ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ

ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Μαθηματική εκπαίδευση Β΄ Ηλικιακού Κύκλου (13-18 χρονών)

Διπλωματική εργασία

Διερεύνηση της κατανόησης μαθητών Β΄ Γυμνασίου για τους αρνητικούς αριθμούς

της

Γεωργιάδου Ευαγγελία, Α.Ε.Μ. 1046

Θεσσαλονίκη, 2023

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Βαμβακούση Ξανθή - Ξένια

Εξεταστές: Καλδρυμίδου Μαρία

Χρήστου Κωνσταντίνος

Φλώρινα, Μάρτιος 2023

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όσους συνέβαλαν στην προσπάθεια εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας, πρωτίστως την επιβλέπουσα καθηγήτρια κυρία Βαμβακούση Ξανθή – Ξένια για την καθοδήγηση και την υποστήριξη που μου πρόσφερε καθ’ όλη τη διάρκεια της ερευνητικής διαδικασίας και συγγραφής της εργασίας.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής, κύριο Χρήστου Κωνσταντίνο και κυρία Καλδρυμίδου Μαρία για το χρόνο, την προσοχή τους στην εξέταση και την παροχή ανατροφοδότησης σε αυτή την εργασία.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω το διευθυντή του σχολείου που ενέκρινε και υποστήριξε τη διεξαγωγή της έρευνας και τους μαθητές του σχολείου που συμμετείχαν στην έρευνα.

Τέλος, ευχαριστώ το σύντροφό μου Λεωνίδα και την οικογένειά μου για την ενθάρρυνση, την κατανόηση και υποστήριξή τους σε αυτό το διάστημα.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εννοιολογική κατανόηση και η διαδικαστική ευχέρεια σχετικά με τους αρνητικούς αριθμούς αποτελεί θεμέλιο για την Άλγεβρα. Οι μαθητές φαίνεται να συναντούν εμπόδια, που σχετίζονται με την αφηρημένη φύση των αρνητικών αριθμών, τα σύμβολα, αλλά και την εστίαση της διδασκαλίας σε διαδικασίες. Για τη βελτιωμένη διδασκαλία των αρνητικών αριθμών, είναι σημαντικό να διαπιστωθεί τι είναι αυτό που δυσκολεύει τους μαθητές και να αναδειχθεί ο τρόπος σκέψης τους. Στόχος της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση της γνώσης και του τρόπου σκέψης των μαθητών Γυμνασίου στους αρνητικούς αριθμούς. Έτσι, διερευνάται το αν οι μαθητές Γυμνασίου έχουν ενσωματώσει τους αρνητικούς αριθμούς ως ισότιμα μέλη της κατηγορίας «αριθμός», με ποιους τρόπους τους νοηματοδοτούν και αν υπάρχει διάσταση ανάμεσα στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση τους για τις πράξεις ακεραίων. Η μέθοδος που επιλέχθηκε για την έρευνα είναι ποιοτική και το εργαλείο συλλογής δεδομένων είναι η συνέντευξη βασισμένη σε έργα. Υλοποιήθηκαν 20 συνεντεύξεις με μαθητές της Β΄ Γυμνασίου ενός δημοσίου σχολείου του νομού Θεσσαλονίκης. Τα ευρήματα της έρευνας δείχνουν πως οι περισσότεροι μαθητές δεν σκέφτηκαν αυθόρμητα αρνητικούς αριθμούς ως πιθανές τιμές μίας μεταβλητής ή στη θέση ενός «άγνωστου αριθμού», ειδικά στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού. Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού (π.χ. η πεποίθηση πως το 0 είναι ο μικρότερος αριθμός, και η πεποίθηση πως η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός σημαίνουν αύξηση), οδήγησαν σε λάθη και προβληματισμούς. Οι μαθητές για την έννοια των αρνητικών αριθμών, εστίασαν στη σύγκρισή τους με το 0 και τη θέση τους στην αριθμογραμμή, και άντλησαν ερμηνείες για αυτούς πρωτίστως, αλλά όχι αποκλειστικά, από το σχολικό πλαίσιο. Στη διάταξη των αριθμών, ιδιαίτερο ρόλο διαδραμάτισε η σύγκριση με το 0, η απόλυτη τιμή του αριθμού και η χρήση της αριθμογραμμής. Η ερμηνεία του συμβόλου μείον επηρέασε τη σκέψη των μαθητών, καθώς ερμήνευσαν το μείον περισσότερο ως αφαίρεση, παρά ως πρόσημο ή δυσκολεύτηκαν στη διαχείριση δύο συμβόλων μείον μαζί. Επιπλέον, φάνηκε να δυσκολεύονται στη διατύπωση προβλημάτων με αρνητικούς αριθμούς, καθώς ορισμένοι μόνο έδωσαν ένα σωστό πρόβλημα για μία δοσμένη πράξη, και λίγοι χρησιμοποίησαν τα προβλήματα για την ερμηνεία των αρνητικών αριθμών. Αναφορικά με τις πράξεις ακεραίων, οι μαθητές σε γενικές γραμμές εκτέλεσαν τις πράξεις, όμως οι περισσότεροι δε μπόρεσαν να εξηγήσουν επαρκώς τις πράξεις πέραν από τη χρήση των κανόνων των προσήμων, γεγονός που υποδηλώνει πως η διαδικαστική γνώση υπερτερεί της εννοιολογικής γνώσης στις πράξεις με ακεραίους. Γενικά, τα ευρήματα της έρευνας συμβαδίζουν με αρκετά από τα ευρήματα των ερευνών της βιβλιογραφίας που μελετήθηκαν.

Λέξεις – Κλειδιά: αρνητικοί αριθμοί, ακέραιοι αριθμοί, εννοιολογική γνώση, διαδικαστική γνώση

ABSTRACT

Conceptual understanding and procedural fluency about negative numbers is a foundation for algebra. Students seem to encounter barriers related to the abstract nature of negative numbers, symbols, and also the fact that instruction emphasizes procedures, rather than concepts pertaining to negative numbers. In order to improve teaching of negative numbers, it is important to find out what makes it difficult for students and to bring out their way of thinking. The aim of this research is to investigate middle school students' knowledge of, and way of thinking about negative numbers. Thus, we investigated whether middle school students extended the category of number to include negative numbers as full-fledged members; how they assign meaning to negative numbers; and whether there is a gap between their conceptual and procedural knowledge of integer operations. The method chosen for the research is qualitative and the data was collected via individual task-based interviews. Twenty Grade 8 students of a public school in the area of Thessaloniki participated in the study. The findings of the study show that most students did not think spontaneously of negative numbers as possible values of a carriable, or an "unknown number", particularly when multiplication was involved. The natural number bias (i.e., the belief that 0 is the smallest number, and the belief that addition and multiplication "mean bigger"), led to difficulties and errors. When describing negative numbers, students focused on comparison with 0 and the position on the number line, and indicated that they assign meaning to negative numbers mostly, albeit not exclusively, from school contexts. While ordering integers, they used the comparison with 0, the absolute value of the number and the number line. The interpretation of the minus sign affected students' thinking, as they interpreted minus as subtraction rather than as a sign of polarity and had difficulty managing two minus signs in a row. In addition, they appeared to have difficulty constructing problems with negative numbers, as only few students gave a correct problem for a given operation, and few used the problems to interpret negative numbers. Regarding the operations with integers, students performed correctly most of the given operations, but most of them were unable to explain the operations without evoking the rules, which suggests that procedural knowledge of operations is stronger than conceptual knowledge. In general, the findings of this study are consistent with research findings in the literature.

Keywords: negative numbers, integers, conceptual knowledge, procedural knowledge

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι αρνητικοί αριθμοί μπορεί να είναι μια δύσκολη έννοια για τους μαθητές, καθώς αντιτίθενται στη διαισθητική τους αντίληψη ότι οι αριθμοί αντιπροσωπεύουν ποσότητες. Η αφηρημένη και η αντιφατική φύση των αρνητικών αριθμών δημιουργεί εμπόδια στη βαθύτερη κατανόησή τους (Vlassis, 2004), καθώς αυτοί οι αριθμοί είναι από τις πρώτες επισημοποιήσεις που συναντούν οι μαθητές στη μαθηματική τους μάθηση και διαφέρουν σαφώς από τις εξωσχολικές εμπειρίες τους (Schindler et al. 2017). Η σημασία της κατανόησης των αρνητικών αριθμών είναι μεγάλη. Η κατανόηση των εννοιολογικών πτυχών των ακεραίων αριθμών και η επίδειξη της ικανότητας επιτυχούς εργασίας με πράξεις αρνητικών αριθμών αποτελεί θεμέλιο για την Άλγεβρα (Lamb et al., 2018) καθώς ένας λόγος για τον οποίο οι μαθητές εξακολουθούν να δυσκολεύονται με τις αλγεβρικές έννοιες είναι ότι δυσκολεύονται να κατανοήσουν και να εργαστούν με αρνητικούς αριθμούς (Bofferding, 2010, Vlassis, 2004).

Ποικίλα είναι τα εμπόδια που συναντούν οι μαθητές, όπως η προϋπάρχουσα γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς, η πολλαπλή σημασία του συμβόλου μείον, οι λιγοστές αναπαραστάσεις που τους δίνονται στη διδασκαλία και η εστίαση σε διαδικασίες και αλγορίθμους. Εγείρεται λοιπόν ο προβληματισμός για τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση των μαθητών στους αρνητικούς αριθμούς. Οι ερευνητές τονίζουν τη σημασία της διερεύνησης των δύο τύπων γνώσεων, καθώς η μαθηματική επάρκεια βασίζεται στην ανάπτυξη της γνώσης των εννοιών και των διαδικασιών. Η οριοθέτηση του τρόπου με τον οποίο αυτοί οι δύο τύποι γνώσης αλληλεπιδρούν είναι θεμελιώδης για την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο συντελείται η ανάπτυξη της γνώσης. Είναι επίσης κεντρικής σημασίας για τη βελτίωση της διδασκαλίας (Rittle-Johnson & Schneider, 2015).

Για τη σωστότερη διδασκαλία των αρνητικών αριθμών, είναι σημαντικό να διαπιστωθεί τι είναι αυτό που δυσκολεύει τους μαθητές και να αναδειχθεί ο τρόπος σκέψης τους. Γνωρίζοντας περισσότερα για τις δυνατότητες των μαθητών να κατανοήσουν τους αρνητικούς αριθμούς μπορούν οι εκπαιδευτικοί να βασιστούν σε αυτές (Bofferding, 2014). Έτσι, πολλοί ερευνητές επικεντρώνονται στην υλοποίηση ερευνών με την ποιοτική μέθοδο ώστε να διερευνηθούν οι τρόποι συλλογισμού των μαθητών όταν διαχειρίζονται αρνητικούς αριθμούς.

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση της γνώσης των μαθητών Γυμνασίου στην κατανόηση της έννοιας και των πράξεων των αρνητικών αριθμών. Τα πρώτα δύο κεφάλαια αποτελούν τη βιβλιογραφική επισκόπηση. Στο πρώτο, αναλύεται η εννοιολογική και διαδικαστική γνώση, οι σχέσεις μεταξύ τους και το πώς αυτές έχουν θέση στη εκμάθηση των αρνητικών αριθμών. Στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα ευρήματα ερευνών πάνω στον τρόπο συλλογισμού των μαθητών στους αρνητικούς αριθμούς. Ακολουθεί το τρίτο κεφάλαιο, με τη μεθοδολογία της έρευνας, την παρουσίαση του εργαλείου συλλογής δεδομένων, τη διαδικασία διεξαγωγής της έρευνας και τους τρόπους διασφάλισης της εγκυρότητας και της αξιοπιστίας της. Στο τέταρτο κεφάλαιο, κατόπιν της ανάλυσης των δεδομένων παρουσιάζονται τα αποτελέσματα και στο πέμπτο κεφάλαιο αντιπαραβάλλονται τα ευρήματα της έρευνας με αυτά των ερευνών της βιβλιογραφίας και απαντώνται τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας. Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο αναφέρονται ορισμένοι από τους περιορισμούς της έρευνας και γίνονται προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΔΙΑΔΙΚΑΣΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ

1.1. Ορισμοί και εννοιολογική αποσαφήνιση

Η γνώση μπορεί να πάρει διάφορες μορφές, από την απλή απομίμηση μέχρι και την εκ νέου ανακάλυψη μίας ιδέας ή μίας νέας έννοιας. Οι μαθηματικές ικανότητες επηρεάζονται από διαφορετικές μορφές γνώσης. Η διάκριση μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης έχει προκαλέσει τα τελευταία χρόνια μεγάλη συζήτηση της ερευνητικής κοινότητας της ψυχολογίας και της διδακτικής των μαθηματικών. Αν και η εννοιολογική και η διαδικαστική γνώση δεν μπορούν πάντα να διαχωρίζονται, είναι χρήσιμο να γίνεται διάκριση μεταξύ των δύο τύπων γνώσης για την καλύτερη κατανόηση της ανάπτυξης της γνώσης. Η διάκριση μεταξύ αυτών των δύο τύπων γνώσεων βρίσκει εφαρμογή σε όλα τα είδη των αριθμών, και κατ’ επέκταση και στους αρνητικούς, και σε διάφορα πεδία των Μαθηματικών. Η μαθηματική ικανότητα βασίζεται στην ανάπτυξη τόσο της εννοιολογικής όσο και της διαδικαστικής γνώσης, και είναι ευρέως αποδεκτό ότι η εννοιολογική γνώση συχνά υποστηρίζει τη διαδικαστική γνώση πιο συχνά απ’ ό,τι συμβαίνει το αντίστροφο (Rittle-Johnson et al. 2015).

Για την καλύτερη μελέτη όμως των δύο τύπων γνώσεων αρχικά, είναι σημαντικό να αποσαφηνιστούν οι όροι περεταίρω. Οι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών έχουν περιορίσει τους ορισμούς των ερευνητών της ψυχολογίας, εξειδικεύοντάς τους στη μάθηση των μαθηματικών. Η εννοιολογική γνώση ορίζεται ως η γνώση των εννοιών που αφορούν έναν τομέα και των σχετικών αρχών του (Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Οι μαθητές κατέχουν ισχυρή εννοιολογική γνώση όταν αντιλαμβάνονται ενοποιημένα και λειτουργικά μία μαθηματική έννοια. Οι μαθητές αυτοί γνωρίζουν περισσότερα από μεμονωμένες διαδικασίες και αλγορίθμους, μπορούν να εξηγήσουν τη σκέψη τους και τις στρατηγικές τους, και να εξηγήσουν περαιτέρω τις πράξεις που εκτελούν. Γνωρίζουν περισσότερα για τη σημασία μίας μαθηματικής έννοιας και μπορούν να τη χρησιμοποιούν σε διάφορα πλαίσια. Η εννοιολογική κατανόηση βοηθά στην ενίσχυση και οργάνωση της μνήμης, στη μάθηση νέων εννοιών και διαδικασιών, στην ανάπτυξη δεξιοτήτων επίλυσης προβλήματος, στην ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης και στην εξερεύνηση νέων εννοιών και περιοχών.

Η διαδικαστική γνώση ορίζεται ως η ικανότητα εκτέλεσης ακολουθιών ενεργειών για την επίλυση προβλημάτων και συνήθως συνδέεται με συγκεκριμένους τύπους προβλημάτων (Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Η διαδικαστική γνώση αναφέρεται και ως η σειρά από βήματα και ενέργειες που εκτελούνται για την επίτευξη ενός στόχου (Μαρκάδας, 2018). Οι διαδικασίες μπορεί να είναι (1) αλγόριθμοι ή μια προκαθορισμένη ακολουθία ενεργειών που θα οδηγήσει στη σωστή απάντηση όταν εκτελεστεί σωστά, ή (2) μία σειρά πιθανών ενεργειών που πρέπει να ακολουθηθούν κατάλληλα για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος (π.χ. βήματα επίλυσης εξισώσεων). Η διαδικαστική γνώση αναπτύσσεται μέσω της πρακτικής επίλυσης προβλημάτων και, επομένως, μπορεί να συνδεθεί και με συγκεκριμένους τύπους προβλημάτων (Rittle-Johnson et al. 2015). Η διαδικαστική γνώση εμφανίζεται στους μαθητές που έχουν την ευχέρεια να εκτελούν πράξεις με σωστό τρόπο, συνήθως με έναν τρόπο που έχουν ήδη διδαχθεί και έχουν εξασκηθεί σε αυτόν.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η γνώση μπορεί να πάρει διάφορες μορφές και δεν είναι απαραίτητο να αναφέρεται μόνο στα δύο παραπάνω είδη. Για παράδειγμα, οι Bofferding & Richardson (2013) περιγράφουν τέσσερις διαφορετικές κατηγορίες:

1) Η εννοιολογική κατανόηση, που σχετίζεται με την κατανόηση του γιατί μια διαδικασία λειτουργεί και μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αποφύγουν τα λάθη.

2) Η διαδικαστική γνώση, όπου οι μαθητές γνωρίζουν πότε και πώς να χρησιμοποιούν διαδικασίες για να επιλύουν ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων αποτελεσματικά και με ακρίβεια.

3) Η στρατηγική επάρκεια, που περιλαμβάνει την κατανόηση των προβλημάτων και τη γνώση της καλύτερης στρατηγικής που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυσή τους.

4) Η προσαρμοστική συλλογιστική, που αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να αιτιολογούν επαρκώς τις απαντήσεις τους.

1.2. Σχέσεις μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης

Υπάρχει μία μακροχρόνια και συνεχής συζήτηση για τις σχέσεις μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης. Ερωτήματα όπως το αν οι σχέσεις μεταξύ τους είναι μονόδρομες ή αμφίδρομες αλλά και ποια σειρά διδασκαλίας οδηγεί σε καλύτερη μάθηση έχουν απασχολήσει την ερευνητική κοινότητα. Οι εκπαιδευόμενοι χρειάζεται σαφώς να αναπτύξουν τόσο εννοιολογική όσο και διαδικαστική γνώση σε έναν τομέα, αλλά δημιουργείται διαμάχη σχετικά με το πώς συνδέονται οι δύο τύποι γνώσης.

Σύμφωνα με τους ερευνητές (Rittle-Johnson & Schneider, 2015, Rittle-Johnson et al. 2015, Bempeni & Vamvakoussi, 2015), υπάρχουν τέσσερα είδη προσεγγίσεων για τη σχέση μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης. Οι εννοιολογικές προσεγγίσεις ισχυρίζονται πως τα παιδιά αναπτύσσουν αρχικά εννοιολογικές γνώσεις και στη συνέχεια αντλούν και οικοδομούν τη διαδικαστική γνώση και χρησιμοποιούν τις έννοιες που έμαθαν επιλέγοντας διαδικασίες για την επίλυση προβλημάτων. Οι διαδικαστικές προσεγγίσεις υποστηρίζουν πως τα παιδιά μαθαίνουν διαδικασίες για την επίλυση προβλημάτων και αργότερα αντλούν εννοιολογική γνώση από την εμπειρία τους μέσω αφαιρετικών διαδικασιών. Επιπλέον, υπάρχει η προσέγγιση που αναφέρει πως οι δύο τύποι γνώσεων αναπτύσσονται ανεξάρτητα. Η τέταρτη είναι μία προσέγγιση ανάδρασης, όπου υποστηρίζεται πως οι σχέσεις είναι αμφίδρομες, με την αύξηση της εννοιολογικής γνώσης να οδηγεί σε επακόλουθη αύξηση της διαδικαστικής γνώσης και αντίστροφα. Η τελευταία θεώρηση πως οι σχέσεις είναι αμφίδρομες φαίνεται να είναι και η περισσότερο αποδεκτή από τους ερευνητές. Οι σχέσεις μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης είναι συχνά αμφίδρομες και επαναληπτικές αλλά μερικές φορές δεν είναι συμμετρικές (Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Κατά καιρούς, η εννοιολογική γνώση υποστηρίζει με μεγαλύτερη συνέπεια και ένταση τη διαδικαστική γνώση παρά το αντίστροφο. Για παράδειγμα, η ενίσχυση της εννοιολογικής γνώσης μέσω στοχευμένων μαθημάτων που ενθαρρύνουν την παρατήρηση των υποκείμενων εννοιών μπορεί να οδηγήσει και σε βελτιώσεις στη διαδικαστική ευχέρεια, ενώ η υποστήριξη της διαδικαστικής γνώσης δεν προκαλεί ή προκαλεί μικρότερες βελτιώσεις στην εννοιολογική γνώση. Η επίδραση της διαδικαστικής γνώσης στην εννοιολογική κατανόηση εξαρτάται από τη φύση της διδασκαλίας των διαδικασιών ή της εξάσκησης (Μαρκάδας, 2018). Η κατηγοριοποίηση των προβλημάτων είναι βοηθητική για την παρατήρηση σχετικών εννοιολογικών σχέσεων, καθώς η τυχαία επίδοση πρακτικών προβλημάτων δεν είναι αποτελεσματική (Canobi, 2009).

Η έρευνα της Canobi (2009) στόχευσε στον έλεγχο της ύπαρξης ανάδρασης μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης στην ανάπτυξη της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, αξιολογώντας τις επιδράσεις της εμπειρίας επίλυσης προβλημάτων. Τα ευρήματα έδειξαν πως οι μαθητές βελτίωσαν την ακρίβεια στην πράξη της αφαίρεσης και στη χρήση διαδικασιών σε προβλήματα που είχαν εξασκηθεί. Ωστόσο, ως αποτέλεσμα της εξάσκησης των προβλημάτων, τα παιδιά αποκόμισαν και διαδικαστικά και εννοιολογικά οφέλη σε προβλήματα που δεν είχαν εξασκηθεί. Επιπλέον, το αρχικό επίπεδο δεξιοτήτων των παιδιών ήταν προγνωστικό της βελτίωσης των αναφορών τους σε διαδικασίες βασισμένες σε έννοιες μετά από άσκηση επίλυσης προβλημάτων με εννοιολογική αλληλουχία. Συνεπώς η ερευνήτρια συμπέρανε πως η διαδικαστική πρακτική οδηγεί σε αλλαγές στην αναφερόμενη εννοιολογική κατανόηση των παιδιών. Επιπλέον διατυπώνει πως τα πλεονεκτήματα της εμπειρίας στην επίλυση τυχαία διατεταγμένων προβλημάτων περιορίζονται στα πραγματικά προβλήματα στα οποία τα παιδιά έχουν εξασκηθεί.

Παρά τις διαφωνίες σχετικά με τη σειρά που εμφανίζεται ο κάθε τύπος γνώσης, είναι αποδεκτό πως οι μαθητές είναι σε θέση να κατασκευάζουν τη γνώση μόνοι τους μέσα από μία ιδέα που αναπτύσσουν απομνημονεύοντας κανόνες ή διαδικασίες.

Το γενικό μοτίβο ότι ένας τύπος γνώσης προβλέπει μελλοντικές γνώσεις του άλλου τύπου δεν σημαίνει ότι οι δύο τύποι γνώσεων είναι εξίσου καλά ανεπτυγμένοι σε κάθε δεδομένη στιγμή (Rittle-Johnson et al. (2015). Υπάρχουν ατομικές διαφορές στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση, και η μελέτη τους είναι σημαντική για την κατανόηση της μαθηματικής ανάπτυξης. Από την έρευνα των Bempeni & Vamvakoussi (2015) για τη διαδικαστική και την εννοιολογική γνώση των μαθητών στα κλάσματα, προέκυψαν τρία προφίλ μαθητών, όπως το διαδικαστικό – εννοιολογικό προφίλ μαθητών, το διαδικαστικό προφίλ και το εννοιολογικό προφίλ. Το διαδικαστικό – εννοιολογικό προφίλ φάνηκε να είναι το βέλτιστο καθώς οι μαθητές είχαν ισχυρή εννοιολογική γνώση σε συνδυασμό με ευχέρεια στις διαδικασίες. Μάλιστα οι μαθητές αυτού του προφίλ έδωσαν λεπτομερείς και πλήρεις απαντήσεις στα έργα. Οι ερευνήτριες κατέληξαν πως υπάρχουν ατομικές διαφορές, ακόμη και ακραίες, στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές συνδυάζουν την εννοιολογική και τη διαδικαστική γνώση των κλασμάτων. Έτσι, φαίνεται πως υπάρχουν ατομικές διαφορές, παρ' όλα αυτά, η εννοιολογική και η διαδικαστική γνώση εμφανίζουν συχνά υψηλή συσχέτιση με αποτέλεσμα η μία να είναι ένας καλός και αξιόπιστος προγνωστικός δείκτης για την άλλη (Rittle-Johnson et al. 2015).

1.3. Μέτρηση και αξιολόγηση διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης

Για την ερμηνεία των σχέσεων μεταξύ της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης ιδιαίτερα σημαντικός είναι ο τρόπος αξιολόγησής τους. Οι δύο τύποι γνώσης πρέπει να αξιολογούνται ανεξάρτητα προκειμένου να μελετηθούν οι μεταξύ τους σχέσεις, κατά προτίμηση με τη χρήση πολλαπλών μέτρων για κάθε τύπο γνώσης (Rittle-Johnson et al. 2015). Έχει παρατηρηθεί από τους ερευνητές πως υπάρχει δυσκολία στην έγκυρη και ανεξάρτητη μέτρηση των δύο τύπων γνώσεων. Η ανάπτυξη ενός τεστ που περιλαμβάνει μόνο διαδικασίες και είναι απαλλαγμένη από έννοιες, και το αντίστροφο είναι ιδιαίτερα δύσκολο έργο καθώς η δοκιμασία θα εξαρτάται από τους συμμετέχοντες, το περιεχόμενο και το πλαίσιο (Bempeni & Vamvakoussi, 2015). Έτσι, φαίνεται πως ένα είδος τεστ δεν μπορεί να μετρήσει ικανοποιητικά ένα είδος γνώσης μεμονωμένα, εξαιρώντας το άλλο (Μαρκάδας, 2018).

Υπάρχει μεγάλη ποικιλία εργασιών που έχουν χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση της εννοιολογικής γνώσης. Οι μετρήσεις της εννοιολογικής γνώσης ποικίλλουν ως προς το αν τα καθήκοντα απαιτούν σιωπηρή ή ρητή γνώση των εννοιών (Rittle-Johnson & Schneider, 2015, Μαρκάδας, 2018). Οι μετρήσεις της άρρητης εννοιολογικής γνώσης βασίζονται συχνά σε εργασίες αξιολόγησης όπου τα παιδιά κάνουν μία επιλογή (π.χ. σε ερωτήσεις κλειστού τύπου όπου κρίνουν την ορθότητα ενός παραδείγματος διαδικασίας ή απάντησης) ή κάνουν μια ποιοτική αξιολόγηση (π.χ. αξιολογούν μια διαδικασία παραδείγματος ως πολύ έξυπνη, κάπως έξυπνη ή όχι τόσο έξυπνη). Οι ρητές μετρήσεις της εννοιολογικής γνώσης περιλαμβάνουν συνήθως την παροχή ορισμών και εξηγήσεων. Συνήθως ζητείται από τους μαθητές να δώσουν ορισμούς ή εξηγήσεις, π.χ. τον τρόπο λειτουργίας μίας διαδικασίας, να σχεδιάσουν έναν εννοιολογικό χάρτη ή να δημιουργήσουν και να επιλέξουν ορισμούς για συγκεκριμένες έννοιες και όρους. Η μέτρηση της εννοιολογικής γνώσης είναι αξιόπιστη εφόσον βασίζεται σε πολλαπλές εργασίες – τεστ, καθώς αυτές βοηθούν στην εκτίμηση της έννοιας.

Οι διαδικαστικές στρατηγικές είναι πιο συγκεκριμένες, σχετίζονται με κανόνες και ακριβείς αλγόριθμους υπολογισμού που μαθαίνονται από τη διδασκαλία (Bempeni & Vamvakoussi, 2015). Έτσι, το έργο είναι σχεδόν πάντα η επίλυση προβλημάτων και το μέτρο του αποτελέσματος είναι συνήθως η ακρίβεια των απαντήσεων ή των διαδικασιών. Τα διαδικαστικά έργα είναι οικεία, περιλαμβάνουν τύπους προβλημάτων που οι άνθρωποι έχουν επιλύσει στο παρελθόν και επομένως θα πρέπει να γνωρίζουν τις διαδικασίες επίλυσης (Rittle-Johnson & Schneider, 2015, Rittle-Johnson et al. 2015).

1.4. Μέθοδοι για βελτίωση της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης

Κατά την εκμάθηση των μαθηματικών, διδάσκεται η εκτέλεση μαθηματικών διαδικασιών, γνωστές και ως αλγόριθμοι. Είναι «πεπατημένες» οδοί, οδηγοί για επίλυση προβλημάτων και πράξεων, παρόλα αυτά δεν αρκούν για τη βαθύτερη κατανόηση και μάθηση των Μαθηματικών. Στο παρελθόν υπήρξε έμφαση της διδασκαλίας των μαθηματικών στη διαδικαστική γνώση, μέσω της εστίασης στην ικανότητα εκτέλεσης αλγοριθμικών διαδικασιών με αποτελεσματικό τρόπο. Η ευχέρεια στη σωστή εκτέλεση πράξεων και επανάληψη διαδικασιών ήταν καθοριστικής σημασίας για το μαθητή. Με την εστίαση στις διαδικασίες, στηριζόμαστε στο πώς και όχι στο γιατί, και η γνώση αποκτά μηχανιστικά χαρακτηριστικά. Τα μαθηματικά αποσυνδέονται από το νόημα, που είναι η ουσία τους, καθώς η επιστήμη βασίζεται στην οικοδόμηση των εννοιών και των ορισμών. Η διαδικαστική ευχέρεια και η εννοιολογική κατανόηση συχνά θεωρούνται ότι ανταγωνίζονται για την προσοχή στα σχολικά μαθηματικά. Αλλά η αντιπαράθεση των δεξιοτήτων με την κατανόηση δημιουργεί μια λανθασμένη διχοτόμηση (Rittle-Johnson et al. 2015). Συνεπώς, προτείνονται διδακτικές πρακτικές που περιλαμβάνουν και τα δύο είδη γνώσεων.

Οι εκπαιδευτικοί έχουν συνηθίσει να παρουσιάζουν αρχικά τις μαθηματικές έννοιες και κατόπιν να προχωρούν σε διαδικαστική επίλυση προβλημάτων, όμως δεν είναι κοινώς αποδεκτό πως αυτός είναι και ο βέλτιστος τρόπος. Ακόμη, τα βιβλία των μαθηματικών συνήθως παρουσιάζουν αρχικά τη θεωρία και τους ορισμούς και κατόπιν ακολουθούν οι ασκήσεις. Έτσι, εγείρεται το ερώτημα για το πώς πρέπει να σχεδιαστεί μία διδασκαλία και τη σειρά με την οποία είναι βέλτιστο να αναπτυχθεί ο κάθε τύπος γνώσης. Αν και υπάρχει ευρεία συναίνεση ότι η εννοιολογική γνώση υποστηρίζει τη διαδικαστική γνώση, υπάρχει διαφωνία σχετικά με το αν η διαδικαστική γνώση υποστηρίζει την εννοιολογική γνώση και σχετικά με τον τρόπο που πρέπει να διαδοθεί η διδασκαλία των δύο τύπων γνώσης. Συνεπώς η σειρά με την οποία θα πρέπει να διδαχθούν οι μαθητές την εννοιολογική και τη διαδικαστική γνώση στα μαθηματικά είναι υπό συζήτηση.

Η επικρατούσα προοπτική της εννοιολογικής προς τη διαδικαστική γνώση υποστηρίζει ότι η διδασκαλία θα πρέπει να αναπτύσσει εκτενώς την εννοιολογική γνώση πριν από την εστίαση στη διαδικαστική γνώση. Βάσει των Rittle-Johnson et al. (2015) δεν έχει αξιολογηθεί άμεσα κατά πόσον μια εννοιολογική και στη συνέχεια διαδικαστική ακολουθία διδασκαλίας οδηγεί σε μεγαλύτερη μάθηση από ό,τι εναλλακτικές διατάξεις διδασκαλίας που επίσης εστιάζουν στην ανάπτυξη και των δύο τύπων γνώσεων

Υπάρχει και ο ισχυρισμός ότι η διδασκαλία των εννοιών πρέπει να ακολουθεί τη διδασκαλία των διαδικασιών. Ορισμένοι ερευνητές (Rittle-Johnson et al. 2015) αναφέρουν πως μπορεί να είναι πιο αποτελεσματικό να ξεκινά η διδασκαλία με ένα σύντομο εννοιολογικό μάθημα παρά με ένα σύντομο διαδικαστικό μάθημα. Η διδασκαλία διαδικασιών για τη διδασκαλία εννοιών είναι μία πρακτική που ακολουθείται από ορισμένους εκπαιδευτικούς (Μαρκάδας, 2018). Έτσι, προκύπτουν διάφορα οφέλη, καθώς μία διαδικασία δε διδάσκεται με στόχο την εκμάθηση μόνο της διαδικασίας, ο σχεδιασμός του μαθήματος αποκτά νέο νόημα, οι μαθητές εφευρίσκουν δικές τους στρατηγικές και ανακαλύπτουν τις έννοιες μέσω της καθοδήγησης από τις δραστηριότητες. Βέβαια, ορισμένοι ερευνητές (Canobi, 2009) αναφέρουν πως η εκμάθηση διαδικασιών με σύντομο τρόπο και η επίλυση προβλημάτων με πρακτικό τρόπο δε βοηθά πάντα στην ανάπτυξη εννοιολογικής γνώσης. Σύμφωνα με τους Rittle-Johnson et al. (2015), δεν είναι μονόδρομος από την εννοιολογική γνώση στη διαδικαστική γνώση ή αντίστροφα, και δεν υπάρχουν επαρκή εμπειρικά στοιχεία για τη βέλτιστη σειρά διδασκαλίας, αλλά μάλλον πολλαπλές διαδρομές προς τη μαθηματική επάρκεια.

Εκτός από τις δύο επικρατούσες προσεγγίσεις που αναζητούν τη σειρά των δύο ειδών γνώσεων στη διδασκαλία, ερευνητές (Rittle-Johnson & Schneider, 2015, Canobi, 2009) παρουσιάζουν και επιπλέον προτάσεις για την ανάπτυξη και των δύο τύπων γνώσεων παράλληλα. Μία αποτελεσματική διδακτική προσέγγιση είναι η προώθηση της σύγκρισης εναλλακτικών διαδικασιών επίλυσης. Σε αυτή, οι μαθητές καλούνται να συγκρίνουν λανθασμένες διαδικασίες με σωστές με στόχο την ανάπτυξη της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώση και καταπολέμηση των παρανοήσεων. Μια επιπλέον προσέγγιση είναι η ενθάρρυνση της αυτοεξήγησης κατά τη μελέτη των διαδικασιών επίλυσης. Η σύγκριση, η αυτοεξήγηση και η εξερεύνηση είναι όλες υποσχόμενες διδακτικές μέθοδοι για την προώθηση της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης, όπως και η αλληλουχία των προβλημάτων ώστε οι εννοιολογικές σχέσεις να είναι πιο εμφανείς και η επανάληψη μεταξύ μαθημάτων σχετικά με έννοιες και διαδικασίες. Τέλος, ο Μαρκάδας (2018) εστιάζει στη δυνατότητα ανάπτυξης της εννοιολογικής γνώσης ή/και της διαδικαστικής γνώσης μέσω της επίλυσης προβλημάτων. Με τους διαφορετικούς τρόπους επίλυσης προβλημάτων (π.χ. οπτικά, συμβολικά, με αναπαραστάσεις κ.α.) οι μαθητές εξερευνούν και συγκρίνουν διαδικασίες και οδηγούνται στην γενίκευση και την κατανόηση της μαθηματικής έννοιας.

Για τους παραπάνω λόγους πρέπει να δοθεί προσοχή στις στρατηγικές των μαθητών και στη διερεύνηση του τρόπου σκέψης τους κατά την επίλυση μαθηματικών έργων.

1.5. Εννοιολογική και διαδικαστική γνώση στους αρνητικούς αριθμούς

Εστιάζοντας τη μελέτη στα είδη γνώσης των μαθητών κατά την μάθηση των αρνητικών αριθμών, προκύπτουν προβληματισμοί για τον τρόπο με τον οποίο μεταπηδούν οι μαθητές από τον ένα τύπο γνώσης στον άλλον και για τον βαθμό που διαθέτουν και στα δύο είδη γνώσης. Από τη μελέτη της βιβλιογραφίας, δε φαίνεται να υπάρχει αφθονία ερευνών που ασχολούνται αποκλειστικά με τη διερεύνηση της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης εστιάζοντας στους αρνητικούς αριθμούς.

Η αποτυχία των παιδιών να επαναχρησιμοποιούν και να μετασχηματίζουν τη γνώση θα βελτιωθεί όταν κατανοηθούν καλύτερα οι διαδικασίες που συμβάλλουν στην εννοιολογική ανάπτυξη. Οι ερευνητές αναφέρουν πως ο μετασχηματισμός αφηρημένων εννοιών από το περιβάλλον στο οποίο ζουν οι μαθητές σε ένα ήδη γνωστό πλαίσιο είναι απαραίτητος για την πρώτη επαφή με την έννοια του αρνητικού αριθμού (Altiparmak & Özdoğan, 2010). Οι μαθητές που αρχίζουν να μαθαίνουν μέσω συγκεκριμένων διαδικασιών πρέπει στη συνέχεια να κατευθύνονται σε μια αφηρημένη διαδικασία καθώς στόχος είναι να φτάσουν σε ένα στάδιο στο οποίο να μπορούν να σκέφτονται με αφηρημένους όρους. Συνεπώς, η διδασκαλία θα πρέπει να προσανατολιστεί σε αυτή την κατεύθυνση. Οι μνημονικές τεχνικές που διδάσκονται και στοχεύουν στην απομνημόνευση μπορεί να παρέχουν συνδέσεις μεταξύ των ιδεών που διευκολύνουν την εκτέλεση μαθηματικών πράξεων, αλλά μπορεί επίσης να μην οδηγούν στην κατανόηση, καθώς μαθητές που μπορούν να χρησιμοποιούν διαδικασίες χωρίς εννοιολογική κατανόηση είναι πιθανό να οδηγηθούν σε λάθη (Bofferding & Richardson, 2013).

Ορισμένες μελέτες της βιβλιογραφίας απευθύνθηκαν σε εκπαιδευτικούς, διερευνώντας την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση τους στους ακεραίους αλλά και στο είδος των εργασιών που συμπεριλαμβάνουν στις δοκιμασίες που προετοιμάζουν για τους μαθητές τους. Στην μελέτη των Ganor-Stern & Tzelgov (2008) διερευνήθηκαν οι εξετάσεις που προετοιμάστηκαν από καθηγητές μαθηματικών ως προς το είδος της γνώσης που αφορούσαν. Η έρευνα απευθύνθηκε σε μαθηματικούς, και οι εξετάσεις απευθύνονταν σε μαθητές Γυμνασίου. Τα ευρήματα της μελέτης έδειξαν ότι όλοι οι εκπαιδευτικοί προετοίμασαν έργα που απαιτούσαν και διαδικαστικές και εννοιολογικές γνώσεις. Παρόλα αυτά, όλοι οι εκπαιδευτικοί έδωσαν μεγαλύτερη βαρύτητα στα έργα που απαιτούσαν διαδικαστικές γνώσεις στις εξετάσεις τους. Εκτός αυτού, φάνηκε ότι τα έργα που αφορούσαν την εννοιολογική γνώση αφορούσαν κυρίως την πρόσθεση και την αφαίρεση ακεραίων αριθμών. Οι εννοιολογικές εργασίες σχετικά με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση ακεραίων αριθμών ήταν ανύπαρκτες. Οι ερευνητές εικάζουν πως ο λόγος για το γεγονός αυτό είναι πως η εννοιολογική διδασκαλία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης ακεραίων αριθμών απαιτεί τη γνώση διαφόρων αναπαραστάσεων και μοντέλων και τη γνώση του τρόπου χρήσης τους κατά τη διδασκαλία. Η παραπάνω έρευνα εγείρει ερωτήματα ως προς τη εννοιολογική γνώση των εκπαιδευτικών για τις πράξεις στους ακέραιους αριθμούς. Ο Ural (2016) επισημαίνει πως αρκετοί εκπαιδευτικοί έχουν μία πιο διαδικαστική αντίληψη ως προς τη διδασκαλία των μαθηματικών και αδυνατούν να αποδώσουν σωστά το νόημα των αρνητικών αριθμών και των πράξεων που τους εμπεριέχουν. Οι Bofferding & Richardson (2013) διερεύνησαν τις στρατηγικές επίλυσης και τις γνώσεις των εκπαιδευτικών μαθηματικών σε προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης ακέραιων αριθμών. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί βασίστηκαν στη διαδικαστική γνώση, είχαν αδύναμη εννοιολογική γνώση και εστίασαν σε μικρό βαθμό στις τιμές των αριθμών στις τέσσερις κύριες στρατηγικές επίλυσης. Τα ευρήματα αυτά αναδεικνύουν πιθανούς τομείς διδασκαλίας για την υποστήριξη της εννοιολογικής κατανόησης στους αρνητικούς αριθμούς. Καταλήγοντας, προτείνεται οι εκπαιδευτικοί να συμπεριλάβουν ολοκληρωμένες εργασίες ακεραίων που περιλαμβάνουν και τα δύο είδη γνώσης για την πιο ολοκληρωμένη αξιολόγηση της γνώσης των μαθητών. Τονίζεται πως αν ο στόχος είναι η ολοκληρωμένη ανάπτυξη της γνώσης από τους μαθητές για τους αρνητικούς αριθμούς, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να γνωρίζουν πώς να βοηθήσουν τους μαθητές να εξηγήσουν με νόημα τη σχέση μεταξύ των πράξεων (Bofferding & Richardson, 2013).

Η έρευνα της Simpson (2009) εξέτασε την εννοιολογική ανάπτυξη στους αρνητικούς αριθμούς σε μαθητές 8-9 ετών. Πιο συγκεκριμένα, διερεύνησε τους πόρους που διαμορφώνουν την ανάπτυξη της γνώσης σχετικά με τους αρνητικούς αριθμούς, το ρόλο της αλληλεπίδρασης στη μεταφορά γνώσεων και τη σχέση της αφαίρεσης με τη μεταφορά αυτή. Συμπέρανε πως η έκταση της εννοιολογικής ανάπτυξης σχετικά με τους αρνητικούς αριθμούς επηρεάστηκε από προσωπικά χαρακτηριστικά των μαθητών και περιγράφει μια σύνθετη αλληλεπίδραση μεταξύ γνωστικών και συναισθηματικών παραγόντων. Η μεταφορά γνώσεων και οι αφαιρέσεις διαδραμάτισαν έναν μείζον ρόλο στην εννοιολογική ανάπτυξη των μαθητών. Η μεταφορά γνώσεων θεωρείται απαραίτητη για την εννοιολογική ανάπτυξη από την ερευνήτρια, παρόλο που οι αφαιρέσεις δεν φάνηκε να ήταν απαραίτητες για την εννοιολογική αλλαγή.

Φαίνεται λοιπόν πως ο βαθμός της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης των μαθητών στους αρνητικούς αριθμούς είναι υπό διερεύνηση και χρήζει περαιτέρω μελέτης. Οι εκπαιδευτικοί κρίνεται χρήσιμο να εμπλουτίσουν την εννοιολογική τους γνώση αναφορικά με τις πράξεις των ακεραίων και την επεξήγηση των διαδικασιών. Με αυτόν τον τρόπο θα βοηθήσουν τους μαθητές να εδραιώσουν τα δύο είδη γνώσεων σε ικανοποιητικό βαθμό και να μπορούν να μετασχηματίζουν τη γνώση αναλόγως με το πρόβλημα που καλούνται να αντιμετωπίσουν. Στο επόμενο κεφάλαιο η εργασία θα εστιάσει στην εννοιολογική κατανόηση των μαθητών για τους αρνητικούς ακεραίους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

2.1. Η κατανόηση της έννοιας του αριθμού

Διάφοροι ερευνητές έχουν ασχοληθεί με την έννοια των αρνητικών αριθμών και πώς αυτή γίνεται αντιληπτή από τους μαθητές. Το πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται την έννοια των αρνητικών ακεραίων επηρεάζει τις επιδόσεις τους και το πώς θα χειριστούν προβλήματα με αυτούς. Μία σημαντική πτυχή στην εννοιολογική κατανόηση είναι η κατανόηση της έννοιας του αρνητικού αριθμού ως στοιχείο ενός αριθμητικού συστήματος.

Στη βιβλιογραφία βρέθηκαν διάφορες προσεγγίσεις ως προς την έννοια των αρνητικών αριθμών. Οι Altiparmak & Ozdogan (2010) διατυπώνουν τρεις διαστάσεις της έννοιας των αρνητικών αριθμών :

1) **Οι αρνητικοί ως μέλη της κατηγορίας «αριθμός»:** Εστιάζει στο γεγονός ότι οι αρνητικοί αριθμοί ανήκουν στο ίδιο αριθμητικό σύστημα στο οποίο ανήκουν και οι θετικοί αριθμοί και αναδεικνύει το μέγεθος (αριθμητική αξία) και την «κατεύθυνση» (αριστερά ή δεξιά του μηδενός) ως κρίσιμα στοιχεία για την κατανόηση των αριθμών.
2) **Υπολογισμοί και Αριθμογραμμή:** Η διερεύνηση του νοήματος των πράξεων των αρνητικών αριθμών βοηθά τους μαθητές να δημιουργήσουν συνδέσεις μεταξύ των όσων μαθαίνουν και των εφαρμογών τους. Για την αριθμογραμμή, οι αριθμοί μπορούν να σημειωθούν σε αυτή ως θέση ή ως διάνυσμα και συνεπώς η αποτύπωσή τους σε αυτή σχετίζεται με την κατανόηση του μεγέθους και της κατεύθυνσης του αριθμού.
3) **Ερμηνεία και εξήγηση:** Το στάδιο αυτό περιλαμβάνει τον καθορισμό της θέσης των αρνητικών αριθμών στο σύστημα αριθμών, την κατανόηση των σχέσεων μεταξύ αρνητικών αριθμών και διαφορετικών πλαισίων εφαρμογής τους, την ερμηνεία της φυσικής σημασίας των αρνητικών αριθμών, τη γενίκευση και την απόκτηση κανόνων για τις πράξεις, την κατανόηση των σημασιών των πράξεων και του τρόπου με τον οποίο σχετίζονται μεταξύ τους. Αφορά το πώς οι μαθητές κατανοούν τη σχέση των αρνητικών αριθμών με ένα πλαίσιο, ερμηνεύουν, γενικεύουν και συσχετίζουν ένα πλαίσιο με ένα άλλο.

Οι τρεις αυτές διαστάσεις είναι καθοριστικές για τη μετατόπιση της μάθησης από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο.

Αναφορικά με το πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται και αποδέχονται τους αρνητικούς αριθμούς, η Vlassis (2008) συνοψίζει πως υπάρχουν τρία επίπεδα αποδοχής:

1) **Ο αρνητικός αριθμός ως αφαιρετέος**: Αφορά το πιο στοιχειώδες επίπεδο, όπου οι μαθητές αντιλαμβάνονται τον αρνητικό αριθμό ως έναν αριθμό που αφαιρείται.
2) **Ο αρνητικός ως σχετικός αριθμός:** Αυτό το επίπεδο σχετίζεται με την ιδέα των αντίθετων αριθμών ή την έννοια της συμμετρίας και ο αρνητικός αριθμός σχετίζεται πάντα με τον αντίθετο θετικό. Η κατάκτηση αυτής της σημασίας για τους αρνητικούς αριθμούς σχετίζεται με την αριθμογραμμή και την αναγνώριση του μηδενός ως αρχή.
3) **Ο αρνητικός ως μεμονωμένος αριθμός:** Το επίπεδο αυτό συνεπάγεται την ικανότητα αναγνώρισης ενός αρνητικού αριθμού ως αποτέλεσμα μιας πράξης ή ως λύση ενός προβλήματος ή μιας εξίσωσης.

Η κατανόηση της έννοιας του αρνητικού ακέραιου αριθμού βασίζεται σε δίκτυα αλληλοσυνδεόμενων εννοιών, σχέσεων και διαδικασιών, αλλά και πλαισίων στα οποία το υποκείμενο της μάθησης έχει έρθει σε επαφή με τις έννοιες. Η έννοια του αριθμού που έχει δομηθεί από τις μικρές ηλικίες για τον αριθμό ως ποσότητα και ως στοιχείο ενός αριθμητικού συστήματος, οι φυσικοί αριθμοί, τα κλάσματα, και γενικότερα οι θετικοί ρητοί επηρεάζουν τη μάθηση των αρνητικών αριθμών. Αυτά τα δίκτυα έχουν επεξηγηματικό χαρακτήρα, καθώς οι μαθητές, προσπαθώντας να διαχειριστούν τις νέες καταστάσεις, χρησιμοποιούν επιμέρους έννοιες, σχέσεις, ιδιότητες κ.λπ. ως κατηγορίες που έχουν αναπτύξει προηγουμένως και που τους επιτρέπουν να επιλέγουν τις ποικίλες πληροφορίες που ενσωματώνονται στη δεδομένη κατάσταση (Schindler & Hußmann, 2013). Όπως επισημαίνουν οι Schindler και Hußmann, οι μαθητές έχουν συναντήσει τους αρνητικούς αριθμούς πριν την «επίσημη» εισαγωγή τους στη διδασκαλία (π.χ. στις «υπό το μηδέν» θερμοκρασίες) και είναι πιθανόν να έχουν ήδη αντιλήψεις που αφορούν τους αρνητικούς αριθμούς.

Αναλύοντας περισσότερο την προσέγγιση που αφορά τις προϋπάρχουσες γνώσεις των παιδιών για του αριθμούς, φαίνεται ότι τα παιδιά διαμορφώνουν μια αρχική έννοια του αριθμού που τους επιτρέπει να αντιμετωπίζουν καταστάσεις σχετικές με τον αριθμό πριν διδαχθούν μαθηματικά, από την προσχολική ηλικία (Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti, 2008, Χρήστου, 2009). Οι αρχικές αυτές γνώσεις σχετίζονται με την έννοια του φυσικού αριθμού ως πληθικό αριθμό, καθώς τα παιδιά μαθαίνουν την αρίθμηση ένα-προς-ένα και την απαρίθμηση που σχετίζεται με το πλήθος.

Ακόμη και τα πρώτα χρόνια της διδασκαλίας στο Δημοτικό είναι αφιερωμένα στην αριθμητική των φυσικών αριθμών, οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα τους αριθμούς σε μαθηματικό πλαίσιο και μαθαίνουν τις τέσσερις πράξεις. Η Bofferding (2014) εστιάζει στις διαφορετικές ερμηνείες των αρνητικών αριθμών από τους μαθητές υπό το πρίσμα των αντιλήψεων και των θεωριών που αναπτύσσουν. Εκφράζει την άποψη πως οι εμπειρίες των παιδιών διαδραματίζουν ισχυρό ρόλο στην κατανόηση των ακεραίων καθώς φαίνεται πως βασίζονται σε προηγούμενες γνώσεις όταν αντιμετωπίζουν νέα προβλήματα. Παρακάτω, συνοψίζονται ορισμένες από αυτές τις θεωρίες όπως διατυπώνονται στη βιβλιογραφία (Vosniadou, Vamvakoussi, & Skopeliti, 2008, Χρήστου, 2009, Bofferding, 2014):

- Οι αριθμοί είναι πληθικοί αριθμοί, δηλαδή δηλώνουν πλήθος.
- Οι αριθμοί είναι διακριτοί. Υπάρχει ο επόμενος ενός αριθμού και δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί μεταξύ τους.
- Υπάρχει ένας αριθμός που είναι μικρότερος όλων (π.χ. 0 ή 1). Δεν υπάρχουν αριθμοί κάτω από το 0.
- Μπορεί να γίνει ταξινόμηση των αριθμών με βάση τη θέση τους στην αριθμογραμμή (οι αριθμοί που απέχουν περισσότερο από το μηδέν προς τα δεξιά είναι μεγαλύτεροι).
- Οι αριθμοί με περισσότερα ψηφία είναι μεγαλύτεροι.
- Κάθε αριθμός έχει μόνο μία συμβολική αναπαράσταση.
- Η πρόσθεση σημαίνει πάντα αύξηση και δίνει μεγαλύτερο αποτέλεσμα.
- Η αφαίρεση σημαίνει πάντα ελάττωση.
- Ο πολλαπλασιασμός σημαίνει πάντα αύξηση και είναι επαναλαμβανόμενη πρόσθεση.
- Η διαίρεση σημαίνει πάντα ελάττωση και επεξηγείται ως μερισμός.

Οι αντιλήψεις που αναφέρθηκαν επιβεβαιώνονται μέσω της επαφής των μαθητών με την καθημερινότητα, όπου οι αριθμοί εκφράζουν πλήθος, δεν υπάρχουν συχνά αρνητικοί αριθμοί και η πρόσθεση και η αφαίρεση φαίνεται να έχουν αυτές τις ερμηνείες. Επιβεβαιώνονται ακόμη και με τα πρώτα χρόνια διδασκαλίας, καθώς οι αριθμοί και οι πράξεις έχουν τις παραπάνω ιδιότητες. Έτσι, οι αρχικές αντιλήψεις για τον αριθμό είναι συμβατές με τη σχολική διδασκαλία. Συνεπώς οι μαθητές εδραιώνουν τις γνώσεις τους και καταλήγουν να τις χρησιμοποιούν ως ένα κυρίαρχο εναλλακτικό επεξηγηματικό πλαίσιο για τον αριθμό (Χρήστου, 2009). Οι μαθητές εφαρμόζουν τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών και αργότερα, όταν καλούνται να διαχειριστούν τους θετικούς ρητούς, αλλά και τους ακέραιους αριθμούς. Έτσι, εμφανίζεται αυτή η τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν τις γνώσεις που απέκτησαν για τους φυσικούς αριθμούς για την κατανόηση των αρνητικών αριθμών (Vlassis, 2004). Αυτή η τάση ονομάζεται και προκατάληψη του φυσικού αριθμού. Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού σχετίζεται με το πρόβλημα της εννοιολογικής αλλαγής που θα αναφερθεί σε επόμενη ενότητα, καθώς οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την έννοια των αρνητικών αριθμών που δεν είναι πάντα συμβατοί με τις προϋπάρχουσες πεποιθήσεις τους για τους αριθμούς.

Όποια προσέγγιση και να ακολουθηθεί για την ερμηνεία της έννοιας του αριθμού από τους μαθητές, το κοινό σημείο είναι πως οι μαθητές ερμηνεύουν την έννοια των αρνητικών αριθμών με πολλαπλούς τρόπους, που σχετίζονται είτε με την ποσότητα, την κατεύθυνση και την αναπαράσταση του αριθμού. Οι μαθητές είναι σαφώς επηρεασμένοι από δικές τους αντιλήψεις για τους αριθμούς και από προϋπάρχουσες γνώσεις τους στους φυσικούς αριθμούς. Το πώς αυτές οι έννοιες αλληλεπιδρούν και σχετίζονται μεταξύ τους παραμένει υπό συζήτηση, καθώς δεν υπάρχει πληθώρα ερευνών σχετικά με την εξελιγμένη αλληλεπίδραση των εννοιών που χρησιμοποιούν οι μαθητές (Schindler & Hußmann, 2013).

2.2. Η κατανόηση της σημασίας του προσήμου μείον

Ένα πολυσυζητημένο ζήτημα στη μάθηση των αρνητικών ακεραίων είναι η σημασία του προσήμου μείον και πώς αυτή γίνεται αντιληπτή από τους μαθητές. Ο συμβολισμός στην κατανόηση των αρνητικών αριθμών φαίνεται να είναι καθοριστικής σημασίας. Κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών χρησιμοποιούνται εκφράσεις, έννοιες και σύμβολα που μπορεί να θεωρούνται γνωστά και κατανοητά, όμως κάτι τέτοιο δεν είναι αυτονόητο. Ο ρόλος της γλώσσας και των συμβόλων στη μαθηματική εκπαίδευση έχει τονισθεί από τους ερευνητές τα τελευταία χρόνια.

Αρχικά, αναφορικά με τη γλώσσα, η προσοχή που έχει στραφεί σε αυτή στη μαθηματική εκπαίδευση σχετίζεται και με την στροφή στην κοινωνικο-πολιτισμική θεωρία. Η κατανόηση των αρνητικών αριθμών συνδέθηκε άρρηκτα με την αλγεβρική γλώσσα (Vlassis, 2008). Η γλώσσα μπορεί να εμφανιστεί με διάφορα είδη, όπως συνηθισμένη γλώσσα (προφορική ή γραπτή), διαγράμματα, διαγράμματα, σύμβολα κλπ. Εστιάζοντας στα σύμβολα, η Άλγεβρα, στην οποία καλούνται οι μαθητές να εισαχθούν στο Γυμνάσιο, αφότου γνωρίσουν τους ακεραίους, χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολυάριθμων συμβόλων, των οποίων το νόημα δεν είναι πάντα προφανές. Η Vlassis (2008) αναδεικνύει το θεμελιώδη ρόλο που διαδραμάτισε ο συμβολισμός στη διατύπωση προβλημάτων και συλλογισμών της άλγεβρας. Η χρήση των συμβόλων επηρέασε δραματικά την εννοιολογική αλλαγή για την έννοια του αριθμού επιφέροντας καινοτομία που άνοιξε το δρόμο για νέους τρόπους σκέψης στα μαθηματικά. Η χρήση σημείων όπως η γλώσσα ή τα μαθηματικά σύμβολα, μετασχηματίζει ή αναδομεί την ανθρώπινη νόηση.

Αναφορικά με τους αρνητικούς αριθμούς, αυτοί πλέον έχουν πρόσημα και έτσι, το σύμβολο μείον αποκτά μία νέα ερμηνεία. Τη σημασία του καλούνται να κατανοήσουν οι μαθητές και να το ερμηνεύσουν με ακρίβεια.

Η σημασία του συμβόλου μείον αναδεικνύεται από έρευνες που αφορούν την εσωτερική αναπαράσταση των αρνητικών αριθμών. Οι Ganor-Stern & Tzelgov (2008) έθεσαν ως στόχο τη διερεύνηση της φύσης της αναπαράστασης των αρνητικών αριθμών. Πρότειναν το διαχωρισμό σε δύο πιθανές αναπαραστάσεις, την ολιστική αναπαράσταση (holistic representation), όπου το απόλυτο μέγεθος ενσωματώνεται με την «πολικότητα» που δηλώνεται από το πρόσημο, και την αναπαράσταση συνιστωσών (components representation), όπου το απόλυτο μέγεθος αποθηκεύεται χωριστά από την πολικότητα. Οι συμμετέχοντες της έρευνας ήταν φοιτητές ψυχολογίας, στους οποίους δόθηκαν έργα με αριθμούς από το -100 ως το 100, όπως έργα σύγκρισης και έργα αριθμογραμμής. Τα ευρήματα της έρευνας έδειξαν ότι η επεξεργασία των αρνητικών αριθμών δεν περιλαμβάνει την ανάκτηση της σημασίας τους από τη μνήμη, αλλά μάλλον την ενσωμάτωση του σημείου της πολικότητας με τα μεγέθη των ψηφίων. Έτσι, αναδείχθηκε μια επίδραση μεγέθους τόσο για τους θετικούς όσο και για τους αρνητικούς αριθμούς και συνεπώς υποστηρίζουν την αναπαράσταση συνιστωσών.

Το σύμβολο μείον και η πολυδιάστατη φύση του έχει απασχολήσει διάφορους ερευνητές (Vlassis, 2004, 2008, Bofferding, 2010, 2014, Bryant et al. 2020), που καταλήγουν πως έχει τριπλή σημασία:

1) **ως μονομελής (unary) τελεστής (πρόσημο)**, δηλαδή ως η ένδειξη ενός αρνητικού αριθμού, π.χ. -5. Το σύμβολο μείον θεωρείται δομικό σύμβολο και εμφανίζεται σε προτάσεις που αφορούν αντικείμενα. Η Vlassis (2008) διαχώρισε την κατηγορία αυτή σε δύο υποκατηγορίες, τον αρνητικό αριθμό ως λύση (π.χ η λύση μιας εξίσωσης) και τον αριθμό ως αποτέλεσμα μιας πράξης.
2) **ως διμελής (binary) τελεστής**, δηλαδή ως ένδειξη της πράξης της αφαίρεσης, π.χ. 8 – 5. Σε αυτή την κατηγορία το σύμβολο μείον έχει έναν λειτουργικό ρόλο. Η ίδια η πράξη της

αφαίρεσης έχει και αυτή πολλαπλές σημασίες, για παράδειγμα ως αφαίρεση (π.χ. αφαιρούμε 2 μπίλιες από 12), ως συμπλήρωση (πόσες μπίλιες χρειάζονται ώστε από 5 να γίνουν 8) και ως διαφορά αριθμών (ποια είναι η διαφορά μεταξύ του 15 και του 22). Η ερμηνεία αυτή σχετίζεται επίσης με την αλλαγή της σημασίας της αφαίρεσης ως πρόσθεση με έναν αρνητικό αριθμό.

3) **ως συμμετρικό (symmetric) σύμβολο**, που υποδεικνύει τον αντίθετο ενός αριθμού. Εδώ το σύμβολο μείον διαδραματίζει και πάλι λειτουργικό ρόλο, καθώς υποδηλώνει τον αντίθετο αριθμό π.χ. – (-7) = +7 σηματοδοτώντας την αλλαγή των προσήμων, π.χ. – (-7 + 3) = +7 - 3 .

Ο Πίνακας 1 παρακάτω δίνει μία συνοπτική εικόνα της πολλαπλής σημασίας του συμβόλου μείον.

Πίνακας 1. Πολλαπλή σημασία του συμβόλου μείον (Vlassis, 2008).

Τριπλή σημασία του προσήμου μείον		
«Μονομελής» σημασία (δομική)	**«Διμελής» σημασία (λειτουργική)**	**«Συμμετρική» σημασία (λειτουργική)**
Τυπικός Αρνητικός αριθμός	Πράξη αφαίρεσης στην αριθμητική στους φυσικούς αριθμούς (Αφαίρεση, Συμπλήρωση, Διαφορά αριθμών)	Προσδιορισμός αντίθετου αριθμού
Αριθμός ως λύση	Αφαίρεση στην άλγεβρα (αφαίρεση ακεραίων που σημαίνει πρόσθεση του αντίθετου)	
Αριθμός ως αποτέλεσμα		
Σχετικός αριθμός (relative number)		

Οι ερευνητές συγκλίνουν στο ότι η ικανότητα των μαθητών να λαμβάνουν υπόψη τις πολλαπλές σημασίες του συμβόλου μείον είναι ζωτικής σημασίας για την ικανότητα τους να κατανοήσουν την έννοια των αρνητικών αριθμών (Vlassis, 2004, 2008, Lamb et al. 2012, Bofferding, 2010, 2014). Μάλιστα, αυτή η πολλαπλή ερμηνεία και οι διαφορετικές χρήσεις του συμβόλου μείον είναι αντιφατικές και αποτελούν εμπόδιο για τους μαθητές (Ural, 2016), καθώς συνήθως το ερμηνεύουν ως την πράξη της αφαίρεσης (Bofferding, 2014), με αποτέλεσμα να δυσκολεύονται στη κατανόηση και διαχείριση των αρνητικών αριθμών. Η εμπειρική μελέτη της Vlassis (2008) εστίασε στις στρατηγικές των μαθητών στην επίλυση εξισώσεων με αρνητικούς αριθμούς. Οι αναλύσεις δείχνουν ότι η εμφάνιση μιας αρνητικής λύσης σπάνια συμβαίνει μεμονωμένα, αλλά συνήθως πέφτει θύμα της λανθασμένης, άκαμπτης χρήσης του σημείου μείον. Φάνηκε ότι τα προβλήματα που δημιουργεί η παρουσία αρνητικών αριθμών στις εξισώσεις οφείλονται στην πολύ περιορισμένη και ανεπαρκή χρήση του συμβόλου μείον από τους μαθητές, η οποία τους εμποδίζει να βρουν μια αρνητική λύση ή να την κατανοήσουν. Οι μαθητές εμφανίζουν δυσκολίες όταν συναντούν δύο διαδοχικά πρόσημα και δυσκολεύονται να δουν τις πολλαπλές σημασίες του συμβόλου μείον. Ακόμη, αδυνατούν να βρουν αρνητική λύση στη θέση ενός αγνώστου σε εξίσωση, και όταν βρίσκουν αρνητική λύση διστάζουν να την ερμηνεύσουν. Και στη συνέχεια της μαθητικής τους πορείας, όταν διαχειρίζονται αλγεβρικές παραστάσεις, τείνουν να ερμηνεύουν την παρουσία του μείον πριν από μία μεταβλητή ως σύμβολο που ορίζει την αξία του αριθμού που μπορεί να πάρει αυτή η μεταβλητή, αντιμετωπίζοντας το σαν φαινομενικό πρόσημο (Χρήστου, 2009).

Κατόπιν των αναλύσεων των ερευνητών, αναδεικνύεται η σημασία της ερμηνείας των συμβόλων στην μάθηση των ακεραίων. Η λανθασμένη χρήση του συμβόλου μείον μπορεί να οφείλεται στη λανθασμένη ερμηνεία του, και αυτό οδηγεί τους μαθητές να χρησιμοποιούν διαφορετικά πρότυπα και καταστάσεις γύρω από το μείον. Επιπλέον, οι μαθητές μπορεί να επηρεαστούν και να εμφανίσουν αντίσταση στην κατανόηση των αρνητικών αριθμών που συχνά δε συμβαδίζουν με τις πρωταρχικές αντιλήψεις τους για τους αριθμούς.

2.3. Αναπαραστάσεις και αριθμογραμμή

Μια άλλη εννοιολογική πτυχή των αρνητικών αριθμών σχετίζεται με τον τρόπο αναπαράστασής τους. Παρότι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις των αρνητικών αριθμών έχουν συζητηθεί, δε φαίνεται να υπάρχει πληθώρα ερευνών αποκλειστικά πάνω στις αναπαραστάσεις τους (Ganor-Stern & Tzelgov, 2008). Βέβαια, αρκετοί ερευνητές κάνουν αναφορά στη χρήση πολλών αναπαραστάσεων εστιάζοντας στη χρήση τους στη διδασκαλία των ακεραίων και των πράξεων τους.

Υπάρχουν δύο συνηθισμένοι τύποι αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται: διακριτές (π.χ. δίχρωμες μάρκες) ή συνεχείς (π.χ. η αριθμογραμμή) (Bryant et al. 2020). Σε αυτή την κατηγοριοποίηση βασίζονται και οι Bofferding & Richardson (2013), διακρίνοντας δύο μεθόδους για τη διδασκαλία της πρόσθεσης και της αφαίρεσης με αρνητικούς αριθμούς. Στις συνεχείς αναπαραστάσεις δίνουν έμφαση στην κίνηση στην αριθμογραμμή, όπου η κίνηση προς τα δεξιά υποδηλώνει θετικό αριθμό και η κίνηση προς τα αριστερά αρνητικό αριθμό. Το μοντέλο της αριθμογραμμής μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τη διάταξη των αριθμών. Στις διακριτές αναπαραστάσεις, υπάρχει το μοντέλο της εξουδετέρωσης, όπου οι εκπαιδευτικοί κάνουν χρήση αρνητικών ή θετικών μαρκών, και κάθε αρνητική μάρκα ακυρώνει μία θετική. Οι αρνητικοί αριθμοί μπορούν να αναπαρασταθούν είτε με βάση την αριθμητική τους αξία είτε με βάση την απόλυτη τιμή τους, βασιζόμενοι σε μία κατασκευή από τους θετικούς αριθμούς.

Οι Schindler & Hußmann (2013) διακρίνουν τέσσερα είδη αναπαραστάσεων, τα οποία φαίνεται να έχουν νόημα για τη γνωριμία των μαθητών με τους αρνητικούς αριθμούς. Αυτά είναι: (α) η αναπαράσταση στην αριθμογραμμή ή άλλες τακτικές διατάξεις σχετικά με τη σειρά των ακεραίων αριθμών (όπως ... -3 -2 -1 0 1 ...) (β) μια ποσοτική αναπαράσταση, την οποία οι μαθητές γνωρίζουν κυρίως από τους φυσικούς αριθμούς (όπως η χρήση αντικειμένων όπου π.χ. 3 σημαίνει 3 χρωματιστές κουκκίδες και -3 σημαίνει 3 άχρωμες κουκκίδες, που παρομοιάζει το μοντέλο των θετικών και αρνητικών μαρκών), (γ) η αναπαράσταση σε ένα πραγματικό πλαίσιο (π.χ. θερμοκρασίες, χρέη και περιουσιακά στοιχεία) και (δ) η συμβολική αναπαράσταση (π.χ. -6 ή "μείον έξι"). Αυτά τα είδη αναπαράστασης και η αλληλεπίδρασή τους έχουν μεγάλη σημασία για την εκμάθηση των αρνητικών ακεραίων αριθμών. Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές αλλάζουν και χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις όταν διατάσσουν και διαχειρίζονται ακέραιους αριθμούς είναι αξιοσημείωτος. Οι μαθητές μπορεί να χρησιμοποιούν την αριθμογραμμή, να δίνουν προσοχή στο αρνητικό πρόσημο ή να εστιάζουν στην τυπική-συμβολική αναπαράσταση, αλλά και να αξιοποιούν τα πλαίσια της πραγματικής ζωής (Schindler et al. 2017).

Συνεπώς, φαίνεται πως οι ερευνητές κατηγοριοποιούν με διάφορους τρόπους τις αναπαραστάσεις των αρνητικών αριθμών. Αρκετοί ερευνητές εστιάζουν στην αριθμογραμμή και στο σημαντικό ρόλο που αυτή διαδραματίζει στη διδασκαλία των αρνητικών αριθμών. Οι Peled et al. (1989) προσπάθησαν να εξηγήσουν τους συλλογισμούς των μαθητών θέτοντας δύο νοητικά μοντέλα: το μοντέλο διαιρεμένης (divided) και το μοντέλο συνεχούς (continuous) αριθμογραμμής. Εν συντομία, το μοντέλο διαιρεμένης αριθμογραμμής αντιπροσωπεύει την ιδέα πως όσο πιο μακριά βρίσκεται από το μηδέν ένας αριθμός, τόσο μεγαλύτερος είναι, γεγονός που οδηγεί στην εσφαλμένη υπόθεση ότι, για παράδειγμα, το -6 είναι μεγαλύτερο από το -4. Αντίθετα, το μοντέλο συνεχούς αριθμογραμμής αντιπροσωπεύει την ιδέα πως όσο πιο δεξιά τοποθετείται ο αριθμός πάνω στην αριθμογραμμή τόσο μεγαλύτερος είναι και επιτρέπει στους μαθητές να μετακινούνται εύκολα μεταξύ θετικών και αρνητικών αριθμών. Κατέληξαν στο συμπέρασμα πως οι μαθητές βασίζονταν σε ένα από τα δύο νοητικά μοντέλα αριθμογραμμής για να υποστηρίξουν τη σκέψη τους σχετικά με τους αρνητικούς ακεραίους.

Το μοντέλο της αριθμογραμμής αναδεικνύει τη σειρά των αρνητικών αριθμών σε σύγκριση με τους θετικούς αριθμούς και οι τιμές των αριθμών μπορούν να ερμηνευτούν ως αποστάσεις από το μηδέν προς αντίθετες κατευθύνσεις, δίνοντας νόημα στην έννοια της συμμετρίας και στην ερμηνεία του μείον ως συμμετρικό σύμβολο. Η αριθμογραμμή που χρησιμοποιείται στη διδασκαλία μπορεί να είναι είτε οριζόντια, που είναι η συνήθης, στην οποία οι αρνητικοί αριθμοί είναι αριστερά του μηδενός και οι θετικοί στα δεξιά, είτε κατακόρυφη, όπου οι θετικοί αριθμοί είναι πάνω από το μηδέν και οι αρνητικοί από κάτω (π.χ. θερμόμετρο). Η αναπαράσταση αυτή βοηθά τους μαθητές να αντιληφθούν τη διάταξη των αριθμών, κατανοώντας ότι όσο πιο αριστερά ή όσο πιο κάτω είναι ο αριθμός, τόσο μικρότερος είναι. Αργότερα μάλιστα, θα έρθουν σε επαφή με τους άξονες καρτεσιανών συντεταγμένων, στους οποίους αναπαρίστανται οι αριθμοί με παρόμοιο τρόπο. Η σημασία της αριθμογραμμής στη διδασκαλία των ακεραίων καθώς οι ερευνητές προτείνουν πως η χρήση της αλλά και άλλων πολλαπλών αναπαραστάσεων βοηθά τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις εννοιών. Ωστόσο, προβληματισμό εγείρει η σκέψη της Bofferding (2014), που αναφέρει πως ορισμένες διδακτικές στρατηγικές για την πρόσθεση και την αφαίρεση με τη χρήση της αριθμογραμμής μπορεί να στέλνουν αντικρουόμενα μηνύματα σχετικά με τις έννοιες του σημείου μείον, αφού αυτό μπορεί να εκληφθεί μόνο ως πράξη και όχι με τη σημασία του προσήμου ή του αντίθετου αριθμού. Φυσικά η τοποθέτηση αυτή δε σημαίνει πως η αριθμογραμμή δε πρέπει να χρησιμοποιείται, αλλά να δοθεί προσοχή στον τρόπο με τον οποίο εντάσσεται στη διδασκαλία.

2.4. Εννοιολογική κατανόηση των πράξεων στους ακεραίους

Η εννοιολογική σημασία των πράξεων μεταξύ αρνητικών είναι επίσης μία πτυχή που πρέπει να εξεταστεί καθώς επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται την έννοια των ακεραίων. Η πρόσθεση και η αφαίρεση ακεραίων αποτελεί ένα μείζον θέμα που απασχολεί την ερευνητική κοινότητα, καθώς οι μαθητές τείνουν να εφαρμόζουν στρατηγικές αφαίρεσης από φυσικούς αριθμούς σε ακέραιους αριθμούς (Bofferding, 2014, Schindler et al. 2017). Η επιρροή της διδασκαλίας του Δημοτικού διαδραματίζει σημαντικό ρόλο, καθώς κατά τη διδασκαλία της αφαίρεσης, πολλοί δάσκαλοι του Δημοτικού διδάσκουν τους μαθητές να αφαιρούν πάντα το μικρότερο από το μεγαλύτερο αριθμό. Έτσι, στους μαθητές εντυπώνεται η ιδέα πως αφαίρεση όπως 3 – 5 δε γίνεται, και όταν σε επόμενα χρόνια το διδαχθούν, επέρχεται σύγκρουση με αυτή την ιδέα. Έτσι, ορισμένοι μαθητές καταλήγουν να επιλύουν λανθασμένα προβλήματα όπως το 3 – 5 ως 5 – 3 (Bofferding, 2014). Η αφαίρεση ακεραίων συνεπώς καταλήγει να είναι δυσκολότερη από την πρόσθεση ακεραίων καθώς εκτός από την επιρροή της παραπάνω ιδέας εμφανίζεται το σύμβολο μείον με τις πολλαπλές του σημασίες. Αυτό υποστηρίζουν και οι Lamb et al. (2018), αναφέροντας πως οι μαθητές βρίσκουν τα προβλήματα αφαίρεσης ακεραίων πιο δύσκολα από τα προβλήματα πρόσθεσης ακεραίων και ότι τα λάθη συχνά οφείλονταν σε εφαρμογή λανθασμένων κανόνων. Τέλος, η αντιμεταθετική ιδιότητα που πλέον ισχύει για την αφαίρεση, είναι ένας τομέας που θα μπορούσε να εστιάσει η διδασκαλία (Bofferding, 2010), ώστε να αναγνωρίσουν οι μαθητές τη δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων όπως το 3 – 5 ως το ίδιο με το -5 + 3, αλλά και χωρίς απαραίτητα να πρέπει να αντιστρέψουν τους αριθμούς. Με αυτό τον τρόπο, θα μπορέσουν επιπλέον να διερευνηθούν και οι πολλαπλές ερμηνείες του συμβόλου μείον.

Η πράξη της αφαίρεσης μελετήθηκε και στην έρευνα της Kilhamn (2018) προσεγγίζοντας την έννοια «διαφορά» και το πώς γίνεται αντιληπτή από τους μαθητές. Υλοποιήθηκαν μαθήματα και συνεντεύξεις σε μαθητές Γυμνασίου και φάνηκε πως η έννοια της διαφοράς μπορεί να προκαλέσει σύγχυση σε σχέση με την πρόσθεση και την αφαίρεση ακεραίων. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι μαθητές χρησιμοποιούσαν συχνότερα μαθηματική ορολογία και εστίασαν στην καθιέρωση διαδικασιών, καταλήγοντας με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού να απομνημονεύουν και να εφαρμόζουν τους κανόνες για τα πρόσημα. Δηλαδή, εμφανίστηκε μία αβεβαιότητα στην επίλυση προβλημάτων αφαίρεσης από τους μαθητές. Μία άλλη πτυχή που ερευνήθηκε ήταν ο λόγος, και διαπιστώθηκε πως οι μαθητές δεν ανέπτυξαν πλούσιο λόγο για να αντιμετωπίσουν τις διαφορές. Η διαφορά έχει πολλαπλές ερμηνείες, ως το αποτέλεσμα της αφαίρεσης, ως η απόσταση μεταξύ δύο αριθμών, αλλά σχετίζεται και με τις απόλυτες τιμές στα μαθηματικά. Η ερευνήτρια υποστηρίζει πως εκφράσεις όπως η αφαίρεση, η διαφορά, η κίνηση προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά, ή προς τα εμπρός ή προς τα πίσω, σχετίζονται με ενσωματωμένες εμπειρίες που είναι διαφορετικές από μαθητή σε μαθητή. Η ερμηνεία της διαφοράς ως απόσταση χρησιμοποιεί τη μεταφορά της μέτρησης (measurement metaphor) και η κίνηση στην αριθμογραμμή χρησιμοποιεί εμπειρίες κίνησης κατά μήκος μίας διαδρομής. Στη μελέτη αυτή αναδεικνύεται η σημασία της γλώσσας και του πλαισίου στην εννοιολογική κατανόηση των πράξεων των ακεραίων, όπως τονίσθηκε και σε προηγούμενη ενότητα.

Η μελέτη της Nurnberger-Haag (2018) επικεντρώθηκε και αυτή στην αφαίρεση ακεραίων, διερευνώντας το πώς μαθητές στα τέλη του Δημοτικού αντιλαμβάνονται τις πράξεις ακεραίων. Διαπιστώθηκε πως ιδιαίτερα η ιδέα πως η αφαίρεση με αρνητικό αριθμό μπορεί να έχει θετικό αποτέλεσμα δυσκόλεψε τους μαθητές, καθώς η μειοψηφία έδωσε θετικές λύσεις σε προβλήματα αφαίρεσης. Οι μεγαλύτεροι μαθητές διατηρούσαν τη δυσκολία να χειριστούν τέτοιου είδους προβλήματα ακεραίων. Ακόμη και οι μαθητές που έδωσαν σωστές απαντήσεις είναι πιθανό να είχαν λανθασμένη συλλογιστική. Η ερευνήτρια ακολούθησε τη θεωρία των εννοιολογικών μεταφορών, εφαρμόζοντας δύο μοντέλα, ένα διακριτό βασισμένο σε συλλογές αντικειμένων (chip model) και ένα συνεχές μοντέλο βασισμένο στην κίνηση σε μία διαδρομή, δηλαδή ένα μοντέλο αριθμογραμμής (μοντέλο walk-it-off). Το δεύτερο μοντέλο φάνηκε να είναι το πιο αποτελεσματικό καθώς βοήθησε τους μαθητές να διαχειριστούν τέτοια προβλήματα.

Αναφορικά με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση ακεραίων, παρότι φαίνονται ως πιο εύκολες πράξεις στην εκτέλεσή τους, εμφανίζονται προβλήματα στην εννοιολογική τους επεξήγηση. Καθώς η πράξη της διαίρεσης στα μαθηματικά ανάγεται σε πολλαπλασιασμό, θα αναλυθεί περαιτέρω αυτή η πράξη. Ο πολλαπλασιασμός ξεκινά με την ανάγκη να ομαδοποιηθούν διάφοροι αριθμοί με τη χρήση της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης, όμως η πολλαπλασιαστική σκέψη εμφανίζει διαφορές από την προσθετική σκέψη. Ο πολλαπλασιασμός ακεραίων μπορεί να φαντάζει απλός όμως διαμορφώνεται από πολλαπλές καταστάσεις, όπου πλέον το γινόμενο δεν είναι πάντοτε μεγαλύτερο από τους παράγοντες. Οι μαθητές πολλές φορές ακόμη και από το Δημοτικό δεν έχουν κατανοήσει πλήρως τις διαδικασίες του πολλαπλασιασμού ούτε μεταξύ των φυσικών αριθμών. Όταν έρχονται σε επαφή με τους αρνητικούς αριθμούς, εμφανίζονται εκ νέου δυσκολίες. Η απλή παρουσίαση των κανόνων των προσήμων φαίνεται πως δεν είναι επαρκής. Η εννοιολογική διδασκαλία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης ακεραίων αριθμών απαιτεί την ύπαρξη κάποιας γνώσης σχετικά με το ποιες αναπαραστάσεις πρέπει να χρησιμοποιηθούν και με ποιον τρόπο (Ganor-Stern & Tzelgov, 2008) και δεν είναι αυτονόητο πως την κατέχουν όλοι οι εκπαιδευτικοί. Οι Tsay & Hauk (2006) διερεύνησαν τις γνώσεις μελλοντικών εκπαιδευτικών πάνω στη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού με προσημασμένους αριθμούς. Έδωσαν έμφαση στις γνωστικές δομές των μαθητών για τον πολλαπλασιασμό, παρατηρώντας ότι η σχέση μεταξύ πολλαπλασιασμού με πρόσημα είναι δομική, καθώς δύο αριθμοί με διττή μορφή (πρόσημο, απόλυτη τιμή) και συνδυάζονται μεταξύ τους. Οι ερευνητές παρατηρούν πως συχνά μοντέλα επεξήγησης του πολλαπλασιασμού με προσημασμένους αριθμούς είναι το τσιπ, το φορτίο και η αριθμογραμμή, για τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς. Τα ευρήματα της έρευνας έδειξαν πως οι συμμετέχοντες αφιέρωσαν χρόνο για να εξηγήσουν τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων στα προβλήματα, προσαρμόζοντας τις υπάρχουσες γνώσεις τους για τον πολλαπλασιασμό και μετασχηματίζοντας τις διαδικασίες για την επίλυση προβλημάτων. Υπήρξαν και περιπτώσεις με φτωχή κατανόηση των αρνητικών αριθμών με αποτέλεσμα την έλλειψη επαρκών εξηγήσεων για την πράξη του πολλαπλασιασμού. Για τη βελτίωση της γνώσης πάνω στον πολλαπλασιασμό προσημασμένων αριθμών, οι ερευνητές προτείνουν την ενσωμάτωση προβλημάτων στη διδασκαλία, την οπτικοποίηση επίλυσης προβλημάτων και την ισορροπία μεταξύ υπολογισμών και οπτικοποιήσεων.

Οι Seah & Booker (2005) παρατήρησαν πως η έλλειψη πολλαπλασιαστικού συλλογισμού, ο οποίος απαιτεί σαφή εννοιολογική κατανόηση και πλήρη γνώση των μαθηματικών διαδικασιών και των μεταξύ τους σχέσεων, φαίνεται να είναι μια σημαντική αιτία των δυσκολιών στα μαθηματικά. Έθεσαν ως στόχο την εις βάθος διερεύνηση των μαθηματικών γνώσεων των μαθητών Γυμνασίου. Τα ευρήματα έδειξαν πως οι γνώσεις των μαθητών είναι ανεπαρκείς για την περαιτέρω ανάπτυξη των μαθηματικών και εμφάνισαν δυσκολίες στον πολλαπλασιασμό που σχετίζονται με την αξία θέσης, τη μετονομασία, τον αριθμό ψηφίων και τα μηδενικά. Η έλλειψη της εννοιολογικής κατανόησης μαθηματικών ιδεών ήταν εμφανής, καθώς υπήρξε σύγχυση μεταξύ προσθετικών στρατηγικών στον αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού. Μεγαλύτερη δυσκολία συνάντησαν στην επίλυση προβλημάτων, με την πλειοψηφία να μη μπορεί να χρησιμοποιήσει μία κατάλληλη στρατηγική. Τα ευρήματα της έρευνας αυτής εγείρουν προβληματισμούς που σχετίζονται και με την Ελληνική σχολική τάξη, καθώς είναι συχνό φαινόμενο πως οι μαθητές παρότι μπορούν να ολοκληρώσουν πράξεις με ακεραίους δυσκολεύονται στην εννοιολογική κατανόηση και στην επίλυση προβλημάτων, που απαιτούν ανώτερη μαθηματική σκέψη.

2.5. Τρόποι συλλογισμού στους ακεραίους

Κατά τη μελέτη της μάθησης των αρνητικών αριθμών από τους μαθητές εγείρεται το ερώτημα του πώς σκέφτονται αυτοί όταν διαχειρίζονται τέτοιους αριθμούς. Η μελέτη του τρόπου σκέψης των μαθητών οδηγεί στην καλύτερη κατανόηση του πώς αντιλαμβάνονται τις έννοιες των ακέραιων αριθμών, των προσήμων, των αναπαραστάσεων και των πράξεων με αυτούς. Το να βλέπουμε τα μαθηματικά μέσα από τα μάτια των παιδιών είναι σημαντικό για την καλύτερη κατανόηση του νοήματος που βγάζουν (Whitacre et al. 2017). Αρκετοί ερευνητές έχουν διερευνήσει τους τρόπους συλλογισμού των μαθητών όταν αυτοί διαχειρίζονται ακέραιους αριθμούς. Προτού παρουσιαστούν τα ευρήματά τους, κρίνεται χρήσιμο να αναλυθούν τα είδη των συλλογισμών των μαθητών στους ακεραίους όπως βρέθηκαν στη βιβλιογραφία.

Οι Lamb et al. (2018) διαχωρίζουν τους τρόπους συλλογισμού των μαθητών σε 5 κατηγορίες:

1) **Συλλογισμός με βάση τη διάταξη (Order-based):** Οι μαθητές αξιοποιούν τη διαδοχική και διατεταγμένη φύση των αριθμών για να σκεφτούν για ένα πρόβλημα (π.χ. χρήση αριθμογραμμής, μέτρηση αυξάνοντας ή μειώνοντας κατά 1 κα.). Αφορά την αρχική επίσημη εισαγωγή των μαθητών στους αρνητικούς αριθμούς και είναι ένα από τα πρώτα θέματα που συναντούν οι μαθητές στη διδασκαλία των αρνητικών αριθμών. Επιπλέον, είναι βασική για την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση ακεραίων αριθμών (Schindler et al. 2017).

2) **Αναλογικός Συλλογισμός (Analogy-based)**: Οι μαθητές συσχετίζουν τους αριθμούς με μία άλλη ιδέα, έννοια ή αντικείμενο (π.χ. πλαίσια όπως χρέος, επιφάνεια κάτω από τη Γη κα.). Ο συλλογισμός αυτός σχετίζεται με τις απόλυτες τιμές και την κατανόηση του αριθμού ως μέγεθος.

3) **Τυπικός Συλλογισμός (Formal):** Οι μαθητές αντιμετωπίζουν τους αριθμούς ως αντικείμενα που είναι στοιχεία ενός συστήματος και υπόκεινται σε μαθηματικές αρχές που διέπουν τη συμπεριφορά τους. Πολλές φορές οι μαθητές γενικεύουν συγκρίνοντας την ειδική περίπτωση με μία άλλη γνωστή σε αυτούς και προσαρμόζοντας την ευρετική τους μέθοδο ώστε να παραμένει λογική ή και ακόμη γενικεύουν μία ειδική περίπτωση εξάγοντας ιδιότητες για κατηγορίες αριθμών.

4) **Υπολογιστικός Συλλογισμός (Computational)**: Οι μαθητές χρησιμοποιούν μία διαδικασία, έναν κανόνα ή υπολογισμό για να καταλήξουν σε απαντήσεις (π.χ. κανόνες αλλαγής προσήμων, κανόνες απαλοιφής παρενθέσεων, αλγόριθμοι πράξεων κα.). Πολλές φορές οι μαθητές που

σκέφτονται με αυτόν τον τρόπο δε δίνουν αιτιολόγηση στη χρήση των κανόνων ή των διαδικασιών.

5) **Αναδυόμενος Συλλογισμός (Emergent)**: Οι μαθητές περιορίζονται στη χρήση θετικών ακέραιων, δηλαδή φυσικών αριθμών, και μεταφέρουν τις ιδιότητες αυτών στη διαχείριση των αρνητικών αριθμών. Οι μαθητές μπορεί να χειρίζονται όλους τους αριθμούς ως θετικούς και να γενικεύουν τη θεώρηση πως η πρόσθεση δίνει πάντα μεγαλύτερο αποτέλεσμα, όπως έχουν διδαχθεί σε μικρότερες τάξεις.

Οι Whitacre et al. (2017) χρησιμοποιούν τις παραπάνω κατηγορίες εστιάζοντας στη σύγκριση των ακεραίων, συνοψίζοντάς της σε τρεις: το συλλογισμό με βάση τη διάταξη, με βάση το μέγεθος και λοιπούς συλλογισμούς (αναδυόμενους ή συνδυασμός των δύο προηγούμενων).

Τα νοητικά μοντέλα που χρησιμοποιούν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με τους αρνητικούς αριθμούς έχουν απασχολήσει την ερευνητική κοινότητα. Σύμφωνα με τη Bofferding (2014), τα αρχικά (initial) νοητικά μοντέλα αφορούν την περίπτωση που οι μαθητές συγχέουν τους αρνητικούς και τους θετικούς αριθμούς και δεν αναγνωρίζουν το σύμβολο μείον ως πρόσημο αρνητικού αριθμού αλλά μόνο ως την πράξη της αφαίρεσης. Οι μαθητές που χρησιμοποιούν αρχικά νοητικά μοντέλα για τους αριθμούς μπορεί να απαντούν σε ερωτήσεις για αρνητικούς ακεραίους χρησιμοποιώντας κανόνες για θετικούς ακεραίους. Όταν οι μαθητές μαθαίνουν μια νέα έννοια, αρχίζουν να αναδιοργανώνουν την εννοιολογική τους δομή και, στην προκειμένη περίπτωση, την εφαρμογή των αρχών του αριθμού σε μια προσπάθεια να αφομοιώσουν τις νέες πληροφορίες διατηρώντας την τρέχουσα δομή των γνώσεων τους. Το αποτέλεσμα είναι ένα συνθετικό νοητικό μοντέλο, επειδή αποτελεί σύνθεση πολλαπλών ιδεών. Το συνθετικό (synthetic) μοντέλο αφορά την περίπτωση που οι μαθητές αναγνωρίζουν το πρόσημο μείον των αρνητικών αριθμών αλλά τους ταξινομούν μόνο με βάση την απόλυτη τιμή τους. Τέλος, κατά το τυπικό (formal) μοντέλο, οι αριθμοί είναι συμμετρικοί γύρω από το μηδέν, και η αξία τους αυξάνεται όσο δεξιότερα είναι η θέση τους στην αριθμογραμμή. Οι Schindler et al. (2017) υποστηρίζουν πως κάθε ένα από αυτά τα νοητικά μοντέλα μπορεί να είναι βοηθητικά κατά την προσπάθεια εξάλειψης εμποδίων και τον σχεδιασμό μιας αποτελεσματικότερης διδασκαλίας. Ωστόσο, θεωρούν πως οι κατηγορίες αυτές υπολείπονται στη βαθύτερη κατανόηση, καθώς πρέπει να ληφθούν υπόψιν οι εξατομικευμένες προϋπάρχουσες εμπειρίες και γνώσεις των μαθητών, που είναι μοναδικές για κάθε άτομο και μπορεί να επιδρούν αρνητικά στην οικοδόμηση νέων εννοιών.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι προηγούμενες εμπειρίες των μαθητών και η επαφή τους με την καθημερινότητα επηρεάζουν την κατανόηση των αρνητικών αριθμών από αυτούς. Έτσι, οι Whitacre et al. (2012) κάνουν μία διαφορετική κατηγοριοποίηση, διακρίνοντας δύο πεδία συλλογισμού στους ακεραίους: 1) τα πλαίσια που σχετίζονται με την πραγματική ζωή (π.χ. δανεισμός, χρέος, θερμοκρασία, απόσταση πάνω ή κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας) και 2) το τυπικό πλαίσιο, όπου οι ακέραιοι αριθμοί υπάρχουν ως αφηρημένες οντότητες, αναπαρίστανται αριθμητικά και δε χρειάζεται να σχετίζονται με ποσότητες στον κόσμο.

Είναι συνεπώς φανερό πως οι μαθητές έχουν διάφορους τρόπους συλλογισμού, οι οποίοι μπορούν να κατηγοριοποιηθούν με διαφορετικούς τρόπους, είτε λαμβάνοντας υπόψιν το πώς αντιλαμβάνονται τους αριθμούς, το πώς τους χειρίζονται και το πώς τους συσχετίζουν με την καθημερινότητα. Η πλειοψηφία των ερευνών (Bofferding, 2010, 2014, Whitacre et al. 2012, Schindler & Hußmann, 2013, Schindler et al. 2017, Παπαδόπουλος και συνεργάτες, 2020) που διερευνούν τους τρόπους συλλογισμού στους ακεραίους απευθύνονται σε μαθητές Δημοτικού. Υπάρχουν και έρευνες (Whitacre et al. 2017, Lamb et al. 2018) που απευθύνθηκαν σε μαθητές Δημοτικού, Γυμνασίου και Λυκείου και ώστε να προβούν και σε μία σύγκριση. Οι έρευνες είναι στην πλειοψηφία τους ποιοτικές, κάτι που υποδηλώνει πως πρόκειται για την κυρίαρχη μέθοδο επιλογής των ερευνητών κατά τη διερεύνηση της κατανόησης των συλλογισμών στους αρνητικούς αριθμούς, καθώς συγκριτικά με τις ποσοτικές μελέτες, δεν εστιάζουν μόνο στο ποσοστό των επιτυχημένων απαντήσεων, αλλά προσφέρουν τη δυνατότητα περαιτέρω εμβάθυνσης στις διαδικασίες συλλογισμού των μαθητών. Αξιοσημείωτα είναι τα ευρήματα των ερευνών που απευθύνθηκαν σε μικρότερους μαθητές Δημοτικού, πριν ακόμη αυτοί διδαχθούν τους αρνητικούς ακέραιους αριθμούς.

Η μελέτη των Hativa και Cohen (1995) εξέτασε τη σκοπιμότητα της διδασκαλίας των αρνητικών αριθμών σε μαθητές τέταρτης τάξης Δημοτικού, δηλαδή αρκετά νωρίτερα από όσο διδάσκονται συνήθως τους αρνητικούς. Στη μέθοδό τους χρησιμοποίησαν τον υπολογιστή και την αριθμογραμμή ως διαισθητικό μοντέλο. Τα ευρήματα υποστήριξαν ότι οι μαθητές έχουν διαισθήσεις και προηγούμενη άτυπη γνώση των αρνητικών αριθμών και μπορούν να εκτελέσουν απλές πράξεις με αυτούς. Βέβαια, αυτές οι γνώσεις και διαισθήσεις εμφανίζονται σε μεγαλύτερο βαθμό στους μαθητές με υψηλές επιδόσεις στα μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα, οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι οι μαθητές μπορούσαν να συγκρίνουν με επιτυχία ακέραιους αριθμούς και έκαναν υπολογισμούς για να φτάσουν σε έναν ακέραιο αριθμό-στόχο και λαμβάνοντας ανατροφοδότηση στο μοντέλο της αριθμογραμμής.

Η Bofferding (2010) τονίζει πως η απλή εξέταση των αποτελεσμάτων των τεστ στους ακέραιους αριθμούς δεν παρέχει επαρκείς πληροφορίες σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές ερμηνεύουν τους αρνητικούς αριθμούς, καθώς αρκετοί έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις όμως επέδειξαν διορατική συλλογιστική σε σχέση με τα προβλήματα που τους δόθηκαν. Φάνηκε πως οι μαθητές προσπάθησαν να κατανοήσουν πώς οι πράξεις με τους αρνητικούς αριθμούς ευθυγραμμίζονται με τις προηγούμενες ιδέες τους για την πρόσθεση και την αφαίρεση. Ακόμη, πολλοί μαθητές παρότι δεν είχαν διδαχθεί ακόμη τους αρνητικούς αριθμούς, διαμόρφωσαν ιδέες για τη πολλαπλή σημασία του συμβόλου μείον και προβλημάτων με αρνητική λύση και σκεφτόταν με παρόμοιο τρόπο με μεγαλύτερους μαθητές που έχουν διδαχθεί τους αρνητικούς αριθμούς. Σε μεταγενέστερη έρευνά της (Bofferding, 2014), μελετώντας τον τρόπο αλλαγής των νοητικών μοντέλων των μαθητών ανάλογα με τη διδασκαλία των διαφορετικών σημασιών του προσήμου μείον, οδηγήθηκε στο συμπέρασμα πως μια ετεροχρονισμένη εισαγωγή στους αρνητικούς αριθμούς, μπορεί να κάνει τους μαθητές να αισθάνονται απογοητευμένοι, δεδομένου ότι πρέπει να διδαχθούν την πρόσθεση και την αφαίρεση σε ένα νέο σύνολο αριθμών. Η διαπίστωση της σύγχυσης που προκαλείται στους μαθητές με τις ποικίλες σημασίες του προσήμου μείον, αναδεικνύει την ανάγκη μιας προγενέστερης εισαγωγής του αρνητικού ακέραιου αριθμού στην τάξη των μαθηματικών, η οποία δεν θα βασίζεται καθαρά σε συμβολική αναπαράσταση, αλλά πιθανότατα θα πρέπει να συσχετιστεί με εμπειρίες και παραδείγματα από την πραγματική ζωή και θα μπορούσε να προσφέρει βαθύτερο νόημα και συνοχή στα μαθηματικά που διδάσκονται σε όλες τις τάξεις του δημοτικού.

Η μελέτη των Whitacre et al. (2012) παρέχει πρόσθετες αποδείξεις ότι οι μαθητές έχουν από μικροί διαισθήσεις που μπορούν ενδεχομένως να υποστηρίξουν τη μετέπειτα συλλογιστική τους σχετικά με τους ακέραιους αριθμούς με εξελιγμένους τρόπους. Η ικανότητα εξαγωγής συμπερασμάτων για τα πρόσημα των αριθμών είναι μια κρίσιμη πτυχή της κατανόησης των ακεραίων αριθμών, και διαπιστώθηκε ότι τα μικρά παιδιά παρουσιάζουν εκκολαπτόμενες ιδέες προς αυτή την κατεύθυνση.

Στη μελέτη των Schindler & Hußmann (2013), που εστίασε στη σύγκριση ακεραίων, φάνηκε πως το είδος της αναπαράστασης των αριθμών έπαιξε ουσιαστικό ρόλο, καθώς οι ερευνητές χρησιμοποίησαν τη συμβολική αναπαράσταση των αριθμών αλλά και αλλαγή μεταξύ των αναπαραστάσεων. Έτσι, δόθηκε μία εικόνα για τις ατομικές διαδικασίες και αντιλήψεις των μαθητών, καθώς και για το πώς οι διαδικασίες συνδέονται με τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, οι ερευνητές κατέληξαν πως οι μαθητές εν μέρει φαίνεται να μην είναι σε θέση να ερμηνεύσουν το μείον ως σύμβολο αρνητικών αριθμών, και αυτό υποδεικνύει ότι η εισαγωγή των αρνητικών ακεραίων στο μάθημα των μαθηματικών δεν θα πρέπει να βασίζεται καθαρά σε μια συμβολική αναπαράσταση, αλλά πιθανώς θα πρέπει να εμπεριέχει εμπειρίες σε πραγματικές συνθήκες. Επιπλέον, σημειώνουν πως ορισμένοι μαθητές πρέπει να ξεπεράσουν βαθιά ριζωμένες (λανθασμένες) αντιλήψεις από το δημοτικό σχολείο, π.χ. ότι δεν υπάρχουν αριθμοί κάτω από το μηδέν. Βέβαια, φάνηκε πως υπάρχουν και μαθητές που έχουν ήδη στη διάθεσή τους έναν ουσιαστικό και εξελιγμένο συμπερασματικό ιστό που περιλαμβάνει αρνητικούς ακέραιους - ακόμη και πριν διδαχθούν τους αρνητικούς ακεραίους στο σχολείο. Οι μαθητές αυτοί χρησιμοποιούν εμπειρίες της πραγματικής ζωής (π.χ. θερμοκρασίες) για την εννοιολογική ανάπτυξη.

Σε μεταγενέστερη μελέτη τους (Schindler et al. 2017) επιχειρούν να κατανοήσουν τη σύνδεση του συλλογισμού των μαθητών με τις προϋπάρχουσες σχολικές και εξωσχολικές εμπειρίες τους. Ανέλυσαν σε βάθος τους τρόπους συλλογισμού 2 μαθητών πριν από μια διδασκαλία και πώς επηρεάζονται αυτοί μέσα από μία σειρά μαθημάτων, όπου κυριαρχούν η αριθμογραμμή και το πλαίσιο της καθημερινότητας με χρέη. Τα αποτελέσματα έδειξαν πώς οι μαθητές αντλούν τη συλλογιστική τους από εξωσχολικές και σχολικές εμπειρίες πριν αλλά και μετά τη σειρά μαθημάτων. Επιπλέον, ορισμένοι μαθητές αντλούν απαντήσεις από εμπειρίες που δεν είναι μαθηματικά έγκυρες. Αυτό αναδεικνύει το γεγονός πως οι αρχικές απαντήσεις των μαθητών μπορούν εύκολα να παρερμηνευτούν, καθώς υπήρξαν περιπτώσεις όπου οι μαθητές έδωσαν σωστές απαντήσεις αλλά με λανθασμένη συλλογιστική. Αυτό υπογραμμίζει την ανάγκη διερεύνησης της συλλογιστικής των μαθητών. Τα αποτελέσματά τους υποδεικνύουν ότι μια πιο εξελιγμένη θεώρηση της συλλογιστικής των μαθητών, όπως προτείνεται στην παρούσα εργασία, είναι ευεργετική για την καταλληλότερη κατανόησή τους.

Οι Παπαδόπουλος και συνεργάτες (2020) διερεύνησαν το πώς μαθητές Δημοτικού διαχειρίζονται τους αρνητικούς αριθμούς, κάνοντας χρήση του περιβάλλοντος «Βήματα». Κατέληξαν πως επίδραση στη μάθηση είχε το περιβάλλον, που διευκόλυνε τους μαθητές να νοηματοδοτήσουν και να συμβολίσουν τους αρνητικούς αριθμούς. Επιπλέον, διαπίστωσαν πως οι μαθητές δε φτάνουν απευθείας στον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων με αρνητικούς αριθμούς, αλλά σταδιακά, μετακινούμενοι από την εικονική στη συμβολική αναπαράσταση.

Από τις παραπάνω έρευνες που απευθύνθηκαν σε μαθητές Δημοτικού φαίνεται πως οι μαθητές έχουν διαισθητικές γνώσεις για τους αρνητικούς αριθμούς και μπορούν να τους διαχειριστούν ως ένα βαθμό. Ορισμένα παιδιά, παρότι δεν είχαν διδαχθεί τους αρνητικούς αριθμούς, ήταν ικανά να συλλογίζονται για ακέραιους αριθμούς με σχετικά εξελιγμένους τρόπους (Bofferding, 2010, Schindler & Hußmann, 2013, Lamb et al. 2018). Μάλιστα, ορισμένοι μαθητές μπορούσαν να λύσουν ένα εύρος προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης χρησιμοποιώντας σχετικά εξελιγμένες και αφηρημένες στρατηγικές. Τα παιδιά μπορεί να είναι ικανά να επανεφεύρουν την αριθμητική των ακεραίων αριθμών από μόνα τους, αντί να διδάσκονται τους κανόνες των προσήμων μέσω άμεσης διδασκαλίας (Whitacre et al. 2012). Αυτά τα συμπεράσματα είναι χρήσιμα και για το σχεδιασμό μίας κατάλληλης διδασκαλίας στους αρνητικούς αριθμούς.

Οι μελέτες που συμπεριέλαβαν και μεγαλύτερους μαθητές για να συγκρίνουν το συλλογισμό τους με μικρότερους, κατέληξαν και αυτές σε αξιοσημείωτα συμπεράσματα. Τα ευρήματα των Whitacre et al. (2017) έδειξαν πως οι μαθητές της 7ης τάξης χρησιμοποιούσαν συχνότερα τη συλλογιστική με βάση τη διάταξη από ό,τι οι νεότεροι μαθητές και οδηγούνταν συχνότερα σε σωστές απαντήσεις. Ωστόσο, ορισμένοι μαθητές της 11ης τάξης, οι οποίοι απάντησαν σωστά σχεδόν σε κάθε πρόβλημα, χρησιμοποιούσαν μια πιο ισορροπημένη κατανομή της συλλογιστικής με βάση τη σειρά και το μέγεθος. Αυτό υποδηλώνει πως οι μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας έχουν βελτιωμένες επιδόσεις και έναν πιο ολοκληρωμένο τρόπο συλλογισμού, όπως είναι αναμενόμενο.

Οι Lamb et al. (2018) υλοποίησαν συνεντεύξεις σε μαθητές Δημοτικού, Γυμνασίου και Λυκείου με στόχο να διαπιστώσουν αν οι μαθητές μπορούσαν να επιλύσουν επιτυχώς προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης ακεραίων, να διερευνήσουν τις επιδόσεις και τους τρόπους συλλογισμού των μαθητών κατά την επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης ακεραίων, να κατηγοριοποιήσουν τα προβλήματα και να διερευνήσουν τη συσχέτισή τους με τη συλλογιστική των μαθητών. Διαπίστωσαν πως οι μαθητές έχουν την ικανότητα να αντιλαμβάνονται εξελιγμένες μαθηματικές ιδέες όταν συμπληρώνουν ασκήσεις με αγνώστους σε πρόσθεση και αφαίρεση ακέραιων αριθμών. Έδειξαν πως το είδος του προβλήματος επηρέασε την απόδοση των μαθητών και προκαλούσε διαφορετικό τρόπο συλλογισμού. Οι ερευνητές αναδεικνύουν πως η απόκτηση ευελιξίας κατά την πρόσθεση και την αφαίρεση ακεραίων αριθμών πρέπει να αποτελεί στόχο για κάθε μαθητή. Τα ευρήματα της έρευνας έδειξαν πως όσο πιο ευέλικτοι ήταν οι μαθητές στη χρήση των τρόπων συλλογισμού τους, τόσο πιο ακριβείς ήταν. Ακόμη, όσοι είχαν μεγαλύτερη εμπειρία με αρνητικούς αριθμούς, και συνεπώς ήταν μεγαλύτερη σε ηλικία, χρησιμοποιούν στρατηγικές συλλογισμού πιο ευέλικτα από όσους είχαν λιγότερη εμπειρία.

Οι έρευνες της βιβλιογραφίας δίνουν μία εικόνα για το πώς συλλογίζονται οι μαθητές κατά τη διαχείριση αρνητικών αριθμών. Βέβαια, μελετώντας κυρίως μαθητές μικρότερων τάξεων, πριν ακόμη αυτοί διδαχθούν τους αρνητικούς αριθμούς, δίνεται έμφαση στις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών για τους αριθμούς και πώς αυτές επιδρούν στις επιδόσεις τους και δε δίνεται πλήρης εικόνα για την εξέλιξη του συλλογισμού τους όταν αυτοί διδάσκονται τους αρνητικούς αριθμούς. Σε αυτό έρχεται να συμβάλλει η παρούσα εργασία, μελετώντας μεγαλύτερους μαθητές στα μέσα του Γυμνασίου, όπου θεωρείται πως έχουν ήδη μία επαρκή γνώση για τους αρνητικούς αριθμούς.

2.6. Εννοιολογική αλλαγή

Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές αναπτύσσουν την εννοιολογική κατανόηση για τους αρνητικούς αριθμούς μπορεί να διερευνηθεί και μέσω του μοντέλου της εννοιολογικής αλλαγής. Θεωρητικά πλαίσια όπως η εννοιολογική αλλαγή μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη μελέτη της γνωστικής ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών. Τα παιδιά φαίνεται να δομούν τις διαισθητικές τους γνώσεις σε πλέγματα εννοιών, τα οποία αλλάζουν αργά και με δυσκολία. Το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής διατυπώθηκε από τη Vosniadou (2003) για τη διερεύνηση της κατανόησης των εννοιών στις φυσικές επιστήμες και εξηγεί τον τρόπο ανάπτυξης των εννοιών από τους μαθητές. Η ερευνήτρια ορίζει την εννοιολογική αλλαγή ως το αποτέλεσμα μιας σύνθετης γνωστικής και κοινωνικής διαδικασίας με την οποία αναδιαρθρώνεται μια αρχική θεωρία-πλαίσιο.

Συνοπτικά, οι βασικοί άξονες του μοντέλου είναι:

- Η απόκτηση νέας γνώσης απαιτεί την αναδιοργάνωση της υπάρχουσας γνώσης. Όταν οι μαθητές μαθαίνουν κάτι νέο αυτό δε σημαίνει πως εμπλουτίζουν τις υπάρχουσες εννοιολογικές δομές.
- Η αναδιοργάνωση αυτή είναι δύσκολη και χρονοβόρα, ειδικά σε σχέση με τη μάθηση μέσω εμπλουτισμού των υπαρχουσών δομών. Πιθανή είναι η εμφάνιση παρανοήσεων κατά την αναδιοργάνωση.

- Όταν οι μαθητές προσπαθούν να αφομοιώσουν νέες πληροφορίες και να τις ενσωματώσουν στις υπάρχουσες γνωστικές τους δομές, τότε προκύπτουν παρανοήσεις.
- Για την εκμάθηση πολλών επιστημονικών εννοιών απαιτείται εννοιολογική αλλαγή.

Η εννοιολογική αλλαγή βέβαια δεν είναι κάτι που λαμβάνει χώρα αποκλειστικά στο μυαλό του ατόμου, ούτε αφορά μόνο τη διδασκαλία και τη μάθηση, αλλά είναι μια διαδικασία που μπορεί να επηρεαστεί από διάφορους παράγοντες. Μία πλήρης θεωρία εννοιολογικής αλλαγής πρέπει να περιλαμβάνει τέσσερις διαστάσεις (Vosniadou, 2003): 1) ατομικές γνωστικές αλλαγές (πχ. σε πεποιθήσεις, συλλογισμούς, στρατηγικές), 2) ατομικές μεταβολές κινήτρων και συναισθημάτων (πχ. στάσεις, κίνητρα για ενασχόληση με εργασία, στόχοι, ενδιαφέροντα), 3) εκπαιδευτικά περιβάλλοντα στα οποία υλοποιείται η διδασκαλία και 4) τα κοινωνικο-πολιτισμικά περιβάλλοντα των μαθητών.

Η εννοιολογική αλλαγή είναι ένας χώρος που βρίσκει εφαρμογή στην επιστήμη των μαθηματικών, παρότι τα μαθηματικά τυπικά θεωρούνται διαφορετικά από τις φυσικές επιστήμες. Στη συνέχεια, θα εστιάσουμε στη θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής στη μάθηση εννοιών από τους μαθητές, καθώς αυτό είναι που διερευνά η παρούσα έρευνα. Κατά την εξέταση της προοπτικής της εννοιολογικής αλλαγής, εγείρεται το ερώτημα του τι αλλάζει και με ποιον τρόπο. Η εννοιολογική αλλαγή περιλαμβάνει τον εμπλουτισμό ή την αναθεώρηση των τρεχουσών εννοιολογικών δομών των μαθητών για να φιλοξενήσουν τη νέα γνώση. Ακόμη, φαίνεται να περιλαμβάνει μια σταδιακή άρση των προϋποθέσεων της θεωρίας-πλαισίου που επιτρέπει το σχηματισμό πιο εξελιγμένων τρόπων συλλογισμού, μέχρι να επιτευχθεί η εννοιολογική αλλαγή (Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti, 2008).

Οι μαθητές κατά τη διδασκαλία των αρνητικών αριθμών αντιμετωπίζουν ένα πρόβλημα εννοιολογικής αλλαγής, καθώς έχουν προϋπάρχουσες αντιλήψεις για την έννοια του αριθμού και τις τέσσερις πράξεις που προέρχονται από τους φυσικούς αριθμούς. Αναφορικά με την έννοια του αριθμού, όπως αναλύθηκε εκτενέστερα και σε προηγούμενη ενότητα, οι μαθητές από τα πρώτα χρόνια του σχολείου σχηματίζουν αντιλήψεις για την έννοια του αριθμού, επηρεασμένοι από τους φυσικούς αριθμούς. Ορισμένες από αυτές είναι ότι οι αριθμοί είναι διακριτοί, δηλώνουν πλήθος και άρα είναι όλοι θετικοί, ενώ δεν υπάρχει αριθμός κάτω από το μηδέν. Αναφορικά με τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής, δημιουργούνται συνηθισμένες παρανοήσεις όπως ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός επιφέρουν πάντοτε αύξηση και η αφαίρεση και η διαίρεση ελάττωση. Επιπλέον, ο πολλαπλασιασμός εξηγείται συχνά ως επανάληψη πολλαπλών προσθέσεων και η διαίρεση ως μερισμός. Αυτές οι αντιλήψεις δυσκολεύουν τους μαθητές αργότερα στη διαχείριση πράξεων με ακεραίους αλλά και ρητούς αριθμούς.

Η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής επηρέασε την Bofferding (2014) στη μελέτη της για τη διερεύνηση των νοητικών μοντέλων των μαθητών στους αρνητικούς αριθμούς. Ακόμη, η έρευνα της Vlassis (2004) ανέδειξε δύο είδη εννοιολογικών αλλαγών που συμβαίνουν όταν μαθητές Γυμνασίου έπρεπε να διαχειριστούν στοιχειώδεις αλγεβρικές πράξεις πολυωνύμων. Το πρώτο είδος αφορά τη προσπάθεια των μαθητών να διαχειριστούν τις υπάρχουσες γνώσεις τους για τους φυσικούς αριθμούς και να εφαρμόσουν κανόνες για τους αρνητικούς αριθμούς. Το δεύτερο είδος εννοιολογικής αλλαγής σχετίζεται με το σύμβολο του μείον και αναπτύσσεται μέσω μιας διευρυμένης κατανόησης και μιας ευέλικτης χρήσης αυτού που η ερευνήτρια ονόμασε "αρνητικότητα". Επιπλέον, υποστήριξε πως αυτά τα δύο είδη εννοιολογικής αλλαγής δεν μπορούν να συμβούν πλήρως χωρίς οι μαθητές να αναπτύξουν μια μετα-εννοιολογική επίγνωση των ενεργειών τους. Εδώ είναι φανερή η σύνδεση του μοντέλου με τη μάθηση των αρνητικών αριθμών, καθώς μπορούν να προσεγγιστούν οι δυσκολίες που εγείρει το σύμβολο μείον.

Το πρόβλημα της εννοιολογικής αλλαγής που συνήθως τίθεται στη διδασκαλία είναι ένας από τους κύριους λόγους πίσω από την εκτεταμένη αποτυχία των μαθητών να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες (Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti, 2008). Παρατηρείται πως δεν έχει δοθεί η επαρκής προσοχή στο πρόβλημα της εννοιολογικής αλλαγής. Προκειμένου να ενταχθεί και να προωθηθεί μέσω της διδασκαλία εννοιών όπως οι ακέραιοι αριθμοί, θα πρέπει να σχεδιαστούν προγράμματα σπουδών και διδασκαλίας που μειώνουν το χάσμα μεταξύ των αναμενόμενων αρχικών γνώσεων των μαθητών και των νέων επιθυμητών γνώσεων. Έτσι, οι μαθητές θα μπορέσουν με επιτυχία να χρησιμοποιήσουν εποικοδομητικούς και εξελιγμένους μηχανισμούς μάθησης κατά τη διαχείριση των αρνητικών αριθμών.

2.7. Δυσκολίες και παρανοήσεις στην κατανόηση των αρνητικών αριθμών

Ποικίλες μελέτες δείχνουν ότι οι αρνητικοί αριθμοί δημιουργούν δυσκολίες στους μαθητές καθώς εκείνοι προσπαθούν να τους κατανοήσουν στη διάρκεια της διδασκαλίας (Peled et al., 1989). Προτού σχεδιαστεί η κατάλληλη διδασκαλία ακεραίων, είναι ιδιαίτερα σημαντικό να μελετηθούν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές ώστε να είναι δυνατή η αντιμετώπισή τους. Από τις έρευνες της βιβλιογραφίας φαίνεται πως οι μαθητές συναντούν δυσκολίες ως προς την εννοιολογική κατανόηση των αρνητικών αριθμών, ως προς τη σύγκριση και διάταξή τους, ως προς την τοποθέτηση στην αριθμογραμμή και ως προς τις πράξεις μεταξύ τους.

Αναφορικά με τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά την κατανόηση της έννοιας των αρνητικών αριθμών, οι μαθητές φαίνεται να δυσκολεύονται στην αφομοίωσή της. Στην έρευνα των Makonye & Fakude (2016) αναφέρεται πως η δυσκολία αυτή προέκυψε διότι οι μαθητές βασίστηκαν στο σχήμα που έχτισαν από το δημοτικό σχολείο στην έννοια του αριθμού. Οι Fuadiah & Suryadi (2019) παρατήρησαν πως οι μαθητές αναγνωρίζουν τους αρνητικούς αριθμούς ως μαθηματικά σύμβολα και αδυνατούν να τους συνδέσουν με την καθημερινότητα. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές αδυνατούσαν να δώσουν ένα πρόβλημα της καθημερινότητας με τη μορφή αριθμητικών πράξεων ακεραίων. Στο ίδιο συμπέρασμα κατέληξε και ο Ural (2016), καθώς παρατήρησε πως οι μαθητές δυσκολεύθηκαν να συνθέσουν ένα πρόβλημα με αρνητικούς αριθμούς, όταν τους δόθηκε μία συγκεκριμένη μαθηματική έκφραση. Ο Ural (2016) και η Bofferding (2014) συμπέραναν πως οι διαφορετικές σημασίες του προσήμου μείον δυσκολεύουν τους μαθητές στην αφομοίωση της έννοιας των αρνητικών αριθμών, όπως αναφέρθηκε εκτενώς και σε προηγούμενη ενότητα.

Αναφορικά με τη διάκριση αρνητικών ακεραίων από ένα σύνολο ρητών αριθμών, οι μαθητές έχουν την τάση να αγνοούν το αρνητικό πρόσημο και να αντιμετωπίζουν τους αρνητικούς αριθμούς ως θετικούς (Bofferding, 2014). Επιπλέον, οι Fuadiah & Suryadi (2017) διέκριναν μία κατηγορία μαθητών, οι οποίοι ήταν σε θέση να ξεχωρίσουν τους αρνητικούς αριθμούς με βάση το πρόσημο μείον, ωστόσο αδυνατούσαν να διακρίνουν τους αρνητικούς ακεραίους από ένα σύνολο ρητών αριθμών.

Στην έρευνα των Makonye & Fakude (2016) εντοπίστηκε ένα σημαντικό και μη αναμενόμενο εμπόδιο στη μάθηση των μαθητών, που ήταν η κακή γνώση της γλώσσας που χρησιμοποιείται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Ακόμη, δυσκολίες μπορεί να επιφέρει και η ίδια η γλώσσα των μαθηματικών, που έχει τη δική της ορολογία. Έτσι, οι μαθητές αντιμετώπισαν δύο γλωσσικά εμπόδια πριν μάθουν σωστά τα μαθηματικά: την αγγλική γλώσσα και τη μαθηματική γλώσσα. Το συμπέρασμα της έρευνας αυτής εγείρει προβληματισμούς πάνω στη διδασκαλία σε τάξεις με πολυπολιτισμικά στοιχεία και μαθητές διαφόρων εθνικοτήτων, γεγονός που παρατηρείται συχνά στην Ελληνική πραγματικότητα. Εάν οι μαθητές διδάσκονται τους αρνητικούς αριθμούς και τις ορολογίες στα Ελληνικά ενώ η μητρική τους γλώσσα είναι διαφορετική, είναι αναμενόμενη η εμφάνιση παρανοήσεων πάνω στις έννοιες του αριθμού, της κατεύθυνσης, του προσήμου αλλά και στη σύνδεσή τους με την καθημερινότητα.

Σχετικά με τη σύγκριση και τη διάταξη των αρνητικών αριθμών, οι μαθητές φαίνεται να δυσκολεύονται να τοποθετήσουν σε σειρά τους ακεραίους και να τους συγκρίνουν (Ural, 2016). Πιο συγκεκριμένα, κατά τη σύγκριση μεταξύ αρνητικών αριθμών, οι μαθητές τους αντιμετωπίζουν ως θετικούς και τείνουν να αγνοούν το πρόσημο, θεωρώντας ως μεγαλύτερο τον αριθμό με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή (π.χ. -5 > -3) (Bofferding, 2014, Makonye & Fakude, 2016, Fuadiah & Suryadi, 2017; Schindler et al. 2017). Ακόμη, το ίδιο φαινόμενο παρατηρείται κατά τη διάταξη ενός θετικού και ενός αρνητικού αριθμού (π.χ. 3 < -5) (Bofferding, 2014).

Δυσκολίες φαίνεται να συναντούν οι μαθητές και κατά την τοποθέτηση αρνητικών αριθμών στην αριθμογραμμή. Πιο αναλυτικά, στην έρευνα της Bofferding (2014) οι μαθητές δυσκολεύτηκαν στην τοποθέτηση αρνητικών αριθμών αριστερά του μηδενός και τους τοποθέτησαν όλους δεξιά του μηδενός, λαμβάνοντας υπόψιν μόνο την απόλυτη τιμή τους (π.χ. 0, 1, 2, -2, 3, -4, -5 κ.ο.κ. Επιπλέον, ορισμένοι μαθητές, παρότι τοποθετούσαν τους αρνητικούς αριθμούς αριστερά του μηδενός, τους ταξινομούσαν αντίστροφα ενώ ήταν σε θέση να ταξινομήσουν σωστά τους θετικούς αριθμούς (π.χ. -1, -2, -3, -4, 0, 1, 2, 3, 4).

Περισσότερα προβλήματα προκύπτουν όταν οι μαθητές εμπλέκουν αρνητικούς αριθμούς σε πράξεις ακέραιων αριθμών. Στην έρευνα των Makonye & Fakude (2016), οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να αντιμετωπίσουν τη μαθηματική διαδικαστική γνώση. Η μαθηματική διαδικαστική γνώση ασχολείται επίσης με την κατανόηση και την ικανότητα χρήσης της μαθηματικής σημειογραφίας. Έτσι, ορισμένα από τα λάθη των μαθητών ήταν διαδικαστικά λόγω έλλειψης εξοικείωσης με τη μαθηματική σημειογραφία. Σε παρανοήσεις σχετικές με το σύμβολο μείον καταλήγουν και άλλοι ερευνητές (Fuadiah & Suryadi, 2017 και 2019). Πιο αναλυτικά, οι μαθητές, ενώ κατανοούν το σύμβολο μείον ως ένδειξη αρνητικού αριθμού, δυσκολεύονται όταν πρέπει να το χειριστούν σε πράξεις ακέραιων αριθμών. Ακόμη, συχνά αγνοούν τα πρόσημα και επικεντρώνονται στις πράξεις πρόσθεση και αφαίρεση (π.χ. -5 – 3 = 2). Επιπρόσθετα, σύμφωνα με την έρευνα των Fuadiah & Suryadi (2017) άλλες δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές είναι στα προβλήματα που περιέχουν αρνητικούς αριθμούς και στην εύρεση κατάλληλων στρατηγικών για την επίλυσή τους. Σε μία μαθηματική έκφραση με άγνωστο, όταν αυτός αφορά αρνητικό αριθμό, οι μαθητές δυσκολεύονται να τον προσδιορίσουν. Τέλος, οι μαθητές δεν κατανοούν πλήρως την έννοια των αντίθετων αριθμών. Εμπειρικά, οι μαθητές φαίνεται να δυσκολεύονται περισσότερο στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης σε σχέση με του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, παρότι οι δύο τελευταίες πράξεις είναι δυσκολότερες στην απεικόνισή τους στην αριθμογραμμή ή στη συσχέτισή τους με κάποιο πραγματικό πρόβλημα.

Μετά την αναγνώριση των δυσκολιών που συναντούν οι μαθητές, εγείρεται το ερώτημα για τις αιτίες που οδηγούν σε αυτές. Οι δυσκολίες αυτές αφορούν συχνά λανθασμένες αντιλήψεις, διαδικαστικά λάθη, στρατηγικά λάθη και λογικά λάθη. Ο τρόπος διδασκαλίας, η ίδια η αφηρημένη φύση των αρνητικών αριθμών, οι γνωστικές διαδικασίες μάθησης των μαθητών και οι προϋπάρχουσες γνώσεις φαίνεται να επηρεάζουν τη μάθηση.

Οι μαθητές από την προσχολική ακόμη ηλικία, αλλά και από νωρίτερα, μέσω της πραγματικής ζωής έρχονται σε επαφή με τους φυσικούς αριθμούς και αποκτούν γνώση ως προς αυτούς, μέσω του πλήθους των αντικειμένων που παρατηρούν γύρω τους αλλά και μέσω της διδασκαλίας στο νηπιαγωγείο. Κατόπιν, εισέρχονται στο δημοτικό, όπου επίσης έρχονται σε επαφή με τους φυσικούς αριθμούς, μετρώντας αντικείμενα. Το γεγονός αυτό δημιουργεί προϋπάρχουσες γνώσεις για τους αριθμούς και έτσι ο μαθητής μαθαίνει να αναζητεί αριθμούς μόνο από το σύνολο των φυσικών, και συνδέει τον αριθμό με το πλήθος. Έτσι, η πρωταρχική σκέψη του για έναν αριθμό είναι ότι είναι φυσικός, και κατ’ επέκταση θετικός, την οποία διατηρεί έως και τις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου, όπου έρχεται σε πρώτη επαφή με τους αρνητικούς αριθμούς. Παρόμοια θεωρία υποστηρίζουν και οι Makonye & Fakude (2016), που αναφέρουν πως η εμμονή των μαθητών με τους θετικούς αριθμούς και η πρώτη τους επαφή με τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης στο Δημοτικό επηρεάζει την επίδοσή τους στους αρνητικούς αριθμούς. Σύμφωνα με τους Hativa & Cohen (1995), κύριες πηγές αυτών των δυσκολιών είναι (α) η σύγκρουση μεταξύ της πρακτικής έννοιας του μεγέθους ή της ποσότητας που συνδέεται με τους αριθμούς στην πρώιμη διδασκαλία της αριθμητικής και της έννοιας των αρνητικών αριθμών (β) η σύγκρουση μεταξύ των δύο διαφορετικών σημασιών του συμβόλου "-" και (γ) η απουσία ενός καλού, διαισθητικού, οικείου μοντέλου που θα ικανοποιούσε με συνέπεια όλες τις αλγεβρικές ιδιότητες των αριθμών.

Ορισμένες δυσκολίες και παρανοήσεις των μαθητών φαίνεται να οφείλονται στις πρακτικές διδασκαλίας των εκπαιδευτικών. Σύμφωνα με τους ερευνητές (Fuadiah & Suryadi, 2019, Makonye & Fakude, 2016), η έλλειψη επαρκών αναπαραστάσεων όπως η αριθμογραμμή και η έλλειψη σύνδεσης των αρνητικών αριθμών με πραγματικές καταστάσεις της καθημερινότητας φαίνεται να δυσχεραίνει τη μάθηση. Η παραδοσιακή διδασκαλία, με λιγοστή συζήτηση μεταξύ δασκάλου και μαθητών, όπου ο δάσκαλος κυριαρχεί μεταφέροντας τη γνώση με τη μέθοδο της διάλεξης, φαίνεται να μην έχει τα βέλτιστα αποτελέσματα. Ανασταλτικός παράγοντας στη μάθηση των αρνητικών αριθμών είναι και η προσκόλληση σε διαδικασίες, αποκομμένες από προβλήματα και περαιτέρω επεξηγήσεις. Έτσι, εγείρονται προβληματισμοί ως προς το τι μπορεί να αλλάξει στη διδασκαλία ώστε να βοηθηθούν οι μαθητές στην καλύτερη κατανόηση των αρνητικών αριθμών. Για να γίνει αυτό, θα πρέπει να τους δοθεί η ευκαιρία να μιλήσουν για τη σκέψη τους ώστε να φανεί τι είναι αυτό που τους δυσκολεύει.

2.8. Στόχος και ερευνητικά ερωτήματα

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση του τρόπου σκέψης των μαθητών Γυμνασίου στην κατανόηση των αρνητικών αριθμών. Με τη βαθύτερη κατανόηση του πώς σκέφτονται οι μαθητές και πώς αντιλαμβάνονται την έννοια του αρνητικού αριθμού μπορούν να υπερκεραστούν τα εμπόδια που συναντούν και να σχεδιαστεί μία βελτιωμένη διδασκαλία των ακεραίων.

Τα ερευνητικά ερωτήματα στα οποία διαρθρώνεται η παρούσα εργασία διατυπώνονται ως εξής:

1) Έχουν ενσωματώσει οι μαθητές Γυμνασίου τους αρνητικούς αριθμούς ως ισότιμα μέλη της κατηγορίας «αριθμός»;

Εξετάστηκε κατά πόσο οι μαθητές λαμβάνουν υπόψιν τους αρνητικούς αριθμούς ως πιθανές τιμές ενός «άγνωστου» αριθμού.

2) Με ποιους τρόπους νοηματοδοτούν οι μαθητές Γυμνασίου τους αρνητικούς αριθμούς;

Εξετάστηκε α) πώς περιγράφουν οι μαθητές τους αρνητικούς αριθμούς, και από ποια εξω-μαθηματικά πλαίσια αντλούν ερμηνείες για τους αρνητικούς αριθμούς και τις πράξεις τους, β) αν μπορούν να συγκρίνουν ακέραιους αριθμούς (αριθμητική αξία), γ) πώς νοηματοδοτούν το σύμβολο «μείον» (το σύμβολο ως «πρόσημο» και ως ένδειξη πράξης), δ) αν είναι σε θέση να αναπαραστήσουν τον αντίθετο ενός αρνητικού αριθμού στην αριθμογραμμή (ο αρνητικός αριθμός ως συμμετρικός ενός φυσικού ως προς το μηδέν) και ε) αν μπορούν να διατυπώσουν ένα κατάλληλο πρόβλημα για μία δεδομένη πράξη ακεραίων.

3) Υπάρχει διάσταση ανάμεσα στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση των μαθητών για τις πράξεις ακέραιων αριθμών;

Εξετάστηκε αν οι μαθητές έχουν διαδικαστική ευχέρεια με τις τέσσερις πράξεις με ακέραιους αριθμούς (διαδικαστική γνώση) και αν μπορούν να εξηγήσουν τους κανόνες για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ετερόσημων αριθμών (εννοιολογική γνώση). Επιπλέον, εξετάστηκε αν οι μαθητές διατηρούν τις παρανοήσεις «ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει» και «η πρόσθεση μεγαλώνει» τους αριθμούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.1. Ερευνητική Μέθοδος

Ο σχεδιασμός της παρούσας έρευνας έγινε με βάση την ποιοτική μέθοδο, διότι θεωρήθηκε καταλληλότερη για τη συγκέντρωση των ζητούμενων στοιχείων και την εις βάθος κατανόηση του τρόπου σκέψης των μαθητών για τους αρνητικούς αριθμούς.

Η ποιοτική μέθοδος επιλέχθηκε καθώς η προσοχή εστιάζεται στη βαθύτερη κατανόηση της προοπτικής μικρού δείγματος των συμμετεχόντων. Επιπλέον, παρέχεται η δυνατότητα για εις βάθος διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις έννοιες των αρνητικών αριθμών και τις πράξεις τους. Η ποιοτική μέθοδος επιτρέπει την ερμηνεία, την παρατήρηση και τη συζήτηση με τους μαθητές, καθώς τους δίνεται η ευκαιρία να εκφραστούν μέσω των σκέψεων τους. Δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να μιλήσουν για τις εμπειρίες τους και τις γνώσεις τους, να εμβαθύνουν τη σκέψη τους και να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους. Έτσι, η ερευνήτρια σε αυτή την εργασία παρατήρησε τους μαθητές, κράτησε σημειώσεις, και διευκολύνθηκε στην ερμηνεία των φαινομένων. Συνοψίζοντας, η ποιοτική μέθοδος επιλέχθηκε για την παρούσα έρευνα καθώς στόχος δεν είναι να αναλυθούν μόνο οι απαντήσεις των μαθητών, αλλά να μελετηθούν βαθύτερα οι τρόποι συλλογισμού τους όταν διαχειρίζονται αρνητικούς αριθμούς.

3.2. Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες της παρούσας έρευνας είναι 20 μαθητές της Β΄ Γυμνασίου που φοιτούν σε δημόσιο σχολείο του νομού Θεσσαλονίκης. Για την έρευνα αυτή επιλέχθηκαν μαθητές της Β΄ Γυμνασίου καθώς μόλις στα τέλη της Α΄ Γυμνασίου έχουν διδαχθεί τους αρνητικούς αριθμούς και τις πράξεις τους, ενώ στην αρχή της Β΄ Γυμνασίου έχουν δεχθεί και κάποια επαναληπτικά μαθήματα πάνω σε αυτή την ενότητα. Συνεπώς, επί της αρχής, σε αυτή τη φάση γνωρίζουν να χειρίζονται τους αρνητικούς αριθμούς και έχουν εξοικειωθεί ως ένα βαθμό με αυτούς. Έτσι, μπορούν να προκύψουν χρήσιμα συμπεράσματα σχετικά με το βαθμό στον οποίο τους έχουν κατανοήσει αλλά και για το πώς σκέφτονται όταν εκτελούν πράξεις με αυτούς.

Οι συγκεκριμένοι μαθητές επιλέχθηκαν με βάση τη σκόπιμη δειγματοληψία καθώς η ερευνήτρια είχε πρόσβαση σε αυτούς, καθώς διδάσκει στο σχολείο τους. Οι μαθητές ανήκουν στο ίδιο τμήμα, που έχει συνολικά 22 μαθητές, από τους οποίους οι 20 συμμετείχαν στην έρευνα. Σκοπίμως επιλέχθηκαν συμμετέχοντες από το ίδιο τμήμα καθώς στόχος ήταν να συμπεριληφθούν μαθητές διαφόρων επιδόσεων και να διασφαλιστεί σε μεγαλύτερο βαθμό η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων.

3.3. Παρουσίαση εργαλείου συλλογής δεδομένων

Το μεθοδολογικό εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα έρευνα για τη συλλογή δεδομένων είναι η συνέντευξη, με στόχο να αντληθούν οι απαραίτητες πληροφορίες για την προσέγγιση και την εμβάθυνση σε πτυχές του υπό μελέτη θέματος, κάτι το οποίο δεν είναι εφικτό στην περίπτωση του ερωτηματολογίου. Η συνέντευξη έδωσε τη δυνατότητα για αλληλεπίδραση και επικοινωνία μεταξύ της ερευνήτριας και των μαθητών, οι οποίοι με την καθοδήγησή της οδηγήθηκαν στο να εκφράσουν τον τρόπο με τον οποίο σκέφτονται.

Ως προς τη μορφή της, η συνέντευξη είναι βασισμένη σε έργα. Η μέθοδος της συνέντευξης βασισμένης σε έργα επιλέχθηκε ως εργαλείο καθώς επιτρέπει την αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών και της ερευνήτριας σε ένα πλαίσιο που καθορίζεται από τα έργα που τους δίνονται. Αυτή η αλληλεπίδραση οδήγησε σε επιπλέον πληροφορίες και δεδομένα που αξιοποιήθηκαν κατάλληλα. Οι απαντήσεις στη συνέντευξη σε αντίθεση με σε αντίθεση με τις απλές γραπτές απαντήσεις ενός ερωτηματολογίου, έδωσε έδαφος για περαιτέρω ανάλυση και σχολιασμό ώστε να γίνει πιο κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβάνεται ο κάθε μαθητής τους αρνητικούς αριθμούς. Ως προς τον τύπο της συνέντευξης, αυτή είναι ημιδομημένη καθώς αποτελείται από δομημένες ερωτήσεις που έχουν προκαθοριστεί από την ερευνήτρια και οι οποίες λειτουργούν ως κατευθυντήριοι άξονες, παρέχοντας ωστόσο τη δυνατότητα διατύπωσης νέων ερωτήσεων διευκρινιστικού τύπου, οι οποίες θα οδηγήσουν σε πληρέστερες απαντήσεις από τους μαθητές και στην καλύτερη κατανόηση των εμπειριών τους (Μαντζούκας, 2007). Όπως θα αναλυθεί και στη συνέχεια, σε ορισμένες ερωτήσεις η ερευνήτρια είχε προετοιμάσει και συμπληρωματικές ερωτήσεις που βοήθησαν στην επίτευξη του στόχου της κάθε ερώτησης. Έχοντας και την ελευθερία, σε ορισμένα σημεία έκανε και επιπρόσθετες ερωτήσεις διευκρινιστικού τύπου στους μαθητές ώστε να εκφράσουν πιο οργανωμένα και κατανοητά τη σκέψη τους.

Η συνέντευξη περιλαμβάνει 10 ερωτήσεις (βλ. Παράρτημα), οι οποίες μπορούν να ενταχθούν σε 3 θεματικούς άξονες που σχετίζονται με τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας εργασίας. Ο πρώτος διερευνά το κατά πόσο οι μαθητές ενσωματώνουν τους αρνητικούς αριθμούς ως ισότιμα μέλη της κατηγορίας αριθμός (ερωτήσεις 1, 2, 3). Ο δεύτερος άξονας διερευνά τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές νοηματοδοτούν τους αρνητικούς αριθμούς (ερωτήσεις 4, 5, 6, 7, 10). Ο τρίτος άξονας αφορά στη διερεύνηση της διάστασης μεταξύ της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης των μαθητών στις πράξεις με αρνητικούς αριθμούς (ερωτήσεις 8, 9).

Οι τρεις πρώτες ερωτήσεις εξετάζουν κατά πόσο οι μαθητές έχουν εντάξει τους αρνητικούς αριθμούς στην κατηγορία του αριθμού ως ισότιμα μέλη με τους θετικούς ρητούς, τουλάχιστον τους ακεραίους, όντας σε θέση να λάβουν υπόψιν αρνητικούς αριθμούς όταν αναζητούν τιμές για έναν «άγνωστο» αριθμό. Παρόμοια έργα έχουν βρεθεί στη βιβλιογραφία (Vlassis, 2008, Lamb et al. 2018) και είναι προσανατολισμένα περισσότερο στην Άλγεβρα περιλαμβάνοντας μεταβλητές. Οι συμμετέχοντες της συγκεκριμένης έρευνας τη στιγμή που υλοποιήθηκαν οι συνεντεύξεις ήταν στην αρχή της Β΄ Γυμνασίου, δεν είχαν διδαχθεί πλήρως τις εξισώσεις και μόλις είχαν εισαχθεί στην Άλγεβρα. Γι’ αυτό το λόγο, οι 2 από τις 3 ερωτήσεις που διαμορφώθηκαν έχουν κενό στη θέση των «άγνωστων» αριθμών.

Στην πρώτη ερώτηση οι μαθητές καλούνται να βρουν ζευγάρια αριθμών που να έχουν γινόμενο το 12. Σε αυτή την ερώτηση, η ερευνήτρια είχε έτοιμες συμπληρωματικές ερωτήσεις όπως «Υπάρχει άλλο ζευγάρι αριθμών;» ώστε να προτρέψει τους μαθητές να βρουν όσα περισσότερα ζευγάρια μπορούν. Κατόπιν, αφότου οι μαθητές δεν έβρισκαν άλλο ζευγάρι, ακολουθούσε η ερώτηση «Πιστεύεις ότι τα βρήκες όλα;», με στόχο να διαπιστωθεί αν οι μαθητές γνωρίζουν πως υπάρχουν και άλλα ζευγάρια αριθμών με αυτό το γινόμενο και αν θα αναφέρουν ρητά ζεύγη αρνητικών αριθμών.

Στη δεύτερη ερώτηση, καλούνται οι μαθητές να βρουν αν υπάρχει αριθμός τέτοιος ώστε το γινόμενό του με το 10 να είναι μικρότερο από το 10. Το έργο αυτό προϋποθέτει την υπέρβαση της παρανόησης «ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει» και απαιτεί να σκεφτούν πέραν των θετικών ρητών αριθμών. Η ερώτηση αυτή, δηλαδή, ελέγχει και μία εννοιολογική πτυχή της κατανόησης της πράξης του πολλαπλασιασμού στους ακέραιους αριθμούς.

Στην τρίτη ερώτηση, οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν ένα κυκλικό διάγραμμα που αναπαριστά την αριθμητική πρόταση $10 + 5 + (-5) = 10$, δηλαδή αφορά την έννοια του αντίθετου αριθμού. Το έργο αυτό προϋποθέτει την υπέρβαση της γνωστής παρανόηση «η πρόσθεση μεγαλώνει» και, παρόμοια με την προηγούμενη ερώτηση, ελέγχει μία εννοιολογική πτυχή της κατανόησης της πρόσθεσης ακέραιων αριθμών.

Η τέταρτη ερώτηση στοχεύει στην διερεύνηση του τρόπου περιγραφής των αρνητικών αριθμών από τους μαθητές αλλά και του τρόπου που τους συνδέουν με την καθημερινότητα. Αντίστοιχες ερωτήσεις κάνουν και άλλοι ερευνητές (Ural, 2016, Bryant et al. 2020), ζητώντας από τους μαθητές να περιγράψουν τι είναι οι αρνητικοί αριθμοί και πού τους συναντούν. Η ερώτηση διαμορφώθηκε ώστε να ζητά εξήγηση προς ένα μικρότερο παιδί, έτσι ώστε οι μαθητές να εκφραστούν καλύτερα και να αναλύσουν τη σκέψη τους.

Οι ερωτήσεις 5 και 6 αφορούν τη διάταξη των αρνητικών αριθμών, τομέας που σύμφωνα με τη βιβλιογραφία είναι σημαντικός στην κατανόησή της έννοιας τους. Η ερώτηση 5 περιλαμβάνει τέσσερα έργα σύγκρισης ακεραίων, στα οποία ζητείται από τους μαθητές να συμπληρώσουν το σύμβολο της σύγκρισης και να εξηγήσουν τη σκέψη τους. Παρόμοια έργα βρέθηκαν στις έρευνες που έχουν μελετηθεί από τη βιβλιογραφία (Schindler & Hußmann, 2013, Bofferding, 2014, Schindler & et. al. 2017), και επιλέχθηκαν 4 έργα που θεωρήθηκε πως καλύπτουν όλες τις περιπτώσεις, δύο έργα με σύγκριση θετικού με αρνητικό αριθμό, ένα στο οποίο η απόλυτη τιμή του θετικού αριθμού είναι μεγαλύτερη ενώ στο άλλο μικρότερη, ένα έργο με σύγκριση αρνητικού αριθμού με το 0, και ένα έργο με σύγκριση δύο αρνητικών αριθμών. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ερώτηση 5 θεωρείται οικεία στους μαθητές, καθώς πρόκειται για ένα συχνό ζητούμενο στο σχολικό πλαίσιο, για το οποίο διδάσκονται κανόνες και, υπό αυτή την έννοια, εξετάζει τη διαδικαστική ευχέρεια των μαθητών στους αρνητικούς αριθμούς.

Η ερώτηση 6 περιλαμβάνει κενή αριθμογραμμή όπου ζητείται από τους μαθητές να τοποθετήσουν δύο αριθμούς σε αυτή, το -2 και το –(-2). Παρόμοια έργα με τοποθέτηση σε αριθμογραμμή ζητούνται από μαθητές σε άλλες έρευνες (Bofferding, 2014) και στόχος είναι να φανεί το πώς οι μαθητές οπτικοποιούν τους αρνητικούς αριθμούς στην αριθμογραμμή, πώς τους διατάσσουν και πώς χειρίζονται τα δύο σύμβολα μείον στον αριθμό –(-2). Επιλέχθηκε έργο με κενή αριθμογραμμή, ώστε να δοθεί στους μαθητές η ελευθερία να τοποθετήσουν και άλλους αριθμούς όπως το 0 ως βοηθητικούς, και να διαχειριστούν την απόσταση στην αριθμογραμμή όπως επιθυμούν.

Η ερώτηση 7 αποτελείται από μία ισότητα με πράξεις και καλούνται οι μαθητές να κυκλώσουν τα σύμβολα πράξεων που αναγνωρίζουν. Σε αυτή την ερώτηση, η ερευνήτρια έκανε επιπλέον προσχεδιασμένες ερωτήσεις, όπως «Το σύμβολο αυτό τι πράξη δηλώνει;», «Ποιους αριθμούς προσθέτεις εδώ;» ή «Αφαίρεση μεταξύ ποιων αριθμών;». Παρόμοιο έργο περιλαμβάνει και η έρευνα της Bofferding (2014) και στόχος σε αυτή την ερώτηση είναι η διερεύνηση της ερμηνείας των συμβόλων από τους μαθητές και του διαχωρισμού των συμβόλων πράξεων και των προσήμων.

Οι ερωτήσεις 8 και 9 στοχεύουν στη διερεύνηση της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης των μαθητών στις πράξεις των ακεραίων αντίστοιχα. Η ερώτηση 8 αποτελείται από έργα στα οποία καλούνται οι μαθητές να εκτελέσουν τις ζητούμενες πράξεις γράφοντας το αποτέλεσμα. Έργα σαν αυτό συναντώνται συχνά στη βιβλιογραφία (Altiparmak & Özdoğan, 2010, Bofferding, 2010, Fuadiah & Suryadi, 2017) διαμορφωμένα στο επίπεδο των συμμετεχόντων. Σε αυτό το έργο συμπεριλήφθηκαν και οι τέσσερις πράξεις, με συνδυασμό θετικών και αρνητικών αριθμών ώστε να καλύπτουν ένα μεγάλο εύρος περιπτώσεων. Εδώ, στόχος είναι η διερεύνηση της διαδικαστικής γνώσης στις πράξεις, μελετώντας το κατά πόσο οι μαθητές έχουν μάθει να τις εκτελούν.

Από την άλλη μεριά, στην ερώτηση 9 καλούνται οι μαθητές να εξηγήσουν πώς προκύπτει το αποτέλεσμα σε μία πράξη πρόσθεσης και μία πολλαπλασιασμού μεταξύ ετερόσημων αριθμών. Στο έργο αυτό, ήταν αναμενόμενο ορισμένοι μαθητές να αναφέρουν τους κανόνες των προσήμων, συνεπώς η ερευνήτρια είχε σχεδιάσει έτοιμες συμπληρωματικές ερωτήσεις, όπως «Αυτός είναι ο κανόνας, όμως πως εξηγείται;» ή «Μπορείς να εξηγήσεις περισσότερο τον κανόνα αυτό;». Εδώ στόχος είναι να διερευνηθεί η εννοιολογική κατανόηση στις πράξεις με αρνητικούς αριθμούς, και να αναδειχθεί το αν οι μαθητές έχουν τρόπους να νοηματοδοτήσουν τις δύο αυτές πράξεις.

Στην τελευταία ερώτηση 10, καλούνται οι μαθητές να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα για την πράξη +3-7. Το έργο αυτό το συμπεριέλαβε στην έρευνά του και ο Ural (2016), ενώ παρόμοιο έργο με πολλαπλασιασμό συμπεριέλαβαν οι Altiparmak & Özdoğan (2010), και στόχος της ερώτησης είναι να διερευνηθεί το κατά πόσο είναι οι μαθητές εξοικειωμένοι με προβλήματα ακεραίων, αλλά και να φανεί αν μπορούν να συνδέσουν τους αρνητικούς αριθμούς με πλαίσια πέραν του συμβολικού.

3.4. Περιγραφή Ερευνητικής Διαδικασίας

Πριν τη διεξαγωγή των συνεντεύξεων, ζητήθηκε η άδεια από τη διεύθυνση του σχολείου, κατόπιν έγινε ενημέρωση των μαθητών και ζητήθηκε έγγραφη άδεια συμμετοχής και από τους κηδεμόνες τους (Παράρτημα). Οι συμμετέχοντες και οι κηδεμόνες τους διαβεβαιώθηκαν πως θα τηρηθεί εχεμύθεια καθώς και πως τα δεδομένα θα διαχειριστούν αυστηρά και μόνο για τους σκοπούς της έρευνας. Κατόπιν, πραγματοποιήθηκαν οι συνεντεύξεις με τους μαθητές διά ζώσης στο χώρο του σχολείου κατά το χρονικό διάστημα δύο μηνών.

Κατά τη διάρκεια της κάθε συνέντευξης, χορηγήθηκε στον κάθε μαθητή ένα φύλλο με τις ερωτήσεις της συνέντευξης. Η ερευνήτρια διατύπωνε την ερώτηση, και όπου χρειαζόταν έδινε διευκρινίσεις ή επαναλάμβανε την ερώτηση. Σε ορισμένα έργα, έκανε και συμπληρωματικές ερωτήσεις εφόσον έκρινε ότι χρειαζόταν, για την αιτιολόγηση των απαντήσεων του κάθε μαθητή ή για την περαιτέρω διευκρίνιση πάνω στον τρόπο σκέψης του. Η κάθε συνέντευξη είχε διάρκεια περίπου 15-20 λεπτά. Η συλλογή των δεδομένων έγινε μέσω των απαντημένων εντύπων της συνέντευξης και των αναλυτικών σημειώσεων που κράτησε η ερευνήτρια κατά τη διάρκεια της κάθε συνέντευξης.

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έγινε κατόπιν της αναλυτικής καταγραφής των απαντήσεων των συνεντεύξεων με συνδυασμό ποιοτικών και ποσοτικών μεθόδων. Αρχικά, οι απαντήσεις των μαθητών συγκεντρώθηκαν ανά ερώτηση, ομαδοποιήθηκαν και δημιουργήθηκαν κατηγορίες ώστε να γίνει παρουσίαση των αποτελεσμάτων σε πίνακες. Επιπλέον, το περιεχόμενο των συνεντεύξεων χωρίστηκε σε θεματικές ενότητες, με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας και τους θεματικούς άξονες στους οποίους στηρίχθηκε το εργαλείο συλλογής δεδομένων (Πίνακας 2). Η διαδικασία αυτή είναι δυναμική, με απαραίτητη την ενεργητική συμβολή της ερευνήτριας για την ανάπτυξη μίας διαλογικής σχέσης με τα δεδομένα και στη συνέχεια τη συγκρότηση θεματικών (Τσιώλης, 2018). Στην παρούσα εργασία για τον κάθε συμμετέχοντα δόθηκε ένα νούμερο π.χ. Μ1, Μ2 κλπ., ώστε να μη χρησιμοποιηθεί το μικρό του όνομα.

Πίνακας 2. Κωδικοποίηση απαντήσεων συνέντευξης

Κεντρικά Θέματα	**Υποενότητες**
Κ1. Οι αρνητικοί αριθμοί ως ισότιμα μέλη της κατηγορίας «αριθμός»	
Κ2. Νοηματοδότηση των αρνητικών αριθμών	Κ2.1. Περιγραφή αρνητικών αριθμών και σύνδεση με πλαίσια της καθημερινότητας Κ2.2. Σύγκριση ακεραίων

	K2.3. Αναπαράσταση στην αριθμογραμμή K2.4. Ερμηνεία του συμβόλου μείον K2.5. Διατύπωση προβλημάτων με αρνητικούς αριθμούς
K3. Κατανόηση των πράξεων με αρνητικούς αριθμούς	K3.1. Διαδικαστική γνώση στις πράξεις ακεραίων K3.2. Εννοιολογική κατανόηση στις πράξεις ακεραίων

3.5. Διασφάλιση Εγκυρότητας και Αξιοπιστίας

Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη παράγραφο, η ποιοτική μέθοδος στην οποία βασίστηκε η έρευνα αυτή διέπεται από την υποκειμενικότητα της ερευνήτριας και των συμμετεχόντων μαθητών. Συνεπώς, τα συμπεράσματα της έρευνας δεν είναι πλήρως γενικεύσιμα. Παρ' όλα αυτά, κατά το σχεδιασμό της μεθοδολογίας και την υλοποίηση των συνεντεύξεων ακολουθήθηκαν ορισμένες ενέργειες ώστε να διασφαλιστεί πως το εργαλείο που εφαρμόστηκε ήταν όσο το δυνατόν πιο έγκυρο και αξιόπιστο.

Για να επιτευχθεί η εγκυρότητα των συνεντεύξεων, το παρόν εργαλείο συγκρίθηκε με παρόμοια εργαλεία της βιβλιογραφίας. Έτσι, διατυπώθηκαν ερωτήσεις που παρόμοιές τους βρέθηκαν σε εργαλεία των ερευνών της βιβλιογραφίας (Vlassis, 2008, Altiparmak & Özdoğan, 2010, Bofferding, 2014, Ural et al. 2016, Schindler & et. al. 2017, Bryant et al. 2020). Επιπλέον, οι ερωτήσεις βασίστηκαν στα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας, ώστε να έχουν αντίστοιχους θεματικούς άξονες.

Ακόμη, για την εξασφάλιση της εγκυρότητας, έγινε προσπάθεια ώστε να απουσιάζει η μεροληψία από τη μεριά της ερευνήτριας. Οι ερωτήσεις σχεδιάστηκαν με τρόπο ώστε να απουσιάζουν καθοδηγητικές ερωτήσεις που μπορεί να προϊδεάσουν απαντήσεις των μαθητών, και διατυπώθηκαν ώστε να μην εμπεριέχουν απόψεις ή προσδοκίες της ερευνήτριας.

Το εργαλείο προτού διαμορφωθεί στην τελική του μορφή υλοποιήθηκε πιλοτικά σε 2 μαθητές εκτός του δείγματος της έρευνας ώστε να βελτιωθεί και να μελετηθεί η διάρκειά του. Κατόπιν της πιλοτικής εφαρμογής έγιναν βελτιώσεις και τροποποιήσεις, ώστε οι ερωτήσεις να είναι περισσότερο κατανοητές για τους μαθητές, αλλά και η διάρκεια να είναι τέτοια ώστε να μην κουράσει τους συμμετέχοντες.

Για την καλύτερη διασφάλιση της αξιοπιστίας της έρευνας, έγινε προσεκτικός σχεδιασμός της συνέντευξης, διατηρώντας την ίδια δομή και αλληλουχία λέξεων και ερωτήσεων για τον κάθε μαθητή που συμμετείχε. Οι ερωτήσεις διατυπώθηκαν με προσεκτική επιλογή λεξιλογίου και έχουν προσαρμοστεί στο επίπεδο της ηλικιακής ομάδας του δείγματος. Η συλλογή των δεδομένων έγινε με διαφάνεια, συστηματικότητα και προσοχή και η ανάλυσή τους βασίστηκε στην αντικειμενικότητα και το σωστό συνδυασμό μεθόδων αποδεκτών από την επιστημονική κοινότητα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Για την ποιοτική προσέγγιση των ερευνητικών ερωτημάτων εξετάστηκαν 20 συνεντεύξεις με μαθητές της Β΄ Γυμνασίου ενός δημοσίου σχολείου. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης των δεδομένων της έρευνας που διεξάχθηκε, ακολουθώντας τη μεθοδολογία που αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Στη συνέχεια, αναπτύσσονται και παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών δομημένες σε 3 ενότητες που αντιστοιχούν σε κάθε ένα από τα κεντρικά θέματα. Σε κάθε ενότητα, η παρουσίαση των αποτελεσμάτων δομείται σε υποενότητες που βασίζονται στα διαφορετικά έργα που είχαν να διαχειριστούν οι μαθητές και τις θεματικές τους.

Κ1. Οι αρνητικοί αριθμοί ως ισότιμα μέλη της κατηγορίας «αριθμός»

Αναφορικά με το κατά πόσο οι μαθητές θεωρούν τους αρνητικούς αριθμούς ισότιμους των θετικών και το αν μπορούν να σκεφτούν αρνητικούς αριθμούς ως λύση σε θέση ενός αγνώστου, οι ερωτήσεις 1, 2 και 3 της συνέντευξης είναι οι κατάλληλες για να δώσουν τα αντίστοιχα συμπεράσματα.

Στην πρώτη ερώτηση, οι μαθητές κλήθηκαν να βρουν όσα περισσότερα ζευγάρια αριθμών μπορούν να έχουν γινόμενο τον αριθμό 12. Οι απαντήσεις συγκεντρώθηκαν και κατηγοριοποιήθηκαν όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.

Πίνακας 3. Απαντήσεις στην ερώτηση 1

Κατηγορίες	**Αριθμός Απαντήσεων**
Απαντήσεις μόνο με φυσικούς αριθμούς	16
Απαντήσεις και με θετικούς ρητούς	2
Απαντήσεις και με αρνητικούς αριθμούς	2
Σύνολο	**20**

Έτσι, 18 μαθητές έδωσαν απαντήσεις μόνο με θετικούς αριθμούς, με 16 από αυτούς να αναφέρονται μόνο σε φυσικούς, ενώ μόνο 2 συμπεριέλαβαν και αρνητικούς αριθμούς στις απαντήσεις τους. Από τους 2 μαθητές που συμπεριέλαβαν και αρνητικούς αριθμούς, αξίζει να σημειωθεί πως ο ένας δήλωσε το ζευγάρι (-1)·(-12) και ο άλλος δήλωσε το (-3)·(+4), (-1)·12 και (-6)·2, φαίνεται πως σκέφτηκε την αρνητική λύση αλλά έκανε λάθος στα πρόσημα των αριθμών.

Ακολούθησε η ερώτηση σε όλους τους μαθητές αν θεωρούν πως βρήκαν όλα τα ζευγάρια των αριθμών, 15 από αυτούς απάντησαν αρνητικά, 4 θετικά και 1 δήλωσε πως δε γνωρίζει. Οι αρνητικές απαντήσεις περιλάμβαναν εκφράσεις όπως: «*σίγουρα θα υπάρχουν και άλλοι*», «*όχι, έχει πάρα πολλά, με κόμματα, δεκαδικούς…*», «*Σίγουρα θα έχει κάτι ακόμη που δε μπορώ να το βρω!*», «*όχι φυσικά*», που δηλώνουν πως οι περισσότεροι μαθητές είναι αρκετά σίγουροι πως τα ζευγάρια είναι πολλά. Μάλιστα μία μαθήτρια δήλωσε καθαρά πως «*Υπάρχουν άπειροι συνδυασμοί*». Ωστόσο, κανείς δεν αναφέρθηκε ρητά στους αρνητικούς αριθμούς. Από τις 4 θετικές απαντήσεις, ξεχώρισε μία, καθώς η μαθήτρια έψαξε τους διαιρέτες του 12, έδωσε όλα τα ζευγάρια φυσικών αριθμών με γινόμενο το 12 και κατόπιν δήλωσε πως θεωρεί πως έχει βρει όλα τα ζευγάρια αριθμών.

Στη δεύτερη ερώτηση, οι μαθητές κλήθηκαν να βρουν αν υπάρχει αριθμός που το γινόμενό του με το 10 να έχει αποτέλεσμα μικρότερο του 10. Οι απαντήσεις κατηγοριοποιήθηκαν αρχικά σε δύο αδρές κατηγορίες, με κριτήριο αν αναφερόταν ρητά ή όχι σε αρνητικούς αριθμούς (βλ. Πίνακα 4).

Πίνακας 4. Απαντήσεις στην ερώτηση 2

Κατηγορίες	**Υποκατηγορίες**	**Αριθμός Απαντήσεων**	**Παραδείγματα Απαντήσεων**
Απαντήσεις που περιλαμβάνουν ρητά αρνητικούς αριθμούς		**4**	«*Μείον. -1, -2, -3, -4*», «*Το 0,1… και το -2. Και το -1… Το -3, το -4.*»
Απαντήσεις που δεν περιλαμβάνουν	Ο αριθμός 0	9	«*Το 0! Άλλος δεν υπάρχει.*», «*Το 0 επί 10.*»
	Αδυναμία εύρεσης αριθμού	3	

ρητά αρνητικούς αριθμούς	Δεν υπάρχει αριθμός	2	«*Όχι, σίγουρα δεν υπάρχει!*», «*Δεν υπάρχει νομίζω*»
	Απαντήσεις μόνο με θετικούς ρητούς αριθμούς	1	«*… οι δεκαδικοί που είναι κάτω από το 1, όπως το 0,1 το 0,2…*»
	Όλοι εκτός από 1 και 0	1	
	Μερικό Σύνολο	**16**	
	Γενικό Σύνολο	**20**	

Σε αυτή την ερώτηση, 4 μαθητές συμπεριέλαβαν ρητά αρνητικούς αριθμούς στις απαντήσεις τους, από τους οποίους οι 2 συμπεριέλαβαν και ρητούς αριθμούς. Οι υπόλοιποι 16 μαθητές δε συμπεριέλαβαν ρητά αρνητικούς αριθμούς στις απαντήσεις τους.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι απαντήσεις των 9 μαθητών που έδωσαν ως απάντηση τον αριθμό 0. Αξιοσημείωτο είναι πως οι 5 από αυτούς, δήλωσαν ότι το 0 είναι ο μοναδικός αριθμός για τον οποίο ισχύει η ανισότητα. Ενδεικτικά, ορισμένα από σχόλια των μαθητών ήταν:

Μ3: «*Το 0! Άλλος δεν υπάρχει.*»

Μ5: «*Το 0! Δεν υπάρχει άλλος αριθμός. Έτσι νομίζω.»*

Μ16: «*Το 0. Αυτό είναι μόνο.*

- *Εννοείς ότι είναι ο μόνος αριθμός;*
- *Ναι, όλα τα άλλα βγαίνουν ή ίσα ή μεγαλύτερα.»*

Μάλιστα ένας μαθητής, ενώ σκέφτηκε το 0, έκανε λάθος στον πολλαπλασιασμό του με το 10, με αποτέλεσμα να μη δώσει κάποια απάντηση:

Μ4: «*Δε ξέρω αν υπάρχει…. Το 1 δεν είναι. Το 0… ούτε. Γιατί 0·10 δίνει 10 ακριβώς και όχι κάτω από 10.»*

Επιπλέον, αξιοσημείωτο είναι πως 2 από τους μαθητές που έδωσαν ως λύση τον αριθμό 0, εξέφρασαν αρχικά απορία για την πράξη του πολλαπλασιασμού, λέγοντας: «*Μα υπάρχει κάτι που αν το πολλαπλασιάσουμε με το 10 και να βγάζει λιγότερο;*» και «*Πώς γίνεται αυτό; Υπάρχει* *αριθμός;*». Αυτά τα σχόλια φανερώνουν πως οι μαθητές ανέμεναν το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού να είναι πάνω από 10.

Στη τρίτη ερώτηση της συνέντευξης, οι μαθητές κλήθηκαν να βρουν αν υπάρχει αριθμός που το άθροισμά του με το 15 να δίνει αποτέλεσμα 10. Οι απαντήσεις τους κατηγοριοποιήθηκαν ως σωστές (υπάρχει και είναι το -5) ή λανθασμένες (δεν υπάρχει ή καμία απάντηση) (βλ. Πίνακα 5).

Πίνακας 5. Απαντήσεις στην ερώτηση 3

Κατηγορίες	Υποκατηγορίες	Αριθμός Απαντήσεων
Σωστές απαντήσεις	Το -5	12
Λανθασμένες απαντήσεις	Δεν υπάρχει	7
	Δε ξέρω	1
Σύνολο		**20**

Συνολικά 12 μαθητές απάντησαν σωστά, ενώ 7 απάντησαν πως δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός. Από τις σωστές απαντήσεις, αξιοσημείωτο είναι πως ορισμένοι μαθητές ρώτησαν αν επιτρέπεται να πουν αρνητικό αριθμό, λέγοντας: «*Βασικά επιτρέπεται να πω μείον;*», «*Γίνεται να βάλω αρνητικό;*», *«… έχει και αρνητικούς και τέτοια;*». Επιπλέον, σε σωστές και λανθασμένες απαντήσεις, ξεχώρισαν τα σχόλια πάνω στον προβληματισμό πως η πράξη είναι πρόσθεση. Έτσι ορισμένοι μαθητές έκαναν τις παρακάτω ερωτήσεις, που φανερώνουν πως περιμένουν η πρόσθεση να δίνει πάντοτε μεγαλύτερο αποτέλεσμα από τους προσθετέους:

Μ10: «*Με πρόσθεση; Μα αν προσθέσω κάτι στο 15 δε γίνεται να κάνει 10, άρα δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός.*»

Μ14: «*Αυτό δε γίνεται, γιατί θα ήταν αφαίρεση!*»

Μ11: «*Με πρόσθεση;*

- *(Ερευνήτρια): Ναι.*
- *Να προσθέσω στο 15 και να γίνει 10;*
- *Ναι.*
- *Γίνεται να είναι αρνητικός;*
- *Ναι.*
- *Δε παίζει ρόλο το + όμως;… Το -5.*»

Συγκρίνοντας τα δεδομένα από τις παραπάνω τρεις ερωτήσεις, φαίνεται πως στις δύο πρώτες ερωτήσεις πολύ λίγοι μαθητές έλαβαν υπόψη και αναφέρθηκαν στους αρνητικούς αριθμούς. Η ερώτηση 3 συγκέντρωσε τις περισσότερες σωστές απαντήσεις αλλά και οι μαθητές βρήκαν γρηγορότερα το σωστό αριθμό. Αυτό είναι μία ένδειξη ότι οι μαθητές λαμβάνουν υπόψη τους αρνητικούς αριθμούς ευκολότερα σε ένα έργο με πρόσθεση παρά με πολλαπλασιασμό. Πρέπει ωστόσο να συνυπολογιστεί και πως στις ερωτήσεις 1 και 2 οι ζητούμενοι αριθμοί/συνδυασμοί ήταν άπειροι, ενώ στην ερώτηση 3 ο ζητούμενος αριθμός ήταν μοναδικός. Από τις απαντήσεις στην ερώτηση 1, που ήταν και η πρώτη που δόθηκε στους μαθητές, διαφαίνεται η τάση τους να σκέφτονται πρωτίστως τους φυσικούς αριθμούς ή θετικούς μη φυσικούς. Από τις ερωτήσεις 2 και 3, φαίνεται ότι η τάση αυτή, σε συνδυασμό με την αντίληψη ότι «ο πολλαπλασιασμός και η πρόσθεση μεγαλώνουν τους αριθμούς» λειτουργούν ως εμπόδια στην αντιμετώπιση των ερωτημάτων. Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι ακόμα και οι μαθητές που απαντούν τελικά σωστά στην ερώτηση 3, φαίνεται να προβληματίζονται για το αν πρέπει ή όχι να λαμβάνουν υπόψη τους αρνητικούς αριθμούς.

Κ2. Νοηματοδότηση των αρνητικών αριθμών

Κ2.1. Περιγραφή αρνητικών αριθμών και σύνδεση με πλαίσια της καθημερινότητας

Στην ερώτηση 4 της συνέντευξης οι μαθητές κλήθηκαν να περιγράψουν την έννοια του αρνητικού αριθμού καθώς και να απαντήσουν πού μπορεί να συναντήσουν έναν αρνητικό αριθμό. Η ερώτηση έχει δύο σκέλη και η ανάλυση χωρίστηκε αναλόγως.

Στο πρώτο ερώτημα, οι μαθητές δε φάνηκε να δυσκολεύτηκαν ιδιαίτερα, και οι απαντήσεις τους συγκεντρώθηκαν στον Πίνακα 6.

Πίνακας 6. Απαντήσεις στο ερώτημα 4(α)

Κατηγορίες	Υποκατηγορίες	Αριθμός Απαντήσεων	Παραδείγματα Απαντήσεων
Σωστές Απαντήσεις	Ένας αριθμός κάτω από το 0	11	«*Είναι 8 αριθμοί κάτω από το 0. Ουσιαστικά θα του έλεγα πως κάτω από το 0 είναι οι αριθμοί με μείον.*», «*Θα του έλεγα ότι μετά το 0 είναι οι θετικοί, και πριν το 0 είναι αρνητικοί. Ε πριν το 0 είναι και το -8.*», «*Το -8 είναι ένας αρνητικός αριθμός. Οι*

			αριθμοί που είναι πριν από το 0, όπως το -1, το -2, το -3… είναι… πώς να το πω… μικρότεροι από το 0.»
	Με χρήση της αριθμογραμμής	5	«*Γράφοντας μία γραμμή. Στη μέση είναι το 0, δεξιά οι θετικοί αριθμοί και αριστερά οι αρνητικοί, και εκεί θα έδειχνα το -8*»
	Με χρήση προβλήματος	1	«*Αν σου έδινα 8 καραμέλες εμένα θα μου έλειπαν οι 8 καραμέλες άρα θα ήμουν μείον 8 καραμέλες.*»
	Με χρήση αντίθετου αριθμού	1	«*Είναι αντίθετο από το 8, σαν αρνητικός αριθμός… Οι αρνητικοί αριθμοί είναι οι αντίθετοι από τους φυσικούς.*»
	Μερικό Σύνολο	**18**	
Λανθασμένες Απαντήσεις	Αδυναμία εξήγησης	1	
	Με χρήση της πράξης της αφαίρεσης	1	«*…ας πούμε ότι από τα 10 βγάζω τα 7, πόσα έμειναν, τότε είμαι μείον 7 άρα -7.*»
	Μερικό Σύνολο	**2**	
	Γενικό Σύνολο	**20**	

Φαίνεται πως 18 από τους 20 μαθητές έδωσαν σωστή επεξήγηση για το τι είναι ο αρνητικός αριθμός, με τους περισσότερους να χρησιμοποιούν το 0 ως σημείο αναφοράς (11 μαθητές) και την αριθμογραμμή (5 μαθητές). Ένας μαθητής αναφέρθηκε στους αρνητικούς αριθμούς ως «αντίθετους» των φυσικών. Από τις λανθασμένες απαντήσεις η μία που ξεχώρισε είναι μίας μαθήτριας που προσπάθησε να εξηγήσει έναν αρνητικό αριθμό με τη χρήση της αφαίρεσης, όμως αφαίρεσε έναν μικρότερο αριθμό από μεγαλύτερο, αποτυγχάνοντας έτσι να απαντήσει σωστά.

Στο δεύτερο ερώτημα της τέταρτης ερώτησης, οι μαθητές χρειάστηκαν λίγο περισσότερο χρόνο να σκεφτούν σε ποιες καταστάσεις συναντούν τους αρνητικούς αριθμούς. Σε αυτό το ερώτημα, οι απαντήσεις δε διαχωρίστηκαν σε σωστές και λάθος, καθώς ήταν όλες αποδεκτές. Ακόμη, ήταν διαφορετικές μεταξύ τους και γι’ αυτό δεν κατασκευάστηκαν διακριτές κατηγορίες. Έτσι, δεδομένου πως οι απαντήσεις των μαθητών εμπίπτουν σε περισσότερες από μία κατηγορίες, το άθροισμα των συχνοτήτων εμφάνισης δεν ταυτίζεται με το σύνολο των μαθητών (20). Οι κατηγορίες και οι απαντήσεις των μαθητών παρουσιάζονται στον Πίνακα 7.

Πίνακας 7. Απαντήσεις στο ερώτημα 4(β)

Κατηγορίες	**Αριθμός Απαντήσεων**	**Παραδείγματα Απαντήσεων**
Στα Μαθηματικά	17	«*… στις πράξεις στα Μαθηματικά*», «*Σε μία πράξη, στα Μαθηματικά, σε εξίσωση, σε προβλήματα.*»
Σε σχολικό πλαίσιο	6	«*Στη Φυσική…και στη Χημεία*», «*στα φροντιστήρια, στα ιδιαίτερα*», «*στο σχολείο*», «*στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο*»
Σε θερμοκρασίες	9	«*…μπορείς να τους συναντήσεις στον καιρό.*», «*…στη θερμοκρασία*»
Σε συναλλαγές	5	«*Αν πάρει κάτι, αν αγοράσει κάτι από το κινητό θα του εμφανίζει ότι έχασε 8 ευρώ.*», «*Στα ταμεία. Λοιπόν εκεί στα ρέστα που γράφει μείον...*», «*…στο σούπερ μάρκετ*», «*Και σε πληρωμές, αν πληρώσει κάτι. Και στο πόσα λεφτά θα του χρειαστούν αν θέλει να αγοράσει κάτι.*»
Στην τράπεζα	2	«*Σε κάποιο τραπεζικό λογαριασμό*»
Σε επαγγελματικό χώρο	1	«*…στη δουλειά του… Αν δουλέψει σε μία τράπεζα, ή με συναλλαγές.*»

Σε αυτή την ερώτηση, 17 απαντήσεις αναφέρονται στα Μαθηματικά και 6 σε άλλα σχολικά μαθήματα, ενώ 13 συνολικά απαντήσεις αναφέρθηκαν σε πλαίσια εκτός σχολείου, με επικρατέστερες τις αναφορές στη θερμοκρασία (9 μαθητές) και στο πλαίσιο των συναλλαγών, με την έννοια του χρέους ή ενός ποσού που «λείπει» (5 μαθητές). Στις περισσότερες συνεντεύξεις, η πρώτη απάντηση που έδιναν οι μαθητές αφορούσε τα Μαθηματικά, και κατόπιν ακολουθούσαν πιθανές άλλες κατηγορίες. Από αυτό το γεγονός φάνηκε πως η πιο αυθόρμητη σκέψη των μαθητών ήταν πως συναντούν τους αρνητικούς αριθμούς στα Μαθηματικά και στο σχολείο.

Κ2.2. Σύγκριση ακεραίων

Στη συνέχεια της συνέντευξης, στην ερώτηση 5, τα έργα αφορούσαν τη σύγκριση των ακεραίων. Εδώ οι μαθητές ολοκλήρωσαν σχετικά γρήγορα τα έργα, και οι περισσότεροι φάνηκε να μη δυσκολεύονται να εξηγήσουν τη σκέψη τους, ενισχύοντας την πεποίθησή μας ότι πρόκειται για έργο οικείο στους μαθητές. Καθώς οι συγκρίσεις είναι 4, οι απαντήσεις κατηγοριοποιήθηκαν ξεχωριστά στους Πίνακες 8, 9, 10 και 11.

Πίνακας 8. Απαντήσεις στη σύγκριση 9...-6

Κατηγορίες	Κατηγορίες εξήγησης	Αριθμός Απαντήσεων
Σωστά σύμβολα ανισότητας	Οι αρνητικοί είναι πάντα μικρότεροι από τους θετικούς αριθμούς	8
	Σύγκριση με το 0	6
	Με χρήση της αριθμογραμμής	3
	Σύγκριση απόλυτων τιμών	1
	Μερικό Σύνολο	**18**
Λανθασμένα σύμβολα ανισότητας	Σωστή σύγκριση με το 0	1
	Απόσταση από το 0	1
	Μερικό Σύνολο	**2**
	Γενικό Σύνολο	**20**

Πίνακας 9. Απαντήσεις στη σύγκριση -27...-31

Κατηγορίες	Κατηγορίες εξήγησης	Αριθμός Απαντήσεων
Σωστά σύμβολα ανισότητας	Απόσταση από το 0	9
	Με χρήση της αριθμογραμμής	4
	Σύγκριση απόλυτων τιμών	1
	Μερικό Σύνολο	**14**
	Σύγκριση απόλυτων τιμών	4

Λανθασμένα σύμβολα ανισότητας	Με χρήση της αριθμογραμμής	1
	Δε γνωρίζω/στην τύχη	1
	Μερικό Σύνολο	**6**
	Γενικό Σύνολο	**20**

Πίνακας 10. Απαντήσεις στη σύγκριση 12...-25

Κατηγορίες	Κατηγορίες εξήγησης	Αριθμός Απαντήσεων
Σωστά σύμβολα ανισότητας	Οι αρνητικοί είναι πάντα μικρότεροι από τους θετικούς αριθμούς	8
	Σύγκριση με το 0	7
	Με χρήση της αριθμογραμμής	2
	Δε γνωρίζω/στην τύχη	1
	Μερικό Σύνολο	**18**
Λανθασμένα σύμβολα ανισότητας	Σωστή σύγκριση με το 0	1
	Απόσταση μεταξύ των αριθμών	1
	Μερικό Σύνολο	**2**
	Γενικό Σύνολο	**20**

Πίνακας 11. Απαντήσεις στη σύγκριση 0...-9

Κατηγορίες	Κατηγορίες εξήγησης	Αριθμός Απαντήσεων
Σωστά σύμβολα ανισότητας	Οι αρνητικοί είναι πάντα μικρότεροι	8
	Σύγκριση με το 0	5
	Με χρήση της αριθμογραμμής	4
	Μερικό Σύνολο	**17**

Λανθασμένα σύμβολα ανισότητας	Δε γνωρίζω/στην τύχη	3
	Μερικό Σύνολο	**3**
	Γενικό Σύνολο	**20**

Σχολιάζοντας τους παραπάνω πίνακες, στα 3 έργα σύγκρισης αρνητικού με θετικό αριθμό και αρνητικού αριθμού με 0 οι περισσότεροι μαθητές απάντησαν σωστά. Στα 3 αυτά έργα παρατηρήθηκε πως στις περισσότερες απαντήσεις, ο ίδιος μαθητής έκανε τη σύγκριση με ίδιο τρόπο συλλογισμού. Οι απαντήσεις τους στηρίχθηκαν κυρίως στο γεγονός πως ο αρνητικός αριθμός είναι πάντα μικρότερος, ακολουθούσε η σύγκριση και των δύο αριθμών με το 0 και η χρήση της αριθμογραμμής. Αξιοσημείωτο είναι πως στη σύγκριση του 9 με το -6, μία μαθήτρια έβαλε σωστό σύμβολο, διατυπώνοντας όμως λάθος σκεπτικό: «*Σκέφτηκα την απόλυτη τιμή. Η απόλυτη τιμή του -6 είναι 6 και έτσι το 9 είναι μεγαλύτερο από το 6.*».

Από τις λανθασμένες απαντήσεις στα 3 αυτά έργα, ορισμένες είναι άξιες αναφοράς. Συγκεκριμένα, ένας μαθητής ενώ τοποθέτησε λάθος σύμβολα στις συγκρίσεις 9…-6 και 12…-25, εξηγώντας ανέφερε σωστά το ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος, συγκρίνοντάς τους με το 0. Από αυτό το γεγονός φαίνεται πως το λάθος οφείλεται στο ότι πιθανόν δε γνώριζε καλά τα σύμβολα της ανισότητας. Ακόμη, μία μαθήτρια για τη σύγκριση 9…-6 ανέφερε «*Το 6 είναι πιο κοντά στο 0.*».

Το έργο με τις λιγότερες σωστές απαντήσεις ήταν η σύγκριση -27…-31, όπου 14 μαθητές απάντησαν σωστά, με επικρατέστερους τρόπους σκέψης την απόσταση των αριθμών από το 0 ή τη θέση τους στην αριθμογραμμή. Από τους 6 μαθητές με λάθος απαντήσεις, αξιοσημείωτο είναι πως οι 4 έκαναν τη σύγκριση των απόλυτων τιμών, δηλώνοντας πως αφού 31>27 τότε και -31>-27. Τέλος, ένας μαθητής χρησιμοποιώντας την αριθμογραμμή, ανέφερε λανθασμένα: «*Το -27, η θέση του είναι πιο πίσω σε θέση από -31*», απάντηση από την οποία προκύπτει η υπόθεση πως τοποθετεί λανθασμένα το -27 και το -31 στην αριθμογραμμή λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τις απόλυτες τιμές τους. Από τις απαντήσεις των μαθητών, φαίνεται πως ορισμένοι τείνουν να συγκρίνουν τις απόλυτες τιμές των αριθμών αντί για αυτούς, αγνοώντας τα πρόσημά τους, παρανόηση που αναφέρεται και στη βιβλιογραφία.

Κ2.3. Αναπαράσταση στην αριθμογραμμή

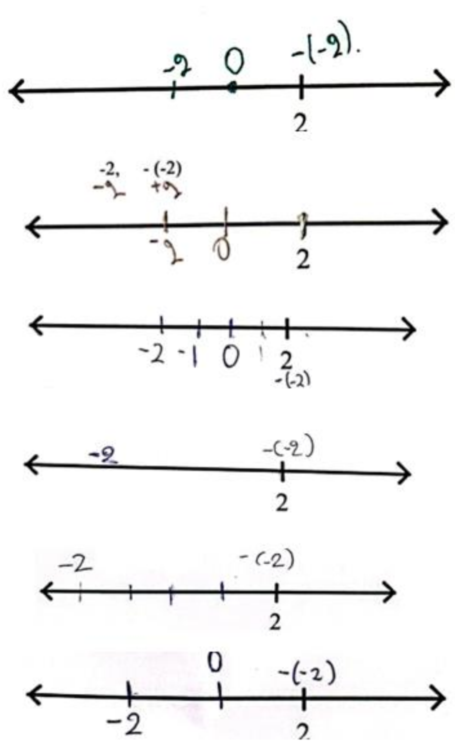
Αναφορικά με την ερώτηση 6, που αφορούσε την αναπαράσταση στην αριθμογραμμή, οι μαθητές χρειάστηκαν διευκρινίσεις ως προς το τι έπρεπε να κάνουν. Όλοι οι μαθητές τοποθέτησαν σχετικά γρήγορα το -2 στην αριθμογραμμή, και δυσκολεύτηκαν περισσότερο στην τοποθέτηση του –(-2). Οι απαντήσεις των μαθητών συγκεντρώνονται στον Πίνακα 12 και διαχωρίζονται στους δύο αριθμούς που είχαν να τοποθετήσουν.

Πίνακας 12. Απαντήσεις στην ερώτηση 6

		Τοποθέτηση του -2	**Τοποθέτηση του -(-2)**
Κατηγορίες	**Υποκατηγορίες**	**Αριθμός Απαντήσεων**	**Αριθμός Απαντήσεων**
Σωστές Απαντήσεις	Με σημείο αναφοράς	12	5
	Χωρίς σημείο αναφοράς	7	1
	Μερικό Σύνολο	**19**	**6**
Λανθασμένες Απαντήσεις	Με σημείο αναφοράς		7
	Χωρίς σημείο αναφοράς	1	7
	Μερικό Σύνολο	**1**	**14**
	Γενικό Σύνολο	**20**	**20**

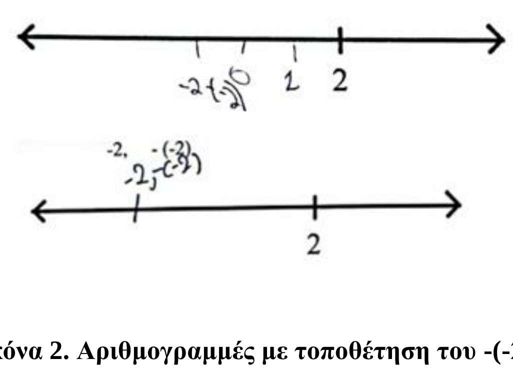
Επεξηγώντας τον παραπάνω πίνακα, η κατηγοριοποίηση έγινε βάση του αν η αριθμογραμμή ήταν σωστή ή όχι και του αν οι μαθητές χρησιμοποίησαν σημεία αναφοράς το 0 και άλλους αριθμούς. Στην τοποθέτηση του -2, καθώς δε ζητήθηκε ρητά από τους μαθητές να τοποθετήσουν σημεία αναφοράς, σωστές θεωρήθηκαν οι αριθμογραμμές όπου η τοποθέτησή του έγινε αριστερά του 2. Έτσι, 19 μαθητές τοποθέτησαν σωστά το -2, από τους οποίους οι 12 χρησιμοποίησαν σημεία αναφοράς επί της αριθμογραμμής, γεγονός που καθιστά τις απαντήσεις τους πιο πλήρεις. Ο ένας μαθητής που είχε λανθασμένη απάντηση, τοποθέτησε το -2 δεξιά του 2.

Στην τοποθέτηση του –(-2), σωστές θεωρήθηκαν οι απαντήσεις μαθητών που βρήκαν πως το –(-2) είναι το 2 και το τοποθέτησαν εκεί. Έτσι, 6 μαθητές το τοποθέτησαν σωστά, από τους οποίους οι 5 χρησιμοποίησαν και σημεία αναφοράς (Εικόνα 1). Από τους 6 αυτούς μαθητές, οι 3 σημείωσαν πως το –(-2) είναι το 2 είτε γραπτά είτε απευθείας στην αριθμογραμμή χωρίς να εξηγήσουν τη σκέψη τους, ενώ οι υπόλοιποι 3 ανέφεραν τον κανόνα πως «*όταν υπάρχουν δύο μείον κάνουν συν*» ή πως «*όταν έχει παρένθεση και μείον γίνεται +2*».



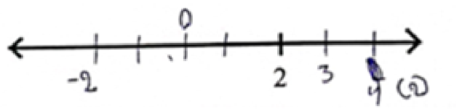
Εικόνα 1. Αριθμογραμμές με σωστή τοποθέτηση του -(-2)

Από τους 14 μαθητές που δεν μπόρεσαν να τοποθετήσουν σωστά το –(-2), οι 7 άφησαν κενό το έργο, οι 2 το τοποθέτησαν στο -2 και οι 5 το τοποθέτησαν μετά το 2. Ενδιαφέρον παρουσίασαν οι 2 μαθητές που τοποθέτησαν το –(-2) στη θέση του -2, καθώς φάνηκε θεώρησαν πως είναι ο ίδιος αριθμός (Εικόνα 2).

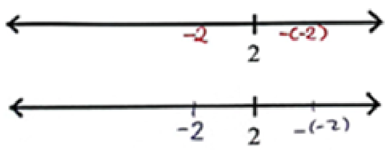


Εικόνα 2. Αριθμογραμμές με τοποθέτηση του -(-2) στο 2

Αξιοσημείωτες είναι και ορισμένες από τις λανθασμένες αριθμογραμμές, καθώς 1 μαθητής δήλωσε πως το –(-2) είναι το 4, λέγοντας: «*το –(-2)… αλλάζει το πρόσημο άρα θα γίνει +, άρα θα πάει 2,3,4.*» (Εικόνα 3) και 2 μαθητές χρησιμοποίησαν ως σημείο αναφοράς το 2 αντί για το 0 (Εικόνα 4).



Εικόνα 3. Αριθμογραμμή με τοποθέτηση του -(-2) στο 4



Εικόνα 4. Αριθμογραμμές με σημείο αναφοράς το 2

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα, συνολικά οι σωστές αριθμογραμμές που παραδόθηκαν ήταν 6, καθώς σε αυτές οι μαθητές κατάφεραν να αποτυπώσουν σωστά και τους 2 αριθμούς.

Κ2.4. Ερμηνεία του συμβόλου μείον

Η σημασία των συμβόλων για την κατανόηση των αρνητικών αριθμών περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Σε πολλά σημεία της συνέντευξης οι μαθητές έδωσαν απαντήσεις από τις οποίες διαφαίνεται το πώς αντιλαμβάνονται τα σύμβολα των πράξεων. Αρχικά, εξολοκλήρου το έργο 7 αφορούσε την ερμηνεία των συμβόλων, καθώς οι μαθητές κλήθηκαν να ξεχωρίσουν ποια είναι σύμβολα πράξεων σε μία αριθμητική παράσταση. Οι απαντήσεις των μαθητών συγκεντρώθηκαν και παρουσιάζονται στον Πίνακα 13.

Πίνακας 13. Απαντήσεις στην ερώτηση 7

Κατηγορίες	Υποκατηγορίες	Αριθμός Απαντήσεων
Κύκλωσαν τα σωστά σύμβολα	Σωστή δήλωση πράξεων	10
	Λανθασμένη δήλωση πράξης 2^{ου} μέλους	3

	Μερικό Σύνολο	**13**
Λανθασμένες απαντήσεις	Κύκλωσαν και πρόσημα	3
	Κύκλωσαν το ίσον	2
	Υπογράμμισαν/ Κύκλωσαν ολόκληρα τα μέλη	2
	Μερικό Σύνολο	**7**
	Γενικό Σύνολο	**20**

Όπως φαίνεται, από τους 13 μαθητές που κύκλωσαν τα σωστά σύμβολα, οι 3 δε δήλωσαν τη σωστή πράξη για το δεύτερο μέλος της παράστασης. Συγκεκριμένα, δήλωσαν την πράξη πρόσθεση αντί για αφαίρεση. Επιπλέον, ακόμη 2 μαθητές με λανθασμένες απαντήσεις, δήλωσαν επίσης πως το μείον του δεύτερου μέλους δηλώνει πρόσθεση. Ενδεικτικές απαντήσεις τους ήταν:

«Μ2: *Αφαίρεση, αλλά από το -10 το -13. Άρα πρόσθεση. Ναι εντάξει… Αφαίρεση.*

- *Τι σε μπερδεύει εδώ;*
- *Ότι είναι ουσιαστικά πρόσθεση. Μέσα στο κεφάλι μας κάνουμε πρόσθεση, αφού είναι δύο αρνητικοί αριθμοί.*»

«Μ5: *Είναι η πράξη 10 – (-13) που και εδώ θα αλλάξει και θα γίνει +13 άρα 10+13 άρα πρόσθεση.*»

«Μ12: *Αφαίρεση… όχι… αφαίρεση… βέβαια μετά γίνεται +23 άρα πρόσθεση… Πρόσθεση τελικά…*»

Επιπλέον, αξιοσημείωτες ήταν οι απαντήσεις 3 μαθητών που κύκλωσαν και πρόσημα αντί για σύμβολα πράξεων. Ενδεικτικά αποσπάσματα είναι:

«*(Ερευνήτρια): -Και το μείον εδώ τι δηλώνει; (πρόσημο του -10)*

-(Μ10): Είναι αφαίρεση, αυτό που θα βρω από το εδώ (1ο μέλος) θα το κάνω μείον 10.»

«(*Ερευνήτρια): -Το επόμενο μείον; (-10)*

- *(Μ11): Αφού το μείον αν είχε μπροστά αριθμό θα ήταν αφαίρεση, βέβαια ανάλογα το πρόσημο αλλά έτσι το σκέφτηκα.*

…

- *Και το τελευταίο μείον; (-13)*

- *Όπως το μπροστά, αν είχε αποτέλεσμα μπροστά θα κάναμε αφαίρεση.»*

«(*ερευνήτρια): - Το επόμενο μείον; (το -10)*

- *(Μ17): Χαρακτηρίζει το 10 ότι είναι κάτω από το 0.*
- *Άρα δηλώνει πράξη;*
- *Ναι, αφαίρεση μεταξύ του 10 και του 13*.»

Ενδιαφέρον παρουσίασε και ο προβληματισμός για το σύμβολο ίσον, καθώς εμφανίστηκε σε 2 μαθητές που έδωσαν λάθος απάντηση, μη μπορώντας να δηλώσουν τι πράξη δηλώνει αλλά και ενός μαθητή που έδωσε σωστή απάντηση, ο οποίος σχολίασε σκεπτόμενος δυνατά: «*Ίσως θα μπορούσα και το ίσον…Δεν είμαι σίγουρος.* (δε το κυκλώνει)».

Από την υπόλοιπη συνέντευξη, σε διάφορα σημεία εμφανίστηκαν δηλώσεις μαθητών που αφορούσαν την ερμηνεία του συμβόλου μείον. Η σύγχυση για το αν τα σύμβολα δηλώνουν πρόσημο ή πράξη είναι φανερή σε διάφορα σημεία της συνέντευξης. Αρχικά, στην ερώτηση 3, οι μαθητές βλέποντας το συν προβληματίζονται για το πως εφόσον δηλώνει πρόσθεση, τοποθετώντας το -5 θα γίνει αφαίρεση. Επιπλέον, στην ερώτηση 4 μία μαθήτρια προσπαθώντας να περιγράψει τι είναι το -8, ανέφερε «*Αν σε μία πράξη έχω 10-8 που είναι αφαίρεση, πλέον το μείον δεν είναι πράξη αλλά το πρόσημο του 8 άρα είναι -8… Τώρα που το σκέφτομαι ακούγονται το ίδιο…*». Τέλος, σε σημεία όπου οι μαθητές έπρεπε να διαχειριστούν 2 σύμβολα μείον μαζί, φάνηκε να δυσκολεύονται. Συγκεκριμένα, στο έργο 6 με την τοποθέτηση του –(-2) σε αριθμογραμμή και στο έργο 8 στην πράξη 5-(-7), ορισμένοι μαθητές δήλωσαν πως δε γνωρίζουν να το διαχειριστούν, ορισμένοι έκαναν λάθος πράξη και ορισμένοι φάνηκε να γνωρίζουν τον κανόνα με τα πρόσημα. Ενδεικτικά κάποια σχόλιά τους είναι τα παρακάτω:

Μ4: «*Έχει δύο μείον και η παρένθεση. Δε το θυμάμαι*»,

Μ14: «*Είναι αρνητικός και μέσα και απ' έξω. Θα το αφήσω*»

Μ8: «*Είναι αφαίρεση, επειδή έχει το μείον, και αφαιρείς 5 – 7*»

Μ1: «*Έκανα την πράξη που ζητάει, αφαίρεση, και έβαλα το μεγαλύτερο πρόσημο του αριθμού που είναι μεγαλύτερος και έκανα την αφαίρεση 7-5 = 2*»

M2: «*Έξω από την παρένθεση έχει μείον, άρα το πρόσημο μέσα στην παρένθεση αλλάζει άρα γίνεται συν…*»

M14: «*Όταν υπάρχει μείον έξω από την παρένθεση αλλάζει πρόσημο άρα γίνεται +7 και άρα 5+7=12*»

K2.5. Διατύπωση προβλημάτων με αρνητικούς αριθμούς

Το κατά πόσο οι μαθητές Γυμνασίου είναι σε θέση να διατυπώσουν προβλήματα με δεδομένη μία πράξη ακεραίων εξετάστηκε στην ερώτηση 10, όπου οι μαθητές κλήθηκαν να δώσουν ένα πρόβλημα για την πράξη +3 – 7. Έγινε κατηγοριοποίηση των απαντήσεων και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα στον Πίνακα 14.

Πίνακας 14. Απαντήσεις στην ερώτηση 10

Κατηγορίες	**Αριθμός Απαντήσεων**	**Παραδείγματα Απαντήσεων**
Σωστά προβλήματα	6	«*…έχει χάλια καιρό έξω (γελάει) και έχει -7 βαθμούς. Το μεσημέρι όμως προστέθηκαν…ανέβηκαν +3 βαθμοί.*», «*…Ένα παιδί χρωστούσε 7 ευρώ σε ένα φίλο του. Και του έδωσε 3 ευρώ. Πόσα ευρώ χρωστάει τώρα;», «Σε ένα ίντερνετ καφέ η κάθε ώρα κοστίζει 1 ευρώ. Ο Γιάννης έχει 3€ και θέλει να παίξει για 7 ώρες. Πόσα € θα πρέπει να πληρώσει την επόμενη φορά που θα πάει, για να μη χρωστάει; Ή αλλιώς πόσα ευρώ θα είναι τα χρωστούμενα για την επόμενη φορά;»*
Μερικώς σωστά προβλήματα	1	«*Λοιπόν, η κ. Γεωργιάδου είχε πάει να αγοράσει μήλα. Αλλά από τα 7 μήλα είχε λεφτά μόνο για τα 3. Πόσα μήλα έμειναν; Άρα -4*»
Λανθασμένα προβλήματα	5	«*…έχω 3 € και η κολλητή μου έχασε 7€. Αν τα προσθέσουμε πόσο θα βγει; 10€!*», «*Δώσαμε καραμέλες σε ένα παιδί, δε ξέρουμε πόσες. Του έμειναν 3 και έφαγε 7, πόσες καραμέλες του δώσαμε;*»,
Αδυναμία εύρεσης προβλήματος	8	
Σύνολο	**20**	

Σε αυτή την ερώτηση, 6 μαθητές απάντησαν δίνοντας ένα σωστό πρόβλημα, 1 με μερικώς σωστό πρόβλημα, 5 δίνοντας λανθασμένο πρόβλημα και 8 δεν μπόρεσαν να δώσουν κανένα πρόβλημα. Το πρόβλημα που θεωρήθηκε μερικώς σωστό αφορά σωστή σκέψη του μαθητή όμως με λανθασμένη διατύπωση. Αναφορικά με τις θεματικές που επέλεξαν οι μαθητές, αυτές ήταν παρόμοιες με αυτές που αναφέρθηκαν στην ερώτηση 3, συγκεκριμένα, η θερμοκρασία και το χρέος ή μία ποσότητα που «λείπει». Θα πρέπει να σημειωθεί η αντιμετάθεση των όρων της πράξης (-7+3 αντί του +3-7) που εμφανίστηκε σε κάποια από τα σωστά προβλήματα (π.χ. στα δύο πρώτα προβλήματα του Πίνακα 14).

Από τους 8 μαθητές που δεν έδωσαν κάποιο πρόβλημα, οι 2 δήλωσαν ότι η δυσκολία έγκειται στο ότι η δοσμένη πράξη έχει πρόσημα.

Το πώς οι μαθητές διαχειρίζονται τα προβλήματα με αρνητικούς αριθμούς φάνηκε και σε άλλα σημεία της συνέντευξης. Συγκεκριμένα, στην ερώτηση 4, ένας μαθητής εξήγησε το -8 δίνοντας ένα πρόβλημα, και στην ερώτηση 9 δύο μαθητές εξήγησαν την πράξη -10+3=-7 δίνοντας σωστά προβλήματα. Φαίνεται λοιπόν ότι ακόμη και όταν δε τους ζητήθηκε, ορισμένοι μαθητές σκέφτηκαν τα προβλήματα ώστε να εξηγήσουν ή να διαχειριστούν αρνητικούς αριθμούς.

Κ3. Κατανόηση των πράξεων με αρνητικούς αριθμούς

Κ3.1. Διαδικαστική γνώση στις πράξεις ακεραίων

Η διαδικαστική γνώση των μαθητών στις πράξεις με αρνητικούς αριθμούς εξετάστηκε κυρίως στην ερώτηση 8, που αποτελούταν από 8 πράξεις συνολικά.

Οι απαντήσεις ομαδοποιήθηκαν και παρουσιάζονται στον Πίνακα 15.

Πίνακας 15. Απαντήσεις στην ερώτηση 8

Κατηγορίες	**-8+4**	**-2+6**	**2-8**	**-4-4**	**5-(-7)**	**(-2)(-3)**	**3(-5)**	**-12:(+6)**
Σωστές Απαντήσεις	20	17	14	8	5	10	14	6
Λάθος Απαντήσεις	0	3	5	12	10	8	2	1
Καμία Απάντηση			1		5	2	2	13

Από τις απαντήσεις σε αυτή την ερώτηση, αξίζει να αναφερθεί πως το έργο -8+4 συγκέντρωσε τις περισσότερες σωστές απαντήσεις (20), και το έργο 5-(-7) τις λιγότερες σωστές απαντήσεις (5), ενώ το έργο -12:(+6) τα περισσότερα κενά (13). Αξιοσημείωτο είναι πως στο έργο -4-4 από τις 12 λάθος απαντήσεις, οι 7 ήταν το 0 και οι 5 το 8, που σημαίνει πως είτε οι μαθητές έκαναν πρόσθεση αγνοώντας τα πρόσημα, είτε έκαναν αφαίρεση βλέποντας το ένα σύμβολο μείον. Στο έργο 5-(-7) από τις 10 λανθασμένες απαντήσεις, οι 6 ήταν το -2, γεγονός που δηλώνει πως οι μαθητές έκαναν την πράξη 5-7 αγνοώντας την παρένθεση και το δεύτερο μείον. Ορισμένοι μαθητές εξήγησαν τη σκέψη τους σε αυτή την πράξη, κάτι που αναλύθηκε σε προηγούμενη ενότητα (Κ2) και αφορούσε τη σημασία του προσήμου μείον.

Κ3.2. Εννοιολογική κατανόηση στις πράξεις ακεραίων

Η εννοιολογική κατανόηση των μαθητών σε πράξεις με αρνητικούς αριθμούς εξετάστηκε κυρίως από την ερώτηση 9. Το έργο χωρίζεται σε δύο πράξεις, μία πρόσθεσης και μίας πολλαπλασιασμού ετερόσημων αριθμών. Για την πρόσθεση θετικού και αρνητικού αριθμού, 5 μαθητές μπόρεσαν να εξηγήσουν την πράξη χωρίς να χρησιμοποιήσουν τον κανόνα, αφότου τους ζητήθηκε από την ερευνήτρια περαιτέρω εξήγηση (Πίνακας 16).

Πίνακας 16. Απαντήσεις για την πρόσθεση -10+3 = -7 στην ερώτηση 9

Κατηγορίες	Υποκατηγορίες	Αριθμός Απαντήσεων	Παραδείγματα Απαντήσεων
Σωστές Απαντήσεις	Μόνο με χρήση κανόνα προσήμων	9	«*ο μεγαλύτερος είναι αρνητικός άρα θα δίνει πάντα αρνητικό αποτέλεσμα και κάνουμε αφαίρεση*», «*Για το -10+3, επειδή έχουν διαφορετικά πρόσημα κάνουμε αφαίρεση 10-3=7 και βάζουμε το πρόσημο του μεγαλύτερου*»
	Με χρήση αριθμογραμμής	2	«*Άμα πάρουμε μία αριθμογραμμή και πάμε στο -10, και προχωρήσουμε 3 θέσεις μπροστά, προς το 0, θα φτάσουμε στο -7*», «*Σε μία γραμμή με κέντρο το 0, είμαστε στο -10. Και θα προσθέσω 3 γραμμούλες από το +3 προς το 0,… προς τα δεξιά… και θα φτάσω στο -7*»

	Με χρήση προβλήματος	2	*«... σου λείπουν 10 βόλοι άρα είσαι -10 βόλους. Και βρήκες άλλους 3 βόλους άρα σου λείπουν σύνολο 7 βόλοι, άρα -7», «Αν μου χρωστά ένας φίλος 10 καραμέλες και μου δώσει 3 καραμέλες τότε θα μου χρωστά 7 καραμέλες.»*
	Με χρήση αντίστροφης πράξης	1	*«Είναι η ίδια λογική με το 3-10. Γράφεται όμως με αντίστροφη σειρά. Δηλαδή εδώ αφαιρώ το 10 από το 3, που βγάζει αρνητικό.… Ουσιαστικά είναι μείον το κρατάμε, και 10-3 =7 άρα επιστρέφουμε το μείον.* (γράφοντας – (10 – 3) = -7)»
	Μερικό Σύνολο	**14**	
Λανθασμένες Απαντήσεις	Αδυναμία εξήγησης	**6**	
	Γενικό Σύνολο	**20**	

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσίασε η πράξη του πολλαπλασιασμού, για την οποία οι απαντήσεις των μαθητών κατηγοριοποιήθηκαν στον Πίνακα 17.

Πίνακας 17. Απαντήσεις για τον πολλαπλασιασμό (-1)(+2)=(-2) στην ερώτηση 9

Κατηγορίες	**Υποκατηγορίες**	**Αριθμός Απαντήσεων**
Σωστές Απαντήσεις	Με χρήση κανόνα προσήμων	12
Λανθασμένες Απαντήσεις	Αδυναμία εξήγησης	8
	Σύνολο	**20**

Οι 12 μαθητές έκαναν χρήση του κανόνα, και όταν τους ζητήθηκε να τον εξηγήσουν, κανένας δεν κατάφερε να εξηγήσει περισσότερο την πράξη αυτή. Ενδεικτικές απαντήσεις τους ήταν: «*Δε ξέρω, αυτός είναι ο κανόνας*», «*Όχι, πού να ξέρω, από το βιβλίο τον διάβασα. Από αυτούς που τους έβγαλαν τους κανόνες*», «*Μακάρι να ξερα*».

Θέλοντας να συσχετιστεί η εννοιολογική και η διαδικαστική γνώση στις πράξεις με αρνητικούς αριθμούς, συγκρίθηκαν τα αποτελέσματα από τα έργα 8 και 9. Οι σωστές απαντήσεις ανά μαθητή συγκεντρώθηκαν (Πίνακας 18), και καθώς τα έργα είναι 8, θεωρήθηκε πως όσοι έχουν πάνω από 5/8 σωστές απαντήσεις γνωρίζουν σε ένα βαθμό να εκτελούν πράξεις με ακεραίους.

Πίνακας 18. Συγκέντρωση σωστών απαντήσεων ανά μαθητή στην ερώτηση 8

Σωστές απαντήσεις	Αριθμός Μαθητών
8/8	3
7/8	2
6/8	1
5/8	6
4/8	1
3/8	3
2/8	3
1/8	1
Σύνολο	**20**

Για τους 12 μαθητές με πάνω από 5/8 σωστά αποτελέσματα, μόνο οι 4 μπόρεσαν να εξηγήσουν την πρόσθεση χωρίς τον κανόνα ενώ κανένας δεν κατάφερε να εξηγήσει τον πολλαπλασιασμό χωρίς τον κανόνα. Έτσι, μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα πως οι μαθητές που εκτέλεσαν σωστά τις πράξεις βασίστηκαν κυρίως στους κανόνες των προσήμων, με την πλειοψηφία να μη μπορεί να εξηγήσει περισσότερο τους κανόνες αυτούς.

Συγκεντρωτικά Αποτελέσματα

Για να δοθεί μία συνολική εικόνα των επιδόσεων των μαθητών σε όλα τα έργα της συνέντευξης, δημιουργήθηκε ένας συγκεντρωτικός πίνακας που περιλαμβάνει τις επιδόσεις ανά μαθητή και ανά έργο, καθώς και τα σύνολα (Πίνακας 19). Κάθε μαθητής βαθμολογήθηκε σε κάθε ερώτημα με 1, αν είχε ανταποκριθεί με επιτυχία και 0 σε διαφορετική περίπτωση. Η «επιτυχία» καθορίστηκε για κάθε μία ερώτηση ξεχωριστά (βλ. Υπόμνημα του Πίνακα 19). Οι μαθητές χωρίστηκαν σε ομάδες αναλόγως των συνολικών επιδόσεών τους. Τα έργα είναι συνολικά 23, έτσι θεωρήθηκε πως υψηλές επιδόσεις έχουν οι μαθητές που ολοκλήρωσαν με επιτυχία πάνω από τα 2/3 των έργων (15 έργα), χαμηλές επιδόσεις αυτοί που ολοκλήρωσαν επιτυχώς κάτω από το 1/3 των έργων (περίπου 8 έργα) ενώ μέτριες επιδόσεις οι υπόλοιποι μαθητές. Με αυτό τον τρόπο, δημιουργήθηκαν 3 ομάδες μαθητών, η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει 4 μαθητές με πάνω από 15 σωστές απαντήσεις (υψηλές επιδόσεις), η δεύτερη ομάδα περιλαμβάνει 12 μαθητές με 9 έως 15 σωστές απαντήσεις (μέτριες επιδόσεις) και η τρίτη ομάδα περιλαμβάνει 4 μαθητές με λιγότερες από 9 σωστές απαντήσεις (χαμηλές επιδόσεις).

	Μαθητές	Ερωτήσεις																							Σύνολο max. 23
		1	2	3	4	5				6		7		8								9		10	
						5.1	5.2	5.3	5.4	6.1	6.2	7.1	7.2	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	9.1	9.2		
1η ομάδα (N=4)	**M2**	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	**21**
	M17	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	**19**
	M1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	**17**
	M16	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	**17**
	Μερικό Σύνολο	**1**	**3**	**3**	**4**	**4**	**3**	**4**	**4**	**4**	**4**	**3**	**3**	**4**	**4**	**4**	**4**	**3**	**3**	**4**	**3**	**2**	**0**	**3**	
2η ομάδα (N=12)	**M6**	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	**15**
	M9	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	**15**
	M14	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	**15**
	M3	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	**14**
	M11	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	**14**
	M12	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	**14**
	M20	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	**14**
	M8	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	**12**
	M19	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	**12**
	M7	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**10**
	M10	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	**9**
	M13	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	**9**
	Μερικό Σύνολο	**1**	**1**	**6**	**11**	**11**	**10**	**12**	**12**	**11**	**2**	**8**	**6**	**12**	**11**	**10**	**4**	**2**	**5**	**9**	**3**	**3**	**0**	**3**	
3η ομάδα (N=4)	**M4**	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	**8**
	M18	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	**8**
	M5	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	**7**
	M15	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**7**
	Μερικό Σύνολο	**0**	**0**	**3**	**3**	**3**	**1**	**2**	**1**	**4**	**0**	**2**	**2**	**4**	**2**	**0**	**0**	**0**	**2**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	
	Γενικό Σύνολο	**2**	**4**	**12**	**18**	**18**	**14**	**18**	**17**	**19**	**6**	**13**	**11**	**20**	**17**	**14**	**8**	**5**	**10**	**14**	**6**	**5**	**0**	**6**	

Πίνακας 19. Συγκεντρωτικός Πίνακας με τις επιδόσεις των μαθητών

Υπόμνημα Πίνακα 19.

Ερώτηση	Κωδικός
1	1: Αναφέρεται ρητά σε αρνητικούς, είτε στο πρώτο, είτε στο δεύτερο σκέλος της ερώτησης, 0: Δεν αναφέρεται σε αρνητικούς αριθμούς
2	1: Αναφέρεται ρητά σε αρνητικούς αριθμούς, 0: Δεν αναφέρεται
3	1: Σωστό, 2: Λάθος
4	1: Περιγράφει έναν αρνητικό αριθμό, 0: Δεν περιγράφει
5	1: Σωστό, 0: Λάθος
6	1: Σωστό, 0: Λάθος
7.1	1: Διακρίνει τα σύμβολα των πράξεων από τα πρόσημα, 0: Δεν τα διακρίνει
7.2	1: Δηλώνει σωστά τις πράξεις, 0: Δεν τις δηλώνει σωστά
8	1: Σωστό, 0:Λάθος
9	1: Εξηγεί την πράξη χωρίς τον κανόνα, 0: Δεν εξηγεί
10	1: Κατασκευάζει σωστό πρόβλημα, 0: Δεν κατασκευάζει

Σχολιάζοντας τον Πίνακα 19, φαίνεται πως ορισμένα έργα ήταν πιο απαιτητικά από άλλα. Πιο συγκεκριμένα, ως πιο απαιτητικά κρίθηκαν τα έργα στα οποία λιγότεροι από 5 μαθητές απάντησαν σωστά. Το πιο απαιτητικό ερώτημα, το οποίο δεν απάντησε κανείς μαθητής, ήταν η ερμηνεία του πολλαπλασιασμού ετερόσημων αριθμών χωρίς τη χρήση του κανόνα (ερώτηση 9). Και το αντίστοιχο ερώτημα για την πρόσθεση ετερόσημων αριθμών φάνηκε απαιτητικό, αλλά 5 μαθητές έδωσαν σε αυτό μια ερμηνεία. Δεύτερη πιο απαιτητική ήταν η ερώτηση 1, καθώς μόνο δύο μαθητές σκέφτηκαν αρνητικούς αριθμούς ως παράγοντες ενός θετικού γινομένου, συμπεριλαμβανομένων και τριών από τους τέσσερις μαθητές της $1^{ης}$ Ομάδας, που είχαν γενικά υψηλή επίδοση. Επόμενη σε δυσκολία ήταν η ερώτηση 2, στην οποία μόνο 4 μαθητές συμπεριέλαβαν αρνητικούς αριθμούς στην ανίσωση 10x…<10, τρεις εκ των οποίων από την $1^{η}$ ομάδα. Αντίθετα, στο έργο 3, δώδεκα μαθητές, από όλες τις ομάδες, πρότειναν το -5 ως απάντηση στην πρόταση 15 + …=10.

Πάνω από τους μισούς μαθητές διαφοροποίησαν τα σύμβολα των πράξεων από τα πρόσημα και δήλωσαν σωστά τις πράξεις (7.1, 7.2). και δέκα μαθητές απάντησαν σωστά και στις δύο ερωτήσεις. Πέντε μαθητές, ωστόσο, δεν απάντησαν σωστά σε καμία από τις δύο, με έναν να προέρχεται από την 1η ομάδα.

Στο έργο 6 παρουσιάζεται μια μεγάλη διαφορά ανάμεσα στις δύο ερωτήσεις (6.1, 6.2). Δεκαεννιά μαθητές τοποθέτησαν το -2 στην αριθμογραμμή, αλλά μόνο 6 τοποθέτησαν σωστά το –(-2) (οι τέσσερις μαθητές της $1^{ης}$ ομάδας και δύο από τη $2^{η}$ ομάδα).

Τα έργα που ήταν πιο κοντά στη σχολική εμπειρία των μαθητών ήταν το έργο 5 (σύγκριση ακεραίων) και το έργο 8 (πράξεις με ακέραιους αριθμούς). Το έργο 5 συγκέντρωσε γενικά πολλές σωστές απαντήσεις, με εξαίρεση την 5.2 στην οποία έπρεπε να συγκριθούν δύο αρνητικοί αριθμοί (-27, -31). Στη σύγκριση αυτή και οι τρεις ομάδες σημείωσαν χαμηλότερη επίδοση, σε σχέση με τις υπόλοιπες ερωτήσεις του ίδιου έργου. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το εύρημα ότι καμία ομάδα δεν απέφυγε εντελώς τα λάθη στο σύνολο των ερωτήσεων στο έργο 5. Συγκεκριμένα, ένας από τους τέσσερις μαθητές της $1^{ης}$ ομάδας και τρεις από τους δώδεκα της $2^{ης}$ ομάδας έκαναν από ένα λάθος, ενώ οι μαθητές της $3^{ης}$ ομάδας είχαν από δύο τουλάχιστον λάθη στα τέσσερα ερωτήματα.

Στο έργο 8 παρατηρείται διαφοροποίηση ανάμεσα στις επιμέρους ερωτήσεις, από 20 σωστές απαντήσεις στο 8.1 (-8+4), έως 5 σωστές απαντήσεις στο 8.5 (5-(-7)). Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι 14 μαθητές απάντησαν σωστά στην περίπτωση του γινομένου ετερόσημων αριθμών, αλλά μόνο 6 στην περίπτωση του πηλίκου ετερόσημων αριθμών. Και σε αυτό το έργο, καμία ομάδα δεν απέφυγε τα λάθη στο σύνολο των ερωτήσεων. Από την άλλη μεριά, η διατύπωση προβλήματος για μια πράξη με ακέραιους αριθμούς (+3-7) ήταν εφικτή μόνο για 6 μαθητές, κανένας εκ των οποίων δεν ήταν από την 3η ομάδα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1. Συζήτηση

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλυθούν τα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας, αντιπαραβάλλοντας τα ευρήματά της με αυτά των ερευνών της βιβλιογραφίας που μελετήθηκε. Αρχικά, αναφορικά με το κατά πόσο οι μαθητές έχουν εντάξει τους αρνητικούς αριθμούς στην κατηγορία ως ισότιμα μέλη στην κατηγορία του αριθμού (Κ1), φαίνεται ότι οι μαθητές δε σκέφτονται αυθόρμητα τους αρνητικούς αριθμούς στη θέση αγνώστων. Ακόμη και οι μαθητές με υψηλότερη συνολικά επίδοση φάνηκε να δυσκολεύονται να σκεφτούν ζεύγη αρνητικών αριθμών με δοσμένο θετικό γινόμενο, αλλά και αρνητικούς αριθμούς ως πολλαπλασιαστικούς τελεστές που «μειώνουν» έναν δεδομένο θετικό αριθμό. Περισσότεροι μαθητές έλαβαν υπόψη έναν αρνητικό αριθμό ο οποίος προστιθέμενος «μειώνει» έναν θετικό αριθμό, συμπεριλαμβανομένων και μαθητών με χαμηλότερες συνολικά επιδόσεις. Το εύρημα αυτό είναι μια ένδειξη ότι οι μαθητές λαμβάνουν υπόψη τους αρνητικούς αριθμούς πιο εύκολα στο πλαίσιο της πρόσθεσης, παρά του πολλαπλασιασμού. Θα πρέπει, ωστόσο, να ληφθεί υπόψη ότι το έργο που χρησιμοποιήθηκε για το πλαίσιο της πρόσθεσης ήταν λιγότερο σύνθετο από αυτά που χρησιμοποιήθηκαν στο πλαίσιο του πολλαπλασιασμού, δεδομένου ότι είχε μοναδική σωστή απάντηση και, επιπλέον, ενδεχομένως προϊδέαζε τους μαθητές για τον «αντίθετο» ενός αριθμού. Και στην περίπτωση αυτή, πάντως, ακόμα και μαθητές που απάντησαν τελικά σωστά, φάνηκε να διστάζουν να χρησιμοποιήσουν αρνητικούς αριθμούς, ενώ υπήρξαν και μαθητές που δήλωσαν ρητά ότι δεν υπάρχει αριθμός που να «μειώνει» προστιθέμενος έναν θετικό αριθμό. Τα ευρήματα αυτά δείχνουν ότι η ενσωμάτωση των αρνητικών αριθμών στην κατηγορία «αριθμός» δεν έχει ολοκληρωθεί.

Έντονη ήταν η εμφάνιση του φαινομένου της προκατάληψης του φυσικού αριθμού, καθώς οι μαθητές συμπεριέλαβαν κυρίως φυσικούς αριθμούς στις απαντήσεις τους. Επιβεβαιώνονται έτσι τα συμπεράσματα των ερευνητών (Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti, 2008, Χρήστου, 2009) πως τα παιδιά αντιμετωπίζουν έργα σχετικά με τους αριθμούς σύμφωνα με μία αρχική έννοια του αριθμού που διαμορφώνουν από μικρότερες ηλικίες, και έτσι έχουν την τάση να χρησιμοποιούν τις γνώσεις για τους φυσικούς αριθμούς για την κατανόηση των αρνητικών αριθμών (βλ. και Vlassis, 2004, Makonye & Fakude, 2016). Τα σχόλια των μαθητών για τον αριθμό 0 αλλά και για τα αποτελέσματα των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού υποδηλώνουν τις λανθασμένες αντιλήψεις των παιδιών που διαπιστώνουν και οι ερευνητές της βιβλιογραφίας

(Vosniadou, Vamvakoussi, & Skopeliti, 2008, Χρήστου, 2009, Schindler & Hußmann, 2013, Bofferding, 2014) πως υπάρχει αριθμός μικρότερος όλων και δεν υπάρχουν αριθμοί κάτω από το 0, αλλά και πως ο πολλαπλασιασμός και η πρόσθεση σημαίνουν πάντοτε αύξηση και δίνουν μεγαλύτερο αποτέλεσμα.

Στη συνέχεια θα αναλυθεί ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές νοηματοδοτούν τους αρνητικούς αριθμούς (Κ2). Αναφορικά με την περιγραφή ενός αρνητικού αριθμού, οι μαθητές φάνηκε πως δε δυσκολεύτηκαν στην επεξήγηση, μάλιστα ακόμη και οι μαθητές με τις χαμηλότερες επιδόσεις περιέγραψαν σωστά έναν αρνητικό αριθμό. Έτσι, φαίνεται πως οι μαθητές είναι ικανοί να αντιληφθούν την έννοια των αρνητικών αριθμών (Bofferding, 2014, Ural, 2016, Fuadiah & Suryadi, 2017). Ενδιαφέρον έχει το γεγονός ότι στο μικρό δείγμα που εξετάστηκε, εμφανίστηκαν διαφορετικοί «ορισμοί» για τον αρνητικό αριθμό, όπως «αριθμός μικρότερος του μηδενός», ως «αριθμός στα αριστερά του μηδενός» (πάνω στην αριθμογραμμή), αλλά και ως «αντίθετος ενός φυσικού αριθμού».

Στη σύνδεση με πλαίσια της καθημερινότητας, οι μαθητές άντλησαν τη συλλογιστική τους από εξωσχολικές και σχολικές εμπειρίες, συμπέρασμα που συμφωνεί με τα ευρήματα των Schindler et al. (2017). Βέβαια, οι απαντήσεις τους υποδηλώνουν πως οι μαθητές θεωρούν τους αρνητικούς αριθμούς κατά κύριο λόγο συσχετισμένους με το σχολείο, καθώς ήταν η πρώτη και αυθόρμητή τους σκέψη αλλά και σε ορισμένους η μοναδική. Η θερμοκρασία, το χρέος και «η ποσότητα που λείπει» ήταν τα επικρατέστερα πλαίσια εκτός σχολείου στα οποία οι μαθητές σκέφτηκαν ότι συναντούν τους αρνητικούς αριθμούς και είναι πλαίσια που συναντώνται συχνά σε σχολικά βιβλία, τη διδασκαλία και στη βιβλιογραφία (Ural, 2016, Schindler et al. 2017).

Αναφορικά με το πώς οι μαθητές συγκρίνουν τους ακέραιους αριθμούς, σε γενικές γραμμές η σύγκριση των ετερόσημων αριθμών και η σύγκριση αρνητικού αριθμού με το 0 ήταν τα ερωτήματα που οι ίδιοι οι μαθητές εξέλαβαν ως τα λιγότερο απαιτητικά, ενώ επέσυραν συνολικά πολλές σωστές απαντήσεις. Οι μαθητές σύγκριναν τους αριθμούς σκεπτόμενοι κυρίως την απόσταση ή τη σύγκριση με το 0, το γεγονός του αν είναι θετικοί ή αρνητικοί αριθμοί (σύμφωνα με τον κανόνα «οποιοσδήποτε αρνητικός είναι μικρότερος από οποιονδήποτε θετικό αριθμό»), και τη θέση τους στην αριθμογραμμή. Η χρήση της απόστασης από το 0 είναι σκέψη που εντόπισαν και άλλοι ερευνητές (Χρήστου, 2009, Bofferding, 2014) και η χρήση της αριθμογραμμής φαίνεται να τους βοηθά να κατανοήσουν πως όσο πιο αριστερά είναι ο αριθμός, τόσο μικρότερος είναι.

Έτσι, το είδος της αναπαράστασης των αριθμών διαδραματίζει σημαντικό ρόλο, κάτι που διατυπώνουν και οι Schindler & Hußmann (2013). Ωστόσο, υπήρχαν διαφορές στην επίδοση ανάλογα με το είδος των αριθμών που συγκρίνονταν, με πιο δύσκολη τη σύγκριση δύο αρνητικών αριθμών, όπου οι μαθητές συνέκριναν τις απόλυτες τιμές τους καταλήγοντας σε λανθασμένη απάντηση, γεγονός που παρατηρείται και σε άλλες έρευνες της βιβλιογραφίας (Bofferding, 2014, Makonye & Fakude, 2016, Fuadiah και Suryadi, 2017). Στα ερωτήματα σύγκρισης, μαθητές διαφορετικών επιδόσεων δεν απέφυγαν τα λάθη, αλλά οι μαθητές με τις χαμηλότερες επιδόσεις φάνηκε να δυσκολεύτηκαν περισσότερο.

Στην τοποθέτηση ενός αρνητικού και του αντίθετού του στην αριθμογραμμή, οι μαθητές, ακόμη και αυτοί με χαμηλότερες επιδόσεις συνολικά τοποθέτησαν το -2 σωστά όμως δυσκολεύτηκαν στην τοποθέτηση του –(-2). Έτσι, φάνηκε πως λίγοι μαθητές κατάφεραν να τοποθετήσουν σωστά τον αντίθετο αριθμό, με τους μισούς από αυτούς να αναφέρουν τους κανόνες πως «δύο μείον κάνουν συν» ή πως «το μείον έξω από την παρένθεση αλλάζει το πρόσημο», ενώ κανένας μαθητής δεν αναφέρθηκε ρητά στην έννοια του αντίθετου αριθμού. Ενδιαφέρον παρουσίασαν ορισμένοι μαθητές που τοποθέτησαν λανθασμένα το –(-2) στο 2, αγνοώντας το δεύτερο πρόσημο και ακόμη μαθητές που τοποθέτησαν το –(-2) δεξιά του 2, ένδειξη για τη δυσκολία της κατανόησης της σημασίας του δεύτερου μείον από τους μαθητές.

Η ερμηνεία των συμβόλων διαδραμάτισε σημαντικό ρόλο σε όλη την πορεία της έρευνας. Η σύγχυση που προκαλείται στους μαθητές με τις ποικίλες σημασίες του προσήμου μείον διαπιστώθηκε και σε άλλες έρευνες της βιβλιογραφίας (Vlassis, 2004, 2008, Schindler & Hußmann, 2013, Bofferding, 2010, 2014, Ural, 2016, Bryant et al. 2020) και επιβεβαιώνεται στην έρευνα αυτή. Αναλύοντας τη τριπλή σημασία του συμβόλου μείον που χρησιμοποιήθηκε από τους ερευνητές, παρατηρήθηκε πως σε αυτή την έρευνα ορισμένοι μαθητές ερμήνευσαν το σύμβολο μείον ως μονομελή τελεστή, είτε βλέποντάς το σωστά ως πρόσημο που χαρακτηρίζει έναν αρνητικό αριθμό είτε οδηγούμενοι σε λάθος, αγνοώντας πιθανά άλλα σύμβολα πράξης που συνάντησαν. Αρκετοί μαθητές αντιμετώπισαν το σύμβολο μείον ως διμελή τελεστή, δηλαδή ως την πράξη της αφαίρεσης, περιγράφοντας αρνητικούς αριθμούς ή προβλήματα αρνητικών αριθμών με αφαίρεση. Τέλος, λίγοι μαθητές αντιλήφθηκαν σωστά το σύμβολο μείον ως συμμετρικό, περιγράφοντας τους αρνητικούς αριθμούς ως αντίθετους των φυσικών ή περιγράφοντας μία πράξη ως αντίστροφη άλλης. Οι μαθητές εμφάνισαν δυσκολίες όταν συνάντησαν δύο διαδοχικά πρόσημα μείον, κάτι που παρατήρησε και η Vlassis (2008). Έτσι, σε αυτές τις περιπτώσεις αρκετοί μαθητές, ακόμη και αυτοί με μέτριες επιδόσεις συνολικά, είτε άφησαν τα αντίστοιχα έργα κενά, είτε έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις, είτε διατυπώνοντας τον κανόνα πως δύο σύμβολα μείον δίνουν συν, ερμήνευσαν το μείον ως πράξη πρόσθεσης.

Αναφορικά με το πώς οι μαθητές διατυπώνουν προβλήματα με αρνητικούς αριθμούς, φάνηκε πως ορισμένοι αντιμετώπισαν δυσκολίες στην εύρεση προβλημάτων με δοσμένη πράξη ακεραίων. Δυσκολία στη διατύπωση προβλημάτων εμφανίζεται και στην έρευνα των Seah & Booker (2005) και του Ural (2016) που περιέχει το ίδιο έργο. Από τα δοσμένα προβλήματα, τα μισά ήταν σωστά και τα μισά λανθασμένα. Φάνηκε πως οι μαθητές επηρεάστηκαν από σχολικές και εξωσχολικές εμπειρίες, και ορισμένοι μαθητές άντλησαν απαντήσεις από εμπειρίες που δεν είναι μαθηματικά έγκυρες, γεγονός που παρατήρησαν και οι Schindler et al. (2017). Όσον αφορά τις θεματικές, αρκετοί χρησιμοποίησαν τα χρήματα ως πλαίσιο για τα προβλήματά τους, λιγότεροι τη θερμοκρασία ή την «ποσότητα που λείπει», ενώ σε ορισμένες απαντήσεις παρατηρήθηκε σύγχυση ως προς την πράξη της αφαίρεσης. Τέλος, λίγοι μαθητές, ακόμη και όταν δε τους ζητήθηκε, εξήγησαν την έννοια του αρνητικού αριθμού και μία πρόσθεση ετερόσημων αριθμών με τη χρήση προβλήματος, που δηλώνει ότι η σύνδεση με ένα πιο «βιωματικό» πλαίσιο τους βοηθά στην εννοιολογική κατανόηση των αρνητικών αριθμών.

Σε σχέση με την κατανόηση των πράξεων με αρνητικούς αριθμούς (Κ3), οι περισσότεροι μαθητές φάνηκαν ικανοί να εκτελέσουν πράξεις με ακεραίους, γεγονός που εμφανίζεται στην έρευνα των Fuadiah και Suryadi (2017) αλλά όχι σε αυτή των Makonye & Fakude (2016). Μεγαλύτερη δυσκολία συνάντησαν στην πράξη της διαίρεσης και της αφαίρεσης με αρνητικό αριθμό ενώ ακόμη και οι πιο αδύναμοι μαθητές εκτέλεσαν με επιτυχία την πρόσθεση ετερόσημων αριθμών. Από την εκτέλεση πράξεων, ένα συμπέρασμα που συμφωνεί με τη βιβλιογραφία (Bofferding, 2014, Schindler et al. 2017) είναι ότι οι μαθητές εφάρμοσαν στρατηγικές αφαίρεσης από φυσικούς αριθμούς σε ακέραιους, απαντώντας πως -4-4=8 και -4-4=0. Ιδιαίτερα απαιτητικό έργο ήταν αυτό που ζητούσε από τους μαθητές να εξηγήσουν τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ετερόσημων αριθμών. Ακόμη και οι μαθητές που είχαν καλές επιδόσεις στην εκτέλεση πράξεων αλλά και καλές επιδόσεις συνολικά σε όλα τα έργα, δε μπόρεσαν επαρκώς να ερμηνεύσουν εννοιολογικά τις πράξεις. Όπως και στην έρευνα της Kilhamn (2018), οι μαθητές εστίασαν στην καθιερωμένη γνώση διαδικασιών χρησιμοποιώντας τους κανόνες για τα πρόσημα για την εξήγηση των πράξεων. Λίγοι μαθητές κατάφεραν να εξηγήσουν την πράξη της πρόσθεσης χωρίς τη χρήση του κανόνα, και από αυτούς ορισμένοι χρησιμοποίησαν την αριθμογραμμή, κάποιο πρόβλημα ή μία πιο τεχνική επεξήγηση με αντίστροφη πράξη, απάντηση που δόθηκε από μαθητή υψηλής επίδοσης. Κανένας μαθητής δεν ερμήνευσε την πράξη του πολλαπλασιασμού χωρίς τη χρήση του κανόνα, επιβεβαιώνοντας το συμπέρασμα ορισμένων ερευνητών (Seah & Booker, 2005, Ganor-Stern & Tzelgov, 2008) πως η εννοιολογική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού ακεραίων αριθμών δεν είναι εύκολη για τους μαθητές και απαιτεί την ύπαρξη κάποιας ανώτερης γνώσης, που πολλοί δεν διαθέτουν.

5.2. Συμπεράσματα

Απαντώντας στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα της παρούσας έρευνας, αναφορικά με το αν οι μαθητές Γυμνασίου έχουν επεκτείνει την έννοια του αριθμού ώστε να συμπεριλάβουν τους αρνητικούς αριθμούς ως ισότιμα μέλη της κατηγορίας «αριθμός», φάνηκε πως οι μαθητές, ακόμη και αυτοί με υψηλές επιδόσεις, δε μπορούν εύκολα να σκεφτούν έναν αρνητικό αριθμό ως λύση μίας εξίσωσης, ιδιαίτερα σε έργα με πολλαπλασιασμό. Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού δημιουργεί εμπόδια στη σκέψη των μαθητών καθώς αυτοί διαχειρίζονται αρνητικούς αριθμούς.

Σχετικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα για τη διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές νοηματοδοτούν τους αρνητικούς αριθμούς, οι μαθητές δε φαίνεται να δυσκολεύονται στην περιγραφή ενός αρνητικού αριθμού, ορισμένοι όμως δε μπορούν να συνδέσουν τους αρνητικούς αριθμούς με την καθημερινότητά τους και θεωρούν πως συναντούν τους αρνητικούς αριθμούς κυρίως στο σχολικό πλαίσιο και στα μαθηματικά. Ακόμη, οι μαθητές φαίνεται να είναι ικανοί να συγκρίνουν ακέραιους αριθμούς, εξηγώντας τη σκέψη τους. Η χρήση της αριθμογραμμής, επίσης διαδραματίζει σημαντικό ρόλο για το πώς αντιλαμβάνονται την έννοια των αρνητικών αριθμών, αλλά και το πώς τους ταξινομούν. Οι μαθητές γενικά δυσκολεύονται στο να τοποθετήσουν τον αντίθετο ενός αρνητικού αριθμού στην αριθμογραμμή, και αυτό φαίνεται να πηγάζει και από το λάθος χειρισμό των δύο συμβόλων μείον. Η ερμηνεία του συμβόλου μείον επηρεάζει την γνώση των μαθητών για τις πράξεις με ακεραίους, καθώς η εμφάνιση του προσήμου μείον μπορεί να ερμηνευθεί ως αφαίρεση, αλλά και η εμφάνιση δύο συμβόλων μαζί μπορεί να οδηγήσει είτε σε λανθασμένη εκτέλεση πράξης είτε σε αγνόηση του ενός από τα δύο σύμβολα. Βέβαια, φάνηκε πως είναι ικανοί να διαχωρίσουν τα σύμβολα ως πρόσημα και ως ένδειξη πράξης. Τέλος, οι μαθητές φαίνεται να δυσκολεύονται στη διατύπωση προβλημάτων με αρνητικούς αριθμούς, με λίγους από αυτούς να μπορούν να κατασκευάσουν ένα σωστό πρόβλημα ή να μπορούν να το χρησιμοποιήσουν για την ερμηνεία των αρνητικών αριθμών.

Απαντώντας στο τρίτο ερευνητικό ερώτημα της παρούσας εργασίας, για τη διάσταση μεταξύ της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης των μαθητών στις πράξεις με ακεραίους, ήταν φανερό πως η διαδικαστική γνώση των μαθητών υπερίσχυσε της εννοιολογικής κατανόησης. Συγκεκριμένα, οι μαθητές χειρίστηκαν τις πράξεις στην πλειοψηφία τους σωστά, όμως οι περισσότεροι, ακόμη και οι μαθητές με καλές επιδόσεις δε μπόρεσαν να ερμηνεύσουν τις πράξεις χωρίς τη χρήση των κανόνων των προσήμων. Συμπερασματικά, κατά την εκτέλεση πράξεων η διαδικαστική γνώση υπερτερεί της εννοιολογικής γνώσης στους μαθητές που συμμετείχαν στην παρούσα έρευνα. Ιδιαίτερη σημασία λοιπόν έχει το γεγονός πως οι μαθητές εστιάζουν στις διαδικασίες και τους αλγόριθμους, και αυτό εγείρει προβληματισμούς ως προς το περιεχόμενο της διδασκαλίας των αρνητικών αριθμών. Στην εννοιολογική κατανόηση των πράξεων φαίνεται να βοηθά η αναπαράσταση στην αριθμογραμμή και η χρήση προβλημάτων. Ενδιαφέρον παρουσιάζει και πως η πράξη του πολλαπλασιασμού και η ερμηνεία της εγείρει δυσκολίες για τους μαθητές, ακόμη και για αυτούς με καλές επιδόσεις. Τέλος, ορισμένοι μαθητές φάνηκε πως διατηρούν τις παρανοήσεις «ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει» και «η πρόσθεση μεγαλώνει» καθώς προβληματίστηκαν όταν διαχειρίστηκαν αντίστοιχα έργα.

Συνοψίζοντας, τα ευρήματα της έρευνας συμφωνούν κατά μεγάλο βαθμό με τα ευρήματα της βιβλιογραφίας, ενισχύοντας έτσι σημαντικά συμπεράσματα που πρέπει να ληφθούν υπόψιν κατά το σχεδιασμό της διδασκαλίας των αρνητικών αριθμών στις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 – ΕΠΙΛΟΓΟΣ

6.1. Περιορισμοί της έρευνας

Τα συμπεράσματα της έρευνας αυτής παρουσίασαν ενδιαφέρον και στην πλειοψηφία τους συμφωνούν με τα ευρήματα άλλων ερευνών της βιβλιογραφίας. Κλείνοντας όμως την παρούσα εργασία, είναι σημαντικό να αναφερθούν οι περιορισμοί που προέκυψαν κατά τη μεθοδολογία και την υλοποίηση της έρευνας. Έχει σημασία να ληφθούν υπόψιν αυτοί οι περιορισμοί, καθώς παρά τις ενέργειες για τη διασφάλιση της εγκυρότητας και αξιοπιστίας της μελέτης, τις θέτουν υπό αμφισβήτηση. Σημαντικός περιορισμός αφορά την επιλογή του δείγματος με μία σκόπιμη δειγματοληψία, καθώς η ερευνήτρια είχε πρόσβαση στο συγκεκριμένο σχολείο και δεν ήταν δυνατή η τυχαία επιλογή του σχολείου και των συμμετεχόντων. Ένας ακόμη περιορισμός είναι το μέγεθος του δείγματος, που είναι μικρό ώστε να μην επιτρέπει τη γενίκευση και την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων για τα ευρήματα που προέκυψαν. Τέλος, η υποκειμενικότητα που υπάρχει στην ποιοτική μέθοδο ενδεχομένως επηρεάζει την υλοποίηση των συνεντεύξεων από την ερευνήτρια αλλά και τις απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις της.

6.2. Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Αρκετοί ερευνητές έχουν εστιάσει στην μελέτη της κατανόησης των αρνητικών αριθμών από τους μαθητές. Ωστόσο, αρκετές έχουν εστιάσει σε μαθητές Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και προσχολικής ηλικίας με λιγότερες από αυτές να απευθύνονται σε μεγαλύτερους μαθητές. Προτείνεται η διεξαγωγή ερευνών για τη διερεύνηση του τρόπου συλλογισμού των μαθητών Γυμνασίου και Λυκείου κατά το χειρισμό αρνητικών αριθμών, καθώς έτσι θα διαπιστωθούν καλύτερα τα αποτελέσματα της διδασκαλίας που δέχονται αυτοί στις αρχές του Γυμνασίου. Προτείνεται ακόμη η διεξαγωγή της παρούσας έρευνας σε μεγαλύτερο δείγμα συμμετεχόντων και ο επανασχεδιασμός του μαθηματικού έργου, ώστε να ανταποκρίνεται καλύτερα στις γνώσεις και το επίπεδο των μαθητών. Τέλος, καθώς στην Ελληνική τάξη υπάρχει εστίαση στην εκμάθηση διαδικαστικής γνώσης και στις πράξεις με αρνητικούς αριθμούς, η υλοποίηση παρεμβάσεων και διδασκαλιών που να εστιάζουν στην εννοιολογική ερμηνεία των αρνητικών αριθμών θα συνέβαλε ιδιαίτερα στον προσδιορισμό των ενεργειών που χρειάζεται για τη βελτίωση της διδασκαλίας των μαθηματικών, που είναι και βασικός στόχος της ερευνητικής και της εκπαιδευτικής κοινότητας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Altiparmak, K., & Özdoğan, E. (2010). A study on the teaching of the concept of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41(1)*, 31-47.

Avcu, R., & Avcu, S. (2018). Middle School Mathematics Teachers' Selection of Exam Tasks to Measure Their Students' Conceptual and Procedural Knowledge of Integers Öz Methods Participants. In *International Congress on Educational Sciences, December* (pp. 1509-1514).

Bempeni, M., & Vamvakoussi, X. (2015). Individual Differences in Students' Knowing and Learning about Fractions: Evidence from an In-Depth Qualitative Study. *Frontline Learning Research*, *3*(1), 18-35.

Bofferding, L. (2010, October). Addition and subtraction with negatives: Acknowledging the multiple meanings of the minus sign. In *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 6, pp. 703-710). Columbus, OH: The Ohio State University.

Bofferding, L. (2014). Negative integer understanding: Characterizing first graders' mental models. *Journal for Research in Mathematics Education, 45(2)*, 194-245.

Bofferding, L., & Richardson, S. E. (2013). Investigating Integer Addition and Subtraction: A Task Analysis. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Bryant, D. P., Bryant, B. R., Dougherty, B., Roberts, G., Pfannenstiel, K. H., & Lee, J. (2020). Mathematics performance on integers of students with mathematics difficulties. *The Journal of Mathematical Behavior*, *58*, 100776.

Canobi, K. H. (2009). Concept–procedure interactions in children's addition and subtraction. *Journal of experimental child psychology*, *102*(2), 131-149.

Fuadiah, N. F., & Suryadi, D. (2017). Some Difficulties in Understanding Negative Numbers Faced by Students: A Qualitative Study Applied at Secondary Schools in Indonesia. *International Education Studies*, *10*(1), 24-38.

Fuadiah, N. F., & Suryadi, D. (2019). Teaching and Learning Activities in Classroom and Their Impact on Student Misunderstanding: A Case Study on Negative Integers. *International Journal of Instruction*, *12*(1), 407-424.

Ganor-Stern, D., & Tzelgov, J. (2008). Negative numbers are generated in the mind. *Experimental Psychology, 55(3),* 157.

Hativa, N., & Cohen, D. (1995). Self learning of negative number concepts by lower division elementary students through solving computer-provided numerical problems. *Educational Studies in Mathematics*, *28*(4), 401-431.

Kilhamn, C. (2018). Different Differences: Metaphorical Interpretations of "Difference" in Integer Addition and Subtraction. In *Exploring the Integer Addition and Subtraction Landscape* (pp. 143-166). Springer, Cham.

Lamb, L. L., Bishop, J. P., Philipp, R. A., Whitacre, I., & Schappelle, B. P. (2018). A Cross-Sectional Investigation of Students' Reasoning About Integer Addition and Subtraction: Ways of Reasoning, Problem Types, and Flexibility. *Journal for research in mathematics education*, *49*(5), 575-613.

Makonye, J. P., & Fakude, J. (2016). A study of errors and misconceptions in the learning of addition and subtraction of directed numbers in grade 8. *SAGE Open*, *6*(4), 2158244016671375.

Nurnberger-Haag, J. (2018). Take it away or walk the other way? Finding positive solutions for integer subtraction. In *Exploring the Integer Addition and Subtraction Landscape* (pp. 109-141). Springer, Cham.

Peled, I., Mukhopadhyay, S., & Resnick, L. B. (1989). Formal and informal sources of mental models for negative numbers. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artique (Eds.), *Proceedings of the 13th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 106–110). Paris, France.

Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. *Oxford handbook of numerical cognition*, 1118-1134.

Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015). Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review*, *27*(4), 587-597.

Schindler, M., & Hußmann, S. (2013). About students' individual concepts of negative integer—in terms of the order relation. In *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 373-382).

Schindler, M., Hußmann, S., Nilsson, P., & Bakker, A. (2017). Sixth-grade students' reasoning on the order relation of integers as influenced by prior experience: an inferentialist analysis. *Mathematics Education Research Journal, 29(4),* 471-492.

Seah, R., & Booker, G. (2005). Lack of numeration and multiplication conceptual knowledge in middle school students: A barrier to the development of high school mathematics. *Stimulating the'Action'as participants in Participatory Research*, *3*, 86-98.

Simpson, A. R. (2009). *The micro-evolution and transfer of conceptual knowledge about negative numbers* (Doctoral dissertation, University of Warwick).

Tsay, J. J., & Hauk, S. (2006). Multiplication schema for signed number: Case study of three prospective teachers.

Ural, A. (2016). 7th grade students" understandings of negative integer. *Journal of Studies in Education, 6(2),* 170-179.

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. *Learning and instruction*, *14*(5), 469-484.

Vlassis, J. (2008). The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign. *Philosophical Psychology*, *21*(4), 555-570.

Vosniadou, S. (2003). Exploring the relationships between conceptual change and intentional learning. In *Intentional conceptual change* (pp. 373-402). Routledge.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, I. (2008). The framework theory approach to the problem of conceptual change. *International handbook of research on conceptual change,* 3-34.

Whitacre, I., Azuz, B., Lamb, L. L., Bishop, J. P., Schappelle, B. P., & Philipp, R. A. (2017). Integer comparisons across the grades: Students' justifications and ways of reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *45*, 47-62.

Whitacre, I., Bishop, J. P., Lamb, L. L., Philipp, R. A., Schappelle, B. P., & Lewis, M. L. (2012). Happy and sad thoughts: An exploration of children's integer reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 356-365.

Zuya, H. E. (2017). Prospective teachers' conceptual and procedural knowledge in mathematics: The case of algebra. *American Journal of Educational Research*, *5*(3), 310-315.

Γαλάνης, Π. (2018). Ανάλυση δεδομένων στην ποιοτική έρευνα Θεματική ανάλυση. *Archives of Hellenic Medicine/Arheia Ellenikes Iatrikes*, *35*(3).

Ι. Παπαδόπουλος, Σ. Βλάχου, & Ε. Κιορίδου (2020). Αρνητικοί αριθμοί - Συμβολισμός και πράξεις στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, *Πρακτικά 8ου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ, Λευκωσία*, σ. 93-102.

Μαντζούκας, Σ., 2007. Ποιοτική έρευνα σε έξι εύκολα βήματα. Η επιστημολογία, οι μέθοδοι, και η παρουσίαση. *Νοσηλευτική*.. 46 (1) σελ.88-98.

Μαρκάδας Σ. (2018). Η εννοιολογική κατανόηση και η διαδικαστική γνώση στα Μαθηματικά: μια διαρκώς παρούσα διελκυστίνδα για τη διδασκαλία τους. 8η Ημερίδα Μαθηματικών, Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί, Θεσσαλονίκη, 3-18.

Παρασκευοπούλου-Κόλλια, Ε. Ά. (2008). Μεθοδολογία ποιοτικής έρευνας στις κοινωνικές επιστήμες και συνεντεύξεις. *Ανοικτή Εκπαίδευση: το περιοδικό για την Ανοικτή και εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση και την Εκπαιδευτική Τεχνολογία*, *4*(1), 72-81.

Τσιώλης, Γ. (2018). Θεματική ανάλυση ποιοτικών δεδομένων. *Ερευνητικές διαδρομές στις Κοινωνικές Επιστήμες. Θεωρητικές-Μεθοδολογικές Συμβολές και Μελέτες Περίπτωσης*, 97-125.

Χρήστου, Κ. (2009). *Εννοιολογική αλλαγή στα μαθηματικά: η περίπτωση της άλγεβρας* (Doctoral dissertation, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ). Τμήμα Μεθοδολογίας, Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

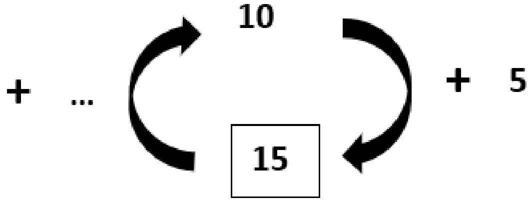
Εργαλείο Συλλογής Δεδομένων – Ερωτήσεις Συνέντευξης

1. Δίνονται δύο αριθμοί α και β ώστε να ισχύει η σχέση: α · β = 12. Ποιοι μπορεί να είναι οι αριθμοί α και β;

2. Παρατήρησε την παρακάτω ανίσωση. Θα μπορούσες να βρεις έναν αριθμό που να το συμπληρώνει σωστά; Υπάρχει τέτοιος αριθμός;

….. x 10 < 10

3. Παρατήρησε το παρακάτω διάγραμμα. Θα μπορούσες να βρεις έναν αριθμό που να το συμπληρώνει σωστά; Υπάρχει τέτοιος αριθμός;

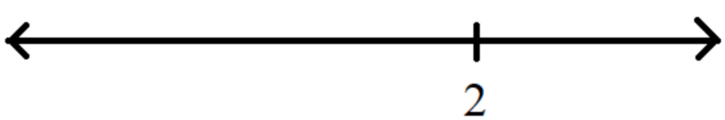


4. α) Θα μπορούσες να εξηγήσεις σε ένα παιδί μικρότερης ηλικίας τι είναι το -8;
β) Πού θα του έλεγες ότι μπορεί να συναντήσει αυτόν τον αριθμό;

5. Να συγκρίνεις τους παρακάτω αριθμούς τοποθετώντας το κατάλληλο σύμβολο ανισότητας (<, >, =). Μπορείς να εξηγήσεις πώς το σκέφτηκες;

9 …. -6   -27 ….. -31   12 …. -25   0 ….. -9

6. Να τοποθετήσετε τους αριθμούς στην παρακάτω αριθμογραμμή:
-2, - (-2)



7. Ποια σύμβολα πράξεων αναγνωρίζεις στην παρακάτω αριθμητική παράσταση; Ποιων πράξεων; Μπορείς να τα κυκλώσεις;

10 + (– 7) = – 10 – (– 13)

8. Να εκτελέσεις τις παρακάτω πράξεις.

-8 + 4 = …….	-2 + 6 = ………	2 – 8 = ………
-4 – 4 = ……..	5 – (-7) = ………	(-2) · (-3) = ……..
3 · (-5) = ………	-12 : (+6) = ……..	

9. Ένα παιδί μικρότερης ηλικίας δυσκολεύεται να καταλάβει γιατί -10 + 3 = -7 και γιατί (-1)·(+2) = (-2). Μπορείς να του εξηγήσεις;

10. Μπορείς να φτιάξεις ένα πρόβλημα για την παρακάτω μαθηματική πράξη: +3 – 7;

Έντυπο Ενημέρωσης Γονέων

Ερευνήτρια: Γεωργιάδου Ευαγγελία, **e-mail**: … **Τηλ. Σχολείου**:…

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών»,

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Βαμβακούση Ξένια - Ξανθή

Γεια σας,

Είμαι Μαθηματικός στο σχολείο που φοιτά το παιδί σας και φοιτήτρια στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών» του Παιδαγωγικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας. Στα πλαίσια της διπλωματικής μου εργασίας διεξάγω μία έρευνα με σκοπό την καλύτερη κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές προσεγγίζουν τους αρνητικούς αριθμούς. Το παιδί σας έχει επιλεχθεί για να συμμετάσχει στην έρευνα αυτή.

Θα γίνει μία συνάντηση με κάθε παιδί, κατά την οποία θα κληθεί να συμπληρώσει ένα φύλλο εργασίας πάνω στους αρνητικούς αριθμούς και ταυτόχρονα να απαντήσει σε συμπληρωματικές ερωτήσεις που θα γίνουν. Η διάρκεια της κάθε συνέντευξης θα είναι 15-30 λεπτά και θα πραγματοποιηθεί στο χώρο του σχολείου μετά το πέρας του διδακτικού του ωραρίου. Η συλλογή των δεδομένων θα γίνει μέσω δικών μου σημειώσεων, με στόχο την ποιοτική ανάλυση.

Τα στοιχεία του παιδιού σας δεν θα γίνουν γνωστά και τα αποτελέσματα για κάθε παιδί τηρούνται αυστηρά εμπιστευτικά. Η συμμετοχή του στην έρευνα δεν επηρεάζει τις επιδόσεις και/ή τη βαθμολογία του στο μάθημα των Μαθηματικών.

Η συμμετοχή δεν είναι δεσμευτική και οποιαδήποτε στιγμή ο μαθητής μπορεί να αποχωρήσει. Εάν έχετε ερωτήσεις σχετικά με τη μελέτη μπορείτε να επικοινωνήσετε μαζί μου.

Ο/Η υπογράφων/ουσα ……………………………………………………………………….. γονέας/κηδεμόνας του/τη μαθητή/τριας ……………………………… του τμήματος ……… δηλώνω ότι επιτρέπω τη συμμετοχή του στην έρευνα και την παραμονή του στο σχολείο για μία ημέρα μετά το διδακτικό του ωράριο.

Με εκτίμηση,

Γεωργιάδου Ευαγγελία