ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ -ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

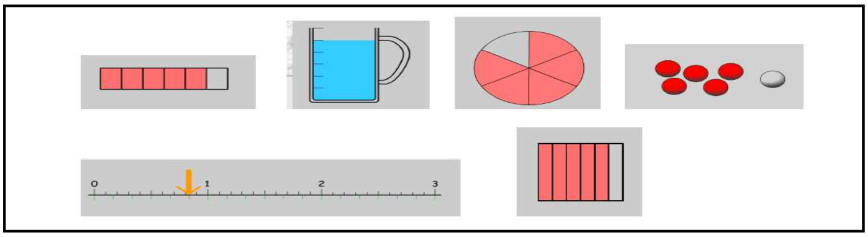
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜ. ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜ.ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ-ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ Γ΄ ΚΑΙ ΤΗΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Κατσαβουνίδου Αικατερίνη

Α.Ε.Μ.: 807

Επιβλέπουσα: Δεσλή Δέσποινα

Θεσσαλονίκη, 2020

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Γ΄ ΜΕΡΟΣ: ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες σε όλους όσους συνέβαλλαν στην εκπόνησή της. Καταρχάς, ευχαριστώ θερμά την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου, κ. Δεσλή Δέσποινα, για την τιμή που μου έκανε και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, ώστε να αναλάβει να είναι η επιβλέπουσα καθηγήτριά μου. Επιπλέον, την ευχαριστώ ιδιαιτέρως για την επιστημονική της καθοδήγηση, τις πολύτιμες συμβουλές και υποδείξεις της, την επιμονή και υπομονή της, καθώς και τη συνεχή υποστήριξή της από την αρχή μέχρι το τέλος της εργασίας. Ευχαριστώ πολύ, όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος και ιδιαίτερα τους κ. Σακονίδη Χαράλαμπο και την κ. Χρονάκη Άννα ως μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την αμέριστη συμπαράσταση, την κατανόηση και την υπομονή τους κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών και της διπλωματικής μου εργασίας, και να τους διαβεβαιώσω πως όλη αυτή η «περιπέτεια» που τους στέρησε την παρουσία μου άξιζε τον κόπο.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν τη βασική γέφυρα ανάμεσα στο αναλυτικό πρόγραμμα και την εφαρμογή της διδασκαλίας μέσα στη σχολική τάξη και συχνά λειτουργούν ως στήριγμα του εκπαιδευτικού για τον σχεδιασμό και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Στην παρούσα εργασία σκοπός είναι αφενός να μελετηθεί ο τρόπος που εισάγεται και προσεγγίζεται διδακτικά η έννοια του κλάσματος στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Γ΄ και της Δ΄ τάξης και αφετέρου να ελεγχθεί η συνέπεια και η συνέχεια που παρουσιάζουν στην οργάνωση του μαθηματικού περιεχομένου της έννοιας του κλάσματος ανάμεσα στις δύο τάξεις. Για τον σκοπό αυτό, χαρτογραφήθηκαν όλες οι δραστηριότητες από τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Γ΄ και της Δ΄ τάξης ως προς τη συχνότητα εμφάνισης των διαστάσεων του κλάσματος, των μοντέλων και των αναπαραστατικών μέσων που τις συνοδεύουν.

Τα αποτελέσματα έδειξαν σχεδόν ίσο αριθμό δραστηριοτήτων στις δύο τάξεις, αλλά με διαφορά στο είδος των αριθμών που εμφάνιζαν, καθώς στα εγχειρίδια της Δ΄ τάξης οι δραστηριότητες περιορίζονταν κυρίως στα δεκαδικά κλάσματα. Από τις διαστάσεις του κλάσματος, αυτή που κυριαρχούσε ήταν του «μέρους-όλου». Το μεγαλύτερο ποσοστό δραστηριοτήτων και στις δύο τάξεις αξιοποιούσε το μοντέλο «εμβαδού ή επιφάνειας», κυρίως με τη χρήση γεωμετρικών σχημάτων και τετραγωνισμένων επιφανειών. Μεγάλο ποσοστό δραστηριοτήτων στη Δ΄ τάξη δεν βρέθηκε να εμφανίζει κάποιο μοντέλο με τα κλάσματα. Ποικιλία αναπαραστατικών μέσων (χειραπτικά, εικόνες, γραπτά σύμβολα, κ.λ.π.) εντοπίστηκε να πλαισιώνει τις δραστηριότητες που αφορούν στα κλάσματα, όχι όμως με την ίδια συχνότητα παρουσίας στις δυο τάξεις: ενώ στη Γ΄τάξη αξιοποιούνταν ένα πλήθος μέσων, η εικόνα και τα γραπτά σύμβολα κυριαρχούσαν στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄τάξης. Τα παραπάνω αποτελέσματα αναδεικνύουν αρκετές αποκλίσεις στη διδακτική προσέγγιση του κλάσματος όπως προτείνεται από τα σχολικά εγχειρίδια των δύο τάξεων, γεγονός που εγείρει προβληματισμούς για τη συνέπεια στη διδασκαλία και προσφέρεται για εκπαιδευτικές βελτιωτικές αλλαγές.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Σχολικά εγχειρίδια, κλάσματα, διαστάσεις του κλάσματος, αναπαραστάσεις του κλάσματος

ABSTRACT

School textbooks bridge the gap between curriculum and teaching practices with their use often considered as supportive tools for teachers when mathematics teaching. The purpose of the present study was twofold: firstly, to examine the way in which the fraction concept is introduced in year 3and year 4 mathematics textbooks, and to check for consistency and continuity in the mathematical content of fraction between the two years. For this purpose, all activities in year 3 and year 4 mathematics textbooks were classified according to their frequency in terms of the fraction constructs, models and representation means.

The results showed an almost equal number of activities between the two years textbooks which differed, however, in the type of numbers: activities in year 4 textbooks were mainly limited to decimal fractions. The dominant fraction construct observed was that of the “part-whole”. In the majority of the activities the “area model” was revealed with the main use of the geometric shapes and squared areas in both year 3 and 4 textbooks. However, a quite big percentage of activities in year 4 textbooks were found without any model for use. A variety of representation means (representation tools, pictures, symbols, etc.) were observed with differences in their frequency between the two years: whereas year 3 textbooks involve a lot of means, mainly pictures and symbols were found in the year 4 textbooks. These findings highlight the inconsistencies in teaching approaches for fraction between the two textbooks, and indicate concerns for educational improvement.

KEY WORDS: School textbooks, Fractions, Fraction constructs, Fraction representations

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το σχολικό εγχειρίδιο είναι ένα μέσο διδασκαλίας, με μορφή βιβλίου, που ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις του Αναλυτικού Προγράμματος και χρησιμοποιείται τόσο από τους μαθητές όσο και από τους εκπαιδευτικούς, προκειμένου να επεξεργασθούν τη διδακτέα ύλη. Ο ρόλος του στο πλαίσιο της διδασκαλίας είναι κεντρικός (Καψάλης & Χαραλάμπους, 2008). Κατά την Κολέζα (2017), τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν το μέσο που χρησιμοποιείται και μπορεί να θεωρηθεί ως η βασική γέφυρα ανάμεσα στο αναλυτικό πρόγραμμα και την εφαρμογή της διδασκαλίας, μέσα στη σχολική τάξη. Εκφράζουν κατά ένα μέρος τις προθέσεις του αναλυτικού προγράμματος και επηρεάζουν τους διδακτικούς σκοπούς και τον σχεδιασμό της διδασκαλίας σε συγκεκριμένες κοινωνικο-πολιτισμικές συνθήκες.

Την άρρηκτη σύνδεση του κοινωνικο-πολιτισμικού πλαισίου και των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών υποστηρίζουν και οι Pepin και Haggarty (2001). Θεωρούν πως οι υπάρχουσες πολιτισμικές παραδόσεις, η φιλοσοφία, οι παιδαγωγικές αρχές των εκπαιδευτικών, η δομή του αναλυτικού προγράμματος καθώς και του εκπαιδευτικού συστήματος επηρεάζουν και διαμορφώνουν τον τρόπο χρήσης των σχολικών εγχειριδίων για την επίτευξη της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών. Επιπλέον τονίζουν πως τα εγχειρίδια είναι αυτά που κατασκευάζουν συγχρόνως την εικόνα των Μαθηματικών και την εικόνα του μαθητή που μαθαίνει μαθηματικά.

Σύμφωνα με τους Mesa (2004) και Reys, Reys και Chávez (2004), τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών αποτελούν ένα σημαντικό εργαλείο για τη διδασκαλία και τη μάθηση, γιατί ορίζουν τι είναι τα σχολικά μαθηματικά και οργανώνουν επιστημονικά το περιεχόμενο της γνώσης. Μπορούν να καθοδηγήσουν τους δασκάλους σχετικά με τα θέματα που θα διδάξουν και τον χρόνο που θα διαθέσουν. Επιπλέον καθορίζουν τη ροή των δραστηριοτήτων και τη σειρά που θα ακολουθήσουν ώστε να διδαχθεί μια μαθηματική έννοια.

Τα σχολικά εγχειρίδια, επίσης, έχουν χαρακτηρισθεί ως «εξουσία μέσα στην εξουσία», γιατί ουσιαστικά είναι μια κωδικοποιημένη έκφραση του μαθηματικού περιεχομένου, που καθορίζεται από την πολιτική εξουσία και τη μαθηματική κοινότητα ως σημαντική για τους μαθητές σε μία δεδομένη χρονική περίοδο (Apple, 1986. 1992. Stray, 1994, στο Κολέζα, 2017).

Η έρευνα αναφορικά με την αξιολόγηση και τη χρήση των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών είναι σχετικά πρόσφατη και περιορισμένη (Κολέζα, 2007). Κάποιες μελέτες έχουν εξετάσει μια σειρά από ζητήματα, όπως το περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων (Li, Chen & An, 2009), τη φύση και τους στόχους των δραστηριοτήτων που προτείνονται μέσα από αυτά (da Ponte & Marques, 2007), το επίπεδο των γνωστικών απαιτήσεων που θεωρούνται αναγκαίες για την εκτέλεση των δραστηριοτήτων (Jones & Tarr, 2007), αλλά και τη χρήση των εγχειριδίων μέσα στις σχολικές τάξεις σε σχέση με τους μαθητές, τους εκπαιδευτικούς ή και συνδυαστικά (Pepin & Haggarty, 2001).

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία το σχολικό εγχειρίδιο αποτελεί τη βασική πηγή παροχής εκπαιδευτικών ευκαιριών στους μαθητές τόσο στις γερμανικές όσο και στις αγγλικές αίθουσες διδασκαλίας και χρησιμοποιείται ευρέως στην τάξη (Pepin & Haggarty, 2001). Με την ίδια άποψη ταυτίζεται και ο Apple και Christian-Smith (1991), υποστηρίζοντας πως τα σχολικά εγχειρίδια χρησιμοποιούνται ευρέως και στα αμερικανικά σχολεία. Όπως στις παραπάνω χώρες το ίδιο και στην Ελλάδα, οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν το σχολικό εγχειρίδιο ως βασικό στήριγμα σχεδιασμού για τη διδασκαλία (Χαραλάμπους & Καψάλης, 2008) και τη μάθηση των μαθηματικών εννοιών μέσα στη σχολική τάξη (Κολέζα, 2006).

Μια από τις βασικές και θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες που διδάσκονται μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια είναι και τα κλάσματα. Το ερευνητικό ενδιαφέρον για τον τρόπο που προσεγγίζεται και παρουσιάζεται η έννοια του κλάσματος μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών όλο και συνεχώς αυξάνεται, καθώς τα κλάσματα αποτελούν μία από τις πιο δύσκολες και προβληματικές περιοχές στα σχολικά μαθηματικά (Kieren, 1993. Lamon, 1999, στο Γαγάτσης, Μιχαηλίδου & Σιακαλλή, 2001). Παρόλο που κατά διαστήματα προτείνονται διάφορες αλλαγές στον τρόπο οργάνωσης της διδασκαλίας των κλασμάτων, αυτές οι αλλαγές δεν φαίνεται να μεταβάλλουν σημαντικά το επίπεδο κατανόησης των μαθητών (Lortie-Forgues, Tian, & Siegler, 2015).

Σύμφωνα με τους Kieren (1976), Marshall (1993) και Lamon (2012), ένας από τους βασικούς παράγοντες που κάνουν τη διδασκαλία των κλασματικών αριθμών προβληματική εντοπίζεται στο γεγονός ότι τα κλάσματα αποτελούν ένα πολυσύνθετο κατασκεύασμα. Ο Kieren (1976), θεωρώντας ως θεμέλιο της κλασματικής έννοιας το μέρος-όλο, ήταν ο πρώτος που υποστήριξε την πολύπλευρη δομή τους παρουσιάζοντας ένα θεωρητικό μοντέλο που αποτελείται από τις τέσσερις διαστάσεις του κλάσματος: τον λόγο, τον τελεστή, το πηλίκο, το μέτρο και την άρρηκτη σύνδεση μεταξύ τους.

Παρά το γεγονός πως τόσο η κατανόηση των διαστάσεων του κλάσματος όσο και οι ποικίλες αναπαραστάσεις της έννοιας συμβάλλουν στην καλύτερη και ολοκληρωμένη κατανόησή τους από τους μαθητές (Γαγάτσης, Μιχαηλίδου & Σιακαλή, 2001), λίγες είναι οι έρευνες που έχουν μελετήσει αν στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών εισάγεται και ενθαρρύνεται μια πιο εννοιολογική και πολύπλευρη διδακτική προσέγγιση που να βοηθά στην κατανόηση της πολυδιάστατης έννοιας των κλασμάτων.

Για παράδειγμα, οι Charalambous και Pita-Pantazi (2007) και οι Nguyen, Duong και Phan (2017) στην προσπάθειά τους να συνδέσουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα κλάσματα, μελετώντας την παρουσία τους στα σχολικά εγχειρίδια, συμπεραίνουν ότι τόσο στα σχολεία της Κύπρου όσο και του Βιετνάμ το πρόγραμμα σπουδών και τα εγχειρίδια των μαθηματικών προσεγγίζουν μονομερώς την πολυσύνθετη έννοια του κλάσματος εστιάζοντας σε αυτή του μέρους-όλου, με αποτέλεσμα να είναι ελλιπής η γνώση στις υπόλοιπες διαστάσεις, περιορισμένες οι αναπαραστάσεις και κατ' επέκταση φτωχή η εννοιολογική κατανόηση του κλασματικού αριθμού. Σχετικές έρευνες για τον τρόπο παρουσίασης των κλασμάτων στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών δεν έχουν πραγματοποιηθεί.

Για τον λόγο αυτό στην παρούσα εργασία εξετάζεται η παρουσίαση της έννοιας του κλάσματος στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Γ΄ και της Δ΄ τάξης του Δημοτικού στον ελλαδικό χώρο. Πιο συγκεκριμένα, σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να χαρτογραφηθούν οι δραστηριότητες που αφορούν τα κλάσματα στο σύνολό τους και να αναδειχθεί η συχνότητα εμφάνισης των διαστάσεων (ερμηνειών) του κλάσματος αλλά και των αναπαραστάσεων που τα συνοδεύουν. Η συγκεκριμένη επιλογή που αφορά την έννοια του κλάσματος και τις διαστάσεις του έγινε γιατί τα κλάσματα αντιπροσωπεύουν μια δύσκολη και αφηρημένη έννοια, ένα πολύπλευρο κατασκεύασμα καθώς η μετάβαση από την λογική της φυσικής σημασίας του αριθμού προς την κατανόηση ενός αριθμού της μορφής α/β, είναι κάτι που δυσκολεύει τους μαθητές αλλά και τους εκπαιδευτικούς σε όλο τον κόσμο (Lortie-Forgues, Tian & Siegler, 2015).

Ερευνητικά ερωτήματα που θα διερευνηθούν – ερευνητικές υποθέσεις

Τα επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα που η παρούσα εργασία επιχειρεί να απαντήσει είναι:

- Ποιες από τις διαστάσεις (ερμηνείες) του κλάσματος (μέρος-όλου, πηλίκο, τελεστής, λόγος, μέτρο) εμφανίζονται πιο συχνά στις δραστηριότητες που παρουσιάζονται στις διδακτικές προτάσεις των εγχειριδίων των μαθηματικών της Γ΄ και της Δ΄ τάξης;

Στα σχολικά εγχειρίδια η κατανόηση των κλασματικών εννοιών δομείται με βάση το πρόγραμμα σπουδών και σύμφωνα με τους Charalambous και Pita-Pantazi (2007), Nguyen, Duong και Phan (2017), και Bature (2004) η διάσταση του μέρους-όλου κατέχει το μεγαλύτερο εύρος στα εγχειρίδια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης προκειμένου να εισαχθεί η έννοια του κλάσματος. Αν και θεωρείται σημαντικό οι μαθητές να έρχονται σε επαφή με τις διαφορετικές εννοιολογικές πτυχές του κλάσματος και να διακρίνουν τις συνδέσεις μεταξύ τους (Κολέζα, 2017. Lamon, 2012), είναι πολύ πιθανό στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Γ΄ και της Δ΄ τάξης του δημοτικού να επικρατεί η διάσταση του μέρους-όλου.

- Ποια μοντέλα και ποια αναπαραστατικά μέσα εμφανίζονται και αναδεικνύουν τα κλάσματα μέσα από τις δραστηριότητες που υιοθετούνται από τα σχολικά εγχειρίδια των δύο τάξεων;

Αρκετοί είναι οι ερευνητές (Lamon, 2001 & van de Walle, 2005) που θεωρούν αναγκαία τη χρήση πολλαπλών μοντέλων και αναπαραστάσεων προκειμένου να γίνει κατανοητή η έννοια του κλάσματος. Σύμφωνα με τους Charalambous και Pitta-Pantazi (2007), τα διαφορετικά μοντέλα της επιφάνειας, του μέτρου και των συνόλων βοηθούν τους μαθητές να ανακαλύψουν τα ποικίλα εννοιολογικά χαρακτηριστικά του κλάσματος και να δημιουργήσουν ακριβέστερα νοητικά σχήματα και συνδέσεις που αφορούν στα κλάσματα. Συχνά, ο κύκλος, το τετράγωνο και η επιφάνεια γενικότερα εμφανίζονται ως η ευκολότερη προσέγγιση για τους μαθητές, γι’ αυτό παραδείγματα με συνεχείς επιφάνειες στη διδασκαλία των κλασμάτων απαντώνται με μεγαλύτερη συχνότητα στα σχολικά εγχειρίδια (Γαγάτσης, Σιημητρά-Κωνσταντίνου & Χριστουδουλίδου, 2006).

Οι αναπαραστάσεις στο χώρο των Μαθηματικών επίσης θεωρούνται ένα ισχυρό εργαλείο διδασκαλίας, γιατί μέσω αυτών οι μαθητές μπορούν να αναδιοργανώσουν και να μεταφράσουν τις ιδέες με σύμβολα. Η αριθμογραμμή ως διδακτικό μέσο για παράδειγμα αποτελεί ένα πολύ σημαντικό αναπαραστατικό μέσο. Είναι ένα επιτηδευμένο μοντέλο μέτρησης με πιο δύσκολη τη χρήση της από τους μαθητές αλλά τους δίνει η δυνατότητα σύγκρισης και κατανόησης ενός πραγματικού μήκους σε σχέση με κάποιο άλλο (van de Valle, 2007). Επιπλέον η χρήση εικονικών και διαγραμματικών αναπαραστάσεων συντελεί αποτελεσματικά στον ίδιο σκοπό (Γαγάτσης, Σιημητρά-Κωνσταντίνου και Χριστουδουλίδου 2006).

Αναμένεται λοιπόν τα μοντέλα και οι αναπαραστάσεις που θα συνοδεύουν συχνότερα τις δραστηριότητες των κλασματικών αριθμών στα εγχειρίδια των μαθηματικών της Γ΄ και της Δ΄ τάξης του δημοτικού να είναι μοντέλα επιφάνειας, μέσα από τα στερεότυπα γεωμετρικά σχήματα (κύκλος, τετράγωνα, ορθογώνιο κ.λ.π.) όπως επίσης και οι εικόνες και οι αριθμογραμμές, τα οποία εκτιμάται να υπερτερούν σε σχέση με τα χειραπτικά ή σχηματικά μέσα που πιθανότατα θα εμφανίζονται λιγότερο συχνά.

- Εμφανίζονται κάποια αναπαραστατικά μέσα, συχνότερα, σε σχέση με κάποια άλλα αναδεικνύοντας συγκεκριμένη διάσταση (ερμηνεία) του κλάσματος;

Παραδοσιακά, οι δάσκαλοι εισάγουν τη διάσταση του μέρους-όλου με αναπαραστάσεις που εστιάζουν σε δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα που χωρίζονται σε ίσα μέρη αξιοποιώντας την επιφάνεια (Γαγάτσης, Κύπρος, Σιημητρά-Κωνσταντίνου & Χριστοδουλίδου, 2006.) Αναμένεται ότι και στα εγχειρίδια της Γ΄ και της Δ΄ τάξης, οι πίτες και τα γεωμετρικά σχήματα θα συνοδεύουν πιο συχνά την ερμηνεία του μέρους-όλου γιατί είναι πιο οικεία στους μαθητές και πιθανόν να βρεθεί μια ποικιλία των συγκεκριμένων μέσων, ιδιαίτερα στη Γ΄ τάξη, που γίνεται η εισαγωγή στα κλάσματα (van de Walle, 2005). Η αριθμογραμμή επίσης, που αναφέρεται ως ένα επιτηδευμένο μοντέλο μέτρησης (Bright, Behr, Post & Wachsmuth, 1988, στο van de Walle, 2005) εικάζεται ότι θα αναδεικνύει αρκετά συχνά τη διάσταση του μέτρου.

- Υπάρχει συνέπεια και συνέχεια ανάμεσα στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών των δύο τάξεων ως προς την οργάνωση του μαθηματικού περιεχομένου της έννοιας του κλάσματος;

Στα νέα σχολικά εγχειρίδια η οργάνωση του μαθηματικού περιεχομένου δομείται σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα σπουδών (2003) και στηρίζεται σε μια σπειροειδή ανάπτυξη της ύλης και των μαθηματικών εννοιών, «*ώστε οι καινούριες γνώσεις να εισάγονται με εμπέδωση και επέκταση των προηγούμενων. Για παράδειγμα, σ΄ όλη την πρώτη περίοδο επανεμφανίζονται και επεκτείνονται γνώσεις των προηγούμενων τάξεων*» (Ο.Ε.Δ.Β., Βιβλίο Δασκάλου Δ΄ τάξη, 2006, σελ.11). Αναμένεται και σε σχέση με τα κλάσματα και την οργάνωση του μαθηματικού περιεχομένου της έννοιας, να υπάρχει στα εγχειρίδια της Γ΄ και της Δ΄ Τάξης μια συνέχεια και εμβάθυνση που θα συμβάλλει με συνέπεια, σε μια αποτελεσματική διδασκαλία μέσα στο σχολείο, έχοντας οδηγό το εγχειρίδιο των μαθηματικών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

Βιβλιογραφική Επισκόπηση

Στο κεφάλαιο αυτό, το οποίο χωρίζεται σε τρία μέρη, επιχειρείται η βιβλιογραφική επισκόπηση ερευνών που αφορά: α) στα σχολικά εγχειρίδια και, πιο συγκεκριμένα, αυτά των μαθηματικών, β) στην ανάλυση της έννοιας του κλάσματος και γ) στον ρόλο των αναπαραστάσεων στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών. Το πρώτο μέρος αναφέρεται στον ρόλο και τη λειτουργία των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών. Στη συνέχεια, περιγράφονται διεξοδικότερα τα εγχειρίδια των μαθηματικών και τα Ελληνικά Αναλυτικά Προγράμματα των Μαθηματικών της Γ΄ και της Δ΄ τάξης του δημοτικού, κάνοντας εκτενή αναφορά στα κλάσματα ως διδακτική ενότητα. Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου γίνεται ιστορική αναφορά σε σχέση με τα κλάσματα και επιχειρείται ο ορισμός τους, η έννοια και οι διαστάσεις τους καθώς και η κατανόησή τους τόσο από τους μαθητές όσο και από τους εκπαιδευτικούς. Στο τρίτο και τελευταίο μέρος του κεφαλαίου, καταγράφεται ο ρόλος των μοντέλων και αναπαραστάσεων σε σχέση με τα κλάσματα και η σημασία τους στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών.

Α. ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ

Α.1 Ο ρόλος και η λειτουργία των σχολικών εγχειριδίων στη διδασκαλία

Στη σύγχρονη κοινωνία, παρά τη συνεχώς αυξανόμενη διάδοση των τεχνολογικών και οπτικοακουστικών μέσων, το σχολικό εγχειρίδιο εξακολουθεί να κατέχει στη σχολική εκπαίδευση έναν ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο, τόσο για τους εκπαιδευτικούς όσο και τους μαθητές (Μπονίδης, 2004).

Σύμφωνα με τον Ματσαγγούρα (2006), με τον όρο σχολικά εγχειρίδια -που είναι ευρύτερος- εννοούνται συνήθως το σύνολο των βιβλίων τα οποία έχουν συγγραφεί για να στηρίξουν τη διδασκαλία των μαθημάτων με βάση το επίσημο Αναλυτικό πρόγραμμα. Κάποια από αυτά απευθύνονται μόνο στους εκπαιδευτικούς (βιβλίο δασκάλου), ενώ κάποια άλλα στους μαθητές. Αντίθετα, ο όρος διδακτικά εγχειρίδια είναι πιο συγκεκριμένος γιατί αναφέρεται στα Βιβλία του Μαθητή και τα Τετράδια Εργασιών που τα συνοδεύουν και απευθύνονται στους μαθητές ενός σχολείου. Κατά τους Καψάλη και Χαραλάμπους (2008), ο όρος σχολικό εγχειρίδιο είναι επίσης διευρυμένος, μιας και συμπεριλαμβάνει το διδακτικό εγχειρίδιο, το βιβλίο του δασκάλου, και αν υπάρχουν, τα τεύχη εργασιών και ασκήσεων.

Ανεξάρτητα από τους ορισμούς που δίνονται, σε κάθε περίπτωση το σχολικό εγχειρίδιο ως εκπαιδευτικό και πληροφοριακό μέσο αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης και έρευνας σχετικά πρόσφατα, σχεδόν από τις αρχές του 20ού αιώνα μέχρι και σήμερα (Remillard, 2000, στο Κολέζα, 2017). Αρχικά η έρευνα των σχολικών εγχειριδίων είχε πραγματιστικό χαρακτήρα, Διεθνής βελτίωση ή η αναθεώρησή τους στο πλαίσιο της Παιδαγωγικής της Ειρήνης. Ο σημαντικός ρόλος τους στα πλαίσια της εκπαίδευσης αρχίζει να συνειδητοποιείται κυρίως μετά τον πρώτο παγκόσμιο πόλεμο. Ιστορικά το σχολικό εγχειρίδιο θεωρείται το παλαιότερο μέσο διδασκαλίας και η χρήση του αυτονόητη από τους μαθητές. Μετά την καθιέρωση και επέκταση του θεσμού της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, γίνεται το βασικό μέσο εφαρμογής του αναλυτικού προγράμματος σπουδών και καθορίζει σε πολύ μεγάλο βαθμό τους σκοπούς, τη στήριξη και την οργάνωση της διδασκαλίας (Καψάλης & Χαραλάμπους, 2008).

Από τη δεκαετία του 1970 και μετά, το σχολικό εγχειρίδιο θεωρείται ένα μέσο επικοινωνίας, διδασκαλίας και μάθησης. Το ερευνητικό ενδιαφέρον στρέφεται και σε άλλους παράγοντες που σχετίζονται με το εγχειρίδιο όπως η διδακτική μεθοδολογία, η διαδικασία συγγραφής, το περιεχόμενό του αλλά και παράγοντες που το πλαισιώνουν όπως το σχολείο, η κοινωνία, ο πολιτισμός. Ο ρόλος του στα πλαίσια της εκπαιδευτικής διαδικασίας γίνεται κεντρικός (Μπονίδης, 2004).

Σύμφωνα με τους Καψάλη και Χαραλάμπους (2008), το σχολικό εγχειρίδιο διαδραματίζει τον κεντρικότερο ρόλο στα πλαίσια της διδασκαλίας και της σχολικής εκπαίδευσης. Η γνώση μιας συγκεκριμένης επιστημονικής περιοχής παρουσιάζεται με σύστημα και οργάνωση μέσα από το σχολικό εγχειρίδιο. Το περιεχόμενό του συνάδει τόσο με τις απαιτήσεις που ορίζει το Πρόγραμμα Σπουδών για τη διδακτέα ύλη, όσο και με το ωρολόγιο πρόγραμμα του σχολείου και αυτό υποστηρίζει την χρήση του ως έγκυρη πηγή. Στην κοινή γνώμη οι έννοιες «σχολικό εγχειρίδιο» και «μόρφωση» έχουν ταυτιστεί. Επιπλέον το σχολικό εγχειρίδιο παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της επικοινωνίας και των διαπροσωπικών σχέσεων τόσο ανάμεσα στον εκπαιδευτικό και στους μαθητές όσο και στους μαθητές μεταξύ τους. Οι ίδιοι ερευνητές υποστηρίζουν πως για κάποιους μαθητές το σχολικό εγχειρίδιο αποτελεί και την πρώτη επαφή με το βιβλίο. Στα πλαίσια της σχολικής τάξης, εκπαιδευτικοί και μαθητές είναι πολλές φορές αναγκασμένοι να χρησιμοποιούν αποκλειστικά το σχολικό εγχειρίδιο λόγο έλλειψης άλλων μέσων διδασκαλίας όπως χάρτες, οπτικοακουστικό υλικό, εικόνες κ.λ.π..

Ως μέσο διδασκαλίας, μάθησης και επικοινωνίας, το σχολικό εγχειρίδιο με τη λειτουργία του συμβάλει δυναμικά στην κατάκτηση της γνώσης. Κατά τους Καψάλη και Χαραλάμπους (2008), οι κυριότερες λειτουργίες των σχολικών εγχειριδίων είναι: α) Μεταμορφώνουν ουσιαστικά την επιστημονική γνώση σε διδακτέα ύλη ανάλογα με τις γνωστικές δυνατότητες και το ηλικιακό επίπεδο των μαθητών. β) Καθοδηγούν και προγραμματίζουν το σχεδιασμό και τη διεξαγωγή της διδασκαλίας αλλά ταυτόχρονα επιβάλλουν και μια συγκεκριμένη διδακτική προσέγγιση την οποία πρέπει να ακολουθήσει ο εκάστοτε εκπαιδευτικός. γ) Δραστηριοποιούν τα κίνητρα μάθησης και εξοικείωσης με το βιβλίο ώστε οι μαθητές να αυτενεργούν και να συνεχίσουν να μαθαίνουν με τους τρόπους που διδάχτηκαν. δ) Προσφέρουν διαφοροποίηση και εξατομίκευση της διδακτέας ύλης, όταν τα σχολικά εγχειρίδια περιέχουν πλήθος διαφοροποιημένων ασκήσεων και εργασιών ανάλογα με το γνωστικό επίπεδο των μαθητών. ε) Συμβάλλουν στην εμπέδωση και την αξιολόγηση της γνώσης, μέσα από τα επαναληπτικά κριτήρια και τα φύλλα αξιολόγησης που παρέχουν ώστε να είναι πλήρες και σύγχρονα βοηθώντας με τον τρόπο αυτό τον εκπαιδευτικό. στ) Τέλος, λειτουργούν ως φορείς κοινωνικοποίησης καθώς εισάγουν τους μαθητές στην «επίσημη» γνώση και την ιδεολογία της κοινωνίας, τόσο στα πλαίσια της σχολικής αίθουσας όσο και στο ευρύτερο κοινωνικό σύνολο.

Σύμφωνα με τους Pepin και Haggarty (2001), το σχολικό εγχειρίδιο αντικατοπτρίζει την «εικόνα» του κοινωνικο-πολιτισμικού επιπέδου μιας χώρας και περιλαμβάνει την πολιτισμικά σημαντική γνώση που το σχολείο πρέπει να μεταφέρει στη νέα γενιά. Ευρέως έχει υποστηριχθεί ότι τα σχολικά εγχειρίδια προωθούν τις απόψεις των εκάστοτε επίσημων πολιτικών και εκπαιδευτικών οργανισμών για την εκπαίδευση (Apple & Christian-Smith, 1991. Brummelen, 1991). Το εκπαιδευτικό σύστημα, οι εκπαιδευτικοί, οι μαθητές, αλλά και το ευρύτερο κοινωνικό πλαίσιο στο οποίο τοποθετείται κάθε σχολικό εγχειρίδιο, είναι παράγοντες που μεταβάλλονται και ανάλογα διαμορφώνουν το ρόλο και τη χρήση του εγχειριδίου στο σχολείο (Κολέζα, 2017).

Φορείς της κοινωνίας και κύριοι αποδέκτες των σχολικών εγχειριδίων σε κάθε περίπτωση είναι οι μαθητές, οι εκπαιδευτικοί και, τα τελευταία χρόνια, οι γονείς των μαθητών. Από τις τρεις ομάδες, σίγουρα οι εκπαιδευτικοί είναι ο συνδετικός κρίκος μεταξύ των σχολικών εγχειριδίων και της μάθησης. Ο ρόλος του εκάστοτε εκπαιδευτικού, οι γνώσεις, οι ενέργειες και οι δραστηριότητές τους στα πλαίσια της διδασκαλίας καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό την αποτελεσματικότητα στη χρήση των σχολικών εγχειριδίων (Ματσαγγούρας, 2006).

Στις αρχές της δεκαετίας του ΄90 ένας σημαντικός αριθμός ερευνών αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν τα εγχειρίδια. Ερευνητικά δεδομένα δείχνουν ότι εκπαιδευτικοί -κυρίως οι αρχάριοι- πράγματι στηρίζονται σε μεγάλο βαθμό στα σχολικά εγχειρίδια τόσο για την οργάνωση της διδασκαλίας τους, όσο και για την ανάθεση εργασιών στο σπίτι, χωρίς όμως αυτό να κατοχυρώνει τα βέλτιστα μαθησιακά αποτελέσματα (Woodward & Elliot, 1990. Freeman & Porter, 1989. Μπονίδης, 2004). Το σχολικό εγχειρίδιο αποτελεί γι' αυτούς την κύρια πηγή άντλησης πληροφοριών καθώς μειώνει τον χρόνο προετοιμασίας τους για τη διδασκαλία, αλλά ταυτόχρονα προσφέρει και μια έγκυρη και αξιόπιστη συλλογή υλικού που μπορούν να επεξεργαστούν χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες (Μπονίδης, 2004). Σε πολλές περιπτώσεις, τα εγχειρίδια ως οι ουσιαστικοί πόροι για τη διδασκαλία και τη μάθηση δεν υφίστανται κριτική αξιολόγηση και επιλεκτική χρήση, οπότε στην περίπτωση αυτή περιορίζουν παρά υποστηρίζουν σωστά τους εκπαιδευτικούς. Πολλές φορές η μελέτη του σχολικού εγχειριδίου και οι απαντήσεις των ερωτήσεων που τίθενται από αυτό γίνεται ο στόχος των μαθητών και προφανώς και ο εκπαιδευτικός στόχος (Sosniak & Perlman, 1990).

Οι Χαραλάμπους και Καψάλης (2008), αναγνωρίζοντας τόσο την αξία του σχολικού εγχειριδίου, όσο και τους κινδύνους που ελλοχεύει όταν δεν χρησιμοποιείται σωστά, επισημαίνουν πόσο σημαντική είναι η γνώση του παιδαγωγικού περιεχομένου και η γνώση της διδακτικής της χρήσης των σχολικών εγχειριδίων. Τονίζουν πως καθήκον του κάθε εκπαιδευτικού είναι πρώτα να κάνει κτήμα του τη γνώση του περιεχομένου και τη γνώση των παιδαγωγικών και διδακτικών αρχών ενός εγχειριδίου πριν το εγχειρίδιο γίνει το εργαλείο που θα οργανώνει την εργασία του καθημερινά.

Από τη στιγμή που ένα σχολικό εγχειρίδιο καθορίζει το περιεχόμενο της σχολικής γνώσης, τις διδακτικές δραστηριότητες που αναπτύσσει ο εκπαιδευτικός και τις μαθησιακές που αναπτύσσουν οι μαθητές, για να είναι χρήσιμο και λειτουργικό, πρέπει να διασφαλίζει την επιστημονική, παιδαγωγική, διδακτική και κοινωνική εγκυρότητα. Η διαφάνεια αφετηρίας και προθέσεων, αλλά και η συμφωνία με το αναλυτικό πρόγραμμα, πρέπει να είναι ξεκάθαρες ώστε να θεωρείται ένα εύστοχο και παραγωγικό μέσο διδασκαλίας (Fritzche, 1992).

1.A.2.i Τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών

Σύμφωνα με την Κολέζα (2017), τα σχολικά Μαθηματικά που ορίζονται με βάση το Πρόγραμμα Σπουδών, είναι ένα σύνθετο πολιτισμικό προϊόν, που παράγεται μέσα από ένα καλοστημένο κράμα της επιστήμης, της ιδεολογίας και της παιδαγωγικής, σε συγκεκριμένες κοινωνικο-πολιτισμικές συνθήκες. Το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών είναι μια κωδικοποιημένη έκφραση του μαθηματικού περιεχομένου, που θεωρείται από τη μαθηματική κοινότητα ή την πολιτική εξουσία ως σημαντική για τους μαθητές σε μία δεδομένη χρονική περίοδο. Αποτελεί ένα από τα διδακτικά μέσα που καθορίζει αποφασιστικά την ποιότητα στη μαθηματική εκπαίδευση των μαθητών στο σχολείο (Κολέζα, 2006).

Με δεδομένο ότι η ποιότητα ενός εγχειριδίου έχει άμεση σχέση με την ποιότητα της μάθησης, τα εγχειρίδια των μαθηματικών απασχόλησαν την έρευνα τα τελευταία χρόνια διεξοδικότερα. Ο ρόλος, οι λειτουργίες τους, καθώς και η ανάλυσή τους ήταν από τα βασικά θέματα που ερευνήθηκαν. Σύμφωνα με τους Reys, Reys και Chavez (2004), ο ρόλος που διαδραματίζουν τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών στη σχολική τάξη είναι πολλαπλός : α) υποδεικνύουν σε μεγάλο βαθμό την οργάνωση του μαθηματικού περιεχομένου που πρέπει να διδαχθεί και καθορίζουν τη διαδοχή των ενοτήτων στη διδασκαλία β) προγραμματίζουν τη ροή των δραστηριοτήτων και τον τρόπο χρήσης του υλικού που προσφέρεται γ) προτείνουν ιδέες και δραστηριότητες για τη συμμετοχή των μαθητών στο μάθημα, δ) αποτυπώνουν ουσιαστικά αυτό που διδάσκεται στο σχολείο και αυτό που μαθαίνουν οι μαθητές.

Οι Mesa, (2004) και Apple et al., (1991) θεωρούν επίσης τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών σημαντικά εργαλεία για τη διδασκαλία και τη μάθηση γιατί καθορίζουν τι είναι τα σχολικά μαθηματικά, καθορίζουν το επιστημονικό πεδίο με βάση το οποίο αναπτύσσεται η αποδεκτή γνώση στο σχολείο και τέλος σε συνδυασμό με τις διάφορες μορφές αξιολόγησης εξυπηρετούν τη λειτουργία ελέγχου των μαθητών.
Τα τελευταία χρόνια με βάση τη διεθνή έρευνα φαίνεται ότι οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στηρίζουν το 50% του εβδομαδιαίου χρόνου διδασκαλίας τους στα σχολικά εγχειρίδια (Κολέζα, 2017). Η συχνότητα αυτή παρατηρείται όχι

μόνο στο *παραδοσιακό σχολείο,* [1]αλλά και σε πιο σύγχρονα εκπαιδευτικά συστήματα με ανοιχτά σχολεία, όπως π.χ. στη Σουηδία (Johnsen, 1993, στο Καψάλης & Χαραλάμπους, 2008). Πολύ συχνά το σχολικό εγχειρίδιο -ιδιαίτερα στο μάθημα των Μαθηματικών και της Γλώσσας- καταλαμβάνει και μεγάλο μέρος του εξωσχολικού χρόνου των μαθητών, αφού οι περισσότερες εργασίες στο σπίτι γίνονται με βάση το σχολικό εγχειρίδιο (Καψάλης & Χαραλάμπους, 2008).

Ο καθοριστικός ρόλος που διαδραματίζουν τα εγχειρίδια των μαθηματικών και ο αυξημένος χρόνος χρήσης τους στο σχολείο, αλλά και στο σπίτι, κάνουν επιτακτική την ανάγκη της ανάλυσής τους, προκειμένου η λειτουργία τους να είναι αποτελεσματική στη σχολική μάθηση. Όταν η έρευνα αφορά στην ανάλυση ενός εγχειριδίου μαθηματικών τότε μπορεί να περιλαμβάνει ένα ευρύ φάσμα, όπως η ανάλυση ενός ενιαίου εγχειριδίου ή μιας σειράς εγχειριδίων, η οποία συχνά επικεντρώνεται στο πώς μια έννοια ή κάποιες έννοιες εμφανίζονται μέσα από αυτό, την ανάλυση διαφορετικών σειρών εγχειριδίων από την ίδια χώρα ή συχνά διαφορετικές χώρες, με σκοπό τον εντοπισμό ομοιοτήτων και διαφορών ή την καταλληλότητα του εγχειριδίου σε σχέση με το αντίστοιχο πρόγραμμα σπουδών (Κολέζα, 2017).

Η ανάλυση των μαθηματικών εγχειριδίων, σύμφωνα με τους Pepin και Haggarty (2001), ώστε να λειτουργούν αποτελεσματικά πρέπει να στηρίζεται σε τρεις βασικούς άξονες που θα αφορούν: *τις μαθηματικές προθέσεις των εγχειριδίων* (τα μαθηματικά που παρουσιάζονται και οι πεποιθήσεις που προωθούνται ώστε να συγκροτηθεί η μαθηματική γνώση), *τις διδακτικές προθέσεις* (τρόποι με τους οποίους ενισχύεται ο μαθητής στην κατανόηση του περιεχομένου και ο δάσκαλος στη διδασκαλία του), *τα κοινωνιολογικά πλαίσια και τις πολιτισμικές παραδόσεις* που εμφανίζονται στα εγχειρίδια.

Θεωρώντας την ανάλυση της δομής και του περιεχομένου ενός μαθηματικού σχολικού εγχειριδίου και την εφαρμογή του στην τάξη πολύ σημαντική, οι Haggarty και Pepin (2002) μελέτησαν τα εγχειρίδια των Μαθηματικών και τη χρήση τους σε τάξεις στην Αγγλία, Γαλλία και Γερμανία. Στη Γαλλία όπως και στη Γερμανία, μέσα από τα εγχειρίδια υποστηρίζεται η φορμαλιστική διάσταση των Μαθηματικών και

1. **Παραδοσιακό** χαρακτηρίζεται το σχολείο εκείνο που υποστηρίζει μια συγκεκριμένη μορφή διδασκαλίας, τη μετωπική, δασκαλοκεντρική, η οποία στηρίζεται στην εξωτερική αυθεντία του εκπαιδευτικού ως μεταφορέα της γνώσης και στην παθητική αποδοχή της από τους μαθητές, (Καψάλης & Χαραλάμπους, 2008).

θεωρούνται ως ένα δομημένο προϋπάρχον σώμα γνώσης που αναπτύσσεται σε αφηρημένο επίπεδο. Τα γαλλικά εγχειρίδια μαθηματικών περιέχουν πλήθος δραστηριοτήτων και η δομή των κεφαλαίων βασίζεται κυρίως στη ροή *«δραστηριότητες-μάθημα-ασκήσεις»* επιτρέποντας έτσι τους μαθητές να εισαχθούν σε μια έννοια μόνοι τους μέσω της προσωπικής διερεύνησης και ανακάλυψης. Αντίστοιχα, στα γερμανικά εγχειρίδια δίνεται έμφαση στη μαθηματική γλώσσα από άποψη λεξιλογίου και συμβόλων, στη δομή και την ιεραρχία των μαθηματικών εννοιών ως εργαλείων για την επίλυση προβλημάτων. Η δομή των κεφαλαίων ακολουθεί το πρότυπο *«παρουσίαση του θέματος-παραδείγματα-εργασίες»* (Haggarty & Pepin, 2002). Στην Αγγλία τα εγχειρίδια εμφανίζουν τα μαθηματικά ως ένα σύνολο ανεξάρτητων αλλά χρηστικών κανόνων με πρόθεση να αποκτήσουν οι μαθητές άνεση στη χρήση των μαθηματικών εννοιών μέσω της επαναλαμβανόμενης πρακτικής σε εργασίες. Οι ερωτήσεις που εμφανίζονται συχνά είναι ως επί το πλείστον απλές εφαρμογές των παραδειγμάτων που προηγήθηκαν. Η απουσία Μαθηματικής γλώσσας είναι επίσης εμφανής στα σχολικά εγχειρίδια παρόλο που στο πρόγραμμα σπουδών τονίζεται απαραίτητη η παρουσία της. Τα εγχειρίδια των μαθηματικών και στις τρεις χώρες (Αγγλία, Γαλλία, Γερμανία) παρουσιάζουν τη μαθηματική γνώση μ’ ένα διαφορετικό τρόπο που άμεσα σχετίζεται με τα διαφορετικά εκπαιδευτικά πλαίσια στα οποία εφαρμόζεται αλλά και στο διαφορετικό πολιτισμικό επίπεδο των χωρών (Haggarty & Pepin, 2002).

Όμοια με τους Haggarty και Pepin (2002), οι Hino, Kaiser και Knipping (2002, 2005) πραγματοποίησαν σύγκριση του δυτικού τρόπου παρουσίασης των Μαθηματικών εννοιών μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών (Γαλλία, Γερμανία, Αγγλία) με τα αντίστοιχα της Ιαπωνίας. Βρήκαν ότι τα γερμανικά εγχειρίδια μαθηματικών είναι αυτά που προσεγγίζουν περισσότερο τα αντίστοιχα της Ιαπωνίας με μοναδικό στόχο να φωτίσουν τις διάφορες πτυχές των μαθηματικών εννοιών χωρίς να τις παραθέτουν έτοιμες. Ο ρόλος των «πραγματικών προβλημάτων» και η μοντελοποίηση στα σχολικά εγχειρίδια της Ιαπωνίας και της Γερμανίας δε διαφέρουν και πάρα πολύ, ενώ αντίθετα μεγάλη διαφορά παρατηρείται στα αντίστοιχα εγχειρίδια της Αγγλίας και της Γαλλίας. Πιο συγκεκριμένα στη Γαλλία οι μαθηματικές έννοιες εισάγονται μέσα από ενδιαφέρουσες δραστηριότητες με στόχο να δείξουν στους μαθητές την αξία της νέας γνώσης και τη χρήση της για την επίλυση κάποιων προβλημάτων. Στην Αγγλία τα εγχειρίδια παρουσιάζουν τη νέα γνώση δομημένη και δεδομένη και από τους μαθητές απλά επιχειρείται η εφαρμογή της. Πέρα από το περιεχόμενο και τη δομή τους, σε κάθε περίπτωση, τα εγχειρίδια των μαθηματικών αναπαρήγαγαν την κουλτούρα του πολιτισμού της σχολικής τάξης, της κάθε χώρας.

1.Α.2.ii Τα εγχειρίδια των Μαθηματικών στα ελληνικά σχολεία

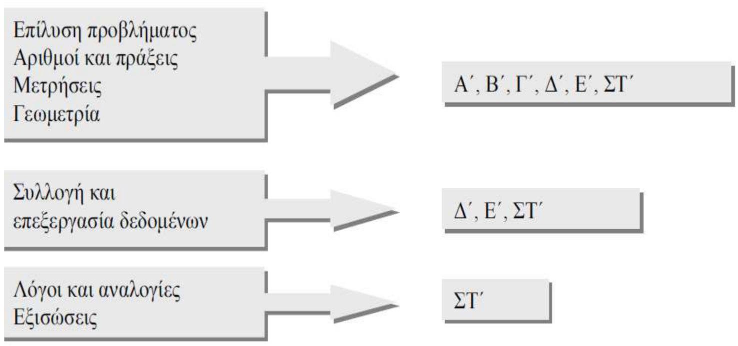
Στην προσπάθεια για καλύτερη προσέγγιση και κατανόηση των μαθηματικών εννοιών τόσο από τους εκπαιδευτικούς όσο και από τους μαθητές, το Υπουργείο Παιδείας της Ελλάδας, κατά το σχολικό έτος 2006-2007, προχώρησε στην έκδοση νέων σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών για το Δημοτικό Σχολείο. Σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) και τα νέα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.), τα καινούρια εγχειρίδια βασίζονται σε πιο σύγχρονες παιδαγωγικές αντιλήψεις για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών εννοιών. Κατά τον Τύπα (2005), τα νέα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) των Μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο έχουν ως στόχο οι μαθητές να:

- Αποκτήσουν βασικές μαθηματικές έννοιες, γνώσεις και ικανότητες.
- Να μάθουν να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά εργαλεία (π.χ. μαθηματικά μοντέλα και μεθόδους) για τη λύση προβλημάτων.
- Να καλλιεργήσουν τη μαθηματική γλώσσα ως μέσο επικοινωνίας.
- Να εξοικειωθούν με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία.
- Να κατανοούν τις μαθηματικές διασυνδέσεις μεταξύ διαφόρων περιοχών των Μαθηματικών και μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων γνωστικών αντικειμένων.
- Να αναπτύξουν την ικανότητας επίλυσης προβλημάτων μέσα από την επαναδόμηση και επαναδιατύπωση ενός προβλήματος από μια εξωμαθηματική περιοχή σε μαθηματικό πρόβλημα.
- Να αναπτύξουν μεταγνωστικές ικανότητες μέσα από τον έλεγχο και τη διαχείριση της μαθησιακής τους πορείας, ώστε τα παιδιά «να μάθουν να μαθαίνουν».
- Να καλλιεργήσουν δεξιότητες που αφορούν τη συναισθηματική και ψυχοκινητική περιοχή της προσωπικότητάς τους.

* Να καλλιεργήσουν θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά.

Στα ελληνικά σχολεία, τα νέα διδακτικά εγχειρίδια των μαθηματικών που δομούνται με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ.), παρουσιάζουν τη μορφή ενός πακέτου βιβλίων. Αυτό απαρτίζεται από: α) *το βιβλίο του μαθητή*, που αποτελεί το βασικό σχολικό εγχειρίδιο της διδασκαλίας, β) *το τετράδιο εργασιών,* το οποίο περιέχει διάφορες εργασίες για εξάσκηση και επεξεργασία στο σχολείο ή στο σπίτι, γ) *το βιβλίο του δασκάλου,* που λειτουργεί ως επιμορφωτικό υλικό για τον εκπαιδευτικό και δίνει επιμέρους οδηγίες και υποδείξεις που αφορούν στον σχεδιασμό και την οργάνωση της διδασκαλίας (Καψάλης & Χαραλάμπους, 2008). *δ) Το εκπαιδευτικό λογισμικό (CD-ROM*) των Μαθηματικών.

Σύμφωνα με τις προδιαγραφές που έθεσε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (Π.Ι.), μέσα από τα νέα εγχειρίδια των Μαθηματικών συγκεκριμένες κατηγορίες περιεχομένων πρέπει να διδαχθούν σε συγκεκριμένες βαθμίδες. Για τον λόγο αυτό η ύλη των μαθηματικών οργανώνεται με βάση συγκεκριμένους άξονες. Οι άξονες περιεχομένου πάνω στους οποίους δομείται και αναπτύσσεται η διδασκαλία των Μαθηματικών στο Δημοτικό είναι επτά (Εικ.1). Απ' αυτούς, η 'Επίλυση προβλήματος', οι 'Αριθμοί και πράξεις', οι 'Μετρήσεις' και η 'Γεωμετρία' εισάγονται από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού, η 'Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων' εισάγεται στην Δ΄ τάξη, ενώ οι 'Λόγοι και αναλογίες' και οι 'Εξισώσεις' εισάγονται στην Στ΄ τάξη. Η ύλη διατάσσεται σπειροειδώς προκειμένου να επιτευχθεί μια ομαλή μετάβαση των μαθητών από το ένα γνωστικό επίπεδο στο άλλο με οργανωμένες προτάσεις διδασκαλίας για κάθε μαθηματική έννοια, σε κάθε διδακτική ενότητα (Τύπας, 2005).



Εικόνα 1: Οι άξονες περιεχομένου των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο με βάση το Α.Π.Σ. ΠΗΓΗ: Τύπας, 2005, σελ.2

Μεθοδολογικά στα νέα εγχειρίδια των μαθηματικών, η μάθηση παρουσιάζεται ως μια κατασκευαστική διαδικασία - στηριζόμενη στη θεωρία του εποικοδομητισμού - όπου ο μαθητής προβληματίζεται και ανακαλύπτει τη γνώση αυτενεργώντας (Λεμονίδης, Θεοδώρου, Νικολαντωνάκης, Παναγάκος, Σπανακά, 2007). Στην αρχή κάθε διδακτικής ενότητας, η εισαγωγική εργασία αφορά τον έλεγχο της προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών ώστε να καλυφθούν ελλείψεις ή λανθασμένες πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με τα διδασκόμενα νοητικά σχήματα. Η παρουσία πολλαπλών αναπαραστάσεων (πραγματικές καταστάσεις, χειραπτικά μοντέλα, εικόνες, προφορική γλώσσα, και γραπτός συμβολισμός) είναι πλούσια, παρέχοντας τη δυνατότητα πολλαπλών διασυνδέσεων μεταξύ των μαθηματικών εννοιών για την καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών ιδεών (Τύπας, 2005).

Η κατανόηση των βασικών μαθηματικών εννοιών ως στοιχείο της μαθηματικοποίησης επιχειρείται μέσα από βιωματικές διαδικασίες που προέρχονται από το οικείο και φυσικό περιβάλλον των παιδιών με στόχο την καλύτερη κατανόηση τους. Η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία προτείνεται σε όλες τις βαθμίδες και σε κάθε ενότητα, δημιουργώντας το κατάλληλο πλαίσιο για την ανάπτυξη γνωστικών, συναισθηματικών και ψυχοκινητικών ικανοτήτων στη σχολική τάξη (Λεμονίδης κ.α., 2007).

Με βάση το νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, η διαθεματικότητα στα νέα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών είναι εμφανής και δημιουργεί μια πλατιά εννοιολογική βάση στην οποία η μαθηματική γνώση γίνεται πλουσιότερη και πολύπλευρη. Η εξοικείωση των μαθητών με τους υπολογιστές και τις σύγχρονες τεχνολογίες αποτελεί έναν από τους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης στα νέα εγχειρίδια, τόσο με τη χρήση του προβλεπόμενου εκπαιδευτικού λογισμικού που συνοδεύει κάποια βιβλία όσο και με τη χρήση του διαδικτύου μέσα από διαδικτυακές πηγές που προτείνονται από το βιβλίο του δασκάλου (Τύπας, 2005).

1.Α.3 Το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών στα σχολικά εγχειρίδια και στα εγχειρίδια των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο

Τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν τις επίσημες προδιαγραφές της διδασκαλίας που η πολιτεία προτάσσει ώστε να επιτευχθούν οι εκπαιδευτικοί στόχοι που θέτει -η πολιτεία- σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή (Κολέζα, 2017). Τα Αναλυτικά Προγράμματα εκφράζουν τη φιλοσοφία της εκπαίδευσης, ενώ τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν το μέσο, το εργαλείο, ώστε η φιλοσοφία αυτή να γίνει πράξη στη σχολική τάξη (Καψάλης & Χαραλάμπους, 2008).

Τα Αναλυτικά Προγράμματα αποτελούν τη βάση πάνω στην οποία παράγονται και χρησιμοποιούνται τα σχολικά εγχειρίδια και κάθε άλλο μέσο διδασκαλίας. Τα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα (curricula) εμφανίζονται πιο οργανωμένα καθώς πέρα από τους σκοπούς και στόχους που θέτουν, περιέχουν και μεθοδολογικές υποδείξεις. Δεν συναντάται μόνο απλή παράθεση της «διδακτέας ύλης», αλλά αντιστοιχίζουν και τους στόχους, το περιεχόμενο, τις διδακτικές δραστηριότητες στο επίπεδο κάθε διδακτικής ενότητας. Με τον τρόπο αυτό καθοδηγούν απόλυτα τους συγγραφείς των σχολικών εγχειριδίων αλλά και τους εκπαιδευτικούς της τάξης για την πιστή εφαρμογή τους (Καψάλης & Χαραλάμπους, 2008).

Όπως προτείνουν οι Καψάλης και Χαραλάμπους (2008), το αναλυτικό πρόγραμμα, θα μπορούσε να αποτελεί και ένα πιο ευρύ και γενικό πλαίσιο μέσα στο οποίο θα είχαν τη δυνατότητα, να κινηθούν οι συγγραφείς των σχολικών εγχειριδίων και οι εκπαιδευτικοί κατά τη διδασκαλία τους, προκειμένου να επιτευχθούν οι στόχοι της εκάστοτε διδασκαλίας. Στα πλαίσια του αναλυτικού προγράμματος, θα μπορούσε επιπλέον να πραγματοποιηθεί και ένας συντονισμός των σχολικών εγχειριδίων τόσο κάθετος όσο και οριζόντιος. «*<u>Ο κάθετος συντονισμός</u> κατευθύνει όλες τις προσπάθειες ένταξης ενός συγκεκριμένου σχολικού εγχειριδίου σε μια σειρά εγχειριδίων, ώστε να παρουσιάζουν μία συνέχεια και μια συνέπεια από τη μια μεριά τα περιεχόμενα και από την άλλη οι διδακτικές και μεθοδολογικές αρχές τους*» (Καψάλης & Χαραλάμπους, 2008, σελ.279) ώστε να επιτυγχάνονται εύστοχα και χωρίς επαναλήψεις ή και αντιφάσεις οι σκοποί ενός μαθήματος. *<u>Ο οριζόντιος συντονισμός</u> αναφέρεται στις προσπάθειες συντονισμού των σχολικών εγχειριδίων διαφόρων μαθημάτων της ίδιας τάξης* (Καψάλης & Χαραλάμπους, 2008, σελ. 279) ώστε μέσα από έναν τέτοιο συντονισμό να επιτυγχάνεται η αρχή της διαθεματικότητας που εφαρμόζεται τα τελευταία χρόνια και στα ελληνικά σχολεία μετά τις τελευταίες μεταρρυθμίσεις.

Σύμφωνα με τον Ματσαγγούρα (2006), στα ελληνικά σχολεία, τα σχολικά εγχειρίδια δεν αποτελούν απλώς μέσα διδασκαλίας, αλλά υποκαθιστούν τα αναλυτικά προγράμματα. Για τον λόγο αυτό οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν καθημερινά το σχολικό εγχειρίδιο ως οδηγό και σπάνια ενημερώνονται από τα αναλυτικά προγράμματα. Τα σχολικά εγχειρίδια εισπράττουν πολλές φορές την κριτική που θα έπρεπε να απευθύνεται στο αναλυτικό πρόγραμμα και γίνεται λόγος για αλλαγές ως προς τον εκσυγχρονισμό τους, ανεξάρτητα από το αναλυτικό πρόγραμμα που εκφράζουν. Κάθε αλλαγή ωστόσο στα σχολικά εγχειρίδια σημαίνει πρώτα μεταρρύθμιση ή αναμόρφωση στα αναλυτικά προγράμματα των σχολείων.

Στην ελληνική εκπαίδευση από τη Μεταπολίτευση ως το 1997, τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (ΑΠΣ) και τα σχολικά εγχειρίδια συντάσσονταν από ένα άτομο ή μια επιτροπή μετά από ανάθεση του Υπουργείου Παιδείας και παρά τις αλλεπάλληλες μεταρρυθμίσεις, παρέμεναν παραδοσιακά και κλειστά προγράμματα. Με τις εκπαιδευτικές αλλαγές, που επιχειρήθηκαν κατά την περίοδο 1997-2003, έγινε προσπάθεια τα ΑΠΣ να αποκτήσουν σταδιακά χαρακτήρα ευέλικτων προγραμμάτων, με στόχο να αντιμετωπιστεί η μάθηση όχι ως συσσώρευση γνώσεων αλλά ως δημιουργική οικοδόμηση μέσα από συμμετοχικές και βιωματικές διαδικασίες (Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών για όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, 1997). Επίσης, με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ), από το 2003, και τα Α.Π.Σ. για την υποχρεωτική εκπαίδευση, υιοθετήθηκε και η διαθεματική προσέγγιση της γνώσης και επιχειρήθηκε η διασύνδεση των γνωστικών αντικειμένων (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο 2003).

Στην τελευταία μεταρρυθμιστική προσπάθεια, το Υπουργείο Παιδείας της Ελλάδας πριν προχωρήσει στην έκδοση νέων σχολικών εγχειριδίων, είχε αναθέσει το έργο της συγγραφής των εγχειριδίων σε ομάδες ειδικών μετά από προκήρυξη, αναγνωρίζοντας την πολυσύνθετη διάστασή του και ότι ένα άτομο δεν μπορεί να ανταποκριθεί στις δύσκολες απαιτήσεις του. Μέλη των ομάδων αυτών αποτέλεσαν και οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί -κάτι που δεν γινόταν παλαιότερα- οι οποίοι με τον τρόπο αυτό δεν θα έχουν απλώς το ρόλο του διαμεσολαβητή στη διαδικασία μεταφοράς της γνώσης προς τους μαθητές, αλλά μια ενεργητικότερη συμμετοχή στη διαδικασία σύνταξης και συγγραφής των αναλυτικών προγραμμάτων και σχολικών εγχειριδίων (Καψάλης & Χαραλάμπους, 2008).

Η όλη διαδικασία και η δαπάνη για τα σχολικά εγχειρίδια καλύφθηκε κατά 75% από το Κοινοτικό Πλαίσιο Στήριξης της Ευρωπαϊκής Ένωσης και το 25% από εθνικούς πόρους. Το παιδαγωγικό Ινστιτούτο έκρινε σκόπιμο στη συνέχεια οι συγγραφείς να συνεργασθούν με διαφορετικούς εκδοτικούς οίκους για την έκδοση και διανομή τους στα σχολεία. Η λογική αυτή οδήγησε *«στο περίεργο γεγονός το οποίο ωστόσο δεν φαίνεται να ενοχλεί κανέναν αρμόδιο, να εγκριθεί π.χ. για την Α΄ και την Γ΄ τάξη του Δημοτικού το εγχειρίδιο των Μαθηματικών μιας ομάδας, για την Β΄ τάξη όμως το εγχειρίδιο μιας άλλης συγγραφικής ομάδας»* (Καψάλης & Χαραλάμπους, 2008, σελ. 312).

Αργότερα το 2011, σχεδιάστηκαν τα Νέα Προγράμματα Σπουδών Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης. Δεν συμπεριλαμβάνουν σχολικά εγχειρίδια απλά διαχωρίζονται σε προγράμματα που αναπτύσσονται σε τρεις ηλικιακούς κύκλους και έχουν δομηθεί σύμφωνα με τη λογική της τροχιάς μάθησης. Ο πρώτος κύκλος καλύπτει μαθητές του νηπιαγωγείου, της Α΄ και της Β΄ τάξης (5-8 ετών). Στο δεύτερο κύκλο συμπεριλαμβάνονται οι ηλικίες 8 ως 12 ετών, (οι μαθητές των Γ', Δ', Ε' και Στ΄ τάξεων). Στον τρίτο ηλικιακό κύκλο εντάσσονται οι μαθητές του Γυμνασίου, 12-15 ετών. Το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, (2011) δεν εφαρμόστηκε στην πράξη, παρά μόνο πιλοτικά, και δεν χρησιμοποιήθηκε ως διδακτικό υλικό μέσα στις σχολικές τάξεις.

Β. ΜΕΡΟΣ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

1.Β.1 Ιστορική αναδρομή

Εξετάζοντας ιστορικά την εξέλιξη της έννοιας του κλάσματος φαίνεται ότι περιλαμβάνει πολλά στάδια. Υπάρχει μια διαφοροποίηση τόσο στο πεδίο των εφαρμογών της όσο και στην εννοιολογική της υπόσταση, θεωρητική και επιστημολογική. Ιστορικά στοιχεία φανερώνουν την εκτεταμένη γνώση των αναλογιών και τη χρήση των κλασμάτων στην αρχαία Αίγυπτο (2007 π.Χ.) όπου ήταν απαραίτητα για την κατασκευή των πυραμίδων, (Γαγάτσης, Μιχαηλίδου & Σιακαλή, 2001). Στην αρχαία Ελλάδα, το κλάσμα έχει την ίδια τυπολογία με τα αιγυπτιακά κλάσματα. Η διαφορά τους είναι στην ονομασία, όπου στην Αίγυπτο αποκαλούνται μέρη ή μόρια, ενώ στην Ελλάδα αντί να γίνεται αναφορά σε μια ποσότητα ως τα 2/5 μιας άλλης, αναφέρεται ότι ο λόγος τους είναι 2 στα 5. Κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα οι Άραβες εισήγαγαν την έννοια και τον συμβολισμό του κλάσματος με τη σημερινή του μορφή, προχώρησαν στις διαδικασίες των πράξεων με κλάσματα και πέρασαν στη χρήση της αρίθμησης με δεκαδική θέση (Σταφυλίδου, 2001).

Έναν πλήρη ορισμό του κλάσματος ως αφηρημένης μαθηματικής έννοιας, δίνεται κατά το $16^{ο}$-$19^{ο}$ αιώνα από τον Euler, ο οποίος αναφέρει ότι, αν το πηλίκο δύο αριθμών δεν είναι ακέραιος, τότε υπάρχει ένα ιδιαίτερο είδος αριθμού που ονομάζεται κλάσμα και που φανερώνει ένα τέτοιο πηλίκο. Το κλάσμα α/β, δηλαδή, ορίζεται ως το πηλίκο μιας διαίρεσης του *α δια του β,* τα οποία ονομάζονται αντίστοιχα αριθμητής και παρονομαστής.

Κατά τη Lamon (2007) οι όροι κλάσμα και ρητός αριθμός συχνά αντιμετωπίζονται ως ταυτόσημοι, χωρίς διάκριση. Ορθό, κρίνεται, κατά την ίδια, να γίνεται ένας σαφής διαχωρισμός. Οι ρητοί αριθμοί ορίζονται ως αριθμοί της μορφής α/β, όπου α, β ακέραιοι, με β διάφορο του μηδενός (α/β: α, β ϵ □, β≠0). Τα κλάσματα αποτελούν ένα συμβολικό τρόπο γραφής αριθμών με τη μορφή α/β, όπου α και β μεγαλύτερα του μηδενός (α/β: α, β > 0), δηλαδή αποτελούν θετικούς ρητούς αριθμούς. Με βάση αυτή την αλληλουχία, στη διδασκαλία οι αριθμοί α και β κατ' ανάγκη περιορίζονται στους φυσικούς αριθμούς. Έτσι τα κλάσματα αποτελούν μόνο ένα υποσύνολο των ρητών και το κλάσμα α/β, ορίζεται ως το γινόμενο του ακεραίου α επί την κλασματική μονάδα 1/β.

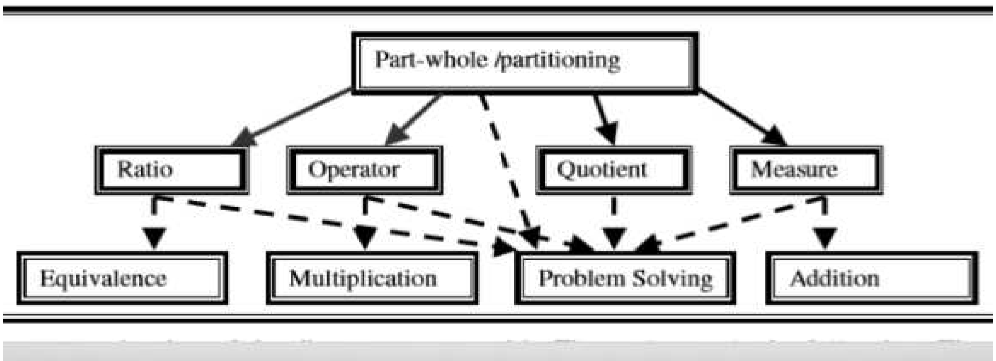
1.Β.2 Η ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος

Τα κλάσματα είναι ένας καινούριος χώρος στην εμπειρία των παιδιών. Η χρήση της λέξης κλάσμα είναι αρκετά πολύπλοκη και δυσνόητη τόσο στην καθημερινή της χρήση όσο και στη μαθηματική εμπειρία των μαθητών. Για πρώτη φορά, ένας αριθμός δεν αντιπροσωπεύει το αποτέλεσμα μιας απαρίθμησης αλλά κάτι διαφορετικό σε σχέση με αυτό που γνώριζαν ως τώρα (van de Walle, 2005).

Για τους μαθητές, η μετάβαση από τη λογική της φυσικής σημασίας του αριθμού προς την κατανόηση ενός αριθμού της μορφής α/β, είναι κάτι που δύσκολα θα γίνει αντιληπτό. Ένας από τους κυριότερους παράγοντες που κάνουν προβληματική την κατανόηση των κλασμάτων εντοπίζεται στο γεγονός ότι τα κλάσματα αποτελούν μια πολυδιάστατη, πολυσύνθετη και αφηρημένη κατασκευή (Brousseau, Brousseau & Warfield, 2004. Kieren, 1995. Lamon, 2001, στο Charalambous & Pitta-Pantazi, 2005).

Σύμφωνα με τους Hecht και Vagi (2012), τόσο η διαδικαστική γνώση - διαδικασίες ή στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές, όσο και η εννοιολογική γνώση - κατανόηση των μαθηματικών δομών και σχέσεων, είναι απαραίτητες ώστε οι μαθητές να δομήσουν και να κατακτήσουν σταδιακά την πολυσύνθετη έννοια του κλάσματος. Η μεγαλύτερη βαρύτητα αξίζει να δοθεί στην κατανόηση της ιδέας του κλασματικού μοντέλου ως αριθμού, από τους μαθητές, παρά στη χρήση του αλγόριθμου για να γίνουν απλά και μόνο κλασματικές πράξεις διαδικαστικά. Κατά την Tirosh (2000), όταν ο αλγόριθμος αντιμετωπίζεται ως μια ανούσια σειρά βημάτων, είναι πολύ λογικό οι μαθητές να παραλείψουν κάποια βήματα ή να τα τροποποιήσουν και να φτάσουν σε λάθος αποτέλεσμα χωρίς να κατανοούν πού αυτό οφείλεται. Η μηχανική αναπαραγωγή εκτέλεσης πράξεων, δυσκολεύει τους μαθητές γι' αυτό και εμφανίζουν χαμηλές επιδόσεις, γιατί ουσιαστικά δεν έχουν κατανοήσει την έννοια πάνω στην οποία δουλεύουν. Για παράδειγμα δυσκολεύονται στην πρόσθεση ή και την αφαίρεση κλασμάτων γιατί ουσιαστικά δεν έχουν αντιληφθεί την έννοια της ισοδυναμίας των κλασμάτων (Οικονόμου, Σακονίδη & Τζεκάκη, 2000).

Την πολυδιάστατη έννοια του κλάσματος και τη σύνθετη κατασκευή του, πρώτος υποστήριξε ο Kieren (1976). Τονίζοντας ότι τα κλάσματα δεν έχουν μια απλή εννοιολογική δομή, αλλά μπορεί να θεωρηθούν ως ένα σύνολο αλληλοσυνδεόμενων δομών με άρρηκτη σχέση μεταξύ τους, παρουσίασε ένα θεωρητικό μοντέλο που αποτελείται από τέσσερις υπο-κατασκευές[2]: λόγος, τελεστής, πηλίκο και μέτρο. Κατά τον Kieren (1976) η έννοια του μέρους-όλου θεωρήθηκε ως το θεμέλιο για την ανάπτυξη των άλλων υποσυστημάτων και έτσι απέφυγε την ταύτιση αυτής της έννοιας ως ξεχωριστού, πέμπτου, υποσυστήματος. Θεώρησε ότι η έννοια αυτή είναι ενσωματωμένη σε όλες τις άλλες υποκατασκευές που πρότεινε. Στις αρχές της δεκαετίας του 1980, οι Behr, Lesh, Post και Silver (1983), λαμβάνοντας υπόψη τον Kieren, προχωρώντας ένα βήμα παραπάνω, πρότειναν ένα νέο θεωρητικό μοντέλο που συνδέει τις τέσσερις διαστάσεις του κλάσματος με τις βασικές πράξεις των κλασμάτων, την επίλυση προβλημάτων και τις κλασματικές ισοδυναμίες (Εικ. 2). Με τις παραπάνω απόψεις ταυτίζονται αργότερα πολλοί άλλοι ερευνητές (Marshall 1993. Carraher, 1996. Lamon, 2001) που διακρίνουν τις πέντε διαφορετικές διαστάσεις του κλάσματος, και προκειμένου να το ερμηνεύσουν χρησιμοποιούν τις πέντε διαφορετικές ερμηνείες ή υποκατασκευές του: μέρος-όλο, πηλίκο, λόγος, τελεστής και μέτρο. Η κατανόηση όλων των πιθανών ερμηνειών που μπορούν να αντιπροσωπεύουν την έννοια του κλάσματος, σημαίνει ουσιαστικά και εννοιολογική κατανόησή του.



Εικόνα 2: Το θεωρητικό μοντέλο που συνδέει τις τέσσερις διαστάσεις των κλασμάτων με τις βασικές πράξεις των κλασμάτων, την επίλυση προβλημάτων και τις κλασματικές αναλογίες ΠΗΓΗ: Behr et al., 1983, σελ.117

[2] Στη δεύτερη ενότητα γίνεται αναλυτική περιγραφή των υπο-κατασκευών του κλάσματος. Εκτός από τον όρο υπο-κατασκευή χρησιμοποιούνται ως ταυτόσημοι και οι παρακάτω όροι που απαντήθηκαν στη σχετική βιβλιογραφία: ερμηνείες, υποσυστήματα, διαστάσεις, πτυχές, σχήματα, όψεις, υποστηρίζοντας την εννοιολογική ανάλυση του κλάσματος.

Συνοψίζοντας, στη διεθνή βιβλιογραφία οι περισσότεροι ερευνητές (Clarke, Roche, & Mitchell, 2008. Lamon, 2012. van de Walle, 2005) συγκλίνουν στην άποψη ότι μια βαθύτερη κατανόηση της κλασματικής έννοιας είναι περισσότερο επιτυχής όταν δίνεται έμφαση όχι μόνο στο αρχικό και θεμελιώδες σχήμα του μέρους-όλου, αλλά σε όλες τις υποέννοιες (ερμηνείες) του κλάσματος.

Στη συνέχεια γίνεται εκτενής αναφορά στις πέντε ερμηνείες (διαστάσεις) του κλάσματος καθώς αποτελούν θεμέλιο λίθο προκειμένου να γίνουν κατανοητά τα κλάσματα τόσο από τους εκπαιδευτικούς όσο και από τους μαθητές.

1.Β.2.i Οι διαστάσεις (ερμηνείες) του κλάσματος

Πέντε είναι οι διαστάσεις του κλάσματος (Kieren, 1976. Marsall, 1993. Charalamdus & Pita-Pantazi, 2007. Clark & Roche, 2008. van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2017). Αυτές περιγράφονται ως εξής:

α) Το κλάσμα ως μέρος - όλου (part-whole)

Μια από τις απλούστερες και ευρέως χρησιμοποιούμενες ερμηνείες του κλάσματος είναι αυτή του μέρους-όλου. Είναι συνήθως και η πρώτη ερμηνεία με την οποία έρχονται σε επαφή οι μαθητές, μέσα από τα κοινά παραδείγματα του χρωματισμένου μέρους ενός όλου μιας επιφάνειας ή ενός αντικειμένου, ως σημείο εκκίνησης ώστε να γνωρίσουν τα κλάσματα (Cramer &Whitney, 2010). Στη συγκεκριμένη ερμηνεία, το κλάσμα θεωρείται ως ολότητα που συντίθεται από έναν συγκεκριμένο αριθμό ίσων μερών. Για το κλάσμα α/β, το όλο χωρίζεται σε β κομμάτια και κάθε κομμάτι συμβολίζεται ως 1/β ή στην περίπτωση α κομματιών, συμβολίζεται α/β.

Ένας από τους βασικούς στόχους στην κατανόηση και ανάπτυξη των κλασμάτων, είναι οι μαθητές «*να κατασκευάσουν την ιδέα των κλασματικών μερών του συνόλου – τα μέρη που προκύπτουν όταν το σύνολο έχει διαμεριστεί σε ισομεγέθη τμήματα ή δίκαια μερίδια* (van de Walle, 2015, σελ. 21). Βασική ιδέα, επίσης, στην οποία πρέπει να φτάσουν και να κατανοήσουν οι μαθητές, είναι ότι το κλάσμα δεν λέει τίποτα για το μέγεθος του όλου ή των μερών του αλλά για τη σχέση ανάμεσα στο μέρος και το όλο. Να καταλάβουν για παράδειγμα πως η σύγκριση δύο κλασμάτων μπορεί να γίνει μόνο εάν και τα δύο κλάσματα είναι μέρη ενός όλου με το ίδιο μέγεθος (van de Walle et al., 2017).

Το κλάσμα ως «όλο» μπορεί να είναι μια συνεχής ποσότητα ή ένα σύνολο από διακριτές ποσότητες. Στις συνεχείς ποσότητες χρησιμοποιούνται συνήθως επιφάνειες όπως γεωμετρικά σχήματα, κύκλος, ορθογώνια, ή ακόμη πίτσες, πίτες, σοκολάτες κ.λ.π., τις οποίες οι μαθητές πρέπει να χωρίσουν σε ίσα μέρη-τμήματα και να επιλέξουν τόσα τμήματα, όσος είναι ο αριθμητής του κλάσματος. Πολλές φορές μέρη της επιφάνειας αποδίδονται σκιασμένα ή καλούνται οι μαθητές να τα σκιάσουν και να τα χαρακτηρίσουν με ένα κλασματικό αριθμό. Αυτό θεωρείται και η ευκολότερη προσέγγιση για τους μαθητές, γι' αυτό παραδείγματα με συνεχείς ποσότητες στη διδασκαλία των κλασμάτων απαντώνται με μεγαλύτερη συχνότητα στα σχολικά εγχειρίδια, καθώς θεωρούνται πιο κατανοητά. Ο κύκλος και το τετράγωνο, για παράδειγμα, λειτουργούν αποτελεσματικά ως απεικόνιση, που η συνέχειά της βοηθάει στην κατανόηση της σχέσης μέρους-όλου (Γαγάτσης, Σιημητρά-Κωνσταντίνου & Χριστουδουλίδου, 2006).

Αντίθετα η διδασκαλία του κλάσματος ως μέρος-όλου μέσα από διακριτές ποσότητες θεωρείται δυσκολότερη, γι' αυτό και εμφανίζεται ελάχιστα μέσα στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών στην προσέγγιση του κλάσματος (π.χ. ένα σύνολο αντικειμένων, μιας ομάδας ανθρώπων ή μέρος ενός μήκους), (Lamon, 1999. Marshall, 1993, στο Charalambous & Pita-Pantazi, 2007).

Σύμφωνα με τον van de Walle (2017), το «όλο», στις διακριτές ποσότητες νοείται ως σύνολο αντικειμένων και τα υποσύνολα του συνόλου συνιστούν τα κλασματικά μέρη. Το αντικείμενο είναι χωρισμένο ή χωρίζεται σε ίσα μέρη από τα οποία παίρνουμε μερικά. Υπάρχει βέβαια πάντα μια μονάδα, αλλά τα αντικείμενα δεν είναι σίγουρα οργανωμένα σε τόσες ισοδύναμες ομάδες όσες λέει ο παρονομαστής του κλάσματος και αυτό δυσκολεύει τους μαθητές. Για παράδειγμα ένα τμήμα μιας ομάδας ανθρώπων που πήγαν εκδρομή (τα 3/5 της τάξης συμμετείχαν στην εκδρομή), ή ένα τμήμα μιας απόστασης (οι μαθητές περπάτησαν τα 3 και ½ μιας απόστασης 5 χιλιομέτρων), παρουσιάζονται ως μαθηματικά έργα που αφορούν τα κλάσματα χρησιμοποιώντας διακριτές ποσότητες (van de Walle et al., 2017).

Σε κάθε περίπτωση συνεχούς ή διακριτής ποσότητας ως μονάδας, το «μισό», καθώς διαμερίζει, διαιρεί το «όλο» σε δυο ίσα μέρη, κατέχει μια σημαντική θέση στη απαρχή της ποσοτικοποίησης των κλασμάτων και βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν στη συνέχεια τις σχέσεις μέρους-όλου (Nunes & Bryant, 2007). Η Desli (1994), εξετάζοντας περαιτέρω τον ρόλο του μισού στην ποσοτικοποίηση των κλασμάτων επιβεβαίωσε τον σημαντικό ρόλο του, τόσο στην κατανόηση του μέρους - όλου όσο και στην κατανόηση του μέρους-μέρους. Το μισό προσφέρει στους μαθητές την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν γνωστές προς αυτούς λογικές σχέσεις και να προβούν σε εννοιολογική κατανόηση μέσα από τις συγκρίσεις μέρους-μέρους, «ίσο με», «μικρότερο ή μεγαλύτερο από το μισό». Επιπλέον, προσφέρει τη δυνατότητα για την ανάπτυξη μιας αρχικής σύνδεσης ανάμεσα στις εκτατικές (η διαίρεση του όλου σε ίσα μέρη) και τις εντατικές ιδιότητες (η σχέση μεταξύ των μερών και του όλου) των κλασματικών αριθμών (Desli, 1994, στο Nunes & Bryant, 2007).

Σύμφωνα με τον Baturo (2004) η πλήρης κατανόηση της ερμηνείας του κλάσματος ως «μέρος-όλου», εκτός από τη διαμέριση του συνόλου (χωρισμός σε ίσα μέρη) και την κατανόηση της ομαδοποίησης, απαιτεί από τους μαθητές ανάπτυξη ικανοτήτων εύρεσης του όλου, βασιζόμενοι στα μέρη του (π.χ. βρες το όλο όταν ξέρεις τα 3/8) και της εκ νέου μοναδοποίησης δηλαδή της σύνθεσης της ακέραιας μονάδας από τα μέρη της, όπως επίσης και της επαναδιαμέρισης ήδη ισοδιαμερισμένων όλων (π.χ. βρες τα 3/8 μιας ποσότητας χωρισμένης σε τέταρτα ή βρες τα 3/4 μιας ποσότητας χωρισμένης σε όγδοα).

Το οικείο περιβάλλον των μαθητών αποτελεί από μόνο του μια ανεξάντλητη πηγή υλικών (όπως π.χ. οι μπάρες σοκολάτας, το ρολόι, ο χάρακας κ.λ.π.) και καταστάσεων όπου μπορεί να εφαρμοστεί η ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρους-όλου» προκειμένου οι μαθητές να οδηγηθούν στην βαθύτερη κατανόηση της κλασματικής έννοιας (Post et al., 1982).

β) Το κλάσμα ως διαίρεση-πηλίκο (quotient)

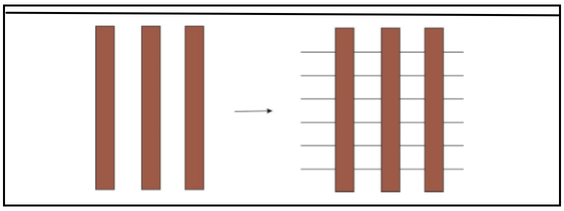
Η έννοια του διαμερισμού ή της μοιρασιάς είναι μια από τις βασικές ιδέες που μεταφέρουν οι μαθητές με βάση την άτυπη γνώση τους, στην προσπάθεια να κατανοήσουν την έννοια του κλάσματος. Η έννοια του μοιράσματος, κατά τους Pitkethly και Hunting (1996), είναι το κλειδί για την οικοδόμηση της έννοιας του κλάσματος αλλά και την ευρύτερη κατανόηση των κλασματικών αριθμών. Το φυσικό πλαίσιο μέσα στο οποίο αναπτύσσονται οι αρχικές κλασματικές έννοιες στις πρώτες τάξεις του δημοτικού όταν οι μαθητές κάνουν διαμέριση και σκέφτονται με όρους «δίκαιης μοιρασιάς», παίρνω το μισό (½), «μοιράζω σε τρία ίσα μέρη» (1/3) ή «παίρνω το ένα από τα τέσσερα» (1/4), οικοδομεί την μετέπειτα γνώση τους για τα κλάσματα.

Συνήθως οι δραστηριότητες με προβλήματα «ίσης μοιρασιάς» εισάγουν το κλάσμα ως «διαίρεση – πηλίκο», δηλαδή μιας διαίρεσης του αριθμητή δια του παρονομαστή. Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι μαθητές καλούνται να κατανοήσουν τη διάσταση της διαίρεσης α/β, δηλαδή ότι πρόκειται να μοιράσουν δίκαια, α πράγματα σε β ίσα μέρη. Παρά το γεγονός ότι ο συμβολισμός του πηλίκου α/β είναι ο ίδιος συμβολισμός που χρησιμοποιείται στην ερμηνεία του μέρους-όλου, στόχος είναι να αντιληφθούν οι μαθητές τη διαφορά ότι το **α** διαιρετέος (αριθμητής) δεν αναπαριστά τον αριθμό των μερών που θα πάρουμε αλλά την ποσότητα, (τον αριθμό των στοιχείων του συνόλου) που θα μοιραστούν ίσα, δίκαια. Ο **β** διαιρέτης (παρονομαστής) δεν αναπαριστά τα μέρη ενός όλου, αλλά αναπαριστά τον αριθμό των ίσων μερών που θα χωριστούν τα στοιχεία του συνόλου.

Σύμφωνα με τους Nunes και Bryant (2007), οι καταστάσεις διαίρεσης χωρίζονται σε δύο τύπους: α) σε αυτές που απαιτούν διαμέριση, μοίρασμα- *προβλήματα μερισμού* (ισόποση κατανομή ποσότητας σε συγκεκριμένο αριθμό αποδεκτών), π.χ. αριθμός ζαχαρωτών (12), αριθμός λαγών (4), (12:4), δηλαδή δίνεται μεγαλύτερη έμφαση στην ποσότητα που κάθε λαγός παίρνει β) σε αυτές που απαιτούν τμηματοποίηση, μέτρηση- *προβλήματα μέτρησης* (ομαδοποίηση μιας ποσότητας σε ίσα τμήματα), δίνεται έμφαση στον αριθμό των ίσων μεριδίων που μπορούν να παραχθούν, όταν μοιράζεται μια ποσότητα σε ίσα μέρη π.χ. ποσότητα (12), ίσα μερίδια ζαχαρωτών που μπορούν να παραχθούν (3), (12:3). Όταν οι μαθητές έχουν αντιληφθεί την αντίστροφη σχέση ανάμεσα στο πηλίκο και το διαιρέτη σε προβλήματα τόσο μερισμού όσο και μέτρησης, τότε η διάσταση του κλάσματος ως διαίρεση, γίνεται ευκολότερα κατανοητή.

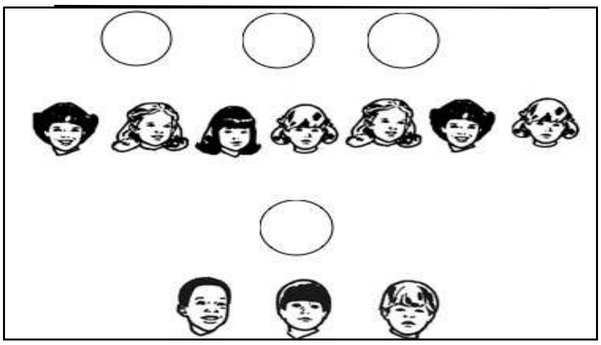
Ο βασικός ρόλος της διαίρεσης για την κατανόηση των κλασμάτων, παρακίνησε αρκετούς επιστήμονες να επικεντρωθούν στις στρατηγικές διαχωρισμού των μικρών παιδιών όταν μοιράζονται τα πράγματα (Xu, 1998. Lv, 1996. Lin & Huang, 1993). Οι αρχικές στρατηγικές των μαθητών για τη μοιρασιά περιλαμβάνουν το κόψιμο/χωρισμό στη μέση για να μοιράσουν δίκαια, και πάλι στη μέση (δύο, τέσσερα, οκτώ μερίδια), οπότε η δυσκολία του προβλήματος εξαρτάται από τη σχέση ανάμεσα στον αριθμό των αντικειμένων που πρέπει να μοιραστούν και τον αριθμό των μεριδίων που θα προκύψουν. Για παράδειγμα, όταν μοιράζουν πέντε πράγματα σε τέσσερα παιδιά, στο τέλος θα μείνει ένα, δηλαδή δύο μισά, που θα πρέπει να τα δώσουν σε τέσσερα παιδιά. Η λύση που θα βρουν είναι να κόψουν κάθε μισό στη μέση ώστε κάθε παιδί στο τέλος να πάρει ένα ολόκληρο και ένα μισό του μισού (van de Walle et al., 2017).

Ο Λεμονίδης (2016), προτείνει έναν επιπλέον πιο πρακτικό τρόπο ώστε να μοιραστούν δίκαια τρεις σοκολάτες σε επτά άτομα. Οι τρεις σοκολάτες τοποθετούνται η μια δίπλα στην άλλη. Με το μαχαίρι χαράζεται η μία σε επτά ίσα μέρη και με τον ίδιο τρόπο χωρίζονται και οι άλλες (Εικ. 3). Στο παράδειγμα αυτό φαίνεται ότι το σύμβολο 3/7 μπορεί να σημαίνει *«διαιρώ 3 μονάδες με το 7»,* και ότι το αποτέλεσμα αυτής της διαίρεσης είναι *« τα 3/7 της μονάδας»* μέσα από διακριτές ποσότητες.



Εικόνα 3: Τρεις σοκολάτες μοιράζονται σε επτά παιδιά ΠΗΓΗ: Λεμονίδης, 2016, σελ.28

Η Lamon (1999), αντίστοιχα σε έργα μοιρασιάς, ζήτησε από μαθητές 11 χρονών (Grade 6) να μοιράσουν τρεις πίτσες ίσα μεταξύ επτά κοριτσιών, ενώ μια ίδια πίτσα να μοιραστεί ίσα ανάμεσα σε τρία αγόρια (Εικ. 4). Το ερώτημα ήταν: «*Ποιος παίρνει περισσότερη πίτσα; ένα αγόρι ή ένα κορίτσι;»* Οι μαθητές που κατανοούν την έννοια του κλάσματος ως διαίρεση, απαντούν ότι κάθε κορίτσι παίρνει 3/7 της πίτσας και κάθε αγόρι το 1/3 της πίτσας. Στη συνέχεια συγκρίνουν τα δύο κλάσματα παίρνοντας ως σημείο αναφοράς το «μισό». Συμπεραίνουν ότι το 3/7 είναι μεγαλύτερο επειδή είναι πιο κοντά στο μισό. Άρα ένα κορίτσι τρώει περισσότερο από ένα αγόρι. Οι μαθητές αξιοποιώντας, την έννοια «του μισού», δίνουν τη λύση μέσα από λογικές σχέσεις που διέπουν στα κλάσματα (Desli, 1994).
Οι Clarke, Roche, Mitchell & Sukenik (2006) δίνουν το έργο της Lamon (1999), σε ευκολότερη εκδοχή, σε 323 μαθητές της Στ΄ τάξης στην Αυστραλία. Ζητείτε από τους μαθητές να μοιράσουν 3 πίτσες σε 5 άτομα. Το 30% των μαθητών έδωσαν σωστή απάντηση με 12% από αυτούς να στηρίζονται σε νοερό υπολογισμό λογικών σχέσεων, ενώ το 18% μέσα από αναπαραστάσεις (σχεδιάζοντας) μπόρεσαν να φτάσουν στη σωστή απάντηση.



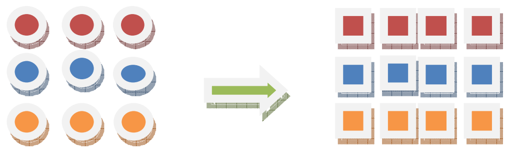
Εικόνα 4: Δίκαιη μοιρασιά τρεις πίτσες μεταξύ επτά κοριτσιών, μια πίτσα μεταξύ τριών αγοριών ΠΗΓΗ: Clarke et al., 2006, σελ.39

Τέλος, σημαντικό είναι να αντιληφθούν οι μαθητές ότι το αποτέλεσμα του κλάσματος ως διαίρεση αναφέρεται σε μια αριθμητική τιμή και όχι στα μέρη που λαμβάνονται από δραστηριότητα ισοκατανομής (μέρος-όλο), επομένως το κλάσμα μπορεί να είναι ένας αριθμός που είναι μικρότερος, ίσος ή και μεγαλύτερος της μονάδας (Lamon, 1999).

γ) Το κλάσμα ως λόγος (ratio)

Το κλάσμα ως λόγος δεν αναπαριστά τη διαμέριση μιας ποσότητας ή ενός συνόλου αντικειμένων, όπως συνέβαινε με τις ερμηνείες «μέρος-όλου» και «πηλίκου», αλλά εκφράζει τη συγκριτική σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων τα οποία μπορεί να είναι ομοειδή ή ετερογενή. Σύμφωνα με τον van de Walle (2007), (σελ.451), ο λόγος *«είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών ή μετρήσεων που εκφράζει μια σύγκριση ανάμεσα στους συγκεκριμένους αριθμούς ή τις μετρήσεις μέσα σε μια δεδομένη κατάσταση σε μια πολλαπλασιαστική σχέση (σε αντίθεση με τη σχέση διαφοράς ή την προσθετική σχέση).*

Όταν σκεφτόμαστε με όρους λόγου, εξετάζουμε δύο ποσότητες που μεταβάλλονται από κοινού. Το μέγεθος της μιας ποσότητας συγκρίνεται με το μέγεθος της άλλης, ενώ η έννοια της σταθερότητας και της συμμεταβολής εμπεριέχεται στα δύο μεγέθη. Το κλάσμα ως λόγος νοείται δηλαδή ως συγκριτικός δείκτης. Για παράδειγμα (Εικ.5) σε κάθε τρεις κύκλους αντιστοιχούν τέσσερα τετράγωνα. Ο λόγος των κύκλων προς τα τετράγωνα είναι 3:4 και διαβάζεται «3 προς 4» ή ¾. Ο λόγος αναφέρεται στα σχετικά μεγέθη των δυο συνόλων όχι όμως και στον πραγματικό αριθμό των αντικειμένων που περιέχονται σ' αυτά. Ο λόγος 3:4 δηλώνει π.χ. 3 κύκλους του πρώτου συνόλου προς 4 τετράγωνα του δεύτερου συνόλου, χωρίς να δίνεται καμία πληροφορία για τον αριθμό των κύκλων στο πρώτο σύνολο ή τον αριθμό των τετραγώνων στο δεύτερο (Παπαδόπουλος, 2013).



Εικόνα 5: Ο λόγος δύο συνόλων, κύκλων προς τα τετράγωνα είναι 3/4

ΠΗΓΗ: Παπαδόπουλος 2013, σελ. 105

Μια μορφή λόγου είναι αυτή που συγκρίνει ένα μέρος ενός όλου (9 κορίτσια μιας τάξης) με ένα άλλο μέρος του ίδιου όλου (7 αγόρια της ίδιας τάξης). Ο λόγος μέρους προς μέρος, γράφεται 9/7 ή 9:7 και σημαίνει «εννέα προς επτά» και όχι «εννέα έβδομα». Παρότι έχουμε χρήση της κλασματικής γραμμής δεν είναι κλάσμα και αυτό διακρίνεται από το εννοιολογικό πλαίσιο του έργου. Αντίθετα η σύγκριση ενός μέρους προς το όλο, όπως για παράδειγμα ο αριθμός των κοριτσιών μιας τάξης (9) προς το σύνολο όλων των μαθητών (16), γίνεται αντιληπτό ως κλάσμα και γράφεται 9/16 ή 9:16 και σημαίνει πως τα εννιά δέκατα έκτα της τάξης είναι κορίτσια ή εννιά προς δέκα έξι μαθητές είναι κορίτσια (van de Walle et al., 2017).

Σύμφωνα με την Κολέζα (2000), το κλάσμα ως λόγος αναφέρεται σε δυο χώρους μέτρησης, οι οποίοι μπορούν να συνδεθούν είτε με μία «μεταξύ» των χώρων στρατηγική, οπότε αναφέρεται ως λόγος υπό μορφή ρυθμού μεταβολής «εξωτερικός» λόγος (rate), είτε σε μια «εντός» του ίδιου χώρου μεταβολής (ratio) οπότε γίνεται αναφορά σε «εσωτερικό» λόγο. Για παράδειγμα, αν υπάρχουν 8 αγόρια και 12 κορίτσια σε μια τάξη (Α1) και 6 αγόρια και 10 κορίτσια σε μια άλλη τάξη (Β1) μπορούμε να συγκρίνουμε τους μαθητές των δύο τάξεων, 8/12 και 6/10. Συγκρίνουμε δηλαδή δυο διαφορετικούς χώρους μέτρησης, «εξωτερικός» λόγος (rate). Αν ένα αυτοκίνητο καταναλώνει 12 λίτρα βενζίνης στα 100 χιλιόμετρα και ένα άλλο 8 λίτρα στα ίδια χιλιόμετρα, ο λόγος 8/12 ή 2/3 δίνει τη σχέση κατανάλωσης του δεύτερου αυτοκίνητο σε σχέση με το πρώτο, «εσωτερικός» λόγος (ratio), και συγκρίνουμε μέτρα από τους ίδιους χώρους μέτρησης (λίτρα) (Λεμονίδης, 2016).

Η κατανόηση της ερμηνείας του κλάσματος ως «λόγου» μπορεί να βοηθήσει ώστε οι μαθητές να αντιληφθούν καλύτερα και την έννοια της ισοδυναμίας και τις πράξεις κλασμάτων π.χ. την πρόσθεση και την αφαίρεση (Marshall, 1993).

Τέλος, σύμφωνα με τον Marshall (1993), εφόσον το κλάσμα ως «λόγος» δεν εμπεριέχει διαμέριση μιας ποσότητας ή ενός συνόλου αντικειμένων, στόχος είναι οι μαθητές να αντιληφθούν την έννοια των σχετικών ποσών και στη συνέχεια να προχωρήσουν στην κατανόηση του κλάσματος ως αναλογίας, δηλαδή μιας ισότητας λόγων. Όταν καταλάβουν οι μαθητές πως, όταν οι δυο ποσότητες βρίσκονται σε σχέση αναλογίας αλλάζουν μαζί – διαιρούνται ή πολλαπλασιάζονται – προκειμένου η σχέση τους να παραμένει σταθερή και η αρχική τους αξία αναλλοίωτη, μπορούν ευκολότερα να κατανοήσουν και τη διάκριση ανάμεσα στην ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρους-όλου» και αυτή του «λόγου». (Γαγάστης κ.ά. 2006. Charalambous & Pita-Pantazi, 2007).

δ) Το κλάσμα ως μέτρο - μέτρηση (measure)

Η ερμηνεία του κλάσματος ως «μέτρο-μέτρηση» αφορά την ποσότητα μιας συνεχούς μονάδας μέτρησης (όπως μήκος, εμβαδό, χρόνος ή όγκος) η οποία στη συνέχεια συγκρίνεται με μία ολόκληρη μονάδα που ισούται με ένα. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που ένας μαθητής διανύει το ½ ενός χιλιομέτρου, αυτό αποτελεί ποσότητα συνεχούς μονάδας (μήκος) και έπειτα ακολουθεί η σύγκρισή της (1/2) με το ένα χιλιόμετρο (ολόκληρη μονάδα), ως υποδιαίρεσή της. Στη συγκεκριμένη ερμηνεία του κλάσματος εξετάζεται η ποσότητα και όχι ο αριθμός των μερών όπως συμβαίνει με τα έργα «μέρους-όλου». Η ποσοτικοποιήση του κλάσματος, μέσα από τη μέτρηση και τη σύγκριση, προσφέρει μια σημαντική εμπειρία στους μαθητές ώστε να αντιληφθούν την έννοια του κλάσματος ως αριθμού (Behr et al., 1983. Martine, 2007, στο van de Walle et al., 2017).

Κατά τους Yanik, Helding και Flores (2008), για να είναι σε θέση οι μαθητές να κατανοήσουν το κλάσμα ως «μέτρηση-μέτρο», και να επιχειρούν οποιαδήποτε διαμέριση, σύγκριση ή διάταξη, αρχικά θα πρέπει να αντιληφθούν τη μονάδα πάνω στην οποία εργάζονται. Τα μέσα που χρησιμοποιούνται συνήθως για να επιτευχθεί αυτό, είναι οι ποικίλες αναπαραστάσεις αριθμητικών γραμμών (π.χ. κανόνας, μέτρο, κλασματικές λωρίδες, ράβδοι κ.λ.π.).

Σύμφωνα με την Κολέζα (2000), στην ερμηνεία του κλάσματος ως «μέτρο», το κλάσμα α/β σημαίνει ότι η μονάδα έχει διαιρεθεί σε β ίσα μέρη μήκους 1/β, και ότι το σημείο που αντιστοιχεί στο κλάσμα α/β πάνω στην αριθμογραμμή απέχει από το μηδέν **α** διαστήματα μήκους 1/β. Το κλάσμα 1/β λειτουργεί ως μονάδα μέτρησης και χρησιμοποιείται επαναληπτικά, ξεκινώντας από το μηδέν, τόσες φορές όσες υποδεικνύει το κλάσμα. Το σημείο μηδέν τίθεται αυθαίρετα και δεν ταυτίζεται πάντα με την αρχή της αριθμητικής γραμμής.

Η μονάδα μέτρησης πάνω στην αριθμητική γραμμή μπορεί να διαιρείται σε μικρότερες μονάδες δίνοντας έτσι νέα διαφορετικά κλάσματα. Στην περίπτωση που εμφανίζονται δύο μονάδες ή όταν η μονάδα δεν διαχωρίζεται σε τμήματα, τόσα όσα υποδεικνύει ο παρονομαστής και εμφανίζει πολλαπλάσια ή υπο-πολλαπλάσιά του, οι μαθητές αδυνατούν να εντοπίσουν σωστά την ποσότητα που εκφράζει το κλάσμα. Δυσκολεύονται, για παράδειγμα, να τοποθετήσουν το κλάσμα 7/8 σε μια αριθμογραμμή που είναι χωρισμένη σε τέταρτα, δεύτερα ή δέκατα έκτα γιατί δεν καταφέρνουν συχνά να αντιληφθούν σωστά τη μονάδα αναφοράς. Ωστόσο, η δημιουργία διαφορετικών μονάδων που καλύπτουν την ίδια απόσταση μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές και στην ισοδυναμία των κλασμάτων την οποία μπορούν να ανακαλύψουν και να κατανοήσουν καλύτερα (Baturo, 2004).

Επιπλέον, η αριθμητική γραμμή μπορεί να αποτελέσει ένα πολύτιμο εργαλείο, που θα μπορούσε να δώσει λύση στο «πρόβλημα των ενδιάμεσων αριθμών», στην πυκνότητα, στη διαδοχικότητα, στην απόσταση από το μηδέν αλλά και στο άπειρο, έννοιες που δυσκολεύουν τους μαθητές, προκειμένου να αντιληφθούν το μέγεθος των κλασμάτων (Κολέζα, 2000).

ε) Το κλάσμα ως τελεστής – πολλαπλασιαστής (operator)

Το κλάσμα, μέσα από τη διάσταση του τελεστή, νοείται ως μια συνάρτηση που εφαρμόζεται σε αντικείμενα (αριθμούς, σύνολα ή γεωμετρικά σχήματα) και τα μετασχηματίζει ως προς κάποιο μέγεθος. Για παράδειγμα, το κλάσμα εμφανίζεται ως ο σταθερός τελεστής a της συνάρτησης y=a.x με δεδομένο ότι οι τιμές των y, x μεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο ώστε ο a να παραμένει σταθερός. Δηλαδή, λειτουργεί ως ένας μηχανισμός μετατροπής μιας ποσότητας σε μια άλλη. Η μετασχηματιστική αυτή λειτουργία θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια ξεχωριστή

σύνθετη πράξη που έχει δυο ερμηνείες, τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση σε διακριτές ποσότητες, και την σμίκρυνση ή τη μεγέθυνση σε συνεχείς ποσότητες. Για παράδειγμα όταν αναζητούμε τα 4/5 των 2 τετραγωνικών μέτρων, ο τελεστής κλάσμα αλλάζει το μέγεθος (συρρικνώνει ή μεγεθύνει) μέσω του πολλαπλασιασμού (van de Walle et al., 2017).
Σύμφωνα με τον Behr (1993), και τους συνεργάτες του όταν οι μαθητές κατανοήσουν τη μετασχηματιστική λειτουργία του κλάσματος ως τελεστής, τότε θα μπορέσουν ευκολότερα να κατανοήσουν και τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων μέσα από την ερμηνεία του ότι, πολλαπλασιάζοντας, «παίρνω ένα μέρος από το μέρος του όλου» (π.χ. βρείτε τα ¾ του ½), ή ακόμη να κατανοήσουν ευκολότερα και την έννοια της ισοδυναμίας δίνοντας έμφαση στο ανάγωγο κλάσμα βάση του οποίου πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με έναν αριθμό να δημιουργούνται ισοδύναμα κλάσματα. (Behr et al., 1993. Marshall, 1993, στο Charalambous & Pita-Pantazi, 2007).

Για να αντιληφθούν την ερμηνεία του τελεστή καλύτερα οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να ερμηνεύουν κάθε πολλαπλασιασμό κλάσματος με ποικίλους τρόπους (π.χ. το 3/4 να αναγνωρίζεται ως 3 × 1/4 της μονάδας ή 1/4 × 3 μονάδες), κατανοώντας το αποτέλεσμα της πράξης σε κάθε μετασχηματισμό της. Επίσης να κατανοηθεί από τους μαθητές πως το γινόμενο των κλασμάτων, σε αντίθεση με το γινόμενο των ακεραίων, μπορεί να δίνει αποτέλεσμα και μικρότερο από τους παράγοντες που πολλαπλασιάζονται (Γαγάτσης κ.ά., 2006. Charalambous & Pita-Pantazi, 2007).

Εν κατακλείδι, οι πέντε ερμηνείες του κλάσματος (μέρος-όλο, πηλίκο, λόγος, τελεστής και μέτρο) παρά το γεγονός ότι είναι ανεξάρτητες κατασκευές, συνδέονται άρρηκτα μεταξύ τους στη βάση ενός κοινού πλαισίου που τις συνδέει και τις ενώνει. Το κοινό αυτό πλαίσιο που συνδέει όλες τις διαφορετικές διαστάσεις-ερμηνείες του κλάσματος βασίζεται στις έννοιες της ίσης διαμέρισης, της μονάδας, της ποσότητας (Λεμονίδης, 2016).

Οι πέντε ερμηνείες του κλάσματος δεν είναι όλες το ίδιο κατανοητές από τους μαθητές και ούτε έχουν οι μαθητές τις ίδιες επιδόσεις σε αυτές. Οι Charalambous και Pita-Pantazi (2007) ερεύνησαν την κατανόηση των κλασμάτων σε μαθητές Ε΄και Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου της Κύπρου. Πιο συγκεκριμένα, ερεύνησαν την κατανόηση του κλάσματος σε σχέση με τις πέντε διαστάσεις (κατασκευές) του μοντέλου του Behr (1983) και την σύνδεσή τους με την έννοια του κλάσματος, σύμφωνα με όσα είχαν ήδη διδαχθεί. Κατέληξαν στο συμπέρασμα πως οι επιδόσεις των μαθητών δεν ήταν το ίδιο υψηλές και στις πέντε κατασκευές. Εκείνη που έδωσε τα καλύτερα αποτελέσματα ήταν αυτή του μέρους-όλου, καθώς αυτή κυριαρχούσε στα σχολικά εγχειρίδια, σε σχέση με τις υπόλοιπες στις οποίες παρουσίασαν χαμηλότερες επιδόσεις. Στην ίδια μελέτη, οι ερευνητές υποδηλώνουν πως μια βαθύτερη και ουσιαστική κατανόηση όλων των διαφορετικών κατασκευών του κλάσματος θα μπορούσε να επηρεάσει θετικά τις επιδόσεις των μαθητών σε δραστηριότητες που θα είχαν σχέση τόσο με τις πράξεις των κλασμάτων, την έννοια της ισοδυναμίας των κλασμάτων και γενικότερα τη διαχείριση των κλασματικών αριθμών.

1.Β.3 ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥΣ

1.Β.3.i Δυσκολίες στην κατανόηση της κλασματικής έννοιας από τους μαθητές

Οι μαθητές στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν και να ερμηνεύσουν τα κλάσματα στο σχολείο και στην καθημερινότητά τους, δυσκολεύονται πολύ. Διαπιστώνεται ότι μεγάλος αριθμός μαθητών από διαφορετικές χώρες αντιμετωπίζουν τις ίδιες δυσκολίες οι οποίες πηγάζουν από την πολυσύνθετη κατασκευή και φύση των κλασμάτων. Η εννοιολογική φύση των κλασμάτων, οι ποικίλες αναπαραστάσεις, ο συμβολισμός τους (Lortie-Forgues, Tian & Siegler, 2015), αλλά και ο τρόπος διδασκαλίας τους διαμορφώνουν και επηρεάζουν την κατανόησή τους.

Σύμφωνα με τους Vamvakousi &Vosniadou (2010), η διαδικασία κατάκτησης του κλάσματος, εννοιολογικά συνεπάγεται αναδιοργάνωση της προϋπάρχουσας γνώσης και απαιτεί οντολογική αλλαγή. Μια διαδικασία αλλαγής που ωστόσο, μπορεί να δημιουργήσει παρανοήσεις και λάθη στους μαθητές. Το επεξηγηματικό πλαίσιο των φυσικών αριθμών, που αποτελεί την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών, διαφέρει κατά πολλά από αυτό του κλάσματος και λειτουργεί ως τροχοπέδη στην κατάκτηση της νέας έννοιας. Απαραίτητο κατ' επέκταση, προκειμένου οι μαθητές να υπερβούν την «προκατάληψη του φυσικού αριθμού» είναι, να εντοπιστούν και να προσδιοριστούν οι διαφορές ανάμεσα στους φυσικούς αριθμούς και στα κλάσματα ώστε να αναδιοργανωθεί σωστά η θεμελιώδης γνώση των μαθητών σε σχέση με τους φυσικούς αριθμούς, προτού δομηθεί η αφηρημένη έννοια του κλάσματος (Van Dooren, Lehtinen & Verschaffel, 2015. Ni & Zhou, 2005, στο Λεμονίδης 2016).

Οι Stafylidou και Vosniadou (2004) καταγράφοντας τις βασικές διαφορές ανάμεσα στο κλάσμα και τον φυσικό αριθμό αποτυπώνουν τα κύρια σημεία όπου εντοπίζεται η διαφοροποίησή τους και εστιάζουν: α) στη συμβολική τους αναπαράσταση, β) στη διάταξη, γ) στη σχέση τους με τη μονάδα και δ) στην εκτέλεση των πράξεων (πρόσθεση-αφαίρεση, πολλαπλασιασμός-διαίρεση), (Πίνακας 1). Υποστηρίζουν πως η σταδιακή αναδιοργάνωση της γνώσης των μαθητών και η προσέγγιση του κλάσματος μέσα από λογικές σχέσεις που στηρίζονται στην προηγούμενη γνώση τους, θα βοηθήσουν σημαντικά και στην καλύτερη κατανόηση της νέας έννοιας.

Πίνακας 1: Διαφορές μεταξύ φυσικών αριθμών και κλασμάτων

Αριθμητική Αξία	Φυσικοί Αριθμοί	Κλάσματα
Συμβολική Αναπαράσταση	Ένας αριθμός (*προϋπόθεση διακριτότητας- presupposition of discreteness)*	Δύο αριθμοί και μια γραμμή (*προϋπόθεση πυκνότητας- presupposition of density)*
Διάταξη	Υποστηρίζεται από την ακολουθία (καταμέτρηση) των φυσικών αριθμών Υπάρχει επόμενος ή προηγούμενος αριθμός Δεν υπάρχει αριθμός μεταξύ δύο διαφορετικών αριθμών	Δεν υποστηρίζεται από τη φυσική αλληλουχία αριθμών Δεν υπάρχει ένας μοναδικός επόμενος ή προηγούμενος αριθμός Υπάρχει το άπειρο (*Infinity)*
Σχέση με τη μονάδα	Η μονάδα είναι ο μικρότερος αριθμός	Δεν υπάρχει μοναδικός μικρότερος αριθμός
<u>Πράξεις</u> **Πρόσθεση- Αφαίρεση**	Υποστηρίζεται από την ακολουθία των φυσικών αριθμών	Δεν υποστηρίζεται από την ακολουθία των φυσικών αριθμών
Πολλαπλασιασμός	Ο πολλαπλασιασμός κάνει τον αριθμό μεγαλύτερο	Ο Πολλαπλασιασμός κάνει τον αριθμό ή μεγαλύτερο ή μικρότερο
Διαίρεση	Η διαίρεση κάνει τον αριθμό μικρότερο	Η διαίρεση κάνει τον αριθμό ή μεγαλύτερο ή μικρότερο

ΠΗΓΗ: S. Stafylidou, S. Vosniadou (2004), σελ. 503-518

Επιπλέον, η πυκνή δομή των ρητών αριθμών σε αντίθεση με τη σαφή, διακριτή των φυσικών αριθμών δημιουργεί και αυξάνει τις δυσκολίες που σχετίζονται με την εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων. Ως σημαντικότερες εννοιολογικές δυσκολίες που αφορούν στα κλάσματα (Γαγάτσης κ.α., 2001. Χρίστου & Φιλλίπου, 1995) αναφέρονται οι εξής:

α) Η δυσκολία στην υπέρβαση της κλασματικής ποσότητας και στην αδυναμία οικοδόμησης της έννοιας του κλασματικού αριθμού, παραμένοντας στην απόλυτη αξία των φυσικών αριθμών που απεικονίζουν τον αριθμητή και τον παρονομαστή ως δύο ξεχωριστούς φυσικούς αριθμούς.

β) Η αντίληψη του κλάσματος ως δύο αριθμών, με λογιστικές πράξεις σε αριθμητές και παρονομαστές ανεξάρτητα του ενός από τον άλλο. Για παράδειγμα 3/5 + 1/3 = 4/8.

γ) Η σύνδεση του κλάσματος κ/μ με την απόλυτη αξία των φυσικών κ και μ. Για παράδειγμα, θεωρείται συχνά ότι το 3/12 είναι μεγαλύτερο από το 2/4.

δ) Η αντίληψη ότι η κλασματική μονάδα είναι σταθερό μέγεθος.

ε) Ανάμεσα σε δύο διαδοχικά κλάσματα υπάρχει η αντίληψη ότι δεν υπάρχει άλλος αριθμός. Για παράδειγμα θεωρείται ότι το επόμενο κλάσμα μετά το 2/5 είναι το 3/5.

στ) Παραμένει η κυριαρχία της αντίληψης της σχέσης μέρους-μέρους αντί της σχέσης μέρους- όλου.

Οι ποικίλες συμβολικές αναπαραστάσεις των κλασμάτων αποτελούν μια επιπλέον δυσκολία για τους μαθητές. Το γεγονός ότι οι κλασματικοί αριθμοί παραμένουν αμετάβλητοι παρόλο που αλλάζουν οι αναπαραστάσεις τους είναι κάτι που δύσκολα οι μαθητές συνειδητοποιούν (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Άλλοι παράγοντες που επηρεάζουν και διαμορφώνουν την ικανότητα των μαθητών στο να κατανοήσουν και να διαχειριστούν τα κλάσματα εντοπίζονται σε πολιτισμικές διαφορές, όπως το περιεχόμενο των μαθηματικών προγραμμάτων σπουδών, τα σχολικά εγχειρίδια αλλά και η χρήση της γλώσσας στην απόδοση των αριθμών με λέξεις. Για παράδειγμα η σπουδαιότητα της σημασίας του μέρους-όλου για την έννοια του κλάσματος υπάρχει σχεδόν σε όλες τις κουλτούρες, διότι σε πολλές γλώσσες η αναφορά «κλάσμα» περιλαμβάνει την έννοια του χωρισμού και της διαίρεσης αλλά αποδίδεται διαφορετικά. Για παράδειγμα στα κινέζικα, τα κορεατικά και τα ιαπωνικά, η έννοια του κλασματικού μέρους είναι ρητά ενσωματωμένη με τον όρο «κλάσμα». Λέγοντας « ¼», αυτό μεταφράζεται ως "τεσσάρων τμημάτων, ένα", το οποίο εκφράζει ρητά την έννοια του συνόλου και του μέρους μέσα από την ονομασία του αριθμού, βοηθώντας τους μαθητές να αποφύγουν συγχύσεις. Αντίθετα, στην αγγλική γλώσσα, το 1/4 διαβάζεται ως "ένα τέταρτο" το οποίο δεν αντανακλά με σαφήνεια την έννοια συνόλου ή τη σχέση μέρους-όλου, το ίδιο ισχύει και για την ελληνική γλώσσα. Σ’ αυτή την περίπτωση οι μαθητές πρέπει να διδαχθούν και να αντιληφθούν αναλυτικά την ερμηνεία του «ένα τέταρτο» με βάση και το νόημα που μεταφέρει (Miura, Okamoto, Vlahovic-Stetic, Kim & Han, 1999).

Τέλος, η γνώση και η ικανότητα των εκπαιδευτικών ώστε να διδάξουν εύστοχα τα κλάσματα, συγκαταλέγεται στους παράγοντες που διαμορφώνουν την προσέγγιση των κλασματικών αριθμών από τους μαθητές. Ο ρόλος τους παρουσιάζεται αναλυτικά παρακάτω.

1.Β.3.ii Δυσκολίες στην κατανόηση και διδασκαλία της κλασματικής έννοιας από τους εκπαιδευτικούς

Η μαθηματική παιδεία του εκπαιδευτικού, σύμφωνα με την έρευνα (Ball, 1990. Tirosh, 2000), αποτελεί ένα από τα βασικά προαπαιτούμενα για μια πετυχημένη διδασκαλία στα μαθηματικά. Ο εκπαιδευτικός παίζει πρωταγωνιστικό ρόλο προκειμένου οι μαθητές να αναπτύξουν στρατηγικές και να κατανοήσουν σύνθετες μαθηματικές έννοιες, όπως και αυτήν του κλάσματος. Η ανεπαρκής γνώση των εν ενεργεία και των υποψήφιων εκπαιδευτικών, σχετικά με τα κλάσματα, καθορίζουν αρνητικά τον τρόπο διδασκαλίας που θα υιοθετήσουν, αλλά και τις επιδόσεις των μαθητών τους (Zhou, Peverly & Xin, 2006. Tirosh, 2000).

Σύμφωνα με τον Shulman (1986), τρεις πτυχές της γνώσης θεωρούνται απαραίτητες προκειμένου ένας εκπαιδευτικός να προβεί σε μια επιτυχή διδασκαλία μιας μαθηματικής έννοιας: α) Γνώση Περιεχομένου - γνώση του ίδιου του αντικειμένου που διδάσκει, β) Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου - ευέλικτη και εύστοχη διδασκαλία για την προσέγγιση μιας μαθηματικής έννοιας (π.χ. στην περίπτωση των κλασμάτων τη χρήση ποικίλων μοντέλων, αναπαραστάσεων, παραδειγμάτων) και γ) Γενική Παιδαγωγική Γνώση - γνώση του αναλυτικού προγράμματος της εκπαίδευσης.

Σύμφωνα με τη Ma (1999), οι εκπαιδευτικοί στην Αμερική παρουσιάζουν πολύ χαμηλές επιδόσεις και στις τρεις πτυχές της γνώσης που απαιτείται για τη διδασκαλία των κλασμάτων σύμφωνα με το μοντέλο του Shulman (1986), γιατί όπως υποστηρίζει δεν απέκτησαν επαρκή γνώση της έννοιας του κλάσματος κατά τη φοίτησή τους στο σχολείο ως μαθητές.

Οι Zhou, Peverly και Xin (2006), συγκρίνοντας τις γνώσεις των εκπαιδευτικών στην Κίνα και στην Αμερική σε σχέση με τα κλάσματα, με βάση το μοντέλο του Shulman (1986), συμπέραναν ότι οι Κινέζοι εκπαιδευτικοί είχαν καλύτερες επιδόσεις σε γνώσεις περιεχομένου, (έννοιες, υπολογισμοί και πρόβλημα) ενώ υστερούσαν σε παιδαγωγική γνώση και παρουσίασαν αδυναμίες στο να μεταφέρουν τη γνώση τους στους μαθητές. Αντίθετα οι Αμερικανοί υστερούσαν τόσο σε εννοιολογική κατανόηση όσο και σε γνώσεις περιεχομένου. Όπως υποστηρίζουν η διαφορετική μαθηματική εκπαίδευση που έλαβαν οι συμμετέχοντες ως μαθητές και φοιτητές, προκαθορίζει σε μεγάλο βαθμό τη μαθηματική συμπεριφορά τους ως εκπαιδευτικοί.

Οι Olanoff, Lo και Tobias (2014) πραγματοποίησαν μια μετα-ανάλυση (extensive review of the research literature) σε αρκετές ερευνητικές μελέτες που αφορούσαν υποψήφιους εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και τη γνώση τους σχετικά με το μαθηματικό περιεχόμενο στον τομέα των κλασμάτων από το 1989 έως το 2013. Οι έρευνες πριν το 1998 επικεντρώθηκαν κυρίως στην κατανόηση των πράξεων με κλάσματα (κυρίως του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης) ενώ μετά το 1990 εστίασαν και στην κατανόηση του κλάσματος ως αριθμού (Ball, 1990. Tirosh, 2000). Βρέθηκε πως οι περισσότεροι από τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς ήταν σε θέση να χρησιμοποιήσουν αλγόριθμους για τον πολλαπλασιασμό, να εκτελέσουν τη διαδικασία αντιστροφής και πολλαπλασιασμού για τη διαίρεση των κλασμάτων, τον διαχωρισμό και τη σύγκριση των κλασμάτων, αλλά δυσκολεύονταν όταν τους ζητούνταν να αιτιολογήσουν τη στρατηγική τους, ή να διατυπώσουν ένα δικό τους πρόβλημα που να περιέχει κλάσματα (Newton, 2008). Στην Αγγλία, αντίστοιχα, υποψήφιοι εκπαιδευτικοί, φοιτητές του παιδαγωγικού τμήματος δημοτικής εκπαίδευσης, έδειξαν περιορισμένη την εννοιολογική κατανόηση του κλάσματος σε σχέση με τις διαστάσεις του, αξιοποιώντας αυτή του μέρους-όλου ως την ευκολότερη προσέγγιση να διαχειριστούν μαθηματικά έργα με τα κλάσματα. Οι περισσότεροι φοιτητές ήταν επίσης εξαρτημένοι από ένα διαδικαστικό τρόπο επίλυσης ενός προβλήματος με κλάσματα, αλλά δεν μπορούσαν να εξηγήσουν εννοιολογικά τις διαδικασίες που ακολουθούσαν (Caglayan & Olive, 2011. Kajander & Holm, 2011. Domoney, 2008, στο Olanoff et al., 2014).

Σε παρόμοια έρευνα οι Δεσλή και Κυριακορεΐζη (2015) μελετώντας 150 υποψήφιους Έλληνες εκπαιδευτικούς (προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς) της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης και τη γνώση τους σχετικά με το παιδαγωγικό και μαθηματικό περιεχόμενο στον τομέα των κλασμάτων (αριθμητικές πράξεις με κλάσματα - προβλήματα με κλάσματα) επιβεβαιώνει την έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης στους υποψήφιους εκπαιδευτικούς, καθώς και την περιορισμένη δυνατότητα παιδαγωγικής ευελιξίας ώστε να ερμηνεύσουν και να επαναπροσδιορίσουν τα λάθη των μαθητών. Ένα γενικό εύρημα της μελέτης ήταν ότι η γνώση των υποψήφιων εκπαιδευτικών ήταν αρκετά καλή όσον αφορά την εκτέλεση των διαδικασιών σχετικά με τα κλάσματα (μια μικρή δυσκολία παρουσίασαν στον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση κλασμάτων), αλλά δεν διέθεταν ευελιξία ώστε να απομακρυνθούν από τις διαδικασίες και να πετύχουν μια ουσιαστικότερη προσέγγιση στις πραγματικές εννοιολογικές δυσκολίες των μαθητών. Εξαίρεση εμφάνισαν οι μεταπτυχιακοί φοιτητές που εφάρμοσαν τη χρήση μοντέλων, χειραπτικών υλικών και εικονικών αναπαραστάσεων προκειμένου να ενισχύσουν εννοιολογικά την κατανόηση των μαθητών αλλά και να αντιμετωπίσουν τις δυσκολίες στις πράξεις με τα κλάσματα.

Εν κατακλείδι, οι αδυναμίες που εμφανίζουν οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί και στα δύο είδη γνώσεων (έλλειψη γνώσης περιεχομένου του κλάσματος και παιδαγωγική γνώση περιεχομένου) αποτελούν βασικούς παράγοντες και επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό τη διδασκαλία και τις επιδόσεις τους μέσα στις σχολικές αίθουσες (Ma 1999, Olanoff et al., 2014) διαμορφώνοντας παράλληλα και την γνώση των μαθητών τους στη μαθηματική περιοχή των κλασμάτων.

Γ. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

1.Γ.1 Οι αναπαραστάσεις στη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών

Οι μαθητές καθημερινά στα πλαίσια της διδακτικής πράξης καλούνται εκτός από τον εκπαιδευτικό, να αντιληφθούν, να αποκωδικοποιήσουν και να κατανοήσουν τις διάφορες μαθηματικές έννοιες που διδάσκονται. Τα συστήματα αναπαράστασης και τα ποικίλα μοντέλα ως εργαλεία στον χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης βοηθούν ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν ευκολότερα και καλύτερα τις νέες έννοιες. Βέβαια τόσο οι αναπαραστάσεις όσο και τα μοντέλα πρέπει να έχουν νόημα, δηλαδή να συνδεθούν με συγκεκριμένες περιστάσεις όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά. Το σημαντικό στην κατανόηση δεν είναι η γνώση διαδικασίας αλλά η μετατροπή αυτής της διαδικασίας σε εργαλείο σκέψης (Nunes & Bryant, 2007).

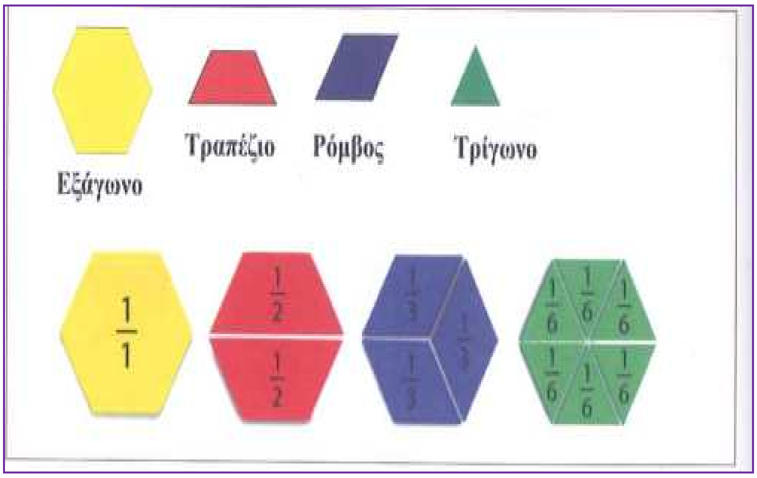
Σύμφωνα με τον van de Walle (2005), ως Μοντέλο μιας μαθηματικής έννοιας «*μπορεί να είναι οποιοδήποτε αντικείμενο, εικόνα ή σχέδιο το οποίο την αναπαριστά ή στο οποίο μπορεί να επιβληθεί η σχέση για αυτή την έννοια*» (σελ. 46). Τα μοντέλα λειτουργούν ως συνδετικοί κρίκοι ανάμεσα στις έννοιες και στα σύμβολα και αποτελούν βασικό μέσο ανάπτυξης της κάθε μαθηματικής έννοιας. Ο τρόπος με τον οποίο το άτομο απεικονίζει τα μοντέλα που δημιουργεί αποτελεί τις αναπαραστάσεις (Gilbert, 2010). Οι αναπαραστάσεις στο χώρο των Μαθηματικών θεωρούνται ένα ισχυρό εργαλείο διδασκαλίας, κατανόησης, μάθησης, και επικοινωνίας. Ως εργαλεία κατανόησης μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αναδιοργανώσουν και να μεταφράσουν τις ιδέες με σύμβολα. Ως εργαλεία επικοινωνιακά, ενισχύουν στην επικοινωνία των ιδεών και των μαθητών που τις χρησιμοποιούν, ενώ παράλληλα δημιουργούν ένα κοινωνικό περιβάλλον για την ανάπτυξη μαθηματικών συζητήσεων (Anchileri, 2001. Gagatsis et al., 2004. Van de Walle, 2005). Αποτελούν δηλαδή, νοητικές δομές μέσω των οποίων εκφράζονται οι ιδέες, αναδεικνύοντας κατ’ αυτόν τον τρόπο τη δύναμή τους.

Σύμφωνα με τον Kaput (1987), «αναπαράσταση» είναι ένα νοητικό σύμβολο ή έννοια το οποίο αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο υλικό σύμβολο και περιλαμβάνει πέντε συνιστώσες: α) την έννοια που αναπαρίσταται β) την έννοια που την αναπαριστά γ) τις πτυχές της εκπροσωπούμενης έννοιας που αναπαρίστανται δ) τις πτυχές της έννοιας που αναπαριστά οι οποίες σχηματίζουν την αναπαράσταση ε) την αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο έννοιες. Κάθε εικόνα, σχήμα, κινούμενο σχέδιο, χάρτης, γραφική παράσταση, πίνακας, ορισμός, σύμβολο και γενικότερα, κάθε χειραπτικό υλικό αποτελεί μέσο αναπαράστασης κάθε μαθηματικής έννοιας. Όλες οι αναπαραστάσεις αποτελούν ισχυρά εργαλεία για την κατανόηση, την επικοινωνία και τη διδασκαλία γιατί μπορούν να δημιουργήσουν παραγωγικά ερεθίσματα στις αισθήσεις και τη μνήμη των μαθητών ώστε να κατανοήσουν τη νέα γνώση (Κολέζα, 2017). Πρέπει να κατέχουν σημαντική θέση στα σχολικά εγχειρίδια, τα οποία συχνά αποτελούν το αποκλειστικό μέσο για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο (Fan & Zhu, 2007, στο Κολέζα, 2006).

Μια αναπαράσταση, πέρα από το γεγονός ότι απεικονίζει μια έννοια, αποτελεί παράλληλα και ένα εσωτερικό και εξωτερικό κατασκεύασμα. Οι αναπαραστάσεις χωρίζονται σε δυο μεγάλες κατηγορίες: α) ***τις εσωτερικές*** *(internal or mental representations)* και β) ***τις εξωτερικές*** *(external representations)* αναπαραστάσεις. *Οι εσωτερικές* αναφέρονται σε έννοιες, σχήματα, μοντέλα που δεν είναι άμεσα ορατά, αλλά γίνονται αντιληπτά μέσα από την παρατήρηση εξωτερικών συμπεριφορών. Είναι απαραίτητη η χρήση τους στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης γιατί αποτελούν διαφορετικές, ατομικές κατασκευές. Παίζουν σημαντικό ρόλο στη μάθηση καθώς οι ερευνητές μέσω αυτών εξετάζουν τις αντιλήψεις που έχουν οι μαθητές για τα μαθηματικά αντικείμενα και τις διαδικασίες. Αντίθετα, *οι εξωτερικές αναπαραστάσεις* περιλαμβάνουν τα αισθητηριακά ερεθίσματα που διαδραματίζουν αποφασιστικό ρόλο στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών όπως εικόνες, σχέδια, διαγράμματα, γραπτά σύμβολα, λεκτικές περιγραφές, κ.λ.π.. Είναι παρατηρήσιμες και υποδηλώνουν τον τρόπο της εσωτερικής κατανόησης των μαθητών. Σύμφωνα με τον Goldin (1998), τα εσωτερικά αναπαραστατικά συστήματα είναι κατασκευές της μαθηματικής συμπεριφοράς των μαθητών, ενώ τα εξωτερικά είναι κατασκευές για την κατανόηση των μαθηματικών. Ανάμεσα στις εσωτερικές και στις εξωτερικές αναπαραστάσεις υπάρχει μια αμφίδρομη σχέση (Gilbert, 2010).

Οι Lesh, Post και Behr (1987), στο van de Walle (2005) επισημαίνουν πέντε διαφορετικά είδη συστημάτων εξωτερικών αναπαραστάσεων σε σχέση με τη μάθηση των μαθηματικών εννοιών και την επίλυση προβλήματος (Εικ. 7). Αυτά είναι:

α) τα χειραπτικά μοντέλα όπως είναι οι αριθμητικές γραμμές, οι κλασματικές λωρίδες, τα μπλοκ μοτίβου (pattern blocks), οι γεωπίνακες (geoboards), οι κλασματικές ράβδοι (fraction bars), οι ράβδοι Cuisenaire (Cuisenaire robs) κ.τ.λ.. Τα παραπάνω μοντέλα-πλαίσια αν χρησιμοποιηθούν αυτόνομα έχουν μικρή σημασία και δεν λειτουργούν αποτελεσματικά, αλλά αν ενσωματωθούν μέσα σε σχέσεις και συνδέσεις που αναδεικνύουν τις ιδιότητες, τις πράξεις και τις καταστάσεις μιας μαθηματικής έννοιας (π.χ. τα κλάσματα), μπορούν να λειτουργήσουν δυναμικά. Τα μπλοκ μοτίβου, για παράδειγμα, αναπαριστούν διαφορετικό σχήμα και εμβαδό, έχουν μεταξύ τους διαφορετικά αντιληπτικά χαρακτηριστικά αλλά μπορούν να αναδείξουν την αξία του κλάσματος ως αριθμού, τη σύγκριση, την ισοδυναμία και τις πράξεις με τα κλάσματα. Το τραπέζιο, ο ρόμβος και το τρίγωνο είναι κλασματικά μέρη του εξαγώνου (Εικ. 6) και τα μικρότερα σχήματα είναι κλασματικά μέρη των μεγαλύτερων (Petit, Laird, Marsden & Ebby, 2010, στο Λεμονίδης, 2016). Οι κλασματικές λωρίδες επίσης αποτελούν ένα πολύ σημαντικό χειραπτικό υλικό γιατί κατασκευάζονται εύκολα από τους μαθητές από χαρτί ή χαρτόνι και αποτελούν το ενδιάμεσο υλικό για το πέρασμα στην αριθμογραμμή.



Εικόνα 6: Τα μπλοκ μοτίβου στην κατανόηση των κλασμάτων

ΠΗΓΗ: Λεμονίδης (2016), σελ. 62

β) οι εικόνες ή διαγράμματα τα οποία είναι στατικά εικονικά μοντέλα και τα οποία είναι δυνατόν να εσωτερικευθούν από τους μαθητές ως νοητικές εικόνες.

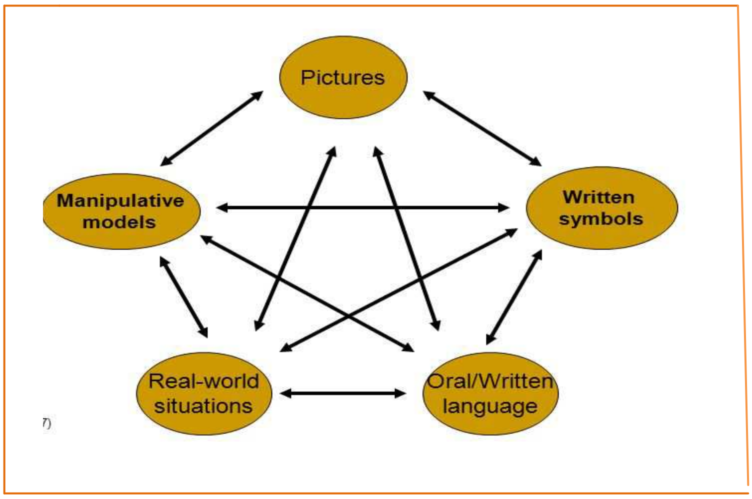
γ) οι πραγματικές καταστάσεις όπου η γνώση είναι οργανωμένη σύμφωνα με καταστάσεις της καθημερινής ζωής και αποτελούν το πλαίσιο και την ερμηνεία για την επίλυση άλλων καταστάσεων προβλήματος.

δ) η προφορική γλώσσα η οποία χρησιμοποιείται στη διατύπωση λεκτικών προβλημάτων, αλλά και στα άλλα είδη αναπαραστάσεων (π.χ., εικόνες και γραπτά σύμβολα) ώστε να δίνονται πληροφορίες και εξηγήσεις.

ε) τα γραπτά σύμβολα τα οποία, όπως και η γλώσσα, μπορούν να περιλαμβάνουν εξειδικευμένες προτάσεις και φράσεις που συναντώνται στην καθημερινή ζωή, αλλά και έναν από τους βασικούς τρόπους για τις πράξεις με τους αριθμούς.

Τέλος, τα **εικονικά χειραπτικά υλικά** αποτελούν ένα ακόμη σύστημα αναπαραστάσεων καθώς με την είσοδο της τεχνολογίας και τις σύγχρονες ψηφιακές εφαρμογές διαμορφώνονται πιο άμεσες, οπτικές και εικονικές αναπαραστάσεις, ώστε οι μαθητές να διδαχθούν την πολυσύνθετη έννοια του κλάσματος (van de Valle, 2005).

Η χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών ενδυναμώνει την κατανόηση των εννοιών, βελτιώνει την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων και ενισχύει τη μαθησιακή διαδικασία δημιουργώντας κοινές πηγές πληροφοριών (Lesh et all., 1987, στο van de Walle, 2005) .



Εικόνα 7: Οι πέντε διαφορετικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών ιδεών και οι συνδέσεις τους, σύμφωνα με τους Lesh et al. (1987)

ΠΗΓΗ: van de Walle (2005), σελ. 47

Σύμφωνα με την Τζεκάκη (2007), όσο περισσότερους τρόπους δίνουμε στους μαθητές για να σκεφτούν και να δοκιμάσουν μια αναπτυσσόμενη μαθηματική έννοια τόσες περισσότερες πιθανότητες υπάρχουν ώστε οι μαθητές να αφομοιώσουν και να διαμορφώσουν αυτή τη νέα ιδέα μέσα από ένα πλούσιο και ποικίλο αναπαραστατικό περιβάλλον. Το ιδανικό πλαίσιο των αναπαραστάσεων είναι αυτό που ορίζει και παρουσιάζει κατάλληλα ένα μαθηματικό αντικείμενο, τις ιδιότητες και τις σχέσεις του με άλλα μαθηματικά αντικείμενα και βοηθά προοδευτικά τον μαθητή ώστε να μετακινηθεί από τα συγκεκριμένα υλικά στα μαθηματικά νοήματα που αναπαριστώνται. Κάθε αναπαράσταση δίνει πληροφορίες για κάποιες πτυχές μιας μαθηματικής έννοιας και δεν καλύπτει συνολικά όλο το εύρος της, γι’ αυτό είναι απαραίτητη η χρήση ενός συνόλου αναπαραστάσεων που θα αναφέρονται στην ίδια έννοια.

Το Εθνικό Συμβούλιο των Καθηγητών Μαθηματικών της Αμερικής (National Council of Teachers of Mathematics, 2000) θεωρώντας σημαντικό τον ρόλο των πέντε διαφορετικών αναπαραστάσεων των Lesh et al. (1987) στη διδασκαλία και στη μάθηση των εννοιών που διαπραγματεύεται η σχολική τάξη, ενθαρρύνει την ευρεία χρήση τους από τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς για την βαθύτερη κατανόηση κάθε μαθηματικής έννοιας.

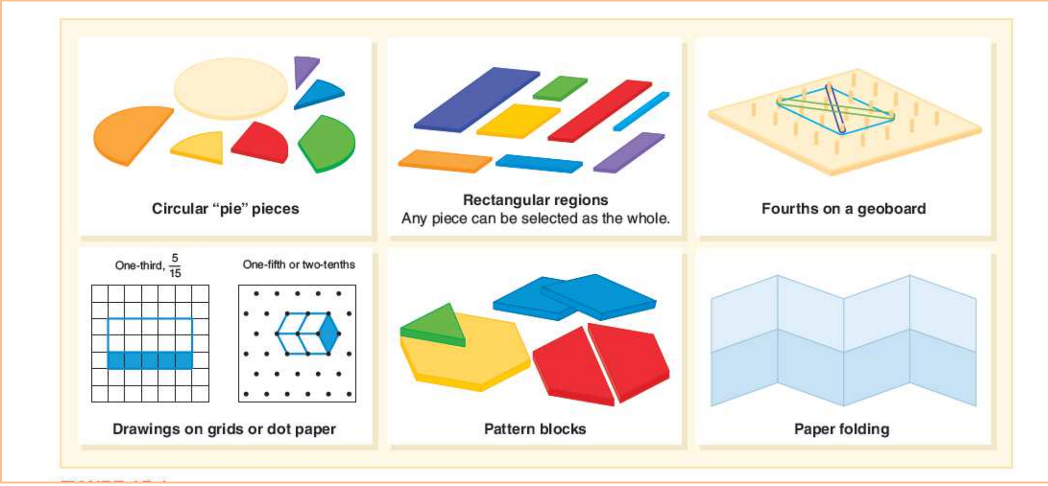
Οι αναπαραστάσεις, κατά τους Ball et al. (2008), αποτελούν μέρος της εννοιολογικής γνώσης των μαθηματικών και η χρήση τους στη διδασκαλία είναι πολύ σημαντική. Η εξειδικευμένη γνώση από μέρους των εκπαιδευτικών για την επιλογή κατάλληλων αναπαραστάσεων για συγκεκριμένες έννοιες ενδυναμώνει τη χρήση μιας ορισμένης αναπαράστασης συνδέοντάς την με άλλες αναπαραστάσεις, με τις οποίες εμπλέκεται και συνδέεται, ώστε να γίνει βαθύτερα κατανοητή από τους μαθητές η διδασκόμενη έννοια.

1.Γ.2 Είδη μοντέλων και αναπαραστάσεων στα κλάσματα

Η χρήση μοντέλων και αναπαραστάσεων σε δραστηριότητες κλασμάτων είναι πολύ σημαντική γιατί βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τις έννοιες που σχετίζονται με τα κλάσματα. Πολύ συχνά οι μαθητές δυσκολεύονται με τις κλασματικές έννοιες γιατί τους δίνονται περιορισμένοι τρόποι ώστε να σκεφτούν, να δοκιμάσουν και να δουλέψουν πάνω στην καινούρια μαθηματική έννοια που διδάσκονται. Αντίθετα η χρήση χειραπτικών εργαλείων οδηγεί στη δημιουργία ποικίλων νοερών μοντέλων και συμβάλλει καθοριστικά ώστε οι μαθητές να αντιληφθούν και να αφομοιώσουν καλύτερα την έννοια των κλασμάτων (Cramer & Whitney, 2010, στο van de Valle et al., 2017).

Σύμφωνα με τον van de Valle (2007) υπάρχουν τρία είδη μοντέλων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως βασικό υλικό για τη διδασκαλία των κλασμάτων: μοντέλα εμβαδού ή επιφάνειας, μοντέλα συνόλου και μοντέλα μήκους ή μέτρησης.

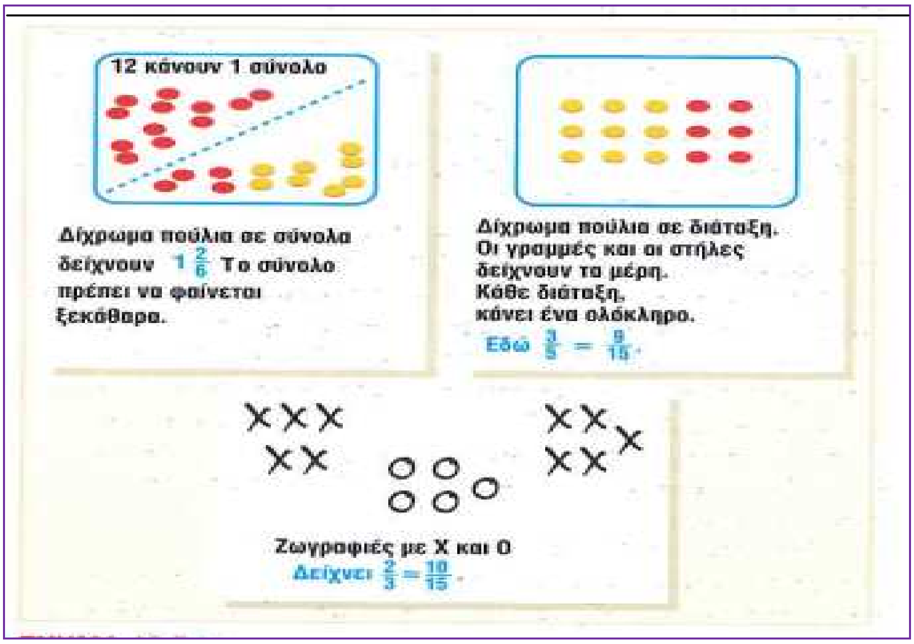
Στα **μοντέλα εμβαδού ή επιφάνειας** δουλεύονται περισσότερο οι σχέσεις μέρους-όλου, και τα κλάσματα βασίζονται στα μέρη μιας επιφάνειας ή κάποιου εμβαδού όπου τα μεγέθη είναι συνήθως συνεχή (Εικ.8). Η «κυκλική» πίτα είναι το μοντέλο εκείνο που χρησιμοποιείται πιο συχνά γιατί δίνει έμφαση στην ποσότητα που απομένει για να σχηματιστεί ένα ολόκληρο. Στα μοντέλα εμβαδού συμπεριλαμβάνονται τα διάφορα γεωμετρικά σχήματα, ο γεωπίνακας, το τετραγωνισμένο χαρτί, τα μπλοκ μοτίβων, κ.λ.π.. Το μοντέλο αυτό είναι κατάλληλο για την πρώτη εμπειρία των μαθητών με τα κλάσματα και πολύ σημαντικό για την επίλυση έργων μερισμού – μοιρασιάς (van de Valle, 2007).



Εικόνα 8: Μοντέλα επιφάνειας ή εμβαδού για κλάσματα

ΠΗΓΗ: van de Valle (2007), σελ. 384

Στα **μοντέλα συνόλου,** το όλο θεωρείται ένα σύνολο από μεμονωμένα (διακριτά) αντικείμενα και τα υποσύνολα του όλου αποτελούν τα κλασματικά μέρη. Τα μεγέθη στα μοντέλα αυτά ως διακριτά μπορούν εύκολα να καταμετρηθούν. Για παράδειγμα, η μονάδα (το όλο) αν αντιστοιχεί σε σύνολο 12 αντικειμένων (πούλια), τα 4 αντικείμενα αποτελούν τα 4/12 ή τα 2/6 του συνόλου, ή όπως φαίνεται στην Εικόνα 9, καθώς εμφανίζονται δύο σύνολα των 12 αντικειμένων, τα 4 πούλια αποτελούν το $1+\frac{2}{6}$ του συνόλου. Το μοντέλο των συνόλων παρέχει τη δυνατότητα για συνδέσεις των κλασμάτων με πολλαπλές έννοιες όπως π.χ. στην κατανόηση της έννοια της ισοδυναμίας του κλάσματος ή στα καταχρηστικά κλάσματα. Παράλληλα, ωστόσο, μπορεί να δημιουργήσει και σύγχυση στους μαθητές οι οποίοι αν δεν έχουν κατανοήσει βαθύτερα την έννοια του μέρους-μέρους, όταν τους ζητηθεί μέρος ενός συνόλου, μπορεί να απαντήσουν με κλάσμα, αλλά να αναφέρονται σε λόγο και όχι σε μέρος από το σύνολο των αντικειμένων της ίδιας μονάδας (όλο) που τους δίνεται (Φιλίππου & Χρίστου,1995).

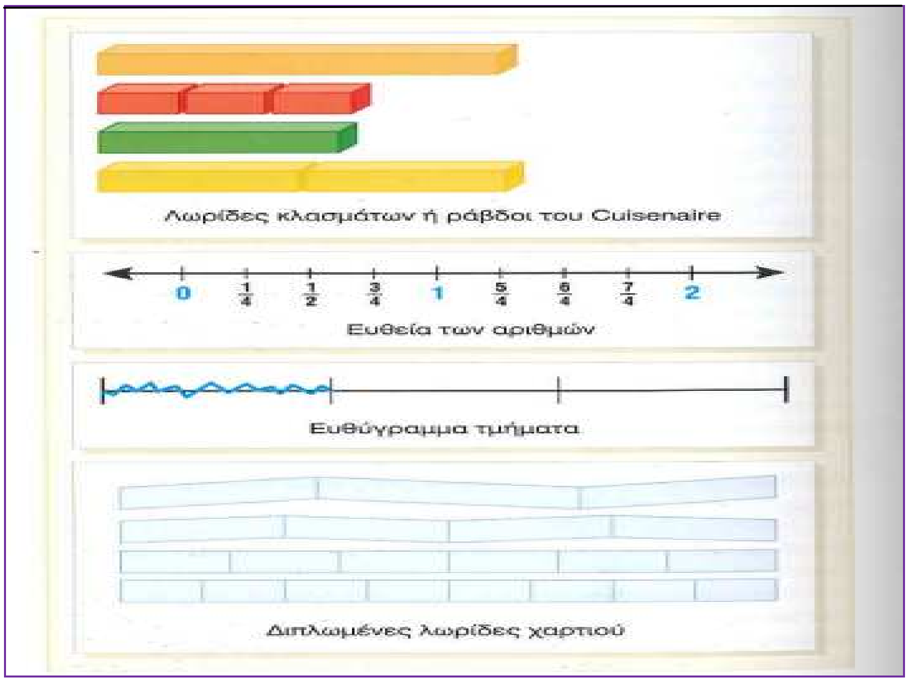


Εικόνα 9: Μοντέλα συνόλων για κλάσματα

ΠΗΓΗ: van de Valle (2007), σελ. 384

Στα **μοντέλα μέτρησης ή μήκους** αντί για το εμβαδόν αυτό που συγκρίνεται είναι το μήκος. Ευθείες γραμμές ή ευθύγραμμα τμήματα, χειραπτικό υλικό (λωρίδες χαρτιού-κλασμάτων, ράβδοι του Cuisenaire) αποτελούν τα μοντέλα μήκους στα οποία και εδώ τα μεγέθη είναι συνεχή (Εικ. 10). Τα μοντέλα της ράβδου ή λωρίδας είναι χειραπτικά υλικά και πιο ευέλικτα για τους μαθητές γιατί διαθέτουν χωριστά κομμάτια για εύκολες συγκρίσεις. Η αριθμητική γραμμή είναι ένα πολύ πιο επιτηδευμένο μοντέλο μέτρησης με πιο δύσκολη τη χρήση της από τους μαθητές αλλά τους δίνει η δυνατότητα σύγκρισης και κατανόησης ενός πραγματικού μήκους σε σχέση με κάποιο άλλο (van de Valle, 2007). Επιπλέον η αφηρημένη έννοια του κλάσματος ως αριθμός γίνεται κατανοητή μέσω της αριθμογραμμής γιατί οι μαθητές μπορούν να ορίσουν την κλασματική μονάδα, να τοποθετούν και να συγκρίνουν κλάσματα, να συγκρίνουν μεγέθη και να διαπιστώνουν την ισοδυναμία τους, να κατανοούν ότι και οι ακέραιοι αριθμοί μπορούν να γραφούν ως κλάσματα και τέλος μπορεί να επεκταθεί η αντίληψη των μαθητών για τα καταχρηστικά κλάσματα (van de Valle et al., 2017).

Τα μοντέλα μήκους και η εφαρμογή τους μέσα από ένα πλήθος δραστηριοτήτων όπως υποστηρίζουν πολλοί ερευνητές (Clarke et.al., 2008. Usiskin, 2007. Siegler et.al., 2010, στο van de Valle et al., 2017) θα πρέπει να χρησιμοποιούνται κατά προτεραιότητα στη διδασκαλία των κλασμάτων, ως βασικά εργαλεία αναπαράστασης, γιατί βοηθούν τους μαθητές να αποκτήσουν αντίληψη και κατανόηση των κλασμάτων.



Εικόνα 10: Μοντέλα μήκους και μέτρησης για τα κλάσματα

ΠΗΓΗ: van de Valle (2007), σελ.385

Η Ni (1999) χρησιμοποιώντας πολλαπλά μοντέλα όπως μοντέλα διακριτών αντικειμένων (συνόλου), επιφάνεια, τμήμα γραμμής και διακριτή αριθμογραμμή διερεύνησε, το πώς, Κινέζοι μαθητές πέμπτης και έκτης τάξης κατανοούν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των κλασμάτων. Το μοντέλο περιοχής, το μοντέλο τμήματος γραμμής και το μοντέλο διακριτών αντικειμένων (συνόλων) αντιπροσώπευε το μέρος μιας μονάδας, ενώ το μοντέλο της αριθμογραμμής αντιπροσώπευε την έννοια της μέτρησης. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονταν το κλάσμα μέσα από τα μοντέλα που αναδείκνυαν το κλάσμα ως μέρος-όλου ενός συνόλου, αλλά δυσκολεύονταν να κατανοήσουν το κλάσμα ως μέτρηση. Η εξήγηση που δόθηκε ήταν πως οι μαθητές ήταν περισσότερο εξοικειωμένοι με αναπαραστάσεις για το μέρος-όλο (σε μοντέλα περιοχής, μοντέλα τμήματος γραμμής και μοντέλα συνόλων) που συναντούσαν πιο συχνά παρά με την αναπαράσταση της μέτρησης (σε αριθμογραμμή). Σύμφωνα με την έρευνα, η διαφορά ανάμεσα στον τρόπο που κατανοούν τις δύο αναπαραστάσεις του κλάσματος οι μαθητές (ως μέρος-όλου και μέτρηση) πιθανόν να αντικατοπτρίζει και την γνωστική υποδομή τους σε σχέση με τα κλάσματα. Η έννοια του μέρους-όλου μπορεί ευκολότερα να στηριχθεί στην προηγούμενη γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς, ενώ η έννοια της μέτρησης απαιτεί από τους μαθητές να αλλάξουν την αντίληψή τους, περνώντας μέσα από τους φυσικούς αριθμούς, στους δεκαδικούς και κλασματικούς προκειμένου να αντιληφθούν ότι ένας αριθμός μπορεί να διαχωριστεί απεριόριστα.

Ερευνητικά αποτελέσματα δείχνουν (Κολέζα, 2006. Σκουμπουρδή, 2008. Ball et al., 2008) πως η χρήση ποικίλων μοντέλων και πλήθος αναπαραστατικών μέσων, συμβάλλει αποφασιστικά στη διδασκαλία και στη μάθηση, για το λόγο αυτό πρέπει να κατέχουν σημαντική θέση στα σχολικά εγχειρίδια, τα οποία, αποτελούν συχνά το αποκλειστικό μέσο για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο. Σύμφωνα με τον Λεμονίδη (2016), τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών στην Ελλάδα και κατ' επέκταση η τακτική των εκπαιδευτικών στη διδασκαλία των κλασμάτων δίνουν έμφαση στη δομή του κλάσματος ως μέρος-όλου και την κατανόησή του μέσω των μοντέλων εμβαδού (χρήση κύκλων ή άλλων γεωμετρικών σχημάτων χωρισμένων σε ίσα μέρη). Παρόμοια πρακτική εμφανίζεται και διεθνώς, με αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας περιορισμένης αντίληψης για τα κλάσματα η οποία στη συνέχεια περιορίζει και τη δημιουργία μιας πιο αφηρημένης συλλογιστικής γι' αυτά (Baturo, 2004. Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007. Misquitta, 2011). Αντίθετα, η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων θα μπορούσε να δώσει τη δυνατότητα για πολύπλευρη επεξεργασία και ουσιαστικότερη κατανόηση της έννοιας από τους μαθητές (van de Valle, 2007).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

2.Α Ερευνητικό πρόβλημα και ερευνητικά ερωτήματα

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να χαρτογραφηθούν οι δραστηριότητες που αφορούν τα κλάσματα στο σύνολό τους, στα εγχειρίδια της Γ΄ και της Δ΄ τάξης του δημοτικού, και να αναδειχθεί η συχνότητα εμφάνισης των διαστάσεων (ερμηνειών) του κλάσματος αλλά και των αναπαραστάσεων που τα συνοδεύουν.

Τα επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα που η παρούσα εργασία επιχειρεί να απαντήσει είναι:

- Ποιες από τις διαστάσεις (ερμηνείες) του κλάσματος (μέρος-όλου, πηλίκο, τελεστής, λόγος, μέτρο) εμφανίζονται πιο συχνά στις δραστηριότητες που παρουσιάζονται στις διδακτικές προτάσεις των εγχειριδίων των μαθηματικών της Γ΄ και της Δ΄ τάξης;

- Ποια μοντέλα και ποια αναπαραστατικά μέσα εμφανίζονται και αναδεικνύουν τα κλάσματα μέσα από τις δραστηριότητες που υιοθετούνται από τα σχολικά εγχειρίδια των δύο τάξεων;

- Εμφανίζονται κάποια αναπαραστατικά μέσα συχνότερα σε σχέση με κάποια άλλα αναδεικνύοντας συγκεκριμένη διάσταση(ερμηνεία) του κλάσματος;

- Υπάρχει συνέπεια και συνέχεια ανάμεσα στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών των δύο τάξεων ως προς την οργάνωση του μαθηματικού περιεχομένου της έννοιας του κλάσματος;

2.Β Αντικείμενο μελέτης – Τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών

Στην παρούσα μελέτη αντικείμενο αποτελούν τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της Γ΄ και της Δ΄ τάξης του Δημοτικού, τα οποία μελετώνται αναφορικά με τις ενότητες που προσεγγίζουν τα κλάσματα.

Η επιλογή των συγκεκριμένων εγχειριδίων των δύο συνεχόμενων τάξεων έγινε αφενός γιατί η εισαγωγή στη διδασκαλία των κλασμάτων γίνεται στη Γ΄ τάξη (Α.Π.Σ.-Δ.Ε.Π.Π.Σ., 2003) και αφετέρου καθώς, με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, και στη Δ΄ τάξη εμφανίζονται κοινές κλασματικές έννοιες, οι οποίες υποστηρίζονται και εμπλουτίζονται με συνέπεια και συνέχεια στη διδασκαλία τους, λόγω της σπειροειδούς διάταξης της ύλης. Επιπλέον, μετά από σχετική εισήγηση του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Πράξη 33/267-2018 του Δ.Σ.), στάλθηκαν ορισμένες προτεινόμενες διορθώσεις που αφορούσαν στη διδακτέα ύλη και οδηγίες διδασκαλίας των Μαθηματικών για όλες τις τάξεις του δημοτικού σχολείου. Πιο συγκεκριμένα, για την Δ΄ τάξη τονίστηκε «*άκρως απαραίτητο να αφιερωθεί περισσότερος χρόνος, πέραν του προτεινόμενου από το εγχειρίδιο, στη μελέτη των κλασμάτων, ώστε η Δ΄ τάξη να αποτελέσει σημαντική γέφυρα μεταξύ της Γ΄ και Ε΄ τάξης. Σε κάθε περίπτωση* ***η στόχευση θα επικεντρωθεί στην άρση των παρανοήσεων ότι ένα κλάσμα είναι μόνο ένα μικρό κομμάτι μιας ακέραιας μονάδας, ενός όλου, και ότι τα κλάσματα δεν είναι αριθμοί παρά μόνο μέρη ενός σχήματος ή μιας ποσότητας»*** (Γενική Δ/νση σπουδών Π/θμιας και Δ/θμιας Εκπαίδευσης, Διεύθυνση Σπουδών, Προγραμμάτων και Οργάνωσης Π.Ε., Τμήμα Α΄ Σπουδών και Εφαρμογής Προγραμμάτων: Εγκύκλιος Εξορθολογισμού Διδακτέας ύλης, 2018).

Τα εγχειρίδια των δυο τάξεων αποτελούν το επίσημο διδακτικό υλικό για την υλοποίηση των στόχων που θέτουν τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών στις συγκεκριμένες βαθμίδες. Κατά συνέπεια, οι δραστηριότητες που χρησιμοποιούνται για την εισαγωγή της έννοιας του κλάσματος παίζουν σημαντικό ρόλο στη γνώση που θα δομήσουν οι μαθητές για την έννοια, καθώς η επιλογή συγκεκριμένων δραστηριοτήτων μπορεί να διευκολύνει ή να δυσχεραίνει την κατανόησή τους.

Η σύγχρονη έρευνα της διδακτικής των μαθηματικών δίνει μεγάλη βαρύτητα στη μαθηματική δραστηριότητα και θεωρεί πως μέσω αυτής επιτυγχάνεται πιο ουσιαστικά η κατασκευή των μαθηματικών εννοιών. Σύμφωνα με τους Καλδρυμίδου, Πόταρη, Σακονίδη και Τζεκάκη (2009) η σωστή επιλογή και η κατάλληλη αξιοποίηση των δραστηριοτήτων στη σχολική τάξη, μπορεί να λειτουργήσει θετικά στην ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης όπως ορίζεται από το Αναλυτικό Πρόγραμμα. Ταυτόχρονα μπορούν να αποτελέσουν διαφορετικά πλαίσια για μαθηματική δράση, γιατί μπορούν να δημιουργήσουν νέα πεδία αλληλεπίδρασης και επικοινωνίας τόσο μεταξύ του εκπαιδευτικού και των μαθητών όσο και των μαθητών μεταξύ τους, αναδεικνύοντας την ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών και ιδεών».

Στην παρούσα εργασία θα καταγραφούν και θα μελετηθούν οι εισαγωγικές δραστηριότητες κάθε κεφαλαίου, τα παραδείγματα-εφαρμογές που αναπτύσσονται, οι ασκήσεις-προβλήματα, οι δραστηριότητες για το σπίτι, καθώς και οι επαναληπτικές δραστηριότητες που βρίσκονται στο τέλος των ενοτήτων και αφορούν στα κλάσματα.

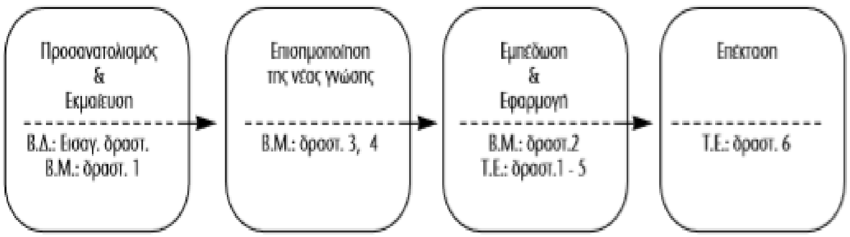
Τέλος, με δεδομένο ότι οι εκπαιδευτικοί, σε μεγάλο βαθμό, στηρίζονται στα εγχειρίδια για την καθημερινή τους διδασκαλία (Sosniak & Perlman,1990. Μπονίδης, 2004), η ανάλυση του περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών στις ενότητες των κλασμάτων μπορεί να μας δείξει πώς και τι προτείνεται να μαθαίνουν οι μαθητές στο ελληνικό σχολείο για τα κλάσματα. Επίσης, θα μελετηθούν στοιχεία για τον βαθμό στον οποίο η *«Δ΄ τάξη μπορεί να αποτελέσει σημαντική γέφυρα μεταξύ της Γ΄ και της Ε΄ τάξης»*.

2.Β.1 Ανάλυση περιεχομένου - Τα σχολικά εγχειρίδια της Γ΄ και της Δ΄ τάξης των Μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο

Τα διδακτικά πακέτα των μαθηματικών για την Γ΄ και την Δ΄ Τάξη του Δημοτικού στην Ελλάδα σχεδιάστηκαν σύμφωνα με τις αρχές και τη φιλοσοφία του Διαθετικού Ενιαίου Πλαισίου Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ) και των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών (Α.Π.Σ) των Μαθηματικών που όρισε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο ώστε να συμβάλουν στη δημιουργία ενός πραγματικά σύγχρονου και αποτελεσματικού περιβάλλοντος μάθησης (Τύπας, 2005).

Το διδακτικό πακέτο των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης (Λεμονίδης, Θεοδώρου, Νικολαντωνάκης, Παναγάκος, & Σπανακά, 2007) αποτελείται από: *α) ένα Βιβλίο*

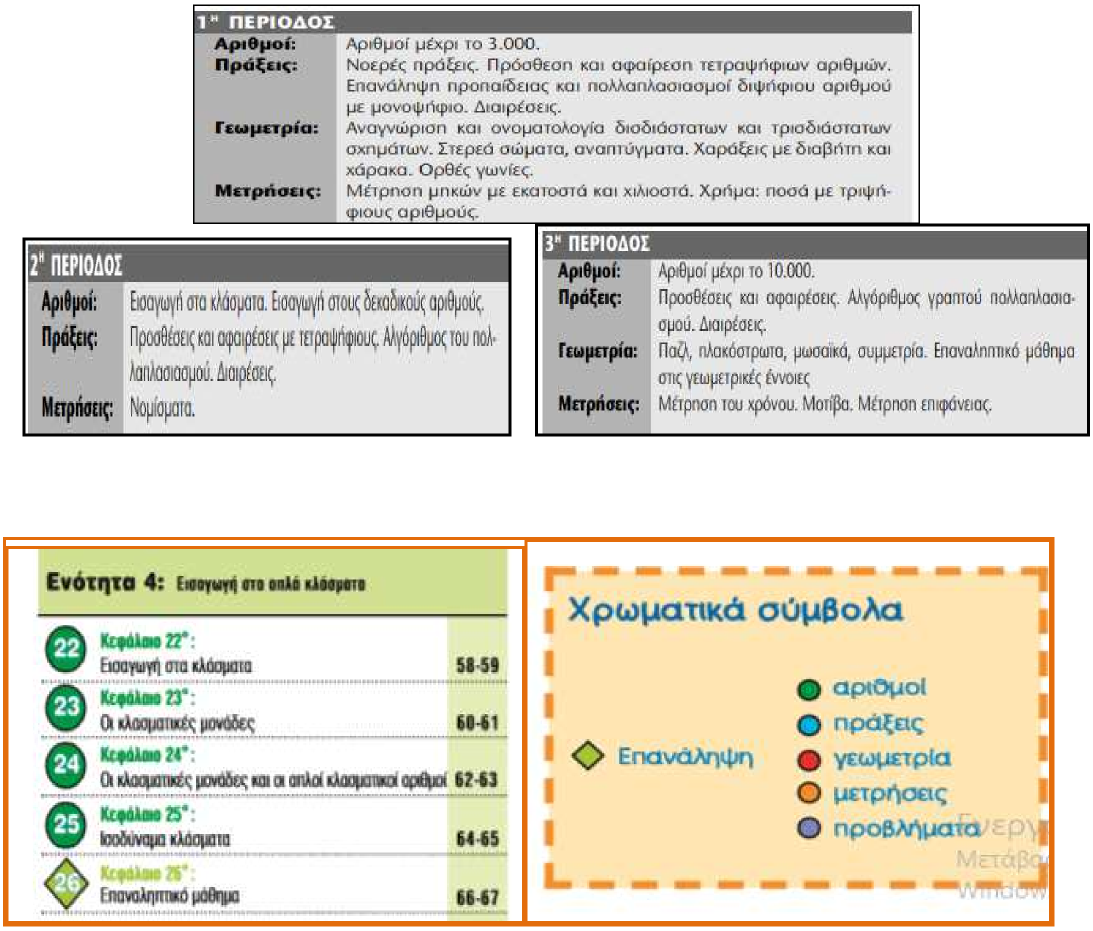
<u>Μαθητή</u>, με το οποίο ο μαθητής εισάγεται στις μαθηματικές έννοιες. Μέσα από παραδείγματα και εργασίες κινητοποιείται ώστε να τις προσεγγίσει και να κατακτήσει τη νέα γνώση, *β) <u>4 τεύχη Τετραδίων Εργασιών,</u>* στα οποία επιχειρείται η εμπέδωση των μαθηματικών εννοιών μέσα από μαθηματικά έργα και προβληματικές καταστάσεις, γ) *<u>ένα Βιβλίο Δασκάλου</u>*, όπου καθοδηγεί τον εκπαιδευτικό στον τρόπο που θα χειριστεί το μαθηματικό περιεχόμενο, μέσα από ένα ενδεικτικό διάγραμμα ροής της διδασκαλίας (Εικ. 11.1), χωρίς όμως να προσδιορίζεται ο χρόνος που θα αφιερώσει σε κάθε μαθηματική έννοια και ενότητα. Επιπλέον δίνονται οδηγίες για διεύρυνση των μαθηματικών με άλλους επιστημονικούς κλάδους εισάγοντας την διαθεματικότητα στη διδασκαλία. Για κάθε ενότητα περιλαμβάνεται στο βιβλίο του Δασκάλου και μια επιστολή προς τον γονέα/κηδεμόνα των μαθητών, με σκοπό να εξηγηθεί τι θα διδαχτεί το παιδί στο σχολείο, ποιες ιδιαιτερότητες υπάρχουν και προτείνονται ιδέες για δραστηριότητες και παιχνίδια που θα μπορούσαν να ενδιαφέρουν τα παιδιά στο σπίτι σχετικά με τις μαθηματικές έννοιες που διδάχθηκαν στη συγκεκριμένη ενότητα, δ) *<u>εκπαιδευτικό λογισμικό (CD-ROM)</u>* που συμπληρώνει το διδακτικό πακέτο των Μαθηματικών με σκοπό την εμπέδωση των εννοιών μέσα από ψηφιακές δραστηριότητες.



Εικόνα 11.1: Ενδεικτικό διάγραμμα ροής διδασκαλίας στη Γ΄ τάξη

(Πηγή: Λεμονίδης κ.α., 2007- Βιβλίο Δασκάλου, σελ.31)

Οι άξονες περιεχομένου πάνω στους οποίους δομείται και αναπτύσσεται η ύλη των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης είναι τέσσερις: <u>Αριθμοί και πράξεις</u>, <u>Γεωμετρία</u>, <u>Μετρήσεις</u>, και <u>Προβλήματα</u> και οργανώνονται σε τρεις περιόδους (Εικ. 11.2). Κάθε περίοδος αποτελείται από τρεις ενότητες, οι οποίες με τη σειρά τους οργανώνονται σε πέντε ως επτά δισέλιδα κεφάλαια -εξήντα (60) στο σύνολό τους - που καλύπτουν εκατόν τριάντα σελίδες (130), επιχειρώντας σπειροειδή ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών. Οι άξονες περιεχομένου τονίζονται επίσης με χρωματικά σύμβολα στην αρχή του βιβλίου του μαθητή, στα περιεχόμενα και στην εισαγωγή κάθε ενότητας (Εικ. 11.2). Στην εισαγωγή κάθε ενότητας, αναφέρονται αναλυτικά οι στόχοι των κεφαλαίων που ακολουθούν. Το τελευταίο κεφάλαιο κάθε ενότητας αποτελεί επαναληπτικό μάθημα. Αντίστοιχα, στο τελευταίο κεφάλαιο κάθε περιόδου προτείνεται από το βιβλίο του δασκάλου ένα κριτήριο αξιολόγησης για τους μαθητές που αφορά στη διδακτική ύλη της περιόδου.

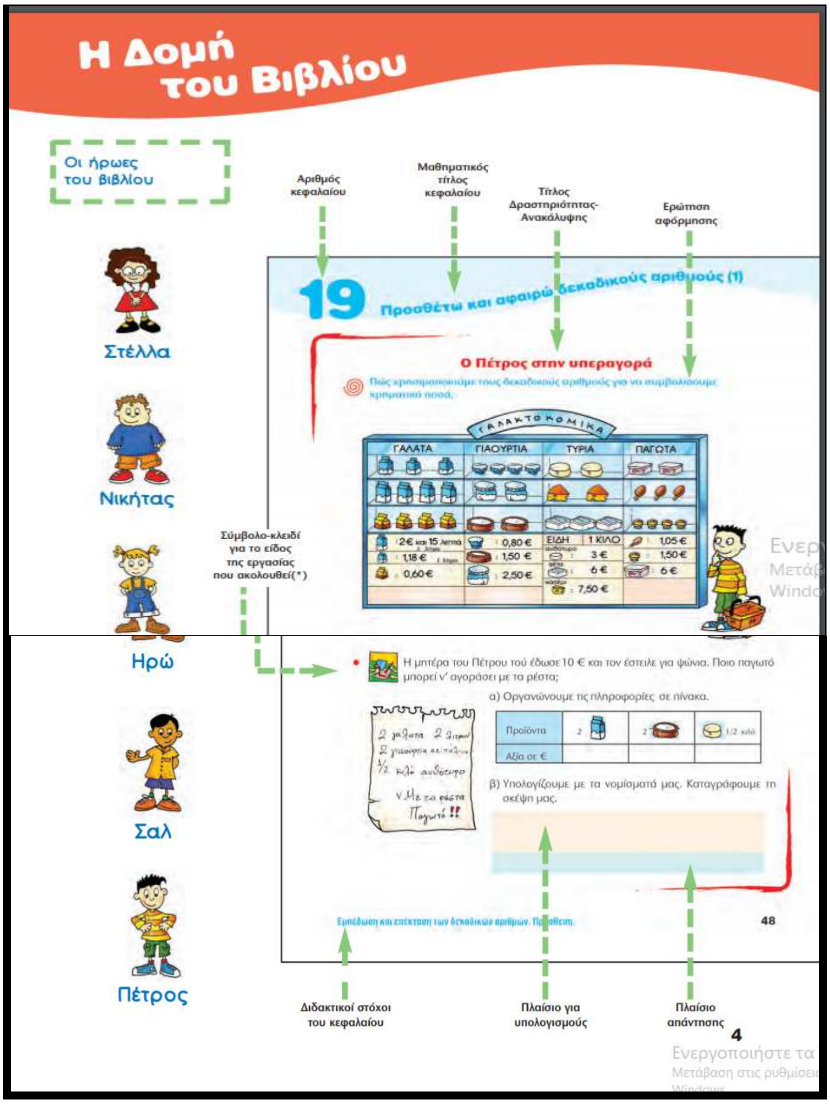


Εικόνα 11.2: Η οργάνωση του μαθηματικού περιεχομένου σε τρεις περιόδους και τα χρωματικά σύμβολα που ορίζουν τους άξονες περιεχομένου σε κάθε ενότητα στη Γ΄ τάξη (Πηγή: Λεμονίδης κ.α., 2007, - Βιβλίο Μαθητή σελ.9)

Η διδασκαλία που προτάσσεται κινείται από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο. Η αφόρμηση κάθε νέας μαθηματικής έννοιας εμφανίζεται στην αρχή κάθε κεφαλαίου. Η διδασκαλία και η εμπέδωση συνεχίζει μέσα από παραδείγματα, εφαρμογές και εργασίες στα αντίστοιχα Τετράδια του μαθητή (Λεμονίδης κ.α., 2007).

Το διδακτικό πακέτο για τα μαθηματικά της Δ΄ τάξης του Δημοτικού αποτελείται αντίστοιχα από έντυπο υλικό και συνοδευτικό λογισμικό. Το έντυπο εκπαιδευτικό υλικό απαρτίζεται από: *α) ένα Βιβλίο Μαθητή/τριας*, με το οποίο επιχειρείται η εισαγωγή και η αφόρμηση στις νέες έννοιες *β) 4 τεύχη Τετραδίων Μαθητή/τριας*, στα οποία επιχειρείται η εμπέδωση των μαθηματικών εννοιών μέσα από μαθηματικά έργα και προβληματικές καταστάσεις, *γ) ένα Βιβλίο του/της εκπαιδευτικού* που καθοδηγεί τον/την εκπαιδευτικό στον τρόπο που θα χειριστεί το μαθηματικό περιεχόμενο και δίνει διευκρινιστικές οδηγίες στη διαχείριση των δραστηριοτήτων, και *δ) το Εκπαιδευτικό Λογισμικό (CD-ROM)* με ψηφιακές δραστηριότητες για την Δ΄ τάξη που συμπληρώνει το διδακτικό πακέτο. Σύμφωνα με τη συγγραφική ομάδα (Βαμβακούση, Καργιωτάκης, Μπομποτίνου & Σαΐτης, 2007), στο τέλος του Βιβλίου του Μαθητή υπάρχει χειραπτικό, εκπαιδευτικό υλικό σε δύο μορφές, χαρτί και χαρτόνι (καρτέλες), ως υποστηρικτικό υλικό της διδασκαλίας. Τέλος, μέσα από τις αναφορές των συγγραφέων για τα συγκεκριμένα εγχειρίδια γίνεται διακριτή η διαφορά προς τα δύο φύλα *(Μαθητής/τρια, του /της Εκπαιδευτικού).*

Το διδακτικό υλικό οργανώνεται, με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, σε έξι άξονες περιεχομένου για κάθε γνωστική περιοχή (Εικ. 11.3), οι οποίοι είναι: Αριθμοί, Αριθμοί και Πράξεις, Γεωμετρία, Μετρήσεις, Στατιστική, και Προβλήματα. Η ύλη κατανέμεται σε τρεις περιόδους (Α΄, Β΄, Γ΄ περίοδος) και κάθε περίοδος χωρίζεται σε τρεις ενότητες. Το Βιβλίο του Μαθητή αποτελείται από πενήντα έξι (56) δισέλιδα κεφάλαια και εννέα επαναληπτικά, που αναπτύσσονται σε εκατόν σαράντα (140) σελίδες και το καθένα συνοδεύεται από το αντίστοιχο δισέλιδο κεφάλαιο στο Τετράδιο του Μαθητή. Στη δομή και οργάνωση του κάθε κεφαλαίου επαναλαμβάνεται το ίδιο μοτίβο, δηλαδή κάθε δισέλιδο ξεκινά με *Ερώτηση Αφόρμησης*, η οποία βοηθά τον εκπαιδευτικό να διερευνήσει την προϋπάρχουσα γνώση των παιδιών, στη συνέχεια εισάγει τους μαθητές στη *Δραστηριότητα Ανακάλυψης (Δ/Α)* και, τέλος, τους προετοιμάζει να φτάσουν στο *Συμπέρασμα* που δίνεται με την ολοκλήρωση του κεφαλαίου (Εικ. 11.3.α). Στα αντίστοιχα κεφάλαια του Τετραδίου Μαθητή (ΤΜ) οι μαθητές εκτελούν εργασίες διαφόρων τύπων και επιπέδων δυσκολίας ώστε να εξασκηθούν, να εμβαθύνουν και να εμπεδώσουν τις γνώσεις που αποτελούν τον διδακτικό στόχο του κεφαλαίου (Βαμβακούση κ.α., 2007).



Εικόνα 11.3.α: Η δομή και οργάνωση του κάθε κεφαλαίου στη Δ΄τάξη

(Πηγή: Βαμβακούση κ.α., 2007, Βιβλίο Μαθητή/τριας, σελ.5)

Προκαταβολικοί οργανωτές (Εικ. 11.3.β), όπως αριθμός κεφαλαίου με συγκεκριμένο χρώμα που υποδηλώνει τη γνωστική περιοχή του βασικού διδακτικού στόχου, εικονίδια με χρωματικό κωδικό που σημαίνουν το διαφορετικό πλαίσιο ανάπτυξης των στόχων, εικονίδια ερώτησης- αφόρμησης κ.λ.π., εμφανίζονται τόσο στο ΒΜ όσο και στο ΤΜ και αποσκοπούν στη διευκόλυνση του εκπαιδευτικού στη διαχείριση της τάξης. Στο τέλος κάθε ενότητας υπάρχει ένα επαναληπτικό κεφάλαιο, ενώ αντίστοιχα στο Βιβλίο του Εκπαιδευτικού προτείνεται ένα φύλλο αξιολόγησης για κάθε ενότητα. Ο χρόνος που προτείνεται από το Βιβλίο του Εκπαιδευτικού για την επεξεργασία της ύλης προσδιορίζεται και είναι μία ή δύο διδακτικές ώρες για κάθε κεφάλαιο (Βαμβακούση κ.α., 2007).

Τα σχολικά εγχειρίδια της Γ΄ και Δ΄ τάξης στα οποία επιχειρείται η ανάλυση περιεχομένου είναι επίσης διαθέσιμα στον ιστότοπο του ψηφιακού σχολείου http://dschool.edu.gr/

Πίνακας 3.					
Χρωματικός κωδικός ανά γνωστική περιοχή					
Αριθμοί (μπλε)	Πράξεις (γαλάζιο)	Γεωμετρία (κίτρινο)	Μετρήσεις (πορτοκαλί)	Διαχείριση δεδομένων (κόκκινο)	Προβλήματα (πράσινο)

Εικόνα 11.3.β: Προκαταβολικοί οργανωτές που δηλώνουν τον τρόπο οργάνωσης στη Δ΄ τάξη (Πηγή: Βαμβακούση κ.α., 2007, Βιβλίο Μαθητή/τριας, σελ.5)

2.Β.2 Τα κλάσματα στα εγχειρίδια της Γ΄ και της Δ΄ Δημοτικού - Κεφάλαια που μελετήθηκαν

Σύμφωνα με το ισχύον Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ, 2003), όπως προαναφέρθηκε, τα κλάσματα στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια εισάγονται για πρώτη φορά στη Γ΄ τάξη. Περιέχονται στη θεματική ενότητα «Πράξεις και Αριθμοί» τόσο στη Γ΄ όσο και στη Δ΄ τάξη και αποτελούν τη βάση ώστε να δομηθούν στη συνέχεια τα δεκαδικά κλάσματα και οι δεκαδικοί αριθμοί.

Στην παρούσα εργασία στα εγχειρίδια της Γ΄ τάξης (Βιβλίο Μαθητή, Τετράδια Εργασιών), από τα εξήντα κεφάλαια που καλύπτουν το μαθηματικό περιεχόμενο, μελετήθηκαν τα οκτώ που αφορούν στη διδασκαλία των κλασμάτων. Συγκεκριμένα, στην τέταρτη ενότητα τα κεφάλαια 22, 23, 24, 25, και 26 παρουσιάζουν συγκεντρωτικά τα κλάσματα, με το κεφάλαιο 26 να αποτελεί το επαναληπτικό κεφάλαιο της ενότητας. Μελετήθηκαν επίσης τα κεφάλαια 34 και 35 στην έκτη ενότητα όπου γίνεται εισαγωγή στα δεκαδικά κλάσματα και, στη συνέχεια, οι μαθητές καλούνται να συνδέσουν τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις των δεκαδικών κλασμάτων με τους δεκαδικούς αριθμούς. Τέλος, στην ένατη και τελευταία ενότητα του βιβλίου, στο κεφάλαιο 57, οι μαθητές καλούνται να ξαναθυμηθούν τα κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς. Ο χρόνος που προτείνεται από το Αναλυτικό Πρόγραμμα σπουδών για τη διδασκαλία των κλασμάτων στη Γ΄ τάξη είναι 10 διδακτικές ώρες.

Στην Δ΄ τάξη, η διδακτέα ύλη που αφορά στα κλάσματα, σύμφωνα με το ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ-Α.Π.Σ, 2003), επικεντρώνεται στα δεκαδικά κλάσματα και τη σύνδεσή τους με τους δεκαδικούς αριθμούς. Για τον λόγο αυτό, από τα 56 δισέλιδα κεφάλαια του σχολικού εγχειριδίου της Δ΄ τάξης, στην παρούσα εργασία μελετήθηκαν τα επτά κεφάλαια που αναφέρονται στα δεκαδικά κλάσματα καθώς, δεν εντοπίστηκαν δραστηριότητες σε άλλα κεφάλαια που να έχουν ως στόχο τη διδασκαλία των κλασματικών αριθμών.

Τα τρία διδακτικά κεφάλαια βρίσκονται στην τρίτη ενότητα (κεφ. 15, 16, 17) συν την επανάληψη της ενότητας, τρία στην τέταρτη (κεφ. 21, 22, 24) συν την επανάληψη της ενότητας και ένα τελευταίο κεφάλαιο στην Πέμπτη ενότητα (κεφ. 31). Ο χρόνος που προβλέπεται στην Δ΄ τάξη, σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, για την ολοκλήρωση της διδασκαλίας και δεκαδικών κλασματικών αριθμών είναι δεκατέσσερις διδακτικές ώρες μέσα στις οποίες συμπεριλαμβάνεται και η διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών.

Συγκεντρωτικά, οι στόχοι που έχουν τεθεί για τη διδασκαλία των κλασμάτων με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ-Α.Π.Σ, 2003), καθώς και τα κεφάλαια τα οποία μελετήθηκαν από κάθε τάξη, παρουσιάζονται στον Πίνακες 2.1, 2.2 και 2.3 που ακολουθούν.

Πίνακας 2.1: Οι στόχοι αναφορικά με τη διδασκαλία των κλασματικών αριθμών, με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, στη Γ΄ τάξη

Στόχοι	Θεματικές Ενότητες (διατιθέμενος χρόνος)	Ενδεικτικές δραστηριότητες
Να γνωρίσουν τις απλές κλασματικές μονάδες (π.χ. 1/2, 1/4, 1/3, 1/8, 1/16, 1/5, 1/10 κτλ.). Να μπορούν να συγκρίνουν, με τη βοήθεια κατάλληλων αναπαραστάσεων, απλές κλασματικές μονάδες.	*Αριθμοί και πράξεις* Εισαγωγή στα «απλά» κλάσματα. *(10 ώρες)*	Εισαγωγή στα κλάσματα με τη βοήθεια κατάλληλων αναπαραστάσεων ή φυσικών μοντέλων όπως: το ρολόι με τις υποδιαιρέσεις του, τα γεωμετρικά σχήματα με άξονες συμμετρίας , οι υποδιαιρέσεις μηκών, το κόψιμο ενός μήλου ή μιας σοκολάτας και η ζωγραφική τους, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για μια πρώτη εισαγωγή στα κλάσματα *(Αισθητική Αγωγή, Μελέτη Περιβάλλοντος)*.

(Πηγή: ΑΠΠΣ-ΔΕΠΣ, 2003, σελ. 262)

Πίνακας 2.2: Οι στόχοι αναφορικά με τη διδασκαλία των κλασματικών αριθμών, με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, στη Δ ΄ τάξη

Στόχοι	Θεματικές Ενότητες (διατιθέμενος χρόνος)	Ενδεικτικές δραστηριότητες
Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: Να διακρίνουν τη σημασία καθενός από τα ψηφία ενός δεκαδικού αριθμού. Να περνούν από ένα δεκαδικό αριθμό σε μια κλασματική δεκαδική γραφή, και αντίστροφα. Να γράφουν το δεκαδικό ανάπτυγμα ενός δεκαδικού αριθμού. Να τοποθετούν με προσέγγιση δεκαδικά κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς στην αριθμογραμμή.	*Αριθμοί και πράξεις* δεκαδικοί αριθμοί. *(14 ώρες)*	Κατανόηση,μέσα από οικείες καταστάσεις μοιρασιάς μηκών, της αναγκαιότητας επέκτασης των υπολογισμών με την εισαγωγή αριθμών όπως είναι τα κλάσματα και οι δεκαδικοί αριθμοί Χρήση της αριθμογραμμής Δραστηριότητες για παράδειγμα ότι 1,3=1,30= 1,300 Επίσης ανάμεσα στο 1,3 και 1,4 ή ακόμα στο 1,30 και 1,40 υπάρχουν και άλλοι δεκαδικοί αριθμοί, όπως οι 1,31, 1,32, ... 1,39

(Πηγή: ΑΠΠΣ-ΔΕΠΣ, 2003, σελ. 266)

Πίνακας 2.3: Συγκεντρωτικός πίνακας των κεφαλαίων που μελετήθηκαν

Τάξη	Ενότητα-Κεφάλαια	Τίτλοι κεφαλαίων	Σελίδες στο Β.Μ
Γ΄ τάξη	**4η Ενότητα**		
	Κεφάλαιο 22	Εισαγωγή στα κλάσματα	58-59
	Κεφάλαιο 22	Εισαγωγή στα κλάσματα	58-59
	Κεφάλαιο 23	Οι κλασματικές μονάδες	60-61
	Κεφάλαιο 24	Οι κλασματικές μονάδες και οι απλοί κλασματικοί αριθμοί	62-63
	Κεφάλαιο 25	Ισοδύναμα κλάσματα	64-65
	Κεφάλαιο 26	*Επαναληπτικό μάθημα 4ης ενότητας*	66-67
	6η Ενότητα		
	Κεφάλαιο 34	Δεκαδικά κλάσματα	86-87
	Κεφάλαιο 35	Δεκαδικά κλάσματα και δεκαδικοί αριθμοί	88-89
	9η Ενότητα		
	Κεφάλαιο 57	Κλάσματα και δεκαδικοί αριθμοί	136-137
Δ΄ τάξη	**3η Ενότητα**		
	Κεφάλαιο 15	Θυμάμαι τους δεκαδικούς αριθμούς	40-41
	Κεφάλαιο 16	Νομίσματα και δεκαδικοί αριθμοί	42-43
	Κεφάλαιο 17	Μετρώ και εκφράζω το μήκος	44-45
	3η επανάληψη		52-53
	4η Ενότητα		
	Κεφάλαιο 21	Γνωρίζω καλύτερα τους δεκαδικούς	56-57
	Κεφάλαιο 22	Διαχειρίζομαι δεκαδικούς αριθμούς	58-59
	Κεφάλαιο 24	Διαιρώ με το 10, 100, 1000	62-63
	4η επανάληψη		68-69
	5η Ενότητα		
	Κεφάλαιο 31	Μετρώ την επιφάνεια, βρίσκω το εμβαδόν	78-79

2.B.3 Κριτήρια ανάλυσης και διαδικασία

Το μεθοδολογικό πλαίσιο που χρησιμοποιήθηκε ανάγεται στη θεμελιωμένη ανάλυση περιεχομένου (grounded content analysis) και βασίζεται στο περιεχόμενο των δραστηριοτήτων που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια και χρησιμοποιούνται για την παρουσίαση της έννοιας του κλάσματος (Strauss & Corbin, 2014). Η επιλογή του παραπάνω σχεδιασμού έρευνας έγινε με σκοπό να οργανωθούν, να ταξινομηθούν και να μελετηθούν οι διαφορετικές δραστηριότητες που πλαισιώνουν τις κλασματικές έννοιες στα εγχειρίδια των δύο συνεχόμενων τάξεων ώστε μέσα από τη συστηματική συλλογή, ταξινόμηση και μελέτη των δεδομένων να παραχθεί ένα σαφές ερμηνευτικό πλαίσιο για τα εγχειρίδια των δυο τάξεων αναφορικά με τα κλάσματα (Tan, 2010).

Αρχικά επιχειρήθηκε η χαρτογράφηση των δραστηριοτήτων των εγχειριδίων που αφορούν στα κλάσματα και τη διδασκαλία τους. Στη συνέχεια, οι συγκεκριμένες δραστηριότητες καταγράφηκαν και ομαδοποιήθηκαν ανά εγχειρίδιο (Βιβλίο Μαθητή, Τετράδιο Εργασιών) και τάξη (Γ΄, Δ΄). Μετά ταξινομήθηκαν ανά ενότητα, κεφάλαιο, σελίδα και οργανώθηκαν σε πίνακες. Στη συνέχεια, σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών και τη βιβλιογραφία που μελετήθηκε σε σχέση με τα κλάσματα, τέθηκαν τα κριτήρια με βάση τα οποία πραγματοποιήθηκε η ανάλυση του περιεχομένου των εγχειριδίων των Μαθηματικών της Γ΄ και της Δ΄ τάξης αναφορικά με την έννοια του κλάσματος. Αυτά είναι:

α) οι διαστάσεις του κλάσματος. Με δεδομένο ότι υπάρχουν πέντε διαστάσεις στα κλάσματα (μέρος-όλο, πηλίκο, μέτρο, τελεστής και λόγος) οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους (Κολέζα, 2017. Lamon, 2012. Van de Walle, 2007), θα εξεταστεί αν υπάρχουν συγκεκριμένες διαστάσεις του κλάσματος που κυριαρχούν στις δραστηριότητες που αφορούν στα κλάσματα στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Γ΄ και της Δ΄ τάξης του δημοτικού και με ποια συχνότητα εμφανίζονται.

β) τα μοντέλα αναπαράστασης. Καθώς τα μοντέλα λειτουργούν ως συνδετικοί κρίκοι ανάμεσα στις έννοιες και στα σύμβολα, και αποτελούν βασικό μέσο ανάπτυξης της κάθε μαθηματικής έννοιας πολύ δε περισσότερο ισχυρό εργαλείο κατανόησης για τα κλάσματα (Kaput, 1987. van de Walle, 2005. Κολέζα, 2017) θα εξεταστεί αν τα μοντέλα εμβαδού ή επιφάνειας, τα μοντέλα μήκους ή μέτρησης και συνόλων απαντώνται σε δραστηριότητες που αφορούν στα κλάσματα στα εγχειρίδια των δύο τάξεων (Γ΄ και Δ΄) και με ποια συχνότητα.

γ) τα μέσα αναπαράστασης. Θεωρώντας καθοριστικό τον ρόλο των πολλαπλών αναπαραστάσεων προκειμένου οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές να δημιουργήσουν ακριβέστερα τα νοητικά μοντέλα της κλασματικής έννοιας (NCTM, 2000), και με δεδομένο ότι τα ποικίλα αναπαραστατικά μέσα [χειραπτικά μέσα (γεωμετρικές επιφάνειες, πίτσες, ευθύγραμμα τμήματα), σύμβολα, εικόνες, σχηματικές αναπαραστάσεις (διαγράμματα, πίνακες) και αναπαραστάσεις πραγματικών καταστάσεων] βοηθούν τους μαθητές να ανακαλύψουν τα διαφορετικά εννοιολογικά χαρακτηριστικά του κλάσματος (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007), θα εξεταστεί αν κάποιες από τις παραπάνω μορφές εξωτερικών αναπαραστάσεων υιοθετούνται από τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών (Γ΄ και Δ΄ τάξης) στις δραστηριότητες που προτείνονται και αφορούν στη διδασκαλία των κλασμάτων και με ποια συχνότητα εμφανίζονται.

Καθώς θα μελετηθούν τα παραπάνω κριτήρια στα κεφάλαια των εγχειριδίων και των δυο τάξεων, θα είναι δυνατόν να ελεγχθεί η συνέχεια και η συνέπεια μεταξύ των δυο τάξεων σε σχέση με τη διδασκαλία της κλασματικής έννοιας, όπως υπαγορεύει το ισχύον πρόγραμμα σπουδών (ΑΠΠΣ-ΔΕΠΣ, 2003).

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί πως στις περιπτώσεις των δραστηριοτήτων που εντοπίστηκαν περισσότερες από μία διαστάσεις ή περισσότερα από ένα μοντέλα αναπαράστασης ή περισσότερα από ένα αναπαραστατικά μέσα, οι δραστηριότητες αυτές προσμετρήθηκαν δυο φορές. Αντίστοιχα, καταγράφηκαν και οι περιπτώσεις δραστηριοτήτων στις οποίες δεν εντοπίστηκε κανένα από τα κριτήρια που μελετώνται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

3.Α Αποτελέσματα ανάλυσης περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών

Στο τρίτο κεφάλαιο, το οποίο χωρίζεται σε τρία μέρη, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εργασίας από τη μελέτη των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών της Γ΄ και Δ΄ τάξης. Στο πρώτο και δεύτερο μέρος παρουσιάζονται τα αποτελέσματα αναφορικά με τις διαστάσεις του κλάσματος, τα μοντέλα και τα μέσα αναπαράστασης που εμφανίζονται στις δραστηριότητες με τα κλάσματα στα σχολικά εγχειρίδια των δύο τάξεων αντίστοιχα. Στο τρίτο μέρος, επιχειρείται η σύγκριση ανάμεσα στις δύο τάξεις και, με βάση τα κριτήρια που έχουν τεθεί, ελέγχεται η συνέπεια και η συνέχεια που εμφανίζουν τα εγχειρίδια των μαθηματικών σχετικά με την έννοια του κλάσματος ανάμεσα στις δύο συνεχόμενες τάξεις.

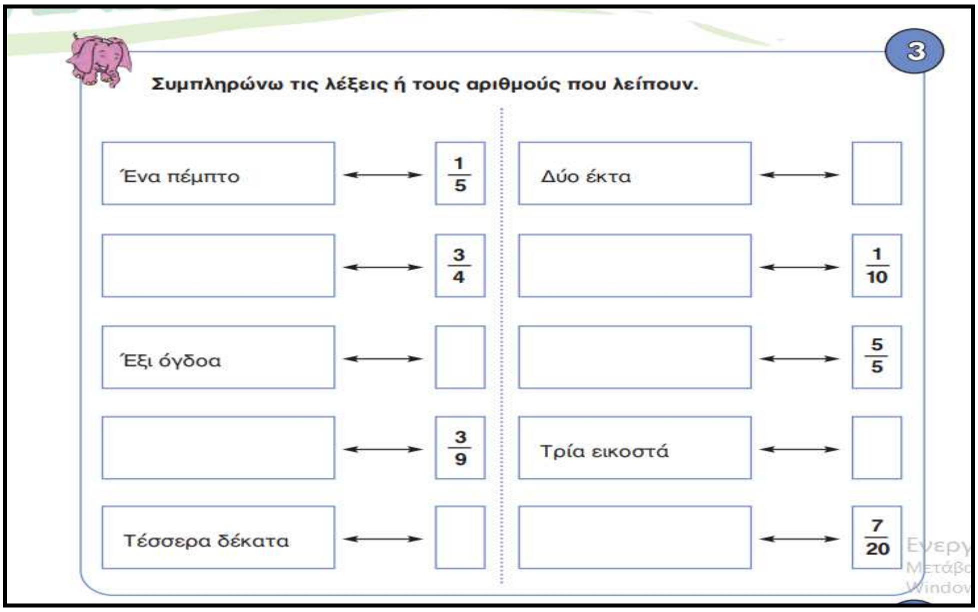
3.Α.1 Τα Σχολικά Εγχειρίδια στη Γ΄ τάξη

Στα εγχειρίδια των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης (Βιβλίο Μαθητή και 4 τεύχη Τετραδίων Εργασιών) καταγράφηκαν συνολικά 42 δραστηριότητες που αφορούν στη διδασκαλία των κλασμάτων. Οι 17 δραστηριότητες απαντώνται στο Β.Μ. και οι 25 στα Τ.Ε σε τρεις ενότητες.

3.Α.2 Οι διαστάσεις του κλάσματος

Οι περισσότερες δραστηριότητες (Ν=37) αναδεικνύουν μία από τις διαστάσεις του κλάσματος (μέρος-όλο, πηλίκο, μέτρο, τελεστής και λόγος). Ελάχιστες είναι οι δραστηριότητες (Ν=3) που εμφανίζουν δύο διαστάσεις ταυτόχρονα, ενώ σε δύο δραστηριότητες δεν αναδεικνύεται κάποια διάσταση.

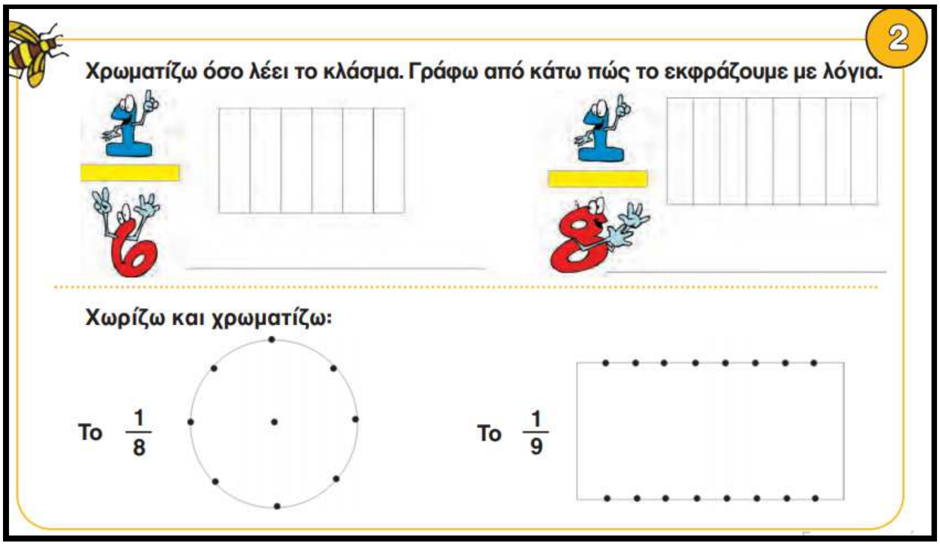
Ένα παράδειγμα δραστηριότητας που δεν διαφαίνεται καμία από τις διαστάσεις του κλάσματος παρουσιάζεται στην Εικόνα 12.1. Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν τα κλάσματα στο πλαίσιο που τους δίνεται λεκτικά ή με σύμβολο.



Εικόνα 12.1: Παράδειγμα δραστηριότητας που δεν αναδεικνύεται κάποια από τις διαστάσεις του κλάσματος (Τετράδιο Εργασιών, β΄ τεύχος, κεφ.26, σελ. 33)

Η διάσταση **«μέρος-όλο»** κυριαρχεί σε σχέση με τις υπόλοιπες διαστάσεις του κλάσματος και παρουσιάζεται με μεγαλύτερη συχνότητα στις δραστηριότητες που μελετήθηκαν (Πίνακας 3.1). Εντοπίζεται σε 33 δραστηριότητες με τις περισσότερες από αυτές (Ν=19) να βρίσκονται στα Τετράδια Εργασιών (Τ.Ε) όπου επιχειρείται η εξάσκηση και εμπέδωση της έννοιας, ενώ οι υπόλοιπες (Ν=14) απαντώνται στο Βιβλίο Μαθητή.

Ένα παράδειγμα δραστηριότητας που αναδεικνύει τη διάσταση «μέρος-όλο» παρουσιάζεται στην Εικόνα 12.2. Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, αρχικά ζητείται από τους μαθητές να μεταφράσουν το κλάσμα χρωματίζοντας τα χωρισμένα γεωμετρικά σχήματα που τους δίνονται. Στη συνέχεια, καλούνται να χωρίσουν και να χρωματίσουν συγκεκριμένες γεωμετρικές επιφάνειες (κύκλος, ορθογώνιο) με βάση το κλάσμα που τους δίνεται.



Εικόνα 12.2: Παράδειγμα δραστηριότητας που αναδεικνύεται η διάσταση «μέρος-όλο» (Τετράδιο Εργασιών, β΄ τεύχος, κεφ.23, σελ. 26)

Δύο από τις δραστηριότητες που προτείνονται στην εισαγωγή των κλασμάτων στα Τ.Ε υπονοούν τη διαίρεση και αναδεικνύουν τη διάσταση **«πηλίκο»** παράλληλα με αυτή του «μέρους-όλου».

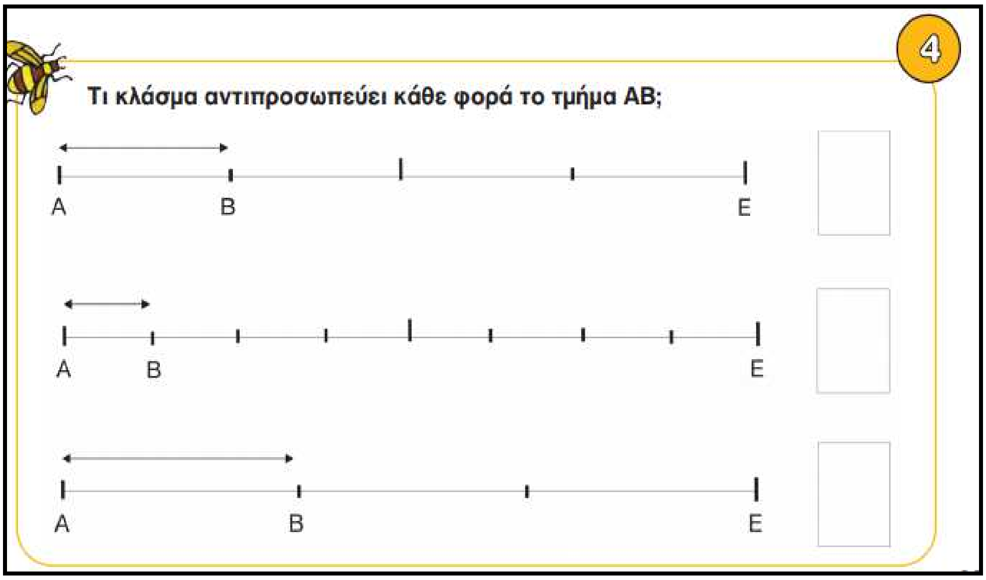
Εικόνα 12.3: Παράδειγμα δραστηριότητας όπου αναδεικνύονται οι διαστάσεις «μέρος-όλο» και «πηλίκο» (Τετράδιο Εργασιών, β΄ τεύχος, κεφ. 22, σελ. 24) .

Για παράδειγμα, στη μία από τις δραστηριότητες (Εικ.12.3), ζητείται από τους μαθητές να μοιράσουν εξίσου μία ίδια σοκολάτα, η οποία είναι χωρισμένη αντίστοιχα σε 6 και 8 ίσα κομμάτια, σε δυο διαφορετικές ομάδες παιδιών που αποτελούνται από

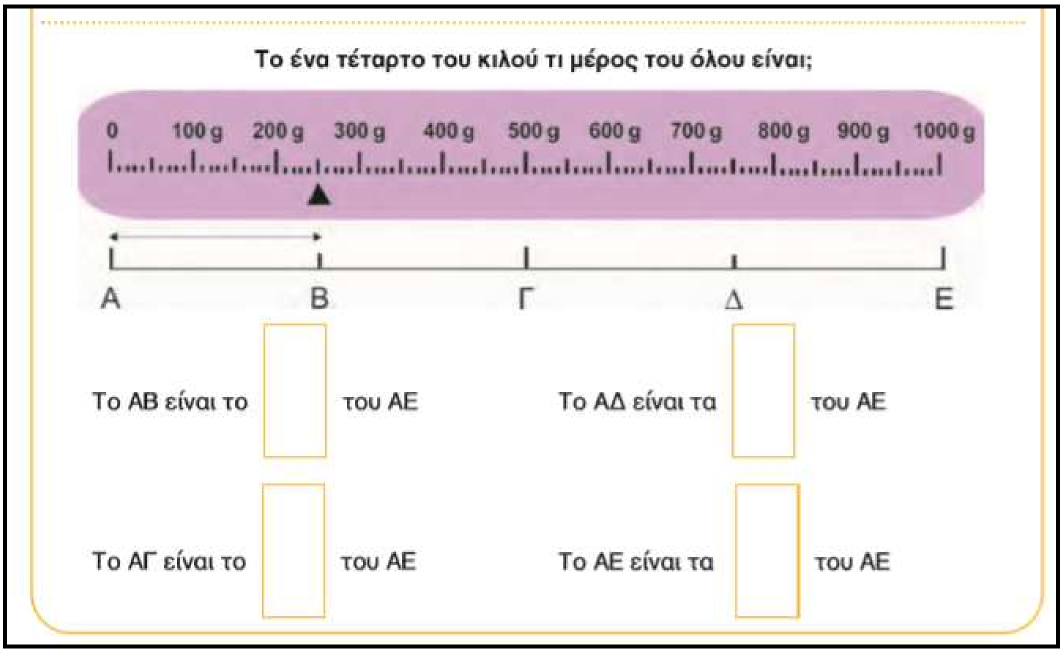
6 και 8 άτομα αντίστοιχα. Οι μαθητές καλούνται να γράψουν με κλάσμα σε ποια από τις δύο παρέες το κάθε παιδί έφαγε περισσότερη σοκολάτα και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους

Η διάσταση **«μέτρο»** αναδεικνύεται μέσα από 5 δραστηριότητες με παρόμοια συχνότητα ανάμεσα στο Β.Μ (N=3) και στα Τ.Ε (N=2). Δύο από τις δραστηριότητες που αναδεικνύουν τη διάσταση του μέτρου χρησιμοποιούνται στην εισαγωγή των δεκαδικών κλασμάτων. Επιπλέον, στις άλλες δυο από τις δραστηριότητες οι οποίες προτείνονται για τη διδασκαλία της κλασματικής μονάδας, μία στο Β.Μ ως εισαγωγική και μία αντίστοιχα ως εμπέδωση στο Τ.Ε, διαφαίνονται ταυτόχρονα δύο διαστάσεις του κλάσματος, του μέτρου και του μέρους-όλου (Εικ. 12.4).

Για παράδειγμα, στις δραστηριότητες που παρουσιάζονται στις Εικόνες 12.4.1 και 12.4.2 το ευθύγραμμο τμήμα στη μία και η κλίμακα του κιλού στην άλλη απεικονίζουν μια γραμμική μονάδα που υποδιαιρείται σε ίσες ποσότητες. Ζητείται από τους μαθητές, παρατηρώντας τα ευθύγραμμα τμήματα, να γράψουν με κλάσμα το μέρος που αντιπροσωπεύει κάθε φορά το τμήμα που τους δίνεται.



Εικόνα 12.4.1: Παράδειγμα δραστηριότητας όπου αναδεικνύονται οι διαστάσεις «μέρος-όλο» και «μέτρο» (Τετράδιο Εργασιών, β΄ τεύχος, κεφ.24, σελ.29)



Εικόνα 12.4.2: Παράδειγμα δραστηριότητας όπου αναδεικνύονται οι διαστάσεις «μέρος-όλο» και «μέτρο» (Βιβλίο Μαθητή, κεφ.24, σελ.63)

Τέλος, οι διαστάσεις **«τελεστής»** και **«λόγος»** δεν εμφανίζονται σε καμία δραστηριότητα στα εγχειρίδια της Γ΄ τάξης.

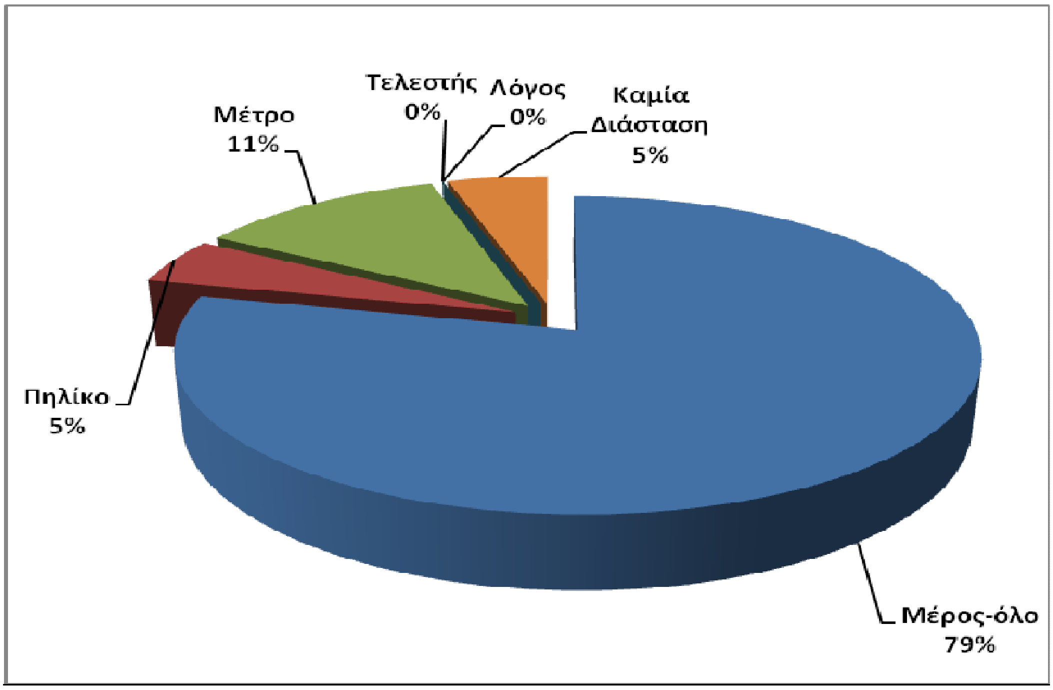
Τα στοιχεία για τις δραστηριότητες σε σχέση με τις διαστάσεις του κλάσματος στα σχολικά εγχειρίδια της Γ΄ τάξης παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 3.1 και στο Σχήμα 1 που ακολουθούν.

Πίνακας 3.1: **Συχνότητα εμφάνισης των διαστάσεων του κλάσματος στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης**

Διαστάσεις	Βιβλίο Μαθητή	Τετράδια Εργασιών	Σύνολο
Μέρος - όλο	14	19	33
Πηλίκο	-	2	2
Μέτρο	3	2	5
Τελεστής	_	_	_
Λόγος	_	_	_
Καμία διάσταση	2		2
ΣΥΝΟΛΟ	**19**	**23**	**(42)**[3]

[3] Οι δραστηριότητες που αφορούν στα κλάσματα στο σύνολό τους καταγράφονται ως σαράντα δύο (N=42). Προσμετρώνται, ωστόσο, οι σαράντα (N=40) γιατί, όπως αναφέρθηκε, σε δύο από τις δραστηριότητες δεν εμφανίζεται κάποια διάσταση. Στον πίνακα όπου αναγράφεται το «καμία διάσταση» υποδεικνύεται ο αριθμός των δραστηριοτήτων που αφαιρούνται.

Σχήμα 1: Οι διαστάσεις του κλάσματος συνολικά στα εγχειρίδια της Γ΄ τάξης



3.Α.3 Τα μοντέλα αναπαράστασης των κλασμάτων

Από τις συνολικά 42 δραστηριότητες που αφορούν στην έννοια του κλάσματος στο σύνολο των σχολικών εγχειριδίων της Γ΄τάξης αναγνωρίστηκαν **μοντέλα αναπαράστασης** σχεδόν σε όλες τις δραστηριότητες (N=40), εκτός από δύο στις οποίες δεν διαφαίνεται κάποιο μοντέλο. Ένα παράδειγμα μιας από τις δραστηριότητες που δεν εντοπίστηκε κάποιο μοντέλο και αναφέρεται σε δεκαδικούς αριθμούς και δεκαδικά κλάσματα παρουσιάζεται παρακάτω (Εικ. 12.5). Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται με τη βοήθεια της αριθμομηχανής να μετατρέψουν τα δεκαδικά κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς και στη συνέχεια σε άθροισμα φυσικών αριθμών και δεκαδικών κλασμάτων και αντίστροφα, συμπληρώνοντας τον πίνακα που τους δίνεται.

2

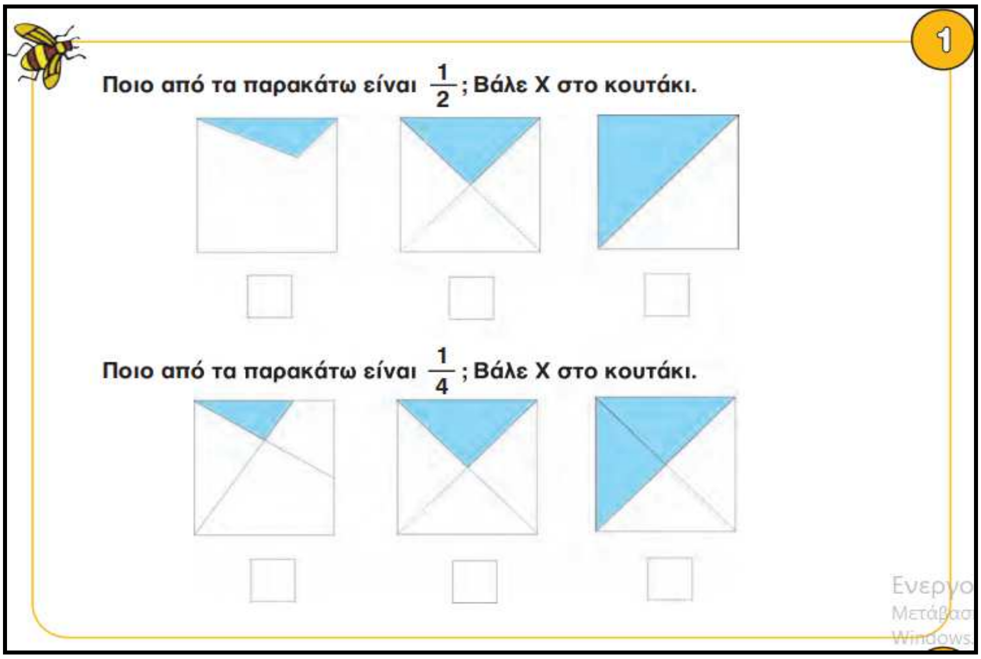
Με τη βοήθεια της αριθμομηχανής συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Δεκαδικό κλάσμα	Χτυπάω	Βρίσκω	Αναλύω
$\frac{567}{100}$	567 ÷ 100 =	5,67	$5 + \frac{6}{10} + \frac{7}{100}$
$\frac{567}{10}$			
$\frac{2.895}{10}$			
$\frac{2.895}{100}$			
	47 ÷ 10 =		
	47 ÷ 100 =		
		2,153	
		28,17	

Εικόνα 12.5: Παράδειγμα όπου δεν εντοπίστηκε κάποιο μοντέλο αναπαράστασης (Τετράδιο Εργασιών, γ΄ τεύχος, κεφ.35, σελ.26)

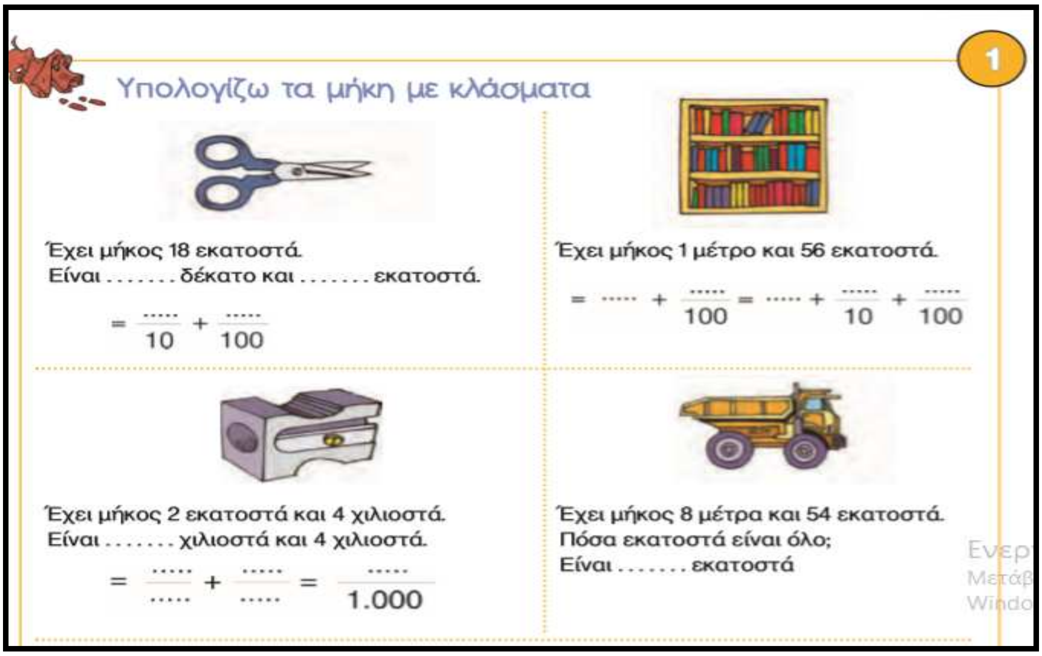
Στις υπόλοιπες δραστηριότητες (N=40) τα μοντέλα αναπαράστασης που αξιοποιούνται κατηγοριοποιήθηκαν σε μοντέλα εμβαδού ή επιφάνειας, μήκους ή μέτρησης και συνόλων.

Σε μεγάλο βαθμό κυριαρχούν οι δραστηριότητες που εμφανίζουν το **μοντέλο του εμβαδού ή επιφάνειας** (N=28) με μικρή διαφορά στη συχνότητα εμφάνισής τους ανάμεσα στο Β.Μ (N=12) και το Τ.Ε (N=16). Αξιοσημείωτο είναι πως στα μοντέλα εμβαδού με μεγαλύτερη συχνότητα αξιοποιούνται τα γεωμετρικά σχήματα όπως κύκλος, τετράγωνο και παραλληλόγραμμο, Στις Εικόνες 12.2 και 12.6 παρουσιάζονται παραδείγματα όπου το μοντέλο επιφάνειας αναδεικνύεται μέσα από γεωμετρικές επιφάνειες. Στην Εικόνα 12.2 οι μαθητές καλούνται να μεταφράσουν το κλάσμα χρωματίζοντας τα χωρισμένα γεωμετρικά σχήματα που τους δίνονται. Αντίστοιχα, παρακάτω στην Εικόνα 12.6 ζητείται από τους μαθητές να επιλέξουν το σκιασμένο τετράγωνο που αποτυπώνει κάθε φορά το κλάσμα.



Εικόνα 12.6: Παράδειγμα δραστηριότητας όπου αναδεικνύεται το μοντέλο εμβαδού ή επιφάνειας (Τετράδιο Εργασιών, β΄ τεύχος, κεφ. 23, σελ. 26)

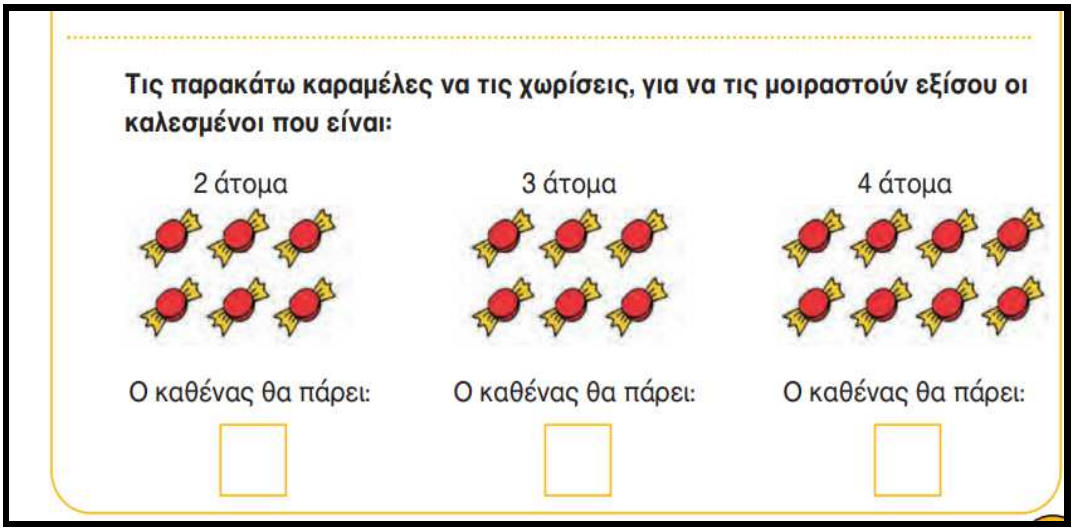
Μέσα από ελάχιστες δραστηριότητες αναδεικνύεται **το μοντέλο μήκους ή μέτρησης,** μόλις 4, με ισάριθμη κατανομή σε Β.Μ (N=2) και Τ.Ε (N=2). Ένα παράδειγμα αποτελούν οι δραστηριότητες που εμφανίζονται στην Εικόνα 12.4.1 και 12.4.2. Ζητείται από τους μαθητές παρατηρώντας δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα και μέτρο να γράψουν με κλάσμα το μέρος που αντιπροσωπεύει κάθε φορά το τμήμα που τους δίνεται. Οι άλλες δυο από τις δραστηριότητες που αφορούν στα μοντέλα αναπαράστασης μήκους προτάσσονται για τη διδασκαλία των δεκαδικών κλασμάτων. Η μία από αυτές τις δραστηριότητες (Εικ. 12.7) δεν αναδεικνύει άμεσα το μοντέλο. Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα που είναι εισαγωγική στους δεκαδικούς αριθμούς στο Β.Μ, οι μαθητές καλούνται να εκφράσουν με δεκαδικά κλάσματα τις μονάδες του μήκους και να μετατρέψουν τα εκατοστά σε δέκατα, τα μέτρα σε εκατοστά, και τα δέκατα σε μέτρα. Συγκεκριμένη βοήθεια στους μαθητές μέσω αριθμητικής γραμμής, λωρίδας ή μέτρου δεν δίνεται ώστε να δείχνει άμεσα και το μοντέλο.



Εικόνα 12.7: Παράδειγμα δραστηριότητας μήκους ή μέτρησης (Βιβλίο Μαθητή, κεφ.34, σελ.86)

Τέλος, **το μοντέλο συνόλων** εμφανίζεται σε περιορισμένες δραστηριότητες (N= 8), με παρόμοια κατανομή σε Β.Μ (N=3) και Τ.Ε (N=5), αντίστοιχα. Σε σχέση με τα αντικείμενα που απαρτίζουν τα σύνολα που αξιοποιούνται στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων, αξίζει να τονιστεί πως υπάρχει ποικιλία και δεν περιορίζονται στην επανάληψη ίδιων αντικειμένων. Δηλαδή, εκτός από τις καραμέλες που συνθέτουν το σύνολο σε δύο δραστηριότητες, οι μπάλες, τα ανθρωπάκια, τα χελιδόνια αλλά και τα νομίσματα απαρτίζουν τα σύνολα των υπόλοιπων δραστηριοτήτων.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα δραστηριότητας που αφορά στο μοντέλο συνόλων και συναντάται από τους μαθητές στην εισαγωγή των κλασματικών αριθμών παρουσιάζεται στην Εικόνα 12.8. Ζητείται από τους μαθητές να μοιράσουν καραμέλες που είναι διακριτές καταστάσεις σε 2, 3 και 4 άτομα.



Εικόνα 12.8: Παράδειγμα δραστηριότητας όπου αναδεικνύεται το μοντέλο συνόλων (Τετράδιο Εργασιών, κεφ.22, σελ.25)

Σε άλλη δραστηριότητα όπου εμφανίζεται το μοντέλο συνόλων και αφορά στα δεκαδικά κλάσματα (Εικ.12.9) οι μαθητές καλούνται να διαχειριστούν τα νομίσματα (υποδιαιρέσεις του ευρώ) και να εφαρμόσουν τα δεκαδικά κλάσματα. Στη συνέχεια, τους ζητείται να δημιουργήσουν αθροίσματα μονάδων και δεκαδικών κλασμάτων με συγκεκριμένα ποσά του ευρώ που τους δίνονται.

Εικόνα 12.9: Παράδειγμα δραστηριότητας όπου αναδεικνύεται το μοντέλο συνόλων (Τετράδιο Εργασιών, κεφ.34, σελ.25)

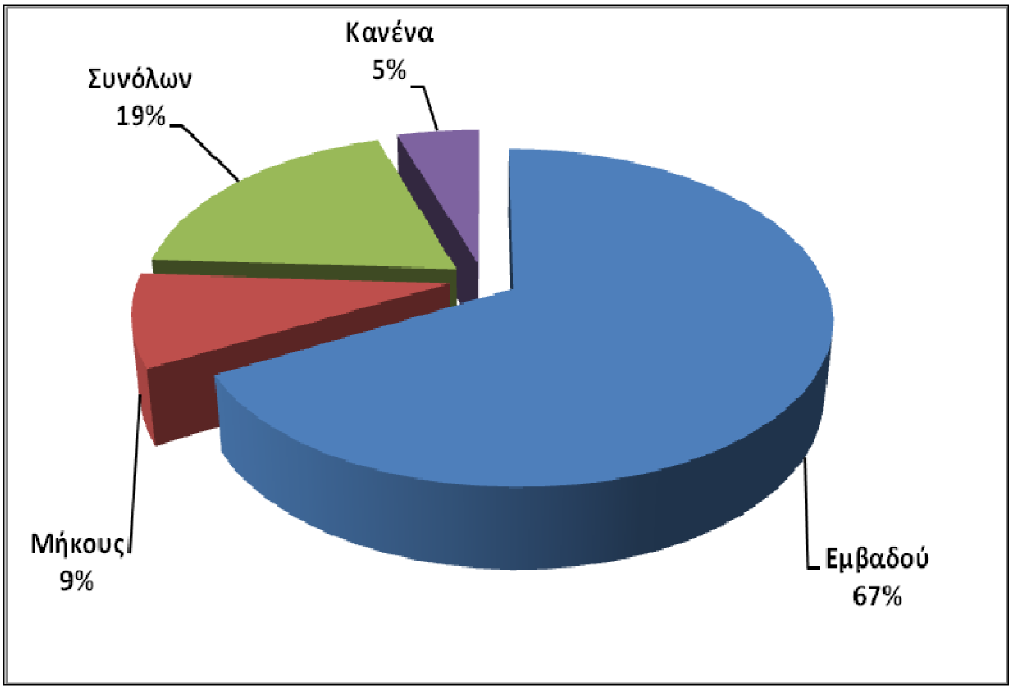
Τα στοιχεία για τις δραστηριότητες σε σχέση με τα μοντέλα αναπαράστασης του κλάσματος συνολικά στα σχολικά εγχειρίδια της Γ΄ τάξης παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.2 και στο Σχήμα 2 που ακολουθούν.

Πίνακας 4.2: **Συχνότητα εμφάνισης των μοντέλων αναπαράστασης του κλάσματος στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης**

Μοντέλα Αναπαράστασης	**Βιβλίο Μαθητή**	**Τετράδια Εργασιών**	**Σύνολο**
Εμβαδού ή Επιφάνειας	12	16	28
Μήκους ή Μέτρησης	2	2	4
Συνόλων	3	5	8
Κανένα Μοντέλο	1	1	2
ΣΥΝΟΛΟ	18	24	(42)[4]

[4] Οι δραστηριότητες που αφορούν στα κλάσματα στο σύνολό τους καταγράφονται ως σαράντα δύο (Ν=42). Προσμετρώνται, ωστόσο, οι σαράντα (Ν=40), γιατί σε δύο από τις δραστηριότητες, όπως προαναφέρθηκε, δεν εμφανίζεται κάποιο μοντέλο. Στον πίνακα όπου αναγράφεται «κανένα μοντέλο» υποδεικνύεται ο αριθμός των δραστηριοτήτων που αφαιρούνται (Ν=2).

Σχήμα 2: Τα μοντέλα αναπαράστασης του κλάσματος συνολικά στα εγχειρίδια της Γ΄ τάξης



3.Α.4 Τα αναπαραστατικά μέσα των κλασμάτων

Τα εξωτερικά αναπαραστατικά μέσα που απαντώνται στο σύνολο των εγχειριδίων της Γ΄ τάξης και αφορούν στα κλάσματα είναι ευδιάκριτα και στις 42 δραστηριότητες που καταγράφηκαν. Με βάση τη χαρτογράφηση των δραστηριοτήτων παρατηρήθηκαν ποικίλες μορφές μέσων αναπαράστασης [χειραπτικά μέσα (γεωμετρικές επιφάνειες, πίτσες, ευθύγραμμα τμήματα), σύμβολα, εικόνες, σχηματικές αναπαραστάσεις (διαγράμματα, πίνακες) και αναπαραστάσεις πραγματικών καταστάσεων] που υιοθετούνται από τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Γ΄ τάξης. Αξίζει να τονιστεί πως σε πολλές από τις δραστηριότητες των εγχειριδίων που αφορούν στα κλάσματα εμφανίζεται και ένας συνδυασμός των παραπάνω μέσων προκειμένου να επιτευχθούν οι στόχοι του μαθήματος, γι’ αυτό και οι μισές σχεδόν από τις δραστηριότητες (N=20) προσμετρώνται περισσότερο από μία φορά.

Πιο συγκεκριμένα, τη μεγαλύτερη συχνότητα παρουσιάζουν **τα χειραπτικά μέσα** που εμφανίζονται σχεδόν στις μισές από τις δραστηριότητες των κλασμάτων (N=20), με μια διακριτή διαφορά ανάμεσα σε Βιβλία Μαθητή (N=7) και Τετράδια Εργασιών (N=13). Στα χειραπτικά μέσα προσμετρώνται όλα τα γεωμετρικά σχήματα (κύκλος, τρίγωνο, ορθογώνιο κ.λ.π.), νομίσματα και οι κλασματικές λωρίδες. Ένα παράδειγμα από το Β.Μ όπου αξιοποιούνται τα χειραπτικά μέσα στη διδασκαλία των ισοδύναμων κλασμάτων παρουσιάζεται παρακάτω στην Εικόνα 12.10.

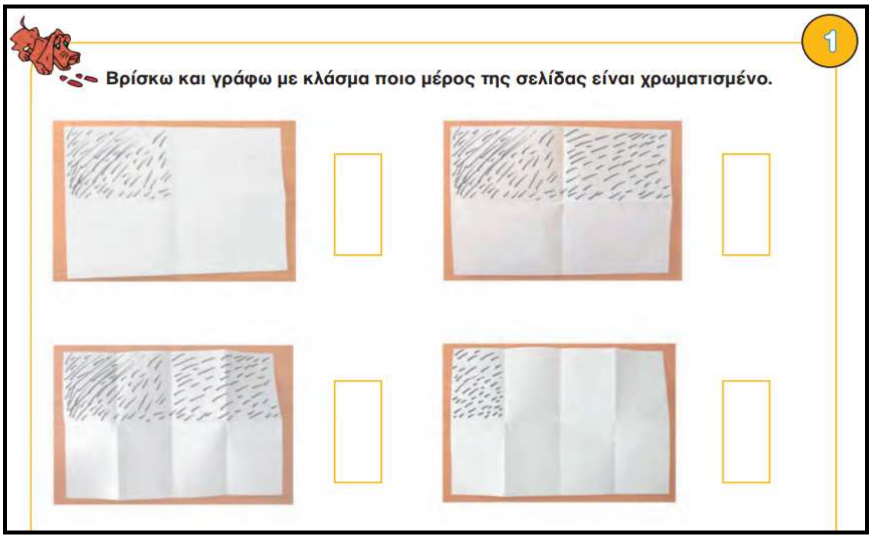
Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται να σχηματίσουν το ένα ευρώ, με δύο πενηντάλεπτα και με πέντε δεκάλεπτα. Στη συνέχεια ζητείται να δώσουν τις παρατηρήσεις τους και να γράψουν το συμπέρασμά τους για την ισοδυναμία που προκύπτει.

Εικόνα 12.10: Παράδειγμα δραστηριότητας με τη χρήση χειραπτικών μέσων (Βιβλίο Μαθητή, κεφ. 25, σελ.65)

Άλλο παράδειγμα από το Τ.Ε παρουσιάζεται σε δραστηριότητα στην οποία οι μαθητές καλούνται να μοιράσουν δίκαια το ίδιο πλήθος από καραμέλες σε 2, 3 και 4 άτομα (Εικ. 12.8).

Η εικόνα ως αναπαραστατικό μέσο χρησιμοποιείται επίσης σ' ένα μεγάλο ποσοστό των δραστηριοτήτων (N=15) και τις περισσότερες φορές (N=12) συνδυαστικά με άλλα μέσα, όπως για παράδειγμα, γραπτά σύμβολα και εικόνα (N=4) ή χειραπτικά μέσα και εικόνα (N=8), όπως φαίνεται στην Εικόνα 12.10 όπου οι μαθητές μοιράζονται νομίσματα. Στην Εικόνα 12.11 παρουσιάζεται ένα ακόμη παράδειγμα δραστηριότητας για τον συνδυασμό εικόνας και συμβόλου στην οποία οι μαθητές παρατηρώντας την εικόνα καλούνται να συμπληρώσουν με κλάσμα τι μέρος της σελίδας (του όλου) είναι κάθε φορά σκιασμένο.

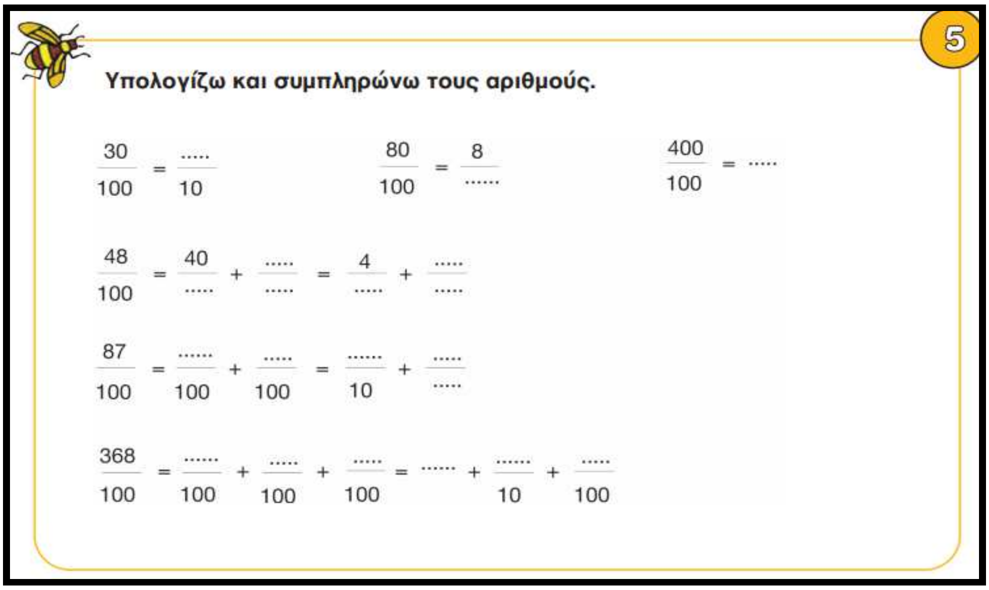
Η εικόνα εμφανίζεται με μεγαλύτερη συχνότητα στο Βιβλίο Μαθητή (N=11) και στηρίζει διδακτικά την εισαγωγή και την αφόρμηση στη νέα γνώση, ενώ φαίνεται λιγότερο στα Τετράδια Εργασιών (N=4) όπου επιδιώκεται η εξάσκηση και εμπέδωση για τους μαθητές.



Εικόνα 12.11: Παράδειγμα δραστηριότητας όπου αναδεικνύεται η εικόνα ως μέσο αναπαράστασης στα κλάσματα (Βιβλίο Μαθητή, κεφ.24, σελ.62)

Αντίθετα, οι δραστηριότητες που στηρίζονται σε **γραπτά σύμβολα** (N=13) καταλαμβάνουν έναν μεγάλο αριθμό στα Τ.Ε (N=9) επιδιώκοντας την εξάσκηση στις νέες έννοιες σε σχέση με τα Β.Μ (N=4)**.**

Παράδειγμα γραπτών συμβόλων αποτελεί η δραστηριότητα στην Εικόνα 12.5, όπου οι μαθητές καλούνται με τη βοήθεια της αριθμομηχανής να μετατρέψουν τα δεκαδικά κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς. Ένα ακόμη παράδειγμα δίνεται παρακάτω (Εικ. 12.12). Οι μαθητές καλούνται να πραγματοποιήσουν μετατροπές δεκαδικών κλασμάτων συμπληρώνοντας τις ισότητες που τους δίνονται.



5

Υπολογίζω και συμπληρώνω τους αριθμούς.

$\frac{30}{100} = \frac{\dots}{10}$ $\quad \frac{80}{100} = \frac{8}{\dots}$ $\quad \frac{400}{100} = \dots$

$\frac{48}{100} = \frac{40}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} = \frac{4}{\dots} + \frac{\dots}{\dots}$

$\frac{87}{100} = \frac{\dots}{100} + \frac{\dots}{100} = \frac{\dots}{10} + \frac{\dots}{\dots}$

$\frac{368}{100} = \frac{\dots}{100} + \frac{\dots}{100} + \frac{\dots}{100} = \dots + \frac{\dots}{10} + \frac{\dots}{100}$

Εικόνα 12.12: Παράδειγμα δραστηριότητας όπου αναδεικνύονται μόνο τα γραπτά σύμβολα ως μέσο αναπαράστασης στα κλάσματα (Τετράδιο Εργασιών, κεφ. 34, σελ. 25)

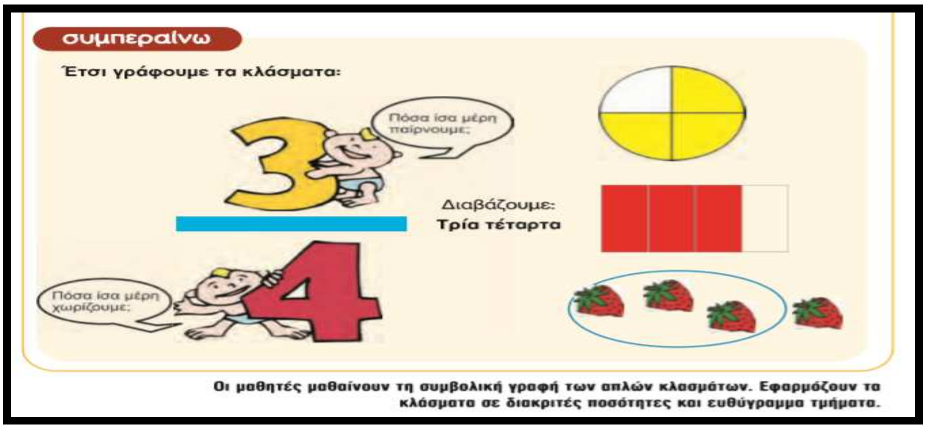
Τα μέσα που πηγάζουν από την καθημερινότητα των μαθητών αναφερόμενα **ως αναπαραστάσεις πραγματικών καταστάσεων** (τούρτα, ντομάτες, σοκολάτες, καραμέλες, πίτα, πίτσες, ρολόι, μήνες, εποχές, κ.λ.π.) εμφανίζονται στο ένα τέταρτο των δραστηριοτήτων (N=11) με σχεδόν ισάριθμη παρουσία σε Β.Μ (N=6) και Τ.Ε. (N=5). Σε αρκετές δραστηριότητες (N=5) η εικόνα αναδεικνύει αναπαραστάσεις πραγματικών καταστάσεων που θα λειτουργήσουν ως μέσα για την κατανόηση της κλασματικής έννοιας.

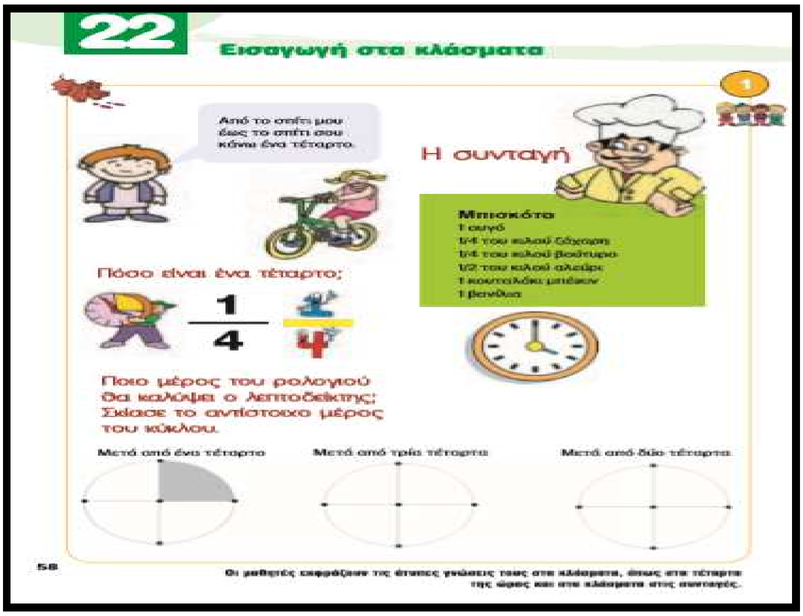
Στο παράδειγμα που ακολουθεί (Εικ. 12.13), δίνεται ο χρόνος χωρισμένος στους μήνες και τις εποχές του μέσα από μια εικόνα. Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται να βρουν κάθε φορά με κλάσμα, τι μέρος του χρόνου είναι ο ένας ή οι δύο μήνες, μια εποχή του χρόνου, ή τι μέρος μιας εποχής είναι ο ένας μήνας.

Εικόνα 12.13: Παράδειγμα δραστηριότητας όπου αναδεικνύονται συνδυαστικά η εικόνα και οι αναπαραστάσεις πραγματικών καταστάσεων (Τετράδιο Εργασιών, κεφ.24, σελ. 29)

Οι λεκτικές περιγραφές (Ν=10) εμφανίζονται συνδυαστικά με την εικόνα και την υποστηρίζουν σε αρκετές δραστηριότητες (Ν=6). Είναι σχεδόν ισάριθμες σε Β.Μ (Ν=6) και σε Τ.Ε (Ν=5). Οι μαθητές στις δραστηριότητες που παρουσιάζονται παρακάτω (Εικ. 12.14) καλούνται μέσα από την παρατήρηση της εικόνας που δείχνει το κλάσμα ποικιλόμορφα, σε συνδυασμό με λεκτικές περιγραφές (ερώτηση, απάντηση) να δώσουν τα συμπεράσματά τους για τα κλάσματα.

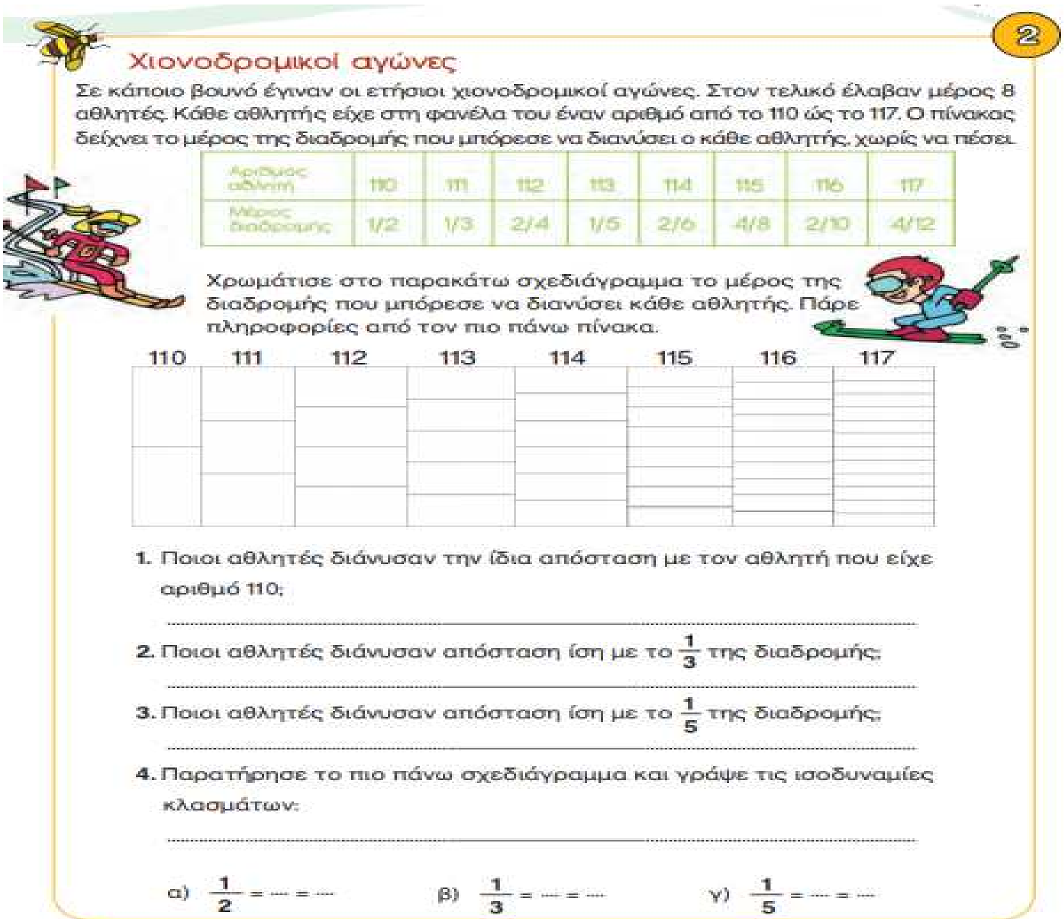
Τέλος, τα **σχηματικά μέσα (πίνακες και διαγράμματα)** αξιοποιούνται ως αναπαραστατικά μέσα μόλις σε δυο δραστηριότητες στα Τετράδια Εργασιών. Συγκεκριμένα, στη μια από τις δύο δραστηριότητες φαίνεται ένας εύστοχος συνδυασμός αναπαραστατικών μέσων (εικόνα, σύμβολο, πίνακας, λεκτική περιγραφή) προκειμένου να επιτευχθεί ο στόχος του κεφαλαίου που αφορά στα ισοδύναμα κλάσματα (Εικ. 12.15).





Εικόνα 12.14: Παράδειγμα δραστηριοτήτων όπου οι λεκτικές περιγραφές εμφανίζονται συνδυαστικά με την εικόνα (Βιβλίο Μαθητή, κεφ.22, σελ.58, κεφ.24, σελ.62)

Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα αρχικά ζητείται από τους μαθητές να διαβάσουν το κείμενο και τον πίνακα που παρουσιάζεται και δείχνει με κλάσμα το μέρος της διαδρομής που διανύουν κάποιοι αθλητές σε χιονοδρομικούς αγώνες. Στη συνέχεια, οι μαθητές καλούνται να χρωματίσουν τις διαδρομές των αθλητών και να συγκρίνουν τις αποστάσεις που διάνυσαν οι αθλητές αναγνωρίζοντας τα ισοδύναμα κλάσματα.


2

Χιονοδρομικοί αγώνες

Σε κάποιο βουνό έγιναν οι ετήσιοι χιονοδρομικοί αγώνες. Στον τελικό έλαβαν μέρος 8 αθλητές. Κάθε αθλητής είχε στη φανέλα του έναν αριθμό από το 110 ώς το 117. Ο πίνακας δείχνει το μέρος της διαδρομής που μπόρεσε να διανύσει ο κάθε αθλητής, χωρίς να πέσει.

Αριθμός αθλητή	110	111	112	113	114	115	116	117
Μέρος διαδρομής	1/2	1/3	2/4	1/5	2/6	4/8	2/10	4/12

Χρωμάτισε στο παρακάτω σχεδιάγραμμα το μέρος της διαδρομής που μπόρεσε να διανύσει κάθε αθλητής. Πάρε πληροφορίες από τον πιο πάνω πίνακα.

110 111 112 113 114 115 116 117

1. Ποιοι αθλητές διάνυσαν την ίδια απόσταση με τον αθλητή που είχε αριθμό 110;

....

2. Ποιοι αθλητές διάνυσαν απόσταση ίση με το $\frac{1}{3}$ της διαδρομής;

....

3. Ποιοι αθλητές διάνυσαν απόσταση ίση με το $\frac{1}{5}$ της διαδρομής;

....

4. Παρατήρησε το πιο πάνω σχεδιάγραμμα και γράψε τις ισοδυναμίες κλασμάτων:

....

α) $\frac{1}{2}$ = ... = ... β) $\frac{1}{3}$ = ... = ... γ) $\frac{1}{5}$ = ... = ...

Εικόνα 12.15: Παράδειγμα δραστηριότητας συνδυασμού αναπαραστατικών μέσων (Τετράδιο Εργασιών, β΄ τεύχος, κεφ. 25, σελ. 31)

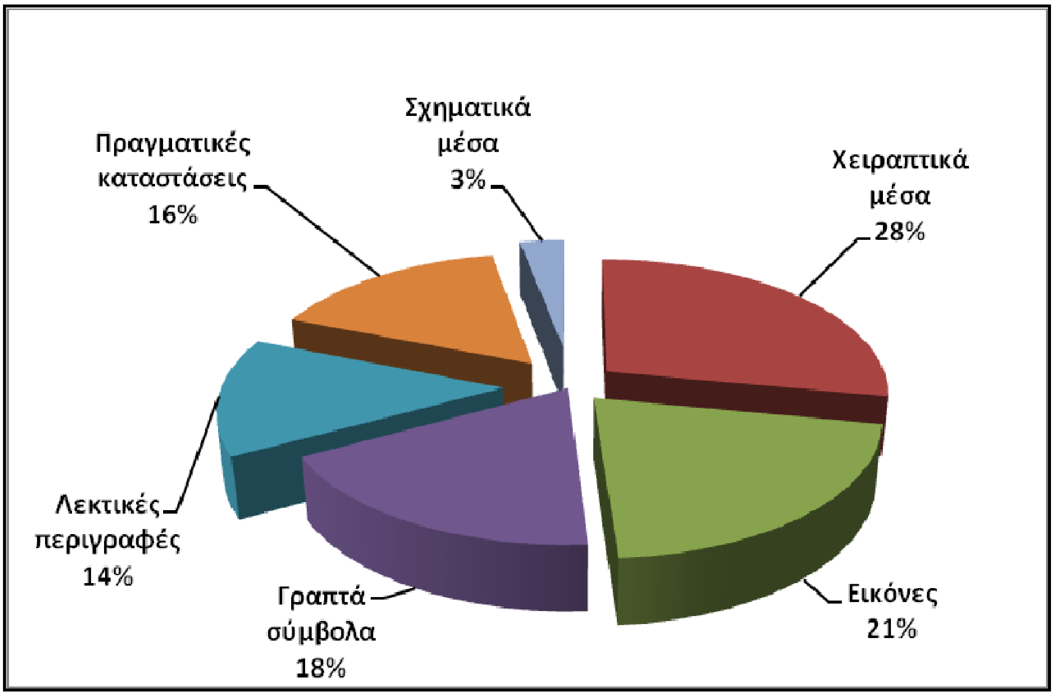
Τα στοιχεία για τις δραστηριότητες σε σχέση με τα μέσα αναπαράστασης του κλάσματος συνολικά στα σχολικά εγχειρίδια της Γ΄ τάξης παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον Πίνακα 5.3 και το Σχήμα 3 που ακολουθούν.

Πίνακας 5.3: **Συχνότητα εμφάνισης των μέσων αναπαράστασης του κλάσματος στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης**

Αναπαραστατικά μέσα	Βιβλίο Μαθητή	Τετράδιο Εργασιών	Σύνολο
Χειραπτικά μέσα	7	13	20
Εικόνες	11	4	15
Γραπτά σύμβολα	4	9	13
Πραγματικές καταστάσεις	6	5	11
Λεκτικές περιγραφές	6	4	10
Σχηματικά μοντέλα	-	2	2
ΣΥΝΟΛΟ	34	37	71[5]

[5] Οι δραστηριότητες που αφορούν στα κλάσματα στο σύνολό τους καταγράφονται ως σαράντα δύο (Ν=42). Προσμετρώνται, ωστόσο, πολύ περισσότερες (Ν=71) όταν εξετάζονται ως προς τα εξωτερικά αναπαραστατικά μέσα, καθώς, όπως προαναφέρθηκε, σε πολλές δραστηριότητες (Ν=29) αναδεικνύονται περισσότερα του ενός αναπαραστατικά μέσα.

Σχήμα 3: Τα μέσα αναπαράστασης του κλάσματος συνολικά στα εγχειρίδια της Γ΄ τάξης



3.Β Τα σχολικά εγχειρίδια στη Δ΄ τάξη

Στα σχολικά εγχειρίδια της Δ΄ τάξης (Βιβλίο Μαθητή και 4 τεύχη Τετραδίων Μαθητή) καταγράφηκαν συνολικά είκοσι οχτώ (28) δραστηριότητες που αφορούν στη διδασκαλία των κλασμάτων, σχεδόν ισάριθμα κατανεμημένες σε Β.Μ (Ν=13) και Τ.Ε. (Ν=15). Η πλειοψηφία τους αναφέρεται στα δεκαδικά κλάσματα και συγκεντρώνονται σε επτά κεφάλαια και σε δύο επαναληπτικά μαθήματα.

3.Β.1 Οι διαστάσεις του κλάσματος

Σε σχέση με **τις διαστάσεις του κλάσματος** (μέρος-όλο, πηλίκο, μέτρο, τελεστής και λόγος) στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ΄ τάξης, σχεδόν οι μισές δραστηριότητες (Ν=15) αναδεικνύουν μία από τις διαστάσεις του κλάσματος, ενώ μόλις μια δραστηριότητα (Ν=1) εμφανίζει ταυτόχρονα δυο διαστάσεις (μέρος-όλο και μέτρο). Στις υπόλοιπες δραστηριότητες (Ν=12) δεν αναδεικνύεται κάποια διάσταση.

Ένα παράδειγμα δραστηριότητας που δεν διαφαίνεται κάποια από τις διαστάσεις του κλάσματος παρουσιάζεται παρακάτω στην Εικόνα 12.16. Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα ζητείται από τους μαθητές να προβούν σε δυο εργασίες εφαρμογής και εμπέδωσης της νέας γνώσης. Αρχικά, ζητείται να χρωματίσουν τα πλαίσια που περιέχουν δεκαδικά κλάσματα και, στη συνέχεια, συγκρίνοντας τα δεκαδικά κλάσματα με τη μονάδα, να εντοπίσουν και να υποδείξουν αυτά που είναι μεγαλύτερα της μονάδας.

Η διάσταση **«μέρος-όλο»** κυριαρχεί στο σύνολο των δραστηριοτήτων που μελετήθηκαν στα εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ΄ τάξης (Πίνακας 6.4) και εμφανίζεται με μεγαλύτερη συχνότητα (Ν=12) σε σχέση με τις υπόλοιπες διαστάσεις (Ν=5). Σε μία από τις δραστηριότητες εκτός από το μέρος-όλο διαφαίνεται ταυτόχρονα και η διάσταση του μέτρου. Παρατηρείται μικρή διαφορά στην κατανομή των δραστηριοτήτων σε Β.Μ (Ν=7) και Τ.Μ (Ν=5).

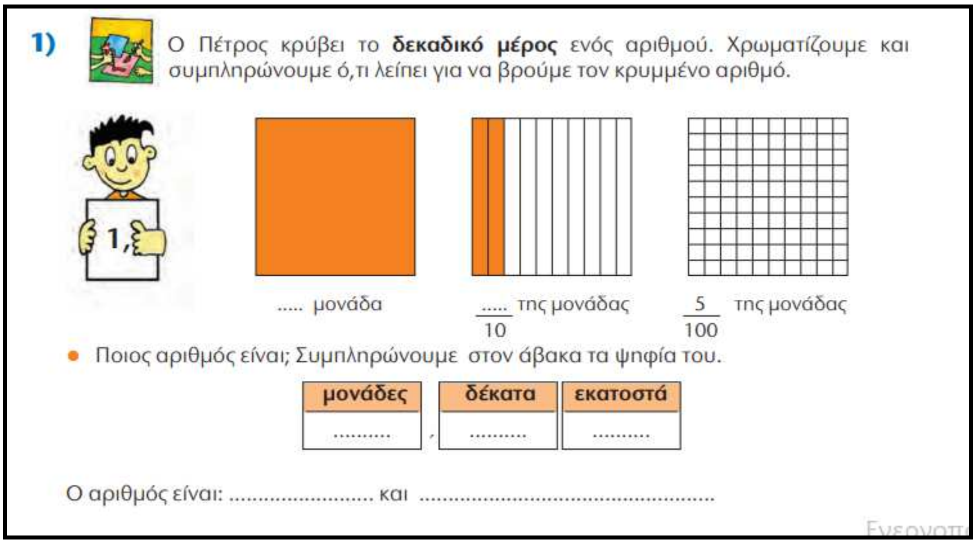

1) Χρωματίζω με **κόκκινο** τα πλαίσια που περιέχουν δεκαδικά κλάσματα. Επιλέγω με ✔ όσα δεκαδικά κλάσματα είναι μεγαλύτερα από τη μονάδα.

$\frac{4}{100}$ $\frac{10}{40}$ $\frac{5}{1.000}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4.621}{10}$

100 $\frac{100}{5}$ $\frac{10}{10}$ $\frac{83}{10}$ $\frac{999}{1.000}$

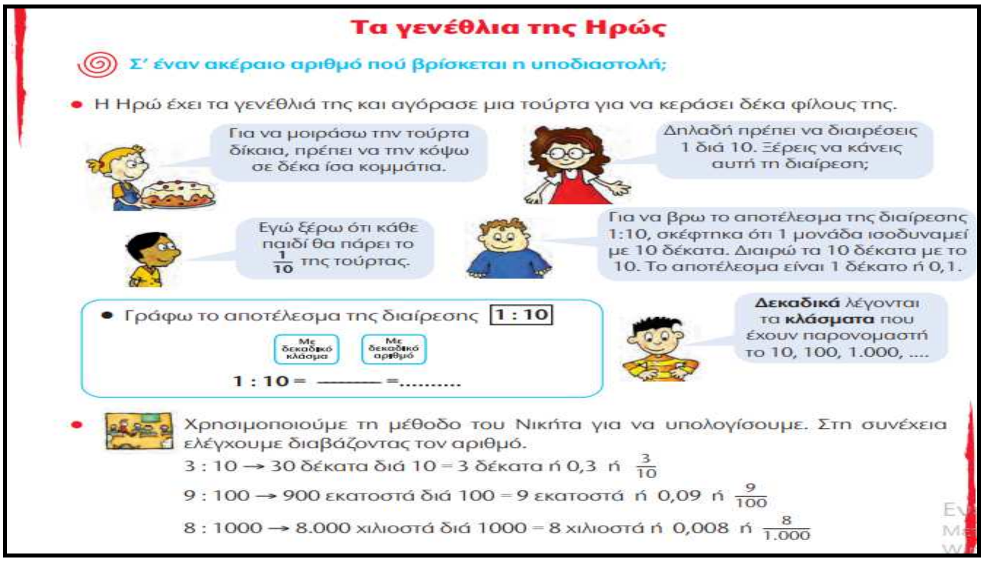
Εικόνα 12.16: Παράδειγμα δραστηριότητας που δεν αναδεικνύεται κάποια από τις διαστάσεις του κλάσματος (Τετράδια Εργασιών, β΄τεύχος, κεφ.24, σελ. 28)

Ένα παράδειγμα δραστηριότητας «μέρους-όλου» που παρουσιάζεται στην εισαγωγή των δεκαδικών κλασμάτων ακολουθεί στην Εικόνα 12.17. Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, οι μαθητές καλούνται να αξιοποιήσουν τις πληροφορίες της εικόνας και να χρωματίσουν τα δύο από τα δέκα (2/10) και τα πέντε από τα εκατό μέρη (5/100) της μονάδας που τους δίνεται και να συνδέσουν λεκτικά και συμβολικά δεκαδικό κλάσμα και δεκαδικό αριθμό.



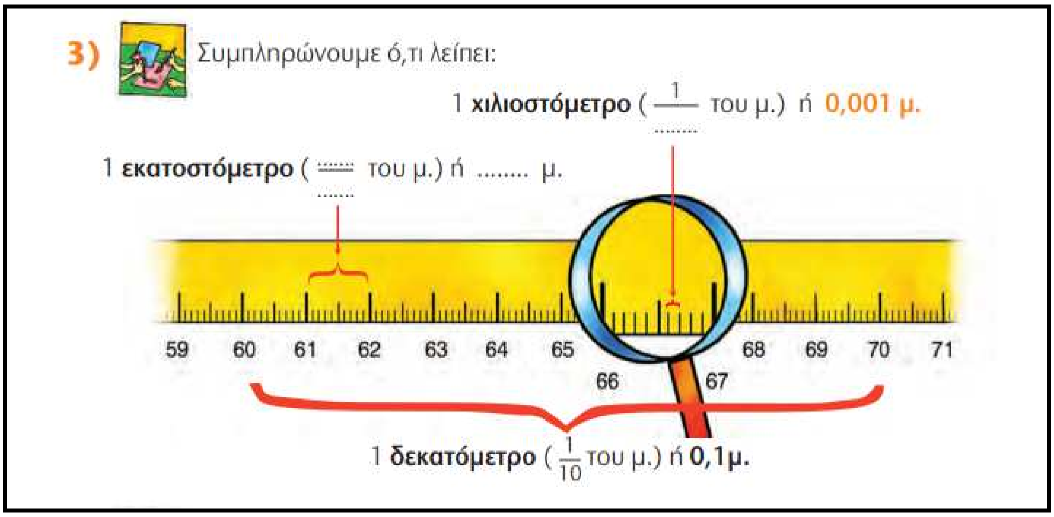
Εικόνα 12.17: Παράδειγμα δραστηριότητας όπου αναδεικνύεται η διάσταση «μέρος-όλο» (Τετράδιο Εργασιών, β΄ τεύχος, κεφ.15, σελ. 6)

Λίγες δραστηριότητες (Ν=4) αναδεικνύουν τη διάσταση «**πηλίκο»,** με άνιση κατανομή σε Β.Μ (Ν=3) και Τ.Μ (Ν=1) και σχεδόν τις περισσότερες να αναφέρονται στα δεκαδικά κλάσματα (Ν=3). Για παράδειγμα, στην Εικόνα 12.18 παρουσιάζεται μια εισαγωγική δραστηριότητα αφόρμησης όπου διαφαίνεται η διάσταση του πηλίκου. Οι μαθητές καλούνται μέσα από τον προβληματισμό των ηρώων του βιβλίου -που δίνεται με λεκτική περιγραφή και εικόνα- να μοιράσουν μία τούρτα δίκαια, σε δέκα ίσα κομμάτια. Στη συνέχεια, οι μαθητές οδηγούνται στη σύνδεση της διαίρεσης (1/10) με τα δεκαδικά κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς.



Εικόνα 12.18: Παράδειγμα δραστηριότητας που αναδεικνύεται η διάσταση «πηλίκο» (Βιβλίο Μαθητή, κεφ.24, σελ.62)

Σε αντίθεση με τη διάσταση «μέρος-όλο», η διάσταση **«μέτρο»** εμφανίζεται ελάχιστα. Μόλις σε μία δραστηριότητα στο Βιβλίο Μαθητή (Ν=1) αξιοποιείται το «μέτρο» συνδυαστικά με τη διάσταση του «μέρους-όλου», προκειμένου να γίνει κατανοητή στους μαθητές η έννοια του γαλλικού μέτρου και των υποδιαιρέσεών του.



Εικόνα 12.19: Παράδειγμα δραστηριότητας που αναδεικνύεται η διάσταση «μέρος-όλο» και «μέτρο» (Βιβλίο Μαθητή, κεφ.17, σελ.45)

Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα (Εικ.12.19) οι μαθητές καλούνται, με βάση την εικόνα του γαλλικού μέτρου που τους δίνεται, να συμπληρώσουν τη σχέση των υποδιαιρέσεων στο μέτρο χρησιμοποιώντας δεκαδικά κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς ώστε να αντιληφθούν, μέσα από τις απλές μετατροπές, τις σχέσεις ισοδυναμίας των μονάδων.

Τέλος, οι διαστάσεις **«τελεστής»** και **«λόγος»** δεν εμφανίζονται σε καμία δραστηριότητα στα εγχειρίδια της Δ΄ τάξης.

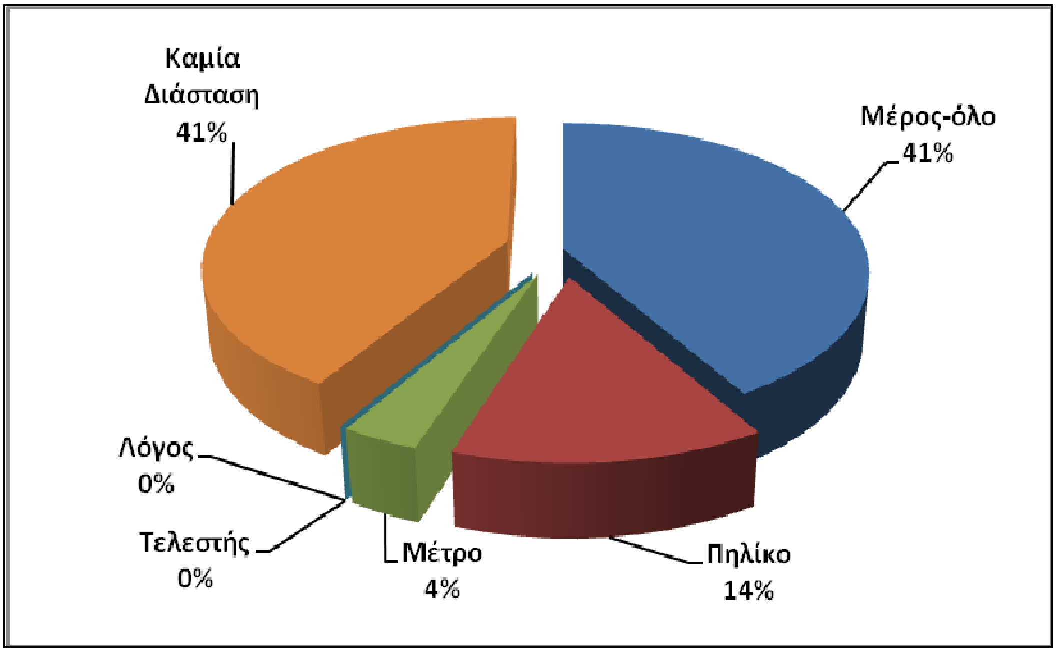
Τα στοιχεία για τις δραστηριότητες σε σχέση με τις διαστάσεις του κλάσματος στα σχολικά εγχειρίδια της Δ΄ τάξης παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 6.4 και στο Σχήμα 4, που ακολουθούν.

Πίνακας 6.4: **Συχνότητα εμφάνισης των διαστάσεων του κλάσματος στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της Δ΄ τάξης**

Διαστάσεις	Βιβλίο Μαθητή	Τετράδια Εργασιών	Σύνολο
Μέρος - όλο	7	5	12
Πηλίκο	3	1	4
Μέτρο	1	_	1
Τελεστής	_	_	_
Λόγος	_	_	_
Καμία διάσταση	3	9	12
ΣΥΝΟΛΟ	**14**	**15**	**29**[6]

[6] Οι δραστηριότητες που αφορούν στα κλάσματα στο σύνολό τους καταγράφονται ως είκοσι οχτώ (Ν=28). Προσμετρώνται, ωστόσο, οι δεκαέξι (Ν=16) γιατί, όπως προαναφέρθηκε, σε δώδεκα (Ν=12) από τις δραστηριότητες δεν εμφανίζεται κάποια διάσταση και σε μία δραστηριότητα εμφανίζονται δύο διαστάσεις. Στον πίνακα όπου αναγράφεται «καμία διάσταση» υποδεικνύεται ο αριθμός των δραστηριοτήτων που αφαιρούνται.

Σχήμα 4: Οι διαστάσεις του κλάσματος συνολικά στα εγχειρίδια της Δ΄ τάξης



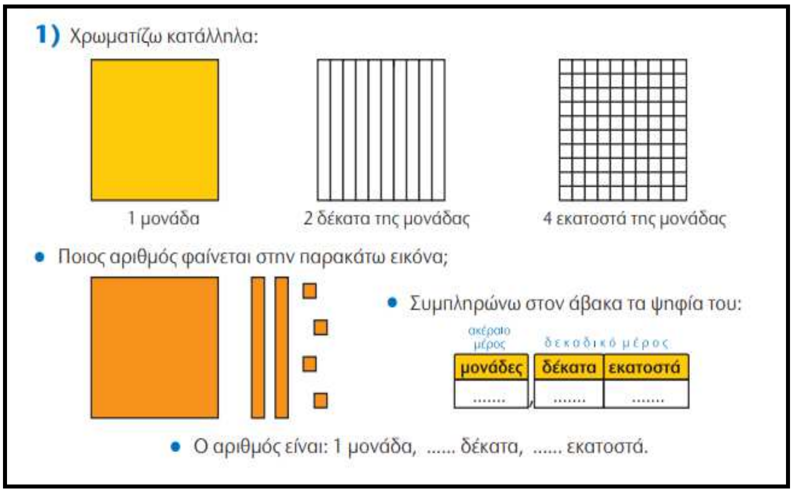
3.Β.2 Τα μοντέλα αναπαράστασης των κλασμάτων

Από τις συνολικά **28** δραστηριότητες που αφορούν στην έννοια του κλάσματος, στο σύνολο των σχολικών εγχειριδίων της Δ΄τάξης, αναγνωρίστηκαν **μοντέλα αναπαράστασης** (εμβαδού ή επιφάνειας, μήκους ή μέτρησης, συνόλων) στις μισές σχεδόν από τις δραστηριότητες (Ν=15) καθώς στις υπόλοιπες (Ν=13) δεν διακρίνεται κάποιο μοντέλο. Για παράδειγμα, σε μια από τις δραστηριότητες που δεν εντοπίστηκε κάποιο μοντέλο (Εικ. 12.20) οι μαθητές καλούνται να αντιστοιχίσουν τα δεκαδικά κλάσματα με τους δεκαδικούς αριθμούς και τη λεκτική περιγραφή τους. Υπάρχει επίσης διαφορά στην κατανομή τους μεταξύ Β.Μ (Ν=9) και Τ.Μ (Ν=6)

Σε μεγάλο βαθμό κυριαρχούν οι δραστηριότητες που εμφανίζουν το **μοντέλο του εμβαδού ή επιφάνειας** (Ν=11) με παρόμοια συχνότητα εμφάνισης ανάμεσα σε Β.Μ (Ν=6) και Τ.Μ (Ν=5).

Εικόνα 12.20: Παράδειγμα δραστηριότητας που δεν εντοπίστηκε κανένα μοντέλο αναπαράστασης (Τετράδιο Μαθητή, β΄τεύχος, κεφ.15, σελ.6)

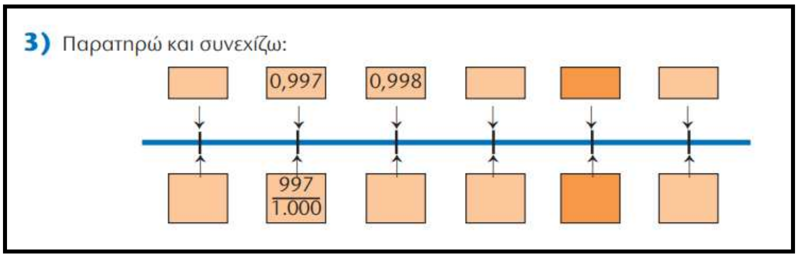
Αξιοσημείωτο είναι πως στα μοντέλα εμβαδού με μεγαλύτερη συχνότητα αξιοποιούνται οι τετραγωνισμένες επιφάνειες που υποδηλώνουν τη μονάδα (το όλο), όπως, για παράδειγμα, στις δραστηριότητες που εμφανίζονται στις Εικόνες 12.17 και 12.21. Στην τελευταία μάλιστα ζητείται από τους μαθητές να χρωματίσουν κάθε φορά ένα συγκεκριμένο μέρος της μονάδας (2/10, 4/10, 5/100) και στη συνέχεια να σχηματίσουν τον δεκαδικό αριθμό με βάση τα μέρη που χρωμάτισαν.



Εικόνα 12.21: Παράδειγμα δραστηριότητας όπου αναδεικνύεται το μοντέλο εμβαδού (Βιβλίο Μαθητή, κεφ.15, σελ. 41)

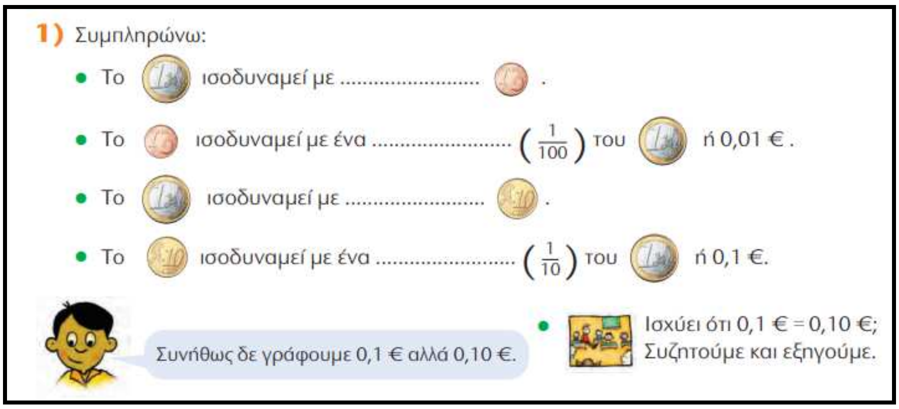
Το μοντέλο μήκους ή μέτρησης αναδεικνύεται μέσα από ελάχιστες δραστηριότητες (N=3), μια δραστηριότητα σε Τ.Μ και τις υπόλοιπες στο Β.Μ. Για παράδειγμα, στη δραστηριότητα που εμφανίζεται στην Εικόνα 12.19 αναδεικνύεται η διάσταση του «μέτρου» ταυτόχρονα με τη διάσταση «μέρους-όλου» και οι μαθητές με οδηγό το γαλλικό μέτρο συμπληρώνουν τις ισοδυναμίες των μονάδων με δεκαδικά κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς.

Επίσης, σε άλλη δραστηριότητα (Εικ.12.22) χρησιμοποιείται η αριθμογραμμή και οι μαθητές πρέπει να συμπληρώσουν δεκαδικά κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς αντίστοιχα πάνω σ' αυτή.



Εικόνα 12.22: Παράδειγμα δραστηριότητας όπου αναδεικνύεται το μοντέλο μέτρησης (Τετράδιο Μαθητή, β΄ τεύχος, κεφ.21, σελ. 22)

Τέλος, **το μοντέλο συνόλων** εμφανίζεται σε μία μόνο δραστηριότητα, η οποία βρίσκεται στο Β.Μ (Εικ. 12.23). Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται να κατανοήσουν το ευρώ και τις υποδιαιρέσεις του και στη συνέχεια να συμπληρώσουν τις ισοδυναμίες που τους δίνονται με στόχο τη σύνδεση δεκαδικών αριθμών και δεκαδικών κλασμάτων.



Εικόνα 12.23: Παράδειγμα δραστηριότητας που αναδεικνύει το μοντέλο συνόλων (Βιβλίο Μαθητή, κεφ.16, σελ. 43)

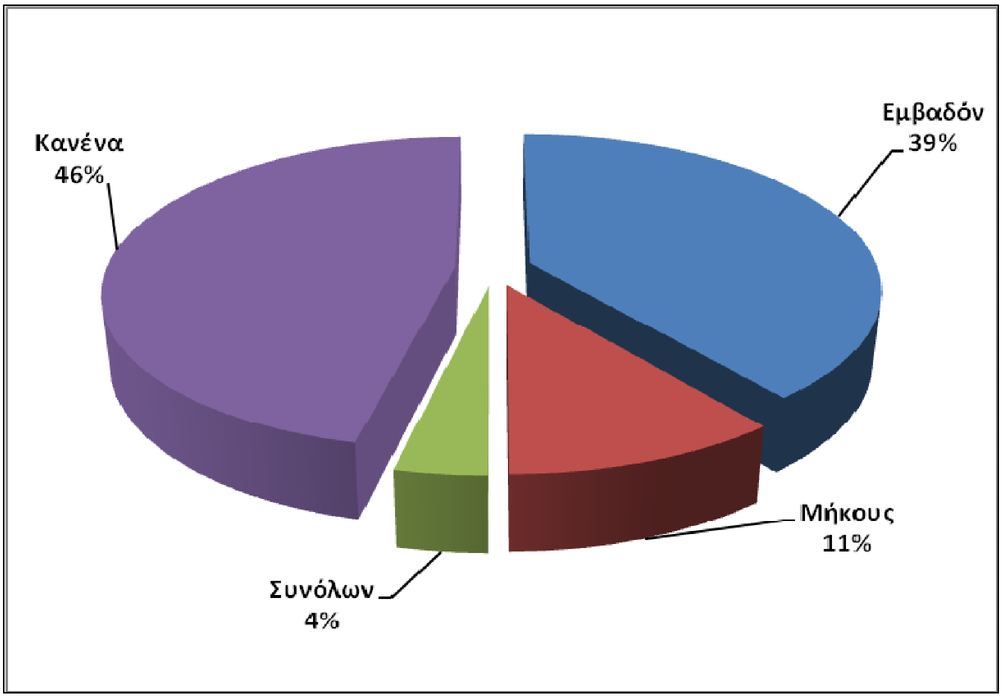
Τα στοιχεία για τις δραστηριότητες σε σχέση με τα μοντέλα αναπαράστασης του κλάσματος στα σχολικά εγχειρίδια της Δ΄ τάξης παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον Πίνακα 7.5 και στο Σχήμα 5 που ακολουθούν.

Πίνακας 7.5: **Συχνότητα εμφάνισης των μοντέλων αναπαράστασης του κλάσματος στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της Δ΄ τάξης**

Μοντέλα Αναπαράστασης	**Βιβλίο Μαθητή**	**Τετράδια Εργασιών**	**Σύνολο**
Εμβαδού ή Επιφάνειας	5	6	11
Μήκους ή Μέτρησης	2	1	3
Συνόλων	1	0	1
Κανένα Μοντέλο	4	9	13
ΣΥΝΟΛΟ	12	16	28 [7]

7 Οι δραστηριότητες που αφορούν στα κλάσματα στο σύνολό τους καταγράφονται ως είκοσι οχτώ (Ν=28). Προσμετρώνται, ωστόσο, οι δεκαπέντε (Ν=15) γιατί σε δεκατρείς (Ν=13) από τις δραστηριότητες, όπως προαναφέρθηκε, δεν εμφανίζεται κάποιο μοντέλο. Στον πίνακα όπου αναγράφεται «κανένα μοντέλο» υποδεικνύεται ο αριθμός των δραστηριοτήτων που αφαιρούνται.

Σχήμα 5: Τα μοντέλα αναπαράστασης του κλάσματος συνολικά στα εγχειρίδια της Δ΄ τάξης

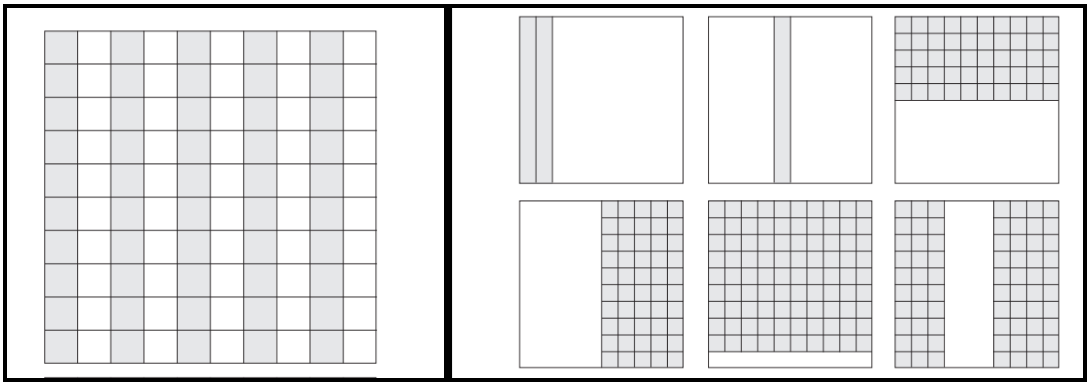


3.Β.3 Τα αναπαραστατικά μέσα των κλασμάτων

Τα εξωτερικά αναπαραστατικά μέσα που απαντώνται στο σύνολο των εγχειριδίων της Δ΄ τάξης και αφορούν στα κλάσματα είναι ευδιάκριτα και στις 28 δραστηριότητες που καταγράφηκαν. Τα μέσα αναπαράστασης [χειραπτικά μέσα (γεωμετρικές επιφάνειες, πίτσες, ευθύγραμμα τμήματα), σύμβολα, εικόνες, σχηματικές αναπαραστάσεις (διαγράμματα, πίνακες) και αναπαραστάσεις πραγματικών καταστάσεων] που υιοθετούνται στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ΄ τάξης λειτουργούν συνδυαστικά και όχι με την ίδια συχνότητα. Εμφανίζεται, δηλαδή, ένας συνδυασμός των παραπάνω αναπαραστατικών μέσων σε αρκετές δραστηριότητες (Ν=11) προκειμένου να επιτευχθούν οι στόχοι της κάθε ενότητας αναφορικά με τα κλάσματα.

Πιο συγκεκριμένα, **τα χειραπτικά μέσα** εμφανίζονται ελάχιστα (Ν=5) στο σύνολο των δραστηριοτήτων με παρόμοια παρουσία, σε Βιβλία Μαθητή (Ν=2) και Τετράδια Μαθητή (Ν=3).

Στις τελευταίες σελίδες του Βιβλίου του Μαθητή (Εικ. 12.24) υπάρχει χειραπτικό υλικό (καρτέλες) όπου οι μαθητές μπορούν να αξιοποιήσουν παράλληλα με τις δραστηριότητες του βιβλίου.



Εικόνα 12.24: Χειραπτικό υλικό σε καρτέλες (Βιβλίο Μαθητή, σελ.155)

Στην Εικόνα 12.21 παρουσιάζεται μια δραστηριότητα από το Β.Μ στην οποία αξιοποιούνται, εκτός από το μοντέλο επιφάνειας, και τα χειραπτικά μέσα στη διδασκαλία της σύνδεσης των δεκαδικών κλασμάτων με τους δεκαδικούς αριθμούς. Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται να χρωματίσουν κάθε φορά ένα συγκεκριμένο μέρος της μονάδας (2/10, 4/10, 5/100) και στη συνέχεια να σχηματίσουν τον δεκαδικό αριθμό με βάση τα μέρη που χρωμάτισαν.

Τη μεγαλύτερη συχνότητα ως αναπαραστατικό μέσο παρουσιάζει η **«εικόνα»** (Ν=14), η οποία εμφανίζεται στις μισές από τις δραστηριότητες των κλασμάτων, με διακριτή διαφορά ανάμεσα σε Βιβλία Μαθητή (Ν=9) και Τετράδια Μαθητή (Ν=5). Η εικόνα ως αναπαραστατικό μέσο χρησιμοποιείται επίσης σε αρκετές δραστηριότητες (Ν=8) συνδυαστικά με κάποια άλλα μέσα, όπως, για παράδειγμα, χειραπτικά μέσα και εικόνα (Ν=4), γραπτά σύμβολα και εικόνα (Ν=2) ή αναπαραστάσεις πραγματικών καταστάσεων και εικόνα (Ν=2).

Στη δραστηριότητα της Εικόνας 12.25 η εικόνα στηρίζει διδακτικά την εισαγωγή και την αφόρμηση, συνδυάζοντας λεκτική περιγραφή και αναπαραστάσεις πραγματικών καταστάσεων που αφορά τα δεκαδικά κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς. Οι μαθητές παρατηρώντας την εικόνα καλούνται μέσα από εμπράγματες καταστάσεις - τα αυτοκόλλητα για τα τετράδιά τους- να χρησιμοποιήσουν δεκαδικό κλάσμα ή δεκαδικό αριθμό για να συμβολίσουν το ένα δέκατο (1/10) και τα έξι εκατοστά (6/100). Επίσης, τονίζεται η έκφραση «ένα από τα δέκα ίσα μέρη» ή «ένα από τα εκατό ίσα μέρη» που επαναλαμβάνεται ώστε να γίνει και λεκτικά η σύνδεση με τους αντίστοιχους αριθμούς.

Εικόνα 6.25: Παράδειγμα δραστηριότητας όπου αναδεικνύεται η εικόνα σε συνδυασμό με λεκτική περιγραφή και αναπαραστάσεις πραγματικών καταστάσεων ως αναπαραστατικά μέσα (Βιβλίο Μαθητή, κεφ. 15, σελ.40)

Αντίστοιχα, οι δραστηριότητες που στηρίζονται σε **γραπτά σύμβολα** (N=10) και επιδιώκουν κυρίως την εμπέδωση και εξάσκηση των μαθητών καταλαμβάνουν έναν μεγάλο αριθμό στα Τ.Μ (N=9) σε αντίθεση με αυτά του Β.Μ (N=1)**.** Οι μαθητές καλούνται στη δραστηριότητα της Εικόνας 12.26, που αξιοποιεί μόνο γραπτά σύμβολα, να κυκλώσουν τα καταχρηστικά δεκαδικά κλάσματα.

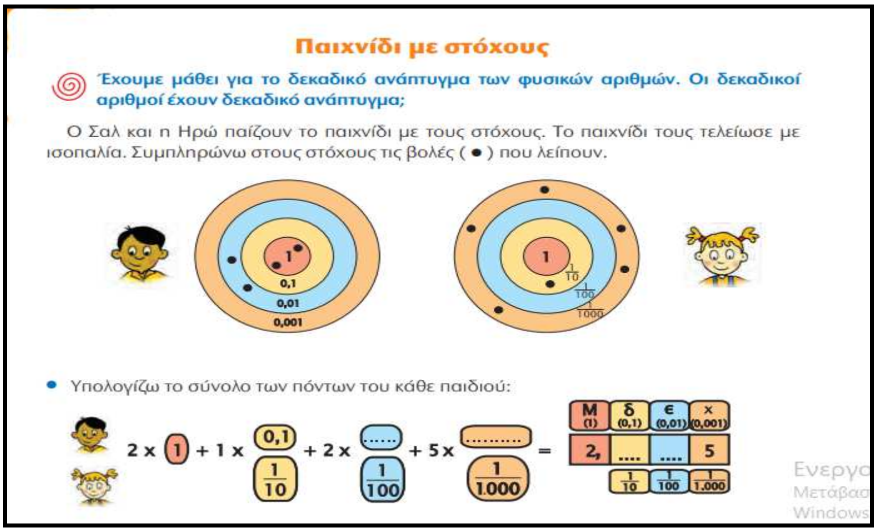
Εικ. 12.26: Παράδειγμα δραστηριότητας όπου αναδεικνύονται τα γραπτά σύμβολα ως αναπαραστατικό μέσο (Τετράδιο Μαθητή, τεύχος β΄, κεφ.15, σελ.7)

Οι αναπαραστάσεις **πραγματικών καταστάσεων** που αντλούνται από την καθημερινότητα των μαθητών εμφανίζονται σε ελάχιστες δραστηριότητες (Ν=3), μόνο στο Βιβλίο του Μαθητή. Στην πλειοψηφία τους (Ν=2) χρησιμοποιούνται ως δραστηριότητες αφόρμησης και σε συνδυασμό πάντα με εικόνα και λεκτική περιγραφή (Εικ. 6.25).

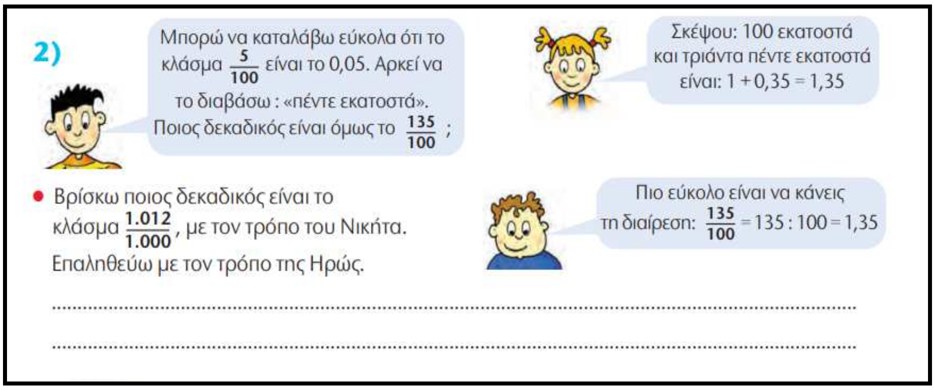
Άλλο ένα παράδειγμα εισαγωγικής δραστηριότητας, όπου αξιοποιείται ένα από τα παιχνίδια των παιδιών με τους στόχους και συνδυάζει τις πραγματικές καταστάσεις, με εικόνα, σύμβολο και λεκτική περιγραφή, δίνεται παρακάτω. Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα (Εικ.12.27) οι μαθητές παρατηρώντας την εικόνα καλούνται να υπολογίσουν τους στόχους που πέτυχε το κάθε παιδί (με δεκαδικό κλάσμα - 1/10, 1/100 και δεκαδικό αριθμό – 0,1, 0,001) και να αντιληφθούν την ισοδυναμία τους.

Οι λεκτικές περιγραφές εμφανίζονται ελάχιστα (Ν=3), μόνο στα Βιβλία Μαθητή, συνδυαστικά με την εικόνα και την υποστηρίζουν σχεδόν σε όλες τις δραστηριότητες (Ν=2). Για παράδειγμα, οι δραστηριότητες που εμφανίζονται στις Εικόνες 12.18 και 12.25 χρησιμοποιούν την εικόνα ως αναπαραστατικό μέσο και υποστηρίζονται και από λεκτική περιγραφή ώστε να γίνουν καλύτερα κατανοητές.

Λόγος χωρίς την εικόνα χρησιμοποιείται σε μια δραστηριότητα (Εικ. 12.28) κατευθύνοντας τον συλλογισμό των μαθητών ώστε να συνδέσουν τα κλάσματα με τους δεκαδικούς και την πράξη της διαίρεσης.



Εικόνα 12.27: Παράδειγμα δραστηριότητας που αναδεικνύεται η εικόνα σε συνδυασμό με άλλα αναπαραστατικά μέσα (Βιβλίο Μαθητή, κεφ. 22, σελ.58)



Εικόνα 12.28: Παράδειγμα δραστηριότητας που αναδεικνύεται η λεκτική περιγραφή ως αναπαραστατικό μέσο (Βιβλίο Μαθητή, κεφ. 24, σελ.63)

Τέλος, από τα **σχηματικά μέσα** χρησιμοποιείται μόνο ο πίνακας, σε μόλις τέσσερις δραστηριότητες, ισάριθμα μοιρασμένες στα Τετράδια Μαθητή (N=2) και στα Βιβλία Μαθητή (N=2). Για παράδειγμα, στις δραστηριότητες της Εικόνας 12.29 αξιοποιείται ο πίνακας ως αναπαραστατικό μέσο και ενθαρρύνει τους μαθητές να καταγράψουν τις μετρήσεις τους (12.29α) με διάφορους τρόπους (συμμιγής, δεκαδικός, δεκαδικό κλάσμα) ή να συμπληρώσουν μετατροπές από σύμβολα σε λέξεις και αντίστροφα (6.29β).

1)

- Τα παιδιά εργάστηκαν με τη μεζούρα και το γαλλικό μέτρο. Έκαναν διάφορες μετρήσεις και τις κατέγραψαν σε πίνακα με διάφορους τρόπους.

α) Συμπληρώνω στον πίνακα ό,τι λείπει.

	Συμμιγής	Δεκαδικός	Δεκαδικό κλάσμα
Ύψος παιδιού			$\frac{138}{100}$ μ. ή $1\frac{38}{100}$ μ.
Μήκος μολυβιού			$\frac{95}{1.000}$ μ.
Πλάτος βιβλιοθήκης	0 μ. 500 χιλ.		
Μήκος θρανίου		1,27 μ.	

β) Διατάσσω τους δεκαδικούς αριθμούς:

.... < .... < .... < ....

(α)

2) Συμπληρώνω τον πίνακα:

Με λέξεις	Με δεκαδικό κλάσμα	Με δεκαδικό αριθμό	Με διαίρεση
οχτώ δέκατα			8 : 10
	$\frac{3}{100}$		
		0,012	
			402 : 100
	$\frac{1.454}{10}$		

(β)

Εικόνα 6.29.α.β: Παράδειγματα δραστηριοτήτων όπου αναδεικνύονται τα σχηματικά μέσα (πίνακας) ως αναπαραστατικά μέσα (α. Βιβλίο Μαθητή, 4η επανάληψη, σελ. 68, β. Τετράδιο Μαθητή, κεφ. 24, σελ. 28)

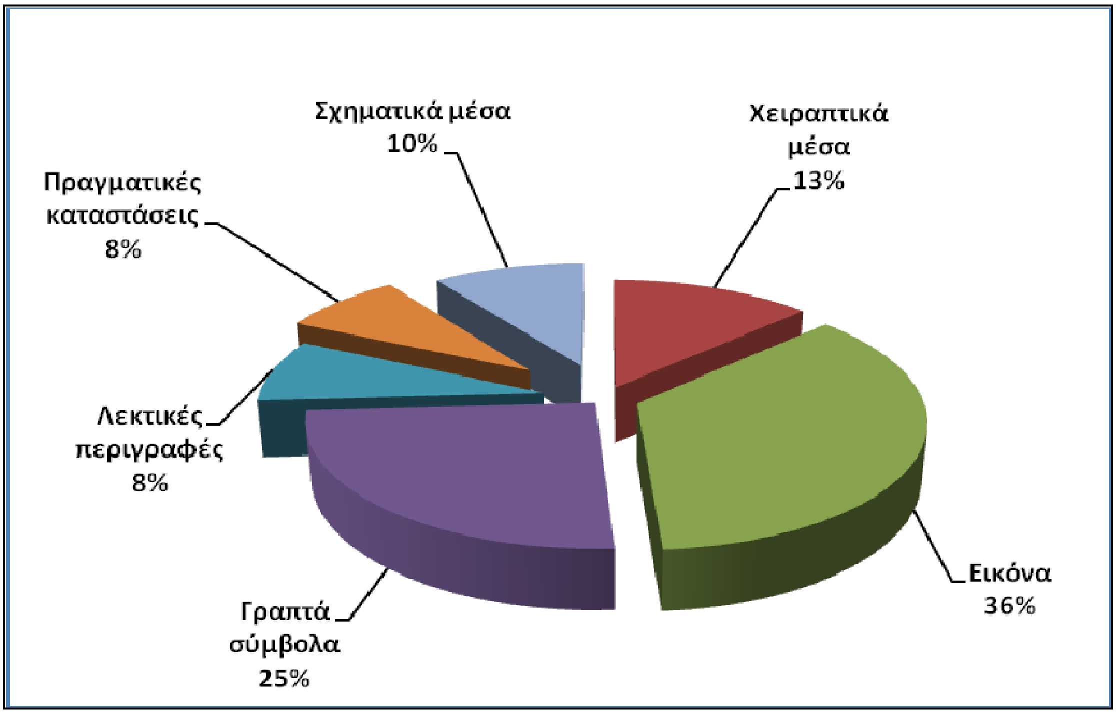
Τα στοιχεία για τις δραστηριότητες σε σχέση με τα αναπαραστατικά μέσα του κλάσματος στα σχολικά εγχειρίδια της Δ΄ τάξης παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον Πίνακα 8.6 και στο Σχήμα 6 που ακολουθούν.

Πίνακας 8.6: Συχνότητα εμφάνισης των αναπαραστατικών μέσων του κλάσματος στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της Δ΄ τάξης

Αναπαραστατικά μέσα	Βιβλίο Μαθητή	Τετράδιο Εργασιών	Σύνολο
Χειραπτικά μέσα	2	3	5
Εικόνες	9	5	14
Γραπτά σύμβολα	1	9	10
Πραγματικές καταστάσεις	3	-	3
Λεκτικές περιγραφές	3	-	3
Σχηματικά μέσα	2	2	4
Σύνολο	20	19	39[8]

[8] **Σημείωση:** Οι δραστηριότητες που αφορούν στα κλάσματα στο σύνολό τους καταγράφονται ως είκοσι οχτώ (N=28). Προσμετρώνται, ωστόσο, περισσότερες όταν εξετάζονται ως προς τα εξωτερικά αναπαραστατικά μέσα (N=39), γιατί όπως προαναφέρθηκε, σε αρκετές δραστηριότητες (N=11) αναδεικνύονται πέραν του ενός αναπαραστατικού μέσου προκειμένου να προσεγγίσουν την έννοια του κλάσματος.

Σχήμα 6: Τα μέσα αναπαράστασης του κλάσματος συνολικά στα εγχειρίδια της Δ΄ τάξης



3. Γ Σύγκριση σχολικών εγχειριδίων Γ΄ και Δ΄ τάξης

Στο τρίτο μέρος του κεφαλαίου επιχειρείται, με βάση τα κριτήρια που έχουν τεθεί, η σύγκριση ανάμεσα στα εγχειρίδια των μαθηματικών των δύο τάξεων, προκειμένου να ελεγχθεί η συνέπεια και η συνέχεια που εμφανίζουν τα εγχειρίδια σχετικά με την έννοια του κλάσματος ανάμεσα στις δύο συνεχόμενες τάξεις.

Στα εγχειρίδια των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης καταγράφηκαν συνολικά 42 δραστηριότητες, ενώ στα εγχειρίδια της Δ΄ τάξης εμφανίστηκαν συγκριτικά λιγότερες δραστηριότητες (N=28) που αφορούν τη διδασκαλία των κλασμάτων. Μάλιστα οι περισσότερες από αυτές (N=26) αφορούν στα δεκαδικά κλάσματα και τη σύνδεσή τους με τους δεκαδικούς αριθμούς, κάτι που δεν συμβαίνει με τόση έκταση στις δραστηριότητες των κλασμάτων στα εγχειρίδια της Γ΄ τάξης (N=10).

Σε σχέση με την κατανομή των δραστηριοτήτων σε Βιβλία Μαθητή και Τετράδια Μαθητή, οι δραστηριότητες στη Δ΄ τάξη είναι κατανεμημένες σχεδόν ισάριθμα σε Β.Μ (Ν=13) και Τ.Μ (Ν=15). Ωστόσο, δεν παρατηρείται το ίδιο στη Γ΄ τάξη όπου τα Τ.Ε, στα οποία επιχειρείται η εξάσκηση και εμπέδωση, εμφανίζουν περισσότερες δραστηριότητες (Ν=25) και λιγότερες στα Β.Μ (Ν=17) όπου υπάρχει η εισαγωγή και αφόρμηση στην έννοια του κλάσματος.

Τέλος, οι δραστηριότητες που αφορούν τα κλάσματα στα εγχειρίδια και των δύο τάξεων εμφανίζονται σχεδόν σε ισάριθμα κεφάλαια, οκτώ στη Γ΄ και επτά στη Δ΄ τάξη. Επίσης και στις δυο τάξεις εμφανίζονται επαναληπτικές δραστηριότητες στο τέλος των αντίστοιχων ενοτήτων που αφορούν στα κλάσματα.

3.Γ.1 Σύγκριση σε σχέση με τις διαστάσεις του κλάσματος ανάμεσα στη Γ΄ και στη Δ΄ τάξη

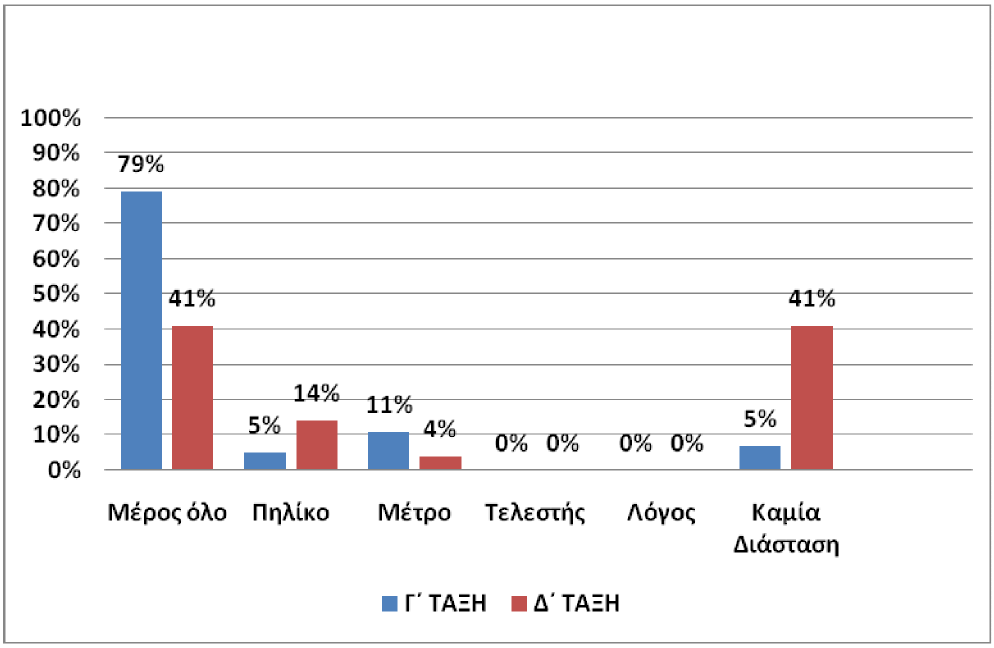
Συγκρίνοντας τα εγχειρίδια των δυο τάξεων με βάση το πρώτο κριτήριο που αφορά στις διαστάσεις του κλάσματος (μέρος-όλο, πηλίκο, μέτρο, τελεστής και λόγος), παρατηρείται ότι στο σύνολο των δραστηριοτήτων της Γ΄ τάξης (Ν=42) αναδεικνύεται κάποια από τις διαστάσεις του κλάσματος (Ν=40), ενώ σε ελάχιστες (Ν=2) δεν αναγνωρίζεται κάποια διάσταση (5%). Αντίθετα, σχεδόν ισόποσα στις μισές από τις δραστηριότητες της Δ΄ τάξης (Ν=16) αναδεικνύεται κάποια διάσταση του κλάσματος (41%) και στις άλλες μισές παρατηρείται απουσία διαστάσεων (41%).

Η διάσταση «**μέρος-όλο**» είναι αυτή που κυριαρχεί στα εγχειρίδια των μαθηματικών και των δύο τάξεων. Συγκεκριμένα, εμφανίζεται στη Γ΄ τάξη σε μεγάλο ποσοστό (79%) ενώ στη Δ΄ τάξη σε πολύ μικρότερη συχνότητα, σχεδόν στις μισές δραστηριότητες (41%).

Η διάσταση «**πηλίκο**» εμφανίζεται σε τέσσερις δραστηριότητες στη Δ΄ τάξη (14%) ενώ μόλις δύο δραστηριότητες αναδεικνύουν το πηλίκο στη Γ΄ τάξη (5%). Αντίθετα, το «**μέτρο**» ως διάσταση εμφανίζεται σε περισσότερες δραστηριότητες στο σύνολο (11%) στη Γ΄ τάξη, ενώ μόλις μια δραστηριότητα αξιοποιεί το μέτρο στη Δ΄ τάξη για να αναδείξει την έννοια του κλάσματος (4%).

Τέλος, **«ο λόγος»** και **«ο τελεστής»** ως διαστάσεις του κλάσματος δεν εμφανίζονται καθόλου στα εγχειρίδια και των δύο τάξεων για να υποστηρίξουν κάποιες από τις δραστηριότητες που αφορούν τα κλάσματα. Το Σχήμα 7 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.

Σχήμα 7: Ποσοστιαία (%) σύγκριση στις διαστάσεις του κλάσματος ανάμεσα στη Γ΄ και στη Δ΄ τάξη



3. Γ.2 Σύγκριση σε σχέση με τα μοντέλα αναπαράστασης του κλάσματος ανάμεσα στη Γ΄ και στη Δ΄ τάξη

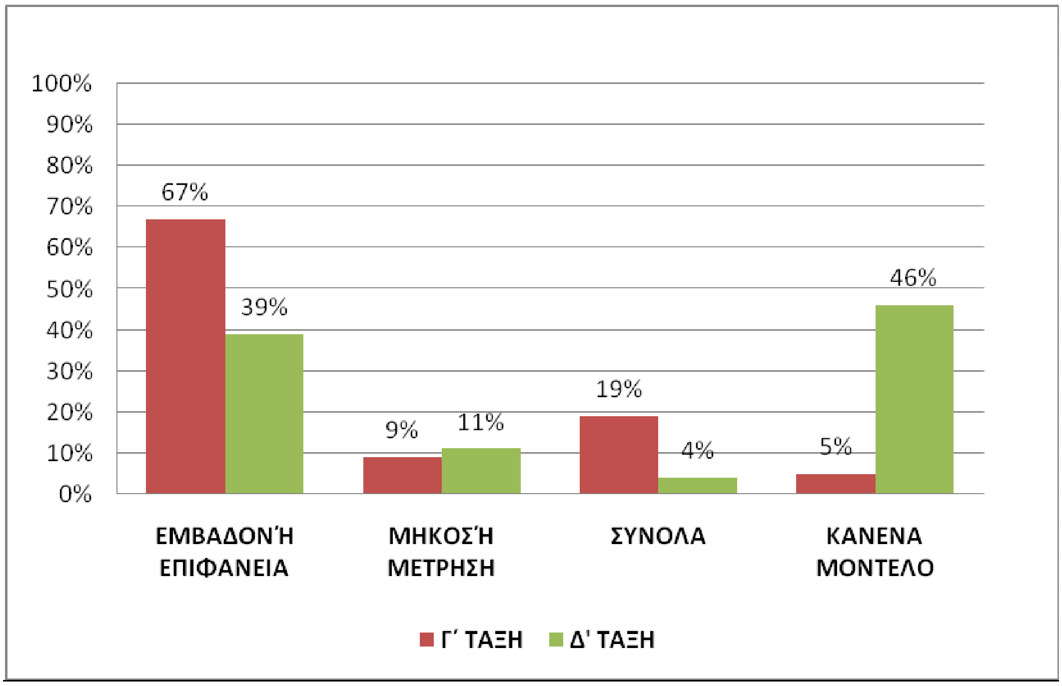
Συγκρίνοντας τα εγχειρίδια των δυο τάξεων με βάση το δεύτερο κριτήριο που αφορά στα μοντέλα αναπαράστασης του κλάσματος (μοντέλα εμβαδού ή επιφάνειας, μήκους ή μέτρησης και συνόλων), παρατηρείται στη Γ΄ τάξη το σύνολο των δραστηριοτήτων να αναδεικνύει κάποιο μοντέλο, ενώ σε δυο μόνο δραστηριότητες απουσιάζουν τα μοντέλα (5%). Αντίθετα, στη Δ΄τάξη αναπαραστατικά μοντέλα εμφανίζονται περίπου στις μισές δραστηριότητες από το σύνολό τους (σε 15 από τις 28) και μεγάλο ποσοστό δραστηριοτήτων, δεν εμφανίζουν κάποιο μοντέλο (46%),

Το μοντέλο **«εμβαδού ή επιφάνειας»** είναι αυτό που κυριαρχεί με μεγάλη διαφορά και στις δύο τάξεις. Στη Γ΄ τάξη οι περισσότερες δραστηριότητες έχουν μοντέλα εμβαδού (67%) και αξιοποιούν κυρίως την επιφάνεια για να αναδείξουν το κλάσμα. Ακολουθούν τα **«μοντέλα συνόλων»** (19%). Αντίθετα, στη Δ΄τάξη τα μοντέλα επιφάνειας εμφανίζονται σε μικρότερο ποσοστό (39%) μέσα από τετραγωνισμένες επιφάνειες που υποδηλώνουν τη μονάδα (όλο) εισάγοντας κυρίως τα δεκαδικά κλάσματα. Με ελάχιστη παρουσία συχνότητας (N=4%) εμφανίζεται το μοντέλο συνόλων.

Τέλος, ο μοντέλο **«μήκους ή μέτρησης»** παρουσιάζεται ελάχιστα στα εγχειρίδια και των δυο τάξεων με παρόμοια συχνότητα εμφάνισης στη Γ΄ (9%) και στη Δ΄ τάξη (11%). Οι περισσότερες δραστηριότητες που αξιοποιούν το μοντέλο του μέτρου αφορούν στα δεκαδικά κλάσματα και στις δυο τάξεις.

Τα παραπάνω στοιχεία παρουσιάζονται στο Σχήμα 8.

Σχήμα 8: Ποσοστιαία (%) σύγκριση στα μοντέλα αναπαράστασης του κλάσματος ανάμεσα στη Γ΄ και Δ΄ τάξη



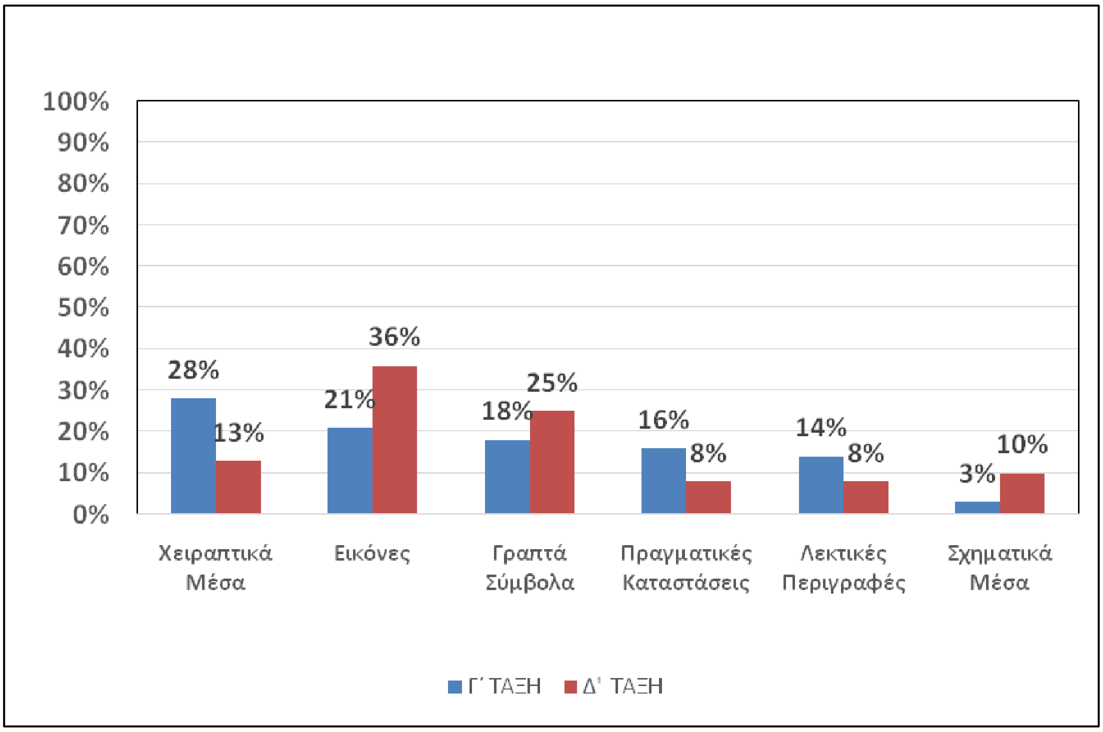
3.Γ.3 Σύγκριση σε σχέση με τα αναπαραστατικά μέσα του κλάσματος ανάμεσα στη Γ΄ και στη Δ΄ τάξη

Συγκρίνοντας τα εγχειρίδια των δυο τάξεων με βάση το τρίτο κριτήριο που αφορά τα **εξωτερικά αναπαραστατικά μέσα** [χειραπτικά μέσα (γεωμετρικές επιφάνειες, πίτσες, ευθύγραμμα τμήματα, νομίσματα), σύμβολα, εικόνες, σχηματικές αναπαραστάσεις (διαγράμματα, πίνακες) και αναπαραστάσεις πραγματικών καταστάσεων] παρατηρείται πως στα εγχειρίδια και των δύο τάξεων, σε όλες τις δραστηριότητες, εμφανίζονται ποικίλα αναπαραστατικά μέσα ώστε να εισάγουν και να ερμηνεύσουν τα κλάσματα και τα δεκαδικά κλάσματα. Επίσης, σε αρκετές δραστηριότητες εμφανίζεται ένας συνδυασμός των παραπάνω μέσων, γι' αυτό και στην καταμέτρηση κάποιες δραστηριότητες τόσο στη Γ΄ (N=20) όσο και στη Δ΄ τάξη (N=11) προσμετρούνται περισσότερο από μία φορά.

Τα αναπαραστατικά μέσα που υπερτερούν στα εγχειρίδια και των δύο τάξεων είναι τα χειραπτικά μέσα στη Γ΄ τάξη (28%), ενώ η εικόνα, κυρίως, στα εγχειρίδια της Δ΄ τάξης (36%), και με μικρότερη την παρουσία της στη Γ΄ τάξη (21%) στηρίζει διδακτικά σε μεγάλο βαθμό την εισαγωγή και την αφόρμηση για τα κλάσματα. Ακολουθούν τα γραπτά σύμβολα (18% και 25% Γ΄ και Δ΄ αντίστοιχα) ενώ τα υπόλοιπα αναπαραστατικά μέσα αξιοποιούνται λιγότερο παρουσιάζοντας μια φθίνουσα σειρά στη συχνότητα εμφάνισής τους, και για τις δύο τάξεις: αναπαραστάσεις πραγματικών καταστάσεων (16% και 8%), με μεγαλύτερη συχνότητα χρήσης στα εγχειρίδια της Γ΄ τάξης, λεκτικές περιγραφές (14% και 8%) που κυρίως λειτουργούν συνδυαστικά με την εικόνα, και σχηματικά μέσα (3% και 10%) για τη Γ΄ και τη Δ΄ τάξη, αντίστοιχα, που καλύπτουν μικρότερο ποσοστό συχνότητας για την Γ΄ τάξη (μόλις σε δύο δραστηριότητες) ενώ εμφανίζουν μεγαλύτερη παρουσία στη Δ΄ τάξη.

Η συχνότητα εμφάνισης των εξωτερικών αναπαραστατικών μέσων δεν παρουσιάζει ομοιογένεια για τις δύο τάξεις όπως φαίνεται από τα παραπάνω. Στο σύνολό τους τα σχολικά εγχειρίδια, ενώ αξιοποιούν ένα πλήθος διαφορετικών μέσων, αντίστοιχα δεν αναδεικνύουν την ίδια συχνότητα παρουσίας τους, στις δυο τάξεις. Στη Γ΄τάξη εμφανίζουν μια πιο ομοιόμορφη κατανομή χωρίς μεγάλες αποκλίσεις (εκτός των σχηματικών μέσων) ενώ στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄ τάξης, κυριαρχούν κυρίως η εικόνα και τα γραπτά σύμβολα δίνοντας μια ανισομερής κατανομή στα υπόλοιπα μέσα. Τα παραπάνω στοιχεία παρουσιάζονται στο Σχήμα 9.

Σχήμα 9: Ποσοστιαία (%) σύγκριση στα μέσα αναπαράστασης του κλάσματος ανάμεσα στη Γ΄ και Δ΄ τάξη



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν αφενός να χαρτογραφηθούν οι δραστηριότητες που αφορούν στα κλάσματα, στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών (Γ΄ και Δ΄ τάξης) και αφετέρου να αναδειχθεί η συχνότητα εμφάνισης των διαστάσεων (ερμηνειών) του κλάσματος, των μοντέλων και των αναπαραστάσεων που τα συνοδεύουν. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο, θα παρουσιαστούν τα κύρια ευρήματα της παρούσας εργασίας και θα επιχειρηθεί η διατύπωση των περιορισμών κατά την υλοποίηση της έρευνας καθώς και προτάσεων για περεταίρω έρευνα.

Βρέθηκαν συνολικά 70 δραστηριότητες, που αφορούν τη διδασκαλία για τα κλάσματα. Παρόλο που είναι κατανεμημένες σχεδόν σε ισάριθμα κεφάλαια στις δύο τάξεις (οκτώ και επτά, αντίστοιχα), η Γ΄ τάξη παρουσιάζει συγκριτικά μεγαλύτερο αριθμό δραστηριοτήτων σε σχέση με τη Δ΄ τάξη [Γ΄(42), Δ΄(28)]. Ενδεχομένως αυτό να οφείλεται στο γεγονός ότι στη Γ΄ τάξη υπάρχει ένα κεφάλαιο επιπλέον, αλλά και γιατί τα κλάσματα ως νέα έννοια που εισάγονται για πρώτη φορά στη διδακτέα ύλη της Γ΄ τάξης, ίσως καταλαμβάνουν και μεγαλύτερη έκταση (Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ, 2003).

Από τις διαστάσεις (ερμηνείες) του κλάσματος στις δραστηριότητες που ελέγχθηκαν, σε μεγάλο εύρος εμφανίζεται η διάσταση του «μέρους-όλου» στα εγχειρίδια και των δυο τάξεων. Συγκεκριμένα, καταγράφεται στο 79% των δραστηριοτήτων στη Γ΄ τάξη και στις μισές σχεδόν από τις δραστηριότητες της Δ΄ τάξης (41%). Ακολουθούν σε φθίνουσα σειρά και με παρόμοια συχνότητα εμφάνισης οι δραστηριότητες που αναδεικνύουν το κλάσμα ως «πηλίκο-διαίρεση» (5%, 12%), και ως «μέτρηση» (11%, 4%), αντίστοιχα για τη Γ΄ και τη Δ΄ τάξη. Ο μεγάλος αριθμός δραστηριοτήτων με την ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρους-όλου» σε συνδυασμό με τον μικρό αριθμό παρουσίας των άλλων διαστάσεων, επιβεβαιώνουν την αρχική υπόθεση της εργασίας, πως, η διάσταση του μέρους-όλου πιθανόν να επικρατεί στα εγχειρίδια των μαθηματικών των δύο τάξεων, αλλά και προηγούμενα ερευνητικά αποτελέσματα των Charalambous και Pita-Pantazi (2007) και Nguyen, Duong και Phan (2017), οι οποίοι βρήκαν πως η διάσταση του «μέρους-όλου» κατέχει το μεγαλύτερο μέρος στα εγχειρίδια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σε Κύπρο και Βιετνάμ, αντίστοιχα, και χρησιμοποιείται προκειμένου να εισαχθεί και να διδαχθεί η έννοια του κλάσματος. Μια πιθανή εξήγηση, που θα μπορούσε να αιτιολογήσει το μεγάλο ποσοστό της

συγκεκριμένης ερμηνείας του κλάσματος, αποτελεί το γεγονός ότι, όπως υποστηρίζουν οι Kieren (1976), Cramer και Whitney (2010) και van de Walle (2015), το «μέρος-όλο» θεωρείται ως το θεμέλιο για την ανάπτυξη και των άλλων διαστάσεων (πηλίκο, μέτρο, τελεστής και λόγος). Υποστηρίζουν μάλιστα πως το «μέρος-όλο» αποτελεί την πρώτη ερμηνεία, το σημείο εκκίνησης ώστε να γνωρίσουν οι μαθητές τα κλάσματα, αλλά, και να αντιληφθούν βασικές έννοιες όπως τον διαμερισμό, τα ισομεγέθη τμήματα και να κατανοήσουν βαθύτερα την έννοια της μονάδας. Η έντονη παρουσία δραστηριοτήτων «μέρους-όλου» στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών εξηγεί, κατά τη Ni (1999), τόσο τη μεγάλη εξοικείωση μαθητών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με αναπαραστάσεις για το μέρος-όλο (σε μοντέλα περιοχής, μοντέλα τμήματος γραμμής και μοντέλα συνόλων), όσο και τη δυσκολία τους στην ερμηνεία του κλάσματος ως «μέτρου».
Πολλοί ερευνητές (Behr et al., 1983. Martine, 2007, στο van de Walle et al., 2017) εξετάζοντας τις διαστάσεις του κλάσματος υποστηρίζουν πως οι μαθητές μέσα από δραστηριότητες που αφορούν στην ερμηνεία του κλάσματος ως «μέτρου» μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα τη μέτρηση, τη σύγκριση και την ποσοτικοποιήση του κλάσματος. Τη θέση αυτή, δε φαίνεται να ακολουθούν τα εγχειρίδια των μαθηματικών της Γ΄ και Δ΄ τάξης όπου εμφανίζουν περιορισμένη την παρουσία του κλάσματος ως «μέτρου», ιδιαίτερα τα εγχειρίδια της Δ΄ τάξης, με μόλις μία δραστηριότητα. Είναι πιθανό, το γεγονός αυτό να περιορίζει αντίστοιχα και τις ευκαιρίες που έχουν οι μαθητές να δουλέψουν τα κλάσματα μέσα από μια διαφορετική ερμηνεία τους, προκειμένου να αντιληφθούν νέες έννοιες στους κλασματικούς αριθμούς όπως για παράδειγμα, τη διαδοχικότητα, την πυκνότητα, το άπειρο (Lamon, 1999. Ni, 2002, στο Γαγάτσης κ.α., 2006) καθώς και να επιχειρήσουν έργα σύγκρισης ή διάταξης κατανοώντας τις σχέσεις μεταξύ τους (Yanik, Helding & Flores, 2008) μέσα από την προσέγγιση του κλάσματος ως «μέτρου».

Παρόμοια, το κλάσμα ως «πηλίκο-διαίρεση» εμφανίζει χαμηλά ποσοστά παρουσίας, με μόνο δύο δραστηριότητες στη Γ΄ τάξη (5%) να αναδεικνύουν το κλάσμα ως «πηλίκο» παράλληλα με την ερμηνεία του «μέρους-όλου». Ενδεχομένως το εύρημα αυτό να δείχνει μια ταυτόχρονη προσέγγιση των δύο διαστάσεων του κλάσματος και διδακτικά, πιθανόν, να είναι ένας τρόπος ώστε να αξιοποιηθούν οι δύο ερμηνείες του κλάσματος συνδυαστικά, προκειμένου να αντιληφθούν οι μαθητές τη σύνθετη φύση του. Ωστόσο, η ελάχιστη παρουσία του κλάσματος ως διαίρεση μέσα στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών (5%, 14%) δεν συγκλίνει με τη θέση αρκετών ερευνητών. Για παράδειγμα, οι Pitkethly και Hunting (1996), Lin και Huang (1993) και Xu (1998) περιγράφουν το μοίρασμα, ως το κλειδί για την οικοδόμηση της κλασματικής έννοιας. Όπως υποστηρίζουν, οι καταστάσεις διαχωρισμού και διαμέρισης στις δραστηριότητες με κλάσματα βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν ευκολότερα το κλάσμα ως αριθμό καθώς και να το αντιληφθούν ως διαίρεση. Στη διαμέριση και ποσοτικοποίηση του κλάσματος, όπως κατέδειξαν άλλες μελέτες (Clarke, Roche, Mitchell & Sukenik, 2006. Desli 1994, στο Nunes & Bryant, 2007) συντελεί η έννοια «του μισού» προκειμένου οι μαθητές να αναπτύξουν εννοιολογική γνώση μέσω των λογικών σχέσεων που διέπουν τα κλάσματα. Παρά το γεγονός ότι στη Γ΄ τάξη εισάγεται, σύμφωνα με το ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα, η διδασκαλία στα κλάσματα, δεν βρέθηκε κάποια δραστηριότητα που να ενισχύει με καταστάσεις διαμερισμού-διαίρεσης την εννοιολογική προσέγγιση.

Τέλος, το κλάσμα, ως λόγος και ως τελεστής, δεν εμφανίζεται σε καμία από τις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών της Γ΄ και της Δ΄ τάξης. Το αποτέλεσμα αυτό θα μπορούσε ενδεχομένως να εξηγηθεί από το γεγονός ότι οι έννοιες του λόγου και της αναλογίας εισάγονται στις τελευταίες τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Στ΄ Δημοτικού), σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ) των Μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, καθώς η έννοια του «λόγου» θεωρείται πιο σύνθετη και η κατανόησή της δυσκολότερη (Τύπας, 2005). Παρόμοια, μια πιθανή εξήγηση στην απουσία της ερμηνείας του κλάσματος ως «τελεστή» στα εγχειρίδια και των δυο τάξεων θα μπορούσε να αποτελεί το γεγονός ότι στη διδακτέα ύλη των μαθηματικών των δύο τάξεων δεν περιλαμβάνονται οι πράξεις με τα κλάσματα και, πιο συγκεκριμένα, ο πολλαπλασιασμός. Σύμφωνα με τους Γαγάτσης κ.ά. (2006) και Charalambous και Pita-Pantazi (2007), για να αντιληφθούν οι μαθητές την ερμηνεία του τελεστή καλύτερα, θα πρέπει να διδαχθούν τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Να είναι, δηλαδή, ικανοί να ερμηνεύουν κάθε μετασχηματισμό του με ποικίλους τρόπους (π.χ., το 3/4 να αναγνωρίζεται ως 3 × 1/4 της μονάδας, το 3/4 είναι τρεις φορές το 1/4 του όλου-της μονάδας ή 1/4 × 3 μονάδες) ώστε να μπορούν να εξηγούν, κάθε φορά, πώς έφτασαν στο αποτέλεσμα της πράξης. Από τη στιγμή λοιπόν που οι μαθητές δεν αντιμετωπίζουν αντίστοιχα πολλαπλασιαστικά έργα με κλάσματα, δεν τους δίνεται παράλληλα και η ευκαιρία να γνωρίσουν άλλη μία ερμηνεία του κλάσματος ως «τελεστή» ή και να αντιληφθούν μέσα από τη «λειτουργία του τελεστή» καλύτερα κάποιες έννοειες π.χ. την έννοια της ισοδυναμίας (Behr et al., 1993. Marshall, 1993, στο Charalambous & Pita-Pantazi, 2007).

Επιβεβαιώνοντας την αρχική υπόθεση της εργασίας, το μοντέλο «εμβαδού ή επιφάνειας» είναι αυτό που κυριαρχεί με τη μεγαλύτερη συχνότητα παρουσίας στη Γ΄ τάξη (67%) μέσα από γεωμετρικά σχήματα (κύκλους, τετράγωνα, ορθογώνια), πίτες, πίτσες και σοκολάτες. Το μοντέλο «εμβαδού» αξιοποιείται, επίσης, μέσα από τετραγωνισμένες επιφάνειες για να εισαγάγει στα δεκαδικά κλάσματα στη Δ΄ τάξη σε ένα μεγάλο εύρος δραστηριοτήτων (39%). Το εύρημα αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με τους Γαγάτσης κ.α. (2006) και van de Walle et al., (2017) οι οποίοι υποστηρίζουν πως η επιφάνεια και τα μοντέλα εμβαδού (μέσα από γεωμετρικά σχήματα) βοηθούν στην εισαγωγική προσέγγιση του κλάσματος για τους μαθητές, αλλά αποτελούν και κατάλληλα μοντέλα για την επίλυση των έργων ίσης μοιρασιάς, που ενισχύουν την κατανόηση στα κλάσματα. Το γεγονός αυτό θα μπορούσε να προσφέρει μια πιθανή εξήγηση για τη μεγάλη συχνότητα που εμφανίζει η παρουσία δραστηριοτήτων με συνεχείς επιφάνειες που αφορούν στα κλάσματα στα σχολικά εγχειρίδια και των δύο τάξεων του δημοτικού σχολείου. Το αποτέλεσμα αυτό, επίσης, υποστηρίζει τη θέση του Λεμονίδη (2016) ο οποίος, προτείνοντας μια αναπροσαρμογή στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών σε σχέση με τους ρητούς αριθμούς και τα κλάσματα, πιο συγκεκριμένα, αναφέρει πως τόσο τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών όσο και η τακτική των εκπαιδευτικών κατά τη διδασκαλία των κλασμάτων επικεντρώνονται στη δομή του κλάσματος ως μέρους-όλου και την κατανόησή του μέσα από τα μοντέλα εμβαδού (χρήση κύκλων ή άλλων γεωμετρικών σχημάτων χωρισμένων σε ίσα μέρη). Ωστόσο, η εκτεταμένη χρήση της στερεότυπης μορφής των μοντέλων εμβαδού στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών (π.χ. ο χωρισμός του τετραγώνου σε τέταρτα) αφενός θεωρείται ως εισαγωγική και προσιτή προσέγγιση του κλάσματος για τους μαθητές και, αφετέρου, δεν εξασφαλίζει εννοιολογικά την οικοδόμηση της έννοιας. Σύμφωνα με άλλα ερευνητικά ευρήματα (Καλδρυμίδου & Κοντοζήσης, 2003, στο Γαγάτσης κ.α., 2006) οι μαθητές, ιδιαίτερα σε μικρότερες τάξεις, για παράδειγμα στη Γ΄ τάξη, δεν γνωρίζουν καλά τα γεωμετρικά σχήματα, τις ιδιότητες και τις σχέσεις των μερών τους προκειμένου να κατανοήσουν άμεσα προφανείς σχέσεις που δημιουργούνται και να τις αξιοποιήσουν στα κλάσματα. Για παράδειγμα, ο συνήθης χωρισμός γεωμετρικών σχημάτων (κύκλος, τετράγωνο) οδηγεί τους μαθητές στο σωστό αποτέλεσμα, ωστόσο, δεν βοηθάει τα παιδιά να αντιληφθούν ότι μπορούν να δημιουργηθούν εκτός από ίσα μέρη και μέρη ισοδύναμα σε μέγεθος, που να αναπαριστούν την ίδια ποσότητα, π.χ. χωρισμός τριγώνου.

Σε αντίθεση με τη χρήση των «μοντέλων επιφάνειας», τα μοντέλα «μήκους ή μέτρησης» μέσα από λωρίδες χαρτιού, ευθύγραμμα τμήματα ή την αριθμογραμμή απαντώνται ελάχιστα στα εγχειρίδια και των δυο τάξεων. Αν και αρκετοί ερευνητές (Clarke et al., 2008. Usiskin, 2007. Siegler et al., 2010, στο van de Valle et al., 2017) θεωρούν πως τα μοντέλα μήκους βοηθούν τους μαθητές στην εννοιολογική κατανόηση των κλασματικών αριθμών και γι' αυτό θα πρέπει να χρησιμοποιούνται ως βασικά εργαλεία, κατά προτεραιότητα, στη διδασκαλία τους, η εμφάνισή τους στα εγχειρίδια των μαθηματικών των δύο τάξεων είναι περιορισμένη (9%, 11%), ενδεχομένως λόγω της κυριαρχίας του μοντέλου επιφάνειας. Ωστόσο, είναι πιθανόν η περιορισμένη εμφάνισή τους να ακολουθεί ερευνητικά ευρήματα που υποστηρίζουν ότι η χρήση τους είναι δύσκολη. Για παράδειγμα ο Kilpatrick και οι συνεργάτες του (2001, στο Σκουμπουρδή, 2009) βρήκαν πως, όταν δόθηκε σε μαθητές (Γ΄, Δ΄ και Ε΄ τάξης) ο χάρακας ως εργαλείο μέτρησης, ελάχιστοι κατανόησαν ότι κάθε σημείο στην κλίμακα του χάρακα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αφετηρία. Επίσης, μαθητές της ίδιας ηλικίας δυσκολεύτηκαν να τοποθετήσουν το κλάσμα 7/8 σε μια αριθμογραμμή που είναι χωρισμένη σε τέταρτα, δεύτερα ή δέκατα έκτα (Baturo, 2004). Με άλλα λόγια, αν και η αριθμογραμμή αποτελεί βασικό και αποτελεσματικό αναπαραστατικό εργαλείο για την κατανόηση της σχέσης των κλασμάτων με τους φυσικούς αριθμούς, την κατανόηση της πυκνότητας των κλασμάτων αλλά και της σχέσης τους με τη μονάδα, είναι την ίδια στιγμή ένα πολύπλοκο μοντέλο μέτρησης, λόγω της διπλής λειτουργίας της (εικόνα και σύμβολο) ως οπτικό μοντέλο (Ni & Zhou, 2005. Fazio & Siegler, 2011. Bright, Behr, Post & Wachsmuth, 1988, στο van de Walle et al., 2017). Η συχνότερη παρουσία των μοντέλων του μήκους στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών είναι πιθανόν να ενίσχυε και την εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων από τους μαθητές, δίνοντας επιπλέον ευκαιρίες και τρόπους προσέγγισης στην πολυσύνθετη έννοια του κλάσματος (Usiskin, 2007. Clarke et al., 2008. Lortie-Forgues, Tian & Siegler, 2015).

Περιορισμένη είναι ωστόσο, και η παρουσία των «συνόλων», ως μοντέλων αναπαράστασης στα εγχειρίδια των μαθηματικών της Γ΄ τάξης (19%) και ελάχιστη σε αυτό της Δ΄ τάξης (4%), με δραστηριότητες που κάνουν αναφορά σε διακριτές ποσότητες όπως καραμέλες, χελιδόνια και νομίσματα. Προηγούμενα ερευνητικά αποτελέσματα (Lamon, 1999. Marshall, 1993, στο Charalambous & Pita-Pantazi,

2007) μαρτυρούν ότι η διδασκαλία του κλάσματος μέσα από διακριτές ποσότητες (σύνολο αντικειμένων, ομάδα ανθρώπων ή ζώων) δεν είναι εύκολη και εμφανίζεται ελάχιστα στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών. Μια πιθανή εξήγηση της δυσκολίας που εμφανίζουν, η οποία περιορίζει τη συχνότητα παρουσίας τους σε δραστηριότητες των κλασμάτων στα σχολικά εγχειρίδια, θα μπορούσε να αποτελεί το γεγονός ότι πολλές φορές το περιεχόμενο (στοιχεία) των συνόλων δεν είναι οργανωμένο σε τόσες ισοδύναμες ομάδες όσες λέει ο παρονομαστής του κλάσματος, με αποτέλεσμα οι μαθητές τους να δυσκολεύονται στη διαχείρισή τους (van de Walle et al., 2017). Όπως αναφέρουν οι Φιλίππου και Χρίστου (1995), συχνά οι μαθητές, όταν καλούνται να εντοπίσουν το μέρος ενός συνόλου σε διακριτές ποσότητες, απαντούν με κλάσμα και αναφέρονται σε λόγο και όχι σε μέρος από το σύνολο των αντικειμένων (της μονάδας) που τους δίνεται, εύρημα που υποδηλώνει τη δυσκολία τους να αντιληφθούν τη σχέση της μονάδας (μέρους) με το όλο.

Τα μοντέλα αναπαράστασης στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών των δύο τάξεων (Γ΄ και Δ΄) αναδεικνύονται μέσα από τη χρήση ποικιλίας αναπαραστατικών μέσων (γεωμετρικές επιφάνειες, πίτσες, ευθύγραμμα τμήματα, σύμβολα, εικόνες και σχηματικές αναπαραστάσεις) που κατανέμονται σχεδόν ισόποσα σε Τετράδια εργασιών και Βιβλία μαθητή, όμως διαφέρουν σε συχνότητα εμφάνισης. Αυτή η ποικιλία των μέσων στις δραστηριότητες φαίνεται να βρίσκεται σε συμφωνία με ευρήματα (Σκουμπουρδή, 2009. Fan & Zhu, 2007. Baturo, 2004. Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007. Misquitta, 2011) που δείχνουν ότι τα ποικίλα αναπαραστατικά μέσα συντελούν θετικά στη διδασκαλία προκειμένου οι μαθητές να κατανοήσουν, και να ερμηνεύσουν τις σχέσεις που εμπεριέχονται στους κλασματικούς αριθμούς.

Οι συνεχείς γεωμετρικές επιφάνειες (τετράγωνο, κύκλος, ορθογώνιο), η πίτα, οι πίτσες κ.λ.π. ως χειραπτικά μέσα, βρέθηκε να εμφανίζονται με τη μεγαλύτερη συχνότητα (28%) στα εγχειρίδια της Γ΄ τάξης, επιβεβαιώνοντας εν μέρει την αρχική υπόθεση της εργασίας ότι στερεοτυπικά γεωμετρικά σχήματα (κύκλος, τετράγωνο) και εικόνες θα εμφανίζονται συχνότερα προκειμένου να αναδείξουν την έννοια του κλάσματος στα εγχειρίδια. Το εύρημα αυτό συγκλίνει και με τη θέση που υποστηρίζουν οι Γαγάτσης κ.α. (2006) ότι η διδασκαλία της έννοιας του κλάσματος στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό σε στερεοτυπικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν το εμβαδόν ή τις γεωμετρικές επιφάνειες προκειμένου να αναδείξουν τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες των κλασματικών αριθμών. Η επανάληψη αυτή που παρατηρείται σε συγκεκριμένα αναπαραστατικά μέσα (μοντέλα επιφάνειας), όπως αναφέρουν οι ίδιοι ερευνητές, ενισχύει τη δυσκολία των μαθητών να αντιληφθούν το κλάσμα ως μία ποσότητα, ως αριθμό που προέρχεται από τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στον αριθμητή με τον παρονομαστή γιατί ακολουθώντας πάντα την ίδια διαδικασία, καταμετρούν τόσα μέρη όσα υπαγορεύει ο αριθμητής του κλάσματος και σκιάζουν τη δοσμένη επιφάνεια ενισχύοντας την προσοχή τους μόνο στον αριθμητή, αγνοώντας τον παρονομαστή. Στη θέση αυτή συγκλίνουν και οι Nguyen, Duong και Phan (2017), οι οποίοι, επιβεβαιώνουν ένα στερεοτυπικό σύστημα δραστηριοτήτων στα σχολικά εγχειρίδια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, για τη διδασκαλία των κλασμάτων στο Βιετνάμ, το οποίο στηρίζεται στην επιφάνεια και αναδεικνύει το «μέρος-όλου». Οι ίδιοι ερευνητές επισημαίνουν την έλλειψη αντι-παραδειγμάτων στα σχολικά εγχειρίδια και θεωρούν την παρουσία τους ιδιαίτερα χρήσιμη ώστε να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια του κλάσματος (π.χ. μια επιφάνεια που χωρίζεται σε άνισα μέρη).

Οι εικονικές αναπαραστάσεις κυριαρχούν στα εγχειρίδια της Δ΄ τάξης (36%) και εμφανίζονται σε μεγάλο βαθμό στηρίζοντας εισαγωγικά τη νέα έννοια (κυρίως στα δεκαδικά κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς) δίνοντας βασικές πληροφορίες για προβληματισμό. Αντίθετα, στη Γ΄ τάξη η παρουσία της εικόνας είναι πιο περιορισμένη (21%) και λειτουργεί συνδυαστικά με τα μοντέλα συνόλων (απεικονίζοντας αντικείμενα) και τις λεκτικές περιγραφές ενισχύοντας και οργανώνοντας πιθανόν πιο ευχάριστα για τους μαθητές τις πληροφορίες. Παρόμοια, τα γραπτά σύμβολα αξιοποιούνται, με μεγάλη συχνότητα (25%) στη Δ΄ τάξη αμέσως μετά την εικόνα και υποστηρίζουν κυρίως, όπως και στη Γ΄ τάξη (18%), δραστηριότητες με αριθμητικές πράξεις εξάσκησης και εμπέδωσης.

Τα υπόλοιπα αναπαραστατικά μέσα [λεκτικές περιγραφές-πρόβλημα, σχηματικές αναπαραστάσεις (πίνακες, διαγράμματα)] παρουσιάζονται περιορισμένα. Η μικρή ηλικία των μαθητών ενδεχομένως περιορίζει την παρουσία τους. Ωστόσο, αυτό δεν συνάδει με τους Anghileri (2001), Gagatsis et al. (2004) και van de Walle (2005) που τα θεωρούν σημαντικά επικοινωνιακά εργαλεία γιατί ενισχύουν την επικοινωνία των ιδεών και την ανάπτυξη μαθηματικών συζητήσεων μεταξύ των μαθητών που τα χρησιμοποιούν.

Εξετάζοντας συγκριτικά το σύνολο των δραστηριοτήτων που καταγράφονται στα εγχειρίδια και των δύο τάξεων, όπως προαναφέρθηκε, η κατανομή τους είναι άνιση. Εμφανίζονται περισσότερες δραστηριότητες στη Γ΄ τάξη (42, από τις συνολικά 70 δραστηριότητες), και μόνο 28 στη Δ΄τάξη οι οποίες στην πλειοψηφία τους καλύπτουν τη διδασκαλία των δεκαδικών κλασμάτων (μόλις δύο δραστηριότητες αφορούν στα κλάσματα). Το εύρημα αυτό πιθανότατα εξηγείται από τη διαφοροποίηση στους στόχους που τίθενται από το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ., 2003), για τα Μαθηματικά του δημοτικού σχολείου στις δύο συνεχόμενες τάξεις. Πιο συγκεκριμένα, για την Δ΄ τάξη του δημοτικού σχολείου, τα κλάσματα συμπεριλαμβάνονται στη θεματική ενότητα των δεκαδικών αριθμών και οι στόχοι επικεντρώνονται στη σχέση δεκαδικών αριθμών και δεκαδικών κλασματικών αριθμών, τις μετατροπές τους από τη μια μορφή στην άλλη, τη σύγκριση και την τοποθέτησή τους στην αριθμογραμμή. Αντίθετα, για την Γ΄ τάξη, οι στόχοι που τίθενται εστιάζουν κυρίως στην κλασματική μονάδα και την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών μέσα από ποικίλες αναπαραστάσεις να γνωρίσουν και να κατανοήσουν τα κλάσματα (Α.Π.Σ., 2003).

Αρκετές διαφοροποιήσεις ανάμεσα στις δύο τάξεις παρατηρούνται αναφορικά με τη συχνότητα που εμφανίζουν οι διαστάσεις (ερμηνείες) του κλάσματος και τα μοντέλα που υιοθετούνται για να αναδειχθεί το κλάσμα. Πιο συγκεκριμένα, σχεδόν στις μισές δραστηριότητες (41%) της Δ΄ τάξης δεν εμφανίζεται κάποια διάσταση, με το αντίστοιχο ποσοστό στη Γ΄ τάξη να είναι στο 7% των δραστηριοτήτων. Παρόμοια, στη Δ΄ τάξη παρατηρείται απουσία μοντέλων στο μεγαλύτερο ποσοστό των δραστηριοτήτων (46%), ενώ στη Γ΄ τάξη ελάχιστες δραστηριότητες στερούνται αναπαραστατικών μοντέλων (5%). Είναι πιθανόν, αυτές οι αποκλίσεις να σχετίζονται με το γεγονός ότι οι δυο τάξεις στοχεύουν σε διαφορετικές μαθηματικές έννοιες (π.χ., Δ΄ τάξη, δεκαδικά κλάσματα, δεκαδικοί αριθμοί – Γ΄ τάξη, κλασματική μονάδα, δεκαδικά κλάσματα) και απευθύνονται σε διαφορετικές ηλικίες μαθητών.

Παράλληλα, μια πλούσια ποικιλία αναπαραστατικών μέσων υπάρχει στα εγχειρίδια και των δύο τάξεων. Ένας εύστοχος συνδυασμός των μέσων (π.χ. λεκτική περιγραφή, εικόνα, εμπράγματες καταστάσεις και πίνακες) εμπλουτίζει τις δραστηριότητες στα κλάσματα αλλά η συχνότητα παρουσίας τους εμφανίζει εν μέρει σταθερότητα, συνέπεια και συνέχεια ανάμεσα στις δυο τάξεις. Ενώ στη Γ΄ τάξη βρέθηκε να υπάρχει ποικιλία αναπαραστατικών μέσων με παρόμοια συχνότητα εμφάνισης [(χειραπτικά μέσα (28%), εικόνες (21%), γραπτά σύμβολα (18%), αναπαραστάσεις πραγματικών καταστάσεων (16%)], στη Δ΄ τάξη οι εικόνες (36%) και τα γραπτά σύμβολα (25%) κυριαρχούν, παρουσιάζοντας μια μονομέρεια στα μέσα που αξιοποιούνται. Το γεγονός αυτό δεν ακολουθεί τα ερευνητικά ευρήματα (van de Walle et al., 2017.

Misquitta, 2011. Λεμονίδης, 2016) που υποστηρίζουν πως ο χειρισμός μιας έννοιας μέσα από διαφορετικά σημειολογικά συστήματα λειτουργεί θετικά και συμβάλλει στην ανάπτυξη ευελιξίας ώστε οι μαθητές να προσεγγίσουν την ίδια έννοια μέσα από άλλα πλαίσια, που τους ταιριάζουν και τα κατανοούν καλύτερα. Αντίθετα, τη θέση αυτή, της χρήσης των διαφορετικών αναπαραστατικών μέσων και των περασμάτων από τη μία αναπαράσταση στην άλλη, φαίνεται να ακολουθούν τα εγχειρίδια της Γ΄ τάξης. Για παράδειγμα, μέσα από δύο δραστηριότητες παρουσιάζεται ένα «παιχνίδι ρόλων». Οι μαθητές υποδύονται διάφορους ρόλους, όπως τους πρακτικούς (χρησιμοποιούν χειραπτικά μέσα - αντικείμενα), τους λογοτέχνες, τους ζωγράφους και τους μαθηματικούς και, εναλλάσσοντας τους ρόλους τους, μεταφράζουν το κλάσμα που τους δίνεται κάθε φορά. Για παράδειγμα, οι λογοτέχνες εκφράζουν το κλάσμα στην ομιλούμενη γλώσσα, δηλαδή γράφουν τις κλασματικές μονάδες με αριθμολέξεις (ένα τέταρτο), οι ζωγράφοι εκφράζονται με εικόνες (σχεδιάζουν), οι μαθηματικοί με γραπτά σύμβολα και οι πρακτικοί κόβουν κάποιο αντικείμενο π.χ. φρούτα, πίτες, κ.λ.π

Τις διαφορές και αποκλίσεις ανάμεσα στις δύο συνεχόμενες τάξεις επιχειρεί τα τελευταία χρόνια να περιορίσει το Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Πράξη 33/267-2018 Δ.Σ.), που δίνει προτεινόμενες διορθώσεις στη διδακτέα ύλη και οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών σε όλες τις τάξεις του δημοτικού σχολείου. Ενδεικτικά, για τα κλάσματα στη Δ΄ τάξη αναφέρεται: «*άκρως απαραίτητο να αφιερωθεί περισσότερος χρόνος, πέραν του προτεινόμενου από το εγχειρίδιο, στη μελέτη των κλασμάτων, ώστε η Δ΄ τάξη να αποτελέσει σημαντική γέφυρα μεταξύ της Γ΄ και Ε΄*» (σελ.50).

Μέσα από τη χαρτογράφηση και ανάλυση των δραστηριοτήτων που αφορούν στα κλάσματα, στις δυο συνεχόμενες τάξεις του δημοτικού σχολείου, επιχειρήθηκε να αναδειχθεί ο τρόπος που συμβάλλουν τα ελληνικά εγχειρίδια προκειμένου να κατακτηθεί η μαθηματική γνώση για τα κλάσματα στη Γ΄ και στη Δ΄ δημοτικού. Έγινε προσπάθεια να φανούν οι διδακτικές προθέσεις, δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο ενισχύεται ο μαθητής στην κατανόηση του περιεχομένου και το διδακτικό υλικό που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο δάσκαλος στη διδασκαλία των κλασμάτων, αλλά και κάποια στοιχεία που δυνητικά διαμορφώνουν το κοινωνικο-πολιτισμικό πλαίσιο που υιοθετείται από τα ισχύοντα σχολικά εγχειρίδια. Έμφυλες ανισότητες και διαφοροποιήσεις μεταξύ των προσεγγίσεων των δύο φύλων που χαρακτήριζαν παλαιότερες αναλύσεις σε εγχειρίδια και σχολικά περιοδικά μαθηματικών (Stamou, Chronaki & Zioga, 2007) δεν εμφανίζονται. Άλλο στοιχείο που διαφαίνεται έμμεσα είναι η διαπολιτισμικότητα. Για παράδειγμα, οι ήρωες στις δραστηριότητες είναι αγόρια και κορίτσια διαφορετικών πολιτισμών (η Υπατία, η Χαρά, ο Γιώργος, ο Χασάν, ο Σαλ, ο Πυθαγόρας κ.λ.π.) που επικοινωνούν και συνεργάζονται αρμονικά καλλιεργώντας το κλίμα της ισότητας και της ενότητας στη σχολική κουλτούρα χωρίς διακρίσεις και σύνορα. Η παρουσία γλυκών και φαγητών στα μαθηματικά έργα (πίτσες, πίτες, μπισκότα, τούρτες, σοκολάτες, παγωτά κ.λ.π) αποκαλύπτει έμμεσα τη συχνότητα κατανάλωσης των συγκεκριμένων αγαθών στα παιδιά. Αναδεικνύονται, επίσης, πληροφορίες για τα παιχνίδια τους (βελάκια, στόχοι, αυτοκόλλητα), τις δραστηριότητές τους (σχολικές εκδρομές, θέατρο) όπως και πληροφορίες για την οργάνωση μιας σχολικής τάξης (η θέση των θρανίων, ο πίνακας, η βιβλιοθήκη κ.λ.π.).

Στην προσπάθεια υλοποίησης της παρούσας εργασίας δυσκολίες παρουσιάστηκαν αναφορικά με την πυκνή διατύπωση και ταυτόχρονη παρουσία μοντέλων και αναπαραστάσεων στις δραστηριότητες. Ωστόσο, χρειάστηκαν επανειλημμένες και προσεχτικές αναγνώσεις, ομαδοποίηση και λεπτομερή ταξινόμηση των δραστηριοτήτων για να είναι όσο το δυνατόν περισσότερο ακριβής και άρτια η χαρτογράφηση και να επιτευχθεί ο σκοπός της εργασίας.

Αν και τα ευρήματα της παρούσας εργασίας αφορούν αποκλειστικά τα κλάσματα, και συγκεκριμένα στη Γ΄ τάξη και τη Δ΄ τάξη, ενδιαφέρον θα έχει να μελετηθούν περαιτέρω τα κλάσματα σε όλα τα σχολικά εγχειρίδια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς πολλές είναι οι πτυχές που θα μπορούσαν να διερευνηθούν εκτενέστερα, βοηθώντας σταδιακά στην οικοδόμηση της γνώσης τους από τους μαθητές. Επίσης θα άξιζε να μελετηθούν οι επιδόσεις των μαθητών αντίστοιχων τάξεων, Γ΄ και Δ΄ δημοτικού, στις διαστάσεις (ερμηνείες) του κλάσματος, προκειμένου να εξεταστεί αν πράγματι η μεγάλη παρουσία του «μέρους-όλου» οδηγεί σε καλύτερη κατανόηση της συγκεκριμένης διάστασης από τα παιδιά.

Κλείνοντας την παρούσα εργασία, συμπερασματικά θα μπορούσε να αναφερθεί πως τα κλάσματα, στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών των δύο τάξεων, καταλαμβάνουν ευρεία έκταση ακολουθώντας τη σπειροειδή διάταξη της ύλης. Επίσης, μέσα από τα εγχειρίδια επιδιώκεται η σύγχρονη και πολύπλευρη προσέγγιση της κλασματικής έννοιας χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό και την μοντελοποίηση ακολουθώντας ερευνητικά ευρήματα (Newton & Newton, 2006. Charalambous &

Pita-Pantazi, 2007. Fan & Zhu, 2007) που επιβεβαιώνουν τον καθοριστικό τους ρόλο στην κατανόηση των κλασμάτων. Αναπόφευκτα, ωστόσο, η άρτια γνώση του μαθηματικού περιεχομένου και η κατάλληλη και επαρκής παιδαγωγική γνώση περιεχομένου του εκπαιδευτικού (Shulman, 1987) συντελούν στην αποδοτικότερη και αποτελεσματικότερη αξιοποίηση των εγχειριδίων για τους μαθητές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

5.1 Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

Anghileri J. (2001). *Principles and practices in arithmetic teaching. Innovative approaches for the primary classroom*. Philadelphia: Open University Press.

Apple, M. W., & Christian-Smith, L. K. (1991). The politics of the textbook. In M. W. Apple & L. K. Christian-Smith (Eds.), *The politics of the textbook.* London,UK: Routledge.

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 132–144.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Baturo, A.R. (2004). Empowering Andrea to help year-5 students construct fraction understanding. In M. J. Hoines & A. Fuglestad (Eds*.), Proceedings of the 28th PME Conference, 2* (pp.95-102). Bergen: Bergen University College.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds*.), Acquisition of mathematics concepts and processes* (91–125). New York: Academic Press.

Brummelen, H. V. (1991). The world portrayed in texts: An analysis of the content of elementary school textbooks. *The Journal of Educational Though*t, *25*(3), 202-221.

Carraher, D.W. (1996). Learning about fractions. In L.P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning (*pp. 241–266). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2005). Revisiting a theoretical model on fractions: Implications for teaching and researching. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 233-240). Melbourne:PME.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*(3), 293-316.

Clarke, D. M., Roche, A., Mitchell, A., & Sukenik, M. (2006). Assessing student understanding of fractions using task-based interviews. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds), *Proceedings of the 30th conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 337–344). Prague: PME.

Clarke, D. M., Roche, A., & Mitchell, A. (2008). Ten practical tips for making fractions come alive and make sense. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(7), 373–380.

Cramer, K. A., & Whitney, S. (2010). Learning rational number concepts and skills in elementary classrooms: Translating research to the elementary classroom. In D. V. Lambdin & F. K. Lester (Eds.), *Teaching and learning mathematics:*

Translating research to the elementary classroom (pp. 15-22). Reston, VA: NCTM.

Freeman, D. J., & Porter, A. C. (1989). Do Textbooks Dictate the Content of Mathematics Instruction in Elementary Schools? *American Educational Research Journal , 26*(3), 403-421.

Gilbert, J. K. (2010). The role of visual representations in the learning and teaching of science: An introduction. *Asia-Pacific Forum on Science Learning and Teaching*, *11*(1), 1-19.

Goldin, G.A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 137-165.

Haggarty, L., & Pepin, B. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal, 28* (4), 567-59.

Hecht,S., A., Vagi, K., J. (2012). Patterns of strengths and weaknesses in children's knowledge about fractions. *Journal of Experimental Child Psychology, (111),* 212–229.

Hino, K., Kaiser, G., Knipping, C. (2002). Comparing teaching mathematics in eastern and western traditions. Looking at French, German, England, and Japan. In ICMI, *Comparative Study Conference* (pp.319-351). Hong Kong: University of Hong Kong.

Jones, D. L. & Tarr, J. E. (2007). An examination of the levels of cognitive demand required by probability tasks in middle grades mathematics textbooks. *Statistics Education Research Journal*, *6*(2), 4–27.

Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, New Jersey: LEA.

Kieren, T.E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: papers from a research workshop* (pp. 101–144). Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC

Lamon, S.J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding*, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. L. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representations in school mathematics* (pp. 146–165). Reston: NCTM.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Towards a theoretical framework for research. In F. Lester (Ed*.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Reston, VA: NCTM.

Lamon, S. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies*. New York, NY: Taylor & Francis Group.

Li, Y., Chen, X., & An, S. (2009). Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, Japanese, and US mathematics textbooks: The case of fraction division. *ZDM*, *The International Journal on Mathematics Education, 41*, 809–826.

Lin, F., & Huang, M. (1993). The beginning fractions curriculum in Taiwan: Analysis and criticism. *Chinese Journal of Science Education, 1,* 1–27.

Lv, Y. (1996). Elementary school teachers' knowledge of fraction. *Journal of National Tainan Teachers College, 9,* 427–460.

Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, *38,* 201-221.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. New Jersey: Erlbaum.

Marshall, S.P. (1993). Assessment of Rational Number Understanding: A Schema-Based Approach. In T.P. Carpenter, E. Fennema & T.A. Romberg (Eds.), *rational numbers: An integration of research*, (pp. 261-288*).* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics 56,* 255-286.

Misquitta, R. (2011). A review of the literature: Fraction instruction for struggling learners in mathematics. *Learning Disabilities Research and Practice, 26(2),* 109–119.

Miura, I. T., Okama, Y., Valhovic-Stetic, V., Kim, C. C., & Han, J. H. (1999). Language supports for children's understanding of numerical fractions: Crossnational comparisons. *Journal of Experimental Child Psychology, 74*, 356–365.

National Council of Teachers of Mathematics, NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Newton, K. J. (2008). An extensive analysis of pre-service elementary teachers' knowledge of fractions. *American Educational Research Journal, 45*(4), 1080–1110.

Nguye, L., Duong, T., & Phan, C., (2017). Identifying the concept *"*fraction*"* of primary school students*:* The investigation in Vietnam. *Educational Research and Reviews School of Education.* Vietnam: Can Tho University.

Ni, Y. J. (1999). The understanding of the meaning and nature of fraction of Grade fifth and sixth. *Psychological Development and Education, 11*, 26–30.

Olanoff, D., Lo, J. J., & Tobias, J. (2014). Mathematical content knowledge for teaching elementary mathematics: A focus on fractions. *The Mathematics Enthusiast, 11*(2), 267-310.

Pepin, B., & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. *ZDM 33*(5), 158-175.

Pitkethly, A., & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics, 30*(1), 5-38.

da Ponte, J. P., & Marques, S. (2007). Proportion in school mathematics textbooks: A comparative study. In D. Pitta - Pantazi & G. Philippou (Eds.), *5th Congress of ERME, the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2443-2452). Cyprus: Larnaca.

Post, T. Behr, M., & Lesh, R (1982). Interpretations of rational number concepts. In L. Silvey & J. Smart (Eds*), Mathematics for grades 5-9* (pp.51-72). Reston: Virginia, NCTM.

Reys, B. J., Reys, R. E., & Chávez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. *Educational Leadership, 61*(5), 61–66.

Shulman, L. S. (1986).Those who understand: A conception of teacher knowledge. *American Educator, 10*(1), 9–15, 43–44.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*(5), 503–518.

Sosniak, L. A., & Perlman, C.L.(1990). Secondary education by the book. *Journal of Curriculum Studies*, *22*(5), 427-442.

Strauss, A., Corbin, J. (2014). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (4nd Eds.). Kalifornia, Thousand Oaks: Sage Publications.

Tan, J. (2010)., Grounded theory in practice: Issues and discussion for new qualitative researchers. *Journal of Documentation, 66*(1), 93-112.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education,31*(1) 5-25.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' reasoning about rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 181-209.

Woodward, A., & Elliott, D. L. (1990). Textbook use and teacher professionalism. In D. L. Elliott and A. Woodward (Eds.), *Textbooks and schooling in the United States* (pp. 178-193). Chicago, IL: The National Society for the Study of Education.

Wu, H. (2011). Understanding numbers in elementary school mathematics (pp. 173-374). RI: American Mathematical Society.

Xu, H. (1998). Children's ability of partition: cutting and paper folding. *Journal of National Tainan Teachers College, 31, 327–369.*

Yanik, B. Helding, B., & Flores, A. (2008). Teaching the concept of unit in measurement interpretation of rational numbers. *Elementary Education Online, 7*(3), 693-705.

Zhou, Z., Peverly, S. T., & Xin, T. (2006). Knowing and teaching fractions: A crosscultural study of American and Chinese mathematics teachers. *Contemporary Educational Psychology, 31*, 438–457.

5.2 Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α., & Σαΐτης, Α. (2007). *Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού Βιβλίο Δασκάλου*, ΥΠΕΠΘ, ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Γαγάτσης, Α., Ιωάννου, Κ., Σιημητρά – Κωνσταντίνου, Α., & Χριστοδουλίδου, Ο. (2006). Γιατί οι μαθητές δυσκολεύονται στα κλάσματα; Στο Ε. Φτιάκα, Α. Γαγάτσης, Ι. Ηλία, & Μ. Μοδέστου (Εκδ.), *Πρακτικά 9ου Παγκύπριου Συνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου & Κ.Ο.Ε.Ε.* (σσ. 99-110). Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου Ε., & Σιακαλλή Μ. (2001). *Θεωρίες αναπαράστασης και μάθηση των μαθηματικών*. Λευκωσία: Intercollege Press.

Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης (Δ.Ε.Π.Π.Σ.)*,* Τόμος Α΄(2003). Αθήνα: ΥΠΕΠΘ και Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Δεσλή, Δ., & Κυριακορεϊζη, Α. (2015). Γνώσεις περιεχομένου και παιδαγωγικές γνώσεις περιεχομένου υποψήφιων δασκάλων στις πράξεις με κλάσματα. Στο Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλος & Μ. Τζεκάκη (Επιμ.). *Πρακτικά του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ: Μαθηματικά με διάκριση και χωρίς διακρίσεις.* Θεσσαλονίκη: ΕΝΕΔΙΜ.

Fritzsche, K. P. (1992). Τα σχολικά εγχειρίδια ως αντικείμενο έρευνας. Ματιές στη διεθνή έρευνα σχολικών εγχειριδίων (Μετάφραση: Αχιλλέας Καψάλης). *Παιδαγωγική Επιθεώρηση, 17,* 173-183.

Καλδρυμίδου, Μ., Πόταρη, Δ., Σακονίδης, Χ., & Τζεκάκη, Μ. (2009). Η δραστηριότητα και η διαχείρισή της στην τάξη ως παράγοντες συγκρότησης του μαθηματικού νοήματος, Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή, Γ. Φεσάκης (Επιμ.), *Πρακτικά 3ου Συνεδρίου* *της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών: Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές, 343-345.* Ρόδος:ΕΝΕΔΙΜ

Καψάλης, Α., & Χαραλάμπους, Δ. (2008). *Σχολικά εγχειρίδια, θεσμική εξέλιξη και σύγχρονη προβληματική.* Αθήνα: Μεταίχμιο.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών.* Αθήνα: Εκδόσεις Leader Books.

Κολέζα, Ε. (2006). Σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών: Α΄ Μέρος: Ένα θεωρητικό πλαίσιο αξιολόγησης. *Ευκλείδης Γ΄, 65,* 3-27.

Κολέζα, Ε. (2007). Σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών: Β΄ Μέρος: Γνωστική και Κοινωνιολογική ανάλυση. *Ευκλείδης Γ΄, 66*, 3-24.

Κολέζα, Ε. (2017). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος Ι., & Σπανακά, Α. (2007). *Μαθηματικά Γ΄ Δημοτικού*, *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής*, Βιβλίο Δασκάλου, ΥΠΕΠΘ ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Λεμονίδης, Χ. (2016). *Στην τροχιά των ρητών*. Θεσσαλονίκη: Κυριακίδης.

Ματσαγγούρας, Η. (2006). Διδακτικά εγχειρίδια*:* Κριτική αξιολόγηση της γνωσιακής, διδακτικής *και* μαθησιακής λειτουργίας *τους. Συγκριτική και διεθνής Εκπαιδευτική Επιθεώρηση, 7,* 60-92.

Μπονίδης, Κ. (2004). *Το περιεχόμενο του σχολικού βιβλίου ως αντικείμενο έρευνας: διαχρονική εξέταση της σχετικής έρευνας και μεθοδολογικές προσεγγίσεις.* Αθήνα: Μεταίχμιο.

Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (2011). *Μαθηματικά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Δημοτικό), Νέο Σχολείο (Σχολείο 21ου αιώνα).* Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ΕΣΠΑ 2007-2013.

Nunes T., & Bryant P. (2007). *Τα παιδιά κάνουν μαθηματικά (Εισαγωγή και επιμέλεια: Δ. Δεσλή).* Αθήνα: Gutenberg.

Οικονόμου, Α., Σακονίδης, Χ., & Τζεκάκη Μ. (2000). Αξιολόγηση των μαθηματικών γνώσεων μαθητών Στ΄ Δημοτικού και Γ΄ Γυμνασίου. Στο Μ. Τζεκάκη & Ι. Δεληγιωργάκος (Επιμ.), *Έρευνα για εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών,* ΥΠΕΠΘ-ΚΕΕ, ΕΠΕΑΕΚ.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών – Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης, τ. Α΄Αθήνα: ΥΠ.Ε.Π.Θ και Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Παπαδόπουλος, Ι. (2013). *Τα Μαθηματικά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και η διδασκαλία τους.* Θεσσαλονίκη: Πανεπιστήμιο Μακεδονίας.

Σκουμπουρδή, Χ. (2008). Η αριθμογραμμή στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Στο *25ο Πανελλήνιο Συνέδριο μαθηματικής παιδείας (ΕΜΕ): Η μαθηματική εκπαίδευση και η σύνθετη πραγματικότητα του 21ου αιώνα* (σελ. 303-312), Βόλος.

Στάμου, Α., Χρονάκη, Ά., & Ζιώγα, Α. (2007). Επιστημονικοί λόγοι και έμφυλες αναπαραστάσεις στο σχολικό μαθηματικό περιοδικό Ευκλείδης Α'. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, (1),* 67-89. ΕΝΕΔΙΜ

Σταφυλίδου , Σ. (2001). *Μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες μάθησης: Η ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος.* Αδημοσίευτη Διδακτορική Διατριβή. Αθήνα: Τμήμα Μεθοδολογίας, Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά παιδιά, μεγάλα μαθηματικά νοήματα.* Αθήνα: Gutenberg.

Τύπας, Γ. (2005). Τα νέα διδακτικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης: το πλαίσιο δημιουργίας και τα ειδικά χαρακτηριστικά τους. *Πρακτικά Συνεδρίου του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου σε συνεργασία με το Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, με θέμα: «Διδακτικό βιβλίο και εκπαιδευτικό υλικό στο Σχολείο: Προβληματισμοί – Δυνατότητες – Προοπτικές»*. Θεσσαλονίκη: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

van de Walle, A. John (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο. Μια εξελικτική διδασκαλία* (Επιστημονική επιμέλεια: Τριαντάφυλλος Α. Τριανταφυλλίδης Α., Μετάφραση: Αλεξανδροπούλου, Β. Κομπορόζος). Αθήνα: Τυπωθήτω - Γεώργιος Δαρδανός.

van de Walle, V. J. A. (2007). *Διδάσκοντας μαθηματικά για το δημοτικό και το γυμνάσιο: Μια αναπτυξιακή διαδικασία.* Επιστημονική επιμέλεια-θεώρηση: Σ. Σταφυλίδου, Θεσ/νίκη: Επίκεντρο.

van de Walle, J. A., Lovin, L.h., Karp, K.S., & Bay-Williams, J.M. (2017). *Διδάσκοντας μαθηματικά από το νηπιαγωγείο ως το γυμνάσιο.* Αθήνα: Gutenberg.

Φιλλίπου, Γ., & Χρίστου, Κ. (1995). Η μαθηματική εκπαίδευση των δασκάλων και το επίπεδο της διαδικαστική γνώσης και εννοιολογικής κατανόησης των κλασμάτων. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση, 22*, 233-251.

Άλλες Πηγές

ΥΠΕΠΘ-ΠΙ. Διδακτικά πακέτα Δημοτικού Σχολείου Γ΄και Δ΄τάξη. Διαθέσιμο στον ιστότοπο του ψηφιακού σχολείου: http://www.pi-schools.gr/books/