ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΣΤΗ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Μαθηματική εκπαίδευση Β΄ Ηλικιακού Κύκλου (13-18 χρόνων)

Διπλωματική Εργασία

Διδασκαλία και μάθηση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης με την αξιοποίηση της ιστορικής γεωμετρικής προσέγγισης επίλυσής της

Δασόπουλος Αλέξανδρος, ΑΕΜ : 1048

Επιβλέπων καθηγητής: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής

Εξεταστές: Βαμβακούση Ξένια, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Χρήστου Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Φλώρινα, Μάρτιος 2023

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Νικολαντωνάκη Κωνσταντίνο για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, την καθοδήγηση που μου παρείχε και την εν γένει άριστη επικοινωνία και συνεργασία καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας.

Ακόμη, να ευχαριστήσω την καθηγήτρια κα Βαμβακούση Ξένια και τον καθηγητή κ. Χρήστου Κωνσταντίνο για την τιμή να συμμετέχουν στην επιτροπή εξετάσεων, καθώς και για τις επιστημονικές τους επισημάνσεις.

Τέλος, να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τους μαθητές/-τριές μου για την πρόθυμη συμμετοχή τους και το πραγματικό τους ενδιαφέρον.

Δασόπουλος Αλέξανδρος

Κατερίνη, Μάρτιος 2023

Περιεχόμενα

Κατάλογος εικόνων

Κατάλογος πινάκων

Περίληψη

Κεντρικός στόχος της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση των δυνητικών μαθησιακών ευκαιριών που προκύπτουν από τη διδακτική αξιοποίηση της ιστορικής γεωμετρικής προσέγγισης επίλυσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης και ειδικότερα της βαβυλωνιακής στοιχειώδους Γεωμετρίας και της αραβικής μεθόδου του Al-Khwarizmi. Στη διδακτική παρέμβαση συμμετείχαν 43 μαθητές της Α’ τάξης του Πρότυπου ΕΠΑΛ Κατερίνης και διερευνήθηκαν οι δυνατότητες τους να μετασχηματίζουν μαθηματικές εκφράσεις στις διάφορες μορφές αναπαράστασής τους (λεκτική, αριθμητική, αλγεβρική, γεωμετρική) και η αποτελεσματικότητα της χρήσης διαγραμμάτων κατά την επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού, καθώς και κατά την επαναανακάλυψη του τετραγωνικού τύπου. Οι μαθητές ταξινομήθηκαν σε ομάδας με βάση την επίδοσή τους σε ένα σχετικό με τις εξισώσεις διαγνωστικό τεστ. Κατόπιν, εργάστηκαν σε ομάδες με 4 φύλλα εργασίας σχεδιασμένα σύμφωνα με τις ανάγκες της έρευνας, ενώ στο τέλος υπήρξε και ατομική αξιολόγηση των μαθητών. Τα αποτελέσματα της παρέμβασης έδειξαν ότι η γεωμετρική προσέγγιση κατασκευής και επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων μέσω της εφαρμογής ιστορικών διαγραμμάτων μπορεί να είναι αποτελεσματική, ωστόσο μόνο μαθητές με υψηλή μαθηματική ικανότητα επιτυγχάνουν την επαναανακάλυψη του τετραγωνικού τύπου εργαζόμενοι σε πιο αφηρημένο μαθηματικό πλαίσιο.

Λέξεις κλειδιά: Ιστορία των Μαθηματικών, δευτεροβάθμια εξίσωση, πολλαπλές μορφές αναπαράστασης εξίσωσης, βαβυλωνιακή απλοϊκή - στοιχειώδης Γεωμετρία, Al-Khwarizmi.

Abstract

The general aim of this master thesis is the investigation of the potential learning opportunities arising from the didactic use of the historical geometric approach to solving quadratic equations and in particular the Babylonian Naive Geometry and the Arabic method of Al-Khwarizmi. The participants in the teaching intervention were 43 first grade students of the Model Vocational High School of Katerini. We examined their abilities to transform mathematical expressions in their various forms of representation (verbal, arithmetic, algebraic, geometric) and the effectiveness of the use of diagrams when solving quadratic equations and in the quadratic formula reinvention. Students were assigned to groups according to their performance on a solving equations diagnostic test. Then, they worked in groups with 4 worksheets designed according to the research needs. Finally, the students' performance was assessed individually too. The results of this intervention showed that the geometric approach of constructing and solving quadratic equations by using historical diagrams can be effective but only students with high mathematical ability achieve the quadratic formula reinvention working in a more abstract mathematical context.

Keywords: History of Mathematics, quadratic equation, multiple representations of equations, Babylonian Naive Geometry, Al-Khwarizmi.

Εισαγωγή

Η δευτεροβάθμια εξίσωση και η εξίσωση γενικότερα ως θεμελιώδης μαθηματική έννοια, αλλά και εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων σε διάφορους τομείς των Μαθηματικών, καθώς και άλλων επιστημονικών κλάδων, αποτελεί δικαίως σημαντικό μέρος της διδασκαλίας των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση με την αφιέρωση σημαντικών διδακτικών ωρών για την μελέτη της.

Ωστόσο, σε αυτήν την πορεία διδασκαλίας και μάθησης παρατηρούνται γνωστικά εμπόδια τα οποία οφείλονται τόσο στις γενικότερες δυσκολίες των μαθητών στον τομέα της Άλγεβρας και της μετάβασης σε αυτήν από την Αριθμητική (Davis, 1975· Carpenter, 1981· Booth, 1988· Sfard & Linchevski, 1994· Λεμονίδης 1996· Δραμαλίδης & Σακονίδης, 2006), όσο και σε ειδικότερες που σχετίζονται με την εκμάθηση των διάφορων μεθόδων επίλυσής τους, οι οποίες φαίνεται να διατηρούνται και στις τάξεις του Λυκείου (Didis et al., 2011· Tall et al., 2014· Makonye & Nhlanhla, 2014· Godden et al., 2013· Nielsen, 2015· López, 2016· Kabar, 2018), καθιστώντας τελικά την δευτεροβάθμια εξίσωση ένα δύσκολο πεδίο του Α.Π.Σ. των Μαθηματικών.

Στην προσπάθεια βελτίωσης του διδακτικού και μαθησιακού αποτελέσματος ο ρόλος του οπτικού γραμματισμού και συλλογισμού έχει αποτελέσει αντικείμενο πολλών ερευνών (Bishop, 1989· Presmeg, 1992· Arcavi, 2003· Stylianou & Silver, 2004· English, 2013· Nardi, 2014). Η νοηματοδότηση των μαθηματικών εννοιών και των μεταξύ τους σχέσεων που προσφέρουν (Arcavi, 2003) εμπλέκουν τους μαθητές σε ενέργειες μεταξύ πολλαπλών αναπαραστάσεων που προάγουν την κατανόηση (Ainsworth et al., 1998). Το διάγραμμα ως εργαλείο οπτικοποίησης αποτελεί ανακαλυπτικό μέσο (Giaquinto, 1992· Giaquinto, 1994· Mancosu 2001· Mancosu, 2005), βοήθημα μνήμης και εξαγωγής συμπερασμάτων (Giardino, 2013a· Giardino, 2013b) όπου ο χρήστης συμπεραίνει κάτι νέο, τροποποιώντας και μετασχηματίζοντάς το. Ο συνδυασμός συμπληρωματικών πολλαπλών αναπαραστάσεων, που προωθείται από τη χρήση τους, καταργεί πολλά από τα επιμέρους μειονεκτήματά τους (Kaput 1992).

Η μελέτη του αλγεβρικού συλλογισμού χρησιμοποιώντας γεωμετρικά στοιχεία και μάλιστα ιστορικού περιεχομένου είναι εξαιρετικά χρήσιμη, καθώς αυτά είναι σαφέστερα αντικείμενα για τους περισσότερους μαθητές από τις αλγεβρικές εκφράσεις που συνήθως χρησιμοποιούνται (Katz & Barton, 2007) και βοηθούν στην επίλυση προβλημάτων που συνήθως λύνονται μόνο με τη χρήση της αλγεβρικής γλώσσας (Guevara-Casanova & Burgués-

Flamarich, 2018). Ειδικότερα, η αποτελεσματικότητα της γεωμετρικής προσέγγισης στην επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού έχει επισημανθεί σε σχετικές έρευνες (Fachrudin & Putri, 2014· Nielsen, 2015· Fachrudin et al., 2018· Herawaty et al., 2021), ενώ αναπτύσσεται και προτείνεται ένα σύνολο εκπαιδευτικών εργασιών για την αποτελεσματική κατανόηση και εκμάθηση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, με έμπνευση από τη βαβυλωνιακή προσέγγιση επίλυσής της και τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου του Al-Khwarizmi (Katz, 1997· Katz, 2000· Radford & Gerette 2000· Allaire & Bradley, 2001· Radford, 2001· Guevara-Casanova, 2012).

Κάτι παρόμοιο επιδιώκει και η παρούσα εργασία απαντώντας σε ερωτήματα σχετικά με τη δυνατότητα των μαθητών να μετασχηματίζουν μαθηματικές εκφράσεις στις διάφορες μορφές αναπαράστασής τους (λεκτική, αριθμητική, αλγεβρική, γεωμετρική) και την αποτελεσματικότητα χρήσης ιστορικών γεωμετρικών μεθόδων κατά την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων και κατά την επαναανακάλυψη του τετραγωνικού τύπου.

Το κύριο σώμα της εργασίας δομείται σε οκτώ κεφάλαια. Το πρώτο και δεύτερο αναφέρονται στον ρόλο, τους περιορισμούς και τα οφέλη της οπτικοποίησης και των διαγραμμάτων στην διδασκαλία και μάθηση γενικότερα και στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις ειδικότερα.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη ιστορική ανασκόπηση των βασικότερων σταθμών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης με τη μεγαλύτερη έμφαση να δίνεται εύλογα στα βαβυλωνιακά και αραβικά Μαθηματικά.

Το τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζει τον τρόπο διαπραγμάτευσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων στα ελληνικά προγράμματα σπουδών, στις οδηγίες διδασκαλίας και τα βιβλία του μαθητή και του διδάσκοντος στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο.

Στο πέμπτο κεφάλαιο εντοπίζονται βιβλιογραφικά οι δυσκολίες, τα λάθη και οι παρανοήσεις των μαθητών κατά την ενασχόλησή τους με τις αλγεβρικές έννοιες και ειδικότερα με τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις.

Τα επόμενα τρία κεφάλαια συνιστούν το μέρος της εμπειρικής έρευνας. Πιο συγκεκριμένα, με το έκτο γίνεται η παρουσίαση της όλης διαδικασίας διεξαγωγής της διδακτικής παρέμβασης, επεξηγούνται οι γενικότερες στοχεύσεις της, τα ερευνητικά ερωτήματα, καθώς και η μεθοδολογία της έρευνας, με τους διδακτικούς στόχους κάθε φύλλου εργασίας και κάθε φάσης της παρέμβασης.

Στο έβδομο κεφάλαιο καταγράφονται τα αποτελέσματα της έρευνας, ενώ ακολουθεί στο τελευταίο όγδοο κεφάλαιο η συζήτηση (συμπεράσματα) και οι περιορισμοί.

Κεφάλαιο 1ο: Οπτικός γραμματισμός και οπτικοποίηση

Ο ρόλος της οπτικοποίησης στα Μαθηματικά και τη μαθηματική εκπαίδευση έχει αποτελέσει αντικείμενο πολλών ερευνών (π.χ. Bishop, 1989· Presmeg, 1992· Arcavi, 2003· Stylianou & Silver, 2004· English, 2013· Nardi, 2014).

Γενικότερα, ως οπτικός γραμματισμός ορίζεται η ικανότητα να διαβάζεις, να ερμηνεύεις και να κατανοείς πληροφορίες που παρουσιάζονται σε εικονική ή γραφική απεικόνιση (Wileman, 1993). Ο οπτικός γραμματισμός συνδέεται με τον οπτικό συλλογισμό, ο οποίος ορίζεται ως η ικανότητα να μετατρέπεις πληροφορίες όλων των τύπων σε εικόνες, γραφικές αναπαραστάσεις ή άλλες μορφές που βοηθούν στην επικοινωνία των πληροφοριών και να συλλογίζεσαι μέσω αυτού του οπτικού μετασχηματισμού και της αντίστοιχης οπτικής επεξεργασίας (Wileman, 1993).

Οπτικοποίηση είναι η ικανότητα, η διαδικασία και το προϊόν δημιουργίας, ερμηνείας, χρήσης και αναστοχασμού σε εικόνες, απεικονίσεις, διαγράμματα, στο μυαλό μας, σε χαρτί ή με τεχνολογικά εργαλεία, με σκοπό την απεικόνιση και την επικοινωνία πληροφοριών, το συλλογισμό και την ανάπτυξη προηγουμένως άγνωστων ιδεών και ανώτερων νοημάτων. (Zimmermann & Cunningham, 1991· Arcavi, 2003).

Επιπλέον, μια οπτική μέθοδος επίλυσης είναι αυτή που περιλαμβάνει οπτικές απεικονίσεις (ένα νοητικό σχήμα που απεικονίζει οπτικές ή χωρικές πληροφορίες), με ή χωρίς διάγραμμα, ως ουσιαστικά μέρη της μεθόδου επίλυσης, ακόμη και αν χρησιμοποιούνται, επίσης, συλλογιστικές ή αλγεβρικές μέθοδοι επίλυσης (Presmeg, 1986).

Ο παραπάνω ορισμός της οπτικοποίησης τονίζει ότι, στην εκμάθηση των Μαθηματικών, η οπτικοποίηση μπορεί να είναι ένα ισχυρό εργαλείο για τη διερεύνηση μαθηματικών προβλημάτων και τη νοηματοδότηση των μαθηματικών εννοιών και των μεταξύ τους σχέσεων (Arcavi, 2003), ενώ η οπτικοποίηση επιτρέπει τη μείωση της πολυπλοκότητας στην περίπτωση μεγάλου πλήθους πληροφοριών (Rösken & Rolka, 2006). Για αυτό και σύμφωνα με τον Bishop (1989), έχει αξία η έμφαση στις οπτικές αναπαραστάσεις σε όλες τις πτυχές της τάξης των Μαθηματικών.

Σε ένα διαφορετικό πλαίσιο, η οπτικοποίηση συζητείται ως σημαντικό μέρος των λεγόμενων «εικόνων έννοιας» (concept images) (Tall & Vinner, 1981). Η εικόνα μιας έννοιας περιλαμβάνει οπτικές απεικονίσεις, ιδιότητες και εμπειρίες που αφορούν μια συγκεκριμένη μαθηματική έννοια. Για την κατανόηση μιας τυπικής μαθηματικής έννοιας απαιτείται από τον μαθητή να δημιουργήσει μια εικόνα έννοιας (concept image) για αυτήν. Ωστόσο, ο Vinner (2018) επισημαίνει ότι σε ορισμένες περιπτώσεις ο διαισθητικός τρόπος σκέψης και δράσης, μπορεί να αποτελεί μια καλή αρχή, αλλά τελικά δεν είναι πάντα ορθός, μπορεί να γίνει παραπλανητικός, γι’ αυτό και η μαθηματική σκέψη απαιτεί τον έλεγχο αυτών των διαισθητικών μεθόδων.

1.1 Περιορισμοί και δυσκολίες της οπτικοποίησης

Γενικότερα, οι περιορισμοί και οι δυσκολίες γύρω από την οπτικοποίηση, όπως και η απροθυμία, σε ορισμένες περιπτώσεις, για την εφαρμογή της έχουν συζητηθεί σε μεγάλο βαθμό (Arcavi, 2003· Stylianou & Silver, 2004). Ο Abraham Arcavi (2003), υπό την επίδραση του έργου των Eisenberg and Dreyfus (1991), προτείνει την ταξινόμηση των εμφανιζόμενων δυσκολιών σχετικά με την οπτικοποίηση σε τρεις κύριες κατηγορίες: τις «πολιτιστικές» (cultural), τις «γνωστικές» (cognitive) και τις «κοινωνιολογικές» (sociological). Όταν η οπτικοποίηση δρα σε εννοιολογικά «πλούσιες» απεικονίσεις, οι γνωστικές απαιτήσεις είναι σίγουρα υψηλές. Άλλωστε, ο συλλογισμός με μαθηματικές έννοιες σε οπτικό περιβάλλον μάθησης, σε αντίθεση με τις παραδοσιακές συμβολικές προσεγγίσεις, ενδέχεται να απενεργοποιεί τις όποιες «ασφαλείς» μαθηματικές διαδικασίες και βήματα (υπό την έννοια της προκύπτουσας γνώσης, λόγω συχνής εφαρμογής-εξάσκησης). Οπότε, ακόμα και από τους ίδιους τους μαθητές, οι οπτικές προσεγγίσεις μπορούν να απορριφθούν ως ασαφείς, ανακριβείς ή έστω ριψοκίνδυνες. Επιπλέον, η εκμάθηση κατανόησης, επεξεργασίας και ερμηνείας οπτικών αναπαραστάσεων, μετασχηματισμού τους σε άλλες μη οπτικές μορφές και εν τέλει ο αναπόφευκτος χειρισμός πολλαπλών αναπαραστάσεων είναι μια εννοιολογικά εκτενής, χρονοβόρα και γνωστικά απαιτητική για τους μαθητές διαδικασία (Arcavi, 2003).

Βεβαίως, ο σημαντικός ρόλος των πολλαπλών αναπαραστάσεων στο να προάγουν τη μάθηση έχει επισημανθεί σαφώς. Συνήθως, οι διαφορετικές αναπαραστάσεις εκφράζουν με μεγαλύτερη σαφήνεια διαφορετικές πτυχές των εννοιών που πραγματεύονται, κι έτσι οι πληροφορίες που λαμβάνονται από το συνδυασμό τους μπορούν να είναι περισσότερες από ό,τι με μία. Ακόμη, οι πολλαπλές αναπαραστάσεις περιορίζουν η μία την άλλη, έτσι ώστε το πλαίσιο των επιτρεπόμενων χειρισμών να γίνεται στενότερο, κάτι όχι απαραιτήτως αρνητικό. Επιπροσθέτως, οι μαθητές όταν απαιτείται να συσχετιστούν πολλαπλές αναπαραστάσεις μεταξύ τους, «αναγκάζονται» να εμπλακούν σε ενέργειες που προάγουν την κατανόηση (Ainsworth et al., 1998).

Μια «πολιτιστική» δυσκολία αναφέρεται στις πεποιθήσεις και τις αξίες που διατηρούνται για το τι είναι τα Μαθηματικά και τι σημαίνει να κάνεις Μαθηματικά, τι θεωρείται και είναι έγκυρο ή αποδεκτό και τι όχι (σε αυτό θα αναφερθούμε εκτενέστερα στη συνέχεια) (Arcavi, 2003).

Υπό τον όρο της «κοινωνιολογικής» δυσκολίας, περιλαμβάνονται αυτά που οι Eisenberg και Dreyfus (1991) θεωρούν ως ζητήματα διδασκαλίας. Υποστηρίζουν ότι η διδασκαλία συνεπάγεται και έναν διδακτικό μετασχηματισμό (κατά Chevallard, 1985), δηλαδή ότι η γνώση υφίσταται αναπόφευκτα μια αλλαγή όταν προσαρμόζεται από τον επιστημονικό/ακαδημαϊκό της χαρακτήρα σε διδάξιμη μορφή γνώσης. Σε αυτή τη διαδικασία μετασχηματισμού ενδέχεται να χαθούν ορισμένες κρίσιμες εννοιολογικές συνδέσεις που περιέχει η γνώση, γι’ αυτό και πολλοί δάσκαλοι μπορεί να πιστεύουν ότι οι διαδοχικές αναλυτικές αναπαραστάσεις, ενδέχεται να είναι παιδαγωγικά καταλληλότερες και πιο αποτελεσματικές (Arcavi, 2003). Ένα άλλο είδος «κοινωνιολογικής» δυσκολίας προκύπτει από την ίδια τη σχολική πραγματικότητα, όπου σχολεία και σχολικές τάξεις αποτελούνται, συνήθως, από μαθητές με διαφορετικό πολιτιστικό υπόβαθρο και διαφορετικό βαθμό οπτικού πλούτου (Arcavi, 2003).

Η οπτικοποίηση είναι μια δυναμική διαδικασία, ενώ το κύριο μέσο μετάδοσης της πληροφορίας που χρησιμοποιείται στα σχολικά βιβλία είναι ο γραπτός, στατικός λόγος, που δεν προσαρμόζεται εύκολα στις ανάγκες των διαδικασιών οπτικοποίησης. Με αυτό τον τρόπο παρουσιάζεται, συνήθως, η τελική εικόνα εφοδιασμένη με το σύνολο των στοιχείων πληροφορίας, δυσκολεύοντας την ερμηνεία τους από τους μαθητές. Αντίθετα, στην περίπτωση της οπτικοποίησης έχουμε κατά κανόνα σταδιακή εξαγωγή των στοιχείων της πληροφορίας και ερμηνείας τους (Arcavi, 2003).

Η Presmeg (1986) συσχετίζει τη χρήση διαγραμμάτων και με τον παράγοντα του χρόνου στη σχολική πραγματικότητα. Σε αυτήν, η επίδοση των μαθητών προσεγγίζεται κυρίως εξετασιοκεντρικά, μη ευνοώντας τη συνήθως χρονοβόρα εφαρμογή οπτικών μεθόδων μάθησης και διδασκαλίας, οπότε και τον οπτικό συλλογισμό.

Η Presmeg διαπίστωσε, ακόμη, ότι μαθητές υψηλότερων επιδόσεων είναι κατά κανόνα «μη οπτικοποιητές» (non-visualizers), ενώ οι μαθητές που έδειξαν προτίμηση στην οπτικοποίηση αντιμετώπιζαν, γενικά, δυσκολίες στα Μαθηματικά. Σύμφωνα με την Presmeg, τα τυπικά προγράμματα σπουδών και η διδακτική τους προσέγγιση δίνουν έμφαση σε μη οπτικές μεθόδους αφήνοντας τους οπτικοποιητές (visualizers) σε μειονεκτική θέση, θέτοντας, παράλληλα, ως ανοιχτό ερώτημα εάν αυτό το μη οπτικό μοτίβο σκέψης είναι επαρκές στο υψηλότερο επίπεδο όταν απαιτείται δημιουργική μαθηματική σκέψη.

1.2 Αιτιολογικός και ευρετικός ρόλος της οπτικοποίησης

Η είσοδος των οπτικών μέσων, όπως τα διαγράμματα, στην περιοχή της αιτιολόγησης και της μαθηματικής απόδειξης, έφερε τουλάχιστον δυσπιστία από πολλούς μαθηματικούς, οι οποίοι εναντιώνονταν στην προσφυγή σε «αναξιόπιστα» μέσα απόδειξης, υπέρ μιας αυστηρότερης προσέγγισης και της γλωσσικής ανάπτυξης των μαθηματικών, αλλά χωρίς, βεβαίως να αποκλείουν τη χρήση τους ως ευρετικά εργαλεία (Mancosu, 2005). Κεντρική θέση σε αυτό το ζήτημα κατέχει το αν οι οπτικές αναπαραστάσεις πρέπει να αντιμετωπίζονται ως συμπληρωματικά μέσα απόδειξης, ως αναπόσπαστο μέρος της απόδειξης ή αποτελούν οι ίδιες αποδείξεις (Nardi, 2014).

Η οπτικοποίηση φαινόταν (τουλάχιστον αρχικά) να χάνει τη δύναμή της στο πλαίσιο της αιτιολόγησης, ενώ επιτρέπονταν στο πλαίσιο της ανακάλυψης, ως κάτι που απλοποιεί τη γνώση (Mancosu, 2005). Χαρακτηριστικά οι Pasch και Dehn (1926) αναφέρουν πως η κατασκευή ενός σχήματος, γενικώς, δεν μπορεί να κριθεί ως απαραίτητη. Διευκολύνει, όμως, ουσιαστικά την κατανόηση σχέσεων σε ένα πρόβλημα (θεώρημα) και των κατασκευών που εφαρμόζονται κατά την επίλυσή (απόδειξή) του. Αποτελεί αποτελεσματικό εργαλείο για την ανακάλυψη συσχετισμών και κατασκευών, ωστόσο, το πρόβλημα (θεώρημα) επιλύεται (αποδεικνύεται) αληθινά μόνο όταν η επίλυσή (απόδειξή) του είναι εντελώς ανεξάρτητη του σχήματος (Pasch & Dehn 1926).

Με αυτή τη στάση θα συμφωνούσε και ο Hilbert, καθώς σε διαλέξεις του ανέφερε ότι η απόδειξη με τη βοήθεια ενός σχήματος μπορεί να γίνει πιο εύληπτη, οι ερμηνείες των βημάτων της ευκολότερες, ενώ θα μπορούσε να βοηθήσει στην ανακάλυψη νέων προτάσεων. Δεν αποτελεί, όμως, απαραίτητο στοιχείο της απόδειξης, ενώ μπορεί εύκολα να γίνει παραπλανητικό. Επομένως, στη χρήση των σχημάτων θα πρέπει να είναι κανείς ιδιαίτερα προσεκτικός, καθώς θα πρέπει να βεβαιώνεται κάθε φορά ότι οι ενέργειες που εφαρμόζονται σε αυτό παραμένουν σωστές από μια καθαρά λογική οπτική (Mancosu, 2005).

Μεγάλο ενδιαφέρον για την οπτικοποίηση παρουσιάζει το επιστημονικό έργο του Marcus Giaquinto (1992, 1994). Η θέση του Giaquinto, είναι ότι η γνωσιολογική λειτουργία της οπτικοποίησης στα Μαθηματικά μπορεί να υπερβεί την απλή ευρετική και να είναι στην πραγματικότητα ένα μέσο ανακάλυψης. Συνηθίζεται να συνδέεται η ανακάλυψη με το ευρετικό πλαίσιο δράσης. Αλλά η ανακάλυψη λαμβάνεται εδώ υπό την έννοια ότι «ανακαλύπτει κανείς μια αλήθεια φτάνοντας να την πιστέψει ανεξάρτητα, με έναν γνωσιολογικά αποδεκτό τρόπο». Το κριτήριο της ανεξαρτησίας έχει σκοπό να αποκλείσει περιπτώσεις στις οποίες κάποιος πιστεύει μια πρόταση, επειδή απλώς παρουσιάζεται έτοιμη (πχ. λέγεται) σε αυτόν. Υποστηρίζει, ακόμη, ότι μέσω διαδικασιών κατάλληλης οπτικοποίησης μπορεί κανείς να καταλήξει στην ανακάλυψη του αποτελέσματος ενός προβλήματος, ωστόσο θα πρέπει να εφαρμόσει τελικά έγκυρους τρόπους απόδειξης και αποδεκτούς τρόπους αιτιολόγησης, ώστε να προκύψει η τελική λύση. Βεβαίως, το σημαντικό για τον Giaquinto είναι η περιγραφή και εξέταση των αλληλεπιδράσεων μεταξύ της αντίληψης, της οπτικής απεικόνισης, των εννοιών και του σχηματισμού πεποιθήσεων και όχι τόσο η επιλογή κατάλληλων τύπων οπτικοποίησης που θα λειτουργήσουν ως αποδεικτικά μέσα, υπό αυστηρή-παραδοσιακή έννοια (Giaquinto, 1992· Giaquinto, 1994).

Αντιθέτως, η έρευνα που πραγματοποιήθηκε από τους Barwise και Etchemendy (1996) για τα οπτικά επιχειρήματα στη Λογική και στα Μαθηματικά κινητοποιείται σε μεγάλο βαθμό από τις θεμελιώδεις θεωρίες απόδειξης. Ενώ ο Giaquinto ασχολήθηκε κυρίως με την ανακάλυψη (υπό την έννοια που αναφέρεται παραπάνω), οι Barwise και Etchemendy επικεντρώνονται στην απόδειξη. Βεβαίως, επισημαίνουν το σημαντικό ευρετικό ρόλο των οπτικών αναπαραστάσεων, αλλά προχωρούν περαιτέρω, αναγνωρίζοντάς τες, υπό συνθήκες, και ως έγκυρες μορφές μαθηματικών αποδείξεων, εφόσον αποτελούν σύμφωνα με αυτούς μια επιπλέον μορφή γλώσσας και ενός ακόμη τρόπου μετάδοσης της πληροφορίας. Όπως τονίζουν και οι ίδιοι, αυτή η θεώρηση είναι αιρετική, καθώς αντιβαίνει σε αιώνες λογικής και μαθηματικής παράδοσης, όπου η έγκυρη συλλογιστική και συμπερασματολογία προκύπτουν μέσα από το πλαίσιο που διαμορφώνει η φυσική γλώσσα, υπηρετώντας μια λογοκεντρική κατά Sheffer (1926) προσέγγιση. Θεωρούν, ακόμη, ότι τα οπτικά συστήματα δεν είναι εγγενώς παραπλανητικά, ή τουλάχιστον όχι περισσότερο από ό,τι μπορεί να είναι και τα γλωσσικά συστήματα και ότι στο παραδοσιακό μοντέλο γλωσσικής αυστηρότητας μπορούμε τώρα να προσθέσουμε αυστηρές μορφές συμπερασμάτων σε μορφή διαγραμμάτων (Barwise, & Etchemendy, 1996).

Ο Mancosu (2001, 2005) κάνει διάκριση μεταξύ της οπτικοποίησης (visualization) και της διαγραμματικής συλλογιστικής (diagrammatic reasoning). Χρησιμοποιεί την οπτικοποίηση ως εργαλείο ανακάλυψης, με τον ίδιο τρόπο όπως ο Giaquinto (1992), ενώ αξιοποιεί το διαγραμματικό συλλογισμό ως εργαλείο παρουσίασης, με τον ίδιο τρόπο όπως οι Barwise και Etchemendy (1996). Από τη δική του πλευρά, ο Tennant (1984) υποστηρίζει ότι η απόδειξη είναι ένα συντακτικό αντικείμενο που αποτελείται μόνο από προτάσεις διατεταγμένες με πεπερασμένο και επιθεωρήσιμο τρόπο. Επίσης, ο Fischbein αναφέρει ότι στα Μαθηματικά, κάθε αποδεκτή μαθηματική πρόταση ή έννοια, θα πρέπει να ορίζεται ρητά. Έτσι, για τον θεμελιώδη λόγο ότι τα Μαθηματικά είναι ένα απαγωγικό, τυπικό και αυστηρό σύστημα, τα διαισθητικά μέσα δεν αναπαριστούν από μόνα τους μια μαθηματικώς αποδεκτή αιτιολόγηση, πόσο μάλλον απόδειξη, οπότε δεν αντικαθιστούν τη χρήση των αυστηρών και τυπικών μορφών απόδειξης (Fischbein, 1999).

Πολλές έρευνες, λοιπόν, ενώ αναγνωρίζουν ξεκάθαρα τους διαφορετικούς ρόλους της οπτικοποίησης στη μάθηση, τη διδασκαλία και την αιτιολόγηση και απόδειξη μαθηματικών προτάσεων, ταυτόχρονα, συνιστούν προσοχή στη χρήση των μέσων οπτικοποίησης, υπό την έννοια ότι δεν αποτελούν «πανάκεια» και ότι απλώς αποτελούν ένα μέρος της διαδικασίας μάθησης (Aspinwall et al. 1997).

Συνδυάζοντας κανείς την πρακτική δύναμη του πολυτροπικού συλλογισμού με τη σύγχρονη αυστηρή λογική αναμένεται να έχει θετικό αποτέλεσμα στη διδασκαλία. Ο γενικότερος στόχος είναι να επεκταθεί η περιοχή της συλλογιστικής, απελευθερώνοντάς τη από τη χρήση ενός και μόνο τρόπου αναπαράστασης. Άλλωστε, ο συλλογισμός είναι ετερογενής, αφού βασίζεται τόσο στη λεκτική όσο και στη μη λεκτική σκέψη. Και οι δύο είναι κρίσιμες στη διαδικασία της κατανόησης, αλλά ενώ η λεκτική έχει διερευνηθεί σε βάθος, η μελέτη της μη λεκτικής σκέψης πρέπει να βρει μια νέα συστηματοποίηση που θα προωθούσε μια περαιτέρω συζήτηση (Giardino, 2013a).

Κεφάλαιο 2ο: Διαγράμματα – πλεονεκτήματα και προβληματισμοί

Ένα διάγραμμα έχει συγκεκριμένο σκοπό να επιτελέσει, έχει σχεδιαστεί με γνώμονα μια συγκεκριμένη λειτουργία, δίνεται δηλαδή πάντα με κάποια σαφή επιδίωξη, η οποία πρέπει να προσδιοριστεί σαφώς, ώστε να διαβαστεί σωστά, να ερμηνευτεί και χρησιμοποιηθεί κατάλληλα (Giardino, 2013a· Giardino, 2013b).

Αυτή η λειτουργικότητα και το σύνολο των στοιχείων που ο χρήστης κατανοεί, είναι σημαντικά για τη λήψη του ίδιου του μηνύματος που μεταφέρεται από το διάγραμμα. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα διάγραμμα για να παρουσιάσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο και τρία τετράγωνα με μήκος πλευράς το μήκος κάθε αντίστοιχης πλευράς του τριγώνου. Καθώς η σχεδίαση γίνεται με το χέρι, το τελικό σχέδιο θα είναι μια προσέγγιση αυτού που οι γεωμετρικές έννοιες του ορθογώνιου τριγώνου και του τετραγώνου υπαγορεύουν. Ωστόσο, αν ο δευτερεύων στόχος της σχεδίασης ενός ορθογώνιου τριγώνου και των παράπλευρων τετραγώνων θεωρηθεί δεδομένος, τότε δεν θα υπάρχουν προβλήματα στην ανάγνωση του σχεδίου, παρόλο που δεν είναι ακριβές σύμφωνα με τους γεωμετρικούς ορισμούς και κανόνες (Giardino, 2013a· Giardino, 2013b).

Οι Larkin και Simon (1987) υποστηρίζουν ότι, για ορισμένους τύπους μαθηματικών εργασιών, η χρήση οπτικών αναπαραστάσεων μπορεί να έχει πλεονεκτήματα σε σχέση με τη χρήση άλλων αναπαραστάσεων και στις τρεις φάσεις του ανθρώπινου συστήματος επεξεργασίας πληροφοριών: αναζήτηση (search), αναγνώριση (recognition) και συμπέρασμα (inference) (Larkin & Simon, 1987).

Ένα διάγραμμα δεν είναι εικόνα, υπό την έννοια ενός οπτικού, αναγνωριστικού αντικειμένου, αλλά μια συγκεκριμένη μορφή αναπαράστασης που προορίζεται για τη διαχείριση ορισμένων δεδομένων, την εξαγωγή πληροφοριών ή κάποιου νέου συμπεράσματος από τη διαθέσιμη γνώση. Ως εκ τούτου, ένα διάγραμμα αποτελεί βοήθημα μνήμης ή εξαγωγής συμπερασμάτων (Giardino, 2013a· Giardino, 2013b).

Επιπλέον, μπορεί να έχει διττή φύση, να είναι, δηλαδή στατικό (static diagram) και να λειτουργεί ως βοήθημα μνήμης, με τον χρήστη απλώς να εξάγει ορισμένες πληροφορίες από αυτό, ή/και να είναι δυναμικό (dynamic diagram), όπου ο χρήστης εξάγει νέα πληροφορία, συμπεραίνει κάτι καινούργιο, τροποποιώντας το, μετασχηματίζοντάς το. Ο δυνητικός δυναμικός χαρακτήρας ενός διαγράμματος τονίζεται και από τον Fischbein (1987) στην περίπτωση που συνεπάγεται μια συγκεκριμένη διαδικασία και έναν πειραματισμό, ως συνέπεια της εφαρμογής αυτής της διαδικασίας (Fischbein, 1987).

Σύμφωνα με τον Polya (1945), για να λυθεί ένα πρόβλημα είναι πρώτα απαραίτητο να κατανοηθεί, καθώς μόνο τότε είναι δυνατό να επινοηθεί και να εφαρμοστεί ένα σχέδιο επίλυσής του. Για το σκοπό αυτό, ένα διάγραμμα ή μια εξωτερική αναπαράσταση γενικά μπορεί να βοηθήσει, καθώς μια λεπτομέρεια που απεικονίζεται στη φαντασία του χρήστη μπορεί να ξεχαστεί, αλλά η λεπτομέρεια που αποδίδεται στο χαρτί παραμένει. Για το λόγο αυτό, όταν ο χρήστης επιστρέφει στο διάγραμμα, τού υπενθυμίζει τις προηγούμενες παρατηρήσεις, γλιτώνοντάς του χρόνο και κόπο να θυμηθεί τις προηγούμενες σκέψεις του (Polya, 1945).

Από τη γενικότερη έρευνα σχετικά με την επίλυση προβλήματος συμπεραίνει κανείς ότι η χρήση οπτικών αναπαραστάσεων μπορεί να διευκολύνει την επίλυση προβλημάτων, προσφέροντας βοήθεια σε όλες τις φάσεις της διαδικασίας επίλυσης (Stylianou & Silver, 2004). Αν και μια οπτική αναπαράσταση μπορεί να περιέχει τον ίδιο όγκο πληροφοριών με κάποια άλλη αναπαράσταση, οι Larkin και Simon (1987) επισημαίνουν ότι ορισμένες σχέσεις (π.χ. οι χωρικές σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του προβλήματος) μπορεί να είναι οπτικά σαφέστερες, οπότε να οδηγήσει σε απλούστερες και αμεσότερες διαδικασίες εξαγωγής συμπερασμάτων. Ωστόσο, επειδή ακριβώς οι οπτικές αναπαραστάσεις μπορούν να φέρουν μεγάλο πλήθος πληροφοριών, ενδεχομένως να είναι δύσκολο να κατασκευαστούν και να ερμηνευτούν (Larkin & Simon, 1987). Σε αυτό το συμπέρασμα καταλήγει και ο Bishop (1986), ο οποίος τονίζει ότι ένα διάγραμμα μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκο και να συγκεντρώνει ένα σύνολο πληροφοριών που να μην γίνεται άμεσα κατανοητό, ειδικά σε άπειρους χρήστες του (Bishop, 1986).

Με την αξιοποίησή του ως μνημονικό εργαλείο συμφωνεί και ο Guzman (2002), ο οποίος ταυτόχρονα επισημαίνει τον προβληματισμό ότι, συνήθως, τα διαγράμματα απεικονίζουν καθαρά προσωπικές οπτικές, οι οποίες δύσκολα επικοινωνούνται σε άλλους, και μάλιστα σε περιβάλλον κυριαρχίας των αυστηρών, τυπικών αιτιολογήσεων και αποδείξεων, πιθανώς να αποτελέσουν εμπόδιο για την ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων (Guzman, 2002).

Όπως υποστηρίζουν οι Stenning et al. (1995), τα διαγράμματα διαθέτουν ορισμένους εκφραστικούς περιορισμούς, καθώς ορισμένα δεν μπορούν να εκφράσουν το σύνολο των αφηρημένων εννοιών (τουλάχιστον με την απαραίτητη σαφήνεια) που είναι αναγκαίες για ορισμένες εργασίες. Σε τέτοιες περιπτώσεις, είναι πιο βολικό να αντικαθίστανται ή να συνοδεύονται με χρήση μιας περισσότερο εκφραστικής γλώσσας (Stenning et al., 1995· Giardino, 2013b).

Ένα ακόμη αποτέλεσμα στη σχετική βιβλιογραφία είναι ότι και οι μαθητές υψηλών μαθηματικών επιδόσεων επιδεικνύουν συχνά απροθυμία στο να χρησιμοποιήσουν οπτικές αναπαραστάσεις. Αντίθετα, τείνουν να προτιμούν αλγεβρικές μεθόδους αναπαράστασης και επίλυσης ενός προβλήματος έναντι των οπτικών, ακόμη και όταν οι πρώτες είναι πιο περίπλοκες· μια τάση που συχνά οδηγεί σε ανεπιθύμητα αποτελέσματα, διότι οι μαθητές αποτυγχάνουν να αναλύσουν πλήρως το πρόβλημα, οπότε να καταλήξουν στην ορθή επίλυσή του (Eisenberg & Dreyfus, 1991· Vinner, 1989).

2.1 Διαγράμματα και Άλγεβρα

Πολλοί ερευνητές γνωρίζουν ότι η παρουσίαση της Άλγεβρας σχεδόν αποκλειστικά μέσω της μελέτης αλγεβρικών εκφράσεων και εξισώσεων μπορεί να δημιουργήσει σοβαρά εμπόδια κατά τη διαδικασία μιας αποτελεσματικής και ουσιαστικής μάθησης (Kieran 1992). Ως αποτέλεσμα, συνίσταται η χρήση και αξιοποίηση διάφορων αναπαραστάσεων από την αρχή της εκμάθησης της Άλγεβρας. Η χρήση λεκτικών, αριθμητικών, αλγεβρικών, αλλά και γραφικών αναπαραστάσεων δίνει τη δυνατότητα να γίνει ουσιαστική και αποτελεσματική η διαδικασία εκμάθησης της Άλγεβρας, ιδιαίτερα όταν εφαρμόζονται συνδυαστικά, οπότε και καταργούνται πολλά από τα επιμέρους μειονεκτήματά τους (Kaput 1992).

Έχει επισημανθεί η δυσκολία μετάβασης των μαθητών από την Αριθμητική στην περισσότερο αφηρημένη προσέγγιση των σχολικών Μαθηματικών και την Άλγεβρα, καθώς και τη συνεπαγόμενη δυσκολία στους μετασχηματισμούς μεταξύ των διαφορετικών μορφών μαθηματικής αναπαράστασης (Brenner et al., 1997· Katz & Barton, 2007). Η επιτυχία στην επίλυση προβλημάτων προϋποθέτει δεξιότητες κατάλληλης αναπαράστασης του προβλήματος, επιπλέον του αποτελεσματικού χειρισμού των συμβόλων κατά τις αριθμητικές και αλγεβρικές διαδικασίες επίλυσής του (Brenner et al., 1997). Οι γεωμετρικές έννοιες είναι ιδιαίτερης σημασίας, καθώς οι δεσμοί τους με την Άλγεβρα είναι εμφανείς με τρόπο που δεν είναι οι αριθμητικές έννοιες, ενώ οι γενικεύσεις που ενυπάρχουν σε αυτές δύναται να καλύψουν το εννοιολογικό κενό (Katz & Barton, 2007).

Όσον αφορά στη χρήση των διαγραμμάτων, οι Barwise και Etchemendy (1996) υποστηρίζουν ότι η συμπερασματολογία και η συλλογιστική δεν εμφανίζονται μόνο σε προτάσεις με γλωσσικές εκφράσεις, αλλά και με τη χρήση διαγραμμάτων, τονίζοντας παράλληλα την ιστορικότητα της χρήση τους, καθώς έχει τις ρίζες της στην αρχαιότητα. Για παράδειγμα, συσχετίζουν τη χρήση των διαγραμμάτων με τη Γεωμετρία αναφέροντας την περίπτωση του μεγάλου πλήθους αποδείξεων του Πυθαγόρειου Θεωρήματος που εμφανίζονται ανά τους αιώνες και σε διαφορετικούς πολιτισμούς σε όλο τον κόσμο.

Πολλά μαθηματικά προβλήματα που περιέχονται σε πήλινες πλάκες της Μεσοποταμίας που χρονολογούνται στο πρώτο μισό της δεύτερης χιλιετίας π.Χ. παρουσιάζουν υπολογισμούς με άγνωστες ποσότητες. Σε αυτά τα προβλήματα, οι άγνωστες ποσότητες φαίνεται να αναπαρίστανται, για παράδειγμα, ως το «μήκος» και το «πλάτος» ενός ορθογωνίου. Έρευνες έχουν δείξει ότι το νόημα των υπολογισμών εξασφαλίζονταν με οπτικούς γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, όπου συνήθως το αρχικό σχήμα μετατρέπονταν σε μια γεωμετρική μορφή (π.χ. ένα τετράγωνο) για το οποίο ήταν ήδη γνωστή μια διαδικασία επίλυσης του αντίστοιχου προβλήματος (Radford & Puig, 2007).

Το γεωμετρικό αυτό πλαίσιο εφαρμογής προοδευτικά χάνονταν, ακόμη, όμως, υπήρξε στο έργο του Al-Khwarizmi κατά τον 9^{ο} αιώνα μ.Χ. κατά την επεξήγηση αλγεβρικών διαδικασιών, για να «σβήσει» σχεδόν με την εμφάνιση του αλγεβρικού συμβολισμού στην περίοδο της Αναγέννησης. Αυτή η σημαντική αλλαγή οδήγησε στην εστίαση σε ποσότητες, που οδήγησαν, με τη σειρά τους, σε αλλαγές στον τρόπο παροχής νοημάτων στα σύμβολα. Ως αποτέλεσμα, η Άλγεβρα θεωρήθηκε εντελώς αποκομμένη από τη Γεωμετρία, μια γενικευμένη Αριθμητική (Radford & Puig, 2007).

Ιστορικά, το κίνητρο για την δημιουργία και ανάπτυξη της Άλγεβρας προήλθε από την ανάγκη επίλυσης συγκεκριμένων προβλημάτων, τόσο του πραγματικού κόσμου όσο και επιμέρους προβλήματα που προέκυπταν κάθε φορά από την διερεύνηση άλλων. Η Άλγεβρα δεν προέκυψε από μια αφηρημένη ανάγκη γενίκευσης της Αριθμητικής. Η σημερινή μορφή της Άλγεβρας οφείλει περισσότερα στην ίδια τη φύση των προβλημάτων που παράγει, καθώς και στα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυσή τους, παρά στους κανόνες της Αριθμητικής. Επομένως, όπως προτείνει ο Katz, έχει νόημα να εξετάσουμε αν μια προσέγγιση με βάση την επίλυση προβλημάτων (πόσο μάλλον ιστορικού περιεχομένου) θα ήταν χρήσιμη στα πρώτα τουλάχιστον στάδια της αλγεβρικής εκπαίδευσης. Φυσικά, κάτι τέτοιο δεν αναιρεί την ανάγκη σταδιακής δυνατότητας μετατροπής της σχολικής Άλγεβρας σε τομέα μελέτης και χρήσης αυστηρών μαθηματικών-αξιωματικών συστημάτων (Katz & Barton, 2007).

Η έμφαση στην Αριθμητική στην πρωτοβάθμια μαθηματική εκπαίδευση, και η επέκτασή της στη δευτεροβάθμια δημιουργεί την εντύπωση ότι τα Μαθηματικά βασίζονται καθαρά στον «αριθμό» και έτσι, ότι η Άλγεβρα είναι κυρίως γενικευμένη Αριθμητική. Ωστόσο, η ιστορική οπτική τοποθετεί τον «αριθμό» και τη Γεωμετρία τουλάχιστον στην ίδια αξιακή θέση όσον αφορά στον ρόλο τους στην ανάπτυξη και εξέλιξη των μαθηματικών, κάνοντας εμφανή την ισχυρή αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο (Katz & Barton, 2007).

Για παράδειγμα, ο Radford (2002, 2007) υποστηρίζει πώς ορισμένοι μαθητές, όταν πρέπει μετασχηματίσουν μια εξίσωση με παρενθέσεις σε ισοδύναμη, διστάζουν να απαλλαγούν από τις παρενθέσεις. Αφαιρώντας τες, οδηγούνται σε μια κατάσταση όπου δεν μπορούν εύκολα να ταυτοποιήσουν με βεβαιότητα το νόημα των όρων της. Έτσι, για να μετασχηματίσουμε την εξίσωση σε απλούστερη, πρέπει τα σύμβολα να αλλάξουν τον τρόπο με τον οποίο εκφράζουν τα αντιπροσωπευόμενα αντικείμενα. Αυτό δεν συνέβαινε στη μεσοποταμιακή γεωμετρική προσέγγιση των αντίστοιχων διαδικασιών, καθώς τα σύμβολα διατηρούσαν την αρχική τους σημασία (ή δανείζονταν την αντίστοιχη γεωμετρική τους) (Radford, 2002· Radford & Puig, 2007).

Καθώς τα Μαθηματικά εξελίσσονται, οι τεχνικές και μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων που «επιβιώνουν» είναι αυτές που έχουν τη μεγαλύτερη γενικότητα. Ο βασικός λόγος που διδάσκουμε τον συμβολικό αλγεβρικό χειρισμό έχει να κάνει καθαρά με την αποτελεσματικότητά του και όχι με την ιστορική εξέλιξη των προβλημάτων που επιλύει η σωστή εφαρμογή του. Η αναπαράσταση ποσοτήτων με σύμβολα-γράμματα και η εκτέλεση αλγεβρικών διαδικασιών σε αυτά, φαίνεται να έχουν μικρή σχέση με το πρακτικό πρόβλημα του προσδιορισμού των διαστάσεων ενός φυσικού αντικειμένου. Διδάσκουμε αυτές τις δεξιότητες λόγω της ευρείας εφαρμογής τους όχι μόνο σε προβλήματα δευτεροβάθμιων εξισώσεων, αλλά και σε πρωτοβάθμιες, κυβικές, συστήματα γραμμικών, κ.ά. εξισώσεων, καθώς και σε προβλήματα που περιλαμβάνουν ρητές συναρτήσεις, τετραγωνικές ρίζες και πιο περίπλοκες μορφές (Allaire & Bradley, 2001).

Και πριν την καθιέρωση της αλγεβρικής συμβολικής γλώσσας, υπήρχε η γνώση της επίλυσης προβλημάτων δευτεροβάθμιων εξισώσεων (αιγυπτιακά, ασιατικά, μεσοποταμιακά, ελληνικά Μαθηματικά). Οι τεχνικές επίλυσης περιλάμβαναν κάποια γεωμετρικά χαρακτηριστικά της κατάστασης του προβλήματος, ένα είδος γεωμετρικής Άλγεβρας, όπου τα μεγέθη, είτε σταθεροί αριθμοί είτε άγνωστοι, αντιπροσωπεύονται μέσω φυσικών αντικειμένων (εξού και οι όροι «τετράγωνο» και «κύβος» στην περίπτωση των αντίστοιχων δυνάμεων) (Allaire & Bradley, 2001).

Όσοι μελετούν τις γεωμετρικές διαδικασίες επίλυσης των προβλημάτων οπτικά και όχι συμβολικά μπορούν να κατανοήσουν και νοηματοδοτήσουν σε μεγαλύτερο βαθμό το ίδιο το πρόβλημα, αλλά και τις αλγεβρικές διαδικασίες που περιέχονται σε αυτό. Ακόμη και εκείνοι που χρησιμοποιούν με μεγαλύτερη ευχέρεια τη συμβολική Άλγεβρα πιθανότατα να εντοπίσουν και διαφορετικές διαστάσεις και πρόσθετα σημεία προσέγγισης ενός προβλήματος. Για παράδειγμα, η ιστορική ανασκόπηση των γεωμετρικών μεθόδων επίλυσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εισαγωγή τόσο της μεθόδου συμπλήρωσης του τετραγώνου—όπου εξηγείται και η προέλευση του όρου— όσο και η εξαγωγή του τετραγωνικού τύπου. Ακόμη, η εμπειρία στη σχολική τάξη δείχνει ότι μια κατάλληλα δομημένη ιστορική προσέγγιση των προβλημάτων κάνει πάντα τη διδασκαλία τους πιο ελκυστική στον «μέσο» μαθητή (Allaire & Bradley, 2001).

Οπότε, θα ήταν χρήσιμο να ξεκινήσει κανείς τη μελέτη του αλγεβρικού συλλογισμού χρησιμοποιώντας γεωμετρικά στοιχεία και μάλιστα ιστορικού περιεχομένου, καθώς αυτά είναι σαφέστερα αντικείμενα από τις αλγεβρικές εκφράσεις που συνήθως χρησιμοποιούνται. Για παράδειγμα, μια τετραγωνική μορφή μπορεί να αναπαρασταθεί ακριβώς ως ένα τετράγωνο, το γινόμενο δύο αριθμών ως ένα ορθογώνιο, ενώ η επιμεριστική ιδιότητα είναι απλώς η ίδια πρόταση για δύο διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης ενός δεδομένου ορθογωνίου. Ταυτόχρονα, είναι πιθανώς χρήσιμο να συζητούμε λεκτικά αυτές τις έννοιες, καθώς οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με τις γεωμετρικές λέξεις και εκφράσεις (Katz & Barton, 2007).

Η χρήση των διαγραμμάτων σε αυτή τη διαδικασία θα είναι γεωμετρική και ιστορική· γεωμετρική, διότι τα γεωμετρικά σχήματα με γράμματα και αριθμούς υποδεικνύουν εμβαδά ή μήκη και ιστορική λόγω της προέλευσής τους από την ιστορία των Μαθηματικών και το γεγονός ότι οι μαθητές τα αξιοποιούν για την επίλυση κλασικών προβλημάτων που συνήθως λύνονται μόνο με τη χρήση της αλγεβρικής γλώσσας (Guevara-Casanova & Burgués-Flamarich, 2018).

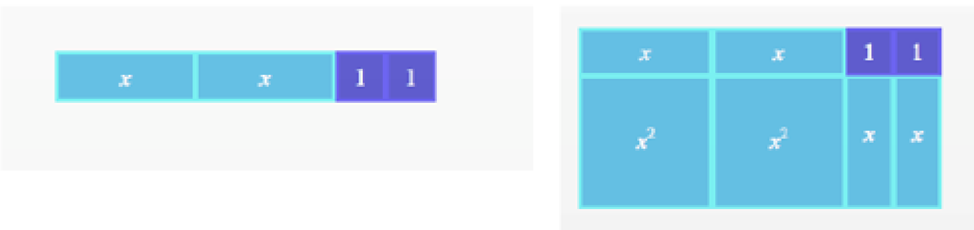
2.2 Γεωμετρική προσέγγιση επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων

Η διαγραμματική λογική αντιμετώπισης ενός προβλήματος, μπορεί να υποστηρίξει την κατανόηση της επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Οι μαθητές όντας εξοικειωμένοι με τις εμπλεκόμενες γεωμετρικές έννοιες μπορούν να νοηματοδοτήσουν τις διαδικασίες που περιέχουν αλγεβρικές-συμβολικές εκφράσεις (Fachrudin et al., 2019). Η αποτελεσματικότητα της γεωμετρικής προσέγγισης στην επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού έχει επισημανθεί στις ποιοτικές έρευνες των Nielsen (2015) και Herawaty et al. (2021).

Η έρευνα της Nielsen (2015) εστιάζει στην κατανόηση του τρόπου συλλογισμού των μαθητών κατά την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων και ποιο συγκεκριμένα (μεταξύ άλλων ερευνητικών ερωτημάτων) στο πώς προσεγγίζουν οι μαθητές την επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων και πώς ερμηνεύουν τις λύσεις τους (Nielsen, L. E. J., 2015). Το σκόπιμο δείγμα ευκολίας της ποιοτικής έρευνας ήταν 27 μαθητές διαφόρων μαθησιακών επιπέδων των τριών τάξεων του αντίστοιχου Γυμνασίου των ΗΠΑ ($7^{η}$-$9^{η}$ τάξη). Κατά την έρευνα αξιοποιήθηκαν προσωπικές συνεντεύξεις με κάθε μαθητή, ηχογραφήσεις και καταγραφή βίντεο, καθώς και σχετικές εργασίες των μαθητών. Σύμφωνα με τη συγκεκριμένη έρευνα, η συμπλήρωση του τετραγώνου περιλαμβάνει την κατανόηση της δομής των τέλειων τετραγωνικών παραστάσεων και τη χρήση αυτής της δομής για τον αλγεβρικό χειρισμό μιας έκφρασης σε τυπική τετραγωνική μορφή, σε μια έκφραση τέλειου τετραγώνου. Όταν η αρχική έκφραση μπορεί να αναπαρασταθεί με μία «θετική» επιφάνεια, αυτή η διαδικασία μπορεί να μοντελοποιηθεί με μια γεωμετρική αναπαράσταση στην οποία οι μαθητές εργάζονται για να μετατρέψουν μια επιφάνεια από ορθογώνιο σε τετράγωνο με μια μικρή προσαρμογή.

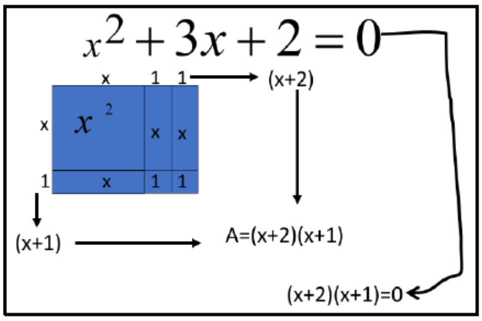
Η μετάβαση των μαθητών από τη γραμμική στην τετραγωνική λογική επίλυσης εξισώσεων μπορεί να υποστηριχθεί με τη χρήση των γεωμετρικών αναπαραστάσεων οι οποίες μπορούν να κάνουν σαφείς τις εννοιολογικές συνδέσεις και διαφορές αλγεβρικών και γεωμετρικών αναπαραστάσεων κατά την μέθοδο επίλυσης με συμπλήρωση τετραγώνου, την εκτέλεση των πράξεων μεταξύ μονωνύμων, της παραγοντοποίησης και της επιμεριστικής ιδιότητας, όπως και τη διαφορά του αθροίσματος/διαφοράς δύο τετραγώνων με το τετράγωνο αθροίσματος/διαφοράς (Nielsen, L. E. J., 2015).

Για παράδειγμα, η παρακάτω απεικόνιση μοντέλων αναπαράστασης και υπολογισμού μήκους και εμβαδού επιφάνειας (περιέχεται στην έρευνα) κάνει εμφανή την ισοδυναμία των μορφών $(2x+2)(x+1)$ και $(2x^2+4x+2)$ (*Εικόνα 1)*:

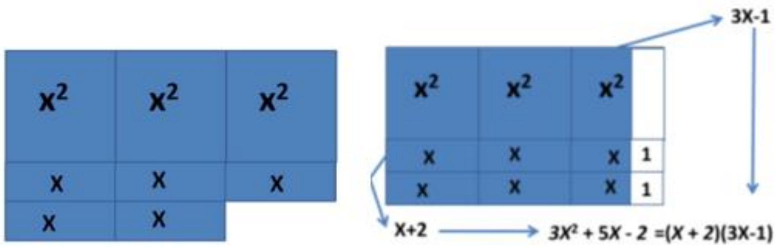


Εικόνα 1: Γεωμετρική απεικόνιση ισοδύναμων εκφράσεων (εικ. 33, σελίδα 119 άρθρου)

Σε ανάλογα αποτελέσματα καταλήγει και η έρευνα των Herawaty et al. (2021). Οι ερευνητές πραγματοποίησαν εργασιοκεντρικές συνεντεύξεις (*task-based interviews)* που περιείχαν επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων με χρήση τετραγώνων και ορθογωνίων, με στόχο την ανακάλυψη των γνωστικών διαδικασιών και συλλογισμών των μαθητών στην εφαρμογή της παραγοντοποίησης. Σύμφωνα με την έρευνα, οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν τετράγωνα, ορθογώνια και μοναδιαίες τετραγωνικές επιφάνειες για την εφαρμογή της παραγοντοποίησης στην περίπτωση του τριωνύμου και την επίλυση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων (είτε με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα είτε διάφορο της μονάδας), όπως και να εφαρμόσουν με τον ίδιο τρόπο τη μέθοδο επίλυσης με συμπλήρωση τετραγώνου. Το συμπέρασμα είναι ότι οι μαθητές που διδάσκονται τον συγκεκριμένο τρόπο επίλυσης μπορούν να φτάσουν σε υψηλά επίπεδα επίδοσης σχετικά με την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων (Herawaty et al. 2021). Ακολουθούν ενδεικτικά οι περιπτώσεις επίλυσης των εξισώσεων $x^2+3x+2=0$ *(Εικόνα 2)* και $3x^2+5x-2=0$ (*Εικόνα 3)*:



Εικόνα 2: Επίλυση εξίσωσης με τη βοήθεια διαγράμματος (εικ. 4, σελ. 5 άρθρου)



Εικόνα 3: Επίλυση εξίσωσης με τη βοήθεια διαγράμματος (εικ. 7, 8, σελ. 7, 8, αντίστοιχα, άρθρου)

Σχετικά με το δεύτερο παράδειγμα *(Εικόνα 3),* αρχικά, κατασκευάζουμε την έκφραση $\left(3x^2+5x\right)$ η οποία δεν συνιστά ορθογώνιο. Γι' αυτό, προσθέτουμε ένα επιπλέον ορθογώνιο διαστάσεων x επί 1 (εμβαδού x) και ταυτόχρονα αφαιρούμε από την επιφάνεια εμβαδού $\left(3x^2+5x\right)$ μια επιφάνεια εμβαδού x και δύο μοναδιαία τετράγωνα. Το ορθογώνιο που θα προκύψει θα έχει εμβαδό $\left(3x^2+5x-2\right)$ ή ισοδύναμα $\left(x+2\right)\left(3x-1\right)$.

Η χρήση διαγραμμάτων μπορεί, λοιπόν, να αποτελέσει σημαντικό εργαλείο για τους μαθητές στην ανάπτυξη της αλγεβρικής τους γνώσης μέσω της γεωμετρικής. Σε αυτή τη διαδικασία, η ιστορία των Μαθηματικών παρέχει πλήθος ευκαιριών ανάδειξης του ρόλου των διαγραμμάτων (Fachrudin et al., 2019).

Σε πλήθος ερευνών (π.χ. Katz, 1997· Katz, 2000· Radford & Gerette 2000· Allaire & Bradley, 2001· Radford, 2001· Guevara-Casanova, 2012) αναπτύσσεται και προτείνεται ένα σύνολο εκπαιδευτικών εργασιών για την αποτελεσματική εκμάθηση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, με έμπνευση από τη βαβυλωνιακή προσέγγιση επίλυσής της. Υποστηρίζεται, επιπλέον, ότι η χρήση της γεωμετρικής προσέγγισης από την ιστορία των Μαθηματικών παρέχει ένα χρήσιμο πλαίσιο για τους μαθητές ώστε να αναπτύξουν την κατανόηση του συμβολικού αλγεβρικού συμβολισμού και τις εν γένει αλγεβρικές και γεωμετρικές τους δεξιότητες.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουν και οι έρευνες των Fachrudin et al. (2014, 2018). Ο σκοπός αυτών των ερευνών μέσω σχεδιασμού (*design research*) είναι να εξεταστεί αν η «απλοϊκή» Γεωμετρία (“*naïve Geometry*”) ή «αποκοπής και επικόλλησης» (“*cut and paste*”) μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στην κατανόηση της επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Οι συγκεκριμένοι όροι εισήχθησαν από τον Høyrup, J. μετά από ενδελεχή γλωσσική ανάλυση της βαβυλωνιακής ορολογίας, για να οριστεί η βαβυλωνιακή γεωμετρική μέθοδος επίλυσης τετραγωνικών εξισώσεων, που βασίζεται στη συμπλήρωση τετραγώνου (Høyrup, 1990).

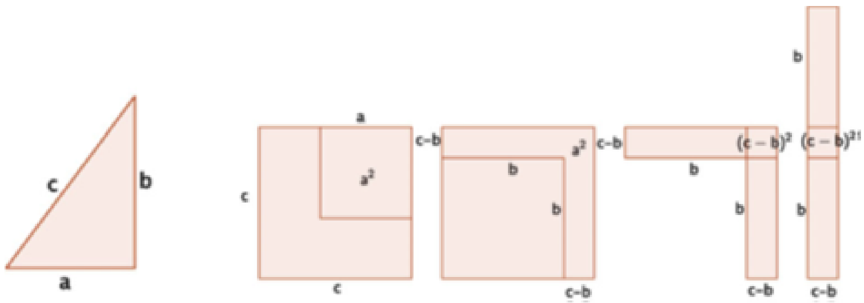
Για τον σκοπό αυτό, στις έρευνες των Fachrudin et al. (2014, 2018) χρησιμοποιούνται μαθηματικά προβλήματα που περιέχονται σε πήλινη βαβυλωνιακή πλάκα (για παράδειγμα, το γνωστό δεύτερο από τα είκοσι τέσσερα προβλήματα υπό τον κωδικό αριθμό BM 13901). Πιο συγκεκριμένα, ελέγχεται πώς η χρήση διαγραμμάτων κατά τη διαδικασία της συμπλήρωσης τετραγώνου μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές στον τετραγωνικό τύπο επίλυσης εξισώσεων δευτέρου βαθμού, δηλαδή ουσιαστικά στην γεωμετρική ερμηνεία των βημάτων απόδειξης του τετραγωνικού τύπου, μέσω διαδοχικών μετασχηματισμών των γεωμετρικών μορφών στις αντίστοιχες αλγεβρικές. Το δείγμα αποτελούνταν από 32 μαθητές της Β΄ Γυμνασίου, σχολείου της Ινδονησίας. Αρχικά, οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν τα προβλήματα χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου που διδάχθηκαν στην πρώτη φάση της έρευνας και στη συνέχεια κάθε βήμα της διαδικασίας επίλυσης να το εκφράσουν σε συμβολική αλγεβρική γλώσσα. Οι πρώτες μαθηματικές δραστηριότητες περιείχαν συγκεκριμένα αριθμητικά δεδομένα, ενώ οι δεύτερες μεταβλητές εκφράσεις. Τα αποτελέσματα των ερευνών έδειξαν ότι η χρήση της γεωμετρικής μεθόδου νοηματοδοτεί καλύτερα κάθε βήμα της διαδικασίας επίλυσης, καθώς οι μαθητές είναι εν γένει εξοικειωμένοι με το γεωμετρικό πλαίσιο στο οποίο εργάζονται, ενώ, έστω και με κάποια καθοδήγηση του διδάσκοντος σε ορισμένα σημεία, μπορούν να ερμηνεύσουν ορθά τις «γεωμετρικές» τους ενέργειες στην αλγεβρική γλώσσα, καταλήγοντας επιτυχώς στον τετραγωνικό τύπο επίλυσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Επίσης, πολλές έρευνες προτείνουν ως αποτελεσματική την αξιοποίηση ιστορικών γεωμετρικών διαγραμμάτων κατά την επίλυση προβλημάτων με ορθογώνια τρίγωνα που θα μπορούσαν να αναχθούν στην επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιείται η κινεζική εκδοχή του Πυθαγορείου Θεωρήματος, όπως παρουσιάζεται στα συμπληρωματικά σχόλια του Liu Hui του 263 μ.Χ. στο σημαντικό κινεζικό μαθηματικό έργο «*Τα εννέα κεφάλαια για τη μαθηματική τέχνη*» (“*The Nine Chapters on the Mathematical Art”*) (π.χ. Katz, 2000· Tzanakis et al., 2002· Cullen, 2002· Chemla, 2005· Guevara-Casanova, 2012· Vallhonestaa et al., 2015).

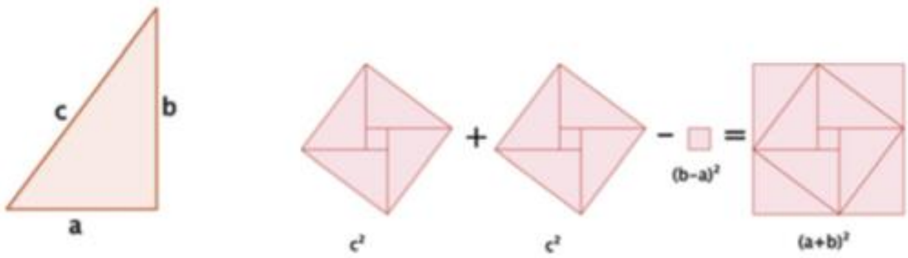
Σχετική έρευνα διερεύνησης της αποτελεσματικότητας του συγκεκριμένου μαθηματικού έργου διεξήγαγαν οι Fachrudin et al. (2019). Η συγκεκριμένη έρευνα σχεδιασμού (design research) διεξήχθη σε 17 μαθητές τριών διαφορετικών Γυμνασίων της Ινδονησίας. Μετά την ανάλυση των προσωπικών σημειώσεων των μαθητών, των εργασιών τους και σχετικών βίντεο, οι ερευνητές κατέληξαν στο ότι η χρήση διαγραμμάτων συνδυαστικά με γραπτά δεδομένα μπορούν να υποστηρίξουν την εκτέλεση αλγεβρικών υπολογισμών από μαθητές που δεν είναι εξοικειωμένοι με τη χρήση αλγεβρικών εκφράσεων και πράξεων. Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί και χειρισμοί που απαιτούνται διαμορφώνουν ισοδύναμα επιμέρους προβλήματα που μπορούν να ερμηνευτούν ευκολότερα από τους μαθητές στην περίπτωση της επίλυσης προβλήματος με ορθογώνια τρίγωνα (αντίστοιχο Πυθαγόρειο Θεώρημα και παραλλαγές του). Επιπλέον, οι μαθητές εργαζόμενοι σε ιστορικό πλαίσιο, βρίσκουν περισσότερες ευκαιρίες να βελτιώσουν την απόδοσή τους στο μαθηματικό γραμματισμό (αλγεβρικό και γεωμετρικό) νοηματοδοτώντας το «κινέζικο Πυθαγόρειο Θεώρημα» από τις ιστορικές πηγές και μετασχηματίζοντάς το σε τυπική μαθηματική μορφή (Fachrudin et al., 2019).

Επιπρόσθετα, για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων σε πολλές έρευνες συναντάται η μέθοδος της συμπλήρωσης γεωμετρικών τετραγώνων κατά Al-Khwarizmi του 9^{ου} αιώνα μ.Χ. (π.χ. Katz, 1997· Katz, 2000· Radford, 2001· Allaire & Bradley, 2001· Guevara-Casanova, 2012).

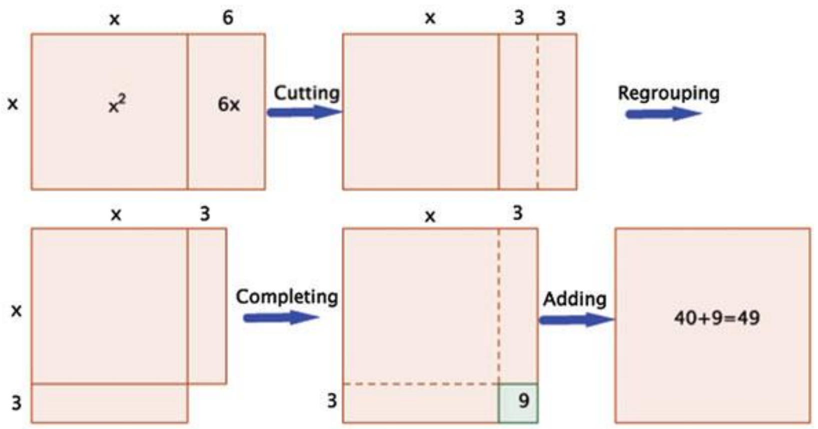
Για παράδειγμα, η έρευνα των Guevara-Casanova & Burgués-Flamarich (2018), με την αξιοποίηση προβλημάτων των Al-Khwarizmi και Liu Hui, διερευνά την αποτελεσματικότητα χρήσης ιστορικών γεωμετρικών διαγραμμάτων κατά την επίλυση προβλημάτων με ορθογώνια τρίγωνα και δευτεροβάθμιων εξισώσεων από τους μαθητές. Ο τρόπος εργασίας των μαθητών σε μερικά από τα προβλήματα που τους τέθηκαν συνοψίζεται στις παρακάτω εικόνες *(Εικόνες 4, 5, 6)*:



Εικόνα 4: Γενική μέθοδος υπολογισμού των b και c με γνωστά τα a και c-b κατά Liu Hui (εικ. 9.8, σελ. 173 άρθρου)



Εικόνα 5: Γενική μέθοδος υπολογισμού του αθροίσματος a+b με γνωστά τα c και b-a κατά Liu Hui (εικ. 9.6, σελ. 172 άρθρου)



Εικόνα 6: Επίλυση τη εξίσωσης με συμπλήρωση τετραγώνου κατά Al-Khwarizmi (εικ. 9.15, σελ. 183 άρθρου)

Το δείγμα της έρευνας ήταν 21 μαθητές τεσσάρων διαφορετικών μαθησιακών επιπέδων (καθορίστηκαν ανάλογα με το επίπεδο κατανόησης των εμπλεκόμενων εννοιών, της συμβολικής γλώσσας και αλγεβρικού συλλογισμού από τους μαθητές στην επίλυση πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων εξισώσεων) της αντίστοιχης Γ' Γυμνασίου σε σχολείο της Badalona στην Ισπανία. Οι μαθητές εργάστηκαν σε ετερογενείς ομάδες αποτελούμενες από έναν τουλάχιστον μαθητή κάθε επιπέδου. Στις ομάδες εργασίας παρασχέθηκε σχετικό υλικό με ιστορικά στοιχεία των συγγραφέων, του έργου τους, μαθηματικές εργασίες βασισμένες σε αυτό, αλλά και πληροφορίες για τον πολιτισμό των λαών τους (κινεζικό και αραβικό). Οι ομάδες εργάστηκαν συνολικά για 20 διδακτικές ώρες (10 συν 1 τεστ για τα προβλήματα κατά Al-Khwarizmi και 8 συν 1 τεστ για τα προβλήματα κατά Liu Hui).

Στην περίπτωση των προβλημάτων με ορθογώνια τρίγωνα, από τα 10 αποτελέσματα που αναλύθηκαν, σε 6 περιπτώσεις αντιμετωπίστηκε το πρόβλημα με γεωμετρικό τρόπο (στις 4 σωστά), σε 3 με αλγεβρικό (στη μία μόνο σωστά), ενώ σε μία υπήρξε αδυναμία καταγραφής οποιασδήποτε μεθόδου επίλυσης. Στην περίπτωση των εξισώσεων δεύτερου βαθμού, αναλύθηκαν 21 αποτελέσματα. Σε όλα χρησιμοποιήθηκαν διαγράμματα, διότι οι μαθητές δεν διδάχθηκαν τη χρήση του τετραγωνικού τύπου (διδάσκεται το επόμενο σχολικό έτος), ενώ στις 15 περιπτώσεις από τις 21 η λύση ήταν ορθή.

Η έρευνα, λοιπόν, κατέδειξε ότι η εισαγωγή των μαθητών σε αλγεβρικές έννοιες και σχέσεις μέσω γεωμετρικών αναπαραστάσεων και ερμηνειών μπορεί να εφαρμοστεί επωφελώς στην τάξη. Οι μαθητές που πήραν μέρος στην έρευνα επέλεξαν κυρίως τη γεωμετρική μέθοδο επίλυσης προβλήματος (να σημειωθεί ότι στην συγκεκριμένη έρευνα προηγήθηκαν αρκετές διδακτικές ώρες για την παρουσίαση των αλγεβρικών και γεωμετρικών μεθόδων στους μαθητές). Ωστόσο, ορισμένοι μαθητές χρησιμοποίησαν και γεωμετρικές και αλγεβρικές μεθόδους. Επιπλέον, η έρευνα έδειξε ότι τα οπτικά διαγράμματα δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να είναι πιο αποτελεσματικοί. Όχι μόνο περισσότεροι μαθητές έλυσαν τα προβλήματα με τον γεωμετρικό τρόπο επίλυσης μέσω διαγραμμάτων, αλλά τα έλυσαν και καλύτερα, υπό την έννοια της εν γένει μαθηματικής αρτιότητας της λύσης.

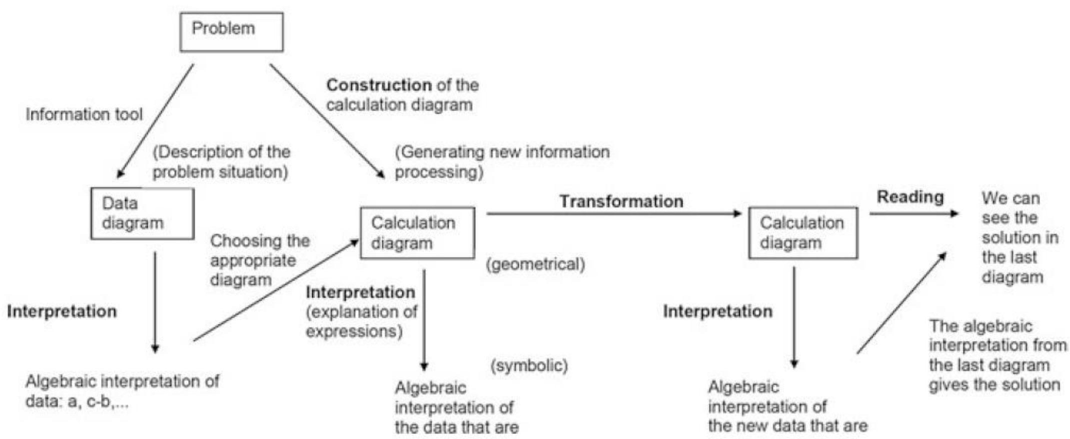
Στην έρευνα, επίσης, επισημαίνεται ότι ο χειρισμός διαγραμμάτων με άνεση έχει ως βασική προϋπόθεση να γίνει διακριτή η εννοιολογική διαφορά της περιμέτρου και του εμβαδού, καθώς και μεταξύ του μήκους και της επιφάνειας, καθώς παρατηρήθηκαν περιπτώσεις όπου οι μαθητές συνέχεαν τις έννοιες. Ακόμη, μέσω της οπτικής αντίληψης να γίνει ορθός προσδιορισμός των εμπλεκόμενων σχημάτων και, επιπλέον, σωστός συσχετισμός των δεδομένων των αλγεβρικών σχέσεων με μήκη και εμβαδά.

2.3 Διαδικασία επίλυσης προβλήματος με διαγράμματα

Οι Guevara-Casanova και Burgués-Flamarich (2018) με αφορμή την έρευνά τους σχετικά με την αποτελεσματικότητα χρήσης των διαγραμμάτων στη διαδικασία μάθησης δευτεροβάθμιων εξισώσεων (στο πλαίσιο σύνδεσης Γεωμετρίας και Άλγεβρας), ταξινομούν τα διαγράμματα συνδυάζοντας την οπτική των Barwise και Etchemendy (1996) και την οπτική-ορολογία του Giardino (2013a).

Λαμβάνοντας υπόψιν τους την εκφραστική αποτελεσματικότητα ενός διαγράμματος, δηλαδή την ικανότητα έκφρασης σημασιολογικών ιδιοτήτων, την υπολογιστική αποτελεσματικότητα, καθώς και την ικανότητα εξαγωγής νέων πληροφοριών από αυτό, κατέληξαν σε δύο τύπους διαγραμμάτων: το διάγραμμα δεδομένων (data diagram) και το διάγραμμα υπολογισμού (calculation diagram). Ένα διάγραμμα δεδομένων εκφράζει σημασιολογικές ιδιότητες και συσχετίσεις μεταξύ των δεδομένων και βοηθά στην επιλογή του σωστού διαγράμματος υπολογισμού κατά την επίλυση προβλημάτων. Ένα διάγραμμα υπολογισμού έχει εκφραστική αποτελεσματικότητα και βοηθά στον υπολογισμό της τελικής λύσης του προβλήματος (Guevara-Casanova & Burgués-Flamarich, 2018). Ο Giardino (2013a) επισημαίνει δύο βασικά στοιχεία στη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος με χρήση υπολογιστικών διαγραμμάτων: αυτά κάθε αυτά τα διαγράμματα και τις σχετικές ενέργειες με αυτά: την κατασκευή (construction), την επεξεργασία (processing), την ερμηνεία/ανάλυση (interpretation) και την ανάγνωση (reading) του διαγράμματος.

Η παραπάνω διαδικασία επίλυσης προβλήματος με χρήση διαγραμμάτων παρουσιάζεται με την παρακάτω σχηματική απεικόνιση *(Εικόνα 7 :διαβάζεται από πάνω προς τα κάτω και από αριστερά προς τα δεξιά)* (Guevara-Casanova & Burgués-Flamarich, 2018):



Εικόνα 7: Η διαδικασία επίλυσης προβλήματος με διαγράμματα (εικ. 9.17, σελ. 184 άρθρου)

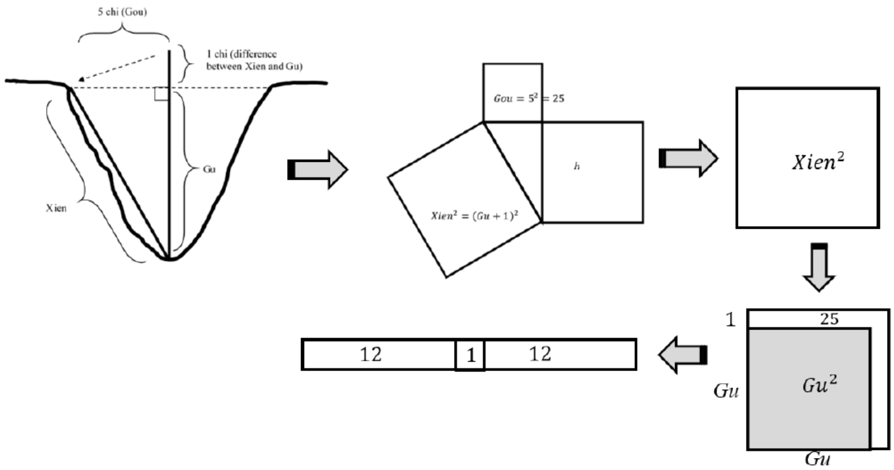
Τα βέλη υποδεικνύουν τις ενέργειες που εκτελούνται από το ένα βήμα στο άλλο. Το διάγραμμα δεδομένων (data diagram) κατασκευάζεται άμεσα από τα δεδομένα του προβλήματος και μέσω της παρακολούθησης των μεταξύ τους συσχετίσεων προκύπτει η απόφαση για το κατάλληλο υπολογιστικό διάγραμμα που θα κατασκευαστεί. Στη συνέχεια, κατασκευάζεται το διάγραμμα υπολογισμού. Κάθε διάγραμμα έχει και μια αντίστοιχη ερμηνεία με αλγεβρικούς όρους (όπως απεικονίζεται στο κάτω μέρος της απεικόνισης). Το πρώτο διάγραμμα υπολογισμού περιέχει συνήθως πιο σύνθετους μετασχηματισμούς και επεξεργασία, ενώ, τέλος, η τελική λύση του προβλήματος προκύπτει από το τελευταίο διάγραμμα υπολογισμού (Guevara-Casanova & Burgués-Flamarich, 2018).

Οι τέσσερις ενέργειες στην επίλυση προβλημάτων με διαγράμματα (κατασκευή, επεξεργασία, ερμηνεία/ανάλυση και ανάγνωση) μπορούν να συνδυαστούν σε τρεις διαδικασίες: τη μετάφραση (translation) (κατασκευή-ανάγνωση), τον μετασχηματισμό (transformation) (επεξεργασία) και τη διαγραμματική συλλογιστική (diagrammatic reasoning) (ερμηνεία/ανάλυση) (Guevara-Casanova & Burgués-Flamarich, 2018).

Η πρώτη διαδικασία αναφέρεται στη μετάφραση του προβλήματος στη γλώσσα των διαγραμμάτων από τη γλώσσα (λεκτική, αλγεβρική, γεωμετρική) στην οποία τους δίνεται. Οι μαθητές, αρχικά, διαπιστώνουν τις ισοδυναμίες μεταξύ των γλωσσών αναπαράστασης κατά την κατασκευή του πρώτου διαγράμματος δεδομένων του προβλήματος, ώστε να είναι σε θέση να εντοπίσουν το κατάλληλο για το εκάστοτε πρόβλημα υπολογιστικό διάγραμμα που θα κατασκευάσουν στη συνέχεια (Guevara-Casanova & Burgués-Flamarich, 2018· Fachrudin et al., 2019).

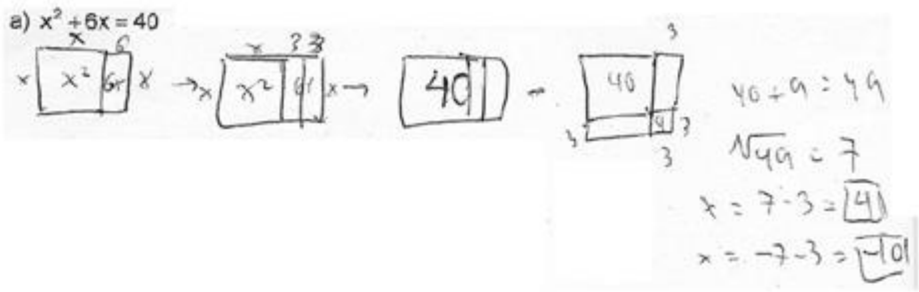
Για παράδειγμα, στις έρευνες των Fachrudin et al. (2019) και Guevara-Casanova και Burgués-Flamarich (2018), δίνεται το πρόβλημα 6 από το τελευταίο 9^{ο} κεφαλαίο (με την ονομασία "Gou Gu", όπου "gou" η μικρότερη κάθετη πλευρά ορθογωνίου τριγώνου και "gu" η μεγαλύτερη) του έργου «*Τα εννέα κεφάλαια για τη μαθηματική τέχνη*» ("*The Nine Chapters on the Mathematical Art"*) που περιέχει μαθηματικές προτάσεις και προβλήματα σχετικά με ορθογώνια τρίγωνα. Σε αυτή την περίπτωση, η δραστηριότητα δίνεται προς τους μαθητές στη «γνήσια» λεκτική της μορφή:

«Στο κέντρο μιας τετράγωνης μικρής λίμνης πλευράς 1 zhang (ισοδύναμο με 10 chi, ενώ 1 chi ισοδυναμεί με το 1/3 του μέτρου), φυτρώνει ένα καλάμι του οποίου η κορυφή φτάνει στο 1 chi πάνω από τη στάθμη του νερού. Αν τραβήξουμε το καλάμι προς την όχθη, η κορυφή του είναι στο ίδιο ύψος με την επιφάνεια του νερού. Ποιο είναι το βάθος της λίμνης και ποιο το μήκος του φυτού; *(Εικόνα 8)*»



Εικόνα 8: Διαγραμματική απεικόνιση της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος 6· ως "Xien" ορίζεται η υποτείνουσα του ορθογωνίου (εικ. 4, σελ. 4 άρθρου Fachrudin et al. (2019))

Αντιθέτως, παρακάτω, απεικονίζεται η προσπάθεια επίλυσης της εξίσωσης $x^2+6x=40$ από έναν μαθητή της έρευνας των Guevara-Casanova και Burgués-Flamarich (2018), όπου δεδομένη είναι η αλγεβρική αναπαράσταση της εξίσωσης:



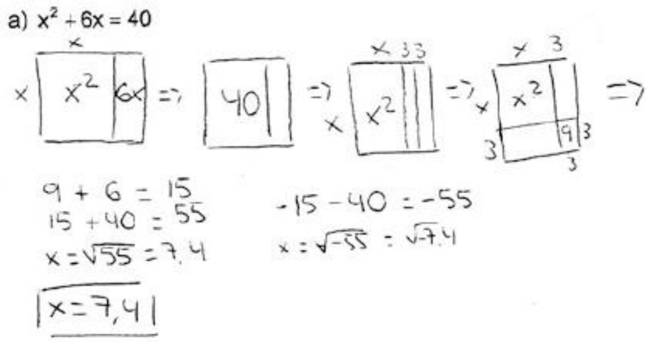
Εικόνα 9: Γεωμετρική επίλυση εξίσωσης (εικ. 9.16, σελ. 183 άρθρου)

Παρατηρούμε ότι ο μαθητής, αρχικά, προχωρά στον γεωμετρικό μετασχηματισμό των όρων x^2 και $6x$ (κατασκευή διαγράμματος δεδομένων) , προσδιορίζοντας τις ισοδυναμίες μεταξύ των αλγεβρικών εκφράσεων και του μήκους των πλευρών και του εμβαδού των επιφανειών με τη χρήση των αντίστοιχων σημειώσεων εντός ή εκτός των σχημάτων, ανάλογα του τι αναπαριστούν (μήκος ή εμβαδό). Γενικότερα, οι μαθητές συσχετίζουν τον πρωτοβάθμιο όρο μοναδιαίου συντελεστή, x, με μήκος πλευράς, πρωτοβάθμιους όρους διαφορετικού συντελεστή (π.χ. $6x$) με εμβαδά επιφανειών, δευτεροβάθμιους όρους με τον ίδιο τρόπο, ενώ τα αριθμητικά δεδομένα με μήκη πλευρών ή εμβαδά επιφανειών.

Η δεύτερη διαδικασία είναι η περιγραφή της διαδικασίας μετασχηματισμού του διαγράμματος που χρησιμοποιείται από τους μαθητές κατά την επίλυση προβλήματος (Guevara-Casanova & Burgués-Flamarich, 2018). Για παράδειγμα, στο παραπάνω διάγραμμα (εικόνα 9), κατά την πρώτη φάση (μετάφραση) της διαδικασίας επίλυσης, ο μαθητής προσδιόρισε τις βασικές περιοχές, ώστε σε αυτή τη δεύτερη φάση να είναι σε θέση να κατασκευάσει το πρώτο διάγραμμα υπολογισμού (αυτό που περιέχει τον αριθμό 40, ως την τιμή του εμβαδού της ισοδύναμης επιφάνειας) για να ξεκινήσει η διαδικασία μετασχηματισμού του προβλήματος με επιπλέον υπολογιστικά διαγράμματα.

Η τρίτη διαδικασία είναι η διαγραμματική συλλογιστική, όπου γίνεται ουσιαστική σύνδεση Γεωμετρίας και Άλγεβρας, εντοπίζονται τα βασικά στοιχεία των διαγραμμάτων, τα οποία ερμηνεύονται διαδοχικά σε αλγεβρική γλώσσα και ορίζεται ένα διάγραμμα σε ρόλο βασικού διαγράμματος στη συλλογιστική τους έως την τελική επίλυση του προβλήματος (Guevara-Casanova & Burgués-Flamarich, 2018). Στο άνω παράδειγμα *(Εικόνα 9)*, ο μαθητής χρησιμοποιεί ως βασικό το τελευταίο διάγραμμα (τετράγωνο αποτελούμενο από δύο τετράγωνα και δύο ορθογώνια), το οποίο συνοδεύει μόνο με αριθμητικά δεδομένα. Η χρήση αριθμητικών δεδομένων, όπως φαίνεται από το τελευταίο διάγραμμα της λύσης ενός άλλου μαθητή, παρακάτω, δεν είναι δεδομένη *(Εικόνα 10)*:

Fig. 9.21 Sum of areas and lengths in the solution by one student (17)



Εικόνα 10: Γεωμετρική επίλυση εξίσωσης (εικ. 9.21, σελ. 189 άρθρου)

Ωστόσο, στην έρευνα επισημαίνεται ότι σε αυτή την φάση, προτιμήθηκαν τα αριθμητικά και όχι τα αλγεβρικά δεδομένα, τα οποία στις περιπτώσεις που χρησιμοποιήθηκαν δεν έδειξαν να βοηθούν τους μαθητές στην ορθή επίλυση του προβλήματος (Guevara-Casanova & Burgués-Flamarich, 2018).

Κεφάλαιο 3ο: Συνοπτική ιστορία της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

3.1 Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις κατά τη Βαβυλωνιακή Περίοδο (μέσα 3ης χιλιετίας π.Χ. – 539 π.Χ.)

Θα ξεκινήσουμε την αναφορά σε σημαντικούς σταθμούς της εξελικτικής πορείας της δευτεροβάθμιας εξίσωσης από τους Βαβυλώνιους. Ο Βαβυλωνιακός πολιτισμός θα αναδυθεί στα μέσα της τρίτης χιλιετίας π.Χ. στη Μεσοποταμία, την ευρύτερη περιοχή μεταξύ των κοιλάδων των ποταμών Τίγρη και Ευφράτη. Κατά την τρισχιλιετή διάρκειά της ήκμασαν οι αυτοκρατορίες των Σουμερίων, Ακκάδων, Ασσυρίων και Χαλδαίων, έως την κατάκτηση της αυτοκρατορίας των τελευταίων από τον Πέρση βασιλιά Κύρο το 539 π.Χ.. Η περίοδος από το 1900 έως το 1600 π.Χ. είναι περίοδος ευημερίας και πολιτισμικής άνθησης. Κατά τη διάρκειά της ιδρύεται η Πρώτη (Παλαιά) Βαβυλωνιακή Δυναστεία με κέντρο της την πόλη της Βαβυλώνας και σημαντικότερο εκπρόσωπό της τον μεγάλο Ακκάδιο νομοθέτη και κυβερνήτη Χαμουραμπί (περ. βασιλείας 1792-1750 π.Χ.).

Τα Μαθηματικά στα οποία θα αναφερθούμε στη συνέχεια αφορούν ακριβώς σε αυτή την περίοδο. Μολονότι η Βαβυλώνα αποτέλεσε το κέντρο των εξελίξεων για σχετικά μικρό χρονικό διάστημα συγκριτικά με τη διάρκειά του πολιτισμού της περιοχής, ο όρος «βαβυλωνιακά» για τα Μαθηματικά της περιόδου έχει καθιερωθεί στον χώρο της ιστορίας των Μαθηματικών. Τα Μαθηματικά αυτής της περιόδου, εν αντιθέσει με τα προγενέστερά τους, δεν έχουν απόλυτα ωφελιμιστικό χαρακτήρα (κυρίως γραφειοκρατικό), αλλά δείχνουν να εξυπηρετούν και εκπαιδευτικές ανάγκες (όπως αυτές των γραφέων της εποχής), κάτι που αποδεικνύεται από την συχνή τεχνητή επανάληψη προβλημάτων και απαντήσεων.

Η πλειονότητα των μαθηματικών κειμένων προέρχονται από την Παλαιοβαβυλωνιακή περίοδο και είναι χαραγμένα σε σφηνοειδή γραφή πάνω σε πήλινες πινακίδες. Λόγω της ανθεκτικότητας του υλικού κατασκευής τους έχουν βγει στο φως από την αρχαιολογική σκαπάνη πολλές χιλιάδες τα τελευταία 150 χρόνια. Από αυτές σχεδόν 500 είναι αυτές που έχουν άμεσο μαθηματικό ενδιαφέρον. Επίσης, το αριθμητικό σύστημα που χρησιμοποιείται είναι το θεσιακό εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης.

Τα μαθηματικά κείμενα δεν περιέχουν αλγεβρικούς συμβολισμούς, ούτε καταγράφονται τύποι σε αυτά, αλλά περιγράφονται λεκτικά αλγοριθμικές διαδικασίες επίλυσης των προβλημάτων, εν είδει διατεταγμένων ακολουθιών συγκεκριμένων οδηγιών. Μια συνήθης μεθοδολογία επίλυσης προβλήματος αρχίζει με την «εικασία» μιας πιθανής λύσης, για να ολοκληρωθεί με τη διόρθωσή της, ώστε να προκύψει η ορθή. Μια ακόμη μεθοδολογία, όπως θα δείξουμε με παραδείγματα, βασίζεται σε γεωμετρικές ιδέες, δηλαδή σε γεωμετρικά τετράγωνα και ορθογώνια και όχι σε αριθμητικά τετράγωνα και γινόμενα.

Τα μαθηματικά κείμενα μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο κύριες κατηγορίες. Στη μία ανήκουν τα κείμενα που περιέχουν πίνακες - καταλόγους πράξεων (για παράδειγμα η περίφημη πινακίδα Plimpton 322 χρονολογούμενη από την Παλαιοβαβυλωνιακή Περίοδο με το περιεχόμενό της να αφορά σε «πυθαγόρειες τριάδες») και στη δεύτερη τα κείμενα που περιέχουν προβλήματα και τις λύσεις τους ή/και τις απαντήσεις τους (Χριστιανίδης, 2003· Katz, 2013).

Στη δεύτερη κατηγορία προβλημάτων ανήκουν και αυτά που θα μπορούσαμε να ονομάσουμε «δευτεροβάθμια», δεδομένου ότι αν διατυπωθούν σε σύγχρονη αλγεβρική γλώσσα ανάγονται στην επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Να σημειωθεί ότι η ερμηνεία τους ως «δευτεροβάθμια» προβλήματα και η απόδοση «ισχυρών» αλγεβρικών ερμηνειών στις επιλυτικές τους διαδικασίες αντιμετωπίζεται τα τελευταία χρόνια με επιφυλακτικότητα και σκεπτικισμό. Για παράδειγμα, τα βήματα επίλυσης που περιγράφονται στα μαθηματικά κείμενα θα μπορούσαν να προκύψουν από απλές αριθμητικές ταυτότητες, αποδίδοντας το ίδιο καλά αποτελέσματα και μάλιστα χωρίς ο γραφέας της εποχής να έχει τη γνώση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, όπως απαιτεί η «ισχυρή» αλγεβρική ερμηνεία.

Ακόμη, στο έργο του ο J. Høyrup ερμηνεύει τα αλγοριθμικά βήματα της επιλυτικής διαδικασίας χωρίς κάποια προσφυγή σε αφηρημένες αλγεβρικές έννοιες, όπως της «εξίσωσης» και του «αγνώστου». Αντιθέτως, οι όροι «μήκος» και «πλάτος» λαμβάνουν την κυριολεκτική τους σημασία, ως γεωμετρικά αντικείμενα, μέσα σε ένα γενικότερο πλαίσιο στοιχειώδους Γεωμετρίας, όπου η επιλυτική διαδικασία μελετάται μέσω διαιρέσεων, συνθέσεων και ανασυνθέσεων γεωμετρικών σχημάτων. Άλλωστε, οι Βαβυλώνιοι ήταν εξοικειωμένοι με εφαρμογές της υπολογιστικής Γεωμετρίας, όπως τους υπολογισμούς εμβαδών και όγκων, καθώς και τις μετρικές σχέσεις σε τρίγωνα και τραπέζια (Χριστιανίδης, 2003).

Φαίνεται πως οι Βαβυλώνιοι[1] ήταν σε θέση να επιλύσουν συστήματα εξισώσεων υπό τις ακόλουθες μορφές (είτε αρχικές, είτε τελικές, έπειτα από ορισμένους μετασχηματισμούς):

$$\begin{cases} x+y=\beta \\ xy=\gamma \end{cases},\ \begin{cases} x-y=\beta \\ xy=\gamma \end{cases},\ \begin{cases} x+y=\beta \\ x^2+y^2=\gamma \end{cases},\ \begin{cases} x-y=\beta \\ x^2+y^2=\gamma \end{cases},\ \begin{cases} x+y=\beta \\ x^2-y^2=\gamma \end{cases},\ \begin{cases} x-y=\beta \\ x^2-y^2=\gamma \end{cases}$$

(Gandz, 1937).

Η πρώτη μορφή των παραπάνω συστημάτων εξισώσεων που έχουν εντοπιστεί και που ανάγεται στην επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων καταδεικνύει πως οι Βαβυλώνιοι ενδιαφέρονταν γενικότερα για τη σχέση μεταξύ του εμβαδού και της περιμέτρου ενός ορθογωνίου, ενώ κατασκεύαζαν καταλόγους εμβαδών γ με δοθείσα περίμετρο 2β και με διαφορετικές τιμές για πλάτος x και μήκος y ενός ορθογωνίου.

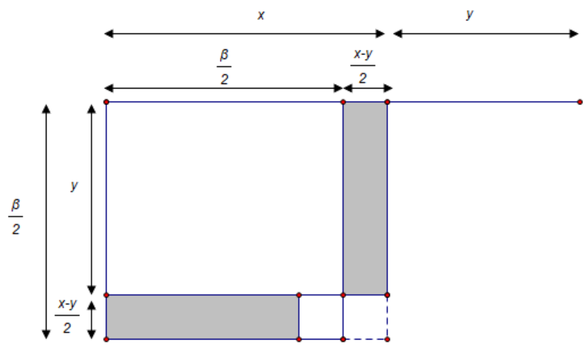
Από αυτούς τους καταλόγους είναι πιθανό η μελέτη των συσχετισμών μεταξύ των μηκών των ποσοτήτων $x=\frac{\beta}{2}+\frac{x-y}{2}$ και $y=\frac{\beta}{2}-\frac{x-y}{2}$ με τα εμβαδά $\gamma=\left(\frac{\beta}{2}+\frac{x-y}{2}\right)\left(\frac{\beta}{2}-\frac{x-y}{2}\right)=\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$ να οδήγησε τελικά στην παρατήρηση ότι $\frac{x-y}{2}=\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$ και έτσι στην λύση του συστήματος: $x=\frac{\beta}{2}+\frac{x-y}{2}=\frac{\beta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$ και $y=\frac{\beta}{2}-\frac{x-y}{2}=\frac{\beta}{2}-\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$.

Βέβαια, όπως έχει επισημανθεί, οι Βαβυλώνιοι δεν καταγράφουν τύπους, αλλά δίνουν αριθμητικά δεδομένα στα παραπάνω μεγέθη, υποδεικνύοντας συγκεκριμένους αριθμητικούς υπολογισμούς για την εύρεση της λύσης. Σε αυτό το σημείο, απλώς, αποδίδουμε τη διαδικασία που ακολουθούσαν για το δεδομένο πρόβλημα με σύγχρονη συμβολική αλγεβρική μορφή. Επιπλέον, η μελέτη των σχετικών πινακίδων δείχνει ότι οι γραφείς προσέγγιζαν και γεωμετρικά το πρόβλημα (όπως και άλλα, των μορφών που αναφέραμε προηγούμενα), ως ακολούθως:

Όπως φαίνεται και στην γεωμετρική απεικόνιση του προβλήματος στο παρακάτω σχήμα *(Εικόνα 11)*, η διαίρεση του αθροίσματος $x+y=\beta$ στα δύο και η κατασκευή ενός

[1] Θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο «Βαβυλώνιοι» σε αντιστοιχία με τα «Βαβυλωνιακά» Μαθηματικά της εποχής, όπως εξηγήθηκε σε προηγούμενη παράγραφο της ενότητας.

τετραγώνου πλευράς $\frac{\beta}{2}$, δείχνει ότι $\frac{\beta}{2} = x - \frac{x-y}{2} = y + \frac{x-y}{2}$ και ότι $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$, δηλαδή ότι το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς $\frac{\beta}{2}$ ισοδυναμεί με το εμβαδόν του αρχικού ορθογωνίου γ συν το τετράγωνο πλευράς $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$. Επίσης, από το σχήμα διακρίνεται εύκολα, πως προσθέτοντας την πλευρά αυτού του τετραγώνου (δηλαδή το $\frac{x-y}{2} = \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma}$) στο $\frac{\beta}{2}$, βρίσκουμε το μήκος x, ενώ αφαιρώντας το από το $\frac{\beta}{2}$, βρίσκουμε το πλάτος y του αρχικού ορθογωνίου, κάτι που αντιστοιχεί και στον αλγόριθμο που περιεγράφηκε παραπάνω (Katz, 2013).



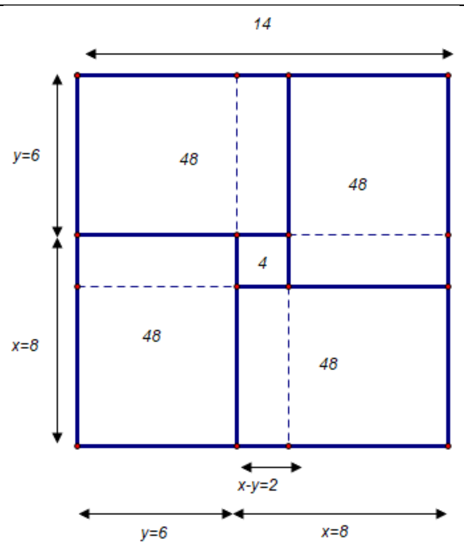
Εικόνα 11: Γεωμετρική απεικόνιση βαβυλωνιακού προβλήματος

Στη συνέχεια, παρατίθεται ένα πρόβλημα αυτής της μορφής που εξετάσαμε παραπάνω. Περιέχεται στην πινακίδα με τον κωδικό BM 34568 (Βρετανικό Μουσείο), η οποία χρονολογείται από την περίοδο των Σελευκιδών (Πίνακας 1):

Πίνακας 1: Επίλυση προβλήματος πινακίδας BM 34568

Λεκτική διατύπωση λύσης στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.	**Συμβολική αλγεβρική διατύπωση λύσης**	**Αλγεβρική διατύπωση λύσης με δευτεροβάθμια εξίσωση**
Μήκος και πλάτος μαζί κάνουν 14, η επιφάνεια είναι 48.	$x+y=14, \quad xy=48$	$x+y=14, \quad xy=48$
Τα μεγέθη δεν είναι γνωστά.	$x=;, \quad y=;$	$x=;, \quad y=;$
14 φορές το 14, 196.	$14 \cdot 14 = 196$	$(x+y)^2 = 196$
48 φορές το 4, 192.	$48 \cdot 4 = 192$	$4xy = 192$
Αφαίρεσε το 192 από το 196.	$196-192=4$	$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=196-192=4$
Πόσες φορές το πόσο κάνει 4;	$z=;$ ώστε $z^2=4$; $2 \cdot 2 = 4$	$x-y=\sqrt{4}=2$
Αφαίρεσε το 2 από το 14, το υπόλοιπο είναι 12.	$14-2=12$	$2y=(x+y)-(x-y)=14-2=12$
12 φορές το $1/2$, 6. Το πλάτος είναι 6.	$12 \cdot 1/2 = 6 = y$	$y = 1/2 \cdot (14-2) = 6$
Στο 2 πρόσθεσε 6, γίνεται 8. Το μήκος είναι 8.	$2+6=8=x$	$x=(x-y)+y=2+6=8$

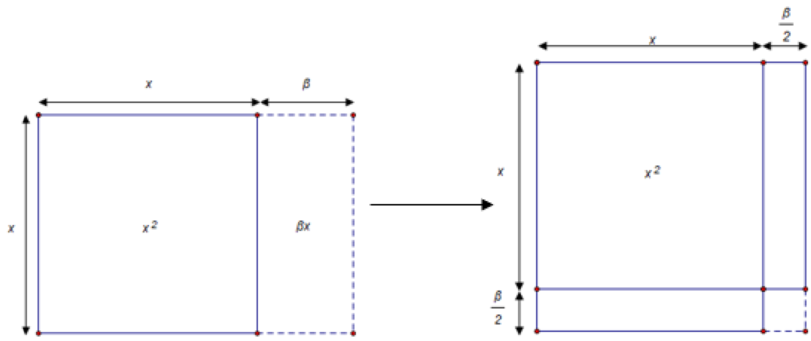
Γεωμετρική προσέγγιση λύσης



Η αλγεβρική λύση του συστήματος εξισώσεων που δίνεται ισοδυναμεί με τη δευτεροβάθμια εξίσωση $w^2 - 14w + 48 = 0$, σε σύγχρονη συμβολική αλγεβρική γλώσσα. Βέβαια, ο ίδιος αλγόριθμος επίλυσης που παρουσιάζεται στο πρωτότυπο κείμενο θα μπορούσε να προκύψει και με τη γνώση από τον γραφέα της εποχής της παρακάτω αριθμητικής ταυτότητας: $(x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2$. Για την εύρεση του $(x-y)$ θα πρέπει αρχικά να υπολογίσει το $(x-y)^2$, έπειτα να πολλαπλασιάσει το xy με το 4, να κάνει την αφαίρεση $(x+y)^2 - 4xy$ και τέλος να βρει την τετραγωνική ρίζα του αποτελέσματος . Έπειτα, γνωρίζοντας τα $(x+y)$ και $(x-y)$ να υπολογίσει τους δύο αγνώστους x και y, χωρίς μάλιστα τη γνώση και χρήση αυτής καθαυτής της δευτεροβάθμιας εξίσωσης (Χριστιανίδης, 2003).

Η γεωμετρική προσέγγιση της λύσης του προβλήματος διατυπωμένη από τον Høyrup, J. (1990), όπως έχουμε ήδη επισημάνει, δεν αναφέρεται σε αφηρημένες αλγεβρικές έννοιες, αλλά τα μεγέθη του «μήκους» και «πλάτους» εκφράζουν γεωμετρικά αντικείμενα (στο σχήμα που παραθέτουμε η όποια χρήση αγνώστων γίνεται και για την κατανόηση των αλγεβρικών προσεγγίσεων). Στο σχήμα, λοιπόν, είναι εμφανές ότι η πλευρά του αρχικού τετραγώνου γράφεται $y + x = y + [(x-y) + y] = y + (2+y) = 2y + 2$ το οποίο ισοδυναμεί με 14, για να δώσει στη συνέχεια εύκολα τις λύσεις αρχικά του $y = 1/2 \cdot (14-2) = 6$ και έπειτα του $x = 14 - y = 14 - 6 = 8$.

Επιπλέον, οι Βαβυλώνιοι, εκτός από τα προαναφερθέντα συστήματα, φαίνεται να ήταν σε θέση να επιλύσουν και μεμονωμένες εξισώσεις δευτέρου βαθμού μορφής $x^2 + \beta x = \gamma$, $x^2 - \beta x = \gamma$ (ή $x^2 = \beta x + \gamma$) και $x^2 + \gamma = \beta x$. Ο αλγόριθμος επίλυσης των δύο πρώτων μορφών οδηγεί στον τύπο $x = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma}$ και $x = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma}$, αντίστοιχα. Η γεωμετρική αναπαράσταση του πρώτου τύπου για την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης μορφής $x^2 + \beta x = \gamma$ μπορεί να αποδοθεί ως εξής *(Εικόνα 12)*:



Εικόνα 12: Γεωμετρική αναπαράσταση τύπου για την επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Σύμφωνα με αυτήν, αποσπάται το μισό ορθογώνιο από την πλευρά του τετραγώνου και μεταφέρεται στη βάση του. Στη συνέχεια, με την προσθήκη του τετραγώνου πλευράς $\frac{\beta}{2}$ (κάτω δεξιά στο σχήμα) έχουμε τη «συμπλήρωση του (νέου) τετραγώνου» πλευράς $\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\gamma}$. Συνεπώς, το άγνωστο μήκος x θα ισούται με τη διαφορά του $\frac{\beta}{2}$ από την πλευρά $\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\gamma}$, αυτού του νέου τετραγώνου, δηλαδή $x=-\frac{\beta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\gamma}$ (Katz, 2013).

Η διαφορετική αναφορά στις δύο πρώτες, φαινομενικά ίδιες για εμάς τους σύγχρονους, μορφές εξισώσεων $x^2+\beta x=\gamma$ και $x^2-\beta x=\gamma$, έγκειται στο ότι οι Βαβυλώνιοι μετέβαλαν τη μέθοδο επίλυσης λόγω της διαφορετικής τους γεωμετρικής απόδοσης (στη συνέχεια θα αναφερθούμε με παραδείγματα σε αυτές). Ακόμη, ενώ ο σύγχρονος τύπος λύσεων δίνει θετική και αρνητική λύση, πρέπει να επισημανθεί ότι οι Βαβυλώνιοι αγνοούσαν την ύπαρξη των αρνητικών, καθώς δεν έχει καμία γεωμετρική σημασία (Katz, 2013).

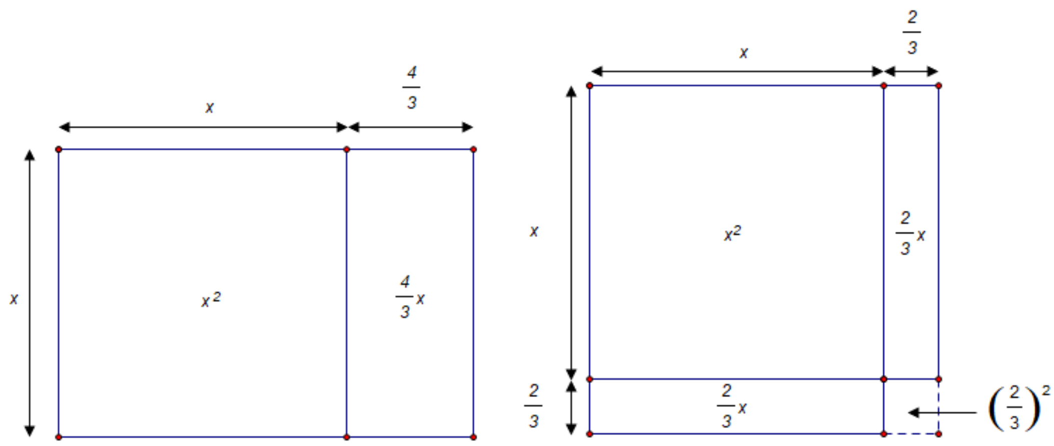
Το παράδειγμα που ακολουθεί αποτελεί πρόβλημα που ανάγεται στην επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης μορφής $x^2+\beta x=\gamma$ και περιέχεται στην πινακίδα BM 13901:

«*Το άθροισμα του εμβαδού ενός τετραγώνου και των* $\frac{4}{3}$ *της πλευράς του είναι* $\frac{11}{12}$, *να βρεθεί η πλευρά του*» (Πίνακας 2):

Πίνακας 2: Επίλυση προβλήματος πινακίδας BM 13901

Λεκτική διατύπωση λύσης (δεκ. σύστ. αρ.)	**Αλγεβρική -Συμβολική διατύπωση λύσης με δευτεροβάθμια εξίσωση**	**Γενικός αλγόριθμος λύσης με σύγχρονη σημειογραφία ($x^2+\beta x=\gamma$)**
Πάρε το μισό του $\frac{4}{3}\cdot$ είναι $\frac{2}{3}$.	$\frac{4}{3}:2=\frac{2}{3}$,δηλαδή $\frac{4}{3}=2\cdot\frac{2}{3}$ και $x^2+2\cdot\frac{2}{3}x=\frac{11}{12}$	$\frac{\beta}{2}$
Τετραγώνισέ το (το $\frac{2}{3}$)· δίνει $\frac{4}{9}$.	$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$ και $x^2+2\cdot\frac{2}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{11}{12}+\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\left(\frac{\beta}{2}\right)^2$
Πρόσθεσέ το (το $\frac{4}{9}$) στο $\frac{11}{12}$ · βρίσκεις την τιμή $\frac{49}{36}=1\frac{13}{36}$.	$x^2+2\cdot\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}=\frac{11}{12}+\frac{4}{9}$ ή $x^2+2\cdot\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}=1\frac{13}{36}$	$\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\gamma$
Η τιμή αυτή είναι το τετράγωνο του $\frac{7}{6}$.	$x^2+2\cdot\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}=\left(\frac{7}{6}\right)^2$ ή $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{7}{6}\right)^2$ ή $x+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$	$\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\gamma}$
Αφαίρεσε το $\frac{2}{3}$ από το $\frac{7}{6}$ · βρίσκεις ότι η	$x=\frac{7}{6}-\frac{2}{3}$ ή $x=\frac{1}{2}$	$-\frac{\beta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\gamma}=x$

<table>
<tr><td>ζητούμενη πλευρά είναι $\frac{1}{2}$.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Γεωμετρική προσέγγισης λύσης</td></tr>
<tr><td colspan="3">



Χωρίζεται το μισό ορθογώνιο και τοποθετείται στη βάση του τετραγώνου πλευράς x.

Με την πρόσθεση του τετραγώνου πλευράς $\frac{2}{3}$ «συμπληρώνεται το τετράγωνο».

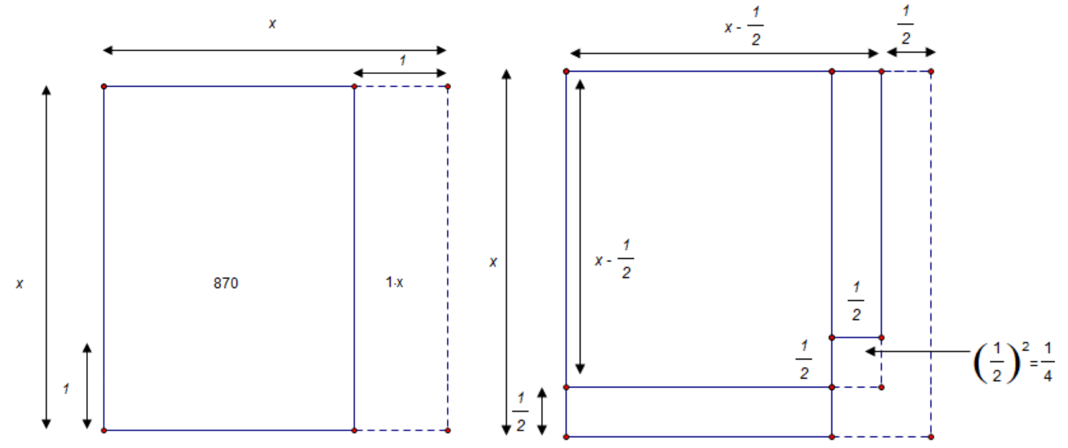
</td></tr>
</table>

Ένα δεύτερο παράδειγμα από την ίδια πινακίδα (BM 13901) με αναγωγή στην επίλυση δευτεροβάθμιας μορφής $x^2 - \beta x = \gamma$ είναι το εξής: «Από την επιφάνεια του τετραγώνου μου αφαίρεσα την πλευρά του και βρήκα 870 (δεκ. σύστ. αρ.). Ποια είναι η πλευρά του;» (Πίνακας 3):

Πίνακας 3: Επίλυση δεύτερου προβλήματος πινακίδας BM 13901

Λεκτική διατύπωση επίλυσης (δεκ. σύστ. αρ.)	**Αλγεβρική -Συμβολική διατύπωση επίλυσης**	**Γενικός αλγόριθμος λύσης με σύγχρονη σημειογραφία ($x^2 - \beta x = \gamma$)**
Πάρε το μισό του $1\cdot$ είναι $\frac{1}{2}$.	$1:2 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$ και $x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x = 870$	$\frac{\beta}{2}$
Τετραγώνισέ το· δίνει $\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{\beta}{2}\right)^2$

Πρόσθεσέ σε αυτό (στο $\frac{1}{4}$) το $870\cdot$ βρίσκεις $\frac{3.481}{4}$.	$x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=870+\left(\frac{1}{2}\right)^2$ $x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=870+\frac{1}{4}$ $x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=\frac{3.481}{4}$	$\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\gamma$
Ποιος αριθμός στο τετράγωνο είναι $\frac{3.481}{4}$; Είναι ο $\frac{59}{2}$.	$x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=\left(\frac{59}{2}\right)^2$ $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{59}{2}\right)^2$ $x-\frac{1}{2}=\frac{59}{2}$	$\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\gamma}$
Πρόσθεσε το $\frac{1}{2}$ στο $\frac{59}{2}\cdot$ βρίσκεις $\frac{60}{2}=30$, που είναι η ζητούμενη πλευρά του τετραγώνου.	$x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{59}{2}+\frac{1}{2}$ $x=\frac{60}{2}=30$	$\frac{\beta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\gamma}=x$
Γεωμετρική προσέγγισης λύσης		



Σχετικά με την τρίτη μορφή εξίσωσης, $x^2+\gamma=\beta x$, ενδιαφέρον είναι ότι οι Βαβυλώνιοι, παρά το γεγονός ύπαρξης δύο θετικών λύσεων για αυτές, αντιμετώπιζαν μόνο την περίπτωση όπου $\left(\frac{\beta}{2}\right)^2=\gamma$, λόγω της μίας λύσης που προέκυπτε. Η προσπάθεια μετασχηματισμού της εξίσωσης σε σύστημα εξισώσεων που ήδη γνώριζαν να επιλύουν, ώστε να αντιστοιχίζεται η κάθε λύση σε διαφορετικό άγνωστο, υποδηλώνει την αδυναμία ερμηνείας ότι μια εξίσωση ενδέχεται να επαληθεύεται από διακεκριμένες τιμές για τον ίδιο άγνωστο (Katz, 2013).

3.2 Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις και η γεωμετρική Άλγεβρα - Ευκλείδης και Διόφαντος

Το σπουδαιότερο ελληνικό μαθηματικό έργο και ίσως το σημαντικότερο όλων των εποχών, τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη (περ. 300 π.Χ.), αποτελείται από δεκατρία βιβλία[2] τα οποία συνιστούν μια επιτομή διάφορων μαθηματικών κλάδων που είχαν αναπτυχθεί έως τότε.

Στο δεύτερο βιβλίο περιέχονται σχέσεις μεταξύ τετραγώνων και ορθογωνίων, με τις περισσότερες να μπορούν να διατυπωθούν με σύγχρονο αλγεβρικό τρόπο. Οι προτάσεις αυτού του βιβλίου, μαζί με τις 43-45 του πρώτου και τις 27-30 του ενδέκατου, συγκροτούν αυτό που ονομάζεται «γεωμετρική Άλγεβρα», δηλαδή την αναπαράσταση αλγεβρικών εννοιών μέσω γεωμετρικών σχημάτων.

Για παράδειγμα η πρόταση ΙΙ-5 του δεύτερου βιβλίου των «Στοιχείων» θα μπορούσε να αποτελέσει τη γεωμετρική αναπαράσταση-αιτιολόγηση της λύσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $(\beta - x)x = \gamma$, δηλαδή της $\beta x - x^2 = \gamma$, με λύση την $x = \frac{\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma}$ (Katz, 2013), που εμφανίζεται και στην περίπτωση των Βαβυλωνίων:

«Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα υποδιαιρεθεί σε δύο ίσα μέρη και σε δύο άνισα, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που περιέχεται από τα δύο άνισα μέρη συν το τετράγωνο με πλευρά το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα σημεία υποδιαίρεσης ισούται με το τετράγωνο με πλευρά το μισό του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος.» (Katz, 2013).

Πράγματι, ας θεωρήσουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{AB} = \beta$ χωρίζεται στα δύο ίσα τμήματα $\mathrm{AM} = \mathrm{MB} = \frac{\beta}{2}$ και στα δύο άνισα $\mathrm{A\Gamma} = \beta - x$ και $\mathrm{\Gamma B} = x$ *(Εικόνα 13).*

Ισχύει:

[2] Τα πρώτα έξι βιβλία αναφέρονται στη μελέτη των δισδιάστατων γεωμετρικών μεγεθών, το έβδομο έως το ένατο σχετίζονται με τη θεωρία αριθμών, το δέκατο βιβλίο συνδέει τις έννοιες του μεγέθους και του αριθμού, το ενδέκατο και δωδέκατο μελετά τη στερεομετρία και τέλος το δέκατο τρίτο χρησιμοποιεί τα αποτελέσματα του δέκατου βιβλίου για την κατασκευή των πέντε κανονικών πολυέδρων.

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{A\Gamma\Delta E})+(\mathrm{Z\Delta KH})=(\mathrm{AMZE})+(\mathrm{M\Gamma\Delta Z})+(\mathrm{Z\Delta KH})=\\
&=(\mathrm{\Gamma B\Lambda K})+(\mathrm{M\Gamma\Delta Z})+(\mathrm{Z\Delta KH})=(\mathrm{MB\Lambda H})
\end{aligned}
$$

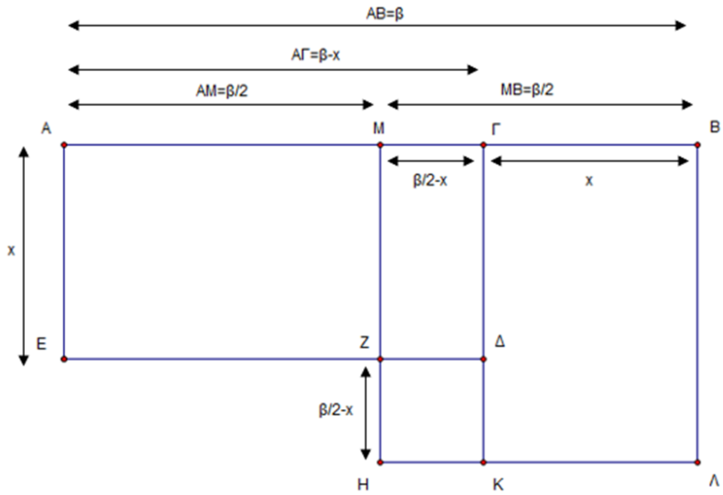
Οπότε:

$$(\mathrm{A\Gamma\Delta E})+(\mathrm{Z\Delta KH})=(\mathrm{MB\Lambda H}) \Leftrightarrow (\beta-x)x+\left(\frac{\beta}{2}-x\right)^2=\left(\frac{\beta}{2}\right)^2$$

Επομένως, αν $(\beta-x)x=\gamma$, τότε

$$\left(\frac{\beta}{2}-x\right)^2=\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{2}-x\right)^2=\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma \Rightarrow \frac{\beta}{2}-x=\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma} \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{\beta}{2}-\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}\ .$$



Εικόνα 13: Γεωμετρική αιτιολόγηση λύσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Οφείλουμε να επισημάνουμε ότι ο όρος «γεωμετρική Άλγεβρα» πυροδότησε μεγάλη διαμάχη μεταξύ της επιστημονικής κοινότητας, ως προς τη σχέση των ελληνικών Μαθηματικών με την Άλγεβρα και τις έμμεσες ή άμεσες βαβυλωνιακές καταβολές της (Katz, 2013).

Ο ιστορικός των Μαθηματικών Otto Neugebauer μελετώντας και ερμηνεύοντας τις βαβυλωνιακές πινακίδες κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η αποκαλούμενη «γεωμετρική Άλγεβρα» είναι το αποτέλεσμα των «αλγεβρικών» βαβυλωνιακών μεθόδων εντός της ελληνικής γεωμετρικής πλαισίωσης. Αυτή η οπτική υιοθετήθηκε από τους περισσότερους μαθηματικούς ερευνητές (μεταξύ τους οι van der Waerden, André Weil, Freudenthal) με την υποστηρικτική επιχειρηματολογία να επικεντρώνεται στην παρέκκλιση μέρους των

«Στοιχείων» από την όλη γεωμετρική κατεύθυνση του έργου επηρεαζόμενο ενδεχομένως από την προϋπάρχουσα βαβυλωνιακή «αλγεβρική» παράδοση (Χριστιανίδης & Διαλέτης, 2006).

Από την άλλη οι αμφισβητίες των παραπάνω ιστορικών αναγνώσεων και ερμηνειών, όπως ο Arpad Szabo και ο Sabetai Unguru, επικεντρώνουν την κριτική τους κυρίως στο ότι η υιοθέτηση της βαβυλωνιακής γνώσης δεν θα μπορούσε να είναι επιλεκτική (καθώς θα είχε ενδεχομένως αφομοιωθεί και το θεσιακό σύστημα αρίθμησης) και στο ότι οι ερμηνευμένες ως «αλγεβρικές ταυτότητες» ή «δευτεροβάθμιες εξισώσεις» των «Στοιχείων» έχουν καθαρά γεωμετρικό περιεχόμενο αξιοποιήσιμο ως βασικό στοιχείο των γεωμετρικών κατασκευών (Θωμαΐδης, 2011).

Συνεχίζοντας με τα ελληνικά Μαθηματικά, το έργο «Αριθμητικά» του σπουδαίου Έλληνα μαθηματικού Διόφαντου (210 – 290 μ.Χ.) άσκησε σημαντική και διαχρονική επιρροή. Αποτελείται από δεκατρία βιβλία, όμως τα έξι διασώζονται στα ελληνικά. Η σημαντικότερη ίσως συνεισφορά του έργου του Διόφαντου είναι η εισαγωγή συμβολισμού κατά την επίλυση εξισώσεων και η εισαγωγή της έννοιας του «αγνώστου» (τον συμβολίζει με το τελικό «ς»), σε αντίθεση με τη προγενέστερη λεκτική βαβυλωνιακή διατύπωση (Katz, 2013). Λόγω των συμβολικών-αλγεβρικών του χαρακτηριστικών ανήκει στην κατηγορία της αποκαλούμενης (κατά Nesselmann, 1842) «συγκεκομμένης» Άλγεβρας, δηλαδή μιας ενδιάμεσης μορφής έκφρασης των λύσεων των προβλημάτων μεταξύ της λεκτικής και της συμβολικής.

Ένα επιπλέον χαρακτηριστικό των εκφωνήσεων των προβλημάτων που παραθέτει είναι ο γενικός και ρητορικός τρόπος διατύπωσής τους, αλλά η εισαγωγή συγκεκριμένων πάντοτε αριθμητικών δεδομένων κατά τη διαδικασία επίλυσης (Θωμαΐδης, 2006). Επίσης, οι μεθοδολογίες και οι λύσεις των προβλημάτων είναι αλγεβρικές σε αντίθεση με τις μάλλον γεωμετρικές βαβυλωνιακές (Katz, 2013).

Η σπουδαιότητα του έργου του Διόφαντου καθιστά απαραίτητη την επισήμανσή του στην ιστορική ανασκόπηση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων, ωστόσο η απουσία του γεωμετρικού στοιχείου σε αυτό (κρίσιμο για την παρούσα εργασία), ίσως να καθιστά πλεονασματική την περαιτέρω διαπραγμάτευσή του.

3.3 Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις στη μεσαιωνική Ινδία

Η κοινωνική ταξική οργάνωση της Ινδίας σε κάστες και η αυστηρή ινδουιστική θρησκευτική παράδοση μέσω των ιερέων (βραχμάνων) δυσχέραινε τη μετάδοση της γνώσης, η οποία ακόμη και με την ανάπτυξη της γραφής συνεχίζονταν κυρίως προφορικά. Η έλλειψη πληθώρας γραπτών και η συνοπτική έμμετρη μορφή των μαθηματικών κειμένων που έχουν διασωθεί τα καθιστούν δυσνόητα. Ο έλεγχος των ινδικών βασιλείων απαιτούσε έγκυρες απαντήσεις σε πρακτικά προβλήματα αστρονομικής φύσεως. Γι' αυτό και τα περισσότερα ινδικά μαθηματικά έργα αποτελούν μέρος αστρονομικών έργων (Katz, 2013).

Ωστόσο, δεν έλλειπαν και δημιουργικοί εκπρόσωποι των ινδικών μαθηματικών, όπως οι Brahmagupta, (7ο αιώνας μ. Χ.) και Bhaskara II, (12ο αιώνας μ. Χ.). Και οι δύο ασχολήθηκαν με τις αόριστες εξισώσεις μορφής $\alpha x^2 \pm \beta = y^2$ (ή και ειδικότερα εξισώσεων μορφής «Pell» $\alpha x^2 \pm 1 = y^2$ (όπως καταχρηστικά ονομάζονται από το όνομα του μαθηματικού του 17^ου^ αιώνα John Pell) (για παράδειγμα $92x^2 + 1 = y^2$). Παρά το γεγονός ότι κυρίαρχο και σπουδαιότερο στοιχείο της ινδικής μαθηματικής παράδοσης ήταν η επίλυση των παραπάνω μορφών εξισώσεων, τα έργα τους μεταξύ άλλων περιέχουν και αλγεβρικές μεθόδους επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων (με έναν ή περισσότερους αγνώστους) με βασική τεχνική τη συμπλήρωση τετραγώνου και την λεκτική περιγραφή των λύσεων και των συνθηκών για την ύπαρξή τους. Επίσης, στην περίπτωση δευτεροβάθμιων εξισώσεων με θετική και αρνητική ρίζα, ο Bhaskara II καταλήγει μόνο στη θετική, ενώ δεν διαπραγματεύεται παραδείγματα δευτεροβάθμιων εξισώσεων με δύο αρνητικές ρίζες ή καμία πραγματική ρίζα, αλλά ούτε και με άρρητες ρίζες.

Οι Ινδοί μαθηματικοί καθώς φαίνεται γνώριζαν τις συνήθεις μεθόδους επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Όμως, δεν υπάρχουν επαρκή τεκμήρια για να καταλήξει κανείς σε ασφαλή συμπεράσματα για το αν η γνώση αυτών προέκυψε ανεξάρτητα των υπόλοιπων πολιτισμών ή κατόπιν επιρροών τους (από τους Βαβυλώνιους ή μέσα από το έργο του Διόφαντου) (Katz, 2013).

3.4 Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις στη μεσαιωνική Κίνα

Στη μεσαιωνική Κίνα (3ος -13ος αιώνας μ.Χ.) τα Μαθηματικά είχαν εφαρμοσμένο και εκπαιδευτικό χαρακτήρα, καθώς συνδέονταν με τις αυτοκρατορικές διοικητικές υπολογιστικές ανάγκες φορολόγησης, χωρομέτρησης, δημιουργίας ημερολογίων, αλλά και την κατάλληλη προετοιμασία των κυβερνητικών υπαλλήλων για αυτές τις διαδικασίες.

Σημαντικό κινεζικό μαθηματικό έργο θεωρείται το «Μαθηματικό εγχειρίδιο της θαλάσσιας νήσου» του Liu Hui, του 3ου αιώνα μ.Χ. Αποτελεί παράρτημα του βιβλίου σχολιασμού των «Εννέα Κεφαλαίων σχετικά με τη Μαθηματική Τέχνη», ενός συνόλου μαθηματικών κανόνων του 1ου αιώνα π.Χ., παρόμοιας ακτινοβολίας στην Ανατολή με τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Το βιβλίο περιέχει πρακτικά προβλήματα χωρομέτρησης, όπως ο υπολογισμός αποστάσεων και υψών, π.χ. ενός νησιού, το βάθος μίας κοιλάδας, το πλάτος ενός ποταμού. Το ένατο κεφάλαιο που αναφέρεται στα ορθογώνια τρίγωνα, περιέχει αρκετά προβλήματα που θα μπορούσαν να διατυπωθούν με δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Γενικότερα, τα περισσότερα προβλήματα μεταφράζονται υπό σημερινούς όρους ως συστήματα γραμμικών και δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Παρόμοια προβλήματα που ανάγονταν στην επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων περιέχονται στο «Μαθηματικό εγχειρίδιο» του Zhang Quijian (περ. 430-490 μ.Χ.) (Katz, 2013).

Δημιουργικοί μαθηματικοί στο συγκεκριμένο πεδίο ήταν επίσης οι Li Ye (1192-1279), Yang Hui (13ος αιώνας) και Zhu Shijie (τέλη 13ου αιώνα). Στο έργο του πρώτου «Παλαιά Μαθηματικά σε επαυξημένα κεφάλαια» («Yigu yanduan») περιέχονται προβλήματα με κύριο σκοπό τη διδασκαλία των μεθόδων για τη διατύπωση των κατάλληλων δευτεροβάθμιων εξισώσεων για την επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος. Η αλγεβρική λύση των προβλημάτων συνοδεύεται από μια αντίστοιχη γεωμετρική, ενώ και η διατύπωση των προβλημάτων είναι γεωμετρική. Αξίζει να σημειωθεί ο ρόλος που έπαιξε ο άβακας ως συνδετικός «αριθμητικός» κρίκος γεωμετρικών και αφηρημένων αλγεβρικών στοιχείων. Οι κινέζοι μαθηματικοί ενδεχομένως να αναγνώριζαν ορισμένα πρότυπα σε αυτόν, αναπτύσσοντας αριθμητικούς αλγορίθμους ή ταυτίζοντας για παράδειγμα τη γεωμετρική έννοια του τετραγώνου με μια απλή θέση στον πίνακα, φθάνοντας τελικά στην αφηρημένη αλγεβρική ιδέα του τετραγώνου μιας άγνωστης αριθμητικής ποσότητας (Katz, 2013).

Στο έργο του Yang Hui, «Υπολογιστικές μέθοδοι του Yang Hui» του 1275, το περιεχόμενο αφορά επίσης στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις με λεπτομερείς επεξηγήσεις των μεθόδων του και τη χρήση γεωμετρικών σχημάτων (τετράγωνα και ορθογώνια) για την καλύτερη κατανόησή τους. Ακόμη, το 1303 ο Zhu Shijie συνέγραψε το «Πολύτιμο κάτοπτρο των τεσσάρων στοιχείων» και εισήγαγε μια μέθοδο επίλυσης συστημάτων εξισώσεων με την προσαρμογή προγενέστερων μεθόδων για την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων (Katz, 2013).

3.5 Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις στα αραβικά (ισλαμικά) Μαθηματικά

Κατά τον 7ο και 8ο αιώνα μ.Χ. εξαπλώνεται ραγδαία η νέα μονοθεϊστική θρησκεία του Ισλάμ και κατ' επέκταση δημιουργείται η τεράστια ισλαμική αυτοκρατορία εκτεινόμενη από την ινδική έως την ιβηρική χερσόνησο. Το τέλος των πολέμων και ο συσσωρευμένος πλούτος στις ανατολικές της επαρχίες δημιουργεί τις ενδεδειγμένες συνθήκες για την άνθηση ενός, επίσης νέου, πολιτισμού. Πνευματικά κέντρα αυτού του πολιτισμού αποτελούσαν οι βιβλιοθήκες που ίδρυαν οι εκάστοτε χαλίφηδες. Σε αυτές συλλέγονταν και μεταφράζονταν συστηματικά πλήθος χειρογράφων, πολλά από τα οποία περιείχαν κλασικά ελληνικά μαθηματικά έργα, όπως του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη, του Διόφαντου, κ.ά. Η μετάφρασή τους στην αραβική γλώσσα οδήγησε στη μελέτη τους από λόγιους της εποχής που συνέρρεαν στο νεοϊδρυθέν ερευνητικό κέντρο της Βαγδάτης, τον «Οίκο της Σοφίας» (επί διακυβέρνησης Al-Ma'mun, 813-833 μ.Χ.). Φυσιολογικά, οι λόγιοι-ερευνητές αφομοίωσαν την αρχαία βαβυλωνιακή και ελληνική μαθηματική παράδοση, συνεισφέροντας, τελικά, ουσιαστικά στη διαμόρφωση της «σύγχρονης» επιστήμης, εναρμονίζοντας τη μαθηματική θεωρία και με πρακτικές εφαρμογές των Μαθηματικών. Η συνεισφορά τους ειδικότερα στον τομέα της Άλγεβρας θεωρείται σπουδαία. Η συμβολή της κλασικής ελληνικής γεωμετρικής νόησης με κεντρική έννοια την απόδειξη συνδυαστικά με την προϋπάρχουσα γνώση των Βαβυλώνιων γραφέων ήταν καθοριστική για το έργο τους. (Katz, 2013).

3.5.1 Al-Khwarizmi

O Al-Khwarizmi (περ. 780-850 μ.Χ.) συγκαταλέγεται στους πρώτους λόγιους του «Οίκου της Σοφίας» και αποτελεί ίσως τον σημαντικότερο εκπρόσωπο των αραβικών (ισλαμικών ακριβέστερα) Μαθηματικών αυτής της περιόδου. Μάλιστα, από τον τίτλο του βιβλίου του «Συνοπτικό βιβλίο για τον λογισμό της αποκατάστασης[3] και της εξισορρόπησης (ή σύγκρισης)[4]» ("Al-kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala") και τη λέξη «al-jabr» προέρχεται, ως παραφθορά, η ίδια η λέξη «Άλγεβρα», η οποία προσδιόρισε τελικά την ίδια την επιστήμη. Το εγχειρίδιο αυτό αποσκοπούσε στην επίλυση εξισώσεων, αν και στην εισαγωγή του ο Al-Khwarizmi αναφέρει την πρακτική του χρησιμότητα. Ωστόσο, λίγα από τα προβλήματα που περιέχει και οδηγούν σε επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων έχουν

[3] Αποτελεί μετάφραση του όρου «al-jabr» και αναφέρεται στη μεταφορά μιας ποσότητας που αφαιρείται σε ένα μέλος μιας εξίσωσης στο άλλο όπου προστίθεται.
[4] Αποτελεί μετάφραση του όρου «al-muqabala» και αφορά στην απάλειψη ενός θετικού όρου από ένα μέλος μιας εξίσωσης με αφαίρεση ίσων ποσοτήτων και από τα δύο μέλη της.

ρεαλιστικό χαρακτήρα εξυπηρετώντας κάποια πρακτική ανάγκη. Ακόμη, όπως θα παρατηρήσουμε στη συνέχεια, η επιρροή των ελληνικών Μαθηματικών μέσω της συστηματικής ταξινόμησης των προβλημάτων και τη λεπτομερή αιτιολόγηση των μεθόδων του, αλλά και η επιρροή των προγενέστερων βαβυλωνιακών αλγοριθμικών[5] μεθόδων επίλυσης είναι εμφανής. Επίσης, βασικό χαρακτηριστικό του έργου του είναι η γεωμετρική αναπαράσταση των λύσεων των διάφορων τύπων εξισώσεων που προσφέρει, μέσω τετραγώνων και ορθογωνίων (Sesiano, J. 2009· Katz, 2013· Guevara-Casanova & Burgués-Flamarich, 2018).

Γενικά, ασχολείται με τρία είδη ποσοτήτων: το τετράγωνο του αγνώστου (x^2), τη ρίζα του αγνώστου (x) και τον απόλυτο αριθμό (σταθερός όρος της εξίσωσης). Με βάση αυτές τις ποσότητες ταξινομεί τις εξισώσεις σε έξι διαφορετικές μορφές:

1. Τετράγωνα ίσα με ρίζες ($\alpha x^2 = \beta x$)
2. Τετράγωνα ίσα με αριθμούς ($\alpha x^2 = \gamma$)
3. Ρίζες ίσες με αριθμούς ($\beta x = \gamma$)
4. Τετράγωνα και ρίζες ίσα με αριθμούς ($\alpha x^2 + \beta x = \gamma$)
5. Τετράγωνα και αριθμοί ίσα με ρίζες ($\alpha x^2 + \gamma = \beta x$)
6. Ρίζες και αριθμοί ίσα με τετράγωνα ($\beta x + \gamma = \alpha x^2$)

Να σημειωθεί ότι οι συντελεστές και οι ρίζες των παραπάνω μορφών εξισώσεων είναι θετικοί αριθμοί, καθώς γενικότερα τα ισλαμικά Μαθηματικά δεν αναφέρονται καθόλου σε αρνητικούς αριθμούς, απουσία γεωμετρικής νοηματοδότησης. Γι’ αυτό και η δευτεροβάθμια εξίσωση πλήρους μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με θετικούς συντελεστές δεν είχε νόημα για τον Al-Khwarizmi, καθώς οι λύσεις της είναι μη θετικές (Katz, 2013).

Επίσης, να τονίσουμε ότι η διατύπωση των προβλημάτων και των λύσεών του είναι λεκτική και όχι συμβολική (ρητορική Άλγεβρα). Ενδεικτικά ακολουθεί ένα πρόβλημα (συγκαταλέγεται στη διδακτική παρέμβαση στο φύλλο εργασίας 3):

«*Ποιο είναι το τετράγωνο το οποίο αν αυξηθεί κατά δέκα ρίζες του γίνεται τριάντα εννέα;*».

[5] Η λέξη «αλγόριθμος» αποτελεί παραφθορά του ονόματος του Al-Khwarizmi.

Με συμβολικό τρόπο το πρόβλημα διατυπώνεται με τη δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2+10x=39$. Ακολουθεί η λεκτική κατά Al- Khwarizmi διατύπωση της λύσης του προβλήματος, όπως και η αντίστοιχη αριθμητική και αλγεβρική (Πίνακας 4):

Πίνακας 4: Επίλυση προβλήματος Al-Khwarizmi

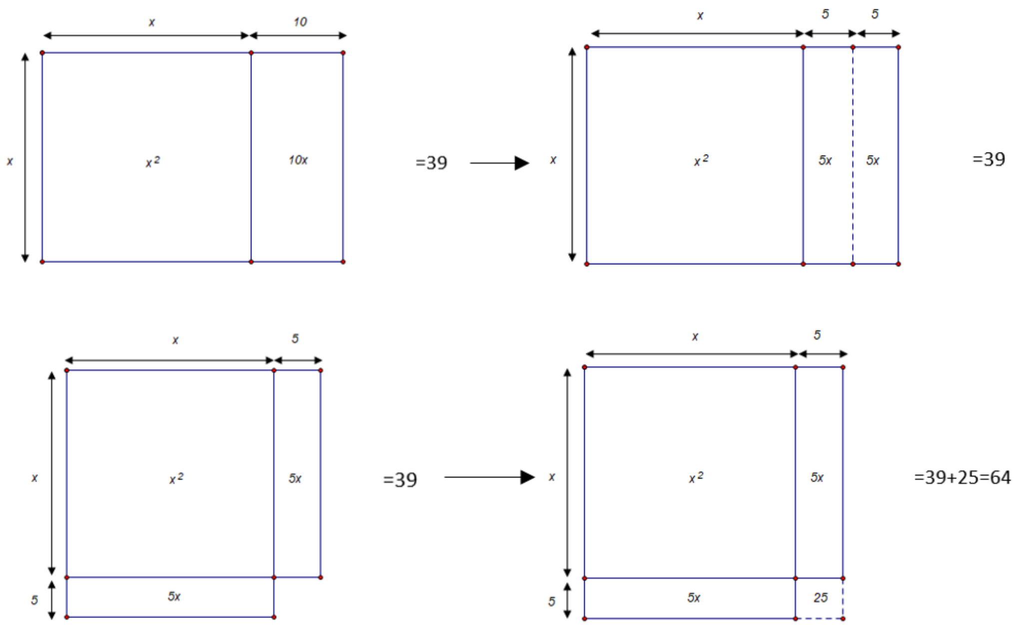
Λεκτική διατύπωση λύσης	**Αριθμητική διατύπωση λύσης**	**Αλγεβρική διατύπωση λύσης**
Υποδιπλασιάζεις το πλήθος των ριζών που στο παράδειγμα αυτό μας δίνει πέντε.	$10:2=5$	$x^2+2\cdot 5x=39$
Μετά πολλαπλασιάζεις τον αριθμό αυτόν επί τον εαυτό του που δίνει είκοσι πέντε.	$5\cdot 5=25$	$x^2+2\cdot 5x+\underline{5^2}=39+5^2$
Προσθέτεις αυτό στο τριάντα εννέα και το άθροισμα είναι εξήντα τέσσερα.	$25+39=64$	$(x+5)^2=64$
Παίρνεις την τετραγωνική ρίζα αυτού που είναι οκτώ.	$\sqrt{64}=8$	$x+5=\sqrt{64}=8$
Αφαιρείς το μισό του πλήθους των πραγμάτων που είναι πέντε. Η διαφορά είναι τρία. Αυτή είναι η ρίζα του τετραγώνου που ψάχνεις.	$8-5=3$	$x=8-5=3$

Παρατηρεί κανείς τις ομοιότητες με τη διαδικασία επίλυσης του βαβυλωνιακού προβλήματος της πινακίδας BM13901 (ενότητα Βαβυλωνιακής περιόδου) με τη γενική μορφή της εξίσωση $x^2+\beta x=\gamma$ να δίνει τη θετική λύση $x=-\frac{\beta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\gamma}$.

Ο Al- Khwarizmi δίνει ρητά (εν αντιθέσει με τους Βαβυλώνιους) και τη γεωμετρική αιτιολόγηση της μεθόδου (με δύο τρόπους[6]· μετάφραση Rosen του 1831) με εμφανείς τις βαβυλωνιακές καταβολές της συμπλήρωσης τετραγώνου μέσω αποκοπής και επικόλλησης:

«Αρχίζει *με το τετράγωνο* x^2*, προσθέτει δυο ορθογώνια καθένα από τα οποία έχει πλάτος* 5 *(το μισό του πλήθους των ριζών) (εννοεί στις δύο κάθετες πλευρές του τετραγώνου). Τότε, το άθροισμα του τετραγώνου και των δύο ορθογωνίων είναι* $x^2+10x=39$*. Έπειτα, συμπληρώνει το τετράγωνο με ένα τετραγωνάκι εμβαδού* 25 *οπότε παίρνει τετράγωνη περιοχή συνολικού εμβαδού* 64*. Η λύση* $x=3$ *συνάγεται εύκολα»* (δεύτερος γεωμετρικός τρόπος επίλυσης που παρατίθεται) (Katz, 2013).

Η πορεία επίλυσης σχηματικά μπορεί να αποδοθεί ως ακολούθως *(Εικόνα 14):*



Εικόνα 14: Σχηματική πορεία επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης κατά Al-Khwarizmi

Ακόμη, ο Al-Khwarizmi για την επίλυση εξισώσεων μορφής $\alpha x^2+\beta x=\gamma$ (τέταρτου τύπου), δηλαδή εξισώσεων με τον συντελεστή του τετραγώνου διαφορετικό της μονάδας πολλαπλασιάζει επί, ή διαιρεί διά, ενός κατάλληλου αριθμού, ώστε να προκύψει συντελεστής η μονάδα και έπειτα εφαρμόζει την παραπάνω μέθοδο (Katz, 2013).

---

[6] Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο δεύτερος κατά σειρά. Ο πρώτος που δίνει ο Al-Khwarizmi αρχικά είναι μια πολυπλοκότερη απόδειξη μέσω ενός τετραγώνου που περιβάλλεται από τέσσερα ορθογώνια και τέσσερα μικρά τετράγωνα.

Αξίζει να επισημανθεί ότι ο τρόπος διαπραγμάτευσης των εξισώσεων μορφής $x^2+\gamma=\beta x$ (πέμπτου τύπου), καθώς και η γεωμετρική αιτιολόγηση της διαδικασίας επίλυσής της, φανερώνει ότι ο Al-Khwarizmi ήταν σε θέση να διαχειριστεί, έστω αριθμητικά, εξισώσεις με δύο θετικές λύσεις. Στην περίπτωση μετασχηματισμού της εξίσωσης αυτής της μορφής στη μορφή $x^2+\gamma=\beta x$, η λεκτική περιγραφή της διαδικασίας επίλυσης που οδηγεί στον σύγχρονο τύπο $x=\frac{\beta}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$, δηλαδή $x=\frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2}$ (συντελεστής $\alpha=1$).

Μάλιστα, σημειώνει και τις συνθήκες δυνατής επίλυσης της παραπάνω εξίσωσης:
«Εάν το γινόμενο του μισού πλήθους των ριζών επί τον εαυτό του είναι μικρότερο από τον αριθμό που συνδέεται με το τετράγωνο, τότε η εξίσωση δεν λύνεται· αλλά εάν το γινόμενο είναι ίσο με τον αριθμό, τότε η ρίζα του τετραγώνου ισούται ακριβώς με το μισό του πλήθους των ριζών και τίποτα δεν προστίθεται ούτε αφαιρείται» (Katz, 2013).

Πράγματι, η πρώτη συνθήκη συμβολικά αποδίδεται ως $\left(\frac{\beta}{2}\right)^2<\gamma$ η οποία προοδευτικά οδηγεί στο $\beta^2-4\gamma<0$, δηλαδή σε αρνητική διακρίνουσα. Ενώ, η δεύτερη σε μηδενική διακρίνουσα και λύση $x=\frac{\beta}{2}$.

Επίσης, η γεωμετρική απόδειξη θυμίζει την αντίστοιχη βαβυλωνιακή κατά την επίλυση του συστήματος $\begin{cases} x+y=\beta \\ xy=\gamma \end{cases}$ (ενότητα βαβυλωνιακής περιόδου).

Τέλος, να σημειώσουμε ότι ο Al-Khwarizmi ασχολήθηκε και με εξισώσεις άρρητης ρίζας, όπως την $10x=(10-x)^2$, επισημαίνοντας ως λύση την $x=15-\sqrt{125}$ και αδιαφορώντας για την $x=15+\sqrt{125}$, καθώς δεν θα μπορούσε να αποτελεί «μέρος» του 10 (Katz, 2013).

3.5.2 Σύγχρονοι και μεταγενέστεροι του Al-Khwarizmi

Το έργο του Al-Khwarizmi, αν κρίνουμε από το ότι ο ίδιος το αποκαλεί «σύνοψη», φαίνεται να μην είναι το μοναδικό εκείνης της περιόδου με αλγεβρικές μεθόδους επίλυσης εξισώσεων και συνοδευτικές γεωμετρικές αιτιολογήσεις. Το βιβλίο «Λογικές αναγκαιότητες στις μικτές εξισώσεις» (μέρος του έργου Kitab al-jabr wa'l muqabala) του ibn Turk (γνωρίζουμε ελάχιστα για τον βίο του) αφορά και εκείνο σε δευτεροβάθμιες εξισώσεις των μορφών 1, 4, 5 και 6 που προαναφέραμε και εντοπισμό κατάλληλων συνθηκών επίλυσης εξισώσεων, αλλά με εκτενέστερες γεωμετρικές περιγραφές των λύσεων από τις αντίστοιχες του Al-Khwarizmi (Katz, 2013).

Στον επόμενο μισό αιώνα από το μαθηματικό έργο των Al-Khwarizmi και ibn Turk υπήρξε στροφή προς την αυστηρότερη γεωμετρική θεμελίωση των αλγεβρικών διαδικασιών επίλυσης βασιζόμενη στο έργο του Ευκλείδη και όχι στην «απλοϊκή» βαβυλωνιακή γεωμετρική παράδοση, με το πρώτο ενδεικτικό παράδειγμα αυτής της επιστημονικής στροφής να αποτελεί το έργο του Thabit ibn Qurra (περ. 830-890), «Περί της επαλήθευσης των προβλημάτων της άλγεβρας μέσω γεωμετρικών αποδείξεων» ("Qawl fi tashih masa'il al-jabr bi l-barahin al-handasiya").

Στο ίδιο πνεύμα ήταν και το έργο "Kitab fi al-jabr wa'l-muqabala" του Αιγύπτιου μαθηματικού Abu Kamil (περ. 850-930), ο οποίος αναφέρει ρητά την επεξήγηση των μεθόδων του βάσει των γεωμετρικών οχημάτων του Ευκλείδη, αποδεικνύοντας όμως εκ νέου τα αποτελέσματα των «Στοιχείων» και συμπεριλαμβάνοντας ως αριθμητικά παραδείγματα τα ίδια που χρησιμοποιούσε και ο Al-Khwarizmi. Εν αντιθέσει με τον προγενέστερό του Thabit ibn Qurra πραγματεύεται πιο σύνθετες εξισώσεις, ενώ χειρίζεται ειδικότερα και χωρίς ιδιαίτερους προβληματισμούς άρρητους αριθμούς. Αυτό εξηγείται από την ερμηνεία που απέδιδε στη λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης ως έναν γενικότερο «αριθμό»[7] και όχι περιοριστικά ως ένα ευθύγραμμο τμήμα, όπως θα ήταν στα «Στοιχεία».

3.6 Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις στη Δύση

3.6.1 Μεσαίωνας (5ος - 15ος αιώνας μ.Χ.)

Η πτώση της Δυτικής Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας (395-476 μ.Χ.) το 476 μ.Χ. σηματοδοτεί την έναρξη του Πρώιμου Μεσαίωνα[8] (5ος-10ος αιώνας μ.Χ.) ο οποίος χαρακτηρίστηκε από την κατάτμηση των εδαφικών περιοχών της πάλαι ποτέ αυτοκρατορίας σε φέουδα. Η σχεδόν απόλυτη αυτάρκεια των φέουδων και η απουσία εμπορικής δραστηριότητας, ιδιαίτερα μετά τον μουσουλμανικό έλεγχο των μεσογειακών θαλάσσιων οδών, κατέστησαν τη μαθηματική γνώση ουσιαστικά και πρακτικά «αχρείαστη» και τη μαθηματική έρευνα και ανάπτυξη σχεδόν ανύπαρκτη. Το γεγονός ότι ο Πρώιμος Μεσαίωνας κληρονόμησε από την αρχαιότητα

[7] Ενδεχομένως να μην ήταν σε θέση να ορίσει επακριβώς την έννοια.

[8] Ακολουθούν ο Ώριμος ή Κλασικός Μεσαίωνας (1000-1300 μ.Χ.) και ο Ύστερος Μεσαίωνας (περ. 1301-1500 μ.Χ.) συνθέτοντας την μεσαιωνική ευρωπαϊκή περίοδο (Μεσαίωνα) του 5ου – 15ου αιώνα μ.Χ.

την άποψη ότι η μελέτη των τεσσάρων αντικειμένων των μαθηματικών τεχνών[9] (Αριθμητική, Γεωμετρία, Μουσική, Αστρονομία) είναι απαραίτητη για τον μορφωμένο άνδρα, αποτελεί αντίφαση. Τα όποια σχολεία αυτής της περιόδου ήταν συνδεδεμένα με τα μοναστήρια και η όποια μαθηματική γνώση καλούνταν να εξυπηρετήσει ανάγκες θρησκευτικής φύσεως, όπως τον εναρμονισμό του ρωμαϊκού και εβραϊκού σεληνιακού ημερολογίου μέσω μαθηματικών υπολογιστικών μεθόδων.

Η ανακάλυψη των σπουδαίων ελληνικών μαθηματικών (και όχι μόνο) έργων της αρχαιότητας συντελείται στις αρχές του 12ου αιώνα μ.Χ. (περίοδος Ώριμου Μεσαίωνα), τις περισσότερες φορές μάλιστα με την αρχική μετάφρασή τους από τα αραβικά στα λατινικά. Σημαντικό μεταφραστικό σταθμό και επιστημονικό «κόμβο» μεταξύ ελληνικών, αραβικών και λατινικών συγγραμμάτων αποτέλεσε η έως τότε μουσουλμανική και μόλις επανακτηθείσα από τους χριστιανούς περιοχή του Τολέδο στην Ισπανία. Η μετάφραση των έργων, με την σημαντική συμβολή των Ισπανοεβραίων οι οποίοι γνώριζαν καλά την αραβική γλώσσα, οδήγησε στη μελέτη και κατανόησή τους, ενώ τους επόμενους αιώνες οι Ευρωπαίοι αφομοιώνοντας τη μαθηματική γνώση άρχισαν να δημιουργούν νέα (Katz, 2013).

Η πραγματεία πρακτικής Γεωμετρίας και Άλγεβρας του Καταλανού Εβραίου μαθηματικού Abraham bar Ḥiyya (“*Ḥibbur ha-Meshiḥah ve-ha-Tishboret*”) το 1116 μ.Χ., συμπεριλαμβάνει τα σημαντικότερα αποτελέσματα των «Στοιχείων» που αναφέρονται στη λεγόμενη «γεωμετρική Άλγεβρα» και τα χρησιμοποιεί για την απόδειξη της ορθότητας των μεθόδων επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων (Katz, 2013).

Το έργο “Practica Geometriae” (1220 μ.Χ.) του Λεονάρδου της Πίζα (γνωστός ως Fibonacci, περ. 1170-1240) έχει πολλά κοινά στοιχεία με αυτό του Abraham, καθώς περιέχει ορισμούς, αξιώματα και θεωρήματα των «Στοιχείων», ενώ στο τμήμα περί μέτρησης ορθογωνίων, τα συμπεριλαμβάνει για τις γεωμετρικές αιτιολογήσεις των διαδικασιών επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων που εφαρμόζει. Οι διαφορές με το έργο του Abraham είναι ότι περιέχει περισσότερα παραδείγματα, αλλά και εξισώσεις με συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου μεγαλύτερο της μονάδας (σε αυτά πρωτίστως διαιρεί κάθε όρο της εξίσωσης με αυτόν, ώστε να πάρει τη συνήθη μορφή $x^2 + \beta x = \gamma$) (Katz, 2013).

[9] Στα λατινικά αποδίδεται ως “Quadrivium”, δηλαδή ως οι «τέσσερις τρόποι ή οδοί», οι οποίοι έπονταν του “Trivium” (Γραμματική, Λογική, Ρητορική), εφοδιάζοντας συνδυαστικά τον εκπαιδευόμενο με όλες τις ουσιαστικές διανοητικές δεξιότητες της κλασικής αρχαιότητας, καθιστώντας τον τελικά μορφωμένο άνθρωπο.

Στο διασημότερο έργο του “Liber abbaci” («Το βιβλίο του υπολογισμού») και μέσα στην πληθώρα των πρακτικών προβλημάτων, πλαισιωμένων με τα ινδοαραβικά ψηφία, περιέχονται προβλήματα που λύνονται με τη βοήθεια δευτεροβάθμιων εξισώσεων, καθώς και γεωμετρικές αιτιολογήσεις των τύπων για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Επιλύει τα προβλήματά του με πολλές μεθόδους, όπως της «ψευδούς παραδοχής»[10] ή τις μεθόδους του Al-Khwarizmi για τις εξισώσεις δευτέρου βαθμού. Στο τελευταίο κεφάλαιο του έργου ασχολείται με τις έξι μορφές δευτεροβάθμιων εξισώσεων, όπως τις όρισε ο Al-Khwarizmi, ενώ ακολούθως επεξηγεί γεωμετρικά τον τρόπο επίλυσης των τριών περιπτώσεων πλήρους μορφής, παραθέτοντας σχετικά παραδείγματα (ορισμένα ίδια με αυτά των Al-Khwarizmi και Abū Kāmil) (Katz, 2013).

O Jordanus (πρώτο μισό 13ου αιώνα) είναι γνωστός για τα έργα του «Αριθμητική» (παρόμοιας στόχευσης και δομής με τα «Στοιχεία») και «Περί δεδομένων αριθμών» (“De numeris datis”). Τα προβλήματα του δεύτερου είναι περισσότερο αλγεβρικά παρά γεωμετρικά, ενώ οι αποδείξεις μάλλον αριθμητικές, καθώς στόχος του ήταν να βασίσει την δική του Άλγεβρα στην Αριθμητική του πρώτου του έργου και όχι στη Γεωμετρία. Ο Jordanus χρησιμοποιεί γράμματα για την αναπαράσταση τυχαίων αριθμών, οπότε η Άλγεβρά του δεν είναι εντελώς ρητορική. Συν τοις άλλοις, παρατηρείται μια τάση γενίκευσης στο έργο του. Η εισαγωγή συμβολισμού και η γενίκευση οπωσδήποτε αποτελούν μια πρόοδο συγκριτικά με τα ισλαμικά έργα. Ορισμένα προβλήματα του έργου ανάγονται στην επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων ή συστημάτων δευτεροβάθμιων εξισώσεων, παρόμοιας και γενικότερης εκδοχής του γνωστού βαβυλωνιακού προβλήματος περί εύρεσης πλευρών ορθογωνίου με γνωστή ημιπερίμετρο και εμβαδόν (ενότητα βαβυλωνιακών Μαθηματικών). Να σημειωθεί ότι ενώ ο Jordanus χρησιμοποιεί κλάσματα, επιλέγει αριθμούς ώστε να καταλήγει πάντα σε ακέραιες λύσεις, επηρεασμένος από την ευκλείδεια οπτική ότι οι άρρητοι αριθμοί δεν έχουν θέση σε ένα κατά βάσιν έργο Αριθμητικής (Katz, 2013).

3.6.2 Αναγέννηση (15ος - 16ος αιώνας)

Η εμπορική επανάσταση που παρατηρήθηκε ήδη από τον 14ο αιώνα μ.Χ. και η φυσιολογική μετάβαση των «κλειστών» ευρωπαϊκών οικονομιών σε διεθνείς διαμόρφωσε ένα πιο απαιτητικό πεδίο συναλλαγών για τους εμπόρους, οι οποίοι όφειλαν να αποκτήσουν

[10] Αρχικά, δίνεται μια κατάλληλη, αλλά λανθασμένη, απάντηση η οποία έπειτα προσαρμόζεται καταλλήλως ώστε να προκύψει το σωστό αποτέλεσμα.

ευχέρεια σε υπολογιστικές διαδικασίες και στην επίλυση προβλημάτων (και μάλιστα με ταχύτητα και σαφήνεια), μία γνώση που δεν μπορούσε να προκύψει άμεσα από τα πανεπιστημιακά Μαθηματικά του “Quadrivium” (αναφερθήκαμε σε προηγούμενη ενότητα). Οι Ιταλοί αβακιστές ήταν αυτοί που τελικά έπαιξαν τον καθοριστικό ρόλο της διδασκαλίας του νέου στη Δύση ινδοαραβικού θεσιακού δεκαδικού συστήματος, τους συνοδούς αλγορίθμους χρήσης του, αλλά κατ’ επέκταση και των εργαλείων της ισλαμικής Αριθμητικής και Άλγεβρας. Η ολοένα και μεγαλύτερη ικανότητα που αποκτήθηκε στην Άλγεβρα μέσω της μελέτης των κειμένων των αβακιστών, οδήγησε και στην εφαρμογή των ίδιων τεχνικών για την επίλυση πιο θεωρητικών προβλημάτων που προέκυπταν από την επαναανακάλυψη κλασικών ελληνικών μαθηματικών έργων. Ο συνδυασμός της Άλγεβρας και της ελληνικής Γεωμετρίας θα οδηγήσει τελικά τον 17^{ο} αιώνα στις αναλυτικές τεχνικές που αποτελούν τη βάση των νεότερων Μαθηματικών (Katz, 2013).

Τον 15^{ο} αιώνα τα νέα μαθηματικά έργα συμπεριελάμβαναν τη γνώση της ισλαμικής Άλγεβρας που ήταν ευρέως διαδεδομένη στην Ευρώπη, άλλα σύγχρονα ευρωπαϊκά έργα και καινοτομίες του εκάστοτε συγγραφέα. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί το έργο “Triparty” (1484) του Γάλλου Nicolas Chuquet, όπου στο τρίτο και πιο αλγεβρικό μέρος του οποίου γενικεύει τους κανόνες του Al-Khwarizmi σε εξισώσεις κάθε βαθμού που ανάγονται σε δευτεροβάθμιες, ενώ υπό ορισμένες συνθήκες αποδέχεται αρνητικές λύσεις των εξισώσεων, όμως όχι και το μηδέν (Katz, 2013).

Ο Γερμανός Christoff Rudolff στις αρχές τις δεκαετίας του 1520 συνέγραψε το έργο του “Coss”, του οποίου το δεύτερο μέρος αφιερώνεται στην επίλυση εξισώσεων. Αντί των έξι μορφών των εξισώσεων του Al-Khwarizmi, ο Rudolff ταξινομεί τις εξισώσεις σε οκτώ, ενώ συμπεριλαμβάνει εξισώσεις βαθμού και μεγαλύτερου του δύο, μόνον όμως εκείνες που δύναται να επιλυθούν με αναγωγή σε δευτεροβάθμιες (όπως και ο Chuquet) ή έχουν απλές ρίζες. Επίσης, δεν υπάρχει αναφορά σε αρνητικές ρίζες, ούτε και το μηδέν ως λύση (Katz, 2013).

Ο επίσης Γερμανός Michael Stifel συνέγραψε το 1544 το έργο “Arithmetica integra”, όπου ομοίως με τους περισσότερους σύγχρονούς του δεν αποδέχεται αρνητικές λύσεις στις εξισώσεις του. Σημαντική καινοτομία του Stifel και βήμα προόδου για τη επέκταση της έννοιας του αριθμού είναι το ότι συνοψίζει τις τρεις συνήθεις έως τότε μορφές της δευτεροβάθμιας εξίσωσης στη μία μοναδική μορφή $x^2 = \beta x + \gamma$, όπου οι συντελεστές β, γ είναι και οι δύο θετικοί ή ετερόσημοι (Katz, 2013).

Τα παραπάνω γερμανικά μαθηματικά έργα αποτέλεσαν την σημαντικότερη πηγή για τη διαμόρφωση της πρώτης αγγλικής Άλγεβρας. Πρώτος εκφραστής της είναι ο Robert Recorde (1510-1558 μ.Χ.) ο οποίος στο δικό του "Whetstone of Witte" εισάγει τον μοντέρνο συμβολισμό της ισότητας («=», ζεύγος παραλλήλων όπως αναφέρει), ενώ τροποποιεί και επεκτείνει τον γερμανικό συμβολισμό των δυνάμεων του αγνώστου (Katz, 2013).

Στην Πορτογαλία, ο Pedro Nunes (1502-1578) συγγράφει το 1532 το "Libro de Algebra". Στο έργο του, με εμφανή την ιταλική επιρροή ως προς τον συμβολισμό, ο Nunes περιγράφει το πώς συνδυάζονται οι αλγεβρικές εκφράσεις, πώς επιλύονται οι εξισώσεις και τον τρόπο χειρισμού των ριζικών και των αναλογιών (Katz, 2013).

Οι Ευρωπαίοι μαθηματικοί του 16^{ου} αιώνα, με οδηγό τη μεσαιωνική ισλαμική Άλγεβρα, κατάφεραν να επιλύουν εξισώσεις έως και τετάρτου βαθμού εφαρμόζοντας με ευχέρεια τους κατάλληλους αλγεβρικούς χειρισμούς. Ωστόσο, ο συμβολισμός τους δεν θεωρούνταν ικανοποιητικός, εμποδίζοντας τη διαμόρφωση γενικών τύπων, όπως και για την δευτεροβάθμια εξίσωση. Επίσης, τον 16^{ο} αιώνα και εντός του γενικότερου ενδιαφέροντος για την αναβίωση της γνώσης της κλασικής αρχαιότητας, γίνονται σημαντικές προσπάθειες για την επανεξέταση (μετάφραση, μελέτη, σχολιασμό) των κλασικών ελληνικών μαθηματικών έργων, αυτή τη φορά από το αρχαιοελληνικό πρωτότυπο (ει δυνατόν) και από μαθηματικούς (όχι απλούς μεταφραστές) (Katz, 2013).

Από τους πρώτους εκφραστές του συνδυασμού των δύο τάσεων (ισλαμικής Άλγεβρας και ελληνικής Ανάλυσης) ήταν ο François Viète (1540-1603). Ο Viète συνέγραψε ένα σύνολο πραγματειών, γνωστές ως «Αναλυτική Τέχνη», στις οποίες επαναδιατυπώνει τη μελέτη της Άλγεβρας, αντικαθιστώντας την εύρεση των ριζών των εξισώσεων με τη μελέτη της δομής τους (ζητητική, ποριστική, εξηγητική ανάλυση)[11]. Ακόμη, χρησιμοποιεί και αριθμούς και γράμματα, τα οποία δεν είναι απαραίτητο να δηλώνουν κάποιον αριθμό, αλλά και οποιαδήποτε ποσότητα στην οποία μπορούν να εφαρμοστούν οι αριθμητικές πράξεις. Αυτό το στοιχείο τού επέτρεψε να δίνει τύπους και όχι αλγοριθμικούς κανόνες, καθώς και να εστιάζει στη διαδικασία επίλυσης αντί σε αυτή κάθε αυτή τη λύση του προβλήματος ή σε ορισμένες περιπτώσεις να ανακαλύπτει το συσχετισμό μεταξύ των ριζών με τις εκφράσεις από τις οποίες διαμορφώθηκε η εξίσωση. Για αυτό και δεν ασχολείται με τις αρνητικές ή

[11] Ζητητική ανάλυση καλείται σύμφωνα με τον Viète η διαδικασία μετασχηματισμού του προβλήματος σε εξίσωση με τον συσχετισμό του αγνώστου με τους δοθέντες γνωστούς. Ποριστική ανάλυση είναι η διαδικασία διερεύνησης της ισχύος ενός θεωρήματος μέσω κατάλληλου συμβολικού χειρισμού. Ενώ, εξηγητική ανάλυση λέγεται η τέχνη του μετασχηματισμού της εξίσωσης που προέκυψε στη ζητητική ανάλυση, ώστε να υπολογιστεί ο άγνωστος.

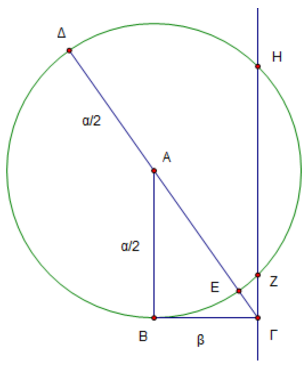
μιγαδικές ρίζες, αλλά με τη σχέση των ριζών προς τους συντελεστές της εξίσωσης (Katz, 2013).

3.6.3 17^{ος} – 19^{ος} αιώνας

Στις αρχές του 17^{ου} αιώνα με την διάδοση της τυπογραφίας και τη συνεπαγόμενη ταχύτερη επικοινωνία, ο ρυθμός μαθηματικής ανάπτυξης επιταχύνθηκε. Το έργο του Viète επαναδιατυπώθηκε στον νέο μαθηματικό τομέα της Αναλυτικής Γεωμετρίας, που συνδυάζει την Άλγεβρα με τη Γεωμετρία. Σημαντικοί εκφραστές της ο René Descartes (1596-1650) και ο Pierre de Fermat (1601-1665).

Η μελέτη των έργων του Απολλώνιου («Επίπεδοι Τόποι») και του Viète οδήγησε τον Fermat στην προσπάθεια αντικατάστασης της γεωμετρικής ανάλυσης του πρώτου με τα αλγεβρικά εργαλεία του δεύτερου. Σε αυτή την προσπάθεια ο Fermat κατόρθωσε να περιγράψει, έστω γενικά, μια μέθοδο αναγωγής οποιασδήποτε δευτεροβάθμιας εξίσωσης σε συγκεκριμένες μορφές που διατύπωσε, δείχνοντας παράλληλα τον τρόπο μετασχηματισμού των μεταβλητών σε κάθε περίπτωση. Επίσης, κατόρθωσε να προσδιορίσει τον τόπο που αντιστοιχεί σε κάθε δευτεροβάθμια εξίσωση δύο μεταβλητών, αποδεικνύοντας ότι είναι ευθεία, κύκλος ή κωνική τομή (Katz, 2013).

Ο Descartes, σε αντίθεση με τον Fermat, κατά τη μελέτη συσχετισμού Άλγεβρας και Γεωμετρίας δεν μελέτησε τους τόπους, αλλά ενδιαφέρθηκε να εμφανίσει τη σχέση των δύο κλάδων με τη γεωμετρική κατασκευή των λύσεων των αλγεβρικών εξισώσεων, και μάλιστα χρησιμοποιώντας συντεταγμένες με την επιλογή ενός κατάλληλου δεδομένου μήκους ως μονάδα. Στο πρώτο από τα τρία βιβλία της «Γεωμετρίας» του ο Descartes δείχνει τον τρόπο γεωμετρικής κατασκευής των λύσεων προβλημάτων που απαιτούν μόνο χρήση ευθείας και κύκλου. Για παράδειγμα κατασκευάζει τις λύσεις των δευτεροβάθμιων εξισώσεων $x^2 = \alpha x + \beta^2$, $x^2 = -\alpha x + \beta^2$ και $x^2 = \alpha x - \beta^2$ (*Εικόνα 15*) ως εξής:



Εικόνα 15: Γεωμετρική κατασκευή λύσεων δευτεροβάθμιων εξισώσεων κατά Descartes

Αρχικά, κατασκευάζει ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με κάθετες πλευρές $B\Gamma = \beta$ και $AB = \alpha/2$. Προεκτείνει την υποτείνουσα $A\Gamma$ έως το Δ, ώστε $A\Delta = AB$. Έπειτα, κατασκευάζει κύκλο με κέντρο το A και ακτίνα $A\Delta$, συμπεραίνοντας ότι η ζητούμενη τιμή για το x είναι το μήκος του $\Delta\Gamma$, καθώς το x δίνεται από τον τύπο $x = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta^2}$.

Το ΓE είναι η λύση της $x^2 = -\alpha x + \beta^2$ (ως $x = \Gamma E = \Gamma A - AE = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta^2} - \frac{\alpha}{2}$), ενώ σχεδιάζοντας την ευθεία $\Gamma Z H$ παράλληλη προς την AB, τα ΓZ και ΓH αποτελούν τις δύο λύσεις της $x^2 = \alpha x - \beta^2$ (Katz, 2013).

Ο Thomas Harriot (1560-1621) κατόπιν μελέτης του έργου του Viète συνειδητοποίησε την ανάγκη ενασχόλησης τόσο με τις αρνητικές όσο και με τις μιγαδικές ρίζες των εξισώσεων, κατορθώνοντας να προχωρήσει, έστω περιορισμένα, στη γενική θεώρησή τους (Katz, 2013).

Ο Albert Girard (1595-1632) στο έργο του “Invention nouvelle en l’algebre” («Νέα ανακάλυψη της Άλγεβρας») είναι πιο σαφής από τον Harriot ως προς τη σχέση των ριζών και των συντελεστών ενός πολυωνύμου, ενώ διατυπώνει για πρώτη φορά με σαφήνεια το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας: «Κάθε αλγεβρική εξίσωση… επιδέχεται τόσες λύσεις όσες δηλώνει η ονομασία της υψηλότερης ποσότητας (…)» (Katz, 2013).

Ολοκληρώνοντας την ιστορική ανασκόπηση βασικών σταθμών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης θα μπορούσαμε να συμπληρώσουμε ότι μεταγενέστερα οι μαθηματικοί εστίασαν περισσότερο σε εξισώσεις μεγαλύτερων βαθμών, κατορθώνοντας να καταλήξουν σε τύπους για την επίλυση εξισώσεων έως και τέταρτου βαθμού. Επίσης, ο Niels Henrik Abel απέδειξε (1827) ότι είναι αδύνατον να επιλυθεί η γενική αλγεβρική εξίσωση πέμπτου ή μεγαλύτερου βαθμού με τη βοήθεια ριζικών, ενώ ο Évariste Galois (1811 – 1832) αποσαφήνισε εν τέλει την έννοια της ρητότητας, οπότε και προσδιόρισε τις συνθήκες ώστε μια εξίσωση να μπορεί να λυθεί με ριζικά (Katz, 2013).

Κεφάλαιο 4ο: Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις στα ελληνικά προγράμματα σπουδών και στα σχολικά βιβλία

4.1 Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις στο Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ. Μαθηματικών του 2003

Το ισχύων Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ. (ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΕΝΙΑΙΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ) των Μαθηματικών του 2003, διαθέτει τα χαρακτηριστικά των διαθεματικών προγραμμάτων σπουδών ενιαίου πλαισίου, δηλαδή: στηρίζεται στις διερευνητικές και ολιστικές διδακτικές προσεγγίσεις, έχει ως βασικούς στόχους την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης, τις δεξιότητες συνεργασίας και τη δημιουργική δραστηριότητα, ενώ δίνει έμφαση στη μαθητοκεντρική μάθηση και την ενεργό συμμετοχή των μαθητών για την απόκτηση της γνώσης, ως δημιουργική μάθηση. Ταυτόχρονα, υλοποιεί δύο ευρωπαϊκούς στόχους: την είσοδο των ΤΠΕ (τεχνολογιών πληροφορίας και επικοινωνίας) στην εκπαιδευτική διαδικασία και την προώθηση της έννοιας της διεπιστημονικότητας. Η θεωρία μάθησης που προωθείται είναι αυτή του εποικοδομητισμού (ή κονστρουκτιβισμού), χωρίς, ωστόσο, αυτή η επιλογή να εξηγείται και να αναλύεται, με αποτέλεσμα οι εκπαιδευτικοί να οδηγούνται σε παρανοήσεις. Προωθείται η δημιουργία συνδέσεων, τόσο ενδομαθηματικών (όπως μεταξύ αναπαραστάσεων μιας έννοιας, μεταξύ μαθηματικών περιοχών με αφορμή μια έννοια ή ένα θέμα), διαθεματικών και διεπιστημονικών (Φυσική, Ιστορία, Γεωγραφία, Τεχνολογία, Οικονομία, Χημεία, κ.ά.) πλαισιωμένων με ρεαλιστικό περιεχόμενο (Κολέζα, 2017).

Ως προς τη θεματική ενότητα των δευτεροβάθμιων εξισώσεων στη Γ’ Γυμνασίου, οπότε και εισάγονται ουσιαστικά οι μαθητές, προτείνονται τα εξής (Πίνακας 5):

Πίνακας 5: Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις στο Α.Π.Σ. της Γ’ Γυμνασίου

• Να λύνουν εξισώσεις δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων. • Να βρίσκουν το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού και να υπολογίζουν τις λύσεις της με τη βοήθεια του τύπου. • Να μετατρέπουν ένα τριώνυμο σε γινόμενο παραγόντων. • Να λύνουν προβλήματα που οδηγούν σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού.	Εξισώσεις δεύτερου βαθμού Προβλήματα εξισώσεων δεύτερου βαθμού *(7 ώρες)*	Η εισαγωγή της εξίσωσης δευτέρου βαθμού θα γίνει με κατάλληλες δραστηριότητες από την καθημερινή ζωή, τη Φυσική (ελεύθερη πτώση, βολή προς τα άνω, κτλ.), την Οικονομία (ανατοκισμός για δυο έτη, κτλ.).
• Να λύνουν κλασματικές εξισώσεις που μετασχηματίζονται σε εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού.	Κλασματικές εξισώσεις *(3 ώρες)*	Η εισαγωγή της κλασματικής εξίσωσης να γίνει με δραστηριότητες από άλλα γνωστικά αντικείμενα, π.χ. Φυσική (συνδεσμολογία αντιστάσεων), Χημεία κτλ.

4.2 Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις στο Νέο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών του 2011 (Ν.Π.Σ.)

Όπως επισημαίνεται, η ανάπτυξη του περιεχομένου του Ν.Π.Σ. του 2011 έγινε με βάση την έννοια της «τροχιάς μάθησης και διδασκαλίας» η οποία «υποδεικνύει τους εκάστοτε στόχους μάθησης, την αφετηρία εκκίνησης, πώς και πού μετακινείσαι κάθε φορά και πώς επιτυγχάνεις, τελικά, το στόχο μάθησης που είχε αρχικά τεθεί. Μια Τροχιά Μάθησης και Διδασκαλίας (ΤΜΔ) αποτυπώνει μια συνολική θέαση της μαθησιακής εμπειρίας των μαθητών σε μια συγκεκριμένη θεματική του Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών».

Οι βασικές θεματικές περιοχές όπου αναπτύσσονται τα περιεχόμενα και τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα είναι: Αριθμοί – Άλγεβρα, Χώρος – Γεωμετρία – Μετρήσεις και Στοχαστικά Μαθηματικά. Οι περιοχές αυτές εμφανίζονται σε όλους τους ηλικιακούς κύκλους[12] αναδεικνύοντας στις μικρότερες τάξεις, άτυπους και διαισθητικούς τρόπους σκέψης, οι οποίοι γίνονται περισσότερο τυπικοί προς το τέλος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα που περιγράφονται για την κάθε τάξη θα ήταν ιδανικό να επιτευχθούν από όλους τους μαθητές. Όμως, στην πραγματικότητα, ο βαθμός επίτευξης του κάθε μαθησιακού αποτελέσματος διαφέρει για τον κάθε μαθητή, με την γνώση από τον εκπαιδευτικό των διάφορων επιπέδων ανάπτυξης να το βοηθά στη διαμόρφωση κατάλληλων παρεμβάσεων με στόχο την περαιτέρω ανάπτυξη όλων των μαθητών.

Η θεματική «Άλγεβρα» περιλαμβάνει τρεις τροχιές: ισότητες & ανισότητες, αλγεβρικές παραστάσεις και μοτίβα/κανονικότητες & συναρτήσεις. Οι διαφορετικές τροχιές συσχετίζονται, διασταυρώνονται και συχνά ενοποιούνται, χωρίς αυτό να είναι πάντοτε εύκολο να ανιχνευτεί και να περιγραφεί με σαφήνεια και ακρίβεια.

Σχετικά με την τροχιά «Ισότητα και Ανισότητα» που κυρίως μας απασχολεί, επισημαίνεται η σημασία της εξίσωσης, καθώς αποτελεί ισχυρό εργαλείο μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων που μπορεί να προέρχονται από άλλα πεδία των Μαθηματικών, από άλλες επιστήμες, αλλά και από την καθημερινή ζωή.

[12] Ο πρώτος ηλικιακός κύκλος αφορά στους μαθητές του νηπιαγωγείου, της Α' τάξης και της Β' τάξης (5-8 ετών), ο δεύτερος κύκλος μαθητές των Γ', Δ', Ε' και Στ΄ τάξεων (8 -12 ετών) και ο τελευταίος ηλικιακός κύκλος τους μαθητές των τάξεων του Γυμνασίου (12-15 ετών).

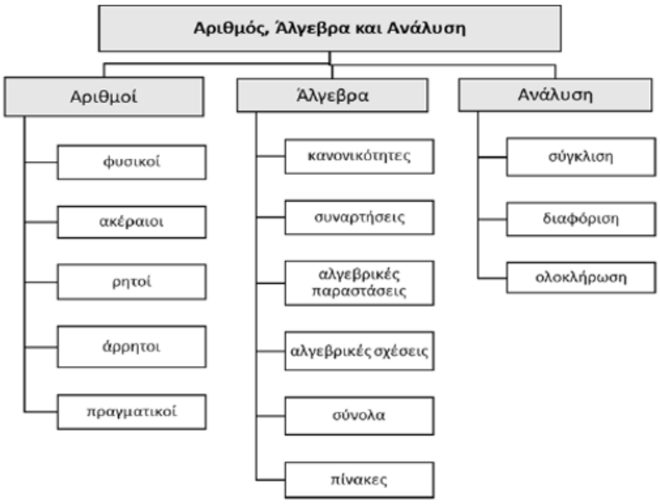
Οι έννοιες και οι διαδικασίες που σχετίζονται με την εξίσωση συνδέονται στενά με τη χρήση του γράμματος, την αλγεβρική παράσταση, τις συναρτήσεις και τις αναπαραστάσεις τους, την έννοια και τις ιδιότητες της ισότητας. Από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού οι μαθητές έχουν συναντήσει εξισώσεις χωρίς γράμματα των οποίων η επίλυση απαιτεί μια πράξη, ενώ στην ΣΤ’ τάξη έχουν συναντήσει τις ίδιες μορφές εξισώσεων, αλλά με χρήση του γράμματος. Στην Α’ Γυμνασίου ασχολούνται με εξισώσεις που έχουν άγνωστο μόνο στο ένα μέλος (που δεν απαιτούν αλγεβρικούς χειρισμούς με τον άγνωστο και στα δύο μέλη). Στη Β΄ Γυμνασίου, εμπλέκονται με γραμμικές εξισώσεις, που ενδέχεται να περιέχουν και ρητούς συντελεστές και παρενθέσεις. Η αλγεβρική επίλυση με γενίκευση της χρήσης των ιδιοτήτων της ισότητας (που είναι ο στόχος γι' αυτή την τάξη) δίνει νόημα και τεκμηρίωση στις αλγοριθμικές διαδικασίες. Επίσης, η γραφική επίλυση εξισώσεων (μέσω των συναρτήσεων) μπορεί να βοηθήσει στην διαμόρφωση αναπαραστάσεων για τις έννοιες της εξίσωσης και της λύσης της. Στη Γ΄ τάξη, οι μαθητές διαπραγματεύονται πολυωνυμικές εξισώσεις (που ανάγονται σε πρωτοβάθμιες μετά από παραγοντοποίηση). Για τις πολυωνυμικές εξισώσεις, χρειάζεται να συζητηθούν στην τάξη τόσο ο σκοπός της παραγοντοποίησης, όσο και η ύπαρξη περισσότερων της μίας λύσης. Στη συνέχεια, στο Λύκειο, ασχολούνται και με άλλες μορφές εξισώσεων που απαιτούν βαθύτερη κατανόηση των εννοιών και ευχέρεια στην επίλυση εξισώσεων.

Η επίλυση προβλήματος για όλες τις τάξεις είναι το πεδίο στο οποίο αναδεικνύεται η αξία της εξίσωσης. Για το σκοπό αυτό απαιτείται η αφιέρωση σεβαστού χρόνου στη μοντελοποίηση καταστάσεων και προβλημάτων με αλγεβρικές παραστάσεις και εξισώσεις. Επίσης, στο πρόγραμμα σπουδών, τα ψηφιακά εργαλεία μαθηματικής έκφρασης αξιοποιούνται με συνδυασμό μεικτής και διακριτής παρέμβασης. Χρησιμοποιούνται, δηλαδή, ως ψηφιακά εργαλεία έκφρασης σε βασικό υλικό αναφοράς σε συνθετικές εργασίες και παράλληλα επιλεκτικά με τη μορφή μικροπειραμάτων στο πλαίσιο κατανόησης των εννοιών, των αναπαραστάσεων και των συνδέσεων μεταξύ αναπαραστάσεων (π.χ. πώς μεταβάλλεται η δευτεροβάθμια εξίσωση καθώς αλλάζει καθεμία από τις παραμέτρους της). Ακόμη, στο πρόγραμμα σπουδών επισημαίνονται οι κυριότερες δυσκολίες των μαθητών, οι οποίες συχνά διατηρούνται στο Γυμνάσιο έως και τις τάξεις του Λυκείου. Σε αυτές αναφερόμαστε διεξοδικά σε επόμενη ενότητα της εργασίας.

4.3 Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις στο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών του 2021

Το νέο πρόγραμμα σπουδών που παρουσιάστηκε το 2021 αποτελείται από τρία θεματικά πεδία: «Αριθμός-Άλγεβρα-Ανάλυση», «Γεωμετρία-Μέτρηση-Αναλυτική Γεωμετρία» και «Στοχαστικά Μαθηματικά (Στατιστική-Πιθανότητες)».

Η δομή της πρώτης θεματικής παρουσιάζεται με την παρακάτω σχηματική αναπαράσταση *(Εικόνα 16):*



Εικόνα 16: Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στις Α', Β', Γ' τάξεις Λυκείου-Γυμνασίου, εικ. σελ. 6

Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις στο πρόγραμμα σπουδών του Γυμνασίου περιέχονται στην υπο-θεματική των συναρτήσεων με μελέτη συναρτήσεων μορφής $y = \alpha x^2$ και την ερμηνεία και γραφική επίλυση εξισώσεων μορφής $\alpha x^2 = \beta$, όπως επίσης και στην υπο-θεματική των αλγεβρικών σχέσεων με την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων, ελλιπούς ή πλήρους μορφής, αλλά και μεγαλύτερου βαθμού με παραγοντοποίηση, καθώς και με την επίλυση και ερμηνεία προβλημάτων δευτέρου βαθμού.

Στο αντίστοιχο πρόγραμμα σπουδών του Λυκείου οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις εμφανίζονται στην υπο-θεματική των αλγεβρικών σχέσεων με την αλγεβρική επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού, τη χρήση τους στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων, όπως και στην κατασκευή προβλημάτων από τους ίδιους τους μαθητές που επιλύονται με εξισώσεις δευτέρου βαθμού. Επίσης, προτείνεται οι μαθητές να βρουν τις ρίζες δευτεροβάθμιας εξίσωσης μέσω της μεθόδου της συμπλήρωσης τετραγώνου και η μοντελοποίησή της με αλγεβρικά πλακίδια (algebra tiles) σε συγκεκριμένες δευτεροβάθμιες εξισώσεις, όπως η $x^2 + 4x + 3 = 0$. Επιπλέον, προτείνεται η αξιοποίηση προβλημάτων ελάχιστης και μέγιστης τιμής τριωνύμου και η γραφική τους επίλυση.

4.4 Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις στη Β' Γυμνασίου

Η πρώτη έμμεση[13] γνωριμία των μαθητών με τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις γίνεται στη Β' Γυμνασίου. Σύμφωνα με το Δ.Ε.Π.Π.Σ. -Α.Π.Σ. των Μαθηματικών του 2003, κατά την παράλληλη και συμπληρωματική (όπως τονίζεται και από τους συγγραφείς του σχολικού βιβλίου) διδασκαλία των πραγματικών αριθμών -ρητών και άρρητων- (Μέρος Α'- κεφάλαιο 2ο- Πραγματικοί Αριθμοί) και του Πυθαγορείου θεωρήματος (Μέρος Β'- 1.4), οι μαθητές γνωρίζουν την έννοια της τετραγωνικής ρίζας και του συμβόλου της, μαθαίνουν να υπολογίζουν τετραγωνικές ρίζες θετικών αριθμών, γνωρίζουν ότι οι άρρητοι αριθμοί δεν είναι μόνο οι θετικές ή αρνητικές ρίζες θετικών ακεραίων ή ρητών, επιλύουν προβλήματα με χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος και του αντιστρόφου του. Χαρακτηριστικά, στο βιβλίο του εκπαιδευτικού (όπως φυσικά και στο σχολικό βιβλίο) δε γίνεται κάποια αναφορά στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις.

Συγκεκριμένα, για την παράγραφο 2.1 (Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού) ως διδακτικοί στόχοι καθορίζονται η γνωριμία των μαθητών με την έννοια του συμβόλου της τετραγωνικής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού και ο υπολογισμός τετραγωνικών ριζών θετικών αριθμών με δοκιμές και με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης. Ακολουθούν σχετικά παραδείγματα του σχολικού βιβλίου (*Εικόνες 17, 18, 19*):

2. Η εξίσωση $x^2 = 16$ έχει λύσεις:
Α: μόνο το 4   Β: μόνο το -4 Γ: το 4 και το -4.

Εικόνα 17: Βιβλίο μαθητή Β΄ Γυμνασίου, Μέρος Α' - 2.1. Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού, σελ. 43

6 Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς x που ικανοποιούν τις εξισώσεις:
α) $x^2 = 9$ β) $x^2 = 25$
γ) $x^2 = 64$ δ) $x^2 = \frac{100}{81}$.

Εικόνα 18: Βιβλίο μαθητή Β΄ Γυμνασίου, Μέρος Α' - 2.1. Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού, σελ. 44

[13] Χαρακτηρίζεται «έμμεση», διότι η επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων δεν προσεγγίζεται αυτοτελώς και ούτε αποτελεί βασικό διδακτικό στόχο, εν αντιθέσει με τις πρωτοβάθμιες εξισώσεις (Μέρος Α'- κεφάλαιο 1ο- Εξισώσεις, Ανισώσεις).

9 Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού, αν αυξηθεί κατά 8, γίνεται ίσο με το τριπλάσιο του τετραγώνου του αριθμού αυτού. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

Εικόνα 19: Βιβλίο μαθητή Β΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄ - 2.1. Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού, σελ. 44

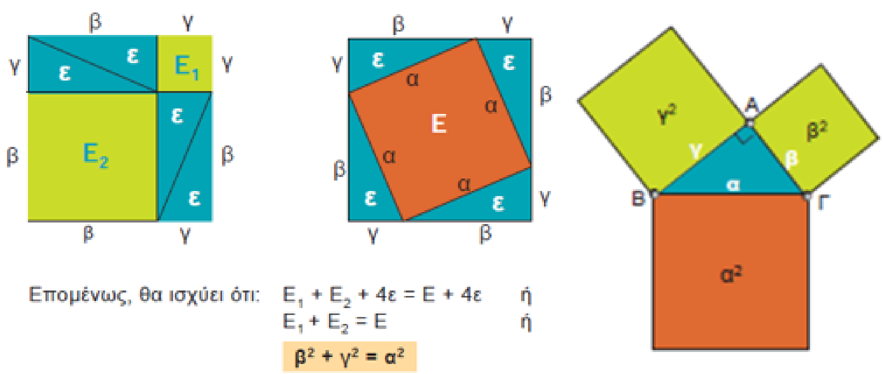
Στην παράγραφο 2.2 (Άρρητοι αριθμοί - Πραγματικοί αριθμοί) οι μαθητές γνωρίζουν τους άρρητους αριθμούς και ποιοι αριθμοί αποτελούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Ενδεικτικά παρατίθεται η παρακάτω άσκηση *(Εικόνα 20):*

4 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $x^2 = 0$, β) $x^2 = 5$, γ) $x^2 = -3$, δ) $x^2 = 17$.

Εικόνα 20: Βιβλίο μαθητή Β΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄ - 2.2. Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί, σελ. 48

Στην παράγραφο 2.3 (Προβλήματα) γίνεται σύνδεση με γεωμετρικές έννοιες μέσω εφαρμογών σε ορθογώνια τρίγωνα (Π.Θ.), που όμως το αποτέλεσμα μπορεί να είναι μόνο θετικές τιμές-λύσεις, καθώς αντιστοιχούν σε μήκη πλευρών (στις ενότητες του 2ου κεφαλαίου, 2.1,2,3, του Μέρους Α' και στην ενότητα 1.4. του Μέρους Β' που αναφέρεται στο Πυθαγόρειο θεώρημα).

Επιπροσθέτως, όπως αναφέρεται στο βιβλίο του εκπαιδευτικού, το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτελεί ευκαιρία για τους μαθητές να συσχετίσουν τις αλγεβρικές και τις γεωμετρικές έννοιες. Για το λόγο αυτό, προτείνεται να δίνεται προβάδισμα στη γεωμετρική «ανακάλυψη» και κατανόηση του θεωρήματος με τη βοήθεια διαγραμμάτων, όπως αποδεικνύεται και στο σχολικό βιβλίο *(Εικόνα 21).* Άλλωστε, ο διαγραμματικός συλλογισμός και η αναζήτηση μοτίβων και δομών, όπως και η απεικόνιση αριθμών και σχέσεων, λειτουργούν ως μέσα υποστήριξης και ανάδειξης του μαθηματικού συλλογισμού (Κολέζα, 2009).



Εικόνα 21: Βιβλίο μαθητή Β΄ Γυμνασίου, Μέρος Β΄ – 1.4 Πυθαγόρειο θεώρημα, σελ. 127, 128

Οι συνδέσεις μεταξύ θεματικών ενοτήτων, και οι συνεπαγόμενες διεπιστημονικές και ενδομαθηματικές συνδέσεις, όπως των εξισώσεων με τις συναρτήσεις και των αλγεβρικών παραστάσεων με εμβαδά, αποτελούν βασικούς στόχους του Νέου Προγράμματος Σπουδών του 2011 (Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (2011) - Επιμορφωτικό Υλικό για τους Καθηγητές Μαθηματικών Γυμνασίου), καθώς μέσα από αυτές οι μαθητές νοηματοδοτούν αφηρημένα μαθηματικά αντικείμενα (π.χ. την αλγεβρική παράσταση), έχουν ευκαιρίες εννοιολογικής κατανόησης, συνειδητοποιώντας τις σχέσεις μεταξύ εννοιών και διαδικασιών, αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητα των Μαθηματικών κατά την επίλυση προβλημάτων άλλων επιστημών και της καθημερινής ζωής και εν τέλει αποκτούν καλύτερες στάσεις απέναντι στα Μαθηματικά.

4.5 Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις στη Γ' Γυμνασίου

Η ουσιαστική ενασχόληση των μαθητών με τη δευτεροβάθμια εξίσωση ξεκινά στη Γ' Γυμνασίου. Σύμφωνα με το Δ.Ε.Π.Π.Σ. του 2003, στόχοι των σχετικών παραγράφων (θα αναφερθούμε παρακάτω σε καθεμία συγκεκριμένα) είναι οι μαθητές να λύνουν δευτεροβάθμιες εξισώσεις με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων, να βρίσκουν το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού και να υπολογίζουν τις λύσεις της με τη βοήθεια του τύπου. Ακόμη, να μετατρέπουν ένα τριώνυμο σε γινόμενο παραγόντων, να λύνουν προβλήματα που οδηγούν σε δευτεροβάθμιες εξισώσεις, καθώς και κλασματικές εξισώσεις που μετασχηματίζονται σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

Στο «Νέο Πρόγραμμα Σπουδών» του 2011 (Μαθηματικά στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση - ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα), Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011) δίνεται έμφαση στη μέθοδο της παραγοντοποίησης με τους διδακτικούς στόχους να είναι οι εξής: επίλυση απλών πολυωνυμικών εξισώσεων (δευτέρου βαθμού ελλιπούς ή και πλήρους μορφής, αλλά και μεγαλύτερου βαθμού) με παραγοντοποίηση, μοντελοποίηση προβλημάτων με απλές πολυωνυμικές εξισώσεις (κυρίως δευτεροβάθμιες), οι οποίες ανάγονται σε πρωτοβάθμιες με παραγοντοποίηση.

Πιο συγκεκριμένα, οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις μελετώνται στο Μέρος Α', κεφάλαιο 2 (Εξισώσεις - Ανισώσεις) του σχολικού βιβλίου, υπό την παρακάτω δομή παραγράφων:

2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

Α. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

Β. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου

2.3 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού

2.4 Κλασματικές εξισώσεις (δεν περιέχεται στη διδακτέα ύλη τις τελευταίες σχολικές περιόδους)

Με εξαίρεση τις εξισώσεις ελλιπούς μορφής $x^2 = \alpha$, τις οποίες οι μαθητές έχουν γνωρίσει στη Β' Γυμνασίου (αναφερθήκαμε προηγούμενα), το περιεχόμενο του κεφαλαίου σχετικά με τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις είναι καθαρά νέο προς αυτούς. Επίσης, να τονιστεί ότι στην παράγραφο 2.2 Α, παρουσιάζεται και η μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου, αλλά μονοδιάστατα, μέσω μιας καθαρά αλγεβρικής προσέγγισης.

Στις οδηγίες προς τους εκπαιδευτικούς της τρέχουσας σχολικής περιόδου προτείνονται 8 διδακτικές ώρες και για τις δύο παραγράφους 2.1 (επανάληψη πρωτοβάθμιων) και 2.2, με βασικό στόχο τη σύνδεση πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων εξισώσεων μέσω παραγοντοποίησης και την τελική τους επίλυση. Ακόμη, προτείνεται η απόδειξη του τύπου για την δευτεροβάθμια εξίσωση (αφήνεται στην κρίση του διδάσκοντα), χωρίς να αποτελεί αντικείμενο εξέτασης. Επίσης, μέσω κατάλληλων παραδειγμάτων (1γ, σελ. 95 – Παράρτημα Α) να συζητηθεί και η δυνατότητα επίλυσης εξίσωσης με παραγοντοποίηση εκτός του τύπου και να συγκριθούν οι δύο μέθοδοι, καθώς όπως τονίζεται, μέσω αυτής της συζήτησης επιδιώκεται να αναδειχθεί η λειτουργικότητα της παραγοντοποίησης πολυωνύμων. Ακόμη, να επισημανθεί η αδυναμία αξιοποίησης άλλων μεθόδων για την επίλυση, όπως η χρήση της ταυτότητας διαφοράς τετραγώνων στο παράδειγμα 2α, σελ. 95 (Παράρτημα Α).

Επιπροσθέτως, στις οδηγίες προς τους εκπαιδευτικούς περιέχονται ενδεικτικές δραστηριότητες, οι οποίες στοχεύουν στην ανάδειξη της σημασίας επίλυσης μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης μέσω αλγεβρικού μετασχηματισμού για την εύρεση όλων των λύσεών της (δραστηριότητα 1η)[14], στην κατανόηση και εξάσκηση της αλγεβρικής και γραφικής προσέγγισης των λύσεων (δραστηριότητα 2η)[15], στη σύνδεση των πολυωνυμικών εξισώσεων και των αλγεβρικών μεθόδων επίλυσής τους με τη γραφική αναπαράστασή τους,

---

[14] *Παρατηρήστε ότι $1^3 = 1$, δηλαδή ότι ο κύβος του 1 ισούται με το 1. Μπορείτε να βρείτε όλους τους αριθμούς που έχουν αυτή την ιδιότητα, δηλαδή ο κύβος του αριθμού να είναι ίσος με τον ίδιο αριθμό; Πόσοι τέτοιοι αριθμοί υπάρχουν;*

[15] http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2132

καθώς και στην αναγνώριση της λύσης της εξίσωσης ως τετμημένης του κοινού σημείου (ή των κοινών σημείων) (δραστηριότητα 3η).

Για την παράγραφο 2.2 (Α και Β), στο βιβλίο του εκπαιδευτικού, προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες (2 για το Α και 3 για το Β μέρος), ως ακολούθως:

- 1η διδακτική ώρα: εισαγωγή των μαθητών στην έννοια της δευτεροβάθμιας εξίσωσης και επίλυση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων (2.2 Α).
- 2η διδακτική ώρα: επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων με συμπλήρωση τετραγώνου (2.2 Α).
- 3η διδακτική ώρα: επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου (απόδειξη και διερεύνηση) (2.2 Β).
- 4η διδακτική ώρα: εκτέλεση παραδειγμάτων και εφαρμογών και επίλυση σχετικών ασκήσεων (2.2 Β).
- 5η διδακτική ώρα: παραγοντοποίηση τριωνύμου και ως εργασία «Ένα θέμα από την ιστορία των Μαθηματικών».

Διδακτικοί στόχοι της παραγράφου 2.2 Α (2 διδακτικές ώρες), ορίζονται:

- η εκμάθηση της γενικής μορφής εξίσωσης δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο και η διάκριση των συντελεστών της και
- η επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων (ελλιπείς μορφές $\alpha x^2+\beta x=0$, $\alpha x^2+\gamma=0$ και πλήρη μορφή με συμπλήρωση τετραγώνου).

Αρχικά, στην παράγραφο 2.2 οι μαθητές εισάγονται στις τρεις μορφές των δευτεροβάθμιων εξισώσεων, πλήρους μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ και ελλιπούς μορφής, $\alpha x^2+\beta x=0$ και $\alpha x^2+\gamma=0$. Στη συνέχεια, θα τις διαπραγματευτούν ξεχωριστά με τη βοήθεια της παραγοντοποίησης και την εφαρμογή της ιδιότητας μηδενικού γινομένου $\alpha\cdot\beta=0 \Leftrightarrow$ $\alpha=0$ ή $\beta=0$, τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου που ενσωματώνει και τη γνώση της Β' Γυμνασίου ως προς τη χρήση της τετραγωνικής ρίζας (2.2Α) και τέλος, τη χρήση του τετραγωνικού τύπου των λύσεων (2.2Β).

Στις διδακτικές οδηγίες επισημαίνεται ότι η μέθοδος της παραγοντοποίησης, με την οποία οι μαθητές έχουν ασχοληθεί και σε αυτοτελή παράγραφο (1.6), χρησιμοποιείται μόνο στην περίπτωση που το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι γινόμενο και το δεύτερο μέλος είναι μηδέν, καθώς έχει παρατηρηθεί ότι τη χρησιμοποιούν και σε άλλες περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα: για την εξίσωση $(x+1)+(x+3)=0$, γράφουν $x+1=0$ και $x-3=0$ ή για την εξίσωση $x(x+2)=5$, γράφουν $x=5$ και $x+2=1$. Ακόμη, τονίζεται ότι η μέθοδος της συμπλήρωσης τετραγώνου είναι πολύ σημαντική και μας οδηγεί στον τύπο που θα διδαχτούν στην επόμενη ενότητα (βιβλίο μαθητή σελ. 94 – Παράρτημα Α) και ότι θα πρέπει να γίνει κατανοητό ότι μια εξίσωση δευτέρου βαθμού, μπορεί να έχει μία (διπλή), καμιά ή δύο λύσεις. Επίσης, με αφορμή την ερώτηση κατανόησης 3, σελ. 92 (Παράρτημα Α), προτείνεται να συζητηθεί στη τάξη το συνηθισμένο λάθος των μαθητών κατά την αυθαίρετη απλοποίηση μεταβλητών παραγόντων στα δύο μέλη μιας εξίσωσης, ενώ, τέλος, στο βιβλίο του εκπαιδευτικού περιέχονται συμπληρωματικές ασκήσεις παραμετρικού τύπου.

Σχετικά με την παράγραφο 2.2 Β (3 διδακτικές ώρες), οι διδακτικοί στόχοι είναι οι εξής:

- η επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια του τύπου και η κατανόηση της σημασίας της διακρίνουσας για τον προσδιορισμό του πλήθους των λύσεων της εξίσωσης και
- η εκμάθηση μέσω παραδειγμάτων της μετατροπής ενός τριωνύμου σε γινόμενο παραγόντων.

Στις αντίστοιχες διδακτικές οδηγίες προτείνεται να τονιστεί προς τους μαθητές μέσω παραδειγμάτων ότι ο συντομότερος τρόπος επίλυσης δεν είναι πάντα ο ίδιος, αλλά εξαρτάται από τη μορφή της εξίσωσης δευτέρου βαθμού, ενώ αντίθετα δεν προτείνεται η διερεύνηση πολύπλοκων εξισώσεων δευτέρου βαθμού και η επίλυση προβλημάτων, τα οποία ούτως ή άλλως θα διδαχτούν ξεχωριστά στην επόμενη ενότητα.

Όσον αφορά στη 2.3 παράγραφο «Προβλήματα εξισώσεων 2^{ου} βαθμού» (2 διδακτικές ώρες), βασικός διδακτικός στόχος είναι οι μαθητές να ασχοληθούν με τη λύση προβλημάτων τα οποία ανάγονται σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού, αξιοποιώντας τις γνώσεις προηγούμενων ενοτήτων. Στις διδακτικές οδηγίες προτείνεται ο μετασχηματισμός αναπαραστάσεων από λεκτική σε συμβολική μορφή, ώστε να εξοικειωθούν οι μαθητές με τη μαθηματικοποίηση των προβλημάτων (την επιλογή των άγνωστων και τη διαμόρφωση της εξίσωσης του προβλήματος). Για παράδειγμα: «το τετράγωνο ενός αριθμού μειωμένο κατά 3» ή «το γινόμενο δυο διαδοχικών ακεραίων αριθμών κ.λπ.» (όπως ασκήσεις 5, 6, σελ. 101)

(Παράρτημα Α). Ακόμη, τονίζεται πως οι μαθητές, αφού λύσουν ένα πρόβλημα, πρέπει να ελέγχουν τα αποτελέσματα και να τα αξιολογούν με βάση τους περιορισμούς.

4.6 Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις στην Α' Λυκείου (ΓΕΛ και ΕΠΑΛ)

Στην Α' Λυκείου (ΓΕΛ και ΕΠΑΛ) οι γνώσεις των μαθητών για τις εξισώσεις 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού από το Γυμνάσιο επαναλαμβάνονται, επεκτείνονται και εξετάζονται συστηματικά στο 3^{ο} κεφάλαιο, κατά τις παραγράφους 3.1 (εξισώσεις 1^{ου} βαθμού) και 3.3 (εξισώσεις 2^{ου} βαθμού), ενώ ως ιδιαίτερη περίπτωση εξετάζεται η εξίσωση $x^{\nu}=\alpha$ (παράγραφος 3.2). Επίσης, μελετώνται εξισώσεις που η επίλυσή τους ανάγεται σε επίλυση εξισώσεων πρώτου και δευτέρου βαθμού.

Οι διδακτικοί στόχοι για την 3.3 παράγραφο καθορίζονται από το Α.Π.Σ. του 2011 ως εξής:

- διερεύνηση της διαδικασίας επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης πλήρους μορφής και κατάληξη σε συμπεράσματα τα οποία χρησιμεύουν στην επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων,
- προσδιορισμός των τύπων του Vieta για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης και αξιοποίηση αυτών στην κατασκευή εξισώσεων των οποίων οι ρίζες ικανοποιούν δεδομένες σχέσεις,
- επίλυση εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού,
- μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων δευτέρου βαθμού.

Στις οδηγίες διδασκαλίας του μαθήματος της τρέχουσας σχολικής περιόδου προτείνεται η διάθεση 7 διδακτικών ωρών για την 3.3 παράγραφο.

Με την παραδοχή ότι η επίλυση της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ στη γενική της μορφή με τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» είναι μια διαδικασία που δυσκολεύει τους μαθητές, προτείνεται η χρήση της πρωτίστως σε εξισώσεις 2ου βαθμού με συντελεστές συγκεκριμένους αριθμούς και στη συνέχεια με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού η γενίκευση της διαδικασίας (βιβλίο μαθητή σελ. 88, 89 – Παράρτημα Α). Στο πρόγραμμα σπουδών (Π.Σ.) του 2015, προτείνεται η εφαρμογή παραδειγμάτων με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου, ώστε οι μαθητές μέσα από αυτά να καταλήξουν σε συμπεράσματα για το ρόλο της διακρίνουσας, καθώς και στον τύπο των λύσεων.

Επίσης, στις οδηγίες διδασκαλίας προτείνεται η επίλυση απλών εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού (όπως επίλυση εξισώσεων μορφής $\alpha x^2+\beta|x|+\gamma=0$ και διτετράγωνης μορφής $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0$) και να δοθεί έμφαση στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων 2ου βαθμού (δραστηριότητα Δ23 του Π.Σ. του 2015, και η άσκηση 7, σελ. 101, του βιβλίου της Γ' Γυμνασίου).

Ακόμη, οι μαθητές στην ίδια παράγραφο συναντούν τους τύπους Vieta, οι οποίοι επιτρέπουν στους μαθητές είτε να κατασκευάσουν μια εξίσωση 2ου βαθμού με δεδομένο το άθροισμα και το γινόμενο ριζών της είτε να προσδιορίσουν απευθείας τις ρίζες της (βρίσκοντας δυο αριθμούς που να έχουν άθροισμα S και γινόμενο P). Στις οδηγίες διδασκαλίας προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές, υπό μορφή άσκησης, να προσδιορίσουν αυτούς τους τύπους και να τους χρησιμοποιήσουν στα προαναφερθέντα. Τονίζεται, όμως, πως πέραν των παραπάνω στόχων, η χρήση των τύπων του Vieta σε άλλες ασκήσεις ξεφεύγει από το πνεύμα της διδασκαλίας, χωρίς να προσφέρει στη μαθηματική σκέψη των μαθητών.

Ακόμη, προτείνεται η επίλυση ασκήσεων με παραμετρικές εξισώσεις 2ου βαθμού να εστιάζει στην αναγνώριση του ρόλου της παραμέτρου. Για αυτό, η προτεραιότητα σε αυτό το σημείο θα πρέπει να είναι εννοιολογική και όχι μεθοδολογική, δηλαδή να αναδεικνύει ότι μια εξίσωση με παράμετρο είναι πολλές εξισώσεις οι οποίες μπορούν να μελετηθούν μαζί. Έτσι, προτείνεται να γίνει μια επιλογή λίγων ασκήσεων με μία μόνο παράμετρο στις οποίες αρχικά οι μαθητές θα δίνουν τιμές στην παράμετρο και θα παρατηρούν την επίδραση αυτών των τιμών στην εξίσωση.

Τέλος, να σημειωθεί ότι το 7ο κεφάλαιο «Μελέτη βασικών συναρτήσεων», οπότε και η παράγραφος 7.3 «Μελέτη της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$», βρίσκεται εκτός διδακτέας ύλης, ενώ θα μπορούσε η χρήση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης να διευκολύνει και να δώσει εννοιολογικό βάθος στη διερεύνηση των ριζών και του προσήμου του τριωνύμου, ειδικότερα από τη στιγμή που η αντίστοιχη παράγραφος απουσιάζει και από τη διδακτέα ύλη της Γ' Γυμνασίου (Κεφάλαιο 4 - Συναρτήσεις).

4.7 Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις στις ιστορικές αναφορές των σχολικών βιβλίων

Το σχολικό βιβλίο της Γ' Γυμνασίου, καθώς και το αντίστοιχο βιβλίο του εκπαιδευτικού εμπλουτίζονται στο τέλος ορισμένων παραγράφων με σημειώματα ιστορικού περιεχομένου.

Συγκεκριμένα, στο τέλος της παραγράφου 2.2 (σελ. 98), υπό τον τίτλο «Ένα θέμα από την ιστορία των Μαθηματικών» γίνεται αναφορά στην πρακτική, αλγοριθμική (σε βήματα) επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων από τους Βαβυλώνιους. Επίσης, καταδεικνύεται το ενδιαφέρον του γραφέα της βαβυλωνιακής πλάκας στις ίδιες τις ποσότητες, εκφραζόμενες με συγκεκριμένους αριθμούς, και όχι στη γεωμετρική έννοια αυτών των ποσοτήτων, οπότε και στη γεωμετρική αιτιολόγηση κάθε βήματος επίλυσης της εξίσωσης. Ζητείται, τέλος, από τους μαθητές η επίλυση της δοσμένης εξίσωσης με τη μέθοδο που διδάχτηκαν στην ενότητα 2.2, καθώς και η σύγκριση των δύο μεθόδων (Παράρτημα Α).

Στο βιβλίο του εκπαιδευτικού (σελ. 44-47), παρατίθενται ορισμένα ιστορικά στοιχεία ως προς την προέλευση της συγκεκριμένης βαβυλωνιακής πλάκας, ως προς το περιεχόμενο των προβλημάτων στα βαβυλωνιακά Μαθηματικά και την προσέγγιση λύσης αυτών, καθώς και ο μετασχηματισμός των δοσμένων προβλημάτων σε σύγχρονη συμβολική μορφή και η επίλυσή τους (Παράρτημα Α).

Επιπλέον, στο βιβλίο του εκπαιδευτικού γίνεται αναφορά στην έννοια του αλγορίθμου, την προέλευση της λέξης (λατινική γραφική απόδοση του ονόματος του al–Khwarizmi) και στα χαρακτηριστικά της αντίστοιχης μεθόδου επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Ακόμη, αναφέρονται η προέλευση της λέξης «Άλγεβρα» και το περιεχόμενο της Άλγεβρας στο έργο του al–Khwarizmi. Το υποστηρικτικό υλικό καταλήγει με τη μέθοδο επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων του Ινδού μαθηματικού Sridhara (1025 μ.Χ.) (Παράρτημα Α).

Όσον αφορά στο σχολικό βιβλίο της Α΄ λυκείου και συγκεκριμένα στο τέλος της παραγράφου 3.3 «Εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού» (σελ. 98-100-Παράρτημα Α), παρουσιάζονται τρεις μέθοδοι επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων: η μέθοδος των Ινδών (Sridhara, 1025 μ.Χ.), στην οποία γίνεται αναφορά και στο βιβλίο του εκπαιδευτικού της Γ' Γυμνασίου στη σχετική παράγραφο, η μέθοδος του Vieta (François Viète, 1540-1603), καθώς και αυτή του Thomas Harriot (1560-1621). Να σημειωθεί ότι εν αντιθέσει με τα ιστορικά σημειώματα της Γ΄ Γυμνασίου, τα οποία εμπλέκουν και ενεργά τον μαθητή στην μελέτη των στοιχείων τους, το παραπάνω ιστορικό σημείωμα έχει τη δομή μιας απλής παρουσίασης ιστορικών επιστημονικών δεδομένων.

Κεφάλαιο 5ο: Δυσκολίες, λάθη και παρανοήσεις στην Άλγεβρα και τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις

5.1 Δυσκολίες, λάθη και παρανοήσεις στην Άλγεβρα

Μια γνώση, εντασσόμενη σε συγκεκριμένο εννοιολογικό πλαίσιο, η οποία είναι ικανοποιητική για την επίλυση ορισμένων προβλημάτων, μπορεί να μην είναι επαρκής και εύκολα προσαρμόσιμη σε ένα νέο εννοιολογικό πλαίσιο και τα προβλήματά του. Η αντίσταση της προϋπάρχουσας γνώσης (γνωστικό εμπόδιο) και η τροποποίησή της στο νέο πλαίσιο μέχρι τη διαμόρφωση της νέας γνώσης, συμβάλλει στη πλήρη κατανόησή της (Artigue 1992). Επιπλέον, οι πεποιθήσεις των μαθητών, οι θεωρίες που αναπτύσσουν, τα νοήματα και οι εξηγήσεις τους σχετικά με τις μαθηματικές έννοιες αποτελούν τη βάση των αντιλήψεών τους. Όταν αυτές οι αντιλήψεις συγκρούονται με τα αντίστοιχα αποδεκτά νοήματα και τις αντίστοιχες θεωρίες και εξηγήσεις της επιστημονικής μαθηματικής κοινότητας, τότε είναι που προκύπτει μια παρανόηση (Osborne & Wittrock, 1983· Mayer, 1987). Το λάθος, από την άλλη, δεν εμφανίζεται απαραίτητα συστηματικά, μπορεί να προκύψει και από μια περιστασιακή έλλειψη συγκέντρωσης και προσοχής. Συνεπώς, στα Μαθηματικά, ως λάθος μπορεί να θεωρηθεί η απόκλιση από την ορθή λύση ενός προβλήματος (Young & O'Shea, 1981). Σε κάθε περίπτωση, οι μαθητές εμφανίζουν δυσκολίες στην κατανόηση και διαχείριση των μαθηματικών εννοιών, και φυσικά των εννοιών της Άλγεβρας (αντικείμενο της παρούσας εργασίας).

Στον συγκεκριμένο τομέα, οι δυσκολίες πηγάζουν σε μεγάλο βαθμό από τη μετάβαση των μαθητών από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και τη συνακόλουθη μετάβαση από την Αριθμητική και την «προ-Άλγεβρα» (τελευταία τάξη του Δημοτικού) στην Άλγεβρα του Γυμνασίου (Davis, 1975· Carpenter, 1981· Booth, 1988· Sfard & Linchevski, 1994).

Στην Αριθμητική, η επίλυση ενός προβλήματος προσεγγίζεται από τους μαθητές διαισθητικά με αντικειμενικό σκοπό το γρήγορο, τελικό, αριθμητικό αποτελέσμα, εν αντιθέσει με την Άλγεβρα που συναντούν στο Γυμνάσιο, όπου απαιτείται η αλγοριθμική προσέγγιση και εφαρμογή συγκεκριμένων κανόνων, ανεξάρτητων από αυτά κάθε αυτά τα δεδομένα και τις σχέσεις του προβλήματος (Λεμονίδης, 1996).

Φαίνεται πως οι διαδικασίες που εφαρμόζονται από τους μαθητές για την αντικατάσταση αριθμών με αλγεβρικές εκφράσεις ή το αντίστροφο, η απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων και η περαιτέρω επεξεργασία τους, καθώς και η σημασία που δίνεται στα γράμματα συμβολισμού βασίζονται συχνά στο αριθμητικό πλαίσιο εφαρμογής τους, με αποτέλεσμα τη δημιουργία πολλών σφαλμάτων (Fischbein, 1993· Godden et al., 2013).

Η «προ-Άλγεβρα» με τη γνωριμία των μαθητών με την έννοια της μεταβλητής και της εξίσωσης, εστιάζει κυρίως σε δεξιότητες απλού συμβολικού χειρισμού συνοδευόμενες από υπολογιστικές διαδικασίες, όπως η επίλυση εξισώσεων (και μάλιστα κατηγοριοποιημένες ως προς τη θέση του αγνώστου), αλλά χωρίς να δίνει έμφαση σε δεξιότητες αναπαράστασης ενός προβλήματος, πόσο μάλλον στην εννοιολογική σύνδεση διάφορων μορφών αναπαράστασής του (Brenner et al., 1997).

Λόγω του αλγεβρικού τρόπου συμβολισμού, οι πηγές νοηματοδότησης της Άλγεβρας διαφέρουν από αυτές τις Αριθμητικής. Ένας γενικός στόχος της διδασκαλίας της Άλγεβρας είναι η παροχή προς τους μαθητές ενός προχωρημένου τρόπου σκέψης μέσω αλφαριθμητικών συμβόλων (alphanumeric signs) (Radford & Puig, 2007). Επιπλέον, για την παραγωγή ενός αλγεβρικού κειμένου απαιτείται η κατανόηση από τους μαθητές των ερμηνειών αυτών των συμβόλων, των τρόπων έκφρασης των αντικειμένων που αντιπροσωπεύουν, καθώς και των πράξεων και γενικότερων αλγεβρικών χειρισμών που πραγματοποιούνται με αυτά (Smagorinsky, 2001· Radford & Puig, 2007). Στην Αριθμητική, τα σύμβολα δηλώνουν γνωστές μόνο ποσότητες, ενώ ο άγνωστος του προβλήματος αποτελεί το τέλος της διαδικασίας επίλυσής του, χωρίς να απαιτείται καν η αναπαράστασή του. Στην Άλγεβρα, αντίθετα, ο άγνωστος πρέπει να συμβολιστεί, διότι αποτελεί το αρχικό σημείο της μαθηματικής διαδικασίας. Το αλγεβρικό κείμενο ξεδιπλώνεται ως υπολογισμοί προερχόμενοι από αυτή την αναπαράσταση του αγνώστου (Radford & Puig, 2007).

Παραδείγματα διαφοροποίησης των ερμηνειών που αποδίδονται σε μαθηματικά σύμβολα μεταξύ Αριθμητικής και Άλγεβρας αποτελούν τα σύμβολα ισότητας «=» και πρόσθεσης «+».

Όσον αφορά στο σύμβολο της ισότητας, οι πολλαπλές ερμηνείες του γίνονται εμφανείς στο πέρασμα των μαθητών από την Αριθμητική στην Άλγεβρα. Στην Άλγεβρα, το σύμβολο μπορεί να παρουσιάζει ένα αποτελέσμα (το σύνηθες από την Αριθμητική για τους μαθητές), μπορεί να δηλώνει την ισοδυναμία μεταξύ δύο ποσοτήτων (αριστερό-δεξί μέλος της εξίσωσης), την ταυτότητα, για παράδειγμα στον μετασχηματισμό σχέσεων με γράμματα όπου συμβολίζει την ισχύ τους για όλες τις τιμές των μεταβλητών τους, αλλά και την συγκεκριμένη περιγραφή (specification) και ορισμό (identification) μιας μαθηματικής οντότητας, όπως στον τύπο μιας συνάρτησης όπου ορίζει την αναλυτική της έκφραση (Cortes et al., 1990).

Ειδικότερα, οι μαθητές καθώς προχωρούν στις τάξεις του Γυμνασίου και διδάσκονται την επίλυση εξισώσεων, εμφανίζουν δυσκολίες στην κατανόηση της διατήρησης ισοδυναμίας κατά τις διαδικασίες πρόσθεσης και αφαίρεσης ίσων ποσοτήτων σε κάθε μέλος τους (Russell, et al., 2009). Αυτό γίνεται ακόμη πιο περίπλοκο καθώς οι μαθητές μαθαίνουν να εξετάζουν τι συμβαίνει κατά τον πολλαπλασιασμό ή διαίρεση και των δύο μελών μιας εξίσωσης με μια άγνωστη ποσότητα και να είναι επιφυλακτικοί σχετικά με τη δυνατότητα διαίρεσης με το μηδέν (Nielsen, 2015).

Τα σφάλματα προκύπτουν, διότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται κυρίως το σύμβολο της ισότητας ως διαχωριστικό σύμβολο (Adu-Gyamfi, et al., 2015), ως σύμβολο-εντολή για την εκτέλεση υπολογισμών και την κατάληξη σε μια απάντηση-λύση και όχι ως ένα σύμβολο που δηλώνει τη σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων, ως σύμβολο ισοδυναμίας μεταξύ πρώτου και δεύτερου μέλους (Saenz-Ludlow & Walgamuth, 1998· Kieran, 1981· Carpenter et al., 2003· Ball et al., 2008· Makgakga, 2016). Δηλαδή, είναι εμφανέστερη η λειτουργική και όχι η σχεσιακή αντίληψη του συμβόλου, κάτι που οφείλεται στην επιρροή της Αριθμητικής.

Επίσης, σχετικά με το σύμβολο της πρόσθεσης «+», ενώ η χρήση του στην Αριθμητική είναι κυρίως διαδικαστική, ως δήλωση εκτέλεσης της πράξης, στην Άλγεβρα αποτελεί τον δείκτη του αποτελέσματος, αλλά και της λειτουργίας της πράξης. Τα συχνά λάθη σύνδεσης ανόμοιων μονωνύμων (π.χ. 2α+3β=5αβ) οφείλονται κατά κύριο λόγο στην Αριθμητική όπου «η έννοια της πρόσθεσης εισάγεται ως φυσική συνένωση δύο συνόλων», στη σημειογραφία των μεικτών αριθμών, όπου το κενό μεταξύ δύο αριθμών υποδηλώνει την πρόσθεσή τους και όχι τον πολλαπλασιασμό τους, καθώς και στο ίδιο το αριθμητικό σύστημα (π.χ. 35=3 δεκάδες + 5 μονάδες) (Λεμονίδης, 1996).

Συνεχίζοντας ως προς τις διαπιστωμένες δυσκολίες των μαθητών, οι Stacey και MacGregor (1993, 1997) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται με τις αλγεβρικές εκφράσεις, διότι δεν κατανοούν εννοιολογικά ποιες είναι και τι αντιπροσωπεύουν οι μεταβλητές τους. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγει και ο Rosnick (1981), ο οποίος επισημαίνει την αδυναμία κατανόησης των αφηρημένων χαρακτηριστικών της μεταβλητής έναντι των γραμμάτων που αναπαριστούν συγκεκριμένες οντότητες, οπότε και την αποτυχία προσδιορισμού των ρόλων των γραμμάτων και χρήσης αυτών σε μια εξίσωση (Rosnick, 1981). Επίσης, ενώ οι μαθητές ενδεχομένως να είναι σε θέση να διακρίνουν σωστά τις ποσότητες και τις μεταξύ τους συσχετίσεις σε μια δεδομένη λεκτική μορφή, αποτυγχάνουν να τις εκφράσουν αλγεβρικά. Δηλαδή, μπορεί να εμφανίζεται ο σημασιολογικός χαρακτήρας των σχέσεων, αλλά όχι ο συντακτικός (Stacey & MacGregor, 1993, 1997).

Οι μαθητές της μέσης εκπαίδευσης συχνά δείχνουν μεγαλύτερες δεξιότητες κατά την επίλυση τυπικών και άτυπων προβλημάτων που απαιτούν αλγεβρικό συλλογισμό ή σε απλά λεκτικά προβλήματα Αριθμητικής, παρά στη συμβολική αναπαράσταση και την κατασκευή εξισώσεων (Latterell & Copes, 2003). Το γεγονός ότι η εστίαση της προσοχής των μαθητών γίνεται στο διαδικαστικό-λειτουργικό και όχι στο εννοιολογικό-δομικό σκέλος κατασκευής της εξίσωσης οδηγεί και στην αδυναμία εντοπισμού όμοιων χαρακτηριστικών ενός νέου προβλήματος με τα αντίστοιχα ενός που ήδη έχουν αντιμετωπίσει ή στην αποτυχία κατασκευής της εξίσωσης ακόμη κι αν υπάρχει μικρή διαφοροποίηση των δεδομένων του προβλήματος (Kieran, 1992).

Έτσι, για πολλούς μαθητές η κατασκευή της εξίσωσης, με την κατανόηση της σημασίας κάθε όρου της και η ερμηνεία των μεταξύ τους συσχετίσεων αποτελεί ζητούμενο (Makgakga, 2016· Didis et al., 2015), ακόμη και στην περίπτωση κατασκευής απλών εξισώσεων (Kieran, 1992). Ειδικότερα, για τα προβλήματα που απαιτούν τη χρήση δευτεροβάθμιων εξισώσεων για τη λύση τους και η επιτυχής κατασκευή τους με την αντιμετώπιση της πολύπλοκης συντακτικής δομή τους, δυσκολεύουν τους μαθητές, ακόμη και σε περιπτώσεις όπου έχει γίνει αρχικά η κατανόηση του ζητούμενου του προβλήματος, ο καθορισμός του αγνώστου και ο συμβολισμός του (Didis et al., 2015).

Μία από τις δυσκολίες στη «μετάφραση» ενός λεκτικού προβλήματος σε εξίσωση είναι ότι απαιτείται η κατανόηση και διαπραγμάτευση του αρχικού «γνήσιου» προβλήματος, δηλαδή του γενικότερου πλαισίου του προβλήματος (Radford & Puig, 2007· Didis et al., 2015). Επιπλέον, η αλγεβρική εξίσωση λειτουργεί στην πραγματικότητα σαν ένα διάγραμμα στο οποίο εκθέτει μέσα από αλγεβρικά σύμβολα τις σχέσεις μεταξύ των εμπλεκόμενων ποσοτήτων. Για να απλοποιηθεί και να επιλυθεί, απαιτεί, επομένως, και ένα συγκεκριμένο είδος χωροαισθητικού συλλογισμού, δηλαδή διαγραμματική σκέψη (Radford & Puig, 2007).

Η σύνταξη και το νόημα στην Άλγεβρα εξαρτώνται σημαντικά από την οπτικοποίηση, η εστίαση σε αυτά βρίσκεται στις ποσότητες, ενώ δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να προβληματιστούν, να ερμηνεύσουν, να δημιουργήσουν και να φανταστούν με συγκεκριμένο τρόπο (Radford & Puig, 2007). Επιπρόσθετα, οι Kieran και Chalouh (1993), προτείνουν οι μαθητές, στην κρίσιμη φάση της εισαγωγής τους στον τομέα της Άλγεβρας και πριν διδαχθούν να αναπαριστούν αλγεβρικές καταστάσεις συμβολικά, αρχικά να έχουν ευκαιρίες να τις συζητήσουν σε εύκολα κατανοητή, καθημερινή γλώσσα, αναπτύσσοντας έτσι την εννοιολογική τους κατανόηση.

Όσον αφορά στις εξισώσεις, οι Kieran και Sfard (1999) θεωρούν ότι η διδασκαλία τους θα πρέπει να συνδέεται με την οπτικοποίηση που προσφέρουν οι πολλαπλές μορφές αναπαράστασης των διαδικασιών επίλυσής τους, για παράδειγμα, οι γραφικές παραστάσεις και οι πίνακες, ώστε να προκύπτουν οι διαφορές μεταξύ των διάφορων μορφών τους, κι έτσι να επιτυγχάνεται η βαθύτερη εννοιολογική κατανόησή τους (Kieran & Sfard, 1999). Στην χρησιμότητα της κατασκευής, χρήσης, ερμηνείας και σύγκρισης των πολλαπλών αναπαραστάσεων καταλήγει και ο Swan (2000), ο οποίος, επιπλέον, προτείνει τη χρήση γεωμετρικών επιτραπέζιων μοντέλων απόδοσης των αλγεβρικών εκφράσεων (Swan, 2000). Επίσης, σχετικά με τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις, οι μετασχηματισμοί μεταξύ των πολλαπλών μορφών αναπαράστασής τους, βοηθά στην παραγωγή συνδέσεων και συσχετισμών και γενικότερα στη διαμόρφωση ανώτερης εννοιολογικής κατανόησης, για αυτό οι μαθητές θα πρέπει να ενθαρρύνονται στη χρήση και επεξεργασία τους (Kotsopoulos, 2007).

5.2 Δυσκολίες, λάθη και παρανοήσεις στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις

Κατά την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων παρατηρούνται γνωστικά εμπόδια τα οποία οφείλονται τόσο στις γενικότερες προαναφερθείσες δυσκολίες των μαθητών στον τομέα της Άλγεβρας, όσο και σε ειδικότερες που σχετίζονται με τη εκμάθηση των διάφορων μεθόδων επίλυσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων, οι οποίες φαίνεται να διατηρούνται και στις τάξεις του Λυκείου (Didis et al., 2011· Tall et al., 2014· Makonye & Nhlanhla, 2014· Godden et al., 2013· Nielsen, 2015· López, 2016· Kabar, 2018). Επιπλέον παράγοντες είναι οι μέθοδοι διδασκαλίας και το περιεχόμενο του προγράμματος σπουδών.

Για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων χρησιμοποιούνται διάφορες μέθοδοι, όπως η παραγοντοποίηση, ο τετραγωνικός τύπος, η συμπλήρωση τετραγώνου, γεωμετρικές και γραφικές μέθοδοι. Ωστόσο, ενώ οι τρεις συμβολικές μέθοδοι - η παραγοντοποίηση, ο τετραγωνικός τύπος και η συμπλήρωση τετραγώνου - προτιμώνται ως μέθοδοι εισαγωγής των μαθητών στην επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων, οι γραφικές και οι γεωμετρικές μέθοδοι αγνοούνται σε μεγάλο βαθμό (Allaire & Bradley, 2001). Δηλαδή, δίνεται προτεραιότητα στους συμβολικούς αλγεβρικούς χειρισμούς (κυρίως διαδικαστικές μέθοδοι) για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Για το λόγο αυτό, η αντίληψη των μαθητών για την δευτεροβάθμια εξίσωση βασίζεται σε «ισχυρές» συμβολικές αναπαραστάσεις ή τύπους (Kabar, 2018). Αυτούς τους τύπους και τις συνοδευτικές διαδικασίες επίλυσης (όπως ο υπολογισμός της διακρίνουσας) πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να απομνημονεύσουν, να εφαρμόσουν (ιδιαίτερα όταν η εξίσωση δίνεται στη μη τυπική της μορφή) (Tall et al., 2014) και φυσικά να νοηματοδοτήσουν (Didis et al., 2011).

Οι μαθητές, επίσης, εμφανίζουν δυσκολίες κατά την εκτέλεση των πράξεων που απαιτούνται καθ' όλη τη διάρκεια της διαδικασίας, στον προσδιορισμό των παραμέτρων της εξίσωσης και στην αντικατάσταση των τιμών τους, ειδικά στην περίπτωση που έχουν αρνητικό πρόσημο (Zakaria & Maat, 2010· Makonye & Matuku 2016). Δηλαδή, οι δυσκολίες οφείλονται σε μεγάλο βαθμό στην άγνοια ή ελλιπή κατανόηση και εμβάθυνση σε απαραίτητες προαπαιτούμενες αλγεβρικές και αριθμητικές γνώσεις, όπως ο χειρισμός των πραγματικών αριθμών, οι εξισώσεις πρώτου βαθμού και τα πολυώνυμα (Zakaria & Maat, 2010· López et al., 2016).

Για αυτό, πέραν της εμπέδωσης των πραγματικών αριθμών και των χειρισμών με αυτούς, καθώς και της επίλυσης πρωτοβάθμιων εξισώσεων που ούτως ή άλλως προηγούνται στα προγράμματα σπουδών των δευτεροβάθμιων, προτείνεται η διδακτική σύνδεση των πολυωνύμων με τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις (Sönnerhed, 2011· Kabar, 2018). Συγκεκριμένα, προτείνεται η εξής ακολουθία διδασκαλίας έως την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων: πολυώνυμα, βαθμός πολυωνύμων, κανόνες απαλοιφής παρενθέσεων, πολλαπλασιασμός δύο πολυωνύμων, διαφορά τετραγώνων και άλλες ταυτότητες που αφορούν σε τετραγωνικές μορφές, παραγοντοποίηση με χρήση των προηγούμενων ταυτοτήτων, μέθοδος εφαρμογής τετραγωνικής ρίζας και μέθοδος ανάλυσης σε γινόμενο παραγόντων (κανόνας μηδενικού παράγοντα-null-factor law) για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων, μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου, μέθοδος τετραγωνικού τύπου (Sönnerhed 2011). Αυτή η σειρά ακολουθείται και στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών των Μαθηματικών της Γ' Γυμνασίου.

Συνεχίζοντας, αν και οι μαθητές δείχνουν να γνωρίζουν ορισμένους κανόνες σχετικά με την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων ή ορισμένες τεχνικές κατά την διαδικασία επίλυσής τους, τελικά φαίνεται να εφαρμόζουν αυτούς τους κανόνες και τεχνικές μηχανικά, χωρίς να γνωρίζουν ακριβώς το λόγο, αλλά και ούτε αν κάθε τους ενέργεια είναι μαθηματικώς ορθή.

Για παράδειγμα, πολλοί μαθητές ταυτίζουν την έννοια της μεταβλητής με τη λύση της εξίσωσης με αποτέλεσμα να θεωρούν ότι η εμφάνιση της ίδιας μεταβλητής περισσότερες από μία φορές στην ίδια εξίσωση συνεπάγεται την ύπαρξη περισσότερων λύσεων, κάτι που αποδεικνύεται από την ταυτόχρονη αντικατάσταση των ριζών της εξίσωσης ως επαλήθευση των λύσεων τους (Vaiyavutjamai et al., 2005· Didis et al., 2011). Για παράδειγμα, στην εξίσωση

$\left(x-\alpha\right)\cdot\left(x-\beta\right)=0$, η διπλή παρουσία της μεταβλητής x ερμηνεύεται ως ύπαρξη δύο διαφορετικών μεταβλητών, οπότε αντικαθιστούν ταυτόχρονα με $\left(\alpha-\alpha\right)\cdot\left(\beta-\beta\right)=0$.

Ακόμη, εμφανίζουν δυσκολίες στην κατανόηση της ισοδυναμίας μεταξύ των διαφορετικών μορφών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, απλοποιούν αυθαίρετα την εξίσωση με διαίρεση παραγόντων, μη λαμβάνοντας υπόψιν την περίπτωση να ισούνται με το 0 (Didis et al., 2011). Προβληματίζονται ιδιαίτερα κατά τον χειρισμό των τετραγωνικών ριζών (Güner & Uygun, 2016), τη μεταφορά όρων από το ένα μέλος στο άλλο (Makonye & Matuku, 2016), την αναγωγή όμοιων όρων, την απαλοιφή παρενθέσεων (όπου απαιτείται) (Didis et al., 2011), την αντικατάσταση τιμών με αρνητικό πρόσημο ή την εκτέλεση πράξεων με αυτές τις τιμές (Zakaria & Maat, 2010). Επίσης, εφαρμόζουν την ιδιότητα μηδενικού γινομένου (zero product property) (αν $\alpha\cdot\beta=0$, τότε $\alpha=0$ ή $\beta=0$) ακόμη και σε περιπτώσεις όπου το γινόμενο δεν ισούται με το μηδέν (Didi, et al., 2011).

Παρόμοιες δυσκολίες εντοπίζονται και στην επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης με παραγοντοποίηση, κατά την οποία μετατρέπεται μια εξίσωση από τυπική σε παραγοντοποιημένη μορφή και στη συνέχεια εφαρμόζεται η ιδιότητα μηδενικού γινομένου. Τα συνηθέστερα λάθη σχετίζονται με τη διαδικασία μετασχηματισμού μεταξύ ισοδύναμων μορφών, με την εννοιολογική τους κατανόηση και ερμηνεία, καθώς και με υπολογιστικές διαδικασίες και εφαρμογή βασικών αλγεβρικών κανόνων (Bossè & Nandakumar, 2005· Godden et al., 2013· Güner & Uygun, 2016). Τα παραπάνω συνθέτουν μια εξαιρετικά δυσνόητη μέθοδο για τους μαθητές, οδηγώντας τους προς την απομνημόνευση κανόνων κι έτσι τη μη ουσιαστική κατανόησή της (Leitze & Kitt, 2000).

Οι Didis, et al. (2011) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές προτιμούν την παραγοντοποίηση ως μέθοδο επίλυσης όταν η τετραγωνική παράσταση αποτελεί συνήθη-εμφανή παραγοντοποιήσιμη μορφή και ότι με αυτή τη μέθοδο μπορούν να καταλήξουν στη λύση γρήγορα χωρίς να δίνουν προσοχή στη δομή και τα εννοιολογικά νοήματα των εξισώσεων. Γι’ αυτό δυσκολεύονται να παραγοντοποιήσουν τετραγωνικές εκφράσεις τυπικής μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (Kotsopoulos, 2007). Η δυσκολία αυτή μεγαλώνει όταν η παράμετρος α είναι διαφορετική της μονάδας (π.χ. $6x^2+3x+2$) και ακόμα περισσότερο όταν οι παράμετροι α ή/και το γ έχουν πολλούς διαιρέτες (π.χ. $20x^2+63x+36$).

Επίσης, οι μαθητές εμφανίζουν σε ορισμένες περιπτώσεις την τάση να διαιρούν και τα δύο μέλη της εξίσωσης με έναν από τους δύο παράγοντες του γινομένου που προκύπτει από την παραγοντοποίηση, δηλαδή να εφαρμόζουν τεχνικές επίλυσης πρωτοβάθμιων εξισώσεων που ήδη έχουν διδαχθεί. Αυτό βέβαια δε συνεπάγεται απαραίτητα την καθολική άγνοια εφαρμογής της σχετικής ιδιότητας, αλλά την κατάλληλη εφαρμογή της σε περιπτώσεις όπου η εξίσωση ή οι παράγοντες του γινομένου έχουν ασυνήθη για αυτούς μορφή (Didis et al., 2011).

Σχετικά με τη γεωμετρική προσέγγιση επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων και τη μέθοδο της παραγοντοποίησης τα αποτελέσματα της έρευνας των Herawaty, et al. (2021) δείχνουν ότι οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιούν επιτυχώς τετράγωνα, ορθογώνια και μοναδιαία τετράγωνα κατά την εκτέλεση της μεθόδου, ενώ η γνωστική διαδικασία των μαθητών που μαθαίνουν να χρησιμοποιούν μέσα μάθησης με βάση το τετράγωνο και το ορθογώνιο μπορεί να φτάσει σε υψηλό επίπεδο (Herawaty et al., 2021).

Στη συμπλήρωση του τετραγώνου, οι μαθητές εμφανίζουν συνήθως λάθη μετασχηματισμού και επεξεργασίας αλγεβρικών παραστάσεων κατά την απόδοση της εξίσωσης σε κατάλληλη μορφή, ώστε να επιλυθεί με τη χρήση της τετραγωνικής ρίζας, ενώ συχνά δυσκολεύονται να κατανοήσουν και να περιγράψουν τι απαιτείται από το ερώτημα της σχετικής δραστηριότητας (López, et al., 2016). Επιπλέον, πολλοί μαθητές δεν έχουν την απαιτούμενη ικανότητα να χειριστούν κλασματικές μορφές όταν προκύπτουν (Güner & Uygun, 2016).

Γενικότερα, σύμφωνα με τους Makonye και Luneta (2014), οι μαθητές κάνουν διαφορετικού είδους λάθη στην επίλυση ακόμη και της ίδιας μαθηματικής δραστηριότητας. Φαίνεται να συγχέουν τις εμπλεκόμενες μαθηματικές έννοιες , χωρίς να είναι ξεκάθαρο σε αυτούς πότε και τι πρέπει να χρησιμοποιήσουν ή να εφαρμόσουν (Makonye & Nhlanhla, 2014).

Επιπλέον, συχνά εμφανίζουν ελλιπή κατανόηση του ερωτήματος ερμηνεύοντας και αντιμετωπίζοντάς το, λανθασμένα, σύμφωνα με άλλες προϋπάρχουσες γνώσεις τους, περιορίζοντας σημαντικά τα νοητικά σχήματα που μεσολαβούν έως την τελική λύση. Για παράδειγμα, διαχειρίζονται μια δευτεροβάθμια εξίσωση σαν μια πρωτοβάθμια εξίσωση (Makonye & Nhlanhla, 2014). Τα αποτελέσματα ερευνών δείχνουν ότι οι μαθητές δεν μπορούν να δώσουν έναν σωστό ορισμό για τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις με έναν άγνωστο και ότι οι ορισμοί τους δεν συμβαδίζουν με τον τυποποιημένο ορισμό των τετραγωνικών εξισώσεων, αλλά αντίθετα βασίζονται σε προϋπάρχουσες γνώσεις και μορφές εξισώσεων που ήδη έχουν διδαχθεί, όπως τις πρωτοβάθμιες εξισώσεις (Vinner, 1983· Tall & Vinner, 1981· Kabar, 2018).

Ακόμη, η μη κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής από τους μαθητές και ο προσδιορισμός του βαθμού ενός πολυωνύμου έχει ως αποτέλεσμα να συγχέουν τη δευτεροβάθμια με την πρωτοβάθμια εξίσωση (Kabar, 2018). Επίσης, η χρήση των ίδιων γραμμάτων για τον συμβολισμό των συντελεστών των εξισώσεων, επηρεάζει τους μαθητές ως προς τις στρατηγικές και τεχνικές που τελικά ακολουθούν για την επίλυσή τους (Nielsen, 2015). Για παράδειγμα, όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου για την επίλυση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης στην τυπική της μορφή, συνήθως το πρώτο βήμα είναι η αφαίρεση του σταθερού όρου και από τα δύο μέλη, διαδικασία που εμφανίζεται και στην περίπτωση των πρωτοβάθμιων (Nielsen, 2015).

Ακόμη, σε εξισώσεις μορφής $\alpha x^2 + \gamma = 0$ ή $\alpha x^2 = \gamma$, οι μαθητές λύνουν ως προς το x^2, όπως δηλαδή και στην περίπτωση του αγνώστου στις πρωτοβάθμιες. Έπειτα, θα πρέπει να εφαρμόσουν ιδιότητες των ριζών και να καταλήξουν σε δύο λύσεις (όταν υπάρχουν), θετική και αρνητική ($x = \pm\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$) (Nielsen, 2015). Ωστόσο, στην τυπική μορφή της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ο μαθητής φτάνοντας στη μορφή $\alpha x^2 + \beta x = -\gamma$ θα μπορούσε να σκεφτεί τη διαίρεση και των δύο μελών με την παράμετρο α ή β ή να εισάγει την τετραγωνική ρίζα και στα δύο μέλη (Nielsen, 2015).

Αυτός ο τρόπος σκέψης με την εισαγωγή της τετραγωνικής ρίζας ως τεχνική επίλυσης προκύπτει από προηγούμενες εμπειρίες των μαθητών με πρωτοβάθμιες εξισώσεις, όπου οι τεχνικές επίλυσης εφαρμόζονται και στα δύο μέλη της εξίσωσης, με αποτέλεσμα και στις δευτεροβάθμιες να αναμένουν το πολύ μια λύση. Αυτό το γνωστικό εμπόδιο μπορεί να γίνει ακόμη υψηλότερο, διότι οι αρχικές εμπειρίες των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων που περιλαμβάνουν τετράγωνα, ορθογώνια και τετραγωνικές ρίζες παρουσιάζονται γενικά ως προβλήματα υπολογισμού εμβαδού και επομένως έχουν μόνο θετικές λύσεις (Nielsen, 2015).

Ακόμη, το φαινόμενο της προκατάληψης του φυσικού αριθμού (natural number bias phenomenon), δηλαδή η τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν την προϋπάρχουσα γνώση τους με τους φυσικούς αριθμούς και σε περιπτώσεις με ρητούς αριθμούς (Ni & Zhou, 2005), ενδεχομένως πέρα από τον ρόλο του στην κατανόηση των μεταβλητών και των αλγεβρικών παραστάσεων (Christou & Vosniadou, 2005· Christou et al., 2007· Christou & Vosniadou

2012), να συμβάλει συνεπαγόμενα και στην αδυναμία εύρεσης και των δύο λύσεων στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις διωνυμικής μορφής. Τα αποτελέσματα ερευνών του Κ. Χρήστου και των συνεργατών του έχουν δείξει ότι μαθητές ακόμα και της Α' Λυκείου, ενώ αναγνωρίζουν τα γράμματα-μεταβλητές ως σύμβολα που αναπαριστούν περισσότερους του ενός αριθμούς, δηλαδή ως γενικευμένους αριθμούς, έχουν την ισχυρή τάση να τους αποδίδουν τιμές κατά προτεραιότητα (ή και αποκλειστικά) φυσικών αριθμών, δηλαδή θετικών αριθμών (Christou, 2017· Δημητρακοπούλου & Χρήστου, 2018).

Επιπλέον και σχετικά με την αδυναμία εύρεσης και των δύο λύσεων στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις μορφής $x^2 = \alpha$ ο Thorpe (1989) υποστηρίζει ότι οφείλεται, εκτός των άλλων διαπιστωμένων παρανοήσεων των μαθητών, και στη δυσκολία ερμηνείας του συμβόλου "±" (Thorpe, 1989).

Μια ενδιαφέρουσα σύνδεση της αδυναμίας εύρεσης και των δύο λύσεων στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις γίνεται και με τη διδασκαλία μόνο «ένα προς ένα» (1-1) συναρτήσεων και των αντίστοιχων γραφικών τους παραστάσεων έως τη στιγμή της διδασκαλίας επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων (Nielsen, 2015). Στη χώρα μας, οι μαθητές έως τη στιγμή που διδάσκονται την επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης στη Γ' Γυμνασίου, έχουν γνωρίσει «ένα προς ένα» (1-1) συναρτήσεις (χωρίς βέβαια να ορίζονται και να αναφέρονται ως τέτοιες). Συγκεκριμένα, στο 3$^{\text{ο}}$ κεφάλαιο της Β' Γυμνασίου διδάσκονται την $y = \alpha x$ (περιγραφή ανάλογων ποσών), την $y = \alpha x + \beta$ και την υπερβολή $y = \alpha / x$ (περιγραφή αντιστρόφως ανάλογων ποσών) με τις γραφικές παραστάσεις αυτών να τέμνονται το πολύ σε ένα σημείο με κάθε οριζόντια ευθεία. Στην προϋπάρχουσα γνώση, λοιπόν, των μαθητών δεν περιλαμβάνεται κάποιο παράδειγμα διαφορετικού τύπου συνάρτησης, ώστε να γίνει κάποιου είδους σύνδεση, έστω μη συνειδητή.

Η μελέτη των συναρτήσεων $y = \alpha x^2$ και $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, μέσω των γραφικών τους παραστάσεων (4$^{\text{ο}}$ Κεφάλαιο, Γ' Γυμνασίου), έπεται της επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων (2$^{\text{ο}}$ κεφάλαιο, Γ' Γυμνασίου) και μάλιστα δεν αποτελεί μέρος της διδακτέας ύλης. Συνεπώς, η έστω εκ των υστέρων επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων μέσω των γραφικών τους παραστάσεων, δηλαδή της οπτικοποίησης, που θα μπορούσε να συμβάλει στην κατανόησή τους, ουσιαστικά να αποκλείεται από τη διδακτική και μαθησιακή διαδικασία.

Η διδακτική σύνδεση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων και συναρτήσεων προτείνεται, καθώς η παράλληλη εξέτασή τους, η χρήση της γραφικής-γεωμετρικής προσέγγισης επίλυσης που υπαγορεύεται από τις συναρτήσεις και η μετέπειτα κατάληξη σε συγκεκριμένους ορισμούς για το καθένα, τις αλληλοσυμπληρώνει εννοιολογικά και αποτρέπει την όποια εννοιολογική σύγχυση των μαθητών (Vaiyavutjamai & Clements, 2006· Nielsen, 2015).

Όσον αφορά στις αιτίες των παραπάνω δυσκολιών και παρανοήσεων των μαθητών έχουν επισημανθεί η έλλειψη ουσιαστική γνώσης των βασικών κανόνων της Άλγεβρας, καθώς και οι αυθαίρετες υπεργενικεύσεις προϋπαρχουσών, εννοιολογικά περιορισμένων γνώσεων, που εφαρμόζονται λανθασμένα (Nesher, 1987). Επίσης, ενδεχομένως να μη δίνεται η απαραίτητη έμφαση στη σωστή χρήση της μαθηματικής γλώσσας και ορολογίας, κάτι που οφείλουν να προωθούν οι διδάσκοντες, ισορροπώντας μεταξύ της κατανόησης αφηρημένων μαθηματικών εννοιών και της απόκτησης αριθμητικών δεξιοτήτων, καθώς και της αιτιολόγησης και επεξήγησης (Güner & Uygun, 2016).

Ακόμη μια αιτία εντοπίζεται στην ανεπαρκή σύνδεση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων, οπότε και στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών. Η επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων με πολλαπλές μεθόδους έδειξε ότι οδηγεί σε ευρύτερη κατανόηση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων και υψηλότερη επίδοση των μαθητών στην επίλυσή τους (Olteanu & Holmqvist, 2012). Οι μαθητές υπό την κατάλληλη καθοδήγηση των διδασκόντων τους και την υποστηρικτική δομή ενός κατάλληλα διαμορφωμένου προγράμματος σπουδών θα πρέπει να ενθαρρύνονται να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών μορφών αλγεβρικής αναπαράστασης τετραγωνικών ποσοτήτων: $y=\alpha\left(x-\beta\right)\left(x-\gamma\right)$ (factored form), $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (standard form), $y=\alpha\left(x-\beta\right)^2+\gamma$ (vertex form) (Kotsopouslos, 2007), αλλά και μεταξύ αλγεβρικών και γεωμετρικών προσεγγίσεων επίλυσής τους, ώστε να προκύπτουν εμφανέστερα και να γίνονται κατανοητοί οι συσχετισμοί αλγεβρικών και γεωμετρικών εννοιών (Allaire & Bradley, 2001). Για παράδειγμα, οι Allaire & Bradely (2001), Leong et al. (2010) και Sönnerhed (2011) προτείνουν τη γεωμετρική προσέγγιση των Βαβυλωνίων και του Al-Khwarizmi για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων, ώστε να συνδεθούν οι αφηρημένες αλγεβρικές έννοιες με την περισσότερο αντιληπτή γεωμετρική τους απόδοση, αλλά και να επισημανθεί η σημασία αξιοποίησης σημείων της ιστορικής εξέλιξης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης για τη δημιουργία νοήματος και κατ’ επέκταση κινήτρου στους μαθητές ως προς τη χρησιμότητα και αξία αυτών, αλλά και της Άλγεβρας γενικότερα (Usiskin, 1995· NCTM, 2000· Sönnerhed, 2011).

Επιπλέον, ενώ οι διδάσκοντες παρουσιάζουν στους μαθητές τους τις διάφορες μεθόδους επίλυσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων, κατά κανόνα οι μαθητές δεν ενθαρρύνονται να συζητήσουν πάνω στην αποτελεσματικότητα της καθεμίας, τις διαφορές στο τρόπο προσέγγισης των λύσεων, όπως και να επιλέξουν συνειδητά τη μέθοδο που θα χρησιμοποιηθεί σε κάθε πρόβλημα. Αντιθέτως, η επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων με διάφορες μεθόδους σε αντιπαραβολή προς τους μαθητές, θα έδινε τη δυνατότητα σε αυτούς να εντοπίσουν τα δυνατά και αδύναμα σημεία της κάθε μεθόδου και να κρίνουν κατά περίπτωση την αποτελεσματικότητα της καθεμίας (Shulman, 1986· Yakes & Star, 2011· Sönnerhed, 2011).

Επιπρόσθετη αιτία των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές αποτελεί η χρήση συγκεκριμένων παραδειγμάτων από τους διδάσκοντες, με αποτέλεσμα την δημιουργία πρωτοτυπικών εννοιολογικών εικόνων για τους μαθητές (Tall & Vinner, 1981· Kabar, 2018), όπως και η διδακτική τάση και έμφαση σε αλγοριθμικές διαδικασίες επίλυσης αντί της προώθησης με κατάλληλες πρακτικές της εννοιολογικής κατανόησης κανόνων και διαδικασιών (Perso, 1996).

Τέλος, συνοψίζοντας τις προτάσεις που αναφέρονται στη σχετική βιβλιογραφία για την υποστήριξη των διδασκόντων και κατ’ επέκταση των μαθητών κατά τη διδασκαλία και αντιστοίχως εκμάθηση της επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων, οι Güner & Uygun (2016) καταλήγουν στα εξής:

• διδακτική έμφαση στους κανόνες αλγεβρικής σύνταξης,
• εισαγωγή της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία,
• βαθύτερη επεξήγηση των μεθόδων και διαδικασιών επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων,
• ορισμός των εννοιών,
• διευκρίνιση της σημασίας και ερμηνείας των αλγεβρικών εκφράσεων,
• ορθή-αυστηρή χρήση της μαθηματικής γλώσσας,
• εφαρμογή γεωμετρικών-αλγεβρικών μετασχηματισμών,
• συσχετισμός δευτεροβάθμιων εξισώσεων και συναρτήσεων,
• χρήση γραφικών παραστάσεων,
• ευελιξία στην προτίμηση της μεθόδου επίλυσης,
• ποικιλία δραστηριοτήτων για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων,
• δημιουργία συνδέσεων μεταξύ των πολλαπλών αναπαραστάσεων και
• χρήση της τεχνολογίας.

Κεφάλαιο 6ο: Εφαρμογή της διδακτικής παρέμβασης

6.1 Σχεδιασμός διδασκαλίας

Η σημασία αξιοποίησης της ιστορίας των Μαθηματικών κατά τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών εννοιών, όπως και οι τρόποι ενσωμάτωσής της στη διδακτική πράξη, έχει καταγραφεί και επισημανθεί από πλήθος ερευνών (Gulikers & Blom, 2001· Fried, 2001· Tzanakis et al., 2002· Jankvist, 2009). Κοινός τόπος αυτών είναι η σημαντική θέση του ιστορικού προβλήματος, το οποίο εν αντιθέσει με την παραδοσιακή διδακτική προσέγγιση, αποτελεί την αφετηρία και όχι τον τερματικό σταθμό της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Άλλωστε, σύμφωνα με τον Freudenthal (1983) η χρήση του προβλήματος, ως ένα απλό μέσο εφαρμογής και εμπέδωσης αποκτηθέντων γνώσεων, είναι ιστορικά αβάσιμη, ορίζοντάς την ως αντιδιδακτική αντιστροφή.

Επίσης, η εκμάθηση των Μαθηματικών δε συνίσταται μόνο από την εξοικείωση με τους χειρισμούς μαθηματικών συμβόλων και εκφράσεων, τη λογική σύνταξη μαθηματικών θεωριών και τη συσσώρευση γνώσεων που παρουσιάζονται ως ένα τελικό μαθηματικό προϊόν. Αντιθέτως, περιλαμβάνει και την κατανόηση των κινήτρων για συγκεκριμένα προβλήματα και ερωτήματα, διαδικασίες που δίνουν νόημα στις ενέργειες των μαθητών και που συνδέουν την προϋπάρχουσα γνώση με τη νέα, ενισχύοντας τελικά το όλο εννοιολογικό πλαίσιο δράσης τους (Tzanakis and Arcavi 2000). Ο σχεδιασμός της προτεινόμενης σε αυτή την εργασία διδακτικής παρέμβασης με την αξιοποίηση της ιστορικής γεωμετρικής προσέγγισης επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων γίνεται υπό αυτό το πρίσμα.

Η ισότιμη αξιακή θέση Άλγεβρας και Γεωμετρίας όσον αφορά στην ανάπτυξη και ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών εν γένει και των δευτεροβάθμιων εξισώσεων ειδικότερα, καθιστά τουλάχιστον χρήσιμη την ταυτόχρονη εμπλοκή με τον αλγεβρικό και γεωμετρικό συλλογισμό (Katz, 1997, 2000· Radford & Gerette 2000· Allaire & Bradley, 2001· Radford, 2001· Guevara-Casanova, 2012) παρέχοντας στους μαθητές ένα κατάλληλο πλαίσιο κατανόησης του συμβολικού αλγεβρικού συμβολισμού και ανάπτυξης των αλγεβρικών και γεωμετρικών τους δεξιοτήτων.

Για αυτό τον σκοπό θα χρησιμοποιηθούν παραδείγματα ιστορικών προβλημάτων των βαβυλωνιακών και αραβικών Μαθηματικών, ώστε να εξεταστεί αν οι γεωμετρικές μέθοδοι επίλυσης της «στοιχειώδους» (κατά Høyrup) Γεωμετρίας των Βαβυλωνίων και της συμπλήρωσης τετραγώνου του Al Khwarizmi, μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές στην περαιτέρω κατανόηση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις των εξισώσεων που προσφέρουν τα προβλήματα (λεκτική, αριθμητική, αλγεβρική, γεωμετρική) μπορούν να κάνουν εμφανείς καταγεγραμμένες δυσκολίες και παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις, ενώ ο ολιστικός τρόπος διαπραγμάτευσής τους θα προσπαθήσει να τις περιορίσει, νοηματοδοτώντας τους μετασχηματισμούς των μαθηματικών εκφράσεων μεταξύ των μορφών αναπαράστασής τους.

Η διδακτική παρέμβαση απευθύνεται σε μαθητές της πρώτης τάξης του Λυκείου, στην οποία όπως έχει τονιστεί σε ξεχωριστή ενότητα της παρούσας εργασίας, τα γνωστικά εμπόδια των μαθητών κατά την εκμάθηση των διάφορων μεθόδων επίλυσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων διατηρούνται (Didis et al., 2011· Tall et al., 2014· Makonye & Nhlanhla, 2014· Godden et al., 2013· Nielsen, 2015· López, 2016· Kabar, 2018).

Επίσης, η επιλογή των ιστορικών περιόδων και των ιστορικών προβλημάτων έγινε με γνώμονα την συμβατότητα των μαθηματικών γνώσεων που οι μέθοδοι επίλυσης απαιτούν με την διδακτέα ύλη των μαθητών της Α’ Λυκείου, τη γεωμετρική και όχι αμιγώς αλγεβρική προσέγγιση επίλυσης που προσφέρουν, καθώς και το ότι κεντρική έννοια διαπραγμάτευσης θα πρέπει να είναι η δευτεροβάθμια εξίσωση και όχι κάποια αλγεβρική ή γεωμετρική έννοια που θα χρησιμοποιηθεί κατά τη διαδικασία επίλυσης.

Συνεπώς, με μαθηματικά εργαλεία κατανόησης και επεξεργασίας την προϋπάρχουσα γνώση σχετικά με την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων ελλιπούς ή πλήρους μορφής από τη Γ’ Γυμνασίου, καθώς και την επίλυση πρωτοβάθμιων και διωνυμικών εξισώσεων (Α’ Λυκείου), οι μαθητές θα προσπαθήσουν να ανακαλύψουν ή να ξαναανακαλύψουν πτυχές των δευτεροβάθμιων εξισώσεων.

6.2 Στόχος – ερευνητικά ερωτήματα

Γενικός στόχος (σκοπός) της διδακτικής πρότασης της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη και η διερεύνηση των αποτελεσμάτων αξιοποίησης του οπτικού-γεωμετρικού (διαγραμματικού) συλλογισμού από μαθητές της Α’ Λυκείου μέσω ιστορικών γεωμετρικών προσεγγίσεων επίλυσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων.

Να σημειώσουμε ότι στόχος της διδακτικής πρότασης δεν είναι η ανάδειξη της εξελικτικής πορείας της δευτεροβάθμιας εξίσωσης (παρά το ότι εμφανίζονται στοιχεία της). Στόχος είναι η ανάπτυξη από τους μαθητές οπτικού γεωμετρικού συλλογισμού μέσω διαγραμμάτων, τα οποία θα ενθαρρυνθούν να χρησιμοποιήσουν με δική τους πρωτοβουλία.

Οπότε, δεν αποτελεί αυτοσκοπό της έρευνας η απλή επίλυση ενός προβλήματος, αλλά επίλυση ενός προβλήματος δευτεροβάθμιας εξίσωσης το οποίο έχει μετασχηματιστεί σε πρόβλημα υπολογισμού εμβαδού και μηκών και που σχετίζεται με τετράγωνα και ορθογώνια, δηλαδή να οδηγηθούν στη χρήση του γεωμετρικού συλλογισμού.

Για αυτό, στόχος είναι η μετάβαση των μαθητών από τις αλγεβρικές εκφράσεις σε γεωμετρικές, η κατά το δυνατόν εύρεση των λύσεων στο γεωμετρικό πεδίο και τέλος η ανάγνωση του προβλήματος με αλγεβρικό τρόπο αποφεύγοντας την απευθείας διαχείριση των αλγεβρικών εκφράσεων.

Οπότε, γενικότερα, σκοπός της εισαγωγής διαγραμμάτων είναι η σύνδεση της συμβολικής αλγεβρικής νόησης με την εικονική-γεωμετρική, κάτι εντελώς διαφορετικό και φαινομενικά δύσκολα συνδεόμενο για τους περισσότερους μαθητές.

Οι επιμέρους στόχοι είναι οι ακόλουθοι:

- Ο μετασχηματισμός μαθηματικών εκφράσεων στις διάφορες μορφές αναπαράστασής τους (λεκτική, αριθμητική, αλγεβρική, γεωμετρική).
- Η χρήση γεωμετρικών μεθόδων κατασκευής και επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων και συγκεκριμένα, η χρήση της παραγοντοποίησης (υπό γεωμετρική οπτική), της μεθόδου της απλοϊκής-στοιχειώδους βαβυλωνιακής Γεωμετρίας και της συμπλήρωσης τετραγώνου του Al Khwarizmi.
- Η επαναανακάλυψη και νοηματοδότηση με γεωμετρικό τρόπο του τετραγωνικού τύπου.

Συνεπώς, με βάση τους παραπάνω επιμέρους στόχους, διατυπώνονται τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

1. Σε ποιο βαθμό οι μαθητές της Α' Λυκείου μπορούν να μετασχηματίζουν μαθηματικές εκφράσεις στις διάφορες μορφές αναπαράστασής τους· λεκτική, αριθμητική, αλγεβρική, γεωμετρική;
2. Η χρήση ιστορικών γεωμετρικών μεθόδων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές της Α' λυκείου στην επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων;

3. Μπορούν οι μαθητές της Α' Λυκείου να αποδεικνύουν και να ερμηνεύουν γεωμετρικά τον τετραγωνικό τύπο;

6.3 Μεθοδολογία Έρευνας

6.3.1 Συμμετέχοντες στην έρευνα

Στην έρευνα συμμετείχαν 43 μαθητές (24 αγόρια και 19 κορίτσια) ηλικίας 15-16 ετών από δύο τμήματα της Α' Λυκείου του Πρότυπου ΕΠΑΛ Κατερίνης. Οι συμμετέχοντες μαθητές προέρχονταν από διάφορες περιοχές (αστική, αγροτική, ενδιάμεση – κωμοπόλεις και προάστια) της Περιφερειακής Ενότητας Πιερίας και κατ' επέκταση φοιτούσαν σε αρκετά διαφορετικά Γυμνάσια (16, εκ των οποίων τα 7 εντός της πόλης της Κατερίνης), με αποτελέσμα τόσο το κοινωνικοοικονομικό όσο και το γενικό μαθησιακό τους υπόβαθρο να ποικίλει.

6.3.2 Ανάλυση διαδικασίας και ερευνητικών εργαλείων

Για την διδακτική παρέμβαση απαιτήθηκαν 7 διδακτικές ώρες (φάσεις). Κατά κανόνα η κάθε διδακτική ώρα (εκτός των δύο πρώτων) ξεκινούσε με την ολιγόλεπτη συζήτηση απoριών των μαθητών ως προς τις εργασίες που περιέχονταν στο τέλος του προηγούμενου φύλλου εργασίας. Στη συνέχεια, οι μαθητές εργάζονταν σε ομάδες με το επόμενο φύλλο εργασίας, ενώ τις απαντήσεις τους σε κόλλες αναφοράς τις παρέδιδαν στο τέλος της εργασίας τους. Για την κάθε δραστηριότητα των τεστ και των φύλλων εργασίας δίνονταν αρχικά από τον διδάσκοντα οι απαραίτητες επεξηγήσεις, ενώ στη συνέχεια οι ομάδες (ή οι μαθητές ατομικά στα τεστ αξιολόγησης) ενθαρρύνονταν να συμμετέχουν και να απαντούν με δική τους πρωτοβουλία. Στο τέλος κάθε διδακτικής ώρας γινόταν στην ολομέλεια της τάξης μια ολιγόλεπτη συζήτηση ως προς το διδακτικό αποτέλεσμα που προέκυπτε κάθε φορά.

Η ομαδική εργασία των μαθητών καταγράφονταν ηχητικά (ηχογράφηση) και όπου κρίνονταν απαραίτητο με σημειώσεις-παρατηρήσεις του διδάσκοντος. Ο ρόλος του διδάσκοντος ήταν καθοδηγητικός και συντονιστικός. Να σημειωθεί η παρουσία και ενός δεύτερου εκπαιδευτικού (μαθηματικού επίσης) στο πλαίσιο του προγράμματος ΜΝΑΕ (Μια Νέα Αρχή στα ΕΠΑΛ), ο οποίος συνέβαλε στην ευρυθμία και υποστήριξη της διαδικασίας κυρίως κατά την καταγραφή παρατηρήσεων ως προς την ομαδική εργασία των μαθητών με τα φύλλα εργασίας.

$1^η$ διδακτική ώρα – φάση

Αρχικά, στην $1^η$ διδακτική ώρα δόθηκε στους μαθητές ένα κριτήριο διαγνωστικής αξιολόγησης που περιείχε ερωτήσεις σχετικές με τις εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού (Παράρτημα Β). Σκοπός του τεστ ήταν ο προσδιορισμός του γνωστικού υποβάθρου των μαθητών σχετικά με τις εξισώσεις, ώστε στη συνέχεια να χωριστούν σε ετερογενείς ομάδες εργασίας για τις επόμενες φάσεις ($2^η$ έως $6^η$) της διδακτικής παρέμβασης.

Πιο συγκεκριμένα η δραστηριότητα 1 του διαγνωστικού τεστ αναφέρονταν στην επίλυση εξισώσεων πρώτου βαθμού. Απαιτούνταν από τους μαθητές ο εντοπισμός αδύνατων, αόριστων εξισώσεων, καθώς και η εκτέλεση απλών αλγεβρικών πράξεων κατά τη διαδικασία εύρεσης της μοναδικής λύσης (όπου υπήρχε).

Η δραστηριότητα 2 αφορά στην αναγνώριση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων (Δρ2Α) και στον προσδιορισμό του πλήθους των λύσεών τους (Δρ2Β), ενώ στο τρίτο μέρος της δραστηριότητας (Δρ2Γ) ζητούνταν η επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων ελλιπούς και πλήρους μορφής.

Με βάση τον βαθμό κατανόησης, επίλυσης εξισώσεων και επαλήθευσης των λύσεών τους οι μαθητές ταξινομήθηκαν σε τρεις κατηγορίες (αδύναμη-μέτρια-δυνατή): δέκα (10) μαθητές για την δυνατή, έντεκα (11) για τη μέτρια και είκοσι δύο (22) για την αδύναμη. Συγκροτήθηκαν δέκα (10) ετερογενείς ομάδες με έναν τουλάχιστον μαθητή από κάθε κατηγορία. Οι ομάδες ήταν κατά κανόνα τετραμελείς ή και τριμελείς, λόγω των δικαιολογημένων απουσιών μαθητών σε ορισμένες διδακτικές ώρες.

$2^η$ και $3^η$ διδακτική ώρα – φάση

Οι ομάδες εργασίας παρέλαβαν το φύλλο εργασίας 1 (Παράρτημα Β), το οποίο περιείχε δραστηριότητες μετασχηματισμού μαθηματικών εκφράσεων από αλγεβρική μορφή σε γεωμετρική (πρώτο ερευνητικό ερώτημα). Στόχος ήταν η κατανόηση των σχέσεων των αλγεβρικών όρων με τα μήκη και τα εμβαδά των τετραγώνων και ορθογωνίων με τα οποία αντιστοιχίζονται, καθώς τότε θα ήταν σε θέση να λύσουν αλγεβρικές εξισώσεις με τις γεωμετρικές μεθόδους που θα ακολουθούσαν. Το φύλλο εργασίας 1 ολοκληρώθηκε σε 2 διδακτικές ώρες λόγω του πλήθους των ερωτημάτων του, της αρχικής, αλλά απαραίτητης διαδικασίας κατάρτισης και συντονισμού των ομάδων, καθώς και της αρχικής δυσκολίας των μαθητών να προσαρμοστούν στη νέα μορφή διδασκαλίας.

Στην δραστηριότητα 1, οι μαθητές μεταβαίνουν από την αλγεβρική στην γεωμετρική μορφή αναπαράστασης απλών εκφράσεων (μονώνυμα), αλλά και πιο σύνθετων (διωνύμων και ενός γινομένου μεταβλητών παραγόντων). Επίσης, τους ζητήθηκε να εντοπίσουν και να ερμηνεύσουν γεωμετρικά παραγοντοποιήσιμες παραστάσεις ($x^2 - 4$ και $x^2 + 2x$).

Στην δραστηριότητα 2, δόθηκαν εξισώσεις, πλέον, τις οποίες θα έπρεπε να αναπαραστήσουν και να λύσουν γεωμετρικά (Δρ2Α), προσδιορίζοντας έπειτα το πλήθος λύσεων που βρήκαν (Δρ2Β). Στο τρίτο μέρος της δραστηριότητας τους ζητήθηκε να λύσουν με όποιον τρόπο επιθυμούν τις ίδιες εξισώσεις και να παρατηρήσουν κάποια διαφορά ως προς το πλήθος των λύσεων. Με την αλγεβρική τους επίλυση ή και τη μέθοδο δοκιμής κατάλληλων τιμών (δοκιμής-σφάλματος), αναμένονταν οι μαθητές να παρατηρήσουν τη διαφορά μεταξύ γεωμετρικής και αλγεβρικής επίλυσης ως προς το πλήθος των παραγόμενων και νοηματοδοτούμενων λύσεων.

Στην δραστηριότητα 3, στόχος ήταν η κατασκευή εξίσωσης από τους μαθητές με δοσμένες λύσεις (π.χ. για τις $x = 0$ και $x = 3$, την $x \cdot (x - 3) = 0$) και στη συνέχεια η γεωμετρική της αναπαράσταση (το αντίστροφο της δραστηριότητας 2).

Οι εργασίες του φύλλου εργασίας 1 (ασκήσεις του σχολικού βιβλίου) αποσκοπούσαν στην εξάσκηση των μαθητών (αντιστοιχούν στις δραστηριότητες 2 και 3 του φύλλου εργασίας).

4η διδακτική ώρα – φάση

Οι ομάδες εργασίας με το φύλλο εργασίας 2 (Παράρτημα Β) εισήχθησαν στη στοιχειώδη-απλοϊκή (κατά Høyrup) Γεωμετρία των Βαβυλωνίων με δύο ιστορικά προβλήματα καταγεγραμμένα σε πινακίδες (BM 34568 και BM 13901).

Στην δραστηριότητα 1, δόθηκε η ευκαιρία στους μαθητές (ερώτημα Α) να σκεφτούν τη λύση του προβλήματος (πινακίδα BM 34568 – 3.1 ενότητα εργασίας, σελ. 36), είτε καθαρά αλγεβρικά, είτε γεωμετρικά με βάση τη ληφθείσα γνώση των προηγούμενων φάσεων. Στο ερώτημα Β, δόθηκε η λεκτική, αριθμητική και μια πιθανή γεωμετρική μορφή της λύσης του προβλήματος. Ζητήθηκε από τους μαθητές να αντιστοιχίσουν τα βήματα της διαδικασίας στην κάθε της μορφή.[16] Αφού οι ομάδες απάντησαν στο ερώτημα έγινε αναφορά και σε μια γεωμετρική μέθοδο επίλυσης του προβλήματος με αποκοπή και επικόλληση η οποία απαιτεί την αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή την αρχική κατασκευή κατάλληλου τετραγώνου και τον μετασχηματισμό του σε ορθογώνιο (κατασκευάζουμε τετράγωνο πλευράς 7, εμβαδού 48, και αποκόπτουμε ορθογώνιο διαστάσεων 6 επί 1 από μια βάση του, επανατοποθετώντας το στην κάθετη με αυτήν πλευρά του, ώστε να σχηματιστεί ορθογώνιο διαστάσεων 6 επί 8).

Η δραστηριότητα 2 ζητούσε από τους μαθητές την αναπαράσταση του προβλήματος (πινακίδα BM 13901 - 3.1 ενότητα εργασίας, σελ. 40-42) με μια εξίσωση (Δρ2Α) και την αλγεβρική διατύπωση της λύσης της, με βάση την ιστορική λεκτική διατύπωσή της (Δρ2Β). Επιπλέον, οι μαθητές έχοντας δύο σχήματα αναφοράς καλούνταν να περιγράψουν την αντίστοιχη πιθανή γεωμετρική ερμηνεία των βημάτων επίλυσης του προβλήματος (Δρ2Γ). Τέλος, οι μαθητές θα έπρεπε να ελέγξουν με βάση την αλγεβρική μορφή αναπαράστασης της λύσης που καταγράψανε ενδεχόμενη άλλη λύση, παρατηρώντας και πάλι τις αδυναμίες[17] της γεωμετρικής μεθόδου (Δρ2Δ). Ως εργασία, δίνονταν στους μαθητές παρόμοιες δραστηριότητες προς εξάσκησή τους.[18]

Με τις παραπάνω δραστηριότητες οι μαθητές ασχολήθηκαν με μετασχηματισμούς των διάφορων μορφών αναπαράστασης προβλημάτων και λύσεων, συνέκριναν τις μεθόδους επίλυσης και γνώρισαν τις πιθανές γεωμετρικές μεθόδους των Βαβυλωνίων, ώστε να εισαχθούν ομαλά (από ιστορικής και πρακτικής άποψης) στις αντίστοιχες του Al-Khwarizmi (πρώτο και δεύτερο ερευνητικό ερώτημα).

5η διδακτική ώρα – φάση

Οι μαθητές με το φύλλο εργασίας 3 (Παράρτημα Β), είχαν τη δυνατότητα να συγκρίνουν τον τρόπο αναπαράστασης και τη λεκτική διατύπωση των λύσεων βαβυλωνιακών και αραβικών (Al-Khwarizmi) προβλημάτων, συνάγοντας το συμπέρασμα ότι είναι ουσιαστικά παρόμοια

[16] Ως μια επέκταση του προβλήματος θα μπορούσαμε να ζητήσουμε την αλγεβρική αναπαράσταση και λύση του προβλήματος, με βάση την ιστορική λεκτική διατύπωση, ή/και αναγάγοντας το σύστημα εξισώσεων σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση (ο χρόνος που θα απαιτούνταν θα ξεπερνούσε τη μια διδακτική ώρα).

[17] Ο κατάλληλος μετασχηματισμός εξισώσεων, με αναδιάταξη των όρων του, επιτρέπει την εύρεση όλων των λύσεων.

[18] Για τη βαθύτερη κατανόηση της μεθόδου που απαιτείται στην πρώτη εργασία, θα μπορούσε να δοθεί προς τους μαθητές πρόβλημα όπου το αποκοπτόμενο σχήμα να είναι τετράγωνο πλευράς άρρητου μήκους, π.χ. «Αν το μήκος και πλάτος μαζί (μιας ορθογώνιας έκτασης) είναι 12 και η επιφάνειά της 30, ποιο είναι το μήκος και ποιο το πλάτος;», όπου το τετράγωνο θα έχει πλευρά $\sqrt{6}$.

(Δρ1). Για αυτό τον σκοπό δόθηκε ένα βαβυλωνιακό πρόβλημα καταγεγραμμένο με τη λύση του στην πινακίδα BM 13901 (3.1 ενότητα εργασίας, σελ. 39, 40) και ένα πρόβλημα του Al-Khwarizmi με διατυπωμένες τις λύσεις του (και τη γεωμετρική) (3.5.1 ενότητα εργασίας, σελ. 51-53). Στη συνέχεια με την ρητή αναφορά του Al-Khwarizmi σε γεωμετρική μέθοδο επίλυσης και τα σχετικά ερωτήματα, διαφαίνεται η διαφοροποίηση της λεκτικής-αριθμητικής μεθόδου των Βαβυλωνίων, αλλά και η ομοιότητα της πιθανότατης, αλλά μη ρητά καταγεγραμμένης, γεωμετρικής τους (Δρ2). Οι μαθητές γνώρισαν τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου του Al-Khwarizmi αναπαριστώντας γεωμετρικά τα βήματα της διατυπωμένης επίλυσης με την κατασκευή των κατάλληλων σχημάτων και συνέδεσαν κάθε γεωμετρικό βήμα με το αντίστοιχο αλγεβρικό (Δρ2Α) (πρώτο και δεύτερο ερευνητικό ερώτημα). Στο ερώτημα Β οι μαθητές έπρεπε και πάλι να ελέγξουν την ύπαρξη και άλλης λύσης στο πρόβλημα.

Η εργασία περιελάμβανε παρόμοια προβλήματα, ώστε να εξοικειωθούν οι μαθητές με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου (αλγεβρική και γεωμετρική) του Al-Khwarizmi.

6η διδακτική ώρα – φάση

Στο τελευταίο φύλλο εργασίας 4 (Παράρτημα Β), ζητούνταν από τους μαθητές η γενίκευση της διαδικασίας επίλυσης του Al-Khwarizmi σε αφηρημένη αλγεβρική γλώσσα, ώστε να εξαχθούν οι λύσεις των δευτεροβάθμιων εξισώσεων, αρχικά μορφής $x^2+\beta x=\gamma$, στη συνέχεια $\alpha x^2+\beta x=\gamma$ (με ανάλογη διαδικασία και διαίρεση κάθε όρου με τον συντελεστή α) και τέλος μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (με αντικατάσταση του συντελεστή γ με $-\gamma$). Οι παραπάνω διαδικασίες δυσκόλεψαν τους περισσότερους μαθητές, οπότε ο ρόλος του διδάσκοντος ήταν πιο έντονα καθοδηγητικός. Οι μαθητές με την κατάληξη στον τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης (πλήρους μορφής) και την ερμηνεία των βημάτων της διαδικασίας με τα αντίστοιχα γεωμετρικά, είχαν τη δυνατότητα να νοηματοδοτήσουν τις διαδικασίες που προηγήθηκαν, οπτικοποιώντας τες (τρίτο ερευνητικό ερώτημα).

Ως εργασία, δόθηκε στους μαθητές η εξίσωση $x^2+6x+8=0$ (η οποία έχει θετικούς όλους τους συντελεστές της) και τους ζητήθηκε να εξετάσουν αν είχε νόημα η λύση της για τον Al-Khwarizmi. Προηγούμενα συμπεράσματα των μαθητών σχετικά με το είδος των λύσεων και την απουσία τους κατά τις γεωμετρικές μεθόδους επίλυσης, θα μπορούσαν να βοηθήσουν στο να οδηγηθούν στο ευνόητο συμπέρασμα. Επίσης, η δεύτερη εργασία θα μπορούσε να καταδείξει πως ο κατάλληλος μετασχηματισμός εξισώσεων, με αναδιάταξη των όρων του, επιτρέπει την εύρεση όλων των λύσεων, και των αρνητικών των «πρώτων» εξισώσεων, ως απόλυτες τιμές τους στις «δεύτερες» εξισώσεις.

7η διδακτική ώρα – φάση

Στην τελευταία φάση, οι μαθητές αξιολογήθηκαν ως προς τον βαθμό κατανόησης και την ικανότητα εφαρμογής των διδαχθέντων με σχετικό κριτήριο αξιολόγησης (Παράρτημα Β). Να σημειωθεί ότι στις δραστηριότητες απουσίαζε η απόδειξη του τετραγωνικού τύπου και η γεωμετρική του ερμηνεία (τρίτος ερευνητικός στόχος), καθώς περιέχονταν ως δραστηριότητα στο τελευταίο φύλλο εργασίας, θεωρώντας πως θα είχε νόημα ο έλεγχος της επίδοσης των μαθητών σε πρώτο χρόνο, κατά την επεξεργασία του φύλλου εργασίας, και όχι σε δεύτερο, μετά τη διατύπωσή του κατά τη διδασκαλία, ως αποτέλεσμα απομνημόνευσης-ανάκλησης της αποδεικτικής διαδικασίας.

Η δραστηριότητες 1 και 2 αναφέρονταν στην αναπαράσταση, επίλυση και κατασκευή δευτεροβάθμιων εξισώσεων (παρόμοιες με το φύλλο εργασίας 1). Η επίλυσή τους δεν ζητήθηκε ρητά να γίνει αλγεβρικά, ώστε να διαπιστωθεί ο αντίκτυπος της διδακτικής παρέμβασης και της τελικής εξοικείωσης των μαθητών με τις γεωμετρικές μεθόδους. Η δραστηριότητα 3 αφορούσε στον μετασχηματισμό της γεωμετρικής αναπαράστασης μιας εξίσωσης και της διαδικασίας επίλυσής της στην αντίστοιχη αλγεβρική της (παρόμοια του φύλλου εργασίας 2). Η δραστηριότητα 4 ζητούσε την εφαρμογή της μεθόδου συμπλήρωσης τετραγώνου του Al-Khwarizmi για την επίλυση δύο εξισώσεων, εκ των οποίων η μία με συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου διάφορο ης μονάδας, ώστε να γίνει η απαραίτητη αναγωγή στο τετράγωνο με τη διαίρεση των όρων του με το δύο (παρόμοια δραστηριότητα του φύλλου εργασίας 3). Τέλος, η δραστηριότητα 5 οι μαθητές καλούνται να λύσουν με τον τετραγωνικό τύπο που εξήγαγαν στο φύλλο εργασίας 4 την εξίσωση $x^2+5x+4=0$ συνάγοντας το συμπέρασμα της μη γεωμετρικής νοηματοδότησής της.

6.4 Αξιοπιστία και εγκυρότητα της συλλογής δεδομένων

Η όλη διαδικασία της διδακτικής παρέμβασης διενεργήθηκε στις σχολικές τάξεις με την παρουσία του διδάσκοντος, αλλά και (την προβλεπόμενη) ενός δεύτερου εκπαιδευτικού (μαθηματικού επίσης) στο πλαίσιο του προγράμματος ΜΝΑΕ (Μια Νέα Αρχή στα ΕΠΑΛ), ο οποίος συνέβαλε στην ευρυθμία και υποστήριξη της διαδικασίας κυρίως κατά την καταγραφή παρατηρήσεων ως προς την ομαδική εργασία των μαθητών με τα φύλλα εργασίας. Επίσης, το δείγμα της έρευνας (συμμετέχοντες μαθητές) παρέμεινε σταθερό σε όλη τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, η οποία πραγματοποιήθηκε με τη φυσική παρουσία συμμετεχόντων μαθητών και εκπαιδευτικών.

Να σημειωθεί, επίσης, ότι οι συμμετέχοντες μαθητές προέρχονταν από διάφορες περιοχές (αστική, αγροτική, ενδιάμεση – κωμοπόλεις και προάστια) της Περιφερειακής Ενότητας Πιερίας και κατ' επέκταση φοιτούσαν σε αρκετά διαφορετικά Γυμνάσια (16, εκ των οποίων τα 7 εντός της πόλης της Κατερίνης), με αποτελέσμα τόσο το κοινωνικοοικονομικό όσο και το γενικό μαθησιακό τους υπόβαθρο να ποικίλει.

Η συλλογή των δεδομένων της παρούσας διδακτικής παρέμβασης έγινε με το κριτήριο διαγνωστικής αξιολόγησης, τα τέσσερα φύλλα εργασίας, του τελικού κριτηρίου ατομικής αξιολόγησης των μαθητών, την παρατήρηση της ομαδικής εργασίας των μαθητών με τα φύλλα εργασίας και την ηχογράφησή τους.

Τα τεστ και τα φύλλα εργασίας, δηλαδή τα ερευνητικά εργαλεία, σχεδιάστηκαν με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν. Οι απαντήσεις των μαθητών κατά την ομαδική και ατομική τους εργασία, η διασταύρωσή τους με τις αντίστοιχες ηχογραφήσεις (κατά την ομαδική εργασία) και οι καταγραφόμενες παρατηρήσεις-σημειώσεις σε πρώτο χρόνο παρήγαγαν ικανοποιητικό πλήθος δεδομένων προς αξιοποίηση και παραγωγή υποθέσεων-αποτελεσμάτων για τα επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα.

Κεφάλαιο 7^{ο}: Αποτελέσματα της διδακτικής παρέμβασης

7.1 Ανάλυση αποτελεσμάτων τεστ διαγνωστικής αξιολόγησης (1^{η} Φάση)

Στην 1^{η} διδακτική ώρα της διδακτικής πρότασης δόθηκε στους μαθητές ένα τεστ διαγνωστικής αξιολόγησης με ερωτήσεις σχετικές με τις εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού. Ο σκοπός του τεστ ήταν διπλός: πρώτον, ο προσδιορισμός του γνωστικού υποβάθρου των μαθητών σχετικά με τις εξισώσεις και δεύτερον, η ταξινόμηση των μαθητών σε ετερογενείς ομάδες εργασίας για τις επόμενες φάσεις (2^{η} έως 5^{η}) της διδακτικής πρότασης. Το τεστ περιείχε ερωτήσεις κατανόησης ως προς τον εντοπισμό του βαθμού και του πλήθους των λύσεων των εξισώσεων πρώτου και δευτέρου βαθμού, αλλά και επίλυση εξισώσεων (για τις δευτεροβάθμιες, ελλιπούς και πλήρους μορφής).

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων του διαγνωστικού τεστ οδήγησε στην ταξινόμηση των μαθητών σε τρεις κατηγορίες ως προς τον βαθμό κατανόησης, επίλυσης εξισώσεων και επαλήθευσης των λύσεών τους (αδύναμη-μέτρια-δυνατή): δέκα (10) μαθητές για την δυνατή, έντεκα (11) για τη μέτρια και είκοσι δύο (22) για την αδύναμη. Συγκροτήθηκαν δέκα ετερογενείς ομάδες με έναν τουλάχιστον μαθητή από κάθε κατηγορία. Οι ομάδες ήταν κατά κανόνα τετραμελείς ή και τριμελείς, λόγω των δικαιολογημένων απουσιών μαθητών σε ορισμένες διδακτικές ώρες.

Παρακάτω, για την καλύτερη κατανόηση του γνωστικού υποβάθρου των μαθητών, παρατίθενται αποτελέσματα και συμπεράσματα σχετικά με τις εξισώσεις και πρώτου και δευτέρου βαθμού. Να σημειωθεί ότι στο αρχικό τεστ διαγνωστικής αξιολόγησης μπόρεσαν να συμμετάσχουν 36 από τους 43 μαθητές του δείγματος (οι υπόλοιποι απουσίαζαν δικαιολογημένα). Οι υπόλοιποι ταξινομήθηκαν με βάση τη γνωστή στον διδάσκοντα γενικότερη απόδοσή τους στη σχολική τάξη.

Δραστηριότητα 1

Α. Οι απαντήσεις των μαθητών που έδωσαν απάντηση στην ερώτηση (17 από τους 36) για τη σημασία του «λύνω μια εξίσωση», επικεντρώθηκαν στην εύρεση «μιας τιμής», «ενός αποτελέσματος», «μιας λύσης» για αυτή. Τέσσερις (4) μαθητές έδωσαν την απάντηση «να βρεις την τιμή του αγνώστου x» (η διατύπωση της ερώτησης δεν περιείχε κάποια εξίσωση και κατ᾽ επέκταση κάποιον άγνωστο συγκεκριμένης μορφής x), δύο (2) μαθητές «να βρεις την τιμή του αγνώστου» και δύο (2) μαθητές αναφέρθηκαν στην ισότητα των δύο μελών της εξίσωσης (σχεσιακή αντίληψη συμβόλου ισότητας) με τις απαντήσεις «να αποδείξεις ότι τα δύο μέλη είναι ίσα», «να βρεις την τιμή του αγνώστου, ώστε να προκύπτει ισότητα μεταξύ των δύο μελών».

Στο ερώτημα για το πλήθος των λύσεων μιας πρωτοβάθμιας εξίσωσης σημαντικός αριθμός μαθητών (7 μαθητές) απάντησαν «μόνο μία λύση» ή «το πολύ δύο» (7 μαθητές).

Να σημειωθεί ότι σε ορισμένες περιπτώσεις οι απαντήσεις των μαθητών ως προς το πλήθος των λύσεων μιας πρωτοβάθμιας εξίσωσης δεν είχαν λογική συνέπεια με το πλήθος των λύσεων που τελικά έβρισκαν κατά την επίλυση πρωτοβάθμιων εξισώσεων, καθώς κατέληγαν σε συμπεράσματα για αδύνατες και αόριστες εξισώσεις.

Β. Σχετικά με την επίλυση εξισώσεων πρωτοβάθμιων εξισώσεων πέντε (5) μαθητές κατέγραψαν την εξίσωση $0x = 2$ ως αδύνατη (όπως και την $0x = 2$).

Επτά (7) μαθητές παρουσίασαν προβλήματα κατά την εκτέλεση πράξεων μεταξύ ανόμοιων μονωνύμων π.χ. $3x+12=15x$, $-2x+x=-2x^2$, $3+x=3x$, επιβεβαιώνοντας αποτελέσματα ερευνών (π.χ. Λεμονίδης, 1996).

Λίγοι ήταν οι μαθητές (2) οι οποίοι δεν άλλαξαν το πρόσημο κατά τη μεταφορά όρων από το ένα μέλος στο άλλο.

Δέκα μαθητές (10) οι οποίοι επέλεξαν να παρουσιάσουν τη διαδικασία επίλυσης των εξισώσεων γράφοντας οριζόντια τις ισοδύναμες εξισώσεις παρουσίασαν σημαντικά προβλήματα κατά τη λογική σύνδεση των εξισώσεων, καθώς αντί της συνεπαγωγής ή ισοδυναμίας χρησιμοποιούσαν το σύμβολο της ισότητας, ενδεχομένως διότι το αντιλαμβάνονται ως γενικό σύμβολο-εντολή για την εκτέλεση υπολογισμών, προώθησης σχέσεων και κατάληξης σε μια απάντηση-λύση (Saenz-Ludlow & Walgamuth, 1998· Kieran, 1981· Carpenter et al., 2003· Ball et al., 2008· Makgakga, 2016).

Ορισμένοι μαθητές (2) μόλις κατέληγαν σε εξίσωση μορφής $\alpha x=\beta$ (π.χ. $3x=12$) σταματούσαν τη διαδικασία επίλυσης.

Η επιμεριστική ιδιότητα στην έκφραση $4\cdot(x-1)$ αντιμετωπίστηκε κατά κανόνα σωστά από τους περισσότερους μαθητές.

Δραστηριότητα 2

Α. Η αναγνώριση δευτεροβάθμιων εξισώσεων δυσκόλεψε χαρακτηριστικά τους μαθητές, καθώς μόνο μία μαθήτρια κατόρθωσε να τις εντοπίσει. Υπήρξαν αρκετοί μαθητές (12) οι οποίοι επέλεξαν και την « $\lambda x^2+5x+6=0$, για όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ».

Β. Ως προς το πλήθος των λύσεων των επιλεγμένων εξισώσεων οι περισσότεροι μαθητές απάντησαν σωστά για την ύπαρξη μίας (διπλής) λύσης για την $(x+1)^2=0$, δύο λύσεων για την $(x+3)\cdot(x-2)=-6$, ενώ μόλις δύο (2) μαθητές κατέγραψαν την εξίσωση $2x-3=x^2$ ως αδύνατη.

Γ. Οι περισσότεροι μαθητές που προσπάθησαν να λύσουν τις εξισώσεις εφάρμοσαν τη μέθοδο «δοκιμής και σφάλματος» για την εύρεση των λύσεων των δευτεροβάθμιων εξισώσεων, ειδικά για τις περιπτώσεις των $x^2=4$, $x^2-9=0$ και $(x+1)^2=36$. Επίσης, οι πλειονότητα των μαθητών κατέληξε στη θετική μόνο λύση των παραπάνω εξισώσεων, χωρίς να ελέγξει την ύπαρξη δεύτερης και παρά το γεγονός ότι ορισμένοι από αυτούς στο ερώτημα

Β αναφέρθηκαν σε δύο λύσεις. Μόλις πέντε (5) μαθητές κατόρθωσαν να βρουν και τις δύο λύσεις της εξίσωσης $x^2=4$, ενώ έξι μαθητές (6) προσδιόρισαν τις δύο λύσεις της εξίσωσης $x^2-9=0$.

Μόνο δύο (2) μαθητές κατάφεραν να λύσουν την εξίσωση $\left(x+1\right)^2=36$ (ο ένας με παραγοντοποίηση). Αρκετοί επέλεξαν να αναπτύξουν το τετράγωνο αθροίσματος στην εξίσωση $\left(x+1\right)^2=36$, χωρίς όμως να συνεχίσουν τη διαδικασία επίλυσης. Στην ανάπτυξη της ταυτότητας καταγράφηκε, σε κάποιες περιπτώσεις, η λανθασμένη ισοδυναμία $\left(x+1\right)^2=x^2+1^2$.

Τρεις (3) μαθητές εργάστηκαν ορθά για την $x^2+2x=0$. Οι μαθητές που απάντησαν σωστά εφάρμοσαν τη μέθοδο της παραγοντοποίησης για τις περιπτώσεις των εξισώσεων $x^2-9=0$ και $x^2+2x=0$.

Η τελευταία εξίσωση $x\cdot\left(x+1\right)=-2$ δε λύθηκε από κάποιον μαθητή. Να σημειωθεί πως ακόμη και στην προσπάθεια μαθητών να φέρουν την εξίσωση στη γενική μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ δεν εφαρμόστηκε σε καμία περίπτωση ο τετραγωνικός τύπος, επιβεβαιώνοντας τα συμπεράσματα ερευνών περί δυσκολίας απομνημόνευσης, εφαρμογής και νοηματοδότησής του (Didis et al., 2011· Tall et al., 2014).

Το γενικό συμπέρασμα που προέκυψε είναι ότι οι μαθητές συνάντησαν πολλές δυσκολίες στην αντιμετώπιση όλων των ερωτημάτων που σχετίζονταν με τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις.

7.2 Ανάλυση αποτελεσμάτων φύλλων εργασίας

Τα αποτελέσματα κάθε φύλλου εργασίας αναλύονται ξεχωριστά, ενώ αποτιμάται η επίδοση των ομάδων εργασίας και καταγράφεται η συλλογιστική που ανέπτυξαν προοδευτικά στο σύνολο των φύλλων εργασίας.

7.2.1 Φύλλο εργασίας 1 (2η και 3η Φάση)

Δραστηριότητα 1

Α. Η δραστηριότητα 1Α ζητά από τους μαθητές τον μετασχηματισμό μαθηματικών εκφράσεων από αλγεβρική μορφή σε γεωμετρική (αντιστοιχεί στον πρώτο διδακτικό στόχο της διδακτικής πρότασης).

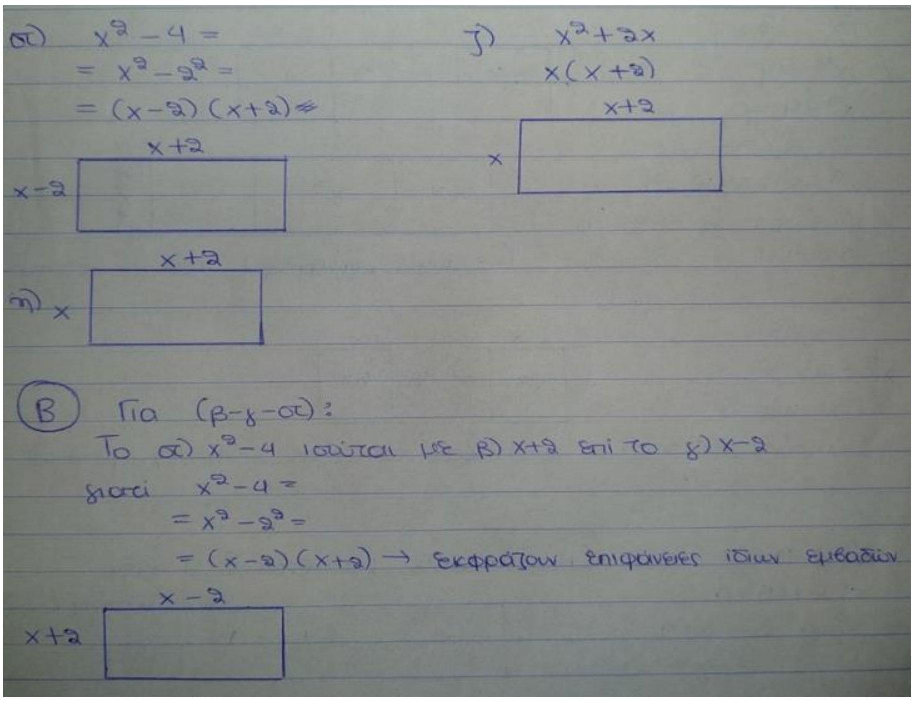
Στην περίπτωση του μονωνύμου $2x$ (ερώτημα 1Αα), οι επτά από τις δέκα ομάδες την εξέφρασαν ως εμβαδόν ορθογωνίου διαστάσεων 2 και x ($2x = 2 \cdot x$), ενώ οι υπόλοιπες τρεις ομάδες ως το συνολικό μήκος δύο συνευθειακών ευθύγραμμων τμημάτων μήκους x ($2x = x + x$). Σε όλες τις περιπτώσεις το μονώνυμο αποδόθηκε γεωμετρικά σωστά, εκτός από μια ομάδα σε κάθε περίπτωση. Στη μία, ταυτίστηκε το εμβαδόν με αυτό του x^2 (το $2x$ ως $x \cdot x$), ενώ στην άλλη με το συνολικό μήκος δύο συνευθειακών ευθύγραμμων τμημάτων μήκους 2 και x (το $2x$ ως $2 + x$).

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η συλλογιστική που αναπτύχθηκε σε μια ομάδα (9η), όπου οι μαθητές, αρχικά, εξέφρασαν τη ζητούμενη έκφραση ως άθροισμα μηκών τεθλασμένης (πολυγωνικής) γραμμής μη συνευθειακών τμημάτων. Σε επιπλέον ερωτήσεις του διδάσκοντος για το πώς θα μπορούσε να εκφραστεί το $3x$, $4x$, κ.λπ. οι μαθητές έδωσαν ως απαντήσεις είτε την περίμετρο ευθύγραμμων σχημάτων (ισόπλευρου τριγώνου, κανονικών πολυγώνων), είτε το συνολικό μήκος τεθλασμένων γραμμών. Στη συνέχεια, κατόπιν εμπλοκής και με τα υπόλοιπα ερωτήματα της δραστηριότητας ή και της δραστηριότητας 2, όπου απαιτείται η κατασκευή και επίλυση εξίσωσης, απέρριψαν την αρχική τους απάντηση θεωρώντας ότι η αναπαράσταση της έκφρασης ως εμβαδόν θα ήταν λειτουργικότερη.

Στα ερωτήματα 1Αβ και 1Αγ, εννέα από τις δέκα ομάδες αναπαράστησαν ορθά τις εκφράσεις $x + 2$, $x - 2$. Μία ομάδα (5η) χρησιμοποίησε το x ως σημείο αναφοράς σε άξονα τοποθετώντας το 2 από τα δεξιά του (στο $x + 2$) και το -2 από τα αριστερά του (στο $x - 2$).

Το ερώτημα 1Αδ (x^2) απαντήθηκε από το σύνολο των ομάδων με αμεσότητα και ευκολία. Το μονώνυμο $3x^2$ (ερώτημα 1Αε) αντιμετωπίστηκε από σχεδόν όλες τις ομάδες ως άθροισμα τριών τετραγώνων (το $3x^2$ ως $x^2 + x^2 + x^2$), ενώ από μία ομάδα (3η) εξ αρχής ως ορθογώνιο διαστάσεων $3x$ και x (το $3x^2$ ως $3x \cdot x$). Μία ομάδα (8η) δεν μπόρεσε να δώσει απάντηση, ενώ δύο ομάδες (5η και 7η) σχεδίασαν ένα τετράγωνο με πλευρά $3x$ (το $3x^2$ λανθασμένα ως $3x \cdot 3x = 9x^2$).

Για την έκφραση x^2-4 (ερώτημα 1Αστ), πέντε ομάδες κατέληξαν σε ορθή αναπαράσταση μιας «γεωμετρικής» διαφοράς δύο τετραγώνων (ενός με εμβαδόν x^2 κι ενός εσωτερικού του με εμβαδόν 4). Δύο ομάδες (1η και 4η) οδηγήθηκαν σε ισοδύναμο αποτέλεσμα, αφού αντιμετώπισαν το ερώτημα, αρχικά, αλγεβρικά *(Εικόνα 22),* διακρίνοντας την ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων και κατασκευάζοντας στη συνέχεια ορθογώνιο διαστάσεων $x+2$ και $x-2$ (χρήση των εκφράσεων των ερωτημάτων β και γ). Μία ομάδα δεν έδωσε απάντηση (8η), μία ομάδα (10η) κατασκεύασε ορθογώνιο διαστάσεων x και $x-4$ (το x^2-4 ως $x\cdot(x-4)=x^2-4x$), ενώ μία άλλη (5η) όρισε ως μήκος του ορθογωνίου το -4 (η ίδια ομάδα έπραξε με παρόμοιο τρόπο και στην περίπτωση του $x-2$).



Εικόνα 22: Η Ομάδα 1 εργάζεται πρωτίστως αλγεβρικά – Δρ1, φ.ε.1

Οι ίδιες ομάδες (1η και 4η) που συλλογίστηκαν πρωτίστως αλγεβρικά στο προηγούμενο ερώτημα έκαναν το ίδιο, με επιτυχές αποτέλεσμα, και για την έκφραση x^2+2x (ερώτημα 1Αζ), παραγοντοποιώντας την σε $x\cdot(x+2)$ και στη συνέχεια κατασκευάζοντας ορθογώνιο διαστάσεων x και $x+2$. Πέντε ομάδες κατέληξαν σε σωστή γεωμετρική απόδοση, συνδέοντας κατάλληλα τα σχήματα που σχεδίασαν για τις εκφράσεις x^2 και $2x$, μία ομάδα (3η) δεν έδωσε απάντηση, ενώ δύο ομάδες (5η και 8η) δεν κατέληξαν σε σωστό αποτέλεσμα παρά τις σωστές αναπαραστάσεις των x^2 και $2x$, ξεχωριστά.

Οι ίδιες ομάδες (5η και 8η) δεν κατάφεραν να ολοκληρώσουν και το ερώτημα 1Αη (έκφραση $x\cdot\left(x+2\right)$). Όλες οι υπόλοιπες ομάδες απέδωσαν γεωμετρικά σωστά τη ζητούμενη έκφραση.

Παρακάτω καταγράφεται ο διάλογος μεταξύ των μελών της 4ης ομάδας, ο οποίος εμφανίζει την πορεία σκέψης των μαθητών προς το τελικό σωστό αποτέλεσμα για τα ερωτήματα 1Αστ και 1Αζ:

Μ1: «Να κάνουμε ένα τετράγωνο όπως πριν και να γράψουμε x στη μία πλευρά και $x-4$ στην άλλη;»

(Ο Μ1 θεώρησε το x^2-4 ίσο με $x\cdot\left(x-4\right)$, δηλαδή ως x^2-4x)

Μ2: «Να το δούμε λίγο στο πρόχειρο;» (Κατασκευάζουν ένα ορθογώνιο με πλευρές x και $x-4$)

Μ3: «Ναι, αλλά τότε θα ήταν το εμβαδόν ίσο με $x\cdot\left(x-4\right)=x^2-4x$. Δεν είναι ίδιο με αυτό που έχουμε.»

(Ο Μ3 προσεγγίζει αλγεβρικά το ερώτημα, εντοπίζοντας το λάθος)

Μ1: «Αν έτσι όπως είναι το τετράγωνο (δείχνει το x^2) βάλουμε από μέσα το 4;»

Μ3: «Μέσα;»

Μ1: «Ναι, να κάνουμε μια γραμμή που θα είναι 4.»

Μ2: «Τι γραμμή; Πώς;»

Οι μαθητές άφησαν εκείνη τη στιγμή το ερώτημα στ) περνώντας στο επόμενο (x^2+2x), καθώς τους φάνηκε σχεδόν ίδιο με αυτό που «ανακάλυψαν» επεξεργαζόμενοι λανθασμένα το x^2-4 *ως* $x\cdot\left(x-4\right)=x^2-4x$.

Οπότε σκέφτηκαν αμέσως ότι x^2+2x, ως $x\cdot\left(x+2\right)$, κατασκευάζοντας άμεσα και το σχετικό ορθογώνιο πλευράς x και $x+2$.

Επανερχόμενοι στο ερώτημα στ) ((x^2-4)) κατασκεύασαν τετράγωνο πλευράς $x-4$, με το μαθητή Μ3 που εφάρμοσε την επιμεριστική ιδιότητα προηγουμένως να πράττει το ίδιο διαπιστώνοντας ότι τότε το x^2-4 θα ισοδυναμούσε με

$\left(x-4\right)\cdot\left(x-4\right)=x^2-4x-4x+16=x^2-8x+16$ (ο σχετικός διάλογος των μαθητών ήταν παρόμοιος).

Ο ίδιος μαθητής, στη συνέχεια, αναφερόμενος στο 16 του αποτελέσματος, τόνισε ότι έπρεπε να πολλαπλασιάσουν έναν αριθμό με τον εαυτό του που θα δώσει 4. Έτσι, προέκυψε το 2^2 και το ότι $x^2-4=x^2-2^2$, οπότε άμεσα θυμήθηκε τη διαφορά τετραγώνων $x^2-2^2=\left(x-2\right)\cdot\left(x+2\right)$. Τελικά κατασκεύασαν ένα ορθογώνιο διαστάσεων $x-2$ και $x+2$.

Από τα παραπάνω είναι εμφανής η προσπάθεια του μαθητή Μ3 με μεγαλύτερη ευχέρεια στις διαδικασίες του αλγεβρικού λογισμού (π.χ. εκτέλεση πράξεων, εφαρμογή ταυτοτήτων και ιδιοτήτων) να προσεγγίσει, αρχικά τουλάχιστον, αλγεβρικά τα ερωτήματα και στη συνέχεια να παράξει το αντίστοιχο γεωμετρικό αποτέλεσμα. Επίσης, η αλγεβρική προσέγγιση είχε επιβεβαιωτικό, επαληθευτικό, αλλά και ανακαλυπτικό ρόλο στα ερωτήματα, ενώ η γεωμετρική εισαγωγικό κυρίως.

Β. Η δραστηριότητα 1Β ζητά τον εντοπισμό του αλγεβρικού και γεωμετρικού συσχετισμού μεταξύ μαθηματικών εκφράσεων.

Μόνο δύο ομάδες (1η, 4η) μπόρεσαν να εντοπίσουν την αλγεβρική σχέση μεταξύ των παραστάσεων $\left(x+2\right)$, $\left(x-2\right)$ και $\left(x^2-4\right)$. Άλλωστε, αυτή ήταν και η αρχική τους σκέψη για την ολοκλήρωση του ερωτήματος 1Αστ. Καμία ομάδα δεν μπόρεσε να ερμηνεύσει γεωμετρικά τις εκφράσεις $\left(x+2\right)\cdot\left(x-2\right)$ και $\left(x^2-4\right)$, αποκόπτοντας και επικολλώντας κατάλληλα ορθογώνια.

Πέντε ομάδες κατόρθωσαν να συνδέσουν αλγεβρικά και γεωμετρικά τις εκφράσεις x^2+2x και $x\cdot\left(x+2\right)$. Και οι πέντε ομάδες είχαν απαντήσει επιτυχώς στα αντίστοιχα ερωτήματα 1Αζ και 1Αστ. Να σημειωθεί ότι αυτές οι ομάδες εργάστηκαν, πρωτίστως, αλγεβρικά, είτε παραγοντοποιώντας την x^2+2x, είτε εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα στην $x\cdot\left(x+2\right)$ καταλήγοντας στη μεταξύ τους ισοδυναμία. Στη συνέχεια, διαπίστωσαν την ισοδυναμία των αντίστοιχων διαγραμμάτων. Χαρακτηριστικά, ένας μαθητής σχολίασε «εφόσον με επιμεριστική ιδιότητα καταλήγω στην ίδια παράσταση, δεν μπορεί γεωμετρικά να εκφράζει κάτι διαφορετικό».

Δραστηριότητα 2

Με τη δραστηριότητα 2 οι μαθητές εισέρχονται πλέον στην επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων (ελλιπούς μορφής) και στη διάκριση των «γεωμετρικών» και «αλγεβρικών» λύσεών τους, αφού προηγηθεί η γεωμετρική αναπαράσταση των δύο μελών τους.

Α. Όλες οι ομάδες αναπαράστησαν γεωμετρικά ορθά την εξίσωση $x^2 = 4$ (ερώτημα 2Αα), προσδιορίζοντας τη λύση της $x = 2$.

Σχετικά με την εξίσωση $3x^2 = 12$ (ερώτημα 2Αβ), τρεις ομάδες (1η, 2η, 3η) ανήγαγαν την επίλυσή της στην εξίσωση $x^2 = 4$, απλοποιώντας αρχικά τη δοσμένη εξίσωση. Όλες οι ομάδες βρήκαν τη λύση $x = 2$. Ακολουθεί ο σχετικός διάλογος των μελών της 2ης ομάδας:

Μ1: «Είναι $3 \cdot 4 = 12$, οπότε το x που είναι στο τετράγωνο… θα είναι $2 \cdot 2 = 4$ »

(Τα υπόλοιπα μέλη ζητούν από το μαθητή Μ1 να εκφράσει γραπτώς τη σκέψη του)

Μ2: «Δεν καταλαβαίνω τι είναι αυτό το 4»

Μ3: «Ούτε κι εγώ»

Μ1: «Ναι, νομίζω δεν είναι σωστό»

Μ3: «Μα το $3x^2$ το έχουμε κάνει στην προηγούμενη άσκηση» (δείχνει το ορθογώνιο διαστάσεων $3x$ και x, αποτελούμενο από τρία τετράγωνα πλευράς x.)

Μ2: «Άρα δηλαδή θέλουμε να έχει εμβαδόν 12;»

Μ1: «Τότε θα είναι το $x = 2$, γιατί κάθε τετράγωνο θα πρέπει να είναι 4»

Μ3: «Τότε, αυτό ήταν το 4 που είπες πριν;»

Μ1: «Νομίζω ναι»

Ο μαθητής Μ1, αρχικά, προσπαθεί να προσεγγίσει το ερώτημα αριθμητικά, χωρίς όμως να μπορεί (και ο ίδιος και τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας) να ερμηνεύσει σημεία του συλλογισμού του. Στη συνέχεια ο μαθητής Μ3 αντιλαμβάνεται ότι έχει κατασκευαστεί το πρώτο μέλος της εξίσωσης. Η παρατήρησή του οδηγεί τους μαθητές στη θετική λύση της εξίσωσης αλλά και στην ερμηνεία του αρχικού αριθμητικού συλλογισμού. Σε αυτό το ερώτημα η γεωμετρική αναπαράσταση είναι καθοριστική για την εύρεση της θετικής λύσης της εξίσωσης.

Για την εξίσωση $x^2 = 2x$ (ερώτημα 2Αγ) , έδωσαν απάντηση οκτώ ομάδες. Από αυτές η μία ομάδα (7η) δεν κατόρθωσε να αναπαραστήσει γεωμετρικά σωστά τα μέλη της, όπως και στα αντίστοιχα ερωτήματα της πρώτης δραστηριότητας. Άλλη μία ομάδα (5η) έδωσε σωστή γεωμετρική αναπαράσταση, αλλά λάθος λύση, καθώς θεωρήθηκε αδύνατη η εξίσωση. Οι υπόλοιπες έξι ομάδες αντιμετώπισαν επιτυχώς το ερώτημα. Παρακάτω παρατίθεται ο διάλογος μεταξύ των μελών της 10ης ομάδας (απάντησε στο ερώτημα):

Μ1: «Το x^2 είναι εύκολα ένα τετράγωνο πλευράς x, αλλά το $2x$ είναι ένα μήκος» (ο μαθητής εννοεί ένα ευθύγραμμο τμήμα αποτελούμενο από συνευθειακά ευθύγραμμα τμήματα με επιμέρους μήκη 2 και x, όπως το κατασκεύασαν στο ερώτημα Δρ1α).

Μ2: «Ναι, πώς γίνεται αυτό· ένα τετράγωνο να ισούται με μία γραμμή;»

Μ3: «Μήπως, δεν ξέρω αν είναι σωστό, αν ήταν κι αυτό τετράγωνο ή ορθογώνιο όπως και τα προηγούμενα, με πλευρές 2 και x;» (το σχεδιάζει στο πρόχειρο)

Μ1: «Τότε, θα ήταν το x σίγουρα 2 !»

Η ίδια ομάδα κατάφερε να λύσει σωστά αλγεβρικά την εξίσωση (στην παρακάτω Δρ2Γ) με παραγοντοποίηση και εφαρμογή της ιδιότητας μηδενικού γινομένου. Μάλιστα, στο τέλος της διαδικασίας ο μαθητής Μ3 αναρωτήθηκε πώς ερμηνεύεται η λύση $x = 0$ στο σχήμα, με τον μαθητή Μ1 να επισημαίνει πως τότε το σχήμα δεν θα υπήρχε! Ο μαθητής Μ3 κατέληξε στο εξής συμπέρασμα: «όταν το σχήμα υπάρχει, τότε το $x = 2$, ενώ όταν δεν υπάρχει, $x = 0$ ».

Η εξίσωση $x^2 + 4x = 0$ (ερώτημα 2Αδ) προβλημάτισε ιδιαίτερα τους μαθητές. Δύο ομάδες (7η, 8η) δεν έδωσαν απάντηση, ενώ πέντε ομάδες απέδωσαν γεωμετρικά το πρώτο μέλος κατασκευάζοντας ορθογώνιο διαστάσεων x και $x+4$, αδυνατώντας, όμως, να εντοπίσουν κάποια λύση. Δύο ομάδες (2η και 9η) κατέληξαν γεωμετρικά στη λύση $x = 0$, με τη μία ομάδα (2η) να νοηματοδοτεί τη λύση στην περίπτωση ανύπαρκτων σχημάτων, ενώ η άλλη ομάδα (9η) για τον ίδιο λόγο να την απορρίπτει. Μία ομάδα (4η) εργάστηκε καθαρά αλγεβρικά, προσδιορίζοντας επιτυχώς τις λύσεις της εξίσωσης, χωρίς όμως να τις ερμηνεύει γεωμετρικά.

Β. και Γ. Οκτώ ομάδες κατάφεραν να προσδιορίσουν αλγεβρικά και τις δύο λύσεις των εξισώσεων $x^2 = 4$ (ερώτημα 2Γα) και $3x^2 = 12$ (ερώτημα 2Γβ), ενώ οι άλλες δύο (6η και 9η) παρέμειναν στη μία λύση, $x = 2$, που βρήκαν προηγουμένως. Φάνηκε ότι η εύρεση μιας λύσης μέσω του διαγράμματος δε συνεπάγονταν αυτόματα και τον έλεγχο για εντοπισμό και δεύτερης, ακόμη και από μαθητές που γνώριζαν ότι ως δευτεροβάθμια θα έχει το πολύ δύο λύσεις.

Να σημειωθεί επίσης, ότι από τις παραπάνω οκτώ ομάδες που είχαν επιτυχές αποτέλεσμα οι τέσσερις χρησιμοποίησαν τη μέθοδο «δοκιμής και σφάλματος» για την εύρεση της δεύτερης λύσης. Γνωρίζοντας ότι ως δευτεροβάθμια εξίσωση πιθανώς να έχει και δεύτερη λύση, σκέφτονταν άμεσα την αντίθετη τιμή της πρώτης λύσης, επαληθεύοντάς την με αντικατάσταση.

Για την εξίσωση $x^2 = 2x$ (ερώτημα 2Γγ), τέσσερις ομάδες (1η, 2η, 4η, 10η) κατέληξαν και στις δύο λύσεις της, είτε με χρήση της μεθόδου «δοκιμής και σφάλματος», είτε με παραγοντοποίηση, τρεις ομάδες (3η, 6η, 7η) δεν εντόπισαν τη δεύτερη λύση, παρά μόνο τη $x = 2$ που βρήκαν γεωμετρικά, ενώ οι υπόλοιπες τρεις ομάδες δεν έδωσαν απάντηση.

Την εξίσωση $x^2 + 4x = 0$ (ερώτημα 2Γδ), έλυσαν αλγεβρικά τέσσερις ομάδες (1η, 2η, 4η, 10η) παραγοντοποιώντας το πρώτο μέλος και εφαρμόζοντας την ιδιότητα μηδενικού γινομένου. Ακόμη μία ομάδα (3η), αφού παραγοντοποίησε, στη συνέχεια εγκατέλειψε την προσπάθειά της. Οι υπόλοιπες πέντε ομάδες δεν έδωσαν απάντηση.

Τέσσερις ομάδες (1η, 2η, 4η, 10η) σχολίασαν τη διαφοροποίηση που παρατηρείται μεταξύ του πλήθους των «γεωμετρικών» και «αλγεβρικών» λύσεων των εξισώσεων, αναφέροντας πως «οι λύσεις δεν μπορούν να είναι αρνητικοί αριθμοί, καθώς εκφράζουν μήκη πλευρών».

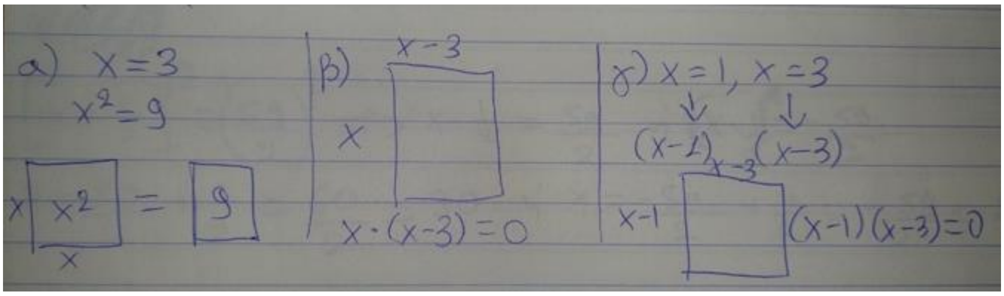
Δραστηριότητα 3

Η δραστηριότητα 3 αποσκοπούσε στην κατασκευή εξίσωσης με δοσμένες λύσεις και στη γεωμετρική τους αναπαράσταση.

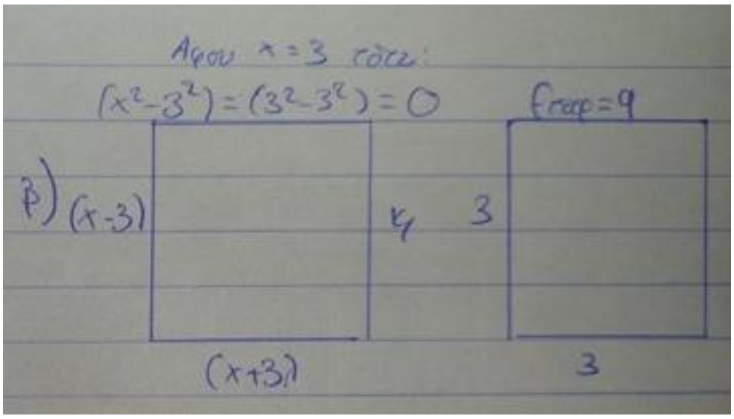
Για το ερώτημα 3Αα, επτά από τις δέκα ομάδες κατασκεύασαν την εξίσωση $x^2 = 9$, παραθέτοντας τα σχετικά τετράγωνα πλευράς x και 3, αντίστοιχα.

Οι τέσσερις ομάδες (1η, 2η, 4η, 10η) που κατόρθωσαν να λύσουν αλγεβρικά με παραγοντοποίηση την εξίσωση $x^2 + 4x = 0$ (ερώτημα 2Γδ) κατάφεραν να κατασκευάσουν, τελικά, ανάλογες εξισώσεις, την $x \cdot (x-3) = 0$ με λύσεις $x = 0$, $x = 3$ (ερώτημα 3Αβ) και την $(x-1) \cdot (x-3) = 0$ με λύσεις $x = 1$, $x = 3$ (ερώτημα 3Αγ), διαμορφώνοντας δευτεροβάθμιες εξισώσεις ως γινόμενα παραγόντων και αναπαριστώντας τες ως ορθογώνια

(Εικόνα 23). Να σημειωθεί πως τα μέλη των ομάδων χρειάστηκαν αρκετό χρόνο για την παρατήρηση του συγκεκριμένου συσχετισμού. Επίσης, σε μία ομάδα ($3^η$) έγινε η προσπάθεια κατασκευής εξισώσεων με δοκιμή των δοσμένων λύσεων σε συγκεκριμένες εξισώσεις, χωρίς επιτυχή κατάληξη. Μάλιστα, για τις λύσεις $x=0$, $x=3$ (ερώτημα 3Αβ) δόθηκε η απάντηση «$x^2-9=0$, διότι το 3 την επαληθεύει», χωρίς να γίνει κάποια αναφορά στη λύση $x=0$ *(Εικόνα 24).* Από τις συνομιλίες των μελών της ομάδας, αλλά και των υπολοίπων που δεν έδωσαν κάποια απάντηση, ήταν εμφανές πως οι περισσότεροι μαθητές αντιλαμβάνονταν τις διακριτές λύσεις ως λύσεις διαφορετικών εξισώσεων και τη διπλή παρουσία της μεταβλητής x, ως την ύπαρξή δύο διαφορετικών μεταβλητών (όπως σε Vaiyavutjamai et al., 2005· Didis et al., 2011).



Εικόνα 23: Η Ομάδα 2 εργάζεται σωστά για την κατασκευή των εξισώσεων – Δρ3, φ.ε.1



Εικόνα 24: Η Ομάδα 3 λαμβάνει υπόψιν της τη μία λύση (x=3) – Δρ3, φ.ε.1

Πίνακας 6: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα φύλλου εργασίας 1 (Σύνολο ομάδων: 10)

Ερευνητικό ερώτημα	**Επιμέρους ερωτήματα**		**Σωστές Απαντήσεις (αριθμός ομάδων)**
		αx	8

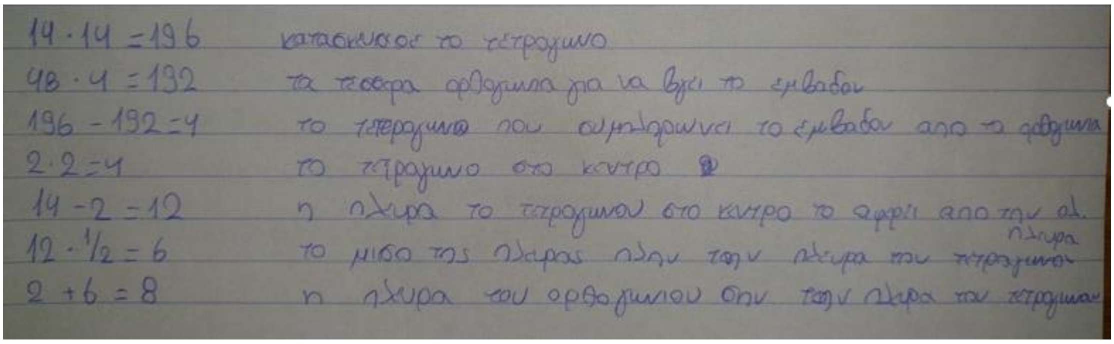
(1ο) Μετασχηματισμός μαθηματικών εκφράσεων	Μετασχηματισμός εκφράσεων από αλγεβρική σε γεωμετρική μορφή (Δρ1)	$x+\gamma$	9
		$x-\gamma$	9
		x^2	10
		αx^2	7
		$x^2-\gamma$	7
		$x^2+\beta x$	7
		$x\cdot(x+\gamma)$	8
	Γεωμετρική αναπαράσταση εξίσωσης (Δρ2)	$x^2=\beta$	10
		$\alpha x^2=\beta$	10
		$\alpha x^2=\beta x$	6
		$\alpha x^2+\beta x=0$	7
(2ο) Επίλυση εξίσωσης με τη βοήθεια διαγραμμάτων	Επίλυση εξίσωσης (Δρ2)	$x^2=\beta$	8
		$\alpha x^2=\beta$	8
		$\alpha x^2=\beta x$	4
		$\alpha x^2+\beta x=0$	4
(1ο) Μετασχηματισμός μαθηματικών εκφράσεων	Κατασκευή εξίσωσης (Δρ3)	$x^2=\beta$	7
		$(x+\beta)\cdot(x+\gamma)=0$	4
	Μετασχηματισμός εκφράσεων από αλγεβρική σε γεωμετρική μορφή (Δρ3)	$x^2=\beta$	7
		$(x+\beta)\cdot(x+\gamma)=0$	4

7.2.2 Φύλλο εργασίας 2 (4η Φάση)

Δραστηριότητα 1

Α. Οι ομάδες εργασίας με το φύλλο εργασίας 2 εισάγονται στη στοιχειώδη-απλοϊκή (κατά Høyrup) Γεωμετρία των Βαβυλωνίων. Στο ερώτημα Α τους ζητείται η επίλυση του προβλήματος BM 34568 όπου δίνονται η ημιπερίμετρος και το εμβαδόν ενός ορθογωνίου για την εύρεση των διαστάσεών του. Μόλις δύο ομάδες ($1^η$ και $3^η$) κατόρθωσαν να λύσουν το πρόβλημα με δοκιμή κατάλληλων τιμών, αφού πρώτα κατασκεύασαν το σύστημα εξισώσεων $x+y=14$, $x \cdot y=48$ και πρόχειρο βοηθητικό διάγραμμα, δηλαδή περνώντας από τη λεκτική στην αλγεβρική, αλλά και γεωμετρική αναπαράσταση του προβλήματος. Άλλη μία ομάδα ($4^η$) κατασκεύασε το σύστημα εξισώσεων, χωρίς όμως να καταλήξει σε κάποια λύση. Υπήρξαν προσπάθειες ομάδων να επιλύσουν γεωμετρικά το πρόβλημα με την κατασκευή σχήματος, χωρίς επιτυχή κατάληξη.

Β. Στο ερώτημα Β, με τη βοήθεια των δοσμένων βημάτων αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος και ένα σχετικό διάγραμμα, οι ομάδες θα έπρεπε να ερμηνεύσουν γεωμετρικά τα βήματα αριθμητικής επίλυσης. Τρεις ομάδες ($1^η$, $2^η$, $7^η$) κατόρθωσαν να απαντήσουν ορθά *(Εικόνα 25).* Οι υπόλοιπες δυσκολεύτηκαν ιδιαίτερα να καταλήξουν σε κάποιο συμπέρασμα συσχετισμού του αριθμητικού και γεωμετρικού συλλογισμού. Μάλιστα, πολλοί μαθητές απόρησαν για τη δυσκολία, την πολυπλοκότητα και εν γένει λειτουργικότητα της συγκεκριμένης (πιθανής) γεωμετρικής βαβυλωνιακής μεθόδου, ιδιαίτερα στην περίπτωση προβλημάτων «με δυσκολότερους αριθμούς», όπως χαρακτηριστικά ανέφεραν.

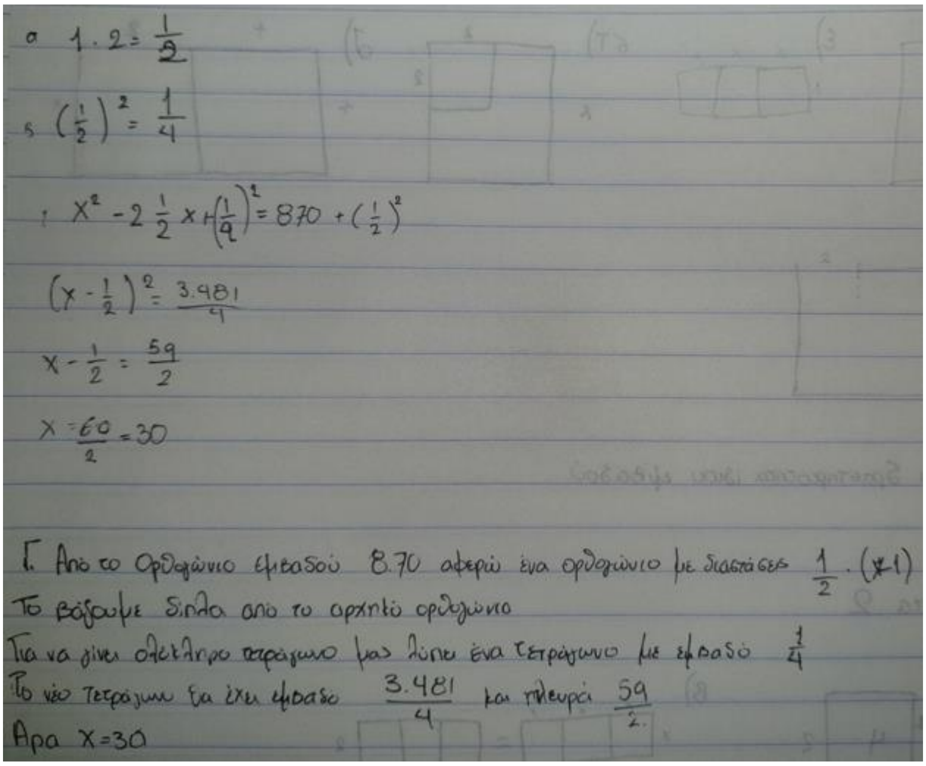


Εικόνα 25: Εργασία Ομάδας 2 – Δρ1Β, φ.ε.2

Δραστηριότητα 2

Α. και Β. Στο ερώτημα Α της δραστηριότητας 2, ζητούνταν από τους μαθητές η αλγεβρική αναπαράσταση ενός λεκτικού προβλήματος (BM 13901) με κατασκευή εξίσωσης. Οι ομάδες ανταποκρίθηκαν εξαιρετικά, καθώς και οι δέκα ομάδες κατέληξαν στη ζητούμενη εξίσωση $x^2 - x = 870$. Εντύπωση προκαλεί και η επίδοση των μαθητών στην μετάβαση από τη δοσμένη αριθμητική στη συμβολική-αλγεβρική αναπαράσταση των βημάτων επίλυσης του προβλήματος, καθώς επίσης όλες οι ομάδες κατόρθωσαν να τα αποδώσουν σωστά, αναγνωρίζοντας το τετράγωνο διαφοράς που εμφανίζονταν και επιλύοντας την απλή, έστω, κλασματική πρωτοβάθμια εξίσωση που προέκυπτε στη συνέχεια *(Εικόνα 26).*

Γ. Στο ερώτημα Β, οι ομάδες θα έπρεπε να μεταβούν από τις μορφές αναπαράστασης που προηγήθηκαν στην αντίστοιχη γεωμετρική, με τη βοήθεια δύο διαγραμμάτων. Επτά από τις δέκα ομάδες διέκριναν τους αλγεβρικούς-αριθμητικούς και γεωμετρικούς συσχετισμούς περιγράφοντας τη διαδικασία γεωμετρικής επίλυσης *(Εικόνα 26).* Στις υπόλοιπες τρεις ομάδες ($7^η$, $9^η$, $10^η$), υπήρξε η αντιστοίχιση του πρώτου διαγράμματος με την εξίσωση που διαμόρφωσαν στο ερώτημα Α, αλλά όχι και οι ενέργειες στο δεύτερο διάγραμμα με τα αντίστοιχα βήματα αλγεβρικής επίλυσης.



Εικόνα 26: Εργασία Ομάδας 6 – Δρ2Γ, φ.ε.2

Δ. Τέσσερις ομάδες ($1^η$, $5^η$, $8^η$, $10^η$) κατάφεραν να εντοπίσουν τη δεύτερη «αλγεβρική» αρνητική λύση του προβλήματος, παρατηρώντας την εξίσωση $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3.481}{4}$ που διαμόρφωσαν στο ερώτημα Β. Παρατηρήθηκε ότι ορισμένες ομάδες δοκίμασαν την αντίθετη τιμή της πρώτης λύσης που βρήκαν ($x=-30$). Αντικαθιστώντας, όμως, στην αρχική εξίσωση $x^2 - x = 870$ που είχαν κατασκευάσει, την απέρριψαν.

Πίνακας 7: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα φύλλου εργασίας 2 (Σύνολο ομάδων: 10)

Ερευνητικό ερώτημα	**Επιμέρους ερωτήματα**	**Σωστές Απαντήσεις (αριθμός ομάδων)**
(2°) Επίλυση εξίσωσης με τη βοήθεια διαγραμμάτων	Επίλυση προβλήματος σε λεκτική μορφή (Δρ1Α)	2
(1°) Μετασχηματισμός μαθηματικών εκφράσεων	Μετασχηματισμός λεκτικής-αριθμητικής λύσης σε γεωμετρική (Δρ1Β)	3
	Κατασκευή εξίσωσης από λεκτική διατύπωση προβλήματος (Δρ2Α)	10
	Μετασχηματισμός λεκτικής λύσης σε αριθμητική-αλγεβρική (Δρ2Β)	10
	Σύνδεση γεωμετρικής λύσης με αντίστοιχη αλγεβρική (Δρ2Γ)	7
(2°) Επίλυση εξίσωσης με τη βοήθεια διαγραμμάτων	Επίλυση εξίσωσης (βαβυλωνιακή μέθοδος) (Δρ2Β-Δ)	4

7.2.3 Φύλλο εργασίας 3 (5η Φάση)

Δραστηριότητα 1

Στο φύλλο εργασίας 3, οι μαθητές συναντούν την αλγεβρική και γεωμετρική εκδοχή της μεθόδου συμπλήρωσης τετραγώνου του Al-Khwarizmi, αφού πρώτα συγκρίνουν τον τρόπο αναπαράστασης και τη λεκτική διατύπωση των λύσεων βαβυλωνιακών και αραβικών (Al-Khwarizmi) προβλημάτων.

Α. Σχεδόν όλες οι ομάδες, εκτός από μία (6η), κατόρθωσαν με σχετική ευκολία να αναπαραστήσουν με μία εξίσωση κάθε ένα από τα προβλήματα που τους δίνονταν, κατασκευάζοντας επιτυχώς τις εξισώσεις $x^2 + \frac{4}{3}x = \frac{11}{12}$ για το πρώτο και $x^2 + 10x = 39$ για το δεύτερο. Η 6η ομάδα για το πρώτο πρόβλημα έδωσε την εξίσωση $x^2 + 3x : 4 = \frac{11}{12}$.

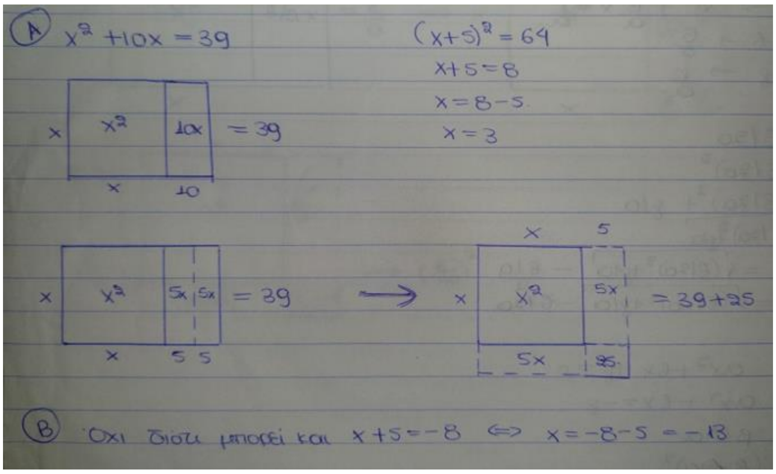
Β. Συγκρίνοντας τις διατυπώσεις επίλυσης του βαβυλωνιακού και αραβικού προβλήματος όλες οι ομάδες συνήγαγαν το συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει κάποια διαφορά, διότι και στις δύο δίνονται «συγκεκριμένες αριθμητικές οδηγίες επίλυσης», όπως ανέφεραν.

Γ. Στο ερώτημα Γ ζητούνταν ο μετασχηματισμός της δοσμένης λεκτικής μορφής της διαδικασίας επίλυσης στην αντίστοιχη αλγεβρική. Έξι ομάδες κατόρθωσαν να τη μετασχηματίσουν ορθά, τρεις ομάδες (4η, 5η, 6η) προσπάθησαν, αρχικά, να διατυπώσουν με αριθμητικό τρόπο τη διαδικασία επίλυσης, χωρίς όμως να καταλήξουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα και μία ομάδα (1η) δεν έδωσε απάντηση. Να σημειώσουμε ότι όλες οι ομάδες είχαν κατασκευάσει την εξίσωση $x^2 - x = 870$ στο φύλλο εργασίας 2 (δραστηριότητα 2) και είχαν καταφέρει να μετασχηματίσουν την αριθμητική-λεκτική μορφή αναπαράστασης του βαβυλωνιακού προβλήματος στην αντίστοιχη αλγεβρική. Οι μαθητές τόνισαν ότι η μορφή διατύπωσης του προβλήματος του Al-Khwarizmi, παρά τις ομοιότητές της, είναι δυσκολότερη από το αντίστοιχο βαβυλωνιακό πρόβλημα της δραστηριότητας 2, καθώς η οριζόντια και όχι η κατακόρυφη παράθεση των βημάτων επίλυσης του προβλήματος είναι δύσχρηστη και ότι η μαθηματική γλώσσα που χρησιμοποιήθηκε πιο απαιτητική (όπως οι φράσεις «υποδιπλασιάζεις το πλήθος…», «αφαιρείς το μισό του πλήθους των πραγμάτων…»).

Δραστηριότητα 2

Α. Στο ερώτημα Α όλες οι ομάδες, έχοντας πλέον και τη γνώση της βαβυλωνιακής μεθόδου που γνώρισαν στο φύλλο εργασίας 2 ανταποκρίθηκαν εξαιρετικά. Μάλιστα, η διαδικασία τους φάνηκε ευκολότερη, καθώς οι μετασχηματισμοί του διαγράμματος γίνονταν «εξωτερικά του αρχικού τετραγώνου και όχι εσωτερικά», κάτι που τους δυσκόλεψε στη διάκριση των επιφανειών και των εμβαδών τους στην περίπτωση του σχηματισμού του τετραγώνου διαφοράς της δραστηριότητας 2Γ, στο φύλλο εργασίας 2. Επίσης, να τονίσουμε ότι και σε αυτό το ερώτημα, αρχικά, κάποιες ομάδες συνάντησαν προβλήματα στη γεωμετρική απόδοση της φράσης «προσθέτει δύο ορθογώνια καθένα από τα οποία έχει πλάτος 5 (…) (εννοεί στις δύο κάθετες πλευρές του τετραγώνου)», ως προς το σημείο στο οποίο έπρεπε να τοποθετηθεί το κάθε ορθογώνιο. Τελικά, όμως, η αναγνώριση της στόχευσης του λύτη για τη δημιουργία ενός τέλειου τετραγώνου τούς οδήγησε στο σωστό κατασκευαστικό αποτέλεσμα. Επίσης, να σημειώσουμε ότι σε καμία ομάδα δεν παρατηρήθηκε η χρήση αποκλειστικά και μόνο αριθμητικών «ετικετών» στα μήκη και τα εμβαδά που εμφανίζονταν στα διαγράμματα, αλλά οι κατάλληλες κάθε φορά αλγεβρικές εκφράσεις συνόδευαν κατά κανόνα τα διαγράμματα. Ακόμη, υπήρξαν μαθητές που διερωτήθηκαν για το αν η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για περιπτώσεις όπου ο συντελεστής του x είναι αριθμός του οποίου το μισό δεν είναι φυσικός (π.χ. 7) ή για περιπτώσεις όπου το x^2 έχει συντελεστή διάφορο της μονάδας.

Β. Με την επίλυση παρόμοιου προβλήματος να έχει προηγηθεί στο φύλλο εργασίας 2, όλες οι ομάδες εντόπισαν την εξίσωση $(x+5)^2 = 64$ που διαμορφώνονταν κατά τη συμπλήρωση τετραγώνου, προσδιορίζοντας με επιτυχία και τις δύο λύσεις του προβλήματος *(Εικόνα 27).*



Εικόνα 27: Εργασία Ομάδας 1 – Δρ2Β, φ.ε.3

Πίνακας 8: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα φύλλου εργασίας 3 (Σύνολο ομάδων: 10)

Ερευνητικό ερώτημα	**Επιμέρους ερωτήματα**	**Σωστές Απαντήσεις (αριθμός ομάδων)**
	Κατασκευή εξίσωσης από λεκτική διατύπωση προβλήματος (Δρ1Α)	9
	Μετασχηματισμός λεκτικής λύσης σε αλγεβρική (Δρ1Γ)	6

(1ο) **Μετασχηματισμός μαθηματικών εκφράσεων**		
	Μετασχηματισμός λεκτικής λύσης σε γεωμετρική (Δρ2Α)	10
	Σύνδεση γεωμετρικής λύσης με αντίστοιχη αλγεβρική (Δρ2Α)	10
(2ο) **Επίλυση εξίσωσης με τη βοήθεια διαγραμμάτων**	Επίλυση εξίσωσης (μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου Al-Khwarizmi) (Δρ2Β)	10

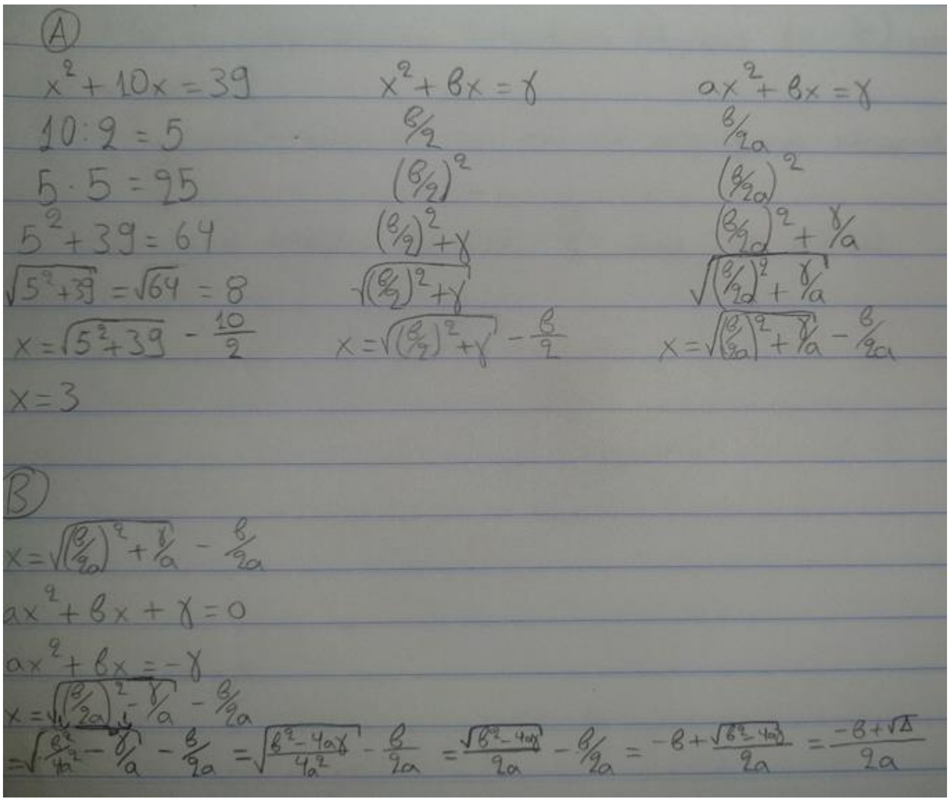
7.2.4 Φύλλο εργασίας 4 (6η Φάση)

Δραστηριότητα 1

Στο φύλλο εργασίας 4, ζητείται η γενίκευση της διαδικασίας επίλυσης του Al-Khwarizmi σε αφηρημένη αλγεβρική γλώσσα, με την εξαγωγή των λύσεων, κατά σειρά, των δευτεροβάθμιων εξισώσεων μορφής $x^2 + \beta x = \gamma$, $\alpha x^2 + \beta x = \gamma$ (ερώτημα Α) και $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (ερώτημα Β). Επίσης, ως τελευταίο ερώτημα, ζητείται από τους μαθητές η γεωμετρική αναπαράσταση της διαδικασίας επίλυσης της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (ερώτημα Γ).

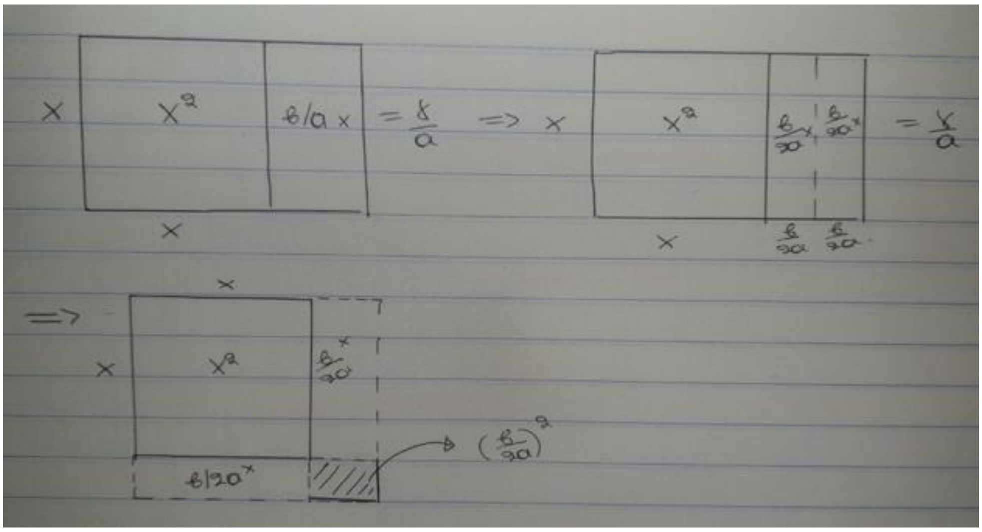
Α. Όλες οι ομάδες κατόρθωσαν να γενικεύσουν την αλγεβρική διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης $x^2 + 10x = 39$ (φύλλο εργασίας 3) στη μορφή $x^2 + \beta x = \gamma$ αντικαθιστώντας σε κάθε βήμα επίλυσης όπου 10 το β και όπου 39 το γ. Για τη μορφή $\alpha x^2 + \beta x = \gamma$ έξι ομάδες (1η, 3η, 4η, 5η, 8η, 9η) εργάστηκαν με παρόμοιο τρόπο έχοντας ως σημεία αναφοράς τα βήματα επίλυσης της $x^2 + \beta x = \gamma$ και αντικαθιστώντας όπου β το β/α και όπου γ το γ/α. Οι υπόλοιπες τέσσερις ομάδες, ενώ εντόπισαν τη διαφοροποίηση της μορφής ως προς τον συντελεστή του x^2 και διαίρεσαν κάθε όρο της εξίσωσης με το α, δεν προχώρησαν στον προσδιορισμό της λύσης.

Β. Και οι έξι ομάδες που ολοκλήρωσαν επιτυχώς το ερώτημα Α, τα κατάφεραν και στο ερώτημα Β, βρίσκοντας τη θετική λύση της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$. Μάλιστα, σε δύο από αυτές τις ομάδες (1η, 8η) η εμφάνιση της έκφρασης $\beta^2-4\alpha\gamma$ οδήγησε στην άμεση σύνδεση με τη διακρίνουσα *(Εικόνα 28).* Από τις υπόλοιπες ομάδες οι τρεις (2η, 6η, 10η) εντόπισαν τη διαφοροποίηση της $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με την $\alpha x^2+\beta x=\gamma$, παρατηρώντας πως αρκεί η αντικατάσταση του $-\gamma$ με $-\gamma$ στη λύση της δεύτερης, αλλά δεν προχώρησαν περαιτέρω. Η ομάδα 7 δεν έδωσε κάποια απάντηση.



Εικόνα 28: Εργασία Ομάδας 8 – Δρ1Β, φ.ε.4

Γ. Στο ερώτημα Γ κατάφερε να απαντήσει μόνο μία ομάδα (1η) από τις δέκα *(Εικόνα 29).* Δύο ομάδες (3η και 4η) κατασκεύασαν διάγραμμα για τη γεωμετρική αναπαράσταση της εξίσωσης $x^2+\frac{\beta}{\alpha}x=\frac{\gamma}{\alpha}$ και δεν συνέχισαν. Οι υπόλοιπες ομάδες δεν έδωσαν κάποια απάντηση, αδυνατώντας να συνδέσουν τα βήματα που εκτέλεσαν για τις εξισώσεις με γνωστούς αριθμητικούς συντελεστές.



Εικόνα 29: Εργασία Ομάδας 1 – Δρ1Γ, φ.ε.4

Πίνακας 9: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα φύλλου εργασίας 4 (Σύνολο ομάδων: 10)

Ερευνητικό ερώτημα	**Επιμέρους ερωτήματα**	**Σωστές Απαντήσεις (αριθμός ομάδων)**
(3ο) Απόδειξη και γεωμετρική ερμηνεία γενικών λύσεων δευτεροβάθμιων εξισώσεων πλήρους μορφής	Εύρεση γενικής (θετικής) λύσης της $x^2+\beta x=\gamma$ (Δρ1Α)	10
	Εύρεση γενικής (θετικής) λύσης της $\alpha x^2+\beta x=\gamma$ (Δρ1Α)	6
	Εύρεση γενικής (θετικής) λύσης της $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (Δρ1Β)	6
	Γεωμετρική αναπαράσταση διαδικασίας εύρεσης (θετικής) λύσης της $\alpha x^2+\beta x=\gamma$ (Δρ1Γ)	1

Τα παραπάνω κάνουν εμφανή τη διαφορά στην επίδοση των μαθητών σε αφηρημένο μαθηματικό πλαίσιο. Οι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες κατά τον εντοπισμό των διαφοροποιήσεων μεταξύ των εξισώσεων, κατά τις σχετικές αντικαταστάσεις και τις μετέπειτα πράξεις και απλοποιήσεις. Ειδικότερα, η ύπαρξη αφηρημένων και όχι συγκεκριμένων αριθμητικών δεδομένων για τους συντελεστές των εξισώσεων προβλημάτισε ιδιαίτερα (εννοιολογικά και διαδικαστικά) κατά τη γεωμετρική τους αναπαράσταση.

7.3 Κριτήριο Αξιολόγησης (7η Φάση)

Δραστηριότητα 1

Για την εξίσωση $x^2=9$, οι περισσότεροι μαθητές (29) έδωσαν τη γεωμετρική της αναπαράσταση, βρίσκοντας μόνο τη θετική της λύση. Τέσσερις (4) μαθητές έδωσαν και τις δύο λύσεις της εξίσωσης, αφού την απέδωσαν γεωμετρικά, ενώ δύο (2) μαθητές εργάστηκαν επιτυχώς αποκλειστικά αλγεβρικά, περνώντας το 9 στο πρώτο μέλος, παραγοντοποιώντας και εφαρμόζοντας την ιδιότητα μηδενικού γινομένου. Οκτώ (8) μαθητές δεν απάντησαν.

Η πλειονότητα των μαθητών (18) απέδωσε γεωμετρικά την εξίσωση $2x^2=8$, βρίσκοντας και πάλι τη μία θετική της λύση. Τέσσερις (4) μαθητές αναπαράστησαν γεωμετρικά την εξίσωση, δίνοντας τις δύο λύσεις της εξίσωσης κατόπιν απλών αλγεβρικών χειρισμών. Οι ίδιοι δύο (2) μαθητές εργάστηκαν, όπως και στην προηγούμενη εξίσωση, μόνο αλγεβρικά και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία επίλυσης, αφού διαίρεσαν αρχικά με το 2 τους όρους της εξίσωσης. Κατέληξαν και στις δύο λύσεις της εξίσωσης. Τρεις (3) μαθητές σχεδίασαν το κατάλληλο διάγραμμα αναπαράστασης της εξίσωσης, καταλήγοντας, όμως, σε λανθασμένο αποτέλεσμα. Δεκαέξι (16) μαθητές δεν έδωσαν απάντηση. Να σημειώσουμε ότι δέκα (10) μαθητές ανήγαγαν άμεσα την επίλυση της εξίσωσης $2x^2=8$ στην επίλυση της $x^2=4$, αναπαριστώντας γεωμετρικά τη δεύτερη και όχι την πρώτη.

Δέκα (10) μαθητές μετασχημάτισαν ορθά την εξίσωση $x^2=3x$ στη γεωμετρική της μορφή αναπαράστασης, καταλήγοντας μόνο στη λύση $x=3$. Συνολικά εννέα (9) μαθητές κατάφεραν να καταλήξουν και στις δύο λύσεις τις εξισώσεις, οι τρεις (3) εργαζόμενοι αποκλειστικά γεωμετρικά, ενώ οι υπόλοιποι και αλγεβρικά, είτε με παραγοντοποίηση είτε με τη μέθοδο «δοκιμής και σφάλματος». Τέσσερις (4) μαθητές έκαναν με επιτυχία τη γεωμετρικά αναπαράσταση, χωρίς να καταλήξουν σε αποτέλεσμα. Είκοσι (20) μαθητές δεν έδωσαν κάποια απάντηση.

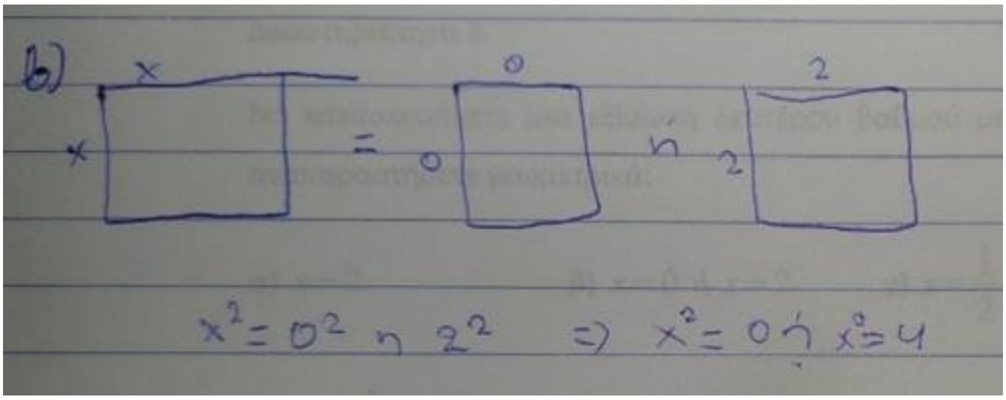
Δραστηριότητα 2

Για το πρώτο ερώτημα και την κατασκευή δευτεροβάθμιας εξίσωσης με λύση $x=2$ (όχι αποκλειστικά και μοναδική) 21 μαθητές έδωσαν την απάντηση $x^2=4$, σχεδιάζοντας και το κατάλληλο διάγραμμα. Οι υπόλοιποι μαθητές δεν απάντησαν στο ερώτημα.

Δεκαέξι (16) μαθητές στο δεύτερο ερώτημα κατασκεύασαν την εξίσωση $x \cdot (x-2)=0$, σχεδιάζοντας ορθογώνιο διαστάσεων x και $(x-2)$. Είκοσι τέσσερις (24) μαθητές δεν έδωσαν κάποια απάντηση.

Για την περίπτωση των λύσεων $x=\frac{1}{2}$ ή $x=1$ (ερώτημα γ) δώδεκα (12) μαθητές κατασκεύασαν την εξίσωση $\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-1)=0$ σχεδιάζοντας το κατάλληλο ορθογώνιο. Και οι 12 μαθητές είχαν απαντήσει σωστά στο προηγούμενο ερώτημα. Είκοσι οκτώ (28) μαθητές δεν απάντησαν.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τρεις περιπτώσεις μαθητών που αντιμετώπισαν το δεύτερο και τρίτο ερώτημα ξεχωριστά για κάθε λύση, κατασκευάζοντας δύο αυτοτελείς εξισώσεις, π.χ. $x^2=0$ (για τη λύση $x=0$) και $x^2=4$ (για τη λύση $x=2$) και παραθέτοντας τα σχετικά διαγράμματα (*Εικόνα 29*).



Εικόνα 30: Κατασκευή διαφορετικών εξισώσεων για κάθε λύση από μαθητή

Δραστηριότητα 3

Το πρώτο σκέλος της δραστηριότητας 3 ήταν ο προσδιορισμός της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $x^2-2x=24$ που αναπαρίσταται γεωμετρικά στο πρώτο διάγραμμα. Απαντήθηκε επιτυχώς από δεκαοκτώ (18) μαθητές. Από αυτούς οι δέκα (10) κατόρθωσαν και να την επιλύσουν (δεύτερο σκέλος) βρίσκοντας και τις δύο λύσεις, οι εννέα (9) συμπληρώνοντας το τετράγωνο και ένας χρησιμοποιώντας τον τετραγωνικό τύπο. Ακόμη τρεις (3) μαθητές συμπλήρωσαν το τετράγωνο, καταλήγοντας όμως στη μία θετική λύση της εξίσωσης. Οι υπόλοιποι τριάντα (30) μαθητές δεν μπόρεσαν να δώσουν απάντηση.

Δραστηριότητα 4

Ως προς την επίλυση της εξίσωσης $x^2+4x=5$ με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου του Al-Khwarizmi, δεκατρείς (13) μαθητές απάντησαν ολοκληρωμένα, παραθέτοντας και τα σχετικά διαγράμματα και τις δύο λύσεις της εξίσωσης. Ακόμη πέντε (5) μαθητές κατέληξαν στη μία θετική λύση της εξίσωσης. Να σημειωθεί ότι επιπλέον εννέα (9) μαθητές, ενώ σχεδίασαν σωστά διαγράμματα επίλυσης, δεν έκαναν τις αντίστοιχες αλγεβρικές ερμηνείες, μη καταλήγοντας στις λύσεις της εξίσωσης. Δεκαέξι (16) μαθητές δεν απάντησαν στο ερώτημα.

Την εξίσωση $2x^2+10x=28$ κατάφεραν να λύσουν μόνο τρεις (3) μαθητές. Τέσσερις (4) μαθητές προσπάθησαν να συμπληρώσουν το τετράγωνο αλγεβρικά χωρίς τη βοήθεια κάποιου διαγράμματος. Δύο εξ αυτών δεν διαίρεσαν με το 2 κάθε όρο της εξίσωσης, ενώ οι άλλοι δύο ταύτισαν την έκφραση x^2+5x+5^2 με την $\left(x+5\right)^2$ καταλήγοντας σε λανθασμένες λύσεις. Οι υπόλοιποι τριάντα (30) μαθητές δεν απάντησαν στο ερώτημα.

Δραστηριότητα 5

Δεκατρείς (13) μαθητές κατάφεραν να λύσουν την εξίσωση $x^2+5x+4=0$ χρησιμοποιώντας τον τύπο, με τους περισσότερους να κάνουν και το σχετικό σχόλιο για την ανυπαρξία νοήματος της γεωμετρικής επίλυσης λόγω των δύο αρνητικών λύσεων. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι τρεις (3) μαθητές που δεν κατάφεραν να λύσουν την εξίσωση διέκριναν αυτή την αδυναμία νοηματοδότησης, καθώς όπως κατέγραψαν «δεν μπορούν αθροιζόμενα εμβαδά σχημάτων να δώσουν μηδέν», «όταν αθροίζω θετικούς αριθμούς γεωμετρικά δε μπορεί να βγει μηδέν», «υπάρχουν μόνο προσθέσεις κι έτσι δε γίνεται να βγει μηδέν».

Πίνακας 10: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα κριτηρίου αξιολόγησης (Σύνολο μαθητών: 43)

Ερευνητικό ερώτημα	**Επιμέρους ερωτήματα**		**Σωστές Απαντήσεις (αριθμός μαθητών)**
(1ο) Μετασχηματισμός	Γεωμετρική αναπαράσταση εξίσωσης (Δρ1)	$x^2=\beta$	29
		$\alpha x^2=\beta$	18
		$\alpha x^2=\beta x$	10

μαθηματικών εκφράσεων			
(2^{ο}) Επίλυση εξίσωσης με τη βοήθεια διαγραμμάτων	Επίλυση εξίσωσης (Δρ1)	$x^2=\beta$	6
		$\alpha x^2=\beta$	4
		$\alpha x^2=\beta x$	9
(1^{ο}) Μετασχηματισμός μαθηματικών εκφράσεων	Κατασκευή εξίσωσης (Δρ2)	$x^2=\beta$	21
		$x\cdot(x+\gamma)=0$	16
		$(x+\beta)\cdot(x+\gamma)=0$	12
	Μετασχηματισμός εκφράσεων από αλγεβρική σε γεωμετρική μορφή (Δρ2)	$x^2=\beta$	21
		$x\cdot(x+\gamma)=0$	16
		$(x+\beta)\cdot(x+\gamma)=0$	12
	Μετασχηματισμός εξίσωσης από γεωμετρική σε αλγεβρική μορφή (Δρ3)		18
(2^{ο}) Επίλυση εξίσωσης με τη βοήθεια διαγραμμάτων	Επίλυση εξίσωσης (βαβυλωνιακή μέθοδος) (Δρ3)		10
	Επίλυση εξίσωσης (μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου Al-Khwarizmi) (Δρ4)	$x^2+\beta x=\gamma$	11
		$\alpha x^2+\beta x=\gamma$	3
	Επίλυση εξίσωσης με τετραγωνικό τύπο (Δρ5)		13

7.4 Αποτελέσματα κατά τη σύγκριση του διαγνωστικού τεστ και του κριτηρίου αξιολόγησης

Οι διαπιστώσεις κατά την εργασία των μαθητών σε ομάδες (φύλλα εργασίας) εμφανίστηκαν και κατά την ατομική τους εργασία (κριτήριο αξιολόγησης). Χαρακτηριστικότερη όλων, η προσκόλληση των μαθητών στη μία θετική λύση (στην περίπτωση ύπαρξης και αρνητικής), παρά την ορθή γεωμετρική αναπαράσταση της αντίστοιχης εξίσωσης. Μάλιστα, περισσότεροι μαθητές έλυσαν την εξίσωση με μία θετική λύση και μία το μηδέν, σημείο που ισχυροποιεί τη διαπίστωση (από τα φύλλα εργασίας) ότι αρκετοί μαθητές παρέμειναν στη λύση που μπορούσαν να νοηματοδοτήσουν γεωμετρικά, συνδυαστικά με την εννοιολογική εμπλοκή των πρωτοβάθμιων εξισώσεων (χαρακτηριστικά, δεν αναζητούσαν, έστω, τη δεύτερη λύση). Άλλωστε, η επίλυση προβλήματος που περιέχει σχήματα (τετράγωνα, ορθογώνια) εκ των πραγμάτων θα παρουσιαστεί στους μαθητές ως πρόβλημα υπολογισμού εμβαδών, με αποτέλεσμα συνειδητά ή υποσυνείδητα να «παραμένουν» στις θετικές τους λύσεις (σύμφωνο αποτέλεσμα με Nielsen, 2015). Επιπλέον, τα ευρήματα ερευνών σχετικά με την προκατάληψη του φυσικού αριθμού και την ισχυρή τάση των μαθητών να αποδίδουν στις μεταβλητές τιμές κατά προτεραιότητα (ή και αποκλειστικά) φυσικών αριθμών, δηλαδή θετικούς αριθμούς (Christou, 2017· Δημητρακοπούλου & Χρήστου, 2018) φαίνεται να ενισχύονται από το γεγονός ότι αρκετοί μαθητές κατά την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων διωνυμικής μορφής ακολούθησαν τη μέθοδο δοκιμής και όχι τις διαδικαστικές μεθόδους επίλυσης που έχουν διδαχθεί στο παρελθόν (εφαρμογή τετραγωνικής ρίζας και συμβόλου “±”, παραγοντοποίηση και ιδιότητα μηδενικού γινομένου ή ακόμα και τετραγωνικού τύπου) με τις οποίες γίνεται σαφέστερη η ύπαρξη των δύο λύσεων και αμεσότερη η εύρεσή τους.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν ορισμένα αποτελέσματα των μαθητών συγκριτικά με το αρχικό τεστ διαγνωστικής αξιολόγησης ως προς την επίλυση εξισώσεων μορφής $x^2=\beta$, $(x+\beta)^2=\gamma$ και $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (Δρ2Γ):

Δέκα (10) μαθητές περισσότεροι προσπάθησαν να λύσουν την εξίσωση μορφής $x^2=\beta$, δώδεκα (12) περισσότεροι έδωσαν τη μία θετική λύση της εξίσωσης, ενώ τρεις (3) περισσότεροι βρήκαν και τις δύο λύσεις της εξίσωσης. Ο αριθμός των μαθητών που έλυσαν πλήρως την εξίσωση δεν είναι πολύ μεγαλύτερος, είναι όμως μαθηματικώς κατά πολύ «ποιοτικότερη» η συμμετοχή των μαθητών στην προσπάθεια επίλυσή της, υπό την έννοια της εν γένει μαθηματικής αρτιότητας της λύσης. Είναι κάτι που έρχεται σε συμφωνία με προηγούμενες έρευνες ως προς τη δυνατότητα του διαγραμματικού συλλογισμού να καταστήσει τους μαθητές πιο αποτελεσματικούς (Fachrudin & Putri, 2014· Fachrudin et al., 2018).

Την εξίσωση μορφής $(x+\beta)^2=\gamma$ συνάντησαν οι μαθητές κατά τη συμπλήρωση τετραγώνου σε δύο δραστηριότητες του κριτηρίου αξιολόγησης (Δρ3 και Δρ4). Συγκριτικά με την επίλυση παρόμοιας εξίσωσης στο διαγνωστικό τεστ, η επίδοση των μαθητών ήταν καταφανώς καλύτερη, αφού επιπλέον οκτώ (στη Δρ3) με δώδεκα (Δρ4) μαθητές κατάφεραν να τις λύσουν. Επίσης, μέσα από τη γεωμετρική ιδέα του ανασχηματισμού και της συμπλήρωσης ενός τετραγώνου, οι μαθητές μπορούν να βοηθηθούν κατά τη νοηματοδότηση συμβόλων και την εκτέλεση συμβολικών πράξεων, είτε αριθμητικών είτε αλγεβρικών (Fachrudin & Putri, 2014).

Στο διαγνωστικό τεστ κανένας μαθητής δεν είχε καταφέρει να λύσει την εξίσωση που ανάγονταν στην εξίσωση πλήρους μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, παρά το ότι μερικοί μαθητές την έφεραν στην αναγόμενη τελική της μορφή. Στο κριτήριο αξιολόγησης δεκατρείς (13) μαθητές κατάφεραν να λύσουν την αντίστοιχη εξίσωση εφαρμόζοντας τον τετραγωνικό τύπο.

Κεφάλαιο 8ο: Συμπεράσματα – Συζήτηση

8.1 Συμπεράσματα – Συζήτηση ανά ερευνητικό ερώτημα

Τα συμπεράσματα ως προς τα δύο πρώτα ερευνητικά ερωτήματα, δηλαδή τη δεξιότητα των μαθητών στον μετασχηματισμό μαθηματικών εκφράσεων στις διάφορες μορφές τους και την επίλυση εξίσωσης με τη βοήθεια διαγραμμάτων, βασίστηκε στην ανάλυση των αποτελεσμάτων των φύλλων εργασίας 1, 2 και 3, καθώς και στη συγκριτική παρατήρηση της ατομικής επίδοσης των μαθητών στο αρχικό διαγνωστικό τεστ και στο τελικό κριτήριο αξιολόγησης.

Από τα παραπάνω και όσον αφορά στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα, οι μαθητές εμφανίζουν υψηλό βαθμό κατανόησης και αποτελεσματικής απόδοσης επιμέρους μονωνύμων σε γεωμετρική μορφή, ενώ στη σύνθεσή τους ως αλγεβρικές εκφράσεις για την κατασκευή εξισώσεων δεν δείχνουν να αντιμετωπίζουν ιδιαίτερα προβλήματα. Επίσης, παρατηρήθηκε μια σχετική ευκολία κατασκευής εξίσωσης από μια δοσμένη λεκτική διατύπωση. Το αποτέλεσμα έρχεται σε αντίθεση με τα αποτελέσματα ερευνών (βέβαια σε μικρότερους κατά κανόνα μαθητές) περί της σημασιολογικής, αλλά όχι και συντακτικής κατανόησης των σχέσεων μεταξύ των αλγεβρικών εκφράσεων (Kieran, 1992· Stacey & MacGregor, 1993, 1997· Didis et al., 2015· Makgakga, 2016).

Ακόμη, η χρήση αριθμητικών αναπαραστάσεων των βημάτων επίλυσης στα δοσμένα ιστορικά προβλήματα φαίνεται να έπαιξε ενδιάμεσο βοηθητικό ρόλο στη μετάβαση από τη λεκτική στην αλγεβρική αναπαράστασή τους. Ωστόσο, ελάχιστη ήταν η χρήση αμιγώς αριθμητικών συνοδευτικών δεδομένων στα διαγράμματα. Αντιθέτως, κυριάρχησαν οι αλγεβρικές ενδείξεις («ετικέτες»). Φάνηκε ότι οι μαθητές της Α' Λυκείου είναι αρκετά πλέον εξοικειωμένοι με τους αλγεβρικούς συμβολισμούς και χειρισμούς, προτιμώντας τους, κατά περίπτωση έστω, από τους αντίστοιχους αριθμητικούς, εν αντιθέσει με μαθητές μικρότερων τάξεων (Guevara-Casanova & Burgués-Flamarich, 2018).

Επιπροσθέτως, παρατηρήθηκε δυσκολία κατά τη σύνδεση μεγάλου όγκου πληροφοριών που μπορούν να περιέχουν διαγράμματα με τις αντίστοιχες αλγεβρικές ή αριθμητικές πληροφορίες, συμφωνώντας με τις έρευνες των Bishop (1986) και Larkin & Simon (1987). Φαίνεται έτσι να εξηγείται και η διαφορά επίδοσης των μαθητών κατά τη χρήση ενός στατικού διαγράμματος[19] και μιας δυναμικής σειράς διαγραμμάτων[20], με τη δεύτερη περίπτωση να είναι εμφανώς αποδοτικότερη, ως βοήθημα εξαγωγής συμπερασμάτων (Giardino, 2013a· Giardino, 2013b). Φάνηκε, επίσης, πως η μετάβαση από τη γεωμετρική αναπαράσταση στην αλγεβρική είναι δυσκολότερη για τους μαθητές από την αντίστροφη διαδικασία.

Σχετικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα για το αν η χρήση ιστορικών γεωμετρικών μεθόδων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές της Α' λυκείου στην επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων, η απάντηση φαίνεται να είναι θετική. Συγκεκριμένα, εμφανίστηκαν ικανοποιητικά αποτελέσματα στην επίλυση εξισώσεων διωνυμικής μορφής (ελλιπούς μορφής δευτεροβάθμιων εξισώσεων). Ακόμη, ιδιαίτερα η μέθοδος της συμπλήρωσης τετραγώνου για τις εξισώσεις πλήρους μορφής, και ειδικότερα στην περίπτωση του τετραγώνου αθροίσματος, με την ταυτόχρονη γεωμετρική και αλγεβρική αναπαράστασή του οδήγησε σε θετικότατα αποτελέσματα, καθώς οι μαθητές μπορούν να βοηθηθούν κατά τη νοηματοδότηση συμβόλων και την εκτέλεση συμβολικών πράξεων, είτε αριθμητικών είτε αλγεβρικών (Fachrudin & Putri, 2014). Γενικότερα, καταδεικνύεται ότι προοδευτικά ήταν υψηλός ο αντίκτυπος της ιστορικής γεωμετρικής προσέγγισης επίλυσης εξισώσεων στις ομάδες, με θετικά τελικά αποτελέσματα.

Βεβαίως, η χρήση γεωμετρικών μεθόδων δεν οδηγούσε αυτομάτως πάντα τους μαθητές στις δύο λύσεις του προβλήματος, ειδικότερα στην περίπτωση αρνητικής και θετικής λύσης.

[19] Φύλλο εργασίας 2, Δρ1Β
[20] Φύλλο εργασίας 2, Δρ.2Γ, Φύλλο εργασίας 3, Δρ.2, Κρ. Αξ.Δρ.3, 4

Συνήθως, οι μαθητές παρέμεναν μόνο στη θετική, εμφανίζοντας τον ισχυρό αντίκτυπο των πρωτοβάθμιων εξισώσεων (που επισημάνθηκε στη σχετική ενότητα των παρανοήσεων), αλλά και λόγω της προφανούς νοηματικής σύνδεσης των λύσεων με τις τιμές εμβαδών σχημάτων (Nielsen, 2015). Ένας ακόμη λόγος είναι το ότι αρκετοί μαθητές κατά την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων διωνυμικής μορφής εφάρμοσαν τη μέθοδο δοκιμής και όχι άλλες διδαχθείσες μεθόδους επίλυσης (εφαρμογή τετραγωνικής ρίζας και συμβόλου "±", παραγοντοποίηση και ιδιότητα μηδενικού γινομένου ή ακόμα και τετραγωνικού τύπου) με τις οποίες γίνεται σαφέστερη η ύπαρξη των δύο λύσεων και αμεσότερη η εύρεσή τους. Έτσι, επιβεβαιώνονται και έρευνες σχετικά με την προκατάληψη του φυσικού αριθμού και την ισχυρή τάση των μαθητών να αποδίδουν στις μεταβλητές τιμές κατά προτεραιότητα (ή και αποκλειστικά) φυσικών αριθμών, δηλαδή θετικών αριθμών (Christou, 2017· Δημητρακοπούλου & Χρήστου, 2018). Σε πολλές περιπτώσεις οι μαθητές φάνηκε να οδηγούνται στη δεύτερη λύση από τα καθοδηγητικά ερωτήματα των φύλλων εργασίας και όχι από δική τους πρωτοβουλία. Από την άλλη, από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων ατομικής επίδοσης των μαθητών (μεταξύ διαγν. τεστ και κρ. αξιολόγησης), προκύπτει ότι η επιρροή των γεωμετριών μεθόδων κατέστησε μαθηματικώς αρτιότερη την προσπάθεια επίλυσης εξισώσεων, κάτι που συμφωνεί με προηγούμενες έρευνες ως προς την αποτελεσματικότητα του διαγραμματικού συλλογισμού (Fachrudin & Putri, 2014· Fachrudin et al., 2018).

Η παραγοντοποίηση παραστάσεων έπαιξε αρκετά σημαντικό ρόλο στην επίλυση και κατασκευή εξισώσεων, όταν οι μαθητές αντιλαμβάνονταν γεωμετρικά κάθε παράγοντα που διαμόρφωναν ως πλευρά ορθογωνίου. Η ιδιότητα του μηδενικού γινομένου εφαρμόζονταν κατά κανόνα επιτυχώς μέσω της γεωμετρικής νοηματοδότησης, καθώς οι μαθητές διερωτούνταν: «Πότε δεν θα υπάρχει το σχήμα; Όταν μία από τις δύο διαστάσεις του είναι ανύπαρκτη». Βέβαια υπήρχαν και περιπτώσεις σωστής εφαρμογής της παραγοντοποίησης σε περιπτώσεις εξισώσεων συνήθους και εμφανούς παραγοντοποιήσιμης μορφής, όπως της $\alpha x^2 + \beta x = 0$, χωρίς τη γεωμετρική και εννοιολογική νοηματοδότηση της εξίσωσης (συμφωνώντας με Didis, et al., 2011).

Ως προς και τα δύο πρώτα ερευνητικά ερωτήματα να σημειώσουμε ότι τα θετικότερα αποτελέσματα φαίνεται να είχαν οι ομάδες (ή οι μαθητές, όταν εργάστηκαν ατομικά) που χρησιμοποίησαν πολλαπλές μορφές αναπαράστασης για την επίλυση ενός προβλήματος ή μιας εξίσωσης, καθώς η κάθε μία «συμπλήρωνε» ή/και «επιβεβαίωνε» εννοιολογικά, νοηματικά και λειτουργικά-διαδικαστικά την άλλη, επιβεβαιώνοντας το συμπέρασμα του Kaput (1992).

Το τρίτο ερευνητικό ερώτημα, δηλαδή η δυνατότητα των μαθητών της Α' Λυκείου να αποδείξουν και να ερμηνεύσουν γεωμετρικά τον τετραγωνικό τύπο, απαντάται από την καταγραφή των αποτελεσμάτων του φύλλου εργασίας 4. Να σημειώσουμε ότι ο έλεγχος της επίδοσης των μαθητών ως προς αυτόν θα είχε νόημα σε πρώτο χρόνο, κατά την επεξεργασία του φύλλου εργασίας, και όχι σε δεύτερο μέσω του τελικού κριτηρίου αξιολόγησης, μετά δηλαδή τη διατύπωσή του κατά τη διδασκαλία, ως αποτέλεσμα απομνημόνευσης-ανάκλησης της αποδεικτικής διαδικασίας.

Από τα αποτελέσματα του φύλλου εργασίας 4 είναι εμφανής η διαφορά επίδοσης των μαθητών σε ποιο αφηρημένο μαθηματικό πλαίσιο. Προοδευτικά, και ανάλογα με την πολυπλοκότητα της μορφής που έπρεπε να διαχειριστούν, παρουσιάστηκαν αδυναμίες και δυσκολίες κατά τον εντοπισμό των διαφοροποιήσεων μεταξύ των εξισώσεων, κατά τις σχετικές αντικαταστάσεις και τις μετέπειτα πράξεις-απλοποιήσεις για την παραγωγή ισοδυναμιών. Ειδικότερα, η ύπαρξη αφηρημένων και όχι συγκεκριμένων αριθμητικών δεδομένων για τους συντελεστές των εξισώσεων αποτέλεσε σημαντικό εμπόδιο (εννοιολογικό και διαδικαστικό) κατά τη γεωμετρική τους αναπαράσταση. Τα παραπάνω συμφωνούν με τα αποτελέσματα παρόμοιας έρευνας των Fachrudin et al. (2018).

Να προστεθεί και να σημειωθεί ότι η προοδευτική βελτίωση στην εν γένει χρήση της μαθηματικής γλώσσας ήταν εμφανής κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης. Ακόμη και στη δύσκολη περίπτωση της επαναανακάλυψης του τετραγωνικού τύπου είναι σημαντικό που οι μαθητές προσπάθησαν να χρησιμοποιήσουν τη φυσική και μαθηματική γλώσσα για να εκφράσουν τις ιδέες τους, απλοποιώντας κατά το δυνατόν τη μετάβαση στην αφηρημένη συμβολική αλγεβρική γλώσσα, κάτι που συμφωνεί με την έρευνα των Radford & Guérette του 2000.

Τέλος, να επισημάνουμε ότι πολλοί μαθητές χρειάστηκαν περισσότερο χρόνο από τον προβλεπόμενο για την ολοκλήρωση των εργασιών τους, καθώς όπως τόνισαν και οι ίδιοι δεν «είναι εξοικειωμένοι με τον συγκεκριμένο τρόπο μάθησης» (Fachrudin & Putri, 2014).

Από τα παραπάνω φαίνεται πως η γεωμετρική προσέγγιση επίλυσης εξισώσεων μέσω διαγραμμάτων και της μεθόδου συμπλήρωσης τετραγώνου (βαβυλωνιακή και αραβική εκδοχή) βοηθά τους μαθητές στην επίλυση εξισώσεων κι έτσι η εφαρμογή της μπορεί να αποτελέσει εναλλακτική (εισαγωγική ή συνοδευτική) μέθοδο εκμάθησης της έννοιας της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, όπως επισημαίνεται και στις έρευνες των Allaire & Bradely (2001), Katz & Barton (2007), Leong et al. (2010) και Sönnerhed (2011). Η χρήση των ιστορικών διαγραμμάτων για τη σύνδεση της Άλγεβρας με τη Γεωμετρία μέσω αλγεβρικών και γεωμετρικών μετασχηματισμών δείχνει να είναι εφαρμόσιμη και αποτελεσματική, καθώς προοδευτικά περισσότεροι μαθητές έλυσαν προβλήματα, αλλά τα έλυσαν και ορθότερα, επιβεβαιώνοντας τον Freudenthal στο ότι η μάθηση συμβαίνει όταν μπορεί να νοηματοδοτηθεί. Οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν την ιδέα της απλοϊκής-στοιχειώδους Γεωμετρίας (κατά Høyrup) και την εύρεση ενός γενικού τύπου για την επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων. Ωστόσο, από την υλοποίηση μαθησιακών δραστηριοτήτων διαπιστώνουμε ότι μόνο οι μαθητές με υψηλή μαθηματική ικανότητα επιτυγχάνουν τον τελικό μαθησιακό στόχο, που είναι η επαναανακάλυψη του τετραγωνικού τύπου για την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, συμφωνώντας με τα συμπεράσματα ανάλογων ερευνών (Fachrudin & Putri, 2014· Fachrudin et al., 2018· Radford & Guérette, 2000).

8.2 Περιορισμοί της έρευνας

Το πλήθος των 43 συμμετεχόντων μαθητών που εργάστηκαν με τα φύλλα εργασίας χωρισμένοι σε δέκα (10) ομάδες των τριών ή τεσσάρων μαθητών δεν θα μπορούσε να αποτελέσει αντιπροσωπευτικό δείγμα, ούτε ίσως και στην περιορισμένη κλίμακα εντός του ίδιου σχολείου των 152 μαθητών/-τριών.

Επίσης, να τονίσουμε ότι το προφίλ των μαθητών αντιστοιχεί στο μαθησιακό επίπεδο των μαθητών ενός Πρότυπου ΕΠΑΛ, δηλαδή ενός μαθησιακού επιπέδου ενδεχομένως υψηλότερου του μέσου ΕΠΑΛ, αλλά και χαμηλότερου του μέσου ΓΕΛ. Να αναφέρουμε ότι ένα στοιχείο επιπλέον διαφοροποίησης από τα ΓΕΛ είναι η παρουσία και δεύτερου υποστηρικτικού/-ης καθηγητή/-τριας σε όλες τις διδακτικές ώρες των Μαθηματικών της Α' Λυκείου, γεγονός που μπορεί να διευκολύνει ουσιαστικά την οργάνωση και διεκπεραίωση της διδακτικής παρέμβασης, καθώς και την καταγραφή και συλλογή των ερευνητικών δεδομένων.

Ακόμη, παρά το γεγονός ότι οι μαθητές του Π.ΕΠΑΛ έχουν τη δυνατότητα να εμπλακούν σε ομαδοσυνεργατικές μορφές διδασκαλίας σε διάφορα άλλα μαθησιακά αντικείμενα, στα Μαθηματικά εντούτοις δεν είναι αρκετά εξοικειωμένοι, πόσο μάλλον όταν πρόκειται για την ασυνήθη εισαγωγή της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία και αξιολόγησή τους. Οπότε, έναν επιπλέον περιοριστικό παράγοντα αποτέλεσε ο παράγοντας του χρόνου εξοικείωσης των μαθητών με τις μεθόδους κατά τη συνεργασία τους σε ομάδες, ώστε να προκύψει το σχετικό και αξιόπιστο προς μελέτη ερευνητικό υλικό.

Στις προτάσεις για μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να συμπεριληφθεί η διεύρυνση του δείγματος, αλλά και του ιστορικού μαθηματικού περιεχομένου που καλύπτει η διδακτική παρέμβαση με την εισαγωγή και μεταγενέστερων ιστορικών γεωμετρικών προσεγγίσεων επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων (όπως καταγράφηκαν στις σχετικές ενότητες).

Βιβλιογραφία

Adu-Gyamfi, K., Bossé, M. J., & Chandler, K. (2015). Situating Student Errors: Linguistic-to-Algebra Translation Errors. International Journal for Mathematics Teaching & Learning.

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζου Γ., Σβέρκου Α., Αδαμόπουλου Λ., Δαμιανού Χ. (1991). Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ Γενικού Λυκείου Βιβλίο Μαθητή. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Α.Π.Σ. (2011) Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου. ΥΑ 59614/Γ2, ΦΕΚ 1168/8– 6–2011.

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ. & Χρυσοβέργης, Μ. (2007). Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου Βιβλίο μαθητή. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ. & Χρυσοβέργης, Μ. (2007). Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου Βιβλίο εκπαιδευτικού. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Ainsworth, S. E., Bibby, P. A., & Wood, D. J. (1998). Analysing the costs and benefits of multi-representational learning environments. *Learning with multiple representations*, 120-134.

Allaire, P. R., & Bradley, R. E. (2001). Geometric approaches to quadratic equations from other times and places. *The Mathematics Teacher*, *94*(4), 308-319.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *52*(3), 215-241.

Artigue, M. (1992). Functions from an algebraic and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practices. The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, 25, 109-132.

Aspinwall, L., Shaw, K. L., & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational studies in mathematics*, *33*(3), 301-317.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407.

Barwise, J., & Etchemendy, J. (1996). Visual Information and Valid reasoning. In *Logical Reasoning with Diagrams* (pp. 3-25). Oxford University Press, New York- Oxford.

Bishop, A. J. (1986). What are some obstacles to learning geometry. *Studies in mathematics education*, *5*, 141-159.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on learning problems in mathematics*, *11*(1), 7-16.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2008). Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου Βιβλίο μαθητή. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2008). Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου Βιβλίο εκπαιδευτικού. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Booth, L.R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In Arthur F. Coxford, & Albert P. Shulte (Eds), The ideas of algebra, K-12 (1988 yearbook of the NCTM) (pp. 20–32). Reston, VA: NCTM.

Bossé, M. J., & Nandakumar, N. R. (2005). The factorability of quadratics: Motivation for more techniques. Teaching Mathematics and its Applications, 24(4), 143-153.

Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Durán, R., Reed, B. S., & Webb, D. (1997). Learning by understanding: The role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal*, *34*(4), 663-689.

Carpenter, T., P., Corbitt, M., K., Kepner, H., S., J., Lindquist, M., M., & Reys, R., E.(1981). Results from the second mathematics assessment of the national assessment of educational progress. Reston: VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). Thinking mathematically. Portsmouth, NH: Heinemann.

Chemla, K. (2005). Geometrical figures and generality in ancient China and beyond: Liu Hui and Zhao Shuang, Plato and Thabit ibn Qurra. *Science in context*, *18*(1), 123-166.

Christou, K. P. (2017). Students' interpretation of variables and the phenomenal sign of algebraic expressions, MENON: Journal of Educational Research, 4, 161-175.

Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2005). How students interpret literal symbols in algebra: A conceptual change approach. In Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society (Vol. 27, No. 27).

Christou, K. P., Vosniadou, S., & Vamvakoussi, X. (2007). Students' interpretations of literal symbols in algebra. Reframing the conceptual change approach in learning and instruction, 283-297.

Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2012). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. Mathematical Thinking and Learning, 14(1), 1-27.

Clark, M. K. (2012). History of mathematics Illuminating understanding of school mathematics concepts for prospective mathematics teachers. Educational Studies in Mathematics, 81(1), 67–84.

Cortes, A., Vergnaud, G., & Kavafian, N. (1990). From arithmetic to algebra: Negotiating a jump in the learning process. In Proceedings of the l4 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 27-34).

Cullen, C. (2002). Learning from Liu Hui? A different way to do mathematics. *Notices of the AMS*, *49*(7), 783-790.

Davis, R., B. (1975). Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations. Journal of Children's Mathematical Behavior, 1 (3), 7-35.

Δ.Ε.Π.Π.Σ (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, ΦΕΚ 303Β/13-3-2003.

Δημητρακοπούλου, Σ., & Χρήστου, Κ. (2018). ΤΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ-ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ: ΠΩΣ ΤΑ ΚΑΤΑΝΟΟΥΝ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΚΑΙ ΠΩΣ ΕΜΦΑΝΙΖΟΝΤΑΙ ΣΤΑ ΒΙΒΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (11), 31-52.

Didiş, M. G., Baş, S., & Erbaş, A. (2011). Students' reasoning in quadratic equations with one unknown. In The Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-7) (pp. 479-489).

Didis, M. G., & Erbas, A. K. (2015). Performance and difficulties of students in formulating and solving quadratic equations with one unknown. Educational Sciences: Theory & Practice, 15(4).

Δραμαλίδης, Α., & Σακονίδης, Χ. (2006). Η επίδοση μαθητών ηλικίας 13 – 15 χρόνων σε θέματα σχολικής άλγεβρας. Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων, Τεύχος 11, σσ. 100 – 114.

English, L. D. (Ed.). (2013). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. Routledge.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25-37).

Fachrudin, A. D., Ekawati, R., Kohar, A. W., Widadah, S., Kusumawati, I. B., & Setianingsih, R. (2019, December). Ancient China history-based task to support students' geometrical reasoning and mathematical literacy in learning Pythagoras. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1417, No. 1, p. 012042). IOP Publishing.

Fachrudin, A. D., Putri, R. I. I., Kohar, A. W., & Widadah, S. (2018, November). Developing a local instruction theory for learning the concept of solving quadratic equation using babylonian approach. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1108, No. 1, p. 012069). IOP Publishing.

Fachrudin, A. D., & Putri, R. I. I. (2014). Building Students' Understanding of Quadratic Equation Concept Using Naïve Geometry. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education*, *5*(2), 192-202.

Fischbein, H. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. Educational studies in mathematics, 24(2), 139-162.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational studies in mathematics*, *38*(1-3), 11-50.

Gandz, S. (1937). The origin and development of the quadratic equations in Babylonian, Greek, and early Arabic algebra. Osiris, 3, 405-557.

Giaquinto, M. (1992). Visualizing as a means of geometrical discovery. *Mind & Language*.

Giaquinto, M. (1994). Epistemology of visual thinking in elementary real analysis. *The British journal for the philosophy of science*, *45*(3), 789-813.

Giardino, V. (2013a). Towards a diagrammatic classification. *The Knowledge Engineering Review*, *28*(3), 237-248.

Giardino, V. (2013b). A practice-based approach to diagrams. In *Visual reasoning with diagrams* (pp. 135-151). Birkhäuser, Basel.

Godden, H., Mbekwa, M., & Julie, C. (2013). An analysis of errors and misconceptions in the 2010 grade 12 mathematics examination: A focus on quadratic equations and inequalities. In proceedings of the 19th Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa (Vol. 1, No. 1, pp. 70-79).

Guevara-Casanova, I. Pythagoras' Theorem and the Resolution of the Second Degree Equation in the Nine Chapters on the Mathematical Art. *SCIENTIFIC COSMOPOLITANISM AND LOCAL CULTURES: RELIGIONS, IDEOLOGIES, SOCIETIES*, 255.

Guevara-Casanova, I., & Burgués-Flamarich, C. (2018). Geometry and Visual Reasoning. In *Mathematics, Education and History* (pp. 165-192). Springer, Cham.

Güner, P., & Uygun, T. (2016). Developmental process of quadratic equations from past to present and reflections on teaching-learning. HAYEF Journal of Education, 13(3), 149-163.

Guzman, M. D. (2002). The Role of Visualization in the Teaching and Learning of Mathematical Analysis.

Herawaty, D., Widada, W., Gede, W., Lusiana, D., Pusvita, Y., Widiarti, Y., & Anggoro, A. F. D. (2021). The cognitive process of students understanding quadratic equations. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1731, No. 1, p. 012053). IOP Publishing.

Høyrup, J. (1990). Algebra and naive geometry. An investigation of some basic aspects of old Babylonian mathematical thought II. *Altorientalische Forschungen*, *17*(1-2), 262-354.

Θωμαϊδης Γ. (2011). Εξισώσεις και ανισώσεις δευτέρου βαθμού στα Αριθμητικά του Διόφαντου-Μια μελέτη για την ιστορία της Άλγεβρας. Εκδόσεις ΖΗΤΗ.

Θωμαΐδης Γ., Καστάνης Ν. & Τζανάκης Κ. (2006). Ιστορία και μαθηματική εκπαίδευση. Εκδόσεις ΖΗΤΗ.

Kabar, M. G. D. (2018). Secondary School Students' Conception of Quadratic Equations with One Unknown. International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 19(1), 112-129.

Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, *515*, 556.

Katz, V. J. (1997). Algebra and its teaching An historical survey. The Journal of Mathematical Behavior, 16(1), 25-38.

Katz, V. J. (2000). *Using history to teach mathematics: An international perspective* (Vol. 51). Cambridge University Press.

Katz, V. J., & Barton, B. (2007). Stages in the history of algebra with implications for teaching. *Educational studies in mathematics*, *66*(2), 185-201.

Katz V. J. (2013). Ιστορία των μαθηματικών – Μια εισαγωγή. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. Educational studies in Mathematics, 12(3), 317-326.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. Handbook of Research on Mathematical Teaching and Learning, 390-419.

Kieran, C., & Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics, 119, 139.

Kieran, C., & Sfard, A. (1999). Seeing through symbols: The case of equivalent expressions. Focus on learning problems in mathematics, 21(1), 1-17.

Κολέζα, Ε. (2017). Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών. Β΄ Ανανεωμένη Έκδοση. Αθήνα: Gutenberg.

Kotsopoulos, D. (2007). Unravelling student challenges with quadratics: A cognitive approach. Australian Mathematics Teacher, The, 63(2), 19-24.

Larkin, J. H., & Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. Cognitive science, 11(1), 65-100.

Latterell, C. M., & Copes, L. (2003). Can we reach definitive conclusions in mathematics education research?. Phi Delta Kappan, 85(3), 207-211.

Leitze, A., & Kitt, N. A. (2000). Algebra for all: Using homemade algebra tiles to develop algebra and prealgebra concepts. The Mathematics Teacher, 93(6), 462-520.

Λεμονίδης, Χ. (1996). Δυσκολίες και αντιλήψεις των μαθητών κατά το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα. Ευκλείδης Γ΄, Τόμος 13, Τεύχος 45, σσ. 61 – 70.

Leong, Y. H., Yap, S. F., Yvonne, T. M. L., Mohd Zaini, I. K. B., Chiew, Q. E., Tan, K. L. K., & Subramaniam, T. (2010). Concretising factorisation of quadratic expressions. Australian Mathematics Teacher, The, 66(3), 19-24.

López, J., Robles, I., & Martínez-Planell, R. (2016). Students' understanding of quadratic equations. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47(4), 552-572.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. Journal for research in mathematics education, 24(3), 217-232.

Makgakga, S. (2016). Errors and misconceptions in solving quadratic equations by completing a square. Mathematics Education.(Online),(http://www. amesa. org. za), diakses, 8.

Makonye, J. P., & Luneta, K. (2014). Mathematical errors in differential calculus tasks in the Senior School Certificate Examinations in South Africa. Education as Change, 18(1), 119-136.

Makonye, J. P., & Matuku, O. (2016). Exploring learner errors in solving quadratic equations. International journal of educational sciences, 12(1), 7-15.

Makonye, J., & Nhlanhla, S. (2014). Exploring ‘non-science’ grade 11 learners’ errors in solving quadratic equations. Mediterranean journal of social sciences, 5(27 P2), 634.

Mancosu, P. (2001). Mathematical explanation: Problems and prospects. *Topoi*, *20*(1), 97-117.

Mancosu, P. (2005). Visualization in logic and mathematics. In *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics* (pp. 13-30). Springer, Dordrecht.

Mayer, R. E. (1987). Educational psychology: A cognitive approach. New York: Harper Collins.

Nardi, E. (2014). Reflections on visualization in mathematics and in mathematics education. In *Mathematics & mathematics education: searching for common ground* (pp. 193-220). Springer, Dordrecht.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston. VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (2011). Επιμορφωτικό Υλικό για τους Καθηγητές Μαθηματικών Γυμνασίου. Αθήνα, Νοέμβριος 2011.

Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (2011). Μαθηματικά στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (Γυμνάσιο). ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα), Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ΕΣΠΑ 2007-2013.

Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (2011). Μαθηματικά στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (Γυμνάσιο). Οδηγός για τον εκπαιδευτικό, «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων». Αθήνα 2011.

Nesher, P. (1987). Towards an instructional theory: The role of student's misconceptions. For the learning of mathematics, 7(3), 33-40.

Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. Educational psychologist, 40(1), 27-52.

Nielsen, L. E. J. (2015). Understanding quadratic functions and solving quadratic equations: An analysis of student thinking and reasoning (Doctoral dissertation).

Οδηγίες για τη διδασκαλία του μαθήματος των Μαθηματικών των Ημερησίων και των Εσπερινών Γυμνασίων για το σχολικό έτος 2022-2023. Σχετ.: Το με αρ. πρωτ. εισ. Υ.ΠΑΙ.Θ. 104170/Δ2/29-08-2022 έγγραφο.

Οδηγίες για τη διδασκαλία των μαθημάτων της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας των Α’ και Β’ τάξεων του Ημερησίου και του Εσπερινού Γενικού Λυκείου για το σχολικό έτος 2022-2023.

Σχετ.: Τα με αρ. πρωτ. εισ. Υ.ΠΑΙ.Θ. 109853/Δ2/12-09-2022 και 110161/Δ2/12-09-2022 έγγραφα.

Olteanu, C., & Holmqvist, M. (2012). Differences in success in solving second-degree equations due to differences in classroom instruction. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43(5), 575-587.

Osborne, R. J., & Wittrock, M. C. (1983). Learning science: A generative process. Science Education, 67(4), 498-508.

Pasch, M., & Dehn, M. (1926). *Vorlesungen über die neuere Geometrie* (Vol. 23). Springer.

Perso, T. (1996). Teaching equation solving– Again? The Australian Mathematics Teacher, 52(1), 19–21.

Polya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (Vol. 85). Princeton university press.

Presmeg, N. C. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational studies in mathematics*, *17*(3), 297-311.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational studies in mathematics*, *23*(6), 595-610.

Presmeg, N. C. (2013). Generalization using imagery in mathematics. In *Mathematical reasoning* (pp. 307-320). Routledge.

Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στις Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεις Γυμνασίου. Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής, Αθήνα 2021.

Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στις Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεις Λυκείου. Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής, Αθήνα 2021.

Radford, L., & Guérette, G. (2000). Second degree equations in the classroom: A Babylonian approach. *Paleontological Society Papers*, *6*, 69-76.

Radford, L. G. (2001). The historical origins of algebraic thinking. In Perspectives on school algebra (pp. 13-36). Springer, Dordrecht.

Radford, L. (2002). On heroes and the collapse of narratives: a contribution to the study of symbolic thinking. In *PME CONFERENCE* (Vol. 4, pp. 4-081).

Radford, L., & Puig, L. (2007). Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(2), 145-164.

Rosen, F. A. (Ed.). (1831). The algebra of Mohammed ben Musa (Vol. 17). Murray.

Rösken, B., & Rolka, K. (2006, July). A picture is worth a 1000 words–the role of visualization in mathematics learning. In *Proceedings 30th conference of the International Group for the Psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 457-464). Prague: Charles University.

Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. The Mathematics Teacher, 74(6), 418-420.

Russell, M., O'dwyer, L. M., & Miranda, H. (2009). Diagnosing students' misconceptions in algebra: Results from an experimental pilot study. Behavior research methods, 41(2), 414-424.

Saenz-Ludlow, A., & Walgamuth, C. (1998). Third graders' interpretations of equality and the equal symbol. Educational studies in mathematics, 35(2), 153-187.

Sesiano, J. (2009). An introduction to the history of algebra solving equations from Mesopotamian times to the Renaissance (Vol. 27). American Mathematical Soc.

Sfard, A., Linchevski, L. (1994). "The Gains and the Pitfalls of Reification - The Case of Algebra." Educational Studies in Mathematics 26, 191-228.

Sheffer, H. M. (1926). Principia Mathematica.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational researcher, 15(2), 4-14.

Smagorinsky, P. (2001). If meaning is constructed, what is it made from? Toward a cultural theory of reading. Review of educational research, 71(1), 133-169.

Sönnerhed, W. W. (2011). Mathematics textbooks for teaching. Retrieved from http://gupea.ub.gu.se/handle/2077/27935.

Stacey, K., & MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. The Mathematics Teacher, 90(2), 110-113.

Stenning, K. (1995). Applying semantic concepts to analyzing media and modalities. *Diagrammatic Reasoning, Cognitive and Computational Perspectives*, 303-338.

Stylianou, D. A., & Silver, E. A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Mathematical thinking and learning*, *6*(4), 353-387.

Swan, M. (2000). Making Sense of Algebra. Mathematics teaching, 171, 16-19.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151-169.

Tall D, Lima RN & Healy L. (2014). Evolving a three-world framework for solving algebraic equations in the light of what a student has met before. J Math Behav. 34:1–13.

Thorpe, J. A. (1989). Algebra: What should we teach and how should we teach it? In S. Wagner, C. Kieran. (eds), Research issues in the learning and teaching of algebra, 4, 11-24.

Tennant, N. (1986). The withering away of formal semantics?. *Mind & language*, *1*(4), 302-318.

Tzanakis, C., Arcavi, A., Sa, C. C. D., Isoda, M., Lit, C. K., Niss, M., ... & Siu, M. K. (2002). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In *History in mathematics education* (pp. 201-240). Springer, Dordrecht.

Usiskin, Z. (1995). Why is algebra important to learn. *American Educator*, *19*(1), 30-37.

Vaiyavutjamai, P., & Clements, M. A. (2006). Effects of classroom instruction on students' understanding of quadratic equations. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(1), 47-77.

Vaiyavutjamai, P., Ellerton, N. F., & Clements, M. A. (2005). Students' attempts to solve two elementary quadratic equations: A study in three nations. *Building connections: Research, theory and practice*, 735-742.

Vallhonestaa, F. R., Estevea, M. R. M., Casanovab, I. G., Puig-Plaa, C., & Roca-Rosella, A. (2015). Teacher training in the history of mathematics. *History and Epistemology in Mathematics Education*, 113.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293-305.

Vinner, S. (1989). The Avoidance of Visual Considerations in Calculus Students. *Focus on learning problems in mathematics*, *11*, 149-56.

Vinner, S. (2018). *Mathematics, education, and other endangered species*. Springer International Publishing.

Wileman, R. E. (1993). *Visual communicating*. Educational Technology.

Χριστιανίδης, Γ. (2003). Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών. Αιγυπτιακά, Βαβυλωνιακά και Ελληνικά Μαθηματικά. Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Χριστιανίδης Γ. & Διαλέτης Δ. (2006). Διαμάχες για την ιστορία των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών-Κείμενα των S. Unguru, B.L. van der Waerden, H. Freudenthal, A Weil. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Yakes, C., & Star, J. R. (2011). Using comparison to develop flexibility for teaching algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(3), 175-191.

Young, R & O'Shea, T. (1981). Errors in children's subtraction. *Cognitive Science*, *5*, 152-177.

Zakaria, E., & Maat, S. M. (2010). Analysis of Students' Error in Learning of Quadratic Equations. *International Education Studies*, *3*(3), 105-110.

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (Eds.). (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Mathematical Association of America.

Παράρτημα

Παράρτημα Α: Βιβλίο Μαθητή – Βιβλίο Εκπαιδευτικού – Ιστορικά Σημειώματα

Βιβλίο Μαθητή - Μαθηματικά Γ’ Γυμνασίου – Παράγραφοι 2.2 – 2.3 (σελ. 89 - 102)

Παράγραφος 2.2: «Εξισώσεις δευτέρου βαθμού»

Ερώτηση κατανόησης 3, σελ. 92.

3 Ένας μαθητής λύνοντας την εξίσωση $x^2 = 6x$ απλοποίησε με το x και βρήκε ότι έχει μοναδική λύση τη $x = 6$. Παρατηρώντας όμως την εξίσωση διαπίστωσε ότι επαληθεύεται και για $x = 0$. Πού έγινε το λάθος και χάθηκε η λύση $x = 0$;

Επίλυση δευτ. εξίσωσης πλήρους μορφής με συμπλήρωση τετραγώνου, σελ. 94.

Μέρος Α - Κεφάλαιο 2ο

Β Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου

Στην προηγούμενη ενότητα εφαρμόσαμε τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$. Τη μέθοδο αυτή μπορούμε να την εφαρμόσουμε και για να λύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού στη γενική της μορφή, $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$. Έχουμε διαδοχικά:

$$αx^2 + βx + γ = 0$$

- Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με 4α. $\quad 4α \cdot αx^2 + 4α \cdot βx + 4α \cdot γ = 0$
- Μεταφέρουμε το σταθερό όρο στο β’ μέλος. $\quad 4α^2x^2 + 4αβx = -4αγ$
- Στο α’ μέλος έχουμε δύο όρους του αναπτύγματος $(2αx + β)^2$. Για να συμπληρώσουμε το τετράγωνο του $2αx + β$ προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $β^2$.

$$(2αx)^2 + 2 \cdot 2αx \cdot β = -4αγ$$
$$(2αx)^2 + 2 \cdot 2αx \cdot β + β^2 = β^2 - 4αγ$$
$$(2αx + β)^2 = β^2 - 4αγ$$

Αν συμβολίσουμε την παράσταση $β^2 - 4αγ$ με το γράμμα Δ, τότε η εξίσωση γράφεται $(2αx + β)^2 = Δ$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $Δ > 0$, τότε έχουμε:

$$2αx + β = \pm\sqrt{Δ}$$
$$2αx = -β \pm \sqrt{Δ}$$
$$x = \frac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$$

Άρα η εξίσωση έχει **δύο άνισες λύσεις**, τις $x = \frac{-β + \sqrt{Δ}}{2α}$ και $x = \frac{-β - \sqrt{Δ}}{2α}$

- Αν $Δ = 0$, τότε έχουμε:

$$(2αx + β)^2 = 0$$
$$2αx + β = 0$$
$$2αx = -β$$
$$x = -\frac{β}{2α}$$

Άρα η εξίσωση έχει **μία διπλή λύση**, τη $x = -\frac{β}{2α}$

- Αν $Δ < 0$, τότε η εξίσωση **δεν έχει λύση** (**αδύνατη**).

Η παράσταση $β^2 - 4αγ$, όπως είδαμε, παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση της εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$, γιατί μας επιτρέπει να διακρίνουμε το πλήθος των λύσεών της. Γι’ αυτό λέγεται **διακρίνουσα** και συμβολίζεται με το γράμμα Δ, δηλαδή

$$\boxed{Δ = β^2 - 4αγ}$$

Παραδείγματα-εφαρμογές 1γ και 2α, σελ. 95.

2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $2x^2 + 5x + 3 = 0$ β) $6x^2 - 5x + 2 = 0$ γ) $-16x^2 + 8x - 1 = 0$

Λύση

α) Στην εξίσωση $2x^2 + 5x + 3 = 0$ είναι $α = 2$, $β = 5$, $γ = 3$, οπότε η διακρίνουσα είναι $Δ = β^2 - 4αγ = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0$.
Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = \frac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 1}{4}$,
δηλαδή είναι $x = \frac{-5+1}{4} = -1$ ή $x = \frac{-5-1}{4} = -\frac{3}{2}$

β) Στην εξίσωση $6x^2 - 5x + 2 = 0$ είναι $α = 6$, $β = -5$, $γ = 2$, οπότε η διακρίνουσα είναι $Δ = β^2 - 4αγ = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 25 - 48 = -23 < 0$.
Άρα η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη).

γ) Στην εξίσωση $-16x^2 + 8x - 1 = 0$ είναι $α = -16$, $β = 8$, $γ = -1$, οπότε η διακρίνουσα είναι $Δ = β^2 - 4αγ = 8^2 - 4 \cdot (-16) \cdot (-1) = 64 - 64 = 0$.
Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, την $x = -\frac{β}{2α} = -\frac{8}{2 \cdot (-16)} = \frac{1}{4}$

2 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $9x^2 - (5x - 1)^2 = 2x$ β) $\frac{x(x+3)}{3} - \frac{x-6}{6} = \frac{1}{2}$

Λύση

α)
$$9x^2 - (5x-1)^2 = 2x$$
$$9x^2 - (25x^2 - 10x + 1) = 2x$$
$$9x^2 - 25x^2 + 10x - 1 - 2x = 0$$
$$-16x^2 + 8x - 1 = 0$$
$x = \frac{1}{4}$ (διπλή λύση)

(Παράδειγμα 1γ)

β)
$$\frac{x(x+3)}{3} - \frac{x-6}{6} = \frac{1}{2}$$
$$6 \cdot \frac{x(x+3)}{3} - 6 \cdot \frac{x-6}{6} = 6 \cdot \frac{1}{2}$$
$$2x(x+3) - (x-6) = 3$$
$$2x^2 + 6x - x + 6 - 3 = 0$$
$$2x^2 + 5x + 3 = 0$$
$x = -1$ ή $x = -\frac{3}{2}$ *(Παράδειγμα 1α)*

Παράγραφος 2.3: «Προβλήματα εξισώσεων 2^{ου} βαθμού»

Ασκήσεις 5 και 6, σελίδας 101

5 Να βρείτε δύο διαδοχικούς περιττούς ακεραίους, που το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι 74.

6 Ο καθηγητής των Μαθηματικών πρότεινε στους μαθητές του να λύσουν ορισμένες ασκήσεις για να εμπεδώσουν την ενότητα που διδάχτηκαν. Όταν αυτοί τον ρώτησαν σε ποια σελίδα είναι γραμμένες οι ασκήσεις, αυτός απάντησε: «*Αν ανοίξετε το βιβλίο σας, το γινόμενο των αριθμών των δύο αντικρυστών σελίδων μέσα στις οποίες είναι γραμμένες οι ασκήσεις, είναι 506*». Μπορείτε να βρείτε σε ποιες σελίδες είναι γραμμένες οι ασκήσεις;

Βιβλίο Μαθητή – Άλγεβρα Α' Λυκείου – Παράγραφος 3.3 (σελ. 88 - 96)

Επίλυση δευτ. εξίσωσης πλήρους μορφής με συμπλήρωση τετραγώνου, σελ. 88-89.

Στη συνέχεια θα επιλύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού στη γενική της μορφή με τη μέθοδο της «**συμπλήρωσης του τετραγώνου**».

Έχουμε:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \qquad [\text{αφού } \alpha\neq 0]$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{\beta}{\alpha}x=-\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x\cdot\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x\cdot\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}=-\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

Αν θέσουμε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$, τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2} \qquad (2)$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\mathbf{\Delta>0}$, τότε έχουμε:

$$x+\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x+\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

δηλαδή

$$x=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Επομένως η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), έχει δύο λύσεις άνισες, τις:

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ και } x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Για συντομία οι λύσεις αυτές γράφονται

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}.$$

- Αν $\mathbf{\Delta=0}$, τότε η εξίσωση (2) γράφεται:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)\cdot\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\beta}{2\alpha}=0 \text{ ή } x+\frac{\beta}{2\alpha}=0$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\beta}{2\alpha} \text{ ή } x=-\frac{\beta}{2\alpha}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση έχει **διπλή ρίζα** την $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

- Αν $\mathbf{\Delta<0}$, τότε η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), δεν έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή είναι **αδύνατη** στο $\mathbb{R}$.

Παράγραφος 2.2 (σελ. 44 -47)

Ένα θέμα από την Ιστορία των Μαθηματικών
Οι Βαβυλώνιοι και η επίλυση της εξίσωσης 2ου βαθμού

Το θέμα από την Ιστορία των Μαθηματικών αφορά τον τρόπο επίλυσης των εξισώσεων δευτέρου βαθμού από τους Βαβυλώνιους. Οι βαβυλωνιακές πλάκες με μαθηματικό περιεχόμενο, που έχουν μεταφραστεί, περιέχουν προβλήματα της καθημερινής ζωής. Προβλήματα θεωρητικού περιεχομένου δεν υπάρχουν στα βαβυλωνιακά μαθηματικά. Το πρόβλημα που παρουσιάζεται στο βιβλίο του μαθητή είναι το δεύτερο από τα είκοσι τέσσερα προβλήματα που περιέχονται στην πήλινη βαβυλωνιακή πλάκα με τον κωδικό αριθμό 13901 και η οποία βρίσκεται στο Βρετανικό Μουσείο. Από το πρόβλημα αυτό αλλά και από άλλα προβλήματα αναλόγου περιεχομένου, διαπιστώνουμε ότι τους Βαβυλωνίους δεν τους απασχολούσε η γεωμετρική έννοια της ποσότητας, αφού πρόσθεταν επιφάνεια με μήκος, αλλά η ίδια η ποσότητα όπως αυτή εκφράζεται από τους συγκεκριμένους αριθμούς. Οι Βαβυλώνιοι την εποχή της πρώτης βαβυλωνιακής δυναστείας (1830 – 1530 π.Χ.) αν και δεν γνώριζαν αλγεβρικές μεθόδους και δεν είχαν αλγεβρικούς συμβολισμούς, κατείχαν με πρακτικό τρόπο την τεχνική επίλυσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Με βάση τη σημερινή ορολογία και το σύγχρονο συμβολισμό ορισμένα από τα προβλήματα που έχουν βρεθεί γραμμένα στις διάφορες πλάκες οδηγούν στη λύση δευτεροβαθμίων εξισώσεων της μορφής

$$x^2 + βx = γ, \qquad x^2 - βx = γ, \qquad αx^2 + βx = γ$$

Η βαβυλωνιακή μέθοδος επίλυσης εξίσωσης 2ου βαθμού μοιάζει με τον τρόπο που λύνουμε σήμερα μια δευτεροβάθμια εξίσωση (συμπλήρωση τετραγώνου). Η λύση του συγκεκριμένου προβλήματος που αναφέρεται στο σφηνοειδές κείμενο περιορίζεται στην απαρίθμηση των βημάτων που πρέπει να γίνουν για την επίλυση του προβλήματος χωρίς καμία διακαιολόγηση και αποτελούν ένα είδος «συνταγής». Σε κάθε βήμα δίνεται και το αντίστοιχο εξαγόμενο.

Με σύγχρονο συμβολισμό, αν εφαρμόσουμε τα βήματα των Βαβυλωνίων για την επίλυση της εξίσωσης $x^2 - βx = γ$, θα οδηγηθούμε στον τύπο $\frac{β + \sqrt{β^2+4γ}}{2}$ (στα βαβυλωνιακά κείμενα δεν υπάρχει πουθενά καταγεγραμμένος ένας τέτοιος τύπος).

1ο βήμα: Πάρε το $\frac{β}{2}$

2ο βήμα: Πολλαπλασίασέ το με τον εαυτό του $\frac{β}{2} \cdot \frac{β}{2} = \frac{β^2}{4}$

3ο βήμα: Πρόσθεσε στο αποτέλεσμα το σταθερό αριθμό γ $\left(\frac{β^2}{4} + γ\right)$ και υπολόγισε την τετραγωνική του ρίζα (Οι Βαβυλώνιοι έβρισκαν τις τετραγωνικές ρίζες είτε από πίνακες τετραγώνων αριθμών είτε προσεγγιστικά).

4ο βήμα: Για να βρεις το ζητούμενο πρόσθεσε στο αποτέλεσμα το $\frac{β}{2}$

$$\frac{β}{2} + \sqrt{\frac{β^2}{4} + γ} = \frac{β + \sqrt{β^2+4γ}}{2}$$

Π.χ. για τη λύση της εξίσωσης $x^2 + x = \frac{3}{4}$ οι αριθμοί που προέκυπταν σύμφωνα με τα προηγούμενα βήματα ήταν $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$, $= 1$, $\sqrt{1} = 1$ και επομένως η τιμή του x είναι $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Για την εξίσωση $x^2 + \beta x = \gamma$ ακολουθούσαν τα ίδια βήματα με τη διαφορά ότι στο 4ο βήμα αφαιρούσαν το $\frac{\beta}{2}$. Έτσι κατέληγαν στον τύπο $\sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \gamma} - \frac{\beta}{2} = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2+4\gamma}}{2}$

(Οι Βαβυλώνιοι καθώς και όλοι οι αρχαίοι λαοί δε χρησιμοποιούσαν αρνητικούς αριθμούς).

Οι Βαβυλώνιοι μπορούσαν να επιλύουν δευτεροβάθμιες εξισώσεις στις οποίες ο συντελεστής του x^2 δεν ήταν 1. Για παράδειγμα, για να λύσουν την εξίσωση $7x^2 + 6x = 1$, η οποία αναγράφεται σε μια άλλη πλάκα, πολλαπλασίαζαν και τα δύο μέλη της με το 7, οπότε η εξίσωση έπαιρνε την μορφή $(7x)^2 + 6\cdot(7x) = 7$. Τότε θεωρούσαν νέο άγνωστο τον $y = 7x$ και λύνοντας την εξίσωση $y^2 + 6y = 7$ έβρισκαν $y = 1$, οπότε η λύση της αρχικής εξίσωσης είναι $x = \frac{1}{7}$.

Δεν την έλυναν διαιρώντας και τα δυο μέλη της με το 7, γιατί τότε θα είχαν τα κλάσματα $\frac{6}{7}, \frac{1}{7}$ των οποίων η εξηνταδική τους παράσταση είναι αριθμός μη τερματιζόμενος. (Οι Βαβυλώνιοι ως γνωστόν χρησιμοποιούσαν εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης).

Σημείωση: *Είναι γνωστό ότι οι αρχαίοι Έλληνες έλυναν τις εξισώσεις 2ου και 3ου βαθμού γεωμετρικά όχι μόνο βρίσκοντας τις ρίζες τους αλλά και κατασκευάζοντάς τες.*

Βιβλιογραφία

- *L. Bunt – Ph. Jones – J. Bedient: Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών Μαθηματικών, μετάφραση Άννα Φερεντίνου, εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικός, Αθήνα 1981.*
- *Θ. Εξαρχάκος: Ιστορία των Μαθηματικών (τόμος Α΄). Τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αρχαίων Αιγυπτίων, Αθήνα 1997.*

- *B. Hughes: Understanding algorithms from their history. The teaching and learning of algorithms in school mathematics, NCTM 1998.*
- *O. Neugebauer: Οι θετικές επιστήμες στην αρχαιότητα, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τράπεζας, Αθήνα 1990.*
- *B.L. van der Waerden: Geometry and Aglebra in Ancient Civilizations, Springer–Verlag, New York, 1983.*

Ιστορικά σημειώματα - Βιβλία μαθητή Μαθηματικών Γ’ Γυμνασίου - Άλγεβρας Α’ Λυκείου

Μαθηματικά Γ’ Γυμνασίου

Σελ. 98

ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σε μια βαβυλωνική πλάκα (περίπου 1650 π.Χ.) βρίσκουμε χαραγμένο και λυμένο το παρακάτω πρόβλημα(*):

«Αν από την επιφάνεια ενός τετραγώνου αφαιρέσω την πλευρά του, θα βρω 870. Να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου».

Τον γραφέα της πλάκας δεν τον απασχολούσε η γεωμετρική έννοια της ποσότητας, αλλά η ίδια η ποσότητα, όπως αυτή εκφράζεται με τους συγκεκριμένους αριθμούς (Γι’ αυτό προσθέτει μήκος με επιφάνεια).

Αν χρησιμοποιήσουμε σημερινό συμβολισμό και υποθέσουμε ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι x, τότε η λύση του προβλήματος οδηγεί στη λύση της εξίσωσης $x^2 - x = 870$.

Ο Βαβυλώνιος γραφέας της πλάκας μας προτείνει να λύσουμε το πρόβλημα αυτό ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- Πάρε το μισό του 1 που είναι το $\frac{1}{2}$.
- Πολλαπλασίασε το $\frac{1}{2}$ με το $\frac{1}{2}$, αποτέλεσμα $\frac{1}{4}$.
- Πρόσθεσε το $\frac{1}{4}$ στο 870 και θα βρεις $870\frac{1}{4}$.
- Το $870\frac{1}{4}$, είναι το τετράγωνο του $29\frac{1}{2}$.
- Πρόσθεσε στο $29\frac{1}{2}$ το $\frac{1}{2}$ (που βρήκες αρχικά) και θα βρεις 30.
- Αυτή είναι η πλευρά του τετραγώνου.

- Το 1 είναι ο συντελεστής του x. (Οι Βαβυλώνιοι δε χρησιμοποιούσαν αρνητικούς αριθμούς).
- Οι Βαβυλώνιοι για να βρίσκουν την τετραγωνική ρίζα αριθμών είχαν κατασκευάσει πίνακες με τα τετράγωνα των αριθμών.
- Έκαναν πρόσθεση, όταν στην εξίσωση υπήρχε αφαίρεση (π.χ. $x^2 - x$) και αφαίρεση, όταν στην εξίσωση υπήρχει πρόσθεση (π.χ. $x^2 + x$)

- Να λύσετε την εξίσωση με τη μέθοδο που μάθατε στην ενότητα αυτή και να τη συγκρίνετε με την πρακτική μέθοδο με την οποία έλυναν οι Βαβυλώνιοι τις εξισώσεις 2ου βαθμού. Τι παρατηρείτε;
- Ακολουθώντας τα βήματα των Βαβυλωνίων να λύσετε και το παρακάτω πρόβλημα που είναι χαραγμένο στην ίδια πλάκα. «Αν στην επιφάνεια ενός τετραγώνου προσθέσω την πλευρά του, θα βρω $\frac{3}{4}$. Ποια είναι η πλευρά του τετραγώνου;»

(*) Από το βιβλίο του Θ. Εξαρχάκου: *Ιστορία των Μαθηματικών, Τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αρχαίων Αιγυπτίων*, τόμος Α′, Αθήνα 1997.

98

Άλγεβρα Α' Λυκείου

Σελ. 98-100

Μέθοδος των Ινδών

Η επίλυση αυτή, που επινοήθηκε στην Ινδία, αποδίδεται στον Sridhara (1025 μ.Χ. περίπου).

Έχουμε διαδοχικά:
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$
$\alpha x^2 + \beta x = -\gamma$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με 4α και ύστερα προσθέτουμε το β^2 και στα δύο μέλη, για να προκύψει ένα «τέλειο» τετράγωνο στο αριστερό μέλος. Δηλαδή

$$4\alpha^2x^2 + 4\alpha\beta x = -4\alpha\gamma$$

$$4\alpha^2x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

$$(2\alpha x + \beta)^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

$$2\alpha x + \beta = \pm\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}, \text{ εφόσον } \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0.$$

Έτσι προκύπτει ότι: $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$.

ΣΧΟΛΙΟ

Η απλότητα της μεθόδου των Ινδών χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι το κλάσμα δεν εμφανίζεται παρά μόνο στο τελευταίο βήμα.

Μέθοδος του Vieta

Η εξίσωση 2ου βαθμού $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ μπορεί να λυθεί ευκολότερα, αν δεν περιέχει τον πρωτοβάθμιο όρο βx, πράγμα που μπορεί εύκολα να επιτευχθεί με την αντικατάσταση

$$x = y - \frac{\beta}{2\alpha} \qquad (1)$$

Τότε η εξίσωση γίνεται: $\alpha\left(y - \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \beta\left(y - \dfrac{\beta}{2\alpha}\right) + \gamma = 0$ η οποία όταν απλοποιηθεί γίνεται:

$$\alpha y^2 + \frac{-\beta + 4\alpha\gamma}{4\alpha} = 0.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι $y = \dfrac{\pm\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ εφόσον $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$.

Για να βρούμε τις ρίζες της αρχικής εξίσωσης αντικαθιστούμε την παραπάνω τιμή του y στην (1) και έχουμε:

$$x = y - \frac{\beta}{2\alpha} = \pm\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} - \frac{\beta}{2\alpha}$$

Οπότε
$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Η μέθοδος αυτή του Vieta είναι ενδιαφέρουσα, γιατί είναι ο προάγγελος της τεχνικής για την επίλυση της γενικής τριτοβάθμιας καθώς και της διτετράγωνης εξίσωσης. Για παράδειγμα, το πρώτο βήμα στην επίλυση της εξίσωσης $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$, είναι η αντικατάσταση $x = y - \dfrac{\beta}{3\alpha}$ που απαλλάσσει την εξίσωση από το δευτεροβάθμιο όρο.

Μέθοδος του Harriot

Ο μαθηματικός Thomas **Harriot** (1560-1621) εφάρμοσε τη μέθοδο της παραγοντοποίησης, για να βρει τις λύσεις μιας εξίσωσης 2ου βαθμού, στο μεγάλο έργο του για την άλγεβρα «Artis Analytical Praxis». Η τεχνική του είναι η εξής περίπου:

Υποθέτουμε ότι x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0 \qquad (1).$$

Σχηματίζουμε τώρα μία εξίσωση με ρίζες x_1 και x_2. Αυτή είναι η $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ ή, ισοδύναμα, η

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0 \qquad (2)$$

Με διαίρεση των μελών της (1) με $\alpha \neq 0$, βρίσκουμε:

$$x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \qquad (3)$$

Επειδή οι εξισώσεις (2) και (3) είναι ίδιες, οι αντίστοιχοι συντελεστές πρέπει να είναι ίσοι. Επομένως:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \qquad (4)$$

Η ταυτότητα $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$ σε συνδυασμό με την (4) δίνει

$$x_1 - x_2 = \pm\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{\alpha}, \quad [\text{εφόσον } \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0] \qquad (5)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (4) και (5) έχουμε:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Είναι αρκετό να θεωρήσουμε μόνο τη θετική τετραγωνική ρίζα της (5).
Η αρνητική ρίζα απλώς εναλλάσσει τη διάταξη των x_1 και x_2.

Παράστημα Β: Τεστ και φύλλα εργασίας

Κριτήριο Διαγνωστικής Αξιολόγησης - Εξισώσεις Α' και Β' Βαθμού

Δραστηριότητα 1.

Α. Τι σημαίνει η έκφραση «λύσε την εξίσωση»; Πόσες λύσεις μπορεί να έχει μια εξίσωση πρώτου βαθμού;

Β. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $2x=6$ **β)** $0x=2$

γ) $2x=0$ **δ)** $0x=0$

ε) $12-3x=0$ **στ)** $2x-1=3+x$

ζ) $4\cdot(x-1)-x=x-2$

Δραστηριότητα 2.

Α. Ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις είναι δευτέρου βαθμού; (Κύκλωσε το γράμμα που αντιστοιχεί στις εξισώσεις που επέλεξες).

α) $2x-3=x^2$

β) $x^2+2x+3=x\cdot(x-1)$

γ) $\lambda x^2+5x+6=0$, για όλες τις τιμές του λ.

δ) $(x+1)^2=0$

ε) $(x+3)\cdot(x-2)=-6$

Β. Για κάθε εξίσωση που επέλεξες, ποιο είναι το πλήθος των λύσεων;

Γ. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις με όποιον τρόπο επιθυμείτε:

α) $x^2=4$

β) $x^2-9=0$

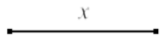
γ) $x^2+2x=0$

δ) $(x+1)^2=36$

ε) $x\cdot(x+1)=-2$

Φύλλο Εργασίας 1

Δραστηριότητα 1

Α. Αν το x εκφράζει το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος () , τότε να αναπαραστήσετε τις παρακάτω μαθηματικές εκφράσεις με γεωμετρικό τρόπο:

α) $2x$ **β)** $x+2$ **γ)** $x-2$ **δ)** x^2

ε) $3x^2$ **στ)** x^2-4 **ζ)** x^2+2x **η)** $x\cdot\left(x+2\right)$

Β. Μπορείτε να εντοπίσετε κάποια σχέση μεταξύ των παραστάσεων (β-γ-στ) και (ζ-η) και να τις ερμηνεύσετε γεωμετρικά με βάση το σχήμα που κατασκευάσατε;

Δραστηριότητα 2

Α. Να αναπαραστήσετε και να λύσετε γεωμετρικά τις εξισώσεις:

α) $x^2=4$ **β)** $3x^2=12$ **γ)** $x^2=2x$ **δ)** $x^2+4x=0$

Β. Πόσες λύσεις βρήκατε;

Γ. Να λύσετε τις ίδιες εξισώσεις με όποιον άλλον τρόπο επιθυμείτε. Παρατηρείτε κάποια διαφορά ως προς το πλήθος των λύσεων;

Δραστηριότητα 3

Α. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με τις παρακάτω λύσεις και να τις αναπαραστήσετε γεωμετρικά:

α) $x=3$

β) $x=0$ ή $x=3$

γ) $x=1$ ή $x=3$

Εργασία

1. Να αναπαραστήσετε και να λύσετε γεωμετρικά, αλλά και αλγεβρικά, τις παρακάτω εξισώσεις (άσκηση 2, σελίδα 93 του σχολικού βιβλίου):
   α) $x^2-1,69=0$ **β)** $0,5x^2-x=0$ **γ)** $3x^2+27=0$
2. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με τις παρακάτω λύσεις και να τις αναπαραστήσετε γεωμετρικά (άσκηση 6, σελίδα 94 του σχολικού βιβλίου):
   α) $x=2$ και $x=3$ **β)** $x=1$ και $x=\frac{1}{2}$

Φύλλο Εργασίας 2

Δραστηριότητα 1

Στη βαβυλωνιακή πινακίδα με κωδικό BM 34568 εντοπίζεται το εξής πρόβλημα:

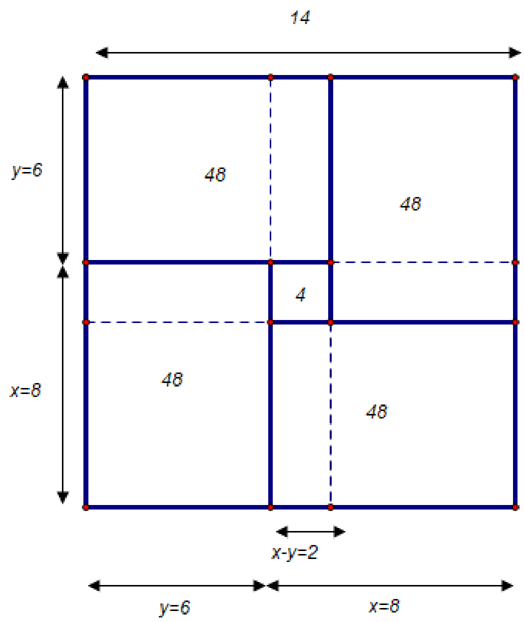
«Αν το μήκος και πλάτος μαζί (μιας ορθογώνιας έκτασης) είναι 14 και η επιφάνειά της 48, ποιο είναι το μήκος και ποιο το πλάτος;»

(Το πρόβλημα είναι διατυπωμένο στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης).

Α. Να λύσετε το παραπάνω πρόβλημα με όποιον τρόπο επιθυμείτε.

Β. Στην πρώτη στήλη του παρακάτω πίνακα υπάρχουν τα βήματα επίλυσης που καταγράφονται στην ίδια πινακίδα για το πρόβλημα. Στη δεύτερη στήλη χρησιμοποιείται η συμβολική διατύπωση της λύσης.

Λεκτική διατύπωση λύσης	**Αριθμητική διατύπωση λύσης**
14 φορές το 14, 196.	$14 \cdot 14 = 196$
48 φορές το 4, 192.	$48 \cdot 4 = 192$
Αφαίρεσε το 192 από το 196.	$196 - 192 = 4$
Πόσες φορές το πόσο κάνει 4;	$2 \cdot 2 = 4$
Αφαίρεσε το 2 από το 14, το υπόλοιπο είναι 12.	$14 - 2 = 12$
12 φορές το $1/2$, 6. Το πλάτος είναι 6.	$12 \cdot 1/2 = 6$
Στο 2 πρόσθεσε 6, γίνεται 8. Το μήκος είναι 8.	$2 + 6 = 8$



(όπου x και y τα δύο άγνωστα μεγέθη)

Με βάση το διπλανό σχήμα μπορείτε να περιγράψετε την αντίστοιχη πιθανή γεωμετρική ερμηνεία των βημάτων επίλυσης του προβλήματος;

Δραστηριότητα 2

Στη βαβυλωνιακή πινακίδα με κωδικό BM 13901 υπάρχει το ακόλουθο πρόβλημα:

«Από την επιφάνεια του τετραγώνου μου αφαίρεσα την πλευρά του και βρήκα 870. Ποια είναι η πλευρά του;»

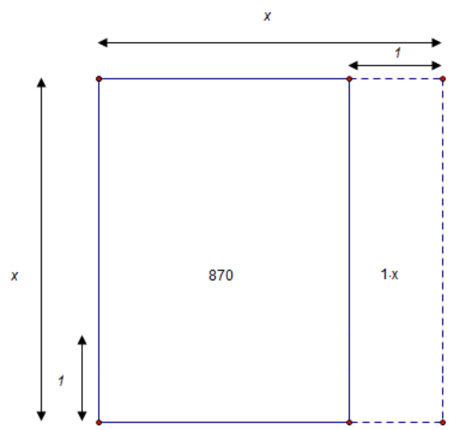
(Το πρόβλημα είναι διατυπωμένο στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης).

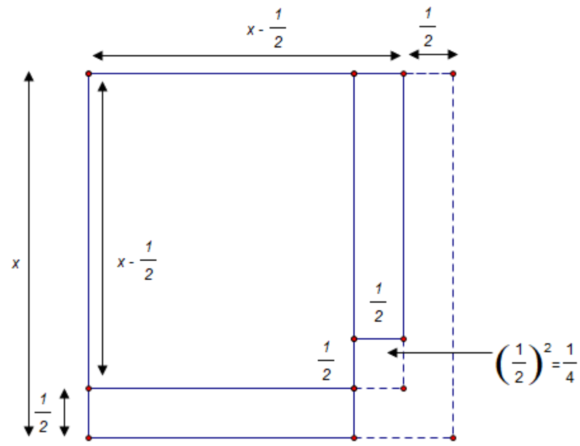
Α. Μπορείτε να διατυπώσετε μια εξίσωση που να αναπαριστά το πρόβλημα;

Β. Στην πρώτη στήλη του παρακάτω πίνακα υπάρχουν τα βήματα επίλυσης που καταγράφονται στην ίδια πινακίδα για το πρόβλημα. Να μετασχηματίσετε κάθε βήμα επίλυσης από τη λεκτική- αριθμητική του μορφή σε συμβολική αλγεβρική:

Λεκτική διατύπωση επίλυσης	**Αλγεβρική -Συμβολική διατύπωση επίλυσης**
Πάρε το μισό του $1\cdot$ είναι $\frac{1}{2}$.	
Τετραγώνισέ το· δίνει $\frac{1}{4}$.	
Πρόσθεσέ σε αυτό (στο $\frac{1}{4}$) το $870\cdot$ βρίσκεις $\frac{3.481}{4}$.	
Ποιος αριθμός στο τετράγωνο είναι $\frac{3.481}{4}$; Είναι ο $\frac{59}{2}$.	
Πρόσθεσε το $\frac{1}{2}$ στο $\frac{59}{2}\cdot$ βρίσκεις $\frac{60}{2}=30$, που είναι η ζητούμενη πλευρά του τετραγώνου.	

Γ. Με βάση τα παρακάτω σχήματα μπορείτε να περιγράψετε την αντίστοιχη πιθανή γεωμετρική ερμηνεία των βημάτων επίλυσης του προβλήματος;





Δ. Με βάση την αλγεβρική μορφή αναπαράστασης της λύσης που καταγράψατε να ελέγξετε αν υπάρχει και άλλη λύση.

Εργασία

Με τις ίδιες γεωμετρικές μεθόδους να λύσετε τα παρακάτω προβλήματα:

1. «Αν το μήκος και πλάτος μαζί (μιας ορθογώνιας έκτασης) είναι 20 και η επιφάνειά της 84, ποιο είναι το μήκος και ποιο το πλάτος;»
2. «Από την επιφάνεια του τετραγώνου μου αφαίρεσα το διπλάσιο της πλευράς του και βρήκα 24. Ποια είναι η πλευρά του;»

Φύλλο Εργασίας 3

Δραστηριότητα 1

Στη βαβυλωνιακή πινακίδα με κωδικό BM 13901 εντοπίζεται το ακόλουθο πρόβλημα:

«Το άθροισμα του εμβαδού ενός τετραγώνου και των $\frac{4}{3}$ *της πλευράς του είναι* $\frac{11}{12}$*, να βρεθεί η πλευρά του».*

(Το πρόβλημα είναι διατυπωμένο στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης).

Στην ίδια πινακίδα καταγράφεται και η λύση του:

«Παίρνουμε το μισό του $\frac{4}{3}$*, το τετραγωνίζουμε και αυτό που μας δίνει το προσθέτουμε στο* $\frac{11}{12}$*. Η τετραγωνική ρίζα αυτού που βρίσκουμε αν αφαιρεθεί κατά το μισό του* $\frac{4}{3}$ *μας δίνει την πλευρά του τετραγώνου. Το αποτέλεσμα είναι* $\frac{1}{2}$*.»*

Ο σπουδαίος Άραβας μαθηματικός Al- Khwarizmi έδωσε το παρακάτω πρόβλημα:

«Ποιο είναι το τετράγωνο το οποίο αν αυξηθεί κατά δέκα ρίζες του, γίνεται τριάντα εννέα;».

(Ο όρος «ρίζα» είναι ο αντίστοιχος αραβικός του όρου «άγνωστος»).

Ο ίδιος ο Al- Khwarizmi δίνει την απάντηση:

«Υποδιπλασιάζεις το πλήθος των ριζών που στο παράδειγμα αυτό μας δίνει 5. Μετά πολλαπλασιάζεις τον αριθμό αυτόν επί τον εαυτό του που δίνει 25. Προσθέτεις αυτό στο 39 και το άθροισμα είναι 64. Παίρνεις την τετραγωνική ρίζα αυτού που είναι 8 και αφαιρείς το μισό του πλήθους των πραγμάτων που είναι 5. Η διαφορά είναι 3. Αυτή είναι και η λύση του προβλήματος.»

Α. Να αναπαραστήσετε με μια εξίσωση κάθε ένα από τα παραπάνω προβλήματα.

Β. Παρατηρείται κάποια διαφορά ως προς τον τρόπο επίλυσης των δύο προβλημάτων;

Γ. Να μετασχηματίσετε την παραπάνω λεκτική μορφή λύσης του Al- Khwarizmi σε αλγεβρική.

Δραστηριότητα 2

Ο Al- Khwarizmi δίνει και μια γεωμετρική λύση στο πρόβλημα (μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου), η οποία περιγράφεται ακολούθως:

«Ο Al- Khwarizmi αρχίζει με το τετράγωνο x^2, προσθέτει δυο ορθογώνια καθένα από τα οποία έχει πλάτος 5 (το μισό του πλήθους των ριζών) (εννοεί στις δύο κάθετες πλευρές του τετραγώνου). Τότε, το άθροισμα του τετραγώνου και των δύο ορθογωνίων είναι $x^2+10x=39$. Έπειτα, συμπληρώνει το τετράγωνο με ένα τετραγωνάκι εμβαδού 25 οπότε παίρνει τετράγωνη περιοχή συνολικού εμβαδού 64. Η λύση $x=3$ συνάγεται εύκολα».

Α. Να αναπαραστήσετε γεωμετρικά τα παραπάνω βήματα επίλυσης κατασκευάζοντας τα κατάλληλα σχήματα (ή σχήμα) και να συνδέσετε κάθε γεωμετρικό βήμα με το αντίστοιχο αλγεβρικό.

Β. Η λύση του προβλήματος είναι μοναδική;

Εργασία

Να λύσετε με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου του Al-Khwarizmi τις παρακάτω εξισώσεις, περιγράφοντας τα αλγεβρικά και γεωμετρικά βήματα επίλυσης:

α) $x^2+6x=7$ **β)** $x^2+5x=14$ **γ)** $2x^2+10x=48$

Φύλλο εργασίας 4

Δραστηριότητα 1

Στο προηγούμενο φύλλο εργασίας λύσαμε με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου (αλγεβρικά και γεωμετρικά) την εξίσωση $x^2+10x=39$.

Α. Με τη βοήθεια των βημάτων επίλυσης σε αλγεβρική μορφή που καταγράψατε, να γενικεύσετε τη διαδικασία επίλυσης για τη μορφή $x^2+\beta x=\gamma$ κι έπειτα για την $\alpha x^2+\beta x=\gamma$.

Β. Με τη βοήθεια των λύσεων της $\alpha x^2+\beta x=\gamma$, να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$. Παρατηρήστε και σχολιάστε τις λύσεις στις οποίες καταλήξατε.

Γ. Μπορείτε να αναπαραστήσετε τη διαδικασία επίλυσης της $\alpha x^2+\beta x=\gamma$ και γεωμετρικά;

Εργασία

Α. Θεωρείτε πως η επίλυση της εξίσωσης $x^2+6x+8=0$ είχε νόημα για τον Al-Khwarizmi; Να λύσετε την εξίσωση με τη χρήση του τύπου.

Β. Να λύσετε την εξίσωση $x^2+8=6x$ (με όποιον τρόπο επιθυμείτε). Τι παρατηρείτε σχετικά με τις λύσεις των εξισώσεων $x^2+6x+8=0$ και $x^2+8=6x$;

Κριτήριο Αξιολόγησης – Εξισώσεις β' βαθμού

Ονοματεπώνυμο:____________________________________ **Τμήμα:**__________________

Δραστηριότητα 1

Να αναπαραστήσετε γεωμετρικά και να λύσετε (με όποιον τρόπο επιθυμείτε) τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^2 = 9$ **β)** $2x^2 = 8$ **γ)** $x^2 = 3x$

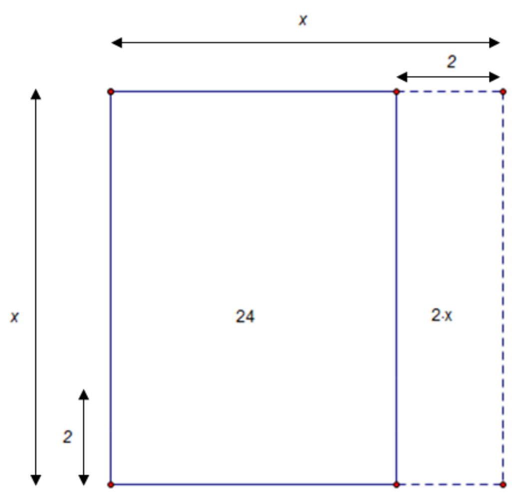
Δραστηριότητα 2

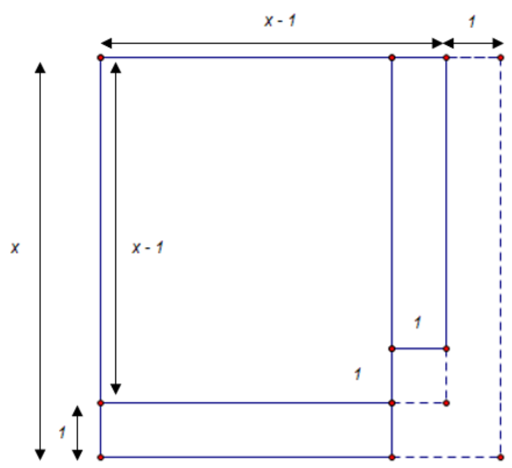
Να κατασκευάσετε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με τις παρακάτω λύσεις και να τις αναπαραστήσετε γεωμετρικά:

α) $x = 2$ **β)** $x = 0$ ή $x = 2$ **γ)** $x = \frac{1}{2}$ ή $x = 1$

Δραστηριότητα 3

Με βάση τα δύο παρακάτω σχήματα να γράψετε την εξίσωση δευτέρου βαθμού που αναπαρίσταται και έπειτα να προσδιορίσετε τη λύση του:





Δραστηριότητα 4

Να λύσετε με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου του Al-Khwarizmi τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^2 + 4x = 5$ **β)** $2x^2 + 10x = 28$

Δραστηριότητα 5

Να λύσετε την εξίσωση $x^2 + 5x + 4 = 0$ με χρήση του τετραγωνικού τύπου. Θεωρείτε πως η επίλυση της εξίσωσης είχε νόημα για τον Al-Khwarizmi;