ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Α΄ΗΛΙΚΙΑΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Διπλωματική εργασία

«Η γενίκευση στα γεωμετρικά σχήματα»

της

Ακρανίδου Ελένης

Α.Ε.Μ. 958

Επιβλέπουσα: Καθηγήτρια: Τζεκάκη Μαριάννα, Καθηγήτρια Α.Π.Θ

Μέλη Τριμελούς Επιτροπής: Καλδρυμίδου Μαρία, Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, καθηγητής Π.Δ.Μ

Φλώρινα, Φεβρουάριος 2023

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ολοκληρώνοντας, λοιπόν, αυτό το ταξίδι των μεταπτυχιακών μου σπουδών θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες σε όλους όσους συνέβαλλαν στην εκπόνησή της.

Αρχικά, ευχαριστώ ιδιαίτερα την επιβλέπουσα καθηγήτρια κ. Τζεκάκη Μαριάννα για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε εξ' αρχής, την επιστημονική της καθοδήγηση, τις υποδείξεις της και την υποστήριξή της, καθώς η συμβολή της ήταν ουσιαστική κατά τη συγγραφή της παρούσας μελέτης.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές κ. Νικολαντωνάκη Κωνσταντίνο και κ. Καλδρυμίδου Μαρία για τις χρήσιμες παρατηρήσεις τους και τη συμμετοχή τους στην τριμελή εξεταστική επιτροπή.

Ευχαριστώ πολύ τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα, διότι χωρίς τη συνεργασία τους η ολοκλήρωση της εργασίας αυτής δε θα ήταν εφικτή.

Ακόμη, ευχαριστώ τους γονείς μου, Δήμητρα και Στέλιο, για τη στήριξή τους και όσα μου έχουν προσφέρει όλα αυτά τα χρόνια, σε κάθε μου προσπάθεια.

Τέλος, ευχαριστώ τον αγαπημένο μου Παντελή, για την ενθάρρυνση, τις συμβουλές και την κατανόηση που έδειξε αυτό το διάστημα.

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε με σκοπό να διερευνήσει το επίπεδο γενίκευσης των μαθητών Ε' Δημοτικού και τις στρατηγικές που εφαρμόζουν κατά την γενίκευση γεωμετρικών σχημάτων. Στην έρευνα συμμετείχαν 19 μαθητές της Ε΄ δημοτικού οι οποίοι κλήθηκαν να αναγνωρίσουν γεωμετρικά σχήματα, να τα κατηγοριοποιήσουν, να τα κατασκευάσουν και τέλος να τα μετασχηματίσουν. Κατά τη διάρκεια ενασχόλησής τους με τις παραπάνω δράσεις, κλήθηκαν να απαντήσουν σε ερωτήσεις που είχαν σκοπό να εντοπίσουν τον τρόπο σκέψης τους, την εστίασή τους, αλλά και τις γενικότερες ιδέες τους αναφορικά με τα γεωμετρικά σχήματα. Μέσα από τα 3 έργα που δόθηκαν στους μαθητές και από τις απαντήσεις τους στις ερωτήσεις που τους τέθηκαν, διαπιστώθηκε ότι εργάζονται στο 1^{ο} και στο 2^{ο} επίπεδο γενίκευσης. Ειδικότερα, οι μαθητές είναι σε θέση να αναγνωρίσουν τα γεωμετρικά σχήματα, κυρίως όταν βρίσκονται σε πρωτοτυπικές θέσεις. Ωστόσο, ελάχιστοι αναγνώρισαν το τραπέζιο και κανένας την έλλειψη. Ακόμη, το δείγμα της έρευνας είναι ικανό να κατασκευάσει γεωμετρικά σχήματα, όπως, επίσης, και διαφορετικές αναπαραστάσεις αυτών. Ωστόσο, ο μετασχηματισμός των γεωμετρικών σχημάτων αποδείχθηκε ότι πρόκειται για μία δύσκολη και απαιτητική διαδικασία για τους συμμετέχοντες, όπου ελάχιστοι ήταν αυτοί που ολοκλήρωσαν το έργο αυτό. Αναφορικά με τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν κατά τη γενίκευση των ιδεών και των δράσεων τους, οι συμμετέχοντες κυρίως περιέγραφαν μία διαδικασία που είχαν εκτελέσει προηγουμένως, είτε προσπαθούσαν να βρουν έναν κανόνα που να ταιριάζει σε μια συγκεκριμένη περίπτωση ενός γεωμετρικού σχήματος (Στρατηγική μαντέψτε και ελέγξτε), είτε χρησιμοποιούσαν εμπειρικές αποδείξεις. Τέλος, αρκετοί ήταν εκείνοι, οι οποίοι δεν ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους

Λέξεις-κλειδιά: γενίκευση γεωμετρικών σχημάτων, ικανότητα γενίκευσης γεωμετρικών σχημάτων, επίπεδο γενίκευσης μαθητών, στρατηγικές γενίκευσης γεωμετρικών σχημάτων, πρωτοβάθμια εκπαίδευση

ABSTRACT

This research has been conducted in order to investigate the level of the generalization on 5th grade students and the strategies they use during the generalization of the geometric shapes. In this research participated 19 students of the 5th grade. The students had to recognize the geometric shapes, categorize them , construct them and lastly remodel them. During these activities, they have been asked to answer specific questions which have been made to find the way they think, their focus, but also their general ideas in regards to the geometric shapes. Based on the 3 tasks given to students and the answers they gave to the questions, is established that they work through the 1st and the 2nd level of generalization. Specifically, the students are capable of recognizing the geometrical shapes, mainly when they are in their original prototype orientation. However, only a few recognized the trapezium and no one the ellipse. Furthermore, the research sample was capable of creating geometrical shapes as well as their different representations. Nevertheless, the remodeling of the shapes proven to be a hard and demanding task for the participants, mainly because only a few managed to finish that task. Regarding the strategies they used during the generalization of their ideas and actions, the participants either described the procedure they just put through, or they tried to find a rule which fits in the particular case of a geometrical shape(guess and check strategy), or they used proof of their own experiences. Lastly, many of them could not justify their answers.

Key words: geometrical shapes generalization, ability to generalize geometrical shapes, generalization levels in students, generalization strategies on geometrical shapes, primary education

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται την έννοια της γενίκευσης αναφορικά με τα γεωμετρικά σχήματα. Η σημασία της μαθηματικής γενίκευσης είναι ευρέως αναγνωρισμένη, γι' αυτό και η ανάπτυξη της ικανότητας αυτής κατέχει αξιοσημείωτη θέση στην μαθηματική εκπαίδευση και είναι σημαντικό να αποτελεί βασικό στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης (Davidov, 1990˙ Iwasaki, 1997˙ Mason, et al, 2011˙ Cadez & Kolar, 2015 ˙ Tzekaki & Papadopoulou, 2016˙). Μάλιστα, αρκετές έρευνες έχουν πραγματοποιηθεί αναφορικά με την ανάπτυξη της ικανότητας γενίκευσης, αλλά μελετούν τα πρότυπα και την άλγεβρα σε μεγαλύτερους μαθητές (Zazkis, Liljedahl, & Chernoff, 2008; Lannin, 2005), σε αντίθεση με το πεδίο της γεωμετρίας, όπου αντίστοιχες μελέτες είναι περιορισμένες (Tzekaki & Papadopoulou, 2016˙ 2017). Για το λόγο αυτό, η έρευνα αυτή θα διερευνήσει τις ικανότητες γενίκευσης των μαθητών Ε' δημοτικού, το επίπεδο γενίκευσής τους, αλλά και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν αναφορικά με τα γεωμετρικά σχήματα.

Επομένως, στο 1ο μέρος της εργασίας, πραγματοποιείται μία βιβλιογραφική ανασκόπηση, όπου αναλύονται η έννοια της γενίκευσης, η σημασία που κατέχει στην μαθηματική εκπαίδευση, τα επίπεδα και οι στρατηγικές γενίκευσης. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται δύο μοντέλα, τα οποία περιγράφουν την εννοιολόγηση και την κατανόηση των γεωμετρικών σχημάτων, αυτό της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών σύμφωνα με τους van Hiele, καθώς και ο ρόλος των πρωτοτυπικών παραδειγμάτων. Ακόμη, αναδεικνύονται υπάρχοντα ερευνητικά ευρήματα αναφορικά με την αναγνώριση και την ονομασία των γεωμετρικών σχημάτων, τις ιδέες των μαθητών για τα γεωμετρικά σχήματα, την ανάπτυξη γεωμετρικής σκέψης και την γενίκευση γεωμετρικών σχημάτων. Στο 2ο μέρος, παρουσιάζεται η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε στην παρούσα έρευνα, το δείγμα της έρευνας, το ερευνητικό εργαλείο που σχεδιάστηκε, η ερευνητική διαδικασία, ο τρόπος ανάλυσης των δεδομένων που συλλέχθηκαν, καθώς και οι απαραίτητες εννοιολογικές αποσαφηνίσεις, σύμφωνα με τον σκοπό και τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν. Στο 3ο μέρος, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας σε κάθε έργο ξεχωριστά και τέλος, στο 4ο μέρος τα συμπεράσματα, σύμφωνα με τα δύο ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας.

1ο Μέρος: Βιβλιογραφική ανασκόπηση

1. Γενίκευση

1.1 Η έννοια της γενίκευσης

Μελετώντας την υπάρχουσα βιβλιογραφία παρατηρείται ότι αρκετοί ερευνητές έχουν προσπαθήσει να ορίσουν την έννοια της γενίκευσης, όπως παρουσιάζεται παρακάτω.

Αρχικά, οι Davydov (1990) και Dörfler (1991) λαμβάνουν την γενίκευση ως μια κοινωνική-γνωστική διαδικασία και τη βάση του σχηματισμού μίας έννοιας, το προϊόν της οποία αποτελεί μία γνωστική κατασκευή και αναφέρεται σε ένα πραγματικό ή δυνητικά πολλαπλό σύνολο με έναν ορισμένο τρόπο. Η διαδικασία αυτή είναι, συγχρόνως, ατομική και κοινωνική, καθώς χρησιμοποιεί και εξαρτάται από μέσα, όπως η γλώσσα, που επιτυγχάνονται και προετοιμάζονται από την κοινωνία (Dörfler, 1991˙Cadez & Kolar, 2015˙ Dumitrascu, 2017). Η Ellis (2007) τονίζει, ότι η γενίκευση δεν λαμβάνεται υπόψη μόνο ως η παραγωγή ενός σωστού μαθηματικού κανόνα ή αρχής, αλλά και η θεώρηση αυτού ως μαθηματικά χρήσιμου σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο από την πλευρά των ειδικών.

Αναλυτικότερα, η διαδικασία της γενίκευσης στα μαθηματικά αποτελεί ένα σύστημα δραστηριοτήτων που περιέχει συγκεκριμένες δράσεις και λειτουργίες, μία διαδικασία μέσω της οποίας λαμβάνεται μια γενική δήλωση. Αυτό προϋποθέτει μία μετάβαση από συγκεκριμένες, γνωστές πληροφορίες, που βασίζονται σε τυπικούς λογικούς κανόνες, στο γενικό και μία σύνδεση μεταξύ αυτών. Η μετάβαση από το συγκεκριμένο στο γενικό υλοποιείται ανιχνεύοντας ιδιότητες, εξετάζοντας προσεκτικά μια ερώτηση με σκοπό τον εντοπισμό διάφορων περιορισμών και τον ρόλο αυτών και εντοπίζοντας στρατηγικές. Συγχρόνως, μέσω αυτής της διαδικασίας προσδιορίζεται κάτι γενικό που είναι ήδη γνωστό σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, και μέσω αυτής εντοπίζεται κάτι γενικό που δεν είναι γνωστό από μεμονωμένες και ιδιαίτερες περιπτώσεις. Συνεπώς, το γενικό περιέχει όλη την ποικιλομορφία του συγκεκριμένου, γι’ αυτό και διεξάγονται συμπεράσματα, τα οποία εφαρμόζονται σε ένα ευρύτερο πλαίσιο (Harel & Tall, 1991˙ Dörfle, 1991˙ Ellis, 2007˙ Lannin, Ellis & Elliot, 2011˙ Mason, Burton & Stacey, 2011 ˙ Cadez & Kolar, 2015 ˙ Tateo, 2015 ˙ Dumitrascu, 2017).

Συμπληρωματικά, ο Kaput (1999), όπως αναφέρουν οι Yeap και Kaur (2008), Ellis (2007), Zazkis, κ.α. (2008), Lannin, κ.α. (2011), Malara (2012), όπως αναφέρεται στο Vigh (2013), Hashemia, κ.α. (2013), Čadež και Kolar (2015) και Tzekaki και Papadopoulou (2016) ορίζουν την γενίκευση ως μία διαδικασία η οποία στοχεύει στην αναζήτηση και στον εντοπισμό κοινών χαρακτηριστικών, στοιχείων, πρότυπων, δομών, σχέσεων και κανόνων σε όλες τις περιπτώσεις, δημιουργώντας συνδέσεις σε διαφορετικά επίπεδα της μαθηματικής σκέψης και επεκτείνοντας την συλλογιστική πέρα από το εύρος από το οποίο προήλθε, αναλύοντας πολυάριθμα αντικείμενα και εξετάζοντας μεμονωμένες περιπτώσεις.

Συνεπώς, η γενίκευση είναι μια μέθοδος που βοηθά στην κάλυψη της απόστασης μεταξύ της προηγούμενης γνώσης και των νέων εννοιών, επειδή η γενίκευση μπορεί να κάνει τη σύνδεση από τις προηγούμενες γνώσεις για να φθάσει στις νέες σχετικές έννοιες (Hashemia, et al., 2013)

Ακόμη, ο Stylianidis (2007), όπως αναφέρεται στο Weinberg (2019), προσθέτει στην έννοια της γενίκευσης μία ακόμη διάσταση, καθώς την εκλαμβάνει ως την διατύπωση της απόδειξης, διότι υποστηρίζει το πόρισμα που κατέχει κάποια ιδιότητα ή τεχνική για όλα τα μαθηματικά αντικείμενα ή τις μαθηματικές συνθήκες.

Συμπερασματικά, η γενίκευση αποτελεί μία κοινωνική – γνωστική διαδικασία μέσω της οποίας εξετάζονται συγκεκριμένες καταστάσεις και αναζητούνται πρότυπα και σχέσεις, κάνοντας εικασίες. Στη συνέχεια, εντοπίζονται τα κοινά σημεία και διεξάγονται συμπεράσματα μεταβαίνοντας από το ειδικό πλαίσιο σε ένα γενικό. Τα συμπεράσματα αυτά εφαρμόζονται και ισχύουν σε μία μεγάλη ομάδα και όχι μόνο σε μία συγκεκριμένη περίπτωση. Κλείνοντας, πρόκειται για τον ακρογωνιαίο λίθος μίας έννοιας, διότι μέσω της γενίκευσης δημιουργείται ένας συνδετικός κρίκος μεταξύ των προϋπάρχουσων γνώσεων και των νέων, αλλά και μία μορφή απόδειξης.

1.2 Σημασία γενίκευσης στην μαθηματική εκπαίδευση

Η ικανότητα γενίκευσης είναι ιδιαίτερης σημασίας για την καθημερινότητα των ατόμων. Κάθε αντικείμενο θα ήταν διαφορετικό από κάθε άλλο, διότι τα άτομα δε θα ήταν σε θέση να εντοπίζουν ομοιότητες και διαφορές (Dörfler, 1991). Στην πραγματικότητα, η σημασία των γενικεύσεων δεν περιορίζεται μόνο στην ατομική σκέψη, αλλά αναφέρεται εξίσου στην κοινωνική επικοινωνία. Από την άλλη πλευρά, τα μαθηματικά αναπτύσσουν τη λογική-συμπερασματική συλλογιστική και αφαιρετική συλλογιστική, καθώς και την σχέση των μαθητών με τη γλώσσα της επιστήμης και της τεχνολογίας, θέτοντας ένα βασικό χαρακτηριστικό της ανθρώπινης σκέψης και δράσης, τη γενίκευση (Santi & Baccaglini-Frank, 2015).

Αναφορικά με την μαθηματική γενίκευση, η σημασία της είναι ευρέως αναγνωρισμένη (Butler, 1960˙ Davidov, 1990˙ Iwasaki, 1997˙ Mason, et al, 2011˙ Cadez & Kolar, 2015). Πρόκειται για μία εξέχουσα διαδικασία επιστημονικής σκέψης και αποτελεί έναν από τους πρωταρχικούς στόχους της εκπαιδευτικής πρακτικής, καθώς βοηθάει τους μαθητές να αναπτύξουν ισχυρές γενικευμένες γνώσεις, οι οποίες θα υποστηρίξουν τις ικανότητές τους να δημιουργήσουν γενικεύσεις, τις οποίες θα συνδυάσουν με τις προϋπάρχουσες εμπειρίες τους, θα τις μεταφέρουν σε νέες και άγνωστες συνθήκες, με σκοπό την επίλυση προβλημάτων. Επιπλέον, προβλέπει μαθηματικά έγκυρες αλήθειες με βάση συγκεκριμένες περιπτώσεις και προάγει την δημιουργικότητα των μαθητών. Επίσης, η γενίκευση βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν τις έννοιες και να ξεπεράσουν τυχόν δυσκολίες που μπορεί να αντιμετωπίζουν (Ellis, 2007˙ Mason, et al., 2010˙ Hashemia, et al., 2013˙ Cadez & Kolar, 2015).

Συμπληρωματικά, τα αποτελέσματά της μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως βάση για την ανάπτυξη μοντέλων για γνωστικές διεργασίες που οδηγούν τον τύπο της γνώσης που αναλύεται επιστημολογικά, τα οποία, στη συνέχεια, μπορούν να αξιολογηθούν εμπειρικά. Κατά μήκος τέτοιων επιστημολογικά τεκμηριωμένων ψυχολογικών θεωριών μπορούν να αναπτυχθούν διδακτικές προτάσεις, οι οποίες και πάλι μέσα από τις πρακτικές υλοποιήσεις τους στην σχολική τάξη προσφέρουν ευκαιρίες για εμπειρική αξιολόγηση (Dörfler, 1991).

Επιπροσθέτως, η δραστηριότητα της γενίκευσης στη γεωμετρία είναι πολύ σημαντική, και συνεπώς στην έρευνα για τη μάθηση και τη διδασκαλία της γεωμετρίας, ωστόσο αποτελεί ένα δύσκολο έργο για τους μαθητές. Η γενίκευση στο πεδίο της γεωμετρίας αναγκάζει τους μαθητές να διευκρινίσουν τις γεωμετρικές έννοιες, να εξετάσουν και να συγκρίνουν τις ιδιότητες των σχημάτων. Συγχρόνως, δοκιμάζουν κριτικά κάθε ειδικό θεώρημα, για να βεβαιωθούν ότι ισχύει ή όχι μια ειδική περίπτωση σύμφωνα με τη γενική πρόταση. Επίσης, προκαλεί και διατηρεί το ενδιαφέρον των μαθητών, διότι χαρακτηρίζεται από ένα στοιχείο ανακάλυψης. Τέλος, χρησιμεύει για τη σύνδεση και την παροχή οργάνωσης σε σύνολα ξεχωριστών αλλά σχετικών θεωρημάτων, και αυτό, με τη σειρά του, δίνει κάποια διαβεβαίωση ότι θα θυμούνται σωστά (Butler, 1960).

Συμπερασματικά, η γενίκευση αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την επίτευξη μίας αποτελεσματικής διδασκαλίας και μάθησης σε όλα τα επίπεδα της μαθηματικής εκπαίδευσης, για το λόγο αυτό η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να γενικεύουν τίθεται και ως ένας από τους κύριους σκοπούς της μαθηματικής εκπαίδευσης καθώς και η ενθάρρυνση των μαθητών να ακολουθούν την διαδικασία αυτή (Davidov, 1990˙Iwasaki, 1997˙ Becker & Rivera, 2005˙ Hashemia, et al., 2013˙ Park & Kim, 2017).

1.3 Επίπεδα γενίκευσης

Οι Mason, κ.α. (2011) υποστηρίζουν ότι η γενίκευση ξεκινά όταν ένα υποκείμενο μοτίβο, γίνεται αισθητό, ακόμα κι αν δεν μπορεί κάποιος να το αρθρώσει. Από την άλλη πλευρά, ο Iwasaki (1997) θεωρεί, ότι η γενίκευση αρχίζει μετά την επίλυση ενός προβλήματος, αν η σκέψη έλκεται από δραστηριότητες, όπως είναι η εξαγωγή μαθηματικών σχέσεων μεταξύ των φαινομένων, αντικατοπτρίζοντας τη δική του υπάρχουσα σκέψη, την σχηματοποίηση κάποιου φαινομένου, την αναζήτηση των συνδέσεων μεταξύ τους, την αναδιοργάνωση ή τη δημιουργία αυτών των σχέσεων ως ένα νέο είδος σχήματος.

Ο Rubinshtein (1994), όπως αναφέρει η Dumitrascu (2017) θεώρησε ότι η διαδικασία της γενίκευσης χρειάζεται να μεταβεί από τρεις διανοητικές ενέργειες, την ανάλυση, την σύνθεση, και την αφαίρεση για να πραγματοποιηθεί και απαιτούνται τρία στάδια. Κατά την πρώτη διανοητική ενέργεια, η οποία σχετίζεται και με το πρώτο επίπεδο γενίκευσης, την "εμπειρική γενίκευση" στόχος είναι να προσδιοριστεί μία γενική δήλωση μέσω της μεθόδους της ανάλυσης, συγκρίνοντας και περιγράφοντας τον τρόπο με τον οποίο ένα αντικείμενο είναι παρόμοιο ή πανομοιότυπο με άλλα αντικείμενα και εντοπίζοντας, τελικά, τα κοινά χαρακτηριστικά τους. Κατά το δεύτερο επίπεδο, μέσω της μεθόδου της σύνθεσης η δραστηριότητα επικεντρώνεται στην ανάλυση και την αφαίρεση διακρίνοντας τι είναι ή δεν είναι ουσιώδες, δηλαδή εκείνο το χαρακτηριστικό του που παραμένει αμετάβλητο κατά τον μετασχηματισμό και τις αλληλεπιδράσεις του με άλλα αντικείμενα. Όταν το ουσιώδες οριοθετείται, γίνεται αμέσως αφηρημένο. Στη συνέχεια, το αφηρημένο μπορεί να συντεθεί σε ένα συγκεκριμένο συμπέρασμα. Αυτή η γενίκευση ονομάζεται επιστημονική ή θεωρητική γενίκευση. Κατά το τρίτο επίπεδο, απαιτείται η διαδικασία της αφαίρεσης, η οποία ορίζεται ως «η πνευματική οριοθέτηση ορισμένων ιδιοτήτων των αντικειμένων και ο διαχωρισμός τους από όλες τις άλλες ιδιότητες» (Davydov, 1990, σ. 38) και απαιτείται μία θεωρητική παραγωγή, η οποία επιτυγχάνεται με τη σύνδεση του γενικού και του συγκεκριμένου, καθώς η γενίκευση και η θεωρητική γνώση είναι αλληλένδετες (Davydov, 1990˙ Dumitrascu, 2017).

Συγκεκριμένα, αναφορικά με τα γεωμετρικά σχήματα, οι Tzekaki και Papadopoulou (2016), Brunheira και Ponte (2019) και Ovadiya (2019) έχουν αναπτύξει κάποια στάδια τα οποία απαιτούνται, για να ολοκληρωθεί η διαδικασία της γενίκευσης. Οι Tzekaki και Papadopoulou (2016), έχουν προσδιορίζει 3 επίπεδα οι Brunheira και Ponte (2019) 4 επίπεδα και η Ovadiya (2019) 6 επίπεδα.

Το πρώτο επίπεδο, λοιπόν, χαρακτηρίζεται από χαμηλή αναγνώριση των οπτικών χαρακτηριστικών μιας κατηγορίας σχήματος (Tzekaki & Papadopoulou, 2016˙ Brunheira &

Ponte, 2019˙ Ovadiya, 2019). Ειδικότερα, οι Tzekaki και Papadopoulou (2016) προσθέτουν ότι αναγνωρίζονται οι κατηγορίες των (πρωτοτυπικών) γεωμετρικών σχημάτων, χωρίς, όμως, να κατονομάζονται και αναγνωρίζονται οι κατηγορίες των σχημάτων με βάση οπτικά ολιστικά χαρακτηριστικά, με δυνατότητα της ονομασίας τους, και η Ovadiya (2019) προσθέτει σχετικά με την κατασκευή τους ότι πραγματοποιείται χωρίς να γίνονται κατανοητά όλα τα χαρακτηριστικά του. Από την άλλη πλευρά, οι Brunheira και Ponte (2019) αναφέρουν ότι τα επιχειρήματα αναφέρονται στις γεωμετρικές σχέσεις, χωρίς, όμως, να υπάρχει σύνδεση με τη δομή των σχημάτων, ικανότητα η οποία εντοπίζεται στο δεύτερο επίπεδο σύμφωνα με τις Tzekaki και Papadopoulou (2016). Ακόμη, στο πρώτο επίπεδο, κατά την γενίκευση, το άτομο επικεντρώνεται σε ένα ή περισσότερα γεωμετρικά σχήματα, χωρίς να γενικεύει ή/και επικεντρώνεται σε ένα γενικό παράδειγμα.

Κατά το δεύτερο επίπεδο, η Ovadiya (2019) αναφέρει ότι αναγνωρίζουν ένα χαρακτηριστικό μίας κατηγορίας γεωμετρικών σχημάτων, ενώ οι Tzekaki και Papadopoulou (2016) ,όπως προαναφέρθηκε, ότι η γενίκευση των γεωμετρικών σχημάτων βασίζεται στην οπτική αναγνώριση, χωρίς να αναγνωρίζονται οι σχέσεις των σχημάτων περιγράφοντας επιπρόσθετες ικανότητες. Συγκεκριμένα, οι μαθητές αναγνωρίζουν ορισμένα στοιχεία και ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων, δίχως να τα ονομάζουν, αναγνωρίζουν, όμως, τα περισσότερα στοιχεία και τις ιδιότητές τους, με δυνατότητα της ονομασίας τους και αναγνωρίζουν όλα τα στοιχεία, τις ιδιότητες και ορισμένες σχέσεις των γεωμετρικών σχημάτων, με δυνατότητα προφορικής εξήγησης (μερικά από αυτά), ικανότητες οι οποίες παρατηρούνται στο τρίτο επίπεδο των Brunheira και Ponte (2019). Συγκεκριμένα, οι Brunheira και Ponte (2019) υποστηρίζουν ότι στο δεύτερο στάδιο τα επιχειρήματα βασίζονται στην εσφαλμένη γεωμετρική διάρθωση της οικογένειας των σχημάτων, ενώ γίνεται αναφορά σε χαρακτηριστικά μη σχετικά, ή σε χαρακτηριστικά το οποία δεν υφίσταται. Επίσης, στο επόμενο επίπεδο, οι Brunheira και Ponte (2019) υποστηρίζουν ότι η φύση του επιχειρήματος βασίζεται στην ελλιπή γεωμετρική διάρθρωση της οικογένειας των σχημάτων, ενώ γίνεται αναφορά σε ιδιότητες που ισχύουν, αλλά παραλείπονται άλλες. Κατά την προσπάθεια γενίκευσης, τόσο στο δεύτερο όσο και στο τρίτο επίπεδο χρησιμοποιείται μια γενική γλώσσα σχετικά με τα σχήματα, δίνεται βάση σε ένα γενικό παράδειγμα, ή/και σε ένα ή περισσότερα γεωμετρικά σχήματα χωρίς να γενικεύει. Η Ovadiya (2019) αναφέρει ότι στο στάδιο αυτό, γενικεύεται ένα χαρακτηριστικό ενός γεωμετρικού σχήματος σε μία ολόκληρη κατηγορία γεωμετρικών σχημάτων. Στα δύο επόμενα επίπεδα, αναλύονται τα γεωμετρικά σχήματα, γενικεύονται κοινά χαρακτηριστικά και αναπτύσσεται η ικανότητα κατασκευής ενός γεωμετρικού σχήματος, όχι μόνο ως τεχνική ικανότητα αλλά ως αποτέλεσμα της γενίκευσης.

Στο τελευταίο επίπεδο των προσεγγίσεων των Tzekaki και Papadopoulou (2016) και Brunheira και Ponte (2019) τα επιχειρήματα βασίζονται στη σωστή γεωμετρική διάρθρωση της οικογένειας των σχημάτων, γίνεται αναφορά σε σχετικές και υπαρκτές ιδιότητες τους και αναγνωρίζουν τις σχέσεις μεταξύ των χαρακτηριστικών των σχημάτων, με δυνατότητα προφορικής εξήγησης. Διατυπώνουν προτάσεις με ιδιαίτερο επίπεδο γενικότητας, χρησιμοποιώντας μία γενική γλώσσα σχετικά με τα σχήματα. Η Ovadiya (2019) επικεντρώνεται στην ικανότητα επίλυσης προβλήματος και στην ανάπτυξη σχέσεων μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών, γεγονός που υποδηλώνει την «απόλυτη» γενίκευση, όπως υποστηρίζει.

1.4 Στρατηγικές γενίκευσης

Οι στρατηγικές γενίκευσης χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά, για να δείξουν τις διαδικασίες, οι οποίες υπάρχουν σε ευρύτερα πλαίσια και για να βοηθήσουν τον λύτη προβλημάτων να μάθει για τα προϊόντα αυτών των διαδικασιών (Hashemia, et al. 2013).

Μελετώντας την βιβλιογραφία, εντοπίστηκαν στρατηγικές γενίκευσης, οι οποίες χρησιμοποιούνται από τους μαθητές, στην άλγεβρα και σε κανονικότητες.

Αρχικά, ο Lannin (2005) διερεύνησε τον τρόπο με τον οποίο μαθητές Στ’ τάξης ερμηνεύουν και προχωρούν σε γενικεύσεις ενός κανόνα σε μοτίβα με εικονική ή λεκτική αναπαράσταση και παρατήρησε πέντε διαδοχικά επίπεδα, τα οποία βαθμιαία αναπτύσσονταν. Κατά το πρώτο επίπεδο (καμία αιτιολόγηση) τα παιδιά αδυνατούν να αιτιολογήσουν, συνεχίζοντας (επίκληση στην αυθεντία) αναφέρονται στην ορθότητα που υποστηρίζεται από άλλα άτομα ή άλλο υλικό αναφοράς. Έπειτα, χρησιμοποιούν εμπειρικές αποδείξεις, δηλαδή βασίζονται στην ορθότητα συγκεκριμένων παραδειγμάτων, περνώντας στην χρήση γενικών παραδειγμάτων, όπου η επαγωγική αιτιολόγηση βασίζεται σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, καταλήγοντας σε ένα πολύ προχωρημένο στάδιο (επαγωγική αιτιολόγηση), όπου οι αιτιολογήσεις δίνονται μέσω ενός επαγωγικού επιχειρήματος ανεξάρτητο από συγκεκριμένες περιπτώσεις. Επιπρόσθετα, οι μαθητές χρησιμοποίησαν την στρατηγική guess-and-check, όπου προσπαθούσαν να μαντέψουν έναν κανόνα που να ταιριάζει σε μια συγκεκριμένη περίπτωση, αντί να προσπαθήσουν να εντοπίσουν μία σχέση που εμπίπτει στο πρόβλημα που τους τέθηκε.

Οι Becker & Rivera (2005) κατονομάζουν τρεις στρατηγικές. Κατά την *αριθμητική γενίκευση (numeric)*, οι μαθητές χρησιμοποιούν τη μέθοδο της δοκιμής και του λάθους, ενώ στις μεταβλητές δεν αποδίδουν κάποιο νόημα. Στην *σχηματική* (*figural)*, εφαρμόζουν στρατηγικές αντιληπτικής ομοιότητας και δίνουν έμφαση στις σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς, κατανοώντας τη σχέση των μεταβλητών. Στην τρίτη στρατηγική, την *πραγματιστική (pragmatic)*, χρησιμοποιούνται δύο προηγούμενες για να εστιάσουν στις ιδιότητες και στις σχέσεις που διέπουν τους αριθμούς. Οι μαθητές που αποτυγχάνουν να γενικεύσουν, βρίσκονται στη *διαζευκτική γενίκευση (disjunctive generalization)*.

Οι Lannin, Barker & Townsend (2006) διερεύνησαν τις στρατηγικές γενίκευσης που χρησιμοποιούσαν τα παιδιά και κατέληξαν σε ένα πλαίσιο τεσσάρων κατηγοριών. Στο πλαίσιο αυτό, οι στρατηγικές γενίκευσης είναι της επανάληψης (*recursive*), της διάσπασης (*chunking*), της ένωσης (*unising*), και της ολοκλήρωσης (*explicit*). Στην πρώτη στρατηγική, οι μαθητές περιγράφουν μια σχέση που εμφανίζεται στην κατάσταση μεταξύ διαδοχικών τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής. Στη δεύτερη, οι μαθητές βασίζονται σε ένα αναδρομικό μοτίβο δημιουργώντας μια μονάδα σε γνωστές τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής. Στην τρίτη στρατηγική, οι μαθητές χρησιμοποιούν ένα τμήμα ως μονάδα για να κατασκευάσουν μια μεγαλύτερη μονάδα χρησιμοποιώντας πολλαπλάσια της μονάδας. Στην τέταρτη στρατηγική, οι μαθητές κατασκευάζουν έναν κανόνα που επιτρέπει τον άμεσο υπολογισμό της τιμής της εξαρτημένης μεταβλητής για μια δεδομένη ανεξάρτητη μεταβλητή τιμή.

Οι Walcott, Mohr, Signe και Kastberg (2009) σε έρευνα που πραγματοποίησαν για να ανακαλύψουν τις αντιλήψεις των μαθητών αναφορικά με τα γεωμετρικά σχήματα και να εντοπίσουν τις στρατηγικές που χρησιμοποιήσαν κατά την αναγνώρισή τους παρατήρησαν ότι χρησιμοποιούσαν περιγραφές κοινών χαρακτηριστικών των σχημάτων, είτε συσχετίζοντας το ένα σχήμα με το άλλο (υποδεικνύοντας μια ενέργεια που πρέπει να εκτελεστεί στο ένα σχήμα για να μετατραπεί στο άλλο), είτε περιγράφοντας μια ενέργεια που είχε εκτελεστεί για να μετατραπεί το πρώτο σχήμα στο δεύτερο.

2. Γεωμετρικά σχήματα

2.1 Τα Γεωμετρικά σχήματα στο αναλυτικό πρόγραμμα του δημοτικού σχολείου

Σύμφωνα με το Πρόγραμμα Σπουδών (2014) για τα Μαθηματικά του δημοτικού σχολείου μία από τις θεματικές περιοχές γύρω από τις οποίες αναπτύσσονται τα περιεχόμενα και τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα είναι και η Γεωμετρία, της οποίας βασικό μαθηματικό περιεχόμενο αποτελούν τα Γεωμετρικά σχήματα. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, οι γεωμετρικές έννοιες και ιδιότητες εμφανίζονται σε προβλήματα πραγματικού κόσμου, επομένως η Γεωμετρία κατέχει σημαντική θέση στα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών στην εκπαίδευση. Μάλιστα, κατά την πρωτοβάθμια εκπαίδευση τίθενται τα θεμέλια των γεωμετρικών γνώσεων, διότι οι μαθητές μαθαίνουν έννοιες και ιδιότητες της γεωμετρίας εξερευνώντας το περιβάλλον τους (Σκουμπουρδή, 2004˙ Marchis, 2012).

Το περιεχόμενο της Γεωμετρίας που αναπτύσσεται στο Δημοτικό αποτελεί μέρος της μη τυπικής Γεωμετρίας, η οποία προετοιμάζει τους μαθητές για τη θεωρητική γεωμετρία που ακολουθεί στο γυμνάσιο και κυρίως στο λύκειο, και τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα που διδάσκονται είναι ο κύκλος, το τετράγωνο, το ορθογώνιο, το τρίγωνο και ο ρόμβος (Σκουμπουρδή, 2004˙ Πόταρη, 2016˙ Μπαραλής, 2016).

Η προσέγγιση των γεωμετρικών σχημάτων περιλαμβάνει την αναγνώριση κατηγοριών σχημάτων, την αναγνώριση των ιδιοτήτων των σχημάτων, την αναγνώριση των ιδιοτήτων των κατηγοριών, τις κατασκευές, τις αναλύσεις/συνθέσεις σχημάτων και τους μετασχηματισμούς τους που αφορούν μετατοπίσεις, στροφές, συμμετρίες και ομοιότητα (Πόταρη, 2016)

Σύμφωνα με το Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά (Πόταρη, 2016), στις δύο πρώτες τάξεις του δημοτικού οι μαθητές μαθαίνουν να αναγνωρίζουν και να ταξινομούν επίπεδα και στερεά σχήματα, με βάση τα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά σε ποικιλία θέσεων, μεγεθών και προσανατολισμών στην Α’ Δημοτικού και με βάση κριτήρια που οι ίδιοι οι μαθητές παρατηρούν στην Β’ Δημοτικού. Επίσης, κατασκευάζουν γνώριμα επίπεδα και στερεά γεωμετρικά σχήματα με διάφορα μέσα και συνθέτουν και αναλύουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και στερεά σε 2 ή περισσότερα μέρη. Επιπλέον, στην Α’ Δημοτικού οι μαθητές μαθαίνουν να περιγράφουν απλά επίπεδα γεωμετρικά σχήματα με τη χρήση όρων, ενώ στην επόμενη τάξη είναι σε θέση να αναγνωρίζουν και να διερευνούν χαρακτηριστικά επίπεδων και στερεών γεωμετρικών σχημάτων. Επίσης, στην Α’ τάξη μαθαίνουν να συνδέουν επίπεδα και στερεά σχήματα προσεγγίζοντας έδρες και ακμές και στην συνέχεια στην Β’ τάξη συνδέουν τις έδρες των στερεών με τα επίπεδα σχήματα και αναγνωρίζουν απλά αναπτύγματα.

Στις δύο επόμενες τάξεις, διευρύνεται η αναγνώριση και η κατάταξη των επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και στερεών, αναγνωρίζουν και διερευνούν χαρακτηριστικά επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και βασικών στερεών με βάση πλευρές και γωνίες στην Γ΄ τάξη και με βάση (γεωμετρικές) ιδιότητες και σχέσεις στην Δ’ τάξη. Επίσης, στην Γ’ τάξη χρησιμοποιούν όρους όπως κορυφή, ακμή, έδρα, όταν περιγράφουν απλά γεωμετρικά στερεά και διερευνούν τις σχέσεις μεταξύ τετράπλευρων, συγκρίνουν γωνίες χρησιμοποιώντας την ορθή ως μέτρο και σχεδιάζουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα. Στην Δ΄ τάξη είναι σε θέση να γενικεύουν αναφορικά με τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα ως όψεις στερεών και τα συνδέουν με τα αναπτύγματά τους.

Στην Ε’ Δημοτικού, οι μαθητές είναι σε θέση να αναγνωρίζουν κανονικά πολύγωνα, ενώ στην Στ’ τάξη ταξινομούν πολύγωνα βάσει του αριθμού και του μήκους των πλευρών τους, των γωνιών, των παράλληλων πλευρών τους, των αξόνων συμμετρίας και της περιστροφικής συμμετρίας. Ακόμη, στην Ε’ τάξη χρησιμοποιούν την αξονική συμμετρία στη διερεύνηση τριγώνων και ορθογωνίων παραλληλογράμμων, αντιλαμβάνονται ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^o και σχεδιάζουν τρίγωνα με τη βοήθεια μοιρογνωμονίου. Επιπλέον, δημιουργούν καταλόγους με τα στοιχεία και τις ιδιότητες επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και στερεών και αναγνωρίζουν στερεά από τα αναπτύγματά τους. Συμπληρωματικά, στην Ε’ τάξη ταξινομούν τρίγωνα βάσει των πλευρών και των γωνιών τους και αναγνωρίζουν τα στοιχείου των κύκλων, ενώ στην Στ΄ τάξη και των ημικυκλίων. Και στις δύο αυτές τάξεις αναλύουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και στερεά σε μέρη. Ολοκληρώνοντας την ΣΤ’ τάξη, οι μαθητές ταξινομούν στερεά βάσει του σχήματος της βάσης και της παράπλευρης επιφάνειάς τους, τετράπλευρα και πολύγωνα βάσει της αξονικής συμμετρίας, των γωνιών και των πλευρών τους. Ακόμη, αναγνωρίζουν ομοιότητες μεταξύ διάφορων πρισμάτων και διάφορων πυραμίδων. Επιπροσθέτως, συζητούν για τα κρίσιμα χαρακτηριστικά επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και συντάσσουν περιγραφές (μη τυπικούς ορισμούς) για τετράπλευρα, κατασκευάζουν και σχεδιάζουν πολύγωνα.

2.2 Εννοιολόγηση και αντίληψη γεωμετρικών σχημάτων

Η μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών και ειδικότερα οι έννοιες των δισδιάστατων σχημάτων ξεκινούν να σχηματίζονται από την προσχολική ηλικία, όπου οι προϋπάρχουσες εικόνες για τις έννοιες βασίζονται, κυρίως, στις αντιληπτικές ομοιότητες των αντικειμένων από το άμεσο περιβάλλον τους και τις προσωπικές εμπειρίες. Οι ιδέες αυτές, αρχίζουν να σταθεροποιούνται κατά την ηλικία των έξι ετών, σταδιακά, μέσω της διδασκαλίας. Οι μαθητές οικοδομούν μία έννοια, αφού δουν ή έλθουν σε επαφή με τις χαρακτηριστικές περιπτώσεις της, έπειτα εστιάζουν σε ορισμένα κοινά χαρακτηριστικά των σχημάτων, και αρχίζουν να αναπτύσσουν άτυπους ορισμούς, βασιζόμενοι στις ιδιότητες τους. Με βάση αυτές τις έννοιες κατηγοριοποιούν νέα παραδείγματα της έννοιας και τα εντάσσουν ή όχι στο αντίστοιχο σχήμα, ανάλογα με τα χαρακτηριστικά που παρουσιάζουν. Πολύ συχνά, δηλαδή, οι μαθητές χρησιμοποιώντας την επαγωγική μέθοδο, δημιουργούν μέσα στο μυαλό τους μία έννοια ή φτάνουν σε γενικεύσεις. Ωστόσο, ελλοχεύει ο κίνδυνος δημιουργίας παρανοήσεων, αν δεν έχει επιτευχθεί η εννοιολογική κατανόηση και δεν έχει συνδεθεί καταλλήλως η "*έννοια της εικόνας*" και ο "*ορισμός της έννοιας*", εκτός και αν παρουσιάζονται τα κατάλληλα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα. Η κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών περιλαμβάνει μια επίκληση ενός συνόλου διανοητικών εικόνων μαζί με ένα αντίστοιχο σύνολο ιδιοτήτων για εκείνη την κατηγορία αντικειμένων (Clements & Battista, 1992˙ Clements, 1998˙ Sarama & Clements, 2009˙ Halat & Dağli, 2016˙ Μπαραλής, 2016).

Επίσης, η κατανόηση των ιδεών για τα σχήματα απαιτεί τον συστηματικό συντονισμό της όρασης, της αφής και του νου των παιδιών, για να εξερευνήσουν τα μέρη και τα χαρακτηριστικά των σχημάτων εκτενώς και για να τα κατανοήσουν πλήρως. Τα μικρότερα παιδιά, για παράδειγμα, αγγίζουν μόνο ένα μέρος ενός σχήματος, ή, ίσως, δύο μέρη χωρίς να συσχετίζουν τις δύο αντιλήψεις, με αποτέλεσμα να λαμβάνουν αποφάσεις στηριζόμενοι σε περιορισμένες πληροφορίες. Τα μεγαλύτερα παιδιά συνδέουν τη μία αντίληψη με την άλλη, δημιουργώντας μια πλήρη νοητική εικόνα του σχήματος (Clements, 1998).

Επιπλέον, σημαντικό ρόλο στην κατανόηση των γεωμετρικών σχημάτων και στη διαμόρφωση νοητικών σχημάτων τους κατέχει και το εκάστοτε πολιτισμικό πλαίσιο. Τα υλικά που χρησιμοποιούνται κατά τη διδασκαλία και η μορφή των σχημάτων που εμφανίζονται στα σχολικά εγχειρίδια, με ελάχιστες εξαιρέσεις, φαίνεται να παρουσιάζουν τα τρίγωνα, τα ορθογώνια και τα τετράγωνα με άκαμπτους τρόπους. Τα τρίγωνα είναι συνήθως ισόπλευρα ή ισοσκελή και έχουν οριζόντιες βάσεις. Τα περισσότερα ορθογώνια είναι οριζόντια, επιμήκη σχήματα περίπου δύο φορές περισσότερο από όσο είναι ευρεία. Για το λόγο αυτό δεν προκαλεί εντύπωση το γεγονός ότι πολλοί μαθητές, ακόμη και σε όλο το δημοτικό σχολείο, ισχυρίζονται ότι αν ένα τετράγωνο περιστρέφει *"δεν είναι ένα τετράγωνο αλλά ένας ρόμβος."* Αυτά τα οπτικά πρωτότυπα έχουν ισχυρή επιρροή στην διαμόρφωση των νοητικών σχημάτων των μαθητών (Clements, 1998).

2.2.1 Γεωμετρική σκέψη των μαθητών σύμφωνα με το μοντέλο van Hiele

Το μοντέλο van Hiele αποτελείται από μία ιεραρχία πέντε επιπέδων, σύμφωνα με το οποίο η γεωμετρική σκέψη των μαθητών εξελίσσεται ξεκινώντας από την οπτικοποίηση (το χαμηλότερο επίπεδο) όπου αναγνωρίζουν το σχήμα μόνο από την εμφάνιση και, τελικά, οδηγείται σε επίσημη αφαιρετική συλλογιστική (Tsamir, et al, 2008˙ Ma, et al, 2015˙ Tzekaki & Papadopoulou, 2016).

Σύμφωνα με το πρώτο στάδιο – *Επίπεδο 0: Νοερή απεικόνιση* – τα γεωμετρικά σχήματα αναγνωρίζονται ολιστικά και κατονομάζονται, χωρίς να γίνονται αντιληπτά τα χαρακτηριστικά, οι ιδιότητες τους τα επιμέρους συστατικά τους, ενώ συχνά υπερισχύουν τα πρωτοτυπικά παραδείγματα, γι’ αυτό και δεν αναγνωρίζονται σε μη τυπικές θέσεις και μεγέθη.

Κατά το δεύτερο στάδιο – *Επίπεδο 1: Ανάλυση* – οι μαθητές έχουν μία αναλυτική αντίληψη των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων, καθώς αναγνωρίζουν και αναλύουν τα χαρακτηριστικά τους βάσει των ιδιοτήτων τους, τα ομαδοποιούν και παρατηρούν ότι διαφορετικά σχήματα έχουν διαφορετικά χαρακτηριστικά, χωρίς, ωστόσο, να βλέπουν σχέσεις μεταξύ των κατηγοριών των σχημάτων, μέσω μίας εμπειρικής προσέγγισης (Clements, 1998˙ Van de Walle, 2005˙ Sarama & Clements, 2009˙ Maier & Benz, 2012˙ Marchis, 2012˙ Ma, et al., 2015˙ Halat, & Dağli, 2016).

Στο τρίτο στάδιο – *Επίπεδο 2: Μη τυπική παραγωγή* – οι σχέσεις που υπάρχουν τόσο ανάμεσα στο ίδιο σχήμα όσο και μεταξύ των σχημάτων γίνονται αντιληπτές. Συγχρόνως, η σύγκριση και η ταξινόμηση των σχημάτων γίνεται βάσει της λογικής, χωρίς όμως να δικαιολογούν τις παρατηρήσεις τους, αρχίζουν να αντιλαμβάνονται τους ορισμούς, χωρίς, όμως το ίδιο να ισχύει για τις αποδείξεις, διότι δεν κατανοούν τη σημασία της παραγωγικής σκέψης (Van de Walle, 2005˙ Sarama & Clements, 2009˙ Maier & Benz, 2012˙ Ma, et al., 2015).

Στο τέταρτο στάδιο - *Επίπεδο 3 : Παραγωγή* – γίνεται αντιληπτή η δομή ενός συστήματος γεωμετρίας που χαρακτηρίζεται από αξιώματα, ορισμούς, θεωρήματα, πορίσματα και προτάσεις και η απόδειξη θεωρείται ως το αναγκαίο μέσο για την εύρεση της γεωμετρικής αλήθειας. Οι μαθητές εργάζονται με αφηρημένες έννοιες των γεωμετρικών ιδοτήτων και εξάγουν συμπεράσματα βασισμένα στη λογική και στα γεωμετρικά αξιώματα (Van de Walle, 2005˙ Marchis, 2012).

Το υψηλότερο επίπεδο της ιεραρχίας - *Επίπεδο 4: Αυστηρότητα* – πρόκειται για ένα καθαρά θεωρητικό επίπεδο, στο οποίο γίνεται κατανοητή η ευκλείδεια γεωμετρία και οι αρχές μη-ευκλείδειων γεωμετριών. Αντικείμενο μελέτης είναι τα αξιωματικά συστήματα και οι μεταξύ τους σχέσεις χρησιμοποιώντας την αφαιρετική συλλογιστική (Van de Walle, 2005˙ Marchis, 2012).

2.2.2 Τα πρωτότυπα παραδείγματα στην κατανόηση των γεωμετρικών σχημάτων

Έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί (Mason, 1989˙ Clements, 1999˙ Oberdorf & Taylor-cox, 1999˙ Gal & Linchevski, 2010) αναδεικνύουν τον ρόλο των πρωτοτυπικών γεωμετρικών σχημάτων για τα παιδιά κατά τον αρχικό σχηματισμό εννοιών, τον εντοπισμό και την αναγνώριση γεωμετρικών σχημάτων.

Σύμφωνα με τη θεωρία του πρωτοτύπου, *Prototype Theory* (Rosch, 1973), τα άτομα σχηματίζουν έννοιες που δεν βασίζονται κυρίως στους επίσημους κανόνες ή τους ορισμούς, αλλά σε πρωτοτυπικά παραδείγματα, τα οποία είναι το τυπικό και συχνότερα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα των εννοιών. Ένα πρωτοτυπικό γεωμετρικό σχήμα αποτελεί το κεντρικό μέλος μίας κατηγορίας και κάθε άλλο σχήμα κατηγοριοποιείται με βάση την ομοιότητα ή την ανομοιότητα με το κεντρικό μέλος. . Για παράδειγμα, για την έννοια του τριγώνου, το κεντρικό μέλος είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο με οριζόντια βάση. Τα πρωτοτυπικά παραδείγματα είναι εύκολα αναγνωρίσιμα και παρουσιάζουν τόσο τα απαραίτητα και επαρκή (κρίσιμα) χαρακτηριστικά ενός σχήματος, όσο και τα ειδικά (μη κρίσιμα) χαρακτηριστικά, τα οποία κυριαρχούν και κεντρίζουν την προσοχή. Μετά από την συνεχόμενη έκθεση των παιδιών σε αυτά σχηματίζονται και αρχίζουν να συσχετίζονται τα μη κρίσιμα χαρακτηριστικά με παραδείγματα του σχήματος και στη συνέχεια στην ακούσια επέκταση του μαθηματικού ορισμού, η οποία συμπεριλαμβάνει πρόσθετα μη κρίσιμα χαρακτηριστικά (π.χ. τον προσανατολισμό) ή στη μείωση του ορισμού μέσω της απόσπασης ορισμένων κρίσιμων χαρακτηριστικών. Συμπληρωματικά, η υπερβολική έκθεση σε αυτά δύναται να εμποδίσει την ανάπτυξη της πληρέστερης απόκτησης ιδεών, ενώ πολλές φορές γίνεται διαισθητικά αποδεκτό ως αντιπροσωπευτικό της έννοιας χωρίς την αίσθηση ότι απαιτείται οποιαδήποτε δικαιολογία. Ωστόσο, αν τα παραδείγματα και τα μη παραδείγματα που βιώνουν τα παιδιά είναι άκαμπτα, έτσι θα είναι και τα πρωτοτυπικά τους και αυτά τα παιδιά θα έχουν ποικίλες εμπειρίες με τα σχήματα και τα χαρακτηριστικά τους (Triadafillidis, 1995 ˙ Clements, 1998˙ Tsamir, et. al., 2008˙ Halat & Dağli, 2016).

Στην πραγματικότητα, οι πρωτοτυπικές εικόνες των παιδιών αποτελούνται από πρωτοτυπικά παραδείγματα και οι μαθητές τείνουν να θεωρούν μόνο αυτά ως παραδείγματα της έννοιας ή μίας κατηγορίας σχημάτων. Αυτά τα οπτικά πρωτότυπα μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε ως παράδειγμα μιας κατηγορίας είτε ως μη-παράδειγμα μιας άλλης κατηγορίας. Για παράδειγμα, ένα πρωτότυπο της κατηγορίας "ορθογώνιο" μπορεί να χρησιμεύσει ως παράδειγμα της κατηγορίας "τετράπλευρο" και ως μη-παράδειγμα της κατηγορίας "τετράγωνο". Από την άλλη πλευρά, παραδείγματα, μη πρωτοτυπικά, συχνά θεωρούνται ως μη παραδείγματα, διότι είναι διαισθητικά αποδεκτά ως εκπρόσωποι μιας έννοιας (Walcott, et al, 2009 ˙Tsamir, et. al., 2008˙ Halat & Dağli, 2016). Αξίζει να αναφερθεί ότι διαφορετικά σχήματα μπορεί να έχουν διαφορετικά πρωτοτυπικά σχήματα, ενώ ο κύκλος και το τετράγωνο έχουν λιγότερα πρωτοτυπικά από τα ορθογώνια και τα τρίγωνα (Clements, et al, 1999˙ Tsamir, et. al, 2008).

2.3 Ερευνητικά ευρήματα

Μελετώντας την υπάρχουσα βιβλιογραφία παρατηρείται ότι αρκετοί ερευνητές έχουν μελετήσει τις ικανότητες γενίκευσης των παιδιών στο πεδίο των μοτίβων, των δομών και της άλγεβρας, τις ιδέες των μαθητών και τα οπτικά πρωτότυπά τους για τα γεωμετρικά σχήματα, χωρίς, όμως, το ίδιο να ισχύει για έρευνες που αφορούν τις ικανότητες γενίκευσης τους στο πεδίο των γεωμετρικών σχημάτων (Tzekaki & Papadopoulou, 2017˙ Tzekaki, 2020).

2.3.1 Ευρήματα αναφορικά με την αναγνώριση και την ονομασία των γεωμετρικών σχημάτων

Έρευνες που ασχολήθηκαν με την αναγνώριση και την ονομασία των γεωμετρικών σχημάτων (Koleza & Giannisi, 2013˙ Clements, et al, 1999˙ Ma, et al., 2015) έδειξαν ότι οι μαθητές είναι σε θέση να προσδιορίσουν τα σχήματα και χρησιμοποίησαν επίσημα ονόματα για τις κατηγορίες σχημάτων (κύκλος, τρίγωνο, ρόμβο, τετράγωνα, ορθογώνια/παραλληλόγραμμα) εκτός από την έλλειψη (που περιγράφεται ως καθρέφτης ή αυγό). Συμπληρωματικά, οι μελέτες των Clements, et al. (1999) και Ma, et al. (2015) έχουν δείξει ότι η οπτική αναγνώριση του κύκλου είναι η ευκολότερη για τους μαθητές, ακολουθούμενη από αυτή του τρίγωνου και του τετραγώνου, ενώ οι Satlow & Newcombe (1998) παρατήρησαν ότι από την οπτική γωνία των χαρακτηριστικών, οι κύκλοι είναι απλούστεροι για τους μαθητές, ακολουθούν τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα και τα πεντάγωνα είναι τα πιο περίπλοκα. Αποτελέσματα ερευνών που αφορούν τα τετράπλευρα (Clements et. al, 1999˙ Hannibal & Clements, 2000˙ Koleza & Giannisi, 2013) παρατήρησαν ότι οι μαθητές είναι σε θέση να εντοπίσουν τα τετράγωνα, ενώ λίγοι ήταν εκείνοι που είχαν την τάση να επιλέξουν το ρόμβο. Εντούτοις, σε αναφορές αυτών των δύο σχημάτων χρησιμοποίησαν και τους δύο όρους "*τετράγωνο*" και "*ρόμβο*". Σε μελέτες των παραπάνω ερευνητών (Clements et. al, 1999˙ Hannibal & Clements, 2000˙Koleza & Giannisi, 2013) οι συμμετέχοντες έτειναν να δέχονται τα μόνο "μακριά" παραλληλογογράμμα ως ορθογώνια. Αντίθετα, στην μελέτη των Ma, et al. (2015) οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να εντοπίσουν τα τετράπλευρα.

2.3.2 Ευρήματα αναφορικά με τις ιδέες των μαθητών για τα γεωμετρικά σχήματα

Αναφορικά με τις ιδέες των μαθητών για τα γεωμετρικά σχήματα, ξεκινώντας από τον κύκλο, οι μαθητές θεωρούν ότι τα σχήματα που είναι κλειστά και "στρογγυλεμένα" είναι κύκλοι (Ma, et al., 2015), ενώ ο κύκλος και η έλλειψη αντιμετωπίστηκαν ως στενά συνδεδεμένες κατηγορίες σε έρευνα των Koleza, & Giannisi (2013).

Αναφορικά με το τρίγωνο φαίνεται να αποτελεί μια γενικά «προφανή» και αναγνωρίσιμη κατηγορία σχημάτων, καθώς σε έρευνες των Clements κ.α. (1999) και Sarama και Clements (2009) τα παιδιά ήταν εξοικειωμένα και το περιέγραψαν ως ένα σχήμα «*με τρεις γωνίες και τρεις πλευρές*», χωρίς όμως να είναι βέβαιοι για το τι είναι μία «*γωνία*» ή μια «*πλευρά*». Επιπροσθέτως, οι Koleza και Giannisi (2013) παρατήρησαν ότι το κύριο κριτήριο για τον χαρακτηρισμό ενός σχήματος ως τριγώνου είναι η ύπαρξη τριών οξειών γωνιών.

Επίσης, οι Sarama & Clements (2009) αναφέρουν ότι τα παιδιά ηλικίας τεσσάρων έως πέντε πιστεύουν ότι τετράγωνα που έχουν περιστρέφει δεν έχουν πλέον το ίδιο σχήμα ή ακόμα και μέγεθος, παιδιά ηλικίας έξι έως εφτά ετών πιστεύουν ότι διατηρούνται τα χαρακτηριστικά τους, αλλά αλλάζουν κατηγορία και όνομα και μόνο κατά την ηλικία των οκτώ έως εννέα ετών οι μαθητές πέτυχαν την διαχώριση. Ακόμη, οι Clements και Battista (1992), Clements κ.α., (1999) και Marchis (2008) παρατήρησαν ότι τα παιδιά θεωρούν ότι ένα τετράγωνο δεν είναι τετράγωνο εάν η βάση του δεν είναι οριζόντια ή ότι ένα τετράγωνο δεν είναι συγχρόνως και ορθογώνιο. Συγχρόνως, οι μαθητές διακατέχονται από την ιδέα ότι ένα τετράγωνο δεν είναι ρόμβος και ένα ορθογώνιο δεν είναι παραλληλόγραμμο.

Συμπληρωματικά, σχετικά με την κατηγοριοποίηση των γεωμετρικών σχημάτων, τα ευρήματα της έρευνας των Koleza & Giannisi (2013) έδειξαν τα παιδιά διαχώρισαν τα σχήματα σε δύο μεγάλες κατηγορίες, εκείνα χωρίς γωνίες και εκείνα με γωνίες. Από την άλλη πλευρά, οι Tzekaki & Papadopoulou (2016) αναφέρουν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται στην κατηγοριοποίηση του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου και του τραπεζιού. Ευρήματα που συμφωνούν με αυτά της Fujita (2012), όπως αναφέρουν οι Sinclair, et al. (2016), εξηγώντας συμπληρωματικά, ότι οι επιλογές των μαθητών επηρεάζονται από περιορισμένες οπτικές και νοητικές αναπαραστάσεις, καθώς αναγνωρίζουν τα τετράπλευρα κυρίως από πρωτοτυπικά παραδείγματα, παρόλο που γνωρίζουν τον σωστό, επίσημο ορισμό, με αποτέλεσμα να δυσκολεύονται στην κατανόηση των σχέσεων τους.

Σε μελέτη των Fujita και Jones (2007) οι μαθητές κατάφεραν να σχεδιάσουν σωστά αναπαραστάσεις των τριγώνων, των τετραγώνων και ορθογωνίων παραλληλογράμμων. Αντίθετα, οι Tzekaki & Papadopoulou (2016) αναφέρουν ότι οι μαθητές δυσκολεύτηκαν στην κατασκευή ενός τετραγώνου ή τη μετατροπή ενός ορθογωνίου σε τετράγωνο.

2.3.3 Ευρήματα αναφορικά με την ανάπτυξη γεωμετρικής σκέψης

Επίσης, έρευνες των Clements, et al. (1999) και Hannibal & Clements (2000) ανέδειξαν ότι η πρωτοτυπική εικόνα των παιδιών ενός ορθογωνίου είναι μια τετράπλευρη φιγούρα με δύο μεγάλες και δύο μικρές παράλληλες πλευρές και ορθές γωνίες και τα σχήματα με τέσσερις, σχεδόν, ίσες πλευρές με περίπου ορθές γωνίες είναι τετράγωνα.

Συγκεκριμένα, οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι τα παιδιά έτειναν να αναγνωρίζουν τα μακρόστενα τετράπλευρα ως ορθογώνια όταν τουλάχιστον ένα ζεύγος πλευρών ήταν παράλληλο (Clements & Battista, 1992). Επιπλέον, τα παιδιά ήταν πιο πιθανό να αναγνωρίσουν τα "μακρά" παραλληλόγραμμα (αυτά που με μεγαλύτερη βάση από το ύψος) ως ορθογώνια, ενώ στηρίζονταν σε μεγάλο βαθμό στη σύγκριση με ένα οπτικό πρωτότυπο για την αναγνώριση και ταξινόμηση των σχημάτων (Clements, Swaminathan, Hannibal, & Sarama, 1999).

Οι Clements et al. (1999) παρατήρησαν στην έρευνά τους ότι δεν υπάρχουν πρωτοτυπικές αναπαραστάσεις κύκλου, γιατί όλοι φαίνονται ίδιοι, εκτός αν μεταβληθεί το μέγεθος. Η πρωτοτυπική αναπαράσταση ενός τριγώνου είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο, όπως κατέδειξαν οι έρευνες των Clements κ.α. (1999), Sarama και Clements (2009) και Koleza, και Giannisi (2013) γι' αυτό και σε έρευνα του Hershkowitz (1989), όπως αναφέρεται στο Halat & Dağli (2016), όπου συμμετείχαν μαθητές της πέμπτης, έκτης δημοτικού και πρώτης γυμνασίου, δυσκολεύτηκαν να εντοπίσουν ένα μη πρωτότυπο τρίγωνο, το οποίο ήταν ένα ανεστραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο με μια βάση που δεν ήταν παράλληλη με το κάτω μέρος της σελίδας. Ακόμη, έρευνες (Clements & Battista, 1992˙ Clements et al., 1999˙ Marchis, 2008) φανέρωσαν ότι οι μαθητές διακατέχονται από την ιδέα ότι ένα τετράγωνο δεν είναι ρόμβος και ένα ορθογώνιο δεν είναι παραλληλόγραμμο, γι' αυτό και τα πρωτοτυπικά τετράγωνα εμφανίζονται μόνο σε σχέση με τη θέση.

Σχετικά με τις αναπτυσσόμενες έννοιες των γεωμετρικών σχημάτων, οι Satlow & Newcombe (1998) σε έρευνα που πραγματοποίησαν συμπεράναν ότι οι μαθητές της Δ΄ Τάξης βασίζονται περισσότερο σε ορισμούς και κανόνες, παρά στην αντιληπτική ομοιότητα, σε σχέση με τα μικρότερα παιδιά, τα οποία καθοδηγούνται από την εμφάνιση του κάθε σχήματος και επηρεάζονται από μη μαθηματικές ιδιότητες (π.χ. τον προσανατολισμό) και επέδειξαν ακρίβεια στον εντοπισμό τυπικών περιπτώσεων σχημάτων που τους παρουσιάστηκαν. Επιπλέον, η ανάπτυξη της έννοιας αποδείχθηκε ότι δεν συνδέεται αυστηρά με την ηλικία.

Επιπλέον, Koleza & Giannisi (2013) ανέδειξε δύο βασικά στοιχεία σχετικά με τις γνώσεις τους σε γεωμετρικά σχήματα. Το πρώτο αφορά την ύπαρξη «πρωτοτύπων» (στην περίπτωση των τριγώνων), όπου η πρωτοτυπική οπτική εικόνα τους αμφισβητήθηκε από την παρουσία μη πρωτοτυπικών τριγώνων και το επικοινωνιακό πλαίσιο. Το δεύτερο αφορά το γεγονός ότι τα περισσότερα παιδιά ήταν σε θέση να διατυπώσουν συσχετίσεις μεταξύ ρόμβου-τετράγωνου και τετράγωνου-ορθογώνιου, ένα γεγονός, το οποίο μας επιτρέπει να προωθήσουμε την υπόθεση σχετικά με την ύπαρξη ενός μεταβατικού σταδίου μεταξύ περιγραφικού και σχεσιακού επίπεδου σκέψης.

2.3.4 Ευρήματα αναφορικά με την γενίκευση γεωμετρικών σχημάτων

Ο Yevdokimov (2008) σε έρευνά του παρατήρησε ότι οι μαθητές με μέσες μαθηματικές ικανότητες αντιμετώπισαν δυσκολίες σε δραστηριότητες με δημιουργικές γενικεύσεις, επειδή έπρεπε, ταυτοχρόνως, να αναλύσουν την αλλαγή ορισμένων γεωμετρικών αντικειμένων ή/και των χαρακτηριστικών τους. Επίσης, συμπέρανε ότι οι λύσεις των προτεινόμενων εικασιών δεν θεωρούνταν από τους μαθητές γενικευμένες, ακόμα και αυτών με υψηλές επιδόσεις στα μαθηματικά, οι οποίοι, ωστόσο, χρησιμοποίησαν πολύ περισσότερες γενικεύσεις στην επιχειρηματολογία τους, καθώς ήταν πιο εύκολο να αντιληφθούν ότι δίνουν ορισμένα χαρακτηριστικά και δημιουργούν νέα χαρακτηριστικά αντ' αυτού. Οι ίδιοι, συμπληρωματικά, είχαν μεγάλο πλεονέκτημα κατά την επίλυση και την απόδειξη των προτεινόμενων εικασιών. Ωστόσο, ο ερευνητής τονίζει ότι δεν εξετάστηκαν λεπτομερώς οι ικανότητες των μαθητών να προβούν σε γενίκευση οποιασδήποτε δήλωσης χωρίς την προκαταρκτική διερεύνηση και λύση της. Επίσης, παρατήρησε ότι μαθητές με μέσες μαθηματικές ικανότητες στη γεωμετρία ανταποκρίθηκαν σε εποικοδομητικές ενέργειες και προτάσεις, για το λόγο αυτό η περαιτέρω εργασία προς αυτή την κατεύθυνση μπορεί να ωφελήσει αυτούς τους μαθητές και να βελτιώσουν τις επιδόσεις τους στα μαθηματικά.

Επιπροσθέτως, οι μαθητές νηπιαγωγείου που έλαβαν μέρος σε μελέτης των Tzekaki & Papadopoulou (2016) εργάστηκαν στα δύο πρώτα επίπεδα γενίκευσης, όπως οι ίδιες τα όρισαν, διότι τα παιδιά ήταν σε θέση να αναγνωρίσουν σχήματα, να τα αντιληφθούν ολιστικά χωρίς αναφορές σε δομικά στοιχεία (πλευρές και γωνίες) ή ιδιότητες (ισότητα, κάθετη κ.λπ.) ή ακόμη και την ονομασία σχημάτων ή χαρακτηριστικών. Ορισμένα παιδιά ήταν σε θέση να αναγνωρίσουν οπτικά ορισμένα στοιχεία και για να αναγνωρίσουν τα σχήματα βασίστηκαν σε ιδιότητες, αν και έδωσαν λίγες εξηγήσεις που σχετίζονται με αυτά.

Η Παπαδοπούλου (2017) παρατήρησε ότι τα παιδιά ηλικίας 6 ετών συνδυάζουν σχήματα διαφορετικών μεγεθών και προσανατολισμού (τρίγωνα, ορθογώνια, τραπέζια) για να παράγουν μια σύνθετη διαμόρφωση, βασιζόμενοι κατά την αιτιολόγηση των επιλογών τους στις ιδιότητες και στις σχέσεις που είχαν προσδιορίσει.

3. Η σημασία της παρούσας έρευνας

Συνοψίζοντας, όπως φαίνεται από το βιβλιογραφικό μέρος της παρούσας εργασίας, έχουν πραγματοποιηθεί αρκετές μελέτες οι οποίες διερευνούν την ονομασία και την αναγνώριση των γεωμετρικών σχημάτων, τον εντοπισμό των χαρακτηριστικών τους και των σχέσεων τους. Ακόμη, αρκετές μελέτες έχουν διεξαχθεί για να μελετήσουν το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης των μαθητών, όπως έχει αναπτυχθεί από τους Van Hiele, αλλά και το ρόλο των πρωτοτυπικών αναπαραστάσεων και την αναγνώριση αυτών. Επίσης, κάποιες έρευνες εντοπίστηκαν κατά την βιβλιογραφική ανασκόπηση οι οποίες ασχολήθηκαν με την κατηγοριοποίηση των γεωμετρικών σχημάτων, την κατασκευή και τον μετασχηματισμό τους. Συγχρόνως, οι μελέτες που έχουν πραγματοποιηθεί και διερευνούν τις γενικεύσεις των μαθητών έχουν μέχρι στιγμής επικεντρωθεί κυρίως στις γενικεύσεις των αλγεβρικών προτύπων. Κατ' επέκταση, περιορισμένες είναι οι έρευνες που στοχεύουν να προσδιορίσουν το επίπεδο ικανοτήτων γενίκευσης μαθητών στα γεωμετρικά σχήματα αλλά και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν.

Λαμβάνοντας λοιπόν υπόψη τα παραπάνω δεδομένα, η παρούσα έρευνα θα προσπαθήσει να προσδιορίζει το επίπεδο γενίκευσης όπου εργάζονται και να εντοπίσει στρατηγικές που εφαρμόζουν οι μαθητές της Ε' Δημοτικού κατά τη γενίκευση γεωμετρικών σχημάτων.

2ο Μέρος: Μεθοδολογία έρευνας

2.1 Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω δεδομένα, τίθεται ως σκοπός της παρούσας εργασίας η διερεύνηση των ικανοτήτων γενίκευσης των μαθητών Ε΄ Δημοτικού στο πεδίο των γεωμετρικών σχημάτων. Ειδικότερα, τα ερευνητικά ερωτήματα τα οποία επιδιώκεται να απαντηθούν μέσω της παρούσας μελέτης είναι τα εξής:

1. Ποιο είναι το επίπεδο γενίκευσης των μαθητών Ε' Δημοτικού αναφορικά με τα γεωμετρικά σχήματα;
2. Ποιες στρατηγικές εφαρμόζουν οι μαθητές για να γενικεύσουν τις γνώσεις τους για τα γεωμετρικά σχήματα;

2.2 Εννοιολογικές αποσαφηνίσεις

Στο σημείο αυτό θα αναπτυχθούν βασικοί ορισμοί που σχετίζονται με τα ερευνητικά ερωτήματα που έχουν τεθεί στην παρούσας εργασία. Αυτοί οι ορισμοί αφορούν τις ικανότητες γενίκευσης, τα επίπεδα γενίκευσης των μαθητών αναφορικά με τα γεωμετρικά σχήματα και οι στρατηγικές γενίκευσης.

2.2.1 Ικανότητες γενίκευσης

Αρχικά, ένας μαθητής ο οποίος είναι ικανός να γενικεύει σκέφτεται τόσο επαγωγικά όσο και αφαιρετικά (Davidov, 1990˙Cadez&Kolar, 2015˙Tateo, 2015). Ειδικότερα, ο μαθητής είναι ικανός να:

- αναζητά, εντοπίζει και διασυνδέει κοινά χαρακτηριστικά, δομές, και κανόνες που διέπουν τα γεωμετρικά σχήματα, καθώς και τις μεταξύ τους σχέσεις, ή τα απορρίπτει, αναλύοντας πολυάριθμα σχήματα και μεμονωμένες περιπτώσεις αυτών, επεκτείνοντας το φάσμα της συλλογιστικής του πέραν της υπόθεσης ή των υποθέσεων που εξετάζει σε ευρύτερες οντότητες, συνδέοντας τις προηγούμενες γνώσεις, για να φθάσει στις νέες σχετικές έννοιες και να δημιουργήσει γενικευμένες ιδέες (Iwasaki, 1997˙ Kaput,1999, όπως αναφέρουν οι Yeap&Kaur, 2008˙ Radford, 2003˙ Ellis, 2007˙ Zazkis, et al, 2008˙ Lannin, et. al, 2011˙ Malara, 2012, όπως αναφέρεται στο Vigh, 2013 ˙Hashemia, et al, 2013˙ Čadež &Kolar, 2015˙Tzekaki & Papadopoulou, 2016, 2017)
- βρίσκει στρατηγικές με λογικό τρόπο, ώστε να ερμηνεύει τις σχέσεις, τα κοινά χαρακτηριστικά την δομή των γεωμετρικών σχημάτων, σκέφτεται δημιουργικά και ανακλαστικά (Cadez & Kolar, 2015˙Tateo, 2015)

- χρησιμοποιεί ποικίλα σημειωτικά μέσα, όπως σχέδια, σύμβολα και γενική γλώσσα, η οποία αποδεικνύει ότι εφαρμόζεται σε περισσότερες από μία συγκεκριμένες περιπτώσεις γεωμετρικών σχημάτων, ακόμη και αν βασίζεται σε γενικά παραδείγματα (Radford, 2003˙ Brunheira & Ponte, 2019)
- μεταβαίνει από συγκεκριμένα παραδείγματα γεωμετρικών σχημάτων σε ένα γενικό συμπέρασμα, το οποίο ισχύει για μια ολόκληρη κατηγορία γεωμετρικών σχημάτων, κάνοντας εικασίες και εξετάζοντας προσεκτικά το εκάστοτε σχήμα (Davydov, 1990˙ Dörfler, 1991˙ Harel and Tall, 1991˙ Mason, et. al, 2011˙ Cadez&Kolar, 2015˙Tateo, 2015˙ Dumitrascu, 2017)
- καταλήγει σε συμπεράσματα για τις ιδιότητες και τις σχέσεις των γεωμετρικών σχημάτων, κάνοντας έγκυρες αιτιολογήσεις, οι οποίες αποτελούνται από λογικές δηλώσεις και βασίζονται σε προϋπάρχουσες γνώσεις, διερευνώντας τους παράγοντες που εξηγούν γιατί μια γενίκευση είναι αληθής ή ψευδής (Ellis, 2007˙ Lannin, et. al, 2011˙ Cadez&Kolar, 2015˙Tateo, 2015˙ Brunheira&Ponte, 2019)

2.2.2 Επίπεδα γενίκευσης μαθητών στα γεωμετρικά σχήματα

Στο σημείο αυτό παρουσιάζονται τα επίπεδα γενίκευσης των μαθητών στα γεωμετρικά σχήματα και χαρακτηριστικά του τρόπου γενίκευσης τους στο καθένα. Για τον προσδιορισμό των παρακάτω επιπέδων πραγματοποιήθηκε μία σύνθεση των χαρακτηριστικών που παρουσιάζουν οι Davydov (1990), Rubinshtein (1994), όπως αναφέρει η Dumitrascu (2017), Duval (1998), Tall (2013), Tzekaki&Papadopoulou (2016), Brunheira&Ponte (2019), Ovadiya (2019) καθώς και του μοντέλου ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης των vanHiele.

Στο πρώτο επίπεδο, η γενίκευση στηρίζεται στην οπτική αναγνώριση των ιδιοτήτων των σχημάτων. Συγκεκριμένα οι μαθητές:

- αναγνωρίζουν το σχήμα ολιστικά, ως σύνολο από την οπτική εμφάνιση του, καθώς δεν αντιλαμβάνονται τα ξεχωριστά συστατικά του
- αναγνωρίζουν σε μικρό βαθμό τα οπτικά χαρακτηριστικά μιας κατηγορίας σχήματος
- δεν το αναγνωρίζουν σε μη τυπικές θέσεις και μεγέθη
- δεν προσδιορίζουν ρητά τις ιδιότητες του
- διακρίνουν μεταξύ καμπυλόγραμμων και ευθύγραμμων σχημάτων αλλά όχι μεταξύ αυτών των ομάδων
- σχεδιάζουν ένα γεωμετρικό σχήμα, χωρίς να κατανοούν όλες τις γεωμετρικές πτυχές

- επιχειρηματολογούν χωρίς να βασίζονται στα χαρακτηριστικά μίας κατηγορίας σχημάτων
- επικεντρώνονται σε ένα ή περισσότερα σχήματα χωρίς να γενικεύουν (Duval, 1995˙ Clements, 1998˙ Van de Walle, 2005˙ Duval, 2006˙ Sarama & Clements, 2009˙ Maier & Benz, 2012˙ Marchis, 2012, 2014˙ Ma, et al., 2015˙ Halat, & Dağli, 2016˙ Tzekaki&Papadopoulou, 2016˙ Brunheira & Ponte, 2019˙ Ovadiya, 2019)

Στο δεύτερο επίπεδο η γενίκευση βασίζεται στην οπτική αναγνώριση, χωρίς να αναγνωρίζονται οι σχέσεις των σχημάτων. Ειδικότερα, οι μαθητές:

- αναγνωρίζουν ορισμένα (1 ή 2) ή όλα τα στοιχεία, τις ιδιότητες και ορισμένες σχέσεις των γεωμετρικών σχημάτων, δίχως να τα ονομάζουν ή με δυνατότητα της ονομασίας τους
- αναγνωρίζουν τις κατηγορίες των σχημάτων (πρωτοτύπων), με δυνατότητα της ονομασίας τους
- αναφέρουν χαρακτηριστικά μη σχετικά, ή χαρακτηριστικά το οποία δεν υφίσταται
- δεν συγχέονται πλέον από τον προσανατολισμό ή το μέγεθος ενός σχήματος
- ομαδοποιούν και παρατηρούν ότι διαφορετικά σχήματα έχουν διαφορετικά χαρακτηριστικά, χωρίς, ωστόσο, να βλέπουν σχέσεις μεταξύ των κατηγοριών των σχημάτων
- χρησιμοποιούν μια γενική γλώσσα σχετικά με τα σχήματα
- επικεντρώνονται σε ένα ή περισσότερα γεωμετρικά σχήματα χωρίς να γενικεύουν
- επιχειρηματολογούν βασιζόμενοι στην εσφαλμένη γεωμετρική διάρθρωση της οικογένειας των σχημάτων (Clements, 1998˙ Van de Walle, 2005˙ Duval, 2006˙Sarama & Clements, 2009˙ Maier & Benz, 2012˙ Marchis, 2012˙ Tall, 2013˙ Ma, et al., 2015˙ Halat, &Dağli, 2016˙ Tzekaki & Papadopoulou, 2016˙ Brunheira & Ponte, 2019)

Στο τρίτο στάδιο, οι μαθητές αναγνωρίζουν τα κοινά χαρακτηριστικά των σχημάτων και τις μεταξύ τους σχέσεις. Συγκεκριμένα:

- προσδιορίζουν τα κοινά χαρακτηριστικά τους
- αναγνωρίζουν ορισμένες ή όλες τις σχέσεις μεταξύ γεωμετρικών σχημάτων
- ταξινομούν τις σχέσεις και συγκρίνουν τα σχήματα βασιζόμενοι στη λογική τους, χωρίς όμως να δικαιολογούν τις παρατηρήσεις τους
- χρησιμοποιούν προσεκτικά γεωμετρικές ιδιότητες που επιτρέπουν την αναγνώριση και την κατασκευή τους και με δυνατότητα προφορική εξήγησης

- περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο ένα γεωμετρικό σχήμα είναι παρόμοιο ή πανομοιότυπο με άλλα μέσω της σύγκρισης
- μεταφέρουν αυτή την παρατήρηση σε άλλα γεωμετρικά σχήματα της ίδιας κατηγορίας
- αναπτύσσουν άτυπους ορισμούς, βασιζόμενοι στις ιδιότητες τους
- δίνουν έμφαση σε ειδικές ιδιότητες που διαμορφώνουν έναν ορισμό
- δίνουν βάση σε ένα γενικό παράδειγμα
- χρησιμοποιούν μια γενική γλώσσα σχετικά με τα σχήματα και επιχειρηματολογούν βασιζόμενοι στην ελλιπή γεωμετρική διάρθρωση της οικογένειας των σχημάτων
- ξεκινούν να διατυπώνουν προτάσεις με ιδιαίτερο επίπεδο γενικότητας (Davydov, 1990˙ Clements & Battista, 1992˙ Rubinshtein, 1994, όπως αναφέρει η Dumitrascu, 2017˙ Clements, 1998˙ Clements, 1998˙ Sarama & Clements, 2009˙ Maier & Benz, 2012˙ Tall, 2013˙ Ma, et al., 2015˙ Tzekaki & Papadopoulou, 2016˙ Brunheira & Ponte, 2019˙ Ovadiya, 2019).

2.2.3 Στρατηγικές γενίκευσης

- Καμία απάντηση: οι μαθητές δεν αιτιολογούν τις απαντήσεις τους ή η απάντησή τους δεν βασίζεται σε κάποια στρατηγική (Lannin, 2005)
- Στρατηγική μαντέψτε και ελέγξτε (guess-and-check strategy) : αφορά τις προσπάθειες των παιδιών να βρουν έναν κανόνα που να ταιριάζει σε μια συγκεκριμένη περίπτωση ενός γεωμετρικού σχήματος αντί να έχει κατανοήσει μια γενική σχέση που αφορά το συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα ή την κατηγορία γεωμετρικού σχήματος (Lanin, 2005)
- Περιγραφή μίας ενέργειας που είχε εκτελεστεί προηγουμένως σε ένα άλλο σχήμα (π.χ. περιγράφει μία ενέργεια που είχε εκτελέσει για να μετατραπεί το πρώτο σχήμα στο δεύτερο) Walcott, Mohr, Signe και Kastberg (2009)
- Επίκληση στην αυθεντία: αναφέρονται στην ορθότητα που υποστηρίζεται από άλλα άτομα ή άλλο υλικό αναφοράς (Lannin, 2005)
- Εμπειρικές αποδείξεις: βασίζονται στην ορθότητα συγκεκριμένων παραδειγμάτων, περνώντας στην χρήση γενικών παραδειγμάτων, όπου η επαγωγική αιτιολόγηση βασίζεται σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα (Lannin, 2005)
- Επαγωγική αιτιολόγηση: βασίζεται σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, καταλήγοντας σε ένα πολύ προχωρημένο στάδιο (επαγωγική αιτιολόγηση), όπου οι αιτιολογήσεις δίνονται μέσω ενός επαγωγικού επιχειρήματος ανεξάρτητο από συγκεκριμένες περιπτώσεις (Lannin, 2005)

2.3 Μεθοδολογική Προσέγγιση

Στο κεφάλαιο αυτό πρόκειται να δοθούν οι απαραίτητες διευκρινήσεις σχετικά με το μεθοδολογικό σχέδιο (Μέθοδος, Συμμετέχοντες, Διαδικασία συλλογής δεδομένων, Εργαλείο συλλογής δεδομένων) σύμφωνα με το οποίο οργανώθηκε και πραγματοποιήθηκε το εμπειρικό μέρος της παρούσας μελέτης.

2.3.1 Μέθοδος

Η παρούσα εργασία στοχεύει, όπως προαναφέρθηκε να εξετάσει τις ικανότητες γενίκευσης των μαθητών της Ε’ Δημοτικού αναφορικά με το πεδίο των γεωμετρικών σχημάτων. Η μέθοδος που επιλέχθηκε για την υλοποίηση της έρευνας είναι η ποιοτική έρευνα μέσω συνέντευξης, διότι, σύμφωνα με το σκοπό της μελέτης το επίπεδο γενίκευσης των μαθητών αναφορικά με τα γεωμετρικά σχήματα δύναται να διερευνηθεί καλύτερα βάσει των προφορικών απαντήσεων τους, των παρατηρήσεων, που θα καταγραφούν και θα ληφθούν υπόψη, για τον τρόπο δράσης τους στα έργα που τους δόθηκαν, καθώς και του οπτικοακουστικού υλικού που θα συλλεχθεί. Οι μέθοδοι συλλογής δεδομένων στην ποιοτική έρευνα που επιλέχθηκαν στην παρούσα μελέτη είναι η συνέντευξη στη βάση τριών έργων που θα δοθούν στους μαθητές και η παρατήρησή τους ενώ θα εργάζονται, κατά τη διάρκεια της συνέντευξης (Ζαφειρόπουλος, 2015). Συγχρόνως, η επιλογή της ποιοτικής μεθόδου έγκειται στο πλεονέκτημα που παρέχει στον ερευνητή για ταυτόχρονη αλληλεπίδραση με τον συμμετέχοντα, στην συγκεκριμένη περίπτωση τους μαθητές, δίνοντάς τους την ευκαιρία να εκφράσουν τις σκέψεις τους και να επιχειρηματολογήσουν πάνω σε αυτές, αντί να επιλέξουν μία απάντηση ανάμεσα σε ορισμένες άλλες, όπως συμβαίνει στην ποσοτική έρευνα (Ίσαρη & Πουρκός, 2015). Στην έρευνα αυτή οι μαθητές θα ονομάσουν και θα εντάξουν σε κατηγορίες διάφορα γεωμετρικά σχήματα που θα τους δοθούν, επίσης θα κατασκευάσουν γεωμετρικά σχήματα και τέλος θα τα μετασχηματίσουν.

2.3.2 Δείγμα

Η έρευνα διεξήχθη σε δημόσιο δημοτικό σχολείο της Ανατολικής Αττικής. Οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα ήταν στο σύνολό τους 19 και φοιτούσαν στην Ε’ Δημοτικού. Ειδικότερα, σε αυτή συμμετείχαν 7 κορίτσια και 12 αγόρια των δύο τμημάτων του σχολείου, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Η επιλογή του δείγματος πραγματοποιήθηκε με τη μέθοδο της βολικής δειγματοληψίας, διότι η ερευνήτρια είχε δυνατότητα πρόσβασης στη σχολική μονάδα, καθώς εργαζόταν σε αυτή, και δεν μπορεί να θεωρηθεί τυχαία. Το δείγμα δεν μπορεί να χαρακτηριστεί αντιπροσωπευτικό και ως εκ τούτου τα αποτελέσματα δεν είναι δυνατόν να γενικευτούν στον γενικό πληθυσμό των μαθητών.

Πίνακας 1. Κατανομή των συμμετεχόντων με βάση το τμήμα και το φύλλο.

Τμήματα	Αγόρια	Κορίτσια	Σύνολο
Τμήμα 1	4	5	9
Τμήμα 2	8	2	10
Σύνολο	12	7	19

2.3.3 Το ερευνητικό εργαλείο

Για την υλοποίηση της παρούσας έρευνας σχεδιάστηκε ένα ερευνητικό εργαλείο, του οποίου το περιεχόμενο και οι ερωτήσεις βασίστηκαν σε υφιστάμενα ερευνητικά στοιχεία για τα γεωμετρικά σχήματα. Αποτελείται από τρία έργα, τα οποία είχαν στόχο να διερευνήσουν το επίπεδο γενίκευσης του δείγματος και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν για να γενικεύσουν σχετικά με τα γεωμετρικά σχήματα. Τα έργα αυτά εξετάστηκαν μέσω μιας προφορικής συνέντευξης, η οποία ήταν βασισμένη σε ερωτήσεις που στόχο είχαν να εξετάσουν τον τρόπο σκέψης, την εστίαση και τις γενικότερες ιδέες των συμμετεχόντων. Οι ερωτήσεις που τέθηκαν στους μαθητές ήταν ανοιχτού τύπου, έτσι ώστε να δοθεί η ευκαιρία στους συμμετέχοντες να εκφράσουν καλύτερα τις σκέψεις τους, χωρίς κάποιο περιορισμό (Creswell, 2011).

Συγκεκριμένα, στο 1^{ο} έργο, το οποίο βασίστηκε σε προηγούμενες έρευνες των Satlow και Newcombe (1998), Clements κ.α. (1999) Sarama και Clements (2009) Maier και Benz (2012) Koleza και Giannisi (2013) Halat και Dağli (2016) και Tzekaki και Papadopoulou (2016), παρουσιάστηκαν σε μία κόλλα Α4, όπως φαίνεται στο παράρτημα, διάφορες έγκυρες και μη έγκυρες αναπαραστάσεις των 7 γεωμετρικών σχημάτων που μελετώνται στην παρούσα εργασία. Τα γεωμετρικά σχήματα που εξετάστηκαν είναι ο κύκλος, η έλλειψη, το τρίγωνο, ο ρόμβος, το τετράγωνο, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και το τραπέζιο. Οι αναπαραστάσεις των γεωμετρικών σχημάτων ήταν μη πανομοιότυπες με παραλλαγές εντός κάθε κατηγορίας όσον αφορά τα σχήματα, το μέγεθος και τις ιδιότητες του καθενός. Οι συμμετέχοντες, αρχικά, κλήθηκαν να ταξινομήσουν σε κατηγορίες, να ονομάσουν τα γεωμετρικά σχήματα και να εντοπίσουν τις έγκυρες αναπαραστάσεις τους και να τα συγκρίνουν. Κάθε ενέργεια των συμμετεχόντων συνοδευόταν από μία ερώτηση. Για να προσδιοριστεί το επίπεδο γενίκευσης θα τεθούν ερωτήσεις σε σχέση με το ειδικό αντικείμενο, σε σχέση με τα ειδικά σχήματα/την ομάδα των γεωμετρικών σχημάτων και σε σχέση με τα γενικά σχήματα. Οι απαντήσεις τους θα βοηθήσουν να εντοπιστεί το επίπεδο γενίκευσης στο οποίο εργάζονται και οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν. Οι ερωτήσεις που τέθηκαν αφορούσαν, αρχικά, το κάθε σχήμα ξεχωριστά και διερευνούσαν τον τρόπο σκέψης των συμμετεχόντων (*Γιατί αυτό το σχήμα είναι κύκλος/ έλλειψη/ τρίγωνο/ ρόμβος/ τετράγωνο/ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο/ τραπέζιο* - Πώς σκέφτηκες για να βάλεις αυτά τα σχήματα στην ίδια κατηγορία;), τα ειδικά σχήματα/την ομάδα των γεωμετρικών σχημάτων και διερευνούσαν την εστίασή των συμμετεχόντων (Γιατί αυτό το σχήμα είναι κύκλος/ έλλειψη/ ορθογώνιο/ τρίγωνο/ τετράγωνο/ τραπέζιο/ ρόμβος ; Γιατί έβαλες αυτά τα σχήματα στην ίδια κατηγορία ;) και τα γενικά σχήματα και διερευνούσαν τις γενικότερες ιδέες τους (Πώς θα μάθουμε ότι ένα σχήμα είναι κύκλος/ έλλειψη/ τρίγωνο/ ορθογώνιο/ τετράγωνο/ τραπέζιο/ ρόμβος; Πώς μπορούμε να βάλουμε κύκλους/ ελλείψεις/ τρίγωνο. Ορθογώνια/ τετράγωνο/ τραπέζια/ ρόμβους σε μια κατηγορία ; Τι παρατηρούμε για να δούμε αν ένα σχήμα ανήκει σε μία κατηγορία σχημάτων ;)

Στο 2ο έργο (Sarama & Clements, 2009˙ Maier & Benz, 2012˙ Tzekaki & Papadopoulou, 2016˙ Halat & Dağli, 2016), οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να κατασκευάσουν διάφορες αναπαραστάσεις των γεωμετρικών σχημάτων (ορθογώνια παραλληλόγραμμα, τετράγωνα, ρόμβους, τρίγωνα και ισοσκελή τραπέζια) με τη χρήση του εποπτικού υλικού «*συνδεόμενες πλευρές*». Το υλικό αυτό πρόκειται για 80 αλληλοσυνδεόμενες πλευρές σε οκτώ χρώματα διαφορετικού μήκους, όπως φαίνεται στην Εικόνα 1. Για κάθε σχήμα όπου κατασκεύαζαν, στη συνέχεια, τους θέτονταν ερωτήσεις που είχαν στόχο να προσδιορίσουν το επίπεδο γενίκευσης οπού εργάζονται και μαθητές και τις στρατηγικές που εφαρμόζουν. Οι ερωτήσεις αφορούν, αρχικά, το κάθε σχήμα ξεχωριστά και διερευνούσαν τον τρόπο σκέψης των συμμετεχόντων (|*Πώς κατασκεύασες αυτό το* ορθογώνιο/ τραπέζιο/ ρόμβο/ τετράγωνο/ τρίγωνο;*;*). Οι μαθητές απαντούσαν σε αυτή την ερώτηση για κάθε διαφορετική αναπαράσταση γεωμετρικού σχήματος που κατασκεύαζαν. Στη συνέχεια οι ερωτήσεις αφορούσαν μία ολόκληρη ομάδα γεωμετρικών σχημάτων και την εστίαση των συμμετεχόντων (*Πώς κατασκευάζεις ένα τετράγωνο/ ρόμβο/ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο/ τραπέζιο;*), και, τέλος, τις γενικότερες ιδέες τους για την κατασκευή των γεωμετρικών σχημάτων (*Τι προσέχεις όταν κατασκευάζεις ένα γεωμετρικό σχήμα;*).

Εικόνα 1. Υλικό "Συνδεόμενες πλευρές"

Στο τρίτο έργο, οι μαθητές κλήθηκαν να μετασχηματίσουν γεωμετρικά σχήματα (Tzekaki & Papadopoulou, 2016). Μέσω αυτό του έργου, των ερωτήσεων που τέθηκαν στους συμμετέχοντες και της παρατήρησης των κινήσεων τους, θα γίνει προσπάθεια να προσδιοριστεί το επίπεδο γενίκευσης στο οποίο εργάζονται και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν κατά των μετασχηματισμό των γεωμετρικών σχημάτων και συνεπώς της γενίκευσης των ιδεών τους. Στους συμμετέχοντες δόθηκαν, σταδιακά, διαφανείς παράλληλες και μη παράλληλες λωρίδες με χρώμα σε ποικίλα μεγέθη. Οι μαθητές χρησιμοποιώντας τις λωρίδες αυτές μετασχημάτισαν τα γεωμετρικά σχήματα μετακινώντας τες και περιστρέφοντάς τες, χωρίς να αφήνουν κενά μεταξύ τους ή να τις αλληλεπικαλύπτουν. Στην αρχή τους τέθηκε η ερώτηση που αφορούσε οι τον τρόπο σκέψης τους (Πώς σκέφτεσαι να μετατρέψεις αυτό το τετράγωνο σε ορθογώνιο ; Πώς σκέφτεσαι να μετατρέψεις αυτό το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε τρίγωνο ; Πώς σκέφτεσαι να μετατρέψεις αυτό το ισοσκελές τραπέζιο σε ορθογώνιο; Πώς σκέφτεσαι να μετατρέψεις αυτό το ρόμβο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμο ;), την εστίασή τους (Γιατί μετέτρεψες το τετράγωνο σε ορθογώνιο; Γιατί μετέτρεψες το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε τρίγωνο ; Γιατί μετέτρεψες το ισοσκελές τραπέζιο σε ορθογώνιο ; Γιατί μετέτρεψες τον ρόμβο σε τρίγωνο ;) και τις γενικότερες ιδέες τους (Πώς μπορούμε να μετατρέψουμε ένα τετράγωνο σε ορθογώνιο ; Πώς μπορούμε να μετατρέψουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε τρίγωνο ; Πώς μπορούμε να μετατρέψουμε ένα ισοσκελές τραπέζιο σε ορθογώνιο ; Πώς μπορούμε να μετατρέψουμε ένα ρόμβο σε τρίγωνο ;)

2.3.4 Ερευνητική διαδικασία

Αρχικά, το ερευνητικό εργαλείο που σχεδιάστηκε εφαρμόστηκε σε μία πιλοτική έρευνα, η οποία πραγματοποιήθηκε τον Νοέμβριο του 2021. Στην πιλοτική έρευνα συμμετείχαν 5 μαθητές της Ε’ Δημοτικού και υλοποιήθηκε για να προσδιορισθεί η λειτουργικότητα του ερευνητικού εργαλείου, να εντοπιστούν τυχόν ασάφειες και να διαμορφωθεί η τελική δομή του.

Πριν την διεξαγωγή της κύριας έρευνας, ενημερώθηκε η διευθύντρια της σχολικής μονάδας και στη συνέχεια μοιράστηκαν στους μαθητές υπεύθυνες δηλώσεις συγκατάθεσης των γονέων/κηδεμόνων για την συμμετοχή τους στην έρευνα, σύμφωνα με τις υποδείξεις της διευθύντριας. Μετά την συλλογή του απαιτούμενου αριθμού δηλώσεων των μαθητών ξεκίνησε η διεξαγωγή της κύρια έρευνας.

Η κύρια έρευνα διεξήχθη το χρονικό διάστημα Δεκεμβρίου 2021 – Φεβρουαρίου 2022. Η έρευνα έλαβε χώρα στο γυμναστήριο του σχολείου, όταν αυτό ήταν διαθέσιμο, καθώς μόνο αυτή η αίθουσα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί. Η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός έπαιρνε κάθε παιδί ξεχωριστά στο χώρο του γυμναστηρίου, σε ώρες εντός του ωρολογίου προγράμματος της τάξης, και το παιδί καλούνταν να αντιμετωπίσει τρία έργα και να απαντήσει συγχρόνως, στα ερωτήματα που του έθετε η ερευνήτρια κάθε φορά, ώστε να εξεταστεί το επίπεδο γενίκευσης του κάθε μαθητή και οι στρατηγικές που εφάρμοζε, για να γενικεύει στο πεδίο των γεωμετρικών σχημάτων. Αυτά διατυπώθηκαν στους/στις μαθητές/τριες ενώ ή/και μετέπειτα της εκτέλεσης μίας εργασίας. Σε περίπτωση που ένας/ μία μαθητής/τρια δεν είχε κατανοήσει την ερώτηση ή δυσκολευόταν στην απάντησή της, αυτή τροποποιούνταν ή δίνονταν διευκρινήσεις που είχαν σκοπό την διευκόλυνση και την ενθάρρυνσή του/της.

Η διαδικασία αυτή είχε διάρκεια περίπου 25-30 λεπτά. Κλείνοντας, οι συνεντεύξεις των μαθητών ηχογραφήθηκαν και φωτογραφήθηκαν οι κατασκευές των γεωμετρικών σχημάτων καθώς και οι μετασχηματισμοί. Τα αποτελέσματα θα αναλυθούν ποιοτικά, λαμβάνοντας υπόψη τις απαντήσεις και τις παρατηρήσεις που συλλέχθηκαν κατά την συνέντευξη.

2.3.5 Ανάλυση δεδομένων

Μετά την ολοκλήρωση των συνεντεύξεων, ακολούθησε η ανάλυση των δεδομένων, ώστε, στο τέλος, να προσδιοριστεί ποιο είναι το επίπεδο γενίκευσης των μαθητών Ε' Δημοτικού αναφορικά με τα γεωμετρικά σχήματα και ποιες στρατηγικές χρησιμοποιούν κατά τη γενίκευση των γεωμετρικών σχημάτων.

Για την ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν κατά την διεξαγωγή της έρευνας επιλέχθηκε η θεματική ανάλυση. Πρόκειται για μια εύχρηστη μέθοδο, η οποία εφαρμόζεται ευρέως στην ποιοτική έρευνα. Αποτελεί μέθοδο εντοπισμού, περιγραφής, αναφοράς και «θεματοποίησης» επαναλαμβανόμενων νοηματικών μοτίβων, δηλαδή «θεμάτων» τα οποία προκύπτουν από τα ερευνητικά δεδομένα, και αποτελεί βασικό εργαλείο για όλους τους ερευνητές που ασχολούνται με την ποιοτική έρευνα (Ισαρη & Πουρκός, 2015).

Οι Braun και Clarke (2006), όπως αναφέρεται στο Ίσαρη & Πουρκός (2015) προτείνουν έξι βήματα κατά τη διεξαγωγή της θεματικής ανάλυσης, χωρίς, όμως, να προϋποθέτουν μια γραμμική πορεία. Αρχικά, απομαγνητοφωνήθηκαν οι συνεντεύξεις των συμμετεχόντων. Στη συνέχεια, η ερευνήτρια εξοικειώθηκε με το ερευνητικό υλικό που προέκυψε από τις απομαγνητοφωνήσεις των συνεντεύξεων, μέσω της προσεκτικής ανάγνωσης του συνόλου των απαντήσεων των συμμετεχόντων σε κάθε έργο και σε κάθε ερώτηση, αλλά και των σημειώσεων που είχαν προκύψει κατά την παρατήρησή τους. Αυτή η πρωταρχική διαδικασία είχε σκοπό την αναζήτηση κοινών στοιχείων στις απαντήσεις των μαθητών και στον τρόπο εργασίας τους. Έτσι, προέκυψαν κάποιοι αρχικοί άξονες των απαντήσεων και μία πρώτη συνολική εικόνα αναφορικά με το επίπεδο γενίκευσης των μαθητών στα γεωμετρικά σχήματα και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν κατά την γενίκευση γεωμετρικών σχημάτων. Έπειτα, επαναλήφθηκε η ανάγνωση του συνόλου των απομαγνητοφωνήσεων σειρά προς σειρά που είχε συλλεχθεί από τις ερωτήσεις που τέθηκαν στους συμμετέχοντες σε κάθε έργο, αλλά και των σημειώσεων που είχαν δημιουργηθεί από την παρατήρησή τους. Αναλύθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών και κωδικοποιήθηκαν τα «μοτίβα απαντήσεων» που εντοπίστηκαν. Στη συνέχεια, το κάθε μοτίβο απαντήσεων εξετάστηκε προσεκτικά, ώστε να ενταχθεί ως χαρακτηριστικό σε κάποιο από τα επίπεδα γενίκευσης, όπως αυτά παρουσιάστηκαν στο εννοιολογικό πλαίσιο της παρούσας εργασίας. Παρομοίως, έγινε προσπάθεια να εντοπιστούν χαρακτηριστικά που υποδηλώνουν την χρήση κάποιας/ων από τις στρατηγικές γενίκευσης, όπως αυτές παρουσιάστηκαν προηγουμένως. Προχωρώντας, οι απαντήσεις και οι κατηγοριοποιήσεις επανεξετάστηκαν, ώστε να ελεγχθεί αν παρουσιάζουν συνοχή με νόημα μεταξύ τους και αν υπάρχουν ξεκάθαροι και αναγνωρίσιμοι διαχωρισμοί με βάση τα χαρακτηριστικά των επιπέδων γενίκευσης και των στρατηγικών γενίκευσης. Τέλος, έγινε ένας ακόμη επανέλεγχος, ώστε να διαπιστωθούν τυχόν παραλείψεις ή ανακρίβειες και ακολούθησε η τελική ανάλυση και η συγγραφή των ευρημάτων.

2.3.6 Αξιοπιστία και εγκυρότητα της έρευνας

Η αξιοπιστία της παρούσας έρευνας εξασφαλίζεται από τη σταθερότητα καταγραφής των απαντήσεων για όλους τους μαθητές της τάξης, διότι δόθηκαν ακριβώς τα ίδια έργα σε κάθε μαθητή, πραγματοποιήθηκαν σε συγκεκριμένο χρόνο από όλους και υπό τις ίδιες συνθήκες, προκειμένου να αποφευχθεί οποιαδήποτε μεταβολή των συνθηκών διεξαγωγής της έρευνας, καθώς όταν οι διαδικασίες ποικίλλουν, εισάγεται μεροληψία και τα δεδομένα ίσως να μην είναι συγκρίσιμα και κατάλληλα για επεξεργασία (Creswell, 2011). Επίσης, η αξιοπιστία της μελέτης φανερώνεται από τη χρήση πολλαπλών μεθόδων συλλογής δεδομένων (προφορική συνέντευξη, παρατήρηση των κινήσεων των μαθητών) τα οποία διασταυρώθηκαν προκειμένου να ενισχυθούν τα ευρήματα (Denzin, 2000). Επιπροσθέτως, το περιεχόμενο του ερευνητικού εργαλείου σχεδιάστηκε και δομήθηκε με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα, τους εννοιολογικούς και λειτουργικούς ορισμούς που αναπτύχθηκαν παραπάνω, ώστε τα ερωτήματα, το περιεχόμενό του και οι ερωτήσεις του να σχετίζονται με όλους τους πιθανούς άξονες των εννοιών που πραγματεύεται η παρούσα μελέτη (Creswell, 2011). Ταυτόχρονα, για να ενισχυθεί η σταθερότητα μέτρησης του ερευνητικού εργαλείου, δόθηκε πιλοτικά σε 5 μαθητές της Ε' Δημοτικού ώστε να εξεταστεί η καταλληλόλητά του και η σαφήνειά του, αν δηλαδή το περιεχόμενο του είναι κατανοητό, αν οι ερωτήσεις προκαλούν σύγχυση και παρανοήσεις στους μαθητές, αν οι δραστηριότητες και οι ερωτήσεις που σχεδιάστηκαν συμβάλουν στην συλλογή των προσδοκώμενων δεδομένων, αν το εργαλείο είναι μεγάλο και κουραστικό και αν οι οδηγίες συμπλήρωσης είναι σαφείς (Cohen, Manion & Morrison, 2008).

Αναφορικά με την εγκυρότητα της έρευνας, μπορεί να εξασφαλιστεί από το γεγονός ότι το ερευνητικό εργαλείο δημιουργήθηκε για να διερευνήσει το επίπεδο γενίκευσης των μαθητών Ε' δημοτικού αναφορικά με τα γεωμετρικά σχήματα, καθώς και τις στρατηγικές που εφαρμόζουν κατά την γενίκευση γεωμετρικών σχημάτων. Ειδικότερα, στο τέλος της μελέτης, μέσω των τριών έργων και των διαβαθμισμένων ως προς τη γενίκευση ερωτήσεων (από το ειδικό αντικείμενο στο γενικό αντικείμενο) που, συγχρόνως, ζητήθηκε να απαντήσουν οι συμμετέχοντες, θεωρείται πως θα προσδιοριστεί το επίπεδο γενίκευσης των μαθητών και οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν κατά την γενίκευση γεωμετρικών σχημάτων, καθώς οι μαθητές κλήθηκαν να αναγνωρίσουν, ταξινομήσουν και να συγκρίνουν γεωμετρικά σχήματα, να κατασκευάσουν και να μετασχηματίσουν γεωμετρικά σχήματα.

3ο Μέρος: Αποτελέσματα έρευνας

Κατά την ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων, σύμφωνα με τον σκοπό και τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν, προέκυψαν τα αποτελέσματα της έρευνας, τα οποία και παρουσιάζονται στη συνέχεια.

1ο έργο

Αναγνώριση γεωμετρικών σχημάτων

Οι συμμετέχοντες της έρευνας στο 1ο έργο κλήθηκαν να αναγνωρίσουν διάφορες αναπαραστάσεις γεωμετρικών σχημάτων και να τις ονομάσουν.

Αρχικά, το σύνολο του δείγματος, χωρίς καμία εξαίρεση, αναγνώρισε τις αναπαραστάσεις των κύκλων. Ωστόσο, κανένας συμμετέχων δεν αναγνώρισε κάποιο σχήμα της έλλειψης, ενώ οι περισσότεροι τα ονόμασαν κύκλο. Οι υπόλοιπες δηλώσεις των συμμετεχόντων αναφορικά με αυτά τα σχήματα του κύκλου και της έλλειψης παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2. Δηλώσεις συμμετεχόντων αναφορικά με την ονομασία του κύκλου και της έλλειψης

	Σχήμα 2	Σχήμα 4	Σχήμα 13

Κύκλος	11	3	7
Δεν το έχω ξαναδεί	2	3	2
Δεν υπάρχει	3	2	2
Οβάλ	2	6	6
Κύλινδρος		2	1
Έχω δει ξανά αυτό το σχήμα, αλλά δεν θυμάμαι πώς το λένε	1	3	1
Σύνολο	19	19	19

Συνεχίζοντας με το τετράγωνο, η πλειοψηφία του δείγματος της έρευνας αναγνώρισε με ευκολία τα δύο πρωτοτυπικά σχήματα, ενώ δυσκολεύτηκαν με το σχήμα του τετραγώνου, το οποίο παρουσιάστηκε σε μη πρωτοτυπικό προσανατολισμό και περίπου το μισό δείγμα (11 συμμετέχοντες) το ονόμασε ρόμβο.

Πίνακας 3. Δηλώσεις συμμετεχόντων αναφορικά με την ονομασία του τετραγώνου

	Σχήμα 11	Σχήμα 18	Σχήμα 21
Τετράγωνο	17	19	7
Ρόμβος			1
Δεν υπάρχει	2		11
Σύνολο	19	19	19

Σχετικά με την αναγνώριση των ρόμβων, οι μαθητές αναγνώρισαν με ευκολία τα 2 πρωτοτυπικά σχήματα, αλλά δυσκολεύτηκαν σε αυτό (Σχήμα 3) που ο προσανατολισμός του διέφερε σημαντικά από τα άλλα δύο.

Πίνακας 4. Δηλώσεις συμμετεχόντων αναφορικά με την ονομασία του ρόμβου

	Σχήμα 3	Σχήμα 7	Σχήμα 9
Τετράγωνο	3	1	1
Ρόμβος	3	12	16
Χαρταετός		1	1
Πλάγιο τετράγωνο	5	1	1
Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο	2		
Τραπέζιο	1		

Έχω δει ξανά αυτό το σχήμα, αλλά δεν θυμάμαι πώς το λένε	3		1
Δεν υπάρχει	2	4	
Σύνολο	19	19	19

Η πλειοψηφία των συμμετεχόντων της έρευνας (17 μαθητές) αναγνώρισαν την πρωτοτυπική αναπαράσταση του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (Σχήμα 12) και δυσκολεύτηκαν στην μη πρωτοτυπική, όπου μόλις 8 συμμετέχοντες την αναγνώρισαν, ενώ άλλοι 7 την ονόμασαν *γραμμή*.

Πίνακας 5. Δηλώσεις συμμετεχόντων αναφορικά με την ονομασία του ορθογωνίου παραλληλογράμμου

	Σχήμα 5	Σχήμα 12
Τετράγωνο		2
Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο	8	17
Γραμμή	7	
Δεν υπάρχει	4	4
Σύνολο	19	19

Αναφορικά με την αναγνώριση του τριγώνου, οι μαθητές φάνηκε να αναγνωρίζουν με ευκολία τα σχήματα αυτά. Ειδικότερα, 11 συμμετέχοντες ονόμασαν *τρίγωνο* το *Σχήμα 16* και 10 συμμετέχοντες αναγνώρισαν το *Σχήμα 17* ως τρίγωνο.

Πίνακας 6. Δηλώσεις συμμετεχόντων αναφορικά με την ονομασία του τριγώνου

	Σχήμα 16	Σχήμα 17
Τρίγωνο	11	10
Δεν υπάρχει/ Δεν είναι τρίγωνο	6	7
Έχω δει ξανά αυτό το σχήμα, αλλά δεν θυμάμαι πώς το λένε	2	
Δεν το έχω ξαναδεί		2
Σύνολο	19	19

Η αναγνώριση του τραπεζίου δυσκόλεψε την πλειοψηφία των μαθητών, καθώς μόλις 3 από τους 19 αναγνώρισαν το ισοσκελές τραπέζιο (Σχήμα 22), ενώ η δεύτερη αναπαράσταση τραπεζίου χαρακτηρίστηκε από τους περισσότερους (15 συμμετέχοντες), ως μη έγκυρη, 2 συμμετέχοντες την ονόμασαν τετράγωνο, 1 συμμετέχων τρίγωνο και 1 συμμετέχων ανέφερε ότι έχει ξαναδεί αυτό το σχήμα αλλά δεν θυμάται την ονομασία του.

Πίνακας 7. Δηλώσεις συμμετεχόντων σχετικά με την αναγνώριση των τραπεζίων

	Σχήμα 19	Σχήμα 22
Τραπέζιο	0	3
Τετράγωνο	2	2
Τρίγωνο	1	
Δεν υπάρχει/ Δεν είναι τραπέζιο	15	3
Σύνολο	19	19

Σχετικά με τις μη έγκυρες αναπαραστάσεις σχημάτων, η πλειοψηφία των συμμετεχόντων στην έρευνα δεν τις αναγνώρισε, αλλά απέδωσε σε αυτές κάποια ονομασία από τα γεωμετρικά σχήματα. Ειδικότερα, αναφορικά με την *Αναπαράσταση 6*, το μεγαλύτερο μέρος των συμμετεχόντων (12 μαθητές) την ονόμασαν ρόμβο, 2 τετράγωνο και 1 ανέφερε ότι έχει ξαναδεί το σχήμα αλλά δεν θυμάται το όνομά του. Μόλις 3 μαθητές ανέφεραν ότι η αναπαράσταση αυτή δεν πρόκειται για κάποιο σχήμα. Συγχρόνως, την *Αναπαράσταση 8*, μόλις 1 μαθητής ανέφερε ότι δεν υπάρχει, ενώ οι υπόλοιποι 18 υποστήριξαν ότι πρόκειται για το σχήμα του κύκλου. Επιπλέον, την *Αναπαράσταση 15*, 11 μαθητές την αναγνώρισαν ως *τετράγωνο* και μόλις 8 ανέφεραν ότι *δεν είναι τετράγωνο/δεν είναι σχήμα.* Η *Αναπαράσταση 14* χαρακτηρίστηκε από 10 μαθητές ως μη έγκυρη, από 6 ως ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, από 2 ως τετράγωνο και από 1 ως τραπέζιο. Το *Σχήμα 20* αναγνώρισαν ως μη έγκυρη αναπαράσταση 11 μαθητές και άλλοι 8 ως Τρίγωνο. Κλείνοντας, 5 συμμετέχοντες αναγνώρισαν το Σχήμα 23 ως μη έγκυρη αναπαράσταση, 6 ανέφεραν ότι δεν έχουν δει ξανά αυτό το σχήμα, αλλά υπάρχει, 5 ότι έχουν δει ξανά αυτό το σχήμα, αλλά δεν θυμούνται την ονομασία τους, 2 μαθητές το ονόμασαν Τραπέζιο και 1 Τετράγωνο.

Συμπερασματικά, λοιπόν, αναφορικά με τις έγκυρες αναπαραστάσεις των γεωμετρικών σχημάτων που τους δόθηκαν, οι συμμετέχοντες της έρευνας αναγνώρισαν τις πρωτοτυπικές (Επίπεδο 1) με μεγάλη ευκολία. Ειδικότερα, όλοι οι μαθητές αναγνώρισαν τις αναπαραστάσεις των κύκλων και η πλειοψηφία των συμμετεχόντων τις πρωτοτυπικές αναπαραστάσεις των τετραγώνων, των ρόμβων, του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και του ορθογωνίου τριγώνου. Από την άλλη πλευρά, δυσκολεύτηκαν να αναγνωρίσουν τις μη προτοτυπικές αναπαραστάσεις των παραπάνω σχημάτων. Μάλιστα, ελάχιστοι αναγνώρισαν το ισοσκελές τραπέζιο και κανένας από τους συμμετέχοντες τις ελλείψεις. Αναφορικά με τις μη έγκυρες αναπαραστάσεις των γεωμετρικών σχημάτων, ελάχιστοι συμμετέχοντες τις αναγνώρισαν, ενώ οι περισσότεροι απέδιδαν σε αυτές ονομασίες σχημάτων βάσει της ολιστικής αναγνώρισής τους, χωρίς να εστιάζουν στις ιδιότητές τους (Επίπεδο 1).

<u>Τρόπος σκέψη δείγματος</u>

Πώς ξέρεις ότι αυτό το σχήμα είναι/ δεν είναι κύκλος;

Το δείγμα της έρευνας, χωρίς καμία εξαίρεση, αναγνώρισε με ευκολία τα σχήματα που αναπαριστούν κύκλους βάση της ολιστικής αναγνώρισης (Επίπεδο 1) («*Επειδή είναι στρογγυλό/ επειδή το σχήμα του είναι κυκλικό).* Αναφορικά με το Σχήμα 8, το οποίο πρόκειται για μία μη έγκυρη αναπαράσταση, οι 18 συμμετέχοντες που το ονόμασαν *Κύκλο* δικαιολόγησαν την επιλογή τους, επίσης, βάσει της ολιστικής αναγνώρισης (Επίπεδο 1) (*επειδή έχει κυκλικό σχήμα*, *επειδή είναι στρογγυλό*, *γιατί είναι σαν σφαίρα***.** Μάλιστα, ένας από αυτούς ανέφερε χαρακτηριστικά *επειδή μπορεί να κυλήσει και είναι στρογγυλό*. Ο συμμετέχων, ο οποίος ανέφερε πώς η αναπαράσταση αυτή *μάλλον δεν υπάρχει, δεν είναι κύκλος*, αιτιολογήθηκε βάση ενός χαρακτηριστικού του κύκλου, του κλειστού της γραμμής, χωρίς ωστόσο να το ονομάσει (Επίπεδο 2), αλλά περιγράφοντάς το λέγοντας, *γιατί έχει αυτές τις διακεκομμένες γραμμές. Ένας κύκλος δεν έχει τέτοιες γραμμές μικρές, αλλά μία μεγάλη γραμμή ενωμένη!».* Συνεχίζοντας με τα σχήματα της έλλειψης, οι περισσότεροι συμμετέχοντες τα ονόμασαν *κύκλο* και ρωτήθηκαν *Πώς ξέρεις ότι αυτό το σχήμα είναι κύκλος* ;. Όλοι βασίστηκαν στην ολιστική αναγνώριση (Επίπεδο 1) (*το ξέρω από το σχέδιο, μοιάζει με κύκλο/ επειδή είναι κυκλικό/ επειδή είναι στρογγυλό*).

Η μερίδα των συμμετεχόντων που δήλωσε για τις αναπαραστάσεις της έλλειψης, πως *δεν είναι κύκλος* ερωτήθηκε *Πώς ξέρεις ότι αυτό το σχήμα δεν είναι κύκλος;* και για να αιτιολογήσουν την απάντησή τους βασίστηκαν στα οπτικά χαρακτηριστικά της (Επίπεδο 1) (*γιατί δεν είναι στρογγυλό*), όπως φαίνεται στον Πίνακα 9. Συγκεκριμένα, η Β. απάντησε *μοιάζει με έναν κύκλο, αλλά είναι λάθος, γιατί είναι μαζεμένο* και ο Γ. *δεν είναι κύκλος, γιατί δεν είναι στρογγυλό, είναι κάπως φαρδύ. Δεν υπάρχει, είναι ένας κύκλος που έχει σχεδιαστεί λάθος*.

Συμπερασματικά, λοιπόν, οι συμμετέχοντες που αναγνώρισαν τις έγκυρες αναπαραστάσεις απάντησαν όλοι βάση της ολιστικής αναγνώρισής του (Επίπεδο 1), ενώ ο ένας που αναγνώρισε την μη έγκυρη αναπαράσταση βασίστηκε σε ένα στοιχείο του κύκλου (Επίπεδο 2), την μη ύπαρξη του κλειστού της γραμμής του κύκλου. Οι συμμετέχοντες που αναγνώρισαν λανθασμένα ως κύκλο τη μη έγκυρη αναπαράσταση βασίστηκαν εξίσου στην ολιστική αναγνώριση. Το δείγμα της έρευνας, που ονόμασε την έλλειψη ως κύκλο, αιτιολόγησε βάσει της ολιστικής αναγνώρισης (Επίπεδο 1) και όσοι υποστήριξαν πως δεν πρόκειται για κύκλο, βασίστηκαν, επίσης, στην αναγνώριση οπτικών χαρακτηριστικών (Επίπεδο 1).

Πώς ξέρεις ότι αυτό το σχήμα είναι/ δεν είναι τρίγωνο ;

Οι μαθητές που αναγνώρισαν τις αναπαραστάσεις του τριγώνου (Σχήμα 16, Σχήμα 17) δικαιολόγησαν την ονομασία αυτή βασισμένοι στις ιδιότητες του τριγώνου (Επίπεδο 2) και στην ολιστική αναγνώριση του σχήματος (Επίπεδο 1). Ειδικότερα, σχετικά με το Σχήμα 16, το οποίο αναπαριστά ένα ορθογώνιο τρίγωνο, οι ιδιότητες που βασίστηκαν αφορούσαν τον αριθμό των γωνιών (6 συμμετέχοντες - *επειδή έχει 3 γωνίες)*, τον αριθμό των πλευρών (3 συμμετέχοντες - *επειδή έχει 3 γραμμές)*, τον αριθμό τόσο των γωνιών όσο και των πλευρών (1 συμμετέχων - *έχει 3 γωνίες και 3 πλευρές)* και μόλις 1 συμμετέχων στηρίχθηκε στην ολιστική αναγνώριση *(το ξέρω από το σχήμα του, τέτοιο είναι το σχήμα τρίγωνο)*. Συμπληρωματικά, από τους 10 συμμετέχοντες που αναγνώρισαν το Σχήμα 17 ως *Τρίγωνο*, συνολικά 9 αναφέρθηκαν σε ιδιότητες του τριγώνου και συγκεκριμένα 6 απάντησαν βάσει του αριθμού των γωνιών (*γιατί έχει 3 γωνίες*), 2 βάσει του αριθμού των πλευρών (*έχει 3 πλευρές/ οι δύο αυτές γραμμές είναι ίσες και αυτή είναι μεγαλύτερη*), και 1 συμμετέχων βάσει του αριθμού των πλευρών και των γωνιών (*έχει 3 γραμμές και 3 γωνίες*). Μόλις 1 συμμετέχων αιτιολόγησε την απάντησή του βάσει ολιστικής αναγνώρισης (Επίπεδο 1) (*γιατί είναι σαν τρίγωνο κάπως*).

Πίνακας 8. Απαντήσεις συμμετεχόντων στην ερώτηση Πώς ξέρεις ότι αυτό το σχήμα είναι τρίγωνο ;

	Σχήμα 16	Σχήμα 27
Ολιστική αναγνώριση (Επίπεδο 1)	1	1
Αναγνώριση ορισμένων ιδιοτήτων τριγώνου, με δυνατότητα ονομασίας (Επίπεδο 2)	10	9
Σύνολο	11	10

Οι συμμετέχοντες που υποστήριξαν ότι Σχήμα 16 και το Σχήμα 17, *δεν είναι τρίγωνο* αιτιολόγησαν την επιλογή τους βάσει ενός πρωτοτυπικού τριγώνου (Επίπεδο 1) και οπτικών χαρακτηριστικών (Επίπεδο 1). Ειδικότερα, αναφορικά με το ορθογώνιο τρίγωνο (Σχήμα 16) , και οι 6 συμμετέχοντες επιχειρηματολόγησαν βάσει ενός πρωτοτυπικού τριγώνου (Επίπεδο 1), καθώς αναφέρθηκαν στο είδος των πλευρών του τριγώνου και συγκεκριμένα στην ύπαρξη άνισων πλευρών, μίας και όλοι υποστήριξαν ότι ένα τρίγωνο *έχει 3 ίσες πλευρές*. Ειδικότερα, ο Κ. απάντησε *αν ήταν τρίγωνο...το τρίγωνο είναι έτσι* (σχεδιάζει ένα ισόπλευρο τρίγωνο) *και αυτό...πώς να το πω τώρα..αυτό δεν έχει καν το σωστό σχήμα και δεν έχει ίσες πλευρές, οι* *γωνίες του οι δύο είναι κανονικές, η μία είναι τετραγωνική. Τα τρίγωνα δεν έχουν τέτοιες γωνίες* (δείχνει την ορθή) *και οι πλευρές τους είναι ίσες!* Στο σημείο αυτό, αξίζει να αναφερθεί, ότι ο συγκεκριμένος μαθητής χρησιμοποιεί την στρατηγική της εμπειρικής γενίκευσης, για να αιτιολογήσει την θέση του, καθώς βασίζεται σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα ενός πρωτοτυπικού τριγώνου, συγκρίνει τα δύο αυτά σχήματα και απορρίπτει το μη πρωτοτυπικό γι' αυτόν τρίγωνο, χρησιμοποιώντας συγχρόνως, σημειωτικά μέσα, σχεδιάζοντας ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Επίσης, ένας ακόμα συμμετέχων απάντησε χαρακτηριστικά *δεν υπάρχει, γιατί για να είναι τρίγωνο θα έπρεπε να είναι πλάγιες έτσι* (δείχνει ένα Λ με τα χέρια) *οι δύο πλευρές του και η μία να είναι κάτω ίσια. Και όλες να είναι ίσες!* Συγχρόνως, από αυτή την δήλωση του πρώτου μαθητή, φανερώνεται πως οι ορθές γωνίες (*τετραγωνική*, όπως την ανέφερε) δεν αποτελούν χαρακτηριστικό των τριγώνων, επομένως, δεν αναγνωρίζουν ρητά τις ιδιότητες της κατηγορίας των τριγώνων και επιχειρηματολογούν χωρίς να βασίζονται στα χαρακτηριστικά της κατηγορίας των τριγώνων, αλλά σε ένα πρωτοτυπικό τρίγωνο (Επίπεδο 1).

Το δείγμα της έρευνας που υποστήριξε πως το Σχήμα 17 *δεν είναι τρίγωνο*, απάντησε στην πλειοψηφία (7 συμμετέχοντες) ότι πρόκειται για ένα άγνωστο σχήμα (*γιατί δεν το έχω δει ξανά*) και 2 συμμετέχοντες εστίασαν στην ολιστική αναγνώριση του σχήματος (Επίπεδο 1), υποστηρίζοντας ότι *δεν είναι τρίγωνο, δεν είναι καν σχήμα, γιατί οι πλευρές του δεν είναι καλές, είναι πολύ λεπτές, είναι περίεργες* και *οι γωνίες πάρα πολύ κοντά.* Συνεπώς, καθίσταται αντιληπτό ότι το δείγμα της έρευνας που δεν αναγνώρισε ότι αναπαρίσταται ένα τρίγωνο, αναγνωρίζει μόνο πρωτοτυπικά τρίγωνα, καθώς δεν το αναγνωρίζουν σε μη τυπικό μέγεθος (Επίπεδο 1).

Συνεχίζοντας με το *Σχήμα 20*, οι 10 συμμετέχοντες της έρευνας που αναγνώρισαν πως πρόκειται για μία μη έγκυρη αναπαράσταση βασίστηκαν στην ολιστική αναγνώρισή του (Επίπεδο 1). Συγκεκριμένα, ο Χ. συμμετέχων απάντησε χαρακτηριστικά *είναι ένα τρίγωνο που είναι στενό και μυτερό και τέτοιο σχήμα τρίγωνο δεν υπάρχει*. Επομένως, οι μαθητές την αναγνώρισαν από την οπτική εμφάνιση της αναπαράστασης, χωρίς να είναι σε θέση να επιχειρηματολογήσουν, βασιζόμενοι σε χαρακτηριστικά και ιδιότητες της κατηγορίας των τριγώνων (Επίπεδο 1). Από την άλλη πλευρά, την ίδια αναπαράσταση, οι υπόλοιποι 9 συμμετέχοντες που την ονόμασαν *τρίγωνο*, βασίστηκαν, λανθασμένα στις ιδιότητες της αναπαράστασης και αναφέρθηκαν στον αριθμό των γωνιών (3 συμμετέχοντες - *γιατί έχει 3 γωνίες*), χωρίς να παρατηρούν ότι οι δύο πλευρές του σχήματος δεν ενώνονται, και επομένως δεν υπάρχει η 3^{η} γωνία στην οποία αναφέρονται, τον αριθμό των πλευρών (2 συμμετέχοντες -

επειδή έχει 3 γραμμές) και βάσει ολιστικής αναγνώρισης (3 συμμετέχοντες - *επειδή φαίνεται σαν* τρίγωνο),

Καταληκτικά, αναφορικά με τις έγκυρες αναπαραστάσεις των τριγώνων, η πλειοψηφία των μαθητών αναγνώρισε ορισμένες ιδιότητες των τριγώνων (αριθμός πλευρών, αριθμός γωνιών, αριθμός πλευρών και γωνιών) και τις κατονόμασαν (Επίπεδο 2) και μόλις 1 συμμετέχων τις αναγνώρισε ολιστικά (Επίπεδο 1). Σχετικά με την μη έγκυρη αναπαράσταση, οι συμμετέχοντες αναφέρθηκαν στην οπτική εμφάνιση τής (Επίπεδο 1) και σε χαρακτηριστικά των τριγώνων, τα οποία δεν ισχύουν στην συγκεκριμένη αναπαράσταση, όπως ο αριθμός των γωνιών (Επίπεδο 1).

Πώς ξέρεις ότι αυτό το σχήμα είναι/ δεν είναι ένα ορθογώνιο ;

Οι 5 συμμετέχοντες που αναγνώρισαν την μη πρωτοτυπική αναπαράσταση, το Σχήμα 5, ως ορθογώνιο παραλληλόγραμμο αιτιολόγησαν την επιλογή βάσει της αναγνώρισης ιδιοτήτων του σχήματος και συγκεκριμένα του αριθμού και της σχέση των πλευρών (Επίπεδο 2)(« *Επειδή έχει 4 πλευρές, και η πάνω και η κάτω πλευρά είναι μεγαλύτερες από τις πλαϊνές και οι δυο απέναντι ίσες*) και οι 3 συμμετέχοντες βάσει της ολιστικής αναγνώρισης (Επίπεδο 1) (« *Το ξέρω επειδή το σχήμα του είναι μακρύ)*. Επίσης, οι απαντήσεις των συμμετεχόντων που αναγνώρισαν το Σχήμα 12 ως ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στην ερώτηση *Πώς ξέρεις ότι αυτό το σχήμα είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο* δεν διέφεραν ιδιαίτερα από τις προαναφερθείσες. Συγκεκριμένα, 8 συμμετέχοντες φαίνεται ότι αναγνώρισαν το σχήμα ολιστικά (Επίπεδο 1) (*από το σχήμα του/ είναι μακρουλό*) και 9 συμμετέχοντες από ιδιότητες του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, χωρίς, ωστόσο να τις ονομάζουν (Επίπεδο 2). Ειδικότερα, 7 συμμετέχοντες βάσει της σχέσης και παραλληλίας των πλευρών, χωρίς να ονομάζουν τις ιδιότητες αυτές, αλλά περιγράφοντάς τες (*γιατί έχει ίσες γραμμές στα πλάγια και ίσες στην πάνω και στην κάτω μεριά του, όπου πάνω και κάτω είναι μεγάλες και οι δύο πλαϊνές είναι μικρές*) και 2 συμμετέχοντες του αριθμού των γωνιών (*από τις 4 γωνίες*).

Πίνακας 9. Απαντήσεις συμμετεχόντων στην ερώτηση Πώς ξέρεις ότι αυτό το σχήμα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ;

	Σχήμα 5	Σχήμα 12
Ολιστική αναγνώριση (Επίπεδο 1)	3	8
Αναγνώριση ορισμένων ιδιοτήτων τριγώνου, με δυνατότητα ονομασίας (Επίπεδο 2)		
- Αριθμό, σχέση και παραλληλία των πλευρών	5	

- Σχέση και παραλληλία των πλευρών		7
- Αριθμό των γωνιών		2
Σύνολο	8	17

Οι 10 συμμετέχοντες αναγνώρισαν την μη έγκυρη αναπαράσταση (Σχήμα 14) αιτιολόγησαν ομόφωνα με βάση ιδιότητας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, χωρίς να την ονομάζουν ρητά, (Επίπεδο 2) και συγκεκριμένη την μη ύπαρξη ισότητας των παράλληλων πλευρών (*γιατί οι πλευρές του δεν είναι ίσες*). Αξίζει να επισημανθεί, ότι 2 από αυτούς πρόσθεσαν ως λόγο τον προσανατολισμό της αναπαράστασης (Επίπεδο 1). Συγκεκριμένα, αναφέρθηκε ότι *αν λέγαμε ότι είναι ορθογώνιο έχει λάθος κατεύθυνση, είναι κάθετο και τα ορθογώνια είναι οριζόντια.*

Από την άλλη πλευρά, οι 6 συμμετέχοντες που χαρακτήρισαν το Σχήμα 14 ως ορθογώνιο παραλληλόγραμμο δικαιολόγησαν την επιλογή τους βάσει ολιστικής αναγνώρισης του (*επειδή είναι μακρύ*), χωρίς να αναφέρονται ρητά σε ιδιότητες της κατηγορίας των ορθογωνίων παραλληλογράμμων (Επίπεδο 1).

Αναφορικά με την μη πρωτοτυπική αναπαράσταση του ορθογωνίου παραλληλογράμμου την οποία οι 4 συμμετέχοντες που δεν την αναγνώρισαν, αλλά ανέφεραν ότι *δεν υπάρχει/δεν είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο* απάντησαν ότι το σχήμα αυτό (Σχήμα 5) απάντησαν ομόφωνα βάσει οπτικών χαρακτηριστικών (*επειδή είναι πολύ λεπτό, μακρουλό* και *στενό*), επομένως δεν είναι σε θέση να το αναγνωρίσουν σε μη τυπικό μέγεθος και στηρίζονται σε πρωτοτυπικά παραδείγματα (Επίπεδο 1)

Τέλος, 1 συμμετέχων αναγνώρισε ως ορθογώνιο παραλληλόγραμμο τις αναπαραστάσεις 3 και 9 ολιστικά (*το βλέπω και το καταλαβαίνω*).

Συμπερασματικά, οι συμμετέχοντες δικαιολόγησαν τις απαντήσεις τους για τις έγκυρες αναπαραστάσεις βάσει αναγνώρισης ιδιοτήτων του σχήματος, με και χωρίς δυνατότητα ονομασίας και συγκεκριμένα του αριθμού, της σχέσης και της παραλληλίας των πλευρών, της σχέσης και της παραλληλίας των πλευρών και του αριθμού των γωνιών (Επίπεδο 2), αλλά και ολιστικής αναγνώρισης του σχήματος (Επίπεδο 1). Συγχρόνως, το δείγμα της έρευνας που αναγνώρισε την μη έγκυρη αναπαράσταση του ορθογωνίου παραλληλογράμμου επιχειρηματολόγησε βάσει της ιδιότητας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, για μη ύπαρξη ισότητας των παράλληλων πλευρών, χωρίς, ωστόσο, να την ονομάζουν ρητά (Επίπεδο 2). Από την άλλη πλευρά, οι συμμετέχοντες που αναγνώρισαν ως έγκυρη λανθασμένα μία μη έγκυρη αναπαράσταση του ορθογωνίου παραλληλογράμμου βασίστηκαν στην συνολική εικόνα του σχήματος (Επίπεδο 1).

Πώς ξέρεις ότι αυτό το σχήμα είναι/ δεν είναι τετράγωνο ;

Επιπροσθέτως, αναφορικά με το Σχήμα 11, οι 17 συμμετέχοντες που το ονόμασαν *τετράγωνο* απάντησαν στην ερώτηση *Πώς ξέρεις ότι αυτό το σχήμα είναι τετράγωνο,* με βάση ιδιότητες της κατηγορίας των τετραγώνων (Επίπεδο 2) και συγκεκριμένα του αριθμού και της ισότητας των πλευρών (9 συμμετέχοντες - *γιατί έχει τις 4 πλευρές του ίσες* και του αριθμό των γωνιών (7 συμμετέχοντες - *επειδή έχει 4 γωνίες*). Ενώ μόλις 1 συμμετέχων απάντησε βάσει ολιστικής αναγνώρισης (*επειδή έχει σχήμα τετραγώνου*) (Επίπεδο 1). Αναφορικά με το Σχήμα 18, οι συμμετέχοντες αναφέρθηκαν επίσης σε ιδιότητες της κατηγορίας των τετραγώνων (Επίπεδο 2). Αναλυτικότερα, 11 συμμετέχοντες βασίστηκαν στον αριθμό των γωνιών (*επειδή έχει 4 γωνίες*), 5 βασίστηκαν στον αριθμό και την ισότητα των πλευρών (*επειδή έχει 4 πλευρές ίσες*), 2 στον αριθμό των γωνιών και στον αριθμό και της ισότητας των πλευρών (*έχει 4 ίδιες πλευρές που ενώνονται και 4 γωνίες ίσες*) και μόλις 1 συμμετέχων βάσει ολιστικής αναγνώρισης (Επίπεδο 1). Μάλιστα, αξίζει να επισημανθούν τα σχόλιά του για την συγκεκριμένη αναπαράσταση, αναφέροντας χαρακτηριστικά *«Είναι ένα συνηθισμένο τετράγωνο. Μόλις το βλέπω το καταλαβαίνω ότι είναι τετράγωνο και τέλος! Αυτό το σχήμα μόλις το βλέπω ξέρω ότι είναι τετράγωνο! Είναι στην ευθεία, ακουμπάει κάτω, δεν είναι λες και πάει να πέσει».* Το Σχήμα 21 το αναγνώρισαν μόλις 7 μαθητές ως *τετράγωνο* και απάντησαν ομόφωνα βάσει του αριθμού και της σχέσεις τόσο των πλευρών όσο και των γωνιών (Επίπεδο 2) (*έχει 4 γωνίες ίσες και 4 πλευρές ίσες*).

Πίνακας 10. Δηλώσεις συμμετεχόντων στην ερώτηση Πώς ξέρεις ότι αυτό το σχήμα είναι τετράγωνο ;

	Σχήμα 11	Σχήμα 18	Σχήμα 21
Ολιστική αναγνώριση (Επίπεδο 1)	1	1	
Αναγνώριση ορισμένων ιδιοτήτων τριγώνου, με δυνατότητα ονομασίας (Επίπεδο 2)			
Αριθμός και ισότητα πλευρών	9	5	
Αριθμός γωνιών	7	11	
Αριθμός γωνιών και πλευρών, ισότητα πλευρών		2	
Αριθμός γωνιών και πλευρών, ισότητα πλευρών και γωνιών			7

Σύνολο	17	19	7

Οι συμμετέχοντες που ονόμασαν μία μη έγκυρη αναπαράσταση (Σχήμα 15) ως τετράγωνο, στην ερώτηση *Πώς ξέρεις ότι αυτό το σχήμα είναι τετράγωνο ;* εστίασαν στην ύπαρξη των 4ων γωνιών (6 συμμετέχοντες - *γιατί έχει 4 γωνίες*), στην ισότητα των πλευρών (3 συμμετέχοντες - *γιατί έχει όλες τις πλευρές του ίσες*), αλλά και στον αριθμό των πλευρών και των γωνιών (2 συμμετέχοντες - *επειδή έχει 4 πλευρές και 4 γωνίες*). Ωστόσο, παρέλειψαν να παρατηρήσουν ότι οι γωνίες του σχήματος δεν είναι όλες ορθές (Επίπεδο 1).

Από την άλλη πλευρά, το δείγμα της έρευνας που αναγνώρισε ορθώς πώς το Σχήμα 15 πρόκειται για μία μη έγκυρη αναπαράσταση ενός τετραγώνου αιτιολόγησαν ομόφωνα βάση της ιδιότητας του τετραγώνου να έχει 4 ορθές γωνίες, χωρίς ωστόσο να την ονομάζουν, αλλά περιγράφοντας την (Επίπεδο 2). Συγκεκριμένα, ο Γ. απάντησε «*Γιατί αυτή η πλευρά πάει προς τα μέσα, είναι στραβή,* ενώ ο Κ. ανέφερε χαρακτηριστικά ότι *δεν είναι πολύ καλά τετραγωνισμένο και η μία πλευρά του δεν ενώνεται με την κάτω πλευρά, με αποτέλεσμα να εξέχει η μία»*.

Ακόμη, οι 2 συμμετέχοντες που ανέφεραν ότι *δεν είναι τετράγωνο* το Σχήμα 11 βασίστηκαν στην κατεύθυνση/ προσανατολισμό της αναπαράστασης, καθώς, όπως φαίνεται δεν το αναγνωρίζουν σε μη τυπική θέση (Επίπεδο 1). Ειδικότερα, ο Κ. απάντησε ότι τ*ο τετράγωνο δεν είναι έτσι. Οι πλευρές του ακουμπάν κάτω, και σε αυτό δεν ακουμπάν, είναι στραβό, γέρνει, δεν είναι στην ευθεία, άρα δεν είναι τετράγωνο! […] η μορφή του δεν ταιριάζει με αυτή ενός τετραγώνου* και η Δ. *είναι λίγο πιο λοξό, δεν ακουμπάει πάνω σε γραμμή ας πούμε, αν φανταστούμε ότι έχει μία γραμμή*.

Επίσης, 2 συμμετέχοντες ανέφεραν ότι το Σχήμα 23 *μοιάζει με τετράγωνο αλλά δεν είναι* και το ξέρουν, λόγω της ανισότητας των γωνιών και των πλευρών του (*δεν έχει ίσες γραμμές και ούτε ίσιες γωνίες*), ιδιότητες του τετραγώνου, οι οποίες όντως δεν ισχύουν στην συγκεκριμένη αναπαράσταση (Επίπεδο 2).

Επίσης, άλλοι 2 συμμετέχοντες αναγνώρισαν ως τετράγωνο το Σχήμα 22 βάσει του αριθμού των πλευρών του (*επειδή έχει 4 ίσιες γραμμές*). Μάλιστα, με την έννοια «ίσια γραμμή» αναφέρεται στην ύπαρξη τεσσάρων ευθύγραμμων τμημάτων και όχι στην ισότητα, η οποία εντοπίζεται μόνο στις παράλληλες πλευρές του σχήματος. Επομένως, ο μαθητής επιχειρηματολογεί στη βάση χαρακτηριστικών που δεν υφίσταται (Επίπεδο 2). Επίσης, αναφορικά με την ίδια αναπαράσταση, 1 συμμετέχων υποστήριξε ότι δεν είναι τετράγωνο και αναφέρθηκε στην ανισότητα των γωνιών και των πλευρών του τετραγώνου (*δεν έχει ίσες γραμμές και ούτε ίσιες γωνίες*), ιδιότητες, οι οποίες ισχύουν στην συγκεκριμένη αναπαράσταση (Επίπεδο 2), η οποία, όμως, πρόκειται για ένα τραπέζιο, σχήμα το οποίο δεν αναγνωρίστηκε από την συγκεκριμένο συμμετέχοντα.

Ακόμη, οι συμμετέχοντες που αναγνωρίσαν λανθασμένα ορισμένα σχήματα ως τετράγωνο (Σχήμα 3, Σχήμα 5, Σχήμα 6, Σχήμα 7 Σχήμα 12, Σχήμα 14) βασίστηκαν σε ορισμένες ιδιότητες της κατηγορίας των τετραγώνων (Επίπεδο 2), όπως στον αριθμό και την ισότητα των πλευρών (*επειδή έχει 4 ίσιες γραμμές*), στον προσανατολισμό του (« *Γιατί αν το γυρίσουμε μοιάζει με τετράγωνο»*), στο είδος των πλευρών και στον αριθμό των γωνιών (*επειδή είναι ίσες όλες οι γραμμές και έχει και 4 γωνίες*), αλλά και στην ολιστική αναγνώριση (Επίπεδο 1) («*Γιατί μου θυμίζει τον χαρταετό και ο χαρταετός είναι ένα τετράγωνο»*).

Συμπερασματικά, οι μαθητές αναγνώρισαν τις έγκυρες αναπαραστάσεις των τετραγώνων βασιζόμενοι σε ιδιότητες της κατηγορίας των τετραγώνων, όπως είναι ο αριθμός και το είδος των πλευρών, ο αριθμός και το είδος τόσο των γωνιών όσο και των πλευρών, ο αριθμό των γωνιών (Επίπεδο 2), στον προσανατολισμό των σχημάτων (Επίπεδο 1), αλλά και στην ολιστική αναγνώρισή τους (Επίπεδο 1). Αναφορικά με τις μη έγκυρες αναπαραστάσεις των τετραγώνων, το δείγμα της έρευνας αιτιολογήθηκε βάσει ιδιοτήτων της κατηγορίας των τετραγώνων και συγκεκριμένα της ισότητας των πλευρών (Επίπεδο 2). Οι μαθητές που αναγνώρισαν λανθασμένα κάποιες αναπαραστάσεις ως τετράγωνο δικαιολόγησαν την απάντησή τους με βάση ορισμένες ιδιότητες της κατηγορίας των τετραγώνων (Επίπεδο 2),όπως τον αριθμό και το είδος των πλευρών, τον αριθμό γωνιών, τον αριθμό γωνιών και πλευρών και την ολιστική αναγνώριση του σχήματος (Επίπεδο 1).

Πώς ξέρεις ότι αυτό το σχήμα είναι/ δεν είναι ένας ρόμβος;

Συνεχίζοντας με τους ρόμβους, οι περισσότεροι συμμετέχοντες που αναγνώρισαν τα σχήματα των ρόμβων βασίστηκαν στην ολιστική αναγνώρισή τους (Επίπεδο 1). Συγκεκριμένα, μερικές από τις απαντήσεις των συμμετεχόντων είναι οι εξής: *από το σχήμα του, είναι ένα τετράγωνο γυρισμένο/ το ξέρω γιατί έχει τις γραμμές του όπως τις έχει ένας ρόμβος, είναι στραβές οι γραμμές/ γιατί έχει το σχήμα του ρόμβου, είναι ένα ανάποδο τετράγωνο*. Μόλις 2 συμμετέχοντες αναφέρθηκαν σε ορισμένες ιδιότητες της κατηγορίας των ρόμβων (Επίπεδο 2) και συγκεκριμένα στον αριθμό των γωνιών και των πλευρών (*έχει 4 γωνίες και 4 στραβές γραμμές*).

Πίνακας 11. Δηλώσεις συμμετεχόντων στην ερώτηση "Πώς ξέρεις ότι αυτό το σχήμα είναι ρόμβος;"

	Σχήμα 7	Σχήμα 9
Ολιστική αναγνώριση (Επίπεδο 1)	12	14
Αναγνώριση βάσει ιδιοτήτων της κατηγορίας των ρόμβων (Επίπεδο 2)		2
Σύνολο	12	16

Ελάχιστοι, ήταν οι συμμετέχοντες της έρευνας (3 από τους 19) που αναγνώρισαν την μη έγκυρη αναπαράσταση του ρόμβου και βρίσκονται, επίσης, στο Επίπεδο 1, καθώς στην ερώτηση *Πώς ξέρεις ότι αυτό το σχήμα δεν είναι ρόμβος* δικαιολόγησαν την απάντησή τους βάσει ολιστικής αναγνώρισης (*είναι κάπως πιο στραβό απ' ότι είναι οι ρόμβοι που ξέρω/ γιατί ο ρόμβος είναι πιο μακρύς*).

Αξιοσημείωτο αποτελεί το γεγονός, ότι μεγάλος αριθμός των συμμετεχόντων της έρευνας (11 συμμετέχοντες), αναγνώρισε την αναπαράσταση του τετραγώνου με περιστροφή 45°, ως ρόμβο. Η αναγνώριση του σχήματος έγινε ολιστικά (Επίπεδο 1) από τους περισσότερους (7 συμμετέχοντες), καθώς όπως ανέφεραν αναγνώρισαν πώς πρόκειται για ρόμβο *από το σχήμα του, είναι ένα ανάποδο τετράγωνο* και βάσει μίας ιδιότητας των ρόμβων (Επίπεδο 2) και συγκεκριμένα του αριθμού των πλευρών (*επειδή έχει 4 ίσες πλευρές*).

Αναφορικά με το Σχήμα 6, το οποίο πρόκειται για μία μη έγκυρη αναπαράσταση ρόμβου, οι 10 συμμετέχοντες της έρευνας που το αναγνώρισαν, λανθασμένα, ως ρόμβο, βρίσκονται στο Επίπεδο 1, καθώς το αναγνώρισαν ολιστικά – 8 συμμετέχοντες - (*επειδή το σχήμα του είναι σαν του ρόμβου,* και από οπτικά χαρακτηριστικά – 4 συμμετέχοντες - και συγκεκριμένα από την μορφή των πλευρών (*έχει στραβές γραμμές*).

Επομένως, το δείγμα της έρευνας αναγνωρίζει τους ρόμβους κυρίως ολιστικά (Επίπεδο 1) και μόλις 2 συμμετέχοντες βασίστηκαν στις ιδιότητες της κατηγορίας των ρόμβων (Επίπεδο 2). Ακόμη, αναγνώρισε το αντιπαράδειγμα του ρόμβου, επίσης, ολιστικά (Επίπεδο 1). Τέλος, συγχέουν ένα ανεστραμμένο τετράγωνο και το αναγνωρίζουν ως ρόμβο.

Πώς ξέρεις ότι αυτό το σχήμα είναι/ δεν είναι ένα τραπέζιο ;

Οι μόλις 3 από τους συμμετέχοντες που αναγνώρισαν την αναπαράσταση του τραπεζίου (Σχήμα 22) δικαιολόγησαν την απάντησή τους βάσει οπτικών χαρακτηριστικών (2 συμμετέχοντες - *επειδή είναι σαν τρίγωνο και αυτές οι δύο οι πλευρές του είναι πλαγιαστές* / *επειδή έχει αυτές εδώ τις 2 παράλληλες και έχει και 2 λοξές*) και ολιστικής αναγνώρισης (*μου το είχε πει η μαμά μου μια φορά και θυμάμαι το σχήμα του*). Επομένως, βρίσκονται στο Επίπεδο 1 ικανοτήτων γενίκευσης.

Οι συμμετέχοντες που ανέφεραν ότι το Σχήμα 22 *δεν υπάρχει* απάντησαν πως το ξέρουν βάσει οπτικών χαρακτηριστικών (Επίπεδο 1) και συγκεκριμένα από την μορφή των πλευρών (*επειδή οι πλευρές του δεν είναι ίσες* και *είναι στραβές*). Συγχρόνως, φαίνεται ότι συγχέουν τις έννοιες «ίσος» και «ίσιος».

Επίσης, οι συμμετέχοντες που αναγνώρισαν κάποιες άλλες αναπαραστάσεις (Σχήμα 3, Σχήμα 14, Σχήμα 23), λανθασμένα, ως τραπέζια βασίστηκαν σε οπτικά χαρακτηριστικά (*έχει πλάγιες γραμμές και τα τραπέζια έχουν πλάγιες γραμμές*). Συμπληρωματικά, αναφορικά με το Σχήμα 23, ένας άλλος υποστήριξε ότι *δεν είναι τραπέζιο* και δικαιολόγησε την απάντησή του, βάσει ιδιότητας των τραπεζίων (Επίπεδο 2) και συγκεκριμένα της μη παραλληλίας 2 πλευρών, χωρίς όμως να την ονομάζει, αλλά περιγράφοντας την, χρησιμοποιώντας μία γενική γλώσσα λέγοντας χαρακτηριστικά *γιατί κι αυτή η πλευρά του είναι στραβή* (δείχνοντας την δεξιά πλευρά του σχήματος) […] *δηλαδή δεν είναι ευθεία σαν την απέναντι*.

Καταλήγουμε, λοιπόν, ότι οι συμμετέχοντες αιτιολόγησαν τις απαντήσεις τους σχετικά με την έγκυρη και την μη έγκυρη αναπαράσταση του ισοσκελούς τραπεζίου βάση των οπτικών χαρακτηριστικών και ολιστικής αναγνώρισης του σχήματος (Επίπεδο 1). Ακόμη, φαίνεται πως βασίζονται ιδιαίτερα στα οπτικά χαρακτηριστικά των τραπεζίων (Επίπεδο 1), καθώς βασικό κριτήριο, για να αναγνωρίσουν ένα σχήμα ως τραπέζιο αποτελεί η ύπαρξη «*στραβών*» πλευρών, όπως αναφέρουν οι συμμετέχοντες.

Γενικότερες ιδέες δείγματος για τα γεωμετρικά σχήματα

Οι συμμετέχοντες την έρευνας ερωτήθηκαν *Πώς θα μάθουμε ότι ένα σχήμα είναι κύκλος*, ώστε να διερευνηθούν οι γενικότερες ιδέες τους αναφορικά με τα γεωμετρικά σχήματα, αλλά και οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν, για να γενικεύσουν.

Αναφορικά με το σχήμα του κύκλου, το μεγαλύτερο μέρος του δείγματος (17 συμμετέχοντες) απάντησαν με βάση την ολιστική αναγνώριση – Επίπεδο 1 - (*από το σχήμα του, είναι στρογγυλό/ κυκλικό*) και 2 συμμετέχοντες αναφέρθηκαν σε οπτικά χαρακτηριστικά («*Δεν θα έχει καμία γωνία*). Συγχρόνως, το δείγμα της έρευνας χρησιμοποίησε την εμπειρική γενίκευση, για να απαντήσει στην ερώτηση αυτή, καθώς βασίστηκε στην εξωτερική εμφάνιση των κύκλων και στο κοινό χαρακτηριστικό που έχουν, αναφορικά με την μη ύπαρξη γωνιών, στοιχεία, τα οποία μεταφέρουν στην κατηγορία των κύκλων.

Επίσης, αναφορικά με την *έλλειψη* απάντησαν ανεξαιρέτως βάσει της ολιστικής αναγνώρισης – Επίπεδο 1 - «*μοιάζει με κύκλο, αλλά είναι μακρόστενο*», «*μοιάζει με τον κύκλο,* αλλά *στις άκρες είναι πιο ανοιχτό από τον κύκλο*». Παρομοίως, και στην περίπτωση της έλλειψης, οι συμμετέχοντες απάντησαν χρησιμοποιώντας την εμπειρική γενίκευση, διότι βασίστηκαν αποκλειστικά στην εξωτερική εμφάνιση και στα οπτικά χαρακτηριστικά των συγκεκριμένων παραδειγμάτων της έλλειψης, που τους παρουσιάστηκαν στο έργο αυτό.

Στη συνέχεια, το δείγμα της έρευνας στην αντίστοιχη ερώτηση για το τρίγωνο, απάντησε στην συντριπτική πλειοψηφία (17 συμμετέχοντες) βάσει ορισμένων ιδιοτήτων των σχημάτων αυτής της κατηγορίας – Επίπεδο 2 – και συγκεκριμένα του αριθμού των γωνιών (8 συμμετέχοντες - *θα έχει 3 γωνίες*), του αριθμού των πλευρών (6 συμμετέχοντες - *από τις τρεις πλευρές*), του αριθμού τόσο των πλευρών όσο και των γωνιών (3 συμμετέχοντες - *θα έχει 3 πλευρές και 3 γωνίες*), αλλά και της ολιστικής αναγνώρισης του σχήματος – Επίπεδο 1- (2 συμμετέχοντες - *από το σχέδιο, θα το δω και θα το καταλάβω*). Παρομοίως, αναφορικά με την στρατηγική γενίκευσης που εφαρμόζουν οι μαθητές, αυτοί οι οποίοι βασίστηκαν σε ορισμένες ιδιότητες των τριγώνων, εφάρμοσαν την εμπειρική γενίκευση, καθώς βασίστηκαν στην ορθότητα των συγκεκριμένων παραδειγμάτων που τους παρουσιάστηκαν, στα κοινά χαρακτηριστικά και στις ιδιότητες αυτών και τα μετέφεραν στην γενικότερη κατηγορία των τριγώνων. Από την άλλη πλευρά, οι μαθητές που απάντησαν ολιστικά, δεν είναι σε θέση να γενικεύσουν.

Αναφορικά με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, η πλειοψηφία της έρευνας (12 μαθητές) απάντησαν ότι θα αναγνωρίσουν ένα σχήμα πως πρόκειται για ορθογώνιο παραλληλόγραμμο από οπτικά χαρακτηριστικά – Επίπεδο 1- (*επειδή θα είναι μακρόστενο/ μακρουλό*), και οι υπόλοιποι σε ορισμένες από τις ιδιότητες της συγκεκριμένης κατηγορίας. Αναλυτικότερα, 4 συμμετέχοντες από τον αριθμό των πλευρών και την ισότητά τους (*επειδή έχει 4 πλευρές,* όπου *η πάνω και η κάτω* (πλευρές) *είναι ίσες και οι άλλες δυο είναι ίσες και μικρότερες*), 2 συμμετέχοντες από τον αριθμό πλευρών και γωνιών (*από* τις *4 πλευρές και 4 γωνίες*) και άλλοι 2 από τον αριθμό των πλευρών (*θα έχει 4 πλευρές*). Από τις απαντήσεις αυτές, γίνεται φανερό ότι η πρώτη ομάδα μαθητών που απάντησε ολιστικά, δεν χρησιμοποιεί κάποια στρατηγική γενίκευσης, ενώ η δεύτερη ομάδα, γενικεύει εμπειρικά, αφού περιγράφει ορισμένα χαρακτηριστικά και ιδιότητες των ορθογωνίων παραλληλογράμμων, από συγκεκριμένα παραδείγματα, τα οποία μεταφέρουν σε ένα γενικό παράδειγμα, το οποίο αφορά την κατηγορία του συγκεκριμένου σχήματος.

Οι απαντήσεις του δείγματος της έρευνας στην ερώτηση που αφορούσε το τετράγωνο καταδεικνύουν ότι οι μαθητές βασίζονται αποκλειστικά σε ορισμένες ιδιότητες της κατηγορίας των τετραγώνων – Επίπεδο 2- και συγκεκριμένα στον αριθμό των γωνιών (8 συμμετέχοντες – *έχει 4 γωνίες*), στον αριθμό και την ισότητα των πλευρών (8 συμμετέχοντες - *έχουν όλα 4 ίσες πλευρές*) καθώς και στον αριθμό και την ισότητα τόσο των πλευρών όσο και των γωνιών (3 συμμετέχοντες - *θα έχει 4 ίσιες γραμμές και 4 γωνίες που είναι ίσες*). Παράλληλα, εφαρμόζουν και στην ερώτηση αυτή την εμπειρική γενίκευση, καθώς μεταφέρουν ορισμένες ιδιότητες και κοινά χαρακτηριστικά των τετραγώνων, σε γενικά παραδείγματα που αφορούν την κατηγορία αυτή.

Η συντριπτική πλειοψηφία (15 συμμετέχοντες) του δείγματος της έρευνας απάντησε αναφορικά με τον ρόμβο με βάση την ολιστική αναγνώριση – Επίπεδο 1 - (*«από το σχήμα του», «θα είναι σαν ένα τετράγωνο γυρισμένο», «μοιάζει με χαρταετό, οπότε έτσι θα το ξεχωρίσουμε»*), χωρίς να είναι σε θέση να γενικεύσουν, διότι δεν χρησιμοποιούν κάποια στρατηγική και δεν αιτιολογούν την απάντησή τους, αλλά και τα οπτικά χαρακτηριστικά (4 συμμετέχοντες) – Επίπεδο 1 - (*γιατί θα έχει στραβές/ πλάγιες γραμμές και οι ρόμβοι έχουν στραβές/ πλάγιες γραμμές*), όπου χρησιμοποιούν την εμπειρική γενίκευση, καθώς βασίζονται σε ένα συγκεκριμένο χαρακτηριστικό των ρόμβων, το οποίο μεταφέρουν σε ολόκληρη την κατηγορία.

Η συντριπτική πλειοψηφία (16 συμμετέχοντες) του δείγματος της έρευνας όταν ερωτήθηκε *Πώς θα μάθουμε ότι ένα σχήμα είναι τραπέζιο* απάντησε περιγράφοντας οπτικά χαρακτηριστικά ενός πρωτοτυπικού ισοσκελούς τραπεζίου – Επίπεδο 1-. Ειδικότερα, κάποιοι από τους συμμετέχοντες ανέφεραν χαρακτηριστικά ότι *θα μοιάζει με ένα τετράγωνο, αλλά έχει 2 στραβές πλευρές που είναι ίσες και άλλες δύο που είναι κανονικές αλλά η μία που είναι πάνω είναι πιο μεγάλη από την άλλη, έχει πάνω μία πλευρά πιο μικρή από την κάτω και δεξιά και αριστερά είναι ίσες, έχει μία μεγάλη γραμμή οριζόντια, μία από πάνω μικρότερη και δύο πλαγιαστές διαγώνιες ίσες*. Οι υπόλοιποι 3 συμμετέχοντες απάντησαν βάσει της ολιστικής αναγνώρισης (*μοιάζει με ένα ηφαίστειο/ θα μοιάζει σαν φούστα/ θα δω το σχήμα του και θα το καταλάβω*). Από τις παραπάνω δηλώσεις των συμμετεχόντων του δείγματος, καθίσταται φανερό, ότι, στην προσπάθειά τους να γενικεύσουν, αναφορικά με τον τρόπο που θα αναγνωρίσουν ένα τραπέζιο, περιγράφουν ένα συγκεκριμένο παράδειγμα ισοσκελούς τραπεζίου, αναφέροντας κάποια οπτικά χαρακτηριστικά των πλευρών του, απομονωμένα διανοητικά και αποκολλημένα από τα τραπέζια, τα οποία, στη συνέχεια, τα μεταφέρουν και τα αποδίδουν ως γενική ιδιότητα σε ολόκληρη την κατηγορία των τραπεζίων (Εμπειρική γενίκευση).

Πίνακας 12. Δηλώσεις συμμετεχόντων για την αναγνώριση γεωμετρικών σχημάτων (γενικότερες ιδέες)

	Ολιστική αναγνώριση (Επίπεδο 1)	Αναγνώριση βάσει οπτικών χαρακτηριστικών	Αναγνώριση βάσει ιδιοτήτων της κατηγορίας των ρόμβων (Επίπεδο 2)	Σύνολο
Κύκλος	17	2		19
Έλλειψη		19		19
Τετράγωνο			19	19
Ορθογώνιο παραλ/μμο	12		7	19
Ρόμβος	15	4		19
Τρίγωνο	2		17	19
Τραπέζιο	3	16		19

Καταληκτικά, όπως καθίσταται φανερό και από το παραπάνω διάγραμμα, το δείγμα της έρευνας αναγνωρίζει ολιστικά (Επίπεδο 1) τον κύκλο, την έλλειψη και τον ρόμβο, βασίζεται σε οπτικά χαρακτηριστικά (Επίπεδο 1) για την αναγνώριση το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και το ισοσκελές τραπέζιο και βασίζεται σε ορισμένες ιδιότητες της κατηγορίας των τετραγώνων και των τριγώνων (Επίπεδο 2).

Κατηγορίες σχήματος

Το δείγμα της έρευνας, επίσης, κλήθηκε να ταξινομήσει τις διάφορες αναπαραστάσεις που τους δόθηκαν, όπως φαίνεται στο Παράρτημα, σε κατηγορίες. Όλοι οι συμμετέχοντες τοποθέτησαν τους κύκλους και τις ελλείψεις στην ίδια κατηγορία. Συγχρόνως, οι περισσότεροι, 12 συμμετέχοντες, ξεχώρισαν σε 4 διαφορετικές κατηγορίες τα τετράγωνα, τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα, τους ρόμβους και τα τρίγωνα, σύμφωνα με τις ονομασίες που έδωσαν στο κάθε σχήμα συμπεριλαμβανομένου και μη έγκυρες αναπαραστάσεις Επιπλέον, 4 συμμετέχοντες τοποθέτησαν στην ίδια κατηγορία όλα τα τετράπλευρα σχήμα και τα σχήματα με 3 πλευρές. και οι υπόλοιποι 3 συμμετέχοντες εξίσου σε 4 διαφορετικές κατηγορίες τα τετράγωνα, τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα, τους ρόμβους και τα τρίγωνα, χωρίς όμως να περιλαμβάνονται οι μη έγκυρες αναπαραστάσεις. Αξίζει να αναφερθεί, ότι οι μαθητές δεν τοποθέτησαν σε μία κατηγορία το ισοσκελές τραπέζιο. Συνεπώς, το δείγμα της έρευνας ξεχωρίζει μεταξύ καμπυλόγραμμων και ευθύγραμμων σχημάτων (Επίπεδο 1) και αναγνωρίζουν τις κατηγορίες των σχημάτων (Επίπεδο 2).

Στη συνέχεια, το δείγμα της έρευνας ερωτήθηκε *Πώς σκέφτηκες για να βάλεις αυτά τα σχήματα στην ίδια κατηγορία*. Ειδικότερα, αρχικά, αναφορικά με την κατηγορία που περιλαμβάνονται οι κύκλοι και οι ελλείψεις, όλοι οι συμμετέχοντες απάντησαν βάσει της ολιστικής αναγνώρισης (Επίπεδο 1) (*είναι στρογγυλοί, άρα θα μπουν στην ίδια κατηγορία*). Οι συμμετέχοντες που ταξινόμησαν όλα τα τετράπλευρα σε μία κατηγορία και τα τρίγωνα σε μία άλλη κατηγορία βασίστηκαν στον αριθμό των πλευρών (*«αφού έχουν 4 πλευρές τα έβαλα όλα μαζί*, «*σκέφτηκα ότι έχουν 3 πλευρές και τα έβαλα μαζί»*). Επιπροσθέτως, όσοι ταξινόμησαν ξεχωριστά τα τρίγωνα, τα τετράγωνα, τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα, 8 απάντησαν βάσει των ιδιοτήτων των σχημάτων (αριθμός πλευρών, γωνιών και συνδυασμό αυτών των δύο) και 7 συμμετέχοντες της ολιστικής αντίληψης (*επειδή μοιάζουν μεταξύ τους*). Αναφορικά με τους ρόμβους η πλειοψηφία του δείγματος (11 συμμετέχοντες) τους ταξινόμησαν βάσει ολιστικής αντίληψης (*επειδή έχουν το σχήμα του ρόμβου*) και οι υπόλοιποι 4 συμμετέχοντες των πλευρών (*έχουν 4 ίσες και πλάγιες γραμμές*). Αξίζει να αναφερθεί, ότι, στη συνέχεια, ερωτήθηκαν *Γιατί έβαλες αυτά τα σχήματα στην ίδια κατηγορία*, και οι απαντήσεις των συμμετεχόντων δεν διέφεραν σε κανένα σημείο με τα προαναφερθέντα αποτελέσματα. Συνοψίζοντας, το δείγμα της έρευνας σκέφτηκε να ταξινομήσει τις αναπαραστάσεις γεωμετρικών σχημάτων που τους δόθηκαν με βάση την ολιστική αντίληψη (Επίπεδο 1) και τις ιδιότητες τους (Επίπεδο 2) (αριθμός πλευρών, γωνιών και συνδυασμό αυτών των δύο).

Επιπρόσθετα, στο δείγμα της έρευνας τέθηκαν ερωτήσεις, οι οποίες διερευνούν τις γενικότερες ιδέες τους σχετικά με την κατηγοριοποίηση των γεωμετρικών σχημάτων. Συγκεκριμένα, όλοι οι συμμετέχοντες στις ερωτήσεις *Πώς μπορούμε να βάλουμε κύκλους σε μία κατηγορία* απάντησαν βάσει ολιστικής αντίληψης (Επίπεδο 1) (*«θα είναι στρογγυλοί»)*στην αντίστοιχη ερώτηση για τις ελλείψεις, εξίσου βάσει ολιστικής αντίληψης (Επίπεδο 1) (*«θα μοιάζει με κύκλο, αλλά θα είναι κάπως πιεσμένος κύκλος, όχι ακριβώς στρογγυλό»*). Σχετικά με τα τρίγωνα, η πλειοψηφία του δείγματος (11 μαθητές) ανέφερε ότι θα επικεντρωθεί στον αριθμό των γωνιών (*θα παρατηρήσω αν έχει 3 γωνίες*), 4 συμμετέχοντες απάντησαν στον αριθμό των πλευρών (*θα πρέπει να έχει 3 πλευρές*) και οι υπόλοιποι στον συνδυασμό αυτών των δύο ιδιοτήτων (πως *θα πρέπει να έχει 3 πλευρές και 3 γωνίες*). Συμπληρωματικά, αναφορικά με τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα, η πλειοψηφία των συμμετεχόντων (13 μαθητές) απάντησε με βάση οπτικά χαρακτηριστικά («θα είναι *μακρόστενο/ μακρουλό, άρα θα το βάλουμε με τα ορθογώνια»*), 5 συμμετέχοντες τον αριθμό των πλευρών και των γωνιών («*Αν έχουν 4 πλευρές που είναι ίσες οι 2 απέναντι πλευρές και 4 γωνίες, είναι ορθογώνια, άρα θα τα βάλουμε στην κατηγορία των ορθογωνίων»)* και μόλις 1 συμμετέχων τον αριθμό των πλευρών («*θα πρέπει να έχει 4 πλευρές, για να το βάλουμε»*). Ταυτόχρονα, οι συμμετέχοντες απάντησαν για τον τρόπο που θα βάλουμε τετράγωνα σε μία κατηγορία, αναφερόμενοι στον αριθμό των πλευρών (9 συμμετέχοντες - *θα πρέπει να έχει 4 ίσες πλευρές*), στον αριθμό των γωνιών (7 συμμετέχοντες - *θα δούμε αν έχει 4 γωνίες*) και στον αριθμό γωνιών και πλευρών (3 συμμετέχοντες - *θα έχει 4 ίσες πλευρές και 4 γωνίες*. Επιπροσθέτως, στην ίδια ερώτηση, αλλά αυτή τη φορά για το τραπέζιο, συνολικά το δείγμα της έρευνα απάντησε σύμφωνα με την ολιστική αντίληψη (16 συμμετέχοντες – «*θα παρατηρήσω να έχουν μία μεγάλη πλευρά κάτω και μία μικρότερη πάνω και δεξιά και αριστερά δύο πλάγιες και ίσες»/* 3 συμμετέχοντες – «*από το σχήμα του»*). Χαρακτηριστικά ένας ανέφερε, «*θα δω το σχήμα, αν είναι τραπέζιο θα το βάλω στα τραπέζια, κάπως έτσι, δεν ξέρω ακριβώς πώς»*. Η συντριπτική πλειοψηφία των συμμετεχόντων στην ερώτηση *Πώς μπορούμε να βάλουμε ρόμβους σε μία κατηγορία*, απάντησε με βάση τον προσανατολισμό του σχήματος (15 συμμετέχοντες - *θα πρέπει να είναι ένα τετράγωνο γυρισμένο, για να μπει στην κατηγορία των ρόμβων*) και οι υπόλοιποι οπτικά χαρακτηριστικά (4 συμμετέχοντες - *θα πρέπει να έχει στραβές/ πλάγιες γραμμές*).

Στην ερώτηση *Τι παρατηρούμε για να δούμε αν ένα σχήμα ανήκει σε μία κατηγορία σχημάτων* / Πώς *θα εξετάσουμε σχήματα τα οποία θέλουμε να τα εντάξουμε σε μία κατηγορία* οι συμμετέχοντες απάντησαν ότι παρατηρούν την συνολική εικόνα τους σχήματος (11 συμμετέχοντες), εντοπίζουν κοινά χαρακτηριστικά (5 συμμετέχοντες – *ψάχνω να δω αν έχουν κάτι κοινό, τότε είναι στην ίδια κατηγορία*) και παρατηρούν τις πλευρές του σχήματος (3 συμμετέχοντες – *βλέπω τις πλευρές, πώς είναι, είναι ευθείες ή είναι στραβές, πόσες είναι, είναι 4; Τότε είναι τετράγωνο, είναι 3 τόσες είναι τρίγωνο, αυτό θα δω*.

Συνοπτικά, λοιπόν, καθίσταται κατανοητό ότι το δείγμα της έρευνα για να ταξινομήσει γεωμετρικά σχήματα σε μία κατηγορία παρατηρεί την συνολική τους εικόνα (ολιστική αντίληψη), τον αριθμό πλευρών, τον αριθμό των γωνιών και τον συνδυασμό αυτών των δύο ιδιοτήτων.

$2^{ο}$ έργο

Στο δεύτερο έργο οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να κατασκευάσουν τα γεωμετρικά σχήματα του τετραγώνου, του τριγώνου του ορθογωνίου, του ρόμβου και του τραπεζίου με τη χρήση των συνδεόμενων άκρων και στη συνέχεια τους ζητήθηκε να κατασκευάσουν ένα διαφορετικό τετράγωνο, διαφορετικό τρίγωνο, διαφορετικό ορθογώνιο, διαφορετικό ρόμβο και διαφορετικό τραπέζιο από αυτό που κατασκεύασαν στην αρχή. Για κάθε γεωμετρικό σχήμα που κατασκεύασαν τους θέτονταν οι ερωτήσεις, οι οποίες είχαν στόχο να εντοπίσουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών, την εστίασή τους και τέλος τις γενικότερες ιδέες τους αναφορικά με την κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων.

Τα αποτελέσματα που αφορούν την ικανότητα του δείγματος να κατασκευάζει γεωμετρικά σχήματα (τετράγωνο, τρίγωνο, ρόμβο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τραπέζιο) φαίνονται στον Πίνακα 14 και τα ευρήματα αναφορικά με την κατασκευή διαφορετικών αναπαραστάσεων των γεωμετρικών σχημάτων στον Πίνακα 15. Επίσης, στο Παράρτημα 2 παρουσιάζονται φωτογραφίες από τις κατασκευές των γεωμετρικών σχημάτων των συμμετεχόντων.

Πίνακας 13. Ικανότητα κατασκευής γεωμετρικών σχημάτων

	Σωστή κατασκευή	Λάθος κατασκευή	Καθόλου κατασκευή	Σύνολο
Τετράγωνο	19			19
Ορθογώνιο παραλ/μμο	17	1	1	19
Ρόμβος	17	2		19
Τρίγωνο	19		17	19
Τραπέζιο	14	4	5	19

Γενικότερα, όπως καθίσταται έκδηλο, οι συμμετέχοντες της έρευνες δεν δυσκολεύτηκαν στην κατασκευή των γεωμετρικών σχημάτων, με εξαίρεση το τραπέζιο. Αναλυτικότερα, η κατασκευή του τετραγώνου και του τριγώνου φαίνεται να είναι η πιο εύκολη για τους συμμετέχοντες, καθώς όλοι ανεξαιρέτως κατασκεύασαν από 1 τουλάχιστον έγκυρη αναπαράσταση. Ακολουθεί η κατασκευή του ορθογωνίου και του ρόμβου, όπου μόλις 2 συμμετέχοντες είτε δεν προσπάθησαν να κατασκευάσουν κάποια έγκυρη αναπαράσταση είτε την κατασκεύασαν λάθος. Η κατασκευή του τραπεζίου δυσκόλεψε 9 συμμετέχοντες της έρευνας, όπου 5 από αυτούς δεν το σχημάτισαν, καθώς δεν το γνώριζαν (*Δεν θυμάμαι πώς είναι αυτό το σχήμα, Δεν έχω φτιάξει ξανά τραπέζιο…δεν ξέρω πώς γίνεται*) και άλλοι 4 το σχημάτισαν λάθος.

Πίνακας 14. Ικανότητα κατασκευής διαφορετικών αναπαραστάσεων

	Σωστή κατασκευή	Λάθος κατασκευή	Καθόλου κατασκευή	Σύνολο
Τετράγωνο	19			19
Ορθογώνιο παραλ/μμο	16	1	2	19
Ρόμβος	18		1	19
Τρίγωνο	18		1	19
Τραπέζιο	14		5	19

Συνεχίζοντας με την κατασκευή διαφορετικών αναπαραστάσεων των γεωμετρικών σχημάτων, οι συμμετέχοντες δυσκολεύτηκαν επίσης στο τραπέζιο, όπου 5 δεν κατασκεύασαν καμία διαφορετική αναπαράσταση, ακολουθεί το ορθογώνιο, όπου 2 συμμετέχοντες δεν κατασκεύασαν καμία διαφορετική αναπαράσταση («*Δεν μπορώ να κάνω άλλο ορθογώνιο, όλα τα ορθογώνια είναι ίδια»*) και 1 συμμετέχων την κατασκεύασε λάθος και το τετράγωνο, όπου 2 συμμετέχοντες κατασκεύασαν λάθος αναπαράσταση. Ο ρόμβος και το τρίγωνο ήταν ευκολότερα για τους συμμετέχοντες κατά την κατασκευή διαφορετικής αναπαράστασης, και ειδικά το τρίγωνο, στο οποίο κατασκεύασαν κυρίως ισόπλευρα (12 συμμετέχοντες) και ισοσκελή (10 συμμετέχοντες) τρίγωνα σε ποικίλα μεγέθη. Μάλιστα, κάποιοι μαθητές, ενώ κατασκέυασαν ένα σκαληνό τρίγωνο, συνέχιζαν τις προσπάθειες μέχρι να κατασκευάσουν ένα ισόπλευρο ή ισοσκελές, καθώς όπως έλεγαν «αυτό είναι στραβό και δεν μοιάζει με τρίγωνο» (αναφερόμενοι στο σκαληνό). Αναφορικά με τα υπόλοιπα γεωμετρικά σχήματα, όλοι οι διαφοροποιήσεις αφορούσαν το μέγεθος (Επίπεδο 1), επιλέγοντας διαφορετικό μέγεθος συνδεόμενων πλευρών, εκτός από το τετράγωνο, όπου 1 συμμετέχων την διαφοροποίησε ως προς τον προσανατολισμό (Επίπεδο 2), περιστρέφοντας την 1η αναπαράσταση κατά 45°, καθώς όπως υποστήριξε ο ίδιος *είναι πάλι τετράγωνο, γιατί έχει 4 ίσες πλευρές και 4 ίσες γωνίες*. Τέλος, όλοι οι κατασκευές των γεωμετρικών σχημάτων ήταν σε πρωτοτυπική θέση (Επίπεδο 1).

Παρακάτω παρουσιάζονται τα ευρήματα σχετικά με την κατασκευή του κάθε γεωμετρικού σχήματος ξεχωριστά. Για την εξαγωγή συμπερασμάτων αναλύθηκαν τόσο οι περιγραφές των συμμετεχόντων για την κατασκευή των γεωμετρικών σχημάτων, αλλά και οι χειρονομίες, που τυχόν έκαναν, οι οποίες εμπλούτισαν τον λόγο τους. Όλοι οι απαντήσεις των συμμετεχόντων ήταν περιγραφικές, χρησιμοποιούσαν γενική γλώσσα σχετικά με τα γεωμετρικά σχήματα (Επίπεδο 2), όπως για παράδειγμα «*Πήρα δύο πλευρές πάνω και κάτω*, «*Πήρα μία γραμμή μεγάλη και την ένωσα με μία μικρή»*, και τις συνόδευαν με δεικτικές χειρονομίες που συμπλήρωναν την ομιλία τους.

Τρόπος σκέψης δείγματος κατά την κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων

Οι συμμετέχοντες αφού κατασκεύαζαν μία αναπαράσταση ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου απαντούσαν στην ερώτηση *Πώς κατασκεύασες αυτό το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο*, η οποία διερευνά τον τρόπο σκέψης των μαθητών. Όλοι οι συμμετέχοντες απάντησαν βάσει ιδιοτήτων του σχήματος (Επίπεδο 2) και συγκεκριμένα 16 συμμετέχοντες βάσει του αριθμού των πλευρών που χρησιμοποίησαν (« *Πήρα δύο πλευρές πάνω και κάτω που είναι ίσες και η δεξιά και η αριστερά πάλι ίσες άλλες μικρότερες από τις άλλες δύο»*) και 3 συμμετέχοντες αναφέρθηκαν στον αριθμό των γωνιών και των πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που κατασκεύασαν. Χαρακτηριστικά η Μ. απάντησε *Πήρα μία γραμμή μεγάλη και την ένωσα με μία μικρή και έκανα μία γωνία, μετά έβαλα άλλη μία μεγάλη και έκανα δεύτερη γωνία και μετά μία μικρή γραμμή και έκανα μία άλλη γωνία. 4 γωνίες δηλαδή.* Οι απαντήσεις των μαθητών δεν διέφεραν όταν κατασκεύαζαν διαφορετικές αναπαραστάσεις του σχήματος, απλώς πρόσθεταν ότι επέλεξαν μεγαλύτερες ή μικρότερες πλευρές, για να διαφοροποιήσουν τις αναπαραστάσεις που δημιουργούσαν («*Για να το κάνω διαφορετικό πήρα μικρότερες γραμμές από το πρώτο. Αλλά πάλι οι δύο οριζόντιες είναι μεγαλύτερες από τις 2 κάθετες γραμμές»*). Οι δύο μαθητές που κατασκεύασαν μία μη έγκυρη αναπαράσταση, σχημάτισαν ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο βάσει των πλευρών του σχήματος. Χαρακτηριστικά ο Χ. απάντησε *Αυτό είναι ένα πλάγιο ορθογώνιο. Έχει πάλι 2 ίσες μικρότερες πλευρές και 2 ίσες μεγαλύτερες, όπως τα ορθογώνια. Αλλά εδώ τράβηξα τις γωνίες και το έκανα πλάγιο ορθογώνιο για να είναι διαφορετικό από το πρώτο* και ο τρίτος μαθητής κατά την προσπάθειά του να κατασκευάσει μία διαφορετική αναπαράσταση του σχήματος που του ζητήθηκε, δημιούργησε ένα τετράγωνο, επίσης, βάσει των πλευρών του σχήματος (*το έκανα με 4 γραμμές*).

Συνεχίζοντας με την κατασκευή του ρόμβου, στην ερώτηση *Πώς κατασκεύασες αυτό το ρόμβο*, 11 συμμετέχοντες απάντησαν βάσει ιδιοτήτων του ρόμβου, χωρίς να τις ονομάζουν

(Επίπεδο 2) και ειδικότερα αναφέρθηκαν στον αριθμό των πλευρών και το είδος των γωνιών (*Έκανα τις πλευρές ίσες..4 πλευρές.. και τις γωνίες τις πίεσα για να είναι σαν* ρόμβος) και 6 συμμετέχοντες βάσει της ολιστικής αντίληψης του σχήματος (Επίπεδο 1), από τους οποίους οι 4 συμμετέχοντες πρώτα κατασκεύασαν ένα τετράγωνο και στη συνέχεια το γύρισαν κατά 45 μοίρες («*Ο ρόμβος είναι σαν ένα τετράγωνο. Οπότε πήρα το τετράγωνο, ακούμπησα την μύτη του κάτω και έγινε ρόμβος*», «*Ο ρόμβος έχει 4 γωνίες, οπότε κι εγώ πήρα 4 κομματάκια. Τα έχω ενώσει μεταξύ τους, στην αρχή το έκανα τετράγωνο και μετά το γύρισα και έγινε ρόμβος»)* και άλλοι 2 συμμετέχοντες ανέφεραν ότι σκέφτηκαν το σχήμα και σχημάτισαν ένα ίδιο («*Έ θυμάμαι πώς είναι και έφτιαξα ένα ίδιο», «Δεν μπορώ να εξηγήσω τι έκανα, σκέφτηκα έναν ρόμβο και τον έκανα ίδιο με 4 γραμμές και τις έβαλα έτσι όπως είναι στον ρόμβο»)*. Επιπλέον, 2 συμμετέχοντες κατασκεύασαν έναν ρόμβο βάσει της σχέσης του ρόμβου με ένα τρίγωνο (Επίπεδο 2) («*Σκέφτηκα ότι ένας ρόμβος είναι σαν να έχουμε ενώσει 2 τρίγωνα. Άρα θα φτιάξω 2 τρίγωνα, μετά βγάζω την κάτω γραμμή και τα ενώνω*»).

Στην ερώτηση που αφορούσε την κατασκευή του τετραγώνου, όλοι ανεξαιρέτως οι συμμετέχοντες απάντησαν βάσει ιδιοτήτων των τετραγώνων (Επίπεδο 2). Αναλυτικότερα, 12 συμμετέχοντες αναφέρθηκαν στον αριθμό και τη ισότητα των πλευρών (*ένωσα 4 ίσες πλευρές*), 3 συμμετέχοντες στον αριθμό των πλευρών και των γωνιών και την ισότητα των (*ένωσα 4 ίσες πλευρές και σχημάτισα 4 γωνίες*), 2 συμμετέχοντες στον αριθμό των πλευρών και των γωνιών και την ισότητα των πλευρών κ των γωνιών (*ένωσα 4 ίσες πλευρές και σχημάτισα 4 ίσες γωνίες*), και άλλοι 2 συμμετέχοντες αναφέρθηκαν στον αριθμό των γωνιών και των πλευρών (*πρόσεξα το σχήμα να έχει 4 γωνίες, ενώνοντας 4 πλευρές*).

Συνεχίζοντας με την κατασκευή των τριγώνων, οι 18 συμμετέχοντες αναφέρθηκαν στην ιδιοτητά τους ως προς την ύπαρξη 3^{ων} πλευρών και 3^{ων} γωνιών. Αναλυτικότερα, 7 συμμετέχοντες επισήμαναν ότι χρησιμοποίησαν 1 μικρή πλευρά και 2 μεγαλύτερες και ίσες, 6 συμμετέχοντες απάντησαν ότι το κατασκεύασαν χρησιμοποιώντας 3 ίσες πλευρές, 4 συμμετέχοντες ότι χρειάστηκαν 3 ίσες γραμμές για να σχηματίσουν 3 γωνίες που έχει 1 τρίγωνο, 2 μαθητές απάντησαν ότι ένωσαν 3 γραμμές και 1 συμμετέχων βασίστηκε στην ολιστική αντίληψη, διότι έφτιαξε *ένα τρίγωνο- γνώμονα, που του έχουμε αλλάξει θέση, αλλά είναι τρίγωνο. Σκέφτηκα πώς είναι το τρίγωνο- γνώμονας και το έφτιαξα.*

Οι συμμετέχοντες μετά την κατασκευή του κάθε τραπεζίου κλήθηκαν να απαντήσουν στην ερώτηση *Πώς κατασκεύασες αυτό το τραπέζιο*. Στην ερώτηση αυτή, λοιπόν, όλοι οι συμμετέχοντες βασίστηκαν στην ολιστική αντίληψη του τραπεζίου (Επίπεδο 1). Αναλυτικότερα, 12 συμμετέχοντες περιέγραψαν ένα πρωτοτυπικό ισοσκελές τραπέζιο

(«*Χρειάστηκα δύο οριζόντιες πλευρές που δεν ίδιες και δύο λοξές ίδιες,* όπου *η πάνω γραμμή είναι μικρή σε σχέση με τις άλλες, οι διπλανές πιο μακριές και η κάτω η πιο μεγάλη», «Σκέφτηκα ένα σχήμα με 4 γωνίες και 4 πλευρές, αλλά κάτω πιο φαρδύ, δηλαδή πάνω είναι πιο στενό και κάτω πιο μεγάλο», « Σκέφτηκα πως είναι ένα τραπέζιο και το έκανα. Πήρα μία μεγάλη γραμμή κάτω και μετά 3 ίδιες και τις ένωσα. Και τις δύο τις έβαλα έτσι πλάγια και το έκανα*) και 2 συμμετέχοντες βάσει οπτικών χαρακτηριστικών, καθώς παρομοίασαν το τραπέζιο με ένα τρίγωνο, το οποίο έχει 4 πλευρές. Χαρακτηριστικά η Χ. απάντησε *σκέφτηκα ότι είναι σαν να φτιάχνω ένα τρίγωνο που δεν θα το ενώσω πάνω, αλλά θα βάλω μία πλευρά εδώ πάνω, για να σκεπάζει τις 3 πλευρές και όχι να τις ενώνει* και ο Γ. *Ουσιαστικά είναι ένα τρίγωνο που αντί για το μυτερό κομμάτι έχει μία γραμμή. Και πήρα 4 γραμμές και τις ένωσα και σκεφτόμουν το τρίγωνο να μην το κλείσω, αλλά να βάλω την γραμμή*.

Συνοψίζοντας, οι συμμετέχοντες της έρευνας κατασκεύασαν τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα στηριζόμενοι στις ιδιότητες του σχήματος (Επίπεδο 2) και συγκεκριμένα στον αριθμό των πλευρών και στον αριθμό τόσο των πλευρών όσο και των γωνιών, στη βάση, ωστόσο, ενός οπτικού προτύπου (Επίπεδο 1). Τον ρόμβο 11 συμμετέχοντες τον κατασκεύασαν βάσει ιδιοτήτων του σχήματος, χωρίς να τις ονομάζουν (Επίπεδο 2) και ειδικότερα αναφέρθηκαν στον αριθμό των πλευρών και το είδος των γωνιών, 6 συμμετέχοντες βάσει της ολιστικής αντίληψης του σχήματος (Επίπεδο 1) και 2 συμμετέχοντες κατασκεύασαν έναν ρόμβο βάσει της σχέσης του ρόμβου με ένα τρίγωνο (Επίπεδο 2). Όλοι οι συμμετέχοντες κατασκεύασαν τις αναπαραστάσεις των τετραγώνων βάσει ιδιοτήτων αυτού του σχήματος (Επίπεδο 2). Επίσης, η πλειοψηφία των συμμετεχόντων κατασκεύασε τα τρίγωνα βάσει των ιδιοτήτων τους και μόλις 1 συμμετέχων βάσει της ολιστικής αντίληψης.

Εστίαση δείγματος κατά την κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων

Οι συμμετέχοντες στην ερώτηση *Πώς κατασκευάζεις ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, η οποία διερευνά την εστίασή τους,* απάντησαν, επίσης, βάσει ιδιοτήτων του σχήματος αυτού (Επίπεδο 2) και συγκεκριμένα του αριθμό των πλευρών (17 συμμετέχοντες) περιγράφοντας ένα πρωτοτυπικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (Επίπεδο 1) («*Σκέφτομαι, ότι πρέπει να κατασκευάσω ένα ορθογώνιο και σχηματίζω μία μεγάλη πλευρά κάτω, μετά στα πλάγια δύο μικρές ίσες πλευρές και μετά βάζω άλλη μία πλευρά πάνω μεγάλη και ίση με την άλλη την μεγάλη που σχεδίασα πριν και έτσι το έφτιαξα»*) και του αριθμό των γωνιών (2 συμμετέχοντες) («*Θα σχεδιάσω ένα ορθογώνιο ενώ θα σκέφτομαι ότι πρέπει να κάνω 4 γωνίες»*). Δύο από τους συμμετέχοντες επεσήμαναν την χρήση του χάρακα (*θα χρειαστώ έναν χάρακα, για να γίνει ακριβώς ορθογώνιο, δηλαδή να σχεδιάσω ίσιες τις γραμμές* *και ίδιες τις γωνίες*). Επιπροσθέτως, στην ερώτηση *Πώς κατασκευάζεις ένα ρόμβο*, 8 από τους συμμετέχοντες του δείγματος της έρευνας εστίασαν στην τοποθέτηση του ρόμβου (Επίπεδο 1) («*Θα σχεδιάσω ένα τετράγωνο και μετά θα το γυρίσω*), 5 συμμετέχοντες στην ιδιότητα του σχήματος αναφορικά με την ισότητα των πλευρών (Επίπεδο 2) («*θα σχεδιάσω 4 πλευρές ίσες που είναι λοξές»*), 5 συμμετέχοντες στην σχέση του ρόμβου με ένα τρίγωνο (Επίπεδο 2) («*θα σχεδιάσω 2 τρίγωνα, χωρίς την γραμμή κάτω και μετά θα τα ενώσω»*) και μόλις 1 συμμετέχων στην ολιστική αντίληψη (Επίπεδο 1) («*δεν έχω να πω κάτι, απλώς θα θυμηθώ πώς είναι ο ρόμβος και θα το κάνω»*).

Στην αντίστοιχη ερώτηση που αφορούσε την κατασκευή ενός τετραγώνου, οι περισσότεροι συμμετέχοντες (18 συμμετέχοντες) εστίασαν στις ιδιότητές του (Επίπεδο 2) και μόλις 1 συμμετέχων στην ολιστική αντίληψη του σχήματος (Επίπεδο 1). Αναλυτικότερα, 12 συμμετέχοντες εστίασαν στον αριθμό και την ισότητα των πλευρών («*Θα σχεδιάσω 4 ίσες πλευρές και θα τις ενώσω»*), 4 συμμετέχοντες στον αριθμό των πλευρών και των γωνιών αλλά και στην ισότητα αυτών (*«Θα σχεδιάσω 4 ίσες πλευρές και θα τις ενώσω για να σχηματιστούν 4 ίσες γωνίες»*), 2 συμμετέχοντες στον αριθμό των πλευρών (*«Θα σκεφτώ ότι θα πρέπει να έχει 4 πλευρές»)* και ένας συμμετέχων θα κατασκευάσει το τετράγωνο βάσει της ολιστικής αντίληψης (*Το τετράγωνο θα το σχεδίαζα σαν ένα κουτί με 4 γωνίες*). Αξίζει να επισημανθεί, ότι 2 συμμετέχοντες ανέφεραν πως θα χρησιμοποιήσουν ένα γεωμετρικό όργανο *(«θα χρειαστούμε ένα χάρακα»*) και άλλοι 2 τόνισαν τον προσανατολισμό του σχήματος («*θα πρέπει να ακουμπάει στην γραμμή του τετραδίου, διαφορετικά θα είναι ρόμβος και όχι τετράγωνο»*), γεγονός το οποίο φανερώνει πως αν και οι συμμετέχοντες αναγνωρίζουν ορισμένες ιδιότητες του τετραγώνου, ο προσανατολισμός του συνεχίζει να τους συγχέει, και να θεωρούν ένα τετράγωνο κατά 45° περιστραμμένο ως ρόμβο. Επομένως, εργάζονται τόσο στο 1ο όσο και στο 2ο επίπεδο γενίκευσης.

Από την άλλη πλευρά, οι 2 συμμετέχοντες που κατασκεύασαν μία μη έγκυρη αναπαράσταση του τετραγώνου, όταν τους ζητήθηκε να σχηματίσουν μία διαφορετική αναπαράσταση, βασίστηκαν στην ολιστική αντίληψη (Επίπεδο 1), καθώς και οι 2 σχημάτισαν έναν ρόμβο τον οποίο γύρισαν κατά 45° και στη συνέχεια, το ονόμασαν τετράγωνο (*τώρα έφτιαξα έναν ρόμβο, γιατί ο ρόμβος είναι ένα τετράγωνο, απλώς το γύρισα, για να είναι διαφορετικό. Το τετράγωνο είναι το ίδιο σχήμα με τον ρόμβο δηλαδή. Έτσι* (η βάση ακουμπάει) *είναι τετράγωνο, ενώ έτσι* (η κορυφή ακουμπάει) *είναι ρόμβος, αλλά και τα δύο είναι τετράγωνα», «Πήρα πάλι 4 ίσα τέτοια και απλώς το έκανα λίγο πιο στραβό, έναν σαν ρόμβο δηλαδή και μετά το γύρισα κάπως, για να είναι διαφορετικό, έτσι όρθιο είναι ρόμβος, έτσι είναι* *τετράγωνο*). Στη συνέχεια, ερωτήθηκαν γιατί το έκαναν αυτό και απάντησαν «*επειδή αν είναι τετράγωνο ακουμπάει κάτω και αν είναι όρθιο είναι ρόμβος»*. Ένας ακόμη συμμετέχων δεν κατασκεύασε μία διαφορετική αναπαράσταση, καθώς όπως υποστήριξε «*δεν μπορώ να το κάνω, δεν υπάρχει, τι διαφορετικό μπορεί να έχει ένα τετράγωνο, είναι όλα ίδια*!»).

Στη συνέχεια, το δείγμα κλήθηκε να απαντήσει στην ερώτηση *Πώς κατασκευάζεις ένα τρίγωνο* και το σύνολο του δείγματος, χωρίς καμία εξαίρεση αναφέρθηκε στην ιδιότητα των τριγώνων αναφορικά με την ύπαρξη $3^{ων}$ πλευρών. Ειδικότερα, 5 συμμετέχοντες απάντησαν βάσει της ισότητας των πλευρών («*Θα φτιάξω 3 ίσες πλευρές*»), 5 συμμετέχοντες πρόσθεσαν τον αριθμό των γωνιών (*θα σχηματίσω 3 γωνίες),* 6 συμμετέχοντες περιέγραψαν ένα ισοσκελές τρίγωνο (*θα σχεδιάσω δύο πλάγιες μεγάλες και ίσες γραμμές δεξιά και αριστερά και μία κάτω πιο μικρή*), 2 μαθητές αναφέρθηκαν στον αριθμό των πλευρών (*θα σχεδιάσω 3 πλευρές*), άλλοι 2 βασίστηκαν στον αριθμό τόσο των γωνιών όσο και των πλευρών (*θα σχεδιάσω 3 πλευρές ενωμένες και θα σχηματίσω 3 γωνίες*).

Αναφορικά με την εστίαση του δείγματος κατά την κατασκευή ενός τραπεζίου, επικεντρώνονται στην ολιστική αντίληψή του (Επίπεδο 1). Αναλυτικότερα, 17 συμμετέχοντες απάντησαν περιγράφοντας ένα πρωτοτυπικό ισοσκελές τραπέζιο («Θα σχεδιάσω μία *μικρή γραμμή πάνω, 2 μεγαλύτερες ίσες δεξιά και αριστερά και μία μεγαλύτερη απ' όλες κάτω*», «*Θα σχεδιάσω κάτω μία μεγάλη, δεξιά και αριστερά 2 πλευρές κάπως στραβές και πάνω θα κάνω μία μικρότερη, «Θα κάνω περίπου το ίδιο με ένα τρίγωνο, αλλά αντί να ενώσω τις 2 πλάγιες πλευρές, θα βάλω άλλη μία πάνω στην κορυφή»*), και 2 συμμετέχοντες βάσει οπτικών χαρακτηριστικών (« *Το τραπέζιο θα το κατασκεύαζα..σαν ένα τετράγωνο απλά πιο φαρδύ στα πλαϊνά..δηλαδή στο πλάι να γίνεται σιγά σιγά πιο φαρδύ»*). Επίσης, Αξίζει να αναφερθεί ότι από έναν συμμετέχοντα τονίστηκε η χρήση του χάρακα (*θα χρησιμοποιήσω έναν χάρακα, για να μετρήσω τις πλευρές).*

Από τις παραπάνω απαντήσεις των μαθητών, φανερώνεται ότι στην προσπάθειά τους να γενικεύσουν την απάντηση τους για τον τρόπου που θα κατασκευάσουν ένα τετράγωνο, ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ένα ρόμβο και ένα τραπέζιο, περιγράφουν τις ενέργειες που ακολούθησαν κατά την κατασκευή αυτών των σχημάτων, χρησιμοποιώντας μία γενική γλώσσα, χωρίς να είναι σε θέση να γενικεύσουν τις απαντήσεις τους.

Γενικότερες ιδέες του δείγματος αναφορικά με την κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων

Ολοκληρώνοντας το 2ο έργο, κάθε συμμετέχοντας ερωτήθηκε *Τι προσέχεις για να κατασκευάσεις ένα σχήμα.* Αναλυτικότερα, 7 συμμετέχοντες απάντησαν βάσει ολιστικής αντίληψης του σχήματος (Επίπεδο 1). Χαρακτηριστικά μερικοί ανέφεραν «*θα σκεφτώ πως είναι ένα σχήμα και θα προσπαθήσω να το κάνω ίδιο»* και *«θα σκεφτώ πώς είναι, θα το έχω στο μυαλό μου…πώς μοιάζει και θα το κάνω».* Επιπροσθέτως, 8 συμμετέχοντες απάντησαν βάσει οπτικών χαρακτηριστικών του σχήματος (Επίπεδο 1) («θα προσέξω *να σχεδιάσω σωστά τις πλευρές, ανάλογα το σχήμα, να είναι ίσες ή ποιες να είναι πιο μεγάλες και ποιες πιο μικρές», οι πλευρές θα πρέπει να είναι όλες ενωμένες, να είναι κλειστά τα σχήματα, γιατί αλλιώς δεν είναι σχήμα»*) Αξίζει να σημειωθεί ότι ένας μαθητής τόνισε πως οι πλευρές *είναι το σημαντικότερο νομίζω στο σχήμα, γιατί ανάλογα πώς είναι οι πλευρές γίνεται και το σχήμα, έτσι καταλαβαίνουμε ποιο είναι το σχήμα.* Συμπληρωματικά, 4 συμμετέχοντες βασίστηκαν στον προσανατολισμό του σχήματος (*θα προσέξω το σχήμα που θα σχεδιάσω* να *μην είναι στραβό, να ακουμπάει πάνω στις γραμμές*

Πίνακας 15. Γενικότερες ιδέες του δείγματος αναφορικά με την κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων

Τρόπος κατασκευής σχήματος	Πλήθος μαθητών
Ολιστική αντίληψη του σχήματος (Επίπεδο 1)	7
Οπτικά χαρακτηριστικά του σχήματος (Επίπεδο 1)	8
Προσανατολισμός του σχήματος (Επίπεδο 1)	4
Σύνολο	19

Παρομοίως, και σε αυτή την ερώτηση, το δείγμα της έρευνας χρησιμοποίησε μία γενική γλώσσα αναφορικά με τα γεωμετρικά σχήματα και στην προσπάθειά τους να γενικεύσουν αναφορικά με την κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων, βασίζονται σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα ενός γεωμετρικού σχήματος (πρωτοτυπικό), το οποίο χρησιμοποιούν για να αναφερθούν γενικότερα στην κατασκευή των γεωμετρικών σχημάτων. Συγχρόνως, οι συμμετέχοντες γενικεύουν με βάση το 1ο επίπεδο γενίκευσης, όπως παρουσιάστηκε στο εννοιολογικό πλαίσιο, εστιάζοντας στην ολιστική αντίληψη των σχημάτων, στα οπτικά χαρακτηριστικά και στον προσανατολισμό του σχήματος.

3ο έργο

Ικανότητα μετασχηματισμού των γεωμετρικών σχημάτων

Στο 3^{ο} έργο, όπως αναφέρθηκε και στο Μεθοδολογικό μέρος της παρούσας εργασίας, οι συμμετέχοντες της έρευνες κλήθηκαν να μετασχηματίσουν ένα τετράγωνο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και το αντίστροφο, ένα ρόμβο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ένα ισοσκελές τραπέζιο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Η διαδικασία αυτή, όπως καθίσταται φανερό και από τον παρακάτω πίνακα, δυσκόλεψε αρκετά το δείγμα, καθώς ελάχιστοι ήταν αυτοί που τις ολοκλήρωσαν.

Πίνακας 16. Ικανότητα μετασχηματισμού γεωμετρικών σχημάτων

Μετασχηματισμός	Τετράγωνο σε ορθ. παραλ/μο	Ορθ. παραλ/μο σε τετράγωνο	Ρόμβος σε ορθ. παραλ/μο	Ισοσκελές τραπέζιο σε ορθ. παραλ/μο
Ολοκληρώθηκε	6	2	5	6
Δεν ολοκληρώθηκε	5	8	5	6
Δεν προσπάθησε	8	9	9	7
Σύνολο	19	19	19	19

Από τους 19 συμμετέχοντες της έρευνας, οι 6 κατάφεραν να μετασχηματίσουν το τετράγωνο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με τη χρήση παράλληλων λωρίδων που τους δόθηκαν, ενώ οι υπόλοιποι είτε προσπάθησαν, αλλά δεν τα κατάφεραν (5 συμμετέχοντες είτε απάντησαν αμέσως ότι δεν γίνεται να μετασχηματιστεί (8 συμμετέχοντες). Όσοι από τους συμμετέχοντες προσπάθησαν να μετασχηματίσουν το τετράγωνο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μετακινούσαν τις παράλληλες λωρίδες είτε τις περιστρέφανε, κάνοντας δοκιμές μέχρι να σχηματιστεί το επιθυμητό σχήμα.

Από τους 19 μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα, οι 2 μαθητές κατάφεραν να μετασχηματίσουν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε τετράγωνο, ενώ οι υπόλοιποι είτε προσπάθησαν, αλλά δεν τα κατάφεραν (8 μαθητές), ενώ μερικοί απάντησαν αμέσως ότι δεν γίνεται να μετασχηματιστεί (9 μαθητές). Όλοι οι μαθητές που προσπάθησαν να μετασχηματίσουν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε τετράγωνο μετακινούσαν τις παράλληλες λωρίδες είτε τις περιστρέφανε, κάνοντας δοκιμές μέχρι να σχηματιστεί το επιθυμητό σχήμα.

Από τους 19 μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα, οι 5 συμμετέχοντες κατάφεραν να μετασχηματίσουν το ρόμβο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ενώ οι υπόλοιποι είτε προσπάθησαν, αλλά δεν τα κατάφεραν (5 συμμετέχοντες) ενώ οι περισσότεροι απάντησαν αμέσως ότι δεν γίνεται να μετασχηματιστεί (9 συμμετέχοντες). Όλοι οι μαθητές που προσπάθησαν να μετασχηματίσουν το ρόμβο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μετακινούσαν τις παράλληλες λωρίδες είτε τις περιστρέφανε, κάνοντας δοκιμές μέχρι να σχηματιστεί το επιθυμητό σχήμα. Από τους 5 μαθητές που ολοκλήρωσαν τον μετασχηματισμό, οι 3 τον πραγματοποίησαν τυχαία, μετακινώντας τις μη παράλληλες λωρίδες κάνοντας δοκιμές και οι 2 βασίστηκαν σε ένα πρωτοτυπικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Από τους 19 συμμετέχοντες της έρευνας, μόλις 6 κατάφεραν να μετασχηματίσουν το ισοσκελές τραπέζιο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ενώ οι υπόλοιποι είτε προσπάθησαν, αλλά δεν τα κατάφεραν (6 συμμετέχοντες) ενώ μερικοί απάντησαν αμέσως ότι δεν γίνεται να μετασχηματιστεί (7 συμμετέχοντες). Όλοι οι μαθητές που προσπάθησαν να μετασχηματίσουν το ισοσκελές τραπέζιο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μετακινούσαν τις μη παράλληλες και τις παράλληλες λωρίδες είτε τις περιστρέφανε, κάνοντας δοκιμές μέχρι να σχηματιστεί το επιθυμητό σχήμα. Οι συμμετέχοντες που ολοκλήρωσαν τον μετασχηματισμό μετακίνησαν τις μη παράλληλες και παράλληλες λωρίδες κάνοντας δοκιμές και συγχρόνως λαμβάνοντας υπόψη ένα προτοτυπικό ορθογώνιο παραλληλογράμμο.

Τρόπος σκέψης δείγματος αναφορικά με τον μετασχηματισμό γεωμετρικών σχημάτων

Στην ερώτηση *Πώς σκέφτεσαι να μετατρέψεις αυτό το τετράγωνο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο,* 5 από τους μαθητές σκέφτηκαν ολιστικά (Επίπεδο 1), καθώς βασίστηκαν την γενικότερη εικόνα ενός πρωτοτυπικού ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Συγκεκριμένα, αναφέρθηκε από τον Κ. «*Σκέφτομαι πώς είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και θα γυρίσω τις διαφάνειες για να δω αν μπορώ να το κάνω*», ενώ η Ε. απάντησε «*Έτσι όπως το βλέπω σκέφτομαι να βγάλω τις δύο πάνω πλευρές για να μην είναι τετράγωνο, γιατί το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι μακρόστενο πολύ*». Συγχρόνως, οι συμμετέχοντες αυτοί, για να προσπαθήσουν να υλοποιήσουν τον μετασχηματισμό, θα επιδιώξουν να βρουν έναν κανόνα που να ταιριάζει με την συγκεκριμένη περίπτωση των δύο γεωμετρικών σχημάτων (στρατηγική μαντέψτε και ελέγξτε). Μόλις 1 από τους συμμετέχοντες βασίστηκε στις ιδιότητες των δύο σχημάτων και στις σχέσεις που τα διέπουν (Επίπεδο 2). Η μαθήτρια αυτή απάντησε χαρακτηριστικά «*Σκέφτομαι ότι το τετράγωνο έχει 4 ίσες πλευρές και 4 γωνίες ίσιες. Και σκέφτομαι ότι και το ορθογώνιο έχει ίδιες γωνίες με το τετράγωνο. Άρα εγώ θα πρέπει να κάνω το από κάτω του πιο μεγάλο ώστε να βγει παραλληλόγραμμο*». Παράλληλα, η συγκεκριμένη συμμετέχουσα, χρησιμοποίησε την εμπειρική γενίκευση, όπου συγκρίνοντας τα δύο γεωμετρικά σχήματα, σε σχέση με την εξωτερική τους εμφάνιση και τα κοινά χαρακτηριστικά που εμφανίζουν, προσπαθεί να μεταφέρει τα στοιχεία αυτά σε ένα γενικό παράδειγμα. Από την άλλη πλευρά, 8 συμμετέχοντες απάντησαν πως δεν μπορούν να μετατρέψουν το τετράγωνο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και αιτιολόγησαν αυτή τους τη θέση βάσει της ολιστικής αντίληψης (Επίπεδο 1) των δύο γεωμετρικών σχημάτων, καθώς δεν εντοπίζουν κάποιο κοινό χαρακτηριστικό ή οποιαδήποτε σχέση μεταξύ τους. Ειδικότερα, ο Β. ανέφερε ότι *δεν γίνεται να το μετατρέψω, γιατί το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει 2 μικρότερες πλευρές και 2 μεγαλύτερες, ενώ το τετράγωνο έχει όλες τις πλευρές ίσες, άρα δεν γίνεται να το κάνουμε το τετράγωνο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, δεν έχουν καμία σχέση το ένα με το άλλο*, η Σ. ότι «*Πώς μπορεί ένα τετράγωνο να γίνει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, αφού άλλο το ένα σχήμα, άλλο το άλλο ; Δεν έχουν τίποτα κοινό, ούτε μοιάζουν»*. Συμπληρωματικά, 5 συμμετέχοντες υποστήριξαν ότι δεν είναι εφικτό να το μετασχηματίσουν λόγω έλλειψης γνώσεων (*Δεν ξέρω αν θα το κάνω, θα αρχίσω να τις γυρνάω, θα τις αλλάζω θέσεις και θα δοκιμάσω και θα δω αν γίνεται, γιατί δεν το έχω κάνει ξανά*).

Στην ερώτηση *Πώς σκέφτεσαι να μετατρέψεις αυτό το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε τετράγωνο;* ένα μεγάλο μέρος των συμμετεχόντων (9 συμμετέχοντες) υποστήριξαν ότι ο μετασχηματισμός δεν είναι εφικτός να πραγματοποιηθεί και αιτιολόγησαν την θέση τους ομόφωνα βάσει της ολιστικής αναγνώρισης (Επίπεδο 1) των δύο σχημάτων. Χαρακτηριστική είναι η εξής απάντηση της Ν. «*Είναι δύο διαφορετικά σχήματα, δεν μπορεί το τετράγωνο να γίνει ορθογώνιο»*. Επιπλέον, 8 συμμετέχοντες βασίστηκαν στην ολιστική αντίληψη των δύο σχημάτων (Επίπεδο 1), για να περιγράψουν την σκέψη τους αναφορικά με τον μετασχηματισμού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου σε τετράγωνο («*Θα τις αλλάξω θέση για να δω. Σκέφτομαι πώς είναι ένα τετράγωνο και κάπως έτσι θα τις γυρίσω για να δω αν μπορώ να φτιάξω ένα τετράγωνο/* «*Δεν ξέρω πώς να το κάνω σκέφτομαι μόνο πώς είναι το τετράγωνο»*).

Επίσης, 2 συμμετέχοντες εστίασαν σε οπτικά χαρακτηριστικά των δύο σχημάτων (Επίπεδο 1). Χαρακτηριστικά η Ν. απάντησε «*Σκέφτομαι να χωρίσω το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε 2 μικρότερα, γιατί έχει μεγαλύτερες πλευρές από το τετράγωνο, θα τα βάλω από πάνω τα 2 μικρότερα και νομίζω θα γίνει»* και ο Κ. «*Πρέπει να το κάνω πιο μικρό με κάποιο τρόπο, γιατί το τετράγωνο δεν είναι μακρύ σαν το ορθογώνιο, έχει πιο μικρές πλευρές. Άρα λέω να πάρω αυτές τις λωρίδες και να τις βάλω από πάνω»*.

Στην αντίστοιχη ερώτηση σχετικά με τον μετασχηματισμό του ρόμβου σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, 9 συμμετέχοντες απάντησαν, χωρίς να προσπαθήσουν, ότι δεν είναι εφικτός αυτός ο μετασχηματισμός, υποστηρίζοντας πως οπτικά τα δύο σχήματα δεν παρουσιάζουν κάποια σχέση μεταξύ τους, καθώς αντιλαμβάνονται τα δύο σχήματα ολιστικά (Επίπεδο 1). Μάλιστα, χαρακτηριστικά αναφέρθηκε ότι «*Σκέφτομαι αυτός ο ρόμβος πώς θα γίνει ορθογώνιο, γιατί όταν βλέπω τον ρόμβο δεν μου θυμίζει το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο […] Ο ρόμβος δεν έχει τίποτα ίδιο με το ορθογώνιο*», «*Νομίζω ότι επειδή ο ρόμβος θα μπορούσε να γίνει τετράγωνο αν το γυρίσουμε, αλλά δεν μπορεί να γίνει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, άρα δεν γίνεται. Δεν μοιάζουν τα δύο σχήματα*», «*Ο ρόμβος δεν έχει ίδιες πλευρές με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχεις ευθείες..ίσιες πλευρές ενώ ο ρόμβος έχει πλάγιες*». Ακόμη, 7 συμμετέχοντες σκέφτηκαν βάσει ενός πρωτοτυπικού ορθογωνίου παραλληλογράμμου (Επίπεδο 1), ώστε να σχηματίσουν κι εκείνοι ένα αντίστοιχο («*Σκέφτομαι πώς είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Και ότι πρέπει πάνω και κάτω να κάνω 2 μεγάλες πλευρές και δεξιά και αριστερά δύο μικρότερες*», «*Ε σκέφτομαι ότι έχει 2 μεγάλες πλευρές ίσες και 2 μικρότερες πλευρές ίσες*»), 3 μαθητές υποστήριξαν ότι δεν γνωρίζουν πώς θα το κάνουν και θα προσπαθήσουν γυρνώντας «*στην τύχη*» τις μη παράλληλες λωρίδες έως ότου σχηματιστεί ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Από την δήλωσή τους αυτή, φανερώνεται ότι αντιλαμβάνονται ένα σχήμα ολιστικά, χωρίς να διακρίνουν κάποια ιδιότητα, χαρακτηριστικό ή σχέση μεταξύ των σχημάτων (Επίπεδο 1).

Συμπληρωματικά, στην ερώτηση *Πώς σκέφτεσαι να μετατρέψεις αυτό το ισοσκελές τραπέζιο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο*, 12 συμμετέχοντες αναφέρθηκαν στην ολιστική αντίληψη του ορθογωνίου παραλληλογράμμου *(«Θα σκεφτώ ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και θα γυρίσω αυτά εδώ, θα τα βάλω κάπως, θα δω πώς δεν ξέρω, για να γίνει το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο»*), Ακόμη, 7 μαθητές απάντησαν ότι είναι αδύνατος ο μετασχηματισμός αυτός, διότι, είτε δεν γνωρίζουν πως θα το κάνουν λόγω έλλειψης εμπειρίας (*Δεν το έχω ξανακάνει, δεν ξέρω πώς να το κάνω…*) είτε δεν είναι σε θέση να εντοπίσουν κοινά χαρακτηριστικά και σχέσεις μεταξύ των δύο σχημάτων, λόγω ολιστικής αντίληψης των δύο σχημάτων (Επίπεδο 1) («*Σκέφτομαι και πώς είναι το ορθογώνιο, ότι πρέπει η δεξιά και η αριστερή να είναι ίσες και η πάνω και η κάτω να είναι ίσες. Αλλά το τραπέζιο δεν έχει κάτι κοινό με το ορθογώνιο για να γίνει ορθογώνιο. Άρα δεν γίνεται, δεν μπορώ»*).

Πίνακας 17. Τρόπος σκέψης δείγματος αναφορικά με τον μετασχηματισμό γεωμετρικών σχημάτων

Μετασχηματισμός	Τετράγωνο σε ορθ. παραλ/μο	Ορθ. παραλ/μο σε τετράγωνο	Ρόμβος σε ορθ. παραλ/μο	Ισοσκελές τραπέζιο σε ορθ. παραλ/μο
Προσπάθεια πραγματοποίησης μετασχηματισμού				
Ολιστική αντίληψη (Επίπεδο 1)	5	8	7	12
Οπτικά χαρακτηριστικά των δύο σχημάτων (Επίπεδο 1)		2		
Ορισμένες ιδιότητες και σχέσεις των δύο σχημάτων (Επίπεδο 2)	1			
Καμία προσπάθεια πραγματοποίησης μετασχηματισμού				
Ολιστική αντίληψη (Επίπεδο 1)	8	9	9	2
Ελλιπείς γνώσεις	5			5
Σύνολο	19	19	19	19

<u>Εστίαση δείγματος αναφορικά με τον μετασχηματισμό γεωμετρικών σχημάτων</u>

Οι συμμετέχοντες αφού ολοκλήρωσαν τον μετασχηματισμό του τετραγώνου σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο κλήθηκαν να απαντήσουν στην ερώτηση *Γιατί μετέτρεψες το τετράγωνο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο*, η οποία διερευνά της εστίαση των μαθητών. Οι περισσότεροι (4 συμμετέχοντες) αιτιολόγησαν βάσει ολιστικής αντίληψης (Επίπεδο 1), καθώς σκέφτηκαν πώς μοιάζει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και στη συνέχεια προσπάθησαν να τοποθετήσουν τις παράλληλες λωρίδες με τέτοιο τρόπο ώστε να τους «*θυμίζει*» το σχήμα αυτό («*Σκέφτηκα ότι πρέπει να κάνω 2 μεγάλες πλευρές και δύο μικρές. Τα γύρισα με τέτοιο τρόπο ώστε να κάνω το σχήμα να μοιάζει με το ορθογώνιο*», «*Δεν ξέρω, αλλά είδα ότι αν αλλάξω τις λωρίδες τελικά μπορεί να γίνει, γιατί σκέφτηκα ότι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι πιο μακρύ από το τετράγωνο. Οπότε έβαλα αυτές τις λωρίδες με τέτοιο τρόπο ώστε να γίνει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που είναι μακρύ*»). Επίσης, 2 συμμετέχοντες εστίασαν στη σχέση τετραγώνου και ορθογωνίου παραλληλογράμμου (Επίπεδο 2). Ειδικότερα, ένας παρατήρησε ότι «*αν χωρίσω το τετράγωνο στα 2 έχω 2 ίσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Και μετά έβαλα αυτά τα 2 ίσα κομμάτια το ένα δίπλα στο άλλο και έφτιαξα ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο»*, ενώ ο δεύτερος ότι «*αν χωρίσουμε το τετράγωνο σε 4 ίσα κομμάτια και τα βάλουμε το ένα δίπλα στο άλλο κάνουμε ένα ορθογώνιο».* Συγχρόνως, οι μαθητές περιέγραφαν τις ενέργειες που είχαν ακολουθήσει κατά τον μετασχηματισμό του τετραγώνου σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, για να απαντήσουν στην ερώτηση που τους τέθηκε.

Στην αντίστοιχη ερώτηση που αφορά τον μετασχηματισμό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου σε τετράγωνο, οι μαθητές που πραγματοποίησαν τον μετασχηματισμό απάντησαν με βάση τη σχέση μεταξύ των δύο σχημάτων (Επίπεδο 2), καθώς παρατήρησαν ότι αν χωρίσουν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε 2 μικρότερα και ίσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα, τα οποία στη συνέχεια τοποθετήσουν το ένα πάνω στο άλλο, θα σχηματιστεί ένα τετράγωνο («*Αν χωρίσω το ορθογώνιο στα 2 έχω 2 ίσα μικρά ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Και μετά έβαλα αυτά τα 2 ίσα κομμάτια το ένα πάνω στο άλλο και έφτιαξα ένα τετράγωνο»).*

Επιπροσθέτως, στην ερώτηση *Γιατί μετέτρεψες τον ρόμβο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο,* η οποία διερευνά της εστίαση των μαθητών, δύο μαθητές απάντησαν ολιστικά («*Γιατί είδα ότι έτσι ταιριάζει, για να γίνει ο ρόμβος ορθογώνιο»/ «Ε δεν ξέρω, προσπαθούσα να το κάνω αλλά δεν έβγαινε. Κάποια στιγμή κατά λάθος έκανα έτσι και τα ένωσα αυτά τα δύο και είδα τυχαία ότι γίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Και λέω, αφού πρέπει να τα χρησιμοποιήσω όλα θα κάνω το ίδιο και με τα άλλα δύο. Μετά το έκανα αλλά δεν μου έμοιαζε με ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Μετά έτσι όπως το κοιτούσα κατάλαβα ότι αν το γυρίσω κάπως ανάποδα θα φαίνεται σαν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Γενικά έφτιαξα δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα που τα ένωσα»*). Επίσης, δύο συμμετέχοντες βασίστηκαν στις ιδιότητες ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου (*Σκέφτηκα ότι πρέπει να έχει 4 γωνίες. Οπότε τα γύρισα έτσι ώστε να κάνω 2 μεγάλες και 2 μικρές πλευρές. Τα γυρνούσα έτσι γύρω γύρω για να βρω πως θα γίνει και τελικά έκανα ένα μεγάλο ορθογώνιο*). Ένας άλλος συμμετέχων προσπάθησε να αποδώσει τον μετασχηματισμό στην σχέση μεταξύ των δύο σχημάτων χωρίς όμως να αιτιολογεί περαιτέρω την θέση του («*Εε..γιατί το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει σχέση με το τετράγωνο, και το τετράγωνο με το ρόμβο, άρα και το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει σχέση με τον ρόμβο. Άρα γι' αυτό..νομίζω...δεν είμαι σίγουρος..έτσι το σκέφτηκα τώρα που τα έκανα αυτά εδώ μαζί σας*»). Παράλληλα, από τις παραπάνω δηλώσεις γίνεται κατανοητό ότι 2 μαθητές δεν είναι σε θέση να γενικεύσουν, καθώς δεν αιτιολογούν στις απαντήσεις τους, επομένως δεν χρησιμοποιούν κάποια στρατηγική γενίκευσης (« *Γιατί είδα ότι έτσι ταιριάζει, για να γίνει ο ρόμβος ορθογώνιο»,* («*Εε..γιατί το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει σχέση με το τετράγωνο, και το τετράγωνο με το ρόμβο, άρα και το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει σχέση με τον ρόμβο. Άρα γι' αυτό..νομίζω...δεν είμαι σίγουρος..έτσι το σκέφτηκα τώρα που τα έκανα αυτά εδώ μαζί σας»),* ενώ οι υπόλοιποι μετακινώντας τις λωρίδες προσπαθούσαν να βρουν έναν κανόνα, ο οποίος θα ταιριάζει με τον συγκεκριμένο μετασχηματισμό, χωρίς να έχουν κατανοήσει μία γενική σχέση που να ταιριάζει (Στρατηγική μαντέψτε και ελέγξτε).

Επιπροσθέτως, στην ερώτηση *Γιατί μετέτρεψες το ισοσκελές τραπέζιο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο,* η οποία διερευνά της εστίαση των μαθητών, 3 από τους 6 μαθητές που ολοκλήρωσαν τον μετασχηματισμό, βασίστηκαν στην σχέση που εντόπισαν μεταξύ των δύο σχημάτων (Επίπεδο 2). Συγκεκριμένα, η Ν. απάντησε «*Έτσι όπως το έβλεπα σκέφτηκα ότι μοιάζει με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, γιατί από το πλάι είναι λες και το κόψαμε. Οπότε πήρα αυτό το κομμάτι από εδώ και το άφησα εδώ και είδα ότι γίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο!»* Η μαθήτρια αυτή, περιέγραψε τις ενέργειες που ακολούθησε κατά τον μετασχηματισμό του ισοσκελούς τραπεζίου σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ακόμη, 1 συμμετέχων αναφέρθηκε στον παράγοντα της τύχης, όπως χαρακτηριστικά απάντησε «*Δεν ξέρω τυχαία ότι βγει*». Μάλιστα, όταν ολοκλήρωσε τον μετασχηματισμό, αφού προσπάθησε να ενώσει και να συνδυάσει τις μη παράλληλες και παράλληλες λωρίδες, αντέδρασε λέγοντας *«Α καλά πάλι στην τύχη βγήκε. Τέλειο! Αλλά μου φαίνεται περίεργο για ορθογώνιο παραλληλόγραμμο*[….] *γιατί είναι πολύ μακρύ»*.

Οι υπόλοιποι 3 συμμετέχοντες δεν κατάφεραν να αιτιολογήσουν τον μετασχηματισμό που πραγματοποίησαν (Επίπεδο 1). Μάλιστα, χαρακτηριστικά ανέφεραν «*Γιατί δεν μπορούσα να το κάνω κάπως αλλιώς. Τα γυρνούσα, τα άλλαζα θέση και είδα ότι αν τα ενώσω έτσι όπως τα ένωσα, κατά τύχη βέβαια, κάνουν ένα ορθογώνιο, τα ένωσα και βγήκε ένα μεγάλο ορθογώνιο»*, «*Έκανα πάλι αυτό που έκανα πριν. Προσπάθησα να τα ενώσω, ώστε να γίνει ένα ορθογώνιο. Στην αρχή νόμιζα ότι αυτό δεν γίνεται έτσι δεν ξέρω γιατί δεν μου έμοιαζε για ορθογώνιο αυτό που έφτιαχνα. Μετά όμως κατάλαβα δεν ξέρω πως μην με ρωτήσετε ότι τελικά είναι», «Δεν ξέρω γιατί. Ξέρω ότι έτσι όπως τα γυρνούσα και τα έβαζα διπλά έκανα ένα ορθογώνιο»*.

Από τους συμμετέχοντες που προσπάθησαν να μετασχηματίσουν το σχήμα, χωρίς, όμως επιτυχία, 4 βασίστηκαν σε ένα πρωτοτυπικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (Επίπεδο 1). Οι υπόλοιποι 2 μαθητές προσπάθησαν και στη συνέχεια υποστήριξαν ότι δεν μπορεί το ισοσκελές τραπέζιο σε μετασχηματιστεί σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, λόγω διαφορών στις ιδιότητες των πλευρών τους (*η κάτω (πλευρά) είναι η μεγαλύτερη, η πάνω πιο μικρή και πλάγια είναι στραβές, ενώ το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο δεν έχει στραβές γραμμές είναι όλες ευθείες!* Μ.3, *Δεν γίνεται, γιατί το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει τις απέναντι πλευρές ίσες, ενώ το ισοσκελές τραπέζιο δεν έχει τις απέναντι πλευρές ίσες. Έχει αυτές που είναι δεξιά και αριστερά, αλλά είναι στραβές, ενώ στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο δεν είναι στραβές Μ.7).* Επομένως, οι συμμετέχοντες αυτοί, δεν είναι σε θέση να εντοπίσουν κοινά χαρακτηριστικά και σχέσεις μεταξύ των δύο σχημάτων, καθώς δεν αναγνωρίζουν τα ξεχωριστά μέρη τους, αλλά τα αντιλαμβάνονται μόνο ολιστικά (Επίπεδο 1).

Γενικότερες ιδέες του δείγματος αναφορικά με τον μετασχηματισμό των γεωμετρικών σχημάτων

Για την διερεύνηση των γενικότερων ιδεών των συμμετεχόντων αναφορικά με τον μετασχηματισμό των γεωμετρικών σχημάτων, ερωτήθηκαν μετά την ολοκλήρωση τους «*Πώς μπορούμε να μετατρέψουμε ένα τετράγωνο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο*». Οι συμμετέχοντες της έρευνας στις απαντήσεις τους χρησιμοποιούσαν μία γενική γλώσσα αναφορικά με τα γεωμετρικά σχήματα (Επίπεδο 1) και προσπάθησαν να γενικεύσουν την απάντησή τους περιγράφοντας τις ενέργειες που είχα ακολουθήσει στο προηγούμενο στάδιο της έρευνας, όπου μετασχημάτισαν το τετράγωνο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ακόμη, οι περιγραφές 4^ων^ συμμετεχόντων βασίστηκαν σε οπτικά χαρακτηριστικά του ορθογωνίου παραλληλογράμμου - Επίπεδο 1 - («*Επειδή το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι μακρουλό με κάποιο τρόπο θα μεγαλώσω την πάνω και την κάτω πλευρά του τετραγώνου και θα μικρύνω τις δύο δεξιά και αριστερά πλευρά*») και άλλων 2 συμμετεχόντων στη σχέσης των δύο σχημάτων (Επίπεδο 2) («*Θα κόψω το τετράγωνο σε δύο μικρότερα κομμάτια, για να δημιουργηθούν 2 μικρά ορθογώνια παραλληλόγραμμα, τα οποία στη συνέχεια θα τα ενώσω*»).

Στην ερώτηση *Πώς μπορούμε να μετατρέψουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε τετράγωνο*, και οι 2 μαθητές περιέγραψαν τις κινήσεις που είχαν ακολουθήσει προηγουμένως, χωρίς να γενικεύουν τον τρόπο που θα μετασχηματίσουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε τετράγωνο. Ακόμη, οι 2 μαθητές εντόπισαν μέσω αυτού του παραδείγματος την σχέση που έχουν αυτά τα δύο σχήματα (Επίπεδο 2), την οποία και περιγράφουν («*Εεε θα πάρω το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, θα το χωρίσουμε στη μέση, για να φτιάξουμε 2 μικρότερα ορθογώνια παραλληλόγραμμα και αυτά τα 2 ορθογώνια παραλληλόγραμμα θα τα βάλω το ένα πάνω στο άλλο για να φτιάξω ένα τετράγωνο*», «*Θα του σβήσουμε την δεξιά πλευρά, θα την* *πάμε πιο μέσα, από πάνω θα μικρύνουμε την πλευρά, ώστε να είναι ίσες και οι 4, για να γίνει τετράγωνο»).*

Στην ερώτηση που είχε στόχο να διερευνήσει τις γενικότερες ιδέες των συμμετεχόντων αναφορικά με τον μετασχηματισμό *ενός ρόμβου σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο,* δυσκολεύτηκαν να δώσουν κάποια. Συγκεκριμένα, 4 μαθητές δεν ήταν σε θέση να γενικεύσουν (Επίπεδο 1), απάντηση και συνεπώς δεν χρησιμοποίησαν κάποια στρατηγική γενίκευσης (*«Δεν ξέρω πώς θα κάνω έναν ρόμβο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο»*) και 1 μαθητής χρησιμοποιώντας την στρατηγική «μαντέψτε και ελέγξτε» απάντησε *«Θα προσπαθήσω να κάνω δοκιμές, όπως έκανα πριν, μέχρι να γίνει»*, χωρίς να είναι σε θέση να γενικεύει (Επίπεδο 2).

Στην τρίτη ερώτηση *Πώς μπορούμε να μετατρέψουμε ένα ρόμβο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο*, η οποία διερευνά τις γενικότερες ιδέες των μαθητών, 3 από τους 6 συμμετέχοντες που ολοκλήρωσαν τον μετασχηματισμό κατάφεραν να απαντήσουν. Ειδικότερα, οι μαθητές αυτοί απάντησαν βάσει των διαδικασιών που ακολούθησαν κατά τον μετασχηματισμό του ισοσκελούς τραπεζίου σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, εξηγώντας ότι θα χωρίσουν το ισοσκελές τραπέζιο σε τρία μέρη/ σχήματα, σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στη μέση και δεξιά και αριστερά σε δύο τρίγωνα, τα οποία στη συνέχεια θα ενώσουν μεταξύ τους και θα σχηματίσουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (*« Θα χωρίσω στο μυαλό μου το τραπέζιο σε δύο τρίγωνα στο πλάι από την μία και από την άλλη και ένα ορθογώνιο στη μέση. Θα ενώσω τα δύο τρίγωνα και έτσι θα γίνει το τραπέζιο ορθογώνιο»*, *«Θα σκεφτούμε ότι έχει μέσα* (το ισοσκελές τραπέζιο*) τριγωνάκια από το πλάι και αν αυτά τα τριγωνάκια τα ενώσουμε θα γίνει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο», «Αν από την μία πλευρά κόψουμε ή σβήσουμε την πλάγια γραμμή και κάνουμε ένα τρίγωνο και το βάλουμε από την άλλη πλευρά»*. Επομένως, οι μαθητές αυτοί αδυνατούν να γενικεύσουν και επικεντρώνονται σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα (Επίπεδο 2). Οι υπόλοιποι 3 μαθητές δεν έδωσαν κάποια απάντηση (*«Δεν ξέρω πώς θα το κάνω», «Δεν ξέρω, δεν μπορώ να το εξηγήσω, δεν το έχω ξανακάνει και δεν νομίζω να το κάνω ξανά, στο σχολείο δεν κάνουν τέτοια»*)

4ο Μέρος: Συζήτηση/ Συμπεράσματα

1ο ερευνητικό ερώτημα: Ποιο είναι το επίπεδο γενίκευσης των μαθητών Ε’ Δημοτικού αναφορικά με τα γεωμετρικά σχήματα;

Οι συμμετέχοντες της έρευνας βρίσκονται, συγχρόνως, τόσο στο 1ο όσο και στο 2ο επίπεδο γενίκευσης, όπως και οι μαθητές νηπιαγωγείου που έλαβαν μέρος σε μελέτη των Tzekaki και Papadopoulou (2016), καθώς αναγνώρισαν τις πρωτοτυπικές αναπαραστάσεις των γεωμετρικών σχημάτων και χρησιμοποίησαν τα επίσημα ονόματα για τις κατηγορίες (Επίπεδο 1) που τους παρουσιάστηκαν με μεγάλη ευκολία (κύκλος, τρίγωνο, ρόμβος, τετράγωνα, ορθογώνια παραλληλόγραμμα) εκτός από την έλλειψη, η οποία δεν κατονομάστηκε από κανέναν μαθητή που έλαβε μέρος στην έρευνα, ευρήματα που συμφωνούν με αυτά των Koleza και Giannisi (2013), Clements, κ.α. (1999) και Ma, κ.α. (2015). Ωστόσο, δυσκολεύτηκαν να αναγνωρίσουν τις μη πρωτοτυπικές αναπαραστάσεις των παραπάνω σχημάτων (Επίπεδο 1), όταν αυτές δεν βρίσκονται σε μη τυπικές θέσεις και μεγέθη. Συμπληρωματικά, η οπτική αναγνώριση των αναπαραστάσεων των κύκλων ήταν η ευκολότερη για το δείγμα της έρευνας (Clements, et al, 1999˙ Ma, et al, 2015), όπου ακολουθείται από το τετράγωνο και το τρίγωνο, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τον ρόμβο και τέλος το τραπέζιο, το οποίο αναγνώρισαν ελάχιστοι στην πρωτοτυπική μορφή του. Αναφορικά με τις μη έγκυρες αναπαραστάσεις των γεωμετρικών σχημάτων, ελάχιστοι συμμετέχοντες τις αναγνώρισαν, ενώ οι περισσότεροι απέδιδαν σε αυτές ονομασίες σχημάτων βάσει της ολιστικής αναγνώρισής τους (Επίπεδο 1) ή αιτιολογούσαν την ονομασία βάσει ορισμένων ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων (Επίπεδο 2) και χαρακτηριστικών τα οποία δεν υφίσταται στην εκάστοτε περίπτωση (Επίπεδο 2).

Συγχρόνως, οι συμμετέχοντες δικαιολόγησαν τις απαντήσεις τους για τις έγκυρες αναπαραστάσεις βάσει αναγνώρισης ορισμένων ιδιοτήτων των σχημάτων, με και χωρίς δυνατότητα ονομασίας (Επίπεδο 2), ολιστικής αναγνώρισης (Επίπεδο 1) και του προσανατολισμού των σχημάτων (Επίπεδο 1), αναδεικνύοντας τον ισχυρό ρόλο που κατέχουν τα πρωτοτυπικά γεωμετρικά σχήματα στην αναγνώριση των γεωμετρικών σχημάτων, όπως συνέβη και σε έρευνα των Clements, κ.α. (1999). Αναφορικά με τις μη έγκυρες αναπαραστάσεις, το δείγμα της έρευνας αιτιολογήθηκε είτε βάσει ολιστικής αναγνώρισης (Επίπεδο 1), βάση των οπτικών χαρακτηριστικών (Επίπεδο 1) είτε βάσει ορισμένων ιδιοτήτων της κατηγορίας του εκάστοτε σχήματος, με ή χωρίς δυνατότητα ονομασίας αυτών (Επίπεδο 2). Αξίζει να αναφερθεί, ότι ένα σημαντικό μέρος των συμμετεχόντων συγχέουν ένα ανεστραμμένο τετράγωνο και το αναγνωρίζουν ως ρόμβο, σε αντίθεση με έρευνες των Clements κ.α. (1999) Hannibal και Clements (2000) και Koleza και Giannisi (2013), .

Αναφορικά με την κατηγοριοποίηση των γεωμετρικών σχημάτων, το δείγμα είναι σε θέση να ξεχωρίσει τα καμπυλόγραμμα από τα ευθύγραμμα γεωμετρικά σχήματα (Επίπεδο 1), καθώς όλοι τοποθέτησαν τους κύκλους και τις ελλείψεις στην ίδια κατηγορία (Koleza, & Giannisi, 2013) και, συγχρόνως, η πλειοψηφία των συμμετεχόντνων αναγνωρίζει τις κατηγορίες των γεωμετρικών σχημάτων (πρωτοτύπων) με δυνατότητα ονομασίας τους (Επίπεδο 2), αφού οι περισσότεροι, ξεχώρισαν σε 4 διαφορετικές κατηγορίες τα τετράγωνα, τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα, τους ρόμβους και τα τρίγωνα, σύμφωνα με τις ονομασίες που έδωσαν στο κάθε σχήμα συμπεριλαμβανομένου και μη έγκυρες αναπαραστάσεις, ενώ τα τραπέζια δεν τα ένταξαν σε κάποια από τις παραπάνω κατηγορίες, όπως συνέβη και σε έρευνα των Tzekaki και Papadopoulou (2016). Ακόμη, το δείγμα της έρευνα για να ταξινομήσει γεωμετρικά σχήματα σε μία κατηγορία παρατηρεί την συνολική τους εικόνα (ολιστική αντίληψη) (Επίπεδο 1), τα οπτικά χαρακτηριστικά (Επίπεδο 1), αναδεικνύοντας, επίσης, την ύπαρξη πρωτοτύπων, όπως και σε έρευνα των Clements, κ.α. (1999), αλλά και βασίζονται σε ορισμένες ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων (Επίπεδο 2).

Συνεχίζοντας με την κατασκευή των γεωμετρικών σχημάτων, οι συμμετέχοντες της έρευνες δεν δυσκολεύτηκαν, με εξαίρεση το τραπέζιο. Αναλυτικότερα, η κατασκευή του τετραγώνου και του τριγώνου φαίνεται να είναι η πιο εύκολη για τους συμμετέχοντες, ακολουθεί η κατασκευή του ορθογωνίου (Fujita & Jones, 2007), του ρόμβου και τέλος η κατασκευή του τραπεζίου. Συγχρόνως, κατασκεύασαν διαφορετικές ως προς το μέγεθος αναπαραστάσεις των γεωμετρικών σχημάτων, καθώς δυσκολεύονται στην αναγνώρισή τους σε μη τυπικές θέσεις και μεγέθη, γι’ αυτό και όλες οι κατασκευές παρουσιάστηκαν σε πρωτοτυπική θέση (Επίπεδο 1). Το δείγμα της έρευνας, αν και κατασκεύασε τα γεωμετρικά σχήματα, δεν έχει κατανοήσει πλήρως όλες τις γεωμετρικές πτυχές, καθώς τα κατασκεύασαν στηριζόμενοι σε ορισμένες ιδιότητες των σχημάτων με ή χωρίς δυνατότητα ονομασίας (Επίπεδο 2), και συγκεκριμένα στον αριθμό των πλευρών, στον αριθμό των γωνιών, στον αριθμό τόσο των πλευρών όσο και των γωνιών, αλλά και βάσει της ολιστικής αντίληψης του σχήματος (Επίπεδο 1), των οπτικών του χαρακτηριστικών (Επίπεδο 1) και του προσανατολισμού (Επίπεδο 1). Ακόμη, όλες οι απαντήσεις των συμμετεχόντων ήταν περιγραφικές και χρησιμοποιούσαν γενική γλώσσα σχετικά με τα γεωμετρικά σχήματα (Επίπεδο 2).

Συμπληρωματικά, μετασχηματισμός των γεωμετρικών σχημάτων αποτέλεσε μία απαιτητική διαδικασία για τους συμμετέχοντες της έρευνας, καθώς ελάχιστοι ήταν αυτοί που ολοκλήρωσαν την διαδικασία. Οι περισσότεροι μετασχημάτισαν ένα τετράγωνο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ένα ισοσκελές τραπέζιο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ενώ δυσκολεύτηκαν στον μετασχηματισμό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου σε τετράγωνο, εύρημα που συμφωνεί με έρευνα των Tzekaki και Papadopoulou (2016), όπως, επίσης και στον μετασχηματισμό του ρόμβου σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Όλοι οι μαθητές που προσπάθησαν να μετασχηματίσουν τα γεωμετρικά σχήματα μετακινούσαν τις μη παράλληλες και τις παράλληλες λωρίδες είτε τις περιστρέφανε, κάνοντας δοκιμές μέχρι να σχηματιστεί το επιθυμητό σχήμα. Οι συμμετέχοντες, οι οποίοι ολοκλήρωσαν τους μετασχηματισμούς εστίασαν στην ολιστική αντίληψη του κάθε γεωμετρικού σχήματος (Επίπεδο 1) ή σε οπτικά χαρακτηριστικά των δύο σχημάτων (Επίπεδο 1). Λίγοι ήταν αυτοί οι οποίοι βασίστηκαν στις ιδιότητες των δύο σχημάτων και στις σχέσεις που τα διέπουν (Επίπεδο 2). Από την άλλη πλευρά, οι συμμετέχοντες που δεν καταφέραν να ολοκληρώσουν τους μετασχηματισμούς βασίστηκαν στην ολιστική αντίληψη (Επίπεδο 1) των γεωμετρικών σχημάτων, καθώς δεν είναι σε θέση να εντοπίσουν κάποιο κοινό χαρακτηριστικό ή οποιαδήποτε σχέση μεταξύ τους, ενώ κάποιοι υποστήριξαν ότι δεν είναι εφικτό να το μετασχηματίσουν λόγω έλλειψης γνώσεων. Το δείγμα της έρευνας δυσκολεύτηκε να δώσει γενικευμένες απαντήσεις αναφορικά με τον μετασχηματισμό των γεωμετρικών σχημάτων, και όσοι προσπάθησαν περιέγραφαν τις διαδικασίες που ακολούθησαν κατά τον μετασχηματισμό των γεωμετρικών σχημάτων. Επομένως, οι μαθητές αυτοί αδυνατούν να γενικεύσουν και επικεντρώνονται σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα (Επίπεδο 2).

2ο ερευνητικό ερώτημα: Ποιες στρατηγικές εφαρμόζουν οι μαθητές για να γενικεύσουν τις γνώσεις τους για τα γεωμετρικά σχήματα;

Μέσω των απαντήσεων των μαθητών, αλλά και της παρατήρησής τους ενώ εργαζόντουσαν κατά την κατασκευή των γεωμετρικών σχημάτων και των μετασχηματισμό τους παρατηρήθηκε ότι οι στρατηγικές γενίκευσης που χρησιμοποιούν είναι: α) Καμία απάντηση, β) Στρατηγική μαντέψτε και ελέγξτε (guess-and-check strategy), γ) Περιγραφή μίας ενέργειας που είχε εκτελεστεί προηγουμένως και δ)Εμπειρικές αποδείξεις.

Συγκεκριμένα, αναφορικά με την πρώτη στρατηγική, την χρησιμοποιούσαν οι μαθητές οι οποίοι αποτύγχαναν να γενικεύσουν ή όσοι δεν αιτιολογούν τις απαντήσεις τους. Μάλιστα, οι μαθητές αυτοί ήταν αρκετοί, ειδικά στις ερωτήσεις που είχαν στόχο να αναδείξουν τις γενικότερες ιδέες των συμμετεχόντων κατά τον μετασχηματισμό των γεωμετρικών σχημάτων. Ακόμη, την στρατηγική αυτή την χρησιμοποίησαν οι μαθητές οι οποίοι δεν καταφέραν να ολοκληρώσουν τον μετασχηματισμό, αν και προσπάθησαν, αλλά και κάποιοι οι οποίοι τον ολοκλήρωσαν «στην τύχη», περιστρέφοντας και μετακινώντας τις παράλληλες και μη παράλληλες λωρίδες, μέχρι να σχηματιστεί το επιθυμητό σχήμα. Συγχρόνως, σε προηγούμενα έργα ή σε προηγούμενα ερωτήματα βασίστηκαν στην ολιστική αντίληψη των γεωμετρικών σχημάτων, κατά την αιτιολόγηση των θέσεων τους. Επομένως, όσοι εργάζονται στο 1^{ο} επίπεδο γενίκευσης αδυνατούν να γενικεύσουν.

Επιπλέον, οι μαθητές, κατά τον μετασχηματισμό των γεωμετρικών σχημάτων, χρησιμοποίησαν την στρατηγική μαντέψτε και ελέγξτε, καθώς για να προσπαθήσουν να υλοποιήσουν τον μετασχηματισμό, επιδίωξαν να βρουν έναν κανόνα που να ταιριάζει με την συγκεκριμένη περίπτωση των δύο γεωμετρικών σχημάτων. Συνεχίζοντας με την τρίτη στρατηγική, οι μαθητές περιέγραφαν τις κινήσεις που είχαν ακολουθήσει προηγουμένως, για να κατασκευάσουν ή να μετασχηματίσουν ένα συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα, χωρίς να γενικεύουν, στην συνέχεια, τον τρόπο που θα κατασκευάσουν ή θα μετασχηματίσουν αντίστοιχα ένα γενικό αντικείμενο (γεωμετρικό σχήμα), χρησιμοποιώντας μία γενική γλώσσα. Παράλληλα, οι περιγραφές αυτές χαρακτηρίζονται από την χρήση γενικής γλώσσας αναφορικά με τα γεωμετρικά σχήματα και βασίζονται σε οπτικά χαρακτηριστικά των γεωμετρικών σχημάτων. Η στρατηγική της εμπειρικής απόδειξης, εφαρμόστηκε από αρκετούς συμμετέχοντες της έρευνας, οι οποίοι βασίστηκαν σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα ενός πρωτοτυπικού γεωμετρικού σχήματος, στην ολιστική του αντίληψη, στα οπτικά χαρακτηριστικά του, αλλά και σε ορισμένες ιδιότητές του, για να τα μεταφέρουν στη συνέχεια, σε ολόκληρη την κατηγορία ενός γεωμετρικού σχήματος. Αντίστοιχα, η στρατηγική αυτή χρησιμοποιήθηκε από μαθητή, για να απορρίψει ένα μη πρωτοτυπικό γεωμετρικό σχήμα, χρησιμοποιώντας συγχρόνως, σημειωτικά μέσα, όπως για παράδειγμα τον σχεδιασμό ενός ισόπλευρου τριγώνου. Επιπλέον, την συγκεκριμένη στρατηγική, χρησιμοποιήσαν μαθητές οι οποίοι βασίζονται σε ορισμένες ιδιότητες τους προς εξέταση γεωμετρικού σχήματος.

Συμπερασματικά, το δείγμα της έρευνας εργάζεται, συγχρόνως, τόσο στο 1^{ο} όσο και στο 2^{ο} επίπεδο γενίκευσης, καθώς κατά την αναγνώριση, την κατηγοριοποίηση, την κατασκευή και τον μετασχηματισμό των γεωμετρικών σχημάτων βασίζονται στην ολιστική αναγνώρισή τους (Επίπεδο 1), στον προσανατολισμό τους (Επίπεδο 1), στα οπτικά χαρακτηριστικά τους (Επίπεδο 1), στις πρωτοτυπικές αναπαραστάσεις αυτών (Επίπεδο 1), ενώ, αναγνωρίζουν και αναφέρουν ορισμένες ιδιότητες, χαρακτηριστικά ή σχέσεις των γεωμετρικών σχημάτων (Επίπεδο 2). Αναφορικά με τις στρατηγικές που εφαρμόζει το δείγμα της έρευνας, για να γενικεύσει τις γνώσεις του για τα γεωμετρικά σχήματα, παρατηρήθηκε ότι οι στρατηγικές γενίκευσης που χρησιμοποιούν είναι: α) Καμία απάντηση, β) Στρατηγική μαντέψτε και ελέγξτε (guess-and-check strategy), γ) Περιγραφή μίας ενέργειας που είχε εκτελεστεί προηγουμένως και δ)Εμπειρικές αποδείξεις. Κλείνοντας, οι απαντήσεις τους ήταν περιγραφικές και χρησιμοποιούσαν γενική γλώσσα σχετικά με τα γεωμετρικά σχήματα (Επίπεδο 2).

Περιορισμοί και προεκτάσεις έρευνας

Η παρούσα έρευνα, όπως έχει προαναφερθεί, επιχείρησε να εξετάσει τις ικανότητες γενίκευσης μαθητών Ε’ δημοτικού αναφορικά με τα γεωμετρικά σχήματα και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν. Εντούτοις, κατά την πραγματοποίηση της παρούσας έρευνας υπήρξαν κάποιοι περιορισμοί, στους οποίους είναι σημαντικό να γίνει αναφορά. Αρχικά, πρόκειται για μία ποιοτική μελέτη στην οποία συμμετείχαν μόλις 19 μαθητές δύο τμημάτων της Ε’ δημοτικού ενός Δημόσιου Δημοτικού Σχολείου της Ανατολικής Αττικής. Ο αριθμός των συμμετεχόντων ήταν μικρός, ενώ η επιλογή τους δεν πραγματοποιήθηκε με τυχαία δειγματοληψία, αλλά η επιλογή έγινε με βάση τη δυνατότητα πρόσβασης στο συγκεκριμένο σχολείο, στο οποίο εργαζόταν η ερευνήτρια και υπήρχε η σύμφωνη γνώμη της διευθύντριας και έπειτα των γονέων/ κηδεμόνων των μαθητών, για να λάβουν μέρος στην έρευνα. Επομένως, το δείγμα της έρευνας ήταν βολικό. Για το λόγο αυτό, τα παραπάνω αποτελέσματα δεν είναι δυνατό να γενικευτούν για όλους τους μαθητές της Ελλάδας, αλλά αφορούν μόνο στα υποκείμενα της παρούσας εργασίας.

Κατ’ επέκταση, το επίπεδο γενίκευσης αναφορικά με τα γεωμετρικά σχήματα και οι στρατηγικές γενίκευσης αυτών θα μπορούσαν να μελετηθούν από μελλοντικές έρευνες με μεγαλύτερο δείγμα μαθητών διαφόρων ηλιακών κι από άλλες τάξεις του δημοτικού σχολείου. Ακόμη, σημαντικό ρόλο κατέχει η παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου των γεωμετρικών σχημάτων που κατέχουν οι εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, η οποία θα μπορούσε να μελετηθεί, και πιθανόν να δώσει απαντήσεις αναφορικά με τις ιδέες των μαθητών. Συγχρόνως, θα μπορούσε να πραγματοποιηθούν διδακτικές παρεμβάσεις σε μία ομάδα μαθητών, οι οποίες θα σχεδιαστούν με στόχο την ανάπτυξη των ικανοτήτων γενίκευσης των μαθητών, ώστε να εντοπιστεί αν οι ικανότητες γενίκευσή τους δύναται να βελτιωθούν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνόγλωσση και μεταφρασμένη βιβλιογραφία

Creswell, J. (2011). Έρευνα στην Εκπαίδευση–Σχεδιασμός Διεξαγωγή και Αξιολόγηση Ποσοτικής και Ποιοτικής Έρευνας (μτφ. Ν. Κουβαράκου, επιμ. Χ. Τσορμπατζούδης). *Αθήνα: Ίων*.
Ίσαρη, Φ., & Πουρκός, Μ. (2015). Οργάνωση, Ταξινόμηση, Ανάλυση και Αξιολόγηση Ποιοτικών Δεδομένων. Ανακτήθηκε από: https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/5822/3/02_chapter_05.pdf

Μπαραλής, Γ. (2016). Οι γεωμετρικές έννοιες στα σχολικά βιβλία της Α΄ τάξης του Δημοτικού σχολείου. *Πανελλήνιο Συνέδριο Επιστημών Εκπαίδευσης*, *2014*(1), 271-280.

Παπαδοπούλου, Ε. (2017). *Διδακτικές παρεμβάσεις για μαθηματική γενίκευση σε παιδιά ηλικίας 5-7 χρόνων*. (Διδακτορική διατριβή). Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης. Ανακτήθηκε από: https://thesis.ekt.gr/thesisBookReader/id/40454?lang=el#page/1/mode/2up

Πόταρη, Δ. (2016). Πρόγραμμα Σπουδών: Επιστημονικό Πεδίο: Μαθηματικά: Διδακτικό Μαθησιακό Αντικείμενο/Τάξη/επίπεδο εκπαίδευσης: Μαθηματικά Α΄-ΣΤ΄ Δημοτικού. Ανακτήθηκε από: http://repository.edulll.gr/edulll/handle/10795/1926

Σκουμπουρδή, Χ. (2004). Μορφές εικονικής αναπαράστασης της έννοιας του τριγώνου στα μαθηματικά του δημοτικού σχολείου. Στο Δ. Χασάπης (επιμ.), 3 ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών: Εικόνα, σχήμα και λόγος στη διδασκαλία των μαθηματικών (σελ. 105-116). Εκδόσεις Copy City, Θεσσαλονίκη.

Van De Walle J. A. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια εξελικτική διδασκαλία.* Επιμ. Τριαντάφυλλος Τριανταφυλλίδης, μτφρ. Α. Αλεξανροπούλου & Β. Κομπορόζος. Αθήνα: Τυπωθήτω – Γ. Δαρδανός.

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization Strategies of Beginning High School Algebra Students. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 121-128.

Brunheira, L., & Ponte, J. P. D. (2019). Justifying geometrical generalizations in elementary school preservice teacher education. In *CERME 11, 11th Congress of European Research in Mathematics Education*. University of Utrecht.

Butler, C. H. (1960). Generalization in Geometry. *School Science and Mathematics*, *60*(6), 445-449.

Čadež, T. H., & Kolar, V. M. (2015). Comparison of types of generalizations and problem-solving schemas used to solve a mathematical problem. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(2), 283-306.

Clements, D. H. (1998). Geometric and spatial thinking in young children, Opinion Paper. *National Science Foundation. Arlington, VA.*

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 420-464.

Clements, D. H., Sarama, J., Swaminathan, S., Weber, D., & Trawick-Smith, J. (2018). Teaching and learning Geometry: early foundations. *Quadrante*, *27*(2), 7-31.

Davydov, V. V. (1990). *Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula. Soviet Studies in Mathematics Education. Volume 2*. National Council of Teachers of Mathematics, 1906 Association Dr., Reston, VA 22091.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 61-85). Springer, Dordrecht.

Dumitrascu, G. (2017). Understanding the Process of Generalization in Mathematics through Activity Theory. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*, *16*(12), 46-69.

Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *The Journal of the Learning Sciences*, *16*(2), 221-262.

Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational studies in mathematics*, *74*(2), 163-183.

Halat, E., & Dağli, Ü. Y. (2016). Preschool students' understanding of a geometric shape, the square. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(55), 830-848.

Hannibal, M. A. Z., & Clements, D. H. (2000). Young children’s understanding of basic geometric shapes. *Manuscript submitted for publication*.

Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the learning of mathematics*, *11*(1), 38-42.

Hashemia, N., Abua, M. S., Kashefia, H., & Rahimib, K. (2013). Generalization in the Learning of Mathematics. In *MB Ali (President). Second International Seminar on Quality and Affordable Education (ISQAE). Universiti Teknologi Malaysia, Johor Bahru, Malaysia. Recuperado de https://educ. utm. my/wp-content/uploads/2013/11/291. pdf*.

Iwasaki, H. (1997). The cognitive and symbolic analysis of the generalization process: The comparison of algebraic signs with geometric figures. In *Proceedings of the 21th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 105-112).

Koleza, E., & Giannisi, P. (2013). Kindergarten children's reasoning about basic geometric shapes. In *Proceedings of the eighth congress of the European society for research in mathematics education* (pp. 2118-2127).

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and learning*, *7*(3), 231-258.

Lannin, J. K., Barker, D. D., & Townsend, B. E. (2006). Recursive and explicit rules: How can we build student algebraic understanding?. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(4), 299-317.

Lannin, J., Ellis, A. B., Elliott, R., & Zbiek, R. M. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ma, H. L., Lee, D. C., Lin, S. H., & Wu, D. B. (2015). A Study of Van Hiele of Geometric Thinking among 1st through 6th Graders. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *11*(5), 1181-1196.

Maier, A. S., & Benz, C. (2012). Development of Geometric Competencies–Children's Conception of Geometric Shapes in England and Germany. *POEM. http://cermat. org/poem2012/main/proceedings_files/Maier-POEM2012. pdf*.

Marchis, I. (2012). Preservice Primary School Teachers' Elementary Geometry Knowledge. *Acta Didactica Napocensia*, *5*(2), 33-40.

Mason, M. M. (1989). Geometric Understanding and Misconceptions among Gifted Fourth-Eighth Graders.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2011). *Thinking mathematically*. Pearson Higher Ed.

Oberdorf, C. D., & Taylor-Cox, J. (1999). Early Childhood Corner: Shape Up!. *Teaching Children Mathematics*, *5*(6), 340-345.

Ovadiya, T. (2019). Posing problems and designing tasks to promote transfer of learning in geometry by teacher researchers: the case of tessellations. In *International Symposium Elementary Mathematics Teaching* (p. 280).

Park, J., & Kim, D. W. (2017). How can students generalize examples? Focusing on the generalizing geometric properties. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(7), 3771-3800.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical thinking and learning*, *5*(1), 37-70.

Rosch, E. H. (1973). Natural categories. *Cognitive psychology*, *4*(3), 328-350.

Santi, G., & Baccaglini-Frank, A. (2015). Forms of generalization in students experiencing mathematical learning difficulties. *PNA*, *9*(3), 217-243.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

Satlow, E., & Newcombe, N. (1998). When is a triangle not a triangle? Young children's developing concepts of geometric shape. *Cognitive Development*, *13*(4), 547-559.

Sinclair, N., Bussi, M. G. B., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM*, *48*(5), 691-719.

Tateo, L. (2015). The nature of generalization in psychology. *Reflexivity and psychology*, 45-64.

Triadafillidis, T. A. (1995). Circumventing visual limitations in teaching the geometry of shapes. *Educational studies in mathematics*, *29*(3), 225-235.

Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 81-95.

Tzekaki, M. (2020). Mathematical Activity in Early Childhood and the Role of Generalization. In *Mathematics Education in the Early Years* (pp. 301-313). Springer, Cham.

Tzekaki, M., & Papadopoulou, E. (2016). Generalizing in Early Childhood. Paper presented at the 40th International Conference of PME, Vol. 1, 252. Szeged, Hungary: PME.

Tzekaki, M., & Papadopoulou, E. (2017). Teaching intervention for developing generalization in early childhood: the case of measurement. In *CERME 10*.

Vigh, P. (2013). Game promoting early generalization. In *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2228-2247).

Walcott, C., Mohr, D., & Kastberg, S. E. (2009). Making sense of shape: An analysis of children's written responses. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*(1), 30-40.

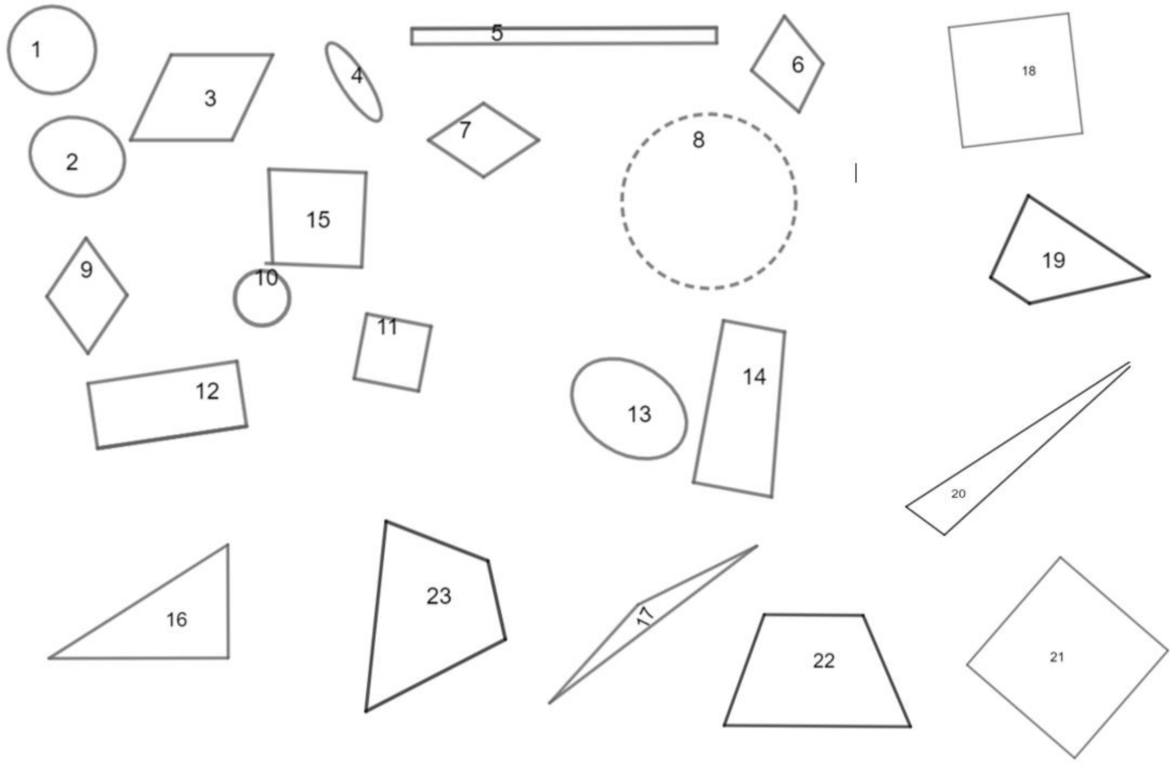
Weinberg, P. (2019). Generalizing and Proving in an Elementary Mathematics Teacher Education Program: Moving Beyond Logic. *EURASIA Journal of Mathematics, science and technology education*, *15*(9), em1740

Yeap, B. H., & Kaur, B. (2008). Elementary school students engaging in making generalisation: A glimpse from a Singapore classroom. *ZDM*, *40*(1), 55-64.

Yevdokimov, O. (2008). Making generalisations in geometry: students' views on the process: a case study. In *Proceedings of the 2008 Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME 32)* (Vol. 4, pp. 441-448). Cinvestav-UMSNH.

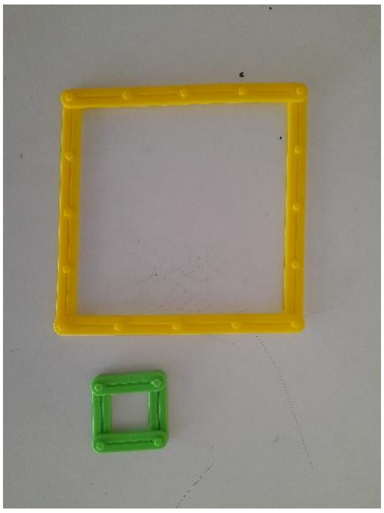
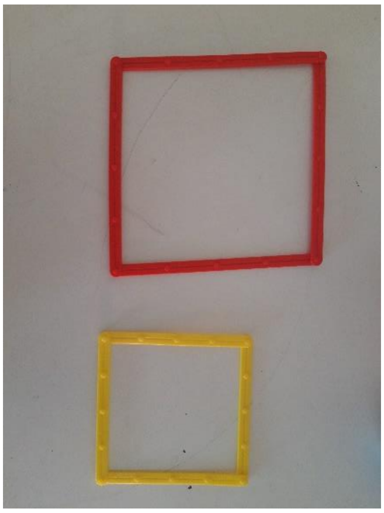
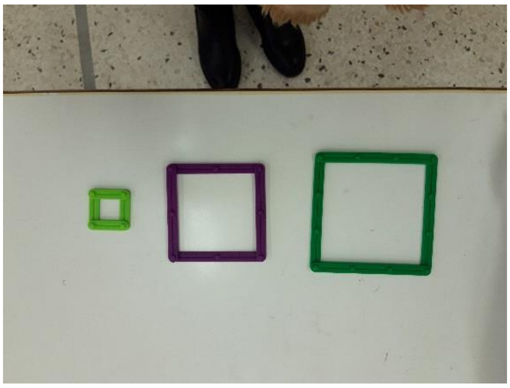
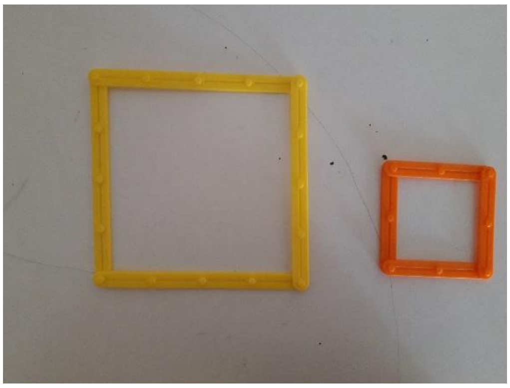
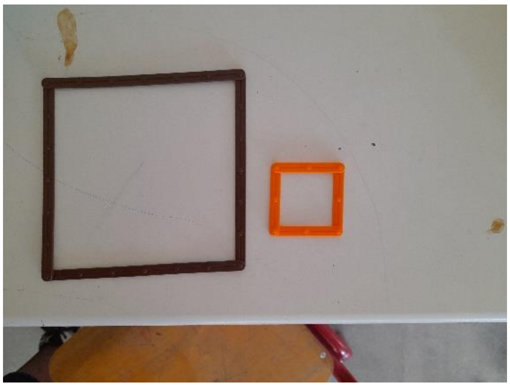
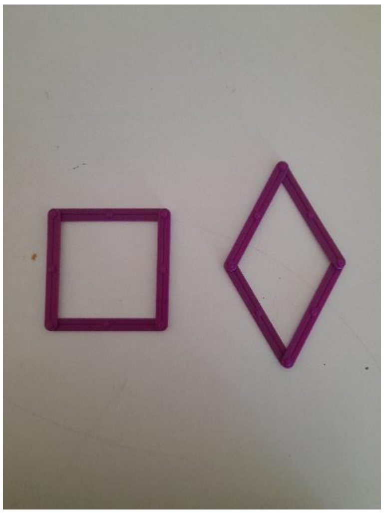
Zazkis, R., Liljedahl, P., & Chernoff, E. J. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM*, *40*(1), 131-141.

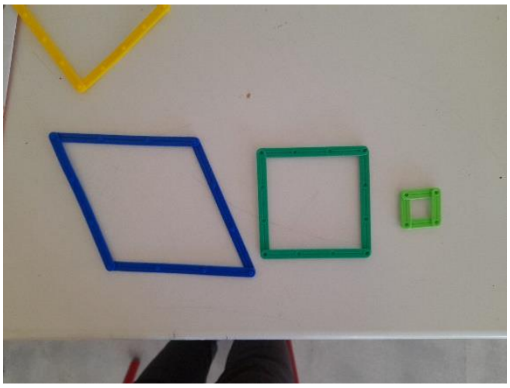
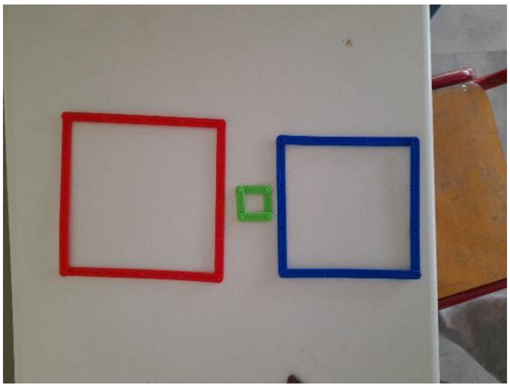
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1



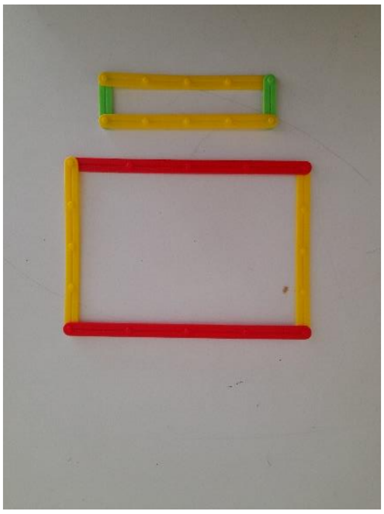
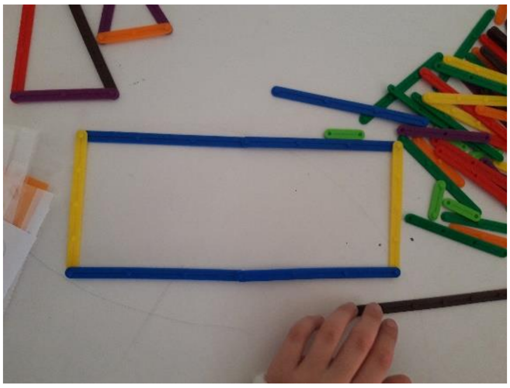
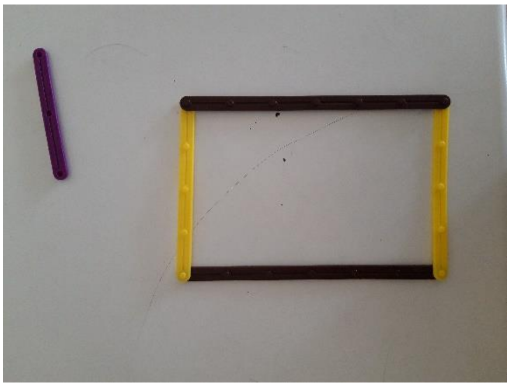
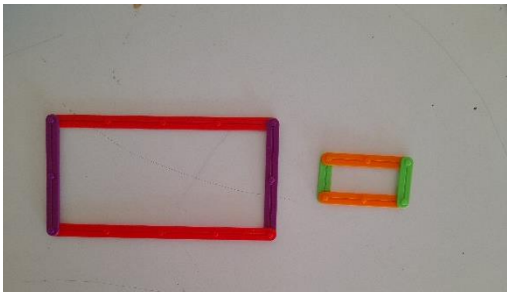
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

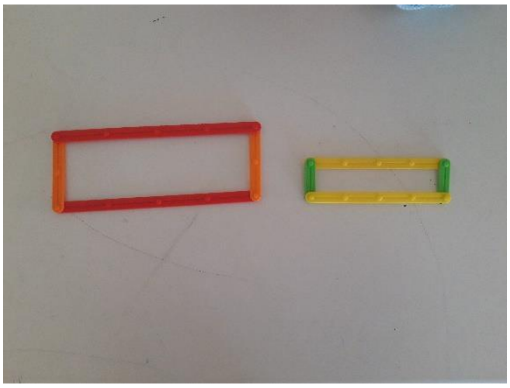
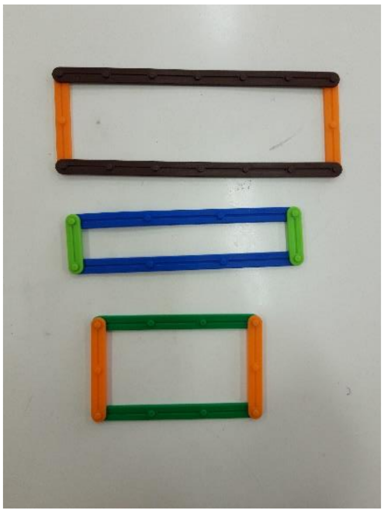
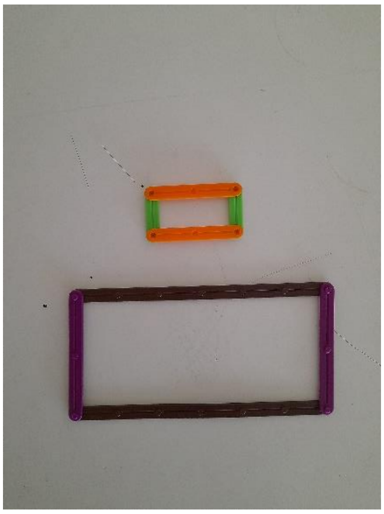
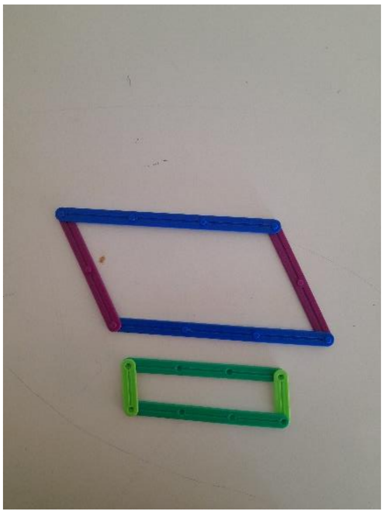
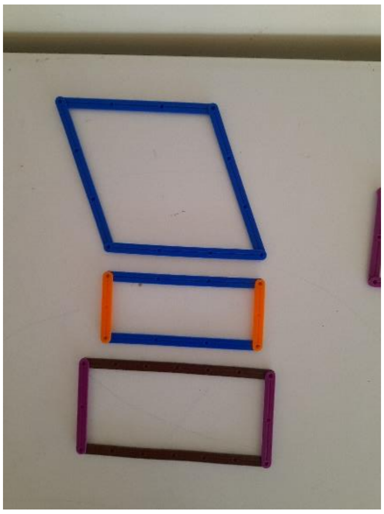
Κατασκευή τετραγώνου

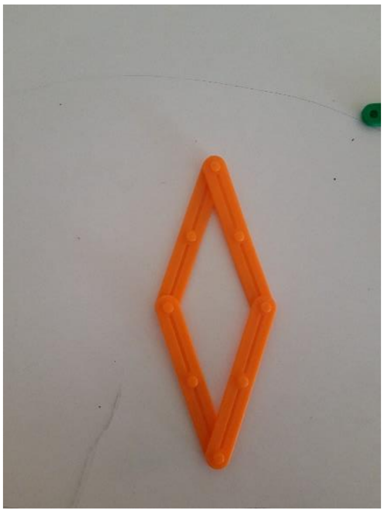



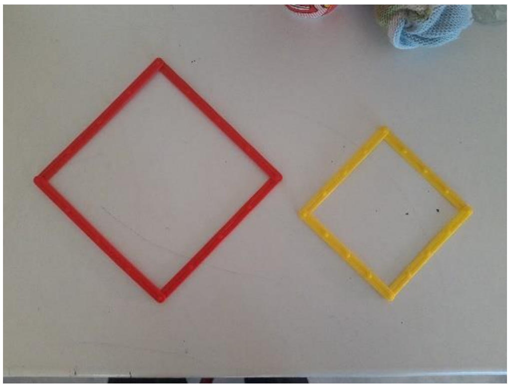
Κατασκευή ορθογωνίου παραλληλογράμμου

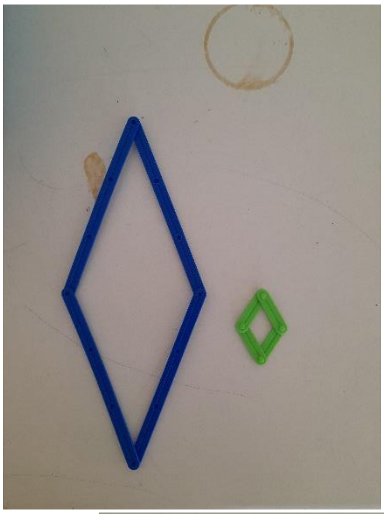





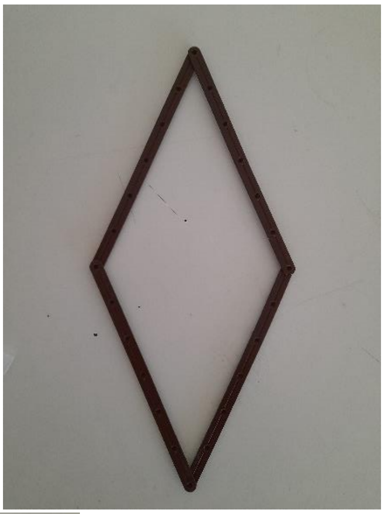






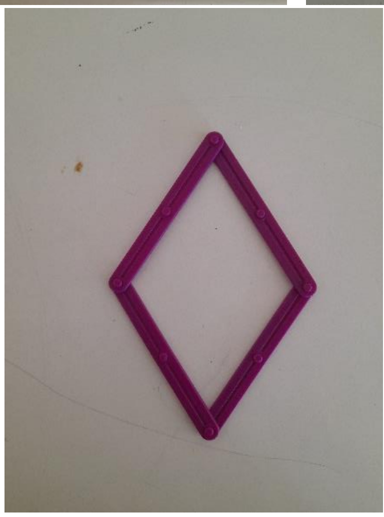
Κατασκευή ρόμβου

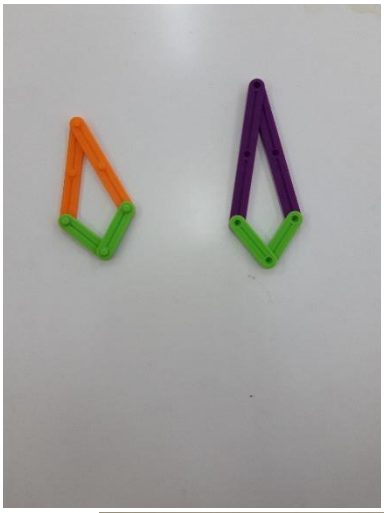
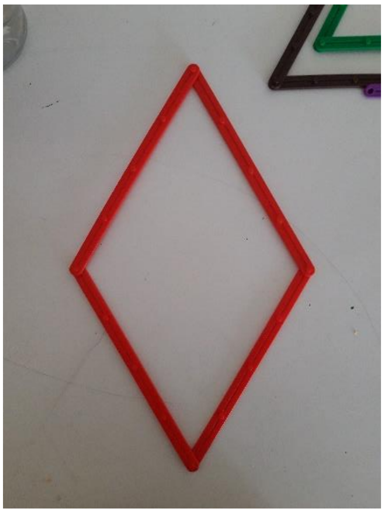
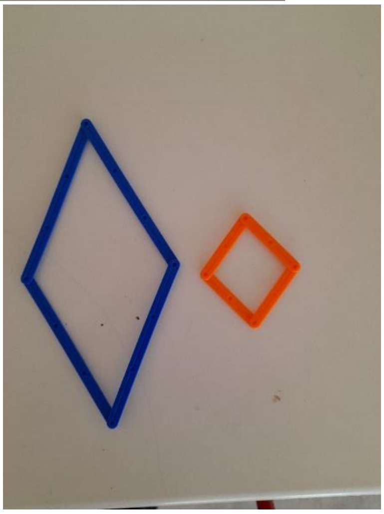
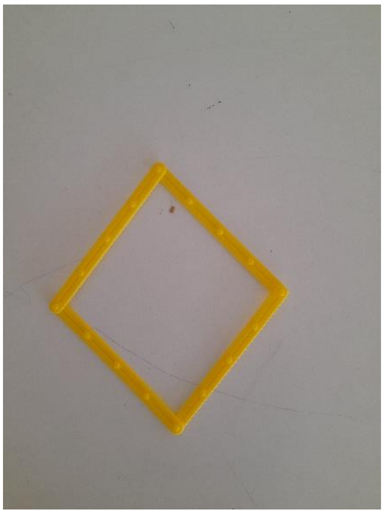
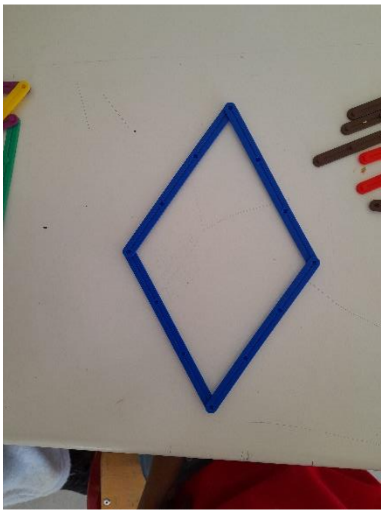




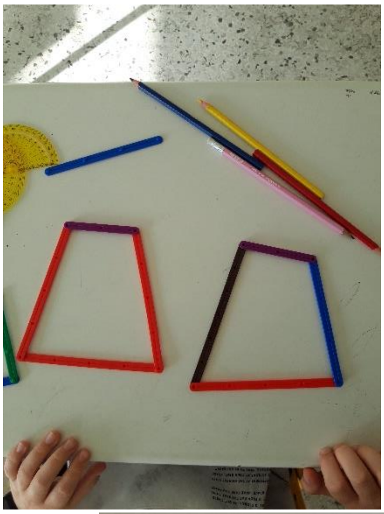


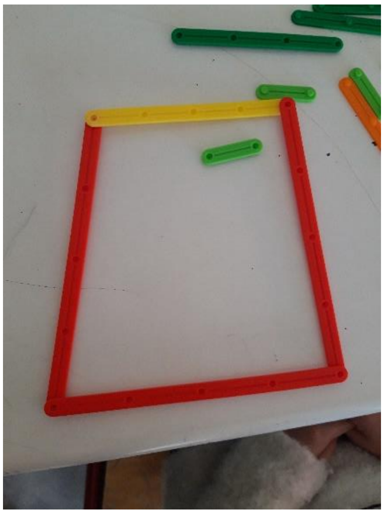


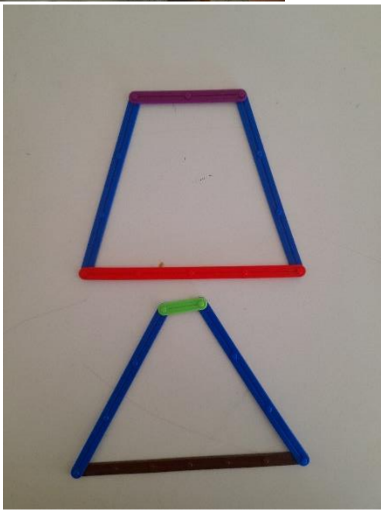


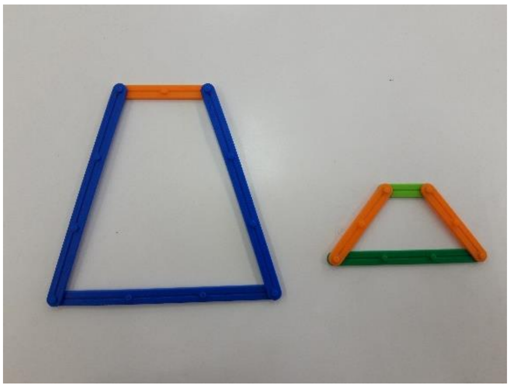
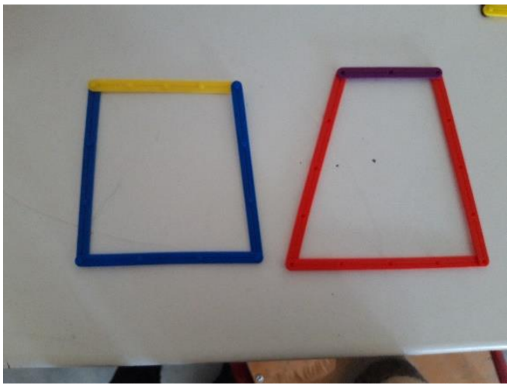
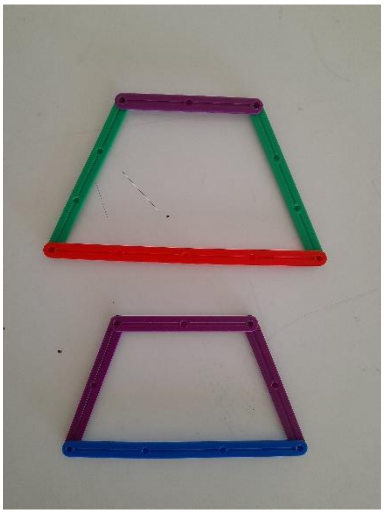
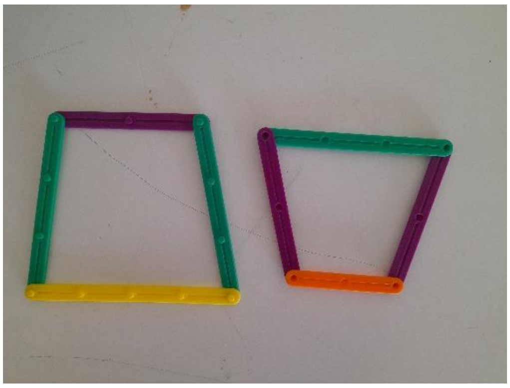
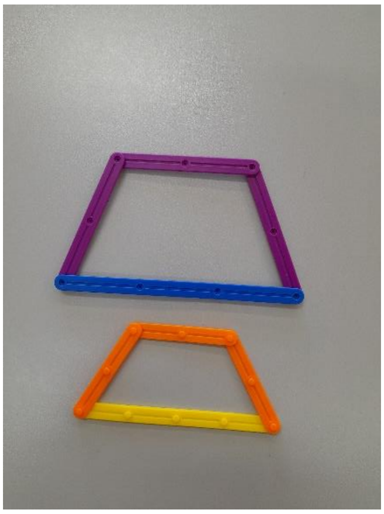






Κατασκευή τραπεζίου







Κατασκευή τριγώνου