ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: **Μαθηματική εκπαίδευση Β΄ Ηλικιακού Κύκλου (13-18 χρόνων)**

Διπλωματική εργασία

Το πρώτο βιβλίο Πιθανοτήτων στο νεοσύστατο ελληνικό κράτος.

Η εισαγωγή του Λογισμού των Πιθανοτήτων στη σύγχρονη ελληνική παιδεία.

της

Βαρβάρας Χ. Τούρα (Α.Ε.Μ. 0722)

Επιβλέπων Καθηγητής: Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης, Αν. Καθηγητής

Εξεταστές: Ελένη Τσακιρίδου, Καθηγήτρια/ Χαρίκλεια Σταθοπούλου, Καθηγήτρια

Φλώρινα, Φεβρουάριος 2019

«*Ένα μέτρο ωρίμανσης του πεδίου της Διδακτικής των Μαθηματικών είναι ότι οι ερευνητές της άρχισαν να μελετούν την ιστορία της*» (Kilpatrick, 2014)

Στους καθηγητές μου, παλιούς και νεότερους.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: **Μαθηματική εκπαίδευση Β΄ Ηλικιακού Κύκλου (13-18 χρόνων)**

Διπλωματική εργασία

Το πρώτο βιβλίο Πιθανοτήτων στο νεοσύστατο ελληνικό κράτος.

Η εισαγωγή του Λογισμού των Πιθανοτήτων στη σύγχρονη ελληνική παιδεία.

της

Βαρβάρας Χ. Τούρα (Α.Ε.Μ. 0722)

Επιβλέπων Καθηγητής: Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης, Αν. Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή στις 23/2/2019

Κ. Νικολαντωνάκης *(Επιβλέπων)*	Ε. Τσακιρίδου	Χ. Σταθοπούλου
…………………………	………………………….	……………………….

Φλώρινα, Φεβρουάριος 2019

Τούρα Βαρβάρα

Πτυχιούχος Τμήματος Μαθηματικών Α.Π.Θ.

Μ.Δ.Ε. στη *Θεωρητική Πληροφορική και Θεωρία Συστημάτων & Ελέγχου*, Α.Π.Θ.

Μ.Δ.Ε. στην *Ειδική Αγωγή*, University of Sofia "St. Kliment Ohridski"

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Το παρόν σύγγραμμα αποτελεί διπλωματική εργασία στα πλαίσια του Διατμηματικού – Διαπανεπιστημιακού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτική των Μαθηματικών», του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας.

Ως την ελάχιστη δυνατή μνεία, με την παρούσα παράγραφο, οφείλω να ευχαριστήσω, αφενός τις Βιβλιοθήκες: της Βουλής των Ελλήνων/ Μπενάκειος Βιβλιοθήκη (*για τα βιβλία των Γ. Αθανασιάδη και Π. Ρεδιάδη*), την Κεντρική- αλλά και τα επιμέρους τμήματα αυτής- Βιβλιοθήκη του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης (*για τα βιβλία των Ν. Καρακατσανίδη και Κ. Μπίρη*), την Κεντρική Βιβλιοθήκη του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου (*για τα βιβλία του Ι. Λαζαρίμου*) και την Εθνική Βιβλιοθήκη (*για το αντίγραφο της ομιλίας του Π. Δαγκλή*), αφετέρου όλους όσοι συνέβαλαν στην εκπόνησή της και ιδιαίτερα:

Τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Κωνσταντίνο Νικολαντωνάκη, για την πολύτιμη υποστήριξή του και το πολύ καλό κλίμα συνεργασίας που διαμόρφωσε, συμβάλλοντας τα μέγιστα στην ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας.

Τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, την κ. Ελένη Τσακιρίδου για την εμπιστοσύνη της και την κ. Χαρίκλεια Σταθοπούλου για την πολύτιμη βοήθειά της, τις παραγωγικές υποδείξεις της και την αμέριστη συμπαράστασή της.

Επίσης, ευχαριστίες απευθύνω σε όλο το διδακτικό προσωπικό του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών για τις γνώσεις που μου προσέφεραν και ιδιαίτερα στον κ. Ιωάννη Θωμαΐδη, από τον οποίο πληροφορήθηκα την ύπαρξη του εν λόγω Προγράμματος, και τον κ. Χαράλαμπο Σακονίδη για τον πολύτιμο χρόνο του και τις συζητήσεις μας- καταλυτικές για τον προσανατολισμό της εργασίας μου.

Τέλος, ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω να απευθύνω σε δύο ξεχωριστούς καθηγητές μου από το Τμήμα Μαθηματικών Α.Π.Θ.: στον καθηγητή μου κ. Πολυχρόνη Μωυσιάδη για την εμπιστοσύνη του και την πολύτιμη βοήθειά του στην κατανόηση από μέρους μου του κλάδου του τυχαίου και, κυρίως, στον μέντορά μου, κ. Νίκο Καστάνη, για την ακούραστη προσπάθειά του να με εισάγει σε έναν διαφορετικό τρόπο σκέψης (για να μπορέσω να εισχωρήσω στον κόσμο της Ιστορίας και της Διδακτικής των Μαθηματικών) και να μου μεταδώσει τις γνώσεις του. Για τα όσα μου δίδαξε στα χρόνια της συνεργασίας μας, η αφιέρωση της εργασίας αφορά εν πολλοίς το πρόσωπό του.

Βαρβάρα Χ. Τούρα

Θεσσαλονίκη, Ιανουάριος 2019

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία επιχειρείται να δοθεί απάντηση στα ερωτήματα «*Πότε εμφανίστηκαν για πρώτη φορά οι Πιθανότητες στη σύγχρονη ελληνική παιδεία;»* και «*Ποιο ήταν το πρώτο βιβλίο Πιθανοτήτων στην Ελλάδα;»*. Προηγείται μια εισαγωγή στην Ιστορία της Μαθηματικής Εκπαίδευσης και ακολουθεί η γενικότερη θεώρηση της ιστορικής διαδρομής των Πιθανοτήτων από το *κέντρο* (Ευρώπη) στην *περιφέρεια* (Ελλάδα), ενώ παρουσιάζονται σύντομα τα πρώτα ελληνικά εγχειρίδια που κάνουν μνεία σε αυτές. Μέσω της εργασίας καθίσταται σαφές πως ο Λογισμός των Πιθανοτήτων στη σύγχρονη ελληνική παιδεία αναφύεται, όχι από το περιβάλλον των Μαθηματικών, αλλά από τις διδακτικές πρωτοβουλίες της τεχνικής εκπαίδευσης. Η εργασία ολοκληρώνεται με την παρουσίαση του παλαιότερου βιβλίου πιθανοτήτων που εκδόθηκε στο σύγχρονο ελληνικό κράτος, τη βιογραφία του συγγραφέα και την τοποθέτηση τού βιβλίου σε (χρονικό και τοπικό) πλαίσιο, σε σύγκριση με εγχειρίδια που είχαν προηγηθεί αυτού, κυρίως από την κεντρική Ευρώπη (Γαλλία, Γερμανία, Βέλγιο), καθώς και από τον Ελλαδικό χώρο ως μικρής και μερικής έκτασης αναφορές σε έννοιες του πεδίου.

ΛΕΞΕΙΣ- ΚΛΕΙΔΙΑ

Ιστορία της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, Θεωρία Πιθανοτήτων, Ελλάδα

ABSTRACT

This postgraduate dissertation attempts to answer the questions "*When did probabilities appear in Modern Greek Education*?" and "*Which was the first book dedicated on probabilities in Greece?*". After an introduction to the History of Mathematics Education, the essay continues with the general view of the historical route of probabilities from the ‘centre’ (Europe) to the ‘periphery’ (Greece), while the first Greek textbooks mentioning Probability Theory are briefly presented. The essay reflects the fact that the Calculus of Probabilities in Modern Greek Education arises not from a mathematical environment but from teaching initiatives of technical education. The thesis is concluding with the presentation of the oldest book of probabilities published in the Modern Greek State, along with author’s biography and this textbook is placed in (time and local) context, as compared to previous textbooks, mainly from Central Europe (France, Germany, Belgium), and from Greece as a minor and partial references to field concepts.

KEY- WORDS

History of Mathematics Education, Probability Theory, Greece

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μία ανάπτυξη των εθνικών Ιστοριών των Μαθηματικών σε χώρες της ευρωπαϊκής «περιφέρειας».[1] Η εισαγωγή των Πιθανοτήτων, ενός σχετικά νέου κλάδου των Μαθηματικών, στη σύγχρονη Ελλάδα είναι μια τέτοια ιστορική περίπτωση. Το αξιοσημείωτο είναι ότι η διερεύνηση του θέματος ανέδειξε μια διεπιστημονική ιστορική πραγματικότητα. Η Πυροβολική, η Τοπογραφία και η Πειραματική Φυσική συνθέτουν την αρχική πρόσληψη των Πιθανοτήτων, η οποία διαπλέκεται με τις θεσμικές και επιστημολογικές καταστάσεις της Ελληνικής επιστημονικής παιδείας, στο γύρισμα του 19^{ου} αιώνα (Τούρα, 2013).

Οι επιστημονικές ιδέες και θεωρίες αναδύονται από πρωτοπόρα και ιδιαίτερα προικισμένα άτομα. Η προσωπική δημιουργικότητά τους είναι συνυφασμένη, κατά κανόνα, με περιρρέοντα κίνητρα και με ευπρόσδεκτα πλαίσια συναίνεσης. Μετά την αρχική αποδοχή τους, οι νέες ιδέες και θεωρίες δεν καθηλώνονται, αλλά διαχέονται στα ευαισθητοποιημένα επιστημονικά κέντρα ή μεταλαμπαδεύονται σε επιστημονικά απόκεντρα. Η «μετακένωση» των νέων επιστημονικών γνώσεων σε περιφερειακές δομές επιστημονικής παιδείας δεν είναι ούτε αυτόματη, ούτε τελεσίδικη. Εξαρτάται από τις ιδιαιτερότητες των εξωτερικών επιδράσεων και την ευελιξία των κυρίαρχων νοοτροπιών του θεσμικού πλαισίου υποδοχής τους.

Στην παρούσα εργασία, η πορεία που ακολουθείται είναι μάλλον «παραγωγική», καθώς ξεκινά από το ευρύτερο πλαίσιο (τι αποκαλούμε Ιστορία της Μαθηματικής Εκπαίδευσης), συνεχίζει με τη γενικότερη θεώρηση της ιστορικής διαδρομής των Πιθανοτήτων από το *κέντρο* (Ευρώπη) στην *περιφέρεια* (Ελλάδα), για να καταλήξει στην περιγραφή του πρώτου ελληνικού βιβλίου πιθανοτήτων.

Πιο αναλυτικά, στο πρώτο μέρος γίνεται μια προσπάθεια εισαγωγής του αναγνώστη στην Ιστορία της Μαθηματικής Εκπαίδευσης ως κλάδου της Διδακτικής των Μαθηματικών, όπου παρουσιάζονται μεταξύ άλλων και κάποιες θεωρητικές αναζητήσεις των επιστημόνων που ασχολούνται με το εν λόγω πεδίο έρευνας. Παρουσιάζεται, τέλος, η Ιστορία της Διδακτικής των Πιθανοτήτων και αναφέρονται οι δυσκολίες που προκύπτουν από τις διαφορετικές προσεγγίσεις της έννοιας της πιθανότητας.

Στο δεύτερο μέρος γίνεται μια ιστορική αναδρομή στην εξέλιξη του κλάδου των Πιθανοτήτων σε ευρωπαϊκό και ελληνικό πλαίσιο. *Ποια ήταν τα αίτια για την εμφάνιση των Πιθανοτήτων; Πότε* και *πώς θεμελιώθηκαν οι πιθανότητες και ποιοι ήταν οι πρώτοι κλάδοι που τις ανέδειξαν; Πώς εισηχθησαν οι Πιθανότητες στην ελληνική παιδεία; Υπήρχε κάποια ιδιαιτερότητα στην τελευταία που να παρουσιάζει ιστορικό ενδιαφέρον;* Είναι κάποια ερωτήματα που απαντώνται στο μέρος αυτό.

---

[1] Ενδεικτικά:
Bilova, S., Mazliak, L., & Sisma, P. (2006). The axiomatic melting pot. Teaching probability theory in Prague during the 1930's, *Electronic Journal for History of Probability and Statistics, 2/2.*

Στο τρίτο μέρος δίνεται απάντηση στο ερώτημα *Ποιο ήταν το πρώτο βιβλίο Πιθανοτήτων στην Ελλάδα;* και επιχειρείται να δοθεί απάντηση στην ερώτηση *Ποιες μπορεί να ήταν οι επιρροές του συγγραφέα;* Με γνώμονα αυτά τα ερωτήματα, στο τελευταίο μέρος, περιγράφεται το παλαιότερο βιβλίο πιθανοτήτων που εκδόθηκε στο σύγχρονο ελληνικό κράτος, παρουσιάζεται η βιογραφία του συγγραφέα, τοποθετείται το βιβλίο στον χώρο και τον χρόνο έκδοσής του και, τέλος, περιγράφεται το βιβλίο (αναλύονται οι ορισμοί, τα θεωρήματα και τα παραδείγματα) και συσχετίζονται τα περιεχόμενα των κεφαλαίων του με αντίστοιχα προηγούμενων εγχειριδίων, ελληνικών ή ξένων.

Α΄ ΜΕΡΟΣ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

1. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Με τον όρο Διδακτική των Μαθηματικών (*Mathematics Education* ή *Didactics of Mathematics*) αναφέρεται ο κλάδος εκείνος που μελετά, μεταξύ άλλων, τα προβλήματα μάθησης, λαθών ή διδακτικής επικοινωνίας και καλείται να δίνει απαντήσεις σε ερωτήματα που σχετίζονται με τη Μαθηματική Εκπαίδευση (Γαγάτσης, 1995).

Η εκμάθηση των Μαθηματικών δεν περιλαμβάνει μόνο τα λαμπρά επιτεύγματα κάποιων διαβόητων μαθηματικών, αλλά ταυτόχρονα εξετάζει τη μαθηματική δραστηριότητα προσπαθώντας να κατανοήσει τα κίνητρα που αποσιωπούνται, τις εννοιολογικές δράσεις και τις αντανακλαστικές διαδικασίες που χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί με σκοπό την κατασκευή νοήματος (Clark, Kjeldsen, Schorcht, Tzanakis & Wang, 2018).

Παρόλο που τα Μαθηματικά διδάσκονται εδώ και χιλιετίες, ο κλάδος της Διδακτικής των Μαθηματικών θεσμοθετήθηκε μόνο κατά τον 19^{ο} αιώνα[2], καθώς τότε «ιδρύθηκαν τα εθνικά εκπαιδευτικά συστήματα και η εκπαίδευση των δασκάλων πέρασε στα κολλέγια και τα πανεπιστήμια, οπότε και οι άνθρωποι ξεκίνησαν να αυτό-προσδιορίζονται ως εκπαιδευτικοί των Μαθηματικών» (Kilpatrick, 2014).

Η Διδακτική των Μαθηματικών έχει δεχθεί επιρροές από διάφορους κλάδους, όπως είναι αυτοί της Ψυχολογίας, της Παιδαγωγικής, της Γλωσσολογίας ή της Κοινωνιολογίας, και για τον λόγο αυτό έχει ενσωματώσει στα εργαλεία της κάποιες από τις μεθόδους αυτών, όπως είναι για παράδειγμα οι κλινικές παρατηρήσεις (ή, με άλλη μορφή, συνεντεύξεις) ή τα ερωτηματολόγια (Γαγάτσης, 1995). Παρόλο που ο αρχικός προσανατολισμός της Διδακτικής των Μαθηματικών ήταν ψυχολογικός, έγινε μέρος της επιστήμης των Μαθηματικών κυρίως με την επιρροή πεδίων όπως η ανθρωπολογία και η φιλοσοφία (Kilpatrick, 2014).

[2] Η εκπαίδευση, γενικά, ξεκίνησε να εισχωρεί στα πανεπιστήμια από τον 18^{ο} αιώνα, με πρώτη έδρα αυτήν στο Πανεπιστήμιο της Halle, το 1779. Όμως, στα τέλη του 19^{ου} αιώνα και στις αρχές του 20^{ου} ήταν που τέτοιες έδρες ιδρύθηκαν και σε άλλα πανεπιστήμια και τα σχολικά Μαθηματικά αποτέλεσαν αντικείμενο ακαδημαϊκής μελέτης (Kilpatrick, 2014).

2. ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

2.1 ΓΕΝΙΚΑ

«*Ένα μέτρο ωρίμανσης του πεδίου της Διδακτικής των Μαθηματικών είναι ότι οι ερευνητές της άρχισαν να μελετούν την ιστορία της*» (Kilpatrick, 2014: 271).

Η Ιστορία της Μαθηματικής Εκπαίδευσης- όπως είναι γνωστή η Ιστορία των Μαθηματικών από τη σκοπιά της Διδακτικής των Μαθηματικών- είναι ένας κλάδος που αναπτύχθηκε σχετικά πρόσφατα[3]. Η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική των Μαθηματικών ξεκίνησε στο δεύτερο μισό του 19^{ου} αιώνα, με την υποστήριξη μαθηματικών όπως οι De Morgan, Poincaré, Klein και ιστορικών όπως ο Tannery ή ο Loria, οι οποίοι ενδιαφέρθηκαν για τον ρόλο της πρώτης στη δεύτερη. Στη συνέχεια, στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, υπήρξε μια αναζωπύρωση του ενδιαφέροντος αυτού για την Ιστορία εξαιτίας των συζητήσεων για τα θεμέλια των Μαθηματικών. Έπειτα, η Ιστορία θεωρήθηκε πηγή παραδειγμάτων: για την ιστορική επιστημολογία του Bachelard, για τη γενετική επιστημολογία του Piaget και για τη φαινομενολογική επιστημολογία του Freudenthal (Clark et al., 2018).

Ένα μόνιμο θέμα διαμάχης ανάμεσα στους ιστορικούς και τους διδακτικολόγους των Μαθηματικών- από τη σκοπιά της Ιστορίας και Ψυχολογίας των Μαθηματικών- υπήρξε το ερώτημα *ποια ιστορία είναι χρήσιμη και σχετική με τη Μαθηματική Εκπαίδευση*; Απάντηση σε αυτήν έδωσε το 1984 ο Ubiratan d'Ambrosio, ο οποίος πρότεινε την ανάπτυξη τριών διαφορετικών «Ιστοριών» των Μαθηματικών: της ιστορίας όπως διδάσκεται στα σχολεία, της ιστορίας που συνδέεται με τη δημιουργία των Μαθηματικών (εννοιών) και της ιστορίας εκείνης που αφορά τα Μαθηματικά που χρησιμοποιούνται στην καθημερινότητα και τον εργασιακό χώρο. Για τον λόγο αυτό εισήγαγε τη διάκριση ανάμεσα στα *Εθνομαθηματικά* και τα *Διδασκόμενα Μαθηματικά/ Μαθηματικά της Εκπαίδευσης* (*learned mathematics*) (Clark et al., 2018).

2.2 ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ

Στην παράγραφο αυτή, θα γίνει αναφορά στις πρόσφατες εξελίξεις[4] του κλάδου της Ιστορίας της Μαθηματικής Εκπαίδευσης και στα ερωτήματα στα οποία (αυτή) καλείται να δώσει απαντήσεις, εδραιώνοντας τη θέση της στο ευρύτερο πλαίσιο της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Κάποιες ερωτήσεις που τέθηκαν σχετικά με τον ρόλο που καλείται να διαδραματίσει η Ιστορία στη Μαθηματική Εκπαίδευση είναι: «*Ποια ιστορία είναι*

[3] Ένα ορόσημο για τη θεσμοθέτηση της Ιστορίας της Μαθηματικής Εκπαίδευσης ήταν η ίδρυση, το 2006, της *International Journal for the History of Mathematics Education.*

[4] Τέλη του 20^{ου} με αρχές του 21^{ου} αιώνα.

κατάλληλη και σχετίζεται με τη Μαθηματική Εκπαίδευση;», «*Ποιος ο ρόλος της στην Μαθηματική Εκπαίδευση;*», «*Σε ποιον βαθμό έχει εισέλθει στη Μαθηματική Εκπαίδευση (για παράδειγμα, στα αναλυτικά προγράμματα, το εκπαιδευτικό υλικό, την εκπαίδευση εκπαιδευτικών);*», «*Πώς μπορεί αυτός ο ρόλος να αξιολογηθεί, να επιβεβαιωθεί και σε ποιο βαθμό συμβάλλει στη διδασκαλία και την εκμάθηση των Μαθηματικών;*» (Clark et al., 2018: 1).

Η Ιστορία της Μαθηματικής Εκπαίδευσης ως πεδίο έρευνας τέθηκε για πρώτη φορά το 2004, στην Κοπεγχάγη, στην ημερήσια διάταξη του 10ου Διεθνούς Συνεδρίου για τη Μαθηματική Εκπαίδευση ICME[5]- 10. Ένα εξειδικευμένο περιοδικό, με τίτλο *International Journal for the History of Mathematics Education*, που εμφανίστηκε στο προσκήνιο το 2006, ασχολείται αποκλειστικά με θέματα του κλάδου, το πεδίο έρευνάς της έχει γίνει θέμα σε διάφορες διεθνείς συναντήσεις[6], ενώ από το 2009 και κάθε δύο χρόνια λαμβάνουν χώρα εξειδικευμένα ερευνητικά συνέδρια[7] (Jankvist & van Maanen, 2017).

Οι Jankvist και van Maanen (2017) αναφέρουν πως υπάρχουν δύο μονοπάτια που μπορεί να ακολουθήσει κάποιος για να θεωρήσει τη Διδακτική των Μαθηματικών από ιστορική σκοπιά: το ένα είναι η Ιστορία[8] *στην* Μαθηματική Εκπαίδευση και το άλλο είναι η Ιστορία *της* Μαθηματικής Εκπαίδευσης.

Στην πρώτη κατεύθυνση, εμφανίζονται εργασίες και άρθρα για την ανάπτυξη στρατηγικών μάθησης στο πλαίσιο της ωφέλιμης για τη διδασκαλία των Μαθηματικών χρήσης της ιστορίας, όπως είναι για παράδειγμα αυτό της Kjeldsen[9], με τίτλο *Χρήσεις της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση: ανάπτυξη στρατηγικών μάθησης και ιστορική επίγνωση (αντίληψη)* ή αναφορές για πειράματα που πραγματοποιήθηκαν σε αίθουσες διδασκαλίας με την ιστορία ως εργαλείο, όπως είναι

---

[5]ICME: International Congress on Mathematical Education.

[6] Για παράδειγμα: ESU-5 (Πράγα 2007) και ESU-6 (Βιέννη, 2010), στα Συνέδρια CERME και στο ICME 11 (Monterrey, 2008, TSG 38), ICME 12 (Σεούλ, 2012, TSG 35) και HPM2012 (Daejong, 2012).

[7] Το πρώτο συνέδριο πραγματοποιήθηκε στο Garðabær κοντά στο Ρέικιαβικ (πρωτεύουσα) της Ισλανδίας το 2009 και είχε τίτλο «*Συνεχιζόμενη έρευνα στην Ιστορία της Μαθηματικής Εκπαίδευσης*».

[8] Η Ιστορία θεωρούμενη είτε ως αντικείμενο είτε ως διδακτικό εργαλείο (Jankvist & van Maanen, 2017).

[9] Kjeldsen, T. H. (2011). Uses of history in mathematics education: development of learning strategies and historical awareness. Στο M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Επιμ.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1640-1649. Rzeszów: University of Rzeszów.

για παράδειγμα το άρθρο των Mota, Ralda και Estrada, με τίτλο[10] *Η διδασκαλία της έννοιας της εφαπτομένης χρησιμοποιώντας αυθεντικές πηγές*.

Στη δεύτερη κατεύθυνση, εμφανίζονται άρθρα για τη διδασκαλία των Μαθηματικών (ή συγκεκριμένων κλάδων αυτών) σε διάφορα μέρη της γης και από παρελθόντα έτη, όπως είναι η εργασία του Da Costa με τίτλο *Η Αριθμητική σε σχολείο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στη Βραζιλία του 19ου αιώνα*[11], στην οποία περιγράφεται η εισαγωγή μιας διδακτικής μεθόδου της αριθμητικής με τη χρήση καρτών στη Βραζιλία, αλλά και εργασίες που παρουσιάζουν παλαιά βιβλία ή περιοδικά Μαθηματικών, όπως είναι για παράδειγμα η εργασία των Alpaslan, Schubring και Günergun[12], με τίτλο *'Mebahis-i İlmiye': το πρώτο περιοδικό (αφιερωμένο) στις μαθηματικές επιστήμες στην Οθωμανική Τουρκία*.

Η παρούσα εργασία- στο τρίτο μέρος της- ασχολείται με την περιγραφή και ανάλυση του παλαιότερου βιβλίου πιθανοτήτων που εκδόθηκε στο σύγχρονο ελληνικό κράτος, επομένως, εντάσσεται στη δεύτερη κατεύθυνση, που είναι η Ιστορία *της* Μαθηματικής Εκπαίδευσης (ΙΜΕ).[13] Έτσι, επιλέγοντας κάποια άρθρα που έχουν εκδοθεί από το 2000 έως σήμερα και παρατηρώντας το ύφος και το περιεχόμενό τους, θα γίνει προσπάθεια να αποκτήσει ο αναγνώστης μια εικόνα των αναζητήσεων[14] όσων ασχολούνται με το πεδίο αυτό.

Πριν γίνει, όμως, η παρουσίαση και ανάλυση κάποιων άρθρων της κατεύθυνσης αυτής, θα πρέπει να έχει οριστεί με κάποιον τρόπο ένα θεωρητικό πλαίσιο για την Ιστορία της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Κάνοντας μια ιστορική αναδρομή, η θεματική αυτή τέθηκε στο συνέδριο CERME[15]- 8 (8ο Συνέδριο της Ευρωπαϊκής Εταιρείας Έρευνας στη Μαθηματική Εκπαίδευση), με σκοπό να απαντηθούν, κυρίως, τρία βασικά ερωτήματα: 1) *Ποιες είναι, υπό το πρίσμα της ΙΜΕ,*

[10] Mota, C., Ralda, M. E., & Estrada, M. F. (2013). The teaching of the concept of tangent line using original sources. Στο B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Επιμ.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2048-2057. Ankara: METU.

[11] da Costa, D.A. (2009), Arithmetic in primary school in Brazil: end of the nineteenth century. Στο V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Επιμ.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2712-2721. Lyon: Institut national de recherche pédagogique.

[12] Alpaslan, M., Schubring, G., & Günergun, F. (2015). 'Mebahis-i İlmiye' as the first periodical on mathematical sciences in the Ottoman Turkey. Στο N. Vondrová and K. Krainer (Επιμ.), 14 *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1783-1789. Prague: Charles University.

[13] «*Το ενδιαφέρον για την κατεύθυνση αυτή ανάγεται στον 19ο αιώνα, όπως διαφαίνεται στο Handbook on the History of Mathematics education (Karp & Schubring, 2014), όπου ο Schubring εξετάζει την ιστοριογραφία της διδασκαλίας και της εκμάθησης των Μαθηματικών.*» (Jankvist & van Maanen, 2017: 3).

[14] Αν υπάρχουν, λ.χ., κάποιες πρώιμες μεθοδολογικές αρχές στο νέο αυτό πεδίο έρευνας.

[15] Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.

οι διαφορές μεταξύ της ‘ιστορίας’ (story) και της ‘Ιστορίας’ (history); 2) *Ποια θεωρητικά πλαίσια είναι πράγματι διαθέσιμα για την έρευνα αυτού του πεδίου;* 3) *Μέχρι ποιο βαθμό η ΙΜΕ απαιτεί μελέτη των πρωτογενών ή πρωτότυπων πηγών, εγγράφων κτλ;* Στην τελική αναφορά του συνεδρίου έχει γραφεί το παρακάτω απόσπασμα:

> «Υπήρξε μια συναίνεση αναφορικά με την *ιστορία* ως κάτι αφηγηματικό, ενώ η *Ιστορία*, αν και μπορεί να περιέχει αφηγήσεις (ή ιστορίες), διαρθρώνεται από θεωρητικά πλαίσια, ο σκοπός των οποίων είναι να βλέπει τα οφέλη των περιορισμών, να επικοινωνεί τα αποτελέσματα και να επιτρέπει στους ερευνητές να οργανώνουν και να παρουσιάζουν ευρήματα, ισχυρισμούς κ.λπ. […] Οι συμμετέχοντες επισημαίνουν, για παράδειγμα, δομές από την ιστορική έρευνα, π.χ. εκείνες μιας πιο «εξωτερίστικης» (externalist ο αγγλικός όρος- *σε αντιδιαστολή με το internalist*) ιστοριογραφίας της μελέτης κρίσιμων παραγόντων στην ανάπτυξη των θεσμών, κ.λπ. […] Σε ό, τι αφορά τον ρόλο των πρωτογενών πηγών, όλοι θεωρούν αυτές πρακτικά μια αναγκαιότητα για τη διεξαγωγή της Ιστορίας της Μαθηματικής Εκπαίδευσης.» (Jankvist et al. 2013: 1947-1948, όπως αναφέρεται στο Jankvist & van Maanen, 2017: 11).

Μία άλλη πρόταση προσέγγισης της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, που αφορά στον καθορισμό των *θεμελιωδών λόγων* που την αναπτύσσουν, έχει προταθεί το 1996 από τον καθηγητή Mogens Niss, σύμφωνα με τον οποίο, οι αναλύσεις της Μαθηματικής Εκπαίδευσης από ιστορικές και σύγχρονες προοπτικές δείχνουν ότι στην ουσία υπάρχουν μόνο λίγα είδη θεμελιωδών αιτιών και περιλαμβάνουν τα παρακάτω:

> - Τη συμβολή στην τεχνολογική και κοινωνικοοικονομική ανάπτυξη της κοινωνίας, είτε της ίδιας είτε σε ανταγωνισμό με άλλες κοινωνίες/χώρες·
> - Τη συμβολή στην πολιτική, ιδεολογική και πολιτισμική συντήρηση της κοινωνίας και ανάπτυξη, και πάλι είτε της ίδιας είτε σε ανταγωνισμό με άλλες κοινωνίες/χώρες·
> - Παρέχοντας στα άτομα προαπαιτούμενα που μπορούν να τους βοηθήσουν να αντεπεξέλθουν στη ζωή σε διάφορους τομείς στους οποίους ζουν: εκπαίδευση ή κατοχή, ιδιωτική ζωή, κοινωνική ζωή, ζωή ως πολίτης (Niss, M., 1996: 13, όπως αναφέρεται στο Bjarnadóttir, 2007: 138).

Ένα άρθρο-πρότυπο είναι και αυτό του Gert Schubring (1987), στο οποίο προτείνεται οι ερευνητές-ιστορικοί της μαθηματικής εκπαίδευσης να επιλέγουν να εστιάσουν σε κάτι που θεωρούν βασικό. Ένα παράδειγμα που αναφέρεται ως πρόταση είναι να κοιτάξει κανείς τη ζωή του εκπαιδευτικού των Μαθηματικών, όπου τόσο η συνεργασία με τους άλλους εκπαιδευτικούς, όσο η συγγραφή εγχειριδίων -στη δεδομένη εποχή που εξετάζεται- είναι όλα συνυφασμένα. Μια διαφορετική τεχνική που προτείνει ο Schubring, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση κειμένων που άπτονται του ενδιαφέροντος των ιστορικών της μαθηματικής εκπαίδευσης, είναι η μελέτη διαφορετικών εκδόσεων του ίδιου εγχειριδίου. Με τον τρόπο αυτό, υποστηρίζει πως μπορεί κανείς να καταλήξει σε μια καλύτερη κατανόηση του τι έχει λάβει χώρα[16].

Στο ίδιο μήκος κύματος, ο Karp (2014), που δέχεται την Ιστορία της Μαθηματικής Εκπαίδευσης ως μέρος της κοινωνικής ιστορίας, αναφέρει πως *η μαθηματική εκπαίδευση εμφανίστηκε και αναπτύχθηκε όχι στην απομόνωση, αλλά ως απάντηση σε διάφορες κοινωνικές ανάγκες* (Karp, 2014: 10). Ο Karp, έχοντας ενστερνιστεί τις απόψεις του Schubring, δέχεται ότι *η ανάπτυξη της μαθηματικής διδασκαλίας είναι στοιχείο του κοινωνικού υποσυνόλου των σχολείων, τα οποία με τη σειρά τους είναι κομμάτι του ευρύτερου υποσυνόλου της εκπαίδευσης, η οποία αλληλεπιδρά με άλλα κοινωνικά υποσυστήματα όπως είναι η αγορά εργασίας* (Karp, 2014: 10). Έτσι, δεχόμενος την διττή φύση του πεδίου (ιστορική όσον αφορά τη μεθοδολογία και μαθηματική- παιδαγωγική όσον αφορά το αντικείμενο), θεωρεί πως ο ιστορικός της μαθηματικής εκπαίδευσης πρέπει να έχει την ικανότητα να συνδέει τους δύο χώρους, αλλά και να κατέχει τόσο τις ιστορικές μεθόδους ανάλυσης, όσο και τις μαθηματικές- μεθοδολογικές (Karp, 2014). Έχοντας ορίσει, ως ένα βαθμό, ένα θεωρητικό πλαίσιο για την κατεύθυνση της ΙΜΕ, είναι το κατάλληλο σημείο για να γίνει η παρουσίαση κάποιων άρθρων που εντάσσονται στο πεδίο έρευνας αυτής.

Το άρθρο των Bjarnadσttir, Christiansen & Lepik (2013)[17] με τίτλο *Εγχειρίδια Αριθμητικής σε Εσθονία, Ισλανδία και Νορβηγία- ομοιότητες και διαφορές κατά τη διάρκεια του 19ου αιώνα* αποτελεί ένα τέτοιο παράδειγμα. Σε αυτό, γίνεται μια προσπάθεια να προσδιοριστούν οι ιδιαιτερότητες που παρουσιάζει η ανάπτυξη της δημόσιας μαθηματικής εκπαίδευσης σε κάθε μία από τις τρεις αυτές Βορειο-ευρωπαϊκές χώρες, κατά τη διάρκεια του προ-περασμένου αιώνα, ώστε να φανεί πώς επηρέασαν τη συγγραφή των πρώτων βιβλίων αριθμητικής. Ένα άλλο στοιχείο που αναδύεται από την έρευνα είναι η κοινή τους παράδοση και οι κοινές τους ρίζες: ο Λουθηρανικός Προτεσταντισμός και η μεταρρύθμισή του, ο Διαφωτισμός (στη γερμανική του εκδοχή) ή ακόμα οι επιρροές από παιδαγωγικά ρεύματα των Comenius, Pestalozzi και Spencer.

Το άρθρο ξεκινά με μια ιστορική αναδρομή στα *libri d' abbaco* ως προδρόμους των εγχειριδίων αριθμητικής που εξετάζονται, αναφέρει την προτεσταντική μεταρρύθμιση, αλλά και τις εκπαιδευτικές θεωρίες που την ακολούθησαν και συνεχίζει με αναφορές στην παγκόσμια ανάγκη για δημόσια εκπαίδευση εκείνη την εποχή. Στη συνέχεια ακολουθούν οι ιστορικές διαδρομές των τριών χωρών και έπεται η ανάλυση των εγχειριδίων αριθμητικής του 19ου αιώνα σε

[16] Συνδέοντας τις αλλαγές που γίνονται στη ζωή και την παιδαγωγική με τις αλλαγές που εισήχθησαν σε διαφορετικές εκδόσεις ενός εγχειριδίου.

[17] Bjarnadσttir, K., Christiansen, A. & Lepik, M. (2013). Arithmetic textbooks in Estonia, Iceland and Norway – similarities and differences during the nineteenth century. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 18 (3): 27–58.

κάθε μία από τις χώρες αυτές, για να καταλήξει το άρθρο στις ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στα βιβλία της κάθε χώρας, όπως τις παρατήρησαν οι συγγραφείς.

Η μετάδοση της μαθηματικής γνώσης από τα επιστημονικά 'κέντρα' στην 'περιφέρεια' χρησιμοποιείται ως θεωρητικό πλαίσιο (προσέγγιση). Οι συγγραφείς παρατηρούν ότι η εκπαίδευση στην καθομιλουμένη- και η μαθηματική εκπαίδευση ειδικότερα- θεωρήθηκε σημαντική από τα εθνικά κινήματα κάθε χώρας (οι οποίες δεν είχαν ακόμη ανεξαρτητοποιηθεί), καθώς τα Μαθηματικά συμβάλλουν στην ικανότητα διαχείρισης των πόρων, αλλά και στην αύξηση της αυτοεκτίμησης, όπως συμβαίνει και με τη χρήση της καθομιλουμένης από το ευρύ κοινό. Επίσης, διαπιστώνουν ότι το περιεχόμενο των Μαθηματικών είχε καθοριστεί και αναπτυχθεί, τόσο από τις κοινωνικές πρακτικές, όσο από τις κοινωνικο-τεχνολογικές προκλήσεις.

Τα πρώτα εγχειρίδια αριθμητικής που εκδόθηκαν και στις τρεις χώρες είχαν επηρεαστεί από τα αντίστοιχα γερμανικά που με τη σειρά τους είχαν ακολουθήσει την ιταλική παράδοση που επικρατούσε στα τέλη του Μεσαίωνα. Οι ομοιότητες που βρέθηκαν στον τρόπο γραφής και παρουσίασης παραπέμπουν σε επιρροές από τα προαναφερθέντα παιδαγωγικά ρεύματα. Αυτό που οι συγγραφείς θεώρησαν άξιο αναφοράς ήταν ότι, παρά τα διαφορετικά κοινωνικο - ιστορικά παρελθόντα και τη γεωγραφική απομόνωση, και οι τρεις αυτές χώρες υιοθέτησαν παρόμοιες πρακτικές σε ό, τι αφορά τη μαθηματική εκπαίδευση. Το άρθρο καταλήγει στο ότι η Εσθονία, η Ισλανδία και η Νορβηγία εντάσσονται στον ευρωπαϊκό πολιτισμικά χώρο και προσάρμοσαν όσες ιδέες προήλθαν από τα κέντρα στις εθνικές εκπαιδευτικές τους ανάγκες και την αυτονομία τους (Bjarnadσttir, Christiansen & Lepik, 2013).

Μια εργασία που προ-αναφέρθηκε, αυτή των Alpaslan, Schubring & Günergun, με τίτλο *'Mebahis-i İlmiye': το πρώτο περιοδικό (αφιερωμένο) στις μαθηματικές επιστήμες στην Οθωμανική Τουρκία* είναι το δεύτερο παράδειγμα. Η εν λόγω εργασία αποτελεί τη συνεργασία ενός υποψήφιου διδάκτορα και δύο έμπειρων ερευνητών του κλάδου, με σκοπό την ανάδειξη ενός περιοδικού- του *Mebahis-i* İlmiye- που εκδιδόταν στην Οθωμανική Αυτοκρατορία την περίοδο 1867-1869. Το περιοδικό αυτό είχε ως στόχο τη διάδοση της μαθηματικής εκπαίδευσης στο ευρύ κοινό, εν μέσω πολέμων στην περιοχή. Η θεματολογία του ήταν ευρεία, από Καθαρά Μαθηματικά μέχρι Εφαρμοσμένα (σχετιζόμενα με τη Φυσική ή τη Μηχανική), αλλά και επαγγελματικά Μαθηματικά.

Οι ερευνητές έθεσαν κάποια ερωτήματα, τα οποία απαντώνται λαμβάνοντας υπόψη τη θεωρία του Niss, αλλά και χρησιμοποιώντας ένα θεωρητικό κατασκεύασμα των συγγραφέων που έχει σχέση με «*τη μετάδοση της μαθηματικής γνώσης ως μια διαδικασία διάδοσης μαθηματικών ιδεών από την επιστημονικά εδραιωμένη 'μητροπολιτική' χώρα σε όχι ακόμη επιστημονικά ανεπτυγμένες χώρες της 'περιφέρειας'*» (Schubring, 2000): 1) *Ποιοι ήταν οι λόγοι για τους οποίους το περιοδικό παρείχε μαθηματική εκπαίδευση στην κοινωνία της Οθωμανικής Τουρκίας* *του 19^{ου} αιώνα;* και 2) *Σε ποιες μαθηματικές παραδόσεις βασίστηκε το περιοδικό;* (Jankvist & van Maanen, 2017: 7).

Τα ευρήματα δείχνουν ότι το περιοδικό αφορούσε- ως έναν βαθμό- και στις τρεις κατηγορίες του Niss. Η μεταφορά της γνώσης θεωρήθηκε πως προήλθε από τη Γαλλία που ήταν η «Μητρόπολη» της εποχής, ενώ η υποδοχή πραγματοποιήθηκε μέσα σε κοινωνικό περιβάλλον συγκρούσεων ανάμεσα σε εκσυγχρονιστές και συντηρητικούς, αλλά και στην προϋπάρχουσα κουλτούρα των Ισλαμικών Μαθηματικών. Η διάδοση αυτή είχε ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη νέας ορολογίας, σχετικής με τα σύγχρονα Μαθηματικά, μια και τα παραδοσιακά Μαθηματικά δεν παρείχαν κάτι ανάλογο (Alpaslan, Schubring & Günergun, 2016 όπως αναφέρεται στο Jankvist & van Maanen, 2017).

3. ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Ένα δύσκολο τμήμα της διδασκαλίας των Μαθηματικών αποτελεί και ο κλάδος των Πιθανοτήτων. Το γεγονός ότι τα Στοχαστικά Μαθηματικά λειτουργούν με διαφορετικό τρόπο σκέψης από τα κλασικά Μαθηματικά, καθώς υπόκεινται σε διαφορετική λογική από τα δεύτερα, υπήρξε ο κύριος λόγος που καθιστά δύσκολη την κατανόησή τους και κατ' επέκταση τη διδασκαλία τους. Είναι εντυπωσιακό πως ο Freudenthal στο βιβλίο του *Διδακτική Φαινομενολογία των Μαθηματικών Δομών* εξαιρεί τις Πιθανότητες από τις θεματικές που πραγματεύεται (Kapadia & Borovcnik, 1991).

Οι δύο κύριες επιστημολογικές προσεγγίσεις της πιθανότητας- είτε ως σχετικής συχνότητας είτε κάνοντας χρήση του κλασικού ορισμού- μπορούν να θεωρηθούν ως δύο διαφορετικές οδοί εισαγωγής και προσδιορισμού της έννοιας (Kapadia & Borovcnik, 1991). Οι δύο κύριες μέθοδοι διδασκαλίας των πιθανοτήτων βασίζονται στη διαίσθηση και τη συνέπεια (Kapadia & Borovcnik, 1991). Παρόλο που κυριαρχεί αυστηρότητα στη δομή της διδασκαλίας των Στοχαστικών Μαθηματικών όπως συμβαίνει σε όλους τους κλάδους των Μαθηματικών, εντούτοις η διδακτική διαδικασία δομείται διαφορετικά. Οι έννοιες πρέπει να αναπτυχθούν σιγά σιγά, μέσα από καταστάσεις που έχουν νόημα για τους διδασκόμενους και όχι να δοθούν έτοιμες από τον διδάσκοντα, καθώς οι βασικές έννοιες των πιθανοτήτων δεν ορίζουν επακριβώς την πιθανότητα (Kapadia & Borovcnik, 1991).

Αν παρακολουθήσει κάποιος την ιστορική ανάπτυξη της πιθανότητας και προσπαθήσει να την αναλύσει, παρατηρώντας και τις φιλοσοφικές ιδέες που αναπτύχθηκαν παράλληλα, θα κατανοήσει τον πολύ-παραγοντικό της χαρακτήρα. Ιστορικά, η ανάπτυξη της έννοιας κατευθύνθηκε από μια εμπειρική σε μια ακριβή μαθηματική δόμηση. Η πληθώρα των παράδοξων που συντελέστηκαν κατά την ιστορική ανάπτυξη του πεδίου αντικατοπτρίζεται και στην ατομική μαθησιακή διαδικασία, όπου οι παρανοήσεις αποτελούν εμπόδια στην κατανόηση των θεωρητικών εννοιών και την αποδοχή τους (Borovcnik, Bentz & Kapadia, 1991).

Οι τέσσερις βασικές προσεγγίσεις στη φύση της πιθανότητας που σχετίζονται με τα σχολικά Μαθηματικά είναι η κλασική, η σχετική με τη συχνότητα, η υποκειμενική και η κατασκευαστική. Η πρώτη προσέγγιση (κλασική) βασίζεται στη νοηματοδότηση της έννοιας από τον Laplace, σύμφωνα με τον οποίο, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου υπολογίζεται ως το κλάσμα των ευνοϊκών αποτελεσμάτων του ενδεχομένου στον δειγματικό χώρο. Η δεύτερη θεώρηση (η πιθανότητα ως συχνότητα) υπολογίζει την πιθανότητα από τις παρατηρούμενες σχετικές συχνότητες του προς εξέταση ενδεχομένου σε επαναλαμβανόμενες δοκιμές. Η τρίτη άποψη (υποκειμενική) θεωρεί ότι οι πιθανότητες είναι αξιολογήσεις καταστάσεων που ενυπάρχουν στο μυαλό του υποκειμένου και δεν αποτελούν στοιχεία του πραγματικού κόσμου. Τέλος, η τέταρτη προσέγγιση (κατασκευαστική) θεωρεί την τυπική πιθανότητα να ορίζεται από ένα σύνολο αξιωμάτων και να οικοδομείται (ορισμοί και θεωρήματα) από αυτά τα αξιώματα (Borovcnik, Bentz & Kapadia, 1991).

Β΄ ΜΕΡΟΣ

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

4. Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΟΥ ΚΛΑΔΟΥ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΤΟΝ 19^{Ο} ΑΙΩΝΑ ΣΤΗΝ ΕΥΡΩΠΗ

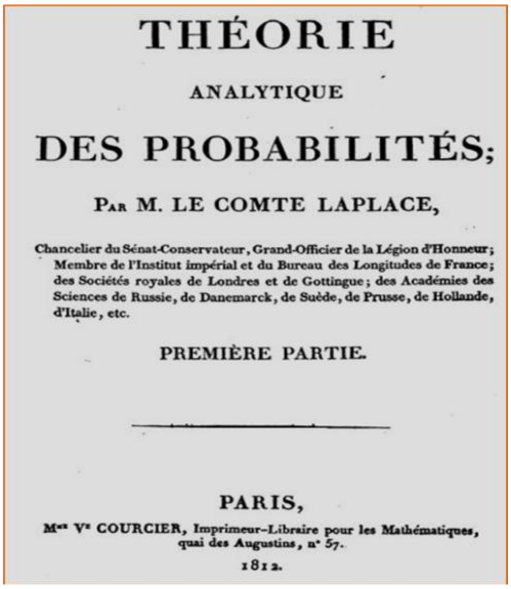
Μια πρώτη εμφάνιση της θεωρίας πιθανοτήτων (σύμφωνα με τις περισσότερες πηγές) γίνεται τον 16^{ο} και 17^{ο} αιώνα με αφετηρία την αναζήτηση λύσης σε προβλήματα τυχερών παιχνιδιών[18]. Τον 19^{ο} αιώνα αναπτύσσεται εκ νέου η θεωρία πιθανοτήτων, και μάλιστα αποκτώντας μεγάλη ώθηση. Η πρόοδος αυτή έχει στενή σχέση με τα διάφορα επιστημονικά επιτεύγματα στην αστρονομία, τη ναυσιπλοΐα, τη φυσική, τη γεωδαισία και ακόμη τη βλητική ή την κοσμολογία. Ζητούμενο της εποχής ήταν η καθιέρωση μιας ενοποιημένης θεωρίας σφαλμάτων παρατηρήσεων: ο προσδιορισμός του μεγέθους και του σχήματος της γης ταλάνιζε τους επιστήμονες, η μέτρηση ενός τετάρτου του μεσημβρινού που διέρχεται από το Παρίσι οδήγησε στην εισαγωγή του μετρικού συστήματος, το πυροβολικό ενδιαφερόταν για τη διασπορά των βλημάτων, οι διάφορες υποθέσεις για την απαρχή του ηλιακού συστήματος οδήγησαν στην αναζήτηση άλλης γεωμετρίας από την ευκλείδεια, η μαθηματική στατιστική άνθησε κυρίως χάρη στα ευρήματα της βιομετρίας. Όλα αυτά κατέστησαν στοχαστική την αντίληψη γύρω από τους νόμους που διέπουν τις φυσικές επιστήμες. Αυτή η αλλαγή στον τρόπο σκέψης ήταν ίσως το σημαντικότερο επιστημονικό επίτευγμα του 19^{ου} αιώνα.

Στις αρχές του 19^{ου} αιώνα, οι νέες διανοητικές και κοινωνικές τάσεις, που αναπτύχθηκαν από τη Γαλλική Επανάσταση, έθεσαν τις βάσεις της κλασικής ερμηνείας των Πιθανοτήτων και των χαρακτηριστικών εφαρμογών τους. Στο βιβλίο *Théorie analytique des probabilités* του Pierre-Simon Laplace (1749-1827), που πρωτοκυκλοφόρησε το 1812, περιείχε εκτός από την αναλυτική θεμελίωση των Πιθανοτήτων και μια ισχυρή ώθηση προς τις εφαρμογές τους.

Μια απ' αυτές τις εφαρμογές, παρουσιάζεται στο 4^{ο} κεφάλαιο της δεύτερης ενότητας του βιβλίου και έχει να κάνει με τη συμβολή των Πιθανοτήτων στις αστρονομικές και γεωδαιτικές διαδικασίες μετρήσεων, χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων. Πρόκειται για μια εφαρμογή των Μαθηματικών στις επιστημονικές πρακτικές, που αναπτύχθηκε ραγδαία στις αρχές του 19^{ου} αιώνα και είχε, στη διάρκειά του, μια ευρεία επέκταση σε διάφορους τομείς της επιστήμης. Μια αξιοσημείωτη χρησιμοποίηση της μεθόδου αυτής, έγινε, στα μέσα του αιώνα, από τον James Clark Maxwell (1831-1879), στην Κινητική Θεωρία των Αερίων (Porter, 1986).

[18] Ο Σ. Κουνιάς (1978: 5) δίνει μια διαφορετική, αλλά πειστική, εξήγηση στο άρθρο του «ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ», σύμφωνα με την οποία *ίσως θα πρέπει να αποδώσουμε την ανάπτυξη της Θεωρίας Πιθανοτήτων στην Αναγέννηση, στο γεγονός ότι από το 14^{ο} αιώνα άρχισαν να λειτουργούν οι πρώτες ναυτικές ασφαλιστικές εταιρείες και οι καπιταλιστικές σχέσεις παραγωγής. Το κόστος των ασφάλιστρων στηρίζεται στην πιθανότητα να φτάσει το φορτίο στον προορισμό του (πειρατεία, βούλιαγμα καραβιού, κλπ).*

Η Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων αναδείχθηκε στη στροφή του 18ου αιώνα, όταν οι αστρονομικές, γεωδαιτικές, τεχνικές και στατιστικές μετρήσεις αυξήθηκαν και αυστηροποιήθηκαν, λόγω των νέων επιστημονικών τάσεων, των νέων προβλημάτων και των νέων πρακτικών, που επηρεάστηκαν, αρκετά, από την εξάπλωση της βιομηχανικής προόδου, μετά το 1760 (Heilbron, 1990; Widmalm, 1990; Porter, 1995; Daumas, 1963; Pannekoek, 1961; Horn, 2006; Ρωσσικόπουλος, 2006). Η μέθοδος αυτή[19] έχει να κάνει με μια υπολογιστική διαδικασία βέλτιστης εκτίμησης μιας σειράς μετρήσεων ενός μεγέθους.



THÉORIE
ANALYTIQUE
DES PROBABILITÉS;
PAR M. LE COMTE LAPLACE,
Chancelier du Sénat-Conservateur, Grand-Officier de la Légion d'Honneur; Membre de l'Institut impérial et du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés royales de Londres et de Gottingue; des Académies des Sciences de Russie, de Danemarck, de Suède, de Prusse, de Hollande, d'Italie, etc.
PREMIÈRE PARTIE.
PARIS,
Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.
1812.

Pierre- Simon **Laplace**
(1749-1827)

Σύμφωνα με τον Laplace, *η πιθανότητα ενός γεγονότος ορίζεται ως το κλάσμα με αριθμητή τον αριθμό των ευνοϊκών περιπτώσεων και παρονομαστή τον αριθμό των δυνατών περιπτώσεων, με την προϋπόθεση ότι οι περιπτώσεις αυτές είναι ισοπίθανες*. Στην προκειμένη περίπτωση, η αντίληψη του ισοπίθανου δεν στηρίζεται σε αντικειμενικές παρατηρήσεις, αλλά στην υποκειμενική (έμφυτη) πεποίθηση. Αυτή την υποκειμενική πιθανότητα δίδαξε ο Laplace, για πρώτη φορά το 1795, στην École Normal και εφάρμοσε σε διάφορα επιστημονικά και κοινωνικά ζητήματα στο βιβλίο του.

Ο Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) δίδαξε Πιθανότητες στην École Polytechnique το 1795, λίγο μετά τη διδασκαλία τους από τον Laplace στην École Normal, δίνοντας έμφαση σε κοινωνικές εφαρμογές τους. Την περίοδο 1810-1815, ο Laplace ώθησε συστηματικά την εδραίωση, την ανάπτυξη και τις εφαρμογές των Πιθανοτήτων και δύο επιστήμονες από τον κύκλο του, ο François Jean Dominique

[19] Η μέθοδος επεκτάθηκε και εφαρμόστηκε και σε άλλους τομείς της επιστήμης, όπως για παράδειγμα τη βιολογία, τη φυσική, τις οικονομικές και κοινωνικές επιστήμες από επιστήμονες όπως οι Francis Galton, James Clerk Maxwell, Ludwig Boltzmann, Wilhelm Lexis, F.Y.Edgeworth.

Arago[20] (1786-1853), αστρονόμος-μαθηματικός, διευθυντής του Αστεροσκοπείου στο Παρίσι, που δίδαξε στην École Polytechnique και ο Siméon Denis Poisson[21] (1781-1840), καθηγητής στην École Polytechnique και στην Sorbonne, πρόβαλαν τις ιδέες του διδάσκοντας σχετικά μαθήματα σε δύο από τα σημαντικότερα εκπαιδευτικά ιδρύματα της Γαλλίας, τις δεκαετίες του 1820 και του 1830, αντίστοιχα.

Στα μέσα του 19ου αιώνα, οι Πιθανότητες σε συνδυασμό με τη Θεωρία των Σφαλμάτων και τη Μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων άρχισαν να συνυφαίνονται στα εγχειρίδια Γεωδαισίας, Αστρονομίας και Βλητικής. Η Γεωδαισία αναπτύχτηκε στη Γαλλία αμέσως μετά τη Γαλλική Επανάσταση, με αφετηρία τη μέτρηση του Γαλλικού μεσημβρινού που διέρχεται από το Παρίσι και τους στρατιωτικούς χάρτες των γύρω χωρών την εποχή του Ναπολέοντα.

Τα Γερμανικά κράτη που συνειδητοποίησαν ότι υπολείπονταν των Γάλλων, άρχισαν να αναδιοργανώνονται μετά την κατάρρευση του Ναπολέοντα. Οι τοπογραφικές εργασίες και η Γεωδαισία τους αναβαθμίστηκαν την περίοδο 1820-30, με τη συμβολή των Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Friedrich Wilhelm Bessel (1784- 1846), αστρονόμου, μαθηματικού, φυσικού και γεωδαίτη, Friedrich Georg Wilhelm von Struve (1793-1864), αστρονόμου με ενδιαφέρον στις γεωδαιτικές μετρήσεις, και Johann Jacob Baeyer (1795-1885), τοπογράφου, στρατηγού, αξιωματούχου της Πρωσίας.

Στη Γερμανική αυτή δυναμική, αναθεωρήθηκε η εφαρμογή των Πιθανοτήτων σε συνδυασμό με τη Μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων και τη Θεωρία των Σφαλμάτων. Η Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων και η Θεωρία Σφαλμάτων σε σχέση με τη Γεωδαισία και την Αστρονομία άρχισαν να αναπτύσσονται συστηματικά στα Γερμανικά βιβλία Πιθανοτήτων, με πρώτο αυτό του Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen (1797-1884), καθηγητού στη Σχολή Πυροβολικού και Μηχανικής, το 1837. Η πρακτική εφαρμογή των αναθεωρημένων Γερμανικών μεθόδων στις τοπογραφικές εργασίες άρχισε από την περίοδο 1825-1850, με επικεφαλής τους Gauss, Bessel και Baeyer. Η Γερμανική Γεωδαισία αναβαθμίστηκε τη δεκαετία του 1870 με τη μετατροπή των τεχνικών σχολείων σε Ανώτερες Τεχνικές Σχολές και στο πλαίσιο

---

[20] *Ο Αραγκό θα παραμείνει 20 χρόνια καθηγητής στο Πολυτεχνείο, διδάσκοντας τη γεωμετρία του Μονζ, στην οποία προστέθηκε η γεωδαισία [...] και τέλος η κοινωνική αριθμητική που καθιερώθηκε το 1816, όπου, πολύ μπροστά από την εποχή του, διδάσκει στους μαθητές τα βασικά του λογισμού των πιθανοτήτων, των οικονομικών μαθηματικών και των δημογραφικών στοιχείων.»* http://www.sabix.org/bulletin/b4/arago.html (ημερομηνία ανάκτησης, 15/9/2018) & *Φαίνεται ότι ο Arago είναι άμεσα εμπνευσμένος από τα έργα των Lacroix και Laplace για να εκθέσει το μέρος του λογισμού των πιθανοτήτων στο μάθημά του Κοινωνική Αριθμητική. (Courtebras*, 2006: 57).

[21] Ήταν Καθηγητής Μηχανικής τόσο στην École Polytechnique, όσο και στον Τομέα Φυσικής στη Facuté des Sciences de Paris (Sorbonne). Τα σημαντικότερα έργα του είναι τα απομνημονεύματά του για τη θεωρία της ηλεκτρικής ενέργειας και του μαγνητισμού (δημιουργώντας με αυτά τον κλάδο της μαθηματικής φυσικής) και εκείνα για την ουράνια μηχανική, ενώ δεν μπορεί να παραβλεφθεί ο "νόμος των μεγάλων αριθμών", που συχνά αναφέρεται ως "κατανομή Poisson" (Gillispie, 1970–1980,15, 480-490).

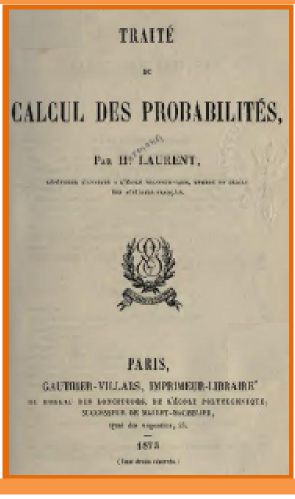
αυτό ανυψώθηκε το επίπεδο των σχετικών εγχειριδίων, με πιο χαρακτηριστικό το *Handbuch der Vermessungskunde* (πρώτη έκδοση το 1873) του Wilhelm Jordan (1842-1899), καθηγητού στην Τεχνική Ανώτερη Σχολή του Hannover.

Στη Γαλλία άρχισαν να επισημαίνουν τις Γερμανικές μεθόδους στη Γεωδαισία στα μέσα της δεκαετίας του 1850. Ο Jean Pierre Eugène Félicien Peytier (1793-1864)[22] ήταν ένας από τους πρώτους που ευαισθητοποιήθηκε τότε κι αναφέρθηκε στις μεθόδους αυτές. Η διδασκαλία Γεωδαισίας- Αστρονομίας στην École Polytechnique και στην Sorbonne στα τέλη του 19ου αιώνα συνοδευόταν από εγχειρίδια με αναφορές στη Θεωρία Σφαλμάτων, όπως το *Cours d' Astronomie et de géodésie de l'École Polytechnique* (1876-77) του H. Faye (1881) ή το *Astronomie et Geodesie: Cours professé à la Sorbonne* του C. Wolf (1891). Επιπλέον, από τη δεκαετία του 1850 στη Γαλλία και το Βέλγιο άρχισαν να εφαρμόζονται οι Πιθανότητες στη Βλητική (Jozeau, 1997).

Την ίδια περίοδο, δηλαδή στα μέσα του 19ου αιώνα, υπήρχαν τάσεις αλλαγής στην έννοια της πιθανότητας. Ο Antoine-Augustin Cournot (1801-1877), καθηγητής Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Grenoble και Γενικός Επιθεωρητής της Δημόσιας Εκπαίδευσης, υποστήριζε τον πειραματικό προσδιορισμό της πιθανότητας, δηλαδή την αντικειμενική αντί την υποκειμενική της έννοια. Τότε, ο Lambert Adolphe Jacques Quetelet (1796-1874), καθηγητής της Αστρονομίας και της Γεωδαισίας στη Στρατιωτική Σχολή των Βρυξελλών, ανέπτυξε τη Μαθηματική Στατιστική, όπου καλλιεργήθηκε η στατιστική πιθανότητα, η οποία διαπνέονταν από την έννοια της συχνότητας. Η ιδέα της στατιστικής πιθανότητας διαπερνούσε τη σκέψη του John Stuart Mill (1806-1873) και του Robert Leslie Ellis (1817-1859) στην Αγγλία, του A. A. Cournot στη Γαλλία και του Jakob Friedrich Fries (1773-1843) στη Γερμανία. Μετά το 1870, υποστηρίχθηκε από τον John Venn (1834-1923) στην Αγγλία, τον Charles Sanders Peirce (1839-1914) στις ΗΠΑ και τον Georg Helm (1851-1923) στη Γερμανία.

Τα σημαντικότερα διδακτικά εγχειρίδια πιθανοτήτων που έπονται αυτού του Laplace είναι τα βιβλία που συνέγραψαν οι Laurent, Bertrand και Poincaré. Ο Matthieu Paul Hermann Laurent (1841-1908), που δίδασκε Μαθηματική Ανάλυση στην École Polytechnique, έκανε, το 1873, μια διδακτική αναπροσαρμογή της «Αναλυτικής Θεωρίας των Πιθανοτήτων» του Laplace, επηρεάζοντας τα επόμενα Γαλλικά εγχειρίδια πιθανοτήτων.

[22] Διευθυντής του Dépôt de la Guerre. (ΣτΣ: Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Peytier συμμετείχε, με τη Γαλλική αποστολή του 1828, στις τοπογραφικές εργασίες της Πελοποννήσου.)



TRAITÉ

CALCUL DES PROBABILITÉS,

PAR H. LAURENT,

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

1873

<u>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ</u>:

Συνδυαστική ανάλυση/

Παρουσίαση των μεθόδων/

Μελέτη των φαινομένων που παρατηρούνται στην επανάληψη των ίδιων δοκιμών/

Για τις μεθόδους των επιστημών παρατήρησης/

Για τις ασφαλιστικές εταιρείες.

Ο ορισμός της πιθανότητας, όπως αναφέρεται στο εν λόγω βιβλίο:

> Η πιθανότητα ενός γεγονότος, που οφείλεται στην τύχη, είναι η αναλογία του αριθμού των θετικών περιπτώσεων για την εμφάνιση του παρόντος γεγονότος προς τον συνολικό αριθμό των περιπτώσεων που μπορούν να προκύψουν όταν όλες αυτές αναμένονται, ευνοϊκά ή όχι, με τη δυνατότητα του εν λόγω γεγονότος (Laurent, 1873: 36).

Το βιβλίο Πιθανοτήτων του Joseph Louis François Bertrand (1822-1900), καθηγητή της École Polytechnique και του Collège de France, που πρωτοεκδόθηκε το 1888, έδωσε μια ισχυρή ώθηση στην ανάπτυξη της στοχαστικής σκέψης στη Γαλλία. Ο Bertrand, το 1855, είχε μεταφράσει στα γαλλικά έργα του Gauss που αναφέρονταν στη Θεωρία των Σφαλμάτων και τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Το 1888 συνέγραψε το εν λόγω βιβλίο φεύγοντας από το Collège, και αφού συγκέντρωσε τις σημειώσεις του μαθήματος που παρέδιδε εκεί. Το βιβλίο παρά τις παραλήψεις και τα λάθη, έγινε ιδιαίτερα δημοφιλές εξαιτίας του εκπληκτικού λογοτεχνικού στυλ του συγγραφέα του (Sheynin, 1994).

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ:

Απαριθμητικός προσδιορισμός της τύχης/

Αδέσμευτες και δεσμευμένες πιθανότητες/

Μαθηματική προσδοκία/

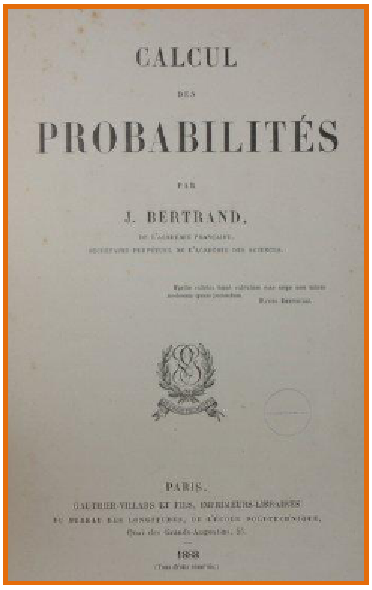
Θεώρημα του Jacques Bernoulli/

Πιθανότητες των αιτιών/

Θεωρία σφαλμάτων και η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων/

Στατιστική/

Πιθανότητες των αποφάσεων.



CALCUL DES PROBABILITÉS

PAR

J. BERTRAND,

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

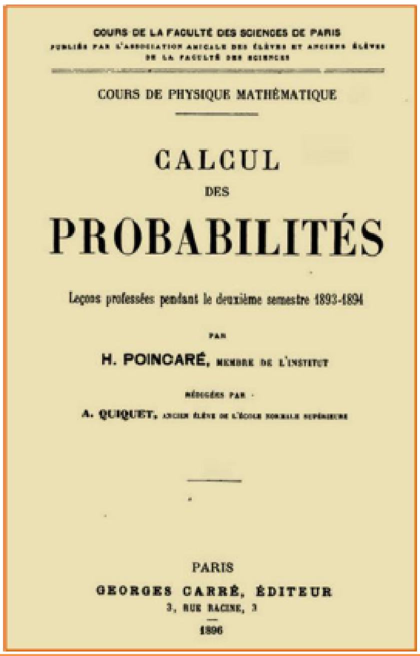
1888

Ο ορισμός της πιθανότητας, όπως αναφέρεται στο εν λόγω βιβλίο:

> Η πιθανότητα ενός γεγονότος υπολογίζεται με την απαρίθμηση των ευνοϊκών περιπτώσεων, σε σύγκριση με εκείνη των δυνατών περιπτώσεων (Bertrand, 1888: 1).

Ο Jules Henri Poincaré (1854-1912), καθηγητής στην Sorbonne, εξέδωσε το βιβλίο[23] του για τις Πιθανότητες το 1896, το οποίο ήταν επηρεασμένο από το αντίστοιχο βιβλίο του Bertrand και πρόβαλε μια ενοποιητική μεθόδευσή του. Ο Henri Poincaré το 1886 ανέλαβε την έδρα της Μαθηματικής Φυσικής ως το 1896 και ασχολήθηκε με τις πιθανότητες και τη διδασκαλία τους μόνο κατά τα έτη 1891-1892 (αφιέρωσε μόνο ένα εξάμηνο, δηλαδή 12 ή 13 μαθήματα) βασιζόμενος στα μαθήματα του Bertrand στην École Polytechnique. Σημειώνεται ο ίδιος δεν είχε παρακολουθήσει τον Bertrand αλλά τον Hérmite που δε δίδασκε Πιθανότητες.

[23] Το οποίο είχε θεωρητικό προσανατολισμό.


COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS
PUBLIÉS PAR L'ASSOCIATION AMICALE DES ÉLÈVES ET ANCIENS ÉLÈVES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

CALCUL
DES
PROBABILITÉS

Leçons professées pendant le deuxième semestre 1893-1894

PAR
H. POINCARÉ, MEMBRE DE L'INSTITUT

RÉDIGÉES PAR
A. QUIQUET, ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PARIS
GEORGES CARRÉ, ÉDITEUR
3, RUE RACINE, 3
1896

<u>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ</u>:

Ορισμός της πιθανότητας

(παραδείγματα και επιστημολογικές παρατηρήσεις),

Δεσμευμένες και αδέσμευτες πιθανότητες/

Προσδοκία/

Το θεώρημα του Bernoulli/

Ο τύπος του Stirling/

Ο νόμος του Gauss/

Πιθανότητες των αιτιών/

Θεωρία σφαλμάτων

(μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων)

Ο ορισμός της πιθανότητας, όπως αναφέρεται στο εν λόγω βιβλίο:

> Η πιθανότητα ενός γεγονότος είναι ο λόγος του αριθμού των ευνοϊκών περιπτώσεων προς τον συνολικό αριθμό των δυνατών περιπτώσεων γι' αυτό το γεγονός (Poincaré, 1896: 1).

5. Η ΠΡΩΤΗ ΕΜΦΑΝΙΣΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

Όπως προαναφέρθηκε, οι βάσεις της κλασικής ερμηνείας των Πιθανοτήτων και των εφαρμογών τους τέθηκαν στις αρχές του 19^{ου} αιώνα. Η ραγδαία ανάπτυξη των ενεργειακών υποδομών, της βιομηχανίας και των επικοινωνιών στην Κεντρική Ευρώπη, το δεύτερο μισό του 19^{ου} αιώνα, ήταν στενά συνυφασμένη με την πρόοδο της επιστημονικής και τεχνολογικής δραστηριότητας. Και οι μεταβολές αυτές, δεν άφησαν αδιάφορη την ελληνική πραγματικότητα (Αγριαντώνη, 1988). Αντίθετα, ο απόηχός τους είχε άμεση επίπτωση στις παραγωγικές, οικονομικές, πολιτικές και εκπαιδευτικές συνιστώσες[24] της ελληνικής κοινωνίας (Τσοκόπουλος, 1989; Antoniou

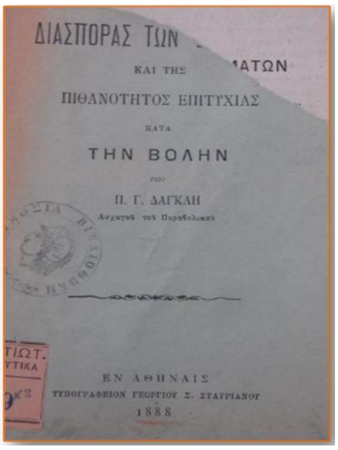
[24] "Η ελληνική οικονομία […] είχε μπει, από τη δεκαετία του 1860 σε μια καμπή. Ήδη στον Πειραιά, και από το 1870 και σε άλλες πόλεις, άρχισε να εξαπλώνεται το πρώτο κύμα εκβιομηχάνισης. Οι σιδηρόδρομοι, μια δεκαετία αργότερα, η ατμοκίνητη ναυτιλία, τα μεγάλα τεχνικά έργα, έθεταν το πρόβλημα του τεχνικού εκσυγχρονισμού της Ελλάδας. Παρ' όλο που η ανάγκη αυτή δεν απαντήθηκε ποτέ ικανοποιητικά και ολοκληρωμένα στο επίπεδο της οικονομίας, το Πανεπιστήμιο παρουσιάζει κάποια δείγματα προσαρμογής […] Η αργή αλλά σταθερή εξέλιξη [των φυσικών επιστημών] θα οδηγήσει στο διαχωρισμό της Φυσικομαθηματικής Σχολής από την Φιλοσοφική το 1904. Ωστόσο, η σημασία των φυσικών και μηχανικών επιστημών μετά την δεκαετία του 1860 υπογραμμίζεται περισσότερο αν ληφθούν υπ' όψη δύο ακόμα δεδομένα: το πρώτο είναι μια τάση για τέτοιου είδους

& Assimakopoulos, 2003). Από το 1880 και μετά, δρομολογήθηκε μια σειρά μεταρρυθμιστικών προσπαθειών για τον εκσυγχρονισμό των ευαίσθητων τομέων της ελληνικής παραγωγικής και οικονομικής ανάπτυξης. Μεταξύ αυτών, νευραλγικό ρόλο είχε η αναβάθμιση της παιδείας και ειδικότερα η ανύψωση της επιστημονικής και τεχνικής μόρφωσης (Γαβρόγλου, Καραμανωλάκης & Μπάρκουλα, 2014).

5.1 Η ΠΡΩΤΗ ΑΝΑΦΟΡΑ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ (1888)

Αναφορικά με την ανάπτυξη της ανώτερης παιδείας στην Ελλάδα κατά τον 19ο αιώνα, η πρώτη μη-στοιχειώδης τεχνική εκπαίδευση προωθήθηκε στη Σχολή Ευελπίδων, από την ίδρυσή της το 1828, και απηχούσε το πνεύμα της École Polytechnique. Από το 1833 και μετά, η πολιτική των Βαυαρών αξιωματούχων του Όθωνα διεύρυνε, ανύψωσε και ανασυγκρότησε το επίπεδο σπουδών της Σχολής και χαρακτηρίζεται πλέον ως Ανώτερη Τεχνική Σχολή. Τη δεκαετία του 1880 αναδιοργανώνεται ο Ελληνικός Στρατός και η Σχολή Ευελπίδων, με τη βοήθεια γαλλικής οργανωτικής αποστολής. Στο πλαίσιο αυτό εμπλουτίζεται το επίπεδο σπουδών με νέα μαθήματα και απαιτείται η συγγραφή διδακτικών βιβλίων.

Δεν αποτελεί έκπληξη, επομένως, πως το πρώτο έντυπο εγχειρίδιο- αναφορά στις Πιθανότητες τόσο στον τίτλο του όσο στο περιεχόμενό του, είναι το «*Περί της διασποράς των βλημάτων και της πιθανότητας επιτυχίας κατά την βολήν*», βιβλίο που εκδόθηκε το έτος 1888 βασιζόμενο σε ομιλία του Λοχαγού Π. Γ. Δαγκλή προς το Α' Σύνταγμα Πυροβολικού.



ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΤΩΝ ... ΑΤΩΝ

ΚΑΙ ΤΗΣ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΟΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

ΚΑΤΑ

ΤΗΝ ΒΟΛΗΝ

ΥΠΟ

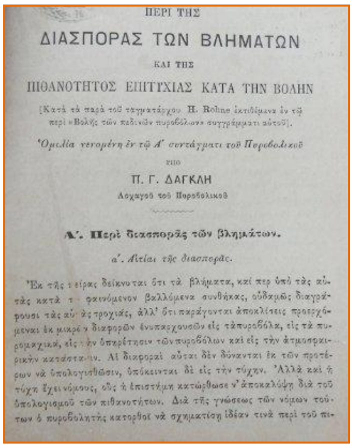
Π. Γ. ΔΑΓΚΛΗ

Λοχαγοῦ τοῦ Πυροβολικοῦ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΓΕΩΡΓΙΟΥ Σ. ΣΤΑΥΡΙΑΝΟΥ

1888



ΠΕΡΙ ΤΗΣ

ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΤΩΝ ΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΚΑΙ ΤΗΣ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΟΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΒΟΛΗΝ

[Κατὰ τὰ παρὰ τοῦ ταγματάρχου H. Rohne ἐκτιθέμενα ἐν τῷ περὶ «Βολῆς τῶν πεδινῶν πυροβόλων» συγγράμματι αὐτοῦ].

Ὁμιλία γενομένη ἐν τῷ Α' συντάγματι τοῦ Πυροβολικοῦ

ΥΠΟ

Π. Γ. ΔΑΓΚΛΗ

Λοχαγοῦ τοῦ Πυροβολικοῦ

Α'. Περὶ διασπορᾶς τῶν βλημάτων.

α'. Αἰτίαι τῆς διασπορᾶς.

Παναγιώτης Γ. **Δαγκλής**

σπουδών στο εξωτερικό που παρατηρείται την ίδια εποχή, Το 1870, για παράδειγμα, το ελληνικό κράτος παραχωρεί τις πρώτες του υποτροφίες για σπουδές στην «μηχανική τέχνη» στην Γερμανία. Και μέσα στο διευθυντικό προσωπικό των εργοστασίων, ξεχωρίζουμε μετά το 1870 πολλούς μηχανικούς μετεκπαιδευμένους στην Γαλλία, την Αγγλία ή την Γερμανία, ιδιότητα που μετράει στην οικονομική πρακτική και στις αξίες της νεοπαγούς αστικής τάξης. Το δεύτερο στοιχείο είναι η αλλαγή στην λειτουργία του Πολυτεχνείου που παρατηρούμε μετά το 1863 (Τσοκόπουλος, 1989).

Ο Παναγιώτης Γεωργίου Δαγκλής γεννήθηκε το 1853 στο Αγρίνιο και αποφοίτησε από τη Σχολή Ευελπίδων (Πυροβολικό) το 1878. Μετεκπαιδεύτηκε αργότερα, για το ακαδημαϊκό έτος 1883-84 , στο Βέλγιο. Όταν επέστρεψε, και κατά τα έτη 1884-1887, διορίστηκε Υπασπιστής του Αρχηγού της πρώτης Γαλλικής Στρατιωτικής Αποστολής, η οποία είχε κληθεί για τον εκσυγχρονισμό του Ελληνικού Στρατού. Στη συνέχεια, υπηρέτησε πρώτα στο Σύνταγμα του Όπλου του κι έπειτα ως Καθηγητής της Πυροβολικής στη Στρατιωτική Σχολή Ευελπίδων (Τούρα, 2013).

Το βιβλίο αποτελείται από δύο μέρη - κεφάλαια. Το πρώτο τιτλοφορείται «*Περί διασποράς των βλημάτων*», αναφέρεται γενικά στη διασπορά (των βλημάτων) και εστιάζει στις αιτίες της διασποράς, στην εικόνα της συγκεντρώσεως των βολών και τις μέσες διασπορές, στον προσδιορισμό του μέσου σημείου κρούσεως και τις αποκλίσεις των βλημάτων, στην κατανομή των βολών επί της εικόνας της συγκεντρώσεως αυτών και στις πιθανές αποκλίσεις των πυροβόλων.

Το δεύτερο μέρος του βιβλίου έχει ως τίτλο «*Περί της πιθανότητος επιτυχίας εν τη βολή*» και αναφέρει τον ορισμό της πιθανότητας και το συντελεστή πιθανότητας, τη διανομή των βολών κατά τη διεύθυνση του βεληνεκούς επί της επί οριζοντίου εδάφους εικόνος της συγκεντρώσεως των βολών, τον υπολογισμό της πιθανότητας επιτυχίας κάποιου στόχου, την αξιοποίηση των σχετικών πινάκων, τις αιτίες που μειώνουν την πιθανότητα επιτυχίας και την πραγματική προσδοκία της επιτυχίας. Τα περιεχόμενα που προαναφέρθηκαν, συνοδεύονται από λυμένα παραδείγματα, που δίνονται για την καλύτερη κατανόηση της θεωρίας που προηγείται αυτών. Δίνονται τρία παραδείγματα εύρεσης της πιθανότητας επιτυχίας κάποιου στόχου (ανάλογα είτε με την απόσταση του πυροβόλου από τον στόχο, είτε με το ύψος στο οποίο βρίσκεται ο στόχος και το ποσοστό επιτυχίας που θέλουμε) και στη συνέχεια, παρουσιάζονται αριθμητικά παραδείγματα έπειτα από την παράθεση ορισμών, με σκοπό την εμπέδωση της θεωρίας.

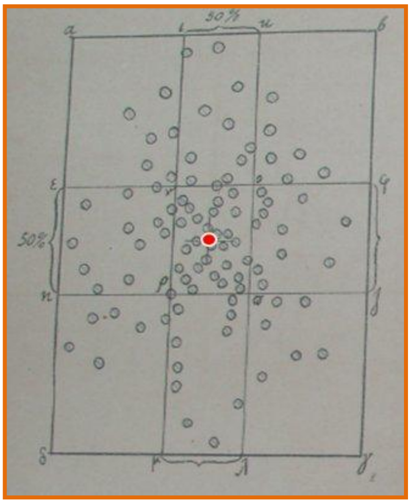
Ο συγγραφέας δηλώνει στην πρώτη σελίδα του εγχειριδίου πως τα όσα γράφει βασίζονται στο σύγγραμμα περί «*Βολής των πεδινών πυροβόλων*» του ταγματάρχη H. Rohne. Ουσιαστικά, το βιβλίο του Δαγκλή αποτελεί μετάφραση ενός μέρους του βιβλίου Rohne, H. (1882). *Le tir de l'artillerie de campagne,* Tradution du capitaine commandant G. Bodenhorst de l'artillerie belge, Bruxelles : C. de Laroière. Το αρχέτυπο του ήταν το γερμανικό βιβλίο: Rohne, H. (1881). *Das Schiessen der Feld-Artillerie unter Berücksichtigung der für die preußische Artillerie gültigen Bestimmungen,* Berlin: Mittler.

Στα πλαίσια της πολιτικής και παραγωγικής αναδιοργάνωσης της χώρας, την περίοδο του Τρικούπη, άρχισε να πνέει ένας νέος άνεμος στην ελληνική επιστημονική παιδεία, που οφειλόταν σε ενδογενείς και εξωγενείς παράγοντες. Ένας απ' αυτούς τους εξωγενείς παράγοντες ήταν η Γαλλική αποστολή, με επικεφαλής τον V. Vosseur, για τον εκσυγχρονισμό του Ελληνικού στρατού, την περίοδο 1884-1887, η οποία δεν μπορεί να μην επηρέασε τον Π. Δαγκλή, υπασπιστή τότε του Vosseur. Ο

Δαγκλής, ένας φέρελπις νέος αξιωματικός, όταν ανέλαβε την εν λόγω θέση, μόλις είχε επιστρέψει από τη μετεκπαίδευσή του στο Βέλγιο (Τούρα, 2013).

Το 1888 και μέσα στο κλίμα της Γαλλικής ανασυγκρότησης του Ελληνικού στρατού ο Δαγκλής έκανε μια ομιλία στο Α' Σύνταγμα Πυροβολικού σχετικά με τη νέα επιστημονική μέθοδο για την επιτυχία τον βολών, τη μέθοδο των Πιθανοτήτων. Τη μέθοδο αυτή, την έμαθε στη διάρκεια της μετεκπαίδευσής του στο Βέλγιο, όπου οι Πιθανότητες είχαν αναπτυχθεί από τους A. Quetelet, A. Meyer, J. Liagre και εφαρμόστηκαν στην Πυροβολική.

Το θέμα της ομιλίας του Δαγκλή ήταν η διασπορά των βλημάτων, δηλαδή το σκόρπισμα τους γύρω από ένα στόχο. Παρουσιάζει το παρακάτω παράδειγμα διασποράς βλημάτων, κι όπως φαίνεται προσπαθεί να προσδιορίσει την οριζόντια και την κατακόρυφη ζώνη με μεγάλα ποσοστά βολών κοντά στο στόχο, με τη βοήθεια του Λογισμού των Πιθανοτήτων.



Σχήμα 1

Έτσι, στην κατακόρυφη εικόνα της συγκέντρωσης των βολών (Σχήμα 1) και σε ίσες αποστάσεις από το μέσο σημείο κρούσεως (που έχει τεθεί στο μέσο ακριβώς του στόχου), φέρνει δύο οριζόντιες γραμμές που περικλείουν τις μισές βολές (50%), σχηματίζοντας ζώνη της οποίας το πλάτος καλεί *μέση καθ' ύψος (κατακόρυφη) διασπορά*. Με τον ίδιο τρόπο χαράσσει σε ίσες αποστάσεις από το μέσο σημείο κρούσεως δύο κατακόρυφες γραμμές, μεταξύ των οποίων περιλαμβάνονται οι μισές βολές (50%), και καλεί την απόστασή τους *μέση κατά διεύθυνση (οριζόντια) διασπορά*.

Προσδιορίζει στο πεδίο βολής μία οριζόντια ζώνη γύρω από το στόχο έτσι, ώστε σε αυτή να συγκεντρώνεται το 50% των βολών (δηλαδή η πιθανότητα να βληθεί αυτή η περιοχή είναι ½). Όμοια, προσδιορίζει μία κατακόρυφη ζώνη γύρω από το στόχο με πιθανότητα ½ να βληθεί (δηλαδή να συγκεντρώνει το 50% των βολών). Παρατηρεί ότι η τομή τους έχει πιθανότητα να βληθεί $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, δηλαδή συγκεντρώνει το 25% των βολών. Υπονοεί, με άλλα λόγια, αυτό που σήμερα ονομάζουμε Θεώρημα του de Moivre.

Ομοίως, και τα υπόλοιπα ποσοστά που αναφέρει στην ομιλία του προκύπτουν από τον πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων για ανεξάρτητα ενδεχόμενα: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, χωρίς να γίνεται οποιαδήποτε αναφορά σε κάποια θεωρητική έννοια (όπως αυτήν της δεσμευμένης πιθανότητας). Μια προφανής εξήγηση είναι ότι, επειδή πρόκειται για ομιλία κι όχι για μάθημα, ο Δαγκλής δεν ενδιαφέρεται να δώσει έμφαση στο θεωρητικό υπόβαθρο, αλλά μάλλον στη βελτίωση των τεχνικών που χρειάζονται οι ακροατές του.

Η θεωρία των πιθανοτήτων έχει δείξει ότι η διασπορά των βλημάτων, που φαινομενικά έχει σχήμα ακανόνιστο, στην πραγματικότητα υπόκειται σε καθορισμένους νόμους, υπό την προϋπόθεση ότι ο αριθμός των φυσιγγίων που βλήθηκαν είναι αρκετά μεγάλος. Έτσι, στο δεύτερο μέρος του βιβλίου ο Δαγκλής εισάγει την έννοια της πιθανότητας και του συντελεστή πιθανότητας για να καταλήξει έπειτα στο ζητούμενο: να ορίσει την πιθανότητα επιτυχίας της βολής.

Με τη βοήθεια ενός πίνακα συντελεστών πιθανότητας (όπου κάθε συντελεστής αντιστοιχεί σε ορισμένο αριθμό επιτυχών βολών επί τοις εκατό), καθίσταται εύκολο να βρει κανείς τον αριθμό των βολών από τις 100 που δύνανται να επιτύχουν έναν στόχο ορισμένου ύψους, αν υποτεθεί ότι το σημείο πρόσκρουσης βρίσκεται στη μέση του στόχου. Αυτό είναι αρκετό για να βρεθεί τόσο ο συντελεστής πιθανότητας, όσο και ο αντίστοιχος αριθμός βολών.

Συντελεστές πιθανότητας

%	Συντελεστής	%	Συντελεστής	%	Συντελεστής	%	Συντελεστής	%	Συντελεστής
1	0,02	21	0,40	41	0,80	61	1,27	81	1,94
2	0,04	22	0,41	42	0,82	62	1,30	82	1,98
3	0,06	23	0,43	43	0,84	63	1,33	83	2,03
4	0,07	24	0,45	44	0,86	64	1,36	84	2,08
5	0,09	25	0,47	45	0,89	65	1,39	85	2,13
6	0,11	26	0,49	46	0,91	66	1,42	86	2,18
7	0,13	27	0,50	47	0,93	67	1,45	87	2,24
8	0,15	28	0,53	48	0,95	68	1,48	88	2,30
9	0,17	29	0,55	49	0,98	69	1,51	89	2,37
10	0,18	30	0,57	50	1,00	70	1,54	90	2,44
11	0,20	31	0,59	51	1,02	71	1,57	91	2,52
12	0,22	32	0,61	52	1,04	72	1,60	92	2,60
13	0,24	33	0,63	53	1,07	73	1,64	93	2,69
14	0,26	34	0,65	54	1,09	74	1,67	94	2,78
15	0,28	35	0,67	55	1,12	75	1,71	95	2,91
16	0,30	36	0,70	56	1,14	76	1,74	96	3,04
17	0,32	37	0,72	57	1,17	77	1,78	97	3,22
18	0,34	38	0,74	58	1,19	78	1,82	98	3,45
19	0,36	39	0,76	59	1,22	79	1,86	99	3,82
20	0,38	40	0,78	60	1,25	80	1,90		

Από ασκήσεις πυροβολικού μελετήθηκαν οι διασπορές βλημάτων και καταρτίστηκαν πίνακες συντελεστών πιθανότητας, οι οποίοι καθιερώθηκαν κι αποτελούσαν τα βοηθήματα των πυροβολητών.

Ένα παράδειγμα στο οποίο θα μπορούσε να φανεί η χρησιμότητα του πίνακα είναι το ακόλουθο[25]. *Στις 100 βολές ενός πυροβόλου, πόσες θα χτυπήσουν έναν στόχο*

[25] Το εν λόγω παράδειγμα αποτελεί προσαρμογή (της συγγραφέως) ενός παραδείγματος του Δαγκλή, ώστε να γίνει ευκολότερα κατανοητή η χρήση του πίνακα.

που είναι σε ύψος 1,70 μ., και η μέση καθ' ύψος διασπορά του είναι 0,74 μ.; Η λύση σύμφωνα με τα όσα παρουσιάζονται στο βιβλίο θα είναι η εξής: *Η οριζόντια ζώνη που επιλέγεται με το 50% των βολών είναι πλάτους 1,70 μ. (85 εκ. πάνω και 85 εκ. κάτω από το στόχο). Ο συντελεστής πιθανότητας θα είναι 1,7: 0,74 = 2,30, που αντιστοιχεί στον πίνακα στο 88% των βολών. Δηλαδή, υπάρχει 88% πιθανότητα να επιτευχθεί ο στόχος.*

Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, το πρώτο μέρος του προς εξέταση εγχειριδίου εξετάζει τη διασπορά των βλημάτων, την οποία ορίζει ως *το διάστημα που χωρίζει τη χαμηλότερη βολή από την υψηλότερη ή την πιο αριστερή από την πιο δεξιά αποκλίνουσα βολή*- αυτό, δηλαδή, που θα καλούσαμε «εύρος» στον κατακόρυφο και οριζόντιο άξονα αντίστοιχα με τη σημερινή ορολογία.

Στο δεύτερο μέρος του βιβλίου που τιτλοφορείται «*Περί της πιθανότητος επιτυχίας εν τη βολή*», ο συγγραφέας κάνει αναφορά στην πιθανότητα επιτυχίας- αφού προηγουμένως έχει αναφέρει πως ο Λογισμός των Πιθανοτήτων ορίζει την πιθανότητα ως τον *λόγο του αριθμού των ευνοϊκών για την έκβαση κάποιου γεγονότος περιπτώσεων, προς τον αριθμό των δυνατών περιπτώσεων* (Δαγκλής, 1888: 13). Πιο συγκεκριμένα, θεωρεί πως για τις βολές, *πιθανότητα επιτυχίας είναι η επί τοις εκατό αναλογία των επιτυχών βολών*, πάνω στην οποία μπορεί να βασιστεί κάποιος για τη βολή κατά στόχου ορισμένων διαστάσεων. Με λίγα λόγια, ο ορισμός που δίνεται στο εγχειρίδιο αυτό, είναι αυτός της κλασικής πιθανότητας.

Μετά την αναφορά του ορισμού της πιθανότητας, ο συγγραφέας εισάγει τον αναγνώστη στην έννοια του συντελεστή πιθανότητας, τον οποίο ορίζει ως τον *λόγο του πλάτους κάποιας ζώνης προς τη μέση διασπορά* (ή ως τον *λόγο της διάστασης κάποιου στόχου προς τη μέση διασπορά*) (Δαγκλής, 1888: 14). Στις τελευταίες σελίδες ο Δαγκλής (1888: 17-23) αναφέρεται στις αιτίες μείωσης της πιθανότητας επιτυχίας της βολής, εξετάζοντας τη μη οριζοντιότητα του εδάφους πάνω στο οποίο βρίσκονται οι τροχοί και το σχήμα της τροχιάς, για να καταλήξει στο συμπέρασμα πως οι παράγοντες που δυνητικά επιδρούν στην προσδοκία επιτυχίας είναι η ακρίβεια βολής των πυροβόλων, το σχήμα της τροχιάς, η θέση του μέσου σημείου κρούσεως σε σχέση με τον στόχο και η ατμοσφαιρική κατάσταση (Δαγκλής, 1888).

Γίνεται φανερό κι από το μέγεθος του εγχειριδίου- μόλις 23 σελίδες- πως ο Δαγκλής δεν είχε σκοπό να καταρτίσει τους ακροατές/ αναγνώστες του στις Πιθανότητες, αλλά μάλλον να κάνει μια εισαγωγή σε αυτές, αναφέροντας μόνο το θέμα που ενδιέφερε το Πυροβολικό: την επιτυχία της βολής (Τούρα, 2013). Είναι πολύ πιθανό, να χρησιμοποίησε το βιβλίο αυτό ως εισαγωγή στο μάθημα της Πυροβολικής που ξεκίνησε να διδάσκει στη Σ.Σ.Ε. ένα χρόνο αργότερα, το 1889, έως το 1895.

5.2 Η ΔΕΥΤΕΡΗ ΑΝΑΦΟΡΑ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ (1901/ 1893;)

Κατά τη μετάβαση στον 20^{ο} αιώνα παρατηρήθηκαν αρκετές και σημαντικές ανακατατάξεις αναφορικά με την κατάσταση της επιστήμης στην Ελλάδα. Οι αλλαγές αυτές σχετίζονται με μία γενικότερη δυναμική που επικρατούσε στην κεντρική Ευρώπη και ιδιαίτερα στις βιομηχανικά προηγμένες χώρες (Κρητικός, 1995). Η επικρατούσα τάση στο εξωτερικό προωθεί την αύξηση των θετικών επιστημόνων και των μηχανικών (Τσοκόπουλος, 1989).

Η τεχνική και κοινωνική πρόοδος της χώρας, σε συνδυασμό με την περιρρέουσα ατμόσφαιρα -ο απόηχος της δεύτερης επιστημονικής επανάστασης γίνεται αισθητός στη χώρα μας ως νέο κίνημα επιστημονικών ιδεών (Κρητικός, 1995), οδήγησαν σε μια ανανέωση της επιστήμης στην Ελλάδα. Η ανανέωση αυτή έγινε εμφανής στις θετικές επιστήμες κυρίως με την πραγματοποίηση δύο θεσμικών αλλαγών: την αναβάθμιση του Πολυτεχνείου σε ανώτερο (το 1887) και ανώτατο (το 1914) Εκπαιδευτικό Ίδρυμα (Καλαφάτη, 1989 & Αντωνίου, 2004) και την αυτονόμηση της Φυσικομαθηματικής Σχολής από τη Φιλοσοφική (το 1904). Μαζί με αυτές τις θεσμικές αλλαγές, παρατηρούνται και αλλαγές στο περιεχόμενο των μαθημάτων. Η διδασκαλία των Μαθηματικών, για παράδειγμα, ενισχύεται στο Πολυτεχνείο ως ένδειξη της αναβάθμισης των σπουδών (Αντωνίου, 2004 & Κρητικός, 1995).

Μέσα σε αυτό το κλίμα, ο Ιωάννης Λαζαρίμος (1849-1913), ένας εξέχων μηχανικός και καθηγητής στο γύρισμα του 19^{ου} αιώνα, έκανε μια ανανέωση του μαθήματος της Γεωδαισίας στο Βιομηχανικό Σχολείο. Συγκεκριμένα, το βιβλίο του *ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ ΚΑΙ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ, ΜΕΡΟΣ Β', ΓΕΩΔΑΙΣΙΑ-ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ*, το διδακτικό εγχειρίδιο που παρουσιάζει και αναπτύσσει τη θεωρία των πιθανοτήτων, το οποίο εκδίδεται το 1901, γράφτηκε για τις ανάγκες των μαθημάτων που παρέδιδε ο συγγραφέας στους φοιτητές του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Όπως είναι φανερό από τον τίτλο του βιβλίου, οι πιθανότητες δεν εμφανίζονται στο ελληνικό εκπαιδευτικό γίγνεσθαι ως απόρροια κάποιας μαθηματικής θεωρίας, αλλά ως συμπλήρωμα/χρήσιμο εργαλείο ενός βιβλίου τοπογραφίας (ή, πιο συγκεκριμένα, γεωδαισίας).

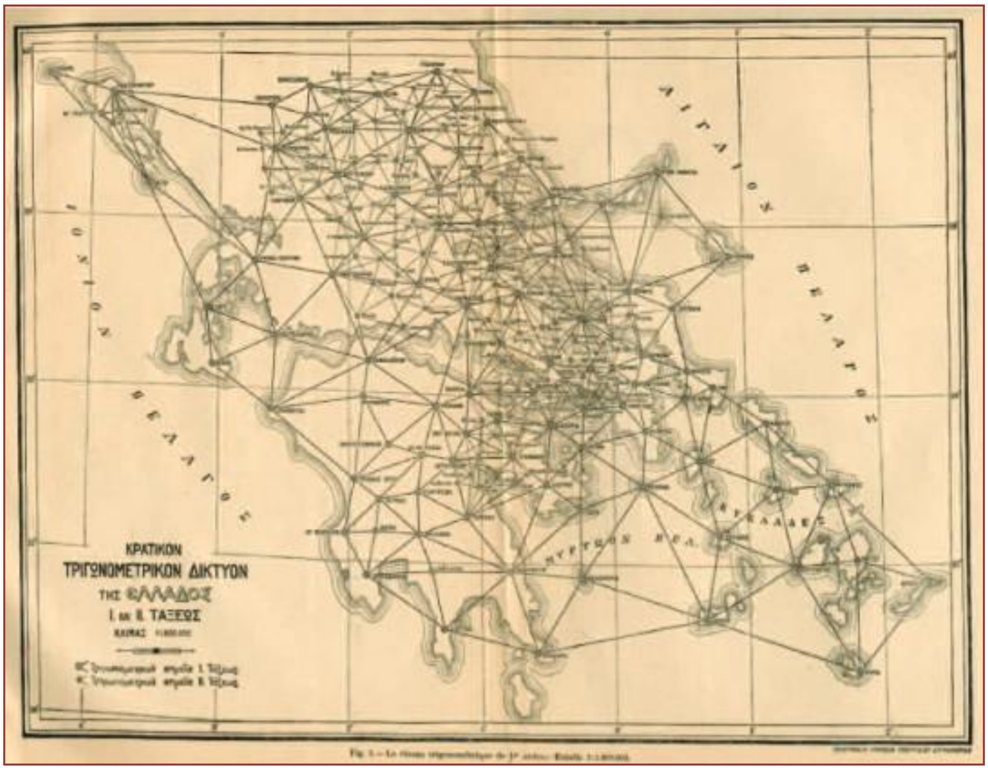
Ο Ιωάννης Λαζαρίμος σπούδασε Χωρομετρία στο Σχολείο των Τεχνών (πρόδρομο του ΕΜΠ) στην Αθήνα, και Αρχιτεκτονική στη Σχολή Καλών Τεχνών στο Παρίσι, όπου είχε μεταβεί με υποτροφία για ανώτερες σπουδές. Με την επάνοδό του στην Ελλάδα το 1878, διορίστηκε καθηγητής της Χωρομετρίας στο Σχολείο των Τεχνών, ενώ το 1887 αναδιορίστηκε καθηγητής της Τοπογραφίας στο νεοϊδρυθέν Σχολείο των Βιομηχανικών Τεχνών. Από το επόμενο έτος εξελέγη υποδιευθυντής του Σχολείου. Παράλληλα με το Πολυτεχνείο, διετέλεσε καθηγητής των Ανώτερων Μαθηματικών στη Σχολή των Ναυτικών Δοκίμων, όπου πρώτος δίδαξε Γεωδαισία και Υδατογραφία (Μπίρης, 1956). Τέλος, αξίζει να σημειωθεί πως ταυτόχρονα με τη διδασκαλία, ασκούσε το επάγγελμα του μηχανικού στη γενέτειρά του τον Πειραιά, υπογράφοντας έργα όπως το Δημοτικό Θέατρο Πειραιά, τους ναούς Αγίου Νικολάου και Αγίου Κωνσταντίνου (Καβαλάρη, 2009).

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο Ι. Λαζαρίμος συνέγραψε, για τις ανάγκες των μαθημάτων Τοπογραφίας που παρέδιδε στο Πολυτεχνείο, σχετικά εγχειρίδια. Μέσα από την εξέλιξη της διδασκαλίας ενός μαθήματος είναι δυνατόν να αποκαλυφθεί η «προοπτική» που είχε ο διδάσκων για το μάθημα: ποια κομμάτια της επιστήμης προτιμούσε να διδάξει, σε ποια έδινε βαρύτητα και με ποια επέλεξε να το εμπλουτίσει από έτος σε έτος. Η θέση του διδάσκοντα σε συνδυασμό με το πλαίσιο μέσα στο οποίο διαδραματίζεται αυτή η εξέλιξη μπορούν να δώσουν μια ικανοποιητική εικόνα της εποχής, αναφορικά με την υποδοχή του νέου κλάδου στην ακαδημαϊκή κοινότητα.

Ξεκινώντας από το πρώτο διδακτικό βιβλίο που συνέγραψε το 1888 και είχε τον τίτλο *Μαθήματα Τοπογραφίας, Μέρος Α',* μπορεί να διαπιστωθεί πως δεν υπάρχει ίχνος πιθανοτήτων, θεωρίας σφαλμάτων ή αναφορά στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Σε αυτό το πρώτο πόνημα που εκδόθηκε μόλις ένα χρόνο μετά το διορισμό του ως καθηγητή τοπογραφίας στο Πολυτεχνείο, και παρά τις 503 σελίδες του, παρατηρεί κανείς απλώς μια εκτενή περιγραφή των μέχρι τότε (πρακτικών) γνώσεων των τοπογράφων-γεωδαιτών.

Το δεύτερο στη σειρά εγχειρίδιο (172 σελίδων), που αποτελεί συνέχεια του προηγούμενου, εκδίδεται το 1893 υπό τον τίτλο *Μαθήματα Τοπογραφίας, Μέρος Β',* όπου πάλι δεν γίνεται κάποια αναφορά στις πιθανότητες. Το ίδιο έτος, όμως, εκδίδεται ένα άλλο βιβλίο με τίτλο *Μαθήματα <u>Ανωτέρας</u> Τοπογραφίας*[26], 240 σελίδων με την τέταρτη ενότητά του (ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄) αφιερωμένη στο *Λογισμό των σφαλμάτων των παρατηρήσεων*. Στα έξι κεφάλαια αυτού του μέρους γίνεται εισαγωγή του αναγνώστη στον λογισμό των πιθανοτήτων, αναζήτηση του νόμου που διέπει τις πιθανότητες των σφαλμάτων, εύρεση του μέσου σφάλματος, ανάπτυξη της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων και παρουσίαση σχετικών εφαρμογών. Από τη διαφοροποίηση του τίτλου και την προσθήκη του επιθέτου «ανωτέρας» (σε συγκριτικό βαθμό) καθίσταται σαφές ότι η εισαγωγή του εν λόγω κλάδου των Μαθηματικών στην ύλη συμβάλλει στην ανέλιξη της τοπογραφικής επιστήμης.

[26] Σύμφωνα με τους καταλόγους των ψηφιοποιημένων αρχείων του ΕΜΠ, <u>το πρώτο εγχειρίδιο που εμφανίζεται να περιλαμβάνει μέρος που αναφέρεται στις Πιθανότητες και τη Θεωρία Σφαλμάτων είναι αυτό του 1893</u>! Λόγω της παλαιότητας των αυθεντικών βιβλίων που καθιστούν αδύνατη τη διαθεσιμότητα στο κοινό και της άγνωστης παρέμβασης που αυτά έχουν υποστεί από τους δωρητές τους, δεν μπορεί να ειπωθεί το συγκεκριμένο πόρισμα με βεβαιότητα.



Το 1890 αρχίζει ο πρώτος τριγωνισμός στη χώρα[27], μια ιστορική συγκυρία που δεν μπορεί παρά να επηρέασε τον, καθηγητή Τοπογραφίας, τότε, Ιωάννη Λαζαρίμο.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημανθεί μια ιστορική συγκυρία: με σκοπό τη σύνταξη κτηματικού χάρτη στο ελληνικό κράτος μετά την έξωση του Όθωνα, η κυβέρνηση του Χ. Τρικούπη κάλεσε το 1889 ειδική στρατιωτική αυστριακή αποστολή για να οργανώσει σχετική υπηρεσία (πρόδρομο αυτής που τώρα ονομάζουμε Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού). Επικεφαλής της αποστολής ήταν ο Αντισυνταγματάρχης Heinrich Hartl και την ομάδα αποτελούσαν ο λοχαγός Fr. Lehrl και ο υποπλοίαρχος J. Lohr (Τούρα, 2013; Λιβιεράτος, 1992 ; http://www.army.gr/default.php?pname=istorika_GYS&la=1).

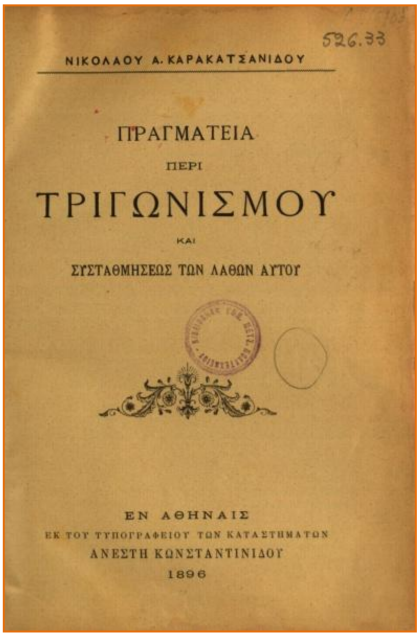
Ο Νικόλαος Α. Καρακατσανίδης[28] (1885- **?**) διορίζεται στο Πολυτεχνείο βοηθός τοπογραφικών ασκήσεων (δηλαδή βοηθός του Ι. Λαζαρίμου) το 1888, θεσμός

[27] Κατά την περίοδο 1890-96 εκτελέστηκαν οι εργασίες τριγωνισμού (1ης- 4ης τάξης) σε ολόκληρη τη χώρα. Επίσης, ιδρύθηκε το Τοπογραφικό Τμήμα με αρμοδιότητα την τοπογραφική αποτύπωση και τη σύνταξη τοπογραφικού χάρτη. Το 1897 οι εργασίες του Γεωδαιτικού Αποσπάσματος διακόπηκαν, για να συνεχίσουν την περίοδο 1898-1906 οι γεωδαιτικές και χαρτογραφικές αποτυπώσεις από Έλληνες μηχανικούς-αξιωματικούς της Χαρτογραφικής Υπηρεσίας, οργανισμού που διαδέχθηκε τη Γεωδαιτική Αποστολή.

[28] Στο (Τούρα, 2013: 822) διαβάζουμε ότι

> Ο Νικόλαος Α. Καρακατσανίδης, που σύμφωνα με τον Κ. Μπίρη (1956) διορίστηκε στο Πολυτεχνείο βοηθός τοπογραφικών ασκήσεων το 1888, θεσμός που μάλλον αναδύθηκε από τη μεταρρύθμιση του 1887, αναφέρει στο σύγγραμμά του και ειδικότερα στον πρόλογο αυτού πως «όσον αφορά εις την πρακτικήν διάταξιν των υπολογισμών και εν γένει εις ό,τι δεν ευρίσκει τις ουδέ εις τα δοκιμώτερα συγγράμματα, τούτο οφείλω εις τον Αυστριακόν

που μάλλον αναδύθηκε από τη μεταρρύθμιση του 1887. Στο σύγγραμμα που εκδίδεται το 1896 με τίτλο *«Πραγματεία περί τριγωνισμού και συσταθμήσεως των λαθών αυτού»,* αναφέρει πως*, τις γνώσεις του στους πρακτικούς υπολογισμούς, τις οφείλει σε γεωδαίτη της αυστριακής αποστολής (κ. Lehrl)* **(**Καρακατσανίδης, 1896: δ΄). Η παράλληλη πορεία τεχνικής-κοινωνικής προόδου της χώρας (αποτέλεσμα της δεύτερης βιομηχανικής επανάστασης) και ανύψωσης της τεχνικής εκπαίδευσης (απόρροια της γαλλικής επανάστασης) είναι πλέον εμφανής.



Το εξώφυλλο του βιβλίου του Ν. Καρακατσανίδη

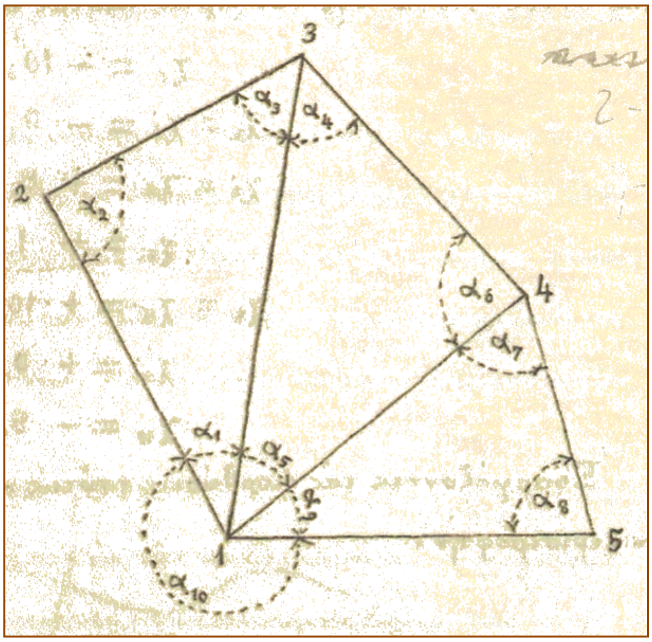
Επιστρέφοντας στο βιβλίο του Λαζαρίμου, διαπιστώνεται πως ο κύριος στόχος του βιβλίου του ήταν η χρήση των μεθόδων της Θεωρίας Πιθανοτήτων (με έμφαση στη Θεωρία Σφαλμάτων και τη Μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων) στη Γεωδαισία. Έτσι, στο σύγγραμμά του, παρουσιάζονται αρκετά παραδείγματα που αναφέρονται στον έλεγχο των γεωδαιτικών παρατηρήσεων[29]. Εδώ, παρουσιάζεται το εξής παράδειγμα διόρθωσης γωνιών τριγωνισμού:

Ταγματάρχην και σοφόν γεωδαίτην κ. Lehrl, όστις κατά την ενταύθα διαμονήν του πλείστα γεωδαιτικά ζητήματα μοι ανέπτυξεν…» (Καρακατσανίδης, 1896: δ΄).

Καθηγητής στην έδρα της Τοπογραφίας το διάστημα της παραμονής της αυστριακής αποστολής στην Ελλάδα (1889-1898) ήταν ο Ι. Λαζαρίμος και ο Ν. Καρακατσανίδης ήταν βοηθός αυτού (Μπίρης, 1956) και μέσω της σχέσης του με την τελευταία, έγινε φορέας νέων ιδεών-μεθόδων. Ελλείψει μάλιστα αναφοράς του ίδιου του Ι. Λαζαρίμου στα βιβλία ή τα άτομα που τον επηρέασαν στη συγγραφή των βιβλίων του, δε θα ήταν αβάσιμος ένας ισχυρισμός ότι πιθανότατα ο Ν. Καρακατσανίδης μεταλαμπάδευσε τις θεωρίες που χρησιμοποιούσε στην πράξη η Ευρώπη.

[29] Για την καλύτερη κατανόηση του παραδείγματος, παρατίθενται δύο ορισμοί.

Θεοδόλιχος: Τοπογραφικό όργανο κατάλληλο για την ακριβή μέτρηση γωνιών, που είναι απαραίτητες για τον τριγωνισμό.



Κι όπως φαίνεται, ο συγγραφέας προσπαθεί να προσδιορίσει τα λάθη που προκλήθηκαν από τη μέτρηση των γωνιών, με τη βοήθεια της Θεωρίας Σφαλμάτων. Ψάχνει να βρει ποιες διορθώσεις μπορούν να γίνουν, ώστε το άθροισμα των γωνιών τριγώνου να είναι 180° ενώ αυτό των γωνιών γύρω από σημείο 360°.

Μετρώντας (με τη βοήθεια θεοδόλιχου) τις γωνίες του σχήματος βρίσκει με μεγάλη ακρίβεια ότι:

α_1 = 36° 25' 47"	α_4 = 50° 26' 13"	α_7 = 70° 43' 28"
α_2 = 90° 36' 28"	α_5 = 42° 4' 7"	α_8 = 56° 19' 37"
α_3 = 52° 57' 57"	α_6 = 87° 29' 25"	α_9 = 52° 56' 34"
---------------	---------------	---------------
180° 0' 12"	179° 59' 45"	179° 59' 39"

Μετρώντας και την εξωτερική γωνία α_{10} βρίσκει:

α_1 = 36° 25' 47"

Τριγωνισμός: Τα σημεία γήινης επιφάνειας επιλέγονται και συνδέονται μεταξύ τους ώστε να σχηματίζουν ένα δίκτυο ή μια αλυσίδα τριγώνων, καθένα από τα οποία έχει μια κοινή πλευρά με το προηγούμενο. Η αποτύπωση αυτή είναι χρήσιμη στις μελέτες σχεδίων οδών, σιδηροδρομικών γραμμών, διωρύγων, σηράγγων, χαρτών. Βλ. http://www.geo.auth.gr/322/chapter062.html και http://greek_greek.enacademic.com/62540/%CE%B8%CE%B5%CE%BF%CE%B4%CF%8C%CE%BB%CE%B9%CF%87%CE%BF%CF%82 (ημερομηνία ανάκτησης 20-11-2017).

α_5 = 42° 4' 7"

α_9 = 52° 56' 34"

α_{10} =228° 33' 52"

360° 0' 20"

Οι διορθώσεις που πρέπει να γίνουν για να αποκτηθούν τα σωστά αθροίσματα είναι: στο πρώτο τρίγωνο -12", στο δεύτερο +15", στο τρίτο +21" και στο σημείο -20". Κάνοντας αλγεβρικές πράξεις βρίσκει ότι οι διορθώσεις που πρέπει να γίνουν (δηλαδή τα σφάλματα των μετρήσεων που έγιναν) είναι λ.χ. -10,22" για την γωνία α_1, και -0,89" για τις γωνίες α_2 και α_3.

Επίσης, αξίζει να γίνει αναφορά στους σημαντικούς ορισμούς και θεωρήματα που αναφέρει.

Ορισμός της πιθανότητας απλών γεγονότων (Λαζαρίμος, 1893: 162): *Πιθανότητα είναι ο λόγος του αριθμού των ευνοϊκών περιπτώσεων προς τον αριθμό των ευνοϊκών και δυσμενών περιπτώσεων μαζί- αν θεωρηθούν εξίσου πιθανές.*

Θεώρημα του Moivre (Λαζαρίμος, 1893: 164): *Η πιθανότητα της ταυτόχρονης παραγωγής πολλών γεγονότων ανεξάρτητων μεταξύ τους ισούται με το γινόμενο των σχετικών πιθανοτήτων του καθενός γεγονότος ξεχωριστά.*

Ορισμός της πιθανότητας τυχαίων σφαλμάτων (Λαζαρίμος, 1893: 168): *Έστω $N = \infty$ ο αριθμός των σφαλμάτων που περιέχεται μεταξύ των άκρων ορίων $-k$ και $+k$ και p ο αριθμός των σφαλμάτων που περιέχεται μεταξύ δύο απείρως εγγύτατων σφαλμάτων x και $x + dx$. Ο αριθμός p αυτός είναι πεπερασμένος και η πιθανότητα κάποιο σφάλμα να περιέχεται ανάμεσα στα x και $x + dx$ εκφράζεται από το απειροελάχιστο κλάσμα $\frac{p}{N}$.*

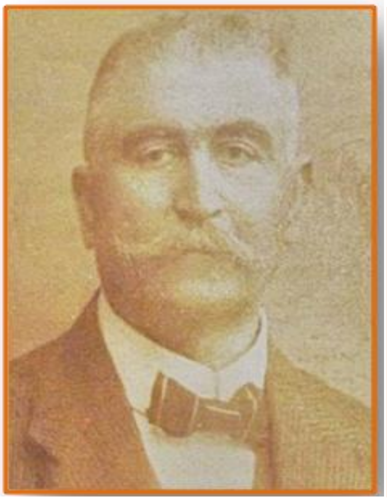
Η έκφραση της πιθανότητας του σφάλματος που περιέχεται μεταξύ δύο εγγύτατων ορίων x και $x + dx$ είναι (Λαζαρίμος, 1893: 171):

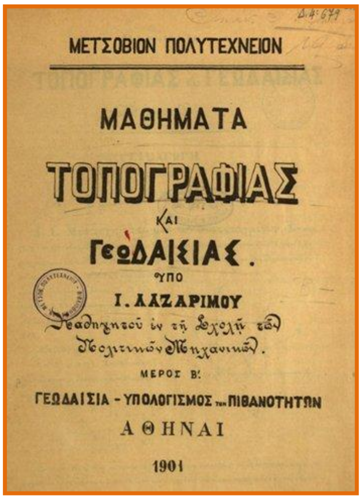
$$\frac{p}{N} = \varphi(\chi)\, d\chi = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\chi^2}\, d\chi$$

5.2.1 ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Ο ορισμός της πιθανότητας που δίνει για τα απλά γεγονότα είναι ο κλασικός ορισμός του Laplace. Ο ορισμός, όμως, της πιθανότητας των (τυχαίων) σφαλμάτων αναφέρεται σε συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και επομένως αυτή κατατάσσεται στις γεωμετρικές πιθανότητες. Παρατηρούμε, επίσης, και μια πιο ολοκληρωμένη έκφραση της όλης θεωρίας. Αξίζει να αναφερθεί πως η Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων κατέχει εξέχουσα θέση στο βιβλίο, αφού σε αυτήν αφιερώνονται δύο κεφάλαια.

Συνεχίζοντας, τώρα, στον κατάλογο των βιβλίων του Ι. Λαζαρίμου, το έτος 1894 εμφανίζεται το βιβλίο *Μαθήματα Τοπογραφίας, Μέρος Α' και Β',* 208 σελίδων. Τέλος, στο βιβλίο που εκδίδεται το 1901, στην αλλαγή του αιώνα, με τίτλο *Μαθήματα Τοπογραφίας και Γεωδαισίας, Μέρος Β'* και δεύτερο τίτλο *Γεωδαισία- Υπολογισμός των Πιθανοτήτων* (264 σελίδων), η καθιέρωση των πιθανοτήτων είναι εμφανής, αφού πλέον αναγράφεται και στον τίτλο του βιβλίου. Αξίζει να σημειωθεί εδώ πως το συγκεκριμένο βιβλίο είναι και το δεύτερο ελληνικό εγχειρίδιο με σαφή αναφορά στις Πιθανότητες στον τίτλο του.





ΜΕΤΣΟΒΙΟΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ

ΚΑΙ

ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ.

ΥΠΟ

Ι. ΛΑΖΑΡΙΜΟΥ

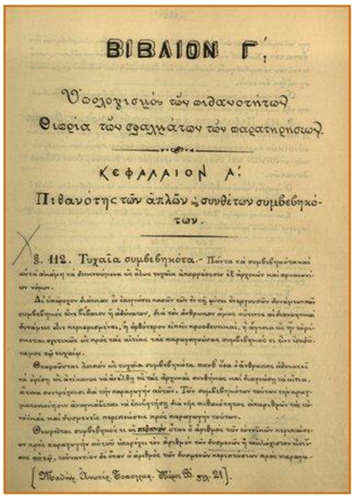
Καθηγητού εν τη Σχολή των Πολιτικών Μηχανικών.

ΜΕΡΟΣ Β'

ΓΕΩΔΑΙΣΙΑ - ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ των ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ

1901



ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'.

Υπολογισμός των πιθανοτήτων

Θεωρία των σφαλμάτων των παρατηρήσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Πιθανότης των απλών και συνθέτων συμβεβηκότων.

§. 112. Τυχαία συμβεβηκότα.- [illegible]

Ιωάννης Λαζαρίμος

Σε αυτό, λοιπόν, το βιβλίο και στην τρίτη ενότητα (ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄) που τιτλοφορείται *Υπολογισμός των Πιθανοτήτων. Θεωρία των σφαλμάτων των παρατηρήσεων*, υπάγονται επτά κεφάλαια. Από αυτά, τα πέντε έχουν κοινό περιεχόμενο με τα πέντε πρώτα κεφάλαια του τέταρτου «βιβλίου» του εγχειριδίου *Μαθήματα <u>Ανωτέρας</u> Τοπογραφίας* (τα τέσσερα μάλιστα έχουν και όμοιους τίτλους) του 1893, μόνο που σε αυτά του 1901 η γραφή είναι περισσότερο λεπτομερής. Απουσιάζει το κεφάλαιο που αναφερόταν στις εφαρμογές (μια εικασία είναι επειδή εν τω μεταξύ -το 1896- είχε εκδοθεί το βιβλίο του βοηθού στο μάθημα της Τοπογραφίας Ν. Καρακατσανίδη που περιείχε παραδείγματα), ενώ προστέθηκαν δύο κεφάλαια που αφορούσαν τις συνορθώσεις, αφενός μεν των παρατηρήσεων στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, αφετέρου δε τα τριγωνικά δίκτυα.

Είναι γνωστό πως στις τοπογραφικές μετρήσεις παρατηρούνται αποκλίσεις από τις πραγματικές τιμές. Με σκοπό την αντιμετώπιση των μετρικών αυτών αποκλίσεων διαμορφώθηκε η Θεωρία Σφαλμάτων, έχοντας ως στόχο την εκτίμηση, με τη βοήθεια των Πιθανοτήτων, του ακριβέστερου αποτελέσματος μετά από έναν αριθμό επαναλαμβανόμενων μετρήσεων ενός μεγέθους. Στο πνεύμα αυτό, ο Λαζαρίμος συμπεριέλαβε στην Τοπογραφία του τη Θεωρία Σφαλμάτων και τις Πιθανότητες. Για να χρησιμοποιήσει τις πιθανότητες στον χειρισμό των πολλαπλών μετρήσεων ενός μεγέθους, ο Λαζαρίμος εισήγαγε τις έννοιες: πιθανό γεγονός, πιθανότητα και σύνθετη πιθανότητα.

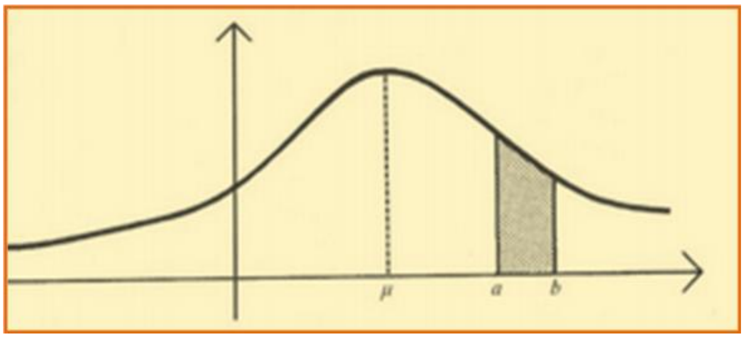
Σύμφωνα με τον Λαζαρίμο (1901: 161, 162, 164):

- Ένα γεγονός είναι *πιθανό* όταν ο αριθμός των ευνοϊκών περιπτώσεων *προς προαγωγήν αυτών* υπερέχει του αριθμού των δυσμενών ή τουλάχιστον είναι ίσος μ’ αυτόν, ενώ όταν ο αριθμός των δυσμενών περιπτώσεων *προς προαγωγήν* του γεγονότος υπερέχει των ευνοϊκών, τότε το γεγονός καλείται δυνατό.

- Η *πιθανότητα* ενός γεγονότος ισούται με το λόγο του αριθμού των ευνοϊκών περιπτώσεων του προς τον αριθμό των ευνοϊκών και δυσμενών περιπτώσεων οι οποίες θεωρούνται εξ ίσου δυνατές.

- *Σύνθετη πιθανότητα* είναι η πιθανότητα ενός γεγονότος που προκύπτει από τη σύμπραξη πολλών άλλων.

Στο πλαίσιο αυτό πραγματεύτηκε το Θεώρημα του Moivre*: Η πιθανότης της ταυτοχρόνου παραγωγής πολλών συμβεβηκότων ανεξαρτήτων αλλήλοις ισούται τω γινομένω των σχετικών πιθανοτήτων εκάστου των συμβεβηκότων τούτων ειλημμένων μεμονωμένως* (Λαζαρίμος, 1901: 164). Οι νύξεις αυτές των πιθανοτήτων αποτελούσαν τις στοιχειώδεις γνώσεις για να μελετηθεί ο νόμος του Gauss, η μέθοδος δηλαδή που ανέπτυξε ο Gauss, με τη βοήθεια της κανονικής καμπύλης κατανομών, η οποία αποσκοπούσε στην ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων μέτρησης. Με τη μέθοδο του Gauss προσδιορίζεται η πιθανότητα μιας μέτρησης ενός μεγέθους l από μια σειρά ν μετρήσεων του $l_1, l_2, \ldots, l_\nu$ (με μέση τιμή μ) να βρίσκεται μεταξύ δύο αριθμών a, b ως το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη της αντίστοιχης κανονικής κατανομής και περιορίζεται από τις κατακόρυφες γραμμές $x = a$ και $x = b$.



Η συνάρτηση της καμπύλης αυτής δίνεται από τον τύπο $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{(\chi-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, όπου σ είναι μια αριθμητική παράμετρος που αντιστοιχεί στην ακρίβεια του οργάνου μέτρησης.

Γίνεται φανερό ότι το επίπεδο των Πιθανοτήτων, στην Τοπογραφία του Λαζαρίμου, είναι πολύ χαμηλό και έχει έναν αρκετά περιορισμένο ρόλο. Οι στοιχειώδεις αυτές γνώσεις των Πιθανοτήτων αποτελούσαν ένα γνωστικό υποβοήθημα για την κατανόηση της Θεωρίας Σφαλμάτων και ειδικότερα της κανονικής κατανομής του Gauss. Αξίζει να σημειωθεί ότι το εγχειρίδιο αυτό ήταν επηρεασμένο από το βιβλίο *Cours d' Astronomie et de géodésie de l'École Polytechnique* (1876-77) του H. Faye (1881), όπου χρησιμοποιούνταν οι Γερμανικές μέθοδοι στη Γεωδαισία κι από το βιβλίο *Calcul des probabilités et théorie des erreurs* του J.B.J. Liagre (1852/1879).

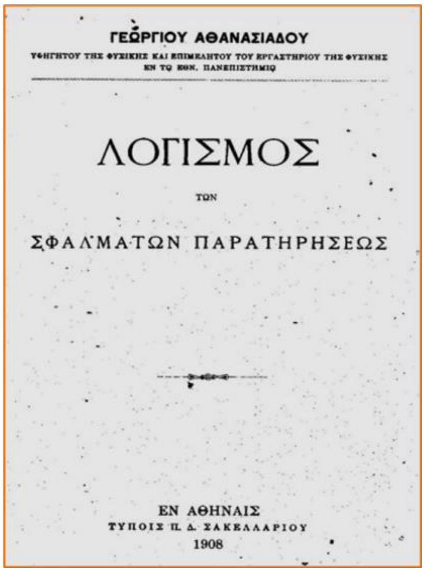
5.3 Η ΤΡΙΤΗ ΑΝΑΦΟΡΑ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ (1908)

Η Πειραματική Φυσική είναι ένας άλλος επιστημονικός τομέας, εκτός από την Πυροβολική και την Τοπογραφία, όπου οι μετρήσεις, τα σφάλματα και οι Πιθανότητες έχουν το ρόλο τους. Στα τέλη του 19ου αιώνα, οι Φυσικές Επιστήμες είχαν αποκτήσει εξαιρετικά υψηλό κύρος στις κοινωνίες της Δύσης. Κι αυτό γιατί η εδραίωση της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας και της θερμοδυναμικής επέφεραν μια ριζική ανανέωση στη Φυσική και προκάλεσαν μεγάλες αλλαγές στις διαδικασίες της βιομηχανικής παραγωγής.

Οι εξελίξεις αυτές δεν άφησαν αδιάφορο το Πανεπιστήμιο της Αθήνας. Ο καθηγητής της Φυσικής, Τιμολέων Αργυρόπουλος (1847-1912), άρχισε να οργανώνει το εργαστήριο Φυσικής στα τέλη του 19^{ου} αιώνα. Και το 1903 ανέλαβε το εργαστήριο αυτό ο επιμελητής, τότε, Γεώργιος Αθανασιάδης[30]. Το 1908 ο Αθανασιάδης εξέδωσε για τις ανάγκες των σπουδαστών του εργαστηρίου Φυσικής το βιβλίο: *Λογισμός των Σφαλμάτων Παρατηρήσεως*.

[30] «Ο Αθανασιάδης γεννήθηκε στην Πάτρα το 1866 και […] εγράφτηκε στη Φιλοσοφική Σχολή του Πανεπιστημίου Αθηνών, το 1885. Επήρε κατά το 1889 το δίπλωμα του Φυσικού τμήματος και αμέσως άρχισε να εργάζεται στην Παιδεία […]. Το 1900 ανακηρύχθηκε υφηγητής της Φυσικής στο Πανεπιστήμιο και το 1903 διωρίστηκε επιμελητής της έδρας αυτής εργαζόμενος από τότε κοντά στον Καθηγητή Τιμολέοντα Αργυρόπουλο. […] Η δημιουργία ενός αληθινού εργαστηρίου Φυσικής αρχίζει ουσιαστικά, με πρωτοβουλία του Αθανασιάδη, από τον καιρό που πρωτοδιορίστηκε επιμελητής της έδρας, κατά το 1903, κι από αυτή την εποχή καθιερώνονται για πρώτη φορά οι ασκήσεις Φυσικής για τους φοιτητάς. […] Ανώτερη θέση παίρνει μόλις το 1910 με τον διορισμό του στην έδρα της Φυσικής της Σχολής Δοκίμων, από την οποία εδίδαξε δύο χρόνια, μέχρι το 1912. […] Δημιουργήθηκε (26 Ιουλίου 1912) η Β' έδρα Πειραματικής Φυσικής και σ' αυτήν διωρίστηκε αμέσως εκείνος.»

«Ο καθηγητής Γεώργιος Κ. Αθανασιάδης» (PDF). chem.uoa.gr. Ανακτήθηκε στις 29-08-2016.


ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΟΥ

ΥΦΗΓΗΤΟΥ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΜΕΛΗΤΟΥ ΤΟΥ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΕΝ ΤΩ ΕΘΝ. ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΩ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΤΩΝ

ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΣ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΤΥΠΟΙΣ Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ

1908

Γεώργιος Αθανασιάδης (1866-1949)

Στο βιβλίο αυτό το κύριο ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην εφαρμογή της Θεωρίας Σφαλμάτων στις μετρήσεις της Φυσικής, αν και περιστασιακά γίνονται κάποιες αναφορές στην Αστρονομία, τη Γεωδαισία, την Πυροβολική και τη Στατιστική. Και στο συγκεκριμένο πλαίσιο, οι Πιθανότητες θίγονται περιθωριακά. Κεντρικό ζήτημα του βιβλίου είναι ο «νόμος της πιθανότητας των τυχαίων σφαλμάτων», και αποδεικνύεται ότι εκφράζει η συνάρτηση $P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-h^2 t^2}\, dt$. Ο τύπος (δηλαδή ο νόμος) αυτός σημαίνει ότι η πιθανότητα P το σφάλμα μιας σειράς μετρήσεων ενός μεγέθους t να είναι μικρότερο του x ισούται με το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα. Είναι φανερό ότι για τους συγκεκριμένους μαθηματικούς χειρισμούς απαιτούνται κάποια στοιχεία από τις Πιθανότητες, που εδώ περιορίζονται στον ορισμό της Πιθανότητας και στη νύξη του «θεωρήματος των συνθέτων πιθανοτήτων (του Moivre)».

Ο ορισμός της Πιθανότητας δίνεται σε υποσημείωση ως εξής: «*Καλείται πιθανότης συμβάντος τινός ο λόγος των ευνοϊκών περιπτώσεων ως προς το συμβάν προς τον ολικόν αριθμόν των ευνοϊκών ή δυσμενών περιπτώσεων*» (Αθανασιάδης, 1908: 13). Και το θεώρημα του Moivre παρουσιάζεται, επίσης, σε υποσημείωση ως εξής: «*Η πιθανότης της συγχρόνου παραγωγής πλειόνων συμβάντων ανεξαρτήτων απ' αλλήλων είνε το γινόμενον των πιθανοτήτων των σχετικών ενί εκάστω συμβάντι*» (Αθανασιάδης, 1908: 13).

5.4 ΛΙΓΑ ΣΧΟΛΙΑ

Με τα βιβλία αυτά εισάγεται, για πρώτη φορά, ο Λογισμός Πιθανοτήτων στη σύγχρονη ελληνική παιδεία. Και το παράξενο είναι ότι ο κλάδος αυτός των Μαθηματικών, δεν πρόβαλε στην Ελλάδα από το περιβάλλον των μαθηματικών, αλλά από τις διδακτικές πρωτοβουλίες της στρατιωτικής και τεχνικής/πειραματικής εκπαίδευσης.

Αυτή η ιδιαιτερότητα προκαλεί ένα ιστορικό ενδιαφέρον για τις επιστημονικές επιλογές και τις γενικότερες επιστημονικές συμπεριφορές σε νέες ιδέες και νέους κλάδους, στα πλαίσια μικρών και περιφερειακών χωρών, όπως αυτό της Ελλάδας, στην αρχή του 20^{ου} αιώνα. Δημιουργείται, έτσι, ένα κίνητρο για την κατανόηση της συγκεκριμένης, απρόσμενης, εισαγωγής των Πιθανοτήτων στην ελληνική παιδεία, παρά την σχετική "τοπική αδράνεια" της καθιερωμένης μαθηματικής νοοτροπίας. Ένα κίνητρο που δεν είναι ανεξάρτητο από τις διεθνείς τάσεις του αντίστοιχου επιστημονικού πεδίου, αλλά ούτε είναι αδιάφορο με τα μαθηματικά χαρακτηριστικά του νεοεισαγόμενου Λογισμού των Πιθανοτήτων, στην Ελλάδα. Ανακύπτει, επομένως, το ερώτημα: Για ποιον λόγο, φαίνεται ότι, οι Έλληνες μαθηματικοί αδιαφόρησαν, ενώ οι Πιθανότητες διείσδυσαν στην Ελληνική επιστημονική παιδεία την περίοδο 1888-1908;

Διεθνώς, η στάση των μαθηματικών για τις Πιθανότητες ήταν υποτιμητική, γύρω στο 1900. Οι Πιθανότητες μειονεκτούσαν στη σκέψη των μαθηματικών την περίοδο εκείνη. Το θεωρητικό υπόβαθρο και η μαθηματική αυστηρότητά τους ήταν αρκετά υποβαθμισμένα, σε αντίθεση με τα παραδοσιακά Μαθηματικά, π.χ. με τη Γεωμετρία του Ευκλείδη, τα οποία είχαν ένα υψηλό επίπεδο θεωρητικής συγκρότησης κι αυστηρότητας. Ο τρόπος σκέψης στις Πιθανότητες ήταν αποκλειστικά επαγωγικός (inductive), σε αντίθεση με τα παραδοσιακά Μαθηματικά που ήταν συμπερασματικός (deductive) κι αξιωματικός (Kapadia & Borovcnik, 1991).

Οι Πιθανότητες είχαν για τον Felix Klein μία, μάλλον, περιθωριακή θέση μεταξύ των μαθηματικών κλάδων. Στην περίφημη Μαθηματική Εγκυκλοπαίδεια, που επιμελήθηκε, αφιερώνεται ελάχιστος χώρος για τις Πιθανότητες και τη Στατιστική, στον Α΄ τόμο, που περιείχε κατά βάση την Αριθμητική και την Άλγεβρα. Επίσης, έχει αναφερθεί πως ο Émile Borel είχε ανάμεικτα συναισθήματα για τις Πιθανότητες κατά τη διάρκεια της ζωής του, καθώς θεωρούσε πως οι πιθανότητες δεν ήταν Μαθηματικά υψηλού επιπέδου, παρόλο που έβλεπε πως ήταν ένας πολλά υποσχόμενος τομέας (Mazliak, 2007).

Την εποχή εκείνη η ακαδημαϊκή κοινότητα του Πανεπιστημίου της Αθήνας, ήταν επηρεασμένη κυρίως από τη Γερμανική επιστήμη και εν μέρει από τη Γαλλική. Την περίοδο αυτή δύο προσωπικότητες δέσποζαν στα Ελληνικά μαθηματικά: ο Ιωάννης Χατζιδάκις (1844-1921) κι ο Κυπάρισσος Στέφανος (1857-1917). Αυτοί καθόριζαν την ορθολογικότητα στην τότε Ελληνική μαθηματική παιδεία, καλλιέργησαν το ερευνητικό πνεύμα και συστηματοποίησαν τις μαθηματικές σπουδές, στο γύρισμα του 19^{ου} αιώνα. Δεν εμπλούτισαν, όμως, το πανεπιστημιακό πρόγραμμα διδασκαλίας των Μαθηματικών. Αξίζει να σημειωθεί ότι στις ομιλίες των μαθηματικών αυτών δεν υπάρχει καμία νύξη στις Πιθανότητες, αν και αναφέρονται με έμφαση στην επιστημονική αξία των παραδοσιακών μαθηματικών κλάδων. Θα πρέπει , επί πλέον, να αναφερθεί ότι το πρόγραμμα στο Τμήμα των Μαθηματικών του Πανεπιστημίου της Αθήνας ήταν παγιωμένο, από το 1870 μέχρι το 1906, κυρίως, στα μαθήματα: Αναλυτική Γεωμετρία, Ανωτέρα Άλγεβρα, Διαφορικός κι Ολοκληρωτικός Λογισμός, Θεωρητική Μηχανική κι Αστρονομία[31]. Η αδιαφορία των Ελλήνων μαθηματικών για τις Πιθανότητες, γύρω στο 1900, οφείλονταν στην προσήλωσή τους στην παραγωγική και αξιωματική επιστημολογία και στον επηρεασμό τους από τη γενικότερη υποτιμητική στάση των Ευρωπαίων μαθηματικών σ' αυτόν τον αναπτυσσόμενο κλάδο του τυχαίου.

Το πρώτο βιβλίο *αμιγώς* αφιερωμένο στη θεωρία πιθανοτήτων εκδίδεται το 1911: είναι το «*ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ*» του Περικλή Ρεδιάδη (1875-1938).[32]

---

[31] Μετά το 1905 διευρύνθηκε το πρόγραμμα σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών με νέα μαθήματα, κυρίως, Γεωμετρίας και Μαθηματικής Ανάλυσης, που δίδαξαν οι Ν. Ι. Χατζιδάκης, Γ. Ρεμούνδος και Π. Ζερβός.

[32] Και στις τρεις πρώτες αναφορές, το επίπεδο των Πιθανοτήτων είναι πολύ χαμηλό και έχει έναν αρκετά περιορισμένο ρόλο. Αυτό είναι φυσικό, αν αναλογιστούμε πως οι συγγραφείς των βιβλίων έβλεπαν τον νέο αυτόν κλάδο ως εργαλείο για τη βελτίωση των υπολογισμών τους. Στο συγκεκριμένο εγχειρίδιο, όμως, οι Πιθανότητες αποκτούν πρωτεύοντα ρόλο.

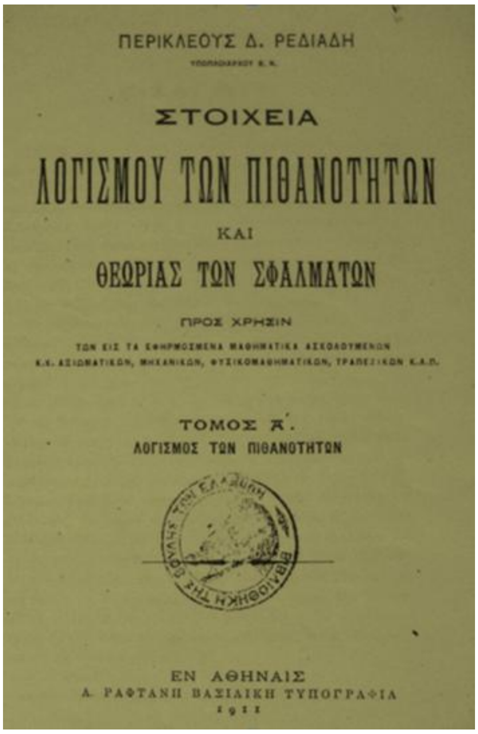
Γ΄ ΜΕΡΟΣ

ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

6. ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ Π. ΡΕΔΙΑΔΗ ΚΑΙ Ο ΣΥΓΓΡΑΦΕΑΣ

6.1 ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το βιβλίο «*Στοιχεία Λογισμού των Πιθανοτήτων και Θεωρίας των Σφαλμάτων*» του Περικλή Ρεδιάδη εκδόθηκε το 1911 «*προς χρήσιν των εις τα εφαρμοσμένα μαθηματικά ασχολούμενων κ.κ. αξιωματικών, μηχανικών, φυσικομαθηματικών, τραπεζικών κλπ.*» όπως ο ίδιος αναφέρει στο εξώφυλλο.



Στην Εισαγωγή του βιβλίου αναφέρεται στη σπουδαιότητα του Λογισμού των Πιθανοτήτων και ιδιαίτερα στη σημαντικότερη (όπως γράφει) εφαρμογή της, τη Θεωρία των Σφαλμάτων και τη Μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων, εξαιτίας της χρησιμότητας αυτών στην Αστρονομία, τη Γεωδαισία, τη Φυσική, τη Βλητική.

Διαβάζοντας το βιβλίο, παρατηρεί κανείς το εύρος των παραδειγμάτων του: από τυχερά παιχνίδια (ρίψη νομίσματος, εξαγωγή σφαιριδίου από κάλπη, ρίψη ζαριού) έως εφαρμογές στη Βλητική. Μεγάλο μέρος της θεωρίας- πέραν των γνωστών θεωρημάτων- καταλαμβάνουν τα λεγόμενα «Οικονομικά- Ασφαλιστικά Μαθηματικά». Δύο κεφάλαια του βιβλίου (το Ε΄ και το Ζ΄) είναι αφιερωμένα σε αυτόν τον κλάδο. Μάλιστα, δύο αναφορές στο βιβλίο αποκαλύπτουν ενδεχομένως κάποια από τα ενδιαφέροντα του γράφοντος, τα οποία πιθανώς τον ώθησαν στη συγγραφή αυτού.

Πιο συγκεκριμένα, στις σελίδες 58- 59[33] επισημαίνεται η προσωπική του ενασχόληση με το συσχετισμό της θεωρίας του ηθικού προσδόκιμου και το φόρο εισοδήματος, γεγονός που υποδηλώνει ότι ο συγγραφέας συσχετίζει την Στατιστική με τις Πιθανότητες σε ζητήματα φορολογίας- και οικονομίας γενικότερα. Επίσης, στη σελίδα 82[34] γίνεται μία νύξη αναφορικά με τη σχέση των ασφαλιστικών κρατήσεων των αξιωματικών του Βασιλικού Ναυτικού με την ισόβια πρόσοδο (rente viagère), με άλλα λόγια, ο συγγραφέας συσχετίζει τις Πιθανότητες με τα ζητήματα του ασφαλιστικού συστήματος στην Ελλάδα.

Στο σημείο αυτό, πρέπει να σημειώσουμε πως την περίοδο στην οποία αναφερόμαστε, η κοινωνία μεταβάλλεται: ισχυροποιείται η αστική τάξη, η χώρα επεκτείνεται (ενσωματώνοντας, το 1867 τα Επτάνησα και το 1881 τη Θεσσαλία), γίνεται νέα αναδιάρθρωση στην τεχνική εκπαίδευση το 1887, η επανάσταση στο Γουδί το 1909, ενώ η τετραετία 1910-1914 βάζει τις βάσεις για το μετασχηματισμό της Ελλάδας σε σύγχρονο κράτος με τις μεταρρυθμίσεις του Βενιζέλου. Ο «περί σωματείων» νόμος του 1914 θα δώσει ώθηση στην ανάπτυξη των κλαδικών ασφαλιστικών ταμείων. Μέχρι τότε, οι πρώτοι που ασφαλίστηκαν στην Ελλάδα είναι οι κρατικοί υπάλληλοι: διδάσκαλοι (1855), στρατιωτικοί (1858), δημόσιοι υπάλληλοι (1861), υπάλληλοι της Εθνικής Τράπεζας (1867). «*Το Ναυτικό Απομαχικό Ταμείο (ΝΑΤ) ιδρύεται το 1861. Θα στηριχθεί στην τριμερή χρηματοδότηση εργαζομένων, εργοδοτών και κράτους και θα επιδιώξει την περίθαλψη των αναπήρων ναυτεργατών και τη φροντίδα προς τις χήρες και τα ορφανά*» (Μαυρέας, 1998).

---

[33] ***Σημείωσις.*** *Πάντως η θεωρία του ηθικού προσδοκίμου δεν δύναται να αποκρουσθή. Εν τούτοις η έκφρασις του D. Bernouilli* $\frac{dx}{x}$ *του ηθικού κέρδους εκρίθη ως ανεφάρμοστος και αυθαίρετος, εφαρμοσθείσα δε καθ' ημετέραν σύστασιν, υπό του λοχαγού του πυροβολικού κ. Ι. Βλαχάβα προς έλεγχον επί του φόρου του εισοδήματος, και επί της σχετικής ημών μελέτης, παρέσχεν άδικον φορολογίαν διά το κάτοχον 2000000 φρ. εντελώς δημευτικήν, την των 75 τοις εκατόν. Εκ της ανεκδότου μελέτης εκείνης επείσθη ο λοχαγός Βλαχάβας, ότι αρμόζει μάλλον αντί της* $x^{-1}dx$ *του Bernouilli η έκφρασις* $x^{-\frac{1}{4}}dx$*, οπότε θέλομεν αντιστοίχως λάβει τους τύπους. [...]*

Ώστε δεν είνε η θεωρία του ηθικού προσδοκίμου ήτις σφάλει αλλά πιθανώς η εκλεγείσα υπό του Bernouilli έκφρασις αυτής.

Καίτοι δε η θεωρία του μαθηματικού προσδοκίμου ηδύνατο καλώς εφαρμοζόμενη να επαρκέση, εν τούτοις, η θεωρία του ηθικού προσδοκίμου εάν καλώς εκλεγή η έκφρασις του ηθικού κέρδους είνε μεγάλης χρησιμότητος (Ρεδιάδης, 1911, 58- 59).

[34] *Η θεωρία **των ταμείων προνοίας, βοηθείας απομάχων** κτλ, δεν διαφέρει ουσιωδώς της θεωρίας των ισοβίων προσόδων επί ενός ατόμου. Εάν π.χ. είς προσοδούχος ηλικίας* m *δίδει ήδη ποσόν Α προς απόκτησιν δικαιώματος συντάξεως* α *εις ηλικίαν* $m + t$*, ήτοι μετά* t *έτη, δέον να έχωμεν*

$$C = a(1+i)^{-t}\frac{y_{a+t+1}}{y_a} + a(1+i)^{-(t+1)}\frac{y_{a+t+1}}{y_a} + \cdots + a(1+i)^{-n}\frac{y_{a+n}}{y_a}. \text{ [...]}$$

Η περίπτωσις αύτη αναφέρεται εις τας υπό του δημοσίου χάριν συντάξεως γενομένας κρατήσεις εκ του μισθού των αξιωματικών του Β. Ναυτικού υπέρ του ταμείου των Αποστράτων.

*Τα **ταμεία χηρών** διέπονται σχεδόν υπό των αυτών αρχών της ισοβίου συντάξεως επί δύο ατόμων* (Ρεδιάδης, 1911: 82).

Ο Π. Ρεδιάδης είτε ως μαθητής της Σχολής Ναυτικών Δοκίμων, είτε ως καθηγητής σε αυτήν, είτε ως πολιτικός, μετέχει στις εξελίξεις.

Η Σ.Ν.Δ. γύρω στο 1910

Το βιβλίο, παρόλο που δεν εμφανίζεται αμιγώς ως εγχειρίδιο της Σχολής Ναυτικών Δοκίμων, υπάρχει η υπόνοια ότι γράφτηκε για τις ανάγκες της διδασκαλίας του Π. Ρεδιάδη σε αυτήν: Η Σχολή Ναυτικών Δοκίμων δημιουργήθηκε το 1884. Το 1905, όμως, αποκτά μόνιμη βάση στην ξηρά, οπότε και η εκπαίδευση που παρείχε να παρουσιάσει σημαντική πρόοδο. Η ήττα του πολέμου του 1897 είχε σαν αποτέλεσμα το κίνημα του 1909, γεγονός που οδήγησε σε «εκκαθάριση του σώματος των αξιωματικών». Οι νέοι αξιωματικοί ήταν μορφωμένοι, αφού τα διδακτικά μέσα έγιναν αρτιότερα και το διδακτικό προσωπικό βελτιώθηκε.

Αντίστοιχα, το Τμήμα Μαθηματικών εκείνη την εποχή (1904) αποσπάται από τη Φιλοσοφική Σχολή όπου ανήκε και γίνεται κομμάτι της, αυτόνομης πλέον, Φυσικομαθηματικής Σχολής. Κάποιοι καθηγητές διδάσκουν και στη Σχολή Ναυτικών Δοκίμων. Στη Σχολή Ναυτικών Δοκίμων διδάσκουν και καθηγητές του Πολυτεχνείου. Μεταξύ των ονομάτων, διακρίνουμε αυτά του Ιωάννη Λαζαρίμου (καθηγητή Τοπογραφίας) και του βοηθού του, Νικόλαου Καρακατσανίδη.

Και στις τρεις πρώτες αναφορές, για τις οποίες έγινε λόγος στο προηγούμενο μέρος, το επίπεδο των Πιθανοτήτων είναι πολύ χαμηλό και έχει έναν αρκετά περιορισμένο ρόλο. Αυτό είναι φυσικό, αν αναλογιστούμε πως οι συγγραφείς των βιβλίων έβλεπαν τον νέο αυτό κλάδο ως εργαλείο για τη βελτίωση των υπολογισμών τους. Στο συγκεκριμένο εγχειρίδιο, όμως, οι Πιθανότητες αποκτούν πρωτεύοντα ρόλο.

6.2 ΒΙΟΓΡΑΦΙΑ ΠΕΡΙΚΛΕΟΥΣ ΡΕΔΙΑΔΗ

Τα παραδείγματα που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, ως ενδεικτικά του περιεχομένου του βιβλίου, υποδηλώνουν ένα ενδιαφέρον του Ρεδιάδη για τις Πιθανότητες στην υπηρεσία των Ασφαλιστικών Μαθηματικών. Πώς, όμως, προέκυψε αυτό;

Σύμφωνα με τις βιογραφίες του (Λυκούδης, 1939), ο Ρεδιάδης ήταν πολυσχιδής προσωπικότητα: σπούδασε στη Σχολή Ναυτικών Δοκίμων, ήταν όμως αυτοδίδακτος μαθηματικός, στατιστικολόγος και οικονομολόγος μεταξύ άλλων. Εκτός της «μαθηματικής ιδιοφυίας» του, είχε μεγαλώσει δίπλα σε έναν πατέρα υψηλόβαθμο Τελώνη και πολιτικό, με συμμετοχή (σημαντική συμβολή) στην αλλαγή του φορολογικού συστήματος[35]. Οι επιστημονικές εργασίες του υιού Ρεδιάδη, χρονολογούνται από το 1906.

Αντιναύαρχος Π.Δ. Ρεδιάδης[36] (Κέα 1875- Αθήνα 1938).

Καθηγητής Γεωδαισίας και Υδρογραφίας της Σ.Ν.Δ.

7. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΟΥ Π. ΡΕΔΙΑΔΗ - ΣΥΣΧΕΤΙΣΜΟΙ ΜΕ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΠΟΥ ΠΡΟΗΓΗΘΗΚΑΝ

Το βιβλίο *Στοιχεία Λογισμού των Πιθανοτήτων και Θεωρίας των Σφαλμάτων* αποτελείται από ένα εισαγωγικό μέρος περίπου επτά σελίδων και από ένα κύριο

[35] Βρισκόταν στο γραφείο του Τρικούπη, όταν ο τελευταίος ήταν Υπουργός Οικονομικών.

[36] Αντιναύαρχος και πολιτικός. Διετέλεσε επί έτη καθηγητής της Σ.Ν.Δ. και συνέγραψε πολλές μελέτες ναυτικής τακτικής και ιστορίας. Διετέλεσε βουλευτής, υφυπουργός και υπουργός Οικονομικών. [Πηγή: ΠΑΠΥΡΟΣ LAROUSSE BRITANNICA]

μέρος (Μέρος Ά) με τίτλο *Λογισμός των Πιθανοτήτων*- όπως γίνεται αντιληπτό κι από το εξώφυλλο, όπου το εν λόγω πόνημα ορίζεται να είναι ο πρώτος τόμος[37], ο οποίος αφιερώνεται στον Λογισμό των Πιθανοτήτων.

Στην *Εισαγωγή* δίνονται κάποιες γενικές ιδέες- κυρίως ποια είναι η άποψη του γράφοντος για τις Πιθανότητες- και λίγα ιστορικά στοιχεία για το ξεκίνημα του κλάδου, κάνοντας μνεία στα πιο αξιοσημείωτα έργα και τους σημαντικότερους μαθηματικούς που ασχολήθηκαν με το αντικείμενο, για να καταλήξει πως η σπουδαιότερη από τις εφαρμογές του Λογισμού των Πιθανοτήτων είναι η Θεωρία των Σφαλμάτων (και η Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων- δεν τις διακρίνει), λόγω της χρησιμότητας αυτών στην Αστρονομία, τη Γεωδαισία και τη Φυσική, μεταξύ άλλων εφαρμοσμένων επιστημών.

Πιο αναλυτικά, αρχικά εισάγει τον αναγνώστη στη χρησιμότητα του νέου κλάδου, προβάλλοντας παραδείγματα από τις Φυσικές Επιστήμες και όλες τις «επιστήμες της παρατήρησης» όπως τις αναφέρει, στις οποίες, παρατηρούνται πολλά φαινόμενα που αποδίδονται στην τύχη. Στη συνέχεια, δηλώνει πως ενστερνίζεται την άποψη του Laplace για τη Θεωρία των Πιθανοτήτων, ο οποίος την ορίζει ως την *ορθή αντίληψη που υπάγεται στον λογισμό* και πιστεύει ότι βοηθά ώστε κάποιος να εκτιμήσει και να επιλέξει την ωφελιμότερη εκλογή (Ρεδιάδης, 1911). Μάλιστα, προτείνει να εισαχθεί η επιστήμη αυτή στο σύστημα της δημόσιας εκπαίδευσης, ακριβώς επειδή την θεωρεί άξια σπουδής (Ρεδιάδης, 1911).

Επιπλέον, σημειώνει την ιστορική πορεία του Λογισμού των Πιθανοτήτων: από τα τυχερά παιχνίδια και τον Chevalier de Méré (με την ανταλλαγή επιστολών του Pascal και του Fermat για το θέμα) ή την προσοχή επιστημόνων όπως ο Huygens, τον $17^{ο}$ αιώνα, μέχρι τα έργα των Jacques Bernouilli (*Ars Conjectandi*, 1713), Monmort (*Essai d' analyse sur les jeux de hazard*, 1708), de Moivre (*The doctrine of Chance*) και Halley στις αρχές του $18^{ου}$ αιώνα, οπότε και του αποδόθηκε μαθηματικός χαρακτήρας και θεωρήθηκε κλάδος των Ανώτερων Μαθηματικών. Επίσης, αναφέρει κι άλλα ονόματα μαθηματικών που ασχολήθηκαν με την ανάπτυξη του πεδίου, όπως οι Nicolas και Daniel Bernouilli, ο Simpson, ο Euler, ο d'Alembert, ο Bayes, ο Lagrange, ο Lambert, ο Condorcet και φυσικά ο Laplace, του οποίου τα έργα *Theorie analytique* (1820-1825) και *Essai philosophique sur les probabilités* θεωρούνται ορόσημα (Ρεδιάδης, 1911).

Τέλος, ο συγγραφέας αναφέρεται στη Θεωρία των Σφαλμάτων και τη Μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων, ξεχωρίζοντάς τες ανάμεσα στις πολλές εφαρμογές του Λογισμού των Πιθανοτήτων ως προς τη χρησιμότητα τους στις εφαρμοσμένες επιστήμες. Το αντιπροσωπευτικό παράδειγμα που παραθέτει είναι αυτό της Βλητικής,

[37] [ΣτΣ] Δεύτερος τόμος δεν έχει εκδοθεί. Επίσης, στη βιογραφία του δε βρίσκουμε τον δεύτερο τόμο στα ανέκδοτα πονήματά του. Μια εικασία είναι ότι, όταν συνέγραφε το πρώτο μέρος, είχε στο μυαλό του να το συμπληρώσει με τη θεωρία των σφαλμάτων, αλλά είτε οι υποχρεώσεις του δεν του το επέτρεψαν είτε άλλαξαν κατεύθυνση τα ενδιαφέροντά του.

όπου η μέτρηση κάποιου μεγέθους ή βάρους απαιτεί ακρίβεια. Αναφορικά με τη Θεωρία των Σφαλμάτων και τις εφαρμογές των Πιθανοτήτων στη Στατιστική, στις ασφάλειες κ.ο.κ. ενδεικτικά γίνεται μνεία στους Poisson, Gauss, Bessel και de Morgan. Το εισαγωγικό κεφάλαιο κλείνει με ορισμένες *Υπομνήσεις*, που υπενθυμίζουν στον αναγνώστη τύπους της Συνδυαστικής (μεταθέσεις- συνδυασμοί) και καταλήγει σε τρία (άλυτα) παραδείγματα (Ρεδιάδης, 1911).

7.1 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Στο πρώτο κεφάλαιο που έχει τίτλο *Πιθανότητες επί των αποτελεσμάτων* δίνονται αρχικά οι ορισμοί της απλής- απολύτου και της σχετικής πιθανότητας. Ως *απλή απόλυτη* (μαθηματική) *πιθανότητα* κάποιου φαινομένου ορίζεται *ο λόγος των ευνοϊκών- στο να πραγματοποιηθεί το φαινόμενο- περιπτώσεων προς τον ολικό αριθμό των δυνατών περιπτώσεων, με την προϋπόθεση ότι όλες είναι εξίσου δυνατές* (Ρεδιάδης, 1911: 13). Ο ορισμός αυτός είναι ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας, όπως έχει δοθεί από τον Laplace.

Στη συνέχεια δίνεται ο ορισμός της σχετικής πιθανότητας και αναφέρεται πως έτσι ονομάζεται η πιθανότητα όταν εξετάζεται σε σχέση με άλλες: *η σχετική πιθανότητα κάποιου φαινομένου λαμβάνεται αν διαιρεθεί η απόλυτη πιθανότητα αυτού του φαινομένου με το άθροισμα των απόλυτων πιθανοτήτων των υπό σύγκριση φαινομένων* (Ρεδιάδης, 1911: 15). Πιο αναλυτικά, εάν $\frac{n}{N}, \frac{n'}{N'}, \frac{n''}{N''}$ …είναι οι απόλυτες πιθανότητες διαφόρων φαινομένων A, A', A'' … ανεξάρτητων μεταξύ τους, μπορούμε να γράψουμε αυτές $\frac{nN'N''}{NN'N''}, \frac{n'NN''}{NN'N''}, \frac{n''NN'}{NN'N''}$... Εάν θεωρηθούν όλες οι πιθανότητες εξίσου δυνατές, η πιθανότητα του A θα δίνεται από τον τύπο

$$p(A) = \frac{nN'N''}{nN'N'' + n'NN'' + n''NN'} = \frac{\frac{n}{N}}{\frac{n}{N} + \frac{n'}{N'} + \frac{n''}{N''}}.$$

Έπειτα από τρία λυμένα παραδείγματα[38], για να γίνουν κατανοητοί οι ορισμοί που παρέθεσε, ο συγγραφέας αναφέρει την *σύνθετη πιθανότητα* (ή συντυχία) με πρόθεση να φτάσει στο Θεώρημα του de Moivre, σύμφωνα με το οποίο *η πιθανότητα*

[38] ***Παράδειγμα 1.*** *Εκ κάλπης περιεχούσης 4 λευκά και 5 μέλανα σφαιρίδια εξάγονται 3 κατά τύχην. Ποία είναι η πιθανότης όπως εκ των εξαχθέντων ουδέν είνε μέλαν;*

Ενδεικτικά αναφέρουμε πως, για να βρει τη λύση αυτού του ερωτήματος, υπολογίζει αρχικά την πιθανότητα να εξαχθούν 3 μαύρα σφαιρίδια, διαιρώντας τον αριθμό των συνδυασμών των 5 ανά 3 προς αυτόν των 9 ανά 3, βρίσκει $\frac{5}{42}$, οπότε καταλήγει πως η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι $\frac{37}{42}$.

Παράδειγμα 2. *Ευρεθήτω η πιθανότης όπως ριπτομένων άπαξ δύο κύβων ηριθμημένων εξαχθή εν 1.*

Παράδειγμα 3. *Ευρεθήτω η πιθανότης να εξαγάγη τις άθροισμα ανώτερον του 15, όταν ριφθώσι τρεις κύβοι εφάπαξ.*

(Ρεδιάδης, 1911: 16).

της συντυχίας πολλών ανεξαρτήτων φαινομένων ισούται προς το γινόμενο των απλών πιθανοτήτων των φαινομένων τούτων (Ρεδιάδης, 1911: 17). Και πάλι, για την εμπέδωση αυτού, ο συγγραφέας παραθέτει τρία λυμένα παραδείγματα: τόσο αριθμητικά, όσο και γενικά, όπως το τρίτο που αναφέρεται στο προσδόκιμο ζωής και καταλήγει σε αναδρομικό τύπο[39].

Στη συνέχεια, ο Ρεδιάδης ορίζει την *εξηρτημένη συντυχία* (τη δεσμευμένη πιθανότητα με τη σημερινή ορολογία) ως εξής: *Λέγεται το σύνθετον φαινόμενον εξηρτημένον και η πιθανότης του εξηρτημένη συντυχία όταν η πιθανότης παραγωγής τινός των απλών φαινομένων άτινα το συγκροτούσιν εξαρτάται εκ της παραγωγής του προηγουμένου* (Ρεδιάδης, 1911: 19). Δίνει το Θεώρημα βάσει του οποίου είναι δυνατόν να υπολογισθεί η εξηρτημένη συντυχία, τα σχετικά λυμένα παραδείγματα και καταλήγει στον ορισμό της *ολικής πιθανότητας*, την οποία ορίζει σε αντιδιαστολή προς την *μερική πιθανότητα*:

> Εάν υποτεθεί ότι αι ευνοϊκαί περιπτώσεις φαινομένου τινός δύνανται να διαιρεθώσιν εις πλείονα συστήματα ευνοϊκών περιπτώσεων αποκλειουσών αλλήλας, η πιθανότης ότι το φαινόμενον τούτο θα συμβή κατ’ ευνοϊκήν περίστασιν ανήκουσαν εις εν των συστημάτων τούτων λέγεται μερική πιθανότης, ολική δε πιθανότης εκείνη ότι το φαινόμενον τούτο θα συμβή καθ’ οιανδήποτε των ευνοϊκών περιστάσεων άνευ ειδικεύσεως συστήματος (Ρεδιάδης, 1911: 20-21).

Η αναφορά στη μερική και την ολική πιθανότητα οδηγεί σε ένα Θεώρημα, σύμφωνα με το οποίο: *Η ολική πιθανότης φαινομένου τινός ισούται προς το άθροισμα των μερικών πιθανοτήτων* (Ρεδιάδης, 1911: 21).

[39] ***Παράδειγμα 1.*** *Εκ κάλπης περιεχούσης N σφαιρίδια, εξ ων* n *λευκά και εξ ετέρας περιεχούσης* N' *εξ ων* n' *λευκά, εξάγεται ανά εν σφαιρίδιον εξ εκάστης κάλπης. Η πιθανότης όπως είναι αμφότερα λευκά θα η* $p(A,A') = \frac{n.n'}{N.N'}$.

Ομοίως η πιθανότης ότι ριπτόμενου νομίσματος τινός τρις, θα έχωμεν και κατά τας τρις ρίψεις «κορώναν» είνε $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.

Παράδειγμα 2. *Γενομένων δύο εξαγωγών, εκ τριών σφαιριδίων εκάστης, εκ κάλπης περιεχούσης 5 λευκά και 8 μέλανα σφαιρίδια, επαναρριπτομένων των εξαχθέντων σφαιριδίων, ζητείται η πιθανότης όπως η πρώτη εξαγωγή δώση 3 λευκά και η δευτέρα 3 μέλανα.*

Παράδειγμα 3. *Εάν* P_x^n *παριστά την πιθανότητα ατόμου τινός ηλικίας* x *ίνα ζήση* n *έτη και* $P_{x+n}^{n'}$ *εκείνην ατόμου τινός ηλικίας* $x+n$ *ίνα ζήση* n' *έτη επί πλέον, η πιθανότης όπως το άτομον ηλικίας* x *ζήση* $x+n''$ *έτη θα η* $P_x^{x+n''} = P_x^n \cdot P_{x+n}^{n'}$.

(Ρεδιάδης, 1911: 18-19).

Από τα τρία παραδείγματα που έπονται του θεωρητικού μέρους, αξίζει να γίνει αναφορά στο Παράδειγμα 3[40], το οποίο αναφέρεται στη Βλητική, θέμα της πρώτης αναφοράς ελληνικών εγχειριδίων. Σε αυτό, δίνονται 5 πυροβόλα, από τα οποία τα 2 έχουν $\frac{1}{3}$ πιθανότητα βραχείας βολής, ενώ τα υπόλοιπα 3 έχουν $\frac{1}{3}$ πιθανότητα μακράς βολής. Εάν γνωρίζουμε ποιο από τα πυροβόλα βάλλει πρώτο και ζητάμε την πιθανότητα η πρώτη βολή να είναι βραχεία, παρατηρούμε ότι η πιθανότητα να βάλλει πυροβόλο της πρώτης κατηγορίας είναι $\frac{2}{5}$, επομένως η πιθανότητα να έχουμε βραχεία βολή από αυτά είναι $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$. Η πιθανότητα να γίνει η βολή από πυροβόλο του δεύτερου είδους είναι $\frac{3}{5}$, οπότε, η πιθανότητα αυτή να είναι βραχεία είναι $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{15}$. Επομένως, η ολική πιθανότητα βραχείας βολής από όλα τα πυροβόλα θα είναι $\frac{2}{15} + \frac{6}{15} = \frac{8}{15}$ (Ρεδιάδης, 1911: 22).

Το πρώτο κεφάλαιο τελειώνει με αναφορά στις δοκιμασίες με επανάληψη και τα Θεωρήματα I: *Εάν κληθεί p η πιθανότης παραγωγής φαινομένου τινός A εις μίαν δοκιμασίαν, 1- p η της παραγωγής του αντιθέτου φαινομένου B, αποκλειομένων αμοιβαίως αλλήλων, η πιθανότης P παραγωγής του αυτού φαινομένου* n *φοράς εις* m *δοκιμασίας παρίσταται διά του* $P = \frac{m!}{n!(m-n)!} p^n (1-p)^{m-n}$ (Ρεδιάδης, 1911: 23-24) και II: *Η πιθανοτέρα συντυχία είνε εκείνη καθ' ην τα απλά φαινόμενα επαναλαμβάνονται αναλόγως προς τας ιδιαιτέρας απλάς αυτών πιθανότητας p και 1-p, ή τουλάχιστον κατά τον λόγων αυτών όστις πλησιάζει τα μάλιστα εις την αναλογίαν ταύτην* (Ρεδιάδης, 1911: 26).

Το τρίτο παράδειγμα[41] της ενότητας αυτής και τελευταίο του κεφαλαίου είναι αφιερωμένο στη βλητική. Σε αυτό, θεωρείται ότι η πιθανότητα να επιτύχουμε βραχεία βολή σε απλή δοκιμασία κατά τη βολή πυροβόλου είναι $\frac{6}{10}$. Εάν ρίξουμε δέκα φορές υπό τις ίδιες συνθήκες, τότε οι πιθανότητες να έχουμε αντίστοιχα 5, 6 και 7 βραχείες βολές θα είναι

$$\frac{10!}{5!\,5!}(\frac{6}{10})^5(\frac{4}{10})^5 = 0{,}2007$$

$$\frac{10!}{6!\,4!}(\frac{6}{10})^6(\frac{4}{10})^4 = 0{,}2508$$

$$\frac{10!}{3!\,7!}(\frac{6}{10})^7(\frac{4}{10})^3 = 0{,}2150.$$

[40] Το οποίο, τόσο επειδή βρίσκεται στο κύριο σώμα του κειμένου, όσο και για λόγους διευκόλυνσης των αναγνωστών (όπως και τα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν), θα αποδοθεί στη νεοελληνική γλώσσα.

[41] Το πρώτο παράδειγμα αναφέρεται σε αντίθετα ενδεχόμενα, ενώ το δεύτερο στη ρίψη δύο κύβων τέσσερις φορές και στο αποτέλεσμα όμοιων αποτελεσμάτων και στους δύο κύβους (Ρεδιάδης, 1911).

Επομένως, η πιθανότητα να έχουμε βραχείες βολές 5 ή 6 ή 7, δηλαδή η ολική πιθανότητα από 5 έως 7 βραχειών βολών, θα είναι $P_t = 0{,}2007 + 0{,}2508 + 0{,}2150 = 0{,}6665$.

Εάν ρίξουμε είκοσι φορές, η πιθανότητα να έχουμε 10, 11, 12, 13 και 14 βραχείες βολές θα είναι 0,1171, 0,1597, 0,1797, 0,1659, 0,1244. Η δε πιθανότητα να έχουμε τουλάχιστον 10 βραχείες βολές και όχι περισσότερες από 14 θα είναι $P_t = 0{,}7468$. Βλέπουμε επίσης ότι σε κάθε σειρά βολής ο πιθανότερος αριθμός βραχειών βολών είναι, διά μεν την πρώτη $10 \cdot \frac{6}{10} = 6$, διά δε την δεύτερη $20 \cdot \frac{6}{10} = 12$, δηλαδή τα $\frac{6}{10}$ του συνολικού αριθμού των ριφθεισών βολών σε κάθε σειρά είναι αριθμός ανάλογος προς την πιθανότητα του απλού φαινομένου. Παρατηρούμε επίσης ότι σε κάθε σειρά η αντίστοιχη πιθανότητα ελαττώνεται, επομένως όσο αυξάνεται ο αριθμός των βολών μειώνεται η πιθανότητα (Ρεδιάδης, 1911).

7.1.1 ΣΥΣΧΕΤΙΣΜΟΙ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1 ΜΕ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΠΟΥ ΠΡΟΗΓΗΘΗΚΑΝ

Οι ορισμοί που δίνονται στο 1ο κεφάλαιο παρουσιάζουν ομοιότητες και διαφορές με αντίστοιχους προηγούμενων βιβλίων. Πιο αναλυτικά, στην πρώτη παράγραφο, ο ορισμός του Ρεδιάδη για την *απλή πιθανότητα* είναι ο κλασικός ορισμός του Laplace, τον οποίο αναφέρει και ο Λαζαρίμος (1901) ως *πιθανότητα απλών συμβεβηκότων*. Η θεώρηση της πιθανότητας ως κλάσμα ανάμεσα στο 0 και το 1, η ταύτιση της βεβαιότητας με τον αριθμό 1 και του αδύνατου [ενδεχομένου] με τον αριθμό 0 παρατηρείται τόσο στο βιβλίο του Λαζαρίμου (1901), όσο και σε αυτό του Αθανασιάδη (1908). Τέλος, μια θέση του Ρεδιάδη πως ένα φαινόμενο λέγεται πιθανό όταν η πιθανότητά του ισούται με ½ έρχεται σε αντίθεση με την πρόταση του Λαζαρίμου (1901) πως ένα φαινόμενο λέγεται πιθανό όταν η πιθανότητά του είναι μεγαλύτερη ή ίση με το ½.

Περνώντας στη δεύτερη παράγραφο, ο Περικλής Ρεδιάδης αναφέρει τον ορισμό της σχετικής πιθανότητας, έννοια που δεν εμφανίζεται σε κανέναν από τους τρεις συγγραφείς των προγενέστερων εγχειριδίων: Ιωάννη Λαζαρίμο, Γεώργιο Αθανασιάδη και Παναγιώτη Δαγκλή. Η τρίτη παράγραφος του 1ου κεφαλαίου είναι αφιερωμένη στη σύνθετη πιθανότητα (ή συντυχία) και το Θεώρημα του de Moivre. Ο ορισμός που δίνεται για την σύνθετη πιθανότητα συνάδει με τον αντίστοιχο ορισμό του Ιωάννη Λαζαρίμου (1901), αν και ο τελευταίος δεν αναφέρει πουθενά τον όρο *συντυχία*. Ομοίως και το Θεώρημα του de Moivre, το οποίο αναφέρεται με παρόμοιο τρόπο (Λαζαρίμος, 1901).

Αξίζει να σημειωθεί ότι στα αντίστοιχα κεφάλαια των τριών εγχειριδίων προηγήθηκαν χρονικά, δεν υπάρχουν αριθμητικά παραδείγματα για τους προαναφερθέντες ορισμούς, πλην μιας παραγράφου του Ιωάννη Λαζαρίμου (1901), στην οποία αναφέρονται συνοπτικά δύο παραδείγματα: αρχικά, η εύρεση της πιθανότητας του ενδεχομένου να φέρουμε δύο 6 κατά τη ρίψη δύο αριθμημένων κύβων[42] και στη συνέχεια η εύρεση της πιθανότητας του ενδεχομένου να εξάγουμε τρία μαύρα σφαιρίδια αν επιλέξουμε ένα από κάθε μία κάλπη, στις οποίες περιέχονται 25 μελανά και 75 λευκά στην πρώτη, 50 μελανά και 50 λευκά στη δεύτερη και 75 μελανά και 25 λευκά στην τρίτη[43].

7.2 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Το δεύτερο κεφάλαιο, που τιτλοφορείται *Θεώρημα του Jacques Bernouilli*, ξεκινά με το Θεμελιώδες Θεώρημα αυτού (Ρεδιάδης, 1911: 29):

> Δύο αντιθέτων φαινομένων Α και Β υποκειμένων εις σειράν δοκιμασιών κατ' επανάληψιν υπό τας αυτάς συνθήκας, η πιθανότης όπως ο λόγος του αριθμού n των επαναλήψεων του αυτού φαινομένου προς τον αριθμόν m των δοκιμασιών δεν απομακρύνηται της απλής πιθανότητος p του φαινομένου πέραν ορίων τινών δεδομένων $\pm\varepsilon$, οσονδήποτε στενά και αν υποτεθώσι τα όρια ταύτα, προσεγγίζει προς την βεβαιότητα αυξανομένου απεριορίστως του αριθμού m των δοκιμασιών.

Στην πραγματικότητα, πρόκειται για τον αδύναμο Νόμο των μεγάλων αριθμών, όπως είναι γνωστό σήμερα.

Η θεωρία που πραγματεύεται το δεύτερο κεφάλαιο πέραν του προαναφερθέντος Θεωρήματος είναι οι ορισμοί της σχετικής, της απόλυτης και της πιθανής απόκλισης. Η ποσότητα $p-\frac{n}{m}$ λέγεται *σχετική απόκλιση* και παίρνει τιμές μεταξύ $\pm$ *ε*, η ποσότητα *mp-n* λέγεται *απόλυτη απόκλιση*, συνήθως συμβολίζεται με *z* και παίρνει τιμές ανάμεσα στα $\pm$ *mε*, ενώ με τον όρο *πιθανή απόκλιση* καλείται η ειδική τιμή *E* της *ε*, η οποία σε κατάλληλο σύστημα τιμών των *m*, *p*, *1-p* δίνει στην *P* την τιμή $\frac{1}{2}$, η οποία αντιστοιχεί στην τιμή της μεταβλητής $t=0{,}477$.

Τα παραδείγματα που παρουσιάζονται στο τέλος του κεφαλαίου, με σκοπό να γίνει φανερή η χρησιμότητα της θεωρίας που πραγματεύεται αυτό, είναι επτά σε αριθμό, δύο εκ των οποίων είναι άλυτα, ενώ τα υπόλοιπα πέντε λύνονται χωρίς πολλές επεξηγήσεις και κάνοντας απλή εφαρμογή των τύπων στους οποίους κατέληξε η θεωρία, αλλά και χρήση του πίνακα τιμών της $\Theta(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt=P$, η οποία έχει υπολογιστεί από το ανάπτυγμα σε σειρά $\Theta(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(t-\frac{t^2}{3}+\frac{1}{2!}\frac{t^5}{5}-\cdots)$ (Ρεδιάδης, 1911).

[42] Όπου δίνει και τη λύση: $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$ (Λαζαρίμος, 1901: 165).

[43] Όπου δίνει και τη λύση: $\frac{25}{100}\times\frac{50}{100}\times\frac{75}{100}$ *ή* $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{32}$ (Λαζαρίμος, 1901: 165). Το παράδειγμα αυτό είναι όμοιο με παράδειγμα του Faye (1881: 214).

7.2.1 ΣΥΣΧΕΤΙΣΜΟΙ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2 ΜΕ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΠΟΥ ΠΡΟΗΓΗΘΗΚΑΝ

Το δεύτερο κεφάλαιο, το οποίο πραγματεύεται, όπως προαναφέρθηκε, τον *αδύναμο Νόμο των μεγάλων αριθμών*, δεν βρίσκεται σε άμεση αντιστοιχία με κάποιο κομμάτι των τριών προηγούμενων ελληνικών εγχειριδίων, υπάρχει όμως σε γαλλόφωνα εγχειρίδια: του Liagre (1879)- όπου αναφέρεται ως Πρόταση που πρωτο-παρουσιάστηκε από τον J. Bernoulli- του Bertrand (1888-9) ή του Borel (1909).

Αναφορικά με τις αποκλίσεις[44]- το μόνο τμήμα του κεφαλαίου που συσχετίζεται εν μέρει με τα τρία ελληνικά βιβλία- ο Π. Δαγκλής που αναφέρεται στον όρο αυτό κάνει λόγο για *μέσες* (*καθ' ύψος, κατά διεύθυνσιν* και *κατά βεληνεκές*) *αποκλίσεις*, οι οποίες προσδιορίζονται με πειραματικό τρόπο και για *πιθανές αποκλίσεις*- οι οποίες εξάγονται από τις προηγούμενες (Δαγκλής, 1888). Συγκριτικά με τον Ρεδιάδη, ο Δαγκλής (1888: 9) ορίζει ως πιθανή απόκλιση την *έχουσαν τοιούτον μέγεθος, ώστε αι μεγαλείτεραι αυτής αποκλίσεις να ώσιν ισάριθμοι προς τας μικροτέρας της αποκλίσεις, εν σχέσει φυσικώς πάντοτε προς το μέσον σημείο κρούσεως. Εν άλλαις λέξεσιν είναι εκείνη, ήτις παρουσιάζει την πιθανότητα 1:2 να μην υπερτερηθή*.

Ο Ι. Λαζαρίμος, από την άλλη, δε χρησιμοποιεί τον όρο απόκλιση, αλλά τον όρο σφάλμα. Έτσι, ορίζει (Λαζαρίμος, 1901: 172) ως *μέσον σφάλμα*[45] την *τετραγωνική ρίζα, του αθροίσματος των τετραγώνων των πραγματικών σφαλμάτων διά του αριθμού των γενομένων παρατηρήσεων* και ως *πιθανόν σφάλμα* την ποσότητα ε_π εκείνη για την οποία, μεταξύ των ορίων -ε_π και ε_π περιέχεται σφάλμα με πιθανότητα ίση με ½[46]. Επιπλέον, αναφέρει ότι *το μέσον σφάλμα* [...] *αντιστοιχεί εις την τετμημένην του σημείου της καμπής της καμπύλης των πιθανοτήτων, ενώ το πιθανόν σφάλμα αντιστοιχεί εις την τετμημένην, ής η τεταγμένη υποδιαιρεί το εμβαδόν της καμπύλης εκατέρωθεν του άξονος των ψ εις δύο ίσα μέρη* (Λαζαρίμος, 1901: 183).

Τον όρο σφάλμα χρησιμοποιεί και ο Γ. Αθανασιάδης στο βιβλίο του, καλώντας *μέσον σφάλμα*[47] τον αριθμητικό μέσο *του αθροίσματος πάντων των θετικών ή αρνητικών σφαλμάτων, υποτιθέμενων ισαρίθμων, δι' αριθμόν παρατηρήσεων ικανώς μέγαν* (Αθανασιάδης, 1908: 17), *σφάλμα του μέσου τετραγώνου* την ποσότητα Σ.Μ.Τ.

---

[44] [ΣτΣ] Οι αποκλίσεις (ή σφάλματα) συνυπάρχουν στα ίδια κεφάλαια με το Θεώρημα του J.Bernoulli ή/και τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών (αυτόν που ονομάζουμε *αδύναμο*) στα γαλλόφωνα εγχειρίδια. Εδώ, όμως, δεν γίνεται αναφορά και σε αυτά λόγω της ύπαρξης συσχέτισης με τα ελληνικά.

[45] Συμβολικά, $\varepsilon_\mu = \sqrt{\frac{\chi_1^2+\chi_2^2+\chi_3^2+\cdots+\chi_\nu^2}{\nu}}$ (Λαζαρίμος, 1901:172).

[46] Για τις ποσότητες αυτές, αναφέρει τις σχέσεις: $h\varepsilon_\pi = 0{,}4769363$, όπου h είναι μια σταθερά (η σχέση αυτή παραπέμπει στο $t = 0{,}477$ του Ρεδιάδη) και $\varepsilon_\pi = \varepsilon_\mu \times 0{,}6744897 \approx \varepsilon_\pi = \frac{2}{3}\varepsilon_\mu$ (Λαζαρίμος, 1901:175).

[47] Συμβολικά, *Μέσον Σφάλμα = Σ.Μ.* $= \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \frac{0{,}564189}{h}$ (Αθανασιάδης, 1908: 18).

$= \sqrt{\frac{\Sigma e^2}{A}} = \frac{1}{h}\sqrt{0{,}5} = \frac{0{,}707107}{h}$ (Αθανασιάδης, 1908: 18), όπου η ποσότητα h καλείται *μέτρον συγκλίσεως (module de convergence) ή μέτρον ακριβείας*[48], και *πιθανόν σφάλμα* την ποσότητα Σ.Π. = $\frac{0{,}476948}{h}$ (Αθανασιάδης, 1908: 19), όταν *ο αριθμός των κατ' απόλυτον τιμήν σφαλμάτων των μεγαλητέρων του πιθανού τούτου σφάλματος είνε ίσος προς τον αριθμόν των κατ' απόλυτον τιμήν μικροτέρων τούτου σφαλμάτων*[49] (Αθανασιάδης, 1908: 18). Ας σημειωθεί στο σημείο αυτό πως ο όρος *σχετικόν σφάλμα* αναφέρεται σε μια εφαρμογή του πέμπτου κεφαλαίου, όπου δίνεται ο ορισμός του σε υποσημείωση: *Καλείται σχετικόν σφάλμα ο λόγος του απολύτου σφάλματος ζ προς την εκ της μετρήσεως του μεγέθους τιμήν* z (Αθανασιάδης, 1908: 35), και αφορά σε σφάλματα που δεν προέρχονται από παρατηρήσεις.

7.3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Το τρίτο κεφάλαιο, με τίτλο *Πιθανότητες επί των αιτίων*, ξεκινά με τον διαχωρισμό των πιθανοτήτων αποτελέσματος- αιτίου. Με ένα παράδειγμα, ο συγγραφέας χαρακτηρίζει πιθανότητα αποτελέσματος εκείνη όπου είναι γνωστός ο δειγματικός χώρος[50], ενώ ονομάζει αιτίου την πιθανότητα όταν δεν είναι γνωστός ο δειγματικός χώρος και ζητείται να βρεθεί η «σύνθεσή» του. Σημειώνει, μάλιστα, πως το συγκεκριμένο κεφάλαιο μπορεί να φανεί χρήσιμο στις επιστήμες της παρατήρησης.

Το βασικό Θεώρημα με το οποίο ξεκινά το κεφάλαιο είναι ο Κανόνας του Bayes:

> Εάν φαινόμενόν τι αποτελούμενον εκ δύο αντιθέτων φαινομένων Α και Β ων έκαστον παρήχθη αριθμόν τινα φορών δυναμένων να αποδοθώσιν εις διαφόρους υποθέσεις υπάρξεως των αποκλειόντων άλληλα αιτίων C_1, C_2, C_3,…, η πιθανότης εκάστης τούτων προσδιοριζομένη κατόπιν παρατηρήσεων καθ' ας συνέβη το φαινόμενον τούτο, ήτοι εκ των υστέρων, η πιθανότης δηλαδή όπως το φαινόμενον οφείληται εις εν εκ των αιτίων τούτων ισούται προς κλάσμα ούτινος ο αριθμητής είνε η εκ των προτέρων πιθανότης παραγωγής του φαινομένου επί τη βάσει της υποθέσεως ή του αιτίου τούτου C_i, ο δε παρωνομαστής η εκ των προτέρων πιθανότης παραγωγής του φαινομένου ανεξαρτήτως του ισχύσαντος αιτίου (Ρεδιάδης, 1911: 40).

[48]Από αυτήν εξαρτάται η ταχύτητα ελάττωσης του αριθμού των σφαλμάτων όταν αυξάνεται το μέγεθος αυτών (Αθανασιάδης, 1908: 17).

[49] Για τις ποσότητες αυτές, αναφέρει τις σχέσεις: $\Sigma.\Pi. = \Sigma.M. \times 0{,}845369 = \Sigma.M.T. \times 0{,}674506$ (Αθανασιάδης, 1908: 19), που ομοιάζουν με αυτές του Λαζαρίμου: $\varepsilon_\pi = \varepsilon_\mu \times 0{,}6744897 \approx \varepsilon_\pi = \frac{2}{3}\varepsilon_\mu$.

[50] Ο συγγραφέας αναφέρει όταν *γνωρίζω την σύνθεσιν της κάλπης* (Ρεδιάδης, 1911: 40).

Το κεφάλαιο συνεχίζεται με την αναφορά ενός Πορίσματος του Θεωρήματος αυτού, τέσσερα λυμένα αριθμητικά παραδείγματα, η επίλυση των οποίων γίνεται με χρήση της θεωρίας και ενός δεύτερου Θεωρήματος.

Ενδεικτικά, το Παράδειγμα 1 αναφέρεται στην ύπαρξη δύο καλπών A_1 και A_2, όπου η A_1 περιλαμβάνει 3 λευκά και 5 μέλανα σφαιρίδια, ενώ η A_2 περιλαμβάνει 2 λευκά και 4 μέλανα σφαιρίδια. Δίνεται η πληροφορία ότι εξήχθη ένα λευκό σφαιρίδιο από κάποια κάλπη και ζητούνται οι πιθανότητες το εν λόγω σφαιρίδιο να ανήκει στην A_1 ή στην A_2. Για την επίλυση αυτού του προβλήματος, ο συγγραφέας, βασιζόμενος στον τύπο $P_0(C_i) = \frac{P_0^1(A)p(C_i)}{\sum P_0^i(A)p(C_i)}$ και αφού αντικαταστήσει με τα ίσα τους τις πιθανότητες παραγωγής του φαινομένου A: (με βάση το C_1) $P_0^1(A) = \frac{3}{8}$, (με βάση το C_2) $P_0^2(A) = \frac{1}{3}$ και αυτές των υποθέσεων $P(C_1) = \frac{1}{2}$, $P(C_2) = \frac{1}{2}$ υπολογίζει:

$P_0(C_1) = \frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{9}{17}$ και $P_0(C_2) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{8}{17}$ (Ρεδιάδης, 1911: 42).

7.3.1 ΣΥΣΧΕΤΙΣΜΟΙ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3 ΜΕ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΠΟΥ ΠΡΟΗΓΗΘΗΚΑΝ

Το τρίτο κεφάλαιο, το οποίο πραγματεύεται το Θεώρημα του Bayes και τη δεσμευμένη πιθανότητα δεν βρίσκεται σε αντιστοιχία με κάποιο κομμάτι των τριών προηγούμενων ελληνικών εγχειριδίων, υπάρχει όμως στα εγχειρίδια του Liagre (1879) και του Borel (1909).

Το Θεώρημα του Bayes υπάρχει στο εγχειρίδιο του Liagre (1879: 145-146) ως *Κανόνας* του Bayes και αναφέρει πως *η εκ των υστέρων πιθανότητα ενός ενδεχομένου ισούται με το κλάσμα εκείνο, του οποίου ο αριθμητής είναι η πιθανότητα του γεγονότος που οφείλεται σε αυτό το αίτιο ή την υπόθεση και ο παρονομαστής είναι το άθροισμα παρόμοιων πιθανοτήτων, που είναι σχετικές με όλα τα αίτια ή τις υποθέσεις.*

Ομοίως, εμφανίζεται στο βιβλίο του Borel (1909) ως *Τύπος* του Bayes σε μια όχι τόσο αυστηρή μορφή, αφού προκύπτει από ένα παράδειγμα- η γενίκευση επαφίεται στον αναγνώστη. Πιο αναλυτικά, σημειώνεται (Borel, 1909: 146) ότι:

$$P_1 = \frac{p_1\varpi_1}{p_1\varpi_1+p_2\varpi_2+\cdots+p_n\varpi_n}.$$

Η σημασία των αριθμών ϖ_κ είναι πολύ απλή. Εάν επιλέξουμε τυχαία μια κάλπη, η πιθανότητα η επιλεγμένη κάλπη να είναι του είδους A_1, είναι ϖ_1, δεδομένου ότι ϖ_1 είναι ο λόγος του αριθμού n_1 των καλπών του A_1 προς τον συνολικό αριθμό n των καλπών. Γι 'αυτόν τον λόγο, η ϖ_1 θα λέγεται εκ των προτέρων πιθανότητα (a priori), δηλαδή πριν από κάθε κλήρωση έτσι ώστε η επιλεγόμενη κάλπη να είναι του είδους A_1, η πιθανότητα P_1 που υπολογίσαμε θα ονομάζεται *εκ των υστέρων πιθανότητα (a posteriori) και ο προηγούμενος τύπος λέγεται τύπος του Bayes.*

7.4 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Στο τέταρτο κεφάλαιο, που τιτλοφορείται *Πιθανότητες επί του μέλλοντος*, γίνεται αναφορά στην ανεπάρκεια του Θεωρήματος του Bernouilli ως προς την καθολικότητα της εφαρμογής του, και παρουσιάζεται ένα Θεώρημα που αναφέρεται στις «υπό συνθήκη πιθανότητες» με τη σημερινή ορολογία:

> Η πιθανότης μέλλοντος φαινομένου δυναμένου να παραχθή διά περιωρισμένου αριθμού υποθέσεων εξαχθείσα εκ παρατηρήσεως ισούται προς κλάσμα ου αριθμητής είνε η πιθανότης του φαινομένου επί τη βάσει των δύο τούτων φαινομένων προσδιορισθείσα εκ των προτέρων, παρωνομαστής δε η πιθανότης του παρατηρηθέντος φαινομένου επίσης εκ των προτέρων προσδιορισθείσα (Ρεδιάδης, 1911: 48).

Το κεφάλαιο τελειώνει αναφέροντας τον Νόμο των μεγάλων αριθμών του Poisson, ο οποίος περιγράφεται ως εξής:

> Εάν παρατηρηθεί μέγας αριθμός φαινομένων της αυτής φύσεως, εξαρτωμένων εξ αιτίων σταθερών αλλ' ακανονίστως μεταβλητών κατ' έννοιαν ωρισμένην, υπάρχουσι πάντοτε μεταξύ των αριθμών τούτων αναλογίαι σχεδόν σταθεραί. Δι' έκαστον είδος φαινομένων οι αναλογίαι αύται κέκτηνται ειδικήν τινά τιμήν ης απομακρύνονται τόσω μάλλον ελάχιστα όσω η σειρά των παρατηρουμένων φαινομένων αυξάνει, ήθελον δε συμπέσει προς τας σταθεράς αναλογίας εάν η σειρά αύτη ηύξανεν επ' άπειρον (Ρεδιάδης, 1911: 52).

Στο τέλος του κεφαλαίου, ο Ρεδιάδης σχολιάζει πως ο νόμος αυτός δεν είναι παρά η επέκταση του θεωρήματος του J. Bernouilli[51]. Σημειώνει, επίσης, ότι εφαρμόζεται σε φαινόμενα όπως είναι η μέση ζωή των ανθρώπων και άλλων φαινομένων ηθικής αξίας. Το κεφάλαιο αυτό έχει μόλις δυο αριθμητικά παραδείγματα· και τα δύο σχετικά με το Θεώρημα των υπό συνθήκη πιθανοτήτων. Ενδεικτικά, γίνεται παράθεση του δεύτερου (Ρεδιάδης, 1911: 51-52): Εάν από κάλπη που περιέχει λευκά και μαύρα σφαιρίδια σε άγνωστη αναλογία γίνονται δέκα εξαγωγές 7 λευκών και 3 μαύρων σφαιριδίων, ποια είναι η πιθανότητα στις επόμενες πέντε δοκιμασίες να εξαχθούν 2 λευκά και 3 μαύρα, αν υπάρχει επανατοποθέτηση των σφαιριδίων; Η απάντηση δίνεται ως εξής: Έχουμε $n = 7, m - n = 3,\ n' = 2,\ m' - n' = 3,$ επομένως, με εφαρμογή του τύπου

[51] [ΣτΣ] Στην περίπτωση που η σύνθεση του φαινομένου αλλάζει σε κάθε δοκιμασία.

$P_\mu^i(A') = [\dots] = \frac{1.2.3\dots m'}{1.2.3\dots n.1.2.3\dots(m'-n')} \frac{1.2.3\dots m+n'.1.2\dots m-n'+m'-n.1.2\dots m+1}{1.2.3\dots n.1.2\dots m-n'2.3\dots m+m'+1}$ καταλήγουμε στο αποτέλεσμα $P_\mu^i(A') = \frac{30}{91}$ για τη ζητούμενη πιθανότητα.

7.4.1 ΣΥΣΧΕΤΙΣΜΟΙ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4 ΜΕ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΠΟΥ ΠΡΟΗΓΗΘΗΚΑΝ

Το τέταρτο κεφάλαιο κάνει αναφορά στις πιθανότητες υπό συνθήκη και τον Νόμο των μεγάλων αριθμών. Η θεματολογία αυτή δεν απαντά στα περιεχόμενα των εγχειριδίων που προηγήθηκαν στον ελλαδικό χώρο. Ένας προσεκτικός αναγνώστης θα παρατηρήσει την ομοιότητα σε σχέση με την παρουσίαση αλλά και τον σχολιασμό του Νόμου των μεγάλων αριθμών του Poisson με την αντίστοιχη παράγραφο στο βιβλίο του Liagre[52]. Ας σημειωθεί πως ο συγκεκριμένος Νόμος αναφέρεται στο βιβλίο του Bertrand (1888/9), αλλά όχι σε αυτό του Borel (1909).

7.5 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Στο πέμπτο κεφάλαιο, που έχει τίτλο *Μαθηματικόν και Ηθικόν Προσδόκιμον*, αρχικά ορίζονται το μαθηματικό[53] και το ηθικό προσδόκιμο και δίνονται οι τύποι υπολογισμού αυτών: *«το μαθηματικόν προσδόκιμον ισούται προς το γινόμενον του ποσού όπερ ελπίζει έκαστος επί την πιθανότητα ην έχει όπως το αποκτήσει». Εάν επομένως το αυτό πρόσωπον έχη τας πιθανότητας* p_1, p_2 *… να κερδίσει τα ποσά* S_1, S_2, S_3 *… θα έχη ως μαθηματικόν προσδόκιμον* $E = S_1p_1 + S_2p_2 + \cdots$ (Ρεδιάδης, 1911: 53).

Αναφορικά με το ηθικόν προσδόκιμον (espérance morale), ο τύπος που το εκφράζει και το διαφοροποιεί από το μαθηματικό προσδόκιμο είναι ο $E' = F(\frac{F+a}{F})^{p'} \cdot (\frac{F+b}{F})^{p''} \cdots -F$, όπου F το κεφάλαιο που δέχεται ορισμένη αύξηση a (κέρδος). Το ηθικό προσδόκιμο συγκλίνει προς το μαθηματικό όταν τα ποσά *α, β, γ..* [54] καταστούν μικρότερα από την περιουσία- κεφάλαιο F. Ο απλουστευμένος τύπος (όταν τα ποσά είναι εξαρτημένα, οπότε ισχύει $p' + p'' + \cdots = 1$) είναι $E' = (F+a)^{p'} \cdot (F+b)^{p''} \cdots -F$.

Ένα παράδειγμα[55] που δίνεται για τη χρησιμότητα του τύπου αυτού είναι το τελευταίο του Κεφαλαίου[56], στο οποίο εξετάζεται το ερώτημα: *Ποιο είναι*

---

[52] §36 στο (Liagre, 1879: 100-101).

[53] *Μαθηματικόν προσδόκιμον (Espérance mathematique). Καλείται μαθηματικόν προσδόκιμον το πλεονέκτημα όπερ αναμένει τις επί τη βάσει υποθέσεων αίτινες είναι μόνον πιθαναί* (Ρεδιάδης, 1911: 52).

[54] Μάλλον εννοεί a, b, c ...(ΣτΣ).

[55] Παράδειγμα 2, σ. 57-58.

περισσότερο συμφέρον αν θέλουμε να διαθέσουμε ποσό Π για την κατασκευή πλοίων, να ναυπηγηθούν σ πλοία αξίας Π ή σπ πλοία αξίας $\frac{\Pi}{n}$ *το καθένα, με δεδομένο ότι η πιθανότητα των ατυχημάτων στη θάλασσα είναι* p; Τη λύση στο πρόβλημα αυτό, ο συγγραφέας την παρουσιάζει με δύο τρόπους · η μεν πρώτη υπολογίζοντας την απώλεια σε περίπτωση ατυχήματος χρησιμοποιώντας τη θεωρία των αποκλίσεων, η δε δεύτερη χρησιμοποιώντας τη θεωρία του ηθικού προσδόκιμου, θέτοντας συγκεκριμένα, όμως, ποσά.

Αν, για παράδειγμα, κάποιο κράτος με προϋπολογισμό 100.000.000 διαθέτει 90.000.000 για τη ναυπήγηση πλοίων, συμφέρει να ναυπηγήσει μόνο ένα πλοίο των 40.000.000 ή περισσότερα; Έχουμε ότι $F = 10^9$, $p = \frac{1}{75}$, $a = 40.000.000$, όπου p είναι η τιμή της πιθανότητας σύμφωνα με τη στατιστική των ατυχημάτων των πλοίων στη θάλασσα, επομένως, εάν κατασκευάσουμε ένα πλοίο θα έχουμε $E_1 = (10^9)^{\frac{1}{75}}(10^9 + 4 \cdot 10^7)^{\frac{74}{75}} - 10^9$, ενώ αν κατασκευάσουμε δύο πλοία $E_2 = (10^9)^{(\frac{1}{75})^2}(10^9 + \frac{4 \cdot 10^7}{2})^{2 \cdot \frac{74}{75} \cdot \frac{1}{25}}(10^9 + 4 \cdot 10^7)^{(\frac{74}{75})^2} - 10^9$, δηλαδή $E_2 > E_1$. Ομοίως, θα έχουμε $E_3 > E_2$ και ούτω καθεξής. Επομένως, από την άποψη των ατυχημάτων, είναι συμφέρον να ναυπηγούνται περισσότερα πλοία.

Το κεφάλαιο τελειώνει με μια σημείωση του συγγραφέα για τη θεωρία του ηθικού προσδόκιμου. Σε αυτήν αναφέρεται ότι ο λοχαγός του πυροβολικού Ι. Βλαχάβας πείσθηκε από μια ανέκδοτη μελέτη του συγγραφέα για την ορθότητα και τη χρησιμότητα της θεωρίας του ηθικού προσδόκιμου, με την προϋπόθεση ότι επιλέγεται σωστός τύπος για το ηθικό κέρδος.

7.5.1 ΣΥΣΧΕΤΙΣΜΟΙ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 5 ΜΕ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΠΟΥ ΠΡΟΗΓΗΘΗΚΑΝ

Το πέμπτο κεφάλαιο κάνει αναφορά στο *μαθηματικό* και *ηθικό προσδόκιμο*, έννοιες που δεν εμφανίζονται στα προγενέστερα ελληνικά εγχειρίδια, αλλά αναφέρονται στο βιβλίο του Joseph Louis François Bertrand, *Calcul des Probabilités*. Στο βιβλίο αυτό και, πιο συγκεκριμένα, στο 3^{ο} κεφάλαιο, αναπτύσσεται η θεωρία του μαθηματικού προσδόκιμου, αλλά γίνεται απλή αναφορά στο ηθικό προσδόκιμο. Απεναντίας, ο Ρεδιάδης διαμερίζει το κεφάλαιο στα δύο, δίνοντας την ίδια βαρύτητα στις δύο έννοιες.

---

[56] Στο Παράδειγμα 1, στη σελίδα 57, αναφέρεται ότι κάποιος παίκτης έχει 100 κέρματα και παίζει το παιχνίδι «πρόσωπον ή γράμματα» για 50 κέρματα. Ζητείται να βρεθεί το ηθικόν προσδόκιμο αυτού. Στο παράδειγμα αυτό, απλώς εφαρμόζεται ο τύπος για $E = 100, \alpha = 50, \beta = -50$ και $p' = p'' = \frac{1}{2}$, οπότε προκύπτει -13,40 το αποτέλεσμα, δηλαδή ο παίκτης πρέπει να πληρώσει 13,40 κέρματα σε όποιον πάρει τη θέση του στο παιχνίδι.

Από τη σημείωση που υπάρχει στη σελίδα 58, μάλιστα, γίνεται φανερό ότι η έννοια του ηθικού προσδόκιμου τον απασχόλησε αρκετά. Πιο συγκεκριμένα, η θεωρία αυτού παρουσιάζεται να έχει επαληθευθεί, εκτός από την έκφραση για το ηθικό κέρδος του D. Bernouilli. Η τελευταία δεν αφήνει ικανοποιημένο τον συγγραφέα σε τέτοιον βαθμό, ώστε να σημειώνει πως μπορεί να βελτιωθεί και, εν συνεχεία, να φανεί περισσότερο χρήσιμη από τη θεωρία του μαθηματικού προσδόκιμου.

7.6 ΚΕΦΑΛΑΙΑ 6 ΚΑΙ 7

Το έκτο κεφάλαιο, με τίτλο *Παραδείγματα*, αποτελείται από λυμένα παραδείγματα στα οποία ζητείται η πιθανότητα διάφορων ενδεχομένων («*Από n αριθμημένες σφαίρες εξάγονται οι m. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα αυτών να είναι Ν;*», «*Ληφθέντος αριθμού στην τύχη, ποια είναι η πιθανότητα αυτός να είναι πρώτος;*», «*Γράφοντας κλάσμα στην τύχη, ποια είναι η πιθανότητα να είναι ανάγωγο;*») ή αναφέρονται γνωστά προβλήματα πιθανοτήτων, όπως το «*Πρόβλημα των points*» ή το «*Πρόβλημα του de Moivre*», το «*Πρόβλημα της βελόνης*», *Γεωμετρικά παραδείγματα* ή το «*Πρόβλημα της Πετρουπόλεως*».

Ας γίνει αναφορά στο Πρόβλημα της Πετρουπόλεως (Ρεδιάδης, 1911: 69-71):

Ο Πέτρος και ο Παύλος παίζουν ρίχνοντας ένα νόμισμα. Ο Πέτρος θα πληρώσει δύο φράγκα στον Παύλο στην περίπτωση που το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης είναι «πρόσωπο», 2^2 εάν είναι «πρόσωπο» το αποτέλεσμα της δεύτερης ρίψης, 2^3 αν είναι της τρίτης ρίψης κ.ο.κ. με το παιχνίδι να τελειώνει όταν ο Πέτρος φέρει «πρόσωπο». Η ερώτηση είναι ποιο ποσό πρέπει να παίξει ο Παύλος.

Σύμφωνα με τη θεωρία του μαθηματικού προσδόκιμου, ο Παύλος πρέπει να ριψοκινδυνεύσει το ποσόν $n \pm 2\frac{1}{2} + 2^2(\frac{1}{2})^2 + 2^3(\frac{1}{2})^3 + \cdots + 2^n(\frac{1}{2})^n = 1 + 1 + 1 + \cdots = n.$ Επειδή δεν είναι αδύνατον να προκύψει «πρόσωπο» περισσότερες φορές από $n,$ θα πρέπει ο αριθμός αυτός να έχει προκαθοριστεί. Η αδυναμία της θεωρίας του μαθηματικού προσδόκιμου έγκειται στο γεγονός ότι, για να συμβεί το προηγούμενο, θα πρέπει το ποσό n να τείνει στο άπειρο- που δεν είναι εφικτό. Η θεωρία του ηθικού προσδόκιμου από την άλλη, διδάσκει πως αν με F συμβολιστεί η περιουσία του Παύλου, το ποσό που διαθέτει στο παιχνίδι θα ορίζεται από τη σχέση:

$$(F-n+2)^{\frac{1}{2}}(F-n+2^2)^{(\frac{1}{2})^2}(F-n+2^3)^{(\frac{1}{2})^3} \ldots = (F-n+2)^{(\frac{1}{2})^m} - F = 0 \text{ ή}$$
$$(\frac{F-n}{2}+1)^{\frac{1}{2}}(\frac{F-n}{2^2}+1)^{(\frac{1}{2})^2} \ldots (\frac{F-n}{2^n}+1)^{(\frac{1}{2})^n} \ldots 2^{\left(\frac{1}{2}\right)}.\, 2^{1(\frac{1}{2})^2}.\, 2^{3(\frac{1}{2})^3} \ldots 2^{n(\frac{1}{2})^n} = F.$$

Επειδή οι συντελεστές των δύο σειρών φθίνουν κι έχουν τη μονάδα ως όριο και επιπλέον το κεφάλαιο δε θεωρείται άπειρο, είναι εφικτό να οδηγηθεί κάποιος σε αποτελέσματα. Έτσι, όμως, ο Παύλος σίγουρα θα αρνηθεί το παιχνίδι διότι έτσι θα διακινδυνεύσει πολλά για ελάχιστο κέρδος.

Το περίεργο αυτό πρόβλημα, που προτάθηκε από τον Nicolas Bernouilli, απασχόλησε πολλούς και διακεκριμένους μαθηματικούς και ήταν το έναυσμα να αμφισβητηθεί η θεωρία του μαθηματικού προσδόκιμου και να εμφανιστεί η θεωρία του ηθικού προσδόκιμου που εφαρμόστηκε με επιτυχία στο πρόβλημα αυτό από τον Daniel Bernouilli. Έτσι, χρησιμοποιώντας αυτή τη θεωρία για τη λύση του εν λόγω προβλήματος, αν είναι F η περιουσία του Παύλου, F' η περιουσία του Πέτρου και x, y οι αντίστοιχες καταθέσεις αυτών, τότε θα ισχύουν οι σχέσεις $\frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2}\lambda o\gamma\, F}{\frac{1}{2}\lambda o\gamma\, F'}$ και $x + y = 2$, δεδομένης συνολικής κατάθεσης 2 φράγκων. Επομένως, $\frac{x}{y} = \frac{\lambda o\gamma\, FF'}{\lambda o\gamma\, F'}$ και $y = \frac{\frac{1}{2}\lambda o\gamma F'}{\lambda o\gamma FF'}$, $x = \frac{\frac{1}{2}\lambda o\gamma F}{\lambda o\gamma FF'}$ δηλαδή θα ισχύει ότι $x = y = 1$ μόνο στην περίπτωση που είναι $F = F'$.

Περνώντας στο έβδομο – και τελευταίο- κεφάλαιο που τιτλοφορείται *Εφαρμογαί του Λογισμού των Πιθανοτήτων*, αυτό ξεκινά με την «Αναζήτηση των αιτιών[57]», συνεχίζει με την «Εκτίμηση της ακρίβειας των μαρτυριών» και την «Πιθανότητα επί της ανθρώπινης ζωής»[58], και τελειώνει με αναφορές στα οικονομικά- ασφαλιστικά μαθηματικά: «Θεωρία των προσόδων, ταμείων βοηθείας κλπ», «Ασφάλειες» και «Συντάξεις». Στα τελευταία, γίνεται αναφορά σε έννοιες όπως *υπερθέσιμο κεφάλαιο* (γαλλιστί capital différé[59]), *ισόβιος καταβολή* (annuité viagère[60]), *ισόβια πρόσοδος* (rente viagère[61]), *τοντίνες* (tontines[62]), στη θεωρία *των ταμείων προνοίας, βοηθείας, απομάχων* κτλ, στα *ταμεία των χηρών*.

Το βιβλίο τελειώνει με μια συλλογή πενήντα πέντε άλυτων ασκήσεων, ποικίλου περιεχομένου. Σε αυτήν βρίσκει κανείς ασκήσεις, στις οποίες – κυρίως- ζητείται η εύρεση της πιθανότητας μετά από ρίψη κύβου (ζάρι) ή κύβων, από επιλογή παιγνιόχαρτων, χρημάτων, γραμμάτων, από εξαγωγή σφαιρών από κάλπη, από επιτυχία βολών, σχετικές με επιλογή ψηφίων αριθμών, αλλά και γεωμετρικές πιθανότητες.

[57] Ο συγγραφέας αναφέρει πως ενίοτε στη Στατιστική παρατηρούνται ανωμαλίες, οι οποίες οφείλονται σε κάποιες αιτίες ή είναι τυχαίες. Στην αρχή του τελευταίου κεφαλαίου του βιβλίου εξετάζει τις αιτίες αυτές.

[58] Στην παράγραφο αυτή αναφέρει τους όρους «πιθανή ζωή», «μέση ζωή», «θνησιμότητα», παρουσιάζει την καμπύλη θνησιμότητας και δίνει κάποια παραδείγματα εύρεσης πιθανοτήτων που σχετίζονται με το προσδόκιμο ζωής ή εκτίμησης της επήρειας ασθένειας επί της θνησιμότητας.

[59] Η προικοδότηση, το προικώο, το κληροδότημα.

[60] Η ισόβιος καταβολή ή η ετήσια πρόσοδος.

[61] Η σύνταξη.

[62] Η διανομή επιδομάτων.

7.6.1 ΣΥΣΧΕΤΙΣΜΟΙ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ 6-7 ΜΕ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΠΟΥ ΠΡΟΗΓΗΘΗΚΑΝ

Στα δύο τελευταία κεφάλαια του βιβλίου του, ο Ρεδιάδης παρουσιάζει μία ιδιάζουσα δομή: αφενός αναφέρει λυμένα παραδείγματα που έχουν παρουσιαστεί στα περισσότερα (γαλλικά) βιβλία πιθανοτήτων (παρατηρεί κανείς πως στο βιβλίο του Bertrand λ.χ. βρίσκει το πρόβλημα της βελόνης[63] ή το πρόβλημα της Πετρουπόλεως[64], παρόλο που οι μέθοδοι επίλυσης που δίνονται είναι διαφορετικές), αφετέρου αφιερώνει μεγάλο μέρος σε θεματολογία που δεν είναι τόσο συνηθισμένη: καμπύλη θνησιμότητας, μέση ζωή, ταμεία βοηθείας κτλ.

Το μοναδικό γαλλικό βιβλίο που έχει αναφορές στα περιεχόμενά του σε θέματα ασφαλίσεων είναι αυτό του Laurent. Πράγματι, στο τέταρτο κεφάλαιο του εν λόγω βιβλίου, γίνονται αναφορές στην καμπύλη θνησιμότητας, στη μέση ζωή ή την πιθανή ζωή (Laurent, 1873), ενώ το πέμπτο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στις Ασφαλιστικές Εταιρείες, με αναφορές σε όρους όπως *capital différé, annuité viagère* ή *rente viagère* που εμφανίζονται και στο τελευταίο κεφάλαιο του βιβλίου του Ρεδιάδη, γεγονός που οδηγεί στο συμπέρασμα πως ο Έλληνας συγγραφέας είχε μάλλον επηρεαστεί από το γαλλικό αυτό εγχειρίδιο.

Ένα άλλο εγχειρίδιο- βελγικό- που πιθανότατα επηρέασε το εν λόγω κεφάλαιο του Ρεδιάδη είναι μάλλον αυτό του Liagre (1879), αφού στο έβδομο κεφάλαιό του γίνονται αναφορές σε όλα τα προαναφερθέντα.

Είναι εμφανές πως η θεματολογία των τελευταίων κεφαλαίων διαφοροποιείται από αυτή των προηγούμενων ελληνικών εγχειριδίων. Μια εκτίμηση είναι πως η αφιέρωση του συνόλου του βιβλίου στις πιθανότητες το καθιστά πιο ολοκληρωμένο αν αναφέρονται όλα τα πεδία στα οποία χρησιμοποιούνται οι πιθανότητες. Μια δεύτερη εκτίμηση γίνεται σύμφωνα με την προσωπικότητα του συγγραφέα και τα όσα αναφέρονται στις βιογραφίες του: ένας άνθρωπος ιδιοφυής και τελειομανής ταυτόχρονα θα ήθελε να περιλάβει στο σύγγραμμά του όσα είναι γνωστά διεθνώς για το θέμα με το οποίο καταπιάνεται.

7.6.2 ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Ενώ στη Γαλλία, όπως έχει αναφερθεί, το πνεύμα του Διαφωτισμού ανέδειξε τις Πιθανότητες ως κλάδο των Μαθηματικών τον 18^{o} αιώνα και τις εδραίωσε τον 19^{o}, στην Ελλάδα- το νεοσύστατο ελεύθερο ελληνικό κράτος που προσπαθούσε να θεμελιώσει την Εκπαίδευση που θα παρείχε στη νεολαία του- τον 19^{o} αιώνα κάνουν

[63] Problème XLVI (Bertrand, 1888-9: 52-53).

[64] Problème (Bertrand, 1888-9: 59-61).

την εμφάνισή τους τα πρώτα ίχνη των Πιθανοτήτων και της διδασκαλίας αυτών. Κι όπως και στην περίπτωση της Γαλλίας, η ανάγκη για την εμφάνιση του κλάδου προέρχεται από μη μαθηματικές περιοχές: από τη Γεωδαισία και το Στρατό (Πυροβολικό). Σε αντίθεση, βέβαια, με τη Γαλλία, στην Ελλάδα την προαγωγή αυτού του κλάδου την αναλαμβάνουν αρχικά επιστήμονες των άλλων κλάδων- όχι μαθηματικοί.

Όπως γίνεται φανερό από τις βιογραφίες και των τεσσάρων ανδρών[65] που συνέγραψαν τα εγχειρίδια που εξετάστηκαν στην παρούσα εργασία, οι σπουδές τους δεν ήταν αμιγώς μαθηματικές. Και οι τέσσερις, όμως, είχαν πολύ καλές γνώσεις Μαθηματικών, καθώς τόσο στο Σχολείο των Τεχνών, στη Σ.Σ. Ευελπίδων[66], όσο στη Σχολή Ναυτικών Δοκίμων και- εννοείται- στη Φυσικομαθηματική διδάσκονταν ανώτερα Μαθηματικά. Οι δύο εξ αυτών (Π. Δαγκλής και Ι. Λαζαρίμος) είχαν μετεκπαιδευτεί στο εξωτερικό και συνέχισαν μετά την επιστροφή τους να συνεργάζονται με άτομα που είχαν κληθεί στην Ελλάδα για να βοηθήσουν στον εκσυγχρονισμό του κράτους με τις γνώσεις τους, ενώ οι άλλοι δύο (Γ. Αθανασιάδης και Π. Ρεδιάδης), παρόλο που δεν σπούδασαν στο εξωτερικό, ήταν γνώστες των επιστημονικών εξελίξεων και αρθρογραφούσαν σε ξένα περιοδικά. Έτσι, όλοι έγιναν φορείς νέων ιδεών και, με την ιδιότητά τους ως καθηγητές, κατάφεραν να μεταλαμπαδεύσουν τη γνώση στους φοιτητές τους.

Αξίζει να αναφερθεί, κλείνοντας, πως ο πρώτος μαθηματικός που συγγράφει εγχειρίδιο αφιερωμένο στις Πιθανότητες και εισάγει τον εν λόγω κλάδο στη Φυσικομαθηματική Σχολή του Πανεπιστημίου είναι ο Γεώργιος Ρεμούνδος (1919). Ο Ρεμούνδος ερχόμενος από τις μεταπτυχιακές σπουδές του στη Γαλλία πιθανότατα υιοθέτησε και προώθησε το μάθημα που στη Γαλλία διδάσκονταν ήδη από τον προηγούμενο αιώνα.

[65] Π. Δαγκλή, Ι. Λαζαρίμου, Γ. Αθανασιάδη και Π. Ρεδιάδη.

[66] βλ. Καστάνη, Α.: *Ιστορία Σ.Σ.Ε.* (http://www.sse.gr/page_gr.php?id=4&page=3) (ημερομηνία προσπέλασης 15-01-2013).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

I. ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αγριαντώνη Χ. (1988). Προς τη βιομηχανική τεχνολογία: οι συντεταγμένες της μεγάλης τομής. Στο *ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ* (219-229). Πάτρα: ΕΤΒΑ- ΝΟΜΑΡΧΙΑ ΑΧΑΙΑΣ.

Αθανασιάδης, Γ. (1908). *Λογισμός των Σφαλμάτων Παρατηρήσεως*. Αθήναι: Τύποις Π. Δ. Σακελλαρίου.

Αντωνίου, Ι. (2004). *Οι Έλληνες μηχανικοί. Θεσμοί και ιδέες: 1900-1940*. Διδακτορική Διατριβή. Αθήνα: ΕΚΠΑ.

Γαβρόγλου Κ., Καραμανωλάκης Β., & Μπάρκουλα Χ. (2014). *Το Πανεπιστήμιο Αθηνών και η Ιστορία του (1837-1937)*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Γαγάτσης, Α. (1995). *Διδακτική των Μαθηματικών: Θεωρία- Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Art of Text.

Δαγκλής, Π. (1888). *Περί της διασποράς των βλημάτων και της πιθανότητας επιτυχίας κατά την βολήν*. Αθήναι: Τυπογραφείον Γεωργίου Σ. Σταυριανού.

Καβαλάρη Φ. (2009). Η διάσωση ενός σπάνιου αρχιτεκτονικού μνημείου, *Ενημερωτικό Δελτίο του Τεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδας*, τεύχος 2560.

Καλαφάτη, Ε. (1989). Το Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο στο γύρισμα του αιώνα, επαγγελματικές διέξοδοι των αποφοίτων και θεσμικό καθεστώς του ιδρύματος. Στο *Πρακτικά του Διεθνούς Συμποσίου «Πανεπιστήμιο: Ιδεολογία και Παιδεία, Ιστορική Διάσταση και Προοπτικές»,* ΙΑΕΝ, 19, τόμος Α΄ (167-186). Αθήνα: Γενική Γραμματεία Νέας Γενιάς.

Καρακατσανίδης, Ν. (1896). *Πραγματεία περί τριγωνισμού και συσταθμήσεως των λαθών αυτού*. Αθήναι: Τυπογραφείον Ανέστη Κωνσταντινίδου.

Κουνιάς, Σ. (1978). ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, *Μαθηματική Επιθεώρηση, 10*: 3-27.

Κρητικός, Θ. (1995). *Η φυσική στην Ελλάδα 1900-1930*. Διδακτορική Διατριβή. Ιόνιο Πανεπιστήμιο. http://thesis.ekt.gr/thesisBookReader/id/7436

Λαζαρίμος, Ι. (1893). *Μαθήματα Ανωτέρας Τοπογραφίας.* Αθήναι: Μετσόβιον Πολυτεχνείον.

Λαζαρίμος, Ι. (1888). *Μαθήματα Τοπογραφίας, Μέρος Α'*. Αθήναι: Σχολείον των Βιομηχάνων Τεχνών.

Λαζαρίμος, Ι. (1894). *Μαθήματα Τοπογραφίας, Μέρος Α' και Β'*. Αθήναι: Μετσόβιον Πολυτεχνείον.

Λαζαρίμος, Ι. (1893). *Μαθήματα Τοπογραφίας, Μέρος Β'*. Αθήναι: Μετσόβιον Πολυτεχνείον.

Λαζαρίμος, Ι. (1901). *Μαθήματα Τοπογραφίας και Γεωδαισίας. Μέρος Β'. Γεωδαισία-Υπολογισμός των Πιθανοτήτων.* Αθήναι: Μετσόβιον Πολυτεχνείον.

Λιβιεράτος, Ε. (1992). *Θεωρία της Γεωδαισίας*, Β΄Έκδοση, Θεσσαλονίκη: ΖΗΤΗ.

Λυκούδης, Σ. (1939). *Περικλής Δ. Ρεδιάδης - Βιογραφικά Σημειώματα και Βιβλιογραφία*. Αθήνα: Εστία.

Μαυρέας, Κ. (Ιούλιος- Σεπτέμβριος, 1998). Κοινωνική πολιτική και ιδεολογία στην Ελλάδα του μεσοπόλεμου: επιδράσεις και εξελίξεις με αφορμή το ζήτημα των κοινωνικών ασφαλίσεων. *Θέσεις 64*. Ανακτήθηκε 10 Απριλίου, 2015, από **http://www.theseis.com/index.php?option=com_content&task=view&id=636**

Μπίρης, Κ. (1956). *Ιστορία του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου μέχρι της ιδρύσεως των ανωτάτων σχολών*. Αθήναι: Έκδοσις του ΕΜΠ.

Πάπυρος [Συγγραφική ομάδα] (2007) 'Ρεδιάδης, Περικλής', *Εγκυκλοπαίδεια Πάπυρος Larousse Britannica*, 44 (468). Αθήνα: ΠΑΠΥΡΟΣ.

Ρεδιάδης, Π. (1911). *Στοιχεία Λογισμού των Πιθανοτήτων και Θεωρίας των Σφαλμάτων*. Αθήναι: Α. Ραφτάνη Βασιλική Τυπογραφία.

Ρωσσικόπουλος, Δ. (2006). *Μέτρον Γεωμετρικόν. Η Ιστορία των Επιστημών της Αποτύπωσης.* Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Τούρα, Β. (2013). Η εμφάνιση των Πιθανοτήτων στο νεοσύστατο ελληνικό κράτος, *Πρακτικά 5ης Διεθνούς Εβδομάδας αφιερωμένης στα Μαθηματικά* (813-826). Θεσσαλονίκη: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία- Παράρτημα Κεντρικής Μακεδονίας.

Τσοκόπουλος, Β. (1989). Επιλογή σπουδών και παραγωγικές δυνάμεις: Μια περιοδολόγηση (1837-1930). Στο *Πρακτικά του Διεθνούς Συμποσίου «Πανεπιστήμιο: Ιδεολογία και Παιδεία, Ιστορική Διάσταση και Προοπτικές»,* ΙΑΕΝ, 19, τόμος Β΄ (461-469). Αθήνα: Γενική Γραμματεία Νέας Γενιάς.

II. ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Alpaslan, M., Schubring, G., & Günergun, F. (2015). 'Mebahis-i İlmiye' as the first periodical on mathematical sciences in the Ottoman Turkey. Στο N. Vondrová and K. Krainer (Επιμ.), 14 *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (1783-1789). Prague: Charles University.

Antoniou, Y. & Assimakopoulos, M. (2003). Notes on the Genesis of the Greek Engineer in the 19th Century: The School of Arts and the Military Academy. Στο Chatzis, K. and Nikolaidis, E. (Επιμ.), *Science, Technology and the 19th Century State: the Role of the Army* (Conference Proceedings), 90-138. Athens: National Hellenic Research Foundation.

Bertrand, J. (1888/9). *Calcul des Probabilités*. Paris: Gauthier-Villars.

Bjarnadσttir, K., Christiansen, A. & Lepik, M. (2013). Arithmetic textbooks in Estonia, Iceland and Norway – similarities and differences during the nineteenth century. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 18 (3), 27–58.

Borel, É. (1909). *Eléments de la théorie des probabilités*. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann & Fils.

Borovcnik, M., Bentz, H.-J., & Kapadia, R. (1991). A Probabilistic Perspective. Στο R. Kapadia & M. Borovcnik (Επιμ.), *Chance Encounters: Probability in Education* (28-71). Dordrecht: Kluwer.

Clark, K., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., Tzanakis, C., & Wang, X. (2018, July). History of mathematics in mathematics education. Recent developments. *History and Pedagogy of Mathematics*. Ανακτήθηκε 1 Αυγούστου, 2018, από http://www.clab.edc.uoc.gr/HPM/HPMinME-TopicalStudy-18-2-16-NewsletterVersion.pdf

Courtebras, B. (2006). *À l'école des probabilités : une histoire de l'enseignement français du calcul des probabilités*. Besançon: Presses universitaires de Franche-comté.

da Costa, D.A. (2009), Arithmetic in primary school in Brazil: end of the nineteenth century. Στο V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Επιμ.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (2712-2721). Institut national de recherche pédagogique.

Daumas, M. (1963). Precision measurement and physical and chemical research in the 18th century. Στο A.C., Crombie (Επιμ.), *Scientific change* (418-430). New York: Basic Books.

Faye, H. (1881). *Cours d' Astronomie et de géodésie de l'École Polytechnique*. Paris: Gauthier-Villars.

Gillispie, Charles C., editor in chief. *Dictionary of Scientific Biography*. New York: Charles Scribner's Sons, 1970–1980. Vol. 15: Supplement I.

Heilbron, J.L. (1990). Introductory Essay. Στο T. Frängsmyr, J.L. Heilbron, & R.E. Rider. (Επιμ.), *The Quantifying Spirit in the Eighteenth* Century, 1-24. Berkeley: University of California Press.

Horn, J. (2006). *The path not taken: French industrialization in the age of revolution, 1750–1830*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Jankvist, U. T. & van Maanen, J. (2017). History and Mathematics Education. Ανακτήθηκε 10 Αυγούστου, 2018, από http://cerme10.org/wp-content/uploads/2017/01/TWG12_ERME_Book_Chp17_History_Draft.pdf

Jozeau M.F. (1997). *Géodésie au XIXème siècle: de l'hégémonie française à l'hégémonie allemande.* Thèse de doctorat. Paris: Université Paris 7.

Kapadia, R., & Borovcnik, M. (1991). The educational perspective. Στο R. Kapadia & M. Borovcnik (Επιμ.), *Chance Encounters: Probability in Education* (14-26). Dordrecht: Kluwer.

Karp, A. (2014). The History of Mathematics Education: Developing a Research Methodology. Στο A. Karp and G. Schubring (Eds.), *Handbook on the History of Mathematics* Education, New York: Springer Science+Business Media.

Kilpatrick J. (2014) History of Research in Mathematics Education. In: Lerman S. (eds), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Dordrecht.

Kjeldsen, T. H. (2011). Uses of history in mathematics education: development of learning strategies and historical awareness. In M. Pytlak, T. Rowland and E. Swoboda (Eds.): *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp. 1640-1649. Rzeszów: University of Rzeszów.

Laurent, H. (1873). *Traité du calcul des probabilités*. Paris: Gauthier-Villars.

Liagre, J.B.J. (1879). *Calcul des probabilités et théorie des erreurs avec des applications aux sciences d'observation en général et a la géodésie en particulier*. Bruxelles: C. Muquardt; Paris: Librairie Polytechnique.

Mazliak, L. (2007). Borel, probability and *La Revue du Mois*. *Electronic Journal for History of Probability and Statistics*, vol.3, n.1.

Mota, C., Ralda, M. E. & Estrada, M. F. (2013). The teaching of the concept of tangent line using original sources. In B. Ubuz, C. Haser and M. A. Mariotti (Eds.): *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp. 2048-2057. Ankara: METU.

Pannekoek, A. (1961). *A History of Astronomy*. London: G. Allen & Unwin.

Poincaré, J.-H. (1896). *Calcul des Probabilités*. *Leçons professées pendant le deuxième semestre 1893-1894*. *Rédigées par A. Quiquet*. Paris: G. Carré.

Porter, Th.M. (1986) *The rise of statistical thinking 1820-1900*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Porter, Th. M. (1995). *Trust in Numbers: the pursuit of objectivity in science and public life*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics* 7(3): 41–51.

Sheynin, O.B. (1994). Bertrand's Work on Probability, *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 48, No. 2 (155-199). Berlin: Springer.

Widmalm, S. (1990). Accuracy, Rhetoric, and Technology: The Paris-Greenwich Triangulation, 1784–88. Στο T. Frängsmyr, J.L. Heilbron, & R.E. Rider. (Επιμ.), (1990). *The Quantifying Spirit in the Eighteenth Century* (179-206). Berkeley: University of California Press.

Wolf, C. (1891). *Astronomie et Geodesie: Cours professé à la Sorbonne.* Paris: Georges Carré.

III. ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

http://www.army.gr/default.php?pname=istorika_GYS&la=1 Ανακτήθηκε στις 26 Απριλίου, 2012.

http://www.sabix.org/bulletin/b4/arago.html Ανακτήθηκε στις 15 Σεπτεμβρίου, 2018.

«Ο καθηγητής Γεώργιος Κ. Αθανασιάδης» (PDF). Ανακτήθηκε στις 29 Αυγούστου, 2016.

Καστάνη, Α.: *Ιστορία Σ.Σ.Ε.* http://www.sse.gr/page_gr.php?id=4&page=3 Ανακτήθηκε στις 15 Ιανουαρίου, 2013.