ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ* ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: 1ος Ηλικιακός Κύκλος 6-12

Διπλωματική εργασία

Αναλογική Συλλογιστική στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση: Μία Μελέτη Παρέμβασης

της

Στογιάννου Γεωργίας,

Α.Ε.Μ. 719

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Βαμβακούση Ξένια, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Εξεταστές: Καλδρυμίδου Μαρία, Καθηγήτρια

Χρήστου Κωνσταντίνος, Επίκουρος Καθηγητής

Φλώρινα, Οκτώβριος 2019

*Όπως μετονομάστηκε η Παιδαγωγική Σχολή με τον Ν.4610/2019, ΦΕΚ70/τ.Α΄/07-5-2019

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διατμηματικό - Διαπανεπιστημιακό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 25η Οκτωβρίου 2019 από **Εξεταστική Επιτροπή**

αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
Βαμβακούση Ξένια	Αναπλ. Καθηγήτρια
Καλδρυμίδου Μαρία	Καθηγήτρια
Χρήστου Κωνσταντίνος	Επίκ. Καθηγητής

Ευχαριστώ:

Την καθηγήτρια του μεταπτυχιακού και επιβλέπουσα αυτής της εργασίας κα Βαμβακούση Ξένια για την επιστημονική καθοδήγηση και την υποστήριξη της σε όλα τα στάδια της εκπόνησης της εργασίας. Η φιλική της αντιμετώπιση ήταν ένα στήριγμα στις δυσκολίες που υπήρξαν.

Τα μέλη της Εξεταστικής επιτροπής κα Καλδρυμίδου Μαρία και κο Χρήστου Κωνσταντίνο για την προθυμία τους να είναι μέλη της επιτροπής.

Περίληψη

Η μελέτη αυτή ασχολείται με την αναλογική συλλογιστική των μαθητών στην Στ΄ τάξη και εξετάζει αν οι μαθητές είναι σε θέση να αναγνωρίσουν αναλογικά από μη αναλογικά προβλήματα που έχουν τη μορφή προβλημάτων ελλείπουσας τιμής και αν μπορεί μια διδακτική παρέμβαση να βελτιώσει την επίδοση τους. Πλήθος ερευνών τεκμηριώνουν τη δυσκολία που έχουν οι μαθητές να αναγνωρίζουν αναλογικές από μη αναλογικές καταστάσεις, όταν τις συναντούν σε αυτή τη μορφή προβλημάτων. Αρχικά γίνεται μια ανάλυση της έννοιας του λόγου και της αναλογίας, προσδιορίζεται η έννοια της αναλογικής συλλογιστικής και τονίζεται στη σημαντικότητα της ανάπτυξης της. Στη συνέχεια επιχειρείται η τεκμηρίωση της κατάχρησης της αναλογίας μέσα στη διδακτική πράξη και η εξήγηση της μέσα από τη βιβλιογραφία Ακόμη δίνεται ένα μοντέλο αναλογικής σκέψης και παρουσιάζονται οι αναλογίες στο βιβλίο των μαθηματικών της Στ΄.

Αρχικά δόθηκε δοκιμασία 10 προβλημάτων για προέλεγχο πριν τη διδασκαλία των αναλογιών στην πειραματική ομάδα και στην ομάδα ελέγχου. Στη συνέχεια, έγινε η παρέμβαση στην πειραματική ομάδα με ένα φύλλο ταξινόμησης προβλημάτων, επίσης πριν τη διδασκαλία των αναλογιών και 5 φύλλα εργασίας, που δόθηκαν στη διάρκεια της συμβατικής διδασκαλίας της ενότητας των αναλογιών. Στο τέλος της ενότητας δόθηκε η ίδια δοκιμασία με την αρχική και στις δυο ομάδες και συγκρίθηκαν τα αποτελέσματα και στις δυο δοκιμασίες (προέλεγχος- μεταέλεγχος).

Τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι μαθητές έχουν έντονη τάση να δίνουν αναλογικές λύσεις σε προβλήματα ελλείπουσας τιμής και πως μετά από μια στοχευμένη παρέμβαση, αυξήθηκαν οι σωστές απαντήσεις της πειραματικής ομάδας σε σχέση με την ομάδα ελέγχου, αλλά και πάλι το πλήθος των λανθασμένων απαντήσεων παρέμεινε υπολογίσιμο. Τέλος γίνονται κάποιες διδακτικές προτάσεις με στόχο την αποφυγή της κατάχρησης της αναλογίας.

Λέξεις-κλειδιά: αναλογία, αναλογική συλλογιστική, προβλήματα ελλείπουσας τιμής, ψευδοαναλογικότητα,

Key-words: proportion, proportional reasoning, missing value problems, pseudo-proportionality

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή

Από πολύ νωρίς, η αναλογία έχει αποδειχθεί ότι είναι ένα ισχυρό μαθηματικό εργαλείο εξήγησης και γνώσης φαινομένων σε διάφορους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας (Freudenthal, 1973 από Lesh, Post, & Behr, 1988). Η αναλογικότητα είναι μια θεμελιώδης έννοια στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, καθώς διαδραματίζει κρίσιμο ρόλο στη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών. Είναι ο βασικός άξονας των στοιχειωδών αριθμητικών αριθμών και των εννοιών των μετρήσεων και ταυτόχρονα μια από τις πιο στοιχειώδεις κατανοήσεις που χρειάζονται για πιο εξελιγμένα μαθηματικά. Η κατανόηση της αναλογικότητας δεν είναι μόνο απαραίτητη για την κατανόηση μαθηματικών υψηλού επιπέδου, όπως η γεωμετρική ομοιότητα ή η πιθανότητα, αλλά και πολύ χρήσιμη για την καθημερινή ζωή(Van Dooren, Vamvakousi &Verschaffel, 2018).

Παραμένει, ωστόσο, ένα ζητούμενο στο να προσδιοριστούν εκείνα τα στοιχεία που συνδέονται άμεσα με την ικανότητα χρήσης αναλογιών και συνεπώς την ανάπτυξη της αναλογικής συλλογιστικής και να αξιοποιηθούν στη διδασκαλία (Lamon, 2008).

Η αναλογική συλλογιστική συναντάται στη βιβλιογραφία με διπλό αγγλικό όρο που συνήθως έχει κοινή μετάφραση στα ελληνικά. Σημειώνεται ότι με τον όρο «αναλογική συλλογιστική» στην παρούσα εργασία αποδίδεται ο όρος ‘proportional reasoning” και όχι ο όρος “analogical reasoning’.

Αξίζει να γίνει αναφορά στον «κατ’ αναλογίαν» συλλογισμό (analogical) που μέρος του είναι και ο μαθηματικός(proportional) αναλογικός συλλογισμός. Ήδη, ξεκινώντας από τα παλαιότερα χρόνια, ο αναλογικός συλλογισμός αποτελεί ένα σημαντικό μαθηματικό εργαλείο για το χειρισμό καταστάσεων σε διάφορα πεδία της ανθρώπινης ενασχόλησης (Lesh, Post, & Behr, 1988). Η φύση αυτού του «εργαλείου» έχει διπλό ρόλο. Από τη μια, χρησιμοποιώντας την αποκλειστικά αναλογική(analogical) του πτυχή, μπορεί να αποτελέσει στοιχείο κλειδί στη διαχείριση προβληματικών καταστάσεων με τη μεταφορά ήδη υπάρχουσας γνώσης και δεξιοτήτων σε καινούρια έργα, που παρουσιάζουν δομικές ομοιότητες με τα προηγούμενα. Από την άλλη, η μαθηματική πτυχή του αναλογικού(proportional) συλλογισμού είναι απαραίτητη για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων αναλογίας, όπου πρέπει να εντοπιστεί η δομική ομοιότητα ανάμεσα στους αριθμούς και τα δεδομένα της προβληματικής κατάστασης(Modestou &Gagatsis, 2010).

Η αναλογική συλλογιστική αποτελεί στοιχείο εντελώς απαραίτητο για την επιστήμη των μαθηματικών. Οι δεξιότητες της αναλογικής συλλογιστικής χαρακτηρίζονται ως ιδιαιτέρως σημαντικές, λόγω του κρίσιμου ρόλου που διαδραματίζουν στη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών (Lesh, Post, &Behr , 1988). Δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι η επιστημονική βιβλιογραφία για την εκπαίδευση των μαθηματικών, αφθονεί σε μελέτες για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής και αναλογικής συλλογιστικής των μαθητών, για τα προβλήματα που μπορεί να προκύψουν σε αυτή την εξέλιξη, για τις διδακτικές προσεγγίσεις για την διδασκαλία της αναλογικής συλλογιστικής και για τις παρανοήσεις που συναντώνται σε όλα τα εκπαιδευτικά συστήματα (π.χ., Behr, Harel, Post &Lesh, 1992; Karplus, Pulos, &Stage, 1983a; Noelting, 1980a; 1980b ; Streefland, 1984; Tourniaire &Pulos, 1985 από De Bock et al 2007; Modestou &Gagatsis, 2007; Lamon,2007; Tjoe &de la Torre, 2014; Allatore & Figueras, 2005; Van Dooren et al, 2009).

2. Θεωρητικό Πλαίσιο

2.1 Λόγος και αναλογία

Πριν ασχοληθούμε με την αναλογική συλλογιστική, ας εξετάσουμε το νόημα των όρων λόγος και αναλογία, γιατί παρόλο που οι περισσότεροι άνθρωποι αγνοούν πιθανώς τον μαθηματικό ορισμό των αναλογιών, τις χρησιμοποιούν σε οικείες καταστάσεις.

Ο λόγος είναι εκφράζει την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων. Οι ποσότητες μπορεί να είναι αριθμητικές (δηλαδή, καθαροί αριθμοί), να προέρχονται από ομοειδή μεγέθη (π.χ. ο λόγος της περιμέτρου ενός τετραγώνου προς το μήκος της πλευράς του), ή να προέρχονται από ετεροειδή μεγέθη (π.χ. ο λόγος του διαστήματος που διένυσε ένα κινούμενο σώμα προς το χρόνο που χρειάστηκε για να το διανύσει). Στις δύο πρώτες περιπτώσεις ο λόγος μπορεί να θεωρηθεί ως καθαρός αριθμός, ενώ στην τρίτη ο λόγος ορίζει ένα νέο μέγεθος, ενδεχομένως σύνηθες (στην περίπτωση του παραδείγματος, τη μέση ταχύτητα). Πρόκειται για τις «εντατικές ποσότητες», που πολλοί ερευνητές θεωρούν κεντρικές στην πραγμάτευση των λόγων (π.χ., Howe, Nunes, &Bryant, 2010; Karplus, 1983; Lesh et al., 1988; Lamon, 2008; Simon & Placa, 2012). Για παράδειγμα, οι εντατικές ποσότητες περιλαμβάνουν την πυκνότητα (ευθέως ανάλογη προς τη μάζα, αντιστρόφως ανάλογη προς τον όγκο), ταχύτητα (ευθέως ανάλογη προς την απόσταση, αντίστροφα ανάλογη με το χρόνο) και θερμοκρασία (ευθέως ανάλογη προς την θερμική ενέργεια, αντιστρόφως ανάλογη προς τον όγκο(π.χ., Howe, Nunes, &Bryant, 2010; Karplus, 1983; Lesh et al., 1988; Lamon, 2008; Simon &Placa, 2012)

Ο λόγος περιγράφει μια κατάσταση με όρους πολλαπλασιαστικής σύγκρισης. Για παράδειγμα, όταν λέμε ότι ο λόγος των αγοριών με τα κορίτσια στην τάξη είναι 2 προς 3, συγκρίνουμε το πλήθος των αγοριών με αυτό των κοριτσιών. Αν γνωρίζουμε ότι υπάρχουν 18 κορίτσια στην τάξη, γνωρίζουμε ότι ο αριθμός των αγοριών είναι 2/3 x 18= 12

Σε πολλές περιπτώσεις είναι απαραίτητη η σύγκριση λόγων. Ας φανταστούμε, για παράδειγμα, δύο βάζα Α και Β. Το Α περιέχει 5 άσπρες και 5 μαύρες μπάλες, ενώ το Β περιέχει 10 άσπρες και 15 μαύρες μπάλες. Το ερώτημα «από ποιο βάζο έχω μεγαλύτερη πιθανότητα να τραβήξω μια άσπρη μπάλα;» απαιτεί τη σύγκριση του λόγου των άσπρων προς των μαύρων μπαλών στο Α με το αντίστοιχο λόγο στο Β (ή, εναλλακτικά, τους λόγους των άσπρων προς το σύνολο των μπαλών στο κάθε βάζο). Στην περίπτωση που οι λόγοι είναι ίσοι, έχουμε μια περίπτωση αναλογίας.

Πράγματι, αναλογία είναι μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ λόγων, η οποία ορίζεται, από μαθηματική άποψη, ως εξής: α/β =γ/δ αν και μόνο αν αδ=βγ (β, γ μη μηδενικοί). Η αναλογία, δηλαδή, είναι μια σχέση μεταξύ δυο σχέσεων, ή μια σχέση 2ης τάξης (Lesh et al., 1988)

Ας σκεφτούμε τώρα το βάζο Β του παραπάνω παραδείγματος και ένα βάζο Γ που περιέχει 30 άσπρες μπάλες και 45 μαύρες μπάλες. Ο λόγος των άσπρων προς τις μαύρες μπάλες στο Β είναι ίσος με τον αντίστοιχο λόγο στο Γ. Πρόκειται, δηλαδή, για μια αναλογία. Μπορεί να βρεθούν και άλλα βάζα στα οποία το πλήθος των μαύρων και άσπρων μπαλών θα διέπεται από την ίδια σχέση, ωστόσο δε θα είχαμε λόγο να περιμένουμε ότι αυτή η σχέση θα μπορούσε να ισχύει γενικά. Ας συγκριθεί αυτή η περίπτωση με τις με τις περιπτώσεις στις οποίες δύο μεταβλητές ποσότητες συμμεταβάλλονται. Για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε ότι η τιμή ενός συγκεκριμένου τετραδίου είναι 2 ευρώ, τότε αναμένουμε ότι αν αγοράσουμε x τετράδια, η τιμή τους θα είναι 2x. Σε τέτοιες περιπτώσεις, το μαθηματικό μοντέλο της κατάστασης είναι μια γραμμική συνάρτηση της μορφής f(x)=αx, όπου το α είναι ο σταθερός λόγος όλων των ζευγών f(x)/x (x διάφορο του μηδενός – η σχέση ισχύει και όταν το x είναι 0).

Παρά τη σημασία της στις καθημερινές καταστάσεις, στις επιστήμες και στο εκπαιδευτικό σύστημα, η έννοια των αναλογιών είναι δύσκολη και αποκτάται αργά.(Tournaire &Pulos, 1985).

2.2 Τι είναι η αναλογική συλλογιστική;

Η αναλογική συλλογιστική δεν είναι σημαντική μόνο στα μαθηματικά, αλλά και στην καθημερινή μας ζωή, επειδή πολλές καταστάσεις οργανώνονται γύρω από την ιδέα του λόγου και της αναλογίας και είναι πολύ πιο πολύπλοκη από ό, τι συχνά θεωρείται (Tourniare &Pulos, 1985), κάτι που καθιστά ακόμη πιο δύσκολη την κατάλληλη επεξεργασία του συγκεκριμένου όρου Αυτό οδήγησε σε πρώιμες συστηματικές προσπάθειες για τον ορισμό της έννοιας. Σήμερα, ωστόσο, εμφανίζονται κενά στο να προσδιοριστούν εκείνα τα στοιχεία που συνδέονται άμεσα με την ικανότητα χρήσης αναλογιών και συνεπώς να εφαρμόσουν αναλογική συλλογιστική (Lamon, 1999).

Μια αναλογία μπορεί να θεωρηθεί ότι τυπώνει την έκφραση μιας αφηρημένης σχέσης σε μια τυποποιημένη μαθηματική δήλωση. Όμως αυτή η μαθηματική τυποποίηση μιας αναλογικής σχέσης δεν είναι εξ ολοκλήρου συνώνυμη με την αναλογική συλλογιστική(De la Torre et al, 2013)

Για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα, η αναλογική σκέψη ήταν ένας όρος ομπρέλα, μια φράση που αφορούσε μια ευρεία γκάμα ικανοτήτων του ατόμου να διαχειριστεί έννοιες, πλαίσια και διαδικασίες ρητών αριθμών. Ο όρος είναι δύσκολο να προσδιοριστεί και να οριοθετηθεί, καθώς είναι πιο εύκολο να αποφανθεί κανείς πότε ένας σπουδαστής ή ένας ενήλικας δεν έχει αναλογική σκέψη, παρά να καθοριστούν τα χαρακτηριστικά ενός ατόμου που έχει την ικανότητα να σκέφτεται αναλογικά.(Lamon,2008, σελ 3)

Σε πολλές απόπειρες για την εκτίμηση της ικανότητας των μαθητών να σκέφτονται αναλογικά (Karplus, Pulos, &Stage, 1983a, 1983b, Noelting, 1980a, 1980b), οι έρευνες αρχικά επικεντρώθηκαν σε μεμονωμένες απαντήσεις σε προβλήματα ελλείπουσας τιμής. Οι μαθητές που μπορούσαν να απαντήσουν επιτυχώς στις αριθμητικά «δύσκολες» καταστάσεις που περιείχαν μη ακέραια πολλαπλάσια εντός και μεταξύ των ζευγών των αναλογιών, θεωρήθηκαν πως είναι στο υψηλότερο επίπεδο και οι απαντήσεις τους θεωρήθηκαν αναλογικές απαντήσεις. Πιστεύουμε ότι αυτό είναι μια περιορισμένη προοπτική, μια απαραίτητη αλλά όχι επαρκή συνθήκη, ειδικά επειδή αυτά τα προβλήματα των ερευνών αυτών προσφέρονται για καθαρά αλγοριθμικές λύσεις (Lesh et al., 1988, σελ. 2).

Είναι δηλαδή προφανές ότι πολλοί άνθρωποι, ενώ δεν έχουν αναπτύξει την αναλογική ικανότητά τους, μπορούν να αντισταθμίσουν και να λύσουν προβλήματα χρησιμοποιώντας μαθηματικούς κανόνες και τύπους σε μαθήματα άλγεβρας, γεωμετρίας και τριγωνομετρίας. Αλλά, τελικά, οι κανόνες πολλές φορές είναι ένα κακό υποκατάστατο της κατανόησης. (Lamon, 2008, σελ. 3)

Για παράδειγμα, τα αποτελέσματα στην έρευνα των Behr et al. (1992) όπως αναφέρει ο Nabors(2003), υποδεικνύουν ότι όλα τα άτομα που επιλύουν ένα πρόβλημα με αναλογίες δεν χρησιμοποιούν αναγκαστικά αναλογικούς συλλογισμούς. Δηλαδή, δείχνουν ότι η επίλυση έργων που χαρακτηρίζονται από μια έκφραση της μορφής A / B = C / D δεν περιλαμβάνει απαραίτητα αναλογική σκέψη. Πράγματι, η χρήση αλγορίθμων όπως ο διασταυρούμενος πολλαπλασιασμός για την επίλυση των αναλογιών του τύπου A / B = x / D μπορεί να επιτρέψει στους μαθητές να αποφύγουν την αναλογική λογική, εφόσον τους αρκεί να λύσουν την εξίσωση του δημιουργείται για να λύσουν το πρόβλημα τους κάθε φορά. Αυτό όμως δε σημαίνει πως σκέφτονται αναλογικά..Για τους ερευνητές αυτούς, ένα μέσο για να αποφασιστεί αν ένας μαθητής χρησιμοποιεί αναλογική συλλογιστική στην επίλυση καθηκόντων που εκφράζονται από το A / B = C / D, είναι να διαπιστώσει εάν υπάρχουν ενδείξεις ότι ο μαθητής αναγνωρίζει τη δομική ομοιότητα που αντιπροσωπεύουν οι δύο πλευρές της εξίσωσης. Αν όχι, τότε δεν εμπλέκεται η αναλογική συλλογιστική.

Από την άλλη πλευρά, η άποψη των Piaget &Inhelder(1975, από Lesh et al., 1988, σελ. 2) πως απαραίτητο χαρακτηριστικό της αναλογικής συλλογιστικής, είναι η κατανόηση μιας σχέσης μεταξύ δυο σχέσεων (δηλ. μια "δεύτερης τάξης" σχέση), είναι επίσης περιοριστική διότι συνεπάγεται ότι αν δεν αντιλαμβάνεσαι αυτή τη σχέση, δεν έχεις ικανότητες αναλογικής συλλογιστικής. Πράγματι, στο πλαίσιο της Πιαζετιανής παράδοσης και με τη συγκεκριμένη προϋπόθεση για την αναλογική σκέψη, πολλοί ερευνητές (Noelting, 1980), υποστήριξαν ότι τα παιδιά είναι ανίκανα να σκέφτονται αναλογικά πριν τα 12 χρόνια.

Σε αντίθεση με τις μελέτες που δείχνουν ότι η αναλογική συλλογιστική είναι ένα καθυστερημένο επίτευγμα, άλλες μελέτες δείχνουν ότι τα παιδιά είναι σε θέση να αιτιολογούν την αναλογικότητα σε προγενέστερες ηλικίες απ' ότι προέβλεπε η θεωρία του Piagetκαι αναφέρουν ότι τα παιδιά ηλικίας 5-6 ετών μπορούν να επιλύσουν απλά αναλογικά προβλήματα κατά τη διάρκεια των προσχολικών χρόνων Οι ερευνητές επίσης σημείωσαν ότι η αναλογική(proportional) συλλογιστική είναι μια ποσοτική μορφή της κατ' αναλογίαν (analogical) συλλογιστικής, με την έννοια ότι τόσο οι εννοιολογικές αναλογίες όσο και οι ποσοτικές αναλογίες απαιτούν ανάλυση των σχέσεων μεταξύ των σχέσεων(Boyer, Levine &Huttenlocher, 2008).Η αντίθεση αυτή οφείλεται στη διαφορετική αντίληψη για το τι συνιστά αναλογική σκέψη. Με την αυστηρή προϋπόθεση της κατανόησης σχέσεων δεύτερης τάξης, αγνοούνται οι πρώιμες ικανότητες αναλογικής σκέψης που φαίνονται να υπάρχουν ακόμα και σε παιδιά πολύ μικρής ηλικίας. Ειδικότερα, αγνοούνται οι ικανότητες των παιδιών σε σχέση με τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις.

Η αναλογική συλλογιστική περιλαμβάνει τη σκέψη για τις σχέσεις και τη σύγκριση των ποσοτήτων ή των αξιών. Σύμφωνα με τα λόγια του John Van de Walle, «Η αναλογική σκέψη είναι δύσκολο να καθοριστεί. Δεν είναι κάτι που μπορείτε ή δεν μπορείτε να το κάνετε, αλλά αναπτύσσεται με την πάροδο του χρόνου μέσω της συλλογιστικής ... Είναι η ικανότητα να σκεφτείτε και να συγκρίνετε τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων »(2009, σελ. 154).

Η αναλογική σκέψη εδράζεται στην πολλαπλασιαστική σκέψη, δηλ. στην ικανότητα ανίχνευσης έκφρασης και χρήσης απλών πολλαπλασιαστικών σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων ή και αριθμών. Για παράδειγμα, όταν οι μαθητές σκέφτονται το 8 ως δύο τετράδες ή τέσσερις δυάδες αντί να το σκέφτονται ως ένα περισσότερο από επτά. Ένα από τα πιο δύσκολα καθήκοντα για τα παιδιά είναι η κατανόηση του πολλαπλασιαστικού χαρακτήρα της αλλαγής στις αναλογικές καταστάσεις. Τα παιδιά που δεν μπορούν ακόμα να διακρίνουν τη διαφορά χρησιμοποιούν αδιακρίτως μετασχηματισμούς προσθέτων. Μερικές φορές αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα παιδιά δεν έχουν εισαχθεί ακόμη σε πολλαπλασιαστικές ιδέες, και μερικές φορές είναι αιτία που η ανακριβής λεκτική γλώσσα μπορεί να επηρεάσει την κατανόησή τους και να τα οδηγήσει σε προσθετικούς μετασχηματισμούς (Lamon, 2008, σελ 4)

Σε πιο εξελιγμένη μορφή της, η αναλογική συλλογιστική επιτρέπει τη σύγκριση πολλαπλασιαστικών σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων(Van de Walle, 2009). Όταν, για παράδειγμα, οι μαθητές όταν αποφασίζουν ότι μια ομάδα 3 παιδιών που αυξάνει σε 9 παιδιά είναι μια πιο σημαντική αλλαγή από μια ομάδα 100 παιδιών που φθάνουν σε 150, αφού ο αριθμός τους τριπλασιάστηκε στην πρώτη περίπτωση. αλλά αυξήθηκε μόνο κατά 50%, χωρίς να διπλασιαστεί, στη δεύτερη περίπτωση. Ή όταν μπορούν να κατανοήσουν πως η ταχύτητα των 50 km / h είναι ίδια με την ταχύτητα των 25 km / 30 min(Lamon, 2008, σελ 101).

Οι περισσότεροι ερευνητές θεωρούν ουσιαστικό συστατικό της προηγμένης αναλογικής σκέψης την αίσθηση συμμεταβολής δύο μεγεθών σε καταστάσεις στις οποίες ενυπάρχει ευθεία αναλογία (Behr et al., 1992), αλλά και αντίστροφη αναλογία (Lamon, 2008), δηλαδή, σε καταστάσεις που δυο μεγέθη συνδέονται και συμμεταβάλλονται διατηρώντας το λόγο ή το γινόμενο των αντίστοιχων ποσοτήτων σταθερό. Η αναλογία θεωρείται εδώ ως γραμμική συναρτησιακή σχέση (Karplus, 1983).

Τέλος, πολύ σημαντικό για την κατανόηση των αναλογικών σχέσεων είναι η ικανότητα της διαφοροποίησης των καταστάσεων που εμπεριέχουν αναλογικές σχέσεις από άλλες που δεν εμπεριέχουν τέτοιες σχέσεις. Δύο ποσότητες μπορεί να μην σχετίζονται αναλογικά, μια ποσότητα μπορεί να σχετίζεται αντιστρόφως ανάλογα με μια άλλη ποσότητα, όπως π.χ. η αύξηση του αριθμού των ατόμων μειώνει το χρόνο που απαιτείται για να κάνει μια δουλειά, ή μπορεί η αλλαγή σε μια ποσότητα να είναι ανάλογη με τη μεταβολή την άλλη ποσότητα. Όμως και πολλές άλλες σημαντικές σχέσεις δεν συνεπάγονται καθόλου αναλογικές σχέσεις και είναι σημαντικό οι σπουδαστές να μάθουν να αναγνωρίζουν τη διαφορά(Lamon, 2008, σελ5).

2.3 Η σημασία της αναλογικής συλλογιστικής

Η αναλογική συλλογιστική θεωρείται μερικές φορές ότι είναι μόνο η μελέτη των λόγων, των ποσοστών και των ρητών αριθμών όπως τα κλάσματα, τα δεκαδικά ψηφία και τα ποσοστά, αλλά στην πραγματικότητα διαπερνά πολλές περιοχές των μαθηματικών. Για παράδειγμα, η αναλογικότητα είναι μια σημαντική πτυχή της μέτρησης, συμπεριλαμβανομένων των μετατροπών μονάδων και της κατανόησης των πολλαπλασιαστικών σχέσεων των διαστάσεων στο εμβαδόν και τον όγκο.

Πέρα από την τάξη μαθηματικών, η αναλογική συλλογιστική είναι εμφανής σε πολλούς άλλους τομείς όπως η φυσική, η μουσική και η γεωγραφία, καθώς και στις καθημερινές δραστηριότητες. Οι άνθρωποι χρησιμοποιούν αναλογικούς συλλογισμούς για τον υπολογισμό των φθηνότερων αγορών, των φόρων και των επενδύσεων, για να δουλεύουν με σχέδια και χάρτες, να πραγματοποιούν μετρήσεις ή νομισματικές μετατροπές, να προσαρμόζουν συνταγές ή να δημιουργούν διάφορες αναλύσεις μιγμάτων και διαλυμάτων. Πολλές βασικές έννοιες στην επιστήμη περιστρέφονται γύρω από τις «εντατικές ποσότητες» (Lamon, 2007) και την αντίστροφη αναλογικότητα.

Η ικανότητα να σκέφτεται και να αιτιολογεί αναλογικά, είναι ένας βασικός παράγοντας στην ανάπτυξη της ικανότητας ενός ατόμου να κατανοεί και να εφαρμόζει τα μαθηματικά. Η Susan Lamon εκτιμά ότι πάνω από το 90% των φοιτητών που εισέρχονται στο γυμνάσιο δεν μπορούν να κατανοήσουν αρκετά καλά τα μαθηματικά και την φυσική και είναι απροετοίμαστοι για πραγματικές εφαρμογές στη στατιστική, τη βιολογία, τη γεωγραφία ή τη φυσική (Lamon, 2008, σελ.10). Ενώ οι μαθητές μπορεί να είναι σε θέση να λύσουν ένα αναλογικό πρόβλημα με μια απομνημονευμένη διαδικασία, αυτό δεν σημαίνει ότι μπορούν να σκέφτονται αναλογικά.

Η ανάπτυξη αναλογικής συλλογιστικής είναι μία από τις πιο προκλητικές πτυχές της μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Ο αναλογικός και πολλαπλασιαστικός συλλογισμός είναι βασικός για πολλές σημαντικές μαθηματικές έννοιες και μπορεί να θεωρηθεί ως η πύλη προς την επιτυχία στη μελέτη της άλγεβρας (Confrey & Smith, 1995).

2.4 Τύποι προβλημάτων αναλογίας

Τα συνηθισμένα έργα των σχολικών εγχειριδίων με τα οποία οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την αναλογική συλλογιστική είναι τα προβλήματα αναλογίας.

Οι πιο κοινοί τύποι προβλημάτων αναλογιών που διακρίνουν οι Tournaire &Pulos(1985) αλλά και οι Cramer, Post και Currier, (1993) είναι :

α) Προβλήματα ελλείπουσας τιμής, όπου δίνονται οι τρεις όροι της αναλογίας και ζητείται ο τέταρτος

Παράδειγμα:

"Εάν 5 μολύβια κοστίζουν 40 λεπτά, πόσο κοστίζουν 15 μολύβια;"

β) Προβλήματα σύγκρισης, όπου δίνονται και οι τέσσερις όροι της αναλογίας και ζητείται από τους μαθητές να συγκρίνουν τους δύο λόγους ή να καθορίσουν αν αποτελούν αναλογία

Παράδειγμα

Ένα σετ 5 μολυβιών κοστίζει 40 λεπτά. Ένα άλλο σετ 15 μολυβιών κοστίζει € 1,10. Σε ποιο σετ τα μολύβια είναι φθηνότερα;

Οι άλλες κατηγορίες από τους Tournaire & Pulos(1985) είναι τα «προβλήματα εξήγησης», όπου ζητείται εξήγηση της απάντησης και μια τέταρτη κατηγορία τα «προβλήματα απάντησης» όπου ζητείται μόνο να βρεθεί ή να επιλεγεί η απάντηση, χωρίς να δοθεί εξήγηση, ενώ από τους Cramer, Post &Currier, 1993 μια διαφορετική κατηγορία προβλημάτων αναφέρεται ως «προβλήματα ποιοτικής πρόβλεψης και σύγκρισης» που απαιτούν συγκρίσεις που δεν εξαρτώνται από συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές.

Η συχνότερη επαφή των μαθητών με τα προβλήματα αναλογικότητας είναι κυρίως τα προβλήματα ελλείπουσας τιμής που συναντώνται σε όλα τα εκπαιδευτικά συστήματα ως κύρια ενασχόληση με τις αναλογίες και η ικανότητα αλγεβρικών λύσεων των αναλογιών και των προβλημάτων αυτών θεωρείται σιωπηρά ως βασικό συστατικό της αναλογικής συλλογιστικής (Lamon, 1999 από Modestou &Gagatsis, 2009)).

2.5 Επίλυση αναλογικών προβλημάτων και παράγοντες δυσκολίας

Η αναλογική συλλογιστική διέπει όλες τις δραστηριότητες των μαθητών στην επαφή με τις αναλογίες. Δεδομένου ότι ο λόγος και η αναλογία είναι σημαντικά μαθηματικά θέματα, οι μαθητές έρχονται σε επαφή με διάφορα μαθηματικά προβλήματα που αποσκοπούν στην ανάπτυξη της αναλογικής συλλογιστικής. Έτσι λοιπόν, κατά τη διάρκεια της φοίτησης στο σχολείο, η ενασχόληση με προβλήματα που κυριαρχούν οι λόγοι και οι αναλογίες γίνεται η κύρια πρακτική που εφαρμόζεται στα περισσότερα εκπαιδευτικά συστήματα για την ανάπτυξη της αναλογικής συλλογιστικής.

Κατά τη διάρκεια των πρώτων τάξεων του Δημοτικού σχολείου, οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της αναλογίας μέσα από την επίλυση απλών αναλογικών προβλημάτων που βασίζονται αρχικά στη σχέση 2:1. Στη συνέχεια, οι μαθητές χειρίζονται πιο συστηματικά αναλογικά έργα με τη βοήθεια του σχήματος της αναλογίας, το οποίο στηρίζεται στη θεωρία σχήματος (Marshall, 1995). Χαρακτηριστικό των έργων αυτών είναι ότι επιλύονται με απλή εφαρμογή μιας πράξης (είτε πολλαπλασιασμού, είτε διαίρεσης), αφού στις περισσότερες φορές ο ένας δεδομένος αριθμός είναι η μονάδα. Στη συνέχεια, τα έργα γίνονται πιο σύνθετα με την εμπλοκή και διαφορετικών αριθμών (όχι μόνο φυσικών, αλλά και μη φυσικών) και οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την έννοια της αναλογίας ως ισότητας δύο λόγων α/β=γ/δ.

Τα προβλήματα ελλείπουσας τιμής (Missing Value Problems), τα πιο κοινά αναλογικά προβλήματα συλλογισμού (Tjoe &de la Torre, 2012), έχουν σχεδιαστεί για να εκτιμήσουν την ικανότητα των μαθητών να προσδιορίσουν τη μια τιμή που λείπει, δεδομένου ότι έχουν τρεις τιμές κατά τέτοιο τρόπο, ώστε μαζί με την τιμή που λείπει, να σχετίζονται αναλογικά (Cramer &Post , 1993, Kaput &West, 1994 από Tjoe &de la Torre, 2014).

Έτσι λοιπόν, προτού οι μαθητές εξοικειωθούν με συγκρίσεις και πιθανές σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στις ποσότητες των δύο λόγων, τους παρουσιάζεται ως μέθοδος λύσης των προβλημάτων, η μέθοδος του εσωτερικού γινομένου, η οποία χρησιμοποιείται ως η εύκολη λύση για τα προβλήματα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη. Η χρήση του κανόνα "διασταυρούμενου πολλαπλασιασμού" χωρίς προηγούμενη αντίληψη της κατάστασης, οδηγεί τους μαθητές να δρουν επί του επίσημου συστήματος συμβόλων με τη χρήση συντακτικών κανόνων και όχι με την κατανόηση.

Ο μνημονικός αυτός κανόνας αποτελεί την επικρατέστερη μέθοδο επίλυσης αναλογικών προβλημάτων στα περισσότερα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών παγκόσμια (Christou &Philippou, 2002). Παρόλα αυτά, ερευνητικά δεδομένα δείχνουν ότι η μέθοδος αυτή σπάνια γίνεται κατανοητή από τους μαθητές (Lesh et al., 1988). Δεν προκύπτει αυθόρμητα, αλλά δίνεται από τον εκπαιδευτικό και χρησιμοποιείται αλγοριθμικά από τους μαθητές για να τους βοηθήσει στην επίλυση προβλημάτων.(Modestou &Gagatsis, 2010).

Μελέτες έχουν δείξει ότι οι μαθητές, που εξετάζουν μόνο τα επιφανειακά χαρακτηριστικά των προβλημάτων, έχουν έντονη τάση να εφαρμόζουν αναλογικές μεθόδους σε προβλήματα με διατύπωση ελλείπουσας τιμής, ακόμη και σε εκείνα, όπου αυτή η λύση είναι αμφισβητήσιμη ή ακόμα και σαφώς ακατάλληλη.(Van Dooren et al, 2009)

Διάφοροι παράγοντες που εντοπίζονται στη βιβλιογραφία, φαίνεται πως επηρεάζουν την απόδοση στην επίλυση προβλημάτων αναλογίας. Οι ερευνητές έχουν εντοπίσει μεταβλητές που συμβάλλουν στην ευκολία ενός ατόμου ή στη δυσκολία επίλυσης προβλημάτων αναλογίας. Η σημασιολογική δομή των προβλημάτων, το είδος και η θέση των αριθμών στην αναλογία, η παρουσία ή όχι ακέραιων λόγων και η αριθμητική πολυπλοκότητα στην αναλογία συγκαταλέγονται μεταξύ αυτών των μεταβλητών που μπορούν να επηρεάσουν τη χρήση της στρατηγικής επίλυσης προβλημάτων και το επίπεδο δυσκολίας του προβλήματος (Tourniaire &Pulos,1985, Steinthorsdottir, 2006).

2.6 Ψευδαίσθηση της αναλογίας

Η βασική γλωσσική δομή για τα προβλήματα που αφορούν την αναλογικότητα, είναι τα προβλήματα ελλείπουσας τιμής, που περιλαμβάνουν τέσσερις ποσότητες (a, b, c, d), εκ των οποίων οι 3 είναι γνωστές και μία άγνωστη, και μία συνέπεια ότι η ίδια πολλαπλασιαστική σχέση που συνδέει a με b συνδέει c με d.

Ας εξετάσουμε για παράδειγμα, την ακόλουθη περίπτωση προβλήματος: "Ο πιανίστας χρειάζεται 5 λεπτά για να εκτελέσει 2 μουσικά θέματα. Πόσο χρόνο χρειάζεται να εκτελέσει 3 θέματα της ίδιας διάρκειας με τα πρώτα; " Στην περίπτωση αυτή υπάρχει πραγματική αναλογικότητα, καθώς η σχέση μεταξύ των όρων είναι σταθερός λόγος. Ωστόσο, υπάρχουν περιπτώσεις όπου τα προβλήματα ταιριάζουν με αυτή τη γενική γλωσσική δομή χωρίς να είναι αναλογικά. Σε αυτές τις περιπτώσεις, τα προβλήματα θεωρούνται «ψευδοαναλογικά», λόγω της έντονης εντύπωσης που δημιουργούν για την εφαρμογή ενός γραμμικού μοντέλου, δηλαδή αναλογικών μεθόδων για τη λύση τους. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του σταθερού προβλήματος: "Ένας πιανίστας χρειάζεται 5 λεπτά για να εκτελέσει ένα μουσικό θέμα. Πόσο χρόνο κάνουν 3 πιανίστες για να εκτελέσουν το ίδιο θέμα στην ίδια ορχήστρα», οι μαθητές θα απαντήσουν αυθόρμητα ότι οι πιανίστες χρειάζονται 15 λεπτά, που υπάγονται με τον τρόπο αυτό στην παγίδα ψευδο-αναλογικότητας; δηλαδή δεν θεωρούν το γεγονός ότι οι 3 πιανίστες εκτελούν το θέμα ταυτόχρονα. Ως εκ τούτου, εάν ένα πρόβλημα που ταιριάζει με τη γενική γλωσσική δομή της αναλογικότητας, η τάση να προκαλέσει την άμεση λύση με αναλογικότητα μπορεί να είναι εξαιρετικά ισχυρή, ακόμη και αν αυτά τα προβλήματα είναι διαφορετικά (Verschaffel, Greer &DeCorte, 2000 από Modestou et al., 2007).

Έρευνες γύρω από το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας (De Bock, Verschaffel, &Janssens, 1998; Modestou &Gagatsis, 2007; Van Dooren, 2005, De Bock et al, 2007) μας κάνουν γνωστό ότι αυτή η τυπική προσέγγιση της αναλογικής συλλογιστικής δεν συνοδεύεται από την κατανόηση της ιδέας της ίδιας της αναλογίας. Οι μαθητές ανεξαρτήτως ηλικίας, ενώ επιτυγχάνουν στην επίλυση τυπικών αναλογικών προβλημάτων, αποτυγχάνουν στο να τα διακρίνουν από άλλα μη αναλογικά προβλήματα (Modestou, Elia, Gagatsis &Spanoudes, 2008). Ως αποτέλεσμα της αποτυχίας διάκρισης των αναλογικών από τις μη αναλογικές καταστάσεις, δημιουργείται στους μαθητές μια "ψευδαίσθηση" για την ύπαρξη αναλογίας, με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούν αναλογικές στρατηγικές για να επιλύσουν ακόμη και τα μη αναλογικά έργα.(Modestou &Gagatsis, 2010).

Ακόμη, για πολλούς μαθητές, τα σχολικά μαθηματικά δεν έχουν καμία σχέση με τις πραγματικές εμπειρίες της ζωής τους. Κατά την επίλυση ενός αριθμητικού λεκτικού προβλήματος, απλώς εφαρμόζουν τις αριθμητικές πράξεις αλγοριθμικά χωρίς ρεαλιστικές εκτιμήσεις ούτε τη χρήση της κοινής λογικής τους. Η πραγματική κατάσταση που προκαλείται από τη λέξη «πρόβλημα» στα αυτιά των μαθητών, δεν μπορεί να είναι μια ενιαία και ακριβή απάντηση για το σύνολο των μαθητών, αλλά σχεδόν όλοι οι μαθητές παίζουν το «παιχνίδι λεκτικών προβλημάτων», που ζητά από τους παίκτες να αναζητήσουν τις μαθηματικές πράξεις που είναι κρυμμένες στην έκφραση του, από το να κατανοήσουν και να προσεγγίσουν αυτά τα προβλήματα ως γνήσιες ασκήσεις σε ρεαλιστικά μαθηματικά μοντέλα και πλαίσια(Van Dooren et al, 2009)

Οι κυριότεροι λόγοι για μια τέτοια συμπεριφορά είναι η στερεότυπη φύση των λεκτικών προβλημάτων που τυπικά παρουσιάζονται στα σχολικά μαθηματικά και οι μαθηματικοί κανόνες για το "παιχνίδι λεκτικών προβλημάτων " που έχουν εισαχθεί στη σχολική πρακτική(Verschaffel, 2000). Λαμβάνοντας υπόψη τους κανόνες του παιχνιδιού των σχολικών λεκτικών προβλημάτων - ή, όπως δήλωσε ο Brousseau (1997), λόγω της λειτουργίας του «διδακτικού συμβολαίου» - οι μαθητές που λύνουν τα προβλήματα αυτά, μπορεί να έχουν υποθέσει ότι τα προβλήματα αυτά είχαν ακριβή, αριθμητική απάντηση και ότι πρέπει να κάνουν μερικούς υπολογισμούς με τους αριθμούς που δίνονται στο πρόβλημα για να δοθεί αυτή η απάντηση.

2.7 Κατηγορίες ψευδοαναλογικών προβλημάτων

Ψευδοαναλογικά, χαρακτηρίζονται τα μη αναλογικά προβλήματα, που έχουν όμως δομή προβλημάτων ελλείπουσας τιμής και για τα οποία μια αναλογική λύση είναι προφανώς εσφαλμένη, και θα έπρεπε να εφαρμοστεί μια άλλη μέθοδος για να βρεθεί η σωστή απάντηση.

Οι Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, Verschaffel (2005) ταξινομούν τα μη αναλογικά καθήκοντα (ψευδοαναλογικά) σε προσθετικά προβλήματα, σταθερά προβλήματα και γραμμικά προβλήματα. Στα γραμμικά προβλήματα, η γραμμική συνάρτηση της προβληματικής κατάστασης είναι της μορφής $f(x) = ax + b$ με $b \neq 0$, όπου ενώ είναι γραμμικά, δεν είναι αναλογικά.

Παράδειγμα γραμμικού προβλήματος:

Η ατμομηχανή ενός τρένου είναι μήκους 12 μέτρων. Εάν υπάρχουν 4 βαγόνια που συνδέονται με την ατμομηχανή, το τρένο έχει μήκος 52 μ. Πόσο μήκος έχει η αμαξοστοιχία εάν υπάρχουν 8 βαγόνια που συνδέονται με την ατμομηχανή;

(σωστή απάντηση: 92 μ, αναλογική απάντηση: 104 μ)

Τα προσθετικά προβλήματα έχουν σταθερή διαφορά μεταξύ των δύο μεταβλητών, οπότε μια σωστή προσέγγιση είναι να προσθέσετε αυτή τη διαφορά σε μια τρίτη τιμή.

Παράδειγμα προσθετικού προβλήματος:

"Η Ellen και η Kim τρέχουν γύρω από ένα γήπεδο.. Τρέχουν εξίσου γρήγορα, αλλά η Ellen ξεκίνησε αργότερα. Όταν η Ellen έχει τρέξει 3 γύρους, η Kim έχει τρέξει 6 γύρους. Όταν η Ellen έχει τρέξει 6 γύρους, πόσους έχει τρέξει η Kim; "

(σωστή απάντηση: 9 γύροι, αναλογική απάντηση: 12 γύροι)

Τα σταθερά προβλήματα δεν έχουν καθόλου σχέση μεταξύ των δύο μεταβλητών. Η τιμή της δεύτερης μεταβλητής δεν αλλάζει, οπότε η σωστή απάντηση αναφέρεται μέσα στο πρόβλημα.

Παράδειγμα σταθερού προβλήματος;

Η μαμά έβαλε 3 πετσέτες στην απλώστρα των ρούχων. Μετά από 12 ώρες ήταν στεγνά. Η γιαγιά έβαλε 6 πετσέτες στην απλώστρα ρούχων. Πόσο χρόνο θα πάρει για να στεγνώσουν;

(σωστή απάντηση: 12 ώρες, αναλογική απάντηση: 24ώρες)

Ενώ σε αυτές τις τρεις κατηγορίες προβλημάτων, υπάρχουν μαθηματικές απαντήσεις, υπάρχουν και προβλήματα που χαρακτηρίζονται «ατελέσφορα» (δηλαδή δεν υπάρχει ακριβής λογικο-μαθηματική σχέση μεταξύ των δοσμένων σε αυτά στοιχείων, οπότε δεν μπορεί να δοθεί μια ακριβής απάντηση στο πρόβλημα) και ως εκ τούτου «ασυνήθιστα» ή και «δύσκολα» διότι οι μαθητές δεν αναμένουν "ανεπίλυτα" προβλήματα σε ένα περιβάλλον λεκτικών προβλημάτων. Έτσι, δεν είναι βέβαιο ότι οι μαθητές στις μελέτες αυτές «πραγματικά πίστευαν» ότι υπήρχε μια αναλογική σχέση που διακυβεύεται.

Παραδείγματα ατελέσφορων προβλημάτων:

Ένα κατάστημα πουλάει 312 χριστουγεννιάτικες κάρτες τον Δεκέμβριο. Πόσες πιστεύετε ότι θα πουλήσει συνολικά τον Ιανουάριο, τον Φεβρουάριο και τον Μάρτιο; (Μάλλον εκτός από τον Δεκέμβριο, δε θα ξαναπουλήσει κάρτες)

Ο καλύτερος χρόνος του Γιάννη είναι να τρέχει 100 μέτρα είναι 17 δευτερόλεπτα. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να τρέξει 1 χιλιόμετρο; (Άγνωστο)

2.8 Προβλήματα ελλείπουσας τιμής και αναλογικότητα

Η αναλογικότητα είναι ένα σημαντικό μαθηματικό θέμα που έχει σημαντική θέση σε όλη την πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση των μαθηματικών. Τυπικά, από την τέταρτη τάξη, οι μαθητές αντιμετωπίζουν συχνά προβλήματα αναλογικότητας με τη μορφή ελλείπουσας τιμής ή όπως ονομάζονται από τον Vergnaud (1983, 1988 από Cramer &Post, 1993), «πρόβλημα με τρεις τάξεις» που χαρακτηρίζεται από «ισομορφισμό μέτρων». Σε αυτά τα προβλήματα, δίδονται τρεις αριθμοί (δύο αποτελούν μία περίπτωση αναλογίας και η τρίτη είναι μία από τις δύο τιμές της άλλης αναλογίας) και ο τέταρτος αριθμός πρέπει να βρεθεί (Kaput &West, 1994). Μελέτες έχουν δείξει ότι οι μαθητές έχουν έντονη τάση να εφαρμόζουν αναλογικές μεθόδους σε προβλήματα που έχουν αυτή τη μορφή , ακόμη και σε εκείνα τα προβλήματα όπου αυτό το σύστημα είναι αμφισβητήσιμο ή ακόμα και σαφώς ακατάλληλο. Για παράδειγμα, οι Verschaffel, De Corte και Lasure (1994),όπως αναφ. σε Van Dooren 2009, 2010 διαπίστωσαν ότι πάνω από το 90% των φοιτητών ηλικίας 10 έως 12 ετών απάντησαν 170 δευτερόλεπτα στο πρόβλημα "Ο καλύτερος χρόνος του John για να τρέξει 100 μέτρα είναι 17 δευτερόλεπτα. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να τρέξει 1 χιλιόμετρο; ". Η πραγματική κατάσταση που προκαλείται από τη λέξη πρόβλημα δεν επιτρέπει μια ενιαία και ακριβή απάντηση, αλλά σχεδόν όλοι οι μαθητές έπαιξαν το «παιχνίδι σχολικών λέξεων», που ζητά από τους παίκτες να αναζητήσουν τις μαθηματικές πράξεις που είναι κρυμμένες στις εκφράσεις του από το να κατανοήσουν και να προσεγγίσουν αυτά τα προβλήματα ως γνήσιες ασκήσεις σε ρεαλιστικά μαθηματικά μοντέλα.(Van Dooren et al,2009)

Αναμφισβήτητα, ορισμένοι λόγοι για τη συσχέτιση προβλημάτων ελλείπουσας τιμής με αναλογικούς συλλογισμούς μαθητών βρίσκονται μέσα στην τάξη των μαθηματικών και στη διδασκαλία (για μια επισκόπηση, βλ. Van Dooren, De Bock, Janssens, &Verschaffel, 2008). Η συντριπτική πλειοψηφία των δραστηριοτήτων των μαθητών με αναλογικά έργα που συναντώνται στα σχολεία της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, έχουν μια μορφή προβλημάτων ελλειμματικής αξίας (Cramer, Post, &Currier, 1993). Αντίθετα, εξαιρετικά σπάνια αναφέρονται άλλα προβλήματα με μορφή ελλείπουσας τιμής, αλλά μη αναλογικά. Επιπλέον, αποδίδεται μεγάλη προσοχή στην τεχνικά ορθή και αρμονική εκτέλεση των απαιτούμενων διαδικασιών, χωρίς ρητή και συστηματική αμφισβήτηση του εάν και σε ποιο βαθμό ισχύουν. Ως εκ τούτου, δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι τα παιδιά αρχίζουν να αναμένουν ότι όλα τα προβλήματα ελλείπουσας τιμής απαιτούν αναλογικές μεθόδους. Αποκτούν ένα είδος «εμπειρίας ρουτίνας» (που καθορίζεται από τον Hatano, 2003, ως «απλά να είναι σε θέση να ολοκληρώσουν τις ασκήσεις των σχολικών μαθηματικών γρήγορα και με ακρίβεια χωρίς να χρειάζεται μεγάλη κατανόηση») αντί μιας «προσαρμοστικής εμπειρογνωμοσύνης», όπου θα μπορούν να εφαρμόσουν με ευελιξία και δημιουργικότητα τις διαδικασίες που έχουν μάθει με νόημα.

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μαθητές, ανεξαρτήτως ηλικίας, παρόλο που γνωρίζουν να επιλύουν τυπικά αναλογικά προβλήματα, δεν καταφέρνουν να κάνουν διάκριση μεταξύ αναλογικών και μη αναλογικών καταστάσεων (De Bock et al, 1998, Modestou &Gagatsis, 2007). Συνεπώς δημιουργείται μια ψευδαίσθηση της ύπαρξης γραμμικότητας στους μαθητές, με αποτέλεσμα την εσφαλμένη χρήση αναλογικών στρατηγικών για τη λύση των μη αναλογικών καταστάσεων.

2.9 Εξηγήσεις της υπερβολικής χρήσης της αναλογικότητας

Διάφορες αλληλένδετες εξηγήσεις έχουν αναφερθεί για αυτό το φαινόμενο της κατάχρησης της αναλογίας στην επίλυση προβλημάτων ελλιπούς τιμής(για ανασκόπηση, βλ. Van Dooren et al., 2008). Μια πρώτη εξήγηση σχετίζεται με τον αυτονόητο, διαισθητικό χαρακτήρα που μπορεί να αναπτυχθεί αναλογικά όταν οι μαθητές έχουν βιώσει την πανταχού παρούσα χρησιμότητά τους στο σχολείο και την καθημερινή ζωή (De Bock, Van Dooren, Janssens, &Verschaffel, 2002, Fischbein, 1999, όπως αναφ.Van Dooren et al, 2009).

Μια δεύτερη εξήγηση δείχνει ότι οι μαθητές δεν έχουν επαρκή γνώση συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών που θα βοηθούσαν στην αναγνώριση, μαζί με τη στενή σχέση μεταξύ αυτών των ιδιαίτερων εννοιών και της έννοιας της αναλογικότητας (για παράδειγμα στην γεωμετρία, βλ. DeBock et al., 2002,

Μια τρίτη εξήγηση σχετίζεται με τις εμπειρίες των μαθητών κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων στην τάξη. Λόγω της φύσης των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και του τρόπου αντιμετώπισης αυτών των προβλημάτων από τους εκπαιδευτικούς, οι μαθητές αρχίζουν να αντιλαμβάνονται τη λύση λεκτικών προβλημάτων ως μια δραστηριότητα «παζλ» με ελάχιστη ή καθόλου σχέση με τον πραγματικό κόσμο. Έτσι, αντί να εξετάσουν τις καταστάσεις πραγματικού κόσμου που περιγράφονται σε προβλήματα λέξεων, οι μαθητές συχνά βασίζονται σε ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, τα οποία είναι επιφανειακά(π.χ. λέξεις-κλειδιά, πρότυπες καταστάσεις που περιγράφονται σε προβλήματα λέξεων, το κεφάλαιο του μαθήματος (όπου υπάρχει το πρόβλημα είναι το πιο κρίσιμο στοιχείο για τις μαθηματικές εργασίες που πρέπει να διεξαχθούν).

Αυτή η χρήση των επιφανειακών συνθηκών μας οδηγεί στην τέταρτη εξήγηση: τη διατύπωση της ελλείπουσας τιμής σε ένα λεκτικό πρόβλημα. Σε όλη τη διάρκεια της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, η πλειονότητα των έργων αναλογικής συλλογιστικής που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές διαμορφώνονται σε μορφή προβλημάτων ελλείπουσας τιμής. Πολλή προσοχή δίνεται εξαρχής στην τεχνικά ορθή και αρμονική εκτέλεση των διαδικασιών που απαιτούνται για να βρεθεί η ελλείπουσα τιμή χωρίς να επικεντρώνεται ρητά στην κατανόηση τους (Hatano, 2003).

Σε μια έρευνα των De Bock, Van Dooren, Janssens, &Verschaffel, 2002, όπου οι μαθητές λύνουν μη αναλογικά γεωμετρικά προβλήματα, υπήρξε διαπίστωση ότι οι μαθητές γενικά δεν επιλέγουν συνειδητά και εσκεμμένα μια αναλογική στρατηγική. Σε μια προσέγγιση ώριμης μαθηματικής μοντελοποίησης (βλ. Π.χ. Verschaffel, Greer, &De Corte, 2000), ουσιαστικά βήματα θα ήταν: (1) η κατανόηση του προβλήματος, (2) η επιλογή σχετικών σχέσεων και η μετάφραση τους σε μαθηματικές δηλώσεις,(3) πραγματοποίηση των απαραίτητων υπολογισμών, (4) ερμηνεία και αξιολόγηση του αποτελέσματος. Ωστόσο, οι μαθητές από τη μελέτη του De Bock et al. (2002) φάνηκαν να παρακάμπτουν σχεδόν εντελώς όλα τα βήματα εκτός από το βήμα 3. Η απόφασή τους για τις μαθηματικές πράξεις προέκυψε κυρίως από μια βασική αναγνώριση του τύπου προβλήματος, οι εργασίες που έλαβαν το μεγαλύτερο μέρος του χρόνου και της προσοχής των μαθητών, ήταν να γίνουν αυτές οι πράξεις και, αφού έλεγξαν τα βασικά σφάλματα υπολογισμού, το αποτέλεσμα κοινοποιήθηκε αμέσως ως απάντηση.

Άρα λοιπόν, η επιτακτική ανάγκη για άμεση λύση των προβλημάτων και κοινοποίηση στην τάξη των μαθηματικών, οδηγεί πολλές φορές τους μαθητές σε εσπευσμένες απαντήσεις, χωρίς να έχει προηγηθεί η κατανόηση και στη συνέχεια η κατάλληλη επεξεργασία τους.

2.10 Μια ενδιαφέρουσα δραστηριότητα: Ταξινόμηση προβλημάτων

Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις ορισμένων ερευνητών, η υπερβολική χρήση της αναλογικότητας μπορεί να αποδυναμωθεί, εάν οι μαθητές δίνουν μεγαλύτερη προσοχή στα αρχικά στάδια του κύκλου μοντελοποίησης, δηλαδή στην κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των σχετικών πτυχών της προβληματικής κατάστασης και της μετάφρασής τους σε μαθηματικούς όρους. Έτσι, όταν οι μαθητές εμπλέκονται σε ένα έργο με αναλογικά και μη αναλογικά προβλήματα, χωρίς την ανάγκη να παράγουν πραγματικά αριθμητικές λύσεις, μπορεί να ενθαρρυνθούν να συμμετάσχουν σε ένα ποιοτικά διαφορετικό είδος μαθηματικής σκέψης και να μπορέσουν να αναγνωρίσουν και να διαφοροποιήσουν τα αναλογικά από τα μη- αναλογικά προβλήματα. Αυτή η υπόθεση δοκιμάστηκε στην έρευνα με τη διαχείριση ενός τύπου εργασίας που είναι μάλλον ασυνήθιστο στην τάξη των μαθηματικών: την ταξινόμηση ενός συνόλου λεκτικών προβλημάτων.(Van Dooren et al, 2010)

Το ενδιαφέρον για την αξία της ταξινόμησης προβλημάτων και για τον προβληματισμό σχετικά με τη συγγένεια των προβλημάτων είναι μάλλον παλιά. O Polya(1957) έδειξε ότι κατά την εκπόνηση ενός σχεδίου για την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος, μια χρήσιμη στρατηγική είναι να σκεφτούμε συναφή προβλήματα. Ωστόσο, οι μελέτες που χρησιμοποίησαν εργασίες ταξινόμησης προβλημάτων δεν είναι πολλές. Σε μια έρευνα του ο Silver (1979) ζήτησε από τους μαθητές 8ης τάξης να ταξινομήσουν προβλήματα λέξεων σύμφωνα με τη μαθηματική τους συγγένεια. Στη συνέχεια έκανε μια διδακτική παρέμβαση στην οποία τα προβλήματα λύθηκαν, παρουσιάστηκαν και συζητήθηκαν οι σωστές λύσεις. Στη συνέχεια πρότεινε πάλι την εργασία ταξινόμησης. Κατά την ανάλυση των ταξινομήσεων των μαθητών και των κριτηρίων που χρησιμοποίησαν, ο Silver διαχωρίζει τις ταξινομήσεις με βάση τη μαθηματική δομή, τις ιδιαίτερες λεπτομέρειες, τη μορφή ερωτήσεων και το ψευδοσύστημα (π.χ., σχετικά με το είδος της μετρούμενης ποσότητας: ταχύτητα, τιμή, βάρος κ.λπ.). O Silver βρήκε πως όπου η ποιότητα των ταξινομήσεων των μαθητών ήταν υψηλή και η επίδοση της επίλυσης προβλημάτων ήταν επίσης υψηλή. Επίσης, οι ταξινομήσεις σχετίζονταν περισσότερο με τη μαθηματική δομή μετά την παρέμβαση από ό,τι προηγουμένως, αλλά η ψευδο-δομή των λεκτικών προβλημάτων παρέμεινε ένα σημαντικό κριτήριο για τις ταξινομήσεις των μαθητών.

Σε μια άλλη έρευνα, και οι Van Dooren et al(2010), κατέληξαν σε θετικά αποτελέσματα για την εργασία ταξινόμησης και τις επιπτώσεις της στην εκπαιδευτική πρακτική. Συμπέραναν ότι η υπερβολική χρήση της αναλογικότητας οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στην επιφανειακή προσέγγιση των μαθηματικών προβλημάτων, με υπερπήδηση υπερβολικά γρήγορα στην εργασία υπολογισμού και άμεση αναφορά του αποτελέσματος, αντί για προσπάθεια διάκρισης αναλογικών από μη αναλογικά προβλήματα. Ως εκ τούτου, η αφορμή που δίνεται για να συζητηθούν οι ομοιότητες και οι διαφορές μεταξύ προβλημάτων στην τάξη (τόσο από άποψη επιφανειακών συμφραζομένων όσο και από άποψη βαθύτερων υποκείμενων δομών) φάνηκε μια πολύ ελπιδοφόρα προσέγγιση προκειμένου να εξαλειφθεί η υπερβολική χρήση αναλογικών μεθόδων.

Αυτά τα ευρήματα υποδηλώνουν ότι η ταξινόμηση προβλημάτων αποτελεί έναν εναλλακτικό τρόπο για να διαλευκανθεί η εμπειρογνωμοσύνη των μαθητών για την επίλυση προβλημάτων. Ως εκ τούτου, είναι ενδιαφέρον να δούμε πώς οι μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης που είναι γνωστό ότι υπερεκτιμούν αναλογικές μεθόδους, θα αντιδράσουν όταν συμμετέχουν σε μια εργασία ταξινόμησης όπου θα πρέπει να ταξινομήσουν, αντί να λύσουν, επιφανειακά παρόμοια αναλογικά και μη αναλογικά προβλήματα λέξεων.

2.11 Προτεινόμενο μοντέλο αναλογικού συλλογισμού

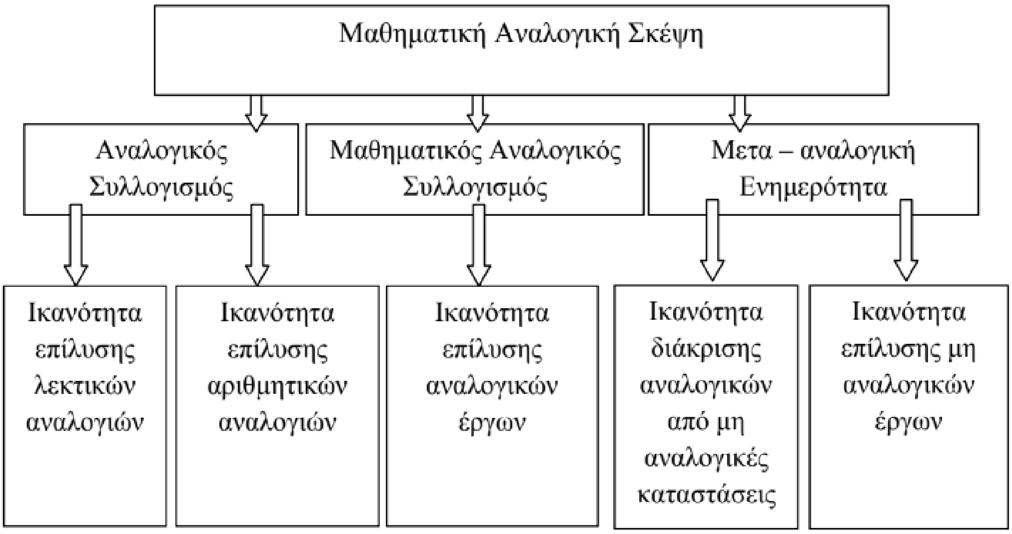
Οι μαθητές, ανεξάρτητα από την ηλικία τους, αν και καταφέρνουν να επιλύσουν τυπικά αναλογικά προβλήματα, δεν καταφέρνουν να κάνουν διάκριση μεταξύ αναλογικών και μη αναλογικών καταστάσεων (De Bock et al., 2002, Modestou &Gagatsis, 2007, Van Dooren et al., 2010, Modestou &Gagatsis, 2010). Στην πραγματικότητα, η ευρεία χρήση αλγορίθμων, όπως οι διασταυρούμενοι πολλαπλασιασμοί, ή ακόμη και οι μέθοδοι πρωταρχικών λύσεων προσθέσεων, δείχνουν ότι δεν είναι απαραίτητο, όλα τα άτομα που επιλύουν σωστά ένα πρόβλημα με αναλογίες να χρησιμοποιούν αναλογικούς συλλογισμούς(Lesh, Post &Behr, 1988, Lamon, 1999).

Τα αναλογικά λάθη των μαθητών δεν είναι περιστασιακά και μεμονωμένα αλλά αντίθετα εμφανίζονται σε ένα ευρύ φάσμα καταστάσεων της καθημερινής ζωής υποδεικνύοντας ότι κάποιος μπορεί πολύ εύκολα να παραπλανηθεί και να χειρίζεται κάθε αριθμητική σχέση ως αναλογική (Freudenthal, 1973), χωρίς να δίνει σημασία στην προβληματική κατάσταση και τους περιορισμούς που αυτή μπορεί να έχει. Κατά συνέπεια, η μαθηματική αναλογική σκέψη ως συνώνυμο με την επίλυση τυπικών αναλογικών έργων στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη, δεν μπορεί να ισχύει. Ένα άτομο με αναλογική σκέψη δεν μπορεί να προσδιοριστεί απλά ως κάποιο που γνωρίζει να χρησιμοποιεί τους αριθμούς ενός έργου με αλγοριθμικό τρόπο για να επιλύει μια αναλογία (Cramer et al., 1993). Αντίθετα και η ικανότητα του ατόμου να διακρίνει κατά πόσο ένα πρόβλημα επιλύεται με τη χρήση μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, προσθετικού συλλογισμού ή οποιασδήποτε άλλης αριθμητικής σχέσης είναι απαραίτητη για τη μαθηματική αναλογική σκέψη (Karplus, Pulos, &Stage, 1983).

Συνεπώς, το σιωπηρό μοντέλο που θεωρεί ότι η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού είναι ταυτόσημη με την ικανότητα επίλυσης τυπικών προβλημάτων ελλιπούς αξίας δεν αποδεικνύεται επαρκής. Η αναλογική λογική πρέπει να περιλαμβάνει μια νέα πτυχή μεταγνωστικού χαρακτήρα που θα αναφέρεται στην ικανότητα διάκρισης των αναλογικών από τις μη αναλογικές καταστάσεις.

Αυτό το νέο και πιο πολυδιάστατο μοντέλο αμφισβητεί τη σιωπηρή παραδοχή ότι η αναλογική συλλογιστική είναι μια διαδικασία ενός στοιχείου που περιλαμβάνει μόνο την ικανότητα επίλυσης των αναλογικών προβλημάτων ρουτίνας, ενώ λαμβάνει υπόψη και διευρύνει τα βιβλιογραφικά δεδομένα που δείχνουν ότι η αναλογική λογική περιλαμβάνει ευρύτερα και πιο σύνθετα φάσματα γνωστικών ικανοτήτων. Πρόκειται για ένα μοντέλο τριών συστατικών, το οποίο αποτελείται από τις πλευρές της κατ'αναλογία-διαισθητικής συλλογιστικής, της αναλογικότητας ρουτίνας και της μεταaναλογικής ενημερότητας (Modestou &Gagatsis, 2010).

Διάγραμμα 1. Μοντέλο μαθηματικής αναλογικής σκέψης (Modestou&Gagatsis, 2010)



2.12 Προαναλογική-Διαισθητική Σκέψη (Analogical)

Ο κατ' αναλογία συλλογισμός αποτελεί έναν από τους πιο σημαντικούς μηχανισμούς της γνωστικής ανάπτυξης του ατόμου. Ως επαγωγικός μηχανισμός, σχετίζεται άμεσα με τη δημιουργία και την τροποποίηση των γνωστικών δομών του ατόμου, μέσω της αναθεώρησης των υπαρχόντων κανόνων και της δημιουργίας νέων κανόνων (Holland, Holyoak, Nisbett, &Thagard, 1989). Το γεγονός αυτό καθιστά τον κατ' αναλογία συλλογισμό αναγκαίο για την κατανόηση και ερμηνεία άγνωστων εννοιών, αλλά και για την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης και την επίλυση προβλήματος (Goswami, 1992).

Ο κατ' αναλογία συλλογισμός περιλαμβάνει την αναγνώριση και μεταφορά δομικών πληροφοριών από ένα σύστημα (πηγή), σε ένα άλλο (στόχο). Αυτή η μεταφορά πραγματοποιείται με την εύρεση της αντιστοιχίας ανάμεσα στις διαδικασίες και τους μηχανισμούς, που χαρακτηρίζουν τα δύο συστήματα (Vosniadou, 1989). Τα συστήματα αυτά μπορεί να συνιστούν έννοιες, θεωρίες ή και προβληματικές καταστάσεις, ενώ παράλληλα στις περισσότερες περιπτώσεις ανήκουν και σε εντελώς διαφορετικά πεδία με όμοια, όμως, δομή.

Ο Polya (1954), από πολύ νωρίς, έχει προβάλει την ύπαρξη σχέσης μεταξύ μαθηματικών(proportional) αναλογιών και λεκτικών(analogical) αναλογιών, υποδεικνύοντας ότι μια μαθηματική είναι μια ειδική περίπτωση αναλογίας. Στην πραγματικότητα, και δυο αυτές κατηγορίες απαιτούν από τους μαθητές να αιτιολογούν για τις σχέσεις μεταξύ των σχέσεων (Goswami, 1992) επικεντρώνοντας στο εύρημα του δομικού προτύπου μεταξύ των όρων. Όταν οι μαθητές είναι σε θέση να ανιχνεύσουν τη δομική ομοιότητα μεταξύ των όρων των λεκτικών ή οπτικών αναλογιών και όχι μόνο να επικεντρωθούν στις αντιληπτικές ομοιότητές τους, τότε είναι σε θέση να συνειδητοποιήσουν τις σχέσεις που ενσωματώνουν αναλογική συλλογιστική (Lamon, 1999).

2.13 Μαθηματικός Αναλογικός Συλλογισμός-Αναλογικότητα ρουτίνας

Η πτυχή της ρουτίνας αναλογικότητας, που αντιπροσωπεύει την ικανότητα επίλυσης καθημερινών αναλογικών έργων, έχει αναπόσπαστο ρόλο σε αυτό το μοντέλο, καθώς η ικανότητα κατασκευής και αλγεβρικής επίλυσης αναλογιών σιωπηρά θεωρείται ως θεμελιώδης πτυχή της αναλογικής συλλογιστικής (Lamon, 1993) και ως εκ τούτου μπορεί να αποτελεί ουσιαστικό μέρος του προτεινόμενου μοντέλου αναλογικής συλλογιστικής.

Αυτή η πτυχή περιλαμβάνει σχέσεις δεύτερης τάξης που περιλαμβάνουν μια ισοδύναμη σχέση μεταξύ δύο λόγων. Η ύπαρξη σχέσης μεταξύ δύο σχέσεων και η αναγνώριση αυτής της δομικής ομοιότητας, είναι το βασικό χαρακτηριστικό της αναλογικότητας. ένα χαρακτηριστικό που συνδέει την αναλογική(proportional) με την αναλογική-διαισθητική(analogical) πλευρά του προτεινόμενου μοντέλου. Κάθε αναλογική σχέση συνεπάγεται το ίδιο μοτίβο σχέσεων ή πράξεων και τα συστατικά είναι πολλαπλά συνδεδεμένα (Lesh et al., 1998 από Modestou &Gagatsis.2010).

Τα αναλογικά καθήκοντα μπορούν επίσης να ανατεθούν σε διαφορετικές κατηγορίες ανάλογα με τη γλωσσική δομή τους. Η βασική γλωσσική δομή για τα προβλήματα που σχετίζονται με την αναλογικότητα είναι τα έργα ελλείπουσας τιμής που συνδέεται με την τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν τον κανόνα μνημονικού "σταυρωτού πολλαπλασιασμού ή πολλαπλασιασμού χιαστί, ο οποίος στις περισσότερες περιπτώσεις αποκλείει τη χρήση αναλογικού συλλογισμού (Lesh et al., 1988, Lamon, 2008).

Επιπρόσθετα, όσον αφορά τα προβλήματα σύγκρισης, δεν συνοδεύονται από το "πρόβλημα" της εφαρμογής ενός κανόνα, αλλά χρησιμοποιούνται σπανιότερα. Αυτά τα καθήκοντα παρουσιάζονται με τέσσερις αριθμούς a, b, c, και d και οι μαθητές καλούνται να καθορίσουν αν σχηματίζουν αναλογία.

Σε αυτό το μοντέλο δεν συνίσταται μόνο στην ικανότητα πολλαπλής επίλυσης των αναλογικών καθηκόντων, αλλά ολοκληρώνεται με την πτυχή που αναφέρεται στην αναγνώριση και το χειρισμό μη αναλογικών καταστάσεων (μετααναλογική ενημερότητα).

2.14 Μετα-αναλογική ενημερότητα

Μια θεμελιώδης πτυχή της αναλογικής συλλογιστικής έγκειται στην επιτυχία της ανάλυσης των ποσοτήτων σε μια δεδομένη κατάσταση, προκειμένου να διαπιστωθεί εάν υπάρχει αναλογική σχέση (Karplus et al., 1983; Lamon, 2008). Αυτό συνδέεται με την ικανότητα να αναγνωρίζεται και να εκτιμάται μια προβληματική κατάσταση, η οποία αποτελεί την πρώτη από τέσσερις γενικές μεταγνωστικές διαδικασίες (κατανόηση, επιλογή λύσης, πραγματοποίηση των πράξεων, αξιολόγηση αποτελέσματος) που διευκολύνουν τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. Επομένως, η αναγνώριση και κωδικοποίηση των βασικών προβληματικών στοιχείων αποδεικνύεται απαραίτητη για μια αποτελεσματική λύση για κάθε πρόβλημα.

Κατά συνέπεια, η τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν το γραμμικό(αναλογικό) μοντέλο σε προβληματικές καταστάσεις για τις οποίες δεν ταιριάζει, είναι αναπόφευκτα συνδεδεμένη με την απουσία αναγνώρισης και στη συνέχεια με τον ορισμό μιας αναλογικής κατάστασης προβλημάτων. Αυτό ορίζεται ως "μετααναλογική ενημερότητα" στο θεωρητικό μοντέλο της αναλογικής συλλογιστικής. Αναφέρεται στην συνειδητοποίηση των καταστάσεων που φαίνονται ανάλογες, αλλά όχι και στις οποίες οι καταστάσεις είναι πραγματικά ανάλογες και που όχι. Για παράδειγμα, το καθήκον να καθοριστεί αν η δήλωση "Ένα παιδί ηλικίας πέντε ετών έχει ύψος 83 εκατοστών. Όταν θα είναι δέκα ετών τότε το ύψος του θα είναι 1,66 μ. "Είναι ανάλογο ή όχι, θεωρείται ως στοιχείο που ανήκει στην προαναφερθείσα πλευρά της αναλογικής συλλογιστικής. Επομένως, αυτή η μεταγνωστική πτυχή στο προτεινόμενο μοντέλο αναλογικής συλλογιστικής αντικατοπτρίζει το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της γραμμικότητας, συνοδευόμενο από όλες τις δυσκολίες που έχουν οι μαθητές στην αναγνώρισή της.

Η μεταγνώση θεωρείται ως η γνώση του ατόμου για τις γνωστικές διαδικασίες και τη ρύθμιση τους (Brown, 1987). Έτσι, η μετα-αναλογική συνειδητοποίηση είναι η γνώση και η ρύθμιση γνωστικών διαδικασιών που εμπλέκονται με την αναλογική συλλογιστική. Στο πλαίσιο αυτό, η ευαισθητοποίηση αποτελεί αναπόσπαστο μέρος των διαδικασιών που απαιτούνται για τη μοντελοποίηση της αναλογικής κατάστασης κατάλληλα και όχι τη λήψη μεθόδου λύσης με βάση επιφανειακά χαρακτηριστικά. (Modestou &Gagatsis, 2008, 2010)

3. Αναλογικότητα στο ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα και τα σχολικά εγχειρίδια

Στους γενικούς στόχους του τρέχοντος αναλυτικού προγράμματος (Α.Π.Σ- Δ.Ε.Π.Π.Σ., 2003).που διαπερνά όλες τις τάξεις του δημοτικού σχολείου, όσον αφορά την επίλυση προβλήματος, αναφέρεται ότι θα πρέπει οι μαθητές να εξερευνούν μια κατάσταση, να κατασκευάζουν ερωτήσεις και προβλήματα με βάση συγκεκριμένα δεδομένα, να διατυπώνουν διαφορετικά το ίδιο πρόβλημα, να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις, να ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις, να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή. Στους ίδιους άξονες και γενικούς στόχους για τις αναλογίες, το Α.Π.Σ. συνιστά να γνωρίζουν οι μαθητές την απλή μέθοδο των τριών και να κατανοούν και να εφαρμόζουν τις έννοιες του λόγου, της αναλογίας και του ποσοστού.

Ειδικότερα, το αναλυτικό πρόγραμμα ορίζει πως οι μαθητές της Στ΄ τάξης, στην ενότητα των λόγων και των αναλογιών θα πρέπει να μάθουν να κατανοούν και να εφαρμόζουν τις έννοιες του λόγου, και της αναλογίας. Επίσης αναφέρεται πως πρέπει να μπορούν να βρίσκουν τον άγνωστο όρο μιας αναλογίας με τη μέθοδο «χιαστί» και να γνωρίσουν την έννοια του ποσοστού ως λόγου, πηλίκου και δεκαδικού και να μπορούν να επιλύουν απλά προβλήματα ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών.

Η πραγμάτευση των λόγων και των αναλογιών, λοιπόν, γίνεται στην Στ΄ τάξη. Στο εγχειρίδιο της Στ΄ τάξης οι λόγοι και οι αναλογίες στο βιβλίο της Στ΄ αποτελούν την Τρίτη θεματική ενότητα με 15 μαθήματα (συνήθως δίωρα). Οι τίτλοι των κεφαλαίων και το μαθηματικό τους περιεχόμενο παρουσιάζονται στον Πίνακα 1:

Πίνακας 1: Τίτλοι και μαθηματικό περιεχόμενο της ενότητας Λόγοι- Αναλογίες

ΤΙΤΛΟΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ
30.Σου δίνουμε τον… λόγο μας	Λόγος δυο μεγεθών
31.Από τον λόγο στην αναλογία… τι γλυκό	Από τους λόγους στις αναλογίες
32.Αναλογία: Χιαστί θα βρω το x	Αναλογίες
33. Εκφράζομαι… ακριβώς!	Σταθερά και μεταβλητά ποσά

34.Όταν ανεβαίνω… ανεβαίνεις	Ανάλογα ποσά
35. Η εύκολη λύση	Προβλήματα με ανάλογα ποσά
36.Μαζί δεν κάνουμε και χώρια δεν μπορούμε	Αντιστρόφως ανάλογα ποσά
37.Παίρνοντας αποφάσεις	Λύνω προβλήματα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά
38. Η απλή μέθοδος των τριών	Η απλή μέθοδος των τριών στα ανάλογα ποσά
39. Είναι απλό όταν ξέρω τρεις τιμές	Η απλή μέθοδος στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά
40. Συγκρίνω (πο)σωστά %	Εκτιμώ το ποσοστό
41. Παίζοντας με το ποσοστό	Βρίσκω το ποσοστό
42. Ποσοστά της αλλαγής	Λύνω προβλήματα με ποσοστά: Βρίσκω την τελική τιμή
43. Από πού έρχομαι;	Λύνω προβλήματα με ποσοστά: Βρίσκω την αρχική τιμή
44. Για να μη λέμε πολλά	Λύνω προβλήματα με ποσοστά: Βρίσκω το ποσοστό στα εκατό

Από τους τίτλους των κεφαλαίων στην ενότητα των αναλογιών, δεν βλέπουμε πουθενά την ύπαρξη μη ανάλογων ποσών, ποσών που δεν χαρακτηρίζονται από σταθερή σχέση. Αφού διδαχθούν οι αναλογίες, η γνωριμία με τα ποσά, γίνεται στο κεφάλαιο 33(Σταθερά και μεταβλητά ποσά), όπου όμως στα πλαίσια του εξορθολογισμού της ύλης, προτείνεται να μη διδαχθεί. Η σειρά των κεφαλαίων μας δείχνει πως πολύ νωρίς στην ενότητα οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τον αλγόριθμο «Χιαστί» (Κεφ 32) για να βρίσκουν την άγνωστη τιμή και σε όλα τα επόμενα κεφάλαια καλούνται να εφαρμόσουν αυτόν τον αλγόριθμο στα προβλήματα που υπάρχουν.

Ακόμη κάτι που καταλαβαίνουμε από τους τίτλους κι επαληθεύεται στις εργασίες του βιβλίου, είναι πως οι μαθητές γνωρίζουν εκ των προτέρων τι είδους ποσά θα συναντήσουν σε κάθε ενότητα. Αυτό έχει ως συνέπεια να μη χρειάζεται σε καμία εργασία του βιβλίου να αποφασίσουν για τον τρόπο λύσης. Ακολουθώντας, λοιπόν, το βιβλίο, πουθενά οι αναλογίες δεν τοποθετούνται σε εμπειρικό πλαίσιο και οι μαθητές δεν χρειάζεται να σκεφτούν για τη λύση, παρά μόνο, να εφαρμόσουν τον αλγόριθμο και να λύσουν «χιαστί», ώστε να βρουν την τέταρτη τιμή από τις αναλογίες που δίνονται. Σε κανένα πρόβλημα και σε κανένα πίνακα τιμών οι μαθητές δεν καλούνται να αποφασίσουν για τις τέσσερις διακριτές ποσότητες και τις πιθανές σχέσεις τους, γιατί κατονομάζονται από την ίδια την ενότητα του μαθήματος. Σε κανένα σημείο της ενότητας δε βρίσκονται μπροστά σε κάποιο λεκτικό πρόβλημα όπου θα πρέπει να σκεφτούν και να αποφασίσουν αν κάποιες ποσοτικές σχέσεις είναι ή δεν είναι συναφείς.

Σημειώνεται ότι το βιβλίο των μαθηματικών παρουσιάζει ομαδοποιημένα τα προβλήματα που αφορούν είτε αμιγώς ανάλογα ποσά, είτε αντιστρόφως ανάλογα, ως καθαρά προβλήματα «εφαρμογής», στα οποία οι μαθητές πουθενά δε χρειάζεται και δεν καλούνται να αναγνωρίσουν στην πραγματικότητα αναλογικές ή μη καταστάσεις, ώστε να επιλέξουν και να εφαρμόσουν στη συνέχεια την κατάλληλη λύση. Άρα τα μόνα προβλήματα που βλέπουν, είναι προβλήματα με ανάλογα ποσά στα μαθήματα αναλογιών και ανάλογων ποσών ή προβλήματα με αντιστρόφως ανάλογα στα σχετικά μαθήματα με τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Η όλη εμπειρία των μαθητών από το σχολικό βιβλίο είναι πως τα προβλήματα που έχουν τη μορφή των προβλημάτων ελλείπουσας τιμής, λύνονται πολλαπλασιάζοντας σταυρωτά ή όπως το λέμε «χιαστί» τους όρους της αναλογίας, ή κάθετα τους όρους της αντίστροφης αναλογίας, αφού πρώτα τη σχηματίσουν και στη συνέχεια να εφαρμόσουν τον ανάλογο αλγόριθμο για το είδος των ποσών(ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα).

<u>Συνοψίζοντας</u>

Ο λόγος εκφράζει μια σχέση με πολλαπλασιαστικούς όρους και μπορεί οι ποσότητες στους δυο όρους του να είναι ομοειδείς ή να είναι από ετεροειδή μεγέθη και να ορίζεται σαν εντατική ποσότητα(ένα καινούριο ποσό). Πολλές φορές χρειάζεται να συγκρίνουμε δυο λόγους. Όταν έχουμε ισότητα ανάμεσα σε δυο λόγους, μιλούμε για αναλογία. Είναι μια σχέση ανάμεσα σε δυο σχέσεις και πολλές φορές είναι πολύ δύσκολο να γίνει κατανοητή από τους μαθητές. Γι αυτό στην εκπαιδευτική διαδικασία, η αλγοριθμική λύση αυτών των έργων είναι μια πολύ συνηθισμένη πρακτική.

Αυτές οι πρακτικές όμως δε βοηθούν ιδιαίτερα την ανάπτυξη της αναλογικής συλλογιστικής, που σε εκτιμήσεις επιστημόνων υστερεί το 90% των ενηλίκων(Lamon, 2008).
Οι δεξιότητες των μαθητών σε σχέση με την αναλογική συλλογιστική αξιολογούνται με την ικανότητα τους να επιλύουν προβλήματα ελλιπούς τιμής, γιατί αυτά είναι τα έργα που συναντούν στα σχολικά εγχειρίδια σε όλα σχεδόν τα εκπαιδευτικά συστήματα.

Η αναλογική συλλογιστική, όμως, δεν συνίσταται μόνο στην ικανότητα σχετικά με την σχέση και τις πράξεις μεταξύ δύο ρητών αριθμών, αλλά και μεταγνωστικές ικανότητες πολύ πιο σύνθετες, που μπορούν να διακρίνουν αναλογικές και μη αναλογικές καταστάσεις(μετα-αναλογική ενημερότητα).Μελέτες αναλογικής συλλογιστικής έχουν δείξει ότι προσθετικές στρατηγικές είναι η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη εσφαλμένη στρατηγική ενώ οι μαθητές επιλύουν προβλήματα αναλογίας (Tourniaire, 1986, Karplus, Pulos, Stage, 1983, Bart, Post, Behr, Lesh, 1994, Singh, 2000, Misailidou&Williams, 2003, Duatepe, Akkuş, Kayhan, 2005 από Pelen, 2016).Από την άλλη πλευρά, οι μαθητές δίνουν αναλογικές απαντήσεις σε μη αναλογικά προβλήματα, όταν έχουν τη μορφή ελλιπούς τιμής (Van Dooren, DeBock, Vleugels, Verschaffel, 2010, Van Dooren, De Bock, Verschaffel, 2010, DeBock, Van Dooren, Janssens, Verschaffel , 2002, De Bock, De Bolle, Van Dooren, Janssens, Verschaffel, 2003). Αυτό δείχνει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να διακρίνουν αναλογικές και μη αναλογικές καταστάσεις λεκτικών προβλημάτων.

Ρίχνοντας και μια ματιά στην αντίστοιχη ενότητα του σχολικού εγχειριδίου, διαπιστώνουμε πως πουθενά δε δίνεται η αφορμή για ουσιαστική απόφαση του πώς να λύσουν οι μαθητές προβλήματα ελλιπούς τιμής, καθώς όσα προβλήματα συναντούν με αυτή τη μορφή είναι κυρίως ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα.

Επομένως, θα ήταν χρήσιμο να διερευνηθεί κατά πόσον οι μαθητές μπορούν να διακρίνουν τέτοιου είδους σχέσεις(αναλογικές), από άλλες σχέσεις(μη αναλογικές) στην καθημερινή ρουτίνα του μαθήματος, καθώς κι επίσης να υπάρξει μια γενικότερη αμφιβολία και σκέψη σε προβλήματα και πρακτικές, προκειμένου να αποφεύγονται οι μηχανικές αυτοματοποιημένες λύσεις.

4. Έρευνα

4.1 Στόχος της έρευνας- Ερευνητικά ερωτήματα

Η βιβλιογραφική ανασκόπηση που παρουσιάστηκε παραπάνω έδειξε την μεγάλη δυσκολία των μαθητών να διαχωρίζουν αναλογικές από μη αναλογικές καταστάσεις στην επίλυση προβλημάτων. Το φαινόμενο αυτό εμφανίζεται με μεγάλη συχνότητα σε όλες τις ηλικίες και σε όλα τα εκπαιδευτικά συστήματα. Η μελέτη αυτή, λοιπόν, πραγματοποιήθηκε με στόχο να εξετάσει: α) την ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν και να λύνουν αναλογικά και μη αναλογικά προβλήματα και στη συνέχεια β) αν μια στοχευμένη παρέμβαση μπορούσε να βελτιώσει την επίδοση των μαθητών στη διάκριση και επίλυση αναλογικών και μη αναλογικών προβλημάτων. Έτσι λοιπόν, οι μαθητές ήρθαν για πρώτη φορά σε επαφή με προβλήματα που έχουν μορφή ελλείπουσας τιμής, αλλά δεν ήταν μόνο αναλογικά κι έπρεπε να λυθούν με διαφορετικούς τρόπους (προσθετικά) ή να βρεθεί η λύση μέσα από την εκφώνηση του προβλήματος, χωρίς την διεξαγωγή πράξεων(σταθερά). Δεδομένης της δυσκολίας των μαθητών σε τέτοια προβλήματα όπως μας τα ανέδειξε η βιβλιογραφία, επιδιώξαμε, αφού εντοπίσουμε κι εμείς τη δυσκολία των μαθητών στη διάκριση των προβλημάτων και στη συνέχεια να πραγματοποιήσουμε μια διαφορετική διδασκαλία, ώστε να ξεπεράσουν αυτή τη δυσκολία

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω θέσαμε στην έρευνά μας και προσπαθήσαμε να απαντήσουμε τα εξής ερωτήματα;

-Οι μαθητές της Στ΄ διαφοροποιούν ανάμεσα σε αναλογικά και μη αναλογικά λεκτικά προβλήματα, όταν έχουν τη μορφή προβλήματος ελλείπουσας τιμής πριν την τυπική διδασκαλία της αντίστοιχης ενότητας;

-Τι επίδραση έχει μια διδακτική παρέμβαση, με στόχο την υποστήριξη των μαθητών στο να διερευνούν και να ελέγχουν τη σχέση μεταξύ των ποσών που εμφανίζονται σε αναλογικές και μη αναλογικές καταστάσεις, σε σχέση με μια παραδοσιακή διδασκαλία που ακολουθεί το σχολικό βιβλίο, στην ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν και να αντιμετωπίζουν σωστά προβλήματα αναλογικού με μη αναλογικού τύπου σε μορφή ελλείπουσας τιμής;

Με βάση τα παραπάνω ερωτήματα και την επισκόπηση της βιβλιογραφίας, διαμορφώθηκαν οι εξής υποθέσεις:

-Οι μαθητές της Στ΄ δεν διαφοροποιούν με επιτυχία τα αναλογικά από τα μη αναλογικά προβλήματα, όταν έχουν τη μορφή προβλημάτων ελλείπουσας τιμής. Ειδικότερα, οι μαθητές τείνουν να αντιμετωπίζουν μη αναλογικά προβλήματα με αναλογικό τρόπο.

-Η πειραματική ομάδα που θα εκτεθεί σε μια διδασκαλία με τα χαρακτηριστικά που περιγράφηκαν παραπάνω θα έχει σημαντικά καλύτερη επίδοση μετά από την παρέμβαση από μια ομάδα ελέγχου που θα εκτεθεί σε παραδοσιακή διδασκαλία.

4.2 Περιγραφή και στόχος του μαθησιακού περιβάλλοντος

Σύμφωνα με την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, αναλογικός στοχαστής δεν μπορεί να νοείται κάποιος που μπορεί μόνο να λύσει μηχανικά μια αναλογία (Cramer et al., 1993,Van Dooren, 2009, Modestou &Gagatsis, 2010). Μόνο η χρήση αλγορίθμων, όπως οι διασταυρούμενοι δείχνουν ότι δεν είναι απαραίτητο, τα άτομα που επιλύουν σωστά ένα πρόβλημα με αναλογίες να χρησιμοποιούν αναλογικούς συλλογισμούς (Lesh, Post &Behr, 1988; Lamon, 1999, Modestou, 2008, 2010).

Οι μαθητές συνήθως αντιμετωπίζουν στην τάξη προβλήματα αναλογικότητας, που έχουν μορφή ελλείπουσας τιμής κι έχουν την τάση να χρησιμοποιούν μεθόδους αναλογικής λύσης ακόμα κι αν δεν είναι κατάλληλες.(De Bock, 2007)

Όπως ειπώθηκε και παραπάνω, η ικανότητα επίλυσης τυπικών προβλημάτων ελλείπουσας τιμής δεν αποδεικνύεται επαρκής για να νοείται κάποιος αναλογικός στοχαστής, αλλά πρέπει να μπορεί να διακρίνει κιόλας τις διαφορετικές καταστάσεις σε αντίστοιχες μορφές προβλημάτων.

Επομένως, οι μαθητές πρέπει να έχουν την ικανότητα ανάλυσης των ποσοτήτων στη δεδομένη κατάσταση για να διαπιστωθεί πρώτιστα κατά πόσο υπάρχει ανάμεσά τους αναλογική σχέση.

Λαμβάνοντας αυτά υπόψη, θέσαμε ως κύριο στόχο του μαθησιακού περιβάλλοντος το να αλλάξει τους μαθητές σε πιο ενεργούς και πιο κριτικούς λύτες προβλημάτων που περιλαμβάνουν όχι μόνο ανάλογα, αλλά και μη ανάλογα ποσά, ώστε όχι μόνο να λύνουν τα συνηθισμένα αναλογικά προβλήματα(αναλογικότητα ρουτίνας), αλλά να αναγνωρίζουν τις δυο διαφορετικές καταστάσεις να αποκτήσουν δηλαδή μεταναλογική ενημερότητα (Modestou & Gagatsis, 2008, 2010)

Στοχεύσαμε λοιπόν η παρέμβαση να υποστηρίξει τους μαθητές στο να εξετάζουν κριτικά τη σχέση που διέπει τα ποσά σε ένα πρόβλημα, ιδιαίτερα, βλέποντας πίνακες τιμών, και να αποφασίζουν για το ποια σχέση διέπει πραγματικά τα ποσά του πίνακα κάθε φορά και όχι μόνο να εφαρμόζουν άκριτα τον αλγόριθμο του «χιαστί».

Μέσω της χρήσης πινάκων αναλογίας, είναι ένας τρόπος να βοηθηθούν οι μαθητές να αναπτύξουν διανοητικές στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων αναλογίας (Middleton &van den Heuvel-Panhuizen, 1995). Οι πίνακες αναλογίας είναι ένας βολικός τρόπος συμβολισμού των στοιχείων σε αναλογικές καταστάσεις και για την υποστήριξη στρατηγικών σκέψης για λύσεις. Οι πίνακες αναλογιών ενθαρρύνουν τη χρήση στρατηγικών αριθμών όπως η κατά το ήμισυ, διπλασιάζοντας, πολλαπλασιάζοντας κατά 10, και ούτω καθεξής.

Ένας πίνακας αναλογίας είναι ένα εργαλείο που βοηθά στην εξέταση της σχέσης μεταξύ δύο ποσοτήτων. Ο πίνακας είναι κατασκευασμένος ώστε να δείχνει τις δύο ποσότητες και τις τιμές τους. Η προοδευτική και ταυτόχρονη λειτουργία στους συγκεκριμένους αριθμούς δείχνει πως η σχέση (αναλογία) διατηρείται αναλογικά (Dole, 2008).

Αυτό το εργαλείο θελήσαμε να διαφοροποιήσουμε, ώστε να φέρουμε τους μαθητές σε επαφή με διαφορετικά ποσά, ώστε να αντιληφθούν πως κάποια ποσά που είναι γραμμένα σε κάποιον πίνακα τιμών, μπορεί να μην είναι ούτε ανάλογα, ούτε αντιστρόφως ανάλογα .

Στο πλαίσιο της παρέμβασης, οι μαθητές της πειραματικής ομάδας ήρθαν σε επαφή με διάφορα προβλήματα και πίνακες τιμών, στα οποία τα ποσά ήταν ανάλογα, αντιστρόφως ανάλογα, ή διέπονταν από άλλους είδους σχέσεις. Έτσι, αντίθετα με τη συνθήκη που προκύπτει αν η διδασκαλία σχεδιαστεί με βάση το βιβλίο, οι μαθητές κλήθηκαν να παρατηρήσουν και να σκεφτούν ποια ποσά είναι πράγματι ανάλογα. Υπό αυτή την έννοια, θελήσαμε να υπάρξει μια μικρή ρήξη του «διδακτικού συμβολαίου», ώστε να μη δίνονται απαντήσεις μηχανικά. Οι μαθητές έπρεπε να σκεφτούν, να κρίνουν και να αναγνωρίσουν τη σχέση που συνδέει τα ποσά μεταξύ τους, ώστε να κάνουν τις σωστές ενέργειες για να λύσουν σωστά το πρόβλημα

4.3 Κύριοι άξονες του μαθησιακού περιβάλλοντος

Ο πρώτος πυλώνας του μαθησιακού περιβάλλοντος, ήταν η ενσωμάτωση προσεκτικά σχεδιασμένων μη τυπικών προβλημάτων, τα οποία εμπεριείχαν ποσά που διέπονταν από διάφορες σχέσεις. Τα προβλήματα δόθηκαν στους μαθητές μέσα από τα φύλλα εργασίας και τους δίνουν την αφορμή να αναγνωρίσουν την αναλογικότητα ή όχι στα ποσά. Ένας τρόπος να βοηθηθούν οι μαθητές να αναπτύξουν διανοητικές στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων αναλογίας είναι οι πίνακες. Οι πίνακες αναλογίας είναι ένας βολικός τρόπος συμβολισμού των στοιχείων σε αναλογικές καταστάσεις, και για την υποστήριξη στρατηγικών σκέψης για λύση. Οι πίνακες αναλογιών ενθαρρύνουν τη χρήση στρατηγικών όπως ο υποδιπλασιασμός, ο διπλασιασμός, ο πολλαπλασιασμός κατά 10, και ούτω καθεξής. Οι πίνακες τιμών και τα προβλήματα που δίνονται, αναφέρονται σε περιβάλλοντα που λαμβάνονται από την καθημερινότητα των μαθητών και συζητούνται συχνά στην τάξη ως αφορμή (Παράδειγμα: Η προσφορά της πιτσαρίας, η αγορά μπλουζών για αθλητική χρήση).

Ο δεύτερος πυλώνας του μαθησιακού περιβάλλοντος είναι η συνεργατική επίλυση των προβλημάτων και η συλλογική διαπραγμάτευση και διόρθωση των φύλλων εργασίας με συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης. Αυτό το μοντέλο αποτελείται από την εξής ακολουθία των δραστηριοτήτων στην τάξη: Δίνεται το φύλλο εργασίας, μετά τη διδασκαλία της αντίστοιχης ενότητας. Οι μαθητές σε ζεύγη (ανά θρανίο) κουβεντιάζουν και αποφασίζουν σε κοινή λύση σε κάθε εργασία. Αφού συμπληρωθούν τα φύλλα, (αφού δοθούν στην ερευνήτρια προκειμένου να εντοπιστούν οι δυσκολίες), την επόμενη μέρα, οι μαθητές καλούνται να υποστηρίξουν και να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις που δόθηκαν και τις λύσεις που βρήκαν στο πλαίσιο της ολομέλειας της τάξης με ζωηρή συζήτηση και αντιπαραθέσεις, ώσπου να πεισθούν από τους συμμαθητές τους και να καταλήξουν σε κοινή συμφωνία για τη σωστή λύση.

Ο τρίτος πυλώνας του μαθησιακού περιβάλλοντος ήταν η δημιουργία μιας κουλτούρας στην τάξη με στόχο την καθιέρωση νέων κοινωνικών και μαθηματικών κανόνων για τη διδασκαλία και εκμάθηση επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Μερικά τυπικά χαρακτηριστικά αυτής της νέας κουλτούρας στην τάξη είναι η ενθάρρυνση των μαθητών τόσο κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων μικρών ομάδων, όσο και η πρόκληση συζητήσεων στην ολομέλεια της τάξης για να εκφράσουν και να προβληματιστούν για τις προσωπικές τους πεποιθήσεις, παρανοήσεις, στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων αλλά και συναισθήματα σε σχέση με τα λεκτικά προβλήματα αναλογιών. Η συγκεκριμένη προσέγγιση θέλουμε να προκαλέσει συγκρούσεις ή ακόμη και δυσαρέσκεια, προκαλώντας και συζητώντας τις διαφορετικές απαντήσεις σε καθήκοντα. Ο δάσκαλος μπορεί να χρειαστεί να μάθει πού μπορεί να προκύψει ένα τέτοιο σφάλμα στο πρόγραμμα σπουδών, ποια παιδιά είναι πιθανό να κάνουν ένα τέτοιο σφάλμα και ποιες στρατηγικές διδασκαλίας θα ήταν ενδεδειγμένο να το αντιμετωπίσει. (Ryan &Williams, 2002). Οι ερωτήσεις και η καθοδήγηση των διδασκόντων είναι ζωτικής σημασίας για τη μετακίνηση των σπουδαστών πέρα από αυτές τις παρορμητικές αντιδράσεις προς μια περισσότερο αιτιολογημένη συλλογιστική (Ritchhart και Perkins 2005, από Fielding-Wells, Dole, Makar 2013).

4.4 Δείγμα

Η πειραματική ομάδα ήταν 20 μαθητές ενός τμήματος της Στ΄ τάξης ενός 12/θεσιου δημοτικού σχολείου της Δυτικής Θεσσαλονίκης. Τα κορίτσια ήταν 11 και τα αγόρια 9. Η ομάδα ελέγχου ήταν το άλλο τμήμα της Στ΄ τάξης του ίδιου σχολείου με 18 μαθητές, 9 κορίτσια , 9 αγόρια. Το σχολείο είναι μεσαίου μεγέθους (238 μαθητές) με μεσαίο προς χαμηλό κοινωνικοοικονομικό υπόβαθρο. Στην τάξη της παρέμβασης 4 μαθητές παρακολουθούσαν υποστηρικτικές δομές (2 μαθήτριες παρακολουθούσαν το τμήμα ένταξης και 2 μαθήτριες ενισχυτική διδασκαλία.).

4.5 Εργαλεία

Τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα ήταν μια δοκιμασία 10 προβλημάτων που χρησιμοποιήθηκε για τον προέλεγχο και το μεταέλεγχο (Βλ. Παράρτημα). Η επιλογή των προβλημάτων βασίστηκε στη συζήτηση που έγινε στην ενότητα και τα προβλήματα που χρησιμοποίησαν οι Van Dooren et al, 2009, 2010, De Bock et al, 2007, Modestou &Gagatsis, 2010. Αυτά τα 10 προβλήματα επιλέχθηκαν ως εξής: 2 ήταν αναλογικά, 2 ήταν προσθετικά με δομή και διατύπωση που θύμιζαν αναλογικά προβλήματα ελλιπούς τιμής, τα 2 ήταν σταθερά που επίσης θύμιζαν δομή προβλημάτων αναλογιών ελλιπούς τιμής, 2 προβλήματα μιας πράξης πρόσθεσης ή αφαίρεσης και 2 προβλήματα δυο πράξεων με μία πρόσθεση και μία αφαίρεση. Αυτά επιλέχθηκαν ώστε να μπορεί να αναγνωριστεί η ικανότητα των μαθητών να κατανοούν τη διαφορά μεταξύ των καταστάσεων που εμπλέκονται αναλογικές σχέσεις και εκείνες που συνεπάγονται μη αναλογικές σχέσεις, αλλά και να λειτουργήσουν ως ουδέτερα (buffers), τα 4 τελευταία που αναφέρονται. Επίσης, αν κατά την επίλυση των σταθερών προβλημάτων λαμβάνεται υπόψη η εμπειρία των μαθητών από την πραγματική ζωή και αν η διατύπωση ενός προσθετικού προβλήματος είναι παρόμοια με τη διατύπωση των προβλημάτων ελλείπουσας τιμής (missing value problems), επηρεάζει τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν αναλογίες (Van Dooren et al, 2009). Το ίδιο τεστ χρησιμοποιήθηκε και στο τέλος της παρέμβασης για να αξιολογήσουμε και να συγκρίνουμε την επίδοση των μαθητών.

Μετά τον προέλεγχο, χρησιμοποιήθηκε μια εργασία 9 προβλημάτων που έπρεπε οι μαθητές να τα ταξινομήσουν σε κοινές ομάδες, ανάλογα με τον τρόπο που λύνονται, όπως είδαμε παραπάνω στις έρευνες των Silver, 1979, Van Dooren et al, 2010. Ένα φύλλο εργασίας με 9 προβλήματα, δόθηκε στους μαθητές για να γίνει ταξινόμηση των προβλημάτων σύμφωνα με τον τρόπο λύσης τους, χωρίς όμως να χρειάζεται να τα λύσουν. Τα προβλήματα ήταν 2 προβλήματα με ανάλογα ποσά (3ο και 7ο), 2 προβλήματα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά (1ο και 5ο), 2 προβλήματα με γραμμικότητα (αx+β) (2ο και 7ο), 1 πρόβλημα σταθερό (9ο), 1 πρόβλημα προσθετικό(6ο), 1 πρόβλημα χωρίς λύση (4ο).

Πίνακας 2: Αντιστοίχιση των προβλημάτων με τον χαρακτηρισμό τους στο φύλλο ταξινόμησης

Προβλήματα ταξινόμησης	Χαρακτηρισμός
Πρόβλημα 1	Αντιστρόφως ανάλογο
Πρόβλημα 2	Γραμμικότητας(αx+β)
Πρόβλημα 3	Ανάλογο
Πρόβλημα 4	Ατελέσφορο (Χωρίς λύση)
Πρόβλημα 5	Αντιστρόφως ανάλογο
Πρόβλημα 6	Προσθετικό
Πρόβλημα 7	Γραμμικότητας(αx+β)
Πρόβλημα 8	Ανάλογο
Πρόβλημα 9	Σταθερό

Στη συνέχεια της παρέμβασης ακολουθώντας τη ροή και τη δομή των κεφαλαίων του βιβλίου δόθηκαν 5 φύλλα εργασίας στα αντίστοιχα κεφάλαια των ποσών, αφού διδάχθηκαν πρώτα από το βιβλίο.

Στο πρώτο φύλλο εργασίας είχε 4 εργασίες με πίνακες τιμών. Στην πρώτη εργασία (Φ1.1) στον πίνακα τιμών που παρουσιάζεται, τα ποσά που υπάρχουν δεν είναι ανάλογα και οι μαθητές καλούνται να αποφασίσουν. Στη δεύτερη εργασία (Φ1.2) υπάρχουν πίνακες με ποσά που οι τιμές τους δεν είναι ακέραιες (δεκαδικοί), στην τρίτη εργασία (Φ1.3) συμπληρώνουν τα ποσά που υπάρχουν στο πρόβλημα και πάλι πρέπει να πουν και να αιτιολογήσουν αν τα ποσά είναι ανάλογα και στην τέταρτη εργασία (Φ1.4) υπάρχουν2 πίνακες με ανάλογα ποσά να συμπληρώσουν οι μαθητές και να γράψουν πώς σκέφτηκαν.

Στο δεύτερο φύλλο εργασίας έχει 4 εργασίες. Στην πρώτη εργασία (Φ2.1) υπάρχει ένα πρόβλημα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά, στη δεύτερη εργασία(Φ2.2) ποσά που δεν εμπίπτουν σε καμία κατηγορία, στην Τρίτη εργασία(Φ2.3) πίνακας με ανάλογα ποσά και στην τέταρτη εργασία(Φ2.4) υπάρχει πρόβλημα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Στο τρίτο φύλλο εργασίας επίσης έχει 4 εργασίες. Στην πρώτη (Φ3.1) υπάρχει πίνακας τιμών με ποσά μη ανάλογα, η δεύτερη εργασία (Φ3.2) είναι με ανάλογα ποσά, η τρίτη με ποσά μη ανάλογα(Φ3.3) και η τέταρτη εργασία με αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Στο τέταρτο φύλλο εργασίας υπήρχαν δυο εργασίες: η πρώτη ήταν ένα προσθετικό πρόβλημα(Φ4.1) κι ένα αναλογικό(Φ4.2) που έμοιαζαν πολύ στη διατύπωση.

Στο πέμπτο φύλλο εργασίας είχε δυο εργασίες. Στην πρώτη(Φ5.1) υπήρχε πίνακας με αρχική τιμή για να συμπληρωθούν το ποσό έκπτωσης και η τελική τιμή και να αναγνωρίσουν αν οι αρχικές, τα ποσά έκπτωσης και οι τελικές τιμές είναι ανά δύο ανάλογα και η δεύτερη εργασία (Φ5.2α) ήταν ένα πρόβλημα αναλογικό που είχε κι ένα ερώτημα πρόβλεψης (Φ5.2β) μέσα από την πραγματική ζωή.

Πίνακας 3: Αντιστοίχιση έργων των φύλλων εργασίας με τον συμβολισμό τους που χρησιμοποιείται για την επεξεργασία τους

Φύλλα εργασίας	Έργα
1^{ο}φύλλο εργασίας	Φ1.1(ποσά μη ανάλογα)
	Φ1.2 (ποσά ανάλογα με αριθμό δεκαδικό)
	Φ1.3 (ποσά μη ανάλογα)
	Φ1.4(ανάλογα ποσά)
	Φ1.4β (ανάλογα ποσά)
2^{ο} Φύλλο εργασίας	Φ2.1 (ποσά αντιστρόφως ανάλογα)
	Φ2.2 (ποσά μη ανάλογα)
	Φ2.3 (ποσά ανάλογα)
	Φ2.4 (ποσά αντιστρόφως ανάλογα)
3^{ο} φύλλο εργασίας	Φ3.1 (ποσά μη αντιστρόφως ανάλογα)
	Φ3.2 (ποσά ανάλογα)
	Φ3.3 (ποσά μη ανάλογα)
	Φ3.4 (ποσά αντιστρόφως ανάλογα)
4^{ο} φύλλο εργασίας	Φ4.1 (πρόβλημα προσθετικό)
	Φ4.2 (πρόβλημα αναλογικό)
5^{ο} φύλλο εργασίας	Φ5.1 (πίνακας έκπτωσης, τελικής τιμής)
	Φ5.2α(πρόβλημα αναλογικό)
	Φ5.2β (πρόβλεψη χωρίς λύση)

4.6 Διαδικασία

Η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε τους μήνες Φεβρουάριο και Μάρτιο του 2018, κατά τη διάρκεια διδασκαλίας της ενότητας των λόγων και αναλογιών, όπως υπάρχει στο βιβλίο Μαθηματικών της ΣΤ΄. Η ενότητα αποτελείται από 15 κεφάλαια και οι ώρες διδασκαλίας για όλη την ενότητα υπολογίζονται περίπου στις 30 με 32. Η εργασία με την ταξινόμηση των προβλημάτων προηγήθηκε, πριν ξεκινήσει η ενότητα, αμέσως μετά από τον προέλεγχο. Αμέσως μετά διδάχτηκαν τα μαθήματα από το βιβλίο κι εμβόλιμα πραγματοποιήθηκαν οι παρεμβάσεις με φύλλα εργασίας, χωρίς να αλλάξει η δομή και η σειρά των κεφαλαίων του βιβλίου. Το φύλλο εργασίας το έλυναν οι μαθητές σε συνεργασία σε ζεύγη μαζί με τον/την διπλανό/ή του/της) σε διάρκεια 20 λεπτών και την επόμενη μέρα, γινόταν διόρθωση από τους μαθητές στην ολομέλεια της τάξης περίπου για 20 λεπτά. Στον αντίστοιχο διδακτικό χρόνο, η ομάδα ελέγχου (κατόπιν συνεννόησης της δασκάλας του τμήματος με την ερευνήτρια) έδινε φύλλα εργασίας με αναλογικά προβλήματα ή αντιστρόφως ανάλογα για περισσότερη εξάσκηση. Στον διδακτικό χρόνο της ταξινόμησης προβλημάτων, η ομάδα ελέγχου, θέλοντας να κάνει επανάληψη η δασκάλα στη μέθοδο «αναγωγής στη μονάδα», έδωσε στους μαθητές φύλλο εργασίας με αναλογικά προβλήματα. Η διάρκεια της παρέμβασης αποφασίστηκε μετά από συζήτηση με τη δασκάλα της ομάδας ελέγχου, ώστε να συμβαδίζουν τα δυο τμήματα στα μαθήματα και στον αριθμό των φύλλων ελέγχου και το μόνο που άλλαζε, ήταν το περιεχόμενο των φύλλων εργασίας που ήταν διαφορετικό σ αυτή την ενότητα στα δυο τμήματα.

4.7 Αναλυτική περιγραφή της παρέμβασης

Αφού πραγματοποιήθηκε ο προέλεγχος και στην πειραματική και στην ομάδα ελέγχου και αποτυπώθηκε μια πρώτη δυσκολία των μαθητών, στη συνέχεια δόθηκε η εργασία των 9 προβλημάτων στην πειραματική ομάδα για να γίνει η ταξινόμηση τους σύμφωνα με τον τρόπο λύσης τους, χωρίς όμως να λυθούν. Τα προβλήματα δόθηκαν σε μικρά ίδια χαρτάκια και δόθηκαν φακελάκια για να μπουν μέσα τα χαρτάκια και να γράψουν έξω από τους φακέλους τους λόγους που τα τοποθέτησαν μαζί.

Οι Van Dooren et al, 2009 έδειξαν πως οι μαθητές που ταξινόμησαν προβλήματα, χωρίς να τα λύσουν, στη συνέχεια είχαν καλύτερες επιδόσεις σε λύσεις αντίστοιχων προβλημάτων. Αυτό έγινε για να δοθεί αφορμή στην τάξη να ξεκινήσει ένας διάλογος πάνω στα λεκτικά προβλήματα και στην κατανόηση τους. Αφού έγινε η εργασία από τους μαθητές, την επόμενη μέρα ξαναδόθηκε το φύλλο με τα προβλήματα, ώστε να τα έχουν μπροστά τους οι μαθητές και στη συνέχεια έγινε υποστήριξη από τους μαθητές και αναπτύχθηκε κάποια επιχειρηματολογία για τον τρόπο που επέλεξαν την ταξινόμηση. Αυτά που ακούστηκαν στην τάξη, είχαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τον τρόπο που αντιλαμβάνονται οι μαθητές τα προβλήματα.

Μετά, ακολουθώντας τη ροή και τη δομή των κεφαλαίων του βιβλίου δόθηκαν 5 φύλλα εργασίας στα αντίστοιχα κεφάλαια, αφού διδάχθηκαν πρώτα από το βιβλίο. Ένα φύλλο εργασίας δόθηκε στα ανάλογα ποσά, δυο φύλλα εργασίας στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, με εργασίες και αντιστρόφων και ανάλογων ποσών, ένα φύλλο εργασίας με ένα πρόβλημα αναλογικό κι ένα προσθετικό(που έμοιαζαν πολύ) κι ένα φύλλο εργασίας δόθηκε στα ποσοστά. Η συχνότητα των φύλλων εργασίας ήταν περίπου ένα κάθε εβδομάδα και αντίστοιχα φύλλα εργασίας δίνοντας στην ομάδα ελέγχου με άλλο όμως περιεχόμενο

Στα 3 πρώτα φύλλα εργασίας δίνονταν πίνακες τιμών για να συμπληρώσουν τα παιδιά ή να αναγνωρίσουν στους πίνακες το είδος των ποσών και στη συνέχεια να δικαιολογήσουν τη γνώμη τους σύντομα. Στο 4ο φύλλο εργασίας δόθηκαν δύο προβλήματα που έμοιαζαν μεταξύ τους, το ένα ήταν προσθετικό και το άλλο αναλογικό. Αφού τα έλυσαν ακολούθησε κι εδώ διόρθωση και έγινε συζήτηση για να εντοπιστεί και να γίνει κατανοητή η διαφορά τους που επιφέρει διαφορετικό τρόπο λύσης.

Στο 5^{ο} φύλλο εργασίας στην ενότητα των ποσοστών, οι μαθητές στην πρώτη άσκηση μέσα από ένα πίνακα, έπρεπε να αναγνωρίσουν αν οι αρχικές και τελικές τιμές είναι ανάλογα ποσά και στη δεύτερη άσκηση να βρουν μια τελική τιμή και να κάνουν μια πρόβλεψη μέσα από την πραγματική ζωή.

Στο τέλος της ενότητας δόθηκε για μεταέλεγχο η ίδια δοκιμασία με την αρχική και στις δυο ομάδες και αξιολογήθηκε και σε σχέση με την αρχική και σε σχέση με την ομάδα ελέγχου.

1η Δραστηριότητα- Ταξινόμηση προβλημάτων

Πριν ξεκινήσει η διδασκαλία της ενότητας έγινε η δοκιμασία της ταξινόμησης προβλημάτων που είχαν τη μορφή προβλημάτων ελλείπουσας τιμής, αλλά ήτα με διαφορετικό περιεχόμενο.

Τα προβλήματα που θέσαμε παρατίθενται στον επόμενο πίνακα:

Πίνακας 4:Προβλήματα φύλλου ταξινόμησης ανά κατηγορία

Κατηγορία	Προβλήματα
Ανάλογα	Π3.Τα 3 m ύφασμα κοστίζουν €12. Πόσο κοστίζουν τα 9 m ύφασμα; Π8.Ένα αυτοκίνητο τρέχει με σταθερή ταχύτητα. Αν διανύει 120 χιλιόμετρα σε 2 ώρες, πόσα χιλιόμετρα θα διανύσει σε 5 ώρες;
Αντιστρόφως ανάλογα	Π1.Ένα αυτοκίνητο τρέχει με 100 χιλιόμετρα την ώρα και για να φτάσει στην Καβάλα χρειάζεται 2 ώρες. Αν αυξήσει την ταχύτητα και πηγαίνει με 150 χιλιόμετρα, σε πόσες ώρες θα φτάσει στην Καβάλα; Π5.Δυο εργάτες μας σύνδεσαν τους προτζέκτορες του σχολείου μας σε 4 ημέρες. Αν οι εργάτες ήταν 4 σε πόσες μέρες θα έκαναν την ίδια εργασία;
Μη Γραμμικά (αx+β)	Π2.Αν πάρω ένα ταξί, μόλις μπω το ταξίμετρο γράφει 1,50 ευρώ και κάθε χιλιόμετρο κάνει 0,80 ευρώ. Πόσα θα πληρώσω για μια διαδρομή 8 χιλιομέτρων; Π7.Σε έναν χώρο ελεγχόμενης στάθμευσης (πάρκινγκ) η πρώτη ώρα κοστίζει 3 ευρώ και κάθε επόμενη ώρα κοστίζει από 1 ευρώ.. Πόσο θα κοστίσει αν το αφήσω για 4 ώρες;
Ατελέσφορο	Π4.Αν ένα παιδί ζυγίζει 25 κιλά όταν είναι 6 χρονών, πόσα κιλά θα ζυγίζει στα 12 του χρόνια;
Προσθετικό	Π6.Ο Γιώργος και ο Μάνος τοποθετούν κουτιά στην αποθήκη. Τα τοποθετούν με τον ίδιο ρυθμό αλλά ο Γιώργος άρχισε νωρίτερα. Όταν ο Γιώργος είχε φορτώσει 5 κουτιά ο Μάνος είχε φορτώσει 1 κουτί. Πόσα θα έχει φορτώσει ο Γιώργος, όταν ο Μάνος θα έχει φορτώσει 5;
Σταθερό	Π9.Αν μια γλάστρα με βασιλικό σε ένα θερμοκήπιο για να ανθίσει θέλει 15 ημέρες, 8 γλάστρες βασιλικού σε πόσες μέρες θα ανθίσουν;

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 4, τα προβλήματα κατηγοριοποιούνται σε 6 ομάδες, εκ των οποίων οι 3 πρώτες περιλαμβάνουν από 2 προβλήματα, ενώ η 3 τελευταίες από 1 πρόβλημα.

Τα αποτελέσματα που πήραμε από την εργασία της ταξινόμησης παρουσιάζονται στον Πίνακα 5. Οι ομάδες που δημιούργησαν οι μαθητές εξετάστηκαν ως προς το αν περιλαμβάνουν α) όλα τα σωστά προβλήματα μιας κατηγορίας και μόνο αυτά (κατηγορία απάντησης: Σωστό), β) όλα τα σωστά προβλήματα της κατηγορίας και άλλα εκτός της κατηγορίας (κατηγορία απάντησης: Σωστό +Άλλο)και γ) ένα από τα προβλήματα κάποιας κατηγορίας και οποιοδήποτε άλλο συνδυασμό προβλημάτων (κατηγορία απάντησης: Άλλο). Στον Πίνακα 5 παρουσιάζονται οι συχνότητες και τα ποσοστά των κατηγοριών απάντησης ανά ομάδα προβλημάτων.

Πίνακας 5:Αποτελέσματα εργασίας ταξινόμησης

	ΠΡ1-ΠΡ5 (Α.Α.)	ΠΡ2-ΠΡ7 (Γρ.)	ΠΡ3-ΠΡ8 (Α)	ΠΡ4 (Χ.Λ.)	ΠΡ6 (Πρ.)	ΠΡ9 (Στ.)
ΣΩΣΤΟ	3 (15%)	3 (15%)	2 (10%)	5 (25%)	5 (25%)	3 (15%)
ΣΩΣΤΟ + ΑΛΛΟ	1(5%)	4(20%)	7(35%)			
ΑΛΛΟ	16(80%)	13(65%)	11(55%)	15(75%)	15(75%)	17(85%)
ΣΥΝΟΛΟ	20	20	20	20	20	20

Σημείωση:
Α.Α.: Αντιστρόφως Ανάλογα, Γρ: Γραμμικά(αx+β), Α: Ανάλογα, Χ.Λ.: Χωρίς Λύση, Πρ: Προσθετικό, Στ: Σταθερό

Οι περισσότεροι μαθητές κατέταξαν πολύ λίγα προβλήματα σωστά και τα περισσότερα όχι. Ένας μαθητής μόνο ταξινόμησε τα προβλήματα σωστά και μόνο με ένα λάθος βάζοντας μαζί τα προβλήματα 6 και 7 κι αυτό το δικαιολογεί λέγοντας πως οι αριθμοί «θα ανεβαίνουν με την ίδια διαφορά», ενώ 5 μαθητές δεν ταξινόμησαν κανένα πρόβλημα σωστά. 3 μαθητές ταξινόμησαν σωστά τα προβλήματα 1 και 5(αντιστρόφως ανάλογα) κι 1 μαθητής μαζί με άλλα, 2 μαθητές έχουν σωστά τα προβλήματα 3 και 8 (ανάλογα) και άλλοι 7 μαζί με άλλα, 3 μαθητές τα προβλήματα 2 και 7 (αχ+β) και άλλοι 4 μαζί με άλλα. Στα υπόλοιπα προβλήματα που θα έπρεπε να είναι μόνα τους 5 μαθητές βάζουν το 6 πρόβλημα μόνο σωστά και 3 μαθητές το πρόβλημα 9 μόνο του και 5 μαθητές το 4 πρόβλημα. Αξίζει να σημειωθεί πως 4 παιδιά ταξινομούν μαζί τα προβλήματα 4 και 9 εξηγώντας μάλλον πως είναι κάπως διαφορετικά από τα συνηθισμένα(δεν λύνονται). Διαβάζοντας στους φακέλους τις αιτιολογήσεις από τις σωστές ταξινομήσεις που γράφουν οι μαθητές, κατανοούμε πως τα κριτήρια τους είναι πολύ υποκειμενικά και στηρίζονται σε επιφανειακά χαρακτηριστικά, για παράδειγμα πως «μιλάνε για ώρες», ή «ρωτούν για μέρες», «μιλάν για χιλιόμετρα» ή «είναι μικρά προβλήματα κι έχουν μικρούς αριθμούς». Μερικοί μαθητές τα συσχέτισαν με τον τρόπο που θα τα λύσουν, για παράδειγμα, «θα κάνω πρόσθεση», «θα κάνω πολλαπλασιασμό», «λύνεται με αναγωγή στη μονάδα» ή πιο ακαθόριστα «χρησιμοποιώ τις ίδιες πράξεις για το αποτέλεσμα».

2η Δραστηριότητα: Συλλογική διαπραγμάτευση της ταξινόμησης

Την επόμενη μέρα στην υποστήριξη της ταξινόμησης τους, όπου οι μαθητές έπρεπε να αιτιολογήσουν στην ολομέλεια της τάξης τις επιλογές τους ακούστηκαν πολλά ενδιαφέροντα. Τον λόγο έπαιρναν οι μαθητές που ήταν πιο σίγουροι για τις επιλογές τους και είχαν τις περισσότερες σωστές επιλογές. Από τα λόγια τους βλέπουμε πως κατανοούν τα προβλήματα.

3-8

Αναστάσης: Θα βρω το ένα και μετά θα πολλαπλασιάσω. Το ίδιο και στο 8.

Αλλά ακούστηκαν και απόψεις που μας συνδέουν με τη μορφή του προβλήματος

Μιλώντας για το πρόβλημα 9:

Παναγιώτα: Σκέφτηκα πως έλειπε ένας αριθμός , σκέφτηκα το ίδιο, και τα άλλα που έβαλα…

Σοφία: Μια γλάστρα 15 ημέρες, πολλαπλασίασα επί 8, αφού είναι 8 οι γλάστρες…

Ερ: Γιατί; Βγάζει μια γλάστρα, ανθίζει, 8 ημέρες, βγάζει δεύτερη ανθίζει άλλες 8 ημέρες και πολλαπλασιάζονται οι μέρες;

Παναγιώτα : Δηλαδή δεν επηρεάζουν οι γλάστρες;

Σοφία: Το ίδιο θα ανθίσουν, μαζί….

Παναγιώτα: Είναι σαν αυτό με τις πετσέτες που είδαμε προχτές στα προβλήματα που λύσαμε στο φύλλο(που θυμόταν το πρόβλημα στον προέλεγχο).

Σοφία: Πράγματι είναι κάτι άλλο το 9, δεν είναι πολλαπλασιασμός..

Παναγιώτα: Εγώ δεν τα είχα καταλάβει, ήταν με τους τρεις αριθμούς και νόμιζα πως πρέπει να πολλαπλασιάσω, ξαναλέει η Παναγιώτα.

Ερ: Οι τρεις αριθμοί (τιμές) μας βοηθούν ή μας μπερδεύουν;

Σωτήρης : Καμιά φορά μας βοηθούν, καμιά φορά μας μπερδεύουν. Μας βοηθούν όταν πρέπει να πολλαπλασιάσουμε, αλλά μας μπερδεύουν κιόλας, γιατί εμείς νομίζουμε πως είναι όλα ίδια.

Είναι φανερό πως η μορφή των προβλημάτων ελλείπουσας τιμής επηρεάζει τους μαθητές στην ταξινόμηση των προβλημάτων χωρίς να δίνουν σημασία στο πραγματικό πλαίσιο των προβλημάτων ή στον τρόπο λύσης. Η λύση των προβλημάτων είναι «Παζλ λέξεων» για τους μαθητές, σύμφωνα με τους Van Dooren et al,2004, 2010, που έχει ελάχιστη σχέση με την πραγματική ζωή.

3η Δραστηριότητα- 1ο Φύλλο Εργασίας

Το πρώτο φύλλο εργασίας δόθηκε στους μαθητές μετά τη διδασκαλία του μαθήματος 35 σελ. 85-86 «Λύνω προβλήματα με ανάλογα ποσά». Το φύλλο αυτό περιείχε 4 εργασίες (η τελευταία με 2 πίνακες τιμών).Όπως φαίνεται στον πίνακα:

Πίνακας 6:Προβλήματα του 1ου φύλλου εργασίας

<table>
<tr><th>Είδος</th><th>Σύμβολο</th><th>Έργο</th></tr>
<tr><td>Μη ανάλογα ποσά</td><td>Φ1.1</td><td>1)Στο Ταχυδρομείο γράφει σε μια ταμπέλα:
Κόστος αποστολής δεμάτων στο εξωτερικό
<table>
<tr><td>Βάρος δέματος (Κιλά)</td><td>2</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Κόστος(Ευρώ)</td><td>18</td><td>24</td><td>42</td></tr>
</table>
Είναι τα ποσά αυτά ανάλογα; ....
Εξηγώ:……………………….</td></tr>
<tr><td>Ποσά ανάλογα με μη ακέραιο λόγο</td><td>Φ1.2</td><td>2)Σε μια συνταγή για ετοιμασία ρυζιού γράφει πώς χρειάζονται:
<table>
<tr><td>Ρύζι(φλυτζάνια)</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Νερό(φλυτζάνια)</td><td>5</td><td>7,5</td><td>10</td></tr>
</table>
Είναι τα ποσά αυτά ανάλογα;...................................
Εξηγώ γιατί:...............</td></tr>
<tr><td>Μη ανάλογα ποσά</td><td>Φ1.3</td><td>3) Στο φυλλάδιο της πιτσαρίας της γειτονιάς γράφει πως στην προσφορά που κάνει, μια πίτσα μαργαρίτα κάνει 7 ευρώ, οι δυο ίδιες πίτσες 12 ευρώ και οι τρεις ίδιες πίτσες 15 ευρώ. Σχηματίζω τον πίνακα των ποσών και ελέγχω αν τα ποσά είναι ανάλογα.
<table>
<tr><td>Πίτσες(πλήθος)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Κόστος(Ευρώ)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Εξηγώ:..............</td></tr>
<tr><td>Συμπλήρωση πινάκων με ποσά ανάλογα</td><td>Φ1.4</td><td>4)Τα ποσά από τους παρακάτω δυο πίνακες είναι ανάλογα. Συμπληρώστε τα κενά.
Αξία υφάσματος
<table>
<tr><td>Μήκος ύφασμα(μέτρα)</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Κόστος(ευρώ)</td><td>15</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Εξηγώ τον τρόπο που σκέφτηκα:....</td></tr>
<tr><td></td><td>Φ1.4β</td><td>Παραγωγή κρασιού
<table>
<tr><td>Σταφύλια (κιλά)</td><td>4</td><td>7</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Κρασί(κιλά)</td><td>2</td><td></td><td>7</td><td>8</td></tr>
</table>
Πώς σκέφτηκα;...........</td></tr>
</table>

Οι μαθητές καλούνται να αποφανθούν α) αν δυο ποσά είναι ανάλογα με βάση έναν πίνακα τιμών (Φ1.1, Φ1.2) β) να συμπληρώσουν έναν πίνακα τιμών με τα δεδομένα του προβλήματος και στη συνέχεια να αποφανθούν αν τα ποσά είναι ανάλογα (Φ1.3) και γ) να συμπληρώσουν τις τιμές που λείπουν σε δυο πίνακες τιμών, γνωρίζοντας πως τα ποσά είναι ανάλογα (Φ1.4α , Φ1.4β). Σε όλες τις εργασίες ζητείται και σύντομη αιτιολόγηση.

Σημειώνεται πως στα Φ1.1 τα ποσά δεν είναι ανάλογα, στην Φ1.2 τα ποσά που παρουσιάζονται στον πίνακα είναι ανάλογα, αλλά ο λόγος της αναλογίας δεν είναι ακέραιος αριθμός, στην Φ1.3 τα ποσά δεν είναι ανάλογα, ενώ στους τελευταίους πίνακες λείπουν τιμές ανάκατα.

Στην πρώτη εργασία του φύλλου Φ1.1 οι μαθητές απάντησαν σχεδόν όλοι όχι, εξηγώντας πως «η αναλογία δεν είναι ίση», «ο ρυθμός που μεγαλώνει δεν είναι σταθερός», «όλα πολλαπλασιάζονται με διαφορετικούς αριθμούς», «δε μεγαλώνει με τον ίδιο τρόπο». Από τους 20 μαθητές οι μόνο 6 απάντησαν μόνο πως είναι τα ποσά ανάλογα, χωρίς να δώσουν μια στοιχειωδώς επαρκή απάντηση, που να αφορά τα ανάλογα ποσά. (Απαντήσεις που έδωσαν: μεγαλώνει το κόστος, πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους).Το αποτέλεσμα μας άφησε θετική εντύπωση για την κατανόηση ποσών που ενώ είναι σε πίνακες τιμών, δεν είναι ανάλογα.

Στην επόμενη εργασία Φ1.2, πάλι αναγνώρισης ποσών σε πίνακα, ανάλογων, αλλά με μη ακέραιο συντελεστή, οι 9 μαθητές αναγνώρισαν τα ανάλογα ποσά ενώ οι 11 μαθητές, απάντησαν πως δεν είναι ανάλογα.

Χαρακτηριστικές απαντήσεις σωστής αναγνώριση ήταν, για παράδειγμα, «ο ρυθμός που μεγαλώνουν είναι σταθερός», «αυξάνονται κάθε φορά το ίδιο», «γιατί όλα πολλαπλασιάζονται με το 2,5», «οι αναλογίες είναι ίσες». Χαρακτηριστικές απαντήσεις λανθασμένης αναγνώρισης: δεν είναι ίσα, δε μεγαλώνουν με τον ίδιο τρόπο, ούτε πολλαπλασιάζονται, ούτε διαιρούνται, γιατί 2x5=10 όχι 7,5.

Στην τρίτη εργασία του φύλλου Φ1.3 οι περισσότεροι μαθητές αναγνώρισαν ότι τα ποσά πίτσες και χρήματα δεν είναι ανάλογα, αιτιολογώντας επαρκώς(το ένα διπλασιάζεται το άλλο όχι, δεν πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο ρυθμό, δεν πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό, δεν είναι ανάλογα γιατί 2x7=14, 3x7=21 κλπ). Μόνο ένας μαθητής έγραψε πως είναι ανάλογα γιατί πολλαπλασιάζονται και 4 μαθητές δεν απάντησαν καθόλου στη συγκεκριμένη εργασία.

Στην τελευταία εργασία του φύλλου Φ4, 7 μαθητές συμπλήρωσαν λανθασμένα τον πρώτο πίνακα γιατί πολλαπλασίασαν τους αριθμούς με το 15, ενώ 13 συμπλήρωσαν σωστά τους πίνακες αναγνωρίζοντας αμέσως πώς πρέπει να σκεφτούν και το γράφουν με πολλούς τρόπους(κάθε φορά πολλαπλασιάζω επί 5, βρήκα το ένα και πολλαπλασίασα, αφού το 3 έγινε 15 πολλαπλασίασα όλους τους αριθμούς με το 5).

Στον τελευταίο πίνακα του Φ4.β, 5 μαθητές συμπλήρωσαν λανθασμένα μπερδεύοντας πού έπρεπε να βάλουν το διπλάσιο και 15 μαθητές αναγνωρίζοντας αμέσως τη σχέσης ανάμεσα στους αριθμούς στις δυο σειρές του πίνακα, τα συμπλήρωσαν σωστά και οι απαντήσεις τους ήταν και απλοϊκές (κάτω είναι το μισό, κάνοντας διαίρεση)αλλά και πιο πλήρεις (αφού από το 4 γίνεται 2 θα διαιρέσω ή θα πολλαπλασιάσω με το 2).

Παρατηρώντας ότι δυσκολία προκάλεσε ο μη ακέραιος συντελεστής, καθώς και το γεγονός ότι πολλά παιδιά χρησιμοποιούν ως «ορισμό» των ανάλογων ποσών το κριτήριο «όσο μεγαλώνει το ένα, μεγαλώνει και το άλλο», η συζήτηση εστιάστηκε σε αυτά τα σημεία. Παραθέτουμε το παράδειγμα της Χριστίνας, η οποία απάντησε λανθασμένα στη Φ2.2.

Χρ: Αφού, κυρία, το 2 γίνεται 5, πώς είναι ανάλογα; Δεν πολλαπλασιάζεται…

Ερ: Τι εννοείς δεν πολλαπλασιάζεται, Χριστίνα;

Χρ: Πολλαπλασιάζεται με διαφορετικό τρόπο… δεν πολλαπλασιάζεται με το 2, το 3….

Ερ: Με τι πολλαπλασιάζεται το 2 για να γίνει 5;

Χρ:…(Δεν απαντά)

Ερ: Δες το στο κομπιουτεράκι σου και κάντο αντίθετα.

Χρ: Κυρία, 5: 2= 2,5.

Ερ: Στο διπλανό ζευγάρι 7,5 και 3, τι θα βρεις στο κομπιουτεράκι σου;

Χρ: Πάλι 2,5.

ΕΡ: Και στο άλλο ζευγάρι:

Χρ: Πάλι 2,5.

Ερ: Τι έχεις να πεις;

Χρ: Τώρα κατάλαβα είναι ανάλογα, ο αριθμός είναι ο ίδιος που πολλαπλασιάζονται..

Ερ: Η δυσκολία ποια είναι;

Χρ: Αυτός ο αριθμός είναι δεκαδικός, γιατί δε μοιάζει …

Ερ: Καταλήγουμε πως τα ποσά είναι ανάλογα;

Χρ: Ναι, το καταλάβαμε, αλλά ο δεκαδικός δε μας βοηθάει…

Εδώ, στην απάντηση της μαθήτριας βλέπουμε πως η μορφή του αριθμού, που δεν είναι ακέραιος και είναι δεκαδικός, επηρεάζει τη μαθήτρια στο να αναγνωρίσει τα ποσά.

Η επισήμανση ότι δεν αρκεί το κριτήριο «όταν μεγαλώνει το ένα, μεγαλώνει και το άλλο», αλλά «όσες φορές αυξάνει το ένα, τόσες ακριβώς και το άλλο», φαίνεται ότι βοήθησε κάποια παιδιά.

Μια μαθήτρια σχετικά αδύνατη (που παρακολουθεί ενισχυτική διδασκαλία), μου είπε όταν τελείωσε η συζήτηση για τα ποσά: «Κυρία, τώρα κατάλαβα τι είναι τα ανάλογα ποσά, γιατί είδα και ποσά που δεν είναι ανάλογα».

Ως κατακλείδα της συζήτησης τέθηκε η ερώτηση: Μπορούν κάποια ποσά να μοιάζουν με ανάλογα αλλά να μην είναι;

Απάντηση δε δόθηκε εύκολα και αυθόρμητα, αλλά μετά από πολλή συζήτηση η Σοφία είπε πως μπορεί να μεγαλώνουν και τα δυο ποσά, αλλά να μην πολλαπλασιάζονται κάθε φορά με τον ίδιο αριθμό, όπως παράδειγμα στις προσφορές των καταστημάτων. Καταλήξαμε πως πάντα θα πρέπει να θυμόμαστε πως πρέπει να πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό και τα δυο ποσά για να είναι ανάλογα.

4η Δραστηριότητα- 2ο Φύλλο Εργασίας

Το δεύτερο φύλλο εργασίας δόθηκε στους μαθητές μετά τη διδασκαλία των αντιστρόφως ανάλογων ποσών (Κεφάλαιο 36, σελίδα 87-88 του σχολικού βιβλίου). Το φύλλο αυτό περιείχε 4 εργασίες.

Πίνακας 7:Προβλήματα 2ου φύλλου εργασίας

<table>
<tr><th>Είδος ποσών</th><th>Σύμβολο</th><th>Έργο</th></tr>
<tr><td>Αντιστρόφως ανάλογα ποσά</td><td>Φ2.1</td><td>Ο δήμος μας για να κλαδέψει τα δέντρα στην περιοχή μας έβαλε 8 εργάτες και δούλεψαν για 24 ημέρες. Σκέφτομαι σε πόσες ημέρες θα τελείωναν το κόψιμο αν έβαζε ο δήμος τους διπλάσιους εργάτες ή τους τριπλάσιους εργάτες και δούλευαν πάλι με τον ίδιο ρυθμό. Σχηματίζω τον πίνακα ποσών και τιμών.

Κλάδεμα δέντρων
<table>
<tr><td>Εργάτες(πλήθος)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Ημέρες εργασίας</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Τι παρατηρώ;…..
Τι συμβαίνει με τους εργάτες και τις ημέρες εργασίας τους;…........</td></tr>
<tr><td>Μη ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα ποσά.</td><td>Φ2.2</td><td>2)Στην παραλία το καλοκαίρι τα θαλάσσια σπορ είχαν τις εξής τιμές:
Χρέωση ενοικίασης τζετ σκι
<table>
<tr><td>Χρόνος(ώρες)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Κόστος(ευρώ)</td><td>10</td><td>16</td><td>20</td></tr>
</table>
Είναι τα ποσά ανάλογα;…..
Είναι αντιστρόφως ανάλογα;…...
Εξηγώ γιατί:…..</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Ανάλογα ποσά</td>
<td>Φ2.3</td>
<td>3. Η Κατερίνα κατασκευάζει ένα περιδέραιο. Χρησιμοποιεί 2 άσπρες χάντρες για κάθε 6 μπλε χάντρες. Πόσες μπλε χάντρες χρειάζονται, αν οι άσπρες χάντρες στο περιδέραιο είναι 8;
Σχηματίζω τον πίνακα τιμών.
<table>
<tr><td>Άσπρες χάντρες</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Μπλε χάντρες</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Τι παρατηρώ για τα ποσά;…..</td>
</tr>
<tr>
<td>Αντιστρόφως ανάλογα ποσά</td>
<td>Φ2.4</td>
<td>4.Έχουμε 120 ευρώ στο ταμείο μας και θέλουμε να αγοράσουμε μπλούζες για να βάλουν οι μαθητές του σχολείου μας στο τουρνουά ποδοσφαίρου. Πόσες μπλούζες θα αγοράσουμε αν η μια μπλούζα κοστίζει 10 ευρώ; Αν κοστίζει 15; Αν κοστίζει 20;
Σχηματίζω τον πίνακα τιμών.
<table>
<tr><td>Αξία μπλούζας(ευρώ)</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td></tr>
<tr><td>Πλήθος μπλουζών</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Τι σκέφτομαι για τα ποσά;…..
Ποια μπλούζα θα επιλέγατε και γιατί;…...............................</td>
</tr>
</table>

Όπως γίνεται φανερό, οι μαθητές καλούνται α)να συμπληρώσουν τους πίνακες, να παρατηρήσουν τα ποσά και να αποφανθούν πώς αυξομειώνονται(Φ2.1) β)να αποφανθούν και να αιτιολογήσουν για το αν τα ποσά είναι ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα (Φ2.2) γ) να συμπληρώσουν πίνακα αναλόγων ποσών(Φ2.3) και δ) να συμπληρώσουν έναν πίνακα τιμών αντιστρόφως ανάλογων ποσών, να χαρακτηρίσουν τα ποσά και να απαντήσουν σε μια απλή ερώτηση κρίσεως(Φ2.4).

Σ' αυτό το φύλλο εργασίας εμπλουτίζονται δυο εργασίες με πίνακες τιμών με ποσά αντιστρόφως ανάλογα, μια εργασία με ποσά που δεν είναι ούτε ανάλογα αλλά ούτε αντιστρόφως ανάλογα, όπως και στο πρώτο φύλλο εργασίας, και μια εργασία ανάλογων ποσών.

Στην πρώτη εργασία (Φ2.1)οι μαθητές δε δυσκολεύονται σχεδόν καθόλου. Σχεδόν όλοι (εκτός από 2 που έγραψαν πως είναι ανάλογα) σχηματίζουν σωστά τους πίνακες και αναγνωρίζουν τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά ωστόσο η αιτιολόγηση που γράφουν δεν είναι ακριβής: όσο περισσότεροι εργάτες, τόσο λιγότερες μέρες, αυξάνεται το ένα μειώνεται το άλλο, το ένα πολλαπλασιάζεται και το άλλο διαιρείται.

Στη δεύτερη εργασία (Φ2.2) που δίνεται πίνακας τιμών είναι με ποσά που μοιάζουν ανάλογα, όμως δεν είναι, οι μαθητές δυσκολεύονται περισσότερο και περίπου οι μισοί μαθητές γράφουν πως είναι τα ποσά ανάλογα. Η αιτιολόγηση που γράφουν είναι: όταν αυξάνεται το ένα αυξάνεται και το άλλο, δεν πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους(μάλλον κάθετα εννοεί), λύνονται με χιαστί, είναι ανάλογα γιατί οι στήλες και οι δυο αυξάνονται και δεν είναι αντιστρόφως ανάλογα γιατί το ένα αν αυξάνεται το άλλο δε μειώνεται.

Οι μαθητές που έδωσαν σωστές απαντήσεις αιτιολόγησαν: ούτε με τον ίδιο αριθμό πολλαπλασιάζονται ούτε είναι αντιστρόφως ανάλογα, γιατί οι λόγοι δεν είναι ίσοι ούτε αντίστροφοι(δεν έχουν σταθερότητα), δεν έχουν στοιχεία αναλογίας, ούτε αντίστροφης αναλογίας.

Στη τρίτη εργασία του φύλλου (Φ2.3) ζητούμενο είναι η συμπλήρωση πίνακα ανάλογων ποσών , οι μαθητές δε δυσκολεύονται καθόλου και μόνο 4 μαθητές, ενώ ονομάζουν τα ποσά ανάλογα, κάνουν κάποιο λάθος στη συμπλήρωση του πίνακα και μια μαθήτρια που συμπληρώνει σωστά τον πίνακα, ονομάζει τα ποσά αντιστρόφως ανάλογα, μπερδεύοντας προφανώς τους όρους.

Στην τέταρτη εργασία, (Φ2.4) σε πρόβλημα αντιστρόφως ανάλογων ποσών, δίνεται το συνολικό ποσό που μπορούμε να διαθέσουμε για αγορά μπλουζών και κάποιες τιμές από μπλούζες και ζητούμε από τους μαθητές να συμπληρώσουν τον πίνακα τιμών με το πόσες μπλούζες θα αγοράσουμε κάθε φορά, να αναγνωρίσουν τα ποσά και να εκτιμήσουν ποια μπλούζα είναι προτιμότερο να αγοράσουν για τους μαθητές του σχολείου.

Εδώ οι απαντήσεις είναι πιο περίπλοκες: 8 μαθητές συμπληρώνουν σωστά τους πίνακες και αναγνωρίζουν σωστά τα ποσά. 5 μαθητές συμπληρώνουν σωστά τους πίνακες αλλά δεν ονομάζουν τα ποσά αντιστρόφως ανάλογα(γράφουν: τα ποσά δεν είναι ανάλογα, δεν είναι ανάλογα ούτε αντιστρόφως ανάλογα αλλά για να βρεις το αποτέλεσμα πρέπει να διαιρέσεις την αξία (της μπλούζας) με τα χρήματα. 2 μαθητές ονομάζουν τα ποσά ανάλογα αλλά συμπληρώνουν σωστά τους πίνακες και 3 μαθητές κάνουν λάθος και στους πίνακες και στην αναγνώριση των ποσών.

Οι μαθητές όλοι έγραψαν πως θα προτιμούσαν να αγοράσουν τις φθηνότερες μπλούζες για να αγοράσουν περισσότερες, εκτός από έναν που προτίμησε την ακριβότερη για την καλύτερη ποιότητα της.

Αναγνωρίζοντας τη δυσκολία στις εργασίες με τα περισσότερα λάθη(Φ2.2, Φ2.3), την επόμενη μέρα η συζήτηση στράφηκε στα ποσά που δεν είναι ούτε ανάλογα ούτε αντίστροφα.

Ερ: Τα ποσά, γράφεις, Πωλίνα, είναι ανάλογα γιατί αυξάνεται το ένα, αυξάνεται και το άλλο. Συμφωνείς, ε;

Πωλ: Ναι, κυρία αυξάνονται…

Παν: Αυξάνονται έχει δίκιο εν μέρει η Πωλίνα, αλλά δεν αυξάνουν με τον ίδιο ρυθμό.

Ερ: Δηλαδή;

Παν: Όταν το 1 γίνεται 2 στην πρώτη σειρά, πρέπει και το 10 να γίνει 20 στη δεύτερη σειρά αντίστοιχα.

Ερ: Πωλίνα, συμβαίνει αυτό;

Πωλ: Όχι.

Ερ: Άρα τα ποσά είναι ανάλογα;

Πωλ: Όχι, κυρία, αλλά δεν είναι και αντίστροφα.

Ερ: Πώς θα ήταν τα ανάλογα ποσά;

Πωλ: Η πρώτη σειρά του πίνακα 1, 2, 3 και η δεύτερη αντίστοιχα 10, 20, 30…

Στη τελευταία άσκηση του φύλλου στη διόρθωση η συζήτηση στράφηκε τι είναι τα ποσά:

Σωτήρης: Δεν είναι αντιστρόφως ανάλογα γιατί δεν διπλασιάζεται το ένα και να διαιρεθεί το άλλο με τον ίδιο αριθμό.

Ερ: Συμφωνείτε;

Ακούστηκαν διάφορες φωνές από τους μαθητές όπως ναι…όχι.

Αναστάσης: Είναι αντιστρόφως ανάλογα γιατί θα πούμε πόσες φορές χωράει το 10 στο 120, το 15 στο 120, κλπ

Ερ: Δηλαδή; Πώς μας βοηθάει το 120;

Σωτήρης: Ναι, κυρία, κατάλαβα, τα δυο ποσά, οι μπλούζες και οι τιμές τους, κάνουν πάντα 120, ο ίδιος αριθμός! Πολλαπλασιάζουμε τις τιμές του κάθε λόγου.

Δοκίμασαν οι μαθητές και πολλαπλασίασαν τις δυο τιμές σε όλους τους λόγους και βρήκαν σε όλους 120.

Εδώ η συζήτηση συνεχίστηκε για λίγο όπου γράφτηκε στον πίνακα από την ερευνήτρια ο πίνακας τιμών της Φ2.4 εργασίας χωρίς τη μεσαία τιμή. Οι μαθητές αναγνώρισαν αμέσως πως διπλασιάζεται η μια τιμή και διαιρείται στο μισό η άλλη και ονόμασαν αμέσως τα ποσά σωστά.

Σωτήρης: Αφού θέλουμε με αυτά τα χρήματα να δούμε πόσες μπλούζες μπορούμε να αγοράσουμε! Αν η μπλούζα έχει 10 ευρώ, αγοράζουμε 12 μπλούζες. Αν έχει 20 ευρώ, τότε παίρνουμε 6 μπλούζες. Αντιστρόφως ανάλογα!

Εδώ γενικεύσαμε το κοινό γινόμενο που βρήκαμε (120) με τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά με αρκετή επιτυχία και οι μαθητές το κατανόησαν σχετικά εύκολα.

5η Δραστηριότητα- 3ο Φύλλο εργασίας

Το 3ο φύλλο εργασίας δόθηκε μετά από τη διδασκαλία των αντιστρόφως ανάλογων ποσών (κεφ 37: Λύνω προβλήματα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά, σελ. 89-90). Από το προηγούμενο φύλλο εργασίας αναγνωρίσαμε μια δυσκολία στο να αναγνωρίσουν αντιστρόφως ανάλογα ποσά, καθώς και ότι στη σελ. 88, υπάρχει μια εφαρμογή που λέει για αντίστροφα ποσά και ποια είναι. Το φύλλο περιείχε 4 εργασίες με πίνακες τιμών με ποσά ανάλογα, αντιστρόφως ανάλογα, ποσά ούτε ανάλογα, ούτε αντιστρόφως ανάλογα. Στην πρώτη εργασία πρέπει μόνο να αναγνωρίσουν τα ποσά, στη δεύτερη να αναγνωρίσουν τα ποσά και να συμπληρώσουν τον πίνακα τιμών, στην τρίτη επίσης να αναγνωρίσουν τα ποσά που δεν εμπίπτουν σε καμία κατηγορία και στη τελευταία να συμπληρώσουν πίνακα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Πίνακας 8: Προβλήματα 3ου φύλλου εργασίας

<table>
<tr><th>Είδος ποσών</th><th>Σύμβολο</th><th>Έργο</th></tr>
<tr><td>Μη ανάλογα ποσά.</td><td>Φ3.1</td><td>Διαβάζω, παρατηρώ τους πίνακες και προσπαθώ να αναγνωρίσω τα ποσά από τις αλλαγές των τιμών τους:
1)Το μαγαζί μας κάνει μια προσφορά αν αγοράσουμε;
<table>
<tr><td>Πλήθος στολών</td><td>5</td><td>10</td><td>20</td></tr>
<tr><td>Αξία στολής (ευρώ)</td><td>20</td><td>15</td><td>12</td></tr>
</table>
Παρατηρώ πώς αλλάζουν οι τιμές;.................................
Είναι τα ποσά ανάλογα;......................................
Είναι τα ποσά αντιστρόφως ανάλογα;…………….</td></tr>
<tr><td>Ποσά ανάλογα</td><td>Φ3.2</td><td>Πόσο κοστίζουν 5 σκούπες για το σχολείο;
<table>
<tr><td>Ποσότητα σκουπών</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Αξία (ευρώ)</td><td>6</td><td>…</td><td>….</td></tr>
</table>
Είναι τα ποσά ανάλογα;..
Είναι τα ποσά αντιστρόφως ανάλογα;…………………</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Ποσά
ακαθόριστα</td>
<td>Φ3.3</td>
<td>Πόσο κοστίζει η ενοικίαση χιονοσανίδας (σνοουμπορντ);
<table>
<tr><td>Χρόνος ενοικίασης(ώρες)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Κόστος ενοικίασης (ευρώ)</td><td>10</td><td>16</td><td>20</td></tr>
</table>
Παρατηρώ πώς αλλάζουν οι τιμές:...................................
Είναι τα ποσά ανάλογα;...
Είναι τα ποσά αντιστρόφως ανάλογα;…………………</td>
</tr>
<tr>
<td>Ποσά
αντιστρόφως
ανάλογα</td>
<td>Φ3.4</td>
<td>Σε πόσες ημέρες τελειώνει το βάψιμο του σχολείου μας;
<table>
<tr><td>Εργάτες</td><td>10</td><td>5</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Χρόνος έργου(ημέρες)</td><td>2</td><td>…</td><td>….</td></tr>
</table>
Είναι τα ποσά ανάλογα;...
Είναι τα ποσά αντιστρόφως ανάλογα;…………………</td>
</tr>
</table>

Στην πρώτη άσκηση (Φ3.1)που υπάρχουν ποσά που δεν εμπίπτουν σε κάποια κατηγορία οι μαθητές λίγο περισσότερο υποψιασμένοι, αναγνωρίζουν περισσότεροι από τους μισούς (11) πως τα ποσά δεν είναι ούτε ανάλογα, ούτε αντιστρόφως ανάλογα. Αιτιολογούν λέγοντας: Δεν αλλάζουν οι τιμές με σταθερό ρυθμό, δεν υπάρχει σταθερότητα, το ένα πολλαπλασιάζεται ενώ το άλλο όχι, αλλάζουν ανώμαλα. Οι υπόλοιποι μαθητές οι περισσότεροι είπαν πως τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα γιατί το ένα μεγαλώνει και το άλλο μικραίνει.

Στη δεύτερη εργασία (Φ3.2)σχεδόν όλοι οι μαθητές (εκτός από 2), εύκολα αναγνώρισαν τον πίνακα και το πρόβλημα και απάντησαν σωστά και συμπλήρωσαν σωστά τον πίνακα με τα ανάλογα ποσά.

Στην τρίτη εργασία του φύλλου(Φ3.3) επανέρχεται πίνακας συμπληρωμένος με ποσά που δεν είναι ανάλογα αλλά ούτε και αντιστρόφως ανάλογα. Οι μαθητές καλούνται να σχολιάσουν πώς αλλάζουν οι τιμές. Και σ αυτή την εργασία, 11 μαθητές αναγνωρίζουν πως τα ποσά «αλλάζουν ανώμαλα» , δεν αλλάζουν με σταθερό τρόπο, δεν υπάρχει σταθερότητα, δεν είναι τίποτα, οι υπόλοιποι 6 αναγνωρίζουν τα ποσά ως ανάλογα γιατί «αυξάνονται οι ώρες αυξάνεται και το κόστος, γιατί πολλαπλασιάζονται» και μια μαθήτρια τα θεωρεί ως αντιστρόφως ανάλογα.

Στην τελευταία εργασία (Φ3.4)που πρέπει να συμπληρώσουν έναν πίνακα τιμών με αντίστροφα ποσά, όλοι οι μαθητές αναγνωρίζουν πως τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα αλλά 5 μαθητές συμπληρώνουν λανθασμένα τον πίνακα.

Επειδή αναγνωρίσαμε τη δυσκολία σε αντίστροφα και μη συμβατικά ποσά, την επόμενη μέρα στη συζήτηση που ανοίγεται κατά τη διάρκεια της διόρθωσης οι μαθητές που κατανόησαν πλήρως και τα ποσά και τον τρόπο ελέγχου των ποσών σε πίνακα τιμών, εξηγούν στους συμμαθητές τους, πώς αναγνωρίζουν τα ποσά.

Γιαν:- Πάντα πρέπει να βγαίνει ο ίδιος αριθμός αν διαιρέσουμε τους λόγους.

Ερ:-Και στα αντιστρόφως ανάλογα;

Γιαν:-Όσες φορές πολλαπλασιάζεται το ένα, τόσες διαιρείται το άλλο.

Ερ:-Και πώς υπάρχει αυτή η σταθερότητα που λέτε;

(Δεν απαντά κανείς)

Ερ:-Τι βγαίνει ίδιο στους λόγους;

Γιαν: Να στο πρώτο πρόβλημα, διπλασιάζονται οι στολές, το άλλο ποσό, η αξία κάθε στολής ούτε διπλασιάζεται, ούτε διαιρείται στο μισό. Ούτε ανάλογα ούτε αντίστροφα.

Ερ: Στο τρίτο πρόβλημα; Χριστίνα, γράψατε με τη Βέτα, αυξάνεται το ένα αυξάνεται και το άλλο άρα τα ποσά είναι ανάλογα;

Χρ: Ναι.

Ερ: Αφού η μια ώρα γίνονται δυο, τα χρήματα πόσα θα έπρεπε να είναι για τις δυο ώρες;

ΧΡ: 20 ευρώ, είναι όμως 16.Δεν διπλασιάζονται, δεν είναι ανάλογα. Ούτε κι αντίστροφα γιατί δεν διαιρούνται.

Ερ: Στο τέταρτο πρόβλημα;

Βέτα: Οι εργάτες γίνονται μισοί δια 2, οι μέρες θα γίνουν διπλάσιες, επί 2.

Ερ: Και πώς θα σκεφτούμε να συμπληρώσουμε το τελευταίο τετραγωνάκι του πίνακα; Από 10 οι εργάτες γίνονται 2;

Εδώ υπάρχει μια μικρή δυσκολία να βρουν πως η τιμή διαιρείται με το 5, δηλ πιο δύσκολα εντοπίζεται ο αριθμός που διαιρείται η τιμή, παρά όταν πολλαπλασιάζεται.

6η Δραστηριότητα – 4ο Φύλλο εργασίας

Το 4ο φύλλο εργασίας δόθηκε μετά από τη διδασκαλία των αντιστρόφων ανάλογων ποσών(Κεφάλαιο 39) και αφού οι μαθητές είχαν έρθει σε επαφή με πολλά προβλήματα αναλόγων και αντιστρόφων ποσών και είχαν εξοικειωθεί αρκετά με τη μορφή των προβλημάτων ελλείπουσας τιμής.

Πίνακας 9: Προβλήματα 4ου φύλλου εργασίας

Κατηγορία προβλήματος	Σύμβολο	Πρόβλημα
Προσθετικό πρόβλημα	Φ4.1	Η Μαρία και η Ιωάννα γράφουν στον υπολογιστή. Γράφουν το ίδιο γρήγορα, αλλά η Μαρία ξεκίνησε πιο νωρίς. Όταν η Μαρία είχε γράψει 3 σελίδες, η Ιωάννα είχε γράψει 1. Όταν η Μαρία έχει γράψει 6, πόσες θα έχει γράψει η Ιωάννα;
Αναλογικό πρόβλημα	Φ4.2	Η Μαρία και η Ιωάννα γράφουν στον υπολογιστή. Ξεκίνησαν μαζί αλλά η Ιωάννα γράφει πιο γρήγορα. Για κάθε 3 σελίδες που γράφει η Ιωάννα , η Μαρία γράφει 1. Όταν η Μαρία έχει γράψει 5 σελίδες, πόσες θα έχει γράψει η Ιωάννα;

Σ αυτό το φύλλο εργασίας υπάρχουν δυο προβλήματα, που φαινομενικά μοιάζουν πολύ και οι μαθητές καλούνται να τα λύσουν. Ήταν δυο προβλήματα με δομή προβλήματος ελλείπουσας τιμής, όμως το ένα προσθετικό και το δεύτερο αναλογικό. Δυο προβλήματα που έμοιαζαν πολύ μεταξύ τους, όμως έπρεπε οι μαθητές να τα κατανοήσουν και να προσέξουν τις λεπτομέρειες που τα διαφοροποιούσαν.

Σχεδόν όλοι οι μαθητές, εκτός από 3, δεν κατανόησαν τις διαφορές ανάμεσα στα δυο προβλήματα και δεν κατόρθωσαν χωρίς βοήθεια να λύσουν το πρώτο πρόβλημα. Άλλοι 2 μαθητές, ενώ διάβασαν προσεκτικά το πρόβλημα, δεν μπορούσαν να αποφασίσουν τι έπρεπε να κάνουν για να το λύσουν σωστά. Οι περισσότεροι μαθητές έδιναν απευθείας απαντήσεις αναλογικής λύσης, δηλ. «αφού οι 3 σελίδες έγιαναν 6, η 1 έγιναν 2».

8 μαθητές αναγνώρισαν τον προσθετικό χαρακτήρα του πρώτου προβλήματος (3 μαθητές το κατανόησαν από την αρχή και το έλυσαν σωστά οι άλλοι με βοήθεια (επεξήγηση) στην κατανόηση του προβλήματος, 6 μαθητές το έλυσαν με αναλογία και 4 μαθητές έγραψαν το σωστό αποτέλεσμα (από τους συμμαθητές τους), χωρίς να μπορούν να το δικαιολογήσουν επαρκώς. Οι περισσότεροι είχαν φτιάξει πίνακα τιμών, ακόμη κι αυτοί που λογάριασαν με πρόσθεση.

Στο δεύτερο αναλογικό πρόβλημα που λεκτικά έμοιαζε πολύ με το προηγούμενο, αναμέναμε μεγαλύτερη επιτυχία, 12 μαθητές το έλυσαν σωστά ενώ 4 μαθητές απάντησαν λάθος ταυτίζοντας το με το προηγούμενο και 2 μαθητές δεν απάντησαν καθόλου, προφανώς αναποφάσιστοι από το προηγούμενο προσθετικό πρόβλημα αφού στην ερώτηση της ερευνήτριας σε έναν μαθητή γιατί δεν το έλυσε, ο μαθητής απάντησε πως δεν ήξερε αν έπρεπε να το λύσει όπως το προηγούμενο (προσθετικό) ή όπως λύνει τα προβλήματα του βιβλίου.

Η διόρθωση και η συζήτηση την επόμενη μέρα είχε μεγάλο ενδιαφέρον. Γιατί παρόλη την κουβέντα που έγινε στη διάρκεια της λύσης των προβλημάτων, κάποιοι μαθητές δεν είχαν πεισθεί. Τα πρώτα επιχειρήματα μαθητών που έδωσαν αναλογική απάντηση στο προσθετικό πρόβλημα ήταν πως διπλασιάζεται το ένα, διπλασιάζεται και το άλλο. Δηλαδή το 3 γίνεται 6, το 1 θα γίνει 2. Στη συνέχεια διαβάζοντας το πρόβλημα, σε κάθε πρόταση το δείχναμε στον πίνακα με εικόνες σελίδων που προσθέταμε κάθε φορά ακόμη μία στην καθεμιά τους. Δηλ. Η Μαρία ξεκινώντας νωρίτερα έχει γράψει 3 σελίδες και η Ιωάννα 1. Αφού γράφουν με την ίδια ταχύτητα, όταν η Μαρία θα γράψει 4 σελίδες, πόσες θα γράψει η Ιωάννα; 1 σελίδα που είχε γράψει από την αρχή και προσθέτουμε και άλλη 1, άρα 2. Και σημειώναμε στον πίνακα μια σελίδα στην κάθε μια, συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο. Όταν θα γράψει 5 η Μαρία; 3 η Ιωάννα. Άρα δηλαδή πώς σκεφτόμαστε; Προσθέτουμε σε κάθε μια κοπέλα, μια σελίδα κάθε φορά Τότε οι μαθητές κατανόησαν καλύτερα το περιεχόμενο του προβλήματος και για μια ακόμη φορά ακούστηκε στην τάξη «Μα, κυρία, μοιάζει με αναλογία που λείπει η μια τιμή». Ένας μαθητής συνεχίζοντας να αμφιβάλλει, είπε «ναι, διάβασα πως γράφουν το ίδιο γρήγορα, αλλά για να έχει γράψει η μια 3 σελίδες ενώ η άλλη 1, γράφει πιο γρήγορα».

Στο δεύτερο πρόβλημα που ήταν αναλογικό, οι μαθητές αναρωτήθηκαν αν είναι κι αυτό σαν το προηγούμενο, αλλά γρήγορα αντιλήφθηκαν τον πολλαπλασιαστικό του χαρακτήρα. Βοήθησε κι εδώ η αναπαράσταση στον πίνακα για να αντιληφθούν τη διαφορετικότητα των δυο προβλημάτων.

Εδώ φάνηκε η δυσκολία των μαθητών να κατανοήσουν τα προβλήματα και να δουν τις διαφορές τους και πόσο επηρεάζει η μορφή του προβλήματος, ακόμη κι αν εξηγηθεί.

7η Δραστηριότητα – 5ο Φύλλο εργασίας

Αυτό το τελευταίο φύλλο εργασίας δόθηκε αφού οι μαθητές διδάχτηκαν τα ποσοστά και είδαν αρκετά προβλήματα με εύρεση αρχικής, τελικής τιμή, εύρεση ποσοστού. Μετά το τελευταίο κεφάλαιο της ενότητας (κεφ.44, Λύνω προβλήματα με ποσοστά: Βρίσκω το ποσοστό στα εκατό), οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν ένα φύλλο εργασίας(Πίνακας 10) με δυο προβλήματα: στο πρώτο πρόβλημα(Φ5.1) δινόταν πίνακας με αρχική τιμή και ζητούνταν από τους μαθητές να συμπληρώσουν τον πίνακα με το ποσό έκπτωσης και την τελική τιμή και στη συνέχεια να εξηγήσουν αν τα ποσά αυτά είναι ανάλογα ανά δυο και στο δεύτερο να βρουν μια ποσοστιαία αύξηση και να κάνουν μια πρόβλεψη.

Πίνακας 10:Προβλήματα 5ου φύλλου εργασίας

<table>
<tr><th>Είδος ποσών</th><th>Σύμβολα</th><th>Προβλήματα</th></tr>
<tr><td>Ανάλογα ποσά</td><td>Φ5.1</td><td>Ένα μαγαζί κάνει έκπτωση σε όλα τα παπούτσια 20%. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι αρχικές τιμές κάποιων ζευγαριών. Συμπληρώστε τον πίνακα υπολογίζοντας το ποσό της έκπτωσης και την τελική τιμή (μετά την έκπτωση) για κάθε ζευγάρι .
<table>
<tr><td>Αρχική τιμή</td><td>50</td><td>60</td><td>75</td><td>90</td></tr>
<tr><td>Ποσό έκπτωσης</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Τελική τιμή</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Λύνω και συμπληρώνω τον πίνακα:
Είναι κάποια από τα παραπάνω ποσά (Αρχική Τιμή, Ποσό Έκπτωσης, Τελική Τιμή) ανά δύο ανάλογα; Εξηγήστε γιατί.</td></tr>
<tr><td>Εύρεση τελικού ποσού- πρόβλημα πρόβλεψης</td><td>Φ5.2</td><td>Η Κατερίνα στα 6 χρόνια είχε ύψος 1 μέτρο. Στα 12 χρόνια το ύψος της είχε αυξηθεί κατά 50%. α)Πόσο ύψος είχε η Κατερίνα όταν ήταν 12 χρονών;
β) Μπορούμε να προβλέψουμε πόσο ύψος θα έχει η Κατερίνα όταν θα είναι 24 χρονών</td></tr>
</table>

Οι μαθητές μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν κομπιουτεράκι για να βρουν τις τιμές που ζητούνταν, πράγμα που δημιούργησε μια κατάσταση «ευφορίας» αρχικά. Οι τιμές συμπληρώθηκαν σωστά, αλλά για το αν τα ποσά είναι ανά δυο ανάλογα, κάποιοι μαθητές (4) δεν απάντησαν καθόλου, κάποιοι (4) απάντησαν πως δεν είναι ανάλογα γιατί «οι αριθμοί δεν πολλαπλασιάζονται και δε διαιρούνται μεταξύ τους, δεν πολλαπλασιάζονται και δε διαιρούνται με τον ίδιο αριθμό».

Τέλος οι μαθητές που είπαν πως είναι τα ποσά ανά δυο ανάλογα είπαν πως «πολλαπλασιάζονται και διαιρούνται με τον ίδιο αριθμό, η αρχική τιμή και το ποσό έκπτωσης βγαίνει 5, το ποσό έκπτωσης και η τελική τιμή βγαίνει 4» και μια μαθήτρια έγραψε πως «το ποσό έκπτωση είναι σα μοτίβο. Όταν προσθέτεις 5 στην αρχική τιμή, αυτό ανεβαίνει ανά 1».

Από αυτές τις απαντήσεις καταλαβαίνουμε πως αρκετοί μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν και να ορίσουν ακριβώς τις συνθήκες που καθιστούν δυο ποσά ανάλογα.

Στην δεύτερη εργασία οι μαθητές υπολόγισαν την αύξηση όλοι σωστά και στην ερώτηση για πρόβλεψη όλοι απάντησαν πως δεν μπορεί να γίνει πρόβλεψη και έγραψαν πως «αν κάναμε αναλογία θα βγει 3 μέτρα, μπορεί να είναι διαφορετική η ανάπτυξη».

Στη διόρθωση, αφού είδαμε πως βρήκαν όλοι τις ίδιες τιμές, στην ερώτηση αν τα ποσά είναι ανάλογα, με τα κομπιουτεράκια να υπολογίσουν την αρχική τιμή με την έκπτωση, μετά την αρχική τιμή με την τελική τιμή, και την έκπτωση με την τελική τιμή. Κάποιοι ένιωσαν έκπληξη όταν είδαν πως το αποτέλεσμα ήταν το ίδιο σε καθένα από τα τρία ζευγάρια.

Αναστάσης: Α, βγάζει το ίδιο 50:10=5, 60:12=5,

Ερ: Κάντε το ίδιο και ανάποδα 10:50=0,2, 60:12=0,2

Αν: Πάλι βγαίνει παντού το ίδιο! Αυτό είναι πως τα ποσά είναι ανάλογα!

Ο Αναστάσης, αν και υψηλής επίδοσης μαθητής, έγραψε πως δεν είναι ανάλογα.

Ερ: Αναστάση, τι λες;

Αν: Ναι, είναι ανάλογα.

Ερ: Γιατί έγραψες πως δεν είναι;

Αν: Δεν μπορώ να το πω με λόγια, γιατί δεν ήταν πολλαπλάσια οι αριθμοί.

Ερ: Γιατί δεν ήταν πολλαπλάσια;

Αν: Τώρα κατάλαβα, δεν πολλαπλασιάσαμε με ακέραιο αλλά με ποσοστό(δεκαδικό).

Εδώ γίνεται κατανοητό ο παράγοντας δυσκολίας που δημιουργεί το είδος των αριθμών που έχει η αναλογία, που οι μαθητές αν δεν δουν ακέραια πολλαπλάσια των αριθμών στους λόγους, δεν αναγνωρίζουν εύκολα ούτε την ανάλογη σχέση, ούτε όμως και την αντίστροφη.

5. Αποτελέσματα

Οι κατηγορίες των προβλημάτων που αναλύθηκαν και παρουσιάζονται είναι οι εξής: μη αναλογικά προβλήματα (2 προσθετικά και 2 σταθερά) και αναλογικά (2) προβλήματα (βλ. Παράρτημα)

Οι απαντήσεις στα τέσσερα μη αναλογικά προβλήματα ταξινομήθηκαν είτε ως σωστές (Σ, όταν μια σωστή απάντηση δόθηκε), είτε ως λάθος με αναλογικό τρόπο (Λ-Α, μια αναλογική στρατηγική εφαρμόστηκε λανθασμένα) ή ως άλλο σφάλμα (Λ, ακολουθήθηκε μια άλλη λανθασμένη διαδικασία λύσης, ή καμία λύση). Για τα δύο αναλογικά προβλήματα, χρησιμοποιήθηκαν μόνο δύο κατηγορίες (απαντήσεις Σ και Λ). Τα καθαρά τεχνικά σφάλματα υπολογισμού δεν βαθμολογήθηκαν ως απαντήσεις Λ αλλά ως απαντήσεις Σ ή Λ-Α (ανάλογα με το αν οι αριθμητικές πράξεις αντικατόπτριζαν ορθό ή αναλογικό τύπο συλλογιστικής). Έτσι, η αύξηση του αριθμού των απαντήσεων Λ, δεν μπορεί απλώς να αποδοθεί στις υπολογιστικές πολυπλοκότητες: Εάν ένας μαθητής προσπάθησε να βρει το αποτέλεσμα κάνοντας τους κατάλληλους υπολογισμούς, η απόκριση βαθμολογήθηκε ως σωστή ακόμα και αν αυτός ή αυτή προσπάθησε να βρει το αποτέλεσμα σε ένα μη αναλογικό πρόβλημα κάνοντας αναλογικούς υπολογισμούς, η απάντηση βαθμολογήθηκε ως αναλογική(Van Dooren et al, 2009).

5.1 Σύγκριση επιδόσεων Πειραματικής Ομάδας (Π.Ο.) και Ομάδας Ελέγχου (Ο.Ε.)

Σε όλα τα είδη προβλημάτων, η σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με 1, ενώ οι λανθασμένες απαντήσεις οποιουδήποτε τύπου βαθμολογήθηκαν με 0. Υπολογίστηκε η συνολική επίδοση κάθε μαθητή ως άθροισμα των επιμέρους βαθμολογιών, στον προέλεγχο και στο μεταέλεγχο αντίστοιχα. Στον Πίνακα 11 παρουσιάζονται η μέση τιμή της επίδοσης, το αντίστοιχο τυπικό σφάλμα και το διάστημα εμπιστοσύνης, το εύρος των τιμών και η τυπική απόκλιση, ανά ομάδα (Π.Ο., Ο.Ε.) κατά τον Προέλεγχο και το Μεταέλεγχο.

Πίνακας 11: Μέση τιμή της επίδοσης, το αντίστοιχο τυπικό σφάλμα και το διάστημα εμπιστοσύνης, το εύρος των τιμών και η τυπική απόκλιση

Δοκιμασία	Ομάδα	Μ.Τ. (Τ.Σφ.)	95% Δ.Ε.	Εύρος	Τ.Α.
Προέλεγχος	Π.Ο.	1,95 (0,420)	1,07-2,83	0-6	1,877
	Ο.Ε.	1,78 (0,275)	1,20-2,36	0-4	1,166
Μεταέλεγχος	Π.Ο.	3,40 (0,461)	2,43-4,37	0-6	2,062
	Ο.Ε.	2,22 (0,308)	1,57-2,87	0-6	4,253
Σημείωση: Μ.Τ.: Μέση τιμή Τ.Σφ.: Τυπικό Σφάλμα Δ.Ε.: Διάστημα Εμπιστοσύνης Τ.Α.: Τυπική Απόκλιση					

Λόγω του μικρού μεγέθους των δειγμάτων, υπολογίστηκαν μέτρα λοξότητας και κύρτωσης για τη μέση επίδοση κατά τον προέλεγχο και το μεταέλεγχο που παρουσιάζονται στον Πίνακα 12.

Πίνακας 12: Μέτρα λοξότητας και κύρτωσης για τη μέση επίδοση

		Λοξότητα (Τ.Σφ.)	Δείκτης Λοξότητας	Κύρτωση (Τ.Σφ)	Δείκτης Κύρτωσης
Προέλεγχος	Π.Ο.	0,929 (0,512)	1,814	0,318 (0,992)	0,321
	Ο.Ε.	0,234 (0,536)	0,436	0,111 (1,038)	0,107
Μεταέλεγχος	Π.Ο.	- 0,042 (0,512)	-0,081	-1,462 (0,992)	1,474
	Ο.Ε.	-0,106 (0,512)	0,207	-1,462 (0,992)	1,474

Δεδομένου ότι οι δείκτες λοξότητας και κυρτότητας είναι <1.96, χρησιμοποιήθηκε το παραμετρικό κριτήριο t-test για να συγκριθούν οι μέσες τιμές της συνολικής βαθμολογίας των μαθητών της Π.Ο. και της Ο.Ε. κατά τον προέλεγχο και τον μεταέλεγχο. Η διαφορά της μέσης επίδοσης ανάμεσα στην Π.Ο. και την Ο.Ε. κατά τον προέλεγχο δεν ήταν σημαντική, $t(36)=0,335$, $p=0,147$. Αντίθετα, κατά τον μεταέλεγχο, η διαφορά της επίδοσης υπέρ της Π.Ο. (βλ. Πίνακα12) ήταν σημαντική, $t(32,528)=2,123$, $p=0,041$ (με διόρθωση για ανόμοιες διακυμάνσεις). Το μέγεθος της επίδρασης υπολογίστηκε σε 0,35>30 που αντιστοιχεί σε μια μετρίου μεγέθους επίδραση.

5.2 Αποτελέσματα ανά κατηγορία προβλημάτων

Οι πίνακες που παρατίθενται στην συνέχεια, συνοψίζουν και συγκρίνουν τις απαντήσεις των μαθητών ανά κατηγορία προβλημάτων. Οι απαντήσεις των μαθητών είναι εκφρασμένες σε ποσοστιαίες μονάδες και γίνεται διαχωρισμός μεταξύ της πειραματικής ομάδας (Π.Ο.) και της ομάδας ελέγχου (Ο.Ε.) καθώς και μεταξύ των απαντήσεων πριν την παρέμβαση (Προέλεγχος -ΠΡΟ) και μετά από αυτήν (Μεταέλεγχος -ΜΕΤΑ).

Στους πίνακες που ακολουθούν αρχικά παρουσιάζονται οι συχνότητες των κατηγοριών απάντησης ανά κατηγορία προβλήματος και, πιο συγκεκριμένα, στα προσθετικά προβλήματα (Πίνακας 13), στα σταθερά προβλήματα (Πίνακας 14) και στα αναλογικά προβλήματα (Πίνακας 15). Παρά το μικρό μέγεθος των Ομάδων, παρουσιάζονται και τα ποσοστά, εξαιτίας της διαφοράς του πλήθους των μελών των μονάδων.

Πίνακας 13: Συχνότητες και ποσοστά των κατηγοριών απάντησης στα προσθετικά προβλήματα

	Π.Ο.				Ο.Ε.			
	Π2		Π7		Π2		Π7	
	ΠΡΟ	ΜΕΤΑ	ΠΡΟ	ΜΕΤΑ	ΠΡΟ	ΜΕΤΑ	ΠΡΟ	ΜΕΤΑ
Σωστό Σ	4 (20%)	12 (60%)	5 (25%)	10 (50%)	2 (11%)	6 (33%)	3 (17%)	3 (17%)
Λάθος-Αναλογικό	11 (55%)	7 (35%)	8 (40%)	6 (30%)	13 (72%)	10 (55%)	8 (44%)	12 (67%)
Λάθος-Άλλο	5 (25%)	1 (5%)	7(35%)	4 (20%)	3 (17%)	2 (11%)	7 (39%)	3 (16,5%)
ΣΥΝΟΛΟ	20 (100%)	20 (100%)	20 (100%)	20 (100%)	18 (100%)	18 (100%)	18 (100%)	18 (100%)

Από τον Πίνακα 13, φαίνεται στον Προέλεγχο, η επικρατούσα απάντηση είναι η λανθασμένη αναλογική και για τις δύο ομάδες, και στα δύο προσθετικά προβλήματα. Στο μεταέλεγχο, η επικρατούσα απάντηση είναι η σωστή για την Π.Ο., καθώς αυξάνονται οι σωστές απαντήσεις, ενώ μειώνονται οι λανθασμένες απαντήσεις και των δύο τύπων. Ωστόσο, παραμένει ένα υπολογίσιμο ποσοστό λανθασμένων αναλογικών απαντήσεων και στα δύο προβλήματα. Παράλληλα, στην Ο.Ε. το πλήθος των σωστών απαντήσεων παραμένει στάσιμο, ενώ αυξάνονται και οι λανθασμένες αναλογικές απαντήσεις στο Π7. Η επικρατούσα τιμή στην Ο.Ε. παραμένει η λανθασμένη αναλογική.

Πίνακας 14: Συχνότητες και ποσοστά των κατηγοριών απάντησης στα σταθερά προβλήματα

	Π.Ο				Ο.Ε.			
	Π5		Π8		Π5		Π8	
	ΠΡΟ	ΜΕΤΑ	ΠΡΟ	ΜΕΤΑ	ΠΡΟ	ΜΕΤΑ	ΠΡΟ	ΜΕΤΑ
ΣΩΣΤΟ (Σ)	2 (10%)	7 (35%)	2 (10%)	8 (40%)	1 (5,5%)	2 (11%)	1 (5,5%)	2 (11%)
(Λ_Α)	15 (75%)	13 (65%)	11 (55%)	7 (35%)	14 (78%)	12 (67%)	12 (67%)	13 (72%)
ΑΛΛΟ (Ο)	3 (15%)	0	7 (35%)	5 (25%)	3 (16,5%)	4 (22%)	5 (27,5%)	3 (17%)
ΣΥΝΟΛΟ	20 (100%)	20 (100%)	20 (100%)	20 (100%)	18 (100%)	18 (100%)	18 (100%)	18 (100%)

Από τον Πίνακα 14 φαίνεται στον Προέλεγχο, η επικρατούσα απάντηση είναι η λανθασμένη αναλογική και για τις δύο ομάδες, και στα δύο σταθερά προβλήματα. Στο μεταέλεγχο, αυξάνονται οι σωστές απαντήσεις για την Π.Ο., ενώ μειώνονται οι λανθασμένες απαντήσεις και των δύο τύπων. Ωστόσο, παραμένει ένα υπολογίσιμο ποσοστό λανθασμένων αναλογικών απαντήσεων και στα δύο προβλήματα, με την απάντηση αυτή να παραμένει επικρατούσα στο Π5.

Στην Ο.Ε., αυξάνονται κατά μία οι σωστές απαντήσεις σε κάθε πρόβλημα, ενώ, ταυτόχρονα, αυξάνονται κατά μία και οι λανθασμένες αναλογικές απαντήσεις στο Π8. Η λανθασμένη αναλογική απάντηση παραμένει επικρατούσα και στα δύο σταθερά προβλήματα κατά τον μεταέλεγχο.

Πίνακας 15: Συχνότητες και ποσοστά των κατηγοριών απάντησης στα αναλογικά προβλήματα

	Π.Ο.				Ο.Ε.			
	Π3		Π10		Π3		Π10	
	ΠΡΟ	ΜΕΤΑ	ΠΡΟ	ΜΕΤΑ	ΠΡΟ	ΜΕΤΑ	ΠΡΟ	ΜΕΤΑ
ΣΩΣΤΟ	14 (70%)	18 (90%)	12 (60%)	13 (65%)	13 (72%)	14 (78%)	11 (61%)	13 (72%)
ΛΑΘΟΣ	6 (30%)	2 (10%)	8 (40%)	7 (35%)	5 (28%)	4 (22%)	7 (39%)	5 (28%)
ΣΥΝΟΛΟ	20 (100%)	20 (100%)	20 (100%)	20 (100%)	18 (100%)	18 (100%)	18 (100%)	18 (100%)

Όπως προαναφέρθηκε σε αυτή την κατηγορία προβλημάτων οι απαντήσεις των μαθητών μπορεί να είναι είτε σωστές (λύση με αναλογικό τρόπο) είτε λάθος, επομένως τα αναλογικά λάθη είναι παντού 0. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 15, τόσο για την Π.Ο., όσο και για την Ο.Ε., η επικρατούσα απάντηση ήταν η σωστή ήδη από τον προέλεγχο και παρέμεινε επικρατούσα αυξάνοντας τη συχνότητά της στον μεταέλεγχο, και για τις δύο ομάδες. Ωστόσο, ένα υπολογίσιμο πλήθος απαντήσεων είναι λανθασμένες στον μεταέλεγχο για το Π10 στην Π.Ο., και στα δύο προβλήματα για την Ο.Ε.

5.3 Σύνοψη αποτελεσμάτων

Παρατηρώντας συνολικά τα αποτελέσματα, βλέπουμε μια μεγαλύτερη αύξηση σε σωστές απαντήσεις των μαθητών της πειραματικής ομάδας, σε σχέση με την ομάδα ελέγχου, στα προσθετικά και σταθερά προβλήματα από τον προέλεγχο στον μεταέλεγχο, η οποία αντανακλάται και στη σημαντική διαφορά στη συνολική επίδοση που παρατηρήθηκε μεταξύ των δύο ομάδων στον μεταέλεγχο.

Στα αναλογικά προβλήματα και η ομάδα ελέγχου και η ομάδα παρέμβασης αντίστοιχα παρουσιάζουν υψηλή επίδοση και πριν και μετά την παρέμβαση με μικρές διαφοροποιήσεις μεταξύ των δύο ομάδων.

Επισημαίνεται ότι, παρά τη σημαντική βελτίωση της Π.Ο., το πλήθος των λανθασμένων αναλογικών απαντήσεων στον μεταέλεγχο παραμένει υπολογίσιμο τόσο στα προσθετικά, αλλά περισσότερο στα σταθερά προβλήματα.

6. Συμπεράσματα-Συζήτηση

Όπως έχει αναφερθεί στη βιβλιογραφική ανασκόπηση, το φαινόμενο της κατάχρησης της αναλογικότητας είναι τεκμηριωμένο και πολλές μελέτες από πολλά εκπαιδευτικά συστήματα περιγράφουν την τάση των μαθητών από διάφορες βαθμίδες εκπαίδευσης να δίνουν αναλογικές απαντήσεις ακόμη κι εκεί που δε χρειάζεται, όταν έχουν να απαντήσουν σε κάποια κοινά προβλήματα, συνήθως με τη μορφή ελλείπουσας τιμής (Lamon, 2007, Modestou &Gagatsis, 2009, 2010, Van Dooren et al, 2008).

Σχεδιάστηκε μια παρέμβαση ανοιχτή και ευέλικτη παρέμβαση, παράλληλα με την παραδοσιακή διδασκαλία με στόχο οι μαθητές να έρθουν σε επαφή με προβλήματα με μορφή ελλείπουσας τιμής τα οποία δεν είναι αναλογικά, να δουν και να σχηματίσουν πίνακες τιμών που τα ποσά δεν είναι ούτε ανάλογα ούτε αντιστρόφως ανάλογα, να εκτεθούν σε προβλήματα που μοιάζουν πολύ, αλλά λύνονται διαφορετικά, χωρίς να χρειαστεί να τα λύσουν(Van Dooren et al, 2008, 2009, 2010). Η πειραματική ομάδα που εκτέθηκε στην παρέμβαση συγκρίθηκε με μια ομάδα ελέγχου, η οποία διδάχτηκε μόνο με τον παραδοσιακό τρόπο σε αντίστοιχο διδακτικό χρόνο.

Με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα που θέσαμε και από τα αποτελέσματα του προελέγχου, οι απαντήσεις τόσο της πειραματικής ομάδας όσο και της ομάδας ελέγχου κινούνται σε ίδια υψηλά επίπεδα σε αναλογικές απαντήσεις σε όλα τα είδη προβλημάτων, αναλογικά και μη αναλογικά. Πράγματι, στα προσθετικά και στα σταθερά προβλήματα, η (λανθασμένη)αναλογική απάντηση είναι ο επικρατών τύπος απάντησης κατά τον προέλεγχο, σε όλα αυτά τα προβλήματα. Άρα, σύμφωνα με την υπόθεσή μας, ότι οι μαθητές της Στ΄ δε διαφοροποιούν ανάμεσα στα αναλογικά και στα μη αναλογικά προβλήματα και τα λύνουν εφαρμόζοντας αναλογικούς τρόπους.

Όσον αφορά τον μεταέλεγχο, οι αναλογικές απαντήσεις στα μη αναλογικά προβλήματα μειώθηκαν στην πειραματική ομάδα, και αυξήθηκαν οι σωστές απαντήσεις, επικρατώντας των άλλων απαντήσεων στα περισσότερα προβλήματα. Αντίθετα, στην ομάδα ελέγχου, οι αναλογικές απαντήσεις στα μη αναλογικά προβλήματα παρέμειναν περίπου στα ίδια επίπεδα από τον προέλεγχο στον μεταέλεγχο, ενώ σε κάποιες περιπτώσεις αυξήθηκαν κιόλας. Οι διαφορές αυτές αντανακλώνται στη σημαντική διαφορά στις συνολικές επιδόσεις των δύο ομάδων κατά το μεταέλεγχο, η οποία δείχνει ότι η πειραματική παρέμβαση βοήθησε τους μαθητές της πειραματικής ομάδας να αναγνωρίσουν και να λύσουν αναλογικά αλλά και μη αναλογικά προβλήματα με μεγαλύτερη επιτυχία, απ’ ότι οι μαθητές της ομάδας ελέγχου που εκτέθηκαν σε παραδοσιακή διδασκαλία.

Ωστόσο, πρέπει να επισημανθεί ότι η λανθασμένη αναλογική απάντηση δεν εξαλείφθηκε στην πειραματική ομάδα. Αντίθετα, συνέχισε να εμφανίζεται με υπολογίσιμη συχνότητα στον μεταέλεγχο, ακόμα και ως επικρατούσα απάντηση σε μία περίπτωση σταθερού προβλήματος. Τα αποσπάσματα από τη διδασκαλία που παρουσιάστηκαν μπορούν να ρίξουν φως στις δυσκολίες που παραμένουν και σχετίζονται με τη μορφή του προβλήματος,(Van Dooren et al, 2008, 2010, Tjoe &de la Torre,2014, Modestou &Gagatsis,2010), το είδος του αριθμού που έχει η αναλογία,(Steinthorsdottir, 2006,Tournaire &Pulos,1985), κανόνες που αντί να ξεκαθαρίζουν, δυσκολεύουν τους μαθητές (όπως μεγαλώνει το ένα, μεγαλώνει και το άλλο).

Άρα, ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας της ομάδας ελέγχου, με την πιστή και μοναδική ακολουθία των σχολικών εγχειριδίων, δε βοηθά τους μαθητές να μπορούν να διακρίνουν και να λύσουν σωστά μη αναλογικά έργα και να εξελιχθούν σε «μετα-αναλογικούς» στοχαστές (Modestou &Gagatsis, 2010). Από την άλλη, αν και με την παρέμβαση μας προσπαθήσαμε να μειώσουμε τους σχολικούς παράγοντες και τις πρακτικές της εκπαίδευσης των μαθηματικών στο σχολείο που ενισχύουν την τάση τους να κάνουν κατάχρηση των αναλογικών σχέσεων, φαίνεται μια πιο συστηματική και μακροχρόνια παρέμβαση είναι απαραίτητη προκειμένου να «εθιστούν» στη διερεύνηση των σχέσεων που διέπουν μια κατάσταση, πριν αποφασίσουν για τη στρατηγική επίλυσης.

7. Διδακτικές επιπτώσεις και προτάσεις για βελτίωση της διδασκαλίας

Παρόλο που η μελέτη μας έχει πολλούς περιορισμούς εξαιτίας του μικρού δείγματος και υπάρχουν αρκετά ανοικτά ερωτήματα, ανοίγει ταυτόχρονα μια μεγάλη συζήτηση. Συμφωνούμε απόλυτα με τους Nunes και Bryant(1996) όπως αναφ. de Bock et al ,2009, ότι «τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται στο σχολείο στα μαθηματικά βιβλία για τη διδασκαλία των παιδιών σχετικά με τις αναλογίες είναι συχνά μια δικαιολογία για τη χρήση της αριθμητικής παρά ενός περιεχομένου για τους νέους προς σκέψη". Η πλειοψηφία των λεκτικών προβλημάτων που σχετίζονται με την αναλογική συλλογιστική που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού σχολείου και στις πρώτες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης είναι πολύ όμοια. Η συνήθης τους μορφή είναι αυτή της ελλείπουσας τιμής (Cramer et al., 1993), ενώ τα μη αναλογικά προβλήματα που συναντούν οι μαθητές, σε μορφή ελλείπουσας τιμής, λείπουν εντελώς από τα σχολικά εγχειρίδια ή τα συναντούν οι μαθητές σε άλλες αξιολογήσεις(π.χ. Μαθηματική εταιρεία) και τα αντιμετωπίζουν ως «παγίδες» . Όταν αυτά τα αναλογικά προβλήματα μπαίνουν στην τάξη, η εστίαση συχνά αφορά την αρμονική εκτέλεση ορισμένων αριθμητικών διαδικασιών για την επίλυση τους, χωρίς - εκείνη τη στιγμή - να χρειαστεί να διερωτηθεί ο μαθητής ρητά και συστηματικά εάν είναι εφαρμόσιμες. Μια παρόμοια περίπτωση μπορεί να γίνει για τους αριθμούς που εμφανίζονται σε προβλήματα λέξεων. Τη στιγμή που οι μαθητές εισάγονται στην αναλογικότητα, οι αριθμοί που εμφανίζονται σε προβλήματα λέξεων επιτρέπουν υπολογισμούς με εύκολα, πολλαπλά πολλαπλασιαστικά άλματα. Από εκπαιδευτική άποψη, αυτό είναι κατανοητό: Η πρόθεση είναι να επικεντρωθούν οι σπουδαστές στην αναγνώριση της αναλογικής δομής της κατάστασης και στην αρμονική εφαρμογή σχετικών διαδικασιών και αυτό θα μπορούσε να παρεμποδιστεί με πολύπλοκους υπολογισμούς που περιλαμβάνουν μη ακέραια πολλαπλασιαστικά άλματα. Οι σπουδαστές δεν διδάχτηκαν ποτέ ρητά ότι τα προβλήματα με δομή ελλείπουσας τιμής μπορούν να λυθούν πολλαπλασιαστικά, ή ότι όταν οι αριθμοί σε ένα πρόβλημα δεν σχηματίζουν ακέραιους λόγους, το πρόβλημα θα πρέπει να λυθεί προσθετικά.

Αντίθετα, αυτά τα μηνύματα μπορεί να έχουν μεταδοθεί σιωπηρά στους σπουδαστές μέσω του περιορισμένου εύρους παραδειγμάτων αλλά και της έλλειψης αντίθετων παραδειγμάτων, τα οποία ποτέ δεν τα αντιμετώπισαν καθημερινά.

Εδώ βρίσκεται ο κίνδυνος πρωτότυπων παραδειγμάτων. Για παράδειγμα, αν οι μαθητές δεν συναντούν ποτέ άλλη περίπτωση, η αντίληψη ενός μαθητή για λεκτικά προβλήματα μπορεί να παραμορφωθεί αν στα πολυάριθμα παραδείγματα και ασκήσεις που συναντούν, η τυποποίηση προβλημάτων ή οι αριθμοί που εμφανίζονται στο πρόβλημα συνδέονται (ψευδώς) με μια συγκεκριμένη μέθοδο επίλυσης προβλημάτων.

Δεδομένου του έμμεσου χαρακτήρα της μαθησιακής διαδικασίας όπως περιγράφηκε παραπάνω (Seger, 1994 όπως αναφ. de Bock, 2009), οι μαθητές πιθανότατα δεν γνωρίζουν (πλήρως) τα χαρακτηριστικά των έργων που καθορίζουν την επιλογή τους για μια προσθετική ή πολλαπλασιαστική προσέγγιση. Επομένως, μια διδακτική προσέγγιση θα πρέπει πιθανώς να είναι λεπτή και μακροπρόθεσμη, βασιζόμενη σε μια κατάλληλη παραλλαγή των παραδειγμάτων και των ασκήσεων προκειμένου να αποφευχθεί - και όχι να αποκατασταθεί - η σιωπηρή μάθηση.

Αν θέλουμε οι σπουδαστές να αντιμετωπίσουν τις διαφορές μεταξύ προσθετικών και αναλογικών καταστάσεων, είναι ωφέλιμο να εξεταστούν και να επανασχεδιαστούν συστηματικά όλα τα παραδείγματα και οι ασκήσεις που σχετίζονται με την αναλογική συλλογιστική που συναντούν οι μαθητές σε όλο το δημοτικό σχολείο όσον αφορά αυτές τις δύο διαστάσεις. Τα αναλογικά προβλήματα θα πρέπει να εμφανίζονται τακτικά σε διάφορες μορφές (π.χ., εκτός από τις μορφές ελλιπούς αξίας και τη σύγκριση δύο ποσοτικών και ποιοτικών τρόπων, να κατασκευάζουν αρκετές νέες αναλογίες ίσες με ένα δεδομένο, πολλαπλασιαστικά αναλογικά προβλήματα), αλλά και διάφορα μη αναλογικά προβλήματα πρέπει επίσης να παρουσιάζονται τακτικά σε μορφή ελλείπουσας αξίας. Μια ποικιλία προβλημάτων με ποιοτικά χαρακτηριστικά (πόσο γλυκό είναι, περισσότερο ή λιγότερο) βοηθούν τους μαθητές να επικεντρώνονται στην προβληματική κατάσταση και όχι στη διαδικασία των πράξεων. Στην ίδια κατεύθυνση μια ποικιλία εργασιών, εκτός της επίλυσης προβλημάτων, όπως οι ταξινομήσεις και ομαδοποιήσεις προβλημάτων και η δημιουργία νέων προβλημάτων ή νέων παραλλαγών, βοηθά τους μαθητές να αποσυνδέσουν τον τρόπο λύσης ενός προβλήματος με μια συγκεκριμένη γλωσσική μορφή(Verschaffel et al, 2018).

Από την άλλη, θα πρέπει να αναπτυχθεί μια τέτοια κουλτούρα στην τάξη, ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν τη συνήθεια της ρητής και συστηματικής αμφισβήτησης, αν η αναλογικότητα είναι το σωστό μαθηματικό μοντέλο για τα συγκεκριμένα προβλήματα.

Τέλος, πρόταση για περαιτέρω έρευνα είναι οι αντιλήψεις των δασκάλων για την αναλογικότητα, όπου έρευνες δείχνουν πως και οι ίδιοι έχουν τις ίδιες παρανοήσεις για τις αναλογικές και μη αναλογικές καταστάσεις. Θα πρέπει να δοθεί έμφαση κατά την εκπαίδευση τους και μέσω της δυνατότητας επαγγελματικής βελτίωσης να ξεπεράσουν τις πρωταρχικές ιδέες τους για την αναλογικότητα και τυχόν παρανοήσεις.

Αναφορές

Alatorre S, &Figueras O. (2005), A developmental model for proportional reasoning in ratio comparison tasks, In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.*). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 25-32. Melbourne: PME

Avcua R, Avcua S.(2010), 6th grade students' use of different strategies in solving ratio and proportion problems. *Procedia Social and Behavioral Sciences* 9 (2010) 1277–1281

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., &Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 296-333). New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc.

Ben-Chaim D., Fey J. T., Fitzgerald W.T., Benedetto C. and Miller J.(1998), Proportional Reasoning among 7th Grade students with different curricular experiences, *Educational Studies in Mathematics 36*: 247–273, 1998

Boyer T. W, Levine S. C. and Huttenlocher J.(2008), Development of Proportional Reasoning: Where Young Children Go Wrong. *Developmental Psychology* Vol. 44, No. 5, 1478–1490

Christou C, Philippou G.(2002), Mapping and development of intuitive proportional thinking. *Journal of Mathematical Behavior20* (2002) 321–336

Confrey J. and Smith E (1995)Splitting, Covariation, and Their Role in the Development of Exponential Functions, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 26, No. 1 (Jan., 1995), pp. 66-86

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 159-178). New York: Macmillan

De Bock D, Van Dooren W, JanssensD and Verschaffel L.(2007): The Illusion of Linearity, From Analysis to Impovement, *Mathematics Educational Library,*SpringerScience+Business Media

De Bock D, Van Dooren W, Janssens D&Verschaffel L. (2002) Improper use of Linear Reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of Secondary School students' errors, *Educational Studies in Mathematics 50*: 311–334, 2002

De Bock D., Van Dooren W, Verschaffel L.(2009) From addition to multiplication … and back , The development of students' additive and multiplicative reasoning skills, *Hub Research Paper* 2009/37, November 2009

de la Cruz J. A.(2013) Selecting proportional reasoning tasks. AMT 69(2), 2013

de la Torre J, Tjoe H, Rhoads K, Lam D.(2013) Conceptual and theoretical issues in proportional reasoning, *International Journal for Studies in Mathematics Education 21-37* v.6(1)-2013

Dole S. (2008), Ratio tables to promote proportional reasoning in the primary classroom, *Australian Primary Mathematics Classroom,13*(2) 2008

Fernandez C, Llinares S, Modestou M, Gagatsis A.(2010), Proportional Reasoning: How task variables influence the developement of students' strategies from Primary to Secondary School. Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics, Issue 10, 2010, pp. 1-18

Fernández C, Llinares S, Van Dooren W, De Bock D &Verschaffel L.(2011),The development of students' use of additive and proportional methods along primary and secondary school, Eur J PsycholEduc (2012) 27:421-438

Fielding-Wells J.& Dole S.& Makar K.(2014),Inquiry pedagogy to promote emerging proportional reasoning in primary students. *Mathematics Education Research Group of Australasia,*

Goswami U, Toward an Interactive Analogy Model of Reading Development: Decoding Vowel Graphemes in Beginning Reading, *Journal of Experimental Child Psychology,* Volume 56, Issue 3, December 1993, Pages 443-475

Hino K(1996), Ratio and proportion : A case study on construction of unit in U. S. and Japanese students. *Japan Society for Science Education*

Howe C, Nunes T.(2010), Rational number and proportional reasoning: Using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science, *International Journal of Science and Mathematics Education,* April, 2010

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, K. E. (1983), Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and process* (pp. 45-90). New York: Academic Press.

Lamon S.,(2008), Teaching fractions and ratios for understanding, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Mahwah, New Jersey

Lesh, R., Post, T., & Behr, M (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert& M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93- 118). NCTM: Lawrence Erlbaum Associates

Middleton J,and van den Heuvel-Panhuizen M (1995) The Ratio Table, *Mathematics Teaching in the Middle School* Vol. 1, No. 4 (January-March 1995), pp. 282-288

Modestou M, Gagatsis A(2009), Proportional Reasoning: The strategies behind the percentages. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics*, Issue 9, 2009, pp. 25-40

Modestou M. &Gagatsis A.(2010) Cognitive and Metacognitive of Proportional Reasoning, *Mathematical Thinking and Learning,* 12:1, 36-53, DOI: 10.1080/10986060903465822

Pelen M. S., Artut P.D.(2016) Seventh Grade Students' Problem Solving Success Rates on Proportional Reasoning Problems, *International Journal of Research in Education and Science,* Volume 2, Issue 1, Winter 2016,pp. 30-34

Pittalis M, Christou C, & Papageorgiou E., (2004)Students' ability in solving proportional problems. *European research in mathematic education*

Ryan, J. T., & Williams, J. S. (2002). Charting argumentation space in conceptual locales: tools at the interface between research and practice. *Research in Mathematics Education, 4,* 89–111.

Silver E. A.(1979),Student Perceptions of Relatedness among Mathematical Verbal Problems, *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol. 10, No. 3 (May, 1979), pp. 195-210.

Steinthorsdottir O. B.(2006) Proportional reasoning: Variable influencing the problems difficulty level and one's' use of problem solving strategies. *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 5*, pp. 169-176

Tjoe H, de la Torre J,(2014),On recognizing proportionality: Does the ability to solve missing value problems pressupose the conception of proportional reasoning? *Journal of mathematical behaviour, 33*(2014) 1-7.

Tourniaire, F., &Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. Educational Studies in Mathematics, 16, 181-204

Vamvakoussi X.,(2019) The use of Analogies in Mathematics Instruction: Affordances and Challenges, *Mathematical Cognition and Learning, Vol. 5*

Van de Walle J., Karp K. and Bay-Williams J.,(2009*), Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (7th Edition), Allyn and Bacon ISBN: 978-0205573523 Mathematical and Pedagogical Knowledge: Books

Van Dooren W, De Bock D, Janssens D, and Verschaffel L(2008), The Linear Imperative: An Inventory and Conceptual Analysis of Students' Overuse of Linearity, *Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 39, No. 3* (May, 2008), pp. 311-342

Van Dooren W., De Bock D, Evers M. and Verschaffel L.(2009), Students' Overuse of Proportionality on Missing-Value Problems: How Numbers May Change Solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 40, No. 2 (Mar., 2009), pp. 187-211

Van Dooren W,, De Bock D., Vleugels K &Verschaffel L(2010)Just Answering … or Thinking? Contrasting Pupils' Solutions and Classifications of Missing-Value Word Problems, *Mathematical Thinking and Learning 12*: 20–35, 2010

Van Dooren W, Vamvakoussi X, and Verschaffel L. (2018), Proportional Reasoning, *Educational Series*, 30-v8.indd.3

Verschaffel, L. , De Corte, E. , Lasure, S. , Van Vaerenbergh, G. , Bogaerts, H. and Ratinckx, E.(1999) ,Learning to Solve Mathematical Application Problems: A Design Experiment With Fifth Graders, Mathematical Thinking and Learning, 1: 3, 195 — 229

ΔΕΠΠΣ (Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών) και ΑΠΣ (Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών) Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης, ΦΕΚ 303Β/13-3- 2003

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2006). *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Μοδέστου, Μ. &Γαγάτσης, Α. (2009). Ένα διαφορετικό πλαίσιο διδασκαλίας της έννοιας της αναλογίας. Στο Α. Γαγάτσης, Α. Μιχαηλίδου, & Α. Χαραλάμπους, (Εκδ.), Εκπαιδευτική Έρευνα και Επιμόρφωση Εκπαιδευτικών στην Κύπρο. *Πρακτικά Συνεδρίου Παιδαγωγικού Ινστιτούτου* (σσ. 161–174). Λευκωσία: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου, Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας και Αξιολόγησης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

10 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΤΕΣΤ- ΜΕΤΑΤΕΣΤ

Σκέφτομαι και λύνω: Όνομα:………………………………………

1. Ο Τάσος και η Μαρία αποταμίευαν και οι δύο επί τρεις μήνες, αλλά ο Τάσος είναι πιο οικονόμος από τη Μαρία. Όταν έσπασαν τους κουμπαράδες τους, η Μαρία είχε μαζέψει 20,5 ευρώ. Ο Τάσος είχε μαζέψει 10,5 ευρώ περισσότερα από τη Μαρία. Πόσα χρήματα αποταμίευσε ο Τάσος;

Λύση:

Απάντηση:

2. Η Βέτα και η Εύα διαβάζουν το ίδιο βιβλίο. Διαβάζουν με την ίδια ταχύτητα, αλλά η Βέτα άρχισε μετά την Εύα. Όταν η Βέτα έχει διαβάσει 4 σελίδες, η Εύα έχει διαβάσει 8 σελίδες. Όταν η Βέτα έχει διαβάσει 24 σελίδες, πόσες θα έχει διαβάσει η Εύα;

Λύση:

Απάντηση:

3. Η Γιώτα και η Μαρία αγόρασαν υφασμάτινα λουλούδια για να φτιάξουν είδη για το χριστουγεννιάτικο παζάρι. Τα λουλούδια κοστίζουν όλα το ίδιο, αλλά η Μαρία αγόρασε περισσότερα λουλούδια. Η Γιώτα αγόρασε 4 λουλούδια ενώ η Μαρία 20. Αν η Γιώτα πλήρωσε 16 ευρώ, πόσα θα πληρώσει η Μαρία;

Λύση:

Απάντηση:

4. Οι δυο αδερφές μου μαζεύουν γραμματόσημα. Η μεγάλη μου αδερφή έχει 83 γραμματόσημα και η μικρή μου αδερφή έχει 25 γραμματόσημα λιγότερα από τη μεγάλη. Πόσα γραμματόσημα έχει η μικρή μου αδερφή;

Λύση:

Απάντηση:

5.Η μητέρα μου άπλωσε 3 πετσέτες χθες και χρειάστηκαν 1 ώρα για να στεγνώσουν. Σήμερα που έχει τον ίδιο καιρό, άπλωσε πάλι πετσέτες. Οι πετσέτες είναι ίδιες με τις χθεσινές, αλλά είναι περισσότερες. Αν οι πετσέτες είναι 6, σε πόσες ώρες θα στεγνώσουν;

Λύση:

Απάντηση:

6. Η Ελένη αγόρασε ένα μπλοκ που κόστιζε 6,5 ευρώ και ένα κουτί μαρκαδόρους που κόστιζαν 3,5 ευρώ. Πόσα ρέστα θα πάρει από ένα χαρτονόμισμα των 20 ευρώ;

Λύση:

Απάντηση:

7. Ο Γιάννης και ο Σωτήρης τρώνε φιστίκια. Τα τρώνε το ίδιο γρήγορα, αλλά ο Γιάννης ξεκίνησε νωρίτερα. Όταν ο Γιάννης είχε φάει 6 φιστίκια, ο Σωτήρης είχε φάει 2. Όταν ο Γιάννης θα έχει φάει 18 φιστίκια, πόσα φιστίκια θα έχει φάει ο Σωτήρης;

Λύση:

Απάντηση:

8. Ο Γιώργος και η Νιόβη βράζουν αυγά. Τα αυγά τους είναι ίδιου μεγέθους, αλλά η Νιόβη βράζει περισσότερα αυγά: Ο Γιώργος βράζει 2 αυγά μαζί σε ένα κατσαρολάκι, ενώ η Νιόβη βράζει 10 αυγά μαζί σε πιο μεγάλη κατσαρόλα. Αν τα αυγά του Γιώργου είναι έτοιμα σε 6 λεπτά, πόσο χρόνο χρειάζονται τα αυγά της Νιόβης για να είναι έτοιμα;

Λύση:

Απάντηση:

9. Η μαμά της Μαργαρίτας αγόρασε 3 κιλά ζάχαρη. Χρησιμοποίησε 1,2 κιλά για να φτιάξει μαρμελάδα και 0,4 κιλά για να φτιάξει ένα κέικ. Πόσα κιλά ζάχαρη της έμεινε;

Λύση:

Απάντηση:

10. Η Γεωργία και η Αναστασία έφτιαξαν μηλόπιτες. Όλες οι μηλόπιτες είναι ίδιου μεγέθους, αλλά η Αναστασία έφτιαξε περισσότερες. Η Γεωργία έφτιαξε 3 μηλόπιτες και η Αναστασία 9. Αν η Γεωργία χρειάστηκε 12 μήλα για τις πίτες της, πόσα μήλα χρειάστηκε η Αναστασία;

Λύση:

Απάντηση:

ΦΥΛΛΟ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗΣ

1.Ένα αυτοκίνητο τρέχει με 100 χιλιόμετρα την ώρα και για να φτάσει στην Καβάλα χρειάζεται 2 ώρες. Αν αυξήσει την ταχύτητα και πηγαίνει με 150 χιλιόμετρα, σε πόσες ώρες θα φτάσει στην Καβάλα;	2.Αν πάρω ένα ταξί, μόλις μπω το ταξίμετρο γράφει 1,50 ευρώ και κάθε χιλιόμετρο κάνει 0,80 ευρώ. Πόσα θα πληρώσω για μια διαδρομή 8 χιλιομέτρων;
3.Τα 3 m ύφασμα κοστίζουν €12. Πόσο κοστίζουν τα 9 m ύφασμα;	4.Αν ένα παιδί ζυγίζει 25 κιλά όταν είναι 6 χρονών, πόσα κιλά θα ζυγίζει στα 12 του χρόνια;
5.Δυο εργάτες μας σύνδεσαν τους προτζέκτορες του σχολείου μας σε 4 ημέρες. Αν οι εργάτες ήταν 4 σε πόσες μέρες θα έκαναν την ίδια εργασία;	6.Ο Γιώργος και ο Μάνος τοποθετούν κουτιά στην αποθήκη. Τα τοποθετούν με τον ίδιο ρυθμό αλλά ο Γιώργος άρχισε νωρίτερα. Όταν ο Γιώργος είχε φορτώσει 5 κουτιά ο Μάνος είχε φορτώσει 1 κουτί. Πόσα θα έχει φορτώσει ο Γιώργος, όταν ο Μάνος θα έχει φορτώσει 5;
7.Σε έναν χώρο ελεγχόμενης στάθμευσης (πάρκινγκ) η πρώτη ώρα κοστίζει 3 ευρώ και κάθε επόμενη ώρα μισό ευρώ λιγότερο από την προηγούμενη. Πόσο θα κοστίσει αν το αφήσω για 4 ώρες;	8. Ένα αυτοκίνητο τρέχει με σταθερή ταχύτητα. Αν διανύει 120 χιλιόμετρα σε 2 ώρες, πόσα χιλιόμετρα θα διανύσει σε 5 ώρες;
9.Αν μια γλάστρα με βασιλικό σε ένα θερμοκήπιο για να ανθίσει θέλει 15 ημέρες, 8 γλάστρες βασιλικού σε πόσες μέρες θα ανθίσουν;	

1ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

Α. Σκέφτομαι κι εξηγώ:

1) Στο Ταχυδρομείο γράφει σε μια ταμπέλα:

Κόστος αποστολής δεμάτων στο εξωτερικό

Βάρος δέματος (Κιλά)	2	3	6
Κόστος(Ευρώ)	18	24	42

Είναι τα ποσά αυτά ανάλογα;...

Εξηγώ γιατί:..

2)Σε μια συνταγή για ετοιμασία ρυζιού γράφει πώς χρειάζονται:

Ρύζι(φλυτζάνια)	2	3	4
Νερό(φλυτζάνια)	5	7,5	10

Είναι τα ποσά αυτά ανάλογα;..

Εξηγώ γιατί:...

3) Στο φυλλάδιο της πιτσαρίας της γειτονιάς γράφει πως στην προσφορά που κάνει, μια πίτσα μαργαρίτα κάνει 7 ευρώ, οι δυο ίδιες πίτσες 12 ευρώ και οι τρεις ίδιες πίτσες 15 ευρώ. Σχηματίζω τον πίνακα των ποσών και ελέγχω αν τα ποσά είναι ανάλογα.

Πίτσες(πλήθος)			
Κόστος(Ευρώ)			

Εξηγώ:..

4)Τα ποσά από τους παρακάτω δυο πίνακες είναι ανάλογα. Συμπληρώστε τα κενά.

Αξία υφάσματος

Μήκος ύφασμα(μέτρα)	3	4	6	8
Κόστος(ευρώ)	15			

Εξηγώ τον τρόπο που σκέφτηκα:...

Παραγωγή κρασιού

Σταφύλια (κιλά)	4	7		
Κρασί(κιλά)	2		7	8

Πώς σκέφτηκα;...

....

2ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Όνομα:…...

Ποσά ανάλογα-Αντιστρόφως ανάλογα

1. Ο δήμος μας για να κλαδέψει τα δέντρα στην περιοχή μας έβαλε 8 εργάτες και δούλεψαν για 24 ημέρες. Σκέφτομαι σε πόσες ημέρες θα τελείωναν το κόψιμο αν έβαζε ο δήμος τους διπλάσιους εργάτες ή τους τριπλάσιους εργάτες και δούλευαν πάλι με τον ίδιο ρυθμό. Σχηματίζω τον πίνακα ποσών και τιμών.

Κλάδεμα δέντρων

Εργάτες(πλήθος)			
Ημέρες εργασίας			

Τι παρατηρώ;…...

Τι συμβαίνει με τους εργάτες και τις ημέρες εργασίας τους;…...

2. Στην παραλία το καλοκαίρι τα θαλάσσια σπορ είχαν τις εξής τιμές:

Χρέωση ενοικίασης τζετ σκι

Χρόνος(ώρες)	1	2	3
Κόστος(ευρώ)	10	16	20

Είναι τα ποσά ανάλογα;…...

Είναι αντιστρόφως ανάλογα;…..

Εξηγώ γιατί:…...

3. Η Κατερίνα κατασκευάζει ένα περιδέραιο. Χρησιμοποιεί 2 άσπρες χάντρες για κάθε 6 μπλε χάντρες. Πόσες μπλε χάντρες χρειάζονται, αν οι άσπρες χάντρες στο περιδέραιο είναι 8;

Σχηματίζω τον πίνακα τιμών και ποσών.

Άσπρες χάντρες	2	4	6	8
Μπλε χάντρες				

Τι παρατηρώ για τα ποσά;…...

4.Έχουμε 120 ευρώ στο ταμείο μας και θέλουμε να αγοράσουμε μπλούζες για να βάλουν οι μαθητές του σχολείου μας στο τουρνουά ποδοσφαίρου. Πόσες μπλούζες θα αγοράσουμε αν η μια μπλούζα κοστίζει 10 ευρώ; Αν κοστίζει 15; Αν κοστίζει 20;

Σχηματίζω τον πίνακα τιμών.

Αξία μπλούζας(ευρώ)	10	15	20
Πλήθος μπλουζών			

Τι σκέφτομαι για τα ποσά;….......................

Ποια μπλούζα θα επιλέγατε και γιατί;…...................................

3^o ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Όνομα:..

Ποσά Ανάλογα-Αντιστρόφως Ανάλογα

Διαβάζω, παρατηρώ τους πίνακες και προσπαθώ να αναγνωρίσω τα ποσά από τις αλλαγές των τιμών τους:

1)Το μαγαζί μας κάνει μια προσφορά αν αγοράσουμε;

Πλήθος στολών	5	10	20
Αξία στολής (ευρώ)	20	15	12

Παρατηρώ πώς αλλάζουν οι τιμές;...

Είναι τα ποσά ανάλογα;...

Είναι τα ποσά αντιστρόφως ανάλογα;………………………………………………

2)Πόσο κοστίζουν 5 σκούπες για το σχολείο;

Ποσότητα σκουπών	2	3	5
Αξία (ευρώ)	6	…	….

Είναι τα ποσά ανάλογα;...

Είναι τα ποσά αντιστρόφως ανάλογα;………………………………………………

3)Πόσο κοστίζει η ενοικίαση χιονοσανίδας (σνοουμπορντ);

Χρόνος ενοικίασης(ώρες)	1	2	3
Κόστος ενοικίασης (ευρώ)	10	16	20

Παρατηρώ πώς αλλάζουν οι τιμές:...

Είναι τα ποσά ανάλογα;..

Είναι τα ποσά αντιστρόφως ανάλογα;……………………………………………

4) Σε πόσες ημέρες τελειώνει το βάψιμο του σχολείου μας;

Εργάτες	10	5	2
Χρόνος έργου(ημέρες)	2	…	….

Είναι τα ποσά ανάλογα;...

Είναι τα ποσά αντιστρόφως ανάλογα;…………………………………………

4ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Όνομα…………………………………………………………………..

Διαβάζω ΠΡΟΣΕΚΤΙΚΑ, σκέφτομαι και λύνω τα προβλήματα:

1)Η Μαρία και η Ιωάννα γράφουν στον υπολογιστή. Γράφουν το ίδιο γρήγορα, αλλά η Μαρία ξεκίνησε πιο νωρίς. Όταν η Μαρία είχε γράψει 3 σελίδες, η Ιωάννα είχε γράψει 1. Όταν η Μαρία έχει γράψει 6, πόσες θα έχει γράψει η Ιωάννα;

Λύνω:

Απαντώ;

2) Η Μαρία και η Ιωάννα γράφουν στον υπολογιστή. Ξεκίνησαν μαζί αλλά η Ιωάννα γράφει πιο γρήγορα. Για κάθε 3 σελίδες που γράφει η Ιωάννα , η Μαρία γράφει 1. Όταν η Μαρία έχει γράψει 5 σελίδες, πόσες θα έχει γράψει η Ιωάννα;

Λύνω:

Απαντώ:

5^{o} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Όνομα:..

Ποσά και ποσοστά

1) Ένα μαγαζί κάνει έκπτωση σε όλα τα παπούτσια 20%. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι αρχικές τιμές κάποιων ζευγαριών. Συμπληρώστε τον πίνακα υπολογίζοντας το ποσό της έκπτωσης και την τελική τιμή (μετά την έκπτωση) για κάθε ζευγάρι .

Αρχική τιμή	50	60	75	90
Ποσό έκπτωσης				
Τελική τιμή				

Λύνω και συμπληρώνω τον πίνακα:

Είναι κάποια από τα παραπάνω ποσά (Αρχική Τιμή, Ποσό Έκπτωσης, Τελική Τιμή) ανά δύο ανάλογα; Εξηγήστε γιατί.

Απαντώ: ....
....
....

2) Η Κατερίνα στα 6 χρόνια είχε ύψος 1 μέτρο. Στα 12 χρόνια το ύψος της είχε αυξηθεί κατά 50%.

α)Πόσο ύψος είχε η Κατερίνα όταν ήταν 12 χρονών;

Απάντηση:

β) Μπορούμε να προβλέψουμε πόσο ύψος θα έχει η Κατερίνα όταν θα είναι 24 χρονών;

....
....