ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ* ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: **«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»**

Διπλωματική εργασία

« Πεποιθήσεις των καθηγητών Γυμνασίου για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου»

του

Βούζιου Γεωργίου, Α. Μ. 0693

Επιβλέπων: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Εξεταστές: Ζαχαριάδης Θεοδόσιος, Καθηγητής Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Τσακιρίδου Ελένη, καθηγήτρια ΠΤΔΕ ΠΔΜ.

Θεσσαλονίκη, Οκτώβριος 2019

Η παρούσα διπλωματική εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια σπουδών

για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το Διατμηματικό- Διαπανεπιστημιακό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

« Διδακτική των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την …./…./2019 από εξεταστική επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**	**Υπογραφή**
1. Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος	Αναπληρωτής Καθηγητής	…………………..
2. Ζαχαριάδης Θεοδόσιος	Καθηγητής Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ	…………………….
3. Τσακιρίδου Ελένη	Καθηγήτρια ΠΤΔΕ ΠΔΜ	..……………………

Περίληψη.

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μια σημαντική αύξηση των ερευνών σχετικά με τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση. Η εισαγωγή της Ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση δεν είναι κάτι καινούργιο, από το δεύτερο μισό του 19ου αιώνα κάποιοι μαθηματικοί υποστηρίζουν, ότι η υιοθέτηση της ιστορικής προσέγγισης της διδασκαλίας των Μαθηματικών ενισχύει το ενδιαφέρον των μαθητών για το αντικείμενο. Το Αναλυτικό Πρόγραμμα του 2003 εισήγε καινοτομίες όπως η διαθεματικότητα, η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία, εκπόνηση σχεδίων εργασίας και τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Η εργασία έχει ως σκοπό τη διερεύνηση των πεποιθήσεων των καθηγητών Μαθηματικών, που διδάσκουν σε Γυμνάσια, σχετικά με τη χρήση των ιστορικών σημειωμάτων που περιέχονται στα σχολικά βιβλία. Η έρευνα απέδειξε ότι το 1/3 των καθηγητών δεν εντάσσουν το ιστορικό υλικό στη διδασκαλία. Τα ιστορικά σημειώματα που περιέχονται στα σχολικά βιβλία στη μεγαλύτερη πλειοψηφία τους είναι ενημερωτικά, χωρίς να διεγείρουν το ενδιαφέρον των μαθητών. Όπου υπάρχουν δραστηριότητες, δεν παρέχονται επαρκείς πληροφορίες στους καθηγητές για τη διεξαγωγή τους στη τάξη.

Κλειδιά: Ιστορία των Μαθηματικών, Διδακτική, Ιστορικά Σημειώματα.

Abstract

In recent years there has been a large increase in research on the use of the History of Mathematics in mathematical education. The introduction of History into mathematical education is nothing new, since the second half of the 19th century some mathematicians have argued that the adoption of the historical approach to teaching mathematics reinforces students' interest in the subject. The Curriculum of 2003 introduced innovations such as interdisciplinary, teamwork teaching, the development of work plans and the use of the History of Mathematics. The work explored the attitude of Mathematics teachers who teach in Gymnasiums to the use of historical notes in textbooks. Research has shown that 1/3 of teachers do not use historical material. The historical notes contained in the textbooks are not for the most part informative, without arousing the interest of the students. Where there are activities, teachers are not provided with sufficient information to conduct them in the classroom.

Keys: History of Mathematics, Didactics, Historical Snippets.

Περιεχόμενα

Σελίδα

Εισαγωγή 6

Κεφάλαιο 1. Το θεωρητικό πλαίσιο διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών. 8

1.1. Η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στην διδασκαλία και μάθηση τους. 8

1.2. Ιστορική Αναδρομή 10

1.3. Ύστερες εξελίξεις. 15

1.4. Οι διακριτές χρήσεις της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους 16

1.4.1. Οι τρόποι που μπορεί να χρησιμοποιηθεί η Ιστορία στη διδασκαλία. 17

1.4.2. Οι τρείς μορφές αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών. 19

1.4.3. Οι τρόποι εφαρμογής της Ιστορίας των Μαθηματικών στη τάξη. 21

1.5. Ποιο ιστορικό υλικό είναι κατάλληλο, εύστοχο και σχετικό με την μαθηματική εκπαίδευση. 23

1.6. Αντίλογος για τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών. 25

Κεφάλαιο 2. Σκοπός της Εργασίας και Μεθοδολογία. 27

2.1. Σκοπός της Εργασίας- Ερευνητικά Ερωτήματα. 27

2.2. Μεθοδολογία της Έρευνας. 28

2.2.1. Ανάλυση Δ.Ε.Π.Π.Σ./ Α.Π.Σ.- Διδακτικά Βιβλία- Οδηγίες Διδασκαλίας. 28

2.2.2. Σύνταξη ερωτηματολογίου. 28

2.2.3. Η διαδικασία συλλογής των δεδομένων. 29

2.2.4. Το δείγμα που συμμετείχε. 29

2.2.5. Επεξεργασία δεδομένων. 30

Κεφάλαιο 3. Τα ιστορικά σημειώματα στα σχολικά βιβλία και στο ΔΕΠΠΣ/ ΑΠΣ. 31

3.1. Ά Γυμνασίου. 31

3.2. Έ Γυμνασίου. 51

3.3. Ύ Γυμνασίου. 62

3.4. Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών-
Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης) 69
3.5. Κριτική του ιστορικού υλικού που περιέχεται στα σχολικά
βιβλία. 71
3.6. Ανακεφαλαίωση 75
Κεφάλαιο 4. Το ερωτηματολόγιο της έρευνας- Αποτελέσματα 77
4.1. Σύνταξη Ερωτηματολόγιου. 77
4.2. Ανάλυση του δείγματος. 78
4.3. Αποτελέσματα. 82
Κεφάλαιο 5. Συζήτηση- Συμπεράσματα 87
5.1. Δάσκαλοι vs Καθηγητές των Μαθηματικών. 87
5.2. Συμπεράσματα 90
5.3 Συζήτηση ζητημάτων 96
Βιβλιογραφία 102
Παράρτημα 106

Εισαγωγή.

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μια σημαντική αύξηση των ερευνών που ασχολούνται και μελετούν την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη σχολική διδακτική πρακτική, μέσα από τα Αναλυτικά Προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών και τα σχολικά βιβλία. Η κύρια ιδέα είναι ότι η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να αποτελέσει το μέσο για την επίτευξη των στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Η παρούσα εργασία μελετά τις στάσεις/ πεποιθήσεις των καθηγητών Μαθηματικών του Γυμνασίου στη χρήση των ιστορικών σημειωμάτων που περιέχονται στα σχολικά βιβλία και στην Ιστορία των Μαθηματικών. Η εργασία αποτελεί μια προέκταση της εργασίας της Καλλιόπης Μιόγλου (2017) , η οποία μελέτησε το ίδιο θέμα στους εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Η έρευνα για την πραγματοποίηση της εργασίας δεν διενεργήθηκε σε αχαρτογράφητο έδαφος, καθώς υπήρχαν εργασίες σχετικά με την Ιστορία των Μαθηματικών που προηγήθηκαν χρονικά της παρούσης. Ενδεικτικά, η εργασία του Μιλτιάδη Μπιζμπιάνου (2011) που ασχολήθηκε με την διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη περίπτωση της Γεωμετρίας, η εργασία της Χριστοφίλης Φιλιππάκου (2015) που ασχολήθηκε με την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στο Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ. και τα σχολικά βιβλία του Δημοτικού- Γυμνασίου, της Καλλιόπης Μιόγλου (2017) που διερεύνησε τις πεποιθήσεις των δασκάλων για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών και της Ιουλίας Γαλέρη (2018) η οποία ασχολήθηκε με την ανάπτυξη και σχεδιασμό ενός προγράμματος επιμόρφωσης εκπαιδευτικών στα ζητήματα διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών.

Η εργασία αποτελείται από πέντε κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο περιέχει το θεωρητικό πλαίσιο της διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των μαθηματικών. Το κεφάλαιο αυτό αποτελείται από την ιστορική αναδρομή, τους λόγους χρησιμοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση και τις διακριτές χρήσεις της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους.

Το δεύτερο κεφάλαιο περιέχει τα ερευνητικά ερωτήματα αυτής της εργασίας τα οποία είναι:

1. Χρησιμοποιούνται/ Αξιοποιούνται τα ιστορικά σημειώματα που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου από τους εκπαιδευτικούς στη διδασκαλία των Μαθηματικών;
2. Οι καθηγητές των Μαθηματικών του Γυμνασίου θεωρούν ότι η Ιστορία των Μαθηματικών θα εμπλουτίσει τη διδασκαλία τους;
3. Έχουν οι καθηγητές των Μαθηματικών το κατάλληλο υπόβαθρο και γνώσεις για να χρησιμοποιήσουν την Ιστορία των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους;
4. Το υλικό που παρέχεται στους εκπαιδευτικούς είναι επαρκές ώστε να τους βοηθήσει να συμπεριλάβουν την Ιστορία των Μαθηματικών στα διδακτικά εργαλεία/ βοηθήματα τους;

Επίσης, στο ίδιο κεφάλαιο αναφέρεται και ο τρόπος εργασίας του ερευνητή για τη διεξαγωγή των αποτελεσμάτων.

Το τρίτο κεφάλαιο ασχολείται με τα ιστορικά σημειώματα στις επίσημες πηγές, την ανάλυση και τη κριτική τους. Συγκεκριμένα, περιέχονται όλα τα ιστορικά σημειώματα των βιβλίων των Μαθηματικών των τάξεων του Γυμνασίου, την ανάλυση τους, το Α.Π.Σ. των Μαθηματικών σε σχέση με την Ιστορία των Μαθηματικών και τη κριτική του ιστορικού υλικού.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η έρευνα που διεξάχθηκε στα πλαίσια της εργασίας. Συγκεκριμένα, περιέχεται το ερωτηματολόγιο, η έρευνα που διεξάχθηκε και τα αποτελέσματα που εξάχθηκαν. Για τη διεξαγωγή των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πρόγραμμα SPSS.

Το πέμπτο κεφάλαιο περιέχει τη συζήτηση επί των αποτελεσμάτων. Το τελευταίο κεφάλαιο αποτελείται από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων, μεταξύ των δασκάλων και των καθηγητών. Τα αποτελέσματα των δασκάλων στη χρήση του ιστορικού υλικού εξάχθηκαν από την εργασία της Μιόγλου (2017). Επίσης, στη Συζήτηση αναφέρεται το τι πραγματικά συμβαίνει με τη χρήση του ιστορικού υλικού, την ανάγκη για επιμόρφωση και τα τελικά συμπεράσματα.

Κεφάλαιο 1. Το θεωρητικό πλαίσιο διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών.

1.1. Η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στην διδασκαλία και μάθηση τους.

Έχει διατυπωθεί από αρκετούς ερευνητές ότι η χρησιμοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στα σχολικά προγράμματα σπουδών είναι ωφέλιμη για τη μάθηση των Μαθηματικών. Ένας από τους βασικούς στόχους της ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στην μαθηματική εκπαίδευση είναι να ενισχύσει το κίνητρο των μαθητών να ασχοληθούν με τις μαθηματικές έννοιες. Προχωρώντας ένα βήμα παραπέρα, είναι η μάθηση μεταγνωστικών κανόνων στα Μαθηματικά. Σύμφωνα με τις έρευνες που έχουν γίνει η ενσωμάτωση της Ιστορίας στη μάθηση και διδασκαλία των Μαθηματικών μπορεί να βοηθήσει στην επίτευξη των παραπάνω στόχων (Tzanakis & Arcavi et al, 2000)

Στη διδασκαλία των Μαθηματικών παραδοσιακά δίνεται μια αυστηρή έμφαση στην εκμάθηση μαθηματικών γνώσεων περιεχομένου και στην ανάπτυξη ικανοτήτων μαθηματικού λογισμού, που στοχεύουν στις έννοιες, δεξιότητες και επίλυση προβλημάτων (Weng Kin Ho, 2008). Αντίθετα, λίγα έχουν γίνει για να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν μια θετική στάση απέναντι στα Μαθηματικά.

«Οι στάσεις των Μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά διαμορφώνονται από τις μαθησιακές τους εμπειρίες. Διαμορφώνοντας τη μάθηση των Μαθηματικών ως κάτι διασκεδαστικό, ουσιαστικό και με σημασία, δίνει πολλαπλάσια οφέλη και πηγαίνει μακρύτερα από την δημιουργία θετικών στάσεων απέναντι στα Μαθηματικά. Πρέπει να δοθεί φροντίδα και προσοχή στο σχεδιασμό των μαθησιακών δραστηριοτήτων, έτσι ώστε να δομηθεί εμπιστοσύνη και να αναπτυχθεί εκτίμηση για το αντικείμενο» (Ministry of Education of Singapore. Mathematics Syllabus Primary, 2007 στο Weng Kin, 2008, pp.9). Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ακόμη και επίσημοι φορείς αναγνωρίζουν την σπουδαιότητα διαμόρφωσης θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά.

Διαμορφώνοντας μια θετική στάση οι μαθητές μπορούν να κατέχουν μια σειρά από μη μετρήσιμες ιδιότητες όπως :

I. Υιοθέτηση θετικής στάσης και φιλοσοφίας προς τα Μαθηματικά, όπως η καθολικότητα των μαθηματικών αποτελεσμάτων και χρησιμότητας των Μαθηματικών.

II. Δημιουργία αυθεντικού ενδιαφέροντος και ευχαρίστησης στη μάθηση των Μαθηματικών.
III. Εκτίμηση της ομορφιάς και της δύναμης των Μαθηματικών.
IV. Οικοδόμηση της εμπιστοσύνης στη χρήση των Μαθηματικών.
V. Ενστάλαξη ενός πνεύματος επιμονής στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, ως μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης (Weng Kin Ho, 2008).

Η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στην μαθηματική εκπαίδευση και διδασκαλία μπορεί να βοηθήσει σε πέντε κύριους τομείς (Clark K et al, 2016):

1. Μάθηση των Μαθηματικών.
2. Ανάπτυξη των απόψεων σχετικά με τη φύση των Μαθηματικών και των μαθηματικών δραστηριοτήτων.
3. Το διδακτικό υπόβαθρο των εκπαιδευτικών και το παιδαγωγικό ρεπερτόριο τους.
4. Θετική προδιάθεση απέναντι στα Μαθηματικά.
5. Εκτίμηση της αξίας των Μαθηματικών ως πολιτιστικής ανθρώπινης προσπάθειας.

Η χρησιμοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στα σχολικά προγράμματα σπουδών μπορεί να οδηγήσει στην επίτευξη των παρακάτω στόχων (Weng Kin Ho, 2008):

1. Ενεργοποίηση του κινήτρου των μαθητών και ανάπτυξη θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά.
2. Μπορεί να βοηθήσει στην επεξήγηση των δυσκολιών και της σύγχυσης που οι μαθητές συναντούν, μέσω της ανάλυσης της εξέλιξης των Μαθηματικών.
3. Ενίσχυση της ανάπτυξης των μαθηματικών δεξιοτήτων των μαθητών με τη χρήση των ιστορικών προβλημάτων.
4. Ανακάλυψη των ανθρωπιστικών πτυχών της μαθηματικής γνώσης.
5. Χρησιμοποίηση του βίου των μεγάλων μαθηματικών ως πρότυπα για την ενθάρρυνση και υιοθέτηση ηθικών αξιών όπως η ειλικρίνεια, επιμέλεια και αποφασιστικότητα.
6. Παροχή ενός οδηγού με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί των Μαθηματικών μπορούν να δομήσουν τη διδασκαλία τους.

Η Ιστορία των Μαθηματικών παρέχει ένα υπόβαθρο για την επίτευξη μιας ευρείας και εις βάθος κατανόησης της εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών. Βοηθά στη κατανόηση του πως και γιατί οι βασικές έννοιες των Μαθηματικών αναπτύχθηκαν από τους ανθρώπους μέσα από πολλά χρόνια σκληρής δουλειάς, θυσίας, δοκιμών και δοκιμασιών. Ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να ιχνηλατήσει την διανοητική ανάπτυξη της ανθρωπότητας. Με αυτό τον τρόπο, τα Μαθηματικά τοποθετούνται μέσα σε ένα σαφές και πρακτικό πλαίσιο που καταδεικνύει τη χρησιμότητα των μαθηματικών εννοιών. Τέλος, η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στην μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να αυξήσει το ενδιαφέρον των μαθητών και να ενισχύσει τη θετική στάση απέναντι στο αντικείμενο (Panasuk & Horton, 2012).

Η πεποίθηση ότι η Ιστορία των Μαθηματικών βελτιώνει την μάθηση τους, βασίζεται σε δύο υποθέσεις σχετικά με τη διαδικασία της μάθησης: Όσο περισσότερο ο μαθητής ενδιαφέρεται για τα Μαθηματικά, τόσο πιο πολύ θα ασχοληθεί, και όσο πιο πολύ ασχοληθεί, τόσο και πιο πολύ θα κατανοεί τις μαθηματικές έννοιες (Barbin et al, 2000).

Αποτελεί κοινή λογική ότι η ιστορική προσέγγιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών θα ευεργετήσει τους μαθητές, ιδιαίτερα αυτούς που δυσκολεύονται να κατανοήσουν τη σημασία και τη σχεσιακή αξία των μαθηματικών εννοιών. Μέσα από το ιστορικό πλαίσιο θα γνωρίσουν τους σκοπούς και τους διανοητικούς αγώνες αυτών που δημιούργησαν τα Μαθηματικά, με συνέπεια να εκτιμήσουν τη διαδικασία. Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί συχνά ενθαρρύνονται να διδάξουν τα Μαθηματικά ως μια κοινωνική κατασκευή, μια δραστηριότητα που έχει νόημα μέσω της χρησιμότητας της (Panasuk & Horton, 2012). Για να εκτιμήσουν τα Μαθηματικά οι μαθητές θα πρέπει να έχουν αποκομίσει μια ποικιλία εμπειριών σχετικά με τις πολιτισμικές και ιστορικές πτυχές (Krathwohl, Bloom & Masia, 1973). Οι εμπειρίες αυτές θα τους βοηθήσουν να γνωρίσουν την εξέλιξη των Μαθηματικών, ώστε να εκτιμήσουν τον ρόλο τους στην ανάπτυξη της κοινωνίας.

Η ιστορική διάσταση των Μαθηματικών είναι δυστυχώς ανεπαρκής, αγνοείται ή θεωρείται ως μια εξωτική πολυτέλεια. Όπως έχει παρατηρηθεί, η πιο σημαντική επιρροή στην απόφαση ενός εκπαιδευτικού αν θα χρησιμοποιήσει την ιστορική προσέγγιση διδασκαλίας ή όχι ,είναι το σύνολο των μαθησιακών στόχων που αναφέρονται στα εθνικά προγράμματα σπουδών (Panasuk & Horton, 2012). Η Ελλάδα είναι μέσα στις χώρες που το Α.Π. ενθαρρύνει τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών.

1.2. Ιστορική Αναδρομή

Η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών υποστηρίζεται από το δεύτερο μισό του 19^{ου} αιώνα, όταν κορυφαίοι μαθηματικοί όπως ο De Morgan, Poincare, Klein υποστήριξαν απερίφραστα την συγκεκριμένη διδακτική προσέγγιση. Επίσης, ιστορικοί όπως ο Tannery και αργότερα ο Loria εκδήλωσαν το ενδιαφέρον τους για το ρόλο που μπορεί να διαδραματίσει η Ιστορία στη μαθηματική εκπαίδευση (Barbin& Janakis, 20014).

Οι λόγοι για την υιοθέτηση της Ιστορίας μέσα στη διδαχή των Μαθηματικών είναι πολλοί. Ένας από αυτούς είναι η συνειδητοποίηση από τους μαθητές ότι τα Μαθηματικά αποτελούν μια επιστήμη που αναπτύχθηκε μέσα από την επίπονη προσπάθεια του ανθρώπινου είδους. Τα Μαθηματικά παρείχαν τη πρακτική απάντηση σε προβλήματα που αντιμετώπιζαν οι πρόγονοι μας στο παρελθόν. Επίσης, η θεμελίωση και ανάπτυξη της επιστήμης των Μαθηματικών χαρακτηρίζεται από πληθώρα λαθών πριν προκύψει το τελικό προϊόν. Όλα τα παραπάνω συνάδουν στο να δώσουν μια ξεχωριστή διάσταση σε ένα μάθημα που θεωρείται λίγο πολύ «στεγνό».

Σύμφωνα με τη Florence Fasanelli (2000) η πρώτη αναφορά σχετικά με την Ιστορία των Μαθηματικών και τη μάθηση των Μαθηματικών, βρίσκεται στον εσωτερικό κανονισμό του πανεπιστημίου της Πορτογαλίας που συντάχθηκε το 1772. Για το πρώτο έτος των Μαθηματικών, μέσα στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών αναφέρεται ότι οι φοιτητές της Γεωμετρίας πρέπει να έχουν μελετήσει τα *προλεγόμενα* (prolegomena). Ως προλεγόμενα εννοείται η Ιστορία των Μαθηματικών. Ο λόγος για τον οποίο μελετάται η Ιστορία είναι για να επωφεληθεί ο φοιτητής. Με βάση τα προλεγόμενα οι φοιτητές θα παρουσιάσουν με συντομία τη χρησιμότητα της επιστήμης, την υπεροχή έναντι των άλλων επιστημών και μια σύνοψη των επιτευγμάτων των Μαθηματικών. Η παρουσίαση των επιτευγμάτων θα ενταχθεί μέσα στις χρονικές περιόδους της Ιστορίας των Μαθηματικών. Ο βασικός στόχος ήταν να γνωρίσουν οι φοιτητές τις μαθηματικές ανακαλύψεις που έγιναν στο παρελθόν, έτσι ώστε να μην ασχοληθούν ερευνητικά με το ίδιο πρόβλημα και το ανακαλύψουν για άλλη μια φορά (Fasanelli et al 2000).

Ο διακεκριμένος μαθηματικός Joseph Louis Lagrange τη δεκαετία του 1790 δίδασκε τους μαθηματικούς που θα στελέχωναν τα σχολεία της Γαλλίας. Στις διαλέξεις του ο Lagrange ανέφερε ότι οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να διακατέχονται από την αίσθηση της περιέργειας να κατανοήσουν πως οι σπουδαίοι μαθηματικοί του παρελθόντος εισέφεραν στην περαιτέρω ανάπτυξη της επιστήμης των Μαθηματικών. Η πορεία που ακολούθησαν οι προγενέστερες γενιές μαθηματικών ήταν γεμάτη από λάθη και δυσκολίες, όπως υπογραμμίζει ο Lagrange, όμως αυτό δεν τους εμπόδισε στο να επιτύχουν τους σκοπούς τους και με αυτόν τον τρόπο να ωφεληθεί το ανθρώπινο είδος. Οι καθηγητές Μαθηματικών θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν την Ιστορία της επιστήμης τους για να αντλήσουν καθοδήγηση και ενδυνάμωση σε παρόμοιες καταστάσεις που ίσως συναντήσουν στις μελλοντικές ερευνητικές προσπάθειες τους (Fasanelli et al, 2000).

Ο Thomas Cooper που δίδασκε στο Dickinson College της Pennsylvania, ήδη από το 1811 στις αρχικές διαλέξεις των μαθημάτων του υποστήριζε την αναγκαιότητα γνώσης της Ιστορίας των Μαθηματικών. Ο Cooper υποστήριζε η ιστορία της επιστήμης δίνει μια περιεκτική και συνοπτική εικόνα των μεθόδων και τρόπων ανάπτυξης και εξέλιξης της ίδιας. Η γνώση της ιστορίας μιας επιστήμης δίνει τη δυνατότητα προειδοποίησης μελλοντικών λαθών, αφού ήδη έχουν παρουσιαστεί τα λάθη σημαντικών ερευνητών του παρελθόντος. Επίσης επιτρέπει την απόδοση ευγνωμοσύνης και τιμών στα άτομα που δαπάνησαν τον χρόνο τους και μόχθησαν για τις ανακαλύψεις τους, και με αυτό τον τρόπο ευεργέτησαν την ανθρωπότητα (Gillings, R.G. 1982).

Το 1817 εκδίδεται το βιβλίο του Sir John Leslie με τίτλο " *The Philosophy of Arithmetic exhibiting a progressive view to the Theory and Practice of Calculation*". Είναι από τα πρώτα βιβλία αν όχι το πρώτο στο οποίο η Ιστορία των Μαθηματικών εμπεριέχεται στο σύνολο των περιεχομένων. Στο συγκεκριμένο βιβλίο η Ιστορία των Μαθηματικών χρησιμοποιήθηκε ως μεθοδολογία για την ανάλυση της πορείας εμφάνισης της αριθμητικής γνώσης και τη σύγκριση διαφόρων τρόπων χειρισμού των αριθμητικών εννοιών (Θωμαΐδης & Καστάνης, 1987).

Ο σπουδαιότερος Νορβηγός μαθηματικός Niels Henrik Abel, έγραψε τη δεκαετία του 1820 σε ένα περιθώριο από τα τετράδια του: « *Μου φαίνεται ότι για να σημειώσει κανείς πρόοδο στα Μαθηματικά θα πρέπει να μελετήσει τους μεγάλους μαθηματικούς*» (Fasanelli et al, 2000, pp. 36).

Το 1853 στη Λειψία δημοσιεύεται το βιβλίο του γερμανού Richard Baltzer, με τίτλο " *Die Element of Mathematic*". Το εγχειρίδιο απευθυνόταν σε εκπαιδευτικούς μαθηματικούς και περιείχε ιστορικές σημειώσεις, με σκοπό να αξιοποιηθεί η ιστορία των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη (Θωμαΐδης & Καστάνης, 1987). Είναι η πρώτη φορά που επιχειρείται η υιοθέτηση της Ιστορίας ως προτεινόμενο εργαλείο διδασκαλίας.

Ο Augustus De Morgan στις 16 Ιανουαρίου ανέλαβε ως πρώτος πρόεδρος της Μαθηματικής Ένωσης του Λονδίνου (London Mathematical Society). Στην εναρκτήρια ομιλία του αναφέρθηκε εκτενώς στη χρησιμότητα της Ιστορίας των Μαθηματικών, τόσο για την κατανόηση τους όσο και για την επίγνωση των δυσκολιών που συναντούνται (Θωμαΐδης & Καστάνης, 1987).

Το 1873 ο καθηγητής μηχανικής Eugenio Beltrami γράφει στην Εφημερίδα των Μαθηματικών (Giornale di matematiche): « Οι φοιτητές θα πρέπει από την αρχή να μελετούν τα έργα των δεξιοτεχνών του είδους, παρά να στειρώνουν το μυαλό τους με ατελείωτες ασκήσεις, που δεν έχουν καμία χρησιμότητα. Εκτός, αν είναι να δημιουργήσουν μια νέα Εδέμ, όπου η οκνηρία είναι μεταμφιεσμένη στη μορφή άσκοπων εργασιών» *(Giornale di matematiche,* 11**,** 1873,pp 153 στο Fasanelli et al, 2000, pp. 37).

Ο Βέλγος Paul Mansion καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Γάνδης, το 1877 δημοσιεύει το άρθρο " *Note sur l' enseignament des Mathemathiques dans les colleges*". Μέσα σε αυτό το έργο αναφέρεται η χρησιμοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία. Το 1883, ο γερμανός καθηγητής S. Gunther, παρουσίασε τη πρώτη εμπεριστατωμένη εργασία σχετικά με τη χρησιμοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη μάθηση και διδασκαλία των Μαθηματικών (Θωμαΐδης & Καστάνης, 1987). Ο Gunther ήταν καθηγητής στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και η συνεισφορά του είναι πολύτιμη. Πλέον, η Ιστορία των Μαθηματικών αποκτά μια αυτόνομη και δομημένη θεώρηση.

Στην Αγγλία, το 1890 ο J. W. L. Glaisher εκφώνησε τον λόγο του, ως πρόεδρος στο πρώτο τμήμα της British Association for Advancement of Science. Μέσα στον λόγο του ανέφερε ότι η κάθε πραγματεία ή βιβλίο ανώτατου επιπέδου είναι επιθυμητό να περιέχει αναφορές στα απομνημονεύματα των μεγάλων μαθηματικών. Αν είναι δυνατόν να δίνονται και σύντομες ιστορικές αναφορές. Επίσης, αναφέρει ότι καμία επιστήμη δεν χάνει περισσότερο από τα Μαθηματικά από την αποσύνδεση με την ιστορία της (Siu, 2000).

Στις Η.Π.Α. το 1896 ο ιστορικός των Μαθηματικών Florian Cajori εξέδωσε το βιβλίο του με τίτλο " *A History of Elementary Mathematics with Hints of Methods of Teaching*". Μέσα στο βιβλίο του αναφέρει ότι αν οι απόψεις των Froebel και Pestalozzi αληθεύουν, τότε η γνώση της ιστορίας μιας επιστήμης αποτελεί θεμέλιο λίθο για τη διδασκαλία της. Αν η άποψη του είναι αληθής, αυτό το αποδεικνύει η εμπειρία πολλών εκπαιδευτικών σχετικά με τη σημαντικότητα της Ιστορίας των Μαθηματικών (Fasanelli et al, 2000.

Ο γερμανός μαθηματικός Herman Schubert το 1897 εξέδωσε το βιβλίο του με τίτλο: " Mathematical Essays and Recreations". Μέσα στο βιβλίο αναφέρει ότι οι μαθηματικές αλήθειες που γνωρίζουμε στη σημερινή εποχή αποτελούν τον διανοητικό κόπο πολλών αιώνων. Οι μαθηματικοί, συνεχίζει, που επιθυμούν να κατανοήσουν την σύγχρονη έρευνα, θα πρέπει να σκέφτονται με γρηγορότερο ρυθμό από τα μαθηματικά επιτεύγματα που έχουν προηγηθεί (Fasanelli et al, 2000).

Ο Felix Klein, ήταν αυτός που έδωσε μια πρόσθετη ώθηση και περιέβαλε με το κύρος του, την ιστορική προσέγγιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Το 1907 παρέδιδε διαλέξεις σε καθηγητές Μαθηματικών στα πλαίσια της επιμόρφωσης τους. Σε αυτές οι διαλέξεις χρησιμοποιήθηκε ευρέως η Ιστορία των Μαθηματικών. Ύστερα οι ίδιες διαλέξεις αποτέλεσαν το περιεχόμενο του διάσημου έργου του “ Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint” (Θωμαΐδης & Καστάνης, 1987).

Στην ελληνική πραγματικότητα, το 1922 ο Κ.Ν. Λαμπίρης διευθυντής της εμπορικής σχολής του Αρσακείου και μέλος της Ε.Μ.Ε. δημοσίευσε στο περιοδικό *Παιδαγωγός* το άρθρο του με τίτλο «*Ιστορικαί παρεκβάσεις κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών*». Μέσα στο άρθρο επιχειρείται η οριοθέτηση της εφαρμογής της Ιστορίας μέσα στη διδασκαλία των Μαθηματικών και αναφέρει ότι πρέπει να βοηθηθούν οι εκπαιδευτικοί με διαλέξεις (Θωμαΐδης & Καστάνης, 1987).

Το 1930 εκδόθηκε το βιβλίο της Vera Sanford με τίτλο: “ *A Short History Of Mathematics*”. Μέσα σε αυτό το βιβλίο η Vera Sanford αναφέρει, ότι μελέτη των έργων των παλαιότερων μαθηματικών από τους καθηγητές Μαθηματικών, γίνεται για να αναδείξει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές τους. Οι ίδιες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές τους προβλημάτισαν και τις μεγάλες μαθηματικές διάνοιες. Επίσης, προσθέτει ότι αυτές οι δυσκολίες ήταν ικανές να σταματήσουν τη πρόοδο της εργασίας τους (Fasanelli et al, 2000).

Στη Ρωσία το 1931, ο Mark Yakovlevich Vygodskii στο βιβλίο του “*Foundations of the Infinitesimal Calculus*” αναφέρει ότι η ιστορία δεν αποτελεί το αντικείμενο, αλλά το μέσο της παρουσίασης των μαθηματικών εννοιών. Επίσης, άλλαξε το σχήμα από φορμαλιστικό-λογικό σε ιστορικό- λογικό (Fasanelli et al, 2000). Σύμφωνα, με τους Θωμαΐδη και Καστάνη (1987) ο David E. Smith (1860-1944) θεωρείται ο πιο αντιπροσωπευτικός εκφραστής, του επιχειρήματος στη πράξη. Στις διαλέξεις του για την επιμόρφωση χρησιμοποίησε την Ιστορία ως εργαλείο. Έδωσε στην Ιστορία της θέση της συγκυρίας στη διδακτική πράξη.

Εκτός από μεμονωμένους ερευνητές η χρησιμότητα της Ιστορίας των Μαθηματικών έχει εκφραστεί και από επίσημους φορείς. Συγκεκριμένα, το 1919 η American Mathematical Association Committee (Fasanelli et al, 2000)., το 1923 το πόρισμα της εθνικής επιτροπής των Η.Π.Α. για την αναθεώρηση των Μαθηματικών (Θωμαΐδης & Καστάνης, 1987) και το 1958 το βρετανικό Υπουργείο Εκπαίδευσης (Fasanelli et al, 2000).

1.3. Ύστερες εξελίξεις.

Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα το ενδιαφέρον αναζωπυρώθηκε, ως συνέπεια της συζήτησης για τη θεμελίωση των Μαθηματικών. Αργότερα, η Ιστορία μετατράπηκε σε ένα βοήθημα για διάφορες επιστημονικές προσεγγίσεις όπως η ιστορική επιστημολογία του Bachelard, η γενετική επιστημολογία του Piaget, η φαινομενολογική επιστημολογία του Freudenthal κ.α. Ταυτόχρονα όμως, τονώθηκε η διατύπωση συγκεκριμένων ιδεών και συμπερασμάτων σχετικά με τη διαδικασία της μάθησης (Fauvel & Van Maanen, 2000).

Το ενδιαφέρον για την Ιστορία εντάθηκε την περίοδο 1960-1980, σαν απάντηση στη μεταρρύθμιση των Νέων Μαθηματικών. Οι υποστηρικτές των Νέων Μαθηματικών βρίσκονταν απέναντι στην ιστορική προσέγγιση της μάθησης και διδασκαλίας. Από την άλλη πλευρά, οι υποστηρικτές της ιστορικής προσέγγισης τη θεώρησαν ως «μια θεραπεία κατά του δογματισμού», αντιλαμβανόμενοι τα Μαθηματικά όχι μόνο ως γλώσσα αλλά και ως ανθρώπινη δραστηριότητα (Clark K. et al, 2016).

Το 1969, το NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) στις Η.Π.Α. αφιέρωσε την 31^{η} έκδοσή του στην Ιστορία των Μαθηματικών (NCTM, 1969). Τη δεκαετία του 1970 ένα ευρύ διεθνές κίνημα άρχισε να διαμορφώνεται, το οποίο υποστηρίχθηκε σημαντικά από την ίδρυση της ομάδας ιστορικής προσέγγισης της διδασκαλίας των Μαθηματικών (HPM) στο 2^{ο} ICME (International Congress of Mathematical Education) το 1972 και του πεδίου του το 1978 στο 3^{ο} ICMI (Clark K. et al, 2016).

Συνεπώς, κατά τη διάρκεια των τελευταίων 40 περίπου ετών η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση έχει εξελιχθεί σε ένα εντατικοποιημένο πεδίο παγκοσμίου επιπέδου. Όλη αυτή η προσπάθεια παρέχει νέες εκπαιδευτικές πρακτικές, ερευνητικές δραστηριότητες και μια βαθμιαία αυξανόμενη συνειδητοποίηση της χρησιμότητας της Ιστορίας στη διδακτική πρακτική (όπως παραπάνω).

Το αυξανόμενο διεθνές ενδιαφέρον για την Ιστορία των Μαθηματικών (HPM) και οι διάφορες δραστηριότητες του HPM group ανά την υφήλιο, οδήγησε, μετά από έγκριση του ICMI, στην έναρξη μιας τετραετούς μελέτης για τις σχέσεις μεταξύ Ιστορίας των Μαθηματικών και μαθηματικής εκπαίδευσης. Μετά τη συγγραφή της μελέτης από τους συμπροέδρους της, πραγματοποιήθηκε μια διάσκεψη το 1998 στο Luminy της Γαλλίας. Η μελέτη ολοκληρώθηκε με τη δημοσίευση ενός τόμου 437 σελίδων, που γράφτηκε από 62 συνεργάτες, οι οποίοι εργάστηκαν σε 11 ομάδες (Fauvel & van Maaren, 2000).

Η ολοκλήρωση της προαναφερθείσας μελέτης αποτέλεσε ένα ορόσημο για την εγκαθίδρυση της ιστορικής προσέγγισης στη μαθηματική εκπαίδευση, ως τομέα έρευνας στα πλαίσια της διδασκαλίας και προσέλκυσε το διεθνές ενδιαφέρον της εκπαιδευτικής κοινότητας στον τομέα αυτό (Clark K. et al, 2016). Από τότε έχουν πραγματοποιηθεί πληθώρα μελετών και συνεδρίων σε ευρωπαϊκό και διεθνές επίπεδο. Ενδεικτικά, αναφέρονται τα Satellite Meetings της HPM με την ευκαιρία του ICME που πραγματοποιείται κάθε 4 χρόνια διεθνώς, το European Summer University (ESU) που πραγματοποιείται κάθε 3 χρόνια, το CERME (Congress of the European Society for Research of the Mathematics Education) Κάθε 2 χρόνια και τα ετήσια συνέδρια της America's Section of HPM.

1.4.Οι διακριτές χρήσεις της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους.

Η ιστορική προσέγγιση στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών διακρίνεται στη χρησιμοποίηση της Ιστορίας ως εργαλείο και της Ιστορίας ως στόχο. Η διάκριση έγινε από τον Jankvist (2009). Με αυτούς τους δύο τρόπους η Ιστορία προσαρμόζεται στη Μαθηματική εκπαίδευση.

<u>Η Ιστορία ως εργαλείο</u> αφορά την χρησιμοποίηση της ως βοηθητικού μέσου για την ενίσχυση της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών. Η Ιστορία θα μπορούσε να διατηρήσει το ενδιαφέρον των μαθητών (Farmaki, et al, 2007). Υπάρχουν στοιχεία των Μαθηματικών που ταλαιπωρούν στη κατανόηση τους μαθητές, επειδή είναι το τελικό προϊόν. Αν οι μαθητές πληροφορούνταν ότι χρειάστηκαν εκατοντάδες χρόνια εργασίας και ότι τα αδιέξοδα ήταν κάτι σύνηθες θα αποκτούσαν τα Μαθηματικά μια πιο ανθρώπινη χροιά. Επίσης, θα επιτυγχάνονταν η απενεχοποίηση των λαθών ως φυσικό αποτέλεσμα μιας ερευνητικής διαδικασίας. Το επιχείρημα της ανακεφαλαίωσης (recapitulation) σύμφωνα με το οποίο « η οντογένεση ανακεφαλαιώνει τη φυλογένεση» του Haeckel (1906). Δηλαδή, η εξέλιξη ενός ατόμου δεν μπορεί να είναι διαφορετική από την εξέλιξη του είδους που ανήκει. Στα Μαθηματικά ισχύει ότι αν κάποιος θέλει να κατανοήσει το αντικείμενο θα πρέπει να ακολουθήσει τα ίδια βήματα με την εξέλιξη τους (Furinghetti, 2004). Η χρησιμοποίηση της Ιστορίας ως εργαλείο σχετίζεται με το εσωτερικό (in issues) των Μαθηματικών (Τζανάκης, 2009).

<u>Η Ιστορία ως στόχος</u> αφορά την διδασκαλία και εκμάθηση της ιστορικής εξέλιξης των Μαθηματικών (Clark, et al, 2016). Αν και η Ιστορία εστιάζει στις εξελικτικές πτυχές του αντικειμένου θα πρέπει να θεωρείται ξεχωριστό μάθημα (Jankvist, 2009). Σε αυτό το επίπεδο

η Ιστορία δείχνει στους μαθητές ότι η επιστήμη των Μαθηματικών δεν είναι κάτι εξωτερικά δημιουργημένο. Για την εξέλιξη του αντικειμένου άνθρωποι εργάστηκαν από διάφορους πολιτισμούς κατά τη διάρκεια της ανθρώπινης Ιστορίας. Επίσης, η εξέλιξη των Μαθηματικών οδηγήθηκε από την αναγκαιότητα επίλυσης προβλημάτων που αντιμετώπιζε η εκάστοτε κοινωνία του παρελθόντος (Tzanakis, & Arcavi, 2000) αλλά και από εσωτερικές δυνάμεις. Η Ιστορία ως στόχος σχετίζεται με τη φύση, το ρόλο και τη σημασία των Μαθηματικών, που αποτελούν μετά- ζητήματα (meta- issues) (Τζανακης, 2009).

Μια παρόμοια διάκριση ανάμεσα στην Ιστορία που εστιάζει επάνω στη φύση των Μαθηματικών ως κοινωνικοπολιτισμική διαδικασία και Ιστορία για την οικοδόμηση των μαθηματικών εννοιών, έγινε από την Furinghetti (2004). Στη πρώτη κατηγορία η Ιστορία δίνει τροφή για το στοχασμό σχετικά με τη φύση των Μαθηματικών ως κοινωνικό-πολιτισμική διαδικασία. Η ιδέα περιλαμβάνει την Ιστορία ως μέσο προώθησης των Μαθηματικών στη τάξη, προκειμένου να αποκτήσουν ένα πιο ανθρώπινο πρόσωπο. Η δεύτερη κατηγορία ασχολείται με τη κατασκευή των μαθηματικών αντικειμένων και αφορά τον πυρήνα των προβλημάτων που σχετίζονται με τη μάθηση των Μαθηματικών (Furinghetti, 2004).

1.4.1. Οι τρόποι που μπορεί να χρησιμοποιηθεί η Ιστορία στη διδασκαλία.

Οι τρόποι ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία και εκμάθηση των μαθηματικών σύμφωνα με τον Μπιζμπιάνο (2011) μπορούν να ταξινομηθούν σε τρείς κύριες κατηγορίες. Αυτές είναι:

1. Οι διαφωτιστικές προσεγγίσεις (illumination approaches)
2. Οι προσεγγίσεις βάσει οριοθετημένων ενοτήτων (modules approaches)
3. Οι προσεγγίσεις βασισμένες στην Ιστορία (history- based approaches).

Στις διαφωτιστικές προσεγγίσεις η διδασκαλία και εκμάθηση των Μαθηματικών, είτε πρόκειται για διδασκαλία μέσα στη τάξη, είτε μέσω των βιβλίων των Μαθηματικών συμπληρώνεται από την παροχή ιστορικών πληροφοριών. Οι ιστορικές προσθήκες μπορούν να διαφέρουν σε μέγεθος ή σκοπό χρήσης τους. Τα μικρότερα κομμάτια ιστορικών πληροφοριών αφορούν τα ιστορικά σημειώματα που περιλαμβάνουν ονόματα, ημερομηνίες. Χρονοδιαγράμματα, βιογραφίες κ.α. Επίσης, εδώ περιλαμβάνονται και οι ανέκδοτες ιστορίες και ιστορικά γεγονότα. Ο Jankvist (2009) σύμφωνα με τον Μπιζμπιάνο παρομοιάζει αυτά τα μικρά ιστορικά συμπληρώματα ως «*το αλατοπίπερο που προστίθεται στη κατσαρόλα της μαθηματικής εκπαίδευσης*».

Στη κατηγορία των διαφωτιστικών προσεγγίσεων ανήκουν οι ιστορικοί επίλογοι ή πρόλογοι, οι οποίοι αποτελούν το μεγαλύτερο δυνατό μέγεθος αυτής της διάκρισης. Αυτές οι προσθήκες συνήθως βρίσκονται στο τέλος ή αρχή του κάθε κεφαλαίου. Σε κάθε τέτοια προσθήκη η οποία είναι σαφώς μεγαλύτερου μεγέθους από τα ιστορικά σημειώματα, περιέχονται ονόματα, χρονολογίες, προβλήματα που κινητοποίησαν τους μαθηματικούς, και συχνά αναφορές στη πορεία ανάπτυξης των Μαθηματικών κ.α. Ανάλογη χρήση των ιστορικών προλόγων και επιλόγων γίνεται και στα ελληνικά βιβλία του Λυκείου (Ευκλείδεια Γεωμετρία της Α΄ και Β΄ Λυκείου).

Οι οριοθετημένες ενότητες είναι διδακτικές ενότητες που ασχολούνται αποκλειστικά με την Ιστορία των Μαθηματικών. Οι προσεγγίσεις της συγκεκριμένης κατηγορίας διαφέρουν ως προς το σκοπό και ως προς το μέγεθος έκθεσης των μαθητών. Οι μικρότερες οριοθετημένες ενότητες αναφέρονται ως *ιστορικά πακέτα*. Τα ιστορικά πακέτα αποτελούν συλλογές εκπαιδευτικού υλικού, που είναι επικεντρωμένο σε μια μικρή μαθηματική ενότητα διδασκαλίας 2 έως 3 διδακτικών ωρών. Τα διδακτικά πακέτα είναι έτοιμα προς χρήση από τον εκπαιδευτικό.

Ως μέση κατηγορία των οριοθετημένων ενοτήτων βρίσκονται αυτές με διάρκεια 10-20 διδακτικών ωρών. Δεν υπάρχει η ανάγκη στενής διασύνδεσης με τη διδακτέα ύλη και παρέχουν την ευκαιρία μελέτης κλάδων των Μαθηματικών που δεν ανήκουν στην ύλη της συγκεκριμένης βαθμίδας. Οι τρόποι που μπορούν να εφαρμοστούν τα ιστορικά πακέτα και οι μέτριου μεγέθους οριοθετημένες ενότητες είναι πάρα πολλοί. Ο Μπιζμπιάνος (2011) αναφέρει ενδεικτικά την ανάγνωση των πρωτότυπων ιστορικών πηγών, τις διαθεματικές εργασίες των μαθητών, θεατρικές παραστάσεις, φύλλα εργασίας με ιστορικά προβλήματα κ.α.

Στις μεγάλου μεγέθους οριοθετημένες ιστορικές ενότητες βρίσκονται τα βιβλία και τα πλήρη μαθήματα της Ιστορίας των Μαθηματικών που εντάσσονται σε κάποιο πρόγραμμα μαθηματικών σπουδών. Αυτά τα μαθήματα ή βιβλία μπορούν να περιλαμβάνουν την ιστορία της εξέλιξης κάποιων μαθηματικών εννοιών και ένα πλήθος ιστορικών δεδομένων. Στο πλαίσιο αυτών των μαθημάτων χρησιμοποιούνται πρωτότυπες ή και δευτερεύουσες ιστορικές πηγές που εξαρτώνται από την επιθυμητή έκθεση του εκπαιδευόμενου στη ιστορία.

Η τρίτη κατηγορία με την οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί η Ιστορία στη μαθηματική εκπαίδευση είναι οι προσεγγίσεις βασισμένες στη Ιστορία. Οι προσεγγίσεις αυτές είτα εμπνέονται, είτε βασίζονται στην εξέλιξη και την Ιστορία των Μαθηματικών. Η ενασχόληση με την Ιστορία γίνεται έμμεσα και το ζητούμενο είναι η καταλληλότερη σειρά και μέθοδος για τη παρουσίαση της μαθηματικής έννοιας. Σε αυτή τη κατηγορία η Ιστορία ενσωματώνεται στις προσεγγίσεις για τη διδασκαλία της μαθηματικής έννοιας, Σε αυτή τη κατηγορία ανήκει και η *γενετική προσέγγιση* (genetic approach).

1.4.2. Οι τρεις μορφές διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών.

Σύμφωνα με τον Μπιζμπιάνο (2011) υπάρχουν τρείς μορφές διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών. Η έμφαση που δίνεται στην ιστορία μέσα σε αυτές είναι διαφορετική, όμως δεν είναι αμοιβαία αποκλειόμενες, αλλά συμπληρωματικές μεταξύ τους. Υπάρχει η δυνατότητα και οι τρείς μορφές να εμφανιστούν και παράλληλα στα πλαίσια της ίδιας διδασκαλίας. Αυτές είναι:

1. Η εκμάθηση της Ιστορίας των Μαθηματικών με τη παροχή και άμεση ενσωμάτωση ιστορικών πληροφοριών.
2. Η εκμάθηση των Μαθηματικών με βάση τη διδακτική και μαθησιακή προσέγγιση εμπνεόμενη από την Ιστορία τους.
3. Η καλλιέργεια βαθύτερης γνώσης και συνείδησης για τα Μαθηματικά αυτά καθ' αυτά και το κοινωνικό και πολιτιστικό πλαίσιο τους.

Στη πρώτη κατηγορία που αφορά την εκμάθηση της Ιστορίας με τη παροχή και άμεση ενσωμάτωση των ιστορικών πληροφοριών, αναφέρεται ο Μπιζμπιάνος (2011) στις ξεχωριστές αντικειμενικές πληροφορίες (ονόματα, χρονολογίες για ιστορικά θέματα, βιογραφίες κ.α.) και τα αυτοτελή βιβλία ή μαθήματα της Ιστορίας των Μαθηματικών. Η έμφαση σε αυτή τη μορφή δίνεται στη παροχή πληροφοριών από τη Ιστορία των Μαθηματικών και στην εμβάθυνση της κατανόησης της φύσης των Μαθηματικών. η διδασκαλία με αυτή τη προσέγγιση δεν αλλάζει μορφή αλλά επηρεάζεται η μαθησιακή εμπειρία. Οι ξεχωριστές αντικειμενικές πληροφορίες ταυτίζονται με τα ιστορικά σημειώματα των διαφωτιστικών προσεγγίσεων και τα αυτοτελή μαθήματα ή βιβλία των προσεγγίσεων βάσει οριοθετημένων ιστορικών ενοτήτων. Σε αυτή τη μορφή η Ιστορία εμφανίζεται σαν στόχος και δευτερευόντως σαν εργαλείο.

Η δεύτερη μορφή διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας αφορά την εκμάθηση των Μαθηματικών με βάση μια διδακτική και μαθησιακή προσέγγιση εμπνεόμενη από τη Ιστορία. Αυτή μέθοδος αποτελεί την γενετική προσέγγιση της διδασκαλίας, δεν είναι αυστηρά επαγωγική ή ιστορική. Η θεμελιώδης θέση αυτής της μεθόδου είναι ότι, ένα μαθηματικό θέμα μπορεί να μελετηθεί από τον εκπαιδευόμενο μόνο όταν ο ίδιος έχει κινητοποιηθεί και ενδιαφερθεί. Επίσης, ο εκπαιδευόμενος μπορεί να μάθει κάποιο μαθηματικό θέμα μόνο τη κατάλληλη στιγμή στη χρονική διαδικασία της πνευματικής του ανάπτυξης και εξέλιξης. Αυτό σημαίνει ότι τα ερωτήματα και τα προβλήματα που ασχολήθηκε ο συγκεκριμένος τομέας των Μαθηματικών έχουν αποσαφηνιστεί και κατανοηθεί επαρκώς (Tzanakis, Arcavi et al, 2000, στο Μπιζμπιάνος, 2011).

Στη γενετική προσέγγιση η έμφαση δεν δίνεται στη χρήση των θεωριών, μεθόδων και εννοιών αλλά στο πως αυτές απαντούν σε συγκεκριμένα προβλήματα και ερωτήματα. Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση η ιστορική διάσταση αυξάνει σημαντικά τις πιθανότητες για μια σφαιρική και σε βάθος κατανόηση του μαθηματικού αντικειμένου. Η συγκεκριμένη μορφή διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας εντάσσεται στη κατηγορία των προσεγγίσεων που είναι βασισμένες στην Ιστορία, η οποία εδώ εμφανίζεται ως εργαλείο. (Τζανάκης, 2009 στο Μπιζμπιάνος, 2011).

Η τρίτη μορφή διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας αφορά τη καλλιέργεια βαθύτερης γνώσης και συνείδησης για τα Μαθηματικά, το κοινωνικό και πολιτιστικό τους πλαίσιο. Σύμφωνα με τον Μπιζμπιάνο με τον όρο βαθύτερη γνώση εννοούνται οι διαστάσεις της μαθηματικής δραστηριότητας που διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: α) τα ενδογενή χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας και β) τα εξωγενή χαρακτηριστικά (Tzanakis, Arcavi, et al 2000).

Τα ενδογενή χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας μπορούν να ανακαλυφθούν και αναλυθούν από την Ιστορία των Μαθηματικών (Τζανάκης, 2009). Ο ρόλος που διαδραμάτισαν τα γενικά εννοιολογικά πλαίσια και τα συνδυαζόμενα κίνητρα ερωτήματα και προβλήματα που οδήγησαν στην ανάπτυξη και εξέλιξη των μαθηματικών πεδίων. Η εξελικτική φύση των Μαθηματικών ως προς το περιεχόμενο και τη μορφή τους, σε τομείς όπως οι συμβολισμοί, η ορολογία, υπολογιστικές μέθοδοι, οι τρόποι έκφρασης και αναπαράστασης σε μαθηματικά θέματα, καθώς επίσης και σε μετά- μαθηματικές έννοιες όπως η απόδειξη, τεκμηρίωση σε σύγκριση με τα σύγχρονα Μαθηματικά. Ο ρόλος των αμφιβολιών, παραδόξων, αντιφάσεων, ευρετικών μεθόδων και δυσκολιών στην εκμάθηση και δημιουργία νέων Μαθηματικών, στα πλαίσια συγκεκριμένων ερωτημάτων και προβλημάτων είναι πολύ σημαντικός και μπορεί να οδηγήσει σε γενικεύσεις, αφαιρετικές διαδικασίες και φορμαλισμό.

Στα εξωγενή χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας περιέχονται τα επιχειρήματα που θεωρούν ότι τα Μαθηματικά αποτελούν ένα κλάδο στενά συνδεδεμένο με τις κοινωνικές και πολιτιστικές συνθήκες. Πλευρές των Μαθηματικών μπορούν να συσχετισθούν με φιλοσοφικά ερωτήματα και προβλήματα, με τις τέχνες ή με άλλες επιστήμες όπως η Βιολογία, Φυσική και Αστρονομία. Το πολιτιστικό και κοινωνικό πλαίσιο επέδρασε στη σύλληψη, διατύπωση και λύση των προβλημάτων, αλλά και στην αξιοποίηση της λύσης τους. Το κοινωνικό και πολιτιστικό πλαίσιο έχει επηρεάσει σημαντικά την ανάπτυξη, αλλά και την καθυστέρηση της ανάπτυξης κάποιων μαθηματικών πεδίων. Τα Μαθηματικά έχουν αναγνωριστεί ως ένα σημαντικό μέρος της πολιτιστικής κληρονομίας διαφορετικών πολιτισμών, εθνών και φυλών. Οι πρακτικές της μαθηματικής εκπαίδευσης, σε όλη τη διάρκεια της ύπαρξης της, φανερώνει τις τάσεις και ανησυχίες στη κοινωνία, στο πολιτισμό της κάθε εποχής σε πολλά διαφορετικά μέρη. Η ενδεδειγμένη μέθοδος για τη καλλιέργεια της βαθύτερης γνώσης των Μαθηματικών, μέσα από τα ενδογενή και εξωγενή χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας, είναι η προσέγγιση βάσει των οριοθετημένων ιστορικών ενοτήτων (Jankvist, 2009). Αυτή μορφή διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας την εμφανίζει ως στόχο.

1.4.3. Τρόποι εφαρμογής της Ιστορίας των Μαθηματικών στη τάξη.

Οι τρόποι με τους οποίους ενσωματώνεται η Ιστορία μέσα στη διδακτική εφαρμογή έχουν καταγραφεί από πολλούς ερευνητές και ιστορικούς των Μαθηματικών. Ο Τζανάκης (2009) έχει κατηγοριοποιήσει αυτούς τους τρόπους σε πέντε κατηγορίες (Μπιζμπιάνος, 2011). Αυτοί είναι:

Α) Εφαρμογές μέσω άμεσης επαφής με το ιστορικό υλικό και γεγονότα.

1. Ιστορικά σημειώματα και ιστορικές εισαγωγές σε επιμέρους μαθήματα.
2. Επιτόπια εμπειρία μέσω επισκέψεων σε μουσεία αρχαιολογικούς, ιστορικούς και άλλους χώρους.
3. Ταινίες και άλλα οπτικά μέσα, όπου παρουσιάζονται θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών.

Β) Εφαρμογές που οδηγούν σε λεπτομερώς δομημένες δραστηριότητες.

1. Ερευνητικές εργασίες για τους διδασκόμενους βασισμένα σε ιστορικά κείμενα.
2. Η διδακτική χρήση πρωτότυπων πηγών. Η οποία αποτελεί χρονοβόρα και απαιτητική διαδικασία.
3. Φύλλα εργασίας συνοδευόμενα από αποσπάσματα πρωτότυπων πηγών ή εμπνευσμένα από αυτές.
4. Πλήρη πακέτα Ιστορίας των Μαθηματικών.

Γ) Ευέλικτές εφαρμογές πιο τοπικού χαρακτήρα, εφαρμοζόμενες ανάλογα με τον πληθυσμό στον οποίο απευθύνονται.

1. Η διδακτική αξιοποίηση λαθών, εναλλακτικών αντιλήψεων, αλλαγή της οπτικής, αναθεώρηση υποθέσεων ή και διαισθητικών και εμπειρικών επιχειρημάτων.
2. Διδακτικό υλικό και σχεδιασμός της διδασκαλίας βασισμένο σε ιστορικά προβλήματα.

Δ) Εφαρμογές πειραματικού και εμπειρικού χαρακτήρα.

1. Η επαφή και χρήση μηχανικών και άλλων εργαλείων που διαδραμάτισαν ρόλο στην Ιστορία των Μαθηματικών.
2. Μαθηματικές δραστηριότητες βιωματικού χαρακτήρα.
3. Θεατροποίηση εμπνευσμένη από τα γεγονότα της ιστορικής διαδρομής των Μαθηματικών.

Ε) Το Διαδίκτυο ως πηγή πληροφόρησης και επικοινωνίας.

Το Διαδίκτυο προσφέρει τη δυνατότητα αναζήτησης πληροφοριών, συμμετοχή σε προγράμματα εκμάθησης δεξιοτήτων και επιστημονικών πεδίων, φοίτηση σε πανεπιστήμια από απόσταση, δυνατότητες εμβάθυνσης σε αντικείμενα που επιθυμεί το άτομο μέσα στα πλαίσια της αυτομόρφωσης και της προσωπικής ανάπτυξης. Πέρα από την αυτομόρφωση το διαδίκτυο αποτελεί χρήσιμο εργαλείο για τους εκπαιδευτικούς, επειδή υπάρχουν πληροφορίες και σχέδια διδασκαλίας και η διεθνής βιβλιογραφία σε σχέση με τη Ιστορία των Μαθηματικών.

Από τους τρόπους εφαρμογής της Ιστορίας στη διδασκαλία στην τάξη δεν αναφέρθηκε η ενσωμάτωση της με τρόπους αξιολόγησης. Ένας πιθανός τρόπος αξιολόγησης της Ιστορίας των Μαθηματικών είναι η εισαγωγή μιας ιστορικής διάστασης στο σχεδιασμό μιας ερώτησης εξέτασης. Ειδικότερα, κάποιος μπορεί να κατασκευάσει την ερώτηση είτε απ' ευθείας από ένα ιστορικό πρόβλημα, είτε ζητώντας μια σύγχρονη εξέταση ενός αρχαίου αλγορίθμου ή μεθόδου (Weng K. H., 2008).

Σε αυτές τις περιπτώσεις υπάρχει ένας ορισμένος βαθμός κινδύνου, από το γεγονός ότι απαιτείται μεγαλύτερη προσπάθεια για την αξιοποίηση της ιστορικής προσέγγισης από τους μαθητές. Οι εκπαιδευόμενοι μπορεί να χρειάζονται πρόσθετες δεξιότητες εγγραμματισμού για να κατανοήσουν την εξέλιξη της ερώτησης, όταν ψάχνουν για σχετικά δεδομένα και να κατανοήσουν το πρόβλημα που δηλώνεται.

1.5. Ποιο ιστορικό υλικό είναι κατάλληλο, εύστοχο και σχετικό με την μαθηματική εκπαίδευση.

Το ζήτημα αυτό αποτελούσε το μόνιμο θέμα διαφωνιών, στις συζητήσεις ανάμεσα στους ιστορικούς και εκπαιδευτικούς των Μαθηματικών (Clark,et al, 2016) που ενδιαφέρονταν για την ιστορική προσέγγιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Ήδη από το 1984 στο 2^{o} ICME, ο d' Ambrosio τόνισε την επιτακτική ανάγκη να αναπτυχθούν τρία διαφορετικά είδη Ιστορίας των Μαθηματικών: η Ιστορία όπως διδάσκεται στα σχολεία, η Ιστορία όπως αναπτύχθηκε μέσω της δημιουργίας των Μαθηματικών και η Ιστορία εκείνων των Μαθηματικών που χρησιμοποιούνται στη καθημερινή ζωή και στους χώρους εργασίας. Για να αντιμετωπιστεί η παραπάνω πρόκληση εισήχθηκε η έννοια των Εθνομαθηματικών σε αντιδιαστολή με τα Μαθηματικά που διδάσκονται (Booker, 1986).

Είναι φανερό ότι η ιστορική εξέλιξη των Μαθηματικών δεν ήταν γραμμική. Η ανάπτυξη των Μαθηματικών ακολούθησε πολλά ζιγκ ζαγκ, πισωγυρίσματα, οδήγησε σε αδιέξοδα. Επίσης, περιλαμβάνονταν έννοιες, μέθοδοι και προβλήματα που δεν χρησιμοποιούνται πλέον στα Μαθηματικά όπως τα γνωρίζουμε σήμερα. Συνεπώς, η ενσωμάτωση της Ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση από τη μια μεριά είναι πολύτιμη. Από την άλλη μεριά όμως τίθεται το ερώτημα *για ποιο σκοπό θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η Ιστορία*. Ως εκ τούτου, η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών μπορεί να αναγκάσει την Ιστορία να « *εξυπηρετήσει σκοπούς ξένους προς αυτή και αντιδεοντολογικά προς αυτούς*» (Fried, M. 2011, pp. 13).

Υπάρχει ο κίνδυνος της απλούστευσης ή και διαστρέβλωσης της Ιστορίας για την εξυπηρέτηση της εκπαίδευσης. Υιοθετώντας την Ιστορία στην οποία θεωρείται κάτι σημαντικό όταν οδηγεί σε κάτι που θεωρείται σημαντικό στο παρόν. Κατά τον Fried (2001, pp. 395) «*το παρόν είναι το μέτρο του παρελθόντος*». Για την αντιμετώπιση του παραπάνω προβλήματος, ένα σημαντικό βήμα ήταν η διάκριση του Grattan- Guiness. O Grattan-Guiness (2004) ξεχωρίζει αυτό που ονομάζεται Ιστορία (history) από αυτό που αποτελεί παρακαταθήκη (heritage). Ο ίδιος προσπάθησε να αποσαφηνίσει τις υπάρχουσες αντιθέσεις και εντάσεις μεταξύ της Μαθηματικής και Ιστορικής προσέγγισης της μαθηματικής εκπαίδευσης, και τη μετατόπιση της προσοχής στη συνάφεια της Ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση (Clark,et al, 2016).

Ο διαχωρισμός μεταξύ της Ιστορίας και παρακαταθήκης/ κληρονομιάς από τον Grattan- Guinness (2004) συνιστάται ως εξής: Η Ιστορία αναφέρει το τι συνέβη στο παρελθόν και γιατί συνέβη, δεδομένου του ιστορικού και κοινωνικού πλαισίου. Επίσης, η ιστορία περιγράφει και συγκρίνει τις διαφορές με τις μεταγενέστερες γνώσεις. Η παρακαταθήκη/ κληρονομιά επεξεργάζεται την επίδραση των προγενέστερων γνώσεων στις μεταγενέστερες, δηλαδή δίνεται έμφαση στην εξέλιξη. Η εστίαση στις σύγχρονες εκδοχές των παλαιότερων γνώσεων δίνει έμφαση στις ομοιότητες μεταξύ τους. Με αυτό τον τρόπο η σύγχρονη γνώση παρεμβάλλεται και αποκαλύπτεται η παλαιότερη γνώση. Συνεπώς, το παρόν αποτυπώνεται στο παρελθόν.

Η ιστορική προσέγγιση στην μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να οδηγήσει στην ελάχιστη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών ή στη διαστρέβλωση της. Ο Fried (2001) πρότεινε δύο λύσεις για την αποφυγή των παραπάνω προβλημάτων: τον ριζοσπαστικό διαχωρισμό (radical separation) και τη ριζοσπαστική αναπροσαρμογή (radical accommodation).

Ο ριζοσπαστικός διαχωρισμός τοποθετεί την Ιστορία των Μαθηματικών ως ξεχωριστό αντικείμενο μέσα στο Αναλυτικό Πρόγραμμα. Τα σημεία τομής μεταξύ των Μαθηματικών και της Ιστορίας είναι τα κείμενα, οι βιογραφίες ή και τα απομονωμένα προβλήματα. Παρότι η Ιστορία και τα Μαθηματικά αποτελούν διακριτά αντικείμενα, στις παραπάνω περιπτώσεις συνυπάρχουν (Fried, M., 2001). Η Ιστορία των Μαθηματικών ως ξεχωριστό αντικείμενο αν και μπορεί να μετατοπίσει θετικά τις μαθησιακές εμπειρίες, δεν επηρεάζει τη διδασκαλία του μαθηματικού περιεχομένου (Tzanakis & Arcavi, 2000). Σύμφωνα με τους Siu & Siu (1979) η παραπάνω προσέγγιση δεν προσφέρει σχεδόν τίποτα σε πρακτικό επίπεδο. Σύμφωνα με τους ίδιους « *ένα πιο αποτελεσματικό διακριτό αντικείμενο θα μπορούσε να είναι η εξέλιξη των μαθηματικών ιδεών*» (Siu & Siu, 1979, pp. 566).

Η δεύτερη λύση, σύμφωνα με το Fried (2001) αυτή της ριζοσπαστικής προσαρμογής, προϋποθέτει την προσαρμογή της διδασκαλίας σε ιστορικές καταστάσεις ή σύμφωνα με κάποιο ιστορικό μοντέλο. Ο κύριος στόχος είναι η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών στη σύγχρονη μορφή τους, αν και χρησιμοποιούνται έννοιες, μέθοδοι και συμβολισμοί οι οποίοι εμφανίστηκαν σε ύστερο χρόνο από το θέμα που εξετάζεται. (Tzanakis & Arcavi, 2000). Στη ριζοσπαστική προσαρμογή δεν δίνεται έμφαση στη χρήση των Μαθηματικών, αλλά στις θεωρίες, έννοιες και μεθόδους που μπορούν να δώσουν απαντήσεις σε συγκεκριμένα ερωτήματα και προβλήματα. Συνεπώς, η αναγκαιότητα επίλυσης ενός θέματος καθιστά αναγκαία τη χρησιμοποίηση του μαθηματικού περιεχομένου.

Μέσω του μοντέλου της ριζοσπαστικής αναπροσαρμογής είναι εφικτή η ανάπτυξη της βαθύτερης μαθηματικής επίγνωσης και της βαθύτερης επίγνωσης του κοινωνικό-πολιτισμικού πλαισίου μέσα στο οποίο αναπτυχτήκαν τα Μαθηματικά (Tzanakis & Arcavi, 2000). Η βαθύτερη μαθηματική επίγνωση αφορά την εσωτερική φύση των Μαθηματικών, δηλαδή το ρόλο των διάφορων εννοιολογικών πλαισίων, αμφιβολιών, παραδόξων, αντιφάσεων ευρετικών μεθόδων, εξελικτική υφή της μορφής και του περιεχομένου των Μαθηματικών. Η βαθύτερη επίγνωση του κοινωνικό- πολιτισμικού πλαισίου διαπραγματεύεται την εξωτερική φύση των Μαθηματικών, όπως η σχέση με τις άλλες επιστήμες, τις τέχνες, τον πολιτισμό (όπως παραπάνω).

1.6. Αντίλογος για τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών.

Η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση μέσω της εκτεταμένης έρευνας και των εύστοχών εφαρμογών τις τελευταίες δεκαετίες παρήγαγε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Ακόμη και σήμερα όμως η ιστορική προσέγγιση δεν έχει επιτύχει καθολική αποδοχή. Στη πραγματικότητα υπάρχουν πολλές αντιρρήσεις κατά της χρησιμοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πρακτική (Clark K. et al, 2016).

Α. Αντιρρήσεις επιστημολογικής και μεθοδολογικής φύσης.

α) Σχετικά με τη φύση των Μαθηματικών

1. Αυτά δεν είναι Μαθηματικά! Πρέπει πρώτα να διδάσκεται το αντικείμενο και ύστερα η Ιστορία του.
2. Η πρόοδος στα Μαθηματικά συντελείται όταν η επίλυση δύσκολων προβλημάτων γίνεται κάτι το σύνηθες, γιατί να χάνουμε χρόνο κοιτώντας το παρελθόν;
3. Τι πραγματικά συνέβη πολύ πιθανό να είναι σύνθετο. Εξιστορώντας το μπορεί να μπερδέψει τους μαθητές παρά να τους διαφωτίσει.

β) Σχετικά με τις δυσκολίες που είναι σύμφυτες με την ιστορική προσέγγιση.

1. Βοηθά στα αλήθεια η ανάγνωση των πρωτότυπων κειμένων, η οποία είναι πολύ δύσκολή και χρονοβόρα;
2. Είναι επιτρεπτό να καλλιεργείται πολιτισμικός σωβινισμός και εθνικισμός;

3. Οι μαθητές μπορεί να έχουν μια ασαφή αίσθηση του παρελθόντος η οποία καθιστά την τοποθέτηση της Ιστορίας σε εννοιολογικό πλαίσιο αδύνατη, λόγω έλλειψης μιας ευρύτερης εκπαίδευσης στη γενική Ιστορία.

Β. Αντιρρήσεις πρακτικής και διδακτικής διάστασης.

α) Το υπόβαθρο και η στάση των εκπαιδευτικών

1. Υπάρχει έλλειψη διδακτικού χρόνου, δεν υπάρχει χρόνος για κάτι τέτοιο στη τάξη!
2. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να είναι επαρκώς επιμορφωμένοι στην Ιστορία: *« Δεν είμαι ιστορικός των Μαθηματικών. Πως μπορώ να είμαι σίγουρος για την ακρίβεια της ανάλυσης;*»
3. Έλλειψη επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών.
4. Έλλειψη καταλλήλου διδακτικού υλικού και πόρων γενικότερα.

β) Το υπόβαθρο και η στάση των μαθητών.

1. Θεωρούν την ιστορική προσέγγιση των Μαθηματικών ως Ιστορία και δεν συμπαθούν τη Ιστορία.
2. Θεωρούν την ιστορική προσέγγιση εξίσου βαρετή με τα Μαθηματικά.
3. Δεν διαθέτουν ευρύτερη πολιτιστική γνώση για να εκτιμήσουν την ιστορική προσέγγιση των Μαθηματικών.

Γ) Θέματα αξιολόγησης.

1. Πως μπορούν να τεθούν ερωτήσεις σε ένα τεστ ή σε μια εξέταση;
2. Υπάρχει κάποια εμπειρική απόδειξη ότι οι μαθητές μαθαίνουν πιο αποτελεσματικά όταν χρησιμοποιείται η Ιστορία των μαθηματικών στη τάξη;

Κεφάλαιο 2. Σκοπός της Εργασίας και Μεθοδολογία.

2.1. Σκοπός της Εργασίας- Ερευνητικά Ερωτήματα.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η παρούσα εργασία αποτελεί μια προέκταση της μεταπτυχιακής εργασίας της Μιόγλου (2017) για το Γυμνάσιο. Η Μιόγλου μελέτησε τις « *Πεποιθήσεις των δασκάλων για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών του Δημοτικού*» (2017). Στη παρούσα διπλωματική εργασία επιχειρείται να εξεταστεί ο ρόλος της Ιστορίας των Μαθηματικών στο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών/ Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, για την υποχρεωτική εκπαίδευση, που εκδόθηκε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο το 2003 (ΦΕΚ 303, 2003), στα σχολικά βιβλία των μαθητών και εκπαιδευτικών που εκδόθηκαν για την Α΄ Γυμνασίου το 2011, για την Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου το 2013 και στις στάσεις των καθηγητών. Η πρώτη έκδοση των βιβλίων πραγματοποιήθηκε το 2007 και η δεύτερη το 2010. Στη δεύτερη έκδοση διορθώθηκαν αρκετά ιστορικά σημειώματα. Η έμφαση δόθηκε στο πως προσλαμβάνεται και αξιοποιείται η Ιστορία των Μαθηματικών από τους καθηγητές των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο.

Πιο συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα θα απαντηθούν με την εξέταση του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών του Γυμνασίου, με το υλικό που υπάρχει στα σχολικά βιβλία των μαθητών και των εκπαιδευτικών και με τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης από το ερωτηματολόγιο.

Εφόσον η παρούσα εργασία αποτελεί τη συνέχεια της εργασίας της Μιόγλου (2017) για το Γυμνάσιο, τα ερευνητικά ερωτήματα θα είναι παρεμφερή με αυτά που αφορούν τη προαναφερθείσα εργασία. Τα ερευνητικά ερωτήματα που θα επιχειρήσει να απαντήσει η παρούσα εργασία είναι:

1. Χρησιμοποιούνται/ Αξιοποιούνται τα ιστορικά σημειώματα που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου από τους εκπαιδευτικούς στη διδασκαλία των Μαθηματικών;

2. Οι καθηγητές των Μαθηματικών του Γυμνασίου θεωρούν ότι η Ιστορία των Μαθηματικών θα εμπλουτίσει τη διδασκαλία τους;

3. Έχουν οι καθηγητές των Μαθηματικών το κατάλληλο υπόβαθρο και γνώσεις για να χρησιμοποιήσουν την Ιστορία των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους;

4. Το υλικό που παρέχεται στους εκπαιδευτικούς είναι επαρκές ώστε να τους βοηθήσει να συμπεριλάβουν την Ιστορία των Μαθηματικών στα διδακτικά εργαλεία/ βοηθήματα τους;

2,2. Μεθοδολογία της Έρευνας.

2,2,1. Ανάλυση Δ.Ε.Π.Π.Σ./ Α.Π.Σ.- Διδακτικά Βιβλία- Οδηγίες Διδασκαλίας.

Το ερευνητικό μέρος της παρούσας εργασίας ξεκίνησε με τη καταγραφή όλου του ιστορικού υλικού που περιέχεται στις τρείς τάξεις του Γυμνασίου στα βιβλία των μαθητών και των εκπαιδευτικών. Ύστερα, αναλύθηκε το Δ.Ε.Π.Π.Σ./ Α.Π.Σ. των Μαθηματικών του Γυμνασίου, για να εντοπιστούν τα τμήματα στα οποία αναφέρεται η Ιστορία των Μαθηματικών ως προτεινόμενο εκπαιδευτικό υλικό.

2,2,2. Σύνταξη ερωτηματολογίου.

Για τη σύνταξη του ερωτηματολογίου των εκπαιδευτικών χρησιμοποιήθηκε το θεωρητικό υπόβαθρο που αναλύθηκε στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας και οι ερωτήσεις του ερωτηματολογίου είναι παρόμοιες με αυτές της Μιόγλου (2017), όμως προσαρμοσμένες για καθηγητές των Μαθηματικών. ο λόγος είναι ότι οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας διδάσκουν μια ποικιλία από αντικείμενα, ενώ οι καθηγητές των Μαθηματικών διδάσκουν μόνο το πεδίο των Μαθηματικών κατά κύριο λόγο. Επίσης, και στις σπουδές τους οι δάσκαλοι εκπαιδεύονται στο σύνολο σχεδόν των παρεχόμενων μαθημάτων του Δημοτικού, ενώ οι καθηγητές των Μαθηματικών εκπαιδεύονται μόνο στα Μαθηματικά.

Το ερωτηματολόγιο των εκπαιδευτικών του Γυμνασίου εκτός από τα δημογραφικά και τα έτη υπηρεσίας αποτελείται από δύο ερωτήσεις κλειστού (ερωτήσεις 5, 7) τύπου ΝΑΙ/ ΟΧΙ και από τέσσερις ερωτήσεις ανοιχτού τύπου (ερωτήσεις 6, 8, 9, 10). Οι κλειστές ερωτήσεις χρησιμοποιήθηκαν για την ευκολία στη συμπλήρωση και οι ανοικτές γιατί υπήρξε η ανάγκη ποιοτικής διερεύνησης. Η συμπλήρωση του ερωτηματολογίου πραγματοποιήθηκε από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς με τη παρουσία του ερευνητή. Ο λόγος της παρουσίας του ερευνητή ήταν για να παρέχει τυχόν διευκρινήσεις που χρειάζονταν οι ερωτώμενοι. Δεν στάλθηκαν τα ερωτηματολόγια για να αποφευχθεί η μη συμπλήρωση τους. Το χρονικό διάστημα συγκέντρωσης των δεδομένων ήταν από 15/02/2019- 15/06/2019. Η παρουσία του ερευνητή δεν επηρέασε τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου γιατί οικειοθελώς συμμετείχαν οι εκπαιδευτικοί.

Στο ερωτηματολόγιο της παρούσας εργασίας εφαρμόστηκε ανάλυση αξιοπιστίας alpha Cronbach στο στατιστικό πρόγραμμα SPSS με δείκτη αξιοπιστίας a= 0.82. Η τιμή κρίνεται ικανοποιητική γιατί για να υπάρχει εσωτερική συνοχή σε ένα ερωτηματολόγιο, θα πρέπει a>0.7 (Jolliffe, I.T., 2002). Το ερωτηματολόγιο που απαντήθηκε από τους εκπαιδευτικούς περιέχεται στο Παράρτημα της παρούσας εργασίας.

2,2,3. Η διαδικασία συλλογής των δεδομένων.

Η έρευνα που περιέχεται στη παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε κατά το σχολικό έτος 2018-2019 και συγκεκριμένα από τις 15/02/2019 έως τις 15/06/2019. Στην έρευνα πήραν μέρος καθηγητές που διδάσκουν Μαθηματικά σε διάφορα Γυμνάσια των νομών Πιερίας, Θεσσαλονίκης και Κιλκίς. Η συμπλήρωση του ερωτηματολογίου ήταν ανώνυμη και ο ερευνητής παρείχε όλες τις διευκρινιστικές απαντήσεις σε τυχόν ερωτήσεις των εκπαιδευτικών.

2,2,4. Το δείγμα που συμμετείχε.

Συνολικά απάντησαν 150 (N= 150) εκπαιδευτικοί στο τυποποιημένο ερωτηματολόγιο. Ο λόγος επιλογής της παρουσίας του ερευνητή στη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου ήταν για τη παροχή διευκρινήσεων στους εκπαιδευτικούς. Η αποστολή των ερωτηματολογίων δεν διασφαλίζει την απάντηση όλων των ερωτήσεων. Οι ερωτώμενοι έχουν την ευχέρεια να μην απαντήσουν στο ερωτηματολόγιο μερικώς ή ολικώς, ακόμη και αν αρχικά δέχθηκαν. Π.χ. Η Μιόγλου (2017) στην ερευνητική της εργασία έστειλε 200 ερωτηματολόγια σε δασκάλους και έλαβε συμπληρωμένα τα 76.

Οι εκπαιδευτικοί που απάντησαν διδάσκουν στα Γυμνάσια των νομών Πιερίας, Θεσσαλονίκης και Κιλκίς. Όπως αντιλαμβάνεται κάποιος η συγκεκριμένη δειγματοληψία είναι μια απλή τυχαία δειγματοληψία των εκπαιδευτικών των παραπάνω νομών. Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν Μαθηματικά στα Γυμνάσια των νομών Κιλκίς, Θεσσαλονίκης και Κατερίνης έχουν τις ίδιες πιθανότητες να ενταχθούν στο δείγμα (Cohen L., et al, 2007).

Όπως και στην εργασία της Μιόγλου (2017), η επιλογή ενός αντιπροσωπευτικού δείγματος ελλήνων καθηγητών που διδάσκουν στα γυμνάσια της χώρας θα απαιτούσε συστηματική οργάνωση, πόρους και χρόνο που δεν ήταν διαθέσιμα για τη παρούσα ερευνητική εργασία. Το μειονέκτημα της έρευνας είναι ότι περιορίζεται σε τρείς μόνο νομούς της Ελλάδας, οπότε εκφράζει τις στάσεις των εκπαιδευτικών της Κεντρική Μακεδονίας. Η γεωγραφική εγγύτητα που υιοθετήθηκε έχει το πλεονέκτημα ότι υπήρχε ευκολία για τη συνέντευξη/ συμπλήρωση του ερωτηματολογίου με βάση το τυποποιημένο ερωτηματολόγιο, όμως υπάρχει περιορισμένη δυνατότητα μεροληπτικού ελέγχου και χαμηλή αντιπροσωπευτικότητα αν το ανάγουμε στον πληθυσμό όλων των εκπαιδευτικών που διδάσκουν Μαθηματικά στα Γυμνάσια της Ελλάδας.

2.2.5. Επεξεργασία δεδομένων.

Μετά τη συλλογή των δεδομένων διενεργήθηκε η ψηφιοποίηση τους για να γίνει δυνατή η στατιστική τους ανάλυση. Για τη στατιστική ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο SPSS. Για τα διαγράμματα που περιέχονται στην εργασία χρησιμοποιήθηκε το SPSS και το Microsoft Excel.

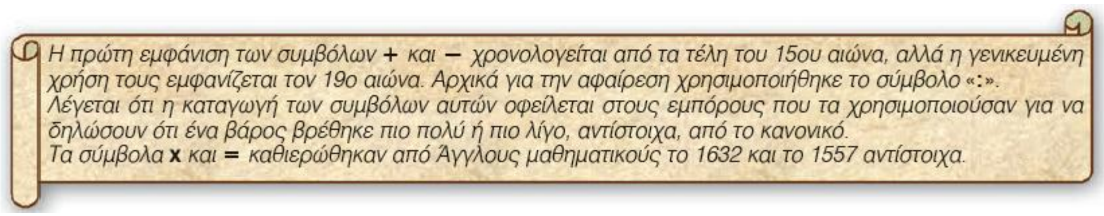
Κεφάλαιο 3. Τα ιστορικά σημειώματα στα σχολικά βιβλία και στο ΔΕΠΠΣ/ ΑΠΣ.

Το παρόν κεφάλαιο ασχολείται με τα ιστορικά σημειώματα που βρίσκονται στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του γυμνάσιου και τις αναφορές στην Ιστορική προσέγγιση στο ΔΕΠΠΣ/ ΑΠΣ του 2003. Στα βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου περιέχονται συνολικά 65 ιστορικά σημειώματα. Στην Ά Γυμνασίου περιέχονται 33 ιστορικά σημειώματα, ενώ στη ΄Β Γυμνασίου 18 και 14 στη ΄Γ τάξη αντίστοιχα. Αν και η ΄Γ γυμνασίου έχει τα λιγότερα ιστορικά σημειώματα, αυτά εμπλέκουν τους μαθητές σε δραστηριότητες. Στις προηγούμενες τάξεις οι ιστορικές αναφορές απλά πληροφορούν.

Στα βιβλία του εκπαιδευτικού γίνονται ελάχιστες αναφορές σε σχέση με την ιστορική προσέγγιση της διδασκαλίας, αν και η χρησιμοποίηση των ιστορικών σημειωμάτων επαφίεται στη βούληση του καθηγητή. Μέσα στο βιβλίο του εκπαιδευτικού υπάρχουν πλήθος ιστοσελίδων στο διαδίκτυο για εμβάθυνση στην ιστορική προσέγγιση της διδασκαλίας, ιδιαίτερα στη ΄Β και ΄Γ τάξη.

3.1. Α΄ Γυμνασίου.

Ι) Βιβλίο μαθητή


*Η πρώτη εμφάνιση των συμβόλων **+** και **−** χρονολογείται από τα τέλη του 15ου αιώνα, αλλά η γενικευμένη χρήση τους εμφανίζεται τον 19ο αιώνα. Αρχικά για την αφαίρεση χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο «:». Λέγεται ότι η καταγωγή των συμβόλων αυτών οφείλεται στους εμπόρους που τα χρησιμοποιούσαν για να δηλώσουν ότι ένα βάρος βρέθηκε πιο πολύ ή πιο λίγο, αντίστοιχα, από το κανονικό. Τα σύμβολα **x** και **=** καθιερώθηκαν από Άγγλους μαθηματικούς το 1632 και το 1557 αντίστοιχα.*

Εικόνα 1.2 α.

Στην παραπάνω εικόνα γίνεται αναφορά για τη χρησιμοποίηση και καθιέρωση των συμβόλων = και - , καθώς επίσης και τη πιθανη προέλευση τους. Είναι καθαρά πληροφοριακού χαρακτήρα η προσθήκη.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Μερικές φορές ένας απλός συλλογισμός κάποιου ανθρώπου αξίζει πιο πολύ απ' όλο το χρυσάφι του κόσμου. Με κάποιες έξυπνες ιδέες κερδίζονται μάχες, γίνονται μνημειώδη έργα και δοξάζονται άνθρωποι, ενώ παράλληλα αναπτύσσεται η επιστήμη, εξελίσσεται η τεχνολογία, διαμορφώνεται η ιστορία και αλλάζει η ζωή.

Ένα μικρό παράδειγμα είναι η "έξυπνη πρόσθεση" που σκέφτηκε να κάνει ο **Γκάους** *(Karl Friedrich Gauss, 1777 - 1855), όταν σε ένα χωριό της Γερμανίας γύρω στα 1784, στην πρώτη τάξη του σχολείου, άρχισε να μαθαίνει για τους αριθμούς και τις αριθμητικές πράξεις. Όταν ο δάσκαλος ζήτησε από τους μαθητές του να υπολογίσουν το άθροισμα:*

1+2+3+....+98+99+100, *πριν οι υπόλοιποι αρχίσουν τις πράξεις, ο μικρός Γκάους το είχε ήδη υπολογίσει. Ο δάσκαλος έκπληκτος τον ρώτησε πώς το βρήκε. Τότε εκείνος έγραψε στον πίνακα:*

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (48 + 53) + (49 + 52) + (50 + 51) =$$
$$= \underbrace{101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101}_{\text{50 φορές}} = 101 \cdot 50 = 5.050$$

Προσπάθησε να υπολογίσεις με τον τρόπο του Γκάους το άθροισμα 1+2+3+...+ 998 + 999 + 1000 και να μετρήσεις τον χρόνο που χρειάστηκες. Πόσο χρόνο θα έκανες άραγε να το υπολογίσεις με κανονική πρόσθεση;

Εικόνα Α. 1.2 β.

Σύμφωνα με τους Thomaidis & Tzanakis (2009), το ιστορικό σημείωμα περιέχει την ακραία δήλωση ότι η μαθηματική πρόοδος οφείλεται σε λίγες ιδιοφυίες. Η μαθηματική πρόοδος οφείλεται στη συνεργατική προσπάθεια μέσω της οποίας συνδέθηκαν αρμονικά η προσωπική επιδεξιότητα με τα προηγούμενα επιτεύγματα της επιστημονικής κοινότητας, τη σωστή στιγμή. Στο παραπάνω απόσπασμα δίνεται μια διαστρεβλωμένη αίσθηση της Ιστορίας, η οποία διδακτικά, αναμένεται να αποθαρρύνει τους μαθητές παρά να τους ενθαρρύνει. Κατά τους παραπάνω ερευνητές αυτό το παράδειγμα δείχνει έλλειψη σχετικότητας του ιστορικού υλικού που παρέχεται στο βιβλίο με το στόχο τους προγράμματος σπουδών, που είναι « να παρέχει τους μαθητές δικλείδες ασφαλείας στην αναζήτηση της γνώσης» (Thomaidis & Tzanakis, 2009, pp 4). Η παραπάνω δήλωση αφορά τη πρώτη έκδοση των σχολικών βιβλίων που πραγματοποιήθηκε το 2007. Στη δεύτερη έκδοση των βιβλίων το 2010 έγιναν οι σχετικές διορθώσεις στα σχολικά βιβλία, όπως και η διόρθωση στο ιστορικό σημείωμα σχετικά με τον Gauss.

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Αρχικά ο άνθρωπος έκανε μόνο τον διαχωρισμό: **ένα, δύο, πολλά**. *Με την πρόοδο του πολιτισμού, την ανάπτυξη των τεχνών και του εμπορίου διαμορφώνει τις έννοιες των αριθμών. Σ' αυτό βοήθησαν και τα* **φυσικά πρότυπα αρίθμησης**, *όπως π.χ. τα δάκτυλα του ενός χεριού (αρίθμηση βάση το 5) ή των δύο χεριών (βάση το 10). Μετά, τα πρώτα αυτά αριθμητικά συστήματα, συμπληρώνονται με τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.*

Τα αποτελέσματα της αρίθμησης καταγράφονταν με τη βοήθεια χαραγών πάνω σε ξύλα ή κόκαλα ή με κόμπους σε σχοινιά. Το αρχαιότερο εύρημα ανάγεται στους προϊστορικούς χρόνους και είναι το κόκαλο ποδιού ενός μικρού λύκου μήκους 18 εκατοστών που βρέθηκε, το 1937, στην πόλη Βεστόνιτσε της Μοραβίας (εικόνα).

Η ανάγκη υπολογισμού μεγεθών απαιτεί σύγκριση με ένα σταθερό υπόδειγμα, τη **μονάδα μέτρησης**. *Οι πρώτες μονάδες αντιστοιχούν πάλι σε μέλη του σώματος, όπως παλάμες, δάχτυλους, πόδια, οργιά, πήχη. Από τα φυσικά πρότυπα, τις χαραγές, τους κόμπους, τα βότσαλα περάσαμε μέσα σε περίοδο χιλιάδων ετών στα* **σύμβολα που παρίσταναν αριθμούς**. *Τα σύμβολα αυτά ήταν διαφορετικά στους διάφορους αρχαίους πολιτισμούς. Η ενοποίηση του συμβολισμού των αριθμών που υπάρχει σήμερα χρειάστηκε χιλιάδες χρόνια για να γίνει.*

Η **ιστορία του μηδενός** *και ο συμβολισμός του ακολουθεί διαφορετική πορεία. Κι αυτό γιατί η ανάγκη ύπαρξης ξεχωριστού συμβόλου για το* **"τίποτα"** *εμφανίστηκε πολύ αργότερα.*

Οι **Σουμέριοι** *και οι* **Βαβυλώνιοι** *άφηναν ένα* **κενό** *διάστημα για να δηλώσουν την απουσία αριθμητικού ψηφίου σε κάποια θέση. Οι παρανοήσεις και τα λάθη που προέκυπταν τους οδήγησαν στην υιοθέτηση του ειδικού συμβόλου ή ή κατά την Περσική περίοδο.*

Το σύμβολο αυτό το τοποθετούσαν μόνο μεταξύ δύο ψηφίων και όχι στο τέλος ενός αριθμού. Από τον 3ο - 12ο αιώνα μ.Χ. το μηδέν είναι μια κουκίδα. Ο μαθηματικός και αστρονόμος Βραχμαγκούπτα, το 628 μ.Χ. ονομάζει το μηδέν ως "το τίποτα". Τον 9ο αιώνα συναντάμε επιγραφή με σαφή συμβολισμό για το μηδέν.

Οι **Ινδοί** *χρησιμοποιούν το σύμβολο του μηδενός και ως τελευταίο ψηφίο αριθμού. Έτσι είχαν 10 ισότιμα ψηφία τα:* • *ή* **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8** *και* **9**.

Ο Άραβας μαθηματικός Αλ-Χουαρίζμι (787 - 850 μ.Χ.), στο έργο του "Αλγόριθμοι των Ινδικών αριθμών" γράφει το 820 μ.Χ. για το μηδέν: **"Όταν μια αφαίρεση δεν αφήνει τίποτα, τότε, για να μη μείνει άδεια η θέση πρέπει να μπαίνει ένας μικρός κύκλος, γιατί διαφορετικά οι θέσεις θα λιγοστέψουν και μπορεί π.χ. η δεύτερη να θεωρηθεί ως πρώτη"**.

Ο Έλληνας μαθηματικός **Κλαύδιος Πτολεμαίος** *(100 - 178 μ.Χ.) χρησιμοποιεί το σύμβολο* 0 *για να παραστήσει το μηδέν, στο βιβλίο του "Μεγάλη Μαθηματική Σύνταξη" ή* **"Αλμαγέστη"** *(150 μ.Χ.). Το επινόησε από το αρχικό γράμμα της λέξης* **"ουδέν"** *που σημαίνει* **κανένα** *(ψηφίο).*

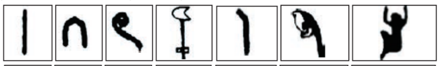
Εικόνα Α. 1.2 γ.

Η ιστορική ανάδρομη αναφέρει την πρακτική ανάγκη που είχαν οι διάφοροι λαοί της ανθρωπότητας να οργανώσουν τη ζωή τους. Μια από αυτές τις επιτακτικές ανάγκες ήταν και ένα αποτελεσματικό μετρικό σύστημα. Αναφέρει λαούς από διαφορετικές ηπείρους και αυτό είναι θετικό. Όμως η ιστορική αναδρομή δεν εξηγεί τα κίνητρα που τους κινητοποίησαν, τη προέλευση και εξέλιξη των ιδεών.

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Οι πιο παλιοί αριθμοί γράφτηκαν από τους **Σουμέριους** *σε πήλινα πινακίδια της 3ης - 2ης χιλιετηρίδας π.Χ. Οι αριθμοί γράφονταν από τα δεξιά προς τα αριστερά. Πρώτα οι μονάδες, μετά οι δεκάδες κ.λπ. Το 1854 ανακαλύφθηκαν κοντά στις όχθες του Ευφράτη, πήλινα πινακίδια γραμμένα στην περίοδο 2300 - 1600 π.Χ. από τους* **Βαβυλώνιους** *που χρησιμοποιούσαν και το δεκαδικό σύστημα.*

Οι **Αιγύπτιοι** *από το 3000 - 2500 π.Χ. είχαν ειδικά ιερογλυφικά για την παράσταση των αριθμών. Τα ειδικά σύμβολα που είχαν για να παριστάνουν τις μονάδες κάθε δεκαδικής τάξης φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:*



1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000

Τον 5ο αιώνα π.Χ. στην **Ιωνία** *δημιουργήθηκε το* **αλφαβητικό** *σύστημα αρίθμησης, που ήταν το τελειότερο σύστημα αρίθμησης μετά το αραβικό και έμεινε σε χρήση μέχρι και την Αναγέννηση, παράλληλα με το ρωμαϊκό. Σ' αυτό κάθε αριθμός από το 1 ως το 9, κάθε δεκάδα 10, 20, 30,..., 90, κάθε εκατοντάδα 100, 200, ..., 900, συμβολίζονταν από ένα γράμμα του ελληνικού αλφαβήτου με μια οξεία πάνω αριστερά για να τα ξεχωρίζουν από τα γράμματα των λέξεων. Επειδή χρειάζονταν 27 γράμματα για τον συμβολισμό όλων αυτών των αριθμών και το αλφάβητο έχει μόνο 24, χρησιμοποίησαν ακόμη τρία σύμβολα το* **στίγμα** ϛ *που παρίστανε τον αριθμό 6, το* **κόππα** ϟ *που παρίστανε τον αριθμό 90 και το* **σαμπί** ϡ *που παρίστανε τον αριθμό 900.*

Έτσι είχαν:

Για μεγαλύτερους αριθμούς είχαν μια μικρή γραμμή κάτω αριστερά, που δήλωνε ότι η αξία του γράμματος πολλαπλασιαζόταν επί 1.000. Δηλαδή: ͵δ=4x1.000=4.000 και ͵η=8x1.000 = 8.000.
Με το αλφαβητικό αριθμητικό σύστημα γράφουμε: ͵βδ' για τον αριθμό 2004 και ω'λ'α' για τον 831.
Οι **Ρωμαίοι** *εισήγαγαν ένα δεκαδικό αριθμητικό σύστημα με ξεχωριστά σύμβολα για τους αριθμούς 1, 5, 10, 50, 100, 500 και 1000. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιούσαν τα σύμβολα:*

I	V	X	L	C	D	M	$\overline{L}$	$\vert\overline{C}\vert$
1	5	10	50	100	500	1.000	50x1.000=50.000	100x100x1.000=10.000.000

Στη γραφή των αριθμών τους χρησιμοποιούσαν την προσθετική αρχή από τα αριστερά προς τα δεξιά αλλά και την αφαιρετική αρχή. Το **2** *γράφεται* **II***, το* **3** *γράφεται* **III***, κ.λπ. Το* **4** *γράφεται* **IV** *(5–1), το* **9** *γράφεται* **IX** *(10–1), το* **40** *γράφεται* **XL** *(50–10), το* **900** *γράφεται* **CM** *(1.000–100), κ.λπ.*

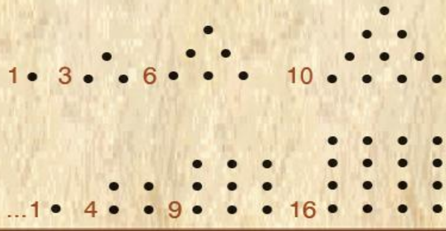
Για πολλούς αιώνες κυριάρχησε το ελληνικό και το ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης. Το 1299 οι Κανονισμοί της "Τέχνης της Συναλλαγής" (Arte del Cambio) απαγόρευαν στους τραπεζίτες της Φλωρεντίας να χρησιμοποιούν τα Ινδοαραβικά αριθμητικά ψηφία και επέβαλαν τα ρωμαϊκά.

Τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε σήμερα του **δεκαδικού συστήματος** *έφτασαν και διαδόθηκαν στην Ευρώπη μέσω των Αράβων, για τον λόγο αυτό ονομάστηκαν* **Αραβικά***, αλλά είναι* **Ινδοαραβικά***, διότι από τα συστήματα αρίθμησης που υπήρχαν στους Άραβες, το δεκαδικό σύστημα ήρθε απ' τους Ινδούς. Αυτό εμφανίζεται για πρώτη φορά στο έργο του Αλ-Χουαρίζμι (787 - 850 μ.Χ.) "Αλγόριθμοι των Ινδικών αριθμών". Ήρθε στη Μέση Ανατολή με τα καραβάνια από την Περσία και την Αίγυπτο την περίοδο 224 - 641 μ.Χ. Οι τύποι Ινδικών συμβόλων είναι τα λεγόμενα* **"γκομπάρ"** *που χρησιμοποιούσαν οι Άραβες στην Ισπανία που την είχαν καταλάβει από το 711 μ.Χ.*

Εικόνα Α. 1.3 α.

Η ιστορική αναδρομή που βρίσκεται παραπάνω αναφέρει τη πρακτική ανάγκη που είχαν οι διάφοροι λαοί της αρχαιότητας για τη καθιέρωση ενός μετρικού συστήματος. Γίνονται αναφορές στους Σουμέριους, Αιγύπτιους, Άραβες, Έλληνες και Ρωμαίους. Μεγάλη παράλειψη ότι δεν αναφέρονται οι Κινέζοι. Επίσης είναι θετικό ότι οι μαθητές πληροφορούνται ότι τα ψηφία που χρησιμοποιούν προέρχονται από την Ινδία.

Οι αριθμοί είχαν αναχθεί από τη σχολή του **Πυθαγόρα** σε θεμέλιο όλων των επιστημών. Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι όλοι οι νόμοι του σύμπαντος μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια των φυσικών αριθμών και των λόγων τους. Αυτή η τολμηρή υπόθεση εκφράζεται παραστατικά στην περίφημη θέση τους "τα πάντα είναι αριθμός". Οι Πυθαγόρειοι είχαν αναπτύξει έναν ιδιότυπο τρόπο συμβολισμού των αριθμών με τη βοήθεια "ψήφων" διατεταγμένων στη μορφή κανονικών γεωμετρικών σχημάτων. Έτσι σχημάτιζαν ακολουθίες "τρίγωνων αριθμών", που ήταν διατεταγμένοι σε σχήμα τριγώνων, τετράγωνων αριθμών, που ήταν διατεταγμένοι σε σχήμα τετραγώνων:



Εικόνα Α. 1.3 β

Το υλικό αποτελεί απλή παράθεση γεγονότων.

ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

► *Με βάση την παραπάνω ιστορική αναδρομή κάνε ένα νοερό ταξίδι στον χρόνο προς το παρελθόν και φαντάσου ότι ζεις στη χώρα των Σουμερίων το 3000 π.Χ., των Αιγυπτίων από το 2500 π.Χ., των Ιώνων το 500 π.Χ., των Ρωμαίων το 1200 μ.Χ., των Ισπανών το 1300 μ.Χ., μέχρι την εποχή μας του 21ου αιώνα και γράψε δύο αριθμούς δικής σου επιλογής, όπως τους έγραφαν εκείνοι τότε.*

Εικόνα Α. 1.3 γ.

Η παραπάνω δραστηριότητα αποτελεί μια ευχάριστη αναδρομή στο παρελθόν για τους μαθητές. Ένα λάθος που πρέπει να σημειωθεί είναι ότι η μόνη ρωμαϊκή αυτοκρατορία που υπήρχε το 1200 μ.Χ. ήταν η ανατολική. Η δυτική ρωμαϊκή αυτοκρατορία διαλύθηκε τον 5^{o} αιώνα μ.Χ.

Ονομάζουμε "**Ευκλείδεια Διαίρεση**" τη διαίρεση δύο αριθμών, προς τιμήν του **Ευκλείδη**, μεγάλου Έλληνα Μαθηματικού, ο οποίος άκμασε περίπου το 300 π.Χ. Μετά τις σπουδές του στην Αθήνα πήγε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, πόλη που αναδείχθηκε σε μεγάλο πολιτιστικό κέντρο του κόσμου εκείνης της εποχής με τη φροντίδα του Πτολεμαίου του Α'. Το πιο σημαντικό έργο του Ευκλείδη είναι "**Τα Στοιχεία**" που αποτελούνται από 13 βιβλία και αποκρυσταλλώνουν την επιτυχημένη προσπάθεια του Ευκλείδη να αξιοποιήσει και να συστηματοποιήσει τις μαθηματικές γνώσεις της εποχής του.

Εικόνα Α. 1.4

Το παραπάνω ιστορικό σημείωμα αποτελεί απλή παράθεση βιογραφικών στοιχείων του Ευκλείδη.

4. *Να βρεθούν όλοι οι πρώτοι αριθμοί μεταξύ του 1 και του 100.*

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Λύση

Οι αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν ότι **δεν υπάρχει μέγιστος πρώτος αριθμός**, δηλαδή ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι στο πλήθος. Γνώριζαν ακόμη ότι δεν υπάρχει ένας απλός κανόνας που να δίνει τους διαδοχικούς πρώτους αριθμούς. Με την απλή μέθοδο του Ερατοσθένη, γνωστή ως **"Κόσκινο του Ερατοσθένη"**, που χρησιμοποιείται μέχρι και σήμερα, βρίσκουμε όλους τους πρώτους αριθμούς που είναι μικρότεροι από δοσμένο αριθμό.

Στον διπλανό πίνακα διαγράφουμε τον αριθμό 1 που δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος.

Μετά σημαδεύουμε το 2 και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσιά του. Το ίδιο κάνουμε και με τους αριθμούς 3, 5 και 7. Μ' αυτό τον τρόπο διαγράφονται όλοι οι σύνθετοι αριθμοί και μένουν μόνο οι πρώτοι, από το 1 έως το 100:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 και 97.

Εικόνα Α. 1.5 α

Το παραπάνω αποτελεί τη πρώτη δραστηριότητα που εμπλέκει την Ιστορία των Μαθηματικών.

Ο **Ερατοσθένης** *(γεννήθηκε στην Κυρήνεια και πέθανε στην Αλεξάνδρεια) διακρίθηκε ως Μαθηματικός, Φυσικός, Γεωγράφος, Αστρονόμος, Ιστορικός και Φιλόλογος. Από το 234 π.Χ. και επί περίπου 40 χρόνια, διετέλεσε υπεύθυνος της περίφημης βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας και δίδαξε στο Μουσείο της. Στα περίφημα* **"Γεωγραφικά"** *που παρουσίασε την πρώτη ακριβή μαθηματική μέτρηση της* **περιμέτρου (μεσημβρινού) της Γης**, *ως* **250.000 στάδια** *(=39.400 - 41.000 km, έναντι της πραγματικής 40.000 km) (Κλεομήδης, Στράβων). Επίσης, υπολόγισε την απόσταση της σελήνης* **780.000 στάδια** *και του Ήλιου* **804.000.000 στάδια.**
Μέτρησε την κλίση του άξονα της γης με μεγάλη ακρίβεια και έφτιαξε έναν κατάλογο που περιελάμβανε **675** *αστέρες. Λάτρης της ταξινόμησης της ανθρώπινης γνώσης, ο Ερατοσθένης δεν μπόρεσε να αντέξει τη στέρηση της μελέτης, που του επέβαλε η τύφλωση που τον έπληξε στα γεράματα και τελικά τερμάτισε τη ζωή του, αφού αρνιότανε να φάει οτιδήποτε.*

Εικόνα Α. 1.5 β

Ακόμα μια βιογραφική αναφορά στον Ερατοσθένη και το έργο του. Σύμφωνα με τους Thomaidis & Tzanakis (2009), αυτό το σημείωμα θα μπορούσε να περιλαμβάνει ενδιαφέρουσες δραστηριότητες, όπως η απλοποίηση της μεθόδου μέτρησης της περιφέρειας της γης. Αντί αυτού, το σημείωμα περιορίζεται στην παράθεση των αποτελεσμάτων.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Σε αρχαία βαβυλωνιακά μαθηματικά κείμενα που χρονολογούνται από το 2100 π.Χ. περίπου, συναντάμε εξηκονταδικά κλάσματα με παρονομαστή δύναμη του 60, για τα οποία υπήρχαν ειδικά σφηνοειδή σύμβολα.

Οι **Βαβυλώνιοι** *είχαν επίσης ειδικά σύμβολα για τα κλάσματα* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ *και* $\frac{2}{3}$.

Οι **Αιγύπτιοι**, *επίσης, γνωρίζουν να χρησιμοποιούν τα λεγόμενα θεμελιώδη ή αιγυπτιακά κλάσματα, δηλαδή κλάσματα με αριθμητή τη μονάδα (κλασματικές μονάδες στη δική μας ορολογία). Ένα θεμελιώδες κλάσμα συμβολίζεται με τον παρανομαστή του, πάνω στον οποίο υπάρχει ένα διακριτικό σημείο, π.χ. το* $\frac{1}{5}$ *γράφεται ως* $\overline{5}$.

Όμως είχαν ειδικό συμβολισμό για τα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ *και* $\frac{2}{3}$.

Αυτή η ιδιομορφία του συμβολισμού οφείλεται στη διαφορετική προέλευση των κλασμάτων αυτών. Τα κλάσματα αυτά έλκουν την καταγωγή τους από άμεσα πρακτικά προβλήματα, ενώ τα θεμελιώδη κλάσματα πρέπει να ήταν προϊόν μαθηματικής επεξεργασίας. Όλα τα κλάσματα που χρησιμοποιούν ανάγονται σε αθροίσματα θεμελιωδών κλασμάτων. Η αναγωγή αυτή γινόταν με τη βοήθεια ειδικών πινάκων. Ένας τέτοιος πίνακας υπάρχει στον **πάπυρο του Ριντ** *(Rhind), μαθηματικό έργο των Αιγυπτίων, που τοποθετείται τουλάχιστον το 1650 π.Χ.*

Ο πίνακας περιέχει την ανάλυση όλων των κλασμάτων της μορφής $\frac{2}{\nu}$ *με "ν" περιττό αριθμό από 5 έως 101.*

$\nu=5$ $\quad \frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\overline{3}+\overline{15}$

$\nu=7$ $\quad \frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}=\overline{4}+\overline{28}$

$\nu=9$ $\quad \frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\overline{6}+\overline{18}$

$\nu=59$ $\quad \frac{2}{59}=\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531}=\overline{36}+\overline{236}+\overline{531}$

$\nu=97$ $\quad \frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}=\overline{56}+\overline{679}+\overline{776}$

Εικόνα Α. 2.6 α.

Στην επόμενη σελίδα συνεχίζεται το ιστορικό σημείωμα.

Αλλά και στον **πάπυρο της Μόσχας**, *που τοποθετείται στα 1850 π.Χ., υπάρχουν προβλήματα που περιέχουν κλάσματα και πράξεις με κλάσματα και αριθμούς, όπως για παράδειγμα "το $\frac{1}{3}$ του 6 είναι 2", που αναφέρεται σε υπολογισμό του όγκου δεδομένης κόλουρης πυραμίδας.*

Οι **Έλληνες** *μαθηματικοί δεν ανέπτυξαν κάποιο νέο σύστημα γραφής των κλασμάτων. Χρησιμοποιούσαν τα θεμελιώδη κλάσματα των Αιγυπτίων και τα εξηκονταδικά των Βαβυλωνίων, σε υπολογιστικά προβλήματα στα μαθηματικά και την αστρονομία. Στους "άβακες" των Ρωμαίων και των Ελλήνων (τα γνωστά αριθμητάρια των πρώτων χρόνων του δημοτικού), βρίσκουμε ειδική στήλη για τα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{4}$.*

Οι **Ινδοί** *μαθηματικοί, επίσης, γνώριζαν και χρησιμοποιούσαν τα κλάσματα και τις πράξεις τους από πολύ παλιά. Στα έργα "Σουλβασούτρα", μερικά από τα οποία ανάγονται στο 500 π.Χ. ή και παλαιότερα, χρησιμοποιούνται τα θεμελιώδη κλάσματα στον προσεγγιστικό υπολογισμό όγκων ή εμβαδών. Αλλά, όταν δημιούργησαν το δεκαδικό Ινδο-Αραβικό σύστημα αρίθμησης, άρχισαν να χρησιμοποιούν και κλάσματα με μορφή πολύ κοντινή στη δική μας. Έγραφαν τον αριθμητή πάνω από τον παρονομαστή, αλλά, χωρίς την κλασματική γραμμή, για παράδειγμα $\begin{matrix}5\\6\end{matrix}$ αντί $\frac{5}{6}$. Τα κλάσματα ξεχώριζαν το ένα από το άλλο με οριζόντιες και κάθετες γραμμές.*

Έτσι, π.χ. το κλάσμα $\frac{3}{5}$ γραφόταν $\left|\begin{matrix}\overline{3}\\ \underline{5}\end{matrix}\right|$.

Η **πρόσθεση** *συμβολιζόταν με την παράθεση των κλασμάτων το ένα δίπλα στο άλλο.*

Για την **αφαίρεση** *χρησιμοποιούσαν μία τελεία ή το σύμβολο "+" στα δεξιά,*

π.χ. η έκφραση $\frac{9}{12} - \frac{2}{15} - \frac{1}{5}$ γραφόταν: $\left|\begin{matrix}\overline{9}\\ \underline{12}\end{matrix}\right| \begin{matrix}\overline{\dot{2}}\\ \underline{15}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\overline{1+}\\ \underline{5}\end{matrix}\right|$.

Στα μεικτά κλάσματα π.χ. $3\frac{1}{4}$, το ακέραιο μέρος γραφόταν πάνω από το κλάσμα: $\left|\begin{matrix}\overline{3}\\ 1\\ \underline{4}\end{matrix}\right|$.

Τα κλάσματα στους **Κινέζους** *εμφανίστηκαν σχεδόν μαζί με τους ακέραιους αριθμούς. Τα πρώτα κλάσματα, που χρησιμοποιούσαν, ήταν το $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$.*

Στους κανόνες των αριθμητικών πράξεων στους Κινέζους, σε αντίθεση με τους άλλους λαούς, δεν υπήρχε τίποτα το ασυνήθιστο. Ήδη τον 2ο αιώνα π.Χ. οι Κινέζοι είχαν επεξεργαστεί, επαρκώς, όλες τις πράξεις με κλάσματα. Τον 3ο αιώνα μ.Χ. οι Κινέζοι, που χρησιμοποιούσαν, ήδη, το δεκαδικό σύστημα, άρχισαν στην ουσία, να χρησιμοποιούν δεκαδικά κλάσματα με μετρολογική μορφή.

Τα δεκαδικά κλάσματα εισάγονται στο έργο του Πέρση μαθηματικού Αλ-Κασί, ο οποίος εργαζόταν στο Αστεροσκοπείο της Σαμαρκάνδης. Αν και στο παρελθόν, υπήρξαν προσπάθειες στον Αραβικό κόσμο να εισαχθούν τα δεκαδικά κλάσματα, πρώτος ο Αλ-Κασί διατυπώνει τους βασικούς κανόνες των πράξεων και τους τρόπους μετατροπής των εξηκονταδικών κλασμάτων σε δεκαδικά και αντίστροφα.

Η είσοδος των κλασμάτων στα Ευρωπαϊκά μαθηματικά ανάγεται στον Λεονάρδο της Πίζας (1202), ενώ οι όροι "αριθμητής" και "παρονομαστής" απαντώνται στον Πλανούδη (τέλη 13ου αιώνα).

Εικόνα Α. 2.6 β.

Προτείνεται μία δραστηριότητα για το σπίτι που προέρχεται από τον πάπυρο του Ριντ. Η ενασχόληση με ένα τρόπο υπολογισμού που χρησιμοποιήθηκε για χιλιάδες χρόνια και η σύγκρισή του με τις σύγχρονες τεχνικές των πράξεων είναι χρήσιμη για να φανεί η εξέλιξη της μαθηματικής γνώσης.

Εικόνα Α. 2.6 γ (βιβλίο εκπαιδευτικού).

Από το βιβλίο του εκπαιδευτικού προτείνεται η παραπάνω δραστηριότητα για το σπίτι. Θα ήταν πιο χρήσιμο να πραγματοποιηθεί στην τάξη.

Ο Φλαμανδός μαθηματικός **Σιμόν Στέβιν** *(Simon Stevin, 1548 - 1620) ασχολήθηκε με τα δεκαδικά κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς. Το έργο "η δεκάτη" (La disme) ήταν μια από τις μεγάλες συνεισφορές στη βελτίωση της τεχνικής των υπολογισμών και στην καθιέρωση του Ινδοαραβικού συστήματος αρίθμησης. Την ίδια χρονιά δημοσιεύει την "Αριθμητική" του, όπου εισάγει το σύμβολο ⓪, για να υποδηλώσει το ακέραιο μέρος του αριθμού, το σύμβολο ①, για τα δέκατα, το ②, για τα εκατοστά, κ.λπ. Με αυτό τον τρόπο συμβολισμού ο δεκαδικός 34,25 γραφόταν 34⓪2①5②, ο αριθμός 0,167 γραφόταν 0⓪1①6②7③ και ο αριθμός 32 γραφόταν 32⓪. Ο γνωστός σήμερα συμβολισμός προτάθηκε από τον* **John Napier** *στα 1620 περίπου. Αυτός πρώτος χρησιμοποίησε το κόμμα μεταξύ του ακέραιου και του δεκαδικού μέρους ενός αριθμού. Το νέο σύστημα συμβολισμού επικράτησε, λόγω της συντομίας στην αναπαράσταση μεγάλων αριθμών και την ευκολία στην απομνημόνευση και εκτέλεση διαφόρων πράξεων.*

Εικόνα Α. 3.1

Ακόμη ένα ιστορικό σημείωμα που αφορά τη συνεισφορά του Σιμόν Στέβιν και την εξέλιξη των συμβολισμών. Το ιστορικό σημείωμα αποτελεί απλή παράθεση γεγονότων.

ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο άνθρωπος από τα πρώτα του βήματα, φαίνεται να αναζήτησε τρόπους σύγκρισης μεγεθών όπως είναι το μήκος, η επιφάνεια, ο όγκος, ο χρόνος και το βάρος ή η μάζα των διαφόρων αντικειμένων που χρησιμοποιούσε, αντάλλασσε, εμπορευόταν κ.λπ.
Οι ανθρώπινες επιλογές για τον καθορισμό των "μέτρων και σταθμών" είχαν ανέκαθεν και κοινωνικό, πολιτιστικό, οικονομικό, ιστορικό, επιστημονικό αλλά και πολιτικό χαρακτήρα.

- *Προσπάθησε να βρεις και να καταγράψεις (σε έναν σχετικό πίνακα) τα "μέτρα και σταθμά" για τα βασικά μεγέθη (μήκος, επιφάνεια, όγκος, χρόνος και βάρος) που χρησιμοποιήθηκαν από το 3000 π.Χ. μέχρι σήμερα, από διάφορους λαούς (Αιγύπτιους, Βαβυλώνιους, Ινδούς, Κινέζους, Αρχαίους Έλληνες, Ρωμαίους, Άγγλους, Γάλλους, Ολλανδούς, Αμερικάνους, Ευρωπαίους και Νεοέλληνες), τα οποία διατηρήθηκαν για μεγάλο χρονικό διάστημα, ώστε να είναι άξια λόγου για να αναφερθούν.*
- *Πότε, με ποιο τρόπο, για ποιο λόγο και από ποιούς έγιναν προσπάθειες να επικρατήσει ένα διεθνές σύστημα μέτρησης μεγεθών; Γιατί απέτυχαν μερικές προσπάθειες από αυτές;*
- *Πόσο ρόλο έπαιξε στις τελικές επιλογές για τα "μέτρα και σταθμά" των βασικών μεγεθών, ο επιστημονικός παράγοντας;*
- *Ποια είναι η κατάσταση που επικρατεί σήμερα διεθνώς, για τα "μέτρα και σταθμά" των βασικών μεγεθών;*

Εικόνα Α. 3.4

Το παραπάνω σχέδιο εργασίας αποτελεί μια χρήσιμη δραστηριότητα η οποία κεντρίζει το ενδιαφέρον των μαθητών. Οι μαθητές μέσω μιας τέτοιας εργασίας θα ανακαλύψουν τα κίνητρα, τη προέλευση και την εξέλιξη των μετρικών συστημάτων. Επίσης, θα κατανοήσουν ότι αυτές οι ιδέες εξυπηρέτησαν πρακτικές ανάγκες της ανθρωπότητας. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα χρησιμοποιεί την Ιστορία των Μαθηματικών για να απεικονίσει την εξέλιξη του μετρικού συστήματος μέσα στον χρόνο.

*Ο **Διόφαντος** (μέσα του 3ου αιώνα μ.Χ.), στην εισαγωγή των "Αριθμητικών" του, ονομάζει τον άγνωστο με τη λέξη "αριθμός" και τον συμβολίζει με το σύμβολο "ς".*

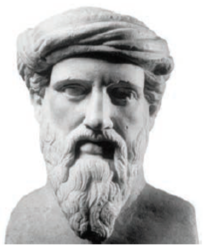
*Αργότερα ο **Βιετ** (1540 - 1603) χρησιμοποιεί τα κεφαλαία φωνήεντα **A, E, I, O, U, Y** για να υποδηλώσει τον **άγνωστο** και τα σύμφωνα **B, D, G** κ.λπ. για τα **γνωστά μεγέθη**.*

Εικόνα Α. 4.3

Το ιστορικό σημείωμα που προηγείται αποτελεί μια απλή παράθεση γεγονότων.

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Οι μαθηματικές έννοιες διαμορφώθηκαν και εξελίχτηκαν παράλληλα με την ανθρώπινη σκέψη. Φυσικά μεγέθη, όπως το βάρος, το μήκος, η επιφάνεια και ο όγκος, έδιναν αφορμές για μέτρηση και για σύγκριση, δηλαδή για λόγους και αναλογίες. Η συστηματική, όμως, μελέτη των εννοιών αυτών άρχισε στην αρχαία Ελλάδα τον 6ο π.Χ. αιώνα.



*Ο **Πυθαγόρας**, που έζησε από το 580 π.Χ. μέχρι πιθανόν το 490 π.Χ., ήταν από τους πρώτους Έλληνες που ασχολήθηκε με τους λόγους και τις αναλογίες των φυσικών αριθμών. Υπάρχει μια παράδοση που αναφέρει τον τρόπο με τον οποίο ο Πυθαγόρας οδηγήθηκε σε αυτήν την έρευνα. Στην Αλεξάνδρεια, όπου έζησε αρκετά χρόνια, βρέθηκε μια μέρα κοντά σε κάποιο σιδηρουργείο όπου τέσσερις τεχνίτες κτυπούσαν με τα σφυριά τους ένα πυρακτωμένο μέταλλο. Ο ήχος από τα κτυπήματα ήταν παράξενα μελωδικός. Αυτό κέντρισε την περιέργεια του Πυθαγόρα, που αναζήτησε τον λόγο της απροσδόκητης μελωδίας αυτών των ήχων.*

Ζήτησε από τους τεχνίτες να εξετάσει τα σφυριά τους. Παρατήρησε ότι το βάρος τους δεν ήταν το ίδιο. Συγκρίνοντας το πιο βαρύ με τα υπόλοιπα, βρήκε τους λόγους $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ και $\frac{1}{2}$ αντίστοιχα. Σκέφτηκε ότι οι λόγοι αυτοί, πιθανόν, να είχαν κάποια σχέση με τους ήχους που άκουσε. Πήρε τότε τέσσερις μεταλλικές χορδές και τις τέντωσε έτσι, ώστε τα μήκη τους να έχουν αντίστοιχους λόγους. Δηλαδή, η δεύτερη είχε μήκος ίσο με τα $\frac{3}{4}$ του μήκους της πρώτης. Η τρίτη $\frac{2}{3}$ και η τέταρτη είχε μήκος ίσο με το $\frac{1}{2}$ της πρώτης.

Έκρουσε τις χορδές και διαπίστωσε ότι οι ήχοι είχαν την ίδια μελωδική σχέση με αυτήν που άκουσε στο σιδηρουργείο. Ήταν μια "αρμονία" ήχων (συγχορδία). Με τον τρόπο αυτό, ο Πυθαγόρας ανακάλυψε αρμονικούς τόνους της μουσικής κλίμακας.

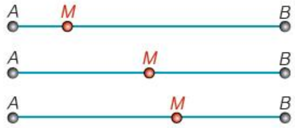
Έτσι, οι λόγοι των φυσικών αριθμών ερμήνευαν φαινόμενα που κανείς μέχρι τότε δεν μπόρεσε να συσχετίσει και να εξηγήσει. Ο δρόμος για την αναζήτηση της γνώσης είχε ανοίξει. Η έρευνα και η ερμηνεία των φαινομένων της φύσης είχε ήδη διαμορφώσει στον νου των ανθρώπων έναν νέο κώδικα, μια νέα "παγκόσμια" γλώσσα: τα μαθηματικά.

Εικόνα Α. 6.2 α.

Η συγκεκριμένη ιστορική αναδρομή αποτελεί μια απλή παράθεση γεγονότων, αυτός άλλωστε είναι και ο ρόλος της ιστορικής αναδρομής.

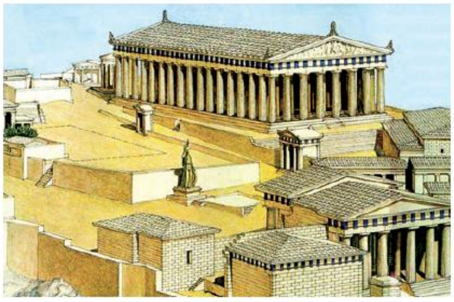
ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στο σχήμα βλέπεις τρεις διαφορετικούς τρόπους, με τους οποίους το σημείο **Μ** *χωρίζει ένα ευθύγραμμο τμήμα* **ΑΒ**, *ορίζοντας τις αντίστοιχες αναλογίες, ανάμεσα στα μέρη του.*



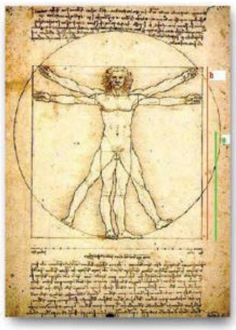
$\frac{AB}{AM}$	$\frac{AM}{MB}$
5	$\frac{1}{4}$
2	1
1,618	1,618

*Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν επιλέξει τον τρίτο τρόπο ως καλύτερο αισθητικά και κατασκεύαζαν όλα τα μνημεία τους χρησιμοποιώντας αυτή τη συγκεκριμένη αναλογία στις διαστάσεις τους, όπως π.χ. μεταξύ των δύο διαστάσεων της βάσης του ναού του Παρθενώνα της Ακρόπολης των Αθηνών. Η αναλογία αυτή ονομάστηκε “***χρυσή τομή***”.*



Αλλά και η φύση φαίνεται ότι έχει παρόμοιες προτιμήσεις!

Την αναλογία της “χρυσής τομής” βρίσκουμε ανάμεσα στα μήκη των μελών του ανθρώπινου σώματος, αλλά και στις διαστάσεις των σχημάτων πολλών φυτών και ζώων.



- *Υπάρχει τέτοια αναλογία στα διάφορα αντικείμενα που παρατηρούμε γύρω μας.*
- *Προσπάθησε να βρεις την αναλογία της “χρυσής τομής” σε:* *(α)* **μνημεία**, *(β)* **ζωγραφικούς πίνακες**, *(γ)* **ανθρώπινες κατασκευές**, *(δ)* **σχήματα ζώων και φυτών**, *(ε)* **ανθρώπινο σώμα** *και άλλα.*
- *Συνδέεται η επιλογή της “χρυσής τομής” από τους ανθρώπους στη συγκεκριμένη εποχή με επιστημονικά, αισθητικά, κοινωνικά, θρησκευτικά, οικονομικά, πολιτιστικά κ.λπ. αίτια; Εάν ναι προσπάθησε να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.*
- *Προσπάθησε να αποτυπώσεις, με τη βοήθεια ίσως και του υπολογιστή, σχέδια των μορφών ή των σχημάτων που έχουν την αναλογία της “χρυσής τομής”.*

Εικόνα Α. 6.2 β

Η εικόνα Α. 6.2 β αποτελεί συνέχεια της ιστορικής αναδρομής που περιέχεται στην εικόνα Α. 6.2 α. Η παραπάνω δραστηριότητα ναι μεν συνδέει την Ιστορία με τα Μαθηματικά, αλλά εξαντλείται σε εικασίες των μαθητών σχετικά με το θρησκευτικό, κοινωνικό, αισθητικό κλπ. πλαίσιο των ιστορικών εποχών. Η παροχή μιας ιστορικής πηγής της εποχής που εξετάζεται και θα αναφέρει τα συγκεκριμένα πλαίσια θα ήταν χρήσιμη. Το κείμενο πρέπει να είναι μεταφρασμένο γιατί οι μαθητές δεν είναι ακόμη σε θέση να μεταφράζουν από μόνοι τους.

Οι αρνητικοί αριθμοί εμφανίζονται για πρώτη φορά σε ένα Κινέζικο μαθηματικό βιβλίο, με τίτλο "Μαθηματικά σε εννέα Βιβλία" ("Τσιου-τσανγκ-σουάν σου"), που τοποθετείται χρονικά στην περίοδο της δυναστείας των Χαν (206 π.Χ. - 220 μ.Χ.).
Στην Ευρωπαϊκή παράδοση ο μεγάλος Έλληνας μαθηματικός **Διόφαντος**, *που άκμασε στην Αλεξάνδρεια γύρω στα 250 μ.Χ. και έγραψε το ογκώδες έργο του (13 βιβλία) τα "Αριθμητικά", χρησιμοποιεί πρώτος τους αρνητικούς αριθμούς στους ενδιάμεσους υπολογισμούς του, ενώ ως λύση ενός προβλήματος αναζητεί πάντα θετικό ρητό αριθμό.*

Εικόνα Α. 7.1

Το ιστορικό σημείωμα αποτελεί μια παράθεση γεγονότων σχετικά με τους αρνητικούς αριθμούς.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Ο αρχαίος φιλόσοφος Ζήνωνας, που έζησε στη Μεγάλη Ελλάδα το 490 - 430 π.Χ. διατύπωσε, μεταξύ άλλων, και το παρακάτω παράδοξο του Αχιλλέα με τη χελώνα: "Ο Αχιλλέας βαδίζει 10 φορές πιο γρήγορα από τη χελώνα. Δε θα μπορέσει ποτέ να τη φτάσει, αν η χελώνα προηγείται ένα στάδιο (192 μέτρα περίπου) απ' αυτόν". Ερεύνησε και προσπάθησε να επιβεβαιώσεις ή να απορρίψεις τον λόγο για τον οποίο ο Ζήνωνας ισχυρίζεται κάτι τέτοιο.

Εικόνα Α. 7.7

Η παραπάνω δραστηριότητα χρησιμοποιεί την αναφορά στον φιλόσοφο Ζήνωνα για να δηλώσει ένα πρόβλημα. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα κεντρίζει το ενδιαφέρον των μαθητών, όμως θα ήταν σκόπιμη η συζήτηση στη σχολική τάξη και όχι για εργασία στο σπίτι.

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Από τα πολύ παλιά χρόνια, οι ανάγκες της ζωής, υποχρέωσαν τους ανθρώπους να μετρήσουν διάφορα μεγέθη. Για να εξυπηρετούν οι μετρήσεις αυτές έπρεπε να χρησιμοποιηθούν σταθερά υποδείγματα, τα οποία να διαθέτει ο καθένας οποιαδήποτε στιγμή τα χρειαζόταν. Αρχικά στη μέτρηση χρησιμοποιήθηκαν τα μέλη του ανθρώπινου σώματος αλλά και ο βηματισμός, το άνοιγμα των χεριών και το ύψος. Έτσι, δημιουργήθηκαν οι μονάδες, όπως: οι "**δάκτυλοι**", οι "**πόδες**", οι "**παλάμες**" κ.α. Αυτή την παλιά συνήθεια εξακολουθούμε να εφαρμόζουμε και σήμερα στις πρόχειρες μετρήσεις μας: "Το πανταλόνι θέλει δυο δάκτυλα μάκρεμα", "Το χορτάρι ψήλωσε μια πιθαμή", "Το σκάφος έχει μήκος 40 πόδια", "Τα δίκτυα έφτασαν στις 50 οργιές", "Βάλε στο ποτήρι ένα δάκτυλο κρασί", "Το πέναλτι χτυπιέται στα 11 βήματα", κ.λπ. Οι μονάδες αυτές, αν και πολύ χρήσιμες, άρχισαν να χάνουν την αξία τους διότι δεν είναι ακριβείς, αφού όλοι οι άνθρωποι δεν έχουν το ίδιο ύψος, την ίδια παλάμη, το ίδιο πάχος δακτύλων και το ίδιο άνοιγμα στο βήμα τους. Όσο όμως αναπτύσσονταν οι ανθρώπινες κοινωνίες τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια χρειάζονταν ορισμένες μετρήσεις, όπως π.χ. για το κτίσιμο των σπιτιών, την κατασκευή αρδευτικών έργων, την καταμέτρηση της γης, κ.λπ. Στην αρχαία **Αίγυπτο**, μετά από κάθε πλημμύρα του Νείλου, η λάσπη κάλυπτε τα σύνορα των κτημάτων. Υπήρχαν τότε ειδικοί υπάλληλοι, οι "αρπεδονάπτες", οι οποίοι επόπτευαν την τήρηση του διαχωρισμού των εκτάσεων. Στις καταμετρήσεις αυτές λέγεται ότι έκαναν μ' ένα ειδικό σχοινί με κόμπους, την "**αρπεδόνη**".

Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι, από την εποχή του βασιλέα **Σέσωστρη** (κατά τον Ηρόδοτο), τηρούσαν στοιχεία μέτρησης των εκτάσεων που καλλιεργούσαν για να τα ξαναβρίσκουν μετά τις εποχιακές πλημμύρες του Νείλου ποταμού.
Άλλωστε **Γεω - μετρία** σημαίνει μέτρηση της Γης. Αλλά και οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν συγκεκριμένα υποδείγματα για να υπολογίσουν το εμβαδόν και τον όγκο σε πολλά πράγματα καθημερινής χρήσης.

Όταν αναπτύχθηκε η επικοινωνία λαών και κρατών, με τα ταξίδια και το εμπόριο, δημιουργήθηκε η ανάγκη να καθιερωθούν κοινές μονάδες μέτρησης για καλύτερη συννενόηση και αποφυγή της ταλαιπωρίας των μετατροπών απ' τη μία μονάδα στην άλλη, όπως π.χ. στην αρχαία **Αθήνα** από τον **Σόλωνα**.

Εικόνα Β. 1.3 α

Η ιστορική αναδρομή συνεχίζεται και στην επόμενη εικόνα.

Το **1791**, *αμέσως μετά την Επανάσταση, η* **Γαλλική Ακαδημία** *ανέθεσε σε μια ομάδα επιστημόνων, απ' όλες τις χώρες της Ευρώπης, να βρουν ένα απλό σύστημα μονάδων μέτρησης. Οι μονάδες που υιοθετήθηκαν τελικά πάρθηκαν από τη φύση και για παράδειγμα η μέτρηση του μήκους καθιερώθηκε να έχει μονάδα το "μέτρο", που είναι το* **1 από τα 40.000.000 ίσα κομμάτια που χωρίστηκε ο γήινος μεσημβρινός που διέρχεται από το Παρίσι.** *Το σύστημα των μονάδων ακολουθεί το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, δηλαδή είναι ένα δεκαδικό μετρικό σύστημα. Μετά από ένα αργό ξεκίνημα, το σύστημα αυτό καθιερώθηκε και το* **1875** *ιδρύθηκε στη* **Σεβρ** *(στο Παρίσι) το* **Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών**, *όπου φυλάχτηκαν τα κατασκευασμένα από πλατίνα πρότυπα "μέτρο" και "χιλιόγραμμο".*

Το σύστημα αυτό των μονάδων δεν υιοθετήθηκε αμέσως απ' όλους τους λαούς, που προτίμησαν να χρησιμοποιούν τα δικά τους συστήματα, όπως τα είχαν συνηθίσει, παρ' όλο που ήταν πιο πολύπλοκα. Στη νεώτερη **Ελλάδα**, *καθιερώθηκε με νόμο, το* **1959**, *το δεκαδικό μετρικό σύστημα και ισχύει μέχρι σήμερα.*

Στην **Αγγλία**, *την* **Αμερική** *και σε μερικές ακόμη χώρες, το σύστημα μέτρησης είναι δωδεκαδικό και η βασική μονάδα μήκους είναι η* **υάρδα** *ή* **γιάρδα (yd)**. *Η* **1 γιάρδα (yd)** *διαιρείται σε* **3 πόδια (ft)**, *και το* **1 πόδι (ft)** *σε* **12 ίντσες (in)**. *Οι σχέσεις των μονάδων αυτών μεταξύ τους αλλά και με το μέτρο είναι:*

$1\ yd = 3\ ft = 36\ in \quad 1\ yd = 0{,}9144\ m = 91{,}44\ cm$

$1\ ft = 12\ in \quad 1\ ft = 0{,}3048\ m = 30{,}48\ cm$

$1\ in = 0{,}0254\ m = 2{,}54\ cm$

Στις ίδιες χώρες για μέτρηση μεγάλων αποστάσεων χρησιμοποιούν το μίλι, που είναι: **1 μίλι = 1609 m = 1,609 km.** *Στη ναυτιλία χρησιμοποιούν για μονάδα μήκους το ναυτικό μίλι, που είναι:* **1 ναυτικό μίλι = 1852 m**.

Εικόνα Β. 1.3 β

Η ιστορική αναδρομή εξηγεί την εξέλιξη των συστημάτων μέτρησης από την αρχαιότητα μέχρι και τη σημερινή εποχή.

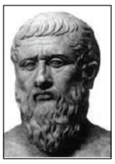
ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Η μοίρα ανήκει σε **εξηντάδικό** *σύστημα αρίθμησης (με βάση το* **60**). *Αυτό προέρχεται από τους Σουμέριους και στη συνέχεια από τους Βαβυλώνιους, δηλαδή χρονολογείται πριν από το* **2100 π.Χ.** *Ο λόγος επιλογής του συστήματος αυτού εικάζεται ότι είναι η προσπάθεια ενοποίησης των διαφορετικών συστημάτων αρίθμησης, που υπήρχαν εκείνη την εποχή (με βάση το* **5** *και το* **12**). *Άλλοι έχουν την άποψη ότι η βάση* **60** *καθιερώθηκε από την αστρονομία και άλλοι ότι έχει επιλεγεί για βάση ο αριθμός* **60** *επειδή έχει πολλούς διαιρέτες. Σημασία έχει ότι μέχρι σήμερα έχει επικρατήσει το εξηνταδικό σύστημα για τη μέτρηση των γωνιών, του χρόνου κ.λπ.*

Εικόνα Β. 1.5

Η ιστορική αναδρομή εξηγεί το εξηνταδικό σύστημα μέτρησης που προέρχεται από τους Σουμέριους. Είναι χρήσιμη αυτή η παράθεση, γιατί εξηγεί το λόγο για τον οποίο μετρούνται με αυτόν τον τρόπο οι γωνίες και ο χρόνος στη σημερινή εποχή.

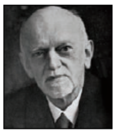
ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ



Ο **Πλάτωνας** *έγραψε στην είσοδο της* **Ακαδημίας** *το ρητό: "Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω", δίνοντας ιδιαίτερο βάρος στη σπουδή και τη γνώση της Γεωμετρίας. Το σημαντικότερο έργο Γεωμετρίας στην αρχαιότητα ήταν τα "*Στοιχεία*" (13 βιβλία) του* **Ευκλείδη** *(άκμασε περίπου το 300 π.Χ.), που απετέλεσε σταθμό στη Γεωμετρία και αναδείχτηκε σε πρότυπο μαθηματικής σκέψης. Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ότι τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη αναγνωρίζονται διεθνώς ως ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα του ανθρωπίνου πνεύματος. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι μαζί με τη Βίβλο είναι από τα συγγράμματα που είχαν τις περισσότερες εκδόσεις. Ο διάσημος Γάλλος μαθηματικός* **Jean Dieudonné**, *έγραψε για τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη, ότι: "Η Γεωμετρία των Αρχαίων Ελλήνων είναι ίσως το πιο εκπληκτικό πνευματικό δημιούργημα του ανθρώπου. Χάρη στους Έλληνες μπορέσαμε να οικοδομήσουμε τη σύγχρονη επιστήμη".*

Ο **Ευκλείδης** *στα "*Στοιχεία*" του ορίζει ως παράλληλες:* "**τις ευθείες εκείνες που ευρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και προεκτεινόμενες επ' άπειρον κι από τα δύο μέρη δε συναντώνται σε κανένα απ' αυτά**" *(Ορισμός 23) και αμέσως μετά διατυπώνει το διάσημο "5ο Αίτημα", δηλαδή την πρόταση ότι:* "**εάν μια ευθεία που τέμνει δύο ευθείες σχηματίζει τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες μικρότερες από δύο ορθές, τότε οι δύο ευθείες προεκτεινόμενες επ' άπειρον συναντώνται στο μέρος που οι σχηματιζόμενες γωνίες είναι μικρότερες από δύο ορθές**".

*Σήμερα το 5ο αίτημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας διατυπώνεται με την εξής μορφή: "*Από ένα σημείο εκτός ευθείας άγεται προς αυτήν μία μόνο παράλληλη*". Στη διατύπωση αυτή συνέβαλε σημαντικά το 1899 ο Γερμανός μαθηματικός* **David Hilbert**.



Η αλήθεια της πρότασης αυτής φαίνεται να προκύπτει αβίαστα από την καθημερινή μας εμπειρία. Όμως, από την αρχαιότητα μέχρι τις αρχές του περασμένου αιώνα, έγιναν πολλές αποτυχημένες προσπάθειες να αποδειχθεί με βάση τις άλλες ισχύουσες προτάσεις της Γεωμετρίας. Η πλήρης αποτυχία των προσπαθειών, όμως, δεν πήγε χαμένη. Αποδείχθηκε ότι εκείνο που έφταιγε ήταν το πλαίσιο μέσα στο οποίο γινόντουσαν οι προσπάθειες αυτές, δηλαδή η συγκεκριμένη "Ευκλείδεια" Γεωμετρία. Έτσι αναπτύχθηκαν και άλλες γεωμετρίες στις οποίες δεν ισχύει το αίτημα αυτό.

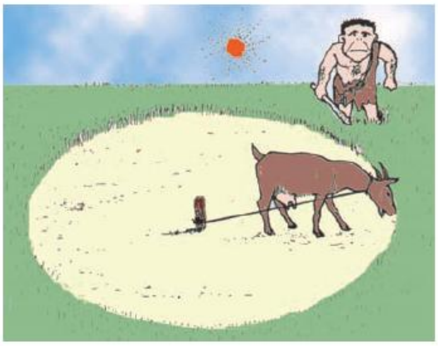
Συγκεκριμένα ο Ρώσος μαθηματικός **Nikolai Lobatchevsky** *(1792-1856) προτείνει μία διαφορετικού τύπου Γεωμετρία, την "Υπερβολική", στην οποία το 5ο αίτημα αντικαθίσταται από την πρόταση ότι: "*από σημείο εκτός ευθείας υπάρχουν περισσότερες από δύο παράλληλες προς αυτήν*". Η Γεωμετρία αυτή περιγράφει χώρους που έχουν παράξενες ιδιότητες, όπως ότι το* **άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από δύο ορθές** *κ.α. Ένας τέτοιος χώρος είναι π.χ. το εσωτερικό του κύκλου στον παράπλευρο πίνακα του Ολλανδού ζωγράφου* **Escher**.

Επίσης, ο **Bernhard Riemann** *(1826-1866) θεμελίωσε την λεγόμενη "Ελλειπτική" Γεωμετρία, στην οποία ισχύει ότι: "*από ένα σημείο εκτός ευθείας δεν υπάρχει καμία παράλληλη προς αυτήν*" και στην οποία στηρίχθηκε ο* **Albert Einstein** *για να διατυπώσει την περίφημη θεωρία του, της* **Σχετικότητας**.

Εικόνα Β. 1.9

Η ιστορική ανάδρομη αναφέρεται στη συνεισφορά πέντε μεγάλων προσωπικοτήτων στην εξέλιξη της Γεωμετρίας.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η



Ο πρωτόγονος άνθρωπος για να μη χάσει την κατσίκα του την έδεσε με ένα σχοινί, σ' ένα ξύλινο πάσσαλο, μέσα στο λιβάδι.

Όταν γύρισε να την πάρει είδε ότι η κατσίκα είχε βοσκήσει εκείνο το μέρος του λιβαδιού που της επέτρεπε το μήκος του σχοινιού να φθάσει. Έτσι, όλα τα χόρτα που απείχαν μικρότερη ή ίση απόσταση από το σχοινί, που ήταν δεμένη, είχαν φαγωθεί.

➢ *Ποια γεωμετρική έννοια χαρακτηρίζει την περιοχή της οποίας το χορτάρι φαγώθηκε;*

Εικόνα Β. 1.10

Η δραστηριότητα δεν αναφέρεται στην Ιστορία των Μαθηματικών, όμως έχει σαν παράδειγμα τον πρωτόγονο άνθρωπο.

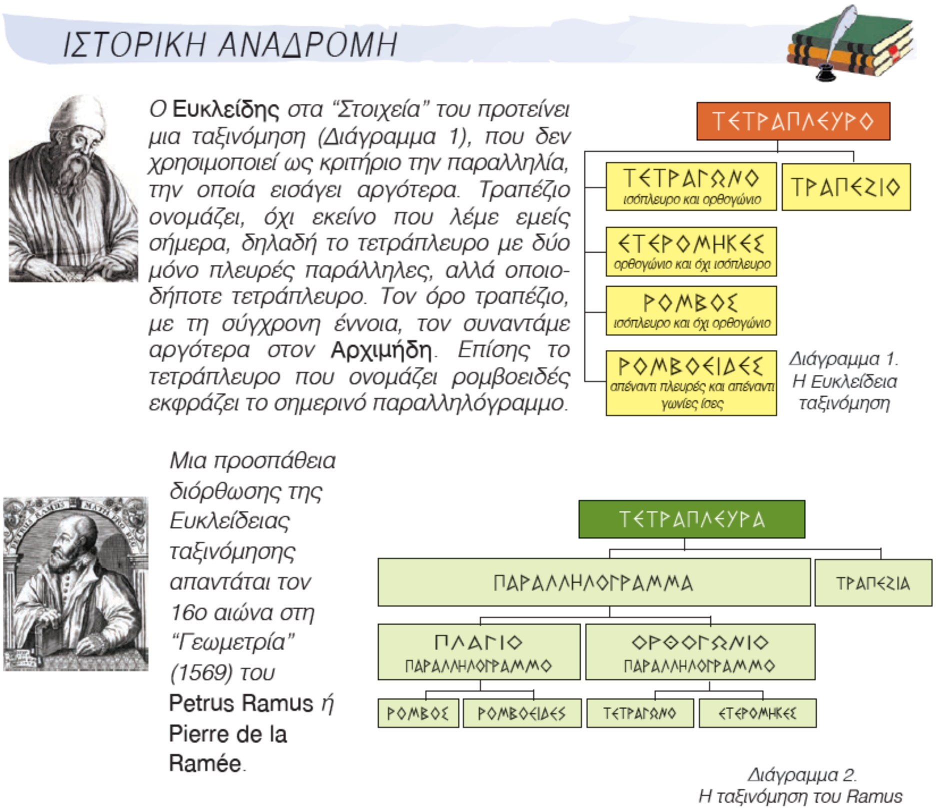
Κατά τον **Ευκλείδη** *οι Κατασκευές, στηρίζονται σε* τρεις κανόνες ("αιτήματα").

- Από δύο σημεία να διέρχεται μία μόνο ευθεία.
- Ένα ευθύγραμμο τμήμα προεκτείνεται απεριόριστα.
- Ο κύκλος ορίζεται με ένα σημείο (κέντρο) και ένα ευθύγραμμο τμήμα (ακτίνα).

Με βάση τους παραπάνω κανόνες ("αιτήματα") μπορούν να γίνουν οι κατασκευές όλων των γεωμετρικών σχημάτων με τη χρήση "του κανόνα και του διαβήτη". ("Κανόνας" είναι ένας χάρακας χωρίς υποδιαιρέσεις για να χαράζουμε ευθείες και όχι για να κάνουμε μετρήσεις μηκών). Οι κατασκευές αυτές απαιτούν μεγαλύτερη επιδεξιότητα και γνώση, δίνουν όμως ακριβέστερα αποτελέσματα και βοηθούν να αποφεύγονται λάθη, που οφείλονται σε ατέλειες των οργάνων που χρησιμοποιούμε στην πράξη.

Εικόνα Β. 2.3

Στο συγκεκριμένο ιστορικό σημείωμα αναφέρονται οι τρεις κανόνες κατά τον Ευκλείδη.


ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Ο **Ευκλείδης** *στα "Στοιχεία" του προτείνει μια ταξινόμηση (Διάγραμμα 1), που δεν χρησιμοποιεί ως κριτήριο την παραλληλία, την οποία εισάγει αργότερα. Τραπέζιο ονομάζει, όχι εκείνο που λέμε εμείς σήμερα, δηλαδή το τετράπλευρο με δύο μόνο πλευρές παράλληλες, αλλά οποιοδήποτε τετράπλευρο. Τον όρο τραπέζιο, με τη σύγχρονη έννοια, τον συναντάμε αργότερα στον* **Αρχιμήδη**. *Επίσης το τετράπλευρο που ονομάζει ρομβοειδές εκφράζει το σημερινό παραλληλόγραμμο.*

Διάγραμμα 1.
Η Ευκλείδεια ταξινόμηση

Μια προσπάθεια διόρθωσης της Ευκλείδειας ταξινόμησης απαντάται τον 16ο αιώνα στη "Γεωμετρία" (1569) του Petrus Ramus *ή* Pierre de la Ramée.

Διάγραμμα 2.
Η ταξινόμηση του Ramus

Εικόνα Β. 3.3

ΙΙ) Βιβλίο εκπαιδευτικού

10. Σε ορισμένες ενότητες υπάρχουν **ιστορικά σημειώματα** που έχουν σκοπό να διεγείρουν το ενδιαφέρον και την αγάπη των μαθητών για τα Μαθηματικά και να τους πληροφορήσουν για την ιστορική πορεία της μαθηματικής σκέψης. Η αξιοποίησή τους στη διδασκαλία εξαρτάται από τις πρωτοβουλίες και ιδέες που θα αναπτύξουν οι διδάσκοντες.

Εικόνα Γ. 1.1

Η παραπάνω αναφορά βρίσκεται στο βιβλίο του εκπαιδευτικού της Ά Γυμνασίου και αποτελεί μέρος των γενικών οδηγιών, που αφορούν τη διεξαγωγή της διδασκαλίας. Φαίνεται ότι η χρησιμοποίηση και αξιοποίηση των ιστορικών σημειωμάτων αφήνεται στην ελεύθερη βούληση του εκπαιδευτικού.

διαθεματικό περιεχόμενο. Τέλος, στο διδακτικό βιβλίο, περιέχονται αρκετά **ιστορικά σημειώματα και αναδρομές**, με σκοπό να διεγείρουν το ενδιαφέρον των μαθητών και να τους πληροφορήσουν για την ιστορική πορεία της μαθηματικής σκέψης. Στη συνέχεια του παρόντος, παρατίθενται:

Εικόνα Γ. 1.2

Στις πρακτικές οδηγίες προς τους εκπαιδευτικούς αναφέρεται στη σελίδα 34 ο σκοπός και η χρησιμότητα της ύπαρξης των ιστορικών σημειωμάτων στο σχολικό εγχειρίδιο.

<u>Το προτεινόμενο ιστορικό σημείωμα:</u> δίνει την ευκαιρία να αναφερθούμε αφενός στη νίκη της ευφυΐας ενάντια στην επίμοχθη μηχανική εργασία και αφετέρου ως υπόδειγμα αυτού που οι μαθηματικοί ονομάζουν "κομψή" λύση ενός προβλήματος. Με αφορμή αυτή την ιστορία μπορείτε να υπογραμμίσετε ότι στα μαθηματικά (και όχι μόνο) εκείνο που έχει τη μεγαλύτερη σημασία είναι ο τρόπος με τον οποίο φθάνουμε στην απάντηση και όχι αυτή η ίδια η απάντηση.

Εικόνα Γ. 1.3

Η φωτογραφία που προηγείται αφορά οδηγίες σχετικά με τη διδασκαλία της ενότητας «Α1.2 *Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών*».

Α.1.3. Δυνάμεις φυσικών αριθμών

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:</u>

(α) <u>Ενδεικτικοί στόχοι:</u>
- Η παρακολούθηση της εξέλιξης των συμβόλων και των συστημάτων αρίθμησης.
- Η σύγκριση των τρόπων αρίθμησης και η αναφορά στο εκάστοτε ιστορικό, κοινωνικό, γεωγραφικό κλπ πλαίσιο

(β) <u>Ενδεικτικές πηγές:</u>
- Boyer, C.B., Merzbach, U.C. (1997). *Η ιστορία των μαθηματικών*. Αθήνα: Πνευματικός.
- Bunt, L.N.H., Jones Ph.S., Bedient, J.D. (1981). *Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών*. Αθήνα: Πνευματικός.
- Heath T.L. *Ιστορία των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών*, 2 τ. Αθήνα.
- Loria, G. *Ιστορία των μαθηματικών*. Αθήνα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, τ. 1- 4.
- Mankiewicz, R. (2002). *Η ιστορία των μαθηματικών*. Αθήνα: Αλεξάνδρεια.
- Neugebauer, O. (1986). *Οι θετικές επιστήμες στην αρχαιότητα*. Αθήνα: Μορφωτικό Ίδρυμα της Εθνικής Τραπέζης.
- Struik, D.J. (1982). *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*. Αθήνα: Ζαχαρόπουλος.
- Van der Waerden, B. (2000). *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*. Ηράκλειο: Παν/μίου Κρήτης.

(γ) <u>Μαθήματα σύνδεσης:</u> Μαθηματικά, Ιστορία, Γεωγραφία κ.ά.

Εικόνα Γ. 1.4

Στην προηγούμενη εικόνα βλέπουμε το προτεινόμενο σχέδιο εργασίας για την ενότητα «Α. 1.3 *Δυνάμεις φυσικών αριθμών*». Η αναφορά βρίσκεται στη σελίδα 38. Στο συγκεκριμένο σχέδιο βλέπουμε τη προσπάθεια σύνδεσης των Μαθηματικών με άλλα πεδία, καθώς και προτεινόμενες βιβλιογραφικές πηγές.

Α.1.4. Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 1 διδακτική ώρα
Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει στόχο την κατανόηση: της έννοιας της διαιρετότητας.

Τα δύο προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό:

- το 1ο, τον τρόπο ελέγχου της ταυτότητας της Ευκλείδειας Διαίρεσης και
- το 2ο, την εφαρμογή της σε ένα αριθμητικό πρόβλημα.

Οι έξι προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα: αφορούν όλες την Ευκλείδεια Διαίρεση.

Εικόνα Γ. 1.4

Στη σελίδα 39 στο βιβλίο του εκπαιδευτικού το παραπάνω αποτελεί προτεινόμενο σχέδιο διδασκαλίας. Η αναφορά προτείνει τη χρήση της Ευκλείδιας διαίρεσης, αφού είναι αυτό το αντικείμενο της ενότητας που διαπραγματεύεται.

Προτείνεται μία δραστηριότητα για το σπίτι που προέρχεται από τον πάπυρο του Ριντ. Η ενασχόληση με ένα τρόπο υπολογισμού που χρησιμοποιήθηκε για χιλιάδες χρόνια και η σύγκρισή του με τις σύγχρονες τεχνικές των πράξεων είναι χρήσιμη για να φανεί η εξέλιξη της μαθηματικής γνώσης.

Εικόνα Γ. 1.5

Η δραστηριότητα που προτείνεται αφορά την Ενότητα «Α. 2.6 *Διαίρεση κλασμάτων*». Αν κι είναι ιδιαίτερα ωφέλιμη στο να ενισχύσει το ενδιαφέρον των μαθητών, θα ήταν προτιμότερο να διεξαχθεί στη σχολική τάξη.

Α.3.5. Μονάδες μέτρησης

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες
Οι τρεις προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο την κατανόηση της διαδικασίας μέτρησης ενός βασικού φυσικού μεγέθους (μήκους, επιφάνειας όγκου, χρόνου και μάζας) με διαφορετικές μονάδες μέτρησης καθώς και τη διερεύνηση της μεταξύ τους σχέσης.

Τα πέντε προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό να δείξουν τον τρόπο και τη διαδικασία:

- το 1ο της μετατροπής της μονάδας μήκους (m) στις υποδιαιρέσεις της (dm, cm, mm),
- το 2ο, της μετατροπής των μονάδων επιφανείας,
- το 3ο, των μονάδων μέτρησης του χρόνου,
- το 4ο, των μονάδων μήκους και
- το 5ο, των μονάδων μέτρησης μάζας.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

(α) Ενδεικτικοί στόχοι:
- Η διαχρονική καταγραφή των «μέτρων και σταθμών» σε διάφορους λαούς και εποχές.
- Η διερεύνηση των λόγων επιλογής των διαφόρων «μέτρων και σταθμών».
- Η ιστορική αναζήτηση των συνθηκών και του τρόπου επικράτησης του διεθνούς συστήματος μέτρησης βασικών μεγεθών.
- Η διερεύνηση του ρόλου της επιστήμης στην τελική επιλογή του διεθνούς συστήματος μέτρησης βασικών μεγεθών.

(β) Ενδεικτικές πηγές: (πέραν των ιστορικών σημειωμάτων στο βιβλίο του μαθητή):
- Εκπαιδευτική Ελληνική Εγκυκλοπαίδεια. Αθήνα: Εκδοτική Αθηνών.
- Alder, K. (2002). *The measure of all things*. London.
- Connor, R.D.(1987). *The weights and measures of England*. London.
- Favre, A. (1931). *Les origines du système métrique*. Paris.
- Zupko, R. (1990). *Revolution in measurement: western European weights and measures since the age of science*. Philadelphia.
- Klein, H.A. (1988). *The science of measurement: A historical survey*. New York.
- Cox, E.F. The metric system: *A quarter-century of acceptance, 1931-1876*, Osiris **13** (1959), 358-379.
- Crosland, M. The Congress on definitive metric standards, 1798-1799: *The first international scientific conference*?, Isis **60** (1979), 226-309.
- Kaunzner, W. Über eine Entwicklung in der Dimensionsrechnung, *Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Denkschr.* **116** (9) (1979), 144-165.
- Jenemann, H.R. Zur Geschichte der Substitutionswägung und der Substitutionswaage, *Technikgeschichte* **49** (2) (1982), 89-131; 176.

(γ) Μαθήματα σύνδεσης: *Μαθηματικά, Πληροφορική* (Αναζήτηση μέσω Internet), *Ιστορία* κ.ά.

Εικόνα Γ. 1.6

Παραπάνω βλέπουμε το προτεινόμενο σχέδιο εργασίας για την Ενότητα Α. 3,5. Σε αυτή την ενότητα χρησιμοποιείται η ιστορική προσέγγιση και δίνεται βιβλιογραφία για περαιτέρω εμβάθυνση. Η ενότητα αφορά τις μεθόδους μέτρησης και η εξέλιξη τους διαχρονικά θα βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τη χρησιμότητα αυτών των συστημάτων. Το συγκεκριμένο πεδίο, δηλαδή τα συστήματα μέτρησης είναι πρόσφορό για τη χρησιμοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών.

ΕΙΔΙΚΟ ΜΕΡΟΣ – Γεωμετρία Κεφάλαιο Β.1. Βασικές γεωμετρικές έννοιες - 85 -

Τα δύο προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό:

- το 1ο την αναγνώριση και το διαχωρισμό των παραλλήλων και των τεμνομένων ευθειών
- το 2ο δίνει τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να φέρουμε παράλληλη ευθεία προς μία άλλη από ένα σημείο εκτός αυτής, με δύο τρόπους:
  (α) κάνοντας ταυτόχρονη χρήση του κανόνα και του γνώμονα και
  (β) φέρνοντας με τον γνώμονα κάθετη από το σημείο στη δεδομένη ευθεία και μετά πάλι άλλη κάθετη σ' αυτή στο σημείο αυτό.

Με αφορμή το θέμα αυτό μπαίνει, εύλογα, το αίτημα της μοναδικότητας της παραλλήλου προς ευθεία από σημείο εκτός αυτής. Στο ιστορικό σημείωμα που παρατίθεται, γίνεται αναφορά στον Ευκλείδη και στο «αίτημα» που συνδέθηκε με το όνομά του. Είναι πολύ χρήσιμο να γνωρίσουν οι μαθητές από την ηλικία αυτή τα θέματα αυτού του είδους, που έχουν και φιλοσοφική χροιά, πέραν της επιστημολογικής και πολιτισμικής.

Εικόνα Γ. 1.7

Παραπάνω εξηγείται η σκοπιμότητα του ιστορικού σημειώματος που περιέχεται στην Ενότητα «Β. 1,9 *Θέσεις ευθειών στο επίπεδο*».

- 92 - ΕΙΔΙΚΟ ΜΕΡΟΣ – Γεωμετρία Κεφάλαιο Β.2. Συμμετρία

Β.2.3. Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

Με τα πέντε προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές γίνεται προσπάθεια να αποκτήσουν οι μαθητές ευχέρεια με την κατασκευή της μεσοκαθέτου. Πιο συγκεκριμένα:

- στο 1ο η κατασκευή αυτή γίνεται κλασσικά με τον κανόνα και το γνώμονα
- στο 2ο η ίδια κατασκευή γίνεται με «τον κανόνα και το διαβήτη» (υπάρχει, στη συνέχεια, ειδική ιστορική αναφορά στον Ευκλείδη και την αντίστοιχη θεωρητική μεθοδολογία)
- τα επόμενα τρία αναφέρονται στις γνωστές κατασκευές, με την ίδια μέθοδο (με τον κανόνα και το διαβήτη), που αφορούν στην κάθετο σε ευθεία από σημείο αυτής ή εκτός αυτής και στην κατασκευή του ισοπλεύρου τριγώνου.

Εικόνα Γ. 1.8

Η παραπάνω εικόνα αναφέρεται στο ενδεικτικό σχέδιο διδασκαλίας της ενότητας Β. 2.3. Προτείνεται η επεξήγηση της μεθοδολογίας του Ευκλείδη, καθώς και η χρησιμοποίηση της. Επίσης, παρατηρείται ότι προτείνεται η χρησιμοποίηση της ιστορικής αναφοράς στον Ευκλείδη.

3.2. Β΄ Γυμνασίου.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

*Λίγα πράγματα είναι γνωστά για τη ζωή του μεγάλου έλληνα μαθηματικού **Διόφαντου**, που έζησε στην Αλεξάνδρεια τον 3ο μ.Χ. αιώνα. Οι εργασίες του όμως είχαν τεράστια σημασία για τη θεμελίωση της Άλγεβρας και εκτιμήθηκαν πολύ τους επόμενους αιώνες. Από τα 13 έργα που έγραψε σώθηκαν μόνο τα 10 (τα 6 σε ελληνικά χειρόγραφα και τα 4 σε αραβική μετάφραση).*
*Το πιο διάσημο από τα έργα του είναι τα **«Αριθμητικά»** (6 βιβλία). Πρόκειται για το αρχαιότερο ελληνικό έργο στο οποίο για πρώτη φορά χρησιμοποιείται μεταβλητή για την επίλυση προβλήματος. Προς τιμήν του μια ειδική κατηγορία εξισώσεων ονομάζεται **«Διοφαντικές εξισώσεις»**.*

Όταν πέθανε, οι μαθητές του -κατά παραγγελίαν του- αντί άλλου επιγράμματος, συνέθεσαν ένα γρίφο και τον έγραψαν πάνω στον τάφο του. Ιδού λοιπόν το Επίγραμμα του Διόφαντου.

«ΔΙΑΒΑΤΗ ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟΝ ΤΑΦΟ ΑΝΑΠΑΥΕΤΑΙ Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ. ΣΕ ΕΣΕΝΑ ΠΟΥ ΕΙΣΑΙ ΣΟΦΟΣ, Η ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΘΑ ΔΩΣΕΙ ΤΟ ΜΕΤΡΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ. ΑΚΟΥΣΕ
- Ο ΘΕΟΣ ΤΟΥ ΕΠΕΤΡΕΨΕ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΝΕΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΕΝΑ ΕΚΤΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ.
- ΑΚΟΜΗ ΕΝΑ ΔΩΔΕΚΑΤΟ ΚΑΙ ΦΥΤΡΩΣΕ ΤΟ ΜΑΥΡΟ ΓΕΝΙ ΤΟΥ.
- ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΕΝΑ ΕΒΔΟΜΟ ΑΚΟΜΑ ΗΡΘΕ ΤΟΥ ΓΑΜΟΥ ΤΟΥ Η ΜΕΡΑ.
- ΤΟΝ ΠΕΜΠΤΟ ΧΡΟΝΟ ΑΥΤΟΥ ΤΟΥ ΓΑΜΟΥ ΓΕΝΝΗΘΗΚΕ ΕΝΑ ΠΑΙΔΙ
- ΤΙ ΚΡΙΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΝΕΑΡΟ ΤΟΥ ΓΙΟ. ΑΦΟΥ ΕΖΗΣΕ ΜΟΝΑΧΑ ΤΑ ΜΙΣΑ ΧΡΟΝΙΑ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΑΤΕΡΑ ΤΟΥ ΓΝΩΡΙΣΕ ΤΗΝ ΠΑΓΩΝΙΑ ΤΟΥ ΘΑΝΑΤΟΥ.
- ΤΕΣΣΕΡΑ ΧΡΟΝΙΑ ΑΡΓΟΤΕΡΑ Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ ΒΡΗΚΕ ΠΑΡΗΓΟΡΙΑ ΣΤΗ ΘΛΙΨΗ ΤΟΥ ΦΤΑΝΟΝΤΑΣ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ».

Σύμφωνα μ' αυτό το επίγραμμα, πόσα χρόνια έζησε ο Διόφαντος; Αν x παριστάνει την ηλικία του Διόφαντου, όταν πέθανε, τότε το παραπάνω πρόβλημα παριστάνεται από την

εξίσωση: $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x.$

Στο κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε να λύνουμε τέτοιες εξισώσεις (καθώς και ανισώσεις).
Θα αναζητήσουμε επίσης τρόπους να εφαρμόζουμε τη μέθοδο αυτή, για να λύνουμε προβλήματα της καθημερινής ζωής.

1.1 Η έννοια της μεταβλητής. Αλγεβρικές παραστάσεις
1.2 Εξισώσεις α' βαθμού
1.3 Επίλυση τύπων
1.4 Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων
1.5 Ανισώσεις α' βαθμού

Εικόνα Α. 1.1

Το παραπάνω αποτελεί εισαγωγικό σημείωμα στο πρώτο κεφάλαιο. Το ιστορικό σημείωμα αναφέρεται στη ζωή και τα έργα του Διόφαντου και κλείνει με ένα πρόβλημα για τους μαθητές. Η παραπάνω εφαρμογή είναι χρήσιμη σαν εισαγωγική δραστηριότητα στις έννοιες που διαπραγματεύεται η ενότητα. Πρώτα χρησιμοποιείται η ιστορική αναφορά και μετά εισάγεται η έννοια της μεταβλητής με μορφή του αγνώστου χ.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

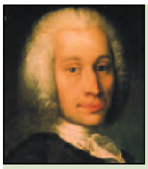
Οι εξισώσεις και οι συμβολισμοί τους μέσα στους αιώνες.

Κατά την αρχαιότητα η έλλειψη κατάλληλου συμβολισμού είχε εμποδίσει τις λύσεις προβλημάτων με αποτέλεσμα αυτές να θεωρούνται πολύπλοκες και δύσκολες.

- *Στον περίφημο αιγυπτιακό πάπυρο του Ρηντ (περίπου 1700 π.Χ. - Βρετανικό Μουσείο) περιγράφονται προβλήματα με ιερογλυφικά (διαβάζονται από δεξιά προς τα αριστερά).*
- *Στην Αναγέννηση (15ος - 16ος αιώνας) οι συμβολισμοί απλοποιήθηκαν κατά κάποιον τρόπο:*
  - *Ο Γάλλος Nicolas Chuquet (1445 - 1500) έγραφε: «12^0 p 5^1 ισούται με 20^0», δηλαδή $12x^0 + 5x^1 = 20x^0$ ή πιο απλά $12 + 5x = 20$.*
  - *Επίσης, ο Γάλλος François Viete (1540 - 1603) έγραφε: «12aq 5a aeq. 23».*
  - *Ο Ιταλός Niccolo Fontana ή Tartaglia (1499 - 1557) έγραφε επίσης: «12 N p 5 R ισούται 20 N».*
- *Ο Γάλλος René Descartes (ή Καρτέσιος 1596 - 1650) στις αρχές του 17ου αιώνα έγραφε «12 + 5z B20». Την εποχή αυτή τα μαθηματικά καθώς και άλλα προβλήματα διατυπώνονται σχεδόν αποκλειστικά με μαθηματικά σύμβολα, γεγονός που συνετέλεσε στην αλματώδη πρόοδο της επιστήμης.*

Εικόνα Α. 1.2

Το ιστορικό σημείωμα βρίσκεται στο τέλος της ενότητας κάτω από τη δραστηριότητα *ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ* . Στο ιστορικό σημείωμα αναφέρεται το τέλμα που υπήρχε στη αρχαιότητα λόγω μη αποτελεσματικών συμβολισμών και η επίλυση του μέσω της εξέλιξης τους. Το ιστορικό σημείωμα αποτελεί χρήσιμη πηγή πληροφόρησης των μαθητών, όμως βρίσκεται σε παράταιρο σημείο μέσα στην ενότητα.



Ο Anders Celsius, γεννήθηκε το 1701 στην Ουψάλα της Σουηδίας. Οι παππούδες του ήταν και οι δύο καθηγητές: ο Magnus Celsius, μαθηματικός και ο Anders Spole, αστρονόμος. Ο πατέρας του Nils Celsius ήταν επίσης καθηγητής της Αστρονομίας. Ο Κέλσιος θεωρήθηκε ταλαντούχος στα Μαθηματικά και σε νεαρή ηλικία (29 ετών το 1730) διορίστηκε καθηγητής Αστρονομίας.

Συμμετείχε το 1736 στη διάσημη αποστολή αστρονόμων στο Tornea, στο βορειότερο μέρος της Σουηδίας ("Η αποστολή του Lapland"). Ο στόχος της αποστολής ήταν να επιβεβαιωθεί η πεποίθεση του Newton, ότι η μορφή της Γης είναι ελλειψοειδής που γίνεται επίπεδη στους πόλους, πράγμα που επιτεύχθηκε με αποτέλεσμα να γίνει ο Κέλσιος διάσημος.

Για τις μετεωρολογικές παρατηρήσεις του, κατασκεύασε τη γνωστή κλίμακα μέτρησης της θερμοκρασίας, με 100 για το σημείο τήξης του νερού και 0 για το σημείο βρασμού του.

Μετά το θάνατό του, που προήλθε από φυματίωση το 1744 (σε ηλικία μόλις 43 ετών), η κλίμακα αντιστράφηκε στη σημερινή της μορφή. Δηλαδή 0 για το σημείο τήξης του νερού και 100 για το σημείο βρασμού του.

Εικόνα Α. 1.3

Η ενότητα που περιέχεται το ιστορικό σημείωμα αναφέρεται στην επίλυση τύπων. Μέσα στην επίλυση τύπων αναφέρεται η θερμοκρασία και τα δύο διαφορετικά συστήματα μέτρησης (σε βαθμούς Celsius και *Fahrenheit).*

Με πρακτική Αριθμητική:

Από τις 22 εύστοχες βολές οι 8 ήταν του 1 πόντου. Επομένως, οι υπόλοιπες 14 ήταν των 2 ή των 3 πόντων. Αν και οι 14 αυτές βολές ήταν των 2 πόντων, τότε ο Γκάλης θα είχε πετύχει εκείνο το βράδυ 8·1+14·2 = 8+28 = 36 πόντους αντί για 40 που πέτυχε στην πραγματικότητα. Αφού πέτυχε 40−36=4 επιπλέον πόντους, η διαφορά αυτή οφείλεται στα τρίποντα. Δηλαδή, πέτυχε 4 τρίποντα και 14 − 4 = 10 δίποντα.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Στον αστερισμό της Δόξας!

Στις 14 Ιουνίου 1987 η εθνική μας ομάδα μπάσκετ κατέκτησε το Πανευρωπαϊκό Πρωτάθλημα νικώντας στο στάδιο Ειρήνης και Φιλίας, στον τελικό, την πανίσχυρη ομάδα της τότε Σοβιετικής Ένωσης με 103-101. Πρωταγωνιστής και σούπερ - σταρ της βραδιάς ήταν ο Νίκος Γκάλης που πέτυχε 40 πόντους. Ο Γκάλης είχε σε εκείνο τον αγώνα 22 εύστοχες βολές, από τις οποίες οι 8 ήταν βολές του 1 πόντου και οι υπόλοιπες 14 ήταν βολές των 2 ή των 3 πόντων.

Πόσα τρίποντα πέτυχε εκείνο το βράδυ ο Γκάλης;

Λύση

Έχουμε τα εξής δεδομένα για τον Γκάλη:

- Πέτυχε συνολικά 40 πόντους.
- Είχε 22 εύστοχες βολές από τις οποίες:
  – 8 του 1 πόντου,
  – άγνωστος αριθμός βολών των 2 πόντων,
  – άγνωστος αριθμός βολών των 3 πόντων.

Το πρόβλημα ζητά να προσδιορίσουμε τον αριθμό των βολών των 3 πόντων που πέτυχε ο Γκάλης.

Έστω ότι είχε x επιτυχίες των 3 πόντων και 14 – x επιτυχίες των 2 πόντων. Αφού πέτυχε συνολικά 40 πόντους, έχουμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned} 8 \cdot 1 + (14 - x) \cdot 2 + x \cdot 3 &= 40 \\ 8 + 28 - 2x + 3x &= 40 \\ -2x + 3x &= 40 - 8 - 28 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Άρα, ο Γκάλης εκείνο το βράδυ πέτυχε 4 τρίποντα (και φυσικά 14 – 4 = 10 δίποντα).

Οι αριθμοί αυτοί επαληθεύουν το πρόβλημα:

$8 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 40$.

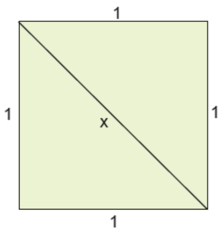
Από την παραπάνω δραστηριότητα συμπεραίνουμε ότι, η λύση προβλημάτων με τη βοήθεια εξισώσεων περιλαμβάνει τα επόμενα γενικά βήματα:

Εικόνα Α. 1,4

Εδώ έχουμε μια δραστηριότητα που αναφέρεται στο πρόσφατο παρελθόν.

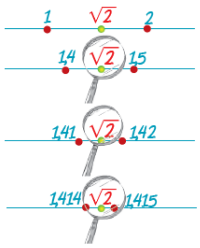
Άρρητοι αριθμοί

Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι ο λόγος δύο οποιωνδήποτε μεγεθών μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο φυσικών αριθμών. Στην πεποίθηση αυτή είχαν στηρίξει όλη την κοσμοθεωρία τους και προσπαθούσαν να επιλύσουν προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο.
Η πρώτη κρίση στα Μαθηματικά εμφανίστηκε όταν, σύμφωνα με την παράδοση, ο Ίππασος ο Μεταπόντιος (450 π.Χ. περίπου) «αποκάλυψε» τον «άρρητο» $\sqrt{2}$.
Σύντομα βρέθηκαν και άλλοι άρρητοι αριθμοί. Ο Εύδοξος ο Κνίδιος (407 - 354 π.Χ.) ήταν αυτός που έβγαλε τους Πυθαγόρειους από την κρίση θεμελιώνοντας ένα μεγάλο μέρος της μελέτης των άρρητων αριθμών.



Ας δούμε, όμως, πώς οδηγηθήκαμε στην ύπαρξη των αρρήτων. Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα τετράγωνο πλευράς 1cm και θέλουμε να υπολογίσουμε τη διαγώνιο x του τετραγώνου.
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, οπότε $x = \sqrt{2}$.
Οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν μπορεί να πάρει τη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι με $\nu \neq 0$, δηλαδή δεν είναι ρητός. Γι' αυτό λέγεται άρρητος.
Γενικά:

> Κάθε αριθμός που δεν μπορεί να πάρει τη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι με $\nu \neq 0$, ονομάζεται **άρρητος αριθμός**.



Αυτό σημαίνει ότι κάθε άρρητος αριθμός δεν μπορεί να γραφεί ούτε ως δεκαδικός, ούτε ως περιοδικός δεκαδικός αριθμός.
Για να προσεγγίσουμε τον αριθμό $\sqrt{2}$, παρατηρούμε διαδοχικά ότι:

$$\begin{aligned}
1 = 1^2 &< 2 < 2^2 = 4\\
1{,}96 = 1{,}4^2 &< 2 < 1{,}5^2 = 2{,}25\\
1{,}9881 = (1{,}41)^2 &< 2 < (1{,}42)^2 = 2{,}0164\\
1{,}9994 = (1{,}414)^2 &< 2 < (1{,}415)^2 = 2{,}0022\\
1{,}99996 = (1{,}4142)^2 &< 2 < (1{,}4143)^2 = 2{,}00024\\
1{,}9999899 = (1{,}41421)^2 &< 2 < (1{,}41422)^2 = 2{,}000018
\end{aligned}$$

....

Άρα:

$$\begin{aligned}
1 &< \sqrt{2} < 2\\
1{,}4 &< \sqrt{2} < 1{,}5\\
1{,}41 &< \sqrt{2} < 1{,}42\\
1{,}414 &< \sqrt{2} < 1{,}415\\
1{,}4142 &< \sqrt{2} < 1{,}4143\\
1{,}41421 &< \sqrt{2} < 1{,}41422
\end{aligned}$$

....

Εικόνα Α. 2.2

Το παραπάνω σημείωμα αποτελεί εισαγωγή στην Ενότητα 2.2 Άρρητοι – Πραγματικοί αριθμοί.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

1.1 Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας

1.2 Μονάδες μέτρησης επιφανειών

1.3 Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

1.4 Πυθαγόρειο θεώρημα

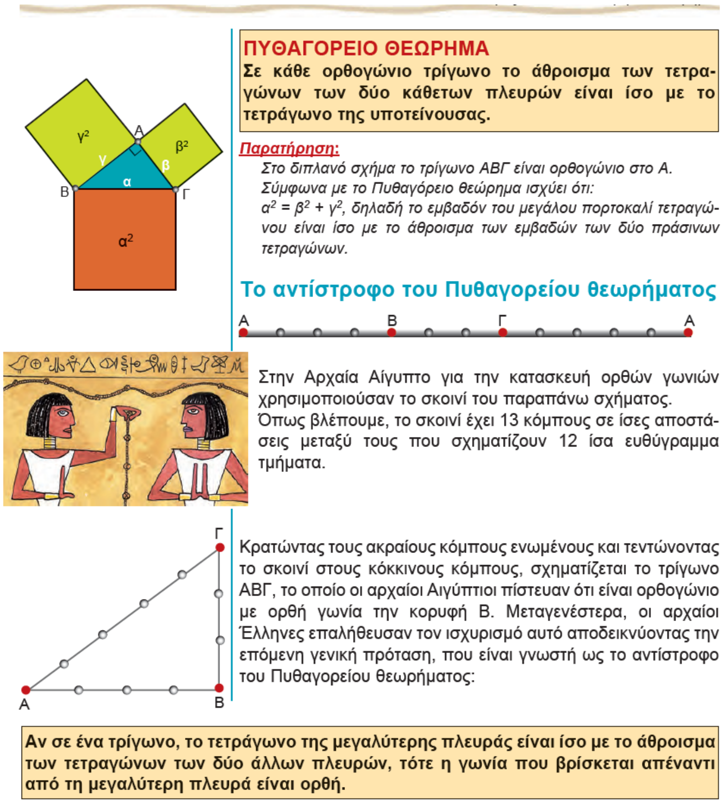
Οι πλημμύρες του Νείλου,
του Τίγρη και του Ευφράτη,
πριν από περίπου τρεις
χιλιετίες, ανάγκασαν τους λαούς
που κατοικούσαν στην περιοχή να
αναπτύξουν την «τέχνη»
της μέτρησης της γης (Γεω-μετρία).

Τότε αναπτύχθηκε η έννοια του εμβαδού,
την οποία θα μελετήσουμε
στο κεφάλαιο αυτό.
Θα μάθουμε τις βασικές μονάδες
μέτρησης εμβαδών,
καθώς και τους τύπους
υπολογισμού του εμβαδού:
τετραγώνου, ορθογωνίου,
παραλληλογράμμου, τριγώνου και
τραπεζίου.

Στο τέλος του κεφαλαίου θα μελετήσουμε
το Πυθαγόρειο θεώρημα και θα
εξετάσουμε αρκετές εφαρμογές του.

Εικόνα Β. 1.1

Η παραπάνω ιστορική αναδρομή αποτελεί εισαγωγή στο δεύτερο μέρος του σχολικού εγχειριδίου, που είναι η Γεωμετρία. Το ιστορικό σημείωμα πληροφορεί τους μαθητές για τη πρακτική ανάγκη που προέκυψε λόγω των ετήσιων πλημμυρών του ποταμού Νείλου και των άλλων μεγάλων ποταμών , που αποτελούν λίκνο του πολιτισμού.



ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

Παρατήρηση:
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α.
Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει ότι:
$α^2 = β^2 + γ^2$, δηλαδή το εμβαδόν του μεγάλου πορτοκαλί τετραγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο πράσινων τετραγώνων.

Το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος

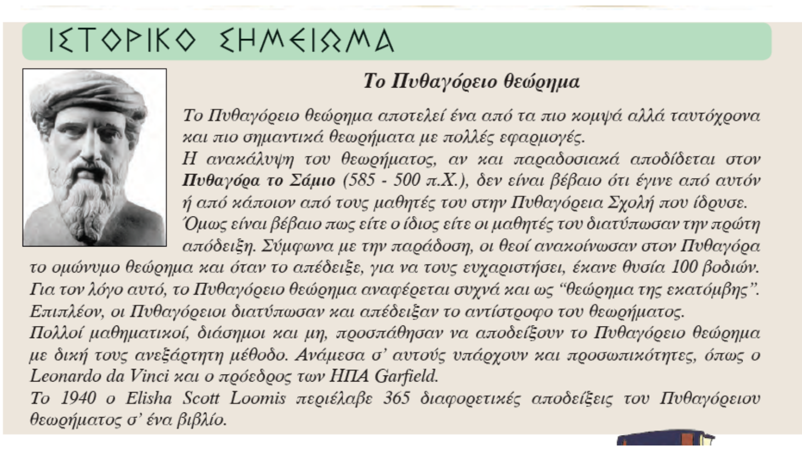
Στην Αρχαία Αίγυπτο για την κατασκευή ορθών γωνιών χρησιμοποιούσαν το σκοινί του παραπάνω σχήματος. Όπως βλέπουμε, το σκοινί έχει 13 κόμπους σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους που σχηματίζουν 12 ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

Κρατώντας τους ακραίους κόμπους ενωμένους και τεντώνοντας το σκοινί στους κόκκινους κόμπους, σχηματίζεται το τρίγωνο ΑΒΓ, το οποίο οι αρχαίοι Αιγύπτιοι πίστευαν ότι είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την κορυφή Β. Μεταγενέστερα, οι αρχαίοι Έλληνες επαλήθευσαν τον ισχυρισμό αυτό αποδεικνύοντας την επόμενη γενική πρόταση, που είναι γνωστή ως το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος:

Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

Εικόνα Β. 1.4

Το ιστορικό σημείωμα που προηγείται αναφέρεται στο πυθαγόρειο θεώρημα και στην προσέγγιση των αρχαίων αιγυπτίων, που προηγήθηκαν του θεωρήματος. Το ιστορικό σημείωμα είναι χρήσιμο, γιατί αναφέρει μια εναλλακτική προσέγγιση του ίδιου θέματος και πληροφορεί για τα επιτεύγματα άλλων λαών της αρχαιότητας.



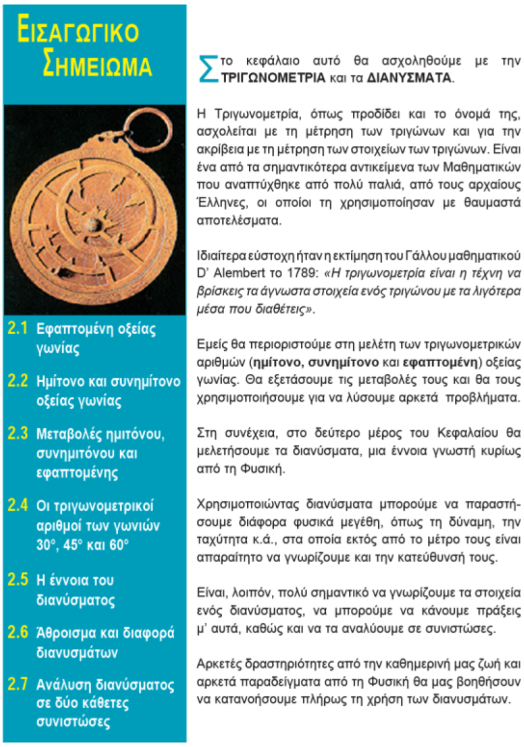
ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το Πυθαγόρειο θεώρημα

Το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτελεί ένα από τα πιο κομψά αλλά ταυτόχρονα και πιο σημαντικά θεωρήματα με πολλές εφαρμογές.
*Η ανακάλυψη του θεωρήματος, αν και παραδοσιακά αποδίδεται στον **Πυθαγόρα το Σάμιο** (585 - 500 π.Χ.), δεν είναι βέβαιο ότι έγινε από αυτόν ή από κάποιον από τους μαθητές του στην Πυθαγόρεια Σχολή που ίδρυσε.*
Όμως είναι βέβαιο πως είτε ο ίδιος είτε οι μαθητές του διατύπωσαν την πρώτη απόδειξη. Σύμφωνα με την παράδοση, οι θεοί ανακοίνωσαν στον Πυθαγόρα το ομώνυμο θεώρημα και όταν το απέδειξε, για να τους ευχαριστήσει, έκανε θυσία 100 βοδιών. Για τον λόγο αυτό, το Πυθαγόρειο θεώρημα αναφέρεται συχνά και ως "θεώρημα της εκατόμβης".
Επιπλέον, οι Πυθαγόρειοι διατύπωσαν και απέδειξαν το αντίστροφο του θεωρήματος.
Πολλοί μαθηματικοί, διάσημοι και μη, προσπάθησαν να αποδείξουν το Πυθαγόρειο θεώρημα με δική τους ανεξάρτητη μέθοδο. Ανάμεσα σ' αυτούς υπάρχουν και προσωπικότητες, όπως ο Leonardo da Vinci και ο πρόεδρος των ΗΠΑ Garfield.
Το 1940 ο Elisha Scott Loomis περιέλαβε 365 διαφορετικές αποδείξεις του Πυθαγόρειου θεωρήματος σ' ένα βιβλίο.

Εικόνα Β. 1.4 ΄β

Το ιστορικό σημείωμα αναφέρεται στην παρακαταθήκη που άφησε ο Πυθαγόρας και στις προσπάθειες μεταγενέστερων επιφανών προσωπικοτήτων, για να αποδείξουν το ίδιο πράγμα με εναλλακτικούς τρόπους. Το ιστορικό σημείωμα αποτελεί χρήσιμη συμβολή στη διδασκαλία, γιατί δείχνει ότι υπάρχει ένας προορισμός και πολλοί δρόμοι που μπορεί να ακολουθήσει κάποιος.



ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

2.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας
2.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας
2.3 Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης
2.4 Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30°, 45° και 60°
2.5 Η έννοια του διανύσματος
2.6 Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων
2.7 Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την **ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ** και τα **ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ**.

Η Τριγωνομετρία, όπως προδίδει και το όνομά της, ασχολείται με τη μέτρηση των τριγώνων και για την ακρίβεια με τη μέτρηση των στοιχείων των τριγώνων. Είναι ένα από τα σημαντικότερα αντικείμενα των Μαθηματικών που αναπτύχθηκε από πολύ παλιά, από τους αρχαίους Έλληνες, οι οποίοι τη χρησιμοποίησαν με θαυμαστά αποτελέσματα.

Ιδιαίτερα εύστοχη ήταν η εκτίμηση του Γάλλου μαθηματικού D' Alembert το 1789: *«Η τριγωνομετρία είναι η τέχνη να βρίσκεις τα άγνωστα στοιχεία ενός τριγώνου με τα λιγότερα μέσα που διαθέτεις»*.

Εμείς θα περιοριστούμε στη μελέτη των τριγωνομετρικών αριθμών (**ημίτονο, συνημίτονο** και **εφαπτομένη**) οξείας γωνίας. Θα εξετάσουμε τις μεταβολές τους και θα τους χρησιμοποιήσουμε για να λύσουμε αρκετά προβλήματα.

Στη συνέχεια, στο δεύτερο μέρος του Κεφαλαίου θα μελετήσουμε τα διανύσματα, μια έννοια γνωστή κυρίως από τη Φυσική.

Χρησιμοποιώντας διανύσματα μπορούμε να παραστήσουμε διάφορα φυσικά μεγέθη, όπως τη δύναμη, την ταχύτητα κ.ά., στα οποία εκτός από το μέτρο τους είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε και την κατεύθυνσή τους.

Είναι, λοιπόν, πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε τα στοιχεία ενός διανύσματος, να μπορούμε να κάνουμε πράξεις μ' αυτά, καθώς και να τα αναλύουμε σε συνιστώσες.

Αρκετές δραστηριότητες από την καθημερινή μας ζωή και αρκετά παραδείγματα από τη Φυσική θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε πλήρως τη χρήση των διανυσμάτων.

Εικόνα Β. 2.1 α.

Τι είναι η Τριγωνομετρία;

Η Τριγωνομετρία αναπτύχθηκε αρχικά για τις ανάγκες της **Αστρονομίας** και της **Γεωγραφίας**, αλλά χρησιμοποιήθηκε στη διάρκεια πολλών αιώνων και σε άλλους κλάδους των Μαθηματικών, στη **Φυσική**, στη **Μηχανική** και στη **Χημεία**.

Οι έννοιες του ημιτόνου, του συνημιτόνου και της εφαπτομένης μιας γωνίας προέκυψαν από τις παρατηρήσεις των Αστρονόμων της Αρχαιότητας.

Οι αρχαίοι Έλληνες πίστευαν ότι τα αστέρια βρίσκονταν πάνω σε μια τεράστια νοητή σφαίρα, στην οποία κινούνταν μόνο οι τότε γνωστοί πλανήτες: Ερμής, Αφροδίτη, Άρης, Δίας, Κρόνος, Σελήνη. Στην προσπάθειά τους να υπολογίσουν τις αποστάσεις μεταξύ των πλανητών –που είναι αδύνατον να μετρηθούν άμεσα– οι αρχαίοι Έλληνες προσπάθησαν να τις υπολογίσουν από τις γωνίες που σχημάτιζαν μεταξύ τους.

Ο **Αρίσταρχος ο Σάμιος, ο Πτολεμαίος, ο Ίππαρχος** και άλλοι, που ασχολήθηκαν με την Αστρονομία, βρήκαν σχέσεις μεταξύ των πλευρών και των γωνιών τριγώνων.

Περίπου δύο χιλιάδες χρόνια πριν δημιουργήθηκαν τριγωνομετρικοί πίνακες, δηλαδή πίνακες με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς (ημίτονα, συνημίτονα, εφαπτομένες) γωνιών. Ο υπολογισμός των τριγωνομετρικών αυτών αριθμών δεν ήταν καθόλου απλός. Άρχισε να απλοποιείται μετά τον 17ο αιώνα μ.Χ. και στις ημέρες μας είναι πανεύκολος με τη χρήση των υπολογιστών τσέπης. Σκοπός αυτών των πινάκων ήταν να διευκολυνθούν οι υπολογισμοί της Αστρονομίας.

Οι εφαρμογές της Αστρονομίας ήταν πολλές και εντυπωσιακές. Ένα απλό παράδειγμα είναι η ναυσιπλοΐα κατά τη διάρκεια της νύχτας. Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούσαν ένα ναυτικό όργανο, τον αστρολάβο, με τον οποίο μετρούσαν ουσιαστικά γωνίες και με τη χρήση της τριγωνομετρίας υπολόγιζαν αποστάσεις και χάραζαν την πορεία τους.

Οι αρχαίοι Έλληνες γνωρίζοντας ότι η Γη είναι σφαιρική χρησιμοποίησαν την Τριγωνομετρία στη Γεωγραφία. Ο Πτολεμαίος χρησιμοποίησε τριγωνομετρικούς πίνακες στο έργο του «Γεωγραφία», ενώ ο Κολόμβος είχε πάντα μαζί του στα ταξίδια του το έργο του Regiomontanus: «Ephemerides Astronomicae». Παρόλο που η Τριγωνομετρία εφαρμόστηκε αρχικά στη σφαίρα, έχει περισσότερες εφαρμογές στο επίπεδο.
Η Τριγωνομετρία αποτελεί βασικό πεδίο γνώσης, καθώς συμβάλλει στην κατανόηση του χώρου και των ιδιοτήτων του.
Οι εφαρμογές της Τριγωνομετρίας δεν περιορίζονται στη Γεωμετρία, αλλά επεκτείνονται στις βολές στη Φυσική, στην ανάκλαση στην Οπτική, στις αντοχές υλικών στη Στατική και σε άλλους κλάδους των Φυσικών ή ακόμα και των Κοινωνικών επιστημών.

Εικόνα Β 2,1 ΄β

Οι παραπάνω σελίδες του σχολικού βιβλίου αποτελούν εισαγωγικό σημείωμα στην Τριγωνομετρία. Αρχικά εξηγούν την χρησιμότητα της Τριγωνομετρίας και τι θα διδαχθούν οι μαθητές στο κεφάλαιο που ακολουθεί. Στη δεύτερη σελίδα γίνεται μια εξήγηση για τη προέλευση του αντικειμένου και της πρακτικής ανάγκης που εξυπηρέτησε. Στο ιστορικό σημείωμα αναφέρονται μόνο οι αρχαίοι έλληνες.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Ο μηχανισμός των Αντικυθήρων ΑΣΤΡΟΛΑΒΟΣ

Αστρολάβος είναι ένα αστρονομικό όργανο που εφευρέθηκε από τον έλληνα αστρονόμο Ίππαρχο τον 2ο αιώνα π.Χ. για να μετρήσει το ύψος ενός αστεριού πάνω από τον ορίζοντα, καθώς και τη γωνιακή απόσταση δύο αστεριών.

Στην πρώτη του μορφή ο αστρολάβος ήταν ένας ξύλινος δίσκος, στο κυκλικό πλαίσιο του οποίου ήταν χαραγμένες οι υποδιαιρέσεις του σε μοίρες και μια ακτίνα που έδειχνε το μηδέν (αρχή) των υποδιαιρέσεων.

Στο κέντρο του δίσκου ήταν στερεωμένος ένας κανόνας (χάρακας), που μπορούσε να περιστρέφεται και με τον οποίο γινόταν η στόχευση του αστεριού.

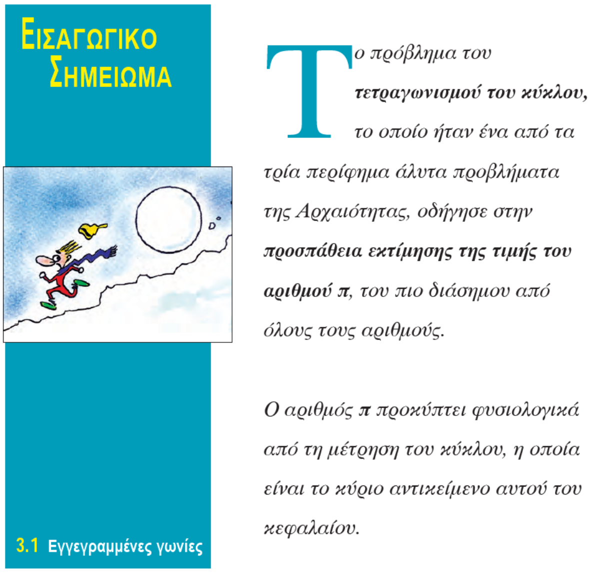
Αργότερα οι αστρολάβοι έγιναν μεταλλικοί, με παραστάσεις από ζωδιακό κύκλο και κάποιους αστρονομικούς χάρτες. Ήταν το κυριότερο όργανο ναυσιπλοΐας κατά τον μεσαίωνα και αντικαταστάθηκε από τον εξάντα τον 18ο αιώνα.

Σήμερα οι αστρολάβοι είναι αστρονομικά όργανα μεγίστης ακρίβειας, εφοδιασμένα με διόπτρα μπροστά από την οποία είναι προσαρμοσμένο ένα πρίσμα. Προσδιορίζουν τη χρονική στιγμή κατά την οποία ένα συγκεκριμένο αστέρι βρίσκεται πάνω από τον ορίζοντα σε ορισμένο ύψος, συνήθως 45° ή 60°.

Στη γαλλική αυτή μικρογραφία του 13ου αιώνα τρεις μοναχοί παρατηρούν με έναν αστρολάβο κάποιο αστέρι.

Εικόνα Β. 2.2

Το ιστορικό σημείωμα βρίσκεται στο τέλος της Ενότητας *2.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας*. Το όργανο που γίνεται λόγος αναφέρεται στη ναυσιπλοΐα και εφευρέθηκε από τον αρχαίο έλληνα Ίππαρχο. Το ιστορικό σημείωμα είναι αρκετά χρήσιμο γιατί πληροφορεί τους μαθητές ότι ο υπολογισμός μιας γωνίας καθιστούσε τους ανθρώπους της αρχαιότητας ικανούς να φτάσουν στον προορισμό τους.



ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

3.1 Εγγεγραμμένες γωνίες

*Το πρόβλημα του **τετραγωνισμού του κύκλου,** το οποίο ήταν ένα από τα τρία περίφημα άλυτα προβλήματα της Αρχαιότητας, οδήγησε στην **προσπάθεια εκτίμησης της τιμής του αριθμού π**, του πιο διάσημου από όλους τους αριθμούς.*

*Ο αριθμός **π** προκύπτει φυσιολογικά από τη μέτρηση του κύκλου, η οποία είναι το κύριο αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου.*

Εικόνα Β. 3.1

Το παραπάνω αποτελεί εισαγωγή στην Ενότητα *3.1 Εγγεγραμμένες γωνίες*. Το ιστορικό σημείωμα αναφέρεται στον τετραγωνισμό του κύκλου και στην ανάγκη του αριθμού π. Είναι ενδιαφέρον να πληροφορούνται οι μαθητές ότι κάποια προβλήματα από την αρχαιότητα ακόμη δεν έχουν λυθεί, αν και ασχολήθηκαν ευφυείς άνθρωποι.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Τα κανονικά πολύγωνα στη Φύση, στην Τέχνη και στις Επιστήμες

Το παλάτι της Alhambra στη Granada της Ισπανίας είναι το εξοχότερο, ίσως, δείγμα χρήσης των κανονικών πολυγώνων στην Τέχνη. Έχει φτιαχτεί όλο με ψηφιδωτά πάνω σε σχέδια που περιλαμβάνουν επαναλήψεις από συνθέσεις κανονικών πολυγώνων. Ανάλογα σχέδια έχουμε δει σε μωσαϊκά, σε υφάσματα και γενικότερα στις Τέχνες. Χαρακτηριστικότερο παράδειγμα αποτελούν οι δημιουργίες του Ολλανδού καλλιτέχνη M.C. Escher.

Η χρήση κανονικών πολυγώνων στην Τέχνη και τη διακόσμηση αποτελεί κομμάτι πολλών αρχαίων πολιτισμών. Οι Σουμέριοι (περίπου 4000 π.Χ.) διακοσμούσαν τα σπίτια και τους ναούς τους με σχέδια από επαναλαμβανόμενα κανονικά πολύγωνα.
Ανάλογες διακοσμήσεις ή ακόμη και εφαρμογές στις κατασκευές κτιρίων έχουν παρουσιαστεί στους Αιγύπτιους, τους Έλληνες, τους Μαυριτανούς, τους Ρωμαίους, τους Πέρσες, τους Άραβες, τους Βυζαντινούς, τους Ιάπωνες και τους Κινέζους. Χρησιμοποιούσαν διάφορες τεχνικές σχεδιασμού και ήταν έντονος ο "συμμετρικός" τρόπος χρωματισμού.

Σε αρκετούς πολιτισμούς η θρησκεία ήταν εκείνη που τους ώθησε σ' αυτό το είδος Τέχνης. Για παράδειγμα, η ισλαμική θρησκεία απαγορεύει την αναπαράσταση ζωντανών οργανισμών σε έργα τέχνης. Για τον λόγο αυτό, οι Μαυριτανοί δημιούργησαν μόνο αφηρημένα γεωμετρικά σχήματα. Αντίθετα, οι Ρωμαίοι και άλλοι μεσογειακοί λαοί χρησιμοποίησαν ως φόντο συνδυασμούς κανονικών πολυγώνων, για να τονίσουν αναπαραστάσεις με ανθρώπους ή σκηνές από τη φύση.

Τα κανονικά πολύγωνα συναντώνται στη Φύση και γίνονται αντικείμενο μελέτης από διάφορους κλάδους των Φυσικών Επιστημών, όπως την Κρυσταλλογραφία (με ακτίνες Χ), την Κβαντομηχανική, την Κβαντική Χημεία. Για παράδειγμα, η Κρυσταλλογραφία με ακτίνες Χ είναι ο επιστημονικός κλάδος που ασχολείται με την επαναληπτική τοποθέτηση ίδιων αντικειμένων, όπως αυτά συναντώνται στη Φύση. Αρκετές από τις ανακαλύψεις στην Κρυσταλλογραφία κατά τα μέσα του 20ού αιώνα μοιάζουν με έργα τέχνης του M.C. Esher.

Άλλοι τομείς έρευνας που ασχολούνται συστηματικά με κανονικά πολύγωνα περιλαμβάνονται στη Γεωλογία, τη Μεταλλουργία, τη Βιολογία ακόμη και στην Κρυπτογραφία!

Εικόνα Β. 3.2

Το ιστορικό σημείωμα αποτελεί απλώς πληροφοριακό υλικό σχετικά με τη χρήση των πολύγωνων. Το αξιοσημείωτο είναι ότι αναφέρεται η χρήση των κανονικών πολυγώνων από πολλούς λαούς από την αρχαιότητα μέχρι και σήμερα.

Μέρος Β' - 3.3. Μήκος κύκλου 189

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971 \ldots$

Ο π είναι ο μόνος άρρητος και υπερβατικός, –όπως λέγεται– αριθμός που συναντάται στη φύση. *Στην Παλαιά Διαθήκη φαίνεται ότι ο **π** θεωρούνταν ίσος με το 3. Οι Βαβυλώνιοι περίπου το 2.000 π.Χ. θεωρούσαν ότι ο **π** είτε είναι ίσος με το 3 είτε με το* $3\frac{1}{8}$.

Οι Αιγύπτιοι στον πάπυρο του Rhind (1500 π.Χ.) θεωρούσαν ότι το εμβαδόν ενός κύκλου ισούται με $\left(\frac{8}{9}\delta\right)^2$, *όπου δ η διάμετρος του κύκλου, οπότε,* $\pi \approx 3,16049\ldots$

*Ωστόσο, οι αρχαίοι Έλληνες ξέφυγαν από τις «χονδρικές» εκτιμήσεις των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων και έδωσαν επιστημονική μέθοδο για τον υπολογισμό του **π**. Το συνδύασαν με ένα από τα περίφημα «άλυτα» προβλήματα της Αρχαιότητας: με το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, δηλαδή την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη τετραγώνου ισεμβαδικού με δοσμένο κύκλο.*

Εκτιμήσεις του π

*Πολλοί επιστήμονες από την αρχαιότητα (με πρωτόγονα μέσα) μέχρι σήμερα (με σύγχρονους υπερυπολογιστές), προσπάθησαν να βρούν προσεγγίσεις του **π** με όσο το δυνατόν περισσότερα δεκαδικά ψηφία. Μερικές από αυτές τις προσπάθειες είναι οι παρακάτω:*

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ: $\frac{310}{71} \le \pi \le 3\frac{10}{70}$

$3,14085 \ldots \le \pi \le 3,142857$

$\pi \approx 3\frac{1}{7}$ ή $\frac{22}{7}$

ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΣ: $\pi \approx \frac{377}{120} (=3,1416\ldots)$

TSU CHUNG-CHI (Κίνα): $3,1415926 \le \pi \le 3,1415927$, $\pi \approx \frac{355}{113}$.

AL–KASHI *(15ος αιώνας μ.Χ.): 16 ακριβή δεκαδικά ψηφία.*

LUDOLPH VAN CEULEN: *20, κατόπιν 32, τελικά 35 ακριβή δεκαδικά ψηφία.*

SNELL: *34 ψηφία.*

VIETE *(1592): πρώτος τύπος:* $\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots}$

JOHN WALLIS: $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\ldots$

LEIBNIZ *(1673):* $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\ldots$

JOHN MACHIN *(1706): 100 δεκαδικά ψηφία*

WILLIAM SHANKS *(1853): 707*

CDC 6600 *(1967): 500.000*

JOLIANN DASE *(1824 - 1861): 200*

ENIAC *(Η/Υ)(1949): 2037*

Ιαπωνική Ομάδα *(1993): 16.777.216* $(=2^{24})$.

Εικόνα Β. 3.3

Το παραπάνω ιστορικό σημείωμα αναφέρεται στον αριθμό π, και αναφέρεται ο υπολογισμός του από άλλους λαούς. Είναι το δεύτερο ιστορικό σημείωμα στη ΄Β γυμνασίου που αναφέρει μαθηματικά επιτεύγματα άλλων λαών.

Από την αρχαιότητα οι άνθρωποι έκτιζαν μνημεία με τη μορφή πυραμίδας.

Οι τάφοι των βασιλέων της αρχαίας Αιγύπτου είχαν τη γνωστή σ' εμάς μορφή της πυραμίδας.

Οι Αζτέκοι και οι Ίνκας είχαν χτίσει, επίσης, ναούς στο σχήμα πυραμίδας, αρκετοί από τους οποίους σώζονται μέχρι σήμερα.

Στην είσοδο του μουσείου του Λούβρου, στο Παρίσι, υπάρχει μια σύγχρονη πυραμίδα που σχεδιάστηκε το 1989 από τον αρχιτέκτοντα Γιέο Μιγκ Πέι.

Πυραμίδα λέγεται ένα στερεό, που μία έδρα του είναι ένα πολύγωνο και όλες οι άλλες έδρες του είναι τρίγωνα με κοινή κορυφή.

Για παράδειγμα, μια πυραμίδα με μια έδρα το επτάγωνο ΑΒΓΔΕΖΗ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

Εικόνα Β. 4.4 α.

Ένα ακόμη ιστορικό σημείωμα που αναφέρεται στα κτίσματα σε σχήμα πυραμίδας. Είναι χρήσιμο το ιστορικό σημείωμα γιατί, οι μαθητές πληροφορούνται ότι τα κτίρια σε σχήμα πυραμίδας κτίστηκαν από λαούς που στην αρχαιότητα και μέχρι το $16^{ο}$ αιώνα δεν είχαν επικοινωνία μεταξύ τους.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Το έτος 3.000 π.Χ. περίπου οι αρχαίοι Αιγύπτιοι έκτισαν την πυραμίδα του Χέοπα, που έχει βάση τετράγωνο πλευράς 233 m και παράπλευρη ακμή 220 m (περίπου).

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας αυτής της πυραμίδας.

β) Αν γνωρίζουμε ότι το ύψος της είναι 146 m, να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.

Εικόνα Β. 4.4 β.

Η παραπάνω εφαρμογή αποτελεί μια δραστηριότητα που δανείζεται δεδομένα από ένα ιστορικό γεγονός. Ιδιαίτερα χρήσιμη γιατί εκτός από τα μαθηματικά δεδομένα ενεργοποιεί και τη φαντασία των μαθητών, παρέχοντας ουσιαστικά κίνητρα για την ενεργό συμμετοχή τους.

3.3. Γ΄ Γυμνασίου.

Το τρίγωνο του Πασκάλ
και το ανάπτυγμα των δυνάμεων του α + β

1	$(\alpha+\beta)^0 = 1$
1 1	$(\alpha+\beta)^1 = 1\alpha + 1\beta$
1 2 1	$(\alpha+\beta)^2 = 1\alpha^2 + 2\alpha\beta + 1\beta^2$
1 3 3 1	$(\alpha+\beta)^3 = 1\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + 1\beta^3$
1 4 6 4 1	$(\alpha+\beta)^4 = 1\alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + 1\beta^4$
1 □ □ □ □ 1	$(\alpha+\beta)^5 =$ .... + ... + ... + ... + ... + ...
1 □ □ □ □ □ 1	$(\alpha+\beta)^6 =$ ... ...

Παρατηρήστε τα αναπτύγματα των δυνάμεων του αθροίσματος α + β.

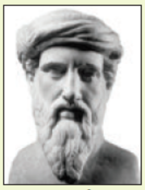
1. Οι αντίστοιχοι συντελεστές σε κάθε ανάπτυγμα σχηματίζουν μια γραμμή σ' ένα αριθμητικό τρίγωνο, που είναι γνωστό ως **τρίγωνο του Πασκάλ**. Το τρίγωνο αυτό πήρε το όνομά του από τον Γάλλο μαθηματικό Blaise Pascal (1623 - 1662) και οι αριθμοί του κρύβουν πολλές ιδιότητες. Ο πρώτος και ο τελευταίος αριθμός κάθε σειράς είναι 1.
Μπορείτε να ανακαλύψετε με ποιον τρόπο προκύπτουν οι υπόλοιποι αριθμοί κάθε σειράς;
2. Συνεχίστε την κατασκευή του τριγώνου και βρείτε τα αναπτύγματα $(\alpha + \beta)^5$ και $(\alpha + \beta)^6$, αφού πρώτα ανακαλύψετε με ποιον τρόπο γράφονται οι δυνάμεις του α και του β σε κάθε ανάπτυγμα.

Εικόνα Α. 1.5 α.

Το ιστορικό σημείωμα αναφέρεται στην συνεισφορά του Γάλλου μαθηματικού Pascal στην επιστήμη των Μαθηματικών. Το ιστορικό σημείωμα θέτει και μια δραστηριότητα θέτοντας τους μαθητές στον ρόλο του ερευνητή.

ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πυθαγόρειες τριάδες



Πυθαγόρας

Αν οι αριθμοί α, β, γ εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου, τότε όπως γνωρίζουμε, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \quad (1)$$

Πόσα όμως ορθογώνια τρίγωνα μπορούμε να βρούμε που τα μήκη των πλευρών τους εκφράζονται με ακέραιους αριθμούς;

Μια τριάδα **θετικών ακεραίων** αριθμών α, β, γ, για την οποία ισχύει η σχέση (1), λέμε ότι αποτελεί **Πυθαγόρεια τριάδα**. Την απλούστερη Πυθαγόρεια τριάδα σχηματίζουν οι αριθμοί 5, 4, 3 αφού $5^2 = 4^2 + 3^2$.

Υπάρχουν, άραγε, τρόποι να σχηματίζουμε Πυθαγόρειες τριάδες;

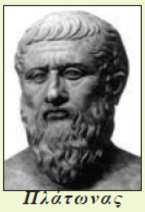
Ο **Πυθαγόρας** (6ος αιώνας π.Χ.) γνώριζε ότι οι αριθμοί της μορφής

$$\frac{\mu^2+1}{2},\quad \frac{\mu^2-1}{2},\quad \mu,\quad \text{όπου } \mu \text{ περιττός } (\mu = 3, 5, 7, \ldots)$$

σχηματίζουν μια Πυθαγόρεια τριάδα.

α) Μπορείτε να το αποδείξετε;

β) Να βρείτε δύο τουλάχιστον Πυθαγόρειες τριάδες με τους αριθμούς του Πυθαγόρα.



Πλάτωνας

Ο **Πλάτωνας** (5ος – 4ος αιώνας π.Χ.) γνώριζε ότι οι αριθμοί της μορφής

$$\frac{\mu^2}{4}+1,\quad \frac{\mu^2}{4}-1,\quad \mu,\quad \text{όπου } \mu \text{ άρτιος } (\mu = 4, 6, 8, \ldots)$$

σχηματίζουν μια Πυθαγόρεια τριάδα.

α) Μπορείτε να το αποδείξετε;

β) Να βρείτε δύο τουλάχιστον Πυθαγόρειες τριάδες με τους αριθμούς του Πλάτωνα.

Ευκλείδης

Ο **Διόφαντος** (3ος αιώνας μ.Χ.) στηριζόμενος σε μία ταυτότητα την οποία γνώριζε και ο **Ευκλείδης**, έδωσε μια γενικότερη λύση στο πρόβλημα κατασκευής Πυθαγορείων τριάδων από οποιουσδήποτε αριθμούς (άρτιους ή περιττούς). Ανακάλυψε ότι ο αριθμοί της μορφής $\lambda^2 + \mu^2$, $\lambda^2 - \mu^2$, $2\lambda\mu$, όπου λ, μ θετικοί άνισοι ακέραιοι αριθμοί, σχηματίζουν Πυθαγόρεια τριάδα.

α) Μπορείτε να το αποδείξετε;

β) Να βρείτε δύο τουλάχιστον Πυθαγόρειες τριάδες με τους αριθμούς του Διόφαντου.

Εικόνα Α. 1.5

Ακόμη ένα ιστορικό σημείωμα που πληροφορεί τους μαθητές για τα ευρήματα επιφανών ανθρώπων της αρχαιότητας και μετέπειτα, όμως τους προκαλεί να συνεχίσουν τη δραστηριότητα. Τέτοιου είδους εφαρμογές είναι χρήσιμές γιατί απενεχοποιούν το λάθος στα μαθηματικά, γιατί το μόνο σίγουρο είναι ότι οι μαθητές στην αρχή θα επέλθουν σε ερευνητικό αδιέξοδο. Το ζητούμενο εδώ είναι η καλλιέργεια της ανθεκτικότητας στον αναπτυσσόμενο άνθρωπο.

ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σε μια βαβυλωνική πλάκα (περίπου 1650 π.Χ.) βρίσκουμε χαραγμένο και λυμένο το παρακάτω πρόβλημα(*):
«Αν από την επιφάνεια ενός τετραγώνου αφαιρέσω την πλευρά του, θα βρω 870. Να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου».
Τον γραφέα της πλάκας δεν τον απασχολούσε η γεωμετρική έννοια της ποσότητας, αλλά η ίδια η ποσότητα, όπως αυτή εκφράζεται με τους συγκεκριμένους αριθμούς (Γι' αυτό προσθέτει μήκος με επιφάνεια).
Αν χρησιμοποιήσουμε σημερινό συμβολισμό και υποθέσουμε ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι x, τότε η λύση του προβλήματος οδηγεί στη λύση της εξίσωσης $x^2 - x = 870$.
Ο Βαβυλώνιος γραφέας της πλάκας μας προτείνει να λύσουμε το πρόβλημα αυτό ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- Πάρε το μισό του 1 που είναι το $\frac{1}{2}$.
- Πολλαπλασίασε το $\frac{1}{2}$ με το $\frac{1}{2}$, αποτέλεσμα $\frac{1}{4}$.
- Πρόσθεσε το $\frac{1}{4}$ στο 870 και θα βρεις $870\frac{1}{4}$.
- Το $870\frac{1}{4}$, είναι το τετράγωνο του $29\frac{1}{2}$.
- Πρόσθεσε στο $29\frac{1}{2}$ το $\frac{1}{2}$ (που βρήκες αρχικά) και θα βρεις 30.
- Αυτή είναι η πλευρά του τετραγώνου.

- Το 1 είναι ο συντελεστής του x. (Οι Βαβυλώνιοι δε χρησιμοποιούσαν αρνητικούς αριθμούς).
- Οι Βαβυλώνιοι για να βρίσκουν την τετραγωνική ρίζα αριθμών είχαν κατασκευάσει πίνακες με τα τετράγωνα των αριθμών.
- Έκαναν πρόσθεση, όταν στην εξίσωση υπήρχε αφαίρεση (π.χ. $x^2 - x$) και αφαίρεση, όταν στην εξίσωση υπήρχει πρόσθεση (π.χ. $x^2 + x$)

- Να λύσετε την εξίσωση με τη μέθοδο που μάθατε στην ενότητα αυτή και να τη συγκρίνετε με την πρακτική μέθοδο με την οποία έλυναν οι Βαβυλώνιοι τις εξισώσεις 2ου βαθμού. Τι παρατηρείτε;
- Ακολουθώντας τα βήματα των Βαβυλωνίων να λύσετε και το παρακάτω πρόβλημα που είναι χαραγμένο στην ίδια πλάκα. «Αν στην επιφάνεια ενός τετραγώνου προσθέσω την πλευρά του, θα βρω $\frac{3}{4}$. Ποια είναι η πλευρά του τετραγώνου;»

(*) Από το βιβλίο του Θ. Εξαρχάκου: *Ιστορία των Μαθηματικών, Τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αρχαίων Αιγυπτίων*, τόμος Α′, Αθήνα 1997.

Εικόνα Α. 2.2

Παραπάνω βλέπουμε ένα ακόμη ιστορικό σημείωμα που δεν πληροφορεί μόνο αλλά και εμπλέκει τους μαθητές σε ερευνητικές δραστηριότητες.

ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

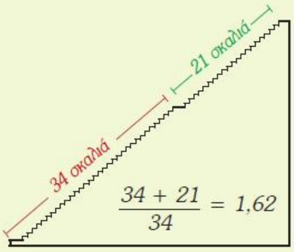
Η χρυσή τομή

Πώς μπορούμε να χωρίσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δύο άνισα μέρη, έτσι ώστε το αποτέλεσμα που θα προκύψει από αυτόν τον χωρισμό να δημιουργεί μια αίσθηση αρμονίας;

Η κατασκευή των δύο διαζωμάτων στο θέατρο της Επιδαύρου (τέλος του 4ου αιώνα π.Χ.) δείχνει πώς έλυσαν το πρόβλημα αυτό οι αρχαίοι Έλληνες. Τα σκαλιά του θεάτρου έχουν χωριστεί σε δύο άνισα μέρη με τέτοιο τρόπο, που το αισθητικό αποτέλεσμα είναι ευχάριστο στο μάτι. Για να καταλάβετε με ποιον τρόπο το πέτυχαν:

α) Υπολογίστε τους λόγους των σκαλιών $\frac{34+21}{34}$ *και* $\frac{34}{21}$.

Τι παρατηρείτε;
Ο χωρισμός έχει γίνει με τυχαίο τρόπο;
Το προβλημα αυτό διατυπώνεται ως εξής:
«Να χωριστεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = λ σε δύο άνισα μέρη ΑΓ και ΓΒ, ώστε ο λόγος ολόκληρου προς το μεγαλύτερο μέρος να είναι ίσος με το λόγο του μεγαλύτερου προς το υπόλοιπο τμήμα».



β) Να δείξετε ότι η λύση του προβλήματος αυτού ανάγεται στην επίλυση της κλασματικής εξίσωσης $\frac{\lambda}{x} = \frac{x}{\lambda - x}$ *(1).*

γ) Να λύσετε την κλασματική εξίσωση (1) και να υπολογίσετε το x ως συνάρτηση του λ.

δ) Να αποδείξετε ότι ο λόγος $\varphi = \frac{\lambda}{x}$ *είναι ίσος με* $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618...$

*Ο αριθμός 1,618... ονομάζεται **λόγος της χρυσής τομής** και συμβολίζεται διεθνώς με το γράμμα φ προς τιμή του γλύπτη Φειδία. Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν διαπιστώσει ότι, όπου εμφανίζεται ο λόγος της χρυσής τομής, δημιουργείται μια αίσθηση αρμονίας.*
*Το ορθογώνιο του οποίου οι διαστάσεις έχουν λόγο φ, λέγεται **«χρυσό ορθογώνιο»** και το συναντάμε συχνά στην αρχιτεκτονική και τη ζωγραφική.*

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο Παρθενώνας, οι διαστάσεις του οποίου έχουν λόγο $\frac{\alpha}{\beta} = \varphi$

109

Εικόνα Α. 2.4

Το παραπάνω ιστορικό σημείωμα κινείται στο ίδιο μοντέλο με τα προηγούμενα, δηλαδή πληροφορεί αλλά και εμπλέκει τους μαθητές να διερευνήσουν.

Το τρίγωνο του Πασκάλ και οι Πιθανότητες

Ο Πασκάλ χρησιμοποίησε το αριθμητικό τρίγωνο (τρίγωνο Πασκάλ) προκειμένου να προσδιορίσει το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων κατά τη ρίψη ενός νομίσματος. Για παράδειγμα, αν ρίξουμε ένα νόμισμα μία, δύο, τρεις φορές, τότε τα δυνατά αποτελέσματα και το πλήθος τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός ρίψεων	Δυνατά αποτελέσματα	Τρίγωνο Πασκάλ	Πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων
1	Κ Γ	1 1	$2 = 2^1$
2	ΚΚ ΚΓ ΓΚ ΓΓ	1 2 1	$4 = 2^2$
3	ΚΚΚ ΚΚΓ ΚΓΚ ΓΚΚ ΓΓΚ ΓΚΓ ΚΓΓ ΓΓΓ	1 3 3 1	$8 = 2^3$

Να βρείτε:

α) Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων σε 5 ρίψεις του νομίσματος.

β) Την πιθανότητα να φέρουμε την ίδια ένδειξη και τις 5 φορές.

γ) Την πιθανότητα να φέρουμε όλες τις φορές γράμματα, αν ρίξουμε το νόμισμα 6 φορές.

Εικόνα Α. 5.3

Η παραπάνω δραστηριότητα αποτελεί χρησιμοποίηση του αριθμητικού τριγώνου του μαθηματικού Pascal στο να υπολογιστούν οι πιθανότητες. Είναι μια εναλλακτική προσέγγιση στον υπολογισμό των πιθανοτήτων αν και πιο σύνθετη.

ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Υπολογισμός της απόστασης ενός πλοίου από τη στεριά

Αν ένα πλοίο βρίσκεται στη θέση Α στη θάλασσα, εμείς στεκόμαστε στη θέση Β στη στεριά και θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση ΑΒ, τότε:

- Ξεκινάμε από το σημείο Β και περπατώντας πάνω στην παραλία κάθετα στην ΑΒ διανύουμε μιαν απόσταση ΒΓ. Στο σημείο Γ βάζουμε ένα σημάδι, π.χ. στερεώνουμε ένα ραβδί και συνεχίζοντας πάνω στην ίδια ευθεία διανύουμε την απόσταση ΓΔ = ΒΓ.
- Στο σημείο Δ αφού βάλουμε ένα σημάδι, π.χ. μια πέτρα, κάνουμε στροφή και περπατώντας κάθετα στη ΒΔ σταματάμε όταν βρεθούμε σ' ένα σημείο Ε, από το οποίο τα σημεία Α και Γ φαίνονται να είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

Η ζητούμενη απόσταση ΑΒ είναι ίση με την απόσταση ΔΕ την οποία μπορούμε να μετρήσουμε, αφού είναι πάνω στη στεριά.

Τη μέθοδο αυτή, λέγεται, ότι εφάρμοσε πριν από 2.500 χρόνια περίπου ο Θαλής ο Μιλήσιος.

Πώς ήταν σίγουρος ο Θαλής ότι ΑΒ = ΔΕ; Μπορείτε να το αποδείξετε; Αναζητήστε τις πέντε προτάσεις που απέδειξε ο Θαλής και σημειώστε ποια απ' αυτές χρησιμοποίησε για να υπολογίσει την απόσταση του πλοίου από τη στεριά.

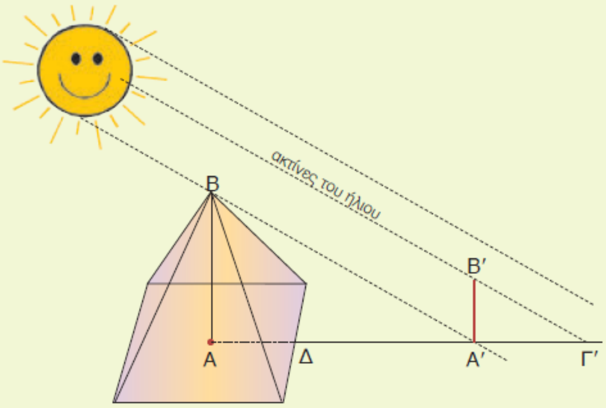
197

Εικόνα Β. 1.1

Το ιστορικό σημείωμα κλείνει την ενότητα 1.1 του μέρους Β στο σχολικό βιβλίο. Το ιστορικό σημείωμα είναι πολύ χρήσιμο, βρίσκεται όμως σε λάθος θέση.

ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η θεωρία των ομοίων σχημάτων ήταν γνωστή από τα μέσα του 7ου αιώνα π.Χ. Με τη βοήθεια της θεωρίας αυτής ο **Θαλής ο Μιλήσιος** (624 - 547 π.Χ.), ένας από τους επτά σοφούς της αρχαιότητας, κατόρθωσε να υπολογίσει το ύψος της μεγάλης πυραμίδας του Χέοπος από το μήκος της σκιάς της, αποσπώντας το θαυμασμό του βασιλιά της Αιγύπτου, του Άμασι.
Δε γνωρίζουμε ακριβώς τις τεχνικές που χρησιμοποίησε ο Θαλής σ' αυτό το επίτευγμά του. Ο Πλούταρχος, ωστόσο, μας διηγείται τα εξής:



«Αφού έστησε το ραβδί του ο Θαλής στο τέλος της σκιάς της πυραμίδας από τα δύο όμοια τρίγωνα που προκύπτουν από την επαφή της ακτίνας του ήλιου, απέδειξε ότι ο λόγος που είχε η σκιά της πυραμίδας προς τη σκιά της ράβδου ήταν ο ίδιος με τον λόγο που είχε το ύψος της πυραμίδας προς το μήκος της ράβδου».

Ο Διογένης ο Λαέρτιος, μάλιστα, ισχυρίζεται ότι ο Θαλής μέτρησε τη σκιά της πυραμίδας, όταν το μήκος της ράβδου έγινε ίσο με το μήκος της σκιάς της.

Μπορείτε να εξηγήσετε, πώς ο Θαλής υπολόγισε τελικά το ύψος της πυραμίδας, αφού μπορούσε να μετρήσει το μήκος της πλευράς της τετραγωνικής βάσης της πυραμίδας και της σκιάς ΔΑ′;

224

Εικόνα Β. 1.5

Το παραπάνω ιστορικό σημείωμα κινείται στο ίδιο μοτίβο με τα προηγούμενα, δηλαδή θέτει ιστορικές πληροφορίες και ύστερα ζητά από τους μαθητές να υπολογίσουν με τον ίδιο τρόπο τα προβλήματα που τίθενται.

Η εισαγωγική δραστηριότητα που προτείνεται σε κάθε ενότητα δεν είναι παρά ένα συγκεκριμένο παράδειγμα το οποίο παροτρύνει τους μαθητές να διατυπώσουν μια εικασία. Στην προσπάθεια να επαληθεύσουν την εικασία αυτή καταλήγουν στη διατύπωση ενός νόμου. Ο νόμος είναι μια ισότητα, μια ανισότητα, μια ιδιότητα, μια συνθήκη ή ένας αλγόριθμος. Όταν κρίνεται δυνατό, υλοποιείται και το στάδιο της απόδειξης. Για τη μετάβαση στο στάδιο των εφαρμογών είναι αρκετή η κατανόηση του νόμου.

Σε ορισμένες ενότητες παρουσιάζονται **θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών** στα οποία επιχειρείται να δοθεί η περιγραφή του προβλήματος που τέθηκε και η παρουσίαση των εννοιολογικών εργαλείων που εφαρμόστηκαν προκειμένου να λυθεί. Τα θέματα αυτά μαζί με τα συνοδευτικά ερωτήματα έχουν ως στόχο να αξιοποιηθεί με τον καλύτερο δυνατό τρόπο η ιστορία των Μαθηματικών. Η αξιοποίηση της ιστορίας των Μαθηματικών έχει γίνει διεθνώς αντικείμενο συστηματικών μελετών. Η θετική συμβολή στοιχείων από την ιστορία των Μαθηματικών τεκμηριώνεται σε τρεις κατηγορίες επιχειρημάτων:

Εικόνα Γ. 1

Η παράγραφος που προηγείται βρίσκεται στο βιβλίο του εκπαιδευτικού της Γ΄ γυμνάσιου στη σελίδα 10. Παρατηρείται ότι γίνεται ξεχωριστή αναφορά στην Ιστορία των Μαθηματικών και της χρησιμότητας της.

α) Προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών και συμβάλλει στη συγκρότηση μιας θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά.
β) Αναδεικνύει και υπογραμμίζει τον ανθρώπινο χαρακτήρα της μαθηματικής δραστηριότητας ανά τους αιώνες.
γ) Συνεισφέρει στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και προβλημάτων, αναδεικνύοντας όχι μόνο τα πλαίσια και τις συνθήκες προέλευσης τους αλλά και τους όρους της εξέλιξής τους.

Τα θέματα αυτά, καθώς και όσα επιπλέον αναφέρονται στο βιβλίο του καθηγητή δεν μπορούν να θεωρηθούν ολοκληρωμένες μελέτες και γι' αυτό υπάρχουν βιβλιογραφικές αναφορές για όσους μαθητές και καθηγητές εκδηλώνουν ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Βιβλιογραφία

– *Η ιστορία των Μαθηματικών ως μέσο διδασκαλίας των μαθηματικών στο Δημοτικό και το Γυμνάσιο, πρακτικά 1ου διημέρου διαλόγου για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, επιμέλεια Δημήτρης Χασάπης, Θεσσαλονίκη 8-9 Μαρτίου 2002, (διάφορα άρθρα).*

Εικόνα Γ. 2

Συνέχεια της σελίδας 10 στη σελίδα 11 στο βιβλίο του καθηγητή, αναφέρεται στα οφέλη της υιοθέτησης της ιστορικής προσέγγισης στη διδασκαλία.

3.4. Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών- Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών .

Το Δ.Ε.Π.Π.Σ./ Α.Π.Σ. των Μαθηματικών κυριαρχείται από την αρχή της διαθεματικότητας και της διεπιστημονικότητας. Η Ιστορία των Μαθηματικών είναι μέρος αυτής της προσπάθειας. Η τελευταία έκδοση των βιβλίων των Μαθηματικών του Γυμνασίου πραγματοποιήθηκε το 2010 και έγιναν οι απαραίτητες διορθώσεις στα ιστορικά σημειώματα της προηγούμενης έκδοσης του 2007. Μέσα σε αυτά τα νέα βιβλία έχουν εισαχθεί διαθεματικές δραστηριότητες, οι οποίες έχουν ως στόχο τη προώθηση της μάθησης μέσω της έρευνας και της συνεργασίας. Ο σκοπός των δραστηριοτήτων είναι η καλλιέργεια και ανάπτυξη της σκέψης των μαθητών και όχι η απλή αποστήθιση της ύλης.

Η διαθεματικότητα στα Μαθηματικά χρησιμοποιείται για να διευκολύνει τους μαθητές στη καλύτερη κατανόηση τους, να αλλάξει τη στάση τους απέναντι στο αντικείμενο και τη χρησιμοποίηση τους στη καθημερινή ζωή. Οι διαθεματικές δραστηριότητες υπάρχουν μέσα στα σχολικά εγχειρίδια για να χρησιμοποιηθούν, όμως για να θεωρηθούν επιτυχημένες πρέπει ο εκπαιδευτικός να τις προσαρμόσει στις ανάγκες της τάξης του και στους πόρους που διαθέτει.

Στο ΔΕΠΠΣ/ ΑΠΣ των Μαθηματικών του γυμνασίου ένας από τους ειδικούς σκοπούς είναι «*Η ανάδειξη της εφαρμοσιμότητας και πρακτικής χρήσης των Μαθηματικών από την αρχαιότητα ως τις μέρες μας, τόσο τις θετικές όσο και στις ανθρωπιστικές και κοινωνικοοικονομικές επιστήμες*». (ΔΕΠΠΣ/ ΑΠΣ 2003, σελ. 275)

Στην Α΄ γυμνασίου σαν ενδεικτικές δραστηριότητες για την κατανόηση των δυνάμεων α^{ν}, προτείνεται η μάθηση «*Της ιστορικής εξέλιξης των συστημάτων αρίθμησης και η μετάβαση από το ένα σύστημα στο άλλο*», (ΔΕΠΠΣ/ ΑΠΣ, σελ. 276). Για τον στόχο της *Πρόσθεσης και Αφαίρεσης κλασμάτων* προτείνεται η αναφορά των κλασμάτων στη Μουσική και την Αρχιτεκτονική, η οποία εμπλέκει και ιστορικά στοιχεία (στο ίδιο, σελ. 279).

Στη Β΄ γυμνασίου για την εμπέδωση της έννοιας $\sqrt{\alpha}$, προτείνεται «*Ο υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας από τους Βαβυλώνιους μέχρι σήμερα*». (ΔΕΠΠΣ/ ΑΠΣ, σελ. 291). Στην ίδια σελίδα επίσης προτείνεται « *Ο ρόλος του αριθμού στην ιστορία, την Τέχνη και την Επιστήμη*». Στην ενότητα των Πολυγώνων σαν προτεινόμενη δραστηριότητα αναφέρεται η ενασχόληση με τη δραστηριότητα του βιβλίου με τίτλο « *Τα κανονικά πολύγωνα στη Φύση και στην Τέχνη*» (όπως παραπάνω, σελ. 296).

Στην Γ΄ γυμνασίου στη ενότητα των Πολυγώνων προτείνεται η δραστηριότητα « *Η ομοιότητα στην Φύση και στην Τέχνη*», η οποία υιοθετεί και ιστορικά στοιχεία μεταξύ των άλλων (ΔΕΠΠΣ/ ΑΠΣ, σελ. 302).

Στα διαθεματικά σχέδια εργασίας το ΔΕΠΠΣ/ΑΠΣ προτείνει τα τεχνικά έργα όπως η διώρυγα του Σουέζ κ.α., την ομοιότητα από την Φύση και Επιστήμη, την υιοθέτηση από την Αρχιτεκτονική κατά τα διάφορα στάδια εξέλιξης των γεωμετρικών σχημάτων κλπ. Όλα τα παραπάνω αποτελούν διαθεματικές προσεγγίσεις που μπορούν να ενσωματώσουν ιστορικά στοιχεία μέσα στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Για τα ιστορικά σημειώματα στο βιβλίο του μαθητή αναφέρεται «*Τα ιστορικά σημειώματα δεν είναι απαραίτητο να εντάσσονται ξεχωριστά και στο τέλος της κάθε ενότητας. Μπορεί (όπου αυτό κρίνεται) να παρουσιάζονται (με σύντομο τρόπο) και σε ενδιάμεσα σημεία του κειμένου*» (σελ. 305).

Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών του 2003 το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας αμφισβητείται. Οι σύγχρονες αντιλήψεις θεωρούν τα Μαθηματικά όχι μόνο ως αποτέλεσμα, αλλά και ως διαδικασία. Για να εφαρμοστεί αυτό το νέο μοντέλο θεωρήθηκε απαραίτητη η εισαγωγή νέων τρόπων διδασκαλίας. Πλέον η δραστηριότητα μέσω της οποίας παράγεται το αναμενόμενο αποτέλεσμα βρίσκεται στο επίκεντρο.

Οι σύγχρονες αρχές και προσεγγίσεις της διδασκαλίας έρχονται σε αντίθεση με το παραδοσιακό μοντέλο του διαχωρισμού και κατάτμησης της γνώσης σε ξεχωριστά γνωστικά αντικείμενα χωρίς συνοχή (Φιλιππάκου, 2015). Οι δραστηριότητες που επιλέγονται λειτουργούν με βάση τους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Η χρησιμότητα της συγκεκριμένης προσέγγισης είναι να προσφέρει στους μαθητές τη δυνατότητα πολλαπλής προσέγγισης μιας έννοιας. Αυτή η δυνατότητα προσφέρεται μέσω των διάφορων τύπων αναπαραστάσεων, διαθεματικά ή με τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Η διαθεματικότητα συμβάλλει στη κατανόηση των Μαθηματικών, στην αλλαγή της στάσης έναντι στα Μαθηματικά και στη διευκόλυνση της χρήσης τους στη καθημερινή ζωή. Η Γαλέρη (2018) αναφέρει ότι η διαθεματική προσέγγιση μαζί με τη προσπάθεια ένταξης της Ιστορίας των Μαθηματικών, αποτελούν δύο από τις πιο σημαντικές καινοτομίες που το Δ.Ε.Π.Π.Σ. και το Α.Π.Σ. των Μαθηματικών εισάγουν στη Μαθηματική εκπαίδευση.

Σύμφωνα με τη Φιλιππάκου (2015), οι βασικές αρχές που βασίστηκε η προσπάθεια αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στα Προγράμματα Σπουδών και στα διδακτικά βιβλία, αναφέρονται παρακάτω:

Η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία είναι ωφέλιμη σε πολλά επίπεδα, όπως στην εισαγωγή νέων μαθηματικών εννοιών, στην ανάδειξη της εσωτερικής δομής των Μαθηματικών. Η αποκάλυψη των κοινωνικών και πολιτισμικών παραγόντων που επέδρασαν ιστορικά στη διαμόρφωση των Μαθηματικών αντικειμένων και η δημιουργία κινήτρων και θετικών στάσεων των μαθητών, είναι πρόσθετα οφέλη. Η μελέτη της Ιστορίας των Μαθηματικών από τους διδάσκοντες βοηθά στη πρόβλεψη και ερμηνεία των λαθών των μαθητών, έτσι βοηθούνται οι εκπαιδευτικοί στην ανακάλυψη και επιλογή αποτελεσματικών στρατηγικών διδασκαλίας. Η χρήση των μαθηματικών εργαλείων και του υλικού αποκτά πρόσθετη χρησιμότητα με την υιοθέτηση της ιστορικής προσέγγισης της διδασκαλίας.

Η επαφή με την Ιστορία των Μαθηματικών δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να γνωρίσουν αρχαίους πολιτισμούς και να κατανοήσουν τις ποικίλες κοινωνικές δομές τους. Μέσω της ιστορικής προσέγγισης κατανοούν και εκτιμούν τον τρόπο που τα Μαθηματικά χρησιμοποιήθηκαν και αναπτύχθηκαν από τους διάφορους λαούς στο πέρασμα του χρόνου. Επίσης, η ενσωμάτωση της Ιστορίας στα σχολικά Μαθηματικά διευκολύνει σημαντικά τη πολυπολιτισμική προσέγγιση της διδασκαλίας και αποτελεί έναν χρήσιμο τρόπο ανάδειξης των συνδέσεων που υπάρχουν μεταξύ των διάφορων μαθηματικών περιοχών. Στα σύγχρονα Αναλυτικά Προγράμματα προωθείται η σύνδεση των Μαθηματικών με άλλα επιστημονικά πεδία. Η χρήση της Ιστορίας λειτουργεί ενισχυτικά σε αυτές τις διασυνδέσεις.

3.5. Κριτική του ιστορικού υλικού που περιέχεται στα σχολικά βιβλία.

Μετά τη καταγραφή των ιστορικών σημειωμάτων στα σχολικά βιβλία και στα βιβλία του εκπαιδευτικού, ακολουθεί η κριτική τους. Σε έρευνα που διεξάχθηκε στα βιβλία του Δημοτικού από τη Μιόγλου (2017), αναφέρεται ότι το ιστορικό υλικό που περιέχεται στα σχολικά βιβλία δεν ακολουθεί κάποια ομοιογένεια. Συγκεκριμένα, στη Β΄ Δημοτικού δεν υπάρχει καθόλου ιστορικό υλικό, στη Δ΄ και Ε΄ Δημοτικού υπάρχουν ελάχιστα ιστορικά σημειώματα, στην Α΄ δημοτικού μικρός αριθμός και ικανοποιητικός αριθμός υπάρχει στις Γ΄ και ΣΤ΄ τάξεις.

Ο ρόλος των ιστορικών σημειωμάτων στο Δημοτικό είναι περισσότερο πληροφοριακός έως διακοσμητικός και σπάνια έχει ως στόχο τη κατανόηση της ενότητας. Στο βιβλίο του δασκάλου γίνονται λίγες αναφορές για τον τρόπο χρησιμοποίησης των ιστορικών σημειωμάτων και το σχεδιασμό των κατάλληλων διαθεματικών δραστηριοτήτων, ενώ στο Δ.Ε.Π.Π.Σ./ Α.Π.Σ. περιέχονται ακόμη λιγότερες αναφορές για τις δραστηριότητες (Μιόγλου, 2017).

Στο Γυμνάσιο η ένταξη της Ιστορίας των μαθηματικών γίνεται με πιο συστηματικό τρόπο. Η Φιλιππάκου (2015) αναφέρει ότι αρκετά ιστορικά σημειώματα δεν παρέχουν μαθηματικά ερεθίσματα στους μαθητές. Τα σχολικά βιβλία διδάχθηκαν για πρώτη φορά το σχολικό έτος 2007-2008 και περιείχαν πολλά λάθη. Στην επόμενη έκδοση το 2010 διορθώθηκαν τα λάθη, όμως ακόμη πολλά ιστορικά σημειώματα είναι καθαρά πληροφοριακά χωρίς να ενεργοποιούν τον μαθητή, ενώ κάποια άλλα έχουν τοποθετηθεί σε λάθος θέση στην ενότητα αφήνοντας αδιάφορους τους μαθητές. Σε αυτό το σημείο να σημειωθεί ότι το σημαντικό δεν είναι η θέση του ιστορικού σημειώματος στην ενότητα, αλλά ο τρόπος που θα ενσωματωθεί στη διδασκαλία της.

Έκτος από το βιβλίο του μαθητή υπάρχει και το βιβλίο του καθηγητή. Μέσα στο βιβλίο του καθηγητή απουσιάζουν οι διδακτικές κατευθύνσεις που θα βοηθήσουν τον εκπαιδευτικό να ενσωματώσει τα ιστορικά σημειώματα με επιτυχία στη διδασκαλία. Σύμφωνα με τη Φιλιππάκου (2015), μέσα στο βιβλίο του εκπαιδευτικού δεν αποσαφηνίζεται ο τρόπος με τον οποίο εμπλέκονται οι μαθητές με τις διαθεματικές δραστηριότητες. Δεν αναφέρεται αν οι διαθεματικές δραστηριότητες διδάσκονται ως ανεξάρτητες ενότητες ή μέσα στη διδασκαλία της ενότητας. Αν περιέχονται στο μάθημα οι δραστηριότητες, δεν αποσαφηνίζεται πως πρέπει να γίνεται η εισαγωγή τους και το ρόλο του εκπαιδευτικού και του μαθητή κατά την ενασχόληση τους.

Μέσα στο βιβλίο του καθηγητή βρίσκονται μικρές αναφορές σε ιστορικά στοιχεία και παραπομπές σε συνδέσμους στον παγκόσμιο ιστό, όπου ο εκπαιδευτικός μπορεί να επιλέξει με ποιο κομμάτι της Ιστορίας θα ασχοληθεί (Γαλέρη, 2018). Ο εκπαιδευτικός που δεν είναι κατάλληλα καταρτισμένος δεν μπορεί να λάβει μεγάλη χρησιμότητα από αυτές τις αναφορές. Ο εκπαιδευτικός χρειάζεται ένα βιβλίο που θα είναι οδηγός και θα του παρέχει την υποστήριξη που χρειάζεται.

Τα ιστορικά σημειώματα συμβάλλουν στον εμπλουτισμό του μαθήματος και έχουν ως στόχο την υποκίνηση των μαθητών. Η υποκίνηση των μαθητών συμβαδίζει με τον κύριο στόχο του Αναλυτικού Προγράμματος για την ένταξη της Ιστορίας, ο οποίος είναι η τόνωση του ενδιαφέροντος των μαθητών και η θετική στάση τους απέναντι στα Μαθηματικά (Σπηλιοπούλου, Διακογιώργη & Παπαντωνίου, 2009, στο Γαλέρη, 2018).

Στα βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου περιέχονται συνολικά 65 ιστορικά σημειώματα. Στην Α΄ Γυμνασίου περιέχονται 33 ιστορικά σημειώματα, ενώ στη Β΄ Γυμνασίου 18 και 14 στη Γ΄ τάξη αντίστοιχα. Στο βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου οι ιστορικές αναφορές δίνονται ως βάση για προβλήματα, ενώ αυτό συμβαίνει ελάχιστα στις άλλες δύο τάξεις (Γαλέρη, 2018). Είναι φυσικό η έμφαση να δίνεται στη μεγαλύτερη τάξη γιατί οι μαθητές είναι πιο ώριμοι νοητικά και έχουν διαμορφώσει μια σωστή αίσθηση του παρελθόντος.

Σύμφωνα με τη Γαλέρη (2018) τα πορτραίτα χρησιμοποιούνται σε μεγάλο βαθμό στην Α΄ Γυμνασίου, ενώ τα πρόσωπα σε δράση αναπαριστώνται στη Γ΄ Γυμνασίου. Σε σχέση με τη διδακτική λειτουργία των ιστορικών σημειωμάτων στην Α΄ και Β΄ Γυμνασίου, οι ιστορικές αναφορές δεν παρέχουν κάποιο λειτουργικό διδακτικό ρόλο. Για τη Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου οι αναφορές έχουν ρόλο εισαγωγικό, προετοιμάζοντας τους μαθητές για αυτά που θα διδαχθούν. Ειδικά, για τη Γ΄ Γυμνασίου η Ιστορία χρησιμοποιείται ως βάση για τις μαθησιακές δραστηριότητες και υποστηρίζεται από τη παρουσία προτάσεων για τη χρήση στο βιβλίο του εκπαιδευτικού.

Όσον αφορά στις αναφορές των μαθηματικών επιτευγμάτων των διάφορων πολιτισμών, στην Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου οι αναφορές προέρχονται μόνο από τα Μαθηματικά της Αρχαίας Ελλάδας. Στη Β΄ γυμνασίου γίνεται μια ίση κατανομή από ελληνικά μαθηματικά επιτεύγματα και επιτεύγματα άλλων πολιτισμών.

Οι ιστορικές αναφορές των διδακτικών βιβλίων θα πρέπει να είναι έγκυρες και να εξυπηρετούν τους στόχους της ενότητας στην οποία ενσωματώνονται (Θωμαΐδης, 2008 στο Γαλέρη, 2018). Η Γαλέρη (2018) και η Φιλιππάκου (2015) αναφέρουν ότι τα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών στη πρώτη έκδοση του το 2007 είχαν αρκετά λάθη, τα οποία όμως στην επόμενη έκδοση του 2010 διορθώθηκαν. Τα ιστορικά σημειώματα που περιέχονται σε αυτά τα σχολικά βιβλία στη πλειοψηφία τους δεν περιέχουν μαθηματικά ερεθίσματα. Διακρίνεται μια προχειρότητα από τη πλευρά των συγγραφέων για την ικανοποίηση των σχετικών προϋποθέσεων που όριζε η προκήρυξη του διαγωνισμού συγγραφής των βιβλίων, στην έκδοση του 2007.

Όμως να σημειωθεί ότι τα ιστορικά σημειώματα του Γυμνασίου απευθύνονται σε αναπτυσσόμενους ανθρώπους. Είναι φυσικό η Γ΄ Γυμνασίου να έχει τις περισσότερες και πιο δομημένες δραστηριότητες γιατί ο μαθητής σε αυτή την ηλικία έχει διαμορφώσει μια αρκετά καλή αίσθηση του παρελθόντος και είναι πιο ώριμος γνωστικά από τον μαθητή της Α΄

Γυμνασίου. Επίσης, να αναφερθεί ότι ο εκπαιδευτικός έχει έναν βαθμό ελευθερίας στη διδασκαλία. Αν επιθυμεί να διδάξει μια ενότητα με δραστηριότητες που υιοθετούν την ιστορική προσέγγιση της διδασκαλίας σε μικρότερες τάξεις, δεν θα αντιμετωπίσει κάποια συνέπεια. Όμως η οργάνωση μιας διδασκαλίας με την ιστορική προσέγγιση ή κάποιας άλλης διαθεματικής δραστηριότητας που δεν αναφέρονται στις οδηγίες του βιβλίου του εκπαιδευτικού απαιτεί προσωπικό χρόνο και έρευνα.

Η Φιλιππάκου (2015) υποστηρίζει ότι για να επιτελέσουν τα ιστορικά σημειώματα επιτυχημένα το ρόλο τους, θα πρέπει να γίνει μια πιο σωστή επιλογή των ιστορικών σημειωμάτων και να δίνονται οι κατάλληλες κατευθύνσεις σχετικά με την αξιοποίηση τους στους εκπαιδευτικούς. Δηλαδή, θα πρέπει να αλλάξει η φύση των ιστορικών σημειωμάτων από πληροφοριακά στη πλειοψηφία τους, να εμπλέκουν σε δραστηριότητες και να ενεργοποιούν το ενδιαφέρον των μαθητών. Μια άλλη παρατήρηση είναι ότι μόνο στη Β΄ Γυμνασίου βρίσκονται ιστορικά επιτεύγματα άλλων πολιτισμών. Η παρούσα εποχή χαρακτηρίζεται από πολυπολιτισμικότητα, χρήσιμο θα ήταν και τα σχολικά βιβλία να ακολουθούν το πνεύμα της εποχής.

Τα ιστορικά στοιχεία για τις μαθηματικές έννοιες θα πρέπει να παρατίθενται τη στιγμή που διδάσκονται οι έννοιες. Αν διδάσκεται η ανακάλυψη ενός σπουδαίου μαθηματικού, να αναφέρονται ταυτόχρονα και λίγα λόγια για τη ζωή του, το χαρακτήρα του και τα επιτεύγματα του. Με αυτό τον τρόπο επηρεάζεται θετικά ο μαθητής προς το αντικείμενο της διδασκαλίας (Φιλιππάκου, 2015). Οι ιστορικές αναφορές στη βιογραφία των μεγάλων μαθηματικών θα πρέπει να γίνονται με προσοχή γιατί δεν πρέπει να δοθούν ωραιοποιημένα και αναληθή στοιχεία. Ο στόχος δεν είναι η θεοποίηση της αυθεντίας αλλά να δειχθεί ότι και οι μεγάλοι μαθηματικοί ήταν άνθρωποι με πλεονεκτήματα και αδυναμίες.

Είναι θετικό να διδάσκονται οι μαθητές, υπό τη μορφή Ιστορίας μια ώρα κάθε εβδομάδα τις βιογραφίες των μεγάλων μαθηματικών, ώστε να δημιουργηθεί μια θετική στάση προς τα Μαθηματικά (Φιλιππάκου, 2015). Εδώ πρέπει να γίνει σαφές ότι η διδακτική προσέγγιση που βασίζεται στο σύνολο της διδακτέας ύλης είναι ανέφικτη και μη απαραίτητη. Η ιστορική προσέγγιση είναι αρκετό να χρησιμοποιηθεί σε ένα μικρό μέρος της ύλης για να έχει ευεργετικές συνέπειες για τους μαθητές (Τζανάκης, 2009).

Η Ιστορία των Μαθηματικών θα πρέπει να βρίσκεται στην εισαγωγή κάθε μαθήματος. Οι μαθητές θα επιφορτίζονται με το έργο να βρουν πληροφορίες σχετικά με την έννοια που διαπραγματεύεται το ιστορικό σημείωμα και στη συνέχεια θα ακολουθεί η εισαγωγή της έννοιας από τον εκπαιδευτικό (Φιλιππάκου, 2015). Η παραπάνω δραστηριότητα εμπλέκει ενεργά τους μαθητές στη μάθηση της μαθηματικής έννοιας. Ωστόσο, τα ιστορικά σημειώματα είναι δυνατό να περιέχονται στο τέλος της ενότητας, αλλά και σε ενδιάμεσα σημεία του κειμένου, καθώς το σημαντικό δεν είναι η θέση τους αλλά ο τρόπος που θα επιτευχθεί η ενσωμάτωσης τους κατά τη διδασκαλία. Όπως ειπώθηκε παραπάνω, ο εκπαιδευτικός έχει ένα βαθμό ελευθερίας να ελιχθεί από το Α.Π.Σ., αν αυτός επιθυμεί να αρχίσει τη διδασκαλία με το ιστορικό σημείωμα και στη συνέχεια να ερευνήσουν οι μαθητές, υπάρχει αυτή η δυνατότητα.

3.6. Ανακεφαλαίωση

Σύμφωνα με τα παραπάνω ευρήματα διενεργείται μια ολοκληρωμένη προσπάθεια αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική, από τους επίσημους φορείς. Σε θεωρητικό επίπεδο το Δ.Ε.Π.Π.Σ/ Α.Π.Σ. της υποχρεωτικής εκπαίδευσης διακατέχεται από την διεπιστημονικότητα και τη διαθεματικότητα, της οποίας μέρος αποτελεί και η Ιστορία των Μαθηματικών.

Στα σχολικά βιβλία περιέχονται διαθεματικές δραστηριότητες που σκοπό έχουν την καλλιέργεια και ανάπτυξη της σκέψης των μαθητών. Τα βιβλία των μαθηματικών του Γυμνασίου, με τη νέα προσέγγιση της εκπαίδευσης εκδόθηκαν το 2007. Αυτή η πρώτη έκδοση περιείχε λάθη οπου τα περισσότερα βρίσκονταν στα ιστορικά σημειώματα. Στην έκδοση του 2010 τα λάθη διορθώθηκαν.

Στο Δημοτικό τα ιστορικά σημειώματα έχουν πληροφοριακό και διακοσμητικό ρόλο. Στο βιβλίο του δασκάλου γίνονται λίγες αναφορές σχετικά με τη χρησιμοποίηση του ιστορικού υλικού που περιέχεται στο βιβλίο του μαθητή. Μέσα στο Δ.Ε.Π.Π.Σ./ Α.Π.Σ. περιέχονται ακόμη λιγότερες αναφορές σχετικά με τα ιστορικά σημειώματα και τις δραστηριότητες που τα αφορούν (Μιόγλου, 2017).

Στο Γυμνάσιο γίνεται πιο συστηματική χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών. Αν και στη πλειοψηφία τους τα ιστορικά σημειώματα καθαρά πληροφορούν, στη Γ΄ Γυμνασίου αποτελούν τη βάση για τα προβλήματα. Στο βιβλίο του καθηγητή απουσιάζουν οι διδακτικές κατευθύνσεις για τη πραγματοποίηση των δραστηριοτήτων στη τάξη. Επίσης, δεν δίνονται διευκρινήσεις σχετικά με τον τρόπο εμπλοκής των μαθηματικών και τους εκπαιδευτικού στις διαθεματικές δραστηριότητες στη σχολική τάξη (Φιλιππάκου, 2015).

Η απουσία επαρκών διδακτικών κατευθύνσεων δυσκολεύει το διδακτικό έργο των εκπαιδευτικών, στη χρησιμοποίηση του ιστορικού υλικού στη διδασκαλία τους και στη διενέργεια διαθεματικών δραστηριοτήτων που επιτάσσει το Α.Π.Σ. Με βάση τα παραπάνω αναδύεται η ανάγκη διερεύνησης των αντιλήψεων των καθηγητών των μαθηματικών του Γυμνάσιου για τα ιστορικά σημειώματα, που περιέχονται στα σχολικά βιβλία. Η παρούσα εργασία έχει το συγκεκριμένο σκοπό, δηλαδή τη διερεύνηση των πεποιθήσεων των καθηγητών του γυμνασίου σχετικά με το ιστορικό υλικό και τη χρησιμοποίηση του.

Κεφάλαιο 4. Το ερωτηματολόγιο της έρευνας- Αποτελέσματα

4.1. Σύνταξη Ερωτηματολόγιου.

Η παρούσα ερευνητική εργασία αποτελεί τη συνέχεια της εργασίας της Μιόγλου (2017) που αφορά την αξιοποίηση των ιστορικών σημειωμάτων στη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο. Οι ερωτήσεις στο ερωτηματολόγιο, που συντάχθηκε για τη παρούσα έρευνα, διατυπώθηκαν έτσι ώστε να αναδεικνύονται οι απόψεις των καθηγητών για τα ιστορικά σημειώματα στο Γυμνάσιο, και τη διδακτική τους αξιοποίηση από αυτούς. Όπως είναι φυσικό κάποιες ερωτήσεις της Μιόγλου παραλείφθηκαν γιατί ρωτούσαν το αυταπόδεικτο, π.χ. η ερώτηση της Μιόγλου από ποια κατεύθυνση προέρχονται και αν τους ενδιαφέρουν τα Μαθηματικά. Άλλες ερωτήσεις επίτηδες αποφεύχθηκαν, όπως π.χ. η ερώτηση για τη παροχή επιπλέον ιστορικού υλικού και ανάγκης επιμόρφωσης, για να διερευνηθεί αν οι ίδιοι οι καθηγητές το αναφέρουν. Το ερωτηματολόγιο της Μιόγλου (2017) περιέχεται στο παράρτημα της εργασίας.

Για τη σύνταξη του ερωτηματολογίου λήφθηκε υπόψη ο προβληματισμός της Φιλιππάκου (2015), που αναφέρεται στην ενότητα 4,2. «*Ο καθηγητής των Μαθηματικών και η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη*». Η Φιλιππάκου (2015) αναφέρει ότι οι καθηγητές των Μαθηματικών δεν διδάσκονται Ιστορία των Μαθηματικών στις σπουδές τους. Όμως, τα τελευταία χρόνια έχει γίνει στροφή σε ορισμένα τμήματα και η Διδακτική και η Ιστορία των Μαθηματικών έχουν ενταχθεί μερικώς στο πρόγραμμα τους. Αν όμως οι μελλοντικοί καθηγητές των Μαθηματικών το παρακολουθήσουν είναι επιλογή τους.

Αναφέρεται επίσης ότι οι καθηγητές των Μαθηματικών ενδιαφέρονται ελάχιστα για την ιστορική εξέλιξη του αντικειμένου που διδάσκουν. Η έλλειψη ενδιαφέροντος σύμφωνα με τη Φιλιππάκου (2015) οφείλεται στους εξής λόγους:

1. Η ταχεία ανάπτυξη των θετικών επιστημών.
2. Η έλλειψη του διδακτικού χρόνου.
3. Οι καθηγητές Μαθηματικών θεωρούν αρκετές φορές ότι η ενασχόληση με τα ιστορικά σημειώματα αποτελεί χάσιμο χρόνου.
4. Οι μαθηματικοί δεν είναι ιστορικοί, άρα δεν είναι σίγουροι ότι παρουσιάζουν το θέμα σωστά.

5. Οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν κατάλληλη επιμόρφωση. Η ιστορική και διεπιστημονική γνώση που είναι απαραίτητες για την ενσωμάτωση της Ιστορίας στη διδακτική πράξη, δεν προσφέρονται στους καθηγητές Μαθηματικών. Κρίνεται απαραίτητη η επιμόρφωση κατά τη διάρκεια των βασικών πανεπιστημιακών σπουδών των εκπαιδευτικών και μέσα στην εργασιακή τους πορεία (Τζανάκης, 2009).
6. Δεν υπάρχει διαθέσιμό το κατάλληλο διδακτικό υλικό. Οι καθηγητές των μαθηματικών αναφέρουν ότι δεν υπάρχει αρκετό και κατάλληλο υλικό για να τους βοηθήσει να το ενσωματώσουν στη διδασκαλία τους (Tzanakis & Arcavi, et al, 2000). Τα βιβλία που παρέχονται στους καθηγητές για την αξιοποίηση των σχολικών βιβλίων, αδυνατούν να πληροφορήσουν και να κατευθύνουν σχετικά με την ενσωμάτωση της Ιστορίας σε συνθήκες σχολικής τάξης.
7. Η δομή και οι ασαφείς στόχοι του Αναλυτικού Προγράμματος δεν επιτρέπουν την αξιοποίηση των ιστορικών σημειωμάτων. Οι μαθητές στην ουσία προετοιμάζονται μόνο για τις εξετάσεις, χωρίς να κατανοούν τις μαθηματικές έννοιες σε βάθος.

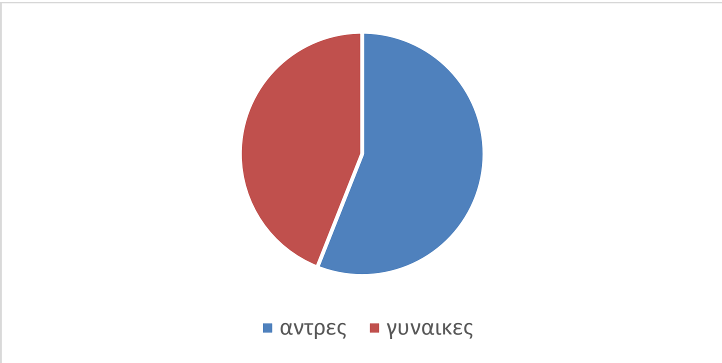
Συμπερασματικά, σύμφωνα με την εργασία της Φιλιππάκου (2015) οι καθηγητές των Μαθηματικών σε σχέση με την Ιστορία των Μαθηματικών, δεν έχουν διδαχθεί αντίστοιχα μαθήματα στο πανεπιστήμιο, δεν έχουν τις απαραίτητες γνώσεις και εφόδια και δεν έχουν πρόσβαση σε ιστορικό υλικό. Επίσης, η διαθεματικότητα και η Ιστορία των μαθηματικών που έχει εισαχθεί στο Αναλυτικό Πρόγραμμα έχει διαμορφώσει μια σύνθετη κατάσταση που οι καθηγητές αδυνατούν να διαχειριστούν μέσα στη σχολική τάξη γιατί δεν έχουν εμπειρία.

4.2. Ανάλυση του δείγματος.

Στη παρούσα έρευνα συμμετείχαν συνολικά 150 εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, το 60% εκ των οποίων ήταν άντρες και το 40% ήταν γυναίκες. Η συλλογή των δεδομένων επιτεύχθηκε με τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου από τους καθηγητές με τη παρουσία του ερευνητή. Η παρουσία του ερευνητή είχε ως σκοπό να παρέχει διευκρινήσεις στους ερωτώμενους. Η παρουσία του ερευνητή δεν επηρέασε τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου γιατί οι εκπαιδευτικοί οικειοθελώς το συμπλήρωσαν. Το χρονικό διάστημα συμπλήρωσης των ερωτηματολογίων ήταν από 15/02/0109- 15/06/2019. Τα δεδομένα αντλήθηκαν από καθηγητές Μαθηματικών που διδάσκουν σε τάξεις του Γυμνασίου στους νομούς Πιερίας, Κιλκίς και Θεσσαλονίκης Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται παρακάτω.

Φύλο

	Συχνότητα	Ποσοστό
Άντρας	84	60%
Γυναίκα	66	40%
Σύνολο	150	100%

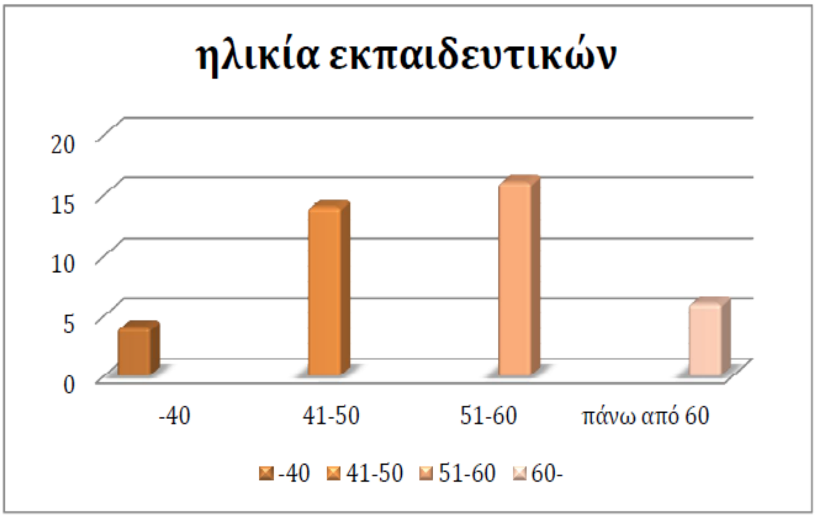


Διάγραμμα 1. Φύλο εκπαιδευτικών.

Ως προς την ηλικία τους το 10% των ερωτωμένων είναι έως 40 ετών, το 35% ανήκει στο ηλικιακό γκρουπ 41-50, το 40% είναι από 51-60 και οι ηλικίες άνω των 60 αντιπροσωπεύονται με το 15%.

Ηλικίες εκπαιδευτικών

Ηλικία	Ποσοστό
≤40	10%
41-50	35%
51-60	40%
≥60	15%
Σύνολο	100%

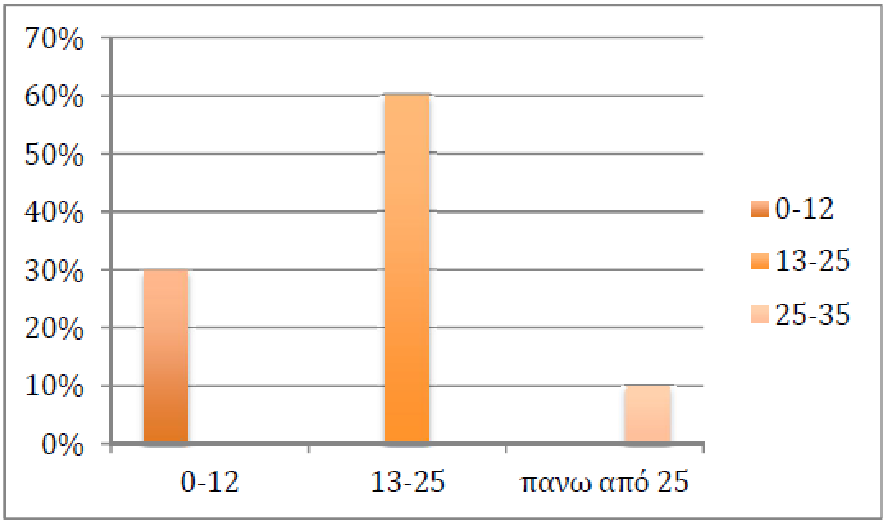


Διάγραμμα 2. Ηλικίες εκπαιδευτικών.

Ως προς τα χρόνια που δίδασκαν οι εκπαιδευτικοί το 30% του δείγματος διδάσκει έως 12 έτη, το 60% διδάσκει από 15-25 χρόνια και το 10% διδάσκει παραπάνω από 25 έτη.

Έτη διδασκαλίας

Έτη διδασκαλίας	Ποσοστό
≤12 έτη	30
15-25	60
>25	10
Σύνολο	100

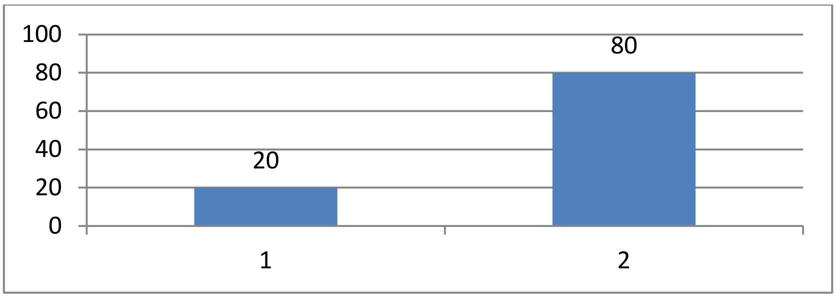


Διάγραμμα 3. Έτη υπηρεσίας εκπαιδευτικών.

Ως προς την εργασιακή τους κατάσταση το 80% του δείγματος αποτελείται από μόνιμους εκπαιδευτικούς και το 20% από αναπληρωτές.

Εργασιακή κατάσταση εκπαιδευτικών

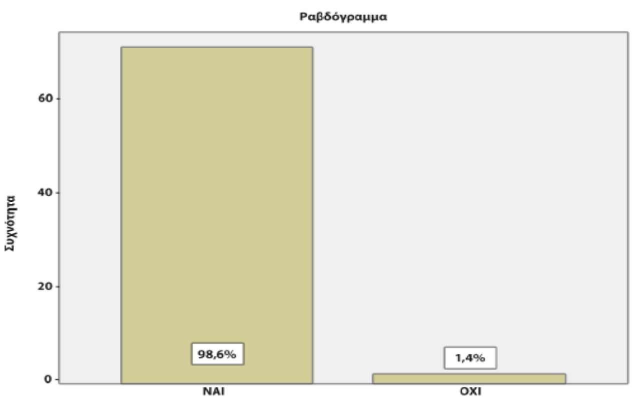
Εργασιακή κατάσταση	Ποσοστό
Μόνιμοι	80%
Αναπληρωτές	20%
Σύνολο	100%



Διάγραμμα 4. Εργασιακή κατάσταση εκπαιδευτικών.

<u>Ερώτηση 5.</u> *Το πρόγραμμα σπουδών σας περιείχε μάθημα που αφορούσε την Ιστορία των Μαθηματικών;*

Συχνότητα		Ποσοστό
Ναι	**148**	98,6%
Όχι	**2**	1,4%
Σύνολο	**150**	100%

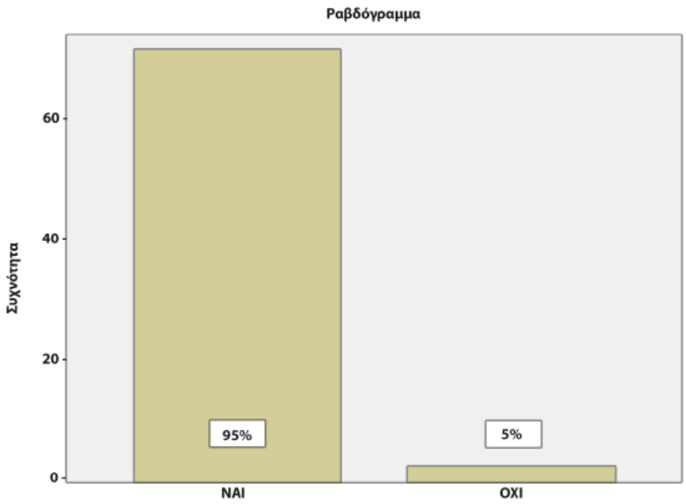


Διάγραμμα 5. Ποσοστό παρακολούθησης μαθήματος Ιστορίας των Μαθηματικών .

Το 99% περίπου των εκπαιδευτικών έχει διδαχθεί σχετικό μάθημα κατά τη διάρκεια των σπουδών τους. Αυτό δείχνει ότι οι καθηγητές των Μαθηματικών έχουν ήδη μια επαφή με την ιστορική προσέγγιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών.

4.3. Αποτελέσματα.

Ερώτηση 6. *Θεωρείτε ενδιαφέρουσα την χρήση της Ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία;*



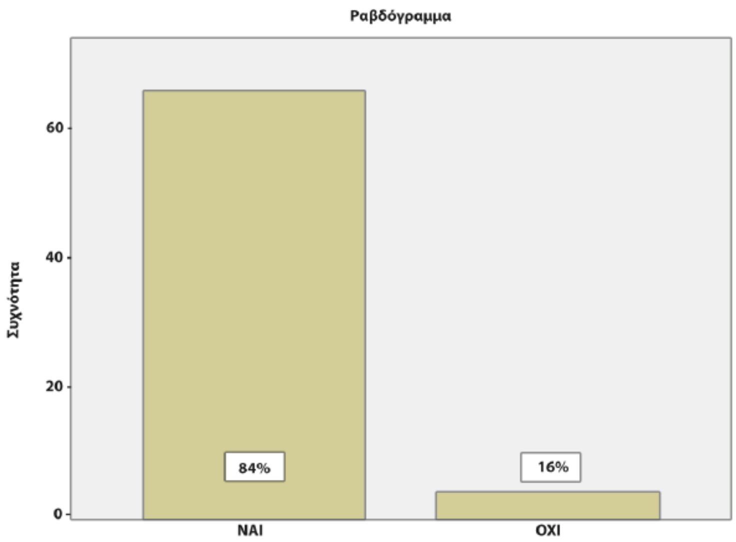
Διάγραμμα 6. Ποσοστό ενδιαφέροντος για την Ιστορία των Μαθηματικών.

Το 95% του δείγματος των Μαθηματικών δηλώνει ότι η Ιστορία των Μαθηματικών είναι ένα ενδιαφέρον αντικείμενο. Η συγκεκριμένη Ιστορία αφορά την εξέλιξη του πεδίου που διδάσκουν και είναι επόμενο να θεωρείται ενδιαφέρον αντικείμενο.

Ερώτηση 7. *Μέσα στα σχολικά εγχειρίδια περιέχονται ιστορικά σημειώματα τα οποία αποτελούν ιστορικό υλικό. Εσείς τα έχετε εντοπίσει;*

Γνώση για την ύπαρξη ιστορικών σημειωμάτων

Γνωρίζετε για τα ιστορικά σημειώματα	Μέχρι 12 έτη	Από 13 μέχρι 25 έτη	Πάνω από 25 έτη
Μαθηματικοί	90%	75%	60%



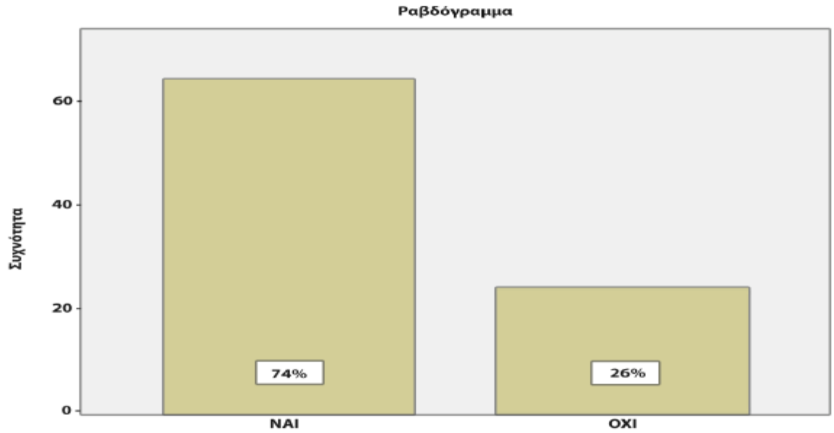
Διάγραμμα 7. Γνώση ύπαρξης ιστορικών σημειωμάτων.

Όπως παρατηρείται το μεγαλύτερο ποσοστό (84%) όλων των καθηγητών γνωρίζει για την ύπαρξη των ιστορικών σημειωμάτων. Το ποσοστό είναι μεγαλύτερο στα έτη υπηρεσίας έως 0-12 έτη. Αυτό το φαινόμενο ίσως οφείλεται στο γεγονός ότι διδάχθηκαν σχετικά μαθήματα στο πανεπιστήμιο και ότι βρίσκονται χρονικά πιο κοντά στην αποφοίτηση από αυτό. Επίσης η συγκεκριμένη ομάδα δηλώνει ότι δεν έχει γίνει καμία αναφορά στα θεωρητικά μέρη των επιμορφώσεων σχετικά με τα ιστορικά σημειώματα. Η χρήση του ιστορικού υλικού στα σχολικά βιβλία δεν επιλέγεται σε κάθε περίπτωση, όμως το 84% των ερωτηθέντων γνωρίζει για αυτά..

Ερώτηση 8. *Για ποιους λόγους έχετε χρησιμοποιήσει τα ιστορικά σημειώματα που περιέχονται στα σχολικά βιβλία;*

Λόγοι χρήσης ιστορικών σημειωμάτων στη διδασκαλία

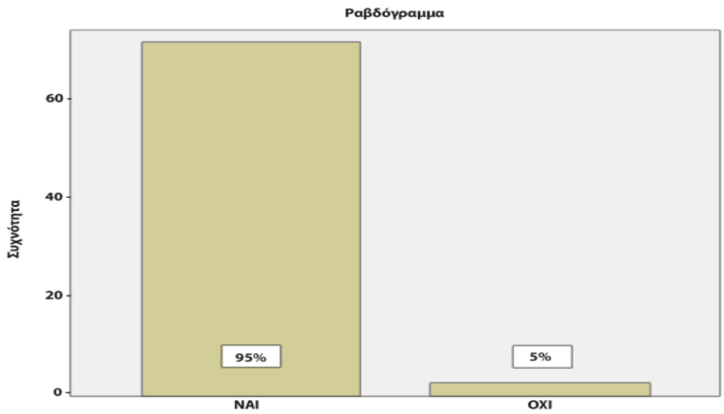
Ποιοι οι λόγοι χρήσης ιστορικών σημειωμάτων μέσα στην τάξη		
Λόγοι εφαρμογής	**N**	**%**
Προγραμματισμένη δράση μέσα στην τάξη	80	53%
Έλλειψη ασκήσεων στο βιβλίο	15	10%
Οι μαθητές έδειχναν αδιάφοροι	9	6%
Παραβατικότητα μέσα στην τάξη	5	3%
Άλλοι λόγοι	3	2%
Σύνολο	112 στους 150	74%



Διάγραμμα 8. Ποσοστό χρήσης ιστορικού υλικού.

Το 74% των ερωτηθέντων εκπαιδευτικών έχει κάνει χρήση του ιστορικού υλικού για τους λόγους που αναφέρονται. Το 53% των καθηγητών το χρησιμοποίησε για προγραμματισμένη δράση μέσα στη τάξη. Το 10% το χρησιμοποίησε λόγω έλλειψης ασκήσεων μέσα στη τάξη, το 6% γιατί οι μαθητές ήταν αδιάφοροι. Το 3% των καθηγητών το χρησιμοποίησε για να μην υπάρχει παραβατικότητα μέσα στη τάξη. Σε αυτό το σημείο ερωτήθηκαν οι εκπαιδευτικοί με ποιο τρόπο μειώθηκε η παραβατικότητα. Η απάντηση ήταν ότι η χρήση του ιστορικού υλικού ενεργοποίησε το ενδιαφέρον των μαθητών μέσω της περιέργειας. Η περιέργεια των μαθητών αναζωπύρωσε το ενδιαφέρον των μαθητών και δεν υπήρχε παραβατικότητα μέσα στη τάξη. Ουσιαστικά το 63% έχει χρησιμοποιήσει το ιστορικό υλικό προγραμματισμένα η επικουρικά. Το 1/3 περίπου των καθηγητών δε το χρησιμοποιεί καθόλου η το χρησιμοποιεί για μη διδακτικούς λόγους.

Ερώτηση 9. *Θεωρείτε ότι τα ιστορικά σημειώματα που περιέχονται στα σχολικά εγχειρίδια είναι χρήσιμα για την διδασκαλία;*

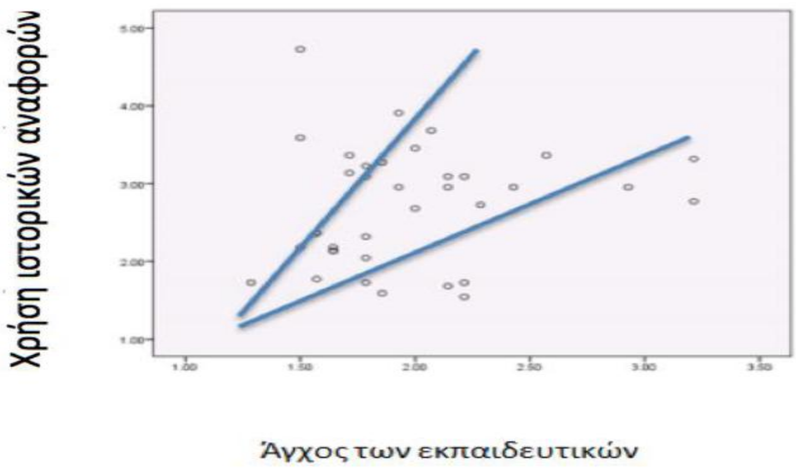


Διάγραμμα 9. Χρησιμότητα ιστορικού υλικού.

Το 95% θεωρεί ότι τα ιστορικά σημειώματα εμπλουτίζουν τη διδασκαλία, το 90% των εκπαιδευτικών υποστηρίζει ότι ενεργοποιούν το ενδιαφέρον των μαθητών. Στην ουσία το μεγαλύτερο μέρος των εκπαιδευτικών υποστηρίζει τουλάχιστον θεωρητικά την ιστορική προσέγγιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών.

Ερώτηση 10. *Αισθάνεστε αμηχανία όταν χρησιμοποιείτε τα ιστορικά σημειώματα στο πλαίσιο της διδασκαλίας σας;*

Ό όρος αμηχανία χρησιμοποιήθηκε γιατί οι ιστορικές αναφορές εμφανίζονται συνήθως στα διδακτικά βιβλία αποκομμένες από την υπόλοιπη μαθηματική ύλη, γεγονός που δημιουργεί στους εκπαιδευτικούς αμηχανία ως προς τον τρόπο διαχείρισης του συγκεκριμένου υλικού στη τάξη. Για τη διερεύνηση μεταξύ των μεταβλητών χρήσης ιστορικών πηγών και αμηχανίας στη διδασκαλία εφαρμόστηκε ο συντελεστής συσχέτισης Pearson r. Ο συντελεστής συσχέτισης βρέθηκε 0,32. Η σχέση των δύο μεταβλητών είναι ασθενής. Η παρατηρούμενη πιθανότητα από τον δίπλευρο έλεγχο είναι p= 0,821. Εφόσον η παρατηρούμενη πιθανότητα είναι μεγαλύτερη από το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας α= 0,05, προκύπτει ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική σχέση ανάμεσα στην αμηχανία (άγχος) των εκπαιδευτικών και στη χρήση των ιστορικών αναφορών.



Διάγραμμα 10. Σχέση αμηχανίας και χρήσης ιστορικών πηγών.

Το σύνολο των καθηγητών ανέφερε την ανάγκη επιμόρφωσης στις νέες διδακτικές μεθόδους στις παρατηρήσεις. Η ερμηνεία μετά από διευκρινήσεις που ζητήθηκαν, δεν είναι τόσο η έλλειψη αυτοπεποίθησης, αλλά η ανάγκη για πληροφόρηση και γνώση στη χρήση νέων διδακτικών μεθόδων που θα βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες και θα αλλάξουν τη στάση τους απέναντι στο αντικείμενο.

Σε αυτό το σημείο διερευνήθηκε αν υπάρχουν διαφορές στις απόψεις των εκπαιδευτικών, σχετικά με τα ιστορικά σημειώματα, μεταξύ αυτών που διδάχθηκαν σχετικό μάθημα στο πανεπιστήμιο και σε αυτούς που δεν διδάχθηκαν.

Για τη διερεύνηση των διαφορών ανάμεσα στις δύο ομάδες καθηγητών χρησιμοποιήθηκε t- test για ανεξάρτητα δείγματα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ο μέσος όρος αυτών που διδάχθηκαν σχετικό μάθημα ήταν m1= 2,97 και αυτών που δεν διδάχθηκαν m2= 1,36. Το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας ήταν a= 0,05. Η ανάλυση δεν έδειξε σημαντική διαφορά ανάμεσα στους μέσους όρους των δύο ομάδων. Συγκεκριμένα, είναι p= 0,948 οπότε δεν είναι στατιστικά σημαντική η διαφορά και το t= 0,085. Το συμπέρασμα είναι ότι δεν υπάρχει διαφορά στις απόψεις αυτών που διδάχθηκαν μάθημα σχετικά με την Ιστορία των Μαθηματικών και σε αυτούς που δεν παρακολούθησαν.

Κεφάλαιο 5. Συζήτηση- Συμπεράσματα.

Το αντικείμενο της έρευνας ήταν η διερεύνηση των στάσεων/ πεποιθήσεων των καθηγητών Μαθηματικών του Γυμνασίου, για τη διδακτική αξιοποίηση των ιστορικών σημειωμάτων των βιβλίων των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους. Όπως είναι αναμενόμενο, οι πεποιθήσεις των καθηγητών δεν μπορούν να μετρηθούν με μεγάλη αξιοπιστία και εγκυρότητα, γιατί η εκτίμηση των στάσεων αποτελεί ένα προβληματικό πεδίο. Για να ξεπεραστούν οι πιθανές αδυναμίες έγινε ένας συνδυασμός μεθόδων, με χρήση της βιβλιογραφίας, ανάλυση των σχολικών βιβλίων των Μαθηματικών και τις απαντήσεις σχετικού ερωτηματολογίου σε ένα δείγμα καθηγητών Μαθηματικών των νομών Κιλκίς, Θεσσαλονίκης και Πιερίας.

Τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας ήταν τα παρακάτω:

1. Χρησιμοποιούνται/ Αξιοποιούνται τα ιστορικά σημειώματα που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου από τους εκπαιδευτικούς στη διδασκαλία των Μαθηματικών;
2. Οι καθηγητές των Μαθηματικών του Γυμνασίου θεωρούν ότι η Ιστορία των Μαθηματικών θα εμπλουτίσει τη διδασκαλία τους;
3. Έχουν οι καθηγητές των Μαθηματικών το κατάλληλο υπόβαθρο και γνώσεις για να χρησιμοποιήσουν την Ιστορία των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους;
4. Το υλικό που παρέχεται στους εκπαιδευτικούς είναι επαρκές ώστε να τους βοηθήσει να συμπεριλάβουν την Ιστορία των Μαθηματικών στα διδακτικά εργαλεία/ βοηθήματα τους;

Οι απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα δίνονται συγκεντρωτικά στην ενότητα 5.2 Συμπεράσματα της εργασίας.

5.1. Δάσκαλοι vs Καθηγητές των Μαθηματικών.

Παρακάτω επιχειρείται μια σύγκριση μεταξύ των απαντήσεων του ερωτηματολογίου της εργασία της Μιόγλου και της παρούσας έρευνας. Υπενθυμίζουμε ότι η παρούσα εργασία αποτελεί τη συνέχεια της εργασίας της Μιόγλου (2017) σε καθηγητές Μαθηματικών που διδάσκουν σε Γυμνάσια. Και οι δύο εργασίες διερευνούν τις στάσεις των εκπαιδευτικών απέναντι στα ιστορικά σημειώματα, στην ουσία διερευνούν το ίδιο θέμα, αλλά σε διαφορετική βαθμίδα εκπαίδευσης η καθεμιά. Μετά από την ανάλυση των αποτελεσμάτων του ερωτηματολογίου και της σύγκρισης τους με αυτά των δασκάλων προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα:

Οι δάσκαλοι εκδηλώνουν ενδιαφέρον σε ποσοστό 86,5% για το αντικείμενο των Μαθηματικών. Αυτή η ερώτηση παραλήφθηκε στους καθηγητές, γιατί τα Μαθηματικά είναι το αντικείμενο τους. Στην ερώτηση αν τους ενδιαφέρει η Ιστορία ως γνωστικό αντικείμενο οι δάσκαλοι απάντησαν θετικά 73,7% και οι καθηγητές των Μαθηματικών 95%. Οι καθηγητές έχουν πιο θετική στάση απέναντι στην Ιστορία σχεδόν το σύνολο τους.

Στην ερώτηση αν έχουν εντοπίσει το ιστορικό υλικό στα σχολικά βιβλία οι δάσκαλοι απάντησαν θετικά το 75% και οι καθηγητές το 84% , πάλι υπερέχουν οι καθηγητές. Μια εξήγηση ίσως να βρίσκεται στο ότι οι δάσκαλοι διδάσκουν περισσότερα μαθήματα σε σχέση με τους καθηγητές και ίσως να μην δίνουν την ανάλογη σημασία στα περιεχόμενα του μαθήματος.

Οι δάσκαλοι και οι καθηγητές ερωτήθηκαν αν έχουν διδαχθεί σχετικό μάθημα με την Ιστορία των μαθηματικών στις σπουδές τους. Το 26,6% των δασκάλων και περίπου 98% των καθηγητών απάντησαν θετικά. Οπότε ο ισχυρισμός της Φιλιππάκου (2015), ότι οι εκπαιδευτικοί των Μαθηματικών δεν έχουν παρακολουθήσει σχετικό μάθημα με την Ιστορία των μαθηματικών δεν ευσταθεί, τουλάχιστον για τους καθηγητές. Τα πορίσματα στην εργασία της Φιλιππάκου προκύπτουν από τη βιβλιογραφική έρευνα που πραγματοποίησε στα πλαίσια της εργασίας της.

Για την αξιοποίηση του ιστορικού υλικού που περιέχεται στα σχολικά βιβλία απάντησε θετικά το 81,6% των δασκάλων και το 74% των καθηγητών. Οι δάσκαλοι αναφέρουν ότι χρησιμοποιούν το ιστορικό υλικό για καλύτερη κατανόηση μιας έννοιας, τη χρήση της στη καθημερινή ζωή και την αύξηση του ενδιαφέροντος από τους μαθητές. Υπάρχουν και οι δάσκαλοι που χρησιμοποιούν το ιστορικό υλικό απλά για εγκυκλοπαιδικούς λόγους. Οι δάσκαλοι που χρησιμοποιούν τα ιστορικά σημειώματα αναφέρουν ότι αυτά είναι ελάχιστα και θα επιθυμούσαν επιπλέον υλικό. Οι δάσκαλοι που δεν χρησιμοποιούν το ιστορικό υλικό αναφέρουν ότι υπάρχει περιορισμένος διδακτικός χρόνος. Οι καθηγητές χρησιμοποιούν τις ιστορικές αναφορές σε μεγαλύτερο ποσοστό σαν προγραμματισμένη δραστηριότητα, ακολουθεί η χρήση του λόγω έλλειψης ασκήσεων στο βιβλίο και τελευταίο ως μέσο μείωσης παραβατικότητας στη τάξη. Στο συγκεκριμένο σημείο ζητήθηκαν διευκρινήσεις από τους ερωτώμενους. Η μείωση της παραβατικότητας προκύπτει από την ενεργοποίηση του ενδιαφέροντος των μαθητών σχετικά με το παρελθόν μιας μαθηματικής έννοιας. Η περιέργεια των μαθητών οδηγεί στην αναζωπύρωση του ενδιαφέροντος τους και δεν παρατηρούνται περιστατικά αδιαφορίας και παραβατικότητας στη τάξη. Παρατηρείται ότι η χρήση των ιστορικών σημειωμάτων αφορά πιο διαδικαστικούς λόγους της διδασκαλίας στους καθηγητές από ότι στους δάσκαλους.

Σύμφωνα με τον Caselmann (1964, στο Πυργιωτάκης, 2000) οι καθηγητές είναι λογότροποι (Die Logotropen). Διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:

Α) Τους θεωρητικό- φιλοσοφικά προσανατολισμένους, αυτοί είναι συνεπαρμένοι από τις ιδέες τους και προσκολλώνται σε αυτές. Ξεχνούν ότι βρίσκονται απέναντι σε μαθητές.

Β) Αυτοί που είναι προσανατολισμένοι στην επιστημονική ειδίκευση τους. Είναι γοητευμένοι από την επιστήμη και την ειδικότητα τους και τη θεωρούν ρυθμιστικό παράγοντα των ενεργειών και πράξεων τους. Και αυτοί αγνοούν του μαθητές.

Οι δάσκαλοι είναι παιδότροποί (Die Pedotropen). Οι δάσκαλοι θέτουν στο επίκεντρο των ενεργειών και των πράξεων τους το ίδιο το παιδί. Τα προβλήματα και ενδιαφέροντα των μαθητών αποτελούν τα βασικό παράγοντα στην οργάνωση της διδασκαλίας. Κυρίαρχη θέση στη διαδικασία της διδασκαλίας έχει η διαπροσωπική σχέση και η συναισθηματική επικοινωνία και όχι η ύλη. Δεν υπάρχει αμιγής παιδότροπος και λογότροπος σύμφωνα με το Caselmann. Απλά θεωρεί χρήσιμο την υιοθέτηση στοιχείων και από τις δύο κατηγορίες (Caselmann, 1964, στο Πυργιωτάκης, 2000).

Η ερώτηση για το αν η χρήση των ιστορικών σημειωμάτων βελτιώνει τη διδασκαλία, το 1/3 των εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας απάντησε θετικά, ενώ οι μισοί περίπου δάσκαλοι απάντησαν ουδέτερα. Οι δάσκαλοι δεν είναι σίγουροι για τα οφέλη της υιοθέτησης της ιστορικής προσέγγισης στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Οι καθηγητές απάντησαν σε ποσοστό 95% ότι τα ιστορικά σημειώματα εμπλουτίζουν τη διδασκαλία και σε ποσοστό 90% ότι ενεργοποιούν το ενδιαφέρον των μαθητών. Ωστόσο, μόνο το 74% των καθηγητών τα χρησιμοποιεί, αυτό αποτελεί παράδοξο.

Οι δάσκαλοι ερωτήθηκαν αν χρειάζονται επιμόρφωση και οι καθηγητές αν έχουν αμηχανία σε σχέση με τη χρήση των ιστορικών πηγών. Ό όρος αμηχανία χρησιμοποιήθηκε γιατί οι ιστορικές αναφορές εμφανίζονται συνήθως στα διδακτικά βιβλία αποκομμένες από την υπόλοιπη μαθηματική ύλη, γεγονός που δημιουργεί στους εκπαιδευτικούς αμηχανία ως προς τον τρόπο διαχείρισης του συγκεκριμένου υλικού στη τάξη. Από τα αποτελέσματα προκύπτει ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική σχέση ανάμεσα στην αμηχανία των εκπαιδευτικών και στη χρήση των ιστορικών αναφορών.

Σχετικά με την ανάγκη επιμόρφωσης δεν τέθηκε ευθέως η ερώτηση στους καθηγητές. Παρά ταύτα το σύνολο των καθηγητών αναφέρθηκε σε αυτή την ανάγκη στις παρατηρήσεις του ερωτηματολογίου. Το 43,4% των δασκάλων ανέφερε πολύ- πάρα πολύ ότι χρειάζεται επιμόρφωση για την εφαρμογή της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Η Μιόγλου (2017) αναφέρει ότι αυτό δείχνει έλλειψη αυτοπεποίθησης στη χρήση της Ιστορίας. Οι δάσκαλοι ερωτήθηκαν αν θα ήταν πιο δεκτικοί στη χρήση του ιστορικού υλικού αν υπήρχαν περισσότερες πηγές και το 89,3 % απάντησε θετικά.

Οι καθηγητές ανέφεραν την επιμόρφωση στο σύνολο τους, όμως υπάρχει διαφορετική ανάγνωση στο αποτέλεσμα. Η ανάγκη πληροφόρησης και εκμάθηση νέων τρόπων διδασκαλίας είναι μέσα στα πλαίσια της εργασίας των εκπαιδευτικών. Η διδασκαλία των Μαθηματικών υιοθετεί νέες προσεγγίσεις μια από αυτές είναι και η ιστορική προσέγγιση. Η πληροφόρηση για αυτές τις εξελίξεις είναι ζωτικής σημασίας για τον εκπαιδευτικό και υποχρέωση του να ενημερωθεί για αυτές, ενδο-υπηρεσιακά ή μη.

Η ερώτηση με το πρόσθετο ιστορικό υλικό στου δασκάλους σύμφωνα με τη Μιόγλου (2017) φανερώνει έλλειψη αυτοπεποίθησης σχετικά με το πόσο καλά κατέχουν το αντικείμενο και πόσο είναι διατεθειμένοι να αφιερώσουν προσωπικό χρόνο, ο οποίος απαιτείται για να προετοιμάσουν το κατάλληλο υλικό μόνοι τους. Οι καθηγητές δεν αναφέρθηκαν καθόλου στη ποσότητα του ιστορικού υλικού μέσα στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου. Εδώ να επισημάνουμε ότι η αλλαγή των βιβλίων που επιθυμούν οι δάσκαλοι αποτελεί κόστος σε πόρους και εργατοώρες. Η προσέγγιση των καθηγητών τείνει προς τη αξιοποίηση των υφιστάμενων μέσων με βασική προϋπόθεση την ανάγκη της επιμόρφωσης τους.

5.2. Συμπεράσματα.

Η αξιοποίηση των ιστορικών σημειωμάτων στη διδασκαλία δεν θα πρέπει να περιορίζεται μόνο στην ενσωμάτωση ή στη παρουσίαση της λύσης ιστορικών προβλημάτων, αλλά και στη χρησιμοποίηση δραστηριοτήτων μέσα από την Ιστορία των Μαθηματικών. Ο στόχος αυτών των δραστηριοτήτων είναι η ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών. Τα Α.Π. των Μαθηματικών έχουν μετατοπίσει την έμφαση τους από το αποτέλεσμα στη δραστηριότητα. Η διεπιστημονικότητα και διαθεματικότητα είναι οι αρχές που διατρέχουν τα σύγχρονα Α.Π.

Στις απαντήσεις του ερωτηματολογίου που δόθηκε στους καθηγητές η χρήση των δραστηριοτήτων που προκύπτουν από τα ιστορικά σημειώματα δεν αναφέρθηκε ούτε μια φορά. Αυτό φανερώνει ότι οι εκπαιδευτικοί δεν επιχειρούν να ασχοληθούν με το αντικείμενο. Οπότε, τα ευρήματα της έρευνας συμφωνούν με τη Φιλιππάκου (2015) που αναφέρει ότι οι καθηγητές του Γυμνασίου δεν ασχολούνται με τις δραστηριότητες. Η Γαλέρη (2018) αναφέρει ότι ο πειραματισμός των μαθητών με τη χρήση δραστηριοτήτων εντοπίζεται σε ένα μικρό ποσοστό εκπαιδευτικών. Για τις διαθεματικές εργασίες/ δραστηριότητες εκδηλώνεται σχεδόν αδιαφορία. Από τη μη αναφορά των δραστηριοτήτων στις απαντήσεις του ερωτηματολογίου της παρούσας έρευνας, προκύπτει ότι αυτές δεν αποτελούν προτεραιότητα, ούτε καν εναλλακτική. Οι δραστηριότητες για τη διδασκαλία αποτελούν ένα εργαλείο που υφίσταται σε θεωρητικό επίπεδο. Δεν εκδηλώνεται αλλαγή της διδακτικής συμπεριφοράς των εκπαιδευτικών.

Η διδακτική συμπεριφορά των εκπαιδευτικών αποτελεί παγιωμένη πρακτική και δεν δύναται να αλλάξει χωρίς συντονισμένη προσπάθεια. Μέσα σε αυτό πρέπει να προστεθούν και τα εμπόδια που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί. Η έκταση της ύλης και η δυνατότητα ολοκλήρωσης της αποτελούν το μεγαλύτερο εμπόδιο. Ο διδακτικός χρόνος ήδη είναι περιορισμένος και οι δραστηριότητες εκτός ότι καταναλώνουν προσωπικό χρόνο των καθηγητών για το σχεδιασμό τους, καταναλώνουν και πολύτιμο διδακτικό χρόνο. Διαφαίνεται ότι δίνεται μια έμφαση στη ποσότητα των γνώσεων που πρέπει να διδαχθούν οι μαθητές και δευτερευόντως στη ποιοτική πρόσληψη τους.

Η χρήση των δραστηριοτήτων έχει ως σκοπό την αυτό-ανακάλυψη της γνώσης από τους μαθητές, αντί της παθητικής πρόσληψης της. Για την επιτυχή διενέργεια των δραστηριοτήτων απαιτούνται οι κατάλληλοι διδακτικοί πόροι. Τα βιβλία των καθηγητών και το Α.Π. δεν παρέχουν επαρκή υποστήριξη για μια επιτυχημένη πραγματοποίηση των καινοτομιών. Στη περίπτωση της χρησιμοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών παρατηρείται έλλειψη του κατάλληλου διδακτικού υλικού ενώ παράλληλα δηλώνεται η επιθυμία των καθηγητών για επιμόρφωση στο αντικείμενο. Για την επίλυση των παραπάνω θεμάτων απαιτείται η εκμετάλλευση ανθρώπινων και υλικών πόρων, τα οποία εναπόκεινται στην ευθύνη της πολιτείας.

Τα ευρήματα της έρευνας έρχονται σε σύγκρουση με τα ευρήματα της εργασίας της Φιλιππάκου (2015). Υπενθυμίζουμε ότι η εργασία της Φιλιππάκου (2015) ασχολήθηκε με την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στο Δ.Ε.Π.Π.Σ/ Α.Π.Σ. και τα σχολικά βιβλία του Δημοτικού- Γυμνασίου. Τα πορίσματα της συγκεκριμένης έρευνας αποτελούν αποτελέσματα βιβλιογραφικής έρευνας. Σύμφωνα με την ίδια, οι καθηγητές υποστηρίζουν ότι η Ιστορία των Μαθηματικών δεν είναι Μαθηματικά και μπορεί να προκληθεί σύγχυση στους μαθητές, ενώ προϋποθέτει πολύ διδακτικό χρόνο. Ένα άλλο εμπόδιο είναι ότι οι μαθηματικοί ελάχιστα ενδιαφέρονται για την ιστορική εξέλιξη του αντικείμενου τους λόγω της ραγδαίας ανάπτυξης των θετικών επιστημών. Οι μαθηματικοί προτιμούν να κοιτούν προς τα εμπρός εξελικτικά, αγνοώντας τα οφέλη της ιστορικής προσέγγισης. Σύμφωνα όμως με την έρευνα που διεξάχθηκε στη παρούσα εργασία, οι καθηγητές δεν ανέφεραν ότι η χρήση της Ιστορίας των μαθητών θα προκαλέσει σύγχυση στους μαθητές και είχαν θετική στάση απέναντι στη χρησιμότητα της σε ποσοστό 95%.

Η παρούσα εργασία αποτελεί ποσοτική έρευνα και τα αποτελέσματα που εξάχθηκαν είναι προϊόν στατιστικής ανάλυσης. Μια πιθανή εξήγηση ίσως να βρίσκεται στο ότι η Φιλιππάκου χρησιμοποίησε παλαιότερη βιβλιογραφία, εξάλλου η εργασία της πραγματοποιήθηκε το 2015 και η παρούσα εργασία αναλύει δεδομένα που συλλέχθηκαν το 2019. Ένας άλλος λόγος θα μπορούσε να είναι ότι οι εκπαιδευτικοί που απάντησαν στο ερωτηματολόγιο της έρευνας, δεν έδωσαν ειλικρινείς απαντήσεις. Το ερωτηματολόγιο όμως ήταν ανώνυμο, και δεν είχαν κανένα λόγο να μην είναι ειλικρινείς στις απαντήσεις τους.

Οι δάσκαλοι, που ερωτήθηκαν στην έρευνα της Μιόγλου (2017), ενδιαφέρονται για το πεδίο των Μαθηματικών και της Ιστορίας σε μεγάλο ποσοστό. Ωστόσο, μόνο το 17% των εκπαιδευτικών έχει αξιοποιήσει ικανοποιητικά τα ιστορικά σημειώματα των βιβλίων. Αυτοί που έχουν χρησιμοποιήσει ελάχιστα το ιστορικό υλικό ισχυρίζονται ότι υπάρχει έλλειψη διδακτικού χρόνου. Σχεδόν το σύνολο των ερωτώμενων, που συμμετείχαν στην έρευνα της Μιόγλου (2017), αναγνωρίζει την ανάγκη για επιμόρφωση σχετικά με τη χρήση ιστορικού υλικού στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Αυτό δείχνει ότι δεν είναι το μεγαλύτερο εμπόδιο η έλλειψη χρόνου, αλλά η έλλειψη αυτοπεποίθησης λόγω μη επιμόρφωσης. Οι καθηγητές γυμνασίου αν και έχουν αμηχανία σχετικά με τη χρήση ιστορικού υλικού, αυτό δεν τους αποτρέπει από τη χρησιμοποίηση του.

Μέσα στη σχολική πραγματικότητα οι εκπαιδευτικοί πρέπει να διαχειριστούν ένα σύνθετο πλέγμα καταστάσεων, το οποίο είναι δύσκολο να αντιμετωπιστεί. Η διαθεματική προσέγγιση, η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία, η εκπόνηση σχεδίων εργασίας και η Ιστορία των Μαθηματικών αποτελούν συνθήκες και απαιτήσεις με τις οποίες εκπαιδευτικοί δεν είναι εξοικειωμένοι. Παρά ταύτα, καλούνται να πραγματοποιήσουν τις παραπάνω καινοτομίες μέσα στη σχολική τάξη.

Οι έννοιες της διαθεματικής προσέγγισης, της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας, η εκπόνηση σχεδίων εργασίας και η Ιστορία των Μαθηματικών δεν εισάγονται για πρώτη φορά στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Το Αναλυτικό Πρόγραμμα θεσμοθετήθηκε το 2003, η εφαρμογή του ξεκίνησε το 2006 και βρισκόμαστε στο 2019. Το Αναλυτικό Πρόγραμμα εισάγοντας αυτές τις έννοιες απορρίπτει το μοντέλο της μετωπικής δασκαλοκεντρικής διδασκαλίας. Αυτό το μοντέλο όμως για τους εκπαιδευτικούς αποτελεί έναν γνωστό και ασφαλή τρόπο διδασκαλίας.

Οι καινοτομίες που θεσμοθετήθηκαν στην υποχρεωτική Ελληνική εκπαίδευση το 2003, για να υιοθετηθούν με επιτυχημένο τρόπο, θα πρέπει να μεταβληθεί η στάση των εκπαιδευτικών προς αυτές. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να πεισθούν για τη χρησιμότητα των σύγχρονων τρόπων διδασκαλίας των Μαθηματικών, και να τις υιοθετήσουν στη διδασκαλία τους μέσα στη σχολική τάξη. Η Φιλιππάκου (2015) αναφέρει ότι είναι αναγκαία η καθολική και συστηματική επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, στη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών μέσα στη μαθηματική εκπαίδευση. Η Γαλέρη (2018) υποστηρίζει ότι ο πρώτος και αναγκαίος όρος είναι η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στο νέο τρόπο αντιμετώπισης των καινοτομιών του Α.Π.

Η Γαλέρη (2018) ανέπτυξε ένα πρόγραμμα επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών για την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους μέσα στη σχολική τάξη. Πρόκειται για ένα πρόγραμμα που θα απευθύνεται στους εν ενεργεία εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η Ιστορία των μαθηματικών σε αυτό το πρόγραμμα θα διαδραματίσει το ρόλο του διαμεσολαβητή της γνώσης. Ο σκοπός είναι να προβληματιστούν οι εκπαιδευτικοί σχετικά, με τη κατασκευή των μαθηματικών εννοιών μέσα από ιστορικές πηγές. Με τη διαδικασία αυτή οι εκπαιδευτικοί θα έρθουν σε επαφή με τη διδακτική χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών μέσα στη διδασκαλία, και θα αποκτήσουν πολύτιμη εμπειρία σχετικά με τη χρησιμοποίηση της για την εκμάθηση μαθηματικών εννοιών. Με αυτό τον τρόπο θα υπερκεραστούν εμπόδια όπως η χαμηλή αυτοπεποίθηση των εκπαιδευτικών, η έλλειψη διδακτικού χρόνου και κατάλληλων πόρων.

Το πρόγραμμα επιμόρφωσης συνιστάται να πραγματοποιηθεί κατά τη διάρκεια ενός διδακτικού έτους, με δια ζώσης αλλά και εξ αποστάσεως συναντήσεις, κατά το πρότυπο της επιμόρφωσης στις Νέες Τεχνολογίες. Οι εκπαιδευτικοί θα μπορούν να παρακολουθούν το πρόγραμμα της επιμόρφωσης και παράλληλα να διδάσκουν στις τάξεις που έχουν αναλάβει. Αυτό δίνει τη δυνατότητα σύνδεσης των δεδομένων του επιμορφωτικού προγράμματος με τη καθημερινή διδακτική πρακτική, που θα ήταν χρήσιμο να πραγματοποιηθεί από τη πλευρά των εκπαιδευτικών.

Το παραπάνω πρόγραμμα αποτελεί μια ενεργητική εφαρμογή για την επίτευξη των στόχων του Αναλυτικού Προγράμματος στη διδακτική πρακτική. Το πρόγραμμα θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμο για την υιοθέτηση της ιστορικής προσέγγισης της διδασκαλίας των Μαθηματικών από τους εκπαιδευτικούς. Πρώτα από όλα, θα έφερνε τους εκπαιδευτικούς σε επαφή με την ιστορία των Μαθηματικών και τη διδακτική αξιοποίηση της. Ως άμεση συνέπεια, οι εκπαιδευτικοί θα αποκτούσαν εμπειρία στη χρήση της ιστορικής διδακτικής προσέγγισης. Αν και ο διδακτικός χρόνος δεν θα μεταβαλλόταν οι εκπαιδευτικοί θα ήταν πιο πρόθυμοι να πειραματιστούν στη σχολική τάξη.

Το επιμορφωτικό πρόγραμμα θα ήταν χρήσιμο αν υλοποιούνταν. Όμως ένα τέτοιο πρόγραμμα απαιτεί πολλούς ανθρώπινους και υλικούς πόρους. Η ευθύνη για την υλοποίηση του προγράμματος ανήκει στους επίσημους φορείς. Οι επίσημοι φορείς χαρακτηρίζονται από ανελαστικότητα και αργά αντανακλαστικά. Απόδειξη είναι ότι αναφέρεται η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών το 2019, για κάτι που θεσμοθετήθηκε στο Α.Π. το 2003.

Τα ιστορικά σημειώματα δεν θα πρέπει να περιορίζονται σε ιστορικές πληροφορίες, αλλά να συμβάλλουν στην κατανόηση των εννοιών που θα διδαχθούν (Fauvel & van Maanen, 2000). Τα ιστορικά σημειώματα θα πρέπει να παρέχουν ιδέες και υλικό για να οργανώνουν τη διδασκαλία και να παρακινούν τους μαθητές να μάθουν. Συνεπώς θα πρέπει να πληρούν δύο εύλογες απαιτήσεις: α) να είναι μαθηματικά και ιστορικά σωστά και β) να υποστηρίζουν τους στόχους των διδακτικών ενοτήτων που έχουν ενσωματωθεί.

Σύμφωνα με τους Thomaidis & Tzanakis (2009) αυτές οι απαιτήσεις παραβιάζονται. Το ιστορικό υλικό περιορίζεται σε βιογραφικές πληροφορίες, παρουσιάζεται με ανεπίσημο στυλ που εισάγεται με ξεχωριστά πλαίσια στο κείμενο. Το ιστορικό υλικό συνήθως υπογραμμίζει ιστορικά γεγονότα, και όχι το αντίστοιχο μαθηματικό περιεχόμενο. Βεβαίως, υπάρχουν και σχετικές δραστηριότητες ιδιαίτερα στη Γ΄ γυμνασίου, στην Α΄ γυμνασίου όμως είναι καθαρά ιστορικά γεγονότα. Εδώ να αναφερθεί ότι η συγκεκριμένη παρατήρηση αφορά τα βιβλία που εκδόθηκαν το 2007 και περιείχαν αρκετά λάθη στα ιστορικά σημειώματα. Η επόμενη έκδοση των βιβλίων που πραγματοποιήθηκε το 2010 περιείχε διορθωμένα τα ιστορικά σημειώματα.

Στο βιβλίο του εκπαιδευτικού υπογραμμίζεται η θετική συμβολή της Ιστορίας των Μαθηματικών, ιδιαίτερα στο βιβλίο της Ά γυμνασίου. Αν και παρέχεται σχετική βιβλιογραφία, ο τρόπος που θα μπορούσε να σχεδιαστεί η διδασκαλία με αναφορά στις ιστορικές πηγές αφήνεται στη πρωτοβουλία και στις ιδέες του εκπαιδευτικού (Thomaidis & Tzanakis, 2009).

Όπως αναφέρει και ο Klowss (2009), δεν είναι απαραίτητο να διαθέτει ο εκπαιδευτικός πτυχίο στην Ιστορία για να διδάξει Μαθηματικά με τη χρήση ιστορικών αναφορών. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να αντλήσει μικρά κομμάτια ιστορικών πληροφοριών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη τάξη. Οι μικρές ιστορίες από την Ιστορία των Μαθηματικών ή δραστηριότητες σε όλη τη διάρκεια του μαθήματος αποτελούν τον ενδεδειγμένο τρόπο διδασκαλίας.

Το σύνολο των ανθρώπων γνωρίζει για το ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης και πως οι συμβολισμοί άλλαξαν κατά τη διάρκεια των ετών. Οι μαθητές όμως πρέπει να λάβουν την απάντηση του *γιατί*; Γιατί έχουμε 0 αριθμό; Γιατί χρησιμοποιούμε το x και y για να απεικονίσουμε τις μεταβλητές στην Άλγεβρα; Γιατί ο μαθηματικός κατέληξε σε αυτό το θεώρημα; Που έχει χρησιμοποιηθεί αυτή η έννοια;

Ο Klowss όταν δίδαξε σε μαθητές 12-13 ετών το εισαγωγικό μάθημα στις αλγεβρικές εξισώσεις, τους ρώτησε γιατί χρησιμοποιούμε το x και y για να απεικονίσουμε τους αγνώστους. Οι μαθητές απόρησαν γιατί να γνωρίζουν κάτι τέτοιο. Ο εκπαιδευτικός τους ανέφερε την ιστορία με τον Descartes. Εκείνη την εποχή χρησιμοποιούνταν μικρά πλακάκια για να τυπώσουν τα βιβλία. Όταν το κείμενο του μεγάλου μαθηματικού έφτασε στο τυπογραφείο, ο τυπογράφος επικοινώνησε με τον Descartes και τον ρώτησε αν χρειάζεται όλα τα y και z στο κείμενο. Ο Descartes ρώτησε τον λόγο και ο τυπογράφος αποκρίθηκε ότι δεν είχε αρκετά z. Ο μαθηματικός ρώτησε τον τυπογράφο ποιο γράμμα είχε σε επάρκεια και ο τυπογράφος είπε ότι έχει πολλά x. Τα υπόλοιπα είναι ιστορία (Klowss, J, 2009).

Η παρούσα έρευνα αποτελεί προέκταση της εργασίας της Μιόγλου (2017), η οποία μελέτησε τις στάσεις των δασκάλων στη χρήση του ιστορικού υλικού που περιέχεται στα βιβλία Μαθηματικών του Δημοτικού. Η παρούσα εργασία είχε ως σκοπό τη διερεύνηση της στάσης των μαθηματικών του Γυμνασίου στα ιστορικά σημειώματα των Βιβλίων των Μαθηματικών του Γυμνασίου. Η έρευνα ξεκίνησε με τη παράθεση της σχετικής βιβλιογραφίας, την καταγραφή -ανάλυση των ιστορικών σημειωμάτων των βιβλίων των Μαθηματικών και του Α.Π. των Μαθηματικών, στη συνέχεια συλλέχθηκαν 150 συμπληρωμένα ερωτηματολόγια από καθηγητές Μαθηματικών του Γυμνασίου των νομών Κιλκίς, Θεσσαλονίκης και Πιερίας, που οδήγησε στην εξαγωγή των αποτελεσμάτων μέσω στατιστικής ανάλυσης και τη διεξαγωγή των συμπερασμάτων. Να σημειωθεί εδώ ότι η συμπλήρωση του ερωτηματολογίου έγινε παρουσία του ερευνητή. Η παρουσία του ερευνητή είχε ως σκοπό τη παροχή διευκρινήσεων στους ερωτώμενους. Η παρουσία του ερευνητή δεν επηρέασε τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου γιατί η συμπλήρωση δεν ήταν υποχρεωτική και οι καθηγητές οικειοθελώς συμμετείχαν στην έρευνα. Το χρονικό διάστημα συλλογής των ερωτηματολογίων ήταν 15/02/2019- 15/06/2019.

5.3. Συζήτηση ζητημάτων.

Είναι σαφές ότι η διερεύνηση στάσεων είναι ένα σύνθετο θέμα για αυτό το λόγο επιλέχθηκε ο συνδυασμός της διερεύνησης των σχολικών βιβλίων και το ερωτηματολόγιο. Επίσης, τα δεδομένα του ερωτηματολογίου προέρχονται από την Κεντρική Μακεδονία (Πιερία, Κιλκίς και Θεσσαλονίκη), ενώ στην έρευνα της Μιογλου (2017) υπήρχαν δεδομένα και από Θεσσαλία και Αττική.

Τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας αποτυπώνονται ως εξής:

1. Χρησιμοποιούνται/ Αξιοποιούνται τα ιστορικά σημειώματα που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου από τους εκπαιδευτικούς στη διδασκαλία των Μαθηματικών;
2. Οι καθηγητές των Μαθηματικών του Γυμνασίου θεωρούν ότι η Ιστορία των Μαθηματικών θα εμπλουτίσει τη διδασκαλία τους;
3. Έχουν οι καθηγητές των Μαθηματικών το κατάλληλο υπόβαθρο και γνώσεις για να χρησιμοποιήσουν την Ιστορία των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους;
4. Το υλικό που παρέχεται στους εκπαιδευτικούς είναι επαρκές ώστε να τους βοηθήσει να συμπεριλάβουν την Ιστορία των Μαθηματικών στα διδακτικά εργαλεία/ βοηθήματα τους;

Η συζήτηση των ευρημάτων που προηγήθηκε μας επιτρέπει να δώσουμε τις παρακάτω απαντήσεις.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου μικρό ποσοστό των ερωτώμενων καθηγητών τα χρησιμοποιεί στη διδασκαλία του με τρόπο ώστε να επωφελούνται οι μαθητές τα πλεονεκτήματα που απορρέουν από την ένταξη της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών. Εδώ πρέπει να αναζητηθούν οι λόγοι. Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί δηλώνουν ότι είχαν παρακολουθήσει μαθήματα ιστορίας Μαθηματικών κατά την διάρκεια των σπουδών τους. Αυτό εξηγεί την θετική τους στάση ως προς την αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία γεννά όμως ερωτήματα ως προς την κατάρτιση που έλαβαν σε διδακτικές πρακτικές και το σχεδιασμό σχετικών δραστηριοτήτων για την εργαλειοποίηση αυτής της γνώσης στη τάξη. Μελλοντικές έρευνες ως προς τη διερεύνηση της επάρκειας ή την ανάγκη τροποποίησης των προγραμμάτων σπουδών των πανεπιστημίων με την εισαγωγή σχετικών μαθημάτων θα ήταν χρήσιμες για την κάλυψη του διαφαινόμενου κενού.

Σχεδόν καθολικά αναγνωρίζεται η συμβολή της ιστορίας των μαθηματικών, θεωρείται ενδιαφέρουσα και ότι εμπλουτίζει τη διδασκαλία. Το 90% των εκπαιδευτικών υποστηρίζει ότι ενεργοποιούν το ενδιαφέρον των μαθητών. Οι καθηγητές των Μαθηματικών που ερωτήθηκαν γνωρίζουν την ύπαρξη του ιστορικού υλικού σε μεγάλο ποσοστό κυρίως αυτοί με τα λιγότερα χρόνια υπηρεσίας. Αντιλαμβάνονται ότι το αντικείμενο τους στερείται αισθητηριακών ερεθισμάτων και την ανάγκη για υποκίνηση του ενδιαφέροντος των μαθητών.

Στο πεδίο των γνώσεων και του υποβάθρου φαίνεται να υπερέχουν οι καθηγητές σε θεωρητικό επίπεδο αλλά όχι σε πρακτικές και διδακτική προσέγγιση. Από τις απαντήσεις του ερωτηματολογίου προκύπτει ότι σχεδόν το 98% των καθηγητών έχει διδαχθεί σχετικό μάθημα στις σπουδές του. Σε αντίθεση με τους δασκάλους οι οποίοι μόνο το 26,6 % έχει διδαχθεί σχετικό μάθημα με την ιστορία των Μαθηματικών.

Η ποσότητα του ιστορικού υλικού κρίνεται επαρκής αλλά η φύση του σε σχέση με το υπόβαθρο των εκπαιδευτικών είναι προβληματική. Τα ιστορικά σημειώματα που περιέχονται στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών είναι πληροφοριακού χαρακτήρα, με εξαίρεση τη Γ΄ Γυμνασίου. Τα ιστορικά σημειώματα δεν αποτελούν έναυσμα για τη διενέργεια δραστηριοτήτων. Ο αριθμός των ιστορικών σημειωμάτων που περιέχονται στα σχολικά βιβλία δεν είναι μεγάλος και σε καμία περίπτωση δεν χαρακτηρίζεται μικρός. Εδώ να διευκρινιστεί ότι δεν μιλάμε για μια διδακτική προσέγγιση βασισμένη στην Ιστορία, για το σύνολο της διδακτέας ύλης. Αυτό είναι ανέφικτο και όχι απαραίτητο. Μια τέτοιου είδους διδακτική προσέγγιση μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα μικρό μέρος της ύλης, για να έχει ευεργετικές συνέπειες. Ο στόχος μιας τέτοιας προσέγγισης είναι η ενεργοποίηση του ενδιαφέροντος των μαθητών και η δημιουργία κινήτρων μάθησης από τη πλευρά τους (Τζανάκης, 2009). Ταυτόχρονα, το σύνολο σχεδόν των καθηγητών ανέφερε την επιμόρφωση. Αυτό δείχνει ότι ενδιαφέρονται για την εξέλιξη της διδακτικής και είναι ανοιχτοί να υιοθετήσουν τις νέες πρακτικές, τουλάχιστον θεωρητικά.

Τα βιβλία που παρέχονται στους καθηγητές για την αξιοποίηση του σχολικού βιβλίου αδυνατούν να πληροφορήσουν και να κατευθύνουν σχετικά με την ενσωμάτωση της Ιστορίας σε συνθήκες σχολικής τάξης. Επίσης, στα βιβλία των καθηγητών δεν δίνονται σαφείς οδηγίες για τις δραστηριότητες και τον τρόπο συμμετοχής των μαθητών και του καθηγητή. Τα βιβλία αυτά περιέχουν ελάχιστες αναφορές και παραπομπές στο Διαδίκτυο σχετικά με την Ιστορία των Μαθηματικών.

Είναι γνωστό ότι τα σύγχρονα Αναλυτικά Προγράμματα των Μαθηματικών έχουν δώσει έμφαση στη δραστηριότητα που παράγει το αποτέλεσμα. Το Α.Π. δεν δίνει σαφείς οδηγίες και κατευθύνσεις για την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών, και όσον αφορά τις δραστηριότητες περιέχει ακόμη πιο λίγες αναφορές. Το αποτέλεσμα είναι οι μαθητές να μην επωφελούνται στο σύνολο τους, από τις καινοτομίες που εισήγαγε το Α.Π. του 2003. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με την συστηματική και καθολική επιμόρφωση των καθηγητών.

Η δομή και οι στόχοι του Α.Π. αυτό- αναιρούνται και αφήνουν στην διακριτική ευχέρεια του εκπαιδευτικού τη χρήση των ιστορικών σημειωμάτων. Οι εκπαιδευτικοί έχουν διαμορφώσει και εσωτερικεύσει ένα μοντέλο διδασκαλίας από τα μαθητικά τους χρόνια. Το συγκεκριμένο μοντέλο αποτελεί έναν ασφαλή και γνώριμο τρόπο διεξαγωγής της διδασκαλίας. Το Α.Π. το 2003 εισάγει καινοτομίες όπως η διαθεματική προσέγγιση, η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία, η εκπόνηση σχεδίων εργασίας και η Ιστορία των Μαθηματικών. Το εκπαιδευτικό προσωπικό όμως δεν παρουσιάζεται να τις έχει εφαρμόσει στη διδακτική πράξη.

Για να επιτευχθούν οι καινοτομίες σε εκπαιδευτικούς που χρησιμοποιούν μετωπική διδασκαλία χρειάζεται να εφαρμοστούν προγράμματα μετασχηματιστικής μάθησης. Η μετασχηματιστική μάθηση εντάσσεται στη ριζοσπαστική παράδοση της εκπαίδευσης. Ο ορισμός κατά τον Mezirow για την Μετασχηματιστική Μάθηση είναι: « *Η μετασχηματιστική μάθηση περιλαμβάνει μια ειδική λειτουργία του στοχασμού: την επαναξιολόγηση των προηγούμενων υποθέσεων επάνω στις οποίες στηρίζονται οι δοξασίες μας και τη δράση που βασίζεται στη βαθιά γνώση, που προέρχεται από τις μετασχηματισμένες αντιλήψεις μας, ως αποτέλεσμα αυτής της επαναξιολόγησης. Τέτοιου είδους μάθηση μπορεί να συμβεί και στη λειτουργική και στην επικοινωνιακή περιοχή της μάθησης. Περιλαμβάνει τη διόρθωση στρεβλωμένων υποθέσεων- επιστημονικών, κοινωνικοπολιτισμικών ή ψυχικών- που αποκτήθηκαν μέσω προγενέστερης γνώσης*» (Mezirow, 1990:18). Μόνο με αυτόν τον τρόπο το παλιό μοντέλο της δασκαλοκεντρικής μετωπικής διδασκαλίας που έχει εσωτερικευθεί από τους εκπαιδευτικούς θα μετασχηματιστεί.

Στο επίπεδο της διδασκαλίας, ένα εύστοχο απόσπασμα για μια δραστηριότητα είναι το ιστορικό σημείωμα σχετικά με τον Ευκλείδη που βρίσκεται στη σελίδα 26 του βιβλίου της Ά γυμνασίου. Σύμφωνα με τους Thomaidis Y. & Tzanakis C.(2009), η μόνη έγκυρη ιστορική πηγή για τον Ευκλείδη προέρχεται από τον Πρόκλο που έζησε τον $5^{ο}$ αιώνα μ.Χ. Ο Πρόκλος σαν σχόλιο στο πρώτο βιβλίο του για τα *Στοιχεία του Ευκλείδη* γράφει: « *ο Ευκλείδης έζησε την εποχή του Πτολεμαίου του πρώτου και ο Αρχιμήδης έζησε αργότερα. Κάποτε ο Πτολεμαίος ρώτησε τον Ευκλείδη αν υπάρχει κάποιος πιο εύκολος/ σύντομος δρόμος για τη Γεωμετρία, παρακάμπτοντας τα Στοιχεία. Ο μεγάλος μαθηματικός απάντησε ότι δεν υπάρχει βασιλικός δρόμος προς τη Γεωμετρία*» (Morrow, 1970, pp. 56-57 στο Thomaidis Y. & Tzanakis C, pp. 2806, 2009).

Το παραπάνω κείμενο ως δραστηριότητα συνδυάζει τα Μαθηματικά, την Ιστορία και την Ελληνική γλώσσα. Οι μαθητές σε μεγαλύτερες τάξεις της Ά γυμνασίου μπορούν να μεταφράσουν το κείμενο στα νέα ελληνικά, να συλλέξουν πληροφορίες για τα εμπλεκόμενα άτομα και να μελετήσουν περισσότερο την ιστορική περίοδο που έζησαν.

Γνωρίζουμε ότι ο Πτολεμαίος ο πρώτος ήταν στρατηγός του Μ. Αλεξάνδρου. Από το 323- 305 π.Χ. ήταν σατράπης της Αιγύπτου και από το 304- 283 π.Χ. έγινε Φαραώ. Ο Αρχιμήδης έζησε από το 287 π.Χ. έως το 212 π.Χ. Ο Πρόκλος αναφέρει τον διάλογο του Πτολεμαίου με τον Ευκλείδη και εξηγεί ότι συνέβη πριν τον Αρχιμήδη. Επομένως, η περίοδος δραστηριότητας του Ευκλείδη ήταν γύρω στο 300 π.Χ. Μέσω αυτού του αποσπάσματος οι μαθητές οδηγούνται στην έννοια της απόδειξης. Ο τρόπος είναι η μέθοδος και τα λογικά επιχειρήματα που οδηγούν από ιστορικές αναφορές στα συμπεράσματα.

Η παραπάνω μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί παράλληλα για να δικαιολογήσει ένα μαθηματικό αποτέλεσμα μέσα από ορισμούς, αξιώματα και προηγούμενες αποδείξεις. Επίσης, χρήσιμες θα ήταν οι νύξεις για εκείνα τα χαρακτηριστικά της Θεωρητικής Γεωμετρίας που οδήγησαν τον Πτολεμαίο να ρωτήσει για έναν πιο σύντομο/ εύκολο δρόμο μάθησης της (Thomaidis & Tzanakis, 2009).

Στο επίπεδο του ιστορικού υλικού, γνώσεων και πόρων η παρούσα εργασία προτείνει την υποστήριξη της ατομικής ενασχόλησης του εκπαιδευτικού με την εξέλιξη της διδακτικής. Δεν απαξιώνεται ούτε υποβαθμίζεται η χρησιμότητα της επιμόρφωσης. Όπως αναφέρθηκε σε πρότερο σημείο της εργασίας η επιμόρφωση είναι αναγκαία για την εφαρμογή των καινοτομιών στην εκπαίδευση. Όμως, ένα καθολικό επιμορφωτικό πρόγραμμα από τη πλευρά του επίσημου φορέα της εκπαίδευσης στη χώρα, θα απαιτούσε μεγάλο μέρος υλικών και ανθρώπινων πόρων. Γνωρίζουμε ότι οι επίσημοι φορείς είναι ανελαστικοί, όταν προκύπτει μια ανάγκη δεν αντιδρούν γρήγορα, τουλάχιστον τον τομέα της εκπαίδευσης.

Οι επιστήμες εξελίσσονται με το πέρασμα του χρόνου και νέες γνώσεις αποθησαυρίζονται. Κάποιος ο οποίος επιθυμεί να κατέχει τις νέες γνώσεις της επιστήμης του, πρέπει να ενημερώνεται συνεχώς. Η Δια Βίου Μάθηση και η αυτομόρφωση είναι οι τάσεις που χαρακτηρίζουν την σύγχρονη εποχή. Στο διαδίκτυο υπάρχουν πλήθος μορφωτικών προγραμμάτων, δωρεάν και μη. Ποτέ άλλοτε ο άνθρωπος στην Ιστορία δεν είχε τόσο μεγάλη πρόσβαση στη γνώση.

Η διδακτική αποτελεί και αυτή μια επιστήμη η οποία δεν είναι στατική στο χρόνο, όπως και οι άλλες επιστήμες και αυτή εξελίσσεται. Ο εκπαιδευτικός είναι και αυτός ένας επιστήμονας που οφείλει να παρακολουθεί τις τάσεις της επιστήμης του. Η επιμόρφωση του μπορεί να γίνει από τους επίσημους φορείς ή και από τη δική του προσωπική προσπάθεια. Η ανακάλυψη της γνώσης δεν αφορά μόνο τον αναπτυσσόμενο άνθρωπο, αλλά τον άνθρωπο σε όλο το φάσμα της ζωής του. Η προσωπική ενασχόληση του εκπαιδευτικού με τις καινοτομίες του Α.Π. θα του δώσει την ευκαιρία για προσωπική ανάπτυξη, αλλά και θα κάνει δυνατό να δει με τη μάτια του αρχαρίου (beginner’s eyes).

Οι πηγές στις οποίες μπορεί να βρει υλικό (ιστορικά σημειώματα, πρωτότυπες πηγές, τρόπους διδασκαλίας) εκτός από το διαδίκτυο είναι και η κοινότητα των εκπαιδευτικών. Η δημιουργία ευέλικτων δομών που θα βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς να αλληλεπιδρούν ,να ανταλλάσουν ιδέες, γνώσεις και πρακτικές μπορεί επικουρικά να συμβάλλει στην εμπλοκή των εκπαιδευτικών με νέες πρακτικές και τη σχολική τάξη να γίνει το πεδίο εφαρμογής τους. Το Α.Π. δίνει ένα βαθμό ελευθερίας στους εκπαιδευτικούς για καινοτόμες δράσεις.

Η παραπάνω πρόταση δεν απαξιώνει την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα πρότυπα ενός προγράμματος όπως προτείνει η Γαλέρη, την θεωρεί απαραίτητη. Η επικουρική όμως εφαρμογή της είναι πιο ρεαλιστική και πιο πιθανό να πραγματοποιηθεί σε εύλογο χρόνο. Παράλληλα, δεν πρέπει να παραλειφθεί η εισαγωγή μαθημάτων Ιστορίας των Μαθηματικών στο βασικό πρόγραμμα σπουδών όλων των μαθηματικών τμημάτων, με στόχευση στην καλλιέργεια διδακτικών πρακτικών που θα βοηθούν τους εκπαιδευτικούς στην αξιοποίηση της ιστορία των μαθηματικών στην τάξη μαζί με την καθολική επιμόρφωση των εν ενεργεία καθηγητών.

Συμπερασματικά, ένα μεγάλο ποσοστό των καθηγητών δεν χρησιμοποιεί τα ιστορικά σημειώματα στη διδασκαλία του παρόλο που οι καθηγητές γνωρίζουν την ύπαρξη του ιστορικού υλικού στα σχολικά βιβλία σε ποσοστό 84%. Από τους εκπαιδευτικούς που γνωρίζουν την ύπαρξη των ιστορικών σημειωμάτων στα βιβλία σε ποσοστό 95% θεωρούν ότι εμπλουτίζουν το μάθημα και σε ποσοστό 90% ενεργοποιούν το ενδιαφέρον των μαθητών. Οι καθηγητές έχουν διδαχθεί σχετικό μάθημα με την Ιστορία των μαθηματικών στις σπουδές του σε ποσοστό 98%. Οπότε μπορεί να ειπωθεί ότι υπάρχει το σχετικό υπόβαθρο αξιοποίησης της Ιστορίας στη διδασκαλία μέσα στη τάξη. Το ιστορικό υλικό όμως που περιέχεται στα σχολικά βιβλία στις περισσότερες περιπτώσεις δεν εμπλέκει τους μαθητές σε δραστηριότητες, με εξαίρεση τη Ϊ Γυμνασίου. Η ποσότητα του ιστορικού υλικού κρίνεται επαρκής, δεδομένου ότι η ιστορική προσέγγιση δεν αφορά το σύνολο της ύλης, αλλά μικρό μέρος αυτής. Οι οδηγίες που περιέχονται στο βιβλίο των καθηγητών για τις προτεινόμενες δραστηριότητες δεν είναι επαρκείς για να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς. Στο Α.Π. περιέχονται ακόμη πιο λίγες οδηγίες σχετικά με τις μαθηματικές δραστηριότητες. Για τους παραπάνω λόγους θα ήταν χρήσιμες έρευνες που θα διερευνούσαν τη φύση του υλικού που οι καθηγητές τελικά χρησιμοποιούν και του υλικού όπως και των οδηγιών που θα ήταν ικανό να αλλάξει τη στάση τους σε ότι αφορά την εμπλοκή τους με δραστηριότητες εμπνευσμένες από την ιστορία των μαθηματικών. Θα ήταν ένα χρήσιμο εργαλείο για τη βελτίωση του υπάρχοντος υλικού που κρίνεται απαραίτητη.

Οι προτάσεις που διατυπώθηκαν πιο πάνω, οι προβληματισμοί καθώς και τα ζητήματα που αναδείχθηκαν εντάσσονται σε ένα ευρύτερο πλαίσιο ανάδειξης του μαθήματος των μαθηματικών μέσα από την αξιοποίηση της ιστορίας τους. Έχουν ως στόχο να συμβάλλουν στο έργο των εκπαιδευτικών να σχεδιάζουν ποιό εμπνευσμένες και αποτελεσματικές διδασκαλίες. Η εφαρμογή των καινοτομιών του Α.Π. θα λειτουργήσει προς όφελος των μαθητών και του εκπαιδευτικού. Αυτό και μόνο επιτάσσει την ανάγκη αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη.

Βιβλιογραφία.

Barbin, E., Bagni, G. T., Grugnetti, L., Kronfellner, M., Lakoma, E., & Menghini, M. (2000). Integrating history: Research perspectives. In J. Fauvel & J. Van Maanen. (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (Vol.6, pp.63-90). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Barbin, É., & Tzanakis, C. (2014). History of mathematics and education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 255-260). New York, NY: Springer.

Booker, G. (1986). Topic Area: Relationship between the History and Pedagogy of Mathematics. In M. Carss (Ed.), *Proc. of the 5th ICME* (pp.256-260). Boston: Birkhäuser.

Clark, K., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., Tzanakis, C., & Wang, X. (2016). History of mathematics in mathematics education: Recent developments. In L. Radford, F. Furinghetti, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting—HPM 2016* (pp. 135–180). Montpellier, France: IREM de Montpellier. Google Scholar

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). Research methods in education. New York: Routledge Taylor & Francis Group.

Fasanelli F. et al. (2000). 'The political context', in J. Fauvel and J. van Maanen (eds), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, pp. 1 – 38.

Fauvel, J. G., & van Maanen, J. (Eds.) (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*, New ICMI Study Series, vol. 6. Dordrecht: Kluwer.

Fried, M. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science & Education*, *10*, 391- 408.

Fried, M. (2011). History of mathematics in mathematics education: Problems and prospects. In E. Barbin, M. Kronfellner & C. Tzanakis (Eds) (2011). *Proc. of the 6th ESU* (pp.13-26). Wien: Holzhausen Verlag.

Kronfellner, & C. Tzanakis. (Eds.), *Proc. of the 6th ESU* (pp. 13-26). Wien: Holzhausen Verlag.

Furinghetti, F. (2004). History and mathematics education: A look around the world with particular reference to Italy. *MedJRME*, *3*(1-2), 1-20.

Gillings R. J., 1982, *Mathematics in the time of Pharaohs*, New York: Dover Publications.

Grattan-Guinness, I. (2004). The mathematics of the past: distinguishing its history from our heritage. *Historia Mathematica*, *31*, 163-185.

Farmaki, V. and Paschos, T. (2007). Employing genetic "moments" in the history of mathematics in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics.* Vol. 66, pp. 83-106.

Haeckel, E. (1906). *The Evolution of Man - A Popular Scientific Study*. London : Watts & Co.

Jankvist, U. T. (2009). *Using history as a "goal" in mathematics education*. Dissertation. Denmark: Department of Science, Systems and Models, *IMFUFA*, Roskilde University.

Jankvist, U. T. (2013). History, applications, and philosophy in mathematics education: HAPh—A use of primary sources. *Science & Education*, *22*, 635-656.

Jolliffe I. T. 2002. Graphical Representation of Data Using Principal Components. In *Principal Component Analysis*, pp: 78-110. 2nd ed.; Springer-Verlag Inc.: New York, NY

Klowss, J. (2009). Using History to Teach Mathematics. In: Paditz L. & Rogerson A. (ed.). *Rroceedings of the 10th international Conference Models in Developing Mathematics Education* (328-330). Dresden: The University of Applied Sciences.

Krathwohl, D. R., Bloom, B. S., & Masia, B. B. (1973). *Taxonomy of Educational Objectives, the Classification of Educational Goals. Handbook II: Affective Domain.* New York: David McKay Co., Inc.

Mezirow J. et al (1990). *Fostering Critical Reflection in Adulthood.* San Francisco: Jossey – Bass.

Panasuk, R. M.,& Horton, L. B. (2012). Integrating history of mathematics into curriculum: what are the chances and constraints?.*International Electronic Journal of Mathematics Education*, 7(1), 3-20.

Siu, F. K. and Siu, M. K. (1979). History of mathematics and its relation to mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.* Vol. 10, 4, pp. 561-567.

Siu M. K., 2000, 'The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom', in Victor J. Katz (ed), Using History to Teach Mathematics. An International Perspective, *The Mathematical Association of America*, pp. 3 – 9.

Swetz, F. J. (1994). *Learning activities from the history of mathematics*. Portland, ME: J. Weston Walch.

Swetz, F., Fauvel, J., Bekken, O. Johansson., B., & Katz, V. (Eds.). (1995). *Learn from the masters*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Thomaidis, Y. & Tzanakis, C. (2009). The implementation of the history of mathematics in the new curriculum and textbooks in Greek secondary education. *Proceedings of CERME*

6 (Congress of The European Society For Research in Mathematics Education), 2801-2810, Lyon.

Tzanakis, C., Arcavi, A. *et al*. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *ICMI study volume* (pp. 201-240). Dordrecht: Kluwer.

Weng Kin, Ho, (2008). Using history of mathematics in the teaching and learning of mathematics in Singapore. *In Proceedings of 1st RICE* (pp. 1-38), Singapore.

Θωμαΐδης Γ., Καστάνης Ν., 1987, 'Μια διαχρονική εξέταση της σχέσης της ιστορίας με τη διδακτική των Μαθηματικών', *Ευκλείδης* γ', 16, pp. 61 – 92.

Βιβλίο Μαθηματικών μαθητή Ά γυμνασίου

http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGYM-A200/426/2865,10900/

Βιβλίο Μαθηματικών εκπ/κού Ά γυμνασίου

http://www.pi-schools.gr/books/gymnasio/math_a/kath/book_1_106.pdf

Βιβλίο Μαθηματικών μαθητή ΄Β γυμνασίου

http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGYM-B105/386/2552,9945/

Βιβλίο Μαθηματικών εκπ/κού ΄Β γυμνασίου

http://www.pe03.gr/abc/sxolika-biblia/biblio-gym-b-ekpaideytikou.html

Βιβλίο Μαθηματικών μαθητή ΄Γ γυμνασίου

http://ebooks.edu.gr/modules/document/file.php/DSGYM-C104/%CE%94%CE%B9%CE%B4%CE%B1%CE%BA%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8C%20%CE%A0%CE%B1%CE%BA%CE%AD%CF%84%CE%BF/%CE%92%CE%B9%CE%B2%CE%BB%CE%AF%CE%BF%20%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CF%84%CE%AE/21-0143-02-v1_Mathimatika_G-Gymnasiou_Vivlio-Mathiti.pdf

Βιβλίο Μαθηματικών εκπ/κού ΄Γ γυμνασίου

http://ebooks.edu.gr/modules/document/file.php/DSGYM-C104/%CE%94%CE%B9%CE%B4%CE%B1%CE%BA%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8C%20%CE%A0%CE%B1%CE%BA%CE%AD%CF%84%CE%BF/%CE%92%CE%B9%CE%B2%CE%BB%CE%AF%CE%BF%20%CE%95%CE%BA%CF%80%CE%B1%CE%B9%CE%B4%CE%B5%CF%85%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%BF%CF%8D/21-0144-01_Mathimatika_C-Gym_BK.pdf

Γαλέρη Ι. (2018). Μελέτη, σχεδιασμός και ανάπτυξη προγράμματος επιμόρφωσης εκπαιδευτικών στα ζητήματα διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών. Παν/νιο Δυτικής Μακεδονίας. ΔΕΠΠΣ/ΑΠΣ Μαθηματικών

http://www.chiourea.gr/2016/09/blog-post_9.html

Μπιζμπιάνος, Μ. (2011). Διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Η περίπτωση της Γεωμετρίας. Αθήνα: Τμήμα Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α.

Μιόγλου Κ. (2017). Πεποιθήσεις των δασκάλων για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Παν/μιο Δυτικής Μακεδονίας.

Πυργιωτάκης Ι., *Εισαγωγή στην Παιδαγωγική Επιστήμη*, Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα, 2000.

Τζανάκης, Κ. (2009). Η αξιοποίηση των σχέσεων μεταξύ Ιστορίας των Μαθηματικών και Μαθηματικής Εκπαίδευσης: Συζήτηση σχετικά με τα υπέρ και τα κατά, βάσει της διεθνούς εμπειρίας. [Επιμ.] Ιωάννης Θωμαΐδης, και συν. *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών.* Θεσσαλονίκη : Εκδόσεις Ζήτη, σσ. 17-39.

Φιλιππάκου Χ. (2015). Η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών και τα αντίστοιχα διδακτικά βιβλία Δημοτικού – Γυμνασίου. ΕΚΠΑ

Παράρτημα

ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ.

Α. ΔΗΜΟΓΡΑΦΙΚΑ

1. Φύλο

Άντρας ☐ Γυναίκα ☐

2. Ηλικία:……………

3. Έτη υπηρεσίας…………………………………………………..

4. Εργασιακό καθεστώς: ………………………………..

5. Το πρόγραμμα σπουδών σας περιείχε μάθημα που αφορούσε την Ιστορία των Μαθηματικών;

Ναι ☐ Όχι ☐

Β. ΠΡΟΣΩΠΙΚΕΣ ΠΡΟΤΙΜΗΣΕΙΣ

6. Θεωρείτε ενδιαφέρουσα την χρήση της Ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία;………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………

Γ. ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

7. Μέσα στα σχολικά εγχειρίδια περιέχονται ιστορικά σημειώματα τα οποία αποτελούν ιστορικό υλικό. Εσείς τα έχετε εντοπίσει;

Ναι Όχι

8. Για ποιους λόγους έχετε χρησιμοποιήσει τα ιστορικά σημειώματα που περιέχονται στα σχολικά βιβλία;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………

9. Θεωρείτε ότι τα ιστορικά σημειώματα που περιέχονται στα σχολικά εγχειρίδια είναι χρήσιμα για την διδασκαλία;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………

10. Αισθάνεστε αμηχανία όταν χρησιμοποιείτε τα ιστορικά σημειώματα στο πλαίσιο της διδασκαλίας σας;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………

Παρατηρήσεις

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Ερωτηματολόγιο της Καλλιόπης Μιόγλου (2017).

ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΔΑΣΚΑΛΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΔΗΜΟΓΡΑΦΙΚΑ

1. Φύλο

Άντρας ◯ Γυναίκα ◯

2. Έτη Υπηρεσίας

----

3. Πρωτοβάθμια στην όποια υπηρετείτε τώρα

----

4. Τάξεις στις οποίες έχετε διδάξει με τα νέα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών

Α' ☐ Β' ☐ Γ' ☐ Δ' ☐ Ε' ☐ ΣΤ' ☐

5. Κατεύθυνση από την οποία προήλθατε (Επιλέξτε την κοντινότερη στην περιγραφή)

Θεωρητική ◯ Θετική/Τεχνολογική ◯

6. Σπουδές (Αναγραφή πόλης δίπλα)

Ακαδημίες ◯ ΑΕΙ ◯ --

7. Επιπλέον Σπουδές (Αναγραφή γνωστικού αντικειμένου δίπλα)

Μεταπτυχιακό ☐ --

Διδακτορικό ☐ --

Δεύτερο Πτυχίο ☐ --

8. Υπήρχε μάθημα που να αφορά την Ιστορία των Μαθηματικών στο πρόγραμμα σπουδών σας;

Ναι ◯ Όχι ◯

ΠΡΟΣΩΠΙΚΕΣ ΠΡΟΤΙΜΗΣΕΙΣ

9. Πόσο θα λέγατε ότι σας ενδιαφέρουν τα μαθηματικά ως γνωστικό αντικείμενο;

1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	5 ◯
(Καθόλου)	(Λίγο)	(Ούτε λίγο, ούτε πολύ)	(Πολύ)	(Πάρα πολύ)

10. Πόσο θα λέγατε ότι σας ενδιαφέρει η ιστορία ως γνωστικό αντικείμενο;

1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	5 ◯
(Καθόλου)	(Λίγο)	(Ούτε λίγο, ούτε πολύ)	(Πολύ)	(Πάρα πολύ)

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

11. Έχετε εντοπίσει ότι στο βιβλίο των Μαθηματικών υπάρχει ιστορικό υλικό (Ιστορικά Σημειώματα);

Ναι ◯ Όχι ◯

12. Σε ποιο βαθμό έχετε επίγνωση των ειδικών σκοπών των Δ.Ε.Π.Π.Σ./Α.Π.Σ.;

1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	5 ◯
(Καθόλου)	(Λίγο)	(Ούτε λίγο, ούτε πολύ)	(Πολύ)	(Πάρα πολύ)

13. Πόσο έχετε αξιοποιήσει ιστορικές γνώσεις από το βιβλίο των Μαθηματικών ή από άλλες πηγές στη διδασκαλία των Μαθηματικών; **(Να εξηγήσετε για ποιους λόγους.)**

1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	5 ◯
(Καθόλου)	(Λίγο)	(Ούτε λίγο, ούτε πολύ)	(Πολύ)	(Πάρα πολύ)

----

14. Πιστεύετε ότι θα μπορούσε η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών να συμβάλει στη βελτίωση της διδασκαλίας τους και στην αντιμετώπιση προβλημάτων μάθησης;

1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	5 ◯
(Καθόλου)	(Λίγο)	(Ούτε λίγο, ούτε πολύ)	(Πολύ)	(Πάρα πολύ)

15. Σας κάνουν οι μαθητές ερωτήματα για τα μαθηματικά που να απαιτούν γνώσεις Ιστορίας των Μαθηματικών για να απαντηθούν;

1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	5 ◯
(Καθόλου)	(Λίγο)	(Ούτε λίγο, ούτε πολύ)	(Πολύ)	(Πάρα πολύ)

16. Πιστεύετε ότι χρειάζεται επιπλέον επιμόρφωση των δασκάλων για την αξιοποίηση του ιστορικού υλικού που υπάρχει στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών;

1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	5 ◯
(Καθόλου)	(Λίγο)	(Ούτε λίγο, ούτε πολύ)	(Πολύ)	(Πάρα πολύ)

17. Αν σας παρέχονταν περισσότερες πληροφορίες στο βιβλίο του εκπαιδευτικού σχετικά με την ιστορία και με το πώς θα πρέπει να αναδείξετε την ιστορική διάσταση ενός θέματος που αφορά το μάθημα των Μαθηματικών, θα ήσασταν πιο δεκτικοί στο να αφιερώσετε χρόνο σε αυτό;

Ναι ◯ Όχι ◯

18. Γνωρίζετε τη μέθοδο του Ελληνικού Πολλαπλασιασμού; Αν ναι, δοκιμάστε να κάνετε τον πολλαπλασιασμό 23 x 17 από κάτω.

Ναι ◯ Όχι ◯