



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β ΗΛΙΚΙΑΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ (13 – 18 ετών)

Διπλωματική εργασία

**«Ανάλυση των σχολικών βιβλίων αναφορικά με τον τρόπο κατανομής των
προβλημάτων στην αριθμητική των κλασμάτων»**

του

Φιλιππόπουλου Δημήτριου, Α.Ε.Μ. 0933

Επιβλέπων Καθηγητής: Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής

Εξεταστές: Βαμβακούση Ξανθή – Ξένια, Επίκουρη Καθηγήτρια

Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής

Φλώρινα, Μάρτιος 2020

1 Περιεχόμενα

1	Περιεχόμενα	2
2	Περίληψη	4
3	Abstract	4
4	Εισαγωγή.....	5
5	Θεωρητικό πλαίσιο	6
5.1	Ο ρόλος των σχολικών βιβλίων στη διδασκαλία και τη μάθηση	8
5.2	Ανάλυση και σύγκριση των σχολικών εγχειριδίων.....	9
5.2.1	Τα μαθηματικά ως προς το περιεχόμενο και τις έννοιες,	10
5.2.2	Γνώση και παιδαγωγική.....	10
5.2.3	Το φύλο, η εθνικότητα, η ισότητα, ο πολιτισμός και η αξία.	11
5.2.4	Σύγκριση διαφορετικών εγχειριδίων.....	11
5.2.5	Τα θέματα της εννοιολόγησης και της μεθοδολογίας	12
5.3	Η χρήση των σχολικών βιβλίων στη διδασκαλία και τη μάθηση	12
5.4	Άλλες περιοχές έρευνας στα σχολικά εγχειρίδια	13
5.5	Το άρθρο των Braithwaite, Pyke & Siegler (2017).....	14
5.5.1	Βασικά συμπεράσματα των Braithwaite, Pyke & Siegler (2017).....	16
6	Στόχοι της παρούσας εργασίας	18
7	Περιγραφή του λογισμικού FARRA.....	20
7.1	Η εκτέλεση του λογισμικού FARRA.....	23
8	Σύγκριση των σχολικών βιβλίων των ΗΠΑ, της Ελλάδας και της Κύπρου αναφορικά με την αριθμητική των κλασμάτων.....	25
8.1	Ανάλυση με βάση τους παρονομαστές	25
8.2	Ανάλυση με βάση το είδος των παραγόντων	27
8.3	Πειράματα με προσομοίωση.....	29
8.3.1	Χαμηλή επίδοση συνολικά	30
8.3.2	Εξαιρετικά χαμηλή επίδοση στα προβλήματα διαίρεσης κλασμάτων.	30
8.3.3	Μεταβλητότητα στις απαντήσεις σε συγκεκριμένα προβλήματα	31
8.3.4	Χρήση ποικίλων στρατηγικών από κάθε μαθητή ατομικά.....	45
8.3.5	Μεγαλύτερη συχνότητα των λαθών στρατηγικής από τα λάθη εκτέλεσης.....	46
8.3.6	Τα πιο κοινά λάθη στρατηγικής είναι η εφαρμογή ενός κανόνα κατάλληλου για διαφορετική πράξη και η αντιμετώπιση των όρων των κλασμάτων ως ανεξάρτητες ποσότητες.	47
8.3.7	Τα ποσοστά επιτυχίας στα προβλήματα με ομώνυμα κλάσματα αυξάνονται σε προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης αλλά μειώνονται σε προβλήματα πολλαπλασιασμού.....	48
8.3.8	Το είδος λάθους με τη μεγαλύτερη συχνότητα σε κάθε πράξη ποικίλει ανάλογα με την ισότητα ή μη των παρονομαστών.	50

8.3.9	Συγκεντρωτικά αποτελέσματα	50
8.4	Συσχέτιση μεταξύ του είδους των παραγόντων των προβλημάτων (φυσικοί αριθμοί, κλάσματα, μεικτοί) και την επιλογή της σωστής στρατηγικής.....	53
8.5	Η επίδραση των προβλημάτων εισόδου στη μάθηση.....	56
8.6	Ποσοστά επιτυχίας για διάφορες τιμές των παραμέτρων.....	59
9	Σύγκριση των σχολικών βιβλίων του Δημοτικού της Ελλάδας, της Κύπρου και ενός εναλλακτικού σχολικού εγχειριδίου αναφορικά με την αριθμητική των κλασμάτων.	66
9.1	Ανάλυση με βάση τους παρονομαστές	66
9.2	Ανάλυση με βάση το είδος των παραγόντων	68
9.3	Πειράματα με προσομοίωση.....	68
9.3.1	Χαμηλή επίδοση συνολικά	68
9.3.2	Εξαιρετικά χαμηλή επίδοση στα προβλήματα διαίρεσης κλασμάτων.	68
9.3.3	Μεταβλητότητα στις απαντήσεις σε συγκεκριμένα προβλήματα	70
9.3.4	Χρήση ποικίλων στρατηγικών από κάθε μαθητή ατομικά.....	71
9.3.5	Μεγαλύτερη συχνότητα των λαθών στρατηγικής από τα λάθη εκτέλεσης.....	71
9.3.6	Τα πιο κοινά λάθη στρατηγικής είναι η εφαρμογή ενός κανόνα κατάλληλου για διαφορετική πράξη και η αντιμετώπιση των όρων των κλασμάτων ως ανεξάρτητες ποσότητες.	73
9.3.7	Τα ποσοστά επιτυχίας στα προβλήματα με ομώνυμα κλάσματα αυξάνονται σε προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης αλλά μειώνονται σε προβλήματα πολλαπλασιασμού.....	73
9.3.8	Το είδος λάθους με τη μεγαλύτερη συχνότητα σε κάθε πράξη ποικίλει ανάλογα με την ισότητα ή μη των παρονομαστών.	75
9.3.9	Συγκεντρωτικά αποτελέσματα	76
9.4	Συσχέτιση μεταξύ του είδους των παραγόντων των προβλημάτων (φυσικοί αριθμοί, κλάσματα, μεικτοί) και την επιλογή της σωστής στρατηγικής.....	79
9.5	Η επίδραση των προβλημάτων εισόδου στη μάθηση.....	81
9.6	Ποσοστά επιτυχίας για διάφορες τιμές των παραμέτρων.....	82
10	Συμπεράσματα – Συζήτηση	87
11	Βιβλιογραφικές αναφορές.....	89
12	Παράρτημα	95
12.1	ΜΕΡΟΣ Α	95
12.2	ΜΕΡΟΣ Β.....	103
12.3	ΜΕΡΟΣ Γ (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ FARRA)	111
1.	Φάση μάθησης (learning mode).....	111
2.	Φάση ελέγχου (testing mode)	118

2 Περίληψη

Είναι γεγονός ότι ένας μεγάλος αριθμός μαθητών αποτυγχάνει να κατακτήσει επαρκώς την αριθμητική των κλασμάτων, ακόμα και μετά από χρόνια διδασκαλίας. Η παρούσα εργασία έχει ως στόχο να εξετάσει την επίδραση της κατανομής των μη-λεκτικών προβλημάτων των σχολικών βιβλίων στην αριθμητική των κλασμάτων σε αυτή ακριβώς τη δυσκολία των μαθητών. Για το σκοπό αυτό μελετήσαμε τα Ελληνικά σχολικά βιβλία, τα σχολικά βιβλία της Κύπρου, τα σχολικά βιβλία της σειράς EnVisionMath των ΗΠΑ και το διδακτικό εγχειρίδιο «*Στην τροχιά των ρητών*» (εκδόσεις Κυριακίδη, Δεκέμβριος 2016). Αρχικά, έγινε καταγραφή, σχολιασμός και σύγκριση των χαρακτηριστικών των προβλημάτων. Στη συνέχεια, διερευνήθηκε μέσω προσομοίωσης με τη βοήθεια του λογισμικού FARRA (Braithwaite, Pyke, & Siegler, 2017) η επίδραση αυτής της κατανομής των προβλημάτων στην επίδοση των μαθητών. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η στατιστική κατανομή των προβλημάτων των σχολικών βιβλίων στην αριθμητική των κλασμάτων επηρεάζει σημαντικά τη μάθηση.

Λέξεις – κλειδιά: Κλάσματα, αριθμητική, υπολογιστικό μοντέλο, προσομοίωση, ομώνυμα, ετερόνυμα, παράγοντες.

3 Abstract

It is a fact that a large number of students fail to adequately master the fraction arithmetic even after years of instruction. The purpose of the present study is to examine the effect of non-verbal problems of textbook on fraction arithmetic in this student difficulty. To this end, we study Greek textbooks, textbooks of Cyprus, the US EnVisionMath textbooks, and the "*In the trajectory of the rational numbers*" textbook (Kyriakidis, December 2016). Initially, the characteristics of the problems were recorded, annotated and compared. Then the effect of the distribution of these problems on student performance was investigated through simulation using the FARRA software (Braithwaite, Pyke, & Siegler, 2017). The results show that the statistical distribution of textbook problems in fractional arithmetic significantly influences learning.

Keywords: fractions, arithmetic, computational model, simulation, equal denominators, unequal denominators, operands.

4 Εισαγωγή

Είναι γενικά παραδεκτό ότι η μαθηματική γνώση παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην επιτυχία του ατόμου τόσο στον ακαδημαϊκό όσο και τον επαγγελματικό τομέα (Davidson, 2012; McCloskey, 2007; Murnane, Willett, & Levy, 1995; Sadler & Tai, 2007). Οι Ritchie & Bates (2013) επισημαίνουν ότι η επίδοση ενός μαθητή στα μαθηματικά στην ηλικία των 7 ετών μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την κοινωνικοοικονομική κατάστασή του στην ηλικία των 42 ετών.

Τα κλάσματα αποτελούν ένα από τα πιο σημαντικά θέματα τα οποία αντιμετωπίζουν οι μαθητές τόσο του Δημοτικού όσο και του Γυμνασίου. Ένας βασικός λόγος για αυτό είναι ότι η κατανόηση των κλασμάτων αποτελεί προϋπόθεση επιτυχίας των μαθητών στα πιο προχωρημένα μαθηματικά. Οι Siegler et al. (2012) συμπεραίνουν ότι στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση η καλή γνώση των κλασμάτων αποτελεί ισχυρό προγνωστικό παράγοντα της κατάκτησης της γνώσης που σχετίζεται, τόσο με την άλγεβρα, όσο και τη γενικότερη επίδοση σε μεγαλύτερες τάξεις στα μαθηματικά και δεν σχετίζεται με το εισόδημα και τη μόρφωση των γονιών, το νοητικό δυναμικό του μαθητή, τις γνωστικές λειτουργίες του που αφορούν τη μνήμη, την αναγνωστική του ικανότητα, τη φυλή και το φύλο. Τα κλάσματα είναι επίσης σημαντικά και για την επαγγελματική επιτυχία: Το 68% των αμερικανικών υπαλλήλων γραφείου και αυτών που επιτελούν χειρονακτική εργασία αναφέρουν τη χρήση κλασμάτων, δεκαδικών ή ποσοστών στην εργασία τους (Handel, 2016). Ο Wu (2005) υποστηρίζει ότι η μελέτη των κλασμάτων αποτελεί τον πρώτο σοβαρό περίπατο του μαθητή στα αφηρημένα μαθηματικά. Η μελέτη των κλασμάτων δεν επιτρέπει μόνο στους μαθητές να υπολογίζουν, αλλά παρέχει επίσης τη βάση για την εργασία με τα ποσοστά, την κλίση και πολλά άλλα θέματα των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Παρά τη σημασία των κλασμάτων, πολλά παιδιά συναντούν μεγάλη δυσκολία στο χειρισμό τους (Byrnes & Wasik, 1991, Fuchs et al., 2014, Jordan et al. 2013 · Newton, Willard & Teufel, 2014. Siegler & Lortie-Forgues, 2015; Siegler & Pyke, 2013; Siegler, Thompson, & Schneider, 2011). Σε αντίθεση με την αριθμητική των φυσικών αριθμών, την οποία τα περισσότερα παιδιά τελικά κατακτούν τουλάχιστον για τους μονοψήφιους αριθμούς, πολλοί μαθητές δεν φτάνουν ποτέ στην επαρκή γνώση της αριθμητικής των κλασμάτων (Gabriel et al., 2013, Lortie-Forgues, Tian, & Siegler, 2015; Stigler, Givvin & Thompson, 2010). Για παράδειγμα, οι μαθητές της 6^{ης} και 8^{ης} τάξης των ΗΠΑ στην έρευνα των Siegler και Pyke (2013) συγκέντρωσαν ποσοστά σωστών απαντήσεων 41% και 57%, αντίστοιχα, σε 16 αριθμητικά προβλήματα με κλάσματα τα οποία συμπεριλάμβαναν και τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις με ομώνυμα και ετερόνυμα κλάσματα. Επίσης, στην έρευνα των Venkataraman, Hedberg, & Shagle (2007) παρουσιάστηκαν 15 θέματα σε καθηγητές της Άλγεβρας στις Ηνωμένες Πολιτείες τα οποία θεωρούνταν ως προαπαιτούμενα για τη μάθηση της άλγεβρας. Οι καθηγητές οι οποίοι ρωτηθήκαν για την ετοιμότητα των μαθητών τους σε αυτά, βαθμολόγησαν τη γνώση των κλασμάτων και των δεκαδικών από τους μαθητές τους ως τη δεύτερη χαμηλότερη.

Όπως αναφέρεται από τους Braithwaite, Pyke & Siegler (2017), έχουν ταυτοποιηθεί (Lortie-Forgues et al., 2015) δύο κατηγορίες δυσκολιών τις οποίες αντιμετωπίζουν τα παιδιά στην εκμάθηση της αριθμητικής των κλασμάτων. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τις δυσκολίες σε συγκεκριμένες διαδικασίες στα κλάσματα τις οποίες αναμένεται

να μάθουν οι μαθητές, όπως ο αριθμός των διαδικασιών, η ασάφεια του νοήματός τους, οι περίπλοκες και μερικώς αλληλεπικαλυπτόμενες σχέσεις μεταξύ των διαδικασιών διαφορετικών πράξεων, και η πολύπλοκη σχέση μεταξύ των διαδικασιών των κλασμάτων και των ακεραίων αριθμών. Η δεύτερη κατηγορία αφορά τις δυσκολίες σχετικά με το πλαίσιο μέσα στο οποίο μαθαίνονται οι διαδικασίες. Τέτοιες είναι η σαφήνεια της παρουσίασης από τους καθηγητές και τα σχολικά βιβλία, το είδος και ο αριθμός των προβλημάτων εξάσκησης τα οποία παρουσιάζονται στους μαθητές, καθώς και η πρότερη μαθηματική γνώση την οποία οι μαθητές μεταφέρουν στη διαδικασία της εκμάθησης της αριθμητικής του κλασμάτων.

Οι Braithwaite et al. (2017), με στόχο να εξετάσουν τον τρόπο με τον οποίο αλληλεπιδρούν οι δύο παραπάνω πηγές των δυσκολιών των μαθητών στην αριθμητική των κλασμάτων, καθώς και να ελέγξουν μια σειρά συγκεκριμένων υποθέσεων σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο συμβαίνει η μάθηση αυτής, δημιούργησαν το λογισμικό FARRA (Fraction Arithmetic Reflects Rules and Associations). Το πρόγραμμα FARRA, χρησιμοποιώντας ως είσοδο το σύνολο των μη-λεκτικών προβλημάτων στην αριθμητική των κλασμάτων από κάποια σειρά σχολικών βιβλίων, υλοποιεί ένα υπολογιστικό μοντέλο του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές αποκτούν ή αποτυγχάνουν να αποκτήσουν ευχέρεια στην αριθμητική των κλασμάτων. Οι Braithwaite et al. (2017) χρησιμοποίησαν ως είσοδο στο λογισμικό FARRA για τα πειράματά τους τα προβλήματα από κάθε μία από τρεις ευρέως διαδεδομένες σειρές σχολικών βιβλίων της Αμερικής.

Η παρούσα εργασία βασίζεται στο μεθοδολογικό πλαίσιο του άρθρου των Braithwaite et al. (2017). Συγκεκριμένα, μελετούμε την κατανομή των προβλημάτων στην αριθμητική των κλασμάτων για τις εξής σειρές σχολικών βιβλίων:

1. Τα Ελληνικά σχολικά βιβλία, τα Κυπριακά σχολικά βιβλία και τη σειρά Pearson Education's enVisionMATH (Charles et al., 2012) των ΗΠΑ), για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο.
2. Τα Ελληνικά σχολικά βιβλία, τα Κυπριακά σχολικά βιβλία και το βιβλίο «*Στην τροχιά των ρητών*» των εκδόσεων Κυριακίδη (Δεκέμβριος 2016), αποκλειστικά για το Δημοτικό.

Χρησιμοποιώντας το υπολογιστικό μοντέλο FARRA των Braithwaite et al. (2017) εξετάζουμε τον πιθανό τρόπο με τον οποίο η κατανομή των προβλημάτων των Ελληνικών και Κυπριακών σχολικών βιβλίων στην αριθμητική των κλασμάτων, επηρεάζει την επίδοση των μαθητών.

5 Θεωρητικό πλαίσιο

Όπως αναφέρουν οι Fan, Zhu, & Miao, (2013), τα εγχειρίδια των Μαθηματικών, ως υλικά υποστήριξης της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών, έχουν υπάρξει από τους αρχαίους χρόνους. Είναι γνωστό ότι «*Τα Στοιχεία*» του Ευκλείδη στην αρχαία Ελλάδα (περίπου στα 300 π.Χ.) θεωρήθηκε ως «*το πιο επιτυχημένο εγχειρίδιο μαθηματικών που έχει γραφτεί ποτέ*» στη Δύση (Merzbach & Boyer 2011, σελ. 90), ενώ τα «*Εννέα Κεφάλαια για την τέχνη των Μαθηματικών*» στην αρχαία Κίνα (περίπου στα 200-100 π.Χ.) θεωρήθηκε ότι «*χρησίμευσε ως βιβλίο όχι μόνο στην Κίνα, αλλά και στις γειτονικές χώρες και τις περιοχές έως το 1600 μ.Χ.*» (Shen et al., 1999, σελ. 1). Όμως,

συγκρινόμενη με τη μακρά ύπαρξη των μαθηματικών σχολικών βιβλίων, η μελέτη αυτή καθεαυτή των σχολικών βιβλίων στα μαθηματικά ή η έρευνα των σχολικών βιβλίων γενικότερα, έχει πολύ μικρότερη ιστορία. Όπως σημείωσε ο Cronbach (1955) πριν από έξι δεκαετίες, μολονότι τα σχολικά εγχειρίδια ήταν πιο διαδεδομένα στις σχολικές τάξεις, η έρευνα με επίκεντρο τα σχολικά βιβλία ήταν «διάσπαρτη, ασαφής και συχνά ασήμαντη» (σελ. 4). Στη δεκαετία του 1980, το γεγονός ότι τα σχολικά εγχειρίδια παρέμεναν σε μεγάλο βαθμό ένα ανεξερεύνητο πεδίο και ότι απαιτούνταν περισσότερη έρευνα σε αυτό το πεδίο, γινόταν όλο και περισσότερο αντιληπτό από τους ερευνητές (βλέπε, π.χ., Freeman & Porter 1989, Graybeal & Stodolsky 1986; Sosniak & Stodolsky 1993). Επιπλέον, όπως τονίζει ο Fan (2011), η έρευνα για τα σχολικά βιβλία έχει αυξηθεί ραγδαία τις τελευταίες τρεις δεκαετίες.

Οι Fan et al. (2013) διεξάγουν μια μελέτη η οποία έχει ως στόχο να εξετάσει συστηματικά, να αναλύσει και να κάνει ανασκόπηση των ερευνών οι οποίες έχουν ως επίκεντρο τα σχολικά βιβλία των μαθηματικών. Κατέταξαν έτσι τα άρθρα σχετικά με την έρευνα των σχολικών βιβλίων στα Μαθηματικά στις εξής τέσσερις κατηγορίες:

1. Ο ρόλος των σχολικών βιβλίων:

Περιλαμβάνει την έρευνα όσον αφορά το ρόλο των βιβλίων στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Όπως σημειώνουν οι Fan et al. (2013), αυτή η κατηγορία είναι απαραίτητη γιατί αντικατοπτρίζει την εστίαση των περισσότερων φιλοσοφικών ή μη εμπειρικών άρθρων στο ρόλο των σχολικών βιβλίων στα μαθηματικά.

2. Ανάλυση και σύγκριση των σχολικών βιβλίων:

Αφορά τις μελέτες με αντικείμενο την ανάλυση συγκεκριμένων χαρακτηριστικών των μαθηματικών στα σχολικά βιβλία και, στην περίπτωση της σύγκρισης σχολικών βιβλίων, τη σύγκριση των ομοιοτήτων και των διαφορών δύο ή περισσότερων σειρών σχολικών βιβλίων στα μαθηματικά.

3. Η χρήση των σχολικών βιβλίων:

Περιλαμβάνει τις μελέτες εκείνες οι οποίες εστιάζουν στον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται τα σχολικά εγχειρίδια από τους εκπαιδευτικούς και/ή τους μαθητές. Με άλλα λόγια, πώς τα βιβλία διαμορφώνουν τον τρόπο της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών.

4. Άλλες ερευνητικές περιοχές:

Αποτελείται από όλες τις υπόλοιπες μελέτες, όπως αυτές για τα ηλεκτρονικά σχολικά βιβλία, τα οποία είναι αρκετά νέα και αξίζουν ιδιαίτερη προσοχή, και τις μελέτες αναφορικά με τη σχέση μεταξύ βιβλίων και επίδοσης των μαθητών. Βέβαια, οι Fan et al. (2013) σημειώνουν ότι ο αριθμός αυτών των μελετών είναι λίγες, γεγονός που υποδηλώνει ότι μια περαιτέρω ταξινόμηση δεν είναι ούτε στην πραγματικότητα εφικτή ούτε απαραίτητη.

Στη συνέχεια, αναφέρουμε αντιπροσωπευτικές έρευνες για κάθε μία από τις παραπάνω κατηγορίες.

5.1 Ο ρόλος των σχολικών βιβλίων στη διδασκαλία και τη μάθηση

Τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην καθοδήγηση των εκπαιδευτικών στο σχεδιασμό των μαθημάτων. Προηγούμενες μελέτες έχουν δείξει ότι επηρεάζουν το τι διδάσκουν οι εκπαιδευτικοί, πώς το διδάσκουν και ποια εργασία για το σπίτι ή δραστηριότητες αναθέτουν στους μαθητές τους (Alajmi, 2009, Hirsch, Lappan, Reys, & Reys, 2005; Robitaille & Travers, 1992; Shimahara & Sakai, 1995; Schmidt, McKnight, & Raizen, 1997; Tyson-Bernstein & Woodward, 1991; Weiss, Pasley, Smith, Sanilower, & Heck, 2003). Τα σχολικά βιβλία των μαθηματικών επηρεάζουν τα θέματα τα οποία καλύπτονται και τον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζονται τα θέματα αυτά. Οι Stein, Remillard και Smith (2007) υποστήριξαν ότι «το ποια μαθηματικά θέματα καλύπτονται σε ένα δεδομένο σύνολο μαθημάτων σπουδών είναι θεμελιώδους σημασίας» (σελ. 327). Όταν ένα θέμα δεν καλύπτεται στο σχολικό εγχειρίδιο, τότε είναι απίθανο να παρουσιαστεί στη σχολική τάξη (Alajmi & Reys, 2007; Schmidt et al., 1997). Επιπλέον, ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζονται τα θέματα στα σχολικά βιβλία είναι σημαντικός διότι θέτει σε κίνηση «τις παιδαγωγικές προσεγγίσεις και τις διαφορετικές ευκαιρίες για τη μάθηση των μαθητών» (Stein et al., 2007, p. 327). Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού TIMSS δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν το σχολικό βιβλίο ως την κύρια πηγή όταν επιλέγουν μεθόδους διδασκαλίας (Beaton et al., 1996; Schmidt et al., 1997). Τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών κατηγορούνται επίσης συχνά για παρανοήσεις τις οποίες έχουν οι μαθητές στα κλάσματα. Για παράδειγμα, ο Behr και οι συνάδελφοί του (1992) επεσήμαναν τις ελλείψεις «σε καταστάσεις με προβλήματα που παρέχουν εμπειρία στη σύνθεση, την αποσύνθεση και τις εννοιολογικές μονάδες του κλάσματος» και μια «έλλειψη εμπειρίας στην ποιοτική συλλογιστική σχετικά με το μέγεθος του κλάσματος, τη σχέση διάταξης και τα αποτελέσματα των πράξεων».

Οι Son & Senk (2010) επισημαίνουν ότι ένας όλο και αυξανόμενος όγκος ερευνών καταδεικνύουν τους τρόπους με τους οποίους τα σχολικά βιβλία συνδέονται με τη μάθηση. Ειδικότερα, αναφέρουν τα εξής (σελ. 118):

- *«Τα σχολικά εγχειρίδια χρησιμεύουν ως ενδιάμεσοι για την μετατροπή των προθέσεων σε πραγματικότητα. Μια εξέταση των σχολικών βιβλίων ενημερώνει αυτούς οι οποίοι χαράσσουν τις πολιτικές για τον τρόπο με τον οποίο τα κοινωνικά οράματα και οι εκπαιδευτικοί στόχοι γίνονται αντιληπτά από τις εθνικές πολιτικές και τα επίσημα έγγραφα, καθώς το αναμενόμενο πρόγραμμα σπουδών ενσαρκώνεται στις σχολικές αίθουσες (Schmidt, McKnight, Cogan, Jakwerth & Houang, 1999; Valverde et al., 2002).*
- *Τα σχολικά βιβλία είναι το ορατό πρόγραμμα σπουδών στις περισσότερες αίθουσες διδασκαλίας και καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό το τι διδάσκεται και τι μαθαίνουν οι μαθητές. Το γεγονός ότι διαφορετικά εγχειρίδια προσφέρουν διαφορετικές ευκαιρίες μάθησης στους μαθητές, βοηθά σημαντικά να εξηγηθούν οι διαφορές στην επίδοση των μαθητών (Fuson, Stigler & Bartsch, 1988; Mayer, Sims & Tajika, 1995; Mesa, 2004; Valverde et al., 2002).*
- *Οι δάσκαλοι οι οποίοι δεν έχουν γνώση του θέματος που διδάσκουν, έχουν μια τάση να στηρίζονται υπερβολικά στα σχολικά εγχειρίδια (Collory, 2003). Τα σχολικά βιβλία μπορούν να λειτουργήσουν ως σημαντική υποστήριξη για τους εκπαιδευτικούς παρέχοντας λεπτομερείς πληροφορίες στη λήψη αποφάσεων (Kaufman, 1997)».*

Επιπλέον, οι Robitaille & Travers (1992) υποστήριξαν ότι η μεγάλη εξάρτηση από τα εγχειρίδια είναι «ίσως περισσότερο χαρακτηριστικό της διδασκαλίας των μαθηματικών από οποιοδήποτε άλλο αντικείμενο» (σελ. 706).

Οι Sosniak & Perlman (1990) επεσήμαναν ότι η δύναμη των σχολικών βιβλίων έγκειται στην ικανότητα τους να χρησιμεύουν ως πόροι που εισάγουν τους αναγνώστες σε κόσμους που δεν είναι άμεσα προφανείς ή δεν μπορούν να βιωθούν άμεσα. Συγκεκριμένα, αναφέρουν ότι τα βιβλία έχουν τη δική τους δύναμη στο να παρέχουν μια «οργανωμένη ακολουθία ιδεών και πληροφοριών» στη δομημένη διδασκαλία και μάθηση, η οποία οδηγεί «την κατανόηση, τη σκέψη και το συναίσθημα» των αναγνωστών όπως επίσης και «την πρόσβαση σε γνώση η οποία εμπλουτίζει την προσωπικότητα και ενδυναμώνει το άτομο πολιτικά» (σελ. 440). Ο Apple (1986) πρότεινε επίσης, ότι «είναι το σχολικό εγχειρίδιο το οποίο καθιερώνει τόσο πολύ τις υλικές συνθήκες για τη διδασκαλία και τη μάθηση στις σχολικές τάξεις ... και ... συχνά καθορίζει τι είναι ελίτ και ποια κουλτούρα είναι θεμιτό να μεταβιβαστεί» (σελ. 81).

Με βάση μια εμπειρική μελέτη σχετικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών χρησιμοποιώντας διαφορετικά εγχειρίδια, οι Fan και Kaeley (2000) διαπίστωσαν ότι οι εκπαιδευτικοί που χρησιμοποιούν διαφορετικούς τύπους σχολικών βιβλίων παρουσίαζαν διαφορετικά συλ διδακτικών στρατηγικών, και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι τα σχολικά εγχειρίδια φαίνεται να παίζουν κάποιο ρόλο στην παιδαγωγική την οποία ασκούν οι εκπαιδευτικοί, διαμέσου της μεταφοράς παιδαγωγικών μηνυμάτων και της παροχής ενός ενθαρρυντικού ή αποθαρρυντικού περιβάλλοντος για τους ίδιους, προκειμένου να εφαρμόσουν διαφορετικές στρατηγικές διδασκαλίας.

Επιπλέον, οι Fan et al. (2013) διαπιστώνουν ότι η σύλληψη από τους ερευνητές της σχέσης μεταξύ των σχολικών εγχειριδίων και του προγράμματος σπουδών είναι ιδιαίτερα αξιοσημείωτη. Στο αξιολογικό βιβλίο του το οποίο αφορά τη σύγκριση μεταξύ των σχολικών εγχειριδίων για την Τρίτη Διεθνή Μελέτη για τα Μαθηματικά και την Επιστήμη (TIMSS), ο Howson (1995) επεσήμανε ότι τα σχολικά βιβλία ήταν ένα βήμα πιο κοντά στην πραγματικότητα της σχολικής τάξης από ένα εθνικό πρόγραμμα σπουδών. Οι Schmidt et al. (1997) τόνισαν παραπέρα ότι «δύο κόσμοι - αυτός των επίσημων προθέσεων και αυτός των πραγματικών δραστηριοτήτων στην τάξη-συνδέονται μαζί, εν μέρει, από τα σχολικά εγχειρίδια» (σελ. 53).

5.2 Ανάλυση και σύγκριση των σχολικών εγχειριδίων

Οι συγκριτικές αναλύσεις βιβλίων έχουν αντιμετωπίσει ένα αρκετά μεγάλο εύρος μαθηματικού περιεχομένου: πρόσθεση και αφαίρεση φυσικών αριθμών (Fuson et al., 1988), πολλαπλασιασμός και διαίρεση φυσικών αριθμών (Watanabe, 2003), δεκαδικά ψηφία (Nicely, Fiber & Bobango, 1986), προσθήκη και αφαίρεση ακεραίων (Li, 2002), συναρτήσεις (Mesa, 2004), και μιγαδικούς αριθμούς (Nicely, 1985).

Όπως σημειώνουν οι Fan et al. (2013), η ανάλυση των σχολικών βιβλίων είναι ένας ευρύς όρος που περιλαμβάνει κυρίως (1) την ανάλυση ενός μόνο εγχειριδίου ή μιας σειράς εγχειριδίων, η οποία συχνά επικεντρώνεται στο πώς αντιμετωπίζεται ένα θέμα ή μια ομάδα θεμάτων, ή πώς μια συγκεκριμένη ιδέα ή πτυχή ενδιαφέροντος αντικατοπτρίζεται στα σχολικά βιβλία και (2), την ανάλυση διαφορετικών σειρών σχολικών εγχειριδίων από την ίδια χώρα ή, πιο συχνά, από διαφορετικές χώρες, συχνά με επίκεντρο τον εντοπισμό των ομοιοτήτων τους και των

διαφορών τους. Το τελευταίο ονομάζεται επίσης και ως σύγκριση σχολικών βιβλίων. Επιπλέον, οι Zhu, & Miao (2013), παρουσιάζουν μια υποδιαίρεση της συνολικής εικόνας της έρευνας στην ανάλυση και σύγκριση των σχολικών βιβλίων, η οποία περιλαμβάνει τις εξής πέντε πτυχές:

- (1) Τα μαθηματικά ως προς το περιεχόμενο και τις έννοιες.
- (2) Γνώση και παιδαγωγική.
- (3) Το φύλο, η εθνικότητα, η ισότητα, ο πολιτισμός και η αξία.
- (4) Σύγκριση διαφορετικών εγχειρίδιων.
- (5) Τα θέματα της εννοιολόγησης και της μεθοδολογίας.

Βέβαια, οι Fan et al. (2013) σημειώνουν ότι οι παραπάνω πτυχές συχνά συνυπάρχουν εντός της ίδιας μελέτης. Για παράδειγμα μια μελέτη σύγκρισης μπορεί να είναι σχετικά με το μαθηματικό περιεχόμενο ή με θέματα σε διαφορετικά εγχειρίδια. Αναλύουμε παρακάτω κάθε υποκατηγορία ξεχωριστά.

5.2.1 Τα μαθηματικά ως προς το περιεχόμενο και τις έννοιες.

Οι περισσότερες μελέτες στην ανάλυση σχολικών βιβλίων, όπως αποκαλύφθηκε από την έρευνα των Fan et al. (2013), επικεντρώθηκαν σε θέματα σχετικά με το πως το διαφορετικό μαθηματικό περιεχόμενο ή έννοια έχουν αντιμετωπιστεί από τα σχολικά εγχειρίδια. Τέτοιες μελέτες είναι για παράδειγμα οι Flanders (1987) και Pickle (2012) σχετικά με την ποσότητα του περιεχομένου η οποία ήταν νέα για τους μαθητές παρά επανάληψη του παλιού περιεχομένου. Σε μία άλλη έρευνα των Reys et al. (1996) εξετάζεται ο τρόπος με τον οποίο τρεις Ιαπωνικές σειρές σχολικών βιβλίων παρουσιάζουν και αναπτύσσουν τους υπολογισμούς. Διαπιστώθηκε ότι οι στόχοι ήταν παρόμοιοι, αλλά οι μέθοδοι και τα υλικά παρουσίασης ήταν πολύ διαφορετικά και, επιπλέον, ένα πολύ υψηλότερο επίπεδο υπολογιστικής ικανότητας αναμένονταν στο τέλος της τρίτης τάξης από τους Ιάπωνες μαθητές σε σχέση με τους Αμερικάνους μαθητές.

5.2.2 Γνώση και παιδαγωγική.

Η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει τις έρευνες σχετικά με τις γνωστικές απαιτήσεις των σχολικών εγχειρίδιων. Μια τέτοια έρευνα σχολικών βιβλίων είναι αυτή του Nicely (1985) η οποία χρησιμοποίησε μια πρωτότυπη ταξινόμηση 10 επιπέδων των νοητικών δραστηριοτήτων και αποκάλυψε μια γενική μείωση τόσο της ποσότητας του υλικού το οποίο απαιτεί τη συμμετοχή των μαθητών, όσο και του ποσοστού αυτού του υλικού που απαιτεί σκέψη υψηλότερου επιπέδου. Η μελέτη κατέληξε στο συμπέρασμα ότι τα σχολικά βιβλία των μαθηματικών δεν επαρκούν για να εμπλέξουν ενεργά τους μαθητές στην ανάπτυξη, την πρακτική και την απόκτηση δεξιοτήτων σκέψης υψηλότερης τάξης. Ομοίως, η ανεπάρκεια των παρεχόμενων δραστηριοτήτων με απαιτήσεις σκέψης υψηλότερης τάξης αναφέρθηκε επίσης και σε μια άλλη μελέτη από τους Nicely et al. (1986) με έμφαση στα προβλήματα με δεκαδικούς σε 16 σχολικά βιβλία Δημοτικού.

Σε μία άλλη έρευνα οι Zhu & Fan (2006) συνέκριναν πώς επιλεγμένα βιβλία από την Κίνα και τις Ηνωμένες Πολιτείες της 7^{ης} και 8^{ης} τάξης αναπαριστούν διάφορους τύπους μαθηματικών προβλημάτων. Η έρευνα αποκάλυψε ότι και στις δύο χώρες, περισσότερο από το 96% των προβλημάτων ήταν ρουτίνας και παραδοσιακά, πάνω από το 93%

ήταν προβλήματα κλειστού τύπου, και περισσότερο από το 92% των προβλημάτων δεν αντιστοιχούσαν σε πραγματικές καταστάσεις. Τα αποτελέσματα επίσης έδειξαν ότι τα προβλήματα στα κινέζικα εγχειρίδια ήταν γενικά πιο δύσκολα αναφορικά με τα βήματα τα οποία εμπλέκονταν στις λύσεις των προβλημάτων, ενώ στις ΗΠΑ, τα εγχειρίδια παρείχαν σημαντικά περισσότερα προβλήματα εφαρμογής, αυθεντικά, όπως και προβλήματα με οπτικοποίηση.

5.2.3 Το φύλο, η εθνικότητα, η ισότητα, ο πολιτισμός και η αξία.

Αυτή η κατηγορία αφορά κυρίως κάποιες αρχικές μελέτες οι οποίες σχετίστηκαν με θέματα φυλετικά και ισότητας (Fan et al., 2013). Για παράδειγμα ο Kuhke (1977) παρακινήμένος από μια ανησυχία σχετικά με το ζήτημα του σεξισμού στα προγράμματα σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια, διερεύνησε δύο σειρές σχολικών εγχειριδίων των ΗΠΑ για το Δημοτικό και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι καταβλήθηκαν θετικές προσπάθειες για την εξάλειψη των στερεοτύπων του φύλου. Παρόμοια θετικά συμπεράσματα ελήφθησαν επίσης από τους Nibbelink et al. (1986), οι οποίοι ανέλυσαν τα προβλήματα που παρουσιάστηκαν στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών της 3^{ης} έως 6^{ης} τάξης των ΗΠΑ και διαπίστωσαν ότι τα σχολικά εγχειρίδια δεν ήταν σεξιστικά, αλλά ούτε και εναντίον του σεξισμού.

5.2.4 Σύγκριση διαφορετικών εγχειριδίων.

Εδώ περιλαμβάνονται οι διεθνείς συγκρίσεις. Μια τέτοια συγκριτική ανάλυση μεγάλης κλίμακας πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο της μελέτης TIMSS στη δεκαετία του 1990. Ήταν η πρώτη φορά που τα σχολικά βιβλία θεωρήθηκαν ως ανεξάρτητη συγκριτική μεταβλητή σε μια διεθνή συγκριτική μελέτη μεγάλης κλίμακας. Οι ερευνητές TIMSS συνέκριναν τα σχολικά βιβλία των μαθηματικών τα οποία χρησιμοποιούνταν σε σχεδόν 40 συμμετέχουσες χώρες με έμφαση σε πέντε μεγάλους τομείς: (α) τη φύση της παιδαγωγικής κατάστασης την οποία θέτει το εγχειρίδιο, (β) τη φύση του θέματος του αντικειμένου όπως ο αριθμός των θεμάτων, ο βαθμός της αφαίρεσης και η πολυπλοκότητα των θεμάτων, (γ) την ακολουθία των θεμάτων, (δ) τα φυσικά χαρακτηριστικά των σχολικών βιβλίων, για παράδειγμα, το μέγεθος και το μήκος, και (ε) την πολυπλοκότητα της συμπεριφοράς των μαθητών την οποία προορίζεται να προκαλέσει το βιβλίο (Valverde et al., 2002, σελ. 14). Το γενικό συμπέρασμα των ερευνητών ήταν ότι τα βιβλία από διαφορετικά εκπαιδευτικά συστήματα διαφέρουν με πολλούς τρόπους και ότι *«αυτά παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές στην παρουσίαση και δόμηση των παιδαγωγικών καταστάσεων και οι διαφορές αυτές συσχετίζονται συστηματικά με τις διαφορές στη χώρα, την τάξη και το αντικείμενο»* (Valverde et al., 2002, σελ. 17).

Μια πρώιμη μελέτη αυτού του είδους είναι αυτή από τους Stigler et al. (1986), η οποία εστίασε στα λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης σε τέσσερις αμερικανικές σειρές σχολικών βιβλίων και σε μία σειρά της Σοβιετικής Ένωσης (ΕΣΣΔ) για το Δημοτικό. Διαπιστώθηκε ότι όλα τα εγχειρίδια των ΗΠΑ ήταν παρόμοια μεταξύ τους, αλλά το σοβιετικό εγχειρίδιο ήταν διαφορετικό από τα αμερικάνικα με διάφορους τρόπους. Συγκεκριμένα, τα σοβιετικά εγχειρίδια είχαν πολύ μεγαλύτερη ποικιλία προβλημάτων διαφόρων τύπων, ενώ οι ΗΠΑ εστιάστηκαν περισσότερο σε προβλήματα τα οποία ήταν πιο εύκολο να λυθούν. Επιπλέον, τα σοβιετικά εγχειρίδια παρουσίασαν διαφορετικά προβλήματα σε ολόκληρο το κείμενο και δεν εστίασαν σε πιο δύσκολα προβλήματα σε ένα συγκεκριμένο τμήμα του σχολικού εγχειριδίου.

5.2.5 Τα θέματα της εννοιολόγησης και της μεθοδολογίας

Μαζί με την ανάπτυξη των μελετών στην ανάλυση των σχολικών βιβλίων, τα θέματα της εννοιολόγησης και της μεθοδολογίας έχουν λάβει αυξανόμενη προσοχή από τους ερευνητές (Fan et al., 2013). Για παράδειγμα οι Perin και Haggarty (2001), με βάση την ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας, παρουσίασαν ένα πλαίσιο το οποίο ταξινόμησε την ανάλυση των σχολικών βιβλίων σε τέσσερις βασικούς τομείς: «μαθηματικές προθέσεις των σχολικών βιβλίων», «παιδαγωγικές προθέσεις των σχολικών βιβλίων», «κοινωνιολογικά πλαίσια των σχολικών εγχειριδίων», και «πολιτιστικές παραδόσεις οι οποίες αναπαρίστανται στα σχολικά εγχειρίδια».

Ο Kim (2009) πραγματοποίησε συνεντεύξεις με 21 καθηγητές (Νότια Κορέα: 11, ΗΠΑ: 10), καθώς και με επτά συγγραφείς σχολικών εγχειριδίων (Νότια Κορέα: 4, ΗΠΑ: 3) με στόχο να αναπτύξει ένα πλαίσιο για την αξιολόγηση στοιχείων που δεν θεωρούνται κείμενο, όπως φωτογραφίες και γραφήματα, στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών. Το πλαίσιο αυτό το οποίο επικυρώθηκε δια μέσου της μέτρησης τεσσάρων κορεατικών και τριών αμερικανικών μαθηματικών σχολικών βιβλίων, περιελάμβανε πέντε στοιχεία: την ακρίβεια, τη συνδεσιμότητα, τη σχετικότητα με το πλαίσιο, την απλότητα και την αισθητική.

5.3 Η χρήση των σχολικών βιβλίων στη διδασκαλία και τη μάθηση

Ο Gilbert (1989) σχολιάζει ότι η ανάλυση κειμένου μπορεί να είναι σε θέση να προβλέψει, αλλά δεν μπορεί ποτέ να εξαγάγει ανεπιφύλακτα, την πραγματική χρήση των σχολικών κειμένων στην τάξη. Ως εκ τούτου, είναι σημαντικό να εξεταστούν τα σχολικά βιβλία όχι μόνο όσον αφορά το περιεχόμενο και τη δομή τους, αλλά και ως προς τη χρήση τους σε πραγματικές αίθουσες διδασκαλίας. Πολλοί άλλοι ερευνητές υποστήριξαν επίσης τις έρευνες των σχολικών εγχειριδίων όπως αυτά χρησιμοποιούνται στην τάξη (π.χ. McCutcheon, 1982 και Stodolsky, 1989).

Μια προηγούμενη μελέτη έγινε από τον Krammer (1985), ο οποίος θεώρησε το βιβλίο ως μεταβλητή του πλαισίου της σχολικής τάξης και σύγκρινε τη διδασκαλία των Ολλανδών εκπαιδευτικών χρησιμοποιώντας τρία διαφορετικά σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών. Βασισμένη στα δεδομένα που συλλέχθηκαν μέσω παρατήρησης της τάξης, δοκιμασιών και ερωτηματολογίων προς τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς, η μελέτη αποκάλυψε σημαντικές διαφορές στις πρακτικές διδασκαλίας μεταξύ των τριών ομάδων χρηστών των σχολικών βιβλίων. Επιπλέον, βρέθηκε συσχέτιση μεταξύ των πρακτικών διδασκαλίας και των χαρακτηριστικών των σχολικών βιβλίων. Είναι ενδιαφέρον ότι ο Krammer έθεσε το ερώτημα κατά πόσο η συσχέτιση αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι οι δάσκαλοι ακολούθησαν τα εγχειρίδια ή επειδή οι εκπαιδευτικοί επέλεξαν εκείνα τα σχολικά βιβλία τα οποία μοιάζουν με το προτιμώμενο στυλ διδασκαλίας από τους ίδιους.

Με σκοπό τη διερεύνηση της χρήσης των βασικών σχολικών βιβλίων από τους δασκάλους και την ενδεχόμενη αλληλοεπικάλυψη μεταξύ του περιεχομένου του σχολικού εγχειριδίου και της διδασκαλίας, οι Freeman & Porter (1989) ανέλυσαν τέσσερα καθημερινά ημερολόγια καθηγητών μαθηματικών και μέτρησαν ποσοτικά την αλληλοεπικάλυψη μεταξύ του περιεχομένου του σχολικού εγχειριδίου το οποίο χρησιμοποίησαν και των μαθημάτων τα οποία δίδαξαν καθ' όλη τη διάρκεια ενός σχολικού έτους. Τα αποτελέσματα αποκάλυψαν το σημαντικό ρόλο που διαδραμάτισαν οι δάσκαλοι στη χρήση των σχολικών βιβλίων και υποστήριξε ότι οι διαφορές

στην εφαρμογή των σχολικών εγχειριδίων από τους μαθητές θα μπορούσαν να εξηγήσουν σε σημαντικό βαθμό τις διαφορές στην αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας και στο αποτέλεσμα της μάθησης.

Ο Remillard (1999) μελέτησε τη χρήση από δύο δασκάλους του σχολικού εγχειριδίου και κατέληξε σε αξιοσημείωτες διαφορές μεταξύ του σχολικού εγχειριδίου και της εφαρμογής του στην τάξη.

Οι Zhu και Fan (2002) διερεύνησαν πώς οι καθηγητές των μαθηματικών της Σιγκαπούρης χρησιμοποίησαν τα δύο συνηθέστερα χρησιμοποιούμενα σχολικά εγχειρίδια στις πρώτες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Διαπίστωσαν ότι τα σχολικά εγχειρίδια ήταν γενικά μια σημαντική πηγή για τη διδασκαλία αλλά όχι η μοναδική. Επιπλέον, παρατήρησαν ότι δεν υπήρξαν σημαντικές διαφορές μεταξύ των δασκάλων διαφορετικού φύλου, εμπειρίας και από διαφορετικά σχολεία αναφορικά με τη χρήση των σχολικών βιβλίων στα μαθηματικά.

5.4 Άλλες περιοχές έρευνας στα σχολικά εγχειρίδια

Τέλος οι Fan et al. (2013) αναφέρουν ότι ενώ το μεγαλύτερο μέρος της έρευνας στα σχολικά βιβλία αφορά την ανάλυση, σύγκριση και χρήση τους στη μαθηματική εκπαίδευση, οι ερευνητές έχουν επίσης δώσει προσοχή σε μερικούς άλλους τομείς που επικεντρώνονται στα σχολικά εγχειρίδια, αν και ο αριθμός αυτών των μελετών είναι σημαντικά λιγότερες. Για παράδειγμα μερικοί ερευνητές εξέτασαν τη σχέση μεταξύ των σχολικών εγχειριδίων και των επιδόσεων των μαθητών στα μαθηματικά.

Ειδικότερα, όσον αφορά τις ευκαιρίες μάθησης που προσφέρονται στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών και τις επιπτώσεις τους στα μαθησιακά αποτελέσματα, ο Xin(2007) εξέτασε 57 Αμερικανούς και 54 Κινέζους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες και συσχέτισε την απόδοσή τους με την κατανομή των διαφόρων ειδών λεκτικών προβλημάτων στα σχολικά εγχειρίδια. Τα αποτελέσματα αποκάλυψαν ότι οι Κινέζοι μαθητές έλαβαν υψηλό βαθμό. Επίσης, οι συγκριτικές αναλύσεις των σχολικών βιβλίων έδειξαν μια μη ισορροπημένη κατανομή των λεκτικών προβλημάτων στο σχολικό εγχειρίδιο των ΗΠΑ. Αυτή η ανισορροπία θεωρήθηκε ένας καθοριστικός παράγοντας της επίδοσης των μαθητών των ΗΠΑ.

Οι Fan et al. (2013) συμπεραίνουν ότι οι περισσότερες μελέτες στην ανάλυση των σχολικών βιβλίων έχουν αποκαλύψει με συνέπεια, σε ένα μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό, την ανεπάρκεια των σχολικών βιβλίων στην παρουσίαση του μαθηματικού περιεχομένου, των μαθηματικών θεμάτων και της επίλυσης προβλήματος. Παρατηρήθηκαν αξιοσημείωτες διαφορές ανάμεσα στα σχολικά εγχειρίδια από διαφορετικές σειρές και ιδιαίτερα ανάμεσα σε διαφορετικές χώρες. Το γεγονός αυτό καταδεικνύει κατά τους Fan et al. (2013) όχι μόνο την έλλειψη συναίνεσης στην ανάπτυξη των σχολικών εγχειριδίων, αλλά και τη στενή σύνδεση των σχολικών βιβλίων με το πολιτιστικό και κοινωνικό υπόβαθρο. Επιπλέον, οι Fan et al. (2013) επισημαίνουν ότι οι διαθέσιμες μελέτες ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων έχουν αποκαλύψει τα κενά μεταξύ σχολικών βιβλίων και των προγραμμάτων σπουδών. Αυτά τα αποτελέσματα δείχνουν τόσο τις προκλήσεις όσο και την ανάγκη οι ερευνητές, οι συγγραφείς των προγραμμάτων σπουδών, οι υπεύθυνοι χάραξης πολιτικής και οι εκπαιδευτικοί να διεξάγουν περαιτέρω έρευνα και δράση.

5.5 Το άρθρο των Braithwaite, Pyke & Siegler (2017)

Μια έρευνα η οποία περιλαμβάνει την ανάλυση και σύγκριση σχολικών εγχειριδίων από την ίδια χώρα (ΗΠΑ), για ένα συγκεκριμένο μαθηματικό θέμα (κατανομή των προβλημάτων στην αριθμητική των κλασμάτων) είναι αυτή των Braithwaite et al. (2017). Επιπλέον, η συγκεκριμένη μελέτη περιέχει και σύνδεση μεταξύ των χαρακτηριστικών του μαθηματικού θέματος και του τρόπου με τον οποίο αυτά τα χαρακτηριστικά επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών. Το συγκεκριμένο άρθρο αποτέλεσε τη βάση για την παρούσα εργασία και κατά συνέπεια παραθέτουμε μια εκτενή αναφορά σε αυτό.

Με σκοπό να εξηγήσουν την συνολικά κακή επίδοση των μαθητών στην αριθμητική των κλασμάτων, καθώς και τα συγκεκριμένα μοτίβα σωστών και λαθεμένων απαντήσεων από τους μαθητές, οι Braithwaite et al. (2017) υπέθεσαν ότι οι επιλογή των στρατηγικών από τα παιδιά βασίζεται κυρίως στη συνειρμική γνώση και όχι στους σωστούς μαθηματικούς κανόνες ή την εννοιολογική κατανόηση. Επιπλέον, θεώρησαν ότι τα παιδιά αποκτούν αυτή τη συνειρμική γνώση από τη στατιστική κατανομή των προβλημάτων τα οποία συναντούν.

Για να ελεγχθούν οι παραπάνω υποθέσεις, οι Braithwaite et al. (2017) αρχικά ανέλυσαν όλες τις ασκήσεις στην αριθμητική των κλασμάτων από τρεις ευρέως διαδεδομένες σειρές σχολικών βιβλίων των ΗΠΑ. Τα προβλήματα τα οποία εξετάστηκαν αποτελούνταν από δύο παράγοντες, έναν από τους οποίους τουλάχιστον ήταν κλάσμα. Τα σχολικά βιβλία τα οποία επιλέχθηκαν αφορούσαν την 4^η, 5^η και 6^η τάξη ήταν τα εξής: οι σειρές Pearson Education's enVisionMATH (Charles et al., 2012), Houghton Mifflin Harcourt's GO MATH! (Dixon, Adams, Larson, & Leiva, 2012a, 2012b), και McGraw Hill Education's Everyday Mathematics (University of Chicago School Mathematics Project, 2015a, 2015b, 2015c).

Στη συνέχεια, οι Braithwaite et al. (2017), προκειμένου να εκτιμήσουν την επίδραση της κατανομής των προβλημάτων των σχολικών βιβλίων στην αριθμητική των κλασμάτων στην επίδοση των μαθητών, δημιούργησαν το λογισμικό προσομοίωσης FARRA (Fraction Arithmetic Reflects Rules and Associations). Όπως επισημαίνουν, τέτοια υπολογιστικά μοντέλα είναι χρήσιμα γιατί ρίχνουν φως στους μηχανισμούς οι οποίοι συνδέουν τις θεωρητικές προσεγγίσεις με την παρατηρήσιμη συμπεριφορά και επιπλέον, ελέγχουν κατά πόσο οι μηχανισμοί αυτοί παράγουν στην πραγματικότητα τα φαινόμενα τα οποία ισχυρίζονται ότι εξηγούν. Επιπρόσθετα, τα μοντέλα προσομοίωσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν με σκοπό να προσομοιωθούν τα αποτελέσματα μελλοντικών ερευνών. Με τον τρόπο αυτό η προσομοίωση παράγει εμπειρικές προβλέψεις οι οποίες επιτρέπουν την εκτέλεση περαιτέρω ελέγχου της υποκείμενης θεωρίας. Τέλος, τα μοντέλα δύνανται να προσδιορίσουν αποτελεσματικές κατευθύνσεις παρέμβασης.

Οι Braithwaite et al. (2017) σημειώνουν ότι (σελ. 2) *«η ταυτόχρονη εξέταση της επίδοσης και στις τέσσερις πράξεις είναι ιδιαίτερα σημαντική για το μοντέλο καθώς η σύγκριση μεταξύ των διαδικασιών που είναι κατάλληλες για διαφορετικές αριθμητικές πράξεις στα κλάσματα θεωρείται ότι βρίσκεται το επίκεντρο των δυσκολιών των μαθητών στην αριθμητική των κλασμάτων. Η συχνότητα και το εύρος αυτών των συγχύσεων είναι εμφανής μόνο όταν ληφθούν υπόψη και οι τέσσερις αριθμητικές πράξεις μαζί.»*

Το λογισμικό προσομοίωσης FARRA βασίζεται σε τέσσερις βασικές υποθέσεις Braithwaite et al. (2017) (σελ. 2, 3):

1. Στην υπόθεση ότι «η χαμηλή επίδοση των μαθητών στις πράξεις των κλασμάτων αντικατοπτρίζει καλά τεκμηριωμένους μηχανισμούς μάθησης οι οποίοι λειτουργούν στην βάση μιας μεροληπτικής εισόδου δεδομένων στους μαθητές. Αυτή η μεροληπτική είσοδος, παράγει μια ασθενική μάθηση συγκεκριμένων διαδικασιών. Η υπεργενίκευση αυτών των συγκεκριμένων διαδικασιών φαίνεται να αποτελεί μια μεγάλη πηγή δυσκολιών για τους μαθητές».
2. Στην υπόθεση ότι «οι σχετικές δυσκολίες στα διαφορετικά είδη προβλημάτων αριθμητικής των κλασμάτων αντικατοπτρίζουν μερικώς την ανισορροπία στην κατανομή των ασκήσεων τις οποίες λαμβάνουν οι μαθητές. Ειδικότερα, οι μαθητές συναντούν τα πιο δύσκολα είδη προβλημάτων λιγότερο συχνά. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να καθιστά αυτά τα προβλήματα πιο δύσκολα απ' ότι είναι πραγματικά. Μια γενική συνέπεια αυτής της υπόθεσης είναι ότι μια λεπτομερή ανάλυση των ασκήσεων οι οποίες παρουσιάζονται στους μαθητές δύναται να φωτίσει τη μάθηση σε συγκεκριμένους τομείς».
3. Στην υπόθεση ότι «ο άνθρωπος γενικά χρησιμοποιεί ως οδηγό για την επιλογή των διαδικασιών επίλυσης προβλημάτων, τις στατιστικές συσχετίσεις μεταξύ των χαρακτηριστικών των προβλημάτων και των διαδικασιών αυτών. Αυτή η στατιστική μάθηση είναι επικερδής σε ορισμένες καταστάσεις, αλλά μπορεί να είναι ζημιογόνα στη μάθηση των μαθηματικών, κατά την οποία τα κριτήρια για να εφαρμοστούν οι διαδικασίες επίλυσης των προβλημάτων βασίζονται σε ξεκάθαρους κανόνες παρά σε στατιστικές συσχετίσεις. Ειδικότερα, αν τα προβλήματα εξάσκησης τα οποία λαμβάνουν οι μαθητές είναι μεροληπτικά, τότε η επιλογή των στρατηγικών αντιμετώπισης των προβλημάτων αυτών θα αντικατοπτρίζει αυτή τη μεροληπτικότητα».
4. Στην υπόθεση ότι «η εννοιολογική κατανόηση παίζει μικρό ρόλο στην εκμάθηση από την πλειοψηφία των μαθητών της αριθμητικής των κλασμάτων. Σε ορισμένες περιπτώσεις, αν και τα παιδιά κατέχουν τη σχετική εννοιολογική κατανόηση, αγνοούν το γεγονός αυτό όταν εκτελούν πράξεις με κλάσματα. Για παράδειγμα, οι περισσότεροι μαθητές της 5^{ης} και της Α' γυμνασίου γνωρίζουν ότι το άθροισμα δύο θετικών κλασμάτων πρέπει να είναι μεγαλύτερο από κάθε έναν από τους δύο προσθετέους (Siegler & Lortie-Forgues, 2015). Παρόλα αυτά, συχνά παραβιάζουν αυτή την αρχή όταν επιλύουν προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων. Για παράδειγμα αναφέρουν το $\frac{2}{4}$ ως απάντηση στο πρόβλημα $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Άλλες φορές, τα παιδιά στερούνται της σχετικής εννοιολογικής κατανόησης. Για παράδειγμα, οι περισσότεροι μαθητές της 5^{ης} και της Α' γυμνασίου, καθώς και οι φοιτητές των παιδαγωγικών τμημάτων, απαντούν λανθασμένα ότι το γινόμενο δύο κλασμάτων με μέγεθος μεταξύ των 0 και 1 είναι μεγαλύτερο και από τους δύο παράγοντες (Siegler & Lortie-Forgues, 2015). Αυτά τα ευρήματα δεν οδηγούν στο συμπέρασμα ότι τα παιδιά δεν έχουν εννοιολογική κατανόηση της αριθμητικής των κλασμάτων, καταδεικνύουν όμως, ότι για πολλά παιδιά, η διαδικαστική γνώση αναπτύσσεται και αναπαρίσταται μεμονωμένα από οποιαδήποτε εννοιολογική γνώση την οποία ενδεχομένως κατέχουν».

Επιπλέον, οι Braithwaite et al. (2017) (σελ. 3) αναφέρουν ότι «με βάση την τελευταία υπόθεση, πολλές πτυχές της επίδοσης των μαθητών στην αριθμητική των κλασμάτων μπορούν να εξηγηθούν αποκλειστικά και μόνο από την εξέταση της διαδικαστικής γνώσης. Το λογισμικό FARRA ελέγχει αυτή την άποψη εξετάζοντας αν ένα υπολογιστικό μοντέλο το οποίο στερείται εννοιολογικής γνώσης μπορεί να παράγει και να εξηγήσει τα κύρια φαινόμενα τα οποία

παρατηρούνται στην αριθμητική των κλασμάτων από τους μαθητές και τα οποία έχουν τεκμηριωθεί από τη διεθνή βιβλιογραφία.»

5.5.1 Βασικά συμπεράσματα των Braithwaite, Pyke & Siegler (2017)

Οι Braithwaite et al. (2017) διαπίστωσαν ότι η προσομοίωση παρήγαγε πολλά φαινόμενα αναφορικά με την επίδοση των μαθητών στην αριθμητική των κλασμάτων μέσω ενός μικρού αριθμού κοινών μηχανισμών μάθησης οι οποίοι λειτουργούν σε ένα μεροληπτικό σύνολο εισροών. Επιπλέον, προσθέτουν ότι αυτές οι μεροληπτικές εισροές δεν περιορίζονταν σε μια συγκεκριμένη σειρά σχολικών εγχειριδίων (υπήρχαν και στις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων). Μεταξύ άλλων φαινομένων, το υπολογιστικό μοντέλο προέβλεψε τη μεγάλη δυσκολία των μαθητών στη διαίρεση κλασμάτων, τη χρήση μιας ποικιλίας στρατηγικών από μεμονωμένα παιδιά και σε μεμονωμένα προβλήματα, τις σχετικές συχνότητες διαφορετικών τύπων σφαλμάτων στρατηγικής σε διαφορετικά είδη προβλημάτων, και μια ποικιλία επιδράσεων της ισοδυναμίας των παρονομαστών στις τέσσερις αριθμητικές πράξεις. Το μοντέλο δημιούργησε επίσης μη-διαισθητικές προβλέψεις σχετικά με τις δυσκολίες πολλών ειδών προβλημάτων και τη δυνητική αποτελεσματικότητα μια νέας εκπαιδευτικής προσέγγισης.

Σύμφωνα με τους Braithwaite et al. (2017), τα πιο εντυπωσιακά ευρήματα τα οποία προκύπτουν από την έρευνά τους αφορούν την κατανομή των προβλημάτων της αριθμητικής των κλασμάτων στα σχολικά εγχειρίδια, τις επιπτώσεις αυτής της κατανομής στη μάθηση του λογισμικού FARRA και των μαθητών. Όπως επισημαίνουν, **«ίσως το πιο γενικό μάθημα από τα ευρήματα αυτά είναι ότι η στατιστική κατανομή των προβλημάτων τα οποία οι μαθητές αντιμετωπίζουν επηρεάζουν τη μάθηση των μαθηματικών με ισχυρούς και συχνά μη-διαισθητικούς τρόπους».**

Βασικά συμπεράσματα της έρευνάς τους είναι τα παρακάτω:

- Τα σύνολα των ασκήσεων που προέκυψαν από τρεις ευρέως διαδεδομένες σειρές σχολικών βιβλίων των ΗΠΑ περιελάμβαναν πολύ λίγες ασκήσεις πολλαπλασιασμού ή διαίρεσης στα ομώνυμα κλάσματα κατά την περίοδο κατά την οποία κυρίως διδάσκεται η αριθμητική των κλασμάτων, δηλαδή, στην τέταρτη, πέμπτη και έκτη τάξη. Αντίθετα, τα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης με ομώνυμα κλάσματα ήταν πολύ συνηθισμένα. Οι επιδόσεις του FARRA και οι πολύ παρόμοιες επιδόσεις των μαθητών υποδηλώνουν ότι η έλλειψη προβλημάτων πολλαπλασιασμού με ομώνυμα κλάσματα παρεμποδίζει τη μάθηση των παιδιών.
- Η υψηλότερη συχνότητα των προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης ομώνυμων κλασμάτων σε σχέση με τα προβλήματα πολλαπλασιασμού με ομώνυμα κλάσματα, προκάλεσαν το FARRA να κάνει συγκεκριμένα είδη σφαλμάτων υπεργενίκευσης, κατά τα οποία οι συνήθεις κανόνες για την επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων με ίσους παρονομαστές είχαν υπεργενικευτεί, οδηγώντας σε συχνότερα σφάλματα της μορφής $3/5 \times 4/5 = (3 \times 4)/5$. Τα αποτελέσματα αυτά της προσομοίωσης εξηγούν τα προηγούμενα ευρήματα κατά τα οποία διαπιστώνεται ότι για τους μαθητές, τα προβλήματα πολλαπλασιασμού με ομώνυμα κλάσματα είναι πιο δύσκολα από εκείνα με ετερώνυμα κλάσματα. Το εύρημα αυτό προκαλεί εντύπωση δεδομένου ότι ο τυπικός αλγόριθμος πολλαπλασιασμού είναι πανομοιότυπος τόσο για ομώνυμα, όσο και τα ετερώνυμα

κλάσματα.(Gabriel et al., 2013, Newton, 2008, Newton et al., 2014, Siegler & Pyke, 2013; Siegler κ.ά., 2011). Οι Braithwaite et al. (2017) αναφέρουν ότι «η παρουσίαση τέτοιων μη ισορροπημένων συνόλων ασκήσεων στα σχολικά εγχειρίδια μοιάζει με ένα μη επιβεβλημένο σφάλμα, το οποίο θα μπορούσε να διορθωθεί εύκολα αυξάνοντας τον αριθμό των προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης ομώνυμων κλασμάτων».

- Στα σχολικά εγχειρίδια τα οποία μελέτησαν οι Braithwaite et al. (2017), υπήρχαν περισσότερα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης με ίσους παρά άνισους παρονομαστές, παρά το γεγονός ότι είναι εγγενώς δυσκολότερο να εκτελεστούν σωστά οι πράξεις σε προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης με άνισους παρονομαστές. Η δυσκολία αυτή πιθανότατα επιδεινώνεται από τα σχολικά βιβλία τα οποία παρουσιάζουν προβλήματα με ετερόνυμα κλάσματα πιο συχνά στον πολλαπλασιασμό απ' ό,τι στην πρόσθεση ή την αφαίρεση. Αυτή η ανισορροπία οδηγεί το FARRA να υπεργενικεύει λανθασμένα τον κανόνα του πολλαπλασιασμού σε προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης με ετερόνυμα κλάσματα. Οι μαθητές κάνουν το ίδιο, πιθανώς για τον ίδιο λόγο.
- Η ανάλυση βάσει μοντέλου έδειξε ότι η ορθή εκτέλεση των κατάλληλων στρατηγικών για τα προβλήματα διαίρεσης είναι εγγενώς πιο δύσκολη από τα προβλήματα πολλαπλασιασμού. Και πάλι, η κατανομή των προβλημάτων φαίνεται να επιδεινώνει αυτή τη δυσκολία, καθώς τα παιδιά και το μοντέλο συναντούν σχετικά λίγα προβλήματα διαίρεσης. Οι Braithwaite et al. (2017) (σελ. 35) τονίζουν ότι «αυτά τα αποτελέσματα δεν φαίνεται να οφείλονται στην ιδιοσυγκρασία της συγκεκριμένης σειράς σχολικών εγχειριδίων από την οποία αντλήθηκαν τα προβλήματα του μοντέλου της μάθησης. Και οι τρεις σειρές σχολικών βιβλίων που εξετάσαμε είχαν πολύ παρόμοια μοντέλα κατανομής προβλημάτων. Λιγότερο λεπτομερείς προηγούμενες αναλύσεις δύο σειρών σχολικών βιβλίων, της *Saxon Math* και της *Everyday Mathematics*, αποκάλυψαν επίσης ότι τα προβλήματα διαίρεσης ήταν λιγότερο συχνά από τα προβλήματα πολλαπλασιασμού σε αυτές τις σειρές, αν και οι αναλύσεις αυτές δεν εξέτασαν την ισότητα των παρονομαστών και έτσι, δεν αποκάλυψαν την εντυπωσιακή αλληλεπίδραση μεταξύ των αριθμητικών πράξεων και της ισότητας των παρονομαστών η οποία τεκμηριώθηκε εδώ (Lortie-Forgues et al., 2015, Son & Senk, 2010). Είναι ενδιαφέρον ότι μια ανάλυση μιας σειράς βιβλίων από την Κορέα, μια χώρα με πολύ υψηλά μαθηματικά επιτεύγματα, έδειξε το αντίθετο μοτίβο: σημαντικά περισσότερα προβλήματα διαίρεσης παρά πολλαπλασιασμού κλασμάτων (Son & Senk, 2010). Δεδομένης της εγγενούς δυσκολίας της σωστής εκτέλεσης του τυπικού αλγορίθμου διαίρεσης, η συχνότερη παρουσίαση προβλημάτων διαίρεσης στο κορεατικό εγχειρίδιο έχει νόημα.»
- Το υπολογιστικό μοντέλο FARRA εξηγεί την ποικιλία των λαθών των μαθητών στην αριθμητική των κλασμάτων με τη βοήθεια του μηχανισμού της **υπεργενίκευσης**. Την λανθασμένη εφαρμογή, δηλαδή, ενός κανόνα ο οποίος είναι κατάλληλος για μία πράξη σε μια άλλη πράξη. Όπως σημειώνουν οι συγγραφείς, η υπεργενίκευση εξηγεί ένα μεγάλο εύρος λαθών των μαθητών, συμπεριλαμβανομένων και των λαθών τα οποία οφείλονται στην «προκατάληψη των φυσικών αριθμών», την τάση, δηλαδή, να βλέπει ο μαθητής ένα κλάσμα ως δύο ξεχωριστούς αριθμούς (αριθμητής και παρονομαστής) και όχι ως έναν μόνο αριθμό (π.χ. Gabriele et al., 2013, Gelman, 1991, Ni & Zhou, 2005).
- Αν και το λογισμικό δε λαβαίνει υπόψη την ενδεχόμενη ύπαρξη της εννοιολογικής κατανόησης από τον μαθητή, εντούτοις, προσομοιώνει επιτυχώς την επίδοση των μαθητών στην αριθμητική των κλασμάτων. Το

γεγονός αυτό, αντικατοπτρίζει την απουσία εννοιολογικής κατανόησης από μεγάλο μέρος των μαθητών ή τουλάχιστον, τη μη χρήση της, κατά την ενασχόληση των μαθητών με τις πράξεις στα κλάσματα.

Τέλος, οι συγγραφείς διατυπώνουν ορισμένες προτάσεις για τη βελτίωση των μαθησιακών αποτελεσμάτων. Μια πρόταση είναι οι μαθητές αρχικά να εξασκούνται αποκλειστικά και μόνο στην επιλογή της σωστής στρατηγικής επίλυσης ενός προβλήματος χωρίς να επιβαρύνονται από τη σωστή εκτέλεση της στρατηγικής την οποία επέλεξαν. Επιπλέον, συνίσταται η παρουσίαση των προβλημάτων στην αριθμητική των κλασμάτων να γίνεται με τρόπο ώστε να εναλλάσσονται οι τέσσερις διαφορετικές πράξεις αφού πρώτα όμως, κάθε πράξη διδαχθεί ξεχωριστά. Οι Braithwaite et al. (2017) θεωρούν ότι η δόμηση των προβλημάτων σε ανεξάρτητες ομάδες οι οποίες περιλαμβάνουν προβλήματα με την ίδια πράξη, ενισχύει την ευχέρεια των μαθητών στην εκτέλεση των πράξεων, αλλά όχι και τη δεξιοτητα της επιλογής της σωστής στρατηγικής επίλυσης. Συχνά οι μαθητές, όταν αντιμετωπίζουν προβλήματα δομημένα σε ομάδες οι οποίες περιέχουν την ίδια πράξη, τείνουν μετά τα πρώτο πρόβλημα της ομάδας να αγνοούν την πράξη, διότι το να βλέπουν συνεχώς την ίδια πράξη δεν τους δίνει κάποια πληροφορία. Ακόμα και πριν από το πρώτο πρόβλημα, οι μαθητές μπορεί να μην προσέχουν την πράξη καθώς γνωρίζουν εκ των προτέρων ότι είναι για παράδειγμα στην παράγραφο του πολλαπλασιασμού κλασμάτων.

6 Στόχοι της παρούσας εργασίας

Εκτός από τη μελέτη αυτής καθεαυτής της κατανομής των προβλημάτων των σχολικών εγχειριδίων στην αριθμητική των κλασμάτων, οι Braithwaite et al. (2017), διαπίστωσαν ότι το υπολογιστικό μοντέλο FARRA παράγει με ακρίβεια τα 8 φαινόμενα του πίνακα Α.1 τα οποία επιβεβαιώνονται και από τη διεθνή βιβλιογραφία (Siegler & Pyke, 2013).

Πίνακας Α.1: Σημαντικά εμπειρικά φαινόμενα τα οποία παρατηρούνται στην αριθμητική των κλασμάτων.

A/A	Φαινόμενο
1	Χαμηλή επίδοση συνολικά.
2	Εξαιρετικά χαμηλή επίδοση στα προβλήματα διαίρεσης κλασμάτων.
3	Μεταβλητότητα στις απαντήσεις σε κάποιο συγκεκριμένο πρόβλημα.
4	Μεταβλητότητα στις στρατηγικές επίλυσης των προβλημάτων.
5	Μεγαλύτερη συχνότητα των λαθών στρατηγικής από τα λάθη εκτέλεσης των πράξεων.
6	Τα πιο κοινό λάθος από τα λάθη στρατηγικής είναι εκείνο αυτό κατά το οποίο εφαρμόζουν οι μαθητές μια στρατηγική η οποία είναι λάθος για την πράξη που απαιτείται από το συγκεκριμένο πρόβλημα αλλά σωστή αν εφαρμοζόταν σε άλλη πράξη.
7	Στα προβλήματα με ομώνυμα κλάσματα οι μαθητές έχουν καλύτερη επίδοση όταν η πράξη είναι η πρόσθεση ή η αφαίρεση, ενώ στον πολλαπλασιασμό μειώνεται η επίδοση.
8	Το είδος λάθους με τη μεγαλύτερη συχνότητα σε κάθε πράξη ποικίλει ανάλογα με την ισότητα ή μη των παρονομαστών.

Δηλαδή, το λογισμικό FARRA προσομοιώνει με αρκετή αξιοπιστία τον τρόπο εκτέλεσης από τους μαθητές των πράξεων στα κλάσματα, τουλάχιστον όσον αφορά τις τρεις σειρές των σχολικών βιβλίων των ΗΠΑ τις οποίες μελέτησαν οι Braithwaite et al. (2017). Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι το μοντέλο FARRA είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για να γίνουν προβλέψεις για τα πιθανά λάθη στην αριθμητική των κλασμάτων και τις αιτίες αυτών των λαθών από τους μαθητές στην Ελλάδα και την Κύπρο. Στο υπόλοιπο της παρούσας εργασίας, επιχειρούμε να απαντήσουμε στα παρακάτω ερωτήματα τα οποία αφορούν τα Ελληνικά και Κυπριακά σχολικά εγχειρίδια:

- Ποια η κατανομή των προβλημάτων στην αριθμητική των κλασμάτων με βάση τα χαρακτηριστικά ομώνυμα-ετερώνυμα κλάσματα και το είδος αριθμητικής πράξης;
- Ποια η κατανομή των προβλημάτων στην αριθμητική των κλασμάτων με βάση τα χαρακτηριστικά παράγοντας μεικτός-φυσικός-κλάσμα και το είδος αριθμητικής πράξης;
- Προκύπτουν κατά την εκτέλεση του λογισμικού FARRA στα Ελληνικά και Κυπριακά σχολικά εγχειρίδια τα 8 φαινόμενα τα οποία παρατηρούνται στις ΗΠΑ;
- Με ποιο τρόπο η κατανομή των προβλημάτων στην αριθμητική των κλασμάτων στα σχολικά βιβλία της Ελλάδας και της Κύπρου επηρεάζει ενδεχομένως την επίδοση των μαθητών;
- Ποιες βελτιώσεις θα μπορούσαν να γίνουν στα Ελληνικά και τα Κυπριακά σχολικά βιβλία όσον αφορά την κατανομή των προβλημάτων στην αριθμητική των κλασμάτων;

Με βάση τους παραπάνω στόχους διεξάγουμε τις εξής δύο ομάδες πειραμάτων:

- Η πρώτη ομάδα περιέχει τα σχολικά βιβλία EnVisionMATH, τα Ελληνικά και τα Κυπριακά σχολικά βιβλία για όλες τις τάξεις στις οποίες διδάσκεται η αριθμητική των κλασμάτων. Συγκεκριμένα, η αριθμητική των κλασμάτων για τη σειρά EnVisionMATH διδάσκεται στην 4^η, 5^η (Elementary school) και 6^η τάξη (Middle school), για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία στην 5^η, 6^η Δημοτικού και Α' Γυμνασίου, και για τα Κυπριακά σχολικά βιβλία στην 4^η, 5^η και 6^η τάξη του Δημοτικού. Στόχος μας είναι να ερευνήσουμε το σύνολο προβλημάτων στην αριθμητική των κλασμάτων τα οποία συναντούν οι μαθητές στα σχολικά τους χρόνια.
- Η δεύτερη ομάδα προβλημάτων αφορά αποκλειστικά το Δημοτικό, καθώς κατά τη σημαντική αυτή περίοδο τίθεται οι βάσεις της κατανόησης των κλασμάτων και της αριθμητικής τους. Εδώ μελετούμε τα Ελληνικά σχολικά βιβλία (5^η και 6^η Δημοτικού), τα Κυπριακά σχολικά βιβλία (4^η, 5^η και 6^η Δημοτικού) και τα προβλήματα ενός εναλλακτικού σχολικού εγχειριδίου, του βιβλίου «Στην τροχιά των ρητών» των εκδόσεων Κυριακίδη. Στο τελευταίο, τα κλάσματα διδάσκονται στην 4^η και 5^η τάξη του Δημοτικού. Σημειώνουμε, ότι καθώς το λογισμικό FARRA απαιτεί την εισαγωγή προβλημάτων και από τις τέσσερις πράξεις στα κλάσματα (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση), δεν κατέστη δυνατό να απομονώσουμε συγκεκριμένες τάξεις στο Δημοτικό. Μπορούμε μόνο να μελετήσουμε όλα τα προβλήματα που αφορούν τη συγκεκριμένη βαθμίδα (πρωτοβάθμια εκπαίδευση) αφού έτσι καλύπτονται όλες οι πράξεις στην αριθμητική των κλασμάτων.

Στη συνέχεια περιγράφουμε και αναλύσουμε τη λειτουργία του λογισμικού FARRA.

7 Περιγραφή του λογισμικού FARRA

Το υπολογιστικό μοντέλο FARRA βασίζεται στην εφαρμογή μιας ομάδας κανόνων σε δεδομένα προβλήματα. Κάθε κανόνας μπορεί να εφαρμοστεί σε συγκεκριμένα προβλήματα της αριθμητικής των κλασμάτων ανάλογα με το είδος της πράξης (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός ή διαίρεση) και το είδος των παρονομαστών (ομώνυμα ή ετερόνυμα κλάσματα). Τα προβλήματα τα οποία χρησιμοποιούνται ως είσοδος στο λογισμικό αποτελούνται από δύο παράγοντες. Είναι, δηλαδή, της μορφής «*α πράξη β*». Η πράξη δύναται να είναι μία από τις τέσσερις πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση πολλαπλασιασμός, διαίρεση). Κάθε ένας από τους παράγοντες α , β μπορεί να είναι κλάσμα, μεικτός αριθμός ή φυσικός αριθμός. Δεν μπορεί όμως, και οι δυο παράγοντες α , β να είναι φυσικοί αριθμοί. Για παράδειγμα, προβλήματα τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως είσοδο στο λογισμικό είναι τα εξής: « $3/8+4/8$ », « $7/8-2/8$ », « $6*1/6$ », « $3/5:4/5$ », « $25/10:3\ 1/2$ », « $6\ 1/2:2/5$ ». Ο συμβολισμός $6\ 1/2$ αντιστοιχεί στον μεικτό αριθμό $6\frac{1}{2}$. Τονίζουμε ότι λεκτικά προβλήματα δεν είναι δυνατόν να εισαχθούν στο λογισμικό.

Κάθε φορά που το λογισμικό συναντά ένα νέο πρόβλημα, επιλέγει κάποιον κανόνα ο οποίος καθορίζει και τα περαιτέρω βήματα τα οποία θα ακολουθήσουν στην επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος. Οι συγκεκριμένοι κανόνες, οι οποίοι επιλέγονται πρώτοι σε κάθε πρόβλημα, είναι 9 στο πλήθος, ονομάζονται στρατηγικές και φαίνονται στον πίνακα A.2:

Πίνακας A.2: Στρατηγικές οι οποίες μπορούν χρησιμοποιηθούν στην αρχή επίλυσης ενός προβλήματος.

	Στρατηγικές	Κατηγορία
1	When operation +/- and denoms equal, create goals operate on numer and maintain common denom.	
2	When denoms equal, create goals operate on numer and maintain common denom.	Στρατηγικές
3	When operation +/-, create goals find common denom then operate on numer and maintain common denom.	OpNumKeepDen
4	Create goals find common denom, then operate on numer and maintain common denom.	
5	When operation *, create goals apply operation to numerators and denominators separately.	Στρατηγικές IndepComp
6	Create goals apply operation to numer and denoms separately.	
7	When operation /, create goal invert-and-operate.	Στρατηγικές InvertOper
8	Create goal invert-and-operate.	
9	When operation *, create goals apply operation cross-wise.	Άλλες στρατηγικές

Στις παραπάνω στρατηγικές περιλαμβάνονται τόσο οι σωστές, όσο και οι λάθος στρατηγικές οι οποίες μπορούν να εφαρμοστούν σε κάθε πρόβλημα. Έτσι η στρατηγική 1 είναι η σωστή για την πρόσθεση ή την αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων, η στρατηγική 3 είναι η σωστή για την πρόσθεση ή την αφαίρεση ετερονύμων κλασμάτων, η στρατηγική 5 για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων και η στρατηγική 7 είναι η σωστή για τη διαίρεση κλασμάτων.

Οι υπόλοιπες στρατηγικές προκαλούν λάθη στην επίλυση του προβλήματος. Συγκεκριμένα, η στρατηγική 9, σε ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλασμάτων, πολλαπλασιάζει τους όρους των κλασμάτων χιαστί. Η στρατηγική 2 γενικεύει λανθασμένα τον κανόνα της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων στις άλλες τρεις πράξεις. Έτσι, όταν έχουμε ένα πρόβλημα πρόσθεσης ή αφαίρεσης κλασμάτων θα εκτελέσει σωστά την πράξη. Σε ένα πρόβλημα

πολλαπλασιασμού κλασμάτων όμως, θα πολλαπλασιάσει τους αριθμητές μεταξύ τους και θα αφήσει στο τελικό αποτέλεσμα τον κοινό παρονομαστή των δύο κλασμάτων. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα $2/5 * 3/5$ θα εκτελέσει $(2*3)/5 = 6/5$ και όχι $(2*3)/(5*5) = 6/25$ που είναι το σωστό. Όμοια σε ένα πρόβλημα διαίρεσης θα έχουμε: $10/5 : 2/5 = (10:2)/5 = 5/5 = 1$. Η στρατηγική 4 γενικεύει την πρόσθεση και την αφαίρεση ετερονύμων κλασμάτων στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα $2/5 * 3/4$ θα εκτελέσει $2/5 * 3/4 = (2*4)/(5*4) * (3*5)/(4*5) = 8/20 * 15/20 = (8*15)/20 = 120/20 = 6$. Η στρατηγική 6 γενικεύει τον κανόνα του πολλαπλασιασμού στις υπόλοιπες πράξεις. Όταν εφαρμόζεται σε ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού, δίνει το σωστό αποτέλεσμα. Όταν όμως εφαρμόζεται σε μία άλλη πράξη, τότε ενεργεί ανεξάρτητα στους αριθμητές και τους παρονομαστές και δίνει λάθος αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα $1/3 + 4/5$ θα εκτελέσει $1/3 + 4/5 = (1+4)/(3+5) = 5/8$. Σε ένα πρόβλημα διαίρεσης όμως, θα δώσει σωστή απάντηση γιατί ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha:\gamma}{\beta:\delta}$. Άρα, στο πρόβλημα $8/9 : 2/3$ θα εκτελέσει $8/6 : 2/3 = (8:2)/(6:3) = 4/2 = 2$ και όχι $8/6 : 2/3 = 8/6 * 3/2 = (8*3)/(6*2) = 24/12 = 2$. Και στις δύο περιπτώσεις προκύπτει η σωστή απάντηση. Τέλος, η στρατηγική 8 είναι σωστή για τη διαίρεση, αλλά λανθασμένη για τις άλλες τρεις πράξεις. Εδώ, αντιστρέφεται ο δεύτερος από αριστερά όρος και εκτελείται η συγκεκριμένη πράξη ανεξάρτητα στους αριθμητές και τους παρονομαστές των κλασμάτων όπως στον πολλαπλασιασμό. Για παράδειγμα, στο παρακάτω πρόβλημα θα έχουμε: $6/8 + 2/4 = 6/8 + 4/2 = (6+4)/(8+2) = 10/10 = 1$ και $3/4 * 4/5 = 3/4 * 5/4 = 15/16$.

Οι στρατηγικές κατηγοριοποιούνται από τους Braithwaite et al. (2017) ως εξής (πίνακας A.2):

- **Στρατηγικές OpNumKeepDen:** είναι οι στρατηγικές 1, 2, 3, 4 του πίνακα A.2 κατά τις οποίες τα κλάσματα αρχικά, αν είναι ετερόνυμα, μετατρέπονται σε ομώνυμα. Στην συνέχεια, ως αριθμητής στο αποτέλεσμα τίθεται αυτός που προκύπτει από την εφαρμογή της τρέχουσας πράξης στους αριθμητές και ως παρονομαστής, ο κοινός παρονομαστής. Οι στρατηγικές OpNumKeepDen είναι σωστές για την πράξη της πρόσθεσης/αφαίρεσης κλασμάτων και λανθασμένες για τη διαίρεση και τον πολλαπλασιασμό.
- **Στρατηγική IndepComp:** είναι οι στρατηγικές 5 και 6 του πίνακα A.2. Σε αυτή την κατηγορία η πράξη εφαρμόζεται ανεξάρτητα στο ζεύγος των αριθμητών και τα ζεύγος των παρονομαστών των κλασμάτων. Είναι η σωστή στρατηγική για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, δίνει το σωστό αποτέλεσμα και στη διαίρεση κλασμάτων, αλλά είναι λάθος στρατηγική για την πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων.
- **Στρατηγική InvertOper:** είναι οι στρατηγικές 7 και 8 του πίνακα A.2. Κατά τη στρατηγική InvertOper, αντιστρέφεται ο δεύτερος όρος και η πράξη αλλάζει από διαίρεση σε πολλαπλασιασμό. Όταν αυτή εφαρμόζεται λανθασμένα σε κάποια άλλη πράξη, τότε η πράξη δεν αλλάζει και αντιστρέφεται κάποιος από τους δύο παράγοντες του προβλήματος.
- **Άλλες στρατηγικές:** είναι οι στρατηγική 9 του πίνακα A.2.

Επιπλέον, τα λάθη των μαθητών όσον αφορά τη επιλογή στρατηγικής χωρίζονται στις τρεις παρακάτω κατηγορίες:

- **Λάθη υπεργενίκευσης (Overgeneralization errors):** Εδώ μία στρατηγική η οποία είναι σωστή για μία συγκεκριμένη πράξη γενικεύεται λανθασμένα σε μία από τις υπόλοιπες πράξεις. Για παράδειγμα, σε ένα

πρόβλημα πολλαπλασιασμού με ετερόνυμα κλάσματα εφαρμόζεται ο κανόνας της πρόσθεσης. Δηλαδή, τα κλάσματα μετατρέπονται σε ομώνυμα, πολλαπλασιάζονται οι αριθμητές μεταξύ τους και ως παρονομαστές στο αποτέλεσμα τίθεται ο κοινός παρονομαστής.

- **Λάθη δράσης στους όρους των κλασμάτων ανεξάρτητα** (Independent whole number errors): Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ανεξάρτητη δράση στους αριθμητές και τους παρονομαστές των δύο κλασμάτων του προβλήματος. Για παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα αφαίρεσης ετερόνυμων κλασμάτων, αφαιρείται ο αριθμητής του ενός κλάσματος από τον αριθμητή του άλλου και ο παρονομαστής του ίδιου κλάσματος από τον παρονομαστή του άλλου. Το λάθος αυτό μπορεί να θεωρηθεί και ως λάθος υπεργενίκευσης της πράξης του πολλαπλασιασμού στις υπόλοιπες πράξεις. Λόγω της μεγάλης συχνότητας αυτού του λάθους στρατηγικής, αυτό μελετάται ξεχωριστά.
- **Άλλου είδους λάθη:** εδώ περιλαμβάνεται το λάθος του «χιαστί πολλαπλασιασμού» σε ένα πρόβλημα διαίρεσης κλασμάτων.

Πίνακας Α.3:Κανόνες εκτέλεσης του λογισμικού FARRA

1	When goal find common denom and denoms equal, notice this and remove the goal.
2	When goal find common denom and denoms not equal, create goals multiply each frac by other's denom
3	When goal find common denom and denoms not equal, create goals multiply each denom by other.
4	When goal find common denom and denoms not equal, create goals convert fracs using LCD procedure.
5	When goal invert_and_operate, create goals invert 2nd operand, change / to *, and operate nums and dens
6	When goal invert_and_operate, create goals change / to * and operate nums and dens.
7	When goal invert_and_operate, create goals invert an operand, change / to *, and operate nums and dens.
8	When goal maintain common denom, set answer denom to common denom.
9	When goal operate on nums, create appropriate whole number arith prob
10	When goal operate on denoms, create appropriate whole number arith prob
11	When goal modify given STM element via given operation, create appropriate whole number arith prob
12	When goal invert fraction, do so
13	When goal change division to multiplication, do so if possible
14	When goal remove a variable, do so.
15	When answer obtained, problem is solved
16	When answer is found but not in lowest terms, create goal reduce it.
17	When goal reduce fraction to lowest terms, create goals find gcd and divide by it
18	When goal do whole number arith and operation is +, add operands
19	When goal do whole number arith and operation is -, subtract operands
20	When goal do whole number arith and operation is *, multiply operands.
21	When goal do whole number arith and operation is /, divide operands
22	When goal do whole number arith and operation is /, divide operands and keep integer part of answer.
23	When goal do whole number arith and operation /, divide larger by smaller.
24	When goal do whole number arith and operation /, divide larger by smaller and keep integer part of answer.
25	When goal do whole number arith, and operation is subtract, subtract smaller from larger
26	When goal find GCD of specified variables, do so
27	When goal find LCM of specified variables, do so

Εκτός από τους κανόνες οι οποίοι αφορούν την επιλογή στρατηγικής, υπάρχουν και οι κανόνες σχετικά με τον τρόπο την εκτέλεσης της επιλεγμένης στρατηγικής. Ορισμένοι από αυτούς είναι σωστοί για τη συγκεκριμένη στρατηγική, ενώ οι υπόλοιποι είναι λανθασμένοι. Στον πίνακα Α.3 υπάρχουν οι κανόνες εκτέλεσης. Για παράδειγμα

οι κανόνες 5, 6, 7 αφορούν της εκτέλεση του αλγορίθμου της διαίρεσης. Ο κανόνας 5 δίνει τη σωστή εφαρμογή της στρατηγικής σε ένα πρόβλημα διαίρεσης κλασμάτων. Ο κανόνας 6 δεν αντιστρέφει κάποιο κλάσμα, ενώ ο κανόνας 7 δεν ορίζει ποιο κλάσμα θα αντιστραφεί. Ο κανόνας 23 διαιρεί πάντα τον μεγαλύτερο αριθμό διά του μικρότερου, ενώ ο κανόνας 24 διαιρεί τον μεγαλύτερο αριθμό δια του μικρότερου και θέτει ως αποτέλεσμα το ακέραιο μέρος της διαίρεσης. Τέλος, ο κανόνας 25 εκτελεί την αφαίρεση πάντα αφαιρώντας των μικρότερο αριθμό από τον μεγαλύτερο αριθμό. Οι παραπάνω κανόνες αντικατοπτρίζουν συχνά λάθη τα οποία γίνονται από τους μαθητές κατά την εκτέλεση των πράξεων στα κλάσματα.

7.1 Η εκτέλεση του λογισμικού FARRA

Κατά την εκτέλεση του λογισμικού FARRA υπάρχουν δύο διακριτές φάσεις, η φάση μάθησης (learning mode) και η φάση έλεγχου (testing mode). Στη φάση μάθησης κάθε μαθητής εκπαιδεύεται σε ένα σύνολο προβλημάτων τα οποία εισάγονται στο πρόγραμμα ως είσοδος (input). Για κάθε ένα από αυτά τα προβλήματα το πρόγραμμα επιλέγει μία στρατηγική αρχικά, και κάποιους κανόνες εκτέλεσης στη συνέχεια, ανάλογα με τη στρατηγική που επιλέχθηκε. Επιπλέον, σε κάθε πρόβλημα, το λογισμικό σημειώνει τα χαρακτηριστικά του τα οποία αφορούν το αν υπάρχουν ομώνυμα ή ετερόνυμα κλάσματα, όπως επίσης και το εάν αυτά τα κλάσματα είναι δύο μεικτοί αριθμοί, δύο κλάσματα, ένας μεικτός αριθμός και ένα κλάσμα, ένας φυσικός αριθμός και ένα κλάσμα ή ένας φυσικός αριθμός και ένας μεικτός αριθμός. Αν το λογισμικό βρει τη σωστή απάντηση, τότε ενισχύεται η σύνδεση μεταξύ της στρατηγικής η οποία χρησιμοποιήθηκε και των χαρακτηριστικών του προβλήματος αυτού. Άμεση συνέπεια αυτής της ενίσχυσης είναι να αυξάνεται η πιθανότητα η συγκεκριμένη στρατηγική να επαναχρησιμοποιηθεί αργότερα κατά την εκτέλεση του προγράμματος σε ένα πρόβλημα με τα ίδια χαρακτηριστικά. Εάν όμως η στρατηγική αυτή οδηγήσει σε λάθος αποτέλεσμα, τότε η σύνδεση ανάμεσα στη στρατηγική και τα χαρακτηριστικά του προβλήματος αποδυναμώνεται με σκοπό το λογισμικό να αποτρέψει την επαναχρησιμοποίηση της συγκεκριμένης στρατηγικής σε κάποιο παρόμοιο πρόβλημα στο μέλλον. Κάθε ένας από τους μαθητές εκπαιδεύεται στο σύνολο των προβλημάτων και έτσι, τελειώνει η φάση μάθησης. Αμέσως μετά ακολουθεί η φάση έλεγχου κατά την οποία ο μαθητής εξετάζεται σε μία σειρά προβλημάτων (τεστ). Υπολογίζεται το ποσοστό των σωστών απαντήσεων στα προβλήματα του τεστ συνολικά και ανά είδος προβλήματος ειδικότερα.

Το λογισμικό είναι γραμμένο στη γλώσσα προγραμματισμού Python (έκδοση 2.7) και αποτελείται από 3050 γραμμές κώδικα περίπου. Αρχικά, καθορίζονται οι τιμές των παραμέτρων του προγράμματος οι οποίες είναι οι ακόλουθες (βλ. Braithwaite et al., 2017 και Braithwaite, Leibb, Siegler & McMullen, 2019):

- Η πρώτη παράμετρος είναι ο **ρυθμός μάθησης (learning rate) e** ο οποίος αντιστοιχεί στο ποσό της θετικής ενίσχυσης την οποία λαμβάνει μια στρατηγική κάθε φορά που η χρήση αυτής οδηγεί σε σωστή απάντηση. Αυτή η παράμετρος έχει σκοπό να καταγράψει τη διακύμανση του βαθμού στον οποίο τα παιδιά μαθαίνουν από μια δεδομένη ποσότητα εξάσκησης σε ασκήσεις (Garlick, D. 2002).
- Η δεύτερη παράμετρος είναι η **έκπτωση λόγω λάθους (error discount) d**. Καθορίζει τη μείωση της ενίσχυσης που δίνεται σε μια στρατηγική όταν η χρήση της οδηγεί σε εσφαλμένη απάντηση. Όταν η τιμή της έκπτωσης λόγω λάθους είναι μεγαλύτερη από 1, τότε οι στρατηγικές λαμβάνουν αρνητική ενίσχυση όταν παράγουν

λανθασμένες απαντήσεις. Σε διαφορετική περίπτωση, όταν, δηλαδή, είναι $d \leq 1$, οι στρατηγικές εξακολουθούν να λαμβάνουν θετική ενίσχυση ακόμη και όταν δημιουργούν σφάλματα. Βέβαια, η θετική αυτή ενίσχυση είναι πάντα μικρότερη της ενίσχυσης e την οποία λαμβάνουν οι σωστές στρατηγικές. Κατά συνέπεια, μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου d υποδηλώνουν πιο αποτελεσματική μάθηση από τα λάθη. Γενικά, τα παιδιά διαφέρουν ως προς το πόσο αποδοτικά μαθαίνουν από τα λανθασμένα παραδείγματα (Große & Renkl, 2007, Heemsoth & Heinze, 2014).

- Η τρίτη παράμετρος είναι ο **ντετερμινισμός των αποφάσεων (decision determinism) γ** . Καθορίζει το κατά πόσο η ενίσχυση την οποία λαμβάνουν οι στρατηγικές επηρεάζει τις επιλογές των στρατηγικών στο μέλλον. Οι υψηλές τιμές της παραμέτρου γ αναγκάζουν το μοντέλο να επιλέγει με μεγαλύτερη σταθερότητα τις στρατηγικές εκείνες οι οποίες είχαν λάβει προηγουμένως τη μεγαλύτερη ενίσχυση, ενώ οι χαμηλές τιμές οδηγούν σε μεγαλύτερη μεταβλητότητα την επιλογή της στρατηγικής. Η παράμετρος γ αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι ορισμένα παιδιά επιλέγουν τις στρατηγικές επίλυσης προβλήματος πιο προσεκτικά σε σχέση με άλλα (Siegler, R.S., 1988).

Επιλέγουμε τις τιμές των παραπάνω παραμέτρων όπως και τα προβλήματα της φάσης ελέγχου σύμφωνα με τους Braithwaite et al. (2017). Συγκεκριμένα, η παράμετρος e ανήκει στο διάστημα $[0.001, 0.020]$, η d στο διάστημα $[0.8, 1.0]$ και η γ στο διάστημα $[0.5, 1.5]$. Για κάθε μαθητή, η τιμές των τριών παραμέτρων επιλέγονται τυχαία και με την ίδια πιθανότητα σε κάθε ένα από τα τρία παραπάνω διαστήματα. Δηλαδή, η κατανομή των παραμέτρων είναι η ομοιόμορφη κατανομή με εύρος τιμών τα παραπάνω διαστήματα. Επίσης, στη φάση έλεγχου περιλαμβάνονται τα εξής 16 προβλήματα: « $3/5+1/5$ », « $4/5+3/5$ », « $2/3+3/5$ », « $3/5+1/4$ », « $3/5-1/5$ », « $4/5-3/5$ », « $2/3-3/5$ », « $3/5-1/4$ », « $3/5*1/5$ », « $4/5*3/5$ », « $2/3*3/5$ », « $3/5*1/4$ », « $3/5:1/5$ », « $4/5:3/5$ », « $2/3:3/5$ », « $3/5:1/4$ ». Επιπλέον, ορίζεται από το χρήστη ο αριθμός των μαθητών N οι οποίοι θα συμμετέχουν στην προσομοίωση. Όσο περισσότεροι μαθητές υπάρχουν στην προσομοίωση, τόσο πιο ακριβή και αξιόπιστα είναι τα τελικά αποτελέσματα. Επιλέγουμε $N = 1000$ μαθητές όπως και οι Braithwaite et al. (2017). Τονίζουμε ότι στο πρόγραμμα αντί για την παράμετρο d χρησιμοποιείται η βοηθητική παράμετρος $disc_inc = 1-d$. Προφανώς, οι τιμές της βοηθητικής παραμέτρου $disc_inc$ ανήκουν στο διάστημα $[0.0, 0.2]$. Πρώτα ξεκινάει η φάση μάθησης (learning mode) και ακολουθεί η φάση ελέγχου (testing mode). Στο παράρτημα (ΜΕΡΟΣ Γ) αναφέρεται αναλυτικά ένα παράδειγμα εκτέλεσης του προγράμματος, το οποίο περιλαμβάνει και τις δύο φάσεις.

8 Σύγκριση των σχολικών βιβλίων των ΗΠΑ, της Ελλάδας και της Κύπρου αναφορικά με την αριθμητική των κλασμάτων.

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε το σύνολο των μη-λεκτικών προβλημάτων στην αριθμητική των κλασμάτων από τα εξής διδακτικά εγχειρίδια:

- Το Pearsons Education's enVisionMATH των ΗΠΑ (Charles et al, 2012).
- Τα Ελληνικά σχολικά εγχειρίδια (Ε' Δημοτικού και Α' Γυμνασίου).
- Τα σχολικά βιβλία της Κύπρου (Δ' Δημοτικού, Ε' Δημοτικού και ΣΤ' Δημοτικού).

8.1 Ανάλυση με βάση τους παρονομαστές

Το σύνολο των προβλημάτων τα οποία λάβαμε υπόψη περιλαμβάνει όλα εκείνα τα προβλήματα στην αριθμητική των κλασμάτων τα οποία έχουν δύο παράγοντες, με ένα τουλάχιστον από αυτούς να είναι είτε κλάσμα είτε μεικτός αριθμός. Επιπλέον, επιλέξαμε μόνο προβλήματα τα οποία είναι γραμμένα σε συμβολική μορφή (όχι δηλαδή λεκτικά προβλήματα) και απαιτούν ακριβής απάντηση (όχι, δηλαδή, εκτίμηση). Τα χαρακτηριστικά των παραπάνω προβλημάτων φαίνονται στον πίνακα Β.1.

Μια πρώτη παρατήρηση είναι ότι ο συνολικός αριθμός των προβλημάτων στα Ελληνικά σχολικά βιβλία είναι αρκετά μικρότερος σε σχέση με τον αντίστοιχο αριθμό στα σχολικά βιβλία των ΗΠΑ και τα Κυπριακά σχολικά βιβλία. Ειδικότερα, στο Ελληνικό σχολικό βιβλίο της Δ' Δημοτικού υπάρχουν 50 προβλήματα, στην ΣΤ' Δημοτικού υπάρχουν αποκλειστικά λεκτικά προβλήματα και στην Α' Γυμνασίου, τα προβλήματα είναι πολύ περισσότερα (119 στο σύνολο των 169 προβλημάτων ή 70% του συνόλου των προβλημάτων). Στην Κύπρο βρήκαμε 43 προβλήματα στη Δ' Δημοτικού, 71 στην Ε' Δημοτικού και 396 προβλήματα στην ΣΤ' Δημοτικού. Υπάρχει, δηλαδή, μια αύξουσα κατανομή του αριθμού των προβλημάτων από τάξη σε τάξη με τον κύριο όγκο από αυτά να συσσωρεύεται στην τελευταία τάξη (78% του συνόλου περίπου).

Μια δεύτερη παρατήρηση αφορά τη συχνότητα των προβλημάτων ανάλογα με το είδος της πράξης. Στη σειρά με τα σχολικά βιβλία των ΗΠΑ, η πράξη της διαίρεσης είναι αυτή με τη μικρότερη συχνότητα σε σχέση με τις υπόλοιπες πράξεις οι οποίες κυμαίνονται σε κοντινά επίπεδα. Η αμέσως μεγαλύτερη σε συχνότητα πράξη είναι ο πολλαπλασιασμός, ενώ η πρόσθεση και η αφαίρεση ισοβαθούν. Ένα διαφορετικό μοτίβο παρατηρείται στα ελληνικά σχολικά βιβλία. Εδώ, η διαίρεση και ο πολλαπλασιασμός υπερέρχουν αριθμητικά και με αρκετά μεγαλύτερο ποσοστό σε σχέση με την πρόσθεση και την αφαίρεση. Τα προβλήματα αφαίρεσης κλασμάτων είναι αυτά με τη μικρότερη συχνότητα και ακολουθούν τα προβλήματα πρόσθεσης. Κατά συνέπεια, φαίνεται ότι στα ελληνικά σχολικά βιβλία δίδεται ιδιαίτερη βαρύτητα στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης ίσως γιατί θεωρούνται πιο δύσκολες στην κατανόηση. Το σχολικά βιβλία της Κύπρου ακολουθούν ένα παρόμοιο μοτίβο με αυτό των ελληνικών σχολικών βιβλίων. Και σε αυτή την περίπτωση τα προβλήματα διαίρεσης είναι αρκετά περισσότερα, ακολουθούν σε μικρότερη συχνότητα τα προβλήματα πολλαπλασιασμού, και τέλος κατά φθίνουσα σειρά τα προβλήματα αφαίρεσης και πρόσθεσης.

πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης είναι ελάχιστα. Τα ποσοστά κυμαίνονται από 1% έως 2% με εξαίρεση αυτό της διαίρεσης των ελληνικών σχολικών βιβλίων το οποίο είναι πάλι χαμηλό (5%). Η πλειοψηφία των προβλημάτων με ίσους παρονομαστές αφορούν τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Σχετικά με τα προβλήματα με ίσους παρονομαστές στην Ελλάδα, βλέπουμε ότι γενικά αυτά είναι πολύ λιγότερα (17%) σε σχέση με αυτά με διαφορετικούς παρονομαστές (87%). Στην Κύπρο τα αντίστοιχα ποσοστά είναι 22% για τα προβλήματα με ομώνυμα κλάσματα και 78% για τα υπόλοιπα. Για τις ΗΠΑ αυτά τα ποσοστά είναι 36% και 64% αντίστοιχα. Δηλαδή τα προβλήματα με ίσους παρονομαστές στις ΗΠΑ είναι λιγότερα από τα υπόλοιπα αλλά όχι πάρα πολύ λίγα. Συμπερασματικά, παρατηρούμε ότι στη σειρά των σχολικών βιβλίων των ΗΠΑ υπάρχουν αρκετά προβλήματα με ομώνυμα κλάσματα αλλά αφορούν μόνο τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, ενώ για τη διαίρεση και τον πολλαπλασιασμό υπάρχουν ελάχιστα. Στα σχολικά βιβλία της Ελλάδας και της Κύπρου έχουμε χαμηλό ποσοστό προβλημάτων με ομώνυμα κλάσματα ($\leq 10\%$) και στις τέσσερις πράξεις.

Αναφορικά με τα προβλήματα που περιέχουν ετερόνυμα κλάσματα τα οποία όπως είδαμε είναι και τα περισσότερα σε όλες τις σειρές των βιβλίων, βλέπουμε ότι οι πράξεις με τη μεγαλύτερη συχνότητα για όλες τις σειρές είναι αυτές του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Σε όλες τις περιπτώσεις ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση ετερόνυμων κλασμάτων έχει ποσοστό μεγαλύτερο του 20%, με εξαίρεση τη συχνότητα της διαίρεσης στη σειρά enVisionMATH (17%). Μεγαλύτερα ποσοστά έχει ο πολλαπλασιασμός για τις σειρές enVisionMATH και την Ελληνική, ενώ στην Κυπριακή σειρά, προηγείται η διαίρεση. Τα αντίστοιχα ποσοστά για την πρόσθεση και την αφαίρεση είναι μικρότερα ή ίσα του 12% με εξαίρεση τη συχνότητα της πρόσθεσης στα Ελληνικά σχολικά εγχειρίδια (17%).

8.2 Ανάλυση με βάση το είδος των παραγόντων

Στη συνέχεια, προκειμένου να έχουμε μια όσο το δυνατόν πληρέστερη εικόνα της κατανομής των προβλημάτων στην αριθμητική των κλασμάτων ανάμεσα στις τρεις χώρες, μελετήσαμε το ποσοστό των προβλημάτων ανά πράξη και ανά είδος παράγοντα (δύο κλάσματα, δύο μεικτοί, ένα κλάσμα και ένας μεικτός, ένας φυσικός αριθμός και ένα κλάσμα, ένας φυσικός αριθμός και ένας μεικτός). Τα αποτελέσματα εικονίζονται στον πίνακα Β.2 όπου εμφανίζονται τα αντίστοιχα ποσοστά. Επιπλέον, σημειώνονται με έντονη γραφή τα ποσοστά εκείνα που είναι χαμηλά ($< 10\%$).

Μια πρώτη παρατήρηση η οποία βρίσκεται σε συμφωνία με τους Braithwaite et al. (2017) είναι ότι τα προβλήματα τα οποία περιλαμβάνουν την πρόσθεση ή την αφαίρεση μεταξύ ενός αριθμού και ενός κλάσματος, ή ενός αριθμού και ενός μεικτού αριθμού, είναι ελάχιστα. Τα αντίστοιχα ποσοστά για τις ΗΠΑ (enVisionMATH) είναι 0% (πρόσθεση) και 1% (αφαίρεση). Για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία τα ποσοστά είναι 6% για την πρόσθεση και 2% για την αφαίρεση, ελαφρώς μεγαλύτερα δηλαδή, αλλά πάλι χαμηλά. Στα σχολικά βιβλία της Κύπρου, τα προβλήματα αυτού του είδους δεν υπάρχουν για την πρόσθεση (0%) και είναι χαμηλά (4%) για την αφαίρεση. Κατά συνέπεια, η συντριπτική πλειοψηφία των προβλημάτων που αποτελούνται από αριθμό και κλάσμα ή μεικτό αφορούν τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων.

Πίνακας Β.2: Ποσοστό των προβλημάτων τα οποία ανήκουν σε κάθε κατηγορία. Τα κελιά των οποίων οι τιμές είναι χαμηλές (< 10%) έχουν σημειωθεί με έντονο χρώμα.

	Πράξη				Σύνολο
	Πρόσθεση	Αφαίρεση	Πολλαπλασιασμός	Διαίρεση	
enVisionMATH					
Δύο κλάσματα, δύο μεικτοί, ή ένα κλάσμα και ένας μεικτός αριθμός	28%	27%	10%	7%	72%
Ένας φυσικός αριθμός και ένα κλάσμα, ή ένας φυσικός αριθμός και ένας μεικτός αριθμός	0%	1%	14%	11%	28%
Σύνολο	28%	29%	25%	19%	100%
Ελληνικά σχολικά βιβλία					
Δύο κλάσματα, δύο μεικτοί, ή ένα κλάσμα και ένας μεικτός αριθμός	18%	11%	15%	20%	64%
Ένας φυσικός αριθμός και ένα κλάσμα, ή ένας φυσικός αριθμός και ένας μεικτός αριθμός	6%	2%	16%	12%	36%
Σύνολο	24%	13%	31%	32%	100%
Σχολικά βιβλία της Κύπρου					
Δύο κλάσματα, δύο μεικτοί, ή ένα κλάσμα και ένας μεικτός αριθμός	19%	19%	15%	14%	66%
Ένας φυσικός αριθμός και ένα κλάσμα, ή ένας φυσικός αριθμός και ένας μεικτός αριθμός	0%	4%	13%	16%	34%
Σύνολο	19%	23%	28%	30%	100%

Εάν εξετάσουμε τα προβλήματα που περιλαμβάνουν δύο κλάσματα, δύο μεικτούς, ή ένα κλάσμα και ένα μεικτό αριθμό, συμπεραίνουμε ότι για τα σχολικά βιβλία των ΗΠΑ, η πλειοψηφία των προβλημάτων αυτών αφορά την πρόσθεση και την αφαίρεση (με ποσοστά 28% και 27% αντιστοίχως). Τα αντίστοιχα ποσοστά για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση είναι το πολύ 10% (10% για τον πολλαπλασιασμό και 7% για τη διαίρεση). Η εικόνα όμως αυτή δεν επιβεβαιώνεται και στα Ελληνικά σχολικά βιβλία. Εκεί η πλειοψηφία των προβλημάτων αυτών είναι στη διαίρεση (20%), αμέσως μετά στην πρόσθεση (18%) και ακολουθούν κατά φθίνουσα σειρά ο πολλαπλασιασμός (15%) και η αφαίρεση (11%). Επιπλέον, βλέπουμε ότι τα ποσοστά και για τις τέσσερις πράξεις δεν παρουσιάζουν μεγάλη διακύμανση μεταξύ τους. Τα σχολικά βιβλία της Κύπρου βλέπουμε ότι έχουν κοινά στοιχεία με τη σειρά EnVisionMATH. Δηλαδή, αν και εδώ οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης πλειοψηφούν (19% το ποσοστό και για τις δύο πράξεις), η διαφορά των ποσοστών αυτών από τα ποσοστά του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης είναι μικρή (15% το ποσοστό για τον πολλαπλασιασμό και 14% για τη διαίρεση). Επιπλέον, ένα γενικό συμπέρασμα είναι ότι υπάρχει μια μεγαλύτερη ισοκατανομή των προβλημάτων αυτού του είδους και για τέσσερις πράξεις τόσο για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου όσο για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία σε μεγαλύτερο βαθμό, σε σχέση με τα σχολικά βιβλία της σειράς EnVisionMATH.

Ένα άλλο κριτήριο με βάση το οποίο μπορούμε να μελετήσουμε τα δεδομένα του πίνακα Β.2 είναι τα ποσοστά κάθε κατηγορίας για τις τέσσερις πράξεις συνολικά. Σαφώς, και στις τρεις χώρες η συχνότητα των προβλημάτων που δεν περιέχουν φυσικούς αριθμούς είναι μικρότερη σε σχέση με τα υπόλοιπα προβλήματα. Η αναλογία των προβλημάτων που περιέχουν φυσικούς αριθμούς σε σχέση με τα υπόλοιπα προβλήματα είναι για τις ΗΠΑ $\frac{28}{72} \cong 0,39$, για την Ελλάδα $\frac{36}{64} \cong 0,57$ και για την Κύπρο $\frac{34}{66} \cong 0,52$. Δηλαδή, στις Ελληνικές και τις Κυπριακές σειρές τα προβλήματα που δεν περιέχουν φυσικούς αριθμούς είναι διπλάσια σε σχέση με υπόλοιπα, ενώ για τη σειρά EnVisionMATH είναι τριπλάσια.

8.3 Πειράματα με προσομοίωση

Με σκοπό να προκύψουν κάποιες προβλέψεις για την επίδοση των μαθητών στην αριθμητική των κλασμάτων καθώς και το ρόλο τον οποίο παίζει η κατανομή των προβλημάτων στα υπάρχοντα σχολικά βιβλία στην επίδοση αυτή, διεξάγουμε πειράματα προσομοίωσης με τη βοήθεια του λογισμικού FARRA. Θέτουμε ως τιμές των παραμέτρων $e \in [0.001, 0.020]$, $d \in [0.8, 1.0]$, $\gamma \in [0.5, 1.5]$ και $N = 1000$. Οι τιμές αυτές ταυτίζονται με αυτές τις οποίες χρησιμοποιούν στα πειράματά τους οι Braithwaite et al. (2017). Χρησιμοποιούμε αυτές τις τιμές γιατί σύμφωνα με τους Braithwaite et al. (2017) παράγουν τα 8 φαινόμενα τα οποία προκύπτουν από τις υπάρχουσες εμπειρικές έρευνες (βλ. πίνακα Α.1). Βέβαια εκτός από τη σειρά σχολικών βιβλίων EnVisionMath την οποία χρησιμοποιούν και οι Braithwaite et al. (2017), χρησιμοποιούμε ως είσοδο στο λογισμικό και τα προβλήματα από τα Ελληνικά και τα Κυπριακά σχολικά βιβλία. Συνεπώς, με αυτή την επιλογή των παραμέτρων είναι δυνατή μια σύγκριση των τριών σειρών σχολικών βιβλίων τις οποίες εξετάζουμε. Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης με σκοπό να διαπιστώσουμε αν παράγονται και στη δική μας περίπτωση τα 8

φαινόμενα του πίνακα A.1 στην αριθμητική των κλασμάτων όπως αυτά αναφέρονται από τους Braithwaite et al. (2017).

8.3.1 Χαμηλή επίδοση συνολικά

Τα αποτελέσματά των Braithwaite et al. (2017) δείχνουν συνολικό ποσοστό επιτυχίας των μαθητών ίσο με 52% (βλ. πίνακα B.3, στήλη enVisionMath). Το ποσοστό αυτό βρίσκεται σε απόλυτη συμφωνία με τα εμπειρικά δεδομένα (Siegler & Pyke, 2013). Επιπλέον, οι συγγραφείς διεξάγουν ορισμένες προσομοιώσεις κατά τις οποίες μεταβάλλουν τις τιμές των παραμέτρων. Τα αποτελέσματά τους προβλέπουν ποσοστά επιτυχίας των μαθητών τα οποία κυμαίνονται μεταξύ των τιμών 42% και 65%.

Στον πίνακα B.3 φαίνονται τα ποσοστά επιτυχίας και για τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων τις οποίες μελετάμε. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι το ποσοστό των σωστών απαντήσεων για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου (51,60%) είναι πολύ κοντά σε αυτό των ΗΠΑ (enVisionMATH). Αντίθετα, τα Ελληνικά σχολικά βιβλία με ποσοστό 45,30%, υστερούν κατά τουλάχιστον 6 ποσοστιαίες μονάδες σε σχέση με τις άλλες δύο σειρές βιβλίων. Μια πιθανή εξήγηση για αυτό είναι ο πολύ μικρότερος αριθμός των προβλημάτων των Ελληνικών σχολικών βιβλίων.

8.3.2 Εξαιρετικά χαμηλή επίδοση στα προβλήματα διαίρεσης κλασμάτων.

Στο διάγραμμα B.1 φαίνονται με τη μορφή ραβδογράμματος τα ποσοστά επιτυχίας τα οποία προκύπτουν από την προσομοίωση. Εδώ έχουμε ξεχωρίσει τα ποσοστά επιτυχίας για την πρόσθεση και την αφαίρεση σύμφωνα με τους (Braithwaite et al., 2017). Παρατηρούμε ως γενικό συμπέρασμα ότι η προσομοίωση εμφανίζει τα χαμηλότερα ποσοστά στη διαίρεση κλασμάτων και για τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων. Αυτό δείχνει ότι οι μαθητές

Πίνακας B.3: Ποσοστά σωστών απαντήσεων τα οποία προκύπτουν από την εκτέλεση του λογισμικού FARRA.

Πράξη	Ποσοστά επιτυχίας		
	enVisionMATH (ΗΠΑ)	Ελληνικά σχολικά βιβλία	Σχολικά βιβλία της Κύπρου
Όλες οι πράξεις μαζί	51,7%	45,3%	51,6%
Πρόσθεση/Αφαίρεση	62,8%	43,7%	57,5%
Πρόσθεση/Αφαίρεση με ομώνυμα κλάσματα	79,9%	49,9%	67,5%
Πρόσθεση/Αφαίρεση με ετερόνυμα κλάσματα	45,7%	37,5%	47,4%
Πολλαπλασιασμός	50,5%	54,7%	54,7%
Πολλαπλασιασμός με ομώνυμα κλάσματα	39,1%	49,4%	49,2%
Πολλαπλασιασμός με ετερόνυμα κλάσματα	61,9%	60%	60,2%
Διαίρεση	30,8%	39,1%	36,8%
Διαίρεση με ομώνυμα κλάσματα	31,3%	45,6%	42,1%
Διαίρεση με ετερόνυμα κλάσματα	30,4%	32,6%	31,6%

κάνουν πολύ πιο συχνά λάθη στον αλγόριθμο εκτέλεσης της διαίρεσης κλασμάτων σε σχέση με τις άλλες τρεις πράξεις. Το χαμηλότερο ποσοστό σωστών απαντήσεων παρατηρείται στις ΗΠΑ (30,8%), ενώ το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας εμφανίζουν τα Ελληνικά σχολικά βιβλία (39,1%). Τα σχολικά βιβλία της Κύπρου συγκεντρώνουν ποσοστό (36,8%). Μια αιτία για τα χαμηλά ποσοστά επιτυχίας και για τις τρεις σειρές είναι ότι ακόμα και αν το λογισμικό επιλέξει τη σωστή στρατηγική επίλυσης σε ένα πρόβλημα διαίρεσης κλασμάτων, η εκτέλεση της σωστής στρατηγικής είναι πολύπλοκη και υπάρχουν πολλά λάθη τα οποία μπορεί να γίνουν. Τέτοια λάθη τα οποία προβλέπονται από το λογισμικό είναι η αντιστροφή του λάθους παράγοντα, η μη αντιστροφή κάποιου παράγοντα ή η τυχαία αντιστροφή των παραγόντων. Αποτέλεσμα αυτού είναι η σωστή στρατηγική επίλυσης προβλημάτων διαίρεσης να μην ενισχύεται από το FARRA γιατί παράγει συχνά λάθος απαντήσεις λόγω της λάθους εκτέλεσής της.

Βέβαια, η επίδοση για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και τα σχολικά βιβλία της Κύπρου εμφανίζεται πιο αυξημένη. Μια πιθανή εξήγηση για αυτό είναι το υψηλότερο ποσοστό προβλημάτων διαίρεσης σε αυτές τις δύο σειρές (31% και στις δύο σειρές έναντι 19% στη σειρά EnVisionMATH).

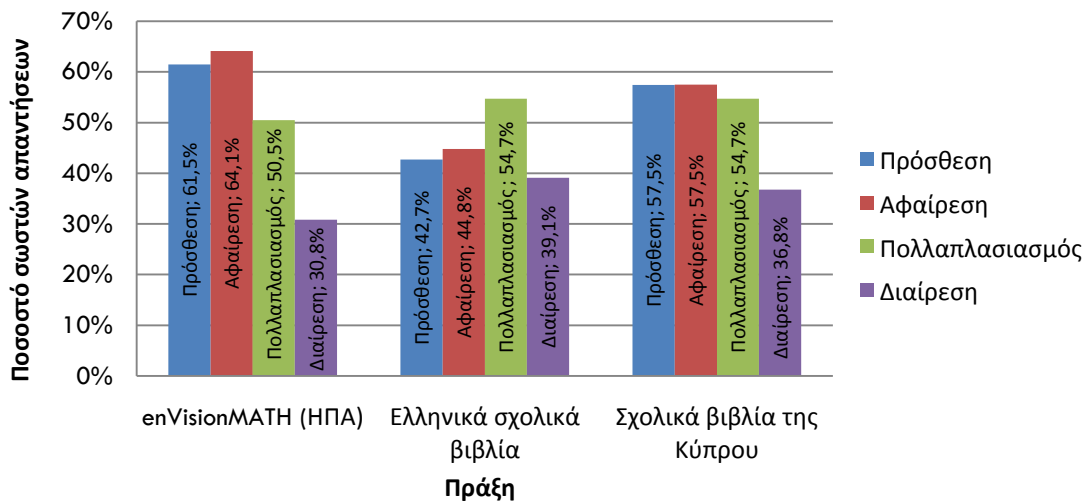
Επιπλέον, παρατηρούμε ότι το ποσοστό επιτυχίας για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία είναι ελαφρώς υψηλότερο σε σχέση με αυτό των σχολικών βιβλίων της Κύπρου. Αν παρατηρήσει κανείς την ακολουθία των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων (πίνακας Β.1), παρατηρεί ότι η διαίρεση στα Ελληνικά σχολικά βιβλία εισάγεται αρκετά νωρίς (στο 35^ο πρόβλημα σε σύνολο 169 προβλημάτων, ποσοστό 7,69%), στη σειρά EnVisionMATH εισάγεται αργότερα (στο 184^ο πρόβλημα σε σύνολο 659 προβλημάτων, ποσοστό 27,92%) και στα σχολικά βιβλία της Κύπρου πολύ αργότερα (στο 303^ο πρόβλημα σε σύνολο 510 προβλημάτων, ποσοστό 59,41%). Δηλαδή, πιθανόν, ο συνδυασμός του ποσοστού των προβλημάτων διαίρεσης και του πόσο νωρίς εισάγεται η πράξη της διαίρεσης φαίνεται να δίνει την εξήγηση της χαμηλής επίδοσης της σειράς EnVisionMATH και της υψηλότερης επίδοσης σε σχέση με τις άλλες δύο σειρές των Ελληνικών σχολικών βιβλίων στη διαίρεση κλασμάτων.

8.3.3 Μεταβλητότητα στις απαντήσεις σε συγκεκριμένα προβλήματα

Βασικό χαρακτηριστικό του λογισμικού FARRA το οποίο προσομοιώνει τον τρόπο εκτέλεσης των πράξεων στα κλάσματα από τους μαθητές, είναι η μεταβλητότητα των απαντήσεων σε κάθε ερώτημα. Όπως αναφέρουν οι Braithwaite et al. (2017), σχεδόν όλες οι απαντήσεις που προκύπτουν από τα πειραματικά δεδομένα προέκυψαν και κατά την εκτέλεση του προγράμματος. Μάλιστα, η συχνότητα των απαντήσεων του λογισμικού FARRA είναι πολύ κοντά σε αυτές που διαπιστώνονται πειραματικά από τη βιβλιογραφία. Ειδικότερα, οι Braithwaite et al. (2017), μελετώντας τις απαντήσεις του λογισμικού FARRA στα 4 προβλήματα πρόσθεσης, διαπιστώνουν ότι υπάρχουν τουλάχιστον 4 διαφορετικές απαντήσεις με συχνότητα μεγαλύτερη ή ίση με 2%, γεγονός το οποίο επαληθεύεται και από τα πειραματικά δεδομένα.

Στη συνέχεια της παρούσας παραγράφου, θα αναλύσουμε τις απαντήσεις οι οποίες προκύπτουν από την εκτέλεση του λογισμικού FARRA και για τρεις σειρές σχολικών βιβλίων που μελετούμε (ΗΠΑ, Ελλάδα, Κύπρος). Σκοπός μας είναι να εξετάσουμε αν οι παραπάνω παρατηρήσεις ισχύουν και για τις απαντήσεις των Ελληνικών και Κυπριακών σχολικών βιβλίων και ταυτόχρονα, να γίνει μια πρόβλεψη για το πλήθος και το είδος των απαντήσεων των μαθητών

σε κάθε χώρα. Λόγου του μεγάλου πλήθους των απαντήσεων σε κάθε πρόβλημα, θα εξετάσουμε τις απαντήσεις για κάθε πράξη ξεχωριστά.



Γράφημα Β.1: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων ανά σειρά σχολικών βιβλίων για κάθε πράξη.

8.3.3.1 Απαντήσεις στα προβλήματα πρόσθεσης

Στον πίνακα Π.Α.1 (βλ. παράρτημα) εικονίζονται όλες οι απαντήσεις όπως προέκυψαν από την εκτέλεση του λογισμικού FARRA και για τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων στα 4 προβλήματα πρόσθεσης. Παρατηρούμε ότι το λογισμικό FARRA παρήγαγε ένα μεγάλο εύρος διαφορετικών απαντήσεων για κάθε πρόβλημα στην πρόσθεση κλασμάτων. Οι σωστές απαντήσεις έχουν επισημανθεί στον πίνακα με έντονη γραφή. Αναλύουμε τις απαντήσεις σε κάθε ένα από τα τέσσερα προβλήματα ξεχωριστά. Επιπλέον, Στον πίνακα Π.Α.2 (βλ. παράρτημα) φαίνεται το είδος των στρατηγικών (OpNumKeepDen, IndepComp, InvertOper) τις οποίες χρησιμοποίησαν οι μαθητές του προγράμματος FARRA σε κάθε απάντηση. Δίπλα σε κάθε απάντηση, σημειώνεται το αντίστοιχο ποσοστό του είδους (ή των ειδών αν είναι περισσότερες από μια) των στρατηγικών οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν ανά σειρά σχολικών βιβλίων. Στη συνέχεια σχολιάζουμε ενδεικτικά κάποιες από τις απαντήσεις.

A1. Απαντήσεις στο πρόβλημα «3/5+1/5»

Το λογισμικό FARRA δίνει τις εξής παρακάτω απαντήσεις:

1. **Απάντηση $\left\{\frac{4}{5}\right\}$ (Σωστή, OpNumKeepDen):** Το 1^ο από τα 4 προβλήματα περιλαμβάνει της πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων. Θεωρείται ως ένα πρόβλημα χαμηλής δυσκολίας για τους μαθητές. Τα ποσοστά επιτυχίας εδώ είναι αυξημένα (80,2% για το enVisionMATH, 49,1% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 70% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου). Προβληματίζει το χαμηλό για το επίπεδο δυσκολίας της ερώτησης ποσοστό (49,1%) των Ελληνικών σχολικών βιβλίων το οποίο πιθανόν να μην απέχει πολύ από την πραγματική επίδοση των μαθητών και δείχνει το πιθανό ρόλο που μπορεί να παίζει σε αυτό το ιδιαίτερα χαμηλό ποσοστό ασκήσεων των σχολικών βιβλίων στα ομώνυμα κλάσματα τόσο στην πρόσθεση όσο και την αφαίρεση.

2. **Απάντηση** $\left\{\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3+1}{5+5} = \frac{4}{10}\right\}$ (**Λάθος, IndepComp & InvertOper**): Το συγκεκριμένο λάθος το δίνει το πρόγραμμα με δεύτερη μεγαλύτερη συχνότητα (10,7% για το enVisionMATH, 24,0% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 18,8% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου). Εδώ οι μαθητές προσθέτουν εκτός από τους αριθμητές και τους παρονομαστές. Εφαρμόζουν, δηλαδή, τη λογική του πολλαπλασιασμού κλασμάτων στην πρόσθεση κλασμάτων. Και αυτό είναι ένα λάθος το οποίο παρατηρείται συχνά στους μαθητές κυρίως του Δημοτικού. Πρέπει επιπλέον να σημειώσουμε ότι το λογισμικό καταλήγει στην απάντηση αυτή εφαρμόζοντας και μια άλλη εναλλακτική στρατηγική. Προσπαθεί, δηλαδή, να εφαρμόσει τον αλγόριθμο της διαίρεσης αλλάζοντας σε πρώτη φάση την πράξη από διαίρεση σε πολλαπλασιασμό. Μόλις όμως διαπιστώσει ότι αυτό δεν είναι εφικτό καθώς υπάρχει άλλη πράξη, εφαρμόζει τον αρχικό κανόνα της πρόσθεσης ξεχωριστά στους παρονομαστές και τους αριθμητές. Παρακάτω παραθέτουμε το αντίστοιχο αποτύπωμα (trace) του προγράμματος για τη στρατηγική InvertOper.

Βήμα 1	κανόνας	None
	κατάσταση	3/5+1/5 = ?/?
	στόχοι	find_answer
Βήμα 2	κανόνας	Create goal invert-and-operate.
	κατάσταση	3/5+1/5 = ?/?
	στόχοι	find_answer, invert_and_operate
Βήμα 3	κανόνας	When goal invert_and_operate, create goals change / to * and operate nums and dens.
	κατάσταση	3/5+1/5 = ?/?
	στόχοι	find_answer, operate_on_denominators, operate_on_numerators, change_div_mult
Βήμα 4	κανόνας	When goal change division to multiplication, do so if possible.
	κατάσταση	3/5+1/5 = ?/?
	στόχοι	find_answer, operate_on_denominators, operate_on_numerators
Βήμα 5	κανόνας	When goal operate on numers, create appropriate whole number arith prob.
	κατάσταση	3/5+1/5 = ?/?
	στόχοι	find_answer, operate_on_denominators, do_whole_arith_3+1=ans_num
Βήμα 6	κανόνας	When goal do whole number arith and operation is +, add operands
	κατάσταση	3/5+1/5 = 4/?
	στόχοι	find_answer, operate_on_denominators
Βήμα 7	κανόνας	When goal operate on denoms, create appropriate whole number arith prob.
	κατάσταση	3/5+1/5 = 4/?
	στόχοι	find_answer, do_whole_arith_5+5=ans_den
Βήμα 8	κανόνας	When goal do whole number arith and operation is +, add operands.
	κατάσταση	3/5+1/5 = 4/10
	στόχοι	find_answer
Βήμα 9	κανόνας	When answer obtained, problem is solved.
	κατάσταση	3/5+1/5 = 4/10
	στόχοι	done

Παρατηρούμε ότι ενώ στο βήμα 2 τίθεται ως στρατηγική ο κανόνας «*Create goal invert-and-operate*», στο βήμα 5 έχουμε τη στρατηγική «*When goal operate on numers, create appropriate whole number arith prob*» η οποία προτρέπει την πρόσθεση αριθμητών και παρονομαστών ξεχωριστά (IndepComp). Η πρώτη εναλλακτική (IndepComp), παρατηρείται σε ποσοστό 77,57% των απαντήσεων και η δεύτερη (InvertOper) στο υπόλοιπο

22,43% για τη σειρά enVisionMATH. Για τις άλλες δύο σειρές τα αντίστοιχα ποσοστά παρόμοια (βλ. πίνακα Π.Α.2).

3. **Απάντηση** $\left\{\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} + \frac{5}{1} = \frac{8}{6}\right\}$ (**Λάθος, InvertOper**): Ένα άλλο πιο σπάνιο λάθος το οποίο εμφανίζεται και στις τρεις σειρές βιβλίων (5,0% για το enVisionMATH, 9,0% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 5,8% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου). Εδώ ο μαθητής εφαρμόζει τον κανόνα της διαίρεσης κλασμάτων (αντέστρεψε και κάλε την πράξη) στην πρόσθεση και στη συνέχεια προσθέτει αριθμητές και παρονομαστές χωρίς να κάνει τα κλάσματα ομώνυμα. Αυτό το λάθος είναι εξαιρετικά σπάνιο και ίσως το ποσοστό που προκύπτει από το πρόγραμμα είναι αρκετά υψηλό.
4. **Απάντηση** $\left\{\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3+1}{5+5} = \frac{4}{10} = \frac{4:2}{10:2} = \frac{2}{5}\right\}$ (**Λάθος, IndepComp & InvertOper**): Αυτή η περίπτωση είναι ίδια με τη 2^η περίπτωση (του παρόντος προβλήματος A1) στην οποία ο μαθητής κάνει επιπλέον την απλοποίηση. Το ποσοστό της απάντησης αυτής (1,9% για το enVisionMATH, 9,3% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 2,4% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου) είναι αρκετά υψηλά για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και αφορά την συνήθη παρανόηση των μαθητών να μην βλέπουν το κλάσμα ως ένα ενιαίο αριθμό, αλλά ως δύο ξεχωριστούς αριθμούς. Τα ποσοστά των δύο εναλλακτικών στρατηγικών είναι να ακολουθούθα (βλ. πίνακα Π.Α.2):
- ✓ EnVisionMATH: IndepComp (68.42%), InvertOper(31.58%)
 - ✓ Ελληνικά σχολικά βιβλία: IndepComp (81.72%), InvertOper(18.28%)
 - ✓ Σχολικά βιβλία της Κύπρου: IndepComp (75%), InvertOper(25%)
5. **Απάντηση** $\left\{\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} + \frac{5}{1} = \frac{3+5}{5+1} = \frac{8}{6} = \frac{8:2}{6:2} = \frac{4}{3}\right\}$ (**Λάθος, InvertOper**): Η απάντηση αυτή είναι ίδια με την περίπτωση 3. Εδώ ο μαθητής απλοποιεί το τελικό αποτέλεσμα. Η απάντηση αυτή σημειώνει αρκετά μικρό ποσοστό των απαντήσεων (1,0% για το enVisionMATH, 4,1% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 1,0% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου).
6. **Απάντηση** $\left\{\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{5}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5+1}{3+5} = \frac{6}{8}\right\}$ (**Λάθος, InvertOper**): Στην περίπτωση αυτή έχουμε λάθος εφαρμογή του αλγορίθμου της διαίρεσης κλασμάτων. Δηλαδή, αντιστρέφεται ο πρώτος όρος αντί για το δεύτερο όρο. Θεωρούμε ότι αυτό είναι ένα πολύ σπάνιο λάθος γεγονός το οποίο φαίνεται από τα αντίστοιχα ποσοστά (1,0% για το enVisionMATH, 3,0% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 1,4% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου).
7. **Απάντηση** $\left\{\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{5}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5+1}{3+5} = \frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}\right\}$ (**Λάθος, InvertOper**): Και εδώ έχουμε ίδια απάντηση με την περίπτωση 6 και απλοποιείται το τελικό αποτέλεσμα. Τα ποσοστά εδώ είναι πολύ χαμηλά (0,2% για το enVisionMATH, 1,5% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 0,6% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου).

A2. Απαντήσεις στο Πρόβλημα «2/3+3/5»:

1. **Απάντηση** $\left\{\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2:5}{3:5} + \frac{3:3}{5:3} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{19}{15}\right\}$ (**Σωστή, OpNumKeepDen**): Τα ποσοστά επιτυχίας και για τις τρεις σειρές βιβλίων μειώνεται σημαντικά σε σχέση με τα προβλήματα με ομώνυμα κλάσματα. Δεν παρατηρείται μεγάλη απόκλιση στα ποσοστά αυτά από τη μία σειρά στην άλλη (42,4% για το enVisionMATH, 37,2% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 45,8% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου). Η συμπεριφορά αυτή του λογισμικού αντικατοπτρίζει την πραγματική δυσκολία την οποία συναντούν οι μαθητές στην πρόσθεση ετερονύμων

κλασμάτων. Το χαμηλότερο ποσοστό έχουν τα Ελληνικά σχολικά βιβλία ίσως λόγω του μικρού απόλυτου αριθμού προβλημάτων συνολικά.

- 2. Απάντηση** $\left\{\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2+3}{3+5} = \frac{5}{8}\right\}$ (**Λάθος, IndepComp & InvertOper**): Και στις τρεις σειρές βιβλίων η συχνότητα του παραπάνω λάθους είναι λίγο πάνω από το 30%. Δηλαδή, το λογισμικό καταδεικνύει ότι 1 στους 3 μαθητές κάνει αυτό το λάθος, φαινόμενο το οποίο είναι πολύ κοντά στην πραγματικότητα.
- 3. Απάντηση** $\left\{\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15} + \frac{3}{15} = \frac{5}{15} \text{ ή } \frac{1}{3}\right\}$ (**Λάθος, OpNumKeepDen**): Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε ένα συχνό λάθος των μαθητών το οποίο είναι να βρίσκουν το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών και να πολλαπλασιάζουν με αυτό τους παρονομαστές μόνο και όχι τους αριθμητές. Το λογισμικό δίνει δύο διαφορετικές απαντήσεις. Τις 5/15 αν δεν γίνει η απλοποίηση και την 1/3 μετά την απλοποίηση. Τα ποσοστά των μαθητών που δίνουν αυτή την απάντηση είναι περίπου 10,5% - 11,8% χωρίς την απλοποίηση και 1,8% - 4% με την απλοποίηση για όλες τις σειρές βιβλίων που μελετάμε.
- 4. Απαντήσεις (A)** $\left\{\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3+3} = \frac{7}{6}\right\}$, **(B)** $\left\{\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{3}{2} + \frac{3}{5} = \frac{6}{7}\right\}$ (**Λάθος, InvertOper**): Παρατηρούμε ότι το πρόγραμμα δίνει αρκετά μεγάλα ποσοστά για το λάθος (A) και για τις τρεις σειρές βιβλίων (9% - 11%) ενώ για το λάθος (B) η συχνότητα εμφάνισης είναι αρκετά χαμηλή (2,6% - 3,4%) . Το γεγονός φαίνεται λογικό καθώς ο μαθητής ο οποίος θα εφαρμόσει λανθασμένα τον αλγόριθμο της διαίρεσης, είναι πιο πιθανό να αντιστρέψει το δεύτερο στη σειρά κλάσμα όπως γράφεται από τα αριστερά προς τα δεξιά γιατί αυτό το κλάσμα είναι ο διαιρέτης στη διαίρεση κλασμάτων και αυτός αντιστρέφεται.

8.3.3.2 Απαντήσεις στα προβλήματα αφαίρεσης

Στον πίνακα Π.Α.3 (βλ. Παράρτημα) φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στα τέσσερα προβλήματα αφαίρεσης καθώς και το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών οι οποίοι έδωσαν τη συγκεκριμένη απάντηση όπως προκύπτει από την προσομοίωση του λογισμικού FARRA. Επιπλέον, στον πίνακα Π.Α.4 (βλ. Παράρτημα) υπάρχουν όλες οι εναλλακτικές στρατηγικές οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν από το λογισμικό για την επίλυση των παραπάνω προβλημάτων μαζί με τη συχνότητά τους. Αναλύουμε την απάντηση σε κάθε πρόβλημα ξεχωριστά.

B1. Απαντήσεις στο πρόβλημα «3/5-1/5»

- 1. Απάντηση** $\left\{\frac{2}{5}\right\}$ (**Σωστή, OpNumKeepDen**): Τα ποσοστά επιτυχίας είναι αρκετά υψηλά. Τα σχολικά βιβλία enVisionMATH συγκεντρώνουν τα υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας (80,6%). Αρκετά υψηλά ποσοστά επιτυχίας εμφανίζει η σειρά των σχολικών βιβλίων της Κύπρου (65,7%). Το ποσοστό επιτυχίας των Ελληνικών σχολικών βιβλίων είναι αρκετά χαμηλό (51,5%) σε σχέση το επίπεδο δυσκολίας της ερώτησης. Γενικά, το λογισμικό δίνει παρόμοια ποσοστά επιτυχίας στην αφαίρεση και πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων. Τα ποσοστά αυτά είναι σε συμφωνία με την πραγματικότητα καθώς ο μικρός αριθμός των προβλημάτων με ομώνυμα κλάσματα στα

σχολικά βιβλία της Ελλάδας και της Κύπρου είναι δυνατόν να οδηγήσει τους μαθητές σε λάθη και παρανοήσεις.

2. **Απάντηση** $\left\{\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3-1}{5-5} = \frac{2}{0}\right\}$ (**Λάθος, IndepComp & InvertOper**): Αξιοσημείωτα είναι τα υψηλά ποσοστά εμφάνισης του λάθους αυτού (13,1% για το enVisionMATH, 33,4% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 25% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου).

3. **Απαντήσεις** $\left\{(A) \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5} - \frac{5}{1} = \frac{3-5}{5-1} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}\right\}$,
 $\left\{(B) \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5} - \frac{5}{1} = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\right\}$, $\left\{(Γ) \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{5}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5-1}{5-3} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}\right\}$,
 $\left\{(Δ) \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{5}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5-1}{3-5} = \frac{4}{-2} = \frac{2}{-1}\right\}$ (**Όλες λάθος και InvertOper**): Ομαδοποιήσαμε όλες τις περιπτώσεις λάθος απάντησης από τους υποθετικούς μαθητές του λογισμικού FARRA οι οποίες βασίζονται στην λάθος γενίκευση του αλγορίθμου της διαίρεσης κλασμάτων στην πρόσθεση κλασμάτων. Τα λάθη αφορούν αρχικά το αν αντιστρέφεται το πρώτο (περιπτώσεις (Γ) και (Δ)) ή το δεύτερο κλάσμα (περιπτώσεις (Α) και (Β)) από αριστερά. Στη συνέχεια, ορισμένοι υποθετικοί μαθητές του προγράμματος αφαιρούν λανθασμένα τους αριθμητές και τους παρονομαστές μεταξύ τους όπως είναι (περιπτώσεις (Α) και (Δ)), ενώ άλλοι, μετά την αντιστροφή του ενός από τα δύο κλάσματα, αφαιρούν τους αριθμητές και τους παρονομαστές μεταξύ τους έτσι ώστε να προκύψει θετικό αποτέλεσμα (περιπτώσεις (Β) και (Γ)). Αν αθροίσουμε τα ποσοστά της συγκεκριμένης ομάδας λαθεμένων στρατηγικών, τότε προκύπτουν τα εξής: enVisionMATH 6,3%, Ελληνικά σχολικά βιβλία 15,1% και 9,3% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου. Αρκετά αυξημένο ποσοστό παρατηρείται στα Ελληνικά σχολικά βιβλία το οποίο προβληματίζει για το είδος των ασκήσεων που συναντούν οι μαθητές στα ομώνυμα κλάσματα και τον τρόπο που είναι δομημένο το σχολικό βιβλίο. Το ίδιο ισχύει αν και σε μικρότερο βαθμό για τα Κυπριακά σχολικά βιβλία για τα οποία σημειώνουμε ότι στο σύνολο έχουν πολύ περισσότερες ασκήσεις στις πράξεις κλασμάτων από αυτές των Ελληνικών σχολικών βιβλίων.

B2. Απαντήσεις στο πρόβλημα «2/3-3/5»

1. **Απάντηση** $\left\{\frac{1}{15}\right\}$ (**Σωστή, OpNumKeepDen**): Όπως είναι αναμενόμενο και ορθά προκύπτει από την εκτέλεση του προγράμματος τα ποσοστά επιτυχίας και για τις τρεις σειρές βιβλίων είναι χαμηλότερα σε σχέση με την περίπτωση της αφαίρεσης ομωνύμων κλασμάτων. Ειδικότερα, τα ποσοστά αυτά είναι 51,9% για το enVisionMATH, 44,5% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 54,9% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου. Εδώ τα Κυπριακά σχολικά βιβλία υπερέχουν ελαφρώς έναντι της σειράς (enVisionMATH) ενώ τα Ελληνικά σχολικά βιβλία δίνουν την πιο χαμηλή επίδοση.

2. **Απαντήσεις** $\left\{\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{3-2}{5-3} = \frac{1}{2}\right\}$, $\left\{\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{2-3}{3-5} = \frac{-1}{-2}\right\}$, $\left\{\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{2-3}{5-3} = \frac{-1}{2}\right\}$,
 $\left\{\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{3-2}{3-5} = \frac{1}{-2}\right\}$ (**Λάθος, IndepComp & InvertOper**): Στις απαντήσεις που αναφέρονται εδώ ο μαθητής αφαιρεί λανθασμένα τον αριθμητή του ενός κλάσματος από τον αριθμητή του άλλου και τον παρονομαστή του ίδιου κλάσματος από τον παρονομαστή του άλλου. Οι τέσσερις παραπάνω διαφορετικές περιπτώσεις προκύπτουν αναλόγως με το εάν ο μαθητής αφαιρεί τους αντίστοιχους όρους του κλάματος όπως είναι ή

μεριμνά έτσι ώστε η διαφορά να είναι θετικός αριθμός. Αθροίζοντας τις συχνότητες των λαθών αυτών για τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων προκύπτουν τα ποσοστά 32,20% για το enVisionMATH, 32,50% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 28,80% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου που είναι αρκετά υψηλά.

3. Απαντήσεις $\left\{\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} = \frac{2-5}{3-3} = \frac{-3}{0}\right\}$, $\left\{\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} = \frac{5-2}{3-3} = \frac{3}{0}\right\}$,
 $\left\{\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{3}{2} - \frac{3}{5} = \frac{3-3}{5-2} = \frac{0}{3}\right\}$, $\left\{\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{3}{2} - \frac{3}{5} = \frac{3-3}{2-5} = \frac{0}{-3}\right\}$ (Λάθος, InvertOper).
4. Απάντηση $\left\{\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{2}{3 \cdot 5} - \frac{3}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15} - \frac{3}{15} = \frac{2-3}{15} = \frac{-1}{15}\right\}$ (Λάθος, OpNumKeepDen).

B3. Απαντήσεις στο πρόβλημα «3/5-1/4»

1. Απάντηση $\left\{\frac{7}{20}\right\}$ (Σωστή, OpNumKeepDen): Τα ποσοστά επιτυχίας είναι πιο χαμηλά σε σχέση με το πρόβλημα «2/3-3/5». Συγκεκριμένα, για το enVisionMATH έχουμε ποσοστό 44,3% (μείωση 51,9% - 44,3% = 7,6%), για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία 36% (μείωση 44,5% - 33,8% = 10,7%) και 42,9% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου (μείωση 54,9% - 42,9% = 12%). Ίσως αυτό να είναι σε συμφωνία με την πραγματικότητα γιατί αν κάποιος μαθητής επιχειρήσει λανθασμένα να αφαιρέσει αριθμητή από αριθμητή και παρονομαστή από παρονομαστή, τότε επειδή το αποτέλεσμα στην παρούσα περίπτωση δεν είναι αρνητικός αριθμός, δεν θα τον προβληματίσει όπως στην περίπτωση 2/3-3/5 κατά όποια η αφαίρεση τόσο των αριθμητών όσο και των παρονομαστών δίνει αρνητικό αποτέλεσμα.
2. Απάντηση $\left\{\frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{5-4} = \frac{2}{1}\right\}$ (Λάθος, IndepComp & InvertOper).
3. Απαντήσεις $\left\{\frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{5} - \frac{4}{1} = \frac{3-4}{5-1} = \frac{-1}{4}\right\}$, $\left\{\frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{5} - \frac{4}{1} = \frac{4-3}{5-1} = \frac{1}{4}\right\}$,
 $\left\{\frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{5}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5-1}{3-4} = \frac{4}{-1}\right\}$, $\left\{\frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{5}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5-1}{4-3} = \frac{4}{1}\right\}$.
4. Απάντηση $\left\{\frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{5 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20} - \frac{1}{20} = \frac{3-1}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}\right\}$ (Λάθος, OpNumKeepDen).

8.3.3.3 Απαντήσεις στα προβλήματα πολλαπλασιασμού

Γ1. Απαντήσεις στο Πρόβλημα «3/5*1/5»

1. Απάντηση $\left\{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 5} = \frac{3}{25}\right\}$ (Σωστή, IndepComp & InvertOper): Τα ποσοστά επιτυχίας και για τις τρεις σειρές βιβλίων είναι αρκετά χαμηλά (βλ. πίνακα Π.Α.5 στο παράρτημα). Τα σχολικά βιβλία των ΗΠΑ εμφανίζουν τα μικρότερο ποσοστό επιτυχίας (37,7%) και τα Ελληνικά σχολικά βιβλία μαζί τα Κυπριακά σχολικά βιβλία το υψηλότερο ποσοστό (49,6%). Το λογισμικό, δηλαδή, καταδεικνύει ότι περίπου 1–1,5 στους 3 μαθητές αποτυγχάνουν να επιλύσουν σωστά τα προβλήματα πολλαπλασιασμού ομωνύμων κλασμάτων. Το φαινόμενο αυτό είναι πολύ κοντά στην πραγματική επίδοση των μαθητών. Εδώ, το πρόγραμμα χρησιμοποιεί δύο εναλλακτικές στρατηγικές επίλυσης. Η πρώτη είναι ο πολλαπλασιασμός αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή. Η δεύτερη, προσπαθεί αρχικά να εφαρμόσει τον αλγόριθμο της διαίρεσης, αλλά δεν μπορεί και συνεχίζει με τον πολλαπλασιασμό αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με

παρονομαστή. Για λόγους πληρέστερης εικόνας της λειτουργίας της κάθε στρατηγικής, παραθέτουμε το αποτύπωμα (trace) από την εκτέλεση του λογισμικού για κάθε μία στρατηγική:

Στρατηγική IndepComp

(Πολλαπλασίασε ανεξάρτητα τους αριθμητές και τους παρονομαστές)

Βήμα 1	κανόνας	None
	κατάσταση	$3/5 * 1/5 = ?/?$
	στόχοι	find_answer
Βήμα 2	κανόνας	Create Στόχοι apply operation to numers and denoms separately.
	κατάσταση	$3/5 * 1/5 = ?/?$
	στόχοι	find_answer, operate_on_denominators, operate_on_numerators
Βήμα 3	κανόνας	When goal operate on numers, create appropriate whole number arith prob.
	κατάσταση	$3/5 * 1/5 = ?/?$
	στόχοι	find_answer, operate_on_denominators, do_whole_arith_3*1=ans_num
Βήμα 4	κανόνας	When goal do whole number arith and operation is *, multiply operands.
	κατάσταση	$3/5 * 1/5 = 3/?$
	στόχοι	find_answer, operate_on_denominators
Βήμα 5	κανόνας	When goal operate on denoms, create appropriate whole number arith prob.
	κατάσταση	$3/5 * 1/5 = 3/?$
	στόχοι	find_answer, do_whole_arith_5*5=ans_den
Βήμα 6	κανόνας	When goal do whole number arith and operation is *, multiply operands.
	κατάσταση	$3/5 * 1/5 = 3/25$
	στόχοι	find_answer
Βήμα 7	κανόνας	When answer obtained, problem is solved.
	κατάσταση	$3/5 * 1/5 = 3/25$
	στόχοι	done

Στρατηγική InvertOper
(Αντέστρεψε και πολλαπλασίασε)

Βήμα 1	κανόνας	None
	κατάσταση	$3/5 * 1/5 = ?/?$
	στόχοι	find_answer
Βήμα 2	κανόνας	Create goal invert-and-operate.
	κατάσταση	$3/5 * 1/5 = ?/?$
	στόχοι	find_answer, invert_and_operate
Βήμα 3	κανόνας	When goal invert_and_operate, create goals change / to * and operate nums and dens.
	κατάσταση	$3/5 * 1/5 = ?/?$
	στόχοι	find_answer, operate_on_denominators, operate_on_numerators, change_div_mult
Βήμα 4	κανόνας	When goal change division to multiplication, do so if possible.
	κατάσταση	$3/5 * 1/5 = ?/?$
	στόχοι	find_answer, operate_on_denominators, operate_on_numerators
Βήμα 5	κανόνας	When goal operate on nums, create appropriate whole number arith prob.
	κατάσταση	$3/5 * 1/5 = ?/?$
	στόχοι	find_answer, operate_on_denominators, do_whole_arith_3*1=ans_num
Βήμα 6	κανόνας	When goal do whole number arith and operation is *, multiply operands.
	κατάσταση	$3/5 * 1/5 = 3/?$
	στόχοι	find_answer, operate_on_denominators
Βήμα 7	κανόνας	When goal operate on dens, create appropriate whole number arith prob.
	κατάσταση	$3/5 * 1/5 = 3/?$
	στόχοι	find_answer, do_whole_arith_5*5=ans_den
Βήμα 8	κανόνας	When goal do whole number arith and operation is *, multiply operands.
	κατάσταση	$3/5 * 1/5 = 3/25$
	στόχοι	find_answer
Βήμα 9	κανόνας	When answer obtained, problem is solved.
	κατάσταση	$3/5 * 1/5 = 3/25$
	στόχοι	done

Τα ποσοστά χρήσης της κάθε στρατηγικής (πίνακας Π.Α.6) είναι τα εξής:

- EnVisionMATH: IndepComp (86,47%), InvertOper(13,53%)
- Ελληνικά σχολικά βιβλία: IndepComp (88,10%), InvertOper(11,90%)
- Σχολικά βιβλία της Κύπρου: IndepComp (91,33%), InvertOper(8,67%)

2. Απάντηση $\left\{ \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 1}{5} = \frac{3}{5} \right\}$ (Λάθος, OpNumKeepDen): Το παρόν λάθος έγκειται στο γεγονός ότι οι υποθετικοί μαθητές του λογισμικού FARRA εφαρμόζουν τη στρατηγική πρόσθεσης ομωνύμων κλασμάτων στον πολλαπλασιασμό. Δηλαδή, αφήνουν ως παρονομαστή του τελικού αποτελέσματος τον κοινό παρονομαστή των κλασμάτων, και ως αποτέλεσμα στον αριθμητή θέτουν το γινόμενο των αριθμητών. Η παρανόηση αυτή εμφανίζεται με μεγάλη συχνότητα στους μαθητές των ΗΠΑ. Το λογισμικό δίνει ως συχνότητα αυτού του λάθους 42,9% για το enVisionMATH, 19,3% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 28,4% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου. Εάν εξετάσουμε την κατανομή των προβλημάτων των σχολικών βιβλίων και για τις τρεις σειρές των

σχολικών βιβλίων τις οποίες μελετούμε, βλέπουμε ότι σε όλες τις σειρές το ποσοστό των προβλημάτων πολλαπλασιασμού ομώνυμων κλασμάτων είναι το πολύ 2% επί του συνόλου των προβλημάτων (πίνακας Β.1). Συνεπώς, η κατανομή αυτή δεν μπορεί να δικαιολογήσει το μεγάλο ποσοστό αποτυχίας των βιβλίων των ΗΠΑ έναντι των άλλων δύο στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Μια άλλη πιθανή εξήγηση για αυτό το φαινόμενο είναι ότι μιας και τα προβλήματα της σειράς enVisionMATH στην πρόσθεση και αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων είναι πολύ περισσότερα ποσοστιαία σε σχέση με τις άλλες δύο σειρές, το λογισμικό συναντάει πιο συχνά προβλήματα στα οποία εφαρμόζει τον κανόνα της πρόσθεσης ή αφαίρεσης ομώνυμων κλασμάτων. Δηλαδή, λόγω της μεγάλης επανάληψης εφαρμογής του συγκεκριμένου κανόνα στη σειρά enVisionMATH, αυτός ενισχύεται και έτσι είναι πιο πιθανό να γενικευτεί λανθασμένα και στα προβλήματα του πολλαπλασιασμού.

3. **Απαντήσεις** $\left\{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{1} = \frac{15}{5} = \frac{3}{1}\right\}, \left\{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}\right\}$ (**Λάθος, InvertOper**): Εδώ έχουμε λανθασμένη προσπάθεια εφαρμογής του κανόνα της διαίρεσης κλασμάτων («αντέστρεψε και πολλαπλασίασε») στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Η πρόβλεψη της συχνότητας του συγκεκριμένου λάθους από το λογισμικό αθροιστικά και για τις τέσσερις δυνατές απαντήσεις $\left(\frac{15}{5}, \frac{3}{1}, \frac{5}{15}, \frac{1}{3}\right)$ είναι 19,4% για το enVisionMATH, 31,1% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 22% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου. Η αρκετά υψηλή συχνότητα αυτού του λάθους για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία εμφανίζεται ίσως λόγω του υψηλού ποσοστού προβλημάτων της συγκεκριμένης σειράς στη διαίρεση κλασμάτων.

Γ2. Απαντήσεις στο πρόβλημα « $2/3 * 3/5$ »

1. **Απαντήσεις** $\left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}\right\}, \left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{3}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{15} = \frac{2 \cdot 3}{15 \cdot 15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}\right\}$ (**Σωστές, IndepComp & InvertOper & OpNumKeepDen**): Στο πρόβλημα αυτό βλέπουμε ότι το λογισμικό δίνει τρεις στρατηγικές επίλυσης. Η πρώτη (IndepComp), είναι ο γνωστός αλγόριθμος πολλαπλασιασμού κλασμάτων κατά τον οποίο πολλαπλασιάζεται ο αριθμητής με τον αριθμητή και ο παρονομαστής με τον παρονομαστή. Η δεύτερη (InvertOper), προσπαθεί να κάνει την αντιστροφή του ενός από τα δύο κλάσματα, να εφαρμόζει δηλαδή, τον κανόνα της διαίρεσης κλασμάτων. Τελικά, όμως προχωρά με τον πολλαπλασιασμό αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή. Η τρίτη (OpNumKeepDen), εφαρμόζει τη στρατηγική πρόσθεσης κλασμάτων. Μετατρέπει, δηλαδή, τα κλάσματα σε ομώνυμα (αν και ξεχνάει να πολλαπλασιάσει τους αριθμητές με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών) και στη συνέχεια πολλαπλασιάζει τους αριθμητές. Αν και η στρατηγική αυτή είναι λανθασμένη, το αποτέλεσμα το οποίο προκύπτει είναι κατά τύχη σωστό. Αποτέλεσμα, αυτού είναι να προσμετρούνται οι απαντήσεις αυτές στο συνολικό ποσοστό επιτυχών απαντήσεων. Το ποσοστό χρήσης της κάθε στρατηγικής φαίνεται στον πίνακα Β.4 (οι απαντήσεις 6/15 και 2/5 ξεχωριστά υπάρχουν στον πίνακα Π.Α.6):

Πίνακας Β.4: Ποσοστά συμμετοχής της κάθε στρατηγικής στις σωστές απαντήσεις του προβλήματος «2/3*3/5».

	Στρατηγική OpNumKeepDen	Στρατηγική IndepComp	Στρατηγική InvertOper
Απάντηση 6/15			
EnVisionMATH	10,49%	81,99%	7,52%
Ελληνικά σχολικά βιβλία	10,2%	76,42%	13,38%
Σχολικά βιβλία της Κύπρου	13,01%	80,67%	6,33%
Απάντηση 2/5			
EnVisionMATH	15%	72,5%	12,5%
Ελληνικά σχολικά βιβλία	12,2%	78,66%	9,15%
Σχολικά βιβλία της Κύπρου	6,67%	84,44%	8,89%
Απαντήσεις 6/15 ή 2/5			
EnVisionMATH	10,78%	81,37%	7,84%
Ελληνικά σχολικά βιβλία	10,74%	77,02%	12,23%
Σχολικά βιβλία της Κύπρου	12,54%	80,94%	6,51%

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι το ποσοστό των μαθητών οι οποίοι χρησιμοποιούν τη στρατηγική της μετατροπής των κλασμάτων σε ομώνυμα (OpNumKeepDen) είναι περίπου 10% και για τις τρεις σειρές των σχολικών βιβλίων. Το ποσοστό αυτό είναι αρκετά μεγάλο, γεγονός το οποίο οφείλεται στο ότι ο αλγόριθμος του προγράμματος ενισχύει κάθε φορά εκείνη τη στρατηγική η οποία δίνει τη σωστή απάντηση χωρίς να ελέγχει αν αυτή η στρατηγική είναι η σωστή. Κατά συνέπεια, εφόσον η στρατηγική OpNumKeepDen δίνει τη σωστή απάντηση ενισχύεται από τον αλγόριθμο. Αποτέλεσμα αυτού είναι να καθίσταται πιο πιθανή η επαναχρησιμοποίηση της σε επόμενα βήματα. Αναφορικά με τις τρεις σειρές των σχολικών βιβλίων φαίνεται ότι τα σχολικά βιβλία της Κύπρου χρησιμοποιούν τη στρατηγική αυτή σε μεγαλύτερο ποσοστό σε σχέση με τις άλλες δύο (12,54% έναντι 10,78% για τη σειρά enVisionMATH, και 10,74% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία). Θεωρούμε, ότι η πρόβλεψη αυτή από το λογισμικό FARRA ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Το συνολικό ποσοστό επιτυχίας αν αθροίσουμε τις συχνότητες των δύο απαντήσεων (με ή χωρίς την απλοποίηση τελικού αποτελέσματος) είναι 61,2% για το enVisionMATH, 60,5% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 61,4% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου. Πολύ υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας από τα αντίστοιχα του πολλαπλασιασμού ομώνυμων κλασμάτων.

2. **Απάντηση** $\left\{ \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{9}{15} = \frac{90}{15} = \frac{6}{1} \right\}$ **(Λάθος, OpNumKeepDen):** Εδώ εφαρμόζεται η στρατηγική της πρόσθεσης κλασμάτων στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Δηλαδή, τα κλάσματα αρχικά μετατρέπονται σε ομώνυμα και στη συνέχεια προκύπτει το αποτέλεσμα το οποίο έχει ως παρονομαστή τον κοινό παρονομαστή των κλασμάτων και ως αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών. Αθροίζοντας τις συχνότητες των συγκεκριμένων απαντήσεων βρίσκουμε τα εξής νούμερα: 18,1% για το enVisionMATH, 12,9% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία

και 18% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου. Τα ποσοστά αυτά είναι αρκετά υψηλά και θεωρούμε ότι είναι κοντά στην πραγματικότητα.

3. Απαντήσεις $\left\{ \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{9} \right\}, \left\{ \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{10} \right\}$ (Λάθος, InvertOper).

8.3.3.4 Απαντήσεις στα προβλήματα διαίρεσης

Δ1. Απαντήσεις στο πρόβλημα «3/5:1/5»

1. Απαντήσεις $\left\{ (A) \frac{3}{5} : \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{1} = \frac{15}{5} = \frac{3}{1} \right\}, \left\{ (B) \frac{3}{5} : \frac{1}{5} = \frac{[3:1]}{[5:5]} = \frac{3}{1}, (Γ) \frac{3}{5} : \frac{1}{5} = \frac{3:1}{5:5} = \frac{3}{1} \right\}$ (Σωστό InvertOper &

IndepComp): Τα ποσοστά επιτυχίας εδώ είναι αρκετά υψηλά (35,3%, 51,7%,46%) σε σχέση με τα αναμενόμενα(βλ. πίνακα Π.Α.7 στο Παράρτημα). Το χαμηλότερο ποσοστό υπάρχει στη σειρά EnVisionMATH και το υψηλότερο στα Κυπριακά σχολικά βιβλία. Εκτός από τη σωστή στρατηγική (InvertOper, απάντηση (A)), το σωστό αποτέλεσμα δίνει και η στρατηγική (IndepComp, απάντηση (B)),κατά την οποία, διαιρείται ανεξάρτητα ο αριθμητής του ενός κλάσματος με τον αριθμητή του άλλου και ο παρονομαστής του ίδιου κλάσματος με τον παρονομαστή του άλλου. Ως αποτέλεσμα επιλέγεται το ακέραιο μέρος της διαίρεσης. Η συχνότητα χρήσης της κάθε στρατηγικής είναι η εξής (πίνακας Π.Α.8):

- EnVisionMATH: IndepComp (86,67%), InvertOper (13,33%).
- Ελληνικά σχολικά βιβλία: IndepComp (82,64%), InvertOper (17,36%).
- Σχολικά βιβλία της Κύπρου: IndepComp (91,63%), InvertOper (8,37%).

Επικρατεί, δηλαδή, η στρατηγική (IndepComp) και για τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων. Αν υπολογίσουμε τη συχνότητα χρήσης της λανθασμένης στρατηγικής IndepComp η οποία υπολογίζει το ακέραιο μέρος της διαίρεσης των αριθμητών και των παρονομαστών μεταξύ τους (περίπτωση (B)), τότε αυτή είναι 35,69% για το EnVisionMATH, 37,14% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 36,52% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου. Άρα, αν αφαιρέσουμε το ποσοστό αυτό από το σύνολο των σωστών λύσεων θα έχουμε ποσοστό επιτυχίας $(1 - 35,69\%)* 35,3 = 22,7\%$ για το EnVisionMATH, $(1 - 37,14\%) * 51,7 = 32,5\%$, για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και $(1 - 36,52\%)* 46 = 29,2\%$ και για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου. Το χαμηλό ποσοστό προβλημάτων διαίρεσης με ομώνυμα κλάσματα (2%) για τα σχολικά βιβλία της σειράς EnVisionMATH είναι η βασική αιτία του χαμηλού ποσοστού επιτυχίας. Βέβαια, αν και η Ελληνική σειρά και Κυπριακή έχουν χαμηλό ποσοστό προβλημάτων διαίρεσης με ομώνυμα κλάσματα (5% και 1% αντίστοιχα), η σειρά EnVisionMATH εμφανίζει επιπλέον και χαμηλό ποσοστό προβλημάτων διαίρεσης στα ετερόνυμα κλάσματα (17% έναντι 31% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 31% επίσης για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου).

2. Απάντηση $\left\{ \frac{3}{5} : \frac{1}{5} = \frac{3:1}{5} = \frac{3}{5} \right\}$ (Λάθος, OpNumKeepDen): Εδώ εφαρμόζεται λανθασμένα ο κανόνας της πρόσθεσης κλασμάτων στη διαίρεση κλασμάτων. Δηλαδή, διατηρείται ο κοινός παρονομαστής και ως αριθμητής στο τελικό κλάσμα τοποθετείται το αποτέλεσμα της διαίρεσης των δύο αριθμητών. Η συχνότητα του συγκεκριμένου λάθους είναι (πίνακας Π.Α.7) 50,5% για τη σειρά enVisionMATH, 24,1% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 36,5% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου.

3. Απαντήσεις $\left\{ (A) \frac{3}{5} : \frac{1}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \right\}, \left\{ (B) \frac{3}{5} : \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 5} = \frac{3}{25} \right\}$ (Λάθος, InvertOper): Σε αυτήν την υποπερίπτωση έχουμε λανθασμένη εκτέλεση του κανόνα της διαίρεσης κλασμάτων. Ειδικότερα, αντιστρέφεται ο διαιρέτος αντί του διαιρέτη (περίπτωση (A)) ή ενώ γίνεται σωστά η μετατροπή της πράξης από τη διαίρεση πολλαπλασιασμό, δεν αντιστρέφεται κάποιος όρος (περίπτωση (B)). Το συνολικό ποσοστό για το λάθος αυτό των μαθητών φαίνεται παρακάτω:

	enVisionMATH	Ελληνικά σχολικά βιβλία	Σχολικά βιβλία της Κύπρου
Περίπτωση A	5,5%	10,1%	5,4%
Περίπτωση B	8,7%	14,1%	12,1%
Σύνολο	14,2%	24,2%	17,5%

Παρατηρούμε ότι το πρόγραμμα δίνει αρκετά υψηλά ποσοστά για ένα είδος απάντησης που παρατηρείται συχνά στους μαθητές συχνά. Επίσης, η μη αντιστροφή του διαιρέτη φαίνεται σύμφωνα με την εκτέλεση του προγράμματος να είναι πιο συχνό λάθος (περίπτωση (B)) από τη μη αντιστροφή κάποιου όρου και για τις τρεις σειρές βιβλίων.

Δ2. Απαντήσεις στο πρόβλημα «4/5:3/5»

1. Απαντήσεις $\left\{ \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \right\}, \left\{ \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{1.33}{1} \right\}$ (Σωστό InvertOper & IndepComp): Το συνολικό ποσοστό επιτυχίας (με απλοποίηση ή όχι του τελικού αποτελέσματος) είναι $17\% + 1,9\% + 8,4\% = 27,3\%$ για τη σειρά enVisionMATH, $20,4\% + 6,5\% + 12,5\% = 39,4\%$ για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και $22\% + 3,2\% + 13\% = 38,2\%$ για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου. Βλέπουμε ότι και εδώ το ποσοστό είναι χαμηλότερο σε σχέση με το αμέσως προηγούμενο πρόβλημα. Αυτό οφείλεται στο ότι η λανθασμένη στρατηγική IndepComp η οποία εφαρμόστηκε στην περίπτωση 1 του προβλήματος Δ1 και υπολογίζει το ακέραιο μέρος της διαίρεσης των αριθμητών και των παρονομαστών, δεν δίνει εδώ σωστό αποτέλεσμα και άρα, δεν προσμετρήθηκε ως σωστή στην καταμέτρηση. Επομένως, τα ποσοστά επιτυχίας για τη διαίρεση κλασμάτων εδώ είναι εξαιρετικά χαμηλά.
2. Απαντήσεις $\left\{ (A) \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{[4 \cdot 3]}{5} = \frac{1}{5} \right\}, \left\{ (B) \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{1.33}{5} \right\}$ (Λάθος, OpNumKeepDen): Εδώ οι μαθητές βλέπουν ότι έχουν ομώνυμα κλάσματα και ακολουθούν τον κανόνα της πρόσθεσης. Έτσι, αφήνουν στο αποτέλεσμα ως παρονομαστή τον κοινό παρονομαστή και ως αριθμητή το πηλίκο των αριθμητών. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις ανάλογα με το εάν διαιρώντας τους δύο αριθμητές βρίσκουν το δεκαδικό αποτέλεσμα (περίπτωση (A)) ή το ακέραιο μέρος αυτού (περίπτωση (B)). Το συνολικό ποσοστό και για τις δύο περιπτώσεις είναι $26\% + 26\% = 52\%$ για τη σειρά enVisionMATH, $12,4\% + 11,3\% = 25,7\%$ για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και $16,2\% + 15,6\% = 31,8\%$ για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου. Τα ποσοστά είναι όμοια μεταξύ τους για τις δύο περιπτώσεις. Εντύπωση προκαλεί το πολύ μεγάλο ποσοστό λάθους (52%) για τη σειρά enVisionMATH.
3. Απάντηση $\left\{ \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{[4 \cdot 3]}{5 \cdot 5} = \frac{1}{1} \right\}$ (Λάθος, IndepComp).

4. Απαντήσεις $\left\{\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}\right\}, \left\{\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25}\right\}$ (Λάθος, InvertOper).

Δ3. Απαντήσεις στο πρόβλημα «2/3:3/5»

1. Απαντήσεις $\left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{9}\right\}, \left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{0.66}{0.6}\right\}$ (Σωστό, InvertOper & IndepComp).

2. Απαντήσεις $\left\{(A1) \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} \cdot \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{15} = \frac{[10 \cdot 9]}{15} = \frac{1}{15}\right\}, \left\{(A2) \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{3}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{15} = \frac{[2 \cdot 3]}{15} = \frac{0}{15}\right\},$

$$\left\{(A3) \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{3}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{15} = \frac{3 \cdot 2}{15} = \frac{1.5}{15}\right\}, \left\{(A4) \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{3}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{15} = \frac{2 \cdot 3}{15} = \frac{0.6}{15}\right\},$$

$$\left\{(A5) \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} \cdot \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{15} = \frac{10 \cdot 9}{15} = \frac{1.1}{15}\right\}. \text{ (Λάθος, OpNumKeepDen): Η απάντηση περιλαμβάνει όλες τις}$$

περιπτώσεις της λανθασμένης εφαρμογής του κανόνα της πρόσθεσης στη διαίρεση κλασμάτων. Αρχικά, τα κλάσματα μετατρέπονται σε ομώνυμα. Όμως, στις περισσότερες περιπτώσεις (A2, A3, A4), ο αριθμητής δεν πολλαπλασιάζεται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών. Σε ορισμένες περιπτώσεις λαμβάνεται το ακέραιο μέρος της διαίρεσης των αριθμητών (A1, A2), ενώ στην περίπτωση A3 αλλάζει η σειρά διαίρεσης των αριθμητών. Οι περιπτώσεις A1, A5 κατά τις οποίες γίνεται σωστά η μετατροπή σε ομώνυμα κλάσματα έχουν αθροιστικά συχνότητα 15,2% + 11,2% = 26,4% (σειρά enVisionMATH), 9,3% + 9,1% = 18,4% (Ελληνικά σχολικά βιβλία) και 14,9% + 11,8% = 26,7% (σχολικά βιβλία της Κύπρου). Τα ποσοστά αυτά είναι αρκετά υψηλά ποσοστά και αντιστοιχούν σε ένα συχνό λάθος των μαθητών στη σχολική πραγματικότητα. Οι υπόλοιπες απαντήσεις (A2, A3, A4) συγκεντρώνουν χαμηλά ποσοστά (2,1% + 1,9% + 1,5% = 5,5% για τη σειρά enVisionMATH, 2,1% + 1,8% + 1,1% = 5% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 2,2% + 2% + 1,9% = 6,1% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου). Η συνολική συχνότητα για όλες τις απαντήσεις είναι 26,4% + 5,5% = 31,9% για τη σειρά enVisionMATH, 18,4% + 5% = 23,4% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 26,7% + 6,1% = 32,8% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου.

3. Απαντήσεις $\left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{[3 \cdot 2]}{5 \cdot 3} = \frac{1}{1.6}\right\}, \left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{[3 \cdot 2]}{3 \cdot 5} = \frac{1}{0.6}\right\}, \left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{[3 \cdot 5]} = \frac{1.5}{0}\right\}, \left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{1.5}{1.6}\right\}, \left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{[2 \cdot 3]}{[5 \cdot 3]} = \frac{0}{1}\right\},$

$$\left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{[3 \cdot 2]}{[5 \cdot 3]} = \frac{1}{1}\right\}, \left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{[5 \cdot 3]} = \frac{1.5}{1}\right\}, \left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{[3 \cdot 5]} = \frac{0.6}{0}\right\}, \left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{[3 \cdot 2]}{[3 \cdot 5]} = \frac{1}{0}\right\}, \left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{[2 \cdot 3]}{3 \cdot 5} = \frac{0}{0.6}\right\}$$

$$\left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{[5 \cdot 3]} = \frac{0.6}{1}\right\}, \left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{0.6}{1.6}\right\}, \left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{[2 \cdot 3]}{[5 \cdot 3]} = \frac{0}{0}\right\}, \left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{[2 \cdot 3]}{5 \cdot 3} = \frac{0}{1.6}\right\}, \left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{1.5}{0.6}\right\} \text{ (Λάθος,}$$

IndepComp): Σε αυτή την υποπερίπτωση υπάρχουν 16 παραλλαγές της στρατηγικής κατά την οποία διαιρούνται ανεξάρτητα οι αριθμητές μεταξύ τους και οι παρονομαστές μεταξύ τους. Αν αθροίσουμε όλες τις συχνότητες έχουμε 24,7% για τη σειρά enVisionMATH, 26,4% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 24,2% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου που είναι ένα αρκετά μεγάλο νούμερο και προβλέπει ορθά την πραγματική επίδοση των μαθητών. Δηλαδή, τουλάχιστον ένας στους τέσσερις μαθητές χρησιμοποιεί αυτή τη λανθασμένη στρατηγική.

4. Απαντήσεις $\left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{10}\right\}, \left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}\right\}$ (Λάθος, InvertOper).

Γενικά παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση το λογισμικό δίνει 4 τουλάχιστον απαντήσεις με ποσοστό τουλάχιστον 2% για όλα τα προβλήματα. Εξαιρέση αποτελούν τα προβλήματα «4/5 + 3/5» και «3/5 - 1/5» της σειράς EnVisionMATH.

8.3.4 Χρήση ποικίλων στρατηγικών από κάθε μαθητή ατομικά.

Όπως αναφέρουν οι Braithwaite et al. (2017), η έρευνα για την επίδοση των μαθητών στην αριθμητική των κλασμάτων δείχνει ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν μια ποικιλία διαφορετικών (σωστών ή όχι) στρατηγικών για την αντιμετώπιση των προβλημάτων στα κλάσματα ακόμα και όταν αυτά έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά. Προκειμένου να εξετάσουμε αν το λογισμικό δείχνει αυτή την συμπεριφορά, υπολογίσαμε το ποσοστό των μαθητών οι οποίοι χρησιμοποιούν διαφορετική στρατηγική επίλυσης για δύο προβλήματα με τα ίδια χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα, αν κάποιος μαθητής εφαρμόζει διαφορετική στρατηγική στα προβλήματα $3/5 + 1/5$ και $4/5 + 3/5$, τα οποία έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά, τότε θεωρούμε ότι αυτός χρησιμοποιεί διαφορετική στρατηγική. Τα αποτελέσματα συγκεντρώνονται στον πίνακα Β.5. Στις πρώτες τέσσερις στήλες από αριστερά (προβλήματα πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης) σημειώνουμε το ποσοστό των μαθητών οι οποίοι δίνουν διαφορετικές απαντήσεις σε ένα τουλάχιστον από τα δύο ζευγάρια προβλημάτων με την συγκεκριμένη πράξη. Στη στήλη «Όλα τα προβλήματα» φαίνεται το ποσοστό των μαθητών οι οποίοι εφαρμόζουν διαφορετικές στρατηγικές σε ένα τουλάχιστον από τα 8 ζευγάρια προβλημάτων με τα ίδια χαρακτηριστικά, δηλαδή, ίδια πράξη και ίδιο είδος παρονομαστών (ίσοι ή όχι). Ως προς το συνολικό αριθμό των προβλημάτων, σχεδόν όλοι οι μαθητές (σε ποσοστό μεγαλύτερο του 99% και για τις τρεις σειρές βιβλίων) εφαρμόζουν διαφορετικές στρατηγικές σε τουλάχιστον ένα ζευγάρι προβλημάτων.

Πίνακας Β.5: Ποσοστό μαθητών οι οποίοι χρησιμοποιούν διαφορετικές στρατηγικές σε προβλήματα με τα ίδια χαρακτηριστικά.

	Προβλήματα πρόσθεσης	Προβλήματα αφαίρεσης	Προβλήματα πολλαπλασιασμού	Προβλήματα διαίρεσης	Όλα τα προβλήματα
	{ $3/5 + 1/5$, $4/5 + 3/5$ }	{ $3/5 - 1/5$, $4/5 - 3/5$ }	{ $3/5 * 1/5$, $4/5 * 3/5$ }	{ $3/5 : 1/5$, $4/5 : 3/5$ }	
	{ $2/3 + 3/5$, $3/5 + 1/4$ }	{ $2/3 - 3/5$, $3/5 - 1/4$ }	{ $2/3 * 3/5$, $3/5 * 1/4$ }	{ $2/3 : 3/5$, $3/5 : 1/4$ }	
enVisionMATH (ΗΠΑ)	69,30%	70,10%	82,50%	83,20%	99,40%
Ελληνικά σχολικά βιβλία	85,90%	88,00%	84,20%	86,30%	100,00%
Σχολικά βιβλία της Κύπρου	74,60%	77,60%	85,20%	85,20%	99,80%

Στο σύνολο των προβλημάτων, μεγαλύτερη μεταβλητότητα στη επιλογή της στρατηγικής παρουσιάζουν οι μαθητές που χρησιμοποιούν τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και μικρότερη μεταβλητότητα οι μαθητές της σειράς EnVisionMATH. Το ίδιο συμπέρασμα ισχύει για τις όλες τις πράξεις εκτός του πολλαπλασιασμού κατά τον οποίο την μικρότερη μεταβλητότητα στις απαντήσεις παρουσιάζει η σειρά EnVisionMATH και τη μεγαλύτερη τα Κυπριακά σχολικά βιβλία.

8.3.5 Μεγαλύτερη συχνότητα των λαθών στρατηγικής από τα λάθη εκτέλεσης

Ένα άλλο συμπέρασμα από την εργασία των Braithwaite et al. (2017) είναι ότι τα λάθη τα οποία προκύπτουν από την εφαρμογή μιας λανθασμένης στρατηγικής είναι περισσότερα από τα λάθη τα οποία οφείλονται στην λανθασμένη εκτέλεση μιας σωστής στρατηγικής. Στον πίνακα Β.6 φαίνονται τα ποσοστά των λαθών στρατηγικής και των λαθών εκτέλεσης ανά πράξη και ανά σειρά σχολικών βιβλίων. Για παράδειγμα, για τα προβλήματα τα οποία έχουν ως πράξη την πρόσθεση ή την αφαίρεση, σωστή είναι η εφαρμογή μιας στρατηγικής με βάση τον κανόνα της πρόσθεσης κλασμάτων. Για τη στήλη «Πρόσθεση / Αφαίρεση», το λάθος από έναν υποθετικό μαθητή του λογισμικού FARRA δύναται να προκύψουν είτε ως λάθος εκτέλεσης (ποσοστό 5,44%), είτε ως λάθος υπεργενίκευσης της του κανόνα του πολλαπλασιασμού (17,8%) ή του κανόνα της διαίρεσης/«χιαστί πολλαπλασιασμού» (13,96%) στα προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης.

Πίνακας Β.6: Ποσοστό χρήσης κάθε είδους λάθους στρατηγικής σε σχέση με το συνολικό αριθμό των απαντήσεων (είτε σωστές είτε λάθος).

	Απαντήσεις enVisionMATH (ΗΠΑ)			Απαντήσεις Ελληνικά σχολικά βιβλία			Απαντήσεις Σχολικά βιβλία της Κύπρου		
	Πρόσθεση/Αφαίρεση	Πολλαπλασιασμός	Διαίρεση	Πρόσθεση/Αφαίρεση	Πολλαπλασιασμός	Διαίρεση	Πρόσθεση/Αφαίρεση	Πολλαπλασιασμός	Διαίρεση
Λάθος εκτέλεσης	5,44%	0%	16,28%	6,38%	0%	24,30%	5,69%	0%	17,53%
Λάθη στρατηγικής	31,76%	49,53%	52,88%	49,89%	45,33%	36,63%	36,84%	45,33%	45,63%
• Στρατηγική πρόσθεσης/αφαίρεσης	-	29,83%	41,13%	-	15,68%	24%	-	23,38%	33,58%
• Στρατηγική πολλαπλασιασμού	17,8%	-	11,75%	26,08%	-	12,63%	21,14%	-	12,05%
• Στρατηγική διαίρεσης/«χιαστί» πολλαπλασιασμού	13,96%	19,70%	-	23,81%	29,65%	-	15,70%	21,95%	-

Το ποσοστό της γραμμής «Λάθη στρατηγικής» προκύπτει από τον άθροισμα των δύο ειδών λαθών στρατηγικής (στρατηγική πολλαπλασιασμού, στρατηγική διαίρεσης/«χιαστί» πολλαπλασιασμού).

Παρατηρούμε ότι και στις τρεις σειρές βιβλίων τα λάθη εκτέλεσης είναι λιγότερα από τα λάθη στρατηγικής. Αυξημένο εμφανίζεται το ποσοστό των λαθών εκτέλεσης για τη διαίρεση κλασμάτων και στις τρεις σειρές.

8.3.6 Τα πιο κοινά λάθη στρατηγικής είναι η εφαρμογή ενός κανόνα κατάλληλου για διαφορετική πράξη και η αντιμετώπιση των όρων των κλασμάτων ως ανεξάρτητες ποσότητες.

Οι λάθος στρατηγικές τις οποίες χρησιμοποιούνται από το λογισμικό FARRA εντάσσονται όπως έχουμε ήδη αναφέρει στις παρακάτω τρεις κατηγορίες (βλ. σελ. 25):

1. Της λάθους εφαρμογής ενός κανόνα ο οποίος είναι κατάλληλος για άλλη πράξη (**λάθος υπεργενίκευσης**).
2. Του χειρισμού των παρονομαστών και των αριθμητών των κλασμάτων ως ανεξάρτητων ποσοτήτων (**λάθος δράσης στους όρους των κλασμάτων ανεξάρτητα**).
3. Της εφαρμογής του κανόνα του «χιαστί» πολλαπλασιασμού κλασμάτων.

Στον πίνακα B.7 φαίνεται για κάθε σειρά σχολικών βιβλίων το ποσοστό των παραπάνω λαθεμένων στρατηγικών από το FARRA στο σύνολο των προβλημάτων. Παρατηρούμε ότι και στις τρεις περιπτώσεις, σχεδόν όλα τα λάθη στρατηγικής (94,15% για τη σειρά enVisionMATH, 92,09% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 93,43% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου) εντάσσονται στις παραπάνω περιπτώσεις 1 και 2. Η στρατηγική της περίπτωσης 3 διατηρείται σε χαμηλό ποσοστό (5,84% για τη σειρά enVisionMATH, 7,9% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 6,57% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου).

Επιπλέον, με τη βοήθεια του πίνακα B.6 μπορούμε να δούμε ποια λανθασμένη ομάδα στρατηγικών από τις πρώτες δύο εφαρμόζεται πιο συχνά αναλόγως με τη σειρά σχολικών βιβλίων και την πράξη. Σχολιάζουμε κάθε σειρά σχολικών βιβλίων ξεχωριστά:

- **EnVisionMATH:**

- ✓ **Προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης:** Βλέπουμε (πίνακας B.6) ότι η στρατηγική του πολλαπλασιασμού εφαρμόζεται λανθασμένα στο 17,8% των προβλημάτων και η στρατηγική της διαίρεσης στο 13,96% των προβλημάτων.
- ✓ **Προβλήματα πολλαπλασιασμού:** Παρατηρούμε ότι εφαρμόζεται λανθασμένα η στρατηγική της πρόσθεσης/αφαίρεσης στο 29,83% των προβλημάτων και η στρατηγική της διαίρεσης στο 19,70% των προβλημάτων.
- ✓ **Προβλήματα διαίρεσης:** Εδώ εφαρμόζεται λανθασμένα η στρατηγική της πρόσθεσης/αφαίρεσης στο 41,13% των προβλημάτων, και η στρατηγική του πολλαπλασιασμού στο 11,75% των προβλημάτων.

Πίνακας Β.7: Ποσοστά των λανθασμένων στρατηγικών στον σύνολο των λανθασμένων στρατηγικών οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν από το πρόγραμμα FARRA για τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων (enVisionMATH (ΗΠΑ), Ελληνικά σχολικά βιβλία, σχολικά βιβλία της Κύπρου).

	Απαντήσεις enVisionMATH (ΗΠΑ)	Απαντήσεις Ελληνικά σχολικά βιβλία	Απαντήσεις Σχολικά βιβλία της Κύπρου
Λάθος υπεργενίκευσης	63,38%	54,35%	57,31%
Λάθος δράσης στους όρους των κλασμάτων ανεξάρτητα.	30,77%	37,74%	36,12%
Σύνολο	94,15%	92,09%	93,43%
Πολλαπλασιασμός «Χιαστί» ενώ έχουμε διαίρεση κλασμάτων.	5,84%	7,90%	6,57%

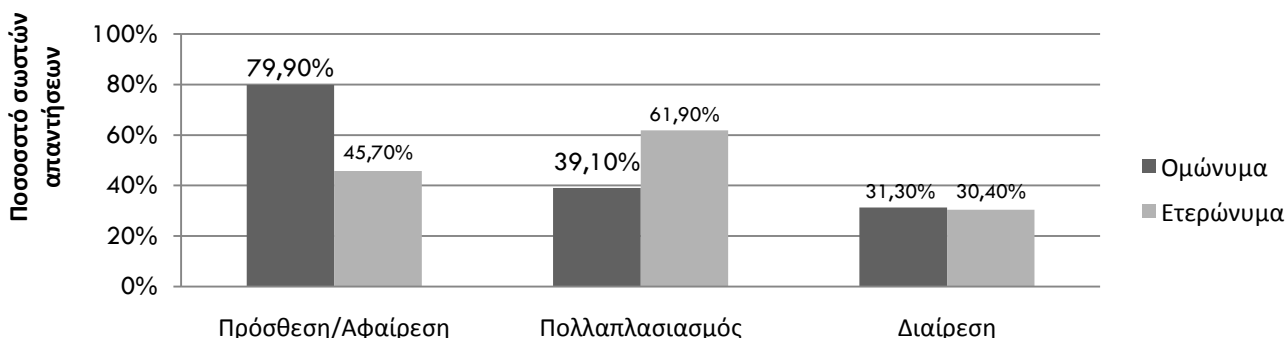
Οι Braithwaite et al. (2017) παρατηρούν ότι οι μαθητές του λογισμικού FARRA εφαρμόζουν πιο συχνά τη λάθος στρατηγική της πρόσθεσης/αφαίρεσης στον πολλαπλασιασμό (ποσοστό 29,83%) και τη διαίρεση (ποσοστό 41,13%) κλασμάτων απ' ό,τι τις λάθος στρατηγικές του πολλαπλασιασμού (ποσοστό 17,8%) και της διαίρεσης (ποσοστό 13,96%) στη πρόσθεση/αφαίρεση κλασμάτων. Το ίδιο φαινόμενο αλλά με μικρότερη ένταση παρατηρούμε ότι ισχύει για τα Κυπριακά σχολικά βιβλία. Στην περίπτωση των Ελληνικών σχολικών βιβλίων ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή, η στρατηγική της πρόσθεσης/αφαίρεσης εφαρμόζεται λιγότερο συχνά στον πολλαπλασιασμό (ποσοστό 15,68%) κλασμάτων από ότι η στρατηγική του πολλαπλασιασμού (ποσοστό 26,08%) στην πρόσθεση /αφαίρεση κλασμάτων. Τέλος, επισημαίνουμε ότι η στρατηγική του πολλαπλασιασμού εφαρμόζεται λανθασμένα περισσότερο συχνά σε προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης παρά σε προβλήματα διαίρεσης και στις τρεις σειρές των σχολικών βιβλίων.

8.3.7 Τα ποσοστά επιτυχίας στα προβλήματα με ομώνυμα κλάσματα αυξάνονται σε προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης αλλά μειώνονται σε προβλήματα πολλαπλασιασμού.

Στα γραφήματα Β2.1, Β2.2, Β2.3 φαίνονται τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών του λογισμικού FARRA για τις πράξεις πρόσθεση/αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση ξεχωριστά για τα προβλήματα με ομώνυμα και ετερόνυμα κλάσματα. Όπως έχει διαπιστωθεί από τους Braithwaite et al. (2017), για τα προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης το λογισμικό δίνει υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας στα ομώνυμα κλάσματα, ενώ για τα προβλήματα πολλαπλασιασμού, τα υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας σημειώνονται στα ετερόνυμα κλάσματα (βλ. γράφημα Β.2.1). Το ίδιο μοτίβο παρατηρείται και στις δύο άλλες σειρές σχολικών βιβλίων (Ελλάδας και Κύπρου). Βέβαια, οι διαφορές εδώ είναι μικρότερες σε σχέση με τη σειρά EnVisionMATH. Συγκεκριμένα, ενώ για την πρόσθεση/αφαίρεση στη σειρά EnVisionMATH η διαφορά στα ποσοστά επιτυχίας μεταξύ ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων είναι $79,9\% - 45,7\% = 34,20\%$, για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία η διαφορά είναι $49,9\% -$

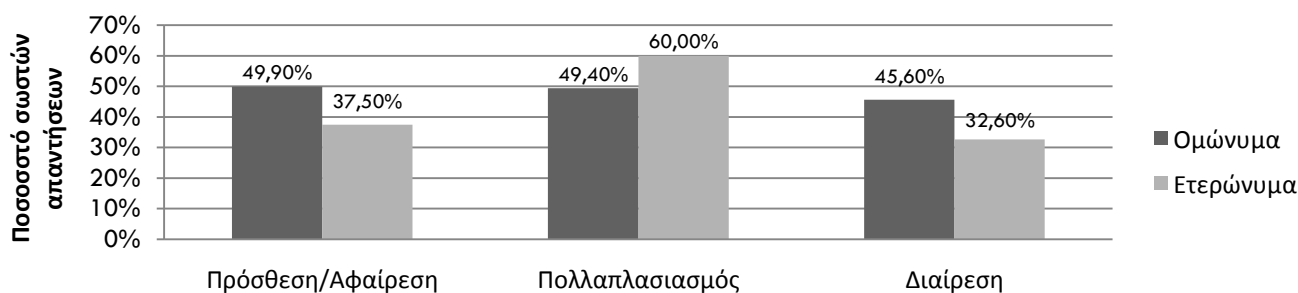
37,5% = 12,40% και για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου είναι 67,5% - 47,4% = 20,10%. Για τον πολλαπλασιασμό, οι διαφορές είναι 61,9% - 39,1% = 22,8% για τη σειρά enVisionMATH, 60% - 49,4% = 10,6% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 60,2% - 49,2% = 11% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου.

EnVisionMATH (ΗΠΑ)



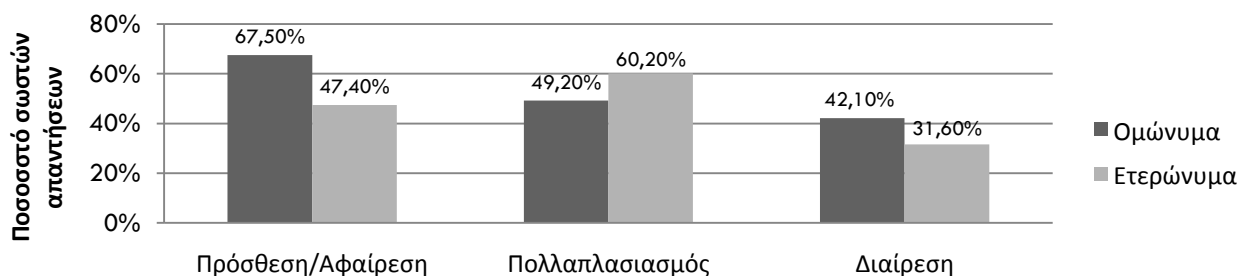
Γράφημα Β.2.1: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τη σειρά σχολικών βιβλίων EnvisionMATH (ΗΠΑ) για κάθε πράξη στα ομώνυμα και ετερόνυμα κλάσματα.

Ελληνικά σχολικά βιβλία



Γράφημα Β.2.2: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τη σειρά των Ελληνικών σχολικών βιβλίων για κάθε πράξη στα ομώνυμα και ετερόνυμα κλάσματα.

Σχολικά βιβλία της Κύπρου



Γράφημα Β.2.3: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τη σειρά των σχολικών βιβλίων της Κύπρου για κάθε πράξη στα ομώνυμα και ετερόνυμα κλάσματα.

Αναφορικά με τη διαίρεση κλασμάτων παρατηρείται το αντίστροφο φαινόμενο σε σχέση με τον πολλαπλασιασμό. Τα ποσοστά επιτυχίας στα ομώνυμα κλάσματα είναι μεγαλύτερα σε σχέση με τα προβλήματα με ετερόνυμα κλάσματα. Το φαινόμενο αυτό προκαλεί εντύπωση εξαιτίας του χαμηλού ποσοστού προβλημάτων διαίρεσης με ομώνυμα κλάσματα και για τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων. Μια εξήγηση για αυτό είναι σύμφωνα με τους Braithwaite et al. (2017) ότι ένα από τα δύο προβλήματα διαίρεσης με ομώνυμα κλάσματα είναι το $3/5:1/5$ στο οποίο ένα πολύ μεγάλο ποσοστό μαθητών (35,69% για το EnVisionMATH, 37,14% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 36,52% για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου) εφαρμόζει τη μη σωστή στρατηγική της διαίρεσης των αριθμητών μεταξύ τους και των παρονομαστών μεταξύ τους και θεωρεί ως αποτέλεσμα το ακέραιο μέρος της διαίρεσης, η οποία όμως δίνει τυχαία το σωστό αποτέλεσμα. Το φαινόμενο αυτό όπως αναφέρουν οι Braithwaite et al. (2017), επαληθεύει και η εμπειρική έρευνα στην οποία βασίζονται για να συγκρίνουν τα αποτελέσματα της προσομοίωσης. Τέλος, παρατηρούμε ότι οι διαφορές στα ποσοστά επιτυχίας μεταξύ ομώνυμων και ετερονύμων κλασμάτων είναι $31,3\% - 30,4\% = 0,9\%$ για τη σειρά enVisionMATH, $45,6\% - 32,6\% = 13\%$ για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και $42,1\% - 31,6\% = 10,5\%$ για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου. Δηλαδή, τα ποσοστά επιτυχίας στη διαίρεση ομώνυμων κλασμάτων για τα Ελληνικά και Κυπριακά σχολικά βιβλία είναι αρκετά υψηλότερα σε σχέση με τα ποσοστά επιτυχίας στα προβλήματα διαίρεσης με ετερόνυμα κλάσματα. Για τη σειρά EnVisionMATH όμως, είναι σχεδόν ίσα.

8.3.8 Το είδος λάθους με τη μεγαλύτερη συχνότητα σε κάθε πράξη ποικίλει ανάλογα με την ισότητα ή μη των παρονομαστών.

Στον πίνακα Β.8 υπάρχουν τα ποσοστά των διαφορετικών ειδών λαθών των υποθετικών μαθητών της προσομοίωσης για κάθε πράξη ξεχωριστά, τόσο για τα προβλήματα με ομώνυμα κλάσματα, όσο και για αυτά με ετερόνυμα κλάσματα. Παρατηρώντας τα ποσοστά της λάθος εφαρμογής της στρατηγικής πρόσθεσης/αφαίρεσης στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, προκύπτει ότι οι μαθητές εφαρμόζουν πιο συχνά αυτή τη λανθασμένη στρατηγική γενίκευσης της πρόσθεσης/αφαίρεσης στα ομώνυμα κλάσματα παρά στα ετερόνυμα και για τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων. Αναφορικά με την εφαρμογή της λανθασμένης στρατηγικής του πολλαπλασιασμού σε προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης κλασμάτων, τα ποσοστά του πίνακα Β.8 δείχνουν ότι η λανθασμένη αυτή στρατηγική έχει προτίμηση στα ετερόνυμα κλάσματα για τη σειρά EnVisionMATH και για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου. Για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία, η λανθασμένη στρατηγική του πολλαπλασιασμού εφαρμόζεται εξίσου τόσο στα προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης με ομώνυμα κλάσματα (26,08%), όσο και σε αυτά τα προβλήματα με ετερόνυμα κλάσματα (26,08%).

8.3.9 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα

Στους πίνακες Β.9 και Β.10 συνοψίζονται τα συμπεράσματα της σύγκρισης των τριών σειρών σχολικών βιβλίων τόσο όσον αφορά τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων τα οποία περιέχουν (πίνακας Β.9), όσο και τα φαινόμενα τα οποία παράγει το λογισμικό FARRA. Ο συμβολισμός « $A > B$ » σημαίνει ότι το φαινόμενο Α συμβαίνει πιο συχνά από το φαινόμενο Β. Ο συμβολισμός « $(/)\rightarrow(*)$ » σημαίνει για παράδειγμα, ότι η διαίρεση υπεργενικεύεται στον πολλαπλασιασμό. Τέλος, ο συμβολισμός « $(+,-)\rightarrow(/) > (+,-)\rightarrow(*)$ » σημαίνει ότι η πρόσθεση και η αφαίρεση

Πίνακας Β.8: Ποσοστά χρήσης κάθε είδους λανθασμένης στρατηγικής σε σχέση με την πράξη και το είδος των παρονομαστών.

	EnVisionMATH (ΗΠΑ)					
	Πρόσθεση/Αφαίρεση		Πολλαπλασιασμός		Διαίρεση	
	Ομώνυμα	Ετερώνυμα	Ομώνυμα	Ετερώνυμα	Ομώνυμα	Ετερώνυμα
Λάθος εκτέλεσης	0%	10,88%	0%	0%	13,95%	18,6%
Λάθος στρατηγικής	20,10%	43,43%	60,9%	38,15%	54,75%	51%
Στρατηγική πρόσθεσης/αφαίρεσης	--	--	41,7%	17,95%	51,25%	31,00%
Στρατηγική πολλαπλασιασμού	10,40%	25,20%	--	--	3,5%	20%
Στρατηγική διαίρεσης/«Χιαστί» πολλαπλασιασμού	9,70%	18,23%	19,20%	20,20%	--	--
	Ελληνικά σχολικά βιβλία					
Λάθος εκτέλεσης	0%	12,75%	0%	0%	24,90%	23,7%
Λάθος στρατηγικής	50,05%	49,73%	50,60%	40,05%	29,55%	43,7%
Στρατηγική πρόσθεσης/αφαίρεσης	--	--	18,60%	12,75%	23,9%	24,1%
Στρατηγική πολλαπλασιασμού	26,08%	26,08%	--	--	5,65%	19,6%
Στρατηγική διαίρεσης/«Χιαστί» πολλαπλασιασμού	23,98%	23,65%	32,00%	27,30%	--	--
	Σχολικά βιβλία της Κύπρου					
Λάθος εκτέλεσης	0%	11,38%	0%	0%	18,4%	16,65%
Λάθος στρατηγικής	32,48%	41,20%	50,80%	39,85%	39,5%	51,75%
Στρατηγική πρόσθεσης/αφαίρεσης	--	--	27,70%	19,05%	34,15%	33%
Στρατηγική πολλαπλασιασμού	18,08%	24,20%	--	--	5,35%	18,75%
Στρατηγική διαίρεσης/«Χιαστί» πολλαπλασιασμού	14,40%	17,00%	23,10%	20,80%	--	--

υπεργενικεύονται πιο συχνά στη διαίρεση απ' ότι στον πολλαπλασιασμό. Οι τρεις σειρές σχολικών βιβλίων έχουν αρκετές ομοιότητες αλλά και ορισμένες διαφορές. Αυτές οι διαφορές δημιουργούν κάποιες αποκλίσεις στα αποτελέσματα της προσομοίωσης από τη μία σειρά βιβλίων στην άλλη. Για τη σειρά EnVisionMATH δε θα γίνει κάποιος σχολιασμός καθώς έχει γίνει εκτενής αναφορά στο στην ενότητα 5.3. Μια γενική παρατήρηση είναι ότι τόσο τα Ελληνικά όσο και τα Κυπριακά σχολικά βιβλία, όταν εισάγονται στο λογισμικό FARRA εμφανίζουν τα 8 φαινόμενα του πίνακα Α.1. Εξαίρεση αποτελεί το 8^ο φαινόμενο για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία. Δηλαδή, το λογισμικό όταν δέχεται ως εισροή τα προβλήματα των Ελληνικών σχολικών βιβλίων, δίνει ως πρόβλεψη ότι οι μαθητές εφαρμόζουν με την ίδια συχνότητα τη λανθασμένη στρατηγική του πολλαπλασιασμού στα προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης με ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα.

Μία βασική διαφορά στα σχολικά βιβλία τα οποία μελετήσαμε είναι ότι ενώ η διαίρεση είναι η πράξη με τη μικρότερη συχνότητα στη σειρά EnVisionMATH, το γεγονός αυτό δεν ισχύει για τις άλλες δύο σειρές (βλ. Πίνακας Β.9, σειρά 1). Επιπλέον, τα ποσοστά επιτυχίας στη διαίρεση ομωνύμων κλασμάτων για τη σειρά EnVisionMATH

είναι χαμηλότερα σε σχέση με τα αντίστοιχα ποσοστά των Ελληνικών και των Κυπριακών σχολικών βιβλίων (βλ. πίνακα Β.3). Αυτό πιθανόν να οφείλεται, εκτός από τους λόγους οι οποίοι αναφέρθηκαν στην ενότητα 8.3.2, και στο γεγονός ότι τα προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης με ομώνυμα κλάσματα για τις σειρές Ελλάδα και Κύπρου δεν είναι πολύ περισσότερα από τα προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης με ομώνυμα κλάσματα. Άμεση συνέπεια είναι να μην υπεργενικεύεται συχνά η στρατηγική της πρόσθεσης/αφαίρεσης στη διαίρεση ομώνυμων κλασμάτων όπως συμβαίνει στη σειρά EnVisionMATH. Βέβαια τα ποσοστά επιτυχίας και για τις τρεις σειρές στη διαίρεση κλασμάτων είναι τα χαμηλότερα σε σχέση με τις άλλες τρεις πράξεις.

Επιπλέον, το ποσοστό των προβλημάτων με ομώνυμα κλάσματα είναι πολύ χαμηλό για την Ελληνική και την Κυπριακή σειρά. Για την σειρά από τις ΗΠΑ αυτό ισχύει μόνο για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων. Για την Ελληνική σειρά, το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με τον μεγάλο αριθμό προβλημάτων πολλαπλασιασμού και με ετερόνυμα κλάσματα, αναγκάζει το λογισμικό FARRA να υπεργενικεύει σε μεγάλο βαθμό τον πολλαπλασιασμό στην πρόσθεση/αφαίρεση. Επιπρόσθετα, στην Ελληνική σειρά, τα προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης στα ομώνυμα κλάσματα είναι διάσπαρτα, ενώ ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση εισάγονται πολύ νωρίς. Άμεση συνέπεια των παραπάνω, όπως και του χαμηλού συνολικού αριθμού προβλημάτων, είναι τα ποσοστά επιτυχίας της Ελληνικής σειράς στην πρόσθεση/αφαίρεση τόσο για τα ομώνυμα όσο για τα ετερόνυμα κλάσματα να είναι εξαιρετικά χαμηλά. Στα σχολικά βιβλία της Κύπρου δεν παρατηρούνται τέτοια εξαιρετικά χαμηλά ποσοστά κυρίως γιατί προβλήματα στην πρόσθεση/αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων είναι περισσότερα και εισάγονται από την αρχή και σε μεγάλη πυκνότητα. Βέβαια, η σειρά των ΗΠΑ εμφανίζει τα υψηλότερα ποσοστά στην πρόσθεση/αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων γιατί διαθέτει ένα μεγάλο αριθμό προβλημάτων αυτής της κατηγορίας.

Τέλος, τα μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας της Ελληνικής και της Κυπριακής σειράς έναντι της σειράς EnVisionMATH είναι στον πολλαπλασιασμό ομώνυμων κλασμάτων. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο μεγαλύτερη συχνότητα προβλημάτων πολλαπλασιασμού σε αυτές τις σειρές. Επιπλέον, τα προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης με ομώνυμα κλάσματα δεν είναι πολύ περισσότερα σε σχέση με τα αντίστοιχα προβλήματα στον πολλαπλασιασμό όπως συμβαίνει πολύ έντονα στη σειρά EnVisionMATH.

Στο υπόλοιπο της παρούσας ενότητας διεξάγουμε κάποια επιπλέον πειράματα με τη βοήθεια του λογισμικού FARRA.

Πίνακας Β.9: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα με τις ιδιότητες των προβλημάτων των σχολικών βιβλίων στην αριθμητική των κλάσμάτων.

A/A	Ιδιότητες	enVisionMATH (ΗΠΑ)	Ελληνικά σχολικά βιβλία	Σχολικά βιβλία της Κύπρου
1	Η διαίρεση είναι η λιγότερο συχνή πράξη.	NAI	OXI Είναι η αφαίρεση	OXI Είναι η πρόσθεση
2	Ποιο συχνές πράξεις.	+, -	*, /	*, /
3	Περισσότερα προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης με ομώνυμα παρά ετερόνυμα κλάσματα.	NAI (+ ομώνυμα: 17%, + ετερόνυμα: 11%) (- ομώνυμα: 16%, - ετερόνυμα: 12%)	OXI (+ ομώνυμα: 8%, + ετερόνυμα: 17%) (- ομώνυμα: 3%, - ετερόνυμα: 10%)	OXI (+ ομώνυμα: 9%, ετερόνυμα: 10%) (+ ομώνυμα: 10%, ετερόνυμα: 12%)
4	Ποσοστό προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης με ομώνυμα κλάσματα $\leq 2\%$.	NAI	NAI για τη διαίρεση. ΣΧΕΔΟΝ NAI για τον πολλαπλασιασμό (ποσοστό 5%).	NAI
5	Τα προβλήματα πολλαπλασιασμού με ετερόνυμα κλάσματα είναι πολύ περισσότερα από αυτά με ομώνυμα κλάσματα	NAI (* ομώνυμα: 1%, + ετερόνυμα: 24%)	NAI (* ομώνυμα: 1%, + ετερόνυμα: 30%)	NAI (* ομώνυμα: 2%, + ετερόνυμα: 26%)
6	Η μεγάλη πλειοψηφία των προβλημάτων με ομώνυμα κλάσματα περιλαμβάνει την πρόσθεση και την αφαίρεση.	NAI (+, - ποσοστό 33%) (* , : ποσοστό 3%)	ΣΧΕΔΟΝ NAI (+, - ποσοστό 11%) (* , : ποσοστό 6%)	ΣΧΕΔΟΝ NAI (+, - ποσοστό 19%) (* , : ποσοστό 3%)
7	Για τα προβλήματα με ετερόνυμα κλάσματα, τα περισσότερα περιλαμβάνουν πολλαπλασιασμό και διαίρεση.	NAI (+ < - < / < *) (Ποσοστά 11% - 12% - 17% - 24% αντίστοιχα)	NAI (- < + < / < *) (Ποσοστά 10% - 17% - 26% - 30% αντίστοιχα)	NAI (+ < - < * < /) (Ποσοστά 10% - 12% - 26% - 30% αντίστοιχα)
8	Εξαιρετικά χαμηλό ποσοστό πρόσθεσης και αφαίρεσης στα προβλήματα με παράγοντα φυσικό αριθμό.	NAI (+: ποσοστό 0%) (-: ποσοστό 1%)	NAI (+: ποσοστό 6%) (-: ποσοστό 2%)	NAI (+: ποσοστό 0%) (-: ποσοστό 4%)
9	Η μεγάλη πλειοψηφία των προβλημάτων με παράγοντα φυσικό αριθμό περιλαμβάνει τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση.	NAI (*: ποσοστό 14%) (/: ποσοστό 11%)	NAI (*: ποσοστό 16%) (/: ποσοστό 12%)	NAI (*: ποσοστό 13%) (/: ποσοστό 16%)
10	Στα προβλήματα με παράγοντες μόνο κλάσματα και μεικτούς πλειοψηφούν η πρόσθεση και η αφαίρεση.	NAI (/ < * < - < +) (Ποσοστά 7% - 10% - 27% - 28% αντίστοιχα)	OXI (- < * < + < /) (Ποσοστά 11% - 15% - 18% - 20% αντίστοιχα)	NAI (/ < * < + = -) (Ποσοστά 14% - 15% - 19% - 19% αντίστοιχα)

8.4 Συσχέτιση μεταξύ του είδους των παραγόντων των προβλημάτων (φυσικοί αριθμοί, κλάσματα, μεικτοί) και την επιλογή της σωστής στρατηγικής.

Οι Braithwaite et al. (2017) σημειώνουν ότι «σε όλες τις σειρές των σχολικών βιβλίων τις οποίες μελετάμε, τα προβλήματα τα οποία αποτελούνται από μόνο κλάσματα ή μεικτούς αριθμούς, σχεδόν πάντα, περιελάμβαναν την πρόσθεση ή την αφαίρεση, ενώ τα προβλήματα με τον ένα παράγοντα φυσικό αριθμό και τον άλλο κλάσμα ή μεικτό αριθμό, συνήθως περιελάμβαναν τον πολλαπλασιασμό». Επιπλέον, προβλέπουν ότι «το λογισμικό FARRA θα

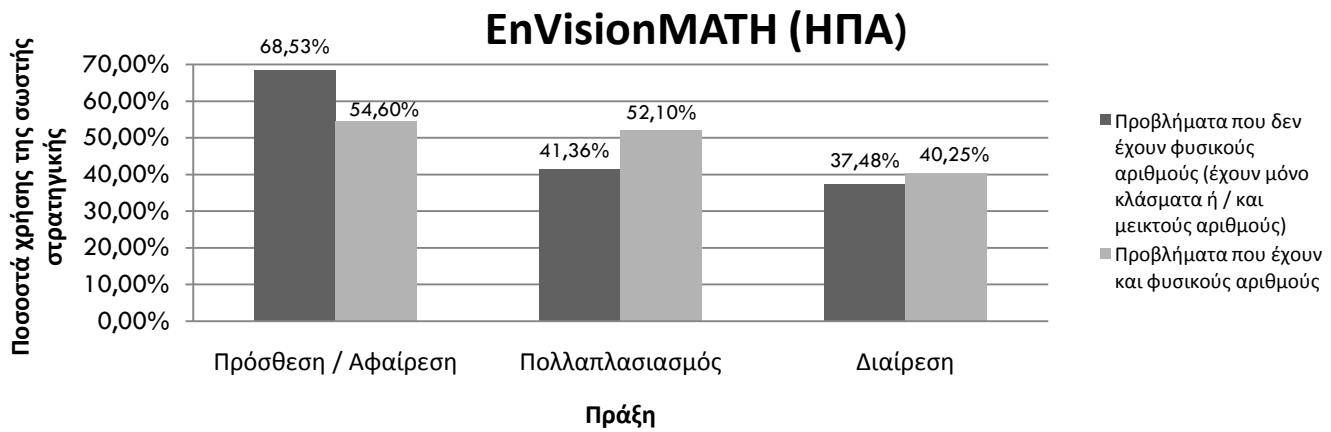
Πίνακας Β.10: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα από το πρόγραμμαFARRA.

A/A	Προβλέψεις	enVisionMATH (ΗΠΑ)	Ελληνικά σχολικά βιβλία	Σχολικά βιβλία της Κύπρου
1	Χαμηλή επίδοση συνολικά	ΝΑΙ 51,7%	ΝΑΙ 45,3%	ΝΑΙ 51,6%
2	Εξαιρετικά χαμηλή επίδοση στα προβλήματα διαίρεσης κλασμάτων.	ΝΑΙ 30,8%	ΣΧΕΔΟΝ ΝΑΙ 39,1%	ΣΧΕΔΟΝ ΝΑΙ 36,8%
3	Μεταβλητότητα στις απαντήσεις σε συγκεκριμένα προβλήματα	ΝΑΙ (Εκτός από τα προβλήματα 4/5+3/5 και 3/5-1/5)	ΝΑΙ	ΝΑΙ
4	Χρήση ποικίλων στρατηγικών από κάθε μαθητή ατομικά.	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
5	Μεγαλύτερη συχνότητα των λαθών στρατηγικής από τα λάθη εκτέλεσης	ΝΑΙ 93%	ΝΑΙ 92%	ΝΑΙ 93%
6	Τα πιο κοινά λάθη στρατηγικής είναι η εφαρμογή ενός κανόνα κατάλληλου για διαφορετική πράξη και η αντιμετώπιση των όρων των κλασμάτων ως ανεξάρτητες ποσότητες.	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
7	Τα ποσοστά επιτυχίας στα προβλήματα με ομώνυμα κλάσματα αυξάνονται σε προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης αλλά μειώνονται σε προβλήματα πολλαπλασιασμού.	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
8	Το πιο συχνό είδος λάθους σε κάθε πράξη ποικίλει ανάλογα με την ισότητα ή μη των παρονομαστών.	(+,-)→(*) (Ομώνυμα > Ετερόνυμα) (*)→(+,-) (Ομώνυμα < Ετερόνυμα)	(+,-)→(*) (Ομώνυμα > Ετερόνυμα) (*)→(+,-) (Ομώνυμα = Ετερόνυμα)	(+,-)→(*) (Ομώνυμα > Ετερόνυμα) (*)→(+,-) (Ομώνυμα < Ετερόνυμα)

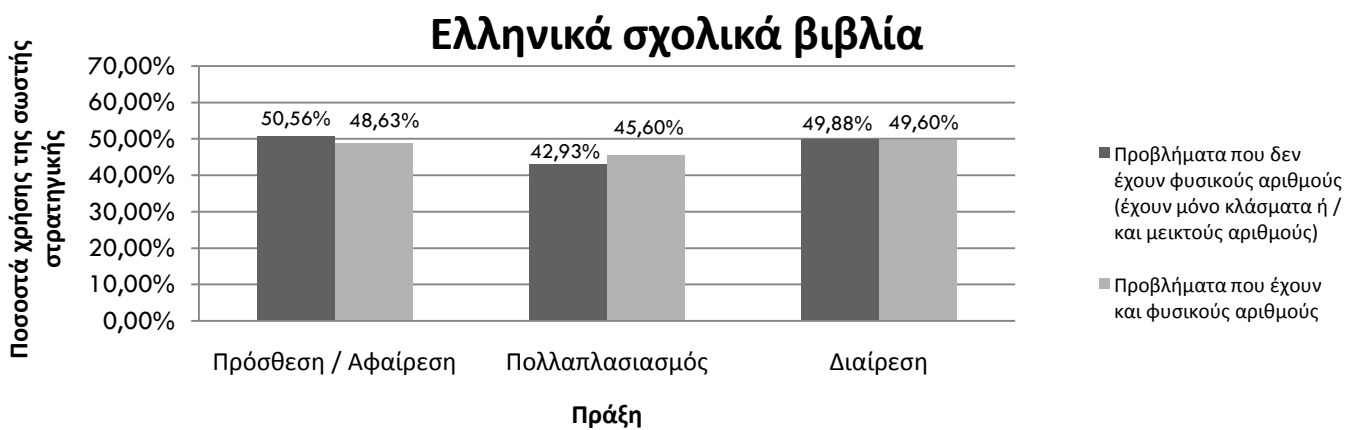
χρησιμοποιήσει τη σωστή στρατηγική πιο συχνά σε προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης τα οποία περιλαμβάνουν μόνο κλάσματα και μεικτούς αριθμούς, αλλά θα χρησιμοποιήσει συχνότερα τη σωστή στρατηγική σε προβλήματα πολλαπλασιασμού όταν ο ένας από τους δύο παράγοντες είναι φυσικός αριθμός» (σελ. 29).

Για να ελέγξουν την παραπάνω υπόθεση οι Braithwaite et al. (2017) χρησιμοποίησαν τα ίδια προβλήματα στη φάση μάθησης και τις ίδιες παραμέτρους όπως και στην προηγούμενη εκτέλεση του προγράμματος. Για τη φάση ελέγχου, δημιούργησαν ένα νέο σύνολο 40 προβλημάτων το οποίο αποτελούνταν από τα 16 προβλήματα με παράγοντες κλάσματα από την προηγούμενη μελέτη και, σε κάθε μία από τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις, προστέθηκαν δύο προβλήματα με παράγοντες ένα μεικτό αριθμό και ένα κλάσμα με ίσους παρονομαστές, δύο προβλήματα με ένα μεικτό αριθμό και ένα κλάσμα με άνισους παρονομαστές, και δύο προβλήματα με ένα κλάσμα και έναν φυσικό αριθμό. Για παράδειγμα, τα ήδη υπάρχοντα προβλήματα πρόσθεσης ενισχύθηκαν από τα εξής προβλήματα:

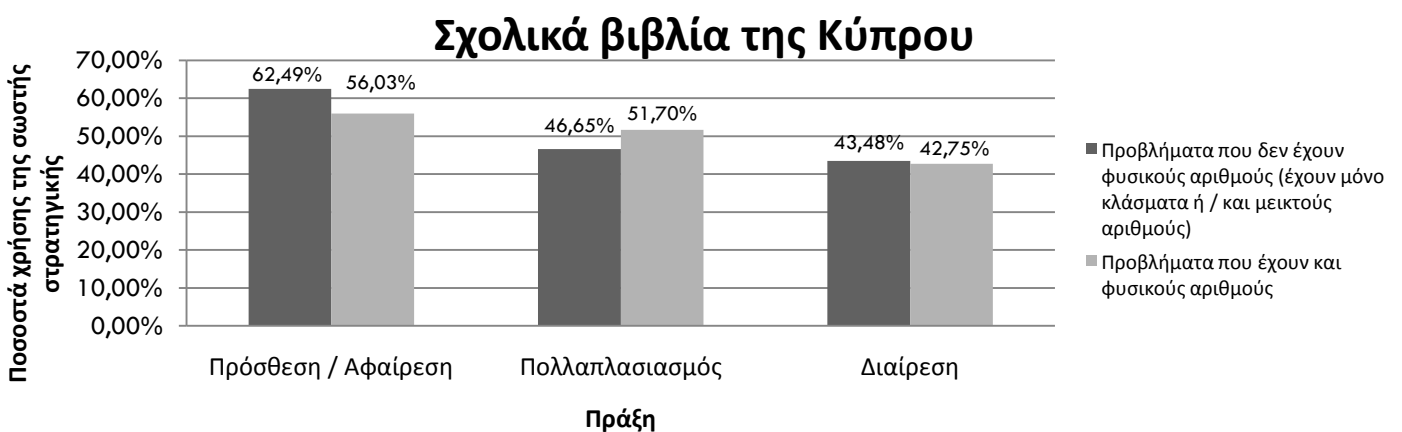
- Δύο προβλήματα ίσων παρονομαστών με ένα μεικτό αριθμό και ένα κλάσμα: $2\frac{3}{5} + \frac{1}{5}$ και $3\frac{4}{5} + \frac{3}{5}$.
- Δύο προβλήματα άνισων παρονομαστών με ένα μεικτό αριθμό και ένα κλάσμα: $2\frac{3}{5} + \frac{1}{4}$ και $3\frac{1}{3} + \frac{3}{5}$.
- Δύο προβλήματα πρόσθεσης με έναν φυσικό αριθμό και ένα κλάσμα: $2 + \frac{1}{4}$ και $3 + \frac{1}{5}$.



Γράφημα Β.3.1: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τη σειρά σχολικών βιβλίων EnvisionMATH (ΗΠΑ).



Γράφημα Β.3.2: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τη σειρά των Ελληνικών σχολικών.



Γράφημα Β.3.3: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τη σειρά των σχολικών βιβλίων της Κύπρου.

Τα προβλήματα αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης αποτελούνταν από τα ίδια ζεύγη παραγόντων με τα προβλήματα πρόσθεσης.

Προκειμένου να εξετάσουμε αν τα αποτελέσματα των Braithwaite et al. (2017) ισχύουν και για τα Ελληνικά και τα Κυπριακά σχολικά βιβλία, τρέξαμε το πρόγραμμα με δεδομένα ως είσοδο, εκτός από τα προβλήματα της σειράς EnVisionMATH, και τα προβλήματα από τα Ελληνικά και τα Κυπριακά σχολικά βιβλία. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα γραφήματα Β3.1, Β3.2 και Β.3.3.

Όπως προκύπτει από τον πίνακα B.3.1, στα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης, το λογισμικό FARRA χρησιμοποίησε πιο συχνά τη σωστή στρατηγική της πρόσθεσης/αφαίρεσης όταν και οι δύο παράγοντες ήταν κλάσματα ή μεικτοί αριθμοί από ό, τι όταν ένας από τους δύο παράγοντες ήταν φυσικός αριθμός. Για τα προβλήματα πολλαπλασιασμού, το πρόγραμμα FARRA χρησιμοποίησε τη σωστή στρατηγική του πολλαπλασιασμού πιο συχνά όταν ο ένας παράγοντας ήταν φυσικός αριθμός απ' ό,τι όταν και οι δύο παράγοντες ήταν κλάσματα ή μεικτοί αριθμοί. Το φαινόμενο αυτό βλέπουμε ότι ισχύει σε αρκετά μικρότερο βαθμό τόσο για τα Κυπριακά (γράφημα B.3.3) όσο και τα Ελληνικά σχολικά βιβλία (γράφημα B.3.2). Συγκεκριμένα, η διαφορά μεταξύ των ποσοστών για κάθε είδος παραγόντων είναι η μεγαλύτερη στη σειρά EnVisionMATH ($68,53\% - 54,60\% = 13,93\%$ για τα προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης και $52,10\% - 41,36\% = 10,74\%$ για τα προβλήματα πολλαπλασιασμού), ενώ αμέσως μετά ακολουθεί με μικρότερες διαφορές η σειρά των Κυπριακών σχολικών βιβλίων ($62,49\% - 56,03\% = 6,46\%$ για τα προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης και $51,70\% - 46,65\% = 5,05\%$ για τα προβλήματα πολλαπλασιασμού). Τελευταία, με τις μικρότερες διαφορές έρχεται η σειρά των Ελληνικών σχολικών βιβλίων ($50,56\% - 48,63\% = 1,93\%$ για τα προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης και $45,6\% - 42,93\% = 2,68\%$ για τα προβλήματα πολλαπλασιασμού).

8.5 Η επίδραση των προβλημάτων εισόδου στη μάθηση

Μια άλλη σημαντική παράμετρος την οποία εξετάζουν οι Braithwaite et al. (2017) είναι αν και σε πιο βαθμό μπορεί να βελτιώσει τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων της προσομοίωσης η αύξηση του αριθμού των προβλημάτων ή η διευθέτηση των προβλημάτων των τριών σειρών σχολικών βιβλίων τις οποίες μελετάμε με τέτοιο τρόπο ώστε να υπάρχει μια ίση κατανομή των προβλημάτων αναφορικά με τις τέσσερις πράξεις. Παράλληλα, εξετάζεται και η επίδραση της μεταβολής της παραμέτρου d στην επίδοση των μαθητών. Στα έως τώρα πειράματα, για τις στρατηγικές οι οποίες οδηγούσαν σε λάθος απαντήσεις, υπήρχε μια θετική ενίσχυση ίση με $(1 - d) * e$, όπου $d \in [0,8, 1]$. Βέβαια, αυτή η θετική ενίσχυση ήταν μικρότερη της ενίσχυσης e η οποία δίδεται στις σωστές απαντήσεις αφού $1 - d \in [0, 0,2]$. Σε αυτή την παράγραφο εκτελούμε μια άλλη εκδοχή της προσομοίωσης κατά την οποία η τιμή του d είναι ίση με 1.5. Συνεπώς, $1 - d = -0,5$. Δηλαδή, σε αυτή την εκδοχή, η λάθος απάντηση σε κάποιο πρόβλημα προκαλεί μείωση της ενίσχυσης της σύνδεσης της στρατηγικής η οποία εφαρμόστηκε στο συγκεκριμένο πρόβλημα με τα χαρακτηριστικά του προβλήματος αυτού. Αναμένουμε, λοιπόν, να υπάρχει βελτίωση των ποσοστών επιτυχίας, καθώς μειώνεται κατά πολύ η πιθανότητα να εφαρμοστούν οι λάθος στρατηγικές για ένα πρόβλημα ξανά στο μέλλον για το ίδιο πρόβλημα λόγω της αρνητικής ενίσχυσης που λαμβάνουν. Οι παράμετροι οι οποίοι μεταβάλλονται είναι οι εξής:

- **Αριθμός προβλημάτων:** 659 ή 2400 (2 επιλογές).
- **Κατανομή προβλημάτων:** διατήρηση υπάρχουσας ή ισορροπημένη (2 επιλογές).
- **Έκπτωση λόγω λάθους γ :** $\gamma \in [0,8, 1]$ ή $\gamma = -0,5$ (2 επιλογές).

Για τον αριθμό των προβλημάτων υπάρχουν δύο εκδοχές. Η πρώτη αποτελείται από 659 προβλήματα και η δεύτερη από 2400 προβλήματα. Για τη σειρά EnVisionMATH, η εκδοχή με τα 659 προβλήματα αποτελείται από τα ίδια

ακριβώς προβλήματα τα οποία χρησιμοποιήθηκαν στα προηγούμενα πειράματα. Η εκδοχή με αριθμό προβλημάτων ίσο με 2400 και για τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων και η εκδοχή με αριθμό προβλημάτων ίσο με 659 για τις σειρές σχολικών βιβλίων της Ελλάδας και της Κύπρου προκύπτουν ως εξής:

Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι έχουμε τη σειρά προβλημάτων της Ελλάδας η οποία αποτελείται από 169 προβλήματα. Αρχικά, δημιουργούνται 8 κατηγορίες προβλημάτων ανάλογα με την πράξη και το είδος των παρονομαστών. Αυτές φαίνονται στη λίστα

['+ same-denom', '+ diff-denom', '- same-denom', '- diff-denom', '* same-denom', '* diff-denom', '/ same-denom', '/ diff-denom'].

Προκειμένου τα 169 προβλήματα να γίνουν 659 προβλήματα και επιπλέον, να διατηρηθεί η υπάρχουσα αναλογία των προβλημάτων με βάση τα χαρακτηριστικά τους (πράξη και είδος παρονομαστών) υπολογίζεται ο αριθμός των προβλημάτων τα οποία ανήκουν σε κάθε μία από τις 8 παραπάνω κατηγορίες. Έχουμε,

(['+ same-denom', 13), ('+ diff-denom', 28), ('- same-denom', 5), ('- diff-denom', 17), ('* same-denom', 1), ('* diff-denom', 51), ('/ same-denom', 9), ('/ diff-denom', 45)]).

Στη συνέχεια υπολογίζεται η ποσότητα

$$x = 659 \cdot \frac{1}{169} = 3.899408284023669.$$

Ο αριθμός των προβλημάτων (αριθμοί – στόχοι) για κάθε μια από τις 8 κατηγορίες προβλημάτων στη νέα εκδοχή με τα 659 προβλήματα προκύπτει ως το ακέραιο μέρος του γινομένου της ποσότητας x με τον αριθμό των προβλημάτων κάθε κατηγορίας στην αρχική έκδοση με τα 169 προβλήματα. Δηλαδή, είναι:

Αριθμός – στόχος '+ same-denom': $[13 \cdot 3.899408284023669] = 51$ προβλήματα,

Αριθμός – στόχος '+ diff-denom': $[28 \cdot 3.899408284023669] = 109$ προβλήματα,

Αριθμός – στόχος '- same-denom': $[5 \cdot 3.899408284023669] = 19$ προβλήματα,

Αριθμός – στόχος '- diff-denom': $[17 \cdot 3.899408284023669] = 66$ προβλήματα,

Αριθμός – στόχος '* same-denom': $[1 \cdot 3.899408284023669] = 4$ προβλήματα,

Αριθμός – στόχος '* diff-denom': $[51 \cdot 3.899408284023669] = 199$ προβλήματα,

Αριθμός – στόχος '/ same-denom': $[9 \cdot 3.899408284023669] = 35$ προβλήματα,

Αριθμός – στόχος '/ diff-denom': $[45 \cdot 3.899408284023669] = 175$ προβλήματα.

Το άθροισμα των παραπάνω προβλημάτων είναι ίσο με 658, ένα λιγότερο πρόβλημα από τον στόχο των 659 προβλημάτων. Προκειμένου να προστεθεί ένα επιπλέον πρόβλημα, επιλέγεται τυχαία με πιθανότητα $1/8$ ένα είδος προβλήματος από τις 8 κατηγορίες. Ας υποθέσουμε ότι εδώ επιλέγεται η κατηγορία '- diff-denom'. Τότε, ο νέος

αριθμός προβλημάτων για την κατηγορία '- diff-denom' αυξάνεται από 66 σε 67 προβλήματα. Για να αυξηθεί ο αριθμός των προβλημάτων από κάθε κατηγορία στους αριθμούς – στόχους, κάθε νέο επιπλέον πρόβλημα προκύπτει από την αναπαραγωγή ενός προβλήματος από τα ήδη υπάρχοντα στη συγκεκριμένη κατηγορία με τυχαία επιλογή. Αυτή η τυχαία αναπαραγωγή γίνεται τόσες φορές όσες απαιτείται για να συμπληρωθεί ο αριθμός – στόχος των προβλημάτων της κατηγορίας. Κάθε νέο πρόβλημα που αναπαράγεται τοποθετείται στη σειρά των προβλημάτων ακριβώς δίπλα από το αρχικό πρόβλημα. Παρόμοια διαδικασία ακολουθείται όταν θέλουμε να δημιουργηθούν 2400 προβλήματα.

Όταν επιλέγεται η ισορροπημένη κατανομή, στόχος είναι να υπάρχει ο ίδιος αριθμός προβλημάτων σε κάθε μία από τις 8 κατηγορίες. Για να γίνει αυτό, καθορίζεται ο αριθμός – στόχος των προβλημάτων για κάθε κατηγορία σύμφωνα με τον τύπο $x = \left\lceil \frac{\text{Αριθμ ός-στόχος προβλημ άτων}}{8} \right\rceil$. Για παράδειγμα, αν έχουμε ένα πρόβλημα και θέλουμε να το μετατρέψουμε σε μια ισορροπημένη παραλλαγή του με 659 προβλήματα, τότε ο αριθμός – στόχος των προβλημάτων της κάθε μίας από τις 8 κατηγορίες θα είναι $x = \left\lceil \frac{659}{8} \right\rceil = 82$. Στη συνέχεια, προστίθενται ή αφαιρούνται προβλήματα με τον ίδιο τρόπο όπως περιγράφηκε παραπάνω μέχρις ότου προκύψει ο αριθμός - στόχος των προβλημάτων κάθε κατηγορίας.

Στα γραφήματα B4.1, B4.2, B4.3 σημειώνονται τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για όλους τους συνδυασμούς των τριών παραμέτρων (αριθμός προβλημάτων, ισορροπημένη ή όχι κατανομή των προβλημάτων, ύπαρξη ή μη και αρνητικής ενίσχυσης) και για κάθε μία από τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων τις οποίες μελετάμε.

Για τη σειρά EnVisionMATH υπάρχει σαφής βελτίωση τόσο όταν η κατανομή των προβλημάτων γίνεται ισορροπημένη, όσο και όταν αυξάνεται ο συνολικός αριθμός των προβλημάτων. Πολύ μεγάλη βελτίωση παρατηρείται όταν και οι τρεις αλλαγές εφαρμόζονται ταυτόχρονα (αριθμός προβλημάτων = 2400, ισορροπημένη κατανομή προβλημάτων, ύπαρξη και αρνητικής ενίσχυσης).

Για τα ελληνικά σχολικά βιβλία βλέπουμε ότι υπάρχει μία αισθητή βελτίωση στο ποσοστό των σωστών απαντήσεων κάθε φορά που προστίθεται μία νέα μεταβολή καθεμιάς από τις τρεις παραμέτρους. Ενώ η αρχική τιμή του ποσοστού των απαντήσεων ήταν 45,3%, με την προσθήκη μεγαλύτερου αριθμού προβλημάτων, ή ισορροπημένης κατανομής των προβλημάτων ή αρνητικής ενίσχυσης, η επίδοση βελτιώνεται σε κάθε περίπτωση. Πολύ μεγάλη βελτίωση παρατηρείται επίσης, όταν αυξάνεται ο αριθμός των προβλημάτων και υπάρχει και αρνητική ενίσχυση χωρίς όμως να είναι ισορροπημένη η κατανομή τους. Το γράφημα B4.2 καταδεικνύει τα μεγάλα περιθώρια βελτίωσης τα οποία υπάρχουν για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία. Πάντως, φαίνεται ότι η ισορροπημένη κατανομή δεν επιφέρει απαραίτητα και αύξηση της επίδοσης των μαθητών. Αυτό παρατηρείται όταν εφαρμόζεται και αρνητική ενίσχυση (αριθμός προβλημάτων 659 ή 2400). Ίσως γιατί αναπαράγονται τα ίδια προβλήματα και δεν αλλάζει ουσιαστικά η δομή του σχολικού βιβλίου).

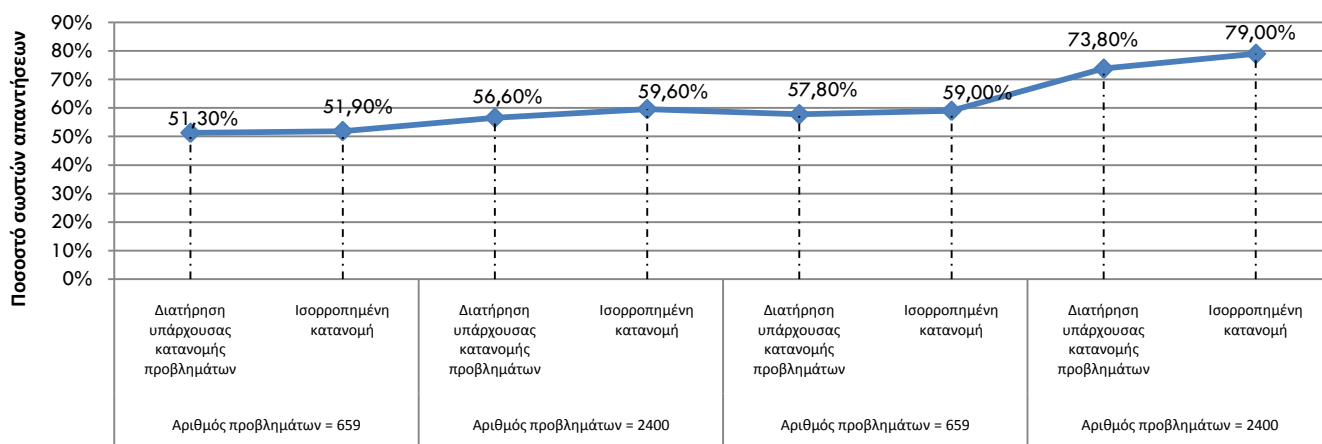
Στο γράφημα B4.3 φαίνονται τα ποσοστά επιτυχίας για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου. Και εδώ υπάρχει βελτίωση σε σχέση με την αρχική τιμή του ποσοστού επιτυχίας (51,6%). Αισθητή είναι η βελτίωση όταν υπάρχουν ταυτόχρονα η αρνητική ενίσχυση και ο αυξημένος αριθμός προβλημάτων (αριθμός προβλημάτων = 2400), με τη μεγαλύτερη αύξηση να προκαλείται όταν απουσιάζει η ισορροπία στην κατανομή των προβλημάτων. Και εδώ βλέπουμε ότι η ισορροπία στην κατανομή των προβλημάτων δε βελτιώνει απαραίτητα το ποσοστό των σωστών απαντήσεων (κυρίως όταν συνυπάρχει και αρνητική ενίσχυση).

8.6 Ποσοστά επιτυχίας για διάφορες τιμές των παραμέτρων

Στα προηγούμενα πειράματα οι τιμές των παραμέτρων του μοντέλου κυμαίνονταν στο διάστημα [0.001, 0.02] για το ρυθμό μάθησης e , στο διάστημα [0.8, 1.0] για την παράμετρο d της έκπτωσης λάθους, και στο διάστημα [0.5, 1.5] για την παράμετρο της ντετερμινισμού των αποφάσεων γ . Οι τιμές αυτών των παραμέτρων επιλέγονται τυχαία και με την ίδια πιθανότητα από τα παραπάνω διαστήματα. Στη παρούσα παράγραφο θα μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζει η μεταβολή των τριών αυτών παραμέτρων του μοντέλου τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων. Στα πειράματα της παρούσας παραγράφου οι παράμετροι δέχονται συγκεκριμένες τιμές κάθε φορά, δεν θα επιλέγονται, δηλαδή, τυχαία από κάποιο διάστημα. Οι τιμές τις οποίες επιλέξαμε για κάθε παράμετρο βασίζονται στη μελέτη των Braithwaite, Leibb, Siegler & McMullen (2019) οι οποίοι διεξάγουν πειράματα για διαφορετικές τιμές του μοντέλου FARRA. Συγκεκριμένα, οι τρεις παράμετροι παίρνουν τις παρακάτω τιμές:

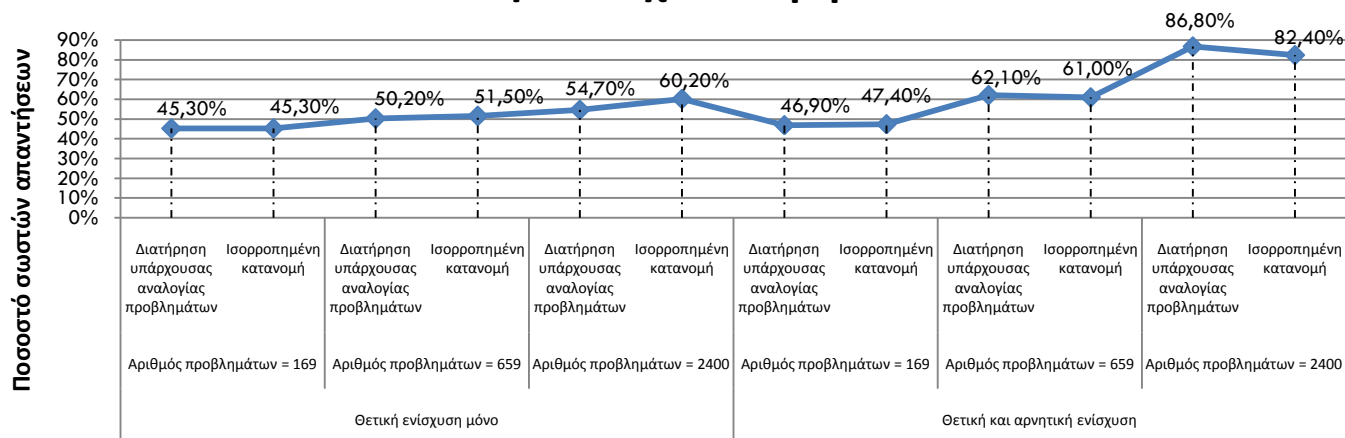
- Ρυθμός μάθησης e : 0.005, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04.
- Παράμετρος έκπτωσης λάθους d : 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0
- Παράμετρος ντετερμινισμού των αποφάσεων γ : 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0

EnVisionMATH (ΗΠΑ)



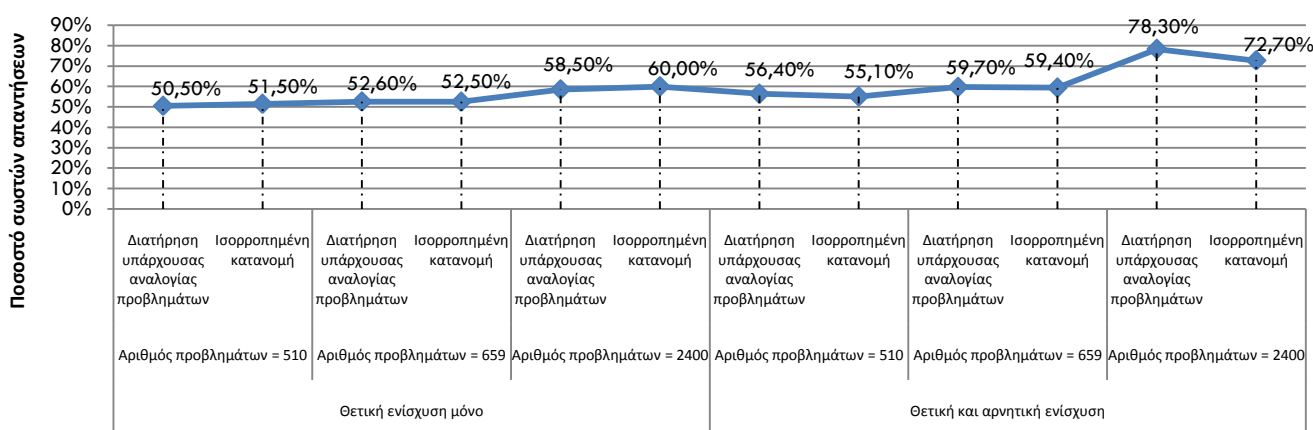
Γράφημα B4.1: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τη σειρά των σχολικών βιβλίων EnVisionMATH για κάθε συνδυασμό των παραμέτρων (αριθμός προβλημάτων, ισορροπημένη ή όχι κατανομή των προβλημάτων, ύπαρξη ή μη και αρνητικής ενίσχυσης).

Ελληνικά σχολικά βιβλία



Γράφημα B4.2: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τη σειρά των Ελληνικών σχολικών βιβλίων για κάθε συνδυασμό των παραμέτρων (αριθμός προβλημάτων, ισορροπημένη ή όχι κατανομή των προβλημάτων, ύπαρξη ή μη και αρνητικής ενίσχυσης).

Σχολικά βιβλία της Κύπρου



Γράφημα B4.3: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τη σειρά των σχολικών βιβλίων της Κύπρου για κάθε συνδυασμό των παραμέτρων (αριθμός προβλημάτων, ισορροπημένη ή όχι κατανομή των προβλημάτων, ύπαρξη ή μη και αρνητικής ενίσχυσης).

Η παράμετρος e καθορίζει τον βαθμό της θετικής ενίσχυσης σε μια στρατηγική, όταν αυτή επιτυγχάνει σωστή απάντηση. Κατά συνέπεια, αναμένουμε ότι μια αύξηση της τιμής της, να οδηγεί σε μεγαλύτερα ποσοστά σωστών απαντήσεων. Η παράμετρος d καθορίζει το βαθμό της αρνητικής ενίσχυσης την οποία δέχεται μια στρατηγική η οποία δίνει λανθασμένη απάντηση. Άρα, αύξηση της τιμής της οδηγεί σε καλύτερα ποσοστά επιτυχίας γιατί απορρίπτονται πιο γρήγορα οι στρατηγικές οι οποίες δίνουν λανθασμένες απαντήσεις. Τέλος, η αύξηση της παραμέτρου γ αναγκάζει το λογισμικό να επιλέγει με μεγαλύτερη συνέπεια στο μέλλον τις στρατηγικές οι οποίες έχουν ήδη δώσει τη σωστή απάντηση. Η παράμετρος αυτή αντικατοπτρίζει τη διαφορά μεταξύ των μαθητών οι οποίοι επιλέγουν τις στρατηγικές επίλυσης πιο προσεκτικά σε σχέση με εκείνους οι οποίοι εμφανίζουν ασυνέπεια στις επιλογές τους. Στις ομάδες γραφημάτων B.5.1, B.5.2, B.5.3 υπάρχουν τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων των

μαθητών όταν μεταβάλλεται η παράμετρος d . Κάθε γράφημα αποτελείται από 5 καμπύλες, μία για κάθε τιμή της παραμέτρου e . Επίσης σε κάθε γράφημα, αντιστοιχεί μια τιμή της παραμέτρου γ .

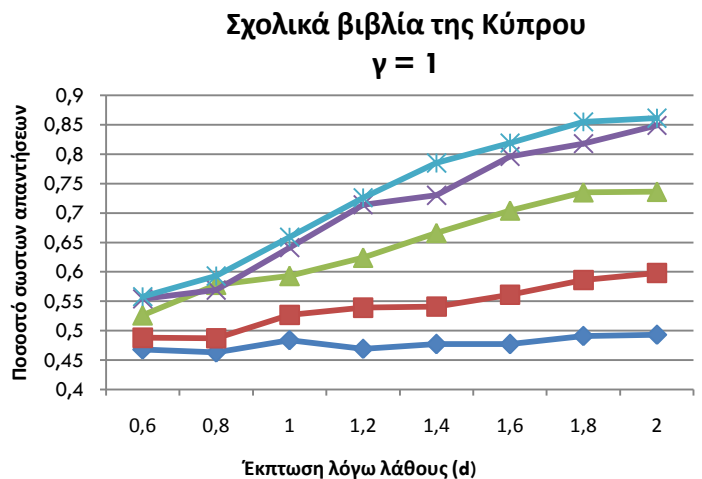
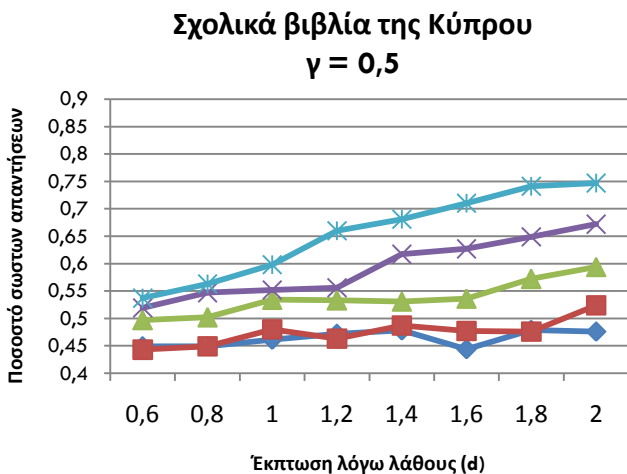
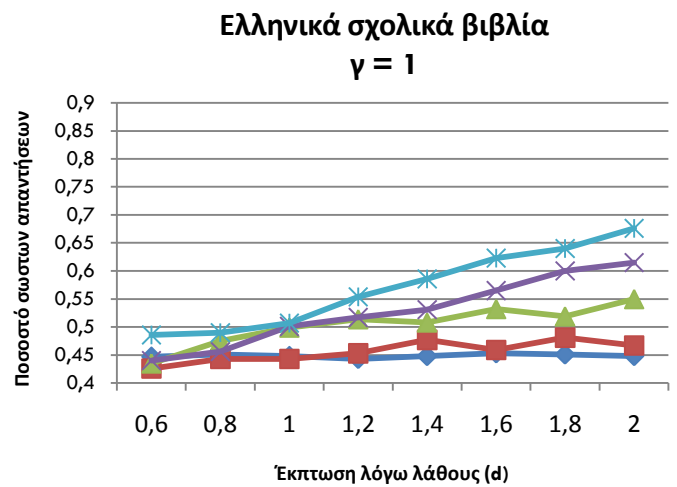
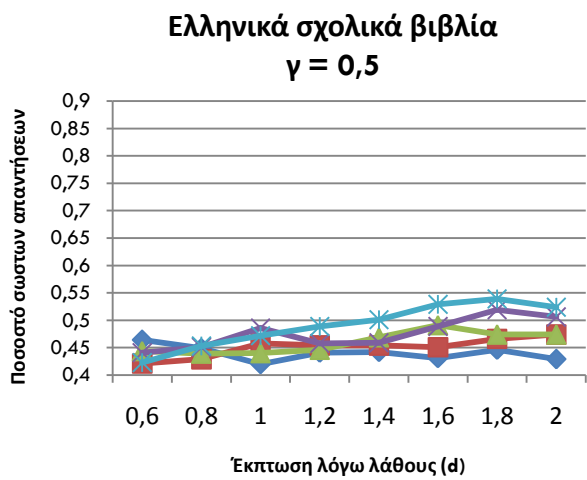
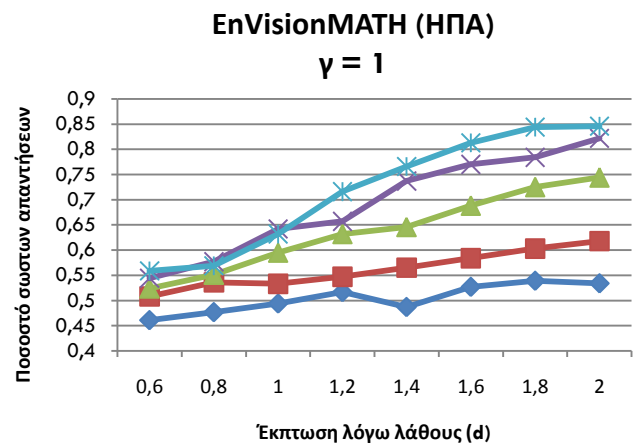
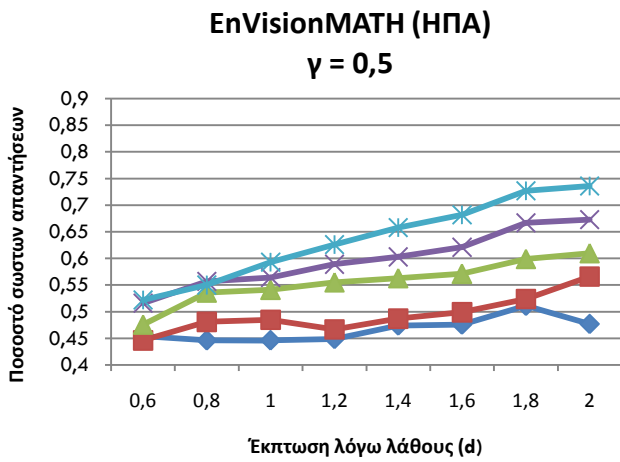
Παρατηρώντας τα τρία γραφήματα όταν $\gamma = 0.5$, βλέπουμε ότι η αύξηση της τιμής της παραμέτρου e , αυξάνει τα ποσοστά επιτυχίας. Αυτό συμβαίνει κυρίως για τα σχολικά βιβλία EnVisionMATH και τα Κυπριακά σχολικά βιβλία. Τα Ελληνικά σχολικά βιβλία δείχνουν να είναι ευάλωτα στη χαμηλή τιμή της παραμέτρου γ καθώς οι καμπύλες που αντιστοιχούν στην τιμή του e , δεν είναι σταθερά η μία πάνω από την άλλη όσο η παράμετρος e αυξάνεται. Το φαινόμενο αυτό φαίνεται να μειώνεται σημαντικά όταν $\gamma \geq 1.5$. Επιπρόσθετα, όλα τα διαγράμματα δείχνουν ότι η αύξηση της παραμέτρου d βελτιώνει τα ποσοστά επιτυχίας.

Μια άλλη μεταβλητή η οποία μπορεί να μελετηθεί είναι οι μέγιστες τιμές των καμπυλών για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου e . Όπως προκύπτει από την ομάδα γραφημάτων B.5.1, η μέγιστη τιμή για τις σειρές EnVisionMATH και της Κύπρου είναι όμοιες, ενώ η μέγιστη τιμή των καμπυλών για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία είναι αρκετά χαμηλότερες. Για παράδειγμα, η μέγιστη τιμή της καμπύλης $e = 0.04$ για τα γραφήματα $\gamma = 0.5$, είναι για τις σειρές EnVisionMATH και Κύπρου σχεδόν 75%, ενώ για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία είναι μικρότερη από 55%. Η εικόνα για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία φαίνεται να βελτιώνεται όταν $\gamma = 1$. Σε αυτή την περίπτωση η μέγιστη τιμή της καμπύλης $e = 0.04$ είναι 85% για τις σειρές EnVisionMATH και Κύπρου, και 67% περίπου για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία. Επιπλέον, όταν η παράμετρος e έχει τιμές 0.005 ή 0.01, τότε η αύξηση της συνέπειας στις αποφάσεις, δε φαίνεται να επηρεάζει το ρυθμό ανόδου των αντίστοιχων καμπυλών ($e = 0.005$, $e = 0.01$) ο οποίος είναι χαμηλός για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία. Για παράδειγμα, όταν $\gamma = 1$, η καμπύλη $e = 0.01$ έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή 51% και 62% αντίστοιχα για τη σειρά EnVisionMATH, 43% και 47% για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 49% και 60% για τα Κυπριακά σχολικά βιβλία. Στις άλλες δύο σειρές όμως, η αύξηση της παραμέτρου γ επηρεάζει σημαντικά το ρυθμό ανόδου. Στα γραφήματα B.5.3 αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η μέγιστη τιμή των καμπυλών $e = 0.04$ και $e = 0.03$, είναι μεγαλύτερη για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία. Για τις καμπύλες $e = 0.005$, $e = 0.01$ και $e = 0.02$ ισχύει το αντίθετο.

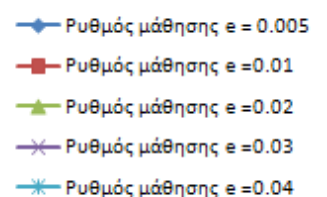
Επίσης, στα γραφήματα B.5.2, B.5.3 οι καμπύλες $e = 0.02$, $e = 0.03$, $e = 0.04$ δείχνουν να έχουν μια τάση να ταυτιστούν για τις σειρές EnVisionMATH και Κύπρου. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα άνω όριο στην τιμή του ποσοστού επιτυχίας πάνω από το οποίο η οποία αύξηση καθενός από τις τρεις παραμέτρους δεν οδηγεί σε περαιτέρω βελτίωση του ποσοστού των σωστών απαντήσεων των μαθητών.

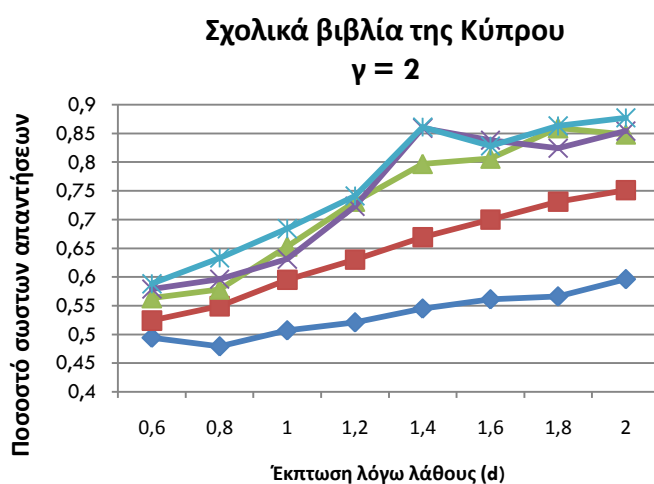
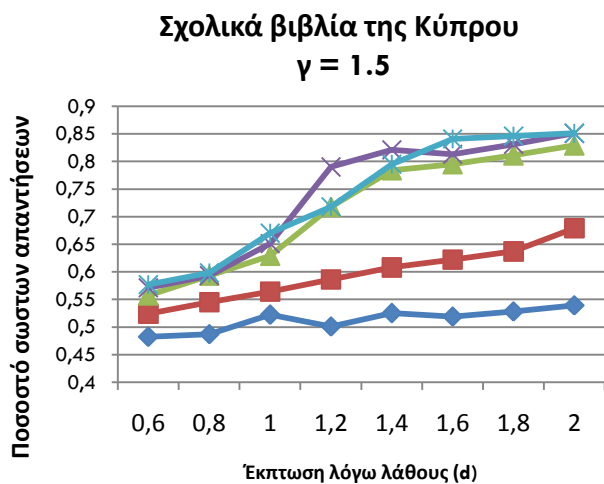
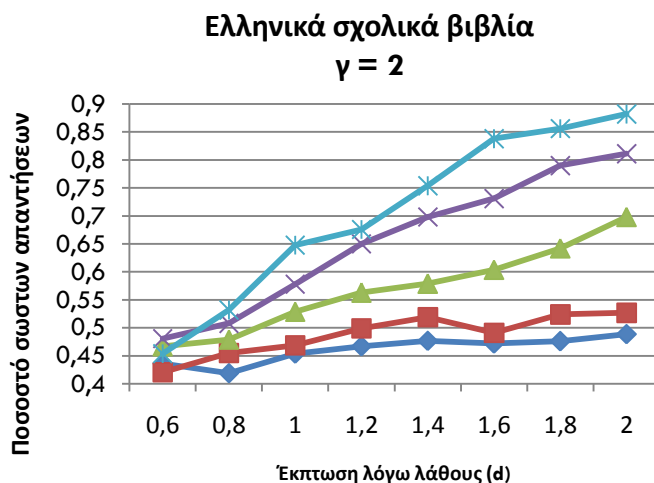
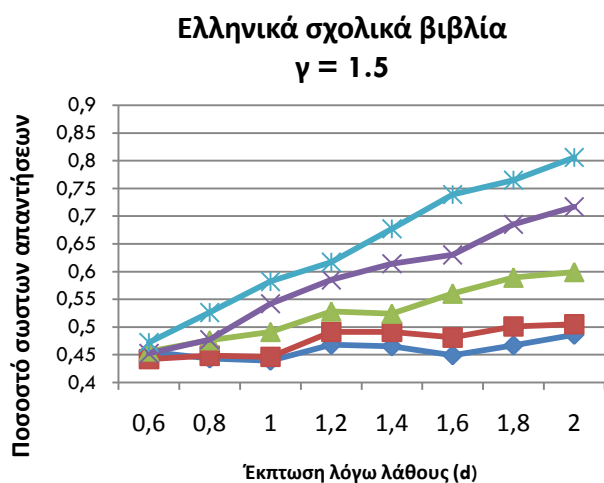
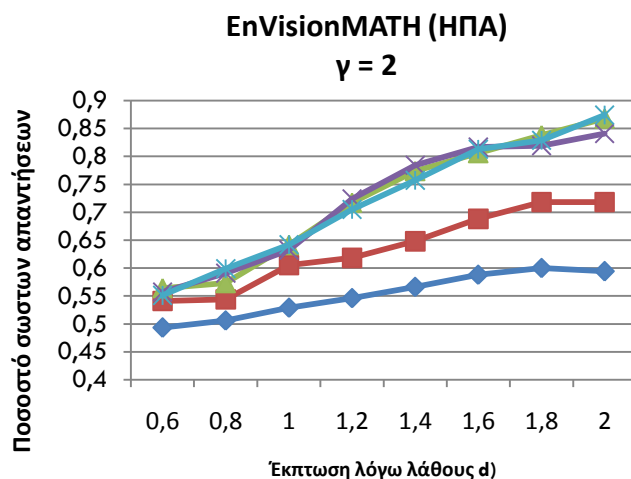
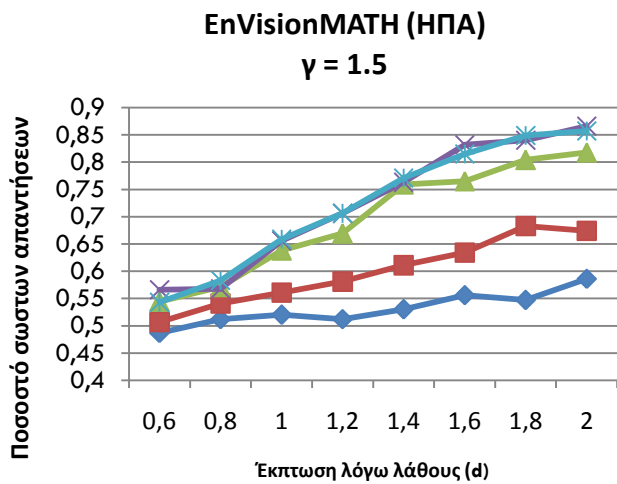
Συμπερασματικά, οι σειρές EnVisionMATH και Κύπρου παρουσιάζουν όμοια και πιο σταθερή συμπεριφορά σε σχέση με αυτή των Ελληνικών σχολικών βιβλίων. Η αύξηση του ποσοστού των σωστών απαντήσεων συμβαίνει ακόμα και όταν οι παράμετροι e , d , γ αυξάνονται αλλά διατηρούνται σε χαμηλές τιμές. Αντίθετα, μόνο σε υψηλές τιμές των παραμέτρων δείχνουν τα Ελληνικά σχολικά βιβλία να έχουν υψηλές αποδόσεις. Δηλαδή, τα Ελληνικά σχολικά βιβλία απαιτούν πιο σταθερούς και συνεπείς μαθητές για να αποδώσουν σε σχέση με τις άλλες δύο σειρές οι οποίες φαίνεται να έχουν θετική επίδραση και στους μαθητές μέτριας και χαμηλής επίδοσης, όπως φυσικά και στους μαθητές υψηλής συνέπειας και επίδοσης. Τελικά, ίσως οι σειρές EnVisionMATH και της Κύπρου μπορούν να

στηρίζουν με πιο αποδοτικό τρόπο τους εκπαιδευτικούς ώστε να καταστεί δυνατόν οι μαθητές με χαμηλή και μέτρια επίδοση να προσεγγίσουν κάποια στιγμή στο μέλλον την επίδοση των μαθητών υψηλής επίδοσης.



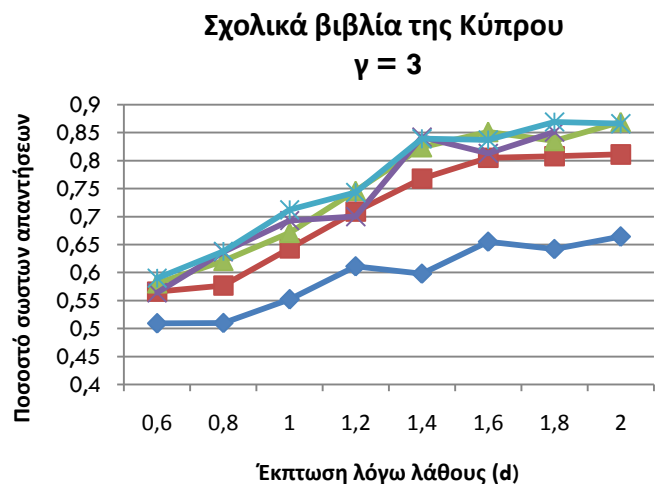
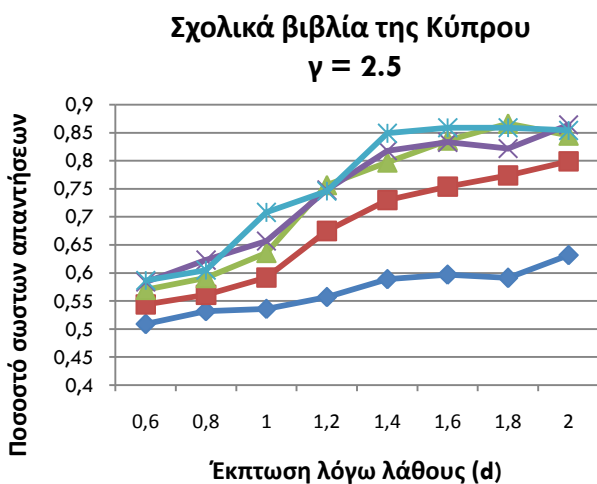
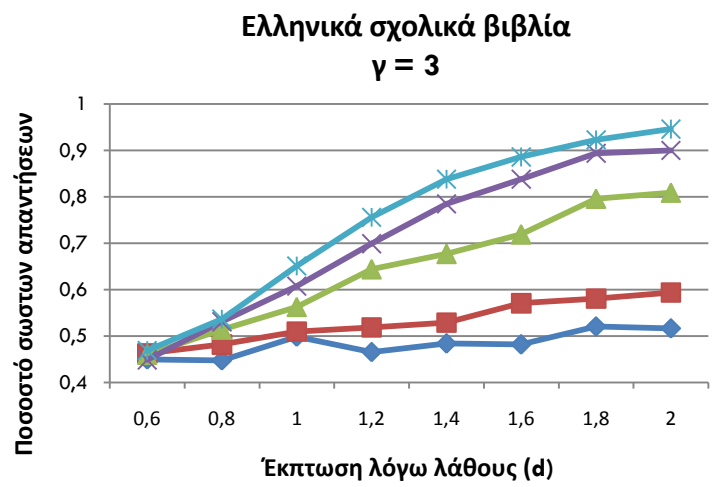
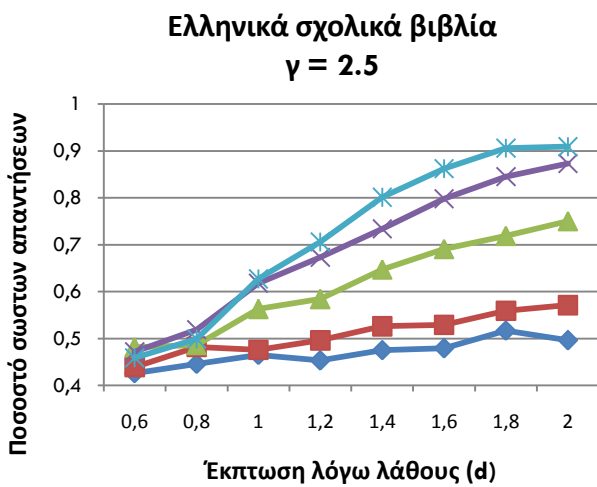
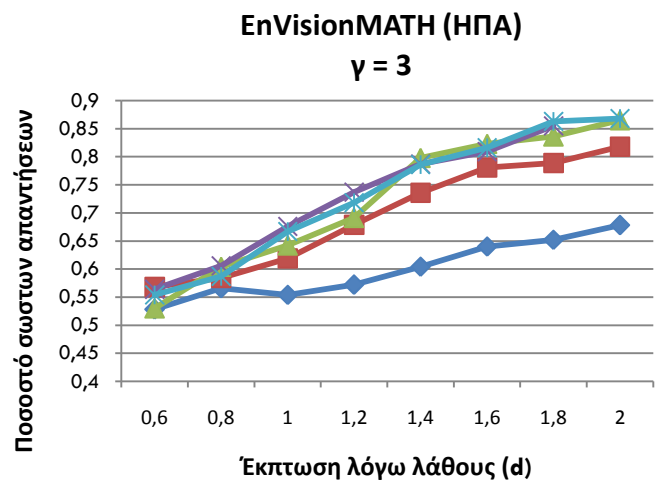
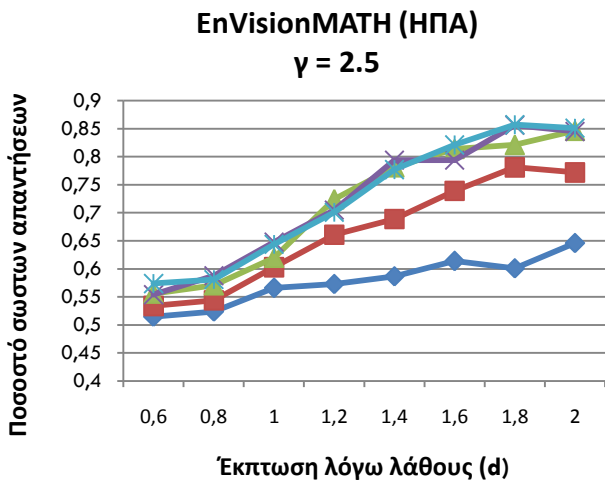
Γραφήματα Β5.1: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τη σειρά των σχολικών βιβλίων EnVisionMATH όταν $\gamma \in \{0.5, 1\}$, $e \in \{0.005, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04\}$ και $d \in \{0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2\}$





Γραφήματα Β5.2: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τη σειρά των σχολικών βιβλίων EnVisionMATH όταν $\gamma \in \{1.5, 2\}$, $e \in \{0.005, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04\}$ και $d \in \{0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2\}$

- Ρυθμός μάθησης $e = 0.005$
- Ρυθμός μάθησης $e = 0.01$
- ▲— Ρυθμός μάθησης $e = 0.02$
- ×— Ρυθμός μάθησης $e = 0.03$
- *— Ρυθμός μάθησης $e = 0.04$



Γραφήματα Β5.3: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τη σειρά των σχολικών βιβλίων EnVisionMATH όταν $\gamma \in \{2.5, 3\}$, $e \in \{0.005, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04\}$ και $d \in \{0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2\}$

- Ρυθμός μάθησης $e = 0.005$
- Ρυθμός μάθησης $e = 0.01$
- ▲— Ρυθμός μάθησης $e = 0.02$
- ×— Ρυθμός μάθησης $e = 0.03$
- *— Ρυθμός μάθησης $e = 0.04$

9 Σύγκριση των σχολικών βιβλίων του Δημοτικού της Ελλάδας, της Κύπρου και ενός εναλλακτικού σχολικού εγχειριδίου αναφορικά με την αριθμητική των κλασμάτων.

Στο παρόν κεφάλαιο περιοριζόμαστε στο Δημοτικό το οποίο είναι μια πολύ σημαντική βαθμίδα εκπαίδευσης σε σχέση με τη διδασκαλία της αριθμητικής των κλασμάτων. Συγκρίνουμε, λοιπόν, την κατανομή των προβλημάτων στα παρακάτω σχολικά εγχειρίδια:

1. Τα σχολικά βιβλία της Κύπρου.
2. Τα Ελληνικά σχολικά βιβλία για το Δημοτικό.
3. Το εναλλακτικό σχολικό εγχειρίδιο «*Στην τροχιά των ρητών*» (Χαράλαμπος Λεμονίδης, εκδόσεις ΚΥΡΙΑΚΙΔΗ, 2016).

Σημειώνουμε ότι στα σχολικά βιβλία της Κύπρου η διδασκαλία της αριθμητικής των κλασμάτων ολοκληρώνεται στην 6^η Δημοτικού, ενώ για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία συνεχίζεται έως την Α' Γυμνασίου. Για το βιβλίο «*Στην τροχιά των ρητών*» ολοκληρώνεται στην Ε' Δημοτικού. Κατά συνέπεια, τα προβλήματα τα οποία μελετάμε στο παρόν κεφάλαιο είναι τα ίδια με το προηγούμενο κεφάλαιο για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου. Για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία, περικόψαμε όλα τα προβλήματα της Α' Γυμνασίου. Επίσης, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, υπάρχουν μόνο λεκτικά προβλήματα στην ΣΤ' Δημοτικού της Ελλάδας. Περιοριστήκαμε, δηλαδή, στη μελέτη των προβλημάτων στην αριθμητική των κλασμάτων της Ε' Δημοτικού των Ελληνικών σχολικών βιβλίων.

9.1 Ανάλυση με βάση τους παρονομαστές

Στον πίνακα Γ1 φαίνεται η κατανομή των προβλημάτων στην αριθμητική των κλασμάτων σε κάθε πράξη ξεχωριστά και ανάλογα με το είδος των παρονομαστών (ομώνυμα, ετερόνυμα). Αναφορικά με τη συχνότητα της κάθε πράξης, παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με την σειρά σχολικών βιβλίων EnVisionMATH των ΗΠΑ, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι οι πράξεις με τη μεγαλύτερη συχνότητα. Μάλιστα, το ποσοστό των προβλημάτων πολλαπλασιασμού για τη σειρά «*Στην τροχιά των ρητών*» είναι ίσο με το μισό του συνόλου των προβλημάτων. Επίσης, η λιγότερη συχνή πράξη για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου είναι η πρόσθεση, ενώ για το βιβλίο «*Στην τροχιά των ρητών*» η πρόσθεση και η αφαίρεση.

Μια δεύτερη επισήμανση είναι ότι τα προβλήματα διαίρεσης και πολλαπλασιασμού με ομώνυμα κλάσματα είναι σχεδόν ολοκληρωτικά απόντα. Μάλιστα, για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία, το ποσοστό των προβλημάτων με ομώνυμα κλάσματα είναι πολύ χαμηλό και για τις τέσσερις πράξεις. Για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου και της σειράς «*Στην τροχιά των ρητών*», η μεγάλη πλειοψηφία των προβλημάτων με ομώνυμα κλάσματα αφορά τα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης. Βέβαια, και εκεί, το ποσοστό για κάθε μία από τις δύο αυτές πράξεις δεν ξεπερνά το 10%.

9.2 Ανάλυση με βάση το είδος των παραγόντων

Όπως έχουμε παρατηρήσει για τη σειρά EnVisionMATH, στα προβλήματα που περιελάμβαναν έναν τουλάχιστον φυσικό αριθμό, η πρόσθεση και η αφαίρεση ήταν σχεδόν ολοκληρωτικά απουσίες. Τα ποσοστά για κάθε μία από αυτές τις κατηγορίες προβλημάτων φαίνονται στον πίνακα Γ2. Είναι εμφανές ότι το παραπάνω συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει και για τις τρεις σειρές σχολικών εγχειριδίων τις οποίες μελετούμε. Τα ποσοστά για την πρόσθεση και την αφαίρεση στα προβλήματα με έναν από τους δύο όρους φυσικό αριθμό είναι το πολύ 4%. Ειδικά, για τα προβλήματα πρόσθεσης, δεν υπάρχουν τέτοια προβλήματα σε καμία από τις τρεις σειρές (ποσοστό 0%). Επιπλέον, στη σειρά «*Στην τροχιά των ρητών*» δεν υπάρχουν τέτοια προβλήματα και στις δύο πράξεις (0% για την πρόσθεση και 0% για την αφαίρεση).

Μια άλλη παρατήρηση στην σειρά EnVisionMATH ήταν ότι στα προβλήματα που αποτελούνταν από κλάσματα ή/και μεικτούς αριθμούς, η πλειοψηφία των προβλημάτων ήταν πρόσθεσης ή αφαίρεσης. Το φαινόμενο αυτό δεν παρατηρείται σε όλα σχολικά βιβλία που μελετάμε. Για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου ισχύει, αλλά η διαφορά του ποσοστού των προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης από τα προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης είναι μικρότερη. Για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία, υψηλότερο ποσοστό εμφανίζουν τα προβλήματα διαίρεσης και το χαμηλότερο τα προβλήματα πρόσθεσης. Τέλος, στο εναλλακτικό βιβλίο «*Στην τροχιά των ρητών*» το υψηλότερο ποσοστό υπάρχει στα προβλήματα πολλαπλασιασμού (17%), αλλά ακολουθούν με μικρή διαφορά τα προβλήματα πρόσθεσης (16%) και αφαίρεσης (16%). Δηλαδή, στο εγχειρίδιο «*Στην τροχιά των ρητών*», τα ποσοστά κάθε πράξης εμφανίζονται πιο ισοκατανεμημένα σε σχέση με τις άλλες δύο σειρές.

9.3 Πειράματα με προσομοίωση

Στη συνέχεια εκτελούμε πειράματα με προσομοίωση με τη βοήθεια του λογισμικού FARRA για κάθε μια από τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων του Δημοτικού.

9.3.1 Χαμηλή επίδοση συνολικά

Στον πίνακα Γ.3 φαίνονται τα ποσοστά επιτυχίας των υποθετικών μαθητών του λογισμικού FARRA. Το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας εμφανίζει η σειρά σχολικών βιβλίων της Κύπρου (51,60%). Η σειρά «*Στην τροχιά των ρητών*» ακολουθεί δεύτερη με ποσοστό 47,40% και τέλος, τα Ελληνικά σχολικά βιβλία έχουν ποσοστό επιτυχίας 44,20%.

Γενικά, τα ποσοστά για τις τρεις σειρές βρίσκονται αρκετά κοντά στο ποσοστό της σειράς EnVisionMATH. Το γεγονός αυτό καθιστά το λογισμικό FARRA ένα αρκετά αξιόπιστο εργαλείο εκτίμησης του μηχανισμού επίδρασης της κατανομής των προβλημάτων των σχολικών βιβλίων στην συνολική επίδοση των μαθητών.

9.3.2 Εξαιρετικά χαμηλή επίδοση στα προβλήματα διαίρεσης κλασμάτων.

Όπως αναφέρουν οι Braithwaite et al. (2017), οι μαθητές τόσο της προσομοίωσης, όσο και των εμπειρικών μελετών, εμφανίζουν μια εξαιρετικά μεγάλη δυσχέρεια στα προβλήματα της διαίρεσης κλασμάτων. Από το

Πίνακας Γ2: Ποσοστό των προβλημάτων για κάθε κατηγορία. Τα κελιά των οποίων οι τιμές είναι εξαιρετικά χαμηλές έχουν σημειωθεί με έντονο χρώμα.

	Πράξη				Σύνολο
	Πρόσθεση	Αφαίρεση	Πολλαπλασιασμός	Διαίρεση	
Σχολικά βιβλία της Κύπρου (Δημοτικό)					
Δύο κλάσματα, δύο μεικτοί, ή ένα κλάσμα και ένας μεικτός αριθμός	19% (97)	19% (97)	15% (74)	14% (70)	66% (338)
Ένας φυσικός αριθμός και ένα κλάσμα, ή ένας φυσικός αριθμός και ένας μεικτός αριθμός	0% (0)	4% (20)	13% (68)	16% (84)	34% (172)
Σύνολο	19% (97)	23% (117)	28% (142)	30% (154)	100% (510)
Ελληνικά σχολικά βιβλία(Δημοτικό)					
Δύο κλάσματα, δύο μεικτοί, ή ένα κλάσμα και ένας μεικτός αριθμός	10% (5)	14% (7)	14% (7)	22% (11)	60% (30)
Ένας φυσικός αριθμός και ένα κλάσμα, ή ένας φυσικός αριθμός και ένας μεικτός αριθμός	0% (0)	2% (1)	28% (14)	10% (5)	40% (20)
Σύνολο	10% (5)	16% (8)	42% (21)	32% (16)	100% (50)
«Στην τροχιά των ρητών» (Δημοτικό)					
Δύο κλάσματα, δύο μεικτοί, ή ένα κλάσμα και ένας μεικτός αριθμός	16% (39)	16% (39)	17% (41)	11% (26)	60% (145)
Ένας φυσικός αριθμός και ένα κλάσμα, ή ένας φυσικός αριθμός και ένας μεικτός αριθμός	0% (0)	0% (0)	33% (80)	7% (16)	40% (96)
Σύνολο	16% (39)	16% (39)	50% (121)	17% (42)	100% (241)

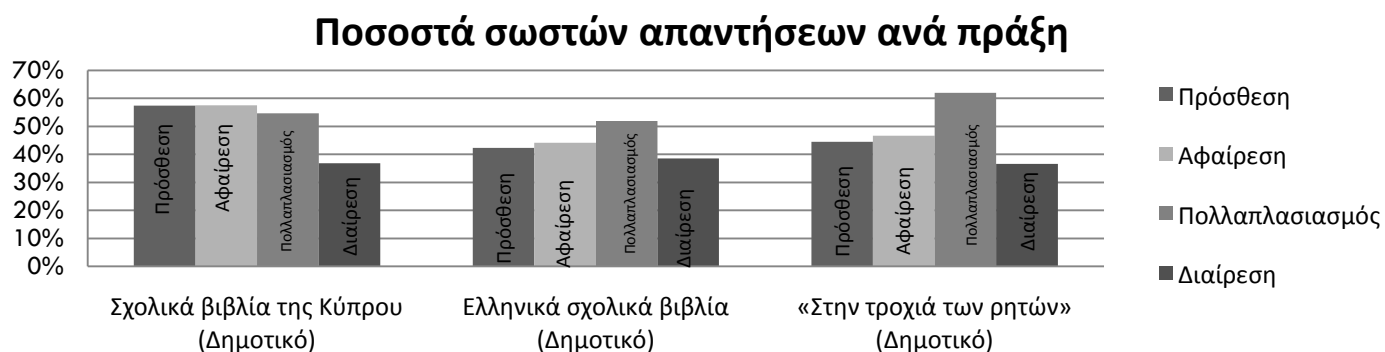
Πίνακας Γ.3: Ποσοστά σωστών απαντήσεων τα οποίο προκύπτουν από την εκτέλεση του λογισμικού FARRA.

Πράξη	Ποσοστά επιτυχίας		
	Σχολικά βιβλία της Κύπρου (Δημοτικό)	Ελληνικά σχολικά βιβλία(Δημοτικό)	«Στην τροχιά των ρητών» (Δημοτικό)
Όλες οι πράξεις μαζί	51,60%	44,20%	47,40%
Πρόσθεση/Αφαίρεση	57,50%	43,20%	45,60%
Πρόσθεση/Αφαίρεση με ομώνυμα κλάσματα	67,50%	50,20%	55,70%
Πρόσθεση/Αφαίρεση με ετερόνυμα κλάσματα	47,40%	36,20%	35,40%
Πολλαπλασιασμός	54,70%	51,90%	62,00%
Πολλαπλασιασμός με ομώνυμα κλάσματα	49,20%	48,70%	53,50%
Πολλαπλασιασμός με ετερόνυμα κλάσματα	60,20%	55,10%	70,60%
Διαίρεση	36,80%	38,50%	36,60%
Διαίρεση με ομώνυμα κλάσματα	42,10%	44,70%	43,20%
Διαίρεση με ετερόνυμα κλάσματα	31,60%	32,30%	29,90%

γράφημα Γ1 προκύπτει ότι το φαινόμενο αυτό εμφανίζεται και στις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων τις οποίες μελετούμε. Βέβαια, το ποσοστά επιτυχίας στα προβλήματα διαίρεσης είναι ελαφρώς υψηλότερα σε σχέση με τη σειρά EnVisionMATH.

9.3.3 Μεταβλητότητα στις απαντήσεις σε συγκεκριμένα προβλήματα

Οι πίνακες Π.Β.1, Π.Β.3, Π.Β.5, Π.Β.7 του Παραρτήματος δείχνουν τις απαντήσεις των μαθητών του λογισμικού FARRA και το αντίστοιχο ποσοστό το οποίο συγκέντρωσε κάθε μία από αυτές τις απαντήσεις. Επίσης, παρατίθενται και οι πίνακες Π.Β.2, Π.Β.4, Π.Β.6, Π.Β.8 του παραρτήματος, οι οποίοι περιέχουν το ποσοστό της κάθε στρατηγικής την οποία εφάρμοσε το πρόγραμμα σε κάθε μια από τις απαντήσεις. Στη συνέχεια, αναλύουμε τις απαντήσεις των μαθητών για κάθε πράξη ξεχωριστά. Στη συγκεκριμένη μελέτη, δεν θα αναφέρουμε αναλυτικά τη διαδικασία η οποία οδήγησε στην κάθε απάντηση, καθώς αυτό έχει γίνει με λεπτομέρεια στο προηγούμενο κεφάλαιο. Γενικά παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση το λογισμικό δίνει 4 τουλάχιστον απαντήσεις με ποσοστό τουλάχιστον 2% για όλα τα προβλήματα.



Γράφημα Γ1: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων ανά σειρά σχολικών βιβλίων για κάθε πράξη

9.3.4 Χρήση ποικίλων στρατηγικών από κάθε μαθητή ατομικά.

Ο παρακάτω πίνακας Γ.4 δείχνει το ποσοστό των μαθητών οι οποίοι χρησιμοποιούν διαφορετικές στρατηγικές σε ένα τουλάχιστον ζευγάρι όμοιων προβλημάτων (ίδια πράξη και ομώνυμα και τα δύο ή ετερόνυμα και τα δύο προβλήματα). Παρατηρούμε, ότι σε σχέση με το σύνολο των προβλημάτων, η μεταβλητότητα στις απαντήσεις είναι τουλάχιστον 99,8% και για τις τρεις σειρές προβλημάτων. Επίσης, σε όλες τις πράξεις η μεταβλητότητα στην επιλογή της στρατηγικής εμφανίζεται τουλάχιστον στο 74% των μαθητών με βάση τα σχολικά βιβλία της Κύπρου και τουλάχιστον στο 80% για τις άλλες δύο σειρές σχολικών βιβλίων.

9.3.5 Μεγαλύτερη συχνότητα των λαθών στρατηγικής από τα λάθη εκτέλεσης

Στον πίνακα Γ.5 φαίνονται τα ποσοστά σε σχέση με το συνολικό αριθμό των απαντήσεων (σωστές και λάθος για τη συγκεκριμένη πράξη) των λαθών εκτέλεσης και στρατηγικής για κάθε μία σειρά σχολικών εγχειριδίων.

Πίνακας Γ.4: Ποσοστό μαθητών οι οποίοι χρησιμοποιούν διαφορετικές στρατηγικές σε προβλήματα με τα ίδια χαρακτηριστικά.

	Προβλήματα πρόσθεσης {3/5 + 1/5, 4/5+3/5} {2/3 + 3/5, 3/5+1/4}	Προβλήματα αφαίρεσης {3/5 - 1/5, 4/5 -3/5} {2/3 -3/5, 3/5 -1/4}	Προβλήματα πολλαπλασιασμού {3/5 * 1/5, 4/5 *3/5} {2/3 *3/5, 3/5 *1/4}	Προβλήματα διαίρεσης {3/5 : 1/5, 4/5 : 3/5} {2/3 :3/5, 3/5 : 1/4}	Όλα τα προβλήματα
Σχολικά βιβλία της Κύπρου (Δημοτικό)	74,50%	77,50%	85,20%	85,20%	99,80%
Ελληνικά σχολικά βιβλία Βιβλίο «Στην τροχιά των ρητών» (Δημοτικό)	85,50%	86,50%	88,50%	84,70%	100,00%
Βιβλίο «Στην τροχιά των ρητών» (Δημοτικό)	84,20%	84,70%	80,40%	87,40%	99,90%

Όπως προκύπτει, τα λάθη στρατηγικής είναι πολύ περισσότερα σε σχέση με τα λάθη εκτέλεσης. Για τα προβλήματα πρόσθεσης, αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού κλασμάτων, το ποσοστό των λαθών στρατηγικής δεν υπερβαίνει το 5%. Αντιθέτως, στα προβλήματα διαίρεσης κλασμάτων, το ποσοστό των λαθών στρατηγικής είναι αρκετά υψηλό (17,53% για της σειρά των σχολικών βιβλίων της Κύπρου, 25,35%

Πίνακας Γ.5: Ποσοστά του κάθε είδους λάθους σε σχέση με το συνολικό αριθμό των απαντήσεων (είτε σωστές είτε λάθος).

	Απαντήσεις Σχολικά βιβλία της Κύπρου (Δημοτικό)			Απαντήσεις Ελληνικά σχολικά βιβλία			Απαντήσεις «Στην τροχιά των ρητών» (Δημοτικό)		
	Πρόσθεση/Αφαίρεση	Πολλαπλασιασμός	Διαίρεση	Πρόσθεση/Αφαίρεση	Πολλαπλασιασμός	Διαίρεση	Πρόσθεση/Αφαίρεση	Πολλαπλασιασμός	Διαίρεση
Λάθος εκτέλεσης	5,69%	0%	17,53%	3,33%	0%	25,35%	3,26%	0%	21,63%
Λάθη στρατηγικής	36,84%	45,33%	45,63%	49,76%	48,05%	36,18%	47,28%	37,98%	41,78%
• Στρατηγική πρόσθεσης/αφαίρεσης	-	23,38%	33,58%	-	16,23%	23,73%		14,78%	27,28%
• Στρατηγική πολλαπλασιασμού	21,14%	-	12,05%	24,66%	-	12,45%	26,95%	-	14,50%
• Στρατηγική διαίρεσης/«Χιαστί» πολλαπλασιασμού	15,70%	21,95%	-	25,10%	31,83%	-	20,33%	23,20%	-

Πίνακας Γ.6: Ποσοστά των λανθασμένων στρατηγικών στον σύνολο των λανθασμένων στρατηγικών οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν από το πρόγραμμα FARRA για τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων (σχολικά βιβλία της Κύπρου, Ελληνικά σχολικά βιβλία, «Στην τροχιά των ρητών»).

	Απαντήσεις Σχολικά βιβλία της Κύπρου (Δημοτικό)	Απαντήσεις Ελληνικά σχολικά βιβλία	Απαντήσεις «Στην τροχιά των ρητών» (Δημοτικό)
Εφαρμογή ενός κανόνα κατάλληλου για διαφορετική πράξη.	57,31%	55,45%	51,22%
Αντιμετώπιση των όρων των κλασμάτων ως ανεξάρτητες ποσότητες.	36,12%	35,42%	41,85%
Σύνολο	93,43%	90,88%	93,06%
Πολλαπλασιασμός «Χιαστί» ενώ έχουμε διαίρεση κλασμάτων.	6,57%	9,12%	6,94%

για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία και 21,63% για το βιβλίο «Στην τροχιά των ρητών»). Γενικά, τα νούμερα αυτά βρίσκονται σε συμφωνία με τις υπάρχουσες εμπειρικές μελέτες (Braithwaite et al., 2017).

9.3.6 Τα πιο κοινά λάθη στρατηγικής είναι η εφαρμογή ενός κανόνα κατάλληλου για διαφορετική πράξη και η αντιμετώπιση των όρων των κλασμάτων ως ανεξάρτητες ποσότητες.

Ο πίνακας Γ.6 δίνει το ποσοστό της κάθε ομάδας λαθών στρατηγικής σε σχέση με τις λάθος απαντήσεις συνολικά. Και σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι η εναλλακτική στρατηγική του πολλαπλασιασμού χιαστί στη διαίρεση κλασμάτων δίνει χαμηλά ποσοστά χρήσης. Οι άλλες δύο στρατηγικές χρήσης συγκεντρώνουν ποσοστά μεγαλύτερα του 90%.

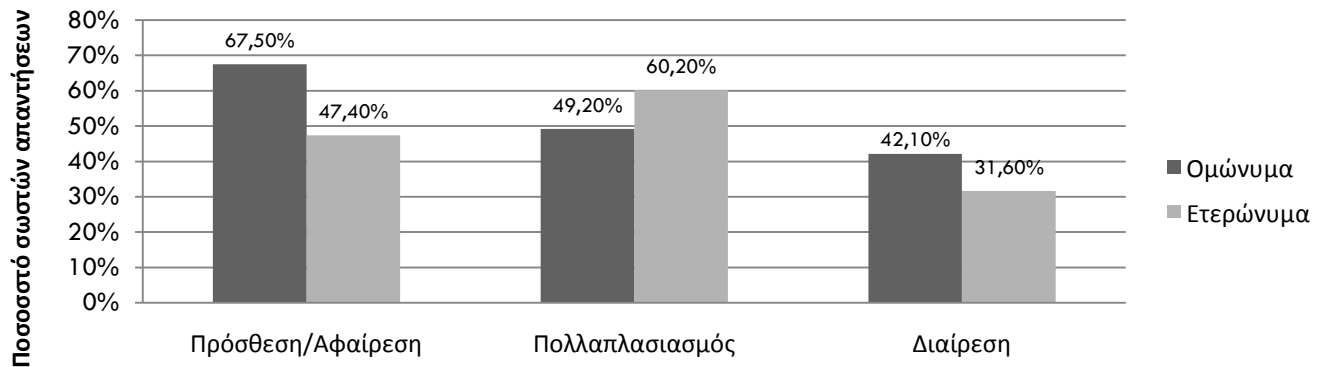
Με στόχο να εξετασθεί πιο είδος λάθους στρατηγικής είναι το πιο συχνό σε κάθε πράξη, παρατίθεται στον πίνακα Γ.5 τα είδη λαθών στρατηγικής ανάλογα με την πράξη. Παρατηρούμε ότι στα σχολικά βιβλία της Κύπρου, η λανθασμένη υπεργενίκευση της στρατηγικής της πρόσθεσης/αφαίρεσης κλασμάτων στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων (ποσοστά 23,38% και 33,58% αντίστοιχα) είναι πιο συχνή από την λανθασμένη γενίκευση του κανόνα του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης (ποσοστά 21,14% και 15,70% αντίστοιχα) σε προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης. Το φαινόμενο αυτό δε φαίνεται να ισχύει για τις δύο άλλες σειρές. Για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία το λογισμικό δείχνει ότι πιο συχνά εφαρμόζεται λανθασμένα ο κανόνας του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης σε προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης παρά εφαρμόζεται ο αλγόριθμος της πρόσθεσης/αφαίρεσης κλασμάτων σε προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Για τη σειρά «Στην τροχιά των ρητών» δεν ισχύει ένα γενικό συμπέρασμα για τα ζευγάρια των πράξεων πρόσθεση/αφαίρεση, πολλαπλασιασμός/διαίρεση. Έτσι, βλέπουμε ότι ο πολλαπλασιασμός γενικεύεται σε προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης (ποσοστό 24,66%) πολύ πιο συχνά σε σχέση με το αντίστροφο (16,23%). Για τη διαίρεση κλασμάτων όμως, γενικεύεται λανθασμένα σε μικρότερο ποσοστό (20,33%) σε προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης σε σχέση με το αντίστροφο γεγονός (27,28%).

Τέλος, παρατηρούμε, σε συμφωνία με τους Braithwaite et al. (2017), ότι η λανθασμένη εφαρμογή της στρατηγικής του πολλαπλασιασμού είναι πιο συχνή σε προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης παρά στα προβλήματα διαίρεσης κλασμάτων και για τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων.

9.3.7 Τα ποσοστά επιτυχίας στα προβλήματα με ομώνυμα κλάσματα αυξάνονται σε προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης αλλά μειώνονται σε προβλήματα πολλαπλασιασμού.

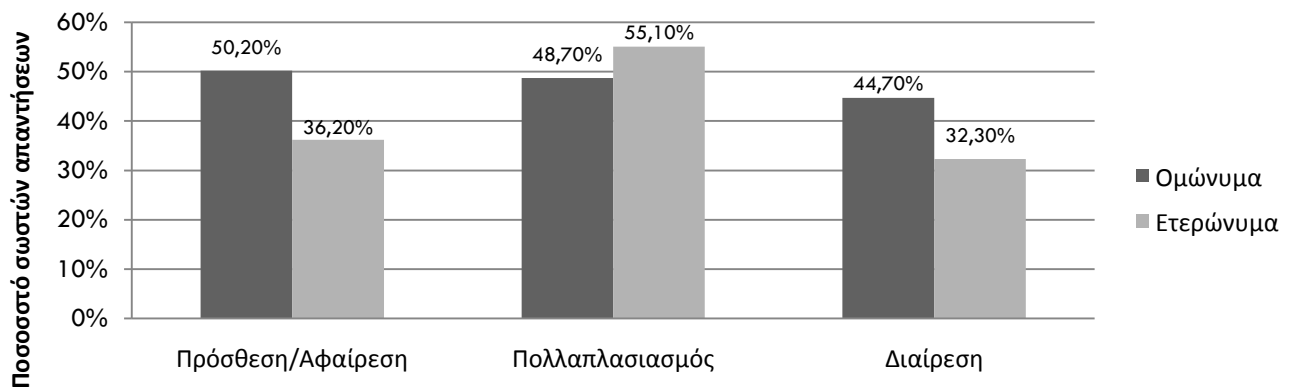
Για να ελέγξουμε εάν ισχύει ότι οι μαθητές έχουν καλύτερη επίδοση στα προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης με ομώνυμα κλάσματα και στα προβλήματα πολλαπλασιασμού με ετερόνυμα κλάσματα, παριστάνουμε τις απαντήσεις των μαθητών ανά πράξη και ανά είδος παρονομαστών των παραγόντων (ίσοι ή όχι) στα γραφήματα Γ2.1, Γ2.2, Γ2.3.

Σχολικά βιβλία της Κύπρου (Δημοτικό)



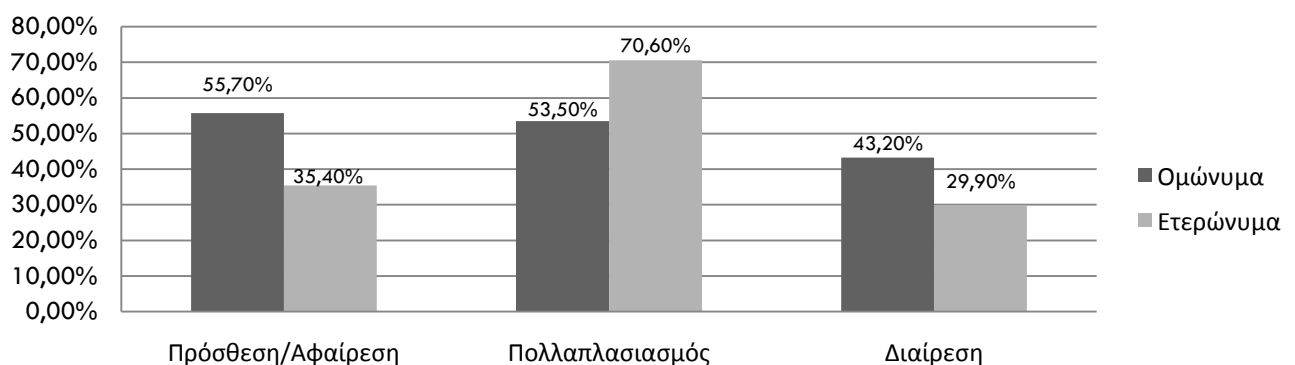
Γράφημα Γ2.1: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τη σειρά των σχολικών βιβλίων της Κύπρου (Δημοτικό) για κάθε πράξη στα ομώνυμα και ετερόνυμα κλάσματα.

Ελληνικά σχολικά βιβλία (Δημοτικό)



Γράφημα Γ2.2: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τη σειρά των Ελληνικών σχολικών βιβλίων (Δημοτικό) για κάθε πράξη στα ομώνυμα και ετερόνυμα κλάσματα.

«Στην τροχιά των ρητών» (Δημοτικό)



Γράφημα Γ2.3: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για το σχολικό εγχειρίδιο «Στην τροχιά των ρητών» για κάθε πράξη στα ομώνυμα και ετερόνυμα κλάσματα.

Βλέπουμε ότι και για τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων επιβεβαιώνεται το παραπάνω συμπέρασμα. Αν επιπλέον υπολογίσουμε τις διαφορές των ποσοστών επιτυχίας ανάμεσα στο προβλήματα με ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα έχουμε τις εξής τιμές:

	Σχολικά βιβλία της Κύπρου	Σχολικά βιβλία της Ελλάδας	Βιβλίο «Στην τροχιά των ρητών»
Πρόσθεση/Αφαίρεση	20,1%.	14%	20,3%
Πολλαπλασιασμός	11%.	6,4%.	17,1%.

Παρατηρούμε ότι το φαινόμενο είναι πιο έντονο στη σειρά «Στην τροχιά των ρητών» και τα σχολικά βιβλία της Κύπρου.

9.3.8 Το είδος λάθους με τη μεγαλύτερη συχνότητα σε κάθε πράξη ποικίλει ανάλογα με την ισότητα ή μη των παρονομαστών.

Σε αυτή την περίπτωση θα εξετάσουμε την επίπτωση την οποία έχει το είδος των κλασμάτων των προβλημάτων (ομώνυμα ή ετερώνυμα) στον καθορισμό από το FARRA της πιο συχνά επιλεγόμενης λανθασμένης στρατηγικής. Για το λόγο αυτό παραθέτουμε στον πίνακα Γ.7 τα ποσοστά χρήσης των λανθασμένων στρατηγικών και των λαθών εκτέλεσης ανά πράξη και ανά είδος παρονομαστών (ίσοι ή διαφορετικοί).

Παρατηρούμε ότι στα προβλήματα πολλαπλασιασμού κλασμάτων, η λάθος στρατηγική της πρόσθεσης/αφαίρεσης εφαρμόζεται πιο συχνά στα ομώνυμα παρά στα ετερώνυμα κλάσματα και για τις τρεις σειρές βιβλίων που μελετάμε. Το γεγονός αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με τα ευρήματα των Braithwaite et al. (2017). Επιπλέον, επαληθεύεται η παρατήρηση των Braithwaite et al. (2017) ότι ο πολλαπλασιασμός κλασμάτων γενικεύεται λανθασμένα συχνότερα σε προβλήματα πρόσθεσης ετερονύμων παρά ομωνύμων κλασμάτων. Το φαινόμενο αυτό είναι πιο έντονο στη σειρά «Στην τροχιά των ρητών» και τα Κυπριακά σχολικά βιβλία τα οποία φαίνεται να συμφωνούν περισσότερο με τη συμπεριφορά των μαθητών όπως αυτή προκύπτει από τη διεθνή βιβλιογραφία (Braithwaite et al., 2017).

Πίνακας Γ.7: Ποσοστά του κάθε είδους απάντησης για κάθε κατηγορία.

	Πρόσθεση/Αφαίρεση		Πολλαπλασιασμός		Διαίρεση	
	Ομώνυμα	Ετερόνυμα	Ομώνυμα	Ετερόνυμα	Ομώνυμα	Ετερόνυμα
Σχολικά βιβλία της Κύπρου (Δημοτικό)						
Λάθος εκτέλεσης	0%	11,38%	0%	0%	18,40%	16,65%
Λάθος στρατηγικής	32,48%	41,20%	50,80%	39,85%	39,50%	51,75%
Στρατηγική πρόσθεσης/αφαίρεσης	--	--	27,70%	19,05%	34,15%	33%
Στρατηγική πολλαπλασιασμού	18,08%	24,20%	--	--	5,35%	18,75%
Στρατηγική διαίρεσης/«Χιαστί»	14,40%	17%	23,10%	20,80%	--	--
Ελληνικά σχολικά βιβλία						
Λάθος εκτέλεσης	0%	14%	0%	0%	25,25%	25,45%
Λάθος στρατηγικής	49,78%	49,75%	51,25%	44,85%	30,05%	42,30%
Στρατηγική πρόσθεσης/αφαίρεσης	--	--	19,85%	12,60%	23,60%	23,85%
Στρατηγική πολλαπλασιασμού	24,38%	24,95%	--	--	6,45%	18,45%
Στρατηγική διαίρεσης/«Χιαστί»	25,40%	24,80%	31,40%	32,25%	--	--
«Στην τροχιά των ρητών» (Δημοτικό)						
Λάθος εκτέλεσης	0%	14,30%	0%	0%	22,35%	20,90%
Λάθος στρατηγικής	44,30%	50,25%	46,50%	29,45%	34,40%	49,15%
Στρατηγική πρόσθεσης/αφαίρεσης	--	--	20,05%	9,50%	28,50%	26,05%
Στρατηγική πολλαπλασιασμού	23,45%	30,45%	--	--	5,90%	23,10%
Στρατηγική διαίρεσης/«Χιαστί»	20,85%	19,80%	26,45%	19,95%	--	--

9.3.9 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα

Στους πίνακες Γ.8 και Γ.9 συγκεντρώνονται τόσο τα ευρήματα για την κατανομή των προβλημάτων σε κάθε σειρά σχολικών βιβλίων, όσο και τα αποτελέσματα του λογισμικού FARRA με είσοδο προβλήματα από κάθε μία από αυτές τις σειρές. Βλέπουμε ότι και σε αυτή την περίπτωση το λογισμικό επιδεικνύει τα φαινόμενα 1 - 7 του πίνακα Α.2 και για τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων. Το φαινόμενο 8 δεν εμφανίζεται στα Ελληνικά σχολικά βιβλία (βλ. πίνακα Γ.8).

Στα προβλήματα πρόσθεση/αφαίρεσης, τα σχολικά βιβλία της Κύπρου δίνουν πολύ μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας σε σχέση με τις άλλες δύο σειρές. Βέβαια, το βιβλίο «Στην τροχιά των ρητών» δίνει καλύτερα ποσοστά επιτυχίας από τα Ελληνικά σχολικά βιβλία στα προβλήματα με ομώνυμα κλάσματα (βλ. πίνακα Γ.3). Μια εξήγηση για τα χαμηλά ποσοστά επιτυχίας στα ομώνυμα κλάσματα των σειρών της Ελλάδας είναι το χαμηλό ποσοστό προβλημάτων πρόσθεσης με ομώνυμα κλάσματα (βλ. πίνακα Γ1). Το βιβλίο «Στην τροχιά των ρητών» δεν εμφανίζει

Πίνακας Γ.8: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα με τις ιδιότητες των προβλημάτων των σχολικών βιβλίων στην αριθμητική των κλασμάτων .

A/A	Ιδιότητες	Σχολικά βιβλία της Κύπρου	Ελληνικά σχολικά βιβλία (Δημοτικό)	«Στην τροχιά των ρητών»
1	Η διαίρεση είναι η λιγότερο συχνή πράξη.	ΟΧΙ Είναι η πρόσθεση	ΟΧΙ Είναι η πρόσθεση	ΟΧΙ Είναι η πρόσθεση και η αφαίρεση
2	Ποιο συχνές πράξεις.	*, /	*, /	*, /
3	Περισσότερα προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης με ομώνυμα παρά ετερόνυμα κλάσματα.	ΟΧΙ (+ ομώνυμα: 9%, ετερόνυμα: 10%) (+ ομώνυμα: 10%, ετερόνυμα: 13%)	ΟΧΙ (+ ομώνυμα: 2%, + ετερόνυμα: 8%) (- ομώνυμα: 4%, - ετερόνυμα: 12%)	ΟΧΙ (+ ομώνυμα: 9%, + ετερόνυμα: 7%) (- ομώνυμα: 8%, - ετερόνυμα: 8%)
4	Ποσοστό προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης με ομώνυμα κλάσματα $\leq 2\%$.	ΝΑΙ	ΝΑΙ για τη διαίρεση. ΣΧΕΔΟΝ ΝΑΙ για τον πολλαπλασιασμό (ποσοστό 6%).	ΝΑΙ
5	Τα προβλήματα πολλαπλασιασμού με ετερόνυμα κλάσματα είναι πολύ περισσότερα από αυτά με ομώνυμα κλάσματα	ΝΑΙ (* ομώνυμα: 2%, + ετερόνυμα: 26%)	ΝΑΙ (* ομώνυμα: 0%, + ετερόνυμα: 42%)	ΝΑΙ (* ομώνυμα: 0%, + ετερόνυμα: 50%)
6	Η μεγάλη πλειοψηφία των προβλημάτων με ομώνυμα κλάσματα περιλαμβάνει την πρόσθεση και την αφαίρεση.	ΝΑΙ (+,- ποσοστό 19%) (* , : ποσοστό 3%)	ΟΧΙ (+,- ποσοστό 6%) (* , : ποσοστό 6%)	ΝΑΙ (+,- ποσοστό 17%) (* , : ποσοστό 2%)
7	Για τα προβλήματα με ετερόνυμα κλάσματα, τα περισσότερα περιλαμβάνουν πολλαπλασιασμό και διαίρεση.	ΝΑΙ (+ < - < * < /) (Ποσοστά 10% - 12% - 26% - 30% αντίστοιχα)	ΝΑΙ (+ < - < *) (Ποσοστά 8% - 12% - 26% - 42% αντίστοιχα)	ΝΑΙ (+ = - < / *) (Ποσοστά 8% - 17% - 16% - 16% αντίστοιχα)
8	Εξαιρετικά χαμηλό ποσοστό πρόσθεσης και αφαίρεσης στα προβλήματα με παράγοντα φυσικό αριθμό.	ΝΑΙ (+ : ποσοστό 0%) (- : ποσοστό 4%)	ΝΑΙ (+ : ποσοστό 0%) (- : ποσοστό 2%)	ΝΑΙ (+ : ποσοστό 0%) (- : ποσοστό 0%)
9	Η μεγάλη πλειοψηφία των προβλημάτων με παράγοντα φυσικό αριθμό περιλαμβάνει τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση.	ΝΑΙ (* : ποσοστό 13%) (/ : ποσοστό 16%)	ΝΑΙ (* : ποσοστό 28%) (/ : ποσοστό 10%)	ΝΑΙ (* : ποσοστό 33%) (/ : ποσοστό 7%)
10	Στα προβλήματα με παράγοντες μόνο κλάσματα και μεικτούς πλειοψηφούν η πρόσθεση και η αφαίρεση.	ΝΑΙ (/ < * < + = -) (Ποσοστά 14% - 15% - 19% - 19% αντίστοιχα)	ΟΧΙ (+ < - = * < /) (Ποσοστά 10% - 14% - 14% - 22% αντίστοιχα)	ΟΧΙ (/ < - = + < *) (Ποσοστά 11% - 16% - 16% - 17% αντίστοιχα)

εξαιρετικά χαμηλά ποσοστά προβλημάτων πρόσθεσης/αφαίρεσης στα ομώνυμα κλάσματα και ίσως η καλύτερη απόδοσή του από τα Ελληνικά σχολικά βιβλία στα προβλήματα με ομώνυμα κλάσματα να οφείλεται σε αυτό το γεγονός. Επιπλέον, μια άλλη αιτία είναι το μεγάλο ποσοστό προβλημάτων πολλαπλασιασμού. Μάλιστα, αυτά τα προβλήματα εισάγονται πολύ νωρίς μαζί με τα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης. Δηλαδή, ενώ τα προβλήματα πολλαπλασιασμού στα σχολικά βιβλία της Κύπρου εισάγονται μετά από 214 προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης, στο εγχειρίδιο «Στην τροχιά των ρητών» το πρώτο πρόβλημα πολλαπλασιασμού εμφανίζεται ως το 20^ο πρόβλημα στη σειρά. Για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία είναι το 14^ο στη σειρά. Αποτέλεσμα αυτής της από νωρίς εμφάνισης των προβλημάτων πολλαπλασιασμού καθώς και του μεγάλου αριθμού τους είναι ο αλγόριθμος να ενισχύει τη σωστή στρατηγική του πολλαπλασιασμού σε προβλήματα πολλαπλασιασμού κλασμάτων, αλλά ταυτόχρονα να προσπαθεί να την υπεργενικεύσει λανθασμένα και σε προβλήματα πρόσθεσης ή αφαίρεσης.

Πίνακας Γ.9: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα με τη συμπεριφορά του προγράμματος FARRA

A/A	Προβλέψεις	Σχολικά βιβλία της Κύπρου	Ελληνικά σχολικά βιβλία (Δημοτικό)	«Στην τροχιά των ρητών»
1	Χαμηλή επίδοση συνολικά	ΝΑΙ 51,6%	ΝΑΙ 44,2%	ΝΑΙ 47,4%
2	Εξαιρετικά χαμηλή επίδοση στα προβλήματα διαίρεσης κλασμάτων.	ΣΧΕΔΟΝ ΝΑΙ 36,8%	ΣΧΕΔΟΝ ΝΑΙ 38,5%	ΣΧΕΔΟΝ ΝΑΙ 36,6%
3	Μεταβλητότητα στις απαντήσεις σε συγκεκριμένα προβλήματα	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
4	Χρήση ποικίλων στρατηγικών από κάθε μαθητή ατομικά.	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
5	Μεγαλύτερη συχνότητα των λαθών στρατηγικής από τα λάθη εκτέλεσης	ΝΑΙ 93%	ΝΑΙ 92%	ΝΑΙ 93%
6	Τα πιο κοινά λάθη στρατηγικής είναι η εφαρμογή ενός κανόνα κατάλληλου για διαφορετική πράξη και η αντιμετώπιση των όρων των κλασμάτων ως ανεξάρτητες ποσότητες.	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
8	Τα ποσοστά επιτυχίας στα προβλήματα με ομώνυμα κλάσματα αυξάνονται σε προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης αλλά μειώνονται σε προβλήματα πολλαπλασιασμού.	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
8	Το πιο συχνό είδος λάθους σε κάθε πράξη ποικίλει ανάλογα με την ισότητα ή μη των παρονομαστών.	(+,-)→(*) (Ομώνυμα > Ετερώνυμα) (*)→(+,-) (Ομώνυμα < Ετερώνυμα)	(+,-)→(*) (Ομώνυμα > Ετερώνυμα) (*)→(+,-) (Ομώνυμα ≈ Ετερώνυμα)	(+,-)→(*) (Ομώνυμα > Ετερώνυμα) (*)→(+,-) (Ομώνυμα < Ετερώνυμα)

Αναφορικά με τα προβλήματα πολλαπλασιασμού κλασμάτων, η σειρά «Στην τροχιά των ρητών» εμφανίζει πολύ πιο υψηλά ποσοστά σε σχέση με τις άλλες δύο σειρές. Ιδιαίτερα στα ετερώνυμα κλάσματα, το ποσοστό επιτυχίας για τη σειρά «Στην τροχιά των ρητών» εμφανίζει ποσοστά σωστής απάντησης κατά 10 τουλάχιστον μονάδες μεγαλύτερα σε σχέση με τις άλλες δύο σειρές. Το φαινόμενο αυτό εξηγείται τόσο από το μεγάλο πλήθος των προβλημάτων πολλαπλασιασμού με ετερώνυμα κλάσματα, καθώς και από την από νωρίς εισαγωγή των προβλημάτων αυτών μαζί με τα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης. Βέβαια, αυτή η επιλογή φαίνεται ότι ναι μεν διευκολύνει τη μάθηση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων από τους μαθητές, αλλά ταυτόχρονα δημιουργεί δυσχέρειες στην εμπέδωση των υπόλοιπων πράξεων.

Τέλος, στα προβλήματα διαίρεσης κλασμάτων παρατηρούμε ότι τα ποσοστά επιτυχίας και για τις τρεις σειρές υπό μελέτη δε διαφέρουν σημαντικά και είναι αρκετά υψηλότερα σε σχέση με τα ποσοστά της σειράς EnVisionMATH. Επίσης, παρόλο που το ποσοστό των προβλημάτων διαίρεσης κλασμάτων για τη σειρά «Στην τροχιά των ρητών» είναι χαμηλότερο (17%) σε σχέση το αντίστοιχο ποσοστό των άλλων δύο σειρών, δε φαίνεται αυτό να επηρεάζει σημαντικά το συνολικό ποσοστά επιτυχίας των μαθητών. Ο κύριος λόγος για το γεγονός αυτό είναι ότι αν κάποιος εφαρμόσει τη στρατηγική του πολλαπλασιασμού στη διαίρεση κλασμάτων, διαιρέσει δηλαδή αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή, θα προκύψει το σωστό αποτέλεσμα. Κατά συνέπεια, λόγω του μεγάλου αριθμού προβλημάτων πολλαπλασιασμού με ετερόνυμα κλάσματα, η στρατηγική του πολλαπλασιασμού θα υπεργενικεύεται συχνά από το λογισμικό σε προβλήματα διαίρεσης και θα δίνει το σωστό αποτέλεσμα.

Ως γενικό συμπέρασμα βλέπουμε ότι οι τρεις σειρές σχολικών βιβλίων ταυτίζονται στα βασικά χαρακτηριστικά τους. Πιο μεγάλος βαθμός ταύτισης παρατηρείται μεταξύ των Κυπριακών σχολικών βιβλίων και του βιβλίου «Στην τροχιά των ρητών».

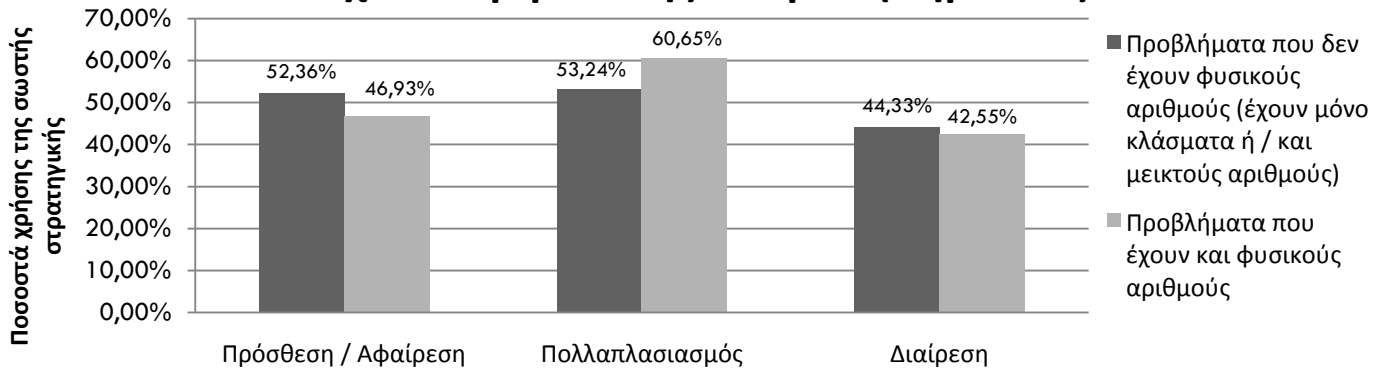
Στο υπόλοιπο της παρούσας ενότητας περιλαμβάνονται κάποια επιπλέον πειράματα με τη βοήθεια του λογισμικού FARRA.

9.4 Συσχέτιση μεταξύ του είδους των παραγόντων των προβλημάτων (φυσικοί αριθμοί, κλάσματα, μεικτοί) και την επιλογή της σωστής στρατηγικής.

Μια άλλη σημαντική παράμετρος της μελέτης των Braithwaite et al. (2017) είναι το πώς επηρεάζει το είδος των παραγόντων των προβλημάτων (φυσικοί αριθμοί, κλάσματα, μεικτοί) τη συχνότητα επιλογής της σωστής στρατηγικής. Με σκοπό να απαντήσουμε στο παραπάνω ερώτημα, τροποποιήσαμε τις ερωτήσεις του τεστ του FARRA έτσι ώστε να περιλαμβάνει και προβλήματα με συνδυασμό κλασμάτων, ακεραίων και μεικτών αριθμών. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα γραφήματα Γ3.1, Γ3.2, Γ3.3.

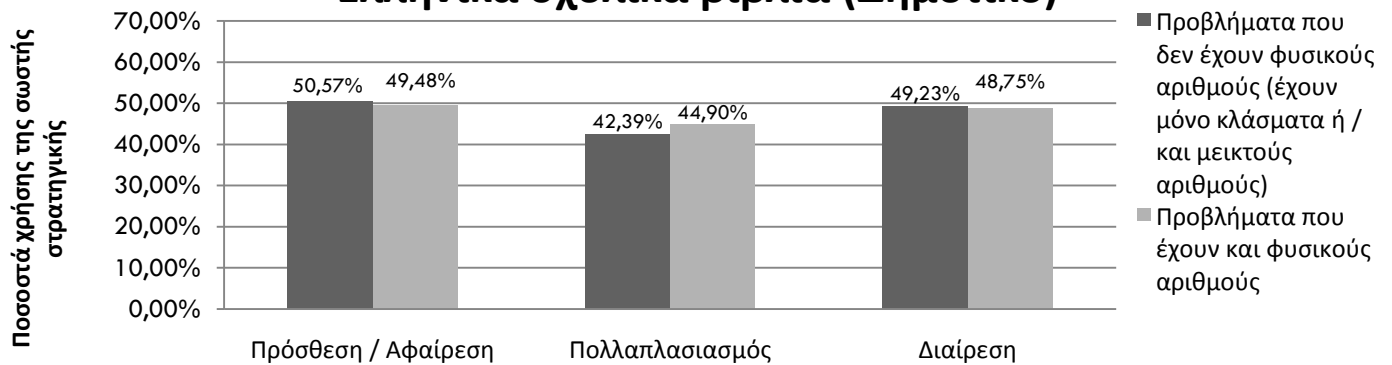
Παρατηρούμε ότι και εδώ επιβεβαιώνεται το συμπέρασμα των Braithwaite et al. (2017) ότι η σωστή στρατηγική για τα προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης κλασμάτων εφαρμόζεται πιο συχνά στα προβλήματα τα οποία αποτελούνται μόνο από μεικτούς και κλάσματα σε σχέση με τα προβλήματα τα οποία περιλαμβάνουν και ακεραίους αριθμούς. Επιπρόσθετα, η σωστή στρατηγική στα προβλήματα πολλαπλασιασμού κλασμάτων, χρησιμοποιήθηκε πιο συχνά σε αυτά με φυσικούς αριθμούς παρά στα υπόλοιπα. Τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν και για τις τρεις σειρές των βιβλίων τις οποίες μελετάμε. Είναι όμως πιο έντονα στα σχολικά βιβλία της Κύπρου και στο βιβλίο «Στην τροχιά των ρητών». Για τα σχολικά βιβλία της Ελλάδας ισχύει πάλι το παραπάνω μοτίβο, αλλά η διαφορά των ποσοστών των δύο κατηγοριών (προβλήματα που περιέχουν ή όχι ακεραίους) είναι πολύ μικρή (μικρότερη από 2,51%). Για την σειρά της Κύπρου και τη σειρά «Στην τροχιά των ρητών» οι διαφορές είναι τουλάχιστον 5%.

Σχολικά βιβλία της Κύπρου (Δημοτικό)



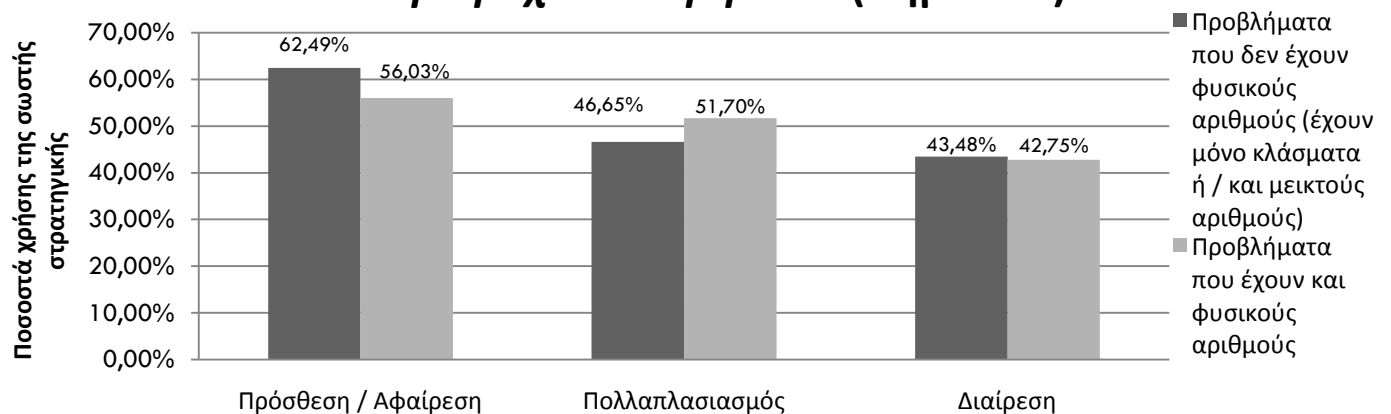
Γράφημα Γ3.1: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τη των σχολικών βιβλίων της Κύπρου (Δημοτικό) για κάθε πράξη στα ομώνυμα και ετερόνυμα κλάσματα.

Ελληνικά σχολικά βιβλία (Δημοτικό)



Γράφημα Γ3.2: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τη σειρά των Ελληνικών σχολικών βιβλίων (Δημοτικό) για κάθε πράξη στα ομώνυμα και ετερόνυμα κλάσματα.

«Στην τροχιά των ρητών» (Δημοτικό)



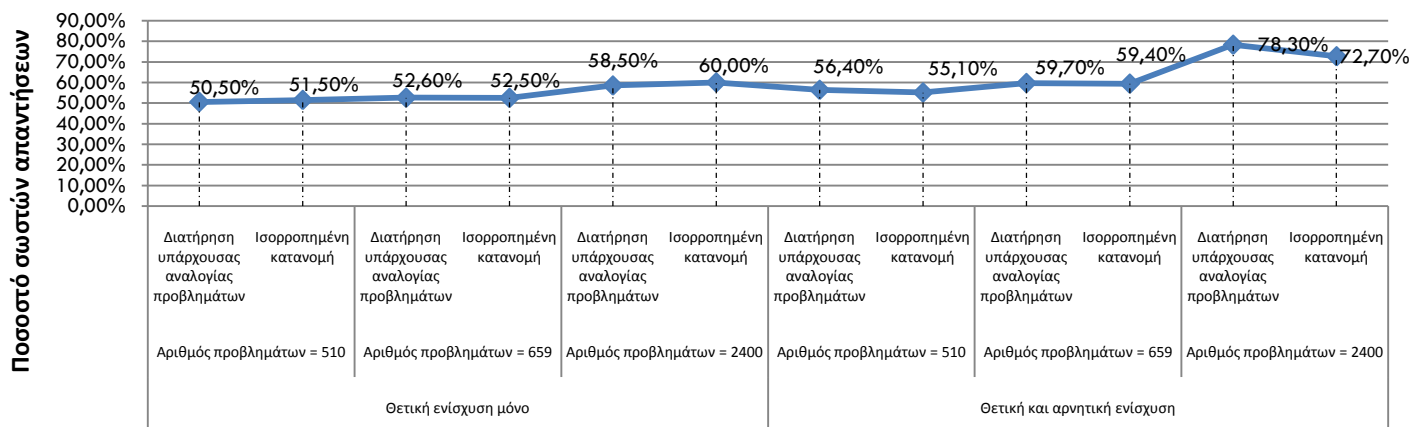
Γράφημα Γ3.3: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για το σχολικό εγχειρίδιο «Στην τροχιά των ρητών» για κάθε πράξη στα ομώνυμα και ετερόνυμα κλάσματα.

9.5 Η επίδραση των προβλημάτων εισόδου στη μάθηση

Στα γραφήματα Γ4.1, Γ4.2, Γ4.3 μεταβάλλουμε τον αριθμό των προβλημάτων, το είδος της ενίσχυσης των σωστών και λάθος στρατηγικών και την κατανομή των προβλημάτων όπως στην ενότητα 8.4. Παρατηρούμε ότι όταν είναι απύσχα η αρνητική ενίσχυση, υπάρχει μια βελτίωση στο ποσοστό των σωστών απαντήσεων όταν αυξάνεται ο αριθμός των προβλημάτων ή όταν τα προβλήματα κατανέμονται ομοιόμορφα στις τέσσερις πράξεις. Μεγαλύτερη βελτίωση παρατηρείται στο βιβλίο «Στην τροχιά των ρητών» για τις κατηγορίες με αριθμό προβλημάτων 659 και 2400 όταν προστίθεται και ο παράγοντας της ισορροπημένης κατανομής (10% βελτίωση για αριθμό προβλημάτων = 659 και 7% για αριθμό προβλημάτων = 2400). Επιπλέον, όταν είναι απύσχα η αρνητική ενίσχυση, η επιπλέον αύξηση του αριθμού των προβλημάτων για το βιβλίο «Στην τροχιά των ρητών» από 659 σε 2400, δε φαίνεται να βελτιώνει την επίδοση.

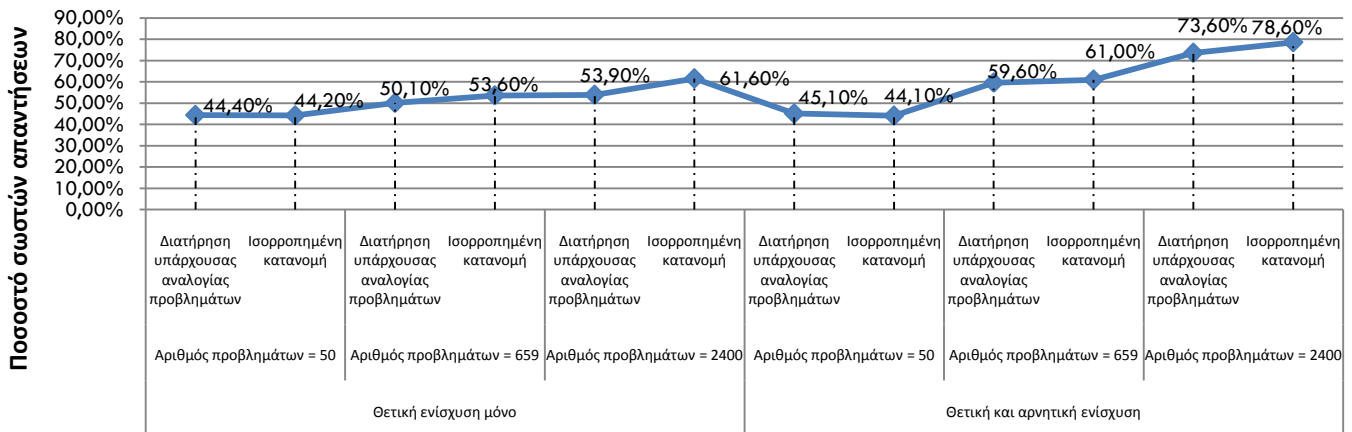
Μεγαλύτερη και πιο σταθερή αύξηση έχουμε και για τις τρεις σειρές των σχολικών βιβλίων όταν προστίθεται η αρνητική ενίσχυση. Για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία έχουμε πάντα αύξηση καθώς μετακινούμαστε δεξιά στον οριζόντιο άξονα των παραμέτρων. Για τα Κυπριακά σχολικά βιβλία, η προσθήκη ισορροπημένης κατανομής όταν ο αριθμός των προβλημάτων είναι 2400 μειώνει την επίδοση. Επιπλέον, το ίδιο συμβαίνει για το βιβλίο «Στην τροχιά των ρητών» όταν ο αριθμός των προβλημάτων γίνεται 2400 αλλά η κατανομή γίνεται από ισορροπημένη, μη ισορροπημένη.

Σχολικά βιβλία της Κύπρου



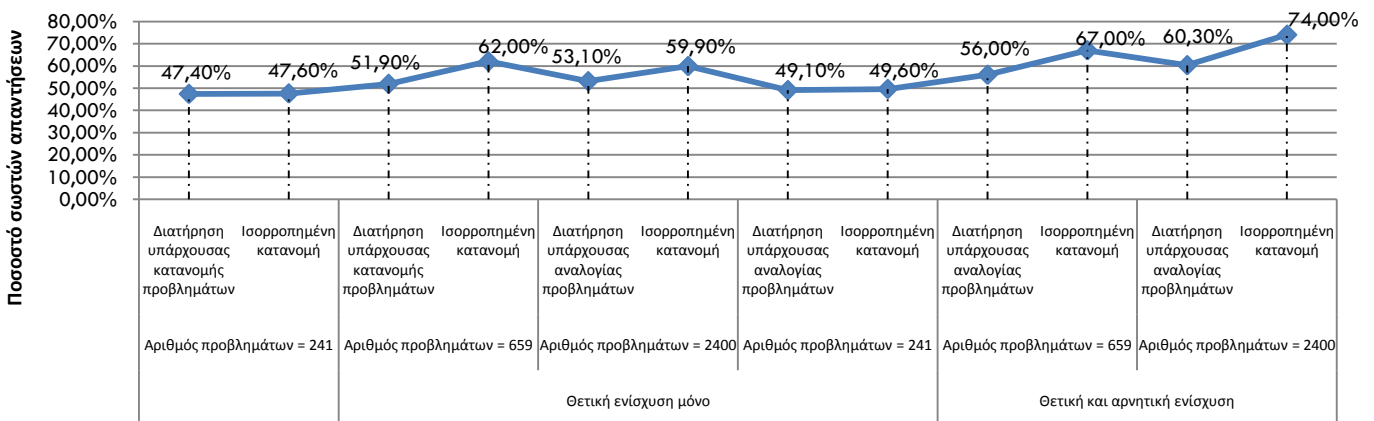
Γράφημα Γ4.1: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τη σειρά των σχολικών βιβλίων της Κύπρου για κάθε συνδυασμό των παραμέτρων (αριθμός προβλημάτων, ισορροπημένη ή όχι κατανομή των προβλημάτων, ύπαρξη ή μη και αρνητικής ενίσχυσης).

Ελληνικά σχολικά βιβλία (Δημοτικό)



Γράφημα Γ4.2: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τη σειρά των σχολικών βιβλίων της Ελλάδας για κάθε συνδυασμό των παραμέτρων (αριθμός προβλημάτων, ισορροπημένη ή όχι κατανομή των προβλημάτων, ύπαρξη ή μη και αρνητικής ενίσχυσης).

"Στην τροχιά των ρητών"



Γράφημα Γ4.3: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τη σειρά του σχολικών εγχειριδίου «Στην τροχιά των ρητών» για κάθε συνδυασμό των παραμέτρων (αριθμός προβλημάτων, ισορροπημένη ή όχι κατανομή των προβλημάτων, ύπαρξη ή μη και αρνητικής ενίσχυσης).

Το μέγιστο ποσοστό επιτυχίας είναι αρκετά υψηλό (74% με 78,60%) σε όλες τις σειρές, γεγονός που καταδεικνύει τα μεγάλα περιθώρια βελτίωσης των σχολικών εγχειριδίων αναφορικά με την κατανομή των προβλημάτων στην αριθμητική των κλασμάτων

9.6 Ποσοστά επιτυχίας για διάφορες τιμές των παραμέτρων

Με σκοπό να εξετάσουμε τη δυναμική των σχολικών βιβλίων τα οποία μελετάμε, παραθέτουμε όπως και στην ενότητα 8.5, μια σειρά πειραμάτων κατά τα οποία οι τιμές των παραμέτρων e , d , γ μεταβάλλονται. Τα αποτελέσματα μετά την εκτέλεση του FARRA εικονίζονται στις ομάδες γραφημάτων Γ5.1, Γ5.2, Γ5.3.

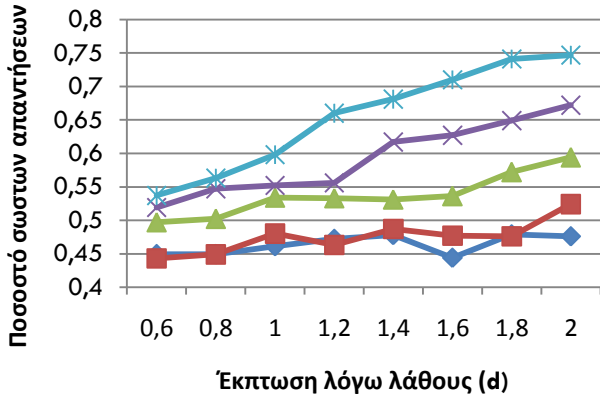
Μια πρώτη παρατήρηση είναι η μεγάλη αστάθεια την οποία παρουσιάζουν τα Ελληνικά σχολικά βιβλία. Το φαινόμενο αυτό είναι έντονο για τις τιμές της παραμέτρου γ από 0.5 έως 1.5. Παρόλα αυτά, υπάρχει αρκετή αστάθεια και σε μεγαλύτερες τιμές. Δηλαδή, η αύξηση του γ , ταυτόχρονα με την αύξηση της έκπτωσης λάθους d ,

δε φαίνεται να εξασφαλίζει σταθερά και συστηματικά καλύτερα ποσοστά επιτυχίας για τους μαθητές. Ειδικότερα, για τις καμπύλες με τιμές του e μικρότερες ή ίσες με 0.02 η αύξηση, αν υπάρχει είναι αναιμική. Συμπερασματικά, για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία του Δημοτικού, λόγω του χαμηλού αριθμού των προβλημάτων και τις ανισοκατανομής ανάμεσα στα προβλήματα των τεσσάρων πράξεων (περισσότερα προβλήματα στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση με ετερόνυμα κλάσματα) φαίνεται να εμποδώνονται κάποιες λάθος στρατηγικές οι οποίες τελικά δεν μπορούν να αλλάξουν ακόμα και αν ο μαθητής είναι συνεπής και έχει ένα σταθερό τρόπο αντιμετώπισης του λάθους και του σωστού. Οι άλλες δύο σειρές (σχολικά βιβλία της Κύπρου και το βιβλίο «Στην τροχιά των ρητών») ακολουθούν κοινό μοτίβο εκτός από τις καμπύλες $\gamma = 0.5$ κατά τις οποίες το εγχειρίδιο «Στην τροχιά των ρητών» εμφανίζει μια αστάθεια. Για τιμές της παραμέτρου γ μεγαλύτερες από 0.5 δεν βλέπουμε κάποια αστάθεια. Δηλαδή, τα ποσοστά επιτυχίας αυξάνονται όσο αυξάνονται και οι τιμές των παραμέτρων e , d . Μια βασική διαφορά ανάμεσα στα σχολικά βιβλία της Κύπρου και το βιβλίο «Στην τροχιά των ρητών» είναι ότι ο ρυθμός αύξησης καθώς και οι μέγιστες τιμές για κάθε καμπύλη είναι μεγαλύτερες για τα σχολικά βιβλία της Κύπρου. Συγκεκριμένα, παραθέτουμε ενδεικτικά τις μέγιστες τιμές όταν μεταβάλλεται η παράμετρος d όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

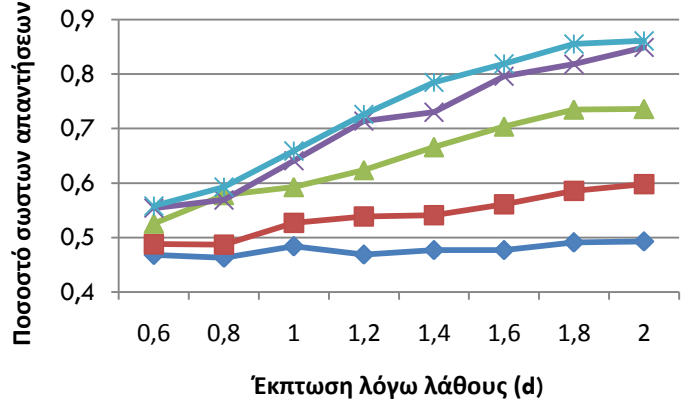
$e = 0.04$	$\gamma=0.5$	$\gamma=1$	$\gamma=1.5$	$\gamma=2$	$\gamma=2.5$	$\gamma=3$
Σχολικά βιβλία της Κύπρου (Δημοτικό)	75%	86%	85%	88%	87%	87%
Ελληνικά σχολικά βιβλία (Δημοτικό)	47%	48%	52%	56%	59%	61%
«Στην τροχιά των ρητών» (Δημοτικό)	57%	66%	70%	72%	71%	72%

Είναι εμφανές ότι τα σχολικά βιβλία της Κύπρου έχουν μεγαλύτερες μέγιστες τιμές σε σχέση με τα άλλα δύο εγχειρίδια. Αμέσως μικρότερες τιμές εμφανίζει το βιβλίο «Στην τροχιά των ρητών» και τις μικρότερες μέγιστες τιμές εμφανίζουν τα Ελληνικά σχολικά βιβλία. Πιστεύουμε ότι το βιβλίο «Στην τροχιά των ρητών» αν και εμφανίζει το μοτίβο ανόδου όπως και τα σχολικά βιβλία της Κύπρου, η αύξηση των ποσοστών επιτυχίας δεν είναι τόσο μεγάλη όσο τα σχολικά βιβλία της Κύπρου λόγω του μεγάλου αριθμού προβλημάτων πολλαπλασιασμού στα ετερόνυμα κλάσματα. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα, ακόμη και αν η παράμετρος της έκπτωσης λάθους αυξάνεται τιμωρώντας έτσι τις λάθος απαντήσεις σε μεγαλύτερο βαθμό, τα πολλά προβλήματα πολλαπλασιασμού συνεχίζουν να υπερκεράζουν αυτή την αύξηση λόγω της μεγάλης συχνότητας τους και κατά συνέπεια, της μεγάλης συχνότητας υπεργενίκευσης του κανόνα του πολλαπλασιασμού κλασμάτων.

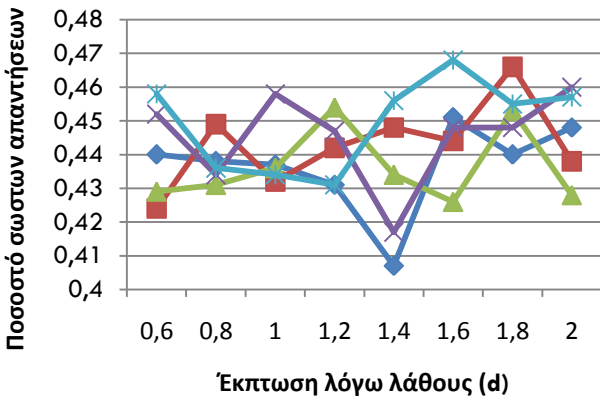
Σχολικά βιβλία της Κύπρου
 $\gamma = 0,5$



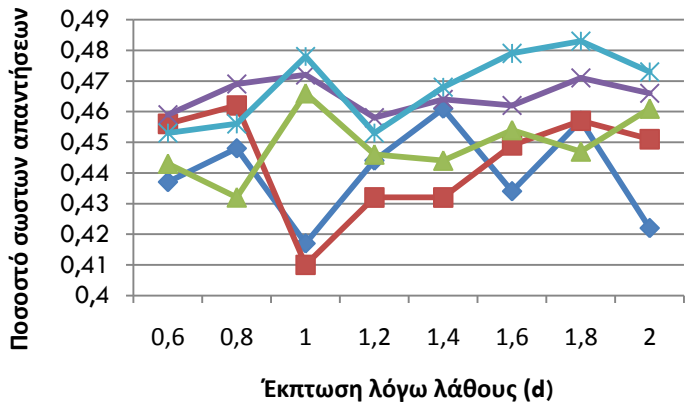
Σχολικά βιβλία της Κύπρου
 $\gamma = 1$



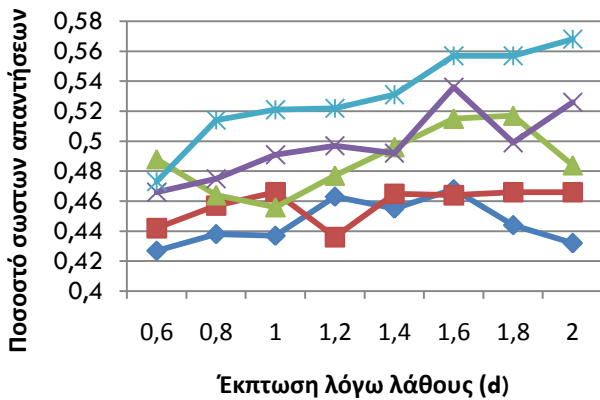
Ελληνικά σχολικά βιβλία (Δημοτικό)
 $\gamma = 0,5$



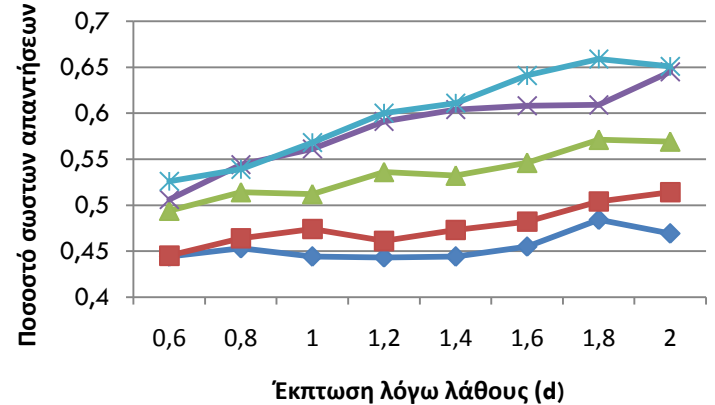
Ελληνικά σχολικά βιβλία (Δημοτικό)
 $\gamma = 1$



«Στην τροχιά των ρητών» (Δημοτικό)
 $\gamma = 0,5$



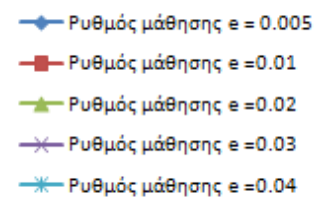
«Στην τροχιά των ρητών» (Δημοτικό)
 $\gamma = 1$

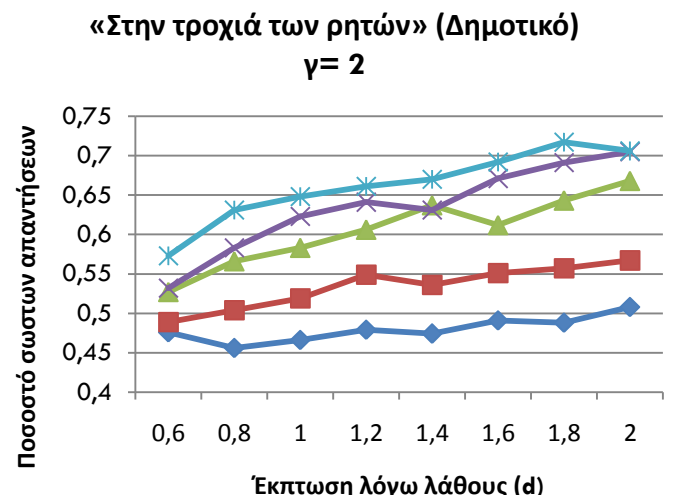
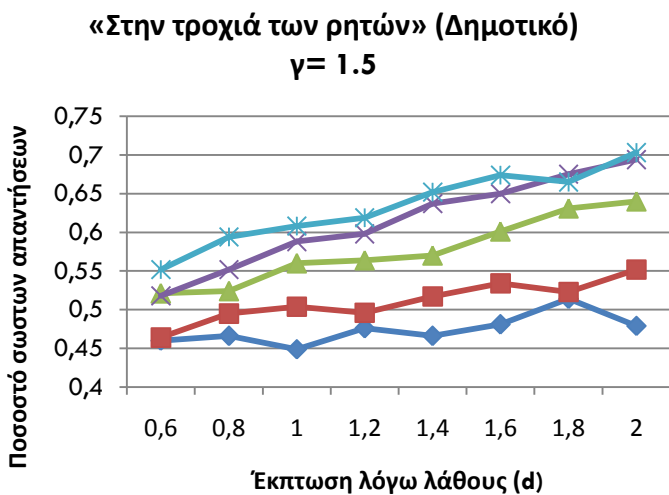
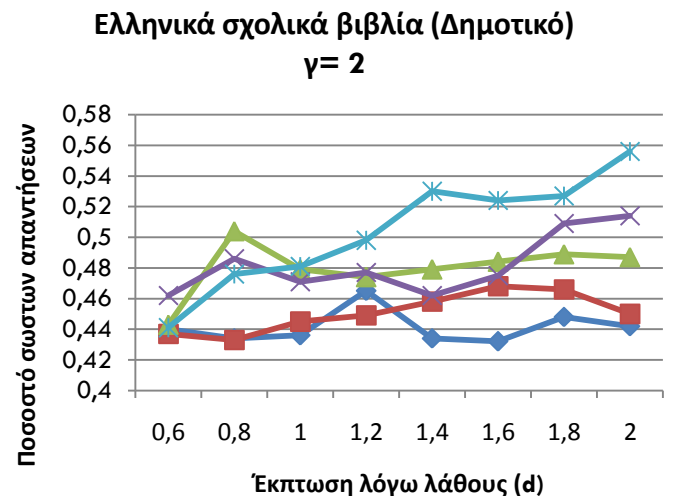
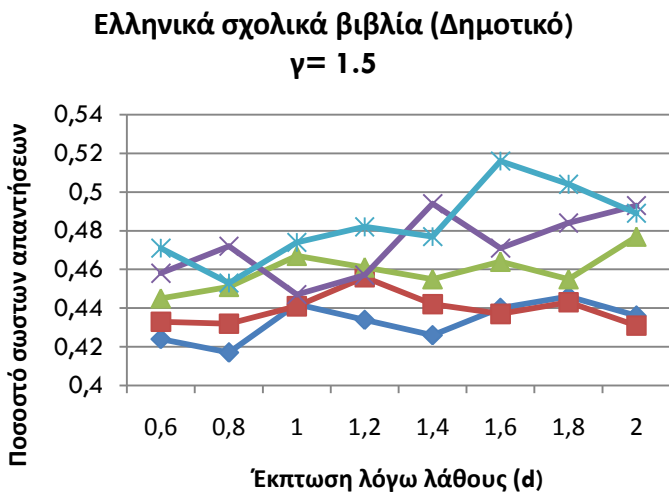
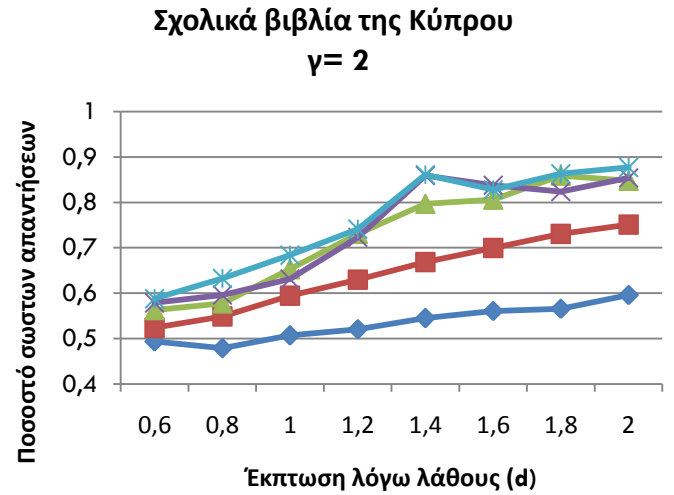
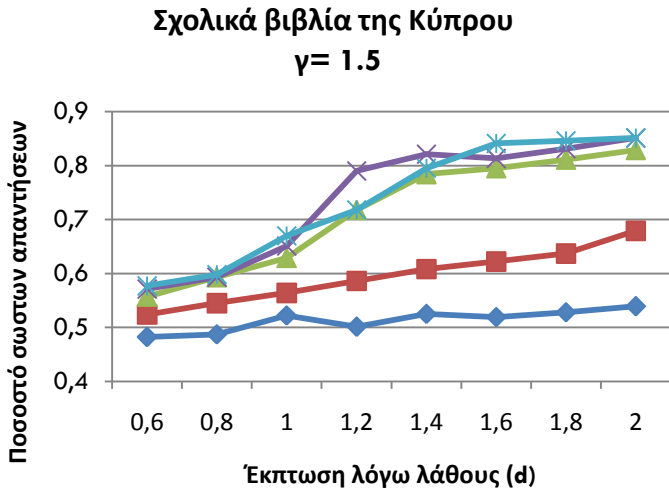


Γραφήματα Γ5.1: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τη σειρά των σχολικών βιβλίων

EnVisionMATH όταν $\gamma \in \{0.5, 1\}$, $e \in \{0.005, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04\}$ και

$d \in \{0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2\}$



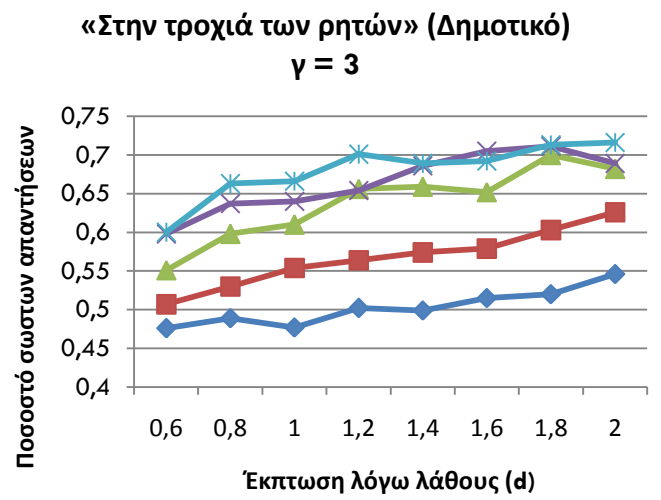
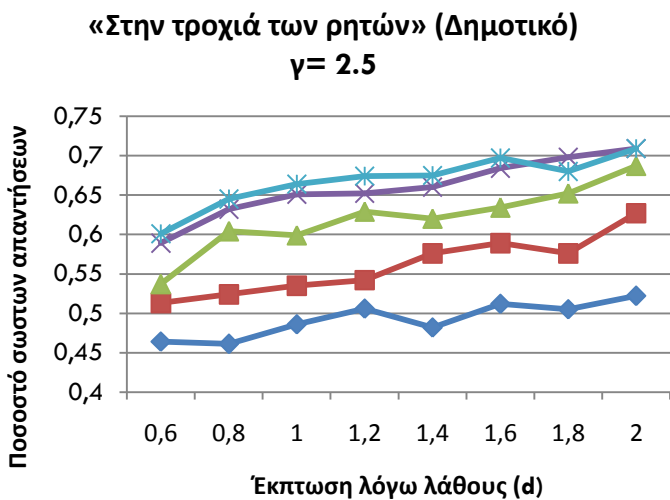
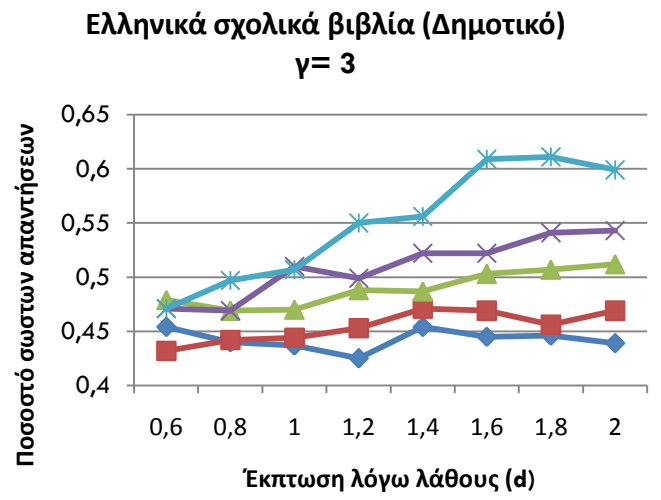
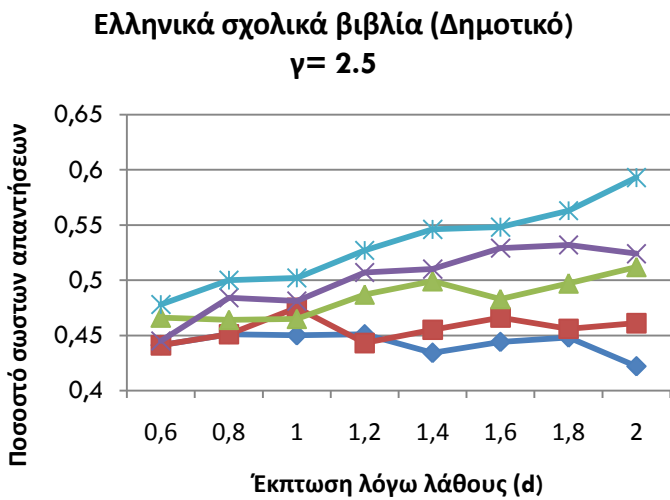
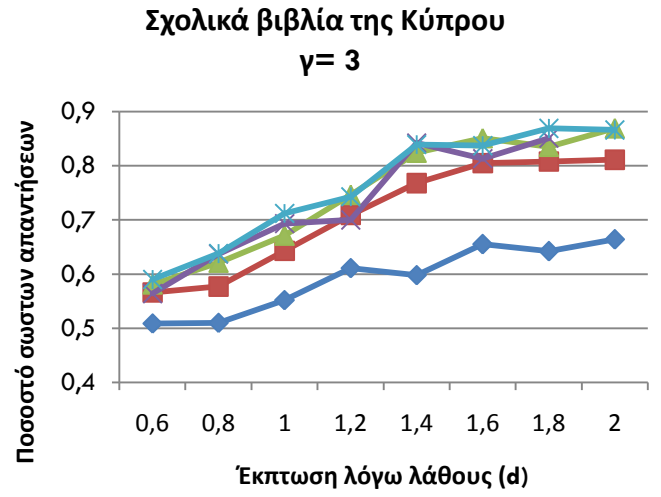
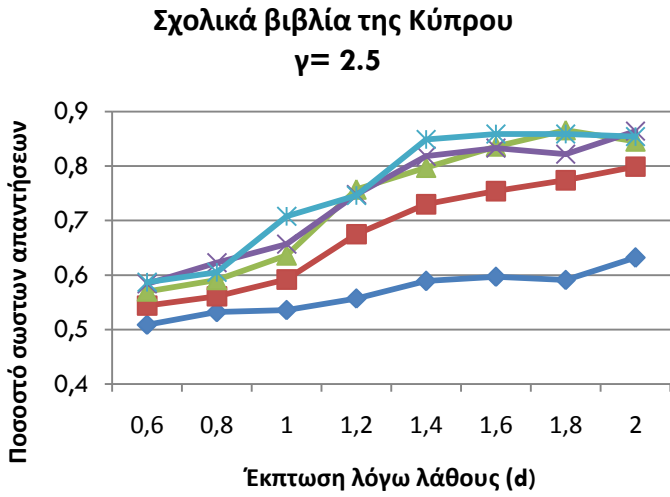


Γραφήματα Γ5.2: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τη σειρά των σχολικών βιβλίων

EnVisionMATH όταν $\gamma \in \{1.5, 2\}$, $e \in \{0.005, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04\}$ και

$d \in \{0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2\}$

- Ρυθμός μάθησης $e = 0.005$
- Ρυθμός μάθησης $e = 0.01$
- ▲— Ρυθμός μάθησης $e = 0.02$
- ×— Ρυθμός μάθησης $e = 0.03$
- *— Ρυθμός μάθησης $e = 0.04$



Γραφήματα Γ5.3: Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τη σειρά των σχολικών βιβλίων

EnVisionMATH όταν $\gamma \in \{2.5, 3\}$, $e \in \{0.005, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04\}$ και

$d \in \{0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2\}$

- ◆ Ρυθμός μάθησης $e = 0.005$
- Ρυθμός μάθησης $e = 0.01$
- ▲ Ρυθμός μάθησης $e = 0.02$
- ✖ Ρυθμός μάθησης $e = 0.03$
- ✱ Ρυθμός μάθησης $e = 0.04$

10 Συμπεράσματα – Συζήτηση

Στην παρούσα εργασία μελετήσαμε τα προβλήματα στην αριθμητική των κλασμάτων τόσο των σχολικών βιβλίων των ΗΠΑ, Ελλάδας και Κύπρου για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο μαζί, όσο και των σχολικών βιβλίων της Ελλάδας και Κύπρου για το Δημοτικό αποκλειστικά. Επιπλέον, αναλύθηκε και ένα εναλλακτικό σχολικό εγχειρίδιο για το Δημοτικό. Τα προβλήματα ταξινομήθηκαν με βάση μια ποικιλία χαρακτηριστικών (είδος πράξης, ίσοι ή όχι παρονομαστές, παράγοντες κλάσματα ή φυσικοί ή μεικτοί αριθμοί, ακολουθία των πράξεων). Βρέθηκαν αρκετές ομοιότητες στην κατανομή των προβλημάτων, όπως μικρός αριθμός προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης με ομώνυμα κλάσματα, περισσότερα προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης παρά πρόσθεσης και αφαίρεσης με ετερόνυμα κλάσματα και εξαιρετικά μικρός αριθμός προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης με έναν από τους δύο παράγοντες φυσικό αριθμό.

Στη συνέχεια, με στόχο να διερευνηθεί σε ποιο βαθμό η κατανομή την οποία παρατηρήσαμε στα διάφορα είδη προβλημάτων επηρεάζει την επίδοση των μαθητών, χρησιμοποιήσαμε προσομοίωση με τη βοήθεια το λογισμικού FARRA (Braithwaite et al., 2017). Σημαντικό εύρημα αποτελεί το γεγονός ότι η προσομοίωση προέβλεψε τα 8 συνήθη φαινόμενα (βλ. πίνακα Α.1) τα οποία διαπιστώνει η έρευνα στην αριθμητική των κλασμάτων (Braithwaite et al., 2017) για όλες τις σειρές σχολικών βιβλίων τα οποία μελετήσαμε. Συγκεκριμένα έδειξε χαμηλή επίδοση των μαθητών συνολικά, χαμηλή επίδοση στα προβλήματα διαίρεσης κλασμάτων, μεταβλητότητα στις απαντήσεις, μεταβλητότητα στις στρατηγικές επίλυσης των προβλημάτων, μεγαλύτερη συχνότητα των λαθών στρατηγικής από τα λάθη εκτέλεσης, μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας στην πρόσθεση/αφαίρεση ομώνυμων παρά ετερόνυμων κλασμάτων και μικρότερα ποσοστά επιτυχίας στον πολλαπλασιασμό ομώνυμων παρά ετερόνυμων κλασμάτων. Κατά συνέπεια, τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας επιβεβαιώνουν της εγκυρότητα του μοντέλου FARRA τόσο για τα Ελληνικά, όσο και τα Κυπριακά σχολικά βιβλία, και επομένως, φαίνεται ότι το μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί με αρκετή ασφάλεια με σκοπό να γίνουν και άλλες προβλέψεις για τη συμπεριφορά των μαθητών στην αριθμητική των κλασμάτων.

Εκτός από την επικύρωση των 8 φαινομένων (βλ. πίνακα Α.1) τα οποία αναφέρει η διεθνής βιβλιογραφία, διεξήγαμε μια ποικιλία πειραμάτων προσομοίωσης. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι υπάρχουν μεγάλα περιθώρια βελτίωσης των υπαρχόντων σχολικών βιβλίων. Συγκεκριμένα, προέκυψε ότι μια αύξηση του συνολικού αριθμού των προβλημάτων ή μια πιο ισορροπημένη κατανομή των υπαρχόντων προβλημάτων μπορεί να βελτιώσει σημαντικά την επίδοση των μαθητών.

Ένα άλλο εύρημα το οποίο προκύπτει από την προσομοίωση είναι ότι οι μαθητές σημειώνουν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας στα προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης κλασμάτων τα οποία αποτελούνται μόνο από μεικτούς και κλάσματα σε σχέση με τα προβλήματα τα οποία περιλαμβάνουν και φυσικούς αριθμούς. Επιπρόσθετα, στα προβλήματα πολλαπλασιασμού κλασμάτων, το λογισμικό προβλέπει μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας στα προβλήματα με φυσικούς αριθμούς παρά στα υπόλοιπα.

Αναφορικά με τη σύγκριση των σχολικών βιβλίων, η προσομοίωση προέβλεψε για τα Ελληνικά σχολικά βιβλία χαμηλά συνολικά ποσοστά επιτυχίας και εξαιρετικά χαμηλά ποσοστά επιτυχίας στην πρόσθεση/αφαίρεση κλασμάτων. Επιπλέον, αυξημένα εμφανίζονται τα ποσοστά επιτυχίας στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων τόσο των Ελληνικών όσο και των Κυπριακών σχολικών βιβλίων. Επίσης, φαίνεται ότι η σειρά EnVisionMATH, τα σχολικά βιβλία της Κύπρου και το βιβλίο «Στην τροχιά των ρητών» παρουσιάζουν όμοια συμπεριφορά όταν μεταβάλλονται οι τρεις παράμετροι του μοντέλου. Συγκεκριμένα, εμφανίζουν σταθερά μια αύξηση των ποσοστών επιτυχίας καθώς βελτιώνονται οι τιμές των παραμέτρων (μεγαλύτερη επιβράβευση των σωστών απαντήσεων, αύξηση της ποινής στις λάθος απαντήσεις και αύξηση της συνέπειας στην επιλογή της σωστής στρατηγικής). Τα Ελληνικά σχολικά βιβλία εμφανίζουν χαμηλότερες επιδόσεις και μεγαλύτερη αστάθεια στις μεταβολές των παραμέτρων. Βασικές αδυναμίες των Ελληνικών σχολικών βιβλίων αποτελούν ο χαμηλός συνολικός αριθμός των προβλημάτων και η εισαγωγή από πολύ νωρίς όλων των ειδών των προβλημάτων ταυτόχρονα.

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι το υπολογιστικό μοντέλο FARRA από το οποίο απουσιάζει η εννοιολογική γνώση, παράγει, όταν δέχεται ως εισροή τα Ελληνικά και τα Κυπριακά σχολικά βιβλία, τα κύρια φαινόμενα τα οποία παρατηρούνται κατά την ενασχόληση των μαθητών με την αριθμητική των κλασμάτων. Αυτό σημαίνει ότι ίσως απουσιάζει από μεγάλο μέρος των Ελλήνων και Κυπρίων μαθητών η εννοιολογική κατανόηση ή ενδεχομένως να μη χρησιμοποιείται από αυτούς κατά την ενασχόλησή τους με τις πράξεις στα κλάσματα. Βέβαια, βρήκαμε ότι υπάρχει ένα μέγιστο όριο στο ποσοστό επιτυχίας (περίπου 80%) το οποίο δεν μπορεί η προσομοίωση να ξεπεράσει, για όλες τις τιμές των παραμέτρων. Πιθανόν η ύπαρξη αυτού του άνω φράγματος να οφείλεται στο γεγονός ότι το πρόγραμμα FARRA λαβαίνει υπόψη μόνο τη διαδικαστική γνώση. Απαιτείται επιπλέον όμως, και η ύπαρξη της εννοιολογικής γνώσης για να αυξηθεί περαιτέρω το ποσοστό.

Τέλος, η παρούσα προσέγγιση ενέχει και περιορισμούς. Για παράδειγμα, η εξέταση αποκλειστικά των σχολικών βιβλίων είναι ένα ατελές μέσο αξιολόγησης του τι λαμβάνουν οι μαθητές. Πολλοί καθηγητές δεν δίνουν ως ασκήσεις όλα τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου ή επιλέγουν ασκήσεις από άλλες πηγές. Παρόλα αυτά, η ακρίβεια με την οποία το υπολογιστικό μοντέλο FARRA προβλέπει τα φαινόμενα στην αριθμητική των κλασμάτων τα οποία προκύπτουν και εμπειρικά, δίνει τη δυνατότητα να θεωρήσουμε ότι τα σχολικά βιβλία είναι μια λογική προσέγγιση των προβλημάτων στην αριθμητική των κλασμάτων τα οποία λαμβάνουν οι μαθητές.

11 Βιβλιογραφικές αναφορές

- Alajmi A., & Reys, R. (2007). Reasonable and reasonableness of answers: Kuwaiti middle school teachers' perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 77 - 94.
- Alajmi, A. (2009). Addressing computational estimation in the Kuwaiti curriculum: Teachers' views. *Mathematics Teacher Education*, 72(4), 263-2.
- Apple, M. (1986). *Teachers and texts: A political economy of class and gender relations in education*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Beaton, Albert & Martin, Michael & Mullis, Ina & Gonzalez, Eugenio & Smith, Teresa & Kelly, Dana. (1996). *Mathematics Achievement in the Middle School Years: IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Lynch School Faculty Publications.
- Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 296–333). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Braithwaite D.W., Leibb E.R., Siegler R.S. , McMullen J. (2019). Individual differences in fraction arithmetic learning. *Cognitive Psychology*, 112, pp. 81 – 98.
- Braithwaite, D.W. Pyke, A.A. , Siegler, R.S. (2017). A computational model of fraction arithmetic. *Psychological Review*, 124 (5) , pp. 603-625.
- Braithwaite, David & Siegler, Robert. (2018). Children Learn Spurious Associations in Their Math Textbooks: Examples From Fraction Arithmetic. *Journal of Experimental Psychology Learning Memory and Cognition*. 44. 10.1037/xlm0000546.
- Byrnes, J. P., & Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental Psychology*, 27(5), 777–786. <http://doi.org/10.1037/0012-1649.27.5.777>.
- Byrnes, J. P., & Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental Psychology*, 27(5), 777–786. <https://doi.org/10.1037/0012-1649.27.5.777>.
- Byrnes, J. P., & Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental Psychology*, 27, 777–786. <http://dx.doi.org/10.1037/0012-1649.27.5.777>.
- Charles, R., Caldwell, J., Cavanagh, M., Chancellor, D., Copley, J., Crown, W. Van der Walle, J. (2012). *enVisionMATH (Common Core edition)*. Glenview, IL: Pearson Education, Inc.
- Collopy, R. (2003). Curriculum materials as a professional development tool: How mathematics textbook affected two teachers' learning. *Elementary School Journal*, 103, 287–311.
- Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.
- Cronbach, L. J. (1955). The text in use. In L. J. Cronbach (Ed.), *Text materials in modern education: A comprehensive theory and platform for research* (pp. 188–216). Urbana, IL: University of Illinois Press.
- Davidson, A. (2012). Making it in America. *The Atlantic*, 65–83.

- Dixon, J. K., Adams, T. L., Larson, M., & Leiva, M. (2012). *GO MATH!* (Common Core edition). Orlando, FL: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.
- Fan, L. (2011). Textbook research as scientific research: Towards a common ground for research on mathematics textbooks. Paper presented at the 2011 International Conference on School Mathematics Textbooks, Shanghai.
- Fan, L., & Kaeley, G. S. (2000). The influence of textbooks on teaching strategies: An empirical study. *Mid-Western Educational Researcher*, 13(4), 2–9.
- Fan, L., Zhu, Y., Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 45 (5) (2013), pp. 633–646.
- Flanders, J. R. (1987). How much of the content in mathematics textbooks is new? *Arithmetic Teacher*, 35(1), 18–23.
- Freeman, D. J., & Porter, A. C. (1989). Do textbooks dictate the content of mathematics instruction in elementary schools? *American Educational Research Journal*, 26(3), 403–421.
- Freeman, D. J., & Porter, A. C. (1989). Do textbooks dictate the content of mathematics instruction in elementary schools? *American Educational Research Journal*, 26(3), 403–421. *American Educational Research Journal*, 26(3), 403–42
- Fuchs, L. S., Schumacher, R. F., Sterba, S. K., Long, J., Namkung, J., Malone, A., . . . Changas, P. (2014). Does working memory moderate the effects of fraction intervention? An aptitude–treatment interaction. *Journal of Educational Psychology*, 106, 499–514. <http://dx.doi.org/10.1037/a0034341>.
- Fuchs, L. S., Schumacher, R. F., Sterba, S. K., Long, J., Namkung, J., Malone, A., ... Changas, P. (2014). Does working memory moderate the effects of fraction intervention? An aptitude–treatment interaction. *Journal of Educational Psychology*, 106(2), 499–514. <https://doi.org/10.1037/a0034341>.
- Fuson, K. C., Stigler, J. W., & Bartsch, K. (1988). Grade placement of addition and subtraction topics in Japan, mainland China, the Soviet Union, Taiwan, and the United States. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(5), 449–456.
- Gabriel, F. C., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B., & Content, A. (2013). A componential view of children’s difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology*, 4(715), 1–12. <http://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00715>.
- Gabriel, F. C., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B., & Content, A. (2013). A componential view of children’s difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology*, 4(715), 1–12. <http://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00715>.<http://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00715>.
- Garlick, D. (2002). Understanding the nature of the general factor of intelligence: The role of individual differences in neural plasticity as an explanatory mechanism. *Psychological Review*, 109(1), 116–136. <https://doi.org/10.1037/0033-295X.109.1.116>.
- Gelman, R. (1991). Epigenetic foundations of knowledge structures: Initial and transcendent constructions. In S. Carey & R. Gelman (Eds.), *The epigenesis of mind: Essays on biology and cognition* (pp. 293–321). Psychology Press.
- Gilbert, R. (1989). Text analysis and ideology critique of curricular content. In S. de Castell et al. (Eds.), *Language,*

- authority and criticism: readings on the school textbook (pp. 61–73). London: Falmer Press.
- Graybeal, S. S., & Stodolsky, S. S. (1986, April). Instructional practice in fifth-grade math and social studies: An analysis of teacher's guides. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.
- Große, C. S., & Renkl, A. (2007). Finding and fixing errors in worked examples: Can this foster learning outcomes? *Learning and Instruction*, 17(6), 612–634. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.008>.
- Handel, M. J. (2016). What do people do at work? *Journal for Labour Market Research*, 49, 177–197. <http://dx.doi.org/10.1007/s12651-016-0213-1>.
- Hecht, S. A., & Vagi, K. J. (2010). Sources of group and individual differences in emerging fraction skills. *Journal of Educational Psychology*, 102, 843–859. <http://dx.doi.org/10.1037/a0019824>.
- Heemsoth, T., & Heinze, A. (2014). The impact of incorrect examples on learning fractions: A field experiment with 6th grade students. *Instructional Science*, 42 (4), 639 – 657. <https://doi.org/10.1007/s11251-013-9302-5>.
- Hirsch, C. & Lappan, G. & Reys, Barbara & Reys, Robert. (2005). Curriculum as a focus for improving school mathematics. *MER Newsletter*. 18. 12-14.
- Howson, G. (1995). *Mathematics textbooks: A comparative study of grade 8 texts (Vol. 3)*. Vancouver: Pacific Educational Press.
- Jordan, N. C., Hansen, N., Fuchs, L. S., Siegler, R. S., Gersten, R., & Micklos, D. (2013). Developmental predictors of fraction concepts and procedures. *Journal of Experimental Child Psychology*, 116, 45–58. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jecp.2013.02.001>.
- Jordan, N. C., Hansen, N., Fuchs, L. S., Siegler, R. S., Gersten, R., & Micklos, D. (2013). Developmental predictors of fraction concepts and procedures. *Journal of Experimental Child Psychology*, 116, 45–58. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jecp.2013.02.001>.
- Kaufman, D. (1997). Collaborative approaches in preparing teachers for content-based and language enhanced settings. In M. A. Snow & D. M. Brinton (Eds.), *The content-based classroom: Perspectives on integrating language and content* (pp. 175–186). London: Longman.
- Kim, R. Y. (2009). Text ? book = textbook? Development of a conceptual framework for non-textual elements in middle school mathematics textbooks. Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University, USA.
- Kuhnke, H. F. (1977). Update on sex-role stereotyping in elementary mathematics textbooks. *Arithmetic Teacher*, 24(5), 373–376.
- Li, Y. (2002). A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 234–241.
- Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, 38, 201–221. <http://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008>.
- Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, 38, 201–221. <http://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008>.
- Mayer, R. E., Sims, V., & Tajika, H. (1995). A comparison of how textbooks teach mathematical problem solving in

- Japan and the United States. *American Educational Research Journal*, 32(2), 443–460.
- McCloskey, M. (2007). Quantitative literacy and developmental dyscalculias. In D. B. Berch & M. M. M. Mazzocco (Eds.), *Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities* (pp. 415–429). Baltimore, MD: Paul H. Brookes Publishing.
- McCutcheon, G. (1982). Textbook use in a central Ohio elementary school. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New York.
- Merzbach, U. C., & Boyer, C. B. (2011). *A history of mathematics* (3rd ed.). Hoboken, NJ: Wiley.
- Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 255–286.
- Murnane, R. J., Willett, J. B., & Levy, F. (1995). The growing importance of cognitive skills in wage determination. *The Review of Economics and Statistics*, 77(2), 251–266. <http://doi.org/10.2307/2109863>.
- Newton, K. J. (2008). An extensive analysis of preservice elementary teachers' knowledge of fractions. *American Educational Research Journal*, 45(4), 1080–1110. <http://doi.org/DOL.10.3102/0002831208320851>.
- Newton, K. J., Willard, C., & Teufel, C. (2014). An examination of the ways that students with learning disabilities solve fraction computation problems. *The Elementary School Journal*, 39(3), 258–275.
- Newton, K. J., Willard, C., & Teufel, C. (2014). An examination of the ways that students with learning disabilities solve fraction computation problems. *The Elementary School Journal*, 39(3), 258–275. http://doi.org/10.1163/_afco_asc_2291.
- Newton, K. J., Willard, C., & Teufel, C. (2014). An examination of the ways that students with learning disabilities solve fraction computation problems. *The Elementary School Journal*, 39(3), 258–275. https://doi.org/10.1163/_afco_asc_2291.
- Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27–52. http://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3.
- Nibbelink, W. H., Stockdale, S. R., & Mangru, M. (1986). Sex-role assignments in elementary school mathematics textbooks. *Arithmetic Teacher*, 34(2), 19–21.
- Nicely, R. F. (1985). Higher-order thinking skills in mathematics textbooks. *Educational Leadership*, 42(7), 26–30.
- Nicely, R. F., Fiber, H. R., & Bobango, J. C. (1986). The cognitive content of elementary school mathematics textbooks. *Arithmetic Teacher*, 34, 60–61.
- Pepin, B., & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: A way to understand teaching and learning cultures. *Zentralblatt for the Didactics of Mathematics*, 33(5), 158–175.
- Pickle, M. C. C. (2012). Statistical content in middle grades mathematics textbooks. Unpublished doctoral dissertation, University of South Florida, USA.
- Remillard, J. T. (1999). Curriculum materials in mathematics education reform: A framework for examining teachers' curriculum development. *Curriculum Inquiry*, 29, 315–342.
- Ritchie, S. J., & Bates, T. C. (2013). Enduring links from childhood mathematics and reading achievement to adult

- socioeconomic status. *Psychological Science*, 24(7), 1301–8. <http://doi.org/10.1177/0956797612466268>.
- Robitaille, D. F., & Travers, K. J. (1992). International studies of achievement in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 687–709). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Sadler, P. M., & Tai, R. H. (2007). The two high-school pillars supporting college science. *Science*, 317(27), 457–458. <http://doi.org/10.1126/science.1144214>.
- Schmidt, W. H., McKnight, C. C., & Raizen, S. A. (1997). *A splintered vision: An investigation of U.S. science and mathematics education*. Boston: Kluwer.
- Schmidt, W. H., McKnight, C., Cogan, L. S., Jakwerth, P. M., & Houang, R. T. (1999). *Facing the consequences: Using TIMSS for a closer look at U. S. mathematics and science education*. Boston: Kluwer.
- Shen, K., Crossley, J. N., & Lun, A. W.-C. (1999). *Nine chapters on the mathematical art: Companion and commentary*. Oxford: Oxford University Press.
- Shimahara, N., Sakai, A. (1995). *Learning to Teach in Two Cultures*. London: Routledge, <https://doi.org/10.4324/9781351004589>.
- Siegler, R. S. (1988). Individual differences in strategy choices: Good students, not-so-good students, and perfectionists. *Child Development*, 59(4), 833–851. <https://doi.org/10.2307/1130252>.
- Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, 107(3), 909–918. <https://doi.org/10.1037/edu0000025>.
- Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M. I. Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science*, 23, 691–697. <http://dx.doi.org/10.1177/0956797612440101>.
- Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, 62(4), 273–96. <http://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001>.
- Siegler, R.S., Pyke , A.A. . (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions, *Developmental Psychology*, 49 pp. 1994-2004.
- Son, J. W., & Senk, S. L. (2010). How reform curricula in the USA and Korea present multiplication and division of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 117–142. <http://doi.org/10.1007/s10649-010-9229-6>.
- Sosniak, L. A., & Perlman, C. L. (1990). Secondary education by the book. *Journal of Curriculum Studies*, 22(5), 427–442.
- Sosniak, L. A., & Stodolsky, S. S. (1993). Teachers and textbooks: Materials use in four fourth-grade classrooms. *The Elementary School Journal*, 93(3), 249–275.
- Stein, Mary & Remillard, Janine & Smith, M.S.. (2007). How curriculum influence student learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557 - 628). Charlotte: Information Age.
- Stigler, J. W., Fuson, K. C., Ham, M., & Kim, M. S. (1986). An analysis of addition and subtraction word problems in American and Soviet elementary mathematics textbooks. *Cognition and Instruction*, 3(3), 153–171.

- Stigler, J., Givvin, K., & Thompson, A. (2010). What community college developmental mathematics students understand about mathematics. *MathAMATYC Educator*, 1(3), 4–16. <http://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002>.
- Trivena, V., Ningsih, A. R., & Jupri, A. (2017). Misconception on addition and subtraction of fraction at primary school students in fifth-grade. *Journal of Physics: Conference Series*, 895(1), 1-7. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/895/1/012139>.
- Tyson-Bernstein, H., & Woodward, A. (1991). Nineteenth century policies for twenty-first century practice: The textbook reform dilemma. In PG Altbach, GP Kelly, HG Petrie, & L. Weis (Eds.) *Textbooks in American society: Politics, policy, and pedagogy*. Albany: State University of New York Press.
- University of Chicago School Mathematics Project. (2015a). *Everyday Mathematics Assessment Handbook (4th ed.)*. Columbus, OH: McGraw-Hill Education.
- University of Chicago School Mathematics Project. (2015b). *Everyday Mathematics Student Math Journal Volumes 1 and 2 (4th ed.)*. Columbus, OH: McGraw-Hill Education.
- University of Chicago School Mathematics Project. (2015c). *Everyday Mathematics Student Reference Book (4th ed.)*. Columbus, OH: McGraw-Hill Education.
- Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks. Dordrecht: Kluwer.
- Watanabe, T. (2003). Teaching multiplication: An analysis of elementary school mathematics teachers' manual from Japan and the United States. *Elementary School Journal*, 104, 111–125.
- Weiss, I. R., Pasley, J. D., Smith, P. S., Banilower, E. R., Heck D. J. (2003). *Looking inside the classroom: A Study of K–12 Mathematics and Science Education in the United States*: Chapel Hill, Horizon Research.
- Wu, H. S. (April, 2005). Key mathematical ideas in grades 5–8. Paper presented at the Annual Meeting of the NCTM, Anaheim, CA. Retrieved September 12, 2005 from <http://math.berkeley.edu/~wu/NCTM2005a.pdf>.
- Xin, Y. P. (2007). Word problem solving tasks in textbooks and their relation to student performance. *The Journal of Educational Research*, 100(6), 347–360.
- Zhu, Y., & Fan, L. (2004). A bibliography of textbook studies. ICME- 10 Discussion Group 14 reading document. <http://www.icmeorganisers.dk/dg14/> (Accessed 1 Dec 2006).
- Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(4), 609–626.

12 Παράρτημα

12.1 ΜΕΡΟΣ Α

Πίνακας Π.Α.1: Απαντήσεις και συχνότητα αυτών για τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων όπως προέκυψαν κατά την εκτέλεση του λογισμικού FARRA για την πράξη της πρόσθεσης.

Α/Α	Προβλήματα πρόσθεσης	Απαντήσεις enVisionMATH (ΗΠΑ)		Απαντήσεις Ελληνικά σχολικά βιβλία		Απαντήσεις Σχολικά βιβλία της Κύπρου	
		Σύνολο απαντήσεων	Συχνότητα	Σύνολο απαντήσεων	Συχνότητα	Σύνολο απαντήσεων	Συχνότητα
1	3/5+1/5	4/5	80,2%	4/5	49,1%	4/5	70,0%
		4/10	10,7%	4/10	24,0%	4/10	18,8%
		8/6	5,0%	2/5	9,3%	8/6	5,8%
		2/5	1,9%	8/6	9,0%	2/5	2,4%
		4/3	1,0%	4/3	4,1%	6/8	1,4%
		6/8	1,0%	6/8	3,0%	4/3	1,0%
		3/4	0,2%	3/4	1,5%	3/4	0,6%
2	4/5+3/5	7/5	79,2%	7/5	49,9%	7/5	67,9%
		7/10	15,0%	7/10	33,1%	7/10	23,4%
		9/8	4,3%	9/8	13,3%	9/8	6,7%
		8/9	1,5%	8/9	3,7%	8/9	2,0%
3	2/3+3/5	19/15	42,4%	19/15	37,2%	19/15	45,8%
		5/8	32,1%	5/8	32,7%	5/8	30,5%
		5/15	11,8%	7/6	11,7%	5/15	10,5%
		7/6	9,0%	5/15	11,0%	7/6	9,6%
		6/7	2,9%	1/3	4,0%	6/7	2,6%
		1/3	1,8%	6/7	3,4%	1/3	1,0%
3	3/5+1/4	17/20	44,2%	4/9	35,0%	17/20	46,1%
		4/9	31,9%	17/20	34,6%	4/9	28,1%
		4/20	11,2%	7/6	12,6%	4/20	11,8%
		7/6	8,9%	4/20	10,2%	7/6	9,7%
		6/7	3,0%	1/5	4,0%	6/7	2,7%
		1/5	0,8%	6/7	3,6%	1/5	1,6%

Πίνακας Π.Α.2: Συχνότητα των ομάδων στρατηγικών (OpNumKeepDen, IndepComp, InvertOper) οι οποίες εφαρμόστηκαν κατά την εκτέλεση του λογισμικού FARRA για την πράξη της πρόσθεσης.

Α/Α	Προβλήματα πρόσθεσης	Σύνολο απαντήσεων	Απαντήσεις enVisionMATH (ΗΠΑ)			Απαντήσεις Ελληνικά σχολικά βιβλία			Απαντήσεις Σχολικά βιβλία της Κύπρου		
			OpNumKeepDen	IndepComp	InvertOper	OpNumKeepDen	IndepComp	InvertOper	OpNumKeepDen	IndepComp	InvertOper
(1)	3/5+1/5	4/5	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		4/10	0%	77,57%	22,43%	0%	76,25%	23,75%	0%	78,19%	21,81%
		8/6	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		2/5	0%	68,42%	31,58%	0%	81,72%	18,28%	0%	75,00%	25,00%
		4/3	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		6/8	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		3/4	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
	Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	0%	48,48%	51,52%	0%	50,88%	49,12%	0%	55,00%	45,00%	
(2)	4/5+3/5	7/5	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		7/10	0%	77,33%	22,67%	0%	79,76%	20,24%	0%	78,63%	21,37%
		9/8	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		8/9	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	0%	55,77%	44,23%	0%	52,69%	47,31%	0%	57,32%	42,68%
(3)	2/3+3/5	19/15	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		5/8	0%	79,75%	20,25%	0%	74,01%	25,99%	0%	84,59%	15,41%
		5/15	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		7/6	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		6/7	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1/3	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	23,61%	44,44%	31,94%	23,89%	38,54%	37,58%	21,22%	47,60%	31,18%
(4)	3/5+1/4	17/20	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		4/9	0%	81,50%	18,50%	0%	77,43%	22,57%	0%	79%	21%
		4/20	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		7/6	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		6/7	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1/5	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	21,51%	46,59%	31,90%	21,71%	41,44%	36,85%	24,86%	41,19%	33,95%

Πίνακας Π.Α.3: Απαντήσεις και συχνότητα αυτών για τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων όπως προέκυψαν κατά την εκτέλεση του λογισμικού FARRA για την πράξη της αφαίρεσης.

Προβλήματα αφαίρεσης	Απαντήσεις enVisionMATH (ΗΠΑ)		Απαντήσεις Ελληνικά σχολικά βιβλία		Απαντήσεις Σχολικά βιβλία της Κύπρου	
	Σύνολο απαντήσεων	Συχνότητα	Σύνολο απαντήσεων	Συχνότητα	Σύνολο απαντήσεων	Συχνότητα
	3/5-1/5	2/5	80,6%	2/5	51,5%	2/5
	2/0	13,1%	2/0	33,4%	2/0	25,0%
	-2/4	2,4%	-2/4	3,7%	-2/4	3,3%
	2/4	1,6%	2/4	3,5%	2/4	2,3%
	1/2	0,6%	-1/2	2,2%	4/-2	1,6%
	4/2	0,5%	4/-2	1,5%	1/2	0,8%
	2/-1	0,4%	1/2	1,4%	4/2	0,7%
	4/-2	0,4%	4/2	1,4%	-1/2	0,3%
	-1/2	0,3%	2/-1	0,7%	2/1	0,2%
	2/1	0,1%	2/1	0,7%	2/-1	0,1%
4/5-3/5	1/5	79,6%	1/5	49,3%	1/5	66,5%
	1/0	14,0%	1/0	34,7%	1/0	23,7%
	-1/2	3,1%	-1/2	6,0%	-1/2	3,7%
	1/2	2,2%	1/2	5,4%	1/2	3,4%
	2/1	0,6%	2/1	2,4%	2/1	1,5%
	2/-1	0,5%	2/-1	2,2%	2/-1	1,2%
2/3-3/5	1/15	51,9%	1/15	44,5%	1/15	54,9%
	1/2	10,7%	1/2	9,8%	-1/-2	8,3%
	-1/-2	8,5%	1/-2	8,1%	-1/2	7,8%
	-1/2	6,6%	-1/2	7,9%	1/2	6,5%
	1/-2	6,4%	-1/15	7,5%	1/-2	6,2%
	-3/0	5,1%	-1/-2	6,7%	-1/15	6,0%
	-1/15	4,6%	3/0	5,8%	3/0	4,0%
	3/0	3,9%	-3/0	5,4%	-3/0	2,8%
	0/3	1,3%	0/3	2,4%	0/3	1,9%
	0/-3	1,0%	0/-3	1,9%	0/-3	1,6%
3/5-1/4	7/20	44,3%	2/1	36,0%	7/20	42,9%
	2/1	29,4%	7/20	33,8%	2/1	30,4%
	2/20	12,3%	2/20	10,0%	2/20	12,8%
	-1/4	5,5%	-1/4	6,5%	-1/4	5,2%
	1/4	4,6%	1/4	5,8%	1/4	4,2%
	4/-1	1,6%	1/10	4,3%	1/10	1,8%
	4/1	1,3%	4/-1	1,8%	4/-1	1,5%
	1/10	1,0%	4/1	1,8%	4/1	1,2%

Πίνακας Π.Α.4: Συχνότητα των ομάδων στρατηγικών (OpNumKeepDen, IndepComp, InvertOper) οι οποίες εφαρμόστηκαν κατά την εκτέλεση του λογισμικού FARRA για την πράξη της αφαίρεσης.

A/A	Προβλήματα αφαίρεσης	Σύνολο απαντήσεων	Απαντήσεις			Απαντήσεις			Απαντήσεις		
			enVisionMATH (ΗΠΑ)			Ελληνικά σχολικά βιβλία			Σχολικά βιβλία της Κύπρου		
			OpNumKeepDen	IndepComp	InvertOper	OpNumKeepDen	IndepComp	InvertOper	OpNumKeepDen	IndepComp	InvertOper
(1)	3/5-1/5	2/5	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		2/0	0%	72,52%	27,48%	0%	72,46%	27,54%	0%	78,40%	21,60%
		-2/4	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		2/4	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1/2	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		4/2	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		2/-1	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		4/-2	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		-1/2	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		2/1	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	0%	48,97%	51,03%	0%	49,90%	50,10%	0%	57,14%	42,86%
(2)	4/5-3/5	1/5	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		1/0	0%	77,86%	22,14%	0%	80,12%	19,88%	0%	75,11%	24,89%
		-1/2	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1/2	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		2/1	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		2/-1	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
				Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	0%	53,43%	46,57%	0%	54,83%	45,17%	0%
(3)	2/3-3/5	1/15	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		1/2	0%	78,50%	21,50%	0%	73,47%	26,53%	0%	84,62%	15,38%
		-1/-2	0%	72,94%	27,06%	0%	74,63%	25,37%	0%	78,31%	21,69%
		-1/2	0%	72,73%	27,27%	0%	84,81%	15,19%	0%	78,21%	21,79%
		1/-2	0%	82,81%	17,19%	0%	80,25%	19,75%	0%	85,48%	14,52%
		-3/0	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		-1/15	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		3/0	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		0/3	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		0/-3	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	9,56%	51,35%	39,09%	13,51%	45,77%	40,72%	13,30%	51,88%	34,81%
(4)	3/5-1/4	7/20	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		2/1	0%	83,33%	16,67%	0%	76,67%	23,33%	0%	83,55%	16,45%
		2/20	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		-1/4	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1/4	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		4/-1	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		4/1	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1/10	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
				Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	23,88%	43,99%	32,14%	21,60%	41,69%	36,71%	25,57%

Πίνακας Π.Α.5: Απαντήσεις και συχνότητα αυτών για τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων όπως προέκυψαν κατά την εκτέλεση του λογισμικού FARRA για την πράξη της πολλαπλασιασμού.

Προβλήματα πολλαπλασιασμού	Απαντήσεις enVisionMATH (ΗΠΑ)		Απαντήσεις Ελληνικά σχολικά βιβλία		Απαντήσεις Σχολικά βιβλία της Κύπρου	
	Σύνολο απαντήσεων	Συχνότητα	Σύνολο	Συχνότητα	Σύνολο	Συχνότητα
			απαντήσεων		απαντήσεων	
3/5*1/5	3/5	42,9%	3/25	49,6%	3/25	49,6%
	3/25	37,7%	3/5	19,3%	3/5	28,4%
	15/5	9,9%	15/5	13,7%	15/5	11,7%
	5/15	6,6%	5/15	9,5%	5/15	8,0%
	3/1	2,0%	3/1	4,6%	3/1	1,5%
	1/3	0,9%	1/3	3,3%	1/3	0,8%
4/5*3/5	12/25	40,5%	12/25	49,2%	12/25	48,8%
	12/5	40,5%	12/5	17,9%	12/5	27,0%
	20/15	10,6%	20/15	15,3%	20/15	12,7%
	15/20	6,0%	15/20	10,1%	15/20	8,4%
	3/4	1,4%	4/3	3,9%	4/3	2,2%
	4/3	1,0%	3/4	3,6%	3/4	0,9%
2/3*3/5	6/15	57,2%	6/15	44,1%	6/15	56,9%
	90/15	17,0%	2/5	16,4%	90/15	17,0%
	10/9	12,9%	10/9	16,1%	10/9	12,2%
	9/10	7,8%	9/10	10,5%	9/10	8,4%
	2/5	4,0%	90/15	9,7%	2/5	4,5%
	6/1	1,1%	6/1	3,2%	6/1	1,0%
3/5*1/4	3/20	62,5%	3/20	59,4%	3/20	58,9%
	60/20	16,4%	12/5	16,8%	60/20	18,5%
	12/5	12,9%	5/12	11,2%	12/5	13,7%
	5/12	6,8%	60/20	9,8%	5/12	7,3%
	3/1	1,4%	3/1	2,8%	3/1	1,6%

Πίνακας Π.Α.6: Συχνότητα των ομάδων στρατηγικών (OpNumKeepDen, IndepComp, InvertOper) οι οποίες εφαρμόστηκαν κατά την εκτέλεση του λογισμικού FARRA για την πράξη της πολλαπλασιασμού.

Α/Α	Προβλήματα πολλαπλασιασμού	Σύνολο απαντήσεων	Απαντήσεις enVisionMATH (ΗΠΑ)			Απαντήσεις Ελληνικά σχολικά βιβλία			Απαντήσεις Σχολικά βιβλία της Κύπρου		
			OpNumKeepDen	IndepComp	InvertOper	OpNumKeepDen	IndepComp	InvertOper	OpNumKeepDen	IndepComp	InvertOper
(1)	3/5*1/5	3/5	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		3/25	0%	86,47%	13,53%	0%	88,10%	11,90%	0%	91,33%	8,67%
		15/5	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		5/15	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		3/1	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1/3	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	68,86%	0%	31,14%	38,29%	0%	61,71%	56,35%	0%	43,65%
(2)	4/5*3/5	12/25	0%	90,62%	9,38%	0%	87,60%	12,40%	0%	87,70%	12,30%
		12/5	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		20/15	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		15/20	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		3/4	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		4/3	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	68,07%	0%	31,93%	35,24%	0%	64,76%	52,73%	0%	47,27%
(3)	2/3*3/5	6/15	10,49%	81,99%	7,52%	10,20%	76,42%	13,38%	13,01%	80,67%	6,33%
		90/15	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		10/9	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		9/10	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		2/5	15%	72,50%	12,50%	12,20%	78,66%	9,15%	6,67%	84,44%	8,89%
		6/1	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	46,65%	0%	53,35%	32,66%	0%	67,34%	46,63%	0%	53,37%
(4)	3/5*1/4	3/20	11,52%	79,68%	8,80%	12,63%	74,41%	12,96%	8,83%	86,08%	5,09%
		60/20	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		12/5	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		5/12	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		3/1	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
				Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	47,47%	0%	52,53%	31,03%	0%	68,97%	48,91%

Πίνακας Π.Α.7: Απαντήσεις και συχνότητα αυτών για τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων όπως προέκυψαν κατά την εκτέλεση του λογισμικού FARRA για την πράξη της διαίρεσης.

Προβλήματα διαίρεσης	Απαντήσεις enVisionMATH (ΗΠΑ)		Απαντήσεις Ελληνικά σχολικά βιβλία		Απαντήσεις Σχολικά βιβλία της Κύπρου	
	Σύνολο απαντήσεων	Συχνότητα	Σύνολο απαντήσεων	Σύνολο απαντήσεων	Σύνολο απαντήσεων	Σύνολο απαντήσεων
	3/5:1/5	3/5	50,5%	3/1	31,1%	3/5
3/1		19,5%	3/5	24,1%	3/1	25,1%
15/5		15,8%	15/5	20,6%	15/5	20,9%
3/25		8,7%	3/25	14,1%	3/25	12,1%
5/15		5,0%	5/15	7,2%	5/15	4,6%
1/3		0,5%	1/3	2,9%	1/3	0,8%
4/5:3/5	1/5	26,0%	20/15	20,4%	20/15	22,0%
	1,33/5	26,0%	12/25	17,0%	1,3/5	16,2%
	20/15	17,0%	1,33/1	12,5%	1/5	15,6%
	12/25	8,7%	1/5	12,4%	1,33/1	13,0%
	1,33/1	8,4%	1/1	11,3%	12/25	12,0%
	1/1	7,0%	1,3/5	11,3%	1/1	10,7%
	15/20	4,3%	4/3	6,5%	15/20	7,0%
	4/3	1,9%	15/20	6,4%	4/3	3,2%
3/4	0,7%	3/4	2,2%	3/4	0,3%	
2/3:3/5	10/9	23,8%	10/9	24,8%	10/9	24,3%
	1/15	15,2%	6/15	10,2%	1/15	14,9%
	1,11/15	11,2%	1,1/15	9,3%	1,1/15	11,8%
	6/15	10,1%	1/15	9,1%	6/15	9,3%
	9/10	7,2%	9/10	7,9%	9/10	6,4%
	1/1,66	2,4%	2/5	4,9%	1,5/1,6	2,3%
	0/0,6	2,2%	0,66/0,6	2,4%	0,6/15	2,2%
	0,66/1	2,2%	0,6/0	2,3%	0/1	2,1%
	0/15	2,1%	1/1,66	2,2%	1/1,66	2,0%
	0,66/15	1,9%	1,5/15	2,1%	1,5/15	2,0%
	0,66/1,66	1,8%	1/1	2,1%	1/1	1,9%
	0/0	1,8%	1/0	2,1%	0/15	1,9%
	0/1,66	1,7%	1,5/1	2,0%	1,5/0	1,8%
	1,5/0	1,6%	0/0	2,0%	1,5/0,6	1,8%
	1/0,6	1,6%	1,5/1,6	1,9%	0,66/0,6	1,7%
	1,5/0,6	1,6%	0/1,6	1,9%	0,6/0	1,6%
	1,5/1,66	1,6%	0/15	1,8%	0,6/1,6	1,5%
	0/1	1,6%	1,5/0	1,7%	1,5/1	1,4%
	1,5/15	1,5%	0,6/1,6	1,6%	1/0	1,4%
	1/1	1,5%	1/0,6	1,5%	0/1,6	1,4%
	0,66/0,6	1,3%	0/1	1,5%	0/0	1,3%
	1,5/1	1,2%	0,66/1	1,5%	2/5	1,3%
	0,66/0	1,0%	0,6/15	1,1%	0/0,6	1,3%
2/5	1,0%	0/0,6	1,1%	1/0,6	1,2%	
1/0	0,9%	1,5/0,6	1,0%	0,66/1	1,2%	
12/5	22,2%	12/5	26,4%	12/5	22,5%	
3/20	19,2%	3/20	24,7%	3/20	19,6%	
3/1	15,3%	3/1	12,8%	3/1,25	14,7%	
3/1,25	13,5%	3/1,25	11,6%	3/1	13,3%	
2,4/20	11,1%	5/12	8,0%	2/20	11,8%	
2/20	10,9%	2,4/20	7,4%	2,4/20	11,3%	
5/12	6,8%	2/20	5,7%	5/12	5,7%	
1/10	1,0%	1/10	3,4%	1/10	1,1%	

Πίνακας Π.Α.8: Συχνότητα των ομάδων στρατηγικών (OpNumKeepDen, IndepComp, InvertOper) οι οποίες εφαρμόστηκαν κατά την εκτέλεση του λογισμικού FARRA για την πράξη της διαίρεσης.

Α/Α	Προβλήματα διαίρεσης	Σύνολο απαντήσεων	Απαντήσεις			Απαντήσεις			Απαντήσεις		
			enVisionMATH (ΗΠΑ)			Ελληνικά σχολικά βιβλία			Σχολικά βιβλία της Κύπρου		
			OpNum	IndepC	InvertO	OpNumKee	IndepCo	Invert	OpNum	IndepC	InvertOper
			KeepDe n	omp	per	pDen	mp	Oper	KeepDe n	omp	
(1)	3/5:1/5	3/5	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		3/1	0%	86,67%	13,33%	0%	82,64%	17,36%	0%	91,63%	8,37%
		15/5	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		3/25	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		5/15	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1/3	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	62,73%	0%	37,27%	34,98%	0%	65,02%	48,73%	0%	51,27%
(2)	4/5:3/5	1/5	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		1,33/5	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		20/15	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		12/25	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1,33/1	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		1/1	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		15/20	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		4/3	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	71,53%	9,63%	18,84%	39,11%	18,65%	42,24%	51,46%	17,31%	31,23%
(3)	2/3:3/5	10/9	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1/15	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		1,11/15	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		6/15	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		9/10	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1/1,66	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		0/0,6	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		0,66/1	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		0/15	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		0,66/15	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		0,66/1,66	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		0/0	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		0/1,66	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		1,5/0	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		1/0,6	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		1,5/0,6	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		1,5/1,66	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		0/1	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		1,5/15	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		1/1	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
0,66/0,6	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%		
1,5/1	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%		
0,66/0	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%		
2/5	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%		
1/0	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%		
		Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	41,86%	34,12%	24,02%	31,12%	38,30%	30,59%	43,33%	34,21%	22,46%
(4)	3/5:1/4	12/5	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		3/20	36,98%	0%	63,02%	33,60%	0%	66,40%	45,92%	0%	54,08%
		3/1	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		3/1,25	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		2,4/20	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		2/20	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		5/12	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1/10	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	38,69%	37,02%	24,29%	33,70%	33,15%	33,15%	42,84%	36,13%	21,03%

12.2 ΜΕΡΟΣ Β

Πίνακας Π.Β.1: Απαντήσεις και συχνότητα αυτών για τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων όπως προέκυψαν κατά την εκτέλεση του λογισμικού FARRA για την πράξη της πρόσθεσης.

Α/Α	Προβλήματα πρόσθεσης	Απαντήσεις Σχολικά βιβλία της		Απαντήσεις		Απαντήσεις «Στην τροχιά των ρητών» (Δημοτικό)	
		Κύπρου (Δημοτικό)		Ελληνικά σχολικά βιβλία		των ρητών» (Δημοτικό)	
		Σύνολο απαντήσεων	Συχνότητα	Σύνολο απαντήσεων	Συχνότητα	Σύνολο απαντήσεων	Συχνότητα
1	3/5+1/5	4/5	70,0%	4/5	50,7%	4/5	56,2%
		4/10	18,8%	4/10	19,7%	4/10	21,5%
		8/6	5,8%	2/5	12,1%	8/6	8,4%
		2/5	2,4%	8/6	7,0%	2/5	7,6%
		6/8	1,4%	4/3	5,2%	6/8	2,8%
		4/3	1,0%	6/8	3,4%	4/3	2,7%
		3/4	0,6%	3/4	1,9%	3/4	0,8%
2	4/5+3/5	7/5	67,9%	7/5	48,4%	7/5	55,6%
		7/10	23,4%	7/10	33,6%	7/10	30,7%
		9/8	6,7%	9/8	13,7%	9/8	9,7%
		8/9	2,0%	8/9	4,3%	8/9	4,0%
3	2/3+3/5	19/15	45,8%	5/8	33,4%	5/8	38,1%
		5/8	30,5%	19/15	33,4%	19/15	31,7%
		5/15	10,5%	7/6	12,6%	5/15	12,7%
		7/6	9,6%	5/15	9,5%	7/6	11,3%
		6/7	2,6%	1/3	7,1%	6/7	3,3%
		1/3	1,0%	6/7	4,0%	1/3	2,9%
3	3/5+1/4	17/20	46,1%	17/20	36,7%	4/9	36,3%
		4/9	28,1%	4/9	32,7%	17/20	34,5%
		4/20	11,8%	7/6	12,1%	4/20	12,0%
		7/6	9,7%	1/5	7,5%	7/6	9,3%
		6/7	2,7%	4/20	7,1%	1/5	4,1%
		1/5	1,6%	6/7	3,9%	6/7	3,8%

Πίνακας Π.Β.2: Συχνότητα των ομάδων στρατηγικών (OpNumKeepDen, IndepComp, InvertOper) οι οποίες εφαρμόστηκαν κατά την εκτέλεση του λογισμικού FARRA για την πράξη της πρόσθεσης.

Α/Α	Προβλήματα πρόσθεσης	Σύνολο απαντήσεων	Απαντήσεις Σχολικά βιβλία της Κύπρου (Δημοτικό)			Απαντήσεις Ελληνικά σχολικά βιβλία			Απαντήσεις «Στην τροχιά των ρητών» (Δημοτικό)		
			OpNumKeepDen	IndepComp	InvertOper	OpNumKeepDen	IndepComp	InvertOper	OpNumKeepDen	IndepComp	InvertOper
(1)	3/5+1/5	4/5	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		4/10	0%	78,19%	21,81%	0%	75,13%	24,87%	0%	83,72%	16,28%
		8/6	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		2/5	0%	75,00%	25,00%	0%	72,73%	27,27%	0%	67,11%	32,89%
		4/3	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		6/8	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		3/4	0%		100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	0%	55,00%	45,00%	0%	47,87%	52,13%	0%	52,74%	47,26%
(2)	4/5+3/5	7/5	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		7/10	0%	78,63%	21,37%	0%	75,30%	24,70%	0%	76,22%	23,78%
		9/8	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		8/9	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
				Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	0%	57,32%	42,68%	0%	49,03%	50,97%	0%
(3)	2/3+3/5	19/15	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		5/8	0%	84,59%	15,41%	0%	72,75%	27,25%	0%	83,20%	16,80%
		5/15	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		7/6	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		6/7	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1/3	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
				Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	21,22%	47,60%	31,18%	24,92%	36,49%	38,59%	22,84%
(4)	3/5+1/4	17/20	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		4/9	0%	79%	21%	0%	75,23%	24,77%	0%	80,72%	19,28%
		4/20	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		7/6	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		6/7	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1/5	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
				Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	24,86%	41,19%	33,95%	23,06%	38,86%	38,07%	24,58%

Πίνακας Π.Β.3: Απαντήσεις και συχνότητα αυτών για τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων όπως προέκυψαν κατά την εκτέλεση του λογισμικού FARRA για την πράξη της αφαίρεσης.

Προβλήματα αφαίρεσης	Απαντήσεις Σχολικά βιβλία της		Απαντήσεις		Απαντήσεις «Στην τροχιά των	
	Κύπρου (Δημοτικό)		Ελληνικά σχολικά βιβλία		ρητών» (Δημοτικό)	
	Σύνολο απαντήσεων	Συχνότητα	Σύνολο απαντήσεων	Συχνότητα	Σύνολο απαντήσεων	Συχνότητα
3/5-1/5	2/5	65,7%	2/5	50,4%	2/5	55,6%
	2/0	25,0%	2/0	33,6%	2/0	29,7%
	-2/4	3,3%	-2/4	3,1%	-2/4	4,6%
	2/4	2,3%	-1/2	3,1%	2/4	3,6%
	4/-2	1,6%	2/4	3,1%	4/2	1,7%
	1/2	0,8%	1/2	2,5%	-1/2	1,7%
	4/2	0,7%	4/2	1,2%	4/-2	1,6%
	-1/2	0,3%	4/-2	1,1%	1/2	0,9%
	2/1	0,2%	2/1	1,0%	2/-1	0,3%
	2/-1	0,1%	2/-1	0,9%	2/1	0,3%
4/5-3/5	1/5	66,5%	1/5	51,4%	1/5	55,4%
	1/0	23,7%	1/0	32,0%	1/0	30,5%
	-1/2	3,7%	-1/2	6,7%	1/2	5,3%
	1/2	3,4%	1/2	5,5%	-1/2	5,1%
	2/1	1,5%	2/1	2,4%	2/-1	2,0%
	2/-1	1,2%	2/-1	2,0%	2/1	1,7%
2/3-3/5	1/15	54,9%	1/15	40,2%	1/15	43,2%
	-1/-2	8,3%	1/-2	9,2%	1/2	9,5%
	-1/2	7,8%	-1/2	8,8%	-1/-2	9,5%
	1/2	6,5%	-1/-2	8,2%	1/-2	9,5%
	1/-2	6,2%	-1/15	8,2%	-1/15	8,0%
	-1/15	6,0%	1/2	7,0%	-1/2	7,9%
	3/0	4,0%	-3/0	6,6%	3/0	5,1%
	-3/0	2,8%	3/0	6,3%	-3/0	5,0%
	0/3	1,9%	0/-3	3,3%	0/3	1,3%
	0/-3	1,6%	0/3	2,2%	0/-3	1,0%
3/5-1/4	7/20	42,9%	7/20	34,7%	2/1	36,3%
	2/1	30,4%	2/1	32,3%	7/20	32,4%
	2/20	12,8%	2/20	9,1%	2/20	13,2%
	-1/4	5,2%	1/10	7,5%	1/4	5,4%
	1/4	4,2%	1/4	7,0%	-1/4	5,1%
	1/10	1,8%	-1/4	5,6%	1/10	4,3%
	4/-1	1,5%	4/1	2,3%	4/-1	2,0%
	4/1	1,2%	4/-1	1,5%	4/1	1,3%

Πίνακας Π.Β.4: Συχνότητα των ομάδων στρατηγικών (OpNumKeepDen, IndepComp, InvertOper) οι οποίες εφαρμόστηκαν κατά την εκτέλεση του λογισμικού FARRA για την πράξη της αφαίρεσης.

A/A	Προβλήματα αφαίρεσης	Σύνολο απαντήσεων	Απαντήσεις Σχολικά βιβλία της Κύπρου (Δημοτικό)			Απαντήσεις Ελληνικά σχολικά βιβλία			Απαντήσεις «Στην τροχιά των ρητών» (Δημοτικό)		
			OpNumKeepDen	IndepComp	InvertOper	OpNumKeepDen	IndepComp	InvertOper	OpNumKeepDen	IndepComp	InvertOper
(1)	3/5-1/5	2/5	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		2/0	0%	78,40%	21,60%	0%	75,60%	24,40%	0%	82,49%	17,51%
		-2/4	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		2/4	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1/2	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		4/2	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		2/-1	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		4/-2	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		-1/2	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		2/1	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	0%	57,14%	42,86%	0%	51,21%	48,79%	0%	55,18%	44,82%
(2)	4/5-3/5	1/5	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		1/0	0%	75,11%	24,89%	0%	72,50%	27,50%	0%	74,75%	25,25%
		-1/2	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1/2	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		2/1	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		2/-1	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
				Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	0%	53,13%	46,87%	0%	47,74%	52,26%	0%
(3)	2/3-3/5	1/15	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		1/2	0%	84,62%	15,38%	0%	74,29%	25,71%	0%	84,21%	15,79%
		-1/-2	0%	78,31%	21,69%	0%	80,49%	19,51%	0%	82,11%	17,89%
		-1/2	0%	78,21%	21,79%	0%	82,95%	17,05%	0%	84,81%	15,19%
		1/-2	0%	85,48%	14,52%	0%	80,43%	19,57%	0%	87,37%	12,63%
		-3/0	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		-1/15	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		3/0	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		0/3	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		0/-3	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	13,30%	51,88%	34,81%	13,71%	44,31%	41,97%	14,08%	54,23%	31,69%
(4)	3/5-1/4	7/20	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		2/1	0%	83,55%	16,45%	0%	75,54%	24,46%	0%	82,64%	17,36%
		2/20	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		-1/4	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1/4	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		4/-1	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		4/1	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1/10	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
				Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	25,57%	44,48%	29,95%	25,42%	37,37%	37,21%	25,89%

Πίνακας Π.Β.5: Απαντήσεις και συχνότητα αυτών για τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων όπως προέκυψαν κατά την εκτέλεση του λογισμικού FARRA για την πράξη της πολλαπλασιασμού.

Προβλήματα πολλαπλασιασμού	Απαντήσεις Σχολικά βιβλία της Κύπρου (Δημοτικό)		Απαντήσεις Ελληνικά σχολικά βιβλία		Απαντήσεις «Στην τροχιά των ρητών» (Δημοτικό)	
	Σύνολο απαντήσεων	Συχνότητα	Σύνολο απαντήσεων	Συχνότητα	Σύνολο απαντήσεων	Συχνότητα
3/5*1/5	3/25	49,6%	3/25	48,7%	3/25	53,2%
	3/5	28,4%	3/5	20,5%	3/5	21,1%
	15/5	11,7%	15/5	10,5%	15/5	10,7%
	5/15	8,0%	3/1	8,0%	5/15	8,9%
	3/1	1,5%	5/15	7,6%	3/1	3,6%
	1/3	0,8%	1/3	4,7%	1/3	2,5%
4/5*3/5	12/25	48,8%	12/25	48,8%	12/25	53,8%
	12/5	27,0%	12/5	19,2%	12/5	19,0%
	20/15	12,7%	20/15	11,3%	20/15	12,8%
	15/20	8,4%	4/3	8,2%	15/20	8,1%
	4/3	2,2%	15/20	8,0%	4/3	3,6%
	3/4	0,9%	3/4	4,5%	3/4	2,7%
2/3*3/5	6/15	56,9%	6/15	34,4%	6/15	60,7%
	90/15	17,0%	2/5	22,7%	2/5	12,2%
	10/9	12,2%	10/9	19,8%	10/9	11,0%
	9/10	8,4%	9/10	11,1%	9/10	7,7%
	2/5	4,5%	90/15	7,3%	90/15	7,0%
	6/1	1,0%	6/1	4,7%	6/1	1,4%
3/5*1/4	3/20	58,9%	3/20	53,2%	3/20	68,2%
	60/20	18,5%	12/5	21,2%	12/5	12,9%
	12/5	13,7%	5/12	12,4%	60/20	9,0%
	5/12	7,3%	60/20	7,7%	5/12	8,3%
	3/1	1,6%	3/1	5,5%	3/1	1,6%

Πίνακας Π.Β.6: Συχνότητα των ομάδων στρατηγικών (OpNumKeepDen, IndepComp, InvertOper) οι οποίες εφαρμόστηκαν κατά την εκτέλεση του λογισμικού FARRA για την πράξη της πολλαπλασιασμού.

Α/Α	Προβλήματα πολλαπλασιασμού	Σύνολο απαντήσεων	Απαντήσεις Σχολικά βιβλία της Κύπρου (Δημοτικό)			Απαντήσεις Ελληνικά σχολικά βιβλία			Απαντήσεις «Στην τροχιά των ρητών» (Δημοτικό)		
			OpNumKeepDen	IndepComp	InvertOper	OpNumKeepDen	IndepComp	InvertOper	OpNumKeepDen	IndepComp	InvertOper
(1)	3/5*1/5	3/5	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		3/25	0%	91,33%	8,67%	0%	85,42%	14,58%	0%	91,35%	8,65%
		15/5	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		5/15	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		3/1	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1/3	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	56,35%	0%	43,65%	39,96%	0%	60,04%	45,09%	0%	54,91%
(2)	4/5*3/5	12/25	0%	87,70%	12,30%	0%	86,68%	13,32%	0%	90,71%	9,29%
		12/5	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		20/15	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		15/20	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		3/4	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		4/3	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	52,73%	0%	47,27%	37,50%	0%	62,50%	41,13%	0%	58,87%
(3)	2/3*3/5	6/15	13,01%	80,67%	6,33%	14,53%	74,42%	11,05%	10,38%	84,35%	5,27%
		90/15	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		10/9	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		9/10	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		2/5	6,67%	84,44%	8,89%	14,98%	73,57%	11,45%	12,30%	77,05%	10,66%
		6/1	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	46,63%	0%	53,37%	27,97%	0%	72,03%	31%	0%	69%
(4)	3/5*1/4	3/20	8,83%	86,08%	5,09%	12,22%	76,50%	11,28%	10,12%	81,38%	8,50%
		60/20	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		12/5	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		5/12	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		3/1	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
				Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	48,91%	0%	51,09%	28,21%	0%	71,79%	33,33%

Πίνακας Π.Β.7: Απαντήσεις και συχνότητα αυτών για τις τρεις σειρές σχολικών βιβλίων όπως προέκυψαν κατά την εκτέλεση του λογισμικού FARRA για την πράξη της διαίρεσης.

Προβλήματα διαίρεσης	Απαντήσεις Σχολικά βιβλία της Κύπρου (Δημοτικό)		Απαντήσεις Ελληνικά σχολικά βιβλία		Απαντήσεις «Στην τροχιά των ρητών» (Δημοτικό)	
	Σύνολο απαντήσεων	Συχνότητα	Σύνολο απαντήσεων	Σύνολο απαντήσεων	Σύνολο απαντήσεων	Σύνολο απαντήσεων
	3/5:1/5	3/5 3/1 15/5 3/25 5/15 1/3	36,5% 25,1% 20,9% 12,1% 4,6% 0,8%	3/1 3/5 3/25 15/5 5/15 1/3	36,4% 24,0% 17,0% 13,9% 5,1% 3,6%	3/5 3/1 15/5 3/25 5/15 1/3
4/5:3/5	20/15 1,3/5 1/5 1,33/1 12/25 1/1 15/20 4/3 3/4	22,0% 16,2% 15,6% 13,0% 12,0% 10,7% 7,0% 3,2% 0,3%	20/15 12/25 1/1 4/3 1/5 1,33/1 1,3/5 15/20 3/4	15,6% 15,1% 12,9% 12,2% 12,1% 11,3% 11,1% 6,0% 3,7%	20/15 12/25 1/5 1,33/1 1,3/5 1/1 15/20 4/3 3/4	20,4% 16,0% 14,5% 13,7% 12,6% 11,8% 5,7% 4,2% 1,1%
2/3:3/5	10/9 1/15 1,1/15 6/15 9/10 1,5/1,6 0,6/15 0/1 1/1,6 1,5/15 1/1 0/15 1,5/0 1,5/0,6 0,66/0,6 0,6/0 0,6/1,6 1,5/1 1/0 0/1,6 0/0 2/5 0/0,6 1/0,6 0,6/1	24,3% 14,9% 11,8% 9,3% 6,4% 2,3% 2,2% 2,1% 2,0% 2,0% 1,9% 1,9% 1,8% 1,8% 1,8% 1,7% 1,6% 1,5% 1,4% 1,4% 1,4% 1,3% 1,3% 1,3% 1,2% 1,2%	10/9 1/15 6/15 1,1/15 9/10 2/5 0/15 0/0,6 1,5/15 0/1 1/1,6 0,6/0 0,6/1 1,5/1,6 0,6/1,6 1/1 1,5/0,6 1,5/1 0/0 1/0,6 1/0 1,5/0 0,66/0,6 0,6/15 0/1,6	26,0% 10,2% 9,6% 8,8% 8,2% 6,3% 2,1% 2,1% 2,0% 2,0% 1,9% 1,8% 1,8% 1,7% 1,7% 1,7% 1,6% 1,5% 1,5% 1,5% 1,4% 1,4% 1,4% 1,2% 1,2% 1,2% 1,1%	10/9 6/15 1/15 9/10 1,1/15 0/15 1,5/0 2/5 1/0,6 1,5/15 2/5 0/0 1,5/1 0,66/0,6 1/0 1/1 0/1,6 0,6/1 1,5/1,6 0,6/0 1,5/0,6	21,2% 11,2% 9,9% 8,6% 8,1% 3,1% 3,0% 2,7% 2,7% 2,6% 2,3% 2,3% 2,1% 2,1% 2,1% 2,1% 1,8% 1,8% 1,8% 1,7% 1,6% 1,6% 1,5% 1,4% 1,4% 1,4% 1,4% 1,4% 1,4% 1,3% 1,3% 1,2% 1,2% 1,0%
3/5:1/4	12/5 3/20 3/1,25 3/1 2/20 2,4/20 5/12 1/10	22,5% 19,6% 14,7% 13,3% 11,8% 11,3% 5,7% 1,1%	3/20 12/5 3/1 3/1,25 5/12 2,4/20 2/20 1/10	26,3% 25,0% 12,5% 12,3% 8,5% 7,9% 4,1% 3,4%	12/5 3/20 3/1 3/1,25 2,4/20 2/20 5/12 1/10	22,7% 22,1% 17,1% 13,9% 8,9% 6,3% 6,1% 2,9%

Πίνακας Π.Β.8: Συχνότητα των ομάδων στρατηγικών (OpNumKeepDen, IndepComp, InvertOper) οι οποίες εφαρμόστηκαν κατά την εκτέλεση του λογισμικού FARRA για την πράξη της διαίρεσης.

Α/Α	Προβλήματα διαίρεσης	Σύνολο απαντήσεων	Απαντήσεις Σχολικά βιβλία της Κύπρου (Δημοτικό)			Απαντήσεις Ελληνικά σχολικά βιβλία			Απαντήσεις «Στην τροχιά των ρητών» (Δημοτικό)		
			OpNu	Indep	Invert	OpNumK	IndepC	Inver	OpNu	Indep	InvertOp
			mKee	Comp	Oper	eeDen	omp	tOper	mKee	Comp	er
(1)	3/5:1/5	3/5	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		3/1	0%	91,63%	8,37%	0%	66,48%	33,52%	0%	85,17%	14,83%
		15/5	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		3/25	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		5/15	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1/3	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	48,73%	0%	51,27%	48,29%	0%	51,71%	57,72%	0%	42,28%
(2)	4/5:3/5	1/5	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		1,33/5	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		20/15	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		12/25	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1,33/1	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		1/1	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		15/20	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		4/3	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		3/4	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	51,46%	17,31%	31,23%	38,10%	21,18%	40,72%	43,92%	19,12%	36,95%
(3)	2/3:3/5	10/9	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1/15	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		1,11/15	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		6/15	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		9/10	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1/1,66	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		0/0,6	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		0,66/1	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		0/15	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		0,66/15	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		0,66/1,66	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		0/0	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		0/1,66	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		1,5/0	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		1/0,6	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		1,5/0,6	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		1,5/1,66	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		0/1	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		1,5/15	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		1/1	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
0,66/0,6	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%		
1,5/1	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%		
0,66/0	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%		
2/5	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%		
1/0	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%		
Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	43,33%	34,21%	22,46%	32,84%	34,59%	32,57%	31,98%	39,59%	28,43%		
(4)	3/5:1/4	12/5	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		3/20	45,92%	0%	54,08%	30,42%	0%	69,58%	39,82%	0%	60,18%
		3/1	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		3/1,25	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%
		2,4/20	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		2/20	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		5/12	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%
		1/10	100%	0%	0%	100%	0%	0%	100%	0%	0%
		Όλες οι λάθος απαντήσεις μαζί	42,84%	36,13%	21,03%	31,20%	33,07%	35,73%	34,80%	40,10%	25,10%

12.3 ΜΕΡΟΣ Γ (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ FARRA)

1. Φάση μάθησης (learning mode)

Περιγράφουμε τα διακριτά βήματα τα οποία ακολουθούνται και την εκτέλεση του προγράμματος:

Βήμα 1^ο: Η τιμή της παραμέτρου N ξεκινάει από τον αριθμό 1 και φτάνει ως τον αριθμό 1000. Άρα, εδώ θα είναι $N =$

1. Επιπλέον το λογισμικό επιλέγει τυχαία τις εξής τιμές: $e = 0.006923410184100121$, $disc_inc = 0.12633706424749533$, $g = 1.0128359763604813$. Επιπλέον, δημιουργείται η λίστα **attentions** με τις περιγραφές των χαρακτηριστικών των προβλημάτων. Δηλαδή, ορίζουμε: **attentions** = ['+', '-', '*', '/', 'same-denom', 'diff-denom', 'whole', 'mixed', 'fraction']. Τα στοιχεία '+', '-', '*', '/' αντιστοιχούν στο είδος της πράξης του προβλήματος. Τα στοιχεία 'same-denom', 'diff-denom' αφορούν στο αν έχουμε ομώνυμα ή ετερόνυμα κλάσματα αντίστοιχως, και τα στοιχεία 'whole', 'mixed', 'fraction' ορίζουν το αν έχουμε φυσικό αριθμό, μεικτό ή κλάσμα αντίστοιχα.

Όπως έχουμε ήδη δει, το πρόγραμμα χρησιμοποιεί ένα σύνολο από 9 στρατηγικές και 27 κανόνες εκτέλεσης. Δηλαδή, έχουμε συνολικά 36 κανόνες (rules) οι οποίοι αριθμούνται όπως φαίνεται στον πίνακα

Πίνακας A.4: Κανόνες εκτέλεσης του λογισμικού FARRA.

0	When operation +/- and denoms equal, create goals operate on numers and maintain common denom.
1	When denoms equal, create goals operate on numers and maintain common denom.
2	When operation +/-, create goals find common denom then operate on numers and maintain common denom.
3	Create goals find common denom, then operate on numers and maintain common denom.
4	When operation *, create goals apply operation to numerators and denominators separately.
5	Create goals apply operation to numers and denoms separately
6	When operation *, create goals apply operation cross-wise.
7	When operation /, create goal invert-and-operate.
8	Create goal invert-and-operate.
9	When goal find common denom and denoms equal, notice this and remove the goal.
10	When goal find common denom and denoms not equal, create goals multiply each frac by other's denom.
11	When goal find common denom and denoms not equal, create goals multiply each denom by other.
12	When goal find common denom and denoms not equal, create goals convert fracs using LCD procedure.
13	When goal invert_and_operate, create goals invert 2nd operand, change / to *, and operate numers and dens.
14	When goal invert_and_operate, create goals change / to * and operate numers and dens.
15	When goal invert_and_operate, create goals invert an operand, change / to *, and operate numers and dens.
16	When goal maintain common denom, set answer denom to common denom.
17	When goal operate on numers, create appropriate whole number arith prob.
18	When goal operate on denoms, create appropriate whole number arith prob.
19	When goal modify given STM element via given operation, create appropriate whole number arith prob.
20	When goal invert fraction, do so.
21	When goal change division to multiplication, do so if possible.
22	When goal remove a variable, do so.

- 23 When answer obtained, problem is solved.
 - 24 When answer is found but not in lowest terms, create goal reduce it.
 - 25 When goal reduce fraction to lowest terms, create goals find gcd and divide by it.
 - 26 When goal do whole number arith and operation is +, add operands.
 - 27 When goal do whole number arith and operation is -, subtract operands.
 - 28 When goal do whole number arith and operation is *, multiply operands.
 - 29 When goal do whole number arith and operation is /, divide operands.
 - 30 When goal do whole number arith, and operation is subtract, subtract smaller from larger.
 - 31 When goal do whole number arith and operation /, divide larger by smaller.
 - 32 When goal do whole number arith and operation is /, divide operands and keep integer part of answer.
 - 33 When goal do whole number arith and operation /, divide larger by smaller and keep integer part of answer.
 - 34 When goal find GCD of specified variables, do so.
 - 35 When goal find LCM of specified variables, do so.
-

A.4. Με στόχο να γίνει η σύνδεση μεταξύ των 36 στρατηγικών και των 9 χαρακτηριστικών των προβλημάτων, δημιουργείται ένας πίνακας **associations** διαστάσεων 36X9 με αρχικές τιμές

associations[i, j] = 0, για κάθε i, j φυσικό αριθμό με $0 \leq i \leq 35$ και $0 \leq j \leq 8$.

Το πρόγραμμα, για κάθε πρόβλημα διατηρεί την κατάσταση στην οποία αυτό βρίσκεται αναφορικά με τη διαδικασία επίλυσής του. Ας υποθέσουμε ότι το πρώτο πρόβλημα το οποίο συναντά το πρόγραμμα είναι το $1/3 + 1/3$. Η κατάσταση του προβλήματος καταγράφεται ως εξής:

rule: None
state: $1/3+1/3 = ?/?$
goals: find_answer.

Σε αυτή την αρχική κατάσταση δεν έχει ακόμα επιλεγεί κάποια στρατηγική (rule: None) και ο μόνος στόχος είναι ο **goals:** find_answer. Ο στόχος «find_answer» υπάρχει στην αρχική φάση για όλα τα προβλήματα και χρησιμοποιείται για να οδηγήσει το πρόγραμμα να επιλέξει μια από τις στρατηγικές με αριθμό 0 έως 8 του πίνακα A.4. Την πρώτη φορά που το πρόγραμμα συναντά ένα πρόβλημα μιας συγκεκριμένης πράξης (εδώ έχουμε πρόσθεση), μπορεί να εφαρμόσει τις στρατηγικές που αφορούν τη συγκεκριμένη πράξη καθώς και τις στρατηγικές για τις πράξεις που έχουν προηγηθεί. Αυτό γίνεται γιατί οι μαθητές δεν μπορούν να εφαρμόσουν μια στρατηγική για μια πράξη που δεν έχει ήδη διδαχθεί. Εξάιρεση αποτελεί ο κανόνας 6 ο οποίος περιλαμβάνει την εφαρμογή της στρατηγικής η οποία ενεργεί ξεχωριστά στους αριθμητές και τους παρονομαστές των παραγόντων του προβλήματος. Όπως αναφέρεται από τους Braithwaite et al. (2017), αυτός ο κανόνας συμπεριλήφθηκε από την αρχή της φάσης μάθησης (learning mode) του λογισμικού, διότι είναι μια απευθείας εφαρμογή της προηγούμενης διδασκαλίας της αριθμητικής των ακεραίων αριθμών και επειδή προηγούμενα ευρήματα έδειξαν ότι πολλά παιδιά χρησιμοποιούν αυτή τη στρατηγική πολύ πριν διδαχθεί στο πλαίσιο του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων (Byrnes

& Wasik, 1991, Ni & Zhou, 2005). Έτσι το σύνολο των κανόνων οι οποίες μπορούν να εφαρμοστούν στο παραπάνω πρόβλημα είναι οι εξής (πίνακας A.5):

Σημειώνουμε ότι ο πίνακας A.5 είναι αυτός ο οποίος εμφανίζεται κατά την εκτέλεση του προγράμματος και διαφέρει με τον πίνακα A.4 ως προς της σειρά απαρίθμησης των κανόνων. Για παράδειγμα, στον πίνακα A.5 οι διαθέσιμες στρατηγικές εμφανίζονται στις θέσεις 28 έως και 31. Στη συνέχεια, για το συγκεκριμένο πρόβλημα προσδιορίζονται τα χαρακτηριστικά του τα οποία τα ['+', 'same-denom', 'fraction']. Δηλαδή, έχουμε ένα πρόβλημα πρόσθεσης δύο ομωνύμων κλασμάτων. Δημιουργείται ο

Πίνακας A.5: Κανόνες για το πρόβλημα « $1/3 + 1/3$ »

- 0 Create goals apply operation to numers and denoms separately.
- 1 When goal find common denom and denoms equal, notice this and remove the goal.
- 2 When goal find common denom and denoms not equal, create goals multiply each frac by other's denom.
- 3 When goal find common denom and denoms not equal, create goals multiply each denom by other.
- 4 When goal find common denom and denoms not equal, create goals convert fracs using LCD procedure.
- 5 When goal invert_and_operate, create goals invert 2nd operand, change / to *, and operate numers and dens.
- 6 When goal invert_and_operate, create goals change / to * and operate numers and dens.
- 7 When goal invert_and_operate, create goals invert an operand, change / to *, and operate numers and dens.
- 8 When goal maintain common denom, set answer denom to common denom.
- 9 When goal operate on numers, create appropriate whole number arith prob.
- 10 When goal operate on denoms, create appropriate whole number arith prob.
- 11 When goal modify given STM element via given operation, create appropriate whole number arith prob.
- 12 When goal invert fraction, do so.
- 13 When goal change division to multiplication, do so if possible.
- 14 When goal remove a variable, do so.
- 15 When answer obtained, problem is solved.
- 16 When answer is found but not in lowest terms, create goal reduce it.
- 17 When goal reduce fraction to lowest terms, create goals find gcd and divide by it.
- 18 When goal do whole number arith and operation is +, add operands.
- 19 When goal do whole number arith and operation is -, subtract operands.
- 20 When goal do whole number arith and operation is *, multiply operands.
- 21 When goal do whole number arith and operation is /, divide operands.
- 22 When goal do whole number arith, and operation is subtract, subtract smaller from larger.
- 23 When goal do whole number arith and operation /, divide larger by smaller.
- 24 When goal do whole number arith and operation is /, divide operands and keep integer part of answer.
- 25 When goal do whole number arith and operation /, divide larger by smaller and keep integer part of answer.
- 26 When goal find GCD of specified variables, do so.
- 27 When goal find LCM of specified variables, do so.
- 28 When operation +/- and denoms equal, create goals operate on numers and maintain common denom.

rule: When goal operate on numbers, create appropriate whole number arith prob
state: $1/3+1/3 = ?/?$
common denominator: 3
goals: find_answer, maintain_common_denominator, do_whole_arith_1+1=ans_num

rule_idxs = [28,9].

Όμοια προκύπτουν οι παρακάτω καταστάσεις:

Βήμα 3^ο: Επιλεγόμενος κανόνας: 18 (When goal do whole number arith and operation is +, add operands).

Κατάσταση προβλήματος:

rule: When goal do whole number arith and operation is +, add operands.
state: $1/3+1/3 = 2/?$
common denominator: 3
goals: find_answer, maintain_common_denominator
rule_idxs = [28,9,18].

Βήμα 4^ο: Επιλεγόμενος κανόνας: 8 (When goal maintain common denom, set answer denom to common denom).

Κατάσταση προβλήματος:

rule: When goal maintain common denom, set answer denom to common denom.
state: $1/3+1/3 = 2/3$
common denominator: 3
goals: find_answer
rule_idxs = [28, 9, 18, 8].

Βήμα 5^ο: Επιλεγόμενος κανόνας: 15 (When goal maintain common denom, set answer denom to common denom).

Κατάσταση προβλήματος:

rule: When answer obtained, problem is solved.
state: $1/3+1/3 = 2/3$
common denominator: 3
goals: done
rule_idxs = [28, 9, 18, 8, 15].

Αμέσως μετά την ολοκλήρωση της λύσης του τρέχοντος προβλήματος, το πρόγραμμα ελέγχει αν επετεύχθητε η σωστή απάντηση. Αν, λοιπόν, η απάντηση ήταν σωστή, όλες οι στρατηγικές οι οποίες επιλέχθηκαν ενισχύονται. Αυτό γίνεται ως εξής: για κάθε κανόνα $j \in \mathbf{rule_idxs} = \{28, 9, 18, 8, 15\}$ και για κάθε χαρακτηριστικό $j \in$

{0, 4, 8} του τρέχοντος προβλήματος $1/3 + 2/3$, υπολογίζεται η τιμή $\text{associations}[i, j] \cdot e$ και δημιουργείται ένας νέος πίνακας **associations_1** του οποίου τα στοιχεία προκύπτουν ως εξής:

$$\text{associations_1}[i, j] = \text{associations}[i, j] \cdot e + \text{associations}[i, j].$$

Στην περίπτωση μας προκύπτει ο παρακάτω πίνακας 31 X 9 **associations_1** (ο πίνακας **associations_1** σημειώνεται στο διακεκομμένο ορθογώνιο πλαίσιο):

	+	-	*	/	same-denom	diff-denom	whole	mixed	fraction
Attention	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0: Create goals apply operation to numers and denoms separately.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1: When goal find common denom and denoms equal, notice this and remove the goal.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2: When goal find common denom and denoms not equal, create goals multiply each frac by other's denom.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3: When goal find common denom and denoms not equal, create goals multiply each denom by other.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4: When goal find common denom and denoms not equal, create goals convert fracs using LCD procedure.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5: When goal invert_and_operate, create goals invert 2nd operand, change / to *, and operate numers and dens.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6: When goal invert_and_operate, create goals change / to * and operate numers and dens.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7: When goal invert_and_operate, create goals invert an operand, change / to *, and operate numers and dens.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
8: When goal maintain common denom, set answer denom to common denom.	0.011	0.0	0.0	0.0	0.011	0.0	0.0	0.0	0.011
9: When goal operate on numers, create appropriate whole number arith prob.	0.011	0.0	0.0	0.0	0.011	0.0	0.0	0.0	0.011
10: When goal operate on denoms, create appropriate whole number arith prob.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
11: When goal modify given STM element via given operation, create appropriate whole number arith prob.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
12: When goal invert fraction, do so.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
13: When goal change division to multiplication, do so if possible.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
14: When goal remove a variable, do so.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
15: When answer obtained, problem is solved.	0.011	0.0	0.0	0.0	0.011	0.0	0.0	0.0	0.011
16: When answer is found but not in lowest terms, create goal reduce it.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
17: When goal reduce fraction to lowest terms, create goals find gcd and divide by it.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
18: When goal do whole number arith and operation is +, add operands.	0.011	0.0	0.0	0.0	0.011	0.0	0.0	0.0	0.011
19: When goal do whole number arith and operation is -, subtract operands.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
20: When goal do whole number arith and operation is *, multiply operands.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
21: When goal do whole number arith and operation is /, divide operands.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
22: When goal do whole number arith, and operation is subtract, subtract smaller from larger.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
23: When goal do whole number arith and operation /, divide larger by smaller.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
24: When goal do whole number arith and operation is /, divide operands and keep integer part of answer.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
25: When goal do whole number arith and operation /, divide larger by smaller and keep integer part of answer.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
26: When goal find GCD of specified variables, do so.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
27: When goal find LCM of specified variables, do so.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
28: When operation +/- and denoms equal, create goals operate on numers and maintain common denom.	0.011	0.0	0.0	0.0	0.011	0.0	0.0	0.0	0.011
29: When denoms equal, create goals operate on numers and maintain common denom.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
30: When operation +/-, create goals find common denom then operate on numers and maintain common denom.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
31: Create goals find common denom, then operate on numers and maintain common denom.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Σε περίπτωση λάθους απάντησης τότε εφαρμόζεται η σχέση $\text{associations_1}[i, j] = \text{associations}[i, j] \cdot e \cdot (1 - d) + \text{associations}[i, j]$. Όσο το πρόβλημα προχωράει από το ένα πρόβλημα στο άλλο, τα χαρακτηριστικά του κάθε προβλήματος τα οποία καθορίζονται από τις 9 στήλες του πίνακα **associations** συνδέονται με τους κανόνες καθένας από τους οποίους αντιστοιχεί σε μια γραμμή του πίνακα **associations**. Οι στρατηγικές οι οποίες δίνουν σωστές απαντήσεις αυξάνουν σε μεγαλύτερο βαθμό τις τιμές τους στις αντίστοιχες θέσεις του πίνακα **associations** σε σχέση με τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων για τα οποία έδωσαν σωστές απαντήσεις. Τελικά, όταν αναγνωστούν όλα τα προβλήματα από το λογισμικό, προκύπτει η τελική μορφή του πίνακα **associations**. Στην εκτέλεση του λογισμικού για το αρχικό πείραμα της σειράς των σχολικών βιβλίων EnVionMATH προέκυψε, ύστερα από την ανάγνωση των 659 προβλημάτων για τον 1^ο από τους 1000 μαθητές της προσομοίωσης ο παρακάτω πίνακας **associations_659** που είναι και ο τελικός πίνακας του βαθμού σύνδεσης των κανόνων (rules) με καθένα από τα χαρακτηριστικά $\{+, -, *, /, \text{'same-denom'}, \text{'diff-denom'}, \text{'whole'}, \text{'mixed'}, \text{'fraction'}\}$ των προβλημάτων για το συγκεκριμένο μαθητή:

	+	-	*	/	same-denom	diff-denom	whole	mixed	fraction
Attention	1.0	0.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0: Create goals apply operation to numbers and denoms separately.	0.081	0.093	0.4	0.084	0.107	0.55	0.258	0.157	0.242
1: When goal find common denom and denoms equal, notice this and remove the goal.	0.429	0.556	0.303	0.086	1.373	0.0	0.292	0.6	0.481
2: When goal find common denom and denoms not equal, create goals multiply each frac by other's denom.	0.228	0.2	0.025	0.032	0.0	0.486	0.049	0.214	0.223
3: When goal find common denom and denoms not equal, create goals multiply each denom by other.	0.044	0.042	0.243	0.028	0.0	0.356	0.147	0.122	0.087
4: When goal find common denom and denoms not equal, create goals convert fracs using LCD procedure.	0.157	0.314	0.035	0.025	0.0	0.531	0.096	0.264	0.171
5: When goal invert_and_operate, create goals invert 2nd operand, change / to *, and operate nums and dens.	0.025	0.019	0.019	0.128	0.019	0.172	0.1	0.066	0.025
6: When goal invert_and_operate, create goals change / to * and operate nums and dens.	0.014	0.005	0.1	0.056	0.005	0.169	0.078	0.042	0.054
7: When goal invert_and_operate, create goals invert an operand, change / to *, and operate nums and dens.	0.012	0.012	0.023	0.135	0.03	0.151	0.066	0.068	0.047
8: When goal maintain common denom, set answer denom to common denom.	1.599	1.754	0.312	0.095	3.761	0.0	0.292	1.629	1.839
9: When goal operate on numbers, create appropriate whole number arith prob.	1.731	1.882	1.834	0.179	3.943	1.683	1.27	2.037	2.319
10: When goal operate on denoms, create appropriate whole number arith prob.	0.132	0.127	1.522	0.084	0.182	1.683	0.978	0.408	0.48
11: When goal modify given STM element via given operation, create appropriate whole number arith prob.	2.056	2.438	1.173	0.301	2.236	3.731	1.312	2.42	2.235
12: When goal invert fraction, do so.	0.037	0.03	0.09	0.263	0.052	0.369	0.2	0.137	0.084
13: When goal change division to multiplication, do so if possible.	0.051	0.035	0.142	0.319	0.057	0.49	0.243	0.177	0.127
14: When goal remove a variable, do so.	0.213	0.15	0.223	0.007	0.366	0.228	0.218	0.133	0.242
15: When answer obtained, problem is solved.	1.731	1.882	1.834	0.179	3.943	1.683	1.27	2.037	2.319
16: When answer is found but not in lowest terms, create goal reduce it.	0.213	0.15	0.223	0.007	0.366	0.228	0.218	0.133	0.242
17: When goal reduce fraction to lowest terms, create goals find gcd and divide by it.	0.213	0.15	0.223	0.007	0.366	0.228	0.218	0.133	0.242
18: When goal do whole number arith and operation is +, add operands.	1.863	0.0	0.0	0.0	1.715	0.148	0.014	0.895	0.954
19: When goal do whole number arith and operation is -, subtract operands.	0.0	0.8	0.0	0.0	0.722	0.079	0.043	0.294	0.464
20: When goal do whole number arith and operation is *, multiply operands.	1.629	2.139	4.083	0.287	1.959	6.179	2.841	2.842	2.455
21: When goal do whole number arith and operation is /, divide operands.	0.14	0.145	0.133	0.067	0.147	0.338	0.186	0.128	0.17
22: When goal do whole number arith, and operation is subtract, subtract smaller from larger.	0.0	1.209	0.0	0.0	1.135	0.074	0.042	0.552	0.614
23: When goal do whole number arith and operation is /, divide larger by smaller.	0.254	0.33	0.123	0.107	0.389	0.425	0.199	0.325	0.289
24: When goal do whole number arith and operation is /, divide operands and keep integer part of answer.	0.111	0.261	0.125	0.077	0.218	0.358	0.241	0.149	0.185
25: When goal do whole number arith and operation /, divide larger by smaller and keep integer part of answer.	0.235	0.19	0.135	0.077	0.291	0.346	0.186	0.206	0.244
26: When goal find GCD of specified variables, do so.	0.213	0.15	0.223	0.007	0.366	0.228	0.218	0.133	0.242
27: When goal find LCM of specified variables, do so.	0.157	0.314	0.035	0.025	0.0	0.531	0.096	0.264	0.171
28: When operation +/- and denoms equal, create goals operate on numbers and maintain common denom.	0.428	0.357	0.0	0.0	0.785	0.0	0.0	0.328	0.457
29: When denoms equal, create goals operate on numbers and maintain common denom.	0.742	0.842	0.009	0.009	1.602	0.0	0.0	0.701	0.901
30: When operation +/-, create goals find common denom then operate on numbers and maintain common denom.	0.332	0.23	0.0	0.0	0.0	0.563	0.014	0.28	0.268
31: Create goals find common denom, then operate on numbers and maintain common denom.	0.097	0.325	0.303	0.086	0.0	0.811	0.278	0.32	0.213
32: When operation *, create goals apply operation to numerators and denominators separately.	0.0	0.0	0.614	0.0	0.014	0.599	0.442	0.071	0.1
33: When operation /, create goals apply operation cross-wise.	0.0	0.0	0.049	0.0	0.002	0.046	0.035	0.002	0.012
34: When operation /, create goal invert-and-operate.	0.0	0.0	0.0	0.149	0.033	0.116	0.047	0.064	0.038
35: Create goal invert-and-operate.	0.051	0.035	0.142	0.17	0.021	0.376	0.196	0.113	0.089

Τονίζουμε, ότι για να προκύψει ο παραπάνω πίνακας χρειάστηκε να τρέξαμε εκ νέου το πρόγραμμα. Οι τιμές των παραμέτρων αυτή τη φορά ήταν οι $e = 0.014268684392882886$, $disc_inc = 0.16228815504385546$, $g = 0.704220178056802$.

2. Φάση ελέγχου (testing mode)

Στη συνέχεια το λογισμικό εισέρχεται στη φάση ελέγχου (testing mode) κατά την οποία υπολογίζεται η επίδοση του μαθητή σε μια σειρά από προβλήματα. Στην παρούσα εκτέλεση υπάρχουν τα εξής 16 προβλήματα: « $3/5+1/5$ », « $4/5+3/5$ », « $2/3+3/5$ », « $3/5+1/4$ », « $3/5-1/5$ », « $4/5-3/5$ », « $2/3-3/5$ », « $3/5-1/4$ », « $3/5*1/5$ », « $4/5*3/5$ », « $2/3*3/5$ », « $3/5*1/4$ », « $3/5:1/5$ », « $4/5:3/5$ », « $2/3:3/5$ », « $3/5:1/4$ ».

Το πρόγραμμα ξεκινάει από το 1^ο πρόβλημα. Η διαδικασία είναι η ίδια με τη φάση μάθησης (learning mode) με τη διαφορά ότι ο πίνακας **associations** ο οποίος προέκυψε από τη φάση μάθησης παραμένει ο ίδιος μετά τη λύση του καθενός από τα παραπάνω προβλήματα. Έτσι, για το πρώτο πρόβλημα, τα χαρακτηριστικά του είναι τα ['+', 'same-denom', 'fraction'] και η αρχική κατάσταση του προβλήματος είναι η

rule: None.
state: $3/5+1/5 = ?/?$
goals: find_answer

Δηλαδή, έχουμε ένα πρόβλημα πρόσθεσης δύο ομωνύμων κλασμάτων. Δημιουργείται ο πίνακας $x = [1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0]$ προκειμένου να ενεργοποιηθούν εκείνες οι στήλες του πίνακα **associations** οι οποίες αντιστοιχούν σε αυτά τα χαρακτηριστικά. Στη συνέχεια, για κάθε μία γραμμή του πίνακα **associations**, η οποία όπως είδαμε αντιστοιχεί σε κάποιο κανόνα (rule), αθροίζονται οι τιμές εκείνων των στηλών οι οποίες αντιστοιχούν στα χαρακτηριστικά τον παρόντος προβλήματος ['+', 'same-denom', 'fraction']. Δηλαδή, έχουμε την πράξη:

activations = associations * x =

[0.42945115998906846, 2.2840052774611066, 0.4515917700394657, 0.1311751684523001,
0.32780488743356767, 0.06984400755345932, 0.07253449962122215, 0.08911882247912903,
7.198629916802393, 7.99262784291125, 0.793997926108873, 6.526635369623143,
0.1728566608227325, 0.23418782172157326, 0.8210781498434657, 7.99262784291125,
0.8210781498434657, 0.8210781498434657, 4.53252627074138, 1.185558399114678,
6.042316324319198, 0.4570392710235826, 1.7486091522294445, 0.9321622793160272,
0.5137391549923755, 0.7702006204615287, 0.8210781498434657, 0.32780488743356767,
1.6694360739672969, 3.245188565374012, 0.6008506757606278, 0.30972115016470575,
0.11414947514306308, 0.01389383079014411, 0.07096856836167566, 0.16052876129213484]

Σημειώνουμε, ότι στον πίνακα **associations**, όπως αυτός εκτυπώνεται από το πρόγραμμα, οι αριθμοί τυπώνονται με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων, αν και η ακρίβεια των αριθμών τους οποίους χρησιμοποιεί το πρόγραμμα είναι 17 ψηφίων. Δηλαδή, στον πίνακα **associations** οι αριθμοί δεν τυπώνονται με την πραγματική ακρίβεια των 17 ψηφίων για οικονομία χώρου. Στη συνέχεια υπολογίζονται οι παρακάτω πίνακες:

pwrs = g * activations=

[0.302428172354202, 1.6084426031763361, 0.31802003670617895, 0.09237620048410977,
0.23084681619635697, 0.049185559435497746, 0.0510802582385181, 0.06275927303446478,
5.069420441775603, 5.628569802676714, 0.5591493609011221, 4.596188322107832,
0.12172914846288892, 0.16491978951150094, 0.578219800881315, 5.628569802676714,
0.578219800881315, 0.578219800881315, 3.1918964574286277, 0.8348941469212761
4.255121077787587, 0.32185627681917833, 1.231405848534773, 0.6564474863177672,
0.36178547920348175, 0.5423908180808772, 0.578219800881315, 0.23084681619635697
1.1756505692636983, 2.2853272693355846, 0.4231311698696991, 0.2181118835169466,
0.08038636371033837, 0.009784315992926363, 0.04997749784809556, 0.11304759286038507]

all_weights = e^{pwrs} =

[1.3531404800354052, 4.995025929491018, 1.3744037994767737, 1.0967773526498792,
1.2596662641995966, 1.0504152471173314, 1.0524073542542702, 1.064770489408479,
159.08210327996102, 278.26386067919975, 1.7491839430202871, 99.10583525628475,
1.129448147581247, 1.179298522807049, 1.7828617551062411, 278.26386067919975,
1.7828617551062411, 1.7828617551062411, 24.33453311665381, 2.3045700895362353,
70.46534846044149, 1.379686468779089, 3.4260426492815883, 1.9279311525987821,
1.4358908804633441, 1.7201144306858243, 1.7828617551062411, 1.2596662641995966,

