ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Α΄ΗΛΙΚΙΑΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Διδακτική παρέμβαση για την υπέρβαση δεκάδας στην Α΄ Δημοτικού με διερευνητική δραματοποίηση

ΤΟΥ

Παπαβασιλείου Γεώργιου: Α.Ε.Μ. 712

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Τζεκάκη Μαριάννα, Καθηγήτρια (Τ.Ε.Π.Α.Ε./Α.Π.Θ.)
Εξεταστές: Καλδρυμίδου Μαρία (Καθηγήτρια Π.Τ.Ν./Παν/μιο Ιωαννίνων)
Δεσλή Δέσποινα (Επ. Καθηγήτρια Π.Τ.Δ.Ε./Α.Π.Θ.)

ΦΛΩΡΙΝΑ 2019

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω την κ. Μαριάννα Τζεκάκη για την τιμή που μου έκανε ως επιβλέπουσα καθηγήτρια της διπλωματικής μου εργασίας όσο και για την υποστήριξη και την άψογη συνεργασία που είχαμε, προκειμένου να ολοκληρωθεί η εργασία μου.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την κ. Μαρία Καλδρυμίδου για τις εύστοχες παρατηρήσεις και υποδείξεις της, καθώς και για τη συμμετοχή της στην επιτροπή αξιολόγησης. Την κ. Δέσποινα Δεσλή για τις χρήσιμες υποδείξεις της και τις παρεχόμενες γνώσεις της, σχετικά με τη διαμόρφωση της εργασίας μου καθώς και για τη συμμετοχή της στην επιτροπή αξιολόγησης.

Ακόμη, τον συμφοιτητή και φίλο Κώστα, που έκανε αυτήν τη διαδρομή ευχάριστη, την συμφοιτήτρια και φίλη Άννα, που όταν τα πράγματα δυσκόλευαν η ηθική συμπαράστασή της ήταν πολύτιμη, τον Θέμη και την Τασούλα για τις εύστοχες παρατηρήσεις τους αλλά και τους υπόλοιπους συμφοιτητές και καθηγητές μου, που ήταν συνεπιβάτες σε αυτό το ταξίδι.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στη γυναίκα μου και στα παιδιά μου, που άντεξαν την απουσία μου σε αυτό το ταξίδι και ήταν άξιοι συμπαραστάτες της προσπάθειας μου.

…στη σύζυγό μου, Λένα

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία διερευνάται η επίδραση του πλαισίου της διερευνητικής δραματοποίησης με τη χρήση θεατρικών – δραματικών τεχνικών στη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών και συγκεκριμένα στην κατανόηση της υπέρβασης δεκάδας και στην αφαίρεση ως πρόσθεση. Αρχικά έγινε διευκρίνιση του όρου «πρώτη αρίθμηση» αλλά και των σταθερών σχέσεών του ως το 20. Επίσης έγινε διευκρίνιση του όρου «νοερός υπολογισμός», ο οποίος συμπεριλαμβάνει τις έννοιες εννοιολογική και διαδικαστική κατανόηση, στρατηγικές, σύγκριση γραπτών αλγόριθμων και νοερών στρατηγικών, τρόποι διδασκαλίας, δυσκολίες και λόγοι δυσκολιών. Επιπλέον όσον αφορά τη «δραματοποίηση στην εκπαίδευση» παρουσιάζονται η σημασία, τα χαρακτηριστικά, καθώς και η σχέση της με τη μαθηματική εκπαίδευση. Στην έρευνα συμμετείχαν δύο τμήματα της Α΄ τάξης δημόσιου δημοτικού σχολείου, αποτελούμενο κάθε τμήμα από 19 μαθητές· 2 μαθητές εξ αυτών με μαθησιακές δυσκολίες. Η έρευνα ήταν ποιοτική και ποσοτική, επιλέχθηκε η μέθοδος του διδακτικού πειράματος (teaching experiment) και πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις βασισμένες σε έργα (task based interview). Τα έργα που δόθηκαν στους μαθητές κατά το στάδιο της πρόσθεσης αποτελούνταν από δύο άξονες. Στον πρώτο άξονα εξετάσαμε τις γνώσεις των μαθητών στις σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα, καθώς και το επίπεδο της στρατηγικής που χρησιμοποιούν. Στον δεύτερο άξονα εξετάσαμε τις γνώσεις των μαθητών στην υπέρβαση της δεκάδας προσθετικά, σε συνδυασμό με το επίπεδο αλλά και το υποεπίπεδο στρατηγικής που χρησιμοποίησαν για την επίλυση των ασκήσεων. Κατά το στάδιο της αφαίρεσης τα έργα που δόθηκαν στους μαθητές αποτελούνταν από τρεις άξονες. Στον πρώτο άξονα θέλαμε να διαπιστώσουμε την διατηρησιμότητα της γνώσης στην υπέρβαση δεκάδας προσθετικά. Στον δεύτερο άξονα ελέγξαμε τη γνώση στην υπέρβαση δεκάδας αφαιρετικά καθώς και το επίπεδο και υποεπίπεδο στρατηγικής που χρησιμοποίησαν οι μαθητές. Και στον τρίτο άξονα ελέγξαμε κατά πόσο οι μαθητές μπόρεσαν να δημιουργήσουν συνδέσεις των δύο πράξεων, ώστε να διαπιστωθεί η κατανόηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης στην υπέρβαση δεκάδας. Τα αποτελέσματα μάς δείχνουν ότι η διερευνητική δραματοποίηση επιδρά θετικά στην κατανόηση της υπέρβασης δεκάδας.

Λέξεις – Κλειδιά

Διδασκαλία μαθηματικών εννοιών, Υπέρβαση δεκάδας, Διερευνητική δραματοποίηση, Νοεροί υπολογισμοί.

ABSTRACT

In this thesis, the effect of inquiry drama is investigated, through the use of theatrical - dramatic techniques in teaching mathematical concepts, and in particular, on understanding the decade and the subtraction as addition. Originally not only was a clarification of the term first count made but also the stable relationships 20 were measured. What is more, there was a clarification of the term mental computation, which includes the concepts of conceptual and procedural understanding, strategies, comparison of written algorithms and mental strategies, ways of teaching, difficulties and reasons for difficulties. In addition to the dramatization of education, its importance, characteristics, and its relation to mathematical education are presented. The study involved two classes of the First Class of a Public Primary School, each consisting of 19 students, 2 of whom with learning disabilities. The research was qualitative and quantitative. The teaching experiment method was selected and task based interviews took place. The projects, given to students during the addition phase, consisted of two axes. In the first axis we examined students' knowledge of the relations of numbers in the first decade. In the second axis, we examined the students' knowledge of exceeding the decade additively. During the subtraction phase the tasks given to the students were made up of three axes. In the first axis we wanted to see the sustainability of knowledge on B.A.M.T. additively. In the second axis we tested knowledge B.A.M.T. deductively. In the third axis, we checked the ability of the students to make connections between the two mathematical operations in order to find out the meaning of addition and subtraction in B.A.M.T.. The results indicate that inquiry drama affects the comprehension of B.A.M.T. positively.

Keywords

Teaching mathematical notions, BAMT (Break Apart to Make Ten), Inquiry Drama, Mental Calculations.

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κάθε πρόταση μεταρρύθμισης της μαθηματικής εκπαίδευσης αναδεικνύει σημαντικές προκλήσεις για τους εκπαιδευτικούς, οι οποίες αποτελούν απόρροια της προσπάθειας που καταβάλουν, ώστε να προσεγγίσουν και να διαπραγματευτούν τα νέα χαρακτηριστικά της και, ταυτόχρονα, να αναπτύξουν νέες παιδαγωγικές πρακτικές (Καλδρυμίδου, Πόταρη, Σακονίδης, Τζεκάκη, 2011, σελ. 591). Έχει διαπιστωθεί ότι οι δάσκαλοι που δεν μπορούν να αναπτύξουν τις νέες παιδαγωγικές πρακτικές μπορούν να δημιουργήσουν άγχος στα παιδιά, καθώς δίνουν μεγάλη έμφαση στην απομνημόνευση τύπων. Έτσι καθορίζουν την εργασία με τον παραδοσιακό τρόπο, χωρίς να δίνουν έμφαση στην κατανόηση (Greenwood, 1984, όπ. αναφ. Ufuktepe & Ozel, 2002). Καταλήγουν ότι τα μαθηματικά είναι θλιβερά και ποτέ δε διασκεδάζουν. Μια αιτία του άγχους για τα παιδιά είναι το στυλ διδασκαλίας στην τάξη των μαθηματικών (Ufuktepe & Ozel, 2002). Το άγχος των μαθηματικών μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την επιτυχία ενός παιδιού κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσής τους αλλά και της ενήλικης ζωής τους (Rossnan, 2006, pp 1). Ο Τουμάσης (2002, σελ. 384), για να περιγράψει τον φόβο των παιδιών για τα μαθηματικά δανείζεται τον όρο «μαθηματικοφοβία». Σύμφωνα με τον Παπαδόπουλο (2007c) τα παιδιά έρχονται στο σχολείο με σημαντικές εμπειρίες, πάνω στις οποίες θα δημιουργήσουν νέες γνώσεις και οπτικές για τα πράγματα. Η μάθηση στο δημοτικό σχολείο καθίσταται φυσική και αποτελεσματική, όταν προκύπτει μέσα από περιβάλλοντα μάθησης παρόμοια με αυτά της καθημερινότητας. Η Δραματοποίηση μέσω της διερεύνησης μπορεί να διευκολύνει την κατανόηση των μαθηματικών. Έτσι η οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης καθίσταται αποτελεσματικότερη (Παπαδόπουλος, 2007c, σελ. 1) και θα πρέπει να προσεγγίζεται μέσα από μια ποικιλία δραστηριοτήτων, όπως και το θεατρικό παιχνίδι (Τζεκάκη, 2001, σελ.78).

Ένα σημαντικό πεδίο έρευνας επίσης αποτελεί και ο νοερός υπολογισμός. Πολλοί ερευνητές θεωρούν ότι για τη διεξαγωγή των νοερών υπολογισμών είναι απαραίτητη η γνώση των βασικών αριθμητικών γεγονότων (Plunket, 1979, όπ. αναφ. Heirdsfield, 2002; Sowder, 1988; Maclellan, 2001). Υπάρχουν, όμως κι έρευνες που αναφέρουν ότι η γνώση των αριθμητικών γεγονότων δεν είναι απαραίτητη (Heirdsfield, 2002; Van de Walle et al., 2017). Ο νοερός υπολογισμός εκτελείται με τη βοήθεια στρατηγικών και περιλαμβάνει ένα ευρύ φάσμα από αυτές και όχι τις παραδοσιακές γραπτές διαδικασίες (Heirdsfield & Cooper, 2002). Μια πολύ σημαντική στρατηγική των νοερών υπολογισμών αποτελεί και η υπέρβαση της δεκάδας. Με την εκμάθησή της μπορούν να επιλυθούν πολλά από τα βασικά δεδομένα της πρόσθεσης και μπορεί να εφαρμοστεί αργότερα σε μεγαλύτερους αριθμούς (Van de Walle et al., 2017).

Σύμφωνα με τα παραπάνω δεδομένα η παρούσα έρευνα σχεδιάστηκε με σκοπό να αναδείξει τη θετική επίδραση της δραματοποίησης μέσω θεατρικών – δραματικών τεχνικών σε στρατηγικές νοερών υπολογισμών, όπως *στην υπέρβαση δεκάδας* αλλά και της *αφαίρεσης ως πρόσθεση*. Αρχικά έγινε μια καταγραφή των ερευνητικών ερωτημάτων που αφορούν τη διερευνητική δραματοποίηση και την υπέρβαση δεκάδας, τις σταθερές σχέσεις των αριθμών και πως οι γνώσεις της επηρεάζουν τη κατανόηση της υπέρβασης, εάν μετά το τέλος των διδασκαλιών με διερευνητική δραματοποίηση οι μαθητές/τριες μπορούν να δημιουργήσουν συνδέσεις των δύο πράξεων και κατά πόσο έχει διατηρηθεί η γνώση στην υπέρβαση δεκάδας στην πρόσθεση μετά από δύο μήνες. Στη συνέχεια γίνεται βιβλιογραφική μελέτη που αφορά την πρώτη αρίθμηση, τις σταθερές σχέσεις των αριθμών και ότι αφορά τους νοερούς υπολογισμούς (ορισμός, σημασία, εννοιολογική και διαδικαστική κατανόηση, στρατηγικές, σύγκριση γραπτών αλγόριθμων και νοερών στρατηγικών, τρόποι διδασκαλίας, δυσκολίες και λόγοι δυσκολιών, διδακτικές προτάσεις) και έπειτα για τη δραματοποίηση (σημασία, χαρακτηριστικά, καθώς και τη σχέση της με τη μαθηματική εκπαίδευση). Τέλος, παρουσιάζεται η έρευνα που πραγματοποιήθηκε με τα αποτελέσματά της και τη σύγκριση μεταξύ των δύο ομάδων (πειραματικής και ελέγχου) και τα συμπεράσματα σε αντιπαραβολή με τα ευρήματα άλλων ερευνών.

II. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

1. ΑΡΙΘΜΗΣΗ

1.1. Πρώτη αρίθμηση

Η πρώτη αρίθμηση αποτελεί την αφετηρία της ενασχόλησης με τους αριθμούς και περιλαμβάνει την ανάπτυξη των πρώτων αριθμητικών εννοιών, όπως είναι τα ψηφία, οι αριθμητικές λέξεις, οι φυσικοί αριθμοί, η θεσιακή αξία των ψηφίων, το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και οι αριθμητικές πράξεις. Αν και η χρήση του όρου «αριθμός» παραμένει ασαφής, αποτελεί μια μαθηματική κατασκευή, η οποία παίρνει το νόημά της από πραγματικές καταστάσεις, είναι μέρος αριθμητικού συνόλου με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και έχει ένα δίκτυο σχέσεων με τους άλλους αριθμούς. (Τζεκάκη, 2010).

Ο σκοπός της πρώτης αριθμητικής μάθησης είναι να κατανοήσουν οι μαθητές τους αριθμούς, αρχικά της πρώτης δεκάδας, των επομένων, των τρόπων παράστασής τους, την μελέτη των αριθμητικών σχέσεων και να αντιληφθούν το επαναλαμβανόμενο σχήμα, από το οποίο προκύπτει η διαδοχή των αριθμών μετά την πρώτη δεκάδα (Τζεκάκη, 2010).

Η συνηθέστερη εισαγωγή του αριθμού πραγματοποιείται με τη χρήση ποσοτήτων (πληθική σημασία του αριθμού). Ο αριθμός μέσα στο αριθμητικό σύνολο έχει μια διάταξη που σχετίζεται με την τακτική σημασία του αριθμού και εμπλέκεται σε σταθερές σχέσεις με τους άλλους αριθμούς της πρώτης δεκάδας, που οδηγούν στις σχέσεις των μεγαλύτερων αριθμών. Αυτά τα τρία στοιχεία· η πληθικότητα, η τακτικότητα και οι σχέσεις στην προσέγγισή τους αποτελεί το θεμέλιο για την κατανόηση των αριθμητικών εννοιών (Τζεκάκη, 2010).

1.2. Σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα

Υπάρχουν τέσσερις διαφορετικές μορφές σχέσεων, τις οποίες πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές σε ό,τι αφορά τους αριθμούς (Van de Walle et al., 2017):

- Χωρικές σχέσεις: να μπορούν οι μαθητές να αναγνωρίζουν σύνολα αντικειμένων σε διάταξη σχηματικού προτύπου χωρίς απαρίθμηση.
- Ένα-δύο περισσότερα, ένα-δύο λιγότερα: στις σχέσεις αυτές δεν περιορίζονται μόνο να μετρήσουν ένα μπροστά ή δύο πίσω. Θα πρέπει να γνωρίζουν παράδειγμα ότι το 6 είναι 1 περισσότερο από το 5 και 1 λιγότερο από το 7.
- Οι άγκυρες ή τα σημεία αναφοράς του 5 και του 10: το 10 έχει πρωταγωνιστικό ρόλο στο αριθμητικό μας σύστημα και αποτελείται από δύο πεντάδες, γι` αυτό πρέπει να αναπτύξουμε τις σχέσεις με σημεία αναφοράς το 5 και το 10.

- Σχέσεις μέρους - μέρους – όλου: η εννοιολογική σύλληψη του αριθμού ως συνδυασμός δύο ή περισσοτέρων μερών. Θεωρείται η πιο σημαντική σχέση.

Με λίγα λόγια σταθερές σχέσεις στην πρώτη δεκάδα είναι όλοι οι συνδυασμοί που μας δίνουν αθροίσματα ή διαφορές των αριθμών ως το 10. Η αντίληψή τους είναι κρίσιμη για την κατανόηση όλων των επόμενων πράξεων (Τζεκάκη, 2010).

1.3. Σχέσεις στους αριθμούς από το 10 ως το 20

Τα παιδιά έρχονται σε επαφή καθημερινά με αριθμούς ως το 20 και πιο πάνω. Παρόλα αυτά δεν αποτελεί τετελεσμένο ότι τις σχέσεις που έχουν αναπτύξει με μικρότερους αριθμούς θα τις εφαρμόσουν και σε αριθμούς πάνω από το 10. Οι αριθμοί αυτοί κατέχουν σημαντική θέση σε δραστηριότητες απαρίθμησης αλλά είναι το ίδιο χρήσιμοι στον νοερό υπολογισμό. Επομένως, αυτές οι σχέσεις των αριθμών είναι το ίδιο σημαντικές με τι σχέσεις των αριθμών ως το 10. Σκοπός μας είναι οι μαθητές να μάθουν τις αριθμητικές λέξεις για αριθμούς πάνω από το 10 και όχι την παραδοσιακή έννοια της θεσιακής αξίας. Αυτό συμβαίνει, γιατί θα εξελιχθεί με τον καιρό, καθώς οι μαθητές αναπτύσσουν στρατηγικές για την πρόσθεση και την αφαίρεση των διψήφιων αριθμών (Van de Walle et al., 2017).

2. ΝΟΕΡΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

Ως μεγαλύτερο πεδίο της αίσθησης του αριθμού είναι και ο νοερός υπολογισμός. Είναι ένα μεγαλύτερο κομμάτι της αίσθησης του αριθμού (Whitacre, 2015, pp 355) και αναπτύσσεται καλύτερα σε μια εκτεταμένη χρονική περίοδο (Caroll, 1996, pp 310). Οι McIntosh και Dole (2000, pp 407) υποστηρίζουν ότι ο νοερός υπολογισμός και η αίσθηση των αριθμών πρέπει να αποτελέσουν αναπόσπαστο κομμάτι των προγραμμάτων σπουδών και των διαδικασιών αξιολόγησης σε επίπεδο τάξης, σχολείου και συστήματος. Ωστόσο, στην έρευνά τους διαπίστωσαν ότι οι μαθητές (τρίτης και πέμπτης τάξης) μπορεί να είχαν υψηλή απόδοση στους νοερούς υπολογισμούς χωρίς να έχουν καλή κατανόηση της αίσθησης των αριθμών και των σχέσεών τους. Ο νοερός υπολογισμός μπορεί να διευκολύνει την αίσθηση των αριθμών όταν οι μαθητές ενθαρρύνονται να είναι ευέλικτοι, αλλά η ευελιξία[1] και η αίσθηση των αριθμών δεν είναι ούτε επαρκείς ούτε αναγκαίες για την ακρίβεια των νοερών υπολογισμών, καθώς η σχέση τους είναι πολύπλοκη (Heirdsfield & Cooper 2004, pp 1).

2.1. Ορισμός των νοερών υπολογισμών

Μια πρώτη έρευνα που αφορά τους νοερούς υπολογισμούς είναι των Wandt και Brown (1957) που σχεδιάστηκε, για να συγκρίνει τη σημασία «νοερά» μαθηματικά με αυτά των «χαρτιού και μολυβιού», στην οποία διαπιστώνεται η διάκριση των νοερών υπολογισμών που γίνονται με το μυαλό, σε σχέση με αυτούς που γίνονται με χαρτί και μολύβι. Υπάρχουν δύο χαρακτηριστικά του νοερού υπολογισμού: πρώτον αυτός παράγει μια ακριβή απάντηση και η διαδικασία γίνεται νοερά· δεύτερον χωρίς τη χρήση εξωτερικών μέσων, όπως μολύβι και χαρτί (Reys, 1984, pp 548; Mcintosh et al., 1995, pp 237) και ο υπολογισμός ποικίλλει ανάλογα μεταξύ των ατόμων (Reys, 1985, pp 43).

Αντίθετα, η Sowder (1990, pp 18) υποστηρίζει ότι ο νοερός υπολογισμός μπορεί να συνδυαστεί με υπολογισμό με χαρτί και μολύβι ή ακόμα και με αριθμομηχανή. Ο νοερός υπολογισμός δεν είναι σαφώς καθορισμένος γι` αυτό χωρίς εννοιολογική σαφήνεια μπορεί να είναι δύσκολο για εμάς να αναγνωρίσουμε, πόσο δε μάλλον να καταλάβουμε ποιες παιδαγωγικές πρακτικές χρειάζονται, για να υποστηρίξουν τον στόχο της αυξανόμενης έμφασης στον νοερό υπολογισμό. Όλες τις ερμηνείες τις θεωρούμε σκέψεις για το τι μπορεί να σημαίνει «νοερός υπολογισμός» (Harries & Spooner, 2000, όπ. αναφ. Maclellan, 2001, pp 145).

Προσθετικά, υπάρχει διαχωρισμός των όρων νοερός υπολογισμός (mental calculation) και νοερά μαθηματικά (mental arithmetic). Ο πρώτος απαιτεί πνευματικές στρατηγικές, καθώς και ανάκληση ενώ ο τελευταίος μπορεί να εμπλέκει μόνο τη διανοητική ανάκληση (Thompson 1999, pp 2). Ο Λυγούρας (2012, σελ. 16) στη διδακτορική του διατριβή κατηγοριοποιεί τους όρους ως εξής: *α) «mental computation» (νοερός υπολογισμός)* συναντάται *κυρίως στις χώρες της Ωκεανίας και στην Ιαπωνία* αναφερόμενος στους (Reys, 1985; Heirdsfield, 1996; Cooper, & Heirdsfield, 2004; Mcintosh, 1996; Sowder, 1994), *β) «mental calculation» (νοερός*

[1] *ευελιξία (η) {χωρ. πληθ.) 1. η ικανότητα να ελίσσεται, να περιστρέφεται κανείς με ταχύτητα και ευκολία 2. η ικανότητα να κάνει κανείς ελιγμούς την κατάλληλη στιγμή. 3. (μτφ.) η ικανότητα να ξεφεύγει κανείς από τις δυσκολίες, να αποφεύγει τις κακοτοπιές χωρίς να φθείρεται Μετάφρ. δάνειο από γαλλ. Flexibilité.* (Μπαμπινιώτης 2002, σελ 687).

υπολογισμός) αναφερόμενους στους (Thompson, 1999; Threlfall, 2002) *και «mental arithmetic» (νοερή αριθμητική)*, αναφερόμενος στους (Beishuizen, 1993, De Smedt et al., 2009) και συναντάται *κυρίως σε ευρωπαϊκές χώρες».*

Πολλοί εκπαιδευτικοί μπερδεύουν τους νοερούς υπολογισμούς με τους κατά εκτίμηση υπολογισμούς (γίνονται και οι δύο νοερά) πιστεύοντας ότι οι νοεροί, αφού δεν είναι γραπτοί αλγόριθμοι μπορούν να γίνουν και κατά προσέγγιση (Λεμονίδης, 2013, σελ. 27). Η εκτίμηση είναι μια διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος που απαιτεί ακατέργαστη ή δοκιμαστική αξιολόγηση μιας ποσότητας. Αυτή που έχει διερευνηθεί ευρύτερα είναι η υπολογιστική εκτίμηση (Sowder, 1992a, όπ. αναφ. Sarama & Clements, 2009, pp 87). Υπάρχουν τρία είδη εκτίμησης που συναντούμε στην καθημερινότητά μας : α) υπολογιστική εκτίμηση, β) εκτίμηση πληθικότητας, γ) εκτίμηση μέτρησης (Siegler & Booth, 2005, pp 189). Αναμφίβολα αποτελούν δεξιότητες πολύ διαφορετικές από συγκεκριμένες απόψεις. Ο νοερός υπολογισμός, για παράδειγμα είναι μια βασική προϋπόθεση για την υπολογιστική εκτίμηση· αλλά η αντίθετη σχέση δεν ισχύει. Επιπλέον, ο νοερός υπολογισμός παράγει μια ακριβή απάντηση που είναι σωστή ή λάθος, ενώ η υπολογιστική εκτίμηση μπορεί να παράγει πολλές διαφορετικές απαντήσεις, οι οποίες είναι λογικές και αποδεκτές (Reys, 1984, pp 555).

Γενικά, ο νοερός υπολογισμός χρησιμοποιείται για να μας δείξει την πράξη εκτέλεσης υπολογισμού, χωρίς την βοήθεια εξωτερικών διαδικασιών για την τήρηση αρχείων (Mcintosh et al., 1995, pp 237). Αναγνωρίζεται ως *σημαντικός* και *χρήσιμος* στην καθημερινή ζωή, καθώς και πολύτιμος για την προώθηση και την παρακολούθηση μαθηματικών προσεγγίσεων ανώτερου επιπέδου (Reys et al., 1995, pp 304).

2.2. Σημασία των νοερών υπολογισμών

Ο νοερός υπολογισμός ως αναπόσπαστο κομμάτι της αριθμητικής διδασκαλίας, πρέπει να αντιμετωπίζεται ως αναπόσπαστο μέρος της μάθησης των μαθηματικών. Τα οφέλη από τη διδασκαλία του είναι ότι:

1. αποτελεί προϋπόθεση για την επιτυχή ανάπτυξη όλων των γραπτών αριθμητικών αλγορίθμων (Reys, 1984, pp 549; Reys, 1985, pp 43)

2. προωθεί την καλύτερη κατανόηση της δομής των αριθμών και των ιδιοτήτων τους (Reys, 1984, pp 549; Thompson, 2010, pp 163; McIntosh et al., 1995, pp 238; Reys, 1985, pp 43)
3. προάγει τη δημιουργική και ανεξάρτητη σκέψη και ενθαρρύνει τους μαθητές να δημιουργήσουν έξυπνους τρόπους χειρισμού των αριθμών (Reys, 1984, pp 549; Thompson, 2010, pp 163; McIntosh et al., 1995, pp 238)
4. συμβάλλει στην ανάπτυξη καλύτερων δεξιοτήτων για την επίλυση προβλημάτων (Reys, 1984, pp 549; Thompson, 2010, pp 163; McIntosh et al., 1995, pp 238)
5. είναι μια βάση για την ανάπτυξη των δεξιοτήτων της υπολογιστικής εκτίμησης (Reys, 1984, pp 549; Thompson, 2010, pp 163; McIntosh et al., 1995, pp 238)
6. οι περισσότεροι υπολογισμοί γίνονται στο κεφάλι και όχι στο χαρτί (Thompson, 2010, pp 163)
7. η νοερή δουλειά είναι σημαντική, επειδή υπάρχει μια φυσική εξέλιξη μέσω άτυπων γραπτών μεθόδων σε τυποποιημένες μεθόδους (Thompson, 2010, pp 163).

Πολλοί ερευνητές συνιστούν την συμπερίληψη των νοερών υπολογισμών στα μαθηματικά προγράμματα (Cobb & Merkel, 1989 όπ. αναφ. Heirdsfield & Lamb, 2005, pp 1; Reys & Barger, 1994; Sowder, 1990; Willis, 1990). Οι λόγοι είναι ότι: α) επιτρέπει στα παιδιά να μάθουν τον τρόπο πώς λειτουργούν οι αριθμοί, να αποφασίζουν για τις διαδικασίες και να δημιουργούν στρατηγικές (Reys, 1985; Sowder, 1990), β) προωθεί την καλύτερη κατανόηση της δομής του αριθμού και των ιδιοτήτων του (Reys, 1984) και γ) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως «όχημα για την προώθηση της σκέψης, της εικασίας και της γενίκευσης, με βάση την *εννοιολογική κατανόηση*» (Reys & Barger, 1994, pp. 31).

2.3. Εννοιολογική και διαδικαστική κατανόηση στους νοερούς υπολογισμούς

Ο Skemp (1976, pp 20) περιγράφει τη λέξη κατανόηση με δύο τρόπους· την «εννοιολογική κατανόηση» (relational understanding) και την «διαδικαστική κατανόηση» (instrumental understanding). Στην πρώτη, οι μαθητές γνωρίζουν τι πρέπει να κάνουν και γιατί, ενώ η δεύτερη αναφέρεται ως «*κανόνες χωρίς λόγο»*. Ο Resnick (1982) απέδωσε δύο άλλους όρους για την κατανόηση: την συντακτική (syntactic), ως σωστή απόδοση μαθηματικών διαδικασιών και την σημασιολογική ή αλλιώς εννοιολογική (semantic), ως την κατανόηση της σημασίας αυτών των διαδικασιών.

Οι Hiebert και Wearne (1996, pp 252) υποστηρίζουν πως τα παιδιά που έχουν κατανόηση ή σχετικές νοερές δομές είναι σε καλό επίπεδο να αποκτήσουν, ώστε να χρησιμοποιήσουν αποτελεσματικά τις διαδικασίες (κατανόησης και υπολογιστικής ικανότητας οι οποίες είναι στενά συνδεδεμένες). Τα παιδιά μπορούν να αποκτήσουν τις διαδικασίες: α) εφευρίσκοντας νέες διαδικασίες είτε με τη δημιουργία είτε με την προσαρμογή γνωστών διαδικασιών για την επίλυση νέων προβλημάτων, β) υιοθετώντας διαδικασίες που προέρχονται από άλλους (π.χ. τους συμμαθητές τους). Και στις δύο περιπτώσεις, μπορεί να υποστηριχθεί ότι η «εννοιολογική κατανόηση» διευκολύνει την απόκτηση δεξιοτήτων. Το θεωρητικό επιχείρημα για το ρόλο της εννοιολογικής κατανόησης στην υιοθέτηση διαδικασιών που έχουν αποδειχθεί από άλλους έχει ως εξής: Οι μαθητές που έχουν σχεδιάσει σχετικές κατανοήσεις μπορούν να επωφεληθούν περισσότερο από τις εισερχόμενες πληροφορίες, ανεξαρτήτου είδους, επειδή διαθέτουν τις νοητικές δομές, με τις οποίες μπορούν να ταξινομούν την αίσθηση της πληροφορίας. Οι διαδικασίες που υιοθετούνται μπορούν να συνδεθούν με τις σχετικές γνώσεις των μαθητών και να γίνουν κατανοητές με τρόπο, που δεν θα ήταν εφικτός διαφορετικά (Hiebert & Wearne, 1996).

Οι σχετικές γνώσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παρακολούθηση της καταλληλότητας και της εκτέλεσης των διαδικασιών σε συγκεκριμένα περιβάλλοντα, όπως και για την υποστήριξη της μνήμης για τέτοιες διαδικασίες (Hiebert & Wearne, 1996). Η διαφορά μεταξύ αυτού του επιχειρήματος και εκείνου που συνδέει την κατανόηση με τις εφευρεθείσες διαδικασίες είναι ότι η κατανόηση μπορεί να είναι απαραίτητη για την κατασκευή των κατάλληλων εφευρέσεων ή την τροποποίηση των υπαρχουσών διαδικασιών, ενώ μπορεί να είναι ευεργετική, αλλά όχι απαραίτητη, για την υιοθέτηση διαδικασιών (Hiebert & Wearne, 1996).

Οι Hiebert και Wearne (1996) υποστηρίζουν ότι μπορεί να υιοθετηθεί μια διαδικασία, χωρίς να συνδεθεί με σχετικές κατανοήσεις. Παρά την αλήθεια αυτών των ισχυρισμών, τα θεωρητικά επιχειρήματα που υιοθετούν τις σχέσεις μεταξύ εννοιολογικής κατανόησης και διαδικαστικής κατανόησης στα σχολικά μαθηματικά δεν αναπτύσσονται αρκετά λεπτομερώς, για να παράγουν συγκεκριμένες υποθέσεις. Παρ' όλα αυτά, είναι λογικό να αναμένουμε ότι οι μαθητές που καταδεικνύουν «εννοιολογική κατανόηση» θα είναι πιο πιθανό από τους συνομηλίκους τους να αναπτύξουν τις κατάλληλες νέες διαδικασίες, ώστε να προσαρμόσουν τις μεθόδους μάθησης για νέα καθήκοντα. Είναι, επίσης, πιθανό ότι οι μαθητές που καταλαβαίνουν θα αποκτήσουν τις διαδικασίες που αποδεικνύονται από άλλους με περισσότερη κατανόηση και ίσως θα τις θυμούνται καλύτερα (Hiebert & Wearne, 1996).

Οι Hiebert και Wearne (1996, pp 253) δηλώνουν πως η «εννοιολογική κατανόηση» είναι δύσκολο να καθοριστεί και να μετρηθεί. Σε μια έρευνά τους, σε μαθητές πρώτων τάξεων δημοτικού κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι ο εναλλακτικός τρόπος διδασκαλίας επηρέασε θετικά το επίπεδο κατανόησής τους. Αυτό έγινε πριν εξετάσουν τις σχέσεις μεταξύ της κατανόησης της βάσης του 10 και της υπολογιστικής μάθησης, σε δυο διαφορετικούς τρόπους διδασκαλίας, τον παραδοσιακό και τον εναλλακτικό (ανάπτυξη δικών τους διαδικασιών) (Hiebert & Wearne, pp 263). Οι Putnam, Lampert, και Peterson (1990, pp. 95) κατηγοριοποιούν την κατανόηση σε πέντε θέματα:

1. *Η κατανόηση ως εκπροσώπηση.* Η κατανόηση των μαθηματικών σημαίνει να έχουν ενσωματωμένα ισχυρά σύμβολα και συστήματα για την εκπροσώπηση των μαθηματικών ιδεών ώστε να μπορούν να κινούνται με άνεση εσωτερικά μεταξύ τους.
2. *Η κατανόηση ως δομή γνώσης.* Οι έμμεσες γνώσεις γίνονται σαφείς, καθώς περιλαμβάνουν πλούσια, προσπελάσιμα σχήματα και ειδικές γνώσεις του τομέα.
3. *Η κατανόηση ως συνδέσεις μεταξύ των τύπων γνώσης.* Διακρίσεις που γίνονται μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης όπως επίσης μεταξύ επίσημης και άτυπης γνώσης.
4. *Η μάθηση ως ενεργή κατασκευή της γνώσης.* Η μάθηση των μαθηματικών με κατανόηση, από αυτή την οπτική σημαίνει ενεργή αναδιοργάνωση των γνωστικών δομών κάποιου και ενσωμάτωση των νέων πληροφοριών στις υπάρχουσες δομές.

5. *Η κατανόηση ως τοποθετημένη γνώση.* Αντί να βλέπουμε τη γνώση και τη σκέψη ως υπάρχουσες μέσα στο μυαλό του ατόμου, η γνώση θεωρείται ότι βρίσκεται διαδραστικά σε φυσικά και κοινωνικά πλαίσια.

Αντίθετα, η Callingham (2005, pp 193) στα πλαίσια της αξιολόγησης ενός προγράμματος νοερού υπολογισμού σε παιδιά 3-6 ετών αναφέρει ότι τα ευρήματα έδειξαν πως οι μαθητές που ήταν διαδικαστικοί στην προσέγγισή τους ήταν λιγότερο επιτυχείς στην προ-δοκιμή, αλλά γενικά έδειξαν *αύξηση* στην μετέπειτα δοκιμασία, ακολουθώντας μια στρατηγική βασισμένη σε παρέμβαση.

2.4. Στρατηγικές νοερών υπολογισμών σε προσθέσεις και αφαιρέσεις

Όταν τα μαθηματικά προβλήματα υπολογίζονται νοερά, η προσέγγιση που χρησιμοποιείται ονομάζεται κοινώς «στρατηγική[2]» (Threfall, 2000, pp 77). Στην καθημερινή γλώσσα η λέξη «στρατηγική» χρησιμοποιείται, για δύο συναφείς σημασίες: η πρώτη είναι η απόφαση να κάνουμε κάτι συγκεκριμένο και η δεύτερη είναι μια σειρά ενεργειών, με τις οποίες εκτελείται μια προηγούμενη απόφαση. Φαίνεται, λοιπόν, ότι μια στρατηγική νοερού υπολογισμού είναι μια «νοερή μέθοδος» που θεωρείται ότι αναπτύσσεται ως αποτέλεσμα μιας απόφασης (Threfall, 2000, pp 79).

Υπάρχουν τρία επίπεδα στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές σε προσθέσεις και αφαιρέσεις μονοψήφιων αριθμών (Carpenter & Moser, 1982, pp 180; Fusun, 1992), όπως έχουν καταλήξει οι περισσότερες έρευνες (Τζεκάκη, 2010, σελ. 306; Λεμονίδης, 2013, σελ. 81). Η κατηγοριοποίησή τους έχει ως εξής:

1^{ο} επίπεδο. Στρατηγικές με υλικά και αισθητοποίησης των αριθμών. Σε αυτό το επίπεδο τα παιδιά, για να πραγματοποιήσουν τις πράξεις τους, έχουν ανάγκη της αισθητοποίησης των αριθμών χρησιμοποιώντας τα δάχτυλά τους ή αντικείμενα.

2^{ο} επίπεδο. Στρατηγικές αρίθμησης. Σε αυτό το επίπεδο τα παιδιά, για να πραγματοποιήσουν τις πράξεις τους χρησιμοποιούν την ακολουθία των αριθμών.

3^{ο} επίπεδο. Στρατηγικές ανάκλησης ή κατασκευαστικές στρατηγικές. Σε αυτό το επίπεδο τα παιδιά γνωρίζουν το αποτέλεσμα από έξω ή ανακαλούν από τη μνήμη

[2] Στρατηγική: το σύνολο των σχεδιασμένων χειρισμών για την επίτευξη συγκεκριμένου στόχου (Μπαμπινιώτης 2002, σελ 1663).

τους γνωστά αριθμητικά γεγονότα και τα επεξεργάζονται νοερά, ώστε να βρουν τη λύση.

Ο διαχωρισμός αυτός δεν είναι απόλυτος, διότι το παιδί μπορεί να υπολογίσει ένα αποτέλεσμα βάση του 3ου επιπέδου και να το επιβεβαιώσει χρησιμοποιώντας το 2ο επίπεδο. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται πίνακες με τις στρατηγικές και την ανάλυσή τους, όπως τους έχει καταγράψει ο Λεμονίδης (2013).

1ο ΕΠΙΠΕΔΟ: ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΜΕ ΥΛΙΚΑ Ή ΑΙΣΘΗΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

	Στρατηγική	**Παράδειγμα**
	1ο επίπεδο: Στρατηγικές με υλικά ή αισθητοποίησης	
	Πρόσθεση	
1	*Απαρίθμηση όλων*	**Πράξη: 2 και 3.** Μετράει δύο δάχτυλα. Μετράει τρία δάχτυλα. Μετράει όλα τα δάχτυλα από την αρχή.
	Αφαίρεση	
1	*Διαχωρισμός από*	**Πράξη: 5 βγάζω 3.** Μετράει πέντε δάχτυλα. Μετράει και κατεβάζει τα τρία από αυτά. Μετράει όσα δάχτυλα έμειναν σηκωμένα.
2	*Διαχωρισμός μέχρι*	Μετράει πέντε κυβάκια. Παίρνει κυβάκια, ώστε αυτά που θα μείνουν να είναι τρία. Μετράει αυτά που πήρε για να βρει το αποτέλεσμα.
3	*Πρόσθεση*	Μετράει και σχηματίζει μια συλλογή από τρία κυβάκια. Στα τρία κυβάκια προσθέτει ένα-ένα μέχρι να γίνουν πέντε. Μετράει αυτά που πρόσθεσε, για να βρει το αποτέλεσμα.
4	*Αντιπαραβολή*	Μετράει και βάζει στη σειρά τρία κυβάκια. Από κάτω κάνει μια άλλη σειρά από πέντε κυβάκια που τα αντιστοιχεί με τα τρία από επάνω. Μετράει αυτά που περισσεύουν, για να βρει την απάντηση.
(Λεμονίδης, 2013)		

ΠΡΟΣΘΕΣΗ (2+3)

Απαρίθμηση όλων: Είναι από τις πρώτες στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές. Στην οποία, για να αισθητοποιήσουν τους όρους χρησιμοποιούν δάχτυλα ή αντικείμενα. Στην πράξη «2 + 3» μετράει δύο δάχτυλα, έπειτα μετράει τρία δάχτυλα και στο τέλος μετράει όλα τα δάχτυλα από την αρχή.

ΑΦΑΙΡΕΣΗ (5-3)

Διαχωρισμός από: Ο μαθητής κατασκευάζει τον μειωτέο, χρησιμοποιώντας τα δάχτυλά του ή αντικείμενα. Στη συνέχεια διαχωρίζει τον αφαιρετέο και απαριθμεί όσα στοιχεία του μένουν για να απαντήσει. Στην πράξη «5 βγάζω 3» μετράει πέντε δάχτυλα, έπειτα μετράει και κατεβάζει τα τρία από αυτά. Μετράει όσα δάχτυλα έμειναν σηκωμένα.

Διαχωρισμός μέχρι: Διαχωρίζει από το αρχικό σύνολο τόσα στοιχεία, ώστε αυτά που θα μείνουν να είναι ίσα με τον αφαιρετέο. Στη συνέχεια μετράει αυτά που αφαίρεσε. Στην πράξη «5 βγάζω 3» μετράει πέντε κυβάκια. Παίρνει κυβάκια έτσι ώστε αυτά που θα μείνουν να είναι τρία. Μετράει αυτά που πήρε, για να βρει το αποτέλεσμα.

Πρόσθεση: Ξεκινάει από τον αφαιρετέο, πηγαίνει ένα - ένα μέχρι να φτάσει στον μειωτέο και τα βήματα που έκανε είναι η διαφορά. Στην πράξη «5 βγάζω 3» μετράει και σχηματίζει μια συλλογή από τρία κυβάκια. Στα τρία κυβάκια προσθέτει ένα-ένα, μέχρι να γίνουν πέντε. Τέλος μετράει αυτά που πρόσθεσε, για να βρει το αποτέλεσμα.

Αντιπαραβολή: Η στρατηγική αυτή δε γίνεται νοερά. Υπάρχει αντιστοίχιση ένα προς ένα των στοιχείων των δύο συνόλων. Αυτά που περισσεύουν από την αντιπαραβολή μας δίνουν την απάντηση. Στην πράξη «5 βγάζω 3» μετράει και βάζει στη σειρά τρία κυβάκια. Από κάτω κάνει μια άλλη σειρά από πέντε κυβάκια, που τα αντιστοιχεί με τα τρία από επάνω. Μετράει αυτά που περισσεύουν, για να βρει την απάντηση.

2ο ΕΠΙΠΕΔΟ: ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

	Στρατηγική	**Παράδειγμα**
	2ο επίπεδο: Στρατηγικές αρίθμησης	
	***Πρόσθεση*: 2+7**	
1	*Αρίθμηση όλων αρχίζοντας από τον πρώτο*	Αριθμούν όλα τα βήματα του πρώτου και δεύτερου όρου: ‘ 1, 2, . . ., 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,’.
2	*Αρίθμηση όλων αρχίζοντας από τον μεγαλύτερο*	Αριθμούν όλα τα βήματα και των δύο όρων αρχίζοντας από τον μεγαλύτερο: ‘1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,. . ., 8, 9’.
3	*Αρίθμηση από τον πρώτο*	Αριθμούν με δεδομένο τον πρώτο αριθμό: ‘(2), . . ., 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9’.
4	*Αρίθμηση από το μεγαλύτερο*	Αριθμούν με δεδομένο τον μεγαλύτερο αριθμό: ‘(7),. . ., 8, 9’.
	Αφαίρεση 7-3	
1	*Αντίστροφη αρίθμηση από*	Ξεκινούν από το μεγαλύτερο όρο και αριθμούν τόσα βήματα όσα είναι ο μικρότερος όρος. ‘’(7), 6, 5, 4
2	*Αντίστροφη αρίθμηση μέχρι*	Ξεκινούν από το μεγαλύτερο όρο και αριθμούν αντίστροφα μέχρι να φτάσουν το μικρότερο. Μετρούν τον αριθμό των βημάτων για να βρουν την απάντηση.

		‘’(7), 6, 5, 4, 3’’
3	*Πρόσθεση*	Ξεκινούν από το μικρότερο όρο και αριθμούν προς τα επάνω μέχρι να φτάσουν το μεγαλύτερο. Μετρούν τον αριθμό των βημάτων για να βρουν την απάντηση. ‘’ (3), 4, 5, 6, 7’’
(Λεμονίδης, 2013)		

ΠΡΟΣΘΕΣΗ (2+7)

Αρίθμηση όλων αρχίζοντας από τον πρώτο: Γίνεται αρίθμηση του πρώτου αριθμού 2 αρχίζοντας από το 1 και συνεχίζεται η ευθεία αρίθμηση του δεύτερου αριθμού 7 και η απάντηση είναι ο τελευταίος αριθμός 9.

Αρίθμηση όλων αρχίζοντας από τον μεγαλύτερο: Εφαρμόζεται η αντιμεταθετική ιδιότητα. Αντί το 2+7 υπολογίζουν το 7+2. Αριθμούν μέχρι τον μεγαλύτερο αριθμό 7 ξεκινώντας από το 1 και συνεχίζουν την ευθεία αρίθμηση του μικρότερου αριθμού 2, ώστε ο τελευταίος αριθμός 9 της αρίθμησης να είναι το αποτέλεσμα.

Αρίθμηση από τον πρώτο: Αριθμούν αφού έχουν δεδομένο τον πρώτο αριθμό 2 και προχωράει 7 βήματα. Ο τελευταίος αριθμός 9 της αρίθμησης είναι το αποτέλεσμα.

Αρίθμηση από το μεγαλύτερο: Αριθμούν αφού έχουν δεδομένο τον μεγαλύτερο αριθμό 7 και προχωράει 2 βήματα. Ο τελευταίος αριθμός 9 της αρίθμησης είναι το αποτέλεσμα.

ΑΦΑΙΡΕΣΗ (7-3)

Αντίστροφη αρίθμηση από: Οι μαθητές πραγματοποιούν την αντίστροφη αρίθμηση αρχίζοντας από τον μεγαλύτερο όρο 7 και κατεβαίνουν 3 αριθμολέξεις που είναι ο μικρότερος όρος. Ο τελευταίος αριθμός 4 είναι η απάντηση.

Αντίστροφη αρίθμηση μέχρι: Ξεκινούν από τον μεγαλύτερο όρο 7 μέχρι να φτάσουν στον μικρότερο όρο 3. Αριθμώντας τα βήματα που έκαναν βρίσκουν την απάντηση.

Πρόσθεση: Οι μαθητές αντί για αφαίρεση κάνουν πρόσθεση. Ξεκινούν από τον μικρότερο όρο 3 και αριθμούν μέχρι να φτάσουν στον μεγαλύτερο όρο 7. Μετρώντας τα βήματα που έκαναν βρίσκουν την απάντηση 4.

Η χρήση των δαχτύλων από τους μαθητές που γίνεται σε αυτό το επίπεδο είναι διαφορετική από του 1ου επιπέδου. Δε χρησιμοποιούν τα δάχτυλα, για να αναπαραστήσουν τις δύο συλλογές των αντικειμένων αλλά για να ελέγξουν τη διαδικασία της αρίθμησης, ώστε να βρουν το αποτέλεσμα. Στο πρώτο επίπεδο χρησιμοποιούν τα δάχτυλα ως αναπαράσταση των αριθμών ενώ στο δεύτερο επίπεδο ως μέσο καταγραφής βημάτων.

3ο ΕΠΙΠΕΔΟ: ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΑΝΑΚΛΗΣΗΣ Ή ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ

	Στρατηγική	**Παράδειγμα**
	3ο επίπεδο: Στρατηγικές ανάκλησης ή κατασκευαστικές στρατηγικές	
	Πρόσθεση	
1	Κοντά στα διπλά	**7+6=13** 7+6=6+6+1 ή 7+7-1. Υπολογίζουν με βάση τα διπλά αθροίσματα.
2	Χρήση του 5	**6+7** 5+1+5+2=10+3. Αναλύουν τους προσθετέους με βάση το 5.
3	Υπέρβαση της δεκάδας ή Πέρασμα από το 10	**9+7** 9+1=10, 10+6=16. Προσθέτουν στο μεγαλύτερο όρο μέχρι να φτάσουν στο 10 και μετά προσθέτουν και τα υπόλοιπα του δεύτερου όρου.
4	Αντιστάθμιση (Compensation)	**9+5** 9+1=10, 10+5=15, 15-1=14. Συμπληρώνουν τον ένα όρο, ώστε να γίνει εύκολα η πρόσθεση και κατόπιν αφαιρούν αυτό το συμπλήρωμα από το αποτέλεσμα.
5	Εξισορρόπηση (Leveling)	**6+8** 7+7=14. Προσθέτουν στον έναν όρο και αφαιρούν από τον άλλο τον ίδιο αριθμό, ώστε να καταλήξουν σε ένα γνωστό άθροισμα.
	Αφαίρεση	
1	Χρήση των διπλών	**14-7=7** 7+7=14. Υπολογίζουν με βάση την αντίστροφη πρόσθεση που είναι το άθροισμα διπλών (ν + ν).
2	Κοντά στα διπλά	**9-5=4** 10-5=5, 5-1=4. Υπολογίζουν με βάση την αφαίρεση των διπλών (2ν-ν).
3	Υπέρβαση της δεκάδας ή Πέρασμα από το 10	**13-7** 13-3=10, 10-4=6. Αφαιρούν από τον μεγαλύτερο όρο μέχρι να φτάσουν στο 10 και μετά αφαιρούν τα υπόλοιπα του δεύτερου όρου.
4	Αφαίρεση ως αντίστροφη της πρόσθεσης	**7-4=3** 4+3=7. Χρησιμοποιούν την αντίστροφη πρόσθεση, για να βρουν τη διαφορά.
(Λεμονίδης, 2013)		

ΠΡΟΣΘΕΣΗ

Κοντά στα διπλά: Οι μαθητές χρησιμοποιούν τα διπλά αθροίσματα, για να υπολογίσουν. Στο άθροισμα 7+6=13 σκέφτονται τα διπλά αθροίσματα **6+6**+1 ή **7+7**-1. Συνήθως, χρησιμοποιείται όταν οι δύο αριθμοί διαφέρουν κατά μία μονάδα.

Χρήση του 5: Εδώ οι μαθητές αναλύουν κάθε προσθετέο με βάση το 5. Στο άθροισμα 6+7 δημιουργούν σχέσεις με βάση το 5 (5+1+5+2=10+3=13).

Υπέρβαση της δεκάδας ή Πέρασμα από το 10: στην πράξη 7+9 οι μαθητές σκέφτονται 9+1=10, 10+6=16. Προσθέτουν, δηλαδή, στο μεγαλύτερο όρο 9 μέχρι να φτάσουν στο 10. Έπειτα προσθέτουν τα υπόλοιπα του δεύτερου όρου. Χρησιμοποιείται για τα αθροίσματα με μεγαλύτερο προσθετέο τον αριθμό 9 ή 8.

Αντιστάθμιση (Compensation): Συμπληρώνουν τον ένα όρο, ώστε να γίνει εύκολα η πρόσθεση και μετά αφαιρούν αυτό το συμπλήρωμα από το αποτέλεσμα. Για παράδειγμα στην πρόσθεση 9+5 το 9 το κάνουν 10 (9+1=10) προσθέτοντας 1. Έπειτα προσθέτουν τον επόμενο όρο 5 (10+5=15). Κατόπιν αφαιρούν αυτό που συμπλήρωσαν, δηλαδή το 1 (15-1=14).

Εξισορρόπηση (Leveling): βασίζεται στην ιδιότητα της ισορροπίας. Ό,τι προσθέτουμε στον έναν όρο το αφαιρούμε από τον άλλον. Για παράδειγμα, το άθροισμα 6+8 γίνεται 7+7=14. Η στρατηγική αυτή χρησιμοποιείται από λίγους μαθητές.

ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Χρήση των διπλών: 14-7=7. Σε αυτή τη στρατηγική οι μαθητές γνωρίζουν την αντίστροφη πρόσθεση που είναι εύκολη. Γίνεται χρήση της αφού έχουν απομνημονευθεί τα αθροίσματα των διπλών (π.χ. 7+7=14).

Κοντά στα διπλά: Υπολογίζουν με βάση την αφαίρεση των διπλών. Για παράδειγμα, στην αφαίρεση 9-5 σκέφτονται 10-5=5 και μετά αφαιρούν το 1 επιπλέον που έβαλαν (5-1=4).

Υπέρβαση της δεκάδας ή Πέρασμα από το 10: Αφαιρούν από τον μεγαλύτερο όρο, ώστε φτάσουν στο 10. Στη συνέχεια αφαιρούν το υπόλοιπο του δεύτερου όρου. Δηλαδή στην αφαίρεση 13-7, γίνεται 13-3=10, 10-4=6.

Αφαίρεση ως αντίστροφη της πρόσθεσης: Χρησιμοποιούν την αντίστροφη πρόσθεση για να βρουν τη διαφορά. (7-4 σκέφτονται 4+3=7. Άρα 3).

2.5. Σύγκριση γραπτών αλγόριθμων και νοερών στρατηγικών

Ο Plunket (1979, pp 2) αναφέρει τα παρακάτω χαρακτηριστικά των γραπτών αλγόριθμων των τεσσάρων πράξεων με φυσικούς αριθμούς, σε σχέση με τους νοερούς υπολογισμούς. Αυτοί είναι γραμμένοι και έτσι ο υπολογισμός είναι μόνιμος και διορθώσιμος. Είναι τυποποιημένοι· δηλαδή είναι δυνατόν να κανονίσουμε να κάνουν όλοι το ίδιο πράγμα. Είναι συμβεβλημένοι, με την έννοια ότι συνοψίζουν διάφορες γραμμές εξισώσεων που αφορούν στη διανομή και τον συσχετισμό. Είναι αποτελεσματικοί και μπορούν να είναι αυτόματοι· γεγονός ότι μπορούν να διδαχθούν και να πραγματοποιηθούν από κάποιον που δεν έχει κατανόηση το τι συμβαίνει. Είναι συμβολικοί, εννοώντας ότι κάποιος κάνει τους υπολογισμούς εξ ολοκλήρου με τον χειρισμό συμβόλων, χωρίς αναφορά στον πραγματικό κόσμο ή σε οποιοδήποτε άλλο μοντέλο. Είναι γενικοί, με την έννοια ότι λειτουργούν για όλους τους αριθμούς μικρούς, μεγάλους, ολόκληρους ή δεκαδικούς, με λίγα ή με πολλά ψηφία. Αυτή είναι ίσως η μεγαλύτερη επιτυχία τους και προέρχεται από την αξιοποίηση της θεσιακής αξίας τους.

Επιπρόσθετα, είναι αναλυτικοί, γιατί απαιτούν να διασπαστούν οι αριθμοί σε μονάδες και δεκάδες ώστε τα ψηφία να αντιμετωπίζονται χωριστά και ίσως είναι το πιο σημαντικό χαρακτηριστικό των γραπτών αλγόριθμων (Plunket, 1979, pp. 3). Δεν είναι εύκολο να τους κατακτήσεις. Ενθαρρύνουν τη γνωστική παθητικότητα ή την αναστολή της κατανόησης. Έτσι, ακόμη και αν οι μαθητές θυμούνται τους κανόνες, μαθαίνουν, κυρίως, χωρίς λόγους, που δεν σχετίζονται με άλλες γνώσεις αριθμών. Δεν βοηθούν πολύ την κατανόηση και ενθαρρύνουν την πεποίθηση ότι τα μαθηματικά είναι ουσιαστικά αυθαίρετα. Ο Plunket (1979) επισημαίνει ότι είναι και παραδοσιακοί, η έννοια και ο αλγόριθμος εξισώνονται καταλήγοντας ότι δεν είναι κατανοητοί για τα παιδιά και αν θέλουμε να αναπτύξουμε στα παιδιά την αίσθηση του αριθμού πρέπει να τους διδάξουμε νοερές στρατηγικές.

Συνεχίζοντας με τα χαρακτηριστικά των νοερών στρατηγικών, ο Plunket (1979, pp 3) αναφέρει ότι είναι προσωρινές· επομένως είναι δύσκολο να συλληφθούν. Είναι μεταβλητές, είναι ευέλικτες και μπορούν να προσαρμοστούν, ώστε να ταιριάζουν με τους αριθμούς. Είναι ενεργές μέθοδοι, με την έννοια ότι ο χρήστης κάνει μια επιλογή, αν όχι πάντα πολύ συνειδητή της μεθόδου και ελέγχει τους υπολογισμούς του. Είναι συνήθως ολιστικές, καθώς εργάζονται με πλήρεις αριθμούς και όχι με χωρισμένα ψηφία δεκάδων και μονάδων. Είναι συχνά εποικοδομητικές, εργάζονται από ένα μέρος της ερώτησης προς την απάντηση. Ακόμη, δεν έχουν σχεδιαστεί για καταγραφή, απαιτούν κατανόηση σε όλη τη διάρκεια, είναι συχνά εικονικές, συχνά δίνουν μια έγκαιρη προσέγγιση στην σωστή απάντηση και είναι περιορισμένες.

Η χρησιμοποίηση γραπτού αλγόριθμου αντί για πραγματοποίηση νοερού υπολογισμού για την επίλυση προβλημάτων είναι μειονεκτική για τουλάχιστον τέσσερις λόγους σύμφωνα με τον Reys (1984, pp 550). Σύμφωνα με αυτόν η χρήση του γραπτού αλγόριθμου:

1. Αποθαρρύνει τη σκέψη, γιατί οι αλγόριθμοι συχνά εφαρμόζονται μηχανικά.
2. Είναι αναποτελεσματική, καθώς απαιτεί χρόνο για να γράψεις ένα πρόβλημα ενώ μπορεί να γίνει πιο γρήγορα νοερά.
3. Εμποδίζει την αναγνώριση και τη χρήση των κατασκευαστικών σχέσεων.
4. Αγνοεί την πραγματικότητα, επειδή τα μαθηματικά του πραγματικού κόσμου δεν είναι πάντα ανεκτά σε μια εξάρτηση από τις μεθόδους με χαρτί και μολύβι.

Οι Kaimi και Dominick (1997, pp 58) συμφωνούν ότι οι γραπτοί αλγόριθμοι είναι επιβλαβείς για την ανάπτυξη της αριθμητικής συλλογιστικής των παιδιών και αναφέρουν δύο διαφορετικούς λόγους. Σύμφωνα με τον πρώτο, το γραπτό αποσυνδέει την θεσιακή αξία των αριθμών και αποθαρρύνει τα παιδιά από την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού. Σύμφωνα με τον δεύτερο, αναγκάζει τα παιδιά να εγκαταλείψουν τη δική τους σκέψη. Ο φυσικός τρόπος των παιδιών είναι να σκεφτούν τους αριθμούς από αριστερά προς τα δεξιά. Ωστόσο, οι γραπτοί αλγόριθμοι απαιτούν από αυτούς να τον εγκαταλείψουν και να προχωρήσουν από δεξιά προς τα αριστερά έτσι ώστε να αντιμετωπίσουν κάθε στήλη σαν μια. Πιστεύουν ωστόσο, ότι ήρθε η ώρα να σταματήσει η διδασκαλία των αλγόριθμων και να ενθαρρύνουμε τα παιδιά να κάνουν τις νοερές σχέσεις που απαιτούνται για την οικοδόμηση της αίσθησης αριθμών. Συνεπώς η καθυστέρηση της εισαγωγής των γραπτών αλγόριθμων είναι ευεργετική για τους μαθητές (Callingham, 2005, pp 199; Sarama & Clements, 2009).

Υπάρχουν τρεις ορθοί και παιδαγωγικοί λόγοι για τη χρήση των νοερών υπολογισμών και την ενσωμάτωσή τους στο πρόγραμμα σπουδών σύμφωνα με την Reys (1985, pp 44):

α. Αποδοτικότητα. Οι ταμειακές μηχανές, οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές και οι αυτόματοι μετατροπείς χρησιμοποιούνται σε παντοπωλεία και εστιατόρια. Γενικά, η κοινωνία μας εκμεταλλεύεται την πιο αποτελεσματική μέθοδο υπολογισμού. Πολλά προβλήματα πραγματικής κατάστασης που μας παρουσιάζονται μπορούν να αντιμετωπιστούν με μια εφαρμογή της νοερής στρατηγικής. Παρόλο που το χαρτί , το μολύβι και οι αριθμομηχανές δεν είναι πάντοτε βολικά, ο υπολογιστής του μυαλού μας είναι πάντα μαζί μας (Reys, 1985).

β. Εμπλουτισμός του υφιστάμενου προγράμματος σπουδών. Η ενσωμάτωση της νοερής αριθμητικής ανάπτυξης προσφέρει στους εκπαιδευτικούς ένα μέσο για τον έλεγχο των υπολογιστικών δεξιοτήτων στους μαθητές γυμνασίου. Ο νοερός υπολογισμός μπορεί να προκαλέσει και τους πιο λαμπρούς μαθητές. Παράλληλα, μπορεί να κυριαρχήσει τόσο στους μέτριους μαθητές όσο σε αυτούς με χαμηλή ικανότητα (Reys, 1985).

γ. Ανάπτυξη μαθηματικού συλλογισμού. Η νοερή αριθμητική συνδυάζει μια ποικιλία γνώσεων, δεξιοτήτων και την εφαρμογή διαφόρων αλγόριθμων. Ενδεικτικά είναι η ευελιξία στη σκέψη, η αποδοτική χρήση των ιδιοτήτων των αριθμών, κατανόηση του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος και η χρήση εναλλακτικών μορφών αριθμών. Η καλλιέργεια αυτών των δεξιοτήτων, όχι μόνο επιφέρει δεξιότητες στη νοερή αριθμητική αλλά και μεταφοράς τους στην επίλυση των προβλημάτων με βάση την εκτίμηση (Reys, 1985).

Οι Heirdsfield και Cooper (2004, pp 13) θεωρούν ότι υπάρχει η πεποίθηση πως αν θέλουμε να ενθαρρύνουμε τους μαθητές να αναπτύξουν τις δικές τους αποτελεσματικές στρατηγικές νοερού υπολογισμού, είναι αναγκαίο οι εκπαιδευτικοί να επικεντρωθούν στην προώθηση της σκέψης των μαθητών, αντί να τους διδάξουν τις γραπτές διαδικασίες, οι οποίες δεν υποστηρίζουν την ανάπτυξη της αίσθησης των αριθμών. Αντίθετα περιμένουν από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τις αυτοαναπτυγμένες στρατηγικές τους. Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές θα εκτιμήσουν τις στρατηγικές τους, αντί να καταφύγουν σε διδακτικές διαδικασίες που έχουν διδάξει οι εκπαιδευτικοί χωρίς να σκέφτονται τους συνδυασμούς αριθμών ή το πλαίσιο. Βεβαίως, οι μαθητές θα πρέπει να ενθαρρύνονται να αναπτύσσουν και να υιοθετούν αποτελεσματικότερες στρατηγικές, που να αντανακλούν την κατανόηση (Heirdsfield & Cooper, 2004).

2.6. Τρόποι διδασκαλίας νοερών υπολογισμών

Σήμερα υπάρχει μια κλίση προς τις στρατηγικές του νοερού υπολογισμού που πρέπει να γεννηθούν από την εννοιολογική κατανόηση αντί των τυποποιημένων διαδικασιών. Υπάρχουν τουλάχιστον τρεις εκπαιδευτικές προσεγγίσεις που εμφανίζονται σήμερα στις αίθουσες διδασκαλίας (McIntosh et al., 1995).

Σύμφωνα με McIntosh et al. (1995) η πρώτη είναι να βλέπει κανείς τον νοερό υπολογισμό σαν ένα «θέμα» που πρέπει να μπει σε ένα πλαίσιο αναγνωρίσιμων στρατηγικών, οι οποίοι παρουσιάζονται άμεσα στους μαθητές. Αυτή η προσέγγιση είναι παρόμοια με την παραδοσιακή διδασκαλία των γραπτών αλγόριθμων. Πολλοί εκπαιδευτικοί υποστηρίζουν ότι αυτό έχει ως απότοκο ο νοερός υπολογισμός να χάσει πολλά από τα πλούσια χαρακτηριστικά που περιγράφονται από τον Plunkett (1979), που τα έχουμε δει νωρίτερα (φευγαλέα, ευέλικτα, ενεργά, εποικοδομητικά) και να λάβει όλα τα ανεπιθύμητα χαρακτηριστικά των «κακά διδασκόμενων» γραπτών υπολογισμών (McIntosh et al., 1995).

Μια δεύτερη εκπαιδευτική προσέγγιση είναι η κατασκευαστική (constructivist) (McIntosh et al., 1995). Σ` αυτήν οι μαθητές ενθαρρύνονται να δημιουργούν στρατηγικές, με βάση την προηγούμενη εμπειρία και γνώση τους. Υπάρχουν πολλές σχετικές έρευνες (Shuard, 1987, όπ. αναφ. Mcintosh et al., 1995; Kamii, 1989; Cobb and Merkel, 1989; Markovitz and Sowder, 1988) ότι οι μαθητές σχεδιάζουν έξυπνες μεθόδους για την επίλυση των αριθμητικών προβλημάτων. Παρόλο που μπορούν να δημιουργήσουν μια ποικιλία στρατηγικών, η πιθανότητα να τις αξιοποιήσουν συνδέεται στενά με την αντίληψή τους για το σχολείο και ειδικά το τι είναι μαθηματικά (McIntosh et al., 1995).

Στην τρίτη προσέγγιση οι μαθητές διδάσκονται τις τυποποιημένες γραπτές μεθόδους του υπολογισμού και πρέπει να εξάγουν από αυτές τις εμπειρίες τους, για να υπολογίσουν νοερά. Αυτή η προσέγγιση μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές να εκτελούν νοερούς υπολογισμούς εφαρμόζοντας τους αναποτελεσματικούς γραπτούς αλγόριθμους (McIntosh et al., 1995, pp 238).

Ο Thompson (2010, pp 170) αναφέρει ότι οι Askew et al. (2001: 9) διαπίστωσαν πως σε ένα στοχευμένο πρόγραμμα διδασκαλίας σε μαθητές που δεν έχουν αναπτύξει τις στρατηγικές οι ίδιοι, μπορούν πράγματι να τις μάθουν. Αν και το δείγμα ήταν μικρό δηλώνει ότι η διδασκαλία των στρατηγικών νοερού υπολογισμού μπορεί να βελτιώσει τις υπολογιστικές επιδόσεις των παιδιών, καθώς και την εμπιστοσύνη τους να χρησιμοποιούν άτυπες παρά επίσημες γραπτές μεθόδους.

Η ελάχιστη απαίτηση που πρέπει να έχουν τα παιδιά για να πετύχουν στους νοερούς υπολογισμούς είναι να έχουν αναπτύξει τα παρακάτω χαρακτηριστικά (Thompson, 2010, pp 171):

- μια ασφαλή γνώση των αριθμητικών στοιχείων
- μια καλή κατανόηση του συστήματος των αριθμών – πώς δουλεύει, ποιες λειτουργίες είναι επιτρεπτές και ποιες όχι - έτσι ώστε τα γνωστά αριθμητικά στοιχεία να μπορούν να συνδυαστούν χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες λειτουργίες για την επεξεργασία άλλων γεγονότων
- η ικανότητα να εκτελεί με ακρίβεια τις δεξιότητες που υποστηρίζονται από αυτές τις σχέσεις
- η εμπιστοσύνη να χρησιμοποιήσουν ό, τι γνωρίζουν με τον δικό τους τρόπο για να βρουν λύσεις.

Η δουλειά του δασκάλου είναι να εξασφαλίσει ότι αυτές οι πτυχές αποτελούν σημαντικό μέρος της διδασκαλίας του (Thompson, 2010, pp 171).

Ο Thompson (1999) υποστηρίζει ότι εξίσου σημαντικό πράγμα στη διδασκαλία τους είναι η διαφορά που πρέπει να δείξουν στη προσέγγιση της διδασκαλίας μονοψήφιων αριθμών αλλά και των διψήφιων. Ενώ στη διδασκαλία των γραπτών υπολογισμών δεν υπάρχει διαφορά, στους νοερούς υπολογισμούς υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ των μονοψήφιων και διψήφιων διαδικασιών, οι οποίες απαιτούν διαφορετικές εκπαιδευτικές προσεγγίσεις (Thompson, 1999, pp 2). Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γνωρίζουν το φάσμα των διαθέσιμων μεθόδων όχι, έτσι ώστε να μπορούν να τους διδάξουν όλους τυπικά, αλλά, ώστε να τους επιτρέψει να υποστηρίξουν παιδιά που αναπτύσσουν επάρκεια με μια συγκεκριμένη στρατηγική. Για αυτό πρέπει να συζητήσουν τις νοερές στρατηγικές των παιδιών στην τάξη και να κάνουν τις αποδεκτές τη χρήση των προσωπικών τους στρατηγικών (Thompson, 1999, pp 4).

2.7. Δυσκολίες στους νοερούς υπολογισμούς

Η γνώση των βασικών αριθμητικών γεγονότων θεωρείται ως απαραίτητη προϋπόθεση για τη διεξαγωγή των νοερών υπολογισμών (Plunket, 1979, όπ. αναφ. Heirdsfield, 2002; Sowder, 1988; Maclellan, 2001), όπως επίσης η στρατηγική στο εννοιολογικό πλαίσιο του μαθητή (Maclellan, 2001). Υπάρχουν, ωστόσο κι άλλες έρευνες (Usnick & Engelhardt, 1988, όπ. αναφ. Heirdsfield, 2002), που αναφέρουν ότι η προϋπόθεση της γνώσης αριθμητικών γεγονότων μπορεί να μην είναι σημαντική για την πρόσθεση και την αφαίρεση, όπως πιστεύεται (Heirdsfield, 2002; Van de Walle et al., 2017). Ο νοερός υπολογισμός πρέπει να υπολογίζεται χρησιμοποιώντας στρατηγικές με κατανόηση (Anghileri, 1999). Για να κατανοήσουν οι μαθητές πλήρως την πρόσθεση και την αφαίρεση πρέπει να γνωρίζουν τη σχέση μεταξύ των δύο πράξεων (Bryant, Christie & Rendu, 1999). Η πρόσθεση και η αφαίρεση είναι συμπληρωματικές λειτουργίες τις οποίες δεν τις καταλαβαίνουν πριν από τα 7 (Baroody, 1999). Ένα σημείο που συχνά έκανε αναφορά ο Piaget (1952) και δεν αμφισβητείται από κανέναν, είναι ότι κανείς δεν μπορεί να κατανοήσει πλήρως τη φύση της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης, εκτός και αν αντιληφθεί την αντίστροφη σχέση μεταξύ αυτών των δύο πράξεων (Bryant et al., 1999).

Πρόσθεση

Όταν οι μαθητές έχουν κατανοήσει την έννοια της πληθικότητας μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις δεξιότητες της απαρίθμησης με λογικό τρόπο. Συχνά, όμως, οι εκπαιδευτικοί πηγαίνουν από τις πρώιμες ιδέες της απαρίθμησης στην πρόσθεση και την αφαίρεση που έχει ως αποτέλεσμα τα παιδιά να απαριθμούν σε μονάδες και να δυσκολεύονται να κατακτήσουν τα βασικά δεδομένα. Για αυτό πρέπει τα παιδιά να μάθουν καλά τις αριθμητικές σχέσεις (Van de Walle et al., 2017). Η άμεση αναγνώριση ποσοτήτων είναι μια σημαντική ικανότητα για τη σύλληψη των αριθμών, των αριθμητικών σχέσεων και των αριθμητικών συστημάτων. Αυτή πρέπει να ενθαρρύνεται στα προγράμματα της πρώτης αρίθμησης· αλλιώς τα παιδιά συνεχίζουν να χρησιμοποιούν την καταμέτρηση ως την ασφαλέστερη μέθοδο υπολογισμού (Τζεκάκη, 2010). Χωρίς τις κατάλληλες δράσεις ανάπτυξης των σταθερών αριθμητικών σχέσεων της πρώτης δεκάδας, τα παιδιά συναντούν δυσκολίες κατά την εύρεση όλων των συνδυασμών των αθροισμάτων για έναν αριθμό. Έτσι δεν μπορούν να συστηματοποιήσουν τα ευρήματα και εμφανίζουν σοβαρές ελλείψεις (Cobb, 1987, όπ. αναφ. Τζεκάκη, 2010).

Τα παιδιά που καταλαβαίνουν την ιδέα της σύνθεσης, ότι δηλαδή ένας αριθμός αποτελείται από κομμάτια συχνά με διαφορετικούς τρόπους και μέρη, μπορούν να αναγνωρίσουν ως μια οικογένεια γεγονότων τους αριθμούς (π.χ. το 8) (Baroody, 2006). Όταν κατανοούν το 5+3 σημαίνει έχουν κάνει εννοιολογική πρόοδο (Sarama & Clements, 2009). Στην ουσία γνωρίζουν τις σταθερές σχέσεις των αριθμών. Αυτή η αναγνώριση μπορεί να τους βοηθήσει να γνωρίσουν την ιδέα της αποσύνθεσης. Οι δυσκολίες στον έλεγχο βασικών συνδυασμών μπορεί να οφείλονται είτε ότι οι μαθητές δε διαθέτουν άτυπη γνώση, είτε ότι η εκμάθηση αυτών είναι υπερβολικά δύσκολη (Baroody, 2006). Το πρόβλημα της ακριβούς και αυτόματης αναπαραγωγής αυτών των συνδυασμών μπορεί να οφείλεται, ακόμα, στις παρανοήσεις των εκπαιδευτικών για τον τρόπο, με τον οποίο μαθαίνουν τα παιδιά και πως αυτοί αναπαριστώνται στη μακροπρόθεσμη μνήμη (Baroody, 1985).

Για να πραγματοποιηθεί η υπέρβαση της δεκάδας στην πρόσθεση χρειάζονται τέσσερα βήματα. Για παράδειγμα, στην πρόσθεση 9+4 πρέπει ο μαθητής στο πρώτο βήμα να σκεφτεί ότι το 9 χρειάζεται το 1 για να γίνει 10 (9+n=10), στο δεύτερο βήμα πρέπει να διαχωρίσει το 4 (4=1+n), στο τρίτο βήμα να γίνει η πρόσθεση 9+1=10 και στο τέταρτο βήμα προσθέτουν και τον άλλον αριθμό που βρήκαν από το σπάσιμο του 4, δηλαδή 10+3=13 (Murata & Fuson, 2006). Έτσι, όταν οι μαθητές γνωρίζουν την ακολουθία μέτρησης γνωρίζουν και το n+1 (Baroody, 2006) γιατί απλά είναι ο επόμενος αριθμός του n (Sarama & Clements, 2009). Το n+1 και n-1 είναι πολύ σημαντικό για τη καταμέτρηση αλλά και την σύνθεση των αριθμών (Sarama & Clements, 2009). Με τον καιρό γίνεται αυτόματα και γρήγορα χωρίς σκέψη (Baroody, 2005), με αποτέλεσμα να μην υπάρχει δυσκολία στις πράξεις με προσθετέο τον αριθμό 9.

Οι Carpenter και Moser (1984) επισημαίνουν ότι τα παιδιά του πρώτου επιπέδου δεν μπορούν να χρησιμοποιήσουν τη στρατηγική της πρόσθεσης προς τα πάνω (adding-on strategy) γιατί δεν έχουν τρόπο να παρακολουθήσουν τις σχέσεις μεταξύ των συνόλων. Αν και το επίπεδο των στρατηγικών 1 και 2 είναι απαραίτητο για την εννοιολογική κατανόηση για τις στρατηγικές με υπολογιστική ευχέρεια, κάποια άτομα κολλάνε στη στρατηγική επιπέδου 1, λόγω μαθησιακών δυσκολιών και μπορούν να πάνε στο επίπεδο 2 προσωρινά, εάν διδαχθούν τις στρατηγικές άμεσα (Baroody, 2006). Πολλά δε θα πάνε στη στρατηγική επιπέδου 3 (Baroody, 2006) ώστε η μετάβαση γι αυτά τα παιδιά από το επίπεδο 1 στο 3 θα είναι περίπου 15% (Carpenter, 1984).

Η λεκτική καταμέτρηση και κατά συνέπεια οι υπολογισμοί στη δεκάδα και πάνω επηρεάζονται από τη γλώσσα και τον τρόπο που αποδίδει τους αριθμούς, όπως π.χ. το 11 και το 12, στην ελληνική (έντεκα, δώδεκα), αγγλική (eleven, twelve) και σε άλλες ευρωπαϊκές γλώσσες προφέρεται διαφορετικά. Σε χώρες της Ανατολικής Ασίας (π.χ. Κίνα, Ιαπωνία) προφέρονται δεκαένα, δεκαδύο και οι μαθητές αυτών των χωρών παρουσιάζουν καλύτερες επιδόσεις στην υπέρβαση δεκάδας (Aunio et al., 2004, pp 54 όπ. αναφ. Sarama & Clements, 2009; Aunio et al., 2006; Murata, 2004). Σήμερα, τα παιδιά κατά τη διάρκεια της ανάπτυξης αντικαθιστούν τις διαδικασίες καταμέτρησης και τις στρατηγικές με γρήγορη ανάκληση (Baroody, 1985). Ένα άλλο εύρημα που πρέπει να αναφερθεί είναι η χρήση των διπλών (8+8) στις οποίες υπάρχουν ενδείξεις ότι τα παιδιά λειτουργούν διαφορετικά με αυτούς τους συνδυασμούς (Groen & Parkman, 1972, όπ. αναφ. σε Carpenter & Moser, 1984).

Αφαίρεση

Πολλά παιδιά του δημοτικού σχολείου συνήθως βασίζονται σε ανεπίσημες διαδικασίες μέτρησης για να κάνουν βασική αριθμητική, επειδή αρχικά αυτό είναι πιο σημαντικό (Brownell, 1935, όπ. αναφ. Baroody, 1984). Οι δυσκολίες στην αφαίρεση φαίνεται να οφείλονται, εν μέρει, σε δυσκολίες με την άτυπη προσέγγισή τους. Πολλά παιδιά της προσχολικής ηλικίας μπορούν να υπολογίσουν το n-1. Σε μια έρευνα που έγινε σε παιδιά Α΄ τάξης διαπιστώθηκε ότι το 100% ήξεραν το n-1 (Baroody, 1984). Όταν εισέρχονται στην πρώτη δημοτικού μπορούν να υπολογίσουν νοερά το n-1 έως το 5-1. Όταν πηγαίνουν στη δευτέρα δημοτικού πρέπει να μπορούν να υπολογίσουν ως το 10-1 αυτόματα. Εάν τα παιδιά δεν μπορούν να μετρήσουν προς τα πίσω δεν μπορούν να επεκτείνουν τη διαδικασία n-1 και αυτό θα δημιουργήσει πρόβλημα, όταν θα χρειαστεί να μετρήσουν λιγότερα από 2 ή περισσότερα. Για να μετρήσουν προς τα κάτω, τα παιδιά έχουν την ανάγκη να παρακολουθούν τον αριθμό και να διαθέτουν τα μέσα για να το κάνουν. Επειδή δεν σκέφτονται την παρακολούθηση, μερικά παιδιά δεν ξέρουν πού να σταματήσουν και επομένως είτε προχωρούν μέχρι να εξαντλήσουν την πίσω ακολουθία ή τείνουν να αντιδρούν λανθασμένα (Fuson et al., 1982, όπ.

αναφ. σε Baroody, 1984). Πράγματι, οι Carpenter και Moser (1982) διαπίστωσαν ότι μόνο οι μισοί από τους μαθητές της πρώτης τάξης στο δείγμα τους μπορούσαν να μετρήσουν προς τα πίσω ένα συγκεκριμένο αριθμό βημάτων και, ως εκ τούτου, χρησιμοποιήθηκε σπάνια η διαδικασία της απαρίθμησης. Ακόμη, και μετά την εκμάθηση μιας διαδικασίας παρακολούθησης, κάποια παιδιά αισθάνονται υποχρεωμένα και βιάζονται στη διαδικασία της καταμέτρησης προς τα πίσω (συχνά για να αποφύγουν το στίγμα της καταμέτρησης). Αυτή η βιασύνη οδηγεί σε απώλεια της διαδρομής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αφήνουν κάποιες φορές έναν όρο «έξω», γιατί δεν ξέρουν πού πρέπει να σταματήσουν (Baroody, 1984). Η αφαίρεση προς τα πίσω είναι γενικά πιο δύσκολη από το να πάει κάποιος προς τα εμπρός (Fuson & Fuson, 1992; Baroody, 1984; Sarama & Clements 2009).

2.8. Λόγοι δυσκολιών των νοερών υπολογισμών

Ο Baroody (2006) αναφέρει ότι υπάρχουν τρία επίπεδα μέσω των οποίων τα παιδιά προχωρούν στην απόκτηση των συνδυασμών βασικών αριθμών στις μονοψήφιες προσθέσεις και αφαιρέσεις[3]. Οι εκπαιδευτικοί συμφωνούν γενικά ότι τα παιδιά πρέπει να κατακτήσουν τους βασικούς συνδυασμούς των αριθμών και διαπιστώνεται, όμως, μια σημαντική διαφωνία στον τρόπο εκμάθησης των βασικών συνδυασμών των αριθμών (Baroody, 2006). Σύμφωνα με τον Baroody (2006) υπάρχουν δύο απόψεις για τον τρόπο που μαθαίνουν τα παιδιά βασικούς συνδυασμούς αριθμών. Αυτές είναι η <u>παραδοσιακή άποψη</u> και η <u>άποψη της αίσθησης του αριθμού</u>. Η παραδοσιακή άποψη εξελίσσεται γύρω από την απομνημόνευση των γεγονότων μέσω της επανάληψης, της άσκησης και της ενθάρρυνσης. Οι υποστηρικτές της συμφωνούν ότι τα επίπεδα ένα και δύο δεν είναι απαραίτητα για την επίτευξη της αποθήκης γεγονότων. Η έκφραση 7+6=13 δε χρειάζεται εννοιολογική κατανόηση αρκεί να το μάθει ο μαθητής απ` έξω. Επισημαίνουν ότι τα παιδιά που έχουν δυσκολίες στην εκμάθηση έχουν ελάχιστο ή καθόλου ενδιαφέρον για τα μαθηματικά. Αντίθετα, οι υποστηρικτές της άποψης της αίσθησης του αριθμού πιστεύουν πως τα επίπεδα ένα και δύο διαδραματίζουν ένα σπουδαίο ρόλο στην επίτευξη του τρίτου επιπέδου. Οι λόγοι που τα παιδιά συναντούν δυσκολίες,

---

[3] ΕΠΙΠΕΔΟ 1 Στρατηγικές καταμέτρησης - χρησιμοποιώντας αντικείμενα (π.χ. δάχτυλα ή σημάδια) ή τη λεκτική μέτρηση.
ΕΠΙΠΕΔΟ 2 Λογικές στρατηγικές – χρησιμοποιώντας γνωστές πληροφορίες (π.χ. γεγονότα και σχέσεις) για τη λογική εξαγωγή της απάντησης ενός άγνωστου συνδυασμού.
ΕΠΙΠΕΔΟ 3 Άριστο επίπεδο – γρήγορη και ακριβής παραγωγή απαντήσεων.

σύμφωνα με την παραδοσιακή άποψη, οφείλονται σε ελαττώματα των μαθητευόμενων που χαρακτηρίζονται ως άτομα απρόσεχτα που αδυνατούν να εφαρμόσουν γνώσεις και από την άλλη σε ανεπαρκή ή ακατάλληλη διδασκαλία με την άποψη της αίσθησης του αριθμού (Baroody, 2006, pp 22).

Σύμφωνα με την Τζεκάκη (2010, σελ. 296), « *οι αριθμοί και τα αριθμητικά συστήματα, όπως και οι αριθμητικές πράξεις έχουν μια ιδιαίτερα σύνθετη δομή με πολλές διαστάσεις. Η προσέγγισή τους και άρα η ουσιαστική κατανόηση των αριθμητικών εννοιών απαιτεί μια προσεκτική διαδρομή προσέγγισης με πλούσιες δραστηριότητες, δράσεις και εμπειρίες των παιδιών».* Ειδικότερα, στις πράξεις πρόσθεσης, αφαίρεσης και γενικά τα αθροιστικά προβλήματα οι μαθητές δείχνουν σημαντικές δυσκολίες. Η διδακτική συνέπεια γι` αυτό είναι αρχικά η δημιουργία αριθμητικών αναπαραστάσεων για τις αριθμητικές σχέσεις και στη συνέχεια η εξάσκησή τους σε μεγάλο αριθμό προβλημάτων με νόημα για τα ίδια (Τζεκάκη 2010, σελ. 309).

3. ΔΡΑΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

3.1. Σημασία της Δραματοποίησης στην Εκπαίδευση

«Στην σύγχρονη κοινωνία που ζούμε δημιουργήθηκε η εξής αντίφαση: το παιδί να είναι το κέντρο του κοινωνικού γίγνεσθαι, αλλά ως παθητικό, ουδέτερο αντικείμενο και μάλιστα ως αντικείμενο εκμετάλλευσης πολλές φορές» (Κοντογιάννη, 2012β). Το σχολείο αγνοεί τις ανάγκες, τις δυνατότητες και τις ιδιαιτερότητες του παιδιού και εφαρμόζει μαζικά προγράμματα μάθησης καθιστώντας το παθητικό δέκτη πληροφοριών (Κοντογιάννη, 2012β, σελ. 14). Η Δραματοποίηση στην Εκπαίδευση (Drama in Education) αποτελεί μια νέα παιδαγωγική αντιμετώπιση, με άξονά της το παιδί η οποία αντλώντας από τη θεατρική τέχνη ασκήσεις και τεχνικές προσπαθεί να εκπληρώσει τους στόχους της (Κοντογιάννη, 2012β, σελ. 15).

Η Δραματοποίηση στην Εκπαίδευση, δηλαδή η χρησιμοποίηση της δραματικής τέχνης ως εκπαιδευτικό εργαλείο καλλιεργεί τη σκέψη, την έκφραση και τη δημιουργικότητα, υπηρετώντας πολλούς εκπαιδευτικούς σκοπούς (Αυδή & Χατζηγεωργίου, 2007, σελ. 11). Είναι μια μορφή θεατρικής τέχνης με παιδαγωγικό χαρακτήρα. Στη Δραματοποίηση[4] οι συμμετέχοντες σύμφωνα με τις Αυδή και Χατζηγεωργίου (2007, σελ. 19):

- *δημιουργούν μια ιστορία που εκτυλίσσεται σε έναν φανταστικό κόσμο στον οποίο ο χώρος , ο χρόνος και τα αντικείμενα έχουν συμβολική σημασία,*
- *υποδύονται ρόλους και αλληλοαντιδρούν,*
- *βιώνουν ατομική και συλλογική εμπειρία,*
- *διερευνούν ένα θέμα και διαπραγματεύονται τα νοήματα των εννοιών που σχετίζονται με αυτό,*
- *αντιμετωπίζουν διλήμματα ή προβλήματα και αποφασίζουν,*
- *δρουν και αναστοχάζονται τις πράξεις τους.*

3.2. Χαρακτηριστικά της Δραματοποίησης στην Εκπαίδευση

Η Δραματοποίηση στην Εκπαίδευση χρησιμοποιεί βασικά στοιχεία του θεάτρου αλλά έχει ορισμένες ιδιαιτερότητες που το ξεχωρίζουν από το παραδοσιακό θέατρο. Αρχικά η Δραματοποίηση στην Εκπαίδευση στηρίζεται στον αυτοσχεδιασμό, ενώ δεν υπάρχει εξωτερικό κοινό. Τα μέλη λειτουργούν άλλοτε ως ηθοποιοί και άλλοτε ως θεατές. Δε βασίζεται σε γραπτό θεατρικό κείμενο αλλά αντλεί στοιχεία από πραγματικές ή φανταστικές ιστορίες. Ο δάσκαλος/α συνδέει την ήδη υπάρχουσα εμπειρία του παιδιού από το παιχνίδι με τις μορφές θεατρικής τέχνης, δίνοντας έτσι στο παιδί να αποκτήσει μια βαθιά μαθησιακή εμπειρία (Neelands, 1984: 7, όπ. αναφ. Αυδή & Χατζηγεωργίου, 2007, σελ. 20). «Η δραματοποίηση στην Εκπαίδευση *προωθεί την **ενεργητική, βιωματική, συνεργατική μάθηση** και καλλιεργεί την **κριτική σκέψη** και το **αίσθημα της κοινωνικής ευθύνης»*** (Αυδή & Χατζηγεωργίου, 2017, σελ. 27). Είναι αυτοσχέδια, συμμετοχική και διερευνητική μορφή θεάτρου, που συνδέει την τέχνη του θεάτρου με τις επιστήμες της αγωγής. Προορισμός της είναι να ενισχύσει τη δημιουργικότητα των διδακτικών στόχων, χωρίς να χάσει την καλλιτεχνική της ουσία (Γραμματάς, 2003, σελ. 452, όπ. αναφ. Παπαδόπουλος, 2005b). Τονίζεται ότι για να υπάρχει η δραματοποίηση πρέπει να υπάρχει ένα ερέθισμα· δηλαδή ένας μύθος, μια ιστορία ή οποιοδήποτε άλλο κείμενο. Η δραματοποίηση αποτελεί μια σύνθετη δραματική διαδικασία και προχωρεί πέρα από

[4] Η Αυδή & Χατζηγεωργίου (2012, σελ.19) υιοθέτησαν τον όρο «Εκπαιδευτικό Δράμα» από τον Πανελλήνιο Σύλλογο Εκπαιδευτικού Δράματος και επειδή μπορεί η χρήση του όρου να παραπέμπει σε άλλα συμφραζόμενα προτίμησαν να διατηρήσουν απλώς τον όρο «Δράμα». Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο «δραματοποίηση».

το θεατρικό παιχνίδι, που είναι δημιουργικό, με βάση το αυτοσχέδιο σενάριο των παιδιών (Μώρου, 2002, σελ. 2). Σύμφωνα με την Κοντογιάννη (2012α, σελ. 28) με τη δραματοποίηση το παιδί μπορεί να αποκτήσει ιδιαίτερη σχέση με το σώμα του, συνειδητοποιεί τις λειτουργίες που γίνονται μέσα στο σώμα του και την ύπαρξή του στο χώρο, μεταλλάσει τη σχέση του με τους γύρω του (όπως οι συμμαθητές του), συνεργάζεται, υποχωρεί, γενικά μπαίνει στη θέση του άλλου, μεταλλάσει τη σχέση του με τον εαυτό του, ξεπερνά τις αναστολές του και αναπτύσσεται η δημιουργική του φαντασία. Μεταλλάσει τον χωροχρόνο του, μπορεί να μετακινηθεί από τον φανταστικό στον πραγματικό χώρο τόσο και στον χρόνο, ευαισθητοποιείται προς τις τέχνες (Κοντογιάννη, 2012α, σελ. 28). Οδηγείται στη βιωματική γνώση και το σώμα του γίνεται ολοζώντανος τόπος γραφής, διευρύνει το πεδίο της γλώσσας του και τη συνδέει με το σώμα του, διευρύνει την ενδοχώρα του και διανοίγεται σε δυνατότητες απόλαυσης, ενθουσιασμού και χαράς (Κοντογιάννη, 2012α, σελ. 28).

Η Κατσαρίδου (2011, σελ. 52) αναφέρει ότι συχνά, ο όρος δραματοποίηση περιγράφει δύο διαφορετικές μορφές θεάτρου στην εκπαίδευση. Η πρώτη, αναπτύσσεται ως μετατροπή ενός οποιουδήποτε κειμένου σε κώδικες δράματος με τελικό σκοπό την έκφρασή του σε θεατρικό δρώμενο, ενώ η δεύτερη ως διερευνητική δραματοποίηση. Εδώ οι συμμετέχοντες υποδυόμενοι τους ρόλους οδηγούνται μέσα από διάφορες τεχνικές σε μια διαδικασία αλληλόδρασης και διερεύνησης ενός θέματος. Αναζητούν το νόημα, αντιμετωπίζουν διλήμματα, παίρνουν αποφάσεις και αναστοχάζονται τις πράξεις, φέρνοντας μαζί τους την εμπειρία και τις απόψεις τους (Κατσαρίδου, 2011, σελ. 52). Οι στόχοι της δραματοποίησης στην Εκπαίδευση, σύμφωνα με τις Αυδή & Χατζηγεωργίου (2007, σελ. 20 & 21), είναι :

- η διερεύνηση ποικίλων κοινωνικών θεμάτων
- η ανάπτυξη ικανότητας στον χειρισμό δραματικής μορφής
- η μύηση των μαθητών στην τέχνη του θεάτρου
- η ολόπλευρη και ισόρροπη ανάπτυξη του μαθητή ως ατόμου και ως μέλος κοινωνικής ομάδας
- η ανάπτυξη εκφραστικών μέσων, καλλιέργεια ψυχοπνευματικών δυνάμεων, απελευθέρωση και ενίσχυση του συναισθηματικού κόσμου, με την απόκτηση αυτοπεποίθησης και αυτοεκτίμησης
- η κοινωνική ανάπτυξη, μέσα από την βίωση μιας συλλογικής εμπειρίας

- η κατάκτηση γνώσεων και δεξιοτήτων, που αφορούν στο εκάστοτε διδασκόμενο μάθημα
- η ψυχαγωγία και λυτρωτική εμπειρία, όπως συμβαίνει σε κάθε μορφή παιχνιδιού.

Υπάρχει μια ποικιλία χρήσης των όρων που περιγράφουν το θέατρο στην εκπαίδευση στην ελληνική βιβλιογραφία, όπως: θεατρικό παιχνίδι, δραματικό παιχνίδι, δραματοποίηση, διερευνητική δραματοποίηση, δράμα, εκπαιδευτικό δράμα, εκπαιδευτικό θέατρο, θεατρική αγωγή, θέατρο για την ανάπτυξη, κοινωνικό θέατρο, θέατρο κοινότητας, διαδραστικό θέατρο, παιδαγωγική δραματική έκφραση, θεατροπαιδαγωγικά προγράμματα, παιχνίδια ρόλων, δραματοθεραπεία (Κατσαρίδου, 2011, σελ. 21). Αντίστοιχα, συναντάμε και τους ευρέως γνωστούς αγγλικούς όρους, όπως: drama in education, theatre in education, process drama, inquiry drama, creative drama, applied drama, applied theatre, community theatre, theatre for development (Κατσαρίδου, 2011, σελ. 21). Έτσι, λοιπόν, βλέπουμε μέσα στο σπίτι της «Δραματοποίησης στην Εκπαίδευση» να περιλαμβάνονται πολλές μορφές οπότε είναι αναγκαίο να αποσαφηνίσουμε τη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε στην έρευνά μας στους ορισμούς.

3.3. Θεατρικές και δραματικές τεχνικές

Υπάρχει πληθώρα θεατρικών (παραστασιακών) και δραματικών (κειμενικών) τεχνικών. Οι Αυδή & Χατζηεωργίου (2007, σελ. 86) τις κατηγοριοποιούν σε πέντε κατηγορίες. Θεωρείται σκόπιμο να γίνει μια απλή αναφορά στις τεχνικές και να επεξηγηθούν μόνο οι τεχνικές που εφαρμόστηκαν στην έρευνα. Εξυπακούεται ότι ο δάσκαλος μπορεί να δημιουργήσει δική του παραλλαγή για κάποια τεχνική ή δική του τεχνική, με βάση τα στοιχεία του θεάτρου .

Τεχνικές για τη δημιουργία δραματικού πλαισίου : ακίνητη / παγωμένη εικόνα (still - image / frozen picture / tableau), ανολοκλήρωτο υλικό (unfinished materials), χτίζω τη «στάση» του ρόλου (modeling), κυκλικό δράμα (circular drama), ομαδική δημιουργία χώρου (defining space), ομαδική ζωγραφική (collective drawing), ομαδική κατασκευή χώρου σε μακέτα, παραγωγή ήχων (soundtracking), παιχνίδια (games), προσωπικά αντικείμενα του ρόλου (objects of character), ρόλος στον τοίχο (role - on - the - wall), συλλογικός ρόλος (collective character), τίτλοι (Αυδή & Χατζηεωργίου, 2007, σελ. 86).

Τεχνικές για την ανάπτυξη της πλοκής : ανακριτική καρέκλα (hot – seating), αυτοσχεδιασμός όλης της ομάδας με δάσκαλο σε ρόλο (whole – group Drama), δάσκαλος σε ρόλο (teacher – in – role), διάδρομος της συνείδησης (conscience alley), κύκλος της συνείδησης, κύκλος του κουτσομπολιού (gossip circle), συμβούλια (meetings), τηλεφωνικές συνδιαλέξεις (telephone conversations) (Αυδή & Χατζηεωργίου, 2007, σελ. 91).

Τεχνικές για τη δημιουργία αναπαραστάσεων : θέατρο της αγοράς (forum theatre), σκηνές ή στιγμιότυπα (small – group play – making), τελετουργίες (ceremonies and ritual) (Αυδή & Χατζηεωργίου, 2007, σελ. 93).

Τεχνικές για αναστοχασμό και κινητικές δραστηριότητες : ανίχνευση / παρακολούθηση της σκέψης του ρόλου (thought – tracking), σύνταξη κειμένων, ομαδικό γλυπτό (group sculpture), παίρνοντας απόσταση (space between) (Αυδή & Χατζηεωργίου, 2007, σελ. 95).

Κινητικές δραστηριότητες : δίνουμε κατάλληλες σε κάθε ηλικία, ώστε να δώσουμε ευκαιρία στους συμμετέχοντες να διαπραγματευτούν το νόημα μέσα στην κίνηση (να εκφράσουν μια ιδέα, ένα συναίσθημα, να δημιουργήσουν συμπεριφορές και καταστάσεις) (Αυδή & Χατζηεωργίου, 2007, σελ. 97).

Οι δύο τεχνικές της διερευνητικής δραματοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα είναι η ακίνητη/παγωμένη εικόνα και ο Δάσκαλος σε Ρόλο (ΔσΡ) τις οποίες αναλύουμε παρακάτω.

Ακίνητη/ παγωμένη εικόνα[5]

Είναι η προετοιμασία για την ανάδειξη μιας στιγμής της δράσης που θα επακολουθήσει με ιδιαίτερη σημασία στην κατανόηση της κατάστασης που διερευνάται. (Παπαδόπουλος, Κούσουλας, Σιούτης, 2014, σελ. 3). Η Heathcote (όπ. αναφ. Αυδή & Χατζηγεωργίου, 2007, σελ. 86) αναφέρει ένα παράδειγμα για το πώς

[5] Ο Κουκουνάρας-Λιάγκης (2011, σελ 84) την αναφέρει ως τεχνική της πολυτροπικής διδακτικής (είναι μια έννοια που τη συναντάς στις εναλλακτικές διδακτικές και την επικοινωνιακή διδακτική ή στις διαθεματικές διδακτικές αναφερόμενος στον Κοσσυβάκη (1998, 2003) και στον Ματσαγγούρα (2003) αντίστοιχα) με βάση τις θεωρίες μάθησης των Piaget, Vygotsky, Bruner, Gagne και παιδαγωγικές θεωρίες των Fröbel, Bruner, Dewey, Kilpatrick, Gardner (σελ. 54). Οι στόχοι της μεθόδου είναι η έκφραση, συνεργασία, ανάλυση σε βάθος μιας ιστορίας ή ενός προσώπου, βίωση. Ο Γκόβας (2001, σελ 82) την αναφέρει ως θέατρο εικόνων & εκφραστικοί πίνακες (image Theatre).

πρέπει να είναι η παγωμένη εικόνα. Σαν το κολίμπρι, που στέκεται φαινομενικά ακίνητο και ρουφάει το νέκταρ των λουλουδιών. Αυτό το καταφέρνει, κουνώντας τα μικρά φτερά του πολύ γρήγορα, που ενώ φαίνεται ακίνητο στην πραγματικότητα κινείται. Με τον ίδιο τρόπο και η παγωμένη εικόνα έχει κίνηση μέσα στην ακινησία της και συγκεντρώνει μέσα της το νόημα μιας δράσης. Η τεχνική αυτή δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να εστιάσουν στο σημαντικό και να δώσουν νόημα στην εικόνα αφαιρώντας τα περιττά. O Boal επινόησε το Θέατρο των εικόνων (Image theatre). O Jackson (Boal, 1992: 10) αναφερόμενος στο θέατρο αυτό υποστηρίζει πως η εικόνα : 1ον έχει μεγάλη δύναμη και εκφράζει περισσότερο από τα λόγια, 2ον αποδίδει καλύτερα ακόμα και τις πιο μύχιες σκέψεις και συναισθήματα χωρίς τη λογοκρισία του νου, 3ον μας υποβάλλει ακόμα και υποσυνείδητα, 4ον είναι πλούσια σε νοήματα, τη χαρακτηρίζει η πολυσημία και 5ον υπερβαίνει τα όρια της γλώσσας και του πολιτισμού και αποκαλύπτει καθολικές αξίες / καταστάσεις (Αυδή & Χατζηγεωργίου, 2007, σελ. 87).

Δάσκαλος σε ρόλο (ΔσΡ - Teacher in Role)[6]

«Ομαδικός αυτοσχεδιασμός με δάσκαλο σε ρόλο» είναι μια μέθοδος που επινόησε η Dorothy Heathcote και άρχιζε να την εφαρμόζει τη δεκαετία του `60. Από τη συγκεκριμένη μέθοδο, που εξελίχθηκε σταδιακά, προέκυψε η τεχνική Δάσκαλος σε Ρόλο (Αυδή & Χατζηγεωργίου, 2017, σελ. 31). Η συγκεκριμένη τεχνική είναι μια σημαντική στρατηγική μάθησης,[7] διότι ανατρέπει την παραδοσιακή σχέση δασκάλου μαθητή, καθώς προσφέρει στον δάσκαλο τη δυνατότητα να χάσει την ισχύ που έχει ως ρόλος μέσα στο δράμα.

Σύμφωνα με τις Αυδή και Χατζηγεωργίου (2017, σελ. 43) ο δάσκαλος αξιοποιεί αυτή την τεχνική, αποβλέποντας σε ορισμένους στόχους. Αρχικά, οικοδομεί με τους μαθητές ένα φανταστικό κόσμο όπου αυτοί, μέσα από τη βίωση μιας κοινής εμπειρίας, αναπτύσσουν την αυτενέργεια. Φροντίζει να κινητοποιεί το ενδιαφέρον τους, με τη δημιουργία φανταστικής και συνάμα συμβολικής ατμόσφαιρας, ανατροφοδοτώντας την ένταση του δράματος, με στόχο τη συναισθηματική εμπλοκή τους (Λενακάκης, 2013, σελ. 77). Αξιοποιεί το θέμα της ιστορίας, πάντα όμως με

[6] Ο Κουκουνάρας-Λιάγκης (2011, σελ. 95) την αναφέρει ως τεχνική της πολυτροπικής διδακτικής με στόχους τη βιωματικότητα, δημοκρατική ατμόσφαιρα, συμμετοχικότητα, εμβάθυνση.
[7] Το ίδιο υποστηρίζει και ο Wooland (1999, σελ. 104) και ο Γκόβας (2001, σελ. 151).

στόχο να την προωθήσει ως προς την πλοκή, ελέγχοντας συχνά τον ρυθμό και την ένταση του δράματος. Σημαντική θεωρείται η κινητοποίηση της κριτικής σκέψης των μαθητών, μέσω στοχευμένων ερωτήσεων κατά τη σωκρατική-διαλεκτική μέθοδο, ώστε μέσα από το διάλογο και τη συνεχή επικοινωνία να εθιστούν στον αναστοχασμό και στην εξεύρεση λύσης. Έτσι διερευνάται πλήρως το θέμα, αποσυμβολίζονται οι παράγοντες της ιστορίας, επιτυγχάνεται η ομαδικότητα και η αποφασιστικότητα στην επίλυση των προβλημάτων, μέσα από τη δραματική ένταση. Η πορεία της όμως είναι σε αντίθεση με των άλλων ερευνητών, γιατί ο δάσκαλος δεν παίρνει ρόλους εξουσίας ή ανώτερους από αυτούς των άλλων μελών (Λενακάκης, 2013, σελ. 77).

Στους μαθητές προσφέρεται, μέσω της τεχνικής, η ευκαιρία: να ζήσουν έντονα μια σημαντική εμπειρία και να προχωρήσουν σε βάθος στην κατανόηση του υπό διερεύνηση θέματος, να μπορούν να εκφράσουν ελεύθερα σκέψεις και συναισθήματα μέσα από την φροντίδα που τους δίνει ο ρόλος και να αναλάβουν ευθύνες, ίσως την ηγεσία της ομάδας αλλά και να πάρουν αποφάσεις (Αυδή & Χατζηγεωργίου, 2017, σελ. 44).

Ο ρόλος που θα χτίσει ο δάσκαλος περιλαμβάνει τα παρακάτω στοιχεία, που συνδέονται στενά μεταξύ τους : *στάση* (attitude), που πρέπει να είναι συγκεκριμένη απέναντι στους ρόλους των μαθητών αλλά και στο γεγονός που συμβαίνει στον φανταστικό κόσμο, *λειτουργία,* που είναι η βασική δράση που επιτελεί ο ρόλος στην ιστορία, και το *κύρος* που υποδύεται ο δάσκαλος (μπορεί να είναι ανώτερο, κατώτερο ή ισότιμο) (Αυδή & Χατζηγεωργίου, 2017, σελ. 44). Ο ρόλος που υιοθετεί ο δάσκαλος βρίσκεται σε συνεχή αλληλεπίδραση με τον ρόλο των μαθητών· για αυτό πρέπει να επιλέξει έναν ρόλο κατάλληλο, προκειμένου να διερευνήσουν οι μαθητές το θέμα στο οποίο εστιάζουν (Αυδή & Χατζηγεωργίου, 2017, σελ. 44).

Οι κατηγορίες με βάση τις λειτουργίες ενός ρόλου μπορεί να είναι : α) αναζήτηση βοήθειας ή συμβουλής, β) αναζήτηση πληροφοριών, γ) συντονισμός και δ) παρεμπόδιση[8] ε) παροχή πληροφοριών, στ) βοήθεια στη διεκπεραίωση καθηκόντων, ζ) αντιπαράθεση – πρόκληση (Αυδή & Χατζηγεωργίου, 2017, σελ. 46).

Οι κατηγορίες ρόλων σύμφωνα με την κοινωνική θέση είναι : α) ανώτατη κοινωνική θέση (βασιλιάς, πρόεδρος του χωριού, αρχηγός ομάδας, κ.λ.π.) β) ο

[8] Ο Wooland (1999, σελ. 106) αναφέρει μόνο το α,β,γ και δ.

δεύτερος σε ιεραρχία, γ) ισότιμη κοινωνική θέση (σε ίδιο επίπεδο με την τάξη π.χ. μέλος της συμμορίας) δ) χαμηλή κοινωνική θέση[9] (ζητιάνος, ταξιδιώτης, ναύτης σε ναυάγιο, κ.λ.π) και ε) σκιώδης ρόλος (ο δάσκαλος μεταβαίνει ελεύθερα μεταξύ του σκιώδους ρόλου και του ρόλου ως δασκάλου της τάξης) (Αυδή & Χατζηγεωργίου, 2017, σελ. 48).

3.4. Χρήση στη μαθηματική εκπαίδευση

Υπάρχουν αρκετές έρευνες για τα μαθηματικά και τη δραματοποίηση, ο ερευνητής, όμως, θα εστιάσει μόνο στις μελέτες που έχουν γίνει σε δημοτικά σχολεία τόσο σε Ελλάδα όσο και στο εξωτερικό και τα αποτελέσματά τους. Στην Ελλάδα υπάρχουν δύο έρευνες σχετικές με τα μαθηματικά και το θέατρο στην εκπαίδευση. Η πρώτη είναι του Χαβιάρη (2006) που μελέτησε το παιχνίδι ρόλων ως περιβάλλον αναστοχασμού. Η έρευνα του εστιάστηκε στη μελέτη της κοινωνικής αλληλεπίδρασης μεταξύ των μαθητών. Πραγματοποιήθηκε στην Ε΄ τάξη δημόσιου δημοτικού σχολείου το 2003-04 είχε διάρκεια περίπου 6 μήνες και το δείγμα του ήταν 18 μαθητές (9 αγόρια και 9 κορίτσια). Σύμφωνα με τον Χαβιάρη το παιχνίδι ρόλων αξιολογήθηκε θετικά. Η δεύτερη έρευνα είναι του Ιωακειμίδη (2012), βασισμένη σε ένα εκπαιδευτικό σενάριο με δράσεις θεατρικής αγωγής για τη διδασκαλία της ενότητας «Τα Γεωμετρικά Σχήματα». Πραγματοποιήθηκε στην Α΄ τάξη δημοτικού σχολείου το 2011, με σκοπό τη γνωριμία των παιδιών με τα γεωμετρικά σχήματα και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους, μέσα από τη βιωματική συμμετοχή αυτών σε παιγνιώδεις δράσεις. Οι δραστηριότητες που χρησιμοποίησε ήταν : παντομίμα-αυτοσχεδιασμός, θεατρικό σκετς, παγωμένη εικόνα, θεατρικό παιχνίδι, κουκλοθέατρο, θέατρο σκιών και θεατρικού δρώμενου. Στην αξιολόγησή του αναφέρει ότι τα παιδιά κατέκτησαν σημαντικές γνώσεις και οι θεατροπαιδαγωγικές δράσεις κέντρισαν το ενδιαφέρον των παιδιών. Παρόλα αυτά απουσιάζει η ομάδα ελέγχου, ώστε να συγκρίνουμε τις γνώσεις των δύο ομάδων σε σύγκριση με την παραδοσιακή διδασκαλία.

Στο εξωτερικό συναντάμε δεκαεπτά έρευνες που αφορούν σε μαθητές αντίστοιχης βαθμίδας με το ελληνικό δημοτικό σχολείο. Οι έρευνες των (Saab,1987; Oniewski, 1999; Soner, 2005; Hatipoglu, 2006) με θέμα (μαθηματικό συλλογισμό -

[9] Ο Wooland (1999, σελ. 107) αναφέρει μόνο το α,β,γ και δ.

εύρεση μοτίβου, ταξινόμηση και γραφικές παραστάσεις – εύρεση μοτίβου, ταξινόμηση και γραφικές παραστάσεις – γεωμετρικά σχήματα) αντίστοιχα και έδειξαν ότι με τη χρήση της δραματοποίησης οι μαθητές της πειραματικής ομάδας είχαν υψηλότερες επιδόσεις έναντι της ομάδας ελέγχου και στην έρευνα του (Nave, 1983) ξεχώρισαν ορισμένοι μαθητές χαμηλής επίδοσης. Στις έρευνες των (Bae, 2003, 2004, 2007; Kayhan, 2004, 2008, 2009; Sözer, 2006; Tanriseven, 2000; Üredi, Şengül, ve Gürdal, 2008; Cantürk Günan, Berna & Özen, Deniz, 2010; Bakkaloğlu, 2011, 2012) διαπιστώνουμε ότι οι μαθητές είχαν υψηλά επίπεδα διατηρησιμότητας της γνώσης με περιεχόμενο (πολλαπλασιασμός, διαίρεση μερισμού και μέτρησης – μέτρηση μήκους – διδασκαλία κλασμάτων – ικανότητες επίλυσης προβλήματος – επιφάνεια και όγκος ορθού πρίσματος) αντίστοιχα, ενώ η έρευνα των (Kariuki et al., 2006) με θέμα (επιφάνεια και όγκος ορθού πρίσματος) έδειξε χαμηλότερη επίδοση στο τεστ αξιολόγησης σε μαθητές υψηλού κινδύνου. Οι υπόλοιπες έρευνες των (Matz & Leier, 1982; Fleming et al., 2004; Korkmaz & Karadağ, 2007; Özgen, 2010; Karaduman, 2011) με θέμα (επίλυση προβλήματος – με μάθημα μαθηματικών – ενότητα μετρήσεων στη γεωμετρία – πολύγωνα – γεωμετρικά σχήματα) αντίστοιχα, δείχνουν το μάθημα κέντρισε το ενδιαφέρον των παιδιών και κατανοήθηκαν καλύτερα οι έννοιες που διδάχθηκαν (Κοταρίνου, 2014, σελ.167).

Συγκεντρωτικά, από τις έρευνες που βλέπουμε σε αυτή τη βαθμίδα εκπαίδευσης οι μαθητές της πειραματικής ομάδας έδειξαν υψηλότερες επιδόσεις, σε αντίθεση με την ομάδα ελέγχου, βελτίωση της επίδοσης στην πειραματική ομάδα, ενίσχυση της εννοιολογικής κατανόησης, πιο ενεργό συμμετοχή στο μάθημα, αποτελεσματικότητα στη διατήρηση της γνώσης, ενίσχυση δημιουργικής και λογικής σκέψης, αλλά και θετική επίδραση στις στάσεις των μαθητών προς τα Μαθηματικά, καθώς και αυξανόμενη αυτοκυριαρχία και αυτοπεποίθηση (Κοταρίνου 2014, σελ. 169).

Αναγκαιότητα έρευνας

Όπως βλέπουμε, από τις έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση σε Ελλάδα και εξωτερικό, αυτές αφορούν την πρώτη τάξη (γνωριμία γεωμετρικών σχημάτων και πολλαπλασιασμός διαίρεση μερισμού και μέτρησης), αλλά και τις υπόλοιπες πέντε τάξεις του δημοτικού σχολείου. Έχουν χρησιμοποιηθεί ποικίλες τεχνικές και ορολογίες της δραματοποίησης στην εκπαίδευση με πιο συχνή το Drama method, με ποικιλία θεμάτων προς διερεύνηση και πιο συχνή τα γεωμετρικά σχήματα. Οι έρευνες δείχνουν ότι η δραματοποίηση επηρεάζει θετικά τις γνώσεις των μαθητών. Επιπρόσθετα η υπέρβαση δεκάδας είναι σημαντική, διότι μπορούν να επιλυθούν πολλά από τα βασικά δεδομένα της πρόσθεσης (το ένα τρίτο περίπου) και μπορεί να βρει εφαρμογή αργότερα στην πρόσθεση μεγαλύτερων αριθμών (Van de Walle et al., 2017). Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ενώ έχουν πραγματοποιηθεί πολλές έρευνες με δραματοποίηση και με θετικά αποτελέσματα απουσιάζει έρευνα στην πρώτη τάξη με διδακτική μέθοδο που να αφορά τη διερευνητική δραματοποίηση και την υπέρβαση δεκάδας, αντλώντας μια σειρά από θεατρικές τεχνικές για την επίτευξη των μαθησιακών στόχων. Εξάλλου οι Heibert και Wearne (1996) υποστηρίζουν ότι ο εναλλακτικός τρόπος διδασκαλίας επηρεάζει θετικά το επίπεδο κατανόησης των μαθητών. Εν κατακλείδι, κρίνεται απαραίτητη μια έρευνα διδακτικής παρέμβασης με τον συγκερασμό αυτών των δύο· δηλαδή της υπέρβασης δεκάδας και της διερευνητικής δραματοποίησης ή με οποιαδήποτε άλλη μέθοδο που να σχετίζεται με τη δραματοποίηση (Drama in Education) με θεατρικές τεχνικές (ακίνητη – παγωμένη εικόνα και δάσκαλος σε ρόλο) που να απευθύνεται σε μαθητές πρώτης δημοτικού.

III. ΣΤΟΧΟΙ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Σκοπός

Σκοπός της έρευνας είναι να διερευνηθεί η συμβολή της διερευνητικής δραματοποίησης μέσω διαφόρων τεχνικών (ακίνητη/παγωμένη εικόνα και Δάσκαλος σε Ρόλο) κατά τη διδασκαλία της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, στην υπέρβαση δεκάδας στην Α΄ Δημοτικού, αλλά και της αφαίρεσης ως πρόσθεση.

Ερευνητικά ερωτήματα

- Η διερευνητική δραματοποίηση επιδρά θετικά στην κατανόηση της υπέρβασης δεκάδας προσθετικά;
- Η διερευνητική δραματοποίηση επιδρά θετικά στην κατανόηση της υπέρβασης δεκάδας αφαιρετικά ή στην αφαίρεση ως πρόσθεση;

- Οι σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα συμβάλλουν στην κατανόηση της πρόσθεσης στην υπέρβαση δεκάδας;
- Μπορούν οι μαθητές να δημιουργήσουν συνδέσεις των δύο πράξεων, ώστε να διαπιστωθεί ότι έχουν κατανοήσει την ουσία της πρόσθεσης και της αφαίρεσης;
- Έχει διατηρηθεί η γνώση στην υπέρβαση δεκάδας προσθετικά μετά από δύο μήνες;

Ορισμοί

Πρόσθεση και αφαίρεση

Για να κατανοήσουν οι μαθητές/τριες την πρόσθεση και την αφαίρεση πρέπει να αναπτύξουν την αντίληψη των αριθμητικών πράξεων (Van de Walle et al., 2017). Όταν σκέφτονται πόσα αντικείμενα έχουν μετά από κάποια αλλαγή ή συγκρίνουν ποσότητες αναπτύσσουν αυτή την αντίληψη και τις αλληλένδετες σημασίες που έχουν οι πράξεις σε πραγματικά γεγονότα. Καθώς αναπτύσσουν αυτή την αντίληψη των πράξεων, πρέπει ταυτόχρονα να αναπτύξουν την κατανόηση των αριθμών και τους βασικούς συνδυασμούς τους (Van de Walle et al., 2017). Στην ουσία για να αναπτυχθεί η γνώση στην πρόσθεση και στην αφαίρεση χρειάζονται τρία στοιχεία. Πρώτο, οι σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα, δεύτερο οι πράξεις με αριθμούς μετά την πρώτη δεκάδα και τρίτο το πλαίσιο μέσα στο οποίο γίνεται η πράξη (Τζεκάκη, 2010).

Το πλαίσιο μέσα στο οποίο εμφανίζονται τα προβλήματα κατηγοριοποιούνται ως εξής: προβλήματα σύζευξης και διαχωρισμού ή αλλιώς συνδυάζω, τα προβλήματα μέρους – μέρους – όλου ή αλλιώς αλλάζω και τα προβλήματα σύγκρισης (Τζεκάκη, 2010; Van de Walle et al., 2017; Clements & Sarama, 2009).

Εν κατακλείδι κάνουμε πρόσθεση όταν γνωρίζουμε τα μέρη ενός συνόλου και θέλουμε να προσδιορίσουμε το σύνολο με βάση τα μέρη. Περιλαμβάνει περιπτώσεις προβλημάτων όπου υπάρχει κάποια ενέργεια, όσο και στις περιπτώσεις που δεν υπάρχει (Van de Walle et al., 2017). Κάνουμε αφαίρεση, όταν γνωρίζουμε το σύνολο και ένα από τα μέρη του συνόλου και θέλουμε να προσδιορίσουμε το άλλο μέρος (Van de Walle et al., 2017).

Υπέρβαση δεκάδας (Break Apart to Make Ten - BAMT)[10]

Παρατηρώντας από τους πίνακες των στρατηγικών, η υπέρβαση δεκάδας είναι μια στρατηγική 3ου επιπέδου στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές σε προσθέσεις και αφαιρέσεις μονοψήφιων αριθμών και ισχύει τόσο στην πρόσθεση όσο και στην αφαίρεση. Πρόκειται για μια κατασκευαστική στρατηγική και δημιουργεί προβλήματα τόσο στους δασκάλους ως προς τη διδασκαλία τους όσο και στους μαθητές ως προς την κατανόηση. Το δεύτερο το υποστηρίζει και ο Λεμονίδης (2013, σελ. 91). Στην πρόσθεση ο μαθητής δουλεύει ως εξής: 9 + 6 γίνεται 9 + 1 = 10, 10 + 5 = 15. Ο μαθητής, δηλαδή, κρατάει τον μεγάλο αριθμό 9 και χωρίζει τον αριθμό 6 σε 5 και 1, ώστε να δώσει το 1 στο 9 για τη δημιουργία του 10. Στη συνέχεια βάζει και το 5, να γίνει πιο εύκολο το αποτέλεσμα. Στην αφαίρεση ως εξής: 15 – 9 γίνεται 15 - 5 = 10, 10 – 4 = 6. Αφαιρεί, δηλαδή, από τον πρώτο όρο, για να φτάσει στο 10 και μετά αφαιρεί και τον υπόλοιπο αριθμό, για να φτάσει στο αποτέλεσμα.

Αφαίρεση ως πρόσθεση (με πρόσθεση προς τα πάνω)

Εδώ οι μαθητές χρησιμοποιούν την πρόσθεση προς τα πάνω για να βρουν το αποτέλεσμα και είναι μια στρατηγική 3ου επιπέδου στρατηγικών. Στην αφαίρεση 15-9 λειτουργούν ως εξής: πηγαίνουν από το 9 στο 10 (θέλει 1) και από το 10 στο 15 (θέλει άλλα 5). Προσθέτουν τα βήματα που χρειάστηκαν για να ανέβουν (το 6), που είναι και το αποτέλεσμα. Η αφαίρεση ως προσθετική σκέψη είναι πολύ σημαντική για την εκμάθηση των δεδομένων της αφαίρεσης (Van de Walle et al., 2017).

Διερευνητική δραματοποίηση (inquiry drama)

Η διερευνητική δραματοποίηση είναι μια διδακτική μέθοδος και, ταυτόχρονα, διαδικασία μελέτης της κοινωνικής πραγματικότητας (Παπαδόπουλος, 2004, όπ. αναφ. Παπαδόπουλος, 2007c) η οποία μπορεί να αποτελέσει ένα εναλλακτικό μέσο στην απόκτηση μαθηματικών γνώσεων, ενταγμένων σε διαθεματικά πλαίσια. Συνεπώς, συνηθισμένες μαθηματικές δραστηριότητες αποκτούν ενδιαφέρον, όταν αποτελέσουν αντικείμενο μιας φανταστικής ιστορίας, όπου οι χαρακτήρες της θα εμπλακούν με στόχο τη διερεύνησή της (Παπαδόπουλος, 2007c). Η διαφορά από την παραδοσιακή διδασκαλία των μαθηματικών είναι ότι με τη δραματοποίηση η επίλυση των προβλημάτων εντάσσεται σε ένα φανταστικό περιβάλλον. Κι αυτό γίνεται με

[10] (Sarama & Clements, 2009, όπ. αναφ. Van de Walle et al., 2017)

σκοπό τα πρόσωπα να εξελίξουν τη δράση. Έτσι τα παιδιά έχουν τη δυνατότητα να βιώσουν τη δραματική ένταση και οι πράξεις τους να αποκτήσουν νόημα, καθώς υπάρχει σοβαρός λόγος να τις πραγματοποιήσουν (Παπαδόπουλος, 2007c). Βασικό στοιχείο της επιτυχίας των δραστηριοτήτων της δραματοποίησης είναι οι κατάλληλες ερωτήσεις του δασκάλου σε ρόλο θεατρικό αλλά και εκτός ρόλου ως προς το περιεχόμενο, γιατί ενεργοποιεί, έτσι, τη συμμετοχή των παιδιών. Ο δάσκαλος εκτός ρόλου στην αρχή εισάγει το προς διερεύνηση θέμα και ζητά από τα παιδιά να αναλάβουν ρόλους. Η εισαγωγή μπορεί να γίνει με ένα ποίημα, μύθο ή τραγούδι που να έχουν έντονα το στοιχείο των αριθμών (Παπαδόπουλος, 2007c). Τα στάδια ανάπτυξης της διερευνητικής δραματοποίησης είναι τα εξής (Παπαδόπουλος, 2007c):

α. Η δημιουργία ατμόσφαιρας ομάδας (εμπλέκονται σε σύντομα παιχνίδια, που αφορούν στη σωματική έκφραση, την παρατήρηση και την προς διερεύνηση μαθηματική ενότητα.
β. Η γνωριμία με το αρχικό περιβάλλον (έρχονται σε επαφή με το αρχικό περιβάλλον που εισάγει ο δάσκαλος το οποίο θα αποτελέσει τη βάση για την απόκτηση της μαθηματικής γνώσης).
γ. Η δημιουργία νέου δραματικού περιβάλλοντος (επισημαίνουν τα στοιχεία του δραματικού περιβάλλοντος, εμπλέκονται στη δράση και το στοχασμό με βάση θεατρικές τεχνικές που εισάγει ο δάσκαλος).
δ. Η αξιολόγηση (αξιολογούν τη μαθητική και δραματική τους εμπειρία).
ε. Η παρουσίαση (αν το θελήσουν παρουσιάζουν την δουλειά τους σε κοινό συμμαθητών).

Η Κοντογιάννη (2012α, σελ. 43) τη χωρίζει σε τρία στάδια (σύμφωνα με τον χρόνο): εισαγωγή στη δραματοποίηση (είναι στάδιο προετοιμασίας και αφορά σε ποικίλες και επιμέρους εκφράσεις, όπως ασκήσεις του σώματος, των χεριών, της παρατηρητικότητας, θεατρικά παιχνίδια, κ.α.), καθαυτό δραματοποίηση (αφόρμηση, χωρισμός σε ρόλους, στάδιο προετοιμασίας, στάδιο σύνθεσης, στάδιο έκφρασης) και αξιολόγηση η οποία αποτελείται από τρία σκέλη: το πρώτο αφορά τα μέλη της ομάδας, το δεύτερο τη διαδικασία της δραματοποίησης και το τρίτο την αυτοκριτική στην εργασία του εκπαιδευτικού.

IV. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1.Μέθοδος

Στην παρούσα έρευνα επιλέχθηκε η μέθοδος του «διδακτικού πειράματος». Το διδακτικό πείραμα (teaching experiment) αποτελεί μια εναλλακτική προσέγγιση για την μελέτη της διδακτικής παρέμβασης, καθώς και μέθοδο μελέτης της αλληλένδετης σχέσης μεταξύ της διδασκαλίας και της μάθησης. Μας παραπέμπει να δούμε το πείραμα σε άρρηκτη σχέση με τη διδακτική διαδικασία. Έχει θεωρητικές καταβολές στο πλαίσιο των θεωριών της «κοινωνικο-πολιτισμικής ψυχολογίας» και του «ριζοσπαστικού κονστρουκτιβισμού» (Χρονάκη, 2010). Το διδακτικό πείραμα του ερευνητή υλοποιήθηκε στο πλαίσιο της θεωρίας της κοινωνικο-πολιτισμικής ψυχολογίας, όπου σημαντικό ρόλο έχει η διαμεσολάβηση ‘μέσων’[11] όπως η δραματοποίηση. Πραγματοποιήθηκαν έλεγχοι σε δύο ομάδες μαθητών/τριων (πειραματική ομάδα και ομάδα ελέγχου) και τρεις διδακτικές παρεμβάσεις στην πειραματική ομάδα.

Οι Engelhardt, Corpuz, Ozimek & Rebello (2004, pp 159) υποστηρίζουν ότι το διδακτικό πείραμα α) επιτρέπει τη δοκιμή νέων τεχνικών διδασκαλίας, η ανάλυση του οποίου μπορεί να προσδιορίσει ποια τεχνική προσέφερε στους μαθητές την πιο εννοιολογική ανάπτυξη και β) μιμείται περισσότερο το φυσικό περιβάλλον της τάξης, όταν εκτελείται με ομάδες μαθητών.

2.Δείγμα

Το δείγμα της έρευνας ήταν τα δύο τμήματα της Α΄ τάξης δημόσιου δημοτικού σχολείου του Κιλκίς. Είναι μια αστική περιοχή αποτελούμενη από γονείς διαφόρων κοινωνικών στρωμάτων. Η επιλογή του σχολείου έγινε, λόγω του ότι ο ερευνητής υπηρετεί στο συγκεκριμένο σχολείο με οργανική θέση τα τελευταία εφτά χρόνια. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η δειγματοληψία της έρευνας χαρακτηρίζεται ως δείγμα βολικής δειγματοληψίας (Cohen, Manion, & Morrison, 2007).

[11] Σύμφωνα με τον (Vygotsky, 1978) η επίδραση των ψυχολογικών εργαλείων και μέσων στη διαδικασία ανάπτυξης και μάθησης είναι καταλυτική, καθώς η χρήση τους αναδομεί και μετασχηματίζει ψυχολογικές διεργασίες όπως, η μνήμη, οι στρατηγικές μάθησης και οι μεταγνωστικές δεξιότητες δημιουργώντας ‘ζώνες επικείμενης ανάπτυξης’ (Χρονάκη, 2010).

Από τα 2 τμήματα της έρευνας το πρώτο τμήμα της Α΄ τάξης ήταν η πειραματική ομάδα αποτελούμενη από 19 μαθητές και συγκεκριμένα 10 κορίτσια και 9 αγόρια. Το δεύτερο τμήμα της Α΄ τάξης ήταν η ομάδα ελέγχου αποτελούμενη από 19 μαθητές και συγκεκριμένα από 9 κορίτσια και 10 αγόρια. Στο δείγμα συμμετείχαν και από δύο μαθητές/τριες σε κάθε τμήμα με μαθησιακές δυσκολίες. Ο διαχωρισμός της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου έγινε με τυχαία επιλογή. Η επιλογή της πειραματικής ομάδας έγινε μετά από διαλογική συζήτηση μεταξύ του ερευνητή και των δύο εκπαιδευτικών των τμημάτων της Α΄ τάξης. Εφαρμόστηκε και εδώ η βολική δειγματοληψία (Cohen, Manion, & Morrison, 2007).

3.Εργαλεία

Για την υλοποίηση της έρευνας δημιουργήθηκε ένα σύνολο έργων χωρισμένο σε τρία στάδια τόσο στη διδασκαλία της πρόσθεσης όσο και της αφαίρεσης, με σκοπό να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα του ερευνητή.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ

Πρώτο στάδιο (προέλεγχος - pre-test)

Το ερευνητικό εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε είναι η συνέντευξη βασισμένη σε έργα[12] (task-based interview) και ένα φύλλο παρατήρησης[13]. Οι συνεντεύξεις βασισμένες σε έργα έχουν χρησιμοποιηθεί από ερευνητές στην ποιοτική έρευνα στην εκπαίδευση των μαθηματικών ώστε να κατανοήσουν τον τρόπο που ένα άτομο ή μια ομάδα μαθητών αναπτύσσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις (Maher & Sigley, 2014, pp. 579). Η συνέντευξη βασίστηκε σε ένα σύνολο έργων[14] που αποτελείται από δύο άξονες, με σκοπό να γίνει προέλεγχος των γνώσεων των μαθητών, ώστε να συγκριθούν με τα αποτελέσματα του μεταελέγχου.

Ο πρώτος άξονας εξετάζει τις γνώσεις των μαθητών στις σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα, καθώς και το επίπεδο της στρατηγικής που χρησιμοποιούν. Αποτελείται από τρεις διακριτές ασκήσεις 1,2,3 όπου κάθε άσκηση περιλαμβάνει τρία ερωτήματα. Οι δύο πρώτες ασκήσεις αφορούν ενδεικτικά τις

---

[12] Όλα τα έργα της έρευνας επιλέχθηκαν από την επιβλέπουσα καθηγήτρια και τον ερευνητή, με σκοπό να ανταποκρίνονται στους στόχους και τα ερευνητικά ερωτήματα.

[13] Βλέπε στο παράρτημα. Φύλλο παρατήρησης 1.

[14] Βλέπε στο παράρτημα. Φύλλο ασκήσεων 1.

σταθερές σχέσεις των αριθμών ως το 9 και η τρίτη άσκηση τις σταθερές σχέσεις των αριθμών του 10. Κάθε άσκηση έχει χωριστεί σε 3 ερωτήματα με διαφορετικό βαθμό δυσκολίας. Στο $1^{ο}$ ερώτημα η απόσταση ανάμεσα στον αφαιρετέο και τη διαφορά που πρέπει να βρουν οι μαθητές είναι μικρή (στις ασκήσεις 1 και 2 ελέγχουμε τις γνώσεις των παιδιών στα διπλά). Στο $2^{ο}$ ερώτημα η απόσταση ανάμεσα στον αφαιρετέο και τη διαφορά είναι περίπου στη μέση, ενώ στο $3^{ο}$ ερώτημα η απόσταση ανάμεσα στον αφαιρετέο και τη διαφορά είναι μεγαλύτερη.

Ο δεύτερος άξονας (άσκηση 4) εξετάζει τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών στην υπέρβαση της δεκάδας προσθετικά, σε συνδυασμό με το επίπεδο αλλά και το υποεπίπεδο στρατηγικής που χρησιμοποιούν για την επίλυση των ασκήσεων.

Σε όλη τη διάρκεια των συνεντεύξεων οι απαντήσεις των μαθητών καταγράφονταν σε ένα οργανωμένο πλαίσιο παρατήρησης,[15] το οποίο σχεδιάστηκε, βάσει των αξόνων των έργων της συνέντευξης. Σκοπός του φύλλου παρατήρησης ήταν να καταγραφεί το επίπεδο των στρατηγικών που χρησιμοποιεί κάθε μαθητής για την επίλυση των έργων στον $1^{ο}$ άξονα και το επίπεδο των στρατηγικών και υποστρατηγικών[16] που χρησιμοποιεί ο μαθητής για την επίλυση των έργων στον $2^{ο}$ άξονα. Παρακάτω (στον Πίνακα α) φαίνονται οι πιθανές απαντήσεις των μαθητών στα έργα που δόθηκαν, όπως οργανώθηκαν και στο φύλλο παρατήρησης.

Πίνακας α

Έργα	Πιθανές απαντήσεις											
	Στρατηγικές											
$1^{ος}$ άξονας	$1^{ο}$ επίπεδο	$2^{ο}$ επίπεδο				$3^{ο}$ επίπεδο						Σ/Λ
$2^{ος}$ άξονας	$1^{ο}$ επίπεδο	$2^{ο}$ επίπεδο				$3^{ο}$ επίπεδο						
	Υποστρατηγικές											
	1	1	2	3	4	1	2	3	4	5	ανάκληση	Σ/Λ

$1^{ος}$ άξονας: οι πιθανές απαντήσεις των μαθητών στα έργα ενδέχεται να ανήκουν στο $1^{ο}$ ή $2^{ο}$ ή $3^{ο}$ επίπεδο στρατηγικής, με ενδεχόμενο να είναι είτε σωστές είτε λανθασμένες (Σ/Λ).

$2^{ος}$ άξονας: οι πιθανές απαντήσεις των μαθητών στα έργα ενδέχεται να ανήκουν είτε στο $1^{ο}$ επίπεδο στρατηγικής (και συγκεκριμένα στην $1^{η}$ υποστρατηγική), είτε στο $2^{ο}$ επίπεδο στρατηγικής (και συγκεκριμένα στην $1^{η}$ ή στην $2^{η}$ ή στην $3^{η}$ ή στην $4^{η}$

[15] Βλέπε στο παράρτημα. Φύλλο παρατήρησης 1.

[16] Οι στρατηγικές και υποστρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές/τριες έχουν αναφερθεί και αναλυθεί στην ενότητα 2.4 Στρατηγικές νοερών υπολογισμών.

υποστρατηγική), είτε στο 3^{ο} επίπεδο στρατηγικής (και συγκεκριμένα στην 1^{η} ή στην 2^{η} ή στην 3^{η} ή στην 4^{η} ή στην 5^{η} υποστρατηγική) ή με άμεση ανάκληση, με ενδεχόμενο να είναι σωστές ή λανθασμένες (Σ/Λ).

Δεύτερο στάδιο (διδακτική παρέμβαση)

Η διδακτική παρέμβαση πραγματοποιήθηκε στην πειραματική ομάδα[17] από τον ερευνητή, έγινε στα πλαίσια του μαθήματος των μαθηματικών της Α΄ τάξης του δημοτικού σχολείου και συγκεκριμένα του κεφαλαίου 42 (προσθέσεις με υπέρβαση της δεκάδας). Μέχρι τη διαδικασία της παρέμβασης η εκπαιδευτικός της τάξης είχε ακολουθήσει τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας σε όλα τα κεφάλαια των μαθηματικών. Ο ερευνητής σχεδίασε τη διδασκαλία του μαθήματος[18] με τρόπο τέτοιο, ώστε να επιτευχθεί ο στόχος της ενότητας, ο οποίος είναι η παρουσίαση στους μαθητές της πρόσθεσης με τη μέθοδο της υπέρβασης της δεκάδας (Λεμονίδης, Θεοδώρου, Καψάλης, & Πνευματικός, 2007). Το εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε ήταν η διερευνητική δραματοποίηση χωρισμένη σε δύο άξονες δραστηριοτήτων, με την χρήση των τεχνικών α) ακίνητη/παγωμένη εικόνα και β) δάσκαλος σε ρόλο. Όπως έχει αναφερθεί η διερευνητική δραματοποίηση είναι μια διδακτική μέθοδος, που αποτελεί εναλλακτικό μέσο για την απόκτηση μαθηματικών γνώσεων, ενταγμένο σε διαθεματικά πλαίσια. Οι μαθηματικές δραστηριότητες[19] γίνονται πιο ενδιαφέρουσες, όταν αποτελούν αντικείμενο φανταστικής ιστορίας και εμπλέκονται οι χαρακτήρες της με στόχο τη διερεύνησή της. Τα παιδιά εισάγονται στη φανταστική ιστορία μέσω ενός ποιήματος[20] που έχει στοιχεία αριθμών και η δράση εξελίσσεται με αυτά. Ο δάσκαλος σε θεατρικό ρόλο ενεργοποιεί τη συμμετοχή των παιδιών (Παπαδόπουλος, 2007c).

Εισαγωγή

Η εισαγωγή του μαθήματος έγινε με την ανάγνωση του ποιήματος. Υπήρξε συζήτηση μεταξύ του ερευνητή-δασκάλου με τους μαθητές πάνω στην ιστορία του

[17] Στην ομάδα ελέγχου πραγματοποιήθηκε η παραδοσιακή διδασκαλία. Ο εκπαιδευτικός δίδασκε με την παραδοσιακή διδασκαλία όλα τα μαθήματα των μαθηματικών από την αρχή ως το τέλος της σχολικής χρονιάς.
[18] Το σχέδιο διδασκαλίας του μαθήματος βρίσκεται στο παράρτημα.
[19] Με αυτή την άποψη συμφωνεί και η Τζεκάκη (2010, σελ. 51).
[20] Το ποίημα έχει γραφτεί από τον ερευνητή το 2006 και βρίσκεται στο παράρτημα.

ποιήματος, ώστε να μπορέσουν να αποδώσουν όσο το δυνατόν καλύτερα την παγωμένη εικόνα που θα επακολουθήσει (Κουκουνάρας-Λιάγκης, 2011, σελ 87).

Ακίνητη/παγωμένη εικόνα (1^{ος} άξονας)

Κατόπιν χρησιμοποιήθηκε η τεχνική της παγωμένης εικόνας για την ανάδειξη μιας στιγμής της δράσης με σκοπό τη δημιουργία ατμόσφαιρας και τη γνωριμία με το αρχικό περιβάλλον· στοιχεία που θα αποτελέσουν τη βάση για την απόκτηση της μαθηματικής γνώσης. Οι μαθητές χρησιμοποιώντας τα σώματά τους δημιούργησαν την εικόνα, η οποία αποκρυσταλλώνει τη στιγμή της δράσης. Ταυτόχρονα αφαίρεσαν το περιττό και εστίασαν στο σημαντικό, ώστε να αποδοθεί το νόημα της σκηνής (Αυδή & Χατζηγεωργίου, 2017, σελ. 78).

Δάσκαλος σε ρόλο (Δσρ) (2^{ος} άξονας)

Στη συνέχεια με, τη δημιουργία του νέου δραματικού περιβάλλοντος ο δάσκαλος μπαίνει σε ρόλο μαζί με τους μαθητές, με σκοπό να βιώσουν την εμπειρία και να προχωρήσουν στην κατανόηση του υπό διερεύνηση θέματος. Τίθενται οι κατάλληλες ερωτήσεις ως προς το περιεχόμενο από τον ερευνητή, ώστε να ενεργοποιηθεί η συμμετοχή των παιδιών (Αυδή & Χατζηγεωργίου, 2017, σελ. 43).

Βάση του δέκα (ten frame)

Το αναπαραστατικό υλικό που χρησιμοποιήθηκε για την υλοποίηση της παρέμβασης ήταν η βάση του δέκα (ten frame). Πολλοί τρόποι παράστασης μπορούν να στηρίξουν μεγάλο κομμάτι της κατανόησης των αριθμών και των αριθμητικών σχέσεων, καθώς τροφοδοτούν τα παιδιά με δυναμικές νοερές παραστάσεις. Τέτοιο αναπαραστατικό υλικό είναι και η βάση του δέκα (Τζεκάκη 2010, σελ. 293). Οι Van de Walle, Karp, και Bay-Williams (2003, pp 127) υποστηρίζουν ότι όταν τα παιδιά χρησιμοποιούν αυτές τις κάρτες (όπως η βάση του δέκα), σχεδόν οποιαδήποτε δραστηριότητα που περιλαμβάνει αριθμητικές έννοιες, οι κάρτες, τους κάνουν να σκεφτούν τους αριθμούς με πολλούς διαφορετικούς τρόπους.

Τρίτο στάδιο (μεταέλεγχος - post-test)

Το ερευνητικό εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε είναι η συνέντευξη βασισμένη σε έργα[21] (task-based interview) και ένα φύλλο παρατήρησης[22]. Στηρίχθηκε στους ίδιους άξονες με το πρώτο στάδιο (ελέγχου) με τη διαφορά ότι στις τρεις πρώτες ασκήσεις (1ος άξονας) ο ερευνητής εστίασε μόνο στη μεγάλη διαφορά που έπρεπε να βρουν οι μαθητές και στις δύο ερωτήματα των τριών ασκήσεων. Στην τέταρτη άσκηση (2ος άξονας) επιλέχτηκαν πέντε προσθέσεις στην υπέρβαση δεκάδας έναντι των τριών του σταδίου προελέγχου. Οι πιθανές απαντήσεις των μαθητών στα έργα που δόθηκαν, όπως οργανώθηκαν και στο φύλλο παρατήρησης, είναι ίδιες με του πρώτου σταδίου[23].

Οι απαντήσεις του πρώτου άξονα των έργων του προελέγχου θα συγκριθούν με τις αντίστοιχες απαντήσεις του ίδιου άξονα μεταελέγχου, για να απαντηθεί το 3ο ερευνητικό ερώτημα. Το εργαλείο της διδακτικής παρέμβασης σε συνδυασμό με τα έργα του δεύτερου άξονα του προελέγχου και μεταελέγχου θα απαντήσουν στο 1ο ερευνητικό ερώτημα.

ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Πρώτο στάδιο (προέλεγχος - pre-test)

Και σε αυτό το στάδιο της αφαίρεσης το ερευνητικό εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε είναι η συνέντευξη βασισμένη σε έργα (task-based interview) και ένα φύλλο παρατήρησης[24]. Η συνέντευξη βασίστηκε σε ένα σύνολο έργων,[25] που αποτελείται από τρεις άξονες. Στον πρώτο άξονα (άσκηση 1) στο σύνολο των έργων που δημιουργήθηκε, ο ερευνητής θέλει να διαπιστώσει την διατηρησιμότητα της γνώσης στην υπέρβαση δεκάδας προσθετικά. Στον δεύτερο άξονα ελέγχεται η προϋπάρχουσα γνώση στην υπέρβαση δεκάδας αφαιρετικά καθώς και το επίπεδο και υποεπίπεδο στρατηγικής που χρησιμοποιούν. Τέλος, στον τρίτο άξονα ελέγχεται κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να δημιουργήσουν συνδέσεις των δύο πράξεων, ώστε να διαπιστωθεί η κατανόηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης στην υπέρβαση δεκάδας.

[21] Βλέπε στο παράρτημα. Φύλλο ασκήσεων 2.
[22] Βλέπε στο παράρτημα. Φύλλο παρατήρησης 2.
[23] Βλέπε πίνακα α.
[24] Βλέπε στο παράρτημα. Φύλλο παρατήρησης 3.
[25] Βλέπε στο παράρτημα. Φύλλο ασκήσεων 3.

Παρακάτω, (στον Πίνακα β) φαίνονται οι πιθανές απαντήσεις των μαθητών στα έργα που δόθηκαν, όπως οργανώθηκαν και στο φύλλο παρατήρησης.

Πίνακας β

Έργα	Πιθανές απαντήσεις														
	Στρατηγικές														
	$1^{ο}$ επίπεδο				$2^{ο}$ επίπεδο				$3^{ο}$ επίπεδο						
	Υποστρατηγικές														
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5	ανάκληση	Σ/Λ
$1^{ος}$ άξονας															
$2^{ος}$ άξονας															
$3^{ος}$ άξονας															
$3^{ος}$ άξονας															

$1^{ος}$ άξονας: οι πιθανές απαντήσεις των μαθητών στα έργα ενδέχεται να ανήκουν στο $1^{ο}$ ή $2^{ο}$ ή $3^{ο}$ επίπεδο στρατηγικής και το αντίστοιχο υποεπίπεδο με ενδεχόμενο να είναι είτε σωστές είτε λανθασμένες (Σ/Λ).

$2^{ος}$ άξονας: οι πιθανές απαντήσεις των μαθητών στα έργα ενδέχεται να ανήκουν και αυτές στο $1^{ο}$ ή $2^{ο}$ ή $3^{ο}$ επίπεδο στρατηγικής και το αντίστοιχο υποεπίπεδο, με ενδεχόμενο να είναι είτε σωστές είτε λανθασμένες (Σ/Λ).

$3^{ος}$ άξονας: στα έργα αυτού του άξονα μπορεί να υπάρξει διαφοροποίηση ως προς το επίπεδο στρατηγικών αλλά και υποεπίπεδο που χρησιμοποιούν οι μαθητές, γιατί περιλαμβάνει δύο είδη πράξεων την πρόσθεση και την αφαίρεση. Οι μαθητές ενδέχεται να χρησιμοποιήσουν άλλο υποεπίπεδο στρατηγικής στην πρόσθεση και άλλο στην αφαίρεση.

Δεύτερο στάδιο (διδακτική παρέμβαση)

Η διδακτική παρέμβαση πραγματοποιήθηκε στην πειραματική ομάδα[26] από τον ερευνητή και έγινε στα πλαίσια του μαθήματος των μαθηματικών της Α΄ τάξης του δημοτικού σχολείου και συγκεκριμένα του κεφαλαίου 47 (η πρόσθεση και η αφαίρεση ως αντίστροφες πράξεις-η υπέρβαση της δεκάδας). Πραγματοποιήθηκε ένα μήνα μετά από τη διδακτική παρέμβαση της πρόσθεσης. Μέχρι τη διαδικασία της παρέμβασης η εκπαιδευτικός της τάξης συνέχισε να ακολουθεί τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας στα ενδιάμεσα κεφάλαια των μαθηματικών. Ο ερευνητής κι εδώ σχεδίασε τη διδασκαλία του μαθήματος[27] με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτευχθεί ο

[26] Στην ομάδα ελέγχου πραγματοποιήθηκε η παραδοσιακή διδασκαλία.
[27] Το σχέδιο διδασκαλίας του μαθήματος βρίσκεται στο παράρτημα.

στόχος της ενότητας, ο οποίος επιδιώκει την εκμάθηση της αφαίρεσης ως αντίστροφη διαδικασία της πρόσθεσης με τη μέθοδο της υπέρβασης δεκάδας (Λεμονίδης, Θεοδώρου, Καψάλης, & Πνευματικός, 2007, σελ 125). Ο ερευνητής δίδαξε εκτός από την υπέρβαση δεκάδας και την αφαίρεση με πρόσθεση προς τα πάνω του κεφαλαίου 49 (Λεμονίδης, Θεοδώρου, Καψάλης, & Πνευματικός, 2007, σελ 131), διότι η διδασκαλία μιας ενιαίας στρατηγικής αφαίρεσης μπορεί να μην είναι επωφελής (Carpenter et al., 1981). Το εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε ήταν η διερευνητική δραματοποίηση, χωρισμένη επίσης, σε δύο άξονες δραστηριοτήτων. Βασίστηκε στο ποίημα[28] του ερευνητή χρησιμοποιώντας τις τεχνικές α) ακίνητη/παγωμένη εικόνα ($1^{ος}$ άξονας) και β) δάσκαλος σε ρόλο ($2^{ος}$ άξονας). Το αναπαραστατικό υλικό που χρησιμοποιήθηκε ήταν η βάση του δέκα (ten frame).

Τρίτο στάδιο (μεταέλεγχος - post-test)

Το ερευνητικό εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε είναι η συνέντευξη βασισμένη σε έργα[29] (task-based interview) και ένα φύλλο παρατήρησης,[30] το οποίο στηρίχθηκε στους ίδιους άξονες με το πρώτο στάδιο (ελέγχου). Οι πιθανές απαντήσεις των μαθητών στα έργα που δόθηκαν, όπως οργανώθηκαν και στο φύλλο παρατήρησης είναι ίδιες με του πρώτου σταδίου[31].

Το εργαλείο της διδακτικής παρέμβασης σε συνδυασμό με τη σύγκριση των έργων του δεύτερου άξονα του προελέγχου και του μεταελέγχου θα απαντήσουν στο $1^{ο}$ ερευνητικό ερώτημα. Το εργαλείο της διδακτικής παρέμβασης σε συνδυασμό με τη σύγκριση των έργων του δεύτερου άξονα του προελέγχου και του μεταελέγχου θα απαντήσουν στο $2^{ο}$ ερευνητικό ερώτημα. Τα έργα του $1^{ου}$ και $2^{ου}$ άξονα και αντίστοιχα του $1^{ου}$ και $2^{ου}$ φύλλου παρατήρησης θα συγκριθούν για να απαντηθεί το $3^{ο}$ ερευνητικό ερώτημα. Στη συνέχεια, θα γίνει σύγκριση των απαντήσεων του τρίτου άξονα προελέγχου και μεταελέγχου, για να απαντηθεί το $4^{ο}$ ερευνητικό ερώτημα. Οι απαντήσεις του πρώτου άξονα των έργων του προελέγχου θα συγκριθούν με τις αντίστοιχες απαντήσεις του ίδιου άξονα μεταελέγχου, για να απαντηθεί το $5^{ο}$ ερευνητικό ερώτημα.

[28] Βλέπε στο παράρτημα.
[29] Βλέπε στο παράρτημα. Φύλλο ασκήσεων 4.
[30] Βλέπε στο παράρτημα. Φύλλο παρατήρησης 4.
[31] Βλέπε πίνακα β.

Συνοπτικά		
Εργαλεία	Σκοπός	Ερευνητικό ερώτημα
Συνέντευξη βασισμένη σε έργα, $1^{ο}$ και $2^{ο}$ φύλλο παρατήρησης (έργα $2^{ου}$ άξονα), διερευνητική δραματοποίηση	Επίδραση διερευνητικής δραματοποίησης στην υπέρβαση δεκάδας προσθετικά.	$1^{ο}$
Συνέντευξη βασισμένη σε έργα, $3^{ο}$ και $4^{ο}$ φύλλο παρατήρησης (έργα $2^{ου}$ άξονα), διερευνητική δραματοποίηση	Επίδραση διερευνητικής δραματοποίησης στην υπέρβαση δεκάδας αφαιρετικά ή της αφαίρεσης ως πρόσθεση.	$2^{ο}$
Συνέντευξη βασισμένη σε έργα, $1^{ο}$ και $2^{ο}$ φύλλο παρατήρησης (έργα $1^{ου}$ και $2^{ου}$ άξονα)	Οι σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα και η συμβολή τους στην κατανόηση της υπέρβασης δεκάδας.	$3^{ο}$
Συνέντευξη βασισμένη σε έργα, $3^{ο}$ και $4^{ο}$ φύλλο παρατήρησης (έργα $3^{ου}$ άξονα)	Σύνδεση των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ως αντίστροφη διαδικασία.	$4^{ο}$
Συνέντευξη βασισμένη σε έργα, $3^{ο}$ και $4^{ο}$ φύλλο παρατήρησης (έργα $1^{ου}$ άξονα)	Διατηρησιμότητα της υπέρβασης δεκάδας προσθετικά.	$5^{ο}$

4.Ερευνητική διαδικασία

Η έρευνα που πραγματοποιήθηκε από τον ερευνητή διήρκησε από τις 15 Μαρτίου έως τις 5 Ιουνίου του 2018. Ήταν ποιοτική και ακολουθήθηκαν τα πέντε στάδια για τη συγκέντρωση των δεδομένων, σύμφωνα με τον Creswell, (2011, σελ. 205). Στο πρώτο στάδιο, έγινε ο εντοπισμός των συμμετεχόντων καθώς και η τοποθεσία, τα οποία έχουν αναφερθεί στο δείγμα. Στο δεύτερο στάδιο, αποκτήθηκε πρόσβαση στα άτομα και στο χώρο της έρευνας μέσα από τη συνεδρίαση του συλλόγου διδασκόντων του σχολείου και την έγκριση αυτής, καθώς και την τοποθέτηση του ερευνητή σε ώρες απουσίας της εκπαιδευτικού για τη διδακτική παρέμβαση και την ολοκλήρωσή της. Τηρήθηκε η ανωνυμία των συμμετεχόντων με την απόδοση αριθμών (αντί ονοματεπώνυμου) στα ερωτηματολόγια, κρατώντας έτσι την ταυτότητά τους μυστική, ώστε να εξασφαλιστεί ο σεβασμός στην ιδιωτική τους ζωή. Ενημερώθηκαν οι συμμετέχοντες για τον σκοπό της έρευνας, καθώς και ότι η συνέντευξη δεν ήταν υποχρεωτική και θα μπορούσαν να αποχωρήσουν σε περίπτωση που δεν επιθυμούσαν τη συνέχισή της για διάφορους προσωπικούς τους λόγους. Στο τρίτο στάδιο εξετάστηκε ποια είδη πληροφοριών θα απαντήσουν καλύτερα τα ερευνητικά ερωτήματα. Στο τέταρτο στάδιο σχεδιάστηκαν τα έργα της συνέντευξης και το φύλλο παρατήρησης, για να συγκεντρωθούν και να καταγραφούν οι πληροφορίες. Ο ερευνητής ενημέρωσε τους μαθητές ότι δεν υπάρχει όριο χρόνου για τη συνέντευξη, με σκοπό να μειωθεί το άγχος τους, να υπάρχει ένα κλίμα εμπιστοσύνης αλλά και να σκέφτονται πιο ελεύθερα. Η διάρκεια των συνεντεύξεων ήταν γύρω στα 5 με 10 λεπτά με ελάχιστες εξαιρέσεις των 15 λεπτών και τηρήθηκαν οι ίδιες διαδικασίες για όλους τους μαθητές. Πραγματοποιήθηκε μέσα στην τάξη την ώρα του μαθήματος των εικαστικών σε μια γωνιά της αίθουσας διδασκαλίας, χωρίς να παρενοχλούνται οι υπόλοιποι μαθητές και η εκπαιδευτικός της τάξης. Οι ερωτήσεις γίνονταν προφορικά και οι απαντήσεις καταγράφονταν από τον ερευνητή στο φύλλο ασκήσεων. Ταυτόχρονα, γινόταν και η καταγραφή της απάντησης (από τον ερευνητή) στο φύλλο παρατήρησης. Σημειωνόταν εάν ήταν σωστή ή λανθασμένη αλλά και το επίπεδο στρατηγικής (ή υποστρατηγικής όπου χρειαζόταν) που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές. Στο πέμπτο και τελευταίο στάδιο έγινε η συγκέντρωση των δεδομένων, δίνοντας ιδιαίτερη προσοχή σε πιθανά ηθικά ζητήματα που ίσως προέκυπταν.

5.Αξιοπιστία και εγκυρότητα

Σε όλη τη διαδικασία της συγκέντρωσης και της ανάλυσης των δεδομένων πρέπει να βεβαιωνόμαστε για την ακρίβεια των ευρημάτων και των ερμηνειών που δίνουμε. Η επικύρωση των ευρημάτων προσδιορίζει την ακρίβεια και την φερεγγυότητά τους μέσα από στρατηγικές όπως η τριγωνοποίηση. Η χρήση διαφορετικών μεθόδων συγκέντρωσης δεδομένων (φύλλα παρατηρήσεων, συνεντεύξεις βασισμένες σε έργα) προάγει την ακρίβεια της μελέτης σε μια ποιοτική έρευνα (Creswell, 2011). Τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν αντιστοιχούν στα ερευνητικά ερωτήματα και τους εννοιολογικούς προσδιορισμούς. Τα φύλλα παρατήρησης και οι συνεντεύξεις βασισμένες σε έργα διασταυρώθηκαν προκειμένου να επιβεβαιωθούν τα ευρήματα μέσω της τριγωνοποίησης. Τέλος οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν με το ίδιο εργαλείο, το ίδιο δείγμα καθώς και κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Υπήρξε δηλαδή μια σταθερότητα μέτρησης.

6.Ανάλυση δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων συγκεντρώθηκαν τα φύλλα παρατήρησης και τα φύλλα από τα έργα των μαθητών. Έγινε ποιοτική ανάλυση των δεδομένων από τα φύλλα παρατήρησης και τα φύλλα των έργων που συλλέχθηκαν. Τα δεδομένα συνδυάστηκαν προκειμένου να διαπιστωθεί εάν επιδρά θετικά η διερευνητική δραματοποίηση στην υπέρβαση δεκάδας, εάν οι σταθερές σχέσεις των αριθμών επηρεάζουν την κατανόησή της, εάν μπορούν οι μαθητές να δημιουργήσουν συνδέσεις των δύο πράξεων καθώς και εάν έχει διατηρηθεί η γνώση στην υπέρβαση δεκάδας προσθετικά. Συμπληρωματικά έγινε και ποσοτική ανάλυση βάση των φύλλων παρατηρήσεως με σκοπό να φανεί η διαφορά της πειραματικής ομάδας με την ομάδα ελέγχου στα τελικά έργα.

V. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Το δείγμα που συμμετείχε στην έρευνα αποτελούταν από 38 παιδιά, 19 σε κάθε τμήμα. Το κάθε τμήμα είχε από 2 παιδιά που αντιμετωπίζουν μαθησιακές δυσκολίες, όπως φαίνεται στον πίνακα 1.

Πίνακας 1. Δείγμα

	Π.Ο.		Ο.Ε.	
Μαθητές	χ. μαθησιακές[32]	μ. μαθησιακές[33]	χ. μαθησιακές	μ. μαθησιακές
αγόρια	9		9	1
κορίτσια	8	2	8	1
σύνολο	19		19	

Όλα τα παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα κατάφεραν να λύσουν τις ασκήσεις με διάφορες στρατηγικές σωστά, ενώ υπήρχαν ορισμένες λανθασμένες απαντήσεις. Ο χρόνος που χρειάστηκαν για την επίλυσή τους ήταν γύρω στα 5 έως 10 λεπτά. Εξαίρεση αποτελούν τα 4 παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες, τα οποία χρειάστηκαν γύρω στα 15 λεπτά, για να ολοκληρώσουν κάθε φύλλο ασκήσεων. Παρόλο που κάποιες ασκήσεις τους δυσκόλεψαν κανένα παιδί δεν τα παράτησε, γιατί το θεώρησαν σαν πρόκληση και ήταν μια διαδικασία που δεν είχαν ξαναζήσει. Μόνο ένα παιδί από την πειραματική ομάδα στο $1^{ο}$ φύλλο εργασίας της πρόσθεσης δεν απάντησε τις δύο τελευταίες ασκήσεις διότι, όπως μου ανέφερε «Κουράστηκα κύριε.

[32] Χωρίς μαθησιακές δυσκολίες.
[33] Με μαθησιακές δυσκολίες.

Γίνεται να σταματήσουμε και να συνεχίσουμε αύριο;» δεν έφερα καμία αντίρρηση και εκπλήρωσα την επιθυμία της. Δύο μαθητές από την ομάδα ελέγχου, εμφάνισαν ευελιξία στις απαντήσεις του $2^{ου}$ άξονα των ασκήσεων του φύλλου εργασιών της πρόσθεσης αλλά και του $1^{ου}$ άξονα του φύλλου εργασιών της αφαίρεσης, που αφορούσαν στην υπέρβαση της δεκάδας προσθετικά.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ

$1^{ο}$ φύλλο ασκήσεων (προέλεγχος/pre-test)

Το αρχικό φύλλο ασκήσεων ($1^{ο}$) αποτελούνταν από 2 άξονες. Χορηγήθηκε και στις δύο ομάδες, για να διαπιστωθεί η γνώση τους στις σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα ($1^{ος}$ άξονας) και η προϋπάρχουσα γνώση τους στην υπέρβαση δεκάδας ($2^{ος}$ άξονας).

Πίνακας 2. Σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα.

1η Άσκηση:	**3+πόσα=6**		**4+πόσα=7**		**2+πόσα=9**	
Επίπεδο στρατηγικής	Αποτελέσματα					
	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.
ΣΩΣΤΟ						
$1^{ο}$ επίπεδο	1	1	1		1	
$2^{ο}$ επίπεδο	6	6	7	10	9	11
$3^{ο}$ επίπεδο	11	10	8	6	4	4
ΛΑΘΟΣ						
$1^{ο}$ επίπεδο	1	2	1	3	1	3
$2^{ο}$ επίπεδο			2		3	1
$3^{ο}$ επίπεδο					1	

Πίνακας 3. Σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα.

2η Άσκηση:	**8-πόσα=4**		**7-πόσα=3**		**9-πόσα=3**	
Επίπεδο στρατηγικής	Αποτελέσματα					
	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.
ΣΩΣΤΟ						
$1^{ο}$ επίπεδο	1	1	1		1	
$2^{ο}$ επίπεδο	7	8	9	12	10	11
$3^{ο}$ επίπεδο	9	8	6	3	4	2
ΛΑΘΟΣ						
$1^{ο}$ επίπεδο	1	2	1	3	1	3
$2^{ο}$ επίπεδο			1	1	2	3
$3^{ο}$ επίπεδο	1		1		1	

Από τον πίνακα 2 και 3 παρατηρείται ότι σχεδόν όλοι οι μαθητές και της πειραματικής αλλά και της ομάδας ελέγχου απάντησαν σωστά στο $1^{ο}$ ερώτημα, το οποίο αφορούσε στα διπλά αθροίσματα. Οι μισοί σχεδόν μαθητές βρίσκονται στο 2^{o} επίπεδο στρατηγικής χρησιμοποιώντας την αρίθμηση με δάκτυλα. Οι υπόλοιποι μισοί μαθητές βρίσκονται στο 3^{o} επίπεδο, ανακαλώντας άμεσα το αποτέλεσμα εφόσον γνωρίζουν καλά τα διπλά αθροίσματα. Στο 2^{o} ερώτημα, σχετικά με την μεσαία διαφορά των αριθμών οι μαθητές δείχνουν μια δυσκολία στην εύρεση του αποτελέσματος. Αυτό φαίνεται από το 2^{o} επίπεδο της στρατηγικής που χρησιμοποιούν οι περισσότεροι μαθητές και στις δύο ομάδες, με μια μικρή υπεροχή της πειραματικής ομάδας ως προς το 3^{o} επίπεδο. Στο 3^{o} ερώτημα που αφορά στη μεγάλη διαφορά των αριθμών και οι δύο ομάδες δυσκολεύτηκαν να βρουν το αποτέλεσμα, χρησιμοποιώντας το 2^{o} επίπεδο στρατηγικής. Στο παρόν εντοπίστηκαν και τα περισσότερα λάθη και από τις δύο ομάδες, ως αποτέλεσμα της μεγάλης διαφοράς των αριθμών που έπρεπε να βρουν. Οι μαθητές με τις μαθησιακές δυσκολίες δεν απάντησαν ορθά σχεδόν σε κανένα ερώτημα.

Πίνακας 4. Σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα.

3η Άσκηση:	**7+πόσα=10**		**6+πόσα=10**		**2+πόσα=10**	
Επίπεδο στρατηγικής	Αποτελέσματα					
	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.
ΣΩΣΤΟ						
1	2	1	2		1	
2	14	11	13	11	13	10
3	2	5	2	5	2	5
ΛΑΘΟΣ						
1	1	2	1	3	2	3
2			1		1	1
3						

Στον πίνακα 4 διαπιστώνεται ότι η πλειοψηφία των μαθητών και των δύο ομάδων βρίσκεται στο 2^{o} επίπεδο στρατηγικής στις σταθερές σχέσεις του 10, με τα περισσότερα λάθη να εντοπίζονται στο 3^{o} ερώτημα της μεγάλης διαφοράς των αριθμών.

Πίνακας 5α. Προϋπάρχουσα γνώση στην υπέρβαση δεκάδας. Επίπεδο στρατηγικών.

4η Άσκηση:	**9+5=**		**8+4=**		**9+7=**	
Επίπεδο στρατηγικής	Αποτελέσματα					
	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.
ΣΩΣΤΟ						
1^{o} επίπεδο	1					
2^{o} επίπεδο	10	11	13	12	10	13
3^{o} επίπεδο	2	2		2	1	2
ΛΑΘΟΣ						
1^{o} επίπεδο	2	3	3	3	3	3
2^{o} επίπεδο	3	3	2	2	4	1

3ο επίπεδο	1	1	1

Στην 4η άσκηση, που ελέγχει την προϋπάρχουσα γνώση στην υπέρβαση δεκάδας στον πίνακα 5α φαίνεται ότι σχεδόν όλοι οι μαθητές της πειραματικής αλλά και της ομάδας ελέγχου αντιμετωπίζουν δυσκολία στο να εκτελέσουν τις πράξεις είτε με άμεση ανάκληση είτε κατασκευαστικά. Επισημαίνεται ότι χρησιμοποιούν στρατηγικές του 2ου επιπέδου και συγκεκριμένα την αρίθμηση από τον μεγαλύτερο αριθμό (4η υποστρατηγική), όπως φαίνεται και στον πίνακα 5β. Υπάρχουν αρκετά λάθη και στις 3 ασκήσεις του 2ου άξονα· γεγονός που οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί ακόμη την υπέρβαση δεκάδας.

Πίνακας 5β. Ανάλυση υποστρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές.

4η Άσκηση:		**9+5=**		**8+4=**		**9+7=**	
Επίπεδο στρατηγικής		Αποτελέσματα					
	Υποστρατηγική	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.
ΣΩΣΤΟ							
1ο	1	1					
2ο	1				1		
	2						
	3	1		1		1	
	4	9	11	12	11	8	13
3ο	1						
	2						
	3				1		
	4	1	2			1	2
	5						
	Άμεση ανάκληση	1			1		
ΛΑΘΟΣ							
1ο	1	2	3	4	3	4	3
2ο	1		1				
	2						
	3						
	4	3	2	1	2	4	1
3ο	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	Άμεση ανάκληση	1		1		1	

Από τα παραπάνω αποτελέσματα των δύο αξόνων των ερωτήσεων ουσιαστικά εξάγεται το συμπέρασμα ότι υπάρχει μια ισοδυναμία των δύο ομάδων στο σύνολό της ως προς τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν για την επίλυση των έργων αλλά και ως προς τα λάθη τους.

2^{o} φύλλο ασκήσεων (μεταέλεγχος/post-test)

Το 2^{o} φύλλο ασκήσεων δόθηκε στους μαθητές μετά τη διδακτική παρέμβαση της πρόσθεσης, ώστε να διαπιστωθεί εάν έχει επηρεάσει θετικά η διερευνητική δραματοποίηση στην κατανόηση της υπέρβασης δεκάδας προσθετικά τους μαθητές της πειραματικής ομάδας, έναντι της παραδοσιακής διδασκαλίας της ομάδας ελέγχου και εάν έχουν επηρεαστεί οι γνώσεις τους στις σταθερές σχέσεις στη δεκάδα.

Πίνακας 6.

1η Άσκηση:

Αποτελέσματα	**3+πόσα=9**		**2+πόσα=8**	
	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.
ΣΩΣΤΟ				
1^{o} επίπεδο				1
2^{o} επίπεδο	16	12	16	12
3^{o} επίπεδο	2	4	2	4
ΛΑΘΟΣ				
1^{o} επίπεδο	1	3	1	2
2^{o} επίπεδο				
3^{o} επίπεδο				

Πίνακας 7.

2η Άσκηση:

Αποτελέσματα	**9-πόσα=4**		**8-πόσα=3**	
	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.
ΣΩΣΤΟ				
1^{o} επίπεδο				
2^{o} επίπεδο	16	13	16	14
3^{o} επίπεδο	2	3	2	2
ΛΑΘΟΣ				
1^{o} επίπεδο	1	3	1	3
2^{o} επίπεδο				
3^{o} επίπεδο				

Πίνακας 8.

3η Άσκηση:

Αποτελέσματα	**4+πόσα=10**		**3+πόσα=10**	
	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.
ΣΩΣΤΟ				
1^{o} επίπεδο	1		1	1
2^{o} επίπεδο	10	10	12	13
3^{o} επίπεδο	5	6	4	3
ΛΑΘΟΣ				

1^{ο} επίπεδο	1	3	1	2
2^{ο} επίπεδο	2		1	
3^{ο} επίπεδο				

Όπως διαφαίνεται από τον πίνακα 6, 7 και 8 δεν υπήρξε μεταβολή στις γνώσεις των παιδιών στις σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα και ειδικά στις μεγάλες διαφορές των αριθμών όπου εστίασε ο ερευνητής. Οι περισσότεροι μαθητές εξακολουθούν να υπολογίζουν με το 2^{ο} επίπεδο στρατηγικής και στις δύο ομάδες.

Πίνακας 9α. Επίπεδο στρατηγικών

4η Άσκηση:

Αποτελέσματα	**9+3=**		**8+5=**		**9+6=**		**7+6=**		**9+8=**	
	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.
ΣΩΣΤΟ										
1^{ο} επίπεδο										
2^{ο} επίπεδο	6	13	11	12	2	11	14	15	1	11
3^{ο} επίπεδο	12	1	5	3	15	4	3		15	3
ΛΑΘΟΣ										
1^{ο} επίπεδο	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3
2^{ο} επίπεδο		1	2	1	1	1	1	1	2	1
3^{ο} επίπεδο		1								1

Πίνακας 9β. Ανάλυση υποστρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές.

4η Άσκηση:		**9+6=**		**7+6=**		**9+8=**	
Επίπεδο στρατηγικής		Αποτελέσματα					
	Υποστρατηγική	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.
ΣΩΣΤΟ							
1^{ο} επ.	1						
2^{ο} επ.	1						
	2						
	3						
	4	2	11	14	15	1	11
3^{ο} επ.	1						
	2						
	3	15		3		15	
	4		2				2
	5						
	Άμεση ανάκληση		2				1
ΛΑΘΟΣ							
1^{ο} επ.	1	1	3	1	3	1	3
2^{ο} επ.	1						
	2						
	3						
	4	1	1	1	1	2	1

$3^{ο}$ επ.	1				
	2				
	3				
	4				
	5				
	Άμεση ανάκληση				1

Πίνακας 9β. Ανάλυση υποστρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές.

4η Άσκηση:		**9+3=**		**8+5=**	
Επίπεδο στρατηγικής					
	Υποστρατηγική	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.
ΣΩΣΤΟ					
$1^{ο}$ επ.	1				
$2^{ο}$ επ.	1				
	2				
	3				
	4	6	13	11	12
$3^{ο}$ επ.	1				
	2				
	3	12		5	2
	4				
	5				
	Άμεση ανάκληση		1		1
ΛΑΘΟΣ					
$1^{ο}$ επ.	1	1	3	1	3
$2^{ο}$ επ.	1				
	2				
	3				
	4		1	2	1
$3^{ο}$ επ.	1				
	2				
	3				
	4				
	5				
	Άμεση ανάκληση		1		

Για την υπέρβαση δεκάδας σημειώνεται από τον πίνακα 9α και 9β ότι σχεδόν η πλειοψηφία της πειραματικής ομάδας μετά τη διδακτική παρέμβαση με διερευνητική δραματοποίηση έχει κατανοήσει πλήρως τις πράξεις με τον αριθμό 9 να είναι ο μεγαλύτερος προσθετέος, σε σχέση με την ομάδα ελέγχου, όπου εφαρμόστηκε η παραδοσιακή διδασκαλία. Εμφανίζουν, όμως, δυσχέρειες στις πράξεις, όταν ο μεγαλύτερος προσθετέος είναι ο αριθμός 8 αλλά και όταν ο μεγαλύτερος προσθετέος είναι ο αριθμός 7. Στην ομάδα ελέγχου εντοπίζεται ότι μετά την παραδοσιακή διδασκαλία η πλειοψηφία των μαθητών δεν έχει κατανοήσει την υπέρβαση δεκάδας. Οι μαθητές χρησιμοποιούν το 2^{ο} επίπεδο στρατηγικής και δύο μαθητές το 3^{ο} επίπεδο στρατηγικής· συγκεκριμένα την αντιστάθμιση (compensation), παρόλο που δεν την είχαν διδαχθεί.

ΠΡΙΝ-ΜΕΤΑ

Πειραματική ομάδα

Στον πίνακα 10α και 10β παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της πειραματικής ομάδας πριν και μετά την παρέμβαση και τον βαθμό προόδου της βελτίωσης. Στις σταθερές σχέσεις των αριθμών (πίνακας 10α) στην πρώτη δεκάδα διαπιστώνεται ότι οι μισοί περίπου μαθητές δεν τις έχουν κατακτήσει και εμφάνισαν αισθητή μείωση στα έργα του μεταελέγχου με λιγότερα, όμως, λάθη. Επίσης, υπήρξε μια πολύ μικρή βελτίωση στις σταθερές σχέσεις του αριθμού 10.

Πίνακας 10α. **ΟΜΑΔΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ**

1^{ος} άξονας : **Σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα**

Αποτελέσματα	**1ΠΡΙΝ**			**1ΜΕΤΑ**		**2ΠΡΙΝ**			**2ΜΕΤΑ**	
	3+χ =6	4+χ =7	2+χ =9	3+χ =9	2+χ =8	8-χ =4	7-χ =3	9-χ =3	9-χ =4	8-χ =3
ΣΩΣΤΟ										
1^{ο} επίπεδο	1	1	1			1	1	1		
2^{ο} επίπεδο	6	7	9	16	16	7	9	10	16	16
3^{ο} επίπεδο	11	8	4	2	2	9	6	4	2	2
ΛΑΘΟΣ										
1^{ο} επίπεδο	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2^{ο} επίπεδο		2	3				1	2		
3^{ο} επίπεδο			1			1	1	1		

Πίνακας 10α. **ΟΜΑΔΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ**

1^{ος} άξονας : **Σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα**

Αποτελέσματα	**3ΠΡΙΝ**	**3ΜΕΤΑ**

	7+χ =10	6+χ= 10	2+χ =10	4+χ =10	3+χ =10
ΣΩΣΤΟ					
1ο επίπεδο	2	2	1	1	1
2ο επίπεδο	14	13	13	10	12
3ο επίπεδο	2	2	2	5	4
ΛΑΘΟΣ					
1ο επίπεδο	1	1	2	1	1
2ο επίπεδο		1	1	2	1
3ο επίπεδο					

Από την παρατήρηση του πίνακα 10β εξάγεται το συμπέρασμα ότι στα έργα πριν την παρέμβαση η πλειοψηφία των μαθητών της πειραματικής ομάδας υπολόγιζε τα αθροίσματα χρησιμοποιώντας το 2ο επίπεδο στρατηγικής με αρκετά λάθη και στα τρία έργα. Μετά την παρέμβαση με διερευνητική δραματοποίηση υπάρχει σαφέστατη κατανόηση της υπέρβασης δεκάδας στα έργα του μεγαλύτερου προσθετέου του αριθμού 9. Δυσκολίες αντιμετωπίζουν στις πράξεις με μεγαλύτερο προσθετέο τον αριθμό 8 αλλά και τον αριθμό 7. Σαφώς τα λάθη είναι πολύ λιγότερα σε σύγκριση με τα έργα του προελέγχου.

Πίνακας 10β. **ΟΜΑΔΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ**

2ος άξονας: **υπέρβαση δεκάδας**

Αποτελέσματα	**4ΠΡΙΝ**			**4ΜΕΤΑ**				
	9+5	8+4	9+7	9+3	8+5	9+6	7+6	9+8
ΣΩΣΤΟ								
1ο επίπεδο	1							
2ο επίπεδο	10	13	10	6	11	2	14	1
3ο επίπεδο	2		1	12	5	15	3	15
ΛΑΘΟΣ								
1ο επίπεδο	2	3	3	1	1	1	1	1
2ο επίπεδο	3	2	4		2	1	1	2
3ο επίπεδο	1	1	1					

Ομάδα ελέγχου

Η ομάδα ελέγχου παραμένει σταθερή στις σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα πριν και μετά την εφαρμογή της παραδοσιακής διδασκαλίας που εφαρμόστηκε (πίνακας 11α). Ελάχιστος αριθμός μαθητών τις έχει κατακτήσει, με τα λάθη τους να παραμένουν σχεδόν τα ίδια.

Πίνακας 11α. **ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ**

$1^{ος}$ άξονας : **σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα**

Αποτελέσματα	**1ΠΡΙΝ**			**1ΜΕΤΑ**		**2ΠΡΙΝ**			**2ΜΕΤΑ**	
	3+χ =6	4+χ =7	2+χ =9	3+χ =9	2+χ =8	8-χ =4	7-χ =3	9-χ =3	9-χ =4	8-χ =3
ΣΩΣΤΟ										
$1^{ο}$ επίπεδο	1				1	1				
$2^{ο}$ επίπεδο	6	10	11	12	12	8	12	11	13	14
$3^{ο}$ επίπεδο	10	6	4	4	4	8	3	2	3	2
ΛΑΘΟΣ										
$1^{ο}$ επίπεδο	2	3	3	3	2	2	3	3	3	3
$2^{ο}$ επίπεδο			1				1	3		
$3^{ο}$ επίπεδο										

Πίνακας 11α. **ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ**

$1^{ος}$ άξονας : **σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα**

Αποτελέσματα	**3ΠΡΙΝ**			**3ΜΕΤΑ**	
	7+χ =10	6+χ= 10	2+χ =10	4+χ =10	3+χ =10
ΣΩΣΤΟ					
$1^{ο}$ επίπεδο	1				1
$2^{ο}$ επίπεδο	11	11	10	10	13
$3^{ο}$ επίπεδο	5	5	5	6	3
ΛΑΘΟΣ					
$1^{ο}$ επίπεδο	2	3	3	3	2
$2^{ο}$ επίπεδο			1		
$3^{ο}$ επίπεδο					

Στην υπέρβαση δεκάδας (πίνακας 11β) με την παραδοσιακή διδασκαλία εντοπίζουμε ότι δεν υπάρχει καμιά μεταβολή στα έργα που δόθηκαν στους μαθητές. Τα αποτελέσματα πριν από τη διδασκαλία και μετά παραμένουν σχεδόν τα ίδια, όπως και τα λάθη των μαθητών. Η πλειοψηφία των μαθητών υπολογίζει χρησιμοποιώντας το $2^{ο}$ επίπεδο στρατηγικής.

Πίνακας 11β. **ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ**

$2^{ος}$ άξονας : **υπέρβαση δεκάδας**

Αποτελέσματα	**4ΠΡΙΝ**			**4ΜΕΤΑ**				
	9+5	8+4	9+7	9+3	8+5	9+6	7+6	9+8

ΣΩΣΤΟ								
1ο επίπεδο								
2ο επίπεδο	11	12	13	13	12	11	15	11
3ο επίπεδο	2	2	2	1	3	4		3
ΛΑΘΟΣ								
1ο επίπεδο	3	3	3	3	3	3	3	3
2ο επίπεδο	3	2	1	1	1	1	1	1
3ο επίπεδο				1				1

ΑΦΑΙΡΕΣΗ

3ο φύλλο ασκήσεων (προέλεγχος/pre-test)

Στην αρχή δόθηκε το 3ο φύλλο ασκήσεων, το οποίο αποτελούνταν από 3 άξονες, με στόχο να διαπιστωθεί η διατηρησιμότητα της γνώσης στην υπέρβαση δεκάδας προσθετικά (1ος άξονας). Ακόμα η προϋπάρχουσα γνώση στην υπέρβαση δεκάδας αφαιρετικά ή η αφαίρεση ως πρόσθεση (2ος άξονας). Τέλος η γνώση της σύνδεσης των δύο πράξεων, που συμβάλλει στην κατανόηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ως αντίστροφες πράξεις (3ος άξονας).

Πίνακας 12α.

1ος Άξονας: Διατηρησιμότητα της γνώσης στην υπέρβαση δεκάδας προσθετικά.

Αποτελέσματα	**6+9=**		**7+4=**		**8+8=**		**7+6=**	
	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.
ΣΩΣΤΟ								
1ο επίπεδο								
2ο επίπεδο	2	11	12	15	6	2	10	15
3ο επίπεδο	16	3	6	1	12	15	7	2
ΛΑΘΟΣ								
1ο επίπεδο	1	2	1	2	1	2	1	2
2ο επίπεδο		3		1			1	
3ο επίπεδο								

Στον 1ο άξονα στη διατηρησιμότητα της γνώσης στην υπέρβαση δεκάδας προσθετικά διακρίνουμε στον πίνακα 12α, σαφή την υπεροχή 3ου επιπέδου της στρατηγικής της πειραματικής ομάδας, σε σχέση με την ομάδα ελέγχου. Οι δύο ομάδες παραμένουν στα ίδια επίπεδα γνώσεων του μεταελέγχου της πρόσθεσης· γεγονός που σημαίνει ότι δεν έχει μεταβληθεί. Η μόνη διαφορά παρουσιάζεται στην πειραματική ομάδα, όπου οι περισσότεροι μαθητές στο άθροισμα με μεγαλύτερο προσθετέο τον αριθμό 9 ανακαλούν άμεσα το αποτέλεσμα[34]. Η ομάδα ελέγχου έχει

[34] Βλέπε στο παράρτημα τον πίνακα 12β των υποστρατηγικών στη διατηρησιμότητα της γνώσης στην υπέρβαση δεκάδας προσθετικά.

μια μικρή υπεροχή στα διπλά αθροίσματα (8+8), αφού χρησιμοποιεί την άμεση ανάκληση. Τα λάθη και των δύο ομάδων παραμένουν σχεδόν τα ίδια.

Πίνακας 13α.

$2^{ος}$ Άξονας: Προϋπάρχουσα γνώση στην υπέρβαση δεκάδας αφαιρετικά ή αφαίρεση ως πρόσθεση.

Αποτελέσματα	**14-9=**		**12-5=**		**14-7=**		**13-6=**	
	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.
ΣΩΣΤΟ								
1^{o} επίπεδο								
2^{o} επίπεδο	16	13	14	13	14	13	14	14
3^{o} επίπεδο	1				1	1	1	1
ΛΑΘΟΣ								
1^{o} επίπεδο	1	2	1	2	1	2	1	2
2^{o} επίπεδο	1	4	4	4	3	3	3	2
3^{o} επίπεδο								

Στα έργα του $2^{ου}$ άξονα (προϋπάρχουσα γνώση στην υπέρβαση δεκάδας αφαιρετικά ή αφαίρεση ως πρόσθεση - πίνακας13α) η πλειοψηφία των μαθητών και των δύο ομάδων χρησιμοποιεί το 2^{o} επίπεδο στρατηγικής[35] για την επίλυσή τους. Υπάρχει μια μικρή διαφοροποίηση ως προς τα λάθη της ομάδας ελέγχου, τα οποία είναι περισσότερα από της πειραματικής ομάδας. Αναφέρεται ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων δεν έχουν ακόμη διδαχθεί την υπέρβαση δεκάδας αφαιρετικά ή αφαίρεση ως πρόσθεση.

Πίνακας 14.

$3^{ος}$ Άξονας: Σύνδεση των δύο πράξεων ως προς την κατανόησή τους.

Αποτελέσματα	**9+9=/18-9=**				**5+8=/13-5=**				**7+6=/13-7=**			
	Π.Ο.		Ο.Ε.		Π.Ο.		Ο.Ε.		Π.Ο.		Ο.Ε.	
ΣΩΣΤΟ												
1^{o} επίπεδο												
2^{o} επίπεδο	3	8	10	9	10	11	15	14	12	13	13	13
3^{o} επίπεδο	15	7	6	3	7	3		2	6	3	2	1
ΛΑΘΟΣ												
1^{o} επίπεδο	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
2^{o} επίπεδο		2	1	5	1	4	2	1		2	2	3
3^{o} επίπεδο		1										

Στη σύνδεση των δύο πράξεων ως προς την κατανόησή τους σημειώνεται μια καλύτερη απόδοση της πειραματικής ομάδας στον πίνακα 14α. Οι μαθητές δεν έχουν καταφέρει να συνδυάσουν τις δύο πράξεις ως αντίστροφες και αντιμετωπίζουν πρόβλημα στις πράξεις που δόθηκαν. Υπάρχουν αρκετά λάθη και στις δύο ομάδες, ως αποτέλεσμα της απουσίας διδασκαλίας της αφαίρεσης.

[35] Οι μαθητές χρησιμοποιούν το 2^{o} επίπεδο στρατηγικής και συγκεκριμένα το 1^{o} υποεπίπεδο. Βλέπε στο παράρτημα τον πίνακα 13β τον πίνακα υποστρατηγικών που χρησιμοποιούν.

$4^{ο}$ φύλλο ασκήσεων (μεταέλεγχος/post-test)

Το $4^{ο}$ φύλλο ασκήσεων δόθηκε στους μαθητές μετά τη διδακτική παρέμβαση της αφαίρεσης, για να εξεταστεί, εάν έχει επηρεάσει θετικά η διερευνητική δραματοποίηση στην κατανόηση της υπέρβασης δεκάδας αφαιρετικά ή της αφαίρεσης, ως αντίστροφη της πρόσθεσης στην πειραματική ομάδα, έναντι της παραδοσιακής διδασκαλίας της ομάδας ελέγχου. Προσθετικά εάν μπορούν οι μαθητές να συνδυάσουν τις δύο πράξεις ως αντίστροφες, για να διαπιστωθεί ότι έχουν αντιληφθεί την ουσία της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Πίνακας 15α.

$1^{ος}$ Άξονας: Διατηρησιμότητα της γνώσης στην υπέρβαση δεκάδας προσθετικά.

Αποτελέσματα	**5+9=**		**8+3=**		**7+7=**		**9+6=**	
	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.
ΣΩΣΤΟ								
$1^{ο}$ επίπεδο								
$2^{ο}$ επίπεδο	2	12	6	12	7	10	2	11
$3^{ο}$ επίπεδο	16	4	12	4	11	7	16	5
ΛΑΘΟΣ								
$1^{ο}$ επίπεδο	1	2	1	2	1	2	1	2
$2^{ο}$ επίπεδο		1		1				1
$3^{ο}$ επίπεδο								

Στα έργα του $1^{ου}$ άξονα (πίνακας 15α) εξακολουθεί να υπερτερεί η πειραματική ομάδα χωρίς καμία μεταβολή στις γνώσεις τους. Η πλειοψηφία των μαθητών της πειραματικής ομάδας έχει διατηρήσει τις γνώσεις της και πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιεί κυρίως την άμεση ανάκληση[36]. Αντίθετα, η ομάδα ελέγχου αντιμετωπίζει προβλήματα, τα οποία είναι εμφανή στον πίνακα.

Πίνακας 16α.

$2^{ος}$ Άξονας: Επίπεδο στρατηγικών στην υπέρβαση δεκάδας αφαιρετικά ή της αφαίρεσης ως πρόσθεση.

Αποτελέσματα	**13-9=**		**12-7=**		**15-7=**		**12-6=**	
	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.
ΣΩΣΤΟ								
$1^{ο}$ επίπεδο								
$2^{ο}$ επίπεδο	3	14	7	16	11	16	4	14
$3^{ο}$ επίπεδο	15	2	10		6		14	3
ΛΑΘΟΣ								
$1^{ο}$ επίπεδο	1	2	1	2	1	2	1	2
$2^{ο}$ επίπεδο		1	1	1		1		
$3^{ο}$ επίπεδο								

[36] Βλέπε στο παράρτημα τον πίνακα 15β.

Στα έργα του $2^{ου}$ άξονα (πίνακας 16α) έχουμε μεταβολή στο επίπεδο των στρατηγικών, που χρησιμοποιούν οι μαθητές της πειραματικής ομάδας. Η πλειονότητα της χρησιμοποιεί την άμεση ανάκληση[37] σε αντίθεση με την ομάδα ελέγχου που βρίσκεται στο $2^{ο}$ επίπεδο στρατηγικής. Αυτό συνδέεται με την απουσία κατανόησης της υπέρβασης δεκάδας ή της αφαίρεσης ως αντίστροφη της πρόσθεσης με τη χρήση της παραδοσιακής διδασκαλίας.

Πίνακας 17α.

$3^{ος}$ Άξονας: Σύνδεση των δύο πράξεων ως προς την κατανόησή τους.

Αποτελέσματα	**8+8=/16-8=**				**6+8=/14-6=**				**9+6=/15-9=**			
	Π.Ο.		Ο.Ε.		Π.Ο.		Ο.Ε.		Π.Ο.		Ο.Ε.	
ΣΩΣΤΟ												
$1^{ο}$ επίπεδο												
$2^{ο}$ επίπεδο	2	2	2	5	8	8	14	15	3	1	13	15
$3^{ο}$ επίπεδο	16	16	15	11	10	10	2	1	15	16	3	1
ΛΑΘΟΣ												
$1^{ο}$ επίπεδο	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
$2^{ο}$ επίπεδο				1			1	1			1	1
$3^{ο}$ επίπεδο												

Στη σύνδεση των δύο πράξεων είναι σαφές ότι έχει εδραιωθεί η κατανόηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ως αντίστροφες πράξεις στην πειραματική ομάδα. Η ομάδα ελέγχου εμφανίζει καλά αποτελέσματα μόνο στα διπλά αλλά με περισσότερα λάθη έναντι της πειραματικής.

ΠΡΙΝ-ΜΕΤΑ

Πειραματική ομάδα

Στους πίνακες 18α, 18β και 18γ παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της πειραματικής ομάδας πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση με διερευνητική δραματοποίηση στην υπέρβαση δεκάδας αφαιρετικά ή με την αφαίρεση ως πρόσθεση και τον βαθμό προόδου των μαθητών της έρευνας. Στη διατηρησιμότητα της γνώσης στην υπέρβαση δεκάδας προσθετικά ($1^{ος}$ άξονας) γίνεται κατανοητό ότι η πλειοψηφία των μαθητών όχι μόνο την έχει εδραιώσει αλλά και ανακαλεί άμεσα το αποτέλεσμα των πράξεων. Στις πράξεις με μεγαλύτερο προσθετέο τον αριθμό 7, ενώ πριν την παρέμβαση οι μαθητές είχαν κάποιες δυσκολίες και χρησιμοποιούσαν το $2^{ο}$ επίπεδο στρατηγικής, μετά την παρέμβαση αυτές βελτιώθηκαν σημαντικά.

[37] Βλέπε στο παράρτημα τον πίνακα 16β.

Πίνακας 18α. **ΟΜΑΔΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ**

1ος Άξονας: Διατηρησιμότητα της γνώσης στην υπέρβαση δεκάδας προσθετικά.

Αποτελέσματα	1ΠΡΙΝ				1ΜΕΤΑ			
	6+9	7+4	8+8	7+6	5+9	8+3	7+7	9+6
ΣΩΣΤΟ								
1ο επίπεδο								
2ο επίπεδο	2	12	6	10	2	6	7	2
3ο επίπεδο	16	6	12	7	16	12	11	16
ΛΑΘΟΣ								
1ο επίπεδο	1	1	1	1	1	1	1	1
2ο επίπεδο				1				
3ο επίπεδο								

Στον πίνακα 18β (2ος άξονας) είαι άξιο προσοχής ότι στα έργα πριν την παρέμβαση η πλειοψηφία των μαθητών υπολογίζει τις διαφορές χρησιμοποιώντας το 2ο επίπεδο στρατηγικής, καθώς δεν έχει διδαχθεί την υπέρβαση δεκάδας ή κάποια άλλη στρατηγική αφαίρεσης 3ου επιπέδου. Μετά, όμως, την παρέμβαση με διερευνητική δραματοποίηση η πλειοψηφία των μαθητών έχει μεταβεί στο 3ο επίπεδο στρατηγικής· γεγονός που ήταν και το ζητούμενο.

Πίνακας 18β. **ΟΜΑΔΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ**

2ος Άξονας: Επίπεδο στρατηγικών στην υπέρβαση δεκάδας αφαιρετικά ή αφαίρεση ως πρόσθεση.

Αποτελέσματα	2ΠΡΙΝ				2ΜΕΤΑ			
	14-9	12-5	14-7	13-6	13-9	12-7	15-7	12-6
ΣΩΣΤΟ								
1ο επίπεδο								
2ο επίπεδο	16	14	14	14	3	7	11	4
3ο επίπεδο	1		1	1	15	10	6	14
ΛΑΘΟΣ								
1ο επίπεδο	1	1	1	1	1	1	1	1
2ο επίπεδο	1	4	3	3		1		
3ο επίπεδο								

Στη σύνδεση των δύο πράξεων ως προς την κατανόησή τους (πίνακας 18γ, 3ος άξονας) εξετάζουμε ότι οι μαθητές πριν την παρέμβαση αντιμετώπιζαν δυσκολίες στην κατανόησή τους με αρκετά λάθη. Μετά την παρέμβαση τα αποτελέσματα είναι εξαιρετικά, με μοναδική δυσκολία να εμφανίζεται στους μισούς μαθητές στις πράξεις 6+8/14-6.

Πίνακας 18γ. **ΟΜΑΔΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ**

3ος Άξονας: Σύνδεση των δύο πράξεων ως προς την κατανόησή τους.

Αποτελέσματα	3ΠΡΙΝ	3ΜΕΤΑ

	9+9	18-9	5+8	13-5	7+6	13-7	8+8	16-8	6+8	14-6	9+6	15-9
ΣΩΣΤΟ												
1ο επίπεδο												
2ο επίπεδο	3	8	10	11	12	13	2	2	8	8	3	1
3ο επίπεδο	15	7	7	3	6	3	16	16	10	10	15	16
ΛΑΘΟΣ												
1ο επίπεδο	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2ο επίπεδο		2	1	4		2						
3ο επίπεδο		1										

<u>Ομάδα ελέγχου</u>

Όπως σημειώνεται σύμφωνα με τον πίνακα 19α η ομάδα ελέγχου παραμένει σταθερή στη διατηρησιμότητα της γνώσης στην υπέρβαση δεκάδας προσθετικά (1ος άξονας) πριν και μετά την παραδοσιακή διδασκαλία. Εξακολουθούν να χρησιμοποιούν το 2ο επίπεδο στρατηγικής, μολονότι έχουν διδαχθεί την υπέρβαση δεκάδας. Στο μοναδικό έργο πριν τη διδασκαλία όπου οι μαθητές ανακαλούν άμεσα το αποτέλεσμα είναι το διπλό άθροισμα 8+8.

Πίνακας 19α. **ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ**

1ος Άξονας: Διατηρησιμότητα της γνώσης στην υπέρβαση δεκάδας προσθετικά.

Αποτελέσματα	**1ΠΡΙΝ**				**1ΜΕΤΑ**			
	6+9	7+4	8+8	7+6	5+9	8+3	7+7	9+6
ΣΩΣΤΟ								
1ο επίπεδο								
2ο επίπεδο	11	15	2	15	12	12	10	11
3ο επίπεδο	3	1	15	2	4	4	7	5
ΛΑΘΟΣ								
1ο επίπεδο	2	2	2	2	2	2	2	2
2ο επίπεδο	3	1			1	1		1
3ο επίπεδο								

Διακρίνεται ότι στις πράξεις του 2ου άξονα (επίπεδο στρατηγικών στην υπέρβαση δεκάδας αφαιρετικά ή αφαίρεση ως πρόσθεση, πίνακας 19β) δεν υπάρχει καμιά μεταβολή των γνώσεων τόσο πριν όσο και μετά την παραδοσιακή διδασκαλία. Οι μαθητές υπολογίζουν τις διαφορές χρησιμοποιώντας το 2ο επίπεδο στρατηγικής, με μόνη διαφορά ως προς τη μείωση των λαθών τους μετά τη διδασκαλία.

Πίνακας 19β. **ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ**

2ος Άξονας: Επίπεδο στρατηγικών στην υπέρβαση δεκάδας αφαιρετικά ή αφαίρεση ως πρόσθεση.

Αποτελέσματα	**2ΠΡΙΝ**				**2ΜΕΤΑ**			
	14-9	12-5	14-7	13-6	13-9	12-7	15-7	12-6

ΣΩΣΤΟ								
$1^{ο}$ επίπεδο								
$2^{ο}$ επίπεδο	13	13	13	14	14	16	16	14
$3^{ο}$ επίπεδο			1	1	2			3
ΛΑΘΟΣ								
$1^{ο}$ επίπεδο	2	2	2	2	2	2	2	2
$2^{ο}$ επίπεδο	4	4	3	2	1	1	1	
$3^{ο}$ επίπεδο								

Στα έργα του $3^{ου}$ άξονα (σύνδεση των δύο πράξεων ως προς την κατανόησή τους, πίνακας 19γ) οι μαθητές της ομάδας ελέγχου δεν έχουν καμιά μεταβολή στις γνώσεις τους. Και πριν αλλά και μετά επισημαίνεται ότι χρησιμοποιούν το $2^{ο}$ επίπεδο στρατηγικής, για να βρουν το αποτέλεσμα των έργων, χωρίς να ανακαλούν άμεσα το αποτέλεσμα, ώστε να τεκμηριωθεί η σύνδεση των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ως αντίθετης πράξης. Στο μοναδικό έργο που ανακαλούν άμεσα το αποτέλεσμα είναι το έργο 8+8/16-8, με τους μισούς μαθητές να το έχουν κατανοήσει.

Πίνακας 19γ. **ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ**

$3^{ος}$ Άξονας: Σύνδεση των δύο πράξεων ως προς την κατανόησή τους.

Αποτελέσματα	**3ΠΡΙΝ**						**3ΜΕΤΑ**					
	9+9	18-9	5+8	13-5	7+6	13-7	8+8	16-8	6+8	14-6	9+6	15-9
ΣΩΣΤΟ												
$1^{ο}$ επίπεδο												
$2^{ο}$ επίπεδο	10	9	15	14	13	13	2	5	14	15	13	15
$3^{ο}$ επίπεδο	6	3		2	2	1	15	11	2	1	3	1
ΛΑΘΟΣ												
$1^{ο}$ επίπεδο	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$2^{ο}$ επίπεδο	1	5	2	1	2	3		1	1	1	1	1
$3^{ο}$ επίπεδο												

VI. ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα μελέτη βασίστηκε στην κοινωνικοπολιτισμική θεωρία της μάθησης. Η συγκεκριμένη θεωρία αντιλαμβάνεται το παιδί ως άτομο που ασχολείται ενεργητικά στην αναζήτηση νοήματος κατά τη στιγμή της μάθησης, αλλά επιπλέον μπορεί να βοηθηθεί από ενήλικες ή πιο ικανούς συνομήλικες (δηλαδή άτομα με περισσότερη γνώση). Κάθε παιδί έχει τη δική του ζώνη επικείμενης ανάπτυξης· δηλαδή ένα φάσμα γνώσης, το οποίο τα παιδιά ενδεχομένως δεν μπορούν να το περάσουν μόνα τους, αλλά χρειάζονται τη βοήθεια των παραπάνω ατόμων (Van de Walle et al., 2017, σελ. 45 όπ. αναφ. σε Vygotsky, 1978). Όταν οι εκπαιδευτικοί στοχεύουν σε αυτή τη ζώνη, αποφεύγουν τη δυσκολία και το άγχος που καταβάλει τα παιδιά, ακόμα κι αν οι δυσκολίες αυτές υπερβαίνουν τις δυνατότητές τους. Συνεπώς έτσι, οι συζητήσεις στην τάξη που βασίζονται σε ιδέες των παιδιών είναι θεμελιώδεις για την ανάπτυξή τους (Van de Walle et al., 2017, σελ. 45 όπ. αναφ. σε Wood & Turner-Vorbeck 2001, σελ. 186).

Τέθηκαν 5 ερευνητικά ερωτήματα τα οποία αφορούσαν στη διερευνητική δραματοποίηση και την υπέρβαση δεκάδας προσθετικά και αφαιρετικά ή της αφαίρεσης ως αντίστροφη της πρόσθεσης. Επίσης αφορούσαν στις σταθερές σχέσεις των αριθμών και την υπέρβαση δεκάδας, τη σύνδεση των δύο πράξεων ως αντίστροφες και τη διατηρησιμότητα της γνώσης.

Διερευνητική δραματοποίηση και υπέρβαση δεκάδας προσθετικά

Ξεκινώντας από το πρώτο ερευνητικό ερώτημα και την επίδραση της διερευνητικής δραματοποίησης στην κατανόηση της υπέρβασης δεκάδας προσθετικά, για να δοθεί απάντηση πραγματοποιήθηκε διδασκαλία με διερευνητική δραματοποίηση και με αναπαραστατικό υλικό τη βάση του δέκα (ten frame).

Οι μαθητές που υιοθέτησαν διαδικασίες από άλλους (συγκεκριμένα από τον ερευνητή μέσω της διερευνητικής δραματοποίησης) μπόρεσαν να τις συνδέσουν με τις σχετικές γνώσεις τους. Άμεση απότοκος είναι να γίνουν κατανοητές με τρόπο που δε θα ήταν εφικτός διαφορετικά, έτσι ίσως τις ανακαλούν στη μνήμη τους πιο εύκολα (Hiebert & Wearne 1996). Όσοι δεν είχαν αναπτύξει στρατηγικές για τον εαυτό τους μπόρεσαν πράγματι να τις μάθουν, σύμφωνα με τον Thompson (2010) ο οποίος αναφερέται στον Askew et al. (2001: 9).

Αυτό διαπιστώθηκε στον μεταέλεγχο, όπου η πλειοψηφία των μαθητών της πειραματικής ομάδας ενώ υπολόγιζε τα αθροίσματα του προελέγχου με το 2^{ο} επίπεδο στρατηγικής, ειδικότερα την αρίθμηση από τον μεγαλύτερο, απάντησε σωστά σχεδόν σε όλα στα έργα του μεταελέγχου χρησιμοποιώντας την 3^{η} στρατηγική (κατασκευαστική) και συγκεκριμένα της υπέρβασης δεκάδας στα έργα με μεγαλύτερο προσθετέο τον αριθμό 9 (9+3, 9+6, 9+8), στην οποία ο ερευνητής είχε εστιάσει στη διδασκαλία του.

Στις απαντήσεις των αθροισμάτων του μεταελέγχου παρατηρήθηκε ότι στα αθροίσματα 9+6, 9+8 έχουν απαντήσει σωστά 15 στους 19 μαθητές με μια μικρή απόκλιση στο άθροισμα 9+3 (12 στους 19 μαθητές). Αυτό ίσως οφείλεται στη γλώσσα την οποία χρησιμοποιούμε στην καταμέτρηση.

Η λεκτική καταμέτρηση και κατά συνέπεια οι υπολογισμοί στη δεκάδα και πάνω επηρεάζονται από τη γλώσσα και τον τρόπο που αποδίδει τους αριθμούς, όπως π.χ. το 11 και το 12, στην ελληνική (έντεκα, δώδεκα), αγγλική (eleven, twelve) και σε άλλες ευρωπαϊκές γλώσσες προφέρεται διαφορετικά. Σε χώρες της Ανατολικής Ασίας (π.χ. Κίνα, Ιαπωνία) προφέρονται δεκαένα, δεκαδύο και οι μαθητές αυτών των χωρών παρουσιάζουν καλύτερες επιδόσεις στην υπέρβαση δεκάδας (Sarama και Clements, 2009, pp 54 όπ. αναφ. σε Aunio et al., 2004; Aunio et al., 2006; Murata, 2004). Η ευκολία να υπολογίσουν τις προσθέσεις με προσθετέο τον αριθμό 9 έγκειται στο γεγονός ότι οι μαθητές μπορούν εύκολα να υπολογίσουν τον αριθμό μετά από ένα δεδομένο, δηλαδή το n+1 (Baroody, 1984), γιατί απλά είναι ο επόμενος αριθμός του n (Sarama & Clements, 2009). Με τον καιρό γίνεται αυτόματα και γρήγορα χωρίς σκέψη (Baroody, 2005).

Επίσης, πολλά παιδιά της προσχολικής ηλικίας μπορούν να υπολογίσουν και το n-1 αρκεί φυσικά να ξέρουν την ακολουθία των αριθμών. Σε μια έρευνα που έγινε σε παιδιά Α΄ τάξης διαπιστώθηκε ότι το 100% ήξεραν το n-1 (Baroody, 1984). Στα αθροίσματα του μεταελέγχου (8+5, 7+6) διαπιστώνεται ότι η πλειοψηφία των μαθητών συνεχίζει και χρησιμοποιεί $2^{ο}$ επίπεδο στρατηγικής (της αρίθμησης) και συγκεκριμένα την αρίθμηση από τον μεγαλύτερο ($4^{ο}$ υποεπίπεδο), όπως έχουν επισημάνει οι Clements και Sarama (2014). Οι μαθητές δεν έχουν περάσει στο $3^{ο}$ επίπεδο στρατηγικής (της ανάκλησης ή κατασκευαστικό και συγκεκριμένα στην υπέρβαση δεκάδας), διότι, όπως αναφέρθηκε ο ερευνητής εστίασε τη διδασκαλία του στον μεγαλύτερο προσθετέο αριθμό 9. Επίσης, αξίζει να αναφερθεί ότι η υπέρβαση δεκάδας ενδείκνυται για αριθμούς που βρίσκονται κοντά στο 10, όπως είναι το 8 και το 9 (Λεμονίδης, 2013).

Οι μαθητές που βρίσκονταν στο $1^{ο}$ επίπεδο στρατηγικής δεν μπόρεσαν να χρησιμοποιήσουν τις στρατηγικές πρόσθεσης, επειδή δεν είχαν τρόπο να παρακολουθήσουν τις σχέσεις μεταξύ των συνόλων (Carpenter & Moser, 1984). Κάποιοι κόλλησαν στο επίπεδο 1 και πέρασαν στο επίπεδο 2, με τη διδασκαλία στρατηγικών (Baroody, 2005). Μόνο το 15% των μαθητών μπορεί να μεταβεί σταδιακά από το επίπεδο 1 στο επίπεδο 3 (Carpenter & Moser, 1984), κάτι που θα φανεί με έναν μαθητή στους τρεις, που χρησιμοποίησε την άμεση ανάκληση για την επίλυση κάποιων έργων στη διατηρησιμότητα της γνώσης.

Η κατανόηση της υπέρβασης δεκάδας προσθετικά, μέσω της διερευνητικής δραματοποίησης αξιολογείται θετικά. Οι μαθητές της πειραματικής ομάδας έχουν απαντήσει σωστά με το $3^{ο}$ επίπεδο στρατηγικής να φτάνει το 49,47% των αθροισμάτων (9+3, 8+5, 9+6, 7+6, 9+8), σε σχέση με την ομάδα ελέγχου με την παραδοσιακή διδασκαλία που απάντησε στο 11,57%. Οι νοεροί υπολογισμοί λογαριάστηκαν με την εφαρμογή των στρατηγικών με κατανόηση (Heirdsfield, 2002 όπ. αναφ. σε Anghileri, 1999).

Κατά γενική ομολογία των παιδιών (δεδομένου του ότι δεν έγινε καταγραφή για την αξιολόγηση των στάσεων, υπήρξε συζήτηση μεταξύ του ερευνητή και των μαθητών για το πλαίσιο της διδασκαλίας και εάν επιθυμούσαν το μάθημα των μαθηματικών να έχει αυτή την πορεία μέσα από τη δραματοποίηση), η διδασκαλία κέντρισε το ενδιαφέρον τους, βίωσαν τη δραματική ένταση και οι πράξεις τους απέκτησαν νόημα, καθώς υπήρχε λόγος να τις πραγματοποιήσουν (Παπαδόπουλος, 2007c). Τα ευρήματα συνάδουν με τις προηγούμενες ερευνητικές μελέτες των (Nave, 1983; Saab, 1987; Oniewski, 1999; Soner, 2005; Hatipoglu, 2006).

Διερευνητική δραματοποίηση και υπέρβαση δεκάδας αφαιρετικά και της αφαίρεσης ως πρόσθεση

Συνεχίζοντας με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα και την επίδραση της διερευνητικής δραματοποίησης στην κατανόηση της υπέρβασης δεκάδας αφαιρετικά ή της αφαίρεσης ως πρόσθεση, για να δοθεί απάντηση πραγματοποιήθηκε διδασκαλία με διερευνητική δραματοποίηση και με τους δύο τρόπους, με τη βοήθεια του αναπαραστατικού υλικού στη βάση του δέκα (ten frame).

Και εδώ οι μαθητές υιοθέτησαν διαδικασίες από άλλους (συγκεκριμένα από τον ερευνητή μέσω της διερευνητικής δραματοποίησης), μπόρεσαν να τις συνδέσουν με τις σχετικές γνώσεις τους και να γίνουν κατανοητές με τρόπο που δε θα ήταν εφικτός διαφορετικά, ώστε ενδεχομένως να τις θυμούνται καλύτερα (Hiebert & Wearne 1996). Όσοι δεν είχαν αναπτύξει στρατηγικές για τον εαυτό τους μπόρεσαν πράγματι να τις μάθουν, σύμφωνα με τον Thompson (2010) αναφερόμενος στον

(Askew et al., 2001: 9). Η πειραματική ομάδα υπολόγιζε τις διαφορές στον προέλεγχο με το $2^{ο}$ επίπεδο στρατηγικής και συγκεκριμένα την αντίστροφη αρίθμηση από ($1^{η}$ υποστρατηγική). Μετά το πέρας των διδασκαλιών και των δύο υποστρατηγικών οι περισσότεροι μαθητές υπολόγισαν τις διαφορές με άμεση ανάκληση. Η μετάβαση σε μια ενιαία στρατηγική αφαίρεσης μπορεί να μην είναι επωφελής (Carpenter et al., 1981). Έτσι, οι μαθητές που έμαθαν να χρησιμοποιούν τις στρατηγικές συνδυασμών με απομνημόνευση ανέπτυξαν μαθηματική επάρκεια, σε σχέση με αυτούς που δεν μπόρεσαν να απομνημονεύσουν συνδυασμούς χωρίς συμπληρωματική στρατηγική (Sarama & Clements 2009). Όπως αποδεικνύεται οι μαθητές που δεν κατάφεραν να μεταβούν στο $3^{ο}$ επίπεδο στρατηγικής χρησιμοποίησαν για την επίλυση των διαφορών την υποστρατηγική της πρόσθεσης. Αυτό συνέβη διότι η αφαίρεση προς τα πίσω είναι πιο δύσκολη (Fuson & Fuson, 1992; Baroody, 1984; Sarama & Clements, 2009; Van de Walle et al., 2017). Τα λάθη των μαθητών οφείλονται στην μέτρηση προς τα πίσω. Δεν ξέρουν σε ποιο σημείο πρέπει να σταματήσουν, με αποτέλεσμα να αφήνουν κάποιον όρο έξω και, λόγω της βιασύνης τους, να υπάρχει απώλεια στη διαδρομή που ακολουθούν (Baroody, 1984).

Αναμφίβολα η κατανόηση της υπέρβασης δεκάδας αφαιρετικά ή της αφαίρεσης ως πρόσθεση μέσω της διερευνητικής δραματοποίησης αξιολογείται θετικά. Οι μαθητές της πειραματικής ομάδας έχουν απαντήσει σωστά σύμφωνα με το $3^{ο}$ επίπεδο στρατηγικής το 60,52% των διαφορών (13-9, 12-7, 15-7, 12-6), σε σχέση με την ομάδα ελέγχου με την παραδοσιακή διδασκαλία που απάντησε στο 6,5% (πίνακας 16β). Οι νοεροί υπολογισμοί υπολογίστηκαν, με τη χρήση στρατηγικών με κατανόηση (Heirdsfield, 2002 όπ. αναφ. σε Anghileri, 1999).

Κατά γενική ομολογία των παιδιών για μια ακόμη φορά η διδασκαλία κέντρισε το ενδιαφέρον τους, βίωσαν τη δραματική ένταση και οι πράξεις τους απέκτησαν νόημα καθώς υπήρχε λόγος να τις πραγματοποιήσουν (Παπαδόπουλος, 2007c). Και αυτά τα ευρήματα συνάδουν με προηγούμενες ερευνητικές μελέτες (Nave,1983; Saab, 1987; Oniewski, 1999; Soner, 2005; Hatipoglu, 2006).

Σταθερές σχέσεις των αριθμών και υπέρβαση δεκάδας

Σχετικά με το τρίτο ερευνητικό ερώτημα για τις σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα και εάν συμβάλλουν στην κατανόηση της πρόσθεσης στην υπέρβαση δεκάδας, δόθηκε στους μαθητές φύλλο ασκήσεων, για να διαπιστωθεί η γνώση τους.

Στις σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα σημειώνεται ότι οι μισοί περίπου μαθητές δεν τις έχουν κατακτήσει και εμφάνισαν μια αισθητή μείωση στα έργα του μεταελέγχου, με λιγότερα όμως, λάθη. Επίσης, υπήρξε μια πολύ μικρή βελτίωση στις σταθερές σχέσεις του αριθμού 10 (πίνακας 10α). Παρόλο που η γνώση βασικών αριθμητικών γεγονότων είναι απαραίτητη προϋπόθεση για τους νοερούς υπολογισμούς (Heirdsfield, 2002 όπ. αναφ. σε Plunket, 1979 και Sowder, 1988; Maclellan, 2001), τα ευρήματά μας συμφωνούν με τις άλλες έρευνες των (Heirdsfield, 2002 όπ. αναφ. σε Usnick & Engelhardt, 1988; Van de Walle et al., 2017).

Σύνδεση των δύο πράξεων ως αντίστροφες

Αναφορικά με το τέταρτο ερευνητικό ερώτημα, τη σύνδεση των δύο πράξεων ως αντίστροφες και την κατανόηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης δόθηκαν τα εξής αθροίσματα και διαφορές στους μαθητές στον προέλεγχο της διδασκαλίας της αφαίρεσης (9+9/18-9, 5+8/13-5, 7+6/13-7). Επιπρόσθετα τα αθροίσματα και οι διαφορές (8+8/16-8, 6+8/14-6, 9+6/15-9) στον μεταέλεγχο της διδασκαλίας της αφαίρεσης.

Ένα σημείο που συχνά έκανε λόγο ο Piaget (1952) και δεν αμφισβητείται σοβαρά από κανέναν, είναι ότι κανείς δεν μπορεί να κατανοήσει πλήρως τη φύση της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης, εκτός και αν αντιληφθεί τις αντίστροφες σχέσεις μεταξύ αυτών των δύο πράξεων (Bryant, Christie & Rendu, 1999). Η πρόσθεση και η αφαίρεση είναι συμπληρωματικές λειτουργίες (Baroody, 1999). Από τα αποτελέσματα εξακριβώνεται ότι οι μαθητές της πειραματικής ομάδας έχουν κατά πλειοψηφία κατανοήσει τη σχέση των δύο πράξεων και τη σύνδεσή τους, έχουν κάνει εννοιολογική πρόοδο (Sarama & Clements, 2009), αφού έχουν απαντήσει στο 71,92% των έργων σωστά με μόλις 22,80% της ομάδας ελέγχου (πίνακας 17α). Η μη κατανόηση της σύνδεσης των δύο πράξεων ως αντίστροφες των υπολοίπων μαθητών οφείλεται στην έλλειψη ισχυρών νοερών αναπαραστάσεων για τις αριθμητικές πράξεις όπου είναι απαραίτητες για την υλοποίηση δράσεων με την άμεση εκτίμηση ποσοτήτων (Τζεκάκη, 2010).

Διατηρησιμότητα της γνώσης

Καταλήγοντας στο πέμπτο ερευνητικό ερώτημα και την διατηρησιμότητα της γνώσης στην υπέρβαση δεκάδας προσθετικά, για να δοθεί απάντηση δόθηκαν τα εξής αθροίσματα στους μαθητές στον προέλεγχο της διδασκαλίας της αφαίρεσης (6+9, 7+4, 8+8, 7+6), καθώς και τα αθροίσματα (5+9, 8+3, 7+7, 9+6) στον μεταέλεγχο της διδασκαλίας της αφαίρεσης. Τονίζεται ότι η επίλυσή τους στον προέλεγχο πραγματοποιήθηκε ένα μήνα μετά τη διδασκαλία της πρόσθεσης και του μεταελέγχου δυο μήνες μετά τη διδασκαλία της πρόσθεσης.

Στα πρώτα αθροίσματα του προελέγχου της αφαίρεσης ανακαλύπτουμε ότι οι μισοί περίπου μαθητές της πειραματικής ομάδας έχουν μεταβεί στην άμεση ανάκληση (39,47%). Οι υπόλοιποι μαθητές χρησιμοποιούν την υπέρβαση δεκάδας, ενώ ελάχιστοι βρίσκονται στο 2^{ο} επίπεδο στρατηγικής (αρίθμηση από τον μεγαλύτερο). Στα αθροίσματα του μεταελέγχου εξακριβώνεται ότι το 72,36% των μαθητών της πειραματικής ομάδας χρησιμοποιεί την άμεση ανάκληση, σε σχέση με το 23,68% της ομάδας ελέγχου. Οι υπόλοιποι μαθητές παραμένουν στο 2^{ο} επίπεδο στρατηγικής (αρίθμηση από τον μεγαλύτερο), όπως και της ομάδας ελέγχου.

Η ανάκτηση που χρησιμοποιούν είναι απλή πρόσβαση πληροφοριών, που είναι αποθηκευμένες στην μακρόχρονη μνήμη (Sarama & Clements, 2009). Οι μαθητές όχι μόνο έχουν κατανοήσει την υπέρβαση της δεκάδας αλλά έχουν μάθει να ανακαλούν άμεσα το αποτέλεσμα. Αυτό συμβαίνει, όταν η κατανόηση προάγει τη μνήμη (Heirdsfield, 2002). Όπως διαπιστώνουμε, έχει διατηρηθεί η γνώση στην υπέρβαση δεκάδας προσθετικά σε συνδυασμό με την άμεση ανάκληση του αποτελέσματος (Baroody, 1985).

Παρατηρείται ότι μόνο 1 από τους 3 μαθητές που βρίσκονταν στο 1^{ο} επίπεδο στρατηγικής δεν μπόρεσε να χρησιμοποιήσει τις στρατηγικές πρόσθεσης, επειδή δεν είχε τρόπο να παρακολουθήσει τις σχέσεις μεταξύ των συνόλων (Carpenter & Moser, 1984) και παρέμεινε σε αυτό. Ένας από τους τρεις μαθητές σε κάποια αθροίσματα χρησιμοποίησε την άμεση ανάκληση περνώντας στο 3^{ο} επίπεδο (Carpenter & Moser, 1984). Ο άλλος μαθητής πέρασε και παρέμεινε στο 2^{ο} επίπεδο στρατηγικής δίχως λάθη (Baroody, 2006).

Περιορισμοί

Στην παρούσα μελέτη εκτός από τα θετικά αποτελέσματα της διερευνητικής δραματοποίησης, υπήρξαν και κάποιες αδυναμίες που θα μπορούσαν να αποφευχθούν σε μελλοντική έρευνα.

Σημαντικός περιορισμός της έρευνας είναι το μέγεθος του δείγματος. Η πειραματική ομάδα αποτελούνταν μόνο από 19 μαθητές, όπως και η ομάδα ελέγχου. Για να είναι αξιόπιστο το δείγμα θα πρέπει να είναι μεγάλο, ώστε να μπορούν να γενικευτούν τα αποτελέσματα. Επιπρόσθετα το δείγμα προερχόταν μέσω βολικής δειγματοληψίας από συγκεκριμένη γεωγραφική περιοχή, από δημόσιο σχολείο, με επακόλουθο τα αποτελέσματα να μην μπορούν να γενικευτούν στο σύνολο των μαθητών. Υπογραμμίζεται ότι υπήρξε διδασκαλία της υπέρβασης δεκάδας προσθετικά μόνο με τη χρήση του μεγαλύτερου προσθετέου αριθμού 9 και ο ερευνητής είχε παραλείψει τη διδασκαλία του μεγαλύτερου προσθετέου 8, λόγω του περιορισμένου χρόνου που διέθετε. Σημειώνεται ότι στον ρόλο μικρότερων προσθετέων χρησιμοποιήθηκε μια μαθήτρια, κάτι που θα μπορούσε να γίνει με όλους τους μαθητές για να φανεί εάν υπάρχει διαφορά πρωταγωνιστή με θεατή στην κατανόηση. Τέλος η επιλογή του χώρου για τη συνέντευξη βασισμένη σε έργα αποτελεί έναν ακόμη περιορισμό, διότι οι μαθητές θα μπορούσαν σε άλλη περίπτωση να εκφραστούν σε άλλο χώρο καλύτερα φωναχτά. Ένας τελευταίος περιορισμός είναι η μη χρήση τεχνολογικών εργαλείων (όπως βιντεοκάμερα, μηχάνημα καταγραφής ομιλιών), ώστε να μπορέσει να γίνει λεπτομερέστερη καταγραφή και εξαγωγή αποτελεσμάτων αμερόληπτα.

VII. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συνοψίζοντας τα κύρια αποτελέσματα και τα ευρήματα από τις μελέτες των άρθρων μπορούμε να συμπεράνουμε αν η διερευνητική δραματοποίηση επιδρά θετικά στην υπέρβαση δεκάδας και στην πρόσθεση αλλά και στην αφαίρεση όπως και στην αφαίρεση ως πρόσθεση, αν οι σταθερές σχέσεις συμβάλλουν στην κατανόησή της, αν μπορούν οι μαθητές να δημιουργήσουν συνδέσεις των δύο πράξεων, καθώς και αν έχει διατηρηθεί η γνώση στην υπέρβαση δεκάδας προσθετικά.

Τα ευρήματα από τις έρευνες επιβεβαιώνουν τα ευρήματα παλαιοτέρων ερευνών που αφορούσαν τη θετική επίδραση της διδασκαλίας μέσω διερευνητικής δραματοποίησης και τη χρήση των θεατρικών και δραματικών τεχνικών. Προορισμός της ήταν να ενισχύσει τη δημιουργικότητα των διδακτικών στόχων, χωρίς να χάσει την καλλιτεχνική της ουσία (Παπαδόπουλος (2005b, σελ. 1, όπ. αναφ. σε Γραμματά, 2003: 452). Υπήρξαν μαθητές οι οποίοι όχι μόνο κατάφεραν να κατανοήσουν την υπέρβαση της δεκάδας προσθετικά, αλλά και να μεταβούν από την κατασκευαστική στρατηγική στην άμεση ανάκληση μετά από ένα χρονικό διάστημα δύο μηνών. Στην υπέρβαση δεκάδας αφαιρετικά ή στην αφαίρεση ως πρόσθεση οι μαθητές υιοθέτησαν την πιο εύκολη στρατηγική (συγκεκριμένα μετά από συζήτηση του ερευνητή με τα παιδιά στο ποια υποστρατηγική τους φάνηκε πιο εύκολη η απάντηση που δόθηκε από τα παιδιά ήταν ομόφωνα η δεύτερη) και επιβεβαιώνει τα ευρήματα των (Fuson & Fuson, 1992; Baroody, 1984; Sarama & Clements, 2009; Van de Walle et al., 2017), που υποστηρίζουν ότι η αφαίρεση προς τα πίσω είναι πιο δύσκολη για τα παιδιά. Επιπλέον στις σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα διαπιστώσαμε ότι οι μισοί περίπου μαθητές δεν τις είχαν κατακτήσει. Παρόλο που η γνώση βασικών αριθμητικών γεγονότων είναι απαραίτητη προϋπόθεση για τους νοερούς υπολογισμούς (Heirdsfield, 2002 όπ. αναφ. σε Plunket, 1979 και Sowder, 1988; Maclellan, 2001) τα ευρήματά μας συμφωνούν με τις άλλες έρευνες των (Heirdsfield, 2002 όπ. αναφ. σε Usnick & Engelhardt, 1988; Van de Walle et al., 2017) ότι η προϋπόθεση αριθμητικής γνώσης μπορεί να μην είναι σημαντική για την πρόσθεση και την αφαίρεση όπως πιστεύεται.

Στη σύνδεση των δύο πράξεων ως αντίστροφες επιβεβαιώνονται τα ευρήματα του Piaget (1952) ότι κανείς δεν μπορεί να κατανοήσει πλήρως τη φύση της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης, εκτός και αν αντιληφθεί τις αντίστροφες σχέσεις μεταξύ αυτών των δύο πράξεων (Bryant, Christie, & Rendu, 1999). Η πρόσθεση και η αφαίρεση είναι συμπληρωματικές λειτουργίες (Baroody, 1999). Η πλειοψηφία των παιδιών τις έχει κατανοήσει χρησιμοποιώντας μάλιστα την άμεση ανάκληση για τα ζευγάρια των πράξεων των έργων που τους δόθηκαν.

Επιπρόσθετα η παρούσα εργασία ανέδειξε τη θετική συμβολή της διερευνητικής δραματοποίησης μέσω των θεατρικών-δραματικών τεχνικών σε διδακτικό αντικείμενο των μαθηματικών και τη θετική στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά. Θα πρέπει πιστεύω ο εκπαιδευτικός να επιμορφωθεί στις θεατρικές-δραματικές τεχνικές της διερευνητικής δραματοποίησης ώστε να μπορέσει να τις εφαρμόσει μέσα στη σχολική τάξη σε συνδυασμό με τα μαθηματικά. Εξάλλου όπως αναφέρει και η Τζεκάκη (2001) οι μαθηματικές γνώσεις θα πρέπει να προσεγγίζονται μέσα από μια ποικιλία δραστηριοτήτων όπως και το θεατρικό παιχνίδι. Ειδικότερα στις πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης και τα αθροιστικά προβλήματα όπου οι μαθητές δείχνουν σημαντικές δυσκολίες είναι σημαντική η δημιουργία αριθμητικών αναπαραστάσεων για τις αριθμητικές σχέσεις και στη συνέχεια η εξάσκησή τους σε μεγάλο αριθμό προβλημάτων με νόημα για τα ίδια (Τζεκάκη, 2001).

Σημασία έχει ότι δεν έχουν γίνει ανάλογες έρευνες με την υπέρβαση δεκάδας και τη διερευνητική δραματοποίηση. Λόγω της μικρής διάρκειά της δεν μπορούμε να εξάγουμε αποτελέσματα μακροπρόθεσμα, κατά πόσο ισχύει η διαπίστωση των Van de Walle et al. (2017) ότι με τη στρατηγική της υπέρβασης δεκάδας μπορούν να επιλυθούν πολλά από τα βασικά δεδομένα της πρόσθεσης (περίπου το ένα τρίτο) και επιπλέον εάν μπορεί να εφαρμοστεί αργότερα στην πρόσθεση μεγαλύτερων αριθμών μετά την κατάκτησή της κάτι το οποίο ισχυρίζονται.

VIII. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξένη Βιβλιογραφία

Anghileri, J. (1999). Issues in teaching multiplication and division. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp 184-194). Buckingham: Open University Press.

Bae, J. S. (2003). Enhancing Children's Understanding of Mathematical Concepts Using Pantomime. In *Proceedings of the Seminar on the Best Practices and Innovations in the Teaching and Learning of Science and Mathematics at the Primary School Level*. Sengalor, Malaysia (July 4-17 2004).

http://hrd.apecwiki.org/index.php/Seminar_on_the_Best_Practices_and_Innovations_in_the_Teaching_and_Learning_of_Science_and_Mathematics_at_the_Primary_School_Level

Bae, J. S. (2004). A clown’s performance. In proceedings *"The 10th International Congress on Mathematics Education"*. Copenhagen, Denmark (July 4-17 2004).

Bae, J., S.; Park, Do-yong, Park, M. (2007). The retention of Mathematical concepts in multiplication in the inquiry-based pantomime instructions. *In Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1,* pp.195. Seoul: PME.

Bakkaloğlu, Nilgün (2011) The effect of Drama method on 4th grade students' at mathematics success and attitudes). *Paper presented in Conference: ECER 2011*, Urban Education.

Bakkaloğlu, N. (2012). Drama Yönteminin İlköğretim 4.Sınıf Matematik Dersinde Öğrenmenin Kalıcılığına Etkisi. (The Impact Of Drama Method On 4th Grade Students At Mathematics Regarding Learning Retention). *Gazeteci Hasan Tahsin İÖO K.Kayaş Mah. 105. Sok. No:17. Mamak Ankara.*

Baroody, A. J. (1984). Children's difficulties in subtraction: Some causes and questions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 203-213.

Baroody, A. J. (1985). Mastery of basic number combinations: Internalization of relationships or facts?. *Journal for Research in Mathematics Education*, 83-98.

Baroody, A. J. (1999). Children's relational knowledge of addition and subtraction. *Cognition and Instruction*, *17*(2), 137-175.

Baroody, A. J. (2006). Mastering the basic number combinations. *Teaching children mathematics*, *23*, 22-31.

Bryant, P., Christie, C., & Rendu, A. (1999). Children's understanding of the relation between addition and subtraction: Inversion, identity, and decomposition. *Journal of Experimental Child Psychology*, *74*(3), 194-212.

Callingham, R. A. (2005). Primary students' mental computation: Strategies and achievement. In *MERGA* (p. EJ).

Cantürk Günan, Berna & Özen, Deniz (2010). Prizmalar Konusunda Drama Yonteminin Uyugulanmasi (The application of Drama method on prisms subject) *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi 27.*

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for research in Mathematics Education*, 179-202.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, 9-24.

Carpenter, T. P., Hiebert, J., & Moser, J. M. (1981). Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics education*, 27-39.

Carroll, W. (1996). Mental computation of students in a reform-based mathematics curriculum. *School Science and Mathematics, 96(6)*, pp. 305-311.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge.

Cohen, L. M., & Manion, L. (2001). l. & Morrison, K.(2007). *Research methods in education, 6*.

Engelhardt, P. V., Corpuz, E. G., Ozimek, D. J., & Rebello, N. S. (2004, September). The Teaching Experiment—What it is and what it isn't. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 720, No. 1, pp. 157-160). AIP.

Fuson, K. C., & Fuson, A. M. (1992). Instruction supporting children's counting on for addition and counting up for subtraction. Journal for Research in Mathematics Education, 23(1), 72-78

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 243-275). New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc.

Hatipoglu, Y.Y. (2006). *Ilkögretim 5.Sinif Matematik Ders Konularinin Ögretiminde Drama Yönteminin Ögrenci Basarisina Etkisi*. Yayinlanmamis Yüksek Lisans

Tezi, Ankara.Heirdsfield, A. M. (2002). The interview in mathematics education: The case of mental computation.

Heirdsfield, A. M. (2002). The interview in mathematics education: the case of mental computation. Understanding and knowledge. In: Annual Conference of the Australian Association for Research in Education, Brisbane, Australia.

Heirdsfield, A., & Cooper, T. (2002). Flexibility and inflexibility in accurate mental addition and subtraction: Two case studies. *Journal of Mathematical Behavior 21* , pp. 57–74.

Heirdsfield, A. M., & Cooper, T. J. (2004). Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: Case studies of flexible and inflexible computers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(4), 443-463.

Heirdsfield, A. M., & Lamb, J. T. (2005). Mental computation: The benefits of informed teacher instruction. MERGA.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1996). Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition and instruction*, *14*(3), 251-283.

Kamii, C., & Dominick, A. (1997). To teach or not to teach algorithms. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(1), 51-61.

Karaduman, G. B. (2011). The Application of Creative Drama in Geometry with Gifted Students. *The 19th Biennial World Conference of the WCGTC: Making a World of Difference for Gifted Children.* Prague (August 8-12).

Kariuki P, Humphrey, S. (2006). The effects of Drama on the Performance of at- Risk Elementary Math Students. *Paper presented at the annual meeting of the Midsouth Educational Research Association.* Birmingham (Nov. 8-10).

Kayhan, H.C. (2004). *Yaratici Dramanin Ilkögretim 3. Sinif Matematik Dersinde Ögrenmeye, Bilgilerin Kaliciligina ve Matematige Yönelik Tutumlara Etkisi*. Yayinlanmamis Yüksek .Lisans Tezi Ankara.

Kayhan H. C. (2008). Effect of Creative Drama as a teaching method on Attitudes towards Mathematics. *In proceedings of International congress of Drama/Theatre in Education,* (pp. 277-278). Ankara (21-23 November).

Kayhan, H. C. (2009). “Creative Drama İn Terms Of Retaining Information. *Procedia social and Behavoral Sciences 1*(1), 737-740.

Korkmaz, T.; Karadağ, E. (2007) Geometri derslerinde drama yönteminin etkiliğinin değerlendirilmesi [The evaluation of effectiveness of drama method in geometry. lesson]. *Yeditepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi* (EDU 7), 2 (2), 1–19.

Maclellan, E. (2001). Mental calculation: Its place in the development of numeracy. *Westminster studies in education*, *24*(2), 145-154.

Maher, C. A., & Sigley, R. (2014). Task-based interviews in mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 579-582.

Matz, K. A., & Leier, C. (1992). Word problems and the language connection. *The Arithmetic Teacher, 39*(8), 14-17.

Fleming*, M., Merrell, C., & Tymms, P. (2004). The impact of drama on pupils' language, mathematics, and attitude in two primary schools. *Research in Drama Education*, *9*(2), 177-197.

McIntosh, A., Nohda, N., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1995). Mental computation performance in Australia, Japan and the United States. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(3), 237-258.

McIntosh, A., Reys, R. E., & Reys, B. J. (1997). Mental computation in the middle grades: The importance of thinking strategies. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *2*(5), 322-327.

McIntosh, A. J., & Dole, S. L. (2000). Mental computation, number sense and general mathematics ability: Are they linked?. In *Mathematics education beyond 2000* (pp. 401-408).

Murata, A. (2004). Paths to learning ten-structured understandings of teen sums: Addition solution methods of Japanese grade 1 students. *Cognition and Instruction*, *22*(2), 185-218.

Murata, A., & Fuson, K. (2006). Teaching as assisting individual constructive paths within an interdependent class learning zone: Japanese first graders learning to add using 10. *Journal for Research in Mathematics Education*, 421-456.

Nave, T. (1983). Drama+ Mathematics= Dramatics. *Arithmetic Teacher*, *30*(5), 22-24.

Neelands, J. (1984). *Making sense of drama: A guide to classroom practice*. Heinemann.

Özgen, C. (2010). The contribution of cognitive style and prior knowledge on sixth grade students' knowledge acquisition in polygons in Drama based learning environment (Doctoral dissertation, MIDDLE EAST TECHNICAL UNIVERSITY).

Omniewski, R. (1999). The effects of an arts infusion approach on the mathematics achievement of second-grade students (Doctoral dissertation). *Kent State University, Ohio*.

Plunkett, S. (1979). Decomposition and all that rot. *Mathematics in school*, *8*(3), 2-5.

Putnam, R. T., Lampert, M., & Peterson, P. L. (1990). Chapter 2: alternative perspectives on knowing mathematics in elementary schools. *Review of research in education*, *16*(1), 57-150.

Resnick, L. B. (1982). Syntax and semantics in learning to subtract.

Reys, B. (1985). *Mental computation. The Arithmetic Teacher, 32(6) , pp. 43-46.*

Reys, B. J., & Barger, R. H. (1994). Mental computation: issues from the United States perspective. *Computational alternatives for the twenty-first century*, 31-47. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Reys, R. (1984). Mental computation and estimation: Past, present, and future. *The Elemantary School Journal, 84(5)* , pp. 546-557.

Reys, R. E., Reys, B. J., Nohda, N., & Emori, H. (1995). Mental computation performance and strategy use of Japanese students in Grades 2, 4, 6, and 8. *Journal for research in mathematics education*. *26(4)* , pp. 304-326.

Rossnan, S. (2006). Overcoming math anxiety. *Mathitudes, 1*(1), 1-4.

Saab, J. (1987). *The effects of creative Drama methods on mathematics achievement, attitudes and creativity.* PhD Dissertation Education D., West Virginia University.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child development*, *75*(2), 428-444.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, *77*(1), 20-26.

Soner, S. (2005). İlköğretim matematik dersi kesirli sayılarda toplama-çıkarma işleminde drama yöntemi ile yapılan öğretimin etkililiği. *Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Abant İzzet Baysal Üniversitesi*. . (The effectiveness of drama-based education in adding and subtracting fractional numbers in an elementary mathematics class]. Unpublished Master Thesis, Abant İzzet Baysal Üniversitesi Social Sciences Institute Bolu.)

Sözer, N. (2006). Ilkögretim 4. Sinif Matematik Dersinde Drama Yönteminin Ögrencilerin Basarilarina Tutumlarina Ve Ögrenmenin Kaliciligina Etkisi. *Yayinlanmamis Yüksek Lisans Tezi. Ankara*. (The effects of using the drama method in elementary 4th grade mathematics class on student success and attitudes and the permanence of learning. Unpublished Master Thesis, Gazi *Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara*.)

Sowder, J. T. (1990). Mental computation and number sense. *The Arithmetic Teacher*, *37*(7), 18-20.

Tanriseven, Işıl (2000). ‘‘*Matematik Öğretiminde Problem Çözme Stratejisi Olarak Dramatizasyonun Kullanılması’’* Yayınlanmamaış Yüksek Lisans Tezi. Marmara Üniversitesi, İstanbul (*Using Dramatization as a problem solving strategy in mathematics*, Unpublished master thesis Marmara University, Instabul)

Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction. Part 1. *Mathematics in school*, *28*(5), 2-4.

Thompson, I. (2010). 12 Getting your head around mental calculation. *Issues in teaching numeracy in primary schools*, 161-173.

Threlfall, J. (2000). Mental calculation strategies. *Research in mathematics education*, *2*(1), 77-90.

Ufuktepe, U., & Ozel, C. T. (2002). Avoiding Mathematics Trauma: Alternative Teaching Methods.

Üredi, I. T., Şengül, S., & Gürdal, A. (2008). Matematik öğretiminde problem çözme stratejisi olarak canlandırma kullanılmasının öğrenci başarısına ve hatırlama düzeyine etkisi. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, *25*(2), 21-33.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2003). Developing early number concepts and number sense. *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*, 115-134.

Wandt, E., & Brown, G.W. (1957). Non-occupational uses of mathematics. *Arithmetic teacher*, *4*, 151-4.

Whitacre, I. (2015). Strategy ranges: describing change in prospective elementary teachers' approaches to mental computation of sums and differences. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18(4)* , pp. 353-373.

Ελληνική Βιβλιογραφία

Αυδή, Α., Χατζηγεωργίου, Μ. (2007). *Η τέχνη του δράματος στην εκπαίδευση*. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Αυδή, Α., & Χατζηγεωργίου, Μ. (2017). *Όταν ο Δάσκαλος Μπαίνει σε Ρόλο -50 Προτάσεις για Θεατρικά Εργαστήρια με Δάσκαλο σε Ρόλο*. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Γκόβας, Ν. (2001). *Για Ένα Νεανικό Δημιουργικό Θέατρο: Ασκήσεις, Παιχνίδια, Τεχνικές*. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Creswell, J.W. (2011). *Η έρευνα στην εκπαίδευση. Σχεδιασμός, διεξαγωγή και αξιολόγηση της ποσοτικής και της ποιοτικής έρευνας*. Αθήνα: Ίων/Έλλην.

Ιωακειμίδης, Π. (2012*). Όταν η θεατρική παιδεία συναντά τα Μαθηματικά: μια πρόταση εκπαιδευτικού σεναρίου με δράσεις Θεατρικής Αγωγής για τη διδασκαλία της ενότητας «Τα Γεωμετρικά Σχήματα»*. Πρακτικά του Ελληνικού Ινστιτούτου Εφαρμοσμένης Παιδαγωγικής και Εκπαίδευσης (ΕΛΛ.Ι.Ε.Π.ΕΚ.), 6ο Πανελλήνιο Συνέδριο, 5-7 Οκτωβρίου 2012.

Καλδρυμίδου Μ., Πόταρη Δ., Σακονίδης Χ., Τζεκάκη Μ. (2011). Η διαχείριση αλλαγής στην τάξη: Εστιάζοντας στην ανάπτυξη της μαθηματικής δραστηριότητας. *4^ο^ Πανελλήνιο συνέδριο της ΕΝΕΔΙΜ*, Ιωάννινα, 2011.

Καραντζής, Ι. (2009). Οι δραστηριότητες παιγνιώδους μορφής στην εκμάθηση και κατανόηση των μαθηματικών εννοιών: Η περίπτωση του νοερού υπολογισμού. Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές. *3^ο^ Πανελλήνιο Συνέδριο της ΕΝΕΔΙΜ*, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 2009.

Κατσαρίδου, Μ. (2011). *Η μέθοδος της δραματοποίησης στη διδασκαλία της λογοτεχνίας.* Διδακτορική διατριβή. Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Παιδαγωγικό τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης. Ανακτήθηκε April 13, 2019, από https://www.didaktorika.gr/eadd/handle/10442/26147.

Κοντογιάννη, Α. (2012α). *Το βιβλίο της δραματοποίησης*. Αθήνα: Πεδίο.

Κοντογιάννη, Α. (2012β). *Η δραματική τέχνη στην εκπαίδευση*. Αθήνα: Πεδίο.

Κοταρίνου, Π. (2014). *Η διδασκαλία των μαθηματικών μέσα από τη χρήση των τεχνικών της "Δραματικής Τέχνης στην Εκπαίδευση" (drama in Education): διερεύνηση της επίδρασης της Δραματικής Τέχνης στη μάθηση των μαθηματικών σε τάξεις του Λυκείου*. Διδακτορική διατριβή. Πανεπιστήμιο

Θεσσαλίας Παιδαγωγικό Τμήμα Ειδικής Αγωγής Τομέας Παιδαγωγικής. Ανακτήθηκε November 17, 2017, από https://www.didaktorika.gr/eadd/handle/10442/38460.

Κουκουνάρας-Λιάγκης, Μ. (2011). *Εκπαιδευτικοί εν δράσει*. Αθήνα: Γρηγόρης

Λεμονίδης, Χ. (2013). Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Νοεροί Υπολογισμοί. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζυγός.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α., Καψάλης, Α., & Πνευματικός, Δ. (2007). Μαθηματικά Α΄ Δημοτικού, Βιβλίο Δασκάλου, Αθήνα: Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Λενακάκης, Α. (2013). Η μορφοπαιδευτική αξία του παιχνιδιού και του θεάτρου στην εκπαίδευση. Στο Θ. Γραμματάς (Επιμ.), *Το θέατρο ως μορφοπαιδευτικό αγαθό και καλλιτεχνική έκφραση στην εκπαίδευση και την κοινωνία*. Εγχειρίδιο για το Πρόγραμμα "Θαλής" (σσ. 58-77). Αθήνα: ΕΚΠΑ.

Λυγούρας, Γ. (2012). Η επίδραση κοινωνικών και ψυχολογικών παραγόντων στην ευελιξία μαθητών ΣΤ΄ τάξης Δημοτικού στους νοερούς υπολογισμούς . Διδακτορική διατριβή. Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας. Παιδαγωγική Σχολή Φλώρινας. Ανακτήθηκε August 20, 2018, από https://www.didaktorika.gr/eadd/bitstream/10442/26903/1/26903.pdf.

Μπαμπινιώτης, Γ. Δ. (2002). Λεξικό της νέας ελληνικής γλώσσας με σχόλια για τη σωστή χρήση των λέξεων: ερμηνευτικό, ετυμολογικό, ορθογραφικό, συνωνύμων, αντιθέτων, κυρίων ονομάτων, επιστημονικών όρων, ακρωνυμιών. Κέντρο Λεξικολογίας.

Μώρου Α., «Δραματοποίηση: από το κείμενο στη σκηνή της τάξης –ένα παράδειγμα, Οδύσσεια Ομήρου» στη *Λέσχη των Εκπαιδευτικών*, τεύχ. 27, Απριλ. 2002.

Παπαδόπουλος, Σ. (2005b). Η Δραματοποίηση στην Εκπαίδευση: Πεδίο Συνάντησης Τέχνης και Επιστήμης. Στα Πρακτικά διεθνούς διεπιστημονικού συνεδρίου: *Επιστήμη και Τέχνη* (τομ. Γ΄). (σσ 129-131). Αθήνα: Ένωση Ελλήνων Φυσικών.

Παπαδόπουλος, Σ. (2007c). *Η Διερευνητική Δραματοποίηση και η Διαθεματική Προσέγγιση των Μαθηματικών*. Νέα Παιδεία, 122, 118-126.

Παπαδόπουλος, Σ., Κούσουλας Φ. & Σιούτης, Α. (2014) *Διερευνητική Δραματοποίηση και δημιουργική έκφραση στο πλαίσιο της μαθησιακής –διδακτικής πράξης*: Αποτελέσματα εμπειρικής έρευνας. Νέα Παιδεία, 152.

Τουμάσης, Μπ. (2002). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.

Τζεκάκη, Μ. (2001). *Η μαθηματική τάξη στον 21ο αιώνα*. Στο ''Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση'' (σ.77-78). Α.Π.Θ. Θεσσαλονίκη.

Τζεκάκη, Μ. (2010). *Μαθηματική Εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία.* Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζυγός.

Van de Walle J., Louann Lovin H., Karen Karp S., Jennifer Bay-Williams M. (2017). *Μαθηματικά από το Νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο. Διδασκαλία με επίκεντρο το παιδί και την ανάπτυξή του*. Αθήνα: Gutenberg.

Χαβιάρης, Π. (2006). *Τύποι κοινωνικομαθηματικής αλληλεπίδρασης στη σχολική τάξη των μαθηματικών: Η παρατήρηση μαγνητοσκοπημένης συνεργασίας και το παιχνίδι ρόλων ως περιβάλλοντα αναστοχασμού*. Διδακτορική διατριβή, Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Πανεπιστήμιο του Αιγαίου. Ανακτήθηκε October 18, 2017, από https://www.didaktorika.gr/eadd/handle/10442/15654.

Χρονάκη, Α. (2010). Το Διδακτικό Πείραμα: Η ποιοτική μελέτη της μαθησιακής διαδικασίας στο πλαίσιο της διδακτικής πράξης. *Ποιοτική Έρευνα στην Ψυχολογία και στην Εκπαίδευση: Επιστημολογικά, μεθοδολογικά και ηθικά ζητήματα*, 605-628.

Wooland, B. (1999). Η διδασκαλία του δράματος στο Δημοτικό σχολείο. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Ποιήματα

Πρόσθεσης (Το παραμύθι με τον αριθμό 9)

Ήταν ένας βασιλιάς,
το δεκάρι, ο κοιλαράς.
Όλα τα παιδιά τον αγαπούσαν
και την ευχή του την ζητούσαν.

Οι πράξεις γινόταν στο λεπτό
χωρίς να μετρούν ένα και δυο.
Όπως το δέκα και το επτά
μας έκανε δεκαεπτά.

Το εννιάρι το μικρό,
ζήλευε τον αρχηγό.
Τα παιδάκια δεν το `θελαν,
γιατί μετρούσαν και δεν `ξέραν.

Ώσπου μια μέρα το μικρό,
άρχισε να κλέβει ένα από το διπλανό.
Οι πράξεις γινόταν στο λεπτό
και όλα τα παιδάκια χαίρονταν γι αυτό.

Αφαίρεσης (Το ταξίδι της αφαίρεσης)

Ήθελα από το 17
να βγάλω το 9.
Προσπάθησα μετρούσα
μα με τίποτα δε μπορούσα.

Ξεκίνησα από το μεγάλο να πάω στο μικρό
σταμάτησα στο 10 να φάω παγωτό.

Μέτρησα τα βήματα και ήθελα 7
μέτρησα κι άλλο 1 για το 9.

Έβαλα τα βήματα μαζί
το πρόβλημα λύθηκε στη στιγμή!
Μα μου ήρθε κι άλλο τρόπος.
Πιο έξυπνος, πιο σύντομος, πιο πρώτος!

Ξεκίνησα από το μικρό να πάω στο μεγάλο,
γιατί μου `λεγε βγάλε με, δεν αντέχω άλλο.
Περπάτησα, κουράστηκα να φτάσω ως το 10
κάθισα, ήπια τον χυμό και με έκανε ρουκέτα.

Μα ήταν εύκολο μετά να πάω στο 17.
Έβαλα τα βήματα μαζί
1+7 με λογική
και το αποτέλεσμα βγήκε στη στιγμή.

<u>Σχέδιο διδασκαλίας</u>

ΠΡΟΣΘΕΣΗ

Η διερευνητική δραματοποίηση απευθύνεται σε μαθητές Α΄ δημοτικού. Για τη διδασκαλία της δραματοποίησης, απαιτείται περίπου 1 διδακτική ώρα για κάθε προσθετέο (π.χ. για τον μεγαλύτερο προσθετέο αριθμό 9).	
ΘΕΜΑ	Υπέρβαση δεκάδας με προσθετέο τον αριθμό 9
ΚΑΤΕΥΘΥΝΤΗΡΙΟ ΕΡΩΤΗΜΑ	Γιατί όλα τα παιδιά αγαπούν το 10;
ΥΠΟΕΡΩΤΗΜΑΤΑ	Τι πρέπει να κάνει το 9 για να γίνει 10;
ΠΗΓΗ/ΕΡΕΘΙΣΜΑ	Το παραμύθι με τον αριθμό 9 (ποίημα)
ΠΡΟΚΕΙΜΕΝΟ	Όλα τα παιδιά αγαπούν τον αριθμό 10 γιατί οι πράξεις με αυτόν γίνονται πολύ γρήγορα (π.χ. 10 + 5 = 15). Τι θα κάνει ο αριθμός 9 που ζηλεύει;
ΡΟΛΟΙ ΓΙΑ ΤΑ ΠΑΙΔΙΑ	Οποιοσδήποτε αριθμός που θα προστεθεί στον αριθμό 9 (π.χ. 5)
ΡΟΛΟΙ ΓΙΑ ΤΟΝ ΔΑΣΚΑΛΟ	Ο αριθμός 9

Πίνακας βασισμένος στα σχέδια μαθημάτων των (Αυδή και Χατζηγεωργίου, 2007).

Α) Δημιουργία ατμόσφαιρας ομάδας

Υπάρχουν πολλά παιχνίδια που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο εκπαιδευτικός για τη δημιουργία ατμόσφαιρας της ομάδας. Θα παρουσιάσουμε ένα από αυτά που αναφέρονται στο βιβλίο των (Αυδή και Χατζηγεωργίου, 2007) η τέχνη του δράματος στην εκπαίδευση.

Ο δάσκαλος μαζεύει τα παιδιά και τους τοποθετεί σε κύκλο. Κάθε παιδί με τη σειρά λέει το όνομά του και από πού το πήρε. Με αυτό τον τρόπο παρουσιάζεται στην ομάδα. Στη συνέχεια να παρουσιάζουμε τον αριθμό 10 και τον αριθμό 9.

Β) Γνωριμία με το αρχικό περιβάλλον (Απαγγελία ποιήματος)

Ο δάσκαλος εντάσσει το ποίημα το παραμύθι με τον αριθμό 9 στο πλαίσιο της μαθησιακής διδασκαλίας. Ακολουθεί συζήτηση πάνω στο θέμα, όπως για ποιο λόγο όλα τα παιδιά αγαπούν το 10, πως νιώθει το μικρό 9 και τι κάνει στο τέλος για να το αγαπήσουν.

Γ) Δημιουργία νέου δραματικού περιβάλλοντος

Ακίνητη – παγωμένη εικόνα

Δημιουργούνται ομάδες των 2 παιδιών και αναλαμβάνουν να παρουσιάσουν σε μια ακίνητη εικόνα, μια ιδέα, μια έννοια ή τα κύρια σημεία της ιστορίας του ποιήματός μας.

Δάσκαλος σε ρόλο

Δραματοποιούμε το ποίημα του ερευνητή. Ο δάσκαλος παίρνει τον ρόλο του μεγαλύτερου προσθετέου αριθμού 9 [38] και ο μαθητής του άλλου προσθετέου (π.χ. 5). Στη συνέχεια ο δάσκαλος προκαλώντας το ενδιαφέρον των παιδιών, ελέγχει τη δράση και προκαλεί τη συμμετοχή όλων μέσα από τη συζήτηση (Τι σκοπό έχει ο αριθμός 9;) και ακολουθεί τη διαδικασία του κλεψίματος όπως φαίνεται στο φωτογραφικό υλικό.

Δ) Αξιολόγηση

Οι μαθητές αξιολογούν τη μαθηματική και δραματική εμπειρία τους και συζητάμε (π.χ. Τι έκανε ο αριθμός 9; Ποιος ο λόγος να το κάνει; Τι έπαθε ο άλλος αριθμός; Τι έγιναν τώρα οι αριθμοί μας; Ποιο είναι το αποτέλεσμα;).

ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Η διερευνητική δραματοποίηση απευθύνεται σε μαθητές Α΄ δημοτικού. Για τη διδασκαλία της δραματοποίησης, απαιτείται περίπου 1 διδακτική ώρα για κάθε μειωτέο (π.χ. για τον μειωτέο αριθμό

[38] Ακριβώς η ίδια διαδικασία μπορεί να γίνει και με μεγαλύτερο προσθετέο τον αριθμό 8.

9). Αφαίρεση 17-9	
ΘΕΜΑ	Υπέρβαση δεκάδας με μειωτέο τον αριθμό 9
ΚΑΤΕΥΘΥΝΤΗΡΙΟ ΕΡΩΤΗΜΑ	Γιατί σταματάω στον αριθμό 10;
ΥΠΟΕΡΩΤΗΜΑΤΑ	Τι πρέπει να κάνω μετά;
ΠΗΓΗ/ΕΡΕΘΙΣΜΑ	Το ταξίδι της αφαίρεσης (ποίημα) (μέχρι τη λέξη «στη στιγμή».
ΠΡΟΚΕΙΜΕΝΟ	Ξεκινώντας την αφαίρεση για να πάω από το 17 στο 9 θα σταματήσω στο 10. Γιατί σταματάω στον αριθμό 10; Τι θα κάνω στο 10 όταν θα σταματήσω;
ΡΟΛΟΙ ΓΙΑ ΤΑ ΠΑΙΔΙΑ ΚΑΙ ΤΟΝ ΔΑΣΚΑΛΟ	Μαζί δημιουργούν τον αριθμό 17 με δύο βάσεις (ten frame) και κρατάει ο καθένας από μία.

Πίνακας βασισμένος στα σχέδια μαθημάτων των (Αυδή και Χατζηγεωργίου, 2007).

Α) Δημιουργία ατμόσφαιρας ομάδας

Υπάρχουν πολλά παιχνίδια που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο εκπαιδευτικός για τη δημιουργία ατμόσφαιρας της ομάδας. Θα παρουσιάσουμε ένα από αυτά που αναφέρονται στο βιβλίο των (Αυδή και Χατζηγεωργίου, 2017) όταν ο δάσκαλος μπαίνει σε ρόλο.

Ο δάσκαλος μαζεύει τα παιδιά και τους τοποθετεί σε κύκλο. Μοιράζουμε σε κάθε παιδί από ένα καραβάκι. Ο καθένας γράφει το όνομά του στο καραβάκι, και καθώς το αφήνει στο κέντρο, αναφέρει το όνομά του και κάτι που του αρέσει. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε σε καραβάκι τον αριθμό 17.

Β) Γνωριμία με το αρχικό περιβάλλον (Ένταξη του ποιήματος στο πλαίσιο της μαθησιακής διδασκαλίας)

Ο δάσκαλος εντάσσει το ποίημα το ταξίδι της αφαίρεσης στο πλαίσιο της μαθησιακής διδασκαλίας. Ακολουθεί συζήτηση πάνω στο θέμα, όπως για ποιον λόγο θα ταξιδέψω, πού θα σταματήσω, τι θα κάνω στον αριθμό 10 όπου σταμάτησα.

Γ) Δημιουργία νέου δραματικού περιβάλλοντος

Ακίνητη – παγωμένη εικόνα

Δημιουργούνται ομάδες των 2 παιδιών και αναλαμβάνουν να παρουσιάσουν σε μια ακίνητη εικόνα, μια ιδέα, μια έννοια ή τα κύρια σημεία της ιστορίας του ποιήματός μας.

Δάσκαλος σε ρόλο

Δραματοποιούμε το ποίημα του ερευνητή. Ο δάσκαλος μαζί με τον/την μαθητή/τρια παίρνει τον ρόλο του αριθμού 17. Στη συνέχεια ο δάσκαλος προκαλώντας το ενδιαφέρον των παιδιών, ελέγχει τη δράση και προκαλεί τη συμμετοχή όλων μέσα από τη συζήτηση (Τι πρέπει να κάνει ο/η μαθητής/τρια για να ταξιδέψει ως το 9;) και ακολουθεί τη διαδικασία της αφαίρεσης των 7 στοιχείων ώστε να μείνουν μόνο 10 στη μια βάση (ten frame) του δασκάλου όπως φαίνεται στο φωτογραφικό υλικό. Στο τέλος αφαιρεί τα υπόλοιπα 2 από τον αριθμό (9). Μετράει τα εναπομείναντα 8. Είναι το αποτέλεσμα.

Δ) Αξιολόγηση

Οι μαθητές αξιολογούν τη μαθηματική και δραματική εμπειρία τους και συζητάμε (π.χ. Ποιος αριθμός ήμαστε; Που θέλει να ταξιδέψει ο/η μαθητής/τρια; Που σταμάτησε; Γιατί σταμάτησε στον αριθμό 10; Ποιο είναι το αποτέλεσμα;).

Η διερευνητική δραματοποίηση απευθύνεται σε μαθητές Α΄ δημοτικού. Για τη διδασκαλία της δραματοποίησης, απαιτείται περίπου 1 διδακτική ώρα για κάθε μειωτέο (π.χ. για τον μειωτέο αριθμό 9). Αφαίρεση 17-9

ΘΕΜΑ	Αφαίρεση ως πρόσθεση
ΚΑΤΕΥΘΥΝΤΗΡΙΟ ΕΡΩΤΗΜΑ	Γιατί σταματάω στον αριθμό 10;
ΥΠΟΕΡΩΤΗΜΑΤΑ	Τι πρέπει να κάνω μετά;
ΠΗΓΗ/ΕΡΕΘΙΣΜΑ	Το ταξίδι της αφαίρεσης (ποίημα). Από τη λέξη «Μα μου ήρθε» ως το τέλος.
ΠΡΟΚΕΙΜΕΝΟ	Ξεκινώντας την αφαίρεση για να πάω από το 9 στο 17 θα σταματήσω στο 10. Γιατί σταματάω στον αριθμό 10; Τι θα κάνω στο 10 όταν θα σταματήσω;
ΡΟΛΟΙ ΓΙΑ ΤΑ ΠΑΙΔΙΑ	Θα γίνει στο τέλος ο αριθμός 17.
ΡΟΛΟΙ ΓΙΑ ΤΟΝ ΔΑΣΚΑΛΟ	Ο αριθμός 9.

Πίνακας βασισμένος στα σχέδια μαθημάτων των (Αυδή και Χατζηγεωργίου, 2007).

Α) Δημιουργία ατμόσφαιρας ομάδας

Υπάρχουν πολλά παιχνίδια που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο εκπαιδευτικός για τη δημιουργία ατμόσφαιρας της ομάδας. Θα παρουσιάσουμε ένα από αυτά που αναφέρονται στο βιβλίο των (Αυδή και Χατζηγεωργίου, 2017) όταν ο δάσκαλος μπαίνει σε ρόλο.

Κάθε μαθητής παίρνει στα χέρια του ένα προσωπικό του αντικείμενο και περπατάει μέσα στον χώρο. Όταν συναντάει κάποιον ανταλλάσουν αντικείμενα του λέει το όνομά του και του ζητάει να το προσέχει. Στην πορεία εάν ξανασυναντήσουν κάποιον άλλο, του αναφέρει ποιανού είναι το αντικείμενο, γίνεται η ανταλλαγή και του ζητάει να το προσέχει. Στη συνέχεια ανταλλάσουμε τη βάση του 10 (ten frame) με τον αριθμό 9 και ζητάμε από το παιδί που θα συμμετάσχει στη δραματοποίηση να το προσέχει.

Β) Γνωριμία με το αρχικό περιβάλλον (Ένταξη του ποιήματος στο πλαίσιο της μαθησιακής διδασκαλίας)

Ο δάσκαλος εντάσσει το ποίημα το ταξίδι της αφαίρεσης στο πλαίσιο της μαθησιακής διδασκαλίας. Ακολουθεί συζήτηση πάνω στο θέμα, όπως για ποιον λόγο θα ταξιδέψω, πού θα σταματήσω, τι θα κάνω στον αριθμό 10 όπου σταμάτησα.

Γ) Δημιουργία νέου δραματικού περιβάλλοντος

Ακίνητη – παγωμένη εικόνα

Δημιουργούνται ομάδες των 2 παιδιών και αναλαμβάνουν να παρουσιάσουν σε μια ακίνητη εικόνα, μια ιδέα, μια έννοια ή τα κύρια σημεία της ιστορίας του ποιήματός μας.

Δάσκαλος σε ρόλο

Δραματοποιούμε το ποίημα του ερευνητή. Ο δάσκαλος παίρνει τον ρόλο του αριθμού 9. Στη συνέχεια ο δάσκαλος προκαλώντας το ενδιαφέρον των παιδιών, ελέγχει τη δράση και προκαλεί τη συμμετοχή όλων μέσα από τη συζήτηση (Τι πρέπει να κάνει ο/η μαθητής/τρια για να ταξιδέψει ως το 17;) και ακολουθεί ο/η μαθητής/τρια τη διαδικασία της πρόσθεσης του ενός στοιχείου ώστε να γίνουν μόνο 10 στη μια βάση (ten frame) του δασκάλου. Στο τέλος ο/η μαθητής/τρια προσθέτει τα υπόλοιπα 7 στοιχεία για να φτάσει στον αριθμό (17). Μετράει πόσα συνολικά στοιχεία τοποθέτησε στις βάσεις (ten frame). Είναι το αποτέλεσμα.

Δ) Αξιολόγηση

Οι μαθητές αξιολογούν τη μαθηματική και δραματική εμπειρία τους και συζητάμε (π.χ. Ποιος αριθμός ήμουν; Που θέλει να ταξιδέψει ο/η μαθητής/τρια; Που σταμάτησε; Γιατί σταμάτησε στον αριθμό 10; Ποιο είναι το αποτέλεσμα;).

<u>Φύλλα παρατήρησης</u>

1ο ΦΥΛΛΟ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗΣ												
Ασκήσεις	**Στρατηγικές**											**Σ/Λ**
	1ο επίπεδο	2ο επίπεδο				3ο επίπεδο						
3+χ=6												
4+χ=7												
2+χ=9												
8-χ=4												
7-χ=3												
9-χ=3												
7+χ=10												
6+χ=10												
2+χ=10												
Υποστρα-τηγική	1	1	2	3	4	1	2	3	4	5	ανάκληση	
9+5=												
8+4=												
9+7=												

2^{o} ΦΥΛΛΟ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗΣ												
Ασκήσεις	**Στρατηγικές**											**Σ/Λ**
	1^{o} επίπεδο	2^{o} επίπεδο				3^{o} επίπεδο						
3+χ=9												
2+χ=8												
9-χ=4												
8-χ=3												
4+χ=10												
3+χ=10												
Υποστρα-τηγική	1	1	2	3	4	1	2	3	4	5	ανάκληση	
9+3=												
8+5=												
9+6=												
7+6=												
9+8=												

$3^{ο}$ ΦΥΛΛΟ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗΣ

Ασκήσεις	**Στρατηγικές**														**Σ/Λ**
	$1^{ο}$ επίπεδο				$2^{ο}$ επίπεδο				$3^{ο}$ επίπεδο						
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5	ανάκληση	
6+9=															
7+4=															
8+8=															
7+6=															
14-9=															
12-5=															
14-7=															
13-6=															
9+9=															
18-9=															
5+8=															
13-5=															
7+6=															
13-7=															

4ο ΦΥΛΛΟ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗΣ															
Ασκήσεις	**Στρατηγικές**														**Σ/Λ**
	1ο επίπεδο				2ο επίπεδο				3ο επίπεδο						
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5	ανάκληση	
5+9=															
8+3=															
7+7=															
9+6=															
13-9=															
12-7=															
15-7=															
12-6=															
8+8=															
16-8=															
6+8=															
14-6=															
9+6=															
15-9=															

<u>Έργα συνέντευξης</u>

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:____________________________________
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:_________________ ΣΧΟΛΕΙΟ:______________

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1) Πόσα πρέπει να βάλω στο **3,** για να φτάσω στο **6**; Απάντηση:__

Πόσα πρέπει να βάλω στο **4,** για να φτάσω στο **7**; Απάντηση:__

Πόσα πρέπει να βάλω στο **2,** για να φτάσω στο **9**; Απάντηση:__

2) Πόσα πρέπει να βγάλω από το **8,** για να φτάσω στο **4**; Απάντηση:__

Πόσα πρέπει να βγάλω από το **7,** για να φτάσω στο **3**; Απάντηση:__

Πόσα πρέπει να βγάλω από το **9,** για να φτάσω στο **3**; Απάντηση:__

3) Πόσα πρέπει να βάλω στο **7,** για να φτάσω στο **10**; Απάντηση:__

Πόσα πρέπει να βάλω στο **6,** για να φτάσω στο **10**; Απάντηση:__

Πόσα πρέπει να βάλω στο **2,** για να φτάσω στο **10**; Απάντηση:__

4) Τι αποτέλεσμα θα πάρω; Πώς το βρήκες;

9 + **5** =__

8 + **4** =__

9 + **7** =__

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:___________________________________

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:_________________ ΣΧΟΛΕΙΟ:______________

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Πόσα πρέπει να βάλω στο **3,** για να φτάσω στο **9**; Απάντηση:__

Πόσα πρέπει να βάλω στο **2,** για να φτάσω στο **8**; Απάντηση:__

2) Πόσα πρέπει να βγάλω από το **9,** για να φτάσω στο **4**; Απάντηση:__

Πόσα πρέπει να βγάλω από το **8,** για να φτάσω στο **3**; Απάντηση:__

3) Πόσα πρέπει να βάλω στο **4,** για να φτάσω στο **10**; Απάντηση:__

Πόσα πρέπει να βάλω στο **3,** για να φτάσω στο **10**; Απάντηση:__

4) Τι αποτέλεσμα θα πάρω; Πώς το βρήκες;

9 + **3** =__

8 + **5** =__

9 + **6** =__

7 + **6** =__

9 + **8** =__

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:__________________________________
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:_________________   ΣΧΟΛΕΙΟ:______________

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Τι αποτέλεσμα θα πάρω; Πώς το βρήκες;

6 + **9** =__

7 + **4** =__

8 + **8** =__

7 + **6** =__

2) Τι αποτέλεσμα θα πάρω; Πώς το βρήκες;

14 - **9** =__

12 - **5** =__

14 - **7** =__

13 - **6** =__

3) Πόσο είναι το **9** + **9** =__   και τώρα πόσο είναι το **18** - **9** =__

Πόσο είναι το **5** + **8** =__   και τώρα πόσο είναι το **13** - **5** =__

Πόσο είναι το **7** + **6** =__   και τώρα πόσο είναι το **13** - **7** =__

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:____

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:____________________   ΣΧΟΛΕΙΟ:________________

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1) Τι αποτέλεσμα θα πάρω; Πώς το βρήκες;

5 + **9** =__

8 + **3** =__

7 + **7** =__

9 + **6** =__

2) Τι αποτέλεσμα θα πάρω; Πώς το βρήκες;

13 - 9 =__

12 - 7 =__

15 - 7 =__

12 - 6 =__

3) Πόσο είναι το **8** + **8** =__   και τώρα πόσο είναι το **16 - 8** =__

Πόσο είναι το **6** + **8** =__   και τώρα πόσο είναι το **14 - 6** =__

Πόσο είναι το **9** + **6** =__   και τώρα πόσο είναι το **15 - 9** =__

Πίνακες

Πίνακας 12β. Διατηρησιμότητα της γνώσης στην υπέρβαση δεκάδας προσθετικά. Επίπεδα υποστρατηγικών.

$1^{ος}$ Άξονας:		**6+9=**		**7+4=**		**8+8=**		**7+6=**	
Επίπεδο στρατηγικής		Αποτελέσματα							
	Υποστρατηγική	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.
ΣΩΣΤΟ									
$1^{ο}$ επ.	1								
$2^{ο}$ επ.	1								
	2								
	3								
	4	2	11	13	15	4	2	7	14
$3^{ο}$ επ.	1							2	
	2								
	3	6			1	2		1	1
	4		3						1
	5								
	Άμεση ανάκληση	10		5		10	15	5	
ΛΑΘΟΣ									
$1^{ο}$ επ.	1	1	2	1	2	1	2	1	2
$2^{ο}$ επ.	1								
	2								
	3								
	4		3		1	2		3	1
$3^{ο}$ επ.	1								
	2								
	3								
	4								
	5								
	Άμεση ανάκληση								

Πίνακας 13β. Προϋπάρχουσα γνώση στην υπέρβαση δεκάδας αφαιρετικά ή αφαίρεση ως πρόσθεση. Επίπεδα υποστρατηγικών.

2ος Άξονας:		**14-9=**		**12-5=**		**14-7=**		**13-6=**	
Επίπεδο στρατηγικής		Αποτελέσματα							
	Υποστρατηγική	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.
ΣΩΣΤΟ									
$1^{ο}$ επ.	1								
	2								
	3								
	4								
$2^{ο}$ επ.	1	16	12	14	13	13	13	14	14
	2								
	3		1						
$3^{ο}$ επ.	1					1	1		
	2								

	3								
	4	1							
	Άμεση ανάκληση					1		1	1
ΛΑΘΟΣ									
$1^{ο}$ επ.	1	1	2	1	2	1	2	1	2
	2								
	3								
	4								
$2^{ο}$ επ.	1	1	4	4	4	3	3	3	2
	2								
	3								
$3^{ο}$ επ.	1								
	2								
	3								
	4								
	Άμεση ανάκληση								

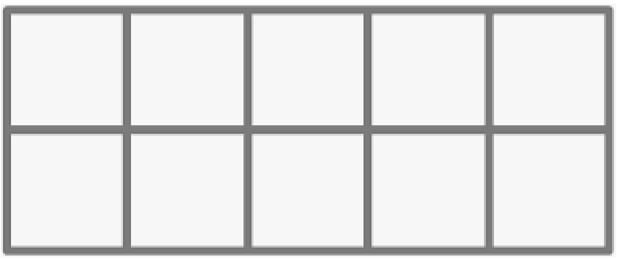
Πίνακας 15β. Διατηρησιμότητα της γνώσης στην υπέρβαση δεκάδας προσθετικά. Επίπεδα υποστρατηγικών.

$1^{ος}$ Άξονας:		**5+9=**		**8+3=**		**7+7=**		**9+6=**	
Επίπεδο στρατηγικής		Αποτελέσματα							
	Υποστρατηγική	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.
ΣΩΣΤΟ									
$1^{ο}$ επ.	1								
$2^{ο}$ επ.	1								
	2								
	3		1		1		1		1
	4	2	11	6	11	7	9	2	10
$3^{ο}$ επ.	1								
	2								
	3								
	4		1						1
	5								
	Άμεση ανάκληση	16	3	12	4	11	7	16	4
ΛΑΘΟΣ									
$1^{ο}$ επ.	1	1	2	1	2	1	2	1	2
$2^{ο}$ επ.	1								
	2								
	3								
	4		1		1				1
$3^{ο}$ επ.	1								
	2								
	3								
	4								
	5								
	Άμεση ανάκληση								

Πίνακας 16β. Γνώση στην υπέρβαση δεκάδας αφαιρετικά ή αφαίρεση ως πρόσθεση. Επίπεδα υποστρατηγικών.

2ος Άξονας:		**13-9=**		**12-7=**		**15-7=**		**12-6=**	
Επίπεδο στρατηγικής		Αποτελέσματα							
	Υποστρατηγική	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.
ΣΩΣΤΟ									
1ο επ.	1								
	2								
	3								
	4								
2ο επ.	1		14	2	16	2	16		14
	2								
	3	3		5		8		4	
3ο επ.	1								
	2								
	3								
	4								
	Άμεση ανάκληση	15	2	10		7		14	3
ΛΑΘΟΣ									
1ο επ.	1	1	2	1	2	1	2	1	2
	2								
	3								
	4								
2ο επ.	1		1		1		1		
	2								
	3			1					
3ο επ.	1								
	2								
	3								
	4								
	Άμεση ανάκληση					1			

Βάση του 10 (ten frame)



Φωτογραφικό υλικό

Διερευνητική δραματοποίηση στην υπέρβαση δεκάδας

Πρόσθεση






Αφαίρεση