ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ -ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜ. ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜ.ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ-ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Μαθηματική Εκπαίδευση Β' Ηλικιακού Κύκλου

Διπλωματική εργασία

Διερεύνηση και αξιοποίηση των πόρων γνώσης μαθητών από ποικίλα πολιτισμικά πλαίσια στη διδασκαλία των μαθηματικών στο πλαίσιο του κοινωνικού φροντιστηρίου

Της Χαραλαμπίδου Μαρίας (Α.Μ:729)

Επιβλέπουσα: Σταθοπούλου Χαρούλα,Καθηγήτρια (ΠΤΕΑ)Παν/μιο Θεσσαλίας
Εξεταστική επιτροπή:**Χαράλαμπος Σακονίδης, Καθηγητής(ΔΠΘ)**
Ελένη Γκανά, Επ, Καθηγήτρια, Παν/μιο Θεσσαλίας

Περίληψη

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι να μελετήσει αν η αξιοποίηση των πόρων γνώσης μαθητών από ποικίλα πολιτισμικά πλαίσια συμβάλλει στο πλαίσιο της διδασκαλίας μαθηματικών και συγκεκριμένα των ενοτήτων του εμβαδού και των κλασμάτων. Το θεωρητικό υπόβαθρο της εργασίας σχετίζεται με την έννοια της άτυπης γνώσης και της μεταφοράς της γνώσης στα μαθηματικά, και συγκεκριμένα όσον αφορά στις ενότητες: κλάσματα και εμβαδόν. Επίσης, θα εξεταστεί η διδασκαλία των μαθηματικών στη σχολική τάξη στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, μέσω της παρουσίασης των βασικών στόχων του αναλυτικού προγράμματος όσον αφορά στα κλάσματα και στο εμβαδόν. Το θεωρητικό πλαίσιο θα αναλυθεί υπό το πρίσμα της πολιτισμικά ευαίσθητης διδασκαλίας. Πρόκειται για ποιοτική έρευνα που σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε σε μια τάξη με 10 μαθητές και μαθήτριες, εκ των οποίων οι 6 είναι κορίτσια και οι 4 είναι αγόρια. Τέσσερα από τα παιδιά της τάξης μας αντιμετωπίζουν μαθησιακές δυσκολίες. Μας απασχολεί πρωτίστως η ανάδειξη του τρόπου σκέψης και εκτίμησης των ίδιων των μαθητών για τα διάφορα μαθηματικά προβλήματα, καθώς και η διασύνδεση των γνώσεων με τις πρακτικές που χρησιμοποιούν εντός της οικογένειας. Η μεθοδολογία είναι η ποιοτική έρευνα, με χαρακτηριστικά έρευνας δράσης, με βασικά ερευνητικά εργαλεία τη χρήση φύλλων εργασίας με ερωτήσεις και μαθηματικά προβλήματα. Η παρατήρηση ήταν συμμετοχική. Το πεδίο της έρευνας είναι η τάξη σε ένα κοινωνικό φροντιστήριο στην Κατερίνη (αίθουσα εκκλησίας). η οποία επιλέχθηκε με το σκεπτικό ότι παρουσιάζουν τις μεγαλύτερες δυσκολίες στα προς μελέτη μαθηματικά φαινόμενα. Ο χρόνος εκτείνεται σε 1 διδακτικό έτος και σε 1 μάθημα ανά εβδομάδα.

Λέξεις- κλειδιά: *άτυπη γνώση, μαθηματικά, κλάσματα, εμβαδόν, κοινωνικό φροντιστήριο*

ABSTRACT

The purpose of this paper is to investigate whether the utilization of students' knowledge resources from a variety of cultural contexts contributes to the teaching of mathematics and in particular in the concepts of area and fractional modules. The theoretical background of the paper is related to the concept of informal knowledge and the transfer of knowledge in mathematics, and in particular in the modules: fractions and area. In addition, the teaching of mathematics in the classroom in the Greek education system will be examined, by presenting the basic objectives of the syllabus in terms of fractions and area. The theoretical framework will be analyzed in the light of the culturally sensitive teaching. This is a qualitative research designed and implemented in a classroom of 10 students, among whom 6 are girls and 4 are boys. Four of the children in our class have learning disabilities. The main issue is the students' thinking and appreciation of the various mathematics problems, as well as linking knowledge with the practices they use within the family. The methodology is qualitative research, with action research features, with the basic research tools using question papers and mathematical problems. The observation was participatory. The field of research is the classroom in a social tutorial in Katerini (church room), which was chosen on the grounds that they present the greatest difficulties in the mathematical issues that are studied. The lessons last for 1 academic year and 1 lesson per week.

Keywords: *informal knowledge, mathematics, fractions, area, community tutorial school*

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Αφετηρία της παρούσας εργασίας είναι η εμπειρία μου από τη διδασκαλία των μαθηματικών στο πλαίσιο του κοινωνικού φροντιστηρίου σε μια αστική περιοχή της Βόρειας Ελλάδας. Η σύνθεση του μαθητικού πληθυσμού ήταν μαθητές και μαθήτριες από χαμηλά κοινωνικοοικονομικά στρώματα, με μέτριο έως χαμηλό μορφωτικό υπόβαθρο και με την ελληνική ως δεύτερη γλώσσα . Από την αρχή της διδασκαλίας παρατήρησα ότι υπήρχαν ελλείψεις στην κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών, τεχνικών και διαδικασιών των σχολικών μαθηματικών. Ιδιαιτέρως, παρατήρησα ότι η πλειονότητα των μαθημάτων δεν ανταποκρίνονταν ικανοποιητικά στην επίλυση προβλημάτων.

Η διαπίστωση ότι οι μαθητές από τα ποικίλα πολιτισμικά υπόβαθρα αντιμετώπιζαν δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων υπαγόρευσε την ανάγκη περαιτέρω διερεύνησης της γνώσης με την οποία οι μαθητές έρχονταν στο φροντιστήριο και την προσπάθεια αξιοποίησης αυτής της γνώσης.

Έτσι ο στόχος της παρούσας εργασίας είναι να μελετήσει αν η αξιοποίηση των πόρων γνώσης μαθητών από ποικίλα πολιτισμικά πλαίσια συμβάλλει στο συγκεκριμένο πλαίσιο στη βελτίωση της διδασκαλίας/μάθησης των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, θα εξεταστεί το ζήτημα των κλασμάτων και του εμβαδού.

Πρόκειται για ποιοτική έρευνα που σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε από 10 μαθητές και μαθήτριες, εκ των οποίων τα 6 είναι κορίτσια και τα 4 είναι αγόρια, με προέλευση από την Ελλάδα, την Αλβανία, τη Ρουμανία και τη Συρία. Τέσσερα από τα παιδιά της τάξης μας αντιμετωπίζουν μαθησιακές δυσκολίες: τα δύο ελαφριάς μόνο μορφής, ενώ τα άλλα δύο παρακολουθούν παράλληλα τμήμα ένταξης μόνο στο μάθημα της γλώσσας.

Η εργασία είναι χωρισμένη σε δύο τμήματα, το θεωρητικό και το ερευνητικό. Αρχικά, μέσω της βιβλιογραφικής ανασκόπησης, θα ανατρέξουμε στις βασικές έρευνες που εξετάζουν το ζήτημα της άτυπης γνώσης και της μεταφοράς της γνώσης στα μαθηματικά, και συγκεκριμένα όσον αφορά τις ενότητες: κλάσματα και εμβαδόν. Τα κλάσματα και κατ επέκταση οι ρητοί παρουσιάζουν ενδιαφέρον γιατί διατρέχουν μεγάλο μέρος της ύλης των μαθηματικών και επιπλέον δυσκολεύουν τους μαθητές, ενώ συνδέονται με καθημερινές εμπειρίες των μαθητών. Με καθημερινή εμπειρία επίσης συνδέεται το εμβαδόν.

Έπειτα, στο θεωρητικό υπόβαθρο, θα εξετάσουμε την άτυπη γνώση, την έννοια της μεταφοράς της γνώσης και την κριτική διδασκαλία των μαθηματικών, στο πρώτο, δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο αντίστοιχα. Στο τέταρτο κεφάλαιο θα εξεταστεί η διδασκαλία των μαθηματικών στη σχολική τάξη στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, μέσω της παρουσίασης των βασικών στόχων του αναλυτικού προγράμματος όσον αφορά στα κλάσματα και στο εμβαδόν. Στο κεφάλαιο πέντε θα εξετάσουμε τη ρεαλιστική διάσταση των μαθηματικών, που συνιστά και τη βασική στοχοθεσία της παρούσας εργασίας. Στο έκτο κεφάλαιο θα προσεγγίσουμε το ζήτημα των πόρων γνώσης, που αποτελούν το βασικό μέσο αξιοποίησης της άτυπης γνώσης των μαθηματικών. Τέλος, στο έβδομο κεφάλαιο θα προσεγγίσουμε το ζήτημα της πολιτισμικά ευαίσθητης διδασκαλίας.

Στο ερευνητικό μέρος, αρχικά θα δώσουμε αναλυτικά στοιχεία για την πορεία της έρευνας και για τα βασικά στοιχεία που συγκροτούν το προς μελέτη δείγμα. Η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών θα εξεταστεί με βάση το θεωρητικό υπόβαθρο, και θα δοθούν αυτούσια κομμάτια από τις απαντήσεις τους στα φύλλα εργασίας. Τέλος, τα συμπεράσματα θα επικεντρωθούν στην απάντηση στα ερευνητικά ερωτήματα, μέσω μίας διαλογικής διαδικασίας με το θεωρητικό υπόβαθρο.

Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Στην παρούσα βιβλιογραφική ανασκόπηση, θα εξετάσουμε την εν γένει άτυπη γνώση στη βιβλιογραφία. Η έννοια της άτυπης γνώσης συνιστά το βασικό θεωρητικό πλαίσιο της παρούσας εργασίας, το οποίο συνδέεται με το γενικότερο πλαίσιο της κριτικής παιδαγωγικής, υπό τη σκοπιά δημιουργίας ενός πλαισίου αξιοποίησης και κριτικής διερεύνησης του γνωστικού υπόβαθρου των μαθητών, με βάση το εν γένει οικονομικό και πολιτισμικό τους κεφάλαιο.

Οι ανάγκες των μαθητών έχουν να κάνουν με τις γενικότερες αλλαγές στις διδακτικές πρακτικές και σχετίζονται άμεσα με τις γενικότερες μαθησιακές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν πολλοί μαθητές τα τελευταία χρόνια, ακόμη και χρόνια μετά την τυπική εκπαίδευση. Οι εκπαιδευτικοί είναι σε μια περίπλοκη θέση με ποικίλους ρόλους και αρμοδιότητες, και καλούνται να εφαρμόσουν τη διδακτική τους πράξη με γνώμονα τις ανάγκες όχι μόνον του μέσου μαθητή, αλλά και με βάση τις ιδιαίτερες ανάγκες, κλίσεις και ιδιαιτερότητες μαθητών που δεν ανήκουν στον λεγόμενο μέσο όρο. Γι’ αυτό και απαιτείται όχι μόνον η επαγγελματική τους κατάρτιση αλλά και η εν γένει ανταλλαγή απόψεων και εμπειριών μεταξύ των εκπαιδευτικών, με στόχο την ουσιαστική αλληλεπίδραση με τη σχολική πραγματικότητα, ούτως ώστε να είναι έτοιμοι να κάνουν αλλαγές όπου κρίνεται αναγκαίο (Krainer, 2008).

Πέραν από το πλαίσιο επαγγελματισμού, είναι απαραίτητο ο εκπαιδευτικός να προβεί και σε ορισμένες αλλαγές, όπου το κρίνει απαραίτητο, ενώ ταυτόχρονα οφείλει να αναπτύσσει και να εξελίσσει αέναα τις γνώσεις και τις δεξιότητές του, μια διαδικασία η οποία ορίζεται από πολλούς ως μια συλλογική κουλτούρα μάθησης (Αρβανίτη, 2013).Επιπλέον, πρέπει να είναι σε θέση να χρησιμοποιούν τις δικές τους γνώσεις ευέλικτα στην πράξη για την αξιολόγηση και την προσαρμογή εκπαιδευτικών υλικών, να χειρίζονται το μαθησιακό περιεχόμενο με ειλικρινείς και προσβάσιμους τρόπους, να σχεδιάζουν και να διεξάγουν τη διδασκαλία και να αξιολογούν το τι ακριβώς μαθαίνουν οι ενήλικοι μαθητές, ενώ ταυτόχρονα πρέπει να μπορούν να παρατηρούν και να αφουγκράζονται τις εκφράσεις μαθηματικών ιδεών των μαθητών και να σχεδιάζουν κατάλληλους τρόπους ανταπόκρισης.

Ένας δάσκαλος πρέπει να ερμηνεύσει, επίσης, τη συλλογιστική των μαθητών στη διαδικασία διά βίου μάθησης, καθώς και τον βαθμό ανταπόκρισής τους στις διάφορες μεθόδους που χρησιμοποιούνται στην τάξη κατά την επίλυση των προβλημάτων. Η διδασκαλία μαθηματικών απαιτεί την ικανότητα να βλέπεις τη διά βίου μάθηση μέσα από τις δυνατότητες σε μια εργασία καθώς και μέσα από το μέγεθος της προσαρμογής που έχουν οι μαθητές καθώς εξοικειώνονται με τις μαθηματικές ιδέες. Για ν' αποκτήσουν οι μαθητές γνώσεις και εμπειρίες τέτοιου είδους, πρέπει να ενεργούν και σε αντίστοιχα περιβάλλοντα, με άλλα λόγια σε περιβάλλοντα που θα φέρουν τους μαθητές αντιμέτωπους με συγκεκριμένα κοινωνικά προβλήματα. Για τον λόγο αυτό, επιλέγονται πολύ προσεκτικά από τους εκπαιδευτικούς. Στόχος είναι να αποκτήσουν οι μαθητές τέτοια βιώματα, ώστε να κατασκευάζουν νοήματα, να τα συγκρίνουν με την προηγούμενη συναφή γνώση τους και να την ανακατασκευάσουν στηριζόμενοι στις νέες εμπειρίες που βιώνουν, μέσω των κριτικών συζητήσεων που θα διεξάγονται. Αυτή η διαδικασία κατ' ουσίαν οδηγεί στη χειραφέτηση των μαθητών.

Μέσω της συζήτησης, οι εκπαιδευτικοί ωθούν τους μαθητές να εκφράσουν αυτά που γνωρίζουν για ένα πρόβλημα μαθηματικών, κι έπειτα τους βοηθούν να το αναλύσουν, να προβληματιστούν γύρω απ' αυτό και να ανακατασκευάσουν τα νοήματα σε νέα αξιακά συμφραζόμενα. Σύμφωνα με τη διεθνή βιβλιογραφία (Krainer, 2008), προτείνονται συγκεκριμένα μοντέλα τα οποία προωθούν την ανάπτυξη των δεξιοτήτων και τα οποία δημιουργούν ένα συγκεκριμένο μαθησιακό πλαίσιο, εστιάζοντας στην πρωτοβάθμια ή δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Τα μοντέλα αυτά περιλαμβάνουν τυπικές δραστηριότητες με επικεφαλής εξωτερικούς της εκπαιδευτικής διαδικασίας, όπως για παράδειγμα με επιστήμονες ή ειδικευμένους εκπαιδευτικούς ή άτυπες αυτοοργανωμένες δραστηριότητες (για παράδειγμα ομάδα μαθηματικών οργανωμένη από τους ίδιους). Επιπλέον, υπάρχουν και οι μεμονωμένες διοργανώσεις ή τα συνεχή και μακροχρόνια προγράμματα, ομαδικά μαθήματα μαθηματικών μικρής ή εθνικής εμβέλειας, ετερογενείς ομάδες συμμετεχόντων, για παράδειγμα συνεργαζόμενοι μαθηματικοί και φυσικοί από διάφορα σχολεία ή περιοχές. Σε ορισμένες περιπτώσεις, υφίστανται και προγράμματα σε μια συγκεκριμένη σχολική μονάδα, τα οποία στοχεύουν στη διδασκαλία μαθηματικών σε μια εστιασμένη περιοχή, καθώς και προγράμματα τα οποία σχετίζονται με υποχρεωτική ή εθελοντική συμμετοχή σε μαθήματα ενός δικτύου εκπαιδευτικών (Σιώπη & Χασάπης).

Οι Tsao & Pan (2011), σε δείγμα 235 μαθητών και μαθητριών Ε΄ τάξης Δημοτικού, διαπίστωσαν μια μέτρια επίδοση στο τεστ υπολογιστικών εκτιμήσεων (58,48% επιτυχία γενικά), με σημαντικότερες δυσκολίες στην εκτίμηση με κλάσματα (επιτυχία μόλις 46,63%). Επιπλέον, οι Yang & Wu (2012) έδωσαν δύο τεστ σε 198 μαθητές της Β΄ Γυμνασίου, ένα με καθαρά αριθμητικά προβλήματα εκτίμησης και ένα με πλαισιωμένα. Οι συμμετέχοντες παρουσίασαν καλύτερες επιδόσεις στα καθαρά αριθμητικά προβλήματα. Οι Δεσλή & Ανεστάκης (2014) σε δείγμα 113 υποψήφιων εκπαιδευτικών δημοτικής εκπαίδευσης διαπίστωσαν καλή επίδοση (68% επιτυχία γενικά) στις υπολογιστικές εκτιμήσεις με διαφοροποιήσεις ανάλογα με το είδος προβλήματος.

Θετικά αποτελέσματα για την υπολογιστική εκτίμηση των ενηλίκων έδωσε έρευνα των Ανεστάκη & Λεμονίδη (2015) που βασίστηκε σε συνέντευξη 15 ενηλίκων και έδειξε πως η κυρίαρχη ενέργεια είναι η στρογγυλοποίηση και πως οι παράγοντες που την επηρεάζουν είναι: οι προϋπάρχουσες εμπειρίες και γνώσεις, το είδος της απαιτούμενης πράξης και οι δυσκολίες που έχουν τα υποκείμενα κατά τη μάθηση.

Μια έρευνα με μεγαλύτερο δείγμα ήταν αυτή των Bana & Dolma (2004), η οποία έλαβε δείγμα από τρεις ετερογενείς τάξεις. Ένα βασικό συμπέρασμα που προέκυψε είναι ότι αρκετοί μαθητές έχουν συνηθίσει τον υπολογισμό με αριθμητικά κομπιουτεράκια, οπότε έχουν εντάξει τις αριθμητικές πράξεις και εκτιμήσεις σε ένα πλαίσιο μηχανιστικής σκέψης και δράσης.

Οι μαθητές στην έρευνα των Singer & Voica (2008)ήταν πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (βαθμοί 5–12, δηλαδή 11–12 έως 18–19 ετών). Συνολικά 262 μαθητές, από τους οποίους τα 143 ήταν κορίτσια και τα 119 αγόρια, απάντησαν στα ερωτηματολόγια. Τα παιδιά που συμμετείχαν στη μελέτη επιλέχθηκαν τυχαία από διαφορετικά σχολεία. Οι ερευνητές χρησιμοποίησαν τέσσερις τρόπους συλλογής δεδομένων: ερωτηματολόγια, συνεντεύξεις, ομάδες εστίασης και μία ειδική ερώτηση σε διαγωνισμό πολλαπλών επιλογών. Καθώς ενδιέφερε να προωθήσουν αποκλίνουσες απόψεις στους μαθητές μέσω ανοιχτών ερωτήσεων, το εύρος των απαντήσεων ήταν πολύ μεγάλο και στις τρεις κατηγορίες πληθυσμού που χρησιμοποιήθηκαν για τη συλλογή δεδομένων. Εξετάζουν τις πρωτογενείς και δευτερογενείς αντιλήψεις των παιδιών για το άπειρο, διερευνώντας κατηγορίες πρωτογενών αντιλήψεων.

Εν προκειμένω, έχουμε αφενός τη δραστηριότητα των ίδιων των μαθητών, λαμβάνοντας υπόψη ταυτόχρονα τις κοινωνικομαθηματικές νόρμες, και αφετέρου τα επιστημολογικά στοιχεία τα οποία σχετίζονται με το εκάστοτε θέμα (όπ.π.). Επιπλέον, πρόκειται για την ανάπτυξη της προσωπικής ιστορίας δυο εκπαιδευτικών-μελών της κοινότητας, οπότε προκύπτουν ποικίλα συμπεράσματα για τον ρόλο της κοινότητας σε μια εν γένει διαδικασία μάθησης, μέσα από ποικίλες πρακτικές και συμμετοχικές δράσεις των ίδιων των εκπαιδευτικών. Ο ρόλος της προσωπικής ιστορίας είναι ιδιαίτερα σημαντικός και για έναν ακόμη λόγο, ότι δηλαδή προωθεί την έννοια της προσωπικής δράσης και της προσωπικής ανάληψης πρωτοβουλιών από την πλευρά των ίδιων των εκπαιδευτικών. Και βέβαια, αυτός ο προσωπικός χαρακτήρας είναι ιδιαίτερα σημαντικός, διότι προωθεί το ρόλο ενός εκπαιδευτικού που έχει την ικανότητα και τη δυνατότητα να τοποθετήσει το δικό του λιθαράκι στην μαθησιακή πορεία, διότι χρησιμοποιώντας διαφορετικές πρακτικές, εκδηλώνει και τα ιδιαίτερα προσωπικά του γνωρίσματα: «Η προσωπική ιστορία ανάπτυξης, ωστόσο, διαφοροποιείται, καθώς ο κάθε εκπαιδευτικός διαθέτει διαφορετικά προσωπικά γνωρίσματα, που φανερώνονται στις πρακτικές της τάξης και τη συμμετοχή στην κοινότητα και διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στις διαδικασίες ανάπτυξης» (όπ.π.: XVI). Σε γενικές γραμμές, αυτού του είδους η προσέγγιση επιτρέπει και μια μαθησιακή πορεία η οποία διαφοροποιείται ανάλογα και με τη φύση της συλλογιστικής πορείας των ίδιων των μαθητών, διότι εδράζεται σε ποικίλες κοινωνικομαθηματικές νόρμες. Επιπλέον, το εν λόγω πρόγραμμα επαγγελματικής ανάπτυξης έχει ως βασικό θεωρητικό υπόβαθρο τη θεωρία δραστηριότητας, η οποία συνιστά μια οπτική μιας κοινότητας πρακτικής, όπου η πρώτη αρχή είναι ένα σύστημα συλλογικής, διαμεσολαβημένης και στοχευμένης στο αντικείμενο δραστηριότητας, που παρατηρείται στις σχέσεις του δικτύου με άλλα συστήματα δραστηριοτήτων. Οι ατομικές και ομαδικές δράσεις που απευθύνονται σε στόχους, καθώς και οι αυτόματες λειτουργίες, είναι σχετικά ανεξάρτητες αλλά δευτερεύουσες μονάδες ανάλυσης, τελικά κατανοητές μόνο όταν ερμηνεύονται στο πλαίσιο ολόκληρων συστημάτων δραστηριότητας. Τα συστήματα δραστηριοτήτων πραγματοποιούν και αναπαράγουν τον εαυτό τους δημιουργώντας δράσεις και λειτουργίες. Βασική αρχή είναι η πολυφωνία των συστημάτων δραστηριοτήτων. Ένα σύστημα δραστηριότητας είναι πάντα μια κοινότητα πολλαπλών οπτικών γωνιών, παραδόσεων και συμφερόντων. Ο καταμερισμός της εργασίας σε μια δραστηριότητα δημιουργεί διαφορετικές θέσεις για τους συμμετέχοντες, οι οποίοι φέρουν τη δική τους διαφορετική ιστορία, ενώ το ίδιο το σύστημα δραστηριοτήτων φέρει πολλαπλά στρώματα και σκέλη της ιστορίας, χαραγμένα στα αντικείμενα, τους κανόνες και τις συμβάσεις. Η πολυφωνία πολλαπλασιάζεται σε δίκτυα αλληλεπιδραστικών συστημάτων δραστηριότητας. Είναι μια πηγή προβλήματος και μια πηγή καινοτομίας, απαιτώντας δράσεις μετάφρασης και διαπραγμάτευσης. Επιπλέον, πρωταρχική αρχή είναι η ιστορικότητα. Τα συστήματα δραστηριοτήτων διαμορφώνονται και μεταμορφώνονται για μακρές χρονικές περιόδους. Τα προβλήματα και οι δυνατότητές τους μπορούν να γίνουν κατανοητά κατά την ιστορίας τους (Engestrom, 1998). Το βασικό είναι ότι η θεωρία δραστηριότητας παρέχει ένα πλαίσιο σκέψης και δράσης, όπου υφίσταται ένας συγκεκριμένος τρόπος κατανόησης της συμμετοχής των ατόμων σε πολιτισμικές κοινότητες και κατ' επέκταση σε πολιτισμικές πρακτικές, σε συγκεκριμένες μάλιστα περιστάσεις (Rogoff, 2003).

Στην έρευνα των Araújo & Barbosa (2005), οι μαθητές είχαν εντολή από τον δάσκαλο να δημιουργήσουν και να λύσουν ένα πραγματικό πρόβλημα. Σε απάντηση, οι μαθητές σκέφτηκαν πρώτα ένα μαθηματικό περιεχόμενο και στη συνέχεια ανέπτυξαν μια πλασματική κατάσταση γύρω από αυτό. Οι συγγραφείς αναφέρονται σε αυτό ως μια αντίστροφη στρατηγική. Η ανάλυση αυτής της υπόθεσης οδήγησε στην υπόθεση ότι οι μαθητές είχαν υιοθετήσει μια τέτοια στρατηγική επηρεασμένοι από τη σχολική κουλτούρα. Τα ευρήματα αυτά παρέχουν ενδείξεις σχετικά με τον ρόλο του κοινωνικού πλαισίου στη γνωστική λειτουργία των μαθητών. Η Σταφυλίδου το 2001 ανέπτυξε μια διδακτική πρόταση για τη διδασκαλία κλασμάτων σε μαθητές πέμπτης δημοτικού. Η δραστηριότητα αυτή εξυπηρετεί στη διερεύνηση και συσχέτιση κλασματικών μεγεθών μέσα από την ενασχόληση των μαθητών με υλικό με το οποίο είναι εξοικειωμένοι από την καθημερινή τους ζωή. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με την ομαδοσυνεργατική μάθηση, προσφέρει επιπλέον κίνητρο συμμετοχής στη διαδικασία ανακάλυψης και κατάκτησης της έννοιας της ισοδυναμίας των κλασμάτων. Ο Δημοσθένους (2012) παρουσίασε μία διπλή αριθμογραμμή, χωρισμένη σε διαφορετικό πλήθος τμημάτων που ωστόσο το καθένα αντιστοιχούσε στην ίδια απόσταση. Οι μαθητές κλήθηκαν να αναγνωρίσουν ότι οι αποστάσεις αυτές εκφράζονται με ισοδύναμα κλάσματα. Έτσι, μπόρεσαν να οδηγηθούν στην αναδιοργάνωση της γνώσης τους για τους κλασματικούς αριθμούς και για την ισοδυναμία των κλασμάτων, ξεπερνώντας τυχόν παρανοήσεις ή εννοιολογικά εμπόδια. Σύμφωνα με τον Empson (2001), τα παιδιά επινοούν ποικίλες στρατηγικές που συμβάλλουν στην πλουσιότερη εννοιολογική κατανόηση της ισοδυναμίας των κλασμάτων, μέσα από την αλληλοσύνδεση διαφορετικών μαθηματικών ιδεών, δίνοντάς τους μια κατάσταση προβληματισμού σχετικά με τον δίκαιο μερισμό 8 τουρτών σε 24 παιδιά.

Σε έρευνα των Mildenhall & Hackling (2012), παρουσιάστηκε μια διδακτική παρέμβαση σε μαθητές. Διαπιστώθηκε η βελτίωση των μαθητών μετά την παρέμβαση. Ωστόσο, διαπιστώθηκε ταυτόχρονα η πεποίθηση-αντίσταση των μαθητών ότι στα μαθηματικά υπάρχει μόνο μια σωστή απάντηση. Θετική ήταν, τέλος, η εμπειρία της εκπαιδευτικού που συμμετείχε στη διδακτική παρέμβαση, η οποία διεύρυνε την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου. Ο Cooper (1998), έχοντας υπόψη τις ιδέες των Bernstein και Bourdieu, διερεύνησε την πιθανότητα οι αξιολογήσεις που περιλαμβάνουν ρεαλιστικά μαθηματικά περιεχόμενα να υποτιμούν τις δυνατότητες των παιδιών από συγκεκριμένα κοινωνικά υπόβαθρα. Έτσι, έχοντας ως πληθυσμό για την έρευνά του δύο παιδιά, μια μαθήτρια από τη μεσαία και έναν μαθητή από την εργατική κοινωνική τάξη, παρατήρησε ότι οι απαντήσεις της πρώτης στις δοκιμασίες ήταν πολιτισμικά ουδέτερες: μπορεί να έκανε αναφορά στην καθημερινή της εμπειρία ωστόσο απαντούσε ανεξάρτητα από αυτή. Αντίθετα, ο μαθητής από την εργατική τάξη ανταποκρινόταν βασισμένος αποκλειστικά στη γνώση του για τον πραγματικό κόσμο. Σε έρευνα του Sepeng (2013), οι μαθητές προτιμούν την αξιοποίηση της μητρικής τους γλώσσας. Οι μαθητές του δείγματος επικοινωνούσαν τις ιδέες τους κατά την επίλυση του προβλήματος με τον δικό τους γλωσσικό κώδικα και κατάφεραν περισσότερη επιτυχία στην ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων. Οι Abedi & Lord (2001), στη μελέτη τους με δείγμα μαθητές που ήταν καλοί γνώστες και χρήστες της αγγλικής και άλλους που τη μάθαιναν ως ξένη γλώσσα, απλοποίησαν τη γλωσσική δομή στα μαθηματικά αντικείμενα και φάνηκε ότι οι μαθητές σημείωσαν υψηλότερα σκορ. Η μεγαλύτερη επιρροή της πρακτικής αυτής παρατηρήθηκε στους μαθητές με φτωχές αναγνωστικές ικανότητες. Αντίθετα, όσοι ήταν δεινοί χρήστες της επίσημης γλώσσας δεν αντιμετώπισαν δυσκολίες στην κατανόηση των αρχικών κειμένων ακόμα κι αν αυτά ήταν μεγαλύτερα σε έκταση και περισσότερο σύνθετα γλωσσικά.

Με βάση την εξέταση των παραπάνω ερευνών, θα προχωρήσουμε στην αποσαφήνιση των βασικών θεωρητικών παραδοχών της παρούσας εργασίας. Θα εξεταστούν αναλυτικά οι έννοιες της άτυπης γνώσης και της μεταφοράς της γνώσης, οι οποίες αποτελούν τα δύο βασικά θεωρητικά εργαλεία για την αξιοποίηση της πρότερης γνώσης των μαθητών σχετικά με τα κλάσματα και το εμβαδόν. Επιπλέον, θα εξεταστεί το ζήτημα της πολιτισμικά ευαίσθητης διδασκαλίας, με βάση την παραδοχή της σύνδεσης της άτυπης γνώσης με το πολιτισμικό και οικονομικό κεφάλαιο των μαθητών.

Θεωρητικό υπόβαθρο

1. Η έννοια της άτυπης γνώσης

Στο πλαίσιο της παρούσας έρευνας, το βασικό θεωρητικό υπόβαθρο σχετίζεται με την έννοια της άτυπης γνώσης στα μαθηματικά, σε μια εποχή με κυρίαρχο το αίτημα «Μαθηματικά για όλους» (Kilpatrick, 1992). Βασικός μας στόχος ήταν να εξετάσουμε την άτυπη γνώση και τις προϋπάρχουσες νοητικές δομές των μαθητών σε ό,τι σχετίζεται με τα κλάσματα και το εμβαδόν. Για τον σκοπό αυτό, μοιράστηκαν σταδιακά φύλλα εργασίας, τα οποία περιελάμβαναν τόσο ασκήσεις τυπικής δομής, για παράδειγμα με πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων, σύγκριση κλασμάτων και μετατροπή σε δεκαδικούς αριθμούς, όσο και προβλήματα τα οποία σχετίζονταν πιο πολύ με πρακτικά ζητήματα της καθημερινής πραγματικότητας. Έτσι, μεριμνήσαμε ώστε τα μαθηματικά προβλήματα να περιέχουν «ιστορίες» που εκτυλίσσονται σε πραγματικά περιβάλλοντα υπό πραγματικές συνθήκες, για παράδειγμα σε χώρους συνεστίασης, ενώ σε κάθε δραστηριότητα επιδιώκαμε να αντιληφθούμε σε πρώτο επίπεδο τα προϋπάρχοντα βιώματα των μαθητών και να τα αξιοποιήσουμε στην κατανόηση και επίλυση του προβλήματος. Επιλέχθηκαν τα μαθηματικά φαινόμενα των κλασμάτων και του εμβαδού διότι αποτελούν δύο ζητήματα που εμφανίζονται σε ποικίλα μαθηματικά προβλήματα, ενώ συνήθως αποτελούν πεδίο σύγχυσης για τους μαθητές.

Η άτυπη (informal) μάθηση είναι αυθόρμητη, λαμβάνει χώρα παντού, δεν είναι δομημένη και κατευθύνεται από το ίδιο το άτομο που μαθαίνει τα κίνητρα είναι περισσότερο εσωτερικά (Eshach, 2007). Η έννοια αυτή διαπλέκεται με την έννοια της δραστηριότητας, σε συνδυασμό με ζητήματα που σχετίζονται με άτυπες διαδικασίες προσανατολισμένες στο περιεχόμενο πραγματικών καταστάσεων, οι οποίες τελικά καταλήγουν σε τυπικές μαθηματικές μορφές (Streefland, 1993). Η άτυπη γνώση αναφέρεται σε μια μαθησιακή διαδικασία όπου «κάποιος συνειδητοποιεί κριτικά τις δικές του παγιωμένες θέσεις και παραδοχές καθώς και των άλλων και στη συνέχεια αξιολογεί την σχετικότητά τους με σκοπό την κατασκευή μιας ερμηνείας» (Mezirow, 2000: 4). Σε κάθε περίπτωση, η μετασχηματίζουσα μάθηση σχετίζεται με προβληματικά πλαίσια αναφοράς, τα οποία εν τέλει καθίστανται περιεκτικά, ανοικτά, στοχαστικά και ευμετάβλητα (Κόκκος, 2005). Σημαντικό τμήμα της άτυπης γνώσης είναι να καταστεί η όποια αλλαγή των πλαισίων αναφοράς ως απότοκος κριτικού στοχασμού και ως αποτέλεσμα ουσιαστικής αλλαγής και μιας αναλυτικής διαδικασίας, αλλά και μια ετοιμότητα στο να αμφισβητηθούν οι πεποιθήσεις των μαθητών ή να διαμορφωθούν νέες πεποιθήσεις πάνω στις παλαιότερες νοητικές δομές (Dirkx, 1998).Επιπλέον, η μαθηματική γνώση αποτελεί παράγωγο μιας κοινωνικής πρακτικής και υπόκειται σε διαρκείς διαψεύσεις και αναθεωρήσεις (Lakatos, 1976). Η διδασκαλία των μαθηματικών εν προκειμένω συνιστά μια κλιμάκωση νοητικών εμπειριών, διατεταγμένων σε μια αλληλουχία, όπου κάθε νέα γνώση αποτελεί φυσική συνέπεια και συνέχεια της προηγούμενης, σε ένα δομικό πλέγμα.

Σύμφωνα με τους Glasman, Cibulka & Ashby (2002), υπάρχει άρρηκτη σύνδεση μεταξύ της δημιουργίας περιβάλλοντος μάθησης, του καθορισμού αναλυτικού προγράμματος και αξιολόγησης, της επαγγελματικής ανάπτυξης, των εσωτερικών δικτύων συνεργασίας και τέλος των εξωτερικών δικτύων που παρέχουν υποστήριξη και νομιμότητα για να υπάρξει σχολική ανάπτυξη. Αυτό σημαίνει ότι η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών και η έμφαση στις νοητικές τους δομές στα μαθηματικά προϋποθέτει μια εν γένει προσπάθεια στήριξης του μαθητικού πλαισίου όχι μόνον από τους εκπαιδευτικούς, αλλά και από τους συμβούλους και συντονιστές εκπαίδευσης. Οι Sabean & Bavaria (2005) συνθέτουν έναν κατάλογο των πιο σημαντικών αρχών που σχετίζονται με τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Αυτή η λίστα περιλαμβάνει τις προσδοκίες ότι οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν τι πρέπει να μάθουν οι μαθητές με βάση αυτό που ήδη γνωρίζουν, οι καθηγητές υποβάλλουν ερωτήσεις επικεντρωμένες στην ανάπτυξη εννοιολογικής κατανόησης και εμπειριών, ενώ οι προηγούμενες γνώσεις παρέχουν τη βάση για την εκμάθηση των μαθηματικών με την κατανόηση. Στους μαθητές παρέχεται γραπτή αιτιολόγηση για στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων, δραστηριότητες που βασίζονται σε προβλήματα και επικεντρώνονται σε έννοιες και δεξιότητες. Σε αυτό το πλαίσιο, η άτυπη γνώση στα μαθηματικά μπορεί να ενθαρρύνει τη δημιουργικότητα, την πρωτοβουλία και την ανταπόκριση στους ανθρώπους, επιτρέποντάς τους έτσι να δείξουν προσαρμοστικότητα στη μεταβιομηχανική κοινωνία, ενισχύοντας τις δεξιότητες για διαχείριση της αβεβαιότητας μέσα στα πλαίσια της οικονομικής κρίσης.

Κατ'ουσίαν, η άτυπη γνώση στα μαθηματικά μπορεί να γίνει αντιληπτή ως μια ολιστική άποψη της εκπαίδευσης και αναγνωρίζει τη μάθηση από διαφορετικά μαθησιακά περιβάλλοντα. Επιπλέον, αποτελεί μια προσέγγιση με βάση το σύνολο των μορφωτικών δραστηριοτήτων σε όλα τα επίπεδα της εκπαίδευσης, είτε πρόκειται για την τυπική είτε πρόκειται για την άτυπη και μη τυπική εκπαίδευση, και χαρακτηρίζεται από την άρρηκτη σύνδεσή της με την κοινωνικοοικονομική πραγματικότητα, που καθορίζει και τις τεχνικές και μεθόδους διδασκαλίας (Βεργίδης, 2001: 138).

Παράλληλα, υπάρχουν οι ακόλουθες βέλτιστες πρακτικές για την εφαρμογή αποτελεσματικών προτύπων:

- Η δέσμευση των μαθητών είναι σε υψηλό επίπεδο.
- Τα καθήκοντα βασίζονται στις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών.
- Διεξάγεται «σκαλωσιά» γνώσης, κάνοντας συνδέσεις με έννοιες, διαδικασίες.
- Υλοποιείται υψηλού επιπέδου απόδοση.
- Οι μαθητές αναμένεται να εξηγήσουν τη σκέψη και το νόημα.
- Οι μαθητές αυτο-παρακολουθούν την πρόοδό τους.
- Ο κατάλληλος χρόνος αφιερώνεται σε εργασίες.(Teaching Today, 2005β, 7)

Ο ρόλος της ανακάλυψης και αυτός της πρακτικής και της χρήσης των υλικών είναι δύο πρόσθετα θέματα που πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά την ανάπτυξη ενός προγράμματος που απευθύνεται στη βελτίωση της επίτευξης των μαθηματικών. Οι Sabean & Bavaria (2005) εξέτασαν την έρευνα, η οποία πρότεινε ότι ένα τέτοιο πρόγραμμα πρέπει να είναι ισορροπημένο μεταξύ της πρακτικής των δεξιοτήτων και των μεθόδων που έχουν μάθει προηγουμένως με την ανακάλυψη νέων ιδεών. Αυτή η ανακάλυψη νέων εννοιών διευκολύνει μια βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών συνδέσεων. Η αξιοποίηση των υλικών βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, αυξάνει την ευελιξία, παρέχει εργαλεία για την επίλυση προβλημάτων και μπορεί να μειώσει το άγχος των μαθηματικών. Η αναγνώριση και η ανταπόκριση στις ποικίλες μορφές μάθησης των μαθητών είναι κρίσιμης σημασίας παράγοντας της αποτελεσματικής διδασκαλίας μαθηματικών που βασίζεται στα πρότυπα. Οι αποτελεσματικές στρατηγικές για τη διαφοροποίηση της διδασκαλίας των μαθηματικών περιλαμβάνουν εναλλασσόμενες στρατηγικές, για να προσελκύσουν τους κυρίαρχους τρόπους μάθησης των σπουδαστών, την ευέλικτη ομαδοποίηση, την εξατομίκευση, οδηγίες για τους μαθητές, αναθέσεις, ανεξάρτητα έργα και ρύθμιση του επιπέδου ερωτήσεων (Computing Technology for Math Excellence, 2006).

Επιλέχθηκαν τα κλάσματα και το εμβαδόν, καθώς αποτελούν δύο βασικές μαθηματικές έννοιες, οι οποίες αποτελούν τη βάση για πολλές μαθηματικές έννοιες, ενώ αποτελούν δυο ενότητες που δυσκολεύουν ιδιαιτέρως τους μαθητές. Αυτό που επιδιώξαμε ωστόσο να δούμε δεν ήταν τόσο η στείρα γνώση πάνω στο προαναφερθέν πλαίσιο, αλλά το υπόβαθρο του κάθε μαθητή, τα βιώματα και οι εμπειρίες του. Για τον λόγο αυτό, έπειτα από τη συμπλήρωση των απαντήσεων, οι μαθητές κλήθηκαν προφορικά να δώσουν και επιχειρήματα, απαντήσεις και απόψεις πάνω στις απαντήσεις τους, ούτως ώστε να διαφανεί η συλλογιστική πορεία του κάθε μαθητή και οι γνωστικές δομές πάνω στις οποίες αναλύονται οι εμπειρίες, αναπτύσσονται δεξιότητες και γνώσεις και πραγματοποιούνται δραστηριότητες.

Πολλοί μαθητές δυσκολεύονται στην κατανόηση και στον αποτελεσματικό χειρισμό των κλασμάτων, επειδή δεν αντιλαμβάνονται την αφηρημένη φύση τους, την ποικιλία των ερμηνειών τους, την ιδιαίτερη γλώσσα που χρησιμοποιείται στη μελέτη τους και τους αλγόριθμους που απαιτεί η αριθμητική τους. Η έννοια του κλασματικού αριθμού: Στη βιβλιογραφία αναφέρονται τέσσερις διακριτές ερμηνείες του κλάσματος (ως μέρος εμβαδού κάποιου χωρίου, ως υποσύνολο ενός συνόλου, ως αποτέλεσμα διαίρεσης και ως σημείο της αριθμογραμμής), οι οποίες δυσκολεύουν πολλούς μαθητές, ακόμη και πέραν της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Οι δυσκολίες αυτές είναι μεγαλύτερες για την ερμηνεία του κλάσματος ως υποσυνόλου και ακόμη περισσότερο για αυτήν ως σημείου της αριθμογραμμής. Οι χωρικές και γεωμετρικές έννοιες, όπως το εμβαδόν, αν και θεωρούνται αρκετά απλές, λόγω της εποπτικής τους προσέγγισής και της καθημερινής εμπειρίας συνοδεύονται με παρανοήσεις που δεν επιτρέπουν την ουσιαστική ανάπτυξη κατανοήσεων που είναι απαραίτητες τόσο για την ανάπτυξη πιο τυπικών γεωμετρικών εννοιών όσο για την αντιμετώπιση προβλημάτων της καθημερινής ζωής. Ως συνέπεια, τα σύγχρονα προγράμματα σπουδών αντικαθιστούν τις απλοϊκές και χωρίς εμβάθυνση προσεγγίσεις με την ανάπτυξη αυτού που ονομάζεται χωρικός, γεωμετρικός και οπτικοποιημένος συλλογισμός (Clements & Sarama, 2000).

2. Η μεταφορά της γνώσης στα μαθηματικά

Στα μαθηματικά ερχόμαστε αντιμέτωποι με το «δίλημμα της μεταφοράς» (Carraher & Schliemann, 2002), με μελέτες να αποτυγχάνουν να αποδείξουν ότι υφίσταται η μεταφορά της γνώσης από το ένα πλαίσιο στο άλλο. Ο Παναγάκος (2002) αναφέρει ότι συχνά οι μαθητές δυσκολεύονται ιδιαιτέρως να μεταφέρουν μια γνώση από το ένα πεδίο στο άλλο, δηλαδή τα μαθηματικά του σχολείου στην καθημερινή ζωή και αντιστρόφως. Βασικό στοιχείο ερμηνείας αυτού του φαινομένου είναι ότι τα μαθηματικά στο σχολείο εμφανίζονται σε γραπτό λόγο, σε αντίθεση με τους υπολογισμούς που πρέπει να κάνουν οι μαθητές προφορικά και νοερά στην καθημερινή ζωή. Σύμφωνα με τους Τσίτσο και Σταθοπούλου (2011), άλλο βασικό σημείο είναι η πρόθεση των μαθητών κατά τη μεταφορά γνώσης από το ένα πλαίσιο στο άλλο. Ακόμα, η τυπολογία των ασκήσεων στο σχολείο έχει ελάχιστη σύνδεση με την πραγματικότητα, αφού συχνά πρόκειται για αποπλαισιωμένους υπολογισμούς, ενώ οι εκπαιδευτικοί συχνά δεν ασχολούνται με το σκεπτικό των ίδιων των μαθητών, τους τρόπους υπολογισμού και τις στρατηγικές που έχουν ήδη αναπτύξει.

Τρία είδη γνώσεων είναι ζωτικής σημασίας για τη διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών: η γνώση των μαθηματικών, η γνώση των σπουδαστών και η γνώση των μαθημάτων. Αυτές μπορούν να φανούν σε ένα είδος διδακτικού τριγώνου, όπου τα μαθηματικά και οι μαθητές είναι δύο από τις κορυφές του και οι πρακτικές διδασκαλίας είναι οι αλληλεπιδράσεις που απεικονίζονται από τα βέλη. Οι μαθηματικές γνώσεις περιλαμβάνουν τη γνώση των μαθηματικών γεγονότων, τις διαδικασίες και τις σχέσεις μεταξύ τους, καθώς και τη γνώση των τρόπων με τους οποίους οι μαθηματικές ιδέες μπορούν να εκπροσωπούνται. Στο πλαίσιο αυτό, μας απασχολούν οι έρευνες που σχετίζονται με τις υπολογιστικές εκτιμήσεις στο πεδίο της διδακτικής μαθηματικών.

Πέραν της εστίασης στις πεποιθήσεις, τα μαθηματικά εστιάζουν στο γνωστικό υπόβαθρο, καθώς και στην παρουσίαση των απόψεων σχετικά με ένα συγκεκριμένο μαθηματικό θέμα. Επίσης, προκύπτουν συγκεκριμένα μαθηματικά ερωτήματα, όπως «Ποιες είναι οι θεμελιώδεις ιδέες (bigideas) που εμπλέκονται στους κλασματικούς αριθμούς; Ποιοι είναι οι βασικοί μαθηματικοί στόχοι που μπορούν να τεθούν στο πλαίσιο αυτής της έννοιας; Ποιες είναι οι πιο κοινές παρανοήσεις των μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης σχετικά με την έννοια των κλασμάτων; Ποιες πιθανές διαδρομές μπορούν να ιχνηλατηθούν για την επίτευξη των στόχων; Ποια μαθηματικά έργα θα μπορούσαν να είναι κατάλληλα για την επίτευξη των στόχων και την υπέρβαση των παρανοήσεων;» (Νίκα, 2014: 96). Πέραν του όντως γόνιμου διαλόγου, ένα ζήτημα που εγείρεται στο σημείο αυτό είναι ότι η παρουσίαση αυτή των ερευνητών δημιουργεί ένα προφίλ αυθεντίας, το οποίο δεν συνάδει με τη φύση της κοινότητας πρακτικής, όπου όλοι οι συμμετέχοντες πρέπει να αναστοχαστούν σχετικά με την πρακτική τους και να μοιραστούν τις ιδέες τους (Σιώπη & Χασάπης). Ένα ουσιώδες σημείο είναι η εστίαση στον σχεδιασμό διδασκαλίας, όπου αρχικά υφίστανται οι πρωταρχικές αρχές μιας διδασκαλίας στα μαθηματικά, καθώς και αναφορικά με τον τρόπο που οι εκπαιδευτικοί μέχρι πρότινος συνήθιζαν να προετοιμάζουν και να σχεδιάζουν τη διδασκαλία τους. Η δράση καταλήγει στην πρόταση σχεδιασμού και υλοποίησης μιας διδασκαλίας μαθηματικών, όπου οι εκπαιδευτικοί σχεδιάζουν σε ατομικό επίπεδο μια διδασκαλία για την τάξη τους και προετοιμάζουν ένα σχέδιο μαθήματος, στο οποίο καταγράφουν τους στόχους, τα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Έτσι, σταδιακά προέκυψε ένα δίκτυο των δρώντων (Latour, 1987, 1996), όπου η μάθηση ξεκινά να προκύπτει και να εξελίσσεται μέσα σε ένα ετερογενές δίκτυο ανθρώπινων και μη ανθρώπινων παραγόντων. Σύμφωνα με τη μελέτη της διατριβής, στο σημείο αυτό εισήχθησαν τα «κρίσιμα συμβάντα», ως μηχανισμός πρόκλησης του αναστοχασμού στη διδασκαλία και ανάπτυξης αναστοχαστικών δεξιοτήτων. Ο αναστοχασμός είναι σημαντικός σε κάθε πορεία της κοινότητας πρακτικής, διότι είναι ουσιώδης η διαρκής κριτική και εποικοδομητική θέαση της διαδικασίας από τους ίδιους τους συμμετέχοντες (Birmanκ.ά., 2000). Ο ατομικός αναστοχασμός των εκπαιδευτικών επικεντρώνεται σε γενικές αναφορές σχετικά με την επιλογή και τον σχεδιασμό των μαθηματικών έργων, την αιτιολόγηση αυτών των επιλογών και σε ζητήματα που οι ίδιοι είχαν παρατηρήσει σχετικά με την υλοποίηση της διδασκαλίας τους. Οι συζητήσεις αυτές δημιουργούν εν τέλει και το πλαίσιο σκέψης για να εκφραστούν τα κρίσιμα συμβάντα κάθε διδασκαλίας, ούτως ώστε να προκύψουν και περαιτέρω συζητήσεις. Στο σημείο αυτό, ο ρόλος του εκπαιδευτικού ως επαγγελματία είναι ιδιαίτερα ενεργητικός, αναστοχαστικός, εμπειρικός και εν πολλοίς δημιουργεί ένα ιδιαίτερα εξωστρεφές και κοινωνικό πλαίσιο δράσης.

Τα κρίσιμα συμβάντα καθορίζονται από τον τρόπο που οι εταίροι της συνεργασίας αντιλαμβάνονται τις διδακτικές καταστάσεις και ερμηνεύουν τη σημασία ενός γεγονότος. Κάποιες φορές οι εκπαιδευτικοί θεωρούσαν ως κρίσιμο και έδιναν ιδιαίτερη σημασία σε ένα γεγονός που δεν ήταν τόσο σημαντικό σύμφωνα με τους εκπαιδευτές/ερευνητές, καθώς επικεντρώνονταν, για παράδειγμα, σε τεχνικές λεπτομέρειες της διδασκαλίας τους. Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι εκπαιδευτές/ερευνητές είτε υποχωρούσαν προσωρινά στα θέματα που αναδείκνυαν οι εκπαιδευτικοί, είτε παρενέβαιναν στρέφοντας τη συζήτηση και την κοινή προσοχή σε πιο κρίσιμα θέματα. Εντούτοις, στο παραπάνω σημείο παρατηρούμε ότι οι εκπαιδευτικοί-ερευνητές εξακολουθούν να διαδραματίζουν έναν παρεμβατικό ρόλο στην κοινότητα πρακτικής, δημιουργώντας ένα πλαίσιο δράσης και σκέψης όπου οι εκπαιδευτικοί υπακούουν σε άνωθεν εντολές. Θα έπρεπε δηλαδή να δοθεί μεγαλύτερη έμφαση στην έννοια της συλλογικότητας, διότι η συλλογικότητα συνιστά τη βάση για τη μάθηση αλλά και για τη νοηματοδότηση. Η συνεχής οργάνωση της συζήτησης με βάση τις καθοδηγήσεις των δύο ερευνητών δημιουργεί το προφίλ ενός εκπαιδευτικού ο οποίος ναι μεν εκφράζει επαρκώς τις θέσεις του, αλλά δεν δύναται πάντοτε να δρα με βάση τα προσωπικά του νοήματα και το προσωπικό του σύστημα αξιών και πεποιθήσεων. Η ικανότητα για συστηματικό αναστοχασμό πάνω στις αλληλεπιδράσεις στην τάξη αποτελεί μια σημαντική επαγγελματική ικανότητα του δασκάλου (Scherer & Steinbring, 2006), ενώ ο χρόνος που ξοδεύεται σε αναστοχαστικές συζητήσεις δεν θα έπρεπε να θεωρείται κατώτερος από αυτόν που αφιερώνεται στην ίδια τη διδασκαλία (Κολέζα & Νίκα, 224). Γι' αυτό και ιδιαίτερα σημαντική σε επόμενο στάδιο είναι η συνάντηση σχετικά με συγκεκριμένες πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών, που έρχονταν σε αντίθεση με τις πρακτικές στην τάξη τους. Εν προκειμένω, προκύπτει ένας γόνιμος αναστοχασμός και μια εν γένει συνειδητοποίηση της άρρηκτης σύνδεσης μεταξύ των θεωρητικών πεποιθήσεων που έχει ο επαγγελματίας και των αντίστοιχων πρακτικών στα πλαίσια της τάξης: «Οι άξονες αναστοχασμού αφορούν ζητήματα σχετικά με τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για τη μάθηση των μαθηματικών και τη φύση της μαθηματικής γνώσης καθώς και θέματα που αναδεικνύουν πτυχές της διδακτικής τους πρακτικής και της επαγγελματικής τους ταυτότητας. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον εκδηλώθηκε για ζητήματα σχετικά με την πρόκληση και την εξέλιξη των πεποιθήσεων με τη συμμετοχή στην κοινότητα, καθώς και για τα διλήμματα που προέκυπταν στη διδασκαλία, ως αποτέλεσμα αυτής της συμμετοχής» (Νίκα, 2014: 83).

Αυτές οι μεταφορές, που σχετίζονται με την προηγούμενη κατάταξη στη λεγόμενη πραγματιστική και επιστημονική σχολή σκέψης, επισημάνθηκαν από την Kaiser (1995) και στη νέα ταξινόμηση των Kaiser & Sriraman (2006). Εντούτοις, δεν επαρκεί μόνο η εμπειρική μάθηση, διότι παίζει σπουδαίο ρόλο και το είδος της γνώσης που λαμβάνεται. Μπορεί δηλαδή η τυπική γνώση στο πλαίσιο των μαθηματικών να δύναται να εφαρμοστεί, όμως ακόμη μεγαλύτερης σημασίας είναι και η άτυπη, λανθάνουσα γνώση. Στο πλαίσιο αυτό, απαιτούνται συγκεκριμένα στοιχεία μάθησης κατά την εκπαίδευση. Πρώτα απ’ όλα, ο αναστοχασμός αφορά σε μια διαδικασία συνεχούς υποστήριξης, ανάπτυξης, καθοδήγησης, η οποία δίνει έμφαση στην ανατροφοδότηση και στην αιτιολόγηση κάθε πτυχής των ενεργειών και πρακτικών. Η σημασία του αναστοχασμού έγκειται στο γεγονός ότι προκαλεί μια επαναλαμβανόμενη ενεργοποίηση των μαθησιακών σχημάτων, ενώ παράλληλα ενισχύεται με συνδέσεις μεταξύ στοιχείων και με την ενεργοποίηση της γνώσης, με στόχο την κατηγοριοποίηση με νέες πληροφορίες. Από τη συνδεσιμότητα και την πολυπλοκότητα των σχημάτων που απαιτούνται με την ταυτοποίηση και την κατηγοριοποίηση των πληροφοριών εξελίσσεται η πρακτική (Berliner, 2001), η «ακρίβεια της αντίληψης». Ο αναστοχασμός δημιουργεί ένα πλαίσιο δράσης όπου οι καθηγητές μαθηματικών αποκτούν μία «ολιστική αντίληψη», ειδικά σε σύγκριση με τους αρχάριους καθηγητές (Bromme 2001·König & Lebens 2012). Είναι εκείνο το είδος της γνώσης το οποίο επιτρέπει στους δασκάλους να μπορούν να ανακατασκευάσουν και να προβλέψουν το πλαίσιο της διδασκαλίας. Το σημαντικό είναι ότι η αναστοχαστική δραστηριότητα δύναται να παράσχει ευκαιρίες για μοίρασμα εμπειριών, από τις οποίες συνθέτονται και ερμηνεύονται αποτελέσματα και αναπτύσσονται κριτικά πλαίσια σχετικά με την πρακτική (Laworsky, 2001).

Έπειτα, η συλλογικότητα-συμμετοχή εντάσσεται στις κοινωνικοπολιτισμικές θεωρίες και πρεσβεύει ότι η μάθηση θεωρείται εγκατεστημένη στις τάξεις και αναπτύσσεται μέσω της διάδρασης και της αλληλεπίδρασης με τους μαθητές (Lave&Wenger, 1991·Cobb, Yackel & Wood, 1991). Σε αυτό το πλαίσιο, η μάθηση δεν μπορεί να εκληφθεί ως κάτι αυθύπαρκτο και απομονωμένο, αλλά ως ένα στοιχείο που αναπτύσσεται μέσα σε κοινότητες πρακτικής (Cobb, Yackel & Wood, 1991), ενώ παράλληλα ερμηνεύεται ο τρόπος με τον οποίο η σκέψη των δασκάλων εξελίσσεται μέσα στα πλαίσια της σχολικής τάξης και σε συνεχή διάδραση τόσο με τους μαθητές, όσο και με τους υπόλοιπους καθηγητές. Επιπλέον, η σημασία της συλλογικότητας στην επαγγελματική ανάπτυξη των μαθηματικών σχετίζεται και με την εν γένει κοινωνικοποίηση στην επαγγελματική κουλτούρα, όπως αναφέρουν οι Calderhead & Shorrock (1997), οι οποίοι προτείνουν ένα κοινωνικοπολιτισμικό μοντέλο επαγγελματικής ανάπτυξης. Επιπλέον, ένα βασικό εμπόδιο είναι ότι υπάρχει ακόμη δυσκολία να γίνει αποδεκτή η μαθηματική γνώση ως πλαισιοθετημένη (situated), σε συνδυασμό με την αναγνώριση ότι εμπειρία και πρακτική είναι άρρηκτα συνδεδεμένες στην πορεία μάθησης και άρα στην πορεία επαγγελματικής ανάπτυξης του εκπαιδευτικού. Στην Ελλάδα εξακολουθεί να υφίσταται η θέση ότι η θεωρητική γνώση κατέχει την ύψιστη θέση, κάτι που δημιουργεί εμπόδια στην εστίαση στην έννοια της κοινότητας πρακτικής. Επιπλέον, υπάρχει ακόμη δυσκολία να επικεντρωθεί η διδασκαλία των μαθηματικών στο κοινωνικό περιεχόμενο, καθώς και στην επίδρασή του σε καθηγητές και μαθητές με ποικίλα κοινωνικά και πολιτισμικά υπόβαθρα. Υπάρχουν ακόμη δυσκολίες στη σκιαγράφηση του ρόλου που παίζουν τα μαθηματικά σχολικά εγχειρίδια, οι διεθνείς συγκρίσεις στα μαθηματικά επιτεύγματα, καθώς και οι αξίες που υιοθετούνται. Ωστόσο, η επιτυχημένη επαγγελματική ανάπτυξη απαιτεί καθοδηγητικές στρατηγικές και σύνδεση με τις πρωτοβουλίες της κάθε περιοχής καθώς και τη κουλτούρα και τα σύμβολα του προγράμματος (Peterson,2002).

Παράλληλα, η ενεργός συμμετοχή απαιτεί και μια αίσθηση ομαδικότητας και συλλογικότητας, η οποία πολλές φορές δεν διαπνέεται από την κλασική θεώρηση της αξιοποίησης του ανθρώπινου δυναμικού. Για μια υγιή, λοιπόν, αξιοποίηση του ανθρώπινου κεφαλαίου πρέπει, παράλληλα με τις ατομικές ανάγκες, δεξιότητες και ικανότητες, να εξετάζεται και το δυναμικό του συνόλου: «Στο παραδοσιακό παραγωγικό περιβάλλον, οι εργαζόμενοι αμείβονται κυρίως ανάλογα με τις ώρες εργασίας τους. Ωστόσο, η αυτοματοποιημένη παραγωγή απαιτεί αυξημένη ομαδική εργασία και συντονισμό. Η απόδοση της ομάδας είναι πιο σημαντική από ό,τι εκείνη των ατόμων» (Hongyl, 2001: 198).

Για να κατανοήσουμε πόσο σημαντικό είναι αυτό, πρέπει να αναλογιστούμε ότι η στείρα αξιοποίηση των επιμέρους ικανοτήτων των ατόμων χωρίς την ταυτόχρονη αίσθηση της συλλογικής εργασίας δεν μπορεί επ’ ουδενί να συμβάλλει στον κριτικό στοχασμό και αναστοχασμό της εργασιακής δραστηριότητας. Όπως στην εκπαίδευση, έτσι και στον εργασιακό χώρο ο κριτικός στοχασμός συνδέεται άρρηκτα με δύο κομβικά σημεία-κλειδιά: την ενδυνάμωση και τη χειραφέτηση των εμπλεκομένων. Η ενδυνάμωση αφορά κυρίως εκείνες τις δεξιότητες και πνευματικές αντιλήψεις(capacities) που θα μας επιτρέψουν να λειτουργήσουμε με τρόπο αποτελεσματικό εντός του συστήματος στο οποίο δρούμε, εν προκειμένω εντός του εργασιακού χώρου (Ζαρίφης,2009: 166). Η δράση αυτή προϋποθέτει την επίγνωση των δομών εξουσίας που διέπουν τον εργασιακό χώρο, ώστε να μπορεί να προβληθεί η όποια αντίσταση στων εργαζομένων απέναντι στην καταπίεσή τους ή στην καταπάτηση των δικαιωμάτων τους. Και εδώ υπεισέρχεται η επόμενη ζωτικής σημασίας έννοια, η χειραφέτηση, η οποία έχει να κάνει «με την κριτική ανάλυση, την αντίσταση και την αναθεώρηση της εξουσίας»(όπ.π.:166).

Αυτό που ο Freire είχε χαρακτηρίσει ως *πράξις* αποτελεί ουσιώδη διάσταση μιας κριτικοστοχαστικής θέασης του ανθρώπινου δυναμικού στον εργασιακό χώρο, το πώς δηλαδή οι εργαζόμενοι θα αντιληφθούν τον ρόλο τους τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο, και θα δράσουν με τέτοιον τρόπο ώστε να διασφαλίζεται η αυτόνομη, ορθολογική και χειραφετική τους παρουσία. Η συμβολή του ατόμου στην παραγωγική δραστηριότητα δεν πρέπει να σημαίνει μαζική παραγωγή εργατών, αλλά αξιοποίηση του ατόμου ως Υποκειμένου. Για να επιτευχθεί αυτό, χρειάζεται μια περισσότερο κριτική και αναστοχαστική ματιά στην εξέταση της διδασκαλίας των μαθηματικών, στο πλαίσιο ενός συνόλου και υπό τη σκοπιά μιας συλλογιστικής όπου τα μαθηματικά δεν είναι ξεκομμένα από την καθημερινή ζωή των μαθητών.

3. Η κριτική διδασκαλία των μαθηματικών

Ο Barbosa (2003) προτείνει τον προβληματισμό σχετικά με τον ρόλο των μαθηματικών στην κοινωνία, με βάση τις μελέτες σχετικά με τις κοινωνικοπολιτισμικές διαστάσεις των μαθηματικών (Atweh κ.ά., 2001·D’Ambrosio, 1986, 1999), και ειδικότερα την κρίσιμη φύση των μαθηματικών μοντέλων στην κοινωνία (Borba & Skovsmose, 1997·Keitel, 1993·Skovsmose, 1994).

Ωστόσο, τα όρια των μαθηματικών πρέπει να καθορίζονται από τα εξής στοιχεία:

- Η δραστηριότητα πρέπει να είναι ένα πρόβλημα (όχι μια άσκηση) για τους μαθητές.
- Η δραστηριότητα πρέπει να εξαχθεί από τις καθημερινές ή άλλες επιστήμες που δεν είναι καθαρά μαθηματικά.

Πιο συγκεκριμένα, τα όρια της μοντελοποίησης είναι ένα είδος μάθησης κοινωνικής διάστασης, όπου οι μαθητές καλούνται να λάβουν ένα πρόβλημα και να διερευνήσουν με αναφορά στην πραγματικότητα μέσω των μαθηματικών (Barbosa, 2003). Αυτή η αντίληψη είναι αρκετά αποκομμένη από τον χαρακτηρισμό των μοντέλων, όπως τη συμμετοχή διαγραμματικών αναπαραστάσεων. Αναφέρεται στη μοντελοποίηση ως μια σχολική δραστηριότητα, η οποία μπορεί να ενημερώνεται από μια πραγματιστική, επιστημονική ή κοινωνικοκριτική προοπτική.

Σε ένα σημαντικό μέρος της βιβλιογραφίας σχετικά με τη μοντελοποίηση, η διαγραμματική απεικόνιση οπτικής των μοντέλων χρησιμοποιείται ως παράμετρος για την ανάλυση των δραστηριοτήτων μοντελοποίησης μαθητών. Συνήθως η πρόθεση είναι να φέρει τους μαθητές πιο κοντά στην επαγγελματική μοντελοποίηση. Για παράδειγμα, ο Hainesetal (2003) πραγματοποίησε μια συγκριτική μελέτη μεταξύ των αρχαρίων και των επαγγελματιών στη μοντελοποίηση. Ο Lamon (2003) χρησιμοποίησε την έννοια του προσπολιτισμού (enculturation), για να υποδηλώσει τη μοντελοποίηση στα σχολεία ως είδος μύησης στην κοινότητα μοντελοποίησης.

Δύο άλλοι τύποι μελετών που παρουσιάζονται στη βιβλιογραφία: εκείνοι που εστιάζουν στις ικανότητες των μαθητών σε κάθε στάδιο της διαδικασίας μοντελοποίησης, και εκείνοι που αναλύουν τη μετάβαση από το ένα στάδιο στο επόμενο. Οι Houston & Neill (2003) και Maaß (2006) αποτελούν παραδείγματα της πρώτης υπόθεσης, δεδομένου ότι ερευνούν τις δεξιότητες και τις ικανότητες των μαθητών και τη σύγκρισή τους με κάποιες κανονιστικές περιγραφές της μοντελοποίησης. Οι Borromeo Ferri (2006) και Galbraith & Stillman (2006) ερεύνησαν την μετάβαση μεταξύ των σταδίων μοντελοποίησης από τους μαθητές.

Ωστόσο, υπάρχουν ενδείξεις σε κάποιες από αυτές τις μελέτες που προτείνουν ότι τα κανονιστικά μοντέλα μπορεί να είναι ακατάλληλα για την περιγραφή των δράσεων των μαθητών, όπως αυτές εκφράζονται από διαγραμματικές αναπαραστάσεις. Ο Borromeo Ferri (2006) καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η διαφοροποίηση μεταξύ των σταδίων μοντελοποίησης είναι μόνο θεωρητική, και ότι είναι δύσκολο να γίνει διάκριση μεταξύ τους εμπειρικά. Ο συγγραφέας θέτει το ζήτημα της ενδεχόμενης ανάγκης να έχουμε ένα είδος διαγράμματος μοντελοποίησης για το σχολείο και ένα άλλο για την έρευνα, θέτοντας σε αμφιβολία την αποτελεσματικότητα των κανονιστικών διαγραμματικών αναπαραστάσεων στη μοντελοποίηση ως προς την περιγραφή των δραστηριοτήτων των μαθητών.

Οι Busse (2005) και Maaß (2006) χρησιμοποιούν εμπειρικά δεδομένα ως βάση για τον προσδιορισμό των τεσσάρων ιδανικών τύπων των μαθητών στη μοντελοποίηση: όσοι παραμελούν τις μαθηματικές πτυχές, όσοι επιτύχει μια ισορροπία μεταξύ των δύο και εκείνοι που θεωρούν τα δύο, αλλά δεν σχετίζονται μεταξύ τους. Τα διαφορετικά στυλ των μαθητών είναι μια αντανάκλαση της υποκειμενικότητας που ενέχει η ερμηνεία της πραγματικής κατάστασης. Στους Busse & Kaiser (2003) και Busse(2005) υπάρχουν ενδείξεις ότι το πλαίσιο μπορεί να ανακατασκευαστεί με διαφορετικούς τρόπους από μαθητές, που έχουν διαφορετικές επιδράσεις πάνω τους, αφού ο καθένας έχει τις δικές του εμπειρίες και πεποιθήσεις.

Επιπλέον, η χρήση της μοντελοποίησης στο σχολείο ανοίγει ενιαίες δυνατότητες. Ο Christiansen (2001) περιγράφει μια περίπτωση στην οποία μαθητές είχαν την επίλυση ενός προβλήματος του πληθυσμού, αγνοώντας τις αναφορές στην πραγματικότητα εκτός σχολείου. Οι Araújo και Barbosa (2005) παρουσιάζουν μια παρόμοια περίπτωση, στην οποία οι μαθητές είχαν εντολή από τον δάσκαλο να δημιουργήσουν και να λύσουν ένα πραγματικό πρόβλημα. Σε απάντηση, οι μαθητές σκέφτηκαν πρώτα ένα μαθηματικό περιεχόμενο, και στη συνέχεια ανέπτυξαν μια πλασματική κατάσταση γύρω από αυτό. Οι συγγραφείς αναφέρονται σε αυτό ως μια αντίστροφη στρατηγική. Η ανάλυση αυτής της υπόθεσης οδήγησε στην υπόθεση ότι οι μαθητές υιοθέτησαν μια τέτοια στρατηγική επηρεασμένοι από τη σχολική κουλτούρα. Τα ευρήματα αυτά παρέχουν ενδείξεις σχετικά με τον ρόλο του κοινωνικού πλαισίου στη γνωστική λειτουργία των μαθητών.

Ως εκ τούτου, τα στοιχεία δείχνουν ότι οι διαδρομές μοντελοποίησης των μαθητών, για να χρησιμοποιήσουμε τον όρο που επινοήθηκε από τον Borromeo Ferri (2006), δεν είναι γραμμικές και δεν ταιριάζουν καλά σε κανονιστικά στάδια. Πολλά στοιχεία από αυτά τα στάδια μπορεί να φαίνονται, αλλά όχι όπως περιγράφονται στις διαγραμματικές απεικονίσεις. Οι μεταβλητές που σχετίζονται με το σχολικό πλαίσιο επιβάλλουν άλλες προϋποθέσεις για τη δουλειά μαθητών και δασκάλων, όπως ο χρόνος, οι στόχοι διδασκαλίας, το σχολικό πρόγραμμα και ούτω καθεξής.

Η ασυμβατότητα με την προσέγγιση διαγραμματικής απεικόνισης στη μοντελοποίηση δεν είναι αποτέλεσμα της ανεπάρκειας δεξιοτήτων των μαθητών, αλλά μάλλον της χρήσης ενός ακατάλληλου πρίσματος για την εξέταση της πρακτικής τους. Οι διαγραμματικές απεικονίσεις έχουν τις ρίζες τους στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και στον τομέα της εκπαίδευσης των μαθηματικών.

Εφόσον οι μαθητές και οι επαγγελματίες στην μοντελοποίηση μοιράζονται διαφορετικές συνθήκες και ενδιαφέροντα, οι πρακτικές που διεξάγονται από αυτούς είναι διαφορετικές. Μελέτες σε κοινωνικές προοπτικές έκαναν οι Lave (1988)και

Wenger (1999), οι οποίοι τόνισαν με έμφαση ότι τα σχολικά μαθηματικά δεν είναι μια απλή μεταφορά της επιστημονικής γνώσης, αλλά μάλλον ένα άλλο είδος της γνώσης. Έτσι, η σχολική μοντελοποίηση εξετάζεται ως μια πρακτική η οποία διαφέρει από εκείνη των επαγγελματιών στη μοντελοποίηση. Η κριτική μοντελοποίηση είναι μέρος της μάθησης που συμβαίνει κατά τη διαδικασία της μοντελοποίησης, και ένας από τους στόχους είναι να παράγει κριτικούς, πολιτικά ενεργούς πολίτες.

Ιδιαίτερα στην εκπαίδευση, παρόλο που τα νέα Αναλυτικά Προγράμματα είναι διαθεματικά (Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών – Δ.Ε.Π.Π.Σ., 2003), δεν θεωρείται σύνηθες για τους εκπαιδευτικούς να συνδέουν τη διδασκαλία των μαθηματικών με τις κάθε μορφής τέχνες. Παρ' όλα αυτά υπάρχουν περιπτώσεις, όπως στο 12ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας (1995: 67), όπου επιβεβαιώνεται η παρουσία γεωμετρικών μοτίβων σε αυτήν.

Εν προκειμένω, ένας εκπαιδευτικός, όπως περιγράφει η Chapman (1993: 170–175), πρέπει να μεριμνήσει ώστε το παιδί να μπορεί ταυτόχρονα να διευρύνει τις προτιμήσεις του αλλά και να πειθαρχεί, κρατώντας τη δημιουργικότητα και την περιέργειά του. Ιδιαίτερα τα παιδιά προεφηβικής ηλικίας (Δ΄, Ε΄, ΣΤ΄ τάξης) έχουν μεγαλύτερες ελλείψεις σε ό,τι αφορά στους σχηματισμούς και τα περιγράμματα. Σ' αυτό το σημείο, ο εκπαιδευτικός μπορεί να δώσει έμφαση σε μοτίβα που βλέπουν στα κόμικς, στην τηλεόραση, στα αθλήματα. Επιπλέον, μπορούν να παρατηρήσουν διάφορα έργα τέχνης, ούτως ώστε να συνδεθεί εμπράκτως η γεωμετρία με την τέχνη μέσω της επικέντρωσης σε λεπτομέρειες και στους ευρύτερους σχηματισμούς, οδηγώντας στην ανάπτυξη δεξιοτήτων των παιδιών όπως ο συμβολισμός χρωμάτων, σχημάτων, γραμμών και ειδικών μοτίβων.

Μία ακόμη γεωμετρική έννοια που μπορούν να διδαχθούν τα παιδιά μέσω της τέχνης είναι η έννοια της συμμετρίας, η οποία συνιστά τη διάταξη δύο όμοιων στοιχείων ή μερών αμφίπλευρα και σε ίση απόσταση ως προς έναν άξονα, ένα σημείο ή ένα επίπεδο (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2000: 70). Αν και η συμμετρία συναντάται συχνά γύρω μας, υπάρχει η ενδεχόμενη δυσκολία, όπως έχει αναφερθεί στο 3ο Πανελλήνιο Εκπαιδευτικό Συνέδριο (Ευαγγέλου & Ταξίδης, 2014: 43), να αναγνωρίσουν τη συμμετρία στα διάφορα σχήματα, καθώς επίσης και στην ικανότητα κατασκευής του συμμετρικού ενός σχήματος. Το βασικό είναι να μπορούν οι μαθητές να κατανοήσουν την έννοια της συμμετρίας μέσα από τα διάφορα εικαστικά έργα, για παράδειγμα μέσα από ένα διακοσμητικό σχέδιο. Στο ίδιο πλαίσιο κινείται και η διδασκαλία της έννοιας του μοτίβου. Σύμφωνα με τους Τουμάση & Αρβανίτη (2002: 68), τα μοτίβα έχουν μια κανονικότητα και μια αισθητική κομψότητα και έτσι η ενασχόληση μ' αυτά συντελεί στη δημιουργία θετικής στάσης των παιδιών απέναντι στο μάθημα των Μαθηματικών. Επιπλέον, καλλιεργούν το καλαισθητικό συναίσθημα και μπορούν να συνδυαστούν με το μάθημα της αισθητικής αγωγής, ενώ επίσης προετοιμάζουν τους μαθητές για τη διδασκαλία της μετατόπισης στη Φυσική. Επιπλέον εποπτικό υλικό για γεωμετρικά μοτίβα είναι τα αγγεία της γεωμετρικής περιόδου, τα ψηφιδωτά, οι τοιχογραφίες, οι παραδοσιακές στολές και τα κεντήματα. Κατά κύριο λόγο, οι μαθητές θα πρέπει να έχουν την ικανότητα να αναγνωρίζουν γεωμετρικά μοτίβα ως μέρος ενός σύνθετου σχεδίου και, επαναλαμβάνοντας το μοτίβο, κάθε παιδί να είναι σε θέση να επεκτείνει το αρχικό σχέδιο μέσα στα βιβλία Μαθηματικών.

4. Η διδασκαλία των μαθηματικών στη σχολική τάξη

Σύμφωνα με τον Siegel(2012), στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση η καλή γνώση των κλασμάτων αποτελεί ισχυρό προβλεπτικό παράγοντα κατάκτησης της γνώσης που σχετίζεται τόσο με συναφή πεδία (όπως οι αναλογίες και τα ποσοστά) όσο και με την άλγεβρα, ανεξαρτήτως από το νοητικό δυναμικό του μαθητή, τις γνωστικές λειτουργίες του που αφορούν τη μνήμη, το πολιτισμικό υπόβαθρο και τη γλωσσική ικανότητα.

Όσον αφορά στη διδασκαλία των κλασμάτων, η Moss (2005) έχει υπογραμμίσει πως υπάρχουν τρεις βασικές αρχές: α) ο δάσκαλος θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη του την προϋπάρχουσα και άτυπη γνώση των μαθητών, β) θα πρέπει να οργανώνει ένα δίκτυο γνώσης που θα αφορά τόσο εννοιολογική όσο και διαδικαστική γνώση και γ) να επιδιώκει την ανάπτυξη μεταγνωστικών στρατηγικών που αφορούν τη διαχείριση της γνώσης των κλασμάτων. Όταν, λοιπόν, ένας μαθητής καλείται να διδαχθεί τα κλάσματα για πρώτη φορά, έρχεται σε επαφή με νέα σύμβολα, νοήματα και αναπαραστάσεις, οπότε οι παραπάνω διαδικασίες είναι αδήριτες.

Σχετικά με τη διδασκαλία των κλασμάτων στο Ελληνικό Δημοτικό Σχολείο, καλό θα είναι να αναφερθούμε αρχικά στους στόχους και τις επιδιώξεις που διέπουν το σχολικό πρόγραμμα. Έτσι, βλέπουμε πως ήδη από την Α΄Δημοτικού τα παιδιά μαθαίνουν να χωρίζουν εμπράγματες διακριτές και συνεχείς ποσότητες(γραμμές, δισδιάστατα σχήματα) σε ίσα μέρη (2, 4, 8) καθώς επίσης και να χωρίζουν εμπράγματες και μη, διακριτές και συνεχείς ποσότητες (γραμμές, δισδιάστατα σχήματα)σε ίσα μέρη (3, 6, 5, 10). Μετά το τέλος της πρώτης τάξης τα παιδιά θα πρέπει να είναι ικανά να συγκρίνουν δύο ποσότητες με απλή σχέση μεγέθους (1/2, 1/4) και να περιγράφουν τη σχέση λεκτικά. Συνεχίζοντας στη Β΄τάξη του Δημοτικού, τα παιδιά διδάσκονται να χωρίζουν εμπράγματες και μη, διακριτές και συνεχείς ποσότητες (γραμμές, δισδιάστατα σχήματα) σε ίσα μέρη (3,6,5,10), ενώ αρχίζουν να διερευνούν με χειραπτικά υλικά και αναπαραστάσεις και να προσεγγίζουν διαισθητικά τα κλάσματα 2/4, 3/4 και 2/3. Επίσης, με τη λήξη της σχολικής χρονιάς τα παιδιά θα πρέπει να είναι ικανά να συγκρίνουν δύο ποσότητες και να προσδιορίζουν τη σχέση μεγέθους και να τη συνδέουν λεκτικά και συμβολικά. Προχωρώντας στην επόμενη τάξη, οι μαθητές χωρίζουν σε ίσα μέρη διακριτές και συνεχείς ποσότητες (σε εικονική και συμβολική μορφή, π.χ. γραμμές και δισδιάστατα σχήματα). Επίσης, σε αυτή την τάξη οι μαθητές μαθαίνουν να εκφράζουν την ίδια σχέση με διαφορετικές κλασματικές αναπαραστάσεις και βρίσκουν έναν ενδιάμεσο κλασματικό αριθμό (μεταξύ 1/2 και 1/4 ή μεταξύ 2/3 και 3/4) Επιπρόσθετα, στην Γ΄ Τάξη λαμβάνει χώρα και η διδασκαλία σύγκρισης δύο ποσοτήτων και ο προσδιορισμός της σχέσης μεγέθους τους, ενώ οι μαθητές μαθαίνουν να χρησιμοποιούν την κλασματική αναπαράσταση και να την τοποθετούν στην αριθμογραμμή.

Η εισαγωγή της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού λαμβάνει χώρα στην Δ΄ τάξη του Δημοτικού, και τα παιδιά διδάσκονται την πρόσθεση και αφαίρεση ομώνυμων και μικρών ετερώνυμων κλασμάτων, ενώ συγκρίνουν κλάσματα με διάφορους τρόπους (λεκτικά και συμβολικά). Στην προτελευταία τάξη του Δημοτικού, τα παιδιά εισάγονται στα κλάσματα μεγαλύτερα της μονάδας και εισέρχονται σε βαθύτερες γνωστικές διαδικασίες, όπως η αναγνώριση και η κατασκευή ισοδύναμων κλασμάτων, η απλοποίησή τους, καθώς και η πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων, ενώ διδάσκονται τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων με φυσικούς και κλασμάτων με κλάσματα. Σε αυτή την τάξη εισάγεται και η διαίρεση των κλασμάτων με φυσικούς και με κλάσματα (διαίρεση ως αντίστροφος πολλαπλασιασμός), ενώ τα παιδιά καλούνται να διατάσσουν ένα σύνολο κλασματικών αριθμών και να βρίσκουν ενδιάμεσους, μικρότερους και μεγαλύτερους κλασματικούς αριθμούς. Τέλος, με διαδικασίες δοκιμής και ελέγχου διευρύνουν τις μεταβολές που προκαλούνται σε μια ποσότητα λόγω μεταβολής μιας άλλης ποσότητας, και διερευνούν τη σχέση μεταξύ ανάλογων ποσών. Φτάνοντας πλέον στην ΣΤ΄ τάξη του Δημοτικού, οι γνωστικά πιο ώριμοι μαθητές καλούνται να διερευνούν τη σχέση μεταξύ ανάλογων και αντίστροφα ανάλογων ποσών. Επίσης, εισάγονται στα ποσοστά, μετατρέπουν κλασματικούς αριθμούς σε ποσοστά και τα χρησιμοποιούν στη μοντελοποίηση καταστάσεων και την επίλυση προβλημάτων. (Βρεττού, Δρόσος, Καντάνη, Πακτσοβάνογλου, Παναγοπούλου, Η Διδασκαλία των Κλασμάτων στο Δημοτικό Σχολείο).

Αυτοί λοιπόν είναι οι στόχοι που τίθενται στους μαθητές του Δημοτικού Σχολείου σε όλες τις βαθμίδες του. Το αν και κατά πόσο είναι επιτεύξιμοι και το είδος των δυσκολιών και των προκλήσεων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές είναι ένα άλλο ζήτημα που έχει διερευνηθεί και συνεχίζει να διερευνάται με σκοπό και στόχο τη βελτιστοποίηση του σχολικού προγράμματος σε σχέση με τη διδασκαλία των κλασμάτων, τον εντοπισμό και εξάλειψη των προβλημάτων και την παροχή αρωγής στους μαθητές, όπου και όποτε τη χρειάζονται.

Σύμφωνα λοιπόν με τους Γαγάτση, Ευαγγελίδου & Σπύρου (2004), παρά το γεγονός ότι στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση αφιερώνεται σημαντικός χρόνος στη διδασκαλία των κλασμάτων, τα τελευταία είναι συνήθως μια έννοια δυσνόητη για τους μαθητές, οι οποίοι συχνά αντιμετωπίζουν διαφορετικής φύσης προβλήματα, όπως λάθη και παρανοήσεις επιστημολογικής, αναπαραστατικής και εννοιολογικής φύσης. Επίσης, οι μαθητές πολλές φορές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν το κλάσμα ως λόγο, ως διαίρεση ή ως μέτρο. Σύμφωνα με τον Lamon (2001) οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν το κλάσμα ως αριθμό, ως μια αυτόνομη οντότητα και, κατά συνέπεια, θεωρούν πως, για παράδειγμα, οι αριθμητές και οι παρονομαστές των κλασμάτων είναι ξεχωριστές οντότητες (Pitkethly & Hunting,1996).Όλα αυτά τα προβλήματα οδηγούν σε λάθη που συνδέονται τόσο με τον χειρισμό των συμβόλων του κλάσματος όσο και με τη διαισθητική απεικόνιση του κλάσματος. Τέλος, δεν πρέπει να λησμονούνται και οι δυσκολίες που προκύπτουν λόγω της διδακτικής φύσης του μαθήματος, καθώς πολλές φορές ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας δε βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια των κλασμάτων, αφού οι διδάσκοντες δεν προσεγγίζουν το θέμα από την οπτική ενός παιδιού αλλά από αυτήν ενός ενήλικα. Επίσης, η προσήλωση σε κανόνες και αλγορίθμους αποτελεί τροχοπέδη στη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και η διδασκαλία των κλασμάτων με στερεότυπο και καθοδηγούμενο τρόπο δε διευκολύνει τους μαθητές να αποκτήσουν αυτόνομη σκέψη.

Συνεπώς, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η ευθύνη για τη σωστή διδασκαλία των κλασμάτων εναπόκειται για μία ακόμη φορά στον εκπαιδευτικό, ο οποίος καλείται να έχει άρτια μαθηματική γνώση αλλά και σωστή προσέγγιση. Οι εκπαιδευτικοί οφείλουν, λοιπόν, να έχουν κατακτημένη την απαραίτητη μαθηματική γνώση, ώστε να είναι σε θέση να χειριστούν πιο αποτελεσματικά διδακτικές πρακτικές επίλυσης προβλημάτων μέσω της παρουσίασης ρεαλιστικών προβλημάτων (Lehrer & Franke, 1992). Παράλληλα όμως με την άρτια και ολοκληρωμένη μαθηματική γνώση, ο διδάσκων θα πρέπει να κατέχει και παιδαγωγική γνώση, ώστε η διδασκαλία των κλασμάτων να είναι επιτυχημένη. Σύμφωνα με τον Shulman (1986), πέρα από γνώση του γνωστικού αντικειμένου, ο δάσκαλος πρέπει να έχει παιδαγωγική γνώση του γνωστικού αντικειμένου και να μπορεί να γνωρίζει τους τρόπους αναπαράστασης και τυποποίησής του ώστε να γίνεται κατανοητό και αντιληπτό από τους μαθητές, όπως επίσης και να κατανοεί ο ίδιος τα αίτια που καθιστούν το συγκεκριμένο διδακτικό αντικείμενο δύσκολο προς τους μαθητευόμενους. Για την επιτυχή διδασκαλία των κλασμάτων, λοιπόν, ο διδάσκων θα πρέπει να χρησιμοποιεί διδακτικές μεθόδους που να συνάδουν με τις γνωστικές λειτουργίες και δυνατότητες των μαθητών του και να αποφεύγει τη στείρα μετάδοση γνώσεων που σχετίζονται μόνο με τη χρήση συμβολικών αναπαραστάσεων και την επικέντρωση στα τμήματα του κλάσματος (αριθμητή, παρονομαστή). Σε κάθε περίπτωση, η διδασκαλία των παραπάνω μαθηματικών ενοτήτων εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη διερεύνηση των στόχων του αναλυτικού προγράμματος.

4.1. Οι στόχοι του Α.Π.Σ. στη διδασκαλία του εμβαδού

Τα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα σε όλο τον κόσμο τονίζουν τη σπουδαιότητα της γεωμετρίας τόσο ως αυτόνομου θέματος όσο και ως μέσου για την ανάπτυξη άλλων μαθηματικών εννοιών (Φιλίππου & Χρίστου, 1995).Η διδασκαλία του μαθήματος της Γεωμετρίας είναι ιδιαιτέρως ζωτικής σημασίας στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση. Οι γεωμετρικές έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού απλών σχημάτων εισάγονται από την Τετάρτη Δημοτικού και έχουν ως απώτερο στόχο την εξάσκηση με τη βοήθεια γεωμετρικών οργάνων στον σχεδιασμό γεωμετρικών σχημάτων, στον υπολογισμό και τη σύγκριση της περιμέτρου απλών σχημάτων και στην κατανόηση διαισθητικά της έννοιας του εμβαδού. Ανατρέχοντας στην ήδη υπάρχουσα βιβλιογραφία, μπορούμε να ανακαλύψουμε πολλούς λόγους που εδραιώνουν τη σημαντικότητα της διδασκαλίας της γεωμετρίας από το Δημοτικό Σχολείο. Οι μαθητές εργάζονται ατομικά ή ομαδικά, ανάλογα με τους στόχους των δραστηριοτήτων, και εμπλέκονται σε συνεργατικές ενεργητικές δραστηριότητες που σχετίζονται με καταστάσεις της καθημερινής ζωής και που στοχεύουν στην ανάπτυξη της σκέψης, του συλλογισμού και της επικοινωνίας (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011β, σ. 17) και σε καταστάσεις προβληματισμού (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011β, σ. 18). Ο ρόλος του δασκάλου κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας είναι συντονιστικός και βοηθητικός. Για την απεικόνιση των μαθηματικών εννοιών χρησιμοποιούνται διαφορετικά μοντέλα, έτσι ώστε να εξασφαλίζονται οι πολλαπλές αναπαραστάσεις, οι οποίες συντελούν στην κατανόηση μιας ιδέας (Λεμονίδης κ.ά., 2006).

Πιο συγκεκριμένα, οι Τζανάκης και Κούρκουλος (2000) θεωρούν πως μέσω της διδασκαλίας της Γεωμετρίας επιτυγχάνονται οι γενικοί σκοποί της διδασκαλίας των μαθηματικών, οι οποίοι διαχωρίζονται σε ελάχιστους και μέγιστους. Οι ελάχιστοι σκοποί αφορούν στην παροχή πρακτικών γνώσεων χρήσιμων στην καθημερινή ζωή, όπως η αρίθμηση, η εκτέλεση πράξεων και η σωστή αντίληψη γεωμετρικών σχημάτων και των ιδιοτήτων τους. Οι μέγιστοι σκοποί αφορούν στην ευρύτερη παροχή και απόκτηση μαθηματικής παιδείας. Η τελευταία περιλαμβάνει την απόκτηση ενδιαφέροντος για την επίλυση προβλημάτων, την ανάπτυξη ικανότητας εκτίμησης καταστάσεων, την ικανότητα σύλληψης, διατύπωσης και εμπειρικής επαλήθευσης εικασιών, την εμπειρική και νοητική αιτιολόγηση εικασιών, τη δυνατότητα άρθρωσης και ελέγχου συλλογισμών, τη δυνατότητα ορθολογικής οργάνωσης και ακριβούς διατύπωσης της σκέψης και την ανάπτυξη ικανότητας μοντελοποίησης καταστάσεων(Τζανάκης & Κούρκουλος, 2000).

Επιπρόσθετα, οι Φιλίππου & Χρίστου (1995) υποστηρίζουν πως η διδασκαλία και το περιεχόμενο της γεωμετρίας διευκολύνουν την ανάπτυξη της κατώτερης και ανώτερης μαθηματικής σκέψης και έτσι οδηγούν στην περεταίρω εξέλιξή της. Ο De Moor (2000) μάλιστα θεωρεί πως η γεωμετρία μπορεί να συνδέσει τα υπόλοιπα συστατικά του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών, ενώ ο κοσμοπροσανατολιστικός χαρακτήρας της δημιουργεί συνεχώς προκλήσεις στο παιδί, λειτουργώντας ως αρωγός στην προσωπική του ανάπτυξη. Η Κολέζα (2000) υποστηρίζει, επίσης, ότι η διδασκαλία της γεωμετρίας βοηθάει στην ανάπτυξη τριών γνωστικών διαδικασιών: α) την οπτικοποίηση, β) την κατασκευή και γ) τον συλλογισμό. Εξάλλου, είναι γεγονός πως πολλοί ερευνητές (De Cuire, 1987·Lawson & Chinnappan, 2000·Milauskas, 1987) θεωρούν πως το μάθημα της γεωμετρίας συμβάλλει στη γνωστική και προσωπική ανάπτυξη των παιδιών, καθώς οξύνει την κριτική τους σκέψη και τη διαδικασία δημιουργίας επαγωγικών και παραγωγικών συλλογισμών.

Ακόμα, αξίζει να αναφερθεί πως η γεωμετρία συμβάλλει στην ανάπτυξη της αίσθησης του χώρου, η οποία είναι απαραίτητη δεξιότητα για έναν ενήλικα (Battista, 1999). Μέσω της διδασκαλίας της γεωμετρίας, οι μαθητές μελετούν τον χώρο που τους περιβάλλει, προσανατολίζονται με μεγαλύτερη ευκολία, μετρούν και συγκρίνουν. Έτσι διαμορφώνουν την αίσθηση του χώρου και αποκτούν υπολογιστικές ικανότητες (Lorenz,2005).

Συνοψίζοντας, λοιπόν, σύμφωνα με την Τουμάση (1994), η αξία της διδασκαλίας της γεωμετρίας στο Δημοτικό Σχολείο είναι αδιαμφισβήτητη καθώς βοηθάει στην ικανότητα αντίληψης του χώρου, καλλιεργεί την ικανότητα της νοερής σύλληψης των αντικειμένων, συνδέει τα μαθηματικά με τον πραγματικό κόσμο και βοηθάει στην κατανόηση άλλων αφηρημένων μαθηματικών ιδεών.

Όσον αφορά τη διδασκαλία της γεωμετρίας στο Ελληνικό Δημοτικό Σχολείο, αξίζει αρχικά να αναφέρουμε πως οι μαθητές έχουν αρκετές εμπειρίες με τις έννοιες της γεωμετρίας προτού ακόμα φοιτήσουν στο δημοτικό σχολείο. Στην καθημερινή τους ζωή ταξινομούν τα παιχνίδια τους ανάλογα με το σχήμα ή το μέγεθός τους, ανακαλύπτουν τις ιδιότητες των σχημάτων των παιχνιδιών τους και αναγνωρίζουν τα ονόματα πολλών σχημάτων. Οι γνώσεις αυτές των μαθητών πρέπει να αποτελέσουν τη βάση του αναλυτικού προγράμματος της γεωμετρίας για την ανάπτυξη των εννοιών του χώρου και της μέτρησης.

Ωστόσο, μέσω της τυπικής εκπαίδευσης τίθενται κάποιοι περεταίρω στόχοι ως προς τη διδασκαλία της συγκεκριμένης ενότητας των μαθηματικών. Σύμφωνα με τον επίσημο οδηγό για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων», Αθήνα, 2011, οι στόχοι που αφορούν στη διδασκαλία της γεωμετρίας στο Δημοτικό Σχολείο έχουν ως εξής:

Στο θέμα «Ταξινόμηση και ανάλυση σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες» οι μαθητές ξεκινούν στις μικρότερες τάξεις με αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση των σχημάτων (επίπεδων και στερεών) με βάση γεωμετρικά και μη χαρακτηριστικά και σε ποικιλία θέσεων, μεγεθών και προσανατολισμών, ενώ βαθμιαία αναγνωρίζουν βασικές ιδιότητες και σχέσεις. Στη συνέχεια, στον δεύτερο ηλικιακό κύκλο, διευρύνουν την αναγνώριση και στα στοιχεία των σχημάτων (σημεία, ευθείες, ημιευθείες, ευθύγραμμα τμήματα), καθώς και στις ιδιότητες (παράλληλες, κάθετες, ίσες, άνισες), και ταξινομούν τα σχήματα (τρίγωνα, τετράπλευρα, πολύγωνα και πολύεδρα) με βάση ιδιότητες όπως αριθμός πλευρών, σύγκριση γωνιών, μήκος πλευρών κ.λπ. (βλ. ΓΔ2 και ΓΔ3 Δ΄ Δημοτικού). Τέλος, στον τρίτο κύκλο, οι μαθητές διατυπώνουν απλούς ορισμούς και περιγράφουν σχέσεις μεταξύ των σχημάτων, εφαρμόζοντάς τες στην επίλυση χωρικών προβλημάτων (βλ. δραστηριότητες ΓΔ1, ΓΔ2, ΓΔ4 Α΄ Γυμνασίου και ΓΔ2, ΓΔ3 Β΄ Γυμνασίου).

Αντίστοιχα, στο θέμα «Κατασκευές σχημάτων και σχεδιασμός», οι μαθητές ξεκινούν στον πρώτο κύκλο με απλές κατασκευές με χρήση χειραπτικών υλικών και απλές παραστάσεις (βλ. ΓΔ11, Β΄ Δημοτικού). Στον δεύτερο ηλικιακό κύκλο περνούν σε απλούς σχεδιασμούς σε πραγματικό και ψηφιακό περιβάλλον, χρησιμοποιούν τα γεωμετρικά όργανα και σχεδιάζουν γεωμετρικά στοιχεία (ευθείες, ημιευθείες, κύκλους, κ.λπ.), καθώς και γεωμετρικά σχήματα (βλ. δραστηριότητες ΓΔ2, ΓΔ3, ΓΔ4 Γ΄ Δημοτικού, ΓΔ4 Δ΄ Δημοτικού, ΓΔ2 Ε΄ Δημοτικού και ΓΔ3, ΓΔ4 ΣΤ΄ Δημοτικού). Τέλος, στον τρίτο κύκλο χρησιμοποιούν πιο τυποποιημένα μέσα (κανόνα και διαβήτη ή αντίστοιχα ψηφιακά περιβάλλοντα), κατανοώντας τη διαφορά μιας κατασκευής με βαθμολογημένα όργανα από τη γεωμετρική κατασκευή με κανόνα και διαβήτη, και λύνουν προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών (βλ. ΓΔ3, ΓΔ7 Α΄ Γυμνασίου).

Στο θέμα «Σύνδεση επιπέδων και στερεών σχημάτων», οι μαθητές του πρώτου κύκλου ξεκινούν να αναγνωρίζουν τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα ως έδρες στερεών και κάνουν απλές κατασκευές αναπτυγμάτων. Στη συνέχεια, στον δεύτερο κύκλο, επεκτείνουν την αναγνώριση επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων ως έδρες στερεών, διερευνούν τις σχέσεις μεταξύ επίπεδων και στερεών γεωμετρικών σχημάτων (π.χ. τετραγώνου-κύβου, κύκλου-σφαίρας, κ.ά.) και γενικεύουν τη σύνδεση με όψεις και τομές, ενώ παράλληλα δημιουργούν και σχεδιάζουν αναπτύγματα στερεών (αρχικά κύβου και, στη συνέχεια, άλλων στερεών, βλ. δραστηριότητα ΓΔ3 Δ΄ Δημοτικού, ΓΔ3, ΓΔ6 Ε΄ Δημοτικού). Τέλος, στον τρίτο κύκλο συνδέουν τα στερεά με τα αναπτύγματά τους, όπως και τα επίπεδα και στερεά σχήματα με τις τομές.

Τέλος, στο θέμα «Ανάλυση ή σύνθεση επιπέδων και στερεών σχημάτων» οι μαθητές του πρώτου κύκλου συνθέτουν και αναλύουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και στερεά σε δύο ή περισσότερα μέρη (απλά παζλ αποτελούμενα από δύο ή τρία κομμάτια τάνγκραμ ή πεντόμινο) και σε πραγματικό ή ψηφιακό περιβάλλον, προσεγγίζοντας ιδιότητες και σχέσεις (βλ. δραστηριότητες ΓΔ4 Νηπιαγωγείο, ΓΔ6 Α΄ και Β΄ Δημοτικού). Στον δεύτερο και τρίτο κύκλο αναλύουν και συνθέτουν επίπεδα και στερεά γεωμετρικά σχήματα σε πιο σύνθετες καταστάσεις, αναγνωρίζοντας ιδιότητες και σχέσεις και συνδέοντάς τες με τη μέτρηση επιφάνειας (βλ. ΜΔ1 ΣΤ΄ Δημοτικού).

Μια ακόμα ομάδα ερευνητών που ασχολήθηκαν με το ζήτημα και έκαναν αξιόλογες μελέτες ήταν οι Gersten & Chard (1999), οι οποίοι προσπάθησαν να ορίσουν την έννοια της αριθμητικής αντίληψης, ώστε να δύνανται να αξιολογούν την άτυπη μάθηση και να σχεδιάζουν μελλοντικές παρεμβάσεις με σκοπό να βελτιώσουν τις μαθηματικές οδηγίες προς μαθητές με δυσκολίες στο μάθημα των μαθηματικών. Σε επόμενή τους έρευνα, οι Gersten, Jordan & Flojo (2005) διαπίστωσαν πως για πολλά παιδιά οι δυσκολίες που αντιμετώπιζαν σε σχέση με τα μαθηματικά δεν παρέμεναν αμετάβλητες στο πέρασμα του χρόνου, ενώ παρατήρησαν πως η παρουσία δυσκολιών ανάγνωσης φαινόταν να συσχετίζεται με τη χαμηλή απόδοση στα μαθηματικά (συννοσηρότητα) και σχεδόν όλοι οι μαθητές με μαθηματικές δυσκολίες παρουσίαζαν προβλήματα στην ακριβή και αυτόματη ανάκτηση βασικών αριθμητικών συνδυασμών, όπως 6+3. Ως εκ τούτου, κατέληξαν στη ζωτικότητα της πρώιμης και έγκαιρης παρέμβασης. Τέλος, σε μια μετα-ανάλυσή τους, οι Gersten, Chard & Jayanthi (2009) συνέθεσαν ευρήματα από 42 παρεμβάσεις (τυχαιοποιημένες δοκιμές ελέγχου και πειραματικές μελέτες) σε διδακτικές προσεγγίσεις που ενισχύουν την ικανότητα των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, και εξέτασαν τον αντίκτυπο τεσσάρων κατηγοριών εκπαιδευτικών συνιστωσών: (α) προσεγγίσεις σχεδιασμού διδασκαλίας ή/και προγραμμάτων σπουδών, (β) στοιχεία εκπαιδευτικής αξιολόγησης και ανατροφοδότηση προς τους καθηγητές σχετικά με τις μαθηματικές επιδόσεις των μαθητών, (γ) μορφοποιητικά δεδομένα και ανατροφοδότηση προς τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες και (δ) την εκπαίδευση με τη βοήθεια των μαθητών. Όλες οι εκπαιδευτικές συνιστώσες εκτός από την ανατροφοδότηση των μαθητών με τον καθορισμό στόχων και τη μάθηση με τη βοήθεια ομότιμων μελών σε μια τάξη είχαν σημαντικές μέσες επιπτώσεις. Τέλος, εξέτασαν την αποτελεσματικότητα αυτών των στοιχείων και κατέθεσαν προτάσεις για βελτίωση των παρουσών πρακτικών και δημιουργία νέων βελτιωμένων παρεμβάσεων στο μέλλον.

Παρόμοια συμπεράσματα εξήγαγαν και οι Swanson & Jerman (2006), όταν συνέκριναν παιδιά που αντιμετώπιζαν δυσκολίες στα μαθηματικά με παιδιά του μέσου όρου, αποδίδοντας τις διαφορές στις επιδόσεις τους σε ένα πλήθος παραγόντων.

Μια ακόμη ενδιαφέρουσα έρευνα των Bragg & Outhred (2004) δείχνει ότι πολλοί μαθητές στο τέλος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης δεν είναι σε θέση να προσδιορίσουν τη μονάδα μέτρησης του μήκους σε έναν χάρακα και για αυτό τον λόγο πρότειναν οι πρώτες δραστηριότητες μέτρησης να περιλαμβάνουν ρητή διδασκαλία των σχέσεων μεταξύ άτυπων μονάδων και της κατασκευής κλίμακας πάνω σε χάρακες.

Ορισμένες χαρακτηριστικές έρευνες στην Ελλάδα είναι η «Διερευνώντας τις πεποιθήσεις των μαθητών της ΣΤ΄ τάξης δημοτικού για το άπειρο» από τις Αγγελική Τσαμπουράκη και Σόνια Καφούση, η οποία έχει ως στόχο τη διερεύνηση της μαθηματικής έννοιας του «άπειρου», με την οποία δεν είχαν ασχοληθεί στη διάρκεια του μαθήματος των μαθηματικών κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς. Κατά τη διάρκεια αυτής της έρευνας διερευνήθηκαν και καταγράφηκαν οι πεποιθήσεις των μαθητών, όπως υποβάλλονται από συνειδητούς και υποσυνείδητους κανόνες, ιδέες, γνώσεις, αναπαραστάσεις και ερμηνείες σε σχέση με τη μαθηματική εμπειρία. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι το άπειρο γίνεται αντιληπτό στους μαθητές αυτής της ηλικίας με διαφορετικούς τρόπους σε διαφορετικά πλαίσια. Με άλλα λόγια, μια τόσο αφηρημένη και δυσνόητη έννοια όπως το άπειρο δε φάνηκε να δημιουργεί σοβαρά εμπόδια στην κατανόησή της από τους μαθητές, παρά την πολύπλοκή της φύση. Επομένως, το ερώτημα που τίθεται στο προσκήνιο είναι ποια θα μπορούσε να είναι η ενδεδειγμένη μαθηματική συμπεριφορά, η οποία θα μπορούσε να συγκεράσει την άτυπη γνώση με βασικές μαθηματικές έννοιες, όπως είναι τα κλάσματα, οι οποίες συνήθως παρουσιάζονται με τρόπο τυποποιημένο και γραμμικό.

5. Η έννοια των ρεαλιστικών μαθηματικών

Παρουσιάζουμε μαθηματική συμπεριφορά όταν αναγνωρίζουμε και περιγράφουμε μοτίβα, κατασκευάζουμε πρακτικά και εννοιολογικά μοντέλα φαινομένων, και δημιουργούμε συστήματα συμβόλων για να μας βοηθήσουν να αναπαραστήσουμε, να χειριστούμε και να σκεφτούμε τις ιδέες και να επινοήσουμε διαδικασίες για την επίλυση προβλημάτων (Battista, 1999).

Η ανάγκη για αποτελεσματική διδασκαλία στα μαθηματικά τεκμηριώνεται περαιτέρω τον Φεβρουάριο του2006 από μια μελέτη του Υπουργείου Παιδείας των ΗΠΑ. Τα πορίσματα της μελέτης βασίζονται σε δεδομένα από ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα των φοιτητών τετραετούς κολεγίου που αποφοίτησαν από το λύκειο το 1992. Η μελέτη διαπίστωσε ότι η λήψη ενός πλήρους χρονοδιαγράμματος, που απαιτούσε ακαδημαϊκά μαθήματα στο γυμνάσιο, συμπεριλαμβανομένων των μαθηματικών πέρα από την άλγεβρα II, ήταν η πιο σημαντική προ-κολεγιακή μεταβλητή που έκρινε εάν οι φοιτητές αποφοίτησαν από το κολέγιο. Η μελέτη διαπίστωσε επίσης σημαντική έλλειψη σύνδεσης ανάμεσα στο σχολικό πρόγραμμα σπουδών και στις προσδοκίες του πρώτου έτους του κολεγίου, γεγονός που υποδηλώνει την ανάγκη να αυξηθεί το επίπεδο του ακαδημαϊκού περιεχομένου στο γυμνάσιο. Το πρόγραμμα μαθηματικών μαθημάτων πρέπει να παρέχει στους μαθητές ευκαιρίες να μάθουν μαθηματικά σε νεαρή ηλικία.

Το μεταρρυθμιστικό κίνημα στην εκπαίδευση των μαθηματικών χρονολογείται στα μέσα της δεκαετίας του ’80 και ήταν μια απάντηση στην αποτυχία των παραδοσιακών μεθόδων διδασκαλίας, στην επίδραση της τεχνολογίας στο πρόγραμμα σπουδών και στην εμφάνιση νέων προσεγγίσεων στην επιστημονική μελέτη του πώς μαθαίνονται τα μαθηματικά. Το βασικό στοιχείο για το μεταρρυθμιστικό κίνημα ήταν ένα πρότυπο προσέγγισης του «τι και πώς» της διδασκαλίας των μαθηματικών (Battista, 1999). Στα νέα μαθηματικά, η εστίαση είναι στην επίλυση προβλημάτων, στη μαθηματική λογική, εξηγώντας ιδέες, καθιστώντας την αίσθηση πολύπλοκων καταστάσεων. Οι σπουδαστές πρέπει να έχουν τη δυνατότητα να λύσουν σύνθετα προβλήματα, να διαμορφώσουν και να δοκιμάσουν μαθηματικές ιδέες και να καταλήξουν σε συμπεράσματα. Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να διαβάζουν, να γράφουν και να συζητούν μαθηματικά, να χρησιμοποιούν σχεδιαγράμματα, σχέδια και αντικείμενα του πραγματικού κόσμου, και να συμμετέχουν σε επίσημα μαθηματικά και λογικά επιχειρήματα (Battista, 1999). Η κινητήρια δύναμη πίσω από την προσέγγιση που βασίζεται στα πρότυπα στην εκπαίδευση των μαθηματικών ήταν τα πρότυπα που ανέπτυξε το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM). Οι αρχές και τα πρότυπα για τα σχολικά μαθηματικά, που δημοσιεύθηκαν από το NCTM στο 2000, περιγράφουν τις αρχές και τα πρότυπα για την ανάπτυξη ενός ολοκληρωμένου σχολείου με μαθηματικό πρόγραμμα. Το έγγραφο περιγράφει έξι κατευθυντήριες αρχές σχετικά με την ισότητα, το μάθημα διδασκαλίας, τη διδασκαλία, τη μάθηση, την αξιολόγηση και την τεχνολογία, και προσδιορίζει πέντε περιεχόμενα και πρότυπα διεργασίας που περιγράφουν ποιο περιεχόμενο και διεργασίες πρέπει να γνωρίζουν και να μπορούν οι σπουδαστές να χρησιμοποιούν. Τα πρότυπα περιεχομένου είναι οργανωμένα γύρω από τα πεδία περιεχομένου και σχετίζονται με τους αριθμούς και τις λειτουργίες, την άλγεβρα, τη γεωμετρία, τη μέτρηση και ανάλυση δεδομένων και τις πιθανότητες. Τα πρότυπα διεργασιών οργανώνονται γύρω από τους τομείς της επίλυσης προβλημάτων και της συλλογιστικής.

Πρώτον, όλοι οι μαθητές πρέπει να έχουν την ευκαιρία να μάθουν νέα μαθηματικά. Δεύτερον, όλοι οι μαθητές έχουν την ικανότητα να μάθουν περισσότερα μαθηματικά από όσα έχουμε παραδοσιακά υποθέσει. Τρίτον, νέες εφαρμογές και αλλαγές στην τεχνολογία έχουν αλλάξει την εκπαιδευτική σημασία ορισμένων εννοιών των μαθηματικών. Τέταρτον, νέα εκπαιδευτικά περιβάλλοντα μπορούν να δημιουργηθούν με τη χρήση τεχνολογικών εργαλείων. Πέμπτον, η ουσιαστική μάθηση των μαθηματικών είναι ένα προϊόν σκόπιμης εμπλοκής και αλληλεπίδρασης η οποία βασίζεται στην προηγούμενη εμπειρία (Romberg, 2000). Ένα πρόσφατο έγγραφο ιδεών που δημοσίευσε η Αμερικανική Μαθηματική Εταιρεία έχει επιρροή στον προσδιορισμό ορισμένων κοινών τομέων συμφωνίας σχετικά με τα μαθηματικά. Οι καθορισμένοι τομείς συμφωνίας βασίζονται σε τρεις θεμελιώδεις προϋποθέσεις.

1. Οι βασικές δεξιότητες με αριθμούς εξακολουθούν να είναι σημαντικές και οι μαθητές χρειάζονται επάρκεια.
2. Υπολογιστικές διαδικασίες, τα μαθηματικά απαιτούν προσεκτική συλλογιστική για την ακρίβεια.
3. Συγκεκριμένα αντικείμενα και έννοιες, όπου οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να διατυπώνουν και να επιλύουν προβλήματα.

Οι τομείς συμφωνίας που προκύπτουν από αυτές τις αρχές περιλαμβάνουν τα εξής:

- Η μαθηματική ευελιξία απαιτεί την αυτόματη ανάκληση ορισμένων διαδικασιών και αλγορίθμων.
- Η χρήση των υπολογιστών σε οδηγίες μπορεί να είναι χρήσιμη, αλλά δεν πρέπει να εμποδίζει την ανάπτυξη της ευχέρειας με υπολογιστικές διαδικασίες και βασικά γεγονότα.
- Η ανάπτυξη κατανόησης της αριθμητικής σημασίας των κλασμάτων είναι απαραίτητη.
- Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να εξασφαλίσουν τη χρήση των «πραγματικών» πλαισίων για τη διδασκαλία.
- Τα μαθηματικά διατηρούν μια εστίαση στις μαθηματικές ιδέες.
- Τα μαθηματικά πρέπει να διδάσκονται χρησιμοποιώντας πολλαπλές στρατηγικές, ωστόσο ο δάσκαλος είναι υπεύθυνος για την επιλογή των κατάλληλων στρατηγικών για κάθε συγκεκριμένη έννοια.
- Οι δάσκαλοι των μαθηματικών πρέπει να κατανοήσουν την υποκείμενη έννοια και τη λογική που υπάρχει στις ιδέες και να είναι σε θέση να κάνουν συνδέσεις μεταξύ θεμάτων(Ball, Ferrini-Mundy, Kilpatrick, Milgram, Schmid&Scharr, 2005).

Από τα πολλά παραδείγματα παρερμηνειών των μαθητών στα μαθηματικά, έχουμε επιλέξει ένα: Μια σημαντική μαθηματική έννοια που αποτελεί μεγάλο εμπόδιο όταν οι μαθητές κινούνται από την αριθμητική στην άλγεβρα είναι ο ρόλος που παίζει το "=", το σημάδι για την ισότητα. Πολλά, αν όχι τα περισσότερα παιδιά του δημοτικού, έχουν την εσφαλμένη αντίληψη ότι το σήμα ισότητας είναι ένα σήμα για να κάνουμε κάτι, για να πραγματοποιήσουμε τον υπολογισμό που προηγείται. Το σχολικό πρόγραμμα σπουδών και οι περισσότερες ασκήσεις πρακτικής τους ταιριάζουν με αυτό το μοτίβο. Λίγοι δάσκαλοι συνειδητοποιούν τον βαθμό της παρερμηνείας των μαθητών τους. Επιπλέον, αν και οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί έχουν κάποια ιδέα ότι η ισότητα είναι η σχέση μεταξύ δύο αριθμών, λίγοι συνειδητοποιούν πόσο σημαντικό είναι οι μαθητές να κατανοήσουν την ισότητα ως σχέση, και λίγοι λαμβάνουν υπόψη αυτή την ανάγκη για κατανόηση όταν χρησιμοποιούν το σήμα ισότητας.

6. Η έννοια των πόρων γνώσης (fundsofknowledge)

Το ανθρώπινο κεφάλαιο ουσιαστικά συντίθεται από τους ανθρώπινους πόρους με τη μορφή των γνώσεων και των δεξιοτήτων που ενσωματώνονται στους μαθητές. Η παραπάνω διαδικασία αποτελεί μια αλληλουχία λειτουργιών διαχείρισης των ανθρώπινων πόρων γνώσης, που συμβάλλουν στην αύξηση της εξειδίκευσης. Παράλληλα, απαιτείται και μια ενεργητική διαδικασία μάθησης, όπου πρέπει να λαμβάνονται υπόψη οι πρωταρχικές ικανότητες, δεξιότητες και ανάγκες των μαθητών και όχι απλά να προσαρμόζονται οι μαθητές στις απαιτήσεις. Στο πλαίσιο αυτό, πρωτεύουσα σημασία κατέχει η ενεργητική, εμπειρική μάθηση (learningbydoing). Αυτό συνεπάγεται ότι η εποικοδομητική χρήση της θεωρίας του ανθρώπινου κεφαλαίου απαιτεί τη σύνδεση της μάθησης σε πρωταρχικό επίπεδο με δεξιότητες και ικανότητες που θα καταστήσουν το άτομο ενδυναμωμένο και έτοιμο να αντιμετωπίσει κάθε περιβάλλον. Η ορθή αξιοποίηση του ανθρώπινου δυναμικού μπορεί παράλληλα να συμβάλει και στην εκ νέου δημιουργία νέας γνώσης, μέσω της εμπειρικής μάθησης. Αυτό σημαίνει ότι το συγκεκριμένο ανθρώπινο κεφάλαιο, που είναι προϊόν ατομικής μάθησης, μπορεί με τη σειρά του να ενισχύσει και να ενδυναμώσει τη μάθηση.

Έρευνες που πραγματοποιήθηκαν στην Ελλάδα σχετικά με τη μαθηματική εκπαίδευση των Ρομά (Σταθοπούλου & Καλαβάσης, 2002·Χρονάκη, 2003) έδειξαν ότι τα σχολεία δε δείχνουν το απαιτούμενο ενδιαφέρον και δεν αξιοποιούν την γνώση που φέρνουν αυτοί οι μαθητές στο σχολείο. Για να ευνοηθεί η μάθηση των παιδιών που διαφέρουν ως προς τις πολιτισμικές τους καταβολές, είναι απαραίτητο να δημιουργηθεί ένα κλίμα στην τάξη το οποίο θα ενθαρρύνει τη χρήση της κουλτούρας του καθενός (Gay, 2002). Σύμφωνα με τους Ladson-Billings & Henry (1990), ο διδάσκων θα πρέπει να ενδιαφέρεται και για την κοινωνική επιτυχία πέρα από την ακαδημαϊκή, χρησιμοποιώντας την κουλτούρα και τον πολιτισμό των μαθητών προκειμένου να καταλάβουν τον κόσμο. Έτσι, μια διαπολιτισμική παιδαγωγική έχει ως κύριους στόχους να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν κοινωνικοπολιτική συνείδηση και θετικές κοινωνικές και πολιτισμικές ταυτότητες (Gutstein, 2003). Τα μαθηματικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν δηλαδή για την εξέταση θεμάτων που αφορούν τη φυλή, την εθνικότητα, το φύλο και την κοινωνική τάξη (Strutchens, 2000). Η τάξη και το μάθημα λοιπόν αποτελεί ένα μέσο για τη γνωριμία διάφορων πολιτισμών (Aronson & Laughter, 2016). Η μαθησιακή διαδικασία, σύμφωνα με τον Strutchens (2000), μπορεί να ξεκινά με την κατανόηση κάποιων μαθηματικών εννοιών που έχουν συνδεθεί με πραγματικές καταστάσεις και ενέργειες, και στη συνέχεια να ακολουθεί η ανάπτυξη στρατηγικών πάνω σε αυτές. Είναι σημαντικό ακόμη να δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές να εφαρμόζουν αυτά που μαθαίνουν μέσα από πρακτικές δραστηριότητες (Garcia, 1991). Η Gay (2010) στήριξε τη διαπολιτισμική διδασκαλία στην χρήση της γνώσης με βάση την κουλτούρα, τις γνώσεις, τις ιδεολογίες και τις εμπειρίες των μαθητών. Για να επιτευχθούν τα παραπάνω πρέπει και τα διδακτικά υλικά που θα χρησιμοποιηθούν να επιλέγονται με προσοχή προκειμένου να ανταποκρίνονται στα πολιτισμικά χαρακτηριστικά των ατόμων που απευθύνονται (Huang, Cheng & Yang, 2017). Όταν δάσκαλος και μαθητές δεν μοιράζονται την ίδια κουλτούρα και εμπειρίες, τότε ο δάσκαλος εξερευνώντας την συμβολή του κάθε πολιτισμού σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους, οδηγείται στην θεωρία της πολυπολιτισμικής εκπαίδευσης (Gay, 2002).

Οι διαφορές και η προφανής έλλειψη σύνδεσης μεταξύ σχολικών και εξωσχολικών μαθηματικών έχουν τεκμηριωθεί καλά σε αρκετές μελέτες (Abreu, 1995·Bishop & Abreu, 1991·Carraher, Carraher & Schliemann, 1985·Lave, 1988·Saxe, 1991·Schoenfeld, 1991) που δείχνουν ότι τόσο οι ενήλικες όσο και οι μαθητές είναι ικανοί να εκτελούν μαθηματικά καθήκοντα που θεωρούν κατάλληλα. Η πρακτική και χωρίς λάθη αριθμητική σε καθημερινές καταστάσεις έρχεται σε αντίθεση με τις χαμηλές επιδόσεις σε σχολικές περιστάσεις. Παρόλο που είχαμε επιβεβαιώσει ότι μια προοπτική των πόρων της γνώσης θα μπορούσε να επηρεάσει περιοχές περιεχομένου όπως γλωσσικές τέχνες και κοινωνικές σπουδές (Amanti, 1995·Floyd-Tenery, 1995·Hensley),οι τομείς των μαθηματικών και της επιστήμης ήταν πιο προβληματικοί. Η μεθοδολογία της γνώσης, μέσω της εθνογραφικής κατανόησης μιας κοινότητας, αποκαλύπτει τα μαθηματικά κεφάλαια της γνώσης που θα μπορούσαν να επηρεάσουν την πρακτική της τάξης.

Μεγάλο μέρος της εργασίας που διερευνά τις άτυπες μαθηματικές γνώσεις των παιδιών έχει συνταχθεί από κοινωνικοπολιτισμικές και κοινωνικοϊστορικές θεωρίες που περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο βρίσκεται η μάθηση σε συγκεκριμένα πλαίσια, που σχετίζονται με πολιτιστικά πρότυπα και επηρεάζονται από τα είδη των εργαλείων ήτις τεχνικές που χρησιμοποιούνται (Cole, 1996·Lave & Wenger, 1991·Rogoff, 2003·Saxe, 1991·Taylor, 2009). Είτε κάνουν αγορές για τους γονείς τους είτε πουλάνε καραμέλες στους δρόμους της Βραζιλίας, η έρευνα έχει αποδείξει ότι ακόμη και πολύ μικρά παιδιά συμμετέχουν σε εξωσχολικές δραστηριότητες που αφορούν τα μαθηματικά (Guberman, 1996·Nunesκ.ά., 1993). Σε αυτές τις πρακτικές, τα παιδιά χρησιμοποιούν τόσο μαθηματικές όσο και μη μαθηματικές στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων όπως ο καθορισμός της τιμής των ειδών ή η εξεύρεση κατάλληλης τιμής μεταπώλησης για τις καραμέλες. Αν και η έρευνα έχει τεκμηριώσει πολλές επιτυχημένες μαθηματικές στρατηγικές που χρησιμοποιούν τα παιδιά ανεπίσημα, άλλες μελέτες έχουν διαπιστώσει ότι ενώ τα παιδιά είναι σε θέση να επιλύσουν προβλήματα στο πλαίσιο αυτών των δραστηριοτήτων, συναντούν προβλήματα στην επίλυση παρόμοιων μαθηματικών προβλημάτων που παρουσιάζονται σε μια παραδοσιακής μορφής τάξη (Saxe, 1988·Taylor, 2000).

Περαιτέρω μελέτες υπογραμμίζουν την αναντιστοιχία μεταξύ του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν τα μαθηματικά εκτός του σχολείου και τους τρόπους με τους οποίους τα μαθηματικά παρουσιάζονται μερικές φορές στα σχολεία. Για παράδειγμα, ο Brenner (1998) διεξήγαγε μια μελέτη για τα ψώνια των παιδιών σε καταστήματα, όπου αναγνώρισε τις διαφορές μεταξύ των τρόπων με τους οποίους τα παιδιά χρησιμοποίησαν χρήματα σε αυτές τις αγορές και τη νομισματική μονάδα που περιέχεται στο πρόγραμμα σπουδών των μαθητών αυτών. Στα καταστήματα, παρατήρησε πως οι μαθητές σπάνια χρησιμοποιούσαν πένες κατά τις αγορές τους. Αντίθετα, πραγματοποίησαν αγορές που περιελάμβαναν υψηλότερο νόμισμα. Σε αντίθεση με τις καθημερινές πρακτικές, η μονάδα νομισματικής τάξης ξεκίνησε με πένες, υποθέτοντας ότι θα ήταν η απλούστερη ποσότητα για τα παιδιά.

Άλλες μελέτες έχουν επισημάνει ότι οι εκπαιδευτικοί αξιοποιούν τις εμπειρίες των παιδιών στο σπίτι και την κοινότητα όταν προγραμματίζουν μαθήματα μαθηματικών, αλλά οι συνδέσεις που κάνουν είναι συχνά επιφανειακές, αλλάζοντας ονόματα σε προβλήματα, και με προσαρμογή των πλαισίων ώστε να αντανακλούν τα συμφέροντα των μαθητών (Nicol & Crespo, 2006).Συχνά εκφράζουν αβεβαιότητα σχετικά με τη βιωσιμότητα αυτού του είδους διδασκαλίας και για το αν και κατά πόσον αυτά τα μαθήματα θα βοηθήσουν τους μαθητές να μάθουν τα μαθηματικά που χρειάζονται (Andrews, Yee, Greenhough, Hughes&Winter, 2005· Leonard, Brooks, Barnes-Johnson&Berry, 2010).

7. Η πολιτισμικά ανταποκρινόμενη διδασκαλία

Τα φύλλα εργασίας που μοιράστηκαν προέρχονται από κοινωνικό φροντιστήριο, οπότε το εν λόγω θέμα μπορεί να εξεταστεί και υπό ένα κοινωνικοπολιτισμικό πρίσμα. Επειδή η έρευνα πεδίου υλοποιήθηκε στο πλαίσιο του κοινωνικού φροντιστηρίου, όπου ο μαθητικός πληθυσμός είχε αυτά τα χαρακτηριστικά, μας αφορά η λογική της πολιτισμικά ευαίσθητης διδασκαλίας.

Στην πράξη, δηλαδή, υφίστανται ορισμένοι μαθητές –περιορισμένου αριθμού– οι οποίοι ναι μεν προέρχονται από οικογενειακά περιβάλλοντα με χαμηλό κοινωνικοοικονομικό υπόβαθρο, επιτυγχάνουν όμως υψηλές επιδόσεις. Πρόκειται για μια παγίδα, διότι δίνεται με αυτόν τον τρόπο η εντύπωση ότι η σχολική επιτυχία –άρα και η αποτυχία– είναι καθαρά προσωπική υπόθεση και έχει πιο πολύ να κάνει με τα χαρίσματα του εκάστοτε παιδιού, παρά με την ίδια την ανισωτική λειτουργία του σχολικού συστήματος. Σε ορισμένες περιπτώσεις, υπάρχει η προκατάληψη ότι η εργατική τάξη δεν ωθεί τα παιδιά της προς τα ανώτατα ιδρύματα, αλλά κι όταν ακόμη το κάνει, αυτό γίνεται διότι πρόκειται για εξαιρετικά «χαρισματικούς» μαθητές, σε αντίθεση με τα παιδιά της μεσαίας και ανώτερης τάξης, τα οποία όχι μόνον ενθαρρύνονται και παροτρύνονται από την οικογένειά τους, αλλά και αποκτούν τη συνήθεια να αντεπεξέρχονται στην κοινωνία (Bourdieu, 1974: 111, 115–116). Έχουν ανώτερες εκπαιδευτικές πηγές, ακόμα κι αν δεν καταβάλλουν προσπάθειες, ενώ το παιδί της εργατικής τάξης έχει περιορισμένες και κατώτερες εκπαιδευτικές πηγές και χρειάζεται να εργαστεί σκληρά (Bourdieu, 1967: 199), και για τον πρόσθετο λόγο ότι το εκπαιδευτικό σύστημα αναπαράγει την κατανομή του πολιτισμικού κεφαλαίου μεταξύ των τάξεων, ώστε η κουλτούρα που μεταβιβάζει είναι εγγύτερη στην κυρίαρχη κουλτούρα (Bourdieu, 1977: 493). Σύμφωνα με τον Bourdieu, η βαρύνουσα σημασία του οικογενειακού υπόβαθρου βρίσκεται σε μια γραμμική αλληλεπίδραση με την τυπική εκπαίδευση, υπό την έννοια ότι η βαρύτητα που προσδίδει κανείς στην αποτελεσματικότητα επίδρασης αυτών των πρακτικών είναι ανάλογη του βαθμού αναγνώρισης και κυρίως νομιμοποίησης των διαφορετικών κοινωνικών και πολιτισμικών πρακτικών στο πλαίσιο της επίσημης εκπαίδευσης (1984:1).

Η ανισωτική λειτουργία του εκπαιδευτικού συστήματος συνδέεται άρρηκτα και με τη θεωρία του ανθρώπινου κεφαλαίου, όπως έχουν δείξει κάποιες έρευνες, όπως η λεγόμενη «Έκθεση» του James Coleman (1966), η μελέτη με τον τίτλο «Ανισότητα» του Christopher Jenks (1973) και η έρευνα των Peter Blau και Otis Duncan (1967) για την κοινωνική κινητικότητα στις ΗΠΑ. Η «Έκθεση» του James Coleman καταδεικνύει μεταξύ άλλων ότι η ανισομερής κρατική επένδυση για την παιδεία δεν επιδρά τόσο καταλυτικά στην ανισότητα στην επίδοση όσο η οικογενειακή προέλευση και το διαφορετικό οικογενειακό και μορφωτικό περιβάλλον. Καταλήγει δε στο ότι η πολυπόθητη ισότητα δεν μπορεί να επιτευχθεί με μία και μόνον διορθωτική παρέμβαση σε ένα και μόνο θεσμικό σημείο του εκπαιδευτικού συστήματος, αλλά απαιτεί μεταβολές σε όλες τις πτυχές του εκπαιδευτικού συστήματος, για να επιτευχθεί μια πραγματική ισότητα ευκαιριών. Ουσιαστική ισότητα ευκαιριών δεν σημαίνει ισότητα κατ' επίφαση, αλλά ισότητα σε όλα τα μέλη των κοινωνικών ομάδων, ούτως ώστε να γεφυρωθούν τα κενά τα προερχόμενα από το ελλιπές οικογενειακό περιβάλλον, για να εκμεταλλευθούν τις προσφερόμενες ευκαιρίες, χωρίς να χρειάζεται να στοχεύσουν στις παραπληρωματικές πτυχές της εκπαίδευσης. Είναι επόμενο και εύλογο να μην μπορούν να διορθωθεί ουσιαστικά το εκπαιδευτικό σύστημα, όταν οι αλλαγές είναι μόνον εξωτερικές. Γεγονός είναι ότι σε ορισμένες εκ των περιπτώσεων οι αλλαγές κρίνονται αναγκαίες, οι κάθε είδους θεσμικές πρωτοβουλίες στοχεύουν σε μια εν γένει αναθεώρηση της εκπαίδευσης, δίνοντας έμφαση στο οικονομικό στάτους. Σύμφωνα με τον Μουζέλη, σε μια σχετική αρθρογραφία του σχετικά με έρευνα του ΚΑΝΕΠ, υφίσταται ισχυρή διασύνδεση μεταξύ «των γεωγραφικών και κοινωνικών ανισοτήτων στην Ελληνική κοινωνία» και των αντίστοιχων αποτελεσμάτων στις πανελλήνιες εξετάσεις του 2004. Η έρευνα αυτή καταδεικνύει την άρρηκτη σύνδεση μεταξύ του οικονομικού και κοινωνικού υπόβαθρου του υποψηφίου, όχι μόνον σε ό,τι αφορά στο οικογενειακό του περιβάλλον, ακόμη και σε συνάρτηση με το νομό από τον οποίο προέρχεται. Έτσι, καταδεικνύεται ότι υποψήφιοι που προέρχονται από περιοχές με μικρή ανάπτυξη, μεγάλα ποσοστά ανεργίας και χαμηλό κατά κεφαλήν εισόδημα, εν τέλει έχουν μικρότερες πιθανότητες επιτυχίας στις πανελλήνιες. Ο Μουζέλης, σύμφωνος με την κριτική στην ιδεολογία της κοινωνική ανόδου, τονίζει ότι η δωρεάν παιδεία κάθε άλλο παρά δωρεάν είναι, εντείνοντας στην πραγματικότητα τις ήδη υπάρχουσες ανισότητες.

Στη διαπολιτισμική εκπαίδευση προτάσσεται η αλληλεξάρτηση των μελών μιας πολυπολιτισμικής κοινωνίας και δεν αφορά μόνο στα παιδιά μεταναστών, αλλά σε όλα τα παιδιά, γι' αυτό και δίνεται έμφαση σε μια εκπαίδευση, όπου όλα τα παιδιά είναι ίσα, ανεξαρτήτως εθνικού, οικονομικού ή άλλου υποβάθρου, ως απάντηση στον πολιτισμικό πλουραρισμό (Κεσίδου, στο: Μαυροσκούφης, 2008: 23).Ο όρος «διαπολιτισμική ικανότητα» αναφέρεται σε αποτελεσματικές και ενδεδειγμένες συμπεριφορές, που εκδηλώνονται σε συναντήσεις με άτομα από άλλες κουλτούρες. Συχνά χρησιμοποιείται και ως «διαπολιτισμική επικοινωνιακή ικανότητα». Η έννοια αυτή σχετίζεται με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά, όπως η ικανότητα της ενσυναίσθησης, η ικανότητα του να ακούει κανείς ενεργά, να έχει θετική στάση προς τους ανθρώπους από άλλες κουλτούρες, να έχει κίνητρο να αλληλεπιδρά με αυτούς, αλλά και ευελιξία και θέληση να μαθαίνει μέσα από νέες εμπειρίες. Η διαπολιτισμική ικανότητα αποτελεί πεδίο ενδιαφέροντος για ερευνητές μιας πληθώρας ακαδημαϊκών κλάδων, όπως η επιστήμη της επικοινωνίας, της διαπολιτισμικής ψυχολογίας, της γλωσσολογίας, της εκπαίδευσης, και της διοίκησης επιχειρήσεων. Σε πρακτικό επίπεδο, αποτελεί πεδίο για μια πληθώρα επαγγελματιών, όπως οι διπλωμάτες, οι εκπαιδευτικοί, οι απασχολούμενοι σε επιχειρήσεις, οι εκπαιδευτές, οι απασχολούμενοι στην εξυπηρέτηση πελατών, και οι υπεύθυνοι χάραξης πολιτικής. Η διαπολιτισμική ικανότητα είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τον διαπολιτισμικό διάλογο, γιατί η επιτυχής έκβαση του τελευταίου εξαρτάται συχνά από το επίπεδο της διαπολιτισμικής ικανότητας των εμπλεκόμενων. Ανεξάρτητα από την έκβαση του διαλόγου, οι διαπολιτισμικά ικανοί συνομιλητές ωφελούνται αδιαμφισβήτητα από την διαλογική διαδικασία λόγω της ικανότητάς τους να μαθαίνουν από αυτή την εμπειρία και να συμμερίζονται την οπτική του άλλου. Το βασικό στοιχείο είναι ότι οι διαπολιτισμικές πρακτικές έρχονται να δώσουν λύσεις εκεί όπου οι υπόλοιπες παιδαγωγικές πρακτικές έχουν αποτύχει (Κεσίδου, στο: Μαυροσκούφης, 2008: 30).

Η διαπολιτισμική εκπαίδευση θεωρείται ως το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης, στα πλαίσια της οποίας αναλύονται εμπειρίες, αναπτύσσονται δεξιότητες και γνώσεις και πραγματοποιούνται δραστηριότητες.

Η εκπαίδευση σε αυτό το πλαίσιο οδηγεί στην ενσυναίσθηση (empathy) όπου πρέπει να μάθουμε να κατανοούμε τους άλλους, να μπαίνουμε στη θέση τους και να βλέπουμε τις απόψεις και τα προβλήματά τους μέσα από τη δική τους οπτική γωνία, μέσα από την κατανόηση της διαφορετικότητας του άλλου (Κεσίδου, στο: Μαυροσκούφης, 2008: 28–29). Πρόκειται μίας συλλογικής συνείδησης μέσα από μια πρακτική που μας δίνει τη δυνατότητα της αλληλεπίδρασης με άλλους πολιτισμούς για να υπερβούμε την ομοιογένεια. Επίσης, πρόκειται για μία εκπαίδευση ενάντια στον εθνικιστικό τρόπο σκέψης, ανεξάρτητα από την εθνική και πολιτισμική προέλευση (όπ.π.: 299).Κάποιοι στόχοι στο πλαίσιο των διαπολιτισμικών σχετίζονται επίσης με προσωπικές στρατηγικές μάθησης, καθώς και με ένα ευρύ πλαίσιο δημιουργικής έκφρασης και επικοινωνίας μέσω της αλληλεπίδρασης μεταξύ παιδιών διαφορετικού υποβάθρου (Καγκά, 2001: 97). Επίσης, στο πλαίσιο της σχολικής τάξης η ικανότητα αυτή προϋποθέτει με τη σειρά της τη διαφορετική θεώρηση των πραγμάτων, όπως επίσης και την προσπάθεια να «διευρύνουμε» τις καθημερινές μας πρακτικές και να αναζητήσουμε νέες μεθόδους προσέγγισης του «διαφορετικού» και του άλλου (Παπαδοπούλου, στο: Μαυροσκούφης, 2008: 65).

Οι βασικές αρχές που διέπουν τη Διαπολιτισμική Εκπαίδευση είναι η αναγνώριση της ισοτιμίας των πολιτισμών και της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης, η ισοτιμία του μορφωτικού κεφαλαίου ατόμων διαφορετικής πολιτισμικής προέλευσης, η εξασφάλιση του δικαιώματος όλων για ίσες ευκαιρίες στην εκπαίδευση και στη ζωή, καθώς και ο κάτω από πολιτισμικές συνθήκες αναπτυσσόμενος άνθρωπος ως αφετηρία και στόχος της διαπολιτισμικής παιδαγωγικής πράξης (Τσιάκαλος, 1997, Δαμανάκης 1997γ). Στη διαπολιτισμική εκπαίδευση δίνεται έμφαση σε μια εκπαίδευση, όπου όλα τα παιδιά είναι ίσα, ανεξαρτήτως εθνικού, οικονομικού ή άλλου υποβάθρου, γι’ αυτό και δεν πρέπει να υφίστανται στερεότυπα εις βάρος μειονοτήτων και μεταναστών (Bullivant, 1981). Σε γενικές γραμμές, η υπάρχουσα βιβλιογραφία υποδεικνύει την ανεπάρκεια των εκπαιδευτικών πρακτικών όσον αφορά στην παρουσία της μητρικής γλώσσας των μεταναστών μαθητών, λόγω του μεγάλου αριθμού μαθητών (Triandafyllidou & Gropas, 2007). Σύμφωνα με τον Banks (1997), η πολυπολιτισμική εκπαίδευση περιγράφει μια ευρεία ποικιλία σχολικών πρακτικών, προγραμμάτων και υλικών που σχεδιάζονται για να βοηθήσουν τα παιδιά από διαφορετικές ομάδες να βιώσουν την εκπαιδευτική ισότητα. Έτσι, η πολυπολιτισμική εκπαίδευση περιλαμβάνει εμπειρίες που προάγουν τις ικανότητες των μαθητών να κρίνουν και να αντιμετωπίσουν θέματα, όπως εκείνα του ρατσισμού, του σεξισμού, της ανισότητας, καθώς και να κατανοήσουν και να αποδεχθούν τις διαφορετικές πολιτισμικές αξίες και κώδικες (Schweizer, 1994). Η πολυπολιτισμική εκπαίδευση περιστρέφεται συνήθως γύρω από τα γλωσσικά και πολυπολιτισμικά χαρακτηριστικά των παιδιών των μειονοτήτων και των μεταναστών και δημιουργεί για αυτά μια θετική αυτοεικόνα και υψηλή αυτοεκτίμηση όταν διδάσκονται στο σχολείο τους τα δικά τους πολιτισμικά χαρακτηριστικά, η οποία λειτουργεί αντίστοιχα θετικά για τη σχολική τους επίδοση (Βαμβακίδου, Κυρίδης & Ντίνας, 2002). Σύμφωνα με τον F. Wardle (2011), οι δάσκαλοι πρέπει να χαρακτηρίζονται από ορισμένα χαρακτηριστικά, όπως η γνώση, ο σεβασμός και η ευαισθησία σε οτιδήποτε διαφορετικό, ενώ απαιτείται επίσης η γνώση μιας άλλης γλώσσας. Στη δική μας περίπτωση, πρέπει να εξεταστεί η διεθνής βιβλιογραφία, ως προς την ύπαρξη από την πλευρά των δασκάλων μεθόδων διδασκαλίας που θα μπορούσαν ευκόλως να συνοδεύσουν την προσπάθειά τους στο πλαίσιο της διαπολιτισμικής εκπαίδευσης (Μπάκας, Πανταζής & Σακελλαρίου, 2014). Αντίθετα, παρά την αναγκαιότητα για την ύπαρξη των παραπάνω αξιών, η συντριπτική πλειοψηφία των ερευνών σε αυτό δείχνουν ότι οι περισσότεροι δάσκαλοι δεν αισθάνονται ασφαλείς για να αντιμετωπίσει τα προβλήματα που προκύπτουν στην πολυπολιτισμική τάξη (Γεωργογιάννης, 2004·Γεωργογιάννης & Μπομπαρίδου, 2006· Μάγος, 2014·Μπούτσκου, 2011· Μπάκας, Πανταζής & Σακελλαρίου, 2014). Οι δάσκαλοι αντιμετωπίζουν δυσκολίες που προκύπτουν όχι μόνο λόγω του γλωσσικού φραγμού, αλλά και από τη διαφορετική κουλτούρα των μεταναστών μαθητών, σε συνδυασμό με πρακτικά ζητήματα, όπως ο μεγάλος αριθμός μαθητών στις αίθουσες διδασκαλίας (Γεωργιάδης & Ζήσιμος, 2012· Τριανταφυλλίδου & Γρόπας, 2007).

Ο όρος «διαπολιτισμική ικανότητα» αναφέρεται σε αποτελεσματικές και ενδεδειγμένες συμπεριφορές, που εκδηλώνονται σε συναντήσεις με άτομα από άλλες κουλτούρες (Δαμανάκης, 1997). Συχνά χρησιμοποιείται και ως «διαπολιτισμική επικοινωνιακή ικανότητα». Η έννοια αυτή σχετίζεται με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά, όπως η ικανότητα της ενσυναίσθησης, η ικανότητα του να ακούει κανείς ενεργά, να έχει θετική στάση προς τους ανθρώπους από άλλες κουλτούρες, να έχει κίνητρο να αλληλεπιδρά με αυτούς, αλλά και ευελιξία και θέληση να μαθαίνει μέσα από νέες εμπειρίες.

Β΄ μέρος: Σχεδιασμός και υλοποίηση της έρευνας

1. Σκοπός της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα

Ως πρωταρχικός σκοπός της έρευνας τίθεται η διερεύνηση των μαθηματικών γνώσεων μαθητών, σε ό,τι έχει να κάνει με ζητήματα άτυπης γνώσης, δηλαδή στρατηγικών που έχουν αναπτύξει ήδη από το οικογενειακό περιβάλλον και τις τροποποιούν στο πλαίσιο της τάξης. Μας απασχολεί πρωτίστως η ανάδειξη του τρόπου σκέψης και εκτίμησης των ίδιων των μαθητών για τα διάφορα μαθηματικά προβλήματα, καθώς και η διασύνδεση των γνώσεων με τις πρακτικές που χρησιμοποιούν εντός της οικογένειας. Τα ερευνητικά ερωτήματα είναι τα εξής:

- Πώς εκφράζεται η άτυπη γνώση στα μαθηματικά όταν πραγματεύονται κλάσματα και εμβαδά;
- Πώς επηρεάζει το υπόβαθρο των μαθητών την άτυπη γνώση;
- Σε ποιες περιπτώσεις υφίστανται παρανοήσεις για τις προαναφερθείσες μαθηματικές έννοιες;
- Αξιοποιούν οι μαθητές τους πόρους γνώσης που φέρουν στο σχολείο, και πώς αυτό αποτυπώνεται στην πραγμάτευση μαθηματικών εννοιών όπως τα κλάσματα και το εμβαδόν;

Ως πρωταρχικός σκοπός της έρευνας τίθεται η διερεύνηση των μαθηματικών γνώσεων των μαθητών, σε ό,τι έχει να κάνει με ζητήματα άτυπης γνώσης, και πώς η ενθάρρυνση για αξιοποίηση αυτών των πόρων γνώσης (fundsofknowledge) καθώς και εναλλακτικών τυπικών αλγορίθμων που γνωρίζουν οι μαθητές, προερχόμενοι από διαφορετικές κουλτούρες, επηρεάζει την επίδοσή τους κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων στην τάξη και ενδυναμώνει την ταυτότητά τους.

2. Μεθοδολογία της έρευνας

Η μεθοδολογία είναι η ποιοτική έρευνα, με χαρακτηριστικά έρευνας δράσης, με βασικά ερευνητικά εργαλεία τη χρήση φύλλων εργασίας με ερωτήσεις και μαθηματικά προβλήματα. Η παρατήρηση ήταν συμμετοχική.

Σε γενικές γραμμές, οι ερωτήσεις θα δίνουν βάση στο να δίνεται η ελευθερία και ο «χώρος» στους μαθητές να σκεφτούν και να απαντήσουν, χωρίς να αισθάνονται ότι εξετάζονται για τις μαθηματικές τους γνώσεις. Ορισμένες ερωτήσεις θα είναι πιο τυποποιημένες και άλλες πιο ελεύθερες, για να διαφανεί ο τρόπος σκέψης και επίλυσης των μαθητών, καθώς και οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν.

3. Χώρος, χρόνος, συμμετέχοντες

Το πεδίο της έρευνας είναι η τάξη σε ένα κοινωνικό φροντιστήριο στην Κατερίνη (αίθουσα εκκλησίας). η οποία επιλέχθηκε με το σκεπτικό ότι παρουσιάζουν τις μεγαλύτερες δυσκολίες στα προς μελέτη μαθηματικά φαινόμενα. Ο χρόνος εκτείνεται σε 1 διδακτικό έτος και σε 1 μάθημα (2 ώρες) ανά εβδομάδα. Οι συμμετέχοντες ήταν 10 μαθητές και συγκεκριμένα 6 κορίτσια και 4 αγόρια.

4. Διαδικασία

Μέθοδος:

Α) Στην αρχή του μαθήματος **εξήγησα στους μαθητές τον τρόπο με τον οποίο θα διεξαχθεί το μάθημα**, δηλαδή ότι θα δουλέψουμε ομαδικά πάνω σε ένα φύλλο εργασίας. Συγκεκριμένα, τους επεσήμανα πως για οποιαδήποτε δυσκολία θα έπρεπε να ρωτάν πρώτα τους συμμαθητές τους στην ομάδα και μετά εμένα, να συζητούν τόσο τους τρόπους επίλυσης της άσκησης όσο και τα συμπεράσματα στα οποία κατέληγαν, πως κάθε μέλος της ομάδας θα έπρεπε να είναι σε θέση να λύνει την άσκηση στον πίνακα και πως στα πλαίσια του χρόνου που τους έδινα θα έπρεπε να τελειώνει όλη η ομάδα την άσκηση και όχι ο καθένας ατομικά.

Β) Δεδομένου ότι επρόκειτο για το δεύτερο μισό της ενότητας, **διατύπωσα λίγες ερωτήσεις για την έννοια του εμβαδού και των κλασμάτων**, ούτως ώστε να θυμηθούν αυτά που διδάχτηκαν την προηγούμενη φορά. Τους ρώτησα, λοιπόν, τι δραστηριότητες πραγματοποίησαν και τι κατανόησαν ως προς τους διάφορους τρόπους μέτρησης του εμβαδού.

Γ) Αφού μοίρασα τα φύλλα εργασίας, έδινα και κατ' ιδίαν βοήθεια καθώς περιφερόμουν από ομάδα σε ομάδα κατά τη διάρκεια επίλυσης του φύλλου εργασίας.

Δ)Μετά το πέρας του απαιτούμενου χρόνου επίλυσης, σηκωνόταν στον πίνακα ένα παιδί από κάποια ομάδα και ένα άλλο από την ίδια ομάδα διάβαζε την άσκηση. Δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στο να προκύψει μία συζήτηση για τους τρόπους επίλυσης και το σκεπτικό των μαθητών. Επιπλέον, οι μαθητές ερωτήθηκαν για τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν, για τον τρόπο σκέψης τους, καθώς και για πιθανές στρατηγικές που είχαν αφομοιώσει από το οικογενειακό περιβάλλον.

Με στόχο να διαπιστώσω τον ρόλο που παίζει η αξιοποίηση των πόρων γνώσης των μαθητών στη γνώση των κλασμάτων και του εμβαδού, αρχικά έκανα ημιδομημένες συνεντεύξεις με τους μαθητές διερευνώντας αφενός την εμπλοκή τους σε συγκεκριμένες περιστάσεις και την συνακόλουθη άτυπη γνώση που συνδέεται μ' αυτές και αφετέρου με άμεσες ερωτήσεις διερεύνησα την πιθανή χρήση εναλλακτικών αλγορίθμων που χρησιμοποιούν στο δικό τους πλαίσιο.

Στη συνέχεια:

1ο, αξιοποίησα αυτούς τους αλγορίθμους στην τάξη.

2ο, ετοίμασα φύλλα εργασίας τα οποία περιείχαν ασκήσεις και προβλήματα ώστε να διαπιστωθεί αν αξιοποιώντας τους πόρους γνώσης των μαθητών οι ίδιοι ήταν πιο αποτελεσματικοί στην επίλυση των προβλημάτων.

3ο, Οι μαθητές κλήθηκαν να δουλέψουν σε ομάδες ενώ η ερευνήτρια λειτουργούσε διευκολυντικά όταν οι μαθητές ζητούσαν βοήθεια.

4ο, Μετά τη συμπλήρωση των φύλλων εργασίας ή και ταυτόχρονα ζητείτο από τους μαθητές να εξηγήσουν τι ενέργειές τους κατά την επίλυση. Όπου έκρινα απαραίτητο, έκανα ερωτήσεις ή αναφορές στους πόρους γνώσης των μαθητών ώστε να διευκολύνω την επίλυση των προβλημάτων.

5. Συλλογή δεδομένων

5.1. Διερεύνηση των πόρων γνώσης των μαθητών

5.1.1. Η έννοια του κλάσματος

Πολύ σημαντικό στοιχείο της έρευνάς μας αποτέλεσε η ανάγκη να ερευνηθεί η ανταπόκριση των μαθητών στην επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων, ποια είναι δηλαδή η πρότερη εμπειρία τους πάνω σε αυτό, από την καθημερινότητά τους, καθώς και από τον περίγυρό τους. Οι απαντήσεις τους δίνουν ένα πολύ σημαντικό στίγμα για τους τρόπους με τους οποίους διαχειρίζονται την έννοια των κλασμάτων και του εμβαδού στα ανάλογα προβλήματα, καθώς και για τη στρατηγική και τον τρόπο σκέψης τους. Η πλειονότητα των απαντήσεων στην έρευνά μας έδωσε έμφαση στη χρήση των χρημάτων στις καθημερινές συνδιαλλαγές με την οικογένεια:

> «Ναι κυρίως με χρήματα και με μοίρασμα».
>
> «όταν πήγαμε στα τζάμπο εγώ πήρα τα 2/4 των χρημάτων που μας είχαν δώσει οι γονείς μου και η αδερφή μου τα άλλα 2/4».

Επιπλέον, οι μαθητές που είχαν γνώση του τι σημαίνει επίλυση προβλήματος το είδαν ως έναν τρόπο λύσης στα καθημερινά ζητήματα:

> «Είναι όταν κάτι μας απασχολεί και προσπαθούμε να το λύσουμε».
>
> «Επίλυση προβλήματος είναι η λύση ενός προβλήματος, όταν έχει να κάνει με το φαγητό».
>
> «Ναι, έχει χρειαστεί να λύσουμε ένα πρόβλημα με τη χρήση μαθηματικών».

Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι μαθητές γνωρίζουν τι είναι η επίλυση προβλήματος, αλλά δεν έχουν στην πράξη προβεί σε μια επίλυση τέτοιου είδους, το οποίο συνεπάγεται ότι έχουν μια θεωρητική, αλλά όχι πρακτική εννοιολογική αποσαφήνιση: «Η επίλυση ενός προβλήματος είναι η πράξη που θα κάνω για να λύσω ένα πρόβλημα. Και επίσης δεν έχει χρειαστεί ποτέ».

Στις περιπτώσεις που οι μαθητές είχαν έρθει σε επαφή με την επίλυση προβλήματος μέσω κλασμάτων, παρατηρούμε ότι έχουν συνδέσει αυτή τη διεργασία με την έννοια του μοιράσματος, της διανομής και της συνδιαλλαγής εντός της οικογένειας:

«Ναι κυρίως στη μαγειρική, στις συνταγές».

Το πως να λύσουμε ενα προβλημα
Ναι στην μαγειρικη με το αλευρι για το κέικ

«Ναι, όταν ήμουν μικρή η μαμά μου μού έλεγε να αφαιρέσω κάποια κομμάτια, π.χ. από πίτσα και να της πω πόσα έμειναν».

Επίσης, μία απάντηση δίνει έμφαση στο ότι υπάρχουν και άλλοι τρόποι να διαχειριστεί κανείς την έννοια του μοιράσματος:

«Όχι, δεν έχει χρειαστεί, γιατί πλέον υπάρχουν σύγχρονες λύσεις».

Τα παιδιά χρειάζονταν λίγο χρόνο προκειμένου να συνηθίσουν να εργάζονται στο μάθημα των μαθηματικών τόσο σε ομάδες όσο και πάνω σε φύλλα εργασίας. Έγινε εμφανές ότι ιδιαίτερα το μάθημα των μαθηματικών το είχαν στο μυαλό τους συνυφασμένο με ένα ανταγωνιστικό πλαίσιο μάθησης, όπου υπερτερούσε ο μαθητής ή η μαθήτρια που είχε το πιο γρήγορο «μαθηματικό» μυαλό. Επίσης, υπήρχαν εκ των πραγμάτων αντιθέσεις στην περίπτωση δύο μαθητών, οι οποίοι ήταν από τη Ρουμανία και είχαν διδαχτεί την αφαίρεση με διαφορετικό τρόπο, γεγονός που δημιουργούσε την ανάγκη εξατομίκευσης σε ορισμένες ασκήσεις.

Χαρακτηριστική υπήρξε η περίπτωση του Γ., ο οποίος κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, συμμετείχε έντονα στο μάθημα, απαντούσε και έκανε ερωτήσεις και είχε μεγάλη προθυμία να κάνει ασκήσεις. Η προθυμία αυτή για αυτόνομη εργασία μετατράπηκε σε άρνηση για συλλογική. Ο Γ. αρνήθηκε να συνεργαστεί για την εξεύρεση κοινών λύσεων, τελείωνε πάντα πρώτος και προχωρούσε στις παρακάτω ασκήσεις χωρίς να περιμένει να τελειώσει η ομάδα του και τέλος όταν ένα μέλος της ομάδας του με ρώτησε κάτι σχετικά με μια άσκηση και το προέτρεψα να ρωτήσει τον Γ. που την είχε λύσει εκείνος απάντησε: «Δεν θέλω να της το εξηγήσω». Αναφορικά με την εργασία πάνω σε φύλλα εργασίας, τα παιδιά το αντιμετώπισαν περισσότερο ως απλό φυλλάδιο-φωτοτυπία, παραβλέποντας την ανακαλυπτική του μορφή. Χρειαζόταν την προτροπή μου για να λύσουν την άσκηση και δυσκολεύονταν να συνεχίσουν αυτόνομα. Στην περίπτωση, όμως, που τους προέτρεπα να αναπτύξουν προφορικά τις απόψεις τους, έδειξαν μεγαλύτερο ενθουσιασμό. Προέκυψε ένας γόνιμος διάλογος σχετικά με το ζήτημα των κλασμάτων, όπου οι περισσότεροι μαθητές συμφώνησαν στο ότι στην καθημερινή μας ζωή, τα κλάσματα είναι παντού, με τη μορφή του μοιράσματος και των διαφορετικών μερών ενός συνόλου.

5.1.2. Η έννοια του εμβαδού

Στην περίπτωσή μας, οι σχέσεις ανάμεσα στις γνώσεις των μαθηματικών και στα αντίστοιχα βιώματα διαφαίνεται από τις απαντήσεις τους στο αν έπρεπε σε μια πραγματική δραστηριότητα να υπολογίσουν το εμβαδόν, πρόκειται, δηλαδή, για μια πραγματική συνθήκη. Οι μαθητές φαίνεται ότι ανταποκρίθηκαν σε αυτή την ερώτηση βιωματικά, διότι ανασκάλεψαν στη μνήμη τους συγκεκριμένες περιπτώσεις:

«Η περίπτωση αυτή ήταν όταν έπρεπε να μετρήσουμε το εμβαδόν ενός δωματίου για να βάλουμε π.χ. το χαλί για τον χειμώνα»

«Όταν θέλαμε να τοποθετήσουμε τα έπιπλα στο δωμάτιό μου για να δούμε πού θα μπει το καθένα»

«Για να αγοράσουμε ένα χαλί μετρήσαμε το εμβαδόν»

Επιπλέον, η άτυπη γνώση των μαθητών διαφάνηκε και στην ερώτηση σχετικά με τις μαθηματικές έννοιες, αν δηλαδή έχει υπάρξει περίπτωση κατά την οποία οι γονείς τους τούς εξήγησαν ένα ζήτημα υπό μαθηματική σκοπιά. Η πλειονότητα των μαθητών έδωσε κάπως ασαφείς απαντήσεις:

«Ναι, όταν δεν καταλάβαινα κάτι στο πρόβλημα»

«Ναι σε μερικά πράγματα»

Επιπλέον, μια περισσότερο εξειδικευμένη ερώτηση σχετιζόταν με την έννοια του κλάσματος στα πλαίσια της οικογενειακής ζωής, αν δηλαδή οι μαθητές είχαν συνδιαλλαγεί ποτέ με τους γονείς του για ένα τέτοιο ζήτημα με μαθηματική χροιά. Η πλειονότητα των απαντήσεων έχει απαντήσει θετικά σε αυτή την ερώτηση, χωρίς ωστόσο να δίνει και κάποια επεξήγηση προς αυτή την κατεύθυνση:

«Ναι σε πιο καθημερινά πράγματα όπως τα παραπάνω παραδείγματα»

«Όχι πριν τη διδασκαλία»

«Ναι κυρίως στη μαγειρική, στις συνταγές»

Μία χαρακτηριστική απάντηση που δίνει πρακτική διάσταση στην έννοια του εμβαδού είναι η παρακάτω:

> Ναι οταν παμε να πάρουμε σπιτι που μετραμε τα τετραγωνικά και στην μαγιρική οταν θελουμε να φτιαξουμε πιτα το ταψί.

5.2. Το γνωστικό υπόβαθρο των μαθητών

Στις προηγούμενες ενότητες είδαμε αναλυτικά ότι η γνώση των μαθητών περιλαμβάνει τόσο τη γνώση των συγκεκριμένων μαθητών, γνώση της μάθησης των μαθητών γενικότερα, δηλαδή το να γνωρίζουν ποιοι είναι, τι γνωρίζουν και πώς βλέπουν τη μάθηση, τα μαθηματικά και τον εαυτό τους. Είδαμε επίσης ότι η άτυπη γνώση αξιοποιείται όταν ο δάσκαλος πρέπει να ξέρει κάτι για το προσωπικό και το εκπαιδευτικό υπόβαθρο κάθε μαθητή, ειδικά για τις μαθηματικές δεξιότητες, τις ικανότητες και τις διαθέσεις που φέρνει ο μαθητής στο μάθημα. Ο δάσκαλος πρέπει επίσης να είναι ευαίσθητος στους μοναδικούς τρόπους που έχουν οι μαθητές στο να μάθουν, να σκέφτονται και να κάνουν μαθηματικά Κάθε μαθητής μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται σε ένα μονοπάτι μέσα από τα σχολικά μαθηματικά, εξοπλισμένο με δυνατά σημεία και αδυναμίες, έχοντας αναπτύξει τις δικές του προσεγγίσεις στα μαθηματικά, ικανές να συμβάλλουν και κερδίζοντας από κάθε μάθημα με διακριτικό τρόπο. Οι δάσκαλοι χρειάζονται επίσης μια γενική γνώση για το πώς οι μαθητές σκέφτονται – τις προσεγγίσεις που είναι χαρακτηριστικές για τους μαθητές μιας δεδομένης ηλικίας και υπόβαθρου, τις κοινές αντιλήψεις και παρανοήσεις και τις πιθανές πηγές αυτών των ιδεών. Κατά την τελευταία δεκαετία, οι ερευνητές έχουν δημιουργήσει ένα εντυπωσιακό σύνολο των στοιχείων σχετικά με τον τρόπο σκέψης των παιδιών για διάφορες μαθηματικές έννοιες, σύνολο που εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου

Το αρχικό ζήτημα που εξετάσαμε στα φύλλα εργασία ήταν η έννοια του κλάσματος. Αρχικά, στην ερώτηση του τι σημαίνει κλάσμα, οι απαντήσεις που δόθηκαν ποικίλλουν σε γενικές γραμμές. Κάποιοι μαθητές δίνουν περισσότερο τη μαθηματική έννοια, ενώ άλλοι προσδίδουν μία περισσότερο καθημερινή και πρακτική χροιά:

Κλάσμα είναι δύο αριθμοι που τους χωρίζουμε με μία γραμμή και τους διαιρούμε.

Τα κλάισματα είναι παντού: Μουσικη, ωρα, ψωνια, και στα αντιπιρετικά. Όταν είμουν αρωστος η μαμα μου μου εκανε μασκες

Το κλάσμα είναι μία διαίρεση. Δηλ. έχουμε καποια πράγματα και τα μοιράζουμε. Ο παρονομαστης είναι το ΟΛΟ και ο αριθμητής είναι ένα μέρος από αυτό.

Κλάσμα συμένει όταν υπάρχει ένας αριθμός εγώ πέρνω το μισό πχ. Έχουμε μια πίτσα με 8 κομμάτια και εγώ τρώω τα 3 δηλαδή $\frac{3}{8}$.

Κλάσμα είναι 2 αριθμοί που χωρίζονται και συγκρίνονται για να δούμε αν είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο.

Όταν εχεις αδελφια χωριζεις τα κρεβατια Οτι ειναι τα 3 αδελφια σε ενα δωματιο και μας βοηθανε τα κλάσματα $\frac{1}{3}$

Στις παραπάνω απαντήσεις, φαίνεται μια ποικιλία στον τρόπο σκέψης και νοηματοδότησης του κλάσματος ως αναπαράστασης. Η πρώτη απάντηση δίνει έμφαση στην εξωτερική μορφή του κλάσματος, σαν ένα είδος νοερής εικόνας. Ο μαθητής απαντά το πρώτο πράγμα που του έρχεται στο μυαλό. Η δεύτερη απάντηση έχει μία περισσότερο πρακτική διάσταση, ενώ η τρίτη πλησιάζει περισσότερο στην ουσιαστική έννοια του κλάσματος, στο ότι πρόκειται για διαίρεση. Η τέταρτη απάντηση δίνει μια περισσότερο βιωματική χροιά, με την έννοια του μοιράσματος, του μερισμού, γι’ αυτό και χρησιμοποιεί το παράδειγμα της πίτσας. Η πέμπτη απάντηση δίνει έμφαση σε μια άλλη πτυχή του κλάσματος, στην έννοια της σύγκρισης, η οποία όμως δεν αποτελεί την ουσιαστική λειτουργία του κλάσματος. Η έκτη απάντηση δίνει έμφαση στην έννοια του μοιράσματος, έτσι επιτυγχάνεται η μεταφορά γνώσης από το οικογενειακό στο σχολικό πλαίσιο.

Επιπλέον, έχουμε και μία απάντηση που προέρχεται από τον χώρο της μουσικής και διαφαίνεται ότι ο συγκεκριμένος μαθητής έχει επιτύχει ορθώς τη μεταφορά γνώσης από το μουσικό πλαίσιο στο σχολικό πλαίσιο.

Για το σουπερ μαρκετ δεν ξερω αλλα
εχω ακουση στο οδιο να λενε οτι
παιζουν με ρυθμο $\frac{3}{8}$

Αντιθέτως, όταν πρόκειται για ομώνυμα κλάσματα, φαίνεται να μην αντιμετωπίζουν ιδιαίτερες δυσκολίες:

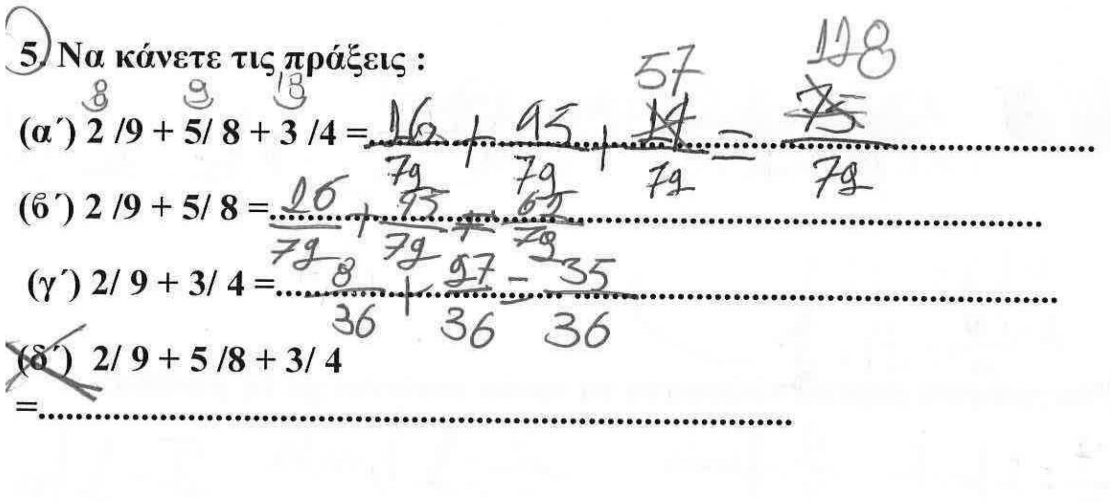
3. Να τοποθετήσετε στην ευθεία των αριθμών τα κλάσματα 2 /3 , 3 /3 , 5/ 3 , 6 /3 και 8/ 3 .

$\frac{9}{3}, \frac{3}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{8}{3}$

3. Να τοποθετήσετε στην ευθεία των αριθμών τα κλάσματα 2 /3 , 3 /3 , 5/ 3 , 6 /3 και 8/ 3 .

$\frac{2}{3} < \frac{3}{3} < \frac{5}{3} < \frac{6}{3} < \frac{8}{3}$

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα απάντησης, στην οποία διαφαίνεται η αδυναμία σύνδεσης άτυπης και τυπικής γνώσης, καθώς και η δυσκολία να φανούν τα βήματα που ακολούθησε ο κάθε μαθητής, είναι στην ερώτηση πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων, όπου αρκετοί μαθητές βρήκαν μεν σωστά τις πράξεις, μετατρέποντας τα κλάσματα σε ομώνυμα, χωρίς ωστόσο να δείξουν τη διαδικασία με την οποία το έκαναν αυτό:



5. Να κάνετε τις πράξεις :

(α΄) 2 /9 + 5/ 8 + 3 /4 =..

(β΄) 2 /9 + 5/ 8 =...

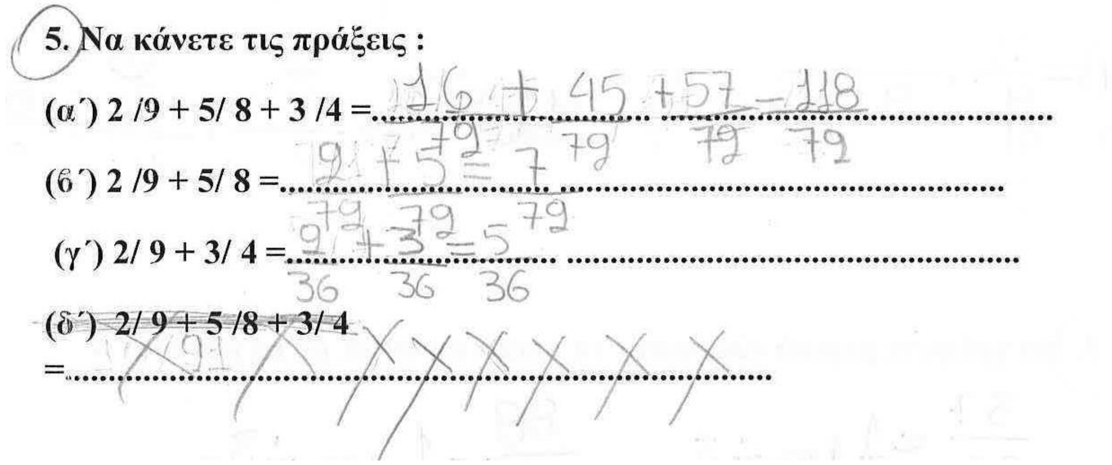
(γ΄) 2/ 9 + 3/ 4 =...

(δ΄) 2/ 9 + 5 /8 + 3/ 4

=..

Η αδυναμία να παρουσιαστεί ακριβώς η διαδικασία σκέψης και χρήσης των κλασμάτων, δείχνει μια τυποποίηση, ενώ αυτό που απαιτείται είναι (Γαγάτσης κ.ά., 2001) η αναγνώριση της έννοιας μέσα από την ποικιλία των αναπαραστάσεων και ο ευέλικτος χειρισμός της έννοιας ανάμεσα στις ποιοτικά διαφορετικές αναπαραστάσεις. Παράλληλα, εννοιολογικές παρανοήσεις που σχετίζονται με την κατανόηση του κλάσματος ως αριθμού οδηγούν και σε δυσκολίες αναπαράστασης και τοποθέτησης του κλασματικού αριθμού στην κλασματική γραμμή (Post κ.ά.,1993) αλλά και σε δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων στα οποία οι υποδιαιρέσεις στην αριθμητική γραμμή δεν ισούνται με τον παρονομαστή του κλάσματος ή δεν είναι πολλαπλάσια του (Ηλία & Γαγάτση, 2004).

Η τυποποίηση της γνώσης φαίνεται επίσης στις κυρίως πράξεις, όπου η χρήση της μετατροπής των κλασμάτων σε ομώνυμα γίνεται περιστασιακά:



5. Να κάνετε τις πράξεις :

(α΄) 2 /9 + 5/ 8 + 3 /4 =..

(β΄) 2 /9 + 5/ 8 =...

(γ΄) 2/ 9 + 3/ 4 =...

(δ΄) 2/ 9 + 5 /8 + 3/ 4

=..

5. Να κάνετε τις πράξεις :

(α΄) 2 /9 + 5/ 8 + 3 /4 = $\frac{16}{79}+\frac{95}{79}+\frac{\cancel{14}}{79}=\frac{\cancel{75}}{79}$ 57 178

(β΄) 2 /9 + 5/ 8 = $\frac{16}{79}+\frac{95}{79}=\frac{62}{79}$

(γ΄) 2/ 9 + 3/ 4 = $\frac{8}{36}+\frac{27}{36}=\frac{35}{36}$

~~**(δ΄)**~~ **2/ 9 + 5 /8 + 3/ 4**

=...

6. Να κάνετε τις πράξεις :

(α΄) 8/ 3 + 5/ 3 – 3/ 4 = $\frac{8}{3}+\frac{5}{3}+\frac{13}{3}-\frac{3}{4}=\frac{52}{19}-\frac{9}{19}=\frac{43}{19}$

(β΄) 8 /3 – 5/ 3 · 3 4 = $\frac{8}{3}-\frac{5}{3}=\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$

Εντούτοις, δεν παρουσιάστηκε ιδιαίτερη δυσκολία στην ερώτηση σχετικά με τα κλάσματα τα οποία ισούνται με τη μονάδα:

9. Να γράψετε μερικά κλάσματα τα οποία ισούνται με τη μονάδα:

$\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$ μονάδα

$\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}=1$ μονάδα

9. Να γράψετε μερικά κλάσματα τα οποία ισούνται με τη μονάδα:

$\frac{36}{36}$, $\frac{148}{148}$, $\frac{14}{14}$, $\frac{199}{199}$

9. Να γράψετε μερικά κλάσματα τα οποία ισούνται με τη μονάδα:

$\frac{7}{7}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{10}{10}$

9. Να γράψετε μερικά κλάσματα τα οποία ισούνται με τη μονάδα:

$\frac{7}{7}$ = 1 μονάδα $\frac{8}{8}$ = 1 μονάδα $\frac{3}{3}$ = 1 μονάδα $\frac{5}{5}$ = 1 μονάδα

12. Να γράψετε δύο ισοδύναμα κλάσματα:

$\frac{2}{3}$ $\frac{10}{15}$

Αντιθέτως, μια σχετική δυσκολία εμφανίστηκε σε ό,τι έχει να κάνει με τα ισοδύναμα κλάσματα, όπου δεν παρουσιάζουν συνήθως τη διαδικασία που ακολούθησαν, δηλαδή συνήθως δεν δηλώνουν τον αριθμό με τον οποίο πολλαπλασίασαν ή διαίρεσαν τα κλάσματα:

12.2. Να εξετάσετε αν τα κλάσματα 7 /8 και 63/ 72 είναι ισοδύναμα.

$\frac{7}{8} + \frac{63}{72}$

12. Να γράψετε δύο ισοδύναμα κλάσματα:

$\frac{2}{5} \xrightarrow{3} \frac{6}{15}$ $\frac{3}{6} = \frac{6}{12}$

$\frac{1}{5}$ $\frac{7}{35}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{12}{16}$

Υπάρχει, δηλαδή, έμφαση στη διαδικαστική γνώση, χωρίς ωστόσο οι μαθητές να έχουν συνηθίσει να παρουσιάζουν τη μέθοδο που χρησιμοποίησαν. Αυτή η δυσκολία διαφαίνεται και στην παρακάτω ερώτηση, η οποία απαιτεί τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα.

7) Το τμήμα Α3 έχει 24 μαθητές και τα 3 /8 είναι αγόρια. Να βρείτε πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια έχει το τμήμα Α3.

Μία απάντηση είναι η παρακάτω, η οποία βγάζει μεν σωστό αποτέλεσμα, χωρίς ωστόσο να φαίνεται ακριβώς η μεθοδολογία:

$24 : 8 = 3$ (υπόλοιπο 00)

$3 \cdot 3 = 9$

$24 - 9 = 15$

Τα κοριτσια ειναι 15 και τα αγορια 9

Επίσης, στην παρακάτω απάντηση, υπάρχει σύγχυση ανάμεσα στο πότε πρέπει να χρησιμοποιηθεί πολλαπλασιασμός και πότε διαίρεση:

Τα $\frac{8}{8}$ είναι 24

Τα $\frac{1}{8}$ είναι $24 \cdot 8 = 192$

Τα $\frac{3}{8}$ είναι $192 : 3 = 64$

$24 \times 8 = 192$

$192 : 3 = 64$

Φάνηκε, επίσης, ότι δυσκολεύτηκαν ιδιαίτερα στην ιεραρχία των κλασμάτων, ακόμη και στη χρήση των συμβόλων ανισότητας:

4. Να βρείτε ένα κλάσμα μεγαλύτερο του 3/ 5 και μικρότερο του 4/ 5 .

$\frac{9}{5} < \frac{4}{5} > \frac{3}{5}$

4. Να βρείτε ένα κλάσμα μεγαλύτερο του 3/ 5 και μικρότερο του 4/ 5 .

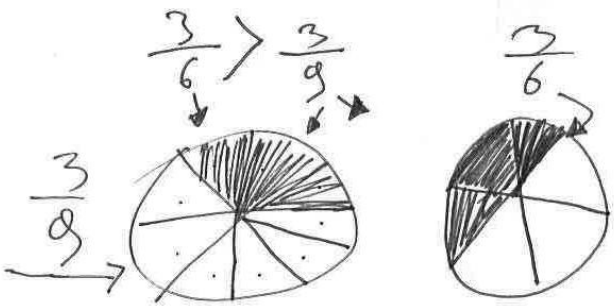
$\frac{6}{6}$ $\frac{2}{5}$

4. Να βρείτε ένα κλάσμα μεγαλύτερο του 3/ 5 και μικρότερο του 4/ 5 .

3/5 < >4/5

Έπειτα μεταβαίνουμε στις ερωτήσεις, οι οποίες αφορούν περισσότερα σε προβλήματα, με την οπτικοποίηση των κλασμάτων, μέσα από παραδείγματα της καθημερινής ζωής:

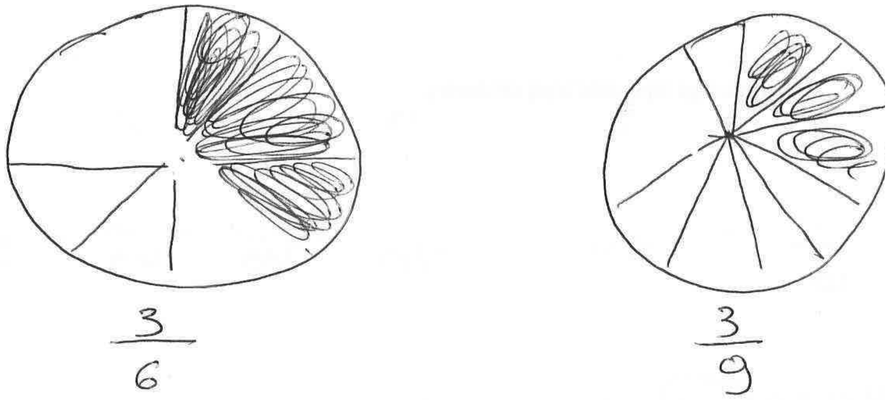
5. Η Δανάη και ο Λευτέρης αγόρασαν δυο ίδιες πίτσες. Η Δανάη έ
3/6 της πίτσας και ο Λευτέρης έφαγε τα 3/9. Και οι δύο πιστει
έφαγαν ίση ποσότητα πίτσας. Έχουν δίκιο; Αιτιολόγησε την αι
σου με αναπαράσταση και υπολογισμούς.



: Τα πεισότερα τα έφαγε α Δανάα γιατί μεγαλίτερο είναι αφού μετο μικρότερο παρονομαστη. Όχι δεν έχουν δίκαιο

$\frac{3}{6} > \frac{3}{9}$

Στην παραπάνω απάντηση ο μαθητής φαίνεται να έχει κατανοήσει εμπράκτως την έννοια της σύγκρισης κλασμάτων. Αντίθετα, η παρακάτω απάντηση δείχνει να μην έχει υπάρξει κατανόηση της έννοιας του κλάσματος:



Η Δανάη και ο Λευτέρης
έφαγαν 3 κομμάτια ανάλογα
που η πίτσα του Λευτέρη
είναι μεγαλύτερη

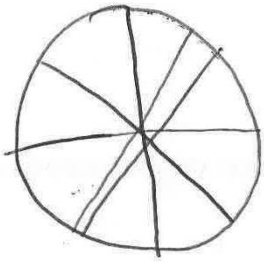
Και στις άλλες απαντήσεις οι μαθητές απέτυχαν πλήρως να αναλογιστούν το κλάσμα ως λόγο και όχι ως κυριολεκτική αποτύπωση των αριθμών με τη μορφή σχημάτων.

$\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{9} = \frac{9}{54}$ –

Απάντηση: Τα πιο πολλα τα εφαγες η Δανάη.

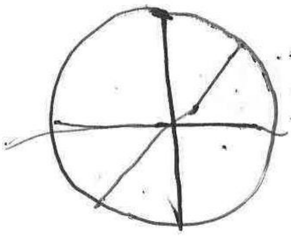
$\frac{3}{6} : \frac{3}{9}$

$\frac{3}{6} \cdot \frac{9}{3} = 18$



Και ο Λευτέρης τα λιγότερα

$\frac{3}{9} < \frac{3}{6}$



$\frac{3}{6} > \frac{3}{9}$ η Δανάη έφαγε τα περισσότερα

$\frac{3}{6} > \frac{3}{9}$

$\frac{3}{6}$ = Η Δανάη έφαγε 3 από τα 6 κομμάτια.

$\frac{3}{9}$ = Ο Λευτέρης έφαγε 3 από τα 9 κομμάτια.

Άρα, τα ποιο πολλά κομμάτια τα έφαγε η Δανάη γιατί, $\frac{3}{6}$ θέλει 4 κομμάτια ακόμα ενώ ο Λευτέρης από τα $\frac{3}{9}$ θέλει 6 κομμάτια.

Στην παραπάνω απάντηση υπάρχει ένας σχετικός συλλογισμός, βασισμένος σε άτυπη γνώση, αλλά υπολείπεται στο αποτέλεσμα. Σε γενικές γραμμές, οι μαθητές δεν φάνηκαν να ανταποκρίνονται στη σχηματική παρουσίαση του κλάσματος ως μέρους όλου επιφάνειας, ούτε μπορεί να ειπωθεί πως υπήρξε σημαντική εστίαση στη σύγκριση των κλασματικών αριθμών. Καλύτερη ανταπόκριση υπήρξε στο σχηματισμό ζευγαριών ισοδύναμων κλασμάτων:

1. Από τα παρακάτω κλάσματα, επιλέγω τα κατάλληλα για να φτιάξω ζευγάρια ισοδύναμων κλασμάτων: 3/5 , 1/5 , 4/8 , 9/15 , 12/24 , 4/20

$\frac{3}{5} \overset{\times 3}{\underset{\times 3}{=}} \frac{9}{15}$ $\quad \frac{4}{8} \overset{\times 3}{\underset{\times 3}{=}} \frac{12}{24}$ $\quad \frac{1}{5} \overset{\times 4}{\underset{\times 4}{=}} \frac{4}{20}$

.. Από τα παρακάτω κλάσματα, επιλέγω τα κατάλληλα για να φτιάξω ζευγάρια ισοδύναμων κλασμάτων: 3/5 , 1/5 , 4/8 , 9/15 , 12/24 , 4/20

$\frac{3}{5}$ $\frac{9}{15}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{4}{20}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{12}{24}$

Από τα παρακάτω κλάσματα, επιλέγω τα κατάλληλα για να φτιάξω ζευγάρια ισοδύναμων κλασμάτων: 3/5 , 1/5 , 4/8 , 9/15 , 12/24 , 4/20

×3 $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{15}$ ×3 ×4 $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{20}$ ×4 ×3 $\frac{4}{8}$, $\frac{12}{24}$ ×3

Πέραν της σύγκρισης κλασμάτων, τα φυλλάδια αφορούσαν και στις αμιγώς μαθηματικές πράξεις. Εκεί οι απαντήσεις των μαθητών ποικίλλουν:

6. Να κάνετε τις πράξεις :

(α΄) 8/ 3 + 5/ 3 – 3/ 4 = (32/12 + 20/12) – 9/12 = 52/12 – 9/12 = 42/12

(β΄) 8 /3 – 5/ 3 · 3 4 = (32/12 – 20/12) · 9/12 = 12/12 · 9/12 = 108/12

6. Να κάνετε τις πράξεις :

(α΄) 8/ 3 + 5/ 3 – 3/ 4 = $\frac{8}{3} + \frac{5}{3} - \frac{3}{4} = \frac{24}{12} + \frac{20}{12} - \frac{9}{12} = \frac{48}{12}$

(β΄) 8 /3 – 5/ 3 · 3 4 =..

6. Να κάνετε τις πράξεις : Εκ.Π(3,4)=12

(α΄) 8/ 3 + 5/ 3 – 3/ 4 = $\frac{8}{3} + \frac{5}{3} - \frac{3}{4} = \frac{32}{12} + \frac{20}{12} - \frac{9}{12} = \frac{93}{12}$

(β΄) 8 /3 – 5/ 3 · 3/4 =..

Στην πρώτη απάντηση ο μαθητής δεν έχει σχηματίσει καν τα κλάσματα με τη σωστή τους μορφή, ενώ στις άλλες δυο οι απαντήσεις έχουν μείνει ημιτελείς. Είναι χαρακτηριστικό ότι οι υπόλοιποι μαθητές άφησαν εντελώς κενή την παραπάνω άσκηση. Αυτό μπορεί να συνδέεται με την έμφαση που δίνεται από τους εκπαιδευτικούς μόνο σε μία εννοιολογική μορφή του κλάσματος, στο μέρος-όλο (Mack, 1993·Κολέζα, 2000). Ο Freudental (1983) αναφέρει πως: «η φαινομενολογική ένδεια της προσέγγισης των κλασμάτων [στη μορφή του μέρους-όλου] μου φαίνεται ότι είναι σε μεγάλο βαθμό υπεύθυνη για τη διδακτική αποτυχία». Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές πολλές φορές δίνουν έμφαση μόνο στο κλάσμα ως μέρος ενός όλου, και όχι τόσο στις μαθηματικές πράξεις που μπορούν να πραγματοποιηθούν.

Η αδυναμία χρήσης των κλασμάτων σε ζητήματα της καθημερινής ζωής φάνηκε και στην παρακάτω ερώτηση, η οποία δεν απαντήθηκε από κανέναν μαθητή:

4. Σε ένα τραπέζι ενός εστιατορίου, έχουν σερβιριστεί 18 πίτσες για 24 άτομα. Για την καλύτερη εξυπηρέτηση και την άνεση των πελατών, ο εστιάτορας προτίθεται αντί για ένα τραπέζι να διαθέσει περισσότερα. Πόσες εναλλακτικές περιπτώσεις υπάρχουν; Δείξτε και με αναπαράσταση.

5.3. Οι συνεντεύξεις των μαθητών

Στην προφορική συζήτηση, οι μαθητές αποκρίθηκαν ότι τα φύλλα εργασίας τους βοήθησαν να ξετυλίξουν τις γνώσεις τους επαρκώς, όπως φαίνεται από την παρακάτω απάντηση:

«Μου φάνηκε αρχικά ότι δεν ήξερα τίποτα, αλλά τελικά πολλά αυτά τα ξέρουμε ήδη από την οικογένεια. Στη λαϊκή όπου οι γονείς μου πουλάνε φρούτα, ακούω ότι συνέχεια μιλάνε για κιλά και για ένα τέταρτο του κιλού κτλ.»

Επίσης, στη συζήτηση που προέκυψε, αρκετοί μαθητές επεσήμαναν ότι ακούγοντας τις απόψεις των άλλων, άλλαξαν γνώμη για αυτά που ήδη πίστευαν:

> «Μέχρι τώρα, νόμιζα ότι το εμβαδό είναι μόνο για τα προβλήματα, τώρα κατάλαβα ότι είναι για όλα, για θέματα καθημερινά, όπως όταν βάζουμε ένα σεντόνι στο κρεβάτι και θέλουμε να δούμε αν χωράει».

Κάποιοι μαθητές εξέφρασαν την άποψη ότι η θεωρητική γνώση από μόνη της δεν είναι επαρκής για τη διδασκαλία μίας μαθηματικής έννοιας:

> «Κάποια πράγματα, αν δεν τα δούμε στην πράξη, για παράδειγμα στο σπίτι ή έξω, δεν μπορούμε να τα καταλάβουμε. Για παράδειγμα, νόμιζα ότι τα κλάσματα είναι αριθμοί όπως οι άλλοι, τώρα κατάλαβα ότι δείχνουν ένα κομμάτι από όλο».

Στη συνέχεια, συνδέσαμε τα κλάσματα με τους δεκαδικούς και συμμιγείς αριθμούς. Μέτρηση χρόνου: ψηφιακό αναλογικό ρολόι. Σχέση της ώρας με τα λεπτά και τα δευτερόλεπτα. Πρόσθεση και αφαίρεση συμμιγών.

Στόχοι: Οι στόχοι του συγκεκριμένου μαθήματος ήταν οι εξής: Να γίνει χρήση του αναλογικού και του ηλεκτρονικού ρολογιού για τη μέτρηση του χρόνου, σε συνδυασμό με τη διδασκαλία των μονάδων μέτρησης του χρόνου. (ώρα, λεπτό, δευτερόλεπτο).Ο στόχος αυτός είναι γνωστικός και εμπίπτει στην κατηγορία της εφαρμογής σύμφωνα με την ταξινομία των διδακτικών στόχων του Bloom. Επίσης, επιλέχθηκε αυτός ο τρόπος διότι αρκετοί μαθητές δεν γνώριζαν την ώρα.

I. Να μάθουν τα παιδιά να διαβάζουν την ώρα στο αναλογικό και ψηφιακό ρολόι και να τη μετατρέπουν από τη μια μορφή στην άλλη (και οι δύο γνωστικοί στόχοι, ο πρώτος εμπίπτει στην κατηγορία της γνώσης και η δεύτερος στην κατηγορία της κατανόησης).
II. Να γνωρίζουν τη σχέση ανάμεσα στην ώρα, το λεπτό και το δευτερόλεπτο(γνωστικός στόχος και συγκεκριμένα γνώση).
III. Να υπολογίζουν τη διάρκεια χρονικών διαστημάτων με το μυαλό και με τη χρήση συμμιγών(γνωστικός στόχος και συγκεκριμένα κατανόηση).

Όπως φαίνεται από την παρουσίαση των στόχων παραπάνω εκτός από το ότι είναι καθαρά και μόνον γνωστικοί, υπάρχει μια κλιμάκωση δυσκολίας καθώς προχωράμε από τον πρώτο στον τελευταίο στόχο. Το ίδιο ιεραρχημένοι φαίνεται να είναι οι στόχοι και ως προς την αξία τους. Αρχικά, δηλαδή, τίθενται στόχοι, οι οποίοι σε γενικές γραμμές σχετίζονται με τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις των μαθητών πάνω στην ώρα, τα λεπτά και τα δευτερόλεπτα, για να περάσουμε σε πιο πολύπλοκους και απαιτητικούς στόχους, όπως είναι ο υπολογισμός του χρόνου με τη χρήση των συμμιγών.

Περιεχόμενο: Για την επίτευξη των παραπάνω στόχων χρησιμοποιήθηκε το σχολικό βιβλίο. Και κυρίως η καρτέλα 11 με τη χρονική γραμμή του 12ωρου και 24ωρου.

Μέθοδος:

Α) Σύνδεση με τα προηγούμενα μαθήματα και με την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών, ερωτήσεις αφόρμησης.

Αρχικά, έκανα μία ερώτηση γενικού τύπου, για να ελέγξω τις γνώσεις των μαθητών όσον αφορά στο τι είναι ο χρόνος γενικότερα, γιατί τον χρησιμοποιούμε και από ποια μέρη αποτελείται. Σε γενικές γραμμές οι απαντήσεις των μαθητών ήταν ορθές, εκφράζοντας τη χρησιμότητα της μέτρησης του χρόνου για την καθημερινή μας ζωή. Εντούτοις, παρατηρήθηκε δυσκολία των μαθητών να διακρίνουν τη σχέση ανάμεσα στην ώρα, τα λεπτά και τα δευτερόλεπτα. Στη συνέχεια, τους ανέφερα τη χρήση του ψηφιακού ρολογιού, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στο να κατανοήσουν τι σημαίνει για παράδειγμα το 00:00.

Β) Δραστηριότητες ανακάλυψης από το βιβλίο του μαθητή.

Στη συνέχεια προχωρήσαμε στο βιβλίο, στη χρονική γραμμή από την καρτέλα 11 του παραρτήματος. Έγραψα στον πίνακα ώρες, με την ψηφιακή και με την αναλογική μορφή και ζήτησα από τα παιδιά να τις μετατρέψουν από τη μια μορφή στην άλλη, παρουσιάζοντας το αποτέλεσμα στο μαγικό τους πίνακα. Μεταβαίνοντας στο βιβλίο, ζήτησα από τα παιδιά να καταγράψουν την ένδειξη των δύο ρολογιών στην πρώτη περίπτωση, λεκτικά και συμβολικά. Έπειτα, εξασφάλισα πως τα παιδιά κατανόησαν ότι σε μία διακοπή ρεύματος η ένδειξη του ψηφιακού ρολογιού μηδενίζεται(00:00), ενώ ρώτησα και ποια ώρα δεν εμφανίζεται ποτέ στο ψηφιακό ρολόι (24:00). Τα παιδιά κατέγραψαν τις ενδείξεις και στη δεύτερη περίπτωση. Έγινε η απαραίτητη εξήγηση ότι η διακοπή έλαβε χώρα τις πρωινές ώρες. Φρόντισα μάλιστα να κατευθύνω τα παιδιά ρωτώντας «Πόση ώρα λειτουργεί το ψηφιακό ρολόι μετά τη διακοπή; Πριν από πόσα λεπτά ήρθε το ρεύμα;».

Γ) Επισημοποίηση-συμπέρασμα

Στο σημείο αυτό καθοδήγησα τα παιδιά στο να διατυπώσουν τους βασικούς άξονες του μαθήματος, κάνοντας ερωτήσεις γενικού τύπου όπως «Με ποιόν τρόπο υπολογίζουμε με τον νου χρονικά διαστήματα;». Πρόσεξα ιδιαίτερα στο να κατανοήσουν ότι η 1 ώρα έχει 60 λεπτά και στη συνέχεια τους προέτρεψα να προσθέσουν ώρες με λεπτά. Αντίστοιχα έγινε το ίδιο και με την αφαίρεση. Για την αφαίρεση και πρόσθεση συμμιγών, τόνισα τη σχέση μεταξύ της 1 ώρας και λεπτών.

Δ)Εφαρμογή-εμπέδωση

Εν συνεχεία, οι μαθητές προχώρησαν στην εφαρμογή των όσων διδάχθηκαν, με την επίλυση των ασκήσεων του βιβλίου του μαθητή και του τετραδίου εργασιών. Τους δόθηκε λίγος χρόνος για να τις επεξεργαστούν, ενώ όσο τις έλυναν, φρόντισα να περάσω από τα θρανία τους, δίνοντας ιδιαίτερη προσοχή στους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες. Στο σύνολο των ασκήσεων ιδιαίτερη μέριμνα δόθηκε στο να κάνουν νοερά όσες από τις πράξεις μπορούν. Όσα παιδιά χρειάζονταν, μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν και το χάρτινο αναλογικό ρολόι από το προηγούμενο μάθημα, ως εποπτικό εργαλείο.

Μέσα: πίνακας

Αξιολόγηση: Το μάθημα αυτό επρόκειτο για ένα είδος εμπέδωσης της μέτρησης του χρόνου. Γι’ αυτό τον λόγο η αξιολόγηση που εφάρμοσα κατά κόρον ήταν η διαγνωστική, ιδιαίτερα στα αρχικά στάδια του μαθήματος, διατυπώνοντας ερωτήσεις που κύριο στόχο είχαν να διερευνήσουν τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών. Έκανα χρήση και της διαμορφωτικής αξιολόγησης κατά τη διάρκεια του μαθήματος, ιδιαίτερα στο σημείο όπου έπρεπε να διατυπωθεί ένα συμπέρασμα, προτού προχωρήσουμε στην εφαρμογή της νέας γνώσης μέσω των ασκήσεων. Στις σωστές απαντήσεις των παιδιών παρείχα λεκτικές ενισχύσεις όπως «μπράβο» και «σωστά», ενώ στα λάθη δεν έδινα τη σωστή απάντηση αλλά ρωτούσα και την άποψη άλλων παιδιών. Τέλος, έδινα αρκετό χρόνο στους μαθητές για να απαντήσουν και φρόντιζα να συμμετέχουν όλοι οι μαθητές στο μάθημα. Παρόλα αυτά, αυτοί που τελικά συμμετείχαν περισσότερο είτε απαντώντας στις ερωτήσεις είτε κάνοντας ερωτήσεις ήταν οι «καλοί» μαθητές. Οι υπόλοιποι χρειάζονταν την προτροπή μου για να πάρουν μέρος.

Συμπερασματικά, στο τέλος του μαθήματος, το βασικότερο πρόβλημα που αντιμετώπισα ήταν αυτό της έλλειψης χρόνου. Στο ενδεικτικό σχέδιο μαθήματος που είχα ετοιμάσει είχα προβλέψει ότι θα συμπεριλαμβάνονταν περισσότερες διαγνωστικές ερωτήσεις, για την ενεργοποίηση της υπάρχουσας γνώσης. Επίσης, δεν επαρκούσε ο χρόνος για την εφαρμογή πολλών παραδειγμάτων με τη χρήση του εποπτικού υλικού. Έτσι, το συμπέρασμα της δραστηριότητας διατυπώθηκε πρώτα από μένα, διότι δεν υπήρχε ο χρόνος να επεξεργαστούν οι ίδιοι οι μαθητές την επισημοποίηση της νέας γνώσης.

Συζήτηση αποτελεσμάτων

Βασικός σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η σκιαγράφηση και αποτύπωση της άτυπης γνώσης και των πόρων γνώσης των μαθητών σχετικά με την έννοια του κλάσματος και του εμβαδού. Μέσω της έρευνας με τη χρήση των φύλλων εργασίας και της μετέπειτα συζήτησης στο πλαίσιο της τάξης, επιδιώξαμε να ερευνήσουμε τη διαδικασία με την οποία ο εκπαιδευτικός δύναται να αξιοποιήσει την πρότερη γνώση των μαθητών στα μαθηματικά, ιδιαίτερα σε ό,τι έχει να κάνει με το οικογενειακό υπόβαθρο και την καθημερινή, πρακτική γνώση των μαθηματικών. Στο παρόν κεφάλαιο, θα επιδιώξουμε να παρουσιάσουμε τα βασικά συμπεράσματα της έρευνας, απαντώντας στα ερωτήματα της έρευνας ένα προς ένα, με μία παράλληλη διασύνδεση με τις βασικές θεωρητικές παραδοχές της εργασίας.

Όσον αφορά στο ερώτημα του πως παρουσιάζεται η άτυπη γνώση στα κλάσματα και στο εμβαδόν, η άτυπη γνώση φαίνεται στο ποια είναι η πρότερη εμπειρία τους πάνω σε αυτό, από την καθημερινότητά τους, καθώς και από τον περίγυρό τους. Η πλειονότητα των απαντήσεων στην έρευνά μας έδωσε έμφαση στη χρήση των χρημάτων στις καθημερινές συνδιαλλαγές με την οικογένεια στα κλάσματα. Στις περιπτώσεις που οι μαθητές είχαν έρθει σε επαφή με την επίλυση προβλήματος μέσω κλασμάτων, παρατηρούμε ότι έχουν συνδέσει αυτή τη διεργασία με την έννοια του μοιράσματος, της διανομής και της συνδιαλλαγής εντός της οικογένειας. Προέκυψε ένας γόνιμος διάλογος σχετικά με το ζήτημα των κλασμάτων, όπου οι περισσότεροι μαθητές συμφώνησαν στο ότι στην καθημερινή μας ζωή, τα κλάσματα είναι παντού, με τη μορφή του μοιράσματος και των διαφορετικών μερών ενός συνόλου. Σε γενικές γραμμές, διαφαίνεται ότι οι μαθητές έχουν μια σχετικώς αχνή γνώση της μαθηματικής γνώσης στα πλαίσια της οικογένειας. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα ερευνών (π.χ. Gelman & Greeno, 1987) φαίνεται ότι τα παιδιά προτού πάνε στο σχολείο διαθέτουν μια προϋπάρχουσα γνώση της μέτρησης των αριθμών και των συνόλων, που ονομάζονται σχήματα (schemata) και θεωρούν ότι τα παιδιά χρησιμοποιούν τα σχήματα αυτά προκειμένου να δημιουργούν πλάνα για την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων που τους παρουσιάζονται. Τα σχήματα διευκολύνουν τα παιδιά στο να δημιουργούν αναπαραστάσεις από τις πληροφορίες που δίνονται από τα μαθηματικά αυτά προβλήματα. Στη συγκεκριμένη έρευνα, οι μαθητές δείχνουν να έχουν μια αδύναμη σκέψη απέναντι στην αμιγώς μαθηματική έννοια των κλασμάτων και μια τάση υπεραπλούστευσης των μαθηματικών εννοιών. Συγκεκριμένα, στο φυλλάδιο εργασίας σχετικά με τα κλάσματα, φαίνεται ότι αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις κατά τις οποίες τα κλάσματα είναι ετερώνυμα. Η Moss (2005) έχει επισημάνει πως είναι αναγκαίο να τηρούνται στη διδακτική προσέγγιση των κλασματικών αριθμών: να λαμβάνεται υπόψη η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών και κυρίως η γνώση των μαθητών για την έννοια του αριθμού και να επιδιώκεται η ανάπτυξη μεταγνωστικών στρατηγικών που αφορούν τη διαχείριση της γνώσης των κλασμάτων. Η πρώτη αρχή στηρίζεται στη διερεύνηση και αξιοποίηση των προϋπαρχουσών ιδεών των μαθητών. Οι μαθητές έχουν ήδη προσχηματισμένες ιδέες που αφορούν την έννοια του αριθμού ως όλου (Moss, 2005). Παράλληλα, σημαντικό είναι να ληφθούν υπόψη και οι ήδη εδραιωμένες ιδέες σχετικά με τις πράξεις των αριθμών. Έτσι για παράδειγμα ο πολλαπλασιασμός έχει συνδεθεί με την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και κατά συνέπεια με την αύξηση ενός αριθμού, γεγονός που δεν λαμβάνει την ίδια εφαρμογή και στην περίπτωση των κλασμάτων. Αναφορικά με τη διδακτική παρουσίαση των κλασμάτων (Moss, 2005), συχνά ο μαθητής έρχεται σε επαφή με νέα σύμβολα, νοήματα και αναπαραστάσεις. Πράγματι, όπως έχει ήδη αναφερθεί, το κλάσμα έχει διαφορετικές εννοιολογικές πτυχές (νοήματα). Για παράδειγμα το 3/4 μπορεί να τα σημαίνει τα 3 από τα 4 ίδια τμήματα ή να υποδηλώνει διαίρεση (3 αντικείμενα και τα μοιράζω σε τέσσερα άτομα),ή λόγο (3 κίτρινα αυτοκίνητα για κάθε 4 πράσινα αυτοκίνητα που συναντούμε). Έτσι, θεωρείται σημαντικό οι μαθητές να έρχονται σε επαφή με τις διαφορετικές εννοιολογικές πτυχές του κλάσματος και να διακρίνουν τις συνδέσεις μεταξύ τους (Lamon, 2007·Moss, 2005·Κολέζα, 2000).Επίσης, διαφάνηκε ότι τα κρίσιμα συμβάντα της εκπαίδευσης καθορίζονται από τον τρόπο που οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις διδακτικές καταστάσεις και ερμηνεύουν τη σημασία ενός γεγονότος. Εντούτοις, στο παραπάνω σημείο παρατηρούμε ότι οι εκπαιδευτικοί-ερευνητές εξακολουθούν να διαδραματίζουν έναν παρεμβατικό ρόλο στη μαθηματική εκπαίδευση, δημιουργώντας ένα πλαίσιο δράσης και σκέψης, όπου οι μαθητές υπακούουν σε άνωθεν εντολές. Θα έπρεπε, δηλαδή, να δοθεί μεγαλύτερη έμφαση στην έννοια της συλλογικότητας, διότι η συλλογικότητα συνιστά τη βάση για τη μάθηση αλλά και για τη νοηματοδότηση. Η ικανότητα για συστηματικό αναστοχασμό πάνω στις αλληλεπιδράσεις στην τάξη αποτελεί μια σημαντική επαγγελματική ικανότητα του δασκάλου (Scherer & Steinbring, 2006), ενώ ο χρόνος που ξοδεύεται σε αναστοχαστικές συζητήσεις στα μαθηματικά δεν θα έπρεπε να θεωρείται κατώτερος από αυτόν που σπαταλάται για την ίδια τη διδασκαλία (Κολέζα & Νίκα, 224). Γι’ αυτό και ιδιαίτερα σημαντική στις περισσότερες μελέτες είναι η συνάντηση σχετικά με συγκεκριμένες πεποιθήσεις των μαθητών, που έρχονταν σε αντίθεση με τις πρακτικές στην τάξη τους. Εν προκειμένω, προκύπτει ένας γόνιμος αναστοχασμός και μια εν γένει συνειδητοποίηση της άρρηκτης σύνδεσης μεταξύ των θεωρητικών πεποιθήσεων που έχει ο μαθητής και των αντίστοιχων πρακτικών στα πλαίσια της τάξης: «Οι άξονες αναστοχασμού αφορούν ζητήματα σχετικά με τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για τη μάθηση».

Πρωτεύουσα σημασία έχει και η αυξημένη ενεργοποίηση των μαθητών λόγων του κλίματος της ΟΜ, που αυξάνει τη διάθεση των μελών για συμμετοχή και ανταλλαγή απόψεων. Ειδικά οι χαμηλού και μεσαίου επιπέδου μαθητές ενεργοποιούνται από τις απόψεις των μαθητών, που χρησιμοποιούν υψηλότερου επιπέδου στρατηγική τόσο στο νοητικό όσο και στον συναισθηματικό τομέα, χωρίς αυτό βέβαια να παραβλάπτει την πρόοδο των τελευταίων. Γι’ αυτό βέβαια προτείνεται και η δημιουργία ανομοιογενών ομάδων. Σημαντικό στοιχείο συνιστά και η ανατροφοδότηση που λαμβάνει ο μαθητής από την ίδια την ομάδα, λόγω της δυνατότητας συλλογικής παρέμβασης και άσκησης πειθαρχίας, κάτι που δεν συμβαίνει στο πλαίσιο της μετωπικής διδασκαλίας, όπου ο εκπαιδευτικός από μόνος του δεν επαρκεί να προσφέρει τις απαραίτητες ανατροφοδοτήσεις.

Το δεύτερο ερώτημα αφορούσε στην επίδραση του πολιτισμικού και οικογενειακού υπόβαθρου των μαθητών στις γνωστικές τους εννοιολογικές δομές. Επίσης, με βάση την έρευνα, προκύπτουν κάποια γενικά συμπεράσματα για τη σημασία του πολιτισμικού και οικονομικού υπόβαθρου των μαθητών. Στο πλαίσιο αυτό, ο πολιτισμικά ευαίσθητος εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τους μαθητές να ανακαλύψουν και να εκφράσουν ελεύθερα τις πολλές και ποικίλες πτυχές της προσωπικότητάς τους, η ανάπτυξη των οποίων αποτελεί και έναν από τους βασικούς σκοπούς της παιδαγωγικής πράξης. Για την επίτευξη των σκοπών αυτών ο εκπαιδευτικός καλλιεργεί κλίμα εμπιστοσύνης, επικοινωνίας και ανταλλαγής μεταξύ όλων, ενώ δίνει έμφαση στην ανάλυση και παρατήρηση της προσωπικής διαδρομής του κάθε μαθητή προκειμένου να κατακτήσει τη γνώση. Επιπλέον, ενθαρρύνει τη συνεργασία του σχολείου τόσο με τους γονείς όσο και με την ευρύτερη κοινότητα, ενώ δίνει έμφαση στο υπόβαθρο του κάθε μαθητή, προτάσσοντας τις έννοιες της ενσυναίσθησης, της κουλτούρας και του σεβασμού στην ετερότητα.

Η σύνθεση της σχολικής τάξης της έρευνας χαρακτηρίζεται από εθνοπολιτισμική ετερογένεια και έτσι πλέον μαθητές με διαφορετική εθνοτική και πολιτισμική ταυτότητα συνυπάρχουν πλέον στις περισσότερες σχολικές τάξεις, συμμετέχουν σε κοινές δράσεις και προγράμματα. Η σημασία του παρόντος θέματος έχει να κάνει με τις δράσεις και τους προβληματισμούς που κρύβονται πίσω από τις διάφορες δράσεις και παρεμβάσεις στην καθημερινή σχολική ζωή. Επίσης, συνδέεται έντονα με χαρακτηριστικά που καλούνται πλέον να έχουν οι εκπαιδευτικοί, όπως είναι η διαπολιτισμική ικανότητα. Ανεξάρτητα από την έκβαση του διαλόγου, οι διαπολιτισμικά ικανοί συνομιλητές ωφελούνται αδιαμφισβήτητα από την διαλογική διαδικασία λόγω της ικανότητάς τους να μαθαίνουν από αυτή την εμπειρία και να συμμερίζονται την οπτική του άλλου (Banks, 2002), εν προκειμένω στα μαθηματικά. Οι μαθητές διαφάνηκε ότι ανάλογα με το κοινωνικό και πολιτισμικό τους υπόβαθρο, απαντούσαν και υπό διαφορετικό πρίσμα. Διαφάνηκε έντονα ότι μεγαλύτερη βιωματική προσέγγιση και έμφαση στην άτυπη γνώση παρατηρήθηκε σε μαθητές από χαμηλότερα μορφωτικά στρώματα, οι οποίοι είχαν συνηθίσει να λειτουργούν περισσότερο βιωματικά.

Πιο χαρακτηριστικά, η Dowker (2005) υπερτόνισε τη σημασία την έγκαιρης διάγνωσης και παρέμβασης στους μαθητές που αντιμετωπίζουν δυσκολίες στα μαθηματικά και εντόπισε πως η ετερογένεια της φύσης των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε σχέση με τα μαθηματικά οφείλεται σε ποικίλους κοινωνικούς, γεωγραφικούς και οικονομικούς παράγοντες. Επίσης, διαπίστωσε ότι για να μελετηθεί η φύση των δυσκολιών που βιώνουν τα παιδιά σε σχέση με τη μαθηματική γνώση και, συνεπώς, να κατανοηθούν ώστε να σχεδιαστεί η σωστή παρέμβαση, είναι εξαιρετικά σημαντικό να θυμόμαστε ότι η αριθμητική εν γένει δεν είναι μια συμπαγής οντότητα, αλλά το σύνολο διαφορετικών στοιχείων, συμπεριλαμβανομένων της ικανότητας να διεξάγουν οι μαθητές αριθμητικές διαδικασίες, να κατανοούν και να χρησιμοποιούν αριθμητικές αρχές, όπως η αντιμεταθετικότητα και η προσεταιριστικότητα και να εφαρμόζουν τις μαθηματικές τους γνώσεις για την επίλυση λεκτικών και πρακτικών προβλημάτων (Dowker, 2005). Σε προγενέστερή της έρευνα, εξάλλου, η Dower(1998) μελέτησε τις ικανότητες υπολογισμού και της αριθμητικής συλλογιστικής σε 213 παιδιά, 6–9 ετών και μεταξύ άλλων διαπίστωσε ότι όντως η αριθμητική δεν είναι ενιαία και αδιαίρετη οντότητα και πιο συγκεκριμένα ότι είναι επίφοβο να θεωρούμε ότι ένα παιδί «δεν κατανοεί τα μαθηματικά» επειδή έχει χαμηλή επίδοση και απόδοση σε ορισμένες μαθηματικές δραστηριότητες και ασκήσεις. Παρόμοιες διαπιστώσεις έκαναν και οι Fuchs & Fuchs(2002), οι οποίοι σε δική τους έρευνα επιχείρησαν να περιγράψουν τα μαθηματικά προφίλ επίλυσης προβλημάτων μαθητών που αντιμετώπιζαν δυσκολίες στα μαθηματικά ή/και στην ανάγνωση. Τα συμπεράσματά μας συμφωνούν με τις παραπάνω έρευνες ως προς το γεγονός ότι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές διαφέρουν ως προς τη φύση, το είδος και τη μορφή του εκάστοτε μαθηματικού προβλήματος, οδηγώντας για μια ακόμη φορά στη διαπίστωση πως η μαθηματική γνώση δεν είναι ενιαία και πως το ότι ένας μαθητής αντιμετωπίζει δυσκολίες σε ένα είδος μαθηματικών προβλημάτων δε σημαίνει αναγκαστικά ότι έχει ένα ευρύτερο πρόβλημα στην κατανόηση των μαθηματικών.

Το τρίτο ερώτημα σχετίζεται με τις παρανοήσεις των μαθητών για τις προαναφερθείσες μαθηματικές έννοιες. Στη συγκεκριμένη έρευνα, οι μαθητές δείχνουν να έχουν μια αδύναμη σκέψη απέναντι στην αμιγώς μαθηματική έννοια των κλασμάτων και μια τάση υπεραπλούστευσης των μαθηματικών εννοιών. Συγκεκριμένα, στο φυλλάδιο εργασίας σχετικά με τα κλάσματα, φαίνεται ότι αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις κατά τις οποίες τα κλάσματα είναι ετερώνυμα. Σε γενικές γραμμές, οι μαθητές δεν φάνηκαν να ανταποκρίνονται στη σχηματική παρουσίαση του κλάσματος ως μέρους όλου επιφάνειας, ούτε μπορεί να ειπωθεί πως υπήρξε σημαντική εστίαση στη σύγκριση των κλασματικών αριθμών. Υπάρχει, δηλαδή, έμφαση στη διαδικαστική γνώση, χωρίς ωστόσο οι μαθητές να έχουν συνηθίσει να παρουσιάζουν τη μέθοδο που χρησιμοποίησαν. Η αδυναμία να παρουσιαστεί ακριβώς η διαδικασία σκέψης και χρήσης των κλασμάτων, δείχνει μια τυποποίηση, ενώ οι εννοιολογικές παρανοήσεις που σχετίζονται με την κατανόηση του κλάσματος ως αριθμού οδηγούν και σε δυσκολίες αναπαράστασης του κλασματικού αριθμού αλλά και σε δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων. Η τυποποίηση της γνώσης φαίνεται επίσης στις κυρίως πράξεις, όπου η χρήση της μετατροπής των κλασμάτων σε ομώνυμα γίνεται περιστασιακά. Στο ζήτημα του εμβαδού, σε ορισμένες περιπτώσεις, οι μαθητές γνωρίζουν τι είναι εμβαδό, αλλά δεν έχουν στην πράξη προβεί σε μια επίλυση τέτοιου είδους, το οποίο συνεπάγεται ότι έχουν μια θεωρητική, αλλά όχι πρακτική εννοιολογική αποσαφήνιση, διότι αναφέρουν περιστασιακά στοιχεία που έχουν ακούσει κατά τον υπολογισμό του εμβαδού χώρου από τους γονείς του.

Σύμφωνα με τους Moss & Case (1999), τρία βασικά σφάλματα γίνονται κυρίως κατά τη διδασκαλία των κλασμάτων και τα οποία είναι ανάγκη να διερευνηθούν διεξοδικά: 1. Οι διαφορές μεταξύ των φυσικών και των ρητών δε γίνονται ορατές στα παιδιά – αντίθετα, δίνεται έμφαση στις ομοιότητες, με αποτέλεσμα να προκαλείται σύγχυση μεταξύ ρητών και φυσικών αριθμών. 2. Δε δίνεται η απαραίτητη σημασία στις δυσκολίες των παιδιών που σχετίζονται με το συμβολικό τρόπο αναπαράστασης των κλασμάτων. 3. Έμφαση προσδίδεται στη διαδικαστική γνώση και όχι τόσο στην εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων. Αναλυτικότερα, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες εννοιολογικής κατανόησης των κλασμάτων που σχετίζονται με το φαινόμενο της μεταφοράς χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών σε μη φυσικούς αριθμούς (Vamvakoussi, VanDooren & Verschaffel, 2012). Επίσης, παρατηρείται μία δυσκολία των μαθητών στην κατανόηση του κλάσματος ως αριθμού. Αυτά παρατηρήθηκαν και στη συγκεκριμένη έρευνα. Παράλληλα, παρατηρείται μία δυσκολία των μαθητών στην κατανόηση του κλάσματος ως αριθμού, γεγονός που φαίνεται να οφείλεται στην κυριαρχία της αναπαράστασης του κλάσματος μόνο σε μία μορφή του, αυτής του μέρους ενός όλου (Lamon, 2001). Κατά συνέπεια, δημιουργείται μία σύγχυση εφόσον το κλάσμα θεωρείται κάτι ξέχωρο από αριθμό. Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας συμφωνούν με προηγούμενες έρευνες που υποδεικνύουν ότι όταν ένας μαθητής καλείται να διδαχθεί τα κλάσματα για πρώτη φορά, έρχεται σε επαφή με νέα σύμβολα, νοήματα και αναπαραστάσεις, οπότε οι παραπάνω διαδικασίες είναι αδήριτες. Στο παρελθόν πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με την κατανόηση από μέρους των μαθητών της έννοιας του κλάσματος με έργα κυρίως εννοιολογικής γνώσης (Booth & Siegler, 2008·Hartnett & Gelman,1998·Meert, Gregoire & Noel,2010·Stafylidou & Vosniadou, 2004) και αρκετές έχουν ασχοληθεί με την συσχέτιση και ανάπτυξη της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης των κλασμάτων (Schneider & Stern, 2010·Hallettκ.ά., 2012). Για τη συστημική προσέγγιση η μαθηματική γνώση δημιουργείται μέσα σε ένα σύστημα και σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο τα χαρακτηριστικά του οποίου καθορίζουν το περιεχόμενο και τη φύση της μαθηματικής γνώσης. (Chevallard, 1992·Brousseau, 1997). Ο Chevallard (2005)θεωρεί ότι η ανάπτυξη και μάθηση των μαθηματικών εννοιών δεν ξεχωρίζει από τη διδασκαλία και η έννοια κλειδί που χρησιμοποιεί είναι η πραξεολογία (praxeologie), η οποία αποτελείται από δύο πόλους, την πράξη και τον λόγο.

Με βάση τα αποτελέσματα προηγούμενης έρευνας με θέμα «Μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες μάθησης: Η ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος» (Σταφυλίδου, 2001), η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής μπορεί να φανεί χρήσιμη έτσι ώστε να προβλεφθούν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σχετικά με την έννοια του κλάσματος και ειδικότερα της διάταξης των κλασμάτων, καθώς επίσης και την αντιμετώπιση των δυσκολιών αυτών. Στην παρούσα έρευνα, στις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τα κλάσματα υφίστανται λάθη που έχουν να κάνουν με το γεγονός ότι ενσωματώνουν τις πληροφορίες που παίρνουν από τη διδασκαλία για τα κλάσματα στις προηγούμενες γνώσεις τους για τον φυσικό αριθμό. Έτσι, οι μαθητές αντιλαμβάνονται ως μεγαλύτερο το κλάσμα που έχει τους μεγαλύτερους όρους που παρουσιάζονται στο μοντέλο του κλάσματος ως δύο φυσικοί αριθμοί. Επιπλέον, υπάρχει το μοντέλο σύμφωνα με το οποίο ο μαθητής αντιλαμβάνεται κάθε κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας, καθώς ο μαθητής αντιλαμβάνεται το κλάσμα πάντα ως μέρος της μονάδας και άρα μικρότερο από αυτή. Επίσης, φάνηκε ότι οι μαθητές πολλές φορές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν το κλάσμα ως λόγο, ως διαίρεση ή ως μέτρο.

Σύμφωνα με τον Lamon (2001) οι μαθητές, επίσης, δυσκολεύονται στο να κατανοήσουν το κλάσμα ως αριθμό, ως μια αυτόνομη οντότητα και, κατά συνέπεια, θεωρούν πως, για παράδειγμα, οι αριθμητές και οι παρονομαστές των κλασμάτων είναι ξεχωριστές οντότητες (Pitkethly & Hunting,1996). Οι Vamvakoussi & Vosniadou (2004) αναφέρουν ότι για την κατανόηση των κλασμάτων απαιτείται αναδιοργάνωση της έννοιας του φυσικού αριθμού με βάση τις διαφορές ανάμεσα στα κλάσματα και στους φυσικούς αριθμούς που αφορούν στη συμβολική αναπαράσταση. Όλα αυτά τα προβλήματα οδηγούν σε λάθη που συνδέονται τόσο με τον χειρισμό των συμβόλων του κλάσματος όσο και με τη διαισθητική απεικόνιση του κλάσματος. Τέλος, δεν πρέπει να λησμονούνται και οι δυσκολίες που προκύπτουν λόγω της διδακτικής φύσης του μαθήματος, καθώς πολλές φορές ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας δε βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια των κλασμάτων, αφού οι διδάσκοντες δε προσεγγίζουν το θέμα από την οπτική ενός παιδιού αλλά αυτή ενός ενήλικα. Επίσης, η προσήλωση σε κανόνες και αλγορίθμους αποτελεί τροχοπέδη στην βαθύτερη κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και η διδασκαλία των κλασμάτων με στερεότυπο και καθοδηγούμενο τρόπο δε διευκολύνει τους μαθητές να αποκτήσουν αυτόνομη σκέψη.

Το τέταρτο ερώτημα της έρευνας έχει να κάνει με το πως αξιοποιούν οι μαθητές τους πόρους γνώσης που φέρουν στο σχολείο στο πλαίσιο της συγκεκριμένης τάξης και πώς αυτό αποτυπώνεται στην πραγμάτευση συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών όπως τα κλάσματα και το εμβαδόν. Στη συγκεκριμένη έρευνα, φάνηκε ότι η μεταφορά των πόρων γνώσης γίνεται σε πολλαπλά επίπεδα, με βάση την πρακτική και καθημερινή διάσταση των μαθηματικών. Σύμφωνα με τον Bruner (1996), οι μαθητές πρέπει να δομήσουν τη γνώση των μαθηματικών εννοιών, πάνω σε τρία επίπεδα, στο συμβολικό, στο πραξιακό και στο οπτικό. Σύμφωνα, λοιπόν, με τους Γαγάτση, Ευαγγελίδου και Σπύρου (2004), παρά το γεγονός ότι στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση αφιερώνεται σημαντικός χρόνος της διδασκαλία των κλασμάτων, τα τελευταία είναι συνήθως μια έννοια δυσνόητη για τους μαθητές και συχνά αντιμετωπίζουν διαφορετικής φύσης προβλήματα, όπως λάθη και παρανοήσεις επιστημολογικής, αναπαραστατικής και εννοιολογικής φύσης.

Συμπεράσματα

Σ' αυτή την εργασία μελετήσαμε το ρόλο της αξιοποίησης των πόρων γνώσης μαθητών από ποικίλα πολιτισμικά πλαίσια στη βελτίωση της διδασκαλίας/μάθησης των μαθηματικών στο πλαίσιο μια τάξης κοινωνικού φροντιστηρίου.

Από την έρευνα φάνηκε ότι η μαθηματική γνώση πρέπει να επικεντρώνεται στους πόρους γνώσης των μαθητών, αλλά και στην εν γένει συλλογιστική τους πορεία, η οποία έχει να κάνει περισσότερο με το υπόβαθρό τους και λιγότερο με τη νέα γνώση που λαμβάνουν εντός τάξης, Φάνηκε, δηλαδή, ότι το οικογενειακό πλαίσιο παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση των γνωστικών δομών και της εννοιολογικής αποσαφήνισης της μαθηματικής γνώσης. Το σημαντικό είναι ότι η αναστοχαστική δραστηριότητα δύναται να παράσχει ευκαιρίες για μοίρασμα εμπειριών, από τις οποίες συνθέτονται και ερμηνεύονται αποτελέσματα και αναπτύσσονται κριτικά πλαίσια σχετικά με την πρακτική (Laworsky, 2001).

Ένα ακόμη πόρισμα είναι ότι διαφάνηκε να υφίσταται η θέση ότι η θεωρητική γνώση και η στείρα διδασκαλία των μαθηματικών δεν βοηθάει, αν θέλουμε να επιτύχουμε τη διδασκαλία με βάση το κοινωνικό περιεχόμενο, καθώς και στην επίδρασή του σε καθηγητές και μαθητές με ποικίλα κοινωνικά και πολιτισμικά υπόβαθρα. Υπάρχουν ακόμη δυσκολίες στη σκιαγράφηση του ρόλου που παίζουν τα σχολικά εγχειρίδια, οι διεθνείς συγκρίσεις στα μαθησιακά επιτεύγματα, καθώς και οι αξίες που υιοθετούνται. Ωστόσο, η επιτυχημένη μαθηματική ανάπτυξη απαιτεί καθοδηγητικές στρατηγικές και σύνδεση με τις πρωτοβουλίες της κάθε περιοχής καθώς και την κουλτούρα και τα σύμβολα του προγράμματος (Peterson, 2002), ενώ υπάρχει άρρηκτη σύνδεση μεταξύ της δημιουργίας περιβάλλοντος μάθησης, του καθορισμού αναλυτικού προγράμματος και αξιολόγησης, της μαθησιακής ανάπτυξης, των εσωτερικών δικτύων συνεργασίας και τέλος των εξωτερικών δικτύων που παρέχουν υποστήριξη και νομιμότητα για να υπάρξει σχολική ανάπτυξη.

Όσον αφορά στα πλεονεκτήματα της συζήτησης που προέκυψε, είναι εμφανές ότι υπερέχει της μετωπικής στον γνωστικό, κοινωνικό και ψυχολογικό τομέα. Και το κυριότερο, τα γνωστικά οφέλη ισχύουν τόσο για τους καλούς όσο και για τους κακούς μαθητές. Στο πλαίσιο αυτό, οι αδύναμοι μαθητές και οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες γίνονται περισσότερο αποδεκτοί, αισθάνονται λιγότερο απομονωμένοι, ενώ παράλληλα αποδεσμεύονται από τη συνεχή αίσθηση της απειλής που συνεπάγεται η ανταγωνιστική οργάνωση. Η θετική επίδραση της συνεργατικής διδασκαλίας στους παραπάνω τομείς οδηγεί κατ' επέκταση και στη μεγιστοποίηση των σχολικών επιδόσεων. Κατά τη διδασκαλία μου παρατήρησα ότι ο χρόνος ενεργητικής συμμετοχής των μαθητών αναβαθμίστηκε ποιοτικά και ποσοτικά και έπαψε πλέον να εξαντλείται στο σχήμα της εξεταστικής ερωταπόκρισης. Αυτό έχει μεγάλη σημασία, ιδιαίτερα για τους αδύναμους μαθητές, οι οποίοι σύμφωνα με έρευνες συμμετέχουν μόνο στο 54% του συνολικού διδακτικού χρόνου κατά τη μετωπική διδασκαλία. Το γεγονός αυτό αποδεικνύει πως μέσα στο παραδοσιακό σχολείο ο χρόνος αποβαίνει στοιχείο κοινωνικής επιλογής, κάτι που υπογραμμίζει τη σπουδαιότητα της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας. Την πρώτη εβδομάδα οι μαθητές που συμμετείχαν κατά κόρον δεν ξεπερνούσαν τους 6, ενώ κατά τη δεύτερη εβδομάδα παρατήρησα μεγαλύτερη προθυμία για συμμετοχή ακόμα και από μαθητές όπως ο Κ. που παρακολουθεί πρόγραμμα ένταξης. Παράλληλα παρατήρησα ότι κατά την ΟΜ κυριαρχούσε περισσότερο η τακτική της συχνής επανάληψης, ερμηνείας και αιτιολόγησης των γεγονότων και πληροφοριών καθώς και της ανακεφαλαίωσης. Οι ανωτέρω ενέργειες, που λαμβάνουν χώρα συχνότερα μέσα στην συνεργατική διδασκαλία απ' ό,τι στη μετωπική, συμβάλλουν στην καλύτερη κατανόηση και διατήρηση στη μνήμη των πληροφοριών.

Επιπλέον, προέκυψαν κάποιες γενικές επισημάνσεις για τον ρόλο των εκπαιδευτικών. Οι εκπαιδευτικοί οφείλουν, λοιπόν, να έχουν κατακτημένη την απαραίτητη μαθηματική γνώση, ώστε να είναι σε θέση να χειριστούν πιο αποτελεσματικά διδακτικές πρακτικές επίλυσης προβλημάτων μέσω της παρουσίασης ρεαλιστικών προβλημάτων (Lehrer & Franke, 1992). Παράλληλα, όμως, με την άρτια και ολοκληρωμένη μαθηματική γνώση, ο διδάσκων θα πρέπει να κατέχει και παιδαγωγική γνώση, ώστε η διδασκαλία των κλασμάτων να είναι επιτυχημένη. Για την επιτυχή διδασκαλία των κλασμάτων, λοιπόν, ο διδάσκων θα πρέπει να χρησιμοποιεί διδακτικές μεθόδους που να συνάδουν με τις γνωστικές λειτουργίες και δυνατότητες των μαθητών του και να αποφύγει τη στείρα μετάδοση γνώσεων που σχετίζονται μόνο με τη χρήση συμβολικών αναπαραστάσεων και την επικέντρωση στα τμήματα του κλάσματος (αριθμητή, παρονομαστή). Σε κάθε περίπτωση, η διδασκαλία των παραπάνω μαθηματικών ενοτήτων εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από την διερεύνηση των στόχων του αναλυτικού προγράμματος. Η αδυναμία να παρουσιαστεί ακριβώς η διαδικασία σκέψης και χρήσης των κλασμάτων, δείχνει μια τυποποίηση, ενώ αυτό που απαιτείται είναι (Γαγάτσης κ.ά., 2001) η αναγνώριση της έννοιας μέσα από την ποικιλία των αναπαραστάσεων και ο ευέλικτος χειρισμός της έννοιας ανάμεσα στις ποιοτικά διαφορετικές αναπαραστάσεις. Παράλληλα, εννοιολογικές παρανοήσεις που σχετίζονται με την κατανόηση του κλάσματος ως αριθμού οδηγούν και σε δυσκολίες αναπαράστασης και τοποθέτησης του κλασματικού αριθμού στην κλασματική γραμμή (Fischbein κ.ά., 1985) αλλά και σε δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων στα οποία οι υποδιαιρέσεις στην αριθμητική γραμμή δεν ισούνται με τον παρονομαστή του κλάσματος ή δεν είναι πολλαπλάσια του (Ηλία & Γαγάτση, 2004). Αυτό μπορεί να συνδέεται με την έμφαση που δίνεται από τους εκπαιδευτικούς μόνο σε μία εννοιολογική μορφή του κλάσματος, στο μέρος-όλο (Mack, 1993·Κολέζα, 2000). Ο Freudental (1983) αναφέρει πως: «η φαινομενολογική ένδεια της προσέγγισης των κλασμάτων μου φαίνεται ότι είναι σε μεγάλο βαθμό υπεύθυνη για τη διδακτική αποτυχία». Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές πολλές φορές δίνουν έμφαση μόνο στο κλάσμα ως μέρος ενός όλου, και όχι τόσο στις μαθηματικές πράξεις που μπορούν να πραγματοποιηθούν.

Μία επιπλέον γενική επισήμανση είναι ότι η διδασκαλία τόσο των κλασμάτων όσο και του εμβαδού είναι εκ των πραγμάτων μία σύνθετη διαδικασία, η οποία απαιτεί μία πρότερη εμπειρία των μαθητών πάνω στις έννοιες αυτές, με βιωματική και εμπειρική γνώση. Γι’ αυτό και η διδασκαλία τους δεν μπορεί να εδράζεται μόνο στη θεωρητική διδακτική, αλλά κυρίως στους τρόπους με τους οποίους η εμπειρία μπορεί να ενωθεί με τη νέα γνώση εντός της τάξης, για να είναι εφικτό να προκύψει μία νέα μαθηματική γνώση, που θα συνδυάζει τη θεωρία με την πράξη. Ιδιαίτερα η συζήτηση και η αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών βοήθησε ιδιαιτέρως προς την επίτευξη των παραπάνω.

Περιορισμοί της έρευνας

Ένας βασικός περιορισμός της έρευνας είναι ο χρόνος διεξαγωγής του μαθήματος, δηλαδή δύο ώρες εβδομαδιαίως, γεγονός που κάποιες φορές οδηγούσε στην απώλεια σύνδεσης με το προηγούμενο μάθημα, γιατί κάθε φορά απαιτούνταν μία μικρή επανάληψη. Επίσης, ένας βασικός περιορισμός είχε να κάνει με το κοινωνικό και οικονομικό υπόβαθρο των μαθητών, καθώς και την ύπαρξη ξένων μαθητών, γεγονός που δημιουργούσε αντικειμενικές δυσκολίες, λόγω της δυσκολίας στη γλώσσα και στην επικοινωνία. Επίσης, κάποιοι μαθητές από άλλα πολιτισμικά περιβάλλοντα εμφανίστηκαν αρχικά διστακτικοί στο να μοιραστούν τις εμπειρίες τους και να συμμετάσχουν στη συζήτηση.

Δυσκολίες εντοπίστηκαν στα φύλλα εργασίας και στις απαντήσεις των ίδιων των μαθητών, διότι το χαμηλό γνωστικό επίπεδο οδήγησε σε απαντήσεις, οι οποίες αρκετές φορές ήταν δυσανάγνωστες ή μη επαρκώς τεκμηριωμένες. Επίσης, παρατηρήθηκε ανάλογη δυσκολία και στην προφορική τεκμηρίωση των απαντήσεών τους. Το χαμηλό κοινωνικο-οικονομικό επίπεδο φάνηκε και στη δυσκολία ορισμένων μαθητών να ανατρέξουν στο οικογενειακό τους υπόβαθρο για απαντήσεις, διότι κάποιοι μαθητές έδειξαν δισταγμό να μοιραστούν εμπειρίες από το επάγγελμα των γονέων τους.

Οι περιορισμοί της έρευνας σχετίζονται και με τη χρήση μόνο 10 συμμετεχόντων, γεγονός που δεν επιτρέπει τη γενίκευση των αποτελεσμάτων, αλλά πρόκειται περισσότερο για μία μελέτη ενός συγκεκριμένου πεδίου, μίας συγκεκριμένης τάξης για τη δεδομένη χρονική περίοδο. Επίσης, τα φύλλα εργασίας εμπίπτουν στην ποιοτική ανάλυση των απαντήσεων, οπότε έχουμε να κάνουμε με μία υποκειμενική εξέταση των απαντήσεων από την ερευνήτρια.

Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Μία πρόταση για μελλοντική έρευνα θα ήταν μία μεγαλύτερης εμβέλειας έρευνα με τη συμμετοχή αρκετών σχολείων και φροντιστηρίων, για να προκύψουν δεδομένα γενικεύσιμα, με μεγαλύτερη εγκυρότητα. Επίσης, θα μπορούσε να προταθεί μία έρευνα που θα σχετίζεται με την άτυπη γνώση και σε άλλες μαθηματικές έννοιες, οι οποίες ενδεχομένως δυσκολεύουν τους μαθητές.

Μία επιπλέον ενδιαφέρουσα πρόταση θα μπορούσε να είναι η σύγκριση απαντήσεων μαθητών από υψηλά και χαμηλά κοινωνικο-οικονομικά στρώματα, καθώς και η μεγαλύτερη διερεύνηση του υπόβαθρου, μέσα από την εξέταση των επιμέρους επαγγελμάτων και του μορφωτικού επιπέδου των γονέων. Αυτό θα είχε ως αποτέλεσμα μία μεγαλύτερη εξέταση της επίπτωσης του κοινωνιολογικού στοιχείου στην άτυπη γνώση. Επίσης, θα μπορούσε να γίνει μία έρευνα που να συνδυάζει ποσοτικά και ποιοτικά στοιχεία, μέσα από συνεντεύξεις και ερωτηματολόγια, με στόχο την μεγαλύτερη εγκυρότητα και αξιοπιστία.

Τέλος, θα προτείναμε μία έρευνα που να χωρίζεται σε δύο στάδια, αρχικά το στάδιο της διδασκαλίας και της διερεύνησης της άτυπης γνώσης και έπειτα το στάδιο της αξιολόγησης των μαθητών για το αν και κατά πόσο η άτυπη γνώση τους βοήθησε να αφομοιώσουν καλύτερα τη νέα γνώση.

Βιβλιογραφία

Ανεστάκης, Π., & Λεμονίδης, Χ. (2015). Διδασκαλία Υπολογιστικών Εκτιμήσεων σε Ενήλικες: Μια Μελέτη Περίπτωσης σε ένα Σχολείο Δεύτερης Ευκαιρίας. Στο Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλος, Μ. Τζεκάκη (επιμ.) *Πρακτικά του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ: Μαθηματικά με διάκριση και χωρίς διακρίσεις.* Θεσσαλονίκη: ΕΝΕΔΙΜ.

Αρβανίτη, Ε. (2013). Εκπαιδευτικές κοινότητες πρακτικής και επαγγελματική μάθηση στο νέο σχολείο. *Εκπαιδευτικός κύκλος, 1* (1), 2013. Ανοικτής πρόσβασης ελληνικό e-journal.

Βαμβακίδου Ι., Ντίνας Κ., Κυρίδης Α., Καραμήτσου, Κ.(2003). Το τέλος της ομοιογένειας και η απαρχή της ετερότητας στο σύγχρονο ελληνικό νηπιαγωγείο. Οι νηπιαγωγοί μιλούν για τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν στις πολυπολιτισμικές τάξεις. Στο Τρέσσου, Ε. – Μητακίδου, Σ. (επιμ.) *Εκπαιδευτικοί μιλούν σε εκπαιδευτικούς για τις εμπειρίες τους. Εκπαίδευση γλωσσικών μειονοτήτων.* Θεσσαλονίκη:*Παρατηρητής, 47-55.*

Bana, J., &Dolma, P. (2004).The relationship between the estimation ability and computational abilities of year 7 students MERGA 27*: Mathematics Education for the Third Millennium: Towards 2010, 1,* 63-70.

Banks, J. (1997). Η πολυπολιτισμική προσέγγιση και οι κριτικές της: Βρετανία και ΗΠΑ, στο Σιδέρη, Α. και Χαραμής Π. (Επιμ.), *Πολυπολιτισμική Εκπαίδευση: Προβληματισμοί-Προοπτικές,* Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Booth, J.L. & Siegler, R.S. (2008). Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. *Child Development, 79,* 1016-1031.

Birman, B. F., Desimone, L., Porter, A. C., & Garet, M. S. (2000). Designing professional development that works. *Educational Leadership*, 57(8), 28–33.

Bourdieu, P. (1967). Systems of Education and Systems of Thought. International Social Science, *19*(3), 367-388.

Bourdieu, P. (1974). The School as a Conservative Force: Scholastic and Cultural Inequalities. Contemporary Research in the Sociology of Education, pp. 32-46. Methuen, London. Bourdieu, P. (1977). Cultural Reproduction and Social Reproduction. In: Karabel, I. and Halsey, A. H. (Eds.) *Power and Ideology in Education.* Oxford: OUP.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA: Belknap Press.

Busse, A. & G.Kaiser (2003). *Mathematical modelling in education and culture, Context in application and modelling–an empirical approach*.Elsevier

Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., και ΣιακαλλήΜ. (2001). *Θεωρίες Αναπαράστασης και Μάθηση των Μαθηματικών.* Πανεπιστήμιο Κύπρου ,Λευκωσία.

Γαγάτσης, Α., Ευαγγελίδου, Α. , Ηλία, Ι., Σπύρου, Π. (2004). *Αναπαραστάσεις και μάθηση των Μαθηματικών.* Λευκωσία: IntercollagePress.

Γεωργογιάννης, Π. (2006). *Εκπαιδευτική, Διαπολιτισμική Επάρκεια και Ετοιμότητα Εκπαιδευτικών Α/βάθμιας και Β/βάθμιας Εκπαίδευσης, Επιστημονική σειρά: Βηματισμοί για μια αλλαγή στην Εκπαίδευση* – Τόμος 1, Πάτρα.

Γεωργογιαννης, Π. (2004). Διαπολιτισμική Επάρκεια και Ετοιμότητα των Εκπαιδευτικών. Στο: Γεωργογιάννης, Π. (2004) (επιμ.), *Διαπολιτισμική Εκπαίδευση*, 1ο Πανελλήνιο Συνέδριο, Δεκέμβριος 2004 Ελλάδα: Πάτρα.

Γκότοβος, Α.Ε., Μαυρογιώργος, Γ. &Παπακωνσταντίνου, Π. (1996). *Κριτική παιδαγωγική και εκπαιδευτική πράξη,* Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Cobb, P, Wood, T, Yackel, E von Glasersfeld, E (1991).A constructivist approach to second grade project. *Journal for Research in Mathematics Education.*

Cooper H. (1998) *Synthesizing Research: A Guide for Literature Reviews*, 3η έκδοση, Sage Publications, Thousand Oaks, CA.

Δεσλή, Δ., & Ανεστάκης, Π. (2014). Υπολογιστικές εκτιμήσεις και η διδασκαλία τους: επιδόσεις, στρατηγικές και στάσεις υποψήφιων εκπαιδευτικών. *Πρακτικά του 5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών.* Φλώρινα: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

Δημοσθένους, Μ. (2012). Διερεύνηση του ρόλου των εξωτερικών αναπαραστάσεων στην κατανόηση των ρητών αριθμών στο Δημοτικό σχολείο: Η περίπτωση της αριθμητικής γραμμής (Μεταπτυχιακή εργασία, Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών “Βασική και Εφαρμοσμένη Γνωσιακή Επιστήμη”, Αθήνα, Ελλάδα).

Efland, A. D. (2002). Art and cognition: Integrating the visual arts in the curriculum. (New York: Teachers College Press & Reston, VA: National Art Education Association).

Empson, S. B. (2001). Equal Sharing and the Roots of Fraction Equivalence. *Teaching Children Mathematics, 7*(7), 421-425.

Engeström, Y. (1998). Innovative learning in work teams: analyzing cycles of knowledge creation in practice. In Y. Engeström, R. Miettinen& R. Punamäki (eds), *Perspectives on Activity Theory* (Cambridge: Cambridge University Press), 377- 404.

Ευαγγέλου, Ε. & Ταξίδης, Χ. (2014). *Ανακαλύπτω τη συμμετρία γύρω μου.* Άρθρο που παρουσιάστηκε στο 3ο Πανελλήνιο Εκπαιδευτικό Συνέδριο, 4-6 Απριλίου 2014. Ανακτήθηκε 9 Απριλίου 2015, από http://hmathia14.ekped.gr/praktika14/ekp_senar/VolE/VolE_43_56.pdf.

Φιλίππου, Γ. & Χρίστου, Κ. (2004). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Τυπωθήτω Γιώργος Δαρδάνος

Fischbein, E., DeriM.,Sainati, N.M., SciolisM. M. (1985). The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division.*Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 3-17.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures. Mathematics education library.* Boston: D. Reidel.

Fuller, A., Hodkinson, H. , Hodkinson, P. & Unwin. L. (2005). Learning as peripheral participation in communities of practice: a reassessment of key concepts in workplace learning. *British Educational Research Journal*, Vol. 31, 49–68.

Gersten, R., & Chard, D. (1999). Number Sense: Rethinking Arithmetic Instruction for Students with Mathematical Disabilities. *The Journal of Special Education, 33,* 18-28.

ΗλίαΙ., Γαγάτσης, Α.(2004). *Η εικόνα στην επίλυση προβλήματος: Αρωγός ή εμπόδιο;* Λευκωσία: Ιδρυμα Προώθησης Έρευνας: Πανεπιστήμιο Κύπρου

Hallett, D., Nunes, T., Bryant, P., Thorpe, M.C..(2012). Individual differences in conceptual and procedural fraction understanding: The role of abilities and school experience. *Journal of Experimental Child Psychology, 113,* 469–486.

Hartnett, P. M., & Gelman, R. (1998). Early understandings of number: paths of barriers to the construction of new understandings? *Learningand 1nstruction, 8,* 341- 374.

Hatch, Nile, W. & Dyer, J.H.(2004). Human capital and learning as a source of sustainable competitive advantage. *Strategic Management Journal, 25,* 1155–1178.

Hongyi, S. (2001).Human resources development and integrated. Manufacturing systems. MCB University Press, 195-204.

Κατσιακιώρη, Χ. &Τσόλκα, Ε. (2015).Γεωμετρικά μοτίβα και Τέχνη στο Δημοτικό σχολείο. Πτυχιακή εργασία. Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, Παιδαγωγικό τμήμα δημοτικής εκπαίδευσης.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics, *Mathematics Learning Study Committee*, National Research Council.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών.* Αθήνα: Leader Books.

Krainer, K. (2008). Individuals, teams, communities and networks: Participants and ways of participation in mathematics teacher education. In K. Krainer and T. Wood (Eds.) Participants in mathematics teacher education (pp.1–10). Rotterdam: Sense Publishers. Ανακτήθηκε από https://www.sensepublishers.com/media/1083-the-handbook-of mathematics-teacher-education-volume-3.pdf.

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: from fractions to rational numbers. In A.Cuoco& R. Curcio (Eds.).The roles of representation in school mathematics: 2001 NCTM Yearbook (pp. 146-165). Reston, Virginia: NCTM.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Towards a theoretical framework for research. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Reston, VA: NCTM.

Lehrer, R. &Franke, M. L. (1992). Applying personal construct psychology to the study of teachers' knowledge of fractions. *Journal for Researchin Mathematics Education*, *23*(3), 223–241.

Μάγος, Κ. (2015). Τα ζητήματα του ρατσισμού και της ξενοφοβίας. Στο Κ. Μάγος (Επιμ.). *Σχολείο, ρατσισμός, ξενοφοβία και δημοκρατική ευθύνη*. Αθήνα: ΚΑΝΕΠ/ΓΣΕΕ, 20-27.

Mack, N.K. (1995). Learning fractions with understanding: building on informal knowledge. *Journal of Mathematics Education*, *21*(1), 16-32.

Mezirow, J. (2000). *Learning of Think Like as Adult*. San Francisco: Jossey-Bass.

Mildenhall, P., Hackling, M., & Swan, P. (2009). Computational estimation in the primary school: A single case study of one teache's involvement in a professional learning intervention. In L. Sparrow, B.Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.* Fremantle: MERGA.

Moss, J., Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum, *Journal for Research in Mathematics Education, 30,* 122-147.

Μπάκας, Θ., Πανταζής, Σ., Χ., Σακελλαρίου, Μ., (2014) *Διαπολιτισμική Εκπαίδευση και Επιμόρφωση των νηπιαγωγών,* Ετήσιο Διαπανεπιστημιακό Διαδικτυακό Σεμινάριο 2013-2014 στη Διαπολιτισμική Εκπαίδευση και Έρευνα με έμφαση στη Διδακτική και Διδασκαλία της Ελληνικής ως δεύτερης ή ξένης γλώσσας σε μαθητές και ενήλικες, ανακτήθηκε από: http://www.kedek.inpatra.gr/seminario3/diapolitismiki.pdf.

Μπούτσκου, Λ. (2011). *Η Διαπολιτισμική Επάρκεια και Ετοιμότητα των Διευθυντών Σχολικών Μονάδων της Α/βάθμιας Εκπαίδευσης στο σημερινό σχολείο,* Ανακτήθηκε από:Ετήσιο Διαπανεπιστημιακό Διαδικτυακό Σεμινάριο στη Διοίκηση της εκπαίδευσης Αμυνταίο:2011, http://www.lemonia-boutskou.gr/data/pdf/ergasies_mou/posotiki1.pdf.

Νίκα, Σ.Δ. (2014). *Σχεδιασμός και υλοποίηση ενός Προγράμματος Επαγγελματικής Ανάπτυξης των δασκάλων στα Μαθηματικά*. Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Πατρών, Παιδαγωγικό τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (2004-2011). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών(Δ.Ε.Π.Π.Σ.) και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) υποχρεωτικής εκπαίδευσης*. ΑνακτήθηκεΙούνιος 1, 2015, από http://www.pi-schools.gr/programs/depps/.

Pitkethly ,A.& Hunting R.(1996) A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics,30*(1), 5-38.

Schneider, M., Stern, E.(2010).The Developmental Relations Between Conceptual and Procedural Knowledge: A Multimethod Approach. *DevelopmentalPsychology,46*(1), 178–192.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(4), 4-14.

Schweizer, H. (1994*). Der Mythos vom interkulturelen Lernen*. List

Σιώπη, Κ. &Χασάπης, Σ. *Κοινότητες πρακτικής και συνδιαμόρφωση περιβαλλόντων μάθησης από ομάδες εκπαιδευτικών με βάση τις ανάγκες των μαθητών.* Ανακτήθηκε από:file:///C:/Users/%CE%96%CF%89%CE%AE/Downloads/6_koinotitespraktikis%20(2).pdf.

Singer, F.M., *Voica*, C. (*2008*). Between perception and intuition: thinking about infinity, *Journal of Mathematical Behavior, 27*(3), 188-205.

Σταθοπούλου, Χ. (2005).Ο ρόλος της μαθηματικής εκπαίδευσης στη σύγχρονη πολυπολιτισμική κοινωνία.

Σταφυλίδου, Σ. (2001). Μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες μάθησης: Η Ανάπτυξη της Έννοιας του Κλάσματος (Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα, Ελλάδα).

Stafylidou, S. &Vosniadou, S.(2004). The Development of Student's Understanding of the Numerical Value of Fractions.*Learning and Instruction, 14,* 508-518.

Swanson, H.L. and Jerman, O. (2006) Math Disabilities A Selective Meta-Analysis of the Literature.*Review of Educational Research, 76,* 249-274.

ΤουμάσηςΜ. (1994). *ΣύγχρονηΔιδακτικήτωνΜαθηματικών*.Αθήνα: ΕκδόσειςGutenberg. σ.132.

Τουμάσης, Μ. & Αρβανίτης, Τ. (2002). *Μαθηματικά και Τέχνη: Διακοσμητικά σχήματα με χρήση γεωμετρικού λογισμικού.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο 19ο πανελλήνιο συνέδριο Μαθηματικής παιδείας., 8-10 Νοεμβρίου 2009.

Triandafyllidou, A., &Gropas, R. (2007). *Greek Education Policy and the Challenge of Migration: An Intercultural View of Assimilation,* ανακτήθηκεαπό:

http://www.eliamep.gr/wp-content/uploads/en/2008/10/greek_education_policy_and_the_challenge_of_migration_triandaf_and_gropas_emilie_wp3_22_nov_07.pdf

Tsao, Y. L., & Pan, T. R. (2011). Study on the Computational Estimation Performance and Computational Estimation Attitude of Elementary School Fifth Gradersin Taiwan. *US-China Education Review, 8(3),* 264-275.

Vamvakoussi, X., &Vosniadou, S. (2004).Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14,* 453-. 467.

Tsitsos, V, Stathopoulou, C.(2011). Transitions Between micro-contexts of mathematical practices. In: Pytlak, M. et. al.(Eds). *Proceedings of the SeventhCongress of the European Society for Research in Mathematics Education* CERME7,

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., &Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults.*The Journal of Mathematical Behavior, 31*,344-355.

Yang, D. C., & Wu, S. S. (2012). Examining the Differences of the 8th-Graders' Estimation Performance Between Contextual and Numerical Problems. *US-China Education Review A, 12,* 1061-1067.

Wenger, E. (1998).Communities of Practice. Cambridge U.P.

Wenger, E., McDermott, R., Snyder, W. M. (2002). Cultivating communities of practice. Boston. MA: HarvardBusinessSchoolPress.

Ζαρίφης, Γ. (2009). *Ο κριτικός στοχασμός στη μάθηση και εκπαίδευση ενηλίκων.*