ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

***ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ*: Β' ΗΛΙΚΙΑΚΟΥ ΚΥΚΛΟΥ (13-18 ετών)**

Σύγχρονες μέθοδοι διδασκαλίας της Τριγωνομετρίας στο Λύκειο

του

Λίτκε Μιχαήλ
Α.Ε.Μ.: 810

Επιβλέπων Καθηγητής: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής
Εξεταστές: Παλαιγεωργίου Γεώργιος, Επίκουρος Καθηγητής
Ζαχαριάδης Θεοδόσιος, Καθηγητής

Φλώρινα, Μάρτιος 2020

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Νικολαντωνάκη Κωνσταντίνο για τη στήριξη, τη βοήθεια και για το άριστο κλίμα συνεργασίας.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Ζαχαριάδη Θεοδόσιο και τον επίκουρο καθηγητή κ. Παλαιγεωργίου Γεώργιο για την τιμή που μου έκαναν να συμμετέχουν στην τριμελή επιτροπή.

Θα ήθελα ακόμα να ευχαριστήσω τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα.

Θα ήθελα, τέλος, να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, τη γυναίκα μου Ευγενία, την κόρη μου Άννα και τον γιο μου Όθωνα, για τη στήριξη, τη βοήθεια και την υπομονή που έδειξαν καθόλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών και ιδιαίτερα κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας και να τους υποσχεθώ ότι θα φροντίσω να αναπληρώσω όσο από το χρόνο μου τους στέρησα.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία διερευνά την αποτελεσματικότητα της χρήσης σύγχρονων μεθόδων διδασκαλίας, όπως είναι οι Νέες Τεχνολογίες και η Ιστορία των Μαθηματικών, στην κατανόηση και στην αντιμετώπιση παρανοήσεων των τριγωνομετρικών εννοιών και συναρτήσεων, καθώς επίσης και την ευχέρεια χρήσης της τριγωνομετρίας για την επίλυση προβλημάτων της καθημερινότητας.

Στην έρευνα συμμετείχαν 24 μαθητές της Β' Λυκείου, οι οποίοι πήραν μέρος στη διδακτική παρέμβαση, που χωρίστηκε σε δύο ενότητες. Η πρώτη ενότητα περιλάμβανε επίσκεψη στο εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου, χρήση του λογισμικού GeoGebra μέσω μικροπειραμάτων και συμπλήρωση κατάλληλων φύλλων εργασίας. Η δεύτερη ενότητα περιλάμβανε συμπλήρωση φύλλων εργασίας με ιστορικά στοιχεία και πηγές.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι μαθητές κατάλαβαν καλύτερα τις τριγωνομετρικές έννοιες και ιδιότητες, έκαναν λιγότερα λάθη κατά τη χρήση των τύπων και αντιμετώπισαν με ευχέρεια τριγωνομετρικά προβλήματα που σχετίζονται με την καθημερινότητα. Τέλος, το ερωτηματολόγιο έδειξε ότι οι μαθητές διψούν για εναλλακτικές μεθόδους διδασκαλίας και ότι αντιμετώπισαν το όλο εγχείρημα με σοβαρότητα, συνέπεια και ζήλο.

Λέξεις κλειδιά: Τριγωνομετρία, νέες τεχνολογίες, λογισμικό, GeoGebra, Ιστορία των Μαθηματικών

Abstract

This paper investigates the effectiveness of using modern teaching methods, such as New Technologies and the History of Mathematics, in understanding and addressing misunderstandings of trigonometric concepts and functions, as well as the ease of using trigonometry to solve problems.

The study involved 24 high school students, who took part in the teaching intervention, which was divided into two modules. The first section included a visit to the school's computer lab, the use of GeoGebra software through micro-experiments and the completion of appropriate worksheets. The second section included filling out worksheets with historical data and sources.

The results of the study showed that students understood trigonometric concepts and properties better, made fewer mistakes in using formulas, and coped with trigonometric problems associated with everyday life. Finally, the questionnaire showed that students were thirsty for alternative teaching methods and that they treated the whole project with seriousness, consistency and zeal.

Key words: Trigonometry, new technologies, software, GeoGebra, History of Mathematics

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η τριγωνομετρία αποτελεί μια από τις σημαντικότερες πτυχές στα πλαίσια του μαθήματος των μαθηματικών σε πολλά εκπαιδευτικά συστήματα ανά τον κόσμο. Η διδασκαλία της μάλιστα, λαμβάνει χώρα κατά την φάση της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, δεδομένου άλλωστε, ότι είναι συνυφασμένη με το πλαίσιο των ειδικότερων ικανοτήτων που αποκτά πλέον το παιδί κατά την διάρκεια της εφηβείας, αναφορικά με τη σύλληψη και κατανόηση συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών. Αυτό άλλωστε, είναι συνυφασμένο και με την συγκεκριμένη φάση ανάπτυξης του παιδιού και των εγκεφαλικών του λειτουργιών, με βάση και τα όσα επισημαίνονται από τη μεριά του Jean Piaget, ως προς τις διάφορες φάσεις ανάπτυξης κατά την παιδική και εφηβική ηλικία (ικανότητα σύλληψης και ανάλυσης σύνθετων και αφηρημένων εννοιών) (Wolff, 1960).

Αυτό θα μπορούσαμε να πούμε άλλωστε, ότι ισχύει, μεταξύ άλλων και για το πεδίο της τριγωνομετρίας. Η τριγωνομετρία πιο συγκεκριμένα, είναι ένας κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με τη μελέτη ενός συνόλου διαφόρων ειδικών συναρτήσεων των γωνιών. Παράλληλα εξετάζει και τις εφαρμογές τους σε διάφορους υπολογισμούς, όπως συμβαίνει με την επίλυση στοιχείων του τριγώνου. Αυτό μπορεί να έχει να κάνει, επί παραδείγματι με λύσεις, ως προς γωνίες ή πλευρές των τριγώνων (Σκούρα, 2003).

Η τριγωνομετρία ξεπήδησε στην προσπάθεια να θεμελιωθεί μια ποσοτική αστρονομία η οποία θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να προβλεφθούν οι θέσεις των ουρανίων σωμάτων, ο υπολογισμός του ημερολογίου και να εφαρμοσθεί στη ναυσιπλοΐα και στη γεωγραφία. Θεμελιωτής της αστρονομίας υπήρξε ο Ίππαρχος που έζησε στη Ρόδο και στην Αλεξάνδρεια και πέθανε γύρω στο 125 π.Χ. Για την προσωπική του ζωή ξέρουμε πολύ λίγα και τα περισσότερα που ξέρουμε γι' αυτόν προέρχονται από τα βιβλία του Πτολεμαίου.

Ο Ίππαρχος συνέβαλε αποφασιστικά στη διαμόρφωση της θεωρίας των επικύκλων, και ήταν σε θέση να υπολογίσει εκλείψεις της σελήνης με ακρίβεια μιας έως δύο ωρών. Διέθετε επίσης και μια θεωρία για μια ικανοποιητική εξήγηση του φαινομένου των εποχών. Η σημαντικότερη ανακάλυψη του ήταν ότι τα σημεία που ο άξονας περιστροφής της γης τέμνει την ουράνια σφαίρα μετακινούνται και διαγράφουν κύκλο με περίοδο 2600 χρόνια Το μεγαλύτερο μέρος της τριγωνομετρίας του Ιππάρχου αναφέρεται σε αυτό που σήμερα ονομάζουμε σφαιρική τριγωνομετρία. Και αυτό είναι μοιραίο, αφού τον ενδιέφεραν κυρίως τρίγωνα που σχηματίζονται πάνω στον ουράνιο θόλο. Όμως ανέπτυξε και βασικά σημεία της επιπέδου τριγωνομετρίας.

Το συγκεκριμένο πεδίο μαθηματικών είχε αναδυθεί στη διάρκεια του 3ου αιώνα π.Χ., με άλλα λόγια, κατά την ελληνιστική εποχή, μέσω της διαδικασίας εφαρμογής «τριγωνομετρικών σχέσεων και εξισώσεων» στην αστρονομία (Nagel, 2002). Στα πλαισιά της επίσης, οι μεν Έλληνες ασχολήθηκαν κατά κύριο λόγο με τον υπολογισμό χορδών, ενώ οι Ινδοί αντίστοιχα, ασχολήθηκαν πιο πολύ με την δημιουργία πινάκων, μέσω των οποίων αποτυπώνονται οι τριγωνομετρικές σχέσεις (Boyer, 1991) .

Η παρούσα εργασία ασχολείται με το ζήτημα της διδασκαλίας του μαθήματος της τριγωνομετρίας στα πλαίσια του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος και ειδικότερα στα πλαίσια της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (Λύκειο). Εν προκειμένω, στο θεωρητικό τμήμα της εργασίας, το πρώτο κεφάλαιο εξετάζει ορισμένα ιστορικά στοιχεία, σχετικά με το επιστημονικό και γνωστικό πεδίο της τριγωνομετρίας, τη στιγμή που το δεύτερο κεφάλαιο εστιάζει το ενδιαφέρον του σε ορισμένες γενικότερες παραμέτρους, αναφορικά με τον τρόπο σκέψης και τις μαθησιακές δυνατότητες των παιδιών κατά την περίοδο της εφηβείας που συμπίπτει άλλωστε με το στάδιο φοίτησης στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Από την άλλη μεριά, το τρίτο κεφάλαιο εξετάζει διάφορες σύγχρονες μεθόδους αναφορικά με την διδασκαλία αυτού του γνωστικού πεδίου στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Ας σημειωθεί, ότι η χρήση τέτοιων μεθόδων την ίδια στιγμή, είναι συναφής και με την διδασκαλία εν γένει του μαθήματος των Μαθηματικών στα πλαίσια ενός σύγχρονου εκπαιδευτικού συστήματος.

Η συγκεκριμένη έρευνα επιχειρεί να εστιάσει ειδικότερα στο ζήτημα των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές αναφορικά με διάφορες περιπτώσεις όρων και εννοιών στο πεδίο της Τριγωνομετρίας. Παράλληλα, εστιάζει ειδικά και στο πώς είναι δυνατόν η σύγχρονη ψηφιακή τεχνολογία και η Ιστορία να παίξουν σημαντικό ρόλο εδώ. Άλλωστε, μέσα από τις σχετικές αναφορές, αφενός μεν αναδεικνύονται τυχόν αβλεψίες, κενά και προβλήματα που μπορεί να υφίστανται στα πλαίσια των σύγχρονων Αναλυτικών Προγραμμάτων, ειδικά, ως προς την διδασκαλία της Τριγωνομετρίας και αφετέρου προβάλλονται κάποιες παράμετροι, όπως η ψηφιακή τεχνολογία και τα ιστορικά αρχεία, που μπορούν να αποτελέσουν εργαλεία.

1ο Κεφάλαιο: Συνοπτικά ιστορικά στοιχεία για το πεδίο της Τριγωνομετρίας

Η ιστορία της τριγωνομετρίας ουσιαστικά είχε ξεκινήσει με τις πρώτες μαθηματικές καταγραφές που είχαν λάβει χώρα στην Αίγυπτο, αλλά και τη Βαβυλώνα. Οι Βαβυλώνιοι μάλιστα, ήταν εκείνοι, οι οποίοι είχαν καθιερώσει την μέτρηση των γωνιών σε μοίρες και πρώτα λεπτά, όπως επίσης και σε δεύτερα. Παράλληλα, ήταν εκείνοι που είχαν συγκεντρώσει έναν τεράστιο αριθμό δεδομένων, μέσα από το πεδίο της αστρονομίας και με αποτέλεσμα μέσω αυτών των δεδομένων να προκύψουν οι πρώτες γνώσεις πάνω στο πεδίο της Τριγωνομετρίας (Λάττας, 2010).

Οι πιο παλιές ενδείξεις για την μελέτη των τριγώνων εντοπίζονται από τη δεύτερη χιλιετία π.Χ. και αφορούν τους Αιγύπτιους. Είναι ενδεικτικό εξάλλου πως οι τελευταίοι έκαναν για αιώνες χρήση ενός πρωτόγονου συστήματος τριγωνομετρίας με γνώμονα την κατασκευή των διαφόρων πυραμίδων. Για παράδειγμα, σε ένα κείμενο παπύρου που χρονολογείται περίπου από το 1680 π.Χ. και που είναι γραμμένο από τον αρχαίο Αιγύπτιο γραφέα Ahmes, υπάρχει καταγεγραμμένο ένα μαθηματικό πρόβλημα, το οποίο απαιτούσε την κατοχή κάποιων βασικών γνώσεων τριγωνομετρίας (Maor, 1998). Το πρόβλημα αυτό πιο συγκεκριμένα έθετε το ακόλουθο ερώτημα: αν μια πυραμίδα έχει ύψος 250 κύβων και η κάθε πλευρά της βάσης της ισούται με 360, τότε ποια είναι η διαγώνια της τετράγωνης βάσης του κτίσματος; Στο ίδιο κείμενο ο Ahmes δίνει την ακόλουθη λύση:

Θα πρέπει ωστόσο από την άλλη μεριά να τονιστεί πως ως την εποχή των αρχαίων Ελλήνων δεν είχε σχηματοποιηθεί με συστηματικό τρόπο καμιά τριγωνομετρική έννοια. Μάλιστα, αυτή η διαδικασία άργησε να λάβει χώρα, δεδομένου, ότι η τριγωνομετρία για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, είχε υπάρξει συνυφασμένη με το πεδίο της αστρονομίας (Λάττας, 2010). Με τους Έλληνες βρίσκουμε πρώτα μια συστηματική μελέτη των σχέσεων ανάμεσα σε γωνίες (ή τόξα) σε ένα κύκλο και τα μήκη των χορδών που υποτάσσουν αυτά. Οι ιδιότητες των χορδών ως μέτρα κεντρικών και εγγεγραμμένων γωνιών σε κύκλους ήταν γνωστές στους Έλληνες της εποχής του Ιπποκράτη και είναι πιθανό ότι ο Εύδοξος είχε χρησιμοποιήσει αναλογίες και γωνιακά μέτρα για τον προσδιορισμό του μεγέθους της γης και των σχετικών αποστάσεων του ήλιου και της σελήνης.

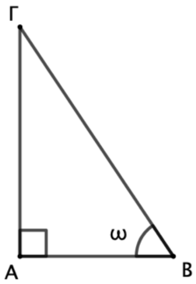
Όπως εν τω μεταξύ, επισημάνθηκε και λίγο πιο πάνω, οι αρχαίοι Έλληνες είχαν ασχοληθεί εν πολλοίς με τους υπολογισμούς των χορδών των γωνιών. Βέβαια, θα πρέπει να τονιστεί εδώ ταυτόχρονα, ότι παρατηρώντας κάποιος το έργο μεγάλων μαθηματικών της αρχαιότητας, όπως ο Ευκλείδης και ο Αρχιμήδης, θα δει ότι ακόμα δεν υφίσταται η τριγωνομετρία με την σύγχρονη έννοια της λέξεως. Εντούτοις όμως, από την άλλη μεριά παρατηρούμε την ύπαρξη διαφόρων θεωρημάτων που παρουσιάζονται με βάση τη γεωμετρία και που παράλληλα αντιστοιχούν σε συγκεκριμένους νόμους και τύπους της τριγωνομετρίας (Boyer, 1991).

Πάντως, ο πρώτος στην ιστορία των μαθηματικών που επρόκειτο να συντάξει τριγωνομετρικό πίνακα, ήταν ο Ίππαρχος, με στόχο την επίλυση των τριγώνων. Για αυτό το λόγο άλλωστε, ο ίδιος είναι γνωστός και ως ο "πατέρας της τριγωνομετρίας". Θα πρέπει να τονιστεί σε αυτό το σημείο πως για περίπου 2 αιώνες από την εποχή του Ιπποκράτη ως εκείνη του Ερατοσθένη, οι Έλληνες είχαν μελετήσει τις σχέσεις μεταξύ γραμμών και κύκλων και τις εφάρμοσαν σε μια ποικιλία αστρονομικών προβλημάτων, αλλά δεν προέκυψε συστηματική τριγωνομετρία. Στη συνέχεια, πιθανότατα κατά το δεύτερο μισό του 2ου αιώνα π.Χ., όπως ήδη αναφέρθηκε πιο πάνω, ο πρώτος τριγωνομετρικός πίνακας προφανώς καταρτίστηκε από τον αστρονόμο Ίππαρχο της Νίκαιας (περίπου 180 π.Χ.-125 π.Χ.), ο οποίος έτσι κέρδισε το δικαίωμα να είναι γνωστός ως «ο πατέρας της τριγωνομετρίας". Ο Αρίσταρχος, αντίστοιχα από τη μεριά του, είχε καταλάβει ότι σε έναν δεδομένο κύκλο ο λόγος τόξου προς χορδή μειώνεται καθώς το τόξο μειώνεται από 180° σε 0°, τείνοντας προς ένα όριο 1. Ωστόσο, φαίνεται ότι μέχρι την εποχή που ο Ίππαρχος είχε κάνει τους δικούς του υπολογισμούς, ως προς το τόξο και τη χορδή για μια ολόκληρη σειρά γωνιών, αυτή η παράμετρος δεν είχε προβληθεί τόσο έντονα (Boyer, 1991).

Σε αυτόν τον πίνακα, σε κάθε γωνία απέδιδε μια τιμή που ήταν το μήκος της χορδής και η οποία αντιστοιχούσε στη γωνία, όταν την έκανε επίκεντρη με σταθερή ακτίνα r. Βέβαια δεν γνωρίζουμε επακριβώς ποια ήταν η σταθερή τιμή, την οποία έδινε ο Ίππαρχος στην ακτίνα. Εντούτοις, περίπου 300 χρόνια αργότερα, ο Πτολεμαίος μέσω του έργου του *Μαθηματική Σύνταξις* ή *Αλμαγέστη* χρησιμοποίησε την τιμή 60 για την ακτίνα του κύκλου (r = 60). Η ίδια η *Αλμαγέστη* βέβαια, θα πρέπει να τονιστεί, ότι ήταν κατά κύριο λόγο, ένα έργο σχετικό με την αστρονομία, στοιχείο, που με βάση εξάλλου και τα όσα ήδη έχουν αναφερθεί πιο πάνω, καταδεικνύει πως η τριγωνομετρία ακόμα δεν είχε αποκοπεί εντελώς από το εν λόγω επιστημονικό πεδίο.

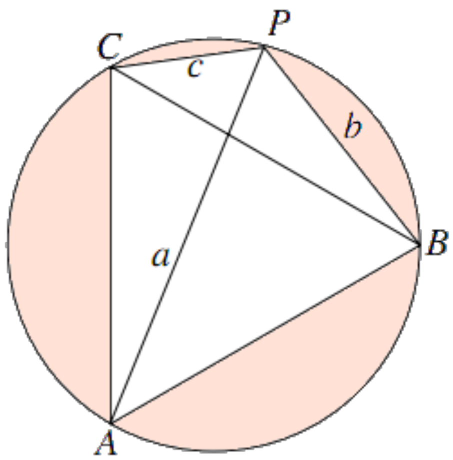
Τα 13 βιβλία που συναποτελούν το έργο της *Αλμαγέστης*, αποτέλεσαν για πολλούς αιώνες κατά την διάρκεια της Αρχαιότητας (όπως και στη διάρκεια του Μεσαίωνα) το σημαντικό έργο της Τριγωνομετρίας (Boyer, 1991). Μάλιστα, η εξαφάνιση πολλών εργασιών άλλων σημαντικών αρχαίων Ελλήνων αστρονόμων και μαθηματικών, οφείλεται στο ότι είχαν επισκιαστεί από το συγκεκριμένο βιβλίο του Πτολεμαίου του Αλεξανδρινού, το οποίο θεωρείται πως γράφτηκε γύρω στο 150 μ.Χ. Το συγκεκριμένο έργο μάλιστα, διακρίνεται για την πληρότητα, την πυκνότητα και την κομψότητά του. Η τελική ονομασία αυτού του έργου προέρχεται από τον συνδυασμό της λέξεως "μεγίστη" που χρησιμοποίησαν ορισμένοι μεταγενέστεροι σχολιαστές, προκειμένου να το ξεχωρίσουν, ως προς την σημασία του από άλλα έργα αστρονομίας και μαθηματικών εν γένει, και του αραβικού προθέματος "Αλ" που είχαν προσθέσει Άραβες μαθηματικοί και αστρονόμοι στη διάρκεια του Μεσαίωνα (Ρασούλης, 2012).

Πολύ σημαντικό εν τω μεταξύ εντός του έργου της *Αλμαγέστης*, είναι το περίφημο θεώρημα του Πτολεμαίου. Με βάση αυτό το θεώρημα, σε ένα εγγράψιμο τετράπλευρο, το γινόμενο των διαγωνίων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των δυο ζευγών των απέναντι πλευρών. Είναι χαρακτηριστικό, ότι μέσω του συγκεκριμένου θεωρήματος υφίστανται στο πλαίσιο των Μαθηματικών και της Τριγωνομετρίας, ορισμένες πολύ σημαντικές συνέπειες. Μια εξ αυτών, επί παραδείγματι, είναι το ότι μέσω του θεωρήματος αυτού προκύπτει άμεσα το Πυθαγόρειο θεώρημα. Το τελευταίο πιο συγκεκριμένα, θεωρεί πως σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε ότι το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο κάθετων πλευρών (Ρασούλης, 2012).



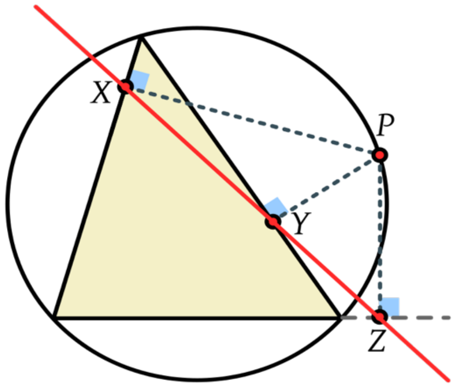
Εικόνα 1: Ορθογώνιο τρίγωνο με παρουσίαση της γωνίας ΑΒΓ

Μια άλλη συνέπεια, από την άλλη μεριά, έχει να κάνει με την απόδειξη του λεγόμενου θεωρήματος Van Schooten. Με βάση αυτό το θεώρημα πιο συγκεκριμένα, θεωρείται πως αν το P είναι σημείο του τόξου BC, το οποίο ανήκει σε κύκλο περιγεγραμμένο σε ισόπλευρο τρίγωνο ABC, τότε PA = PB + PC, (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα).



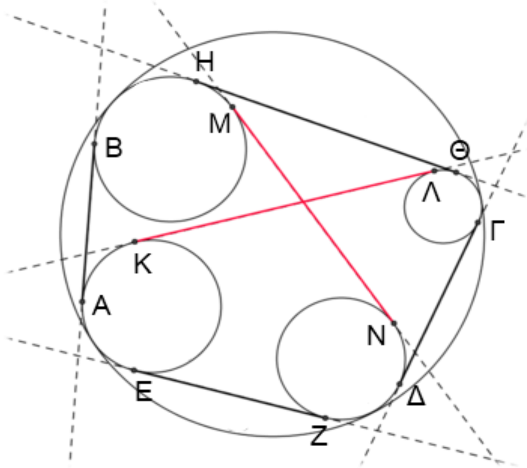
Εικόνα 2: Σχηματική αναπαράσταση του θεωρήματος Van Schooten

Μια τρίτη συνέπεια αφορά τα λεγόμενα φράγματα εμβαδού. Πιο συγκεκριμένα, με τη χρήση του θεωρήματος του Πτολεμαίου, μπορούν να προκύψουν φράγματα για το εμβαδόν του εγγεγραμμένου τετράπλευρου. Μάλιστα, από όλα τα τετράπλευρα με σταθερές πλευρές, το εγγεγραμμένο τετράπλευρο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν. Μια άλλη σημαντική συνέπεια που προκύπτει μέσω του θεωρήματος του Πτολεμαίου, είναι η απόδειξη του θεωρήματος Wallace - Simson. Σύμφωνα με το συγκεκριμένο θεώρημα, υποθέτουμε πως υφίσταται μια ευθεία L που τέμνει τις πλευρές ενός τριγώνου ABC με τέτοιο τρόπο, προκειμένου οι κάθετες που προκύπτουν μέσω των σημείων τομής να τέμνονται αντίστοιχα στο σημείο Τ. Σε αυτήν την περίπτωση, το ίδιο το σημείο Τ βρίσκεται πάνω στην περιφέρεια του περιγεγραμμένου κύκλου (Ρασούλης, 2012).



Εικόνα 3: Το θεώρημα Wallace – Simson

Το ίδιο τέλος ισχύει και με το λεγόμενο θεώρημα Casey (με άλλα λόγια και αυτό το θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί μέσω του θεωρήματος του Πτολεμαίου). Μάλιστα το θεώρημα Casey ίσως μπορεί να θεωρηθεί πως είναι η πλέον αναπάντεχη γενίκευση του θεωρήματος του Πτολεμαίου. Με βάση το θεώρημα Casey, αν έχουμε τέσσερις κύκλους με κέντρα M_1, M_2, M_3 και M_4 και κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες t12, t13, t14, t23, t24, t34, εφάπτονται εξωτερικά σε κύκλο κέντρου M, τότε αντίστοιχα t13t24= t13t24



Εικόνα 4: Σχηματική αναπαράσταση του θεωρήματος Casey

Αντίστοιχα, θα πρέπει να επισημανθεί σε αυτό το σημείο, οι πίνακες τριγωνομετρίας που είχαν προκύψει στα πλαίσια του έργου του Ιππάρχου και αργότερα του Πτολεμαίου, επρόκειτο να αποτελέσουν το κύριο εργαλείο τριγωνομετρικών υπολογισμών στο χώρο της αστρονομίας για πολλούς αιώνες αργότερα, τόσο στο βυζαντινό, όσο και στον δυτικοευρωπαϊκό και τον ισλαμικό κόσμο. Παράλληλα, θα πρέπει να επισημανθεί σε αυτό το σημείο πως δεν είναι ακριβώς γνωστό το πότε ξεκίνησε η χρήση της έννοιας της γωνίας των 360 μοιρών, δηλαδή του κύκλου, για πρώτη φορά στα μαθηματικά, ωστόσο, είναι γνωστό, ότι η συστηματική εισαγωγή της ξεκίνησε στην εποχή λίγο αφότου ο

Αρίσταρχος ο Σάμιος έγραψε το βιβλίο του *Περί των Μεγεθών και των Αποστάσεων της Σελήνης και του Ήλιου* (γύρω στο 250 π.Χ.). Ο ίδιος ο Αρίσταρχος εξάλλου, με στόχο την μέτρηση των σχετικών μεγεθών είχε προβεί σε εκτεταμένη χρήση της γωνίας των 360 μοιρών και του κύκλου. Πάντως, φαίνεται πως ήδη ο Ίππαρχος, με βάση και τα όσα έχουν τονιστεί πιο πάνω, είχε συμβάλλει αποφασιστικά στην χρήση του κύκλου των 360 μοιρών, μέσω και του προαναφερόμενου πίνακα χορδών που δημιούργησε.

Αντιστοίχως, η χρήση αυτή εκ μέρους του Ιππάρχου ίσως είχε προέλθει από το έργο του Υψικλή, ο οποίος ήδη είχε χωρίσει την ημέρα σε 360 τμήματα, μάλλον επηρεασμένος αντίστοιχα από την βαβυλωνιακή αστρονομία. Αυτό ίσως έχει να κάνει και με το ζωδιακό κύκλο που ήδη είχε χωριστεί σε δώδεκα ζώδια και που αντιστοιχούσαν σε 360 ημέρες. Παράλληλα φαίνεται να συνδέεται και με το ότι η κάθε ώρα χωρίζεται σε 60 λεπτά και αντίστοιχα το κάθε λεπτό σε 60 δευτερόλεπτα, κάτι που προέρχεται επίσης από τους Βαβυλώνιους (Katz, 1987).

Εκ των αρχαίων Ελλήνων εξάλλου επίσης πολύ σημαντική μπορεί να θεωρηθεί και η συνεισφορά του μαθηματικού και αστρονόμου Μενελάου από την Αλεξάνδρεια που έζησε γύρω στο 100 μ.Χ. Ο τελευταίος άφησε πίσω του το πολύ σημαντικό έργο *Σφαιρικά*, το οποίο χωρίζεται σε τρία βιβλία. Βασισμένος εν προκειμένω και στα μαθηματικά του Ευκλείδη, στο πρώτο του βιβλίο αναλύει τα σχετικά με τα σφαιρικά τρίγωνα. Μάλιστα είχε δημιουργήσει ένα θεώρημα σχετικά με σφαιρικά τρίγωνα το οποίο αντίστοιχα από την άλλη δεν είχε αναπτυχθεί ποτέ από τον Ευκλείδη και με βάση το οποίο δυο σφαιρικά τρίγωνα συμπίπτουν μεταξύ τους από τη στιγμή που το άθροισμα των γωνιών του ενός και του άλλου είναι ίδιο.

Στο πρώτο βιβλίο αυτής της πραγματείας του εν γένει ο Μενέλαος δημιουργεί σχετικά με τα σφαιρικά τρίγωνα μια βάση, η οποία είναι ανάλογη εκείνης που είχε δημιουργήσει αντίστοιχα ο Ευκλείδης, ως προς τα επίπεδα τρίγωνα. Με βάση το θεώρημά του παράλληλα, είχε προβάλλει την ακόλουθη εξίσωση: ότι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου πάντα είναι 180 μοίρες. Το δεύτερο βιβλίο των *Σφαιρικών* περιγράφει την εφαρμογή της σφαιρικής γεωμετρίας σε αστρονομικά φαινόμενα και έχει μικρό μαθηματικό ενδιαφέρον. Το βιβλίο ΙΙΙ, το τελευταίο, περιέχει το γνωστό "θεώρημα του Μενέλαου" ως μέρος την ουσιαστική σφαιρική τριγωνομετρία στην τυπική ελληνική μορφή - μια γεωμετρία ή τριγωνομετρία των χορδών σε έναν κύκλο. Στον κύκλο πρέπει να γράψουμε ότι η χορδή AB είναι διπλάσια από το ημίτονο της κεντρικής γωνίας AOB (πολλαπλασιασμένη με την ακτίνα του κύκλου). Ο Μενέλαος και οι Έλληνες διάδοχοί του αναφέρθηκαν στην AB απλώς ως η χορδή που αντιστοιχεί στο τόξο AB. Αν η BOB είναι μια διάμετρος του κύκλου, τότε η χορδή A είναι διπλάσια από το συνημίτονο της μισής γωνίας AOB (πολλαπλασιασμένη με την ακτίνα του κύκλου) (Boyer, 1991).

Από την άλλη, θα πρέπει να σημειωθεί εδώ, ότι ορισμένες από τις πρώτες και πολύ σημαντικές εξελίξεις στο πεδίο της επιστήμης της Τριγωνομετρίας είχαν λάβει χώρα από πολύ νωρίς στην Ινδία. Αυτό, για παράδειγμα, φαίνεται μέσα από την περίπτωση του περιεχομένου μιας σειράς έργων που χρονολογούνται από τον 4ο με 5ο αιώνα μ.Χ. και που είναι επίσης γνωστές με την ονομασία *Σιντάντας* (*Surya Siddhanta*). Πάντως σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να τονιστεί, ότι αυτή η ονομασία στον Ινδουισμό, όπως και τον Βουδισμό, χρησιμοποιείται εδώ και χιλιάδες χρόνια και για αρκετά άλλα έργα και βιβλία, ποικίλου περιεχομένου, όπως βιβλία σχετικά με θρησκεία, φιλοσοφία κ.λ.π. Εκ των συγκεκριμένων κειμένων που έχουν να κάνουν με μαθηματικές γνώσεις, το σημαντικότερο ως σήμερα, θεωρείται, πως είναι το λεγόμενο *Surya Siddhanta* που προέρχεται από τον 5ο με 6ο αιώνα μ.Χ. (Boyer, 1991).

Στην διάρκεια του έκτου αιώνα μ.Χ., αντιστοίχως ένας πολύ σημαντικός Ινδός μαθηματικός με το όνομα Arhyabata επρόκειτο να παρουσιάσει το δικό του έργο, εντός του οποίου υφίστανται αρκετές γνώσεις και παρατηρήσεις, σχετικές με την Τριγωνομετρία. Το έργο αυτό, το οποίο ονομάστηκε Arhyabatiya, περιλαμβάνει επίσης μαζί με τα προαναφερόμενα Surya Siddhanta, ορισμένους από τους πιο πρώιμους πίνακες Τριγωνομετρίας. Στο πλαίσιο αυτών των πινάκων μάλιστα, είναι χαρακτηριστικό, ότι μπορούμε να διαπιστώσουμε διαστήματα των 3,75 μοιρών από την 0 γωνία ως εκείνη των 90 μοιρών (Boyer, 1991).

Από την άλλη μεριά, ο επίσης σημαντικός Ινδός μαθηματικός Madhava (έζησε γύρω στο 1400) έκανε τα πρώτα βήματα στην ανάλυση των τριγωνομετρικών «συναρτήσεων» και των απεριόριστων σειρών επεκτάσεών τους. Συγκεκριμένα, είχε αναπτύξει τις έννοιες της σειράς ισχύος και της σειράς Taylor και παρήγαγε τις επεκτάσεις σειράς ισχύος του ημίτονου, του συνημίτονου και της εφαπτομένης. Χρησιμοποιώντας τις προσεγγίσεις της σειράς Taylor του ημιτόνου και του συνημιτόνου, παρήγαγε έναν πίνακα ημιτόνων με ακρίβεια 12 δεκαδικών ψηφίων και έναν πίνακα συνημιτόνων με ακρίβεια 9 δεκαδικών ψηφίων. Έδωσε επίσης τη σειρά ισχύος π και τη γωνία, την ακτίνα, τη διάμετρο και την περιφέρεια ενός κύκλου όσον αφορά τις τριγωνομετρικές «συναρτήσεις». Τα έργα του επεκτάθηκαν από τους οπαδούς του στην περίφημη ινδική, μαθηματική σχολή της Κεράλα μέχρι τον 16ο αιώνα (O'Connor & Robertson, 1996).

Εν τω μεταξύ, το συγκεκριμένο ινδικό έργο που αναφέρθηκε λίγο παραπάνω, δηλαδή το Arhyabatiya, επρόκειτο να μεταφραστεί λίγο αργότερα στα κινέζικα. Το έργο της κινεζικής μετάφρασης είχε τον τίτλο "Kaiyuan Zhanjing" και χρονολογείται περίπου γύρω στο 718 π.Χ. κατά την διάρκεια της δυναστείας Τανγκ. Βέβαια, είναι αλήθεια, πως για πολλούς αιώνες, οι Κινέζοι δεν είχαν αναδειχθεί τόσο πολύ στο πεδίο της Τριγωνομετρίας, δεδομένου, ότι είχαν δώσει μεγαλύτερη βαρύτητα στο πεδίο της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας. Στη θέση της Τριγωνομετρίας, σε αντίθεση με τους αρχαίους Έλληνες και Ινδούς, αλλά και τους Άραβες του Μεσαίωνα, οι Κινέζοι είχαν αναπτύξει περισσότερο ένα είδος εμπειρικού υποκατάστατου, με γνώμονα τον υπολογισμό των γωνιών διαφόρων τριγωνικών σχημάτων (Needham, 1986).

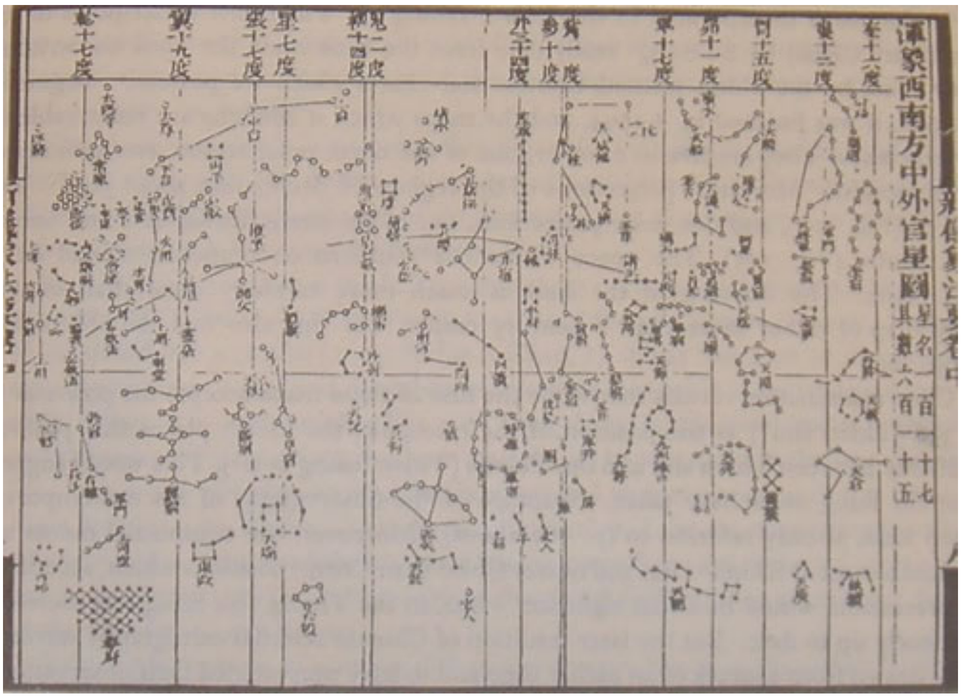
Εντούτοις όμως, αυτό το είδος εμβρυακής Τριγωνομετρίας στην Κίνα άρχισε σταδιακά να αναπτύσσεται ολοένα περισσότερο. Κατά την διάρκεια της δυναστείας Σονγκ (μεταξύ του 960 και του 1279 μ.Χ.) υπήρξε μια σημαντική εξελικτική πορεία για το συγκεκριμένο πεδίο των Μαθηματικών, δεδομένου, ότι οι Κινέζοι μαθηματικοί άρχισαν να αντιλαμβάνονται την ανάγκη και σημασία της σφαιρικής Τριγωνομετρίας, για τους ημερολογιακούς και αστρονομικούς υπολογισμούς τους. Δεν είναι έτσι τυχαίο το ότι ο Κινέζος μαθηματικός και πολυμαθής Shen Kuo (1031-1095) άρχισε να κάνει χρήση τριγωνομετρικών υπολογισμών και εξισώσεων, προκειμένου να λύσει μαθηματικά προβλήματα σχετικά με χορδές και καμπύλες.

Αυτό εξάλλου είχε ως αποτέλεσμα την εμφάνιση μιας συγκεκριμένης εξίσωσης που αφορούσε την επίλυση προβλημάτων σχετικών με την περίπτωση διασταυρούμενων κύκλων (Katz, 2007). Ο Sal Restivo από τη μεριά του, πιστεύει πως αυτή η εξίσωση του Shen Kuo και γενικά οι αναλύσεις του έπαιξαν πολύ σημαντικό ρόλο, αναφορικά με την διαδικασία ανάπτυξης της σφαιρικής Τριγωνομετρίας. Το έργο του δε, επρόκειτο να αποτελέσει αντίστοιχα τη βάση των ερευνών ενός άλλου μεγάλου Κινέζου μαθηματικού των επόμενων αιώνων, του Guo Shunjing (1231-1316 μ.Χ.) (Restivo, 1992).

Εξάλλου και ο συγκεκριμένος Κινέζος μαθηματικός είχε προβεί σε μια εκτεταμένη χρήση της σφαιρικής Τριγωνομετρίας, ώστε να επιφέρει νέες αλλαγές και βελτιώσεις σε διάφορους ημερολογιακούς και αστρονομικούς υπολογισμούς. Αυτοί οι υπολογισμοί είχαν να κάνουν ειδικότερα με το γεωγραφικό μήκος και πλάτος του ισημερινού της γης και το οποίο αντιστοιχούσε στις γωνίες της εκλειπτικής, ενώ από την άλλη μεριά, αφορούσαν και τον υπολογισμό των τιμών των χορδών για διάφορα είδη γωνιών. Μια άλλη παράμετρος εδώ επιπρόσθετα, είχε να κάνει και με τις περιπτώσεις του υπολογισμού των χορδών διαφόρων καμπυλών (Needham, 1986).

Είναι εν τω μεταξύ εδώ ενδεικτικό, ότι και για τους Κινέζους, η Τριγωνομετρία είχε παίξει σημαντικό ρόλο, αναφορικά με τις αστρονομικές παρατηρήσεις τους. Εξάλλου, οι ίδιοι οι Κινέζοι ήταν από εκείνους που είχαν προβεί στις πιο ακριβείς αστρονομικές παρατηρήσεις, ήδη από χιλιάδες χρόνια πριν. Θα μπορούσαμε εδώ να αναφερθούμε στις περιπτώσεις μαθηματικών και αστρονόμων, όπως ο Shi Shen που είχε γράψει ένα βιβλίο αστρονομίας και που είχε δημιουργήσει παράλληλα έναν αστρικό χάρτη, όπως και έναν κατάλογο άστρων. Αντίστοιχα το 364 π.Χ. ο επίσης Κινέζος αστρονόμος Gan De, είχε προβεί στην πρώτη καταγραφή των κηλίδων στην επιφάνεια του ήλιου, αλλά και στην καταγραφή φεγγαριών γύρω από τον πλανήτη Δία. Οι παρατηρήσεις εκείνες εν πολλοίς εξάλλου, είχαν βασιστεί στην εξέταση της κίνησης των άστρων γύρω από τον άξονα των πόλων, όπως η γη ακριβώς περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της.

Είναι χαρακτηριστικό, ότι κατά την διάρκεια του 11ου αιώνα στην Κίνα είχε δημιουργηθεί ένας χάρτης σε χαρτί (περί το 1092 μ.Χ.) που αποτυπώνει όλο τον ουρανό, δείχνοντας παράλληλα τα σημεία και τις τοποθεσίες περίπου 1350 άστρων. Βέβαια, πέραν αυτής της περίπτωσης, είναι χαρακτηριστικό, ότι στην Κίνα ήδη υπήρχαν και ορισμένα παλαιότερα παραδείγματα τέτοιων χαρτών. Ένα τέτοιο παράδειγμα, είναι αυτό ενός αστρικού χάρτη που βρέθηκε στο Dunhuang και που χρονολογείται από τον 7ο αιώνα μ.Χ., ενώ παλαιότερα θεωρούνταν πως χρονολογούνταν περί το 940 π.Χ. Κατασκευάστηκε με μεγάλη ακρίβεια από τον μαθηματικό και αστρονόμο Li Chunfeng (που έζησε περί το 602 με 670 μ.Χ.). Ο χάρτης εκείνος εξάλλου, απεικόνιζε 1339 άστρα, τα οποία ανήκαν σε 257 αστρικούς πίνακες που είχαν συντάξει από νωρίς οι Κινέζοι και με ακρίβεια, η οποία κυμαινόταν ανάμεσα στις 1,5 και τις 4 μοίρες (Van Brummelen, 2009).



Εικόνα 5: Κινέζικος αστρικός χάρτης από τον 11ο αιώνα μ.Χ., όπου επίσης στο κέντρο του αποτυπώνεται και η γραμμή του ισημερινού

Ο ρόλος εν τω μεταξύ από την άλλη του μεσαιωνικού ισλαμικού κόσμου, ως προς την Τριγωνομετρία είχε υπάρξει πολύ σημαντικός. Κι αυτό, επειδή οι Άραβες από νωρίς ασχολήθηκαν με την μετάφραση των έργων και κειμένων διαφόρων αρχαίων Ελλήνων γεωμετρών και μαθηματικών. Αυτές οι μεταφράσεις είχαν γίνει κυρίως από Πέρσες και Άραβες μαθηματικούς και οι οποίοι στην πορεία, σε έναν μεγάλο βαθμό πλέον, απελευθέρωσαν την Τριγωνομετρία από την κυριαρχία των διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων, δίνοντάς της μια νέα ώθηση. Δεν θα ήταν εξάλλου υπερβολή να λεχθεί πως μετά το έργο των μαθηματικών του ισλαμικού κόσμου, σημειώθηκε η ανάδυση της σύγχρονης Τριγωνομετρίας (Kennedy,1996).

Οι εξελίξεις στο πλαίσιο της Τριγωνομετρίας φυσικά και στον ισλαμικό κόσμο, ήταν συνυφασμένες με ένα πλαίσιο συγκεκριμένων πρακτικών λόγων. Για παράδειγμα, με γνώμονα τον υπολογισμό των ιερών θρησκευτικών ημερών του ισλαμικού έτους, ήταν αναγκαία η παρατήρηση των διαφόρων φάσεων του σεληνιακού δίσκου (καθώς το ισλαμικό έτος άλλωστε είναι σεληνιακό και όχι ηλιακό). Για αυτούς τους υπολογισμούς αρχικά είχε γίνει χρήση των διαφόρων πινάκων που ήδη είχε συντάξει από την Αρχαιότητα ο Έλληνας αστρονόμος Μενέλαος, ώστε να επισημανθούν με ακρίβεια οι θέσεις της σελήνης και των διαφόρων άστρων. Εντούτοις όμως, η μεθοδολογία του σύντομα αποδείχτηκε ελαττωματική. Επίσης, ο υπολογισμός του χρόνου, με βάση το ύψος του ήλιου, σε διάφορες φάσεις του εικοσιτετραώρου ήταν δύσκολος και απαιτούσε την χρήση του θεωρήματος του Μενελάου πολλές φορές. Αυτές οι δυσκολίες είχαν αποτελέσει μια σημαντική πρόκληση για τους διάφορους μουσουλμάνους αστρονόμους, προκειμένου να μπορέσουν να απλοποιήσουν τα ήδη υπάρχοντα θεωρήματα, καθιστώντας τα πιο πρακτικά και αποτελεσματικά (Gingerich, 1986).

Στην πορεία, όπως μπορεί να διαπιστώσει κάποιος, διάφοροι σπουδαίοι μουσουλμάνοι μαθηματικοί, όπως ο Μοχάμεντ Ιμπν Μουσάαλ Κουαρίζμι, ή ο Χαμπάς αλ Χασίμπαλ - Μαρουάζι, αλλά και ο Μοχάμεντ αλ- Μπατάνι, έπαιξαν πρωταγωνιστικό ρόλο στην ανάπτυξη της Τριγωνομετρίας. Δεν είναι έτσι τυχαίο πως πλέον κατά τον 10ο αιώνα, οι μουσουλμάνοι μαθηματικοί (όπως φαίνεται και από το έργο του εξίσου σημαντικού μαθηματικού της εποχής, του Αμπού αλ Μπουντζανί) έκαναν χρήση και των έξι τριγωνομετρικών τύπων. Ο συγκεκριμένος μαθηματικός Αμπού αλ Μπουντζανί είχε αναπτύξει μάλιστα την ακόλουθη εξίσωση: $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ (Moussa, 2011).

Μια κορυφαία περίπτωση μουσουλμάνου αστρονόμου και μαθηματικού με σημαντική συνεισφορά στον τομέα της αστρονομίας, ήταν αναμφίβολα ο Abu Al - Rayhan Muhammad ibn Ahmad Al - Biruni, ο οποίος έζησε μεταξύ του 973 μ.Χ. και του 1050 μ.Χ.. Θεωρείται ο συγγραφέας άνω των 100 πραγματειών στον τομέα της αστρονομίας, των μαθηματικών, της γεωγραφίας, της ιστορίας, της γεωδαισίας και της φιλοσοφίας. Στις μέρες μας μάλιστα διασώζονται μόνο 20 από αυτές τις πραγματείες και μόλις 12 εξ αυτών έχουν εκδοθεί ως τις μέρες μας (Douglas, 1973).

Το έργο εξάλλου, του συγκεκριμένου Πέρση μουσουλμάνου μαθηματικού και αστρονόμου του Μεσαίωνα, είχε αποτελέσει παράλληλα και ένα σημαντικό εργαλείο, διαμέσου του οποίου είχε επιχειρηθεί ο καθορισμός των χρονικών συντεταγμένων των διαφόρων πόλεων και τόπων εν γένει. Αυτό άλλωστε, ήταν άμεσα συνυφασμένο και με την προσπάθεια των διαφόρων μουσουλμάνων επιστημόνων εκείνης της περιόδου, να προσδιορίζουν με ακρίβεια και τη γεωγραφική θέση της Μέκκας, στοιχείο που για τους μουσουλμάνους άλλωστε, είχε πάντα μεγάλη σημασία, αναφορικά με την κατεύθυνση κατά την μουσουλμανική προσευχή.

Ένας άλλος σπουδαίος μαθηματικός ήταν ο Αλ Τζαγιάννι από την Ανδαλουσία της Ισπανίας και ο οποίος έγραψε το έργο *Βιβλίο περί των αγνώστων καμπυλών μιας σφαίρας* και το οποίο θεωρείται την ίδια στιγμή, ως η πρώτη πραγματική επιστημονική πραγματεία στο πεδίο της Τριγωνομετρίας (Douglas, 1973). Το έργο αυτό μάλιστα αργότερα είχε πολύ μεγάλη επιρροή και καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη της Τριγωνομετρίας στον ευρωπαϊκό χώρο. Θεωρείται πιθανό μάλιστα, πως οι αναλύσεις αυτού του έργου, σχετικά με τον υπολογισμό των μεγεθών ενός σφαιρικού τριγώνου στην περίπτωση που οι διάφορες γωνίες τους είναι άγνωστες, φαίνεται πως είχαν επηρεάσει, σε μεγάλο βαθμό, το έργο και τη σκέψη του Γερμανού αστρονόμου και μαθηματικού Regiomontanusπου έζησε τον 15ο αιώνα (O'Connor & Robertson, 1996).

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να γίνει λόγος επίσης για τον Nasir al Din al Tusi, ήταν ο πρώτος στην ιστορία των μαθηματικών που είχε αντιμετωπίσει εν γένει την Τριγωνομετρία ως έναν κλάδο εντελώς ανεξάρτητο πλέον από εκείνον της Γεωμετρίας. Μία από τις σημαντικότερες μαθηματικές συνεισφορές του al Tusi ήταν η προβολή της τριγωνομετρίας ως ενός κλάδου των μαθηματικών που μπορεί να σταθεί από μόνος του και όχι απλά ως εργαλείο αστρονομικών εφαρμογών. Στα πλαίσια του έργου του πάνω στην Τριγωνομετρία και ειδικότερα ως προς τις μελέτες του πάνω στα τετράπλευρα, ο al Tusi έδωσε την πρώτη υπάρχουσα έκθεση του συνόλου του συστήματος της επίπεδης και σφαιρικής τριγωνομετρίας. Αυτή η εργασία είναι πραγματικά η πρώτη στην ιστορία της τριγωνομετρίας ως ανεξάρτητος κλάδος των καθαρών μαθηματικών και ο πρώτος μέσω του οποίου παράλληλα εκτίθενται οι έξι περιπτώσεις για ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο (Berggren, 2007).

Από την άλλη μεριά, εδώ θα ήταν δυνατόν να λάβει υπόψη του κάποιος την περίπτωση του επίσης πολύ σημαντικού Άραβα μαθηματικού Abu al Wafa al Buzjani (940-998 μ.Χ.), ο οποίος είχε κάνει σημαντικές προσθήκες στον τομέα της Γεωμετρίας, αλλά και σε εκείνον της Αριθμητικής. Ήταν εξάλλου ο πρώτος, ο οποίος είχε προβεί στην συστηματική μελέτη και ανάλυση των τριγωνομετρικών ιδιοτήτων και αριθμών. Μάλιστα αυτή η μελέτη υπήρξε πολύ σημαντική, αναφορικά με την εξέλιξη της Τριγωνομετρίας, από την άποψη, ότι με αυτόν τον τρόπο ήταν δυνατόν συγχρόνως να υπάρξουν καλύτερες μετρήσεις στην αστρονομία και να δημιουργηθούν καλύτεροι αστρονομικοί πίνακες (Berggren, 2007).

Στα πλαίσια της *Αλμαγέστης* του ο συγκεκριμένος Άραβας μαθηματικός είχε παρουσιάσει τις σχέσεις μεταξύ των έξι βασικών τριγωνομετρικών «συναρτήσεων», για πρώτη φορά μάλιστα. Παράλληλα, ο Abu al Wafa είχε υπάρξει ο πρώτος, ο οποίος είχε συμβολίσει την ακτίνα του κύκλου με το γράμμα R, στοιχείο εξάλλου που ισχύει πλέον και στις μέρες μας, στα πλαίσια της Τριγωνομετρίας.

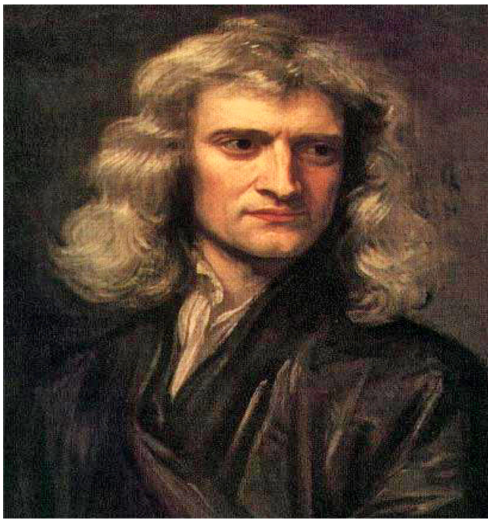
Λόγω της αραβικής επιρροής, η ανάπτυξη της Τριγωνομετρίας στον ευρωπαϊκό χώρο άρχισε να γίνεται εμφανής από την εποχή της Αναγέννησης και μετά. Στα πλαίσια δε αυτής της ανάπτυξης, είναι χαρακτηριστικό, ότι αναδύθηκαν σημαντικοί μαθηματικοί και επιστήμονες, όπως ο εβραϊκής καταγωγής Levi Ben Gersonπου έζησε τον 14ο αιώνα. Αυτή την περίοδο εξάλλου, θα ξεκινήσει μια διαδικασία μετεξέλιξης των διαφόρων πινάκων για τον υπολογισμό, γωνιών, χορδών, πλευρών τριγώνων και καμπυλών. Ενδεικτική είναι η περίπτωση ενός τέτοιου πίνακα που ήταν γνωστός ως "Toleta de marteloio". Ο συγκεκριμένος τριγωνομετρικός πίνακας εξάλλου, είχε χρησιμοποιηθεί κατά την διάρκεια του 14ου και του 15ου αιώνα από τους Ευρωπαίους ναυτικούς στη Μεσόγειο, προκειμένου να κάνουν διάφορους ναυτικούς υπολογισμούς (Kennedy, 1996).

Σημαντικός παράλληλα στα πλαίσια των μαθηματικών της αναγεννησιακής Ευρώπης, είχε υπάρξει ο ρόλος του προαναφερόμενου Γερμανού μαθηματικού και αστρονόμου Regiomontanus. Σημαντικά του έργα στο πεδίο της Τριγωνομετρίας, είχαν υπάρξει το *De triangulis omnimodis* και το *Tabula edirectionum*. Σημαντική όμως ήταν η παρουσία και το έργο επίσης και του μαθηματικού Georg Joachim Rheticus που είχε υπάρξει μαθητής του Κοπέρνικου. Και αυτός είχε συντάξει ένα σύνολο τριγωνομετρικών πινάκων. Πολλοί εξ αυτών των πινάκων περιλαμβάνονται στο πολύ σημαντικό για την Τριγωνομετρία έργο του *Opus palatinum* που ολοκληρώθηκε το 1596 από τον μαθητή του Valentin Otho (Katz, 1987).

Παράλληλα ο απειροστικός λογισμός και η αναλυτική γεωμετρία που άρχισαν να αναπτύσσονται από τα μέσα του 17ου αιώνα, βρήκαν γρήγορα εφαρμογή στο πεδίο της Τριγωνομετρίας. Τα πρώτα βήματα προς αυτήν την κατεύθυνση εξάλλου, είχαν γίνει από τον Γάλλο μαθηματικό Gilles Personnes de Roberval (1602-1675 μ.Χ.). Ο τελευταίος πιο συγκεκριμένα το 1635 είχε σχεδιάσει για πρώτη φορά το μισό τόξο μιας ημιτονοειδούς καμπύλης, ενώ αργότερα, χρησιμοποίησε τη μέθοδο των αδιαίρετων που είχε χρησιμοποιήσει ο Cavallieri.

Επίσης, θα πρέπει να τονιστεί, ότι μέσα από τους υπολογισμούς των εμβαδών, τα οποία περικλείονται από μια ημιτονοειδή καμπύλη, είχε ασχοληθεί και ο επίσης μεγάλος μαθηματικός του 17ου αιώνα Blaise Pascal (1623 - 1662). Ο Pascal πιο συγκεκριμένα είχε προβεί σε χρήση της μεθόδου των αδιαιρέτων. Αυτό συμβαίνει μάλιστα, μέσα από το έργο του *Πραγματεία των Ημιτόνων ενός τεταρτημορίου του κύκλου* (έργο του 1658).

Οι προσπάθειες μάλιστα, των πρωτοπόρων του απειροστικού λογισμού είχαν στραφεί, κατά κύριο λόγο, στον υπολογισμό των τιμών των τριγωνομετρικών γραμμών με βάση τις διάφορες νέες μεθόδους. Τα αναπτύγματα σε σειρές των συναρτήσεων ημιτόνου, συνημίτονου, όπως επίσης και των αντίθετών τους, επρόκειτο να ανακαλύψει πρώτος ο μαθηματικός James Gregory (που έζησε και έδρασε επίσης στην διάρκεια του 17ου αιώνα). Επρόκειτο μάλιστα, να δημοσιεύσει αυτήν την ανακάλυψή του στο έργο του *Vera circuli et hyperbolae Quadratura* το 1667. Ο ίδιος εξάλλου επρόκειτο λίγα χρόνια πριν το θάνατό του το 1675, και συγκεκριμένα το 1671, να δημοσιεύσει το ανάπτυγμα σε σειρά της συνάρτησης τοξεφχ (Μηλιός, 2011).



Εικόνα 6: Πορτρέτο του Ισαάκ Νεύτωνα στην ηλικία των 46 ετών, από τον ζωγράφο Godfrey Kneller (1689)

Λίγο αργότερα και συγκεκριμένα κατά τον 17ο αιώνα, ο Ισαάκ Νεύτωνας και ο Σκωτσέζος μαθηματικός James Sterling ανέπτυξαν τον γενικό τύπο Newton – Sterling για τους τριγωνομετρικούς υπολογισμούς. Θα πρέπει να τονιστεί σε αυτό το σημείο, ότι και ο Νεύτωνας από σχετικά νεαρή ηλικία γνώριζε τα αναπτύγματα σε σειρά των συναρτήσεων ημιτόνου και συνημίτονου. Ο ίδιος άλλωστε, είχε συμπεριλάβει αυτά τα αναπτύγματα στο έργο του *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (μετ. *Ανάλυση σε εξισώσεις με άπειρο πλήθος όρων*). Το έργο αυτό δημοσιεύτηκε το 1666 μ.Χ..

Κατά την διάρκεια του 18ου αιώνα, σημαντικό βήμα για την ανάπτυξη της Τριγωνομετρίας στον ευρωπαϊκό χώρο, υπήρξε το έργο του μεγάλου Ελβετού μαθηματικού Leonhard Euler *Introduction in analysin infinitorum* (έργο του 1748). Το έργο αυτό ήταν σημαντικό για την ανάπτυξη των εξισώσεων και των διαφόρων τύπων της Τριγωνομετρίας και στα πλαίσιά του παράλληλα υφίσταται και η προβολή του περίφημου τύπου του Euler: cos x + i sin x (Rudiger, 2005). Εξίσου σημαντική παράλληλα όμως, είχε υπάρξει στη διάρκεια του 18ου αιώνα και η συνεισφορά στην Τριγωνομετρία του Roger Cotes και του Brook Taylor (Katz, 1987).

Εικόνα 7: Ο μεγάλος Ελβετός μαθηματικός και φυσικός του 18ου αιώνα Leonhard Euler (1707-1783)

Είναι χαρακτηριστικό, ότι ο τρόπος ανάπτυξης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων εκείνη την περίοδο διέφερε σε μεγάλο βαθμό, σε σύγκριση με τον σημερινό τρόπο. Εξάλλου, ακόμα και η έννοια της συνάρτησης εκείνη την εποχή ήταν ακόμα αόριστη. Μάλιστα, σε αντίθεση με ό, τι συμβαίνει στα πλαίσια της σύγχρονης Τριγωνομετρίας, είναι ενδεικτικό, ότι ο Νεύτωνας, όπως και οι άλλοι πρωτεργάτες του απειροστικού λογισμού είχαν αντιμετωπίσει την συνάρτηση του ημιτόνου ως αντίστροφη της συνάρτησης τοξημχ. Ο τρόπος εργασίας που είχαν ακολουθήσει εκείνοι οι μαθηματικοί, προκειμένου να λάβουν τα αναπτύγματα αυτών των σειρών, άρχισαν να προωθούν την έννοια της τριγωνομετρικής συνάρτησης (Μηλιός, 2011).

Ένας εκ των πρώτων που είχαν προβεί σε μια συστηματική θεώρηση αναφορικά με τις τιμές των τριγωνομετρικών τιμών, ως συναρτήσεων του τόξου, ήταν ο Jean Bernoulli (1667-1748), ενώ αντίστοιχα ο Roger Cotes (που ήδη αναφέρθηκε και πιο πάνω) έδωσε στο έργο του *Harmonia Mensurarum* (το οποίο εκδόθηκε το 1722) τους τύπους των παραγώγων και των ολοκληρωμάτων των συναρτήσεων ημx και εφx. Στο ίδιο αυτό έργο εξάλλου, υφίσταται και η περιοδικότητα αυτών των συναρτήσεων. Ο ίδιος ο Cotes είχε διατυπώσει ήδη και από το 1714 έναν τύπο που ήταν ισοδύναμος του τύπου $e^{ιθ}$= συνθ + ιημθ, τον οποίο μάλιστα επέδειξε αργότερα ο Euler. Με αυτόν τον τύπο παράλληλα, είχε εγκαινιαστεί το πλαίσιο των εφαρμογών της Τριγωνομετρίας στους μιγαδικούς αριθμούς (Μηλιός, 2011).

Σε αυτό το πεδίο πάντως εν πολλοίς είχε αναδειχθεί ο μαθηματικός Abraham de Moivre (1667-1754), ο οποίος άλλωστε δημοσίευσε τα σχετικά αποτελέσματα στο έργο του *Miscellanea Analytica*, που εκδόθηκε το 1730. Μέσα σε αυτό το έργο μάλιστα, εμπεριέχονται όλες εκείνες οι σχέσεις που δίνουν τη νιοστή δύναμη και τη νιοστή ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού. Είναι χαρακτηριστικό, ότι εδώ παράλληλα, γίνεται χρήση της τριγωνομετρικής του μορφής με την χρήση των δυο ακόλουθων τύπων:

$(συνθ + iημθ)^n$= συν(nθ) + iημ(nθ) (θεώρημα De Moivre) και αντίστοιχα

$(συνθ + iημθ)^{1/n}$= συν(θ+2κπ) + iημ(θ+2κπ)

2ο Κεφάλαιο: Η Τριγωνομετρία στα Αναλυτικά Προγράμματα του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος κατά τη διάρκεια των τελευταίων 20 ετών

2.1 Το μάθημα της Τριγωνομετρίας στα Αναλυτικά Προγράμματα της δεκαετίας του 2000

Σε αυτό το σημείο καταρχάς, θα πρέπει να τονιστεί πως τα στοιχεία και οι σχετικές οδηγίες που υφίστανται αναφορικά με τη διδασκαλία του μαθήματος των Μαθηματικών και ειδικότερα και την διδασκαλία του Μαθήματος της Τριγωνομετρίας, στην πραγματικότητα είχαν δημοσιευθεί για πρώτη φορά, κατά τα τέλη της δεκαετίας του 1990 και συγκεκριμένα το 1997. Οι συγκεκριμένες αυτές οδηγίες, είναι ενδεικτικό, ότι είχαν οδηγηθεί σε πολλές αναδημοσιεύσεις (το 1998, το 1999, το 2000, το 2001, το 2002, το 2003, όπως και κατά τα επόμενα χρόνια της εξεταζόμενης δεκαετίας).

Υπό αυτό το πρίσμα, στην προκειμένη περίπτωση εξετάζουμε το παράδειγμα του Αναλυτικού Προγράμματος για το έτος 2002 - 2003 και αντίστοιχα και για το έτος 2007 - 2008. Μέσω των Αναλυτικών Προγραμμάτων μάλιστα για τις εν λόγω σχολικές χρονιές, κατά την γνώμη μας, δεν υφίστανται σημαντικές διαφοροποιήσεις και αλλαγές, ως προς τον τρόπο, τη διαδικασία και τις οδηγίες διδασκαλίας του μαθήματος της Τριγωνομετρίας.

Θα πρέπει να σημειωθεί, ότι το 2001 γενικότερα το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο σχεδίασε για την υποχρεωτική εκπαίδευση, βάσει και των όσων άλλωστε προβλέπονταν μέσω του Νόμου 1566/85 της δεκαετίας του 1980 το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Σπουδών και τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών. Στα προγράμματα αυτά, με βάση τους συντάκτες τους, είχε υπάρξει προσπάθεια να αναδειχθεί μια διαθεματικού τύπου προσέγγιση της γνώσης, μέσα από μια διαδικασία διασύνδεσης ανάμεσα σε διάφορα γνωστικά αντικείμενα και επιστημονικά πεδία. Μέσω αυτής της προσέγγισης, επρόκειτο κατά τις αρχές της εν λόγω δεκαετίας, να υπάρξει συγγραφή ενός σημαντικού αριθμού νέων βιβλίων, τη στιγμή επίσης που είχαν κάνει την εμφάνισή τους μετά το 2000 σταδιακά και νέα εκπαιδευτικά λογισμικά. Η χρήση τους άλλωστε έκτοτε υφίσταται σταθερά στο πλαίσιο του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος (στοιχείο που στις μέρες μας, για παράδειγμα, αποτυπώνεται μέσα από τη χρήση των διαφόρων λογισμικών πλέον που κυκλοφορούν ευρέως και στο Ίντερνετ).

Το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Σπουδών, είναι χαρακτηριστικό, ότι περιέχει - κι αυτό άλλωστε ισχύει και στα πλαίσια της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης που μας απασχολεί εδώ- ανά διδακτικό αντικείμενο, τους γενικούς σκοπούς της διδασκαλίας, τους γενικούς γνωστικούς, συναισθηματικούς, ψυχολογικούς και ψυχοκινητικούς στόχους, όπως επίσης και συνοπτικά περιεχόμενα γνώσης και μάθησης. Σε αυτό το σημείο εξάλλου, θα ήταν δυνατόν να προσθέσουμε και τις ενδεικτικές θεμελιώδεις έννοιες της διαθεματικής μάθησης και προσέγγισης που διαχέονται στο κείμενο των διαφόρων σχολικών εγχειριδίων και που την ίδια στιγμή, επίσης διαχέονται και στον τρόπο, με τον οποίο σχεδιάζονται οι ποικίλες διαθεματικές δραστηριότητες στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών από το 2000 και μετά (Βέικου, Σιγανού & Παπασταμούλη, 2007).

Στην περίπτωση πάντως της διδασκαλίας της Τριγωνομετρίας, στα πλαίσια του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος, ακόμα και ως σήμερα μπορούμε να αντιληφθούμε το ακόλουθο: η διαδικασία της διδασκαλίας του συγκεκριμένου γνωστικού πεδίου, μάλλον δεν διακρίνεται τόσο πολύ από την χρήση της διαθεματικής προσέγγισης. Ίσως βέβαια είναι αλήθεια, ότι το εν λόγω γνωστικό πεδίο, είναι τέτοιο, ως προς το περιεχόμενό του, με αποτέλεσμα σε μεγάλο βαθμό να μην υφίσταται η δυνατότητα και η ύπαρξη ευελιξίας για τον σχεδιασμό προγραμμάτων και διαδικασιών μέσα στην τάξη, όπου θα υφίσταται και η χρήση στοιχείων και γνωρισμάτων και από άλλα γνωστικά πεδία, πέραν των ίδιων των Μαθηματικών.

Την ίδια στιγμή, ωστόσο, είναι αλήθεια, πως μέσω των Αναλυτικών Προγραμμάτων των δυο τελευταίων δεκαετιών, μια διάσταση που αναδεικνύεται, είναι η προσπάθεια για μια νέα προσέγγιση, ως προς τον τρόπο διδασκαλίας της Τριγωνομετρίας και κατά προέκταση και του μαθήματος των μαθηματικών. Αυτή η προσέγγιση είναι κυρίως συνδεδεμένη με την προσπάθεια πλέον ο μαθητής να μπορέσει να εισέλθει πιο δυναμικά και προσωπικά στην διαδικασία της ανακάλυψης της γνώσης. Αυτή η διαδικασία αφορά, με άλλα λόγια, μια πιο ενεργητικού τύπου μάθηση και προσέγγιση των προσφερόμενων γνώσεων, τη στιγμή που τα εν λόγω Αναλυτικά Προγράμματα δεν παύουν να δίνουν βαρύτητα και στο πώς μαθαίνουν τα παιδιά (Ζωϊτσάκος, 2019).

Μέσω του Αναλυτικού Προγράμματος για το σχολικό έτος 2003 - 2004, το οποίο βασίστηκε σε μια σειρά ΦΕΚ που είχαν εκδοθεί το 2001 (πρόκειται, εν προκειμένω, για τα ΦΕΚ: 1366, τ. Β' 18-10-2001 / 1373, τ. Β', 18-10-20011374, τ. Β', 18-10-2001 / 1375, τ. Β', 18-10-2001 / 1375, τ. Β', 18-10-2001 / 1376, τ. Β', 18-10-2001), μπορεί κάποιος να δει, ότι σε ό, τι αφορά το Γυμνάσιο, για την Τριγωνομετρία τονίζεται, πως ως προς γενικούς στόχους, οι οποίοι αφορούν τις γνώσεις, τις δεξιότητες, τις γενικές αρχές, στάσεις και αξίες, τα παιδιά καλούνται να: γνωρίσουν καταρχάς τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας, όπως και τις σχέσεις που τους συνδέουν και τους διέπουν. Την ίδια στιγμή καλούνται και να γνωρίσουν και να καταλάβουν την έννοια του διανύσματος, να προσθέτουν και να αφαιρούν διανύσματα και να αναλύουν επίσης ένα διάνυσμα σε δυο κάθετες συνιστώσες ("Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών", στο ΦΕΚ 303Β/ 13-03-2003, σελ. 253).

Είναι χαρακτηριστικό, ότι στο πλαίσιο του ίδιου αυτού Αναλυτικού Προγράμματος επισημαίνεται και η γνωριμία τους με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς με διάνυσμα γωνίας που κυμαίνεται από τις 0 ως τις 360 μοίρες. Επιπλέον, καλούνται να γνωρίσουν τις σχέσεις που διέπουν αυτούς τους αριθμούς και να μάθουν τους νόμους των ημιτόνων και των συνημίτονων και να μπορούν εξάλλου να τους εφαρμόζουν και στον υπολογισμό των πλευρών και των γωνιών ενός τριγώνου.

Κάποια πιο συγκεκριμένα στοιχεία, αναφορικά με την περίπτωση της διδασκαλίας της Τριγωνομετρίας μπορούμε να διαπιστώσουμε στα πλαίσια του εν λόγω Αναλυτικού Προγράμματος, στην περίπτωση της Β΄ Γυμνασίου, όπου σε σχετικό πίνακα, επισημαίνονται τα ακόλουθα, σχετικά με τους στόχους, τις θεματικές ενότητες, αλλά και τις ενδεικτικές δραστηριότητες:

Πίνακας 1: Στόχοι, θεματικές ενότητες και ενδεικτικές δραστηριότητες για την Τριγωνομετρία στη Β΄ Γυμνασίου

Τριγωνομετρία – Διανύσματα		
• Να γνωρίζουν πώς ορίζεται το ημιτόνιο και το συνημίτονο • Να υπολογίζουν το ημίτονο και το συνημίτονο οξείς γωνίας ορθογώνιου τριγώνου, όταν δίνονται οι πλευρές του • Να γνωρίζουν, ότι δυο γωνίες που έχουν το ίδιο ημίτονο και συνημίτονο είναι ίσες και να μπορούν να σχεδιάζουν μιας γωνίας, της οποίας είναι γνωστό το ημίτονο ή το συνημίτονο • Να γνωρίζουν πώς μεταβάλλεται το ημίτονο και το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας, όταν αυτή μεταβάλλεται • Να υπολογίζουν με τη βοήθεια του ημίτονου και συνημίτονου διάφορες αποστάσεις • Να γνωρίζουν και να υπολογίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών των 30, 45 και 60 μοιρών	Ημίτονο και Συνημίτονο οξείας γωνίας (5 διδακτικές ώρες)	Υπολογισμός του ύψους του κτιρίου, όπου θα φτάσει η σκάλα ενός πυροσβεστικού οχήματος, αν είναι γνωστό το μήκος της και η γωνία που σχηματίζει με το έδαφος
• Να γνωρίζουν πώς ορίζεται η εφαπτόμενη μιας οξείας γωνίας ορθογώνιου τριγώνου. • Να υπολογίζουν την εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ορθογώνιου τριγώνου όταν δίνονται οι πλευρές του. • Να υπολογίζουν την εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης • Να σχεδιάζουν μια γωνία, της οποίας δίνεται η εφαπτόμενη • Να γνωρίζουν πώς μεταβάλλεται η εφαπτόμενη οξείας γωνίας, όταν μεταβάλλεται η γωνία	Εφαπτομένη οξείας γωνίας (2 ώρες)	Υπολογισμός του ύψους ενός δένδρου ή ενός κτιρίου από το μήκος της σκιάς του ή της γωνίας που σχηματίζουν οι ακτίνες του ήλιου με το έδαφος.

• Να υπολογίζουν με τη βοήθεια της εφαπτόμενης διάφορες αποστάσεις		
• Να κατανοήσουν την ανάγκη της παράστασης ορισμένων μεγεθών με διανύσματα • Να γνωρίζουν τα στοιχεία ενός διανύσματος • Να γνωρίζουν πότε δυο διανύσματα είναι ίσα, πότε αντίθετα και να μπορούν να σχεδιάζουν τέτοια δια-νύσματα	Η έννοια του διανύσματος και το μέτρο του διανύσματος (1 διδακτική ώρα)	Να δοθούν δραστηριότητες, στις οποίες να διαφαίνεται η ανάγκη εισαγωγής του διανύσματος (π.χ. μετα-τόπιση, δύναμη, ταχύτητα κ.λ.π.)
• Να βρίσκουν το άθροισμα και τη διαφορά διανύσματος • Να αναλύουν ένα διάνυσμα σε δυο κάθετες συνιστώσες και να υπολογίζουν τα μέτρα των συνιστωσών, αν δίνεται το μέτρο του διανύσματος και η γωνία που σχηματίζει με μια από τις δυο συνιστώσες	Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων και επίσης ανάλυση του διανύσματος σε δυο κάθετες συνιστώσες (3 διδακτικές ώρες)	Δραστηριότητες από την καθημερινή ζωή, όπως είναι π.χ. οι διαδοχικές μετα-τοπίσεις, η σύνθεση δυνά-μεων κ.λ.π., από τις οποίες εξάλλου, μπορεί να προκύψει ο τρόπος πρόσθεσης και αφαίρεσης διανυσμάτων

Πηγή: "Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών", στο ΦΕΚ 303Β/ 13-03-2003, σελ.295

Για την περίπτωση αντίστοιχα της Γ΄ Γυμνασίου, μπορούμε, να δούμε, αναφορικά με τους στόχους, τις θεματικές ενότητες, αλλά και τις ενδεικτικές δραστηριότητες, τα ακόλουθα:

Πίνακας 2:Στόχοι, θεματικές ενότητες και ενδεικτικές δραστηριότητες για την Τριγωνομετρία στη Γ΄ Γυμνασίου

• Να γνωρίζουν πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας φ μεταξύ των 0 και 180 μοιρών, με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστή-ματος συντεταγμένων • Να υπολογίζουν τριγωνο-μετρικούς αριθμούς με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων	Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας φ μεταξύ 0 και 180 μοιρών	
• Να γνωρίζουν την σχέση, η οποία υφίσταται εν γένει ανάμεσα στους τριγωνο-μετρικούς αριθμούς των παραπληρωματικών γωνιών και να υπολογίζουν την ίδια στιγμή και τριγωνομετρικούς αριθμούς αμβλείας γωνίας με βάση αυτή τη σχέση		Προβλήματα της φυσικής που αναφέρονται στο έργο δυνάμεων, οι οποίες έχουν ίδιο μέτρο και σχηματίζουν παραπληρωματικές γωνίες με τον άξονα κίνησης

• Να γνωρίζουν, ότι η ισότητα μεταξύ των ημιτόνων δυο γωνιών δεν συνεπάγεται κατά ανάγκη και την ισότητα των γωνιών.		
• Να γνωρίζουν και να μπορούν να αποδεικνύουν τις βασικές ταυτότητες : ημ2 ω+συν2 ω=1, • Να χρησιμοποιούν τις βασικές ταυτότητες για την απόδειξη απλών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων	Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας (4 διδακτικές ώρες)	Δραστηριότητες υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας από το ημίτονο ή το συνημίτονό της
• Να γνωρίζουν τους νόμους των ημιτόνων και συνημιτόνων και να τους εφαρμόζουν στην λύση των προβλημάτων	Νόμος ημιτόνων και συνημιτόνων (5 διδακτικές ώρες)	Επίλυση των προβλημάτων που υφίστανται στο πλαίσιο άλλων γνωστικών αντικειμένων (Εδώ υφίσταται εν προκειμένω, η επίλυση κάποιων προβλημάτων που έχουν να κάνουν με το πεδίο της Φυσικής).

Πηγή: "Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών", στο ΦΕΚ 303Β/ 13-03-2003, σελ.302

Μέσω του Αναλυτικού Προγράμματος του σχολικού έτους 2007 - 2008 μπορούμε να παρατηρήσουμε, ότι εκφράζεται, τόσο στα πλαίσια της διδασκαλίας του μαθήματος των Μαθηματικών όσο κατά προέκταση και στο πλαίσιο της διδασκαλίας της Τριγωνομετρίας, η αντίληψη πως υφίσταται πλέον η προσπάθεια να τεθεί στο περιθώριο το παραδοσιακό διδακτικό μοντέλο. Στα πλαίσια αυτού του μοντέλου, είναι χαρακτηριστικό, ότι ο δάσκαλος του μαθήματος των Μαθηματικών αρχίζει την διδασκαλία του μαθήματος με την παρουσίαση μιας τεχνικής ή ενός μαθηματικού θεωρήματος, ενώ την ίδια στιγμή ακολουθούν διάφορες ασκήσεις, με τις οποίες καλούνται οι μαθητές να εφαρμόσουν τα όσα έχουν διδαχθεί από τον εκπαιδευτικό και διάφορα προβλήματα για εφαρμογή των διαφόρων θεωρημάτων και των μαθηματικών τύπων, εξισώσεων κ.λ.π. (*Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των Μαθηματικών του Γενικού Λυκείου κατά το σχολικό έτος 2007-2008*, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, εκδόσεις ΟΕΔΒ, Αθήνα, 2007, σελ. 15).

Στα πλαίσια ενός τέτοιου μοντέλου εξάλλου, είναι επίσης ενδεικτικό και το ότι το κέντρο βάρους πέφτει σε εκείνα τα είδη δεξιοτήτων που ταυτόχρονα προβάλλονται και διαμέσου της διδασκαλίας από μέρους των εκπαιδευτικών, με άλλα λόγια, της ακρίβειας και της ταχύτητας, ως προς τις σωστές απαντήσεις που πρέπει να δώσει ο μαθητής. Το μοντέλο αυτό μάλιστα, είναι ενδεικτικό, ότι λειτουργεί κάτω από την ακόλουθη υπόθεση: Το σύνολο των τεχνικών που διαθέτουν οι μαθητές, για να λύνουν ασκήσεις, είναι το σώμα των διαφόρων γνώσεων, τις οποίες θα πρέπει να διαθέτουν. Υπό αυτό το πρίσμα εξάλλου, η ευχέρεια στις τεχνικές αυτές δεν παύει την ίδια στιγμή να εκφράζει και το αν οι μαθητές έχουν μάθει τα μαθηματικά ή όχι.

Με αυτόν τον τρόπο όμως, όπως μπορεί να αντιληφθεί κάποιος, είναι χαρακτηριστικό, ότι οι διάφορες μαθηματικές γνώσεις, στο πλαίσιο του παλαιού διδακτικού μοντέλου στην ουσία δεν μπορούν να θεωρηθούν πως συνιστούν κτήμα του ίδιου του μαθητή. Με άλλα λόγια, ο μαθητής και οι μαθηματικές γνώσεις, είναι δυο διαφορετικές και διακριτές μεταξύ τους παράμετροι μέσα από τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας μαθηματικών πεδίων, όπως είναι η Τριγωνομετρία.

Στα πλαίσια όμως των διαφόρων Αναλυτικών Προγραμμάτων, αναφορικά με τον τρόπο διδασκαλίας του μαθήματος των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, από τη δεκαετία του 2000, μπορούμε να αντιληφθούμε το ότι υφίσταται μια σειρά παραδοχών, με βάση τις οποίες θεωρείται, ότι μπορεί να οργανωθεί καλύτερα η εκπαιδευτική διαδικασία σε ένα μάθημα, όπως αυτό. Πιο συγκεκριμένα, μια τέτοια παραδοχή έχει να κάνει, για παράδειγμα, με το ότι η γνώση και ο μαθητής είναι και θα πρέπει πάντα να είναι αλληλοσυνδεόμενα μεταξύ τους μεγέθη. Με άλλα λόγια, ο μαθητής συμμετέχει και αυτός ενεργά και με δυναμικό τρόπο, στην παραγωγή και κατάκτηση της γνώσης. Με βάση αυτήν την αρχή εξάλλου, θεωρείται, πως ο κάθε μαθητής έχει τον δικό του τρόπο, αναφορικά με την διαδικασία της πρόσβασης στη γνώση και της κατάκτησής της. Αυτό πολύ απλά σημαίνει το ακόλουθο: ο εκπαιδευτικός μέσα στην τάξη, θα πρέπει να έχει υπόψη του, ότι δεν αποκλείεται να υπάρχουν μαθητές, οι οποίοι δεν έχουν κατανοήσει μια μαθηματική έννοια (για παράδειγμα, κάποιο θεώρημα στο πεδίο της Τριγωνομετρίας) ή μπορεί αντίστοιχα να το έχουν κατανοήσει με λάθος τρόπο.

Με βάση την παραπάνω προσέγγιση εξάλλου, από τη μια μεριά, το ζητούμενο είναι η ανάπτυξη μιας ερευνητικής και ενεργητικής στάσης των μαθητών για πεδία, όπως αυτό της Τριγωνομετρίας. Η αποδοχή μάλιστα αυτού του στόχου τοποθετεί σε κεντρική θέση το πρόβλημα και τις διαδικασίες λύσης ενός προβλήματος. Το μαθηματικό πρόβλημα και τα ερωτήματά του από την άλλη μεριά, είναι πηγή νοήματος της μαθηματικής γνώσης. Τα αποτελέσματα δηλαδή των νοητικών διεργασιών συνιστούν γνώση, μόνο όταν αποδειχτούν επαρκή και αξιόπιστα στην επίλυση προβλημάτων.

Μάλιστα, με βάση μια τέτοια παραδοχή, είναι ενδεικτικό, ότι το πεδίο της δοκιμασίας για έναν μαθητή και στην Τριγωνομετρία, εστιάζεται περισσότερο στο θέμα της επίλυσης ενός προβλήματος και όχι τόσο στην εξέταση διαφόρων τύπων, κανόνων, Εξάλλου, με βάση τα προβλήματα, όπως θα πρέπει να έχει υπόψη του κάθε εκπαιδευτικός, θα πρέπει να αξιολογούμε μια σειρά από συγκεκριμένες παραμέτρους:

- Η ίδια η διαδικασία της διδασκαλίας δικαιολογείται μέσα από την αποκάλυψη της αξίας και της πρακτικής χρησιμότητας των Μαθηματικών σε πολλαπλές πτυχές του ανθρώπινου βίου.
- Δίνονται στους μαθητές κίνητρα, ώστε να ενδιαφερθούν για το συγκεκριμένο μάθημα.
- Εισάγονται με καλύτερο και πιο αποτελεσματικό τρόπο διάφορες έννοιες και διδακτικές ενότητες. Εδώ εξάλλου, προσφέρεται και στους μαθητές η κατάλληλη βοήθεια, προκειμένου να μπορέσουν να αναπτύξουν τις γνώσεις τους με έναν πιο αποτελεσματικό τρόπο.
- Ελέγχουμε τον βαθμό κατανόησης των μαθητών στις μαθηματικές έννοιες (Johnston-Wilder, Lee & Pimm, 2010).

Υπό το πρίσμα των παραπάνω επισημάνσεων και παραμέτρων, στο ερώτημα του "τι σημαίνει να μαθαίνω Μαθηματικά", θα ήταν εφικτό, με βάση και τις οδηγίες του συγκεκριμένου Αναλυτικού Προγράμματος, να δώσουμε τις ακόλουθες απαντήσεις:

- Μαθαίνω τους αλγόριθμους και τις αποδεικτικές διαδικασίες.

- Μαθαίνω να διακρίνω σε ποια περίπτωση θα χρησιμοποιώ τον κάθε αλγόριθμο και την κατάλληλη αποδεικτική διαδικασία.
- Μαθαίνω να χρησιμοποιώ τους αλγόριθμους και τις αποδεικτικές διαδικασίες στην επίλυση προβλημάτων.
- Μαθαίνω να σκέπτομαι με μαθηματικό τρόπο, δηλαδή να οικοδομώ τη μαθηματική δομή ενός θέματος ή μιας έννοιας και να εκφράζω τις σκέψεις μου με τη γλώσσα και τα σύμβολα των Μαθηματικών (Thomas, Brunsting & Warrick, 2010).

Θα πρέπει να επισημανθεί εξάλλου, ότι εδώ υφίσταται ένα σύνολο συγκεκριμένων μαθησιακών στόχων, μέσα από την διαδικασία διδασκαλίας της Τριγωνομετρίας. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές οφείλουν:

- Να γνωρίζουν το πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ορθογώνιου τριγώνου, όπως επίσης και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιασδήποτε γωνίας σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.
- Να γνωρίζουν τη σχέση που συνδέει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών που διαφέρουν κατά πολλαπλάσιο των 360 μοιρών.
- Να γνωρίζουν την έννοια του τριγωνομετρικού κύκλου και τον τρόπο, με τον οποίο παριστάνονται σε αυτόν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας σε μοίρες ή ακτίνια.

Αντίστοιχα από την άλλη μεριά, οι μαθητές θα πρέπει να μάθουν να υπολογίζουν τις τριγωνομετρικές ταυτότητες και να τις αποδεικνύουν την ίδια στιγμή. Επίσης, πρέπει να μάθουν να τις χρησιμοποιούν για να:

- υπολογίζουν του τριγωνομετρικούς αριθμούς, όταν δίνεται ένας από αυτούς και
- αποδεικνύουν άλλες ταυτότητες. Εξάλλου, με αυτόν τον τρόπο, δίνεται η ευκαιρία για άσκηση στον αλγεβρικό λογισμό και την αποδεικτική διαδικασία.

Κάποιοι άλλοι στόχοι που συνδέονται με το μάθημα της Τριγωνομετρίας αφορούν τα ακόλουθα:

- να γνωρίζουν τις σχέσεις που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών,
- να γνωρίζουν τις σχέσεις που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των αντίθετων γωνιών,
- να γνωρίζουν τις σχέσεις που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών με άθροισμα 180 μοιρών,
- να γνωρίζουν τις σχέσεις που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών που διαφέρουν κατά 180 μοίρες.
- να γνωρίζουν τις σχέσεις που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών με άθροισμα 90 μοιρών,
- παράλληλα, να μπορούν να χρησιμοποιούν όλες τις προηγούμενες σχέσεις για την αναγωγή του υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών οποιασδήποτε γωνίας στον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας από 0 μοίρες ως τις 90 μοίρες.

Πέραν όλων των παραπάνω, την ίδια στιγμή είναι ενδεικτικό, ότι και στην διάρκεια πλέον της δεκαετίας του 2010 θα αναδυθεί ένα παρόμοιο πλαίσιο αναφορικά με την διαδικασία της διδασκαλίας του μαθήματος των μαθηματικών και ειδικότερα και της Τριγωνομετρίας. Για παράδειγμα, μέσω του ΦΕΚ 1168/ τεύχος Β΄/ 8 Ιουνίου 2011, μπορούμε να δούμε, ότι σε ό, τι αφορά ειδικότερα την περίπτωση του Λυκείου, τονίζεται, ότι ένας βασικός στόχος αναφορικά με την διαδικασία της εκπαίδευσης των Μαθηματικών (κι αυτό άλλωστε την ίδια στιγμή, έχει προέκταση και στο πεδίο της Τριγωνομετρίας) έχει να κάνει με το να οδηγηθούν τα παιδιά σε έναν πιο προωθημένο μαθηματικό τρόπο σκέψης. Κάποια βασικά γνωρίσματα μάλιστα, αυτού του μαθηματικού τρόπου σκέψης, είναι συνυφασμένα με την αυστηρή χρήση μαθηματικής ορολογίας ή αντίστοιχα με τους ορισμούς των εννοιών ή αντίστοιχα με την θεωρητική απόδειξη διαφόρων ορισμών (Σπαθάρης, 2011).

Μάλιστα ως προς την προσέγγιση όλων αυτών των στόχων την ίδια στιγμή, είναι δυνατόν να συμβάλλουν αποφασιστικά τα ακόλουθα:

- Η ένταξη των προϋπαρχουσών μαθηματικών γνώσεων των μαθητών σε ένα θεωρητικό πλαίσιο, η επέκταση και η εμβάθυνσή τους.
- Η ενεργητική εμπλοκή των μαθητών στη διερεύνηση προβλημάτων, στην δημιουργία και τον έλεγχο των μαθηματικών εικασιών, στην ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλήματος και πολλαπλών αποδεικτικών προσεγγίσεων, στην ανάπτυξη των διαφόρων τρόπων σκέψης (επαγωγικού και παραγωγικού τρόπου π.χ.).
- Η κατανόηση και η χρήση της μαθηματικής γλώσσας, των συμβόλων και των αναπαραστάσεων των μαθηματικών αντικειμένων και η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να προβαίνουν σε μετάφραση από την φυσική στην μαθηματική γλώσσα ή και αντιστρόφως αντίστοιχα. Αυτό, αφορά παράλληλα και την ικανότητα των μαθητών να επικοινωνούν μαθηματικά.
- Η διαδικασία των εννοιολογικών συνδέσεων στα πλαίσια του πεδίου των Μαθηματικών, αλλά και μεταξύ των ίδιων των μαθηματικών και άλλων γνωστικών περιοχών.
- Η ανάπτυξη των ικανοτήτων χρήσης των Μαθηματικών ως εργαλείου, με το οποίο μπορεί να επέλθει το στοιχείο της κατανόησης και ερμηνείας του κόσμου.
- Η θεώρηση της επιστήμης των μαθηματικών ως ενός κορυφαίου πολιτισμικού μεγέθους, το οποίο άλλωστε, διαχρονικά και κατά την διάρκεια της ιστορίας μεταβλήθηκε και αναπτύχθηκε.

Αντίστοιχα, σε ό, τι αφορά τους στόχους στο μάθημα της Τριγωνομετρίας στο Λύκειο, ένας πρώτος στόχος είναι το να μάθουν οι μαθητές να ταξινομούν τα τρίγωνα, με βάση τις σχέσεις των πλευρών τους, αλλά και το είδος των γωνιών τους. Εδώ στόχος είναι εξάλλου και το να μάθουν τα παιδιά να αναγνωρίζουν τα διάφορα δευτερεύοντα στοιχεία του τριγώνου, όπως είναι η διχοτόμος, η διάμεσος, το ύψος και πάντα φυσικά με βάση και τους αντίστοιχους ορισμούς. Εδώ στόχος είναι και να σχεδιάζουν και να συμβολίζουν τα διάφορα είδη τριγώνων.

Σε ένα δεύτερο επίπεδο αντίστοιχα, ο στόχος αφορά καταρχάς, το να διακρίνουν οι μαθητές το πότε οι σχέσεις μεταξύ των βασικών στοιχείων των τριγώνων, μπορούν να αποτελέσουν κριτήριο ισότητας τους. Εξάλλου, εδώ τίθεται, ως στόχος και το ζήτημα της απόδειξης των κριτηρίων ισότητας μεταξύ των διαφόρων τριγώνων. Τα παιδιά εδώ με άλλα λόγια, οφείλουν να αποδεικνύουν τα διάφορα κριτήρια ισότητας μεταξύ των τριγώνων και επίσης αυτό αφορά ειδικότερα την περίπτωση των ορθογώνιων τριγώνων. Αυτό εξάλλου αφορά και την χρήση κριτηρίων αναφορικά με την απόδειξη της ισότητας ανάμεσα σε ευθύγραμμα τμήματα και γωνίες.

Ένας άλλος στόχος επίσης είναι το ότι τα παιδιά καλούνται να διερευνήσουν (κάνοντας παράλληλα και χρήση των λογισμικών της δυναμικής γεωμετρίας), να προσδιορίζουν, αλλά και να αποδεικνύουν σε ποιες γραμμές ανήκουν συγκεκριμένα σημεία που ικανοποιούν ταυτόχρονα συγκεκριμένες γεωμετρικές ιδιότητες. Οφείλουν ακόμα, να αναγνωρίζουν τον κύκλο, τη μεσοκάθετο τμήματος, αλλά και τη διχοτόμο γωνίας, ως γεωμετρικούς τόπους.

Μια άλλη σημαντική παράμετρος στα πλαίσια διδασκαλίας του μαθήματος είναι το ότι η Τριγωνομετρία αποσκοπεί στο να οδηγήσει τα παιδιά στο να διερευνήσουν, να προσδιορίσουν και να αποδείξουν βασικές ανισοτικές σχέσεις στοιχείων του τριγώνου με ιδιαίτερη έμφαση μάλιστα στο στοιχείο της τριγωνικής ανισότητας. Μάλιστα καλούνται να εφαρμόσουν παράλληλα αυτές τις σχέσεις στην επίλυση προβλημάτων. Ένας άλλος στόχος αντίστοιχα, έχει να κάνει με τον προσδιορισμό και την αιτιολόγηση των σχετικών θέσεων ευθείας και κύκλων, αλλά και των σχετικών θέσεων δυο κύκλων. Τέλος το μάθημα αυτό έχει ως στόχο να μάθει τους μαθητές να πραγματοποιούν απλές γεωμετρικές κατασκευές.

3ο Κεφάλαιο: Οι παρανοήσεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την διάρκεια της διδασκαλίας της Τριγωνομετρίας

Καταρχάς, η τριγωνομετρία αποτελεί μαθηματικό αντικείμενο που η διδασκαλία της ξεκινά στο γυμνάσιο αλλά αποτελεί ένα από τα πρώτα βήματα για τον απειροστικό λογισμό και συνδέεται και με άλλους κλάδους όπως με την Νευτώνεια φυσική, την αρχιτεκτονική, την τοπογραφία και την μηχανική (Weber, 2008). Πέρα όμως από τη χρησιμότητα και την εφαρμογή της στις παραπάνω επιστήμες εμφανίζει χαρακτηριστικά που δυσκολεύουν τους μαθητές. Ένα πρόβλημα, το οποίο έχουν να αντιμετωπίσουν οι μαθητές ήδη από την πρώτη τους επαφή με την Τριγωνομετρία, είναι η δυσκολία τους να προβούν στην σύνδεση διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων (συγκεκριμένα τριγώνων) με διάφορες σχέσεις αριθμών και να χειρίζονται το συμβολισμό που σχετίζεται με αυτές τις σχέσεις αριθμών.

Μπορούμε να δούμε εδώ, με άλλα λόγια, ότι υφίσταται η διαδικασία, μιας απότομης μετάβασης σε ένα σύνολο νέων εννοιών, η εκμάθηση και διδασκαλία των οποίων την ίδια στιγμή, απαιτεί την ύπαρξη ενός νέου ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Καθώς μεταξύ των διαφόρων εννοιών στο πεδίο της Τριγωνομετρίας, υφίσταται το γνώρισμα της ασυνέχειας, είναι ενδεικτικό, ότι μπορεί να προκύψουν ορισμένα εμπόδια, επιστημολογικού και διδακτικού χαρακτήρα.

Το πρόβλημα μάλιστα, μπορεί να καταστεί ακόμα εντονότερο, στην περίπτωση που επιχειρηθεί η μεταφορά του μοντέλου από τον τριγωνομετρικό κύκλο στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, στοιχείο που λαμβάνει χώρα στα πλαίσια του μαθήματος των Μαθηματικών στην Β΄ Λυκείου. Υπό το πρίσμα όλων των παραπάνω, εδώ θα μπορούσε να συμπεράνει κάποιος, ότι η παραδοσιακή διδασκαλία συνεχίζει να επιμένει στην χρήση λόγων, με γνώμονα υποτίθεται την κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, στοιχείο που την ίδια στιγμή στην ουσία δυσκολεύει τους μαθητές αρκετά στο να κατανοήσουν πλήρως τις συναρτήσεις (Kendal & Stacey, 1997).

Αντίστοιχα, μέσω του σχολικού εγχειριδίου στην Γ΄ Λυκείου, είναι ενδεικτικό, ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις αντιμετωπίζονται με πιο αναλυτικό και λεπτομερή τρόπο, χωρίς όμως συγχρόνως οι μαθητές να διαθέτουν ουσιαστικά το κατάλληλο μαθηματικό και τριγωνομετρικό υπόβαθρο. Οι μαθητές υποτίθεται πως ως αυτό το στάδιο έχουν κατανοήσει την στατική έννοια των τριγωνομετρικών αριθμών, τη στιγμή που παράλληλα δεν έχουν όμως ακόμα συλλάβει την συναρτησιακή τους ουσία, η οποία είναι στην πραγματικότητα πολύ σημαντικότερη, αναφορικά με τον απειροστικό λογισμό. Όμως ακόμα και κατά την Γ΄ Λυκείου είναι χαρακτηριστικό, ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις αντιμετωπίζονται από τη μεριά του μαθητή απλώς ως κάποιες ακόμα συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες ή που μέσω αυτών υπάρχει η δυνατότητα για τον υπολογισμό ορισμένων ακόμα δύσκολων κατηγοριών (Μηλιός, 2011).

Ένα άλλο χρόνιο πρόβλημα που έχει επισημανθεί εξάλλου πολλές φορές από αρκετούς εκπαιδευτικούς των Μαθηματικών, είναι πως οι μαθητές διδάσκονται το μάθημα και ειδικότερα το πεδίο της Τριγωνομετρίας με έναν τέτοιο τρόπο, ώστε να μην μπορούν κατά προέκταση να προβούν σε μια σύνδεση των γνώσεων που αποκτούν με διάφορες πτυχές της καθημερινής ζωής ή με άλλα γνωστικά και επιστημονικά πεδία. Είναι ενδεικτικό ωστόσο, ότι στο μάθημα της Τριγωνομετρίας, τα παιδιά, για παράδειγμα, μπορούν να υπολογίζουν τριγωνομετρικούς αριθμούς σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, μέσα από την διαδικασία της επίλυσης μέσω των λόγων των πλευρών του. Κάτι τέτοιο εξάλλου, μπορεί να γίνει ακόμα και από παιδιά που δεν έχουν ιδιαίτερη σχέση με τον χώρο των μαθηματικών (Rosu, 2015).

Το ζήτημα της διασύνδεσης της Τριγωνομετρίας με άλλα γνωστικά και επιστημονικά πεδία, μπορεί να αναδειχθεί, μέσα από το ότι, για παράδειγμα, στο χώρο της Φυσικής και της πρώιμης Μηχανικής, ο μαθητής, μπορεί με τη βοήθεια της Τριγωνομετρίας, να αντιληφθεί τη σημασία αναφορικά με τη σχέση των γωνιών σε τρίγωνα, των οποίων οι πλευρές είναι κάθετες και όπου επίσης εμπλέκεται και το πεδίο της Γεωμετρίας. Υπό αυτό το πρίσμα, η κατανόηση της Τριγωνομετρίας και των διαφόρων συναρτήσεών της, θεωρείται πολύ σημαντική, λόγω των προβλημάτων που μπορεί να κληθεί να επιλύσει ο μαθητής σε πεδία, όπως η Φυσική. Ως προς την τελευταία, για παράδειγμα, μια τέτοια περίπτωση, όπου μπορεί να είναι χρήσιμη η Τριγωνομετρία, είναι η φυσική ερμηνεία των αποτελεσμάτων που έχουν σχέση με τη θετική ή την αρνητική φορά ενός σώματος, εξαιτίας της γωνίας των διανυσμάτων (Hecht, 2000).

Είναι χαρακτηριστικό, ότι στα πλαίσια ενός εκπαιδευτικού συστήματος, όπως είναι αυτό της Ελλάδας, ο ρόλος της Τριγωνομετρίας στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση έχει υποτιμηθεί σε κάποιο βαθμό. Και αυτό, παρόλο που συνδυάζει ορισμένα πολύ σημαντικά πεδία της επιστήμης των Μαθηματικών, όπως είναι η Άλγεβρα και η Γεωμετρία, ενώ έχει μεγάλη σημασία και για άλλους κλάδους των Φυσικών Επιστημών (όπως άλλωστε, φάνηκε και πιο πάνω, με το παράδειγμα του μαθήματος της Φυσικής), όπως και για πεδία, όπως ο Απειροστικός Λογισμός (Μηλιός, 2011).

Σε πολλές περιπτώσεις γενικά, θεωρείται, πως το ζήτημα της κατανόησης της Τριγωνομετρίας και των διαφόρων όρων της έχει επιλυθεί, από τη στιγμή που τα παιδιά έχουν προβεί στην επίλυση των λεκτικών προβλημάτων που αφορούν τον χειρισμό των τριγωνομετρικών λόγων. Στην πραγματικότητα, αναφορικά με αυτήν την κατανόηση, είναι αλήθεια, ότι υφίσταται ένα όριο. Για παράδειγμα, στα πλαίσια του κειμένου – οδηγού Principles and Standards for School Mathematics, επισημαίνεται χαρακτηριστικά, ότι η κατανόηση του χειρισμού στο πλαίσιο των τριγωνομετρικών λόγων και εξισώσεων, δεν θεωρείται, πως υφίσταται μέσα από την ετοιμότητα της εκτίμησης του αποτελέσματος της σχετικής διαδικασίας.

Στα πλαίσια για παράδειγμα, του σχολικού εγχειριδίου του μαθήματος των Μαθηματικών στην Α΄ Λυκείου, μπορεί να διαπιστώσει κάποιος, ότι τα σύνολα τιμών των ημω και των συνω δίνονται αξιωματικά, όπως επίσης το ίδιο συμβαίνει και με τα πρόσημα των τεταρτημορίων. Οι μαθητές σε αυτήν την περίπτωση όμως, αναγκαστικά καλούνται να σκεφτούν ένα πλέγμα μνημονικών κανόνων, χωρίς να γνωρίζουν την ίδια στιγμή τι σημαίνουν όλα αυτά τα στοιχεία. Ενώ μαθαίνουν αξιωματικά τις διάφορες τιμές που παίρνουν το ημω και το συνω, τη στιγμή που αντίθετα θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί μια σύνδεση με την έννοια του συνόλου τιμών, ώστε να έχουμε παράλληλα έτσι και μια ομαλή εμφάνιση της έννοιας της συνάρτησης.

Γενικά εκ μέρους πολλών καθηγητών των Μαθηματικών στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση υπάρχει η πρόταση για αλγεβροποίηση των διαφόρων εννοιών, προκειμένου έτσι ο μαθητής να διευκολύνεται ακόμα περισσότερο. Αυτό εξάλλου, μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα αντίστοιχα, την χρήση λανθανόντων μοντέλων από τη μεριά των μαθητών. Σε αυτό το σημείο άλλωστε, δεν θα πρέπει να αγνοούμε, ότι στα μαθηματικά εν γένει τα διάφορα αντικείμενα, στα οποία αναφερόμαστε, μπορούν να καταστούν αντιληπτά μέσα από τις διεργασίες της λογικής. Κάτι τέτοιο για παράδειγμα, συμβαίνει με την περίπτωση των διαφόρων γεωμετρικών εννοιών, όπως είναι το σημείο, το επίπεδο ή η ευθεία.

Σε αυτό το σημείο άλλωστε, θα ήταν χρήσιμο κάποιος να λάβει υπόψη του τον Πρόκλο, ο οποίος σχετίζει την έννοια περί σημείου με το πέρας και με το άπειρο αντίστοιχα. Το σημείο, εν προκειμένω, είναι πανταχού παρόν και συγχρόνως διαθέτει και συνεκτικές δυνάμεις (Μηλιός, 2011). Παράλληλα, οι διάφορες έννοιες στα Μαθηματικά μπορούν να θεωρηθούν πως συνιστούν ένα είδος εικονικής πραγματικότητας. Γι' αυτό το λόγο εξάλλου, πολλές φορές μπορεί να είναι δύσκολο για τους μαθητές να συσχετίσουν ένα γεωμετρικό αντικείμενο, φερ' ειπείν, με μια συγκεκριμένη συνάρτηση.

Ειδικότερα, ως προς την περίπτωση της Τριγωνομετρίας, θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας, ότι οι μαθητές πολλές φορές μπορεί να αντιμετωπίσουν σημαντικές δυσκολίες σχετικά με την μετάβαση από τον απλό υπολογισμό των διαφόρων γωνιών και πλευρών σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο διαμέσου των τριγωνομετρικών τύπων, για παράδειγμα, στις διάφορες τριγωνομετρικές συναρτήσεις, όπως επίσης και ως προς το πώς αυτές μπορούν να είναι δυνατόν να παρασταθούν σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Εδώ με άλλα λόγια, υφίσταται η δυσκολία της κατανόησης του πώς ένα μη προσανατολισμένο και πεπερασμένο ορθογώνιο τρίγωνο, στο οποίο πραγματοποιούμε μια σειρά αλγεβρικών υπολογισμών, είναι δυνατόν στην πορεία να τοποθετηθεί μέσα σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και να μετατραπεί επίσης σε συνάρτηση. Ακόμα πιο εύλογα εξάλλου, είναι δυνατόν να παρατηρηθεί και να δικαιολογηθεί η αντίδραση των μαθητών στην περίπτωση που υφίσταται κατά την διάρκεια του μαθήματος η μετάβαση από ένα σύμβολο, όπως είναι το ημω (με τη γωνία ω μεγαλύτερη των 0 μοιρών και μικρότερη αντίστοιχα των 90 μοιρών) και όπου τις περισσότερες φορές μάλιστα οι μαθητές είναι μαθημένοι να εργάζονται με βάση τις γωνίες 30^o, 45^o και 60^o, σε μια συνάρτηση της μορφής ημx, $x \in R$.

Μια άλλη δυσκολία και παρανόηση που αναδεικνύεται για τα παιδιά στα πλαίσια της διδασκαλίας του μαθήματος της Τριγωνομετρίας, είναι αυτό της εννοιολογικής αλλαγής. Ο τελευταίος αυτός όρος μάλιστα, είναι σχετικά νέος στο πλαίσιο των ερευνών και επιστημών που σχετίζονται με την διδακτική. Αφορά, κατά κύριο λόγο, την περίπτωση της διδασκαλίας νέων εννοιών που έρχονται σε σύγκρουση με τις προϋπάρχουσες εμπειρίες που έχει το παιδί μέσω των καθημερνών του βιωμάτων. Η έννοια περί εννοιολογικής αλλαγής είναι κάτι μάλιστα, που πλέον απασχολεί αρκετά τους εκπαιδευτικούς στο χώρο των Μαθηματικών εδώ και χρόνια (Vosniadou & Verschaffel, 2004).

Η εφαρμογή αυτής της έννοιας στο χώρο των μαθηματικών είναι έντονα συνδεδεμένη ειδικότερα με το πεδίο των αριθμών. Την ίδια στιγμή, είναι πολύ χαρακτηριστικό ένα παράδειγμα που αναφέρουν μέσα στο άρθρο τους οι Vosniadou & Verschaffel και που έχει σχέση με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν πολλές φορές οι μαθητές ως προς τα κλάσματα, δεδομένου άλλωστε, ότι απαιτούνται ριζικές αλλαγές, ως προς την προϋπάρχουσα γνώση πάνω στους φυσικούς αριθμούς (Stafylidou & Vosniadou, 2004).

Για πρώτη φορά αναφορές στην εννοιολογική αλλαγή είχαν γίνει πριν από αρκετές δεκαετίες μέσα από στοχαστές, όπως ο Thomas Kuhn και ο Lakatos. Αυτές οι αναφορές είχαν γίνει στα πλαίσια των σχετικών αναλύσεων και αναφορών στη φιλοσοφία και ιστορία των επιστημών. Στα πλαίσια των σχετικών αναλύσεων εξάλλου, διάφοροι επιστήμονες της Διδακτικής παρατήρησαν ένα πλέγμα ιδιαίτερων αναλογιών όσον αφορά την θεωρία των αλλαγών στην ιστορία και διδακτική των επιστημών (Μηλιός, 2011).

Η εννοιολογική αλλαγή πιο συγκεκριμένα, είναι δυνατόν να διακριθεί σε δυο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία είναι εκείνη, με βάση η εννοιολογική αλλαγή θεωρείται πως είναι το προϊόν του εμπλουτισμού μιας θεωρίας που είναι συνυφασμένη με την επαύξηση και τη ρύθμιση ενός σχήματος ή μιας προϋπάρχουσας θεωρίας. Η δεύτερη κατηγορία είναι συνδεδεμένη με την λεγόμενη "ριζική αναδιοργάνωση". Πρόκειται, πιο συγκεκριμένα, για το προϊόν της αναδιοργάνωσης μιας θεωρίας ή επίσης μπορεί να ληφθεί υπόψη και ως μια διαδικασία αλλαγής μιας θεωρίας (Βοσνιάδου, 2004).

Και οι δυο κατηγορίες εν τω μεταξύ, είναι δυνατόν να υπάρξουν και να ισχύσουν, από τη στιγμή που θεωρούμε πως οι δομές γνώσεων έχουν θεωρητικό χαρακτήρα. Σε ένα τέτοιο πλαίσιο επίσης, είναι χαρακτηριστικό και το ότι η εννοιολογική αλλαγή εμπεριέχει κάποιες βασικές αρχές:

- Οι διδάσκοντες από τη μεριά τους θα πρέπει να είναι ενήμεροι για τις προηγούμενες γνώσεις που έχει ο μαθητής
- Θα πρέπει επίσης οι διδάσκοντες να αναφέρονται πάντα ρητά στις προϋπάρχουσες έννοιες και γνώσεις που έχει ένας μαθητής και
- Τα αποτελέσματα θα πρέπει να εξάγονται κατά τέτοιο τρόπο, προκειμένου να αποκαλύπτεται ένα σύνολο γνωστικών διαμαχών που μπορεί να προκύψουν μέσω διαφόρων γόνιμων συζητήσεων μέσα στην τάξη. Μέσα από μια τέτοια διαδικασία εξάλλου, οι μαθητές θα μπορέσουν να συμμετάσχουν ακόμα πιο ενεργά σε ένα μάθημα, όπως το συγκεκριμένο, καλλιεργώντας την ίδια στιγμή μάλιστα, και την κριτική τους σκέψη.

Γενικότερα, μέσα από ένα μάθημα, όπως αυτό της Τριγωνομετρίας, είναι αλήθεια, πως οι μαθητές συχνά καλούνται να επιλύσουν μια σειρά τύπων λεκτικών προβλημάτων, με εφαρμογές που μπορεί να αφορούν και κλάδους, όπως η Φυσική ή εκείνος αντίστοιχα, της Αστρονομίας. Στα πλαίσια της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, για πρώτη φορά στα πλαίσια του εκπαιδευτικού συστήματος, ο μαθητής καλείται να προβεί στην επεξεργασία κάποιων δύσκολων όρων και εννοιών που έχουν σχέση ειδικότερα με την Τριγωνομετρία.

Καλούνται, με άλλα λόγια, να επεξεργαστούν διάφορες δύσκολες μαθηματικές έννοιες που έχουν σχέση με προβλήματα καθημερινών εννοιών και καταστάσεων που μπορεί να βιώνουν, μέσα σε ένα κόσμο, του οποίου το μοντέλο κάθε παιδί μπορεί να το έχει δομήσει κατά διαφορετικό τρόπο. Υπό αυτό το πρίσμα άλλωστε, μπορεί να αντιληφθεί κατά προέκταση κάποιος, ότι υφίσταται η εφαρμογή του μοντέλου της εννοιολογικής αλλαγής και με βάση την οποία, οι μαθητές προβαίνουν στην κατασκευή μιας θεωρίας βάσης, ώστε να κατανοήσουν συγχρόνως τον κόσμο. Αυτή η θεωρία βάσης επίσης είναι βασισμένη στα βιώματά και τις εμπειρίες τους και στην προγενέστερη εκπαίδευσή τους. Αυτή εκπαίδευση έρχεται μάλιστα, αντιμέτωπη με τις νέες έννοιες και γνώσεις που καλείται να αποκομίσει ένα παιδί μέσα από την εκπαιδευτική διαδικασία. Αυτό, κατά συνέπεια εξάλλου, το ωθεί αντίστοιχα στην αναδιοργάνωση της από πριν αποκτημένης γνώσης (Μηλιός, 2011).

Τα σχετικά προβλήματα, είναι χαρακτηριστικό, ότι εντοπίζονται ειδικότερα κατά την περίοδο του Λυκείου και σχετίζονται κυρίως με την εισαγωγή της έννοιας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Οι μαθητές, για παράδειγμα, δεν μπορούν να κατανοήσουν πώς μια στατική συμπεριφορά των τριγωνομετρικών αριθμών ξαφνικά μετατρέπεται σε συνάρτηση, γεγονός άλλωστε που τους οδηγεί σε αναθεώρηση και στην εκ νέου σύνθεση των γνώσεων που είχαν πάρει από το Γυμνάσιο.

Βέβαια, θα πρέπει να σημειωθεί εδώ, ότι η ρίζα του προβλήματος αναδεικνύεται ειδικότερα μέσα από την ύλη της Γ΄ Γυμνασίου. Πιο συγκεκριμένα, το σχολικό εγχειρίδιο σε αυτήν την βαθμίδα της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης δεν τονίζει και δεν επιμένει τόσο πολύ στο ζήτημα του υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών αμβλειών γωνιών. Βέβαια ο μαθητής ήδη είναι εξοικειωμένος με τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών οξειών γωνιών σε ορθογώνια τρίγωνα, αλλά αντιμετωπίζει ξαφνικά δυσκολίες, δεδομένου, ότι θα πρέπει να αντιμετωπίσει πια και τους αριθμούς των αμβλειών γωνιών σε τρίγωνα, διαδικασία, για την οποία απαιτείται εξάλλου η χρήση του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Με άλλα λόγια, οι μαθητές καλούνται πλέον να προβούν σε μια αναδιοργάνωση του εννοιολογικού χώρου μέσα στον οποίο είχαν συγκροτήσει αρχικά τις έννοιες των τριγωνομετρικών αριθμών, στην προσπάθειά τους να ορίσουν το ημίτονο μιας μη οξείας γωνίας.

Εν γένει, πολλές δυσκολίες και προβλήματα αναδύονται μέσα από το ότι η διδασκαλία των τριγωνομετρικών αριθμών συνδέεται με την διαδικασία της εκμάθησης των αλγορίθμων και των διαδικασιών που συνδέονται με αυτούς. Εξάλλου, δεν είναι τυχαίο το ότι, για παράδειγμα, από τη δική τους μεριά οι Hirsch, Weinwold & Nichols (1991), θεωρούν πως δεν θα πρέπει να δίνεται τόσο μεγάλη βαρύτητα στο πλαίσιο αυτών των διαδικασιών και στην απομνημόνευση αυτών αλλά και των διαφόρων μεμονωμένων γεγονότων. Ο στόχος περισσότερο, θα πρέπει δηλαδή να εστιάζει στο ζήτημα της εννοιολογικής κατανόησης μέσα από ένα πλέγμα πολλαπλών αναπαραστάσεων και συνδέσεων. Αυτό εξάλλου, την ίδια στιγμή, σημαίνει και την εννοιολογική κατανόηση της επίλυσης προβλημάτων, αλλά και της μαθηματικής μοντελοποίησης. Σε μια τέτοια κατεύθυνση εξάλλου είχαν κινηθεί παράλληλα και οι Kendall και Stacey. Οι τελευταίοι υποστήριξαν, ότι η εφαρμογή διαδικασιών για την παρουσίαση τριγωνομετρικών εννοιών δεν επιτρέπει ούτε καν την κατανόηση των ίδιων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (Kendal & Stacey, 1997).

Αναφορικά με το ζήτημα των αλγορίθμων, θα πρέπει να τονιστεί σε αυτό το σημείο παράλληλα, ότι σύμφωνα με και με τον Katz (1979) κατά την διαδικασία της επίλυσης μιας πρωτοβάθμιας εξίσωσης με έναν άγνωστο, χρησιμοποιούνται δυο διαδικασίες, εκ των οποίων η μία είναι η αφαίρεση και η άλλη η αναγωγή. Η διαδικασία της αφαίρεσης έχει να κάνει με το στοιχείο της εκτέλεσης της ίδιας της διαδικασίας και στα δυο μέλη. Αντίστοιχα, από την άλλη μεριά, η αναγωγή αφορά την διαδικασία της αντικατάστασης μιας έκφρασης από μια άλλη ισοδύναμη (Χαιρέτη, 2009).

Ένα ακόμα σημαντικό πρόβλημα, το οποίο έχουν να αντιμετωπίσουν οι μαθητές από την άλλη, είναι και το ότι πολλές φορές δυσκολεύονται να προβούν σε ταυτόχρονη αλγεβρική, γεωμετρική και γραφική αιτιολόγηση. Η τελευταία μάλιστα, είναι χαρακτηριστικό το ότι προϋποτίθεται μέσα από την εκμάθηση της Τριγωνομετρίας. Ένα βασικό γνώρισμα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι το ότι αποτελούν τις πρώτες συναρτήσεις εν γένει που συναντά ο μαθητής, στο πλαίσιο των οποίων δεν μπορεί αμέσως να βρει οποιαδήποτε τιμή τους (Weber, 2008).

Αυτό κατά προέκταση εξάλλου, σημαίνει, ότι για τον υπολογισμό ενός οποιουδήποτε αριθμού γωνίας οι μαθητές θα πρέπει να επαναλαμβάνουν μια συγκεκριμένη διαδικασία και πορεία, στα πλαίσια της οποίας την ίδια στιγμή θα πρέπει να λαμβάνει χώρα ο υπολογισμός των λόγων πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου, στο οποίο ταυτόχρονα έχει προσαρμοστεί η γωνία. Συγχρόνως, αυτή η διαδικασία μπορεί να γίνει και μέσα από την χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου. Αντίστοιχα, από την άλλη θα πρέπει να προβαίνουν σε μια σειρά σκέψεων χωρίς να εφαρμόζουν αυτή την διαδικασία (Δρακάκη, 2015).

Πάντως, την ίδια στιγμή, με βάση έρευνες που έγιναν στο παρελθόν, είναι αλήθεια, πως για τον μαθητή συχνά υφίσταται η δυσκολία στο να δώσει απαντήσεις εφαρμόζοντας μονάχα διαμέσου της σκέψης μια διαδικασία ενώ από πιο πριν αντίστοιχα δεν του έχει προσφερθεί η δυνατότητα να την εφαρμόσει ο ίδιος (Tall, Thomas, Davis, Gray & Simpson, 2000). Εδώ επίσης, θα πρέπει να τονιστεί και το ότι σε παρόμοια συμπεράσματα είχε καταλήξει και ο Weber μέσα από την δική του έρευνα. Με βάση εκείνη την έρευνα, πιο συγκεκριμένα, είχε φανεί πως μαθητές οι οποίοι πρώτα είχαν εφαρμόσει την σχετική μέθοδο, είχαν στη συνέχεια την ικανότητα να βγάζουν σωστά συμπεράσματα και μάλιστα, χωρίς καν να χρειαστεί να την ακολουθήσουν (Weber, 2005).

Εξάλλου, κατά αυτόν τον τρόπο, ο Weber είχε καταλήξει στο ίδιο συμπεράσματα με τους προαναφερόμενους Hirsch, Weinhold & Nichols, το ότι, με άλλα λόγια, δεν αρκεί μονάχα το να υπάρξει απομνημόνευση διαδικασιών και μεθόδων που συμβάλλουν στην σωστή επίλυση της κάθε άσκησης. Αυτό δηλαδή που έχει εδώ επίσης πολύ μεγάλη σημασία, είναι και το να αποκτήσουν οι μαθητές μια βαθύτερη και πιο ουσιαστική κατανόηση των διαφόρων μαθηματικών εννοιών. Κατά αυτόν τον τρόπο άλλωστε, ο μαθητής θα αποκτήσει συγχρόνως και την ικανότητα να εξηγήσει γιατί όλα αυτά, τα οποία εφαρμόζει είναι σωστά, με βάση τα μαθηματικά και τις ποικίλες έννοιες σε ένα πεδίο, όπως αυτό της Τριγωνομετρίας.

Πέραν όλων των παραπάνω εξάλλου, σε αυτό το σημείο, είναι ενδεικτικό, πως αναφορικά με τα διάφορα τριγωνομετρικά προβλήματα, μια σημαντική παράμετρος, είναι συγχρόνως και η ταξινόμηση των λαθών, αναφορικά με τις γραμμικές εξισώσεις. Οι τελευταίες εξάλλου αποτελούν σημαντικό κομμάτι της Τριγωνομετρίας (όπως συμβαίνει άλλωστε, και με την Άλγεβρα, αλλά και με την Γεωμετρία). Ένα λάθος, για παράδειγμα, που κάνει συχνά την εμφάνισή του, είναι η απλοποίηση που γίνεται σε μια απλή παράσταση. Για παράδειγμα, η παράσταση 2yz-2y είναι ίση με z. Στην περίπτωση αυτή το 2yz-2y λανθασμένα εξισώνεται με το 2y+z-2y=z. Είναι χαρακτηριστικό, πως στα πλαίσια μιας έρευνάς τους, αναφορικά με τις διαδικασίες επίλυσης μιας εξίσωσης, οι Carry, Lewis & Bernard βρήκαν αυτό το είδος λάθους και το οποίο ονόμασαν λάθος διαγραφής.

Θεώρησαν και παρατήρησαν πως αυτό ήταν το πιο διαδεδομένο από όλα τα λάθη που έκαναν οι μαθητές, κατά την διαδικασία της απλοποίησης των διαφόρων εκφράσεων στην διάρκεια της επίλυσης εξισώσεων. Συζητώντας μάλιστα, την περίπτωση αυτού του λάθους, ο Carry ανέφερε πως ορισμένοι μαθητές έχουν την τάση της υπεργενίκευσης συγκεκριμένων μαθηματικών διαδικασιών, φτάνοντας παράλληλα σε μια γενική διαδικασία απαλοιφής, μέσω της οποίας παράλληλα πολλές φορές προκύπτουν λανθασμένα αποτελέσματα (Carry, Lewis & Bernard, 1980).

Μάλιστα, το παραπάνω είδος λάθους και παρανόησης που προκύπτει στο πεδίο της Τριγωνομετρίας πολλές φορές, είναι συνυφασμένο και με εκείνο της αντίστροφης πράξης. Στα πλαίσια του συγκεκριμένου τύπου λάθους, ένα ενδεικτικό παράδειγμα, είναι εκείνο, όπου η παράσταση 4x= 1 γίνεται x= 1-4. Στο παράδειγμα αυτό, εν προκειμένω, ο μαθητής αντί να προβεί στην αντιστροφή του πολλαπλασιασμού, προβαίνει στην αντιστροφή της πρόσθεσης. Το λάθος της αντίστροφης πράξης είναι παρόμοιο με το λάθος της διαγραφής και ίσως και τα δύο παράγονται από τον ίδιο μηχανισμό. Θα συνέβαινε δηλαδή το ίδιο αν στην παράσταση 3x-3 ο μαθητής έκανε το λάθος της διαγραφής και μετέτρεπε την παράσταση σε x. Συχνό επίσης είναι το λάθος της μεταφοράς μίας ιδιότητας που ισχύει στον πολλαπλασιασμό, στους τριγωνομετρικούς τύπους, όπως για παράδειγμα ημ(α+β)=ημα+ημβ, θεωρώντας ότι ανάμεσα στο ημίτονο και την παρένθεση υπάρχει πολλαπλασιασμός. Ένα ακόμα συχνό λάθος είναι κατά την επίλυση μίας τριγωνομετρικής εξίσωσης να υπεραπλουστεύουν τις λύσεις, π.χ. οι λύσεις της εξίσωσης ημx= ½ $\Leftrightarrow$ x=2κπ+ ½ ή x=2κπ+π- 1/2 ή το αντίστοιχο ημx=1 $\Leftrightarrow$ ημx=ημ1.

Τα παραπάνω, μπορούμε να θεωρήσουμε πως είναι συναφή και με μια άλλη περίπτωση λαθών που προκύπτουν στα πλαίσια των ασκήσεων εκείνων που περιλαμβάνουν και εξισώσεις. Πρόκειται, πιο συγκεκριμένα, για τα λάθη της αναδιανομής και της λανθασμένης πρόσθεσης στην ισότητα. Η Kieran από τη μεριά της, θεωρεί, ότι τα παιδιά εκείνα που κάνουν τα συγκεκριμένα είδη λαθών, είναι μαθητές, οι οποίοι περισσότερο έχουν την τάση να μετακινούν "μηχανικά" παρά να προβαίνουν στην δοκιμασία διαφόρων τιμών και σε ανάλογες βελτιώσεις. Οι μαθητές αυτοί, με άλλα λόγια, δεν είναι σίγουροι, αναφορικά με την δομή που υφίσταται πίσω από μια ισότητα (English & Halford, 2012).

Τα παραπάνω εξάλλου, είχαν τονιστεί και στο πλαίσιο μια άλλης έρευνας, την οποία είχε κάνει αντίστοιχα ο Greeno στις αρχές της δεκαετίας του 1980. Μέσω αυτής της έρευνας, τονίζεται πως πολλές φορές οι μαθητές δυσκολεύονται να επαληθεύσουν εξισώσεις που ήδη είναι λυμένες και πως μπορούν να το κάνουν μονάχα μέσα από τις συνεχείς επαναλήψεις της σχετικής διαδικασίας. Φαίνεται να αγνοούν δε, το ότι η λύση είναι εφικτό να μπει στη θέση του αγνώστου και να ελέγξουν παράλληλα το αν επαληθεύει την αρχική (κι εν γένει κάθε εξίσωση στα πλαίσια της αλυσίδας της επίλυσης). Αυτό παράλληλα, φαίνεται να συμφωνεί και με το θέμα περί ιεραρχίας, σχετικά με το οποίο κάνει λόγο ο Bloom και όπου οι διαδικασίες της αξιολόγησης και του ελέγχου φαίνεται να τίθενται υψηλότερα στην σειρά των προτεραιοτήτων που θέτουν οι μαθητές, σε σύγκριση με την εφαρμογή της διαδικαστικής γνώσης. Εξάλλου, κάτι τέτοιο είναι συναφές και με τα όσα ήδη είχε επισημάνει στην δική του έρευνα, ο Greeno, ο οποίος τόνιζε, πως ειδικότερα στους αρχάριους μαθητές αυτό που παρατηρείται, είναι η έλλειψη της κατανόησης των γραμμικών εξισώσεων (Χαιρέτη, 2009).

$4^{ο}$ Κεφάλαιο: Η περίπτωση διαφόρων ερευνών πάνω σε τριγωνομετρικές έννοιες

Εδώ θα ήταν δυνατόν να τονιστεί καταρχάς, ότι ως προς την ένταξη των διαφόρων τριγωνομετρικών εννοιών στο πλαίσιο της εκπαιδευτικής διαδικασίας, μια διάσταση που λαμβάνεται υπόψη, είναι η πορεία του σχηματισμού μιας έννοιας. Μάλιστα, μια τέτοια διάσταση σε ένα γνωστικό αντικείμενο, όπως είναι η Τριγωνομετρία, έχει ιδιαίτερη σημασία, αν ληφθεί υπόψη το ότι εδώ υφίσταται η διαδικασία της μετάβασης του μαθητή από εννοιολογικές διαδικασίες σε αφηρημένα αντικείμενα. Μάλιστα, πρέπει να ληφθεί εδώ παράλληλα υπόψη και το ότι αυτή η διαδικασία θεωρείται, πως λαμβάνει χώρα, μέσα από την λεγόμενη θεωρία των τριών κόσμων των μαθηματικών. Αυτή η θεωρία, πιο συγκεκριμένα, περιλαμβάνει τον ενσώματο κόσμο, τον κόσμο των διεργασιών, ο οποίος, την ίδια στιγμή, είναι επίσης γνωστός και ως διαδικασιοεννοιολογικός κόσμος και τον αξιωματικό κόσμο (Tall, 2004).

Ο Dubinski (1991) από τη μεριά του, μέσω της δικής του έρευνας, είχε δώσει βαρύτητα σε μια σειρά 4 συγκεκριμένων παραμέτρων που έχουν ιδιαίτερη σημασία, αναφορικά με την διδασκαλία των διαφόρων εννοιών και όρων της Τριγωνομετρίας. Η μια εξ αυτών των παραμέτρων, είναι η ενέργεια, η δεύτερη αντίστοιχα, είναι η διαδικασία, η τρίτη το αντικείμενο, η τέταρτη είναι το σχήμα. Μάλιστα, αυτή η θεωρητική προσέγγιση είναι γνωστή και ως σύστημα APOS, από τα αρχικά των συγκεκριμένων αυτών λέξεων στην αγγλική γλώσσα, με άλλα λόγια: Action, Process, Object, Schema.

Σημαντική εδώ συγχρόνως όμως, μπορεί να θεωρηθεί και η έρευνα και η θεωρητική προσέγγιση της Sfard (1991), η οποία δίνει ιδιαίτερο βάρος στο ζήτημα περί αφηρημένης έννοιας. Η Sfard θεωρεί, πως μια αφηρημένη έννοια, όπως αυτές οι οποίες υφίστανται στο πεδίο της Τριγωνομετρίας, είναι δυνατόν να προσεγγιστεί μέσα από δυο διαφορετικούς τρόπους. Ο ένας είναι λειτουργικός, ενώ ο άλλος αντίστοιχα, προκύπτει μέσα από μια δομική προσέγγιση. Αυτές οι δυο διαδικασίες εν τω μεταξύ, είναι συμπληρωματικές μεταξύ τους, η μια με την άλλη, ενώ την ίδια στιγμή, ακολουθούνται τρεις φάσεις από την μεριά του μαθητή, αναφορικά με την προσέγγιση των τριγωνομετρικών εννοιών. Η μια είναι η διαδικασία της εσωτερίκευσης, η δεύτερη η διαδικασία της συμπύκνωσης και η τελευταία η διαδικασία της υποστασιοποίησης.

Κατά την διαδικασία της εσωτερίκευσης, οι μαθητές προβαίνουν στην σύλληψη και κατανόηση, για παράδειγμα, διαφόρων αλγοριθμικών διαδικασιών και κάνουν παρατηρήσεις, βγάζοντας συμπεράσματα, χωρίς όμως να προσέχουν τόσο πολύ τις διάφορες λεπτομέρειες. Στην περίπτωση, για παράδειγμα, του μετασχηματισμού της συνάρτησης των ημιτόνων, ο μαθητής είναι σε μια φάση εσωτερίκευσης, καθώς φερ' ειπείν, κάνει χρήση ενός ψηφιακού εργαλείου, μετακινώντας τους δρομείς και να εντοπίζει το πλαίσιο των διαφόρων μεταβολών που επέρχονται σε γραφήματα για τις διάφορες μεταβλητές των τιμών.

Η επόμενη φάση, είναι αυτή της συμπύκνωσης. Κατά την διάρκειά της, ο μαθητής αναφέρεται στην διαδικασία κατά την έννοια ανάλογα με το τι θα ζητηθεί, θα αναμένεται το αντίστοιχο αποτέλεσμα, χωρίς να είναι ανάγκη να ακολουθηθεί η αλγοριθμική διαδικασία ή να ζητηθούν εξηγήσεις και λεπτομέρειες. Ένα παράδειγμα, του πώς ένας μαθητής έχει κατακτήσει την φάση της συμπύκνωσης, ασχολούμενος με τους μετασχηματισμούς των διαφόρων συναρτήσεων που έχουν σχέση, για παράδειγμα, με τα ημίτονα, είναι η άμεση αντιστοίχιση της γραφικής παράστασης που είναι μετατοπισμένη προς τα άνω, κατά 3 μονάδες και η οποία έχει ως ακολούθως: y = ημx, με την αλγεβρική εξίσωση: y=ημx+3, χωρίς πρώτα να είναι αναγκαία η παρατήρηση, ότι οι τιμές της συνάρτησης έχουν αυξηθεί κατά 3 μονάδες σε σύγκριση με την προηγούμενη συνάρτηση (με άλλα λόγια, την προαναφερόμενη y = ημx) ούτε στην συνέχεια χρειάζεται η επιβεβαίωση της απάντησης από το χρησιμοποιούμενο λογισμικό.

Η τελευταία φάση ως προς την κατασκευή μιας αφηρημένης έννοιας, όπως είναι εκείνες στο χώρο της Τριγωνομετρίας, είναι αυτή της υποστασιοποίησης που ήδη αναφέρθηκε και πιο πάνω. Σε αυτήν την φάση πλέον αυτό που είναι υφίσταται είναι η κατανόηση της δομής της έννοιας. Η κατάκτηση της φάσης που περιλαμβάνει την υποστασιοποίηση, απαιτεί το να μπορέσει πλέον ο μαθητής να αποκτήσει μια νέα, διαφορετική οπτική, αναφορικά με το πώς αντιλαμβάνεται μια τριγωνομετρική έννοια, κατανοώντας της πια ως μια ολότητα.

5ο Κεφάλαιο: Ο ρόλος και η αξιοποίηση των νέων τεχνολογιών (και ειδικότερα του λογισμικού GeoGebra) στη διδασκαλία των μαθηματικών

Φυσικά την ίδια στιγμή, και τα διάφορα ψηφιακά εργαλεία μπορεί να παίξουν πολύ σημαντικό ρόλο, ως προς την διαδικασία της διδασκαλίας του μαθήματος των Μαθηματικών. Η χρήση τους είναι συνυφασμένη με την προσωπική εμπλοκή των μαθητών, ως προς την ανακάλυψη και την κατανόηση των μαθηματικών γνώσεων. Παράλληλα, μέσα από την χρήση περίπλοκων λογισμικών, είναι χαρακτηριστικό πως οι νέες ψηφιακές τεχνολογίες μπορούν να προσφέρουν στο μαθητή την ευκαιρία να προβεί σε μια διαδικασία συλλογικής διαπραγμάτευσης και συνεργασίας, στοιχείο άλλωστε που είναι συναφές και με τα όσα αναφέρθηκαν, ως προς την ομαδοσυνεργατική διδασκαλία (Nolan, Dixon & Safi, 2016).

Τα ψηφιακά μέσα και εργαλεία εν γένει προσφέρουν σημαντικές υπηρεσίες, στο θέμα της διδασκαλίας αντικειμένων, όπως είναι η Τριγωνομετρία. Και αυτό, επειδή με την βοήθειά τους, οι μαθητές έχουν την δυνατότητα να πειραματιστούν και να προβούν σε μια διαδικασία διερεύνησης, με αποτέλεσμα την ανακάλυψη της γνώσης. Η χρήση τέτοιων εργαλείων εν προκειμένω, μπορεί να θεωρηθεί εξάλλου, άμεσα συνδεδεμένη με τις θεωρήσεις που αναπτύσσει η θεωρία του κονστρουκτιβισμού, ως προς το πεδίο της κατασκευής και κατάκτησης της γνώσης, όπου παράλληλα, η τελευταία δεν μεταφέρεται με τον προφορικό και τον γραπτό λόγο. Δεν είναι άλλωστε τυχαίο, πως αυτή η συνεισφορά των σύγχρονων ψηφιακών εργαλείων και τεχνολογιών συγχρόνως είναι άμεσα συνυφασμένη με τα όσα είχε τονίσει στις αρχές της δεκαετίας του 1970 ο Papert που θεωρούσε, πως το παιδί θα πρέπει να βιώσει την εμπειρία του ότι "κάνει μαθηματικά", προκειμένου να μάθει το συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο (Papert, 1972).

Ωστόσο, πέραν όλων των παραπάνω σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να γίνει ιδιαίτερος λόγος αναφορικά με την ειδικότερη σημασία και συνεισφορά που μπορεί να έχουν οι σύγχρονες ψηφιακές τεχνολογίες, στον πεδίο της υποβοήθησης της εκμάθησης εννοιών, όρων συναρτήσεων, λόγων και εξισώσεων στην Τριγωνομετρία. Είναι χαρακτηριστικό, πως με την εμφάνιση των πρώτων ηλεκτρονικών υπολογιστών, οι διάφοροι εκπαιδευτικοί είχαν αρχίσει να σκέφτονται το ζήτημα της χρήσης τους στο πεδίο της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Αυτή η διαδικασία είχε ξεκινήσει σταδιακά από τη δεκαετία του 1970 με τη χρήση, για παράδειγμα, των υπολογιστών τσέπης (τα γνωστά κομπιουτεράκια) και επρόκειτο να συνεχιστεί ως τις μέρες μας και με την χρήση παράλληλα των PC και των διαφόρων μορφών software (Woody, Daniel & Stewart, 2012).

Ενδιαφέρον παρουσιάζει εδώ μια έρευνα που είχε κάνει πριν από κάποιες δεκαετίες ο Richard Meyer (1997) και όπου τονίζει, ότι η διαδικασία του σχεδιασμού εκπαιδευτικών και διδακτικών μοντέλων που βασίζονται στην χρήση ψηφιακού λογισμικού, θα πρέπει πάντα να είναι βασισμένη στην αρχή της ουσιαστικής μάθησης. Αυτό σημαίνει, πως η χρήση τους δεν θα πρέπει να γίνεται απλά για την χρήση τους. Αντίθετα, θα πρέπει να βασίζεται περισσότερο στο πώς μπορούν να μάθουν οι μαθητές μέσα από την χρήση εικόνων, παραστάσεων, γραφημάτων και λέξεων. Αυτό είναι συνυφασμένο, πιο συγκεκριμένα, με το ζήτημα του τρόπου αφομοίωσης διαφόρων οπτικών και προφορικών πληροφοριών κατά την διάρκεια του μαθήματος με τη χρήση ψηφιακών πολυμέσων. Ο Mayerαπό τη μεριά του, υποστηρίζει, ότι σε ένα τέτοιο πλαίσιο, ο μαθητής θα πρέπει ουσιαστικά να καταστεί ο ίδιος κατασκευαστής της γνώσης, ο οποίος επίσης θα επιλέγει ενεργητικά και θα μαθαίνει να κατασκευάζει τμήματα από οπτική και ακουστική γνώση με τους δικούς του, ιδιαίτερους τρόπους (Thomas, Tyrrell & Bullock, 1996).

Ο ίδιος ο Mayer εξάλλου, είχε υποστηρίξει επίσης και το ότι με βάση την λεγόμενη γενετική θεωρία που είχε αποτυπώσει ο Wittrock στις αρχές της δεκαετίας του 1970, η ουσιαστική μάθηση είναι δυνατόν να επέλθει μονάχα, όταν οι μαθητές προβαίνουν στην διαδικασία της επιλογής πληροφοριών μέσα από το σύνολο των διαφόρων γνώσεων που τους προσφέρονται. Παράλληλα, η ουσιαστική μάθηση συνδέεται και με το ότι στην πορεία οι μαθητές οργανώνουν αυτήν την γνώση και τις ποικίλες πληροφορίες μέσα από την ανακατασκευή τους, ενώ την ίδια στιγμή μοιράζονται όλες αυτές τις πληροφορίες και με άλλους, προκειμένου να υπάρξει ανταλλαγή θέσεων και απόψεων. Μάλιστα, στην περίπτωση της χρήσης ψηφιακών μέσων είναι χαρακτηριστικό, πως η χρήση οπτικών και ακουστικών ερεθισμάτων μπορεί να συμβάλει αποφασιστικά στην προσπάθεια των μαθητών να κατασκευάσουν τη νέα γνώση (Μηλιός, 2011).

Σύμφωνα με τους Mayer & Sims, μια από τις πιο σημαντικές εργασίες για την κατασκευή της γνώσης, είναι το να βοηθηθούν οι μαθητές να κατασκευάσουν ένα σύνολο συνδέσεων μεταξύ των δυο αναπαραστατικών τύπων: του οπτικού λειτουργικού συστήματος από τη μια και του ακουστικού λειτουργικού συστήματος από την άλλη. Όμως το να αποκτήσει κάποιος μια όσο το δυνατόν καλύτερη γνώση ενός αντικειμένου, είναι κάτι εντελώς διαφορετικό, από το να το διδάσκει. Κάτι τέτοιο εξάλλου, είναι εμφανές ειδικότερα στην περίπτωση της διδασκαλίας του μαθήματος της Τριγωνομετρίας, παρόλο που αυτό την ίδια στιγμή φαίνεται να είναι ένα τετριμμένο αντικείμενο με απλές εφαρμογές τύπων (Μηλιός, 2011).

Στα πλαίσια της χρήσης και λειτουργίας διαφόρων λογισμικών και ψηφιακών εφαρμογών, υφίσταται η χρήση διαφόρων τρόπων διδασκαλίας με εφαρμογή διαφορετικών στρατηγικών. Αυτό το στοιχείο βέβαια, είναι αλήθεια, την ίδια στιγμή, ότι μπορεί να μην είναι τόσο αποτελεσματικό για την διδασκαλία ενός μαθήματος, όπως αυτό της Τριγωνομετρίας. Και αυτό, επειδή εδώ είναι αναγκαία παράλληλα, η ύπαρξη ορισμένων κοινών μοτίβων, ως προς τους τρόπους και τις μεθόδους διδασκαλίας ενός γνωστικού αντικειμένου, όπως το συγκεκριμένο. Η προσπάθεια για την ύπαρξη κάποιων κοινών μοντέλων διδασκαλίας συνδέεται με την εφαρμογή ορισμένων συγκεκριμένων patterns (συγκεκριμένων μοτίβων, σχεδίων, προτύπων κ.λ.π.). Αυτό άλλωστε, είναι μια προοπτική που μπορεί να πάρει σάρκα και οστά μέσα από την χρήση ψηφιακών μέσων και των ηλεκτρονικών υπολογιστών (Woody, Daniel & Stewart, 2012).

Μια πολύ ενδιαφέρουσα περίπτωση εν γένει στο πεδίο της χρήσης διαφόρων δυναμικών λογισμικών γεωμετρίας. Ο όρος αυτός εξάλλου, χρησιμοποιείται, προκειμένου να περιγράψει ένα σύνολο διαφόρων λογισμικών και ψηφιακών εφαρμογών που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή και την ανάλυση των στόχων των προβλημάτων στα πλαίσια της στοιχειώδους Γεωμετρίας. Τα λογισμικά αυτά, είναι ενδεικτικό, ότι στοχεύουν να αναπτύξουν την χωρική αίσθηση και επίσης να προωθήσουν και το στοιχείο της γεωμετρικής ανάλυσης, προσφέροντας άλλωστε την ίδια στιγμή, ένα σύνολο ευφυών κονστρουκτιβιστικών εργαλείων, μέσω των οποίων ο χρήστης έχει την δυνατότητα να κατασκευάσει ή να χειριστεί γεωμετρικά αντικείμενα, τα οποία υπακούν σε συγκεκριμένους μαθηματικούς κανόνες (Sutherland, Robertson & John, 2008).

Εν τω μεταξύ, είναι χαρακτηριστικό, πως η επαφή του μαθητή με το πλαίσιο των διαφόρων νέων εννοιών στο χώρο της Τριγωνομετρίας, είναι χαρακτηριστικό, πως εν πολλοίς αναδεικνύει την έννοια περί "μικρόκοσμου". Η έννοια αυτή είχε χρησιμοποιηθεί, για πρώτη φορά από τον Papert, και μάλιστα ο ίδιος τον είχε δανειστεί από τον κόσμο της τεχνητής νοημοσύνης. Ο όρος έχει την έννοια, ότι περιγράφει ένα αυτάρκη κόσμο, στα πλαίσια του οποίου οι μαθητές μαθαίνουν να μεταφέρουν διάφορες συνήθειες, αλλά και πρακτικές διερεύνησης από το χώρο της προσωπικής και καθημερινής τους ζωής στο χώρο της επιστημονικής έρευνας και δημιουργίας (Papert, 1980).

Θα πρέπει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο, ότι οι μικρόκοσμοι στην αρχή ουσιαστικά ήταν καθαρώς προγραμματιστικά περιβάλλοντα, τη στιγμή που το βασικό τους γνώρισμα είχε να κάνει με δυνατότητα σχεδιασμού γραφικών με την χρήση και βοήθεια γλώσσας προγραμματισμού. Στα πλαίσια ενός τέτοιου μικρόκοσμου, ο μαθητής μπορεί να αποκτήσει την ευχέρεια, προκειμένου να κατασκευάζει δομήματα και την ίδια στιγμή να μετατρέψουν και να επεκτείνουν τις αρχές και σχέσεις που διέπουν αυτόν τον μικρόκοσμο (Healy & Kynigos, 2010). Αυτό το γνώρισμα άλλωστε, με άλλα λόγια, το να επιδέχεται αλλαγές ένας μικρόκοσμος και επιπρόσθετα και το να είναι συμβατός με έναν πλαίσιο διαφόρων πειραματισμών, είναι κάτι που την ίδια στιγμή τον καθιστά ιδανικό εργαλείο για την διαδικασία της μάθησης (Kafai & Resnick, 1996).

Υπάρχουν και ορισμένες άλλες προσεγγίσεις, με βάση τις οποίες ο μικρόκοσμος είναι δυνατόν να ληφθεί υπόψη ως ένα είδος υπολογιστικού περιβάλλοντος που περιλαμβάνει ένα σύνολο και σετ διαφόρων μαθηματικών εννοιών και σχέσεων με τέτοιο τρόπο μάλιστα ώστε μέσα από ένα πλέγμα κατάλληλων δραστηριοτήτων, αλλά και διδακτικών χειρισμών την ίδια στιγμή, τις οποίες εφαρμόζει ο εκπαιδευτικός, οι μαθητές να έχουν κατά προέκταση την δυνατότητα να εμπλακούν όσο πιο άμεσα γίνεται στην διερεύνηση και την κατασκευή διαφόρων δομημάτων. Αυτό το στοιχείο στη συνέχεια άλλωστε, μπορεί να βοηθήσει τα παιδιά, προκειμένου να κατασκευάσουν τα κατάλληλα μαθηματικά νοήματα (Samara & Clements, 2002).

Η Edwards αντίστοιχα υποστηρίζει, ότι ένας μικρόκοσμος περιλαμβάνει μια σειρά συγκεκριμένων στοιχείων και παραμέτρων:

- Αποτελείται από ένα σύνολο διαφόρων υπολογιστικών αντικειμένων. Τα τελευταία είναι έτσι σχεδιασμένα, προκειμένου να αντιπροσωπεύουν και να εκφράζουν τη δομή των μαθηματικών ή άλλων οντοτήτων στο πλαίσιο ενός συγκεκριμένου γνωστικού πεδίου. Για παράδειγμα, σε ό, τι αφορά την Ευκλείδεια Γεωμετρία, ένα DGE μπορεί να αποτυπώσει στην οθόνη το Ευκλείδειο επίπεδο με όλες τις ιδιότητες που απορρέουν από τα αξιώματα του Ευκλείδη

- Συνδέει μεταξύ τους διαφορετικές παραστάσεις των ίδιων μαθηματικών εννοιών: μια συμβολική και μια χωρική, χωρίς εν τω μεταξύ την ίδια στιγμή, να αποκλείονται άλλες.
- Περιλαμβάνει ένα σύνολο δραστηριοτήτων, στα πλαίσια του οποίου ο μαθητής μπορεί να χρησιμοποιήσει, συνδυάζοντας τις με τέτοιο τρόπο, προκειμένου να πετύχει το στόχο του
- Προσφέρει στους χρήστες ενός τέτοιου συστήματος, τη δυνατότητα να προβεί σε χρήση των διαφόρων αντικειμένων και λειτουργιών του, προκειμένου έτσι στην πορεία να αναδημιουργήσουν πιο σύνθετα αντικείμενα ή λειτουργίες. Εδώ επιπρόσθετα, είναι δυνατόν να τονιστεί και το ότι για παράδειγμα, μέσω ενός τέτοιου συστήματος, οι μαθητές έχουν την δυνατότητα να συνθέσουν δυο αντικείμενα και να δημιουργήσουν ένα τρίτο. Αυτό, για παράδειγμα, μπορεί να γίνει με την κατασκευή ενός κύκλου που έχει συγκεκριμένο κέντρο και ακτίνα και ένα άλλο σχήμα που φέρει κάθετη από σημείο εκτός ευθείας, πάνω σε αυτήν την ευθεία. Με αυτόν τον τρόπο εξάλλου, μπορεί να δημιουργηθεί ένα εργαλείο που να βρίσκει άμεσα τη μεσοκάθετο ενός ευθύγραμμου τμήματος (Edwards, 1998).

Δυο περιπτώσεις που θα ήταν δυνατόν να επισημανθούν σε αυτό το σημείο, ως σχετικά παραδείγματα, είναι καταρχάς το πρόγραμμα Geometer's Sketchpad και το πρόγραμμα Cabri Geometry II. Αυτά τα δυο προγράμματα εξάλλου ως σήμερα έχουν παίξει πολύ σημαντικό ρόλο, αναφορικά με την βοήθεια προς τους μαθητές, σχετικά με την διαδικασία της επίπεδης γεωμετρικής απεικόνισης και εξερεύνησης. Αυτά τα προγράμματα μάλιστα, ήδη εδώ και χρόνια είναι σε χρήση στο πλαίσιο διαφόρων εκπαιδευτικών προγραμμάτων σε αρκετές χώρες του κόσμου. Η χρήση τους, είναι ενδεικτικό άλλωστε, ότι λαμβάνει χώρα και στο πλαίσιο της μαθηματικής έρευνας (Μηλιός, 2011).

Πέραν των παραπάνω περιπτώσεων, εδώ θα ήταν δυνατόν να γίνει αναφορά και στην περίπτωση του προγράμματος GeoGebra. Όπως συμβαίνει με τα δυο προαναφερόμενα προγράμματα, έτσι και στην περίπτωση αυτού του συγκεκριμένου, υφίσταται μια βασική εργαλειοθήκη, όπου περιλαμβάνονται ψηφιακά εργαλεία για την κατασκευή τμημάτων, κύκλων, γραμμών κ.λ.π. Το GeoGebra όπως συμβαίνει και με τα άλλα προγράμματα άλλωστε, έχει την προηγμένη δυνατότητα της κατασκευής νέων εργαλείων, με τα οποία εξάλλου, υπάρχει και η ευκαιρία για την κατασκευή οποιουδήποτε μαθηματικού μοντέλου. Αυτά τα νέα εργαλεία εξάλλου, είναι δυνατόν να προστεθούν στην ψηφιακή εργαλειοθήκη και να επαναχρησιμοποιηθούν στις διάφορες κατασκευές, με εύκολο και αποτελεσματικό τρόπο. Η δυνατότητα χρήσης ενός λογισμικού, όπως είναι το συγκεκριμένο, προσφέρει την δυνατότητα εμπλουτισμού του μαθηματικού λεξιλογίου του λογισμικού με τόσες νέες διαδικασίες, όσες μπορεί να επιθυμεί αντίστοιχα ο χρήστης.

Όπως συμβαίνει και με άλλα ανάλογα λογισμικά που χρησιμοποιούνται στα πλαίσια της διδασκαλίας των Μαθηματικών, έτσι και στην συγκεκριμένη περίπτωση, είναι ενδεικτικό, ότι το πρόγραμμα GeoGebra φέρει μια σειρά συγκεκριμένων γνωρισμάτων:

- Είναι ένα δυναμικό εργαλείο, κατάλληλο για προβλήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που διδάσκεται στο σχολείο, αλλά και για τα διάφορα εργαλεία, με άλλα λόγια, τη δυναμική μοντελοποίηση των παραδοσιακών εργαλείων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

- Είναι εργαλείο, με το οποίο υφίσταται η οπτικοποίηση του ίχνους σημείων που κινούνται ανάλογα με την μετακίνηση αντίστοιχα άλλων σημείων (γεωμετρικός τόπος σημείων) προκειμένου έτσι να παρουσιαστεί η διαδρομή ενός ή περισσότερων σημείων όταν σύρουμε ένα άλλο
- Είναι εργαλείο που επίσης περιλαμβάνει και ένα σύνολο διαφόρων μακροεντολών, με τις οποίες είναι εφικτή η συμπύκνωση μιας σειράς βημάτων διαφόρων κατασκευών σε μια εντολή του λογισμικού. Εδώ με άλλα λόγια, υφίσταται η ικανότητα για την ομαδοποίηση μιας ακολουθίας εντολών μέσα μια ευρύτερη εντολή.

Θα πρέπει να τονιστεί σε αυτό το σημείο, ότι γενικότερα η έννοια περί μακροεντολής, έχει να κάνει με την συμπύκνωση μιας ακολουθίας εντολών που χρησιμοποιούνται και ορίζονται σε ένα σαφές όνομα καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας. Εσωτερικά στα πλαίσια του προγράμματος και κρυφά παράλληλα από τον χρήστη, υφίσταται ένας μάκρο - αποσυμπιεστής, ο οποίος αντικαθιστά το σημαίνον με την αρχική ακολουθία εντολών, όταν αυτό πρόκειται να επαναληφθεί (Kadunz & Strasser, 2004).

Γενικότερα, το συγκεκριμένο λογισμικό εδώ και πολλά χρόνια έχει παίξει πολύ σημαντικό ρόλο, σχετικά με την ανάπτυξη μιας διεθνούς κοινότητας εκπαιδευτικών, οι οποίοι το χρησιμοποιούν για τη διδασκαλία του μαθήματος των Μαθηματικών και για την κατασκευή διαφόρων δραστηριοτήτων που έχουν ως στόχο τους να διευκολύνουν την εκμάθηση διαφόρων μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές. Μάλιστα, με γνώμονα την καλύτερη αξιοποίηση του λογισμικού GeoGebra, εδώ και χρόνια έχει δημιουργηθεί κι ένας διεθνής μη κερδοσκοπικός οργανισμός, το Διεθνές Ινστιτούτο GeoGebra, που αριθμεί πάνω από 100 παραρτήματα σε όλο τον κόσμο.

Το συγκεκριμένο Ινστιτούτο μάλιστα, έχει τους ακόλουθους στόχους:

- την επιμόρφωση και την υποστήριξη των εκπαιδευτικών
- την ανάπτυξη διδακτικού και εκπαιδευτικού υλικού και λογισμικού
- την πραγματοποίηση ερευνών

Εδώ και πολλά χρόνια, οι εκπαιδευτικοί στην Ελλάδα παρακολουθούν εκ του σύνεγγυς διάφορα ζητήματα, τα οποία σχετίζονται με την χρήση του λογισμικού GeoGebra. Το ενδιαφέρον των Ελλήνων εκπαιδευτικών εδώ και χρόνια είναι πολύ έντονο, και είναι ενδεικτικό εξάλλου, ότι με βάση σχετική έρευνα του 2011, η Ελλάδα είχε την 14η θέση παγκοσμίως, ως προς την επισκεψιμότητα στο συγκεκριμένο διαδικτυακό τόπο του λογισμικού GeoGebra.com. Εξάλλου, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη και το ζήτημα του εμπλουτισμού διαφόρων σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών στην Ελλάδα με μικροπειράματα, τα οποία έχουν αναπτυχθεί διαμέσου του GeoGebra. Αυτό έπαιξε στην πορεία σπουδαίο ρόλο, ως προς την υπερκέραση διαφόρων προβλημάτων και εμποδίων που μπορεί να προκύπτουν μερικές φορές μέσα από τη χρήση των λογισμικών στα μαθηματικά.

Επίσης, ως προς την ιστορία του εν λόγω λογισμικού, αυτό είχε δημιουργηθεί το 2001 από τον Markus Hohenwarter, ως μέρος της μεταπτυχιακής του εργασίας για το Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα "Μαθηματικά της Εκπαίδευσης και της επιστήμης των

Υπολογιστών" στο Πανεπιστήμιο του Σάλτσμπουργκ στην Αυστρία. Η ανάπτυξη αυτού του λογισμικού εξάλλου συνεχίστηκε από μέρους του, με υποτροφία και χρηματική υποστήριξη από την Αυστριακή Ακαδημία των Επιστημών. Το πρόγραμμα Geo Gebra επρόκειτο στην πορεία παράλληλα να κερδίσει πολλές διεθνείς διακρίσεις και μεταφράστηκε από εκπαιδευτές των Μαθηματικών σε πάνω από 25 γλώσσες.

6ο Κεφάλαιο: Ο ρόλος και η αξιοποίηση της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών

Στην πραγματικότητα, μέσα και από τα όσα έχουν αναφερθεί πιο πάνω ήδη, η ιστορία των μαθηματικών και ειδικότερα της Τριγωνομετρίας, μπορεί να παίξει σημαίνοντα ρόλο, σχετικά με την διδασκαλία του συγκεκριμένου γνωστικού πεδίου. Για παράδειγμα, σε αυτό το σημείο, θα ήταν δυνατόν να ληφθεί υπόψη η περίπτωση του υπολογισμού των συν 340°. Στα πλαίσια της συγκεκριμένης διαδικασίας, κατά την διάρκεια του μαθήματος, είναι δυνατόν να ληφθεί υπόψη η περίπτωση του έργου του αρχαίου μαθηματικού και αστρονόμου Αρίσταρχου του Σάμιου. Ο εν λόγω αστρονόμος είχε ζήσει κατά την διάρκεια του τρίτου αιώνα π.Χ. και πρώτος επίσης είχε διατυπώσει την υπόθεση, ότι η Γη είναι αυτή που περιστρέφεται γύρω από τον Ήλιο και όχι το αντίθετο που είχε προβληθεί μέσα από το κοσμολογικό μοντέλο του Αριστοτέλη (Heath, 2003).

Το μοναδικό σωζόμενο έργο του είχε υπάρξει εκείνο με τον τίτλο *Περί μεγεθών και αποστημάτων Ηλίου και Σελήνης*. Στα πλαίσια εκείνου του έργου ο Αρίσταρχος είχε αποδείξει πως η διάμετρος του Ηλίου είναι μεγαλύτερη από την επί 18 φορές απόσταση μεταξύ Γης και Σελήνης και μικρότερη από το εικοσαπλάσιο αυτής. Η σημασία αυτής της απόδειξης είναι μεγάλη αναφορικά με την ιστορία της Τριγωνομετρίας και αυτό επειδή για πρώτη φορά έχουμε την προσέγγιση του υπολογισμού του ημιτόνου μιας μικρής γωνίας. Βέβαια, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη σε αυτό το σημείο, ότι ο Αρίσταρχος από τη μεριά του δεν είχε ορίσει τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, αλλά αναφέρεται σε ορθές πλευρές και χορδές κυκλικών τόξων και παράλληλα δεν αποδεικνύει τις ανισότητες, αλλά τις υποθέτει ως γνωστές. Πέραν τούτου, ως προς την διδασκαλία της ανισότητας των εφαπτόμενων θα μπορούσε κάποιος να λάβει υπόψη του την ίδια στιγμή και το έργο του Ευκλείδη *Οπτικά*, όπως επίσης και το έργο του Αρχιμήδη *Κύκλου Μέτρησις* (Μηλιός, 2011).

Από την άλλη μεριά, ως προς το θέμα των συγκεκριμένων ανισοτήτων, η συνεισφορά του ιστορικού παρελθόντος είναι δυνατόν να προβληθεί και μέσα από το έργο του Πτολεμαίου *Μαθηματική Σύνταξις*, το οποίο είχε καταστεί γνωστό στο δυτικό κόσμο μέσω της αραβικής *Αλμαγέστης* που αναφέρθηκε και πιο πάνω. Μέσω αυτού του έργου εξάλλου ακόμα και ως σήμερα οι εκπαιδευτικοί στην τάξη μπορούν να διδάξουν τα σχετικά με τον σχεδιασμό πινάκων μηκών χορδών. Εδώ πιο συγκεκριμένα έχουμε να κάνουμε με τριγωνομετρικούς πίνακες. Εξάλλου, με την μέθοδο του Πτολεμαίου είναι δυνατόν στο μάθημα να γίνει ο υπολογισμός ημιτόνου μικρής γωνίας, ακόμα και γωνίας δηλαδή της μίας μοίρας.

Σε αυτό το σημείο, μπορεί επίσης, να γίνει μία αναφορά στον τρόπο που υπολόγισε ο Ίππαρχος (190-120 π.Χ.) την απόσταση της Σελήνης από τη Γη, καθώς επίσης και για το περιβόητο πείραμα του Ερατοσθένη (280-195 π.Χ.) που υπολογίζει την περιφέρεια της Γης.

Πέραν όλων των παραπάνω, εδώ ακόμα θα ήταν δυνατόν να ληφθούν υπόψη και ορισμένα άλλα σχετικά παραδείγματα, αναφορικά με το πώς διάφορα ιστορικά στοιχεία μέσα από τον κόσμο της Τριγωνομετρίας, μπορούν να λειτουργήσουν έτσι ώστε, να χρησιμοποιηθούν στην εκπαιδευτική διαδικασία μέσα στην τάξη, Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε, ότι τίθενται τα ακόλουθα προβλήματα: Θυμηθείτε ότι για να επιλύσετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, χρειάζονται δύο επιπλέον πληροφορίες σχετικά με το τρίγωνο. Ποιες δυνατότητες υπάρχουν για αυτά τα δύο επιπλέον κομμάτια; Σημειώστε ότι δύο επιπλέον γωνίες δεν επαρκούν για την επίλυση του τριγώνου. Γιατί όχι; Στόχος μας είναι να λύσουμε τρίγωνα που δεν έχουν γωνία 90^o. Αυτά ονομάζονται πλάγια τρίγωνα. Και πάλι, μας ενδιαφέρει η ελάχιστη πληροφόρηση που πρέπει να δοθεί για να βεβαιωθούμε ότι θα υπάρχει μια λύση και μάλιστα θα είναι μοναδική" (Crossfield, Shepherd, Stein & Williams, 2004).

Αυτά τα τρία θεωρήματα λένε ότι αν γνωρίζουμε τρία συγκεκριμένα στοιχεία για ένα τρίγωνο τότε το τρίγωνο προσδιορίζεται πλήρως. Με άλλα λόγια, οποιαδήποτε δύο τρίγωνα με τα ίδια τρία στοιχεία είναι ίσα. Αυτό που θα δούμε είναι ότι αν γνωρίζουμε πραγματικά αυτά τα τρία κομμάτια πληροφοριών, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις άγνωστες πλευρές και γωνίες χρησιμοποιώντας τον έναν ή και τους δύο νόμους, των ημίτονων και των συνημίτονων.

Οι πρώτοι μαθηματικοί ασχολήθηκαν με την επίλυση των τριγώνων. Αρχικά, η πρόθεσή τους ήταν να μάθουν περισσότερα για τον ουρανό πάνω από αυτά και τη σχέση του με τη Γη στην οποία ζούσαν κι έτσι τα τρίγωνα που μελετούσαν ήταν συχνά σφαιρικά τρίγωνα. Για να επιλύσουν τα σχετικά με τα σφαιρικά τρίγωνα, επεξεργάστηκαν εκδόσεις των νόμων περί ημιτόνων και συνημίτονων για να το επιτύχουν. Επίσης, δημιούργησαν παρόμοιους νόμους για την επίλυση σφαιρικών τριγώνων. Αυτές οι διαδικασίες επίλυσης τόσο για τα επίπεδα όσο και για τα σφαιρικά τρίγωνα χρησιμοποιούνται, για παράδειγμα, στην *Αλμαγέστη* του Πτολεμαίου, που γράφτηκε περί το 150 μ.Χ., αλλά ανακαλύφθηκαν μάλλον δύο ή τρεις αιώνες πιο πριν.

Μπορούμε να ξεκινήσουμε με το νόμο των ημιτόνων με βάση τον οποίο μπορούν να βρεθούν λύσεις για ένα τρίγωνο, αν είναι γνωστές δυο γωνίες του και μια πλευρά του. Με βάση αυτόν τον νόμο, θεωρείται, ότι για κάθε γωνία, οι τρεις αναλογίες των πλευρών ενός τριγώνου προς τα ημίτονα των γωνιών του είναι ίσες μεταξύ τους. Αυτό το θεώρημα άλλωστε, είναι δυνατόν να αποτελέσει την βάση για την επίλυση πολλών προβλημάτων στα πλαίσια της Τριγωνομετρίας.

Είναι δυνατόν να σημειωθεί σε αυτό το σημείο, ότι η βασική φύση αυτών των αναλογιών ήταν γνωστή από τον Πτολεμαίο (περί το 100-180μ.Χ.) στη μελέτη του μήκους των χορδών. Στο έργο του σχετικά με έναν κύκλο ακτίνας r περιγεγγραμμένο σε ένα τρίγωνο ο Bragmagupta (598-660 μ.Χ.) είχε τονίσει, πως $2r = a / \sin A$ που ισοδυναμούσε επίσης με $b / \sin B$ και $c / \sin C$. Από την μεριά του ο Al Biruni (973 – 1048 μ.Χ.) είχε δομήσει το νόμο περί ημίτονων για την περίπτωση των σφαιρικών τριγώνων (ο οποίος αργότερα έγινε γνωστός στην Ευρώπη, μέσω μεταφράσεων των έργων των μουσουλμάνων επιστημόνων και μαθηματικών) (Crossfield, Shepherd, Stein & Williams, 2004).

Παρομοίως, η χρήση ιστορικών στοιχείων στην Τριγωνομετρία, μπορεί να παίξει σημαντικό ρόλο, αναφορικά και με την επίλυση προβλημάτων σχετικά με τα συνημίτονα των γωνιών των τριγώνων. Όπως και με τον νόμο των ημιτόνων, ο Πτολεμαίος μπόρεσε πράγματι να λύσει τα σφαιρικά τρίγωνα χρησιμοποιώντας τις διαδικασίες που είναι ισοδύναμες με το νόμο των ημιτόνων. Αυτά απεικονίζονται σε όλη την *Αλμαγέστη*. Ο Al Bāttānī, ένας από τους πολλούς μουσουλμάνους μαθηματικούς που ασχολήθηκαν με την

Τριγωνομετρία, απέδειξε το νόμο των ημιτόνων για σφαιρικά τρίγωνα γύρω στο 920. Πολλοί μελετητές πιστεύουν ότι ο Viète (1540-1603) έγραψε για πρώτη φορά το νόμο όπως τον ξέρουμε σήμερα.

Ένα άλλο πεδίο στο χώρο της Τριγωνομετρίας, όπου η γνώση ορισμένων ιστορικών στοιχείων επίσης μπορεί να παίξει κάποιο ρόλο, είναι και αυτό που αφορά προβλήματα σχετικά με τις μοίρες των γωνιών του τριγώνου ή αντίστοιχα των μηκών διαφόρων πλευρών. Σε αυτό το θέμα, για παράδειγμα, είναι δυνατόν να ληφθούν υπόψη τα όσα επισημαίνει ο μεγάλος αρχαίος μαθηματικός Ευκλείδης μέσα από το έργο του Στοιχεία. Αυτά μπορούν να αποτελέσουν ένα σημαντικό και χρήσιμο οδηγό για την επίλυση σχετικών προβλημάτων.

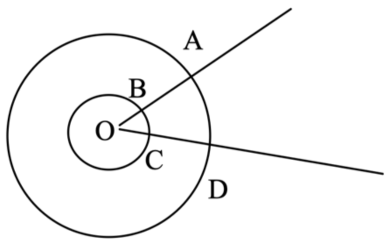
Από την άλλη, είναι δυνατόν να τονιστεί σε αυτό το σημείο, ότι ο Πρόκλος, ο οποίος δίδαξε στην Αθήνα περίπου επτά αιώνες μετά τον Ευκλείδη, σχολίασε εκτενώς σχετικά με τους ορισμούς του Ευκλείδη, αλλά δεν τους διευκρίνισε ριζικά. Προσπάθειες να δώσουμε σαφείς ορισμούς των μαθηματικών εννοιών και όρων συνιστά ένα σημαντικό μέρος της διαδικασίας τυποποίησης. Πράγματι, τα Στοιχεία του Ευκλείδη ξεκινούν με ορισμούς βασικών εννοιών όπως το σημείο και η ευθεία. Έτσι, συνειδητοποιείται το ότι κάθε προσπάθεια να οριστούν όλοι οι όροι, που μπορεί κάποτε να φαινόταν ελκυστικός στόχος, είναι καταδικασμένη σε αποτυχία. Παρά τις εγγενείς δυσκολίες, προσπαθούμε συχνά να προσδιορίσουμε τους βασικούς όρους και τις έννοιες στα μαθηματικά, και οι προσπάθειες του Ευκλείδη σε αυτόν τον τομέα φαίνεται πως είχαν κάποια διαισθητική αξία στην περιγραφή αυτού που είχε κατά νου (Crossfield, Shepherd, Stein & Williams, 2004).

Μια δεύτερη αρχαία άποψη των γωνιών συνδέεται με τα μήκη των τόξων στους κύκλους. Συγκεκριμένα, μια γωνία, που θεωρείται ως μια κεντρική γωνία σε έναν κύκλο, μπορεί να έχει άμεση σχέση με το μήκος τόξου που βαίνει στον κύκλο. Φυσικά, αυτό το μήκος τόξου εξαρτάται από το μέγεθος του κύκλου καθώς και στην κεντρική γωνία, γεγονός που προκάλεσε επιπλοκές σε όσους υπολογιζόμενους τριγωνομετρικούς πίνακες, αφού έπρεπε πάντοτε να καθορίζουν το μέγεθος του κύκλου που χρησιμοποιείται. Ο Πτολεμαίος ασχολήθηκε με τη σύνδεση αυτών των δύο στοιχείων και δημιούργησε έναν πρώιμο τριγωνομετρικό πίνακα (Crossfield, Shepherd, Stein & Williams, 2004)..

Η χρήση των μηκών των κυκλικών τόξων για να ορίσουμε γωνίες τριγώνων, φαίνεται εξάλλου, να ταιριάζει φυσικά με το σύστημα των μοιρών, που χρησιμοποιούνται ακόμα σήμερα για να μετρήσουν τις γωνίες. Αυτό το σύστημα μονάδων, η προέλευση του οποίου είναι άγνωστη, χρησιμοποιήθηκε στην αρχαία Βαβυλωνία περίπου πριν από 4000 χρόνια. Οι εικασίες σχετικά με την προέλευση αυτού του συστήματος γωνιακών μέτρων συχνά επικεντρώνονται στο γεγονός ότι 360 μοίρες είναι ένας πολύ βολικός αριθμός από μια πρακτική άποψη.

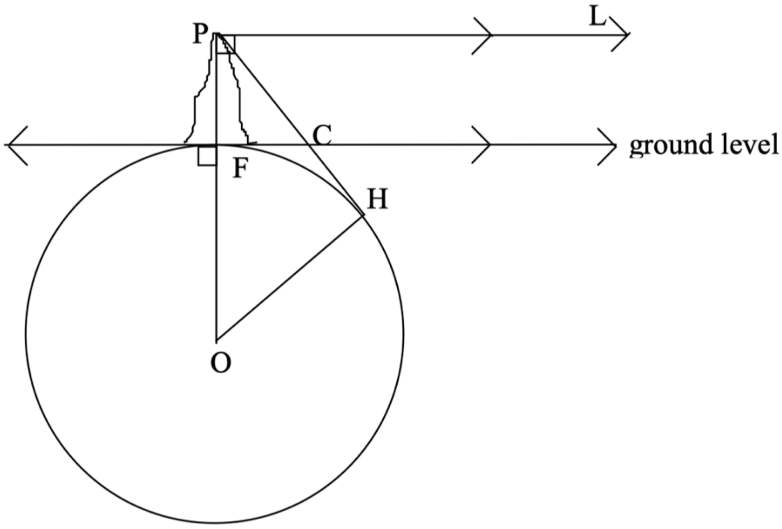
Παράλληλα, μεταξύ των λόγων που δίνονται για αυτή τη διαίρεση ενός κύκλου σε 360 μέρη είναι ότι αυτό το νούμερο έχει πολλές επιπλέον διαιρέσεις, ενώ είναι ο πλησιέστερος "στρογγυλός" αριθμός στον αριθμό των ημερών του έτους. Ένας άλλος λόγος δίνεται από τον Otto Neugebauer: «Στις αρχές της εποχής των Σουμέριων υπήρχε μια μεγάλη μονάδα απόστασης, ένα είδος Βαβυλωνιακού μιλίου, ίσο με περίπου επτά από τα δικά μας μίλια».

Το ζήτημα του τι είναι πραγματικά η γωνία ή, ακριβέστερα, ποια μονάδα μέτρησης πρέπει να χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση της γωνίας εξετάστηκε πάλι από τον Roger Cotes (1682-1716) σε μια δημοσίευση του 1714 με τίτλο *Λογομετρία.* Αυτό το κείμενο, το μόνο που δημοσίευσε ο Cotes στη σύντομη ζωή του, αφορούσε υποτίθεται μόνο τους λογάριθμους, αλλά κυμάνθηκε σε μεγάλο βαθμό σε πολλά συναφή θέματα. Στον πρόλογο του II μέρους της *Λογομετρίας* του, ο Cotes παρατήρησε "ότι η Αρμονία των Μέτρων, είναι τόσο δυνατή που προτείνω ένα ενιαίο συμβολισμό που χρησιμεύει για τον προσδιορισμό των μέτρων, είτε των λόγων (σημείωση: εννοεί λογαρίθμων) είτε των γωνιών. Στη συνέχεια, αυτός εξέτασε τα μέτρα γωνιών, επανεξετάζοντας έτσι ένα θέμα, το οποίο φαίνεται πως δεν είχε αντιμετωπιστεί ρητά για περίπου δύο χιλιετίες. Ο Cotes υποστήριξε ότι το τόξο ενός κύκλου που περιέχεται μεταξύ δύο πλευρών μιας γωνίας, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί προφανώς ως μέτρο για τη μέτρηση μιας γωνίας, αν δεν ήταν ανάλογα με το μέγεθος του κύκλου.



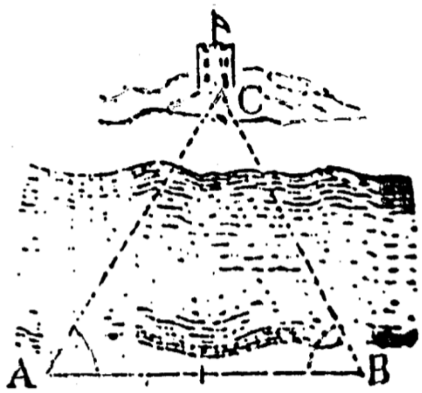
Εικόνα 8. Η θεωρία του Roger Cotes

Από την άλλη μεριά, τα προβλήματα εκείνα που είναι συνυφασμένα με την εφαρμογή γενικών αρχών περί τριγώνων, μπορούν να λυθούν με τη βοήθεια μιας σειράς διαφόρων σχετικών στοιχείων, νόμων και θεωρημάτων που προέκυψαν διαχρονικά, κατά την διάρκεια πολλών αιώνων. Για παράδειγμα, ο μουσουλμάνος μαθηματικός Al Biruni (973-1055) επινόησε μια μέθοδο προσδιορισμού της περιφέρειας της Γης. Αυτή δεν απαιτεί τη βάδιση κατά μήκος μιας συγκεκριμένης απόστασης εδάφους. Η συνήθης μέθοδος ήταν ο προσδιορισμός της περιφέρειας μέσω της κάλυψης με τα πόδια μιας συγκεκριμένης απόστασης, επειδή απαιτούνταν η μέτρηση μιας απόστασης στη Γη μεταξύ δύο χωριστών σημείων. Ο Al Biruni είχε μια νέα ιδέα. Υπολόγισε το ύψος ενός βουνού σε μια περιοχή στην Ινδία, με ένα τετραγωνισμένο πίνακα και παρόμοια τρίγωνα. Στη συνέχεια πήγε στην κορυφή του βουνού με τον αστρολάβο του και μέτρησε τη γωνία της κλίσης του βουνού προς τον ορίζοντα. Δεδομένου ότι είχε ήδη έναν πίνακα με τις τιμές των ημιτόνων διαφόρων γωνιών, ο Al Biruni εφάρμοσε το νόμο των ημιτόνων, για να βρει την ακτίνα της Γης, μέσω της οποίας εν συνεχεία, θα μπορούσε να εντοπίσει την περιφέρεια της.



Εικόνα 9. Υπολογισμός της περιφέρειας της Γης από τον Al Biruni

Ένα άλλο πολύ συνηθισμένο πρόβλημα που είναι ενδεικτικό και απασχόλησε πολλές εθνότητες στο πέρασμα των αιώνων και μπορεί να επιλυθεί μέσα από την εφαρμογή του νόμου των ημιτόνων που αναφέρθηκε πιο πάνω και που μπορεί να εφαρμοστεί μέσα στην τάξη είναι το ακόλουθο: ας υποθέσουμε, ότι έχουμε έναν παρατηρητή στο σημείο A, ο οποίος θέλει να υπολογίσει την απόσταση από εκείνο το σημείο, προς το σημείο C που βρίσκεται πέρα από έναν ποταμό. Προκειμένου να μετρηθεί αυτή η απόσταση, μετριέται η απόσταση από το σημείο A, ως το σημείο B που βρίσκεται στην ίδια ευθεία με το A. Επίσης, υπολογίζονται οι γωνίες A και B του νοητού τριγώνου που ορίζεται από τα σημεία A, B και C. Στη συγκεκριμένη περίπτωση εδώ είναι δυνατόν να γίνει χρήση του νόμου των ημιτόνων, ώστε με βάση όλα αυτά τα στοιχεία, να υπολογιστεί η απόσταση AC (Crossfield, Shepherd, Stein & Williams, 2004).



Εικόνα 10. Εφαρμογή του νόμου ημιτόνων.

Ερευνητικά ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας είναι:

1) Ποια είναι η επίδραση της χρήσης Νέων Τεχνολογιών στην κατανόηση των τριγωνομετρικών εννοιών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων;

2) Ποια είναι η επίδραση της χρήσης ιστορικών στοιχείων στην αντιμετώπιση παρανοήσεων σε τριγωνομετρικές έννοιες και ιδιότητες και στην επίλυση προβλημάτων της καθημερινότητας που αφορούν μέτρηση αποστάσεων και γωνιών;

3) Πώς αξιολογούν οι μαθητές τη διδακτική αξιοποίηση των ιστορικών πηγών και των Νέων Τεχνολογιών;

Μεθοδολογία

Η μεθοδολογία της έρευνας

Για την παρούσα εργασία επιλέχθηκε η ποιοτική έρευνα, όπου σε ένα τμήμα 24 μαθητών μίας σχολικής τάξης, έγινε μία διδακτική παρέμβαση που σκοπό είχε να αυξήσει το βαθμό κατανόησης των τριγωνομετρικών εννοιών, καθώς επίσης να συμβάλλει στην αντιμετώπιση των παρανοήσεων. Για το σκοπό αυτό, η διδακτική παρέμβαση πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια φύλλων εργασίας και ακολούθησε ένα τεστ αξιολόγησης κι ένα ερωτηματολόγιο.

Η διδακτική παρέμβαση χωρίστηκε σε δύο ενότητες. Η πρώτη ενότητα περιλάμβανε δύο δίωρα μαθήματα με τη χρήση νέων τεχνολογιών και ειδικότερα του λογισμικού GeoGebra που έλαβε χώρα στο εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου, συνοδευόμενα από κάποια φύλλα εργασίας, ενώ η δεύτερη ενότητα αποτελούνταν κι αυτή από δύο δίωρα μαθήματα που πραγματοποιήθηκαν στην τάξη του τμήματος και ολοκλήρωσε τη διδακτική παρέμβαση με χρήση και αξιοποίηση ιστορικών αρχείων μέσω κατάλληλων φύλλων εργασίας (ένα φύλλο εργασίας σε κάθε διδακτικό δίωρο). Ακολούθησε ένα γραπτό τεστ αξιολόγησης που εξέτασε την αποτελεσματικότητα της διδακτικής παρέμβασης αναφορικά με το επίπεδο κατανόησης των τριγωνομετρικών εννοιών και τον βαθμό εξοικείωσης με την τριγωνομετρία σχετικά με τα προβλήματα της καθημερινότητας. Τέλος, ακολούθησε ένα ερωτηματολόγιο σχετικά με τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές στη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης,, τις προτιμήσεις τους αναφορικά με τα φύλλα εργασίας και τη διαδικασία που ακολουθήθηκε και εν κατακλείδι με τις προτάσεις τους για βελτίωση ολόκληρης της διαδικασίας.

Πρώτη ενότητα της διδακτικής παρέμβασης

Η πρώτη ενότητα, που στηρίχθηκε στη χρήση νέων τεχνολογιών, χωρίζεται σε δύο επιμέρους φάσεις. Η κάθε φάση διήρκεσε ένα διδακτικό δίωρο και η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε ομάδες των δύο ατόμων και σε κάθε μαθητή δόθηκε ένα φύλλο εργασίας.

Η πρώτη φάση περιλάμβανε φύλλα εργασίας και αρχεία του λογισμικού GeoGebra για τη μελέτη του τριγωνομετρικού κύκλου. Αποτελούνταν από 4 μικροπειράματα με τη βοήθεια των οποίων οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν το φύλλο εργασίας. Το κάθε μικροπείραμα ήταν προσανατολισμένο στη μελέτη καθενός από τους τέσσερις τριγωνομετρικούς αριθμούς, δηλαδή του ημιτόνου, του συνημιτόνου, της εφαπτομένης και της συνεφαπτομένης.

Στη δεύτερη φάση οι μαθητές, αφού μελέτησαν και πειραματίστηκαν με τα κατάλληλα αρχεία GeoGebra, συμπλήρωσαν φύλλα εργασίας προσανατολισμένα στη μελέτη τον τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Δεύτερη ενότητα της διδακτικής παρέμβασης

Η δεύτερη ενότητα της διδακτικής παρέμβασης περιλάμβανε χρήση και αξιοποίηση ιστορικών στοιχείων. Χωρίστηκε κι αυτή σε δύο φάσεις, με κάθε μία φάση να διαρκεί ένα διδακτικό δίωρο και να πραγματοποιείται στην τάξη που κάνει μάθημα το τμήμα. Οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν ένα φύλλο εργασίας στο κάθε διδακτικό δίωρο που διήρκεσε η κάθε φάση.

Στην πρώτη φάση οι μαθητές ασχολήθηκαν με ένα φύλλο εργασίας που έδινε κάποια ιστορικά στοιχεία για το πώς ξεκίνησε και από ποιους μελετήθηκε αρχικά η τριγωνομετρία. Κατόπιν με τη βοήθεια μιας άσκησης οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν στοιχεία από τον πίνακα των χορδών και να τα συνδέσουν με τον τριγωνομετρικό αριθμό του ημιτόνου. Στο επόμενο ερώτημα αποδεικνύουν, με τη βοήθεια της ομοιότητας τριγώνων το θεώρημα του Πτολεμαίου για να καταλήξουν να αποδείξουν τον τύπο που μας δίνει το ημίτονο αθροίσματος δύο γωνιών.

Η δεύτερη φάση περιλάμβανε ένα φύλλο εργασίας που βοηθούσε τους μαθητές να καταλάβουν πως οι αρχαίοι Έλληνες μπόρεσαν να υπολογίσουν τις διαστάσεις και τις αποστάσεις κάποιων ουράνιων σωμάτων. Με κατάλληλες ερωτήσεις υπολογίζουν μόνοι τους την απόσταση της σελήνης και του Ήλιου από τη Γη, της Αφροδίτης από τον Ήλιο ενώ καταλήγουν στο πείραμα του Ερατοσθένη για τον υπολογισμό της περιμέτρου της Γης.

Το δείγμα της έρευνας

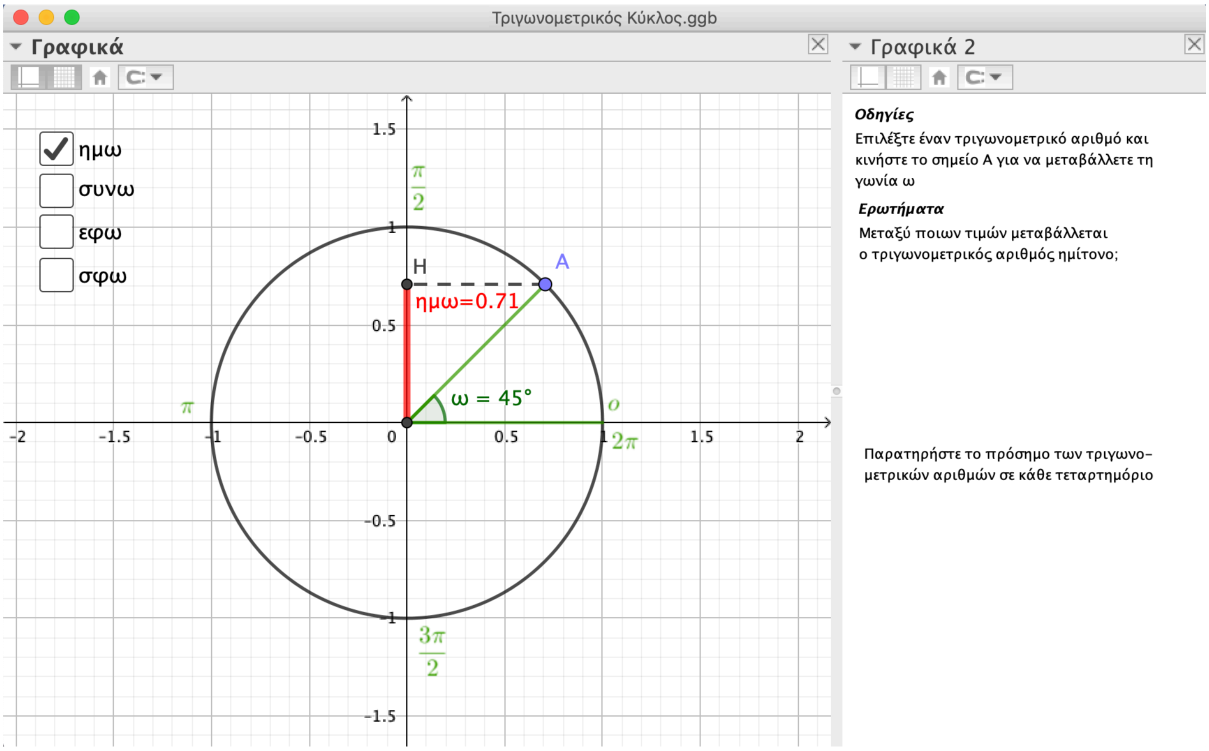
Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε ένα τμήμα 24 μαθητών της Β' τάξης ενός Γενικού Λυκείου λίγο έξω από το πολεοδομικό συγκρότημα της Θεσσαλονίκης. Η δειγματοληψία ήταν «βολική» και αφορούσε το τμήμα που δίδασκε ο ερευνητής. Είναι ένα μέσο τμήμα ως προς τις δυνατότητες και τις επιδόσεις που έχουν οι μαθητές στα Μαθηματικά, έχοντας στο δυναμικό του και πολύ καλούς, αλλά και πολύ αδύναμους μαθητές.

Πρώτη ενότητα της διδακτικής παρέμβασης

Η πρώτη ενότητα της διδακτικής παρέμβασης χωρίζεται σε δύο φάσεις που περιλαμβάνουν φύλλα εργασίας τα οποία στηρίζονται σε μικροπειράματα με αρχεία GeoGebra. Οι μαθητές έχουν στη διάθεσή τους ένα διδακτικό δίωρο προκειμένου να εξερευνήσουν και να πειραματιστούν με το συγκεκριμένο λογισμικό και μέσω αυτού να συμπληρώσουν τα φύλλα εργασίας δουλεύοντας σε ομάδες των δύο ατόμων.

Η πρώτη φάση της πρώτης ενότητας

Δίνεται στους μαθητές το πρώτο φύλλο εργασίας που περιλαμβάνει το πρώτο μικροπείραμα το οποίο αναφέρεται στον τριγωνομετρικό αριθμό ημίτονο. Το πρώτο βήμα καλεί τους μαθητές να ανοίξουν ένα αρχεία GeoGebra που ονομάζεται «Τριγωνομετρικός κύκλος», το οποίο έχει την παρακάτω μορφή:



Εικόνα 11. Αρχείο GeoGebra «Τριγωνομετρικός κύκλος»

Στο πρώτο μικροπείραμα, οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν το τετραγωνάκι δίπλα στον τριγωνομετρικό αριθμό ημίτονο και να μετακινήσουν το σημείο Α σε διάφορες θέσεις πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

Στο δεύτερο βήμα, οι μαθητές πρέπει, αφού μετακινήσουν το σημείο Α στη σωστή θέση, να συμπληρώσουν έναν πίνακα της παρακάτω μορφής:

ω	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημω					

Η σωστή συμπλήρωση του πίνακα είναι η ακόλουθη:

ω	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$ημω$	0	1	0	-1	0

Στο τρίτο βήμα, οι μαθητές πρέπει να απαντήσουν μεταξύ ποιων τιμών μεταβάλλεται το ημίτονο, όταν το σημείο Α διατρέχει τον τριγωνομετρικό κύκλο.
Η σωστή απάντηση είναι: $-1 \leq ημω \leq 1$.

Στο τέταρτο βήμα καλούνται οι μαθητές να απαντήσουν στην ερώτηση: Ποιο είναι το πρόσημο του ημιτόνου σε κάθε τεταρτημόριο, συμπληρώνοντας έναν πίνακα σαν αυτόν που ακολουθεί (η διάταξη προσομοιάζει τη αντίστοιχη του τριγωνομετρικού πίνακα):

2^o ημω …	1^o ημω …
3^o ημω …	4^o ημω …

Η σωστή συμπλήρωση του πίνακα είναι η παρακάτω:

2^o ημω +	1^o ημω +
3^o ημω -	4^o ημω -

Στο πέμπτο και τελευταίο ερώτημα για τα ημίτονα, η ερώτηση που απευθύνεται στου μαθητές είναι η ακόλουθη:
«Όταν η γωνία ω είναι στο 1^o τεταρτημόριο και αυξάνεται, τι συμβαίνει με το ημιτονό της; Αυξάνεται ή μειώνεται; ………………………. Πως θα χαρακτηρίζατε τη συνάρτηση f(ω) = ημω ως προς τη μονοτονία της στο 1^o τεταρτημόριο; ………………».

Η απαντήσεις που πρέπει να δώσουν είναι:
«Όταν η γωνία ω είναι στο 1ο τεταρτημόριο και αυξάνεται, τι συμβαίνει με το ημίτονό της; Αυξάνεται ή μειώνεται; Αυξάνεται . Πως θα χαρακτηρίζατε τη συνάρτηση f(ω) = ημω ως προς τη μονοτονία της στο 1ο τεταρτημόριο; Αύξουσα».

Το δεύτερο φύλλο εργασίας είναι αντίστοιχο με το πρώτο, αλλά αναφέρεται στο συνημίτονο. Οι μαθητές επιλέγουν το τετραγωνάκι δίπλα στο συνημίτονο, όπως φαίνεται στην εικόνα 1 του αρχείου GeoGebra και αφού πειραματιστούν με τις τιμές που παίρνει το συνημίτονο στις διάφορες θέσεις του σημείου Α, καλούνται να συμπληρώσουν το δεύτερο φύλλο εργασίας. Οι ερωτήσεις είναι αντίστοιχες με αυτές του πρώτου, αλλά προσαρμοσμένες στον τριγωνομετρικό αριθμό συνημίτονο. Έτσι, στο ερώτημα που ζητάει από τους μαθητές να συμπληρώσουν έναν πίνακα με τις τιμές που παίρνει το συνημίτονο στις γωνίες 0, $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, η σωστή συμπλήρωση είναι η παρακάτω:

ω	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημω	1	0	-1	0	1

Αντίστοιχα, στο τρίτο ερώτημα του φύλλου εργασίας, οι μαθητές πρέπει να διαπιστώσουν ότι και το συνημίτονο κυμαίνεσαι από -1 ≤ συνω ≤ 1 για τις διάφορες θέσεις του σημείου Α.

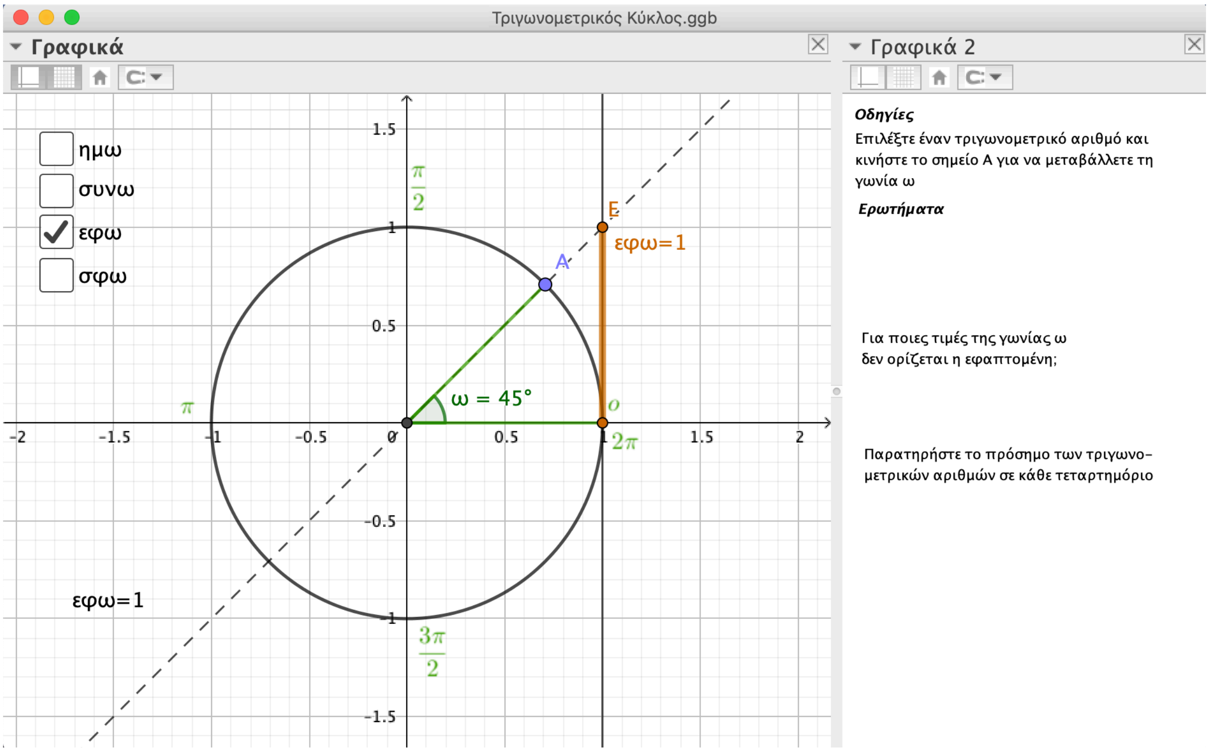
Το τέταρτο ερώτημα που ζητάει την εύρεση του προσήμου του συνημιτόνου στα 4 τεταρτημόρια του τριγωνομετρικού κύκλου και τη συμπλήρωση ενός πίνακα, απαντάται σωστά ως ακολούθως:

2ο συνω -	1ο συνω +
3ο συνω -	4ο συνω +

Τέλος, το πέμπτο ερώτημα που ζητάει από τους μαθητές την εύρεση της μονοτονίας της συνάρτησης του συνημιτόνου, καθώς η ανεξάρτητη μεταβλητή διατρέχει το πρώτο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου, συμπληρώνεται σωστά με τον ακόλουθο τρόπο:

«Όταν η γωνία ω είναι στο 1° τεταρτημόριο και αυξάνεται, τι συμβαίνει με το συνημίτονό της; Αυξάνεται ή μειώνεται; Μειώνεται . Πως θα χαρακτηρίζατε τη συνάρτηση f(ω) = συνω ως προς τη μονοτονία της στο 1° τεταρτημόριο; Φθίνουσα».

Το τρίτο φύλλο εργασίας αναφέρεται στην εφαπτομένη κι έχει ερωτήσεις αντίστοιχες με τα άλλα δύο, αλλά προσαρμοσμένες στα χαρακτηριστικά της εφαπτομένης. Οι μαθητές καλούνται στο πρώτο ερώτημα να επιλέξουν το τετραγωνάκι της εφαπτομένης στο αρχείο GeoGebra, όπως αυτό φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 12. Η εφαπτομένη στον τριγωνομετρικό κύκλο

Αφού πειραματιστούν και εξερευνήσουν τις τιμές που παίρνει η εφαπτομένη για τις διάφορες θέσεις του σημείου Α στον τριγωνομετρικό κύκλο, οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν στα επόμενα ερωτήματα.

Στο δεύτερο ερώτημα, καλούνται οι μαθητές να εντοπίσουν θέσεις στις οποίες η εφαπτομένη δεν ορίζεται. Η σωστή απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι: $\omega = \frac{\pi}{2}$ και $\omega = \frac{3\pi}{2}$

Στο τρίτο ερώτημα, οι μαθητές πρέπει να συμπληρώσουν έναν πίνακα όμοιο με αυτόν που είχε δοθεί στα φύλλα εργασίας σχετικά με τα ημίτονα καθώς επίσης και με τα συνημίτονα. Η ιδιαιτερότητα εδώ έγκειται στο γεγονός ότι σε κάποιες θέσεις δε θα συμπληρωθούν αριθμητικές τιμές, καθότι σε αυτές τις τιμές η εφαπτομένη δεν ορίζεται, πράγμα που δε συνέβαινε ποτέ στους δύο προηγούμενους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Ο πίνακας που δόθηκε είχε την εξής μορφή:

ω	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
εφω					

Η σωστή συμπλήρωση του πίνακα είναι η ακόλουθη:

ω	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
εφω	0	Δεν ορίζεται	0	Δεν ορίζεται	0

Το τέταρτο ερώτημα καλεί τους μαθητές να απαντήσουν αν υπάρχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η εφαπτομένη όταν η γωνία ω διατρέχει τον τριγωνομετρικό κύκλο. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι αρνητική.

Το πέμπτο και τελευταίο ερώτημα στο φύλλο εργασίας σχετικά με την εφαπτομένη, ζητάει από τους μαθητές να συμπληρώσουν έναν πίνακα παρόμοιο με αυτούς που είχαν δοθεί στα προηγούμενα φύλλα εργασίας του ημιτόνου και του συνημιτόνου, αναφορικά με το πρόσημο της εφαπτομένης στα 4 τεταρτημόρια του τριγωνομετρικού κύκλου. Ο πίνακας έχει την εξής μορφή:

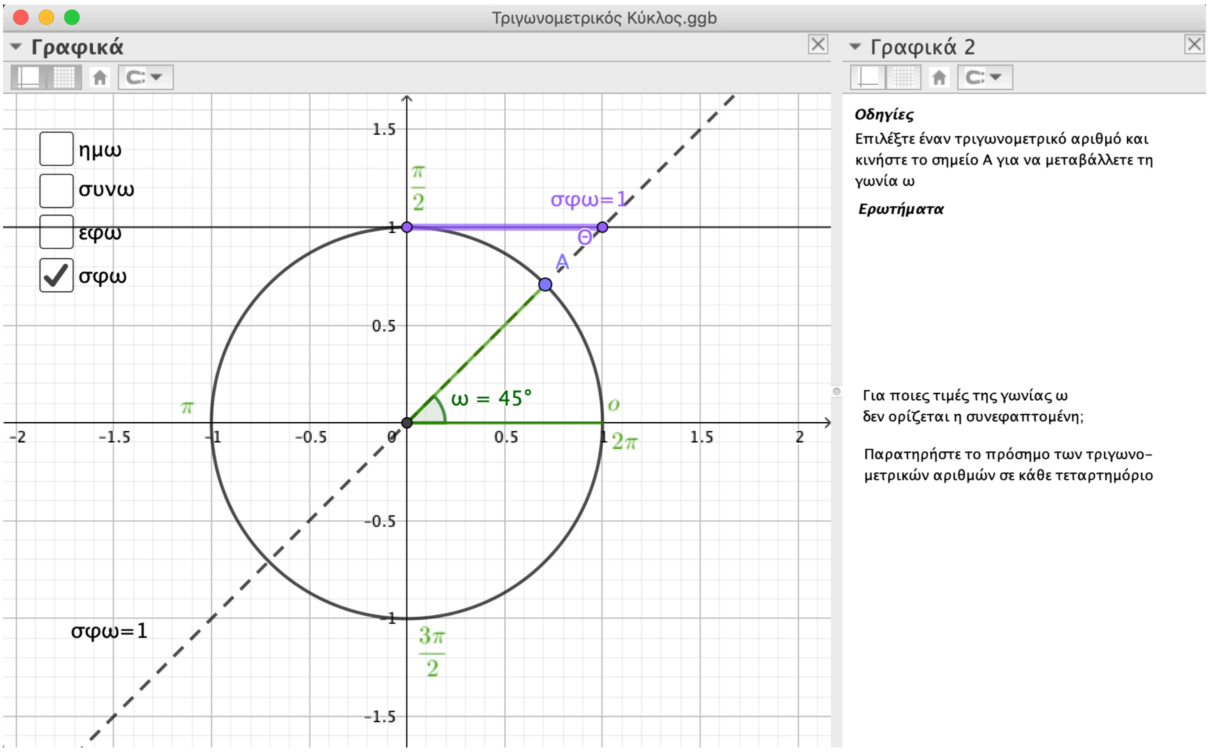
2ο εφω …	1ο εφω …
3ο εφω …	4ο εφω …

Η σωστή συμπλήρωση του πίνακα είναι η ακόλουθη:

2ο εφω -	1ο εφω +
3ο εφω +	4ο εφω -

Το τελευταίο φύλλο εργασίας της πρώτης φάσης της πρώτης ενότητας που διήρκεσε ένα διδακτικό δίωρο και έλαβε χώρα στο εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου, αφορούσε τον τέταρτο τριγωνομετρικό αριθμό, τη συνεφαπτομένη.

Στο πρώτο ερώτημα, οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν το τετραγωνάκι που αντιστοιχεί στη συνεφαπτομένη και να πειραματιστούν με τις διάφορες τιμές που αυτή παίρνει όταν το σημείο Α διατρέχει τον τριγωνομετρικό κύκλο. Η εικόνα που έχουν μπροστά τους οι μαθητές είναι η παρακάτω:



Εικόνα 13. Η συνεφαπτομένη στον τριγωνομετρικό κύκλο

Στο δεύτερο ερώτημα, καλούνται οι μαθητές να εντοπίσουν θέσεις στις οποίες η συνεφαπτομένη δεν ορίζεται. Η σωστή απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι: $\omega = 0$ και $\omega = \pi$.

Στο τρίτο ερώτημα, οι μαθητές πρέπει να συμπληρώσουν έναν πίνακα όμοιο με αυτόν που είχε δοθεί στα προηγούμενα φύλλα εργασίας σχετικά με τις τιμές που παίρνει η συνεφαπτομένη σε διάφορες θέσεις του σημείου Α. Ο πίνακας που δόθηκε είχε την εξής μορφή:

ω	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
σφω					

Η σωστή συμπλήρωση του πίνακα είναι η ακόλουθη:

ω	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
σφω	Δεν ορίζεται	0	Δεν ορίζεται	0	Δεν ορίζεται

Στο τέταρτο ερώτημα, που αναφέρεται στο αν υπάρχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η συνεφαπτομένη, η απάντηση είναι όπως και για την εφαπτομένη, αρνητική.

Το πέμπτο ερώτημα που ζητάει από τους μαθητές να συμπληρώσουν τον πίνακα των προσήμων της συνεφαπτομένης στα 4 τεταρτημόρια του τριγωνομετρικού κύκλου, έχει την παρακάτω μορφή:

2ο σφω …	1ο σφω …
3ο σφω …	4ο σφω …

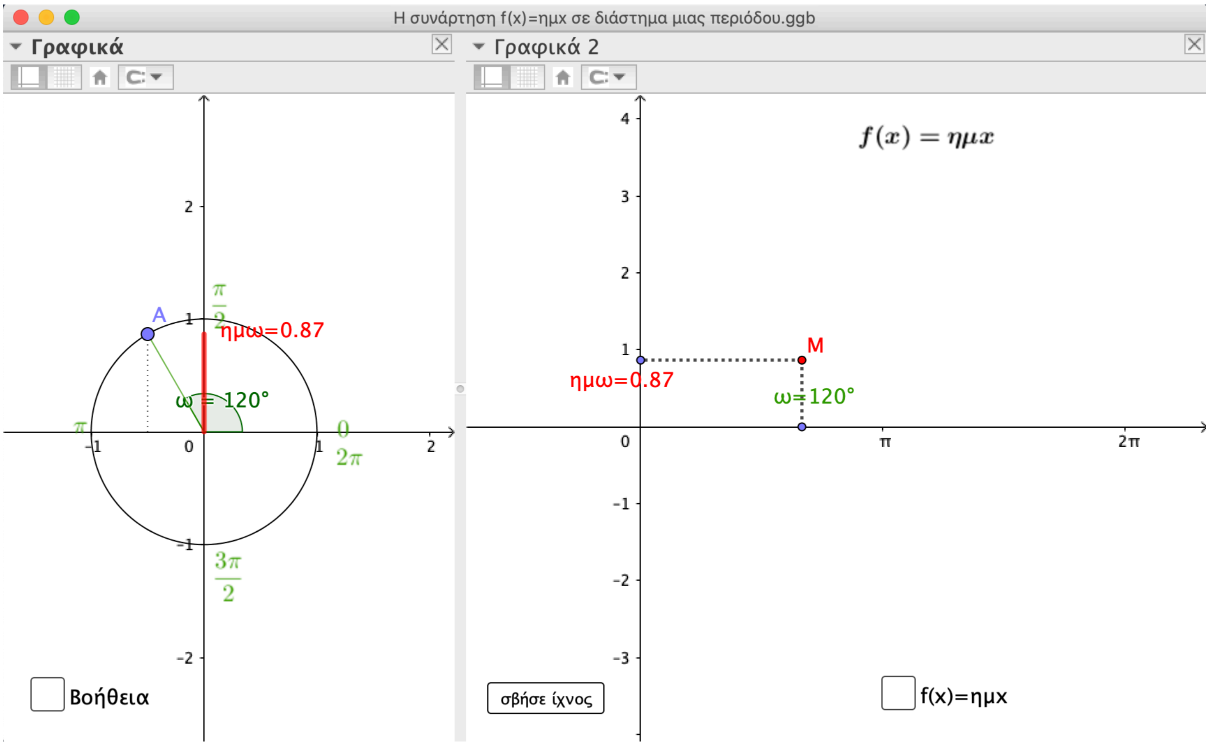
Η σωστή συμπλήρωση του πίνακα είναι η ακόλουθη:

2ο σφω -	1ο σφω +
3ο σφω +	4ο σφω -

Η δεύτερη φάση της πρώτης ενότητας

Η δεύτερη φάση της πρώτης ενότητας είναι αφιερωμένη στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Στη φάση αυτή, οι μαθητές οδηγούνται πάλι στο εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου και δημιουργούν ομάδες των δύο ατόμων, όπου η κάθε ομάδα έχει στη διάθεσή της από έναν υπολογιστή. Δίνεται στον κάθε μαθητή ένα φύλλο εργασίας για να συμπληρώσει.

Το πρώτο φύλλο εργασίας σχετίζεται με τη συνάρτηση του ημιτόνου. Οι μαθητές θα έχουν στη διάθεσή τους δύο διαφορετικά αρχεία GeoGebra. Το ένα θα χρησιμοποιηθεί στα πρώτα ερωτήματα που αφορούν στη μελέτη της συνάρτησης σε διάστημα μίας περιόδου και το επόμενο θα γενικεύσει.
Το πρώτο ερώτημα του φύλλου εργασίας καλεί τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο GeoGebra που ασχολείται με τη συνάρτηση του ημιτόνου σε διάστημα μίας περιόδου. Οι μαθητές αντικρύζουν στις οθόνες των υπολογιστών που βρίσκονται μπροστά τους αυτήν την εικόνα.



Εικόνα 14. Το ημίτονο σε διάστημα μίας περιόδου

Μετακινώντας το σημείο Α, η γωνία ω παίρνει τιμές $0 \leq \omega \leq 2\pi$ και εμφανίζεται στον άξονα y'y το ημίτονό της. Στο δεξί παράθυρο της εφαρμογής εμφανίζεται το σημείο Μ (ω, ημω) που ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης ημιτόνου. Διατρέχοντας το σημείο Α τον τριγωνομετρικό κύκλο, σχηματίζεται στα δεξιά της οθόνης η γραφική παράσταση της συνάρτησης του ημιτόνου σε διάστημα μίας περιόδου. Στο κάτω μέρος της οθόνης υπάρχουν επιλογές για βοήθεια, για να σβήνει το ίχνος που δημιουργείται στη γραφική παράσταση από τη μετακίνηση του σημείου Α και τέλος για να εμφανιστεί όλη η γραφική παράσταση της συνάρτησης.
Στο δεύτερο ερώτημα οι μαθητές πρέπει να συμπληρώσουν έναν πίνακα για τις διάφορες τιμές που παίρνει το ημίτονο, τοποθετώντας το σημείο Α στη κατάλληλη θέση.

ω	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(ω)=ημω					

Η σωστή απάντηση είναι η ακόλουθη:

ω	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(ω)=ημω	0	1	0	-1	0

Το τρίτο ερώτημα του φύλλου εργασίας διατυπώνεται ως εξής:
«Όταν η γωνία ω είναι στο 1^o τεταρτημόριο και αυξάνεται, τι συμβαίνει με το ημίτονό της; Αυξάνεται ή μειώνεται; …………………… Πως θα χαρακτηρίζατε τη συνάρτηση f(ω)=ημω ως προς τη μονοτονία της στο 1^o τεταρτημόριο; …………………….
Επιβεβαιώστε το συμπέρασμά σας από τη γραφική παράσταση που σχηματίζεται στο δεξί παράθυρο.»

Η σωστή συμπλήρωση των κενών φαίνεται παρακάτω.
«Όταν η γωνία ω είναι στο 1^o τεταρτημόριο και αυξάνεται, τι συμβαίνει με το ημίτονό της; Αυξάνεται ή μειώνεται; Αυξάνεται. Πως θα χαρακτηρίζατε τη συνάρτηση f(ω)=ημω ως προς τη μονοτονία της στο 1^o τεταρτημόριο; Αύξουσα
Επιβεβαιώστε το συμπέρασμά σας από τη γραφική παράσταση που σχηματίζεται στο δεξί παράθυρο.»

Το τέταρτο ερώτημα ζητάει από τους μαθητές να συνεχίσουν να αυξάνουν τη γωνία και στα άλλα τεταρτημόρια και να παρατηρήσουν τη μονοτονία της συνάρτησης. Κατόπιν, τους ζητάει να συμπληρώσουν τον παραπάνω πίνακα μεταβολών με το κατάλληλο σύμβολο μονοτονίας.

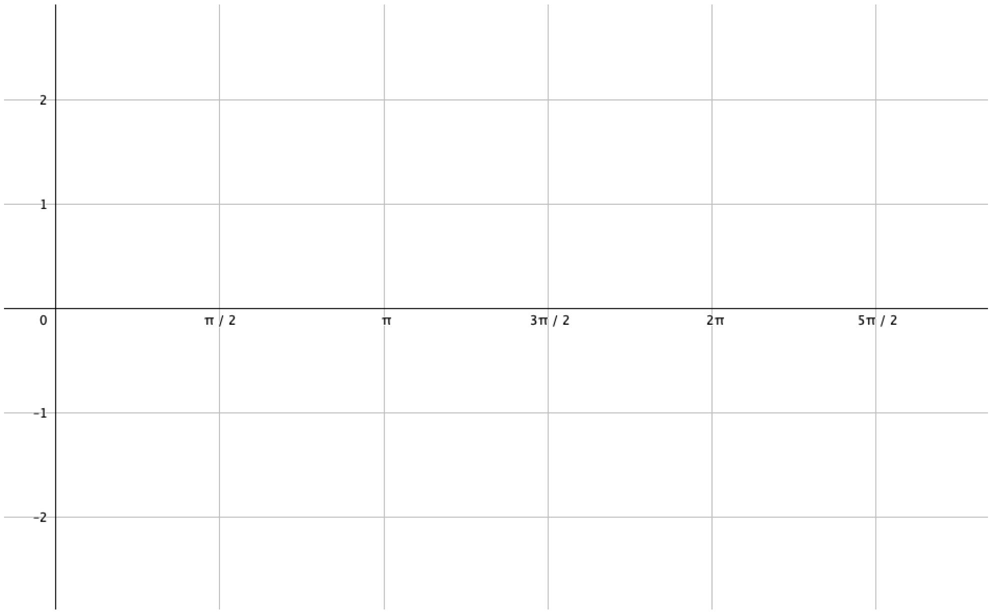
Οι μαθητές πρέπει να συμπληρώσουν τον παραπάνω πίνακα ως εξής:

ω	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(ω)=ημω	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0

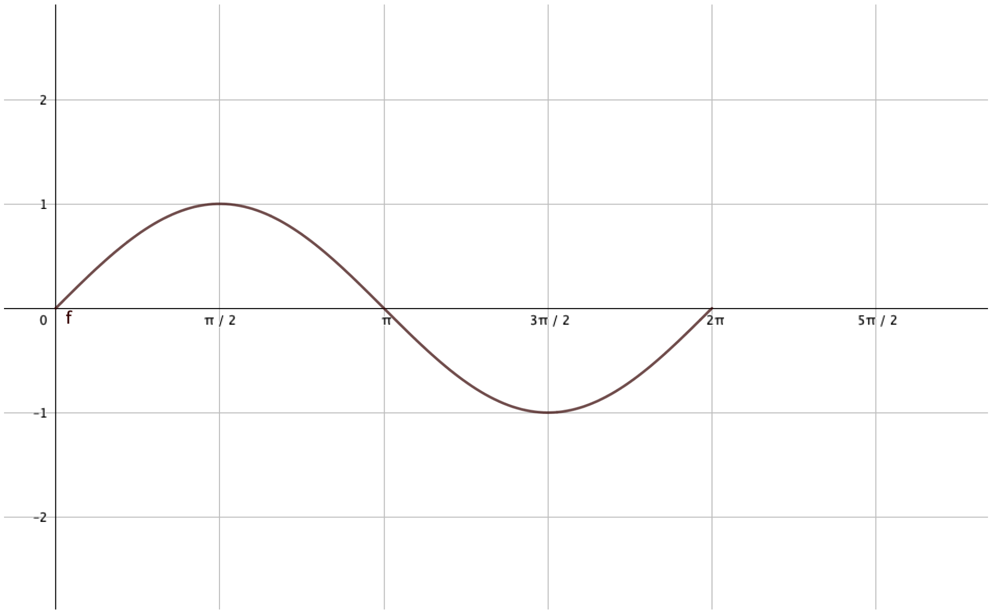
Το πέμπτο ερώτημα, καλεί τους μαθητές να βρουν τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή (δηλαδή τα ακρότατα) της συνάρτησης f(ω)=ημω, όταν $0 \leq \omega \leq 2\pi$ και να σημειώσουν για ποιες τιμές της γωνίας ω παρατηρούνται;

Η σωστή απάντηση είναι η ακόλουθη:
Μέγιστη τιμή= 1 όταν ω=$\frac{\pi}{2}$
Ελάχιστη τιμή=-1 όταν ω=$\frac{3\pi}{2}$

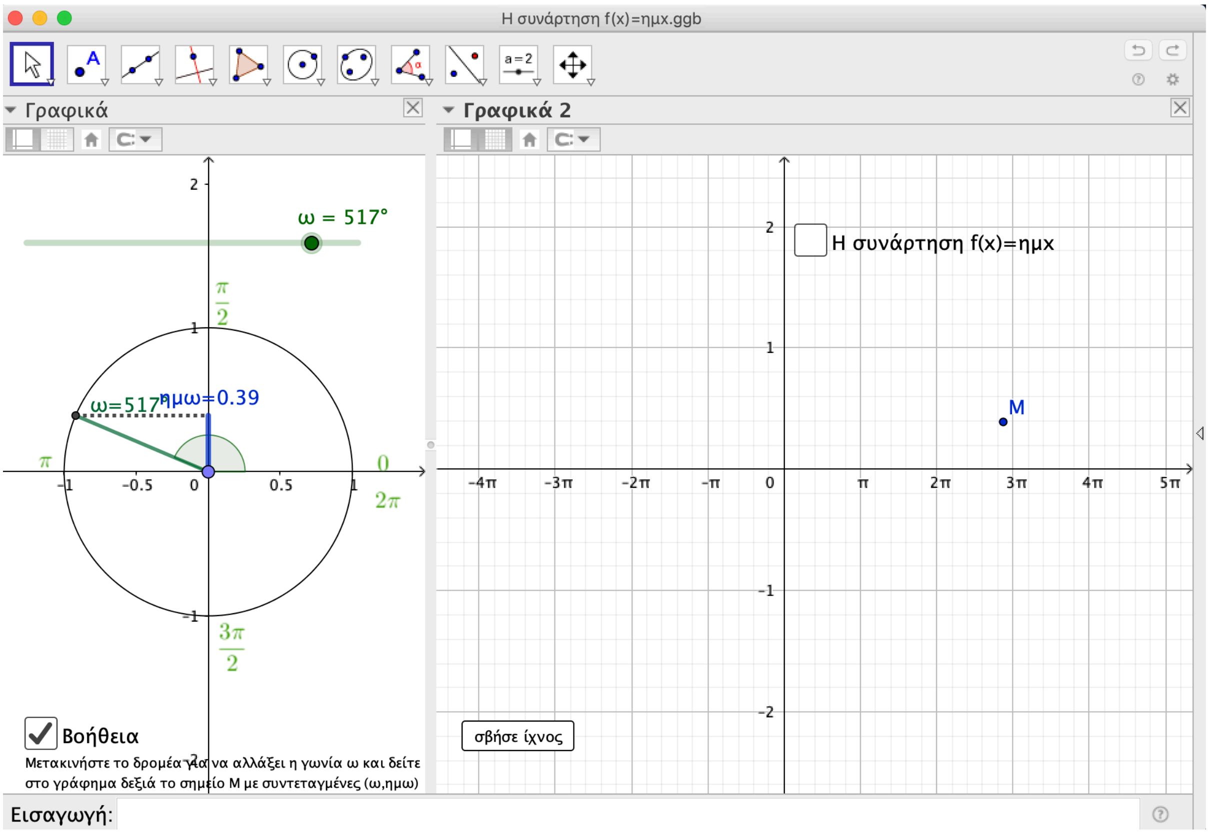
Το έκτο ερώτημα καλεί τους μαθητές να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση σε ένα σύστημα συντεταγμένων όπως αυτό φαίνεται παρακάτω:



Η σωστή σχεδίαση φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Το έβδομο ερώτημα ζητάει από τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο GeoGebra που είναι σχετικό με τη συνάρτηση του ημιτόνου, αλλά δεν περιορίζεται σε διάστημα μίας περιόδου και κατόπιν, μετακινώντας το δρομέα ω (η γωνία ω παίρνει τιμές $-720^o \leq ω \leq 720^o$ ή $[-4π,4π]$), να παρατηρήσουν τα ίχνη που αφήνει το σημείο Μ μετακινούμενο στο σύστημα συντεταγμένων που βρίσκεται στο δεξί παράθυρο της εφαρμογής.



Εικόνα 15. Η συνάρτηση ημίτονο

Το όγδοο ερώτημα καλεί τους μαθητές να απαντήσουν στο εξής: «Ποιο είναι το πλάτος του διαστήματος μετά από το οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης ημιτόνου επαναλαμβάνεται; Πως ονομάζεται αυτό το πλάτος;»

Η απάντηση είναι ότι το ζητούμενο πλάτος είναι ίσο με «2π» ονομάζεται «περίοδος».

Το ένατο ερώτημα ζητάει από τους μαθητές να σβήσουν τα ίχνη που δημιουργήθηκαν από τη μετακίνηση του σημείου Μ και να επιλέξουν το τετραγωνάκι που φαίνεται στο πάνω μέρος της εικόνας, προκειμένου να εμφανιστεί ολοκληρωμένη η γραφική παράσταση της συνάρτησης του ημιτόνου. Στην ερώτηση που ακολουθεί σχετικά με το πόσο απέχει μία κορυφή από την προηγούμενη ή από την επόμενή της, η απάντηση είναι «όσο μία περίοδος, δηλαδή 2π».

Το δέκατο ερώτημα ζητάει από τους μαθητές κάνοντας αναγωγή στο $1^{ο}$ τεταρτημόριο να συγκρίνουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημ(ω+2π), ημ(ω-2π), ημω και να γράψουν τί παρατηρούν. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι ότι «είναι ίσα».

Το ενδέκατο και τελευταίο ερώτημα καλεί τους μαθητές να απαντήσουν ποιο από τα παραπάνω συμπεράσματα επιβεβαίωσαν αλγεβρικά και η απάντηση είναι ότι «η γραφική παράσταση επαναλαμβάνεται κάθε 2π για κάθε σημείο της».

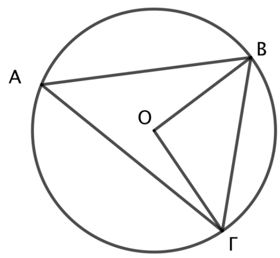
Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για τη συνάρτηση του συνημιτόνου με αντίστοιχα φύλλα εργασίας και αρχεία GeoGebra. Όλα τα φύλλα εργασίας βρίσκονται στο Παράρτημα (στο τέλος της εργασίας).

Δεύτερη ενότητα της διδακτικής παρέμβασης

Η δεύτερη ενότητα της διδακτικής παρέμβασης περιλάμβανε φύλλα εργασίας με αναφορές σε ιστορικά στοιχεία. Οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους ένα διδακτικό δίωρο για να συμπληρώσουν το καθένα από τα δύο φύλλα εργασίας. Δεν χωρίστηκαν σε ομάδες, επειδή ο ερευνητής θεώρησε ότι με αυτόν τον τρόπο κάποιοι μαθητές δε θα κατέβαλαν ισόποση προσπάθεια με κάποιους άλλους, παρόλα αυτά δεν εμποδίστηκε η ελεύθερη ζήτηση ή προσφορά βοήθειας από τους συμμαθητές τους, ενώ παράλληλα υπήρχε στη διάθεσή τους για περαιτέρω βοήθεια και ο εκπαιδευτικός-ερευνητής. Είχαν επίσης τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν ελεύθερα υπολογιστικές αριθμομηχανές, ενώ όσο δε διέθεταν, μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τα κινητά τους τηλέφωνα για να κάνουν τους αριθμητικούς υπολογισμούς που απαιτούσαν τα συγκεκριμένα φύλλα εργασίας.

Το πρώτο φύλλο εργασίας

Στην εισαγωγή του πρώτου φύλλου εργασίας περιγράφεται πως ο Ίππαρχος (180-125 π.Χ.), ένας από τους μεγαλύτερους αστρονόμους της αρχαιότητας, δημιούργησε εκείνα τα μαθηματικά που τελικά ονομάστηκαν τριγωνομετρία. Στο έργο του ασχολήθηκε με τρίγωνα που είχαν εγγραφεί σε κύκλους. Επειδή ασχολήθηκε περισσότερο με τρίγωνα στην ουράνια σφαίρα, ανέπτυξε κυρίως τη σφαιρική τριγωνομετρία ταυτόχρονα με την ανάπτυξη της επίπεδης τριγωνομετρίας. Ένα βασικό πρόβλημα ήταν να εκτιμηθούν οι τρεις γωνίες και οι τρεις πλευρές του εγγεγραμμένου τριγώνου. Η λύση για το συγκεκριμένο πρόβλημα περιλάμβανε αυτό: δεδομένης της κεντρικής γωνίας ΒΟΓ, να βρεθεί το μήκος της χορδής ΒΓ.



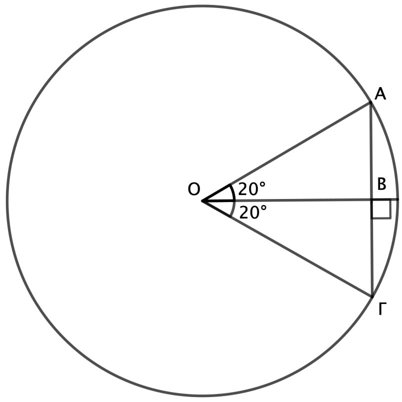
Εικόνα 16. Βασικό πρόβλημα του Ιππάρχου

Για να το καταφέρει αυτό, ο Ίππαρχος έφτιαξε κάποιους πίνακες με αριθμούς όπου θα μπορούσε να αντιστοιχήσει το μήκος της χορδής με μια γωνία. Οι πίνακες αυτοί εξελίχθηκαν σε αυτό που γνωρίζουμε σήμερα ως ημίτονα μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου. Ο σημερινός ορισμός του ημίτονου είναι: Για μια οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου, το ημίτονο είναι το πηλίκο του μήκους της απέναντι από τη γωνία κάθετης πλευράς προς το μήκος της υποτείνουσας.

Γύρω στο 150 μ.Χ., ο αστρονόμος Κλαύδιος ο Πτολεμαίος (100-180 μ.Χ.), επέκτεινε το έργο του Ιππάρχου σε ένα αστρονομικό έργο που ονομάζεται Μαθηματική Συλλογή. Οι Άραβες μελετητές που μελέτησαν αυτό το έργο αιώνες αργότερα το αποκαλούσαν Αλμαγέστη, που σημαίνει «Η Μέγιστη» (σε σύγκριση με άλλα παρόμοια έργα). Το πρώτο κεφάλαιο της Αλμαγέστης πραγματεύτηκε την εκδοχή του Πτολεμαίου για την τριγωνομετρία.

Στο φύλλο εργασίας γίνεται μία απόπειρα, μέσα από μία σειρά ασκήσεων, να κατανοήσουμε τον τρόπο που εφάρμοσε ο Πτολεμαίος για να δημιουργήσει τον πίνακα των χορδών και κατόπιν οι μαθητές θα κληθούν να αποδείξουν το θεώρημα του Πτολεμαίου. Τέλος, με τη βοήθεια του θεωρήματος του Πτολεμαίου, οι μαθητές καλούνται να αποδείξουν με έναν εναλλακτικό τρόπο τον τύπο του ημιτόνου αθροίσματος γωνιών ακολουθώντας μία σειρά από καθοδηγούμενα βήματα.

Στην πρώτη άσκηση δίνεται η παρακάτω εκφώνηση κι ένα βοηθητικό σχήμα.
Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ.
Η οξεία γωνία ΑΟΒ είναι 20^o.



Εικόνα 17. Άσκηση 1 φύλλου εργασίας

1) Να υπολογίσετε το ημίτονο της γωνίας ΑΟΒ, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ημιτόνου οξείας γωνίας σε ορθογώνιο τρίγωνο.
   Απάντηση
   $$\eta\mu\, \widehat{AOB} = \frac{AB}{OA}$$
2) Στο παραπάνω κλάσμα, πολλαπλασιάστε και τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τον αριθμό 2.
   Απάντηση $\eta\mu\, \widehat{AOB} = \frac{2\,AB}{2\,OA}$

3) Αν η διάμετρος του κύκλου είναι ίση με 1, τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε για το ημίτονο της γωνίας που υπολογίσαμε στο πρώτο ερώτημα και για το μήκος της χορδής ΑΓ του κύκλου;
   Απάντηση $\eta\mu\, \widehat{AOB} = \frac{2\,AB}{2\,OA} = \frac{2AB}{1} = 2\,AB = A\Gamma$. Άρα είναι ίσα.

4) Δεδομένου ότι η χορδή ΑΓ αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 40^o, μπορείτε να βρείτε κάποια γωνία που να είναι ίση με 20^o, αλλά να αντιστοιχεί στο ίδιο τόξο ΑΒ;

   Απάντηση Ναι, κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο ΑΒ.

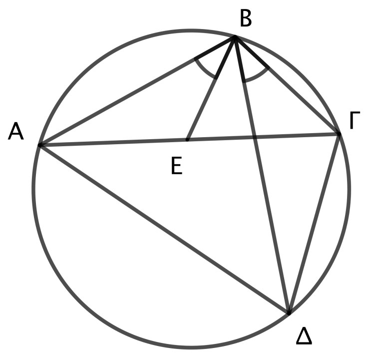
5) Τι συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε για το μήκος μίας χορδής και το ημίτονο της εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνει στο αντίστοιχο τόξο;

Απάντηση Είναι ίσα.

Καταλήξαμε λοιπόν, ότι ο πίνακας των χορδών που υπάρχει στην Αλμαγέστη του Πτολεμαίου και παρουσιάστηκε παραπάνω στο φύλλο εργασίας (παρατίθεται στο παράρτημα), είναι ο αντίστοιχος πίνακας ημιτόνων που χρησιμοποιούμε σήμερα. Ας κρατήσουμε το συμπέρασμα που καταλήξαμε, δηλαδή ότι το μήκος μιας χορδής ενός κύκλου, ισούται με το ημίτονο της εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνει το αντίστοιχο τόξο.

Στη συνέχεια οι μαθητές καλούνται να αποδείξουν το θεώρημα του Πτολεμαίου με μία σειρά από καθοδηγούμενα βήματα. Η εκφώνηση, όπως είναι δίνεται στο φύλλο εργασίας, μαζί με το βοηθητικό σχήμα φαίνεται παρακάτω:

Σε ένα εγγράψιμο τετράπλευρο, το γινόμενο των διαγωνίων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των δυο ζευγών των απέναντι πλευρών.
Έστω εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Φέρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ τέτοιο ώστε $\widehat{ABE} = \widehat{\Delta B\Gamma}$.



Εικόνα 18. Άσκηση 2 φύλλου εργασίας

1) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΕ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΔΒΓ. (Υπενθυμίζουμε ότι οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα του ίδιου κύκλου, είναι ίσες).
Απάντηση Είναι όμοια, επειδή $\widehat{ABE} = \widehat{\Delta B\Gamma}$ (δεδομένα) και $\widehat{BAE} = \widehat{B\Delta\Gamma}$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο τόξο ΒΓ). Άρα και οι τρίτες γωνίες ίσες.

2) Να γράψετε τις αναλογίες των πλευρών που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος.

Απάντηση Ισχύουν οι αναλογίες $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{BE}{B\Gamma} = \frac{AE}{\Gamma\Delta}$

3) Να επιλέξετε τα κλάσματα που περιέχουν τις πλευρές ΑΒ,ΔΒ,ΑΕ,ΓΔ και να πολλαπλασιάσετε «χιαστί».

Απάντηση $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{BE}{B\Gamma} \Leftrightarrow AB \cdot \Gamma\Delta = AE \cdot B\Delta$

4) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΕΒΓ.
Απάντηση $\widehat{AB\Delta} = \widehat{EB\Gamma}$ (αν προσθέσουμε $\widehat{EB\Delta}$ και στα δύο μέλη της ισότητας $\widehat{ABE} = \widehat{\Delta B\Gamma}$). Επίσης ισχύει $\widehat{A\Delta B} = \widehat{B\Gamma E}$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο). Άρα και οι τρίτες γωνίες ίσες.

5) Να γράψετε τις αναλογίες των πλευρών που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος.
Απάντηση Ο αναλογίες είναι οι εξής: $\frac{AB}{EB} = \frac{B\Delta}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{E\Gamma}$

6) Να επιλέξετε τα κλάσματα που περιέχουν τις πλευρές ΑΔ,ΕΓ,ΒΔ,ΒΓ και να πολλαπλασιάσετε «χιαστί».
Απάντηση $\frac{B\Delta}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{E\Gamma} \Leftrightarrow A\Delta \cdot B\Gamma = E\Gamma \cdot B\Delta$

7) Να γράψετε τις ισότητες που προέκυψαν από το 3^{o} και 6^{o} ερώτημα με τρόπο, ώστε το ΒΔ να βρίσκετε και στις δύο στο δεύτερο μέλος και κατόπιν να τις προσθέσετε κατά μέλη.
Απάντηση

$$\begin{array}{r} AB \cdot \Gamma\Delta = AE \cdot B\Delta \\ \underline{+A\Delta \cdot B\Gamma = E\Gamma \cdot B\Delta} \\ AB \cdot \Gamma\Delta + A\Delta \cdot B\Gamma = AE \cdot B\Delta + E\Gamma \cdot B\Delta \end{array}$$

8) Να βγάλετε κοινό παράγοντα το ΒΔ στο δεύτερο μέλος και να προσθέσετε ΑΕ+ΕΓ.
Απάντηση $AB \cdot \Gamma\Delta + A\Delta \cdot B\Gamma = AE \cdot B\Delta + E\Gamma \cdot B\Delta \Leftrightarrow$

$$AB \cdot \Gamma\Delta + A\Delta \cdot B\Gamma = (AE + E\Gamma) \cdot B\Delta \Leftrightarrow$$

$$AB \cdot \Gamma\Delta + A\Delta \cdot B\Gamma = A\Gamma \cdot B\Delta$$

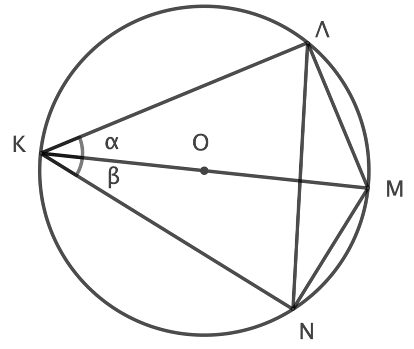
Καταλήξαμε λοιπόν στον τύπο από το θεώρημα του Πτολεμαίου που λέει ότι το γινόμενο των διαγωνίων, είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών, δηλαδή:

ΑΓ · ΒΔ = ΑΒ · ΓΔ + ΑΔ · ΒΓ

Στο επόμενο βήμα θα συνδυάσουμε τα συμπεράσματα που καταλήξαμε αφενός με το ημίτονο μιας εγγεγραμμένης γωνίας και τη χορδή στην οποία βαίνει το αντίστοιχο τόξο και αφετέρου με το θεώρημα του Πτολεμαίου, προκειμένου υπολογίσουμε το ημίτονο αθροίσματος δύο γωνιών.

Η εκφώνηση της τελευταίας άσκησης με το βοηθητικό σχήμα που τη συνοδεύει όπως δόθηκε στους μαθητές, φαίνεται παρακάτω:

Δίνεται τετράπλευρο ΚΛΜΝ εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και διάμετρο ΚΜ=1. Έστω α η γωνία ΛΚΜ και β η γωνία ΜΚΝ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Εικόνα 19. Άσκηση 3 φύλλου εργασίας

1) Να εφαρμόσετε τον τύπο του θεωρήματος του Πτολεμαίου που είδαμε παραπάνω στο τετράπλευρο ΚΛΜΝ.
   <u>Απάντηση</u>
   $K M \cdot \Lambda N = M\Lambda \cdot KN + K\Lambda \cdot MN$

2) Να υπολογίσετε το $\eta\mu\alpha$ και το $\sigma\upsilon\nu\alpha$ (στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΜ).
   <u>Απάντηση</u>
   $\eta\mu\alpha = \frac{M\Lambda}{KM}$

   $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{K\Lambda}{KM}$

3) Να υπολογίσετε το $\eta\mu\beta$ και το $\sigma\upsilon\nu\beta$ (στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΜΝ).
   <u>Απάντηση</u>
   $\eta\mu\beta = \frac{MN}{KM}$

   $\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{KN}{KM}$

4) Να βρείτε χορδή που να είναι ίση με το ημίτονο της γωνίας (α + β).
   <u>Απάντηση</u> Η χορδή που βαίνει σε τόξο εγγεγραμμένης γωνίας (α + β), είναι η ΛΝ. Δηλαδή $\eta\mu(\alpha+\beta) = \Lambda N$.

5) Να αντικαταστήσετε αυτά που βρήκατε στο 2^o, 3^o και 4^o ερώτημα στον τύπο που γράψατε στο 1^o ερώτημα.(Υπενθυμίζουμε ότι η διάμετρος ΚΜ = 1).

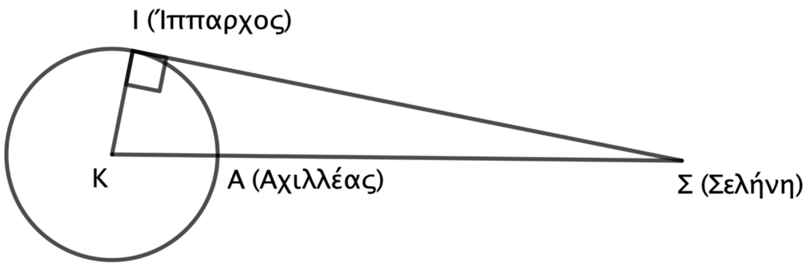
   <u>Απάντηση</u> Έχουμε ότι: $\eta\mu\alpha = M\Lambda$, $\sigma\upsilon\nu\alpha = K\Lambda$, $\eta\mu\beta = MN$, $\sigma\upsilon\nu\beta = KN$, οπότε με αντικατάσταση θα έχουμε $1 \cdot \eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta$

Αποδείξαμε με έναν εναλλακτικό τρόπο τον τύπο του ημιτόνου αθροίσματος δύο γωνιών.

Το δεύτερο φύλλο εργασίας

Στην εισαγωγή του δεύτερου φύλλου εργασίας περιγράφεται πως οι αρχαίοι παρατηρούσαν τις κινήσεις των διαφόρων ουράνιων σωμάτων και τις συσχέτιζαν με κάποια χερσαία φαινόμενα (όπως η παλίρροια, η ζέστη και το κρύο, οι εποχές φύτευσης, οι έμμηνοι κύκλοι, η διαθεσιμότητα άγριων ζώων και φυτών για φαγητό). Κάποιες κινήσεις ήταν επαναλαμβανόμενες και προβλέψιμες (με μικρές αποκλίσεις), ενώ άλλες ήταν εντελώς ακανόνιστες και απρόβλεπτες. Οι μαθηματικοί, λοιπόν, εκείνης της εποχής, επιχείρησαν να μελετήσουν, να ερμηνεύσουν και να «κατακτήσουν» τους ουρανούς.

Το πρώτο ζήτημα εξηγεί πως υπολόγισε ο Ίππαρχος (190-120 π.Χ.) την απόσταση της Σελήνης από τη Γη. Δίνεται αρχικά ένα σχήμα που εξηγεί τις παραδοχές για τις θέσεις τόσο των παρατηρητών, όσο και των ουράνιων σωμάτων (εν προκειμένω της Γης και της Σελήνης).



Εικόνα 20. Απόσταση της Σελήνης από τη Γη

Διευκρινίζεται στους μαθητές πως στο συγκεκριμένο σχήμα σχηματίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο $ΙΚΣ$ ($\hat{Ι}=90^o$) του οποίου η υποτείνουσα διέρχεται από το σημείο που στέκεται ο Αχιλλέας. Αν η απόσταση ανάμεσα στον Ίππαρχο και τον Αχιλλέα είναι γνωστή (μήκος τόξου $ΙΑ$= 6218 μίλια) και δεδομένου ότι η ακτίνα της γης είναι 4000 μίλια, μπορείτε να υπολογίσετε το μέτρο του τόξου (την επίκεντρη γωνία $\widehat{ΙΚΣ}$);

(Υπενθυμίζεται ότι ο τύπος που δίνει το μήκος της περιμέτρου ενός κύκλου είναι $L=2\pi r$).

$$\frac{6218}{2\cdot\pi\cdot 4000}=\frac{\widehat{ΙΚΣ}}{360°}\Leftrightarrow\frac{6218}{25132{,}74123}=\frac{\widehat{ΙΚΣ}}{360°}\Leftrightarrow$$
$$\frac{6218\cdot 360°}{25132{,}74123}=\widehat{ΙΚΣ}\Leftrightarrow\widehat{ΙΚΣ}=89{,}06629\ldots$$

Απάντηση: $\widehat{ΙΚΣ}=89{,}11146$

Στη συνέχεια ζητείται από τους μαθητές, με τη βοήθεια του ορισμού του συνημιτόνου στα ορθογώνια τρίγωνα, να υπολογίσουν το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $ΚΣ$ (δεδομένου ότι είναι γνωστή η γωνία $\widehat{ΙΚΣ}$);

$$συν\widehat{ΙΚΣ}=\frac{ΙΚ}{ΚΣ}\Leftrightarrow ΚΣ=\frac{ΙΚ}{συν\widehat{ΙΚΣ}}\Leftrightarrow ΚΣ=\frac{4000}{0{,}0163}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ΚΣ=245.389\text{ μίλια}$$

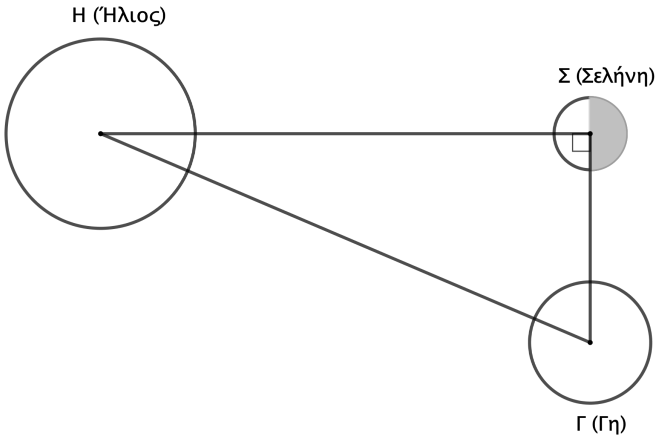
Απάντηση: 245.389 μίλια

Τέλος ζητείται από τους μαθητές να υπολογίσουν απόσταση της Σελήνης από τη Γη δίνοντας τους ως βοήθεια ότι είναι ίση με το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $ΚΣ$ ελαττωμένο κατά το μήκος $ΚΑ$ (την ακτίνα της Γης). Πόση είναι η απόσταση;

$$ΑΣ = ΚΣ - ΚΑ = 245.389 - 4.000 = 241.389 \text{ μίλια}$$

Απάντηση: 241.389 μίλια

Στο δεύτερο ζήτημα, οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν την απόσταση του Ήλιου από τη Γη, με τον τρόπο που χρησιμοποίησε ο Αρίσταρχος (310-230 π.Χ.). Δίνεται ως βοήθεια το σχήμα που απεικονίζει τις σχετικές θέσεις των ουρανίων σωμάτων που θα χρησιμοποιηθούν (εν προκειμένω της Γης, της Σελήνης και του Ήλιου).



Εικόνα 21. Απόσταση του Ήλιου από τη Γη

Διευκρινίζεται στους μαθητές ότι αυτήν τη θέση έχουν τα συγκεκριμένα ουράνια σώματα, κάποιες χρονικές στιγμές του μήνα, όταν το φεγγάρι εμφανίζεται στον ουρανό «μισό». Είναι οι στιγμές εκείνες, που οι ακτίνες του Ήλιου πέφτουν κάθετα στη Σελήνη σε σχέση με την ευθεία που την κοιτάμε από τη Γη.

Αν μία τέτοια χρονική στιγμή, ο Ήλιος είναι ορατός από τη Γη, τότε μπορεί να μετρηθεί η γωνία $\widehat{ΗΓΣ}$ που σχηματίζεται. Ας υποθέσουμε ότι είναι 87°, η τιμή που βρήκε ο Αρίσταρχος. Ο Αρίσταρχος τότε, μπόρεσε να προσδιορίσει με γεωμετρικό τρόπο, τον λόγο της απόστασης του Ήλιου από τη Γη προς την απόσταση της Σελήνης από τη Γη. Να υπολογίσετε με τριγωνομετρικό τρόπο τον ίδιο λόγο $\frac{ΣΓ}{ΗΓ}$ (ο τρόπος αυτός δεν ήταν γνωστός την εποχή που έζησε ο Αρίσταρχος).

$$\frac{ΣΓ}{ΗΓ} = συν\widehat{ΗΓΣ} = συν87° = 0{,}052$$

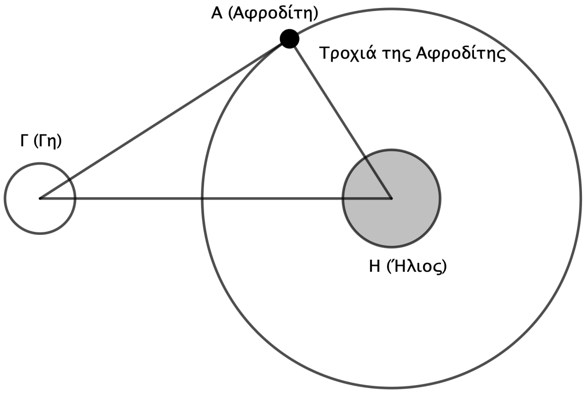
Απάντηση: 0,052

Τέλος, ζητείται από τους μαθητές να υπολογίσουν την απόσταση του Ήλιου από τη Γη (αν είναι γνωστή η απόσταση της Σελήνης από τη Γη (περίπου 240.000 μίλια)).

$H\Gamma = \frac{\Sigma\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\widehat{H\Gamma\Sigma}} = \frac{\Sigma\Gamma}{\sigma\upsilon\nu 87°} = \frac{240.000}{0{,}052} = 4.615.384{,}615$ μίλια Απάντηση:4.615.380

Σε αυτό το σημείο να επισημανθεί ότι στο φύλλο εργασίας υπάρχουν κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με την ακρίβεια του αποτελέσματος καθώς επίσης και κάποιες διευκρινήσεις σχετικά με τις παραδοχές που έχουν γίνει προκειμένου αυτό να βρεθεί.

Το τρίτο ζήτημα του φύλλου εργασίας, ασχολείται με την εύρεση της απόστασης της Αφροδίτης από τον Ήλιο. Το σχετικό σχήμα που δόθηκε στους μαθητές ήταν το παρακάτω:



Εικόνα 22. Απόσταση της Αφροδίτης από τον Ήλιο

Προς διευκόλυνση της κατανόησης της θέσης και της χρονικής στιγμής που αυτή επιτυγχάνεται, δόθηκε στους μαθητές η διευκρίνηση πως η ακτίνα της τροχιάς της Αφροδίτης είναι μικρότερη από την ακτίνα της τροχιάς της Γης. Όπως διαγράφεται η τροχιά της Αφροδίτης γύρω από τον Ήλιο, παρατηρούμε ότι η γωνία $\widehat{A\Gamma H}$ φθάνει στη μέγιστη τιμή της σε δύο θέσεις. Σε κάθε μια από αυτές τις θέσεις μέγιστου γωνιακού διαχωρισμού, η γωνία $\widehat{A\Gamma H}$ είναι ορθή.
Προκειμένου να εντοπιστεί αυτή η χρονική στιγμή που τα συγκεκριμένα ουράνια σώματα έχουν αυτή τη σχετική θέση μεταξύ τους, έπρεπε οι μετρήσεις να γίνουν όταν μεγιστοποιείται η απόσταση που έχει η Αφροδίτη από τον Ήλιο.

Κάποιος που γνωρίζει την απόσταση του Ήλιου από τη Γη (93 εκατομμύρια μίλια) και μπορεί να μετρήσει αυτή τη μέγιστη γωνία (περίπου 46 μοίρες), μπορεί να καθορίσει την ακτίνα της τροχιάς της Αφροδίτης. Να υπολογίσετε την ακτίνα της τροχιάς της Αφροδίτης γύρω από τον Ήλιο.

Έχουμε ότι $H\Gamma = 93.000.000\ \mu\acute{\iota}\lambda\iota\alpha\ \kappa\alpha\iota\ \widehat{H\Gamma A} = 46°$. Άρα
$\eta\mu\widehat{H\Gamma A} = \frac{AH}{H\Gamma} \Leftrightarrow \eta\mu 46° = \frac{AH}{93.000.000} \Leftrightarrow AH = 0{,}72 \cdot 93.000.000 \Leftrightarrow AH = 66.960.000$ μίλια

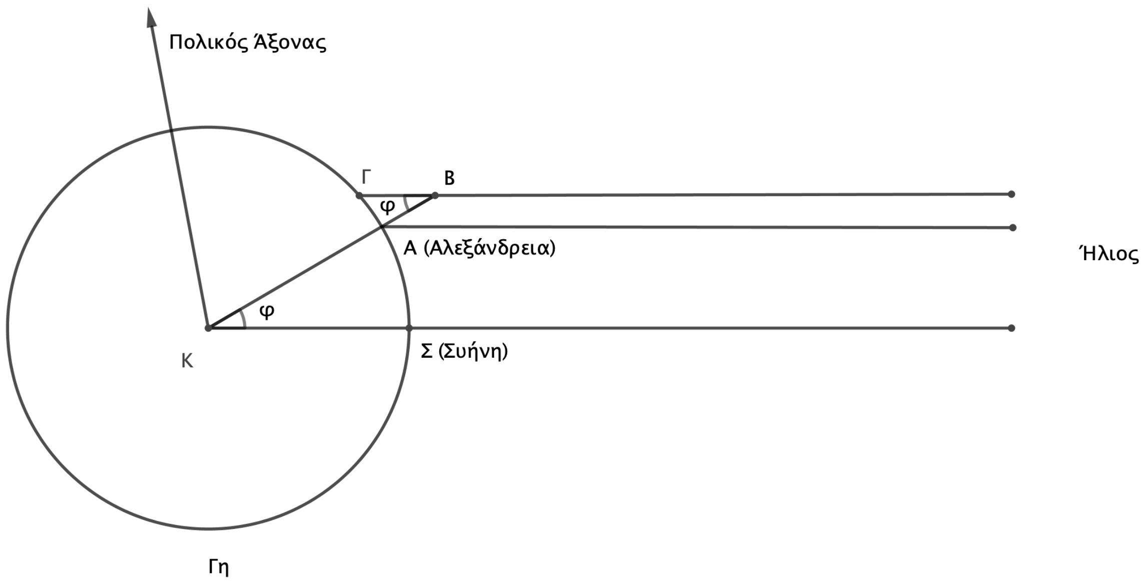
Απάντηση:66.960.000 μ.

Παρόμοιος τρόπος θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και για τον υπολογισμό της ακτίνας της τροχιάς του Ερμή γύρω από τον Ήλιο, αν και δε θα μπορούσε αυτό να γίνει εφικτό στα αρχαία χρόνια. Η γωνία που σχηματίζεται στη θέση μέγιστου γωνιακού διαχωρισμού είναι μόνο 23 μοίρες κι επειδή είναι πολύ μικρή, ο Ερμής είναι ορατός μόνο με τη βοήθεια τηλεσκοπίων που ανακαλύφθηκαν πολύ αργότερα. Να υπολογίσετε την ακτίνα της τροχιάς του Ερμή γύρω από τον Ήλιο.

Έχουμε ότι $ΗΓ = 93.000.000\ μίλια\ και\ \widehat{ΗΓΕ} = 23°$. Άρα
$ημ\widehat{ΗΓΕ} = \frac{ΕΗ}{ΗΓ} \Leftrightarrow ημ23° = \frac{ΕΗ}{93.000.000} \Leftrightarrow ΕΗ = 0{,}391 \cdot$
$93.000.000 \Leftrightarrow ΕΗ = 36.363.000$ μίλια

Απάντηση:36.363.000 μ.

Το τέταρτο και τελευταίο ζήτημα του φύλλου εργασίας, πραγματεύεται τον υπολογισμό της περιμέτρου της Γης με το πείραμα του Ερατοσθένη (280-195 π.Χ.). Δίνεται στους μαθητές το παρακάτω σχήμα:



Εικόνα 23. Υπολογισμός περιμέτρου Γης (πείραμα Ερατοσθένη)

Ένα από τα πιο σημαντικά πειράματα που πραγματοποιήθηκε στην ιστορία της ανθρωπότητας ήταν η μέτρηση της περιφέρειας της Γης από τον Ερατοσθένη τον 3^{ο} π.Χ. αιώνα. Ο Ερατοσθένης πληροφορήθηκε ότι στη Συήνη (σημερινό Ασουάν), ο Ήλιος κατά το μεσημέρι του θερινού ηλιοστασίου ρίχνει τις ακτίνες του κάθετα στον ορίζοντα και φωτίζει ολόκληρο τον πυθμένα ενός πολύ βαθιού πηγαδιού. Την ίδια στιγμή στην Αλεξάνδρεια όπου ζούσε, τοποθέτησε κατακόρυφα έναν πάσσαλο $ΑΒ$ και αφού βρήκε το μήκος της σκιάς $ΑΓ$ που αφήνει, υπολόγισε τη γωνία $φ.$ Επειδή δεν μπορούσε να είναι σίγουρος ότι η μέτρηση θα γινόταν απολύτως ταυτόχρονα, απλώς έκανε τη μέτρηση όταν η σκιά πήρε τη μικρότερή της τιμή.
Γνωρίζοντας το μήκος αυτής της μικρότερης σκιάς και το ύψος του πασσάλου του, ήταν σε θέση να προσδιορίσει ότι η γωνία $\widehat{ΑΒΓ}$ ήταν ίση με 1/50 των 360 μοιρών, δηλαδή 7 1/5 μοίρες. Επειδή οι ακτίνες του Ήλιου είναι παράλληλες μεταξύ τους, άρα και η γωνία $\widehat{ΑΚΣ}$ θα είναι 7 1/5 μοίρες. Γνωρίζοντας ότι η απόσταση μεταξύ της Συήνης και της Αλεξάνδρειας ήταν 5000 στάδια (μονάδα μέτρησης απόστασης της εποχής), ο Ερατοσθένης ήταν σε θέση να προσδιορίσει την περιφέρεια της Γης. Ίση με πόσα στάδια την υπολόγισε;

$\frac{7{,}2°}{360°} = \frac{5000\ στάδια}{περιφέρεια} \Leftrightarrow περιφέρεια\ γης = 50 \cdot 5000\ στάδια$ Απάντηση: 250.000 στάδια

Πόσο μήκος είχε ένα στάδιο; Δυστυχώς, υπάρχουν πολλά διαφορετικά στάδια από την αρχαιότητα. Δεν γνωρίζουμε ποιον ορισμό χρησιμοποιεί ο Ερατοσθένης. Ωστόσο, γνωρίζουμε τη σύγχρονη απόσταση μεταξύ της Συήνης και της Αλεξάνδρειας και είναι 493 μίλια, οπότε μπορούμε να επεξεργαστούμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας αυτές τις σύγχρονες μονάδες μέτρησης. Να υπολογίσετε την περιφέρεια της Γης με αυτά τα σύγχρονα δεδομένα;

$\frac{7{,}2°}{360°} = \frac{493\ μίλια}{περιφέρεια} \Leftrightarrow περιφέρεια\ γης = 50 \cdot 493\ μίλα$ Απάντηση: 24.650 μίλια

Το τεστ αξιολόγησης

Αφού ολοκλήρωσαν οι μαθητές τη διδακτική παρέμβαση με τα φύλλα εργασίας που τους δόθηκαν σχετικά με το λογισμικό GeoGebra και τα ιστορικά στοιχεία, κλήθηκαν να συμπληρώσουν ένα τεστ αξιολόγησης. Το τεστ αυτό περιλάμβανε δύο ερωτήσεις συμπλήρωσης κενού, δύο ασκήσεις και δύο προβλήματα (υπάρχει στο παράρτημα). Οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους μία διδακτική ώρα για να το ολοκληρώσουν. Τα θέματα ήταν με τέτοιο τρόπο επιλεγμένα, ώστε να αξιολογήσουν όσο το δυνατόν περισσότερο την αποτελεσματικότητα της διδακτικής παρέμβασης.

Το πρώτο θέμα του τεστ αξιολόγησης

Στο πρώτο θέμα υπάρχουν δύο υποερωτήματα, όπου οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν τα κενά που υπάρχουν. Στο πρώτο υποερώτημα πρέπει να συμπληρώσουν τη μονοτονία των συναρτήσεων *f(x)=ημx* και *g(x)=συνx* σε διάστημα μίας περιόδου. Με αυτό το υποερώτημα θέλουμε να διαπιστώσουμε αν και κατά πόσο βοήθησε η ενασχόληση με το λογισμικό GeoGebra στην οπτική αναπαράσταση και κατανόηση της μελέτης της γραφικής παράστασης των συναρτήσεων του ημιτόνου και του συνημιτόνου. Το ερώτημα τίθεται ως εξής:

<u>Εκφώνηση</u>

α) Να συμπληρώσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων στα παρακάτω διαστήματα:

Συνάρτηση	Διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$	Διάστημα $[\frac{\pi}{2}, \pi]$	Διάστημα $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	Διάστημα $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
f(x)=ημx				
g(x)=συνx				

Η σωστή συμπλήρωση του πίνακα είναι η ακόλουθη:

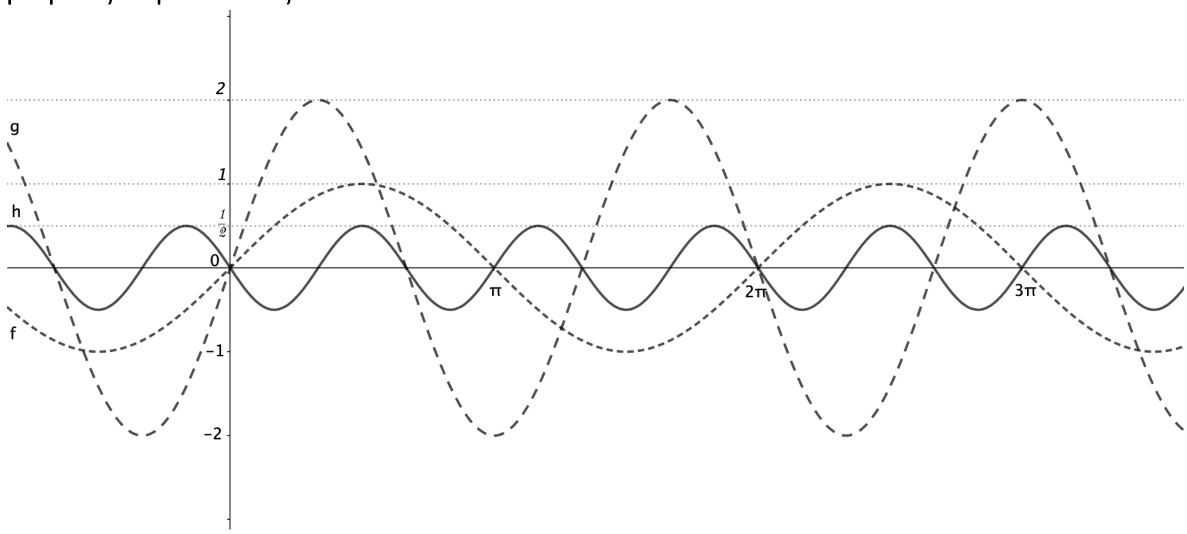
<u>Λύση</u>

Συνάρτηση	Διάστημα $[0,\frac{\pi}{2}]$	Διάστημα $[\frac{\pi}{2},\pi]$	Διάστημα $[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	Διάστημα $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
f(x)=ημx	↗	↘	↘	↗
g(x)=συνx	↘	↘	↗	↗

Αποτελέσματα
Οι μαθητές που απάντησαν σωστά σε όλα τα κενά ήταν 19 από τους 24. Από τους 5 που έκαναν λάθη, οι 4 είχαν λάθη μόνο στη δεύτερη γραμμή του συνημιτόνου (αντί για τη σωστή σειρά συμβόλων ↘↘↗↗, είχαν ↗↘↗↘, ↘↗↘↗, ↗↗↘↘, ↗↘↘↗), ενώ ένας μαθητής (ο μαθητής "Μ17") είχε λάθη και στην πρώτη γραμμή του ημιτόνου (είχε συμπληρώσει λάθος τη μονοτονία στο $2^{ο}$ και $4^{ο}$ τεταρτημόριο, δηλαδή το δεύτερο και τέταρτο κενό, δηλαδή είχε ↗↗↘↘).

Στο δεύτερο υποερώτημα οι μαθητές έπρεπε να συμπληρώσουν με τους κατάλληλους αριθμούς τα κενά ενός πίνακα. Οι αριθμοί αυτοί είναι συντελεστές στην τριγωνομετρική συνάρτηση *f(x)=ρ·ημ(ωx)* και μεταβάλουν τη γραφική παράσταση της αρχικής τριγωνομετρικής συνάρτησης *f(x)=ημx.* Οι μαθητές εδώ καλούνται να θυμηθούν πως μεταβάλλονται οι γραφικές παραστάσεις όταν αλλάζουν οι συντελεστές των τριγωνομετρικών αριθμών και των ανεξάρτητων μεταβλητών, κάτι που εξάσκησαν κατά την ενασχόληση τους με τα αρχεία GeoGebra, μέσα στο εργαστήριο πληροφορικής, όταν πειραματίζονταν με τους διάφορους δρομείς (κέρσορες). Το ερώτημα όπως δόθηκε στους μαθητές φαίνεται παρακάτω:

Εκφώνηση
β) Να συμπληρώσετε τα στοιχεία που λείπουν από τους τύπους των συναρτήσεων με γραφικές παραστάσεις:



Συνάρτηση	ρ	ω
f(x)=ρ·ημ(ωx)		
g(x)=ρ·ημ(ωx)		
h(x)=ρ·ημ(ωx)		

Η σωστή συμπλήρωση του παραπάνω πίνακα είναι η ακόλουθη:

Λύση

Συνάρτηση	ρ	ω
f(x)=ρ·ημ(ωx)	1	1
g(x)=ρ·ημ(ωx)	2	$^3/_2$
h(x)=ρ·ημ(ωx)	$-^1/_2$	3

Αποτελέσματα
Σε αυτό το υποερώτημα, 14 μαθητές συμπλήρωσαν σωστά και τις δύο στήλες του πίνακα, ενώ 6 συμπλήρωσαν σωστά μόνο την πρώτη στήλη που ζητούσε τον συντελεστή ρ που μεταβάλλει τα ακρότατα της συνάρτησης και είναι πιο εύκολος ο προσδιορισμός του, ενώ έκαναν λάθος στη δεύτερη στήλη που ζητούσε τον συντελεστή ω του x, που μεταβάλλει την περίοδο της τριγωνομετρικής συνάρτησης (αντί του ορθού $1, \frac{3}{2}, 3$, συμπλήρωσαν τη στήλη ως εξής: δύο μαθητές έγραψαν $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{11}{2}$, ένας μαθητής έγραψε $\frac{12\pi}{5}, \frac{12\pi}{7}, \frac{12\pi}{11}$, ένας μαθητής έγραψε $\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}$, ένας μαθητής έγραψε $1, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ και ένας μαθητής έγραψε $3\pi, 2\pi, 3\pi$). Τέλος, 3 μαθητές ("Μ14", "Μ8" και "Μ20") έκαναν όλους τους αριθμούς λάθος και ένας μαθητής ("Μ17") δεν τον συμπλήρωσε καθόλου.

Το δεύτερο θέμα του τεστ αξιολόγησης

Το δεύτερο θέμα αποτελούνταν από δύο ασκήσεις που σκοπό είχαν να ελέγξουν αν και κατά πόσο οι μαθητές έχουν κατανοήσει τους τύπους των τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος και διαφοράς γωνιών. Για αυτό το σκοπό είχαμε ασχοληθεί στο φύλλο εργασίας με το θεώρημα του Πτολεμαίου, όπου μετά από μία σειρά αναφορές ιστορικών στοιχείων και ασκήσεων καταλήξαμε στην απόδειξη του τύπου υπολογισμού του ημιτόνου αθροίσματος γωνιών, απόδειξη που στο σχολικό βιβλίο δεν είναι εντός ύλης και οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν τους τύπους χωρίς να έχουν καταλάβει ούτε πως προέκυψαν, ούτε τι συμβολίζουν, ούτε πότε και για ποιο λόγο τους χρησιμοποιούμε.
Το πρώτο υποερώτημα έχει μία άσκηση όπου δίνεται το ημίτονο μίας γωνίας α και ζητάει από τους μαθητές να υπολογίσουν το $\eta\mu\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$ και το $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \frac{\pi}{3})$. Η εκφώνηση της άσκησης όπως αυτή δόθηκε στους μαθητές φαίνεται παρακάτω:

Εκφώνηση

α) Αν $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ και $\eta\mu\alpha = \frac{\sqrt{27}}{14}$, να υπολογίσετε:

i. $\eta\mu\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$
ii. $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \frac{\pi}{3})$

Η λύση του υποερωτήματος δίνεται παρακάτω:

<u>Λύση</u>

i. Εφαρμόζουμε τον τύπο $\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta$ και έχουμε:
$\eta\mu\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}+\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{27}}{14}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\frac{1}{2}$ (1)

Το $\sigma\upsilon\nu\alpha$ θα το υπολογίσουμε από την τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1$
Έχουμε:

$$\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1-\eta\mu^2\alpha\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1-\left(\frac{\sqrt{27}}{14}\right)^2\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\alpha=$$
$$=\frac{196}{196}-\frac{27}{196}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\frac{169}{196}$$

Άρα θα είναι: $\sigma\upsilon\nu\alpha=-\frac{13}{14}$, αφού $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

Αντικαθιστώντας στην (1) θα έχουμε:

$$\eta\mu\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{27}}{14}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{13}{14}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{81}}{28}-\frac{13}{28}=\frac{9}{28}-\frac{13}{28}=-\frac{4}{28}=-\frac{1}{7}$$

ii. Εφαρμόζουμε τον τύπο $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$ και έχουμε:
$$\sigma\upsilon\nu\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\frac{\pi}{3}=-\frac{13}{14}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{27}}{14}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{13}{28}+\frac{\sqrt{81}}{28}$$
$$=-\frac{13}{28}+\frac{9}{28}=-\frac{4}{28}=-\frac{1}{7}$$

<u>Αποτελέσματα</u>
Στο συγκεκριμένο υποερώτημα, 14 μαθητές απάντησαν σωστά και βρήκαν και τα δύο ζητούμενα της άσκησης. Λάθος στις πράξεις στα τελευταία βήματα, έκαναν 5 μαθητές, με έναν από αυτούς να μην ολοκληρώνει μέχρι το τελευταίο βήμα. Τέσσερις (4) μαθητές ("Μ2", "Μ9", "Μ19","Μ20") έκαναν το συνηθισμένο λάθος και αντικατέστησαν στη θέση του α την τιμή του ημιτόνου του, εφαρμόζοντας τον τύπο ως εξής:

$$\eta\mu\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\eta\mu\left(\frac{27}{14}+\frac{\pi}{6}\right)=\cdots$$

Τέλος, 1 μαθητής ("Μ17") εφάρμοσε μόνο τον τύπο και στα δύο ζητούμενα, χωρίς να προχωρήσει ούτε στις αντικαταστάσεις, ούτε στις πράξεις. Όλοι όμως οι μαθητές εφάρμοσαν σωστά τους τύπους, χωρίς κάποιος να κάνει το δεύτερο συνηθισμένο και αναμενόμενο λάθος που γίνεται από ένα μέρος των μαθητών που εφαρμόζουν τον τύπο επιμεριστικά, δηλαδή:

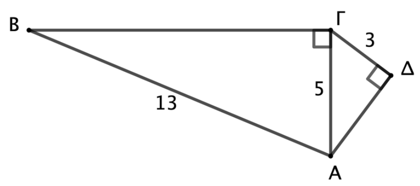
$$\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta \text{ και } \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta.$$

Το δεύτερο υποερώτημα του θέματος ζητούσε να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μίας γωνίας ενός τετραπλεύρου για την οποία το μόνο που δινόταν ήταν ένα σχήμα. Στο τετράπλευρο είναι γνωστές οι δύο απέναντι πλευρές και η μία διαγώνιος. Το ερώτημα όπως τους τέθηκε, δίνεται παρακάτω:

<u>Εκφώνηση</u>

β) Στο παρακάτω σχήμα, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει ΑΒ = 13, ΓΔ = 3 και ΑΓ = 5. Επίσης ΑΓ ⊥ ΒΓ και ΑΔ ⊥ ΓΔ.

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{A}$.



Εικόνα 24. Θέμα 2β του τεστ αξιολόγησης

Η μόνη βοήθεια που δόθηκε προφορικά στους μαθητές, ήταν ότι θα μπορούσαν να χωρίσουν τη γωνία *Α* σε *α* και *β* και μετά να χρησιμοποιήσουν τους τύπους.
Μία ενδεικτική λύση για το παραπάνω, είναι η εξής:

<u>Λύση</u>

Έστω $\alpha=\widehat{B A \Gamma}\ \kappa\alpha\iota\ \beta=\widehat{\Gamma A \Delta}$. Τότε θα έχουμε $\hat{A}=\widehat{BA\Delta}=\alpha+\beta$.

Από τα δεδομένα θα έχουμε ότι: $\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{A\Gamma}{AB}=\frac{5}{13}$ και $\eta\mu\beta=\frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma}=\frac{3}{5}$

Με χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας $\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1$ μπορούμε να υπολογίσουμε το $\eta\mu\alpha$:

$$\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha=1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2 \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha=\frac{169}{169}-\frac{25}{169}$$
$$\Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha=\frac{144}{169}$$

Άρα $\eta\mu\alpha=\frac{12}{13}$, αφού $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Ομοίως βρίσκουμε και το $\sigma\upsilon\nu\beta$:

$$\eta\mu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\beta = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\beta = 1 - \eta\mu^2\beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\beta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\beta = \frac{25}{25} - \frac{9}{25}$$
$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\beta = \frac{16}{25}$$

Άρα $\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{4}{5}$, αφού $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Αντικαθιστούμε τα $\eta\mu\alpha, \eta\mu\beta, \sigma\upsilon\nu\alpha, \sigma\upsilon\nu\beta$ στον τύπο και έχουμε:

$$\eta\mu\hat{A} = \eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{48}{65} + \frac{15}{65} = \frac{63}{65}$$

Για το $\sigma\upsilon\nu\hat{A}$ έχουμε αντίστοιχα:

$$\sigma\upsilon\nu\hat{A} = \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} - \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} = \frac{20}{65} - \frac{36}{65} = -\frac{16}{65}$$

Για την εφαπτομένη μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

$$\varepsilon\varphi\hat{A} = \varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)} = \frac{\frac{63}{65}}{-\frac{16}{65}} = -\frac{63 \cdot 65}{16 \cdot 65} = -\frac{63}{16}$$

Τέλος, για την συνεφαπτομένη έχουμε:

$$\sigma\varphi\hat{A} = \frac{1}{\varepsilon\varphi\hat{A}} = \frac{1}{-\frac{63}{16}} = -\frac{16}{63}$$

<u>Αποτελέσματα</u>

Στο δεύτερο υποερώτημα, οι μαθητές που απάντησαν σωστά σε όλα τα ζητούμενα της άσκησης, ήταν 15. Σε αυτό το σημείο πρέπει να επισημάνουμε, ότι ο υπολογισμός των στοιχείων που λείπουν θεωρήθηκε σωστός είτε αυτά υπολογίστηκαν με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών τύπων, είτε με το Πυθαγόρειο θεώρημα, χωρίς να παίζει κάποιο ρόλο ο λόγος που επιλέχθηκε ο συγκεκριμένος τρόπος. Στο τελευταίο βήμα των πράξεων, 4 μαθητές έκαναν λάθη υπολογισμού, ενώ 2 μαθητές βρήκαν μόνο το ημίτονο της ζητούμενης γωνίας. Τέλος, 3 μαθητές ("Μ8", "Μ17", "Μ19") χρησιμοποίησαν Πυθαγόρειο θεώρημα και βρήκαν τις πλευρές των τριγώνων που έλειπαν, με έναν εξ αυτών ("Μ14") να γράφει και τον τύπο του ημιτόνου αθροίσματος, αλλά χωρίς να κάνει αντικατάσταση και πράξεις ακολούθως.

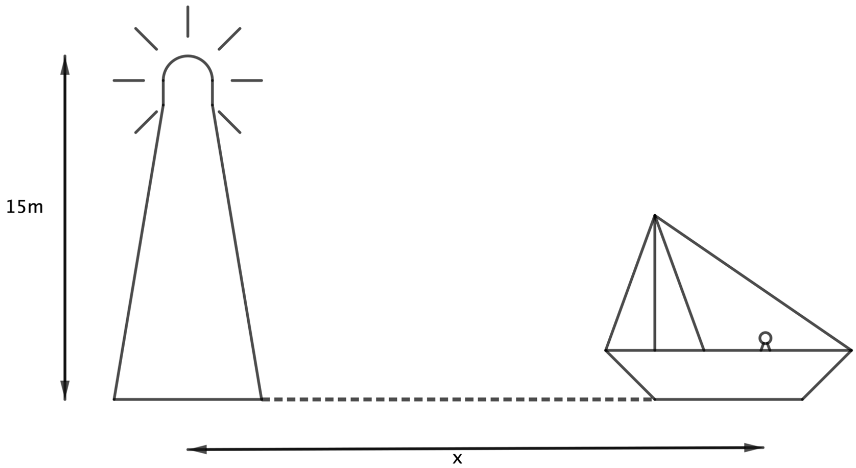
Το τρίτο θέμα του τεστ αξιολόγησης

Το τρίτο θέμα αποτελείται από δύο προβλήματα, ένα κλασικό -θα μπορούσαμε να πούμε- υπολογισμού μίας απόστασης και ένα λίγο πιο ασυνήθιστο, όπου οι μαθητές καλούνται να κάνουν κάποιους υπολογισμούς και αφού ελέγξουν μια ανισοτική σχέση να απαντήσουν σε ένα ερώτημα. Με τέτοιου είδους προβλήματα ασχολήθηκαν οι μαθητές στο φύλλο εργασίας με τους υπολογισμούς αποστάσεων και μεγεθών ουρανίων σωμάτων, όπου κάνοντας χρήση των απλών τριγωνομετρικών τύπων, υπολογίζουμε με πρακτικό τρόπο τα ζητούμενα μήκη και τις ζητούμενες αποστάσεις.

Η εκφώνηση του πρώτου προβλήματος, όπως δόθηκε στους μαθητές, φαίνεται παρακάτω:

Εκφώνηση

α) Στο σχήμα που ακολουθεί βλέπουμε έναν φάρο, που ο φανός του απέχει από την επιφάνεια της θάλασσας 15m. Μέσα από τη βάρκα κάποιος βλέπει το φως του φάρου με γωνία 30 μοιρών σε σχέση με την επιφάνεια της θάλασσας. Ποια είναι η απόσταση της βάρκας από την ακτή;

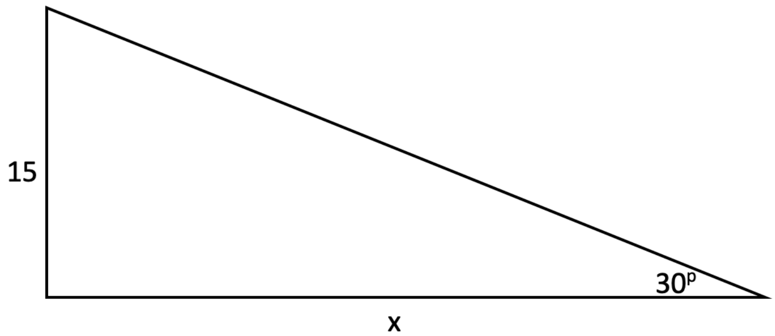


Εικόνα 25. Θέμα 3α του τεστ αξιολόγησης

Μία ενδεικτική λύση του παραπάνω προβλήματος δίνεται ακολούθως:

Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται από τον φάρο και τη βάρκα έχουμε:



Εικόνα 26. Ενδεικτική λύση του θέματος 3α του τεστ αξιολόγησης

$\varepsilon\varphi 30^{o} = \frac{15}{x} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{15}{x} \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot x = 3 \cdot 15 \Leftrightarrow x = \frac{3 \cdot 15}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot 15 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{3 \cdot 15 \cdot \sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = 15\sqrt{3}$ m

Άρα η απόσταση της βάρκας από την ακτή θα είναι $15\sqrt{3}$ μέτρα.

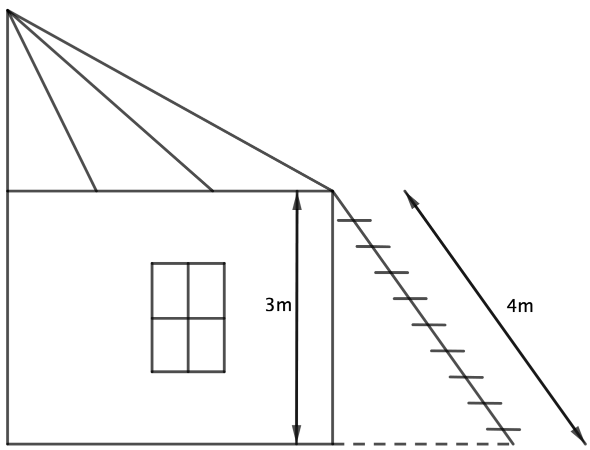
Αποτελέσματα

Στο συγκεκριμένο υποερώτημα, 19 μαθητές απάντησαν σωστά, με τους 17 από αυτούς να εφαρμόζουν ακριβώς την προτεινόμενη λύση, ενώ δύο υπολόγισαν την υποτείνουσα του τριγώνου με τη βοήθεια του ημιτόνου και κατόπιν εφάρμοσαν Πυθαγόρειο θεώρημα για να βρουν τη ζητούμενη απόσταση. Ένας μαθητής ("Μ10") θεώρησε ότι η ζητούμενη απόσταση είναι η υποτείνουσα και σταμάτησε στον υπολογισμό της, ένας μαθητής ("Μ19") αντικατέστησε την τιμή της εφαπτομένης των 30 μοιρών με $\frac{\sqrt{3}}{2}$, αντί με $\frac{\sqrt{3}}{3}$ που είναι η ορθή. Ένας μαθητής ("Μ20") μπέρδεψε τους τριγωνομετρικούς ορισμούς του ημιτόνου και της εφαπτομένης και σχημάτισε την εξίσωση $ημφ = \frac{15}{x}$, αντί του ορθού $εφφ = \frac{15}{x}$, ένας μαθητής ("Μ14") χρησιμοποίησε λάθος τον τύπο του ορισμού του ημιτόνου και σχημάτισε την εξίσωση $ημφ = \frac{υποτείνουσα}{x}$, αντί του ορθού $ημφ = \frac{15}{υποτείνουσα}$. Τέλος, ένας μαθητής ("Μ17") έγραψε: $συν30 = 0{,}86 + \frac{15}{x} = 0{,}86x + 15 = 15{,}86$ (να υπενθυμίσουμε ότι είχε δοθεί στους μαθητές ένας τριγωνομετρικός πίνακας με τα ημίτονα, τα συνημίτονα και τις εφαπτομένες όλων των γωνιών από 0 έως 90 μοίρες).

Το τελευταίο πρόβλημα του τεστ αξιολόγησης απαιτεί από τους μαθητές ένα λίγο διαφορετικό τρόπο σκέψης, που ξεφεύγει από αυτόν που έχουν συνηθίσει να δουλεύουν στις ασκήσεις τόσο του σχολικού όσο και εξωσχολικών εγχειριδίων και των φροντιστηρίων. Απαιτεί μεγαλύτερη κατανόηση και εμβάθυνση στο αντικείμενο. Η εκφώνηση του προβλήματος, όπως δόθηκε στους μαθητές, είναι η ακόλουθη:

Εκφώνηση

β) Για να στηρίξουμε μία σκάλα με ασφάλεια σε τοίχο, πρέπει αυτή να σχηματίζει με το έδαφος γωνία μεγαλύτερη από 40°. Αν ένας άνθρωπος στηρίξει μία σκάλα 4 μέτρων όπως στο σχήμα που φαίνεται παρακάτω, θα μπορέσει να την χρησιμοποιήσει με ασφάλεια ή όχι και γιατί;



Εικόνα 27. Θέμα 3β του τεστ αξιολόγησης

Στους μαθητές δόθηκε, στην τελευταία σελίδα του φύλλου εργασίας, ένας τριγωνομετρικός πίνακας ημιτόνων, συνημιτόνων και εφαπτομένων όλων των γωνιών από 0 έως 90 μοίρες. Μία ενδεικτική λύση παρουσιάζεται παρακάτω:

Λύση

Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η σκάλα με το έδαφος. Στο ορθογώνιο τρίγωνο που προκύπτει, θα έχουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Από τον τριγωνομετρικό πίνακα που δίνεται στην τελευταία σελίδα του φύλλου εργασίας, εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η γωνία θ είναι κατά προσέγγιση ίση με 49^o ($\eta\mu 49^o \approx 0{,}755$).

Συνεπώς η γωνία θ είναι μεγαλύτερη από 40 μοίρες, οπότε ο άνθρωπος θα μπορέσει να χρησιμοποιήσει με ασφάλεια τη σκάλα.

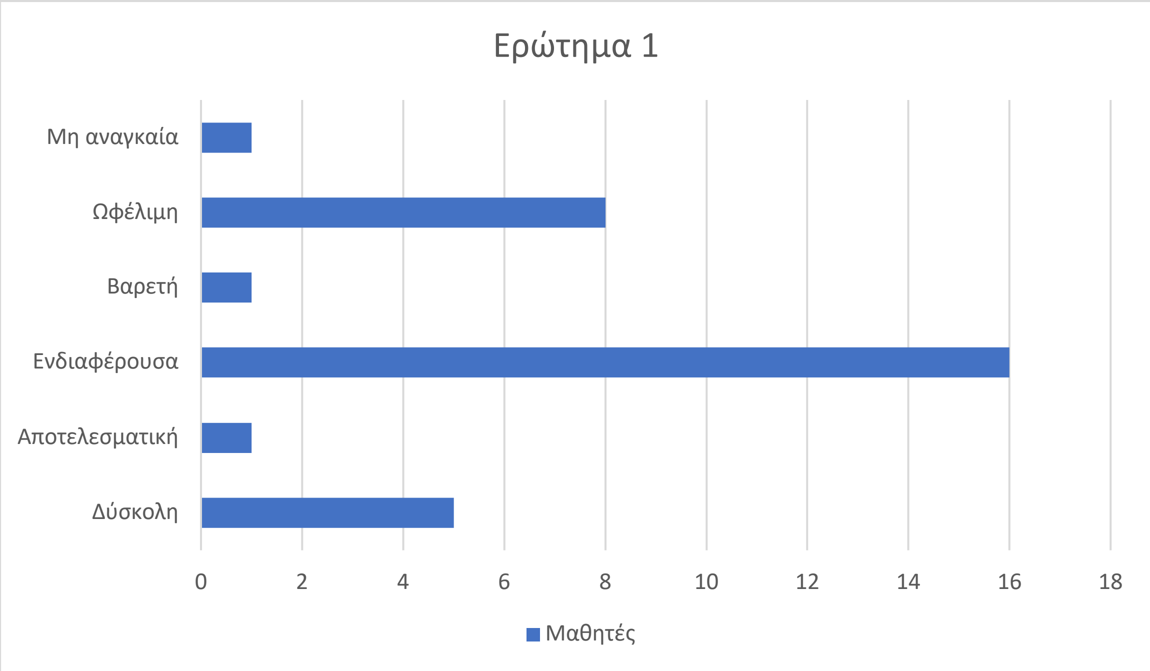
Αποτελέσματα

Στο συγκεκριμένο υποερώτημα, 19 μαθητές κατάφεραν να το βρουν και να απαντήσουν σωστά στο ερώτημα που τέθηκε, ακολουθώντας ακριβώς ή σε μεγάλο βαθμό την ενδεικτική λύση που προτείνεται. Ένας μαθητής ("Μ10") έγραψε «$\eta\mu\omega = \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 60^o$, επειδή είναι 60 μοίρες μπορεί κάποιος να ανέβει με ασφάλεια», ένας μαθητής ("Μ19") έγραψε «ο άνθρωπος δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει με ασφάλεια τη σκάλα, λόγω της γωνίας η οποία είναι 60 μοίρες που δεν είναι αρκετό για να τη χρησιμοποιήσει με ασφάλεια, γιατί $60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$, γιατί $\eta\mu\omega = \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 60^o$». Ένας μαθητής ("Μ20") έγραψε «$\eta\mu 40 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 0{,}643 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 0{,}643 \cdot 4 = 3 \Leftrightarrow 2{,}572 = 3$. Από τη στιγμή που είναι μικρότερο το ύψος σημαίνει ότι η κλίση της σκάλας θα είναι μικρότερη από 40 μοίρες». Τέλος, δύο μαθητές ("Μ14", "Μ17") εφάρμοσαν το Πυθαγόρειο θεώρημα χωρίς να προχωρήσουν ή να γράψουν κάτι άλλο.

Απαντήσεις ερωτηματολογίου

Μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης και του τεστ αξιολόγησης, ήρθε η ώρα της αποτίμησης της διαδικασίας από τους μαθητές. Τους δόθηκε λοιπόν, ένα ερωτηματολόγιο, αποτελούμενο από 9 ερωτήσεις, προκειμένου να εκφράσουν την άποψή τους για την διδακτική παρέμβαση, για το τι τους άρεσε και τι τους δυσκόλεψε από όλο το εγχείρημα, που και πόσο θεωρούν ότι τους βοήθησαν τα φύλλα εργασίας και τέλος να εκφράσουν τις απόψεις και τις προτάσεις τους για βελτίωση της διαδικασίας. Το ερωτηματολόγιο, όπως και τα φύλλα εργασίας μαζί με το τεστ αξιολόγησης, υπάρχει στο παράρτημα στο τέλος της εργασίας.

Στο πρώτο ερώτημα του ερωτηματολογίου: «Ποια είναι η άποψή σας για τη χρησιμοποίηση των ιστορικών στοιχείων στη διδασκαλία; Πιστεύετε ότι ήταν βαρετή, ενδιαφέρουσα, ωφέλιμη, αποτελεσματική, δύσκολη ως προς την κατανόηση, αδιάφορη; Απαντήστε με όσους χαρακτηρισμούς θέλετε (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και δικούς σας) και δικαιολογείστε τους».

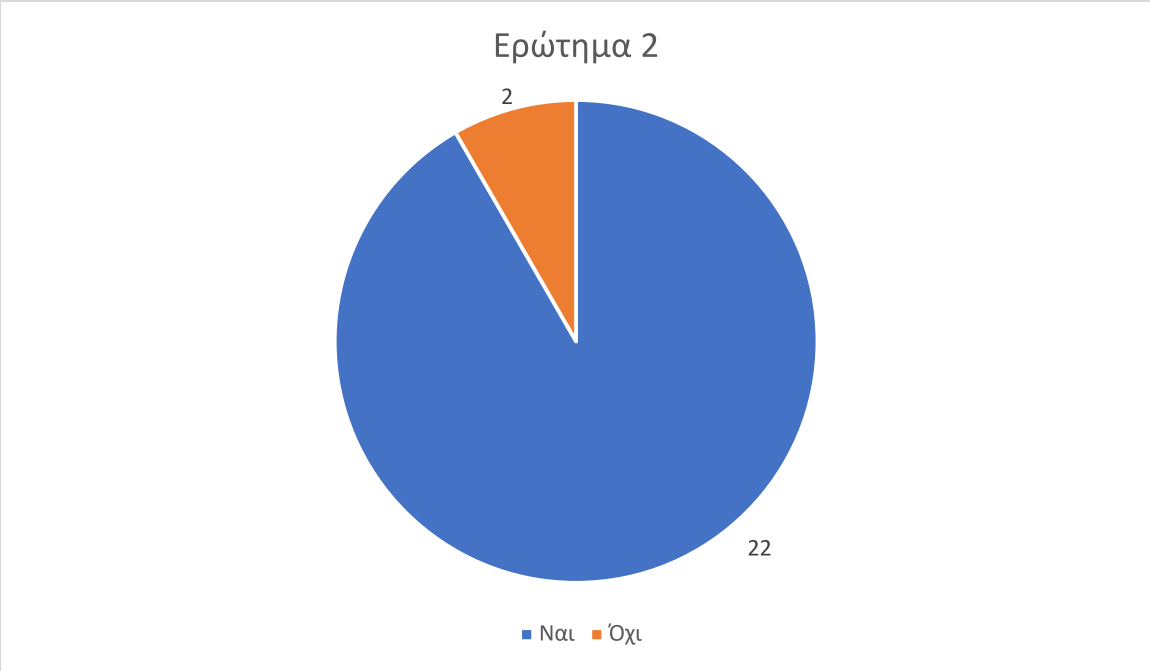


Εικόνα 28. Απαντήσεις στο ερώτημα 1 του ερωτηματολογίου

Κατά πλειοψηφία (16 μαθητές), απάντησαν ότι βρήκαν τη χρησιμοποίηση των ιστορικών στοιχείων στη διδασκαλία, «ενδιαφέρουσα». Από αυτούς, 8 μαθητές τη χαρακτήρισαν μόνο «ενδιαφέρουσα», 7 μαθητές τη χαρακτήρισαν «ενδιαφέρουσα και ωφέλιμη», 2 μαθητές ("Μ5", "Μ16") τη χαρακτήρισαν «ενδιαφέρουσα αλλά δύσκολη» και 1 μαθητής ("Μ21") τη χαρακτήρισε «ενδιαφέρουσα και αποτελεσματική». Ένας μαθητής ("Μ13") τη χαρακτήρισε «ωφέλιμη», 3 μαθητές ("Μ8", "Μ19", "Μ20") τη βρήκαν «δύσκολη», ένας μαθητής ("Μ14") τη θεώρησε «μη αναγκαία», ενώ τέλος ένας μαθητής ("Μ17") τη βρήκε «βαρετή».

Στην αιτιολόγηση των παραπάνω χαρακτηρισμών, κάποιες από τις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές είναι: «Η μέτρηση αποστάσεων ήταν τρομερά ενδιαφέρουσα και με έβαλε σε σκέψεις», «Ασχολήθηκα με όρεξη για την επίλυση των φύλλων εργασίας που δόθηκαν κάτι που δεν το συνηθίζω με τα μαθηματικά», «Ωφέλιμη, διότι κάποιοι μαθητές είναι πιθανόν να μην μπορούν να κατανοήσουν ορισμένα πράγματα με το κλασσικό τρόπο διδασκαλίας», «Παρακινεί το ενδιαφέρον για περαιτέρω ανάγνωση και εκμάθηση του αντικειμένου με το οποίο ασχολούμαστε».

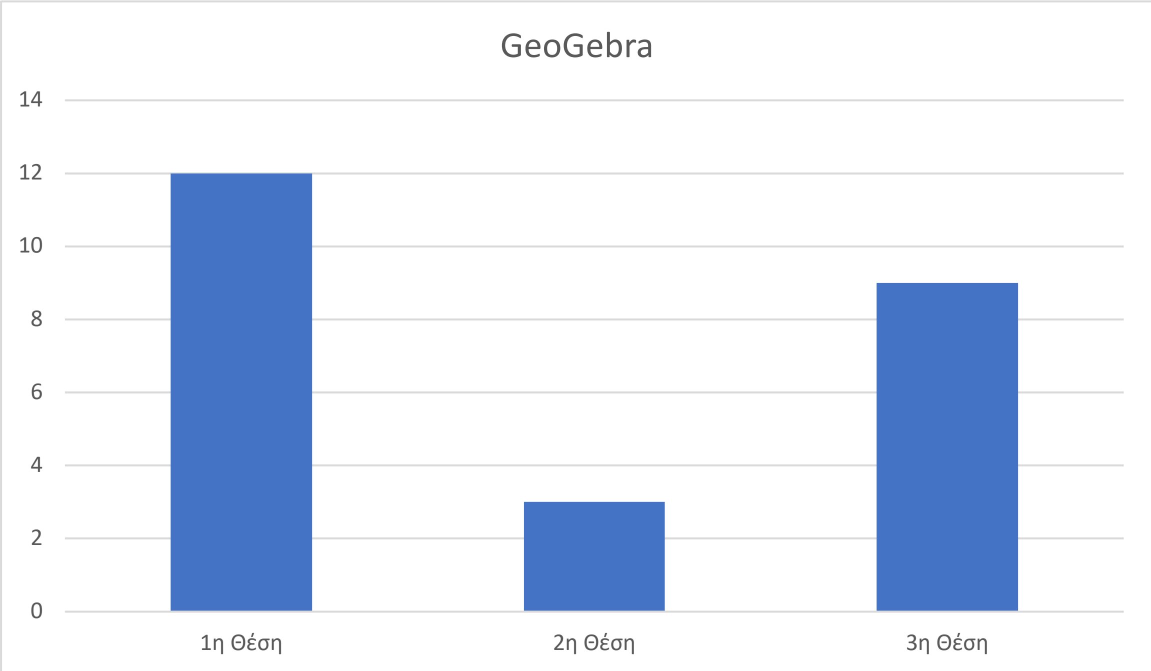
Το δεύτερο ερώτημα ήθελε από τους μαθητές να απαντήσουν στην ερώτηση: «Πιστεύετε ότι η χρήση του λογισμικού GeoGebra σας διευκόλυνε στην κατανόηση εννοιών και ιδιοτήτων; Τι θεωρείτε θετικό στη χρήση του και τι όχι;»

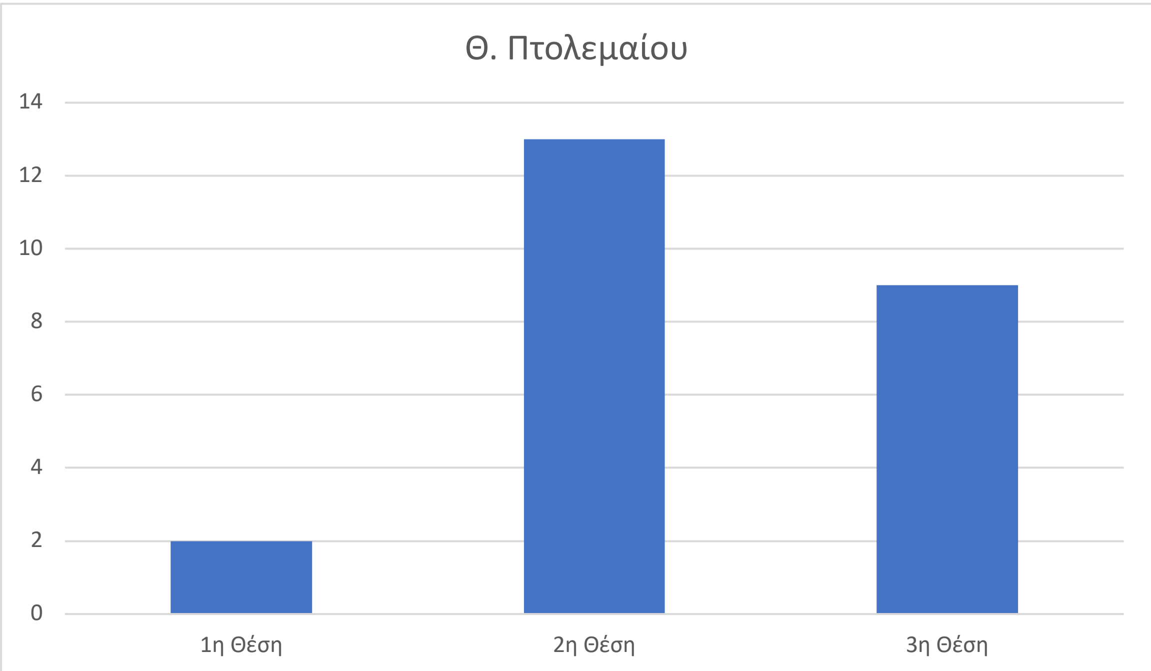


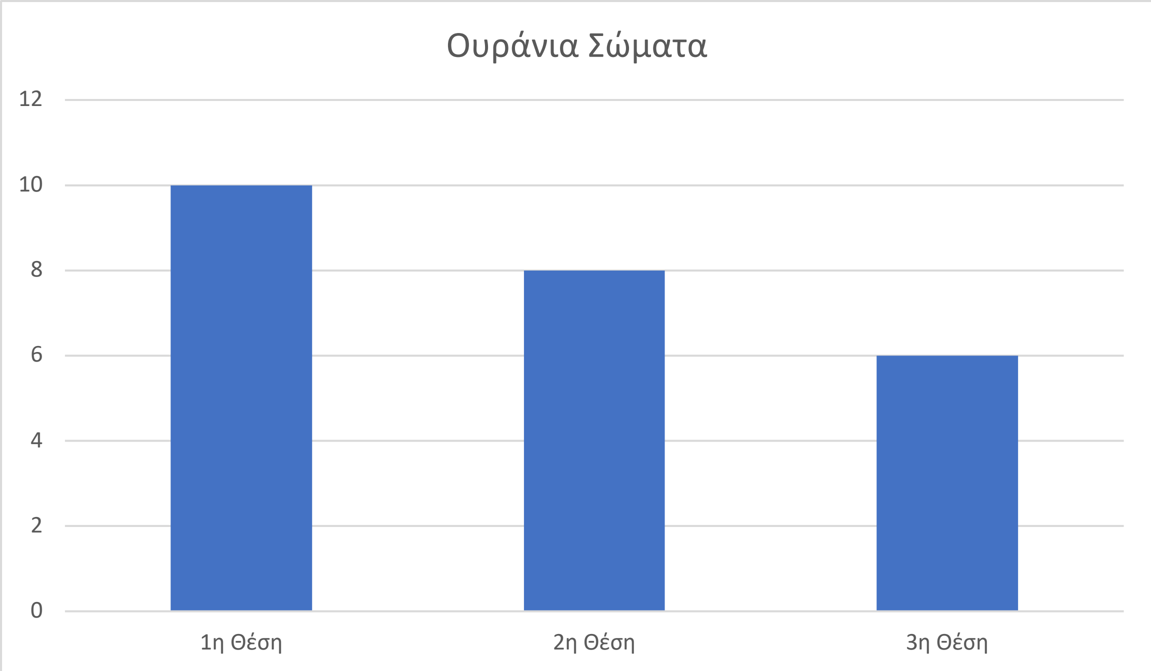
Εικόνα 29. Απαντήσεις στο ερώτημα 2 του ερωτηματολογίου

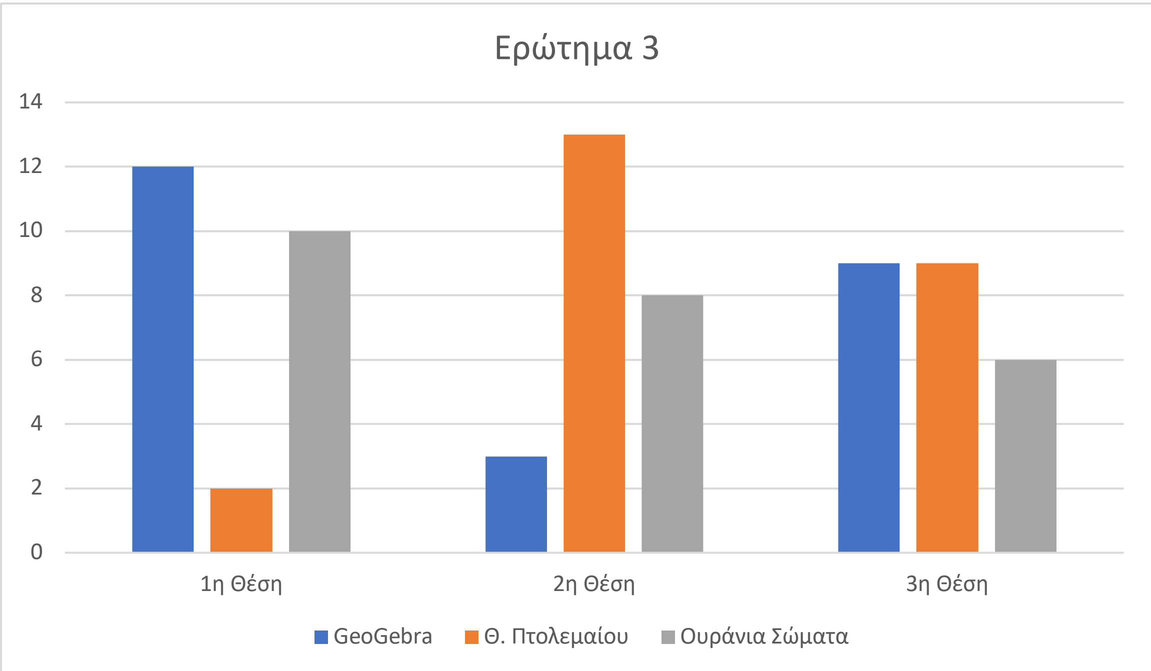
Εδώ οι μαθητές απάντησαν στην πλειοψηφία τους (22 Ναι, 2 Όχι), πως θεωρούν ότι η χρήση του λογισμικού GeoGebra τους διευκόλυνε στην κατανόηση των εννοιών και των ιδιοτήτων των τριγωνομετρικών αριθμών και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Είναι χαρακτηριστικό ότι στο δεύτερο σκέλος της ερώτησης που ζητάει να αναφέρουν τι θεωρούν θετικό στη χρήση του και τι όχι, κάποιες από τις απαντήσεις είναι: "Μ11": «Κατάφερα και κατάλαβα κάποιες έννοιες», "Μ7": «Καταλάβαμε μόνοι μας τι συμβαίνει με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς», "Μ4": «Ήταν περισσότερο σαν παιχνίδι και για το λόγο αυτό περνούσαμε πιο ευχάριστα την ώρα», "Μ15": «Βοήθησε πολύ, διότι με την οπτικοποίηση του τριγωνομετρικού κύκλου κατάφερα να καταλάβω τους τύπους καλύτερα και όχι να τους αποστηθίσω, αλλά να σκέφτομαι πως λειτουργεί το ημίτονο, το συνημίτονο, η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη σε κάθε τεταρτημόριο. Επίσης κατάλαβα καλύτερα την έννοια της περιόδου της συνάρτησης», "Μ12": «Ναι, γιατί είχε διαδραστικότητα και ήταν ευκολονόητο» ,"Μ13": «Θεωρώ θετικό στην χρήση του το γεγονός ότι έγινε με ένα στυλ παιχνιδιού, δηλαδή δινόταν η ερώτηση κι εμείς έπρεπε να βρούμε την απάντηση», "Μ5": «Το θετικό στην χρήση τους είναι ότι ξεφύγαμε από το στερεοτυπικό τρόπο μαθήματος, ο οποίος μερικές φορές είναι κουραστικός», "Μ23": «Μας έδωσε μια διαφορετική αντίληψη για τον τρόπο που υπολογίζονται τα ημίτονα, συνημίτονα, εφαπτομένες και συνεφαπτομένες», "Μ6": «Πιο αποτελεσματική η διαδραστική διδασκαλία, διότι μια εικόνα αποτυπώνεται καλύτερα στο μυαλό του μαθητή και είναι πιο ψυχαγωγικό. Τα περισσότερα βιβλία είναι κάπως παλιά και μουντά, ίσως και κακογραμμένα με αποτέλεσμα μαθητές να χάνουν το ενδιαφέρον τους κάτι που στο GeoGebra είναι λίγο απίθανο να συμβεί. Έτσι, αφού έχει κεντρίσει το ενδιαφέρον ενός μαθητή, είναι ζήτημα λίγου χρόνου να το κατανοήσει κιόλας», "Μ17": «Ήταν όλα βαρετά».

Το τρίτο ερώτημα «Βάλτε σε μία σειρά τα φύλλα εργασίας α, β και γ (όπου α το φύλλο εργασίας με χρήση αρχείων λογισμικού GeoGebra, β το φύλλο εργασίας με το θεώρημα του Πτολεμαίου και γ το φύλλο εργασίας με τους υπολογισμούς αποστάσεων και μεγεθών ουρανίων σωμάτων) ξεκινώντας με αυτό που σας άρεσε περισσότερο και καταλήγοντας σε αυτό που σας άρεσε λιγότερο» ζητούσε από τους μαθητές να αξιολογήσουν ποιο από τα 3 φύλλα εργασίας τους άρεσε περισσότερο και ποιο λιγότερο και συνέχιζε ζητώντας από τους μαθητές να δικαιολογήσουν την απάντησή τους.









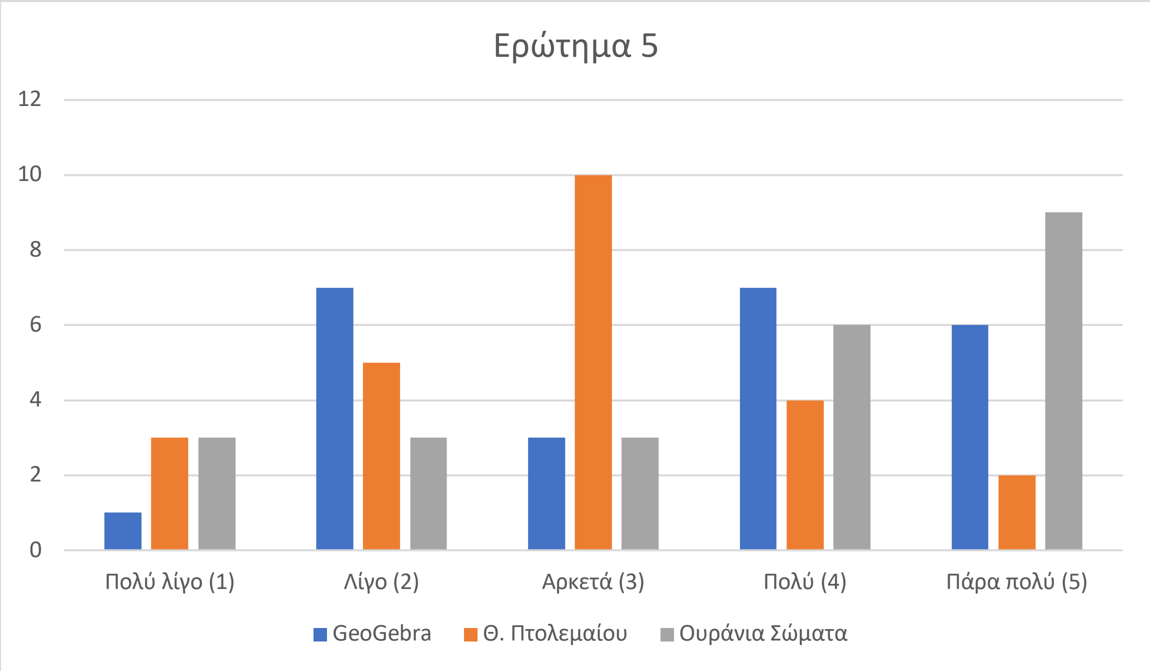
Εικόνα 30. Απαντήσεις στο ερώτημα 3 του ερωτηματολογίου

Στα παραπάνω διαγράμματα, παρατηρούμε ότι την πρώτη θέση στις προτιμήσεις των μαθητών, κέρδισε με 12 ψήφους το φύλλο εργασίας με το λογισμικό GeoGebra. Με 10 ψήφους την πρώτη θέση κατέλαβε το φύλλο εργασίας με τα Ουράνια Σώματα. Τέλος, μόνο δύο μαθητές κατέταξαν το φύλλο εργασίας με το Θεώρημα του Πτολεμαίου στην πρώτη θέση, ενώ το ίδιο φύλλο το κατέταξαν στη δεύτερη θέση 13 μαθητές. Στη δεύτερη θέση ακολουθούν με 8 ψήφους το φύλλο εργασίας με τα Ουράνια Σώματα και με 3 ψήφους τα φύλλα εργασίας με το λογισμικό GeoGebra. Την Τρίτη θέση κατέλαβαν με ισοψηφία (9 ψήφους) τα φύλλα εργασίας με το λογισμικό GeoGebra και με το θεώρημα του Πτολεμαίου και ακολουθεί με 6 ψήφους το φύλλο εργασίας με τα Ουράνια Σώματα.

Στο ερώτημα αυτό οι απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές ήταν: "Μ7": «Μου άρεσε που χρησιμοποιήσαμε υπολογιστές», "Μ3": «Με συναρπάζει η αστρονομία και η μελέτη του διαστήματος», "Μ11": «Κατάλαβα κάποια πράγματα με το GeoGebra», "Μ18": «Είχε περισσότερο ενδιαφέρον και διαδραστικότητα», "Μ5": «Μου άρεσε που έμαθα την ιστορία πως ξεκίνησε η τριγωνομετρία», "Μ23": «Μου άρεσαν όλα, αλλά πιο ευχάριστο ήταν με τους υπολογιστές», "Μ19": «Με τους υπολογιστές επειδή τα άλλα με δυσκόλεψαν λίγο».

Στο τέταρτο ερώτημα οι μαθητές πρέπει να σκεφτούν και να απαντήσουν στα ερωτήματα: «Κάτι που έμαθα είναι…», «Κάτι που με εξέπληξε είναι…» και «Κάτι που με δυσκόλεψε είναι…». Οι απαντήσεις εδώ πολλές και διαφορετικές.
Στο πρώτο υποερώτημα οι μαθητές απάντησαν ότι αυτό που έμαθαν είναι: "Μ18": «Πως κινούνται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί στον τριγωνομετρικό κύκλο», "Μ19": «Βελτίωσα την ικανότητα υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών», "Μ13": «Να λύνω προβλήματα», "Μ12": «Την λογική των ¨αρχαίων¨», "Μ3": «Να υπολογίζω αποστάσεις πλανητών», "Μ22": «Ποια είναι η χρησιμότητα της τριγωνομετρίας στη ζωή», "Μ16": «Να υπολογίζω τους τριγωνομετρικούς αριθμούς χωρίς να χρειάζεται να τους αποστηθίσω», "Μ11": «Να χρησιμοποιώ το GeoGebra», "Μ5": «Το θεώρημα του Πτολεμαίου» κ.α.
Στο δεύτερο υποερώτημα που ζητούσε από τους μαθητές να απαντήσουν τι είναι αυτό που τους εξέπληξε, απάντησαν: "Μ10": «Η ενασχόληση με την τριγωνομετρία από τόσο ¨παλιά¨», "Μ2": «Οι αποστάσεις ανάμεσα στους πλανήτες», "Μ16": «Ότι κατάφερα να λύσω μόνος ασκήσεις», "Μ15": «Ο τρόπος σκέψης των αρχαίων», "Μ10": «Ο τρόπος χρησιμοποίησης της Γεωμετρίας», "Μ11": «Η ιστορική προέλευση σύγχρονων μαθηματικών εννοιών», "Μ13": «Πως μετρούσαν όλα αυτά χωρίς τεχνολογία», "Μ12": «Η ¨πολυμηχανία¨ των αρχαίων Ελλήνων», "Μ14": «Ο τρόπος που βρίσκουμε αποστάσεις», "Μ5": «Η βοήθεια της Ιστορίας στη διδασκαλία», "Μ17": «Ότι κατάφερα να κατανοήσω κάποια πράγματα».
Στο τρίτο υποερώτημα οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν τι είναι αυτό που τους δυσκόλεψε. Οι απαντήσεις τους, είναι: "Μ11": «Η κατανόηση ορισμένων βημάτων», "Μ1": «Η χρησιμοποίηση τύπων προηγούμενων ετών», "Μ6": «Οι μεγάλοι αριθμοί και οι πράξεις», "Μ18": «Κάποιες ασκήσεις», "Μ21": «Τίποτα», "Μ23": «Το φύλλο εργασίας με τα ουράνια σώματα», "Μ7": «Εύρεση σχέσεων στα Θεωρήματα», "Μ15": «Το θεώρημα του Πτολεμαίου και η χρήση της Γεωμετρίας», "Μ19": «Η μεθοδολογία των πράξεων», "Μ13": «το GeoGebra» κ.α.

Το πέμπτο ερώτημα βάζει τους μαθητές να βαθμολογήσουν από το 1 μέχρι το 5 πόσο τους άρεσε το καθένα φύλλο εργασίας (1=το λιγότερο, 5=το περισσότερο) και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους.



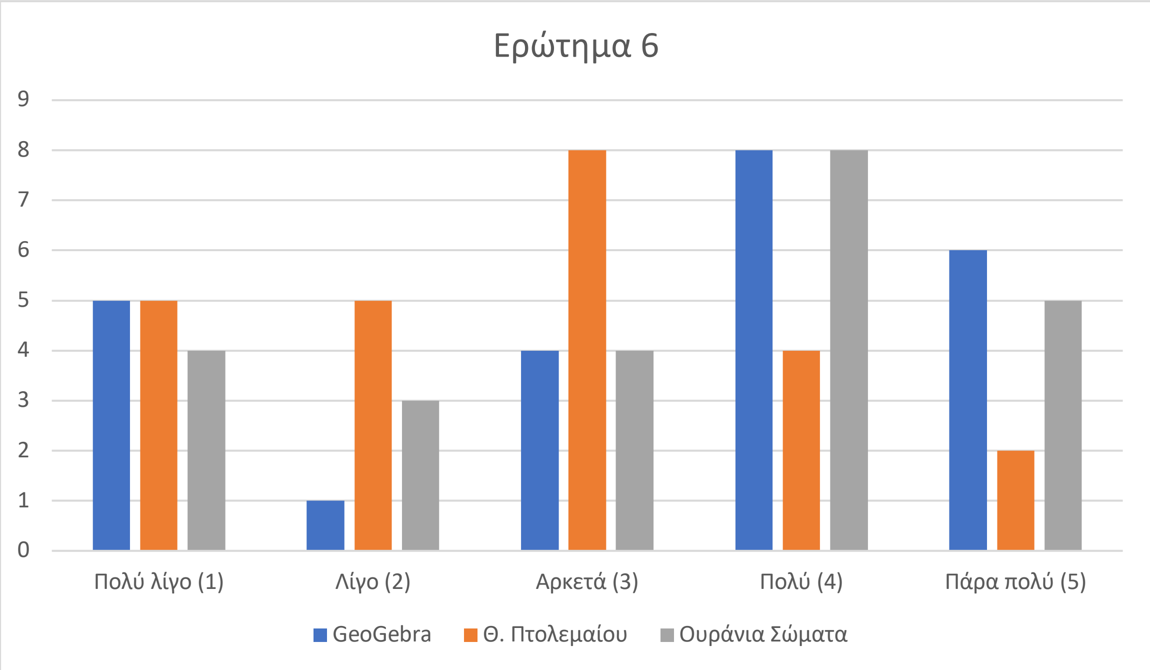
Εικόνα 31. Απαντήσεις στο ερώτημα 5 του ερωτηματολογίου

Στο παραπάνω διάγραμμα βλέπουμε τη βαθμολογία που έδωσαν οι μαθητές στα φύλλα εργασίας σχετικά με το πόσο τους άρεσαν. Τα φύλλα εργασίας με το λογισμικό GeoGebra άρεσαν πολύ λίγο σε 1 μαθητή, λίγο σε 7 μαθητές, αρκετά σε 3 μαθητές, πολύ σε 7 μαθητές και πάρα πολύ σε 6 μαθητές. Αντίστοιχα, το φύλλο εργασίας με το θεώρημα του Πτολεμαίου άρεσε πολύ λίγο σε 3 μαθητές, λίγο σε 5 μαθητές, αρκετά σε 10 μαθητές, πολύ σε 4 μαθητές και πάρα πολύ σε 3 μαθητές. Τέλος το φύλλο εργασίας με τα Ουράνια Σώματα άρεσε πολύ λίγο σε 3 μαθητές, λίγο πάλι σε 3 μαθητές, αρκετά σε άλλους 3 μαθητές, πολύ σε 7 μαθητές και πάρα πολύ σε 9 μαθητές.

Στην αιτιολόγηση για τον βαθμό που έδωσαν στο κάθε φύλλο εργασίας ανάλογα με το πόσο τους άρεσε, οι μαθητές έγραψαν τα εξής:
Για το φύλλο εργασίας με χρήση αρχείων λογισμικού GeoGebra ότι "Μ7": «Μάθαμε καινούργια πράγματα», "Μ19": «Είχε ενδιαφέρον», "Μ11": «Ωραίο και διδακτικό», "Μ23": «Οπτικοποίησε διάφορες έννοιες», "Μ13": «Δύσκολο και αγχωτικό», "Μ14": «Αδιάφορο», "Μ5": «Συνδεδεμένο με την τεχνολογία», "Μ4": «Διαφορετικό», "Μ18": «Ενθουσιάστηκα που έμαθα για τα ημίτονα (επιτέλους)», "Μ12": «Δυσνόητο το GeoGebra», "Μ6": «Ενδιαφέρον και ψυχαγωγικό», "Μ10": «Ήταν σαν παιχνίδι, δε μου άρεσε», "Μ2": «Βοηθητικό», "Μ3": «Διασκεδαστικό».
Για το φύλλο εργασίας με το θεώρημα του Πτολεμαίου έγραψαν ότι είναι "Μ13": «Πιο ενδιαφέρον από τα άλλα», "Μ12": «Ευχάριστο, αλλά δύσκολο», "Μ17": «Βαρετό», "Μ18": «Όχι πολύ εντυπωσιακό», "Μ22": «Ενδιαφέρον, αλλά με πολλές πράξεις», "Μ1": «Ιστορικές γνώσεις, αλλά λίγο δύσκολο», "Μ8": «Όχι όπως το περίμενα», "Μ3": «Μου άρεσε», "Μ7": «Είχε πολλούς γεωμετρικούς όρους».
Για το φύλλο εργασίας με τους υπολογισμούς αποστάσεων και μεγεθών ουρανίων σωμάτων οι μαθητές έγραψαν ότι "Μ5": «Ωραίος τρόπος εύρεσης αποστάσεων», "Μ3": «Πιο ενδιαφέρον από τα άλλα», "Μ23": «Δύσκολο», "Μ2": «Με συναρπάζει το σύμπαν και τα αστέρια», "Μ10": «Μου άρεσε σαν θέμα, εύκολες ασκήσεις», "Μ12": «Τέλεια», "Μ8": «Μου

άρεσε λίγο», "Μ13": «Ενδιαφέροντα ιστορικά γεγονότα», "Μ18": «Πάρα πολύ ενδιαφέρον», "Μ14": «Δυσνόητο».

Στο έκτο ερώτημα οι μαθητές καλούνται να βαθμολογήσουν από το 1 μέχρι το 5 πόσο τους βοήθησε το καθένα φύλλο εργασίας (1=το λιγότερο, 5=το περισσότερο) και να αιτιολογήσουν την απάντηση τους.



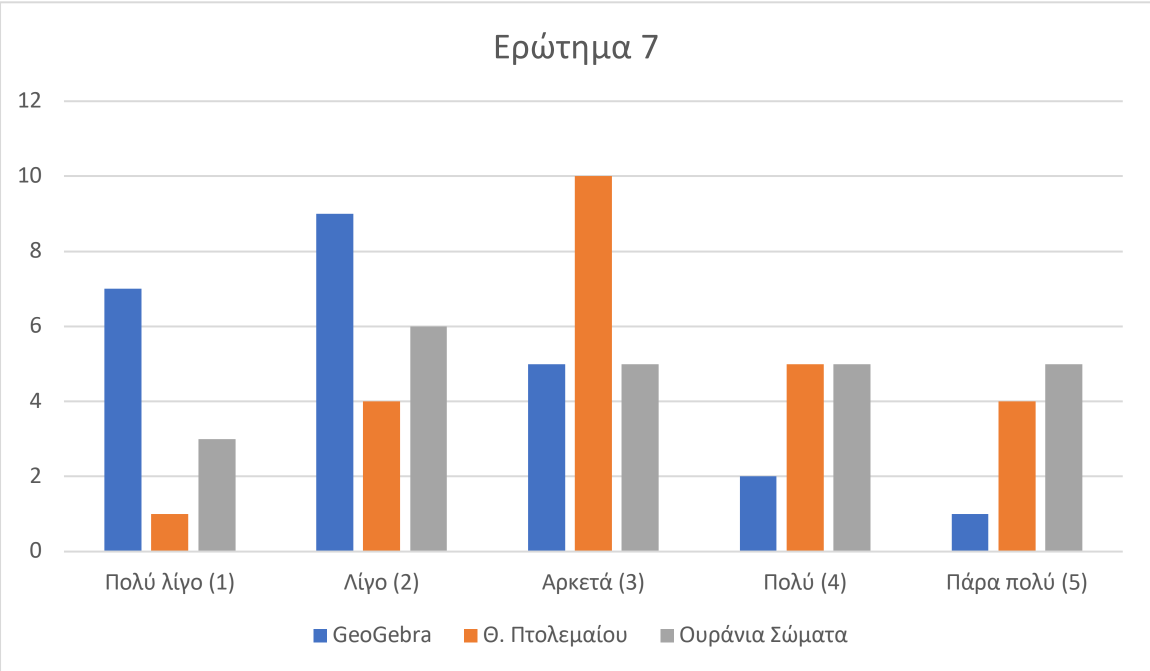
Εικόνα 32. Απαντήσεις στο ερώτημα 6 του ερωτηματολογίου

Στο παραπάνω διάγραμμα βλέπουμε τη βαθμολογία που έδωσαν οι μαθητές στα φύλλα εργασίας σχετικά με το πόσο θεωρούν ότι τους βοήθησαν. Τα φύλλα εργασίας με το λογισμικό GeoGebra θεωρούν ότι τους βοήθησε πολύ λίγο 5 μαθητές, λίγο 1 μαθητής, αρκετά 4 μαθητές, πολύ 8 μαθητές και πάρα πολύ 6 μαθητές. Αντίστοιχα, το φύλλο εργασίας με το θεώρημα του Πτολεμαίου θεωρούν ότι τους βοήθησε πολύ λίγο 5 μαθητές, λίγο άλλοι 5 μαθητές, αρκετά 8 μαθητές, πολύ 4 μαθητές και πάρα πολύ 3 μαθητές. Τέλος το φύλλο εργασίας με τα Ουράνια Σώματα θεωρούν ότι τους βοήθησε πολύ λίγο 4 μαθητές, λίγο 3 μαθητές, αρκετά 4 μαθητές, πολύ 8 μαθητές και πάρα πολύ 5 μαθητές.

Στην αιτιολόγηση για τον βαθμό που έδωσαν στο κάθε φύλλο εργασίας ανάλογα με το πόσο τους βοήθησε, οι μαθητές έγραψαν τα εξής:
Για το φύλλο εργασίας με χρήση αρχείων λογισμικού GeoGebra, έγραψαν ότι "Μ6": «Ήταν πιο εύκολο», "Μ4": «Αρκετά ενδιαφέρον και χρήσιμο», "Μ16": «Κατανόησα τύπους και έννοιες», "Μ19": «Πιο αποτελεσματικό επειδή είναι διαδραστικό», "Μ11": «Έδωσε εικόνα στον τριγωνομετρικό κύκλο», "Μ22": «Χρησιμεύουν άμεσα στην Άλγεβρα», "Μ18": «Απέκτησα πιο μεγάλη άνεση στις ασκήσεις», "Μ23": «Η αναπαράσταση και η χρήση οπτικών μέσων ενσωμάτωσε ευκολότερα την ιδέα της τριγωνομετρίας στο μυαλό μου», "Μ14": «Δυσνόητο», "Μ7": «Είχε σχέση με την τεχνολογία», "Μ3": «Βοηθητικό».

Για το φύλλο εργασίας με το θεώρημα του Πτολεμαίου οι μαθητές έγραψαν ότι "Μ12": «Ήταν πιο κατανοητό και εύκολο», "Μ1": «Εφαρμογή στην καθημερινότητα», "Μ17": «Δυσνόητο και δύσκολο», "Μ19": «Λίγο ενδιαφέρον», "Μ23": «Ήταν εφαρμογή στους τύπους», "Μ13": «Πολύ βοηθητικό, χρήσιμο», "Μ11": «Βοήθησε να καταλάβω ένα κομμάτι», "Μ10": «Ενδιαφέρον, αλλά αμφίβολη η χρησιμότητά του», "Μ7": «Δε με βοήθησε καθόλου»,"Μ8": «Ενδιαφέρον, αλλά γνωστά», "Μ2": «Κατανόηση τύπων».
Για το φύλλο εργασίας με τους υπολογισμούς αποστάσεων και μεγεθών ουρανίων σωμάτων οι μαθητές έγραψαν ότι "Μ3": «Μάθαμε καινούργια πράγματα για τους πλανήτες», "Μ2": «Καλύτερη κατανόηση τύπων», "Μ6": «Πολύ ενδιαφέρον, βοήθησε», "Μ14": «Άχρηστες πληροφορίες», "Μ21": «Μου άρεσε πολύ, αλλά δεν ξέρω αν μου χρειαστεί», "Μ4": «Εφαρμογή στους τύπους», "Μ1": «Είδα την τριγωνομετρία με άλλο μάτι», "Μ12": «Το πιο βοηθητικό», "Μ17": «Μπερδεύτηκα».

Οι μαθητές στο έβδομο ερώτημα έπρεπε να αποφασίσουν και να βαθμολογήσουν από το 1 μέχρι το 5 πόσο τους δυσκόλεψε το καθένα φύλλο εργασίας (1=το λιγότερο, 5=το περισσότερο) και να αιτιολογήσουν την απάντηση τους.

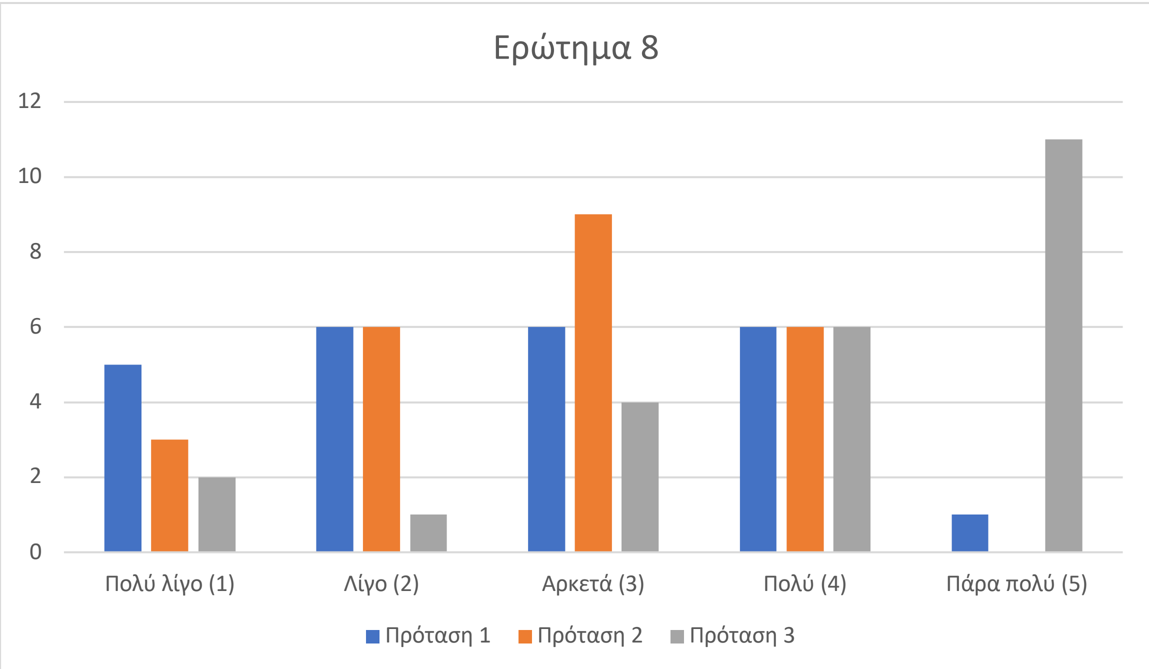


Εικόνα 33. Απαντήσεις στο ερώτημα 7 του ερωτηματολογίου

Στο παραπάνω διάγραμμα βλέπουμε τη βαθμολογία που έδωσαν οι μαθητές στα φύλλα εργασίας σχετικά με το πόσο θεωρούν ότι τους δυσκόλεψαν. Τα φύλλα εργασίας με το λογισμικό GeoGebra θεωρούν ότι τους δυσκόλεψε πολύ λίγο 7 μαθητές, λίγο 9 μαθητές, αρκετά 5 μαθητές, πολύ 2 μαθητές και πάρα πολύ 1 μαθητή. Αντίστοιχα, το φύλλο εργασίας με το θεώρημα του Πτολεμαίου θεωρούν ότι τους δυσκόλεψε πολύ λίγο 1 μαθητής, λίγο 4 μαθητές, αρκετά 10 μαθητές, πολύ 5 μαθητές και πάρα πολύ 4 μαθητές. Τέλος το φύλλο εργασίας με τα Ουράνια Σώματα θεωρούν ότι τους δυσκόλεψε πολύ λίγο 3 μαθητές, λίγο 6 μαθητές, αρκετά 5 μαθητές, πολύ 5 μαθητές και πάρα πολύ 5 μαθητές.

Στην αιτιολόγηση για τον βαθμό που έδωσαν στο κάθε φύλλο εργασίας ανάλογα με το πόσο τους δυσκόλεψε, οι μαθητές έγραψαν τα εξής:
Για το φύλλο εργασίας με χρήση αρχείων λογισμικού GeoGebra, οι μαθητές έγραψαν ότι "Μ5": «Έπρεπε να καταλάβω πως δουλεύει», "Μ3": «Είχα αρκετές γνώσεις», "Μ21": «Όχι πολύ απαιτητικό», "Μ19": «Challenging», "Μ24": «Καθόλου», "Μ12": «Όχι βοηθητικό στο να μάθεις, αλλά να εξασκηθείς και να εξελίξεις τις γνώσεις σου», "Μ20": «Δύσκολο στη χρήση της εφαρμογής», "Μ10": «Δεν είχα ξαναχρησιμοποιήσει GeoGebra», "Μ7": «Εύκολο, ο υπολογιστής έδινε τις απαντήσεις».
Για το φύλλο εργασίας με το θεώρημα του Πτολεμαίου, οι μαθητές απάντησαν ότι "Μ4": «Είχε αρκετή θεωρία», "Μ6": «Είχε να κάνει με ξεχωριστούς τρόπους», "Μ19": «Δεν ήξερα πολλά πράγματα», "Μ13": «Όχι πολύ δύσκολο», "Μ20": «Δεν θυμόμουν αναλογίες πλευρών», "Μ15": «Δύσκολες πράξεις», "Μ9": «Δυσνόητα αυτά που ζητούσε», "Μ8": «Ουδέτερο σε κάθε τομέα», "Μ10": «Δεν τα πάω καλά με τη Γεωμετρία», "Μ14": «Δύσκολο στην αρχή μέχρι να καταλάβεις τι γίνεται», "Μ7": «Με μπέρδεψε αρκετά».
Για το φύλλο εργασίας με τους υπολογισμούς αποστάσεων και μεγεθών ουρανίων σωμάτων, οι μαθητές έγραψαν ότι "Μ13": «Ήταν καινούργια πράγματα», "Μ5": «Πιο σύνθετα ερωτήματα», "Μ16": «Είχε αρκετή θεωρία», "Μ4": «Πιο ωφέλιμη καθοδήγηση», "Μ3": «Λίγο δύσκολο, αλλά πολύ ωραίο», "Μ21": «Καθόλου δύσκολο (εκτός από τις πράξεις)», "Μ20": «Δεν κατάφερα να τελειώσω», "Μ14": «Δύσκολο και αδιάφορο θέμα», "Μ23": «Μεγάλοι δεκαδικοί αριθμοί και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί δεν ήταν ακριβείς», "Μ17": «Δύσκολο».

Στο όγδοο ερώτημα οι μαθητές έπρεπε να βαθμολογήσουν από το 1 μέχρι το 5 πόσο συμφωνούν με καθεμία από τις ακόλουθες προτάσεις (1=το λιγότερο, 5=το περισσότερο):
Πρόταση 1: «Άλλαξε την άποψή μου για την Τριγωνομετρία»
Πρόταση 2: «Με βοήθησαν να λύνω ασκήσεις της σχολικής ύλης»
Πρόταση 3: «Έμαθα πράγματα για την Ιστορία των Μαθηματικών που δεν ήξερα».



Εικόνα 34. Απαντήσεις στο ερώτημα 8 του ερωτηματολογίου

Η βαθμολογία που έδωσαν οι μαθητές στο πόσο θεωρούν ότι μετά από τη διδακτική παρέμβαση και εξαιτίας της, ισχύει η Πρόταση 1: «Άλλαξε την άποψή μου για την Τριγωνομετρία», είναι: 5 μαθητές είπαν πολύ λίγο, 6 είπαν λίγο, άλλοι 6 είπαν αρκετά, ακόμη 6 είπαν πολύ και 1 είπε πάρα πολύ. Για την Πρόταση 2: «Με βοήθησαν να λύνω ασκήσεις της σχολικής ύλης», η βαθμολογία που έδωσαν οι μαθητές σχετικά με το πόσο ισχύει, είναι: 3 μαθητές απάντησαν πολύ λίγο, 6 απάντησαν λίγο, 9 είπαν αρκετά, 6 είπαν πολύ και κανένας δεν απάντησε πάρα πολύ. Τέλος, για το πόσο θεωρούν οι μαθητές ότι ισχύει η Πρόταση 3: «Έμαθα πράγματα για την Ιστορία των Μαθηματικών που δεν ήξερα», η βαθμολογία που έδωσαν οι μαθητές είναι: 2 απάντησαν πολύ λίγο, 1 είπε λίγο, 4 απάντησαν αρκετά, 6 απάντησαν πολύ και 11 πάρα πολύ.

Τέλος, το ένατο ερώτημα καλεί τους μαθητές «Να προτείνετε κάτι που θα αλλάζατε σε ένα ή σε περισσότερα φύλλα εργασίας, έτσι ώστε να γίνουν πιο αποτελεσματικά ή πιο ευχάριστα ή πιο ενδιαφέροντα».
Οι απαντήσεις σε αυτό το ερώτημα έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. «Στο πρώτο φύλλο εργασίας δε θα άλλαζα τίποτα, επειδή ήταν πολύ εύκολο, πολύ βοηθητικό και ενδιαφέρον. Στο δεύτερο φύλλο εργασίας θα έβγαζα κάποιες ιστορικές πληροφορίες και λίγη γεωμετρία. Το τρίτο φύλλο εργασίας είχε πολύ ενδιαφέρον, έχει χρήση τριγωνομετρικών αριθμών», "Μ24": «Πιστεύω δεν θα άλλαζα κάτι», "Μ3": «Δεν θα άλλαζα τίποτα, όλα είναι όπως πρέπει για να αντιληφθούμε αυτά που χρειάζεται να μάθουμε», "Μ23": «Κατά τη γνώμη μου θα μπορούσαν στο GeoGebra να προστεθούν κάποιες ιστορικές πληροφορίες», "Μ12": «Δεν έχω να προτείνω κάτι, το μόνο που θα άλλαζα είναι το GeoGebra θα το καταργούσα εντελώς», "Μ4": «Το μόνο που θα άλλαζα θα ήταν στο φύλλο εργασίας Β η διατύπωση και αν υπήρχε δυνατότητα να γίνονταν όλα διαδραστικά», "Μ15": «Πιο πολλά σχήματα στο δεύτερο φύλλο εργασίας», "Μ7": «Να υπάρχει η χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή σε όλα τα φύλλα εργασίας, για να γίνεται πιο ευχάριστο και κατανοητό το μάθημα», "Μ22": «Στο πρώτο φύλλο εργασίας δεν έχω να προτείνω κάτι, Ήταν αρκετά ενδιαφέρον. Στο δεύτερο φύλλο εργασίας θα πρότεινα να γίνει σε ομάδες των 4 - 5 ατόμων. Το τρίτο φύλλο εργασίας ήταν πολύ ενδιαφέρον», "Μ19": «Δε με πείραξε κάτι στα φύλλα εργασίας, το μόνο που θα άλλαζα θα ήταν να μην υπάρχουν τόσες πληροφορίες για την ιστορία των μαθηματικών γιατί εμένα με κούρασαν», "Μ8": «Το μόνο που θα άλλαζα θα ήταν ότι θα έβαζα λιγότερα ερωτήματα σε κάποια φύλλα εργασίας», "Μ9": «Θεωρώ πως το μόνο που πρέπει να αλλάξει είναι στο πρώτο φύλλο εργασίας να υπάρχει κάποιου είδους άσκηση που να χρειάζεται και το GeoGebra και σκέψη από τον ίδιο τον μαθητή», "Μ1": «Στο τρίτο φύλλο εργασίας μεγαλύτερη ακρίβεια αριθμών», "Μ20": «Στο πρώτο φύλλο εργασίας θα ήθελα να είναι πιο κατανοητά όλα και όχι να καθόμαστε στον ηλεκτρονικό υπολογιστή τόση ώρα προσπαθώντας να βρούμε ένα νούμερο. Στο δεύτερο φύλλο εργασίας πιστεύω πως θα έπρεπε να είναι λίγο πιο ελκυστικές οι ερωτήσεις. Στο τρίτο δεν θα άλλαζα τίποτα», "Μ5": «Περισσότερες πληροφορίες και όχι τόσα λόγια που δεν χρειάζονται στην άσκηση. Ο μαθητής αποσπάται από τα υπόλοιπα και δεν παρατηρεί τις όντως χρήσιμες πληροφορίες», "Μ6": «Σε γενικά πλαίσια πιστεύω πως το να εναλλάσσονται οι τρόποι εκμάθησης βοηθάει στο να μην είναι βαρετά και να είναι πιο ευχάριστα. Η ιστορική αναδρομή βοηθάει στο να τα θυμόμαστε πιο εύκολα ενώ οι ασκήσεις βήμα βήμα μέχρι να καταλήξει κάπου ήταν επίσης ωφέλιμες. Πιστεύω σίγουρα πως παραπάνω χρόνος είναι απαραίτητος ώστε να μην διακόπτεται και η ροή του μαθήματος», "Μ18": «Το μόνο που θα άλλαζα στα φύλλα εργασίας θα ήταν στο δεύτερο το θεώρημα του Πτολεμαίου, θα σας πρότεινα να γίνεται μια εισαγωγή στην τάξη για αυτό, ώστε να είναι πιο εύκολο για μας να ακολουθούμε», "Μ2":

«Δεν υπήρχαν ανταλλαγές ιδεών μαθητών με καθηγητή ώστε τα φύλλα εργασίας να είναι πιο ενδιαφέροντα, αφού θα είναι κάτι που θα θέλουν να μάθουν μαθητές. Να υπάρχουν παρουσιάσεις σχετικών θεμάτων μέσω προτζέκτορα. Οι εργασίες να γίνονται σε ομάδες», "Μ13": «Ήταν όλα τέλεια, δεν θα άλλαζα τίποτα», "Μ10": «Ίσως να τοποθετούσα περισσότερες οδηγίες στο πρώτο φύλλο εργασίας».

Συμπεράσματα - Συζήτηση

Η τριγωνομετρία είναι μία ενότητα πολύ χρήσιμη, αλλά ταυτόχρονα και πολύ απαιτητική και δύσκολη στην κατανόησή της. Οι μαθητές συχνά δυσανασχετούν και αναρωτώνται για τη χρησιμότητα όλων αυτών που μαθαίνουν στα πλαίσια του μαθήματος. Κάθε εγχείρημα που έχει σκοπό να κάνει το μάθημα πιο ευχάριστο και πιο αποτελεσματικό είναι ευπρόσδεκτο από τους μαθητές, ακόμα και από τους πιο «αδιάφορους».

Η έρευνα έδειξε ότι οι μαθητές κατάφεραν να κατανοήσουν σε μεγάλο βαθμό τις τριγωνομετρικές έννοιες και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Μπόρεσαν να καταλάβουν πως λειτουργεί ο τριγωνομετρικός κύκλος και πως τον χρησιμοποιούμε στην πράξη. Επίσης κατάλαβαν πως μεταβάλλονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί, όταν μεταβάλλεται η γωνία και πως αυτό συνδέεται με τη μονοτονία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Κατάφεραν επίσης να κατανοήσουν πως μεταβάλλονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, όταν υπάρχουν μεταβολές στους συντελεστές των τύπων τους και όλα τα παραπάνω με έναν τρόπο διαδραστικό και πρωτότυπο που τους έκανε εντύπωση και αποτυπώθηκε γερά στη μνήμη τους.

Από την άλλη μεριά, η χρήση των ιστορικών στοιχείων, παρακίνησε τους μαθητές να ασχοληθούν, με ιδιαίτερο ενδιαφέρον και ζήλο, με τα φύλλα εργασίας που περιείχαν ιστορικά αρχεία και να καταλήξουν μόνοι τους στην απόδειξη ενός τύπου που συχνά προκαλεί παρανοήσεις και χρησιμοποιείται λανθασμένα από μία μερίδα μαθητών. Το τεστ αξιολόγησης έδειξε ότι κανένας μαθητής δεν έκανε το συγκεκριμένο λάθος (σημείωση: ημ(α+β)=ημα+ημβ), επειδή ήταν ένας τύπος που είχαν ασχοληθεί αρκετά μαζί του και τον είχαν αποδείξει μόνοι τους μέσα από μία σειρά ασκήσεων. Ταυτόχρονα, η έρευνα έδειξε ότι οι μαθητές εξοικειώθηκαν σε μεγάλο βαθμό με την επίλυση προβλημάτων, κάνοντας χρήση της τριγωνομετρίας, που ασχολήθηκαν όλοι ανεξαιρέτως με τα προβλήματα που περιείχε το τεστ αξιολόγησης, πράγμα που δεν συμβαίνει με τα προβλήματα στα μαθηματικά γενικότερα -και ειδικότερα στην τριγωνομετρία- σε κανένα τμήμα από την μέχρι τώρα εμπειρία μου.

Το ερωτηματολόγιο έδειξε ότι οι μαθητές βρήκαν, κατά πλειοψηφία, ενδιαφέρουσα, αποτελεσματική και ωφέλιμη τη διδακτική παρέμβαση στο σύνολο της, αν και όχι απαλλαγμένη από επιμέρους δυσκολίες. Υπήρχαν διαφοροποιήσεις ως προς τις προτιμήσεις τους, αλλά κι αυτό είναι κάτι θεμιτό μιας και δεν συγκέντρωσε μία ενότητα όλες τις θετικές ή όλες τις αρνητικές ψήφους. Οι μαθητές μπήκαν σε μία διαδικασία να αξιολογήσουν τις γνώσεις που απέκτησαν, τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν και να εκφράσουν την άποψή τους για το που θεωρούν ότι βοηθήθηκαν και τι τελικά αποκόμισαν από την όλη διαδικασία.

Τέλος, η διαδικασία της αποτίμησης και οι προτάσεις για βελτίωση της διδακτικής παρέμβασης ή μέρους αυτής, έδωσε στους μαθητές αλλά και στον διδάσκοντα-ερευνητή τη δυνατότητα αναστοχασμού μέσα από την κριτική σκέψη.

Εν κατακλείδι, η πράξη έδειξε ότι στους μαθητές άρεσε αυτή η αλλαγή στον τρόπο διδασκαλίας και περίμεναν κάθε φορά με ανυπομονησία το μάθημα και τις καινούργιες προκλήσεις που καλούνταν να αντιμετωπίσουν. Γενικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι μαθητές διψούν για εναλλακτικές μεθόδους διδασκαλίας και ότι αντιμετώπισαν το όλο εγχείρημα με σοβαρότητα, συνέπεια και ζήλο.

Βιβλιογραφία

Ιστότοποι

http://www.pi-schools.gr/lessons/mathematics/lykeio/algevra_a/kef_7.pdf
https://en.wikipedia.org/wiki/John_Casey_(mathematician)
http://www.geogebra.gr

Ελληνικές βιβλιογραφικές αναφορές

Βέικου Χρ., Σιγανού Αν., & Παπασταμούλη Ελ., (2007). "Σύντομη Επισκόπηση του παιδαγωγικού πλαισίου του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος"

Βοσνιάδου Σ., (2004). Εισαγωγή στην Ψυχολογία, Αθήνα

Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών, στο ΦΕΚ 303Β/ 13-03-2003

Δρακάκη Ν., (2015). Η κατανόηση των μετασχηματισμών τριγωνομετρικών συναρτήσεων από μαθητές της Β΄ Λυκείου, Τμήμα Μεθοδολογίας, Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα

Ζωιτσάκος, Σ. (2019). Μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των Ανώτερων Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Doctoral dissertation, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ). Σχολή Θετικών Επιστημών. Τμήμα Μαθηματικών).

Κακανά, Δ. Μ. (2008). Η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία και μάθηση. Θεωρητικές προσεγγίσεις και εκπαιδευτικές προοπτικές.

Λάττας Κ., (2010). Ιστορική εξέλιξη της τριγωνομετρίας, μελέτη τριγωνομετρικών συναρτήσεων, [χ.ο.], Αθήνα

Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (Γυμνάσιο) - Οδηγός για τον εκπαιδευτικό "Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων", Νέο Σχολείο (Σχολείο 21ου αιώνα) - Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Οριζόντια Πράξη, Αθήνα, 2011

Μηλιός Γ.Ι., (2011).Μετάβαση από το ημω, $0^0 \leq ω \leq 90^0$ στο ημx, x = R μέσω της χρήσης του λογισμικού GeoGebra, Τμήμα Μαθηματικών, Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα

Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των Μαθηματικών του Γενικού Λυκείου κατά το σχολικό έτος 2007-2008, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, εκδόσεις ΟΕΔΒ, Αθήνα, 2007

Πόταρη, Δ. (2016). Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (Γυμνάσιο): Οδηγός για τον εκπαιδευτικό: «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων».

Ρασούλη Γ., (2012).Το θεώρημα του Πτολεμαίου (Μια σύντομη ανασκόπηση από την αρχαιότητα ως τις μέρες μας), Σχολή Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ηράκλειο

Σκούρα Ι., (2003). Απαρχές και ανάπτυξη της ελληνικής τριγωνομετρίας, [χ.ο.], Αθήνα

Σπαθάρης Δ., (2011). Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών Α΄ Τάξης Γενικού Λυκείου, Υ.Α. 59614/Γ2, ΦΕΚ 1168/τεύχος Β΄/ 8 Ιουνίου 2011

Στεφανίδης Ι., (2010). Οι κοινωνικές και μαθηματικές νόρμες που αναπτύσσονται στις σχολικές τάξεις του δημοτικού και του γυμνασίου και ο ρόλος τους στη συνεργατική μάθηση των μαθηματικών, [χ.ο.], Αθήνα

Χαιρέτη, Μ. (2009). Τα λάθη και οι παρανοήσεις των μαθητών στα μαθηματικά και η διδακτική αξιοποίησή τους.

Ξένες βιβλιογραφικές αναφορές

Abramovich, S. (2013). Computers in mathematics education: An introduction. Computers in the Schools, 30(1-2), 4-11.

Berggren, J. L. (2007). Mathematics in medieval Islam. The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook, 515-675.

Boyer C.B., (1991). "Greek Trigonometry and Mensuration", in A History of Mathematics, John Wiley and Sons, London

Chambers, P., & Timlin, R. (2013). Teaching mathematics in the secondary school. Sage.

Crossfield D., Shepherd Ch., Stein R., & Williams Gr., (2004). Trigonometry, The Mathematical Association of America

Dauben, J. W., & Scriba, C. J. (Eds.). (2002). Writing the history of mathematics: its historical development (Vol. 27). Springer Science & Business Media.

Douglas, A. V. (1973). RASC Papers-Al-Biruni, Persian Scholar, 973-1048. Journal of the Royal Astronomical Society of Canada, 67, 209.

Edwards, L. D. (1998). Embodying mathematics and science: Microworlds as representations. The Journal of Mathematical Behavior, 17(1), 53-78.

Fias, W., Menon, V., & Szucs, D. (2013). Multiple components of developmental dyscalculia. Trends in Neuroscience and Education, 2(2), 43-47.

Gingerich, O. (1986). Islamic astronomy. Scientific American, 254(4), 74-83.

Hecht Eu., (2000). Physics: Algebra and Trigonometry, Brooks Cole, London

Hirsch, C. R. (1991). Implementing the standards. Trigonometry Today. Mathematics teacher, 84(2), 98-106.

Johnston-Wilder, S., Lee, C., & Pimm, D. (2016). Learning to Teach Mathematics in the Secondary School: A companion to school experience. Routledge.

Kadunz, G., & Straber, R. (2004). Image--Metaphor--Diagram: Visualisation in Learning Mathematics. International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Katz, V. J., & Imhausen, A. (2007). The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook. Princeton University Press.

Katz, V. J. (1987). The calculus of the trigonometric functions. Historia Mathematica, 14(4), 311-324.

Kendal, M., & Stacey, K. (1996). Trigonometry: Comparing ratio and unit circle methods. In Technology in Mathematics Education. Proceedings of the 19th Annual Conference of the Mathematics education Research group of Australasia (pp. 322-329).

Kendal, M., & Stacey, K. (1998). Teaching trigonometry. Australian Mathematics Teacher, The, 54(1), 34.

Kennedy, E. S. (1969). The History of Trigonometry. Nat Counc Teachers Math Yearbook (31st), 333(375), 69.

Nasr, S. H., & Leaman, O. (1996). The Routledge History of Islamic Philosophy.

Maor, E. (1998). Trigonometric delights. Universities Press.

Moussa, A. (2011). Mathematical methods in abū al-wafāʾ's almagest and the qibla determinations. Arabic sciences and philosophy, 21(1), 1-56.

Nagel, R. (2002). Encyclopedia of science.

Needham, J. (1976). Science and civilisation in China (Vol. 5). Cambridge University Press.

Nolan, E. C., Dixon, J. K., Safi, F., & Haciomeroglu, E. S. (2016). Making sense of mathematics for teaching high school: Understanding how to use functions. Solution Tree Press.

O'Connor J.J. & Robertson E.F., (1996). "The trigonometric functions", in https://www.webcitation.org/6Auwxe6v3?url=http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Trigonometric_functions.html

Papert, S. (1980). Mindstonns. New York: Basic Rooks, 607.

Principles and Standards for School Mathematics, NCTM, 2000

Restivo, S. (1992). Episteme 20: Mathematics in society and history, Sociological Inquiries.

Rosu M., (2015). Trigonometry in High School: Techniques in Problem Solving, Xlibris, London

Rudiger Th., (2005). "The mathematics and science of Leonhard Euler", in Kinyon Michael & van Brummelen Glen (edited). Mathematics and their Historian's Craft: The Kenneth O May Lectures, Springer, New York, σ.σ. 81-140

Thiele, R. (2005). The Mathematics and Science of Leonhard Euler (1707–1783). In Mathematics and the Historian’s Craft (pp. 81-140). Springer, New York, NY.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2002). Design of microworlds in mathematics and science education. Journal of Educational Computing Research, 27(1), 1-5.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students’ understanding of the numerical value of fractions. Learning and instruction, 14(5), 503-518.

Sutherland, R., Robertson, S., & John, P. (2008). Improving classroom learning with ICT. Routledge.

Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E., & Simpson, A. (1999). What is the object of the encapsulation of a process?. The Journal of Mathematical Behavior, 18(2), 223-241.

Thomas, E. J., Brunsting, J. R., & Warrick, P. L. (2010). Styles and strategies for teaching high school mathematics: 21 techniques for differentiating instruction and assessment. Corwin Press.

Zamarian, L., Ischebeck, A., & Delazer, M. (2009). Neuroscience of learning arithmetic—Evidence from brain imaging studies. Neuroscience & Biobehavioral Reviews, 33(6), 909-925.

Van Brummelen, G. (2009). The mathematics of the heavens and the Earth: the early history of trigonometry. Princeton University Press.

Vosniadou, S., & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching.

Weber, K. (2005). Students’ understanding of trigonometric functions. Mathematics Education Research Journal, 17(3), 91-112.

Weber K., (2008). Teaching Trigonometric Functions: Lessons learned from Research. In Mathematics Teacher, Vol. 102, No 2: 99-112

Woody, W. D., Daniel, D. B., & Stewart, J. M. (2012). 'Students' preferences and performance using e-textbooks and print textbooks. Computers in Education, 1, 43-58.

Wolff, P. H. (1960). The developmental psychologies of Jean Piaget and psychoanalysis. Psychological issues.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1. Φύλλα εργασίας GeoGebra
2. Φύλλο εργασίας θεώρημα Πτολεμαίου
3. Φύλλο εργασίας με Ουράνια Σώματα
4. Τεστ αξιολόγησης
5. Ερωτηματολόγιο

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μικροπείραμα 1: Το ημίτονο γωνίας

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. Ανοίξτε το αρχείο GeoGebra «Τριγωνομετρικός Κύκλος» και επιλέξτε τον τριγωνομετρικό αριθμό ημίτονο. Μετακινώντας το σημείο Α, η γωνία ω παίρνει τιμές $0 \leq \omega \leq 2\pi$ και εμφανίζεται στον άξονα y'y το ημίτονό της.

2. Ποιες τιμές παίρνει το ημίτονο όταν η γωνία γίνει $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$; Συμπληρώστε τον πίνακα.

ω	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημω					

3. Μεταξύ ποιων τιμών μεταβάλλεται το ημίτονο, όταν $0 \leq \omega \leq 2\pi$ …………………..

4. Ποιο είναι το πρόσημο του ημιτόνου σε κάθε τεταρτημόριο; Συμπληρώστε με + ή – τις αντίστοιχες θέσεις του πίνακα που αφορά τα τεταρτημόρια όπως τα βλέπετε στον τριγωνομετρικό κύκλο.

$2^{ο}$ ημω …	$1^{ο}$ ημω …
$3^{ο}$ ημω …	$4^{ο}$ ημω …

5. Όταν η γωνία ω είναι στο $1^{ο}$ τεταρτημόριο και αυξάνεται, τι συμβαίνει με το ημίτονό της; Αυξάνεται ή μειώνεται; ……………………… Πως θα χαρακτηρίζατε τη συνάρτηση f(ω) = ημω ως προς τη μονοτονία της στο $1^{ο}$ τεταρτημόριο; ………………

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ
Μικροπείραμα 2: Το συνημίτονο γωνίας
ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. Ανοίξτε το αρχείο GeoGebra «Τριγωνομετρικός Κύκλος» και επιλέξτε τον τριγωνομετρικό αριθμό συνημίτονο. Μετακινώντας το σημείο Α, η γωνία ω παίρνει τιμές $0 \leq ω \leq 2π$ και εμφανίζεται στον άξονα y'y το συνημίτονό της.

2. Ποιες τιμές παίρνει το συνημίτονο όταν η γωνία γίνει $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$;
Συμπληρώστε τον πίνακα.

ω	0	$\frac{π}{2}$	π	$\frac{3π}{2}$	2π
συνω					

3. Μεταξύ ποιων τιμών μεταβάλλεται το συνημίτονο, όταν $0 \leq ω \leq 2π$ …………………..

4. Ποιο είναι το πρόσημο του συνημιτόνου σε κάθε τεταρτημόριο; Συμπληρώστε με + ή – τις αντίστοιχες θέσεις του πίνακα που αφορά τα τεταρτημόρια όπως τα βλέπετε στον τριγωνομετρικό κύκλο.

$2^ο$ συνω …	$1^ο$ συνω …
$3^ο$ συνω …	$4^ο$ συνω …

5. Όταν η γωνία ω είναι στο $1^ο$ τεταρτημόριο και αυξάνεται, τι συμβαίνει με το συνημίτονό της; Αυξάνεται ή μειώνεται; ……………………… Πως θα χαρακτηρίζατε τη συνάρτηση f(ω) = συνω ως προς τη μονοτονία της στο $1^ο$ τεταρτημόριο; ………………

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ
Μικροπείραμα 3: Η εφαπτομένη γωνίας
ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. Ανοίξτε το αρχείο GeoGebra «Τριγωνομετρικός Κύκλος» και επιλέξτε τον τριγωνομετρικό αριθμό εφαπτομένη. Μετακινώντας το σημείο Α, η γωνία ω παίρνει τιμές $0 \leq \omega \leq 2\pi$. Ο άξονας των εφαπτομένων είναι παράλληλος με τον άξονα των ημιτόνων.

2. Για ποιες τιμές της γωνίας ω δεν ορίζεται η εφαπτομένη; …………………………….

3. Ποιες τιμές παίρνει η εφαπτομένη όταν η γωνία γίνει 0, $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$;
Συμπληρώστε τον πίνακα.

ω	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
εφω					

4. Υπάρχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή για την εφαπτομένη; ……………………………….

5. Ποιο είναι το πρόσημο της εφαπτομένης σε κάθε τεταρτημόριο; Συμπληρώστε με + ή − τις αντίστοιχες θέσεις του πίνακα που αφορά τα τεταρτημόρια όπως τα βλέπετε στον τριγωνομετρικό κύκλο.

2ο εφω …	1ο εφω …
3ο εφω …	4ο εφω …

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Μικροπείραμα 4: Η συνεφαπτομένη γωνίας

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. Ανοίξτε το αρχείο GeoGebra «Τριγωνομετρικός Κύκλος» και επιλέξτε τον τριγωνομετρικό αριθμό συνεφαπτομένη. Μετακινώντας το σημείο Α, η γωνία ω παίρνει τιμές $0 \leq ω \leq 2π$. Ο άξονας των συνεφαπτομένων είναι παράλληλος με τον άξονα των συνημιτόνων.

2. Για ποιες τιμές της γωνίας ω δεν ορίζεται η συνεφαπτομένη; ……………………….

3. Ποιες τιμές παίρνει η συνεφαπτομένη όταν η γωνία γίνει 0, $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$; Συμπληρώστε τον πίνακα.

ω	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
σφω					

4. Υπάρχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή για την συνεφαπτομένη; …………………………..

5. Ποιο είναι το πρόσημο της συνεφαπτομένης σε κάθε τεταρτημόριο; Συμπληρώστε με + ή − τις αντίστοιχες θέσεις του πίνακα που αφορά τα τεταρτημόρια όπως τα βλέπετε στον τριγωνομετρικό κύκλο.

2ο σφω …	1ο σφω …
3ο σφω …	4ο σφω …

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ
Μικροπείραμα 1: Η συνάρτηση ημίτονο
ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. Ανοίξτε το αρχείο GeoGebra **«Η συνάρτηση f(x)=ημx σε διάστημα μιας περιόδου».** Μετακινώντας το σημείο Α, η γωνία ω παίρνει τιμές $0 \leq ω \leq 2π$ και εμφανίζεται στον άξονα y'y το ημίτονό της. Στο δεξί παράθυρο της εφαρμογής εμφανίζεται το σημείο Μ (ω, ημω) που ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης ημιτόνου.

2. Ποιες τιμές παίρνει το ημίτονο όταν η γωνία γίνει $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$; Συμπληρώστε τον πίνακα.

ω	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(ω)=ημω					

3. Όταν η γωνία ω είναι στο 1ο τεταρτημόριο και αυξάνεται, τι συμβαίνει με το ημίτονό της; Αυξάνεται ή μειώνεται; ……………………. Πως θα χαρακτηρίζατε τη συνάρτηση f(ω)=ημω ως προς τη μονοτονία της στο 1ο τεταρτημόριο; ……………………..
Επιβεβαιώστε το συμπέρασμά σας από τη γραφική παράσταση που σχηματίζεται στο δεξί παράθυρο.

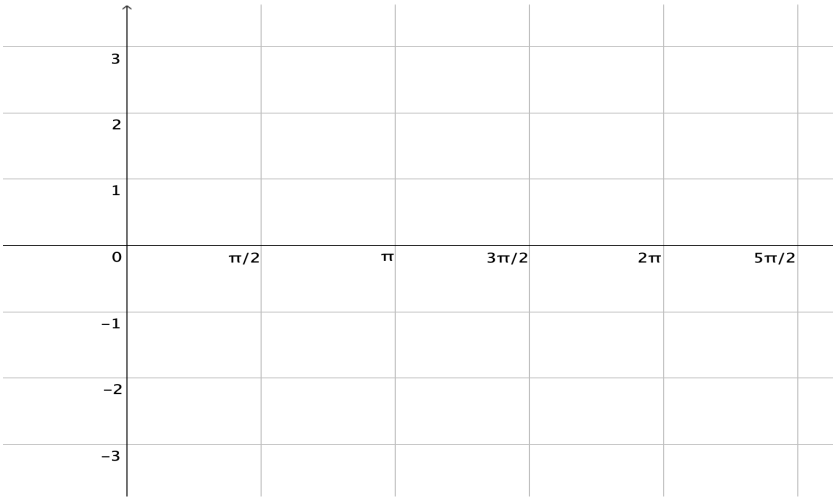
4. Συνεχίστε να αυξάνετε τη γωνία και στα άλλα τεταρτημόρια και παρατηρήστε τη μονοτονία της συνάρτησης. Συμπληρώστε τον παραπάνω πίνακα μεταβολών με το κατάλληλο σύμβολο μονοτονίας.

5. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή (ακρότατα) της συνάρτησης f(ω)=ημω, όταν $0 \leq ω \leq 2π$. Για ποιες τιμές της γωνίας ω παρατηρούνται;

Μέγιστη τιμή= όταν ω=

Ελάχιστη τιμή= όταν ω=

6. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f(x)=ημx, όταν $0 \leq x \leq 2\pi$



7. Ανοίξτε το αρχείο GeoGebra **«Η συνάρτηση f(x)=ημx».** Μετακινώντας το δρομέα ω, η γωνία ω παίρνει τιμές $-720^o \leq \omega \leq 720^o$ ή [-4π,4π] και εμφανίζεται στον άξονα y'y το ημίτονό της. Στο δεξί παράθυρο της εφαρμογής εμφανίζονται τα σημεία της συνάρτησης f(ω)=ημω στο συγκεκριμένο διάστημα.

8. Ποιο είναι το πλάτος του διαστήματος μετά από το οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης ημιτόνου επαναλαμβάνεται; Πως ονομάζεται αυτό το πλάτος;

9. Σβήστε τα ίχνη και επιλέξτε το κουτί f(ω)=ημω για να δείτε ολοκληρωμένη τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ημιτόνου. Πόσο απέχει μια κορυφή από την επόμενη ή την προηγούμενή της; ……………………………….

10. Με αναγωγή στο 1^o τεταρτημόριο συγκρίνετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημ(ω+2π), ημ(ω-2π), ημω. Τι παρατηρείτε;

11. Ποιο από τα παραπάνω συμπεράσματα επιβεβαιώσατε αλγεβρικά;

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ
Μικροπείραμα 1: Η συνάρτηση ημίτονο
ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. Ανοίξτε το αρχείο GeoGebra **«Η συνάρτηση f(x)=συνx σε διάστημα μιας περιόδου».** Μετακινώντας το σημείο Α, η γωνία ω παίρνει τιμές $0 \leq ω \leq 2π$ και εμφανίζεται στον άξονα x'x το ημίτονό της. Στο δεξί παράθυρο της εφαρμογής εμφανίζεται το σημείο Μ (ω, συνω) που ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης συνημιτόνου.

2. Ποιες τιμές παίρνει το ημίτονο όταν η γωνία γίνει $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$; Συμπληρώστε τον πίνακα.

ω	0	$\frac{π}{2}$	$π$	$\frac{3π}{2}$	$2π$
$f(ω)=συνω$					

3. Όταν η γωνία ω είναι στο 1ο τεταρτημόριο και αυξάνεται, τι συμβαίνει με το συνημίτονό της; Αυξάνεται ή μειώνεται; ……………………. Πως θα χαρακτηρίζατε τη συνάρτηση f(ω)=συνω ως προς τη μονοτονία της στο 1ο τεταρτημόριο;
…………………
Επιβεβαιώστε το συμπέρασμά σας από τη γραφική παράσταση που σχηματίζεται στο δεξί παράθυρο.

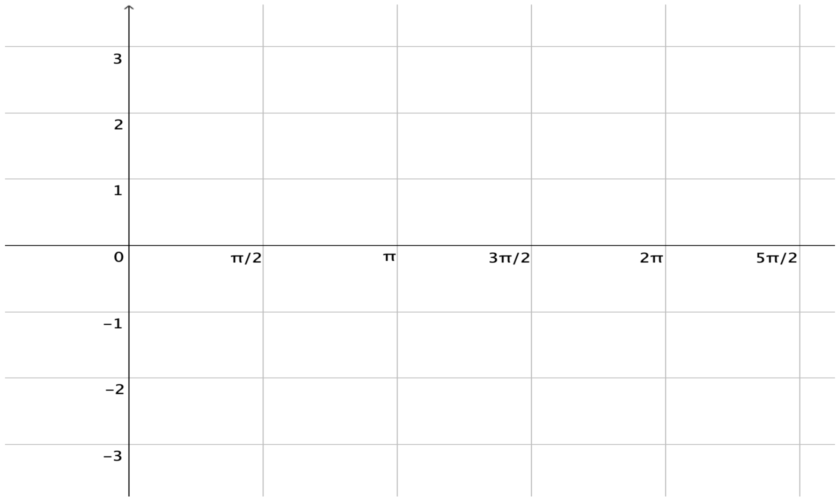
4. Συνεχίστε να αυξάνετε τη γωνία και στα άλλα τεταρτημόρια και παρατηρήστε τη μονοτονία της συνάρτησης. Συμπληρώστε τον παραπάνω πίνακα μεταβολών με το κατάλληλο σύμβολο μονοτονίας.

5. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή (ακρότατα) της συνάρτησης f(ω)=συνω, όταν $0 \leq ω \leq 2π$. Για ποιες τιμές της γωνίας ω παρατηρούνται;

Μέγιστη τιμή= όταν ω=

Ελάχιστη τιμή= όταν ω=

6. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f(x)=συνx, όταν $0 \leq x \leq 2\pi$



7. Ανοίξτε το αρχείο GeoGebra **«Η συνάρτηση f(x)=συνx».** Μετακινώντας το δρομέα ω, η γωνία ω παίρνει τιμές $-720^o \leq \omega \leq 720^o$ ή $[-4\pi, 4\pi]$ και εμφανίζεται στον άξονα x'x το συνημίτονό της. Στο δεξί παράθυρο της εφαρμογής εμφανίζονται τα σημεία της συνάρτησης f(ω)=συνω στο συγκεκριμένο διάστημα.

8. Ποιο είναι το πλάτος του διαστήματος μετά από το οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης συνημιτόνου επαναλαμβάνεται; Πως ονομάζεται αυτό το πλάτος;

....

9. Σβήστε τα ίχνη και επιλέξτε το κουτί f(ω)=συνω για να δείτε ολοκληρωμένη τη γραφική παράσταση της συνάρτησης συνημιτόνου. Πόσο απέχει μια κορυφή από την επόμενη ή την προηγούμενή της; ……………………………….

10. Με αναγωγή στο 1^o τεταρτημόριο συγκρίνετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς συν(ω+2π), συν(ω-2π), συνω. Τι παρατηρείτε;

....

11. Ποιο από τα παραπάνω συμπεράσματα επιβεβαιώσατε αλγεβρικά;

....

Φύλλο εργασίας

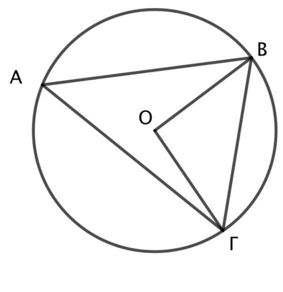
Από το θεώρημα του Κλαύδιου του Πτολεμαίου
στους τριγωνομετρικούς αριθμούς αθροίσματος γωνιών

Εισαγωγή

Η τριγωνομετρία ξεκίνησε έξω στην ύπαιθρο, πριν από δύο χιλιάδες χρόνια περίπου, όταν οι ερευνητές εκείνης της εποχής μελέτησαν τα αστέρια και τους πλανήτες που διέσχιζαν τον νυχτερινό ουρανό και τις μεταβολές στις διαστάσεις των σκιών κατά τις ηλιόλουστες ημέρες. Σε αντίθεση με την εντύπωση που δημιουργείται κατά τη μελέτη των σχολικών εγχειριδίων, η τριγωνομετρία δεν ξεκίνησε με ορθογώνια τρίγωνα ή γωνίες ή τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Το ημίτονο και το συνημίτονο προέκυψαν από την αναζήτηση των μοτίβων των αστρονόμων στην κίνηση και τη θέση των ουράνιων σωμάτων. Η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη εξελίχθηκαν για να καλύψουν τις ανάγκες για υπολογισμό των υψών κάποιων αντικειμένων από τα μήκη των σκιών που δημιουργούσαν. Η αστρονομία ήταν η επιστήμη που προκάλεσε την εξέλιξη της τριγωνομετρίας μέχρι και τον δέκατο πέμπτο αιώνα.

Στην αρχή οι αρχαίοι Έλληνες νόμιζαν ότι η Γη ήταν το ακίνητο κέντρο του σύμπαντος, όπως καταγράφηκε από τον Εύδοξο (408-335 π.Χ.). Θεωρούσαν ότι τα αστέρια ήταν στερεωμένα σε μια τεράστια κρυστάλλινη σφαίρα, την οποία οι Έλληνες θεωρούσαν το τέλειο σχήμα. Ο Ήλιος, η Σελήνη και οι πέντε ορατοί πλανήτες (ο Ερμής, η Αφροδίτη, ο Άρης, ο Δίας και ο Κρόνος) συνδέθηκαν επίσης με τις σφαίρες. Όλα τα ουράνια σώματα μετακινούνταν σε μεγάλους κύκλους γύρω από τη Γη.

Προσπαθώντας να το καταλάβει αυτό, ο Ίππαρχος (180-125 π.Χ.), ένας από τους μεγαλύτερους αστρονόμους της αρχαιότητας, δημιούργησε εκείνα τα μαθηματικά που τελικά ονομάστηκαν τριγωνομετρία. Στο έργο του ασχολήθηκε με τρίγωνα που είχαν εγγραφεί σε κύκλους. Επειδή ασχολήθηκε περισσότερο με τρίγωνα στην ουράνια σφαίρα, ανέπτυξε κυρίως τη σφαιρική τριγωνομετρία ταυτόχρονα με την ανάπτυξη της επίπεδης τριγωνομετρίας. Ένα βασικό πρόβλημα ήταν να εκτιμηθούν οι τρεις γωνίες και οι τρεις πλευρές του εγγεγραμμένου τριγώνου. Η λύση για το συγκεκριμένο πρόβλημα περιελάμβανε αυτό: δεδομένης της κεντρικής γωνίας ΒΟΓ, να βρεθεί το μήκος της χορδής ΒΓ.



Σχήμα 1.

Για να το καταφέρει αυτό, ο Ίππαρχος έφτιαξε κάποιους πίνακες με αριθμούς όπου θα μπορούσε να αντιστοιχήσει το μήκος της χορδής με μια γωνία. Οι πίνακες αυτοί εξελίχθηκαν σε αυτό που γνωρίζουμε σήμερα ως ημίτονα μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου. Ο σημερινός ορισμός του ημίτονου είναι: Για μια οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου, το ημίτονο είναι το πηλίκο του μήκους της απέναντι από τη γωνία κάθετης πλευράς προς το μήκος της υποτείνουσας.

Γύρω στο 150 μ.Χ., ο αστρονόμος Κλαύδιος ο Πτολεμαίος (100-180 μ.Χ.), επέκτεινε το έργο του Ιππάρχου σε ένα αστρονομικό έργο που ονομάζεται Μαθηματική Συλλογή. Οι Άραβες μελετητές που μελέτησαν αυτό το έργο αιώνες αργότερα το αποκαλούσαν Αλμαγέστη, που σημαίνει «Η Μέγιστη» (σε σύγκριση με άλλα παρόμοια έργα). Το πρώτο κεφάλαιο της Αλμαγέστης πραγματεύτηκε την εκδοχή του Πτολεμαίου για την τριγωνομετρία. Παρακάτω παρουσιάζεται ένα μέρος ενός αντιγράφου του πίνακα των χορδών του Πτολεμαίου. Είναι σε εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης (με βάση το 60), το οποίο ήταν το πρότυπο εκείνη την εποχή. Η αριστερή πλευρά του πίνακα είναι γραμμένη στην αρχαία ελληνική γλώσσα, με τους αριθμούς γραμμένους στο εξηκονταδικό σύστημα, ενώ η δεξιά πλευρά είναι η μετάφραση σε ινδοαραβικούς αριθμούς (επίσης στο εξηκονταδικό σύστημα). Ο Πτολεμαίος ακολούθησε το έθιμο της χρήσης ενός κύκλου με ακτίνα 60 μονάδων. Υπολόγισε χορδές για τόξα από ½ μοίρα έως 180 μοίρες σε βήματα της ½ μοίρας. Η στήλη των εξηκοστών ήταν για παρεμβολή, δηλαδή εύρεση χορδών για γωνίες μεταξύ των βημάτων της ½ μοίρας. Έτσι, για παράδειγμα, ο πίνακας μας λέει ότι η χορδή που βαίνει σε τόξο 4^o σε κύκλο ακτίνας 60 μονάδων είναι 4,11,16, δηλαδή 4 μονάδες συν 11/60 μιας μονάδας συν 16/60^2 = 16 / 3600 μιας μονάδας. Στο δεκαδικό σύστημα, αυτό ισούται σε 4.18778 μονάδες.

Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν			Table of Chords		
περιφε-ρειῶν	εὐθειῶν	ἑξηκοστῶν	arcs	chords	sixtieths
∠′	ō λα κε	ō α β ν	½°	0;31,25	0;1,2,50
α	α β ν	ō α β ν	1°	1;2,50	0;1,2,50
α∠′	α λδ ιε	ō α β ν	1½°	1;34,15	0;1,2,50
β	β ε μ	ō α β ν	2°	2;5,40	0;1,2,50
β∠′	β λζ δ	ō α β μη	2½°	2;37,4	0;1,2,48
γ	γ η κη	ō α β μη	3°	3;8,28	0;1,2,48
γ∠′	γ λθ νβ	ō α β μη	3½°	3;39,52	0;1,2,48
δ	δ ια ις	ō α β μζ	4°	4;11,16	0;1,2,47
δ∠′	δ μβ μ	ō α β μζ	4½°	4;42,40	0;1,2,47
ε	ε ιδ δ	ō α β μς	5°	5;14,4	0;1,2,46
ε∠′	ε με κζ	ō α β με	5½°	5;45,27	0;1,2,45
ς	ς ις μθ	ō α β μδ	6°	6;16,49	0;1,2,44
ς∠′	ς μη ια	ō α β μγ	6½°	6;48,11	0;1,2,43
ζ	ζ ιθ λγ	ō α β μβ	7°	7;19,33	0;1,2,42
ζ∠′	ζ ν νδ	ō α β μα	7½°	7;50,54	0;1,2,41
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ροδ∠′	ριθ να μγ	ō ō β νγ	174½°	119;51,43	0;0,2,53
ροε	ριθ νγ ι	ō ō β λς	175°	119;53,10	0;0,2,36
ροε∠′	ριθ νδ κζ	ō ō β κ	175½°	119;54,27	0;0,2,20
ρος	ριθ νε λη	ō ō β γ	176°	119;55,38	0;0,2,3
ρος∠′	ριθ νς λθ	ō ō α μζ	176½°	119;56,39	0;0,1,47
ροζ	ριθ νζ λβ	ō ō α λ	177°	119;57,32	0;0,1,30
ροζ∠′	ριθ νη ιη	ō ō α ιδ	177½°	119;58,18	0;0,1,14
ροη	ριθ νη νε	ō ō ō νζ	178°	119;58,55	0;0,0,57
ροη∠′	ριθ νθ κδ	ō ō ō μα	178½°	119;54,24	0;0,0,41
ροθ	ριθ νθ μδ	ō ō ō κε	179°	119;59,44	0;0,0,25
ροθ∠′	ριθ νθ νς	ō ō ō θ	179½°	119;59,56	0;0,0,9
ρπ	ρκ ō ō	ō ō ō ō	180°	120;0,0	0;0,0,0

Παρακάτω παρουσιάζεται μια πληρέστερη εκδοχή του πίνακα του Πτολεμαίου, γραμμένη εξ ολοκλήρου με δικούς μας χαρακτήρες, αλλά με τιμές που εξακολουθούν να δίνονται στο αρχικό (εξηκονταδικό) σύστημα αρίθμησης.

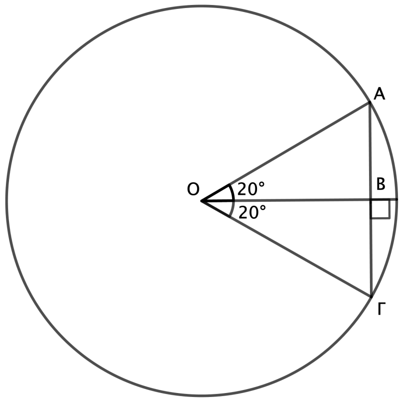
TABLE OF CHORDS

Arcs	Chords	Sixtieths	Arcs	Chords	Sixtieths
½	0 31 25	1 2 50	23	23 55 27	1 1 33
1	1 2 50	1 2 50	23½	24 26 13	1 1 30
1½	1 34 15	1 2 50	24	24 56 68	1 1 26
2	2 5 40	1 2 50	24½	25 27 41	1 1 22
2½	2 37 4	1 2 48	25	25 58 22	1 1 19
3	3 8 28	1 2 48	25½	26 29 1	1 1 15
3½	3 39 52	1 2 48	26	26 59 38	1 1 11
4	4 11 16	1 2 47	26½	27 30 14	1 1 8
4½	4 42 40	1 2 47	27	28 0 48	1 1 4
5	5 14 4	1 2 46	27½	28 31 20	1 1 0
5½	5 45 27	1 2 45	28	29 1 50	1 0 56
6	6 16 49	1 2 44	28½	29 32 18	1 0 52
6½	6 48 11	1 2 43	29	30 2 44	1 0 48
7	7 19 33	1 2 42	29½	30 33 8	1 0 44
7½	7 50 54	1 2 41	30	31 3 30	1 0 40
8	8 22 15	1 2 40	30½	31 33 50	1 0 35
8½	8 53 35	1 2 39	31	32 4 8	1 0 31
9	9 24 54	1 2 38	31½	32 34 22	1 0 27
9½	9 56 13	1 2 37	32	33 4 35	1 0 22
10	10 27 32	1 2 35	32½	33 34 46	1 0 17
10½	10 58 49	1 2 33	33	34 4 55	1 0 12
11	11 30 5	1 2 32	33½	34 35 1	1 0 8
11½	12 1 21	1 2 30	34	35 5 5	1 0 3
12	12 32 36	1 2 28	34½	35 35 6	0 59 57
12½	13 3 50	1 2 27	35	36 5 5	0 59 52
13	13 35 4	1 2 25	35½	36 35 1	0 59 48
13½	14 6 16	1 2 23	36	37 4 55	0 59 43
14	14 37 27	1 2 21	36½	37 34 47	0 59 38
14½	15 8 38	1 2 19	37	38 4 36	0 59 32
15	15 39 47	1 2 17	37½	38 34 22	0 59 27
15½	16 10 56	1 2 15	38	39 4 5	0 59 22
16	16 42 3	1 2 13	38½	39 33 46	0 59 16
16½	17 13 9	1 2 10	39	40 3 25	0 59 11
17	17 44 14	1 2 7	39½	40 33 0	0 59 5
17½	18 15 17	1 2 5	40	41 2 33	0 59 0
18	18 46 19	1 2 2	40½	41 32 3	0 58 54
18½	19 17 21	1 2 0	41	42 1 30	0 58 48
19	19 48 21	1 1 57	41½	42 30 54	0 58 42
19½	20 19 19	1 1 54	42	43 0 15	0 58 36
20	20 50 16	1 1 51	42½	43 29 33	0 58 31
20½	21 21 11	1 1 48	43	43 58 49	0 58 25
21	21 52 6	1 1 45	43½	44 28 1	0 58 18
21½	22 22 58	1 1 42	44	44 57 10	0 58 12
22	22 53 49	1 1 39	44½	45 26 16	0 58 6
22½	23 24 39	1 1 36	45	45 55 19	0 58 0

Για να κατανοήσουμε τη σχέση που έχουν οι χορδές με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς και να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω πίνακα προκειμένου να υπολογίσουμε το ημίτονο μιας οποιασδήποτε γωνίας, ας ακολουθήσουμε το σκεπτικό του Πτολεμαίου στην παρακάτω άσκηση.

Άσκηση

Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ.
Η οξεία γωνία ΑΟΒ είναι 20^o.



6) Να υπολογίσετε το ημίτονο της γωνίας ΑΟΒ, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ημιτόνου οξείας γωνίας σε ορθογώνιο τρίγωνο.

$$\eta\mu\, \widehat{AOB} = \frac{\quad}{\quad}$$

7) Στο παραπάνω κλάσμα, πολλαπλασιάστε και τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τον αριθμό 2.

8) Αν η διάμετρος του κύκλου είναι ίση με 1, τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε για το ημίτονο της γωνίας που υπολογίσαμε στο πρώτο ερώτημα και για το μήκος της χορδής ΑΓ του κύκλου;

9) Δεδομένου ότι η χορδή ΑΓ αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 40^o, μπορείτε να βρείτε κάποια γωνία που να είναι ίση με 20^o, αλλά να αντιστοιχεί στο ίδιο τόξο ΑΒ;

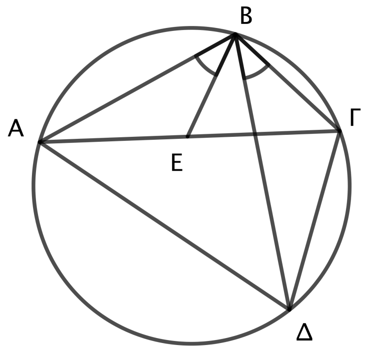
10) Τι συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε για το μήκος μίας χορδής και το ημίτονο της εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνει στο αντίστοιχο τόξο;

Είναι λοιπόν φανερό, πως ο πίνακας των χορδών που υπάρχει στην Αλμαγέστη του Πτολεμαίου και παρουσιάστηκε παραπάνω, είναι ο αντίστοιχος πίνακας ημιτόνων που χρησιμοποιούμε σήμερα. Ας κρατήσουμε το συμπέρασμα που καταλήξαμε, δηλαδή ότι το μήκος μιας χορδής ενός κύκλου, ισούται με το ημίτονο της εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνει το αντίστοιχο τόξο.

Θεώρημα του Πτολεμαίου

Σε ένα εγγράψιμο τετράπλευρο, το γινόμενο των διαγωνίων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των δυο ζευγών των απέναντι πλευρών.

Έστω εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Φέρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ τέτοιο ώστε



$\widehat{ABE} = \widehat{\varDelta B\varGamma}$.

9) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΕ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΔΒΓ. (Υπενθυμίζουμε ότι οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα του ίδιου κύκλου, είναι ίσες).

10) Να γράψετε τις αναλογίες των πλευρών που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος.

11) Να επιλέξετε τα κλάσματα που περιέχουν τις πλευρές ΑΒ,ΔΒ,ΑΕ,ΓΔ και να πολλαπλασιάσετε «χιαστί».

12) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΕΒΓ.

13) Να γράψετε τις αναλογίες των πλευρών που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος.

14) Να επιλέξετε τα κλάσματα που περιέχουν τις πλευρές ΑΔ,ΕΓ,ΒΔ,ΒΓ και να πολλαπλασιάσετε «χιαστί».

15) Να γράψετε τις ισότητες που προέκυψαν από το 3^{o} και 6^{o} ερώτημα με τρόπο, ώστε το ΒΔ να βρίσκετε και στις δύο στο δεύτερο μέλος και κατόπιν να τις προσθέσετε κατά μέλη.

16) Να βγάλετε κοινό παράγοντα το ΒΔ στο δεύτερο μέλος και να προσθέσετε ΑΕ+ΕΓ.

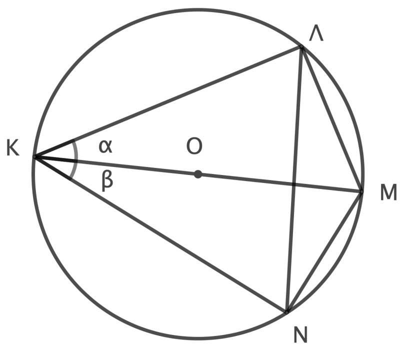
Καταλήξαμε λοιπόν στον τύπο από το θεώρημα του Πτολεμαίου που λέει ότι το γινόμενο των διαγωνίων, είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών, δηλαδή:

ΑΓ · ΒΔ = ΑΒ · ΓΔ + ΑΔ · ΒΓ

Στο επόμενο βήμα θα συνδυάσουμε τα συμπεράσματα που καταλήξαμε αφενός με το ημίτονο μιας εγγεγραμμένης γωνίας και τη χορδή στην οποία βαίνει το αντίστοιχο τόξο και αφετέρου με το θεώρημα του Πτολεμαίου, προκειμένου υπολογίσουμε το ημίτονο αθροίσματος δύο γωνιών.

Ημίτονο αθροίσματος δύο γωνιών

Δίνεται τετράπλευρο ΚΛΜΝ εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και διάμετρο ΚΜ=1. Έστω α η γωνία ΛΚΜ και β η γωνία ΜΚΝ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



6) Να εφαρμόσετε τον τύπο του θεωρήματος του Πτολεμαίου που είδαμε παραπάνω στο τετράπλευρο ΚΛΜΝ.

7) Να υπολογίσετε το $\eta\mu\alpha$ και το $\sigma\upsilon\nu\alpha$ (στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΜ).

$$\eta\mu\alpha = \frac{\quad}{\quad}$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\quad}{\quad}$$

8) Να υπολογίσετε το $\eta\mu\beta$ και το $\sigma\upsilon\nu\beta$ (στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΜΝ).

$$\eta\mu\beta = \frac{\quad}{\quad}$$

$$\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\quad}{\quad}$$

9) Να βρείτε χορδή που να είναι ίση με το ημίτονο της γωνίας (α + β).

10) Να αντικαταστήσετε αυτά που βρήκατε στο $2^ο$, $3^ο$ και $4^ο$ ερώτημα στον τύπο που γράψατε στο $1^ο$ ερώτημα.(Υπενθυμίζουμε ότι η διάμετρος ΚΜ = 1).

Αποδείξαμε με έναν εναλλακτικό τρόπο τον τύπο του ημιτόνου αθροίσματος δύο γωνιών.

Φύλλο εργασίας

Εφαρμογές της Τριγωνομετρίας
από την αρχαιότητα μέχρι και τη σύγχρονη εποχή

Εισαγωγή

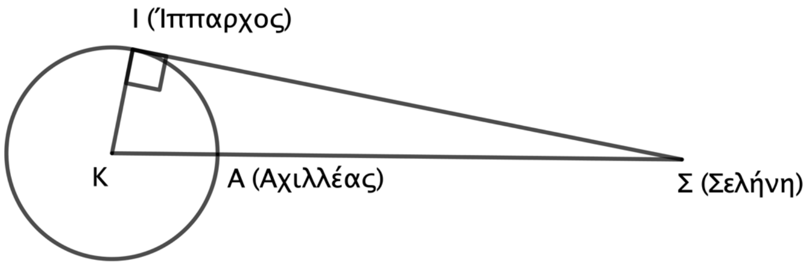
Η ανάπτυξη της τριγωνομετρίας δεν έγινε ούτε μόνο από ένα άτομο, ούτε μόνο από έναν πολιτισμό και αντίθετα με τους ισχυρισμούς πολλών σύγχρονων εγχειριδίων δεν αναπτύχθηκε ούτε για να βρει τα ύψη των βουνών, ούτε αποστάσεις στις ακτές, ούτε και τα όρια των εθνών. Η πρωταρχική κινητήρια δύναμη πίσω τη δημιουργία αυτού του μέρους των μαθηματικών ήταν να κατακτήσει και να δαμάσει τους ουρανούς.

Ανεξάρτητα από τη θέση του στη γη, κάθε πολιτισμός ήταν σε θέση να παρατηρήσει τον ήλιο τη σελήνη και διάφορους αστερισμούς. Όλοι κινούνταν σε έναν περίπλοκο χορό στον ουρανό. Οι άνθρωποι κατάφεραν να διαπιστώσουν ότι οι κινήσεις του ήλιου ή της σελήνης σχετίζονταν με μια μεγάλη ποικιλία χερσαίων φαινομένων όπως η παλίρροια, η ζέστη και το κρύο, οι εποχές φύτευσης, οι έμμηνοι κύκλοι, η διαθεσιμότητα άγριων ζώων και φυτών για φαγητό. Η κατανόηση και η δυνατότητα πρόβλεψης το κινήσεων των ουρανίων σωμάτων σήμαινε ότι μπορούσαν να κάνουν προβλέψεις για τα αντίστοιχα θέματα στη γη που επέτρεψαν στους ανθρώπους να είναι σε θέση να λάβουν προφυλάξεις και να προετοιμαστούν για την ασφαλέστερη επιβίωση. Με αυτόν τον τρόπο η χαρτογράφηση των ουράνιων σωμάτων ήταν ζήτημα ζωής.

Ένα συγκεκριμένο παζλ για τις κοινωνίες αυτές ήταν η πορεία των "περιπλανώμενων αστεριών", γνωστών στη σημερινή εποχή ως πλανήτες. Το ταξίδι του ήλιου ήταν σχετικά προβλέψιμο. Ανέτειλε σχεδόν από το ίδιο μέρος κάθε πρωί, έδυε σχεδόν στο ίδιο μέρος κάθε βράδυ και ταξίδευε σχεδόν στο ίδιο μονοπάτι κάθε μέρα. Το ταξίδι του φεγγαριού ήταν λίγο πιο δύσκολο να καταγραφεί. Τα περισσότερα από τα αστέρια είχαν μόνο περιστροφή γύρω από κάποιο σταθερό μέρος στον ουρανό. Αλλά υπήρχαν και μερικά αστέρια που επέδειξαν μια ακανόνιστη συμπεριφορά. Φαίνεται να σταματούν και να αντιστρέφουν την κατεύθυνση στη μέση της διαδρομής. Το ταξίδι τους ήταν εκτός κανόνων και διαφορετικό από τα υπόλοιπα αστέρια και φυσικά κέντρισε το ενδιαφέρον των αρχαίων μαθηματικών. Σημειώστε την απουσία της φράσης "αρχαίοι αστρονόμοι". Οι μαθηματικοί ήταν οι αστρονόμοι εκείνης της εποχής, που με τις γνώσεις και τις δεξιότητές τους προσπάθησαν να βοηθήσουν σε αυτό το μεγάλο εγχείρημα εκείνης της εποχής.

Σε αυτό το φύλλο εργασίας θα δούμε μερικά από τα επιτεύγματά τους και τον τρόπο με τον οποίον σκέφτηκαν προκειμένου να καταλήξουν στα συμπεράσματά τους.

Απόσταση της Σελήνης από τη Γη (Ίππαρχος 190 – 120 π.Χ.)



Ας υποθέσουμε πως ο Ίππαρχος και ο Αχιλλέας κάθονται σε δύο σημεία πάνω στη Γη, από τα οποία φαίνεται η Σελήνη και στους δύο ταυτόχρονα, με τρόπο ώστε στον Ίππαρχο βρίσκεται σε οριζόντια ευθεία, ενώ στον Αχιλλέα βρίσκεται ακριβώς από πάνω του (στην κατακόρυφη ευθεία).

Σχηματίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο $ΙΚΣ$ ($\hat{Ι}=90^o$) του οποίου η υποτείνουσα διέρχεται από το σημείο που στέκεται ο Αχιλλέας. Αν η απόσταση ανάμεσα στον Ίππαρχο και τον Αχιλλέα είναι γνωστή (μήκος τόξου $ΙΑ$= 6218 μίλια) και δεδομένου ότι η ακτίνα της γης είναι 4000 μίλια, μπορείτε να υπολογίσετε το μέτρο του τόξου (την επίκεντρη γωνία $Ι\widehat{Κ}Σ$);
(Υπενθυμίζεται ότι ο τύπος που δίνει το μήκος της περιμέτρου ενός κύκλου είναι $L=2\pi r$).

Απάντηση:

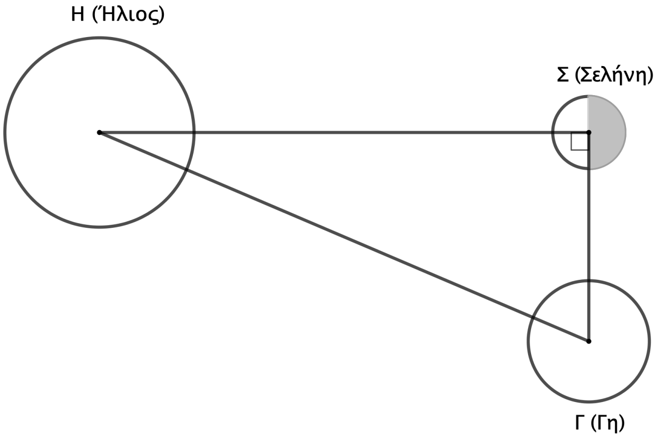
Αφού είναι γνωστή η γωνία $Ι\widehat{Κ}Σ$, μπορείτε με τη βοήθεια του ορισμού του συνημιτόνου στα ορθογώνια τρίγωνα να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $ΚΣ$;

Απάντηση:

Η απόσταση της Σελήνης από τη Γη είναι ίση με το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $ΚΣ$ ελαττωμένο κατά το μήκος $ΚΑ$ (την ακτίνα της Γης). Πόση είναι η απόσταση;

Απάντηση:

Απόσταση του Ήλιου από τη Γη (Αρίσταρχος 310 – 230 π.Χ.)



Κάποιες χρονικές στιγμές του μήνα, το φεγγάρι εμφανίζεται στον ουρανό «μισό». Είναι οι στιγμές εκείνες, που οι ακτίνες του Ήλιου πέφτουν κάθετα στη Σελήνη σε σχέση με την ευθεία που την κοιτάμε από τη Γη.

Αν μία τέτοια χρονική στιγμή, ο Ήλιος είναι ορατός από τη Γη, τότε μπορεί να μετρηθεί η γωνία $\widehat{ΗΓΣ}$ που σχηματίζεται. Ας υποθέσουμε ότι είναι 87^o, η τιμή που βρήκε ο Αρίσταρχος. Ο Αρίσταρχος τότε, μπόρεσε να προσδιορίσει με γεωμετρικό τρόπο, τον λόγο της απόστασης του Ήλιου από τη Γη προς την απόσταση της Σελήνης από τη Γη. Να υπολογίσετε με τριγωνομετρικό τρόπο τον ίδιο λόγο $\frac{ΣΓ}{ΗΓ}$ (ο τρόπος αυτός δεν ήταν γνωστός την εποχή που έζησε ο Αρίσταρχος).

Απάντηση:

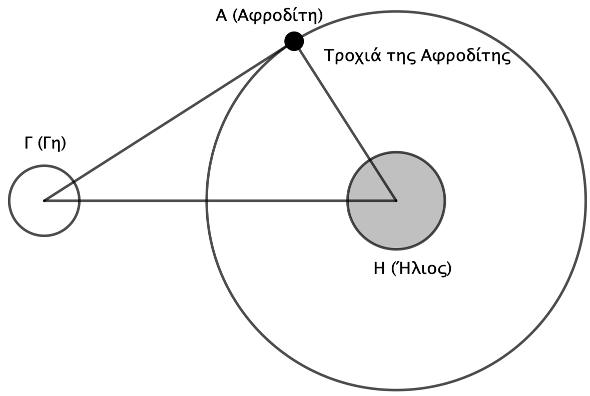
Αν είναι γνωστή η απόσταση της Σελήνης από τη Γη (περίπου 240.000 μίλια), να υπολογίσετε την απόσταση του Ήλιου από τη Γη.

Απάντηση:

Σε αυτό το σημείο να σημειώσουμε κάποια μικρά θέματα που πρέπει να ληφθούν υπόψη. Κατ' αρχάς, η γωνία $\widehat{ΗΓΣ}$ θα είναι πολύ κοντά στις 90 μοίρες. (Ο Αρίσταρχος ισχυρίστηκε ότι ήταν 87 μοίρες). Συνεπώς, μικρά σφάλματα στη μέτρησή της, θα έχουν σοβαρές επιπτώσεις στις προσδιορισμένες αποστάσεις. Επίσης, αν ο Ήλιος είναι κοντά στον ορίζοντα, η διαδρομή του φωτός ΗΓ θα κάμπτεται, καθιστώντας τη μέτρηση ανακριβή. Ένα τρίτο θέμα είναι ο προσδιορισμός της χρονικής στιγμής στην οποία η Σελήνη φωτίζεται ακριβώς η μισή.

Σημειώστε επίσης, ότι για να βρείτε την απόσταση από τον Ήλιο, πρέπει να ξέρουμε την απόσταση από τη Σελήνη. Νωρίτερα σημειώσαμε ότι για να βρούμε την απόσταση από τη Σελήνη απαιτήσαμε να γνωρίζουμε την ακτίνα της Γης. Δεδομένου ότι η γνώση της ακτίνας της Γης ήταν καθοριστική για τον προσδιορισμό όλων των αποστάσεων, έχουμε ίσως το σημαντικότερο ζήτημα, το οποίο λύθηκε αρχικά από τον Ερατοσθένη περίπου το 200 π.Χ..

Η απόσταση της Αφροδίτης από τον Ήλιο



Η ακτίνα της τροχιάς της Αφροδίτης είναι μικρότερη από την ακτίνα της τροχιάς της Γης. Όπως διαγράφεται η τροχιά της Αφροδίτης γύρω από τον Ήλιο, παρατηρούμε ότι η γωνία $\widehat{ΑΓΗ}$ φθάνει στη μέγιστη τιμή της σε δύο θέσεις. Σε κάθε μια από αυτές τις θέσεις μέγιστου γωνιακού διαχωρισμού, η γωνία $\widehat{ΑΓΗ}$ είναι ορθή.

Όταν ο ήλιος ήταν ακριβώς κάτω από τον ορίζοντα, και η Αφροδίτη βρισκόταν σε αυτή τη θέση μέγιστου γωνιακού διαχωρισμού, ήταν πιο εύκολα ορατή από τη Γη. Ανάλογα με το αν ο ήλιος ανέτειλε ή έδυε, αυτός ο πλανήτης ήταν γνωστός ως «πρωινό αστέρι» ή «απογευματινό αστέρι».

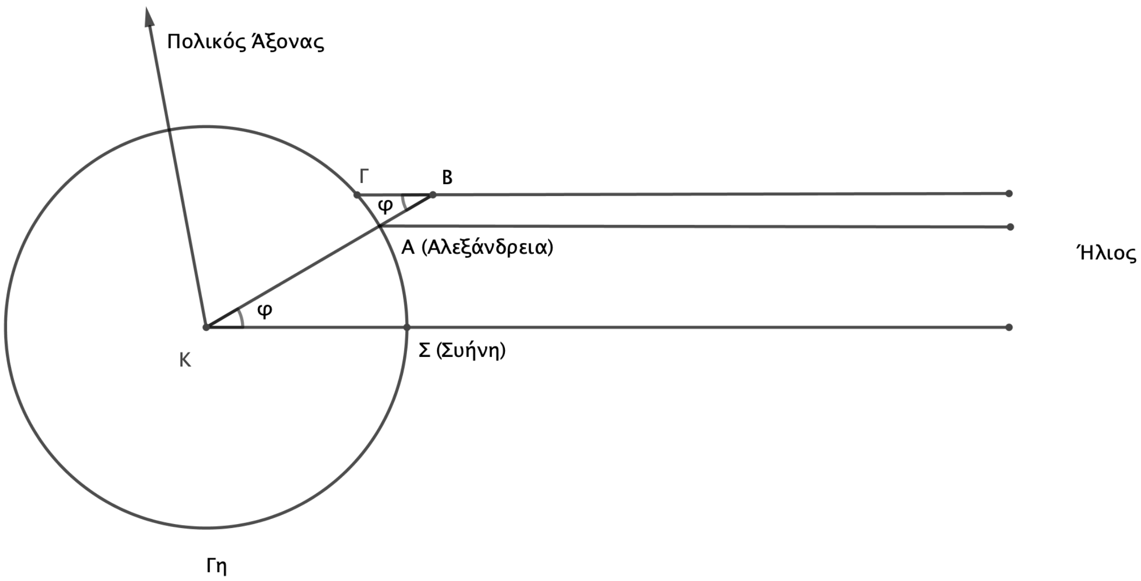
Κάποιος που γνωρίζει την απόσταση του Ήλιου από τη Γη (93 εκατομμύρια μίλια) και μπορεί να μετρήσει αυτή τη μέγιστη γωνία (περίπου 46 μοίρες), μπορεί να καθορίσει την ακτίνα της τροχιάς της Αφροδίτης. Να υπολογίσετε την ακτίνα της τροχιάς της Αφροδίτης γύρω από τον Ήλιο.

Απάντηση:

Παρόμοιος τρόπος θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και για τον υπολογισμό της ακτίνας της τροχιάς του Ερμή γύρω από τον Ήλιο, αν και δε θα μπορούσε αυτό να γίνει εφικτό στα αρχαία χρόνια. Η γωνία που σχηματίζεται στη θέση μέγιστου γωνιακού διαχωρισμού είναι μόνο 23 μοίρες κι επειδή είναι πολύ μικρή, ο Ερμής είναι ορατός μόνο με τη βοήθεια τηλεσκοπίων που ανακαλύφθηκαν πολύ αργότερα. Να υπολογίσετε την ακτίνα της τροχιάς του Ερμή γύρω από τον Ήλιο.

Απάντηση:

Η περίμετρος της Γης από τον Ερατοσθένη (280 – 195 π.Χ.)



Ένα από τα πιο σημαντικά πειράματα που πραγματοποιήθηκε στην ιστορία της ανθρωπότητας ήταν η μέτρηση της περιφέρειας της Γης από τον Ερατοσθένη τον 3ο π.Χ. αιώνα. Ο Ερατοσθένης πληροφορήθηκε ότι στη Συήνη (σημερινό Ασουάν) ο Ήλιος κατά το μεσημέρι του θερινού ηλιοστασίου ρίχνει τις ακτίνες του κάθετα στον ορίζοντα και φωτίζει ολόκληρο τον πυθμένα ενός πολύ βαθιού πηγαδιού. Την ίδια στιγμή στην Αλεξάνδρεια όπου ζούσε, τοποθέτησε κατακόρυφα έναν πάσσαλο AB και αφού βρήκε το μήκος της σκιάς $A\Gamma$ που αφήνει, υπολόγισε τη γωνία φ. Επειδή δεν μπορούσε να είναι σίγουρος ότι η μέτρηση θα γινόταν απολύτως ταυτόχρονα, απλώς έκανε τη μέτρηση όταν η σκιά πήρε τη μικρότερή της τιμή.

Γνωρίζοντας το μήκος αυτής της μικρότερης σκιάς και το ύψος του πασσάλου του, ήταν σε θέση να προσδιορίσει ότι η γωνία $\widehat{AB\Gamma}$ ήταν ίση με 1/50 των 360 μοιρών, δηλαδή 7 1/5 μοίρες. Επειδή οι ακτίνες του Ήλιου είναι παράλληλες μεταξύ τους, άρα και η γωνία $\widehat{AK\Sigma}$ θα είναι 7 1/5 μοίρες. Γνωρίζοντας ότι η απόσταση μεταξύ της Συήνης και της Αλεξάνδρειας ήταν 5000 στάδια (μονάδα μέτρησης απόστασης της εποχής), ο Ερατοσθένης ήταν σε θέση να προσδιορίσει την περιφέρεια της Γης. Ίση με πόσα στάδια την υπολόγισε;

Απάντηση:

Πόσο μήκος είχε ένα στάδιο; Δυστυχώς, υπάρχουν πολλά διαφορετικά στάδια από την αρχαιότητα. Δεν γνωρίζουμε ποιον ορισμό χρησιμοποιεί ο Ερατοσθένης. Ωστόσο, γνωρίζουμε τη σύγχρονη απόσταση μεταξύ της Συήνης και της Αλεξάνδρειας και είναι 493 μίλια, οπότε μπορούμε να επεξεργαστούμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας αυτές τις σύγχρονες μονάδες μέτρησης. Να υπολογίσετε την περιφέρεια της Γης με αυτά τα σύγχρονα δεδομένα;

Απάντηση:

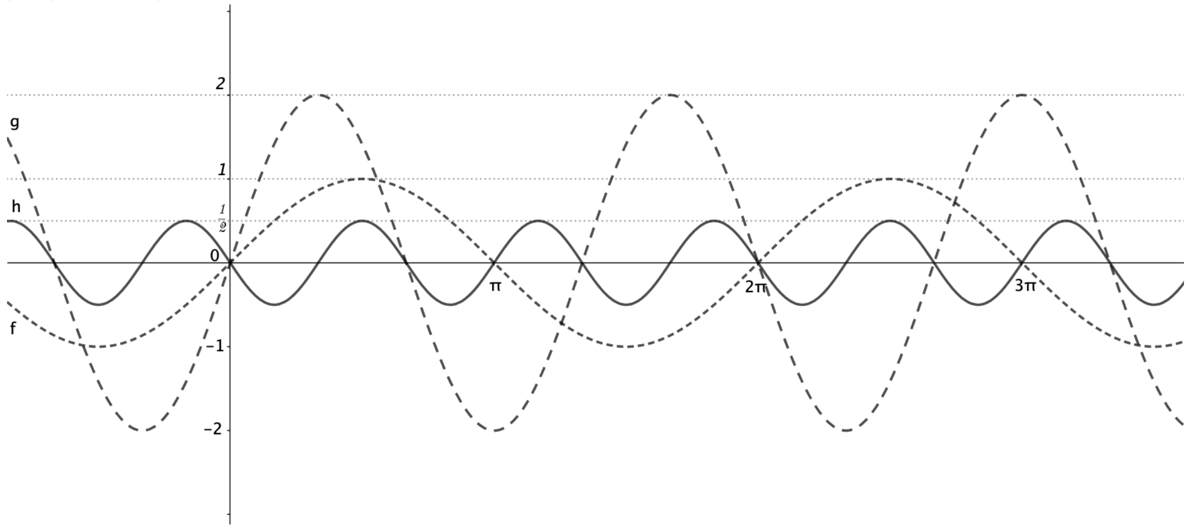
Γραπτή αξιολόγηση στην Τριγωνομετρία της Β' Λυκείου

<u>Θέμα 1ο</u>

α) Να συμπληρώσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων στα παρακάτω διαστήματα:

Συνάρτηση	Διάστημα $[0,\frac{\pi}{2}]$	Διάστημα $[\frac{\pi}{2},\pi]$	Διάστημα $[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	Διάστημα $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
f(x)=ημx				
g(x)=συνx				

β) Να συμπληρώσετε τα στοιχεία που λείπουν από τους τύπους των συναρτήσεων με γραφικές παραστάσεις:



Συνάρτηση	ρ	ω
f(x)=ρ·ημ(ωx)		
g(x)=ρ·ημ(ωx)		
h(x)=ρ·ημ(ωx)		

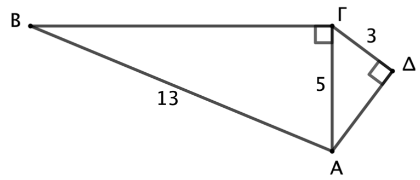
<u>Θέμα 2ο</u>

α) Αν $\alpha \in [\frac{\pi}{2},\pi]$ και $\eta\mu\alpha = \frac{\sqrt{27}}{14}$, να υπολογίσετε:

iii. $\eta\mu\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$

iv. $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \frac{\pi}{3})$

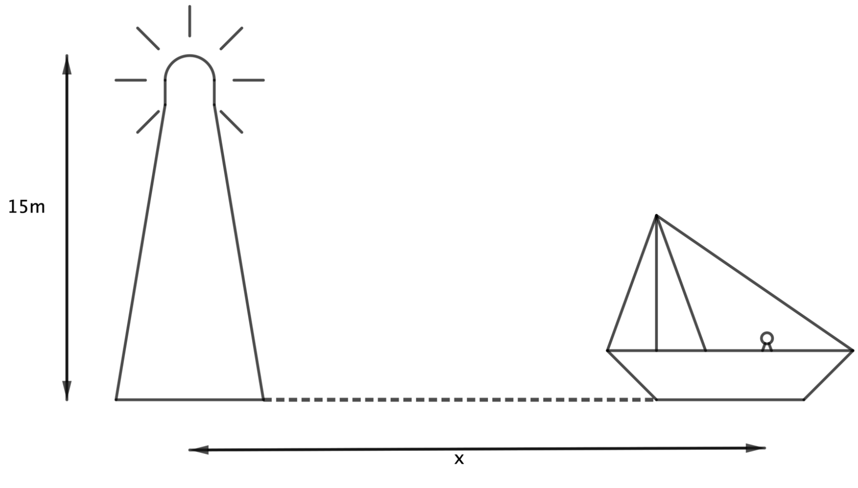
β) Στο διπλανό σχήμα, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει ΑΒ = 13, ΓΔ = 3 και ΑΓ = 5. Επίσης ΑΓ ⊥ ΒΓ και ΑΔ ⊥ ΓΔ.



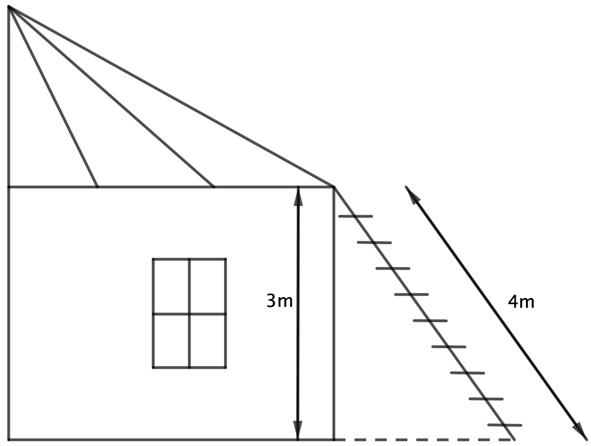
Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{A}$.

<u>Θέμα 3ο</u>

α) Στο σχήμα που ακολουθεί βλέπουμε έναν φάρο, που ο φανός του απέχει από την επιφάνεια της θάλασσας 15m. Μέσα από τη βάρκα κάποιος βλέπει το φως του φάρου με γωνία 30 μοιρών σε σχέση με την επιφάνεια της θάλασσας. Ποια είναι η απόσταση της βάρκας από την ακτή;



β) Για να στηρίξουμε μία σκάλα με ασφάλεια σε τοίχο, πρέπει αυτή να σχηματίζει με το έδαφος γωνία μεγαλύτερη από 40^o. Αν ένας άνθρωπος στηρίξει μία σκάλα 4 μέτρων όπως στο σχήμα που φαίνεται παρακάτω, θα μπορέσει να την χρησιμοποιήσει με ασφάλεια ή όχι και γιατί;



ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Γωνία	ημω	συνω	εφω
0°	0,000	1,000	0,000
1°	0,017	0,999	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,070	0,998	0,070
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,395	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,990	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,348
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
28°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,510
28°	0,469	0,883	0,532
29°	0.485	0,875	0,554
30°	0,500	0,866	0,577
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0.649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700
38°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,810
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,900
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966

Γωνία	ημω	συνω	εφω
45°	0,707	0,707	1,000
46°	0,720	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,150
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1.280
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	1,600
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732
61°	0,875	0,485	1,804
62°	0,883	0,470	1,881
63°	0,891	0,454	1,963
64°	0,899	0,438	2,050
65°	0,906	0.423	2,145
66°	0,914	0,407	2,246
67°	0,921	0,391	2,356
68°	0,927	0,375	2,475
69°	0,934	0,358	2,605
70°	0,940	0,342	2,748
71°	0,946	0,326	2,904
72°	0,951	0,309	3,078
73°	0,956	0,292	3,271
74°	0,961	0,276	3,487
75°	0,966	0,259	3,732
76°	0,970	0,242	4,011
77°	0,974	0.225	4,333
78°	0,978	0,203	4,705
79°	0,982	0,191	5,145
80°	0,985	0,174	5,671
81°	0,988	0.156	6,314
82°	0,990	0,139	7,115
83°	0,993	0,122	8,144
84°	0,995	0.105	9,514
85°	0,996	0,087	11,430
86°	0,998	0,070	14,301
87°	0,999	0,052	19,081
88°	0,999	0,035	28,636
89°	0,999	0,018	57,290
90°	1,000	0,000	

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

1) Ποια είναι η άποψή σας για τη χρησιμοποίηση των ιστορικών στοιχείων στη διδασκαλία; Πιστεύετε ότι ήταν βαρετή, ενδιαφέρουσα, ωφέλιμη, αποτελεσματική, δύσκολη ως προς την κατανόηση, αδιάφορη; Απαντήστε με όσους χαρακτηρισμούς θέλετε (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και δικούς σας) και δικαιολογείστε τους.

………
………
………
………
………
………
………
………
………

2) Πιστεύετε ότι η χρήση του λογισμικού GeoGebra σας διευκόλυνε στην κατανόηση εννοιών και ιδιοτήτων; Τι θεωρείτε θετικό στη χρήση του και τι όχι;

………
………
………
………
………
………
………
………
………

3) Βάλτε σε μία σειρά τα φύλλα εργασίας α, β και γ ξεκινώντας με αυτό που σας άρεσε περισσότερο και καταλήγοντας σε αυτό που σας άρεσε λιγότερο.

………

α) Φύλλο εργασίας με χρήση αρχείων λογισμικού GeoGebra
β) Φύλλο εργασίας με το θεώρημα του Πτολεμαίου
γ) Φύλλο εργασίας με υπολογισμούς αποστάσεων και μεγεθών ουρανίων σωμάτων

Γιατί σας άρεσαν με αυτή τη σειρά;

………
………
………
………
………
………
………
………

4) Με τα φύλλα εργασίας που κάνατε

α) Κάτι που έμαθα είναι ……………………………………………………………………………………………
………
………

β) Κάτι που με εξέπληξε είναι …………………………………………………………………………………
………
………

γ) Κάτι που με δυσκόλεψε είναι ………………………………………………………………………………
………
………

5) Βαθμολογώ από το 1 μέχρι το 5 πόσο μου άρεσε το καθένα φύλλο εργασίας (1=το λιγότερο,5=το περισσότερο)

α)	Φύλλο εργασίας με χρήση αρχείων λογισμικού GeoGebra	1	2	3	4	5
β)	Φύλλο εργασίας με θεώρημα Πτολεμαίου	1	2	3	4	5
γ)	Φύλλο εργασίας με υπολογισμούς αποστάσεων και μεγεθών ουρανίων σωμάτων	1	2	3	4	5

Γιατί;
………
………
………
………

6) Βαθμολογώ από το 1 μέχρι το 5 πόσο με βοήθησε το καθένα φύλλο εργασίας (1=το λιγότερο, 5=το περισσότερο)

α)	Φύλλο εργασίας με χρήση αρχείων λογισμικού GeoGebra	1	2	3	4	5
β)	Φύλλο εργασίας με θεώρημα Πτολεμαίου	1	2	3	4	5
γ)	Φύλλο εργασίας με υπολογισμούς αποστάσεων και μεγεθών ουρανίων σωμάτων	1	2	3	4	5

Γιατί;
………
………
………
………

7) Βαθμολογώ από το 1 μέχρι το 5 πόσο με δυσκόλεψε το καθένα φύλλο εργασίας (1=το λιγότερο,5=το περισσότερο)

α)	Φύλλο εργασίας με χρήση αρχείων λογισμικού GeoGebra	1	2	3	4	5
β)	Φύλλο εργασίας με θεώρημα Πτολεμαίου	1	2	3	4	5
γ)	Φύλλο εργασίας με υπολογισμούς αποστάσεων και μεγεθών ουρανίων σωμάτων	1	2	3	4	5

Γιατί;
………
………
………
………

8) Βαθμολογώ από το 1 μέχρι το 5 πόσο συμφωνώ με καθεμία από τις ακόλουθες προτάσεις (1=το λιγότερο, 5=το περισσότερο)
Με τα φύλλα εργασίας…

α)	Άλλαξε την άποψή μου για την Τριγωνομετρία	1	2	3	4	5
β)	Με βοήθησαν να λύνω ασκήσεις της σχολικής ύλης	1	2	3	4	5
γ)	Έμαθα πράγματα για την Ιστορία των Μαθηματικών που δεν ήξερα	1	2	3	4	5

9) Να προτείνετε κάτι που θα αλλάζατε σε ένα ή σε περισσότερα φύλλα εργασίας, έτσι ώστε να γίνουν πιο αποτελεσματικά ή πιο ευχάριστα ή πιο ενδιαφέροντα.
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………