόσες ομάδες κάνουν την ποσότητα του προϊόντος και το γινόμενο τους δηλώνει πόσα στοιχεία κάνουν την ποσότητα του προϊόντος. Για την αναπαράσταση των συντονισμένων μετρήσεων σε αυτό το μοντέλο γίνεται η χρήση διπλών αριθμογραμμών, όπου υπάρχει μία αριθμογραμμή για τη μέτρηση με βάση τις μονάδες βάσης και μία για τη μέτρηση με βάση τις ομάδες.

Τέλος, οι Norton και Hackenburg (2010) αναφέρουν ότι οι νοητικές ενέργειες που περιλαμβάνει ο πολλαπλασιασμός κλασμάτων είναι ο ισομερισμός, η αποσύνθεση και η επανάληψη. Ο ισομερισμός περιλαμβάνει τη διάσπαση ενός συνεχούς όλου σε ίσα κομμάτια, η αποσύνθεση περιλαμβάνει την αφαίρεση ενός μέρους από ένα όλον χωρίς να καταστρέφεται το όλον και η επανάληψη περιλαμβάνει τη δημιουργία συνδεδεμένων αντιγράφων ενός μέρους (Lovin, Stevens, Siegfried, Wilkins & Norton, 2018). Όπως υποστηρίζεται, η γνώση του ισομερισμού και της εννοιολόγησης των μονάδων μπορεί να αποτελέσει τη βάση για την επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού κλασμάτων (Izsák, 2008, Mack, 2001, Steffe, 2003).

3.4 Αναπαραστάσεις πολλαπλασιασμού κλασμάτων

Η βιβλιογραφία για τη μαθηματική εκπαίδευση υπογραμμίζει τη σημασία της μάθησης των μαθητών με οπτικές αναπαραστάσεις σε όλους τους τομείς των μαθηματικών και της δημιουργίας συνδέσεων μεταξύ τους (Zazkis, Dubinsky & Dautermann, 1996, Wilkie & Roche, 2022). Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να μετατρέψουν το μαθηματικό περιεχόμενο σε αναπαραστάσεις που βοηθούν τους μαθητές να αναπτύξουν κατανόηση (Shulman, 1986). Η ικανότητα των εκπαιδευτικών να χρησιμοποιούν διαφορετικές αναπαραστάσεις μαθηματικών ιδεών θεωρείται σημαντικός τομέας μαθηματικών γνώσεων που πρέπει να αναπτυχθεί προκειμένου να παρέχονται ουσιαστικές ευκαιρίες μάθησης στους μαθητές (National Research Council, 2003).

Η αλλαγή από τη μια μορφή αναπαράστασης στην άλλη μπορεί να αποτελέσει εμπόδιο στην κατανόηση (Duval, 2006), αλλά, από την άλλη πλευρά, αποτελεί κλειδί για τη μαθηματική σκέψη και την επίλυση προβλημάτων (Dreher, 2013). Συνεπώς, η αποτελεσματική χρήση των αναπαραστάσεων είναι σημαντική για την υποστήριξη των διαδικασιών νοηματοδότησης των μαθητών, ενώ η ανεπαρκής και λανθασμένη χρήση των αναπαραστάσεων από τους εκπαιδευτικούς μπορεί να επηρεάσει αρνητικά τη μάθηση των μαθητών και να προωθήσει παρανοήσεις (Caglayan & Olive, 2011, Zazkis & Gadowsky, 2001).

Για τη μάθηση των μαθηματικών διακρίνονται πέντε διακριτοί τύποι συστημάτων αναπαραστάσεων και είναι οι εξής: 1) καταστάσεις πραγματικού κόσμου, 2) χειραπτικά υλικά, 3) εικόνες, 4) γραπτά σύμβολα και 5) ομιλούμενη γλώσσα (Lesh, Post & Behr, 1987, στο Λεμονίδης, 2016).

Σύμφωνα με το TeachingWorks (n.d.), κατά τη χρήση αναπαραστάσεων, πρέπει να δίνεται έμφαση σε επιμέρους δεξιότητες, όπως η σύνδεση των αναπαραστάσεων, η διατήρηση της συνέπειας μεταξύ λεκτικών και οπτικών αναπαραστάσεων, η χρήση ορθής ορολογίας του περιεχομένου και η επεξήγηση των αναπαραστάσεων που απεικονίζουν τη μαθηματική σκέψη και καταγράφουν τη διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε. Επίσης, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι σε περίπτωση που δεν έχει κανείς σταθερή γνώση του τι πρέπει να αναπαραστήσει, όσο πλούσιες και αν είναι οι γνώσεις του για τη ζωή των μαθητών και όσο κίνητρο και αν έχει να συνδέσει τα μαθηματικά με τη ζωή των μαθητών, δεν μπορεί να παράγει μια εννοιολογικά σωστή αναπαράσταση (Ma, 1999, σ. 82).

Σύμφωνα με τον Izsák (2008) υπάρχουν τέσσερις διαφορετικοί παιδαγωγικοί σκοποί για τους οποίους ένας εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιήσει σχέδια ως αναπαραστάσεις για την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων με κλάσματα. Η πρώτη χρήση είναι απλώς η *απεικόνιση λύσεων*, όπου χρησιμοποιώντας την εκ των προτέρων υπολογισμένη αριθμητική απάντηση ως οδηγό, ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει την ερμηνεία του σχεδίου. Η δεύτερη χρήση είναι η *εξαγωγή συμπερασμάτων*, όπου αρχικά ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί σχέδια για τον προσδιορισμό λύσεων για διάφορα προβλήματα και στη συνέχεια αναζητάει μοτίβα στις αριθμητικές απαντήσεις που προκύπτουν. Η τρίτη χρήση των σχεδίων είναι η *εξαγωγή συμπερασμάτων* από τη δομή των σχεδιασμένων ποσοτήτων για μια διαδικασία υπολογισμού. Η τέταρτη χρήση είναι η *προσαρμογή* του τρόπου με τον οποίο ο εκπαιδευτικός αναπαριστά δομές ποσοτήτων ανάλογα με τη σκέψη των μαθητών, βγάζοντας συμπεράσματα για τις αντιλήψεις των μαθητών για το όλο, τα μέρη του όλου και τα μέρη των μερών του όλου.

Μερικές φορές οι όροι «αναπαράσταση» και «μοντέλο» χρησιμοποιούνται εναλλακτικά στη βιβλιογραφία (Ervin, 2017), αν και συνήθως με τον όρο «μοντέλα» εννοούνται τα χειραπτικά υλικά. Στην παρούσα έρευνα με τον όρο «μοντέλα» θα εννοούνται τα κλασματικά μοντέλα. Κατά τη διδασκαλία των κλασμάτων, οι εκπαιδευτικοί παίρνουν διδακτικές αποφάσεις σχετικά με το αν, πότε και πώς θα χρησιμοποιήσουν τους διαφορετικούς τύπους μοντέλων κλασμάτων. Προηγούμενες έρευνες έχουν αναδείξει την αποτελεσματική χρήση κλασματικών μοντέλων στη διδασκαλία, δείχνοντας πώς μπορούν να εμβαθύνουν την εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων από τους μαθητές (Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2016). Αυτό συμβαίνει επειδή τα μοντέλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βοηθήσουν στην αποσαφήνιση ιδεών που μπορεί να προκαλούν σύγχυση όταν παρουσιάζονται μόνο σε συμβολική μορφή (Ervin, 2017). Η κατανόηση των κλασματικών μοντέλων είναι σημαντική τόσο για τους εκπαιδευτικούς όσο και για τους μαθητές, διότι τα μοντέλα μπορούν να βοηθήσουν τους ανθρώπους να αναπτύξουν, να μοιραστούν και να εκφράσουν τη μαθηματική τους σκέψη (Ervin, 2017).

Στη βιβλιογραφία έχουν εντοπιστεί τρεις κύριοι τύποι μοντέλων για τη διδασκαλία και τη μάθηση των κλασμάτων: τα μοντέλα εμβαδού, τα μοντέλα μήκους και τα μοντέλα συνόλου (Van de Walle κ.ά., 2016). Τα μοντέλα αυτά έχουν κατηγοριοποιηθεί ως συνεχή ή διακριτά (Kieren, 1976). Τα συνεχή μοντέλα περιλαμβάνουν τα μοντέλα περιοχής ή εμβαδού (π.χ. κυκλικά κομμάτια «πίτσας», ορθογώνια, αναδιπλωμένο χαρτί) και τα μοντέλα μήκους ή μέτρησης (π.χ. λωρίδες κλασμάτων, αριθμογραμμές, σχέδια γραμμικών τμημάτων), ενώ τα διακριτά μοντέλα περιλαμβάνουν τα μοντέλα συνόλων (π.χ. γεωπίνακας, ράβδοι Cuisenaire κ.ά.).

Η Ervin (2017) προτείνει τα μοντέλα περιοχής για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, διότι είναι δισδιάστατες αναπαραστάσεις και επιτρέπουν στους μαθητές να δουν ότι ο πολλαπλασιασμός δύο γνήσιων κλασμάτων οδηγεί σε μια μικρότερη ποσότητα. Επιπλέον, το μοντέλο περιοχής διευκολύνει τη σύνδεση με τον τυπικό αλγόριθμο πολλαπλασιασμού κλασμάτων (Van de Walle κ.ά., 2016). Ο Wu (2001) και οι Tsankova και Pjanic (2009) συμπληρώνουν ότι τα μοντέλα περιοχής παρέχουν μια οπτική που επιτρέπουν τη σύνδεση του πολλαπλασιασμού ακέραιων αριθμών με τον πολλαπλασιασμό με κλάσματα.

Στο πείραμα διδασκαλίας των Wyberg, Whitney, Cramer, Monson & Leavitt (2012), οι μαθητές μέσω του διπλώματος κερωμένου χαρτιού, το οποίο συγκαταλέγεται στα μοντέλα περιοχής, μπόρεσαν να αντιληφθούν την αλλαγή της μονάδας καθώς επεξεργάζονταν το πρόβλημα και μέσω του ξεδιπλώματος του χαρτιού την επαναφορά στην αρχική μονάδα. Επιπλέον, διαπιστώθηκε ότι η χρήση χαρτιού ήταν ένα ισχυρό οπτικό μέσο που βοήθησε τους μαθητές να διακρίνουν ότι ο πολλαπλασιασμός δεν δίνει πάντα ένα ποσό μεγαλύτερο από τους αριθμούς του προβλήματος. Το χάρτινο μοντέλο προσφέρεται επίσης για να κατανοήσουν οι μαθητές γιατί λειτουργεί ο αλγόριθμος. Ωστόσο, το χάρτινο μοντέλο των Wyberg κ.ά. (2012) έγινε δυσκίνητο όταν οι μαθητές έπρεπε να πολλαπλασιάσουν με μικτό αριθμό. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι, τα μοντέλα περιοχής μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον πολλαπλασιασμό με έναν μικτό αριθμό κατασκευάζοντας δύο περιοχές και για τον πολλαπλασιασμό μεταξύ δύο μικτών αριθμών κατασκευάζοντας τέσσερις περιοχές.

Παρά τα πλεονεκτήματα του μοντέλου περιοχής που αναφέρθηκαν, υπάρχουν και ενστάσεις για τη χρήση του στη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού κλασμάτων και συγκεκριμένα για τη χρήση του *επικαλυπτόμενου μοντέλου περιοχής*. Το επικαλυπτόμενο μοντέλο περιοχής είναι το πιο δημοφιλές μοντέλο στη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Σε αυτό το μοντέλο ο εκπαιδευτικός για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων σκιαγραφεί ολόκληρη την οριζόντια στήλη για το ένα κλάσμα και ολόκληρη την κάθετη στήλη για το άλλο κλάσμα και βρίσκει το αποτέλεσμα ως εμβαδόν στο τμήμα επικάλυψης. Ναι μεν το επικαλυπτόμενο μοντέλο περιοχής δίνει λύση στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, αλλά η αναπαράστασή του δεν έχει νόημα σε προβλήματα πολλαπλασιασμού κλασμάτων, διότι υπονοεί ότι και τα δύο κλάσματα σε αυτή την πολλαπλασιαστική κατάσταση αναφέρονται στην ίδια μονάδα (Webel, Krupa & McManus, 2016). Κατά συνέπεια, το μοντέλο δεν αντιμετωπίζει τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων ως επέκταση του πολλαπλασιασμού των ακέραιων αριθμών όπου τα περισσότερα προβλήματα, σε αντίθεση με την πρόσθεση ή την αφαίρεση, έχουν δύο μονάδες, αλλά αντίθετα τον αντιμετωπίζει ως μια εντελώς νέα πράξη που οι μαθητές πρέπει να μάθουν από την αρχή (Webel κ.ά., 2016). Επιπλέον, αυτή η προσέγγιση ενθαρρύνει τη σκέψη του αριθμητή και του παρονομαστή στο γινόμενο ως δύο ξεχωριστές ποσότητες (Simon, Kara & Placa, 2018). Ο εκπαιδευτικός που χρησιμοποιεί το επικαλυπτόμενο μοντέλο λειτουργεί με μηχανικό τρόπο, περιγράφοντας την παραγωγή του διαγράμματος ως μια σειρά από βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν και αυτή η τυφλή εφαρμογή σε αυτού του είδους της διαδικασίας μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένες απαντήσεις, επειδή όταν ο λύτης λειτουργεί μηχανικά δεν βεβαιώνεται αν η απάντηση του έχει νόημα (Webel κ.ά., 2016). Με άλλα λόγια, η ανησυχία εδώ είναι ότι οι μαθητές μπορεί να μάθουν αυτό το μοντέλο ως γραφικό αλγόριθμο (Simon, Kara & Placa, 2018). Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα μιας υποψήφιας εκπαιδευτικού στην έρευνα των Lee και Shin (2011), η οποία αν και μπορούσε να απεικονίσει σωστά τον πολλαπλασιασμό δύο κλασμάτων τόσο με μοντέλο μήκους όσο και με μοντέλο περιοχής, αναρωτιόταν για ποιον λόγο λειτουργεί η στρατηγική επικάλυψης του μοντέλου περιοχής ως μοντελοποίηση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων.

Οι Lee και Shin (2011) υποστηρίζουν ότι η εννοιολογική πρόοδος στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων έρχεται ιδανικά μέσω της αναδρομικής διαμέρισης χρησιμοποιώντας το μοντέλο μήκους. Το μοντέλο μήκους στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων υποδιαιρεί τις μετρήσεις των μηκών χρησιμοποιώντας μια καθορισμένη μονάδα και εν τέλει το συνολικό μήκος συγκρίνεται με τη μονάδα (Lee & Lee, 2022). Ομοίως, οι Simon, Kara και Placa (2018) χρησιμοποιούν μπάρες (ανήκουν στα μοντέλα μήκους σύμφωνα με τους ίδιους) ως οπτικό βοήθημα για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, ασκώντας παράλληλα κριτική στα μοντέλα περιοχής.

Η αριθμογραμμή είναι ένα μοντέλο μήκους που χρησιμοποιείται για την οπτικοποίηση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Κατά τους Lee, Brown και Orrill, (2011) πάνω στην αριθμογραμμή η σύγκριση με την αφαίρεση κλασμάτων θα μπορούσε να βοηθήσει τους μαθητές να αντιλαμβάνονται τις μονάδες καλύτερα. Ωστόσο, οι Wyberg κ.ά. (2012) θεωρούν ότι το μοντέλο της αριθμογραμμής από μόνο του δεν βοηθάει τους μαθητές να οικοδομήσουν νόημα για τον αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Οι Wyberg κ.ά. (2012) κατέληξαν σε αυτό το συμπέρασμα, μετά από ένα πείραμα διδασκαλίας όπου η αριθμογραμμή χρησιμοποιήθηκε με σκοπό να κάνουν οι μαθητές τη μετάβαση στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, διότι ως εργαλείο διευκολύνει να χωρίζονται και να επαναλαμβάνονται διαστήματα, εξελίσσοντας παράλληλα την έννοια του κλάσματος από μέρος-όλου σε τελεστή. Παρ' όλα αυτά, οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να κάνουν την αναπαράσταση με δύο μη μοναδιαία κλάσματα και δυσκολεύτηκαν επίσης να κατονομάσουν τη μονάδα. Πιο συγκεκριμένα, στον πολλαπλασιασμό 4/5 x 2/3 , το πιο δύσκολο κομμάτι ήταν να χωρίσουν τα 2/3 σε 5 κομμάτια. Ωστόσο, η προγενέστερη εμπειρία τους με το κερωμένο χαρτί και τον αλγόριθμο τους βοήθησε να συνειδητοποιήσουν ότι έπρεπε να χωρίσουν την αριθμογραμμή σε 15 κομμάτια, γεγονός που επέτρεψε στους μαθητές να βρουν τα 4/5 των 2/3 με διάφορους δημιουργικούς τρόπους στην αριθμογραμμή. Όπως καταλήγουν οι Wyberg κ.ά. (2012), η αριθμογραμμή βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν τον αλγόριθμο και έδωσε έμφαση στον πολλαπλασιασμό τόσο ως διαδικασία κατάτμησης όσο και ως επαναληπτική διαδικασία, αλλά προϋπόθεση για την κατανόηση αυτή αποτέλεσε η εμπειρία τους με το κερωμένο χαρτί. Ένα εύρημα που όμως έρχεται σε αντίθεση με την άποψη του Kieren (1976), ο οποίος ανέφερε ότι το μοντέλο της αριθμογραμμής μπορεί να συγκρούεται νοητικά με ένα μοντέλο περιοχής για τη δημιουργία πολλαπλασιαστικών ιδεών.

Από την άλλη πλευρά, τα μοντέλα συνόλων χρησιμοποιούν ένα σύνολο μετρήσιμων αντικειμένων που αποτελούν είτε ένα ολόκληρο σύνολο είτε μια διακριτή συλλογή που αποτελεί μέρος ενός ολόκληρου συνόλου μετρήσιμων αντικειμένων (Lee &Lee, 2022). Από τα μοντέλα συνόλων, για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν οι *μετρητές,* αν και μερικοί μαθητές χρησιμοποιώντας τους δυσκολεύονται να προσδιορίσουν το όλο (Ervin, 2017). Σε αυτή την περίπτωση, η Ervin (2017) προτείνει να χρησιμοποιηθούν ισοδύναμα κλάσματα με μεγαλύτερους όρους για να αναπαρασταθεί ένα σύνολο ή μια ολόκληρη μονάδα.

Για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων οι Webel, Krupa και McManus (2016) προτείνουν στους εκπαιδευτικούς να έχουν κατά νου ότι όποιο οπτικό μοντέλο και αν χρησιμοποιήσουν, να βεβαιωθούν ότι οι μαθητές κατανοούν ότι τα δύο κλάσματα αναφέρονται σε διαφορετικά μεγέθη μονάδων. Μία άλλη διαπίστωση στην έρευνα των Webel κ.ά. (2016) και πρόταση προς τους εκπαιδευτικούς είναι ότι οι αναπαραστάσεις που περιλάμβαναν *ετικέτες πλαισίου* είχαν πολύ λιγότερες πιθανότητες να παραποιήσουν τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων από εκείνες που δεν περιλάμβαναν ετικέτες πλαισίου. Οι ετικέτες πλαισίου είναι σύντομες σημειώσεις πάνω στις αναπαραστάσεις που προσδιορίζουν σε τι αναφέρεται κάθε κλάσμα, έτσι ώστε να συνδέεται η εικόνα και τα σύμβολα με τις αναφορές τους στο πλαίσιο.

Όπως υποστηρίζει ο Clements (1999) η απλή χρήση μοντέλων στα μαθηματικά δεν εγγυάται την επιτυχία. Πέρα από τη χρήση των μοντέλων, απαιτείται και η σύνδεση μεταξύ τους στη διδασκαλία (National Council of Teachers of Mathematics, 2014). Οι Ball κ.ά. (2008) προτείνουν οι εκπαιδευτικοί να αναγνωρίζουν τι συνεπάγεται η χρήση μιας συγκεκριμένης αναπαράστασης και να συνδέουν τις αναπαραστάσεις με τις υποκείμενες ιδέες με άλλες αναπαραστάσεις. Επειδή κάθε τύπος μοντέλου έχει τις δικές του δυνατότητες και περιορισμούς, η ισχυρή εξάρτηση από ένα μόνο μοντέλο είναι προβληματική, καθώς δεν υποστηρίζει την οικοδόμηση ισχυρής και ευέλικτης κατανόησης των εννοιών των κλασμάτων από τους μαθητές, αλλά μάλλον περιορίζει τη σκέψη των μαθητών (Lee & Lee, 2022). Πολλοί εκπαιδευτικοί αντιλαμβάνονται ως σκοπό των πολλαπλών αναπαραστάσεων την παροχή εναλλακτικών λύσεων από τις οποίες κάθε μαθητής μπορεί να κατανοήσει και να χρησιμοποιήσει μόνο μία, αλλά αυτό είναι διαφορετικό από το να δουλεύουν οι μαθητές με πολλαπλές αναπαραστάσεις για να αναπτύξουν μια ολοκληρωμένη βάση γνώσεων (Izsák, 2008).

Συνεπώς, κατά τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού κλασμάτων, μπορούν και πρέπει να χρησιμοποιούνται διαφορετικοί τύποι μοντέλων, παράλληλα όμως, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να καταβάλλουν προσπάθεια να γίνονται συνδέσεις μεταξύ αυτών των μοντέλων και του τυποποιημένου αλγορίθμου για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, με τελικό σκοπό οι μαθητές να φτάσουν σε θέση να εργάζονται σε προβλήματα χωρίς να χρειάζεται να σχεδιάζουν μια εικόνα (Ervin, 2017). Εν κατακλείδι, για την κατασκευή του πολλαπλασιασμού κλασμάτων μέσα σε ένα αναπαραστατικό σύστημα είναι σημαντική η επίγνωση των μονάδων αναφοράς για κάθε στοιχείο, η ικανότητα αναγνώρισης του ποια κλάσματα είναι τελεστές και ποια είναι ποσότητες και η ικανότητα σύνδεσης των αναπαραστάσεων αυτών με τις γραπτές εξηγήσεις (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983, στο Caglayan & Olive, 2011).

3.5 Παρανοήσεις στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων

Υπάρχουν τρεις κύριες κατηγορίες παρανοήσεων που κάνουν οι μαθητές στον πολλαπλασιασμό με κλάσματα και θα μπορούσαν να κατηγοριοποιηθούν με βάση τον αλγόριθμο, τη διαίσθηση και την τυπική γνώση (Isiksal, 2006, Tirosh, 2000). Οι Isiksal και Cakiroglu (2011) εντόπισαν στη μελέτη τους δύο επιπλέον κατηγορίες παρανοήσεων. Η μία επιπλέον κατηγορία είναι η παρανόηση του συμβολισμού ενός κλάσματος, όπου οι μαθητές δεν εσωτερικεύουν τη σημασία του συμβόλου του κλάσματος για να εκτελέσουν σωστά την πράξη και πηγάζει από την περιορισμένη αντίληψη των μαθητών για την έννοια των κλασμάτων, ενώ η άλλη κατηγορία ονομάστηκε παρανόηση του προβλήματος, επειδή οι μαθητές δεν κατανοούν το πρόβλημα, τα δεδομένα και τα ζητούμενά του και πηγές αυτής της παρανόησης είναι η έλλειψη επάρκειας στις μαθηματικές γνώσεις, η έλλειψη επάρκειας στη μαθηματική γλώσσα, το άγχος για τα μαθηματικά και η μειωμένη αίσθηση αυτοαποτελεσματικότητας (Isiksal & Cakiroglu, 2011).

Αναφορικά με τις τρεις κύριες κατηγορίες των παρανοήσεων, οι παρανοήσεις στον αλγόριθμο αφορούν λειτουργικά λάθη. Παρανοήσεις με βάση τον αλγόριθμο μπορεί να είναι η χρήση διασταυρούμενου πολλαπλασιασμού (Newton, 2008) ή η εύρεση κοινών παρονομαστών (Siegler κ.ά., 2010, Young & Zientek, 2011). Η κύρια πηγή αυτών των αλγοριθμικών λαθών θα μπορούσε να είναι η αδυναμία απομνημόνευσης του αλγορίθμου (Isiksal & Cakiroglu, 2011) ή η έμφαση που δίνεται σε προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων (Siegler κ.ά., 2010). Παράλληλα, η έμφαση στην απομνημόνευση της διαδικασίας πολλαπλασιασμού κλασμάτων παρεμποδίζει τις προσπάθειες των μαθητών να οικοδομήσουν εννοιολογικά τους αλγορίθμους (Mack, 1990). Είναι φυσικό, όταν ένας αλγόριθμος αντιμετωπίζεται ως μια ανούσια σειρά βημάτων, οι μαθητές να ξεχάσουν ορισμένα από αυτά τα βήματα ή να τα αλλάξουν με τρόπους που οδηγούν σε λάθη (Tirosh, 2000).

Οι διαισθητικές παρανοήσεις υπάρχουν όταν το άτομο δυσκολεύεται να εντοπίσει τις κατάλληλες πράξεις για την επίλυση προβλημάτων με πολλαπλασιασμό εξαιτίας διαισθήσεων. Οι Fischbein, Deri, Nello και Marino (1985) πρότειναν ότι οι μαθηματικές πράξεις συνδέονται με τα πρωταρχικά διαισθητικά μοντέλα συμπεριφοράς και έχουν αντίκτυπο στην επιλογή μιας πράξης, ενώ ο Simon (1993) συμπληρώνει ότι η επιρροή τους ισχύει ακόμη και αν οι μαθητές έχουν «προχωρήσει» στα μαθηματικά. Το προτεινόμενο από τους Fishbein κ.ά. (1985) διαισθητικό μοντέλο για τον πολλαπλασιασμό είναι η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση,

Οι μαθητές αναπτύσσουν μια αρχική έννοια του πολλαπλασιασμού μέσω της ενασχόλησής τους με τον πολλαπλασιασμό ακέραιων αριθμών, αναπτύσσοντας κυρίως την έννοια της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης, και συνεπώς αναγνωρίζουν ως πολλαπλασιασμό, καταστάσεις στις οποίες συνδυάζονται πολλαπλές ίσες ποσότητες. Σε μια τέτοια ερμηνεία ο ένας από τους δύο όρους του πολλαπλασιασμού δηλώνει τον αριθμό των φορών που πρέπει να προστεθεί ο άλλος. Συνεπώς, οι μαθητές καταλήγουν να πιστεύουν ότι ο πολλαπλασιαστής πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός, επειδή δηλώνει τον αριθμό των φορών που πρέπει να προστεθεί μια ποσότητα (Fischbein κ.ά., 1985) και συνεπώς ενισχύεται η ιδέα ότι ο πολλαπλασιασμός δίνει πάντα μεγαλύτερο αποτέλεσμα. Η ιδέα αυτή κατά τη Lamon (2007) είναι η κύρια πηγή των παρανοήσεων στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων.

Η Prediger (2008) κατέγραψε τη δυσκολία των μαθητών να λύσουν λεκτικά προβλήματα στα οποία υπάρχει ποσότητα μικρότερη του 1 και να κατανοήσουν τη σχέση του μεγέθους του γινομένου (μεγαλύτερο ή μικρότερο) με τις αρχικές ποσότητες. Για παράδειγμα, οι μαθητές προτιμούν να επιλέγουν τη διαίρεση αντί για τον πολλαπλασιασμό στην περίπτωση που η μία ποσότητα του προβλήματος είναι μικρότερη του 1 (Greer, 1992). Συνεπώς, οι μαθητές φαίνεται να επιλέγουν τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση για τη λύση του προβλήματος ανάλογα με την αίσθηση που έχουν για το αν ο πολλαπλασιαστής διευρύνεται ή μειώνεται από τη δράση του προβλήματος (Taber, 1999).

Στις παρανοήσεις που βασίζονται σε τυπικές γνώσεις περιλαμβάνονται λανθασμένες απαντήσεις που οφείλονται τόσο σε περιορισμένες αντιλήψεις για την έννοια του κλάσματος, όσο και σε ανεπαρκείς γνώσεις σχετικά με τις ιδιότητες των πράξεων (Tirosh, 2000). Μια βασική αιτία για τις παρανοήσεις των μαθητών στα κλάσματα είναι η ασυμφωνία μεταξύ της βαθιά ριζωμένης προηγούμενης γνώσης των μαθητών για τους φυσικούς αριθμούς και ορισμένων χαρακτηριστικών του συστήματος των ρητών αριθμών που διαφέρουν από αυτά του συστήματος των φυσικών αριθμών (Vamvakoussi, Van Dooren, & Verschaffel, 2012). Αυτή η δυσκολία αναφέρεται ως *η προκατάληψη των φυσικών αριθμών* (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν γνωστικά εμπόδια καθώς έρχονται αντιμέτωποι με τα κλάσματα, επειδή προσπαθούν να κάνουν συνδέσεις με τους ακέραιους αριθμούς και τις πράξεις με τις οποίες είναι εξοικειωμένοι (Lamon, 2012). Οι Şahin, Gökkurt και Soylu (2016) αναφέρουν ότι ένας από τους κύριους λόγους για τους οποίους οι μαθητές παρουσιάζουν παρανοήσεις στα κλάσματα γενικότερα είναι ότι τα κλάσματα έχουν σημαντικά διαφορετική δομή από τους αριθμούς που μετράνε και δεν μπορούν να προκύψουν μόνο ως αποτέλεσμα δραστηριοτήτων μέτρησης. Πέρα από τη σύγχυση των ιδιοτήτων των κλασμάτων με τις ιδιότητες των ακέραιων αριθμών (π.χ. δεν υπάρχει άλλο κλάσμα μεταξύ δύο κλασμάτων στο Vamvakoussi & Vosniadou, 2004), η Ervin (2017) αναφέρει ότι μερικές κοινές παρανοήσεις στα κλάσματα είναι η αδυναμία να θεωρηθούν τα κλάσματα αριθμοί και η εστίαση στους αριθμητές και τους παρονομαστές ξεχωριστά.

Μία άλλη συχνή δυσκολία στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων εντόπισε η Mack (2001), όταν οι μαθητές της έρευνας έβλεπαν τα κλάσματα ως μοναδιαία κλάσματα μόνο ενός συνεχούς όλου. Για παράδειγμα, μπορούσαν να αναπαραστήσουν το 1/4 ενός μπισκότου, αλλά δεν μπορούσαν να βρουν το 1/4 8 μπισκότων. Επίσης, δεν μπορούσαν να διαμερίσουν περαιτέρω τα 2/3 μιας πίτσας, καθώς έβλεπαν τα μεμονωμένα κομμάτια που προκύπταν από τους λόγους ως μονάδες μέτρησης και όχι ως τμήματα κλάσματος ενός όλου αναφοράς. Επιπλέον, στην ίδια έρευνα της Mack (2001) κάποιοι μαθητές είχαν δυσκολία στην αντίληψη των κλασματικών μερών ως σύνθετες μονάδες, οι οποίοι, ενώ μπορούσαν να παράγουν τα 3/4 του 2/3, δεν μπορούσαν να παράγουν τα 2/3 του 9/10, επειδή δεν μπορούσαν να συλλάβουν τα 9 μέρη ως 3 ίσα μέρη. Όπως αναφέρει η Lamon (2012), για τους μαθητές δεν αποτελεί πρόβλημα να σκεφτούν ότι έχουν το μέρος μια ποσότητας και το πολλαπλασιάζουν με έναν αριθμό, αλλά δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι έχουν μια ποσότητα και την πολλαπλασιάζουν με ένα κλάσμα.

Σε αντίθεση με άλλες πράξεις, στον πολλαπλασιασμό, τόσο των κλασμάτων όσο και των ακέραιων αριθμών, η μονάδα μεταβάλλεται στα διάφορα στάδια του προβλήματος και αυτό αποτελεί μία από τις βασικές δυσκολίες του και πηγή παρανοήσεων (Olanoff, 2011). Επιπλέον, είναι πιθανό η προηγούμενη γνώση για την αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό να δημιουργεί εμπόδια στο σαφή προσδιορισμό της μονάδας του όλου (Son & Lee, 2016).

3.6 Στρατηγικές διδασκαλίας

Οι στρατηγικές των εκπαιδευτικών αναφέρονται στη μεθοδολογία και τους τρόπους που χρησιμοποιούν για να αντιμετωπίσουν τις παρανοήσεις των μαθητών και τις προσεγγίσεις που χρησιμοποιούν για να εξηγήσουν τα βασικά γεγονότα, τις έννοιες, τις αρχές και τις αποδείξεις για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Οι στρατηγικές των εκπαιδευτικών κατηγοριοποιούνται σε διαδικαστικές και εννοιολογικές. Οι διαδικαστικές στρατηγικές αφορούν κυρίως την εξήγηση διαδικασιών και κανόνων στους μαθητές και προωθούν την εκμάθηση κανόνων των χειρισμών συμβόλων για την παραγωγή μιας απάντησης, ενώ οι εννοιολογικές στρατηγικές σχετίζονται με την ανάπτυξη κατανόησης των μαθηματικών σχέσεων που εμπλέκονται στο έργο και παρέχουν τα μέσα για τη διερεύνηση το νοήματος της λειτουργίας σε εννοιολογικό επίπεδο (Bruce, Bennett & Flynn, 2014, Turnuklu & Yesildere, 2007).

Οι εννοιολογικές στρατηγικές συγκεκριμένα περιλαμβάνουν καλά τεκμηριωμένα επιχειρήματα που εξηγούν μια έννοια (α) παρέχοντας παραδείγματα ή αντιπαραδείγματα που επιβεβαιώνουν ή αντικρούουν δεδομένες προϋποθέσεις, (β) χρησιμοποιώντας επαγωγική λογική για τον έλεγχο των προϋποθέσεων και (γ) παρέχοντας μια εναλλακτική αναπαράσταση που απεικονίζει την έννοια με νέο τρόπο (Crespo & Nicol, 2006).

Στη βιβλιογραφία υπάρχει μια συζήτηση σχετικά με το αν η διαδικαστική γνώση προηγείται της εννοιολογικής γνώσης ή το αντίστροφο (Misquitta 2011). Οι Hiebert και Leferve (1986) επισημαίνουν ότι, ενώ η διαδικαστική γνώση μπορεί να αναπτυχθεί είτε από την απομνημόνευση είτε από την ουσιαστική μάθηση, είναι αδύνατο να δημιουργηθεί εννοιολογική γνώση απευθείας από την απομνημόνευση. Η Olanoff (2011) αναφέρει ότι η διαδικαστική γνώση πρέπει να στηρίζεται σε μια βάση εννοιολογικής γνώσης και μαζί να παρέχουν την ουσιαστική κατανόηση των μαθηματικών, ενώ παράλληλα η Ball (1989) τονίζει τη σημασία των μεταξύ τους συνδέσεων.

Εννοιολογική γνώση για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων έχει ένα άτομο όταν μπορεί να αναγνωρίζει πότε πρέπει να χρησιμοποιεί την πράξη και να είναι σαφής σχετικά με τις αναφορές κάθε εμπλεκόμενης ποσότητας (Simon, Kara & Placa, 2018), ενώ η διαδικαστική γνώση είναι να πολλαπλασιαστούν οι δύο αριθμητές μεταξύ τους, να πολλαπλασιαστούν οι δύο παρονομαστές μεταξύ τους και να απλοποιηθεί το κλάσμα που προκύπτει, εφόσον χρειάζεται (Forrester & Chinnappan, 2010).

Αναφορικά με τις στρατηγικές για την αντιμετώπιση των παρανοήσεων των μαθητών στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, με βάση τις απαντήσεις υποψήφιων εκπαιδευτικών, οι Isiksal και Cakiroglu (2011) διέκριναν τρεις κατηγορίες: (α) στρατηγικές που βασίζονται σε μεθόδους διδασκαλίας, (β) στρατηγικές που βασίζονται στην τυπική γνώση των κλασμάτων και (γ) στρατηγικές που βασίζονται σε ψυχολογικές δομές. Οι στρατηγικές που βασίζονται σε μεθόδους διδασκαλίας περιέχουν τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων (π.χ. σχήματα, λεκτικές εκφράσεις, οπτικό υλικό, παραδείγματα της καθημερινής ζωής), τη χρήση διαφορετικών μεθόδων διδασκαλίας (π.χ. στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων), την έμφαση στην εξάσκηση (δηλαδή να λύσουν οι μαθητές πολλές ασκήσεις) και το να παρακινούνται οι μαθητές να εκφράζουν τους συλλογισμούς τους (δηλαδή να αναλύουν το σκεπτικό τους για τα βήματα που εκτελούν) (Isiksal & Cakiroglu, 2011). Τέλος, οι στρατηγικές που βασίζονται στην τυπική γνώση των κλασμάτων περιλαμβάνουν την εστίαση στις έννοιες και τις λογικές σχέσεις, ενώ οι στρατηγικές που βασίζονται σε ψυχολογικές δομές αφορούν κυρίως τα κίνητρα των μαθητών (Isiksal & Cakiroglu, 2011).

4. ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΣΤΟΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Οι Μαθηματικές Γνώσεις για Διδασκαλία των εκπαιδευτικών είναι σημαντικοί προσδιοριστικοί παράγοντες της ποιότητας της διδασκαλίας τους και της προόδου των μαθητών (Hill κ.ά., 2005, Depaepe κ.ά., 2015). Σύμφωνα με τα ευρήματα ερευνών, οι εκπαιδευτικοί έχουν ελλιπή κατανόηση των πράξεων των κλασμάτων (Ball, 1990a, Izsák, Jacobson, & Bradshaw, 2019, Ma, 1999, Şahin, Gökkurt & Soylu, 2016, Tirosh, 2000) που δεν επαρκεί για την αποτελεσματική διδασκαλία τους (Izsák, 2008, Olanoff, 2011, Tobias, Olanoff and Lo, 2012).

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της βιβλιογραφικής ανασκόπησης που αφορούν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Αρχικά παρουσιάζονται οι δυσκολίες που παρουσιάζουν στο να παρέχουν εννοιολογικές εξηγήσεις σχετικά με τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, το οποίο συνεπάγεται χαμηλή Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου. Στη συνέχεια προβάλλονται οι δυσκολίες των εκπαιδευτικών κατά την επίλυση (Κοινή Γνώση Περιεχομένου) και τη δημιουργία (Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου) λεκτικών προβλημάτων με τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Μετέπειτα, αναλύονται οι δυσκολίες των εκπαιδευτικών αναφορικά με τις αναπαραστάσεις για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, οι οποίες παρέχουν ενδείξεις για το επίπεδο της Εξειδικευμένης Γνώσης Περιεχομένου και της Γνώσης Περιεχομένου Διδασκαλίας. Ακολουθεί μια παρουσίαση των πιθανών παρανοήσεων που έχουν οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί πάνω στο θέμα (Κοινή Γνώση Περιεχομένου), καθώς και τις αδυναμίες τους στον προσδιορισμό των παρανοήσεων των μαθητών (Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου και Γνώση Περιεχομένου Μαθητών). Τέλος, αναφέρονται κάποιες προτάσεις της βιβλιογραφίας για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων.

4.1 Δυσκολίες των εκπαιδευτικών να παρέχουν εννοιολογικές εξηγήσεις

Μία ένδειξη για την ύπαρξη ΕΓΠ στους εκπαιδευτικούς είναι η εννοιολογική τους γνώση και η παροχή εννοιολογικών εξηγήσεων. Αρκετές μελέτες έχουν αναφέρει περιορισμούς στις επιδόσεις των υποψηφίων και εν ενεργεία εκπαιδευτικών όταν εξηγούν το γινόμενο κλασμάτων (π.χ. Armstrong & Bezuk, 1995, Ball κ.ά., 2001, στο Izsák κ.ά., 2012). Υπάρχουν ενδείξεις ότι οι (υποψήφιοι) εκπαιδευτικοί βασίζονται σε σημαντικό βαθμό στις διαδικαστικές γνώσεις (Lovin κ.ά., 2018). Σε έρευνα των Huang, Liu και Lin (2008) για τη διερεύνηση της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου στα κλάσματα οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί παρουσίασαν καλύτερες επιδόσεις στις διαδικαστικές έναντι των εννοιολογικών γνώσεων. Οι υποψήφιοι και εν ενεργεία εκπαιδευτικοί βασίζονται κυρίως σε διαδικασίες παρά στην εννοιολογική κατανόηση, γεγονός που οδηγεί σε δικά τους λάθη (χαμηλή ΚΓΠ) και στη δυσκολία εύρεσης και αντιμετώπισης των λαθών των μαθητών (χαμηλή ΚΓΠ, χαμηλή ΓΠΔ, χαμηλή ΓΠΜ) (Forrester & Chinnappan, 2010, Bruce κ.ά., 2014).

Μελέτες επισημαίνουν ότι παρόλο που οι υποψήφιοι και οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί γνωρίζουν πώς να εκτελούν τους αλγόριθμους των πράξεων (διαδικαστική κατανόηση), δυσκολεύονται να κατανοήσουν γιατί, πότε ή πού εφαρμόζονται (εννοιολογική κατανόηση) (π.χ. Ball, 1988, Ma, 1999, Newton, 2008, Son & Crespo, 2009, Tirosh, 2000). Όπως διαπιστώθηκε παραπάνω για τα κλάσματα, το ίδιο ισχύει για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, ότι δηλαδή οι στρατηγικές των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία του είναι σε μεγάλο βαθμό διαδικαστικές, καθώς τα αποτελέσματα ερευνών έδειξαν οι περισσότερες εξηγήσεις είναι αδύναμες και δεν υπάρχει σύνδεση μεταξύ εννοιών και διαδικασιών (Frykholm & Glasson, 2005).

Η διδασκαλία του αλγορίθμου για τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων φαίνεται εύκολη (Johanning, 2019), αλλά το εννοιολογικό της υπόβαθρο είναι πολύπλοκο (Tirosh, 2000, Tsankova & Pjanic, 2009). Επειδή πολλοί εκπαιδευτικοί γνωρίζουν τα βήματα του αλγόριθμου του πολλαπλασιασμού κλασμάτων, πιστεύουν ότι κατανοούν αυτά που πρέπει να γνωρίζουν προκειμένου να διδάξουν το θέμα, με αποτέλεσμα αυτή η διαδικαστική γνώση να μην τους επιτρέπει να ανταποκριθούν στις ερωτήσεις των μαθητών σχετικά με το γιατί λειτουργούν οι αλγόριθμοι ή να εξετάσουν εναλλακτικούς αλγορίθμους των μαθητών (Olanoff, 2011), γεγονός που οδηγεί σε ακόμη χαμηλότερη ΕΓΠ.

Στην έρευνα των Ho και Lai (2012) η πλειονότητα των υποψηφίων εκπαιδευτικών για την αιτιολόγηση της απάντησής τους σε ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλασμάτων έδωσε εξήγηση δείχνοντας την εκτέλεση του αλγόριθμου του πολλαπλασιασμού κλασμάτων, δηλαδή μια διαδικαστική εξήγηση, παρόλο που το τεστ περιείχε ένα καθημερινό πλαίσιο (πίτσα που περίσσεψε μετά από ένα πάρτι). Ομοίως στην έρευνα της Isiksal (2006), οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί μπορούσαν εύκολα να συμβολίζουν και να επιλύουν βασικές ερωτήσεις με τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων (υψηλή ΚΓΠ), αλλά οι γνώσεις τους δεν θα μπορούσαν να θεωρηθούν εννοιολογικά βαθιές, καθώς οι συμμετέχοντες δεν επέδειξαν επαρκείς γνώσεις για να αναπαραστήσουν και να εξηγήσουν εννοιολογικά την πράξη (χαμηλή ΕΓΠ).

Παράλληλα, στη έρευνα των Isiksal και Cakiroglu (2008) παρόλο που όλοι οι συμμετέχοντες μπορούσαν να συμβολίζουν σωστά και να επιλύουν προβλήματα πολλαπλασιασμού που σχετίζονται με κλάσματα (υψηλή ΚΓΠ), οι συλλογισμοί τους σχετικά με την εξήγηση της σημασίας αυτών των πράξεων ήταν χαμηλού επιπέδου (χαμηλή ΕΓΠ). Επιπλέον, οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί είχαν δυσκολίες κατά τον ορισμό του πολλαπλασιασμού δύο κλασμάτων, διότι κατασκεύαζαν τη σχέση τόσο μεταξύ του πολλαπλασιασμού δύο ακέραιων αριθμών όσο και του πολλαπλασιασμού ενός κλάσματος και ενός ακέραιου αριθμού με όρους επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης (χαμηλή ΕΓΠ). Ομοίως, στην έρευνα των Ho και Lai (2012), αν και οι περισσότεροι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί ήταν σε θέση να δώσουν τη σωστή απάντηση στο αντικείμενο του τεστ που αφορούσε τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων (υψηλή ΚΓΠ), η πλειονότητα αυτών δεν ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν επιτυχώς την απάντησή τους (χαμηλή ΕΓΠ).

4.2 Δυσκολίες των εκπαιδευτικών κατά τη δημιουργία λεκτικών προβλημάτων με πολλαπλασιασμό κλασμάτων

Στην έρευνα των Son και Lee (2016) λιγότεροι από τους μισούς συμμετέχοντες αναγνώρισαν σωστά ένα λεκτικό πρόβλημα ως πλαίσιο που αφορούσε τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων (ΚΓΠ), χρησιμοποίησαν σωστά τις αναπαραστάσεις (ΕΓΠ) και το μετέφρασαν σε μια σωστή έκφραση πολλαπλασιασμού (ΚΓΠ), και ακόμα λιγότεροι από αυτούς αναγνώρισαν την υποκείμενη έννοια του πολλαπλασιασμού κλασμάτων ως εύρεση μερών από μέρη (ΚΓΠ). Ομοίως, στη μελέτη των López-Martín, Aguayo-Arriagada και García López (2022) μόνο 55% των υποψηφίων εκπαιδευτικών κατάφεραν να λύσουν σωστά λεκτικά προβλήματα που περιείχαν κλάσματα με τη λειτουργία του τελεστή (χαμηλή ΚΓΠ).

Έρευνες παρείχαν ευρήματα ότι οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί δημοτικού δυσκολεύονται να διακρίνουν τα λεκτικά προβλήματα με κλάσματα που μπορούν να επιλυθούν με πολλαπλασιασμό από εκείνα που μπορούν να επιλυθούν με διαίρεση (π.χ. Armstrong & Bezuk, 1995, Ball 1990a, Luo, Lo & Leu, 2011, Ma, 1999) (χαμηλή ΚΓΠ). Συγκεκριμένα, στην έρευνα της Ball (1990a) μόνο 4 από τους 35 υποψηφίους εκπαιδευτικούς μπόρεσαν να αναπαραστήσουν με πρόβλημα τη διαίρεση κλασμάτων, ενώ όλες οι λανθασμένες αναπαραστάσεις απεικόνιζαν πολλαπλασιασμό. Ομοίως, όταν ο Toluk-Ucar (2009) ζήτησε από υποψηφίους εκπαιδευτικούς να θέσουν ένα λεκτικό πρόβλημα που να αντικατοπτρίσει την πράξη 3/4 x 1/3, οι περισσότεροι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί έθεσαν ένα πρόβλημα που αντανακλούσε την πράξη 3/4 ÷ 3 (χαμηλή ΕΓΠ).

Παρόμοια ευρήματα παρείχε η Luo (2009), η οποία διαπίστωσε ότι ένα σημαντικό ποσοστό των υποψηφίων εκπαιδευτικών δεν ήταν σε θέση να κατασκευάσει λεκτικά προβλήματα με σωστή σημασιολογία και κατάλληλη μονάδα μέτρησης για συμβολικές εκφράσεις πολλαπλασιασμού κλασμάτων (χαμηλή ΕΓΠ). Από την άλλη πλευρά, η Goodson-Espy (2009) διαπίστωσε ότι οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί ήταν συχνά σε θέση να γράφουν προβλήματα πολλαπλασιασμού κλασμάτων, αλλά δεν ήταν σε θέση να εξηγήσουν γιατί ο πολλαπλασιασμός ήταν η κατάλληλη πράξη για να απαντηθεί η ερώτησή τους (χαμηλή ΕΓΠ).

Σε έρευνα του Iskenderoglu (2018) οι περισσότεροι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί, όταν τους ζητήθηκε να δημιουργήσουν ένα λεκτικό πρόβλημα για την πράξη 3/7× 8, έθεσαν προβλήματα που εμπίπτουν στην κατηγορία της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης), όπως για παράδειγμα «*Κάθε παιδί θα πάρει τα 3/7 από ένα κέικ και υπάρχουν 8 παιδιά. Πόσα κέικ χρειάζονται;*» (η αντίστοιχη ενέργεια του εκπαιδευτικού στην τάξη για την εισαγωγή του πολλαπλασιασμού κλασμάτων θα ήταν ένδειξη χαμηλής ΓΠΔ, διότι η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση δεν μπορεί να εφαρμοστεί στον πολλαπλασιασμό δύο κλασμάτων). Τα δεύτερα πιο συχνά προβλήματα που τέθηκαν ανήκαν στην κατηγορία «*Φανταστείτε μια μονάδα σε χ ίσα μέρη*», όπου το πρόβλημα αφορούσε την προσπάθεια προσδιορισμού μιας έκτασης που αντιστοιχεί στο σύνολο, όπως για παράδειγμα «*Πόσο είναι το μήκος των 3/7 ενός σχοινιού 8 μέτρων;*» (ένα τέτοιο πρόβλημα θα ήταν δείκτης υψηλότερης ΓΠΔ). Επιπλέον, ορισμένοι από τους υποψηφίους εκπαιδευτικούς αντί να θέσουν ένα λεκτικό πρόβλημα, παρουσίασαν ουσιαστικά απλές ασκήσεις, γράφοντας για παράδειγμα «*Υπολογίστε το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού του 8 με το 3/7*» (χαμηλή ΕΓΠ, χαμηλή ΓΠΔ).

Στην ίδια έρευνα του Iskenderoglu (2018) κάποιοι συμμετέχοντες απέτυχαν να κατανοήσουν το όλον ως πλήθος μονάδων, όπως για παράδειγμα ο εκπαιδευτικός που έγραψε το πρόβλημα «*Ο Α. έδωσε στον αδερφό του 8 φορές τα 3/7 από τις 70 χάντρες που έχει. Πόσες χάντρες έδωσε στον αδελφό του*;» (χαμηλή ΚΓΠ, διότι δεν μπόρεσαν να αναγνωρίσουν τα λάθη τους, χαμηλή ΕΓΠ). Παρόλο που ο Α. είχε 70 χάντρες στην αρχή, σύμφωνα με το πρόβλημα πρέπει να δώσει 240 από αυτές στον αδελφό του. Παρόμοια αποτελέσματα είχε η έρευνα του Isik (2011), όπου υποψήφιοι εκπαιδευτικοί έθεσαν προβλήματα που το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού δύο γνήσιων κλασμάτων ήταν μεγαλύτερο από τα ίδια τα κλάσματα (χαμηλή ΚΓΠ διότι δεν μπορεί να αναγνωρίσει τα λάθη του, χαμηλή ΕΓΠ).

Περαιτέρω στην έρευνα του Iskenderoglu (2018), όταν οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα για την πράξη 3/4 x 5/7, η πλειοψηφία από αυτούς έθεσε προβλήματα που ζητούσαν τα 3/4 των 5/7 ενός ολόκληρου αντικειμένου χωρίς να προσδιορίζουν την ποσότητα του αντικειμένου, όπως για παράδειγμα «*Ένας αγρότης οργώνει τα 3/4 του χωραφιού του και στη συνέχεια σπέρνει τα 5/7 του οργωμένου χωραφιού. Πόση έκταση του χωραφιού έχει σπαρθεί*;» (χαμηλή ΓΠΜ διότι δεν γνωρίζει ότι ο προσδιορισμός ποσότητας είναι ένα από τα συνήθη λάθη των μαθητών, μέτρια ΕΓΠ).

Στη συνέχεια, οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί της έρευνας Iskenderoglu (2018) έπρεπε να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα για την πράξη 1 1/3 x 1/4, η οποία τους δυσκόλεψε περισσότερο σε σχέση με τις δύο άλλες συμβολικές πράξεις. Οι πλειοψηφία των συμμετεχόντων δημιούργησε προβλήματα που απαιτούσαν τον υπολογισμό του 1/4 του 1 1/3, όπως για παράδειγμα «*Ο Χάρης πεινούσε πολύ και έφαγε 1 κέικ και το 1/3 ενός άλλου κέικ. Ένας φίλος του, με τη σειρά του, έφαγε το 1/4 του κέικ που έφαγε ο Χάρης. Πόσο κέικ έφαγε ο φίλος*;» (μέτρια ΕΓΠ). Παράλληλα, ένα μικρό ποσοστό των υποψηφίων εκπαιδευτικών έθεσε προβλήματα, τα οποία θα μπορούσαν να λυθούν με τη βοήθεια της διαίρεσης. Τα προβλήματα αυτά ήταν συχνά παραλλαγές του παραδείγματος «*Υπάρχει ένα ολόκληρο κέικ και επίσης 1/3 ενός ίδιου κέικ. Τέσσερα άτομα θα τα μοιραστούν. Πόσο κέικ θα πάρει ο καθένας*;» (ναι μεν μπορεί να λυθεί το πρόβλημα με τη δοσμένη συμβολική πράξη, το οποίο δείχνει ένα καλό επίπεδο ΕΓΠ, αφού εντόπισε τις συνδέσεις και αναγνώρισε ότι αυτός ο εναλλακτικός τρόπος δίνει λύση, αλλά αν αυτό το πρόβλημα το έθετε εκπαιδευτικός με σκοπό της ανάπτυξης της κατανόησης του πολλαπλασιασμού μεικτού με κλάσμα, τότε θα ήταν δείγμα χαμηλής ΓΠΔ).

Στην έρευνα των Noh και Sabey (2014) μόνο το 10% των υποψηφίων εκπαιδευτικών κατάφερε να δημιουργήσει πλήρως σωστά προβλήματα πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Στη συγκεκριμένη έρευνα για τη δημιουργία λεκτικού προβλήματος της πράξης 2/3 x 5/7 πολλοί συμμετέχοντες έθεσαν προβλήματα που ναι μεν απεικονίζουν μια κατάσταση πολλαπλασιασμού, όμως είχαν λάθη ή ήταν ελλιπή (χαμηλή ΚΓΠ, χαμηλή ΕΓΠ), όπως για παράδειγμα το πρόβλημα «*Αν τα 2/3 των μαθητών έφαγαν τα 5/7 ενός μήλου, πόσα μήλα φαγώθηκαν συνολικά;*», το οποίο για να λυθεί πρώτον θα πρέπει να καθοριστεί ο αριθμός των μαθητών, και δεύτερον, αν συμβεί αυτό, αλλάζει η συμβολική πράξη που δόθηκε.

Μια άλλη τάση που παρατηρήθηκε στην έρευνα των Noh και Sabey (2014) ήταν οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί να ερμηνεύουν το συγκεκριμένο πρόβλημα πολλαπλασιασμού χρησιμοποιώντας λανθασμένα την ερμηνεία της κλιμάκωσης ως αλλαγή μεγέθους, όπως για παράδειγμα το πρόβλημα «*Είχα 2/3 φλιτζανιού αλεύρι και η γιαγιά μου μού έδωσε 5/7 φορές περισσότερο. Πόσο έχω τώρα;*» (χαμηλή ΚΓΠ, χαμηλή ΕΓΠ). Επιπλέον, αρκετοί συμμετέχοντες έγραψαν ένα πρόβλημα που περιλάμβανε πολλαπλασιασμό κλασμάτων, αλλά υπέθεσαν λανθασμένα ότι θα πρόκυπτε μεγαλύτερο ποσό, όπως για παράδειγμα το πρόβλημα «*Ο Τομ έχει τα 2/3 ενός μήλου και πρέπει να φτιάξει μια μεγάλη παρτίδα για μια συνταγή κατά 5/7. Πόσα μήλα θα χρειαστεί;*», όπου ο υποψήφιος εκπαιδευτικός που το έγραψε, μάλλον σκέφτηκε αρχικά το πρόβλημα με ακέραιους αριθμούς (χαμηλή ΚΓΠ, χαμηλή ΕΓΠ).

Στην έρευνα του Putra (2019) μόνο το 20% των εν ενεργεία εκπαιδευτικών που συμμετείχαν, μπόρεσε να δημιουργήσει ένα πρόβλημα που να αφορά τον πολλαπλασιασμό ακέραιου αριθμού με κλάσμα. Στην έρευνα του Putra (2019), όλα τα παραδείγματα που δημιούργησαν οι εκπαιδευτικοί για τον πολλαπλασιασμό ακέραιου με κλάσμα αφορούσαν τη λειτουργία του κλάσματος ως μέρος-όλου (χαμηλή ΕΓΠ, λόγω χαμηλής εννοιολογικής κατανόησης, χαμηλή ΓΠΜ, διότι ενισχύει παρανοήσεις, χαμηλή ΓΠΔ, διότι δεν γνωρίζει ότι υπάρχουν καταλληλότερα παραδείγματα). Για τον πολλαπλασιασμό του κλάσματος με κλάσμα, οι συμμετέχοντες της έρευνας είχαν συγκριτικά καλύτερες επιδόσεις (65% επιτυχία), ενώ οι περισσότεροι από αυτούς σχεδίασαν προβλήματα πλαισίου με βάση τη μέτρηση του εμβαδού (υψηλή ΕΓΠ, χαμηλή ΓΠΔ, διότι υπάρχουν καταλληλότερα παραδείγματα).

Οι Armstrong και Bezuk (1995) ζήτησαν από επιμορφούμενους εκπαιδευτικούς μέσης εκπαίδευσης να δημιουργήσουν ένα λεκτικό πρόβλημα που απαιτείται ο υπολογισμός του 1/3 των 3/4. Οι εκπαιδευτικοί αναγνώρισαν ότι η κατάσταση απαιτούσε πολλαπλασιασμό κλασμάτων (υψηλή ΚΓΠ), αλλά δυσκολεύτηκαν να εξηγήσουν τη σκέψη τους (χαμηλή ΕΓΠ), να σχεδιάσουν διαγράμματα που να ταιριάζουν με αλγοριθμικές λύσεις (χαμηλή ΕΓΠ, χαμηλή ΓΠΔ) και να βρουν την κατάλληλη μονάδα για το πρόβλημα (χαμηλή ΚΓΠ).

Στην έρευνα της Luo (2009) για να κατασκευάσουν ένα λεκτικό πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλάσματος με ακέραιο αριθμό σχεδόν όλοι οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί χρησιμοποίησαν επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (υψηλή ΕΓΠ, χαμηλή ΓΠΜ, χαμηλή ΓΠΜ). Η χρήση της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης δεν περιορίστηκε από τους εκπαιδευτικούς μόνο στον πολλαπλασιασμό κλάσματος με ακέραιο, αφού στην έρευνα του Putra (2019) πολλοί εκπαιδευτικοί όταν κλήθηκαν να δημιουργήσουν προβλήματα με νόημα για τον πολλαπλασιασμό δύο κλασμάτων χρησιμοποίησαν λανθασμένα τη λειτουργία του πολλαπλασιασμού ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (χαμηλή ΕΓΠ, χαμηλή ΓΠΜ, χαμηλή ΓΠΔ).

4.3 Δυσκολίες των εκπαιδευτικών στη χρήση αναπαραστάσεων για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων

Η βιβλιογραφία παρείχε ενδείξεις ότι υπάρχουν δυσκολίες στο κομμάτι των αναπαραστάσεων του πολλαπλασιασμού με κλάσματα. Για παράδειγμα, ο Putra (2016, στο Putra, 2019) διαπίστωσε ότι περισσότεροι από τους μισούς υποψήφιους εκπαιδευτικούς της έρευνας του δεν μπορούσαν να αναπαραστήσουν τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων χρησιμοποιώντας μοντέλα ορθογωνίων (χαμηλή ΕΓΠ). Παράλληλα, στην έρευνα των Luo, Lo και Leu (2011) μόνο το 19% των υποψήφιων Αμερικανών εκπαιδευτικών επέλεξε σωστά τις αναπαραστάσεις που μπορούν να δώσουν λύση στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων (χαμηλή ΕΓΠ), ενώ στην έρευνα των Noh και Sabey (2014) περίπου το 65% των υποψηφίων εκπαιδευτικών δεν μπόρεσε να εντοπίσει ποια αναπαράσταση μεταξύ άλλων ήταν σωστή για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων (χαμηλή ΕΓΠ).

Στην έρευνα των Caglayan και Olive (2011) για την κατασκευή των προβλημάτων πολλαπλασιασμού 1/3 x 1/2 και 1/2 x 1/3 με τη χρήση χειραπτικών υλικών (το υλικό Pattern Blocks) σε τριγωνικό πλέγμα, πολλοί εκπαιδευτικοί κατασκεύασαν και σχεδίασαν τόσο τον πολλαπλασιαστή όσο και τον πολλαπλασιαστέο, παρέχοντας μια μη λειτουργική ερμηνεία της κατάστασης του προβλήματος (χαμηλή ΚΓΠ, χαμηλή ΕΓΠ). Επιπλέον, αρκετοί εκπαιδευτικοί αντάλλαξαν τον ρόλο του πολλαπλασιαστή και του πολλαπλασιαστέου (μέτρια ΕΓΠ, χαμηλή ΓΠΔ).

Ο Izsak (2008) καταλήγει στο συμπέρασμα ότι για να χρησιμοποιήσουν αποτελεσματικά τις αναπαραστάσεις, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να είναι σε θέση να κατανοήσουν τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων χρησιμοποιώντας συλλογισμό σε τρία επίπεδα μονάδων. Στην έρευνα του Izsák (2008) που μελετάει τις σχέσεις μεταξύ των δομών των μονάδων των εκπαιδευτικών και τους σκοπούς χρήσης των σχεδίων, μια εκπαιδευτικός συγκεκριμένα που έστρεφε κυρίως την προσοχή της σε δύο επίπεδα μονάδων, μπορούσε να καταλάβει τη στρατηγική ενός μαθητή για τον προσδιορισμό ενός κλασματικού μέρους μιας ποσότητας ακέραιου αριθμού (υψηλή ΕΓΠ), αλλά δεν ανταποκρίθηκε στις ερωτήσεις ενός άλλου μαθητή σχετικά με τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων στην αριθμογραμμή (χαμηλή ΕΓΠ).

Τα αποτελέσματα των Son και Lee (2016) συνάδουν με τις περιγραφές του Izsak (2008) για τις διάφορες περιπτώσεις συλλογισμού σε διαφορετικά επίπεδα μονάδων σε σχεδιασμένες αναπαραστάσεις όπου: (α) μια περίπτωση αιτιολογεί κυρίως με δύο μόνο επίπεδα μονάδων και χρησιμοποιεί σχέδια για να απεικονίσει λύσεις (μέτρια ΕΓΠ), (β) μια περίπτωση προσέχει με μεγαλύτερη συνέπεια τις δομές τριών επιπέδων και χρησιμοποιεί σχέδια για να συμπεράνει μια μέθοδο υπολογισμού (υψηλότερη ΕΓΠ), (γ) μια περίπτωση διαθέτει την ικανότητα να παράγει ρητά τρία επίπεδα μονάδων και (δ) μια περίπτωση διαθέτει την ικανότητα να παράγει ρητά τρία επίπεδα μονάδων με ευελιξία, ώστε να συγκρίνει εναλλακτικές προσεγγίσεις (υψηλή ΓΠΔ).

Όπως φαίνεται, δεν έχουν τις απαιτούμενες γνώσεις ή δεν αναγνωρίζουν όλοι οι εκπαιδευτικοί την αξία των αναπαραστάσεων. Ο Izsák (2008) διαπίστωσε ότι οι εκπαιδευτικοί στην έρευνά του δεν χρησιμοποιούσαν αναπαραστάσεις ως εργαλείο για να βοηθήσουν στη συλλογιστική και τη δημιουργία συνδέσεων για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων (χαμηλή ΕΓΠ). Επιπλέον, στην έρευνα των Wilkie και Roche (2022) ένα σημαντικό ποσοστό των εκπαιδευτικών δήλωσε ότι για τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων προτιμά να μην χρησιμοποιεί μοντέλο (πάνω από 30%) ή χειραπτικό υλικό (πάνω από 40%) (χαμηλή ΓΠΔ), ενώ η πλειοψηφία από αυτούς που χρησιμοποιούν μοντέλα (40%) επέλεξε ένα μοντέλο συνόλου για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, το οποίο είναι διακριτό μοντέλο (χαμηλή ΓΠΔ, διότι όπως προαναφέρθηκε τα διακριτά μοντέλα δεν είναι τα ιδανικότερα από μόνα τους για την αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων).

Παράλληλα, η μελέτη των Lovin, Stevens, Siegfried, Wilkins και Norton (2018) παρείχε ενδείξεις ότι οι αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται αφού πρώτα ληφθεί η απάντηση διαδικαστικά, δηλαδή ως μέσο απεικόνισης της απάντησης και όχι εύρεσης της απάντησης (χαμηλή ΕΓΠ). Στην συγκεκριμένη έρευνα μόνο λίγοι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί κατασκεύασαν σχήματα που θεωρούνται κατάλληλα για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, γεγονός που υποδηλώνει δυσκολίες στην υπέρβαση του συλλογισμού μέρος-όλου και στον συντονισμό πολλαπλών επιπέδων μονάδων.

Στην έρευνα των Son και Lee (2016), όταν ο πολλαπλασιασμός περιλάμβανε ένα μοναδιαίο κλάσμα, οι μπάρες κλασμάτων χρησιμοποιήθηκαν συχνότερα ως αναπαραστάσεις από τους εκπαιδευτικούς του δείγματος, ακολουθούμενες από το ορθογώνιο μοντέλο περιοχής, ενώ αντίστροφα, το μοντέλο περιοχής συχνότερα, ακολουθούμενο από τις μπάρες κλασμάτων στον πολλαπλασιασμό δύο μη μοναδιαίων κλασμάτων. Στη συγκεκριμένη έρευνα οι δυσκολίες των συμμετεχόντων με τις γραφικές αναπαραστάσεις στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων συνοψίζονται σε τρεις κατηγορίες:

1) αντιλαμβάνονταν τον ισομερισμό μόνο σε σχέση με ένα ενιαίο σύνολο και δεν εφάρμοζαν τον ισομερισμό σε μέρη συνόλων (σχεδίασαν δύο σχήματα, ένα για κάθε κλάσμα)
2) αδυνατούσαν να αναγνωρίσουν τη μονάδα αναφοράς (αδυναμία αναδρομικού ισομερισμού)
3) είχαν ανεπαρκή κατανόηση των αναπαραστάσεων γενικότερα (χαμηλή ΕΓΠ).

4.4 Παρανοήσεις των εκπαιδευτικών στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων και οι δυσκολίες τους στον προσδιορισμό των παρανοήσεων των μαθητών

Οι παρανοήσεις των εκπαιδευτικών αντικατοπτρίζουν τις παρανοήσεις των μαθητών τους (Newton 2008, Tirosh 2000, Steenbrugge κ.ά., 2014). Τα ευρήματα της έρευνας των Depaepe κ.ά. (2015) για την ΠΓΠ των εκπαιδευτικών στους ρητούς αριθμούς, καταδεικνύουν ότι, όπως και οι μαθητές, έτσι και οι (υποψήφιοι) εκπαιδευτικοί πάσχουν από την προκατάληψη των φυσικών αριθμών. Όπως παρατήρησαν οι Tobias, Olanoff και Lo (2012), οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί έχουν εσφαλμένες αντιλήψεις για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων που προκύπτουν από γενικευμένους κανόνες άλλων συστημάτων αριθμών. Ο Putra (2019) αναφέρει ότι τα κενά στις γνώσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τον πολλαπλασιασμό με κλάσματα οφείλονται στη γενίκευση της έννοιας του πολλαπλασιασμού από το πλαίσιο των ακεραίων σε αυτό των πράξεων των κλασμάτων και υποστηρίζει ότι αυτές οι παρανοήσεις έχουν πιθανώς την προέλευσή τους από την εποχή που οι εκπαιδευτικοί ήταν οι ίδιοι μαθητές στο δημοτικό σχολείο και επιμένουν κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών.

Οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται περισσότερο να λύσουν λεκτικά προβλήματα στα οποία ο πολλαπλασιαστής είναι μικρότερος από το 1 (Harel & Behr, 1995). Οι Siegler και Lortie-Forques (2015) εξέτασαν την κατεύθυνση της επίδρασης των πράξεων και μόνο το 33% των υποψήφιων δασκάλων προέβλεψε σωστά την κατεύθυνση της επίδρασης του πολλαπλασιασμού κλασμάτων με κλάσματα μικρότερα της μονάδας.

Παράλληλα, οι Son και Lee (2016) αναφέρουν ότι οι παρανοήσεις στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων στους υποψηφίους εκπαιδευτικούς μπορεί να οφείλονται στην έλλειψη κατανόησης της φύσης των κλασμάτων, στην υπερβολική έμφαση στην εύρεση κοινού παρονομαστή στην πρόσθεση κλασμάτων, στην έλλειψη κατανόησης της σημασίας του πολλαπλασιασμού κλασμάτων και στην έλλειψη ικανότητας και κατανόησης του αναδρομικού διαμερισμού.

Υπάρχουν μελέτες που έχουν εξετάσει άμεσα τις ικανότητες των εκπαιδευτικών να σχηματίζουν και να μετασχηματίζουν μονάδες όταν συλλογίζονται με ρητούς αριθμούς (π.χ. Izsak, 2008, Izsák κ.ά., 2012). Στην έρευνα του ο Izsak (2008) παρείχε ενδείξεις ότι οι δομές μονάδων πολλαπλών επιπέδων παίζουν ρόλο στη συλλογιστική για τα κλάσματα, καθώς διαπιστώθηκαν διαφορές στις ενέργειες των εκπαιδευτικών τους τέθηκαν εργασίες που τους ζητούσαν να συλλογιστούν με πολλαπλά επίπεδα μονάδων. Συγκεκριμένα, στην έρευνα του Iszak (2008) η εκπαιδευτικός που επιχειρηματολογούσε σε δύο επίπεδα μονάδων, είχε δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων κλασμάτων μέσω σχεδιασμένων αναπαραστάσεων, καθώς και στο να ανταπεξέλθει στις ερωτήσεις των μαθητών, ενώ η εκπαιδευτικός που συλλογιζόταν με τρία επίπεδα μονάδων, παρείχε περισσότερες ευκαιρίες στους μαθητές της να χρησιμοποιούν τις σχεδιασμένες ποσότητες ως βάση για την ανάπτυξη μεθόδων πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Ομοίως, οι Izsák, Jacobson, Araujo και Orrill (2012) συμπέραναν ότι η διάκριση μεταξύ δύο και τριών επιπέδων μονάδων παίζει κεντρικό ρόλο στην απόδοση των εκπαιδευτικών και οδηγεί ειδικότερα στο χάσμα αποτελεσματικότητας στον προσδιορισμό των μονάδων αναφοράς σε πολλαπλασιαστικές καταστάσεις.

Στην έρευνα των Isiksal και Cakiroglu (2011) οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί πρότειναν ότι οι περισσότερες δυσκολίες που μπορεί να έχουν οι μαθητές του δημοτικού στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων προέρχονται από την έλλειψη τυπικής γνώσης και την αδυναμία απομνημόνευσης των αλγορίθμων (χαμηλή ΓΠΜ), ενώ στην έρευνα των Şahin κ.ά. (2016) κάτω του 5% του δείγματος των υποψήφιων εκπαιδευτικών ήταν σε θέση να εντοπίσουν τα λάθη μαθητών σε πράξεις πολλαπλασιασμού κλασμάτων (χαμηλή ΚΓΠ, χαμηλή ΓΠΜ) και να παρέχουν σωστές προτάσεις λύσεις για τα εν λόγω λάθη (χαμηλή ΓΠΔ). Αντιθέτως, οι περισσότεροι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί της έρευνας πρότειναν το σωστό τρόπο του αλγόριθμου ως κανόνα χωρίς περαιτέρω εξήγηση (χαμηλή ΕΓΠ).

4.5 Προτάσεις για τη διδασκαλία πολλαπλασιασμού κλασμάτων

Η Mack (1998) επισημαίνει ότι οι περισσότερες καταστάσεις με πολλαπλασιασμό δύο κλασμάτων περιλαμβάνουν τη λήψη ενός μέρους ενός μέρους ενός όλου και περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί θα μπορούσαν να δημιουργήσουν τα θεμέλια για την κατανόηση της αντίληψης του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων στους μαθητές με ουσιαστικό τρόπο θέτοντας τα ακόλουθα προβλήματα κατά σειρά:

- Καταστάσεις ισότιμου διαμοιρασμού (π.χ. διαμοιρασμός 7 μπισκότων μεταξύ 3 ατόμων)
- Εύρεση ενός κλάσματος μιας ποσότητας ακέραιου αριθμού (π.χ., 2/3 του 6)
- Λήψη ενός μέρους ενός μέρους ενός συνόλου (π.χ., 1/3 των 3/4)
- Ο παρονομαστής του πρώτου κλάσματος να είναι πολλαπλάσιο του αριθμητή του δεύτερου κλάσματος (π.χ. 3/4 των 2/3).
- Ο παρονομαστής του πρώτου κλάσματος είναι διαιρέτης του αριθμητή του δεύτερου κλάσματος (π.χ. 2/3 του 9/10).
- Λαμβάνοντας ένα μέρος ενός μέρους ενός όλου, όπου ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης του παρονομαστή του πρώτου κλάσματος και του αριθμητή του δεύτερου κλάσματος είναι 1 (π.χ. 3/4 του 7/8).

Επιπλέον, οι Hackenberg και Tillema (2009) συμβουλεύουν τους εκπαιδευτικούς ότι η λήψη ενός γνήσιου κλάσματος από ένα μοναδιαίο κλασματικό ποσό διαφέρει σημαντικά από τη λήψη ενός μοναδιαίου κλάσματος από ένα γνήσιο κλασματικό ποσό. Συνεπώς, προτείνουν ο εκπαιδευτικός να ζητήσει από έναν μαθητή που μόλις έχει κατασκευάσει ένα σχήμα σύνθεσης κλασματικής μονάδας, αρχικά να πάρει τα 2/5 του 1/3 και αργότερα το 1/3 του 2/5, και όχι το αντίθετο.

Ένα στοιχείο που μπορεί να κάνει τη διαφορά στο να κατανοήσουν οι μαθητές τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων είναι ο προσδιορισμός του όλου. Η Mack (2001) διαπίστωσε ότι πολλοί μαθητές δεν μπορούν να λύσουν ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλασμάτων όταν σε αυτό δεν προσδιορίζεται η μονάδα για κάθε κλάσμα (π.χ. *Έχεις τα 3/4 μιας πίτσας. Δίνεις το 1/3 στον φίλο σου. Πόσα έδωσες στον φίλο σου;*). Συνεπώς, η βαθιά κατανόηση της μονάδας αναφοράς είναι μια σημαντική έννοια που απαιτείται για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, αλλά και όλες τις άλλες πράξεις με κλάσματα (Izsák κ.ά., 2019).

Επιπλέον, οι Webel και DeLeeuw (2016) εφιστούν την προσοχή στη χρήση του λεξιλογίου κατά τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Για παράδειγμα, οι Mick και Sinicrope (1989) περιέγραψαν έναν μαθητή της ΣΤ΄ τάξης που ήταν σε θέση να κατανοήσει τη φράση «το μισό του μισού», αλλά δυσκολευόταν με την έκφραση «το μισό επί το μισό». Όπως φαίνεται, οι διαφορές στη χρήση των λέξεων οδηγούν σε διαφορετικά μαθηματικά νοήματα, αν και όπως υποστηρίζουν οι Simon, Kara, Norton και Placa (2018), η επιμονή στη γλωσσική διατύπωση δεν είναι το ίδιο με την ανάπτυξη μιας έννοιας. Σε τάξεις όπου οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν σταθερά το «του» για να προσδιορίσουν το σύνολο αναφοράς για κάθε ένα από τα κλάσματα σε ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού και όπου οι συνδέσεις μεταξύ του «του» και του «φορές» γίνονται σαφείς είναι πιο πλούσια τα νοήματα (Webel & DeLeeuw, 2016). Ωστόσο στην έρευνα του Iszak (2008), παρόλο που ένας εκπαιδευτικός δήλωσε ότι οι λέξεις «του» και «φορές» σημαίνουν το ίδιο πράγμα, παρατηρήθηκε ότι παρακολουθούσε τα μέρη των συνόλων όταν σκεφτόταν ένα κλάσμα *επί* έναν αριθμό και τα μέρη των μερών όταν σκεφτόταν ένα κλάσμα ενός αριθμού. Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί τείνουν να διαφοροποιούν τη λέξη του συμβόλου του πολλαπλασιασμού «×», χρησιμοποιώντας τη λέξη «φορές» όταν το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο του 1 και τη λέξη «του» όταν το αποτέλεσμα είναι μικρότερο (Streefland, 1991).

Μία άλλη προσέγγιση την οποία προτείνει η Mack (1990) είναι η διδασκαλία για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων να στηριχθεί στις άτυπες γνώσεις των μαθητών για τα κλάσματα. Η Mack (1990) εντόπισε τα μοναδιαία κλάσματα και τη διαμέριση ως παραδείγματα άτυπης γνώσης για να στηριχθεί ο πολλαπλασιασμός με κλάσματα, καθώς οι μαθητές της έρευνας της επωφελούνταν από την κατανόηση της μονάδας για να βρίσκουν ένα μέρος ενός μέρους ενός όλου και αντλούσαν από τις γνώσεις τους για τη διαμέριση όταν επιλύανε προβλήματα πολλαπλασιασμού με κλάσματα.

Επίσης, είναι βασικό να αναπτυχθεί η ιδέα ότι μια ποσότητα μπορεί να μετρηθεί με μονάδες διαφορετικού μεγέθους, ώστε οι μαθητές να είναι σε θέση να εννοιολογήσουν τη μέτρηση στην οποία η ποσότητα είναι μικρότερη από τη μονάδα μέτρησης (Simon, Kara, Norton & Placa, 2018). Οι Webel, Krupa & McManus (2016) προτείνουν στους εκπαιδευτικούς να έχουν κατά νου ότι όποιο οπτικό μοντέλο και αν χρησιμοποιήσουν για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, να βεβαιωθούν ότι οι μαθητές κατανοούν ότι τα δύο κλάσματα αναφέρονται σε διαφορετικά μεγέθη μονάδων, διότι η προσοχή στις μονάδες στις οποίες αναφέρονται τα κλάσματα σε καταστάσεις πολλαπλασιασμού είναι ζωτικής σημασίας για την κατανόηση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων (Copur – Gencturk, 2021).

Για τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού κλασμάτων οι Webel κ.ά. (2016) προτείνουν τους εκπαιδευτικούς, πρώτον, να δίνουν έμφαση στις συνδέσεις με το πλαίσιο (π.χ. με ετικέτες πλαισίου στα οπτικά μοντέλα) για να τους βοηθήσει να προσέξουν το νόημα κάθε κλάσματος, και ειδικότερα τη μονάδα αναφοράς για κάθε κλάσμα, και δεύτερον, να μην αναγάγουν τα οπτικά μοντέλα σε μια σειρά από βήματα, αλλά να δώσουν έμφαση στον σκοπό των οπτικών μοντέλων, δηλαδή τη δημιουργία μιας εικόνας για τη σχέση μεταξύ των δύο μονάδων του προβλήματος.

Επιπρόσθετα, οι Bruce, Bennett και Flynn (2014) για την αποτελεσματική διδασκαλία του πολλαπλασιασμού κλασμάτων προτείνουν οι εκπαιδευτικοί να σταματήσουν να δίνουν έμφαση στις διαδικασίες έναντι των εννοιών και στη σχέση μέρος-όλου των κλασμάτων, να χρησιμοποιούν περισσότερες αναπαραστάσεις και τέλος, να αφιερώνουν περισσότερο χρόνο, διότι η αύξηση του χρόνου για την ανάπτυξη μαθηματικών ιδεών είναι αναγκαία (Chinnappan & Forrester, 2014).

5. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται το ερευνητικό πρόβλημα και τα επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στην έρευνα. Στη συνέχεια περιγράφεται το ερευνητικό εργαλείο και το δείγμα της έρευνας. Ακολουθεί η ανάλυση της διαδικασίας διεξαγωγής της έρευνας, καθώς και του τρόπου ανάλυσης των δεδομένων. Τέλος γίνεται αναφορά στην εγκυρότητα και αξιοπιστία της έρευνας.

5.2 Ερευνητικό πρόβλημα

Η εργασία διερευνά πτυχές της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν είναι τα εξής:

1. Ποιο είναι το επίπεδο της Κοινής Γνώσης του Περιεχομένου (ΚΓΠ) των εκπαιδευτικών μέσω της δυνατότητάς τους να αναγνωρίζουν τον πολλαπλασιασμό ως κατάλληλη πράξη για τον υπολογισμό του μέρους ενός αριθμού, να αξιολογούν τις απαντήσεις υποθετικών μαθητών σε προβλήματα πολλαπλασιασμού κλασμάτων, να αναγνωρίζουν και να επιλύουν προβλήματα πολλαπλασιασμού κλασμάτων και να ερμηνεύουν σχετικές αναπαραστάσεις;
2. Ποιο είναι το επίπεδο της Εξιδεικευμένης Γνώσης Περιεχομένου (ΕΓΠ) των εκπαιδευτικών μέσω της δυνατότητάς τους να δημιουργούν προβλήματα πολλαπλασιασμού κλασμάτων, να αξιολογούν αναπαραστάσεις και να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις;
3. Ποιο είναι το επίπεδο της Γνώσης του Περιεχομένου και των Μαθητών (ΓΠΜ) των εκπαιδευτικών μέσω της δυνατότητάς τους να προβλέπουν τις απαντήσεις και τα λάθη των μαθητών, και να εξηγούν τις αναπαραστάσεις τους;
4. Ποιο είναι το επίπεδο της Γνώσης του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας (ΓΠΔ) των εκπαιδευτικών μέσω της δυνατότητάς τους να παρέχουν την κατάλληλη ακολουθία παραδειγμάτων και να αξιολογούν την καταλληλότητα δραστηριοτήτων;

Με βάση τη βιβλιογραφική ανασκόπηση που προηγήθηκε αναμένουμε ότι οι εκπαιδευτικοί διαθέτουν υψηλό επίπεδο Κοινής Γνώσης Περιεχομένου στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, γνωρίζοντας τουλάχιστον την έννοια του μέρους (του μέρους) του όλου και τη διαδικασία πολλαπλασιασμού κλασμάτων (πολλαπλασιασμός αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή), αλλά η Εξιδεικευμένη Γνώση Περιεχομένου, η Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας και η Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών δεν βρίσκονται σε αντίστοιχα υψηλό επίπεδο.

5.3 Τρόπος προσέγγισης της έρευνας και ερευνητικό εργαλείο

Προκειμένου να εξεταστεί η Μαθηματική Γνώση για Διδασκαλία των εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων χρησιμοποιήθηκε ποιοτική έρευνα, και συγκεκριμένα ποιοτικές μελέτες περιπτώσεων. Μια τέτοια προσέγγιση επιτρέπει τη λήψη πλούσιων δεδομένων προκειμένου να επιτευχθεί μία σε βάθος ανάλυση των γνώσεων για διδασκαλία των εκπαιδευτικών στο συγκεκριμένο θέμα.

Η μέθοδος συλλογής δεδομένων που επιλέχθηκε ήταν η ατομική συνέντευξη με παράλληλη προβολή και συμπλήρωση ερωτηματολογίου, το οποίο περιείχε έργα τοποθετημένα σε σενάρια τάξης. Οι συνεντεύξεις ήταν ημιδομημένες, καθώς οι περισσότερες ερωτήσεις ήταν προσχεδιασμένες και βασίζονταν στα έργα του ερωτηματολογίου, αλλά κάποιες ερωτήσεις βασίστηκαν στις απαντήσεις των εκπαιδευτικών και χρησιμοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια της συνέντευξης για περαιτέρω διευκρινίσεις. Το ερωτηματολόγιο περιείχε 6 έργα. Κάποια από αυτά τα έργα αντλήθηκαν και προσαρμόστηκαν από τη βιβλιογραφία και τα υπόλοιπα βασίζονται σε στοιχεία της βιβλιογραφίας.

Στόχος των έργων είναι να διερευνηθεί:

- η Κοινή Γνώση του Περιεχομένου μέσω της αναγνώρισης του πολλαπλασιασμού ως της έννοιας του πολλαπλασιασμού κλασμάτων (Ε1), της αναγνώρισης προβλημάτων πολλαπλασιασμού κλασμάτων (Ε2), της δυνατότητας εντοπισμού κλασμάτων και πράξεων κλασμάτων μέσα σε σχήματα (Ε3), της αξιολόγησης αναπαραστάσεων (Ε4), της αξιολόγησης απαντήσεων υποθετικών μαθητών (Ε5, Ε6) και της επίλυσης προβλήματος (Ε6),
- η Εξειδικευμένη Γνώση του Περιεχομένου μέσω της δημιουργίας προβλήματος (Ε2), της αξιολόγησης των δυνατοτήτων των αναπαραστάσεων (Ε4) και της δημιουργίας αναπαραστάσεων (Ε4),
- η Γνώση του Περιεχομένου και των Μαθητών μέσω της πρόβλεψης των απαντήσεων υποθετικών μαθητών (Ε1), της εξήγησης των αναπαραστάσεων των μαθητών (Ε4), της εξήγησης του τρόπου σκέψης των μαθητών (Ε5) και της πρόβλεψης των λαθών των μαθητών (Ε5, Ε6),
- η Γνώση του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας μέσω της επιλογής ακολουθίας παραδειγμάτων (Ε1), του καθορισμού του στόχου διδασκαλίας (Ε1) και της αξιολόγησης δραστηριοτήτων (Ε3).

Τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα παρουσιάζονται αναλυτικά:

Έργο 1: *Σε μια τάξη Στ΄ Δημοτικού, η δασκάλα ρωτάει τους μαθητές αν ξέρουν να βρουν το 1/5 του 30 και με ποια πράξη το βρίσκουν. Ο Γιάννης απαντά: «Είναι εύκολο, είναι το 6. Το βρίσκουμε με διαίρεση, 30 δια 5 ίσον 6». Πώς θα συνεχίζατε αυτή τη συζήτηση, αν ήσασταν στη θέση της δασκάλας;*

Σε αυτό το έργο το κεντρικό ζήτημα είναι αν ο εκπαιδευτικός κάνει τη διάκριση μεταξύ της πράξης (πολλαπλασιασμός) και της διαδικασίας μέσω της οποίας μπορεί να εκτελεστεί η πράξη αυτή. Αφού η ερώτηση της δασκάλας τους σεναρίου είναι *με ποια πράξη* βρίσκεται το 1/5 του 30, οι εκπαιδευτικοί που θα επιβραβεύσουν τον Γιάννη για την απάντησή του, δεν επιδεικνύουν υψηλή ΚΓΠ. Βασικό σημείο είναι η δυνατότητα των εκπαιδευτικών να αναγνωρίσουν τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων ως την πράξη για την εύρεση του μέρος του όλου. Στη συνέχεια, διερευνάται πώς θα συνεχίσουν τη διδασκαλία οι εκπαιδευτικοί και συγκεκριμένα αν θα προτείνουν να συνεχιστεί η διδασκαλία με έναν κλασματικό πολλαπλασιαστή διαφορετικού του μοναδιαίου κλάσματος, στοιχείο που δείχνει τη ΓΠΔ των εκπαιδευτικών. Αν δεν αναφερθεί από τον εκπαιδευτικό κάποια σχετική απάντηση, τότε θα δοθεί η εξής συνέχεια του σεναρίου:

«*Η δασκάλα αναγνωρίζει ότι ο Γιάννης βρήκε το σωστό αποτέλεσμα, και στη συνέχεια ρωτά με ποια πράξη μπορεί να βρει τα 2/5 του 30. Γιατί πιστεύετε ότι συνεχίζει με αυτόν τον τρόπο η δασκάλα τη συζήτηση; Τι προσπαθεί να επιτύχει; Ποιες απαντήσεις θα περιμένατε από τα παιδιά;*»

Μέσω της πρότασης 2/5 του 30 διερευνάται επίσης αν οι συμμετέχοντες μπορούν να δουν το 2/5 ως τελεστή πέρα από τη λειτουργία μέρος όλου. Αυτό φαίνεται αν δικαιολογήσουν το 2/5 του 30 ως 2 φορές το 1/5 του 30.

Αν δεν αναφερθεί κάτι αντίστοιχο, τότε το διδακτικό σενάριο συνεχίζει ως εξής: *Η Κατερίνα απαντά: «Μπορώ να το υπολογίσω. Κάνω πρώτα 30 διά 5, ίσον 6, και μετά πολλαπλασιάζω με το 2 – 2 επί 6 ίσον 12». Πώς θα συνεχίζατε αυτή τη συζήτηση, αν ήσασταν στη θέση της δασκάλας; Με ποιον στόχο;*

Σε αυτό το σημείο διερευνάται αν για τις δύο πράξεις (πολλαπλασιασμός και διαίρεση) που εκτελούνται η μία επί του αποτελέσματος της άλλης μπορούν οι εκπαιδευτικοί να αναφέρουν ως στόχο τη γνώση του ότι πολλαπλασιασμός του 30 με το 2/3 είναι το ίδιο με το να διαιρέσει κανείς το 30 με το 3 και να το πολλαπλασιάσει με το 2.

Στο συγκεκριμένο έργο αναμένουμε ότι οι εκπαιδευτικοί θα γνωρίζουν την έννοια του πολλαπλασιασμού με κλάσμα ως την έννοια της εύρεσης του μέρους του όλου. Ωστόσο, επειδή οι εκπαιδευτικοί τείνουν να βασίζονται περισσότερο σε διαδικασίες παρά στην εννοιολογική κατανόηση (Forrester & Chinnappan, 2010), αναμένουμε ότι ίσως κάποιοι συγχέουν την πράξη του πολλαπλασιασμού με τη διαδικασία εύρεσης του μέρους του όλου που εμπεριέχει τη διαίρεση.

Έργο 2: *Θέλετε να δώσετε στα παιδιά της Στ΄ τάξης ένα παράδειγμα προβλήματος που αντικατοπτρίζει την πράξη 3/4 x 5/7. Τι παράδειγμα δίνετε;*

Το συγκεκριμένο έργο αντλήθηκε από την έρευνα του Iskenderoglu (2018). Ο στόχος του δεύτερου έργου είναι να διερευνηθεί αν οι εκπαιδευτικοί έχουν την ικανότητα να δημιουργήσουν ένα λεκτικό πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Αυτή η ικανότητα είναι δείκτης της ΕΓΠ των εκπαιδευτικών (Son & Crespo, 2009) και τέτοια έργα έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως στη βιβλιογραφία για τη διερεύνηση της ΜΓΔ των εκπαιδευτικών (π.χ. Luo, 2009, Toluk-Ucar, 2009).

Επιπλέον, σε αυτό το έργο διερευνάται αν έχουν στη διάθεσή τους εναλλακτικούς τύπους προβλημάτων. Αν δημιουργήσουν ένα πρόβλημα που αναπαριστά το εμβαδόν ενός ορθογωνίου, τότε η συνέντευξη συνεχίζει ρωτώντας τους αν μπορούν να δημιουργήσουν ένα διαφορετικό πρόβλημα. Στην περίπτωση που οι εκπαιδευτικοί δε μπορέσουν να δημιουργήσουν ένα σωστό πρόβλημα, τότε το σενάριο συνεχίζει ως εξής: *Ένας συνάδελφος έδωσε στην Ε΄ τάξη ως παράδειγμα το εξής πρόβλημα: «Το μήκος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 3/4 του μέτρου και το πλάτος του είναι 5/7 του μέτρου. Πόσο είναι το εμβαδόν του;» Είναι αυτό ένα καλό παράδειγμα για την περίπτωση αυτή; Είναι παρόμοιο με αυτό που δώσατε; Εξηγείστε γιατί.*

Σε αυτό το έργο, με βάση τη σχετική βιβλιογραφία που ανασκοπήθηκε και συζητήθηκε παραπάνω, αναμένουμε ότι αρκετοί εκπαιδευτικοί δεν θα είναι σε θέση να κατασκευάσουν λεκτικά προβλήματα με σωστή σημασιολογία και κατάλληλη μονάδα αναφοράς για τη δεδομένη συμβολική έκφραση πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Επιπλέον, μέσω της δημιουργίας προβλημάτων θα θέλαμε να ερευνήσουμε αν θα καταφύγουν στη δημιουργία προβλήματος εύρεσης του εμβαδού ενός ορθογωνίου ή αν μπορούν να αναγνωρίσουν ένα πρόβλημα εύρεσης εμβαδού ως πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Όπως επίσης, έχει ενδιαφέρον να διερευνηθεί αν τα τυχόν λάθη που προκύψουν κατά τη δημιουργία προβλημάτων έχουν εννοιολογική βάση, οφείλονται σε αδυναμίες σαφούς διατύπωσης των μονάδων αναφοράς ή περιγράφουν κάποια άλλη πράξη, όπως για παράδειγμα τη διαίρεση.

Έργο 3: *Μια δασκάλα δίνει κάθε βδομάδα ένα «μαθηματικό γρίφο» στα παιδιά της Στ΄ τάξης. Αυτή την εβδομάδα βρήκε αυτόν τον «γρίφο» και αναρωτιέται αν είναι κατάλληλος για να τον δώσει στην τάξη της. Τι θα τη συμβουλεύατε; Γιατί;*

α) Μπορείτε να δείτε τα 3/5 σε αυτό το σχήμα;

β) Μπορείτε να δείτε τα 5/3 σε αυτό το σχήμα;

γ) Μπορείτε να δείτε τα 5/3 του 3/5;

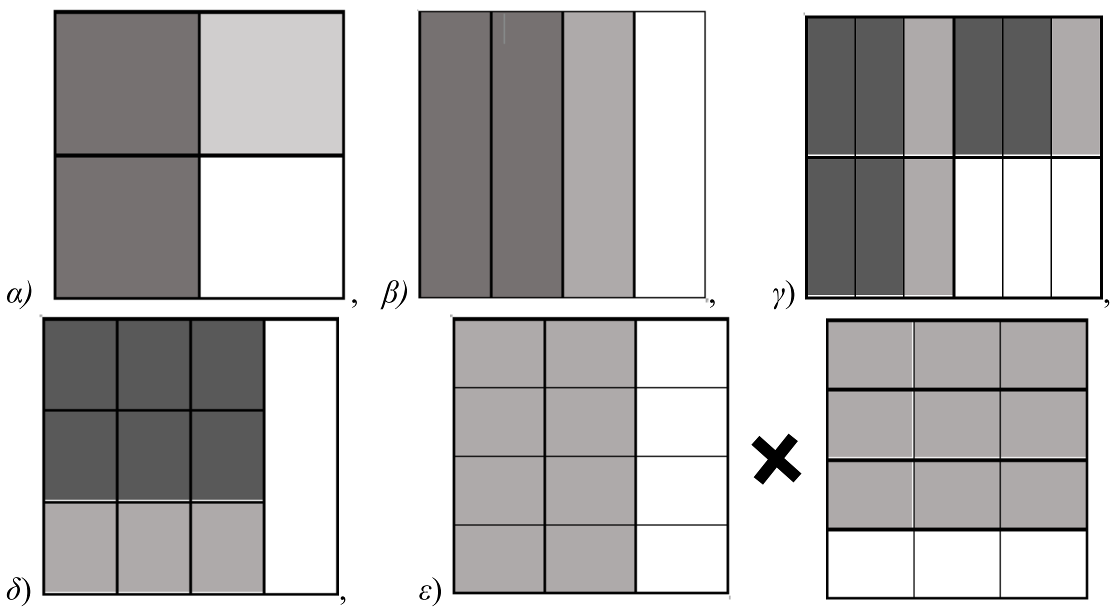
δ) Μπορείτε να δείτε τα 2/3 του 3/5;

Το τρίτο έργο αντλήθηκε και προσαρμόστηκε από τον Thompson (2002, στο Cavey & Kinzel, 2014). Ο στόχος του τρίτου έργου είναι να διερευνηθεί αν οι εκπαιδευτικοί μπορούν να εντοπίσουν τα κλάσματα και τα αποτελέσματα των πράξεων κλασμάτων στο σχήμα.

Για να μπορέσει κάποιος να εντοπίσει τις ζητούμενες ποσότητες πρέπει να εντοπίζει και να συντονίζει με ευελιξία τις πολλαπλές μονάδες αναφοράς. Μέσω του συγκεκριμένου έργου εξετάζεται αν οι εκπαιδευτικοί μπορούν να είναι ευέλικτοι σε σχέση με το τι θεωρούν μονάδα αναφοράς και να υιοθετήσουν διαφορετικές οπτικές για τον εντοπισμό της εκάστοτε μονάδας αναφοράς. Επιπλέον, παρουσιάζει ενδιαφέρον οι λόγοι που θα έδιναν (ή δεν θα έδιναν) τη συγκεκριμένη δραστηριότητα στους μαθητές τους.

Σε αυτό το έργο αναμένουμε ότι ένα μέρος των εκπαιδευτικών δεν θα μπορέσει να εντοπίσει το γ΄ και το δ΄ στο σχήμα.

Έργο 4: *Σε μια τάξη Ε΄ Δημοτικού, ζητήθηκε από τα παιδιά να αναπαραστήσουν το 2/3 του 3/4. Παρακάτω φαίνονται όλες οι διαφορετικές απαντήσεις που προέκυψαν από τα παιδιά. Μπορείτε να εξηγήσετε πώς σκέφτηκε κάθε παιδί; Υπάρχει κάποια αναπαράσταση που θεωρείτε ότι δεν είναι χρήσιμη; Ποια θεωρείτε ότι είναι η πιο χρήσιμη αναπαράσταση που θα μπορούσατε να αξιοποιήσετε για το μάθημά σας και με άλλα κλάσματα; Μήπως χρησιμοποιείτε κάποιο άλλο μοντέλο;*



Το συγκεκριμένο έργο αντλήθηκε και προσαρμόστηκε από την έρευνα του Iszak (2008). Τα σχέδια α, β, γ και δ βασίζονται σε εργασίες που παρήγαγαν οι μαθητές στις τάξεις της μελέτης περίπτωσης του Iszak (2008). Σε αυτό το έργο οι εκπαιδευτικοί καλούνται να αποφασίσουν πώς σκέφτηκαν οι μαθητές κατά τον σχεδιασμό των αναπαραστάσεων (ΓΠΜ), ποιες αναπαραστάσεις είναι σωστές (ΚΓΠ) και ποια αναπαράσταση μπορεί να επεκταθεί σε άλλα παραδείγματα, όπως για παράδειγμα το 3/5 του 4/7. Συνεπώς, διερευνάται αν οι εκπαιδευτικοί μπορούν να κάνουν χρήση των αναπαραστάσεων για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, καθώς και αν γνωρίζουν τις δυνατότητες και τους περιορισμούς των αναπαραστάσεων (ΕΓΠ).

Στην πρώτη αναπαράσταση ο μαθητής χώρισε αρχικά το σχήμα σε τέσσερα τετράγωνα, στη συνέχεια σκιαγράφησε τα τρία από αυτά και τέλος επέλεξε τα δύο από αυτά που είχε σκιαγραφήσει. Για τη δεύτερη αναπαράσταση, ισχύει η παραπάνω διαδικασία με τη διαφορά ότι στην αρχή έγινε κάθετος ισομερισμός του σχήματος. Αναφορικά με την τρίτη αναπαράσταση, το σχήμα χωρίστηκε αρχικά σε τέσσερα μέρη και σκιαγραφήθηκαν τα τρία από αυτά, στη συνέχεια χωρίστηκε επιμέρους κάθε μέρος οριζόντια σε τρία κομμάτια και επιλέχθηκαν τα δύο από τα τρία κομμάτια των σκιαγραφημένων μερών. Στην τέταρτη αναπαράσταση, ο μαθητής χώρισε αρχικά το σχήμα οριζόντια σε τέσσερα μέρη και σκιαγράφησε τα τρία από αυτά, και στη συνέχεια είτε χώρισε όλο το σκιαγραφημένο μέρος κάθετα σε τρία μέρη και επέλεξε τα δύο από αυτά, είτε χώρισε επιμέρους κάθετα το κάθε ένα από τα τρία σκιαγραφημένα μέρη σε τρία κομμάτια και επέλεξε τα δύο από το καθένα. Τέλος, στην πέμπτη αναπαράσταση, ο μαθητής επέλεξε να πάρει διαφορετικά σχήματα για να αναπαραστήσει κάθε κλάσμα και χώρισε σε τόσα κομμάτια το κάθε σχήμα είτε επειδή βρήκε το αποτέλεσμα της πράξης μέσω του αλγορίθμου είτε επειδή σε άλλες πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση) η αναπαράσταση απαιτεί τα κλάσματα να είναι ομώνυμα.

Υιοθετώντας την ανάλυση του Iszak (2008), θεωρούμε ότι η πιο χρήσιμη αναπαράσταση από τις παραπάνω, είναι η τέταρτη, γιατί δεν εξαρτάται από τους όρους των συγκεκριμένων κλασμάτων και θα μπορούσε να γενικευθεί. Πράγματι, αυτό κυρίως συμβαίνει διότι (α) σε σχέση με την πρώτη και την τρίτη αναπαράσταση δεν υπάρχει περιορισμός στον αρχικό διαχωρισμό του σχήματος, (β) σε σχέση με τη δεύτερη αναπαράσταση δεν υπάρχει περιορισμός στον μετέπειτα διαχωρισμό του μέρους και (γ) σε σχέση με την πέμπτη αναπαράσταση δείχνε το τελικό αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού. Η πέμπτη αναπαράσταση, δε, είναι αυτή που δεν έχει καμία ισχύ, καθώς δεν αναπαριστά ουσιωδώς το γινόμενο των κλασμάτων.

Στο συγκεκριμένο έργο αναμένουμε ότι οι εκπαιδευτικοί θα παρουσιάσουν δυσκολίες στην εξήγηση και στην αξιοποίηση των αναπαραστάσεων του πολλαπλασιασμού κλασμάτων, καθώς σύμφωνα με τη βιβλιογραφία ένα μεγάλο ποσοστό των εκπαιδευτικών δεν χρησιμοποιεί καν αναπαραστάσεις. Επίσης, παρουσιάζουν ενδιαφέρον οι προτάσεις για αναπαραστάσεις που ενδέχεται να κάνουν οι εκπαιδευτικοί. Αναμένουμε ότι θα υπάρξουν εκπαιδευτικοί που θα προτείνουν το επικαλυπτόμενο μοντέλο εμβαδού για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, διότι σύμφωνα με τη βιβλιογραφία είναι το πιο δημοφιλές και παράλληλα προτείνεται σε αρκετά βιβλία (π.χ. Λεμονίδης, 2016), παρά την κριτική που έχει δεχθεί (π.χ. Webel κ.ά., 2016).

Έργο 5: *Ένας δάσκαλος της Ε΄ Δημοτικού έδωσε το παρακάτω πρόβλημα στην τάξη του. «Ο Γιάννης αγοράζει 3/4 του κιλού κιμά. Χρησιμοποιεί το 1/3 για να φτιάξει κεφτεδάκια και το υπόλοιπο μέρος το χρησιμοποιεί για την παρασκευή σάλτσας μπολονέζ. Πόσο κιμά χρησιμοποιεί για τα κεφτεδάκια;». α) Ο Κώστας έδωσε μια λανθασμένη λύση σε αυτό πρόβλημα. Από την εμπειρία σας, τι λάθος μπορεί να έκανε το παιδί;β) Τέσσερα παιδιά έγραψαν μόνο το τελικό αποτέλεσμα στα τετράδιά τους. Πώς πιστεύετε ότι κατέληξε κάθε παιδί σε αυτό το αποτέλεσμα; Είναι σωστό;*

- *Θωμάς: 36/12 του κιλού*
- *Μαρία: 250 γραμμάρια κιμά*
- *Αντώνης: 4/9 του κιλού*

- *Ελένη: 3/12 του κιλού κεφτεδάκια*

Σε περίπτωση που δεν αναφερθεί από τον εκπαιδευτικό η αφαίρεση ως η πιθανή λανθασμένη λύση του Κώστα, τότε το διδακτικό σενάριο συνεχίζει ως εξής: *Η Σοφία έγραψε αυτή τη λύση στο τετράδιό της: 3/4 – 1/3 = 9/12 – 4/12 = 5/12 του κιλού κιμά. Πώς πιστεύετε ότι σκέφτηκε αυτό το παιδί;*

Το πρόβλημα του πέμπτου έργου έχει αντληθεί από την έρευνα των Depaepe κ.ά. (2015). Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι πολλαπλασιασμού κλασμάτων, αλλά παραπέμπει σε αφαίρεση. Σε παρόμοιο πρόβλημα με αυτό στην έρευνα των Bharaj, Jacobson, Liu και Ahmad (2020) τα δύο πιο συνηθισμένα λάθη των μαθητών ήταν (α) η επιλογή της αφαίρεσης και (β) ο πολλαπλασιασμός κάνοντας αρχικά ομώνυμα τα κλάσματα και διατηρώντας κοινό παρονομαστή.

Σε αυτό το έργο διερευνάται αν οι εκπαιδευτικοί μπορούν να προβλέψουν την αφαίρεση ως πιθανό λάθος στο πρόβλημα (ΓΠΜ). Επίσης, διερευνάται έμμεσα αν οι εκπαιδευτικοί μπορούν να επιλύσουν σωστά το συγκεκριμένο πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλασμάτων και άμεσα αν μπορούν να αξιολογήσουν τις απαντήσεις των μαθητών (ΚΓΠ). Οι απαντήσεις του Θωμά και του Αντώνη αφορούν τις δύο συχνότερες παρανοήσεις με βάση τον αλγόριθμο σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, οι οποίες είναι να κάνουν τα κλάσματα ομώνυμα, και να πολλαπλασιάζουν μόνο τους αριθμητές, διατηρώντας τον κοινό παρονομαστή (Siegler κ.ά., 2010, Young & Zientek, 2011) ή να πολλαπλασιάσουν χιαστί τον αριθμητή του ενός κλάσματος με τον παρονομαστή του δεύτερου (Newton, 2008).

Στο πέμπτο έργο αναμένουμε ότι αρκετοί εκπαιδευτικοί θα μπορούν να προσδιορίσουν τις λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών σε ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Ωστόσο, όπως και στη βιβλιογραφία, αναμένουμε να αναφέρουν ως κύρια πηγή των λαθών των μαθητών αδυναμίες στη μνήμη των μαθητών.

Έργο 6: *Ένας ξυλουργός μετράει το μήκος μιας σανίδας με ένα ραβδί και το βρίσκει ίσο με 18 ραβδιά. Τι θα έβρισκε, αν το μετρούσε με τα 2/3 του ραβδιού; Η Λίνα έδωσε μια λανθασμένη λύση στο πρόβλημα αυτό. Από την εμπειρία σας, τι λάθος μπορεί να έκανε η Λίνα.*

Αν δεν αναφερθεί ο πολλαπλασιασμός ως το πιθανό λάθος της Λίνας, το διδακτικό σενάριο συνεχίζει ως εξής: *Ο Μιχάλης έγραψε στο τετράδιο του: 2/3 x 18 = 12 ραβδιά. Με άριστα το 5, τι βαθμό θα δίνατε σε αυτήν τη λύση; Γιατί;*

Αρκετοί μαθητές τείνουν να επιλέγουν τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση για τη λύση του προβλήματος ανάλογα με την αίσθηση που έχουν για το αν ο πολλαπλασιαστής διευρύνεται ή μειώνεται από τη δράση του προβλήματος (Taber, 1999). Συνεπώς, σε αυτό το έργο διερευνάται αν οι εκπαιδευτικοί αναγνωρίζουν τη συγκεκριμένη δυσκολία ή ακόμα αν την εμφανίζουν οι ίδιοι.

Στο συγκεκριμένο έργο αναμένουμε ότι κάποιοι εκπαιδευτικοί θα συγχέουν το πρόβλημα που επιλύεται με διαίρεση και θα επιλέξουν πολλαπλασιασμό, διότι σύμφωνα με τη βιβλιογραφία όταν εμπλέκονται σε προβλήματα ποσότητες μικρότερες της μονάδας, τα άτομα δυσκολεύονται να επιλέξουν ανάμεσα στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση. Παράλληλα, αναμένουμε ότι οι ίδιοι εκπαιδευτικοί δε θα προβλέψουν σωστά τη δυσκολία επιλογής της πράξης ενός μαθητή, καθώς και τους διαισθητικούς λόγους που οδηγούν στη δυσκολία αυτή, επειδή πάσχουν ίσως από τις ίδιες διαισθητικές παρανοήσεις.

5.4 Οι συμμετέχοντες της έρευνας

Οι συμμετέχοντες επιλέχθηκαν με τη μέθοδο της σκόπιμης δειγματοληψίας, η οποία είναι μία από τις μεθόδους μη τυχαίας δειγματοληψίας. Το δείγμα της έρευνας αποτελείται από 15 διορισμένους εν ενεργεία εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης που έχουν διδάξει ή διδάσκουν στην Ε΄ ή στη Στ΄ τάξη σε δημόσια δημοτικά σχολεία της Βέροιας, της Θεσσαλονίκης και της Κοζάνης.

Η επιλογή τους έγινε με βάση την πεποίθηση της ερευνήτριας ότι οι εκπαιδευτικοί του δείγματος είναι οι πιο έμπειροι εκπαιδευτικοί του περιβάλλοντός της. Το κριτήριο του κατά πόσο ικανοί είναι έγκειται στην προσωπική κρίση της ερευνήτριας, καθώς πρόκειται για συναδέλφους. Από τους 15 συμμετέχοντες, οι 3 είναι άντρες και οι 12 γυναίκες. Ως προς τα χρόνια προϋπηρεσίας οι μισοί συμμετέχοντες έχουν προϋπηρεσία 5 έως 10 χρόνια, ενώ οι άλλοι μισοί 20 έως 30 χρόνια. Επιπλέον, 3 από τους 15 συμμετέχοντες κατέχουν μεταπτυχιακό τίτλο σπουδών στη Διδακτική των Μαθηματικών.

Στην Ελλάδα η κατάρτιση των εκπαιδευτικών για την πρωτοβάθμια εκπαίδευση αποτελείται από τέσσερα έτη σε δημόσια πανεπιστήμια. Οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί παρακολουθούν μαθήματα γενικής παιδαγωγικής και εκπαιδεύονται σε όλα τα είδη των βασικών μαθημάτων που υπάρχουν στο δημοτικό σχολείο. Οι απόφοιτοι εκπαιδευτικοί καλούνται, χωρίς κάποια ενδιάμεση εκπαίδευση, να εργαστούν ως αναπληρωτές ή ως μόνιμοι εκπαιδευτικοί αναλαμβάνοντας μια τάξη του δημοτικού σχολείου (Α΄ έως ΣΤ΄) διδάσκοντας όλα τα βασικά μαθήματα της τάξης (Γλώσσα, Μαθηματικά, Ιστορία, Φυσική, Γεωγραφία, Θρησκευτικά κ.ά.). Η παρακολούθηση κάποιου Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών ή κάποιου άλλου επιμορφωτικού προγράμματος έγκειται στην προσωπική επιθυμία και οικονομική δυνατότητα του εκάστοτε εκπαιδευτικού.

5.5 Διαδικασία διεξαγωγής της έρευνας

Αρχικά κατασκευάστηκε το πρωτόκολλο της συνέντευξης. Στη συνέχεια, προσέγγισα ως ερευνήτρια τους εκπαιδευτικούς στον χώρο εργασίας τους. Πρόκειται για εκπαιδευτικούς, οι οποίοι ήταν συνάδελφοι σε προγενέστερο χρόνο. Οι συμμετέχοντες ενημερώθηκαν προφορικά για τον σκοπό της έρευνας, την ηχογράφηση των συνεντεύξεων, την επεξεργασία των δεδομένων τους και τη διατήρηση της ανωνυμίας τους (χρησιμοποιούνται ψευδώνυμα αντί των πραγματικών ονομάτων των εκπαιδευτικών). Όλοι οι συμμετέχοντες δέχθηκαν να συμμετέχουν και όρισαν τον χρόνο και τον τόπο της συνέντευξης.

Οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν τον Νοέμβριο του 2022. Κάθε συνέντευξη διήρκεσε κατά μέσο όρο 45 λεπτά, μαγνητοφωνήθηκε, απομαγνητοφωνήθηκε και στη συνέχεια αναλύθηκε.

5.6 Ανάλυση των δεδομένων

Για την ανάλυση των απαντήσεων των εκπαιδευτικών, κάθε έργο αναλύθηκε αρχικά σε υποέργα, ανάλογα με τη συνιστώσα της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία στην οποία στόχευε και εξετάστηκε ξεχωριστά. Η κωδικοποίηση του κάθε υποέργου και οι κατηγορίες απαντήσεων θα παρουσιαστούν ανά έργο. Στη συνέχεια, πραγματοποιήθηκε ανάλυση δεδομένων ανά συνιστώσα της ΜΓΔ με τα προφίλ των εκπαιδευτικών.

5.7 Εγκυρότητα και αξιοπιστία

Με σκοπό να διασφαλιστεί η αξιοπιστία της έρευνας ακολουθήθηκαν κάποιες τεχνικές. Αρχικά, παρόλο που η ερευνήτρια είναι γνωστή με τους συμμετέχοντες και η δειγματοληψία ήταν σκόπιμη, η ερευνήτρια κατέβαλε κάθε προσπάθεια ώστε να παραμείνει αμερόληπτη καθ' όλη τη διάρκεια της συνέντευξης. Μια τεχνική που χρησιμοποιήθηκε ώστε να ληφθούν αξιόπιστα αποτελέσματα είναι η διασταύρωση πηγών. Η λήψη των δεδομένων έγινε μέσω συνεντεύξεων, κατά τις οποίες η ερευνήτρια σημείωνε και μαγνητοφωνούσε. Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων η ερευνήτρια παρατηρούσε τους συμμετέχοντες με σκοπό να εντοπίσει επιμέρους λεπτομέρειες. Τέλος, για να ενισχυθεί η αξιοπιστία της έρευνας στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1 παρατίθενται τα απομαγνητοφωνημένα κείμενα από τις συνεντεύξεις με τους συμμετέχοντες (Χασσάνδρα & Γούδας, 2003).

Το ερευνητικό εργαλείο σχεδιάστηκε με βάση την υπάρχουσα βιβλιογραφία, και ελέγχθηκε από δύο ειδικούς της Διδακτικής των Μαθηματικών, ώστε να εξεταστεί αν τα έργα που επιλέχθηκαν για το εργαλείο είναι κατάλληλα ώστε να απαντήσουν στα ερευνητικά ερωτήματα. Επιπλέον, εφαρμόστηκε πιλοτικά, ώστε να ελεγχθεί αν οι ερωτήσεις του εργαλείου είναι κατανοητές στο άτομο που συμμετέχει στην έρευνα. Στην πιλοτική έρευνα συμμετείχε μια εκπαιδευτικός με εμπειρία 30 χρόνων από την Κοζάνη. Το περιεχόμενο της συνέντευξης μαγνητοφωνήθηκε, απομαγνητοφωνήθηκε και στη συνέχεια αναλύθηκε. Μετά την ανάλυση των αποτελεσμάτων δόθηκε στο εργαλείο η τελική του μορφή.

Τέλος, για τις κατηγοριοποιήσεις των απαντήσεων των εκπαιδευτικών συνεργάστηκαν δύο άτομα ως εξής: Αρχικά μελετήθηκαν οι απαντήσεις και σκιαγραφήθηκαν οι κατηγορίες από την ερευνήτρια. Στη συνέχεια συζητήθηκαν με την επιβλέπουσα και αναδιαμορφώθηκαν. Τέλος, μέρος των δεδομένων εξετάστηκε ξεχωριστά, εντοπίστηκαν ενδεχόμενες διαφορές και επιλύθηκαν με συζήτηση. Στη συνέχεια, αναλύθηκαν τα υπόλοιπα δεδομένα με βάση τις τελικές κατηγορίες.

6. ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

6.1 Μέρους – όλου: Πράξη

Το Έργο 1 αναλύθηκε στα υποέργα Ε1α, Ε1β, Ε1γ και Ε1δ. Τα υποέργα περιγράφονται με τη μορφή δηλώσεων που εκφράζουν ποιοτικά την επίδοση του συμμετέχοντα σε κάθε υποέργο. Οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών ανά υποέργο ταξινομήθηκαν σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με το αν ανταποκρίθηκαν επιτυχώς (Ναι) ή όχι (Όχι) στο υποέργο. Στον Πίνακα 1 παρουσιάζεται το περιεχόμενο του κάθε υποέργου και η αντιστοίχισή του με την πτυχή της ΜΓΔ την οποία αφορά, καθώς και η συχνότητα της κάθε κατηγορίας ανά υποέργο (που αντιστοιχεί σε πλήθος των εκπαιδευτικών).

Πίνακας 1. Συχνότητα των κατηγοριών απάντησης (Ναι: Επιτυχής, Όχι: Ανεπιτυχής) ανά υποέργο του Έργου 1

Κωδικός Υποέργου	**Περιγραφή**	**ΜΓΔ**	**Κατηγορία**	
			Ναι	**Όχι**
Ε1α	Αναγνωρίζει τον πολλαπλασιασμό ως κατάλληλη πράξη για την εύρεση του 1/5 του 30	ΚΓΠ	4	11
Ε1β	Συνεχίζει τη διδασκαλία προτείνοντας την εύρεση ενός μη μοναδιαίου κλάσματος επί του ακεραίου αριθμού (π.χ. τα 2/5 του 30)	ΓΠΔ	5	10
Ε1γ	Αναγνωρίζει τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων ως τον στόχο της διδασκαλίας του 2/5 x 30	ΓΠΔ	4	11
Ε1δ	Προβλέπει τη «διπλή» πράξη ως απάντηση των μαθητών	ΓΠΜ	5	10

Στον Πίνακα 1 παρατηρείται ότι μόνο 4 εκπαιδευτικοί (Βλάσης, Τερέζα, Ελευθερία, Γρηγορία) επισημαίνουν ότι η κατάλληλη πράξη είναι ο πολλαπλασιασμός (Ε1α). Οι υπόλοιποι εκπαιδευτικοί επικροτούν την απάντηση του υποθετικού μαθητή, ο οποίος δήλωσε ότι βρήκε το αποτέλεσμα με διαίρεση, χωρίς να σχολιάζουν την επιλογή της πράξης, ενώ πέντε εκπαιδευτικοί προτείνουν ρητά ότι η εύρεση του μέρους του όλου επιτυγχάνεται με διαίρεση.

Επιπλέον, μόνο πέντε από τους δεκαπέντε εκπαιδευτικούς της έρευνας συνεχίζουν τη διδασκαλία του σεναρίου προτείνοντας τον πολλαπλασιασμό ενός μη μοναδιαίου κλάσματος επί του ακεραίου αριθμού, όπως για παράδειγμα το 2/5 x 30 (Ε1β). Οι τρεις (Τερέζα, Ελευθερία, Γρηγορία) από αυτούς του πέντε εκπαιδευτικούς συμπίπτουν με τους τέσσερις εκπαιδευτικούς που αναγνώρισαν την πράξη στο υποέργο Ε1α.

Αναφορικά με τον στόχο του παραπάνω παραδείγματος (Ε1γ), μόνο τέσσερις από τους δεκαπέντε εκπαιδευτικούς αναγνώρισαν ότι ο στόχος είναι να αναδειχθεί το ζήτημα της μιας πράξης (πολλαπλασιασμός) έναντι της «διπλής πράξης» ως διαδικασία υπολογισμού. Μία εκπαιδευτικός πρότεινε ότι ο στόχος είναι να καταλάβουν οι μαθητές ότι πρέπει να χωρίσουν σε ίσα κομμάτια, δύο εκπαιδευτικοί πρότειναν ότι ο στόχος είναι η διδασκαλία της αναγωγής στη μονάδα και τρεις εκπαιδευτικοί ανέφεραν ως στόχο την εμπέδωση της διδασκαλίας του 1/5 x 30, που σημαίνει ότι δεν αντιλαμβάνονται τη διαφορά μεταξύ 1/5 x 30 και 2/5 x 30.

Τέσσερις εκπαιδευτικοί δήλωσαν ότι η υποθετική δασκάλα συνεχίζει τη διδασκαλία της με στόχο να καταλάβει ο μαθητής ότι πρέπει πρώτα να πολλαπλασιάσει και μετά να διαιρέσει, αναφέροντας ρητά ότι αυτή είναι η σωστή σειρά των πράξεων, καθώς και ότι η αντίστροφη διαδικασία φέρνει *«τυχαία»* σωστά αποτελέσματα ή λανθασμένα αποτελέσματα. Μία από αυτούς αξιολόγησε και την απάντηση του υποθετικού μαθητή του Ε1α ως μη επαρκή εξηγώντας ότι:

> *«Ο Γιάννης παρέλειψε το ενδιάμεσο βήμα (πρώτα 1x30 και μετά 30:5) και έκανε κατευθείαν διαίρεση. Θα συνέχιζα ρωτώντας πόσο κάνουν τα 2/5 του 30, γιατί με αυτό το παράδειγμα αν προσπαθήσει πρώτα να διαιρέσει το 30 με τον παρονομαστή και μετά να πολλαπλασιάσει με τον αριθμητή θα βρει λάθος αποτέλεσμα, γιατί ο αριθμητής δεν είναι 1. Δίνω δηλαδή αυτό το παράδειγμα για να καταλάβουν ότι πρέπει πρώτα να πολλαπλασιάζω και μετά να διαιρώ για να βρω το μέρος του όλου» Τερέζα*

Με τον ισχυρισμό τους αυτό, οι εκπαιδευτικοί αποκάλυψαν ακόμα ένα έλλειμμα στην ΚΓΠ. Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί που αναγνώρισαν τον πολλαπλασιασμό ως κατάλληλη πράξη για την εύρεση του μέρους όλου ανέφεραν ότι θα συνέχιζαν τη διδασκαλία παραθέτοντας τον «κανόνα» εύρεσης του μέρους ενός όλου:

> *«Θα έλεγα τη θεωρία, ότι όταν ξέρω το όλο και θέλω να βρω το μέρος πολλαπλασιάζω» Βλάσης*

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση μιας εκπαιδευτικού, η οποία αναφέρθηκε σε δύο «κανόνες» για την εύρεση του μέρους όλου. Στην περίπτωση που ο πολλαπλασιαστής είναι μοναδιαίο κλάσμα, η πράξη εξακολουθεί να είναι όπως στους φυσικούς αριθμούς η διαίρεση. Στην περίπτωση που δεν είναι, η πράξη είναι πολλαπλασιασμός. Αιτιολόγησε την απάντησή της ως εξής:

«Θα έλεγα στα παιδιά ότι όταν κάνω πολλαπλασιασμό στους φυσικούς αριθμούς ψάχνω να βρω τα πολλά και όταν κάνω διαίρεση ψάχνω να βρω το 1, αλλά στα κλάσματα θα μάθετε κάτι ανώμαλο. Στα κλάσματα ισχύει το ανάποδο. Όταν θέλω να βρω το 1 στα κλάσματα κάνω πολλαπλασιασμό, και όταν θέλω να βρω τα πολλά κάνω διαίρεση. Αυτό πρέπει να το μάθουν τα παιδιά ως κανόνα». Ελευθερία

Στη συνέχεια του Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι προβλέψεις των εκπαιδευτικών για τις απαντήσεις των μαθητών αναφορικά με την κατάλληλη πράξη εύρεσης των 2/5 του 30 (Ε1δ). Πέντε (Ελευθερία, Ελένη, Μαργαρίτα, Δήμητρα, Ζήνα) από τους δεκαπέντε εκπαιδευτικούς πρόβλεψαν ότι ο μαθητής θα αναφερθεί σε μια «διπλή» πράξη για να βρει το αποτέλεσμα. Από αυτούς τους πέντε εκπαιδευτικούς, μόνο μία (Ελευθερία) είχε αναγνωρίσει τον πολλαπλασιασμό ως κατάλληλη πράξη στο υποέργο Ε1α. Οι τέσσερις από τους πέντε εκπαιδευτικούς ανέφεραν ότι ο μαθητής αρχικά θα διαιρέσει το 30 με το 5 και στη συνέχεια θα πολλαπλασιάσει το αποτέλεσμα με το 2, ενώ μία εκπαιδευτικός προέβλεψε ότι ο μαθητής πρώτα θα πολλαπλασιάσει και στη συνέχεια θα διαιρέσει.

Οι υπόλοιποι δέκα εκπαιδευτικοί έδωσαν ασαφείς απαντήσεις, ενώ κάποιοι άλλοι ανέφεραν διαδικαστικά λάθη. Ενδεικτικά:

«Περιμένω σωστές απαντήσεις, γιατί είναι 12 χρονών» Δήμος

«Μπορεί να μπερδευτεί και να διαιρέσει με το 2 αντί του 5» Φαίη

Συνοψίζοντας, από το Έργο 1 διαφαίνεται ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν τη διαδικαστική γνώση που απαιτείται για να εκτελέσουν έναν πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Για τους περισσότερους από αυτούς, η διαδικασία εκτέλεσης με τη «διπλή πράξη» με τους ακέραιους όρους του πολλαπλασιαστή συγχέεται με την πράξη μεταξύ των δοσμένων κλασμάτων που απαιτείται. Για ορισμένους, δε, και η γνώση της διαδικασίας εκτέλεσης είναι ανελαστική, καθώς φαίνεται ότι θέτουν περιορισμούς στη σειρά με την οποία θα εκτελεστούν οι δύο πράξεις. Έτσι, οι περισσότεροι συμμετέχοντες δεν αναγνωρίζουν τη διδακτική πρόθεση της υποθετικής δασκάλας, ενώ οι προβλέψεις τους για την απόκριση του υποθετικού μαθητή μπορεί μεν να συμπεριλαμβάνουν τη «διπλή πράξη», αλλά αυτή η πρόβλεψη ταυτίζεται με τη δική τους οπτική.

6.2 Δημιουργία προβλήματος

Στο Έργο 2 ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς να δημιουργήσουν ένα λεκτικό πρόβλημα που να αποτυπώνει τη συμβολική έκφραση 3/4 x 5/7 (Ε2α, ΕΓΠ) και στη συνέχεια να διατυπώσουν ένα εναλλακτικό λεκτικό πρόβλημα για τη συγκεκριμένη πράξη (Ε2β).

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται αναλυτικά τα προβλήματα που δημιούργησαν οι εκπαιδευτικοί (Ε2α, Ε2β).

Πίνακας 2. Προβλήματα εκπαιδευτικών για την πράξη «3/4 x 5/7»

Πρόβλημα για την πράξη 3/4 x 5/7 (Ε2α)	Αξιολόγηση	Εναλλακτικό πρόβλημα για την πράξη 3/4 x 5/7 (Ε2β)	Αξιολόγηση
«Έχω 5/7 του κιλού ζάχαρη σε ένα δοχείο. Για τη συνταγή μου χρειάζονται τα 3/4 αυτής της ποσότητας. Πόση ζάχαρη θα χρειαστώ;» Άννα	**Σωστό πρόβλημα** Εύρεση του μέρους του μέρους του όλου	-	
«Θέλω να βάψετε τα 3/4 των 5/7 ενός σχήματος» Φαίη	**Σωστό πρόβλημα** Εύρεση του μέρους του μέρους του όλου	-	
«Τα 3/4 των παιδιών μιας τάξης φοράνε άσπρη μπλούζα και από αυτά τα 5/7 είναι αγόρια. Τι μέρος της τάξης είναι αγόρια με άσπρη μπλούζα;» Ζήνα	**Σωστό πρόβλημα** Εύρεση του μέρους του μέρους του όλου	-	
«Η γιαγιά έδωσε τα 3/4 της σύνταξης της στα εγγονάκια της και τα 5/7 από αυτά στον Γιαννάκη. Τι μέρος της σύνταξης πήρε ο Γιαννάκης;» Ελευθερία	**Σωστό πρόβλημα** Εύρεση του μέρους του μέρους του όλου	*«Το οικόπεδο έχει μήκος 3/4 μέτρα και πλάτος 5/7 μέτρα. Ποιο είναι το εμβαδόν του;» Ελευθερία*	**Σωστό πρόβλημα** Εύρεση εμβαδού
«Βρες το εμβαδόν του πίνακα της τάξης. Έχει ορθογώνιο σχήμα με μήκος τα 3/4 του μέτρου και πλάτος τα 5/7 του μέτρου» Ιωάννα	**Σωστό πρόβλημα** Εύρεση εμβαδού ορθογωνίου παραλληλογράμμου	*«Ένα σχολείο έχει 10 ίδιους τοίχους. Για τον κάθε τοίχο χρειαζόμαστε 3/4 του κιλού μπογιά. Οι εργάτες θέλουν να βάψουν τα 5/7 των τοίχων. Πόσα κιλά μπογιά θα χρειαστούν;» Ιωάννα*	**Μερικώς σωστό πρόβλημα** Η πράξη εδώ είναι 5/7 x 10 x 3/4. Υπάρχει ένα επιπλέον στοιχείο
«Ποιο είναι το εμβαδόν του τετραγώνου με τη μία πλευρά 3/4 του μέτρου και την άλλη 5/7 του μέτρου» Βλάσης	**Μερικώς Σωστό πρόβλημα** Εύρεση εμβαδού Γεωμετρικό λάθος	-	

«Σε μια τάξη τα 5/7 είναι αγόρια και τα κορίτσια είναι τα 3/4 των αγοριών. Τι μέρος της τάξης είναι τα κορίτσια;» Γρηγορία	**Μερικώς σωστό πρόβλημα** Δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα	-	
«Η ζάχαρη αποτελεί τα 3/4 του γλυκού και η σοκολάτα τα 5/7 του γλυκού. Πόση είναι η ζάχαρη και η σοκολάτα μαζί ως μέρος του γλυκού;» Δήμος	**Λάθος πρόβλημα** Λάθος πράξη (πρόσθεση)	-	
«Ένας παραγωγός πατάτας έβγαλε 100 κιλά ποσότητας. Την πρώτη μέρα πούλησε τα 3/4 της ποσότητας και τη δεύτερη μέρα τα 5/7 της ποσότητας που έμεινε. Πόσο πούλησε στο τέλος;» Τερέζα	**Λάθος πρόβλημα** Λάθος πράξη (πρόσθεση)	-	
«Αν τα 3/4 ενός υφάσματος κοστίζουν 1 €, πόσο κοστίζουν τα 5/7 του ίδιου υφάσματος;» Μαργαρίτα	**Λάθος πρόβλημα** Λάθος πράξη (διαίρεση)	*«Να βρείτε την περίμετρο ενός ορθογωνίου με πλευρά η μία 3/4 και η άλλη 5/7» Μαργαρίτα*	**Λάθος πρόβλημα** Γεωμετρικό λάθος
«Τα 3/4 της τάξης έφαγαν τα 5/7 της πίτσας» Μιχαέλα	**Λάθος πρόβλημα** Αδυναμία διατύπωσης ερωτήματος	-	
«Θέλω να βρω τα 3/4 του 5/7 αλλά δεν μπορώ να διατυπώσω τώρα ένα πρόβλημα» Ελένη	Αδυναμία διατύπωσης ερωτήματος	-	
«Θα πάνε μια εκδρομή τα 5/7 μιας τάξης και τα 3/4 είναι κορίτσια. Κόλλησα, δεν ξέρω τι να ρωτήσω» Παναγιώτα	Αδυναμία διατύπωσης ερωτήματος	-	

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2, από τα έξι σωστά προβλήματα που δημιουργήθηκαν (Ε2α), τα μισά αφορούσαν την εύρεση ενός μέρους του μέρους του όλου και τα άλλα μισά την εύρεση του εμβαδού ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Δύο εκπαιδευτικοί δεν κατάφεραν να διατυπώσουν κανένα πρόβλημα που να αντικατοπτρίζει τον δεδομένο πολλαπλασιασμό κλασμάτων, ενώ άλλοι δύο δεν μπόρεσαν να θέσουν ένα ερώτημα στο πρόβλημά τους, παρόλο που αναγνώριζαν ότι η κατάσταση που περιέγραφαν μπορεί να αφορά την εύρεση του μέρους του μέρους του όλου.

Επιπλέον, τρεις εκπαιδευτικοί διατύπωσαν μερικώς σωστά προβλήματα, όπου μία εκπαιδευτικός χρησιμοποίησε μια επιπλέον ποσότητα, ένας εκπαιδευτικός ζητούσε την εύρεση του εμβαδού του τετραγώνου αντί του ορθογωνίου, και μία εκπαιδευτικός δημιούργησε ένα πρόβλημα που δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, αφού αναφέρθηκε σε κορίτσια ως υποσύνολο αγοριών.

Ανάμεσα στα λανθασμένα προβλήματα, υπήρχαν τρία προβλήματα που αντικατόπτριζαν άλλες πράξεις (πρόσθεση, διαίρεση), ενώ ένα πρόβλημα παρουσίαζε γεωμετρικό λάθος, αφού ζητούσε την περίμετρο, αντί το εμβαδόν ενός ορθογωνίου.

Τα προβλήματα και οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών κατηγοριοποιήθηκαν ανά υποέργο (Ε2α- Ε2γ) ανάλογα με το αν το εκτέλεσαν με επιτυχία ή όχι. Στον Πίνακα 3 παρουσιάζεται το πλήθος των εκπαιδευτικών που εντάχθηκαν σε κάθε κατηγορία.

Πίνακας 3. Συχνότητα των κατηγοριών απάντησης (Ναι: Επιτυχής, Όχι: Ανεπιτυχής) ανά υποέργο του Έργου 2

Κωδικός Υποέργου	**Περιγραφή**	**ΜΓΔ**	**Κατηγορία**		
			Ναι	**Όχι**	**Μερικώς**
Ε2α	Διατυπώνει ένα σωστό πρόβλημα για την πράξη 3/4 x 5/7	ΕΓΠ	5	8	2
Ε2β	Διατυπώνει ένα διαφορετικό σωστό πρόβλημα για την πράξη 3/4 x 5/7	ΕΓΠ	1	13	1
Ε2γ	Αναγνωρίζει ως κατάλληλο το πρόβλημα εύρεσης εμβαδού	ΚΓΠ	8	7	

Πέντε εκπαιδευτικοί (Άννα, Φαίη, Ζήνα, Ελευθερία, Ιωάννα) από τους δεκαπέντε κατάφεραν να δημιουργήσουν ένα σωστό πρόβλημα για τη δεδομένη πράξη (Ε2α), εκ των οποίων μόνο μία εκπαιδευτικός (Ελευθερία) μπόρεσε να δημιουργήσει ένα εναλλακτικό σωστό πρόβλημα (Ε2β). Το αρχικό πρόβλημα που διατύπωσε η Ελευθερία αφορούσε την εύρεση του μέρους του όλου και το εναλλακτικό της πρόβλημα την εύρεση του εμβαδού ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Από τους έντεκα εκπαιδευτικούς που δεν ανέφεραν ένα πρόβλημα που να παραπέμπει στην εύρεση του εμβαδού ενός ορθογωνίου, όταν τους παρουσιάστηκε το αντίστοιχο πρόβλημα του σεναρίου, μόνο τέσσερις εκπαιδευτικοί αναγνώρισαν ότι ένα πρόβλημα εύρεσης εμβαδού ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλευρές 3/4 του μέτρου και 5/7 του μέτρου αντικατοπτρίζει τον πολλαπλασιασμό 3/4 x 5/7 (Ε2γ). Οι υπόλοιποι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι το πρόβλημα είναι λανθασμένο, για διάφορους μη έγκυρους λόγους, οι οποίοι αναδεικνύουν και περιορισμούς σε ΚΓΠ. Ενδεικτικά απάντησαν:

> *«Αυτό το πρόβλημα δεν είναι σωστό γιατί ο τύπος του εμβαδού δεν θα μου δώσει ακριβές αποτέλεσμα» Νικηφόρος*

> *«Δεν είναι σωστό αυτό το παράδειγμα, γιατί για να βρω το εμβαδόν ενός ορθογωνίου πρέπει πρώτα να βρω τα εκατοστά. Δεν γίνεται με κλάσματα» Φαίη*

Συνοψίζοντας, από το Έργο 2 διαφαίνονται πολλοί περιορισμοί στην ικανότητα των συμμετεχόντων να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλασμάτων (ΕΓΠ). Κάποιοι από αυτούς οφείλονται σε έλλειμμα της ΚΓΠ, είτε για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων (π.χ. τα προβλήματα που αντιστοιχούν σε άλλες πράξεις), είτε σε άλλες περιοχές των μαθηματικών (π.χ. προβλήματα με γεωμετρικά λάθη). Άλλοι περιορισμοί φαίνεται να οφείλονται σε ένα γενικότερο έλλειμμα ικανότητας κατασκευής προβλημάτων (π.χ. προβλήματα που «αδιαφορούν» για την πραγματικότητα, ή αδυναμία στη διατύπωση ερωτήματος). Μια άλλη πτυχή είναι το περιορισμένο ρεπερτόριο σε τύπους προβλημάτων. Πράγματι, ακόμα και οι εκπαιδευτικοί που διατυπώνουν ένα πρόβλημα, δεν έχουν στη διάθεσή τους ένα πρόβλημα διαφορετικού τύπου, με μία μόνο εξαίρεση (Ελευθερία). Επιπλέον, περίπου οι μισοί από τους συμμετέχοντες δεν αναγνωρίζουν έναν εναλλακτικό τύπο προβλήματος (εμβαδόν ορθογωνίου) ως πρόβλημα πολλαπλασιασμού των δεδομένων κλασμάτων, ακόμα και όταν τους δίνεται.

6.3 Μέρος – όλου: Μονάδα αναφοράς

Στο Έργο 3 οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να αξιολογήσουν αν μια αναπαράσταση, η οποία ζητούσε από τους μαθητές να εντοπίσουν κλάσματα και γινόμενα κλασμάτων, είναι «καλό» να δοθεί σε μαθητές Στ΄ τάξης (Ε3α). Η αναπαράσταση είναι η εξής:

Στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών για το αν θα πρέπει αυτή η δραστηριότητα να δοθεί σε μαθητές και καταγράφεται το πόσοι συμμετέχοντες κατάφεραν να εντοπίσουν οι ίδιοι στο σχήμα τα ζητούμενα της δραστηριότητας (Ε3β, Ε3γ, Ε3δ, Ε3ε).

Πίνακας 4. Συχνότητα των κατηγοριών απάντησης (Ναι: Επιτυχής, Όχι: Ανεπιτυχής) ανά υποέργο του Έργου 3

Κωδικός Υποέργου	Περιγραφή	ΜΓΔ	Κατηγορία	
			Ναι	Όχι
Ε3α	Η δραστηριότητα είναι κατάλληλη για να δοθεί σε μαθητές	ΓΠΔ	2	13
Ε3β	Μπορεί να δει «τα 3/5 του…» στο σχήμα	ΚΓΠ	15	0
Ε3γ	Μπορεί να δει «τα 5/3 του…» στο σχήμα	ΚΓΠ	4	11
Ε3δ	Μπορεί να δει τα 5/3 του 3/5	ΚΓΠ	2	13
Ε3ε	Μπορεί να δει τα 2/3 του 3/5	ΚΓΠ	4	11

Ξεκινώντας από τα υποέργα που αφορούν την ΚΓΠ (Ε3β-Ε3ε), από τα στοιχεία του Πίνακα 4 φαίνεται ότι όλοι οι συμμετέχοντες κατάφεραν να εντοπίσουν τα «3/5 του …» (Ε3β), αλλά μόνο τέσσερις από τους δεκαπέντε εκπαιδευτικούς κατάφεραν να δουν τα «5/3 του..» (Ε3γ). Επιπλέον, μόνο τέσσερις εκπαιδευτικοί κατάφεραν να εντοπίσουν τα 2/3 του 3/5 (Ε3ε), και μόνο δύο τα 5/3 του 3/5 (Ε3δ).

Επισημαίνουμε ότι μόνο δύο εκπαιδευτικοί (Τερέζα, Ελένη) κατάφεραν να εντοπίσουν όλες τις ποσότητες στο σχήμα επιδεικνύοντας ευελιξία στον προσδιορισμό διαφορετικών μονάδων αναφοράς.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4, μόνο δύο εκπαιδευτικοί (Ελευθερία, Παναγιώτα) πρότειναν να δοθεί η δραστηριότητας στους μαθητές, χωρίς ωστόσο να πιστεύουν ότι οι μαθητές θα καταφέρουν να δουν τις ποσότητες (Ε3α). Η Ελευθερία μπόρεσε να δει τις τρεις από τις τέσσερις ποσότητες στο σχήμα, ενώ η Παναγιώτα, η οποία μπόρεσε να δει μόνο δύο, ανέφερε:

> *«Θα συμβούλευα να το δώσει, αλλά να μην περιμένει απάντηση. Είναι καλό μόνο για να τους δημιουργήσει απορίες και να θέλουν να μάθουν την απάντηση» Παναγιώτα*

Πρέπει να επισημανθεί ότι οι δύο εκπαιδευτικοί που κατάφεραν να εντοπίσουν όλες τις ποσότητες δεν περιλαμβάνονται στις δύο εκπαιδευτικούς που πρότειναν να δοθεί η δραστηριότητα στους μαθητές.

Έξι εκπαιδευτικοί πρότειναν να μη δοθεί η δραστηριότητα στους μαθητές είτε γιατί είναι δύσκολη είτε γιατί θα τους μπερδέψει, ενώ πέντε εκπαιδευτικοί πρότειναν να δοθεί μόνο με το πρώτο ερώτημα (αν μπορούν να δουν «τα 3/5 του …»). Μία εκπαιδευτικός, η οποία μπόρεσε να εντοπίσει μόνο τα 3/5 στο σχήμα, χαρακτηριστικά ανέφερε:

> *«Να μην το δώσει η δασκάλα στους μαθητές, γιατί δε θα ξέρει να το εξηγήσει» Γρηγορία*

Όπως φαίνεται, η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών πρότεινε να μη δοθεί η δραστηριότητα ως έχει εξαιτίας της πολυπλοκότητάς της και κανένας εκπαιδευτικός δεν ανέφερε την τυπική δυσκολία προσδιορισμού των μονάδων αναφοράς στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων ως αποτρεπτικό παράγοντα στο να δοθεί η συγκεκριμένη δραστηριότητα σε μαθητές δημοτικού.

Συνοψίζοντας, ο εντοπισμός των δεδομένων ποσοτήτων αποδείχθηκε απαιτητικός για τους συμμετέχοντες. Η πλειοψηφία εντόπισε μόνο την πιο απλή περίπτωση και μόνο δύο εντόπισαν όλα τα ζητούμενα, επιδεικνύοντας ευχέρεια και ευελιξία με τις διαφορετικές μονάδες αναφοράς. Όπως έγινε σαφές, η δυσκολία που αντιμετώπισαν οι ίδιοι οι συμμετέχοντες φάνηκε να επηρεάζει την κρίση ορισμένων από αυτούς σχετικά με το αν αυτή η δραστηριότητα είναι κατάλληλη για τους μαθητές. Ωστόσο, αυτός δεν ήταν καθοριστικός παράγοντας για την απόφαση όλων των εκπαιδευτικών, όπως φαίνεται από το γεγονός ότι οι δύο εκπαιδευτικοί που επέδειξαν ευχέρεια, αποφάνθηκαν ότι δεν είναι κατάλληλη για μαθητές, ενώ δύο εκπαιδευτικοί που δυσκολεύτηκαν έκριναν το αντίθετο, καθώς φαίνεται να θεωρούν ότι η πρόκληση μπορεί να είναι ωφέλιμη για τους μαθητές.

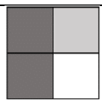
6.4 Αξιολόγηση και χρήση αναπαραστάσεων

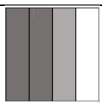
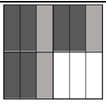
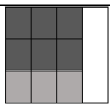
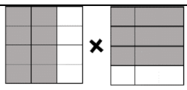
Στο Έργο 4 ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς να εξηγήσουν α) πώς σκέφτηκαν πέντε μαθητές κατά τον σχεδιασμό διάφορων αναπαραστάσεων για να απεικονίσουν το 2/3 του 3/4 (Ε4α, Ε4β, Ε4γ, Ε4δ, Ε4ε, ΓΠΜ), β) να κρίνουν αν οι αναπαραστάσεις ορθά αντικατοπτρίζουν αυτήν την πράξη (Ε4στ, Ε4ζ, Ε4η, Ε4θ, Ε4ι, ΚΓΠ), γ) να επιλέξουν ποια αναπαράσταση είναι λιγότερο χρήσιμη (Ε4κ, ΕΓΠ) και ποια περισσότερο χρήσιμη για να αξιοποιηθεί στο μάθημα χρησιμοποιώντας διάφορα κλάσματα (Ε4λ, ΕΓΠ) και δ) να δηλώσουν αν οι ίδιοι θα χρησιμοποιούσαν κάποια διαφορετική αναπαράσταση για να αναπαραστήσουν το 2/3 του 3/4 (Ε4μ, ΕΓΠ).

6.4.1 Εξήγηση του τρόπου σκέψης του μαθητή

Ο Πίνακας 5 παρουσιάζει το πλήθος των εκπαιδευτικών σε κάθε κατηγορία ανάλογα με τις εξηγήσεις τους για τον τρόπο σκέψης των μαθητών κατά τον σχεδιασμό των αναπαραστάσεων για την οπτικοποίηση του 2/3 του 3/4 (Ε4α-Ε4ε).

Πίνακας 5. Συχνότητα των κατηγοριών απάντησης ανά αναπαράσταση στα υποέργα του Έργου 4

Κωδικός Υποέργου	**Αναπαράσταση**	**Περιγραφή**	**ΜΓΔ**	**Κατηγορία**	
				Ναι	**Όχι**
Ε4α		Εξηγεί σωστά την αναπαράσταση α΄	ΓΠΜ	12	3

Ε4β		Εξηγεί σωστά την αναπαράσταση β΄	ΓΠΜ	12	3
Ε4γ		Εξηγεί σωστά την αναπαράσταση γ΄	ΓΠΜ	6	9
Ε4δ		Εξηγεί σωστά την αναπαράσταση δ΄	ΓΠΜ	8	7
Ε4ε		Εξηγεί σωστά την αναπαράσταση ε΄	ΓΠΜ	5	10

Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί ανέλυσαν σωστά τον τρόπο σκέψης των μαθητών στην πρώτη (Ε4α) και στη δεύτερη αναπαράσταση (Ε4β). Αντιθέτως, η τρίτη αναπαράσταση (Ε4γ) ήταν πιο απαιτητική και εννιά εκπαιδευτικοί δεν κατάφεραν να εξηγήσουν ικανοποιητικά πώς σκέφτηκε ο μαθητής. Τυπικά, υπέθεσαν ότι ο μαθητής χώρισε εξαρχής το σχήμα σε 12 μέρη. Κάποιοι δεν αποπειράθηκαν να εξηγήσουν πώς σκέφτηκε ο μαθητής τον αριθμό 12 (βλ. την απάντηση του Δήμου παρακάτω), ή έδωσαν μια αόριστη εξήγηση (βλ. την απάντηση της Παναγιώτας παρακάτω). Οι περισσότεροι, όμως θεώρησαν ότι ο μαθητής εκτέλεσε πρώτα την πράξη αριθμητικά και στη συνέχεια έκανε την αναπαράσταση (βλ. την απάντηση της Ζήνας παρακάτω):

«Αρχικά το χώρισε σε 12 και από τα 12 με υποδιαίρεση έκανε τετράδες, μετά διαίρεσε το κάθε κουτάκι σε 3 και πήρε 4» Δήμος

«*Στο τρίτο χώρισε σε 12 μικρότερα κομμάτια, από αυτά τα 9 είναι τα 3/4 και συμπληρώνονται 6 κομματάκια. Το χώρισε σε 12 κομμάτια για να δείξει τα πολλαπλάσια και γιατί ένα όλο μπορεί να χωριστεί σε περισσότερα» Παναγιώτα*

«*Στο τρίτο χώρισε σε 12 γιατί έκανε πολλαπλασιασμό τους παρονομαστές. Έκανε δηλαδή τα κλάσματα ισοδύναμα. Μετά πήρε 9, γιατί τα 2/3 του 12 είναι 9. Μετά μπερδεύτηκε. Έκανε πολλαπλασιασμό τους αριθμητές και αφού βρήκε 6, έβαψε τα 6» Ελευθερία*

«*Στο τρίτο σχήμα χωρίζει σε 12 γιατί έκανε τον πολλαπλασιασμό των παρονομαστών. Από τα 12 πήρε τα 6, γιατί πολλαπλασίασε τους αριθμητές» Ζήνα*

Επιπλέον, η τέταρτη αναπαράσταση φαίνεται να δυσκόλεψε τους εκπαιδευτικούς, αφού κάποιοι θεώρησαν ότι το σχήμα έχει χωριστεί σε ανόμοια κομμάτια, ενώ κάποιοι άλλοι δήλωσαν ότι ο μαθητής πήρε τα 6/9 του σχήματος (Ε4δ). Ενδεικτικά, οι εκπαιδευτικοί απάντησαν για την τέταρτη αναπαράσταση:

«Στο τέταρτο σχήμα, το χώρισε σε 4, απέκλεισε τη μία ράβδο και ασχολείται με τις 3 από τις 4. Μετά τις χώρισε σε 9 κουτάκια, γιατί από

τα 2/3 είπε στο μυαλό του να το κάνει ισοδύναμο με παρονομαστή 6/9» Ελευθερία

«Στο τέταρτο χώρισε το σχήμα κάθετα στα 4, πήρε τα 3 από αυτά και τα χώρισε σε 3, και μετά πήρε τα 6/9, επειδή είναι ισοδύναμο με το 2/3» Γρηγορία

Η πέμπτη αναπαράσταση φαίνεται να δυσκόλεψε περισσότερο τους εκπαιδευτικούς να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης του μαθητή, αφού μόνο πέντε από τους δεκαπέντε εκπαιδευτικούς το κατάφεραν (Ε4ε). Ενδεικτικές απαντήσεις:

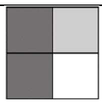
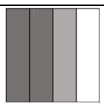
«Το πέμπτο είναι ωραίο. Έκανε με πράξεις τους υπολογισμούς: 2/3 x 3/4 = 8/12 x 9/12 = 72/144. Αυτός ο μαθητής έχει κατανοήσει ακόμη πιο πολύ ότι στον πολλαπλασιασμό βρίσκω το μέρος του όλου. Χώρισε τα κουτιά σε πολλά κουτάκια για να βάλει ισοδύναμα κλάσματα και τα πολλαπλασίασε. Σκέφτηκε σωστά, αλλά δεν βγήκε σωστό το νούμερο, γιατί βγήκε δεκαδικός. Γενικά το πέμπτο είναι σωστό, αλλά πάει μακριά η σκέψη του» Ελευθερία

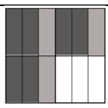
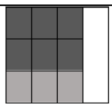
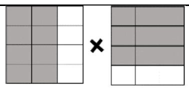
«Στο πέμπτο χωρίζει πρώτα σε 3 και παίρνε τα 2 και μετά τα κάνει 12 κουτάκια, και στο άλλο χωρίζει σε 4 και παίρνει 3 και μετά κάνει 12 κουτάκια. Τα κάνει ομώνυμα για να τα δει καλύτερα. Δημιουργεί δηλαδή, ισοδύναμα ομώνυμα κλάσματα για να τα κατανοήσει» Ζήνα

6.4.2 Αξιολόγηση ορθότητας αναπαραστάσεων

Όσον αφορά την αξιολόγηση της ορθότητας για κάθε μία αναπαράσταση, οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών ταξινομήθηκαν σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με το αν τη θεώρησαν Σωστή ή Λανθασμένη. Σημειώνουμε ότι η απάντηση «Σωστή» είναι ορθή στα τέσσερα πρώτα υποέργα, αλλά θεωρήθηκε λανθασμένη στο πέμπτο. Στον Πίνακα 6 παρουσιάζεται η συχνότητα κάθε κατηγορίας ανά αναπαράσταση.

Πίνακας 6. Συχνότητα των κατηγοριών απάντησης ανά αναπαράσταση στα υποέργα του Έργου 4

Κωδικός Υποέργου	**Αναπαράσταση**	**Περιγραφή**	**ΜΓΔ**	**Κατηγορία**	
				Ναι	**Όχι**
Ε4στ		Αναγνωρίζει ότι η αναπαράσταση α΄ είναι σωστή	ΚΓΠ	11	4
Ε4ζ		Αναγνωρίζει ότι η αναπαράσταση β΄ είναι σωστή	ΚΓΠ	10	5

Ε4η		Αναγνωρίζει ότι η αναπαράσταση γ΄ είναι σωστή	ΚΓΠ	9	6
Ε4θ		Αναγνωρίζει ότι η αναπαράσταση δ΄ είναι σωστή	ΚΓΠ	9	6
Ε4ι		Αναγνωρίζει ότι η αναπαράσταση δ΄ είναι λάθος	ΚΓΠ	9	6

Από τα στοιχεία του Πίνακα 6 φαίνεται ότι η επικρατούσα κατηγορία για τις τέσσερις πρώτες αναπαραστάσεις ήταν (ορθώς) η «Σωστή», με τις δύο πρώτες (και απλούστερες) αναπαραστάσεις να επιλέγονται συχνότερα ως σωστές. Ωστόσο, η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών επέλεξε και την πέμπτη αναπαράσταση ως σωστή, παρά το γεγονός ότι δεν απεικονίζει την ποσότητα που αντιστοιχεί στα 2/3 του 3/4.

Οι εκπαιδευτικοί που θώρησαν ότι οι δύο πρώτες αναπαραστάσεις (Ε4στ, Ε4ζ) είναι λανθασμένες, δεν αιτιολόγησαν την κρίση τους, ενώ οι εκπαιδευτικοί που απέρριψαν την τρίτη αναπαράσταση (Ε4η) τυπικά εντόπισαν το «λάθος» στο γεγονός ότι ο μαθητής είχε γραμμοσκιάσει τα 2/3 σε κάθε ένα ξεχωριστό «κομμάτι», δείχνοντας ότι δεν αναγνωρίζουν την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού σε αυτό το πλαίσιο. Για παράδειγμα:

> «*Η τρίτη αναπαράσταση είναι λάθος. Χώρισε σε 4, μετά πήρε 3 και μετά τα 2/3 κάθε κομματιού» Δήμητρα*

Οι εκπαιδευτικοί που έκριναν ότι η τέταρτη αναπαράσταση (Ε4θ) είναι λανθασμένη, τυπικά επηρεάστηκαν από το λευκό μέρος του σχήματος, που φαίνεται να τους οδήγησε στο συμπέρασμα ότι έχει παραβιαστεί η αρχή «τα μέρη πρέπει να είναι ίσα»:

> *«Το τέταρτο σχήμα είναι λάθος αφού τα κομμάτια δεν έχουν ίδιο μέγεθος» Άννα*

> *«Το τέταρτο σχήμα είναι παντελώς λάθος γιατί τα κουτάκια είναι ανόμοια» Δήμος*

> *«Το τέταρτο είναι επίσης λάθος γιατί δεν τηρεί την ισοδυναμία» Νικηφόρος*

Μια εκπαιδευτικός φάνηκε να θεωρεί ότι ο διαμερισμός σε μέρη πρέπει να γίνεται με γραμμές ίδιου προσανατολισμού:

> *«Η τέταρτη είναι λάθος γιατί δεν χώρισε σε ίσα κομμάτια. Αρχικά χώρισε 4 και πήρε 3, αλλά μετά χώρισε οριζόντια, ενώ ξεκίνησε κάθετα και αυτό είναι λάθος» Δήμητρα*

Όσον αφορά την πέμπτη αναπαράσταση (Ε4ι), οι εκπαιδευτικοί που δήλωσαν ότι η πέμπτη αναπαράσταση είναι σωστή, τυπικά εστίασαν στη σωστή αναπαράσταση των δύο κλασμάτων και την πράξη (πολλαπλασιασμός), και δεν αναφέρθηκαν στο γεγονός ότι δεν αναπαρίσταται στην πραγματικότητα το γινόμενο.

«Το πέμπτο είναι σωστό γιατί έκανε την ισοδυναμία. Δηλαδή έκανε τα κλάσματα ισοδύναμα και πήρε τη σωστή ποσότητα» Δήμος

«Η πέμπτη είναι σωστή. Το ένα σχήμα είναι το 2/3 και το άλλο τα 3/4, σκέφτηκε με την επιφάνεια» Τερέζα

«Στο πέμπτο σχήμα έκανε οπτικοποίηση του «του» του πολλαπλασιασμού, τα έκανε ισοδύναμα και πήρε τα 2/3 και τα 3/4. Είναι σωστό» Φαίη

Ενδιαφέρον σε αυτό το υποέργο ήταν ότι από τους εννιά εκπαιδευτικούς που δήλωσαν ότι η αναπαράσταση είναι λανθασμένη, οι πέντε αιτιολόγησαν με τρόπο που ανέδειξε σημαντικά ελλείμματα ΚΓΠ. Συγκεκριμένα, τρεις από αυτούς εντόπισαν το λάθος στην επιλογή της πράξης, αντιπροτείνοντας τη διαίρεση :

«Το πέμπτο είναι λάθος γιατί το 2/3 του 3/4 το βρίσκεις με διαίρεση και εδώ έχει το σύμβολου του πολλαπλασιασμού, αν είχε διά θα ήταν σωστό» Βλάσης

«*Το πέμπτο είναι λάθος, γιατί έπρεπε να τα σχεδιάσει στο ίδιο σχήμα και να κάνει διαίρεση» Μαργαρίτα*

«Στο πέμπτο δεν ξέρω τι έκανε, αλλά φαίνεται ότι πάει να κάνει πολλαπλασιασμό, και εδώ αυτό που έχουμε δε λύνεται με πολλαπλασιασμό» Δήμητρα

Η τέταρτη εκπαιδευτικός φαίνεται επίσης να συγχέει τις πράξεις, καθώς πρόσθεσε τα γραμμοσκιασμένα «κουτάκια» στις αναπαραστάσεις των δύο κλασμάτων και συμπέρανε ότι το αποτέλεσμα είναι λανθασμένο (αν και δεν είναι ξεκάθαρο πώς προσδιόρισε ως σωστό το αποτέλεσμα 18):

«Το πέμπτο είναι λάθος, γιατί θα έπρεπε να έχω 18 κουτάκια, και εδώ έχω 17» Παναγιώτα

Τέλος, η πέμπτη εκπαιδευτικός, φάνηκε να θεωρεί ότι ο διαμερισμός σε μέρη πρέπει να γίνεται με γραμμές ίδιου προσανατολισμού, παρόμοια με άλλην εκπαιδευτικό (Δήμητρα) που είχε εκφράσει αυτή την άποψη στο Ε4θ:

«Είναι λάθος. Είναι σωστή η σκέψη του, αλλά δεν σχεδίασε σωστά τα κομμάτια, γιατί στο ένα τα πήρε κάθετα και στο άλλο οριζόντια» Γρηγορία

Μόνο μία εκπαιδευτικός (Ιωάννα) θεώρησε την πέμπτη αναπαράσταση λάθος και δικαιολόγησε ορθά την απάντησή τη. Η ίδια εκπαιδευτικός αξιολόγησε σωστά όλες τις αναπαραστάσεις του Έργου 4. Η απάντησή της:

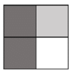
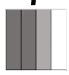
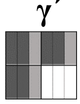
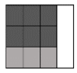
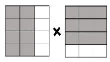
«Η πέμπτη αναπαράσταση είναι λάθος επειδή πήρε το κάθε κλάσμα ξεχωριστά» Ιωάννα

Εξετάζοντας τις δηλώσεις που έκανε ο κάθε εκπαιδευτικός σε σχέση με τις αιτιολογήσεις που έδωσε, και θεωρώντας ως ορθές τις αξιολογήσεις που συνδύαζαν την ορθή δήλωση και την κατάλληλη αιτιολόγηση, βρέθηκε ότι τρεις εκπαιδευτικοί είχαν 0 ή 1 ορθές αξιολογήσεις, έξι είχαν 2 ή 3, και έξι είχαν 4 ή 5. Δηλαδή, η πλειοψηφία των συμμετεχόντων αξιολόγησε σωστά το πολύ τρεις αναπαραστάσεις.

Επίσης, αξίζει να επισημανθεί ότι η ικανότητα εξήγησης της σκέψης του μαθητή δε σημαίνει απαραίτητα ότι η αξιολόγηση της αναπαράστασης που έφτιαξε θα είναι ορθή. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα της Δήμητρας, που, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, περιέγραψε επαρκώς πώς κατέληξε ο υποθετικός μαθητής στην τρίτη (Ε4η) αναπαράσταση (*Χώρισε σε 4, μετά πήρε 3 και μετά τα 2/3 κάθε κομματιού*), αλλά απέρριψε την αναπαράσταση ως λανθασμένη.

Στη συνέχεια, οι εκπαιδευτικοί ρωτήθηκαν για το ποια αναπαράσταση από αυτές θεωρούν λιγότερο χρήσιμη (Ε4κ) και ποια θεωρούν περισσότερο χρήσιμη (Ε4λ), την οποία θα μπορούσαν να αξιοποιήσουν στο μάθημα χρησιμοποιώντας διαφορετικά κλάσματα. Στον Πίνακα 7 καταγράφονται οι ψήφοι των εκπαιδευτικών. Κάθε εκπαιδευτικός μπορούσε να επιλέξει παραπάνω από μία αναπαράσταση για κάθε ερώτημα.

Πίνακας 7. Ταξινόμηση απαντήσεων των εκπαιδευτικών ανά υποέργο του Έργου 4

Κωδικός Υποέργου	**Περιγραφή**	**ΜΓΔ**	**α΄** 	**β΄** 	**γ΄** 	**δ΄** 	**ε΄** 
			Ψήφοι				
Ε4κ	Ποια είναι η λιγότερο χρήσιμη αναπαράσταση	ΕΓΠ	3	4	6	4	8
Ε4λ	Ποια είναι η περισσότερο χρήσιμη αναπαράσταση	ΕΓΠ	4	1	5	1	5

Αναφορικά με το ποια αναπαράσταση θεωρούν λιγότερο χρήσιμη (Ε4κ), οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί επέλεξαν την πέμπτη αναπαράσταση, χωρίς ωστόσο να αναφέρουν το γεγονός ότι δεν αναπαριστά το γινόμενο ως μια ποσότητα. Ενδεικτικές απαντήσεις:

«Η πέμπτη αναπαράσταση είναι λιγότερο χρήσιμη γιατί θα μπέρδευε, όχι γιατί δεν είναι σωστή» Τερέζα

«Η πέμπτη γιατί είναι πολύπλοκη, όχι γιατί δεν είναι σωστή» Φαίη

«Η πέμπτη, γιατί δεν μπορώ να καταλάβω τι έκανε» Γρηγορία

Γενικότερα, οι εκπαιδευτικοί δεν αιτιολόγησαν τον λόγο που θεωρούν κάποια αναπαράσταση λιγότερο χρήσιμη από κάποια άλλη και συχνά απάντησαν με βάση ποια αναπαράσταση τούς δυσκόλεψε να την εξηγήσουν. Συνεπώς, κανένας συμμετέχοντας δεν αναγνώρισε την αδυναμία της πρώτης, της δεύτερης και της τρίτης αναπαράστασης να χρησιμοποιηθεί με κλάσματα, στα οποία ο παρονομαστής του πολλαπλασιαστέου είναι διαφορετικός του 4 (πρώτη και τρίτη) και ο αριθμητής του πολλαπλασιαστή διαφορετικός του παρονομαστή του πολλαπλασιαστέου (πρώτη και δεύτερη).

Σχετικά με την πιο χρήσιμη αναπαράσταση (Ε4λ), η οποία θα μπορούσε να αξιοποιηθεί και με άλλα κλάσματα, στην παρούσα έρευνα θεωρούμε ότι η πιο χρήσιμη αναπαράσταση από αυτές είναι η τέταρτη αναπαράσταση, επειδή έχει τις περισσότερες δυνατότητες γενίκευσης. Ωστόσο, στην έρευνα μόνο ένας συμμετέχοντας επέλεξε την τέταρτη αναπαράσταση ως πιο χρήσιμη, αλλά όπως ο ίδιος δήλωσε την επέλεξε χωρίς λόγο, απλά και μόνο επειδή θεώρησε όλες τις υπόλοιπες λάθος.

Ανάμεσα στις δημοφιλέστερες απαντήσεις για την πιο χρήσιμη αναπαράσταση ήταν η τρίτη αναπαράσταση. Όμως, ο λόγος που κάποιοι εκπαιδευτικοί την επέλεξαν είναι επειδή είναι χωρισμένη σε περισσότερα κομμάτια από τις άλλες. Ενδεικτικές απαντήσεις:

«Η τρίτη αναπαράσταση είναι πιο χρήσιμη, γιατί το χωρίζω σε πολλά κομμάτια και μπορώ να δω τον παρονομαστή» Ιωάννα

«Η τρίτη, γιατί δίνει περισσότερες περιπτώσεις σε αντίθεση με την τέταρτη, επειδή δεν χώρισε το τελευταίο ορθογώνιο, αλλά και χωρισμένο να ήταν, πάλι θα μου έδινε λιγότερες πιθανότητες» Τερέζα

«Η τρίτη γιατί έχει περισσότερα κομματάκια» Παναγιώτα

«Η τρίτη σίγουρα, αν θα το έκανε σωστά (εννοεί να πάρει όλα τα 6 της πρώτης σειράς μαζί, όχι όπως είναι τώρα)*, γιατί χωρίζεται σε περισσότερα κομμάτια και μπορείς να κάνεις ισοδύναμα» Μιχαέλα*

Το ίδιο δημοφιλής με την τρίτη αναπαράσταση ήταν η πέμπτη αναπαράσταση, αν και είναι η μόνη αναπαράσταση που δεν απεικονίζει το γινόμενο. Οι εκπαιδευτικοί δεν αιτιολόγησαν επαρκώς αυτήν την επιλογή τους. Όπως, για παράδειγμα, απάντησε μια εκπαιδευτικός:

«Η πέμπτη αναπαράσταση είναι η πιο χρήσιμη, γιατί δείχνει ανεπτυγμένη λογικομαθηματική σκέψη» Ελευθερία

Το τελευταίο υποέργο στο Έργο 4 (Ε4μ) ζητούσε από τους εκπαιδευτικούς να αναφέρουν ή να παρουσιάσουν κάποια εναλλακτική αναπαράσταση για το 2/3 του 3/4 που ενδεχομένως να χρησιμοποιούσαν οι ίδιοι. Στον Πίνακα 8 φαίνονται οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών.

Πίνακας 8. Συχνότητα των κατηγοριών απάντησης (Ναι: Επιτυχής, Όχι: Ανεπιτυχής) σε υποέργο του Έργου 4

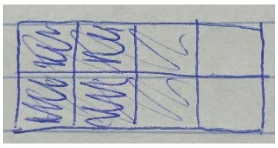
Κωδικός Υποέργου	**Περιγραφή**	**ΜΓΔ**	**Κατηγορία**	
			Ναι	**Όχι**
Ε4μ	Προτείνει κάποιο διαφορετικό σωστό μοντέλο πολλαπλασιασμού κλασμάτων	ΕΓΠ	2	13

Έντεκα εκπαιδευτικοί της έρευνας δεν πρότειναν κανένα διαφορετικό μοντέλο για την αναπαράσταση του 2/3 του 3/4. Τρεις εκπαιδευτικοί πρότειναν το μοντέλο «πίτα», το οποίο είναι επιφανειακά διαφορετικό, διότι είναι ουσιαστικά ίδιο με την πρώτη αναπαράσταση χρησιμοποιώντας κύκλο αντί για τετράγωνο.

Η μία από τις δύο εκπαιδευτικούς που θεωρήσαμε ότι πρότεινε ένα διαφορετικό μοντέλο για την αναπαράσταση του 2/3 του 3/4 ανέφερε:

> *«Ναι χρησιμοποιώ. Χωρίζω σε 8 κομμάτια, γιατί το 8 είναι πολλαπλάσιο του 4» Φαίη*

και σχεδίασε το συγκεκριμένο σχήμα:



Εικόνα 1. Απάντηση της Φαίης στο Ε4μ

Αν και η αναπαράσταση της εκπαιδευτικού είναι ένα διαφορετικό μοντέλο για την απεικόνιση του 2/3 του 3/4, δεν είναι ξεκάθαρο πώς προκύπτει ο διαχωρισμός σε 8 μέρη αντί για 4 (και γιατί θα ήταν εύλογος από τη μεριά των μαθητών). Η εκπαιδευτικός ισχυρίστηκε χώρισε αρχικά σε 8 αντί για 4 κομμάτια επειδή «*το 8 είναι πολλαπλάσιο του 4*» και κατ' επέκταση αναπαράστησε όλους τους όρους με πολλαπλάσιά τους.

Η δεύτερη που εκπαιδευτικός που θεωρήσαμε ότι όντως πρότεινε ένα διαφορετικό μοντέλο ανέφερε ένα μοντέλο συνόλου και συγκεκριμένα «πούλιες», τις οποίες θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει ως μετρητές. Ωστόσο, η εκπαιδευτικός δεν εξήγησε ακριβώς πώς θα τις χρησιμοποιούσε, ούτε φαίνεται από την απάντησή της αν τις έχει χρησιμοποιήσει ποτέ στην τάξη για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Συγκεκριμένα απάντησε:

> *«Δεν χρησιμοποιώ κάποιο άλλο μοντέλο. Ίσως να πάρω πούλιες σε διαφορετικά χρώματα» Ελένη*

Συνοψίζοντας, τα ευρήματα από το Έργο 4 αναδεικνύουν ελλείμματα στην ΚΓΠ και την ΕΓΠ της πλειονότητα ων συμμετεχόντων. Πράγματι, η αξιολόγηση των αναπαραστάσεων του πολλαπλασιασμού κλασμάτων αποδείχθηκε απαιτητική για ένα μεγάλο μέρος των εκπαιδευτικών, ενώ αναδύθηκαν και διάφορες λανθασμένες αντιλήψεις σχετικά με τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων (π.χ. η σύγχυσή του με τη διαίρεση, ενδεχομένως και με την πρόσθεση), αλλά και την αναπαράσταση των κλασμάτων (π.χ., «όλα τα κομμάτια που εμφανίζονται στο σχήμα πρέπει να είναι ίδια», «όλες οι γραμμές πρέπει να έχουν τον ίδιο προσανατολισμό»). Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί φαίνεται να μη διαθέτουν εναλλακτικούς τρόπους αναπαράστασης του πολλαπλασιασμού κλασμάτων, πέραν του μοντέλου του εμβαδού, κι αυτό με περιορισμούς, ενώ και τα κριτήριά τους για το τι θεωρείται διαφορετικό μοντέλο φαίνεται να είναι μάλλον επιφανειακά (π.χ. το μοντέλο διαφοροποιείται, αν αντί του ορθογωνίου χρησιμοποιηθεί κύκλος). Παρατηρήθηκαν επίσης επιφανειακά κριτήρια σχετικά με τη χρησιμότητα της κάθε αναπαράστασης για τη διδασκαλία (π.χ., «περισσότερα κομμάτια, καλύτερη αναπαράσταση»), ενώ η δυσκολία ερμηνείας μιας αναπαράστασης από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς φαίνεται να αποτελεί ανασταλτικό παράγοντα για την αξιοποίησή της. Τέλος, οι εκπαιδευτικοί φαίνεται να εξηγούν ικανοποιητικά τον τρόπο σκέψης των υποθετικών μαθητών (ΓΠΜ) στις πιο απλές αναπαραστάσεις, ενώ οι πιο πολύπλοκες αναπαραστάσεις φαίνεται να επισύρουν συχνά την υπόθεση ότι ο μαθητής υπολογίζει ή αποφασίζει εξαρχής πώς θα διαμερίσει και στη συνέχεια το υλοποιεί.

Θα πρέπει, ωστόσο, να επισημανθεί ότι υπήρχαν διαφορές ανάμεσα στους εκπαιδευτικούς ως προς την ανταπόκρισή τους στα διάφορα έργα, τις οποίες θα εξετάσουμε σε επόμενη ενότητα, παρουσιάζοντας τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι υπήρχαν εκπαιδευτικοί που δεν αξιολόγησαν ορθά καμία αναπαράσταση, και εκπαιδευτικοί που αξιολόγησαν σωστά όλες τις αναπαραστάσεις.

6.5 Πρόβλεψη δυσκολιών και αξιολόγηση απαντήσεων των μαθητών στην επίλυση προβλήματος πολλαπλασιασμού κλασμάτων

Στο Έργο 5 ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς να προβλέψουν τις λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών σε ένα πρόβλημα με κλάσματα (Ε5αΙ και Ε5αΙΙ, ΓΠΜ), το οποίο παραπέμπει σε αφαίρεση, ενώ απαιτεί πολλαπλασιασμό (*«πήρε το 1/3 του 3/4 του κιλού και το υπόλοιπο…»*). Στη συνέχεια, κλήθηκαν να εξηγήσουν (Ε5β, Ε5γ, Ε5ε, Ε5ζ, Ε5θ, ΓΠΜ) και να αξιολογήσουν τις απαντήσεις υποθετικών μαθητών στο ίδιο πρόβλημα (Ε5δ, Ε5στ, Ε5η, Ε5ι, ΚΓΠ).

6.5.1 Πρόβλεψη δυσκολιών

Τα υποέργα του Έργου 5 παρουσιάζονται στον Πίνακα 9. Οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών κατηγοριοποιήθηκαν ανά υποέργο ανάλογα αν το απάντησαν με επιτυχία ή όχι. Στον Πίνακα 9 παρουσιάζεται το πλήθος των εκπαιδευτικών που εντάχθηκαν σε κάθε κατηγορία.

Πίνακας 9. Συχνότητα των κατηγοριών απάντησης (Ναι: Επιτυχής, Όχι: Ανεπιτυχής) ανά υποέργο του Έργου 5

Κωδικός Υποέργου	**Περιγραφή**	**ΜΓΔ**	**Κατηγορία**	
			Ναι	**Όχι**
Ε5αΙ	Πρόβλεψη λανθασμένης πράξης	ΓΠΜ	3	12
Ε5αΙΙ	Πρόβλεψη άλλων λαθών	ΓΠΜ	6	9
Ε5β	Εξήγηση σκέψης μαθήτριας («*3/4 – 1/3*»)	ΓΠΜ	5	10
Ε5γ	Εξήγηση σκέψης μαθητή α΄ («*36/12 του κιλού*»)	ΓΠΜ	6	9
Ε5ε	Εξήγηση σκέψης μαθήτριας β΄ («*250 gr*»)	ΓΠΜ	9	6
Ε5ζ	Εξήγηση σκέψης μαθητή γ΄ («*4/9 του κιλού*»)	ΓΠΜ	6	9
Ε5θ	Εξήγηση σκέψης μαθήτριας δ΄ («*3/12 του κιλού κεφτεδάκια*»)	ΓΠΜ	2	13

Εννιά από τους δεκαπέντε εκπαιδευτικούς μπόρεσαν να προβλέψουν κάποιο λάθος ενός μαθητή στο συγκεκριμένο πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλασμάτων (Ε5αΙ και Ε5αΙΙ, ΓΠΜ). Τρεις από αυτούς τους εκπαιδευτικούς που μπόρεσαν να προβλέψουν το λάθος του μαθητή στο πρόβλημα ανέφεραν τη λανθασμένη επιλογή πράξης (Ε5αΙ), και συγκεκριμένα οι δύο ανέφεραν την αφαίρεση και μία εκπαιδευτικός τη διαίρεση. Οι απαντήσεις τους:

> *«Έκανε αφαίρεση την ποσότητα του κιμά από την αρχική ποσότητα, ενώ δεν χρειάζεται, γιατί λέει ότι χρησιμοποίησε το 1/3» Τερέζα*

> *«3/4 – 1/3. Αφαίρεσε. Το παιδί σκέφτηκε ότι αφού στο πρόβλημα έβγαλε μια ποσότητα, θα κάνει αφαίρεση» Ελένη*

> *«Μπορεί να έκανε διαίρεση, επειδή μπερδεύτηκε με τους φυσικούς, που όταν ψάχνω μέρος κάνω διαίρεση. Δηλαδή να έκανε 3/4 : 1/3» Ελευθερία*

Αναφορικά με την πρόβλεψη άλλων λαθών στο συγκεκριμένο πρόβλημα (Ε5αΙΙ), πέντε από τους εκπαιδευτικούς ανέφεραν λάθη στην επιλογή της μονάδας αναφοράς, όπως για παράδειγμα:

> *«Το λάθος του μαθητή μπορεί να είναι ότι πήρε το 1/3 του κιλού» Βλάσης*

> *«Το λάθος είναι να υπολόγισε για τη σάλτσα, αντί για τα κεφτεδάκια» Φαίη*

Στο ίδιο υποέργο (Ε5αΙΙ) μία εκπαιδευτικός προέβλεψε ότι ο μαθητής θα έκανε τα κλάσματα ομώνυμα πριν τα πολλαπλασιάσει, το οποίο δεν παράγει λανθασμένο αποτέλεσμα, όμως η πρόβλεψη λάθους θεωρήθηκε σωστή, διότι λήφθηκε ως δεδομένο στη συγκεκριμένη περίπτωση, ότι ο μαθητής θα διατηρούσε τον κοινό παρονομαστή στο γινόμενο. Η απάντησή της:

«Να έκανε τα κλάσματα ομώνυμα και μετά να τα πολλαπλασίασε» Άννα

Από τους έξι εκπαιδευτικούς που δεν πρόβλεψαν κάποιο εύλογο λάθος του μαθητή στο πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλασμάτων, δύο εκπαιδευτικοί δεν έδωσαν καμία απάντηση, μία εκπαιδευτικός αναφέρθηκε γενικά στην απροσεξία, ενώ δύο εκπαιδευτικοί έδωσαν απαντήσεις που δείχνουν ότι θεωρούν λανθασμένη την επίλυση του προβλήματος με μετασχηματισμό των κλασμάτων σε δεκαδικούς ή των μονάδων μέτρησης:

«Το λάθος του μαθητή είναι ότι μπορεί να μην τα έκανε δεκαδικούς» Μαργαρίτα

«Το λάθος είναι να απαντήσει με γραμμάρια» Γρηγορία

Στη συνέχεια, παρουσιάστηκε η αφαίρεση των δύο κλασμάτων ως απάντηση μιας μαθήτριας στο δεδομένο πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλασμάτων και οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης της μαθήτριας (3/4 – 1/3 = 5/12) (Ε5β, ΓΠΜ).

Μόνο πέντε από τους δεκαπέντε εκπαιδευτικούς κατάφεραν να εξηγήσουν τον λανθασμένο τρόπο σκέψης της μαθήτριας στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Για παράδειγμα, μια εκπαιδευτικός απάντησε:

«Αφαιρεί αυτό που χρησιμοποίησε, ενώ στην ουσία είναι αυτό που πρέπει να κρατήσει» Φαίη

Αντιθέτως, έξι εκπαιδευτικοί αν και αναγνώρισαν ως λάθος τη λύση της μαθήτριας, είτε δεν μπόρεσαν να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης της είτε έδωσαν ασαφείς απαντήσεις, όπως για παράδειγμα:

«Η μαθήτρια έκανε αφαίρεση, γιατί θεώρησε ότι τα 3/4 είναι όλη η ποσότητα και αφαίρεσε όλη την ποσότητα» Δήμος

Από την άλλη πλευρά, τρεις εκπαιδευτικοί θεώρησαν ότι η αφαίρεση που παρείχε ως λύση η μαθήτρια στο πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλασμάτων ήταν σωστή. Ενδεικτικά απάντησαν:

«Η πράξη είναι σωστή, γιατί αφού ζητάει το υπόλοιπο πρέπει να κάνουμε αφαίρεση. Το λάθος είναι ότι έγραψε «του κιλού κιμά», ενώ στην πραγματικότητα αυτό είναι που χρησιμοποιήθηκε για τη σάλτσα μπολονέζ» Μαργαρίτα

«Ναι, μπορεί να γίνει και έτσι. Σκέφτηκε ότι από το ποσό που έχει βγάζει ένα μέρος» Δήμητρα

Έπειτα, δόθηκαν στους εκπαιδευτικούς οι απαντήσεις τεσσάρων μαθητών στο συγκεκριμένο πρόβλημα και οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να εξηγήσουν τον τρόπο που κατέληξε κάθε μαθητής στη συγκεκριμένη λύση (Ε5γ, Ε5ε, Ε5ζ, Ε5θ, ΓΠΜ).

Ο πρώτος υποτιθέμενος μαθητής παρουσίασε το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού των δύο κλασμάτων, αφού πρώτα τα είχε κάνει ομώνυμα και είχε κρατήσει τον κοινό παρονομαστή («*36/12*»). Έξι εκπαιδευτικοί κατάφεραν να αναγνωρίσουν το διαδικαστικό λάθος του μαθητή (Ε5γ). Ωστόσο, κάποιες απαντήσεις παρουσιάζουν ελλείψεις ΚΓΠ:

> *«Τα έκανε ομώνυμα και πολλαπλασίασε. Αλλά γιατί πολλαπλασίασε; Δεν είναι σωστό να πολλαπλασιάσει» Δήμητρα*

Η δεύτερη υποτιθέμενη μαθήτρια είχε γράψει τη σωστή λύση του προβλήματος σε μορφή γραμμαρίων («*250 γραμμάρια*»). Σε αυτήν τη λύση θα μπορούσε μια μαθήτρια να καταλήξει, είτε αφού έχει κάνει 1/3x3/4=1/4 να βρει το 1/4 του κιλού, είτε βρίσκοντας τα 3/4 του κιλού σε γραμμάρια και στη συνέχεια βρίσκοντας το 1/3 των 750 γραμμαρίων.

Εννιά εκπαιδευτικοί κατάφεραν να εξηγήσουν πώς κατέληξε ο μαθητής σε αυτό το αποτέλεσμα (Ε5ε). Όπως φαίνεται από τις απαντήσεις τους, οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί θα έλυναν με αναγωγή στη μονάδα το συγκεκριμένο πρόβλημα και θα έδιναν την ίδια απάντηση σε γραμμάρια ως λύση του προβλήματος έναντι μιας απάντησης σε μορφή κλάσματος και «το κιλό» ως μονάδα αναφοράς, με εξαίρεση μια εκπαιδευτικό (Μιχαέλα) που δεν σκέφτηκε με τον παραπάνω τρόπο για να λύσει το πρόβλημα, αλλά αντιθέτως έκανε τον πολλαπλασιασμό 1/3x3/4=3/12 και στη συνέχεια διαίρεση (3:12) για να ελέγξει αν όντως το 250 γραμμάρια μπορεί να είναι σωστή λύση:

> «*Τα 3/4 του κιλού είναι 750 γραμμάρια και χρησιμοποίησε το 1/3, δηλαδή 250 γραμμάρια*» *Ελευθερία*

> *«Το 250 είναι τα 3/12 του κιλού» Μιχαέλα*

Ως λύση του τρίτου μαθητή του σεναρίου τάξης υπήρχε ένα κλάσμα που προερχόταν από τους διασταυρωμένους πολλαπλασιασμούς του αριθμητή του ενός κλάσματος με τον παρονομαστή του άλλου και αντίστροφα, το οποίο αφορά ένα διαδικαστικό λάθος κατά την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Έξι από τους δεκαπέντε εκπαιδευτικούς κατάφεραν να εξηγήσουν τί έκανε ο συγκεκριμένος μαθητής (Ε5ζ).

Τέλος, ως απάντηση της τέταρτης μαθήτριας του σεναρίου παρουσιάστηκε στους εκπαιδευτικούς το σωστό κλάσμα με λανθασμένη μονάδα αναφοράς («*3/12 του κιλού κεφτεδάκια*»). Μόνο δύο εκπαιδευτικοί κατάφεραν να εξηγήσουν τι έκανε η μαθήτρια (Ε5θ).

6.5.2 Αξιολόγηση απαντήσεων

Οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να αξιολογήσουν τις απαντήσεις των τεσσάρων μαθητών (Ε5δ, Ε5στ, Ε5η, Ε5ι, ΚΓΠ). Τα υποέργα του Έργου 5 που διερευνούν την ΚΓΠ παρουσιάζονται στον Πίνακα 10. Οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών κατηγοριοποιήθηκαν ανά υποέργο ανάλογα αν το απάντησαν με επιτυχία (Ναι) ή όχι. Στον Πίνακα 10 παρουσιάζεται το πλήθος των εκπαιδευτικών που εντάχθηκαν σε κάθε κατηγορία.

Πίνακας 10. Συχνότητα των κατηγοριών απάντησης (Ναι: Επιτυχής, Όχι:Ανεπιτυχής) ανά υποέργο του Έργου 5

Κωδικός Υποέργου	**Περιγραφή**	**ΜΓΔ**	**Κατηγορία**	
			Ναι	**Όχι**
Ε5δ	Αξιολόγηση απάντησης του μαθητή α΄ («*36/12 του κιλού*»)	ΚΓΠ	14	1
Ε5στ	Αξιολόγηση απάντησης της μαθήτριας β΄ («*250 gr*»)	ΚΓΠ	10	5
Ε5η	Αξιολόγηση απάντησης του μαθητή γ΄ («*4/9 του κιλού*»)	ΚΓΠ	14	1
Ε5ι	Αξιολόγηση απάντησης της μαθήτριας δ΄ («*3/12 του κιλού κεφτεδάκια*»)	ΚΓΠ	1	14

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 11, σχεδόν όλοι οι εκπαιδευτικοί αναγνώρισαν ως λάθος τη λύση του μαθητή, η οποία προέρχεται από τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων αφού τα έχει κάνει ομώνυμα και έχει διατηρήσει τον κοινό παρονομαστή στο γινόμενο (Ε5δ). Ωστόσο, μία εκπαιδευτικός δήλωσε:

> *«Το 36/12 είναι σωστό. Αποτυπώνει τον αρχικό κιμά και όχι αυτό που έμεινε. Πολλαπλασίασε τους παρονομαστές, και πήρε τον παρονομαστή τόσες φορές όσες και ο ένας αριθμητής» Ελένη*

Δέκα από δεκαπέντε εκπαιδευτικούς αναγνώρισαν ως σωστή τη λύση της δεύτερης μαθήτριας, η οποία παρείχε τη σωστή λύση του προβλήματος σε μορφή γραμμαρίων (Ε5στ). Ωστόσο, υπήρχαν εκπαιδευτικοί, οι οποίοι αν και μπόρεσαν να εξηγήσουν πώς σκέφτηκε η υποτιθέμενη μαθήτρια, αξιολόγησαν την απάντησή της ως λανθασμένη:

> *«Είναι λάθος, γιατί έκανε πολλαπλασιασμό» Ιωάννα*
>
> *«Είναι λάθος, γιατί προσπάθησε να βρει το μέρος» Νικηφόρος*
>
> *«Θεώρησε ότι τα 3/4 του κιλού είναι 750 γραμμάρια, και άρα το 1/3 των 750 γραμμαρίων είναι 250 γραμμάρια. Δεν είναι σωστό» Γρηγορία*

Σχεδόν όλοι οι εκπαιδευτικοί αναγνώρισαν ότι η απάντηση του τρίτου μαθητή είναι λάθος (Ε5η), ενώ μόνο ένας εκπαιδευτικός (Βλάσης) αναγνώρισε μετέπειτα τη λύση της τέταρτης μαθήτριας ως λανθασμένη εξαιτίας της λανθασμένης μονάδας αναφοράς (Ε5ι). Η απάντηση της τέταρτης μαθήτριας περιέχει τη σωστή αριθμητική απάντηση σε μορφή κλάσματος όπως προέρχεται από τον πολλαπλασιασμό των δύο κλασμάτων χωρίς να έχει υποστεί απλοποίηση («*3/12*») και λανθασμένη μονάδα αναφοράς («*του κιλού κεφτεδάκια*»). Κάποιοι εκπαιδευτικοί θεώρησαν την απάντηση σωστή, διότι η αριθμητική απάντηση είναι σωστή και δεν πρόσεξαν τη μονάδα αναφοράς, ενώ κάποιοι άλλοι χαρακτήρισαν την απάντηση λανθασμένη εξαιτίας του αριθμητικού αποτελέσματος:

> *«Τα 3/12 δεν είναι σωστό γιατί έκανε πολλαπλασιασμό τα κλάσματα μεταξύ τους και το κεφτεδάκια δεν είναι σωστό, γιατί έπρεπε να λέει κιμά για κεφτεδάκια» Φαίη*

> *«Νομίζω έκανε πολλαπλασιασμό τους αριθμητές μεταξύ τους και τους παρονομαστές μεταξύ τους. Είναι λάθος αυτό» Παναγιώτα*

> *«Είναι εντελώς λάθος. Και τα κεφτεδάκια είναι λάθος, και το 3/12. Τα έκανε ομώνυμα αλλά δεν ξέρω πώς σκέφτηκε» Δήμητρα*

Επιπλέον, υπήρξαν δύο εκπαιδευτικοί που αναγνώρισαν ότι το κλάσμα είναι σωστό και ότι η μονάδα αναφοράς είναι λανθασμένη, αλλά οι απαντήσεις τους παρουσίασαν ελλείψεις:

> *«Το 3/12 είναι σωστό. Αλλά του κιλού που γράφει εκεί είναι λάθος. Έπρεπε να γράφει του μέρους» Ελένη*

> *«Είναι σωστό γιατί 3:12 = 250. Έκανε ισοδυναμία. 3/4 x 1/3 = 3/12. Είναι και αυτό σωστό. Αλλά η ερώτηση ρωτάει πόσα κιλά, άρα έπρεπε να απαντήσει σε γραμμάρια, όχι με κλάσμα» Ελευθερία*

Συνοψίζοντας, από το Έργο 5 διαφαίνεται ότι οι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν ελλείμματα στην ΓΠΜ, καθώς παρουσίασαν δυσκολίες στο να προβλέψουν τα πιθανά λάθη των μαθητών σε ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλασμάτων, όπως επίσης να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών για τις απαντήσεις τους. Επιπλέον, ελλείμματα αναδεικνύονται στην ΚΓΠ, αφού αν και η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών μπόρεσε να αξιολογήσει τις περισσότερες απαντήσεις των μαθητών, υπήρξαν εκπαιδευτικοί που απέρριψαν τις σωστές απαντήσεις του προβλήματος, ενώ σχεδόν κανένας εκπαιδευτικός δεν αναγνώρισε τη λανθασμένη μονάδα αναφοράς στην απάντηση μιας μαθήτριας. Επιπρόσθετα, μέσω αυτού του έργου φάνηκε ότι κάποιοι εκπαιδευτικοί λύνουν το συγκεκριμένο πρόβλημα βρίσκοντας αρχικά το μέρος του όλου («3/4x1000») και στη συνέχεια το μέρος του μέρους («1/3x750»), όχι απλά μόνο προτιμώντας κάθε φορά να πολλαπλασιάζουν με ακέραιο αριθμό, αλλά και αγνοώντας τη λύση του πολλαπλασιασμού των δύο κλασμάτων μεταξύ τους. Αυτό φάνηκε από το ότι τρεις εκπαιδευτικοί διαίρεσαν το 3 δια το 12 για να δουν αν η λύση της μαθήτριας συμπίπτει με το 250 που βρήκαν οι ίδιοι, δίχως να μπορέσουν να εξηγήσουν πώς η μαθήτρια κατέληξε στο 3/12 ή ακόμα απορρίπτοντας τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων ως λύση.

6.6 Επίλυση προβλήματος διαίρεσης με κλάσμα

Το Έργο 6 περιλάμβανε ένα πρόβλημα που επιλύεται με διαίρεση και περιλαμβάνει ένα κλάσμα μικρότερο της μονάδας. Οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να προβλέψουν μια λανθασμένη απάντηση στο συγκεκριμένο πρόβλημα και το υποέργο Ε6α (ΓΠΜ) διερευνούσε αν οι εκπαιδευτικοί θα προτείνουν την επιλογή του πολλαπλασιασμού ως το τυπικό λάθος στο συγκεκριμένο πρόβλημα διαίρεσης. Η λανθασμένη απάντηση ενός μαθητή που αναμένουμε είναι ο πολλαπλασιασμός, δεδομένου ότι το πρόβλημα έχει τη μορφή προβλήματος ανάλογων ποσών και ενδεχομένως εξαιτίας της διαισθητικής παρανόησης ότι ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει.

Στην περίπτωση που οι εκπαιδευτικοί δεν ανέφεραν κάτι σχετικό με αυτήν την απάντηση, τότε δινόταν το στοιχείο ότι ένας μαθητής έκανε πολλαπλασιασμό και οι εκπαιδευτικοί καλούνταν να βαθμολογήσουν με άριστα το 5 τη συγκεκριμένη λύση (Ε6β, ΚΓΠ). Τέλος, μέσω των απαντήσεών τους οι εκπαιδευτικοί αξιολογούνται οι ίδιοι στην επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος (Ε6γ, ΚΓΠ).

Τα υποέργα του Έργου 6 παρουσιάζονται στον Πίνακα 11. Οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών κατηγοριοποιήθηκαν ανά υποέργο ανάλογα αν το απάντησαν με επιτυχία ή όχι. Στον Πίνακα 11 παρουσιάζεται το πλήθος των εκπαιδευτικών που εντάχθηκαν σε κάθε κατηγορία.

Πίνακας 11. Συχνότητα των κατηγοριών απάντησης (Ναι: Επιτυχής, Όχι:Ανεπιτυχής) ανά υποέργο του Έργου 6

Κωδικός Υποέργου	**Περιγραφή**	**ΜΓΔ**	**Κατηγορία**	
			Ναι	**Όχι**
Ε6α	Πρόβλεψη του πολ/σμού ως λανθασμένη πράξη (στο πρόβλημα διαίρεσης «18:2/3»)	ΓΠΜ	7	8
Ε6β	Αξιολόγηση απάντησης («*2/3x18=12*»)	ΚΓΠ	10	5
Ε6γ	Δυνατότητα επίλυσης προβλήματος	ΚΓΠ	1	14

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 11, εφτά από τους δεκαπέντε εκπαιδευτικούς πρόβλεψαν ότι το πιθανό λάθος που ενδέχεται να κάνει κάποιος μαθητής στο δεδομένο πρόβλημα διαίρεσης («*18:2/3*») είναι ο πολλαπλασιασμός («*2/3x18*») (Ε6α).

Από τους υπόλοιπους οχτώ εκπαιδευτικούς, οι δύο ανέφεραν την πρόσθεση ως το λάθος που έκανε η μαθήτρια, ενώ οι υπόλοιποι δεν έδωσαν κάποια απάντηση. Ενδεικτική απάντηση:

> *«Το λάθος είναι να έκανε πρόσθεση; Πολλαπλασιασμός είναι η σωστή λύση» Ζήνα*

Στη συνέχεια, δόθηκε στους εκπαιδευτικούς ο πολλαπλασιασμός ως λύση ενός μαθητή στο συγκεκριμένο πρόβλημα και οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να απαντήσουν αν θεωρούν σωστή τη συγκεκριμένη λύση (Ε6β). Δέκα από τους δεκαπέντε εκπαιδευτικούς ανέφεραν ότι ο πολλαπλασιασμός δεν είναι η σωστή λύση στο πρόβλημα. Ενδεικτικά απάντησαν:

> *«Σωστά έκανε πολλαπλασιασμό. Αλλά… Περίμενε… Το 12 είναι μικρότερο του 18, άρα δεν είναι σωστό. Δεν ξέρω όμως τι πρέπει να κάνω» Μαργαρίτα*

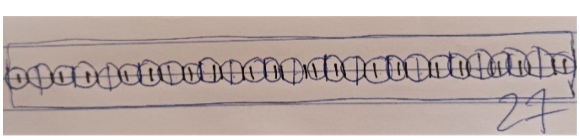
> *«Κι εγώ αυτό σκέφτηκα, αλλά είναι λάθος. Λογικά θα πρέπει να είναι πιο πολλά τα ραβδιά που χωράνε στη σανίδα, όχι λιγότερα, αλλά δεν ξέρω. Αλλά πρέπει να κάνω πολλαπλασιασμό, άρα 12. Δεν ξέρω. Δεν ξέρουμε πόσο είναι το ένα ραβδί» Γρηγορία*

Όπως φαίνεται, οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί αναγνωρίζουν ότι ο πολλαπλασιασμός σε αυτό το πρόβλημα είναι λάθος εκ του αποτελέσματος που δίνει. Δηλαδή, αφού η μαθήτρια βρίσκει 12 ραβδιά από τον πολλαπλασιασμό, οι συγκεκριμένοι εκπαιδευτικοί αντιλαμβάνονται ότι απαιτείται μια λύση μεγαλύτερη των 18 ραβδιών. Παρόλα αυτά, κανένας εκπαιδευτικός δεν προτείνει τη διαίρεση ως την κατάλληλη πράξη του προβλήματος.

Αντιθέτως, οι υπόλοιποι πέντε εκπαιδευτικοί της έρευνας θεώρησαν ότι ο πολλαπλασιασμός είναι η σωστή πράξη για να λυθεί το πρόβλημα. Ενδεικτική απάντηση:

> *«Σωστά. Αφού μέτρησε με τα 2/3 τότε πρέπει να λογαριάσει τα 2/3 του 18 = 12. Άριστα» Φαίη*

Μόνο μία εκπαιδευτικός μπόρεσε να δώσει τη λύση στο πρόβλημα (27 ραβδιά) (Ε6γ). Η συγκεκριμένη εκπαιδευτικός βρήκε τη λύση μέσω της παρακάτω αναπαράστασης που σχεδίασε. Η εκπαιδευτικός δήλωσε ότι η λύση είναι 27 ραβδιά, αλλά παράλληλα ότι δεν γνωρίζει πώς να το βρει με άλλο τρόπο πέρα της αναπαράστασής της. Η αναπαράσταση της εκπαιδευτικού:



Εικόνα 2. Απάντηση της Μιχαέλας στο Ε6γ

Συνοψίζοντας, από το Έργο 6 φαίνεται ότι οι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν ελλείμματα στην ΚΓΠ, τόσο στον πολλαπλασιασμό όσο και στη διαίρεση κλασμάτων, καθώς συγχέουν το πότε πρέπει να χρησιμοποιηθεί κάθε πράξη όταν στα προβλήματα περιλαμβάνονται ποσότητες μικρότερες της μονάδας.

6.7 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα και προφίλ συμμετεχόντων

Παρακάτω παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα των έργων και υποέργων της έρευνας ανάλογα με τη συνιστώσα της ΜΓΔ την οποία αφορούν, καθώς και το συνολικό προφίλ των εκπαιδευτικών. Έγινε αδρή κατηγοριοποίηση των απαντήσεων σε «επιτυχή/ανεπιτυχή», ανάλογα με κάθε υποέργο.

6.7.1 Κοινή Γνώση Περιεχομένου

Εξετάστηκαν οι απαντήσεις του κάθε ενός εκπαιδευτικού σε κάθε ένα από τα υποέργα που αφορούσαν την ΚΓΠ. Οι απαντήσεις τους βαθμολογήθηκαν με 1 όταν ανταποκρίνονταν με επιτυχία στα ζητούμενα του υποέργου, ή με 0, όταν δεν έδιναν καμία απάντηση ή έδιναν λανθασμένη απάντηση. Στον Πίνακα 12 παρουσιάζονται οι κωδικοί και σύντομες περιγραφές των συγκεκριμένων υποέργων (συνολικά 17), καθώς και η βαθμολογία του κάθε συμμετέχοντα ανά υποέργο και συνολικά (τελευταία γραμμή). Στην τελευταία στήλη του Πίνακα 12 αθροίζονται οι βαθμοί ανά υποέργο, με το άθροισμα να αντιστοιχεί στο σύνολο των συμμετεχόντων που το απάντησαν σωστά.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 12, το συνολικό πλήθος των σωστών απαντήσεων ανά εκπαιδευτικό στα υποέργα για την Κοινή Γνώση του Περιεχομένου κυμαίνεται από 3 έως 13 στο σύνολο των 17 ερωτήσεων, γεγονός που δείχνει ευρείες διατομικές διαφορές. Τέσσερις εκπαιδευτικοί απάντησαν σωστά λιγότερες από τις μισές σχετικές ερωτήσεις, και κανείς δεν τις απάντησε όλες.

Από τα στοιχεία του Πίνακα 12 φαίνεται επίσης ότι το εύρος των σωστών απαντήσεων ανά υποέργο κυμαίνεται από 1 έως 15, στο σύνολο των 15 απαντήσεων. Το μοναδικό υποέργο στο οποίο απάντησαν σωστά όλοι οι συμμετέχοντες ήταν το Ε3β, αναγνωρίζοντας τα 3/5 στη δοσμένη αναπαράσταση, που ήταν και το πιο απλό από τα ζητούμενα του έργου. Η δεύτερη καλύτερη συνολική επίδοση (14/15) σημειώθηκε στα υποέργα Ε5δ και Ε5η, τα οποία αφορούσαν την ανίχνευση λαθών στη διαδικασία εκτέλεσης της πράξης. Συνολικά, 7 από τα 17 υποέργα απαντήθηκαν σωστά από λιγότερους από τους μισούς εκπαιδευτικούς.

Ιδιαίτερα απαιτητικά αποδείχθηκαν τα εξής έργα, τα οποία επέσυραν το πολύ δύο σωστές απαντήσεις το καθένα: α) το Ε3δ, όπου μόνο δύο από τους εκπαιδευτικούς αναγνώρισαν το 5/3 του 3/5 στη δοσμένη αναπαράσταση, β) Ε4ι, όπου μόνο μία εκπαιδευτικός αναγνώρισε ότι η δεδομένη αναπαράσταση δεν αναπαριστά το δεδομένο γινόμενο, γ) Ε5ι, όπου μόνο ένας εκπαιδευτικός κατάφερε να αναγνωρίσει ως λανθασμένη μια λύση σε ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλασμάτων, που περιείχε λάθος μονάδα αναφοράς και δ) το Ε6γ, όπου μόνο μία εκπαιδευτικός ήταν σε θέση να επιλύσει το δεδομένο πρόβλημα.

Συμπερασματικά, φαίνεται ότι η Κοινή Γνώση του Περιεχομένου των συμμετεχόντων είναι αρκετά περιορισμένη και αφορά περισσότερο τις διαδικαστικές πλευρές του πολλαπλασιασμού κλασμάτων, ή τα πιο απλά ζητούμενα με τα οποία είναι εξοικειωμένοι.

Πίνακας 12. Σωστές και Λανθασμένες απαντήσεις, ανά συμμετέχοντα και ανά σχετικό υποέργο (ΚΓΠ)

Υποέργο	**Περιγραφή υποέργου**	**Α.**	**Ι.**	**Β.**	**Δς**	**Ν.**	**Τ.**	**Φ.**	**Εη**	**Μα**	**Π.**	**Δα**	**Εα**	**Ζ**	**Μι**	**Γ.**	**Σύνολο (max.15)**
Ε1α	Μέρος όλου: Αναγνώριση πράξης	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	4
Ε2γ	Πρόβλημα εμβαδού, αξιολόγηση	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	8
Ε3β	«3/5 του …»: Αναγνώριση	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	15
Ε3γ	«5/3 του…»: Αναγνώριση	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	4
Ε3δ	«5/3 του 3/5»: Αναγνώριση	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2
Ε3ε	«2/3 του 3/5»: Αναγνώριση	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	4
Ε4στ	Ορθότητα αναπαράστασης α΄	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	11
Ε4ζ	Ορθότητα αναπαράστασης β΄	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	10
Ε4η	Ορθότητα αναπαράστασης γ΄	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	8
Ε4θ	Ορθότητα αναπαράστασης δ΄	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	9
Ε4ι	Ορθότητα αναπαράστασης ε΄	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Ε5δ	Αξιολόγηση λύσης: Μαθητής α΄	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	14
Ε5στ	Αξιολόγηση λύσης: Μαθητής β΄	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	10
Ε5η	Αξιολόγηση λύσης: Μαθητής γ΄	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	14
Ε5ι	Αξιολόγηση λύσης: Μαθητής δ΄	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Ε6β	Αξιολόγηση λύσης μαθήτριας	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	10
Ε6γ	Επίλυση προβλήματος	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
	Σύνολο (max.17)	6	10	9	4	3	13	8	9	8	11	6	13	8	11	9	

6.7.2 Γνώση του Περιεχομένου και του Μαθητή

Εξετάστηκαν οι απαντήσεις του κάθε ενός εκπαιδευτικού σε κάθε ένα από τα υποέργα που αφορούσαν την ΓΠΜ. Οι απαντήσεις τους βαθμολογήθηκαν με 1 όταν ανταποκρίνονταν με επιτυχία στα ζητούμενα του υποέργου, ή με 0, όταν δεν έδιναν καμία απάντηση ή έδιναν λανθασμένη απάντηση. Η ταξινόμηση των απαντήσεων σε επιτυχείς ή μη ήταν αδρή, με επιτυχείς να θεωρούνται (ανάλογα με τον τύπο του έργου) οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών που προέβλεψαν λάθη έστω και αν αυτά δεν αφορούσαν αποκλειστικά εννοιολογικές ή διαδικαστικές πτυχές του πολλαπλασιασμού κλασμάτων ή εξήγησαν τους τρόπους επίλυσης ή αναπαράστασης των μαθητών με ένα εύλογο σκεπτικό (δηλαδή, με σκεπτικό που πράγματι θα μπορούσε να οδηγήσει στη συγκεκριμένη απάντηση του μαθητή). Αντίθετα, οι απαντήσεις που ήταν λανθασμένες, ασαφείς, πολύ γενικές, καθώς και οι περιπτώσεις που δε δόθηκε εξήγηση, βαθμολογήθηκαν με 0.

Στον Πίνακα 13 παρουσιάζονται οι κωδικοί και σύντομες περιγραφές των συγκεκριμένων υποέργων (συνολικά 13) και η βαθμολογία του κάθε συμμετέχοντα ανά υποέργο και συνολικά (τελευταία γραμμή). Στην τελευταία στήλη του Πίνακα 13 αθροίζονται οι βαθμοί ανά υποέργο, με το άθροισμα να αντιστοιχεί στο σύνολο των συμμετεχόντων που ανταποκρίθηκαν με επιτυχία.

Πίνακας 13. Σωστές και Λανθασμένες απαντήσεις, ανά συμμετέχοντα και ανά σχετικό υποέργο (ΓΠΜ)

Υποέργο	**Περιγραφή υποέργου**	**Α.**	**Ι**	**Β.**	**Δς**	**Ν.**	**Τ.**	**Φ.**	**Εη**	**Μα**	**Π.**	**Δα**	**Εα**	**Ζ.**	**Μι**	**Γ.**	**Σύνολο (max.15)**
Ε1δ	Πρόβλεψη: Πράξη	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	5
Ε4α	Εξήγηση: Αναπαράσταση α΄	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12
Ε4β	Εξήγηση: Αναπαράσταση β΄	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12
Ε4γ	Εξήγηση: Αναπαράσταση γ΄	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	6
Ε4 δ	Εξήγηση: Αναπαράσταση δ΄	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	8
Ε4ε	Εξήγηση: Αναπαράσταση ε΄	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5
Ε5α	Πρόβλεψη λάθους	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	9
Ε5β	Εξήγηση: Λανθασμένη πράξη	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	5
Ε5γ	Εξήγηση: Μαθητής α΄	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	6
Ε5ε	Εξήγηση: Μαθητή β΄	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	9
Ε5ζ	Εξήγηση: Μαθητής γ΄	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	6
Ε5θ	Εξήγηση: Μαθητής δ΄	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2
Ε6α	Πρόβλεψη λάθους	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	7
	Σύνολο (max.13)	6	6	5	3	0	10	10	10	3	7	8	6	5	7	6	

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 13, υπάρχει μεγάλο εύρος στις επιτυχείς απαντήσεις ανάμεσα στα διάφορα υποέργα (από 2 έως 12 στα 15). Τα υποέργα στα οποία οι εκπαιδευτικοί σημείωσαν τη μεγαλύτερη επιτυχία ήταν τα Ε4α και Ε4β, όπου κλήθηκαν να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών κατά τον σχεδιασμό των δύο πιο απλών αναπαραστάσεων για τα 2/3 του 3/4.

Αντιθέτως, οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύτηκαν να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης στις υπόλοιπες αναπαραστάσεις (Ε4γ, Ε4δ, Ε4ε), οι οποίες είτε περιείχαν την επιμεριστική ικανότητα του πολλαπλασιασμού, είτε απεικόνιζαν τα δύο κλάσματα σε διαφορετικά σχήματα. Περισσότερο από όλα όμως, δυσκόλεψε τους εκπαιδευτικούς το υποέργο Ε5θ, όπου έπρεπε να εξηγήσουν την σκέψη ενός μαθητή, ο οποίος επέλεξε και εκτέλεσε σωστά την πράξη, αλλά δήλωσε λανθασμένη μονάδα αναφοράς.

Εξετάζοντας τη συνολική βαθμολογία ανά εκπαιδευτικό, διαπιστώνεται ένα μεγάλο εύρος τιμών (από 3 έως 10 στα 13). Κανείς δεν ανταποκρίθηκε με επιτυχία σε όλα τα υποέργα, ενώ έξι από τους δεκαπέντε κατάφεραν να απαντήσουν σωστά σε παραπάνω από τα μισά υποέργα που στόχευαν στη διερεύνηση της ΓΠΜ.

6.7.3 Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου

Εξετάστηκαν οι απαντήσεις του κάθε ενός εκπαιδευτικού σε κάθε ένα από τα υποέργα που αφορούσαν την ΕΓΠ. Οι απαντήσεις τους βαθμολογήθηκαν με 1 όταν ανταποκρίνονταν με επιτυχία στα ζητούμενα του υποέργου, ή με 0, όταν δεν έδιναν καμία απάντηση ή έδιναν λανθασμένη απάντηση. Η ταξινόμηση των απαντήσεων σε επιτυχείς ή μη ήταν αδρή, με επιτυχείς να θεωρούνται (ανάλογα με τον τύπο του έργου) οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών που δημιούργησαν προβλήματα για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, αναγνώρισαν τους περιορισμούς και τις δυνατότητες διαφόρων αναπαραστάσεων ή πρότειναν κάποια αναπαράσταση. Αντίθετα, οι απαντήσεις που ήταν λανθασμένες, ασαφείς, πολύ γενικές, καθώς και οι περιπτώσεις που δε δόθηκε εξήγηση, βαθμολογήθηκαν με 0.

Στον Πίνακα 14 παρουσιάζονται οι κωδικοί και σύντομες περιγραφές των συγκεκριμένων υποέργων (συνολικά 5) και η βαθμολογία του κάθε συμμετέχοντα ανά υποέργο και συνολικά (τελευταία γραμμή). Στην τελευταία στήλη του Πίνακα 14 αθροίζονται οι βαθμοί ανά υποέργο, με το άθροισμα να αντιστοιχεί στο σύνολο των συμμετεχόντων που ανταποκρίθηκαν με επιτυχία.

Πίνακας 14. Σωστές και Λανθασμένες απαντήσεις, ανά συμμετέχοντα και ανά σχετικό υποέργο (ΕΓΠ)

Υπο έργο	**Περιγραφή υποέργου**	**Α.**	**Ι.**	**Β.**	**Δς**	**Ν.**	**Τ.**	**Φ.**	**Εη**	**Μα**	**Π.**	**Δα**	**Εα**	**Ζ.**	**Μι**	**Γ.**	**Σύνολο (max.15)**
Ε2α	Δημιουργία προβλήματος	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	5
Ε2β	Δημιουργία εναλλακτικού προβλήματος	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
Ε4κ	Αξιολόγηση περιορισμών αναπαραστάσεων	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	8
Ε4λ	Αξιολόγηση δυνατοτήτων αναπαραστάσεων	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Ε4μ	Πρόταση αναπαράστασης	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2
	Σύνολο (max.5)	1	2	2	0	0	1	3	1	1	1	0	2	1	1	1	

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 14, το εύρος των επιτυχών ανταποκρίσεων ανά εκπαιδευτικό στα συγκεκριμένα υποέργα είναι από 0 έως 3, σε σύνολο 5 ζητουμένων. Δύο εκπαιδευτικοί δεν κατάφεραν να ανταπεξέλθουν σε κανένα υποέργο και η πλειοψηφία τους απάντησε σωστά σε ένα ή δύο υποέργα που αφορούν την ΕΓΠ. Επίσης, το εύρος του πλήθους των επιτυχών αποκρίσεων ανά υποέργο είναι από 1 έως 8, σε σύνολο 15 απαντήσεων.

Η μεγαλύτερη επιτυχία σημειώθηκε στο να αξιολογήσουν ποια από τις δοσμένες αναπαραστάσεις ήταν λιγότερο χρήσιμη (Ε4κ). Αντιθέτως, τα σημεία που δυσκόλεψαν παραπάνω τους συμμετέχοντες ήταν να προτείνουν μια αναπαράσταση για μια συμβολική πράξη πολλαπλασιασμού κλασμάτων (Ε4μ), να επιλέξουν την πιο χρήσιμη αναπαράσταση (Ε4λ) και να δημιουργήσουν ένα εναλλακτικό λεκτικό πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλασμάτων (Ε2β).

6.7.4 Προφίλ συμμετεχόντων

Στον Πίνακα 15 που ακολουθεί, παρουσιάζονται οι εκπαιδευτικοί της έρευνας με τα ψευδώνυμα που τους δόθηκαν. Δίπλα αναφέρεται αν είναι κάτοχοι Μεταπτυχιακού Τίτλου Σπουδών σχετικού με τα Μαθηματικά, καθώς και τα έτη που δουλεύουν ως εκπαιδευτικοί. Στην στήλη με τα αρχικά ΚΓΠ αναγράφεται η βαθμολογία κάθε εκπαιδευτικού στα υποέργα της ΚΓΠ με βάση τον Πίνακα 12, στην στήλη ΓΠΜ αναγράφεται η βαθμολογία κάθε εκπαιδευτικού στα υποέργα της ΓΠΜ με βάση τον Πίνακα 13 και στην στήλη ΕΓΠ η βαθμολογία κάθε εκπαιδευτικού στα υποέργα της ΕΓΠ με βάση τον Πίνακα 14.

Σε κάθε συμμετέχοντα αναγράφεται η χαμηλή βαθμολογία χωρίς πλαίσιο (λευκό πλαίσιο), η μέτρια βαθμολογία σε ανοιχτό γκρι πλαίσιο και η υψηλή βαθμολογία σε πιο σκούρο γκρι πλαίσιο. Εφόσον η μέγιστη βαθμολογία που θα μπορούσε να έχει ένας συμμετέχοντας στα στοιχεία της ΚΓΠ είναι 17, θεωρούνται χαμηλές οι βαθμολογίες από 0 έως 8, μέτριες από 9 έως 10 και υψηλές από 11 και πάνω. Το σύνολο των στοιχείων της ΓΠΜ είναι 13, οπότε θεωρούνται χαμηλές οι βαθμολογίες από 0 έως 5, μέτριες από 6 έως 8 και υψηλές από 10 και πάνω. Αντίστοιχα στα στοιχεία της ΕΓΠ, από τη στιγμή που η μέγιστη βαθμολογία θα μπορούσε να είναι το 5, θεωρείται η βαθμολογία από το 0 έως 1 χαμηλή, η βαθμολογία 2 θεωρείται μέτρια και από 3 και πάνω θεωρείται υψηλή.

Πίνακας 15. Προφίλ εκπαιδευτικών – ατομικά στοιχεία, επιδόσεις σε ΚΓΠ, ΓΠΜ, ΕΓΠ

Έτη Προϋπηρεσίας	**Συμμετέχοντες**	**Κάτοχος Μεταπτυχιακού Τίτλου**	**ΚΓΠ (max.17)**	**ΓΠΜ (max.13)**	**ΕΓΠ (max.5)**

5-10	Ιωάννα	ναι	10	6	2
	Τερέζα	ναι	13	10	1
	Ελένη	ναι	9	10	1
	Μαργαρίτα	όχι	8	3	1
	Ελευθερία	όχι	13	5	2
	Άννα	όχι	6	6	1
	Μιχαέλα	όχι	11	7	1
20-30	Παναγιώτα	όχι	11	7	1
	Βλάσης	όχι	9	5	2
	Δήμος	όχι	4	3	0
	Νικηφόρος	όχι	3	0	0
	Φαίη	όχι	8	10	3
	Δήμητρα	όχι	6	8	0
	Ζήνα	όχι	8	5	1
	Γρηγορία	όχι	9	6	1

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 15, οι εκπαιδευτικοί που κατέχουν Μεταπτυχιακό Τίτλο Σπουδών στα Μαθηματικά παρουσίασαν συνολικά καλύτερες επιδόσεις σε σχέση με τους περισσότερους συμμετέχοντες. Αναφορικά με τα έτη προϋπηρεσίας, οι εκπαιδευτικοί με μικρότερη εμπειρία των δέκα χρόνων φαίνεται να έχουν κάπως καλύτερες επιδόσεις από αυτούς με προϋπηρεσία μεγαλύτερη των είκοσι χρόνων.

Αυτό που ίσως προκαλεί εντύπωση στον Πίνακα 15 είναι ότι οι εκπαιδευτικοί που παρουσιάζουν υψηλή επίδοση σε κάποια συνιστώσα της ΜΓΔ, δεν παρουσιάζουν αντίστοιχα υψηλή επίδοση σε κάποια άλλη συνιστώσα. Όπως για παράδειγμα η Μιχαέλα και η Ελένη, αμφότερες με προϋπηρεσία μικρότερη των δέκα ετών, ενώ παράλληλα η Ελένη είναι και κάτοχος Μεταπτυχιακού Τίτλου Σπουδών στη Διδακτική των Μαθηματικών, οι οποίες παρουσίασαν τη μεγαλύτερη διαφοροποίηση μεταξύ των επιδόσεών τους. Συγκεκριμένα, στην ΚΓΠ η Μιχαέλα είχε υψηλή και η Ελένη μέτρια επίδοση, στην ΓΠΜ η Μιχαέλα είχε μέτρια και η Ελένη υψηλή επίδοση, ενώ στην ΕΓΠ και οι δύο σημείωσαν χαμηλή επίδοση.

Δύο εκπαιδευτικοί από τους δεκαπέντε του δείγματος παρουσίασαν τις υψηλότερες επιδόσεις σε παραπάνω από μία συνιστώσα της ΜΓΔ. Η μία από τις δύο εκπαιδευτικούς έχει προϋπηρεσία μικρότερη των δέκα χρόνων και είναι κάτοχος Μεταπτυχιακού Τίτλου στη Διδακτική των Μαθηματικών, ενώ η άλλη έχει προϋπηρεσία στην εκπαίδευση τουλάχιστον είκοσι χρόνια και δε διαθέτει μεταπτυχιακό σχετικό με τα μαθηματικά. Ωστόσο, παρά την υψηλή επίδοση τους σε δύο τομείς της ΜΓΔ, παρουσίασαν χαμηλή επίδοση στον τρίτο τομέα.

Επιπλέον, υπήρχαν τέσσερις εκπαιδευτικοί που είχαν σταθερά χαμηλή επίδοση στους τρεις τομείς της ΜΓΔ, εκ των οποίων οι τρεις έχουν προϋπηρεσία στην εκπαίδευση μεγαλύτερη των είκοσι ετών.

Συνολικά, από τον Πίνακα 15 δεν είναι ξεκάθαρο το κατά πόσο επηρεάζουν τα έτη προϋπηρεσίας ή η μετεκπαίδευση τις γνώσεις των εκπαιδευτικών εξαιτίας της μεγάλης διαφοροποίησης των επιδόσεων.

7. ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα έρευνα παρείχε ενδείξεις ότι η Μαθηματική Γνώση για Διδασκαλία των περισσότερων εκπαιδευτικών της έρευνας στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων είναι ελλιπής. Αυτό συνάδει με ευρήματα της βιβλιογραφίας, τα οποία δείχνουν εξίσου χαμηλό επίπεδο της ΜΓΔ των εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στα κλάσματα και στον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων ειδικότερα.

Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα αφορά το επίπεδο της ΚΓΠ των εκπαιδευτικών της έρευνας στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Η παρούσα έρευνα παρείχε ενδείξεις ότι το επίπεδο της ΚΓΠ των εκπαιδευτικών της έρευνας κυμαίνεται από χαμηλό έως μέτριο.

Αρχικά το επίπεδο της ΚΓΠ διερευνήθηκε μέσω της αναγνώρισης της πράξης του πολλαπλασιασμού για την εύρεση του μέρους του όλου. Μόνο τέσσερις από τους δεκαπέντε εκπαιδευτικούς αναγνώρισαν τον πολλαπλασιασμό ως την κατάλληλη πράξη για την εύρεση του μέρους του όλου, ενώ παράλληλα κάποιοι εκπαιδευτικοί ανέφεραν τη διαίρεση ως την κατάλληλη πράξη για τον σκοπό αυτό.

Αυτό συνάδει με την έρευνα των Son και Lee (2016), όπου πολλοί λιγότεροι από τους μισούς συμμετέχοντες αναγνώρισαν τον πολλαπλασιασμό ως την κατάλληλη πράξη για την εύρεση του μέρους όλου. Ομοίως, στην έρευνα των Isiksal και Cakiroglu (2008) οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί είχαν δυσκολίες κατά τον ορισμό του πολλαπλασιασμού δύο κλασμάτων, διότι συλλογίζονταν τον πολλαπλασιασμό κυρίως με όρους επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης.

Παράλληλα, οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί της παρούσας έρευνας στο παραπάνω έργο έστρεψαν την προσοχή τους στη διαδικασία εύρεσης του μέρους του όλου και όχι στην πράξη. Κάτι αντίστοιχο διαπιστώθηκε και στην έρευνα των Frykholm και Glasson (2005), όπου οι εκπαιδευτικοί δεν παρείχαν συνδέσεις μεταξύ εννοιών και διαδικασιών για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Ομοίως, στην έρευνα των Ho και Lai (2012) η πλειονότητα των υποψηφίων εκπαιδευτικών για την αιτιολόγηση της απάντησής τους σε ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλασμάτων έδωσε εξήγηση δείχνοντας την εκτέλεση του αλγορίθμου του πολλαπλασιασμού κλασμάτων.

Επιπλέον, παρατηρήθηκαν περιορισμοί από τους εκπαιδευτικούς σχετικά με τη σειρά των πράξεων κατά τον πολλαπλασιασμό κλάσματος με ακέραιο αριθμό, χωρίς κάτι αντίστοιχο να παρατηρείται κατά την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας. Όταν ένας εκπαιδευτικός υποστηρίζει ότι ο μόνος σωστός τρόπος για τον πολλαπλασιασμό κλάσματος με ακέραιο είναι αρχικά ο πολλαπλασιασμός με τον αριθμητή και έπειτα η διαίρεση του αποτελέσματος με τον παρονομαστή, τότε δεν κατανοεί τη λειτουργία του κλάσματος ως τελεστή (Lamon, 2012), ούτε αντιλαμβάνεται τον διανεμητικό ισομερισμό, ο οποίος θεωρείται από τους ερευνητές (π.χ. Norton & Hackenburg, 2010, Simon, Kara & Placa, 2018) η βάση για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Αντιθέτως, στην έρευνα των Behr κ.ά. (1997) παρατηρήθηκε ότι στις περισσότερες απαντήσεις σχετικού έργου η διαίρεση προηγούταν του πολλαπλασιασμού, διότι όπως ισχυρίζονται οι ίδιοι οι ερευνητές, η αναπαραγωγή μιας ποσότητας είναι ψυχολογικά πιο απαιτητική από ότι ο διαμερισμός αυτής της ποσότητας.

Μία άλλη ένδειξη χαμηλής ΚΓΠ των εκπαιδευτικών της έρευνας στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων είναι ότι μόνο οι μισοί περίπου αναγνώρισαν ότι ένα πρόβλημα εύρεσης του εμβαδού ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλευρές τα δύο κλάσματα μπορεί να αφορά τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με άλλες έρευνες (π.χ. Putra, 2019), όπου οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί καταφεύγουν στην εύκολη λύση της εύρεσης του εμβαδού για να δείξουν τον πολλαπλασιασμό δύο κλασμάτων.

Επιπλέον, μόνο δύο από τους δεκαπέντε εκπαιδευτικούς της παρούσας έρευνας μπόρεσαν να εντοπίσουν και τα δύο γινόμενα κλασμάτων σε ένα σχήμα. Το να μπορεί κάποιος να εντοπίζει τις ποσότητες που προέρχονται από τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων σε ένα σχήμα είναι ένδειξη ΚΓΠ. Για να μπορέσει να τις εντοπίσει, πρέπει να έχει τη δυνατότητα να αναγνωρίζει στο σχήμα τις μονάδες που μεταβάλλονται σε κάθε στάδιο του προβλήματος. Σε σχετικές μελέτες που εξετάζουν τις ικανότητες των εκπαιδευτικών να σχηματίζουν και να μετασχηματίζουν μονάδες όταν συλλογίζονται με ρητούς αριθμούς (π.χ. Izsak, 2008, Izsák κ.ά., 2012), φάνηκε ότι αρκετοί εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν ανάλογες δυσκολίες.

Επιπρόσθετα, από το συγκεκριμένο έργο φάνηκε ότι οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί δε συντονίζουν τρία επίπεδα μονάδων, με βασικότερη δυσκολία να μη διακρίνουν τα ξεχωριστά κομμάτια ως μια ενιαία οντότητα. Σύμφωνα με τον Izsak (2008), για να χρησιμοποιήσουν αποτελεσματικά δραστηριότητες με αναπαραστάσεις, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να είναι σε θέση να κατανοήσουν τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων χρησιμοποιώντας συλλογισμό σε τρία επίπεδα μονάδων.

Στη συνέχεια, οι εκπαιδευτικοί της παρούσας έρευνας παρουσίασαν κάπως καλύτερες επιδόσεις στο στοιχείο της ΚΓΠ που διερευνούσε τη δυνατότητά τους να αξιολογήσουν τις αναπαραστάσεις των μαθητών για έναν πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Πάνω από τους μισούς εκπαιδευτικούς της έρευνας μπόρεσαν να κρίνουν ποια αναπαράσταση είναι σωστή και ποια είναι λάθος για μια δεδομένη πράξη πολλαπλασιασμού. Αυτό το εύρημα δείχνει υψηλότερη ΚΓΠ στους συμμετέχοντες της έρευνας σε σχέση με άλλες έρευνες, όπως για παράδειγμα την έρευνα των Luo κ.ά. (2011), όπου μόνο το 19% των υποψηφίων εκπαιδευτικών επέλεξε σωστά τις αναπαραστάσεις που μπορούν να δώσουν λύση στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, καθώς και σε σύγκριση με την έρευνα των Noh και Sabey (2014), κατά την οποία περίπου το 65% των υποψηφίων εκπαιδευτικών δεν μπόρεσε να εντοπίσει τις σωστές αναπαραστάσεις για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Ωστόσο, οι δύο παραπάνω έρευνες πραγματοποιήθηκαν με υποψήφιους εκπαιδευτικούς, όχι με έμπειρους εν ενεργεία εκπαιδευτικούς όπως της παρούσας έρευνας.

Στη συνέχεια διερευνήθηκε η δυνατότητά των εκπαιδευτικών να αναγνωρίσουν τις σωστές και λάθος απαντήσεις των μαθητών σε ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλασμάτων, οι εκπαιδευτικοί της έρευνας επέδειξαν κάπως υψηλότερο επίπεδο ΚΓΠ σε σχέση με τα παραπάνω, αλλά και με αντίστοιχες έρευνες, όπως την έρευνα των Şahin κ.ά. (2016), όπου κάτω του 5% του δείγματος των υποψηφίων εκπαιδευτικών ήταν σε θέση να εντοπίσει τα λάθη μαθητών σε αντίστοιχα έργα. Παρόλα αυτά, υπήρχαν εκπαιδευτικοί που έκριναν την ποσότητα μετετρεμμένη σε γραμμάρια ως λανθασμένη, όπως επίσης τη σωστή απάντηση σε μορφή μη απλοποιημένου κλάσματος ως λάθος, αφού οι ίδιοι μπορούσαν να βρουν το αποτέλεσμα αποκλειστικά μέσω αναγωγής στη μονάδα.

Μία άλλη ένδειξη που παρουσίασε συγκριτικά με τα προηγούμενα κάπως υψηλότερο επίπεδο ΚΓΠ των εκπαιδευτικών της έρευνας είναι ότι δέκα από τους δεκαπέντε εκπαιδευτικούς της έρευνας αξιολόγησαν σωστά τη λύση που προέρχεται από πολλαπλασιασμό κλασμάτων σε ένα πρόβλημα διαίρεσης κλασμάτων. Οι εκπαιδευτικοί επέδειξαν καλύτερη επίδοση από άλλες έρευνες, όπως για παράδειγμα των Siegler και Lortie-Forques (2015), οι οποίοι εξέτασαν την κατεύθυνση της επίδρασης των πράξεων και μόνο το 33% των υποψηφίων δασκάλων προέβλεψε σωστά την κατεύθυνση της επίδρασης του πολλαπλασιασμού κλασμάτων με κλάσματα μικρότερα της μονάδας.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα οι εκπαιδευτικοί της παρούσας έρευνας απέρριψαν τη λύση που προέρχεται από τον πολλαπλασιασμό, επειδή πρόκυπτε ένα ποσό μικρότερο από αυτό που ζητούσε το πρόβλημα, αλλά παράλληλα κανένας δεν μπορούσε να επιλύσει το πρόβλημα ή να προτείνει τη διαίρεση ως την κατάλληλη πράξη. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (π.χ. Armstrong & Bezuk, 1995, Luo κ.ά., 2011, Ma, 1999), οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να διακρίνουν τα λεκτικά προβλήματα με κλάσματα που μπορούν να επιλυθούν με πολλαπλασιασμό από εκείνα που μπορούν να επιλυθούν με διαίρεση. Αυτό συμβαίνει γιατί οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν διαισθητικές παρανοήσεις και επιλέγουν τον πολλαπλασιασμό σε προβλήματα διαίρεσης όταν ο διαιρέτης είναι μικρότερος της μονάδας. Αντίστοιχα χαμηλές επιδόσεις σε παρόμοια έρευνα παρουσίασε η Ball (1990a), όπου μόνο τέσσερις από τους τριάντα πέντε υποψήφιους εκπαιδευτικούς μπόρεσαν να αναπαραστήσουν με πρόβλημα τη διαίρεση κλασμάτων, ενώ όλες οι λανθασμένες αναπαραστάσεις απεικόνιζαν πολλαπλασιασμό.

Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα της έρευνας αφορά το επίπεδο της ΕΓΠ των εκπαιδευτικών στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Η παρούσα έρευνα παρείχε ενδείξεις ότι το επίπεδο της ΕΓΠ των εκπαιδευτικών της έρευνας κυμαίνεται από χαμηλό έως μέτριο.

Αρχικά το επίπεδο της ΕΓΠ των εκπαιδευτικών της έρευνας στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων διερευνήθηκε μέσω της δυνατότητάς τους να δημιουργήσουν ένα λεκτικό πρόβλημα για μια δεδομένη συμβολική πράξη πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Μόνο πέντε από τους δεκαπέντε εκπαιδευτικούς της έρευνας μπόρεσαν να διατυπώσουν σωστά ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού δύο κλασμάτων, ενώ μόνο μία εκπαιδευτικός από αυτούς μπόρεσε να προτείνει ένα εναλλακτικό πρόβλημα.

Αυτό το εύρημα συνάδει με την έρευνα των Noh και Sabey (2014), όπου μόνο το 10% των υποψηφίων εκπαιδευτικών κατάφερε να δημιουργήσει πλήρως σωστά προβλήματα πολλαπλασιασμού κλασμάτων, καθώς και με την έρευνα της Luo (2009), κατά την οποία ένα σημαντικό ποσοστό των υποψηφίων εκπαιδευτικών δεν ήταν σε θέση να κατασκευάσει λεκτικά προβλήματα με σωστή σημασιολογία και κατάλληλη μονάδα μέτρησης για συμβολικές εκφράσεις πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Επίσης, ανάλογες αστοχίες στον προσδιορισμό των μονάδων κατά τη δημιουργία λεκτικών προβλημάτων για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων παρατηρήθηκαν στην έρευνα του Iskenderoglu (2018).

Οι εκπαιδευτικοί της έρευνας επέδειξαν εξίσου χαμηλή ΕΓΠ σε επόμενα υποέργα, καθώς δεν μπόρεσαν να αναγνωρίσουν τις δυνατότητες και τους περιορισμούς των διάφορων αναπαραστάσεων. Αντιθέτως, υπήρχαν αρκετοί εκπαιδευτικοί που επέλεξαν την πιο περιορισμένων δυνατοτήτων αναπαράσταση ως καταλληλότερη. Όπως επίσης, δεν κατάφεραν να προτείνουν κάποιο διαφορετικό μοντέλο για την απεικόνιση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων.

Η χρήση μιας αναπαράστασης για κάποιον συγκεκριμένο μαθηματικό στόχο και η γνώση των δυνατοτήτων και των περιορισμών των διαφόρων αναπαραστάσεων είναι σημαντικές ενδείξεις ΕΓΠ (Ball κ.ά., 2008). Μόνο δύο εκπαιδευτικοί της έρευνας πρότειναν κάποιο διαφορετικό μοντέλο για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, αν και δεν υπήρχε επαρκής περιγραφή και η χρησιμότητά των μοντέλων που πρότειναν αμφισβητείται.

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, η πιο δημοφιλής αναπαράσταση για τον πολλαπλασιασμό δύο κλασμάτων είναι το επικαλυπτόμενο μοντέλο, ενώ μια άλλη δημοφιλής αναπαράσταση είναι η αριθμογραμμή. Παρόλα αυτά, κανένας εκπαιδευτικός της έρευνας δεν πρότεινε κάποια εναλλακτική αναπαράσταση. Στη βιβλιογραφία επίσης προτείνεται στους εκπαιδευτικούς να μην υπάρχει εξάρτηση από ένα συγκεκριμένο μοντέλο, και εδώ φαίνεται ότι δεν χρησιμοποιείται κανένα μοντέλο.

Το συγκεκριμένο εύρημα συνάδει με αυτό στην έρευνα της Isiksal (2006), όπου πολλοί εκπαιδευτικοί δεν μπόρεσαν να αναπαραστήσουν τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Επίσης, ο Izsák (2008) και οι Wilkie και Roche (2022) διαπίστωσαν ότι οι εκπαιδευτικοί στις έρευνές τους δεν χρησιμοποιούσαν αναπαραστάσεις για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων.

Επιπλέον, στο παραπάνω έργο φάνηκε μεταξύ άλλων ότι οι εκπαιδευτικοί της έρευνας δεν αναγνωρίζουν κατά πόσο μπορεί να γενικευτεί μια στρατηγική των μαθητών, το οποίο αποτελεί μία ακόμη ένδειξη χαμηλής ΕΓΠ.

Το τρίτο ερευνητικό ερώτημα της έρευνας αφορά το επίπεδο της ΓΠΜ των εκπαιδευτικών στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Η παρούσα έρευνα παρείχε ενδείξεις ότι το επίπεδο της ΓΠΜ των εκπαιδευτικών της έρευνας κυμαίνεται από χαμηλό έως μέτριο. Το επίπεδο της ΓΠΜ των εκπαιδευτικών διερευνήθηκε μέσω της δυνατότητάς τους αφενός να προβλέπουν τα λάθη των μαθητών και αφετέρου να εξηγούν τον τρόπο σκέψης των μαθητών.

Στις προβλέψεις των λαθών οι εκπαιδευτικοί της έρευνας δε σημείωσαν μεγάλη επιτυχία. Μόνο πέντε από τους δεκαπέντε εκπαιδευτικούς της έρευνας μπόρεσαν να προβλέψουν τη διπλή πράξη ως απάντηση των μαθητών για την εύρεση των 2/5 του 30.

Επιπλέον, η ΓΠΜ των εκπαιδευτικών χαρακτηρίστηκε έως μέτρια, διότι λιγότεροι από τους μισούς εκπαιδευτικούς της έρευνας μπόρεσαν να προβλέψουν τον πολλαπλασιασμό ως την αναμενόμενη λανθασμένη πράξη ενός μαθητή σε ένα πρόβλημα διαίρεσης κλασμάτων.

Το επίπεδο της ΓΠΜ των εκπαιδευτικών της έρευνας φάνηκε συγκριτικά κάπως υψηλότερο στα έργα που απαιτούσαν την εξήγηση της σκέψης των μαθητών. Σχεδόν οι μισοί συμμετέχοντες μπόρεσαν να εξηγήσουν κάθε φορά τον τρόπο σκέψης των μαθητών κατά τον σχεδιασμό αναπαραστάσεων για μια έκφραση πολλαπλασιασμού κλασμάτων, καθώς και τον τρόπο σκέψης των μαθητών για τις απαντήσεις τους σε ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλασμάτων.

Το τέταρτο ερευνητικό ερώτημα αφορά το επίπεδο της ΓΠΔ των εκπαιδευτικών στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Η παρούσα έρευνα παρείχε ενδείξεις ότι το επίπεδο της ΓΠΔ των εκπαιδευτικών της έρευνας κυμαίνεται από χαμηλό έως μέτριο.

Το επίπεδο της ΓΠΔ των εκπαιδευτικών της έρευνας χαρακτηρίστηκε χαμηλό, διότι οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί δε συνέχισαν τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού κλασμάτων προτείνοντας μετά από ένα μοναδιαίο, ένα μη μοναδιαίο κλάσμα επί του ακέραιου αριθμού.

Επιπλέον, μόνο δύο από τους δεκαπέντε εκπαιδευτικούς πρότειναν να δοθεί μια δραστηριότητα στους μαθητές, η οποία ζητούσε τον εντοπισμό γινομένων σε ένα σχήμα. Επειδή οι εκπαιδευτικοί δεν μπόρεσαν εντοπίσουν οι ίδιο τις ποσότητες στο σχήμα, πρότειναν να μη δοθεί στους μαθητές. Συνεπώς, η χαμηλή ΚΓΠ ίσως να επηρεάζει το εύρος των δραστηριοτήτων που θα μπορούσαν να δοθούν στους μαθητές και κατ' επέκταση τη ΓΠΔ τους.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι υπήρξαν δι-ατομικές διαφορές των εκπαιδευτικών σε κάθε μία συνιστώσα της ΜΓΔ που εξετάστηκε, αλλά και ενδο-ατομικές διαφορές του κάθε εκπαιδευτικού στις διαφορετικές συνιστώσες. Το τελευταίο δείχνει ότι η πρόβλεψη διαφορετικών συνιστωσών της ΜΓΔ από τους Ball και συνεργάτες (2008) πράγματι αντανακλά διαφορετικά είδη γνώσης που είναι απαραίτητα για τη διδασκαλία.

Τα ευρήματα για το επίπεδο της ΓΠΜ και της ΓΠΔ των εκπαιδευτικών της έρευνας δε συγκρίθηκαν με τα ευρήματα από αντίστοιχες έρευνες της βιβλιογραφίας, διότι δεν εντοπίστηκαν σχετικά στοιχεία στη βιβλιογραφία. Αυτός είναι ένας ακόμη λόγος για τη συμβολή και τη σημασία της παρούσας έρευνας, δηλαδή να εμπλουτίσει τη βιβλιογραφία στις συγκεκριμένες πτυχές της ΜΓΔ στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων.

Τέλος, να διευκρινιστεί ότι τα ευρήματα της έρευνας αφορούν τους συγκεκριμένους εκπαιδευτικούς και δεν επιχειρείται να γενικευτούν στο σύνολο των εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην Ελλάδα.

8. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα έρευνα είχε σκοπό να φωτίσει τις πτυχές της Μαθηματικής Γνώσης για Διδασκαλία εν ενεργεία εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Η εικόνα που παρουσιάστηκε δείχνει πολλές ελλείψεις στη ΜΓΔ σε αυτόν τον τομέα, ωστόσο δεν προκαλεί ιδιαίτερη εντύπωση, διότι οι αντίστοιχες έρευνες του εξωτερικού παρουσίασαν παρόμοια ευρήματα.

Το γεγονός που μου προκαλεί προσωπικά εντύπωση είναι ότι οι εκπαιδευτικοί με την περισσότερη εμπειρία παρουσίασαν τις περισσότερες ελλείψεις. Οι συγκεκριμένοι εκπαιδευτικοί έχουν εργαστεί για πάνω από είκοσι χρόνια σε Ε΄ και Στ΄ τάξη, που σημαίνει ότι διδάσκουν τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων κάθε χρόνο και έρχονται τακτικά σε επαφή με τις απαντήσεις και τις δυσκολίες των μαθητών σε αυτό το θέμα.

Η βελτιωμένη εικόνα που παρουσίασαν οι νεότεροι εκπαιδευτικοί ίσως να οφείλεται στην καλύτερη εκπαίδευση που δέχονται στις παιδαγωγικές σχολές σε σύγκριση με παλαιότερα.

Επίσης, μου προκαλεί αρνητική εντύπωση το εύρημα, ότι δε γίνεται χρήση των αναπαραστάσεων στις τάξεις των εκπαιδευτικών, διότι χωρίς τις αναπαραστάσεις δεν μπορεί να επιτευχθεί ουσιαστική μάθηση στο δημοτικό.

Τα αίτια αυτής της κατάστασης δεν πρέπει να αναζητηθούν μόνο στους εκπαιδευτικούς, καθώς και μόνο η διάθεσή τους να συμμετέχουν σε μια τέτοια έρευνα δείχνει ότι ίσως είναι πρόθυμοι στο να διευρύνουν τις γνώσεις τους. Αντιθέτως, αίτια αυτής της κατάστασης μπορεί είναι η έλλειψη επιμορφώσεων στα μαθηματικά, η ανεπάρκεια των σχολικών εγχειριδίων της Ε΄ και Στ΄ τάξης, η έλλειψη κοινοτήτων μάθησης, ο ανύπαρκτος έλεγχος των γνώσεων των μαθητών από φορείς εκτός τάξης κ.ά.

Αναφορικά με τους περιορισμούς της έρευνας, θα μπορούσα να είχα ρωτήσει τους εκπαιδευτικούς περαιτέρω πώς θα αντιμετώπιζαν τα λάθη και τις παρανοήσεις των μαθητών και από πού πιστεύουν ότι πηγάζουν αυτές οι παρανοήσεις, ώστε να έχω μια πληρέστερη εικόνα της ΕΓΠ και ΓΠΜ, αλλά μου προκάλεσε αμηχανία το πόσο λανθασμένες ήταν αρχικά οι περισσότερες απαντήσεις και δεν μπόρεσα να το διαχειριστώ έγκαιρα από τις πρώτες συνεντεύξεις, οπότε και οι συνεντεύξεις που ακολούθησαν ήταν στο ίδιο μοτίβο. Επιπλέον, θεωρώ ότι ήταν λάθος μου, ότι την πιλοτική συνέντευξη την έκανα με μία εκπαιδευτικό που ήξερε καλά μαθηματικά και δεν είχα σαφή εικόνα το πόσο θα δυσκολευτούν οι εκπαιδευτικοί του δείγματος. Επιπρόσθετα, θα μπορούσα να κατηγορηθώ ότι γνώριζα τους συμμετέχοντες εκ των προτέρων και τους επέλεξα σκόπιμα, αλλά ο στόχος μου ήταν να δω τις πτυχές της ΜΓΔ από εκπαιδευτικούς που θεωρούσα ότι θα μου έδιναν πλούσια αποτελέσματα, όχι από τυχαίους εκπαιδευτικούς. Τέλος, έγινε προσπάθεια τα σενάρια τάξης στο εργαλείο να είναι ρεαλιστικά, αλλά μπορεί οι εκπαιδευτικοί σε πραγματικές συνθήκες τάξης να επιδείκνυαν υψηλότερο επίπεδο ΜΓΔ από αυτό της έρευνας.

Αναμφισβήτητα μία αντίστοιχη έρευνα με μεγαλύτερο και πιο τυχαίο δείγμα εκπαιδευτικών θα έδινε σαφέστερα αποτελέσματα, όπως επίσης μία μελέτη των εκπαιδευτικών σε αντιπαραβολή με έργα πολλαπλασιασμού κλασμάτων στους μαθητές τους, ώστε να γίνει μία σύνδεση με τη ΜΓΔ των εκπαιδευτικών και την επίδοση των μαθητών στο συγκεκριμένο θέμα, και όχι μόνο.

Συνοψίζοντας, η Μαθηματική Γνώση για Διδασκαλία συγκεκριμένων εν ενεργεία εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων είναι σε χαμηλό έως μέτριο επίπεδο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Armstrong, B. E., & Bezuk, N. (1995). Multiplication and division of fractions: The search for meaning. *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades*, *85*, 120.

Ball, D. L. (1988). Research on teaching mathematics: Making subject matter knowledge part of the equation.

Ball, D. L. (1989). *Teaching mathematics for understanding: What do teachers need to know about the subject matter?*. National Center for for Research in Teacher Education.

Ball, D. L. (1990a). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for research in mathematics education*, *21*(2), 132-144.

Ball, D. L. (1990b). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The elementary school journal*, *90*(4), 449-466.

Ball, D. L. (1991). Implementing The "Professional Standards For Teaching Mathematics": What's All This Talk about "Discourse"?. *The Arithmetic Teacher*, *39*(3), 44-48.

Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twoths: Constructing representational contexts in teaching fractions. In T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg, (Eds.), Rational numbers: An integration of research (pp. 157-196). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Ball, D. L., & Bass, H. (2002). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14).

Ball, D.L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 27-44.

Ball, D. L., & Hill, H. C. (2008). Measuring teacher quality in practice. *Measurement issues and assessment for teaching quality*, 80-98.

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. *Handbook of research on teaching*, *4*, 433-456.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?.

Ball, D. L., Thames, M. H., Bass, H., Sleep, L., Lewis, J., & Phelps, G. (2009). A practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 95-98). Thessaloniki, Greece: PME.

Behr, M. J., Khoury, H. A., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1997). Conceptual units analysis of preservice elementary school teachers' strategies on a rational-number-as-operator task. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 48-69.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. *Acquisition of mathematics concepts and processes*, *91*, 126.

Bharaj, P. K., Jacobson, E., Liu, J., & Ahmad, F. (2020) Assessing students' understanding of fraction multiplication.

Brown, G., & Quinn, R. J. (2007). Fraction proficiency and success in algebra: What does research say? *Australian Mathematics Teacher, 63*(3), 23-30.

Bruce, C., Bennett, S., & Flynn, T. (2014). Fractions operations: Multiplication and Division literature review. *Unpublished manuscript. Curriculum and Assessment Branch, Trent University, Ontario Ministry of Education, Ontario Canada. Ανακτημένο από http://www. edugains. ca/resourcesMath/CE/LessonsSup po rts/Fractions/FractionsOperations_M ultDivODA. pdf.*

Çağlayan, G., & Olive, J. (2011). Referential commutativity: Preservice K–8 teachers' visualization of fraction operations using pattern blocks. In *Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 303-311).

Cavey, L. O., & Kinzel, M. T. (2014). From whole numbers to invert and multiply. *Teaching children mathematics*, *20*(6), 374-383.

Chinnappan, M., & Forrester, T. (2014). Generating procedural and conceptual knowledge of fractions by pre-service teachers. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(4), 871-896.

Chval, K. B., Lannin, J. K., & Jones, D. (2013). Putting essential understanding of fractions into practice in grades 3-5. National Council of Teachers of Mathematics, Incorporated.

Clements, D. H. (1999). "Concrete" manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood, 1*(1), 45–60.

Copur-Gencturk, Y. (2021). Teachers' conceptual understanding of fraction operations: results from a national sample of elementary school teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(3), 525-545.

Davydov, V. V. (1975). The psychological characteristics of the "prenumerical" period of mathematics instruction. *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, *7*, 109-206.

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education, 47*, 82-92.

Dreher, A. (2013). Den Wechsel von Darstellungsformen fördern und fordern oder vermeiden?. In *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen* (pp. 215-225). Springer Spektrum, Wiesbaden.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational studies in mathematics, 61, 103-131.

Elias, H. R., Ribeiro, A. J., & Savioli, A. M. P. D. D. (2020). Epistemological matrix of rational number: A look at the different meanings of rational numbers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(2), 357-376.

Ervin, H. K. (2017). Fraction Multiplication and Division Models: A Practitioner Reference Paper. *International Journal of Research in Education and Science*, *3*(1), 258-279.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, S. M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. Journal for Research in Mathematics Education, 16(1), 3–17.

Forrester, P. A., & Chinnappan, M. (2010). The predominance of procedural knowledge in fractions.

Frykholm, J., & Glasson, G. (2005). Connecting science and mathematics instruction: Pedagogical context knowledge for teachers. *School Science and Mathematics, 105*(3), 127-141.

Goodson-Espy, T. (2009). An exploration of preservice teachers' creating and analysis of fraction multiplication word problems. *Proceedings of the 31St Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 5,* Atlanta, GA: Georgia State University. 1330-1338.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp.276–295). New York: Simon & Schuster Macmillan.

Hackenberg, A. J., & Tillema, E. S. (2009). Students' whole number multiplicative concepts: A critical constructive resource for fraction composition schemes. The Journal of Mathematical Behavior, 28(1), 1–18.

Hackenberg, A. J., & Lee, M. Y. (2016). Students' distributive reasoning with fractions and unknowns. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(2), 245-263.

Harel, G., & Behr, M. (1995). Teachers' Solutions for Multiplicative Problems. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, *3*, 31-51.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hill, H. C., & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for research in mathematics education*, *35*(5), 330-351.

Hill, H.C., Ball, D. L., & Schilling, S. (2008). Unpacking "pedagogical content knowledge": Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal of Teacher Education*, *39*(4), 372-400.

Hill, H.C., Rowan, B., & Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. American Educational Research Journal, 42, 371e406.

Hill, H. C., Schilling, S. G., & Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal, 105*(1), 11-30.

Ho, S. Y., & Lai, M. Y. (2012). Pre-service teachers' specialized content knowledge on multiplication of fractions. In *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 291-298). PME Taipei, Taiwan.

Huang, T-W., Liu, S-T., & Lin, C-Y. (2008). Preservice teachers' mathematical knowledge of fractions. Research In Higher Education Journal, 5: 1-8.

Isik, C. (2011). Conceptual analysis of multiplication and division problems in fractions posed by preservice elementary mathematics teachers. *Hacettepe University Journal of Education,* 41, 231-243.

Işıksal, M. (2006). A study on pre-service elementary mathematics teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge regarding the multiplication and division of fractions.

Isiksal, M., & Çakiroglu, E. (2008). Preservice teachers' knowledge of students' cognitive processes about the division of fractions. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *35*(35), 175-185.

Isiksal, M., & Cakiroglu, E. (2011). The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: the case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(3), 213-230.

Iskenderoglu, T. A. (2018). Fraction multiplication and division word problems posed by different years of pre-service elementary Mathematics teachers. *European Journal of Educational Research*, *7*(2), 373-385.

Izsák, A. (2008). Mathematical knowledge for teaching fraction multiplication. *Cognition and Instruction*, 26, 95–143.

Izsák, A., & Beckmann, S. (2019). Developing a coherent approach to multiplication and measurement. *Educational Studies in Mathematics, 101*(1), 83-103.

Izsák, A., Jacobson, E., & Bradshaw, L. (2019). Surveying middle-grades teachers' reasoning about fraction arithmetic in terms of measured quantities. Journal for Research in Mathematics Education, 50(2), 156–209.

Izsák, A., Jacobson, E., de Araujo, Z., & Orrill, C. H. (2012). Measuring mathematical knowledge for teaching fractions with drawn quantities. Journal for Research in Mathematics Education, 43(4), 391–427.

Johanning, D. (2019). Getting Past the Sticking Points: A Questioning Framework for Fraction Multiplication. *Ohio Journal of School Mathematics*, *82*(1), 24-28.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement* (pp. 101–150). Columbus, OH: Eric/SMEAC.

Κολέζα, Ε. (*2009*). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Τόπος

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667) Charlotte, NC: Information Age.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers (3rd ed.)*. New York, NY: Routledge.

Lee, J.E., & Lee, M. Y. (2022). How elementary prospective teachers use three fraction models: their perceptions and difficulties. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1-26.

Lee, S. J., Brown, R. E., & Orrill, C. H. (2011). Mathematics teachers" reasoning about fractions and decimals using drawn representations. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(3), 198-220.

Lee, S.J., & Shin, J. H. (2011). Preservice teachers' Key Developmental Understandings (KDUs) for fraction multiplication. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, *14*(4), 477-490.

Λεμονίδης, Χ. (2016). *Στην τροχιά των ρητών*. Θεσσαλονίκη: Κυριακίδη

Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Lawrence Erlbaum.

Lin, Y. C., Chin, C. & Chiu, H.Y. (2011). Developing an instrument to capture high school mathematics teachers' specialized content knowledge: An exploratory study. In Ubuz, B. (Ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 353. Ankara, Turkey: PME.

López-Martín, M. D. M., Aguayo-Arriagada, C. G., & García López, M. D. M. (2022). Preservice Elementary Teachers' Mathematical Knowledge on Fractions as Operator in Word Problems. *Mathematics*, *10*(3), 423.

Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult?. *Developmental Review*, *38*, 201-221.

Lovin, L. H., Stevens, A. L., Siegfried, J., Wilkins, J. L. M., & Norton, A. (2018). Pre-K-8 prospective teachers' understanding of fractions: An extension of fractions schemes and operations research. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(3), 207–235. https:// doi. org/ 10. 1007/ s10857-016-9357-8.

Luo, F. (2009). Evaluating the effectiveness and insights of pre-service elementary teachers' abilities to construct word problems for fraction multiplication. *Journal of Mathematics Education*, 2(1), 83 – 98.

Luo, F., Lo, J. J., & Leu, Y. C. (2011). Fundamental fraction knowledge of preservice elementary teachers: A cross-national study in the United States and Taiwan. *School Science and Mathematics*, *111*(4), 164-177.

Ma, L. (1996). *Profound Understanding of Fundamental Mathematics: What is It, why is it Important, and how is it Attained?*. Stanford University.

Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Routledge.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. Journal for Research in Mathematics Education, 21(1): 16-32.

Mack, N. K. (1998). Building a foundation for understanding the multiplication of fractions. Teaching Children Mathematics, 5(1), 34–38

Mack, N. K. (2000). Long-term effects of building on informal knowledge in a complex content domain: The case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematical Behavior, 19*(3), 307–332.

Mack, N. K. (2001). Building on informal knowledge through instruction in a complex content domain: Partitioning, units, and understanding multiplication of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(3), 267-295.

Mick, H. W., & Sinicrope, R. (1989). Two meanings of fraction multiplication. School Science and Mathematics, 89(8), 632–639.

Misquitta, R. (2011) A review of the literature: Fraction instruction for struggling learners in mathematics. Learning Disabilities Research & Practice, 26 (2), 109–119.

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Research Council. (2003). *Improving undergraduate instruction in science, technology, engineering, and mathematics: Report of a workshop*. Washington, DC: National Academies Press.

Newton, K. J. (2008). An extensive analysis of preservice elementary teachers' knowledge of fractions. *American Educational Research Journal*, 45, 1080-1110.

Ni, Y., & Zhou, Y.D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*, 27–52.

Noh, J., & Sabey, K. (2014). Preservice elementary teachers' understanding of fraction multiplication. In *NCTM Research Conference, New Orleans*.

Norton, A., & Hackenberg, A. J. (2010). Continuing research on students' fraction schemes. In L. P. Steffe & J. Olive (Eds.), *Children's fractional knowledge* (pp. 341–352). Springer.

Olanoff, D. E. (2011). Mathematical knowledge for teaching teachers: The case of multiplication and division of fractions (Unpublished doctoral dissertation). Syracuse University, Syracuse

Olanoff, D., Lo, J. J., & Tobias, J. (2014). Mathematical content knowledge for teaching elementary mathematics: A focus on fractions. *The Mathematics Enthusiast, 11*(2), 267-310.

Piaget, J. (1952). The fourth stage: The coordination of the secondary schemata and their application to new situations.

Post, T., Behr, M., Harel, G., & Lesh, R. (1993). Rational numbers: Towards a semantic analysis–emphasis on the operator construct. *Rational numbers: An integration of research*, *13*.

Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analyzing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction*, 18, 3–17

Putra, Z. H. (2016). Pengetahuan mahasiswa pedidikan guru sekolah dasar dalam merepresentasikan operasi pecahan dengan model persegi panjang. Jurnal Elemen, 2(1), 1–13.

Putra, Z. H. (2019). Elementary teachers' knowledge on fraction multiplication: An anthropological theory of the didactic approach. *Journal of teaching and learning in elementary education*, *2*(1), 47-52.

Şahin, Ö., Gökkurt, B., & Soylu, Y. (2016). Examining prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge on fractions in terms of students' mistakes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(4), 531-551.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15, 4e14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. Harvard Educational Review, 57, 1e22.

Siegler, R. P., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., Thompson, L., & Wray, J. (2010). *Developing effective fractions instruction for kindergarten through 8th grade* (NCEE 2010-4039). Washington, DC: U.S. Department of Education, Institute of Education Sciences, National Center for Education Evaluation and Regional Assistance.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, *107*(3), 909.

Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. Journal for Research in Mathematics Education, 24(3), 233–253.

Simon, M. A., Kara, M., Norton, A., & Placa, N. (2018). Fostering construction of a meaning for multiplication that subsumes whole-number and fraction multiplication: A study of the Learning Through Activity research program. *The Journal of Mathematical Behavior*, *52*, 151-173.

Simon, M. A., Kara, M., Placa, N., (2018). Promoting reinvention of a multiplication of fractions algorithm: A study of the Learning Through Activity Research Program.

Son, J. W., & Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. Journal of Mathematics Teacher Education, 12(4), 235–261.

Son, J. W., & Lee, J. E. (2016). Pre-service Teachers' Understanding of Fraction Multiplication, Representational Knowledge, and Computational Skills. *Mathematics Teacher Education and Development*, *18*(2), 5-28.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. Learning and Instruction, 14, 503–518.

Steenbrugge, H., Lesage, E., Valcke, M., & Desoete, A. (2014). Preservice elementary school teachers' knowledge of fractions: a mirror of students' knowledge?. *Journal of Curriculum Studies*, *46*(1), 138-161.

Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying schemes. *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, 1-41.

Steffe, L. P. (2003). Fractional commensurate, composition, and adding schemes: Learning trajectories of Jason and Laura: Grade 5. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 237–295.

Steffe, L. P. (2010). The partinioning and fraction schemes. In *Children's fractional knowledge* (pp. 315-340). Springer, Boston, MA.

Streefland, L. (1991). Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research: Vol. 8. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic.

Taber, S. B. (1999). Understanding multiplication with fractions: An analysis of problem features and student strategies. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *21*(2), 1-27.

TeachingWorks. (n.d.). *High-leverage content*. Ανακτημένο από
http://www.teachingworks.org/work-of-teaching/ high-leverage- content

Tirosh, D. (2000). Enhancing pre-service teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 5-25.

Thompson, P. W. (2002). In making sense of fractions, ratios, and proportions. Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 103-4). Reston, VA: NCTM.

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), A research companion to principles and standards for school mathematics (pp. 95–113). Reston, VA: NCTM.

Tobias, J. M., Olanoff, D., & Lo, J-J. (2012). A Research Synthesis of Preservice Teachers' Knowledge of Multiplying and Dividing Fractions (pp. 668-673).

Toluk-Ucar, Z. (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education,* 25, 166–175.

Tsankova, J. K., & Pjanic, K. (2009). The Area Model of Multiplication of Fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15*(5), 281-285

Turnuklu, E. B., & Yesildere, S. (2007). The pedagogical content knowledge in mathematics: pre-service primary mathematics teachers' perspectives in Turkey. Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers, 1, 1e13.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. The Journal of Mathematical Behavior, 31, 344e355.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*(5), 453-467.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2016). *Elementary and middle school mathematics*. London: Pearson Education UK.

Webel, C., & DeLeeuw, W. W. (2016). Meaning for fraction multiplication: Thematic analysis of mathematical talk in three fifth grade classes. Journal of Mathematical Behavior, 41, 123–140.

Webel, C., Krupa, E., & McManus, J. (2016). Using representations of fraction multiplication. Teaching Children Mathematics, 22(6), 366–373.

Wilkie, K. J., & Roche, A. (2022). Primary teachers' preferred fraction models and manipulatives for solving fraction tasks and for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1-31.

Wyberg, T., Whitney, S. R., Cramer, K. A., Monson, D. S., & Leavitt, S. (2012). Unfolding fraction multiplication: Helps students understand an important algorithm by using a piece of paper and a number line. *Mathematics Teaching in The Middle School*, *17*(5), 289-293.

Wu, Z. (2001). Multiplying fractions. Teaching Children Mathematics, 8(3): 174-177.

Χασσάνδρα, Μ., & Γούδας, Μ. (2003). Κριτήρια εγκυρότητας και αξιοπιστίας στην ποιοτική-ερμηνευτική έρευνα. Επιστημονική Επετηρίδα της Ψυχολογικής Εταιρείας Βορείου Ελλάδος, Τόμος 2, 31-48.

Young, E., & Zientek, L. (2011). Fraction Operations: An Examination of Prospective Teachers' Errors Confidence, and Bias. *Investigations in Mathematics Learning*, *4*(1), 1-24.

Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D 4. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 435–457. https:// doi. org/ 10. 2307/ 749876

Zazkis, R., & Gadowsky, K. (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics, 2001 yearbook* (pp. 44–52). National Council of Teachers of Mathematics.

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΩΝ

ΓΠ: Γνώση Περιεχομένου
ΠΓΠ: Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου
ΜΓΔ: Μαθηματική Γνώση για τη Διδασκαλία
ΚΓΠ: Κοινή Γνώση Περιεχομένου
ΕΓΠ: Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου
ΓΠΜ: Γνώση του Περιεχομένου και των Μαθητών
ΓΠΔ: Γνώση του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1: Απομαγνητοφωνήσεις

-Πόσα χρόνια προϋπηρεσίας έχετε:

Άννα: 6 χρόνια
Ιωάννα: 5 χρόνια
Βλάσης: 25 χρόνια
Δήμος: 28 χρόνια
Νικηφόρος: 29 χρόνια
Τερέζα: 5 χρόνια
Φαίη: 30 χρόνια
Ελένη: 10 χρόνια
Μαργαρίτα: 6 χρόνια
Παναγιώτα: 25 χρόνια
Δήμητρα: 22 χρόνια
Ελευθερία: 9 χρόνια
Ζήνα: 30 χρόνια
Μιχαέλα: 6 χρόνια
Γρηγορία: 20 χρόνια

-Είστε κάτοχος Μεταπτυχιακού Τίτλου Σπουδών στη Διδακτική των Μαθηματικών;

Άννα: Όχι
Ιωάννα: Ναι
Βλάσης: Όχι
Δήμος: Όχι
Νικηφόρος: Όχι
Τερέζα: Ναι
Φαίη: Όχι
Ελένη: Ναι
Μαργαρίτα: Όχι
Παναγιώτα: Όχι
Δήμητρα: Όχι
Ελευθερία: Όχι
Ζήνα: Όχι
Μιχαέλα: Όχι
Γρηγορία: Όχι

Ε1

Σε μια τάξη Στ΄ Δημοτικού, η δασκάλα ρωτάει τους μαθητές αν ξέρουν να βρουν το 1/5 του 30 και με ποια πράξη το βρίσκουν. Ο Γιάννης απαντά: «Είναι εύκολο, είναι το 6. Το βρίσκουμε με διαίρεση, 30 δια 5 ίσον 6.».

-Πώς θα συνεχίζατε αυτή τη συζήτηση, αν ήσασταν στη θέση της δασκάλας;

Άννα: Θα έλεγα «Πολύ σωστά Γιάννη». Στη συνέχεια θα ρωτούσα πόσο είναι τα 2/5 του 30 με στόχο να καταλάβουν οι μαθητές ότι για να πάρω ένα κομμάτι πρέπει να χωρίσω το όλο σε ίσα κομμάτια.
Ιωάννα: Θα έλεγα «Μπράβο Γιάννη πολύ σωστά».
Βλάσης: Δεν θα έλεγα «μπράβο» στον Γιάννη, γιατί αναιρεί τον αριθμητή. Δεν του ζήτησα να κάνει διαίρεση. Άλλο πώς το βρίσκουμε.
Δήμος: Ωραία**.** Αυτό λύνεται με διαίρεση. Βρίσκω το μέρος του όλου με διαίρεση. Το κλάσμα ούτως ή άλλως είναι μια διαίρεση και πάντα απεικονίζει το μέρος μιας ποσότητας.
Νικηφόρος: Σωστά. Γενικότερα αποδεχόμαστε διάφορες λύσεις αρκεί να είναι αποδεκτές.
Τερέζα: Για να βρεις το μέρος του όλου πρέπει να κάνεις πολλαπλασιασμό. Ο Γιάννης παρέλειψε το ενδιάμεσο βήμα (πρώτα 1x30 και μετά 30:5) και έκανε κατευθείαν διαίρεση. Θα συνέχιζα ρωτώντας πόσο κάνουν τα 2/5 του 30, γιατί με αυτό το παράδειγμα αν προσπαθήσει πρώτα να διαιρέσει το 30 με τον παρονομαστή και μετά να πολλαπλασιάσει με τον αριθμητή θα βρει λάθος αποτέλεσμα, γιατί ο αριθμητής δεν είναι 1. Δίνω δηλαδή αυτό το παράδειγμα για να καταλάβουν ότι πρέπει πρώτα να πολλαπλασιάζω και μετά να διαιρώ για να βρω το μέρος του όλου.
Φαίη: Καταρχήν είναι σωστή η απάντηση. Θα καθοδηγούσα λέγοντας ότι το 30 είναι το σύνολο, δηλαδή τα 5/5 και εγώ θέλω το 1/5, δηλαδή διαιρώ 5 κομμάτια. Η πράξη είναι διαίρεση.
Ελένη: Θα ζητούσα τα 3/5 του 30, ώστε να γίνει αντιληπτό ότι έτσι βρήκα μόνο το 1 και αν έχω 3 πρέπει να κάνω πολλαπλασιασμό. Ο Γιάννης έκανε πρώτα διαίρεση και μετά πολλαπλασιασμό, αλλά γίνεται και αντίστροφα. Η διαδικασία είναι ότι το μέρος του όλου το βρίσκω με πολλαπλασιασμό και διαίρεση.
Μαργαρίτα: Μπράβο Γιάννη. Κάθε κλάσμα είναι μια διαίρεση.
Παναγιώτα: Θα ζητούσα να εξηγήσει πώς σκέφτηκε. Στη συνέχεια θα έδειχνα το ίδιο πράγμα χωρίζοντας αντικείμενα.
Δήμητρα: Έχεις δίκιο. Το βρήκες σωστά. Με διαίρεση το βρίσκεις.
Ελευθερία: Σκέφτηκες πολύ ωραία Γιάννη, αλλά η πράξη δεν είναι διαίρεση. Είναι πολλαπλασιασμός. Το 1/5 x 30 είναι η αναγωγή στη μονάδα. Αν το καταλάβουν όλοι, μετά δίνω να βρουν τα 2/5 του 30, ώστε να καταλάβουν ότι με τον πολλαπλασιασμό μπορώ να βρω πολλά μέρη από ένα όλο. Το 30 από κάτω έχει ένα αόρατο 1. Πολλαπλασιάζω αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή και βρίσκω 60/5. «Θα έλεγα στα παιδιά ότι όταν κάνω πολλαπλασιασμό στους φυσικούς αριθμούς ψάχνω να βρω τα πολλά και όταν κάνω διαίρεση ψάχνω να βρω το 1, αλλά στα κλάσματα θα μάθετε κάτι ανώμαλο. Στα κλάσματα ισχύει το ανάποδο. Όταν θέλω να βρω το 1 στα κλάσματα κάνω πολλαπλασιασμό, και όταν θέλω να βρω τα πολλά στα κλάσματα κάνω διαίρεση. Αυτό πρέπει να το μάθουν τα παιδιά ως κανόνα».
Ζήνα: Μπράβο Γιάννη.
Μιχαέλα: Σωστά.
Γρηγορία: Μπράβο γιατί βρήκες το σωστό. Αν όμως ήταν τα 2/5 του 30; Κάνω πολλαπλασιασμό.

<u>Αν δεν αναφέρουν κάποιο από τα επόμενα, ρωτάω:</u>

α***) Η δασκάλα αναγνωρίζει ότι ο Γιάννης βρήκε το σωστό αποτέλεσμα, και στη συνέχεια ρωτά με ποια πράξη μπορεί να βρεθεί τα 2/5 του 30.***

-Γιατί πιστεύετε ότι συνεχίζει με αυτόν τον τρόπο τη συζήτηση η δασκάλα; Τι προσπαθεί να επιτύχει;

Ιωάννα: Το κάνει για να καταλάβουν οι μαθητές ότι το μέρος του όλου βρίσκεται με διαίρεση.
Βλάσης: Για να διδάξει την έννοια του κλάσματος και τι πρέπει να κάνουμε για να βρούμε το μέρος του όλου.
Δήμος: Συνεχίζει η δασκάλα με αυτόν τον τρόπο γιατί δεν είναι βέβαιη ότι ο μαθητής κατάλαβε τον μηχανισμό.
Νικηφόρος: Προσπαθεί να επιβεβαιώσει και να εμπεδώσει.
Φαίη: Ο στόχος είναι η διδασκαλία της αναγωγής στη μονάδα.
Μαργαρίτα: Να δει αν κατάλαβε σωστά.
Παναγιώτα: Μήπως για να διδάξει τον πολλαπλασιασμό με κλάσματα;
Δήμητρα: Συνεχίζει με αυτόν τον τρόπο για να συνειδητοποιήσει αν έχει αντιληφθεί την αξία του αριθμητή.

Ζήνα: Για να πάει παραπέρα την σκέψη του μαθητή στην αναγωγή στη μονάδα.
Μιχαέλα: Να καταλάβουν ότι το κλάσμα είναι μέρος του αριθμού.

-Ποιες απαντήσεις θα περιμένατε από τα παιδιά;

Άννα: Ανάλογα με το τι κατάλαβαν.
Ιωάννα: Θα περίμενα πολλοί μαθητές να έκαναν πρόσθεση τα 6 κομμάτια που βρήκαν παραπάνω. 6+6=12.
Βλάσης: Δεν θα περίμενα καμία απάντηση.
Δήμος: Περιμένω να ξέρουν να το βρίσκουν γιατί είναι 12 χρονών.
Νικηφόρος: Περιμένω να το απαντήσουν.
Φαίη: Να απαντήσουν σωστά το 12.
Ελένη: Για τα 3/5 του 30, θα περίμενα να μου πουν 30:5 για να βρουν το 1 και μετά επί 3. Αυτή είναι η εννοιολογική κατανόηση.
Μαργαρίτα: Αφού το 1/5 είναι το 6, τότε τα 2/5 είναι το 12.
Παναγιώτα: Θα περίμενα το 12 και το 15. Το 15 είναι αν μπερδευτούν και πάρουν το μισό αντί για τα 2/5.
Δήμητρα: Να συνεχίσουν από εκεί που έμεινε ο Γιάννης. Αφού χωρίσουν το 30 σε 5, να υπολογίσουν τα 2/5.
Ελευθερία: Δεν περιμένω να απαντήσουν, αν δεν το έχουν διδαχθεί. Ίσως ο Γιάννης, περιμένω να πει, 2 φορές το 30 και μετά διά 5.
Ζήνα: Θα περίμενα σωστές απαντήσεις. Να πουν ότι αφού ξέρω το 1/5, τότε διπλασιάζω το 6 και βρίσκω 2.
Μιχαέλα: Μπορεί να μου πουν 30 δια 2 ή 30 δια 5.
Γρηγορία: Ο Γιάννης θα πει εύκολα το 12. Αφού το 1 είναι 6, τότε τα 2 είναι 12. Το σωστό είναι πολλαπλασιάζω και μετά διαιρώ. Αλλά τα παιδιά δεν συνειδητοποιούν ότι κάτω από το 30 υπάρχει το 1, για να κάνουν 30 επί 1.

Αν δεν αναφερθεί:

β) ***Η Κατερίνα απαντά: «Μπορώ να το υπολογίζω. Κάνω πρώτα 30 δια 5, ίσον 6. Μετά πολλαπλασιάζω με το 2 – 6 επί 2 ίσον 12».***

-Πώς θα συνεχίζατε αυτή τη συζήτηση, αν ήσασταν στη θέση της δασκάλας; Με ποιο στόχο;

Άννα: Θα έλεγα Μπράβο Κατερίνα. Θα ζητούσα να το ξαναπεί να το ακούσουν όλοι για να μάθουν τα κλάσματα.
Ιωάννα: Θα ρωτούσα αν μπορεί να το βρει με πρόσθεση.
Βλάσης: Θα έλεγα τη θεωρία, ότι όταν ξέρω το όλο και θέλω να βρω το μέρος πολλαπλασιάζω.
Δήμος: Θα ρωτούσα ποιοι το σκέφτηκαν έτσι. Με στόχο τη έννοια του κλάσματος.
Νικηφόρος: Θα χώριζα το 30 σε 5 κομμάτια στον πίνακα και θα έκανα αναγωγή στην κλασματική μονάδα.
Τερέζα: Αυτό δεν ισχύει γιατί δεν ακολουθεί τη σωστή σειρά πολλαπλασιασμού ενός φυσικού αριθμού με ένα κλάσμα.
Φαίη: Είναι σωστό. Έκανε αναγωγή στην κλασματική μονάδα.
Μαργαρίτα: Θα τους έφτιαχνα ένα σχήμα. Ο στόχος είναι να καταλάβουν την έννοια του κλάσματος.
Παναγιώτα: Θα έλεγα ότι το κορίτσι έχει δίκιο και στη συνέχεια θα εξηγούσα ότι αφού το 1/5 είναι το 6, τότε 2 φορές το 1/5 είναι 6. Ο απώτερος στόχος είναι να κατανοήσουν τον πολλαπλασιασμό με ακέραιο.
Δήμητρα: Μπράβο Κατερίνα. Είναι κλασικός τρόπος σκέψης εύρεσης του κλάσματος.
Ελευθερία: Η Κατερίνα έκανε το αντίστροφο, γιατί δεν τα έμαθε καλά.
Μιχαέλα: Πολύ σωστά.
Γρηγορία: Αυτό δεν ισχύει. Έτυχε και έδωσε σωστό αποτέλεσμα. Δεν είναι σωστός τρόπος.

Ε2

α) Θέλετε να δώσετε στα παιδιά της Στ΄ τάξης ένα παράδειγμα προβλήματος που αντικατοπτρίζει την πράξη 3/4 x 5/7. Τι παράδειγμα δίνετε;

Άννα: Έχω 5/7 του κιλού ζάχαρη σε ένα δοχείο. Για τη συνταγή μου χρειάζονται τα 3/4 αυτής της ποσότητας. Πόση ζάχαρη θα χρειαστώ;
Ιωάννα: Βρες το εμβαδόν του πίνακα της τάξης. Έχει ορθογώνιο σχήμα με μήκος τα 3/4 του μέτρου και πλάτος τα 5/7 του μέτρου.
Βλάσης: Ποιο είναι το εμβαδόν του τετραγώνου με τη μία πλευρά 3/4 του μέτρου και την άλλη 5/7 του μέτρου.
Δήμος: Η ζάχαρη αποτελεί τα 3/4 του γλυκού και η σοκολάτα τα 5/7 του γλυκού. Πόση είναι η ζάχαρη και η σοκολάτα μαζί ως μέρος του γλυκού;
Νικηφόρος: (καμία απάντηση)
Τερέζα: Ένας παραγωγός πατάτας έβγαλε 100 κιλά ποσότητας. Την πρώτη μέρα πούλησε τα 3/4 της ποσότητας και τη δεύτερη μέρα τα 5/7 της ποσότητας που έμεινε. Πόσο πούλησε στο τέλος;
Φαίη: Θέλω να βάψετε τα 3/4 των 5/7 ενός σχήματος.
Ελένη: Θέλω να βρω τα 3/4 του 5/7 αλλά δεν μπορώ να διατυπώσω τώρα ένα πρόβλημα.
Μαργαρίτα: Αν τα 3/4 ενός υφάσματος κοστίζουν 1 €, πόσο κοστίζουν τα 5/7 του ίδιου υφάσματος;
Παναγιώτα: Θα πάνε μια εκδρομή τα 5/7 μιας τάξης και τα 3/4 είναι κορίτσια. Κόλλησα, δεν ξέρω τι να ρωτήσω.
Δήμητρα: Δεν μπορώ.
Ελευθερία: Πολύ εύκολο. Το οικόπεδο έχει μήκος 3/4 μέτρα και πλάτος 5/7 μέτρα. Ποιο είναι το εμβαδόν του;
Ζήνα: Τα 3/4 των παιδιών μιας τάξης φοράνε άσπρη μπλούζα και από αυτά τα 5/7 είναι αγόρια. Τι μέρος της τάξης είναι αγόρια με άσπρη μπλούζα;
Μιχαέλα: Τα 3/4 της τάξης έφαγαν τα 5/7 της πίτσας.
Γρηγορία: Σε μια τάξη τα 5/7 είναι αγόρια και τα κορίτσια είναι τα 3/4 των αγοριών. Τι μέρος της τάξης είναι τα κορίτσια;

β) **Μπορείτε να δώσετε ένα διαφορετικό παράδειγμα;**

Άννα: Όχι.
Ιωάννα: Ένα σχολείο έχει 10 ίδιους τοίχους. Για τον κάθε τοίχο χρειαζόμαστε 3/4 του κιλού μπογιά. Οι εργάτες θέλουν να βάψουν τα 5/7 των τοίχων. Πόσα κιλά μπογιά θα χρειαστούν;
Βλάσης: Όχι.
Δήμος: Όχι.
Τερέζα: Όχι
Φαίη: Όχι.
Μαργαρίτα: Να βρείτε την περίμετρο ενός ορθογωνίου με πλευρά η μία 3/4 και η άλλη 5/7.
Παναγιώτα: Όχι.
Ελευθερία: Ναι, με το μέρος του όλου. Η γιαγιά έδωσε τα 3/4 της σύνταξης της στα εγγονάκια της και από αυτά τα 5/7 στον Γιαννάκη. Τι μέρος της σύνταξης πήρε ο Γιαννάκης; Αυτό είναι καλύτερο παράδειγμα.
Ζήνα: Όχι.
Μιχαέλα: Όχι.
Γρηγορία: Όχι.

<u>Αν δεν αναφερθεί από τον/την εκπαιδευτικό:</u>

Ένας συνάδελφος έδωσε στην Ε΄ τάξη ως παράδειγμα το εξής πρόβλημα: «Το μήκος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 3/4 του μέτρου και το πλάτος του είναι 5/7 του μέτρου. Πόσο είναι το εμβαδόν του;»

γ) **Είναι αυτό ένα καλό παράδειγμα για την περίπτωση αυτή; Είναι παρόμοιο με αυτό που δώσατε; Εξηγείστε γιατί.**

Άννα: Όχι δεν είναι αυτό ένα καλό παράδειγμα.
Δήμος: Είναι το εμβαδόν ένα σωστό παράδειγμα. Απλά άλλαξα τους αριθμούς και αντί για φυσικούς έβαλα κλάσματα. Αλλά δεν θα το έδινα στην τάξη γιατί δεν ισχύει στην πραγματικότητα.
Νικηφόρος: Αυτό το πρόβλημα δεν είναι σωστό γιατί ο τύπος του εμβαδού δεν θα μου δώσει ακριβές αποτέλεσμα.
Τερέζα: Γενικά το εμβαδόν είναι καλό παράδειγμα του πολλαπλασιασμού, αλλά δεν θα το έδινα για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων λόγω της φύσης τους.
Φαίη: Δεν είναι σωστό αυτό το παράδειγμα, γιατί για να βρω το εμβαδόν ενός ορθογωνίου πρέπει πρώτα να βρω τα εκατοστά. Δεν γίνεται με κλάσματα.

Ελένη: Είναι ένα καλό παράδειγμα. Έπρεπε να το είχα σκεφτεί. Θα το έδινα στους μαθητές.
Παναγιώτα: Νομίζω είναι ένα καλό παράδειγμα, αλλά δεν ξέρω γιατί.
Δήμητρα: Νομίζω πως δεν είναι σωστό αυτό το παράδειγμα. Θα προτιμούσα κάτι πιο απτό.
Ζήνα: Αυτό με το εμβαδόν είναι καλύτερο παράδειγμα, γιατί μπορεί να βρει χειροπιαστά αριθμό.
Μιχαέλα: Με αυτό το παράδειγμα δεν βρίσκεις αποτέλεσμα.
Γρηγορία: Νομίζω πως αυτό το πρόβλημα δε λύνεται με αυτόν τον πολλαπλασιασμό, γιατί δε βγαίνουν ακριβώς τα νούμερα.

Ε3

Μια δασκάλα δίνει κάθε βδομάδα ένα «μαθηματικό γρίφο» στα παιδιά της Στ΄ τάξης. Αυτή την εβδομάδα βρήκε αυτόν τον «γρίφο» και αναρωτιέται αν είναι κατάλληλος για να τον δώσει στην τάξη της. ***Τι θα τη συμβουλεύατε; Γιατί;***

Άννα: Είναι καλό να το δώσει στην τάξη μόνο για το πρώτο, για να δουν το μέρος του όλου.
Ιωάννα: Δεν είναι καλό να το δώσει στην τάξη, επειδή θα μπερδέψει τους μαθητές.
Βλάσης: Να το δώσει μόνο για την πρώτη περίπτωση.
Δήμος: Να δώσει μόνο το α.
Νικηφόρος: Να μην το δώσει καθόλου γιατί είναι δύσκολο, εκτός από το α.
Τερέζα: Να μην το δώσει γιατί είναι δύσκολο, δεν είναι ωραία η διατύπωση και θα τους μπερδέψει. Μόνο το α είναι καλό.
Φαίη: Θα συμβούλευα να μην το δώσει, γιατί οι μαθητές δεν θα μπορέσουν.
Ελένη: Να μην το δώσει γιατί είναι δύσκολο.
Μαργαρίτα: Να μην το δώσει, είναι δύσκολο.
Παναγιώτα: Θα συμβούλευα να το δώσει, αλλά να μην περιμένει απάντηση. Είναι καλό μόνο για να τους δημιουργήσει απορίες και να θέλουν να μάθουν την απάντηση.
Δήμητρα: Να μην το δώσει γιατί θα μπερδέψει τα παιδιά. Είναι μόνο για άτομα με τρομερή αντίληψη. Να μην απογοητευτούν οι άλλοι.
Ελευθερία: Θα συμβούλευα να το δώσει αφού είναι στ΄ τάξη, μπορεί να έχουν δει κάτι παρόμοιο.
Ζήνα: Να μην το δώσει, γιατί είναι δύσκολο.
Μιχαέλα: Να μην το δώσει, γιατί δεν φαίνονται επαρκώς τα ερωτήματα.
Γρηγορία: Να μην το δώσει, γιατί δε θα ξέρει να το εξηγήσει.

α) Μπορείτε να δείτε τα 3/5 σε αυτό το σχήμα;

Άννα: Ναι, το σκιασμένο μέρος
Ιωάννα: Ναι…
Βλάσης: Ναι…
Δήμος: Ναι…
Νικηφόρος: Ναι…
Τερέζα: Ναι…
Φαίη: Ναι…
Ελένη: Ναι…
Μαργαρίτα: Ναι…
Παναγιώτα: Ναι…
Δήμητρα: Ναι…
Ελευθερία: Ναι…
Ζήνα: Ναι…
Μιχαέλα: Ναι…
Γρηγορία: Ναι…

β) Μπορείτε να δείτε τα 5/3 σε αυτό το σχήμα;

Άννα: Όχι
Ιωάννα: Όχι
Βλάσης: Όχι
Δήμος: Όχι
Νικηφόρος: Όχι

Τερέζα: Ναι, ολόκληρο το σχήμα.
Φαίη: Όχι
Ελένη: Ναι…
Μαργαρίτα: Όχι
Παναγιώτα: Ναι…
Δήμητρα: Όχι
Ελευθερία: Ναι…
Ζήνα: Όχι
Μιχαέλα: Όχι
Γρηγορία: Όχι

γ) Μπορείτε να δείτε τα 5/3 του 3/5;

Άννα: Όχι
Ιωάννα: Όχι
Βλάσης: Όχι
Δήμος: Όχι
Νικηφόρος: Όχι
Τερέζα: Ναι, το ολόκληρο.
Φαίη: Όχι
Ελένη: Ναι …
Μαργαρίτα: Όχι
Παναγιώτα: Όχι
Δήμητρα: Όχι
Ελευθερία: Όχι
Ζήνα: Όχι
Μιχαέλα: Όχι
Γρηγορία: Όχι

δ) Μπορείτε να δείτε τα 2/3 του 3/5;

Άννα: Όχι
Ιωάννα: Όχι
Βλάσης: Όχι
Δήμος: Όχι
Νικηφόρος: Όχι
Τερέζα: Ναι, τα δύο άσπρα κομμάτια.
Φαίη: Όχι
Ελένη: Ναι…
Μαργαρίτα: Όχι
Παναγιώτα: Όχι
Δήμητρα: Όχι
Ελευθερία: Ναι…
Ζήνα: Όχι
Μιχαέλα: Ναι…
Γρηγορία: Όχι

Ε4

Σε μια τάξη Ε΄ Δημοτικού, ζητήθηκε από τα παιδιά να αναπαραστήσουν το 2/3 του 3/4. Παρακάτω φαίνονται όλες οι διαφορετικές απαντήσεις που προέκυψαν από τα παιδιά.

α) Μπορείτε να εξηγήσετε πώς σκέφτηκε κάθε παιδί;

Άννα: Στο πρώτο σχήμα, το χώρισε σε 4 κομμάτια και πήρε τα 3, και από τα 3 πήρε τα 2. Στο δεύτερο σχήμα, έκανε το ίδιο χωρίζοντας σε διαφορετικά κομμάτια. Στο τρίτο σχήμα δεν καταλαβαίνω τι κάνει.

Το τέταρτο σχήμα είναι λάθος αφού τα κομμάτια δεν έχουν ίδιο μέγεθος. Το πέμπτο σχήμα είναι σωστή αναπαράσταση, αν και δεν δείχνει το τελικό αποτέλεσμα. Δείχνει το κάθε κλάσμα.
Ιωάννα: Στο πρώτο χώρισε σε 4 κομμάτια και χρωμάτισε τα 3 και πήρε τα 2 από τα 3 χρωματισμένα. Στο δεύτερο έκανε το ίδιο με διαφορετικό διαχωρισμό. Στο τρίτο, χώρισε σε 4 τετράγωνα και το κάθε τετράγωνο σε 3 και πήρε 2 από τα 3 τετράγωνα. Στο τέταρτο χώρισε κάθετα τα κομμάτια, πήρε τα 3 και μετά χώρισε σε 3 και πήρε τα δύο από το κάθε ένα. Η πέμπτη αναπαράσταση είναι λάθος επειδή πήρε το κάθε κλάσμα ξεχωριστά.
Βλάσης: Δεν ξέρω πώς σκέφτηκαν. Το πρώτο, το δεύτερο, το τρίτο και το πέμπτο είναι λάθος. Το πέμπτο είναι λάθος γιατί το 2/3 του 3/4 το βρίσκεις με διαίρεση και εδώ έχει το σύμβολου του πολλαπλασιασμού, αν είχε διά θα ήταν σωστό. Το τέταρτο είναι σωστό, αλλά δεν ξέρω γιατί, απλά μου άρεσε.
Δήμος: Το πρώτο είναι λάθος: χώρισε σε 4 κομμάτια, μετά πήρε 3 σαν παρονομαστή και 2 σαν αριθμητή. Στο δεύτερο έκανε το ίδιο λάθος. Το τρίτο είναι σωστό γιατί τα έκανε ομώνυμα, δηλαδή τα έκανε ίσα. Αρχικά το χώρισε σε 12 και από τα 12 με υποδιαίρεση έκανε τετράδες, μετά διαίρεσε το κάθε κουτάκι σε 3 και πήρε 4. Το τέταρτο σχήμα είναι παντελώς λάθος γιατί τα κουτάκια είναι ανόμοια. Το πέμπτο είναι σωστό γιατί έκανε την ισοδυναμία. Δηλαδή έκανε τα κλάσματα ισοδύναμα και πήρε τη σωστή ποσότητα.
Νικηφόρος: Το πρώτο είναι λάθος. Δεν ξέρω πώς σκέφτηκε. Στο δεύτερο έκανε το ίδιο λάθος αλλά χώρισε σε ορθογώνια. Το τρίτο είναι λάθος, επειδή βάσει ισοδυναμίας έπρεπε να πάρει αριθμητή 8. Το τέταρτο είναι επίσης λάθος γιατί δεν τηρεί την ισοδυναμία. Η πέμπτη είναι σωστή.
Τερέζα: Στην πρώτη χώρισε το τετράγωνο σε 4, σκιαγράφησε τα 3 και μετά πήρε τα 2/3. Η δεύτερη είναι ίδια με την πρώτη, με άλλο χωρισμό. Στην τρίτη χώρισε αρχικά σε 4 κομμάτια, χώρισε το κάθε κομμάτι σε 3 κομμάτια και πήρε τα 2/3 από κάθε κομμάτι. Η τέταρτη είναι μια παραλλαγή του δεύτερου, χώρισε σε 4 ορθογώνια κομμάτια και κάθε ορθογώνιο σε 3 κομμάτια. Η πέμπτη είναι σωστή. Το ένα σχήμα είναι το 2/3 και το άλλο τα 3/4, σκέφτηκε με την επιφάνεια.
Φαίη: Στο πρώτο χωρίζει σε 4 κομμάτια, όσα είναι και ο παρονομαστής, παίρνει τα 3 και μετά παίρνει 2 από αυτά. Στο δεύτερο, κάνει το ίδιο με κάθετο διαχωρισμό. Στο τρίτο χώρισε το σχήμα σε 12 κομμάτια, αυτά τα χώρισε σε 4 κομμάτια, πήρε τα 3 από αυτά και μετά πήρε τα 2 από το καθένα. Στο τέταρτο έκανε 4 κάθετες ράβδους, πήρε τα 3, μετά το κάθε ένα από τα 3 το έκοψε σε 3 και πήρε 2 τριάδες. Στο πέμπτο σχήμα έκανε οπτικοποίηση του «του» του πολλαπλασιασμού, τα έκανε ισοδύναμα και πήρε τα 2/3 και τα 3/4. Είναι σωστό.
Ελένη: Στο πρώτο χώρισε το σύνολο σε 4 κομμάτια, πήρε τα 3 και από τα 3 πήρε τα 2. Είναι σωστό. Στο δεύτερο χώρισε το τετράγωνο σε 4 ίσα μέρη και έκανε το ίδιο με το προηγούμενο με διαφορετικές γραμμές. Όμως αυτό δεν είναι σωστό, γιατί τα 2/3 δεν φαίνονται. Στο τρίτο χώρισε στα 4 μέρη, πήρε 3 μέρη στο κάθε ένα και μετά πήρε τα 2/3. Αυτό είναι σωστό. Στο τέταρτο χωρίζει σε 4 ίσα μέρη, παίρνει τα 3, και μετά τα χωρίζει σε 3 και πήρε τα 2 από το κάθε ένα. Είναι σωστά τα μέρη, όχι το όλο, άρα είναι λάθος, γιατί δεν αποτυπώνεται το σύνολο. Το πέμπτο είναι σωστό, γιατί έχει πάρει 2/3 στο πρώτο και τα 3/4 στο δεύτερο.
Μαργαρίτα: Καταρχήν το 2/3 του 3/4 είναι διαίρεση. Στο πρώτο σχήμα χώρισε τα 4, πήρε τα 3 και μετά από τα 3 πήρε τα 2. Στο δεύτερο έκανε το ίδιο αλλά κάθετα. Στο τρίτο έχει χωρίσει σε 2 ίσα μέρη (οριζόντια), άρα είναι και λάθος. Το τέταρτο το χώρισε σε 3 κομμάτια και έβγαλε το 1 εκτός, άρα είναι επίσης λάθος. Το πέμπτο είναι λάθος, γιατί έπρεπε να τα σχεδιάσει στο ίδιο και να κάνει διαίρεση.
Παναγιώτα: Στο πρώτο χώρισε σε 4, πήρε 3 και μετά από τα 3 ξεχώρισε τα 2. Στο δεύτερο το χώρισε σε 4, πήρε τα 3 και από τα 3 πήρε τα 2. Στο τρίτο χώρισε σε 12 μικρότερα κομμάτια, από αυτά τα 9 είναι τα 3/4 και συμπληρώνονται 6 κομματάκια (- γιατί να το χωρίσει αρχικά σε 12 κομμάτια;) Το χώρισε σε 12 κομμάτια για να δείξει τα πολλαπλάσια και γιατί ένα όλο μπορεί να χωριστεί σε περισσότερα. Στο τέταρτο χώρισε σε 4 κομμάτια αρχικά, άφησε το 1 εκτός για να έχει τα 3/4, έκοψε το κάθε ένα σε 3 και πήρε τα 2. Το πέμπτο είναι λάθος, γιατί θα έπρεπε να έχω 18 κουτάκια, και εδώ έχω 17.
Δήμητρα: Στην πρώτη αναπαράσταση πήρε αρχικά τα 3/4 και μετά τα 2/3. Το ίδιο ισχύει και στο δεύτερο σχήμα. Η τρίτη αναπαράσταση είναι λάθος. Χώρισε σε 4, μετά πήρε 3 και μετά τα 2/3 κάθε κομματιού. Η τέταρτη είναι λάθος γιατί δεν χώρισε σε ίσα κομμάτια. Αρχικά χώρισε 4 και πήρε 3, αλλά μετά χώρισε οριζόντια, ενώ ξεκίνησε κάθετα και αυτό είναι λάθος. Στο πέμπτο δεν ξέρω τι έκανε αλλά φαίνεται πάει να κάνει πολλαπλασιασμό και εδώ αυτό που έχουμε (τα 2/3 του 3/4) δεν λύνεται με πολλαπλασιασμό.
Ελευθερία: Στο πρώτο χώρισε σε 4, πήρε τα 3 από τα 4 και μετά πήρε τα 2 από τα 3. Είναι σωστό γιατί αν κάνεις 2/3 x 3/4 = 6/12= 1/2 και στο σχήμα φαίνεται το μισό. Στο δεύτερο χώρισε σε 4 με διαφορετικό τρόπο, πήρε τα 3 και μετά τα 2 από τα 3. Είναι σωστό γιατί φαίνεται ότι είναι το 1/2. Στο τρίτο χώρισε σε 12 γιατί έκανε πολλαπλασιασμό τους παρονομαστές. Έκανε δηλαδή τα κλάσματα ισοδύναμα. Μετά πήρε 9, γιατί τα 2/3 του 12 είναι 9. Μετά μπερδεύτηκε. Έκανε πολλαπλασιασμό τους αριθμητές και αφού βρήκε 6, έβαψε τα 6. Είναι σωστό σαν αποτέλεσμα, αλλά ο τρόπος που σκέφτηκε είναι λάθος. Στο τέταρτο σχήμα, το χώρισε σε 4, απέκλεισε τη μία ράβδο και ασχολείται με τις 3 από τις 4. Μετά τις

χώρισε σε 9 κουτάκια, γιατί από τα 2/3 είπε στο μυαλό του να το κάνει ισοδύναμο με παρονομαστή 6/9. Το αποτέλεσμα είναι σωστό αλλά αυτό που σκέφτηκε είναι πολύ περίπλοκο. Το πέμπτο είναι ωραίο. Έκανε με πράξεις τους υπολογισμούς: 2/3 x 3/4 = 8/12 x 9/12 = 72/144. Αυτός ο μαθητής έχει κατανοήσει ακόμη πιο πολύ ότι στον πολλαπλασιασμό βρίσκω το μέρος του όλου. Χώρισε τα κουτιά σε πολλά κουτάκια για να βάλει ισοδύναμα κλάσματα και τα πολλαπλασίασε. Σκέφτηκε σωστά, αλλά δεν βγήκε σωστό το νούμερο, γιατί βγήκε δεκαδικός. Γενικά το πέμπτο είναι σωστό, αλλά πάει μακρυά η σκέψη του.
Ζήνα: Στο πρώτο χώρισε σε 4 κομμάτια, πήρε τα 3 και μετά πήρε τα 2. Στο δεύτερο χώρισε κάθετα τα 4 και έκανε το ίδιο. Στο τρίτο σχήμα χωρίζει σε 12 γιατί έκανε τον πολλαπλασιασμό των παρονομαστών. Από τα 12 πήρε τα 6, γιατί πολλαπλασίασε τους αριθμητές. (- Γιατί δεν πήρε όλα τα 6 μαζί και αφήνει 1 ανά 2;) Δεν ξέρω γιατί άφησε τα άλλα. Βασικά δεν καταλαβαίνω τι έκανε. Το τέταρτο είναι σωστό. Χώρισε σε 4 λωρίδες και από τις 4 κράτησε 3. Μετά χώρισε οριζόντια σε 3 γιατί 3 είναι ο παρονομαστής και πήρε 2. Στο πέμπτο χωρίζει πρώτα σε 3 και παίρνε τα 2 και μετά τα κάνει 12 κουτάκια, και στο άλλο χωρίζει σε 4 και παίρνει 3 και μετά κάνει 12 κουτάκια. Τα κάνει ομώνυμα για να τα δει καλύτερα. Δημιουργεί δηλαδή, ισοδύναμα ομώνυμα κλάσματα για να τα κατανοήσει. Είναι σωστό.
Μιχαέλα: Στο πρώτο χώρισε σε 4 μέρη, ζωγράφισε τα 3 και μετά πήρε τα 2/3. Στο δεύτερο χώρισε σε 3/4 και πήρε τα 2/3. Στο τρίτο χώρισε σε 4 τετράγωνα και μετά χώρισε το κάθε ένα σε 3 ορθογώνια. Έβαψε μετά 6, γιατί το άθροισμα είναι έτσι. Βγαίνει σωστά, αλλά η διαδικασία είναι λάθος. Η τέταρτη είναι σωστή. Χώρισε σε 4 ορθογώνια, έβαψε τα 3 που τον ενδιαφέρουν και μετά χώρισε σε 3 κομμάτια κατευθείαν οριζόντια και πήρε τα 2 από τα 3. Η πέμπτη αναπαράσταση ουσιαστικά τα 2/3 του 3/4 δείχνει, αλλά δεν έχω καταλάβει τι κάνει και δεν έχει αποτέλεσμα.
Γρηγορία: Στο πρώτο χώρισε 4, πήρε τα 3 και μετά πήρε τα 2/3. Δεν είναι σωστό. Στο δεύτερο κάνει το ίδιο και δεν είναι σωστό. Στο τρίτο χώρισε σε 4, πήρε τα 3, το κάθε ένα από αυτά το χώρισε σε 3 και πήρε τα 2. Αυτό είναι πιο σωστό. Στο τέταρτο χώρισε το σχήμα κάθετα στα 4, πήρε τα 3 από αυτά και τα χώρισε σε 3, και μετά πήρε τα 6/9, επειδή είναι ισοδύναμο με το 2/3. Είναι σωστό. Για το πέμπτο. Όταν λέμε το 2/3 του 3/4 είναι επί. Χώρισε σε 12 κομμάτια στο σχήμα αριστερά γιατί έκανε τον πολλαπλασιασμό 2/3 x 3/4. Δεν είναι σωστό. Είναι σωστή η σκέψη του, αλλά δεν σχεδίασε σωστά τα κομμάτια, γιατί στο ένα τα πήρε κάθετα και στο άλλο οριζόντια.

β) Υπάρχει κάποια αναπαράσταση που θεωρείτε ότι δεν είναι χρήσιμη;

Άννα: Η τέταρτη.
Ιωάννα: Η πέμπτη.
Βλάσης: Η πρώτη, η δεύτερη, η τρίτη και η πέμπτη είναι λάθος.
Δήμος: Όλες εκτός της ε.
Νικηφόρος: Όλες εκτός της ε.
Τερέζα: Η πέμπτη γιατί θα μπέρδευε, όχι γιατί δεν είναι σωστή.
Φαίη: Η πέμπτη γιατί είναι πολύπλοκη, όχι γιατί δεν είναι σωστή.
Ελένη: Η δεύτερη και η τέταρτη.
Μαργαρίτα: Σίγουρα η τρίτη και η πέμπτη.
Παναγιώτα: Η πέμπτη.
Δήμητρα: Όλες είναι χρήσιμες, γιατί μέσα από τα λάθη μαθαίνεις, αλλά πιο λάθος είναι η τρίτη.
Ελευθερία: Όλες χρήσιμες είναι.
Ζήνα: Η τρίτη γιατί μπερδεύει.
Μιχαέλα: Η πέμπτη.
Γρηγορία: Η πέμπτη, γιατί δεν μπορώ να καταλάβω τι έκανε.

γ) Ποια θεωρείτε ότι είναι η πιο χρήσιμη αναπαράσταση που θα μπορούσατε να αξιοποιήσετε για το μάθημά σας και με άλλα κλάσματα;

Άννα: Η πρώτη.
Ιωάννα**:** Η τρίτη γιατί το χωρίζω σε πολλά κομμάτια και μπορώ να δω τον παρονομαστή.
Βλάσης: Η τέταρτη.
Δήμος: Η πέμπτη.
Νικηφόρος: Η πέμπτη.
Τερέζα: Η τρίτη, γιατί δίνει περισσότερες περιπτώσεις σε αντίθεση με την τέταρτη, επειδή δεν χώρισε το τελευταίο ορθογώνιο, αλλά και χωρισμένο να ήταν, πάλι θα μου έδινε λιγότερες πιθανότητες.
Φαίη: Η πρώτη είναι η καλύτερη, γιατί είναι πιο κατανοητή για τα παιδιά, επειδή τα βλέπουν.
Ελένη: Η πέμπτη. Θα ξεκινούσα από την πέμπτη και θα κατέληγα στην τρίτη.
Μαργαρίτα: Η πρώτη γιατί είναι πιο μεγάλα τα τετράγωνα.
Παναγιώτα: Η τρίτη γιατί έχει περισσότερα κομματάκια.

Δήμητρα: Η πέμπτη γιατί έχει περισσότερα κουτάκια.
Ελευθερία: Η πέμπτη, γιατί δείχνει ανεπτυγμένη λογικομαθηματική σκέψη.
Ζήνα: Η πρώτη και η δεύτερη.
Μιχαέλα: Η τρίτη σίγουρα, αν θα το έκανε σωστά να πάρει όλα τα 6 της πρώτης σειράς μαζί, όχι όπως είναι τώρα, γιατί χωρίζεται σε περισσότερα κομμάτια και μπορείς να κάνεις ισοδύναμα.
Γρηγορία: Η τρίτη, γιατί δείχνει ακριβώς το 6/12, που βγαίνει από τον πολλαπλασιασμό.

δ) Μήπως χρησιμοποιείτε κάποιο άλλο μοντέλο;

Άννα: Χρησιμοποιώ την πίτα.
Ιωάννα: Όχι.
Βλάσης: Ναι (προσπάθησε να σχεδιάσει δύο διαφορετικά σχήματα επηρεασμένος από ένα πρόγραμμα στο φωτόδεντρο για τη διαίρεση κλασμάτων, στη συνέχεια ανέφερε ότι αυτά πρέπει να μπουν το ένα μέσα στο άλλο αλλά τελικά δεν μπόρεσε να ολοκληρώσει την αναπαράσταση).
Δήμος: Όχι
Νικηφόρος: Όχι
Φαίη: Ναι χρησιμοποιώ. Χωρίζω σε 8 κομμάτια, γιατί το 8 είναι πολλαπλάσιο του 4…
Ελένη: Όχι. Ίσως να πάρω πούλιες σε διαφορετικά χρώματα.
Μαργαρίτα: Όχι
Παναγιώτα: Όχι
Δήμητρα: Όχι
Ελευθερία: Την πίτσα.
Ζήνα: Όχι
Μιχαέλα: Τον κύκλο.
Γρηγορία: Όχι. Θα ψάξω κάτι ψηφιακό.

Ε5

Ένας δάσκαλος της Ε΄ Δημοτικού έδωσε το παρακάτω πρόβλημα στην τάξη του:

Ο Γιάννης αγοράζει 3/4 του κιλού κιμά. Χρησιμοποιεί το 1/3 για να φτιάξει κεφτεδάκια και το υπόλοιπο μέρος χρησιμοποιείται για την παρασκευή σάλτσας μπολονέζ. Πόσο κιμά χρησιμοποιεί για τα κεφτεδάκια;

α) ***Ο Κώστας έδωσε μια λανθασμένη λύση σε αυτό πρόβλημα. Από την εμπειρία σας, τι λάθος μπορεί να έκανε το παιδί;***

Άννα: Να έκανε τα κλάσματα ομώνυμα και μετά να τα πολλαπλασίασε.
Ιωάννα: Μπορεί να έκανε λάθος και να πήρε το 1/4 από τα 3/4.
Βλάσης: Να πήρε το 1/3 του κιλού.
Δήμος: Να πήρε το 1/3 του κιλού, όχι της ποσότητας.
Νικηφόρος: Δεν ξέρω.
Τερέζα: Έκανε αφαίρεση την ποσότητα του κιμά από την αρχική ποσότητα, ενώ δεν χρειάζεται γιατί λέει ότι χρησιμοποίησε το 1/3. Το σωστό είναι να βρω τα 3/4 του κιλού πόσα γραμμάρια είναι και μετά να βρω το 1/3 αυτών των γραμμαρίων.
Φαίη: Να υπολόγισε για τη σάλτσα, αντί για τα κεφτεδάκια.
Ελένη: 3/4 – 1/3. Αφαίρεσε. Το παιδί σκέφτηκε ότι αφού στο πρόβλημα έβγαλε μια ποσότητα, θα κάνει αφαίρεση.
Μαργαρίτα: Να μην τα έκανε δεκαδικούς.
Παναγιώτα: Να μέτρησε το 1/3 ολόκληρου του κιλού.
Δήμητρα: Δεν ξέρω.
Ελευθερία: Μπορεί να έκανε διαίρεση, επειδή μπερδεύτηκε με τους φυσικούς, που όταν ψάχνω μέρος κάνω διαίρεση. Δηλαδή να έκανε 3/4 : 1/3.
Ζήνα: Να έκανε 3/4 x 1/3 και να μην δούλεψε το κιλό.
Μιχαέλα: Το λάθος είναι να βρουν το 1/3 του κιλού.
Γρηγορία: Να απαντήσει με γραμμάρια.

β) <u>(αν δεν αναφερθεί από τον εκπαιδευτικό)</u> **Η Σοφία έγραψε αυτή τη λύση στο τετράδιό της: 3/4 – 1/3 = 9/12 – 4/12 = 5/12 του κιλού κιμά**
- Πώς πιστεύετε ότι σκέφτηκε αυτό το παιδί;

Άννα: Έκανε λάθος και αφαίρεσε από τον κιμά το μέρος.
Ιωάννα: Έκανε λάθος. Έπρεπε να χωρίσει τα 3, όχι τα 4.
Βλάσης: Έκανε αφαίρεση. Μιλάμε για μέρος, όχι για ποσότητα. Έχω τα 3/4 του κιλού και το 1/3 του τετάρτου.
Δήμος: Γιατί θεώρησε ότι τα 3/4 είναι όλη η ποσότητα και αφαίρεσε όλη την ποσότητα.
Νικηφόρος: Σωστή σκέψη.
Φαίη: Αφαιρεί αυτό που χρησιμοποίησε, ενώ στην ουσία είναι αυτό που πρέπει να κρατήσει.
Μαργαρίτα: Η πράξη είναι σωστή, γιατί αφού ζητάει το υπόλοιπο πρέπει να κάνουμε αφαίρεση. Το λάθος είναι ότι έγραψε «του κιλού κιμά», ενώ στην πραγματικότητα αυτό είναι που χρησιμοποιήθηκε για τη σάλτσα μπολονέζ.
Παναγιώτα: Αυτή σκέφτηκε ότι από το όλο που είχε αγοράσει, αφαίρεσε αυτό που είναι για τα κεφτεδάκια. Νομίζω είναι λάθος, γιατί έτσι βρίσκω τι έμεινε, όχι τι χρησιμοποίησε.
Δήμητρα: Ναι, μπορεί να γίνει και έτσι. Σκέφτηκε ότι από το ποσό που έχει βγάζει ένα μέρος.
Ελευθερία: Είναι λάθος. Μπερδεύτηκε επειδή λέει ότι χρησιμοποιεί κάτι από ένα μέρος.
Ζήνα: Δεν κατάλαβε την πράξη.
Μιχαέλα: Δεν ξέρω. Είναι λάθος. Δεν έχει βρει το μέρος. Βγάζω το 1/3 από το 3/4 γιατί χρησιμοποίησε μόνο αυτό. Έμεινε το υπόλοιπο. Το 5/12 είναι το υπόλοιπο.
Γρηγορία: Δεν είναι σωστό. Έπρεπε να κάνει 3/4 x 1/3. Αφού είναι η μία ποσότητα μέσα στην άλλη. Δεν μπορείς να τα πάρεις ξεχωριστά. 3/12 είναι το σωστό.

γ) Τέσσερα παιδιά έγραψαν μόνο το τελικό αποτέλεσμα στα τετράδιά τους. Πώς πιστεύετε ότι κατέληξε κάθε παιδί σε αυτό το αποτέλεσμα; Είναι σωστά τα αποτελέσματα;

-Θωμάς: 36/12 του κιλού

Άννα: Έκανε ομώνυμα και πολλαπλασίασε τους αριθμητές. Λάθος.
Ιωάννα: Δεν ξέρω. Λάθος.
Βλάσης: Έκανε ομώνυμα και πολλαπλασίασε τους αριθμητές. Λάθος.
Δήμος: Τα έκανε ομώνυμα και πολλαπλασίασε τους αριθμητές. Λάθος.
Νικηφόρος: Δεν ξέρω. Λάθος.
Τερέζα: Τα έκανε ομώνυμα και πολλαπλασίασε τους αριθμητές. Λάθος.
Φαίη: Τα έκανε ομώνυμα και πολλαπλασίασε τους αριθμητές. Λάθος.
Ελένη: Το 36/12 είναι σωστό. Αποτυπώνει τον αρχικό κιμά και όχι αυτό που έμεινε. Πολλαπλασίασε τους παρονομαστές, και πήρε τον παρονομαστή τόσες φορές όσες και ο ένας αριθμητής.
Μαργαρίτα: Δεν ξέρω. Λάθος.
Παναγιώτα: Δεν ξέρω. Λάθος.
Δήμητρα: Λάθος. Τα έκανε ομώνυμα και πολλαπλασίασε. Αλλά γιατί πολλαπλασίασε; Δεν είναι σωστό να πολλαπλασιάσει.
Ελευθερία: Το 1/3 το έκανε ισοδύναμο, αλλά δεν ξέρω. Λάθος.
Ζήνα: Δεν ξέρω. Λάθος.
Μιχαέλα: Δεν ξέρω. Λάθος.
Γρηγορία: Δεν ξέρω. Λάθος.

-Μαρία: 250 γραμμάρια κιμά

Άννα: Είναι λάθος γιατί χρησιμοποίησε το 1/3 κατευθείαν του κιλού.
Ιωάννα: Είναι λάθος, γιατί έκανε πολλαπλασιασμό και μετά βρήκε σε γραμμάρια.
Βλάσης: Είναι σωστό. Πήρε τα 3/4 από το κιλό και βρήκε 750 γραμμάρια, και μετά πήρε το 1/3 από τα 750 γραμμάρια, δηλαδή 250 γραμμάρια.
Δήμος: Είναι πολύ σωστό. Βρήκε σε γραμμάρια.
Νικηφόρος: Είναι λάθος. Προσπάθησε να βρει το μέρος.
Τερέζα: Σωστό. Χώρισε το κιλό σε 4 κομμάτια και πήρε τα 3 που είναι 750 γραμμάρια, και μετά χώρισε σε 3 και πήρε το 1 κομμάτι που είναι 250 γραμμάρια.
Φαίη: Σωστό. Έκανε την πράξη με αναγωγή στη μονάδα.
Ελένη: Είναι σωστό. Προσπάθησε να αναγάγει τα κιλά σε γραμμάρια.
Μαργαρίτα: Είναι σωστό. Το έκανε με σχήμα. Έφτιαξε έναν κύκλο και τον χώρισε σε 4 και μετά πήρε τα 3 και μετά πήρε το 1.
Παναγιώτα: Σωστό. Χώρισε το κιλό σε 4 μέρη και βρήκε 250 γραμμάρια.
Δήμητρα: Ναι μεν έκανε το κιλό διά 4 όπως έπρεπε, αλλά μετά πήρε το 1/3 του κιλού, όχι τα 3/4. Είναι λάθος.

Ελευθερία: Είναι το σωστό. Τα 3/4 του κιλού είναι 750 γραμμάρια και χρησιμοποίησε το 1/3, δηλαδή 250 γραμμάρια.
Ζήνα: Μια χαρά. Υπολόγισε το μέρος του κιλού.
Μιχαέλα: Είναι σωστό. Το 250 είναι τα 3/12 του κιλού. Έκανε τη διαίρεση και το έγραψε με γραμμάρια.
Γρηγορία: Θεώρησε ότι τα 3/4 του κιλού είναι 750 γραμμάρια, και άρα το 1/3 των 750 γραμμαρίων είναι 250 γραμμάρια. Δεν είναι σωστό.

-Αντώνης: 4/9 του κιλού

Άννα: Πρόσθεση. Λάθος.
Ιωάννα: Δεν ξέρω. Λάθος.
Βλάσης: Δεν ξέρω. Λάθος.
Δήμος: Δεν ξέρω. Λάθος.
Νικηφόρος: Δεν ξέρω. Λάθος.
Τερέζα: Σωστό.
Φαίη: Είναι λάθος. Αντέστρεψε τους όρους του 3/4 και έκανε πολλαπλασιασμό.
Ελένη: Έκανε χιαστή. Είναι λάθος.
Μαργαρίτα: Δεν ξέρω. Λάθος.
Παναγιώτα: Έκανε σταυρωτά πολλαπλασιασμό. Είναι λάθος.
Δήμητρα: Είναι λάθος. Έκανε χιαστή πολλαπλασιασμό.
Ελευθερία: Έκανε ισοδυναμία αλλά είναι λάθος.
Ζήνα: Δεν ξέρω. Λάθος.
Μιχαέλα: Πολλαπλασίασε χιαστή. Λάθος.
Γρηγορία: Χιαστή πολλαπλασιασμό. Λάθος.

-Ελένη: 3/12 του κιλού κεφτεδάκια

Άννα: Είναι σωστό.
Ιωάννα: Είναι λάθος, γιατί έκανε πολλαπλασιασμό.
Βλάσης: Έκανε πολλαπλασιασμό, αλλά έγραψε τα κεφτεδάκια, αντί για κιλό.
Δήμος: Τα 3/12 δεν είναι σωστό, γιατί πήρε το 1/3 του κιλού, όχι την ποσότητα.
Νικηφόρος: Είναι σωστό, αλλά δεν ξέρω.
Τερέζα: Νομίζω τα 3/12 είναι σωστό, γιατί 3/12 του κιλού είναι 250 γραμμάρια.
Φαίη: Τα 3/12 δεν είναι σωστό γιατί έκανε πολλαπλασιασμό τα κλάσματα μεταξύ τους και το κεφτεδάκια δεν είναι σωστό, γιατί έπρεπε να λέει «κιμά για κεφτεδάκια».
Ελένη: Το 3/12 είναι σωστό. Αλλά «του κιλού» που γράφει εκεί είναι λάθος. Έπρεπε να γράφει του μέρους.
Μαργαρίτα: Τα 3/12 είναι λάθος.
Παναγιώτα: Νομίζω έκανε πολλαπλασιασμό τους αριθμητές μεταξύ τους και τους παρονομαστές μεταξύ τους. Είναι λάθος αυτό.
Δήμητρα: Είναι εντελώς λάθος. Και τα κεφτεδάκια είναι λάθος, και το 3/12. Τα έκανε ομώνυμα αλλά δεν ξέρω πώς σκέφτηκε.
Ελευθερία: Είναι σωστό γιατί 3:12 = 250. Έκανε ισοδυναμία. 3/4 x 1/3 = 3/12. Είναι και αυτό σωστό. Αλλά η ερώτηση ρωτάει πόσα κιλά, άρα έπρεπε να απαντήσει σε γραμμάρια, όχι με κλάσμα.
Ζήνα: Έκανε σωστά τον πολλαπλασιασμό. Η λύση είναι σωστή.
Μιχαέλα: Είναι σωστό.
Γρηγορία: Έκανε πολλαπλασιασμό. Σωστό.

Ε6

Ένας ξυλουργός μετράει το μήκος μιας σανίδας με ένα ραβδί και το βρίσκει ίσο με 18 ραβδιά. Τι θα έβρισκε, αν το μετρούσε με τα 2/3 του ραβδιού;

α) Η Λίνα έδωσε μια λανθασμένη λύση στο πρόβλημα αυτό. Από την εμπειρία σας, τι λάθος μπορεί να έκανε η Λίνα;

Άννα: Πολλαπλασιασμό.
Ιωάννα: Πολλαπλασιασμό. Δεν ξέρω. Αυτό γίνεται με πολλά βήματα, όχι μόνο με μια πράξη.
Βλάσης: Να είπε τα 2/3 του 18.
Δήμος: Δεν ξέρω.

Νικηφόρος: Δεν ξέρω.
Τερέζα: Να βρήκε τα 2/3 του 18. Πρέπει να βρει τα 2/3 του αρχικού ραβδιού. Αλλά δεν λέει τι μήκος έχει για να το βρούμε. Το 12 είναι λάθος γιατί αφού μειώνεις την ποσότητα πρέπει να βρεις λιγότερα ραβδιά.
Φαίη: Δεν ξέρω.
Ελένη: Δεν ξέρω. Μπορεί να έκανε πρόσθεση όλα τα κομμάτια.
Μαργαρίτα: Δεν ξέρω.
Παναγιώτα: Εγώ θα έκανα πολλαπλασιασμό 18 x 2/3 = 12, αλλά καταλαβαίνω ότι είναι λάθος, επειδή πρέπει να βρω περισσότερα ραβδιά. Αλλά δεν ξέρω τι να κάνω.
Ελευθερία: Δεν ξέρω.
Δήμητρα: Το ραβδί είναι μια αυθαίρετη μονάδα και δεν μπορεί να λυθεί το πρόβλημα. Σίγουρα θα έβρισκε παραπάνω ραβδιά. Αλλά πώς; Το λάθος που μπορεί να έκανε είναι να υπολόγισε τα 2/3 του 18.
Ζήνα: Να έκανε πρόσθεση; Πολλαπλασιασμός είναι η σωστή λύση.
Μιχαέλα: Να έκανε πολλαπλασιασμό από κεκτημένη ταχύτητα. (μετά από σκέψη και σημειώσεις) Το σωστό είναι 27 ραβδιά. Αλλά δεν ξέρω πώς το βρίσκεις. Να έτσι (δείχνει σχεδιασμένη αναπαράσταση).
Γρηγορία: Δεν ξέρω.

β) <u>(αν δεν αναφερθεί από την εκπαιδευτικό)</u> Ο Μιχάλης έγραψε στο τετράδιό του: Θα έβρισκε 2/3 x 18 = 12.

Με άριστα το 5, τι βαθμό θα δίνατε σε αυτή τη λύση; Γιατί;

Βλάσης: Λάθος. Δεν κατάλαβε τίποτα.
Δήμος: Άριστα. Είναι πανέξυπνος.
Νικηφόρος: Σωστό. 5.
Φαίη: Σωστά. Αφού μέτρησε με τα 2/3 τότε πρέπει να λογαριάσει τα 2/3 του 18 = 12. Άριστα.
Ελένη: Άριστα. Είναι σωστό.
Μαργαρίτα: Σωστά έκανε πολλαπλασιασμό. Αλλά… Περίμενε… Το 12 είναι μικρότερο του 18, άρα δεν είναι σωστό. Δεν ξέρω όμως τι πρέπει να κάνω.
Ελευθερία: Δεν είναι σωστό το 2/3 x 18, γιατί νόμιζε ότι τα 18 είναι ένα ραβδί.
Ζήνα: Άριστα. Κουράστηκα.
Γρηγορία: Και εγώ αυτό σκέφτηκα, αλλά είναι λάθος. Λογικά θα πρέπει να είναι πιο πολλά τα ραβδιά που χωράνε στη σανίδα, όχι λιγότερα, αλλά δεν ξέρω. Αλλά πρέπει να κάνω πολλαπλασιασμό, άρα 12. Δεν ξέρω. Δεν ξέρουμε πόσο είναι το ένα ραβδί.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2: Ερευνητικό εργαλείο

(Διευκρίνιση: Κάθε έργο δίνεται στους συμμετέχοντες σε διαφορετική κόλλα Α4.)

Ε1

Σε μια τάξη Στ΄ Δημοτικού, η δασκάλα ρωτάει τους μαθητές αν ξέρουν να βρουν το 1/5 του 30 και με ποια πράξη το βρίσκουν. Ο Γιάννης απαντά: «Είναι εύκολο, είναι το 6. Το βρίσκουμε με διαίρεση, 30 δια 5 ίσον 6.».

- Πώς θα συνεχίζατε αυτή τη συζήτηση, αν ήσασταν στη θέση της δασκάλας;

(Αν δεν αναφερθεί:) *Η δασκάλα αναγνωρίζει ότι ο Γιάννης βρήκε το σωστό αποτέλεσμα, και στη συνέχεια ρωτά με ποια πράξη μπορεί να βρεθεί τα 2/5 του 30.*

- Γιατί πιστεύετε ότι συνεχίζει με αυτόν τον τρόπο τη συζήτηση η δασκάλα; Τι προσπαθεί να επιτύχει;
- Ποιες απαντήσεις θα περιμένατε από τα παιδιά;

(Αν δεν αναφερθεί:) *Η Κατερίνα απαντά: «Μπορώ να το υπολογίζω. Κάνω πρώτα 30 δια 5, ίσον 6. Μετά πολλαπλασιάζω με το 2 – 6 επί 2 ίσον 12».*

- Πώς θα συνεχίζατε αυτή τη συζήτηση, αν ήσασταν στη θέση της δασκάλας; Με ποιο στόχο;

Ε2

Θέλετε να δώσετε στα παιδιά της Στ΄ τάξης ένα παράδειγμα προβλήματος που αντικατοπτρίζει την πράξη 3/4 x 5/7.

- Τι παράδειγμα δίνετε;
- Μπορείτε να δώσετε ένα διαφορετικό παράδειγμα;

(Αν δεν αναφερθεί:) *Ένας συνάδελφος έδωσε στην Ε΄ τάξη ως παράδειγμα το εξής πρόβλημα: «Το μήκος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 3/4 του μέτρου και το πλάτος του είναι 5/7 του μέτρου. Πόσο είναι το εμβαδόν του;»*

- Είναι αυτό ένα καλό παράδειγμα για την περίπτωση αυτή; Είναι παρόμοιο με αυτό που δώσατε; Εξηγείστε γιατί.

Ε3

Μια δασκάλα δίνει κάθε βδομάδα ένα «μαθηματικό γρίφο» στα παιδιά της Στ΄ τάξης. Αυτή την εβδομάδα βρήκε αυτόν τον «γρίφο» και αναρωτιέται αν είναι κατάλληλος για να τον δώσει στην τάξη της.

- Τι θα τη συμβουλεύατε; Γιατί;

α) Μπορείτε να δείτε τα 3/5 σε αυτό το σχήμα;

β) Μπορείτε να δείτε τα 5/3 σε αυτό το σχήμα;

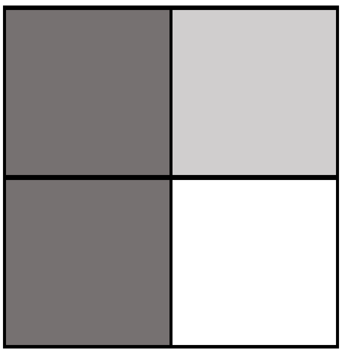
γ) Μπορείτε να δείτε τα 5/3 του 3/5;

δ) Μπορείτε να δείτε τα 2/3 του 3/5;

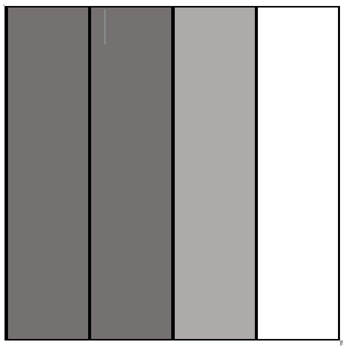
Ε4

Σε μια τάξη Ε΄ Δημοτικού, ζητήθηκε από τα παιδιά να αναπαραστήσουν το 2/3 του 3/4. Παρακάτω φαίνονται όλες οι διαφορετικές απαντήσεις που προέκυψαν από τα παιδιά.

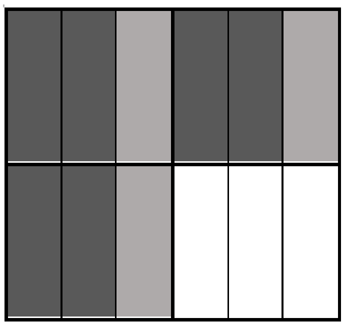
α)



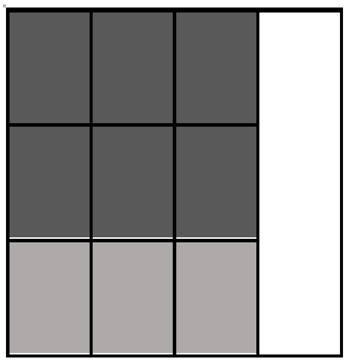
β)



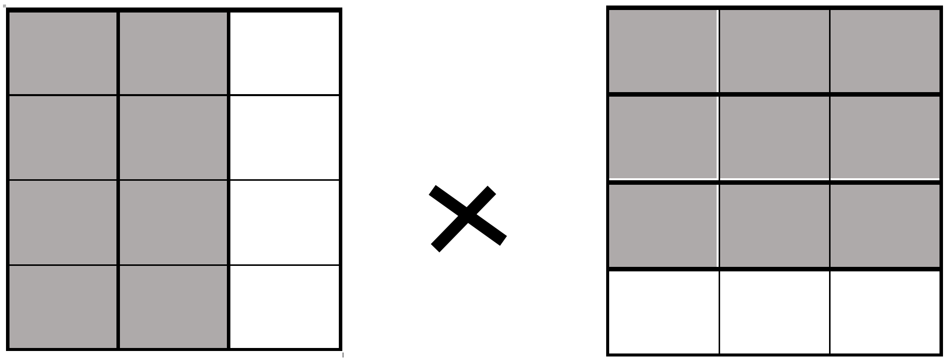
γ)



δ)



ε)



- Μπορείτε να εξηγήσετε πώς σκέφτηκε κάθε παιδί;
- Είναι σωστές;
- Υπάρχει κάποια αναπαράσταση που θεωρείτε ότι δεν είναι χρήσιμη;
- Ποια θεωρείτε ότι είναι η πιο χρήσιμη αναπαράσταση που θα μπορούσατε να αξιοποιήσετε για το μάθημά σας και με άλλα κλάσματα;
- Μήπως χρησιμοποιείτε κάποιο άλλο μοντέλο;

Ε5

Ένας δάσκαλος της Ε΄ Δημοτικού έδωσε το παρακάτω πρόβλημα στην τάξη του. «Ο Γιάννης αγοράζει 3/4 του κιλού κιμά. Χρησιμοποιεί το 1/3 για να φτιάξει κεφτεδάκια και το υπόλοιπο μέρος το χρησιμοποιεί για την παρασκευή σάλτσας μπολονέζ. Πόσα κιλά κιμά χρησιμοποιεί για τα κεφτεδάκια;»

α) Ο Κώστας έδωσε μια λανθασμένη λύση σε αυτό πρόβλημα. Από την εμπειρία σας, τι λάθος μπορεί να έκανε το παιδί;

(Αν δεν αναφερθεί από τον εκπαιδευτικό:) *Η Αρετή έγραψε αυτή τη λύση στο τετράδιό της: «3/4 – 1/3 = 9/12 – 4/12 = 5/12 του κιλού κιμά»*

- Πώς πιστεύετε ότι σκέφτηκε αυτό το παιδί;

β) Τέσσερα παιδιά έγραψαν μόνο το τελικό αποτέλεσμα στα τετράδιά τους.

Θωμάς: 36/12 του κιλού

Μαρία: 250 γραμμάρια κιμά

Αντώνης: 4/9 του κιλού

Ελένη: 3/12 του κιλού κεφτεδάκια

- Πώς πιστεύετε ότι κατέληξε κάθε παιδί σε αυτό το αποτέλεσμα; Είναι σωστό;

Ε6

Ένας ξυλουργός μετράει το μήκος μιας σανίδας με ένα ραβδί και το βρίσκει ίσο με 18 ραβδιά. Τι θα έβρισκε, αν το μετρούσε με τα 2/3 του ραβδιού; Η Λίνα έδωσε μια λανθασμένη λύση στο πρόβλημα αυτό. Από την εμπειρία σας, τι λάθος μπορεί να έκανε η Λίνα;

- Η Λίνα έδωσε μια λανθασμένη λύση στο πρόβλημα αυτό. Από την εμπειρία σας, τι λάθος μπορεί να έκανε η Λίνα;

(αν δεν αναφερθεί:) *Ο Μιχάλης έγραψε στο τετράδιό του «Θα έβρισκε 2/3 x 18 = 12».*

- Με άριστα το 5, τι βαθμό θα δίνατε σε αυτή τη λύση; Γιατί;