ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Α) Μαθηματική εκπαίδευση Α΄ Ηλικιακού Κύκλου (5-12 χρόνων)

Διπλωματική εργασία

«Αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας προγράμματος παρέμβασης για τη βελτίωση της ικανότητας επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, σε μαθητές Δημοτικού Σχολείου με δυσκολίες μάθησης στα Μαθηματικά»

του/της

Αμπράζη Ζωή, Α.Ε.Μ.:556

Επιβλέπων: Γιώργος Μπάρμπας, (Επ. Καθηγητής Τ.Ε.Π.Α.Ε./Α.Π.Θ.)
Εξεταστές: Τζεκάκη Μαριάνα, Καθηγήτρια Τ.Ε.Π.Α.Ε./Α.Π.Θ
Καλδρυμίδου Μαρία, Καθηγήτρια Π.Τ.Ν./Παν/μιο Ιωαννίνων

Φλώρινα, Ιούνιος 2018

Ε Υ Χ Α Ρ Ι Σ Τ Ι Ε Σ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επίκουρο καθηγητή και «δάσκαλό» μου στις μεταπτυχιακές σπουδές, Μπάρμπα Γιώργο για την πολύτιμη βοήθεια και συμπαράσταση κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

Ευχαριστώ την καθηγήτρια του Α.Π.Θ Τζεκάκη Μαριάννα για την στήριξη καθώς επίσης και την καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων Καλδρυμίδου Μαρία.

Περίληψη

Η μελέτη της βιβλιογραφίας για τις δυσκολίες των μαθητών στα σχολικά Μαθηματικά υποδεικνύει ότι πολλοί μαθητές συναντούν μεγαλύτερες δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων και ότι, οι λιγοστές δεξιότητες που αποκτούν στην επίλυση προβλημάτων ρουτίνας, σπάνια γενικεύονται στην επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής. Σκοπός αυτής της μελέτης είναι η διερεύνηση της αποτελεσματικότητας προγράμματος παρέμβασης για την βελτίωση της ικανότητας επίλυσης χαρακτηριστικών προβλημάτων της καθημερινής ζωής, για τα οποία αναμένεται να αναπτύξουν οι μαθητές τις αναγκαίες μεθόδους επεξεργασίας. Η ερευνητική μας υπόθεση είναι α) οι μαθητές με σοβαρές δυσκολίες στα σχολικά μαθηματικά εκτός από τις επιμέρους δυσκολίες στη χρήση των αλγόριθμων υστερούν σε μεθόδους επεξεργασίας της αναπαράστασης του προβλήματος β) ότι οι μαθητές αυτοί μπορούν να αναπτύξουν κατάλληλες μεθόδους επεξεργασίας προβλημάτων μέσω παιδαγωγικού προγράμματος παρέμβασης γ) η βελτίωση των μεθόδων επεξεργασίας της αναπαράστασης αναμένεται να βελτιώσει την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε Δημοτικό Σχολείο της περιοχής Πέλλας κατά το σχολικό έτος 2017-18 και το δείγμα αποτέλεσαν 10 μαθητές της Δ΄ τάξης εκ των οποίων οι 5 μαθητές αποτέλεσαν την πειραματική ομάδα και 5 την ομάδα ελέγχου. Για την επιλογή του δείγματος και την κατάταξή τους σε ισοδύναμες ομάδες χορηγήθηκαν 2 κριτήρια στο σύνολο των μαθητών της Δ τάξης (23 μαθητές). Με την χορήγηση του κριτηρίου της Μαθησιακής επάρκειας εκτιμήθηκε η μαθησιακή ικανότητα ώστε να αποκλειστούν από το δείγμα μαθητές με δυσκολίες μάθησης που οφείλονται σε νοητική ανεπάρκεια ενώ με την χορήγηση του κριτηρίου Μαθηματικής επάρκειας εκτιμήθηκε ο αριθμός των μαθητών που έχουν σοβαρές δυσκολίες στα Μαθηματικά. Για τον προσδιορισμό των δυσκολιών κατά την επίλυση προβλημάτων χορηγήθηκαν υπό μορφή δοκιμασίας 4 προβλήματα καθημερινής ζωής στους 10 μαθητές των δύο ομάδων στην αρχή και στο τέλος της έρευνας. Η επίλυσή τους αξιολογήθηκε ως προς τις μεθόδους επεξεργασίας της αναπαράστασης του προβλήματος και την επιλογή των πράξεων με ολιγόλεπτη συνέντευξη που ακολούθησε μετά από κάθε δοκιμασία για κάθε μαθητή ξεχωριστά.

Τα αποτελέσματα υπέδειξαν ότι οι μαθητές με σοβαρές δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων μπορούν να βελτιώσουν μεθόδους επεξεργασίας της αναπαράστασης. Η ικανότητα επίλυσης δεν βελτιώθηκε όσο ήταν αναμενόμενο καθώς εξαρτάται και από άλλους παράγοντες όπως η μαθηματικοποίηση του προβλήματος, η ορθή χρήση μαθηματικών συμβόλων και η σωστή εκτέλεση των αλγόριθμων.

Λέξεις κλειδιά

Δυσκολίες Επίλυσης Προβλημάτων, Αναπαράσταση του προβλήματος, Γνωστικό ύφος, Ολιστικές- Αναλυτικές Μέθοδοι επεξεργασίας

Abstract

The study of the literature concerning the difficulties of the pupils in curricular Mathematics, suggests that a lot of pupils face greater difficulties in problem solving. The aim of the current study is the examination of the intervention program's effectiveness in improving the ability to solve characteristic problems in everyday life, about which the pupils are expected to develop the necessary processing methods. Our hypothesis is that a) the pupils with severe learning difficulties in curricular mathematics lack in methods of processing the representation of the problem b) the same pupils can develop suitable problem processing methods through pedagogical intervention programs c) the improvement of the representation processing method is anticipated to improve the problem-solving abilities.

The research was conducted in a Primary School in the region of Pella during the school year 2017-2018. For the selection and classification of the sample into two equal teams 2 tests were given to all the pupils of Forth Grade (23 children). 10 pupils of Forth Grade comprised the sample, 5 of whom comprised the experimental team and the other 5 the control team. The learning abilities were evaluated with the use of the Learning competence test, to exclude from the sample pupils with extended learning difficulties due to Intellectual disabilities, while the number of pupils with serious difficulties in Mathematics was evaluated with the Mathematical competence test. To define the difficulties during problem solving, a quiz with 4 problems of everyday life was assigned to the 10 pupils of the two teams in the beginning and at the end of the research. The problem solving was assessed in terms of the processing methods of the representation of the problem and the selection of the operations with a short interview of each pupil separately, following each quiz.

The results have shown that the pupils with serious difficulties in problem solving can improve processing methods of representation. The ability of solving wasn't as improved as expected because it depends on other factors as well, such as the mathematization of the problem, the correct use of mathematical symbols and the correct execution of the algorithms.

Key words

Difficulties in Problem Solving, Problem Representation, Cognitive style, Holistic-Analytic processing methods

Πίνακας περιεχομένων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η συμμετοχή στο κοινωνικό γίγνεσθαι επιβάλλει στην σύγχρονη εποχή τουλάχιστον την βασική γνώση των Μαθηματικών της στοιχειώδους εκπαίδευσης (Methe et al., 2011). Άτομα χωρίς στοιχειώδη μαθηματική σκέψη βρίσκονται αποκλεισμένα από τα σύγχρονα επιτεύγματα της επιστήμης και της τεχνολογίας. Ο μαθηματικός αναλφαβητισμός είναι ένα σημαντικό εμπόδιο, όχι μόνο για την συμμετοχή στα κοινωνικά αγαθά και τις ευκαιρίες στην εύρεση εργασίας αλλά και για την εκτέλεση αναγκαίων δραστηριοτήτων της καθημερινής ζωής. Τα Μαθηματικά του σήμερα, που χρειάζονται να μάθουν οι μαθητές έχουν ένα πιο ευρύ περιεχόμενο από αυτό των μαθητών παλαιότερων γενεών και όταν οι σημερινοί μαθητές γίνουν ενήλικες οι καθημερινές αυτές δραστηριότητες απαιτούν αυτές τις γνώσεις. Για αυτό και υπάρχει διάχυτη μια γενικότερη ανησυχία για την κατανόηση των Μαθηματικών εννοιών και των ιδιοτήτων τους, παρά για την εφαρμογή απλούστερων διαδικασιών που εκτελούνται και με βοηθήματα, προϊόντα της τεχνολογικής προόδου. Παράλληλα με αυτή την ανησυχία μεγαλύτερο προβληματισμό για τους θεωρητικούς των Μαθηματικών υπαγόρευσε η αποτυχία μεγαλύτερου τμήματος του μαθητικού πληθυσμού στην επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής, σε πολλές χώρες των οποίων οι μαθητές αποτυγχάνουν σε διεθνείς αξιολογήσεις στον τομέα αυτό. Μια αιτιολόγηση είναι ότι μαθητές με δυσκολίες στα Μαθηματικά χαρακτηρίζονται από σοβαρές δυσκολίες στις μεθόδους επεξεργασίας που απαιτούνται για την επιτέλεση των μαθηματικών δραστηριοτήτων όπως η επίλυση προβλημάτων, όμως δεν εξηγεί τους γενικότερους δείκτες αποτυχίας. Φαίνεται πώς το σημαντικότερο κενό στην διδασκαλία επίλυσης προβλημάτων αποτελούν οι απαιτούμενες προϋποθέσεις που θα υποστηρίξουν την μαθησιακή προσπάθεια. Συνοπτικά τα ερευνητικά αποτελέσματα που μελετήσαμε για τις δυσκολίες των μαθητών στα Μαθηματικά, ομαδοποιούν τα ευρήματα σε διαφορές που εδράζονται α) στην ανάπτυξη β) στην κατανόηση της έννοιας του αριθμού γ) στην εκτέλεση πράξεων και την επίλυση προβλημάτων. Η διδακτική αντιμετώπιση έγκειται στην εφαρμογή προγραμμάτων παρέμβασης στην τάξη ή σε μικρές ομάδες. Στην παρούσα μελέτη η έρευνα επικεντρώθηκε στην επίλυση προβλημάτων με έμφαση στην κατανόηση του προβλήματος και την διδασκαλία μεθόδων επεξεργασίας της αναπαράστασης του. Τα ευρήματα της έρευνας ενισχύουν την άποψη ότι η επιτυχία στην επίλυση προβλημάτων συνδέεται με τη χρήση αναλυτικών μεθόδων επεξεργασίας και ότι με κατάλληλα προγράμματα παρέμβασης στα οποία κεντρικός στόχος είναι η διδασκαλία αναλυτικών μεθόδων επεξεργασίας, μπορεί να βελτιωθεί η ικανότητα αυτή σε σημαντικό βαθμό.

Μέρος Ι: ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Κεφάλαιο 1ο: Δυσκολίες των μαθητών στα σχολικά Μαθηματικά

1.1. Πορίσματα από Διεθνείς Αξιολογήσεις

Το ζήτημα της υποεπίδοσης πολλών μαθητών στα Μαθηματικά αποτελεί ένα πρόβλημα με ποικίλες διαστάσεις και πολλές ερμηνείες. Οι σχολικές δυσκολίες και η χαμηλή επίδοση είναι, πολυπαραγοντικά φαινόμενα, που έχουν συνδεθεί με καταστάσεις όπως: την ατομική παθολογία (π.χ. καθυστερήσεις στην ανάπτυξη, ψυχοσυναισθηματικές δυσκολίες, δυσλειτουργίες ψυχολογικών διεργασιών) αλλά και την κοινωνική προέλευση (π.χ. οικογενειακό περιβάλλον φτωχό σε ερεθίσματα που δεν ευνοεί τη νοητική εξέλιξη). Σημαντικός παράγοντας είναι επίσης και η αλληλεπίδραση μεταξύ παιδιού και σχολικού περιβάλλοντος (Καΐλα, 1995). Οι μαθητές με δυσκολίες μάθησης χαρακτηρίζονται ως παθητικοί ή αδρανείς στη μαθησιακή διαδικασία εξαιτίας της αποτυχίας να οργανώνουν την υπό μάθηση ύλη, να αναλαμβάνουν δράση, να χρησιμοποιούν μνημονικές τεχνικές και στρατηγικές και να επικεντρώνονται στα μαθησιακά έργα. Η ανάγκη αξιολόγησης των επιτευγμάτων των μαθητών και η συσχέτισή τους με τους γνωστικούς παράγοντες αποτελεί μια περιοχή έρευνας, ενώ η συσχέτιση των δυσκολιών με άλλους παράγοντες όπως τα αναλυτικά προγράμματα, οι οικονομικές ανισότητες και η ισότητα ευκαιριών, επέβαλλαν την συμμετοχή των χωρών πέρα από τις εθνικές αξιολογήσεις, σε διεθνείς συγκριτικές αναλύσεις ώστε να συνεισφέρουν στην καλύτερη κατανόηση των παραγόντων που σχετίζονται με τις δυσκολίες των μαθητών στα Μαθηματικά. Η σχέση μεταξύ γνωστικών ικανοτήτων και επίδοσης στα μαθηματικά έργα απασχόλησε πλήθος ερευνών με διαφορετικές προσεγγίσεις και ορολογία (αναπτυξιακή ψυχολογία, ψυχολογία ατομικών διαφορών). Η έρευνα έχει επίσης αναδείξει ότι οι συναισθηματικοί παράγοντες όπως η αυτό-αποτελεσματικότητα (Self-efficacy) και το άγχος για τα Μαθηματικά (Math-anxiety), έχουν καθοριστικό ρόλο για τα μαθησιακά επιτεύγματα. Η αυτό-αποτελεσματικότητα στα μαθηματικά έργα συσχετίζεται με υψηλές επιδόσεις ενώ το άγχος των μαθητών σχετίζεται με την χαμηλή επίδοση (Lent, Brown, & Gore, 1997). Η συλλογή δεδομένων από ένα ευρύτερο πλαίσιο συντέλεσε τόσο στην ερμηνεία των εθνικών αποτελεσμάτων όσο και την καλύτερη ερμηνεία των αποτελεσμάτων για τις δυνατότητες και τις αδυναμίες της διδασκαλίας αλλά και των εκπαιδευτικών συστημάτων, με στόχο να βοηθηθούν οι φορείς χάραξης εκπαιδευτικής πολιτικής, στην παρακολούθηση της μαθησιακής προόδου και στη δικαιότερη κατανομή των ευκαιριών στην εκπαίδευση.

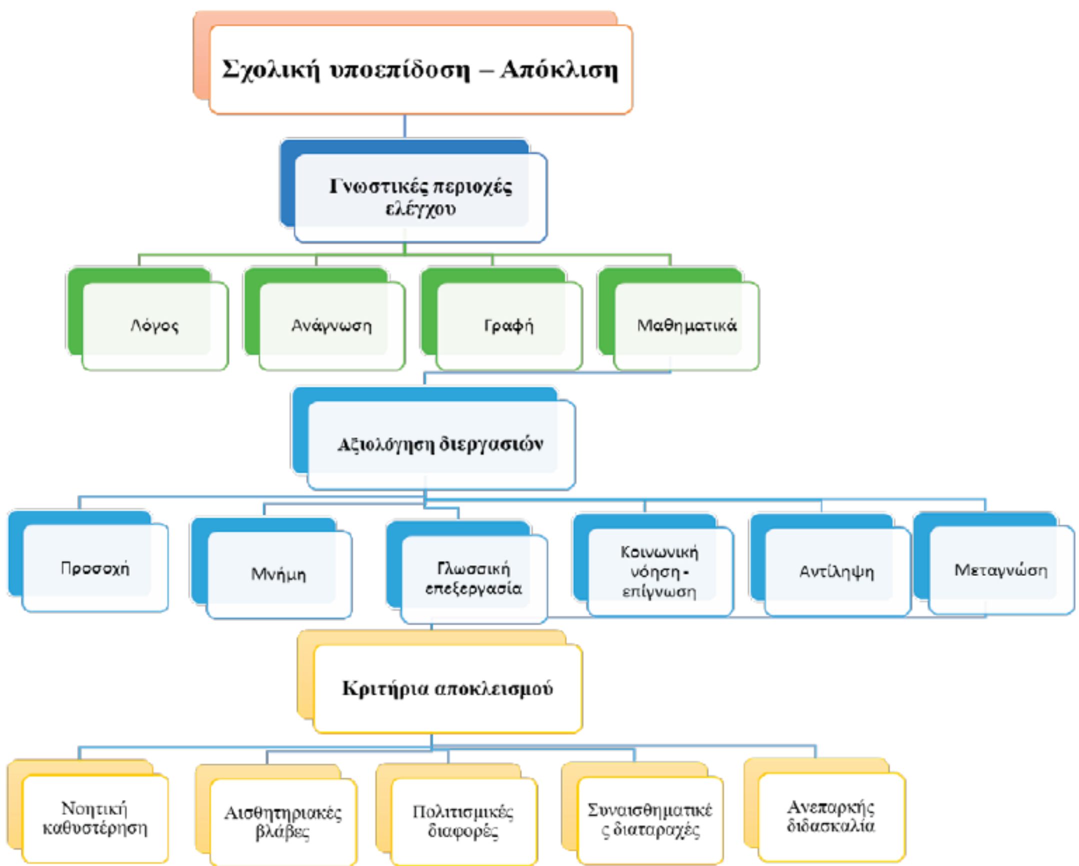
Στόχο του οργανισμού ΟΟΣΑ (OECD), αποτελεί η αξιολόγηση του βαθμού στον οποίο οι μαθητές/τριες στο τέλος της υποχρεωτικής τους εκπαίδευσης, είναι σε θέση να εφαρμόζουν τις γνώσεις και τις δεξιότητες που απέκτησαν στο σχολείο -στη Γλώσσα, στα Μαθηματικά, στις Φυσικές Επιστήμες, και από το 2003 στην Επίλυση Προβλημάτων (σε προβληματικές καταστάσεις της καθημερινής τους ζωής) και όχι η ικανότητά τους να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις ενός συγκεκριμένου προγράμματος σπουδών. Στις χώρες που συμμετέχουν στις αξιολογήσεις του οργανισμού, διαφοροποιήσεις στην επίδοση ερμηνεύονται μερικώς από τις απαντήσεις των μαθητών σε ερωτηματολόγια τα οποία τους χορηγούνται μετά το πέρας των δοκιμασιών. Οι απαντήσεις αυτές συνδέονται κυρίως με τους δύο γενικούς παράγοντες: την αυτό-αποτελεσματικότητα και το άγχος (OECD, 2013a). Αν και μερικά ευρήματα διαφέρουν από χώρα σε χώρα η γενική παραδοχή είναι ότι η επίδραση των παραγόντων αυτών συσχετίζεται με τις υψηλότερες και τις χαμηλότερες επιδόσεις αντίστοιχα.

Τα πρώτα και τελευταία ερευνητικά δεδομένα που αφορούν την Ελλάδα (κατά το διάστημα 1990-1998) από την συμμετοχή στη μελέτη της επιστημονικής κοινότητας του διεθνούς οργανισμού TIMSS -Trends in International Mathematics and Science (Mullis et al., 2012), ήταν αποθαρρυντικά. Όσο αφορά την επίδοση των μαθητών της Δ΄ Δημοτικού στα Μαθηματικά η χώρα μας κατέλαβε την 20η θέση σε 25 χώρες και της Β΄ Γυμνασίου την 16η σε 19 χώρες (Μπάρμπας, 2007). Σχετικά με την επίγνωση των αδυναμιών τους, οι περισσότεροι/ες μαθητές/τριες της τέταρτης τάξης των σχολείων της χώρας μας, πίστευαν ότι τα πήγαιναν πολύ καλά στα μαθηματικά, (ποσοστό 61%), γεγονός που δε συμφωνεί απόλυτα με τα αποτελέσματα και τις συγκρίσεις των επιδόσεων τους. Η μοναδική χώρα της οποίας η αντίληψη που είχαν οι μαθητές για τις ικανότητές τους, συνέπιπτε με τη συνολική τους επίδοση ήταν η Κύπρος με ποσοστό 67% (Τριανταφυλλίδου, 2007).

Με αφετηρία το μοντέλο των γνωστικών παραγόντων που εξειδικεύονται στη μαθηματική γνώση οι Russell και Ginsburg (1984), βρήκαν ότι οι μαθητές με δυσκολίες μάθησης στα Μαθηματικά δεν είχαν σοβαρά ελλείματα στην κατάκτηση άτυπων μορφών μάθησης μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων (π.χ., στρατηγικές για νοερούς υπολογισμούς και επίλυση κάποιων απλών λεκτικών προβλημάτων), ωστόσο εμφάνιζαν σοβαρές δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων με περισσότερες από μία πράξεις. Η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων προστέθηκε ως πεδίο αξιολόγησης στις δοκιμασίες PISA το 2003 με συμμετοχή μαθητών των 34 χωρών μελών του OECD και άλλων 31 συνεργαζόμενων χωρών. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της αξιολόγησης PISA (2003), μόνο το 20% των 15χρονών μαθητών θεωρούνται ικανοί λύτες προβλημάτων (Organization for Economic Co-Operation and Development [OECD], 2004). Σε αντίθεση με τις ανάγκες της σύγχρονης κοινωνίας, οι απόφοιτοι των σχολείων δεν είναι ικανοί λύτες προβλημάτων και δεν μπορούν να χρησιμοποιούν με άνεση μαθηματικές εφαρμογές. Η ικανότητα επίλυσης έγκειται στο ότι οι μαθητές αυτοί μπορούν να αναλύουν ένα πρόβλημα σε επιμέρους στοιχεία, να λαμβάνουν αποφάσεις, να αναπτύσσουν και να δοκιμάζουν μοντέλα επίλυσης και να επικοινωνούν αποτελεσματικά (OECD, 2004). Τα συμπεράσματα για τις δεξιότητες των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής (OECD, 2013b) είναι επίσης αποθαρρυντικά. Σε μερικές χώρες το 70% των μαθητών δεν μπορούν να λύσουν σύνθετα προβλήματα, ενώ σε άλλες μόνο το 5% των μαθητών τα καταφέρνουν. Το ποσοστό των μαθητών που δεν μπορεί να λύσει απλά προβλήματα ανέρχεται στο 10% των μαθητών των χωρών αυτών. Ο γενικός μέσος όρος των μαθητών όλων των χωρών που δεν μπορεί να λύσει προβλήματα εμφανίζει τους μισούς μαθητές να μην μπορούν να επιλύσουν προβλήματα μέτριας δυσκολίας. Η χαμηλή σχολική επίδοση και η δυσκολία επίλυσης προβλημάτων αποτελούν ενδείξεις για την έκταση και τις ποιοτικές διαστάσεις του φαινομένου των δυσκολιών που σχετίζονται με την διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών. Η επίλυση προβλημάτων στα μαθηματικά, είναι μια μαθησιακή δραστηριότητα που απαιτεί ενεργό συμμετοχή του μαθητή, ωστόσο πολλοί μαθητές δεν αναπτύσσουν θετική στάση είτε λόγω συγκεκριμένων δυσκολιών που αντιμετωπίζουν κατά την επίλυση, είτε επειδή θεωρούν τα προβλήματα ως μια εργασία που πρέπει να γίνει σε λίγα λεπτά. Αυτή η αντίληψη οδηγεί χρόνο με το χρόνο στην αποτυχία και την εγκατάλειψη κάθε προσπάθειας (Schoenfeld, 1985).

1.2. Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά

Οι ερμηνευτικές προσεγγίσεις των μαθησιακών δυσκολιών (Μ.Δ.) διαμορφώθηκαν κυρίως από δύο επιστήμες την ιατρική και την ψυχολογία γι' αυτό και σήμερα η συσχέτιση με αιτιολογικούς παράγοντες προσεγγίζεται διαφορετικά από κάθε επιστήμη. Μια τρίτη εκδοχή αποτελεί η άρση των εμποδίων, η οποία απομακρύνεται από τα αίτια μέσα στο ίδιο το άτομο και ερευνά τα εμπόδια που θέτει το κοινωνικό και πιο συγκεκριμένα για την μάθηση, το σχολικό πλαίσιο, τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών, η διδασκαλία και η αξιολόγηση όλων με τον ίδιο τρόπο παρά τις ατομικές διαφορές στην μάθηση. Η καθιέρωση των μαθησιακών δυσκολιών ως τυπικά οργανωμένου πεδίου με βάση την έρευνα και την κλινική δραστηριότητα, ανάγεται στους Werner και Strauss στο Wein County Training School στο Northvill του Michigan. Η συμβολή τους θεωρείται σημαντική γιατί ανέδειξε τις δυσκολίες αυτές ως κυρίαρχο πρόβλημα της σχολικής μάθησης (Fletcher, Lyon, Fuchs, & Barnes, 2018), με συνέπεια την αύξηση του επιστημονικού ενδιαφέροντος για την μελέτη και την αντιμετώπισή τους με ειδικές ρυθμίσεις στα πλαίσια της εκπαιδευτικής πολιτικής. Η εισαγωγή του όρου μαθησιακές δυσκολίες αποδίδεται στον Kirk (Τζουριάδου, 2011:7), ο οποίος προσπάθησε να περιγράψει μια ομάδα παιδιών με διαταραχές στην ανάπτυξη του λόγου, της ομιλίας, της ανάγνωσης και άλλων δεξιοτήτων που είναι απαραίτητες στην κοινωνική αλληλεπίδραση. Στην ομάδα αυτή δεν συμπεριλήφθηκαν παιδιά με αισθητηριακές ανεπάρκειες και παιδιά με νοητική καθυστέρηση. Οι απόψεις του Kirk υιοθετήθηκαν και στον πρώτο ορισμό των μαθησιακών δυσκολιών από τον Σύνδεσμο για τα παιδιά με δυσκολίες μάθησης-Association for Children with Learning Disabilities (Τζουριάδου, ό.π.). Κοινά στοιχεία των ορισμών των μαθησιακών δυσκολιών αποτελούν α) η ασυμμετρία ή ανισομέρεια μεταξύ των ικανοτήτων και β) η διακύμανση ή ασυμβατότητα μεταξύ ικανότητας και επίδοσης. Από την μελέτη της βιβλιογραφίας συμπεραίνουμε ότι οι μαθητές με δυσκολίες στα σχολικά μαθηματικά, δεν αποτελούν μια διακριτή ομάδα καθώς δεν υπάρχει δυνατότητα γενικευμένης ερμηνείας στο πρόβλημα των μαθησιακών δυσκολιών (Kavale, Forness, 1985). Οι γενικευμένες δυσκολίες σε όλες τις ικανότητες εμπίπτουν στην κατηγορία της ήπιας νοητικής ανεπάρκειας. Κατά συνέπεια, ένας μαθητής με μαθησιακές δυσκολίες θεωρείται ότι έχει γενική νοητική λειτουργία στο πλαίσιο του φυσιολογικού, με εσωτερικές διακυμάνσεις μεταξύ λεκτικού-πρακτικού, σύμφωνα με το τεστ νοημοσύνης WISC (Daley & Nagle, 1996). Η σχολική του επίδοση επίσης είναι κατώτερη από το αναμενόμενο για την ηλικία του και το νοητικό του δυναμικό (Τζουριάδου, 2008). Η οριοθέτηση των Kavale και Forness (2000) για τις Μ.Δ. με τρόπο λειτουργικό παραπέμπει στον πολυεπίπεδο και διεπιστημονικό χαρακτήρα που πρέπει να έχει η διάγνωση των Μ.Δ. Ο τελευταίος ορισμός ο οποίος έχει ενσωματωθεί στη Συνθήκη για την Εκπαίδευση Ατόμων με Αναπηρίες των ΗΠΑ, IDEA (Kavale & Forness, 2000), είναι περισσότερο περιγραφικός και δεν κάνει αναφορές σε αιτιολογικούς παράγοντες.



Εικόνα 1. *Γραφική απεικόνιση της πρότασης των Kavale και Forness (2000). Προσαρμογή στα ελληνικά Τζιβινίκου (2015)*

Σύμφωνα μ' αυτόν: «οι μαθησιακές δυσκολίες αναφέρονται σε διαταραχές σε μια ή περισσότερες από τις βασικές ψυχολογικές διεργασίες που εμπεριέχονται στη χρήση του προφορικού ή γραπτού λόγου, οι οποίες έχουν ως συνέπεια «ατελή» ικανότητα ακουστικής αντίληψης, σκέψης, λόγου, ανάγνωσης, γραφής, ορθογραφίας, μαθηματικών ικανοτήτων.. Το ζήτημα των ορισμών των μαθησιακών δυσκολιών αποτελεί θέμα διαλόγου της επιστημονικής κοινότητας καθώς οι διάφοροι ορισμοί συνοψίζουν εμπειρικά ό,τι παρατηρείται στην συμπεριφορά, λόγω αμφισβήτησης και των επιστημονικών μεθόδων για την σύνδεση κάποιας δυσκολίας μάθησης με οργανικούς παράγοντες.

Για τις σοβαρές δυσκολίες σε ένα τομέα μάθησης όπως των Μαθηματικών προέκυψε μια κατηγοριοποίηση των δυσκολιών η οποία αναφέρεται ως δυσαριθμησία. Ο όρος αυτός επικράτησε για να περιγράψει μια γενική κατάσταση που υποδηλώνει δυσκολία με τους αριθμούς (Cohn, 1961). Σύμφωνα με τον Geary με τον όρο δυσαριθμησία περιγράφεται η διαρκής δυσκολία που παρουσιάζουν ορισμένα άτομα στην μάθηση ή κατανόηση μαθηματικών εννοιών (Geary 2006). Στον όρο δεν εμπεριέχονται περιπτώσεις παιδιών των οποίων το πρόβλημα είναι αποτέλεσμα οπτικής, ακουστικής ή κινητικής ανεπάρκειας, νοητικής καθυστέρησης ή προέρχονται από δυσμενείς περιβαλλοντικές, πολιτισμικές ή οικονομικές συνθήκες» (IDEA, 2002). Παρά την επικράτηση του όρου αυτού τα ευρήματα ερευνών συνοψίζονται και ομαδοποιούνται κατά τομείς και επιμέρους δεξιοτήτες που εμφανίζονται ελλειμματικές. Βασικό λοιπόν κριτήριο καθορισμού του πεδίου καθώς και της διατύπωσης ορισμών είναι η αξιολόγηση παραμέτρων του προβλήματος και όχι ερμηνείας του (Τζουριάδου, 2008).

Σύμφωνα με στατιστικά στοιχεία το 17% του μαθητικού πληθυσμού εμφανίζει δυσκολίες μάθησης στα Μαθηματικά ενώ μια άλλη εκτίμηση αναφέρει ότι επί του συνόλου των μαθητών με γνωμάτευση μαθησιακών δυσκολιών στην Γλώσσα οι μισοί περίπου έχουν μαθησιακές δυσκολίες και στα Μαθηματικά (Fuchs &Fuchs 2001, Geary & Hoard 2001). Σε μια επισκόπηση ερευνών για το πλήθος των μαθητών που έχουν ειδικές δυσκολίες στα Μαθηματικά τα συμπεράσματα συγκλίνουν ότι περίπου το 5% - 8% του μαθητικού πληθυσμού εμφανίζει σοβαρές δυσκολίες μάθησης, που σχετίζονται με κάποια μορφή μνημονικού ή γνωστικού ελλείματος ή δυσλειτουργίας που παρεμβαίνει στην ικανότητα μάθησης εννοιών, εκτέλεσης διαδικασιών σε ποικίλα γνωστικά έργα (Geary, 2004).

Ανεπάρκειες σε επιμέρους γνωστικές λειτουργίες όπως προσοχή, μνήμη, παραγωγή υποθέσεων, συνδέονται με τον αριθμό και τη συνθετότητα των υπό επεξεργασία πληροφοριών, τη χρήση στρατηγικών, την ακρίβεια και πληρότητα της αναπαράστασης των πληροφοριών και τη δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων (Wolery, 2004, Τζουριάδου, 2008). Υπάρχουν ενδείξεις ότι οι μαθητές με δυσκολίες στα μαθηματικά έχουν κάποιες στρατηγικές αλλά δεν μπορούν να επιλέξουν τις κατάλληλες. Στον τομέα αυτό είναι δυνατόν να βελτιωθούν μέσω προγραμμάτων διδασκαλίας στρατηγικών (Torgesen, 1977. Wong & Jones, 1982. Wozniak, 1975). Οι Torgesen (1982), Vellutino (1979), υποστηρίζουν ότι η διδασκαλία στρατηγικών σχετίζεται θετικά και με την βελτίωση της ικανότητας επεξεργασίας των πληροφοριών. Η Swanson (1993) διεξήγαγε συγκριτικές έρευνες ώστε να προσδιορίσει τις διαφορετικές μεθόδους επεξεργασίας προβλημάτων των μαθητών με μέτρια και καλή επίδοση, με των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες. Τα συμπεράσματα δεν διαφοροποιούν τις ομάδες ως προς τις νοητικές ικανότητες. Στην πρώτη βαθμίδα οι μαθητές με δυσκολίες στα μαθηματικά εμφανίζουν χαμηλότερη επίδοση σε έργα που αφορούν την έννοια του αριθμού (Stock, Desoete, & Roeyers, 2010), την ευχέρεια στην αρίθμηση και στις βασικές πράξεις (Tolar, Fuchs, Fletcher, Fuchs, & Hamlett, 2016). Άλλες δυσκολίες αφορούν σύγκριση ποσοτήτων λόγω δυσκολίας αριθμητικού συμβολισμούς της αναπαράστασης των ποσοτήτων (De Smedt & Gilmore, 2011, Driver & Powell, 2015). Τα λάθη που παρατηρούνται συχνότερα αφορούν την αναπαράσταση αριθμητικών πληροφοριών και σχέσεων. Σύμφωνα με τους, Bryant, Bryant & Hammill (2000), έχουν εντοπιστεί 32 διαφορετικές συμπεριφορές μαθηματικών δυσκολιών[1]. Υπό το πρίσμα των γνωστικών διεργασιών που λαμβάνουν χώρα στα διάφορα μαθηματικά έργα, διαφαίνονται και αρκετοί περιορισμοί στην δυνατότητα μελέτης όλου του φάσματος των δυσκολιών. Οι σύγχρονες θεωρητικές προσεγγίσεις συνδέουν τις μαθησιακές δυσκολίες όχι τόσο με τις ικανότητες όπως αυτές αξιολογούνται με τα παραδοσιακά κριτήρια νοημοσύνης αλλά με ανεπάρκειες στις γνωστικές διεργασίες. Τα χαρακτηριστικά των δυσκολιών που εμφανίζουν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες

[1] σελ. 170 «*The purpose was to identify specific, observable behaviors exhibited by students with math LD. A total of 32 such behaviors or items were identified*»

στα μαθηματικά μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε πολλές υποομάδες. Σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση του Geary (2004), διακρίνονται 3 ομάδες με κοινές δυσκολίες:

1. Μαθητές με προβλήματα στη χρήση των διαδικασιών.

Δεν χρησιμοποιούν στρατηγικές ή εφαρμόζουν χρονοβόρες στρατηγικές πχ μέτρησης που χαρακτηρίζονται εξελικτικά ανώριμες όπως η μέτρηση με τα δάχτυλα. Κάνουν λάθη στην εκτέλεσε διαδικασιών, συνήθως χρειάζονται βοήθεια στην κατανόηση μιας διαδικασίας. Επίσης δυσκολεύονται με πολύπλοκες διαδικασίες όπως η διαίρεση και ο πολλαπλασιασμός. Επωφελούνται της διδακτικής υποστήριξης αλλά βελτιώνονται με αργά βήματα από τάξη σε τάξη. Οι επιδόσεις τους είναι αντίστοιχες με εκείνες μικρότερων μαθητών.

2. Μαθητές με δυσλειτουργίες στην σημασιολογική μνήμη.

Εμφανίζουν δυσκολίες συγκράτησης βασικών αριθμητικών δεδομένων. Τα λάθη είναι πολλά συνήθως λόγω δυσκολιών στην ανάκληση. Τα ελλείματα εμποδίζουν και την ανάπτυξη άλλων μαθηματικών δεξιοτήτων. Η βελτίωση των δεξιοτήτων είναι εξαιρετικά αργή και ποιοτικά διαφορετική από των μαθητών της πρώτης ομάδας. Οι δυσκολίες τους στα Μαθηματικά συνυπάρχουν με δυσκολίες στην ανάγνωση λόγω δυσχέρειας της φωνολογικής επίγνωσης.

3. Μαθητές με δυσκολίες στην οπτικο-χωρική αντίληψη.

Σχετίζεται με την αντίληψη που ορίζεται ως μια εποικοδομητική σύνθεση τριών στοιχείων: (α) τις χωρικές έννοιες, (β) τα εργαλεία αναπαράστασης, και (γ) τις διαδικασίες συλλογισμού. Η χωρική αντίληψη χρησιμοποιεί το χώρο προκειμένου να δομηθούν προβλήματα, να αναζητηθούν απαντήσεις, και να διατυπωθούν πιθανές λύσεις σε προβλήματα που σχετίζονται με τις χωρικές έννοιες αλλά για λύσεις προβλημάτων της καθημερινής ζωής. Η ικανότητα χρήσης και δημιουργίας χωρικών αναπαραστάσεων είναι μια απαραίτητη διαδικασία προς την κατάκτηση της χωρικής σκέψης.

1.3. Δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων

Οι περισσότερες και συνήθως μεγαλύτερες δυσκολίες των μαθητών με δυσκολίες μάθησης αφορούν την επίλυση προβλημάτων (Fuchs et al., 2008, Kingsdorf & Krawec, 2014). Οι δυσκολίες των μαθητών στην προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία, χωρίς την εφαρμογή πρώιμης παρέμβασης γίνονται προοδευτικά μεγαλύτερες από τάξη σε τάξη (βλ., Duncan et al., 2007, Morgan, Farkas, & Wu, 2009). Στις πρώτες τάξεις οι διαδικασίες επίλυσης περιλαμβάνουν βασικές μαθηματικές πράξεις της πρόσθεσης και αφαίρεσης. Τα ερευνητικά δεδομένα για τις τάξεις αυτές δείχνουν ότι τα παιδιά αντιλαμβάνονται τις αριθμητικές πράξεις με σχετική ευκολία, (Lubin, Poirel, Rossi, Pineau, & Houdé, 2009, Wynn, 1992 στο McCrink & Wynn, 2004), δυσκολεύονται όμως με την λύση απλών προβλημάτων και αυτή η δυσκολία τους ακολουθεί και στην ενήλικη ζωή (Verschaffel, 1994). Για τους μαθητές αυτούς η εκτέλεση πράξεων και η επίλυση προβλημάτων αν και αποτελούν διακριτούς τομείς της μαθηματικής γνώσης, σχετίζονται και οι δύο, με τις δυσκολίες των περισσότερων μαθητών ο οποίοι πρέπει να διδαχθούν με άμεση διδασκαλία και αναλυτικά βήματα την επίλυση προβλημάτων (Fuchs, Powell, et al., 2014). Ένα βασικό εύρημα που αφορά την επίδοση των παιδιών στα λεκτικά προβλήματα που επιλύονται με την ίδια αριθμητική πράξη, είναι ότι μπορεί να έχουν μεγάλες δυσκολίες σε προβλήματα με διαφορές στη σημασιολογική τους δομή. Το επίπεδο δυσκολίας της σημασιολογικής διάκρισης των προβλημάτων μπορεί να διαφέρει, είτε επειδή το αναγκαίο σημασιολογικό σχήμα για την αναπαράσταση των διαφορετικών τύπων προβλημάτων δεν είναι κάτι που τα παιδιά το κατέχουν εξίσου καλά, είτε επειδή μερικές αναπαραστάσεις προβλημάτων ταιριάζουν πιο εύκολα με την κατάλληλη αριθμητική πράξη απ' ό,τι άλλες (De Corte & Verschaffel, 1995). Κάποια ευρήματα ερευνών υποδεικνύουν ότι οι λανθασμένες απαντήσεις των παιδιών στα λεκτικά αριθμητικά προβλήματα δεν οφείλονται πάντα σε ανεύθυνη συμπεριφορά. Αρκετά από αυτά τα λάθη και τις παρανοήσεις έχουν περιγραφεί και σχηματοποιηθεί από πολλούς ερευνητές (Briars & Larkin, 1984, Riley et al., 1983). Επιπλέον, η ανάλυση αυτών των λαθών έδειξε ότι συχνά είναι ιδιαίτερα συστηματικά: είναι αποτέλεσμα λανθασμένων αντιλήψεων της κατάστασης του προβλήματος, που οφείλεται σε συστηματικές, αλλά λανθασμένες, αντιλήψεις ή στρατηγικές. Κατά τους (Clements, 1980, Zweng, 1979), πολλοί άνθρωποι, ερευνητές και δάσκαλοι, πιστεύουν ότι η βασική δυσκολία των παιδιών στα λεκτικά προβλήματα βρίσκεται στην επιλογή της κατάλληλης πράξης για να βρεθεί το άγνωστο στοιχείο στην κατάσταση του προβλήματος. Οι De Corte & Vershaffel (1985a, 1985b) παρουσίασαν συμπεράσματα που καταδεικνύουν ότι αυτή η άποψη δεν αληθεύει για έναν μεγάλο αριθμό παιδιών, για τα οποία η μεγάλη δυσκολία βρίσκεται σ' ένα προηγούμενο στάδιο, συγκεκριμένα στην κατασκευή της κατάλληλης αναπαράστασης του προβλήματος.

Τα πιο σημαντικά ευρήματα από τις μακροχρόνιες μελέτες των De Corte & Verschaffel (1995), στον τομέα επίλυσης προβλημάτων αφορούν (1) στην ποικιλία των στρατηγικών που επινοούν τα παιδιά για να λύσουν λεκτικά προβλήματα, και (2) στην ευελιξία αυτών των στρατηγικών επίλυσης σε σχέση με τη συγκεκριμένη φύση του προβλήματος. Οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες παρουσίαζαν μεγάλη διαφορά ως προς την χρήση στρατηγικών λόγω μεταγνωστικών ελλειμάτων στα οποία αποδίδονται οι διαφορές στις μεθόδους επεξεργασίας. Πέρα από τις αδυναμίες στις γνωστικές στρατηγικές μάθησης, οι δυσκολίες στην ανάπτυξη του επαγωγικού και λογικο-μαθηματικού συλλογισμού, η χαμηλή ικανότητα συνδυασμού στοιχείων και αναγνώρισης σχέσεων (Farnham-Diggory, 1994), συνδέονται επίσης με τις δυσκολίες των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων. Οι δυσκολίες αυτές συσχετίστηκαν με γνωστικά χαρακτηριστικά όπως της μνήμης (Swanson & Beebe-Frankenberger, 2004), της ταχύτητας επεξεργασίας (Cirino, Fuchs, Elias, Powell, & Schumacher, 2015), και της κατανόησης (Fuchs et al., 2006).

Έρευνα σχετική με την πρόβλεψη της τάξης των μαθηματικών με συσχέτιση γνωστικών ικανοτήτων όπως η αυτορρύθμιση, η μνήμη και η λογική ικανότητα, συμπεραίνει ότι η μαθηματική λογική συσχετίζεται με την 4η βαθμίδα (Τετάρτη τάξη) του Δημοτικού Σχολείου (Hibert et al, 2018). Μια ερμηνεία του ευρήματος αυτού είναι ότι σε αυτή την τάξη τα μαθηματικά έργα όπως η επίλυση προβλημάτων συνδέονται με την ανάπτυξη της ικανότητας εντοπισμού λογικών σχέσεων. Σε αυτή την τάξη υπάρχουν ενδείξεις ότι οι μαθητές αισθάνονται δυσφορία και ίσως νευρικότητα (math anxiety) για τα μαθηματικά έργα που είναι δύσκολα (Tankersley[2], 1993, Jackson & Leffingwell, 1999). Έρευνες με ανάλογο εύρημα έχουν διεξαχθεί από τους Maloney & Beilock (2012). Το ζήτημα της επίλυσης προβλημάτων έχει ανησυχητικές διαστάσεις στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση

[2]"*Fear of math is learned somewhere around the 4th grade. What causes such a drastic shift in attitude and self-concept? In the early years, children learn mathematical concepts first by association with concrete objects and later by symbolic representation. They have no fear or lowered sense of self-esteem associated with "doing math." Then, around 4th grade, teachers leave the world of the concrete, opting for the abstract*".

(Calhoon, Emerson, Flores, & Houchins, 2007), όπου και περιορίζει σημαντικά το εύρος των επιλογών που έχουν οι μαθητές μετέπειτα. Οι δυσκολίες αυτές αυξάνονται προοδευτικά και συσχετίζονται με άλλες ελλείψεις των μαθητών αυτών στο επίπεδο των μαθηματικών γνώσεων, αλλά κυρίως με αδυναμίες στο επίπεδο των γενικών μεθόδων που χρησιμοποιούν για την επεξεργασία και τον αποτελεσματικό έλεγχο των γνωστικών διαδικασιών που εμπλέκονται στην επίλυσή τους.

1.4. Αιτιολογία

Η χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά συνδέεται συχνά με προβλήματα που μπορεί να παρουσιαστούν στην κατανόηση εννοιών (Xin, Jitendra, & Deatline-Buchman, 2005), και συχνά τα προβλήματα στη μάθηση μπορεί να επιβαρύνονται από τους ψυχολογικούς παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν τη μαθησιακή συμπεριφορά και τις επιδόσεις των μαθητών αυτών. Οι δυσκολίες των παιδιών στη σχολική μάθηση της τυπικής εκπαίδευσης συνδέονται με δύο κυρίως κατηγορίες: τα ήπια προβλήματα στην νοητική ανάπτυξη και τις δυσκολίες στη μάθηση που μπορεί να οφείλονται σε ειδικές δυσλειτουργίες (μαθησιακές δυσκολίες) ή και σε σχολικές δυσκολίες που δημιουργούνται κατά την φοίτηση και τα αίτια τους είναι συνήθως πολυπαραγοντικά. Η συσχέτιση των γνωστικών διαδικασιών με την λειτουργία του εγκεφάλου οδήγησε σε πολλές ερευνητικές κατευθύνσεις για τις δυσκολίες που έχουν οι μαθητές στην επίλυση προβλημάτων οι οποίες αφορούν τη λειτουργία της μνήμης. Οι Siegel and Ryan (1989) υπέδειξαν ότι οι δυσκολίες των μαθητών στα μαθηματικά, εδράζονται στην προσωρινή μνήμη που απαιτούν συγκεκριμένα έργα και απαιτούν αριθμητικές διεργασίες. Διαταραχές στην αντίληψη των σχέσεων στο χώρο συνδέονται με αντίστοιχες έννοιες στα μαθηματικά. Διαταραχές στην ανάπτυξη του λόγου συνδέονται με δυσκολίες στην απόκτηση μαθηματικών εννοιών. Άλλες προσεγγίσεις συσχετίζουν τις ανεπάρκειες στις γνωστικές στρατηγικές μάθησης με τις δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων (Lerner, 1993). Το γεγονός ότι υπάρχει υψηλή συσχέτιση μεταξύ γνωστικών ικανοτήτων και Μαθηματικής επάρκειας, διευρύνει συνεχώς το σχετικό πεδίο ερευνών (βλ. Rohde & Thompson, 2007, Saxe, 2015), σύμφωνα με τις οποίες η επιδόσεις στα Μαθηματικά δεν σχετίζονται μόνο με την μνήμη (Bull, Espy, & Wiebe, 2008, Siegel & Ryan, 1989, Stamovlasis & Tsaparlis, 2005, Wilson & Swanson, 2001) αλλά και γνωστικές ικανότητες όπως η ανάπτυξη της λογικής ικανότητας

(Blackwell, Trzesniewski, & Dweck, 2007, Floyd, Evans, & McGrew, 2003). O Piaget μελέτησε συστηματικά επί 25 χρόνια με διαφορετικά εργαλεία όπως μη δομημένες συνεντεύξεις και τεχνικές όπως το «σκέψου φωναχτά» ως πρωτόκολλα παρατήρησης για την επίλυση προβλημάτων. Με αυτές τις ερευνητικές μεθόδους προσπάθησε να αναλύσει τις νοητικές διεργασίες και το νόημα που δίνουν τα ίδια τα άτομα στις γνώσεις του και τις ικανότητές τους. Η εξερεύνηση της λανθάνουσας γνώσης κρίθηκε σκόπιμη για τον σχεδιασμό της διδασκαλίας καθώς οι διάφορες δοκιμασίες στα σχολικά μαθήματα παρέχουν μια εικόνα για τις ακαδημαϊκές γνώσεις αλλά όχι για το πώς επηρεάζουν την σκέψη των μαθητών. O Piaget (1965), επέστησε την προσοχή στην πιθανότητα η βασική λογική που χρειάζονται τα Μαθηματικά ίσως να δημιουργεί δυσκολίες στα παιδιά. Πολλά από τα επιχειρήματα του Piaget σχετικά με την λογική των παιδιών σήμερα προκαλούν συζητήσεις και κάποια αμφισβητούνται. Ωστόσο δεν αμφισβητούνται συγκεκριμένες αρχές λογικής για να καταλάβουν τα μαθηματικά (Nunes at al., 2007). Σχεδόν όλοι οι ειδικοί δέχονται ότι τα άτομα έχουν ποικίλες ικανότητες να ενεργούν βάσει στόχων, να σκέφτονται λογικά και να χειρίζονται αποτελεσματικά το περιβάλλον στο οποίο ζουν. Επομένως, όταν βλέπουμε κάποιο άτομο να κινείται προς την υλοποίηση ενός ή πολλών στόχων, να συμπεριφέρεται λογικά και να ελέγχει το περιβάλλον του, συμπεραίνουμε ότι διαθέτει νοημοσύνη. Η σχέση του γενικού δείκτη νοημοσύνης με τις επιδόσεις στα Μαθηματικά, έχει μελετηθεί ως ξεχωριστό πεδίο έρευνας. Αρκετές έρευνες της Ψυχολογίας για την μάθηση των Μαθηματικών υπέδειξαν ότι υπάρχει συσχέτιση των υψηλών επιδόσεων με την γενική ευφυία ενώ επηρεάζει αρκετά χαρακτηριστικά των ατομικών διαφορών που ευθύνονται για τις διαφορές στη μάθηση. Συνεπώς η ευφυία αποτελεί και παράγοντα πρόβλεψης των μαθηματικών επιδόσεων. Για ορισμένους μαθητές με υψηλές επιδόσεις στα Μαθηματικά γίνεται λόγος, με έναν κάπως εύκολο τρόπο, για «κλίση» στα Μαθηματικά. Από την άλλη είναι εξαιρετικά δύσκολο να καταλάβουμε γιατί άλλοι μαθητές με πολύ καλές επιδόσεις στην επεξεργασία των αυθόρμητων λογικο-μαθηματικών δομών της νόησης, δυσκολεύονται στην κατανόηση μιας διδασκαλίας που αναφέρεται αποκλειστικά σ' αυτά που μπορούν να προκύψουν από τέτοιες δομές. Κατά τον Piaget, μια υπόθεση είναι ότι οι ενεργητικές δομές της νόησης είναι λογικο-μαθηματικής φύσης, αλλά δεν είναι συνειδητές ως δομές στο μυαλό των παιδιών: είναι δομές διανοητικών πράξεων και ενεργειών, που κατευθύνουν βέβαια τον συλλογισμό του υποκειμένου, αλλά δεν αποτελούν αντικείμενο λογικής εξέτασης από τη μεριά του (Hibert et al, 2018). Η διδασκαλία των Μαθηματικών προϋποθέτει τον προβληματισμό στις ίδιες τις δομές, και αυτό το κάνει μέσα από μια τεχνητή γλώσσα που έχει έναν πολύ ιδιαίτερο συμβολισμό και απαιτεί ένα μάλλον υψηλό βαθμό αφαίρεσης.

1.4.1. Γνωστικές ικανότητες

Η συσχέτιση των γνωστικών διαδικασιών με την λειτουργία του εγκεφάλου οδήγησε σε πολλές ερευνητικές κατευθύνσεις για τις δυσκολίες που έχουν οι μαθητές στην επίλυση προβλημάτων οι οποίες αφορούν τη λειτουργία της μνήμης. Οι Siegel and Ryan (1989), υπέδειξαν ότι η οι δυσκολίες των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά εδράζεται στην προσωρινή μνήμη που απαιτούν συγκεκριμένα έργα και απαιτούν αριθμητικές διεργασίες. Έρευνες με ανάλογο εύρημα έχουν διεξαχθεί από τους Jackson & Leffingwell (1999). Όσο αφορά την επίλυση προβλημάτων οι Fuchs et al. (2006), περιγράφουν τα λεκτικά προβλήματα ως μια σύνθετη εργασία, η οποία εξαρτάται από διεργασίες όπως η μνήμη εργασίας, η μακρόχρονη μνήμη, η αντίληψη και η προσοχή, η γλωσσική ικανότητα, η αναγνωστική ικανότητα και οι δόμηση των εννοιών Ο όρος «μεταγνώση» υιοθετήθηκε από τον Flavell κατά τη δεκαετία του 1970, για να ερμηνεύσει εξελικτικά φαινόμενα στους τρόπους μάθησης και οργάνωσης της γνώσης. Η μεταγνώση αναφέρεται στη γνώση του ατόμου ως προς τις γνωστικές διαδικασίες και τα παράγωγα τους ή οτιδήποτε σχετίζεται με αυτά. Άρα, η μεταγνώση αφορά στοχασμό επί της προυπάρχουσας γνώσης και γνωστικής εμπειρίας σε ποιες ενέργειες θα προβούμε για να μάθουμε /κατανοήσουμε κάτι. Θεωρητικοί και ερευνητές της νοημοσύνης αποδίδουν στη μεταγνώση το χαρακτηρισμό ενός σημαντικού συστατικού της νοημοσύνης (Stenberg, 1998). Η μεταγνώση αναφέρεται, μεταξύ άλλων, στον ενεργό έλεγχο και στη συνακόλουθη ρύθμιση, καθώς και στη διευθέτηση αυτών των διαδικασιών οι οποίες συνήθως, τίθενται στην υπηρεσία κάποιων συγκεκριμένων γνωστικών στόχων. Στην περιγραφή που συνοδεύει τον ορισμό της μεταγνώσης ο Flavell (1981: 252), τονίζει ότι ο έλεγχος μιας γνωστικής δραστηριότητας συμβαίνει μέσω της δράσης και της αλληλεπίδρασης της μεταγνωστικής γνώσης και των μεταγνωστικών εμπειριών. Από την περιγραφή της πρότασης του Flavell για τον ορισμό και τα συστατικά της μεταγνώσης φαίνεται ότι η μεταγνώση συνιστά ένα σημαντικό είδος γνώσης καθώς αυτή εκφράζει ενημερότητα για εκείνους τους παράγοντες που επηρεάζουν μια γνωστική δραστηριότητα. Οι μεταγνωστικές διαδικασίες λαμβάνουν χώρα όταν αναλογιζόμαστε ποια είναι η τρέχουσα γνωστική μας κατάσταση εάν γνωρίζουμε κάτι. Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1992), υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι να μιλήσει κανείς για τη μεταγνώση στη μάθηση μαθηματικών:

- Τις πεποιθήσεις, στάσεις μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά
- Τις απόψεις για τα Μαθηματικά και τη σχέση του μαθητή με αυτά
- Την Μεταγνώση- την δυνατότητα να αξιολογεί τη γνώση που έχει ή δεν έχει και τους τρόπου με τον οποίο την αποκτά
- Την αυτορρύθμιση, δηλαδή την δυνατότητα να έχει τον έλεγχο να κατευθύνει την δράση και να προσηλώνεται στο στόχο της μάθησης

Η ανάπτυξη των μεταγνωστικών δυνατοτήτων για την επίλυση προβλημάτων σχετίζεται με βασικά στοιχεία της μεταγνωστικής διαδικασίας. Αναμένεται ότι οι μαθητές κατά την ανάπτυξη του σχεδίου δράσης θέτουν ερωτήματα όπως:

- Τι πρέπει να κάνω πρώτα;
- Ποια γνώση και πως θα μπορούσε να βοηθήσει σε αυτό το πρόβλημα;
- Πόσο χρόνο έχω για να λύσω το πρόβλημα;
- Ποιες πληροφορίες θεωρούνται σημαντικές για τις ανακαλέσω από τη μνήμη;
- Πως πάει το αρχικό σχέδιο δράσης μου;
- Μήπως θα πρέπει να κινηθώ προς άλλη κατεύθυνση;
- Να αναπροσαρμόσω τον ρυθμό ανάλογα με τη δυσκολία του προβλήματος;

Οι μαθητές που μπορούν να κάνουν παρόμοιες ερωτήσεις και να εργάζονται για την επίτευξη του στόχου, έχουν εσωτερικά κίνητρα μάθησης, δείχνουν αυτορρύθμιση στην επίλυση προβλημάτων και είναι ικανοί να γενικεύουν στρατηγικές που επιλέγουν κατά την λύση ενός προβλήματος (Pressley, Borkowski, & Schneider, 1987). Άμεση συνέπεια της μεταγνώσης είναι: η καλύτερη παρακολούθηση, η διόρθωση, ο συντονισμός των γνωστικών λειτουργιών και των αποτελεσμάτων τους με στόχο την επίτευξη λύσης. Από τις πολυάριθμες έρευνες που οργανώθηκαν με στόχο τη διερεύνηση των χαρακτηριστικών της ενημερότητας για τις γνωστικές διαδικασίες και των μεταξύ τους σχέσεων έχει φανεί ότι αυτού του είδους η ενημερότητα επηρεάζεται από ποικίλους παράγοντες, όπως η ηλικία

(Wellman, 1990), το κοινωνικοοικονομικό επίπεδο (Demetriou & Efklides, 1989), καθώς και το γνωστικό ύφος των ατόμων (Borkowski, 1985). Σύμφωνα με τους Borkowski, Schneider & Pressley (1989), η μεταγνώση καθοδηγεί και την επιλογή και την ορθή επιλογή και εφαρμογή στρατηγικών. Ο Sternberg (1980, 1985), ενσωματώνει την περιγραφή των μηχανισμών αυτορρύθμισης σε μια ευρύτερη θεωρία για τη νοημοσύνη. Για αυτόν οι μηχανισμοί αυτορρύθμισης, τα μετα-συστατικά όπως τους ονομάζει, αποτελούν διαδικασίες ελέγχου ανώτερης τάξης που εφαρμόζονται κατά τη διάρκεια μιας γνωστικής επεξεργασίας Οι διαδικασίες αυτές χρησιμοποιούνται για το σχεδιασμό του τρόπου με τον οποίο θα πραγματοποιηθεί η επίλυση ενός γνωστικού έργου, για τη λήψη αποφάσεων σχετικά με τους πιθανούς εναλλακτικούς τρόπους προσέγγισης του γνωστικού στόχου και για τον έλεγχο των διαδικασιών λύσης. Τρεις είναι οι παράγοντες που επηρεάζουν τους μαθητές με δυσκολίες μάθησης στην απόκτηση μεταγνωστικής ικανότητας: α) παράγοντες που σχετίζονται με νευρολογικές δυσλειτουργίες, β) γνωστικά ελλείματα γ) αρνητικές πεποιθήσεις, στάσεις που επηρεάζουν το μαθησιακό ύφος και την αυτοεκτίμηση των μαθητών. Τα χαρακτηριστικά αυτά συνήθως διαφοροποιούν το γνωστικό ύφος των μαθητών με δυσκολίες μάθησης από τους μαθητές που έχουν καλή ή υψηλή επίδοση. Παράλληλα με την εξέλιξη των δυσκολιών στα μαθηματικά, που εδραιώνονται με την πάροδο του χρόνου, εντοπίζονται προβλήματα στη συμπεριφορά των μαθητών με αυτές τις δυσκολίες. Τα χαρακτηριστικά της συμπεριφοράς ποικίλουν ανάλογα με την αιτιολογία, την έκταση και την ένταση των δυσκολιών, τη χρονική στιγμή που εμφανίζονται, καθώς και ανάλογα με τον τρόπο που αντιμετωπίζονται στο σχολικό και οικογενειακό περιβάλλον (Μπάρμπας, 2000).

1.4.2. Δυσκολίες που επηρεάζονται από την Διδασκαλία

Η διδασκαλία και η μάθηση είναι πολυδιάστατα φαινόμενα με πολλές προσεγγίσεις και φιλοσοφικές αφετηρίες, ώστε να ερμηνευθεί επιλεκτικά η σχέση διδασκαλίας και μάθησης από μια θεωρητική κατασκευή. Το ερώτημα «πώς μαθαίνουμε Μαθηματικά», μπορεί να αναλυθεί σύμφωνα με τις ψυχολογικές θεωρητικές προσεγγίσεις, οι οποίες εξηγούν πώς μαθαίνει το άτομο και τις προσεγγίσεις της διδακτικής των Μαθηματικών που υποδεικνύουν τι θα μάθει στο συγκεκριμένο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των Μαθηματικών και πως θα οργανωθούν κατάλληλες μαθησιακές δραστηριότητες (Τζεκάκη

2007:61-62). Είναι γεγονός ότι τα Μαθηματικά υπέστησαν εδώ και αρκετά χρόνια μια εξαιρετικά βαθιά αλλαγή, σε σημείο που ανατράπηκε η ίδια τους η γλώσσα. Και είναι έτσι φυσικό να προσπαθούμε να προσαρμόσουμε τους μαθητές, από τις μικρές κιόλας τάξεις, σ' αυτόν τον καινούριο κόσμο από έννοιες, γιατί αλλιώς θα τους φαίνονταν πάντα ξένες. Υπάρχει όμως μια αντίφαση ό,τι στην σύγχρονη εποχή προσπαθούμε να διδάξουμε τα πιο μοντέρνα Μαθηματικά με τις πιο παραδοσιακές μεθόδους καθώς πολλές από τις προτάσεις αποδείχθηκαν ζητήματα δύσκολα στο πεδίο εφαρμογής. Οι σύγχρονες απόψεις για τη διδασκαλία των μαθηματικών δεν έχουν ακόμη καταφέρει να ενσωματωθούν στην καθημερινή σχολική πραγματικότητα.

Η διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος απαιτεί την από μέρους των εκπαιδευτικών κατανόηση σε βάθος των μαθηματικών εννοιών (Clements, 2007), που περιλαμβάνονται στο πρόβλημα και την προσήλωσή τους σε διερευνητικές διαδικασίες. Αρκετές έρευνες επισημαίνουν ότι οι εκπαιδευτικοί της τάξης αλλά και οι εκπαιδευτικοί ειδικής αγωγής υστερούν σε μαθηματική γνώση πολλών από τις οποίες διδάσκουν (Loewenberg Ball, Thames, & Phelps, 2008; Borko, 2004). Αρκετοί εκπαιδευτικοί έχουν δυσκολία στον σχεδιασμό διδακτικών καταστάσεων για να διδάξουν ειδικές περιοχές όπως η επίλυση προβλημάτων, ώστε καταλήγουν στο να δίνουν μεγαλύτερη έμφαση στην διαδικαστική γνώση που είναι το χαμηλότερο επίπεδο μαθηματικής γνώσης και να χρησιμοποιούν φτωχά ή καθόλου υλικά ή μέσα διδασκαλίας για την υποβοήθηση του σχηματισμού ενοιολογικών αναπαραστάσεων (Griffin, Jitendra & League, 2009; van Garderen, 2008).

Η μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας υποδεικνύει ότι η επίλυση προβλημάτων είναι ένα ευρύ πεδίο ιδεών που απασχόλησε και απασχολεί πολλούς ερευνητές (βλ. Pólya,1945; Schoenfeld, 1985 Silver, 2000; Reid, 2002; Radford, 2008; Mason, Burton, and Stacey, 2010; κ α.). Νεότερες απόψεις στο χώρο των μαθηματικών υποδεικνύουν ότι η επίλυση προβλήματος είναι αναπόσπαστο κομμάτι της μαθηματικής εκπαίδευσης και μέσω των προβλημάτων διδάσκονται νέες μαθηματικές έννοιες (National Council of Teachers of Mathematics, 1980, σελ. 1). Για το θέμα αυτό οι Οικονόμου και Τζεκάκη (1999: 45), πραγματοποίησαν έρευνα με αντικείμενο τη διερεύνηση των εναλλακτικών διδακτικών προσεγγίσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Τα συμπεράσματα τους οδηγούν στην παραδοχή ότι «*Τα ερευνητικά πορίσματα τεκμηριώνουν εμφανώς τη διαπίστωση ότι η* *πρακτική της δραστηριοποίησης των μαθητών, για την αντιμετώπιση ενός άγνωστου προβλήματος, με στόχο την 'οικοδόμηση' νέων μαθηματικών γνώσεων, έχει εξαιρετικά περιορισμένη εφαρμογή και στις δύο εκπαιδευτικές βαθμίδες (Δημοτικό και Γυμνάσιο)»*. Κατά τον Lester (2013), οι εκπαιδευτικοί δεν κατανοούν πώς μπορούν τα προβλήματα να αποτελέσουν αφετηρία της διδασκαλίας των Μαθηματικών, εφόσον δεν εκπονήθηκαν Προγράμματα Σπουδών με τέτοια κατεύθυνση, ενώ άλλοι θεωρητικοί εξέφρασαν αμφιβολίες αν μπορούν να οικοδομήσουν οι μαθητές από μόνοι τους τις αντίστοιχες μαθηματικές ιδέες στο πλαίσιο του μαθήματος και αν μπορούν να εφαρμόσουν τις ιδέες αυτές στα μαθηματικά που προσδοκούμε να μάθουν, καθώς οι επιστημονικές ιδέες των Μαθηματικών είναι το αποκρυστάλλωμα μιας μακροχρόνιας και συλλογικής προσπάθειας παρελθόντων ετών. Ο Anderson και συνεργάτες (1998), συμπέραναν ότι «η κονστρουκτιβιστική άποψη (βλ. Steffe & Kieren, 1994), συνηγορεί στην υιοθέτηση «αναποτελεσματικών μεθόδων μάθησης και αξιολόγησης». Μια απάντηση σε αυτή την άποψη είναι ότι τα μαθηματικά αναζήτησης δε θα έπρεπε να συγχέονται με ερευνητικές προσεγγίσεις που αντανακλούν μια προσέγγιση ανακάλυψης. Ο Schoenfeld (1987), μίλησε για «δημιουργία ενός μικρόκοσμου της μαθηματικής φιλοσοφίας» μέσα στην τάξη. Όπως παρατήρησε ο Richards (1991), η διάκριση ανάμεσα στα μαθηματικά αναζήτησης και στα παραδοσιακά μαθηματικά του σχολείου είναι ανάλογη με εκείνη που ονομάζουμε "λογική της ανακάλυψης" της έρευνας των μαθηματικών και της "ανακατασκευασμένης λογικής" του αρχείου καταγραφής των μαθηματικών. Οι Brown, Collins, και Duguid, (στο Pitri, 2004), χρησιμοποίησαν σε κάποιο βαθμό την έκφραση αυθεντική μαθηματική δραστηριότητα. Θα έπρεπε να σημειωθεί ότι η πληροφορία-διαδικασία των θεωρητικών απαιτεί τύπους μαθηματικής διδασκαλίας συμβατής με μαθηματικά αναζήτησης, τα οποία με κανένα τρόπο δεν απορρέουν από τις δικές τους κατανοήσεις του ανθρώπινου μυαλού. Στην πραγματικότητα, μπορεί να αποδειχθεί ότι οι γνωστικές τους θεωρίες και η εκπαιδευτική θέση που προτείνουν είναι σε άμεση αντίφαση και αντανακλούν δύο ασύμβατες ενδείξεις του τι είναι να είσαι ανθρώπινη ύπαρξη (βλ. Cobb, 1990).

Κατά τον Βάμβουκα (1982) οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί λαμβάνουν μια κατάρτιση που περιορίζεται στην εμπειροτεχνική μετάδοση έτοιμων γνώσεων, παγιωμένων εξηγήσεων και «συνταγών», γενικού και καθολικού κύρους. Πιο απλά θα υποστηρίζαμε πως η έννοια του ‘εκπαιδευτικού-ερευνητή’ που αναρωτιέται και προβληματίζεται για το «τι», «πού» και «γιατί» της δράσης του παραμένει σε μεγάλο ποσοστό, ουσιαστικά ανενεργή. Η κρίσιμη σύνδεση της θεωρίας με την διδακτική πράξη δεν είναι πώς σχεδιάζονται οι δραστηριότητες διδασκαλίας αλλά το σκεπτικό που συνδέει κάθε δραστηριότητα με το θεωρητικό υπόβαθρο. Συνήθως αυτό το σκεπτικό επηρεάζεται από την καθημερινή πρακτική στο βαθμό που να δημιουργείται στρέβλωση. Η καθιερωμένη αντίληψη για το Δημοτικό σχολείο είναι ότι η αριθμητική βρίσκεται στην καρδιά των μαθηματικών, και η αριθμητική πραγματοποιείται στις περισσότερες τάξεις δημοτικών σχολείων σαν βασικές διαδικασίες για την πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση αριθμητικών συνόλων και κλασμάτων. Όπως έχει επισημανθεί αυτές οι πρακτικές στην τάξη εξηγούν με παραδείγματα μια στάση συμπεριφοράς σχετικά με το τι αποτελεί τα μαθηματικά, τι αποτελεί την αριθμητική και σχετικά με το ποιοι θα έπρεπε να είναι οι στόχοι της εκπαίδευσης των μαθηματικών στα παιδιά. Από την άλλη πλευρά, ο εξαναγκασμός των εκπαιδευτικών στην προώθηση ενός άκαμπτου Αναλυτικού Προγράμματος, οδήγησε στη δημιουργία μιας γνώσης με τα εξής χαρακτηριστικά:

- λίγη γνώση πέρα από το Α. Π. που περιορίζει την ενεργητική συμμετοχή των μαθητών
- γνώση διαχωρισμένη, συνήθως χωρίς ξεκάθαρη αιτιολογία, σε αντικείμενα, θέματα και κεφάλαια
- γνώση που εκ της δημιουργίας της παράγει διαβαθμισμένη απόδοση
- γνώση που οδηγεί στη χορήγηση ενός πτυχίου με ελάχιστη προγνωστική δύναμη πέραν του εκπαιδευτικού συστήματος
- τέλος, γνώση που έχει σχεδιασθεί με βάση υπεραπλουστευμένες αντιλήψεις για τη νόηση και τη γνωστική διαδικασία, με αποτέλεσμα συχνά να διαστρεβλώνονται οι πραγματικές νοητικές διαδικασίες που συντελούνται.

Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να λάβουν υπόψη τις ατομικές διαφορές, υπό τους χρονικούς περιορισμούς που επιβάλλει ο τρόπος οργάνωσης του εκπαιδευτικού συστήματος και της μαθησιακής ύλης μέσω των αναλυτικών προγραμμάτων. Συχνά τείνουν να πιστεύουν ότι η ικανότητα της επίλυσης προβλημάτων θα ωριμάσει με τα χρόνια και την εξάσκηση στην επίλυση όμοιων προβλημάτων. Ακόμη συχνότερα η επίλυση των προβλημάτων στην τάξη των Μαθηματικών θεωρείται «σπατάλη χρόνου» ή ότι διδάσκοντας με προβλήματα δεν μπορούν να διδάξουν έννοιες ούτε να αξιολογήσουν τους στόχους του μαθήματος. Όμως η διδασκαλία καθορίζει σε μεγάλο βαθμό το νόημα που δίνουν οι μαθητές στα μαθησιακά έργα. Ειδικά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση υιοθετούν στάσεις για τα Μαθηματικά καθώς επηρεάζονται σε μεγαλύτερο βαθμό από τις απαιτήσεις και τις πρακτικές των εκπαιδευτικών. Για το λόγο αυτό είναι αναγκαίο να γνωρίζουν οι εκπαιδευτικοί την δύναμη της δικής τους επιρροής στις στάσεις των μαθητών. Ορισμένα από τα πορίσματα ερευνών αποδίδουν τις δυσκολίες των μαθητών κατά την επίλυση προβλημάτων στο γεγονός, ότι οι εκπαιδευτικοί δεν διδάσκουν τους μαθητές πώς να λύνουν προβλήματα. Οι Mtetwa και Garofalo (1989), υπέδειξαν αντιλήψεις μαθητών που συσχετίζονται με την επιρροή των στάσεων των εκπαιδευτικών στην επίλυση προβλημάτων:

1. Κατά την επίλυση προβλημάτων η έμφαση στα αριθμητικά δεδομένα έχει μεγαλύτερη σημασία από την διερεύνηση των σχέσεων μεταξύ των ποσοτήτων που αναπαριστούν. Οι αντιλήψεις αυτές ενισχύονται και από τα βιβλία των δραστηριοτήτων των μαθητών.

2. Τα προβλήματα λύνονται βήμα-βήμα με την εφαρμογή πράξεων, αντίληψη η οποία περνάει εσφαλμένα από τους διδάσκοντες στους μαθητές. Δεν δίνεται έμφαση στην κατανόηση των σχέσεων του προβλήματος μέσω της αναπαράστασής του.

3. Υπάρχει μόνο μια σωστή λύση για κάθε πρόβλημα. Συνέπεια αυτής της αντίληψής είναι ότι οι μαθητές στερούνται ευκαιριών για λογικό έλεγχο και επαλήθευση. Η ευθύνη κατανέμεται και στην επιλογή κλειστών δραστηριοτήτων και στις πρακτικές εμπειρίες και παραδείγματα στην τάξη.

Κεφάλαιο 2ο: Γιατί πρέπει να μάθουν τα παιδιά τα βασικά μαθηματικά του Δημοτικού Σχολείου.

2.1. Η Σημασία των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή

Τα Μαθηματικά αποτελούν βάση για την πρόσβαση σε άλλα επιστημονικά πεδία και η επίλυση προβλημάτων καταλαμβάνει ένα σημαντικό μέρος του αναλυτικού προγράμματος σπουδών. Η διδασκαλία δεξιοτήτων και στρατηγικών αποτελεί μια σχολική πρακτική που αποσκοπεί στην βελτίωση της σχολικής επίδοσης και στηρίζεται στην εξάσκηση, όμως η δημιουργικότητα, η κριτική σκέψη, η επίλυση προβλημάτων παρότι εμπεριέχουν δεξιότητες που αναπτύσσονται με την διδασκαλία, ελάχιστα γενικεύονται από τα προβλήματα των αναλυτικών προγραμμάτων στα προβλήματα της καθημερινής ζωής (Mayer & Wittrock, 2006). Επί πλέον η ελλιπής γνώση των μαθηματικών επιδρά αρνητικά στην κοινωνική εξέλιξη των μαθητών μετά την έξοδό τους από το σχολικό σύστημα.

Το ερώτημα που θα έκανε κανείς είναι που στη ζωή θα συναντούσε παρόμοια προβλήματα να επιλύσει; Ποιος είναι ο λόγος ώστε να επιμένουμε να μάθουν τα παιδιά Μαθηματικά; Ενδιαφέρουσα θέση στο ερώτημα αυτό θεωρούμε την άποψη του Abraham Arcavi ο οποίος λιτά και σαφέστατα δίνει την απάντηση. Σίγουρα όχι επειδή θα γίνουν Μαθηματικοί. Ούτε επειδή πιθανόν θα επιλέξουν σπουδές για τις οποίες οι μαθηματικές γνώσεις αποτελούν προαπαιτούμενο αλλά το πιο πιθανόν είναι επειδή χρειάζονται να γίνουν εγγράμματοι πολίτες και επειδή τα μαθηματικά σχετίζονται με δεξιότητες που απαιτούνται σε πολλά επαγγέλματα. Αναφέρει επίσης ότι προσφέρουν διανοητική ικανοποίηση και αυτοπεποίθηση στον μαθητή, ότι τουλάχιστον κάποιες φορές νιώθει τη χαρά να τα κατανοεί και να πετυχαίνει (Arcavi, 2000). Στην καθημερινή μας ζωή βρισκόμαστε διαρκώς αντιμέτωποι με προβλήματα, μεγάλα και μικρά, απλά και πολύπλοκα. Αυτό σημαίνει ότι η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων της καθημερινής ζωής, είναι σημαντική για την επιτυχία σε οποιοδήποτε τομέα της ανθρώπινης δράσης. Παραδείγματα από τους Euler, Polya και Poincare, είναι αρκετά για να αντιληφθεί κανείς ότι στα Μαθηματικά όπως και στην καθημερινή ζωή, καλούμαστε να λύσουμε νέα προβλήματα που ανακύπτουν όχι τόσο με συμπερασματικές κρίσεις, όσο με το να εφαρμόσουμε λογικές διεργασίες, να επεξεργαστούμε πληροφορίες και να ανακαλέσουμε γνώσεις που δεν εξάγονται συμπερασματικά αλλά προέρχονται από τις εμπειρίες και την παρατήρηση και την ελαχιστοποίηση των λαθεμένων ενεργειών. Αν και λίγοι θα διαφωνούσαν με τις παραπάνω θέσεις, η αλήθεια είναι ότι τουλάχιστον στο Δημοτικό Σχολείο τα παιδιά μαθαίνουν τις βασικές μαθηματικές έννοιες που είναι αναγκαίες για την ζωή τους και για την γνωστική εξέλιξή τους.

2.2. Η σημασία της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων για την απόκτηση της μαθηματικής γνώσης συνολικά.

Ως τις αρχές του 20ου αιώνα οι ανησυχίες που εκφράζονταν για την μαθηματική επάρκεια διαμόρφωσαν το πλαίσιο της συζήτησης για τις εφαρμογές των Μαθηματικών στα αναλυτικά προγράμματα. Βασικό ρόλο σε αυτή τη συζήτηση έπαιξε η διάκριση μεταξύ της γνώσης στο σχολείο και της εφαρμογής της έξω από το σχολικό πλαίσιο. Τα προβλήματα χρησιμοποιήθηκαν ως «οχήματα για εξάσκηση κάποιων διαδικαστικών γνώσεων και όχι για να προετοιμάσουν για πραγματικές καταστάσεις της ζωής. Αυτό έπρεπε με κάποιο τρόπο να αλλάξει ώστε να καταστεί δυνατό, με κάποιο τρόπο να μπορούν οι μαθητές να μάθουν τις γνώσεις που απαιτούνται για την ζωή. Υπήρχαν όμως και οι αντίθετες απόψεις που ισχυρίζονταν ότι παρόμοιες προσεγγίσεις οδηγούν σε περιστασιακές και ασυνάρτητες γνώσεις γι' αυτό και το πρόγραμμα σπουδών των Μαθηματικών πρέπει να θέτει στο επίκεντρο τις σημαντικές μαθηματικές έννοιες που θα έπρεπε να κατακτηθούν. Η αντίθεση των παραπάνω απόψεων δεν απασχολεί μόνο τα μαθηματικά αλλά τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών άλλων μαθημάτων, κυρίως όμως των φυσικών επιστημών. Στην σύγχρονη εποχή υπάρχει ανάγκη εξισορρόπησης των δύο τάσεων καθώς και οι δύο συνθέτουν το φαινόμενο της διδασκαλίας και μάθησης, όχι όμως της άγονης αποστήθισης εννοιών αλλά της μάθησης με νόημα. Είναι λοιπόν η επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής δραστηριότητα μάθησης με νόημα και εξέχουσας σημασίας ικανότητα την οποία τα παιδιά πρέπει να αναπτύξουν στο Σχολείο στα πλαίσια της τάξης των Μαθηματικών (Lubin, Vidal, Lanoë, Houdé, & Borst, 2013), ώστε να μπορούν να συνδυάζουν τις μαθηματικές γνώσεις τόσο για την επίλυση σχολικών προβλημάτων όσο και για την επίλυση ευρύτερων εξωσχολικών προβλημάτων. Από τα παραπάνω συνάγεται ότι δίδεται ιδιαίτερη έμφαση στην κοινωνική διάσταση της μαθηματικής παιδείας, την ανάγκη δηλαδή να μπορεί το άτομο να χρησιμοποιεί την μαθηματική γνώση στη ζωή, όταν και όπου την χρειάζεται αλλά και στην ανάγκη να ασχοληθεί κανείς πιο αποτελεσματικά με την ίδια την επιστήμη των Μαθηματικών και τις εφαρμογές της, όσο και στις εφαρμογές των μαθηματικών σε άλλα επιστημονικά πεδία. Στα πλαίσια αυτής της εργασίας αναφερθήκαμε στις δυσκολίες που έχουν τα παιδιά να εφαρμόσουν τις μαθηματικές γνώσεις για την επίλυση προβλημάτων καθημερινής ζωής και μελετήσαμε τα αίτια των δυσκολιών που μερικές φορές επιβαρύνονται από τον τρόπο διδασκαλίας. Θεωρούμε ότι το σημαντικότερο κενό στην διδακτική της επίλυσης προβλημάτων είναι οι μαθησιακές δραστηριότητες και οι απαιτούμενες προϋποθέσεις που θα υποστηρίξουν την μαθησιακή προσπάθεια..

Κεφάλαιο 3ο: Διδακτική των Μαθηματικών για την υπέρβαση των δυσκολιών των μαθητών

Η μαθηματική επάρκεια προσδιορίζεται από ένα πλέγμα γνώσεων διαδικασιών και ικανοτήτων του ατόμου να αναπτύσσει και να εφαρμόζει τη μαθηματική σκέψη (λογική και χωρική), να οργανώνει και να συστηματοποιεί τις γνώσεις του για να μπορεί να επιλύει ένα εύρος προβλημάτων σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Ειδικότερα η έννοια της μαθηματικής επάρκειας εμπεριέχει οκτώ ικανότητες, οι οποίες κατηγοριοποιούνται σε δύο ομάδες (Niss & Hojgaard, 2011). Η πρώτη ομάδα σχετίζεται με την ικανότητα του ατόμου να θέτει ερωτήματα αλλά και να απαντάει σε αυτά τα ερωτήματα, αξιοποιώντας την επιστήμη των μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα, αυτή η ομάδα εμπεριέχει τις εξής μαθηματικές ικανότητες, τις οποίες θα πρέπει το άτομο να κατέχει:

1. τη σκέψη με μαθηματικό τρόπο,
2. την τοποθέτηση αλλά και επίλυση μαθηματικών προβλημάτων,
3. την ανάλυση και κατασκευή μαθηματικών μοντέλων και
4. την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού.

Η δεύτερη ομάδα σχετίζεται με την ικανότητα του ατόμου να ανταπεξέρχεται και να διαχειρίζεται, τόσο τη μαθηματική γλώσσα, όσο και τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται στην επιστήμη των μαθηματικών. Αναλυτικότερα, αυτή η ομάδα εμπεριέχει τις εξής μαθηματικές ικανότητες, τις οποίες θα πρέπει το άτομο να κατέχει:

1. την αναπαράσταση των μαθηματικών οντοτήτων,
2. τον κατάλληλο χειρισμό των μαθηματικών συμβόλων και μαθηματικών τύπων,
3. την επικοινωνία για τα μαθηματικά και
4. την αξιοποίηση των μαθηματικών εργαλείων.

Η εννοιολογική κατανόηση των ακεραίων αριθμών αφορά την γνώση των εννοιών, των αρχών και των ιδιοτήτων όπως της αντιμεταθετικής στην πρόσθεση, την αξία της θέσης των ψηφίων, την εκτίμηση κατά προσέγγιση και την λογική μιας εκτίμησης, την ανάλυση και σύνθεση αριθμών (200 + 50 + 7 = 257). Επίσης αφορά κατ’ επέκταση την άνεση και την ευελιξία στην αρίθμηση, τις συγκρίσεις ποσοτήτων και τις νοερές πράξεις (Berch, 2005).

Η διαδικαστική γνώση είναι γνώση για την χρήση των αλγόριθμων, οι νοερές πράξεις οι μνημονικές στρατηγικές κ.ά. Σε αυτή εντάσσονται ακόμη η αυτόματη ανάκληση βασικών γνώσεων (NMAP, 2008)[3]. Αν και η γνώση του κατάλληλου αλγόριθμου είναι μια μαθηματική τεχνική σε συνδυασμό με την εννοιολογική κατανόηση αποτελεί μια αναγκαία διάσταση της μάθησης των μαθηματικών η οποία συντελεί στην επίλυση προβλημάτων και υποβοηθά τους μαθητές να χωρίζουν ένα σύνθετο πρόβλημα σε μικρότερα μέρη (Wu, 2011).

Η γνώση στρατηγικών αναφέρεται στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων με την χρήση εικονικών (π.χ., η αριθμογραμμή, οι ζωγραφιές των παιδιών) ή νοητικών αναπαραστάσεων (Gersten, Beckmann, et al., 2009). Η εξάσκηση σε στρατηγικές αναπαράστασης μαζί με χειραπτικά υλικά αποτελεί ουσιώδη στοιχεία της διδασκαλίας στα προγράμματα παρέμβασης (Flores, 2009, Gersten, Chard, et al., 2009, Swanson, Jerman & Zheng, 2008). Όταν τα παιδιά αντιμετωπίζουν ένα πρόβλημα αναμένεται να σχηματίσουν την νοερή αναπαράσταση των σχέσεων ανάμεσα στις ποσότητες που παρουσιάζονται στο πρόβλημα και να ξεχωρίζουν τα δεδομένα από τα ζητούμενα (Jitendra, 2007; Kilpatrick et al., 2001). Οι στρατηγικές επίσης βοηθούν στην αναγνώριση της δομής του προβλήματος, στην κατάρτιση της εξίσωσης για την επίλυση και τον εντοπισμό κοινών χαρακτηριστικών από παρόμοια προβλήματα(Jitendra & Hoff, 1996; Powell, 2011).

Η προσαρμοστική συλλογιστική αντανακλά την ικανότητα του ατόμου να εξηγεί, να ρωτά και να στοχάζεται πάνω στο πρόβλημα, δηλ « να σκέφτεται φωναχτά» (Gersten, Chard, et al., 2009, Kilpatrick et al., 2001). Η φωναχτή σκέψη βοηθά κυρίως μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά (Gersten, Chard, et al., 2009, Swanson, Jerman & Zheng, 2008)

[3] TheNational MathematicsAdvisory Panel (NMAP, 2008) was established to identify areas of concern in mathematical education in the United States and to provide directions to ensure that graduates attain international standards in mathematics.

και τους βοηθά να δικαιολογούν την επιλογή μιας στρατηγικής (Gersten, Chard, et al., 2009).

Η παραγωγική προδιάθεση αναφέρεται στα κίνητρα και την αυτορρύθμιση για την επίτευξη του στόχου και η πεποιθήσεις για την αξία του έργου (Kilpatrick et al., 2001; NMAP, 2008). Η καλλιέργειά της για μαθητές με δυσκολίες μάθησης αλλά και για όλους τους μαθητές σχετίζεται θετικά με τις προσπάθειες των εκπαιδευτικών ώστε να εμπλέκουν τους μαθητές σε δραστηριότητες που θα εμπνεύσουν θετικές στάσεις για τα μαθηματικά έργα (Gersten, Chard, et al., 2009). Συνεπώς η μαθηματική επάρκεια εμπεριέχει εννοιολογική γνώση και γνώση διεργασίας. Η επίλυση προβλημάτων και οι υπολογισμοί προϋποθέτουν τόσο την κατανόηση εννοιών και γνώση αλγορίθμων, όσο και μεθόδους επεξεργασίας και στρατηγικές. Ειδικότερα σύμφωνα με τον Μπάρμπα (2008:11), «η μαθηματική επάρκεια προσδιορίζεται ως «η ικανότητα να αναπτύξει και να εφαρμόσει κανείς την μαθηματική σκέψη για να μπορεί να επιλύει ένα εύρος προβλημάτων σε καταστάσεις τα καθημερινής ζωής, έχοντας ως βάση για την οικοδόμηση της μαθηματικής επάρκειας, μια βαθιά και έγκυρη γνώση των αριθμητικών εννοιών και σχέσεων». Η αξιοποίηση μοντέλων για την επίλυση προβλημάτων μπορεί να αποτέλεσε μια συστηματική θεωρητική και πρακτική αξιοποίηση της κοινής συνεισφοράς θεωρητικών της ψυχολογίας και των Μαθηματικών αλλά ενέπνευσε και πλούσιο προβληματισμό που οδήγησε στην έρευνα στο συγκεκριμένο πεδίο των δυσκολιών των μαθητών κατά την επίλυση των λεκτικών προβλημάτων.

Κατά τους De Corte, Verschaffel, & De Win, (1985), Verschaffel, (2007), η επίλυση προβλήματος απαιτεί από τον λύτη συστηματική αναπαράσταση των σχέσεων μεταξύ των στοιχείων που περιγράφονται στο πρόβλημα. Το πώς αντιλαμβάνονται τις λέξεις που εκφράζουν αυτές τις σχέσεις μπορεί να ερευνηθεί με την βοήθεια γνωστικών μοντέλων, τα οποία έχουν αξιοποιηθεί ερευνητικά σε πολλές επιστημονικές περιοχές αλλά όχι τόσο στα μαθηματικά προβλήματα τα οποία είναι κατ΄ εξοχήν νοητική δραστηριότητα (Thevenot, 2009). Σε αντίθεση με την έμφαση στην αναζήτηση αναλογιών μεταξύ προβλημάτων, η θεωρία των αναπαραστάσεων δεν εξετάζει μια επιλεγμένη συντακτική δομή, αλλά αυτό που μπορεί να αναπαρασταθεί αναλογικά με αυτό που κατέχουμε ή αντιλαμβανόμαστε για μια υπάρχουσα κατάσταση (Johnson-Laird, 1983:156). Η έρευνα της Thenevot (ό.π.)

στην επίλυση προβλημάτων συμπεραίνει ότι οι καλοί λύτες σχηματίζουν νοητικές αναπαραστάσεις για τα προβλήματα ενώ οι αδύναμοι συνήθως δεν κατανοούν το πρόβλημα, όπως οι φτωχοί αναγνώστες δεν κατανοούν ένα κείμενο. Σε αυτή την περίπτωση η παρέμβαση αφορά μεθόδους κατά τις οποίες οι μαθητές αποκτούν επίγνωση των καταστάσεων που περιγράφονται στο πρόβλημα μέσα από την επεξεργασία της αναπαράστασής του (Vicente, Orrantia, & Verschaffel, 2008b).

Στον τομέα της επίλυσης προβλημάτων, η θεωρία δραστηριοτήτων (activity theory) παρείχε το θεωρητικό πλαίσιο για την χρήση των εργαλείων που διαμεσολαβούν για την επίτευξη των στόχων της μάθησης. Για παράδειγμα, θεωρώντας ότι η κατανόηση του προβλήματος εξαρτάται άμεσα από την ικανότητα της αναπαράστασης μαθηματικών ιδεών- με διαφορετικούς τρόπους, καθώς και την ικανότητα σύνδεσης και συσχέτισης όλων αυτών των- διαφορετικών μορφών, τέτοια εργαλεία στα μαθηματικά αποτελούν διάφορα συστήματα εξωτερικών αναπαραστάσεων που διευκολύνουν τις πιθανές αλληλεπιδράσεις και μεταφράσεις ανάμεσα, αλλά και μεταξύ των διάφορων τρόπων αναπαράστασης των μαθηματικών εννοιών και των σχέσεων των λεκτικών προβλημάτων όπως τα προβλήματα της καθημερινής ζωής τα οποία είναι πολυτροπικά ως προς την αναπαράστασή τους (Lesh, Post & Behr 1987).

Η θεωρία δραστηριοτήτων έχει μία ενδιαφέρουσα προσέγγιση στα δύσκολα προβλήματα της μάθησης και πιο συγκεκριμένα της υπονοούμενης γνώσης. Η έννοια της «δραστηριότητας» ως σύστημα υποστήριξης της μαθησιακής διαδικασίας αποτέλεσε επέκταση του έργου του Vygotsky από τον Leontiev (1978, 1981), ο οποίος έδωσε έμφαση στα κίνητρα και την έννοια της διαμεσολάβησης των πολιτισμικών εργαλείων της μαθησιακής κοινότητας. Κεντρικό στοιχείο αποτελεί η δραστηριότητα, με στόχο, τη μάθηση με νόημα, αλλά και τον τρόπο, με τον οποίο μπορεί να πραγματοποιηθεί αυτή μέσα από τα περιβάλλοντα που συνθέτουν οι μαθητές ενώ το συμπέρασμα αντανακλά το αποτέλεσμα της δραστηριότητας. Τα κίνητρα είναι αυτά που, δραστηριοποιούν τα υποκείμενα της δράσης και ορίζουν το κίνητρο της δραστηριότητας στην πραγματική διάστασή του Engestrom (1987). Οι διαδικασίες, επίσης, αποτελούν εκείνα τα μέσα, με τα οποία μία δράση λαμβάνει χώρα και σχετίζεται με τις συνθήκες, κάτω από τις οποίες πραγματοποιούνται καθορισμένες ενέργειες.

Οι στάσεις και οι πεποιθήσεις των μαθητών για τα προβλήματα, αν και αναφέρονται στις ψυχολογικές διεργασίες των υποκειμένων κατά την επίλυση προβλημάτων, ουσιαστικά διαμορφώνονται από την εμπειρία που αποκομίζουν από την μαθησιακή διαδικασία. Το γεγονός ότι υπάρχουν σημαντικές διαφοροποιήσεις στον τρόπο συμμετοχής των μαθητών στις μαθησιακές δραστηριότητες, συνδέεται κυρίως με το πώς βιώνεται η σχολική γνώση την οποία αρκετοί μαθητές παρακολουθούν χωρίς ενεργή συμμετοχή και ενδιαφέρον. Γι' αυτούς τους μαθητές συγκεκριμένες μαθησιακές δραστηριότητες δεν βιώνονται ως υποκειμενική ανάγκη αλλά ως υποχρέωση στις απαιτήσεις του δασκάλου (Μπάρμπας, 2000). Η έλλειψη κινήτρων είναι μια σοβαρή αιτία σταδιακής απόσυρσης από την μαθησιακή διαδικασία αλλά σε πολλές περιπτώσεις συνδέεται και με τις δυσκολίες της ατομικής δράσης του μαθητή δίχως την διδακτική υποστήριξη του εκπαιδευτικού ώστε να ξεπεράσει τα εμπόδια (Μπάρμπας, 2007:197). Πολλές όμως, από τις δυσκολίες των μαθητών στο σχολείο δημιουργούνται καθώς έρχονται αντιμέτωποι με νέα, μη οικεία σημεία της διδασκαλίας για τα οποία χρειάζονται πλαίσια αναφοράς, ώστε να έχουν γι' αυτούς νόημα. Καθώς οι δυσκολίες αυτές συσσωρεύονται, γενικεύονται και οδηγούν στη σχολική αποτυχία.

3.1. Προγράμματα παρέμβασης

Η χαμηλή επίδοση πολλών παιδιών στο σχολείο στις Η.Π.Α. υπαγόρευσε την λήψη μέτρων ώστε να βελτιωθεί το επίπεδο διδασκαλίας και να υποστηριχθούν οι μαθητές με υπο-επίδοση μέσα στην τάξη. Τα προγράμματα που αναπτύχθηκαν για την αντιμετώπιση των δυσκολιών στην γλώσσα γνωστά ως Response to Intervention-RtI (Ανταπόκριση στην παρέμβαση), εφαρμόστηκαν καθολικά στα σχολεία και τα αποτελέσματά τους ήταν θετικά. Επιπλέον οδήγησαν στην μείωση των μαθητών που έχρηζαν ειδικής αγωγής. Γι' αυτό και επεκτάθηκαν και στη διδασκαλία των Μαθηματικών αναμένοντας ότι η εφαρμογή τους θα ήταν επωφελής για την βελτίωση των μαθηματικών δεξιοτήτων πολλών μαθητών (NMAP, 2008, Codding,Volpe & Poncy, 2017). Η θετική αξιολόγηση της αρχικής εφαρμογής τους αποτέλεσε παράδειγμα και για τα εκπαιδευτικά συστήματα άλλων χωρών και εν μέρει και στην χώρα μας, όχι όμως συστηματικά σε επίπεδο τάξης αλλά στα πλαίσια του θεσμού της ενισχυτικής διδασκαλίας και κυρίως των τμημάτων ένταξης που αποτελούν δομές ειδικής αγωγής στο τυπικό σχολείο. Ένας λόγος είναι ότι το RtI ως πολυεπίπεδο σύστημα παρέμβασης, δεν κατανοήθηκε ούτε αναπτύχθηκε συστηματικά όπως στις Η.Π.Α., όπου η πολυεπίπεδη παρέμβαση ακολουθεί ένα ιεραρχικό μοντέλο που αξιολογείται σε κάθε επίπεδο. Το RtI επιδιώκει να γεφυρώσει το χάσμα διάγνωσης – παρέμβασης απεγκλωβίζοντας τις ΜΔ από τις παραδοσιακές ψυχομετρικές μεθόδους διάγνωσης (Τζουριάδου, 2008). Η πολυεπίπεδη παρέμβαση περιλαμβάνει 3 επίπεδα: α) τη διδασκαλία στη γενική τάξη, όπου οι στρατηγικές που προτείνονται στοχεύουν τόσο σε ακαδημαϊκά όσο και σε συμπεριφορικά ζητήματα, δίνεται έμφαση στο «πώς» και όχι στο «τι» της εκπαιδευτικής διαδικασίας, απευθύνεται σε όλους τους μαθητές και προϋποθέτει μια ποιοτική διδασκαλία με βάση τις ανάγκες όλων των μαθητών (Tier 1), β) την υποστηρικτική διδασκαλία σε μικρές ομάδες, επίπεδο στο οποίο επιλέγονται με βάση τα δεδομένα της καθολικής ανίχνευσης κάποιοι μαθητές με σημαντικές δυσκολίες μάθησης στη γενική τάξη, τα μαθήματα γίνονται εκτός τάξης για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα από εξειδικευμένους εκπαιδευτικούς (Tier 2) και γ) την εξατομικευμένη διδασκαλία, που αποτελεί το επίπεδο στο οποίο μετακινούνται οι μαθητές που δεν επωφελούνται από το 2ο επίπεδο και χρειάζονται εντατικότερη παρέμβαση (Tier 3), (Τζιβινίκου, 2015, Codding 2017).

3.2. Προγράμματα παρέμβασης που υποστηρίζονται από τις Έρευνες στα Μαθηματικά

Το πρόβλημα που αναδύθηκε από την διδασκαλία προβλημάτων μέσω των βημάτων ήταν ότι πολλοί μαθητές στερούνται μεθόδων που απαιτούνται για την επεξεργασία των σταδίων του προβλήματος με αποτέλεσμα να μένουν αδρανείς και παθητικοί στη μαθησιακή διαδικασία, καθώς δεν μπορούν να ενεργοποιήσουν τις στρατηγικές που διαθέτουν (Borkowski & Cavanaugh, 1979). Οι θεωρητικές προσεγγίσεις των δυσκολιών των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων οδήγησε στην εκπόνηση αντίστοιχων προγραμμάτων παρέμβασης. Απαραίτητη προϋπόθεση για την αντιμετώπισή των δυσκολιών των μαθητών στα Μαθηματικά είναι σε πρώτο επίπεδο η αξιολόγηση, και η διαφοροποίηση της διδασκαλίας. Συμπεράσματα πολλών ερευνών υπαγόρευσαν την ανάγκη για τον σχεδιασμό κατάλληλων προγραμμάτων παρέμβασης τα οποία βασίζονται στην καλλιέργεια των διεργασιών σκέψης και της μεταγνωστικής επάρκειας των μαθητών με υπο-επίδοση. Στις περιπτώσεις σοβαρών δυσκολιών βασικό κριτήριο της αξιολόγησης αποτελεί η διακύμανση ή ασυμβατότητα μεταξύ ικανότητας-μαθησιακής επάρκειας και επίδοσης-μαθησιακής συμπεριφοράς, καθώς και το ιδιαίτερο γνωστικό προφίλ των μαθητών το οποίο χαρακτηρίζεται από τομείς δυνατοτήτων και τομείς αδυναμιών. Κριτήρια αξιολόγησης των αδυναμιών αυτών αποτελούν τα διαγνωστικά κριτήρια της Μαθησιακής και Μαθηματικής Επάρκειας. Επίσης καθώς ο λόγος παρέχει το υπόβαθρο στο οποίο βασίζεται η επικοινωνία και η επίλυση προβλημάτων, θα πρέπει να αξιολογείται προσεκτικά. Κατά την μελέτη των προγραμμάτων αυτών είναι εμφανής η σύνδεση με θεωρίες μάθησης ή και συνδυασμό τους (Adams and Carnine 2003, Case 1985, Flavell et al. 1993, Sternberg 1985, Vygotsky 1989). Η συμπεριφοριστική προσέγγιση αποτελεί την βάση για την άμεση διδασκαλία ενώ ο συνδυασμός συμπεριφοριστικών και γνωστικών θεωριών αποτελεί το υπόβαθρο των περισσότερων γνωστικών προγραμμάτων διδασκαλίας (cognitively based instructional approaches) όπως της διδασκαλίας στρατηγικών και της Θεωρίας Σχήματος, οι οποίες και οι δύο αποτελούν διδακτικές προσεγγίσεις με κατεύθυνση την βελτίωση της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων. Η Μελέτη των ερευνών για την αποτελεσματικότητα αυτών των προγραμμάτων παρέμβασης σε παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες (βλ., Kroesbergen & van Luit 2003, Swanson 1999), παρέχει αρκετές ενδείξεις ότι είναι αποτελεσματικά γι' αυτούς τους μαθητές. Και οι δύο διδακτικές προσεγγίσεις είναι αυστηρά και ιεραρχικά δομημένες με μικρές διαφορές ότι στην άμεση διδασκαλία είναι καθοριστικός ο ρόλος του δασκάλου να διδάξει βήμα βήμα την υπό μάθηση ύλη. Αυτή η μέθοδος φαίνεται να είναι αποτελεσματική για την απόκτηση των βασικών δεξιοτήτων και τη διδασκαλία των αλγόριθμων. Η διδασκαλία γνωστικών στρατηγικών είναι περισσότερο αλληλεπιδραστική και θέτει το επίκεντρο στην εξάσκηση στις μεθόδους επεξεργασίας που εμπλέκονται στην εφαρμογή μιας ικανότητας ή στρατηγικής. Η Swanson (1999), συνηγορεί υπερ ενός μικτού μοντέλου άμεσης διδασκαλίας και διδασκαλίας στρατηγικών σε μαθητές με δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων. Το μοντέλο αυτό αποτελείται από 10 συστατικά στοιχεία τα οποία έχουν συσχετισθεί με την πρόβλεψη της αποτελεσματικής παρέμβασης.

1. Ανάλυση του έργου (για παράδειγμα χωρισμός ενός έργου σε μικρά κομμάτια

2. Εξάσκηση επανάληψη και επανέλεγχος

3. Σύνθεση μερών σε ένα έργο

4. Μέθοδος ερωταπαντήσεων / Διάλογος

5. Εξάσκηση στην σταδιακή υπέρβαση των δυσκολιών προχωρώντας από τα εύκολα προς τα δύσκολα.

6. Εξάσκηση στην μετάφραση από ένα σύστημα στο άλλο των διαφορετικών αναπαραστάσεων- Πραξιακή- Εικονιστική – Συμβολική

7. Μοντελοποίηση του προβλήματος

8. Διδασκαλία σε μικρές ομάδες

9. Βοηθήματα διδασκαλίας – μικρές εργασίες για το σπίτι.

10. Τεχνικές (π.χ., Σκέψου Φωναχτά , Μνημονικές τεχνικές κλπ).

Η μελέτη των ερευνών για τα προγράμματα παρέμβασης υποδεικνύει τρεις κύριες κατευθύνσεις που είναι αποτελεσματικές ανάλογα με τις δεξιότητες που πρέπει να καλλιεργήσουν οι μαθητές με δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων. Η μία κατεύθυνση αφορά τη διδασκαλία γνωστικών στρατηγικών (Cognitive Strategies Instruction-CSI) σχεδόν ταυτίζεται με το πρόγραμμα «Solve It» το οποίο εφαρμόστηκε από την Montague (2003), ή παρόμοια (Chung and Tam 2005, Montague 1992, Montague et al. 1993). Άλλες έρευνες υποδεικνύουν ότι η επίλυση προβλημάτων βελτιώνεται με την διδασκαλία που βασίζεται στην Θεωρία Σχήματος (Shema Based Instruction-SBI), και τις τεχνικές διδασκαλίας για την βελτίωση της ικανότητας αναπαράστασης του προβλήματος και μια τρίτη κατεύθυνση αφορά προγράμματα παρέμβασης με την βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών (Computer Assisted Instruction-CAI) (Xin & Jitendra, 2005, Zhang & Xin, 2012).

Το πρόγραμμα CSI σχεδιάστηκε για να διδάξει τους μαθητές την κατανόηση των βημάτων επίλυσης προβλημάτων με ανάλυση του κάθε βήματος στο οποίο οι μαθητές πρέπει να αναπτύξουν τις κατάλληλες μεθόδους και στρατηγικές. Οι έρευνες της Montague επεκτάθηκαν και στους Μαθητές με επικινδυνότητα για σχολική αποτυχία (Montague et al., 2011).

Οι τεχνικές αναπαράστασης των προβλημάτων περιλαμβάνουν την χρήση απλών διαγραμμάτων, βοηθημάτων διδασκαλίας, χαρτογράφησης ή λεκτικής περιγραφής των πληροφοριών των στοιχείων του προβλήματος (Diezman & McCosker, 2011, van

Garderen, 2007). Κάθε μέσο αναπαράστασης είναι βοηθητικό ώστε να αποτυπωθεί η κατανόηση των στοιχείων και των σχέσεων του προβλήματος και ταυτόχρονα παρέχει στον εκπαιδευτικό μια εικόνα για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζει ο μαθητής στην αναγνώριση των σχέσεων (van Garderen & Scheuermann, 2014). Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημάνουμε ότι πολλοί μαθητές έχουν δυσκολίες στην επιλογή ενός τρόπου αναπαράστασης που θα βοηθήσει στην λύση του προβλήματος γι' αυτό και χρειάζονται καθοδήγηση και διδασκαλία των μεθόδων αναπαράστασης. Κατά τους van Garderen & Scheuermann, (2014), van Garderen et al. (2012), οι μαθητές επωφελούνται από μια διδασαλία που εξηγεί τι είναι ένα διάγραμμα, τους τρόπους που μπορούν να σχεδιάσουν ή να απεικονίσουν με σχέδιο τις πληροφορίες, πότε είναι χρήσιμο ώστε να οργανώνουν τις πληροφορίες του προβλήματος με τρόπο που τους βοηθά να τις συγκρατούν πριν την μαθηματικοποίηση ή συμβολική αναπαράστασή του (Fuchs, Seethaler, et al., 2008, Jitendra & Hoff, 1996). Παράλληλα εξηγούνται με σαφήνεια οι στρατηγικές που είναι χρήσιμες για τύπους ομοειδών προβλημάτων. Η διδασκαλία με ομαδοποίηση των προβλημάτων κατά την θεωρία σχήματος είναι αποτελεσματική αλλά τα αποτελέσματα που επιφέρει δεν ασκούν τα παιδιά στην επίλυση προβλημάτων που δεν είναι όμοια με όσα έχουν διδαχθεί. Έτσι η διδασκαλία μεθόδων αναπαράστασης είναι από ερευνητική άποψη δύσκολη ωστόσο έχει καλύτερα μακροπρόθεσμα αποτελέσματα.

Και οι τρεις προσανατολισμοί των προγραμμάτων παρέμβασης έχουν δείξει θετικά αποτελέσματα ιδιαίτερα όταν τα προβλήματα που διδάσκονται είναι μιας πράξης σε σύγκριση με τα σύνθετα προβλήματα (Jitendra, & Xin, 1997, Xin, Jitendra & Deatline-Buchman, 2005, Zhang & Xin, 2012). Την μεγαλύτερη θετική επίδραση στα σύνθετα προβλήματα δείχνουν προγράμματα που βασίζονται στην την θεωρία σχήματος και της αναπαράστασης του προβλήματος, έπονται των γνωστικών στρατηγικών και ακολουθούν οι παρεμβάσεις με την βοήθεια διδακτικών μηχανών.

3.3. Οι απαιτούμενες δεξιότητες για την επίλυση προβλημάτων

3.3.1 Ορισμός του προβλήματος

Για να ορίσουμε τι συνιστά πρόβλημα θεωρούμε ότι μετά από μια επίπονη μελέτη της βιβλιογραφίας θα καταλήξουμε σε πολλούς ορισμούς που σχετίζονται με τις προσεγγίσεις θεωρητικών από διαφορετικά επιστημονικά πεδία. Ο ορισμός του Polya (1945), δεν αφήνει ενδοιασμούς ότι ως πρόβλημα νοείται μια προβληματική κατάσταση που για την επίλυσή της πρέπει να αρθούν κάποια εμπόδια. *«Solving a problem means finding a way out of a difficulty, a way around an obstacle, attaining an aim which was not immediately attainable. Solving problems is the specific achievement of intelligence, and intelligence is the specific gift of mankind: solving problems can be regarded as the most characteristically human activity».* Ο ορισμός αυτός δείχνει ότι η ψυχολογική διάσταση των προβλημάτων δεν περιορίζεται στο μαθηματικό πρόβλημα, μπορούμε όμως να πούμε ότι το περικλείει. Για να είναι ένα πρόβλημα μαθηματικό η αναζήτηση της λύσης απαιτεί κατανόηση μαθηματικών εννοιών και αρχών. Ο όρος προβλήματα της καθημερινής ζωής αναφέρεται και στα λεκτικά προβλήματα που καλούνται να λύσουν οι μαθητές στην τάξη των μαθηματικών. Τα προβλήματα αυτά είναι όμως πιο σύνθετα ως προς την κατανόηση των σχέσεων του προβλήματος, δηλαδή είναι σύνθετα ως προς την αναπαράστασή τους για τους μαθητές του Δημοτικού και σχετικά απλά ως προς την λύση με γνώση των 4 βασικών πράξεων. Για τους θεωρητικούς των μαθηματικών τα προβλήματα αυτά δεν είναι «καθαρά» μαθηματικά προβλήματα αλλά υπόκεινται στις ίδιες μαθηματικές αρχές, τις ίδιες μεθόδους και διαδικασίες για την εύρεση της λύσης (Polya, 1973). Σύμφωνα με το γνωσιακό πλαίσιο του PISA 2003 δεν υπάρχει ακριβής ορισμός για το πρόβλημα (Frensch & Funke, 1995), αλλά η επίλυση προβλημάτων αποτελεί μια ικανότητα του ατόμου να χρησιμοποιεί γνωστικές διεργασίες για να επιλύσει πραγματικές καταστάσεις αξιοποιώντας γνώσεις διαθεματικά όταν η λύση δεν είναι άμεσα προφανής (OECD, 2003, σ. 156).

Ο Jonassen (2000c), υπέδειξε 11 είδη προβλημάτων (όπως logic problems; Algorithms, story problems, rule-using/rule-induction problems, dilemmas κ.α). Η τυπολογία των προβλημάτων αυτών ακολουθεί την αναπτυξιακή πορεία από τα δομημένα στα ημιδομημένα προβλήματα. Τα επαρκώς δομημένα τείνουν να είναι στατικά και απλά ενώ τα ανεπαρκώς δομημένα είναι πιο σύνθετα και δυναμικά. Πολλές από τις γνωστικές δραστηριότητες είναι από τη φύση τους περιπτώσεις επίλυσης προβλημάτων (Glover at all, 1990), που είτε είναι δομημένα, είτε ανεπαρκώς δομημένα, είναι πιο δύσκολο να προσδιοριστούν και να επιλυθούν. Στο χώρο της ψυχολογικής έρευνας τα τεχνητά ασαφώς δομημένα προβλήματα τίθενται ώστε να διερευνηθούν τα βήματα που εφαρμόζονται για τις ενδεχόμενες λύσεις. Τα ασαφώς δομημένα προβλήματα είναι τα περισσότερα που αντιμετωπίζουμε στην καθημερινή ζωή και τα οποία δεν επιδέχονται μία και μόνο λύση. Θεωρείται ότι μερικές φορές χρειάζονται εξειδικευμένη γνώση από κάποιο τομέα ενώ άλλα είναι κατανοητά γιατί δεν έχουν εξειδικευμένη ορολογία από ειδικά επιστημονικά πεδία αλλά έννοιες που χρησιμοποιούνται ευρέως στην καθημερινότητα. Τα προβλήματα που διδάσκονται στο πλαίσιο του μαθήματος των Μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου διακρίνονται σε:

• προβλήματα ρουτίνας ή ασκήσεις

• προβληματικές καταστάσεις ή πρωτότυπα προβλήματα.

Οι σύγχρονες ερευνητικές τάσεις για την επίλυση προβλημάτων επηρεάζονται από το μοντέλο επεξεργασίας πληροφοριών ενώ υπάρχει και μια δεύτερη ερευνητική κατεύθυνση που μελετά και συγκρίνει αρχάριους και έμπειρους λύτες προβλημάτων ώστε να διατυπώσει τα συμπεράσματα για το ρόλο της ειδίκευσης και της εμπειρίας. Από τη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας συνάγουμε ότι η επίλυση προβλημάτων είναι πολύπλοκη, γιατί τα Μαθηματικά περιλαμβάνουν πολλές συναφείς περιοχές οι οποίες καθορίζονται από το γεγονός ότι περικλείουν εκτεταμένα πεδία δηλωτικής γνώσης, διαδικαστικής γνώσης και βασικές αρχές που τις διέπουν.

3.3.2. Στάδια επίλυσης

Το παιδαγωγικό ενδιαφέρον για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Ε.Μ.Π) άρχισε να αναπτύσσεται με αφετηρία το έργο του Polya (1957), και μετέπειτα των Shoenfeld (1985), του Lester και των συνεργατών του (Schroeder και Lester, 1989), καθώς και του Verschaffel και συνεργατών (1999). Στην πρώτη αυτή περίοδο και ειδικότερα τις δεκαετίες 1960, 1970 κυριάρχησε το μοντέλο επίλυσης προβλημάτων που αναπτύχθηκε από τον Polya (1949), με έμφαση στην σημασία των ευρετικών στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων. Οι πρώιμες προσεγγίσεις της επίλυσης προβλημάτων περιέχουν αξιόλογες υποδείξεις που οδήγησαν στην ανάπτυξη μεθόδων που προτείνονται για την επίλυση προβλημάτων. Τα πρώτα στοιχεία επίλυσης προβλημάτων μελετήθηκαν από θεωρητικούς ωστόσο σε αντίθετες μεταξύ τους θεωρίες: Την εμπειρική και την ενορατική (Κολιάδης, 2002:520). Οι συμπεριφοριστές υποστήριξαν ότι η επίλυση προβλημάτων πραγματοποιείται με τη μέθοδο της δοκιμής και της πλάνη. Οι ερευνητές της κατεύθυνσης της μορφολογικής ψυχολογίας υποστήριξαν ότι η επίλυση επιβάλλει την αναδιοργάνωση ενώ η λύση βρίσκεται ενορατικά. Ο Dewey (1910), ήταν μεταξύ αυτών που πρότεινε κάποια βήματα για την αποτελεσματική επίλυση προβλημάτων (Good & Bprophy 1995:262). Τα περισσότερα μοντέλα επίλυσης προβλημάτων στο χώρο των μαθηματικών βασίζονται στη θεωρία της επεξεργασίας των πληροφοριών. Η διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος συνίσταται σε μια αλληλουχία γνωστικών λειτουργιών που κατευθύνονται προς έναν ορισμένο στόχο και διακρίνεται σε δύο κυρίως φάσεις, στην αναπαράσταση του προβλήματος και στην αναζήτηση των κατάλληλων μέσων για την επίλυση του (Mayer 1983, 1992). Σύμφωνα μ' αυτό το μοντέλο σε κάθε στάδιο απαιτούνται συγκεκριμένα βήματα, τα οποία αναφέρονται σε διαφορετικές επιμέρους μεθόδους επεξεργασίας. Στο πρώτο βήμα για την αναπαράσταση του προβλήματος ο μαθητής πρέπει να μεταφράσει κάθε πρόταση του σε μια εσωτερική αναπαράσταση. Το επόμενο βήμα είναι η ολοκλήρωση του σχήματος με την σύνθετη των επιμέρους στοιχείων του προβλήματος σε μια λογικά συνεπή αναπαράσταση. Τα βήματα αυτά αναφέρονται στη συνειδητοποίηση του προβλήματος, τον ορισμό του προβλήματος, την διατύπωση υποθέσεων, τον έλεγχο των υποθέσεων και την επιλογή της καλύτερης λύσης. Οι Bransford & Stein (1993), περιέγραψαν μια παρόμοια μέθοδο επίλυσης προβλημάτων IDEAL από τα αρχικά γράμματα:

- Identify (Αναγνώρισε το πρόβλημα)
- Defain it (Όρισέ το)
- Expore (Αναζήτησε στρατηγικές επίλυσης)
- Act (Πράξε)
- Look at (Εξέτασε το αποτέλεσμα).

Η χρήση του όρου βήματα για την πορεία επίλυσης προβλημάτων απλοποιεί το σύνθετο φαινόμενο των γνωστικών λειτουργιών που υπεισέρχονται στην δραστηριότητα αυτή για αυτό και επιχειρήθηκε η περεταίρω ανάλυση των βημάτων. Σε ένα πρόγραμμα διδασκαλίας επίλυσης προβλημάτων θα πρέπει να μάθει ο μαθητής

- Να διαβάζει το πρόβλημα και να το κατανοεί
- Να διαχωρίζει τα δεδομένα από τα ζητούμενα
- Να εντοπίζει σχέσεις μεταξύ των στοιχείων
- Να ξεχωρίζει τις άσχετες πληροφορίες
- Να αναπαριστά το πρόβλημα
- Να σχεδιάζει στρατηγικές επίλυσης
- Να χωρίζει το πρόβλημα σε μικρότερα μέρη
- Να εργάζεται κατά αναλογία με γνωστά προβλήματα
- Να προχωρά στην επιλογή των κατάλληλων τύπων για την εκτέλεση υπολογισμών

Σύμφωνα με τα βήματα αυτά ο μαθητής μπορεί να εξασκηθεί και να αποκτήσει εμπειρία στην επίλυση προβλημάτων σε ειδικές περιοχές της γνώσης με την εφαρμογή γνωστικών στρατηγικών που αναφέρονται στην δυνατότητα των μαθητών να κατευθύνουν την μνήμη την προσοχή και τη σκέψη τους.

Ο Mayer (1992:458-459), αναλύοντας την διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, επισημαίνει ότι στα λεκτικά προβλήματα με αριθμητικές πληροφορίες απαιτείται ο εντοπισμός των λογικών σχέσεων των ποσοτήτων που εκφράζουν τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος. Επιμέρους διεργασίες διακρίνονται τόσο στον σχηματισμό της αναπαράστασης όσο και στην εφαρμογή της λύσης. Συνεπώς οι μαθητές/τριες, πρέπει να κατανοούν τις γλωσσικές πληροφορίες του προβλήματος, να είναι σε θέση να τις συσχετίζουν με τις μαθηματικές έννοιες, να διακρίνουν τους τύπους προβλημάτων, να εφαρμόζει τις κατάλληλες στρατηγικές που έχει στην διάθεσή του για την οργάνωση των πληροφοριών, τον σχεδιασμό και την παρακολούθηση της επίλυσης του προβλήματος, και την ορθή εκτέλεση των αλγόριθμων. Το πρώτο βήμα για την επίλυση του προβλήματος είναι η αναπαράστασή του κατά την οποία οι λεκτικές πληροφορίες του προβλήματος μετασχηματίζονται σε νοητικές αναπαραστάσεις. Το επόμενο βήμα είναι η επεξεργασία της νοερής αναπαράστασης για τη λύση. Η επίλυση περιλαμβάνει τον σχεδιασμό και την παρακολούθηση των επιμέρους βημάτων για την τελική λύση και την εκτέλεση που αφορά την εφαρμογή του σχεδίου επίλυσης.

Συνοψίζοντας τα θεωρητικά μοντέλα επίλυσης προβλημάτων συγκλίνουν στην ιδέα ότι η επίλυση λεκτικών προβλημάτων συνίσταται σε δύο φάσεις:

(1) τη φάση της αναγνώρισης και αναπαράστασης των καταστάσεων του προβλήματος, που κατά κάποιο τρόπο «κρύβονται» στις φράσεις των λεκτικών προβλημάτων και

(2) τη φάση επίλυσης, η οποία περιλαμβάνει τα βήματα επίλυσης και τις απαραίτητες μαθηματικές πράξεις (Polya, 1945, Mayer, 1985, 1992, Montague, 2002 κ.α.), Κατά την αναπαράσταση οι λεκτικές πληροφορίες που επεξεργάζονται συνιστούν την παράφραση κάθε επιμέρους πληροφορίας σε αντίστοιχη εσωτερική αναπαράσταση και η γλωσσική προσαρμογή που περιλαμβάνει την συσχέτιση των πληροφοριών σε ένα κατανοητά δομημένο σύστημα. Κατά την επίλυση του προβλήματος το άτομο εφαρμόζει αρχές και γνώσεις που οδήγησαν σε επιτυχημένες στο παρελθόν ή δημιουργεί νέες λύσεις προς την επιθυμητή κατεύθυνση. Λαμβάνουν δηλαδή χώρα διεργασίες που οδηγούν στην εφαρμογή νέας γνώσης όπως η προσοχή η αντίληψη η κωδικοποίηση και η ανάκληση πληροφοριών. Ο Riding (στο Riding & Sadler-Smith, 1997), υποστήριξε ότι αυτή η προσέγγιση αγνοεί το μαθησιακό (learning style) και το γνωστικό (cognitive style) ύφος των μαθητών. Ο σχεδιασμός εξαρτάται από την γνώση στρατηγικών ενώ η εκτέλεση αφορά τη γνώση διαδικασιών. Αυτό σημαίνει ότι ή προσκόλληση στα βήματα και τα στάδια αγνοούν τον παράγοντα μαθητή. Όταν κάποιος επιχειρεί να λύσει ένα πρόβλημα, οργανώνει με κάποιον τρόπο την επεξεργασία των στοιχείων και των σχέσεων, δηλαδή χρησιμοποιεί ορισμένες γενικές μεθόδους επεξεργασίας, οι οποίες δεν προσδιορίζονται κατ' ανάγκη από την προσέγγιση που υιοθετεί για το πρόβλημα (Μπάρμπας et al. 2008).

3.4. Στρατηγικές

Αναφέραμε ότι η επίλυση προβλημάτων απαιτεί σύνθετες ικανότητες όπως μεθοδική εργασία, ερμηνεία πληροφοριών και οργάνωσή τους, στρατηγικές επίλυσης και επανεξέταση της λύσης. (Muir, Beswick, & Williamson, 2008). Με άλλα λόγια η επίλυση του προβλήματος απαιτεί σχεδιασμό της λύσης με την επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής και τέλος οι μαθητές οδηγούνται στην λύση με τη χρήση αλγορίθμων και την εκτέλεση των αναγκαίων πράξεων Ως στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων νοούνται τεχνικές οι οποίες όμως δεν διασφαλίζουν την επίλυση του προβλήματος αλλά καθοδηγούν τον λύτη κατά την πορεία επίλυσης (Mayer, 1983, 1992). Κατά τον Φλουρή, «..η γνωστική στρατηγική αναφέρεται στον τρόπο και την μέθοδο που χρησιμοποιεί ο μαθητής για να κωδικοποιήσει, ανακαλέσει, να γενικεύσει και να εφαρμόσει ή να μεταφέρει πληροφορίες γνώσεις δεξιότητες και άλλες δυνατότητες» (Φλουρής 1992, 2000:89). Ο ρόλος των στρατηγικών στη μάθηση έχει αναδειχθεί παρατηρώντας τους καλούς μαθητές οι οποίοι έχουν ένα ευρύ ρεπερτόριο στρατηγικών που εφαρμόζουν αποτελεσματικά και των μεθόδων επεξεργασίας του προβλήματος. Αν ωστόσο θεωρήσουμε ως στρατηγική «την προσέγγιση ενός ατόμου σ' ένα έργο, η οποία περιλαμβάνει το πώς ο άνθρωπος σκέφτεται και δρα, όταν σχεδιάζει, εκτελεί και αξιολογεί την επίδοση του σ' ένα έργο και στα αποτελέσματά του» (Lenz, 1992: 143), τότε η μέθοδος επεξεργασίας είναι συστατικό του περιεχομένου μιας στρατηγικής αλλά δεν είναι στρατηγική.

Οι ευρετικές στρατηγικές αποτελούνται από ένα σύνολο κανόνων που προκύπτουν από την εμπειρία ή τακτικές έρευνας που απορρέουν από ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Ετυμολογικά ο όρος ευρετικές (heuristics) έχει την ίδια ρίζα με την λέξη «εύρηκα» που αποδίδεται στον Αρχιμήδη. Κατά τον Polya (1964:6), οι ευρετικές αφορούν μεταφορά των διαδικασιών επίλυσης από ένα πρόβλημα για την επίλυση μιας παρόμοιας προβληματικής κατάστασης. Η σημασία της χρήσης τους έγκειται στην ορθή επιλογή αυτών που θα οδηγήσουν στην λύση ενός συγκεκριμένου προβλήματος. Η κατάλληλη επιλογή ευρετικών προϋποθέτει εμπειρία με ανάλογα προβλήματα στα οποία έχουν προηγουμένως διδαχθεί με την μορφή παραδειγμάτων (Kilpatrick (1985). Ο Zimerman (1983), παρέχει μια εκτενή επισκόπηση των ευρετικών με προτάσεις για την διδασκαλία τους στην τάξη των μαθηματικών. Οι Bruder and Collet (2011), επισημαίνουν ότι οι ευρετικές αφορούν διαδικασίες που στη σχολική πρακτική διακρίνονται σε εργαλεία (tools), στρατηγικές (strategies) και αρχές (principles). Η παρατήρηση της χρήσης των ευρετικών από έμπειρους λύτες υποδεικνύει ότι οι ευρετικές δεν είναι ένα ξεχωριστό σύστημα γνώσεων που εφαρμόζονται κατά περίπτωση ως έχουν αλλά αποτελούν μια διαρκή αλληλεπίδραση μεταξύ εμπειρίας και γνώσης κατά την οποία τα υποκείμενα δρουν σε με νέα κατάσταση αξιοποιώντας τα γνωστικά τους σχήματα. Για τους περισσότερους μαθητές η δυσκολία στην χρήση ευρετικών συνδέθηκε με τις γνωστικές διεργασίες που αποτελούν την σκοτεινή πλευρά της αξιοποίησης των ευρετικών και εμπλέκονται στην διάκριση όμοιων καταστάσεων, τη μεταφορά και τον μετασχηματισμό τους στην νέα κατάσταση καθώς και τον διαρκή έλεγχο της μετάβασης από το γνωστά προς τα άγνωστα στοιχεία του προβλήματος. Η θεωρία δραστηριοτήτων ειδικά όπως αναπτύχθηκε από τον Lompscher (1975, 1985 στο Perels et al. 2005), και προσαρμόστηκε για τα Μαθηματικά από την Bruder (2000 στο Perels et al. ό.π.), έστρεψε το ενδιαφέρον στην περιγραφή των δραστηριοτήτων των μαθητών και τις διαφορές τους ως προς τις διεργασίες και τα παραγόμενα αποτελέσματα στην επίλυση προβλημάτων. Οι μαθητές αναμένεται να ξεπεράσουν τις δυσκολίες στην αξιοποίηση των ευρετικών στην επίλυση προβλημάτων, ωστόσο η επιτυχής επίλυση αποτελεί μακροπρόθεσμο στόχο της διδασκαλίας-μάθησης που περιλαμβάνει 4 φάσεις (Perels et al. 2005, Bruder and Collet 2011):

1. Διαισθητική χρήση ευρετικών
2. Επίγνωση συγκεκριμένων ευρετικών με την χρήση παραδειγμάτων
3. Εξάσκηση για την απόκτηση της στρατηγικής
4. Διεύρυνση σε άλλα πλαίσια εφαρμογής

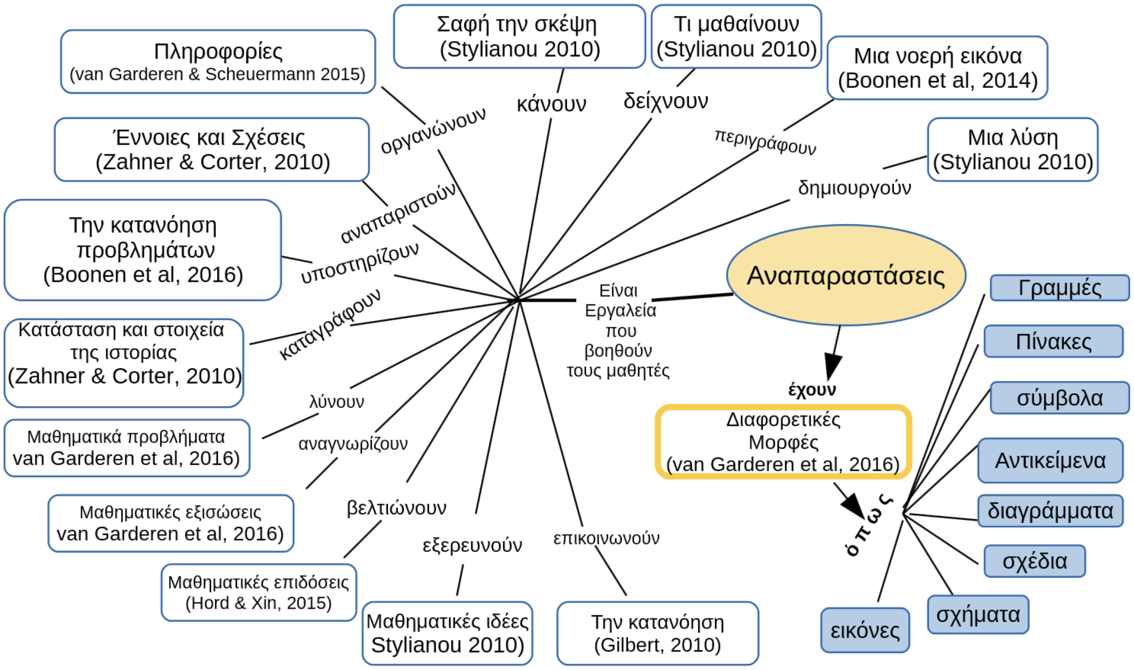
Η εφαρμογής μιας γνωστικής δεξιότητας ή στρατηγικής και της γνώσης σχετικά με την καταλληλότητά της σχετίζεται με την μεταγνώση (Flavell, 1981,1985). Ο Schoenfeld (2013) αναγνωρίζει ότι υπάρχει σύνδεση της επίλυσης προβλημάτων με την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, εισάγει όμως έννοιες από την ψυχολογία όπως την μεταγνώση και την αυτορρύθμιση στον τομέα της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων και τον τρόπο με τον οποίο οι έννοιες αυτές μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να είναι αποτελεσματικότεροι όταν ασχολούνται με ένα νέο, άγνωστο μαθηματικό πρόβλημα. Αναμφισβήτητα εγείρονται θέματα που αφορούν τις γνωστικές διεργασίες που εμπλέκονται, όταν τα παιδιά κάνουν μαθηματικά και τις διδακτικές που βοηθούν στην εκμάθησή των μαθηματικών για την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης (Τζεκάκη 2003. Nunes, et al., 2007). Γεγονός είναι ότι οι θεωρητικές προσεγγίσεις βοηθούν στην κατανόηση περιοχών της μάθησης αλλά αφήνουν ένα σημαντικό κενό στο ζήτημα της διδασκαλίας και την δράση των υποκειμένων στο μικρόκοσμο του σχολείου. Οι στρατηγικές που αφορούν τους τρόπους σκέψης του μαθητή δεν είναι εύκολο να διδαχθούν και απαιτούν μακρά ενασχόληση. Ειδικότερα, εκφράζεται η αντίληψη ότι ένα πρόβλημα τοποθετείται στο ειδικό πλαίσιο και η επίλυσή του εξαρτάται από τις γνωστικές στρατηγικές που είναι ειδικές για το συγκεκριμένο πλαίσιο (Mayer, 1992). Το πλαίσιο επηρεάζει τόσο τις αλληλεπιδράσεις όσο και την γνωστικές διαδικασίες (Silver, 2013). Η Θεωρία Σχήματος (Θ.Σ.) ("Schema theory"), που προτάθηκε από την Marshall (1995), εστιάζεται στα προβλήματα ρουτίνας, τα οποία αποτελούν την πλειονότητα των μαθηματικών προβλημάτων με τα οποία έρχονται σε επαφή οι μαθητές κατά τη φοίτησή τους στο δημοτικό σχολείο. Η Θ.Σ. μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε προβλήματα μιας πράξης όσο και σε σύνθετα προβλήματα δύο ή περισσότερων πράξεων, αποσκοπώντας να βοηθήσει τους μαθητές να οργανώσουν τη σκέψη τους κατά την επίλυση τέτοιων προβλημάτων. Στη Θ.Σ. γίνεται αναφορά σε συγκεκριμένους τύπους προβλημάτων και τύπους γνώσεων που καλούνται να οικοδομήσουν οι μαθητές, ώστε να επιλύουν με επιτυχία προβλήματα μίας ή περισσότερων πράξεων (Charalambous et al., 2012).

Σχετικά με τις στρατηγικές επίλυσης των παιδιών στα αριθμητικά προβλήματα, η διαχρονική μας μελέτη έδωσε ευρήματα που γενικά, συμπλήρωσαν αυτά των προηγούμενων ερευνών. Τα κυριότερα συμπεράσματα αφορούν στην ποικιλία των στρατηγικών που επινοούν τα παιδιά για να λύσουν λεκτικά προβλήματα, και στην ευελιξία αυτών των στρατηγικών επίλυσης σε σχέση με τη συγκεκριμένη φύση του προβλήματος. Οι Carpenter & Moser (1982), ανέπτυξαν ένα σχήμα δύο διαστάσεων για την ταξινόμηση αυτών των στρατηγικών. Αρχικά, διακρίνουν τις στρατηγικές της πρόσθεσης από τις στρατηγικές αφαίρεσης. Έπειτα οι στρατηγικές διευθετούνται, σύμφωνα με το βαθμό εσωτερίκευσής τους, σε υλικές στρατηγικές, που βασίζονται στην απευθείας χρησιμοποίηση των δαχτύλων ή κάποιων φυσικών αντικειμένων, σε λεκτικές στρατηγικές, που βασίζονται στη χρησιμοποίηση της ακολουθίας της μέτρησης, και σε νοητικές στρατηγικές, που βασίζονται στην ανάκληση αριθμητικών πράξεων. Χρησιμοποιώντας αυτό το σχήμα ο Verschaffel (1984), βρήκε δέκα διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης για σχεδόν όλους τους τύπους λεκτικών προβλημάτων που χορηγήθηκαν σε μαθητές για την διερεύνηση των στρατηγικών τους με την μέθοδο συνεντεύξεων. Μια σύγκριση των στρατηγικών που παρατηρήθηκαν μ’ αυτές που διδάσκονται στα σχολεία φανέρωσε ότι πολλές διαδικασίες που χρησιμοποίησαν τα παιδιά δεν είχαν διδαχτεί ποτέ με σαφή τρόπο. Όπως η Rcsnick (1983), θα τις ονομάζαμε «επινοήσεις» π.χ., στρατηγικές επίλυσης που έχουν επινοήσει τα ίδια τα παιδιά με βάση τη γνώση και τις διαδικασίες που απέκτησαν από τη διδασκαλία και από τις καθημερινές τους εμπειρίες.

Συνοψίζοντας όσο αφορά τις στρατηγικές τα ευρήματα πολλών ερευνητών υπαγορεύουν ότι τα λάθη που κάνουν τα παιδιά έχουν νόημα και ακολουθούν κάποιους κανόνες (Brown & Burton, 1978, Carpenter, 1984, Dc Corte & Verschaffel, 1981, Resnick, 1983). Αυτά τα συστηματικά λάθη εμφανίζονται και την επίλυση προβλημάτων και σε άλλους γνωστικούς τομείς. Οι ερευνητές έχουν δείξει ότι στις περισσότερες περιπτώσεις τα λάθη των παιδιών δεν είναι τυχαίες αποτυχίες, αλλά συστηματικές εφαρμογές λανθασμένων εννοιών και διαδικασιών. Με τον ίδιο τρόπο που τα παιδιά επινοούν σωστές στρατηγικές, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, με τον ίδιο τρόπο επινοούν λανθασμένες έννοιες και διαδικασίες για να λύσουν προβλήματα για τα οποία η γνώση και οι διαδικασίες που διαθέτουν είναι ανεπαρκείς. Αυτές οι επινοήσεις των παιδιών, που πηγάζουν από τις προσπάθειές τους να λύσουν προβλήματα που είναι πάνω από τις δυνατότητες τους, μολονότι είναι λανθασμένες, υποστηρίζουν ωστόσο τη θέση ότι η μάθηση είναι μια εποικοδομητική δραστηριότητα (De Corte & Verschaffel 1984).

3.5. Αναπαράσταση του προβλήματος

Το πρώτο βήμα για την επίλυση προβλημάτων είναι η κατανόηση των γλωσσικών πληροφοριών, η επεξεργασία των σχέσεων και η εσωτερική τους αναπαράσταση. Μία νοητική αναπαράσταση αποτελεί μία "εικόνα" ή μία "έννοια" που έχουμε στο μυαλό μας και η οποία αντιπροσωπεύει ένα αντικείμενο, ένα γεγονός, μία κατηγορία, μία ιδέα, του πραγματικού ή του φανταστικού κόσμου. Τα χαρακτηριστικά μιας νοητικής αναπαράστασης μπορεί να αντιστοιχούν πλήρως στα χαρακτηριστικά του πραγματικού αντικειμένου. Άλλες φορές, η αναπαράσταση είναι μόνο συμβολική. Ο Goldin (The PME Working Group, 1998), παρουσίασε μια σύνοψη των διαφορετικών εννοιών που προσδίδονται στον όρο «αναπαράσταση, και σκιαγράφησε ένα μοντέλο επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων βασισμένο σε γνωστικά συστήματα αναπαραστάσεων. Οι έννοιες δεν μπορούν να αποδοθούν με ένα απλό ορισμό καθώς αναφέρονται σε ένα σύνολο καταστάσεων, περικλείουν σύνολα από διαφορετικές λειτουργικές σταθερές και οι ιδιότητές τους μπορούν να εκφραστούν με διαφορετικές λεκτικές και συμβολικές αναπαραστάσεις. Υπό αυτή την έννοια τα αντικείμενα δεν μπορούν να έχουν μια και μόνη αναπαράσταση η οποία με τη σειρά της μπορεί να εκφραστεί συμβολικά. Οι λέξεις και τα σύμβολα επικοινωνίας δεν αναφέρονται απευθείας στην πραγματικότητα αλλά αναπαριστούν οντότητες: αντικείμενα ιδιότητες και σχέσεις, διεργασίες δράσεις και δομές για τα οποία δεν υπάρχει αυτοματοποιημένη συμφωνία ανάμεσα σε δύο άτομα. Κατά τον Vergnaud (1998) είναι μια δύσκολη έννοια γι' αυτό και πολλοί ερευνητές προτιμούν όρους διαφορετικούς όπως "conception" "reasoning". Στον αντίποδα αυτής της στάσης βρίσκονται άλλοι ερευνητές που δίνουν έμφαση στο ρόλο των εξωτερικών αναπαραστάσεων: Σύμφωνα με τους Θεοδούλου & Γαγάτση (2003), μεγάλοι μαθηματικοί παιδαγωγοί, όπως οι Hadamard (1945), και Poincare (1963), εισηγήθηκαν ότι η χρήση εικονικών αναπαραστάσεων αποτελεί απαραίτητο στοιχείο στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος και υποστήριξαν τη χρήση οπτικών αναπαραστάσεων από τους μαθητές στην επίλυση δικών τους προβλημάτων. Μια από τις μεγάλες δυνατότητες της μαθηματικής πληροφορίας είναι ότι μπορεί να εκφραστεί (κατά συμπληρωματικό, συνήθως, τρόπο) με πολλές διαφορετικές αναπαραστάσεις (Kaput, 1998), όμως ένα διάγραμμα που δίνεται ως βοήθημα είναι μια εξωτερική αναπαράσταση και εξαρτάται αν με αυτό είναι εξοικειωμένος αυτός που το χρησιμοποιεί (Vergnaud, 1998). Ο Hadar (Goldin, 1998), επισήμανε ότι η διατύπωση του προβλήματος σχετίζεται με εννοιολογικές παρανοήσεις ενώ ο Harel (ό.π.), διατύπωσε την άποψη ότι η γραφική αποτύπωση του προβλήματος είναι η οδός για να επικοινωνήσει κάποιος με νοητικές αναπαραστάσεις.



Εικόνα2. *Εννοιολογικός χάρτης αναπαραστάσεων για την διδασκαλία των Μαθηματικών*

Η αναπαράσταση του προβλήματος θεωρείται το αποτέλεσμα μιας σύνθετης αλληλεπίδρασης πληροφοριών που προκύπτουν από το κείμενο του προβλήματος με τις προϋπάρχουσες γνώσεις του μαθητή. Έτσι η επεξεργασία των λεκτικών δεδομένων, όπως επίσης η δραστηριότητα των γνωστικών σχημάτων του υποκειμένου, συντελούν στην κατασκευή της αναπαράστασης του προβλήματος. Διακρίνονται δύο κύριες κατηγορίες γνωστικών σχημάτων: (α) τα σημασιολογικά σχήματα που αναπαριστούν τη γνώση του υποκειμένου για την αύξηση και την ελάττωση, τη σύνθεση και τη σύγκριση συνόλων αντικειμένων (το σχήμα αλλαγής σύνθεσης και τη σύγκρισης αντίστοιχα), και (β) το σχήμα των λεκτικών προβλημάτων, που περιέχει γνώση της δομής των λεκτικών προβλημάτων γενικά, το ρόλο και την πρόθεσή τους στη διδασκαλία της αριθμητικής, και τους λανθάνοντες κανόνες και τις υποθέσεις που υπόκεινται σ' αυτόν ειδικά τον τύπο κειμένου (De Corte & Verschaffel, 1985a, 1985b). Η αναπαράσταση του προβλήματος από τον ίδιο το μαθητή καθορίζει τα βήματα που πρέπει να ακολουθήσει για την επίλυσή του και προϋποθέτει εννοιολογική κατανόηση. Για την κατανόηση του προβλήματος είναι σημαντική η γνώση της αρχής της σχηματοποίησης που αφορά την παράσταση με σχήμα, ενός συστήματος εννοιών, ενός φαινομένου κ.λ.π, καθώς οι έννοιες των σχημάτων είναι πιο συγκεκριμένες και γι’ αυτό πιο πρόσφορες για τον μαθητή του Δημοτικού Σχολείου (Φράγκου 2004:399).

Από τα παραπάνω συνάγεται ότι οι μαθητές διαφέρουν ως προς την ικανότητα αναπαράστασης προβλημάτων και η δυσκολία αναπαράστασης επηρεάζει σημαντικά τις διαδικασίες που οδηγούν στην επίλυση του προβλήματος καθώς και την γενικότερη ικανότητα να επιλύουν ανάλογα προβλήματα (Rilley, 1984). Ελλιπής προηγούμενη γνώση εμποδίζει τους μαθητές να μετασχηματίσουν τις αναπαραστάσεις έτσι ώστε να κατανοήσουν έννοιες (Kozma 2003: Kozma and Russell, 1997) και έτσι επικεντρώνουν σε επιφανειακές αναπαραστάσεις για να δομήσουν το νόημα των εννοιών (Seufert, 2003). Συνεπώς, η κατανόηση των μαθηματικών σημαίνει αναγκαστικά κατανόηση των σχέσεων που υπάρχουν στον κόσμο όπως αυτές παριστάνονται με τους διάφορους κώδικες, που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά (αριθμοί, λέξεις, σχήματα, σύμβολα κ.λπ.).

3.6. Γνωστικό και μαθησιακό ύφος – ολιστικός vs αναλυτικός τρόπος επεξεργασίας της αναπαράστασης και της αναγνώρισης των σχέσεων του προβλήματος. Η εκπαίδευση σε αναλυτικές μεθόδους επεξεργασίας του προβλήματος το κλειδί για την ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλήματος

Οι μαθητές με δυσκολίες στα σχολικά μαθηματικά συναντούν πιο μεγάλες δυσκολίες στην επίλυση των προβλημάτων, καθώς μετά την ανάγνωση του προβλήματος, προχωρούν σε τυχαία επιλογή αριθμών για να κάνουν συνήθως μια πράξη με βάση τον αλγόριθμο με τον οποίο είναι εξοικειωμένοι, που ερμηνεύεται ως αποτυχία κατανόησης των στοιχείων και των σχέσεων του προβλήματος και συνδέεται με το γνωστικό ύφος. Οι μελέτες για το γνωστικό ύφος υποδεικνύουν τρεις τρόπους κατά τους οποίους το γνωστικό ύφος των μαθητών έχει σχέση με την μάθηση στο σχολείο: ως προσωπικό χαρακτηριστικό που βρίσκεται σε αλληλεπίδραση με τον τρόπο διδασκαλίας και διαφοροποιεί τον τρόπο και την ποιότητα της συμμετοχής στη μαθησιακή δραστηριότητα, ως χρήσιμη προδιάθεση για να αποφεύγονται στερεότυπα στη διδασκαλία και ως χαρίσματα που μπορούν να αναπτυχθούν με την διδασκαλία Messick (1984). Ευρήματα έρευνας που διεξήγαγε ο Μακρής (1995) σε τρεις κατηγοριοποιήσεις έργων δείχνουν ότι τα αναλογιζόμενα άτομα εμφανίζουν σαφώς καλύτερες επιδόσεις σε σχέση με τα παρορμητικά άτομα σε έργα που απευθύνονται σε βασικές δεξιότητες των τριών ΕΔΟΣ [4]. Σε περιπτώσεις, ωστόσο, όπου κάποια έργα απευθύνονται σε ποσοτικές δεξιότητες, η αυτόματη και απαλλαγμένη από στρατηγικές προσέγγιση των παρορμητικών ατόμων, φαίνεται περισσότερο επαρκής Τούτο, πιθανά, οφείλεται στο γεγονός ότι τα παρορμητικά άτομα δεν σπαταλούν, όπως τα αναλογιζόμενα άτομα, το νοητικό τους δυναμικό στη λεπτομερή ανίχνευση και οργάνωση των χαρακτηριστικών των έργων Ως αποτέλεσμα, εμφανίζουν καλύτερες επιδόσεις σε κάποια ποσοτικά έργα. Οι Kagan & Kogan (1970) παρατήρησαν διαφορές στο γνωστικό ύφος σε όλα τα βήματα κατά την επίλυση προβλημάτων. Λαμβάνοντας υπόψη ότι για την εκτέλεση κάθε βήματος ακολουθούνται διαφορετικές μέθοδοι επεξεργασίας οι διαφορές στο γνωστικό ύφος δεν είναι μια απλή διχοτόμηση της σκέψης αλλά μια εναλλαγή τρόπων που εκτελούνται οι ανώτερες και κατώτερες διεργασίες.

Η θεωρία της διπλής επεξεργασίας κάνει αναφορά σε δύο συστήματα σκέψης, τα οποία χρησιμοποιούν διαφορετικές στρατηγικές για τη λήψη κάποιας απόφασης. Το Πρώτο Σύστημα (System 1) είναι γρήγορο, βασίζεται στην εμπειρία μας και στα γνωστικά σχήματα και οδηγεί στη λήψη μίας απόφασης μέσα από έναν απλοϊκό, ευρετικό (heuristic) τρόπο σκέψης. Το Δεύτερο Σύστημα (System 2) είναι πιο περίπλοκο, καταναλώνει περισσότερο χρόνο και αξιοποιεί στρατηγικές για να φτάσει σε ένα ασφαλές συμπέρασμα (Stanovich 1999). Η συχνότητα της χρήσης των Συστημάτων είναι διαφορετική σε κάθε άτομο, καθώς την επηρεάζουν πολλοί παράγοντες. Ένας από αυτούς τους παράγοντες είναι το "υλικό" που χρησιμοποιεί η σκέψη για να συνθέσει όλα τα παραπάνω. Αναφέρονται αρκετοί όροι και επιχειρούνται ως σήμερα, διάφορες κατηγοριοποιήσεις που δυσχεραίνουν μια συνοπτική παρουσίαση των δύο εννοιών:

«the view that there are two qualitatively different types of thinking is widely shared. Among the terms used to describe one type are analytic, deductive, rigorous, constrained, convergent, formal and critical. Representative of the terms used to describe the other type

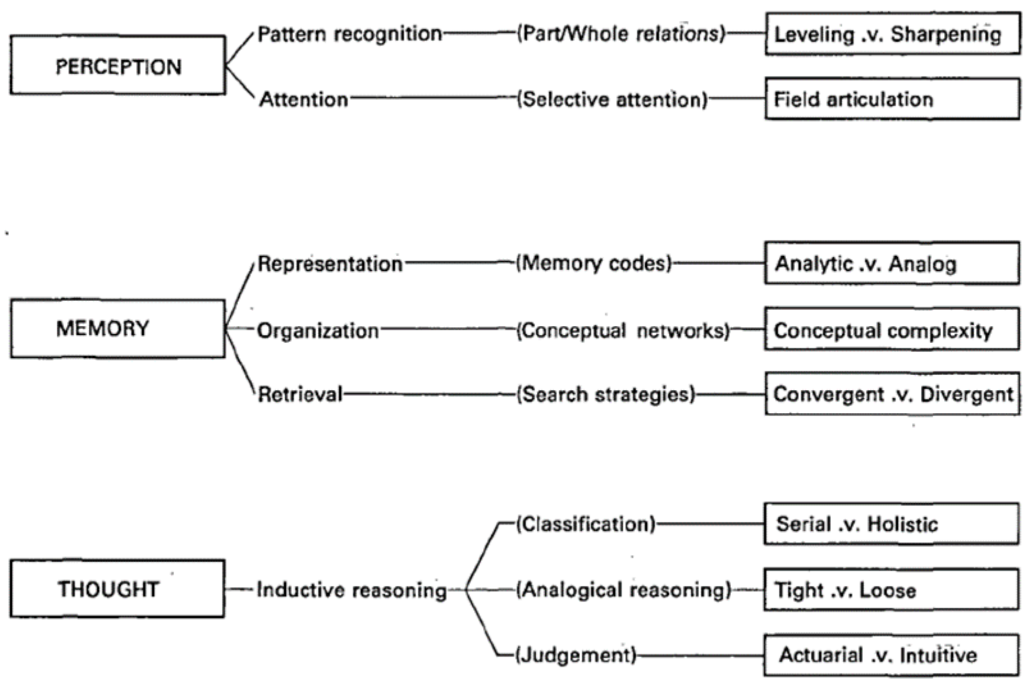
---

[4] Σύμφωνα με τον εμπειρικό δομισμό, η λειτουργία του γνωστικού συστήματος συμβαίνει διαμέσου τριών μετώπων Το πρώτο από αυτά αφορά τη λειτουργία των εξειδικευμένων δομικών συστημάτων (ΕΔΟΣ) τα οποία αντανακλούν τον τρόπο με τον οποίο ο ανθρώπινος νους αναπαριστά την εξωτερική πραγματικότητα (βλ. Μακρής 1995- Διδακτορική Διατριβή)

are synthetic, inductive, expansive, unconstrained, divergent, informal, diffuse and creative. No doubt the partitioning of thinking into two types involves something of an oversimplification, but possibly a useful one»

Nickerson, Perkins & Smith (1985, σελ. 50)

Αρκετές έρευνες υπέδειξαν δύο κατηγοριοποιήσεις που αναφέρονται στις αντίστοιχες διαστάσεις του γνωστικού ύφους: Την ολιστική – Αναλυτική διάσταση και την Λεκτική-Εικονική διάσταση (Foard & Kemler-Nelson, 1984, Riding & Cheema 1991, Rayner, & Riding, 1997, Μπάρμπας 2000, 2003). Οι συγγραφείς κάνουν διάκριση του μαθησιακού και γνωστικού ύφους με την επισήμανση ότι, υπάρχει συσχέτιση του πώς μαθαίνει κανείς με τις γνωστικές του ικανότητες. Πέραν των τυπικών-ψυχομετρικών κριτηρίων και άτυπα κριτήρια μπορεί να δώσουν πληροφορίες για το γνωστικό-μαθησιακό ύφος του παιδιού, του τρόπου δηλαδή που το παιδί προσεγγίζει τη γνώση και το οποίο επίσης έχει συνδεθεί με την μαθησιακή επάρκεια. Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, οι μαθητές χρησιμοποιούν διαφορετικούς τρόπους για να επιλύσουν ένα πρόβλημα ή να αποκτήσουν μια γνώση, οι οποίοι ανάλογα με τις απαιτήσεις του έργου, μπορεί να είναι λιγότερο ή περισσότερο αποτελεσματικοί (ολιστικο-αναλυτικό ύφος), (Kemler-Nelson & Smith, 1989; Riding & Rayner, 1999). O Miller (1987) σχηματοποίησε (εικ. 2), τρεις τύπους γνωστικών διεργασιών ώστε να γίνει καλύτερα κατανοητό το πως το γνωστικό ύφος επηρεάζει το μαθησιακό στυλ. Οι τύποι αυτοί αφορούν την αντίληψη, την μνήμη, την σκέψη και τις επιμέρους διεργασίες που λαμβάνουν χώρα σε γνωστικά έργα και επηρεάζονται από ολιστικές ή αναλυτικές μεθόδους σύμφωνα με την διάκριση των Fowler (1977, 1980) και Brumby (1982). Επειδή επιμέρους μελέτες για κάθε τύπο υιοθέτησαν και διαφορετικούς όρους αυτό δεν αλλάζει την διαπίστωση της βασικής κατεύθυνσης των ολιστικών και αναλυτικών μεθόδων. Τα περισσότερα μοντέλα γνωστικού ύφους έχουν μια κοινή διάσταση, την ολιστική κατ' αντιδιαστολή προς την αναλυτική (holistic vs analytic) (Riding, Rayner, ο.π). Η διάσταση αυτή αναφέρεται στο τρόπο επεξεργασίας των πληροφοριών. Ο ολιστικός τρόπος επεξεργασίας αναφέρεται στην αντίληψη του έργου ή του αντικειμένου ως όλου, δίχως διάκριση των επιμέρους στοιχείων ή χαρακτηριστικών του. Ο αναλυτικός τρόπος επεξεργασίας, αντίθετα, αναφέρεται στην παρατήρηση των λεπτομερειών και στην τελική σύνθεση τους για τη συγκρότηση μιας συνολικής σύλληψης.



Εικόνα 2. Γνωστικές διεργασίες και γνωστικό ύφος (Miller 1987)

Οι μαθησιακές δραστηριότητες σχεδιάζονται με την υπόθεση ότι όλοι οι μαθητές αναμένεται ότι μπορούν να εμπλακούν σε αυτές όμως οι μέθοδοι που υιοθετούν οι μαθητές φαίνεται ότι σχετίζονται με το γνωστικό και μαθησιακό ύφος, καθώς χρήση εμπειρικών στρατηγικών και μεθόδων εξασκεί τους μαθητές στην αναζήτηση και επεξεργασία των λογικο-μαθηματικών σχέσεων, αλλά δεν διασφαλίζει την δυνατότητα αναγνώρισης όλων των σχέσεων.

Τα περισσότερα σχολικά μαθήματα απαιτούν από τους μαθητές να χρησιμοποιούν αναλυτικές διαδικασίες. Οι Riding και Read (1996), διαπίστωσαν ότι η φύση των σχολικών μαθημάτων επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές ολοκληρώνουν ένα έργο. Στο σχολικό πλαίσιο, όταν το περιεχόμενο του μαθήματος γίνεται πιο επιτηδευμένο, απαιτείται συνδυασμός αναλυτικού τρόπου σκέψης και επάρκειας γνώσεων. Αυτό συναντάται περισσότερο σε μαθήματα όπως φυσική, χημεία, μαθηματικά, γλώσσα. Οι μαθητές που υπολείπονται στις αναλυτικές μεθόδους επεξεργασίας αποδίδουν λιγότερο στα μαθήματα αυτά, ιδιαίτερα στις ανώτερες βαθμίδες της εκπαίδευσης (Olstad, Juarez, Davenport, Maury, 1981). Για την ψυχοπαιδαγωγική τα λάθη είτε στον γνωστικό τομέα είτε στον συλλογιστικό, αποτελούν σπουδαία ευκαιρία για την ανίχνευση των τρόπων σκέψης και την εξεύρεση των τρόπων διόρθωσης (Φράγκου 2004). Μέσα από τα μαθηματικά έργα αντιλαμβανόμαστε τις λανθασμένες ιδέες των μαθητών και μέσα από τα ίδια τα έργα καθοδηγούμε την γνωστική ανάπτυξη που απαιτείται για πιο πολύπλοκα έργα όπως τα προβλήματα τα οποία είναι ιδανικά για την ανάπτυξη της συλλογιστικής ικανότητας. Αν και έχει τεκμηριωθεί ότι η μάθηση των μαθηματικών συμβάλλει στην ανάπτυξη της αναλυτικής ικανότητας του ατόμου και στη βελτίωση της αυτοεικόνας του ώστε να οργανώνει και να ελέγχει με επάρκεια την κοινωνική του ζωή (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

Ένα μεγάλο ζήτημα είναι αν παιδιά που δυσκολεύονται με τα μαθηματικά προβλήματα μπορούν να αναπτύξουν αναλυτικές μεθόδους επεξεργασίας προβλημάτων μέσω της διδασκαλίας ώστε να βελτιώσουν την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων. Οι τρόποι με τους οποίους τα παιδιά συλλογίζονται για τα μαθηματικά αλλάζουν πολλές φορές, καθώς μαθαίνουν τα μαθηματικά του σχολείου, γιατί πέρα από την εκμάθηση εννοιών, συλλέγουν τις γνώσεις για τις λογικές σχέσεις, χρησιμοποιούν αποτελεσματικά τις μαθηματικές συμβάσεις και συνδυάζουν τα διαφορετικά είδη γνώσεων ως ένα σύνολο για ευρύτερες εφαρμογές. Κατά τον Μπάρμπα (2000), ο τρόπος επεξεργασίας των στοιχείων και των σχέσεων του προβλήματος αναφέρεται σε δύο τυπολογίες μεθόδων επεξεργασίας του προβλήματος. Τις ολιστικές και τις αναλυτικές μεθόδους οι οποίες αποτυπώνονται και στην αναπαράσταση του προβλήματος. Οι μέθοδοι αυτοί δεν αποτελούν δύο αντίθετους πόλους αλλά αντανακλούν και τα ενδιάμεσα στάδια του νοήματος που δίνουν οι μαθητές στο πρόβλημα. Οι ολιστικές αυτές μέθοδοι αναμένεται να περιέχουν διαφορετικό κάθε φορά συνδυασμό ολιστικών και αναλυτικών στοιχείων και να εκδηλώνονται με διαφορετικούς τρόπους. Οι παράγοντες που επηρεάζουν την επιλογή ολιστικών ή αναλυτικών μεθόδων για την αναγνώριση των στοιχείων και των σχέσεων του προβλήματος σε έρευνα του Μπάρμπα (2000) συνοψίζονται σε τέσσερις κατηγορίες:

- στους παράγοντες που αναφέρονται στις μεθόδους εργασίας του μαθητή,

- στους παράγοντες που αναφέρονται στις επιλεγόμενες στρατηγικές και στους τρόπους σκέψης,
- στους παράγοντες που αναφέρονται στην προυπάρχουσα γνώση και στα χαρακτηριστικά των σχημάτων που διέθεταν οι μαθητές και στους παράγοντες που αναφέρονται στα κίνητρα και στις αντιλήψεις τους σχετικά με τη διαδικασία μαθηματικής επίλυσης ενός προβλήματος, τις απαιτήσεις της μαθησιακής διαδικασίας και τις δικές τους δυνατότητες.

Η διδασκαλία αναλυτικών μεθόδων επεξεργασία δεν στοχεύει στην αλλαγή του γνωστικού ύφους του μαθητή. Επιδίωξη είναι όλοι οι μαθητές να μπορούν να χειρίζονται αποτελεσματικά αναλυτικές και ολιστικές διαδικασίες ανάλογα με τις απαιτήσεις των καταστάσεων που αντιμετωπίζουν (Saracho, 1997). Αυτός ο προσανατολισμός δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να επεξεργάζονται και να βελτιώνουν τις στρατηγικές και τους τρόπους σκέψης που διαθέτουν ωστόσο η θετική επίδραση της διδασκαλίας στη βελτίωση των δεξιοτήτων ως προς αυτούς τους παράγοντες εξαρτάται και από τα χαρακτηριστικά του προς επίλυση προβλήματος. Η έρευνά μας σε μαθητές με σχολικές δυσκολίες και δυσκολίες μάθησης παρέχει ενδείξεις ότι είναι δυνατή η βελτίωση της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων με την διδασκαλία αναλυτικών μεθόδων επεξεργασίας, οι οποίες μπορούν να αξιοποιηθούν και για την διδασκαλία της επίλυσης προβλημάτων σε όλους τους μαθητές ώστε να επωφεληθούν από την εξάσκηση σε διαφορετικές μεθόδους επεξεργασίας.

Μέρος ΙΙ. Η ΕΡΕΥΝΑ

Κεφάλαιο 1. Μεθοδολογία

1.1. Ερευνητική Υπόθεση

Οι μαθητές με σοβαρές δυσκολίες στα σχολικά μαθηματικά αναμένεται να βελτιώσουν την ικανότητά τους στην επίλυση προβλημάτων μέσα από ένα πρόγραμμα εκπαίδευσης σε αναλυτικές μεθόδους επεξεργασίας της αναπαράστασης του προβλήματος.

1.2. Είδος έρευνας, Τόπος και χρόνος

Η έρευνα αφορά στον σχεδιασμό, υλοποίηση και αξιολόγηση προγράμματος για την εκπαίδευση μαθητών Δ’ Δημοτικού με σοβαρές δυσκολίες στα σχολικά μαθηματικά σε αναλυτικές μεθόδους επεξεργασίας της αναπαράστασης των προβλημάτων. Είναι κατά συνέπεια μια έρευνα δράσης, η οποία πραγματοποιήθηκε σε Δημοτικό Σχολείο του Ν. Πέλλας την Άνοιξη του 2018. Στο πλαίσιο του προγράμματος παρέμβασης οι μαθητές επεξεργάζονταν τα προβλήματα μέχρι την τελική τους επίλυση. Ωστόσο η έμφαση της διδασκαλίας δόθηκε στις μεθόδους επεξεργασίας της αναπαράστασης του προβλήματος, αφενός διότι στο περιορισμένο χρονικό πλαίσιο του προγράμματος δεν θα ήταν δυνατόν να αναμένονται αποτελέσματα ταυτόχρονα και στους άλλους τομείς επίλυσης του προβλήματος και αφετέρου διότι η αποτελεσματική επεξεργασία της αναπαράστασης απαιτεί εμπειρικές και πιο απλές μεθόδους, οι οποίες θεωρείται ότι είναι εφικτό να αποκτηθούν από τους μαθητές στο διάστημα αυτό[5].

1.3. Δείγμα της έρευνας

Το δείγμα επιλέχθηκε από τους 22 μαθητές της Δ΄ τάξης. Στην τάξη φοιτούν μαθητές με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες με γνωμάτευση ΚΕΔΔΥ οι οποίοι δέχονται υποστήριξη 4 ώρες την εβδομάδα στο Τ.Ε., και μαθητές με σχολικές δυσκολίες για τους οποίους δεν υπάρχει κάποια πρόβλεψη αντιμετώπισης των δυσκολιών τους. Η πλειονότητα των μαθητών με δυσκολίες στα σχολικά μαθηματικά δεν συνιστούν μια ειδική κατηγορία μαθητών με εκπαιδευτικές ανάγκες, αλλά φοιτούν στο τυπικό σχολικό πλαίσιο χωρίς κάποια οφέλη παιδαγωγικών παρεμβάσεων στην τάξη. Όπως προκύπτει από τα ερευνητικά δεδομένα, οι δυσκολίες στη σχολική μάθηση των παιδιών αυτών συνδέονται κυρίως με δυσκολίες που δεν οφείλονται σε κάποια ειδική αναπτυξιακή διαταραχή, μπορεί όμως να οφείλονται σε περιβαλλοντικούς παράγοντες (Kavale, Forness, 1985), οι οποίοι συνήθως δεν συνεκτιμώνται για τον σχεδιασμό παρεμβάσεων όπως προτείνεται για τους μαθητές που φέρουν γνωμάτευση που τους κατατάσσει στην κατηγορία των ειδικών εκπαιδευτικών αναγκών. Το καταλληλότερο πλαίσιο υποστήριξης γι’ αυτούς τους μαθητές είναι η ενισχυτική διδασκαλία, εφόσον αποτελεί θεσμό και του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος.

[5] Για να έχει κάποιο αντίκτυπο αυτή η προσπάθεια τόσο για τα παιδιά, όσο και για ερευνητικούς λόγους, θα συνεχιστεί για δύο ακόμη χρόνια, ως την αποφοίτηση των μαθητών, με την σύμφωνη γνώμη των γονέων.

1.3.1. Κριτήρια επιλογής του δείγματος

Τα κριτήρια επιλογής του δείγματος περιέλαβαν τα εξής σημεία: (α) την αξιολόγηση για το σύνολο των μαθητών της Δ΄ τάξης (22 μαθητές) του επιπέδου μαθηματικής επάρκειας, δηλαδή των μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων που αναμένεται να έχουν σ' αυτή την ηλικία, με την χορήγηση του ψυχομετρικού κριτηρίου Μαθηματικής Επάρκειας (Μπάρμπας & Βερμέουλεν, 2008) (β) την χορήγηση ψυχομετρικού κριτηρίου Μαθησιακής Επάρκειας (Detroit Test) για τον αποφυγή συμπερίληψης μαθητών με Ήπια Νοητική Ανεπάρκεια (ΗΝΑ), στο δείγμα της έρευνας και (γ) την επίδοση στην αναπαράσταση και επίλυση του προβλήματος στην αρχική αξιολόγηση.

Detroit Test Μαθησιακής Επάρκειας

Το Detroit Test of Learning Aptitude (DTLA-4) είναι ένα ψυχομετρικό κριτήριο νοητικών-γνωστικών-μαθησιακών ικανοτήτων (Τζουριάδου, 2008).

Κριτήριο Μαθηματικής Επάρκειας

Για την αξιολόγηση της Μαθηματικής Επάρκειας χορηγήθηκε το κριτήριο Μαθηματικής Επάρκειας (Μπάρμπας & Βερμέουλεν, 2008), που εκτιμά τη μαθηματική επάρκεια παιδιών 7.06-15.05 ετών. Η χαμηλή τελική αξιολόγηση στο Κριτήριο Μαθηματικής Επάρκειας και παράλληλα η χαμηλή φυσιολογική επίδοση στο Κριτήριο Μαθησιακής Επάρκειας (ΠΜΕ ≥ 75) αποτέλεσαν κριτήρια επιλογής 10 μαθητών για την συγκρότηση του δείγματος.

Α/Α	Ονομα	ΠΜΕ				Detroit
		Λεξ.	Υπολ.	Προβλ.		
1	Μαθητής 1	7	7	4	75	82
2	Μαθητής 2	5	7	7	77	97
3	Μαθητής 3	6	6	6	75	81
4	Μαθητής 4	6	9	9	87	95
5	Μαθητής 5	7	4	9	79	98

6	Μαθητής 6	6	8	9	85	75
7	Μαθήτρια 7	7	9	6	83	94
8	Μαθήτρια 8	6	7	9	83	92
9	Μαθητής 9	6	8	9	85	87
10	Μαθήτρια 10	6	7	6	77	86

Πίνακας 1. *Επιδόσεις του δείγματος στα κριτήρια Μαθηματικής και Μαθησιακής επάρκειας*

Το συγκεκριμένο κριτήριο αποτελείται από 3 υποδοκιμασίες, οι οποίες καλύπτουν τους τρεις τομείς των σχολικών μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων α) λεξιλόγιο (έννοιες), β) υπολογισμούς, και γ) επίλυση προβλημάτων. Χρησιμοποιείται για τον εντοπισμό των μαθητών με σημαντικά χαμηλότερη μαθηματική επάρκεια από τους συνομηλίκους τους, τον προσδιορισμό συγκεκριμένων ενδοατομικών αδυναμιών και δυνατοτήτων μεταξύ των μαθηματικών ικανοτήτων, την αξιολόγηση της πορείας του μαθητή μετά την εφαρμογή εξειδικευμένης παιδαγωγικής παρέμβασης αλλά και για ερευνητικούς σκοπούς.

1.4. Εργαλεία της έρευνας

Κριτήριο για την επιλογή των 10 μαθητών του δείγματος στις δυο ομάδες (πειραματική και ελέγχου) αποτέλεσε η αξιολόγηση της επίλυσης 4 προβλημάτων τα οποία χορηγήθηκαν με την μορφή δοκιμασίας στο δείγμα της έρευνας σε δύο διδακτικές ώρες και διαφορετικές ημέρες. Τα προβλήματα αξιολογήθηκαν ως προς την επεξεργασία της αναπαράστασης και ως προς την τελική επίλυση των 4 προβλημάτων που χορηγήθηκαν ως δοκιμασία σε όλους τους μαθητές του δείγματος.

Μετά την γραπτή δοκιμασία, για την αξιολόγηση των μεθόδων επεξεργασίας της αναπαράστασης ακολούθησε ατομική συνέντευξη με τον κάθε μαθητή, στην οποία του ζητήθηκαν επεξηγήσεις για τα χαρακτηριστικά των αριθμητικών αποτελεσμάτων των πράξεων που εκτέλεσε κατά την διαδικασία επίλυσης (τι είναι δηλαδή το κάθε αριθμητικό αποτέλεσμα ώστε να αξιολογηθεί η αναπαράσταση που σχημάτιζαν οι μαθητές για το πρόβλημα.

1.4.1. Εργαλείο αξιολόγησης των μεθόδων επεξεργασίας κατά την αναπαράσταση του προβλήματος

Σύμφωνα με τις οδηγίες που συνοδεύουν την διδακτέα ύλη των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο (βλ. σχετική εισήγηση του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής - Πράξη 33/26- 7-2018 σελ.49): *«Είναι καταγραμμένο στη βιβλιογραφία το γνωστικό ύφος, ο τρόπος επεξεργασίας, δηλαδή, των ερεθισμάτων, ο οποίος συνδέεται άμεσα με το δίπολο αναλυτικός/ολιστικός τύπος...».* Ωστόσο όπως επισημάναμε στο θεωρητικό μας πλαίσιο (κεφ. 1.6: Γνωστικό και Μαθησιακό ύφος), η ολιστική και αναλυτική μέθοδος επεξεργασίας δεν αποτελεί ένα δίπολο αλλά ένα συνεχές μεθόδων που προσεγγίζουν τη την μια ή την άλλη κατεύθυνση. Η επιλογή αυτή δεν είναι τυχαία αλλά σχετίζεται με τα γνωστικά σχήματα που διαθέτουν οι μαθητές.

Τα χαρακτηριστικά των μεθόδων επεξεργασίας τόσο της αρχικής και τελικής αξιολόγησης (4 προβλήματα) όσο και κατά την διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης (24 προβλήματα) ταξινομήθηκαν σε μια τετράβαθμη (1-4) κλίμακα ο οποία περιγράφει τις σημαντικότερες διαφορές που σχετίζονται με το γνωστικό ύφος των μαθητών. Οι τιμές 1 ως 4 χαρακτηρίζουν τις αντίστοιχες κατηγοριοποιήσεις των τρόπων επεξεργασίας καθενός από τα 24 προβλήματα της διδασκαλίας για τους 5 μαθητές της πειραματικής ομάδας. Αναλυτικότερα παρατηρήσαμε αν οι μαθητές της ομάδας αναγνώριζαν τα στοιχεία και τις σχέσεις του προβλήματος καθώς σχεδίαζαν το πρόβλημα. Με βάση την αξιολόγηση της αναπαράστασης έγινε ταξινόμηση των μεθόδων που χρησιμοποίησαν οι μαθητές ως εξής.

Τιμή (1): Πλήρης ολιστική μέθοδος επεξεργασίας της αναπαράστασης του προβλήματος. Οι μαθητές δεν μπορούν να αναγνωρίσουν τα στοιχεία και τις σχέσεις του προβλήματος ή αναγνωρίζουν μερικές από τις σχέσεις ενώ η επιλογή πράξεων δεν μπορεί να εξηγηθεί με τρόπο ώστε να δείχνει την κατανόησή τους.

Τιμή (2): Ολιστική μέθοδος επεξεργασίας για την αναγνώριση των στοιχείων του προβλήματος, αναγνώριση μερικών σχέσεων, επιλογή πράξεων με σαφές νόημα για τους μαθητές.

Τιμή (3): Αναλυτικός τρόπος επεξεργασίας για την αναγνώριση των στοιχείων του προβλήματος, αναγνώριση μερικών σχέσεων, επιλογή πράξεων δίχως σαφές νόημα για τους μαθητές.

Τιμή (4): Αναλυτικός τρόπος επεξεργασίας για την αναγνώριση των στοιχείων του προβλήματος, αναγνώριση σχέσεων, επιλογή πράξεων με σαφές νόημα για τους μαθητές. Η ερμηνεία των τιμών αυτών κατά την διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης καταγράφει

1.4.2. Κατάταξη σε Ισοδύναμες ομάδες

Η κατάταξη των 10 μαθητών έγινε με κριτήριο τη δημιουργία δυο ισοδύναμων ομάδων ως προς την επεξεργασία της αναπαράστασης και την επίλυση των προβλημάτων με τη χρήση του στατιστικού κριτηρίου Mann-Whitney U. Οι διαφορές μεταξύ των δύο ομάδων και στους δύο τομείς δεν ήταν στατιστικά σημαντικές, ενώ υπήρχε μια ελαφρά υπεροχή της ομάδας ελέγχου (μέθοδοι επεξεργασίας $Z = 0{,}63$, $p = 0{,}65$, επίλυση $Z = 0{,}18$, $p = 0{,}21$).

,630	,176
$,647^{b}$	$,214^{b}$

Πίνακας 2. *Διαφορές πειραματικής ομάδας και ομάδας ελέγχου στις μεθόδους επεξεργασίας και επίλυση*

1.5. Πρόγραμμα παρέμβασης

1.5.1. Περιεχόμενο

Το περιεχόμενο της παρέμβασης συνίσταται στη διδασκαλία αναλυτικών μεθόδων επεξεργασίας της αναπαράστασης και την επίλυση 24 προβλημάτων της καθημερινής ζωής τα οποία είναι σχετικά απλά ως προς τις σχέσεις των στοιχείων αλλά σύνθετα ως προς την αναπαράσταση γεγονός που οδηγεί συνήθως σε αδυναμία επίλυσης. Η χορήγηση προβλημάτων που πολλά από αυτά προτείνονται από το Α.Π.Σ χαμηλότερων τάξεων από αυτή που φοιτούσαν οι μαθητές αφορά προβλήματα που επιλέχτηκαν με βάση, λεκτική διατύπωση απλή, με εννοιολογικά κατανοητό περιεχόμενο σχετικό με τις εμπειρίες των μαθητών αλλά ήταν σύνθετα ως προς την αναπαράστασή το Ωστόσο για να είναι επωφελής η παρέμβαση εκτιμήθηκαν και άλλοι παράγοντες, όπως η συζήτηση πάνω στη λύση για το νόημα που είχαν διαμορφώσει οι μαθητές για το πρόβλημα, ώστε να επανεκτιμηθούν εσφαλμένες αντιλήψεις. Επίσης η παρατήρησή μας αφορούσε την συμπεριφορά των μαθητών καθ΄ όλη την διάρκεια της διδασκαλίας που κατά κανόνα υπήρξε θετική.

1.5.2. Διδακτικές μέθοδοι

Η βιβλιογραφική ανασκόπηση για τα προγράμματα παρέμβασης όπως αυτή παρουσιάστηκε στο θεωρητικό μας πλαίσιο είναι ενδεικτική της προβληματικής που αναπτύχθηκε για την επιτυχία των προγραμμάτων αυτών. Ενώ τα περισσότερα συγκλίνουν στην άποψη ότι οι όλοι οι μαθητές επωφελούνται από την παρέμβαση στην τάξη, ως προς τους μαθητές με χαμηλό μαθησιακό προφίλ συμπεραίνουν ότι επωφελούνται περισσότερο με παρέμβαση έξω από την τάξη, ατομικά ή σε μικρή ομάδα (Laborde, 1994). Η άποψή μας είναι ότι κατά την επίλυση προβλημάτων υπάρχουν πολλά ζητήματα που πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά την παρέμβαση σε αυτούς τους μαθητές ωστόσο δεν μπορούν να ερευνηθούν ταυτόχρονα. Για τον σκοπό αυτό καταλήξαμε σε ένα απλό μοντέλο διδασκαλίας κατά το οποίο λήφθηκαν υπόψη οι παράγοντες της εκχώρησης του προβλήματος (Τζεκάκη, 2003), και οι διάλογοι που έλαβαν χώρα μεταξύ των μελών της ομάδας και του δασκάλου ώστε να συνδιαμορφώνονται τα μαθηματικά νοήματα (Μπάρμπας, 2002, 2007, Kaldrimidou, Sakonidis, & Tzekaki, 2011), οι βέλτιστες μέθοδοι και στρατηγικές των μαθητών που τους βοηθούν στην επίλυση αξιοποιώντας τα δικά τους γνωστικά σχήματα. Θεωρήσαμε αναγκαία προϋπόθεση για τον σχεδιασμό της παιδαγωγικής παρέμβασης την ανάπτυξη θετικών κινήτρων γενικότερα για το μάθημα των μαθηματικών και ειδικότερα για τα προβλήματα, γιατί τα κίνητρα αποτελούν ένα σημαντικό παράγονται που συχνά επηρεάζει αρνητικά την επίδοση των μαθητών και την σχέση τους με την μαθησιακή διαδικασία. Κατά συνέπεια ο σχεδιασμός της διδασκαλίας και της παιδαγωγικής δραστηριότητας έλαβε υπόψη και παράγοντες που δεν μπορούσαν να αξιολογηθούν αλλά να εκτιμηθούν μέσα από την παρατήρηση.

Για τους παραπάνω λόγους αναθεωρήσαμε την αντίληψη ότι η λύση προβλήματος αποτελείται από μια άκαμπτη σειρά τρόπων σκέψης και ενεργειών, οι οποίες στις περιπτώσεις σχολικών δυσκολιών δεν επιφέρουν βελτίωση της επίδοσης των μαθητών. Στις διδασκαλίες της παρέμβασης ακολουθήσαμε την ομαδο-συνεργατική μέθοδο για τον αναστοχασμό πάνω στα ήδη επεξεργασμένα από τους μαθητές προβλήματα, ώστε να εντοπιστούν και να αντιμετωπιστούν οι δυσκολίες, είτε αφορούν κενά της διδασκαλίας, είτε εμπόδια στην επεξεργασία της αναπαράστασης.

Ο ρόλος της εκπαιδευτικού ήταν υποστηρικτικός και διαμεσολαβητικός όσο αφορά τις κοινωνικές νόρμες που υιοθετήθηκαν από την ομάδα των μαθητών κατά την διάρκεια των διδακτικών παρεμβάσεων. Επιπλέον ακολουθήθηκαν νόρμες για την ατομική εργασία που περιλάμβαναν τα ακόλουθα: Σε κάθε πρόβλημα οι μαθητές προσπαθούσαν πριν επιχειρήσουν οποιαδήποτε απάντηση να επεξεργαστούν τα δεδομένα του προβλήματος κάνοντας κάποιο σχέδιο που είχε νόημα γι' αυτούς και μπορούσαν να το εξηγήσουν και στους συμμαθητές της ομάδας (Yackel, 1991).

Συνεπώς κατά τις διδασκαλίες των προβλημάτων υπήρξε εναλλαγή άμεσων και έμμεσων μεθόδων με ελαφρά υπεροχή των έμμεσων καθώς ο ρόλος μας τον περισσότερο χρόνο ήταν αυτός της διαμεσολάβησης μεταξύ των μαθητών και της γνώσης. Υπό αυτή την έννοια θεωρούμε ότι η διδασκαλία δεν σχετίζεται με τις παραδοσιακές στην τάξη αλλά αφορούσε κυρίως την αξιοποίηση των διδακτικών καταστάσεων που προκύπταν μέσα από τις αλληλεπιδράσεις των μαθητών.

1.5.3. Οργάνωση του προγράμματος

Η παρέμβαση έλαβε χώρα στο σχολείο με τη μορφή ενισχυτικής διδασκαλίας με την σύμφωνη γνώμη των γονέων. Το πρόγραμμα των συναντήσεων καθορίστηκε σε συνεργασία με τον επόπτη καθηγητή σε 24 διδακτικές ώρες. ενώ οι δυσκολίες των μαθητών ήταν υπό διαπραγμάτευση με στόχο την διαρκή εξοικείωση με την χρήση αναλυτικών μεθόδων ώστε προοδευτικά να αίρονται τα εμπόδια τόσο στην αναγνώριση των στοιχείων, όσο και την αναγνώριση των σχέσεων, και στη σύνθεσή τους σε μια ολοκληρωμένη αναπαράσταση του προβλήματος. Σε κάθε μάθημα προτείναμε ένα πρόβλημα, προτρέποντας τους μαθητές της πειραματικής ομάδας να το λύσουν με τις εξής γενικές οδηγίες: α) τον εντοπισμό των δεδομένων του προβλήματος, β) την δημιουργία ενός σχεδίου (αναπαράσταση στοιχείων του προβλήματος με τον τρόπο που μπορούσαν οι ίδιοι οι μαθητές π.χ. με σύμβολα, με πίνακες ή/και σκίτσα) γ) τον έλεγχο της αναπαράστασης δ) την δυνατότητα αυτοδιόρθωσης του σχεδίου και ε) την αναζήτηση/αναγνώριση σχέσεων.

1.6. Συλλογή δεδομένων

Η συλλογή των δεδομένων έγινε με πρωτόκολλα, τα οποία βασίστηκαν στα φύλλα εργασίας του κάθε μαθητή της πειραματικής ομάδας σε κάθε μάθημα. Το φύλλο εργασίας περιείχε το πρόβλημα που καλούνταν να λύσει ο μαθητής, την επεξεργασία του, και όλα τα ποιοτικά στοιχεία σχετικά με τις μεθόδους επεξεργασίας της αναπαράστασης και την επίλυση του προβλήματος που προκύπταν από τη μαθησιακή διαδικασία.

Ως βοηθητικό στοιχείο αξιολόγησης της συμπεριφοράς των μαθητών κατά την επίλυση των προβλημάτων και τις αλληλεπιδράσεις κατά την διάρκεια των παρεμβάσεων καταγράφονταν οι παρατηρήσεις για τις αντιδράσεις στο μάθημα και την μαθησιακή διαδικασία, τις αντιδράσεις για την συμμετοχή στο πρόγραμμα και την συλλογική διαδικασία. Οι παρατηρήσεις αυτές, αν υπήρχαν καταγράφηκαν στο πρωτόκολλο παρατήρησης

1.6.1. Αρχική και τελική αξιολόγηση

Τόσο στην αρχική όσο και στην τελική αξιολόγηση δόθηκαν δύο δοκιμασίες που περιλάμβαναν από 2 προβλήματα σε όλους τους μαθητές του δείγματος (10 μαθητές) της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου. Οι μαθητές ενημερώθηκαν από την αρχή για τον σκοπό της διαδικασίας. Διατέθηκε σε κάθε μαθητή χρόνος 40 λεπτών για την επίλυση 2 προβλημάτων. Για τον σκοπό αυτό διατέθηκαν 2 διδακτικές ώρες σε διαφορετικές ημέρες στα πλαίσια του εβδομαδιαίου σχολικού προγράμματος. Κατά την διάρκεια της δοκιμασίας δεν παρενέβη η διεξάγουσα την έρευνα και την παρέμβαση, εκπαιδευτικός. Όπως αναφέρθηκε για την αρχική αξιολόγηση, και στην τελική, μετά την γραπτή δοκιμασία, για την αξιολόγηση των μεθόδων επεξεργασίας της αναπαράστασης ακολούθησε ατομική συνέντευξη με τον κάθε μαθητή, με το ίδιο περιεχόμενο που περιεγράφηκε προηγουμένως για την αρχική αξιολόγηση.

1.7. Επεξεργασία δεδομένων

Στην επεξεργασία των δεδομένων έγιναν στατιστικές επεξεργασίες και ποιοτική ανάλυση. Οι στατιστικές επεξεργασίες αφορούσαν στην μελέτη των διαφορών μεταξύ των δυο ομάδων στην αρχική και τελική αξιολόγηση, τις διαφορές της κάθε ομάδας ανάμεσα στην αρχική και τελική αξιολόγηση, και τη συσχέτιση των μεθόδων επεξεργασίας της αναπαράστασης με την επίλυση του προβλήματος.

Η ποιοτική ανάλυση αφορούσε την πορεία του κάθε μαθητή της πειραματικής ομάδας στη διάρκεια του προγράμματος κυρίως στα θέματα που σχετίζονταν με τις μεθόδους επεξεργασίας της αναπαράστασης. Τα αποτελέσματα της ποιοτικής ανάλυσης επιδιώχθηκε να βοηθήσουν στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων των στατιστικών επεξεργασιών.

Κεφάλαιο 2ο: Ευρήματα – Σχολιασμός

2.1. Σύγκριση διαφορών μεταξύ των 2 ομάδων στην αρχική και τελική αξιολόγηση της αναπαράστασης και της επίλυσης του προβλήματος

N=10	Αναπαρ. Αρχ.	Αναπαρ. Τελ.	Επίλυση Αρχική	Επίλυση Τελική
Z	-0,48	-1,36	0	-0,32
p	0,63	**0,18**	1	0,75

Πίνακας 4. *Σύγκριση διαφορών μεταξύ των ομάδων αρχικής και τελικής αξιολόγησης*

Στον πίνακα 4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επεξεργασίας με τη χρήση του κριτηρίου Mann-Whitney U, οι διαφορές μεταξύ των δύο ομάδων και στους δύο τομείς (επεξεργασία της αναπαράστασης και επίλυση). Παρατηρούμε ότι δεν είναι στατιστικά σημαντικές οι διαφορές μεταξύ των δύο ομάδων ως προς την επίλυση και την μέθοδο επεξεργασίας της αναπαράστασης (p= 0,18 & p= 0,75).

2.2. Σύγκριση διαφορών- Μέσες τιμές

ΟΜΑΔΑ		Αναπαρ. Αρχική	Αναπαρ. Τελ.	Επίλυση Αρχική	Επίλυση Τελική
Ομάδα παρέμβασης	Mean	2,45	3,35	,20	,45
	Std. Deviation	1,395	,813	,410	,510

Ομάδα Ελέγχου	Mean	2,63	2,68	,20	,35
	Std. Deviation	1,065	1,416	,410	,489

Πίνακας 5. *Σύγκριση Μέσων Τιμών*

Τα ευρήματα που παρουσιάστηκαν ενισχύονται από την ανάλυση των μέσων τιμών κατά ομάδα. Παρατηρείται μια μικρή διαφορά υπέρ της πειραματικής ομάδας ως προς την επίλυση ενώ μεγαλύτερη αλλά όχι στατιστικά σημαντική θεωρείται η διαφορά ως προς την αναπαράσταση υπέρ της πειραματικής ομάδας. Παρά την έλλειψη στατστικά σημαντικών διαφορών η παρατήρηση και ερμηνεία των ευρημάτων αυτών οδηγεί σε 2 συμπεράσματα τα οποία θεωρούμε σημαντικά. Παρά το μικρό χρονικό διάστημα της παρέμβασης η πειραματική ομάδα παρέμεινε στα αρχικά επίπεδα τόσο ως προς την επεξεργασία της αναπαράστασης (αναμενόμενο χωρίς κάποια πρόγραμμα διδασκαλίας) όσο και ως προς την επιτυχία στην επίλυση. Αντίθετα οι διαφορές στην ομάδα παρέμβασης είναι ποιοτικές όπως θα παρατηρήσουμε στους παρακάτω πίνακες.

2.3 Σύγκριση διαφορών μέσα στην κάθε ομάδα στην αρχική και τελική αξιολόγηση της αναπαράστασης και επίλυσης προβλήματος.

	A1. Πειραματική Ομάδα N=5		A2. Ομάδα Ελέγχου N=5	
	Αναπαράσταση	Επίλυση	Αναπαράσταση	Επίλυση
Z	-2,32	-1,68	-0,37	-1,63
p	**0,021**	0,096	0,71	0,10

Πίνακας 6. *Σύγκριση αρχικής τελικής αξιολόγησης πειραματικής ομάδας και ομάδας ελέγχου*

Τα ευρήματα από την σύγκριση αρχικής και τελικής αξιολόγησης προέκυψαν από την στατιστική επεξεργασία που έγινε για κάθε ομάδα ξεχωριστά, με την εφαρμογή του κριτηρίου Wilcoxon. Για την αξιολόγηση της μεταβολής στον τύπο επεξεργασίας των προβλημάτων πριν και μετά την εφαρμογή του προγράμματος διαμορφώθηκαν οι παρακάτω κατηγοριοποιήσεις. Παρατηρείται θετική μεταβολή στους μαθητές της πειραματικής ομάδας καθώς υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά $p = 0,021 < 0,05$ μεταξύ αρχικής και τελικής επεξεργασίας της αναπαράστασης. Στην πειραματική ομάδα αντίθετα η διαφορά δεν είναι στατιστικά σημαντική ως προς την επεξεργασίας της αναπαράστασης. Στην επίλυση παρατηρείται μια μικρή θετική διαφορά στην πειραματική ομάδα η οποία ωστόσο δεν είναι στατιστικά σημαντική ενώ στα ίδια επίπεδα παραμένει η επίλυση για την ομάδα ελέγχου.

2.4. Συσχέτιση της αναπαράστασης και επίλυσης του προβλήματος.

Η συσχέτιση μεταξύ αρχικής αναπαράστασης -αρχικής επίλυσης των 4 προβλημάτων που χορηγήθηκαν κατά την αρχική αξιολόγηση των ομάδων με την τελική αναπαράσταση-τελική επίλυση των ίδιων προβλημάτων που χορηγήθηκαν στην τελική αξιολόγηση των δύο ομάδων, έγινε με την εφαρμογή του κριτηρίου Pearson.

Α1. Πειραματική Ομάδα N=5		
Αναπαράσταση αρχική Επίλυση αρχική	Pearson r = 0,57	P = 0,009
Αναπαράσταση τελική Επίλυση τελική	Pearson r = 0,74	P =0,000

Πίνακας 7. *Συσχέτιση μεταξύ αρχικής αναπαράστασης αρχικής επίλυσης πειραματικής ομάδας*

Όπως όμως παρατηρούμε στον πίνακα (πιν.8), η συσχέτιση αναπαράστασης και επίλυσης είναι στατιστικά σημαντική και αυτό φαίνεται και στην αρχική και στην τελική δοκιμασία.

Α2. Ομάδα Ελέγχου N=5		
Αναπαράσταση αρχική Επίλυση αρχική	Pearson r = 0,68	P = 0,001
Αναπαράσταση τελική Επίλυση τελική	Pearson r = 0,74	P =0,000

Πίνακας 8. *Συσχέτιση μεταξύ αρχικής αναπαράστασης αρχικής επίλυσης ομάδας ελέγχου*

Παρόμοια είναι και η συσχέτιση Pearson με το ίδιο κριτήριο στην ομάδα ελέγχου.

Α1&Α2. Σύνολο μαθητών των δύο ομάδων Ν=10		
Αναπαράσταση αρχική Επίλυση αρχική	Pearson r = 0,61	P = 0,000
Αναπαράσταση τελική Επίλυση τελική	Pearson r = 0,69	P =0,000

Πίνακας 9. *Συσχέτιση μεταξύ αρχικής αναπαράστασης των δύο ομάδων μαζί*

Η παρατήρηση του πίνακα (9) ενισχύει ακόμη περισσότερο την σχέση μεταξύ αναπαράστασης και επίλυσης. Παρατηρούμε ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση οποία υποδεικνύει ότι όσο βελτιώνεται η αναπαράσταση τόσο βελτιώνεται και η επίλυση. Πορίσματα ερευνών ενισχύουν την άποψη ότι η χρήση αναλυτικών μεθόδων συνδέεται με την επίλυση προβλημάτων, ενώ η χρήση ολιστικών μεθόδων οδηγεί κατά κανόνα σε μη επίλυση (Kemler-Nelson & Smith, 1989· Paramo & Tinajero, 1990· Μπάρμπας et al., 2007). Ωστόσο πιο συστηματική προσπάθεια απαιτείται για τον ερμηνεία των δεδομένων αυτών και η σύνδεσή τους με τα μαθησιακά χαρακτηριστικά και των 10 μαθητών που αποτέλεσαν το δείγμα της έρευνας διότι το μαθησιακό προφίλ όλων ήταν στο φυσιολογικό χαμηλό επίπεδο όπως προέκυψε από την αξιολόγηση του κριτηρίου Μαθησιακής Επάρκειας.

2.5. Ερμηνεία – σχολιασμός των αποτελεσμάτων της σύγκρισης αρχικής και τελικής αξιολόγησης μεταξύ των δύο ομάδων και μέσα στην πειραματική ομάδα ξεχωριστά

Χορηγήθηκαν τα ίδια προβλήματα και ολιγόλεπτη συνέντευξη πάνω στην λύση τους από κάθε ένα μαθητή του δείγματος Κατά την τελική αξιολόγηση δόθηκαν αντίστοιχα προβλήματα και στις δύο ομάδες.

Πίνακες παρατήρησης πειραματικής ομάδας

Όνομα	Προβ	Αναπαράσταση		Επίλυση	
		Αρχική Αξιολ	Τελ. Αξιολ	Αρχική	Τελική
Αναστασ Χ	Πρόβ1	1	3	0	0
	Προβ 2	1	2	0	0
	Προβ 3	1	4	0	1
	Προβ 4	1	2	0	0

Πίνακας 10.

Στον πίνακα 10 αποτυπώνεται η αξιολόγηση της αναπαράστασης της μαθήτριας Αν. Χ. και η αξιολόγηση της επίλυσης των 4 προβλημάτων. Παρατηρούμε ότι όσο αφορά την επίλυση προβλημάτων η μαθήτρια είχε μεγάλες δυσκολίες να λύσει και το πιο απλό πρόβλημα ενώ στην τελική αξιολόγηση καταφέρνει να λύσει 1. Εξελικτική πορεία είχε στην επεξεργασία της αναπαράστασης του προβλήματος και από πλήρη ολιστική μέθοδο επεξεργασίας έκανε σημαντική πρόοδο προς την αναλυτική μέθοδο. Οι δυσκολίες της μαθήτριας με την επίλυση προβλημάτων υπάρχει δυνατότητα να αρθούν με την συνέχιση του προγράμματος παρέμβασης τουλάχιστον 2 διδακτικές ώρες την εβδομάδα, καθώς είχε και μεγάλη δυσκολία στην εκτέλεση πράξεων. Δεν εφαρμόζει σωστά ούτε τον αλγόριθμο της διαίρεσης ούτε και του πολλαπλασιασμού. Μέσω της παρέμβασης έδειξε ότι υπάρχει δυνατότητα βελτίωσης και στις πράξεις.

Όνομα	Προβ	Αναπαράσταση		Επίλυση	
		Αρχική Αξιολ	Τελ. Αξιολ	Αρχική	Τελική
Μάρ. Γκερ	Πρόβ1	4	4	0	1
	Προβ 2	4	4	1	1
	Προβ 3	4	3	1	0
	Προβ 4	4	4	1	0

Πίνακας 11.

Ο μαθητής στον πίνακα 11 επωφελείται από τις αναλυτικές μεθόδους και εμφάνισε ικανότητα εντυπωσιακή στην αναπαράσταση των προβλημάτων. Προβλήματα ελέγχου της λύσης του προβλήματος δεν διασφάλισαν την επιτυχία στην επίλυση ενώ στην αρχική αξιολόγηση τα είχε λύσει.

Όνομα	Προβ	Αναπαράσταση		Επίλυση	
		Αρχική Αξιολ	Τελ. Αξιολ	Αρχική	Τελική
Εντ. Λεπ	Πρόβ1	4	3	0	0
	Προβ 2	4	3	0	0
	Προβ 3	3	4	0	1
	Προβ 4	2	4	0	1

Πίνακας 12.

Επίσης και ο μαθητής του πίνακα 12 χρησιμοποιεί αναλυτικές μεθόδους επεξεργασίας αλλά εμφάνισε μια μικρή βελτίωση καθώς είχε δυσκολία στην αναγνώριση των σχέσεων των προβλημάτων. Πιθανόν δυσκολίες στην άρθρωση και προβλήματα λόγου και ομιλίας επηρεάζουν την κατανόηση των σχέσεων αυτών. Ο μαθητής θα επωφεληθεί από την συνέχιση της παρέμβασης.

Όνομα	Προβλήματα	Αναπαράσταση		Επίλυση	
Ελεν. Τ.		Αρχική Αξιολ	Τελ. Αξιολ	Αρχική	Τελική
	Πρόβ1	1	2	0	0
	Προβ 2	1	4	0	1
	Προβ 3	1	4	0	1

	Προβ 4	2	4	0	0

Πίνακας 13.

Η μαθήτρια στον πίνακα 13 δείχνει αρκετά μεγάλη πρόοδο και στην επίλυση και στην αναπαράσταση. Η πρόοδος αυτή μπορεί να διασφαλιστεί με την συνέχιση του προγράμματος.

Όνομα	Προβλήματα	Αναπαράσταση		Επίλυση	
Αναστ. Λεν.		Αρχική Αξιολ	Τελ. Αξιολ	Αρχική	Τελική
	Πρόβ1	1	4	0	1
	Προβ 2	2	3	0	0
	Προβ 3	4	4	1	1
	Προβ 4	4	2	0	0

Πίνακας 14.

Ο μαθητής που καταγράφεται στον πίνακα 14 είχε επίσης μια καλή πορεία εξέλιξης προς την χρήση αναλυτικών μεθόδων επεξεργασίας, που επηρεάζεται όμως από την δυσκολία του εκάστοτε προβλήματος. Στην αρχική αξιολόγηση έδειξε δύο αντίθετα προφίλ επεξεργασίας των προβλημάτων. Φαίνεται ότι επιλέγει ολιστική μέθοδο όταν δεν μπορεί να εντοπίσει τις σχέσεις του προβλήματος. Η πράξη/πράξεις που επιλέγει σε αυτήν την περίπτωση είναι τυχαίες. Έτσι η επίλυση συσχετίζεται με τα γνωστικά σχήματα του μαθητή για το πρόβλημα αφού γνωρίζει να κάνει πράξεις.

2.6. Πρωτόκολλα προβλημάτων

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα ευρήματα από την αξιολόγηση των μεθόδων επεξεργασίας της αναπαράστασης με βάση τα πρωτόκολλα παρατήρησης τα οποία συμπληρώθηκαν για κάθε μαθητή της πειραματικής ομάδας (5 μαθητές).

ΜΑΘΗΤΕΣ	**ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΕΣ 26-4-2018 ως 14-6-2018**																							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**17**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**

N=5																								
ΑΝΑΣΤ Χ	3	3	1	4	4	3	1	1	3	2	4	4	2	1	1	4	2	2	1	2	*	4	4	4
ΜΑΡ	4	4	4	4	4	4	4	4	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
ΕΝΤΟΥ	4	2	2	4	4	4	3	4	4	4	4	4	4	1	4	3	3	4	4	3	4	4	4	4
ΕΛΕΝ	4	3	1	4	3	3	1	2	2	2	4	4	3	1	0	3	1	4	1	0	1	2	4	3
ΑΝΑΣΤ	3	4	2	3	1	2	3	2	3	*	4	3	2	1	3	3	*	4	1	1	3	2	4	4

Πίνακας 15. *Πρωτόκολλα προβλημάτων Ο αστερίσκος (*) σε κάποια κελιά του πίνακα υποδηλώνει ότι συγκεκριμένοι μαθητές απουσίαζαν κατά την ημέρα μιας προγραμματισμένης διδακτικής παρέμβασης*.

Στον πίνακα 15 αποτυπώνονται οι τιμές των 4 κατηγοριών που προέκυψαν από την ταξινόμηση των μεθόδων επεξεργασίας που υιοθέτησαν οι μαθητές της πειραματικής ομάδας κατά φάση της αναπαράστασης του προβλήματος και η οποία περιλάμβανε οποιοδήποτε σχέδιο/ πίνακα ή διάγραμμα βοηθούσε στην αναπαράσταση των στοιχείων και των σχέσεων του προβλήματος. Από την παρατήρηση του πίνακα καταγράφεται θετικό αποτέλεσμα για όλους τους μαθητές της ομάδας. Τρεις (3) από τους πέντε (5) μαθητές απέκτησαν σημαντικές δεξιότητες στη χρήση αναλυτικών ή σχεδόν αναλυτικών μεθόδων, ένας (1) είχε σημαντική βελτίωση και (1) είχε σταθερή πορεία στη χρήση αναλυτικών μεθόδων.

Αναλυτικότερα η πρώτη μαθήτρια του δείγματος της πειραματικής ομάδας εμφανίζεται να υιοθετεί αναλυτικές μεθόδους επεξεργασίας της αναπαράστασης στα μισά από τα προβλήματα που δόθηκαν. Το ποσοστό των τιμών 3 και 4 ανέρχεται στο 50% (11/24) των προβλημάτων. Ο δεύτερος μαθητής του πίνακα παρουσιάζει μια σταθερή πορεία χρήσης αναλυτικών μεθόδων σχεδόν σε όλα τα προβλήματα. Ο τρίτος μαθητής του πίνακα δείχνει πολύ συχνή χρήση αναλυτικών μεθόδων (18/24 προβλήματα). Ο τέταρτος μαθητής που είχε μεγάλες δυσκολίες στην αξιολόγηση των 4 προβλημάτων εμφανίζει σημαντική βελτίωση με αύξηση της συχνότητας των αναλυτικών μεθόδων επεξεργασίας σε 14 από τα 24 προβλήματα. Τέλος η τέταρτη μαθήτρια του πίνακα με παρόμοιες δυσκολίες δείχνει βελτίωση με χρήση αναλυτικών μεθόδων σε 13 από τα 24 προβλήματα. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να επισημάνουμε ότι η αναπαράσταση του προβλήματος είναι το πρώτο βήμα για την κατανόηση του προβλήματος και σχετίζεται θετικά με την επίλυσή του ( ), συνεπώς η αναλυτική μέθοδος επεξεργασίας της αναπαράστασης μπορεί να διδαχθεί σε μαθητές που δυσκολεύονται στην κατανόηση του προβλήματος και την συγκράτηση των πληροφοριών των σύνθετων προβλημάτων

Μια σημαντική παρατήρησή μας αφορά την εναλλαγή μεθόδων επιλεκτικά σε κάποια από τα προβλήματα και όχι την προοδευτική βελτίωση των μεθόδων από τις ολιστικές στις αναλυτικές. Φαίνεται ότι η εναλλαγή αυτή σχετίζεται με 2 ζητήματα:

- Τα λεκτικά προβλήματα που δίνονται στους μαθητές ως εξάσκηση στην εφαρμογή του αλγόριθμου που διδάσκεται και τα οποία αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως προβλήματα ρουτίνας (Verschaffel & De Corte, 1997, Selden, Selden, Hauk, & Mason, 1999, Zhu & Fan, 2006), δεν βοηθούν τους μαθητές στην υιοθέτηση αναλυτικών μεθόδων επεξεργασίας. Αμέσως μετά την ανάγνωση του προβλήματος προχωρούν άμεσα στην απλή εφαρμογή του αλγόριθμου με συνέπεια να επηρεάζεται και το γνωστικό τους ύφος, το οποίο τείνει προς το ολιστικό κατά την προσέγγιση των λεκτικών προβλημάτων. Αυτό σημαίνει ότι στα προβλήματα καθημερινής ζωής, τα οποία είναι σύνθετα, προχωρούν στην τυχαία επιλογή αριθμητικών δεδομένων αμέσως μόλις διαβάσουν το πρόβλημα.
- Τα αδύναμα γνωστικά σχήματα για ένα πρόβλημα δημιουργούσαν σημαντικά εμπόδια στην αναπαράστασή του, ενώ άλλα προβλήματα ήταν κοντά στην εμπειρία και στα ενδιαφέροντα των μαθητών γι' αυτό και η αναπαράσταση αυτών των προβλημάτων ήταν εξαιρετικά επιτυχής, τόσο ως προς την αναγνώριση των στοιχείων του προβλήματος, όσο και στην επεξεργασία των σχέσεων.
- Η δυσκολία κατανόησης κάποιων προβλημάτων λόγω των αδύναμων σχημάτων που διαθέτουν για αυτά αρκετοί μαθητές οδηγεί σε σταδιακή απόσυρση από κάθε προσπάθεια επίλυσης.

Η διδασκαλία αναλυτικών μεθόδων επεξεργασίας, οι οποίες περιλάμβαναν τη συστηματική επεξεργασία των χαρακτηριστικών στοιχείων του προβλήματος μέσω της αναπαράστασής τους με κάποιο σχέδιο, καθώς και οι διαδικασίες ελέγχου και διόρθωσης της αρχικής αναπαράστασης, φαίνεται ότι ήταν οι βασικοί παράγοντες που εμπλέκονται στην βελτίωση των μεθόδων και στη χρήση αναλυτικών τρόπων κατά την φάση επεξεργασίας για την αναγνώριση των στοιχείων και των σχέσεων του προβλήματος. Με το εύρημα αυτό συμφωνούν πολλές έρευνες. Hoogland and Pepin (2018) αναφέρονται στην αξία του σχεδίου του προβλήματος σε αντίθεση με την λεκτική περιγραφή του η οποία διευκολύνει την κατανόηση της κατάστασης του συγκεκριμένου προβλήματος (problem situation). Οι ίδιοι υποστηρίζουν ότι η περιγραφή τείνει να τοποθετεί τους μαθητές σε κατάσταση απάντησης πριν την εξερεύνηση του προβλήματος ενώ η σχεδίαση προϋποθέτει καλύτερη εξερεύνηση και έτσι είναι πιθανό να αλλάξουν στάσεις απέναντι στον τρόπο επίλυσης προβλημάτων (σελ. 37-38).

Ένας καθοριστικός επίσης παράγοντας της επιτυχίας του προγράμματος ήταν η τροποποίηση του νοήματος που διαμόρφωναν οι μαθητές για τους στόχους της μαθησιακής διαδικασίας και τη δική τους εμπλοκή σ' αυτήν, καθώς παρατηρήθηκαν θετικά κίνητρα εμπλοκής στο κάθε πρόβλημα που δόθηκε γεγονός που υποδεικνύει ότι η διδασκαλία των τρόπων αναπαράστασης του προβλήματος μπορεί να αποτελέσει ένα σημαντικό διδακτικό εργαλείο στην παιδαγωγική αντιμετώπιση των δυσκολιών των μαθητών στη μαθηματική επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής.

Κεφάλαιο 3ο : Συμπεράσματα

3.2. Επίλυση προβλημάτων

Η παρατήρηση που προηγήθηκε αναδεικνύει τη δυσκολία των μαθητών του δείγματος της έρευνας, να λύσουν προβλήματα τα οποία δεν είναι έξω από το πεδίο των καθημερινών εμπειριών τους αλλά δεν είναι αναλογικά όμοια με κάποια προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν ως παραδείγματα επίλυσης στην τάξη των μαθηματικών. Ο Radford (2013), εντοπίζει τη δυσκολία που συναντούν οι μαθητές, όταν μετατρέπουν την αφήγηση του μαθηματικού προβλήματος σε μαθηματικό συλλογισμό. Συνήθως οι μαθητές δεν αφιερώνουν τον χρόνο που χρειάζεται στην κατανόηση των δεδομένων και των σχέσεων μέσω της αναπαράστασή τους, είτε επειδή δεν διδάσκονται πώς ένα σχέδιο, το οποίο επικεντρώνεται στο μαθηματικό στόχο του προβλήματος, μπορεί να βοηθήσει την οργάνωση της σκέψης και την ανακάλυψη των σχέσεων του προβλήματος.

Οι μαθητές της πειραματικής ομάδας είχαν στατιστικά σημαντική βελτίωση στην επεξεργασία της αναπαράστασης του προβλήματος. Παρόμοιες έρευνες υπέδειξαν ότι οι μαθητές με δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων επωφελούνται όταν μαθαίνουν πώς να σχεδιάζουν ένα πρόβλημα και να εντοπίζουν μία προς μία τις σχέσεις (Saundry & Nicol, 2006, Μπάρμπας και συνεργάτες 2007).

3.1. Μαθησιακή διαδικασία

Τα μαθησιακά οφέλη των μαθητών με μαθησιακές και σχολικές δυσκολίες, όταν διδάσκονται σε μικρές ομάδες έχουν επισημανθεί σε πολλές έρευνες (Swanson, Hoskyn, & Lee, 1999). Επίσης οι ψυχολογικοί παράγοντες όπως η αυτοεκτίμηση, η αυτορρύθμιση και η χρήση στρατηγικών που επηρεάζονται αρνητικά από τις συνεχείς αποτυχίες στις σχολικές δοκιμασίες, έχουν συσχετιστεί θετικά με τις παρεμβάσεις σε παιδιά με συναισθηματικές δυσκολίες. Αυτό οφείλεται στις αλληλεπιδράσεις των μαθητών στις μικρές ομάδες και την ενθάρρυνση μεταξύ τους, να εκφραστούν χωρίς να βιώνουν απόρριψη, να έχουν τον απαραίτητο χρόνο να εργαστούν σε ένα αντικείμενο συστηματικά (Van Luit & Naglieri, 1999).

Όσο αφορά την αυτορρύθμιση και οι 5 μαθητές εργάζονταν και προσπαθούσαν να λύσουν το πρόβλημα ή σε επιπρόσθετες δραστηριότητες εξάσκησης, χωρίς να τους αποσπά ούτε το χτύπημα του κουδουνιού. Όσο αφορά τις αλληλεπιδράσεις, μία μαθήτρια και ένας μαθητής είχαν χαμηλές αλληλεπιδράσεις στην τάξη που φοιτούν αλλά και στην ομάδα στην αρχή της παρέμβασης. Προοδευτικά ενισχύονταν αλλά δεν έφτασαν το επιθυμητό επίπεδο. Ωστόσο βίωναν το αίσθημα του ανήκειν στην ομάδα ποικιλοτρόπως. Για να επιτευχθεί αυτό και για να αξιολογηθεί κυρίως οργανώσαμε 3 συναντήσεις απογευματινές για παιχνίδι και κουβέντα. Τα παιδιά ενθουσιάστηκαν όταν μετά την τελική αξιολόγηση κλήθηκαν να φάμε πίτσα όπως είχαμε υποσχεθεί όταν χορηγήσαμε ένα πρόβλημα όπου αναφέρονταν τα ονόματά τους και το μοίρασμα του λογαριασμού. Είναι αξιοσημείωτο ότι στο πρόβλημα αυτό και οι πέντε μαθητές έκαναν αναλυτική αναπαράσταση και έλυσαν το πρόβλημα ενώ κατά την διαδικασία της επίλυσης ήταν αρκετά ευδιάθετοι. Βέβαια δεν θέλουμε να υπερτονίσουμε τα εξωτερικά κίνητρα με αυτήν την αναφορά αλλά το πώς οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες που έχουν νόημα. Το πρόβλημα ήταν το παρακάτω..

Ο Αναστάσης, ο Μάριος, ο Έντουαρντ, η Ελένη και η Αναστασία πήγαν το Σάββατο το μεσημέρι στην πιτσαρία. Παρήγγειλαν 3 πίτσες, 2 μακαρονάδες, 3 αναψυκτικά, 2 χυμούς και 5 παγωτά. Η πίτσα έκανε 4 ευρώ, η μακαρονάδα 3,50 ευρώ, το ένα αναψυκτικό 1,80 ευρώ, ο ένας φυσικός χυμός 2,20 ευρώ το ένα παγωτό 2 ευρώ και το εμφιαλωμένο νερό 0,50 ευρώ. Τα παιδιά μοιράστηκαν το λογαριασμό. Πόσα πλήρωσε ο καθένας;

Για τους μαθητές αυτό ήταν ένα πραγματικό πρόβλημα επειδή είχε τα ονόματά τους και επειδή δημιουργεί ευχάριστη εικόνα η βίωσή του.

Ένα ακόμη συμπέρασμα από την παρατήρηση ήταν, ότι όλοι οι μαθητές έπαιρναν πρωτοβουλίες, να ζωγραφίσουν το πρόβλημά στον διαδραστικό πίνακα. Γενικά επειδή για τα παιδιά η τεχνολογία είναι πόλος έλξης, αξιοποιήσαμε τον διαδραστικό πίνακα του Τμήματος Ένταξης (Τ. Ε.) όπου γινόταν η ενισχυτική, κατά τις ώρες που το Τ.Ε δεν είχε μαθητές.

3.3. Αναπαράσταση και λύση προβλήματος

Σύμφωνα με τα στατιστική επεξεργασία της σχέσης αναπαράστασης και επίλυσης τα ευρήματα της έρευνας υπέδειξαν ότι η σχέση αυτή είναι στατιστικά σημαντική. Αυτό εξηγεί και το νόημα της παρέμβασης που κάναμε πάνω στην αναπαράσταση του προβλήματος. Οι μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης χρησιμοποιούν ένα ρεπερτόριο στρατηγικών για την επίλυση προβλημάτων (Carpenter & Moser, 1982) χωρίς να έχουν διδαχθεί κάποιες από αυτές (Siegler & Stern, 1998). Κατά τον Mayer (1992), η ανάλυση της ικανότητας επίλυσης λεκτικών προβλημάτων υποδεικνύει ότι απαιτούνται επιμέρους ικανότητες όπως η ικανότητα αναπαράστασης του προβλήματος. Επί πλέον μέσα από την αναπαράσταση οι μαθητές οικοδομούν σημαντικά δίκτυα που ορίζουν τις σχέσεις ανάμεσα στα κύρια σημεία του προβλήματος. Το μεγαλύτερο κομμάτι της φάσης επίλυσης υφίσταται σε αυτή τη σημαντική αναπαράσταση και όχι στη μαθηματική αναπαράσταση που προκύπτει. Με άλλα λόγια οι μαθητές δεν αναπαριστούν μαθηματικά ένα πρόβλημα και μετά χειρίζονται τη μαθηματική αναπαράσταση αλλά χρησιμοποιούν την κατανόηση των καταστάσεων του προβλήματος για τον μετασχηματισμό του, πριν την μαθηματική του αναπαράσταση (Riley et al. 1988), ωστόσο η διδασκαλία που σχετίζεται με την επίλυση προβλημάτων επικεντρώνεται συνήθως σε μεμονωμένες ικανότητες και τακτικές, αγνοώντας άλλες όψεις της διαδικασίας επίλυσης, που σχετίζονται με τις επιλογές και τις αποφάσεις που απαιτούνται κατά την διαδικασία επεξεργασίας των δεδομένων και ζητούμενων μέσω της αναπαράστασης του προβλήματος, με τα γνωστικά σχήματα που το ίδιο το παιδί διαθέτει και επομένως κατανοεί. Χωρίς γνωστική καθοδήγηση τα προβλήματα υποβαθμίζονται σε προβλήματα «ρουτίνας» υπό τον περιορισμό της αλγοριθμικής αναπαράστασης (Stein, 1996, Ball, Goffney & Bass, 2015). Η έρευνα τα Smith (2003) σε παρόμοια ηλικία μαθητών υπέδειξε ότι οι ζωγραφιές των παιδιών για το πρόβλημα βοηθούν και τα δύο, και να διαχειριστούν τις ζωγραφιές ως μαθηματικά αντικείμενα και για να αναπαραστήσουν την σκέψη τους. Παρότι οι τρόποι αναπαράστασης που επιλέγουν οι μαθητές διαφέρουν όλα τα προϊόντα σκέψης των παιδιών έχουν την μαθηματική λογική τους και με βάση αυτή την λογική μπορούν να επεξεργαστούν το πρόβλημα.

3.4. Εκπαίδευση σε μεθόδους επεξεργασίας

Όσο αφορά την ερευνητική μας υπόθεση για το αν οι μαθητές της πειραματικής ομάδας μπορούν να βελτιώσουν τις μεθόδους επεξεργασίας του προβλήματος αν καθοδηγηθούν συστηματικά, τα συμπεράσματά μας, που στηρίζονται στα ευρήματα της ποιοτικής και της στατιστικής επεξεργασίας είναι θετικά. Όλοι οι μαθητές επωφελήθηκαν ενώ πιο ορατά είναι τα αποτελέσματα για τους μαθητές με πιο αδύναμα σχήματα που δεν μπορούσαν να λύσουν κανένα πρόβλημα. Αυτοί οι μαθητές ανακάλυψαν ένα τρόπο να αξιοποιούν τις ίδιες τους τις δυνατότητες γιατί δεν ήξεραν τον τρόπο να εργαστούν όταν έχουν να επιλύσουν ένα πρόβλημα. Έτσι βελτίωσαν σημαντικά την μέθοδο επεξεργασίας προβλημάτων, πλησιάζοντας όλο και πιο κοντά αναλυτικές μεθόδους επεξεργασίας της αναπαράστασης. Αυτό επιτεύχθηκε χάρη στην διδακτική ευελιξία του προγράμματος μέσω της ενισχυτικής διδασκαλίας, για την αντιμετώπιση δυσκολιών που σχετίζονται με τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά εννοιών πάνω στα οποία οι μαθητές χρειάστηκε είτε να τα ανακαλύψουν είτε να δομήσουν τις έννοιες μέσα από τα χαρακτηριστικά του με χειραπτικά εργαλεία, με βιωματικές αναπαραστάσεις και πειραματισμούς. Όπου επίσης χρειάστηκε έγινε επανορθωτική διδασκαλία των τεσσάρων πράξεων σε μαθητές που εμφάνισαν δυσκολίες στις διαδικασίες του αλγόριθμου.

Τέλος είναι επίσης ένα σημαντικό εύρημα, ότι παρά την μικρή υπεροχή στην αρχική αξιολόγηση στην επίλυση προβλημάτων η ομάδα ελέγχου δεν είχε καμία αλλαγή. Οι δυσκολίες των μαθητών αυτής της ομάδας παραμένουν και χρόνο με το χρόνο συσσωρεύονται ώσπου να εξελιχθούν σε πλήρη σχολική αποτυχία στις επόμενες βαθμίδες. Όσο αφορά την επίλυση προβλημάτων που τα παιδιά διδάσκονται στο Δημοτικό Σχολείο, είναι μια ελάχιστη μαθηματική ικανότητα που όλα τα παιδιά πρέπει να αποκτήσουν για να μπορέσουν να ανταπεξέλθουν στα πολλαπλά θέματα της καθημερινότητας που θα αντιμετωπίσουν στην ενήλικη ζωή. Αυτό και μόνο είναι ενδεικτικό του αναγκαίου επαναπροσδιορισμού της ενισχυτικής διδασκαλίας για όσα παιδιά έχουν σχολικές δυσκολίες.

Βιβλιογραφικές παραπομπές

Anderson, J., Reder, L., Simon, H., Ericsson, K., & Glaser, R. (1998). Radical Constructivism and Cognitive Psychology. *Brookings Papers on Education Policy*, (1), 227-278. Ανακτήθηκε από: http://www.jstor.org/stable/20067198

Arcavi, A. (2000). Problem-driven research in mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, 19(2), 141-173.

Blum, W., Niss, M., and Huntley, I., (eds.), (1989). «*Modelling, Applications and Applied Problem Solving-Teaching Mathematics in a Real Context*», Horwood, Chichester

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 333-339.

Blackwell, L. S., Trzesniewski, K. H., & Dweck, C. S. (2007). Implicit theories of intelligence predict achievement across an adolescent transition: A longitudinal study and an intervention. *Child Development*, 78(1), 246-263.

Borko, H. (2004). Professional development and teacher learning: Mapping the terrain. *Educational Researcher*, 33(8), 3-15.

Briars, D. J., & Larkin, J. H. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and instruction*, 1(3), 245-296.

Brown, J. S., & Burton, R. R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. Cognitive Science, 2(2), 155-192.

Brown, S. D., & Gore Jr, P. A. (1997). Discriminant and predictive validity of academic self-concept, academic self-efficacy, and mathematics-specific self-efficacy. *Journal of Counseling Psychology*, 44(3), 307.

Bull, R., Espy, K. A., & Wiebe, S. A. (2008). Short-term memory, working memory, and executive functioning in preschoolers: Longitudinal predictors of mathematical achievement at age 7 years. *Developmental neuropsychology*, 33(3), 205-228.

Bryant, D. P., Bryant, B. R., & Hammill, D. D. (2000). Characteristic behaviors of students with LD who have teacher-identified math weaknesses. *Journal of Learning Disabilities*, 33(2), 168-177.

Βάμβουκας, Μ. (1982). *Κίνητρα διδασκαλικού επαγγέλματος*: Ηράκλειο: Αυτοέκδοση.

Calhoon, M. B., Emerson, R. W., Flores, M., & Houchins, D. E. (2007). Computational fluency performance profile of high school students with mathematics disabilities. *Remedial and Special Education*, 28(5), 292-303.

Charalambous, C. Y., Kyriakides, L., & Philippou, G. N. (2012). Developing a test for exploring student performance in a complex domain: Challenges faced, decisions made, and implications drawn. *Studies in Educational Evaluation*, 38(3), 93-106.

Chung, K. H., & Tam, Y. H. (2005). Effects of cognitive-based instruction on mathematical problem solving by learners with mild intellectual disabilities. *Journal of Intellectual and Developmental Disability*, 30, 207–216.

Clements, M. K. (1980). Analyzing children's errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 11(1), 1-21.

Clements, D. H. (2007). Curriculum research: Toward a framework for" research-based curricula". *Journal for research in mathematics education*, 35-70.

Cobb,P., and Steffe,L.,P., (1993). «The constructivist researcher as a teacher and model builder», *Journal for Research in Mathematics Education*, vol.14, pp. 83 - 94.

Cohn, R. (1961). Dyscalculia. Archives of Neurology, 4, 301-317

Daley, C.E. & Nagle, R.I. (1996). Relevance of WISC-III indicators for assessment of learning disabilities, *Journal of Psychoeducational Assessment*, 14, 320-333.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1981). Children's solution processes in elementary arithmetic problems: Analysis and improvement. *Journal of Educational Psychology*, 58, 765-779.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1985a). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *Journal of Mathematical Behavior,* 4, 3-21.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1985b. Μάρτιος). *An empirical validation of computer models of children's word problem solving*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. The Journal of Mathematical Behavior, 4(1), 3-21.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1995). *Δεξιότητες των παιδιών και διαδικασίες που χρησιμοποιούν κατά την επίλυση στοιχειωδών λεκτικών προβλημάτων*. Στο Βοσνιάδου. Σ (επιμ) Ψυχολογία των Μαθηματικών, Αθήνα: Gutenberg.

De Smedt, B., Janssen, R., Bouwens, K., Verschaffel, L., Boets, B., & Ghesquière, P. (2009). Working memory and individual differences in mathematics achievement: A longitudinal study from first grade to second grade. *Journal of Experimental Child Psychology*, 103(2), 186-201. doi: https://doi.org/10.1016/j.jecp.2009.01.004

De Smedt, B. & Gilmore, C. K. (2011). Defective number module or impaired access? Numerical magnitude processing in first graders with mathematical difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology*, 108(2), 278-292.

Driver, M. K. & Powell, S. R. (2015). Symbolic and nonsymbolic equivalence tasks: The influence of symbols on students with mathematics difficulty. *Learning Disabilities Research & Practice*, 30(3), 127-134.

Duncan, G. J., et al. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*, 43(6), 1428.

Dunham, P., & Osborne, A., (1991). Learning how to see: Students' graphing difficulties, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 13, No 4, pp. 35-49.

Farnham-Diggory, S. (1994). Paradigms of knowledge and instruction. *Review of Educational Research*, 64(3), 463-477.

Flavell, J., H. (1981). Cognitive monitoring. In W., P. Dickson (ed) *Children's oral communication skills,* 35-60. New York Academic Press

Fletcher, J. M., Lyon, G. R., Fuchs, L. S., & Barnes, M. A. (2018). *Learning disabilities: From identification to intervention*: Guilford Publications.

Flores, M. M. (2009). Teaching subtraction with regrouping to students experiencing difficulty in mathematics. Preventing School Failure: *Alternative Education for Children and Youth*, 53(3), 145-152.

Floyd, R. G., Evans, J. J., & Mcgrew, K. S. (2003). Relations between measures of Cattell-Horn-Carroll (CHC) cognitive abilities and mathematics achievement across the school-age years. *Psychology in the Schools*, 40(2), 155-171.

Fuchs, D. & Fuchs, L. S. (2001). Responsiveness to intervention: A blueprint for practitioners, policymakers, and parents. *Teaching Exceptional Children*, 38(1), 57–61.

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Cirino, P. T., & Fletcher, J. M. (2008). Intensive intervention for students with mathematics disabilities: Seven principles of effective practice. *Learning Disability Quarterly*, 31(2), 79-92.

Fuchs, L. S., Seethaler, P. M., Powell, S. R., Fuchs, D., Hamlett, C. L., & Fletcher, J. M. (2008). Effects of preventative tutoring on the mathematical problem solving of third-grade students with math and reading difficulties. *Exceptional Children*, 74(2), 155-173.

Fuchs, L. S., et al. (2014). Does calculation or word-problem instruction provide a stronger route to prealgebraic knowledge? *Journal of Educational Psychology*, 106(4), 990.

Geary, D. C. (2006). Dyscalculia at an early age: Characteristics and potential influence on socio-emotional development. *Encyclopedia on early childhood development*, 15, 1-4.

Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 37(1), 4-15.

Geary, D.C. & Hoard M.K. (2001). Numerical and arithmetical deficits in learning-disabled children: Relation to dyscalculia and dyslexia. *Aphasiology*, 15 (7), 635-647

Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., Nugent, L., & Numtee, C. (2007). Cognitive Mechanisms Underlying Achievement Deficits in Children with Mathematical Learning Disability. *Child Development*, 78(4), 1343-1359.

Gersten, R., Chard, D. J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P., & Flojo, J. (2009). Mathematics instruction for students with learning disabilities: A meta-analysis of instructional components. *Review of Educational Research*, 79(3), 1202-1242.

Griffin, C. C., Jitendra, A. K., & League, M. B. (2009). Novice special educators’ instructional practices, communication patterns, and content knowledge for teaching mathematics. *Teacher Education and Special Education*, 32(4), 319-336.

Goldin, G. (1998). Representations and the psychology of Mathematics education: Part II, *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 135-165.

Hilbert, S., Bruckmaier, G., Binder, K. et al, (2018). Prediction of elementary mathematics grades by cognitive abilities, *Eur J Psychol Educ*, 1-19.

Hoogland, K., Pepin, B., De Koning, J., Bakker, A., & Gravemeijer, K. (2018). Word problems versus image-rich problems: an analysis of effects of task characteristics on students’ performance on contextual mathematics problems. *Research in Mathematics Education*, 20(1), 37-52.

Θεοδούλου,, Ρ. & Γαγάτσης Α. (2003). *Μια εικόνα αξίζει χίλιες λέξεις … ποιο είδος εικόνας όμως βοηθά στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος*; Συνέδριο διδακτικής των μαθηματικών. Αθήνα.

IDEA, 2002 (αναθεώρηση). Ανάκτηση από https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metacrs2207/m1/1/high_res_d/RS20366_2002Jan11.pdf

Jackson, C. D., & Leffingwell, J. R. (1999). The role of instructors in creating math anxiety in students from kindergarten through college. *The Mathematics Teacher*, 92(7), 583-586.

Jitendra, A., & Xin, A. (1997). Mathematical word problem solving instruction for students with mild disabilities and students at risk for failure: A research synthesis. *Journal of Special Education*, 30(4), 412–438.

Kagan, J., & Kogan, N. (1970). Individual variation in cognitive processes. *Carmichael's manual of child psychology*, 1, 1273-1365. https://ia801602.us.archive.org/0/items/in.ernet.dli.2015.264210/2015.264210.TheManual_text.pdf.

Kavale, K., & Forness, S. (1985). *The Science of learning disabilities*, San Diego, CA: College-Hill Press.

Kavale, K.A. & Forness, S.R. (2000). “The Great Divide in Special Education: Inclusion, Ideology and Research”, in *Advances in Learning and Behavioural Disabilities*, Volume 14, pp 179-215.

Kavale, K. A. & Forness, S. R. (2000). What Definitions of Learning Disability Say and Don’t Say A Critical Analysis, *Journal of learning disabilities*, 33(3), 239-256?

Kemler-Nelson, D. G., & Smith, J. D. (1989). Analytic and Holistic Processing in Retlletion - Impulsivity and Cognitive Development. In T. Globerson & T. Zelniker (Eds), *Cognitive Style and Cognitive Development*. New Jersey: Ablex Publishing Corporation, 116-140.

Kilpatrick, J. (1985). *A retrospective account of the past 25 years of research on teaching Math.* Problem Solving, in Silver, E. (ed).

Kilpatrick, J. Swafford, J. & Findell, B. (eds.), 2001. *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education, National Research Council. Washington, DC: National Acade

Kilpatrick, J. (2001). Understanding mathematical literacy: The contribution of research. *Educational Studies in Mathematics* 47: 101. Ανακτήθηκε από https://doi.org/10.1023/A:1017973827514

Kilpatrick, J. (2009). The mathematics teacher and curriculum change. PNA, 3(3), 107–121.Adding it up: Helping children learn mathematics. In J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell (Eds.). Washington, DC: National Academy Pressmy Press.

Kingsdorf, S., & Krawec, J. (2014). Error analysis of mathematical word problem solving across students with and without learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, 29(2), 66-74.

Kirk, S. A. & Bateman, B. (1962). Diagnosis and remediation of learning disabilities. *Exceptional Children*, 26, 73–78.

Kogan, N. (1976). Cognitive Styles in Infancy and Early Childhood (Psychology Revivals). London: Psychology Press.

Καΐλα Μ. (1995): *Η σχολική αποτυχία. Από την «Οικογένεια» του σχολείου, στο «Σχολείο» της οικογένειας*, Αθήνα, Ελληνικά Γράμματα.

Κωσταρίδου-Ευκλείδη, Α. (1992). *Γνωστική Ψυχολογία*. Θεσσαλονίκη: Art-Text, 24-26.

Laborde, C. (1994). *Working in small groups: A learning situation*? In Biehler, R., Scholz, R., Strasser, R., and Winkelman, B., (eds), pp. 147-158.

Lent, R. W., Brown, S. D., & Gore Jr, P. A. (1997). Discriminant and predictive validity of academic self-concept, academic self-efficacy, and mathematics-specific self-efficacy. *Journal of Counseling Psychology*, 44(3), 307.

Lerner, J. (1993*). Learning Disabilities, theories, diagnosis and teaching strategies*, Horighton Mittlin Company. Bonston.

Lenz, B. K. (1992). In the Spirit of Strategies Instruction: Cognitive and Metacognitive Aspects of the Strategies Intervention Model. In T. Globerson & T. Zelniker (Eds), *Cognitive Style and Cognitive Development.* New Jersey: Ablex Publishing Corporation, 116-140.

Lerman, S., (1989). Constructivism,Mathematics and Mathematics Education. *Educ Stud. in Math*., vol.20, 211-223.

Lesh, R., and Landau, M. (1983*). Conceptual Models and applied mathematical problem solving research*, in Lesh and Landau (eds).

Lesh, R., and Landau, M., (eds), (1983). *Acquisition of mathematics concepts and processes*, New York: Academic Press.

Lester, F., K., Jr., (1985). *Methodological Considerations in research on Mathematical Problem-Solving Instruction*, in Silver (ed), 1985.

Lester Jr, F. K. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1), 245-278.

Loewenberg Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407.

Lubin, A., Poirel, N., Rossi, S., Pineau, A., & Houdé, O. (2009). Math in actions: Actor mode reveals the true arithmetic abilities of French-speaking 2-year-olds in a magic task. *Journal of Experimental Child Psychology*, 103(3), 376-385.

Lubin, A., Vidal, J., Lanoë, C., Houdé, O., & Borst, G. (2013). Inhibitory control is needed for the resolution of arithmetic word problems: A developmental negative priming study. *Journal of Educational Psychology*, 105(3), 701.

Maloney, E. A., & Beilock, S. L. (2012). Math anxiety: who has it, why it develops, and how to guard against it. *Trends in cognitive sciences*, 16(8), 404-406.

Marsh, H. W. (1990). Influences of internal and external frames of reference on the formation of maths and English self-concepts. *Journal of Educational Psychology*, 182, 107 - 116.

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition,* 2nd ed. New York, NY, US: W H Freeman/Times Books/ Henry Holt & Co.

Martin A. S., (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective, *Journal for Research in Mathematics Education*, vol.26, pp. 114-145.

Marshall, S., P., (1995). *Schemas in problem solving*, Cambridge Univ. Press.

Mayer, R.E. and M.C. Wittrock (2006). “Problem solving”, in P.A. Alexander and P.H. Winne (eds.), *Handbook of Educational Psychology*, Erlbaum, Mahwah, NJ, pp. 287-303.

McCrink, K., & Wynn, K. (2004). Large-number addition and subtraction in infants. *Psychological Science*, 15, 776-781

Messick, S. (1984). The nature of cognitive styles: Problems and promise in educational practice. Educational Psychologist, 19(2), 59-74.

Miller, A. (1987). Cognitive styles: An integrated model. Educational Psychology, 7(4), 251-268.

Montague, M. (1998). Research on metacognition in special education. In T. Scruggs & M. Mastropieri (Eds.), *Advances in learning and behavioral disabilities* (Vol. 12, pp. 151–183). Greenwich:JAI Press.

Montague, M. (2003). Solve it: *A mathematical problem-solving instructional program*. Reston:

Exceptional Innovations.

Montague, M., Applegate, B., & Marquard, K. (1993). Cognitive strategy instruction and mathematical problem-solving performance of students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice*, 29, 251–261.

Morgan, P. L., Farkas, G., & Wu, Q. (2009). Five-year growth trajectories of kindergarten children with learning difficulties in mathematics. *Journal of Learning Disabilities*, 42(4), 306-321.

Moreno-A., L., & Waldegg, G., (1993). Constructivism and mathematics education, *Int. J. Math. Educ. Sci. Tchnol.*, vol. 24, No 5, pp. 653-661.

Mtetwa, D., & Garofalo, J. (1989). Beliefs about mathematics: An overlooked aspect of student difficulties. *Academic Therapy*, 24(5), 611-618.

Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). TIMSS 2011 international results in mathematics. *International Association for the Evaluation of Educational Achievement*. Herengracht 487, Amsterdam, 1017 BT, The Netherlands.

Ανακτήθηκε από: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED544554.pdf

Methe, S. A., et al. (2011). Innovations and Future Directions for Early Numeracy Curriculum-Based Measurement: Commentary on the Special Series. *Assessment for Effective Intervention*, 36(4), 200-209.

Μπάρμπας, Γ. (2000). *Σχολική υπο-επίδοση στα Μαθηματικά και Ενισχυτική Διδασκαλία,* Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Μπάρμπας, Γ. Ψαθάς, Σ., Λαζοπούλου, Ε., Γιατράκου Α. και Σμοκοβίτου, Κ. (2007). Αξιολόγηση των μεθόδων επεξεργασίας μαθηματικών προβλημάτων από μαθητές με χαμηλή σχολική επίδοση. Στα πρακτικά του 2ου πανελληνίου συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ «*Τυπικά και άτυπα μαθηματικά: χαρακτηριστικά, σχέσεις και αλληλεπιδράσεις στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης*» (επιμ. Χ. Σακονίδης, Δ. Δεσλή), σελ. 379-389, «τυπωθήτω».

Μπάρμπας, Γ. (2007). Σχολείο και μάθηση- Μια αποκλίνουσα σχέση. Θεσσαλονίκη, Προμηθεύς.

Μπάρμπας, Γ. Βερμέουλεν, Φ., Κιοσέογλου Γ. και Μενεξές Γ. (2008). Ψυχομετρικό κριτήριο μαθηματικής επάρκειας για παιδιά και εφήβους, Στο πλαίσιο του έργου ΕΠΕΑΕΚ «*Ψυχομετρική - διαφορική αξιολόγηση παιδιών και εφήβων με μαθησιακές δυσκολίες*», Θεσσαλονίκη.

Μπάρμπας, Γ. και Βερμέουλεν, Φ. (2009). Η αρνητική εξέλιξη των σοβαρών δυσκολιών στα Μαθηματικά στη διάρκεια της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Στα πρακτικά του 3ου πανελληνίου συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ «*Μαθηματική εκπαίδευση και οικογενειακές πρακτικές*», επιμέλεια Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή και Γ. Φεσάκης, σελ. 659-668, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ρόδος.

Nelson, G., & Powell, (2017). S. R. A Systematic Review of Longitudinal Studies of Mathematics Difficulty. *Journal of Learning Disabilities.*

Niss, M., Blum, W., and Huntley, I., (eds.), 1991, «*Teaching of Mathematical Modelling and Applications*», Horwood, Chichester.

Niss, M., & Højgaard, T. (2011). *Competencies and mathematical learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde: Roskilde Universitet. Download date: 06./2018

Nickerson, R. S., Perkins, D. N., & Smith, E. E. (2014). *The teaching of thinking*: Routledge.

Nunes, T., et al. (2007). The contribution of logical reasoning to the learning of mathematics in primary school. *British Journal of Developmental Psychology*, 25(1), 147-166.

OECD. (2003). *The PISA 2003 assessment framework: Mathematics, reading, science and problem-solving knowledge and skills*. Paris: OECD. Ανάκτηση από: http://www.oecd.org/dataoecd/46/14/33694881.pdf/

OECD. (2004b). *Problem solving for tomorrow's world: First measures of cross-curricular competencies from PISA*. Paris: OECD.

OECD. (2013a). *PISA 2012 results: Ready to learn: Students' engagement, drive and self-beliefs* (Vol. III). Ανάκτηση από http://dx.doi.org/10.1787/97892642001170-en

OECD. (2013b). *PISA 2012 assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy*. Ανάκτηση από http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en

Οικονόμου, Π. (2000). Στάσεις, αντιλήψεις και πρακτικές των διδασκόντων, σ. 65. Στο Μ. Τζεκάκη & Ι. Δεληγιώργης (Επιμ.), *Έρευνα για εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών* (σσ. 49-79): Αυτοέκδοση.

Οικονόμου, Π., & Τζεκάκη. Μ. (1999). Στάσεις, αντιλήψεις και πρακτικές των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των Μαθηματικών. *Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, 4, 37-65.

Piaget, J. (1965). *The child's conception of number*. New York: Norton.

Pitri, E. (2004). Situated learning in a classroom community. *Art Education*, 57(6), 6-12.

Polya, G. (1965), «*Mathematical Discovery*», Wiley, 2 vols.

Polya, G. (1973). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method* (Princeton Science Library) (p. 149). *Princeton University Press*. Kindle Edition.

Polya, G., (1973 a). «*How to solve it*», Princeton Univ. Press.

Polya, G. (1973 b). «*Induction and analogy in Mathematics*», Princeton Univ. Press.

Rohde, T. E., & Thompson, L. A. (2007). Predicting academic achievement with cognitive ability. *Intelligence*, 35(1), 83–92.

Richards, J. (1991). Mathematical discussions *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 13-51): Springer.

Riding, R. J., & Sadler-Smith, E. (1997). Cognitive style and learning strategies: Some implications for training design. *International Journal of Training and Development*, 1(3), 199-208.

Riley, M. S. (1984*). Development of children's problem-solving ability in arithmetic*. National Inst. of Education (ED), Washington, DC

Riley, MS., Greene, J.G., & Heller, J.H. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathemarical thinking* (pp. l53- 196). New York: Academic.

Russell, R. L., & Ginsburg, H. P. (1984). Cognitive analysis of children's mathematics difficulties. *Cognition and instruction*, 1(2), 217-244.

NCTM, (1989). *Curriculum and Evaluation Standards*.

Saracho, O. N. (1997) *Teachers and Students' Cognitive Styles in Early Childhood Education*. Westport, CT: Greenwood Publishing Group.

Saundry, C., & Nicol, C. (2006). Drawing as problem-solving: Young children's mathematical reasoning through pictures. Paper presented at the Proceedings of the 30th Conference of the *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Saxe, G. B. (2015). *Culture and cognitive development: Studies in mathematical understanding*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Schoenfeld, A. H. (1983). «*Episodes and executive decisions in mathematical problem solving*», in Lesh, R., and Landau, M., (eds).

Schoenfeld, A., H. (1985). *Mathematical Problem Solving*, Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition. *Cognitive science and mathematics education*, 189, 215.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically Problem-Solving Meta Cognition and Sense-Making in Mathematics. *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*: New York: MacMillan.

Schoenfeld, A., H. (1994). A Discourse on methods, *Journal for Research in Mathematics Education*, vol.25, No6, pp.697-710.

Schoenfeld, A., H. (2013). *Cognitive science and mathematics education*: Routledge.

Schroeder, T. L. & Lester, F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving, *New directions for elementary school mathematics*, 31-42.

Schifter (Eds.), *Representation in school mathematics: A unifying research perspective*, 263-274. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Selden, A., Selden, J., Hauk, S., & Mason, A. (1999). *Do calculus students eventually learn to solve non-routine problems*? Tennessee Technological University Technical Report No. 1999-5. http://math.tntech.edu/techreports/TR_1999_5.pdf

Sherman, H. 1972, «*Common Elements in New Mathematics Programs: Origins & Evolution*», Teachers College Press, C.U.

Silver, E., A. (1987). *Foundations of Cognitive Theory and Research for Mathematics Problem-Solving instruction,* in Schoenfeld (ed) 1987.

Siegel, L. S., & Ryan, E. B. (1989). The development of working memory in normally achieving and subtypes of learning- disabled children. *Child Development*, 973-980.

Smith, S. P. (2003). *Children's representations of problems*. *Στο* J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D.

Stamovlasis, D., & Tsaparlis, G. (2005). Cognitive variables in problem solving: A nonlinear approach. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 3(1), 7-32.

Steffe, L., P., and Kieren, T., (1994). Radical constructivism and mathematics education», Journal for Research in Mathematics Education, vol.25, pp.711-733. *The School Mathematics Project, 1991*, 16-19, Cambridge Univ. Press.

Sternberg, R.J., (1998). Metacognition, abilities, and developing expertise: What makes an expert student*? Instructional Science* 26: 127.

Stock, P., Desoete, A., & Roeyers, H. (2010). Detecting children with arithmetic disabilities from kindergarten: evidence from a 3-year longitudinal study on the role of preparatory arithmetic abilities. *Journal of Learning Disabilities*, 43(3), 250-268.

Swanson, H. L. (1993). An information processing analysis of learning-disabled children's problem solving. *American Educational Research Journal*, 30(4), 861-893.

Swanson, H. L., Hoskyn, M., & Lee, C. (1999). *Interventions for students with learning disabilities*. New York, NY: Guilford.

Swanson, H. L. (1999). *Interventions for students with learning disabilities: A meta-analysis of treatment outcomes*: Guilford Press.

Swanson, H. L., & Sachse-Lee, C. (2001). Mathematical problem solving and working memory in children with learning disabilities: Both executive and phonological processes are important. *Journal of Experimental Child Psychology*, 79(3), 294-321.

Swanson, H. L., & Beebe-Frankenberger, M. (2004). The relationship between working memory and mathematical problem solving in children at risk and not at risk for serious math difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 96(3), 471.

Swanson, H. L., Jerman, O., & Zheng, X. (2008). Growth in working memory and mathematical problem solving in children at risk and not at risk for serious math difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 100(2), 343.

Tankersley, K. (1993). *Teaching math their way*. *Educational Leadership*, 50(8), 12-13.

Tolar, T. D., Fuchs, L., Fletcher, J. M., Fuchs, D., & Hamlett, C. L. (2014). Cognitive Profiles of Mathematical Problem-Solving Learning Disability for Different Definitions of Disability. Journal of learning disabilities, 49(3), 240-56.

Torgesen, J. K. (1977). The Role of Nonspecific Factors in the Task Performance of Learning-Disabled Children: *A Theoretical Assessment. Journal of Learning Disabilities*, 10(1), 27-34.

Torgesen, J. K. (1982). The learning-disabled child as an inactive learner: Educational implications. *Topics in learning & learning Disabilities* 2(1), 45-52.

Τζεκάκη, Μ. (2007*). Μικρά παιδιά μεγάλα μαθηματικά νοήματα*. Gutemberg.

Τζιβινίκου, Σ. (2015). *Δυσκολίες στα μαθηματικά-διδακτικές παρεμβάσεις*. Κάλλιπος

Τζουριάδου, Μ. (2011). Μαθησιακές δυσκολίες: Θέματα ερμηνείας και αντιμετώπισης. *Θεσσαλονίκη: Προμηθεύς*.

Τριανταφυλλίδου Π., (2007). PISA 2000–2003, *Αποτελέσματα στα Μαθηματικά -Αντιδράσεις*. Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης. Ανακτήθηκε από http://ikee.lib.auth.gr/record/122922/files/TRIANTAFYLLIDOUPAR.pdf.

Van Luit, J. E., & Naglieri, J. A. (1999). Effectiveness of the MASTER program for teaching special children multiplication and division. *Journal of Learning Disabilities*, 32(2), 98-107.

Vellutino, F. (1979). *Dyslexia: Research and theory*: Cambridge, MA: MIT Press.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 167-181.

Verschaffel, L. (1994). Using retelling data to study elementary school children's representations and solutions of compare problems. *Journal for research in mathematics education*, 141-165.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Word Problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school? In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective*, 69-97. Hove, England: Psychology Press.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Teaching realistic mathematical modeling in the elementary school: A teaching experiment with fifth graders. Journal for research in mathematics education, 577-601.

Von Glaserfeld, E., 1987, «Learning as a Constructive Activity», in Janvier, (ed). Wilson, J., Fernandez, M., L., and Hadaway, N., 1994, «*Problem Solving: Managing it all*», *The Mathematics Teacher*, vol. 87, No 3, 195-199.

Yackel, E., Cobb, P., & Wood, T. (1991). Small-group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics. *Journal for research in mathematics education*, 390-408.

Υ.Π.Ε.Θ. (2018). Αναδιάρθρωση, εξορθολογισμός και διαχείριση της διδακτέας ύλης για το μάθημα των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο. (σελ.50-51).

Φράγκος, Χ. Π. (1999). Ψυχοπαιδαγωγική. Αθήνα: Gutenberg.

Wilson, K. M., & Swanson, H. L. (2001). Are mathematics disabilities due to a domain-general or a domain-specific working memory deficit? *Journal of Learning Disabilities*, 34(3), 237-248.

Wolery, M. (2004). Using assessment information to plan intervention programs. In M. McLean, M. Wolery, & D. B. Bailey, Jr. (Eds.), *Assessing infants and preschoolers with special needs* (3rd ed., pp. 517-544). Columbus, ON: Pearson.

Xin, Y. P., Jitendra, A. K., & Deatline-Buchman, A. (2005). Effects of mathematical word problem solving instruction on students with learning problems. *Journal of Special Education*, 39, 181–192.

Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: a comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4 (1), 609-626.*

Zhang, D., & Xin, Y.P. (2012). A follow-up meta-analysis for word-problem-solving interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of Educational Research*, 105, 303– 318.

Zimmerman, B. J. (1986). Becoming a self-regulated learner: Which are the key subprocesses? *Contemporary Educational Psychology*, 11(4), 307-313.

Zimmerman, B. (2000). Self-efficacy: An essential motive to learn. *Contemporary Educational Psychology, 25, 82–91*.

Zweng. M (1979). The problem of solving story problems. *The Arithmetic Teacher*, 27. 2-3.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Προβλήματα αρχικής και τελικής αξιολόγησης

1ο Πρόβλημα

Σε ένα περιβόλι είναι φυτεμένα 92 δέντρα, πορτοκαλιές, μανταρινιές και λεμονιές. Οι πορτοκαλιές είναι 36, οι μανταρινιές 43 και τα υπόλοιπα δέντρα είναι λεμονιές. Πόσες είναι οι λεμονιές;

2ο Πρόβλημα

Ένας μελισσοκόμος έβγαλε 65 κιλά μέλι για να το πουλήσει και 20 κιλά για την οικογένειά του. Αυτό που πούλησε το έβαλε σε βάζα των 5 κιλών. Πόσα βάζα πούλησε;

3ο Πρόβλημα

Οι 22 μαθητές της της Δ' τάξης πήγαν εκδρομή στο γήπεδο. Μετά το παιχνίδι αγόρασαν χυμούς και αναψυκτικά. 3 παιδιά δεν είχαν χρήματα μαζί τους και δεν αγόρασαν τίποτε. 6 παιδιά αγόρασαν πορτοκαλάδες και τα υπόλοιπα πήραν χυμούς. Σύμφωνα με τον τιμοκατάλογο οι χυμοί είχαν 2 ευρώ και τα αναψυκτικά 1 ευρώ. Πόσα χρήματα ξόδεψαν όλα μαζί τα παιδιά;

4ο Πρόβλημα

Σε ένα σχολείο που είχε 120 μαθητές, ο γυμναστής έβαλε τους μισούς σε τετράδες και τους άλλους μισούς σε δυάδες. Πόσες τετράδες και πόσες δυάδες σχηματίστηκαν;

Προβλήματα για διδασκαλία στην πειραματική ομάδα

1. Την Παρασκευή ο Μάκης θα πάρει ένα αυτοκόλλητο για κάθε βιβλίο που θα έχει διαβάσει εκείνη την εβδομάδα. Θα πάρει και ένα αυτοκόλλητο επιπλέον αν διαβάσει 5 βιβλία στο σύνολο. Την Δευτέρα διάβασε 1 βιβλίο. Την Τρίτη διάβασε 2 βιβλία. Την Τετάρτη δεν διάβασε. Την Πέμπτη διάβασε 1 βιβλίο και την Παρασκευή δεν διάβασε καθόλου. Πόσα αυτοκόλλητα πήρε ο Μάκης εκείνη την εβδομάδα;

2. Ο Πέτρος και ο Ανδρόνικος παίζουν κάρτες. Όταν ξεκινούν το παιχνίδι έχει ο καθένας από 15 κάρτες. Στο παιχνίδι κέρδισε ο Ανδρόνικος τον Πέτρο και του πήρε 8 κάρτες. Πόσες κάρτες έχει στο τέλος του παιχνιδιού το κάθε παιδί;

3. Ο Γιάννης αγόρασε λουλούδια για την μαμά του που κόστιζαν 9,50 ευρώ. Για τον αδελφό του πήρε 5 μαρκαδόρους. Ο κάθε μαρκαδόρος κοστίζει 25 λεπτά. Το κατάστημα για κάθε δύο μαρκαδόρους κάνει έκπτωση 10 λεπτά. Πόσα πλήρωσε ο Γιάννης για όλα αυτά;

4. Οι κότες της κυρα-Γιαννούλας έκαναν σήμερα 27 αυγά. Η κυρα-Γιαννούλα ζήτησε από τον εγγονό της τον Βασίλη να τις φέρει αυγοθήκες για να τα βάλει μέσα. Η κάθε αυγοθήκη έχει έξι θήκες. Πόσες αυγοθήκες χρειάζεται να πάει ο Βασίλης στη γιαγιά του;

5. Ο Μανόλης μαζί με τους γονείς του πήραν το λεωφορείο από την Θεσσαλονίκη για να πάνε στη γιαγιά του στην Αρναία. Όταν ξεκίνησαν το λεωφορείο είχε 32 επιβάτες. Στην Χαλκηδόνα ανέβηκαν 13 επιβάτες και κατέβηκαν 2. Στα Γιαννιτσα ανέβηκαν 5 επιβάτες και κατέβηκαν 4. Πόσους επιβάτες είχε το λεωφορείο, όταν έφτασε στην Έδεσσα;

6. Η βιβλιοθήκη του σχολείου έχει 234 λογοτεχνικά βιβλία, 358 βιβλία με εγκυκλοπαιδικές γνώσεις, 76 βιβλία για δασκάλους, και τα 18 λεξικά. Πόσα είναι όλα τα βιβλία της βιβλιοθήκης; Πόσα είναι όλα μαζί τα βιβλία εκτός από τα λογοτεχνικά; Πόσα περισσότερα είναι τα βιβλία με εγκυκλοπαιδικές γνώσεις από τα λογοτεχνικά;

7. Μια βιοτεχνία συσκευάζει 150 κιλά βούτυρο σε πακέτα του μισού κιλού. Στη διάρκεια της συσκευασίας χάλασαν 25 πακέτα. Τα υπόλοιπα πουλήθηκαν σε σούπερ – μάρκετ στην τιμή των 2 ευρώ το πακέτο. Πόσα χρήματα εισέπραξε η βιοτεχνία;

8. Σε ένα σχολείο το 2005 υπήρχαν 348 μαθητές. Το 2006 είχαν έρθει κάποιοι μαθητές από την Αλβανία και υπήρχαν συνολικά 46 μαθητές περισσότεροι από το 2005. Το 2007 υπήρχαν συνολικά στο σχολείο 42 μαθητές λιγότεροι από το 2006. Πόσοι ήταν συνολικά οι μαθητές του σχολείου το 2007;

9. Ένα σούπερ μάρκετ δίνει με κάθε αγορά κάποιους πόντους. Όταν κάποιος συμπληρώσει έναν αριθμό πόντων, μπορεί να τους εξαργυρώσει με κάποιο από τα παρακάτω δώρα: Μία αριθμομηχανή με 2050 πόντους, ένα αρκουδάκι με 1380 πόντους, μια αφετιέρα με 9450 πόντους, ένα στεγνωτήρα μαλλιών με 8450 πόντους. Ένας πελάτης που έχει 9500 πόντους ποια δώρα από τα παραπάνω μπορεί να πάρει;

10. Ένα σούπερ μάρκετ δίνει με κάθε αγορά κάποιους πόντους. Όταν κάποιος συμπληρώσει έναν αριθμό πόντων, μπορεί να τους εξαργυρώσει με κάποια από τα παρακάτω δώρα: μία αριθμομηχανή με 2050 πόντους, ένα αρκουδάκι με 1380 πόντους, μία καφετιέρα με 9450 πόντους, ένα στεγνωτήρα μαλλιών με 8450 πόντους. Ένας πελάτης που έχει 9500 πόντους ποια δώρα από τα παραπάνω μπορεί να πάρει

11. Η καμηλοπάρδαλη κοιμάται μόνο 20 λεπτά την ημέρα και μάλιστα όρθια. Πόσα λεπτά κοιμάται συνολικά στην διάρκεια μιας εβδομάδας;

12. Ο Μάρκος θέλει να αγοράσει μπαλόνια για τα γενέθλιά του. Στο κατάστημα «Η Φτήνια» το κάθε μπαλόνι κοστίζει 3 ευρώ! Ο Μάρκος έχει 25 ευρώ. Πόσα μπαλόνια μπορεί να αγοράσει;

13. Το ξενοδοχείο «Η Φιλοξενία» ένα επταώροφο κτίριο. Ο πρώτος και ο δεύτερος όροφος έχουν από 49 δίκλινα δωμάτια ο καθένας. Ο τρίτος και ο τέταρτος όροφος έχουν από 38 τρίκλινα δωμάτια ο καθένας. Ο πέμπτος και ο έκτος όροφος έχουν 67 μονόκλινα δωμάτια ο καθένας. Ο έβδομος έχει 8 διαμερίσματα των τεσσάρων ατόμων και 3 διαμερίσματα των έξι ατόμων. Όταν είναι γεμάτο το ξενοδοχείο πόσοι άνθρωποι φιλοξενούνται;

14. Το ξενοδοχείο «Φιλοξενία» είναι ένα επταώροφο κτίριο. Ο πρώτος και ο δεύτερος όροφος έχουν από 49 δίκλινα δωμάτια ο καθένας. Ο τρίτος και ο τέταρτος όροφος έχουν από 38 τρίκλινα δωμάτια ο καθένας. Ο πέμπτος και ο έκτος όροφος έχουν 67 μονόκλινα δωμάτια ο καθένας. Ο έβδομος έχει 8 διαμερίσματα των τεσσάρων ατόμων και 3 διαμερίσματα των έξι ατόμων. Όταν είναι γεμάτο το ξενοδοχείο, πόσοι άνθρωποι μπορούν να φιλοξενηθούν;

15. Ο κύριος Στέλιος αποφάσισε να βάψει το σπίτι του και άρχισε τους υπολογισμούς. Με ένα δοχείο 10 κιλών χρώματος, που κοστίζει 15 ευρώ, μπορεί να βάψει 25 τετραγωνικά μέτρα. Η επιφάνεια που θέλει να βάψει είναι 400 τετραγωνικά μέτρα. Πόσο θα του κοστίσει το βάψιμο;

16. Κατά τις πρωινές ώρες της $15^{ης}$ Νοεμβρίου του 2017, μετά από έντονη βροχόπτωση, προκλήθηκαν μεγάλες πλημμύρες στην Αττική. Την επόμενη μέρα φιλανθρωπικοί σύλλογοι συγκέντρωσαν τρόφιμα για να τα δώσουν σε 100 οικογένειες που έμειναν άστεγες. Συγκεντρώθηκαν 700 κιλά ζυμαρικά

17. Κατά τις πρωινές ώρες της 15ης Νοεμβρίου του 2017, μετά από έντονη βροχόπτωση, προκλήθηκαν μεγάλες πλημμύρες στην Αττική. Την επόμενη μέρα φιλανθρωπικοί σύλλογοι συγκέντρωσαν τρόφιμα για να τα δώσουν σε 100 οικογένειες που έμειναν άστεγες. Συγκεντρώθηκαν 700 κιλά ζυμαρικά και 800 κιλά όσπρια σε πακέτα του μισού κιλού και τοποθετήθηκαν σε χαρτόκουτα για κάθε οικογένεια. Πόσα πακέτα ζυμαρικά και πόσα πακέτα όσπρια είχε το κάθε χαρτόκουτο;

18. Ο Μάρκος θέλει να αγοράσει μπαλόνια για τα γενέθλιά του. Στο κατάστημα «Η Φτήνια» το κάθε μπαλόνι κοστίζει 3 ευρώ! Ο Μάρκος έχει 25 ευρώ. Πόσα μπαλόνια μπορεί να αγοράσει;

19. Η Αλίκη και μια φίλη της πούλησαν παλιά παιχνίδια και βιβλία. Πούλησαν κόμικς προς 25 λεπτά το ένα που κόστιζαν 75 λεπτά όταν ήταν καινούργια και άλλα κόμικς που κόστιζαν 25 λεπτά όταν ήταν καινούργια. Αυτά τα πούλησαν για 10 λεπτά το ένα. Το Σάββατο πούλησαν 15 κόμικς από αυτά που κόστιζαν καινούργια 25 λεπτά και τέσσερα κόμικς από αυτά που κόστιζαν 75 λεπτά όταν ήταν καινούργια. Πόσα χρήματα βγάλανε πουλώντας κόμικς;

20.Η γιαγιά η Μαρία, είναι 72 ετών. Η ηλικία του αδελφού μου του Λευτέρη είναι οκτώ φορές μικρότερη από την ηλικία της γιαγιάς. Η μαμά μου η Κατερίνα, είναι 29 χρόνια μεγαλύτερη από τον Λευτέρη. Πόσο χρονών είναι η μητέρα μου και ο αδελφός μου;

21. Ένας ανθοπώλης έκανε 10 ανθοδέσμες με τριαντάφυλλα και τριπλάσιες ανθοδέσμες με γαρίφαλα. Πούλησε την κάθε ανθοδέσμη με τα τριαντάφυλλα προς 10 ευρώ τη μία και κάθε ανθοδέσμη με γαρίφαλα προς 8 ευρώ τη μία. Πόσα ευρώ εισέπραξε συνολικά από την πώληση όλων;

22.Ένα πρατήριο αναψυκτικών πούλησε σε μια μέρα 16 κιβώτια λεμονάδες και 23 κιβώτια πορτοκαλάδες. Αν κάθε κιβώτιο είχε 24 μπουκάλια, πόσα ήταν όλα τα μπουκάλια που πούλησε.

23. Ένα σχολείο έχει 12 αίθουσες διδασκαλίας. Κάθε αίθουσα έχει 4 παράθυρα και κάθε παράθυρο έχει 6 τζάμια. Πόσα τζάμια έχει όλο το σχολείο.

24. Ο Αναστάσης, ο Μάριος, ο Έντουαρντ, η Ελένη και η Αναστασία πήγαν το Σάββατο το μεσημέρι στην πιτσαρία. Παρήγγειλαν 3 πίτσες, 2 μακαρονάδες, 3 αναψυκτικά 2 χυμούς και 5 παγωτά. Η πίτσα έκανε 4 ευρώ, η μακαρονάδα 3,50 ευρώ, το ένα αναψυκτικό 1,80 ευρώ, ο ένας φυσικός χυμός 2,20 ευρώ το ένα παγωτό 2 ευρώ και το εμφιαλωμένο νερό 0,50 ευρώ. Τα παιδιά μοιράστηκαν τον λογαριασμό. Πόσα χρήματα πλήρωσε ο καθένας;