ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ*
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ–ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Δασκάλων

Διπλωματική εργασία

Ιστορική πραγματικότητα και λογοτεχνική μυθοπλασία στη διδασκαλία των Μαθηματικών

της

Γκάτζιου Άννας
Α.Ε.Μ.: 560

Επιβλέπων: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής
Εξεταστές: Θωμαΐδης Ιωάννης
Τσακιρίδου Ελένη

Φλώρινα, Οκτώβριος 2019

*Όπως μετονομάστηκε η Παιδαγωγική Σχολή με τον Ν.4610/2019, ΦΕΚ70/τ.Α΄/07-5-2019

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την …/…/2019 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**	**Υπογραφή**
1. ΝΙΚΟΛΑΝΤΩΝΑΚΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ	ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	…………………………….
2. ΤΣΑΚΙΡΙΔΟΥ ΕΛΕΝΗ	……………………….	…………………………….
3. ΘΩΜΑΪΔΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ	…………………………	…………………………….

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Διατμηματικού - Διαπανεπιστημιακού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτική των Μαθηματικών» του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας. Η εκπόνησή της έγινε υπό την επίβλεψη του Αναπληρωτή Καθηγητή Κωνσταντίνου Νικολαντωνάκη, των μελών της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, Ιωάννη Θωμαΐδη και Ελένης Τσακιρίδου, και είναι αποτέλεσμα συστηματικής προσπάθειας, έρευνας και μελέτης. Η υλοποίηση και η ολοκλήρωσή της, δεν θα ήταν δυνατή χωρίς την πολύ σημαντική βοήθεια που μου προσέφεραν ορισμένοι άνθρωποι, τους οποίους και θα ήθελα να ευχαριστήσω.

Αρχικά, θα ήθελα να απευθύνω τις ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κωνσταντίνο Νικολαντωνάκη για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε με αισιοδοξία και αμεσότητα. Επίσης, στην καθηγήτρια κ. Ελένη Τσακιρίδου για τις γνώσεις που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια των μαθημάτων του μεταπτυχιακού προγράμματος και για το γεγονός ότι δέχτηκε να συμμετέχει στην τριμελή επιτροπή. Ιδιαίτερα, όμως, θα ήθελα να απευθύνω θερμές ευχαριστίες στον καθηγητή μου κ. Ιωάννη Θωμαΐδη για τον πολύτιμο χρόνο που πρόθυμα διέθεσε, την υπομονή του, την καθοδήγησή του και την άριστη συνεργασία σε όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας αυτής.

Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τη συμπαράσταση και τη βοήθεια που μου παρείχε σε όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Περίληψη

Τα νέα δεδομένα για τη Μαθηματική Εκπαίδευση επιβάλλουν την αναζήτηση και επιλογή εναλλακτικών διδακτικών προσεγγίσεων που να κινητοποιούν τους μαθητές και δραστηριοτήτων που να τους εμπλέκουν ενεργά στην κατάκτηση της γνώσης. Η αξιοποίηση της Λογοτεχνίας στη Μαθηματική Εκπαίδευση αναδεικνύει ότι Μαθηματικά και Λογοτεχνία, δυο κόσμοι που θεωρούνταν διαφορετικοί, δε δρουν ανταγωνιστικά μεταξύ τους. Αντίθετα, αποτελούν δύο συμπληρωματικούς τρόπους για να φτάσει κανείς στον ίδιο προορισμό, στην αναζήτηση και εξερεύνηση του άγνωστου, του ακατανόητου. Επιπλέον μέσα από τα Προγράμματα Σπουδών για τα Μαθηματικά εισάγονται στη Μαθηματική Εκπαίδευση δύο βασικές καινοτομίες, η διαθεματική προσέγγιση και η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών, ώστε εκπαιδευτικοί και μαθητές να ασχοληθούν με ουσιαστικές διαστάσεις της μάθησης των Μαθηματικών και να δοκιμάσουν νέους τρόπους διδασκαλίας, επικοινωνίας και αλληλεπίδρασης μεταξύ τους. Στην παρούσα εργασία επιχειρούμε να εστιάσουμε στη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών, μέσα από προτάσεις για διδακτικές παρεμβάσεις που καλύπτουν στόχους της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, με αφετηρία ένα κείμενο λογοτεχνικής μυθοπλασίας, το οποίο συνδέεται και με τη μελέτη της ιστορικής εξέλιξης των αρχαίων αιγυπτιακών μαθηματικών.

Λέξεις κλειδιά: διδασκαλία Μαθηματικών, Ιστορία των Μαθηματικών, Μαθηματική Λογοτεχνία, ιστορική πραγματικότητα, λογοτεχνική μυθοπλασία, διαθεματικότητα, ιστορική γνώση, διδακτικές παρεμβάσεις

Abstract

The new Mathematical Education data necessitates searching and selecting of alternative teaching approaches that motivate students and activities that actively involve them in the acquisition of knowledge. The integration of Literature in Mathematical Education shows that Mathematics and Literature, two worlds that were considered different, do not compete with each other. On the contrary, they are two complementary ways to reach the same destination, in the search for and exploration of the unknown, the incomprehensible. In addition, through the Mathematics Curriculum, two key innovations are introduced into Mathematics Education, the cross-curricular teaching and the integration of History of Mathematics, so that teachers and students can engage with the essential dimensions of mathematics learning and learn new ways of teaching and learning interaction with each other. In the present paper we attempt to focus on the integration of History of Mathematics, through suggestions for teaching interventions that cover the aims of Mathematical Education, starting with a text of literary fiction, which is also linked to the study of the historical development of ancient Egyptian mathematics.

Keywords: teaching of Mathematics, History of Mathematics, Mathematical Literature, historical reality, literary fiction, cross-curricular teaching, historical knowledge, teaching interventions

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Με αφετηρία τις διαπιστώσεις των ερευνητικών δεδομένων για την αναποτελεσματικότητα της κυρίαρχης πρακτικής στη διδασκαλία των Μαθηματικών και στο πλαίσιο της αναζήτησης εναλλακτικών προσεγγίσεων, οι οποίες θα αξιοποιούν μαθησιακά τις απεριόριστες δυνατότητες της ανθρώπινης φαντασίας και θα εμπλέκουν ενεργά τους μαθητές στην κατάκτηση της γνώσης, εξετάσαμε νέες διαδρομές με όχημα τη Λογοτεχνία και την Ιστορία των Μαθηματικών, προκειμένου ένα αντικείμενο όπως τα Μαθηματικά, που από πολλούς θεωρούνται κατ' εξοχήν δύσκολο, να αποκτήσουν έναν ανθρώπινο, προσιτό και γιατί όχι ελκυστικό χαρακτήρα. Έτσι, στην **παρούσα διπλωματική εργασία** με θέμα «Ιστορική πραγματικότητα και λογοτεχνική μυθοπλασία στη διδασκαλία των Μαθηματικών» επιχειρούμε να εστιάσουμε στη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών μέσα από ένα κείμενο λογοτεχνικής μυθοπλασίας, το οποίο συνδέεται και με τη μελέτη της ιστορικής εξέλιξης των αρχαίων αιγυπτιακών μαθηματικών.

Στο **1ο κεφάλαιο** διερευνώνται οι σχέσεις Λογοτεχνίας και Μαθηματικών και η δυνατότητα σύζευξής τους στη διδακτική πράξη. Επίσης εξετάζεται η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση, ζήτημα που αποτέλεσε και αποτελεί αντικείμενο πολυάριθμων ερευνών του πεδίου της Διδακτικής των Μαθηματικών. Μέσα στο πλαίσιο, λοιπόν, του προβληματισμού πάνω στα νέα δεδομένα για τη Μαθηματική Εκπαίδευση, που επιβάλλουν την αναζήτηση και επιλογή εναλλακτικών διδακτικών προσεγγίσεων με στόχο την επίτευξη των καλύτερων αποτελεσμάτων προς όφελος των μαθητών, εξετάζονται τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

1) Πόσο έγκυρη είναι η ιστορική γνώση που αποκτούμε από την ανάγνωση ενός έργου Μαθηματικής Λογοτεχνίας;

2) Ποιοι διδακτικοί στόχοι της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι συμβατοί με την Ιστορία των Μαθηματικών και τη Μαθηματική Λογοτεχνία;

Στο **2ο κεφάλαιο** γίνεται αναφορά στους τρόπους «ανάγνωσης», που σχετίζονται με τα αρχαία μαθηματικά κείμενα και μελέτη της ιστορικής εξέλιξης των αρχαίων αιγυπτιακών μαθηματικών, μέσα από παλαιότερες και νεότερες έρευνες, προκειμένου αυτή να συνδεθεί με τη διδακτική αξιοποίηση ενός λογοτεχνικού έργου, το οποίο στηρίζεται μυθοπλαστικά σε στοιχεία αυτής της εξέλιξης.

Στο **3ο κεφάλαιο** εστιάζουμε στη Μαθηματική Λογοτεχνία, για την οποία τα τελευταία χρόνια σημειώνεται αυξημένο ενδιαφέρον, τόσο από τους εκδοτικούς οίκους όσο και από το αναγνωστικό κοινό. Στη συνέχεια γίνεται μια ιστορική αναδρομή σε λογοτεχνικά κείμενα που αναφέρονται στα Μαθηματικά και αναφορά σε προσπάθειες ταξινόμησης των έργων Μαθηματικής Λογοτεχνίας. Επίσης παρουσιάζεται το λογοτεχνικό έργο του Τεύκρου Μιχαηλίδη, «Αχμές, ο γιος του φεγγαριού», το οποίο επιλέχθηκε για διδακτική αξιοποίηση.

Στο **4ο κεφάλαιο** γίνεται αναφορά στην αξιοποίηση της Μαθηματικής Λογοτεχνίας και της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη. Αναλυτικότερα εστιάζουμε στα κίνητρα των μαθητών για τα Μαθηματικά καθώς και στην αδιαφορία και το άγχος στη Μαθηματική Εκπαίδευση. Παρουσιάζονται, επίσης, στοιχεία σχετικά με τη σύνδεση της διδακτικής αξιοποίησης της Λογοτεχνίας και της Ιστορίας των Μαθηματικών με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών και το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά, καθώς και την αναζήτηση της πολιτισμικής αξίας των Μαθηματικών μέσα από τη Μαθηματική Λογοτεχνία. Επιπλέον δίνονται παραδείγματα διδακτικών δραστηριοτήτων στις οποίες αξιοποιείται η Ιστορία των Μαθηματικών με υλικό από το λογοτεχνικό κείμενο που επιλέχθηκε.

Στο **5ο κεφάλαιο** περιλαμβάνεται μια ανασκόπηση των βασικών σημείων από όσα παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, εστιάζοντας στα σημεία που τεκμηριώνουν τις απαντήσεις των ερευνητικών ερωτημάτων και διατυπώνοντας προτάσεις για ζητήματα που θα προσφέρονταν για μελλοντική έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

1. Μαθηματικές διαδρομές μέσα από τη Λογοτεχνία και την Ιστορία των Μαθηματικών.

Οι διαπιστώσεις των ερευνητικών δεδομένων για την αναποτελεσματικότητα της κυρίαρχης πρακτικής στη διδασκαλία των Μαθηματικών αποτέλεσαν αφετηρία για την αναζήτηση εναλλακτικών προσεγγίσεων, οι οποίες θα αξιοποιούν μαθησιακά τις απεριόριστες δυνατότητες της ανθρώπινης φαντασίας και θα εμπλέκουν ενεργά τους μαθητές στην κατάκτηση της γνώσης. Στο πλαίσιο αυτού του προβληματισμού νέες διαδρομές με όχημα τη Λογοτεχνία και την Ιστορία των Μαθηματικών εξετάζονται, προκειμένου τα Μαθηματικά, που από πολλούς θεωρούνται ένα κατ' εξοχήν δύσκολο αντικείμενο, να αποκτήσουν έναν ανθρώπινο, προσιτό και γιατί όχι ελκυστικό χαρακτήρα.

1.1. Λογοτεχνία και Μαθηματικά.

1.1.1. Διερευνώντας τις σχέσεις Λογοτεχνίας και Μαθηματικών.

Σύμφωνα με μια ευρύτατα διαδεδομένη άποψη, Μαθηματικά και Λογοτεχνία θεωρούνται ως εντελώς διαφορετικά μεταξύ τους πεδία της ανθρώπινης δραστηριότητας που αναπτύσσονται για διαφορετικές κοινωνικές και ατομικές ανάγκες, κάτω από διαφορετικούς όρους, υπηρετώντας διαφορετικούς σκοπούς. με διαφορετικά μέσα παραγωγής και έκφρασης (Χασάπης, 2007).

Από την εποχή του Ρομαντισμού και μετά οι επιστήμες και η λογοτεχνία εκλαμβάνονται ως δύο εντελώς ξεχωριστοί, ή ακόμα και αντικρουόμενοι, κόσμοι. Ο Snow (1998), περιγράφοντας αυτή τη διχοτόμηση, αναφερόταν στην ασυνεννοησία, την άγνοια και την έλλειψη επικοινωνίας ανάμεσα στους επιστήμονες από τη μία μεριά και τους ανθρώπους των τεχνών ή των γραμμάτων από την άλλη. Αυτό το χάσμα, κατά τη γνώμη του, καθιστούσε και τις δυο πλευρές πιο φτωχές, ενώ παράλληλα η παγκόσμια πρόοδος γινόταν σημαντικά πιο αργή αλλά και επίπονη.

Για πολλά χρόνια τα Μαθηματικά θεωρούνταν παγκόσμια, αντικειμενικά και ανεξάρτητα από τις κοινωνικές, πολιτισμικές και κοινωνικές συνθήκες μέσα στις οποίες αναπτύχθηκαν και ασκήθηκαν. Αυτή η άποψη ενισχύθηκε από την φορμαλιστική και απρόσωπη παρουσίαση των σχολικών μαθηματικών (Σακονίδης 2004). Τα λογοτεχνικά κείμενα θεωρούνται περιγραφές ή αφηγήσεις από εμπειρίες ή γεγονότα, πραγματικά ή φανταστικά, χωρίς καθολικότητα, χρονικά, κοινωνικά ή πολιτιστικά περιορισμένα, τα οποία κατά κύριο λόγο απευθύνονται στις συναισθηματικές λειτουργίες του αναγνώστη, ενώ τα Μαθηματικά αντιμετωπίζονται ως καταγραφές γνώσης, αντικειμενικής, καθολικής, α-χρονικής και ουδέτερης (Χασάπης, 2007).

Η διάσταση μεταξύ Μαθηματικών και Λογοτεχνίας, ωστόσο, έχει αρχίσει να αμφισβητείται τα τελευταία χρόνια, μέσα από τον προβληματισμό σχετικά με το αν η λογική είναι ο μόνος τρόπος για την απόκτηση της γνώσης και αν η γνωστική λειτουργία είναι μονοσήμαντη. Στον επιστημολογικό χώρο η αμφισβήτηση αυτή εμφανίστηκε με το άρθρο «Two modes of thought» του εκπαιδευτικού και γνωστικού ψυχολόγου Bruner (1986). Αν και ήταν προφανές ότι υπήρχαν από παλαιότερα ειδικές περιπτώσεις αφήγησης με σκοπιμότητα μη-καλλιτεχνική (αφηγήματα του Ηρόδοτου, του Θουκυδίδη ή του Ξενοφώντα μπορούν να ενταχθούν σε αυτήν την κατηγορία), ο Bruner, θέτοντας πρώτος το θέμα στη γενικότητά του, επεσήμανε ότι ο ανθρώπινος νους έχει δύο εντελώς διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους επιχειρεί να κατανοήσει και να ερμηνεύσει τον κόσμο που τον περιβάλλει. Ο πρώτος είναι αυτός που αποκαλεί παραδειγματικό (paradigmatic) δηλαδή ο ταξινομικός, «επαγωγικός» (inductive) ή «παραγωγικός» (deductive), που συνδέεται με τη λογική και την επιστήμη. Ο δεύτερος είναι ο αφηγηματικός (narrative), που είναι διάφορος του πρώτου σε μορφή, πρόθεση και λειτουργία. Και οι δυο τρόποι, ενώ μπορούν να συνεργαστούν, δεν μπορούν να υποκαταστήσουν ο ένας τον άλλον, καθώς προσπάθειες για να αναχθεί ο ένας στον άλλον ή να αγνοηθεί ο ένας σε βάρος του άλλου, αναπόφευκτα, αποτυγχάνουν να συλλάβουν την ποικιλομορφία της σκέψης.

Ο <u>παραδειγματικός ή λογικο-επιστημονικός,</u> τρόπος αναφέρει η Κολέζα (2007), επιχειρεί να υπηρετήσει το ιδανικό ενός τυπικού, μαθηματικού συστήματος περιγραφής και εξήγησης των φαινομένων. Για να περιγράψει τον κόσμο ο άνθρωπος στον «παραδειγματικό τρόπο» έχει ως εργαλεία επιστημονικά κριτήρια και λογικές αφαιρέσεις. Ως πλεονεκτήματα αυτού του τρόπου σκέψης θα μπορούσαν να θεωρηθούν η αμερόληπτη, επαληθεύσιμη ανάλυση, η λογική απόδειξη, το υγιές επιχείρημα και η εμπειρική ανακάλυψη που καθοδηγείται από αιτιολογημένες υποθέσεις. Ο συγκεκριμένος τρόπος, όμως, αποκτά μια «σκληρότητα», διότι στην προσπάθεια κατάκτησης της αφαίρεσης αποκηρύσσεται το ιδιαίτερο και κάθε επεξηγηματική αξία σχετική με αυτό. Επίσης, η λειτουργία του είναι κατιούσα, από πάνω προς τα κάτω, με στόχο τη γενικότητα και σύμμαχο τη συνέπεια.

Ο άλλος τρόπος, <u>ο αφηγηματικός</u>, κάνει χρήση μεταφορών και αναλογιών για την κατανόηση και περιγραφή του τρόπου με τον οποίο συνδέονται μεταξύ τους γεγονότα και καταστάσεις. Αυτός ο τρόπος σκέψης έχει χαρακτηριστεί ως μια «μορφή τέχνης», αφού η ικανότητα να ακούει κανείς ή να διαβάζει ιστορίες ενισχύει την ικανότητά του να προβλέπει, να αναγνωρίζει μια κατάσταση, να μπαίνει στη θέση του ήρωα (ενσυναίσθηση). Επίσης, συμβάλλει στην εξάσκηση της μνήμης και της συγκέντρωσης, ενθαρρύνει και προωθεί τη διάθεση για μάθηση, ενδυναμώνει την ταυτότητα, την αυτογνωσία, τον αυτοσεβασμό και το συναίσθημα του «ανήκειν», προωθώντας την ικανότητα αντιμετώπισης των αλλαγών στη ζωή και την εμπειρία της συνέχειας, που συνοδεύεται από το συναίσθημα ότι η ζωή αξίζει. Ο αφηγηματικός τρόπος λειτουργεί αντίστροφα από τον παραδειγματικό, διότι εστιάζει στο ιδιαίτερο και τη συνοχή, κινείται, δηλαδή, από κάτω προς τα πάνω (Κολέζα, 2007).

Έτσι η αφήγηση, εκτός από μηχανισμός παραγωγής συναισθηματικών αντιδράσεων, αποτελεί και μορφή γνώσης. Ονομάζοντας και ορίζοντας τη γνωστική (σε αντίθεση με την απλά αισθητική ή/και συναισθηματική) λειτουργία του αφηγηματικού τρόπου στη γενικότητά του, ο Bruner νομιμοποίησε αλλά και υποκίνησε ουσιαστικά τη μελέτη της αφήγησης στο εξής και υπό αυτό το πρίσμα.(Δοξιάδης, 2004).

Όταν ασχολούμαστε με τα Μαθηματικά, θεωρώντας ότι η μαθηματική σκέψη ανήκει στον λογικο-επιστημονικό τρόπο, δεν μπορεί να αγνοηθεί ο αφηγηματικός τρόπος, προκειμένου να υπάρχει μια ολιστική προσέγγιση της σκέψης. Καθώς τα Μαθηματικά χαρακτηρίζονται από τον πολύ ειδικό συμβολισμό και το συχνά περιορισμένο πλαίσιο επεξεργασίας των επιμέρους προβλημάτων, ο Σπύρου (2007) αναφέρει ότι οι μαθηματικοί των διάφορων κλάδων ελάχιστα καταλαβαίνουν ο ένας τον άλλο. Για το λόγο αυτό τους ενδιαφέρουν οι ολιστικές περιγραφές που προσφέρονται καλύτερα στη λογοτεχνική γλώσσα, αφού η λογοτεχνία προβάλλει ένα άλλο πρόσωπο των Μαθηματικών προς τους ανθρώπους έξω από τη μαθηματική κοινότητα ή προς όσους πρωτογνωρίζουν αυτή την επιστήμη.

Σε μια άλλη προσέγγιση η Λογοτεχνία και τα Μαθηματικά μερικές φορές πλησιάζουν τόσο κοντά μεταξύ τους, ώστε να μιλούν αλλάζοντας αμοιβαία φωνές και κώδικες (Γιαννικοπούλου, 2002). Ο Corry (2007) αναφέρεται σε μια αμοιβαία αλληλεπίδραση μεταξύ Λογοτεχνίας και Επιστήμης, η οποία μέσα από την ιστορία φαίνεται να είναι μια σχέση πολύπλοκη και ασταθής. Επιπλέον αναφερόμενος στα λεγόμενα του γνωστού συγγραφέα Umberto Eco καταθέτει ότι διαβάζουμε μυθιστορηματικά κείμενα γιατί έρχονται να ενισχύσουν τη μεταφυσική μας στενοκεφαλιά και να προσφέρουν μια ψευδαίσθηση τάξης σε έναν κόσμο του οποίου τη δομή δεν είμαστε σε θέση να αντιληφθούμε και να περιγράψουμε. Γνωρίζοντας αυτούς τους φανταστικούς κόσμους που δημιουργήθηκαν από κάποια «συγγραφική οντότητα», γνωρίζουμε ότι πίσω τους υπάρχει ένα «μήνυμα».

Η σιγουριά για την ύπαρξη αυτού του μηνύματος είναι, αρχικά, αυτή που μας επιτρέπει να το αποκρυπτογραφήσουμε ή τουλάχιστον να σκεφτούμε ότι είμαστε στο δρόμο προς την αποκρυπτογράφηση αυτού του μηνύματος. Για το λόγο αυτό αισθανόμαστε άνετα σε φανταστικούς κόσμους. Μεταφέροντας κάτι ανάλογο στις συναντήσεις με τα Μαθηματικά και έχοντας την άνεση της εμπειρίας από κόσμους φανταστικούς κάποιοι άνθρωποι αντιμετωπίζουν αρχικά δυσκολίες με την τεχνική γνώση του κόσμου των Μαθηματικών, αλλά όταν αυτό ξεπεραστεί, τους παρέχεται, το ύψιστο ίσως παράδειγμα φανταστικού (ή που προσομοιάζει με φανταστικό) κόσμου, όπου γίνεται έντονα αισθητή η σιγουριά για την ύπαρξη ενός βαθύτερου μηνύματος και όπου η πρόοδος είναι συνεχής και σταθερή προς την κατεύθυνση της αποσαφήνισης του μηνύματος αυτού (Corry 2007).

Ο Koehler (1982) υποστηρίζει ότι η αλληλεπίδραση Λογοτεχνίας και Μαθηματικών είναι φυσική και ενδιαφέρουσα και βασίζεται στο γεγονός ότι τα Μαθηματικά είναι μια γλώσσα που πηγάζει από την ανάγκη για περιγραφή του κόσμου που μας περιβάλλει. Για το λόγο αυτό τα Μαθηματικά ανταποκρίνονται στην ανθρώπινη εμπειρία και τροφοδοτούν τους συγγραφείς με υλικό για να δημιουργήσουν ενδιαφέροντα θέματα και εικόνες. Συνήθως, οι συγγραφείς εμπνέονται από τη γεωμετρία, τις πιθανότητες και τη στατιστική, γιατί οι τομείς αυτοί συνδέονται περισσότερο με τον κόσμο που ζούμε.

Σε μια άλλη εκδοχή ο Stevens (2000) στη σχέση μεταξύ Μαθηματικών και Λογοτεχνίας εντοπίζει δύο κατευθύνσεις, από τα Μαθηματικά προς τη Λογοτεχνία και από τη Λογοτεχνία προς τα Μαθηματικά, αναφερόμενος στους τρόπους που τα Μαθηματικά έχουν επηρεάσει τεχνικά τη συγγραφή λογοτεχνικών κειμένων και στους τρόπους που με αφορμή τη Λογοτεχνία καταλήγουμε στην εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών. Επίσης, γίνεται αναφορά σε μια μορφή δυϊσμού ανάμεσα στη μαθηματική και τη λογοτεχνική έμπνευση (Κατσάρκας, 2007; Pycior, 1994).

Από όσα προαναφέρθηκαν μια σχέση συμπληρωματική φαίνεται να αναδεικνύεται μεταξύ της Λογοτεχνίας και των Μαθηματικών, αλλά και μια σχέση αμφίδρομη, για την οποία παρατηρείται ότι υπάρχουν διαφορετικές αντιλήψεις. Όπως ο αφηγηματικός τρόπος σκέψης συμπληρώνει το λογικο-επιστημονικό, έτσι η λογοτεχνική γλώσσα επιδρά στην κατανόηση της μαθηματικής γλώσσας, καθώς η μαθηματική σκέψη συμβάλλει στη σύλληψη του «μηνύματος» που βρίσκεται πίσω από τον φανταστικό - μυθιστορηματικό κόσμο.

Στον ενδιάμεσο χώρο μεταξύ των Μαθηματικών και της Λογοτεχνίας μπορούν να αναδειχθούν τα κοινά τους στοιχεία, αφού όπως ο Frucht (1999) αναφέρει η χρησιμοποίηση των Μαθηματικών στην αφήγηση ιστοριών και η χρησιμοποίηση ιστοριών για την εξήγηση των Μαθηματικών είναι δύο πλευρές του ίδιου νομίσματος. Ενώνουν τους τρόπους του επιστήμονα και του καλλιτέχνη (που δεν έπρεπε ποτέ να έχουν χωριστεί), στην προσπάθειά τους να αποκαλύπτουν αλήθειες για τον κόσμο.

Σύμφωνα με την Κολέζα (2007), τα βασικά κοινά χαρακτηριστικά των Μαθηματικών και της Λογοτεχνίας είναι συνοπτικά:

- η αναζήτηση και η επιδίωξη της αισθητικής, της αρμονίας, του ωραίου.
- η δημιουργικότητα.
- η ανάπτυξη της σκέψης και της φαντασίας κυρίως μέσα από τη χρήση του αναλογικού συλλογισμού. Και στα Μαθηματικά και στη Λογοτεχνία οι άνθρωποι κάνουν χρήση της μεταφοράς επιχειρώντας να κατανοήσουν μια νέα έννοια μέσα από τη σύγκρισή της με μια άλλη έννοια που είναι ήδη γνωστή και κατανοητή.

Η «ομορφιά» μιας δημιουργίας εκτιμάται και είναι ζητούμενο όχι μόνο σε ένα ποίημα, σε μια μελωδία, σε ένα έργο ζωγραφικής αλλά και στα Μαθηματικά και τις επιστήμες. Ένας μαθηματικός δημιουργεί πρότυπα και κανονικότητες, όπως ένας καλλιτέχνης, και τα πρότυπα αυτά πρέπει να είναι όμορφα. Οι ιδέες, όπως τα χρώματα ή οι λέξεις πρέπει να ταιριάζουν με έναν τρόπο αρμονικό. Η μαθηματική ομορφιά, αν και είναι ίσως δύσκολο να οριστεί, είναι εξίσου αληθινή με την ομορφιά οποιουδήποτε είδους. Ένα όμορφο ποίημα μπορεί να μην ξέρουμε τι σημαίνει, αυτό όμως δεν μας εμποδίζει να το αναγνωρίζουμε όταν το διαβάζουμε (Hardy, 1984).

Για τη σύνδεση Μαθηματικών και Λογοτεχνίας η Κολέζα, (2007) αναφέρει ότι θα μπορούσαμε ενδεικτικά να διακρίνουμε τέσσερις μορφές, που επιτυγχάνονται όταν:

- Ένα λογοτεχνικό κείμενο επικαλείται τα Μαθηματικά για να στηρίξει μια θεωρία. Στην περίπτωση αυτή υιοθετείται έμμεσα η αντίληψη ότι τα Μαθηματικά ως μια άρτια συγκροτημένη επιστήμη μπορούν να εξηγήσουν τα πάντα και επομένως μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την υποστήριξη ή απόρριψη μιας θεωρίας.
- Ένα λογοτεχνικό κείμενο δημιουργείται με πηγή έμπνευσης τα Μαθηματικά. Στη μορφή αυτή διακρίνουμε περιπτώσεις που ο συγγραφέας:
  α) είτε επιχειρεί να δημιουργήσει ένα λογοτεχνικό έργο, χρησιμοποιώντας τα Μαθηματικά ως μεταφορά, με την πλοκή να υφαίνεται γύρω από φανταστικά πρόσωπα και την έμφαση να δίνεται στη λογοτεχνική γραφή.
  β) είτε δημιουργεί ένα λογοτεχνικό έργο, έχοντας ως κύριο στόχο την παρουσίαση

μαθηματικών εννοιών ή θεωριών, με την έμφαση να δίνεται στο μαθηματικό περιεχόμενο.

γ) είτε παρουσιάζει τη ζωή ενός προσώπου πραγματικού, τονίζοντας τα στοιχεία της προσωπικότητάς του που αναδεικνύουν τη σημασία του έργου του.

δ) είτε παρουσιάζει τη ζωή ενός προσώπου πραγματικού, προσπαθώντας να αναδείξει όχι μόνο τη μαθηματική διάσταση αλλά όλες τις πτυχές της ζωής του.

• Λογοτεχνικά βιβλία γράφονται με θέμα τα Μαθηματικά ή με σημαντικό μαθηματικό περιεχόμενο (χωρίς τα Μαθηματικά να αποτελούν πάντα τον κεντρικό στόχο), περιγράφοντας μια ιστορία που διαδραματίζεται σε έναν εντελώς φανταστικό κόσμο, όπου χρησιμοποιούνται οι μαθηματικές αναλογίες και μεταφορές.

• Λογοτεχνικά βιβλία γράφονται με θέμα τα Μαθηματικά για καθαρά εκπαιδευτικούς στόχους.

Μέσα από αυτή την προβληματική αναδείχθηκε και γνωρίζει μεγάλη άνθηση τα τελευταία χρόνια μια νέα κατηγορία λογοτεχνίας: η Μαθηματική Λογοτεχνία, <u>για την οποία θα γίνει εκτενής αναφορά σε επόμενο κεφάλαιο της εργασίας μας</u>. Με τον όρο αυτό εννοούμε κείμενα που αναφέρονται στα Μαθηματικά και τον κόσμο τους και δεν έχουν συγγραφεί ως μαθηματικές μονογραφίες ή μαθηματικά εγχειρίδια. Τα κείμενα αυτά μπορεί να είναι βιογραφίες ή αυτοβιογραφίες μαθηματικών, μυθιστορήματα ή διηγήματα με ήρωες μαθηματικούς ή μαθηματικά αντικείμενα, αφηγήματα με αναφορές σε μαθηματικές έννοιες, ανθολογίες με σπαζοκεφαλιές και ψυχαγωγικά μαθηματικά προβλήματα, αλλά και κάποια κείμενα μαθηματικής εκλαΐκευσης (Χατζηκυριάκου, 2007). Μπορεί επίσης κάποιο διάσημο ή λιγότερο γνωστό μαθηματικό πρόβλημα να χρησιμοποιηθεί ως πρόσχημα για τις ανάγκες εξέλιξης της πλοκής του κειμένου. Στην κατηγορία αυτή εντάσσεται και το βιβλίο του Τεύκρου Μιχαηλίδη «Αχμές, ο γιος του φεγγαριού», το οποίο επιλέχθηκε για να αξιοποιηθεί στην παρούσα εργασία. Στο συγκεκριμένο βιβλίο συναντιούνται η Ιστορία των Μαθηματικών και η Λογοτεχνία και παρέχεται το υλικό για έναν άκρως ελκυστικό και ενδιαφέροντα τρόπο γνωριμίας με τα αρχαία αιγυπτιακά μαθηματικά την ανάπτυξη και την εξέλιξή τους.

1.1.2. Επιχειρήματα για την αξιοποίηση της Λογοτεχνίας στη Μαθηματική Εκπαίδευση.

Ξεκινώντας από τη διάκριση των τρόπων σκέψης, όπως έχουν τεθεί από τον Bruner, φαίνεται ότι Μαθηματικά και Λογοτεχνία δε δρουν ανταγωνιστικά μεταξύ τους. Αντίθετα, αποτελούν δύο συμπληρωματικούς τρόπους για να φτάσει κανείς στον ίδιο προορισμό, στην αναζήτηση και εξερεύνηση του άγνωστου, του ακατανόητου. Μέσα από τον κατάλληλο χειρισμό της γλώσσας, δυνατότητα που προσφέρει η Λογοτεχνία, οι μαθηματικές έννοιες γίνονται πιο κατανοητές για τους μαθητές, ενώ ταυτόχρονα τα Μαθηματικά δανείζουν χαρακτηριστικά από τη δική τους γλώσσα στη Λογοτεχνία.

Η Λαλαγιάννη (2005) αναφέρει ότι η Λογοτεχνία δημιουργεί ευκαιρίες για την προσέγγιση, ενσωμάτωση και εξέταση των Μαθηματικών μέσα από ενδιαφέροντα συμφραζόμενα. Έχοντας ως όχημα τη λογοτεχνική ιστορία και διάφορες ελκυστικές δραστηριότητες που προκύπτουν από αυτήν, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να προσεγγίσουν τη μαθηματική γλώσσα, τις έννοιες των Μαθηματικών και την επίλυση προβλημάτων. Το κείμενο του λογοτεχνήματος μέσα από τους δομημένους διαλόγους, τις εικόνες, τον χώρο και τον χρόνο, τα μυθιστορηματικά πρόσωπα, δημιουργεί ένα οικείο πλαίσιο, που μπορούν να χειριστούν οι μαθητές. Από την εξοικείωσή τους με το κείμενο και από την ταύτιση με πρόσωπα της ιστορίας, οι μαθηματικές έννοιες διδάσκονται μέσα σε ένα ενδιαφέρον πλαίσιο από συμφραζόμενα και δραστηριότητες που ευνοούν τον διάλογο και τη συμμετοχή όλων των διδασκομένων και όχι στο πλαίσιο ενός αυστηρά δομημένου μαθήματος. Η Λογοτεχνία δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να ακούν, να διαβάζουν και να καταλαβαίνουν κείμενα που περιέχουν ποσοτικές πληροφορίες, να αναπτύσσουν ικανότητες εντοπισμού πληροφοριών που μεταφέρει το κείμενο και να χρησιμοποιούν αυτές τις πληροφορίες στη λύση προβλημάτων που απαιτούν υπολογισμούς, χρήση αναπαραστάσεων, μαθηματική σκέψη και επιχειρηματολογία. Άλλωστε, λόγω του ιδιαίτερου χαρακτήρα της αφήγησης, όπως επίσης και της διαφορετικής και πιο οικείας δομής της, προσφέρεται η δυνατότητα ευκολότερης και καλύτερης κατανόησης των μαθηματικών δεδομένων σε σύγκριση με την ψυχρή και αποπλαισιωμένη διατύπωση ενός προβλήματος. Βέβαια η Λογοτεχνία, όπως και τα Μαθηματικά, δεν μπορεί να είναι ποτέ απόλυτα τυποποιημένη.

Η Γιαννικοπούλου (2002) επισημαίνει ότι κατά κύριο λόγο η Λογοτεχνία προσφέρει στο μάθημα των Μαθηματικών τη χαμένη συναισθηματική παράμετρο, την ανθρώπινή τους διάσταση, που τους έχουν στερήσει η προσήλωση σε αριθμητικές πράξεις, περίπλοκους υπολογισμούς και σύμβολα. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται καλύτερα τους μαθηματικούς όρους και τις μαθηματικές πράξεις όταν χρησιμοποιούν τη γλώσσα των Μαθηματικών σε καταστάσεις με νόημα, βλέποντας τα Μαθηματικά ως τρόπο σκέψης μέσα στο δικό τους κόσμο και όχι ως ακατανόητες σειρές από αριθμούς και σύμβολα. Η σύνδεση των Μαθηματικών του σχολείου με τις εξωσχολικές εμπειρίες καθιστά τους μαθητές ικανούς στην πρακτική εφαρμογή και αξιοποίηση της γνώσης. Όταν οι μαθητές καταφέρνουν να «διαβάζουν» τον κόσμο, τις φορές που αυτός εκφράζεται με όρους μαθηματικούς, τότε κατακτούν τον μαθηματικό αλφαβητισμό, καθώς η πραγματικότητα μπορεί να περιγράφεται (στατιστικές αναλύσεις, διαγράμματα, ποσοστά) και να γίνεται κατανοητή με τη χρήση και μαθηματικών δεδομένων (Γιαννικοπούλου, 2002).

Οι Lesh και Larson (2006) αναφερόμενοι στα οφέλη από τη σύνδεση Λογοτεχνίας και Μαθηματικών μέσα στην τάξη επισημαίνουν:

- Οι μαθητές στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν τις ιστορίες, βασίζονται στην προσωπική τους γνώση και εμπειρία, επεκτείνοντας ταυτόχρονα αυτή τη γνώση.
- Επιπλέον, τέτοιου είδους δραστηριότητες απαιτούν από τους μαθητές να ακολουθούν μια σπειροειδή οργάνωση του περιεχομένου κατά τη διάρκεια της οποίας εκφράζουν την άποψή τους, επανεξετάζουν τα δεδομένα, αναθεωρούν ή και απορρίπτουν τον αρχικό τρόπο σκέψης τους. Ο Schiro (1997) υποστηρίζει τις αλλεπάλληλες αναγνώσεις ενός βιβλίου με θέμα τα Μαθηματικά στοχεύοντας στην οικοδόμηση της νέας γνώσης μέσα από τη διαδοχική εξαγωγή συμπερασμάτων. Με τη λογική αυτή η ανάγνωση του κειμένου δεν γίνεται με τρόπο μονοσήμαντο, αλλά παρέχεται στους μαθητές η ευκαιρία να δομήσουν μόνοι τους τη γνώση τους

σύμφωνα με τις ιδιαίτερες ανάγκες τους και τους προσωπικούς ρυθμούς μάθησης του καθενός.

- Τέλος, δραστηριότητες που βασίζονται στην ανάγνωση και επεξεργασία λογοτεχνικών κειμένων επεκτείνουν και καλλιεργούν τη φυσική περιέργεια των μαθητών, τους ενθαρρύνουν να αναζητούν νόημα σε αυτά που ακούνε ή διαβάζουν, συμβάλλουν στον εμπλουτισμό του λεξιλογίου, ενεργοποιούν ανώτερες νοητικές λειτουργίες, ενθαρρύνουν το διάλογο μεταξύ των μαθητών και τους βοηθούν να σκέφτονται τον κόσμο τους με νέους τρόπους και μέσα από νέες πρακτικές.

Επίσης δραστηριότητες που βασίζονται σε λογοτεχνικά κείμενα μπορούν να αξιοποιηθούν με τέτοιο τρόπο ώστε:

- να επεκτείνουν τη φυσική περιέργεια των μαθητών,
- να ενθαρρύνουν τους μαθητές στην αναζήτηση νοήματος,
- να συνεισφέρουν στον εμπλουτισμό του λεξιλογίου τους,
- να ενθαρρύνουν την αισθητική εκτίμηση των μαθηματικών και
- να βοηθούν στην ανάπτυξη νέων τρόπων σκέψης για τον κόσμο τους.

Δεν μπορεί, βέβαια, να ισχυριστεί κανείς ότι η χρήση λογοτεχνικών κειμένων στη διδασκαλία των Μαθηματικών αποτελεί πανάκεια ούτε μπορεί να αντικαταστήσει την αναλυτική σκέψη. Τη συμπληρώνει, ωστόσο, αναπτύσσοντας τη φαντασία των μαθητών, ενθαρρύνοντας τη διατύπωση εναλλακτικών ερμηνειών και δημιουργώντας ένα μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο ο μαθητής εμπλέκεται εκούσια και αυθόρμητα συμμετέχοντας μέσα από τις προσωπικές του εμπειρίες και ερμηνείες (Κολέζα, 2007).

Είναι φανερό, ότι όλα τα λογοτεχνικά κείμενα δεν είναι κατάλληλα για διδακτική αξιοποίηση. Η επιλογή λογοτεχνικών κειμένων και ιστοριών θα πρέπει να γίνεται με κριτήριο το κατά πόσο μπορούν να συνεισφέρουν και να χρησιμεύσουν στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών, ώστε να προκύπτουν οφέλη από τη χρήση τους. Κάποιες φορές, η χρησιμοποίηση από τους συγγραφείς ολοένα και περισσότερων Μαθηματικών στην πλοκή της ιστορίας μπορεί να οδηγήσει σε αποτελέσματα διαφορετικά από τα επιδιωκόμενα (Γιαννικοπούλου, 2002). Σε παρόμοιο συμπέρασμα καταλήγει και ο Χατζηκυριάκου (2007) ο οποίος αναφέρεται στη δημιουργική μονομανία και τη στερεοτυπική αλαζονεία των Μαθηματικών της μυθοπλασίας, που οι συγγραφείς των βιβλίων ενίοτε εκμεταλλεύονται στην πλοκή τους, χωρίς να επιτυγχάνεται η συμβολή τους στην αλλαγή της όχι ιδιαίτερα θετικής εικόνας για τους μαθηματικούς και τα Μαθηματικά.

1.1.3. Λογοτεχνία και Μαθηματικά στην εκπαιδευτική πράξη.

Από τη σκοπιά της διδακτικής των Μαθηματικών, οι σχέσεις Μαθηματικών και Λογοτεχνίας αποτελούν πλέον αντικείμενο προβληματισμού και ερευνών, οι οποίες ξεκινώντας από διαπιστώσεις για την αναποτελεσματικότητα των παραδοσιακών προσεγγίσεων στον χώρο της διδακτικής των μαθηματικών επιδιώκουν την ανάπτυξη εναλλακτικών διδακτικών προσεγγίσεων και αξιοποιούν όλες τις δυνατότητες του ανθρώπινου νου. Ένας βασικός λόγος που ένας μεγάλος αριθμός μαθητών έχει αρνητικά συναισθήματα απέναντι στα μαθηματικά είναι ότι δεν τα καταλαβαίνουν. Ο τρόπος που διδάσκονται τα μαθηματικά δε συνεισφέρει ούτε στην εκτίμηση της αξίας τους από τους μαθητές, ούτε στην κατανόησή τους Επιδιώκοντας να καταστήσουμε τα

Μαθηματικά ενδιαφέροντα στους μαθητές και σημαντικά ως προς το μαθηματικό τους περιεχόμενο, η διανοητική και συναισθηματική εμπλοκή των μαθητών κατά τη διδασκαλία τους είναι από τους πρωταρχικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης (Κολέζα, 2007).

Ο Gardner (1993) με το έργο του για τους πολλαπλούς τύπους νοημοσύνης έστρεψε την προσοχή στον σχεδιασμό προσεγγίσεων, οι οποίες δημιουργούν συνθήκες ολόπλευρης ανάπτυξης του ατόμου, ξεφεύγοντας από τη μονοδιάστατη θεώρηση της γνώσης. Προκύπτει, έτσι, ο προβληματισμός, εάν και με ποιον τρόπο είναι δυνατή η σύζευξη Μαθηματικών και Λογοτεχνίας στο πλαίσιο μιας διαφορετικής προσέγγισης για τη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Ο Χασάπης (2007) αναφερόμενος στο ζήτημα αυτό θέτει τρεις προϋποθέσεις, τις οποίες παρουσιάζουμε παρακάτω:

α. <u>Μια διαφορετική από την κυρίαρχη σήμερα θεώρηση της μάθησης, στην οποία οι συναισθηματικές λειτουργίες θα αντιμετωπίζονται όχι μόνο ως ισότιμες, αλλά ως προϋποθέσεις της ανάπτυξης των γνωστικών λειτουργιών.</u> Η αποδοχή της βασικής αρχής ότι ο άνθρωπος κατασκευάζει τη γνώση του με τρόπο ενεργό και δεν τη δέχεται παθητικά, αναδεικνύει ως αιτούμενο μια διαφορετική θεώρηση της μάθησης όπου οι ανθρώπινες συναισθηματικές λειτουργίες θα θεωρούνται όχι απλά ισότιμες με τις γνωστικές λειτουργίες αλλά και απαραίτητη προϋπόθεση για την ανάπτυξή τους. Πρόκειται, στην ουσία, για μια θεώρηση όπου ο δυισμός συναισθήματος και νόησης δεν θα υφίσταται στη μάθηση και όπου η φαντασία θα αντιμετωπίζεται παράλληλα ως συστατική λειτουργία της νόησης.

Στις δύο τελευταίες δεκαετίες έχει αναγνωριστεί η σημασία των συναισθημάτων στη σύγχρονη εκπαίδευση και οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ βιολογικών, γνωστικών, συγκινησιακών και κοινωνικών παραγόντων αποτελούν αντικείμενο μελέτης της γνωστικής ψυχολογίας. Ο Goleman (1998) σημειώνει ότι σταδιακά άρχισε να αλλάζει η μονόπλευρη επιστημονική θεώρηση μιας συγκινησιακά επίπεδης διανοητικής ζωής, καθώς η ψυχολογία βαθμιαία αναγνώριζε τον ουσιαστικό ρόλο των συναισθημάτων στη σκέψη και εκτιμούσε την επίδρασή τους στη διανοητική ζωή, αλλά και τους κινδύνους που μπορεί να εγκυμονούν.

Στην κυρίαρχη μέχρι πρόσφατα θεώρηση της μάθησης, το συναίσθημα και οι λειτουργίες του θεωρούνταν αντιθετικά της λογικής και των λογικών διεργασιών. Ωστόσο, η μάθηση, ως διαδικασία αλλά και ως αποτέλεσμα, δεν πραγματώνεται ανεξάρτητα από τα συναισθήματα. Οι ψυχολογικοί και οι συναισθηματικοί παράγοντες παίζουν σημαντικό ρόλο και ασκούν δυναμική επίδραση πάνω στη λογική σκέψη, έχοντας τη δύναμη είτε να την προωθήσουν είτε ακόμη και να διακόψουν τη λειτουργία της. Το θετικό και αρμονικά αναπτυγμένο συναίσθημα αποτελεί αναγκαία προϋπόθεση για να λειτουργήσει καλά το οικοδόμημα της λογικής σκέψης (Damasio, 2000).

Με δεδομένη την παραπάνω παραδοχή η σύζευξη των Μαθηματικών με τη Λογοτεχνία συνεπικουρεί προς την κατεύθυνση της διαφορετικής προσέγγισης στη μάθηση, καθώς οι άνθρωποι εκφράζουν τα συναισθήματά τους όταν αφηγούνται. Με τον τρόπο αυτό ονειρεύονται, θυμούνται, ελπίζουν, πιστεύουν, αλλά και αμφιβάλλουν και απογοητεύονται, σχεδιάζουν, δημιουργούν, κρίνουν και αναθεωρούν, μαθαίνουν και ζουν. Η αφήγηση, στην ουσία, εμπλέκεται με τις νοητικές τους λειτουργίες και μέσω αυτής οι εμπειρίες τους αποκτούν νόημα (Bruner, 1986; Hardy, 1968; Χασάπης, 2007).

Με σημείο αναφοράς τη συμβολή της αφήγησης στις ανθρώπινες νοητικές λειτουργίες εμφανίζεται στο προσκήνιο και η φαντασία, η οποία στο παρελθόν είχε παρεξηγηθεί και παραγκωνιστεί αρκετά λόγω του έντονου διαχωρισμού μεταξύ συναισθήματος και λογικής. Μέσω της φαντασίας, όμως, εξασφαλίζεται ένας βαθμός ανεξαρτησίας από την περιοριστική πολλές φορές πραγματικότητα με μαθηματικό όφελος λόγω των υποθετικών δράσεων του ανθρώπινου μυαλού, δηλαδή την κατασκευή και τροποποίηση νοητικών εικόνων και ιδεών (Χασάπης, 2007). Μάλιστα, σύμφωνα με τον Vygotsky (1987) η φαντασία καταλαμβάνει σημαντική θέση στην ανθρώπινη νόηση, καθώς με την ανάπτυξη του ανθρώπου εξελίσσονται αντίστοιχα και η φαντασία και η εννοιολογική σκέψη και σταδιακά αναπτύσσονται συνδυαστικά μεταξύ τους δομώντας τη δημιουργική σκέψη.

β. Μια διαφορετική από την επικρατούσα προσέγγιση των Μαθηματικών ως επιστημονικής πρακτικής και σχολικής γνώσης. Αυτή η διαφορετική προσέγγιση θέτει ως βάση και αφετηρία της το γεγονός ότι η μαθηματική γνώση δεν είναι ένα σταθερό σύνολο από καθιερωμένα συμπεράσματα που χαρακτηρίζονται από αλάθητες διαδικασίες και ακριβή αποτελέσματα, αλλά μια δυναμική διαδικασία διερεύνησης όπου η διαρκής αμφισβήτηση, η αβεβαιότητα και η αντιπαράθεση παρέχουν τις προϋποθέσεις και τα κίνητρα για συνεχή έρευνα. Τα Μαθηματικά, σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση, αποτελούν κοινωνική κατασκευή. Κατά συνέπεια, οι υποθέσεις, οι αποδείξεις και τα αξιώματα που διατυπώνονται υπόκεινται σε αναθεωρήσεις, ενώ η αξιοπιστία και η εγκυρότητά τους μπορούν να εκτιμηθούν και να αξιολογηθούν μόνο αναφορικά με ένα συγκεκριμένο κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο.

Η μαθηματική γνώση, επομένως, ως κοινωνική κατασκευή, είναι αποτέλεσμα μιας διαδικασίας η οποία περιλαμβάνει ιστορίες, στηρίζεται σε φιλοσοφικές θεωρίες, διαθέτει πρωταγωνιστές, έχει αναπτύξει τη δική της μεθοδολογία, αντιμετωπίζει τόσο θεωρητικά όσο και πρακτικά ερευνητικά προβλήματα, συνδέεται με άλλα πεδία εφαρμογής, διαθέτει θεσμούς οργάνωσης και κώδικες επικοινωνίας. (Χασάπης, 2007). Όλα, λοιπόν, τα παραπάνω και αλληλένδετα μεταξύ τους είναι Μαθηματικά και η αφήγησή τους αποτελεί σημαντικό συστατικό και απαραίτητη συνθήκη για τη διδασκαλία τους.

γ. Μια διαφορετική από την εδραιωμένη στη διδασκαλία των Μαθηματικών αντιμετώπιση της ανάγνωσης κειμένων και κατά συνέπεια του ρόλου της στη μάθηση των Μαθηματικών. Στο παραδοσιακό μοντέλο αναγνωστικής κατανόησης κυριαρχεί η ιδέα της παθητικής λήψης του μηνύματος του κειμένου, ενώ στο σύγχρονο η κατανόηση θεωρείται αποτέλεσμα της ενεργού εμπλοκής του αναγνώστη και της αλληλεπίδρασής του με το ίδιο το κείμενο.

Η ανάγνωση, σύμφωνα με τις σύγχρονες προσεγγίσεις, είναι μια διαδικασία δόμησης και κατασκευής νοημάτων. Η αντίληψη αυτή συνάγεται από έρευνες και μελέτες που έγιναν κατά καιρούς και έδειξαν ότι η κατανόηση ενός κειμένου βρίσκεται σε άμεση σχέση με τις γνώσεις που ο αναγνώστης κατέχει ήδη για το περιεχόμενο του κειμένου. Το ίδιο κείμενο είναι δυνατόν να ερμηνεύεται με διαφορετικό τρόπο από τους αναγνώστες του. Η στάση που κρατά κάποιος απέναντι σ' ένα κείμενο και η ερμηνεία που δίνει σ' αυτό εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τις παραστάσεις του, τις αξίες του και τα προσωπικά του βιώματα. Θεωρητικά τουλάχιστον θα μπορούσε να πει κανείς ότι υπάρχουν τόσες ερμηνείες για ένα κείμενο όσοι είναι και οι αναγνώστες του. (Βάμβουκας, 2008).

Το γνωστικό υπόβαθρο του αναγνώστη, η ποιότητα και η ποσότητα των γνώσεων που αυτός κατέχει σχετικά με το περιεχόμενο του κειμένου ανάγνωσης προσδιορίζουν σημαντικά το βαθμό κατανόησης του κειμένου καθώς και την ερμηνεία του. Οι γνώσεις, επίσης, που θα αποκομίσει ο αναγνώστης από ένα κείμενο με το οποίο έρχεται σε επαφή εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τις γνώσεις που κατέχει ήδη για το θέμα που πραγματεύεται το κείμενο. Η ανάγνωση, λοιπόν, είναι μια διαδικασία αλληλοδραστική όπου εμπλέκονται ο αναγνώστης, το κείμενο, αλλά και το συγκείμενο, το πλαίσιο, δηλαδή, μέσα στο οποίο πραγματοποιείται η πράξη της ανάγνωσης.

Σχετικά με τους τρόπους χρήσης λογοτεχνικών κειμένων στη διδασκαλία των Μαθηματικών η Κολέζα (2007) αναφέρει ενδεικτικά:

- Την αξιοποίηση του λογοτεχνικού κειμένου πριν τη διδασκαλία των Μαθηματικών που αναφέρονται σε αυτό. Στη συνέχεια με αναφορές στο κείμενο, οι μαθητές απαντούν σε ερωτήσεις σχετικές με το μαθηματικό περιεχόμενο του κειμένου.
- Τη χρησιμοποίηση του κειμένου στο τέλος μιας μαθηματικής ενότητας. Στόχος αυτής της προσέγγισης είναι μέσω κατάλληλων ερωτήσεων να αναστοχαστούν οι μαθητές πάνω σε μαθηματικές έννοιες που έχουν διδαχθεί στη συγκεκριμένη ενότητα.
- Τη διερεύνηση από τους μαθητές των ερωτημάτων που προκύπτουν από τη μελέτη του κειμένου.
- Τη συγγραφή από τους μαθητές δικών τους ιστοριών, στις οποίες να περιλαμβάνονται τα Μαθηματικά που έχουν διδαχθεί.

Ο Triandafillidis (2006) προτείνει την παρουσίαση μαθηματικών εννοιών, οι οποίες προκύπτουν από τη δημιουργία ποιημάτων που γράφουν οι ίδιοι οι μαθητές. Εκτός από τις επιπτώσεις στον γνωστικό τομέα αναδεικνύονται έτσι και οι συναισθηματικοί και ψυχοκινητικοί παράμετροι της μαθησιακής διαδικασίας. Επιπλέον τα ποιήματα μπορούν να φανερώσουν τις ιδέες των μαθητών για τις μαθηματικές έννοιες, οι οποίες αποτελούν αντικείμενο διαπραγμάτευσης των ποιημάτων, για τις προσδοκίες, για τα συναισθήματα και για τις πρακτικές που συνδέονται με τη διδασκαλία των Μαθηματικών στην τάξη.

Σήμερα η ανάγνωση κειμένων στη διδασκαλία των Μαθηματικών έχει περιθωριακό χαρακτήρα και περιορίζεται συνήθως στην ανάγνωση των διδακτικών βιβλίων με στόχο να αποκτηθούν γνώσεις (ορισμοί, αποδείξεις, θεωρήματα, αξιώματα) καθώς και τεχνικές και μέθοδοι για την επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων, κατά κύριο λόγο σε ένα πλαίσιο αξιολόγησης. Οι μαθητές διαβάζουν για να κατανοήσουν, να μάθουν, να εφαρμόσουν αυτά που έμαθαν και τέλος να αξιολογηθούν από τον εκπαιδευτικό. Κάποια κείμενα αφηγηματικού χαρακτήρα που εμπεριέχονται στα σχολικά εγχειρίδια (ιστορικά σημειώματα για παράδειγμα) συνήθως δεν συμπεριλαμβάνονται στις δραστηριότητες της διδασκαλίας. Κάτω από αυτές τις συνθήκες δεν μπορεί να γίνεται λόγος για ανάγνωση και ερμηνεία κειμένων και για παραγωγή νοημάτων. Για τη ριζική τροποποίησή τους μια άλλη οργάνωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών απαιτείται, κυρίαρχο οργανωτικό στοιχείο της οποίας δεν μπορεί να είναι η αξιολόγηση. (Χασάπης, 2007).

Η ενιαιοποίηση της σχολικής γνώσης εξασφαλίζει την πολύπλευρη και πολυδιάστατη προσέγγιση ποικίλων θεμάτων. Μπορεί να παίξει καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη των γνωστικών και κριτικών δεξιοτήτων των μαθητών και μαθητριών, που θα τους βοηθήσουν να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις ενός σύγχρονου εκπαιδευτικού συστήματος και να γίνουν υπεύθυνοι και ενεργοί πολίτες, ευαισθητοποιημένοι στα προβλήματα της σύγχρονης πραγματικότητας. Η ανάγνωση των μαθηματικών κειμένων (τεχνικών ή αφηγηματικών) μπορεί να αποτελέσει ουσιαστικό συστατικό στοιχείο τόσο της διδασκαλίας όσο και της μάθησης των Μαθηματικών, ως δημιουργική μαθηματική δραστηριότητα δόμησης και παραγωγής νοημάτων, αναπτύσσοντας τη φαντασία, δημιουργώντας προκλήσεις για εναλλακτικές ερμηνείες και ένα περιβάλλον όπου ο μαθητής εμπλέκεται ηθελημένα και συμμετέχει ενεργά. Επιπλέον μέσα από τα κείμενα συχνά αναδεικνύεται μια ακόμη παράμετρος και ο ρόλος της στη διδασκαλία των Μαθηματικών, που δεν είναι άλλη από την Ιστορία των Μαθηματικών, με την αξιοποίηση της οποίας θα ασχοληθούμε παρακάτω.

1.2. Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση.

Η Ιστορία των Μαθηματικών και η σχέση της με τη Μαθηματική Εκπαίδευση ως γενική ιδέα είναι αρκετά παλιά. Η αξιοποίησή της στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών είναι ένα θέμα που έκανε την εμφάνισή του στους μαθηματικούς κύκλους κατά τον 19ο αιώνα και ιδιαίτερα κατά το δεύτερο μισό του. Οι μεγάλες κοινωνικές, οικονομικές και επιστημονικές ανακατατάξεις, οι οποίες τότε έλαβαν χώρα, επέβαλαν αλλαγές και στα εκπαιδευτικά συστήματα των αναπτυγμένων χωρών αρχικά και κατ' επέκταση και των υπολοίπων. Μέσα σε ένα τέτοιο περιβάλλον απόκτησε σταδιακά προτεραιότητα η προετοιμασία και η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, ακολουθούμενες από τη διερεύνηση και τον προβληματισμό σχετικά με ζητήματα παιδαγωγικά και διδακτικά, υποβοηθώντας έτσι και την εμφάνιση των πρώτων σπερμάτων για την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών σε διδακτικό επίπεδο. Μέσα από όσα αναφέρουν διαπρεπείς μαθηματικοί, καθηγητές Μαθηματικών, αλλά και διάφοροι φορείς (επιστημονικές ενώσεις, Υπουργεία Εκπαίδευσης) σημειώνονται διάφορες ιδέες αναφορικά με τη συσχέτιση των Μαθηματικών με την ιστορία τους.

1.2.1. Η Ιστορία των Μαθηματικών στη Μαθηματική Εκπαίδευση.

Ο όρος «Μαθηματική Εκπαίδευση», πολύ γενικά, αναφέρεται ως ένα σύνολο από κοινωνικές πρακτικές, που αναπτύσσονται σε πλαίσια τυπικά θεσμοθετημένα και άτυπα καθιερωμένα, έχοντας στόχο τη μάθηση κάθε είδους μαθηματικών γνώσεων και τεχνικών και παράλληλα ως ένα πεδίο επιστημονικής πρακτικής, το οποίο μελετάει και με τα αποτελέσματα του προσανατολίζει τις πρακτικές αυτές. Ο ορισμός αυτός δεν υπονοεί σε καμία περίπτωση ότι η μαθηματική γνώση υπάρχει ανεξάρτητα από τον άνθρωπο και τις δραστηριότητες του. Με αυτή την ευρεία έννοια ως Μαθηματική Εκπαίδευση μπορεί να νοηθεί, η ανάπτυξη κάθε είδους σχέσης των ανθρώπων με τη μαθηματική δραστηριότητα και τα αποτελέσματά της. Επομένως, τα Μαθηματικά, ως γνώση και δραστηριότητα και η διδακτική σχέση διδασκομένων και διδασκόντων αποτελούν συστατικά στοιχεία της μαθηματικής εκπαίδευσης (Χασάπης, 2005).

Ο διάλογος για τον ρόλο που μπορεί να διαδραματίσει η Ιστορία των Μαθηματικών στη Μαθηματική Εκπαίδευση έρχεται στο προσκήνιο μέσα από την έμφαση που δίνεται στη διαθεματικότητα και την ένταξη της στα Προγράμματα Σπουδών. Ο Freudenthal (1981) υπογραμμίζει την αξιοποίηση της ιστορίας των (διαφόρων) επιστημών ως ενιαία γνώση και όχι ως αντικείμενα καλά αποθηκευμένα σε ένα συρτάρι με την ταμπέλα τους, τα οποία ανοίγονται κάθε φορά που στο ωρολόγιο πρόγραμμα αναφέρεται η ιστορία συγκεκριμένου θέματος. Η συζήτηση για τη θέση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Μαθηματική Εκπαίδευση και για τη διδακτική της αξιοποίηση δεν είναι κάτι καινούργιο. Σύμφωνα με τον Χατζηκυριάκου (2006), η πρόταση για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών επανέρχεται από τότε που η μαθηματική πρακτική αποκτά λίγο ως πολύ καταγραμμένο και μελετημένο παρελθόν (δηλαδή ιστορία), αλλά συντελεί και στη διαμόρφωση του γνωστικού πεδίου της Ιστορίας των Μαθηματικών. Όπως επίσης αναφέρει ο Fauvel, (1991) για δεκαετίες, αν όχι αιώνες, αρκετές φωνές σε κάθε γενιά συμβούλευαν για την αξία και την αναγκαιότητα της αξιοποίησης της ιστορίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Επιπλέον η συζήτηση για τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών θα πρέπει να επικεντρωθεί στους τρόπους με τους οποίους αυτή μπορεί να ενσωματωθεί στις δραστηριότητες της τάξης, να κάνει τη διδασκαλία διάφορων ειδικών θεμάτων ευκολότερη και να αποζημιώνει μακροπρόθεσμα, για την παραπάνω δουλειά που πιθανόν στην αρχή απαιτείται, μέσα από τη βελτίωση της επίτευξης των στόχων της Μαθηματικής Εκπαίδευσης.

Ο Tymoczko (1986) επισημαίνει πως οι σύγχρονες φιλοσοφικές αντιλήψεις θεωρούν τα Μαθηματικά όχι μόνο ως το αποτέλεσμα των ειδικών μαθηματικών, αλλά και ως τη δραστηριότητα μέσω της οποίας παράγεται αυτό το αποτέλεσμα. Με αυτή την έννοια τα Μαθηματικά δεν αποτελούν μόνο ένα σύστημα γνώσεων αλλά και μια διαδικασία.

Αν δεχτούμε, λοιπόν, τα Μαθηματικά όχι μόνο ως περιεχόμενο πληροφοριακό, αλλά και ως διαδικασία σύλληψης, τεκμηρίωσης και οργάνωσης του περιεχομένου αυτού, σε κάθε προσπάθεια παρουσίασης ή διδασκαλίας τους, η επιλογή των περιεχομένων αλλά και της μεθόδου, είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την κατανόηση αυτής της διαδικασίας σύλληψης, τεκμηρίωσης και οργάνωσης των επιμέρους μαθηματικών γνώσεων (Τζανάκης & Κούρκουλος, 2000).

Μέσα στις πρακτικές διδασκαλίας αντικατοπτρίζονται, σε μεγάλο βαθμό, οι απόψεις των διδασκόντων για το τι είναι τα Μαθηματικά. Η συνήθης άποψη για τα Μαθηματικά δίνει έμφαση στο τελικό «προϊόν» της μαθηματικής δημιουργίας με συνέπεια στην καθημερινή διδακτική πράξη να συντηρούνται αντίστοιχες πρακτικές. Ασφαλώς αυτό το τελικό «προϊόν» αποτελεί σημαντικό τμήμα των Μαθηματικών, αφού μπορεί να διατυπώνεται κατά τρόπο σαφή και κατηγορηματικό, αλλά η έμφαση στα αποτελέσματα και ο τρόπος παρουσίασής τους (με τυπική και απαγωγικά δομημένη μορφή) υποβαθμίζει τη διαδικασία μέσω της οποίας φθάνουμε σε αυτά.

Ερευνητικά δεδομένα (Τζεκάκη, 2000), που αφορούν στις επιδόσεις και τις δυσκολίες μαθητών (ηλικίας 11-16 ετών) από ελληνικά σχολεία σε βασικούς τομείς του Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών, καταδεικνύουν ότι στο τέλος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης πολλοί μαθητές δεν έχουν κατορθώσει να αποκτήσουν βασικές μαθηματικές γνώσεις. Συνολικά μπορεί να αναφερθεί ότι το επίπεδο των μαθηματικών γνώσεων των μαθητών, τόσο στο τέλος του Δημοτικού όσο και στο τέλος του Γυμνασίου είναι αρκετά χαμηλό. Η διαπίστωση αυτή δίνει μια μάλλον κακή εικόνα για τη Μαθηματική Εκπαίδευση στα ελληνικά σχολεία. Αυτό που έχει όμως σημασία είναι ότι μεγάλος αριθμός δυσκολιών που συναντούν οι μαθητές στα Μαθηματικά, οφείλεται περισσότερο στις πρακτικές διδασκαλίας και λιγότερο στη φύση του αντικειμένου ή στις γνωστικές ικανότητες των μαθητών. Ως εκ τούτου, οι στόχοι της Μαθηματικής Εκπαίδευσης για τους περισσότερους μαθητές είναι αδύνατον να προσεγγισθούν. Μόνο για τους λίγους η Μαθηματική Εκπαίδευση απελευθερώνει και φωτίζει το κρυμμένο δυναμικό των Μαθηματικών.

Η Confrey (1990) μελετώντας τις επιπτώσεις του εποικοδομητισμού στη διδασκαλία υποστηρίζει ότι τα Μαθηματικά προέρχονται όχι από τα αισθητηριακά δεδομένα αλλά από την ανθρώπινη δραστηριότητα, είναι η γλώσσα της ανθρώπινης δραστηριότητας, μέτρηση, ταξινόμηση, κατάταξη, σύγκριση κ.ά. Οπότε για τη δημιουργία μιας τέτοιας γλώσσας απαιτείται μια αναστοχαστική διαδικασία πάνω στην ίδια τη δραστηριότητα, αποκτώντας την ικανότητα για απόδοση των σκέψεων με σύμβολα και σχήματα. Σε ένα τέτοιο μαθησιακό περιβάλλον όπου θα αναδεικνύονται οι σχέσεις Μαθηματικών και πραγματικού κόσμου αλλά και το πλαίσιο ως τρόπος ενεργοποίησης των μαθητών απέναντι σε προβλήματα (Herrera & Owens, 2001) η Ιστορία των Μαθηματικών είναι δυνατόν να αξιοποιηθεί κατάλληλα, ώστε να διαδραματίσει ουσιαστικό ρόλο στη Μαθηματική Εκπαίδευση.

Την ανάγκη μελέτης του ρόλου της ιστορίας στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών επισημαίνει ο Bagni (2004), ο οποίος συμπεραίνει ότι η μαθηματική γνώση, η διδακτική ικανότητα, οι παιδαγωγικές δεξιότητες και η ιστορική γνώση δεν μπορούν να υπάρχουν μεμονωμένα, ενώ οι μεταξύ τους σχέσεις αντανακλούν σημαντικές επιστημολογικές παραδοχές για τη σύνδεση μαθηματικού περιεχομένου, ιστορικών στοιχείων και εκπαιδευτικών χρήσεών τους. Αν τα Μαθηματικά θεωρηθούν ως ένα είδος πολιτισμικής δημιουργίας, τότε η μελέτη της ιστορίας τους μπορεί να γίνει ένα μέσο για την καλύτερη κατανόηση των σχέσεων του ανθρώπινου γένους και της μαθηματικής γνώσης, στο πλαίσιο ενός γενικότερου ιστορικού γίγνεσθαι. Προς αυτή την κατεύθυνση, η σύζευξη διάφορων διδακτικών αντικειμένων στο σχολικό περιβάλλον, μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να προσεγγίσουν τα Μαθηματικά ως ζωντανή διαδικασία επεξεργασιών και εξέλιξης (άμεσα συνδεδεμένης με το πολιτισμικό περιβάλλον στο οποίο αναπτύσσονται), να αναπτύξουν ερευνητικές πρωτοβουλίες, να συσχετίσουν γεγονότα, να κατανοήσουν την αλληλεξάρτηση των επιστημονικών κλάδων και να διαπιστώσουν ότι η γνώση είναι προϊόν της ανθρώπινης δραστηριότητας στην ιστορική διαδρομή.

Παραμένει, επομένως, επίκαιρη η πρόταση που κατέθεσαν πολλοί ερευνητές και καταγράφεται στην διεθνή βιβλιογραφία (Fauvel & van Maanen, 1997), για συνεργασία ανάμεσα σε ιστορικούς των Μαθηματικών, σχεδιαστές αναλυτικών προγραμμάτων και μαχόμενους εκπαιδευτικούς όλων των βαθμίδων, με στόχο την επεξεργασία ενός πλαισίου για την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Μαθηματική Εκπαίδευση. Ενός πλαισίου, το οποίο εκτός από τη φιλοσοφία ενός τέτοιου προσανατολισμού, θα καταγράφει, θα συγκεκριμενοποιεί και θα συνδέει «στιγμές» της ιστορίας με τα τρέχοντα αναλυτικά προγράμματα. Σύμφωνα με τη Furinghetti (1997), η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών και η μελέτη της αποτελεσματικότητάς της στη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών απαιτεί συστηματική προσέγγιση, η οποία θα βασίζεται στη συνεισφορά ερευνητών της Μαθηματικής Εκπαίδευσης και ερευνητών της Ιστορίας των Μαθηματικών.

Όσα προαναφέρθηκαν παρουσιάζουν μια προσπάθεια προκειμένου να αναζητηθεί η χρησιμότητα της ιστορίας στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών και να αναδειχθούν τα οφέλη από τη διδακτική αξιοποίησή της, δημιουργώντας έτσι και ένα ιδιαίτερα ενεργό ερευνητικό πεδίο. Γύρω από την κεντρική ιδέα για τη χρήση της ιστορίας ως παράγοντα κινητοποίησης των μαθητών, προκειμένου να ασχοληθούν με ορισμένες μαθηματικές έννοιες, έχουν αναπτυχθεί διάφορες απόψεις σχετικά με τις δυσκολίες που παρουσιάζει η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη, τους λόγους και τους τρόπους αξιοποίησή της, αλλά και τη δυνατότητα των εκπαιδευτικών που διδάσκουν Μαθηματικά να ανταπεξέλθουν σε αυτόν το ρόλο.

1.2.2. Βασικά επιχειρήματα, αντιρρήσεις και τρόποι για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών.

Οι πρώτες συζητήσεις για την επιστημολογική και φιλοσοφική προσέγγιση της ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών ξεκίνησαν από την εφαρμογή του λεγόμενου «βιογενετικού νόμου» και της έννοιας του «ιστορικού παραλληλισμού» στη διδασκαλία των Μαθηματικών και οδήγησαν στην παραγωγή πολυάριθμων ερευνών και μελετών. Αυτές ανέδειξαν νέες θεωρητικές και ερευνητικές διαστάσεις για το εν λόγω θέμα, του οποίου οι βασικές τάσεις συνδέονται με τα ονόματα των Jean Piaget, Hans Freudenthal και Guy Brousseau. Οι τρεις κυρίαρχες κατευθύνσεις (Θωμαΐδης, 2014), που συνοψίζουν επιγραμματικά το θεωρητικό πλαίσιο των εφαρμογών της Ιστορίας των Μαθηματικών στα ζητήματα διδασκαλίας και μάθησης είναι:

- Τα στάδια της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών αντιστοιχίζονται με τα στάδια της ατομικής γνωστικής ανάπτυξης, με στόχο την πληρέστερη κατανόηση των διαδικασιών μάθησης (Piaget).
- Η διδακτική αξιοποίηση των συνθηκών ανακάλυψης των μαθηματικών εννοιών, με στόχο την «εκ νέου επινόησή» τους από τους μαθητές μέσω της επίλυσης ρεαλιστικών προβλημάτων (Freudenthal).
- Ο εντοπισμός γνώσεων – εμποδίων και η ανάλυση των συνθηκών για την υπέρβασή τους, με στόχο τη δημιουργία ανάλογων διδακτικών καταστάσεων (Brousseau).

1.2.2.α. Επιχειρήματα υπέρ της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών.

Στη βιβλιογραφία της Μαθηματικής Εκπαίδευσης περιλαμβάνεται ένας **μεγάλος αριθμός από επιχειρήματα υπέρ της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών** και της ενσωμάτωσής της στην καθημερινή διδακτική διαδικασία της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών.

Στην κατηγοριοποίηση των επιχειρημάτων αυτών, με σκοπό να στηριχθεί, να εμπλουτιστεί και να βελτιωθεί η διδασκαλία και η μάθηση των Μαθηματικών, **περιλαμβάνονται οι παρακάτω κατηγορίες**, για τις οποίες αντλήθηκαν στοιχεία κατά βάση από τις εργασίες Tzanakis, Arcavi et al. (2000) και Τζανάκης (2009):

1. Η εκμάθηση των Μαθηματικών:

α. Η ιστορική ανάπτυξη των Μαθηματικών σε αντιπαραβολή με το τελικό στιλβωμένο προϊόν, το οποίο γίνεται αποδεκτό από την επιστημονική κοινότητα. Σε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες αγνοείται συστηματικά το γεγονός ότι οι μαθηματικές ιδέες, όπως ο Freudenthal (1983) επεσήμανε, ποτέ δεν δημοσιεύτηκαν με τον τρόπο που ανακαλύφθηκαν. Αυτό δεν επιτρέπει στον διδασκόμενο να εκτιμήσει την ανθρώπινη διάσταση των μαθηματικών ανακαλύψεων και να αναπτύξει μέσα από αυτή μεταγνωστικές ικανότητες και δεξιότητες.

β. Η ιστορία ως πηγή πληροφοριών, καθώς είναι εύκολα προσβάσιμη και μας τροφοδοτεί με σωρεία προβλημάτων, παραδειγμάτων και καταστάσεων, προκειμένου να εμπλουτισθεί η διαδικασία της μάθησης και να κινητοποιηθούν διδάσκοντες και διδασκόμενοι.

γ. Η ιστορία ως γέφυρα μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων επιστημονικών πεδίων, αφού μέσω αυτής μπορούν να αναδειχθούν συσχετίσεις και αλληλεπιδράσεις άλλων επιστημών με τα Μαθηματικά, που συνδέονται με την ανάπτυξη και την εξέλιξή τους, αλλά δεν αναφέρονται κατά τη διδασκαλία τους. Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία σε μια εποχή που οι διαχωριστικές γραμμές μεταξύ των επιστημών έχουν σχεδόν εξαφανιστεί.

δ. Η γενικότερη παιδευτική σημασία της ιστορίας μέσα από τη συμμετοχή σε εργασίες με ιστορικό προσανατολισμό, που δίνει στους διδασκόμενους τη δυνατότητα να αναπτύξουν γενικότερες δεξιότητες και ικανότητες (ανάγνωση και κατανόηση κειμένων, αναζήτηση και διερεύνηση πηγών, γραπτή και προφορική παρουσίαση των αποτελεσμάτων της διερεύνησης, ανάπτυξη επιχειρηματολογίας, απόδοση κειμένου άλλης γλώσσας ή παλαιότερης εποχής στη σύγχρονη γλώσσα). Έτσι δεν ασχολούνται μόνο με το να «κάνουν Μαθηματικά», αλλά ασκούνται και στο να «μιλούν για τα Μαθηματικά».

2. Η φύση των Μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας:

α. Το περιεχόμενο των Μαθηματικών. Η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να κάνει περισσότερο αντιληπτή την εξελικτική πορεία της μαθηματικής γνώσης και να συμβάλει στην ανάπτυξη μεταγνωστικών και αυτοβελτιωτικών ικανοτήτων και πρακτικών στους μαθητές, καθώς αυτοί διαπιστώνουν ότι οι ευρετικές διαδικασίες (εικασίες, αμφιβολίες, λάθη, ελλιπείς διατυπώσεις, αποδείξεις, αδιέξοδα) αποτελούν αναπόσπαστο μέρος των μαθηματικών.

β. Η μορφή των Μαθηματικών. Η εξέλιξη των Μαθηματικών (ως προς το περιεχόμενο, το συμβολισμό, την ορολογία, τις υπολογιστικές μεθόδους, τους τρόπους έκφρασης, τις αναπαραστάσεις) μπορεί να γίνει καλύτερα κατανοητή από τους διδασκόμενους μέσα από την Ιστορία των Μαθηματικών, η οποία επίσης μπορεί να βοηθήσει και στη γνωριμία με τα πλεονεκτήματα αλλά και τα μειονεκτήματα των σύγχρονων

Μαθηματικών.

3. Η κατάρτιση και το παιδαγωγικό ρεπερτόριο των εκπαιδευτικών:

α. Προσδιορισμός κινήτρων. Οι διδάσκοντες μέσα από τη μελέτη της Ιστορίας των Μαθηματικών μπορούν να αναφερθούν στους τρόπους γέννησης και εξέλιξης μιας μαθηματικής έννοιας, μεθόδου ή θεωρίας, πράγμα που εμπεριέχει και τα κίνητρα πίσω από την εισαγωγή της νέας γνώσης, τα προβλήματα που οδήγησαν σε αυτήν και τις προσπάθειες, επιτυχείς ή ανεπιτυχείς για την αντιμετώπισή τους.

β. Δυσκολίες και εμπόδια. Μέσα από την Ιστορία των Μαθηματικών ο εκπαιδευτικός μπορεί να γνωρίσει τις δυσκολίες και τα εμπόδια μιας μαθηματικής έννοιας ή μεθόδου και να χρησιμοποιήσει τη γνώση αυτή όταν ίδιες ή παρόμοιες δυσκολίες και εμπόδια επανεμφανιστούν στη σχολική τάξη. Επίσης, μπορεί να εκτιμήσει τα υπέρ και τα κατά στην παρουσίαση ενός θέματος σε κάθε βαθμίδα εκπαίδευσης.

γ. Εμπλοκή και συνειδητοποίηση της δημιουργικής διαδικασίας «κάνω Μαθηματικά». Η μαθηματική παιδεία διδασκόντων και διδασκομένων εμπλουτίζεται, καθώς έρχονται σε επαφή με πρωτότυπες πηγές ή ασχολούνται με εργασίες που έχουν προσανατολισμό προς την ιστορία.

δ. Εμπλουτισμός διδακτικού ρεπερτορίου. Η μεγάλη ποικιλία προβλημάτων, ερωτημάτων, εξηγήσεων, καταστάσεων, που οι εκπαιδευτικοί μπορούν να αντλήσουν από την Ιστορία των Μαθηματικών εμπλουτίζει το διδακτικό τους ρεπερτόριο, προσφέροντας εναλλακτικές προσεγγίσεις στην επίλυση προβλημάτων ή στην παρουσίαση κάποιου θέματος και κινητοποιεί περισσότερο τους μαθητές.

ε. Αποκωδικοποίηση και κατανόηση μη συμβατικά διατυπωμένων αλλά εν τέλει «σωστών» Μαθηματικών. Η επαφή με πρωτογενείς ή και με δευτερογενείς πηγές ασκεί τους εκπαιδευτικούς στην αποκωδικοποίηση και κατανόηση «σωστών» εν τέλει Μαθηματικών που έχουν διατυπωθεί με διαφορετική από τη σύγχρονη μαθηματική γλώσσα, ευαισθητοποιώντας τους έτσι απέναντι στην ιδιοσυγκρασιακή γλώσσα που οι μαθητές τους χρησιμοποιούν.

4. Η συναισθηματικά θετική προδιάθεση προς τα Μαθηματικά:

α. Η θεώρηση των Μαθηματικών ως ανθρώπινης προσπάθειας. Η ιστορική διάσταση στην εκμάθηση των Μαθηματικών δίνει τη δυνατότητα να γίνει αντιληπτό ότι τα Μαθηματικά δεν είναι ένα τελειωμένο θεόσταλτο προϊόν, ένα σύστημα άκαμπτων κανόνων αλλά μια ανθρώπινη δραστηριότητα και επινόηση. Επίσης, ότι η εξέλιξή τους επηρεάζεται από εξωγενείς και ενδογενείς παράγοντες και απαιτεί εξαιρετική διανοητική προσπάθεια.

β. Επιμονή σε ιδέες, διατύπωση ερωτημάτων, προώθηση ερευνητικής δραστηριότητας. Η γνωριμία με παραδείγματα, ιδέες και ερωτήματα που δεν αποτελούν οργανικό κομμάτι των σύγχρονων Μαθηματικών (συνετέλεσαν όμως στην υλοποίηση των απαραίτητων βημάτων για την ιστορική εξέλιξή τους προς τη σημερινή τους μορφή) ενθαρρύνουν τους διδασκόμενους να τολμούν τη διατύπωση των δικών τους ιδεών, ερωτημάτων, δραστηριοτήτων και να αναπτύξουν δημιουργικούς ή ακόμα και ιδιόρρυθμους τρόπους μαθηματικής σκέψης, όπως συνέβαινε και στο παρελθόν.

γ. Η αποφυγή της απογοήτευσης λόγω αποτυχιών, λαθών, αβεβαιότητας ή παρανοήσεων. Η Ιστορία των Μαθηματικών παρέχει στους διδασκόμενους τη δυνατότητα να αντιληφθούν τον δημιουργικό ρόλο του λάθους, της παρανόησης ή της αποτυχημένης προσπάθειας και τους ενθαρρύνει να προχωρήσουν στη δική τους περιπέτεια έρευνας και στη μαθηματική τους ωρίμανση, χωρίς να απογοητεύονται από την πιθανότητα αποτυχίας ή λάθους.

5. Η αναγνώριση των Μαθηματικών ως πολιτιστικής ανθρώπινης προσπάθειας:

α. Τα Μαθηματικά εξελισσόμενα για εσωτερικούς λόγους. Μέσα από την ιστορία μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι τα Μαθηματικά δεν εξελίσσονται μόνο για πρακτικούς και ωφελιμιστικούς λόγους προς εξυπηρέτηση της κοινωνίας αλλά και για καθαρά εσωτερικούς λόγους, αισθητικών αναζητήσεων (για παράδειγμα ενοποίησης εννοιών και γνωστικών τομέων, ταξινόμησης, λογικής πληρότητας, συμμετρίας, κομψής έκφρασης και λοιπά), διανοητικής περιέργειας και πρόκλησης και καθαρής ευχαρίστησης.

β. Τα Μαθηματικά εξελισσόμενα υπό την επίδραση κοινωνικών και πολιτιστικών παραγόντων. Συμπληρωματικά προς τα προαναφερθέντα, μέσα από την Ιστορία των Μαθηματικών είναι δυνατόν να διακρίνει κανείς την εξέλιξή τους λόγω διάφορων εξωγενών παραγόντων, οι οποίοι μπορεί να προέρχονται από άλλα επιστημονικά πεδία (για παράδειγμα Φυσική), από συγκεκριμένες πρακτικές ανάγκες της κοινωνίας ή από το εκάστοτε πολιτιστικό πλαίσιο όπου υπήρχαν συγκεκριμένοι περιορισμοί και επιταγές.

γ. Τα Μαθηματικά ως μέρος της τοπικής και πολιτιστικής παράδοσης. Μέσα από την ιστορία διδάσκοντες και διδασκόμενοι μπορούν να αντιληφθούν ότι τα Μαθηματικά, αν και σήμερα συχνά θεωρούνται αποτέλεσμα του δυτικού πολιτισμού, εξελίχθηκαν ως αποτέλεσμα πολλών διαφορετικών τάσεων και παραδόσεων που αναπτύχθηκαν και μπορεί ακόμα να υφίστανται σε κάποια μορφή. Αυτές οι πολιτισμικές διαστάσεις μπορούν να αξιοποιηθούν στη διδασκαλία προκειμένου να αναπτυχθεί ανοχή και σεβασμός προς τις διαφορετικές κουλτούρες που πιθανό να συνυπάρχουν μέσα σε μια τάξη, αλλά και για να αναδειχθεί ο τοπικός πολιτισμός και η τοπική κουλτούρα.

1.2.2.β. Αντιρρήσεις για την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών.

Εκτός από τα επιχειρήματα υπέρ της ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους, έχουν διατυπωθεί από τους εκπαιδευτικούς της πράξης και τους ερευνητές του χώρου της Διδακτικής αλλά και από τους ιστορικούς των Μαθηματικών **σοβαρές ενστάσεις για την αποτελεσματικότητα, τη σκοπιμότητα και το θεμιτό της ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση**. Τα επιχειρήματα κατά της αξιοποίησης της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική διαδικασία κατηγοριοποιούνται στις παρακάτω δύο κατηγορίες (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009):

Α. Ενστάσεις επιστημολογικού – φιλοσοφικού χαρακτήρα.

Στις ενστάσεις αυτές έχουμε δύο υποκατηγορίες:

1. Σχετικά με τη φύση των Μαθηματικών.

α. Αυτά δεν είναι Μαθηματικά. Για τη διδασκαλία της Ιστορίας των Μαθηματικών πρέπει πρώτα να διδαχθούν τα ίδια τα Μαθηματικά. Η σειρά είναι: Πρώτα διδάσκει κανείς το θέμα από τα Μαθηματικά και κατόπιν την ιστορία του (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009).

Αυτή η ένσταση παραπέμπει στην επιστημολογική θέση ότι τα Μαθηματικά ταυτίζονται με τα αποτελέσματα στα οποία η επιστημονική κοινότητα οδηγείται, χωρίς να συμπεριλαμβάνονται οι διαδικασίες που οδήγησαν σε αυτά (Τζανάκης, 2009).
β. Η πρόοδος στα Μαθηματικά συνίσταται στο να γίνονται τα δύσκολα προβλήματα ρουτίνα. Επομένως, δεν υπάρχει λόγος να ασχολείται κανείς με όσα έγιναν στο παρελθόν (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009).
γ. Αυτά που έγιναν στο παρελθόν μπορεί να ήταν περίπλοκα. Συνεπώς, υπάρχει πιθανότητα η ενσωμάτωσή τους στη διδασκαλία να προκαλέσει στους μαθητές στρεβλώσεις και σύγχυση μάλλον, παρά να συμβάλει στην αποσαφήνιση εννοιών (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009).
Η συγκεκριμένη ένσταση, όπως και η προηγούμενη, υπονοούν ότι η ιστορική διάσταση στη μαθηματική εκπαίδευση είναι στην ουσία η ενσωμάτωση της ιστορίας με όλη την περιπλοκότητα και όλες τις λεπτομέρειές της (Τζανάκης, 2009).
2. Σχετικά με τις ενδογενείς δυσκολίες του εγχειρήματος.
α. Η ανάγνωση πρωτότυπων κειμένων είναι δύσκολος στόχος και δεν βοηθά. Η αξιοποίηση πρωτότυπων πηγών απαιτεί προσεχτικό σχεδιασμό αλλά και συνεχή έλεγχο σε όλα της τα στάδια (Siu, 2006; Τζανάκης, 2009). Για το συγκεκριμένο θέμα βέβαια, υπάρχει σχετικά πλούσια βιβλιογραφία με μεθοδολογικές προσεγγίσεις και εφαρμογές σε διάφορες περιοχές των Μαθηματικών και για διαφορετικές εκπαιδευτικές βαθμίδες (Τζανάκης, 2009).
β. Η ιστορία είναι δυνατό να οδηγήσει τελικά στην καλλιέργεια πολιτιστικού σωβινισμού και στενόμυαλου και παρωχημένου εθνικισμού (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009). Ο ανεπίτρεπτος ή μη ηθικός τρόπος που ενδεχομένως να χρησιμοποιηθεί η ιστορία δεν είναι λογικό να οδηγεί στην απόρριψη της διδακτικής αξιοποίησής της (Τζανάκης, 2009).
γ. Οι μαθητές, τουλάχιστον μέχρι το Γυμνάσιο, έχουν αποσπασματική αίσθηση του ιστορικού χρόνου (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Τζανάκης, 2009), καθώς αδυνατούν να συσχετίσουν τα Μαθηματικά με το ιστορικό τους πλαίσιο, λόγω έλλειψης ευρύτερης παιδείας στην ιστορική επιστήμη (Tzanakis, Arcavi et al., 2000). Για το λόγο αυτό η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη θα πρέπει να συμβαδίζει με το επίπεδο της γνωστικής ωριμότητας των μαθητών και με το ιστορικό τους υπόβαθρο (Τζανάκης, 2009).
Β. Ενστάσεις πρακτικού και διδακτικού χαρακτήρα.
Στις ενστάσεις αυτές έχουμε τρεις υποκατηγορίες:
1. Το υπόβαθρο και η στάση των διδασκόντων.
α. Δεν υπάρχει διαθέσιμος ο απαιτούμενος διδακτικός χρόνος (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009). Απαιτείται σχεδιασμός μαθηματικών ενοτήτων που μπορούν να διδαχθούν μέσω μιας ιστορικής προσέγγισης και ανάλογη προσαρμογή των αναλυτικών προγραμμάτων (Θωμαΐδης & Τζανάκης, 2006). Εξάλλου, θα πρέπει να αποσαφηνιστεί ότι είναι ανέφικτη και μη αναγκαία μια διδακτική προσέγγιση βασισμένη στην ιστορία για το σύνολο της διδακτέας ύλης (Τζανάκης, 2009).
β. Οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν την κατάλληλη επιμόρφωση (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009) και δεν διαθέτουν την ιστορική αλλά και τη

διεπιστημονική γνώση που είναι απαραίτητη για την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη (Tzanakis, Arcavi et al., 2000). Για το λόγο αυτό η σχετική επιμόρφωση των εκπαιδευτικών κρίνεται απαραίτητη (Τζανάκης, 2009).

γ. Δεν είμαι ιστορικός, άρα δεν μπορώ να ξέρω ότι παρουσιάζω το θέμα σωστά (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009). Συμπληρωματικά με το προηγούμενο επιχείρημα η έλλειψη της κατάλληλης επιμόρφωσης οδηγεί στην έλλειψη της απαραίτητης αυτοπεποίθησης στους εκπαιδευτικούς για την ενσωμάτωση της ιστορίας στη διδακτική πράξη (Tzanakis, Arcavi et al. 2000).

δ. Δεν υπάρχει διαθέσιμο το κατάλληλο διδακτικό υλικό (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009). Τα τελευταία χρόνια βέβαια, έχει δημιουργηθεί από ερευνητές σχετικό βοηθητικό υλικό σε διάφορες μορφές (εκτενής βιβλιογραφία, βιβλία με πρωτότυπες πηγές, συλλογικοί τόμοι με λεπτομερείς περιγραφές συγκεκριμένων παραδειγμάτων ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση, και λοιπά), το οποίο μπορεί να αξιοποιηθεί στη διδακτική πράξη από τους εκπαιδευτικούς (Τζανάκης, 2009).

2. Διαδικασίες αξιολόγησης.

α. Πώς μπορεί να ενσωματωθεί η ιστορική διάσταση σε test ή εξετάσεις (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009); Δεν υπάρχει σαφής ή συνεπής τρόπος αξιολόγησης των στοιχείων από την Ιστορία των Μαθηματικών στα πλαίσια της αξιολόγησης των μαθητών. Για το λόγο αυτό αναμένεται ότι οι μαθητές δεν θα την εκτιμήσουν ούτε και θα δώσουν την απαραίτητη σημασία και προσοχή σε αυτήν (Tzanakis, Arcavi et al., 2000).

β. Υπάρχει πράγματι εμπειρική τεκμηρίωση ότι η ιστορική διάσταση στη Μαθηματική Εκπαίδευση βελτιώνει την εκμάθηση των Μαθηματικών (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009); Τα τελευταία χρόνια γίνεται σοβαρή προσπάθεια προς αυτή την κατεύθυνση, μέσα από εμπειρικές έρευνες και διδασκαλίες με στόχο την επαρκή τεκμηρίωση της αποτελεσματικότητας της ιστορικής διάστασης στη μαθηματική εκπαίδευση, πράγμα για το οποίο απαιτείται να διανυθεί ακόμη πολύς δρόμος (Τζανάκης 2009).

3. Το υπόβαθρο και η στάση των διδασκομένων.

α. Δεν αρέσει στους διδασκόμενους (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009).

β. Οι διδασκόμενοι το θεωρούν μάθημα Ιστορίας και δεν αγαπούν την Ιστορία (Siu, 2006; Τζανάκης, 2009).

γ. Οι διδασκόμενοι το βρίσκουν εξίσου βαρετό με τα ίδια τα Μαθηματικά (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Siu, 2006; Τζανάκης, 2009).

δ. Οι διδασκόμενοι δεν έχουν ικανοποιητική ευρύτερη παιδεία για να το εκτιμήσουν (Siu, 2006; Τζανάκης, 2009).

Οι ενστάσεις που προαναφέρθηκαν δεν περιορίζονται στη Μαθηματική Εκπαίδευση. Μέσα από αυτές εκφράζονται ευρύτερα προβλήματα και δυσλειτουργίες στην εκπαίδευση (Τζανάκης, 2009). Συνεπώς, έμμεσα υπογραμμίζεται η ανάγκη για παρέμβαση στη διδασκαλία και της ιστορίας αλλά και για διαθεματική προσέγγιση σε μέρος, τουλάχιστον, της διδακτέας ύλης (Θωμαΐδης & Τζανάκης, 2006; Τζανάκης, 2009).

Ο Jankvist (2009) αναφέρει, σχολιάζοντας τις παραπάνω ενστάσεις, ότι:

- οι Α.1.α και Α.1.β απλά απορρίπτουν την ενσωμάτωση της ιστορίας ως μη σημαντική για τη μαθηματική διδασκαλία.
- οι Α.2.β, Α.2.γ, Β.1.α, Β.1.β, Β.1.δ και Β.2.α απορρίπτουν τη χρήση της ιστορίας για άλλους λόγους αν και αναγνωρίζουν τη δυνατότητα ενσωμάτωσής της.
- οι Α.1.γ, Β.3.α, Β.3.β και Β.3.γ αντιτίθενται κατά κάποιο τρόπο στα επιχειρήματα υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας που θέτουν ως στόχο την κινητοποίηση των μαθητών (Jankvist, 2009).

1.2.2.γ. Η ιστορική διάσταση στη Μαθηματική Εκπαίδευση.

Μια άλλη ταξινόμηση των επιχειρημάτων που αναφέρθηκαν παραπάνω αφορά τον σκοπό για τον οποίο αξιοποιείται η Ιστορία των Μαθηματικών. Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή οι χρήσεις της ιστορίας μπορεί να είναι:

Η χρήση της ιστορίας ως **εργαλείο**, που αναφέρεται σε ζητήματα τα οποία αφορούν στο εσωτερικό των Μαθηματικών (in-issues) και σχετίζονται με τις μαθηματικές έννοιες, τις θεωρίες, τους κλάδους, τις μεθόδους, και λοιπά. Για παράδειγμα, η μάθηση σχετικά με τα σύνολα των αριθμών (N, Z, Q, R, C), τις μεταξύ τους σχέσεις, τον πληθικό αριθμό τους, και λοιπά, θεωρείται ότι είναι μια μελέτη των in-ζητημάτων των Μαθηματικών (Jankvist, 2009). Στην περίπτωση αυτή η ιστορική διάσταση εμφανίζεται ως βοήθημα- βοηθητικό μέσο, που αφορά στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών.

Για τη χρήση της ιστορίας ως εργαλείο τα πιο χαρακτηριστικά επιχειρήματα είναι αυτά που απαντώνται στη βιβλιογραφία ως «εξελικτικά» (evolutionary), σύμφωνα με τα οποία η μάθηση των Μαθηματικών συνδέεται απόλυτα με την ιστορία τους. Στο πιο ξεκάθαρο από αυτά, το επιχείρημα της «ανακεφαλαίωσης», αναφέρεται ότι η οντογένεση (η ανάπτυξη, δηλαδή, ενός οργανισμού) αποτελεί μια σύντομη επανάληψη ή ανακεφαλαίωση της φυλογένεσης (της εξέλιξης, δηλαδή, του αντίστοιχου γένους-είδους). Μέσω αυτής της μεταφοράς υποστηρίχθηκε ότι η γνωστική ανάπτυξη ενός ατόμου ανακεφαλαιώνει την ανάπτυξη του ανθρώπινου γένους και επομένως η διδασκαλία των Μαθηματικών θα πρέπει να ακολουθεί την ιστορική τους πορεία και να ενσωματώνει στοιχεία από αυτήν. Πρέπει δηλαδή το μυαλό και η σκέψη κάποιου, που μαθαίνει Μαθηματικά, να περάσει από τα στάδια εκείνα που τα Μαθηματικά πέρασαν κατά την πορεία της εξέλιξής τους και αυτό αφορά όχι μόνο τα Μαθηματικά στο σύνολό τους, αλλά και τις μαθηματικές έννοιες και θεωρίες. Πολλές φορές το επιχείρημα αυτό συνδέεται με τον «ιστορικό παραλληλισμό», ο οποίος σχετίζεται με την παρατήρηση των δυσκολιών και των εμποδίων που παρουσιάστηκαν στην ιστορία, όπως αυτά εμφανίζονται μέσα στη σύγχρονη σχολική τάξη, επιχειρώντας τη συσχέτιση της ιστορικής γέννησης και εξέλιξης μιας μαθηματικής έννοιας με τον τρόπο που αυτή προσλαμβάνεται από τους μαθητές (Farmaki & Paschos, 2007; Tzanakis & Kourkoulos, 2007; Thomaidis & Tzanakis 2007).

Η χρήση της ιστορίας ως εργαλείο συνδέεται, επίσης, με επιχειρήματα σύμφωνα με τα οποία η ιστορία μπορεί:

- Να αποτελέσει παράγοντα κινητοποίησης των μαθητών και να εγείρει το ενδιαφέρον τους για μάθηση και μελέτη των Μαθηματικών (Farmaki & Paschos, 2007).
- Να δώσει στα Μαθηματικά ένα πιο ανθρώπινο πρόσωπο, να τα κάνει ίσως λιγότερο «τρομακτικά» και να βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν αυτοπεποίθηση και άνεση, διαπιστώνοντας ότι και οι σπουδαίοι μαθηματικοί του παρελθόντος αντιμετώπισαν τις ίδιες δυσκολίες και χρειάστηκαν χρόνο και προσπάθεια για τις ξεπεράσουν (Tzanakis & Thomaidis, 2000; Jankvist, 2009).
- Να προσφέρει μια διαφορετική άποψη και ένα διαφορετικό τρόπο παρουσίασης μιας μαθηματικής ενότητας (Jahnke, 2001; Kleiner, 2001). Μπορεί, επίσης, να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να δουν διαφορετικά κάποια μαθηματικά θέματα μέσα από τα μάτια και τις δυσκολίες των μαθητών τους (Jankvist, 2009).
- Να βοηθήσει στην ανίχνευση, την ταυτοποίηση και την υπερπήδηση των επιστημολογικών εμποδίων (Brousseau, 1997).

Η χρήση της ιστορίας ως **στόχος** αναφέρεται σε θέματα που αφορούν τη φύση, το ρόλο και τη σημασία των Μαθηματικών, τα οποία μπορούμε να ονομάσουμε μετα-ζητήματα (meta-issues) (Τζανάκης, 2009; Jankvist, 2009). Στην περίπτωση αυτή η ιστορική διάσταση αφορά σε ζητήματα για τα ίδια τα Μαθηματικά (Τζανάκης, 2009). Με τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών ως στόχου, η μάθηση της Ιστορίας των Μαθηματικών υπηρετεί τη μάθηση αυτής της ίδιας, σαν να ήταν δηλαδή ένα ανεξάρτητο επιστημονικό αντικείμενο.

Χρησιμοποιώντας την ιστορία ως στόχο, μπορούμε να δείξουμε στους μαθητές ότι τα Μαθηματικά:

- υπάρχουν, αναπτύσσονται και εξελίσσονται στο χώρο και στο χρόνο (Tzanakis & Thomaidis, 2000).
- δεν προέρχονται από το τίποτα, αλλά είναι ένα επιστημονικό πεδίο που εξελίσσεται και έχει στέρεες βάσεις (Philippou & Christou, 1998).
- εξελίσσονται με την ενεργό συμμετοχή των ανθρώπων (Gulikers & Blom, 2001; Thomaidis & Tzanakis, 2007).
- έχουν εξελιχθεί μέσα στο πέρασμα των αιώνων σε πολλές διαφορετικές κουλτούρες και σε πολλούς διαφορετικούς πολιτισμούς. Επίσης, δέχθηκαν αλλά και άσκησαν σημαντικές επιρροές μέσα στις κουλτούρες αυτές (Tzanakis & Thomaidis, 2000).
- εξελίσσονται καθοδηγούμενα και από εσωτερικές και από εξωτερικές δυνάμεις και ανάγκες (Jankvist, 2009).
- έχουν άμεση σχέση με άλλες επιστήμες (Τζανάκης, 2009).

Επιπλέον, η χρήση της ιστορίας ως στόχου συνδέεται με τη μάθηση θεμάτων σε σχέση με την ανάπτυξη και την εξέλιξη των Μαθηματικών και εξυπηρετεί τη μάθηση της ιστορίας τους ή επεξηγεί άλλα ιστορικά θέματα του επιστημονικού πεδίου των Μαθηματικών (Jankvist, 2009). Ο Jankvist (2009) σημειώνει κάποια παραδείγματα ερωτήσεων που υποδηλώνουν μια μελέτη τέτοιων μετα-ζητημάτων, τα οποία ο Niss (2001a) αναφέρει: Πώς τα Μαθηματικά εξελίσσονται με την πάροδο του χρόνου; Ποιες δυνάμεις και ποιοι μηχανισμοί μπορεί να είναι παρόντες κατά την εξέλιξη; Η κοινωνία και οι πολιτιστικές συνθήκες παίζουν ρόλο στην εξέλιξη αυτή; Αν ναι, πώς; Και τότε τα Μαθηματικά, εξαρτώνται από τον πολιτισμό και την κοινωνία, τον τόπο και το χρόνο;

Είναι τα παλιά Μαθηματικά ξεπερασμένα Μαθηματικά; (Jankvist, 2009).

Σύμφωνα με τον Jankvist (2009), η διάκριση μεταξύ των εσωτερικών ζητημάτων (in-issues) και των μετα-ζητημάτων (meta-issues) παρουσιάζει κάποιες ομοιότητες με τους όρους «εσωτερικά ζητήματα» (inner issues) και «εξωτερικά ζητήματα» (outer issues) καθώς και με τους όρους «γνώση των Μαθηματικών από μέσα» (knowledge of mathematics from the inside) και «γνώση των Μαθηματικών από έξω» (knowledge of mathematics from the outside), οι οποίοι αναφέρονται αντίστοιχα από τους Davis & Hersh (1982) και Niss (2001).

Τα επιχειρήματα υπέρ της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών, που προαναφέρθηκαν, γίνεται σαφές ότι περιλαμβάνουν πλευρές οι οποίες συνδέονται και με τους δύο παραπάνω σκοπούς, αν και η έμφαση κάθε φορά διαφέρει. Τα επιχειρήματα που αφορούν την «εκμάθηση των Μαθηματικών», για παράδειγμα, είναι πιο κοντά στη χρήση της ιστορίας ως εργαλείο, ενώ τα αντίστοιχα για την «αναγνώριση των Μαθηματικών ως πολιτιστικής ανθρώπινης προσπάθειας» είναι πιο κοντά στη χρήση της ιστορίας ως στόχο. Αυτό ισχύει και για οποιαδήποτε μορφή πάρει η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών κατά τον σχεδιασμό ή τη διδακτική πράξη. Σε κάθε περίπτωση, ωστόσο, είναι ενδιαφέρον, χρήσιμο αλλά και υποβοηθητικό για διδάσκοντες και διδασκόμενους να αποσαφηνίζεται ο σκοπός που επιχειρείται να υπηρετηθεί.

Σχετικά με τους τρόπους με τους οποίους η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη διδασκαλία και εκμάθηση των Μαθηματικών διακρίνουμε τις παρακάτω τρεις κύριες κατηγορίες (Jankvist, 2009), εστιάζοντας στη μεθοδολογία που υιοθετείται:

1. Οι διαφωτιστικές προσεγγίσεις (Illumination approaches).

Η διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών μέσα στην τάξη ή μέσω βιβλίων συμπληρώνεται από ιστορικό υλικό που ποικίλει ως προς το μέγεθος και το σκοπό χρήσης. Το υλικό μπορεί να είναι εισαγωγικά ή καταληκτικά κεφάλαια ιστορικού περιεχομένου, αποσπάσματα από πρωτότυπες πηγές και συζήτηση/διδασκαλία με βάση αυτά, ιστορικά σημειώματα και ανάπτυξη σχετικών δραστηριοτήτων, εμπλουτισμός διδακτικών ενοτήτων με αναφορά ή με επεξεργασία ιστορικά σημαντικών ερωτημάτων και προβλημάτων.

2. Οι προσεγγίσεις βάσει οριοθετημένων ενοτήτων (Modules approaches).

Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για σχεδιασμό και ανάπτυξη διδακτικών ενοτήτων που μπορεί να διαφέρουν ως προς το σκοπό και ως προς το μέγεθος και είναι αφιερωμένες στην ιστορία και εφαρμογή ειδικών περιπτώσεων, συχνά με λεπτομερή μελέτη. Τέτοιες ενότητες μπορεί να είναι η διδασκαλία με φύλλα εργασίας ή με «ιστορικά πακέτα», σχετικές διαθεματικές εργασίες (projects) των μαθητών, πλήρης σειρά μαθημάτων με άξονα ένα συγκεκριμένο θέμα (με έμφαση στην ιστορική ή στην μαθηματική του διάσταση)

3. Οι προσεγγίσεις βασισμένες στην ιστορία (History-based approaches).

Στην κατηγορία αυτή έχουμε προσεγγίσεις βασισμένες στην εξέλιξη και στην Ιστορία των Μαθηματικών. Η Ιστορία διαμορφώνει τη σειρά και τον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζονται τα θέματα και συχνά δεν εμφανίζεται ξεκάθαρα, αλλά ενσωματώνεται πλήρως στη διδασκαλία (για παράδειγμα η ιστορικο-γενετική προσέγγιση ενός θέματος ή μαθήματος)

Για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών αναφέρονται στη βιβλιογραφία τρεις μορφές, στις οποίες διαφέρει η έμφαση αναφορικά με την ιστορία, δεν αποκλείουν, όμως η μία την άλλη, και υπάρχει η δυνατότητα αυτές να εμφανιστούν συμπληρωματικά ή ακόμα και παράλληλα στα πλαίσια της ίδιας δραστηριότητας ή διδασκαλίας (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Τζανάκης, 2009; Jankvist, 2009).

1. Η εκμάθηση της ιστορίας των Μαθηματικών με την παροχή και άμεση ενσωμάτωση ιστορικών πληροφοριών. Ο όρος «ιστορικές πληροφορίες» περιλαμβάνει: α. Ξεχωριστές αντικειμενικές πληροφορίες για διάφορα ιστορικά θέματα. β. Αυτοτελή μαθήματα ή βιβλία ιστορίας Μαθηματικών πάνω σε συγκεκριμένα θέματα της ιστορικής εξέλιξης των Μαθηματικών. Στη μορφή αυτή έμφαση δίνεται περισσότερο στην άντληση πληροφοριών από την Ιστορία των Μαθηματικών και στη μεγαλύτερη εμβάθυνση για την κατανόηση της φύσης των Μαθηματικών παρά για την εκμάθηση των ίδιων των Μαθηματικών. Η ιστορία εμφανίζεται εδώ κυρίως «ως στόχος» και δευτερευόντως «ως εργαλείο».

2. Η εκμάθηση των Μαθηματικών με βάση μια διδακτική και μαθησιακή προσέγγιση εμπνεόμενη από την ιστορία τους. Στην ουσία αυτή είναι η γενετική προσέγγιση της διδασκαλίας και της εκμάθησης των Μαθηματικών, όπου δίνεται μικρότερη έμφαση στη χρήση θεωριών, μεθόδων και εννοιών και μεγαλύτερη στον τρόπο που οι θεωρίες, οι μέθοδοι και οι έννοιες απαντούν σε συγκεκριμένα προβλήματα και ερωτήματα. Βασικές ιστορικές γνώσεις κρίνονται απαραίτητες, προκειμένου να είναι κανείς σε θέση να εντοπίσει τα κρίσιμα στάδια της ιστορικής εξέλιξης πάνω στα οποία θα οργανωθούν η διδασκαλία, το διδακτικό υλικό, οι δραστηριότητες. Ως παραδείγματα για μια προσέγγιση αυτού του είδους θα μπορούσαν να αναφερθούν η «γενετική προσέγγιση» (Toeplitz, 1963 και επανέκδοση 2007), η «καθοδηγούμενη επανανακάλυψη» (Freudenthal, 1991), ο σχεδιασμός διδακτικών καταστάσεων με βάση τον προσδιορισμό επιστημολογικών εμποδίων (Brousseau, 1997). Η ιστορία εμφανίζεται εδώ κυρίως «ως εργαλείο», καθώς η συγκεκριμένη μορφή διδακτικής αξιοποίησής της εντάσσεται στην κατηγορία των προσεγγίσεων που είναι βασισμένες στην ιστορία.

3. Η καλλιέργεια βαθύτερης γνώσης και συνείδησης για τα Μαθηματικά αυτά καθ' εαυτά και το κοινωνικό και πολιτιστικό πλαίσιό τους. Εδώ περιλαμβάνονται οι διαστάσεις της μαθηματικής δραστηριότητας στην οποία διακρίνονται δύο κατηγορίες χαρακτηριστικών, τα ενδογενή και τα εξωγενή. Για τη συγκεκριμένη μορφή η πιο κατάλληλη προσέγγιση θεωρείται αυτή που βασίζεται σε οριοθετημένες ενότητες, όπου η ιστορία εμφανίζεται κυρίως «ως στόχος», επιδιώκοντας να δώσει έμφαση:

- στα ενδογενή χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας, όπως ο ρόλος των διάφορων εννοιολογικών πλαισίων, των αμφιβολιών, των παραδόξων, των αντιφάσεων, των ευρετικών μεθόδων αλλά και η εξελικτική φύση της μορφής και του περιεχομένου των Μαθηματικών σε σύγκριση με το σήμερα.
- στα εξωγενή χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας, όπως η σχέση διάφορων όψεων των σημερινών Μαθηματικών με τις τέχνες και τη φιλοσοφία, η αμφίδρομη σχέση και η αλληλεπίδρασή τους με άλλες επιστήμες, οι επιδράσεις του

κοινωνικο-πολιτιστικού πλαισίου στη διατύπωση και λύση προβλημάτων, οι σχέσεις και διαφοροποιήσεις σύγχρονων Μαθηματικών με αυτά άλλων παραδόσεων και πολιτισμών.

Για τους τρόπους εφαρμογής της ιστορίας στη μαθηματική τάξη, πολύ συνοπτικά, αναφέρουμε ότι έχουν καταγραφεί (Τζανάκης, 2009):

α. Εφαρμογές βάσει άμεσης επαφής με ιστορικό υλικό και γεγονότα.

- Ιστορικά «σημειώματα» και ιστορικές εισαγωγές σε επιμέρους μαθηματικά θέματα (historical snippets).
- Επιτόπια εμπειρία βάσει επισκέψεων σε μουσεία, αρχαιολογικούς, ιστορικούς και άλλους χώρους (outdoors experience).
- Ταινίες, videos και άλλα οπτικά μέσα, όπου παρουσιάζονται θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών (films and other visual means).

β. Εφαρμογές που οδηγούν σε λεπτομερώς δομημένες δραστηριότητες.

- Ερευνητικά projects για τους διδασκόμενους βασισμένα σε ιστορικά κείμενα (research projects based on history texts).
- Η διδακτική χρήση πρωτότυπων πηγών (primary sources).
- «Φύλλα εργασίας», που συνοδεύονται ενδεχομένως από αποσπάσματα πρωτότυπων πηγών ή εμπνευσμένα από αυτές (worksheets).
- Πλήρη «Πακέτα Ιστορίας των Μαθηματικών» (historical packages.).

γ. Ευέλικτες εφαρμογές πιο «τοπικού» χαρακτήρα, εφαρμοζόμενες ανάλογα με τον πληθυσμό στον οποίο απευθύνονται.

- Η διδακτική αξιοποίηση λαθών, εναλλακτικών αντιλήψεων, αλλαγής της οπτικής, αναθεώρησης υποθέσεων και διαισθητικών ή/και (ημι)εμπειρικών επιχειρημάτων και λοιπά.
- Διδακτικό υλικό ή/και σχεδιασμός διδασκαλίας βασισμένων σε ιστορικά προβλήματα (historical problems), κάποια από τα οποία έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη των Μαθηματικών και άλλα με ψυχαγωγικό απλά χαρακτήρα.

δ. Εφαρμογές πιο «πειραματικού» και εμπειρικού χαρακτήρα.

- Η επαφή και ενδεχόμενη χρήση μηχανικών και άλλων εργαλείων που διαδραμάτισαν ρόλο στην Ιστορία των Μαθηματικών (mechanical instruments).
- Μαθηματικές δραστηριότητες βιωματικού χαρακτήρα (experiential mathematical activities), όπως συζητήσεις ή ανταλλαγή επιχειρημάτων στην τάξη που έχουν ως πηγή έμπνευσης την ιστορία, σχετικά με ένα μαθηματικό ή μεταμαθηματικό ζήτημα, αντιμετώπιση και επίλυση ήδη γνωστών προβλημάτων με παλαιότερου τύπου (ίσως και παρωχημένους) συμβολισμούς ή μεθόδους.
- Θεατροποίηση εμπνευσμένη από γεγονότα της ιστορικής διαδρομής των Μαθηματικών (plays).

ε. Το Διαδίκτυο ως πηγή πληροφόρησης και μέσο επικοινωνίας.

Με βάση όσα προαναφέρθηκαν η διδασκαλία των Μαθηματικών καθίσταται μία σύνθετη και απαιτητική προσπάθεια, αφού θα πρέπει να επιτρέπει την παράλληλη εξέλιξη των διαδικασιών και των εννοιών. Εξάλλου οι έννοιες αποκτούν νόημα μέσα από τις διαδικασίες παραγωγής και ανάδειξής τους, αλλά και οι διαδικασίες βασίζονται σε κάποιες ήδη αφομοιωμένες έννοιες. Η παράλληλη εξέλιξη διαδικασιών και εννοιών αποτελεί προϋπόθεση της μάθησης με κατανόηση. Σε διαφορετική περίπτωση οι μαθητές μπορεί να «μαθαίνουν» Μαθηματικά χωρίς να τα καταλαβαίνουν, αφού η χρήση κανόνων που οδηγούν σε σωστές λύσεις δε συνεπάγεται και κατανόηση.

Επίσης αναδεικνύονται οι πολλαπλοί ρόλοι που η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να παίξει στη Μαθηματική Εκπαίδευση. Οι ρόλοι αυτοί, που απεικονίζονται στα προαναφερθέντα επιχειρήματα και στους τρόπους υπέρ της ενσωμάτωσής των ιστορικών στοιχείων στη διδακτική πράξη, διαφέρουν ως προς τους επιδιωκόμενους στόχους αλλά και ως προς τα οφέλη που προκύπτουν για τους διδάσκοντες και τους διδασκόμενους. Παράλληλα αναδεικνύεται και ο ρόλος του δασκάλου, ο οποίος έχοντας θεωρητική κατάρτιση αλλά και διδακτική επάρκεια μπορεί να επωμισθεί ένα τέτοιο βαρύ φορτίο. Η παραδοχή αυτή με τη σειρά της οδηγεί και σε θέματα εκπαίδευσης και επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών, ώστε να μπορούν να αναλαμβάνουν πρωτοβουλίες και δράσεις προς όφελος των μαθητών τους και της εκπαίδευσης γενικότερα.

Μέσα στο πλαίσιο, λοιπόν, του προβληματισμού πάνω στα νέα δεδομένα για τη Μαθηματική Εκπαίδευση, που επιβάλλουν την αναζήτηση και επιλογή εναλλακτικών διδακτικών προσεγγίσεων που να κινητοποιούν τους μαθητές και δραστηριοτήτων που να τους εμπλέκουν ενεργά στην κατάκτηση της γνώσης, επιλέχθηκε το βιβλίο που προαναφέραμε, «Αχμές, ο γιος του φεγγαριού», στο οποίο συνδυάζεται η Λογοτεχνία και η Ιστορία των Μαθηματικών. Μέσα από την ιστορία του Αχμές γνωρίζουμε τα αρχαία αιγυπτιακά μαθηματικά, την ανάπτυξη και την ιστορική τους εξέλιξη και τη σύνδεσή τους με τον αρχαίο αιγυπτιακό πολιτισμό. Έτσι γίνεται στην ουσία προσιτό και ελκυστικό ένα θέμα που κάτω από άλλες συνθήκες θα φάνταζε αυστηρά επιστημονικό και απρόσιτο. Κρίνεται σκόπιμο, επομένως, στην ενότητα που ακολουθεί να ασχοληθούμε με τη μελέτη της ιστορικής εξέλιξης των αρχαίων αιγυπτιακών μαθηματικών προκειμένου να τη συνδέσουμε με τη διδακτική αξιοποίηση του συγκεκριμένου λογοτεχνικού έργου, το οποίο στηρίζεται μυθοπλαστικά σε στοιχεία αυτής της εξέλιξης.

Πιο συγκεκριμένα **τα ερευνητικά ερωτήματα** που θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια είναι τα εξής:

1) Πόσο έγκυρη είναι η ιστορική γνώση που αποκτούμε από την ανάγνωση ενός έργου Μαθηματικής Λογοτεχνίας;

2) Ποιοι διδακτικοί στόχοι της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι συμβατοί με την Ιστορία των Μαθηματικών και τη Μαθηματική Λογοτεχνία;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

2. Ιστορική πραγματικότητα και εξέλιξη των Μαθηματικών.

2.1. Τρόποι «ανάγνωσης» που αφορούν τα αρχαία μαθηματικά κείμενα.

Κατά την ενασχόληση με την έρευνα και τη διδασκαλία των Μαθηματικών συνήθως δεν ενδιαφέρει η προέλευση και η εξέλιξή τους μέχρι τη σημερινή τους μορφή, μέσα από μια πορεία χιλιάδων χρόνων. Η μελέτη αυτής της εξέλιξης είναι μια εξειδικευμένη δραστηριότητα με την οποία έχουν ασχοληθεί από τα τέλη του 19ου και τις αρχές του 20ου αιώνα σημαντικοί μαθηματικοί και ιστορικοί όπως οι Tannery, Zeuthen, Heath, Van den Waerden, Neugebauer και πολλοί άλλοι. Το επιστημονικό ενδιαφέρον για τα έργα μαθηματικών και αστρονόμων της αρχαιότητας οδήγησε στην έκδοση σχετικών κειμένων και στη συστηματική προσπάθεια μελέτης, κατανόησης και ερμηνείας του περιεχομένου τους, πράγμα που αποτέλεσε βασική συνιστώσα για την ανάπτυξη της έρευνας στον τομέα της Ιστορίας των Μαθηματικών (Iggers, 2006).

Στην ιστοριογραφία των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών -και γενικότερα των μαθηματικών της αρχαιότητας- διακρίνονται δύο κύριες μεθοδολογικές τάσεις. Σύμφωνα με την πρώτη, η προσέγγιση γίνεται από τη σκοπιά του μαθηματικού, και μάλιστα του σύγχρονου μαθηματικού, ενώ σύμφωνα με τη δεύτερη από τη σκοπιά του ιστορικού των επιστημών. Έτσι προκύπτει η «παραδοσιακή Ιστορία των Μαθηματικών» και η «νέα Ιστορία των Μαθηματικών», ονομασίες που απηχούν και την εξέλιξη των δύο τάσεων. Κάποιες διαφοροποιήσεις από την παραδοσιακή ιστοριογραφία ανιχνεύονται ήδη από τα τέλη του 19ου αι. και σε μερικές σποραδικά δημοσιευμένες μελέτες που αφορούν διάφορες περιόδους του 20ου αι., αλλά η νέα ιστοριογραφία συνδέει ουσιαστικά την εμφάνισή της με το τελευταίο τέταρτο του 20ου αι.

Από τη δεκαετία του 1970 παρατηρείται μια στροφή προς τα ιστορικά κείμενα και την όσο το δυνατό πιστότερη ανάγνωσή τους. Παράλληλα, η άποψη πως τα ιστορικά κείμενα εμπεριέχουν τις πρώιμες μορφές της σημερινής άλγεβρας αρχίζει να αμφισβητείται και φέρνει στο προσκήνιο την πρώτη μεγάλη ρήξη με την παραδοσιακή ιστοριογραφία που προέκυψε από ένα θέμα, το οποίο εκ πρώτης όψεως θα μπορούσε να θεωρηθεί αρκετά ειδικό. Αφορούσε την ορθότητα της μεθόδου για ερμηνεία των αρχαίων μαθηματικών κειμένων με σύγχρονους όρους και συμβολισμούς, που απέδιδε έναν αλγεβρικό (σύμφωνα με την παραδοσιακή ιστοριογραφία) χαρακτήρα σε ένα σημαντικό τμήμα των κλασικών ελληνικών μαθηματικών. Η διαμάχη αυτή, που έγινε γνωστή με την ονομασία «διαμάχη για τη “γεωμετρική άλγεβρα”», εμφανίστηκε αρχικά με τη μορφή μιας ανοιχτής και οξύτατης ρήξης με την παραδοσιακή ιστοριογραφία, και συνεχίστηκε με τη διατύπωση διαφορετικών αναγνώσεων για άλλα κεφάλαια της ιστορίας όχι μόνο των ελληνικών αλλά και των βαβυλωνιακών μαθηματικών καθώς και για μεθοδολογικά ζητήματα της ιστοριογραφίας των Μαθηματικών γενικότερα.

Σε ένα κλασικό πλέον άρθρο του Unguru (1975) στον χώρο της Ιστορίας των Μαθηματικών με τίτλο «On the Need to Rewrite the History of Greek mathematics» επισημάνθηκαν οι κίνδυνοι και οι παγίδες από την εφαρμογή της ορολογίας και των σύγχρονων μαθηματικών συμβολισμών στην ιστοριογραφία των αρχαίων μαθηματικών. Αν και το εν λόγω άρθρο προοριζόταν για να περιγράψει την κατάσταση στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά, η κριτική του θα μπορούσε να έχει ισχύ επίσης και για τα μαθηματικά άλλων αρχαίων πολιτισμών εκτός από την πιο πρόσφατη μαθηματική ιστοριογραφία της Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας (Imhausen, 2003a).

Η διάσταση αυτή των απόψεων αποτέλεσε την αφορμή ώστε για πρώτη φορά να υπάρξει σαφής διατύπωση της νέας ιστοριογραφικής άποψης σχετικά με τον τρόπο που θα πρέπει να μελετώνται τα μαθηματικά του παρελθόντος υπό το πρίσμα του ιστορικού των Μαθηματικών. Αν και το θέμα της διαμάχης ήταν η «γεωμετρική άλγεβρα», η ουσία της βρισκόταν στις βαθύτερες μεθοδολογικές διαφορές ανάμεσα στην παραδοσιακή και τη νέα ιστοριογραφία. Πιο συγκεκριμένα, οι διαφορές αυτές συνδέονταν με τον τρόπο που οι οπαδοί των δύο τάσεων αντιλαμβάνονταν το αντικείμενο της Ιστορίας των Μαθηματικών και το έργο του ιστορικού των Μαθηματικών.

Οι οπαδοί της παραδοσιακής ιστοριογραφίας, κατά κανόνα επαγγελματίες μαθηματικοί, αντιμετώπιζαν τα μαθηματικά του παρελθόντος ως ουδέτερα, αυτοτελή φυσικά αντικείμενα, στα οποία ενσωματώνονταν ρητά ή υπόρρητα όλες οι ιδέες, τα μηνύματα και τα διδάγματά τους. Η εμφάνιση αυτών των ιδεών και μηνυμάτων σε μαθηματικά κείμενα διαφόρων εποχών, με τη μία ή την άλλη μορφή, ουσιαστικά αντιπροσωπεύει διαφορετικές εκφάνσεις των ίδιων αναλλοίωτων μαθηματικών Μορφών, οι οποίες διαπερνούν τα πολιτισμικά και ιστορικά περιβάλλοντα όπου αναδύονται και δεν προσβάλλονται από την ιστορική εξέλιξη. Έτσι, το έργο του ιστορικού των Μαθηματικών συνδέεται με την απλή αναγνώριση των αναλλοίωτων, τελικά, παρά την ποικιλία των ιστορικών εκφάνσεών τους, μαθηματικών Μορφών, που περιλαμβάνονται στο έργο κάθε ιστορικού συγγραφέα. Επιπροσθέτως, ως καθήκον του προβάλλει και η απόδοση της πρέπουσας τιμής στον μαθηματικό εκείνο που πρώτος κατάφερε να εκφράσει μία από τις Μορφές αυτές και να την κατεβάσει από το Πλατωνικό Βασίλειο στον κόσμο της ανθρώπινης συνείδησης. Κατ’ εξοχήν αρμόδιος για την επιτέλεση αυτού του έργου θεωρείται ο επαγγελματίας μαθηματικός, καθώς είναι προφανές ότι μόνον αυτός είναι σε θέση να συλλάβει τις μαθηματικές ιδέες και τα μηνύματα, που λανθάνουν μέσα στο κείμενο. Με τον τρόπο αυτό μπορεί να φτάσει σε μια βαθιά κατανόηση των μαθηματικών επιτευγμάτων της εποχής κατά την οποία αυτό γράφτηκε, αφού οι γνώσεις του υπερβαίνουν κατά πολύ το θέμα που εκ πρώτης όψεως είναι ορατό σε ένα μαθηματικό κείμενο του παρελθόντος. Στην ακραία της εκδοχή η άποψη αυτή οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η Ιστορία των Μαθηματικών πρέπει να γράφεται από τους επαγγελματίες μαθηματικούς και να απευθύνεται, βασικά, στους συναδέλφους τους, ενώ για όλους τους άλλους αποτελεί ένα είδος απαγορευμένης ζώνης.

Οι νέοι ιστορικοί των μαθηματικών, από τη δική τους πλευρά, εξέφρασαν την άποψη ότι η παραπάνω προσέγγιση πρέπει να απορριφθεί, αφού δεν μπορεί να γίνει δεκτή ως ιστορική προσέγγιση. Τα μαθηματικά κείμενα του παρελθόντος δεν είναι μόνο τα αυτάρκη, καλώς ορισμένα, φυσικά αντικείμενα, μέσα στα οποία ένας σύγχρονος αναγνώστης μπορεί να προσδιορίσει τις λανθάνουσες μαθηματικές ιδέες. Ταυτόχρονα είναι και προϊόντα ανθρώπινης δραστηριότητας που εκφράζουν τη βούληση, τις προθέσεις, τις επιθυμίες και τους στόχους του εκάστοτε συγγραφέα. Η παραδοσιακή ιστοριογραφία, εστιάζοντας στο αντικειμενικό, σημασιολογικό περιεχόμενο των μαθηματικών κειμένων του παρελθόντος, αστοχεί στο σπουδαιότερο καθήκον που πρέπει να επιτελεί η Ιστορία των Μαθηματικών. Αυτό αφορά τη μελέτη κάποιων πτυχών από τη δραστηριότητα των μαθηματικών σε παλαιότερες εποχές, οι οποίες πτυχές όμως δεν διέπονταν από γενικούς κανόνες και νόμους, αλλά χαρακτηρίζονταν από γεγονότα μοναδικά και μη επαναλαμβανόμενα. Με αυτή την έννοια, ο στόχος του ιστορικού των Μαθηματικών δεν μπορεί να περιοριστεί μόνο στο να αντιμετωπίζει τα μαθηματικά του παρελθόντος απλά ως προάγγελους των σύγχρονων μαθηματικών και να διερευνά τα παλαιότερα μαθηματικά κείμενα προκειμένου να αναγνωριστούν σε αυτά πιθανές σύγχρονες μαθηματικές ιδέες. Η κύρια προσπάθειά του θα πρέπει να στοχεύει στην ιστορική κατανόηση των μαθηματικών αυτών κειμένων, λαμβάνοντας υπόψη το ιστορικό και πολιτιστικό πλαίσιο της εποχής από την οποία προέρχονται και προσπαθώντας να ανασυγκροτεί, κατά το δυνατόν, τις αυθεντικές προθέσεις του κάθε ιστορικού συγγραφέα. Ακόμη, κρίνεται σημαντικό να απορρίπτονται από πλευράς του ανιστορικές ερμηνείες και σκέψεις που δεν θα μπορούσε να έχει στο νου του ο κάθε ιστορικός συγγραφέας όταν έγραφε το ένα ή το άλλο κείμενο, με απώτερο στόχο να αναδειχθεί τελικά ο πιθανός βαθμός διαφοράς ανάμεσα στις παρελθούσες και τις σύγχρονες ιδέες.

Καθώς λοιπόν οι επιστήμες εξελίσσονται τα μέσα ερμηνείας που χρησιμοποιούνται από τους ιστορικούς δεν παραμένουν αμετάβλητα, αλλά εξελίσσονται και προσαρμόζονται στην τεχνολογία και στα νέα ιστοριογραφικά ζητήματα που προκύπτουν. Αποτέλεσμα όλων αυτών είναι απόψεις για την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών να αναθεωρούνται ή ακόμη και να απορρίπτονται. Προκύπτει, επομένως, ένας προβληματισμός σχετικά με την εγκυρότητα της γνώσης που αντλεί ένας σύγχρονος ερευνητής της Διδακτικής των Μαθηματικών από ιστορικές αναλύσεις ή επισκοπήσεις γραμμένες πριν από αρκετές δεκαετίες.

Στη συνέχεια, εστιάζοντας στην ιστοριογραφία των αρχαίων αιγυπτιακών μαθηματικών, θα παρουσιάσουμε στοιχεία που συνδέονται με παλαιότερες αλλά και νεότερες μελέτες σχετικά με την έρευνα, καταγραφή και ερμηνεία τους από διάφορους ερευνητές.

2.2. Αιγυπτιακά Μαθηματικά. - Στοιχεία από την παλαιότερη ιστοριογραφία.

Τα αρχαιότερα γραμμένα μαθηματικά είναι αυτά των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων και από πολύ νωρίς βρέθηκαν στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος για τους μελετητές, καθώς αποτελούν ένα πολύ σημαντικό κομμάτι στην Ιστορία των Μαθηματικών. Η συμμετοχή των αρχαίων πολιτισμών της Ανατολής στην ανάπτυξη των Μαθηματικών εκτιμήθηκε μετά το δεύτερο μισό του 20^{ου} αι. και σε αυτή την αναγνώριση συνέβαλαν πολύ με τις εργασίες τους ο Thureau-Dangin στη Γαλλία και ο Neugebauer στη Γερμανία και την Αμερική.

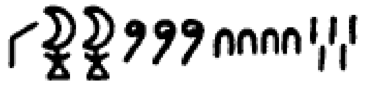
Στην παρούσα ενότητα παραθέτουμε κάποια στοιχεία, τα οποία συνδέονται με παλαιότερες μελέτες για τα αρχαία αιγυπτιακά μαθηματικά και τα οποία συλλέξαμε κατά κύριο λόγο από τις εργασίες των Neugebauer (1986), Bunt Jones, & Bedient (1981) και Boyer & Merzbach (1997).

Η αιγυπτιακή γραφή παρουσιάζεται με δύο ξεχωριστές μορφές σε ολόκληρη τη φαραωνική ιστορία: τα ιερογλυφικά, που χρησιμοποιήθηκαν ως επί το πλείστον για επιγραφές σε μνημεία σκαλισμένα σε πέτρα, ενώ μια άλλη καλλιγραφική γραφή (στις μέρες μας γνωστή ως ιερατική) εντοπίστηκε σε παπύρους και σε πήλινα θραύσματα για καθημερινούς σκοπούς, όπως επιστολές, διοικητικά έγγραφα και λογοτεχνία. Κατά την Ύστερη Περίοδο, η ιερατική γραφή εξελίχθηκε σε μια ακόμη πιο καλλιγραφική μορφή, η οποία είναι γνωστή ως δημοτική (Imhaussen, 2009).

Πληροφορίες σχετικά με τα αιγυπτιακά μαθηματικά συλλέγονται από μνημεία και διάφορες επιγραφές, αλλά κυρίως από παπύρους μέσω των οποίων φαίνεται ότι οι Αιγύπτιοι ασχολούνταν με τα Μαθηματικά τουλάχιστον από το 2000 π.Χ. Σε γραπτά του Ηρόδοτου αλλά και γραπτά των ίδιων των Αιγυπτίων υπάρχουν στοιχεία σχετικά με τις αριθμητικές διαδικασίες και τις γεωμετρικές σχέσεις που οι ίδιοι εφάρμοζαν προκειμένου να οριοθετήσουν τα χωράφια τους μετά από πλημμύρες του Νείλου. Επειδή στα γραπτά αυτά δεν υπάρχουν καθόλου πληροφορίες για τις γενικές αρχές πάνω στις οποίες στηρίχτηκαν και προέκυψαν οι αριθμητικές και γεωμετρικές γνώσεις των Αιγυπτίων, διατυπώνονται μόνο σχετικές εικασίες και πραγματοποιούνται διάφορα παραδείγματα από την πλευρά των επιστημόνων προκειμένου να εντοπίσουν τους συλλογισμούς των αιγυπτιακών μαθηματικών.

2.2.1. Ιερογλυφική Γραφή.

Η τρίγλωσση επιγραφή που ανακαλύφθηκε το 1799 στη Ροζέττα, ένα αρχαίο λιμάνι κοντά στην Αλεξάνδρεια, έδωσε τη δυνατότητα για αποκρυπτογράφηση των αιγυπτιακών ιερογλυφικών αφού περιλάμβανε ένα κείμενο γραμμένο σε τρεις γραφές: την ελληνική, τη δημοτική και την ιερογλυφική. Έτσι, οι επιγραφές των τάφων και των αρχαίων μνημείων μπορούσαν πλέον να διαβαστούν, αλλά αυτά τα τελετουργικού χαρακτήρα ντοκουμέντα δεν ήταν η καλύτερη πηγή πληροφόρησης για τις μαθηματικές έννοιες της εποχής. Η αιγυπτιακή ιερογλυφική αρίθμηση εύκολα αποκαλύφθηκε σε ένα σύστημα παλιό όσο και οι πυραμίδες, ηλικίας 5.000 ετών περίπου, το οποίο βασιζόταν στην κλίμακα του δέκα. Οι Αιγύπτιοι σκάλιζαν αριθμούς σε πέτρα, ξύλο και άλλα υλικά και χρησιμοποιούσαν ένα απλό σύστημα επανάληψης με διαφορετικά σύμβολα για καθεμιά από τις πρώτες έξι δυνάμεις του 10, δηλαδή για τους αριθμούς 1, 10, 100,…, 1.000.000. Επιπλέον, όσον αφορά τους αριθμούς δεν είχαν κάποιο σύμβολο για το 0 και για κάθε δέκα σύμβολα της ίδιας τάξης συμπλήρωναν ένα σύμβολο της αμέσως ανώτερης τάξης, δηλαδή δούλευαν με *δεκαδική βάση*. Έτσι λοιπόν, μια κάθετη γραμμή αντιπροσώπευε τη μονάδα, ένα ανεστραμμένο πεζό ύψιλον το 10, ένα σύμβολο που μοιάζει με τον αριθμό 9 το 100, ένα άνθος λωτού το 1.000, ένα λυγισμένο δάχτυλο το 10.000, ένας γυρίνος το 100.000 και μια γονατιστή φιγούρα ανθρώπου (ίσως ο Θεός του Ατέρμονου) το 1.000.000. Επαναλαμβάνοντας τα σύμβολα αυτά, ο αριθμός 12.345, για παράδειγμα, θα εμφανίζονταν ως



Εικόνα 1 (Boyer & Merzbach, 1997)

Κάποιες φορές τα ψηφία μικρότερης αξίας τοποθετούνταν στα αριστερά, και άλλες φορές τα ψηφία διατάσσονταν κατακόρυφα. Ακόμα τα ίδια σύμβολα παρουσιάζονταν με διαφορετικό προσανατολισμό, οπότε μια καμπύλη, για παράδειγμα, θα μπορούσε να έχει το κύρτωμά της προς τα δεξιά ή τα αριστερά. Οι αιγυπτιακοί αριθμοί γράφονταν και αντίστροφα, δηλαδή και από τα δεξιά προς τα αριστερά και τούμπαλιν, όπως συνέβαινε δηλαδή και στα ιερογλυφικά. Από τις αιγυπτιακές επιγραφές υποδεικνύεται, από παλιά, μια εξοικείωση με τους μεγάλους αριθμούς. Σε ένα βασιλικό σκήπτρο στο μουσείο της Οξφόρδης, ηλικίας άνω των 5.000 ετών, αναφέρονται 120.000 κρατούμενοι και 1.422.000 αιχμάλωτες κατσίκες, αριθμοί που μπορεί να είναι υπερβολικοί, αλλά καθιστούν σαφές, όπως και άλλα ντοκουμέντα, ότι οι Αιγύπτιοι ήταν ιδιαίτερα ακριβείς στην αρίθμηση και τη μέτρηση. Οι πυραμίδες, για παράδειγμα, παρουσιάζουν τόσο υψηλό βαθμό ακρίβειας στην κατασκευή και τον προσανατολισμό τους, ώστε να έχουν αναπτυχθεί μύθοι (συχνά αβάσιμοι) γύρω από αυτές.

2.2.2. Αιγυπτιακοί Πάπυροι.

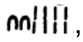
Υπάρχει ένα όριο στην έκταση των μαθηματικών πληροφοριών που μπορούν να μας δώσουν οι επιτύμβιες στήλες και τα ημερολόγια, και η εικόνα μας για την αιγυπτιακή συνεισφορά στην ανάπτυξη των Μαθηματικών θα ήταν πολύ ασαφής, αν έπρεπε να εξαρτηθεί μόνο από αυτό το τελετουργικό και αστρονομικό υλικό. Τα Μαθηματικά είναι κάτι περισσότερο από την αρίθμηση και τη μέτρηση, πτυχές που συνήθως εμφανίζονται στις ιερογλυφικές επιγραφές. Οι σημαντικότερες μαθηματικές πληροφορίες αντλούνται από τους αιγυπτιακούς παπύρους που έχουν επιζήσει από τις καταστροφές για περίπου τρεισήμισι χιλιετίες.

Πληροφορίες σχετικά με την αριθμητική των Αιγυπτίων συλλέγονται από διάφορους παπύρους με σημαντικότερο τον *Πάπυρο του Rhind* ή *Πάπυρο του Ahmes*. Σε αυτόν περιέχονται προβλήματα και λύσεις σε ποικίλα πρακτικά θέματα με αναφορές σε γεωμετρικές έννοιες. Αντίστοιχης σημασίας είναι και ο *Πάπυρος της Μόσχας,* ο *Πάπυρος του Kahun,* ο *Πάπυρος του Βερολίνου*, δύο *ξύλινες πλάκες* από το Κάιρο και ο *Δερμάτινος Κύλινδρος* που περιέχει καταλόγους κλασματικών μονάδων. Υπάρχουν τέλος και άλλοι πάπυροι, όπως οι εμπορικοί, με πληροφορίες που θεωρήθηκαν όχι τόσο μείζονος σημασίας σχετικά με τα αιγυπτιακά μαθηματικά.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε εκτενέστερα με τον πάπυρο του Πάπυρο του Rhind ή Πάπυρο του Ahmes, καθώς η περίπτωση του Ahmes έγινε αντικείμενο λογοτεχνικής μυθοπλασίας στο βιβλίο του Τεύκρου Μιχαηλίδη «Αχμές, ο γιος του φεγγαριού», που επιλέχθηκε για την παρούσα εργασία (όπως ήδη έχει αναφερθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο). Η συγγραφή του εν λόγω βιβλίου στηρίχθηκε στη γνώση της ιστορικής εξέλιξης των αρχαίων αιγυπτιακών μαθηματικών και δημιουργεί ένα πλαίσιο κατάλληλο για να ερευνήσουμε τις δυνατότητες και τους περιορισμούς της διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών. Η λεπτομερής αναφορά και περιγραφή, επομένως, της ιστορικής εξέλιξης των αρχαίων αιγυπτιακών μαθηματικών συνεπικουρεί στη σύνδεση όσων αναφέρονται στο βιβλίο με αυτά που αναφέρονται στον πάπυρο.

Α. Ο Πάπυρος του Rhind ή Πάπυρος του Ahmes.

Ο πιο εκτεταμένος, μαθηματικής φύσεως, είναι ένας πάπυρος με 33 εκατοστά ύψος και 6 μέτρα περίπου μήκος που βρίσκεται στο Βρετανικό Μουσείο (εκτός από μερικά κομμάτια του που βρίσκονται στο Μουσείο του Brooklyn). Αγοράστηκε το 1858 σε μια απομακρυσμένη πόλη του Νείλου από ένα Σκωτσέζο συλλέκτη, τον Henry Rhind. Από τότε είναι γνωστός ως Πάπυρος του Rhind ή πιο σπάνια, ως ο Πάπυρος του Ahmes προς τιμήν του γραφέα που τον είχε αντιγράψει περίπου το 1.650 π.Χ. Ο γραφέας μάς κάνει γνωστό ότι το υλικό προερχόταν από ένα πρωτότυπο του Μέσου Βασιλείου (περίπου από το 2.000 έως το 1.800 π.Χ.) και ότι μερικές από αυτές τις γνώσεις πιθανόν να έχουν παραδοθεί από τον ίδιο τον Imhotep, τον σχεδόν θρυλικό αρχιτέκτονα και γιατρό του Φαραώ Zoser, ο οποίος επέβλεπε το κτίριο της πυραμίδας του πριν από 5.000 χρόνια. Σε κάθε περίπτωση, τα αιγυπτιακά μαθηματικά φαίνεται ότι έμειναν στάσιμα για περίπου 2.000 χρόνια μετά από ένα μάλλον ευοίωνο ξεκίνημα, σύμφωνα με τους εκπροσώπους της παραδοσιακής ιστοριογραφίας.

Οι αριθμοί και το υπόλοιπο υλικό στον Πάπυρο του Rhind δεν έχουν γραφτεί με τα ιερογλυφικά σύμβολα που περιγράφτηκαν παραπάνω, αλλά σε μια πιο καλλιγραφική γραφή, προσαρμοσμένη καλύτερα στη χρήση της γραφίδας και του μελανιού σε επεξεργασμένα φύλλα παπύρου, γνωστή ως ιερατική (για να διακρίνεται από τη μετέπειτα δημοτική). Η αρίθμηση παραμένει δεκαδική, αλλά η ανιαρή αρχή της επανάληψης που παρατηρείται στην ιερογλυφική αρίθμηση έχει αντικατασταθεί από την εισαγωγή μονογραμμάτων και ειδικών συμβόλων που αντιπροσωπεύουν τα ψηφία και τα πολλαπλάσια των δυνάμεων του δέκα. Ο αριθμός τέσσερα, για παράδειγμα, δεν παριστάνεται πλέον με τέσσερις κάθετες γραμμές, αλλά με μια οριζόντια γραμμή. Ο αριθμός επτά, επίσης δε γράφεται ως επτά κάθετες γραμμές, αλλά ως ένα μοναδικό σύμβολο που μοιάζει με δρεπάνι . Στα ιερογλυφικά ο αριθμός είκοσι οκτώ είχε εμφανιστεί ως , αλλά στα ιερατικά είναι απλά . Το σύμβολο = που χρησιμοποιείται για το μικρότερης αξίας ψηφίο οκτώ (ή δύο τετράδες) παρατηρούμε ότι εμφανίζεται στα αριστερά και όχι δεξιά. Η αρχή της χρήσης συμβόλων (τα οποία χρησιμοποιούνται και στον Πάπυρο του Rhind) έχει εισαχθεί από τους Αιγυπτίους πριν από 4.000 χρόνια περίπου και αποτελεί μια σημαντική συμβολή στην αρίθμηση αλλά και έναν από τους παράγοντες που καθιστούν το δικό μας σύστημα αρίθμησης τόσο αποτελεσματικό.

Α.1. Αιγυπτιακά κλάσματα.

Για τους ανθρώπους στην εποχή του λίθου τα κλάσματα δεν είχαν καμιά χρησιμότητα, αλλά με την εμφάνιση πιο προηγμένων πολιτισμών, κατά την εποχή του Χαλκού, φαίνεται να προέκυψε η ανάγκη για την έννοια και για τα σύμβολα του κλάσματος. Οι αιγυπτιακές ιερογλυφικές επιγραφές έχουν ειδικά σύμβολα για τις κλασματικές μονάδες, που είναι κλάσματα με αριθμητή τη μονάδα. Ο αντίστροφος οποιουδήποτε ακεραίου παρουσιαζόταν τοποθετώντας απλά πάνω από το σύμβολο του αριθμού ένα επίμηκες ωοειδές σχήμα. Έτσι το κλάσμα $\frac{1}{8}$ γραφόταν και το $\frac{1}{20}$

Στην ιερατική γραφή το επίμηκες ωοειδές αυτό σχήμα αντικαθίσταται από μια κουκίδα, η οποία τοποθετείται πάνω από το σύμβολο του αντίστοιχου αριθμού (ή πάνω από το ακραίο δεξί ψηφίο στην περίπτωση του αντίστροφου ενός πολυψήφιου αριθμού). Στον Πάπυρο του Ahmes, για παράδειγμα, το κλάσμα $\frac{1}{8}$ εμφανίζεται ως και το $\frac{1}{20}$ γραμμένο ως .

Τέτοιου είδους κλασματικές μονάδες χρησιμοποιούνταν πολύ στις μέρες του Ahmes, αλλά η έννοια του κλάσματος γενικά φαίνεται πως αποτελούσε μυστήριο για τους Αιγυπτίους. Με το κλάσμα $\frac{2}{3}$, όμως, ένιωθαν άνετα και είχαν μάλιστα ένα ειδικό ιερατικό σύμβολο για αυτό, το . Περιστασιακά χρησιμοποιούσαν ειδικά σύμβολα για τα κλάσματα του τύπου $\frac{n}{(n+1)}$, τα «συμπληρώματα» των κλασματικών μονάδων. Στο κλάσμα $\frac{2}{3}$ οι Αιγύπτιοι έδωσαν έναν ειδικό ρόλο στις αριθμητικές διαδικασίες. Έτσι όταν ήθελαν να βρουν το ένα τρίτο του αριθμού έβρισκαν πρώτα τα δύο τρίτα του και στη συνέχεια υπολόγιζαν το μισό αυτού του αποτελέσματος. Γνώριζαν και χρησιμοποιούσαν το δεδομένο ότι τα δύο τρίτα της κλασματικής μονάδας $1/p$ είναι το άθροισμα των δύο κλασματικών μονάδων ½p και $1/6p$. Επίσης, γνώριζαν ότι το διπλάσιο της κλασματικής μονάδας ½p είναι η κλασματική μονάδα $1/p$. Ωστόσο, φαίνεται ότι, εκτός από το κλάσμα $\frac{2}{3}$, οι Αιγύπτιοι θεωρούσαν το ανάγωγο ρητό κλάσμα της μορφής $\frac{m}{n}$ όχι ως μια «βασική έννοια», αλλά ως μέρος μιας μη ολοκληρωμένης διαδικασίας. Σήμερα θεωρούμε το $\frac{3}{5}$ ως ένα απλό ανάγωγο κλάσμα, οι Αιγύπτιοι γραφείς, όμως το θεωρούσαν ως το άθροισμα των κλασματικών μονάδων $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ και $\frac{1}{15}$. Προς διευκόλυνση της ανάλυσης των «μικτών» ανάγωγων κλασμάτων σε άθροισμα κλασματικών μονάδων, ο Πάπυρος του Rhind αρχίζει με έναν πίνακα που εκφράζει το $\frac{2}{n}$ ως άθροισμα των κλασματικών μονάδων για όλες τις περιττές τιμές του n από το 5 έως το 101. Κατά τον ίδιο τρόπο το ισοδύναμο του $\frac{2}{5}$ δίνεται ως άθροισμα του $\frac{1}{3}$ και του $\frac{1}{15}$, το $\frac{2}{11}$ ως άθροισμα του $\frac{1}{6}$ και του $\frac{1}{66}$, ενώ το $\frac{2}{15}$ ως άθροισμα του $\frac{1}{10}$ και του $\frac{1}{30}$. Το τελευταίο στοιχείο αυτού του πίνακα, το $\frac{2}{101}$, αναλύεται σε άθροισμα των $\frac{1}{101}$, $\frac{1}{202}$, $\frac{1}{303}$ και $\frac{1}{606}$. Δεν είναι ξεκάθαρο γιατί προτιμάται μια μορφή ανάλυσης από άλλες, απεριόριστα πολλές, που είναι δυνατές. Κάποια στιγμή διατυπώθηκε η υπόθεση ότι ορισμένες ισοδυναμίες του πίνακα $\frac{2}{n}$ προκύπτουν από τον τύπο:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

ή από

$$\frac{2}{p \cdot q} = \frac{1}{p \cdot \frac{p+q}{2}} + \frac{1}{q \cdot \frac{p+q}{2}}$$

Ωστόσο, καμία από αυτές τις διαδικασίες δεν δίνει τον συνδυασμό για το $\frac{2}{15}$ που εμφανίζεται στον πίνακα. Από τους ερευνητές διατυπώθηκε η άποψη ότι, στις περισσότερες περιπτώσεις, η επιλογή υπαγορευόταν από την προτίμηση των

Αιγυπτίων στα κλάσματα που προέρχονταν από τα «φυσικά» κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$ με διαδοχικές διαιρέσεις τους με το 2 (που σήμερα θα ονομάζονταν υποδιπλασιασμοί). Έτσι, αν θα επιθυμούσε κανείς να εκφράσει το $\frac{2}{15}$ ως άθροισμα κλασματικών μονάδων, θα μπορούσε ίσως να ξεκινήσει παίρνοντας το μισό του $\frac{1}{15}$ και στη συνέχεια να ελέγξει αν μπορεί να προστεθεί στο αποτέλεσμα, $\frac{1}{30}$, μια κλασματική μονάδα για να σχηματιστεί το $\frac{2}{15}$. Ακόμη θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει τη γνωστή σχέση:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{6p}$$

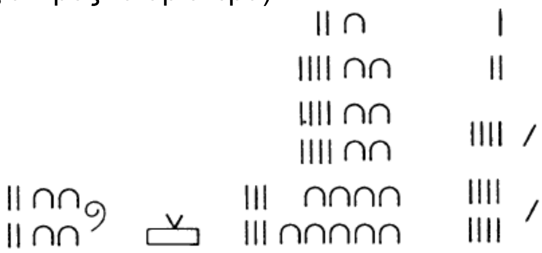
για να φτάσει στο ίδιο αποτέλεσμα $\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$. Ένα πρόβλημα στον Πάπυρο του Rhind αναφέρεται ειδικά στη δεύτερη μέθοδο για την εύρεση των δύο τρίτων του $\frac{1}{5}$ και υποστηρίζει ότι μπορεί κανείς να προχωρήσει με τον ίδιο τρόπο και με άλλα κλάσματα. Αποσπάσματα όπως αυτό δείχνουν ότι οι Αιγύπτιοι είχαν κάποια εκτίμηση για τους γενικούς κανόνες και μεθόδους πάνω και πέρα από τη συγκεκριμένη περίπτωση και αυτό αντιπροσωπεύει ένα σημαντικό βήμα στην ανάπτυξη των Μαθηματικών. Για τη διαδικασία ανάλυσης του $\frac{2}{5}$ σε άθροισμα κλασματικών μονάδων δεν είναι κατάλληλη η διαίρεση με το 2, αλλά ξεκινώντας με το ένα τρίτο του $\frac{1}{5}$ καταλήγει κανείς στην ανάλυση που δίνεται από τον Ahmes, $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$. Στην περίπτωση του $\frac{2}{7}$ εφαρμόζεται η διαδικασία της κατά το ήμισυ διαίρεσης δύο φορές, για να επιτευχθεί το αποτέλεσμα $\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία φτάνουμε, επίσης, στην ανάλυση που δίνεται από τον Ahmes: $\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$. Η αιγυπτιακή εμμονή στη διαίρεση με το 2 και το 3 φαίνεται καθαρά από την τελευταία καταχώρηση στον πίνακα $\frac{2}{n}$ για $n=101$, αφού δεν γίνεται καθόλου σαφές γιατί η ανάλυση $2/n=1/n+1/2n+1/3n+1/2\cdot 3\cdot n$ είναι καλύτερη από την $1/n+1/n$. Ίσως ένας από τους στόχους των Αιγυπτίων για την ανάλυση του $2/n$ ήταν να φθάσουν σε κλασματικές μονάδες μικρότερες από $1/n$.

Α.2. Αριθμητικές Πράξεις.

Ο πίνακας $\frac{2}{n}$ στον πάπυρο του Ahmes ακολουθείται από έναν μικρό πίνακα $\frac{n}{10}$, για n από 1 έως 9, στον οποίο τα κλάσματα εκφράζονται και πάλι χρησιμοποιώντας τις αγαπημένες τους κλασματικές μονάδες και το κλάσμα $\frac{2}{3}$. Το κλάσμα $\frac{1}{9}$, για παράδειγμα, εμφανίζεται ως άθροισμα των $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{5}$ και $\frac{2}{3}$. Ο ίδιος ο Ahmes είχε αρχίσει το έργο του με τη διαβεβαίωση ότι θα παρουσίαζε μια μελέτη όλων των πραγμάτων πλήρη και λεπτομερή καθώς και τη γνώση όλων των μυστηρίων. Για αυτό το κύριο μέρος του κειμένου, μετά από τους πίνακες $\frac{2}{n}$ και $\frac{10}{n}$, αποτελείται από ογδόντα τέσσερα ευρέως διαδεδομένα προβλήματα. Τα πρώτα έξι από αυτά απαιτούν τη διαίρεση ενός, δύο, έξι, επτά, οκτώ ή εννέα καρβελιών ψωμιού σε δέκα άνδρες και ο γραφέας κάνει χρήση του πίνακα $\frac{10}{n}$ τον οποίο έχει δώσει μόλις πιο πάνω. Στο πρώτο πρόβλημα ο Ahmes ασχολείται εκτενώς με το να δείξει ότι είναι σωστό να πάρει καθένας από τους δέκα άνδρες ένα δέκατο του καρβελιού! Εάν ένας άνδρας πάρει $\frac{1}{10}$ του καρβελιού, οι δύο άνδρες θα πάρουν $\frac{2}{10}$ ή $\frac{1}{5}$ και οι τέσσερις θα πάρουν $\frac{2}{5}$ ή $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ του καρβελιού. Ως εκ τούτου, οκτώ άντρες θα πάρουν $\frac{2}{3}+\frac{2}{15}$ ή $\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$ του καρβελιού και οκτώ άντρες συν δύο άνδρες ακόμη θα πάρουν $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$ ή ένα ολόκληρο καρβέλι. Ο Ahmes φαίνεται ότι είχε στη διάθεσή του ένα είδος ισοδύναμου με το γνωστό σε εμάς ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, που του έδινε τη δυνατότητα να ολοκληρώσει την απόδειξη. Στη διαίρεση των επτά καρβελιών σε δέκα άνδρες ο γραφέας θα μπορούσε να επιλέξει $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$ του καρβελιού για τον καθένα, αλλά η προτίμηση για το $\frac{2}{3}$ τον οδήγησε στο $\frac{2}{3}+\frac{1}{30}$ του καρβελιού για τον καθένα.

Τα δύο κύρια συμπεράσματα που προκύπτουν από τη μελέτη των αρχαίων αιγυπτιακών μαθηματικών είναι ότι: α) ακολουθείται στην ουσία η προσθετική μέθοδος και β) προκύπτει μια βαθύτερη κατανόηση της ανάπτυξης των υπολογισμών με κλάσματα. Η βασική αριθμητική πράξη ήταν η πρόσθεση και οι γνωστές σε εμάς πράξεις πραγματοποιούνταν στην εποχή του Ahmes με βάση αυτήν. Οι Αιγύπτιοι πραγματοποιούσαν την πρόσθεση ευκολότερα συγκριτικά με το σημερινό τρόπο, αφού βασίζονταν στην αντικατάσταση συμβόλων (δέκα σύμβολα μιας τάξης τα αντικαθιστούσαν με το σύμβολο της αμέσως επόμενης τάξης), χωρίς να χρειάζεται να απομνημονεύουν αθροίσματα και κρατούμενα. Στην αφαίρεση ξεκινούσαν να μετρούν από τον αφαιρετέο ανεβαίνοντας σταδιακά μέχρι να φτάσουν στον μειωτέο. Στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση χρησιμοποιούσαν διαδοχικούς διπλασιασμούς και έναν αλγόριθμο σύμφωνα με τον οποίο λογάριαζαν διπλασιάζοντας διαδοχικά τον διαιρέτη μέχρι να φτάσουν στον διαιρετέο. Η δική μας λέξη «πολλαπλασιασμός» ή πολλαπλότητα υποδηλώνει, στην πραγματικότητα, αυτή την αιγυπτιακή διαδικασία.

Το πρόβλημα 32 στον Πάπυρο του Rhind, για παράδειγμα, δείχνει τη διαδικασία που ακολουθούνταν από τους Αιγυπτίους για τον υπολογισμό του γινομένου 12x12 (διαβάζοντας από δεξιά προς τα αριστερά).



Η διαδικασία αυτή, χρησιμοποιώντας σύγχρονα αριθμητικά σύμβολα αντιστοιχεί (διαβάζοντας από αριστερά προς τα δεξιά):

	1	12	
	2	24	
\	4	48	
\	8	96	άθροισμα 144

Με τις ενδείξεις \ σημειώνονται τα μερικά γινόμενα που χρησιμοποιούνταν για να βρεθεί το τελικό αποτέλεσμα. Το σύμβολο στο τέλος των υπολογισμών αναπαριστά ένα ρολό παπύρου που σημαίνει ότι «το αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο». Περιστασιακά, επίσης, χρησιμοποιούνταν ο πολλαπλασιασμός με το δέκα, αφού κάτι τέτοιο ήταν φυσικό επακόλουθο του δεκαδικού ιερογλυφικού συμβολισμού. Επιπλέον, ο πολλαπλασιασμός των συνδυασμών κλασματικών μονάδων ήταν ένα κομμάτι της αιγυπτιακής αριθμητικής. Το πρόβλημα 13 στον πάπυρο του Ahmes ζητά το γινόμενο των $\frac{1}{16}+\frac{1}{112}$ και $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, με το αποτέλεσμα να έχει βρεθεί σωστά, $\frac{1}{8}$.

Από τους υπολογισμούς στα προβλήματα του Ahmes γίνεται εμφανές ότι οι Αιγύπτιοι είχαν φτάσει σε υψηλό επίπεδο στην εφαρμογή της διαδικασίας του διπλασιασμού. Στο πρόβλημα 70 ζητείται το πηλίκο της διαίρεσης του 100 με το $7+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$. Το αποτέλεσμα, $12+\frac{2}{3}+\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$, προκύπτει ως εξής: διπλασιάζοντας διαδοχικά τον διαιρέτη, πρώτα έχουμε $15+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, στη συνέχεια $31+\frac{1}{2}$, και τέλος 63, το οποίο είναι οκταπλάσιο του διαιρέτη. Επιπλέον, είναι γνωστό ότι τα δύο τρίτα του διαιρέτη ισούνται με $5+\frac{1}{4}$. Επομένως, όταν ο διαιρέτης πολλαπλασιάζεται με $8+4+\frac{2}{3}$ προκύπτει ως αποτέλεσμα $99\frac{3}{4}$, το οποίο είναι μικρότερο κατά $\frac{1}{4}$ από το επιθυμητό γινόμενο που είναι το 100. Στο σημείο αυτό έγινε μια έξυπνη ρύθμιση της διαφοράς με το σκεπτικό ότι εφόσον το οκταπλάσιο του διαιρέτη είναι 63, αν ο διαιρέτης πολλαπλασιαστεί με $\frac{2}{63}$ θα δώσει αποτέλεσμα $\frac{1}{4}$. Από τον πίνακα $\frac{2}{n}$ γίνεται γνωστό ότι είναι $\frac{2}{63}=\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$. Το επιθυμητό πηλίκο, επομένως, είναι $12+\frac{2}{3}+\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$. Παρεμπιπτόντως, η προαναφερθείσα διαδικασία χρησιμοποιεί την αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού, με την οποία οι Αιγύπτιοι προφανώς ήταν πολύ εξοικειωμένοι.

Πολλά από τα προβλήματα του Ahmes δείχνουν μια γνώση χειρισμού των αναλογιών αντίστοιχη με την «μέθοδο των τριών». Στο πρόβλημα 72 ζητείται ο υπολογισμός του αριθμού των καρβελιών «δύναμης» 45 που ισοδυναμούν με 100 καρβέλια «δύναμης» 10 και η λύση δίνεται ως $(100/10)$ επί 45, ή 450 καρβέλια. Σε προβλήματα που αναφέρονται σε ψωμί και ζύθο, η «δύναμη» ή pesu, είναι το αντίστροφο της πυκνότητας των σιτηρών, δηλαδή το πηλίκο του αριθμού των ψωμιών ή των μονάδων όγκου διαιρούμενο με την ποσότητα σιτηρών που χρησιμοποιήθηκαν (υποδηλώνεται μέσω αυτού η ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος – ψωμιού ή ζύθου – με βάση την ποσότητα σιτηρών που χρησιμοποιήθηκαν για την Παρασκευή του). Προβλήματα σχετικά με ψωμί και ζύθο υπάρχουν πολλά στον πάπυρο του Ahmes. Το πρόβλημα 63, για παράδειγμα, ζητά να μοιραστούν 700 καρβέλια ψωμιού σε τέσσερα άτομα αν οι ποσότητες που πρόκειται να πάρουν βρίσκονται σε συνεχόμενη αναλογία $\frac{2}{3}:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$. Η λύση βρίσκεται λαμβάνοντας τον λόγο 700 προς το άθροισμα των κλασμάτων της αναλογίας. Σε αυτήν την περίπτωση το πηλίκο του 700 διαιρούμενο με $1\frac{3}{4}$ προκύπτει πολλαπλασιάζοντας το 700 με το αντίστροφο του διαιρέτη, που είναι $\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$, και δίνει το αποτέλεσμα 400. Υπολογίζοντας στη συνέχεια τα $\frac{2}{3}$, το $\frac{1}{2}$, το $\frac{1}{3}$ και το $\frac{1}{4}$ αυτού του αριθμού, προκύπτουν τα ζητούμενα μερίδια του ψωμιού.

<u>Α.3. Προβλήματα αλγεβρικά</u>.

Τα αιγυπτιακά μαθηματικά, κατά το μεγαλύτερο μέρος τους, ήταν αριθμητικά με εφαρμογές στη μέτρηση γεωμετρικών σχημάτων. Υπάρχουν, όμως, σε αυτά μερικά σημεία, τα οποία θεωρήθηκαν πρόδρομοι σε θέματα που, σύμφωνα με τα σύγχρονα μαθηματικά, εμπίπτουν στον τομέα της Άλγεβρας. Πρόκειται για προβλήματα όπου εμφανίζεται μια άγνωστη ποσότητα και είναι γνωστά ως προβλήματα «aha», επειδή αρχίζουν συχνά με την αιγυπτιακή λέξη ʿḥʿ. Η λέξη αυτή πιθανώς σημαίνει «την ποσότητα» (που ζητείται να βρεθεί) και είχε προταθεί να προφέρεται «hau» και αργότερα «aha» (Van der Waerden, 1961).

Τα προβλήματα, για τα οποία θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ο όρος αλγεβρικά, δεν αναφέρονται σε συγκεκριμένα αντικείμενα, όπως το ψωμί και ο ζύθος, ούτε ζητούν πράξεις με γνωστούς αριθμούς. Αντίθετα, απαιτούν κάποιες λύσεις αντίστοιχες των γραμμικών εξισώσεων του τύπου $x + ax = b$ ή $x + ax + bx = c$, όπου οι a, b και c είναι γνωστοί και ο x είναι άγνωστος. Ο άγνωστος αναφέρεται ως «aha» ή ποσότητα. Το πρόβλημα 24, για παράδειγμα, ζητά την αξία της ποσότητας εάν η ποσότητα και το ένα έβδομο της ποσότητας είναι 19. Η λύση που έδωσε ο Ahmes δεν μοιάζει με αυτή των σύγχρονων εγχειριδίων, αλλά με τη διαδικασία που είναι γνωστή ως μέθοδος της «αυθαίρετης παραδοχής» και χρησιμοποιούνταν από τους μαθηματικούς της δυτικής Ευρώπης για μεγάλο χρονικό διάστημα. Μια συγκεκριμένη τιμή επιλέγεται για την ποσότητα, κατά πάσα πιθανότατα μια λανθασμένη, και στη συνέχεια με αυτή την τιμή του αγνώστου εκτελούνται οι πράξεις που αναγράφονται στην αριστερή πλευρά της ισότητας. Το αποτέλεσμα αυτών των πράξεων συγκρίνεται με το ζητούμενο αποτέλεσμα και με τη χρήση των αναλογιών οδηγείται στη σωστή απάντηση. Στο πρόβλημα 24 επιλέγεται ως πιθανή τιμή του άγνωστου το 7, έτσι ώστε το $x + \frac{1}{3}x$ είναι 8, αντί του 19 που είναι η επιθυμητή απάντηση. Εφόσον $8(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = 19$, το 7 πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ ώστε να προκύψει η σωστή τιμή για την ποσότητα. Ο Ahmes βρήκε ως απάντηση $16 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ και προχώρησε σε έλεγχο του αποτελέσματός του ,δείχνοντας ότι εάν στο $16 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ προστεθεί το ένα έβδομό του (το οποίο είναι $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$), το αποτέλεσμα είναι πράγματι 19. Διαπιστώνεται, έτσι, ένα ακόμα σημαντικό βήμα στην ανάπτυξη των Μαθηματικών, όπου η επαλήθευση αποτελεί μια απλή περίπτωση απόδειξης. Αν και η μέθοδος της «αυθαίρετης παραδοχής» χρησιμοποιήθηκε γενικά από τον Ahmes, στο πρόβλημα 30 η $x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 37$ λύνεται με παραγοντοποίηση του πρώτου μέλους της εξίσωσης και με διαίρεση του 37 με $1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$, δίνοντας ως αποτέλεσμα το $16 + \frac{1}{36} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$.

Πολλοί από τους υπολογισμούς «aha» στον Πάπυρο του Rhind είναι προφανώς εργασίες εξάσκησης για νέους σπουδαστές. Αν και σε ένα μεγάλο μέρος τους φαίνεται να είχαν πρακτικό χαρακτήρα, σε κάποιες περιπτώσεις αποδεικνύεται το ενδιαφέρον και για αριθμητικά παιχνίδια, τα οποία εικάζεται ότι είχαν σκοπό την αναψυχή των εκπαιδευομένων. Έτσι, το πρόβλημα 79 αναφέρεται σε «επτά σπίτια, 49 γάτες, 343 ποντίκια, 2401 στάχια σιταριού, 16.807 heqat». Μπορεί να υποτεθεί ότι ο γραφέας αναφερόταν σε ένα πρόβλημα, πιθανόν πολύ γνωστό εκείνη την εποχή, στο οποίο σε κάθε ένα από τα επτά σπίτια υπήρχαν επτά γάτες, καθεμιά από της οποίες θα έτρωγε επτά ποντίκια, καθένα από τα οποία θα έτρωγε επτά στάχια, το καθένα από τα οποία θα παρήγαγε επτά μονάδες σιτηρών. Το πρόβλημα προφανώς δεν ζητούσε μια πρακτική απάντηση, που θα αναφερόταν στην ποσότητα σιτηρών που θα είχε σωθεί, αλλά το μη πρακτικό άθροισμα των αριθμών από τις κατοικίες, τις γάτες, τα ποντίκια, τα στάχια σιτηρών και τα heqat (μονάδα χωρητικότητας των αρχαίων Αιγυπτίων) των σιτηρών. Αυτό το διασκεδαστικό πρόβλημα θα μπορούσε να είναι πρόδρομος ανάλογων σύγχρονων παιδικών τραγουδιών με αριθμούς.

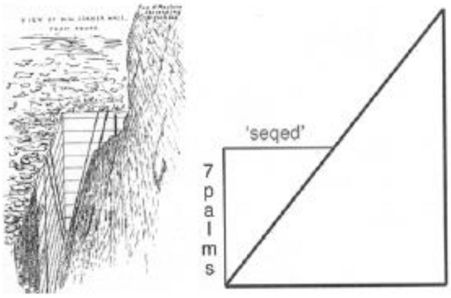
Α.4. Προβλήματα γεωμετρικά.

Στα πλαίσια αναζήτησης χρήσιμων αποτελεσμάτων η αιγυπτιακή γεωμετρία μπορεί να υπολειπόταν σε θεωρήματα και αποδείξεις, αλλά περιλάμβανε κλίση ευθείας και επιπέδου, όγκους και εμβαδά γεωμετρικών σχημάτων. Ο Έλληνας ιστορικός Ηρόδοτος διηγείται ότι οι πλημμύρες του Νείλου και η εξάλειψη των ορίων που προκαλούνταν κατά τη διάρκειά τους έκανε εντονότερη την ανάγκη ύπαρξης των «αρπεδοναπτών». Αυτοί ήταν οι Αιγύπτιοι γεωμέτρες που ασχολούνταν με τις μετρήσεις, την αναδιανομή των κτημάτων και τον υπολογισμό των φόρων που αναλογούσαν σε κάθε κτηματία. Ήταν αξιωματούχοι του κράτους και ονομάζονταν έτσι γιατί χρησιμοποιούσαν για τις μετρήσεις τους την αρπεδόνη, ένα σχοινί χωρισμένο σε 100 ίσα διαστήματα με κόμπους που απείχαν μεταξύ τους έναν πήχη. Οι ικανότητες και τα επιτεύγματά τους θαυμάζονταν και από τον Δημόκριτο, ο οποίος ήταν ένας καταξιωμένος μαθηματικός και ένας από τους θεμελιωτές της ατομικής θεωρίας. Ακόμη και σήμερα φαίνεται να υπερεκτιμώνται τα επιτεύγματά τους, εν μέρει ως αποτέλεσμα της αξιοθαύμαστης ακρίβειας που παρατηρείται στην κατασκευή των πυραμίδων. Συχνά λέγεται ότι οι αρχαίοι Αιγύπτιοι ήταν εξοικειωμένοι με το Πυθαγόρειο θεώρημα, αλλά καμία ένδειξη δεν υπάρχει για αυτό στους παπύρους που έχουν βρεθεί. Ωστόσο, υπάρχουν κάποια γεωμετρικά προβλήματα στον πάπυρο του Ahmes, όπως το πρόβλημα 51, που δείχνει ότι το εμβαδόν ενός ισοσκελούς τριγώνου βρέθηκε πολλαπλασιάζοντας το μισό της αποκαλούμενης βάσης επί το ύψος. Ο Ahmes επιχειρηματολογεί σχετικά με τη μέθοδο που χρησιμοποίησε για να βρει το εμβαδό προτείνοντας ότι το ισοσκελές τρίγωνο μπορεί να θεωρηθεί ως δύο ορθογώνια τρίγωνα, από τα οποία το ένα μπορεί να μετατοπιστεί, έτσι ώστε μαζί τα δύο τρίγωνα να σχηματίζουν ένα ορθογώνιο. Το ισοσκελές τραπέζιο αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο στο πρόβλημα 52, στο οποίο η μεγαλύτερη βάση του τραπεζίου είναι 6, η μικρότερη είναι 4, και η απόσταση μεταξύ τους είναι 20. Παίρνοντας το μισό του μεγέθους των βάσεων και σχηματίζοντας ένα ορθογώνιο, ο Ahmes το πολλαπλασίασε με το 20 για να βρει το εμβαδό. Σε μετασχηματισμούς όπως αυτοί, στους οποίους ισοσκελή τρίγωνα και τραπέζια μετατρέπονται σε ορθογώνια παραλληλόγραμμα, θεωρήθηκε ότι υπάρχουν οι αρχές μιας θεωρίας ομοιότητας αλλά και της έννοιας της απόδειξης στη γεωμετρία. Οι Αιγύπτιοι, όμως, δεν συνέχισαν τις εργασίες τους προς αυτήν την κατεύθυνση. Ως μια σοβαρή ανεπάρκεια στη γεωμετρία τους σημειώθηκε από τους μελετητές η έλλειψη σαφούς διαχωρισμού μεταξύ των σχέσεων που είναι ακριβείς και εκείνων που είναι απλά προσεγγίσεις. Σε συμβολαιογραφικές πράξεις από τον Edfu, που χρονολογούνται 1500 χρόνια περίπου μετά τον Ahmes, περιλαμβάνονται παραδείγματα τριγώνων, τραπεζίων, ορθογώνιων παραλληλογράμμων και γενικότερα τετραπλεύρων. Το γινόμενο των αριθμητικών μέσων των απέναντι πλευρών δίνεται ως κανόνας για την εύρεση του εμβαδού τετράπλευρου σχήματος. Αν και ο κανόνας αυτός είναι ανακριβής, ο συντάκτης της πράξης καταλήγει μέσα από αυτόν στο συμπέρασμα ότι το εμβαδό ενός τριγώνου ισούται με το ημιάθροισμα των δύο πλευρών πολλαπλασιασμένο επί το ήμισυ της τρίτης πλευράς. Αυτό θεωρήθηκε ως ένα εντυπωσιακό παράδειγμα αναζήτησης σχέσεων μεταξύ γεωμετρικών σχημάτων αλλά και μια πρώιμη χρήση της έννοιας του μηδενός σε αντικατάσταση ενός μεγέθους στη Γεωμετρία.

Ο αιγυπτιακός κανόνας για την εύρεση του εμβαδού του κύκλου θεωρείται ως ένα από τα εξαιρετικά επιτεύγματα της εποχής εκείνης. Στο πρόβλημα 50 ο γραφέας Ahmes διατύπωσε την υπόθεση ότι το εμβαδό ενός κυκλικού χωραφιού με διάμετρο εννέα μονάδες είναι το ίδιο με το εμβαδό ενός τετραγώνου με πλευρά οκτώ μονάδες. Αν συγκρίνουμε αυτήν την υπόθεση με τον σύγχρονο τύπο $E = \pi r^2$, διαπιστώνουμε ότι ο αιγυπτιακός κανόνας αποδίδει στο π αξία περίπου $3\frac{1}{6}$, που αποτελεί μια ιδιαίτερα καλή προσέγγιση. Και η περίπτωση αυτή, όμως, δεν αποτελεί ένδειξη ότι ο Ahmes γνώριζε πως τα εμβαδά του κύκλου και του τετραγώνου δεν ήταν ακριβώς ίσα. Ο Gillings (1972) συγκρίνει διάφορες ερμηνείες σχετικά με την αρχαία αιγυπτιακή μέθοδο για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός κύκλου και αναφέρει πως στο πρόβλημα 48 του Παπύρου του Rhind μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζεται μια γενική μέθοδος από την οποία δηλώνεται η έννοια της απόδειξης και συναντάται ίσως μια ένδειξη για τον τρόπο με τον οποίο οι Αιγύπτιοι κατέληξαν στον κανόνα για την εύρεση του εμβαδού του κύκλου. Σε αυτό το πρόβλημα ο γραφέας σχημάτισε ένα οκτάγωνο από ένα τετράγωνο πλευράς εννέα μονάδων, τριχοτομώντας τις πλευρές και αποκόπτοντας τα τέσσερα γωνιακά ισοσκελή τρίγωνα, καθένα από τα οποία είχε εμβαδό $4\frac{1}{2}$ μονάδες. Το εμβαδό του οκταγώνου, το οποίο δεν διαφέρει πολύ από αυτό ενός εγγεγραμμένου στο τετράγωνο κύκλου, είναι εξήντα τρεις μονάδες, αποτέλεσμα που με τη σειρά του δεν απέχει και πολύ από το εμβαδό ενός τετραγώνου πλευράς οκτώ μονάδων. Μέσα από τον κανόνα αυτόν (σύμφωνα με τον οποίο ο λόγος του εμβαδού ενός κύκλου προς την περιφέρειά του είναι ίδιος με τον λόγο του εμβαδού του περιγεγραμμένου τετραγώνου προς την περίμετρό του) φαίνεται να επιβεβαιώνεται το γεγονός ότι ο αριθμός $4(8/9)^2$ πράγματι διαδραμάτιζε ρόλο αντίστοιχο με αυτόν της δικής μας σταθεράς π. Αυτή η παρατήρηση, βέβαια, που διατυπώνεται για το μήκος του κύκλου αντιπροσωπεύει μια γεωμετρική σχέση πολύ μεγαλύτερης ακρίβειας και μαθηματικής σπουδαιότητας από ότι η σχετικά καλή προσέγγιση για το π. Ο βαθμός ακρίβειας μιας προσέγγισης δεν είναι τελικά μέτρο μαθηματικού ή αρχιτεκτονικού επιτεύγματος και δεν θα πρέπει να τονίζεται υπερβολικά αυτή η πτυχή της αιγυπτιακής ανάπτυξης. Η αναγνώριση των σχέσεων μεταξύ των γεωμετρικών σχημάτων, από την άλλη, είχε παραμεληθεί από τους Αιγυπτίους κι όμως είναι αυτό το σημείο στο οποίο ήρθαν πιο κοντά στους διαδόχους τους, τους Έλληνες. Στα αιγυπτιακά μαθηματικά δεν εντοπίστηκε κανένα θεώρημα ή επίσημη απόδειξη, αλλά μερικές από τις γεωμετρικές συγκρίσεις, όπως αυτές για τα εμβαδά και τις περιμέτρους των κύκλων και των τετραγώνων, είναι από τις πρώτες ακριβείς προτάσεις στην ιστορία των καμπυλόγραμμων σχημάτων. Παρόλο που σε πολλά προβλήματά τους παρατηρούνται τα ίδια βήματα επίλυσης, άρα ένα είδος γενίκευσης, η μαθηματική πρόοδος των Αιγυπτίων θεωρήθηκε εμπειρική και αποτυπώνεται από την επιθυμία τους για κάλυψη των πρακτικών τους αναγκών μέσω χρήσιμων αποτελεσμάτων.

A.5. Στοιχεία τριγωνομετρίας.

Το πρόβλημα 56 στον Πάπυρο του Rhind θεωρήθηκε ιδιαίτερα ενδιαφέρον, γιατί σε αυτό περιέχονται στοιχεία τριγωνομετρίας και μια θεωρία όμοιων τριγώνων. Στην κατασκευή των πυραμίδων ήταν απαραίτητο να διατηρηθεί μια ομοιόμορφη κλίση στις έδρες και ίσως να ήταν αυτός ο προβληματισμός που οδήγησε τους Αιγυπτίους να εισαγάγουν μια έννοια αντίστοιχη με αυτήν της συνεφαπτομένης της γωνίας. Στη σύγχρονη τεχνολογία είναι συνηθισμένο να μετριέται η κλίση μιας ευθείας με το λόγο της κατακόρυφης μεταβολής προς την οριζόντια μεταβολή. Στην Αίγυπτο ήταν συνηθισμένο να χρησιμοποιείται ο αντίστροφος αυτού του λόγου. Η λέξη «seqed» σήμαινε την οριζόντια απόσταση μιας πλάγιας ευθείας από τον κατακόρυφο άξονα για κάθε μονάδα μεταβολής του ύψους. Το «seqed» επομένως αντιστοιχούσε, εκτός από τις μονάδες μέτρησης, στην κλίση που σήμερα χρησιμοποιείται από τους αρχιτέκτονες για να περιγράψουν την εσωτερική κλίση ενός υποστυλώματος ή ενός βάθρου. Η κατακόρυφη μονάδα μήκους ήταν ο πήχης, ενώ στη μέτρηση της οριζόντιας απόστασης, η μονάδα που χρησιμοποιούνταν ήταν η «παλάμη», από την οποία αντιστοιχούσαν επτά σε έναν πήχη. Ως εκ τούτου, το «seqed» της έδρας μιας πυραμίδας ήταν ο λόγος της οριζόντιας μεταβολής, που μετριόταν σε παλάμες, προς την κάθετη, που μετριόταν σε πήχεις.



Εικόνα 2: Ένδειξη μιας κεκλιμένης επιφάνειας από την πυραμίδα του Meidum (Imhaussen, 2006).

Στο πρόβλημα 56 καλείται να βρει κάποιος το «seqed» μιας τετραγωνικής πυραμίδας με ύψος 250 πήχεις και με πλευρά βάσης 360 πήχεις.

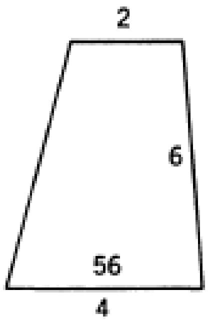
Εικόνα 3: Σχέδιο του γραφέα για μια πυραμίδα, το οποίο συνοδεύει το Πρόβλημα 56 του Παπύρου του Rhind (Gillings, 1972).

Ο γραφέας αρχικά διαίρεσε 360 με το 2, στη συνέχεια διαίρεσε το αποτέλεσμα με το 250 και βρήκε το $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}$ σε πήχεις. Πολλαπλασιάζοντας το αποτέλεσμα με το 7, βρήκε το «seqed» να είναι $5\frac{1}{25}$ παλάμες ανά πήχη. Αυτό σημαίνει ότι η κλίση των τριγωνικών όψεων αυτής της πυραμίδας ήταν $5\frac{1}{25}$ παλάμες οριζόντια για κάθε ανύψωση ύψους ενός πήχη. Οι εργάτες που οικοδόμησαν την πυραμίδα χρειάστηκε βέβαια να τηρήσουν τις οδηγίες τους πολύ προσεκτικά, προκειμένου να αποκτήσουν το ίδιο «seqed» για κάθε επόμενη σειρά από πέτρες και αυτό μπορεί να είναι ένας λόγος για τον οποίο ο προσανατολισμός των πυραμίδων ήταν τόσο ακριβής σε βορρά-νότο και ανατολή-δύση (Gillings, 1972). Σε άλλα προβλήματα πυραμίδων στον πάπυρο του Ahmes, το «seqed» φαίνεται να είναι $5\frac{1}{4}$, συμφωνώντας λίγο περισσότερο με αυτό της μεγάλης πυραμίδας του Χέοπα, με πλάτος βάσης 440 πήχεις και 280 ύψος, της οποίας το «seqed» είναι $5\ \frac{1}{2}$ παλάμες ανά πήχη.

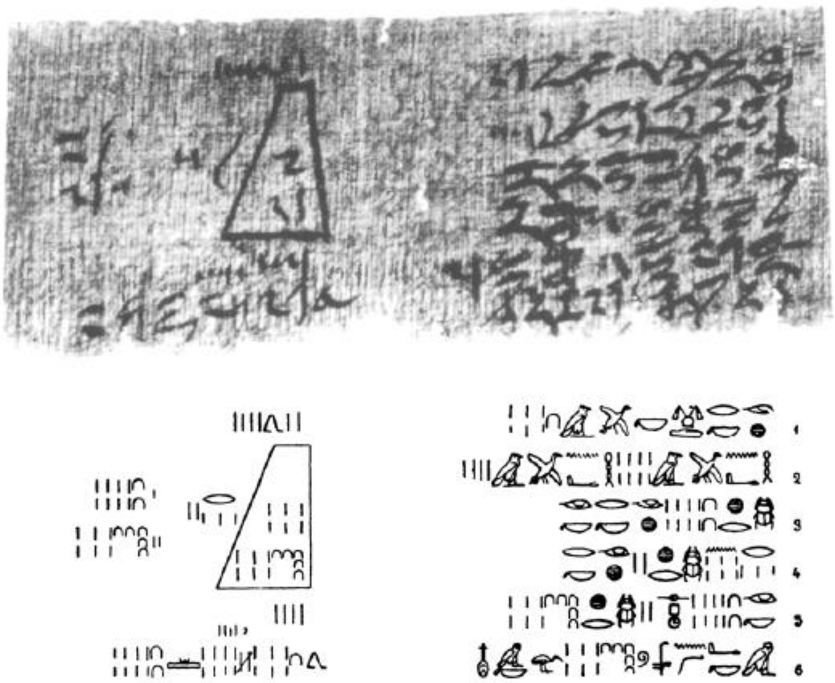
Η κατασκευή των πυραμίδων έδωσε πρόσφορο έδαφος για την καλλιέργεια πολλών ιστοριών σχετικά με υποτιθέμενες γεωμετρικές σχέσεις ανάμεσα στις διαστάσεις της Μεγάλης Πυραμίδας του Χέοπα, μερικές από της οποίες σαφώς δεν ευσταθούν. Για παράδειγμα, η εικασία ότι οι Αιγύπτιοι σκόπευαν να είναι ακριβώς ίση η περίμετρος της βάσης με το μήκος ενός κύκλου με ακτίνα ίση προς το ύψος της πυραμίδας δεν συμφωνεί με τα γραπτά του Ahmes. Ο λόγος της περιμέτρου προς το ύψος είναι πράγματι πολύ κοντά στο $\frac{44}{7}$, το οποίο είναι διπλάσιο από το $\frac{22}{7}$, τιμή που χρησιμοποιείται συχνά σήμερα για το π. Η τιμή, όμως, που δίνεται για το π από τον Ahmes είναι περίπου $3\ \frac{1}{6}$ και όχι $3\ \frac{1}{7}$. Το γεγονός ότι η κατά Ahmes τιμή του π χρησιμοποιήθηκε και από τους Αιγυπτίους επιβεβαιώνεται από έναν πάπυρο της Δωδέκατης Δυναστείας (τον πάπυρο Kahun, που σήμερα βρίσκεται στο Λονδίνο). Σε αυτόν ο όγκος ενός κυλίνδρου υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας το ύψος με το εμβαδό της βάσης, το οποίο προσδιορίζεται σύμφωνα με τον κανόνα του Ahmes.

Β. Ο πάπυρος της Μόσχας.

Σημαντικός, επίσης, είναι ο πάπυρος που είναι γνωστός ως πάπυρος του Golenischev ή πάπυρος της Μόσχας και αγοράστηκε στην Αίγυπτο το 1893. Ο Πάπυρος της Μόσχας είχε το ίδιο μήκος με τον Πάπυρο του Rhind (6 μέτρα περίπου) αλλά πλάτος το ένα τέταρτο (περίπου 8 εκατοστά). Ήταν γραμμένος, λιγότερο προσεκτικά από τον πάπυρο του Ahmes, από έναν άγνωστο γραφέα της Δωδέκατης Δυναστείας (γύρω στα 1890 π.Χ.). Σε αυτόν περιλαμβάνονται είκοσι πέντε παραδείγματα, στην πλειονότητα πρακτικά προβλήματα, τα οποία δεν διαφέρουν πολύ από εκείνα του Ahmes, εκτός από δύο που έχουν ιδιαίτερη σημασία. Το πρόβλημα 14 στον πάπυρο της Μόσχας αναφέρεται σε ένα σχήμα που μοιάζει με ισοσκελές τραπέζιο (βλ. εικόνα 4), αλλά οι υπολογισμοί που σχετίζονται με αυτό υποδεικνύουν ότι αναφέρεται σε μια κόλουρη τετραγωνική πυραμίδα.



Εικόνα 4 (Boyer & Merzbach 1997).



Εικόνα 5: Υπολογισμός του όγκου μιας κόλουρης πυραμίδας από το 14ο πρόβλημα του Μαθηματικού Παπύρου της Μόσχας (Struve, 1930).

Το πάνω μέρος του σχήματος είναι μια φωτογραφική αναπαράσταση ενός τμήματος του Παπύρου της Μόσχας. Είναι γραμμένο στα ιερατικά και το κάτω μέρος περιλαμβάνει τη μεταγραφή των ιερατικών στα ιερογλυφικά. Από το αριστερό μέρος της μεταγραφής φαίνεται ο υπολογισμός του όγκου. Πάνω και κάτω από το σχήμα υπάρχουν σύμβολα για το δύο και το τέσσερα, αντίστοιχα, ενώ μέσα στο σχήμα υπάρχουν τα ιερατικά σύμβολα για το έξι και το πενήντα έξι. Οι οδηγίες δίπλα από το σχήμα κάνουν σαφές ότι το πρόβλημα ζητά τον όγκο μιας κόλουρης τετραγωνικής πυραμίδας με ύψος έξι μονάδες και με ακμές, στην πάνω και κάτω βάση, δύο και τεσσάρων μονάδων αντίστοιχα, δηλαδή οι διαστάσεις που δίνονται είναι $\alpha = 4$, $b = 2$ και $h = 6$.

Ο γραφέας καθοδηγεί να υψωθούν στο τετράγωνο οι αριθμοί δύο και τέσσερα και να προστεθεί στο άθροισμα αυτών των τετραγώνων το γινόμενο του δύο και του τέσσερα, δίνοντας αποτέλεσμα είκοσι οκτώ. Αυτό το αποτέλεσμα στη συνέχεια πολλαπλασιάζεται με το ένα τρίτο του έξι και ο γραφέας κλείνει επισημαίνοντας ότι βρέθηκε το σωστό αποτέλεσμα, το 56.

Ο υπολογισμός του όγκου θα μπορούσε κανείς να πει ότι έχει γίνει σύμφωνα με τον σύγχρονο τύπο $V = \frac{1}{3}h\,(a2 + ab + b2)$, όπου h είναι το ύψος και a και b είναι οι πλευρές των τετράγωνων βάσεων. Οι οδηγίες, βέβαια, που δίνονται δεν συνοδεύονται από καμιά αιτιολόγηση και ο τύπος αυτός δεν είναι πουθενά γραμμένος, αλλά στην ουσία είναι προφανές ότι ένας τέτοιος υπολογισμός ήταν πιθανότατα απόρροια κάποιων σκέψεων που είχαν προηγηθεί.

Το πρόβλημα 10 στον πάπυρο της Μόσχας παρουσιάζει ένα ακόμα πιο δύσκολο πρόβλημα ερμηνείας από αυτήν του προβλήματος 14. Σε αυτήν την περίπτωση ο γραφέας ζητά το εμβαδό επιφάνειας σε ένα αντικείμενο που μοιάζει με ένα καλάθι διαμέτρου 4 ½ μονάδων και έχει ερμηνευτεί (μεταξύ άλλων ενδεχόμενων) ως υπολογισμός της επιφάνειας από μισή σφαίρα ή από την επιφάνεια ενός ημικυκλίου. Σε κάθε περίπτωση, φαίνεται ότι πρόκειται για μια πρώιμη εκτίμηση του εμβαδού μιας καμπυλόγραμμης επιφάνειας.

Από τους μελετητές των αιγυπτιακών μαθηματικών επισημαίνεται, βέβαια, πως έως ότου αποκτηθούν κάποιες νέες επιπλέον πληροφορίες για τις μεθόδους των Αιγυπτίων, κάθε ερμηνεία για τον τρόπο που κατέληξαν σε αυτές δεν είναι παρά εικασίες.

2.3. Αιγυπτιακά Μαθηματικά. – Στοιχεία από την νεότερη ιστοριογραφία.

Στην ενότητα που ακολουθεί παραθέτουμε στοιχεία από τη νεότερη ιστοριογραφία των αιγυπτιακών μαθηματικών μέσα από μελέτες που αντιπροσωπεύουν μια διαφορετική προσέγγιση στις υπάρχουσες πηγές. Κάτω από μια νέα προοπτική λαμβάνεται υπόψη το κοινωνικό, οικονομικό, πολιτιστικό πλαίσιο, στο οποίο δημιουργήθηκαν και εξελίχθηκαν οι έννοιες και τα επιτεύγματα των μαθηματικών στην αρχαία Αίγυπτο, αναγνωρίζοντας ότι δεν αρκεί η ερμηνεία και η απόδοσή τους με σύγχρονους μαθηματικούς όρους, αλλά απαιτείται και η σύνδεσή τους με την κοινωνία από την οποία προέρχονται. Στην παρούσα ενότητα παραθέτουμε κάποια στοιχεία, που συνδέονται με νεότερες μελέτες για τα αρχαία αιγυπτιακά μαθηματικά, τα οποία αντλήθηκαν κατά κύριο λόγο από της εργασίες της Imhausen (2003a; 2006; 2009).

2.3.1. Στοιχεία για το κλίμα και τη γεωγραφία της Αιγύπτου.

Για τον δυτικό κόσμο η φαραωνική Αίγυπτος είχε πάντα μια ασυναγώνιστη γοητεία, που ακόμη και σήμερα φαίνεται από την επιτυχία των εκθέσεων, ανά τον κόσμο, με αρχαία αιγυπτιακά ευρήματα και τη χρήση της αρχαίας Αιγύπτου στη θεματολογία ταινιών του σύγχρονου κινηματογράφου. Οι εκθέσεις συχνά επικεντρώνονται σε βασιλικά ευρήματα από τάφους ή ναούς, ενώ ο κινηματογράφος κάνει τακτική χρήση των μύθων που τα περιβάλλουν με τη μορφή κατάρας, μαγικών αντικειμένων και άλλων παρόμοιων θεμάτων.

Η λαϊκή αντίληψη για την αρχαία Αίγυπτο συνδέεται με τα αιγυπτιακά μαθηματικά, καθώς δημιουργεί συγκεκριμένες προσδοκίες στον σύγχρονο αναγνώστη. Από τη μία, επιβλητικά κτίσματα όπως πυραμίδες, ναοί και άλλα μνημεία από τον αιγυπτιακό πολιτισμό έχουν κάνει βαθιά εντύπωση στον δυτικό κόσμο, δημιουργώντας την τάση να αποδίδεται στους αρχαίους Αιγυπτίους η εφεύρεση πολλών σύγχρονων εννοιών και αποτελώντας μια από τις απαρχές των μύθων γύρω από την αρχαία αιγυπτιακή γνώση. Από την άλλη πλευρά, τα ευρήματα, τα οποία συνίστανται σε διακοσμήσεις τάφων και άλλα αντικείμενα που προορίζονται να εξασφαλίσουν τη μετά θάνατο ζωή, μπορεί να προβάλλουν μια εικόνα του αιγυπτιακού πολιτισμού που επικεντρώνεται αποκλειστικά στον θάνατο και τη μεταθανάτια ζωή. Και οι δύο αυτές προσδοκίες ενισχύονται από την αβασάνιστη ανάγνωση των αρχαίων Ελλήνων ιστορικών, όπως ο Ηρόδοτος (5ος αι. π.Χ.), ο οποίος απέδιδε στους Αιγυπτίους την εφεύρεση της Γεωμετρίας, αλλά τους χαρακτήριζε και ως υπερβολικά θρησκευόμενους, περισσότερο από όλους τους άλλους ανθρώπους. Η Rossi (2004) επισημαίνει την αρνητική επιρροή που μπορεί να έχει στη σύγχρονη έρευνα αυτός ο τύπος προσκόλλησης, αφού η Αίγυπτος, με τα εντυπωσιακά υπερμεγέθη αρχιτεκτονικά μνημεία, τον θρυλικό πλούτο της, τη δυσνόητη και συναρπαστική γραφή της, φαίνεται πως ήταν ο ιδανικός υποψήφιος με το κρυμμένο κλειδί της χαμένης σοφίας. Αν και αυτή η άποψη θα ήταν ίσως κολακευτική για τους αρχαίους Αιγυπτίους, τα αποτελέσματα μιας τέτοιας υπόθεσης δεν έχουν καμία σχέση με τα πραγματικά ιστορικά και αρχαιολογικά ευρήματα, καθώς στην πλειοψηφία τους τα θρησκευτικά αντικείμενα από τις αρχαιολογικές καταγραφές της αρχαίας Αιγύπτου είναι απλά το αποτέλεσμα των ιδιαίτερων γεωγραφικών και κλιματικών συνθηκών της χώρας.

Οι συνέπειες στη συντήρηση των αντικειμένων μπορούν να στρεβλώσουν την αντίληψή μας για τον αρχαίο αιγυπτιακό πολιτισμό. Βασικό τοπογραφικό χαρακτηριστικό της Αιγύπτου, τόσο στην αρχαιότητα όσο και στη σύγχρονη εποχή, αποτελεί ο Νείλος ποταμός. Αυτός διατρέχει το σύνολο της χώρας, δημιουργώντας μια γόνιμη λωρίδα γης κατά μήκος του, με μερικά χιλιόμετρα πλάτος (Butzer 1976), στην οποία και μόνον είναι δυνατή η καλλιέργεια της γης και η ανάπτυξη της αστικής ζωής. Έτσι, παρατηρείται οι αρχαίες αλλά και οι σύγχρονες πόλεις να βρίσκονται σχεδόν αποκλειστικά κατά μήκος του Νείλου ή σε μεγάλες οάσεις. Αυτό το δεδομένο επηρεάζει τη σύγχρονη αρχαιολογία, διότι αφενός μπορούν να ανασκαφούν μόνο οι περιοχές που δεν καταλαμβάνονται από τους σύγχρονους οικισμούς και αφετέρου ανασκαφές σε αυτές τις περιοχές, γύρω από την κοιλάδα του Νείλου, αποκαλύπτουν μόνον ό,τι έχει επιβιώσει μέσα από χιλιετίες υγρασίας, καθώς φθαρτά οργανικά υλικά, όπως ο πάπυρος, καταστρέφονται εύκολα κάτω από τέτοιες συνθήκες.

Μόνο τα αντικείμενα που βρέθηκαν έξω από αυτή τη στενή λωρίδα με το υγρό και γόνιμο έδαφος, στην έρημο ή στα όριά της (όπως η θέση των αρχαίων ναών και των τάφων), είχαν τις πιθανότητες να διατηρηθούν για πολλά χρόνια. Για το λόγο αυτό και το μεγαλύτερο μέρος από τα στοιχεία για τον φαραωνικό πολιτισμό, αλλά και για τον ελληνικό και τον ρωμαϊκό πολιτισμό, προέρχεται από τις ερήμους της Αιγύπτου. Αυτή είναι μια κατάσταση που προφανώς ευνοεί τη διατήρηση αρχαιολογικών και κειμενικών στοιχείων από περιβάλλοντα που συνδέονται με ταφές και άλλες τελετουργίες. Έτσι, από τη μια πλευρά είναι πραγματικά μεγάλη τύχη που κάποιοι αρχαίοι αιγυπτιακοί πάπυροι έχουν επιζήσει, αν λάβει κανείς υπόψη την υγρασία στην κοιλάδα του Νείλου. Από την άλλη, μόνο δεκαπέντε περίπου από αυτούς περιέχουν μαθηματικά κείμενα (δεδομένου ότι τα Μαθηματικά χρησιμοποιήθηκαν σε εργασίες που συνδέονται με τη ζωή, όχι με τον θάνατο), τα οποία εμφανίζονται σποραδικά σε δύο περιόδους που μεταξύ τους απέχουν πάνω από χίλια χρόνια. Αυτή η αντίθεση ανάμεσα στα εντυπωσιακά επιτεύγματα της αρχαίας Αιγύπτου και στην έλλειψη αποδεικτικών στοιχείων, για το πώς αυτά κατορθώθηκαν, επέτρεψε να ανθίσουν κάποιοι μύθοι στην ιστοριογραφία των αιγυπτιακών μαθηματικών. Έτσι, πολλοί ιστορικοί και μαθηματικοί, αντί να δεχτούν αυτή την κατάσταση και να δουλέψουν βασιζόμενοι σε αυτήν, επιχειρώντας παράλληλα να αποκομίσουν όσο το δυνατόν περισσότερα θετικά αποτελέσματα, προσπάθησαν να αξιοποιήσουν τα τμήματα των διαθέσιμων στοιχείων για να αποδείξουν την αρχαία αιγυπτιακή γνώση ή την υστέρησή της σε συγκεκριμένες (σύγχρονες) μαθηματικές έννοιες. Η Rossi (2004), αναφέρει σχετικά ότι τέτοιες απόψεις δεν παρέχουν απαραίτητα κάποιες χρήσιμες πληροφορίες για τον αρχαίο πολιτισμό στον οποίο υποτίθεται ότι αναφέρονται, αλλά μάλλον παρέχουν στοιχεία για την ιστορική περίοδο και τους πολιτισμούς στο πλαίσιο των οποίων αυτές αναπτύχθηκαν, όπως για τους τελευταίους δύο αιώνες στην Ευρώπη.

Επιπλέον, αυτή η πολύ ανομοιογενής διατήρηση των αρχικών πηγών βοηθά να γίνει κατανοητό γιατί η Μεσοποταμία έχει δώσει πολύ περισσότερα στοιχεία από την Αίγυπτο για την Ιστορία των Μαθηματικών. Οι γραφείς εκεί έγραφαν τα μαθηματικά τους κείμενα σε πήλινες πινακίδες, ενώ οι Αιγύπτιοι γραφείς σε παπύρους. Και οι δύο πολιτισμοί έδωσαν πιθανότατα μια παραγωγή από τεράστιες ποσότητες γραπτών κειμένων, στα οποία συμπεριλαμβάνονται και έργα όπου περιγράφονται, εκτελούνται, και εξηγούνται μαθηματικές πράξεις. Οι πήλινες πλάκες, όμως, αποδείχτηκαν πολύ πιο ανθεκτικές από τους παπύρους στη φθορά του χρόνου, σε διάφορες κλιματικές και γεωγραφικές συνθήκες. Ως εκ τούτου, μια σύγκριση ανάμεσα στους δύο αυτούς πολιτισμούς θα είναι πάντα προκατειλημμένη λόγω αυτής της κατάστασης.

2.3.2. Η εξέλιξη της ιστοριογραφίας για τα αρχαία αιγυπτιακά μαθηματικά.

Η μελέτη των αρχαίων αιγυπτιακών μαθηματικών άρχισε με την ανακάλυψη του Παπύρου του Rhind, ενός μαθηματικού παπύρου στα τέλη του δέκατου ένατου αιώνα (Eisenlohr, 1877). Η βιβλιογραφία για τα αιγυπτιακά μαθηματικά από τότε συνέχισε να παράγεται, όμως οι περισσότεροι μελετητές για αρκετό καιρό επαναλάμβαναν και συζητούσαν όσα είχαν γραφτεί νωρίτερα. Αυτή η στασιμότητα οφείλεται στο ότι οι διαθέσιμες πρωτογενείς πηγές δεν έχουν αυξηθεί σημαντικά και οι προσεγγίσεις στα διάφορα προβλήματα δεν έχουν αλλάξει. Η βιβλιογραφία είναι γραμμένη από μελετητές που ανήκουν σε δύο κοινότητες, της Ιστορίας των Μαθηματικών από τη μια και της Αιγυπτιολογίας από την άλλη, με εκπληκτικά μικρή ανταλλαγή απόψεων μεταξύ των δύο. Επιπλέον, το αποτέλεσμα της παραδοσιακής προσέγγισης είναι συχνά παρόμοιο με αυτό που ο Unguru ειρωνικά απεικονίζει στο άρθρο του για την ιστοριογραφία των ελληνικών μαθηματικών: μια αναχρονιστική παρουσίαση, δηλαδή, του υποτιθέμενου αλγεβρικού περιεχομένου το οποίο βρίσκεται κρυμμένο στα αρχαία κείμενα.

Από τη δεκαετία του 1990 προέκυψαν ριζικές αλλαγές στους στόχους και τη μεθοδολογία των αρχαίων μεσοποταμιακών, αιγυπτιακών, ελληνικών και ρωμαϊκών μαθηματικών, ως μέρος των ευρύτερων εξελίξεων στην Ιστορία των Μαθηματικών (Bottazzini & Dalmedico, 2001). Κατά το μεγαλύτερο μέρος του εικοστού αιώνα, η

Αίγυπτος και η Μεσοποταμία θεωρήθηκαν ως το λίκνο των (σύγχρονων) μαθηματικών και για το λόγο αυτό τους δόθηκε ιδιαίτερη θέση στα εισαγωγικά κεφάλαια των γενικών εκπαιδευτικών εγχειριδίων και των επισκοπήσεων. Τέτοιου είδους κεφάλαια προσπαθούσαν συνήθως να περιγράψουν τις διάσπαρτες ρίζες που αυτοί οι πολιτισμοί είχαν θέσει για οποιοδήποτε κλάδο των Μαθηματικών ήταν υπό συζήτηση, από το π (Beckmann 1971) έως την τριγωνομετρία (Maor 1998). Όπως ο Ritter (1995) έχει σημειώσει, οι ιστορικοί των αρχαίων μαθηματικών κατείχαν μια ιδιαίτερη θέση στην εκτίμηση των συναδέλφων τους, καθώς δεν ήταν πολλοί αυτοί που εργάζονταν πάνω στα πρώιμα βήματα των μαθηματικών. Γενικά θεωρούνταν από τους συναδέλφους τους ως δείγματα σπάνια, αφού ασχολούνταν με στοιχειώδες περιεχόμενο που από καιρό είχε ξεπεραστεί και δικαίως είχε ξεχαστεί τόσο από τους μαθηματικούς όσο και από τους μελετητές.

Αυτή η τοποθέτηση της αρχαίας Αιγύπτου στο άνοιγμα των μεγάλων ιστορικών συζητήσεων βασίζεται στην υπόθεση ότι τα Μαθηματικά είναι ενιαία, συνεχίζουν να αναπτύσσονται με το πέρασμα των χρόνων και, πέρα από κάποιες μικρότερης σημασίας εξαιρέσεις, αναπόφευκτα οδηγούν σε τρέχουσες μαθηματικές έννοιες. Έχει πλέον αναγνωριστεί ότι αυτή η άποψη για τα Μαθηματικά είναι μάλλον απλοϊκή, καθώς παραβλέπει ότι τα Μαθηματικά, πάνω από όλα, είναι μια πολιτιστική και κοινωνική δραστηριότητα και ως εκ τούτου εξαρτώνται από τις κοινωνίες και τις ομάδες από τις οποίες προέρχονται. Το πιο γνωστό άρθρο κατά της καθολικότητας των Μαθηματικών είναι αυτό του Unguru (1975), το οποίο αρχικά προκάλεσε πολλές αντιδράσεις και αποτέλεσε ένα σημείο καμπής στην ιστοριογραφία των αρχαίων Μαθηματικών. Τα σχετικά κείμενα έχουν ανατυπωθεί στον συλλογικό τόμο Christianidis (2004). Για τη Μεσοποταμία το έργο του Høyrup (2002) έχει προσδιορίσει μια ξεχωριστή μαθηματική κουλτούρα, ενώ ο Ritter (2004) ασχολείται με την ανάλυση των διαδικασιών στα μαθηματικά της Μεσοποταμίας και της Αιγύπτου που αναδεικνύουν τα χαρακτηριστικά στοιχεία καθενός από αυτά.

Ο Høyrup (1996) έχει εντοπίσει διάφορες φάσεις στην ιστοριογραφία των μαθηματικών της Μεσοποταμίας: μια αρχική «ηρωική εποχή» (1930-40) κατά τη διάρκεια της οποίας οι πρωτοπόροι Neugebauer και Thureau-Dangin μετέφρασαν αυτά που ήταν τότε γνωστά ως Βαβυλωνιακά μαθηματικά κείμενα και καθιέρωσαν την αλγεβρική τους ερμηνεία. Αυτό ακολουθήθηκε από σωρεία μεταφράσεων (1940-1975), που χαρακτηρίζονται από την τάση να αντικατασταθούν τα κείμενα από τις Βαβυλωνιακές πηγές με τα σύγχρονα μαθηματικά ισοδύναμά τους. Από το 1971 και μετά ξεκίνησε μια νέα προσπάθεια για αξιοποίηση των πηγών μέσω νέων προσεγγίσεων, οι οποίες οδήγησαν στην αναγνώριση διάφορων περιόδων στα μαθηματικά της Μεσοποταμίας, στην καλύτερη κατανόηση συγκεκριμένων φάσεων αλλά και του κοινωνικού τους υπόβαθρου. Έκτοτε έχουν εκπονηθεί μελέτες οι οποίες έχουν πάει τη γνώση για τα μαθηματικά της Μεσοποταμίας σε ένα νέο επίπεδο (όπως Robson 1999; Høyrup 2002). Η ιστοριογραφία των αιγυπτιακών μαθηματικών ακολούθησε μια παρόμοια πορεία με την προσθήκη ότι, σε σύγκριση με τη Μεσοποταμία, τα αιγυπτιακά μαθηματικά θεωρήθηκαν πιο πρωτόγονα, πιο προσβάσιμα στον σύγχρονο αναγνώστη (χάρη στις λιγότερες υπάρχουσες πηγές και το αιγυπτιακό δεκαδικό σύστημα), αλλά τελικά λιγότερο ενδιαφέροντα (καθώς δεν βρέθηκαν νέα χειρόγραφα). Οι πρώτες μεταφράσεις αρχαίων αιγυπτιακών μαθηματικών, περισσότερες από τις οποίες έγιναν στις αρχές του εικοστού αιώνα, έγιναν αποδεκτές ως «πηγές». Με την πάροδο του χρόνου, συχνά ξεχνιόταν το γεγονός ότι «οι πηγές» είχαν γραφτεί αρχικά στα Αιγυπτιακά και όχι στα Αγγλικά ή τα Γερμανικά. Τα αποτελέσματα, πράγμα ίσως αναμενόμενο, ήταν μερικές φορές θεωρίες οι οποίες δεν μπορούσαν να τεκμηριωθούν από το αρχικό υλικό πάνω στο οποίο υποτίθεται ότι βασίζονταν, όπως για παράδειγμα οι πολυάριθμες θεωρίες σχετικά με τη δημιουργία του πίνακα $2 \div n$.

Η έλλειψη νέων κειμένων οδήγησε τους μελετητές να συμπεριλάβουν στις παρουσιάσεις τους για τα αιγυπτιακά μαθηματικά κείμενα τα διοικητικά έγγραφα που περιλαμβάνουν υπολογισμούς (για παράδειγμα Gillings, 1972; Claggett, 1999). Αυτές οι πηγές πράγματι μπορούν να αποδειχθούν χρήσιμες για τη διεύρυνση των γνώσεων σχετικά με τα αιγυπτιακά μαθηματικά, αλλά πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ότι δεν είναι μαθηματικά κείμενα. Όπως έχει επισημανθεί από την Eleanor Robson στο έργο της για τα βαβυλωνιακά μαθηματικά, υπάρχει μια διάκριση ανάμεσα στα κείμενα που αντικατοπτρίζουν τις μαθηματικές γνώσεις και στα κείμενα που έχουν γραφτεί για τα μαθηματικά (Robson, 1999). Τα μαθηματικά κείμενα είναι απλά κείμενα που έχουν γραφτεί για να διδαχθεί ή να μάθει κάποιος Μαθηματικά.

Το κίνημα προς το πολιτιστικό πλαίσιο στην ιστοριογραφία των αρχαίων μαθηματικών έχει ανανεώσει σημαντικά την ερμηνεία των αιγυπτιακών μαθηματικών γραπτών πηγών. Αναγνωρίζεται πλέον ότι δεν αρκεί μόνο να εκφραστεί εκ νέου το μαθηματικό τους περιεχόμενο με σύγχρονους όρους. Αντίθετα, όταν τα τυπικά χαρακτηριστικά και το πολιτιστικό πλαίσιο ενός κειμένου λαμβάνεται υπόψη, μια ολόκληρη νέα σειρά από ενδιαφέροντα ερωτήματα μπορεί να δημιουργηθεί (Ritter 1995, 2000; Rossi 2004). Η πλήρης αξιολόγηση των πηγών απαιτεί μια σειρά από ειδικούς, καθώς προϋποθέτει την ικανότητα ανάγνωσης της αιγυπτιακής γλώσσας και ιερατικής γραφής, την κατανόηση της αρχαίας αιγυπτιακής ιστορίας και του πολιτισμού αλλά και γνώση των Μαθηματικών (αρχαίων και σύγχρονων). Σε μια τέτοια περίπτωση, που θα μπορούσαν να συνεργαστούν ομάδες ερευνητών, είναι απαραίτητη μια ορισμένη κριτική αξιολόγηση των θεωριών και των μεθοδολογιών του καθενός. Από αυτή την ευρεία βάση ο στόχος είναι να ξεπεραστεί το παραδοσιακό χάσμα μεταξύ των ανθρωπιστικών και των θετικών επιστημών και να υπάρξει μια μελέτη που να ικανοποιεί αναγνώστες και από τις δύο ομάδες. Οι μεμονωμένοι ερευνητές, ωστόσο, δεν χρειάζεται να είναι έμπειροι σε όλες τις απαραίτητες δεξιότητες για να κάνουν χρήσιμες συνεισφορές στην κατανόηση και ερμηνεία των αρχαίων μαθηματικών, όπως για παράδειγμα στο έργο του Abdulaziz (2008), όπου παρουσιάζεται μια πιο πρόσφατη ανάλυση του μαθηματικού πίνακα $2 \div n$.

Παρά τις αλλαγές που προαναφέρθηκαν, ορισμένα συμπεράσματα προηγούμενων ιστορικών, τα οποία συμβαίνει να μην αντέχουν την κριτική επανεξέταση, αποδείχτηκαν εκπληκτικά ανθεκτικά στην αναθεώρηση. Με την πάροδο του χρόνου αυτοί οι μύθοι ενδύθηκαν το κύρος αληθειών, είτε επειδή εκφράζουν μια ευρέως διαδεδομένη (αλλά ψευδή) αντίληψη ότι ο αρχαίος αιγυπτιακός πολιτισμός ήταν κατά κύριο λόγο θρησκευτικός είτε επειδή είναι ευκολότερο να εξεταστούν τα αιγυπτιακά μαθηματικά μέσα από μια παραπλανητικά σύγχρονη άποψη. Σε ορισμένες περιπτώσεις η εξέλιξη του μύθου μπορεί να ανιχνευθεί με την πάροδο του χρόνου. Σε άλλες περιπτώσεις, μια αρχική, προσεκτικά διατυπωμένη παρατήρηση απλοποιήθηκε και έτσι παραποιήθηκε με την πάροδο του χρόνου.

Παρακάτω παρουσιάζονται παραδείγματα τέτοιων μύθων, για τους οποίους αντλήθηκαν στοιχεία από την εργασία της Imhaussen (2009), όπου εξηγείται γιατί αυτοί θεωρούνται πλέον παρωχημένοι στην σύγχρονη ιστοριογραφία της αρχαίας επιστήμης.

Α. Το αιγυπτιακό π.

Ας εστιάσουμε σε κάποια σημεία από αυτά που κατά καιρούς έχουν γραφτεί:

- Ο Cantor (1880) αναφέρει ότι εξαιτίας των επαναλαμβανόμενων παραδειγμάτων και της αρκετά καλής εφαρμογής του είναι βέβαιο ότι για το λόγο της περιφέρειας κύκλου προς τη διάμετρο αντιστοιχεί μια τιμή $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1604\ldots$, η οποία απέχει πολύ από τη χειρότερη που έχει χρησιμοποιηθεί από μαθηματικούς.
- Αντίστοιχα από τον Engels (1977) σημειώνεται ότι αυτό σημαίνει έναν τετραγωνισμό του κύκλου $\pi r^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$ από όπου και η εξαιρετική προσέγγιση $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1605$ με το σφάλμα είναι μόνο 0,0189.
- Σε ιστοσελίδα του Τμήματος Μαθηματικών και Στατιστικής από το Πανεπιστήμιο του Αγίου Ανδρέα (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Pi_through_the_ages.html) αναφέρεται ότι στον Αιγυπτιακό Πάπυρο του Rhind, που χρονολογείται περίπου το 1650 π.Χ., υπάρχουν αρκετά στοιχεία για $4 \times \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3{,}16$ ως τιμή του π.
- Επιπλέον ο Blatner (1997) αναφέρει πως οι μαθηματικοί σε πρώιμους πολιτισμούς πρέπει να είχαν καταλάβει με απλό πειραματισμό ότι ένα σχοινί τυλιγμένο γύρω από την περιφέρεια ενός κύκλου ισούται με λίγο παραπάνω από τρεις φορές το μήκος της διαμέτρου του. Επίσης ότι με πιο ακριβείς μετρήσεις, ίσως υπολόγισαν πως το επιπλέον κομμάτι του σχοινιού ήταν περισσότερο από το ένα όγδοο του μήκους και λιγότερο από το ένα τέταρτο και ότι η παλαιότερη γνωστή πιο ακριβής τιμή αυτού του λόγου γράφτηκε από έναν αιγυπτιακό γραφέα που ονομαζόταν Ahmes γύρω στο 1650 π.Χ. σε αυτόν που είναι σήμερα γνωστός ως ο Πάπυρος του Rhind.
- Ακόμη, ο Neugebauer (1969) σημειώνει πως αυτό, καθώς και η σχετικά ακριβής τιμή 3,16 για το π, η οποία προκύπτει από τον παραπάνω τύπο, έδωσε στην αιγυπτιακή γεωμετρία ένα προβάδισμα έναντι των αντίστοιχων αριθμητικών επιτευγμάτων.
- Ενώ ο Beckman (1971) καταγράφει ότι οι Βαβυλώνιοι και οι Αιγύπτιοι γνώριζαν για το π κάτι παραπάνω από την απλή ύπαρξή του και είχαν βρει την κατά προσέγγιση αξία του, αφού περίπου το 2000 π.Χ. οι Βαβυλώνιοι έφτασαν σε τιμή $\pi = 3\,\frac{1}{8}$ και οι Αιγύπτιοι αντίστοιχα $\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2$.

Η σύγχρονη μαθηματική αντιμετώπιση των κύκλων βασίζεται στην σταθερά π, τον λόγο της περιφέρειας προς τη διάμετρο. Το εμβαδό ενός κύκλου υπολογίζεται ως το προϊόν της σταθεράς π επί το τετράγωνο της ακτίνας και η περιφέρειά του με το π επί τη διάμετρο. Από τον Lindemann (1882) αποδείχτηκε ότι ο αριθμός π είναι υπερβατικός, δηλαδή δεν αποτελεί τη ρίζα καμιάς αλγεβρικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές. Όταν θεωρούνταν ότι τα Μαθηματικά ήταν παγκόσμια, οι αρχαίοι υπολογισμοί για τον κύκλο αξιολογήθηκαν από την ακρίβειά τους σε σύγκριση με τις σύγχρονες φόρμουλες. Από την άποψη αυτή, η σύγκριση των σύγχρονων τύπων με την αρχαία αιγυπτιακή διαδικασία για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός κύκλου οδήγησε σε μια τιμή για το αιγυπτιακό π ίση με $3{,}16$ ή $\frac{256}{81}$.

Η πρώτη από τις παραπάνω αναφορές έγινε από τον Cantor μόλις μερικά χρόνια μετά την πρώτη αποκρυπτογράφηση του Παπύρου του Rhind. Με την πάροδο του χρόνου έχει αποκτήσει το κύρος μιας αλήθειας που δεν χρειάζεται επαναξιολόγηση: οι αναφορές για τους αιγυπτιακούς υπολογισμούς του εμβαδού ενός κύκλου κινούνται από την περιγραφή μιας διαδικασίας που ισοδυναμεί με την αποδοχή μιας τιμής για το $\pi = \frac{256}{81}$ ή $3{,}16$ ... έως τον ισχυρισμό ότι στα αιγυπτιακά μαθηματικά όχι μόνο ήταν γνωστή η έννοια του π, αλλά είχε υπολογιστεί και μια συγκριτικά καλή τιμή για αυτό.

Ωστόσο, η αρχαία αιγυπτιακή διαδικασία για τον υπολογισμό της επιφάνειας ενός κύκλου, που αναφέρεται ρητά στον Πάπυρο του Rhind στα προβλήματα 41-43 και 50, και έμμεσα στο 48, είναι να αφαιρεθεί από τη διάμετρο το 1/9 και στη συνέχεια να τετραγωνιστεί το υπόλοιπο:

Πάπυρος Rhind, πρόβλημα 50	αριθμητική αναπαράσταση	συμβολική αναπαράσταση
Μέθοδος υπολογισμού μιας κυκλικής περιοχής διαμέτρου 9 ht. Ποια είναι η επιφάνειά της περιοχής;	9	D_1
Θα αφαιρέσετε $\frac{1}{9}$ από αυτήν, δηλαδή 1,	(1) $\frac{1}{9} \times 9 = 1$	(1) $\frac{1}{9} \times D_1$
υπόλοιπο 8.	(2) $9 - 1 = 8$	(2) $D_1 -$ (1)
Θα πολλαπλασιάσετε το 8, 8 φορές πρέπει να είναι 64.	(3) $8 \times 8 = 64$	(3) (2) $\times$(2)

Σύμφωνα με όλα τα άλλα γνωστά παραδείγματα, στη διαδικασία αυτή η διάμετρος χρησιμοποιείται ως σημείο εκκίνησης και ακολουθούν τρία βήματα, στα οποία χρησιμοποιείται μόνο η σταθερά $\frac{1}{9}$ και η τιμή της διαμέτρου. Προκειμένου να φθάσουμε στην «αιγυπτιακή αξία για το π», θα πρέπει η διαδικασία αυτή να εκφραστεί με σύγχρονο συμβολισμό:

$$A_{κύκλου} = \left(d - \frac{1}{9}d\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

και να συγκριθεί με τον σύγχρονο τύπο:

$$A_{κύκλου} = \pi r^2$$

Έτσι, αποδίδεται $\pi = \frac{256}{81} = 3{,}16\ldots$ και ενώ αυτό μπορεί να είναι ένας καλός τρόπος για να διαπιστωθεί η ακρίβεια της αιγυπτιακής διαδικασίας, παραμένει ιστοριογραφικά λανθασμένο να δηλωθεί ότι οι Αιγύπτιοι χρησιμοποίησαν μια προσέγγιση του π που ήταν $\frac{256}{81}$. Οι Αιγύπτιοι δεν χρησιμοποιούσαν π. Όπως φαίνεται πιο πάνω από τη συμβολική αναπαράσταση του κειμένου, η σταθερά που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός κύκλου ήταν $\frac{1}{9}$. Αυτή σαφώς δεν ήταν μια εξαιρετικά κακή προσέγγιση του π, αλλά μάλλον ήταν η κατάλληλη σταθερά για την αρχαία αιγυπτιακή μέθοδο μαθηματική αντιμετώπισης των κύκλων.

Είναι αξιοσημείωτο ότι η δευτερογενής βιβλιογραφία ασχολείται περισσότερο με το γεγονός ότι τα αιγυπτιακά μαθηματικά έφτασαν σε μια τόσο καλή προσέγγιση του π παρά με την πραγματικά εντυπωσιακή παρατήρηση ότι τα αιγυπτιακά μαθηματικά χρησιμοποίησαν μια διαδικασία που δεν περιλάμβανε το π, αλλά οδήγησε σε ένα συγκριτικά ακριβές αποτέλεσμα.

Ένα άλλο αιγυπτιακό π μπορεί να βρεθεί σε μελέτες για τις πυραμίδες, που αποτελούν ένα από τα περισσότερο γνωστά επιτεύγματα της αρχαίας Αιγύπτου. Οι τρεις πιο διάσημες από αυτές βρίσκονται στην Γκίζα και καθώς το μεγαλύτερο μέρος από το περίβλημά τους έχει πλέον φύγει, είναι αδύνατο να ξαναβρεί κανείς τις ακριβείς διαστάσεις τους. Από τις μετρήσεις, λοιπόν, των υπολειμμάτων έχουν γίνει οι ακόλουθες παρατηρήσεις: η διαίρεση της περιμέτρου από τη Μεγάλη Πυραμίδα της Γκίζας με το ύψος της οδηγεί στο αποτέλεσμα $3{,}1399667$. Χρησιμοποιώντας αρχαίες μονάδες και υποθέτοντας ότι η Μεγάλη Πυραμίδα είχε πράγματι μήκος πλευράς 440 πήχεις και ύψος 280 πήχεις, έχουμε αποτέλεσμα $3{,}1428571$ και διαπιστώνουμε ότι αυτό είναι μια προσέγγιση του π. (Ανάλογα με τις μετρήσεις που χρησιμοποιήθηκαν και τον τρόπο με τον οποίο ο εκάστοτε συγγραφέας αποφάσισε να στρογγυλοποιήσει, έχουν ληφθεί διάφορες παρόμοιες τιμές για το π). Κατά παράδοξο τρόπο, όμως, οι μετρήσεις των δύο γειτονικών πυραμίδων δεν συμμορφώνονται με τον ίδιο λόγο. Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, οι υπολογισμοί του εμβαδού των κύκλων στον Πάπυρο του Rhind δεν κάνουν καμία χρήση αυτού του υποτιθέμενου π που συνδέθηκε με τη Μεγάλη Πυραμίδα της Γκίζας. Συνεπώς, φαίνεται πολύ πιο πιθανό ότι το μέγεθος που προκύπτει από την πραγματοποίηση μιας αυθαίρετης, σύγχρονης αριθμητικής πράξης, στην οποία χρησιμοποιήθηκαν εικασίες για τις μετρήσεις από τα υπολείμματα ενός αρχαίου κτίσματος, δεν είναι παρά το αποτέλεσμα ενός σύγχρονου υπολογισμού.

Β. Τα κλάσματα από το μάτι του Horus.

Ένα από τα πολλά ελκυστικά στοιχεία για τους σύγχρονους μελετητές του πολιτισμού της αρχαίας Αιγύπτου είναι η γραφή της. Δεν είναι μόνο ότι τα ιερογλυφικά ήταν ένα από τα πρώιμα συστήματα γραφής στον κόσμο, αλλά παρουσιάζονται με τη μορφή μικρών εικόνων που φαίνονται ευχάριστες και ταυτόχρονα μεταφέρουν μια αίσθηση μυστικότητας που μοιάζει με κώδικα. Υπάρχουν δύο ομάδες ιερογλυφικών, που συνήθως συναντώνται σε έργα σχετικά με τα αιγυπτιακά μαθηματικά, τα ιερογλυφικά σύμβολα για τους αιγυπτιακούς αριθμούς και τα σύμβολα που υποτίθεται ότι χρησιμοποιούνταν για τα κλάσματα της βασικής μονάδας χωρητικότητας, που ήταν το heqat (περίπου 4,8 λίτρα). Τα τελευταία είναι κοινώς γνωστά ως «κλάσματα από το μάτι του Horus», επειδή τα μεμονωμένα σύμβολα () μπορούν προφανώς να συναρμολογηθούν για να σχηματίσουν ένα αντιπροσωπευτικό αιγυπτιακό μάτι ().

Επιπλέον, αυτό το σύνθετο «μάτι» έχει συνδεθεί με το μύθο για το «Μάτι του Horus», ο οποίος εξοντώθηκε από τον κακό αδελφό του Seth και στη συνέχεια αποκαταστάθηκε από τον θεό Thoth που παρουσιαζόταν ως ένα μεγάλο πουλί με ένα μακρύ καμπύλο ράμφος, μακρύ λαιμό και μακριά πόδια. Η εικαζόμενη χρήση αυτών των συμβόλων για τον συμβολισμό τμημάτων του heqat δίνουν την εντύπωση που αρχικά εκφράστηκε από τον Ηρόδοτο ότι οι Αιγύπτιοι ήταν υπέρμετρα θρησκευόμενοι.

Η σχέση μεταξύ ιερογλυφικής και ιερατικής γραφής είναι, σύμφωνα με κάποιες απόψεις, όμοια με αυτή της τυπωμένης γραφής και της χειρόγραφης. Ακριβώς όπως μερικά γραπτά σήμερα είναι δύσκολο να διαβαστούν, η αποκρυπτογράφηση των ιερατικών μπορεί να είναι περισσότερο ή λιγότερο περίπλοκη και αποτελεί το πρώτο βήμα της εργασίας πάνω σε έναν αιγυπτιακό πάπυρο. Εκδόσεις ιερατικών κειμένων ως εκ τούτου συνήθως περιλάμβαναν μια ιερογλυφική εκδοχή του κειμένου, για να φανεί πώς ο συντάκτης διάβασε το χειρόγραφο του αρχαίου γραφέα. Με την πάροδο του χρόνου, η ιερατική γραφή άλλαζε, για αυτό προέκυψε και η ανάγκη για παλαιογραφίες στις οποίες απαριθμούνταν τυπικές μορφές ιερατικών συμβόλων και ιερογλυφικών ομολόγων τους (Imhausen, 2009).

Ο εν λόγω ιστοριογραφικός μύθος, όπως έδειξε ο Ritter (2002), προήλθε το 1911 με τη δημοσίευση του έργου του Möller. Στη συνέχεια, ο μύθος αυτός ακολούθησε το δρόμο του μέσα από τη σημαντική «Αιγυπτιακή Γραμματική» του Gardiner (1927), και εκτός από λίγες αμφιβολίες που είχαν εμφανιστεί ήδη από το 1923, έγινε αποδεκτός από τότε ως αλήθεια. Ωστόσο, όπως υποστήριξε λεπτομερώς ο Ritter, τα σύμβολα που συνήθως αναφέρονται ως «κλάσματα από το μάτι του Horus» δεν συνδέονταν αρχικά με τη μονάδα χωρητικότητας heqat. Υπάρχουν στοιχεία ήδη από τη Δεύτερη Δυναστεία και περισσότερα ακόμη από το Παλαιό Βασίλειο για ιερογλυφικές εκδοχές των ιερατικών συμβόλων, τα οποία σαφώς δεν αποτελούν τμήματα από το μάτι του Horus, αντιπροσωπεύοντας τις υποδιαιρέσεις του heqat. Επιπλέον, τα μεταγενέστερα αποδεικτικά στοιχεία από το Νέο Βασίλειο που αρχικά χρησιμοποιήθηκαν από τον Möller απέχουν πολύ από το να είναι αδιαμφισβήτητα (Ritter 2002).

Στα αυθεντικά αρχαία αιγυπτιακά ντοκουμέντα τα υποπολλαπλάσια του heqat πάντα είναι γραμμένα στην ιερατική μορφή τους. Δεν φαίνεται να μοιάζουν με τα μέρη ενός ματιού και δεν προσφέρονται για σύνδεση με τον μύθο του Horus, Seth και Thoth. Αντίθετα, φαίνεται ότι δεν είναι τίποτε περισσότερο ή λιγότερο από συγκεκριμένα σύμβολα που υποδηλώνουν ένα σύστημα υποδιαιρέσεων του βασικού μέτρου για τον όγκο των σιτηρών.

Γ. Ορθογώνια τρίγωνα και Πυθαγόρας.

Σχετικά με τα τρίγωνα:

- Ο Cantor (1880) αναφέρει ότι θα μπορούσε κανείς να φανταστεί, αν και χωρίς κάποια αιτιολόγηση, ότι οι Αιγύπτιοι ήταν δυνατό να γνωρίζουν πως τρεις πλευρές με μήκος 3, 4, 5 σχηματίζουν ένα τρίγωνο με ορθή γωνία μεταξύ των δύο μικρότερων πλευρών. Επίσης, ότι σε μια περίοδο που είχε ήδη αναπτυχθεί η θεωρία των γωνιών, ώστε να είναι δυνατός ο υπολογισμός του Seqt (seked), θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι υπήρχε ικανοποιητική γνώση σχετικά με το ορθογώνιο τρίγωνο πλευρών μήκους 3, 4, 5. Αυτή η γνώση θα είχε αποκτηθεί ουσιαστικά μέσω της εμπειρίας, χωρίς να υπάρχει στη σκέψη μια αυστηρή γεωμετρική απόδειξη με τη σύγχρονη έννοια της λέξης.

- Ο Shute (2001) επιπρόσθετα σημειώνει πως ένας άλλος λόγος για την υπόθεση ότι οι Αιγύπτιοι γνώριζαν το τρίγωνο με διαστάσεις 3,4,5 βασίζεται στις αναλογίες της πυραμίδας από την Τέταρτη Δυναστεία του Khafre (Chephren) στην Γκίζα και σε μερικές από τις μεταγενέστερες πυραμίδες του Παλαιού Βασιλείου. Οι ίδιες αναλογίες εμφανίζονται σε μερικά προβλήματα πυραμίδων (αρ. 56-59), που περιλαμβάνονται στον μαθηματικό Πάπυρο του Rhind.

Οι ισχυρισμοί σχετικά με την υποτιθέμενη χρήση των πυθαγόρειων τριάδων (ειδικά της 3-4-5) από τους Αιγυπτίους έχουν επίσης εξαπλωθεί από τα Μαθηματικά στην Αρχιτεκτονική (Rossi 2004). Σίγουρα, αυτό που αποκαλούμε σήμερα «ορθογώνιο τρίγωνο» δεν ήταν άγνωστο στα αιγυπτιακά μαθηματικά, όπως καταδεικνύεται και από το πρόβλημα 7 του μαθηματικού Παπύρου της Μόσχας:

Πάπυρος Μόσχας, πρόβλημα 7	αριθμητική αναπαράσταση	συμβολική αναπαράσταση
Μέθοδος υπολογισμού ενός τριγώνου		
Αν σας δοθεί: Ένα τρίγωνο με επιφάνεια 20	20	$D1$
και η ideb του $2\ \frac{1}{2}$.	$2\ \frac{1}{2}$	$D2$
Θα διπλασιάσετε την επιφάνεια.	(1) $2 \times 20 = 40$	(1) $2 \times D1$
40 θα είναι το αποτέλεσμα.		
Λογαριάστε $2\ \frac{1}{2}$ φορές	(2) $40 \times 2\frac{1}{2} = 100$	(2)(1) $\times\ D2$
100 θα είναι το αποτέλεσμα.		
Υπολογίστε την τετραγωνική ρίζα.	(3) $\sqrt{100} = 10$	(3) $\sqrt{2}$
10 θα είναι το αποτέλεσμα.		
Δαιρέστε το 1 με το $2\ \frac{1}{2}$	(4) $1 \div 2\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\frac{1}{15}$	(4) $1 \div D2$
Αυτό που προκύπτει είναι $\frac{1}{3}\frac{1}{15}$.		
Υπολογίστε επί 10	(5) $\frac{1}{3}\frac{1}{15} \times 10 = 4$	(5)(4) $\times$(3)
4 θα είναι το αποτέλεσμα.		
Είναι 10 σε μήκος και 4 σε πλάτος.		

Αυτό το τρίγωνο αποδεικνύεται ότι είναι ορθογώνιο από τους υπολογισμούς που πραγματοποιήθηκαν για την επίλυση του προβλήματος. Η ονομασία του στην αρχή του κειμένου με τον όρο *sepedet,* που ήταν η αρχαία αιγυπτιακή λέξη για το «τρίγωνο» (Rossi, 2004), δεν δείχνει αυτή τη συγκεκριμένη ιδιότητα. Ωστόσο, οι τεχνικοί όροι που χρησιμοποιούνται εδώ περιλαμβάνουν επίσης τη λέξη *ideb*, η οποία χρησιμοποιείται για να δηλώσει την αναλογία των δύο πλευρών που περικλείουν την ορθή γωνία.

Το εμβαδό του τριγώνου και η αναλογία των δύο πλευρών που περικλείουν την ορθή γωνία είναι τα στοιχεία που δίνονται και πρέπει να υπολογιστεί το μήκος αυτών των πλευρών. Με την παραπάνω διαδικασία μετασχηματίζεται το τρίγωνο σε ορθογώνιο (*βήμα 1*) και μετά σε τετράγωνο, του οποίου η βάση είναι όμοια με την μακρύτερη πλευρά του τριγώνου (*βήμα 2*). Στη συνέχεια, το μήκος αυτής της πλευράς υπολογίζεται με εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας (*βήμα 3*) και τέλος το μήκος της άλλης πλευράς του τριγώνου υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας την πλευρά με το αντίστροφο από το *ideb* (*βήμα 5*).

Η ίδια διαδικασία χρησιμοποιείται επίσης στα προβλήματα 6 και 17 του Παπύρου της Μόσχας και ένα παρόμοιο μπορεί να βρεθεί στο θραύσμα UC32162 του Lahun (Imhausen & Ritter 2004). Σε κανένα από αυτά τα προβλήματα δεν υπάρχει ένδειξη για τη χρήση της υποτείνουσας ή για την ταυτότητά της ως τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των δύο μικρότερων πλευρών του τριγώνου. Ωστόσο, αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι οι Αιγύπτιοι μαθηματικοί αγνοούσαν αυτή την ιδιότητα. Απλά δεν υπάρχει κάποια απόδειξη για αυτό μέσα στα υπάρχοντα ιερατικά μαθηματικά κείμενα.

Τα προβλήματα πυραμίδων (Πάπυρος Rhind, 56-59), για τα οποία γίνεται αναφορά από τον Shute (2001), όπως είδαμε παραπάνω, συνδέονται όλα με το Seqt (το λεγόμενο sqd ή seked), που οι Αιγύπτιοι χρησιμοποίησαν για την έκφραση κεκλιμένων επιφανειών, όπως οι πλευρές της πυραμίδας. Αυτός ο αιγυπτιακός όρος προέρχεται από το ρήμα qd, που σημαίνει «να οικοδομήσουμε». Το Seqt χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της οριζόντιας μετατόπισης της κεκλιμένης επιφάνειας για κάθε κατακόρυφη απόσταση ενός πήχη, δηλαδή το μήκος με το οποίο η κεκλιμένη πλευρά είχε «μετακινηθεί» από την κατακόρυφο στο ύψος ενός πήχη (Imhausen, 2006). Το Seqt μετριόταν πάντοτε σε παλάμες πάντοτε σε παλάμες (και εφόσον ήταν αναγκαίο, σε δάκτυλα), όπου 1 (βασιλικός) πήχης (περίπου 52 cm) = 7 παλάμες = 28 δάκτυλα. Τα προβλήματα 56-59 αφορούν όλα τις σχέσεις μεταξύ της πλευράς, του ύψους και του Seqt των πυραμίδων, καθώς δίνονται δύο από αυτές τις ποσότητες και υπολογίζεται η τρίτη. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα 56 δίδεται μια πυραμίδα πλευράς 360 και ύψους 250, από την οποία το Seqt προσδιορίζεται ως $5\ \frac{1}{25}$ παλάμες. Ενώ τα προβλήματα αυτά αφορούν όλα ορθογώνια τρίγωνα (μέσω της έννοιας του Seqt), ούτε οι «υποτείνουσές» τους (το μήκος των κεκλιμένων πλευρών της πυραμίδας από τη βάση προς την κορυφή) ούτε ο Πυθαγόρειος κανόνας εμπλέκονται στη λύση τους. (Για τη διάκριση μεταξύ του Πυθαγόρειου θεωρήματος και του Πυθαγόρειου κανόνα γίνεται αναφορά στο έργο του Høyrup, 1999).

Επομένως, ενώ δεν μπορεί να αποκλειστεί το ενδεχόμενο τα αιγυπτιακά μαθηματικά και η αρχιτεκτονική να έχουν χρησιμοποιήσει Πυθαγόρειες τριάδες (κυρίως την 3-4-5), πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ότι στην πραγματικότητα όλα αυτά βασίζονται σε «αποδεικτικά στοιχεία» που προέρχονται από υπολείμματα κτισμάτων και τις μετρήσεις τους, οι οποίες - όπως έχει ήδη προαναφερθεί - μπορεί να είναι παραπλανητικές.

Δ. Ο περιορισμός σε κλασματικές μονάδες.

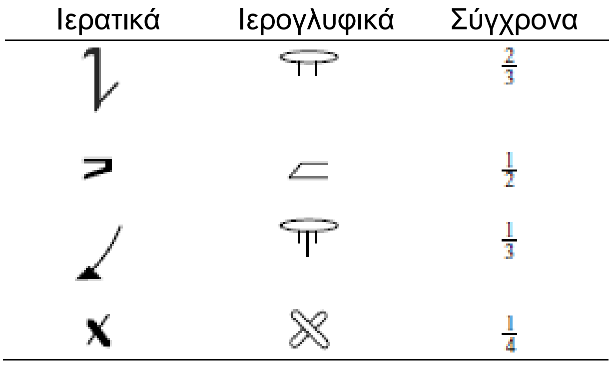
Για τη χρήση των κλασμάτων:

- Ο Cantor (1880) σημείωνε ότι ο Ahmes δεν χρησιμοποίησε κλάσματα με την πιο γενική έννοια της λέξης (δηλαδή ως υπονοούμενες διαιρέσεις, στις οποίες ο αριθμητής αλλά και ο παρονομαστής μπορούν να είναι τυχαίου μεγέθους) παρά μόνο κλασματικές μονάδες (δηλαδή κλάσματα με ακέραιο παρονομαστή και μονάδα ως αριθμητή), τα οποία σημείωνε γράφοντας τον αριθμό του παρονομαστή και βάζοντας μια μικρή κουκίδα πάνω του.

- Ο Van der Waerden (1961) ανέφερε σχετικά ότι καθώς αναπτυσσόταν h τεχνική του υπολογισμού, η σειρά των κλασμάτων επεκτάθηκε για να συμπεριλάβει τα μοναδιαία κλάσματα (με το 1 ως αριθμητή) και ότι οι Αιγύπτιοι δεν μπορούσαν να γράψουν κανένα άλλο κλάσμα, εκτός από τα προαναφερθέντα. Επίσης, ότι με την πρωτόγονη και περίπλοκη τεχνική των υπολογισμών τους, δεν μπορούσαν πιθανότατα να ξεπεράσουν τις γραμμικές και τις τετραγωνικές εξισώσεις με ένα άγνωστο.
- Ο Neugebauer (1969) ανέφερε για τα αιγυπτιακά μαθηματικά ότι σε κάποιο βαθμό επέδρασαν, αν και μάλλον αρνητικά, σε μεταγενέστερες περιόδους, καθώς η αριθμητική τους βασιζόταν ευρέως στη χρήση των κλασματικών μονάδων, μια πρακτική που μάλλον επηρέασε τις ελληνιστικές και ρωμαϊκές διοικητικές υπηρεσίες. Επιπλέον, σημείωνε (Neugebauer 1975) ότι ο πρωτόγονος, αυστηρά προσθετικός, τρόπος υπολογισμού των αρχαίων Αιγυπτίων με κλασματικές μονάδες είχε γενικά καταστροφική επίδραση, ακόμα και στην ελληνική αστρονομία.

Ένας άλλος μύθος που συχνά συναντιόταν στις εκτιμήσεις των ιστορικών για τους αρχαίους Αιγυπτίους ήταν ότι οι δύσχρηστοι κλασματικοί υπολογισμοί τους, που περιορίζονταν σε κλασματικές μονάδες, τους εμπόδισαν να προχωρήσουν στα μαθηματικά τους, όπως για παράδειγμα να παράγουν μαθηματική αστρονομία, πράγμα που έκαναν οι γείτονές τους στη Μεσοποταμία. Αυτός ο μύθος περιλαμβάνει δύο στοιχεία: πρώτον, ότι τα αιγυπτιακά μαθηματικά «περιορίζονταν» σε υπολογισμούς με κλάσματα που είχαν αριθμητή τη μονάδα και δεύτερον, ότι οι κλασματικοί υπολογισμοί τους ήταν τόσο δύσχρηστοι και δυσνόητοι που δεν επέτρεψαν την περαιτέρω ανάπτυξη των μαθηματικών τεχνικών.

Υπάρχουν δύο είδη αιγυπτιακών κλασμάτων. Αυτά που χρησιμοποιούνταν πιο συχνά ήταν τα γνωστά σήμερα ως «κοινά κλάσματα», $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ και $\frac{1}{4}$. Αυτά γράφονταν με συγκεκριμένες ενδείξεις σε ιερατική και ιερογλυφική γραφή (όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα). Όλα τα άλλα κλάσματα γράφονταν με την τοποθέτηση ενός «δείκτη κλάσματος» (μια τελεία στα ιερατικά και το σύμβολο στα ιερογλυφικά) πάνω από το ψηφίο που, στην τρέχουσα ορολογία, θα αποτελούσε τον παρονομαστή. Αυτός ο τύπος κλάσματος αντιστοιχεί σε σύγχρονα κλάσματα του είδους $\frac{1}{n}$ ή αλλιώς κλασματικές μονάδες.



Εικόνα 6: Αιγυπτιακά κοινά κλάσματα (Imhausen 2009).

Έτσι, από μια σύγχρονη άποψη, οι αρχαίοι αιγυπτιακοί υπολογισμοί με κλάσματα «περιορίζονταν» στη χρήση κλασμάτων με αριθμητή 1, δηλαδή κλασματικών μονάδων. Ωστόσο, μια ματιά στον αιγυπτιακό συμβολισμό για τα κλάσματα, που έχει περιγραφεί παραπάνω, αποκαλύπτει μάλλον ότι δεν έχουν καθόλου αριθμητή. Είναι πιθανό (αν και προς το παρόν δεν έχει αποδειχτεί) ότι η έννοια των κλασμάτων (ή ίσως καλύτερα των αντιστρόφων) αναπτύχθηκε γενικεύοντας τα κοινά κλάσματα πάνω στην ιδέα του αντίστροφου για κάθε αριθμό. Για τη γραπτή απόδοσή τους δημιουργήθηκε ένας γενικός συμβολισμός (τελεία ή) και από αυτή τη βασική γενική ιδέα, προέκυψαν κλάσματα των τιμών $\frac{n}{m}$ (σύμφωνα με τον σύγχρονο συμβολισμό), επιλέγοντας κάθε φορά τις κλασματικές μονάδες που θα έδιναν ως άθροισμα τη συγκεκριμένη τιμή και παραθέτοντάς τες κατά τάξη μεγέθους. Για παράδειγμα, το κλάσμα 5/6 θα γραφόταν στα ιερατικά ως $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$ (σύμβολα που στα ιερατικά γράφονταν από δεξιά προς τα αριστερά). Ενώ μια τέτοια σύγκριση με βάση τους σύγχρονους συμβολισμούς κάνει τα αιγυπτιακά κλάσματα να φαίνονται ως κλασματικές μονάδες, είναι περισσότερο ακριβές να τα σκέφτεται κανείς ως αντίστροφα και να έχει κατά νου ότι ο αιγυπτιακός κλασματικός συμβολισμός δεν περιλάμβανε αριθμητή.

Ο Greene (1992) αναφέρει ότι η έννοια του κλάσματος ως μέρος μιας μονάδας αντί ως αντίστροφο ενός ακέραιου αριθμού συνδεόταν με την προέλευσή του από τη μέτρηση, από την οποία δεν απελευθερώθηκε και δεν αποσπάστηκε ποτέ στη συνέχεια. Η καταγωγή των κλασμάτων θα πρέπει ίσως να αναζητηθεί στη διαίρεση και την κατανομή (Greene 1992), αλλά ο συμβολισμός και οι χρήσεις τους μέσα στα μαθηματικά κείμενα των Αιγυπτίων δείχνουν ότι η γενική έννοια ενός κλάσματος ήταν ακριβώς αυτή ενός αντιστρόφου (Imhausen, 2009).

Η απουσία του αριθμητή αναγνωρίστηκε από τον Neugebauer (1926), ο οποίος ήταν ο πρώτος ιστορικός που δούλεψε πάνω στους υπολογισμούς των αιγυπτιακών κλασμάτων, δημιούργησε μια μεταγραφή για τα αιγυπτιακά κλάσματα με σεβασμό στον χαρακτήρα τους ως αντίστροφα και απέδωσε την τελεία ως γραμμή πάνω στον αριθμό («παρονομαστής»), για παράδειγμα $=\bar{5}$. Ο Neugebauer χρησιμοποίησε αυτόν τον συμβολισμό και για τα κοινά κλάσματα (με το $\bar{\bar{3}}$ να αντιπροσωπεύει το $\frac{2}{3}$), παρέχοντας έτσι μια συστηματική μεταγραφή για όλα τα αιγυπτιακά κλάσματα, αλλά καταργώντας τις διαφορές στον συμβολισμό ανάμεσα στα κοινά κλάσματα και στα αντίστροφα.

Από όσα προαναφέρθηκαν φαίνεται ότι οι Αιγύπτιοι δεν «περιορίζονταν» σε κλασματικές μονάδες. Αντιθέτως η έννοια των κλασμάτων τους δεν περιλάμβανε αριθμητή, εξ ου και η διαφορετική μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την έκφραση κλασματικών τιμών της (σύγχρονης) μορφής $\frac{m}{n}$. Συχνά υποστηρίζεται ότι μαθηματικοί πάπυροι στη δημοτική γραφή δείχνουν τη χρήση κλασμάτων με αριθμητή. Ωστόσο, όπως υποστήριξε ο Fowler (1999), αυτά πρέπει μάλλον να ερμηνευθούν ως ημιτελείς διαιρέσεις.

Έτσι, κάποιοι προβληματισμοί αναδεικνύονται: Προκάλεσε προβλήματα στην αιγυπτιακή αριθμητική αυτή η ιδιαιτερότητα; Μπορεί αυτή η έννοια των κλασμάτων να κατηγορηθεί ότι παρεμπόδισε τα αιγυπτιακά μαθηματικά από την περαιτέρω ανάπτυξή τους; Ποια στοιχεία υπάρχουν που να μπορούν να βοηθήσουν ώστε να απαντήσουμε σε αυτές τις ερωτήσεις; Ο σκοπός της παρούσας έρευνας, βέβαια, δεν είναι να απαντήσει σε σημαντικά μεν αλλά πολύ εξειδικευμένα ιστορικά ερωτήματα αυτού του είδους, καθώς όπως ήδη προαναφέρθηκε το παρόν πόνημα αφορά στη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών μέσα από ένα κείμενο λογοτεχνικής μυθοπλασίας, με το οποίο συνδέεται και η ιστορική ανάλυση των αρχαίων αιγυπτιακών μαθηματικών. Εδώ θα αρκεστούμε στα ίδια τα μαθηματικά κείμενα, τα οποία δίνουν κάποια στοιχεία, καθώς μπορούν να ενταχθούν σε δύο κατηγορίες: μαθηματικά προβλήματα (και οι λύσεις τους), όπως τα παραδείγματα από τον Πάπυρο του Rhind που έχουν αναφερθεί, και μαθηματικοί πίνακες. Οι υπάρχοντες πίνακες αφορούν κλασματικούς υπολογισμούς, όπως ο πίνακας $2 \div n$ (στην αρχή του Παπύρου Rhind και στο θραύσμα Lahun UC 32159) και μετατροπές των μέτρων (για παράδειγμα, Πάπυρος του Rhind, 81). Κατά κύριο λόγο οι μελετητές επικεντρώνονταν στον προσθετικό χαρακτήρα της αιγυπτιακής αριθμητικής και στην προσπάθεια εύρεσης των κριτηρίων που είχαν οδηγήσει τους Αιγυπτίους να υιοθετήσουν συγκεκριμένες αναπαραστάσεις, με στόχο την επίλυση του γρίφου σχετικά τους πίνακες $2 \div n$. Παρόλο που είναι δυνατό να περιγραφούν κάποιες από τις γενικότερες τάσεις (για παράδειγμα προτιμώνται αναπαραστάσεις με λιγότερα στοιχεία, καθώς και αναπαραστάσεις με μεγαλύτερους αντίστροφους), δεν κατέστη δυνατό να διατυπωθούν αυστηροί μαθηματικοί κανόνες που να ερμηνεύουν τις επιλογές των Αιγύπτιων μαθηματικών, οι οποίοι κατά καιρούς κατηγορήθηκαν για έλλειψη γνώσης και κανόνων σχετικά με τα κλάσματα. Βέβαια, η μελέτη των αιγυπτιακών μαθηματικών πραγματοποιήθηκε μέσω σύγχρονων κανόνων που δημιουργήθηκαν χιλιετηρίδες αργότερα κάτω από διαφορετικό πολιτισμικό πρίσμα. Καθώς, λοιπόν, τα Μαθηματικά είναι πολιτισμικά εξαρτώμενα πιθανόν θα ήταν χρησιμότερο ο αιγυπτιακός πίνακας να γίνει αποδεκτός ως έχει και να εξεταστεί η χρήση και η χρησιμότητά του στο τότε μαθηματικό περιβάλλον (Imhausen, 2006). Ο Ritter (2000) αναφέρει ότι οι πίνακες αυτοί δημιουργήθηκαν για να βοηθήσουν στο να ξεπεραστούν οι τεχνικές δυσκολίες με τους υπολογισμούς, καθώς οι κλασματικοί υπολογισμοί ήταν πράγματι μια περίπλοκη περιοχή των αιγυπτιακών μαθηματικών. Ωστόσο, τέτοιου είδους τεχνικές δυσκολίες θα μπορούσαν σε κάποιο βαθμό να ξεπεραστούν με τη βοήθεια πινάκων, όπως ο πίνακας $2 \div n$, ο οποίος απαριθμεί το αποτέλεσμα των διαιρέσεων $2 \div (\mu o \nu \acute{o} \varsigma)\ n$ σε μορφή αιγυπτιακών κλασμάτων.

Ένα άλλο επιχείρημα υπέρ των αιγυπτιακών κλασμάτων θα μπορούσε να είναι το γεγονός ότι αποτελούν εκείνο το χαρακτηριστικό στοιχείο των αιγυπτιακών μαθηματικών που εξαπλώθηκε και επιβίωσε πέρα από τη φαραωνική Αίγυπτο. Ένας λόγος για τη συνεχιζόμενη δημοτικότητά τους μπορεί να ήταν η προφανής πρακτικότητά τους στην εκτίμηση του μεγέθους ενός κλάσματος. Εκφράζοντας το $\frac{5}{19}$ ως $\frac{1}{6}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{114}\ \frac{1}{228}$ (Πάπυρος του Rhind, 32) μπορεί να φαίνεται περίπλοκο για εμάς, ειδικά αν πρέπει να χρησιμοποιηθεί για να εκτελεστούν περαιτέρω μαθηματικές εργασίες. Ωστόσο, αυτή η απόδοση έχει (τουλάχιστον) ένα πλεονέκτημα έναντι του $\frac{5}{19}$: το μέγεθός του είναι άμεσα εμφανές. Η σύγχρονη δεκαδική αναπαράσταση των κλασμάτων λειτουργεί εν πολλοίς με τον ίδιο τρόπο. Όσον αφορά τους υπολογισμούς, μπορεί κανείς να επιλέγει την απαιτούμενη ακρίβεια συμπεριλαμβάνοντας ή παραβλέποντας στοιχεία από το κλάσμα, προκειμένου να διευκολυνθούν μερικές πράξεις.

Ε. Αλγεβρικές εξισώσεις.

Σχετικά με το θέμα των υπολογισμών:

- Ο Cantor (1880) ανέφερε ότι στην κορυφή των υπολογισμών βρίσκονταν οι υπολογισμοί Hau, των οποίων το περιεχόμενο δεν διαφέρει από εκείνο που η σύγχρονη Άλγεβρα ονομάζει εξισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο.
- Ο Van der Waerden (1961) σημείωνε ότι αυτοί οι υπολογισμοί "aha" μοιάζουν αρκετά με τις σύγχρονες γραμμικές εξισώσεις με ένα άγνωστο.
- Ο Gillings (1972) διαπίστωνε ότι οι Αιγύπτιοι μαθηματικοί δεν ασχολήθηκαν μόνο με την πρακτική αριθμητική της καθημερινής ζωής, παρουσιάζοντας τα προβλήματα 24-34 από τον μαθηματικό Πάπυρο του Rhind και σημειώνοντας ότι αυτά τα έντεκα προβλήματα ασχολούνταν με μεθόδους επίλυσης των εξισώσεων πρώτου βαθμού με ένα άγνωστο.
- Επίσης, ο Maor (1998) έγραφε ότι περίπου 3.500 χρόνια πριν από τη δημιουργία της σύγχρονης συμβολικής Άλγεβρας, οι Αιγύπτιοι είχαν ήδη μια μέθοδο που τους επέτρεπε να λύσουν γραμμικές εξισώσεις.

Οι αιγυπτιακές «αλγεβρικές εξισώσεις» ήταν στο επίκεντρο μιας από τις πιο θερμές συζητήσεις στην ιστοριογραφία των αιγυπτιακών μαθηματικών κατά το πρώτο μισό του εικοστού αιώνα. Ενώ οι μελετητές συμφώνησαν ότι τα τμήματα 24 έως 34 του Παπύρου του Rhind αποτελούσαν προβλήματα που σήμερα θα μπορούσαν να εκφραστούν ως αλγεβρικές εξισώσεις, υπήρχαν αρχικά πολλές διαφωνίες σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο αυτά επιλύθηκαν και με το αν κάποιος θα μπορούσε να πιστέψει ότι οι αρχαίοι Αιγύπτιοι μαθηματικοί είχαν κάποια γνώση άλγεβρας. Το ερώτημα ήταν αν τα προβλήματα που ορίστηκαν με τον αιγυπτιακό τεχνικό όρο "aha", «ποσότητα», επιλύθηκαν όπως οι σύγχρονοι μαθηματικοί θα επέλυαν αλγεβρικές εξισώσεις ή με τη μέθοδο της «αυθαίρετης παραδοχής».

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ομοιότητα μεταξύ των προβλημάτων "aha" και των αλγεβρικών εξισώσεων στις προαναφερθείσες αναφορές του Cantor (1880) και του Van der Waerden (1961) έγινε «μέθοδος επίλυσης αλγεβρικών εξισώσεων» στην αναφορά του Maor (1998). Ένα παράδειγμα μιας τέτοιας «εξίσωσης» μπορεί να βρεθεί στο πρόβλημα 26 του Παπύρου Rhind:

Πάπυρος Rhind, πρόβλημα 26	αριθμητική αναπαράσταση	συμβολική αναπαράσταση
Μια ποσότητα της οποίας το $\frac{1}{4}$ προστίθεται σε αυτήν	$\frac{1}{4}$	D_1
γίνεται 15.	15	D_2
Υπολογίστε επί 4.	(1) $\left[* \frac{1}{4}\right] = 4$	(1) $[* D_1]$
Θα υπολογίσετε το $\frac{1}{4}$ αυτής ως 1,	(2) $\frac{1}{4} \times 4 = 1$	(2) $D_1 \times (1)$
αποτέλεσμα 5.	(3) $4 + 1 = 5$	(3) $(1) + (2)$
Διαιρείτε το 15 με το 5.		
3 θα είναι το αποτέλεσμα.	(4) $15 \div 5 = 3$	(4) $D_2 \div (3)$
Υπολογίστε 3 φορές 4.		
12 θα είναι το αποτέλεσμα.	(5) $3 \times 4 = 12$	(5) $(4) \times (1)$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η οδηγία «Υπολογίστε επί 4», που είδαμε στον παραπάνω πίνακα, δεν μπορεί να θεωρηθεί ξεκάθαρα ως αριθμητική πράξη. Θα μπορούσε να προκύψει από τον υπολογισμό του αντιστρόφου του πρώτου στοιχείου, αλλά ρητή οδηγία για υπολογισμό δεν δίνεται.

Από μια σύγχρονη άποψη, η εκτίμηση ότι αυτά τα προβλήματα ήταν οι πρόδρομοι των «αλγεβρικών εξισώσεων» φαίνεται αρκετά ξεκάθαρη. Ο Αιγυπτιολόγος Peet (1923) σχολίασε ότι η εξίσωση που λύθηκε στο πρόβλημα αυτό είναι: $x + \frac{1}{4}x = 15.$ Στις αιγυπτιακές «εξισώσεις» βέβαια δεν χρησιμοποιούνται σύμβολα και πιο συγκεκριμένα η μεταβλητή x. Σύμφωνα με την αιγυπτιακή έννοια των μαθηματικών ως μιας συστηματικής συλλογής από διαδικασίες, η διατύπωση στο συγκεκριμένο πρόβλημα περιγράφει μια πράξη και το αριθμητικό της αποτέλεσμα. Η ποσότητα που χρησιμοποιήθηκε κατά τη διαδικασία του υπολογισμού είναι ένας άγνωστος και στο πρόβλημα ζητείται να γίνει ο προσδιορισμός του από τον αριθμό που δίνεται ως αποτέλεσμα.

Το ιστοριογραφικό πρόβλημα είναι, και στην περίπτωση αυτή, παρόμοιο με εκείνο που αντιμετωπίστηκε παραπάνω με τα αιγυπτιακά κλάσματα. Τα αιγυπτιακά μαθηματικά φαίνεται να έχουν ένα είδος «ισοδύναμου» για μια σύγχρονη μαθηματική έννοια. Παρουσιάζουν, ωστόσο, αρκετές διαφορές ώστε να απαιτούν μια προσεκτική εξέταση των χαρακτηριστικών τους. Για τις αιγυπτιακές «εξισώσεις» άλλο ένα δείγμα της ανεπάρκειας των σύγχρονων εκτιμήσεων μπορεί να αποτελέσει το επιχείρημα που είχε διατυπωθεί σχετικά με τη μέθοδο της επίλυσής τους. Όπως ήδη προαναφέρθηκε, οι μελετητές χωρίστηκαν σε δύο ομάδες. Από την πρώτη ομάδα υποστηριζόταν ότι τα προβλήματα αυτά επιλύθηκαν με το χειρισμό μιας εξίσωσης, ενώ από τη δεύτερη αυτό δεν ήταν αποδεκτό και αντιπροτείνονταν η χρήση της μεθόδου της «αυθαίρετης παραδοχής».

Για παράδειγμα, η πρώτη ομάδα ερμήνευσε το πρόβλημα 26 του Παπύρου Rhind με τον ακόλουθο τρόπο, όπως και από τον Eisenlohr (1877) αναφέρεται:

$$x + \frac{1}{4}x = 15$$

αυτό μπορεί να ξαναγραφτεί: $\frac{4}{4}x + \frac{1}{4}x = 15$

επομένως: $\frac{5}{4}x = 15$

άρα: $\frac{1}{4}x = 3$

και έτσι: $x = 12$

Η εναλλακτική ερμηνευτική στρατηγική, με τη χρήση της μεθόδου της «αυθαίρετης παραδοχής», μπορεί επίσης εύκολα να αποδειχθεί. Χρησιμοποιώντας το ίδιο παράδειγμα, το 4 επιλέγεται ως ο κατάλληλος αριθμός για τη δοκιμή, δίνοντας 5 ως υποθετικό αποτέλεσμα. Η διαίρεση του 15 με το 5 καθορίζει ως παράγοντα διόρθωσης το 3, που πολλαπλασιάζεται με τον αριθμό δοκιμής για να ληφθεί το αποτέλεσμα. Οι υποστηρικτές αυτής της τελευταίας ανάλυσης έχουν το πλεονέκτημα ότι η «μέθοδός» τους είναι μια στρατηγική που μπορεί να διαμορφωθεί μέσα από διάφορες επίσημες εκφράσεις. Ακόμη και αν η ερμηνεία των προβλημάτων "aha" ως εξισώσεων εγκαταλείπεται υπέρ της ερμηνείας τους ως διαδικασιών (που τώρα φαίνεται πιο ενδεδειγμένη ιστοριογραφικά), η υπονοούμενη στρατηγική σε ορισμένες από αυτές τις διαδικασίες μπορεί να είναι εκείνη της «αυθαίρετης παραδοχής».

Μέσα στους μαθηματικούς παπύρους υπάρχουν δεκαπέντε προβλήματα "aha" συνολικά (Rhind, αρ. 24-34, Μόσχας, αρ. 19 και 25, UC32134A, Βερολίνου 6619, 1). Συγκεκριμένα προβλήματα μπορούν να προσδιοριστούν με αυτόν τον τύπο βάσει της χρήσης του όρου "aha", «ποσότητα», που βρέθηκε σε δεκατρία από αυτά, ή με βάση τη θέση τους μέσα στον Πάπυρο Rhind (όπως στην περίπτωση των προβλημάτων 28 και 29, ανάμεσα στα 24-27 και 30-34). Μια ανάλυση των διαδικασιών που χρησιμοποιούν αποκαλύπτει ότι μπορούν να ταξινομηθούν σε διάφορες ομάδες, καθεμία από τις οποίες εφαρμόζει μια ξεχωριστή στρατηγική μέθοδο επίλυσης (Imhausen, 2002). Η σειρά των προβλημάτων "aha" στον Πάπυρο Rhind αντικατοπτρίζει αυτές τις ομάδες, αλλά μόνο τα προβλήματα μιας ομάδας χρησιμοποιούν τη στρατηγική της «αυθαίρετης παραδοχής», η οποία δεν είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα των προβλημάτων "aha" στα αρχαία αιγυπτιακά μαθηματικά.

2.4. Επισημάνσεις.

Μετά από όσα προαναφέρθηκαν, μέσα από την ιστορική ανάλυση και την προσέγγιση της νέας ιστοριογραφίας για τα μαθηματικά στην αρχαία Αίγυπτο, αξίζει να καταγραφούν κάποιες επισημάνσεις οι οποίες θα μπορούσαν να επεκταθούν, γενικότερα, στην προσέγγιση των μαθηματικών στοιχείων που προέρχονται από παλαιότερες ιστορικές περιόδους. Αναδεικνύεται έτσι ότι τα αρχαία αιγυπτιακά μαθηματικά δεν χρησιμοποιούσαν π, εξισώσεις ή «γενικά κλάσματα». Ωστόσο, το να τα αξιολογήσει κανείς ως «πρωτόγονα» είναι ιστορικά παραπλανητικό και βασίζεται σε μια σύγκριση με τα σύγχρονα μαθηματικά, που γίνεται πολλούς αιώνες αργότερα. Αν μπορεί να υπάρξει κάποια σύνδεση μεταξύ των αιγυπτιακών και των σύγχρονων μαθηματικών, αυτή δείχνει την ανεπάρκεια της περιγραφής αυτής της αρχαίας μαθηματικής κουλτούρας με όρους σύγχρονων κλάδων όπως η Άλγεβρα, η Τριγωνομετρία κ.ά. Τα πενιχρά στοιχεία, που υπάρχουν στη διάθεση των μελετητών, δείχνουν ότι στην Αίγυπτο τα Μαθηματικά αποτελούσαν ένα βασικό στοιχείο στην εκπαίδευση των γραφέων (Robson, 2009; Imhausen 2003b). Πολυάριθμα διοικητικά κείμενα (όπως λογαριασμοί) μέσα από τη φαραωνική ιστορία δείχνουν τη χρήση μαθηματικών τεχνικών.

Τα επιτεύγματα των πρώτων ερευνητών που μελετούσαν αυτά τα κείμενα, ειδικά αυτών που εργάστηκαν κατά τη διάρκεια του πρώτου μισού του εικοστού αιώνα, ήταν τεράστια. Για να συντάξουν τα έργα τους, κατάφεραν να διεισδύσουν σε ένα ξένο λεξιλόγιο τεχνικών όρων, το οποίο τους έδωσε τη δυνατότητα να κάνουν μια πρώτη προσπάθεια για την κατανόηση των αιγυπτιακών μαθηματικών μεθόδων (για παράδειγμα οι Peet, 1923; Struwe, 1930). Όπως ήταν σύνηθες εκείνη την εποχή οι αρχαίες πηγές και τα επιτεύγματα θεωρούνταν και αξιολογούνταν σε άμεση σύγκριση με σύγχρονους συμβολισμούς και κανόνες. Με πολλές προσπάθειες, διαπιστώθηκε ότι τα αιγυπτιακά μαθηματικά είχαν ελάχιστα κοινά με τις μεθόδους που συναντώνται στα σύγχρονα μαθηματικά βιβλία. Παρόλα αυτά, το μαθηματικό περιεχόμενο των αρχαίων κειμένων κατέστη δυνατό να «αποκωδικοποιηθεί» και να «μεταφραστεί» σύμφωνα με τα σύγχρονα μαθηματικά.

Δυστυχώς, αυτό το είδος ανάγνωσης συχνά είχε ως συνέπεια την απώλεια των πιο εντυπωσιακών χαρακτηριστικών των πρωτότυπων πηγών, ένα μειονέκτημα που ελάχιστα εκτιμήθηκε τότε. Δεν αποτελεί έκπληξη ότι τα «επιτεύγματα» των αιγυπτιακών μαθηματικών, κρινόμενα με διαφορετική μαθηματική κουλτούρα (περισσότερο από 3000 χρόνια αργότερα), φαινόταν μάλλον πρωτόγονα και απλά. Σίγουρα οφείλεται εν μέρει στην εξαιρετική ποιότητα των πρώτων ακαδημαϊκών συνεισφορών το γεγονός ότι οι αναγνώστες δέχτηκαν πρόθυμα αυτό το είδος της αρνητικής εκτίμησης για τα αιγυπτιακά μαθηματικά. Όπως αναφέρθηκε, αυτή η κατάσταση ήταν απόρροια της έλλειψης υλικού από νέες πηγές. Το προς ανάλυση υλικό ήταν ήδη γνωστό και απαιτούσε εκείνες τις ικανότητες ανάγνωσης αιγυπτιακών κειμένων οι οποίες θα οδηγούσαν σε προβληματισμό σχετικά με τις εκτιμήσεις των προγενέστερων μελετητών. Χωρίς αυτόν τον πλούτο σε κειμενικό υλικό, οι αναγνώστες των αιγυπτιακών κειμένων δε φαίνονταν να έχουν κάποια βάση για την αμφισβήτηση των τυπικών απόψεων που είχαν προηγουμένως διατυπωθεί. Πράγματι, μόλις οι κυριότεροι αιγυπτιακοί μαθηματικοί πάπυροι έγιναν διαθέσιμοι σε αγγλική ή γερμανική μετάφραση, διάφοροι ιστορικοί των Μαθηματικών άρχισαν να συνεισφέρουν με νέες ιδέες, βασιζόμενοι πάνω στις δικές τους αναγνώσεις αυτών των πρώτων μεταφράσεων και περιλαμβάνοντας σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό, ο οποίος συχνά οδηγούσε σε αποτελέσματα που δεν είχαν σχεδόν τίποτα κοινό με το αρχικό κείμενο των πρωτογενών πηγών.

Αυτή η συνήθης προσέγγιση έχει πλέον θεωρηθεί όχι μόνο αναχρονιστική αλλά και παραπλανητική. Κατά την τελευταία τριακονταετία οι ιστορικοί των Μαθηματικών έχουν αρχίσει να ξαναδουλεύουν το θέμα των αρχαίων μαθηματικών και είναι πλέον γενικά αποδεκτό ότι δεν μπορούν να εργαστούν πάνω στο κείμενο μιας πηγής χωρίς να γνωρίζουν τη γλώσσα, στην οποία έχει γραφτεί ή το πολιτιστικό υπόβαθρο από το οποίο αυτή προέρχεται. Παράλληλα, έχει γίνει προφανές ότι η μαθηματική γνώση δεν είναι καθολική και δεν είναι ανεξάρτητη από τους πολιτισμούς στους οποίους παράγεται και χρησιμοποιείται. Αυτή η εξάρτηση από το πολιτισμικό υπόβαθρο ξεκινάει ήδη από τα αριθμητικά συστήματα και τις αριθμητικές έννοιες, όπως έχει γίνει φανερό από διάφορους μελετητές που εργάζονται πάνω στα εθνομαθηματικά (όπως οι Urton, 1997; Ascher, 2002). Περισσότερο προηγμένες μαθηματικές τεχνικές και έννοιες έχει επίσης αποδειχθεί ότι εξαρτώνται από την κουλτούρα που τις δημιούργησε (όπως στο έργο του Høyrup, 2002).

Γίνεται, λοιπόν, αντιληπτό ότι απόψεις για την ιστορική εξέλιξη των Μαθηματικών αναθεωρούνται ή ακόμη και απορρίπτονται, καθώς τα μέσα ερμηνείας που χρησιμοποιούν οι ιστορικοί συνεχώς εξελίσσονται και προσαρμόζονται στα νέα δεδομένα που αφορούν τόσο την τεχνολογία όσο τα νέα ιστοριογραφικά ζητήματα που προκύπτουν. Για παράδειγμα, στις δεκαετίες του 1950 και 1960, κυριαρχούσαν οι απόψεις των μελετητών που στηρίζονταν στην ανάλυση των αρχαίων μαθηματικών με σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό. Από τη δεκαετία του 1970, όμως έχει αμφισβητηθεί η άποψη πως τα ιστορικά κείμενα εμπεριέχουν τις πρώιμες μορφές της σημερινής Άλγεβρας. Έχουν σημειωθεί ουσιαστικές αλλαγές στην ιστορική προσέγγιση και ερμηνεία τους και παρατηρείται μια στροφή προς την όσο το δυνατό πιο πιστή ανάγνωσή τους, προκειμένου να ενταχθούν αυτά στο ιστορικό, οικονομικό, κοινωνικό και πολιτιστικό πλαίσιο της εποχής κατά την οποία δημιουργήθηκαν. Έτσι, ένας σύγχρονος ερευνητής της Διδακτικής των Μαθηματικών δεν μπορεί πλέον να βασιστεί απόλυτα σε ιστορικές αναλύσεις ή επισκοπήσεις που ανήκουν στη λεγόμενη «παραδοσιακή ιστοριογραφία» των Μαθηματικών (Πολυπόρτης, 2016).

Παράλληλα, από τις αρχές του 20ου αιώνα, οι συζητήσεις που γίνονται στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών για τη σχέση ανάμεσα στην Ιστορία των Μαθηματικών και τη Μαθηματική Εκπαίδευση, αναζητούν τρόπους για να βελτιωθεί η διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών. Μέσα στους τρόπους αυτούς αναφέρεται και η χρήση πρωτότυπων πηγών με μαθηματικά κείμενα αλλά και η χρήση λογοτεχνικών κειμένων που αφορούν βιογραφίες προσωπικοτήτων και διάφορα μαθηματικά επιτεύγματα. Έτσι οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν το ιστορικό, κοινωνικό και γεωγραφικό πλαίσιο από το οποίο αυτά προέκυψαν και να καταλάβουν ποιες ήταν οι πολιτικές, οικονομικές, κοινωνικές συνθήκες της εποχής, να συγκρίνουν τις καταστάσεις με το σήμερα, να πληροφορηθούν για τις προσπάθειες που κατέβαλαν αυτοί που πρώτοι διατύπωσαν μια ιδέα. Κατ' επέκταση προκύπτει ένας περεταίρω προβληματισμός που θέτει υπό αμφισβήτηση την ιστορική γνώση που αντλείται από έργα Μαθηματικής Λογοτεχνίας με ιστορικό υπόβαθρο, τα οποία παρουσιάζουν μαθηματικές έννοιες, την εξέλιξη και τη χρήση τους σε εποχές συχνά πολύ μακρινές για τον σημερινό αναγνώστη. Πολύ δε περισσότερο εάν αυτά τα έργα αναζητείται τρόπος να ενταχθούν μέσα στη διδακτική πράξη στα πλαίσια του αναλυτικού προγράμματος το οποίο αναφέρεται στη διαθεματικότητα και την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών.

Με βάση την ιστορική ανάλυση, που προηγήθηκε στο παρόν κεφάλαιο, και τα ερευνητικά ερωτήματα, τα οποία έχουν ήδη τεθεί στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου επανέρχονται οι προβληματισμοί σχετικά με την εγκυρότητα της ιστορικής γνώσης που ένας σύγχρονος αναγνώστης αποκτά μέσα από την ανάγνωση ενός έργου Μαθηματικής Λογοτεχνίας, αλλά και τη δυνατότητα αυτού του υλικού να υπηρετήσει τους διδακτικούς στόχους του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών μέσα στη σχολική τάξη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

3. Μαθηματική Λογοτεχνία.

3.1. Ένα καινούριο λογοτεχνικό είδος, μια νέα αναγνωστική τάση ή…

Η παρουσία των Μαθηματικών στη Λογοτεχνία είναι διαχρονική. Τα τελευταία χρόνια, όμως, σημειώνεται αυξημένο ενδιαφέρον για την έκδοση λογοτεχνικών έργων, κυρίως μυθιστορημάτων, μαθηματικού περιεχομένου, που προκαλούν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και σε αρκετές περιπτώσεις σημειώνουν μεγάλη εκδοτική επιτυχία. Αν και η θεματολογία των έργων αυτών δεν είναι ιδιαίτερα οικεία στο ευρύ αναγνωστικό κοινό, οι συγγραφείς επιχειρούν να αναμείξουν τη μυθοπλασία με τα Μαθηματικά σε μια προσπάθεια να κάνουν πιο ελκυστικές τις μαθηματικές έννοιες. Επιπλέον, γράφοντας για μαθηματικούς και Μαθηματικά και τοποθετώντας τις επιστημονικές αντιλήψεις μέσα σε αφηγήσεις ιστορικές και βιογραφικές προσπαθούν να ελκύσουν τη φαντασία των αναγνωστών και να τους πείσουν ότι η κατανόηση των μαθηματικών ιδεών και αποδείξεων θα μπορούσε να εξελιχθεί σε μια συναρπαστική περιπέτεια (Μηλιώνης 2001).

Ο Μιχαηλίδης (2010α) θεωρεί αξιοσημείωτο το γεγονός, ότι η σημαντική αύξηση στη λογοτεχνική παραγωγή έργων που συνδέονται με τα Μαθηματικά, συνοδεύεται σε γενικές γραμμές και από καλή ποιότητα. Με δεδομένους τους αδυσώπητους νόμους της αγοράς, που συναντώνται στις σύγχρονες παγκοσμιοποιημένες κοινωνίες, το φαινόμενο αυτό, φαίνεται να σηματοδοτεί ένα συνεχώς αυξανόμενο ενδιαφέρον, από την πλευρά των αναγνωστών, προς οτιδήποτε συνδέεται με τα Μαθηματικά άμεσα ή έμμεσα.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο δικτυακός τόπος του μαθηματικού, πανεπιστημιακού και συγγραφέα Alex Kasman, όπου παρατίθεται ένας εκτενέστατος, συνεχώς ανανεούμενος κατάλογος όλων των λογοτεχνικών έργων, τα οποία θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως «Μαθηματική Λογοτεχνία», κάνοντας ωστόσο μια διασταλτική χρήση του όρου. Από τον Μιχαηλίδη (2010α) επισημαίνεται, ότι η επιλογή των καταχωρήσεων είναι υποκειμενική αφού δεν μπορεί να υπάρξει ένας κοινά αποδεκτός ορισμός της «Μαθηματικής Λογοτεχνίας». Σε αρκετές δε περιπτώσεις οι καταχωρήσεις αφορούν αριστουργήματα της παγκόσμιας λογοτεχνίας όπως οι «Όρνιθες» του Αριστοφάνη, το «Πόλεμος και Ειρήνη» του Τολστόι ή «Οι αδερφοί Καραμαζώφ» του Ντοστογιέφσκι, στα οποία υπάρχουν σύντομες ή εντελώς περιφερειακές αναφορές στα Μαθηματικά ή στους μαθηματικούς. Επιπρόσθετα, στις καταχωρήσεις του Kasman, συμπεριλαμβάνονται μόνο έργα, που έχουν γραφτεί ή μεταφραστεί στην Αγγλική Γλώσσα, με αποτέλεσμα να μην καταμετρώνται, αρκετά μαθηματικά μυθιστορήματα, όπως για παράδειγμα τα έργα του Frabetti, που είναι γραμμένα στην Ισπανική Γλώσσα. Πρόκειται, όμως, για μια πολύ χρήσιμη ιστοσελίδα με περιλήψεις όλων των έργων του καταλόγου, πληροφορίες για τους συγγραφείς, ομαδοποιήσεις των έργων ανά θέμα, χρονολογία, κ.λπ. και με μια επίσκεψη σε αυτήν (http://kasmana.people.cofc.edu/MATHFICT/) διαπιστώνει κανείς ότι η ροή των καταχωρήσεων, που καταγράφονται, ενισχύουν τον ισχυρισμό για τη σημαντική αύξηση που παρατηρείται στην παραγωγή έργων «Μαθηματικής Λογοτεχνίας» τις τελευταίες δεκαετίες.

Ο προβληματισμός που τίθεται είναι για ποιους λόγους αυτή η νέα τάση εξαπλώνεται με αυξανόμενους ρυθμούς, ποιες ανάγκες του αναγνωστικού κοινού εξυπηρετεί και σε ποιες προσδοκίες του ανταποκρίνεται, θέμα που μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο για περαιτέρω διερεύνηση. Ο Μιχαηλίδης (2006) θέτει το ερώτημα για το αν η άνθηση της Μαθηματικής Λογοτεχνίας είναι ένα συγκυριακό φαινόμενο, αποτέλεσμα της κυκλοφορίας μερικών πετυχημένων βιβλίων που δημιούργησαν ένα ρεύμα ή μια πραγματική στροφή του ενδιαφέροντος του αναγνωστικού κοινού προς τα Μαθηματικά, προσθέτοντας ότι η δεύτερη άποψη ενισχύεται από την παράλληλη ακμή που γνωρίζουν τα εκλαϊκευτικά βιβλία Μαθηματικών.

Η Κολίτση (2009), αναφερόμενη στους λόγους για τους οποίους αυτό το είδος έλκει τους αναγνώστες, σημειώνει ότι:

- Πρώτος πόλος είναι ίσως αυτό που θα μπορούσε να ονομαστεί επικό στοιχείο, η αναζήτηση της απόλυτης γνώσης και αλήθειας ανά τους αιώνες, μέσα στα πλαίσια της μαθηματικής επιστήμης (Χαρακτηριστικός είναι ο υπότιτλος της αγγλικής έκδοσης του Logicomix: «an epic search for the truth»). Ακόμη, θα μπορούσε στην περίπτωση αυτή να προστεθεί και το δέος, ως η άλλη όψη της αποστροφής που παραδοσιακά προκαλούν τα Μαθηματικά στο κοινό, που ενδεχομένως προσελκύει μια μερίδα αναγνωστών.
- Δεύτερος πόλος θα μπορούσε να θεωρηθεί το «εγκυκλοπαιδικό» ή «γνωστικό» στοιχείο, καθώς με τα έργα της Μαθηματικής Λογοτεχνίας (και φυσικά όχι μόνο με αυτά) διαπιστώνεται ένα πέρασμα από τη μοντερνιστική ενδοσκόπηση του μυθιστορήματος προς μια πεζογραφία με ενδιαφέρουσα (και ενίοτε μυστηριώδη) πλοκή, πλούσια σε γνώσεις, που απεικονίζει επιφανείς μαθηματικούς και τα μεγάλα επιτεύγματά τους, με παράλληλη αναφορά στην εποχή τους, σε κρίσιμα παγκόσμια ιστορικά γεγονότα ή σε «κλειστά» πανεπιστημιακά περιβάλλοντα. Έτσι, το μυθιστόρημα γίνεται ξανά μια «ήπειρος γνώσης», διατηρώντας ωστόσο αρκετά στοιχεία αυτο-αναφορικότητας.

Στη συνέχεια, διατρέχοντας τη σχετική βιβλιογραφία, παραθέτουμε ενδεικτικά κάποιους ορισμούς που έχουν διατυπωθεί κατά καιρούς για τη «Μαθηματική Λογοτεχνία».

Ο Μηλιώνης (2001), χαρακτηρίζει ως Μαθηματική Λογοτεχνία, τα λογοτεχνικά έργα που διαπραγματεύονται θέματα Μαθηματικών και έχουν συνήθως ως αντικείμενο θέματα ιστορίας, φιλοσοφίας, επιστημολογίας, έρευνας, εφαρμογών και Διδακτικής των Μαθηματικών. Διευκρινίζει ακόμη ότι σε αρκετές περιπτώσεις ελάχιστα «λογοτεχνικά» ως προς το περιεχόμενο τους έργα χαρακτηρίζονται ως τέτοια, κυρίως λόγω της δομής, της αφηγηματικής τεχνικής και της πλοκής που διαθέτουν, καθώς τα όρια ανάμεσα στα είδη του γραπτού λόγου είναι ασαφή και δυσδιάκριτα, ενώ συχνά στο ίδιο κείμενο συνυπάρχουν διαφορετικά είδη και μορφές.

Η Leary (2004), αναφέρει ότι ως Μαθηματική Λογοτεχνία ορίζεται γενικά οποιοδήποτε είδος μυθοπλαστικής ή όχι, λογοτεχνίας που μπορεί να διαβαστεί σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο χωρίς την πρόθεση να διδάξει στον αναγνώστη μια αλγοριθμική ή υπολογιστική μαθηματική δεξιότητα. Ο παραδοσιακός τύπος εγχειριδίου δεν αποτελεί Μαθηματική Λογοτεχνία, ενώ ένα ποίημα, μια σύντομη ιστορία, μια ιστορική αφήγηση ή ένα μυθιστόρημα μπορεί να αποτελούν παραδείγματα αυτού του είδους. Επιπλέον επισημαίνει ότι ένα καλό δείγμα Μαθηματικής Λογοτεχνίας θα μπορούσε:

- να περιλαμβάνει στρώσεις νοημάτων,
- να επιτρέπει τις φυσικές συνδέσεις με τα Μαθηματικά,
- να παρέχει ευκαιρίες στον αναγνώστη να τα χρησιμοποιεί για αυθεντικούς σκοπούς,
- να μεταφέρει ευχαρίστηση από μαθηματικές αναζητήσεις,
- να αξιοποιεί το ρεπερτόριο των γνώσεων του αναγνώστη,
- να ενθαρρύνει την περιέργεια και να προσκαλεί τον αναγνώστη να μάθει κάτι καινούργιο,
- να επιτρέπει την ανακάλυψη,
- να δημιουργεί την αίσθηση της απορίας,
- να χρησιμοποιεί ένα διασκεδαστικό ή συνομιλητικό τόνο,
- να παρακινεί και να εμπλέκει τον αναγνώστη,
- να έχει μια καθορισμένη λογική δομή είτε επεξηγηματική, είτε αφηγηματική.

Γενικά, θα πρέπει να είναι ένα αξιόλογο κομμάτι λογοτεχνίας αλλά και ένα εργαλείο μαθηματικής διδασκαλίας (Leary, 2004).

Ο Μιχαηλίδης (2010α) επιχειρεί έναν περιγραφικό «ορισμό» για τη Μαθηματική Λογοτεχνία, αναφέροντας ότι σε αυτή θα μπορούσε να ενταχθεί κάθε μορφή μυθοπλασίας, στην οποία τα Μαθηματικά παίζουν καθοριστικό ρόλο, επειδή το αντικείμενο της πλοκής ή και κάποιοι από τους χαρακτήρες, συνδέονται με αυτά και οι ενέργειές τους επηρεάζονται σημαντικά από αυτή τη σχέση.

Φαίνεται ότι ο πρώτος ορισμός με τον τρίτο, κατά κάποιον τρόπο συγκλίνουν, ενώ ο δεύτερος αναφέρεται σε ένα μεγαλύτερο εύρος κειμένων, πιθανόν και μη λογοτεχνικών.

Ο Δοξιάδης καταθέτει την ένστασή του για τη χρήση του όρου «Μαθηματική Λογοτεχνία» καθώς δεν πιστεύει σε αυτή την κατηγοριοποίηση. Θεωρεί παρόλα αυτά ότι ένα τέτοιο είδος μοιάζει σταδιακά να διαμορφώνεται και κρίνει ότι η επιτυχία των πρώτων έργων της λεγόμενης «Μαθηματικής Λογοτεχνίας» βασίζεται στην πρωτοτυπία, αλλά δεν βλέπει να υπάρχουν αρκετά θέματα για να συντηρήσουν μια συνεχή παραγωγή. Αποκαλεί μάλιστα «φρικαλέα διατύπωση» τον όρο αυτό και δηλώνει πως αναγκάζεται να τον χρησιμοποιήσει για καθαρά πρακτικούς λόγους. Ωστόσο, θεωρεί ότι ο ίδιος διαφοροποιείται από τις δύο συνήθεις κατηγορίες συγγραφέων Μαθηματικής Λογοτεχνίας, δηλαδή τόσο από τους συγγραφείς-μαθηματικούς, που χρησιμοποιούν τα Μαθηματικά για διδακτικούς ή προπαγανδιστικούς σκοπούς, όσο και από τους κατ' επάγγελμα συγγραφείς που χρησιμοποιούν τα Μαθηματικά σαν έναν ιδιότυπο ιδεολογικό εξωτισμό, χωρίς αυτά να παίζουν σημαντικό ρόλο στο μυθιστόρημα (Αραγεώργης, & Κιντή, 2006).

Η Κολίτση (2009) σημειώνει ότι η Μαθηματική Λογοτεχνία φαίνεται να διαθέτει αρκετά στοιχεία, για να μπορεί να τοποθετηθεί (έστω και με ερωτηματικό) στην περιοχή του μεταμοντερνισμού, υπογραμμίζοντας ίσως και τα όριά του, καθώς παρουσιάζεται να έχει αφομοιώσει τους λόγους διαφόρων λογοτεχνικών ειδών, όπως του πανεπιστημιακού μυθιστορήματος, της μυθιστορηματικής βιογραφίας και του αστυνομικού μυθιστορήματος. Επίσης αναφέρει ότι παρόλο που είναι ενδεχομένως νωρίς ακόμη να γίνεται αναφορά σε ένα νέο λογοτεχνικό είδος, εντοπίζονται αρκετές ενδείξεις που σηματοδοτούν τη διαμόρφωσή του, ώστε να μπορεί να γίνεται λόγος τουλάχιστον για μία νέα μεταμοντέρνα «υβριδιακή» λογοτεχνική μορφή, η οποία φαίνεται να απευθύνεται από τη μια σε ένα ειδικότερο κοινό μυημένων ή υποψιασμένων γύρω από τα Μαθηματικά και τις Επιστήμες και από την άλλη σε ένα ευρύτερο, που ενδιαφέρεται να αποκτήσει «μαθηματική παιδεία». Η χρήση των τεχνικών του αστυνομικού μυθιστορήματος υποβοηθά τη διεύρυνση του αναγνωστικού κοινού και την προσέλκυση ίσως αναγνωστών νεαρότερης ηλικίας.

Επιπλέον, χαρακτηρίζεται από τη συνύπαρξη στοιχείων επιστήμης και μυθοπλασίας, καθώς η Μαθηματική Λογοτεχνία παρουσιάζεται ως ένας νέος λόγος, στον οποίο συνδυάζονται η επιστημονική εγκυρότητα και η αισθητική απόλαυση της Λογοτεχνίας. Μυθικά πρόσωπα και καταστάσεις, στοιχεία της αρχαίας ελληνικής τραγωδίας και θέματα ρομαντικά «μεταφυτεύονται» σε παλαιότερα ή σύγχρονα πανεπιστημιακά περιβάλλοντα, σε μια συνύπαρξη εκ πρώτης όψεως αμφίβολη αλλά σίγουρα πρωτότυπη και συναρπαστική.

3.2. Μια περιδιάβαση στον χρόνο.

Στην ενότητα που ακολουθεί θα επιχειρήσουμε μια ιστορική αναδρομή αντλώντας κατά κύριο λόγο στοιχεία από έργα και δημοσιεύματα του Μιχαηλίδη (2002, 2004α, 2004β, 2010α, 2010β).

Από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα, τα λογοτεχνικά κείμενα, όταν αναφέρονται στα Μαθηματικά επιδεικνύουν ιδιαίτερο σεβασμό και οι αναφορές σε αυτά είναι προσεκτικές, μετρημένες, μαρτυρώντας ένα μείγμα δέους και θαυμασμού από τη μεριά του λογοτέχνη. Αυτή, είναι μια σχεδόν ενιαία στάση, από τα πρώτα χρόνια ύπαρξης γραπτού λόγου μέχρι τις αρχές του εικοστού αιώνα, όταν εμφανίζονται τα πρώτα δείγματα αυτού που γενικά και αόριστα ονομάστηκε «Μαθηματική Λογοτεχνία».

Το «Τσου Πέι Τσουάγκ Σιγκ», θεωρείται το αρχαιότερο κινεζικό μαθηματικό κείμενο, παρόλο που οι απόψεις σχετικά με τη χρονολόγησή του, αποκλίνουν μέχρι και χίλια χρόνια. Οι πιο τολμηροί το τοποθετούν γύρω στο 1200 π.Χ. ενώ η επικρατέστερη άποψη είναι πως γράφτηκε γύρω στο 300 π.Χ. Το έργο παρουσιάζει τους διαλόγους ενός νεαρού πρίγκιπα με έναν υπουργό, σχετικά με τις κινήσεις των άστρων και με αυτή την ευκαιρία, παρουσιάζονται οι ιδιότητες των τριγώνων και ο λογισμός των κλασμάτων. Η «Σούρια Σιντχάντα» που γράφτηκε στην Ινδία, περί το 400 μ.Χ. έχει τη μορφή επικού ποιήματος που αφηγείται τα κατορθώματα του Ήλιου. Μέσα στην αφήγηση περιλαμβάνονται πλούσιες αστρονομικές πληροφορίες καθώς και το μαθηματικό τους υπόβαθρο. Σε δυο ινδικές σούτρες που χρονολογούνται (με αρκετή αβεβαιότητα) περίπου από το 1000 π.Χ., ο άγνωστος ινδός ποιητής αναφέρεται στο Γκανίτ, την τέχνη δηλαδή των Μαθηματικών, λέγοντας ότι όπως τα φτερά που παγωνιού και τα πολύτιμα πετράδια τοποθετούνται στο ψηλότερο μέρος του κορμιού έτσι και η θέση του Γκανίτ (των Μαθηματικών) είναι στο ψηλότερο κλαδί των Βέδα. Ακόμη ότι δεν ωφελούν τα πολλά λόγια, αφού στον κόσμο ό,τι υπάρχει που κινείται ή δεν κινείται δεν μπορεί να γίνει κατανοητό χωρίς Γκανίτ (χωρίς Μαθηματικά).

Αλλά και στην τραγωδία του Αισχύλου «Προμηθεύς Δεσμώτης» (γύρω στο 460 π.Χ.) γίνεται αναφορά στους αριθμούς. Δεμένος στο βράχο του Καυκάσου, τιμωρημένος

από τον Δία, γιατί τόλμησε να προσφέρει στους θνητούς γνώσεις, που αρμόζουν μόνο σε θεούς, ο Προμηθέας απαριθμεί στο χορό των Ωκεανίδων τα δώρα που χάρισε στους ανθρώπους. Κι ανάμεσα σ' αυτά, τα προορισμένα μόνο για αθάνατους αγαθά αναφέρει και τον αριθμό, την πιο τρανή σοφία, που αυτός βρήκε για χάρη των ανθρώπων.

Σε ένα κατά βάση λογοτεχνικό κείμενο του 5ου μ.Χ. αιώνα, έργο του Martianus Capella, με τίτλο «Οι γάμοι του Ερμή και της Φιλολογίας» (περίπου 410 μ.Χ.), αφιερωμένο στο σύνολο των επιστημονικών γνώσεων της εποχής, ο θεός Ερμής νυμφεύεται τη Φιλολογία. Οι επτά ελεύθερες τέχνες παρελαύνουν για να ευχηθούν και αυτοπαρουσιάζονται. Ανάμεσά τους, η Αριθμητική (που η παρουσίασή της καταλαμβάνει 58 από τις 379 σελίδες του έργου), η Γεωμετρία (που ενσωματώνει και τη Γεωγραφία με 60 σελίδες) και η Αστρονομία (με 41 σελίδες). Το ενδιαφέρον στο συγκεκριμένο κείμενο, έγκειται σύμφωνα με τον Μιχαηλίδη (2010α), στην ιδέα του συγγραφέα να επινοήσει ένα μύθο ως πρόσχημα για να παρουσιάσει τις επιστημονικές γνώσεις της εποχής του, καθώς η συγκεκριμένη ιδέα εμφανίζεται για πρώτη φορά στη Λογοτεχνία, καθιστώντας το έργο του Martianus Capella, πρόδρομο των σημερινών μαθηματικών μυθιστορημάτων, προσχηματικής μυθοπλασίας, τα οποία θα αναφερθούν στη συνέχεια. Οι ίδιες, οι επιστημονικές γνώσεις, που παρουσιάζονται προκαλούν θλίψη με τη φτώχια τους και τη χαμηλή τους ποιότητα. Το έργο αυτό, γραμμένο εν μέρει σε πεζό και εν μέρει σε έμμετρο λόγο, χρησίμευσε ως σχολικό εγχειρίδιο κατά τον Μεσαίωνα και επηρέασε πολύ τους πρώτους πανεπιστημιακούς κύκλους της Ευρώπης.

Στη διάρκεια της επιστημονικής επανάστασης, που ορίζεται ως ένα διάστημα 150 περίπου ετών, η εικόνα του Σύμπαντος άλλαξε ριζικά, αφού πέρασε από πολλά ενδιάμεσα στάδια. Η ηλιοκεντρική ιδέα περί Σύμπαντος, αποκρυσταλλωμένη σ' ένα ενιαίο σύστημα από τον Κοπέρνικο και αναθεωρημένη στη νέα αυτή μορφή από τον Κέπλερ (ο οποίος αντικατέστησε τις κυκλικές τροχιές με ελλειπτικές) τοποθετείται από το Νεύτωνα σε ένα συνεπές μαθηματικό πλαίσιο, βασισμένο στους περίφημους νόμους του Νεύτωνα. Η επιστημονική επανάσταση δεν περιορίστηκε φυσικά μόνο στην Αστρονομία, καθώς η πρόοδος σε αυτήν προκάλεσε αλυσιδωτές αντιδράσεις στη Μηχανική, την Οπτική, τη Χημεία, την Ανατομία, τη Φυσιολογία, ενώ στο υπόβαθρο όλων αυτών των ανακατατάξεων χτιζόταν σταδιακά μια νέα μαθηματική θεωρία, ο Απειροστικός Λογισμός, πρώτη ριζικά νέα μαθηματική δημιουργία ύστερα από τη Γεωμετρία των αρχαίων Ελλήνων. Η λογοτεχνία του 17ου και 18ου αιώνα δε θα μπορούσε, βέβαια, να μείνει ανεπηρέαστη από αλλαγές σαν αυτές. Το 1634, κυκλοφορεί το έργο του Kepler, «Somnium». Το βιβλίο εξιστορεί τις περιπέτειες ενός νεαρού ταξιδιώτη, που αφού σπούδασε Αστρονομία κοντά στον Τύχο Μπράχε, καταφέρνει χάρη στις μαγικές ικανότητες της μητέρας του, να ταξιδέψει στη Σελήνη και να περιγράψει τον κόσμο, όπως τον έβλεπε από εκεί. Η περιπέτεια του νεαρού ταξιδιώτη παρουσιάζεται σαν ένα όνειρο που είδε ο συγγραφέας, ύστερα από έντονες σχετικές συζητήσεις με συναδέλφους του και άτομα της αυλής. Στο έργο, με τη μορφή υποσημειώσεων, συμπεριλαμβάνονται ιστορικά στοιχεία, γεωγραφικές πληροφορίες καθώς και μαθηματικές αλλά και αστρονομικές λεπτομέρειες. Πρόκειται προφανώς για ένα από τα πρώτα δείγματα προσχηματικής μυθοπλασίας με στόχο την εύκολη και ανώδυνη διάδοση των νέων ιδεών αλλά και για το πρώτο ίσως έργο επιστημονικής φαντασίας.

Το 1662, κυκλοφορεί στην Αγγλία, το έργο της Margaret Cavendish, «Η Περιγραφή ενός καινούριου κόσμου που αποκαλείται λαμπρός κόσμος». Στο έργο περιγράφονται οι περιπέτειες μιας νεαρής αριστοκράτισσας, την οποία ερωτεύεται ένας έμπορος. Επειδή η ταπεινή καταγωγή του, τον καθιστά ακατάλληλο για σύζυγό της, αποφασίζει να την απαγάγει. Όμως το πλοίο του, παρασύρεται από την κακοκαιρία προς τον Βόρειο Πόλο, τη στιγμή που χάρη σε μια αστρονομική συγκυρία, η τροχιά της Γης προσεγγίζει, αυτήν ενός άλλου πλανήτη. Όλοι οι επιβαίνοντες στο πλοίο σκοτώνονται εκτός από την κοπέλα, που μεταφέρεται με έναν ανεμοστρόβιλο στον πλανήτη. Ο άρχοντας του νέου αυτού κόσμου την ερωτεύεται, τη νυμφεύεται και της παραδίδει τα ηνία της εξουσίας. Ως βασίλισσα πλέον, η πρωταγωνίστρια συνομιλεί με τους διάφορους επιστήμονες της χώρας, οι οποίοι ανάλογα με την ειδικότητά τους, έχουν το όνομα και τη μορφή διαφόρων ζώων. Κατά τη διάρκεια της συζήτησης με τους μαθηματικούς-αράχνες και τους γεωμέτρες-ψείρες, η βασίλισσα τους ρωτά επίμονα αν κατάφεραν να τετραγωνίσουν τον κύκλο. Αναρωτιέται ακόμα, αν μπορούν να κατασκευάσουν φανταστικές γραμμές (οι φανταστικοί αριθμοί είχαν έρθει στο προσκήνιο από το 1545μ.Χ., ως τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών). Επίσης, η βασίλισσα παρατηρεί ότι τα σημεία των Μαθηματικών, είναι τόσο μικροσκοπικά και μηδαμινά που μοιάζουν φανταστικά. Από την παρατήρηση της βασίλισσας, αναδεικνύεται η δυσκολία κατανόησης της έννοιας του απειροστού, που αρχίζει να διαφαίνεται, από τις προσπάθειες θεμελίωσης του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού. Από το κείμενο γίνεται φανερό, ότι οι γνώσεις της Cavendish είναι ελλιπείς και επιφανειακές. Επιπλέον, στόχος του έργου της, δεν είναι η εκλαΐκευση των νέων επιστημονικών επιτευγμάτων, αλλά η κοινωνική κριτική και επειδή τα Μαθηματικά βρίσκονται στο προσκήνιο, τα ενσωματώνει στο κείμενο της. Βέβαια η θεώρησή της, για τις θετικές επιστήμες παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον, αφού αποτελεί μια αξιόπιστη μαρτυρία για τον τρόπο με τον οποίο, ο μη ειδικός αντιλαμβάνεται τα επιτεύγματα της επιστημονικής επανάστασης.

Ο Γκιούλιβερ, ο διάσημος ήρωας του Jonathan Swift (1667–1745), σε ένα από τα ταξίδια του θα φτάσει στη Λαπούτα, ένα νησί που αιωρείται μεταξύ γης και ουρανού και διοικείται από μαθηματικούς. Οι κάτοικοι του νησιού περνούν το χρόνο τους ασχολούμενοι με τους τέσσερις κλάδους του Quadrivium, Γεωμετρία, Αριθμητική, Αστρονομία και Μουσική. Τόσο πολύ απασχολημένοι είναι με τις επιστημονικές ασχολίες τους, που παραμελούν τις στοιχειώδεις κοινωνικές τους υποχρεώσεις. Για το λόγο αυτό διατηρούν υπηρέτες, που έχουν ως μοναδική αποστολή, να τους θυμίζουν πότε πρέπει να μιλήσουν ή να ακούσουν, χτυπώντας τους ελαφρά στο στόμα ή στο αυτί αντίστοιχα. Τα ρούχα τους, είναι διακοσμημένα με αστρονομικά σύμβολα, τα εδέσματά τους, σερβίρονται κομμένα σε κανονικά γεωμετρικά σχήματα. Όμως, τα σπίτια τους είναι κακοχτισμένα και ετοιμόρροπα γιατί, όπως και ο Πλάτων, απεχθάνονται την πρακτική Γεωμετρία και αρνούνται να εφαρμόσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις για ταπεινούς καθημερινούς σκοπούς.

Και στο έργο του Swift, ο Μιχαηλίδης (2004β) διακρίνει την έμμεση, ενδεχομένως και ασυναίσθητη επιρροή που ασκούν οι επιστημονικές εξελίξεις στην ουσία του μύθου. Εκτός από τις αναφορές στους μαθηματικούς της Λαπούτα, η επίδραση των Μαθηματικών είναι φανερή στα δυο πρώτα ταξίδια του Γκιούλιβερ, στη χώρα των Λιλιπούτιων και των Μπρόμπντιγκναγκ. Στην πρώτη περίπτωση ο ήρωας ναυαγεί σε μια χώρα μικροσκοπικών πλασμάτων που έχουν ακριβώς τα ίδια φυσικά και νοητικά χαρακτηριστικά με τους συνηθισμένους ανθρώπους αλλά είναι πενήντα φορές μικρότεροι. Στη δεύτερη, ο Γκιούλιβερ είναι ο μικροσκοπικός σε μια χώρα γιγάντων. Η διατήρηση των ιδιοτήτων υπό κλίμακα σχετίζεται άμεσα με την εφεύρεση και διάδοση των τηλεσκοπίων και των μικροσκοπίων, αλλά κυρίως με την ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού. Στα «Ταξίδια του Γκιούλιβερ» αφηρημένες μαθηματικές έννοιες διεισδύουν τόσο στην πλοκή όσο και τα ευρήματα.

Η ιδέα, της ύπαρξης όμοιων ανθρώπινων όντων σε διαφορετικά μεγέθη, είναι κυρίαρχη και στο «Μικρομέγα», του Βολταίρου που εκδόθηκε το 1752. Ένας γίγαντας από τον Σείριο, 24.000 φορές μεγαλύτερος από τους κατοίκους της Γης, αποβιβάζεται στον Κρόνο, όπου οι κάτοικοι είναι 900 φορές μεγαλύτεροι από τους γήινους. Εκεί, πιάνει φιλίες με το γραμματέα της Ακαδημίας των Επιστημών και μαζί επισκέπτονται τη Γη. Οι έννοιες του απείρου και του απειροστού ταλανίζουν και τον Βολταίρο, ο οποίος αδυνατεί να κατανοήσει το αληθινό τους νόημα, ταυτίζοντας το άπειρο με το «πάρα πολύ μεγάλο» και το απειροστό με το «πάρα πολύ μικρό». Η αναλλοίωτη κλίμακα του Swift, εμπλουτίζεται από το Βολταίρο. Στον «Μικρομέγα» τα μεγαλύτερα όντα είναι και μακροβιότερα, έχουν περισσότερες αισθήσεις και το φωτεινό φάσμα τους έχει περισσότερα χρώματα. Ο Μιχαηλίδης (2010β) υπογραμμίζει, ότι παρά τον κύριο στόχο του Βολταίρου, να κρίνει και να καυτηριάσει την άσκοπη επιθετικότητα των ανθρώπων, ο αναγνώστης του «Μικρομέγα», αποκομίζει την αίσθηση, ότι ο συγγραφέας διακατέχεται από την αγωνία να παραθέσει, όλες τις γνώσεις που έχει αποκτήσει σχετικά με τις εξελίξεις στη Φυσική Φιλοσοφία (όρος που μέχρι τον 19ο αιώνα περιλάμβανε όλες τις αποκαλούμενες σήμερα, θετικές επιστήμες, τα Μαθηματικά, η Φυσική, η Χημεία και η Αστρονομία.)

Περίπου έναν αιώνα αργότερα (1865), η παρουσία των Μαθηματικών στο έργο του Lewis Carroll, είναι και πιο έντονη και πιο οργανωμένη. Βέβαια, το γεγονός ότι πίσω από το ψευδώνυμο του δημιουργού, της «Αλίκης στη χώρα των θαυμάτων» (1865), κρύβεται ο μαθηματικός Charles Lutwidge Dodgson, λέκτορας στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης, παίζει σημαντικό ρόλο. Χωρίς να γίνεται η παραμικρή ευθεία αναφορά στη συγκεκριμένη επιστήμη, χωρίς κανένας από τους φανταστικούς ήρωες να έχει σχέση με τον κλάδο, η παρουσία των Μαθηματικών σε κάθε εύρημα, σε κάθε ευφυολόγημα, σε κάθε αποστροφή του λόγου, είναι έντονη. Στις σελίδες του, διακρίνονται η «μαθηματική» δομή και τα παράδοξα, που απορρέουν από τη μη προσεκτική χρήση της μαθηματικής γλώσσας. Αν δεν υπήρχαν τόσες άλλες λογοτεχνικές κατηγορίες, που να τα διεκδικούν, θα μπορούσε να ειπωθεί ότι τα μυθιστορήματα του Carroll είναι τα πρώτα δείγματα Μαθηματικής Λογοτεχνίας.

Είκοσι χρόνια αργότερα, το 1884, κυκλοφόρησε το «Flatland» του Edwin Abbot. Είναι η εποχή, που πολλαπλασιάζονται οι δημοσιεύσεις σχετικά με τις γεωμετρίες τεσσάρων διαστάσεων, ένα μαθηματικό εργαλείο εξαιρετικά χρήσιμο όπως αποδείχθηκε αργότερα, αυστηρά θεμελιωμένο από επιστημονική άποψη, αλλά για το οποίο, ακόμα και όσοι έχουν κάποια εξοικείωση με τις θετικές επιστήμες, δεν διαθέτουν καθόλου προσλαμβάνουσες παραστάσεις. Τα εκλαϊκευτικά άρθρα συγγραφέων, όπως ο Charles Hinton, δεν κατορθώνουν να παρουσιάσουν με εύληπτο τρόπο το θέμα. Η ανυπαρξία «βασιλικής οδού» προς τη Γεωμετρία, την οποία είχε ανακοινώσει ο Ευκλείδης, επιβεβαιώνεται για άλλη μια φορά. Και τότε ο ιερέας και δημοδιδάσκαλος Abbot, έχει μια πρωτοφανή σύλληψη για τα παιδαγωγικά χρονικά, να γράψει ένα μυθιστόρημα που εκτυλίσσεται στο χώρο των δύο διαστάσεων. Ο τρισδιάστατος αναγνώστης κατανοεί, από θέση ισχύος, τις δυσκολίες των επίπεδων όντων να κατανοήσουν την τρίτη διάσταση και τις συγκρίνει με τις δικές του δυσκολίες, να συλλάβει την έννοια της τέταρτης. Ωστόσο η «Flatland» δεν είναι ένα καμουφλαρισμένο μάθημα Γεωμετρίας. Είναι μια ολοκληρωμένη νουβέλα που σατιρίζει καυστικά, ήθη και έθιμα της Βικτωριανής Αγγλίας, ένα σαφώς λογοτεχνικό κείμενο, όπου τα Μαθηματικά εντάσσονται αρμονικά στην πλοκή και δημιουργούν αυτό που ανεπιφύλακτα θα χαρακτηριστεί, ως το πρώτο μαθηματικό μυθιστόρημα.

Μετά τον Abbot και μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του ’90, ελάχιστα έργα μπορούν να χαρακτηριστούν ως «μαθηματική λογοτεχνία», με την έννοια που περιγράφτηκε πιο πάνω. Υπάρχουν βέβαια αρκετές μυθιστορηματικές βιογραφίες, που αναφέρονται σε μαθηματικούς καθώς και αρκετά αστυνομικά μυθιστορήματα, όπου το θύμα, ο δολοφόνος ή αυτός που εξιχνιάζει το έγκλημα είναι μαθηματικοί και αυτή τους η ιδιότητα, υπεισέρχεται κατά κάποιο τρόπο στην πλοκή. Όμως, κανένα δεν προχωρά πέρα από τα στερεότυπα του «αφηρημένου μαθηματικού», της «σαφήνειας των εξισώσεων», της «αναμφισβήτητης αλήθειας» που αναφέρθηκαν παραπάνω. Ο αστυνόμος Μπέκας, ήρωας του Γιάννη Μαρή, που αγαπούσε πολύ την Άλγεβρα στο σχολείο, που θεωρούσε ότι «όλα είναι στοιχεία μιας μαθηματικής εξίσωσης» και ότι πηγαίνουμε βήμα-βήμα από το γνωστό στον άγνωστο, αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα (Μιχαηλίδης, 2010α).

Οι δεκαετίες του ’50 και του ’60, χαρακτηρίζονται από την άνθηση της επιστημονικής φαντασίας. Σ’ αυτό το λογοτεχνικό είδος, τα Μαθηματικά παίζουν κατά κανόνα ένα σκοτεινό, για να μην πούμε σκοταδιστικό ρόλο. Επειδή η συντριπτική πλειοψηφία των μυθιστορημάτων, αυτού του τύπου, στηρίζεται σε μια παραβίαση φυσικών νόμων (κίνηση με ταχύτητα μεγαλύτερη αυτής του φωτός, τηλεμεταφορά, ταξίδια στο παρελθόν και στο μέλλον με στόχο την τροποποίηση του παρόντος κλπ.), γίνεται επίκληση κάποιου συγκεχυμένου μαθηματικού όρου ή τύπου, που εξασφαλίζει τη «νομιμοποίηση» της φυσικής παρανομίας. Η συμμετοχή των Μαθηματικών, στα έργα επιστημονικής φαντασίας συμπυκνώνεται στην ιδέα, «αφού είναι μαθηματικό είναι εγγυημένα αληθές, αλλά έτσι κι αλλιώς δεν το καταλαβαίνει κανένας».

Εξαίρεση αποτελούν ίσως τα έργα του Ισαάκ Ασίμωφ και ειδικότερα η τριλογία «Foundation». Εκεί εμφανίζεται μια υποθετική επιστήμη, η Ψυχοϊστορία, που χρησιμοποιώντας τη Στατιστική, τη μελέτη των επαναλήψεων και των κανονικοτήτων και την αυτοομοιότητα (που παρουσιάζεται χωρίς να κατονομάζεται), είναι σε θέση να προβλέψει ή ακόμα και να επηρεάσει το μέλλον, όχι σε ατομική αλλά σε μαζική κλίμακα. Παρατηρείται στις περιπτώσεις αυτές, μια προαναγγελία των θεωριών του Χάους και της Πολυπλοκότητας, που αναπτύχθηκαν είκοσι πέντε χρόνια αργότερα. Ενδιαφέρον, επίσης, παρουσιάζουν τα βιβλία του Gregory Benford, όπου στηρίζει την υπόθεσή του, σε έγκυρες από μαθηματική άποψη εξισώσεις, οι οποίες όμως δεν έχουν επαληθευθεί πειραματικά. Ειδικότερα στην Απόδραση από το Χρόνο προσεγγίζεται με αρκετή σοβαρότητα και αξιοπιστία το πρόβλημα της μεταφοράς προς τα πίσω στο χρόνο όχι προσώπων αλλά μηνυμάτων μέσω ταχυονίων, σωματιδίων που μετακινούνται με ταχύτητες μεγαλύτερες αυτής του φωτός και τα οποία προβλέπονται από τις μαθηματικές εξισώσεις της σχετικότητας.

Στο δεύτερο μισό του 19ου αιώνα, ολοκληρώνεται η θεμελίωση των πραγματικών αριθμών από τον Γερμανό Dedekind. Ο ορισμός όμως, των πραγματικών αριθμών στην εργασία του, έγινε με αρκετά σύνθετο και δυσνόητο τρόπο. Χρειάστηκε να μεσολαβήσει ένα διάστημα 100 ετών, για να απλουστευθεί ο ορισμός των πραγματικών αριθμών από τον Άγγλο μαθηματικό John Horton Conway. Με εξίσου απλό τρόπο ορίζονται στην εργασία του Conway και αριθμοί ακόμα πιο γενικοί από τους πραγματικούς. Το 1972, στα πλαίσια ενός γεύματος, ο Conway κοινοποιεί την εργασία του, στον διάσημο καθηγητή της Πληροφορικής Donald Ervin Knuth. Ο τελευταίος επέλεξε, να συγγράψει ένα μυθιστόρημα, για να παρουσιάσει στην παγκόσμια μαθηματική κοινότητα αλλά και στο ευρύ κοινό τις ιδέες του Conway. Το συγκεκριμένο βιβλίο αποτελεί μάλιστα, μια από τις σπάνιες περιπτώσεις, όπου μία νέα μαθηματική ιδέα παρουσιάζεται, μέσω ενός μυθιστορήματος. Έτσι, το 1974, κυκλοφορεί το έργο του, με τίτλο «Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness». Σε αυτό οι κεντρικοί πρωταγωνιστές, ένα αγόρι και ένα κορίτσι, ανακαλύπτουν σε μια ερημική ακτή μια προχωρημένη μαθηματική θεωρία, καθώς και τους εαυτούς τους, τον έρωτα, και την αναπόδραστη μέθη των μαθηματικών. (Papadimitriou, 2003)

Τις τελευταίες δεκαετίες, όπως προαναφέρθηκε, παρατηρείται πληθώρα εκδόσεων, που εντάσσονται στα πλαίσια της Μαθηματικής Λογοτεχνίας. Τα περισσότερα από αυτά τα βιβλία πραγματοποιούν πολλές εκδόσεις, μεταφράζονται σε πολλές γλώσσες και μερικά από αυτά γίνονται best-seller, δημιουργώντας ένα ρεύμα Μαθηματικής Λογοτεχνίας, για το οποίο στη βιβλιογραφία αναφέρεται ότι χωρίζεται ενδεικτικά σε κάποιες μεγάλες κατηγορίες που θα παρουσιαστούν αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.

3.3. Προσπάθειες ταξινόμησης των έργων Μαθηματικής Λογοτεχνίας.

Ο Μιχαηλίδης (2004α) αναφέρει ότι για τους μαθηματικούς η ταξινόμηση με βάση σαφή και αυστηρά κριτήρια είναι μια οικεία εργασία οικεία. Αναφέρει ενδεικτικά, χαρακτηριστικά παραδείγματα ταξινόμησης από τα Μαθηματικά, όπως η ταξινόμηση των ακέραιων αριθμών σε άρτιους (ζυγούς, πολλαπλάσια του 2 δηλαδή) ή περιττούς. Επίσης η ταξινόμηση των τριγώνων, με βάση τις πλευρές τους, σε ισόπλευρα, ισοσκελή και σκαληνά καθώς και η ταξινόμησή τους με βάση τις γωνίες, σε ορθογώνια, αμβλυγώνια και οξυγώνια. Τονίζει όμως, ότι όσο απομακρύνεται κανείς από τα Μαθηματικά, τα κριτήρια γίνονται όλο και περισσότερο ασαφή. Ακόμα και στο χώρο των θετικών επιστημών, δεν σπανίζουν οι επαμφοτερίζουσες καταστάσεις που κάνουν τις ταξινομήσεις ασαφείς, όπως ο χωρισμός των στοιχείων, για παράδειγμα, σε μέταλλα ή αμέταλλα, ή ο χωρισμός των ζώντων οργανισμών σε ζώα ή φυτά. Γίνεται, επομένως, αντιληπτό πόσο υποκειμενική και αμφιλεγόμενη θα είναι κάθε πιθανή προσπάθεια ταξινομίας σε χώρους όπως η τέχνη ή η λογοτεχνία. Στη συνέχεια, με δεδομένη την εννοιολογική δυσκολία να χαρακτηριστεί κάποιο κείμενο ως «Μαθηματική Λογοτεχνία» και να ενταχθεί σε κάποια υποκατηγορία, τονίζει πως περιορίζεται στην υπογράμμιση μερικών από τα κύρια χαρακτηριστικά που εντοπίζονται στα έργα αυτά, επιχειρώντας, όπου αυτό είναι δυνατόν, να γίνει μια κατάταξη με βάση το κυρίαρχο στοιχείο τους, όπως την παρουσιάζουμε παρακάτω:

α. Στις μέρες μας, ένα είδος ιδιαίτερα διαδεδομένο είναι **«προσχηματική-διδακτική μυθοπλασία»**, όπου ο μύθος χρησιμοποιείται ως πρόσχημα, για τη μετάδοση γνώσεων, με τρόπο περισσότερο εύληπτο, ευχάριστο και αποδεκτό. Είναι σαφές ότι το συγκεκριμένο λογοτεχνικό είδος, δεν αφορά αποκλειστικά τα Μαθηματικά αλλά πάρα πολλά γνωστικά αντικείμενα, στα οποία έχει επιχειρηθεί αυτή η μέθοδος προσέγγισης, με λιγότερη ή περισσότερη επιτυχία. Ωστόσο, με δεδομένη τη δυσφορία, την ένταση, την ανησυχία, το άγχος και τελικά τον φόβο απέναντι στα Μαθηματικά, που η πλειοψηφία των πολιτών κουβαλά από τη σχολική περίοδο της ζωής τους, ένα τέτοιο εγχείρημα σε αυτό τον τομέα αποκτά ξεχωριστή σημασία. Παρόλο που τα σημαντικότερα και πιο επιτυχημένα δείγματα του είδους, εμφανίστηκαν κατά τις δύο τελευταίες δεκαετίες, ο Μιχαηλίδης εντοπίζει απόπειρες προσχηματικής μυθοπλασίας με μαθηματικό περιεχόμενο, στα βάθη της ιστορίας, όπως το έργο του Martianus Capella «Οι γάμοι του Ερμή και της Φιλολογίας», για το οποίο έχει γίνει ήδη αναφορά παραπάνω και αποτέλεσε ένα από τα βασικότερα διδακτικά εγχειρίδια στη Δύση κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα.

Εξέχουσα θέση κατέχουν αναμφίβολα, το «Θεώρημα του παπαγάλου»(1998) του Denis Guedj και το «Flatterland» (2001) του Ian Stewart. Το πρώτο, έχει τη μορφή αστυνομικού μυθιστορήματος, καθώς οι ήρωες, στην προσπάθειά τους να λύσουν το μυστήριο του «θανάτου» ενός φίλου τους, μελετούν τα βασικά προβλήματα, που κυριάρχησαν στην ιστορία των Μαθηματικών, ανά τους αιώνες και βρίσκουν αναλογίες και ομοιότητες ανάμεσα στα Μαθηματικά και το πρόβλημα που τους απασχολεί. Στην ίδια κατηγορία εντάσσονται και δυο ακόμη έργα του Guedj, το «Επιχείρηση Μεσημβρία» και «Τα αστέρια της Βερενίκης». Το πρώτο περιγράφει τη μέτρηση του μεσημβρινού, με τη μέθοδο του γεωδαιτικού τριγωνισμού, που πραγματοποιήθηκε με απόφαση της επαναστατικής εθνοσυνέλευσης, κατά τα πρώτα χρόνια της Γαλλικής Επανάστασης, ενώ το δεύτερο αφηγείται τη μέτρηση της περιφέρειας της Γης από τον Ερατοσθένη κατά τους ελληνιστικούς χρόνους.

Επίσης το «Flatterland», το οποίο αποτελεί «συνέχεια» του «Flatland» (1884), του Edwin Abbot και έχει ως κεντρική ηρωίδα, μια νεαρή δισδιάστατη κάτοικο του επιπέδου, που ανακαλύπτει σε κάποια αποθήκη, τη «μαγική λέξη», με την οποία καλεί τον Διαστημικό Άλτη, ένα ον που την οδηγεί στην περιδιάβαση των κόσμων διαφόρων διαστάσεων. Χωρίς να υστερεί σε χιούμορ και παιγνιώδη διάθεση, ο μύθος έχει καθαρά προσχηματικό χαρακτήρα, αφού ο κύριος στόχος του, είναι φανερά να ξεναγηθεί ο σύγχρονος αναγνώστης στο χώρο των μοντέρνων, μη ενορατικών γεωμετριών.

β. Μια άλλη υποκατηγορία έργων θα μπορούσε ίσως να περιγραφεί με τον όρο **«βιωματική»**. Σε αυτά κεντρικός ήρωας είναι κάποιος μαθηματικός, μια προσωπικότητα που έχει δημιουργηθεί με βάση ένα ή περισσότερα υπαρκτά πρόσωπα και η πλοκή τους στρέφεται γύρω από τα βιώματα, τα όνειρα και τις φιλοδοξίες αυτού του κεντρικού ήρωα. Παράλληλα επιχειρείται μια ανάλυση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών, τα οποία απορρέουν από την ιδιότητά του ως μαθηματικού. Παρόλο που ο ήρωας είναι φανταστικός, συχνά ελίσσεται σε χώρους πραγματικούς και συνδιαλέγεται με πρόσωπα υπαρκτά, ιστορικά.

Σε αυτή την κατηγορία κορυφαίο είναι, χωρίς αμφιβολία, το έργο, «Ο θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλντμπαχ» (1992), του Απόστολου Δοξιάδη. Ο ήρωας του έργου, ο μαθηματικός Πέτρος Παπαχρήστου, μαθητής του Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή (ο οποίος ήταν υπαρκτό πρόσωπο) αφιερώνει τη ζωή του, στη λύση ενός από τα δυσκολότερα προβλήματα που απασχολούν τους μαθηματικούς εδώ και τρεις αιώνες. Ανάλογου ύφους, αλλά πιο κοντά στο στυλ του «campus novel», σύμφωνα με την παρατήρηση του Μιχαηλίδη, είναι «Οι Άγριοι Αριθμοί» (1998) του Schogt Philibert. Η υπόθεση του βιβλίου περιπλέκεται γύρω από την κύρια αγωνία των σημερινών πανεπιστημιακών, που κωδικοποιείται κάτω από τη φράση «publish or perish» (δημοσιεύσεις ή θάνατος). Και τα δυο έργα αγγίζουν με τρόπο πρωτότυπο το δημοφιλές θέμα για τα όρια ανάμεσα στην ιδιοφυία και την τρέλα.

γ. Μια τρίτη κατηγορία περιγράφεται με τον όρο **«δομική»**. Σε αυτή θα μπορούσαν να ενταχθούν έργα, που εκτός από τη θεματολογία τους, συνυφαίνουν τα Μαθηματικά και στη δομή τους. Θα μπορούσαμε, δηλαδή, να πούμε ότι τα Μαθηματικά αποτελούν το βασικό συστατικό της δομής τους. Στη συγκεκριμένη κατηγορία χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν τα διηγήματα του J. L. Borges καθώς και το «Βιβλίο Κόλαση» (2003), του Carlo Frabetti. Φυλακισμένος στα βάθη μιας κόλασης, δομημένης σε κύκλους κατά πρότυπο του Δάντη, ο κεντρικός ήρωας πρέπει να φέρει σε πέρας τους άθλους που του αναθέτει ο φύλακας διάβολός του, νικώντας τον σε μαθηματική ευρηματικότητα. Ο αναγνώστης με μαθηματικές γνώσεις θα τον παρακολουθήσει να ξεκινά από το παράδοξο του Ράσελ και τη θεμελίωση των συνόλων και να κατακτά, σε κάθε νέο κύκλο, κι από ένα νέο μαθηματικό σύνολο: τους φυσικούς, τους ακεραίους, τους ρητούς. Η μαθηματική εξέλιξη, όμως, ευδιάκριτη για τον ειδικό, περνά απαρατήρητη για τον «κοινό θνητό», που απλώς απολαμβάνει τη δομή χωρίς να συνειδητοποιεί τις ευθείες αναφορές στα συγκεκριμένα θεωρήματα.

Ο Μιχαηλίδης, ωστόσο, θεωρεί ότι κάποια έργα, όπως για παράδειγμα το «Τούριγκ: Μαθήματα αγάπης» (2003) του Χρίστου Παπαδημητρίου και η «Αρχή του ντ' Αλαμπέρ» (1996) του Andrew Crumey, είναι δύσκολο να ενταχθούν σε μια από τις παραπάνω κατηγορίες. Το πρώτο αποτελεί μια συνεχή εναλλαγή ανάμεσα σε μια κλασσική ερωτική ιστορία, μια σειρά από μαθήματα Μαθηματικών και Πληροφορικής κι ένα συναρπαστικό ταξίδι στον κόσμο της εικονικής πραγματικότητας. Το δεύτερο ξεκινά σαν μια μυθιστορηματική βιογραφία κι εξελίσσεται σε μια περιδιάβαση στους πολλαπλούς κόσμους, όπου η ευκλείδεια πραγματικότητα εναλλάσσεται με τον χωρόχρονο, την κβαντική πολλαπλότητα και την πλειότιμη λογική. Και τα δυο αυτά έργα ανήκουν περισσότερο στο χώρο του μεταμοντέρνου μυθιστορήματος, ενώ έχουν στοιχεία και από τις τρεις κατηγορίες, αλλά στην πραγματικότητα δεν εντάσσονται σε καμιά από αυτές, λόγω της συνθετότητας και της πολυπλοκότητάς τους.

δ. Σε μεταγενέστερο άρθρο του ο Μιχαηλίδης (2006), κάνει λόγο και για μια τέταρτη κατηγορία, τις **«ιστορίες αναζήτησης»**, που αφηγούνται κάποια μαθηματική περιπέτεια. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν, «Τα αστέρια της Βερενίκης» (2003) του Denis Guedj και «Ο άνθρωπος που μετρούσε την άμμο» (2000) της Gillian Bradshaw. Παρατηρούμε ότι το πρώτο έργο, εντάσσεται και στην κατηγορία της προσχηματικής μυθοπλασίας, γεγονός που καταδεικνύει τη δυσκολία της ταξινόμησης των έργων στη μία ή στην άλλη κατηγορία. Στο δεύτερο βιβλίο, κεντρικός πρωταγωνιστής είναι ο Αρχιμήδης. Ύστερα από αρκετά χρόνια σπουδών στη Βιβλιοθήκη και το Μουσείο της Αλεξάνδρειας, ήδη διάσημος για την εφεύρεση του κοχλία που φέρει το όνομά του, ο νεαρός Αρχιμήδης επιστρέφει στις Συρακούσες. Φτάνοντας θα διαπιστώσει ότι είναι απαραίτητος τόσο στην οικογένειά του, αφού ο βαριά άρρωστος πατέρας του δε μπορεί πια να την συντηρήσει, όσο και στην πατρίδα του, που απειλείται από την πολιορκία των Ρωμαίων. Για να ανταποκριθεί στις υποχρεώσεις του θα πρέπει να επιστρατεύσει τόσο τη μαθηματική του ιδιοφυΐα, όσο και την τεχνική του ευρηματικότητα.

Τη σχέση των Μαθηματικών με τη Λογοτεχνία έχει ως θέμα του το έργο «Το τελευταίο παραμύθι του Μιγκέλ Τόρρες ντα Σίλβα», του Thomas Vogel. Ο ήρωας, εγγονός ενός ονομαστού παραμυθά, σπουδάζει ύστερα από προτροπή του παππού του Μαθηματικά. Στην πορεία ανακαλύπτει ότι μέσα από τα Μαθηματικά, θα μπορέσει ίσως να ολοκληρώσει το τελευταίο παραμύθι, που πεθαίνοντας άφησε μισοτελειωμένο ο παππούς του. Είναι ένα έργο ποιητικό, που δίνει τη δική του εκδοχή πάνω στο ερώτημα σχετικά με τον τρόπο που μπορούν να συμβιβαστούν, να συνυπάρξουν, να αλληλεπιδράσουν ο ορθολογισμός και η αυστηρή αξιωματική παραγωγική διαδικασία των Μαθηματικών με την αμφισημία, την υποκειμενική ερμηνεία και το φανταστικό κόσμο της μυθοπλασίας.

Λαμβάνοντας υπόψη όσα αναπτύχθηκαν παραπάνω, και διατηρώντας πάντοτε κάποιες επιφυλάξεις, μπορούμε να οδηγηθούμε σε κάποια πρώτα συμπεράσματα σχετικά με τα βασικά συστατικά της Μαθηματικής Λογοτεχνίας, που κατά κανόνα:

- Γράφεται από μαθηματικούς, συχνά πανεπιστημιακούς δασκάλους, ερευνητές διεθνούς κύρους ή εκπαιδευτικούς, με μεγάλη αγάπη τόσο για τα Μαθηματικά, όσο και για τη Λογοτεχνία.
- Έχει ως κεντρικούς ήρωες μαθηματικούς, πρόσωπα ιστορικά ή πλασματικά, που έρχονται σε επαφή με επιφανείς μαθηματικούς της εποχής τους.

- Τα Μαθηματικά παίζουν θεμελιώδη ρόλο στη ζωή των πρωταγωνιστών, αλλά και στην εξέλιξη του έργου, είτε μέσα από την προσπάθεια επίλυσης κάποιου άλυτου μαθηματικού προβλήματος, είτε μέσα από την εγγραφή μαθηματικών γρίφων ή κωδίκων στην πλοκή του έργου.
- Χρησιμοποιεί λέξεις και αναπαραστάσεις, που βρίσκονται μέσα στα Μαθηματικά.
- Περιέχει πληροφορίες για ιστορικά ζητήματα της μαθηματικής επιστήμης καθώς και επιστημολογικές εξηγήσεις των μεγάλων αλλαγών της.

Επιπλέον, τα έργα Μαθηματικής Λογοτεχνίας, αποτελούν ένα είδος μύησης στο βασίλειο των Μαθηματικών, που εμπερικλείει ένα αμάλγαμα ομορφιάς και αλήθειας απρόσιτο για τους κοινούς θνητούς, όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Δοξιάδης (1992) στο έργο του «Ο θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλντμπαχ». Ταυτόχρονα, εισάγουν τον αναγνώστη στα άδυτα του μυαλού μιας μαθηματικής ιδιοφυΐας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν τα αλλεπάλληλα όνειρα του θείου Πέτρου, που εκφράζουν εναργέστατα την «ερωτική» προσήλωση του νεαρού επιστήμονα στη θεωρία των αριθμών, κάτι μάλλον ακατανόητο για τον κοινό νου.

Η Κολίτση (2009) εστιάζοντας στις θεωρητικές απόψεις και τις πρακτικές των Ελλήνων συγγραφέων Μαθηματικής Λογοτεχνίας (η οποία, όπως ήδη αναφέρθηκε, γράφεται κατά κανόνα από μαθηματικούς, μιλά για μαθηματικούς και επικεντρώνεται στα Μαθηματικά) αναφέρεται στις ακόλουθες τάσεις που προσδιορίζονται στα έργα ελληνικής Μαθηματικής Λογοτεχνίας:

- Τη μαθηματική μυθιστορηματική βιογραφία, που παρακολουθεί τη διαμόρφωση και επιστημονική ανέλιξη του κεντρικού ήρωα-μαθηματικού, προσώπου ιστορικού ή πλασματικού. Η μυθιστορηματική βιογραφία μετασχηματίζεται σε ένα είδος «σοβαρού» πανεπιστημιακού μυθιστορήματος (σε αντιδιαστολή με τον σατιρικό τόνο του είδους, έτσι όπως έχει επικρατήσει τουλάχιστον στον αγγλοαμερικάνικο χώρο) που είναι ταυτόχρονα και ένα είδος πορτραίτου του καλλιτέχνη-μαθηματικού (για παράδειγμα «Ο θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλντμπαχ», «Αυτοβιογραφία», «Ο καθρέφτης και το πρίσμα», και εν μέρει το *Logicomix*).
- Τη μαθηματική λογοτεχνία μυστηρίου, που περιλαμβάνει έργα με αστυνομική πλοκή ή έργα που εστιάζονται στην επίλυση κάποιου μαθηματικού γρίφου (για παράδειγμα Πυθαγόρεια εγκλήματα).
- Τέλος, πιθανόν μπορούμε να μιλήσουμε και για μαθηματικό ιστορικό μυθιστόρημα, που δίνει έμφαση σε συγκεκριμένη ιστορική εποχή, καταγράφοντας τα μαθηματικά της επιτεύγματα (τα Πυθαγόρεια εγκλήματα και το *Logicomix* μπορούν εν μέρει να ενταχθούν σε αυτή την κατηγορία.).

Υπογραμμίζει πάντως ότι ανοιχτό παραμένει το ερώτημα, εάν τα προαναφερθέντα «κοινά» χαρακτηριστικά, που θα μπορούσε κανείς να εντοπίσει σε έργα Μαθηματικής Λογοτεχνίας που έχουν γραφεί από Έλληνες συγγραφείς, απαντώνται και σε κείμενα ξένων ομοτέχνων τους και ότι μια συγκριτική έρευνα θα αποδώσει ενδιαφέροντα αποτελέσματα.

Η πληθώρα των εκδόσεων με έργα Μαθηματικής Λογοτεχνίας, τα οποία συχνά γίνονται δεκτά, όπως έχει ήδη αναφερθεί, με μεγάλη επιτυχία από το αναγνωστικό κοινό αναμφίβολα υπογραμμίζει την ύπαρξη μιας μεγάλης ευκαιρίας και ταυτόχρονα αποτελεί μια πρόκληση. Η εκπαίδευση, έχοντας πολλά να διδαχθεί από την επιτυχία της Μαθηματικής Λογοτεχνίας, καλείται να υιοθετήσει διαφορετικές μεθόδους ώστε να καταφέρει να αντικαταστήσει το μονότονο «θεώρημα – απόδειξη – ασκήσεις» από μια διδασκαλία που θα είναι πιο ευέλικτη, πιο κοντά στην εμπειρία και τα πραγματικά προβλήματα. Καλείται, επίσης, να υιοθετήσει την πολλαπλή προσέγγιση, αναγνωρίζοντας ότι όλοι οι μαθητές δε συλλαμβάνουν τη γνώση με τον ίδιο τρόπο, να εντάξει αυτά που διδάσκει στο ιστορικό τους πλαίσιο, να πάψει να χρησιμοποιεί τα Μαθηματικά ως μέσο κοινωνικής επιλογής και να τα θεωρήσει κυρίως ως φορέα παιδείας και αγωγής. Προς την κατεύθυνση αυτή και προκειμένου να σχεδιαστούν κάποιες προτάσεις για διδακτική αξιοποίηση επιλέχθηκε το βιβλίο του Μιχαηλίδη (2009) «Αχμές, ο γιος του φεγγαριού», το οποίο θα παρουσιάσουμε στην ενότητα που ακολουθεί.

3.4. Αχμές, ο γιος του φεγγαριού.

Ο συγγραφέας του βιβλίου Τεύκρος Μιχαηλίδης γεννήθηκε στην Αθήνα. Είναι διδάκτωρ των μαθηματικών του Πανεπιστημίου Pierre et Marie Curie και από το 1981 διδάσκει Μαθηματικά στη Μέση Εκπαίδευση. Στις εργασίες του περιλαμβάνονται εκπαιδευτικά βιβλία Μαθηματικών και Πληροφορικής, άρθρα σχετικά με τη Διδακτική των Μαθηματικών, την εισαγωγή των υπολογιστών στην εκπαίδευση, την ιστορία των θετικών επιστημών, καθώς και εκλαϊκευτικά κείμενα σχετικά με τα Μαθηματικά. Έχει μεταφράσει, από τα γαλλικά και τα αγγλικά, είκοσι δύο βιβλία με θέματα μαθηματικά, τις θετικές επιστήμες και την ιστορία τους. Είναι ιδρυτικό μέλος της επιστημονικής Ομάδας Θαλής + Φίλοι που ενδιαφέρεται για το γεφύρωμα του χάσματος ανάμεσα στα Μαθηματικά και τον πολιτισμό.

Στο επίμετρο ο συγγραφέας αναρωτιέται για το βιβλίο του αν θα μπορούσε να χαρακτηριστεί «ιστορικό μυθιστόρημα», «μαθηματική λογοτεχνία», «μυθιστορηματική βιογραφία» ή αν θα μπορούσε να ενταχθεί σε οποιαδήποτε άλλη κατηγορία, για να δώσει την απάντηση ότι δική του πρόθεση ήταν μελετώντας τον πάπυρο του Αχμές να συνθέσει με τη φαντασία του μια πιθανή εκδοχή της ζωής του ανθρώπου που τον έγραψε.

Επιπλέον, σε συνάντηση που πραγματοποιήσαμε μαζί του στα Χανιά, ο Μιχαηλίδης (2019, ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ) αναφέρει ότι το συγκεκριμένο βιβλίο δεν εντάσσεται, όπως άλλα βιβλία του, στην κατηγορία που ο ίδιος ονομάζει προσχηματική μυθοπλασία, καθώς δεν περιλαμβάνει έναν προσχηματικό και μάλλον χαλαρό μύθο ως χαλί για να διδαχθούν ορισμένα πράγματα ούτε και γράφτηκε με διδακτικούς σκοπούς. Στο εν λόγω βιβλίο ο συγγραφέας καταθέτει ότι ήθελε να ζήσει μια περιπέτεια στην Αίγυπτο του 1.700 π.Χ. και τα Μαθηματικά ήταν αυτό που τον τραβούσε μέσα από έναν πάπυρο, που είχε γραφτεί από κάποιον για τον οποίο εκτός από την ημερομηνία γέννησής του (περίπου) και το γραφικό του χαρακτήρα δεν είναι γνωστό τίποτα άλλο. Ακόμη ότι ήθελε, ταξιδεύοντας στην Αίγυπτο, να δει τι ζωή μπορεί να έζησε ένας άνθρωπος που άφησε στην ανθρωπότητα αυτόν τον πάπυρο με τα 84 λυμένα προβλήματα. Τα Μαθηματικά ήταν αυτά που τον τραβούσαν, αλλά δεν ήταν ο σκοπός του να τα διδάξει. Στην περίπτωση του Αχμές μπορούμε πιθανότατα να μιλήσουμε, σύμφωνα και με όσα παραπάνω αναφέρθηκαν, για ένα μαθηματικό ιστορικό μυθιστόρημα, το οποίο δίνει έμφαση σε συγκεκριμένη ιστορική εποχή, καταγράφοντας τα μαθηματικά της επιτεύγματα. Βεβαίως, το βιβλίο αποδείχθηκε, τελικά, πρόσφορο έδαφος για την ανάπτυξη διδακτικών παρεμβάσεων, με αποτέλεσμα ο συγγραφέας να δηλώνει πολύ χαρούμενος για τη διάσταση αυτή που δεν ήταν στους αρχικούς του σκοπούς.

Παράλληλα με τη διήγηση για τη ζωή του Αχμές μέσα στο βιβλίο προχωράει και η αφήγηση της ιστορίας του Χένρι Ριντ (για το διάστημα 1855-1856), ο οποίος ταξίδεψε στις πυραμίδες και αγόρασε από έναν παλαιοπώλη τον πάπυρο του Αχμές που για τρεις χιλιάδες χρόνια βρισκόταν θαμμένος σ' ένα τάφο του Λούξορ.

Η ιστορία του βιβλίου, λοιπόν, εκτυλίσσεται στην Αίγυπτο το 1600 π.Χ., σε μια εποχή που η χώρα ήταν χωρισμένη στο βασίλειο της Άνω Αιγύπτου (νότιο και ορεινό) και στο βασίλειο της Κάτω Αιγύπτου (βόρειο και πεδινό). Βασικό τοπογραφικό χαρακτηριστικό της Αιγύπτου, τόσο στην αρχαιότητα όσο και στη σύγχρονη εποχή αποτελεί ο Νείλος ποταμός, ο οποίος υπήρξε πηγή του πολιτισμού της. Υπήρξε όμως και η πηγή της υπόθεσης του βιβλίου που ξεκινά με την εύρεση ενός μωρού στις όχθες του, μέσα σε ένα καλάθι, πλεγμένο από μίσχους παπύρου. Το καλάθι με το μωρό βρήκε ο κυνηγός Πιανκί, που ήταν παντρεμένος με την Ταντινανέφερ. Το ζευγάρι των ερωτευμένων νέων δεν είχαν παιδιά και ποθούσαν πολύ να αποκτήσουν. Για τον λόγο αυτό η ευτυχία τους ήταν απερίγραπτη. Το μωρό είχε ένα μικρό καφετί σημάδι, σαν μισοφέγγαρο, λίγο πάνω από τον αριστερό καρπό του. Αυτό καθόρισε και το όνομά του Αχμές, ο γιος του φεγγαριού.

Οι θετοί γονείς του Αχμές ήταν ο Πιανκί, κυνηγός στην υπηρεσία του Φαραώ, ο οποίος ήταν γόνος οικογένειας με ασιατική προέλευση (Ααμού) και η Ταντινανέφερ, κόρη του άρχοντα Καάπερ, ο οποίος ήταν γόνος παλαιάς αιγυπτιακής οικογένειας αρχιγραφέας του παλατιού και επιθεωρητής των γραφέων του κράτους.

Κάποια μέρα ο μικρός Αχμές στην προσπάθεια του να ξεπεράσει άλλους πέντε κολυμβητές στα πλαίσια ενός παιχνιδιού κινδύνευσε να πνιγεί. Τον έσωσε θέτοντας σε κίνδυνο την ίδια του τη ζωή ένα νεαρό αγόρι, ο Άμανθυς. Έτσι, ο Νείλος, και πάλι, έφερε στη ζωή του Αχμές έναν πολύτιμο φίλο.

Ο Άμανθυς ήταν ένας Κεφτιού. Έτσι ονομάζονταν οι κάτοικοι της Μινωικής Κρήτης. Κουρσάροι λεηλάτησαν το χωριό του και σκότωσαν την οικογένειά του. Είδε με τα μάτια του να δολοφονείται η μητέρα του, ενώ ο ίδιος πιάστηκε αιχμάλωτος για να πουληθεί σαν σκλάβος. Η ικανότητά του, όμως, να κολυμπά εξαιρετικά τον έκανε χρήσιμο στο πλήρωμα των πειρατών, αφού μπορούσε με επιδεξιότητα να ξεμπερδεύει τις άγκυρες του πλοίου. Ωστόσο, ο δολοφόνος της μητέρας του απειλούσε να τον σκοτώσει, αλλά ο Άμανθυς βούτηξε στη θάλασσα κοντά στο Δέλτα του Νείλου και κατάφερε να δραπετεύσει κολυμπώντας. Έτσι βρέθηκε στην Αίγυπτο και προσπαθώντας να γλιτώσει, ανέβαινε την κοίτη του ποταμού με πολύ κόπο. Μετά από πολλές μέρες βρέθηκε μισοπεθαμένος από κάποιους εργάτες ενός υποστατικού του άρχοντα Ιφάρ, όπου τον περιποιήθηκαν και κατάφεραν να τον κρατήσουν στη ζωή. Για αυτόν ενδιαφέρθηκε κυρίως ο Πανέμπ, αρχιεπιστάτης στα χωράφια του Ιφάρ, που υιοθέτησε τον Άμανθυ επίσημα.

Η μοίρα ένωσε τα δυο παιδιά, τον Αχμές και τον Άμανθυ. Ο πρώτος υιοθετημένος από τον Πιανκί και την Ταντινανέφερ, δεν γνώριζε τίποτα για τη βιολογική οικογένειά του και ζούσε ευτυχισμένος, απολαμβάνοντας την αγάπη των θετών γονιών του. Ο δεύτερος υιοθετημένος από τον Πανέμπ, γνώριζε την καταγωγή του, ήταν Κεφτιού. Είδε να καταστρέφεται το χωριό του από τους πειρατές και να δολοφονείται η βιολογική του μητέρα. Ένιωθε ευγνωμοσύνη και αγάπη για τον Πανέμπ, αλλά δεν μπορούσε και δεν ήθελε να ξεχάσει τις φρικαλεότητες που είχε ζήσει.

Η Ταντινανέφερ, θέλοντας να ευχαριστήσει τον Άμανθυ και να ανταποδώσει τη σωτηρία του γιου της, πρότεινε να τον κρατήσει μαζί της, όσο ο Πανέμπ θα έλειπε στα κτήματα του άρχοντα Ιφάρ, παρέχοντάς του τη μόρφωση που θα παρείχε και στον γιο της. Έτσι ο Αχμές και ο Άμανθυς μεγάλωναν σαν αδέλφια και φοιτούσαν στο σχολείο του Ονέχ, τη σχολή γραφέων στη Χατβαρέτ.

Εκεί φάνηκε από την αρχή η αγάπη των δυο παιδιών για τους αριθμούς. Οι δυο φίλοι μάθαιναν την ιερατική και ιερογλυφική γραφή, όμως περισσότερο τους συγκινούσαν και τους κέντριζαν το ενδιαφέρον οι αριθμοί και οι μονάδες μέτρησης. Έλυναν εύκολα διάφορα προβλήματα που τους έδινε ο Ονέχ και προσπαθούσαν να βρουν απάντηση σε διάφορα ερωτήματα και σκέψεις που τους απασχολούσαν, όπως:

- Πόσα σπυριά κριθάρι είναι στοιβαγμένα στη μεγάλη αποθήκη του παλατιού;
- Πόσους χουρμάδες έχουν όλες μαζί οι χουρμαδιές της πόλης;
- Πόσα άστρα έχει ο ουρανός;
- Τι σημαίνει «αιώνια»;
- Όσα χρόνια κι αν μπορείς να φανταστείς υπάρχουν κι άλλα.
- Οι σπόροι μιας αποθήκης, τ΄ αστέρια του ουρανού, οι κόκκοι της άμμου έχουν έναν αριθμό που δεν μπορούν ίσως να μετρηθούν όμως υπάρχουν ανεξάρτητα από αυτό.
- Για να προχωρήσει η ανακάλυψη της αλήθειας χρειάζεται να υπάρχει κάποιος που να μην αρκείται στην αλήθεια που γνωρίζει.

Αργότερα, όταν τα νερά του Νείλου είχαν αποτραβηχτεί, οι δύο φίλοι και ο Πανέμπ επισκέφτηκαν το υποστατικό του Ιφάρ, όπου οι αρπεδονάπτες έκαναν τις μετρήσεις για τον επαναπροσδιορισμό των ορίων των χωραφιών. Εκεί ο επόπτης Κεχεπέρα τους έθεσε προβλήματα υπολογισμού εμβαδών και όγκων, τους δίδαξε τη μέθοδο πολλαπλασιασμού δύο αριθμών, τους έβαλε μπροστά σε προβλήματα μοιρασιάς. Ένα βράδυ ξενύχτησαν προσπαθώντας να βρουν τρόπο για τον υπολογισμό της επιφάνειας ενός κύκλου και πλησίασαν αρκετά στη λύση.

Στο υποστατικό του Ιφάρ είχαν την ευκαιρία να περιηγηθούν στις βιοτεχνίες του. Επισκέφτηκαν ένα μικρό ναυπηγείο και ένα εργαστήριο καλαθοποιίας. Εντυπωσιάστηκαν από την πλήρη εκμετάλλευση και την ποικιλία των χρήσεων του παπύρου, του εμβληματικού φυτού της Κάτω Αιγύπτου, παρακολουθώντας τη συγκομιδή και την επεξεργασία του για την κατασκευή παπύρων γραφής.

Τα χρόνια περνούσαν και οι δύο φίλοι βρέθηκαν στην Ινέμπ Χέτζ, στη μεγάλη σχολή γραφέων του ναού του Φθα, όπου ο Μέγας Αρχιερέας Τζάου αμέσως διέκρινε το ταλέντο τους στους αριθμούς και στα σχήματα. Το μυαλό του Αχμές αναζητούσε συνεχώς λύσεις σε προβλήματα που κανείς δεν είχε σκεφθεί και, όπως συμβαίνει με τα αντισυμβατικά νεαρά μυαλά, που διαθέτουν κάποιο είδος ευφυΐας, ο Αχμές δε δεχόταν άκριτα ό,τι του δίδασκε ο Αρχιερέας Τζάου. Αυτός καθημερινά τους έθετε δύσκολα προβλήματα ως «ανταμοιβή» επειδή ολοκλήρωναν το βασικό πρόγραμμα της ημέρας. Έτσι αντιμετώπιζε την ανεξάρτητη και ατίθαση φύση τους, δίνοντας ταυτόχρονα και διέξοδο στο πηγαίο ταλέντο τους. Ο Αχμές έλυνε με ευκολία διάφορα προβλήματα, χρησιμοποιώντας μια δική του πρωτοποριακή μέθοδο, τη μέθοδο του «βολικού αριθμού» και ζητούσε να βρει μια γενική μέθοδο για να αντιμετωπίζει παρόμοια προβλήματα, ενώ ο Άμανθυς ζητούσε μια ... απόδειξη ότι η γενική λύση που έβρισκε ο φίλος του με τις μεθόδους του είναι ορθή. Στο ναό του Φθα ο Αχμές και ο Άμανθυς αφοσιώθηκαν στις σπουδές τους και τα Μαθηματικά. Μια περιπέτεια όμως στη νυχτερινή ζωή της Ινέμπ Χέτζ παραλίγο να στοιχίσει την αποβολή του Αχμές από το ναό του Φθα. Ο Άμανθυς από την άλλη έχασε τον Πανέμπ και άρχισε να νιώθει ξένος στη χώρα.

Οι δύο νέοι, όταν αποφοίτησαν από τη μεγάλη σχολή γραφέων του ναού του Φθα, επισκέφτηκαν τη νεκρόπολη Σακκάρα και βρέθηκαν μπροστά στην πυραμίδα του Ντζοζέρ. Μέτρησαν το ύψος της σκαρφαλώνοντας στην κορυφή της, μετρώντας το ύψος καθεμιάς βαθμίδας και προσθέτοντας τα ύψη των έξι βαθμίδων. Αργότερα στην Γκίζα, όταν αντίκρυσαν τις πυραμίδες των Χουφού, Χαφρέ και Μεκαουρέ (Χέοψ, Χεφρήνος και Μυκερίνος), ο Αχμές κοίταξε τον Άμανθυ απελπισμένος και αναρωτήθηκε με ποιον τρόπο θα μπορούσαν να μετρήσουν το ύψος τους.

Σε μια πρώτη προσπάθεια ο Αχμές σκεφτόταν ότι αν ήξεραν το «σεκέτ» της πυραμίδας, δηλαδή την κλίση της πλαϊνής πλευράς της, θα μπορούσαν να υπολογίσουν και το ύψος της. Όμως αρχεία με τέτοιες πληροφορίες δεν σώζονταν εκείνη την εποχή.

Σε μια δεύτερη προσπάθεια μαζί με τον Άμανθυ σκέφτονταν ότι αν μετρούσαν το ύψος από την πλαϊνή τριγωνική πλευρά της πυραμίδας, τότε θα σχηματιζόταν ένα ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου γνωστές θα ήταν δύο του πλευρές (το ύψος της πλαϊνής τριγωνικής πλευράς και το μισό της πλευράς από τη βάση της πυραμίδας) και τότε θα μπορούσαν να υπολογίσουν και την τρίτη του πλευρά, δηλαδή το ύψος της πυραμίδας. Απάντηση σε αυτό το πρόβλημα όπως και στο πρόβλημα υπολογισμού του ύψους της πυραμίδας ο Αχμές δεν κατάφερε να δώσει ποτέ.

Με την επιστροφή στη Χατβαρέτ ο Αχμές έγινε γραφέας στο παλάτι του Φαραώ Α' Ούσερ Ρε, υπεύθυνος στο τμήμα των ανταλλαγών για την ισοτιμία των αγαθών. Ο Άμανθυς πήρε τη θέση του Πανέμπ ως επιστάτης στην περιουσία του άρχοντα Ιφάρ. Εκεί, εποπτεύοντας την κατασκευή μιας έπαυλης για τον γιο του Ιφάρ γνώρισε μια συντεχνία μαστόρων από τη χώρα των Κεφτιού, τη χώρα της καταγωγής του.

Αναπάντεχα, όμως, έφυγαν από τη ζωή οι θετοί γονείς του Αχμές. Πρώτα ο Πιανκί και μετά η Ταντινανέφερ. Την ημέρα της κηδείας της Ταντινανέφερ, ο Φαραώ Α' Ούσερ Ρε κάλεσε στο παλάτι τον Αχμές. Εκεί ο Αχμές γνώρισε την τετράχρονη κόρη του Φαραώ, Χερίτ, η οποία είχε στον καρπό το ίδιο σημάδι με το δικό του. Με τη βοήθεια της Χερίτ έμαθε για τις διαθέσεις του Φαραώ να ξεκινήσει πόλεμο με το Βασίλειο της Άνω Αιγύπτου. Ο Φαραώ όρισε τον Αχμές αρχιερέα στο ναό του Φθα μετά το θάνατο του Τζάου. Στη βιβλιοθήκη του ναού φυλάσσονταν κύλινδροι με παπύρους ηλικίας χιλίων χρόνων και πάνω, τους οποίους ο Φαραώ ήθελε να διασώσει. Ανέθεσε, λοιπόν, στον Αχμές να μελετήσει όλους τους παπύρους της βιβλιοθήκης, να φροντίσει για την αντιγραφή των σημαντικότερων και να διανείμει τα αντίγραφα στους ναούς της χώρας.

Αναπάντεχα, επίσης, σε μια συνάντησή του με τη βασίλισσα ο Αχμές έμαθε για τους βιολογικούς του γονείς. Δύο ερωτευμένους νέους, τον Ιγιπτά, που ήταν γραφέας στην υπηρεσία του Φαραώ και την πριγκίπισσα Τάνι. Ο Ιγιπτά είχε χάσει τη ζωή του κάτω από περίεργες συνθήκες στο κυνήγι και μετά το θάνατό του η Ιγιπτά, παντρεύτηκε, κατά το έθιμο, τον αδερφό της Απέπι, ο οποίος έγινε ο Φαραώ Α' Ούσερ Ρε. Ανακάλυψε τον γιο της τον Αχμές, που της είχαν πει ότι πέθανε στη γέννα, από το σημάδι που είχε στον καρπό του καθώς ένα ίδιο είχε και εκείνη.

Ακολουθώντας τη βασιλική εντολή ο Αχμές ξεκίνησε τη μεθοδική εξέταση και αξιολόγηση των παπύρων που βρίσκονταν στη βιβλιοθήκη του ναού με σκοπό τη συντήρηση και την αναπαραγωγή των σημαντικότερων από αυτούς. Μιάμιση χιλιετία αιγυπτιακού πολιτισμού ξεδιπλωνόταν μπροστά από τα μάτια του. Ο καημός του ήταν η σχεδόν παντελής απουσία παπύρων που σχετίζονταν με τα Μαθηματικά. Μόνο ένας πάπυρος 250 ετών βρέθηκε με πρακτικά Μαθηματικά εργαλεία και δεκάδες προβλήματα, τα οποία όμως δεν έδιναν καμία απάντηση στα ερωτήματα που βασάνιζαν τον Αχμές. Μάταια αναζητούσε κάποιο πρόβλημα που να υπολογίζει το ύψος ή τον όγκο μιας πυραμίδας ή το εμβαδόν ενός κύκλου. Γρήγορα κατάλαβε ότι αυτός ο πάπυρος περιείχε λιγότερα από όσα γνώριζε ο ίδιος. Έτσι πήρε την απόφαση να συντάξει έναν πάπυρο που να περιλαμβάνει όλες τις διαθέσιμες γνώσεις αριθμητικής και γεωμετρίας, έναν πάπυρο που να αναδεικνύει όλο τον πλούτο της αιγυπτιακής μαθηματικής σκέψης.

Τρία χρόνια διήρκεσε η συγγραφή αυτού του έργου. Ένας πάπυρος με ογδόντα τέσσερα λυμένα προβλήματα που ξεκινούσε με έξι προβλήματα μοιρασιάς, συνέχιζε με προβλήματα εξισώσεων, στη συνέχεια ακολουθούσαν προβλήματα όγκων, μετά προβλήματα εμβαδών και προβλήματα που αφορούσαν στο σεκέτ (κλίση) μιας πυραμίδας. Κλείνοντας ο πάπυρος περιλάμβανε μια σειρά από συνδυαστικά προβλήματα.

Δύο θέσεις στον πάπυρο παρέμειναν κενές. Στο πρόβλημα 47και στο πρόβλημα 61 ο Αχμές άφησε χώρο αντίστοιχα για το πρόβλημα υπολογισμού του όγκου της πυραμίδας και τη λύση του και για το πρόβλημα υπολογισμού του ύψους της πυραμίδας, γνωρίζοντας τη βάση της και το ύψος του τριγώνου της κεκλιμένης έδρας της.

Όσο ο Αχμές ήταν αφοσιωμένος στο έργο του οι εξελίξεις στα πολιτικά και στρατιωτικά έτρεχαν. Ο Φαραώ Α' Ούσερ Ρε του Κάτω Βασιλείου κήρυξε τον πόλεμο στο Άνω Βασίλειο, νίκησε και υπέγραψε ειρήνη με την μητέρα του νέου Φαραώ του Άνω Βασιλείου, Αχοτέπ. Ο Σεκενέρα Τάε, Φαραώ του Ανω Βασιλείου, σκοτώθηκε στη μάχη και τον διαδέχθηκε ο γιός του Καμ'ός που οργάνωσε μια άστοχη εκστρατεία ενάντια στο Άνω Βασίλειο. Λίγο αργότερα ο Καμ'ός πέθανε και στο θρόνο ανέβηκε ο δεκάχρονος αδερφός του Αχμές.

Κάποια μέρα ένας «νεαρός», που ήθελε να γίνει γραφέας επισκέφτηκε τον Αχμές στο ναό του Φθα. Είχε ένα σημάδι στο χέρι ίδιο με το δικό του. Ήταν η Χερίτ, η ετεροθαλής αδερφή του, που του ζήτησε να την βοηθήσει να ξεφύγει από τον πατέρα της. Ο Φαραώ Α' Ούσερ Ρε προξένευε την κόρη του με τον δεκάχρονο Φαραώ του Κάτω Βασιλείου «Αχμές» προκειμένου να εξασφαλίσει την ειρήνη ανάμεσα στα δύο Βασίλεια. Ο Αχμές με τη βοήθεια του Άμανθυ κατάφερε να φυγαδεύσει την Χερίτ στη χώρα των Κεφτιού (τόπο καταγωγής του Άμανθυ), όπου αργότερα αναγκάστηκε να καταφύγει και ο ίδιος ο Άμανθυς, αφού είχε καταφέρει να εκδικηθεί τον βασανιστή των παιδικών του χρόνων.

Πολλά χρόνια αργότερα ο Άμανθυς από τη χώρα των Κεφτιού θα του περιέγραφε σε ένα γράμμα μια μέθοδο με την οποία, όταν δίνονται δύο πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου μπορεί κάποιος να υπολογίσει την τρίτη πλευρά του. Τη μέθοδο αυτή την είχε γνωρίσει από έναν Βαβυλώνιο έμπορο. Του έδωσε έτσι μια πιθανή λύση στον υπολογισμό του ύψους της πυραμίδας.

Τα χρόνια περνούσαν και οι εξελίξεις έτρεχαν. Ο πρίγκιπας της Άνω Αιγύπτου οργάνωσε εκστρατεία εναντίον της Κάτω Αιγύπτου. Πολιόρκησε τη Χατβαρέτ και , κατέλαβε την Ινέμπ Χέτζ. Ο Αχμές με βασιλική εντολή βρέθηκε στον Νότο και ίδρυσε σχολή γραφέων στη Νογουέ. Τα άλυτα προβλήματα όμως στον πάπυρο παρέμεναν. Αυτά τα προβλήματα κι αν είχαν κάποια λύση πάντως δεν θα την έβρισκε αυτός. Δεν ήταν αυτός που θα έδινε εξήγηση στο άπιαστο, το απρόσιτο, αυτό που οι μετέπειτα γενιές αποκάλεσαν άπειρο. Εξάλλου στους αιγυπτιακούς μύθους πάντα κάτι λείπει.

Το βιβλίο αυτό θα μπορούσε κάλλιστα να είναι ένα απόσπασμα από βιβλίο αιγυπτιακής μυθολογίας, αλλά δεν είναι. Ένα αρχαιολογικό εύρημα, ένας πάπυρος θαμμένος σ' έναν τάφο στο Λούξορ, τις αρχαίες Θήβες, με ογδόντα τέσσερα λυμένα προβλήματα, ένα όνομα, μία ημερομηνία. Το πρώτο ενυπόγραφο μαθηματικό κείμενο στην ιστορία της ανθρωπότητας όπου συνοψίζονται οι μαθηματικές γνώσεις των ανθρώπων που έχτισαν τις πυραμίδες και, κατά τον Ηρόδοτο, επινόησαν τη Γεωμετρία. Συγγραφέας του ο Αχμές, που μας παίρνει μαζί του σε μια περιήγηση στη χώρα των Φαραώ, μας οδηγεί στην Άβαρι, το κοσμοπολίτικο σταυροδρόμι ανάμεσα σε Ασία και Αφρική, μας σεργιανάει στη Μέμφιδα, ονομαστή για τους ναούς της αλλά και για τα κακόφημα καπηλειά της. Μας ξεναγεί στο κατάφυτο από παπύρους Δέλτα του Νείλου, μας κερνάει μαύρη μπίρα από τη χώρα του Κους και γλυκόπιοτο σεντέχ, κρασί από ρόδι. Παρέα του, μασουλώντας μελωμένα σύκα και χουρμάδες, ακούμε τους μύθους και τα παραμύθια της Αιγύπτου, όπως τα αφηγούνταν οι κατασκευαστές των πυραμίδων τις ώρες της ανάπαυσης. Μέσα από τη ζωή του Αχμές βιώνουμε κι εμείς την πολυτάραχη Δεύτερη Ενδιάμεση Περίοδο, τις διαμάχες, τις ίντριγκες και τους πολέμους ανάμεσα στους ηγεμόνες των δύο βασιλείων, της Άνω και της Κάτω Αιγύπτου. Πάνω από όλα όμως έχουμε την ευκαιρία να μοιραστούμε τις απορίες του, την αγωνία του να φτάσει σε απαντήσεις, αλλά και να σκεφτούμε μαζί του όχι μόνο τα μαθηματικά προβλήματα αλλά και όσα προβλήματα ο καθένας κουβαλά και αναζητά τη λύση τους.

Από τα λεγόμενα του Μιχαηλίδη (2019, ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ), θα άξιζε να σημειώσουμε ότι αφορμή για την ενασχόλησή του με τα αρχαία αιγυπτιακά μαθηματικά αποτέλεσε η πρόκληση να μπορέσει να δώσει ζωή στον συγκεκριμένο πάπυρο, ο οποίος στην ουσία έτσι όπως είναι δομημένος, με τα παραδείγματά του, με τον τρόπο που αυτά είναι χτισμένα το ένα μετά το άλλο, ομαδοποιημένα, με θεματικές και νοηματικές ενότητες, αποτελεί ένα έργο τέχνης. «Αυτό το έργο τέχνης κάποιος το έγραψε και εκτός που το έγραψε είχε και μια ζωή». Ο Μιχαηλίδης (2019, ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ) καταθέτει, λοιπόν, ότι είχε μια καθαρά λογοτεχνική πρόκληση για να ασχοληθεί με τον πάπυρο και τη ζωή του Αχμές, ο οποίος τον είχε γράψει. Μια λογοτεχνική πρόκληση, όμως, που είχε άμεση σχέση με θέματα που ο ίδιος γνωρίζει πολύ καλά, δηλαδή τα Μαθηματικά.

Στην περίπτωση αυτή θα μπορούσαμε να κάνουμε λόγο για απόδειξη του θεωρήματος ότι η Ιστορία των Μαθηματικών και η Λογοτεχνία κάνουν ανθρώπινα τα Μαθηματικά. Διαβάζοντας, διαπιστώνει κανείς πως το βιβλίο θα μπορούσε να είναι (μεταξύ άλλων) ένα αναλυτικό πρόγραμμα μαθητείας στα αιγυπτιακά (και όχι μόνο) μαθηματικά. Μέσα σε αυτό εντοπίζονται σχολικές και οικογενειακές πρακτικές βασικής εκπαίδευσης από την εποχή εκείνη. Η πρώτη μέρα φοίτησης στο σχολείο του Ονέχ γίνεται η αφορμή για να παρουσιαστούν τα σύνεργα του γραφέα και λίγο παρακάτω το πρώτο μάθημα Αριθμητικής για να παρουσιαστεί το αιγυπτιακό σύστημα γραφής των ακέραιων αριθμών. Οι συναντήσεις με τον παππού Καάπερ συνδέονται με την ιερογλυφική και την ιερατική γραφή αλλά και με τη γραφή των μεγάλων αριθμών σε ιστορικά κείμενα με αιχμαλώτους και λάφυρα. Η άφιξη των ιβίδων και η εποχή των πλημμυρών φέρνουν στο προσκήνιο τους αρπεδονάπτες και τις αιγυπτιακές μονάδες μέτρησης στο σχολείο του Ονέχ.

Προχωρώντας την ανάγνωση θα μπορούσαμε ακόμη να σημειώσουμε ενδεικτικά:

α. Εκπαιδευτικές εκδρομές και μαθητεία.

Ταξίδι στο Νείλο με τη βάρκα του επόπτη Κεχεπέρα:

- Υπολογισμός του εμβαδού ορθογώνιων χωραφιών.
- Η τεχνική του αιγυπτιακού πολλαπλασιασμού.
- Πρώτη νύξη για την έννοια της απόδειξης.
- Το εμβαδόν του κύκλου.

Οριοθέτηση χωραφιών με το συνεργείο του Κεχεπέρα:

- Προβλήματα διανομής ψωμιού με χρήση αιγυπτιακών κλασμάτων.
- Υπολογισμός του όγκου μιας παραλληλεπίπεδης και μιας κυλινδρικής σιταποθήκης.
- Ένας άλλος τρόπος για το εμβαδόν του κύκλου.
- Δεύτερη νύξη για την έννοια της απόδειξης.

Αφήγηση της ιστορίας για το μάτι του Ώρου από τη γριά οικονόμο Κιπά και τον Κεχεπέρα:

- Ιερογλυφική και ιερατική γραφή των αιγυπτιακών κλασμάτων.
- Μια νύξη για τη χρήση ενιαίας μονάδας μέτρησης και των υποδιαιρέσεων της.
- Πρώτη νύξη για την έννοια του αθροίσματος άπειρων κλασμάτων που σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο.

β. Ανώτερη επαγγελματική εκπαίδευση.

Προφορικές εξετάσεις εισαγωγής στη σχολή του Ναού του Φθα:

- Επίλυση αριθμητικών προβλημάτων με τη μέθοδο της «αυθαίρετης παραδοχής» (regula falsi).
- Τρίτη νύξη για την έννοια της απόδειξης.
- Μελέτη στη σχολή του Ναού του Φθα:
- Αριθμητικά προβλήματα με διανομές μεριδίων που σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο.
- Αναζήτηση μιας γενικής μεθόδου.

Μια ενδιαφέρουσα συζήτηση των μαθητών της σχολής με τον αρχιερέα Τζάου:

- Η επεξηγηματική λειτουργία των μύθων για τη δημιουργία του κόσμου και τη μέτρηση του χρόνου.
- Η αμφισβήτηση των μύθων και η αναζήτηση μιας ορθολογικής ερμηνείας.

Ένα ταξίδι των αποφοίτων στις Πυραμίδες με τον βασιλικό γιατρό Ιντέφ:

- Το ανοικτό πρόβλημα μέτρησης του ύψους και του όγκου των Πυραμίδων.
- Ο τεχνικός όρος «σεκέτ» (συνεφαπτομένη) για τον υπολογισμό της κλίσης.
- Μια ιδέα για τη μέτρηση του όγκου κάθε πυραμίδας με κατάτμηση σε απειροστές βαθμίδες.

γ. Μαθηματικά στο χώρο εργασίας.

Ανάληψη καθηκόντων βοηθού του Κεχεπέρα:

- Το πρόβλημα καθορισμού της ισοτιμίας μεταξύ διαφορετικών προϊόντων.
- Ο τεχνικός όρος «πεζού» (λόγος) ως βάση για τον υπολογισμό της ισοτιμίας.

Διαδοχή του αρχιερέα Τζάου στο Ναό του Φθα:

- Αναθεώρηση του προγράμματος της σχολής.
- Επίλυση προβλήματος και αριθμητικός λογισμός.
- Διαχωρισμός της μυθολογίας από τη μελέτη των φαινομένων.
- Σύνταξη παπύρου με όλες τις διαθέσιμες γνώσεις αριθμητικής και γεωμετρίας.
- Ανοικτά προβλήματα και Πυθαγόρειο θεώρημα

Ο λόγος που το συγκεκριμένο βιβλίο επιλέχθηκε στην παρούσα εργασία είναι ότι προσφέρει κατάλληλο υλικό για τη μελέτη της ιστορικής εξέλιξης των αρχαίων αιγυπτιακών μαθηματικών και τη σύνδεσή τους με τις σύγχρονες σχολικές πρακτικές, με στόχο τον σχεδιασμό προτάσεων για τη διδακτική αξιοποίηση ενός λογοτεχνικού έργου, το οποίο στηρίζεται μυθοπλαστικά σε στοιχεία αυτής της εξέλιξης. Η περίπτωση του Αχμές έγινε αντικείμενο λογοτεχνικής μυθοπλασίας, η οποία στηρίχθηκε στη γνώση της ιστορικής εξέλιξης των αρχαίων αιγυπτιακών μαθηματικών και δημιουργεί ένα πλαίσιο κατάλληλο για να διερευνηθούν οι δυνατότητες και οι περιορισμοί της διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

4. Αξιοποιώντας τη Μαθηματική Λογοτεχνία και την Ιστορία των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη.

Η ανάγνωση και αφήγηση ιστοριών βοηθά τους μαθητές να ανακαλύψουν και να εκτιμήσουν πλευρές των Μαθηματικών που συμβάλουν στην ιστορία και τον πολιτισμό της ανθρωπότητας. Για το λόγο αυτό έχει αναπτυχθεί έντονο ενδιαφέρον για τη Μαθηματική Λογοτεχνία, καθώς η χρήση της δεν υποκαθιστά τη διδασκαλία των Μαθηματικών, αλλά την υποστηρίζει και την εμπλουτίζει. Επιπλέον μέσα από τα Προγράμματα Σπουδών για τα Μαθηματικά εισάγονται στη Μαθηματική Εκπαίδευση δύο βασικές καινοτομίες, η διαθεματική προσέγγιση και η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών, ώστε εκπαιδευτικοί και μαθητές να ασχοληθούν με ουσιαστικές διαστάσεις της μάθησης των Μαθηματικών και να δοκιμάσουν νέους τρόπους διδασκαλίας, επικοινωνίας και αλληλεπίδρασης μεταξύ τους.

4.1. Εστιάζοντας στα κίνητρα των μαθητών για τα Μαθηματικά.

Αναμφίβολα η παρακίνηση των μαθητών στη μάθηση έχει βαρύνουσα παιδαγωγική σημασία. Πολλοί ψυχολόγοι και παιδαγωγοί έχουν αναφερθεί στην περιέργεια και το ενδιαφέρον των μαθητών για μάθηση (Καψάλης, 2006; Χρυσαφίδης, 2006; Hannula, 2006a). Η πραγματικότητα, όμως, των σχολικών τάξεων σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης, δείχνει ότι οι προθέσεις και επιδιώξεις του σχολείου από τη μία και οι προβληματισμοί των μαθητών από την άλλη βρίσκονται σε απόσταση μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα είναι, καθώς δεν υπάρχουν σημεία επαφής, οι μαθητές να αποστρέφονται τα Μαθηματικά και να μην έχουν ενδιαφέρον και περιέργεια για αυτά. Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να δώσουν τη λύση ενάντια στη μαθηματική ανορεξία αναζητώντας τρόπους για να παρακινήσουν τους μαθητές στη μάθηση των Μαθηματικών, πράγμα καθόλου εύκολο αν σκεφτεί κανείς ότι κάθε μαθητής παρακινείται με διαφορετικό τρόπο.

Τα μαθησιακά κίνητρα των μαθητών είναι αποτέλεσμα πολλών παραγόντων που αλληλεξαρτώνται (Schunk & Richardson, 2011; Keller, 2010; Viau, 2003; Tardif, 1997). Στις αντίξοες σημερινές συνθήκες οι εκπαιδευτικοί αντιλαμβάνονται πόσο δύσκολο είναι να κρατήσουν υψηλό το ενδιαφέρον των μαθητών για τα Μαθηματικά και να προκαλέσουν τη δραστηριοποίηση της σκέψης τους, ενεργοποιώντας τα κίνητρα μάθησης που αυτοί κομίζουν στη σχολική τάξη. Η ικανοποίηση των μαθητών από τις καινούριες γνώσεις και ικανότητες, το ενδιαφέρον και η χαρούμενη διάθεση για το ίδιο το μάθημα, αλλά και η έκπληξη και η περιέργεια συνδέονται με τη φιλομάθεια. Ο Bruner μίλησε για τρία είδη εσωτερικών κινήτρων τα οποία είναι απαραίτητα για τη διατήρηση και τη συνέχιση της μαθησιακής διαδικασίας: την πνευματική περιέργεια, την ανάγκη της ομαδικής εργασίας και την επάρκεια (ικανότητα των μαθητών να τα καταφέρνουν) (Χατζηγεωργίου, 2012).

Η αποτελεσματικότητα της μάθησης εξαρτάται από κίνητρα που προϋπάρχουν αλλά και από κίνητρα που προσφέρονται και ενισχύονται με την ενεργό δράση. Στη βιβλιογραφία γίνεται λόγος για διάκριση των κινήτρων μάθησης σε εξωγενή και εσωγενή (Καψάλης, 2006; Linnenbrink & Pintrich, 2000). Τα εξωγενή κίνητρα αποτελούν εξωτερικές ενισχύσεις, θετικές και αρνητικές, που ωθούν τον μαθητή στη μάθηση και προέρχονται από κελεύσματα ή αξίες που επιβάλλονται από το κοινωνικό περιβάλλον του. Τέτοια είναι οι αμοιβές και οι ποινές, οι βαθμοί των εξετάσεων, η άμιλλα, το επίπεδο των φιλοδοξιών και η οργάνωση του διδακτικού περιβάλλοντος από τον εκπαιδευτικό. Τα εσωγενή έχουν μεγαλύτερη ένταση, είναι μόνιμα και πηγάζουν από τις εσωτερικές ανάγκες του μαθητή, που τον παρακινούν σε ενεργό εμπλοκή και δέσμευση.

Ο Κόσυβας (2015) σημειώνει ότι οι διαθέσεις και οι στάσεις των μαθητών για τα Μαθηματικά επηρεάζονται από κίνητρα όπως η ανάγκη διαπροσωπικής επικοινωνίας στη διδακτική ομάδα, η αυτοπεποίθηση, η επιμονή, το ατομικό ενδιαφέρον και η πνευματική περιέργεια, κάνοντας στη συνέχεια μια σύντομη αναφορά σε μερικά από αυτά:

α. Το **ενδιαφέρον** αποτελεί τον κινητήρα στη μάθηση των Μαθηματικών. Η σύνδεση των Μαθηματικών με τις εμπειρίες και την καθημερινότητα των μαθητών, η εμπλοκή τους σε προβλήματα που έχουν νόημα και η ουσιαστικότητα του μαθήματος για την επιτυχία στην κοινωνική ζωή είναι ορισμένα από τα κίνητρα που μπορούν να διεγείρουν την επιθυμία των μαθητών για μάθηση. Τις περισσότερες φορές, όμως, οι έμμεσες και μακρινές επιδιώξεις που επιβάλλουν οι ενήλικες προσπερνιούνται από τους οι μαθητές και η μελλοντική ωφέλεια που θα αντλήσουν από μια δραστηριότητα, όταν μεγαλώσουν, φαντάζει αυταπάτη. Αντίθετα η εργασία τούς γοητεύει και ενισχύει την επιμονή τους για την ολοκλήρωσή της, όταν η προσπάθεια που καταβάλλουν γίνεται δεκτή με προθυμία, καθώς δεν εκδηλώνουν κούραση ούτε αισθάνονται πλήξη και βιώνουν προσωπική ευχαρίστηση, όπως στο παιχνίδι.

β. Η **περιέργεια** είναι ένα αξιοσημείωτο εσωγενές κίνητρο που πηγάζει από το ενδιαφέρον και διευκολύνεται από διερευνητικές προσεγγίσεις, αποτελώντας πρωταρχική προϋπόθεση της μάθησης. Είναι μια βαθιά πνευματική τάση που ωθεί τους μαθητές σε καινούριους μαθησιακούς δρόμους και τροφοδοτείται από τη δύναμη του ενδιαφέροντος. Εκδηλώνεται από την επιθυμία και τη διάθεση των μαθητών να γνωρίσουν, να στοχαστούν και να δράσουν. Η έκπληξη, το ξύπνημα της ενεργητικής προσοχής των μαθητών και η εμπλοκή τους σε ερευνητικά ερωτήματα που προκαλούν προβληματισμό και κινητοποιούν περαιτέρω τον εσωτερικό τους κόσμο είναι οι τρεις φάσεις στις οποίες ξετυλίγεται η περιέργεια. Αναζητώντας απαντήσεις με πνεύμα δημιουργικής περιέργειας αυξάνεται η όρεξη των μαθητών για μάθηση και κατανόηση, καθώς μέσω αυτής προετοιμάζεται ο εγκέφαλος για τη μάθηση και βελτιώνεται η μνήμη τους. Σταδιακά οι μαθητές θέτουν εικασίες, τις οποίες επιχειρούν να επαληθεύσουν ή να διαψεύσουν και καταλήγουν στην εξαγωγή συμπερασμάτων, βασιζόμενοι στις παρατηρήσεις και τα ενδιαφέροντά τους, τη μαθηματική περιέργεια και τη δημιουργική αμφιβολία.

γ. Τέλος, μέσα από τις **επικοινωνιακές σχέσεις** στην ομάδα τροφοδοτούνται οι ευκαιρίες για έκφραση, η αυτοεκτίμηση και η αυτοπεποίθηση καθώς και τα κίνητρα διαπροσωπικών σχέσεων. Ένα πολύ σημαντικό κίνητρο αποτελεί η αναγνώριση της ευφυΐας των μελών της ομάδας από τους συνομήλικους (ιδιαίτερα στους εφήβους).

4.2. Αδιαφορία και άγχος στη Μαθηματική Εκπαίδευση.

Η διδασκαλία των Μαθηματικών συχνά παράγει υπερβολική αδιαφορία και αποστροφή από την πλευρά των μαθητών, οι οποίοι, μπροστά στον κίνδυνο να περιθωριοποιηθούν, προσαρμόζουν τη συμπεριφορά τους προς τις γενικές τάσεις που επικρατούν στις μαθητικές ομάδες. Έτσι σπάνια, ακόμα και ικανοί μαθητές, επιμένουν να εμπλέκονται σε καταστάσεις προβληματισμού με αυτοπεποίθηση και πολύ λιγότεροι με ενθουσιασμό και περιέργεια. Συνήθως ενδιαφέρονται για τους καλούς βαθμούς, έχουν εκπαιδευτικές και επαγγελματικές βλέψεις, αλλά δεν εργάζονται με πραγματική ευχαρίστηση.

Σε όλη τη διάρκεια της σχολικής τους πορείας οι μαθητές συμπορεύονται με τα Μαθηματικά, μια συμπόρευση που είναι υποχρεωτική για όλους, χωρίς όμως να φαίνεται αληθινά επιθυμητή για πολλούς μαθητές. Έτσι, ενώ στις μικρότερες τάξεις του Δημοτικού όλοι οι μαθητές εμπλέκονται εθελοντικά στις δραστηριότητες της τάξης και έχουν ζωηρή επιθυμία για την απόκτηση μαθηματικών γνώσεων, με τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο παρατηρείται εξασθένιση της επιμονής τους και μεταβολή των μαθησιακών κινήτρων (Καγκουρά, Σπύρου, Ηλία & Μονογυιού, 2008). Επιπλέον, εμφανίζονται τα πρώτα είδη ανησυχίας και φόβου για τα Μαθηματικά και σταδιακά προχωρώντας στις μεγαλύτερες τάξεις ο ζήλος των μαθητών ατονεί, το αρχικό ενδιαφέρον εξατμίζεται, ενώ η ανία και η αντιπάθειά τους προς τα Μαθηματικά αυξάνεται (Τουμάσης, 1999).

Η κατάσταση αυτή εδραιώνεται συχνά με τη συμβολή των εκπαιδευτικών και των γονέων, ιδιαίτερα αν οι ίδιοι αντιπαθούν τα Μαθηματικά ή βίωσαν αρνητικές εμπειρίες κατά τη διάρκεια της μαθητικής τους πορείας. Στους μαθητές μεταφέρεται η αποθαρρυντική αντίληψη ότι δε θα κατανοήσουν ποτέ τα Μαθηματικά, εφόσον δε διαθέτουν το φυσικό χάρισμα της μαθηματικής ευφυΐας. Το θέμα έχει απασχολήσει την Ψυχολογία και τη Διδακτική των Μαθηματικών και αποδίδεται σε πολλούς παράγοντες(Φιλίππου & Χρίστου, 2001), όπως στον υπερβολικά αφηρημένο χαρακτήρα των Μαθηματικών, στην αποσύνδεσή τους από την καθημερινότητα των μαθητών, στα διογκωμένα Προγράμματα Σπουδών, τις δασκαλοκεντρικές μεθόδους διδασκαλίας, κ.λπ. Οι μαθητές ανάλογα με τον κοινωνικό τους περίγυρο και τις επιδόσεις τους στο σχολείο, έχουν σχηματίσει και εξακολουθούν να πλάθουν και να αναπλάθουν μια μάλλον αρνητική εικόνα για τα Μαθηματικά, καθώς τα θεωρούν δυσνόητη, βαρετή και αφηρημένη επιστήμη, η οποία θα καθορίσει την εκπαιδευτική τους εξέλιξη.

Στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση η εξεταστική σκοπιμότητα κυριαρχεί, με αποτέλεσμα η καθημερινή διδασκαλία των Μαθηματικών να ακολουθεί μια προδιαγεγραμμένη πορεία, χωρίς παρεκκλίσεις και εκπλήξεις, παραμερίζοντας τη χαρά της ανακάλυψης, το μόνο γνήσιο μαθησιακό κίνητρο για τα Μαθηματικά. Η προαναφερθείσα αρνητική εικόνα για τα Μαθηματικά, σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες προσδοκίες, καθορίζει προσωρινά τις πεποιθήσεις και τις στάσεις των μαθητών, αλλά μπορεί να μεταβληθεί ανάλογα με τις εμπειρίες τους στο σχολείο. Μπορεί, δηλαδή, να επιβεβαιωθεί και να ενισχυθεί ή να τροποποιηθεί από τα πραγματικά βιώματα

(Hannula, 2006b). Η πρόκληση που προκύπτει, επομένως, είναι να αναζητηθούν τρόποι με τους οποίους θα ενεργοποιηθεί η επιθυμία των Μαθηματικών σε μαθητές που ίσως ποτέ δεν είχαν την έφεση ή το ενδιαφέρον για αυτά.

Τα τελευταία χρόνια οι ερευνητές της Μαθηματικής Εκπαίδευσης αποδίδουν βαρύνουσα σημασία στο ρόλο του συναισθήματος στη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών (Debellis & Goldin; Hannula, 2006a). Ψυχολογικοί μηχανισμοί άμυνας ή ευνοϊκές διαθέσεις που διαμορφώνονται από τις ρευστές αντιλήψεις των μαθητών για τη σημασία των Μαθηματικών στη ζωή, για το εύρος εφαρμογής τους, για το βαθμό δυσκολίας στη μάθησή τους, για το κύρος και το γόητρό τους αποτελούν συχνά πηγή φόβου ή αγάπης, αποστροφής ή γοητείας. Εξίσου σημαντικοί με τη μάθηση του γνωστικού αντικειμένου θεωρούνται συναισθηματικοί παράγοντες, όπως οι στάσεις και οι συγκινήσεις, οι αυτοεικόνες και οι ετεροεικόνες, τα κίνητρα και οι διαθέσεις, οι προσδοκίες και οι στερεοτυπικές παραδοχές, οι πεποιθήσεις και οι αξίες, που επηρεάζουν τις σχολικές επιδόσεις των μαθητών (Φιλίππου & Χρίστου, 2001). Ειδικότερα ως ελκυστικά παιδαγωγικά τεχνάσματα του εκπαιδευτικού για τη διέγερση του ενδιαφέροντος των μαθητών, την προαγωγή της μάθησης και την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης θεωρούνται η έκπληξη, ο θαυμασμός και η περιέργεια (Legrand, 1969; Johnson, 2007). Η έκπληξη και η περιέργεια ξυπνούν το ενδιαφέρον και την επιθυμία για μαθηματική μάθηση και αποτελούν ένα ευχάριστο ξάφνιασμα με τα γνωρίσματα της χαράς, του θαυμασμού, της διασκέδασης και της ικανοποίησης. Ο πιο πρόσφορος τρόπος για την αντιμετώπιση του άγχους, της σύγχυσης και της φοβίας είναι η δραστηριοποίηση της σκέψης των μαθητών, η οποία για να καρποφορήσει έχει ανάγκη από ένα ήρεμο και ευχάριστο περιβάλλον, απαλλαγμένο από το διαρκές άγχος που παραλύει και «θολώνει» τη σκέψη τους.

4.3. Σύνδεση με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών – Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά.

Τα τελευταία χρόνια η διαθεματική προσέγγιση της σχολικής γνώσης είναι ένα ζήτημα που έχει επανέλθει διεθνώς αλλά και στη χώρα μας. Οι ραγδαίες επιστημονικές και τεχνολογικές αλλαγές κάνουν εντονότερη τη διαρκή ρευστότητα η οποία χαρακτηρίζει τις διάφορες και πολυποίκιλες κοινωνικές, οικονομικές, πολιτικές και πολιτισμικές συνθήκες της εποχής μας. Μέσα σε ένα τέτοιο πλαίσιο θεωρείται αναγκαία η δημιουργία ενός ισχυρού σχολικού, παιδαγωγικού περιβάλλοντος με ενισχυμένες και αποτελεσματικές λειτουργίες μάθησης και κοινωνικοποίησης. Προς την κατεύθυνση αυτή φαίνεται απαραίτητη η προώθηση της δημιουργίας ή και της εξασφάλισης συνθηκών κάτω από τις οποίες οι μαθητές θα μπορούν να αναπτύξουν ικανότητες και δεξιότητες, όπως η κριτική σκέψη, η θετική διάθεση για συνεργασία και αυτενέργεια, η δια βίου μάθηση. Το παραδοσιακό σχολείο με τον γνωσιοκεντρικό χαρακτήρα, την αποσπασματικότητα και την παθητική απόκτηση της γνώσης έρχεται σε αντίθεση με τις σύγχρονες προσεγγίσεις και αρχές της διδακτικής. Από τα παραπάνω προκύπτει ως επιβεβλημένη και απαραίτητη μια διαρκής αναπροσαρμογή των Προγραμμάτων Σπουδών καθώς και της φιλοσοφίας τους.

Προς την κατεύθυνση της ποιοτικής αναβάθμισης της υποχρεωτικής εκπαίδευσης στη χώρα μας, το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο επεξεργάσθηκε το 2001 τη σύνταξη του Διαθεματικού Ενιαίου Πλαισίου Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.), με το οποίο συμπληρώθηκε και εμπλουτίστηκε το Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (Ε.Π.Π.Σ.) του 1997, εισάγοντας και τη διαθεματική προσέγγιση, η οποία μαζί με την προσπάθεια για ένταξη της Ιστορίας των Μαθηματικών αποτελούν δύο από τις σημαντικότερες καινοτομίες που το Δ.Ε.Π.Π.Σ. και το Α.Π.Σ. των Μαθηματικών εισάγει στην μαθηματική εκπαίδευση.

4.3.1. Στοιχεία για τη Διαθεματικότητα στο Δ.Ε.Π.Π.Σ. και Α.Π.Σ. των Μαθηματικών.

Μέσα από το Δ.Ε.Π.Π.Σ. που εφαρμόζεται στη χώρα μας ήδη από το 2006 αναπροσαρμόζονται οι στόχοι και οι μέθοδοι διδασκαλίας. Ταυτόχρονα επιχειρείται να οργανωθεί το περιεχόμενο των διδασκόμενων αυτοτελών μαθημάτων, μέσα από τα συνακόλουθα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών, στη βάση μιας ισόρροπης οριζόντιας και κάθετης κατανομής της διδασκόμενης ύλης, προκειμένου να εξασφαλιστεί ταυτόχρονα η απαιτούμενη «εσωτερική συνοχή» και η «ενιαία οριζόντια ανάπτυξη των περιεχομένων». Έτσι μέσα από τις κατάλληλες προεκτάσεις προωθείται η διασύνδεση των γνωστικών αντικειμένων για τα διδασκόμενα θέματα και η σφαιρική ανάλυση βασικών εννοιών. Επίσης προβάλλεται στη σχολική πράξη η παράμετρος της διαθεματικής προσέγγισης της γνώσης, διαδικασία που ενισχύει τη γενική παιδεία (Αλαχιώτης, 2002; Χιονίδου – Μοσκοφόγλου, 2002).

Ο Σκούρας (2002) αναφέρει ότι στο πλαίσιο του σχολείου η γνώση θα πρέπει να είναι ενιαία, κατανοητή, σχετική και ενδιαφέρουσα, για να δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να σκέφτονται και να πράττουν σχετικά με τις καταστάσεις της καθημερινότητας. Διαφορετικά παραμένει ανενεργό σώμα αποτελούμενο από αποσπασματικές και αδιάφορες πληροφορίες. Με τη διαθεματική προσέγγιση επιχειρείται αλλαγή στον χαρακτήρα του σχολείου (από γνωσιοκεντρικό σε μαθητοκεντρικό) και παράλληλα αλλαγή στον ρόλο του μαθητή (από παθητικός δέκτης σε ενεργό συμμέτοχο). Επομένως για λόγους ψυχολογικούς και διδακτικούς αλλά και για την επιτυχία της διαθεματικής προσέγγισης η γνώση ως μάθηση θα πρέπει:

- να διδάσκεται σε ενιαία μορφή, για να προσφέρει ολιστικές εικόνες της πραγματικότητας.
- να συνδέεται με τις εμπειρίες, τα βιώματα και τα ενδιαφέροντα των μαθητών, έτσι ώστε να αποτελεί κίνητρο για μάθηση.
- να προσεγγίζεται με διερευνητικές μεθόδους, ώστε να εξασφαλίζεται η ενεργητική συμμετοχή των μαθητών στην οικοδόμηση της γνώσης και να προσφέρεται για περαιτέρω συσχετίσεις και γενικεύσεις (Παναγάκος, 2002; Σκούρας, 2002)

Όλα τα Α.Π.Σ. της Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης που εκπονήθηκαν με βάση το Δ.Ε.Π.Π.Σ., και κατά συνέπεια και αυτό των Μαθηματικών, στηρίζονται σε μεγάλο βαθμό στη διαθεματική προσέγγιση. Σύμφωνα με όσα αναφέρονται στο ΦΕΚ 303/τ. Β΄/13-03-2003, η διαθεματική προσέγγιση επιτρέπει στους μαθητές να διαμορφώνουν προσωπική άποψη για θέματα των επιστημών που σχετίζονται μεταξύ τους, καθώς και με ζητήματα της καθημερινής ζωής, συγκροτώντας μια ολιστική αντίληψη της γνώσης, ένα ενιαίο σύνολο γνώσεων και δεξιοτήτων. Επιπλέον, μέσα από μεθόδους ενεργητικής απόκτησης της γνώσης, που εφαρμόζονται κατά τη διδασκαλία κάθε γνωστικού αντικειμένου και εξειδικεύονται σε διαθεματικές δραστηριότητες, για τη διδασκαλία κάθε θεματικής ενότητας, δημιουργείται πρόσφορο έδαφος ώστε οι μαθητές να συνεργάζονται και να αναδεικνύουν κάποιες δεξιότητες, τις οποίες μπορεί να κατέχουν, αλλά μέσα από ένα τυπικό μάθημα, που επικεντρώνεται αυστηρά σε ένα γνωστικό αντικείμενο, δεν δίνεται η δυνατότητα να αναδειχθούν (ΦΕΚ 303/ τ.Β΄/13-03-2003). Η εισαγωγή της διαθεματικής προσέγγισης αναδεικνύεται ως αναγκαία και από τα συμπεράσματα της Μορφολογικής Ψυχολογίας και της Ψυχολογίας του Παιδιού, τα οποία αναφέρονται στην ολιστική λειτουργία της αντίληψης και στο ενιαίο και αδιαίρετο του ψυχικού βίου του μαθητή. Με βάση αυτά ο μαθητής αντιλαμβάνεται την ολότητα και όχι απομονωμένα χαρακτηριστικά (Κολιάδης, 2002).

Σύμφωνα με τις προδιαγραφές που θέτει το πρόγραμμα σπουδών μέρος από τις ώρες που συνολικά (σε ετήσια βάση) προβλέπονται στο εβδομαδιαίο ωρολόγιο πρόγραμμα ανά μάθημα, και σε ποσοστό που μπορεί να φτάνει στο 10% περίπου, είναι δυνατό να διατίθενται από τον διδάσκοντα, με τη στήριξη και των σχολικών βιβλίων, στην ανάπτυξη διαθεματικών δραστηριοτήτων/εργασιών σε μορφή μικρού προγράμματος/σχεδίου εργασίας (project). Ο ρόλος των σχεδίων αυτών είναι να λειτουργούν συμπληρωματικά στην κατανόηση των θεμελιωδών διαθεματικών εννοιών και να συμβάλλουν στην εμβάθυνση σε ιδιαιτέρως ενδιαφέροντα γνωστικά στοιχεία κάθε μαθήματος. Έτσι στο πλαίσιο του ωρολογίου προγράμματος δημιουργείται η συνθήκη για δυναμικό σχεδιασμό και οργάνωση δραστηριοτήτων που προωθούν τη μάθηση μέσα από την έρευνα, τη μελέτη πεδίου και τη συνεργασία, καθώς υποβοηθείται η άσκηση των μαθητών στην υιοθέτηση κριτικής στάσης απέναντι στο προσφερόμενο εκπαιδευτικό και μαθησιακό υλικό, αλλά και στην ανάπτυξη πρωτοβουλιών σχετικά με την αναζήτηση πληροφοριών, την επιλογή και σύνθεσή τους και τελικά στην κατάκτηση των δεξιοτήτων της διερεύνησης, του «μαθαίνω πώς να μαθαίνω» (Καρατζιά-Σταυλιώτη, 2002).

Εστιάζοντας στα Μαθηματικά, η διαθεματικότητα μπορεί να έχει θετική επίδραση (Παναγάκος, 2004):

α. <u>Στην κατανόηση των Μαθηματικών</u>.

Η διαθεματική προσέγγιση της γνώσης αναδεικνύει τις διασυνδέσεις μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων επιστημονικών κλάδων με αποτέλεσμα την καλύτερη αφομοίωση των μαθηματικών εννοιών που προσεγγίζονται από διάφορες οπτικές γωνίες. Έτσι τα Μαθηματικά αποκτούν νόημα και αξία, αφού η χρησιμότητα και η εφαρμογή τους γίνεται καλύτερα κατανοητή. Επιπλέον διευκολύνουν και την κατανόηση θεμάτων και ενοτήτων από άλλους επιστημονικούς κλάδους. Επισημαίνεται βέβαια ότι οι διαθεματικές μαθηματικές έννοιες θα πρέπει να είναι διακριτές και ότι θα πρέπει να αποφεύγονται οι υπεραπλουστεύσεις τους για χάρη της διαθεματικότητας, καθώς αυτό εγκυμονεί κινδύνους για αλλοίωση του νοήματός τους.

β. <u>Στην αλλαγή στάσης για τα Μαθηματικά</u>.

Η διαθεματική προσέγγιση συνεπικουρούμενη και από την ομαδοσυνεργατική διδασκαλία μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν σχέσεις αλληλοβοήθειας και αλληλοϋποστήριξης, να ξεπεράσουν ορισμένες από τις δυσκολίες που οφείλονται στην πληθώρα της ύλης και στις πρακτικές διδασκαλίας, να απαλλαγούν από την συναισθηματική ανασφάλεια και να αναπτύξουν θετική στάση για τα Μαθηματικά.

γ. Στη διευκόλυνση της χρήσης των Μαθηματικών στην καθημερινή ζωή.

Η ανάδειξη των διασυνδέσεων των Μαθηματικών με τους άλλους επιστημονικούς κλάδους καταδεικνύει τη συνεισφορά, τη χρησιμότητα και την αναγκαιότητά τους για τις άλλες επιστήμες και τέχνες, πράγμα που αποτελεί και έναν από τους ειδικούς σκοπούς της μαθηματικής εκπαίδευσης (ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003, σ. 4008). Πέρα από τη σύνδεση όμως των Μαθηματικών με τα άλλα γνωστικά αντικείμενα, απαραίτητη είναι και η σύνδεσή τους με τον πραγματικό κόσμο και την καθημερινή ζωή των μαθητών. Έτσι αποδεικνύεται στην πράξη η αναγκαιότητά τους, καθώς για μια απλή συναλλαγή ρουτίνας είναι απαραίτητες οι μαθηματικές γνώσεις. Προς την κατεύθυνση αυτή μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές η ανάπτυξη διαθεματικών σχεδίων εργασίας.

4.3.2. Στοιχεία σχετικά την Ιστορία των Μαθηματικών στο ΔΕΠΠΣ και στο ΑΠΣ των Μαθηματικών.

Σύμφωνα με τα Α.Π.Σ. (ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003) η επίτευξη των γενικών στόχων της Μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως είναι φυσικό, αποτελεί αντικείμενο συνεχούς αναζήτησης και προβληματισμού. Το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας, το οποίο έδινε έμφαση στα αποτελέσματα της μαθηματικής δημιουργίας και στον τρόπο παρουσίασης τους, αμφισβητείται, καθώς υποβαθμίζεται έτσι η διαδικασία μέσω της οποίας φτάνουμε σε αυτά.

Οι σύγχρονες αντιλήψεις σχετικά με τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών θεωρούν τα Μαθηματικά όχι μόνο ως το τελικό προϊόν αλλά και τη δραστηριότητα μέσα από την οποία παράγεται το αποτέλεσμα αυτό. Με την έννοια αυτή τα Μαθηματικά δεν αποτελούν μόνο ένα σύστημα γνώσεων. Αποτελούν επίσης μια διαδικασία σύλληψης, οργάνωσης και τεκμηρίωσης των γνώσεων αυτών.

Επομένως, αν δεχτούμε ότι η διδασκαλία των Μαθηματικών δεν αφορά μόνο την κατάκτηση γνώσεων και ενός συγκεκριμένου επιπέδου ικανοτήτων, αλλά περιλαμβάνει και διαδικασίες μάθησης, τότε συμπεραίνουμε ότι οι στόχοι της Μαθηματικής Εκπαίδευσης δεν εκφράζονται πλήρως με όρους που αφορούν παρατηρήσιμες συμπεριφορές αλλά με όρους δραστηριοτήτων.

Η επιλογή των δραστηριοτήτων γίνεται με βάση συγκεκριμένα κριτήρια που αναφέρονται στους γενικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης και η διατύπωσή τους επιτρέπει να εμπλέκονται, κατά το δυνατόν, οι μαθητές της τάξης στο σύνολό τους. Αυτό από την πλευρά των μαθητών σημαίνει ότι έχουν την ευκαιρία να σκεφτούν, να ενεργήσουν στο δικό τους προσωπικό επίπεδο και να διατυπώσουν τους δικούς τους επιμέρους στόχους, ενώ από την πλευρά του εκπαιδευτικού σημαίνει υψηλό βαθμό αυτενέργειας και πρωτοβουλίας, αφού πρέπει να είναι ικανός να διακρίνει πίσω από τη διατύπωση μιας δραστηριότητας τους γενικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης και να τους προσαρμόσει στις ιδιαιτερότητες της τάξης του (Καραγεώργος,1998; ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003).

Σχετικά με τη σωστή επιλογή δραστηριοτήτων επισημαίνεται πως αυτή πρέπει να έχει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά, όπως (ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003):

- Να είναι κατανοητή από όλους τους μαθητές και να μην επιτρέπει παρανοήσεις και υπονοούμενα.
- Να αφήνει περιθώρια για έρευνα και αυτενέργεια.
- Να ενθαρρύνει τη συνεργατικότητα και την ομαδική εργασία, προτρέποντας τους μαθητές και τις ομάδες σε νοητικό ανταγωνισμό.
- Να μην επιτρέπει άμεση προσέγγιση σε μια και μοναδική λύση.
- Το πρόβλημα από το οποίο προκύπτει η δραστηριότητα πρέπει να είναι πλούσιο σε εμπλεκόμενες έννοιες, να είναι αρκετά σημαντικό αλλά όχι δύσκολο, ώστε να μπορεί να αντιμετωπιστεί από τους μαθητές.
- Η επεξεργασία του προβλήματος να μπορεί να γίνει, όπου είναι δυνατό, σε δύο τουλάχιστον πλαίσια (π.χ. αριθμητικό – γραφικό) μεταξύ των οποίων ο μαθητής θα μπορέσει να κάνει τις κατάλληλες αντιστοιχίσεις.

Χρησιμοποιώντας την επεξεργασία κατάλληλων δραστηριοτήτων ως μέσο για την επίτευξη των γενικών στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης, οι μαθητές μαθαίνουν να ερευνούν, να αιτιολογούν κατ' αναλογία, να εκτιμούν την ισχύ πιθανών λύσεων, να επιχειρηματολογούν υπέρ της λύσης που προτείνουν και να εκφράζονται στη μαθηματική γλώσσα, εκτιμώντας την ισχύ της ως εργαλείο επικοινωνίας. Αυτοί είναι οι πραγματικοί στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης, οι οποίοι δεν αφορούν απλά το μετρήσιμο αποτέλεσμα, αλλά την ίδια τη διαδικασία μάθησης. Για κάθε τάξη, επομένως, η οργάνωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών πρέπει να βασίζεται στην συνύπαρξη ενός σχεδιασμού κατάλληλων και πλούσιων δραστηριοτήτων και ενός προγραμματισμού μιας επιθυμητής τελικής συμπεριφοράς (Καραγεώργος,1998; ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003).

Μέσα στα νέα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών για τα Μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης παρουσιάζονται οι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης και κατ' επέκταση παρουσιάζεται ο ρόλος της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική, αφού σε αυτά περιλαμβάνονται για πρώτη ίσως φορά τόσο σημαντικές και ευρείας έκτασης αναφορές στη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Αναλυτικότερα αναφέρονται:

α) Σχετικά με τη **διδακτική μεθοδολογία** (ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003, σ. 4037):

Είναι σημαντικό να παρέχονται στους μαθητές δικλείδες ασφαλείας στην αναζήτηση της γνώσης, πράγμα που σημαίνει πως οι μαθητές θα πρέπει να έχουν τη δυνατότητα για πολλαπλή προσέγγιση μιας έννοιας. Αυτό μπορεί να γίνει εφικτό με διάφορους τρόπους:

- Μέσα από διάφορους τύπους αναπαραστάσεων (συμβολικά με γραφικές παραστάσεις, με πίνακες, με γεωμετρικά σχήματα)
- Διαθεματικά
- Με αναφορά στην Ιστορία των Μαθηματικών, η οποία είναι ένα πεδίο πλούσιο σε ιδέες για τη διδακτική προσέγγιση μιας έννοιας.

β) Στους ειδικούς σκοπούς του ΑΠΣ για τα Μαθηματικά του Δημοτικού (ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003, σ. 3987):

- Η ανάδειξη της δυναμικής διάστασης της μαθηματικής επιστήμης (ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εργαλείων, συμβόλων και εννοιών).

γ) Στους ειδικούς σκοπούς του ΑΠΣ για τα Μαθηματικά του Γυμνασίου (ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003, σ. 4008):

- Η ανάδειξη της εφαρμοσιμότητας και πρακτικής χρήσης των Μαθηματικών από την αρχαιότητα ως της μέρες μας, τόσο στις θετικές όσο και στις ανθρωπιστικές και κοινωνικοοικονομικές επιστήμες.
- Η ανάδειξη της δυναμικής διάστασης της μαθηματικής επιστήμης που εκφράζεται μέσα από τη ραγδαία ανάπτυξή της, και της σημασίας της ως απαραίτητου εργαλείου όλων των ανθρώπινων δραστηριοτήτων.
- Η καλλιέργεια θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά, χωρίς την οποία η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και προτάσεων αποβαίνει εξαιρετικά δυσχερής

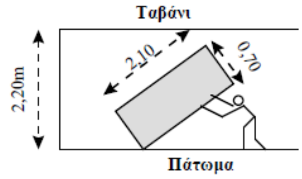
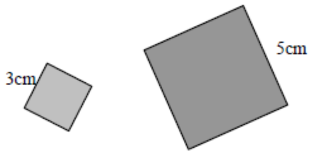
δ) Στις **θεματικές ενότητες** και στις προτεινόμενες **ενδεικτικές δραστηριότητες** (ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003) περιλαμβάνονται αναφορές που συνδέονται με την Ιστορία των Μαθηματικών και μπορούν να αξιοποιηθούν ανάλογα από τους εκπαιδευτικούς. Στην εργασία της Γαλέρη (2018) παρατίθενται ενδεικτικά κάποια σημεία που εντοπίζονται στα προγράμματα σπουδών και παρουσιάζονται στους πίνακες 1 και 2 που ακολουθούν, ταξινομημένα ανά τάξη για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο αντίστοιχα.

Τάξη Γ΄		
Σελίδα	**Θεματική Ενότητα**	**Ενδεικτικές δραστηριότητες**
3994	Μετρήσεις, Τα νομίσματα, Εισαγωγή στους δεκαδικούς αριθμούς	Οι τρόποι συναλλαγής πριν και μετά το «ευρώ», δυσκολίες που προέκυψαν και αντιμετώπισή τους (Γλώσσα, Μελέτη Περιβάλλοντος, Ιστορία).
3996	Γεωμετρία	Παιχνίδια με κομμάτια πάζλ (τάγκραμ), πλακόστρωτα, μωσαϊκά, πάζλ, επαναληπτικές κανονικότητες, γρίφους, μαγικά τετράγωνα.
Τάξη Δ΄		
Σελίδα	**Θεματική Ενότητα**	**Ενδεικτικές δραστηριότητες**
3998	Αριθμοί και πράξεις, Υπολογισμοί (πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών), Ιδιότητες πράξεων	Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι έκαναν τον πολλαπλασιασμό των φυσικών με τον εξής τρόπο: π.χ. για να πολλαπλασιάσουν 11 φορές το 23 έβρισκαν το 2-πλάσιο, 4-πλάσιο, 8-πλάσιο του 23 δηλ. 1 φορά το 23 =23, 1 και 1 φορές το 23=46, 4 φορές το 23=92, 8 φορές το 23 =184 . Πρόσθεταν τους 23+46+184=253 διότι το άθροισμα 1+2+8=11. Να γίνει συζήτηση και αιτιολόγηση του τρόπου προτίμησης εκτέλεσης του πολλαπλασιασμού των αρχαίων Αιγυπτίων και του σημερινού αλγόριθμου του πολλαπλασιασμού (Γλώσσα, Ιστορία).

4000	Γεωμετρία	Η συμμετρία στη φύση (π.χ. φύλλα δένδρων) και στις τέχνες (π.χ. πίνακες, κτίρια). Γεωμετρικά χρόνια (Αισθητική Αγωγή, Γλώσσα, Μελέτη Περιβάλλοντος, Ιστορία).
Τάξη Ε΄		
Σελίδα	**Θεματική Ενότητα**	**Ενδεικτικές δραστηριότητες**
4003	Μετρήσεις	Οι μετρήσεις από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα. Μονάδες μέτρησης στην αρχαιότητα – πρακτικές μονάδες μέτρησης. Ιστορική προσέγγιση της καθιέρωσης του μέτρου (Ιστορία, Γλώσσα).

Πίνακας 1: Σημεία από το ΑΠΣ για τα Μαθηματικά του Δημοτικού που συνδέονται με την Ιστορία των Μαθηματικών (Γαλέρη, 2018).

Τάξη Α΄		
Σελίδα	**Θεματική Ενότητα**	**Ενδεικτικές δραστηριότητες**
4010	Δυνάμεις Φυσικών αριθμών	«Συστήματα αρίθμησης (Ιστορική εξέλιξη - Μετάβαση από το ένα σύστημα αρίθμησης στο άλλο)» (Μαθηματικά, Ιστορία, Γεωγραφία, Πληροφορική - Τεχνολογία).
4012	Πρόσθεση και Αφαίρεση κλασμάτων	«Τα κλάσματα στη Μουσική και την Αρχιτεκτονική.» (Μαθηματικά, Ιστορία, Αισθητική Αγωγή).
4013	Μονάδες μέτρησης	«Οι μετρήσεις από την Αρχαιότητα μέχρι σήμερα» (Μαθηματικά, Ιστορία, Γεωγραφία, Αισθητική Αγωγή).
4014-4015	Λόγος δύο αριθμών Αναλογία	«Η αναλογία στη φύση και στην τέχνη (π.χ. χρυσή τομή)». (Μαθηματικά, Αισθητική Αγωγή, Ιστορία, Γεωγραφία κτλ.).
4016	Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί (Ρητοί αριθμοί)	Δραστηριότητες που αναφέρονται σε μεγέθη τα οποία επιδέχονται αντίθεση (π.χ. θερμοκρασία, υψόμετρο, κέρδος - ζημιά κτλ.), με σκοπό να διαφανεί η ανάγκη εισαγωγής των αρνητικών αριθμών.
Τάξη Β΄		
Σελίδα	**Θεματική Ενότητα**	**Ενδεικτικές δραστηριότητες**
4024	Πυθαγόρειο θεώρημα	«Προσπάθειες απόδειξης του Πυθαγόρειου θεωρήματος» (Ιστορία).
	Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού	«Ο υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας από τους Βαβυλώνιους μέχρι σήμερα» (Μαθηματικά, Ιστορία, Γεωγραφία, Πληροφορική).
4025	Άρρητοι αριθμοί - Πραγματικοί αριθμοί	«Ο ρόλος του αριθμού στην Ιστορία, την Τέχνη και την Επιστήμη». (Μαθηματικά, Αισθητική αγωγή, Ιστορία, Λογοτεχνία, Μουσική).
		Ανάδειξη της σπουδαιότητας του Πυθαγόρειου Θεωρήματος με

		δραστηριότητες που προκαλούν το ενδιαφέρον των μαθητών, όπως π.χ: − Μπορούμε να σηκώσουμε όρθιο το ντουλάπι;   Να κατασκευάσετε γεωμετρικά ένα τετράγωνο με εμβαδόν ίσο προς το άθροισμα των εμβαδών των δυο τετραγώνων. − Προβλήματα υπολογισμού περιμέτρων και εμβαδών πολυγώνων στα οποία απαιτείται η χρήση του πυθαγόρειου θεωρήματος.
4028	Εφαπτομένη οξείας γωνίας	«Υπολογισμός του ύψους των πυραμίδων» (Ιστορία).
4029	Κανονικά πολύγωνα	«Τα κανονικά πολύγωνα στην Φύση και στη Τέχνη» (Φυσική, Ιστορία, Αισθητική αγωγή).
4030	Σχετικές θέσεις επιπέδων και ευθειών - Ευθεία κάθετη σε επίπεδο - Απόσταση σημείου από επίπεδο - Απόσταση παραλλήλων επιπέδων.	«Ο Χώρος» (Μαθηματικά, Ιστορία, Φυσική, Βιολογία, Αισθητική Αγωγή, Χημεία).
4031	Σφαίρα και στοιχεία αυτής - Μέτρηση σφαίρας	«Γεωγραφικές συντεταγμένες» (Μαθηματικά, Γεωγραφία, Ιστορία).
Τάξη Γ΄		
Σελίδα	**Θεματική Ενότητα**	**Ενδεικτικές δραστηριότητες**
4031	Πράξεις με αριθμούς (επαναλήψεις – συμπληρώσεις)	«Η έννοια της Απόδειξης» (Μαθηματικά, Ιστορία, Γλώσσα, Λογοτεχνία).
4035	Ομοιότητα	«Η ομοιότητα στη Φύση και την Τέχνη» (Ιστορία, Αισθητική αγωγή, Φυσική, Βιολογία, Λογοτεχνία).

Πίνακας 2: Σημεία από το ΑΠΣ για τα Μαθηματικά του Γυμνασίου που συνδέονται με την Ιστορία των Μαθηματικών (Γαλέρη, 2018).

Επιπλέον μέσα στο ΑΠΣ προτείνονται (ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/13-03-2003, σ.σ. 4004 & 4008):

1) **πρόσθετα διαθεματικά σχέδια εργασίας για το Δημοτικό** από τα οποία ενδεικτικά αναφέρουμε κάποια θέματα:

- Για την Ε΄ τάξη: Η συμμετρία στη ζωή μας
- Για την ΣΤ΄ τάξη: Κατασκευή πυραμίδας. - Μοτίβα στη ζωή μας. - Το μέτρο στη ζωή μας.

2) **πρόσθετα διαθεματικά σχέδια εργασίας για το Γυμνάσιο** που αφορούν και τις τρεις τάξεις με τα παρακάτω ενδεικτικά θέματα

- Η ομοιότητα στη Φύση και την Επιστήμη
- Αστρονομικές παρατηρήσεις - Διαστημικά ταξίδια
- Τεχνικά έργα
- Η υιοθέτηση από την Αρχιτεκτονική, κατά τα διάφορα στάδια εξέλιξης της, συγκεκριμένων γεωμετρικών σχημάτων
- Η αισθητοποίηση φαινομένων, γεγονότων ή καταστάσεων μέσα από την κατασκευή αναπαραστάσεων

Οι ενδεικτικές δραστηριότητες από τους πίνακες 1 και 2 παρουσιάζονται στο ΑΠΣ με πλάγια γράμματα, προτείνονται ως διαθεματικές και ανταποκρίνονται στις θεμελιώδεις διαθεματικές έννοιες (του συστήματος της αλληλεπίδρασης, της μεταβολής, της επικοινωνίας, της διάστασης, του χώρου και του χρόνου, κ.λπ.), που αναφέρονται στο αντίστοιχο Δ.Ε.Π.Π.Σ. για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο. Επιπλέον τα προτεινόμενα διαθεματικά σχέδια εργασίας αναφέρεται ότι μπορούν εναλλακτικά να συμπληρώσουν τις «ενδεικτικές διαθεματικές δραστηριότητες», που περιλαμβάνονται στο Α.Π.Σ., για τις οποίες προτείνεται να διατίθεται περίπου το 10% του διδακτικού χρόνου.

Ακόμα γίνονται σχετικές αναφορές για το απαιτούμενο διδακτικό υλικό, τις προδιαγραφές των διδακτικών βιβλίων για τα Μαθηματικά και συμπληρωματικές προδιαγραφές για το εκπαιδευτικό υλικό του Γυμνασίου.

4.3.3. Η αξιοποίηση της Μαθηματικής Λογοτεχνίας στο Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά.

Σύμφωνα με το Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών (Ε.Π.Π.Σ., 1997), το πρόγραμμα σπουδών πρέπει να παρέχει την ευκαιρία στους μαθητές να κατανοήσουν μαθηματικά μοντέλα, δομές και προσομοιώσεις που βρίσκουν εφαρμογή σε εξω-μαθηματικές περιοχές. Αναφέροντας εξω-μαθηματικές περιοχές το Ε.Π.Π.Σ. εννοεί τον χώρο της τεχνολογίας και τη χρήση συγκεκριμένα των νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση. Παρόλα αυτά θα μπορούσε με μια επέκταση του όρου εξω-μαθηματικός να ενταχθεί στις περιοχές αυτές και η Μαθηματική Λογοτεχνία. Κατά τη διατύπωση των γενικών στόχων ορίζονται άξονες κάθε ένας από τους οποίους αναφέρεται σε μια συγκεκριμένη θεώρηση της Μαθηματικής Εκπαίδευσης:

- μαθηματική διάσταση
- γλωσσική διάσταση
- εφαρμοσιμότητα και πρακτική χρήση

• μεθοδολογική διάσταση
• μαθηματική δομή
• δυναμική διάσταση
• διάσταση των στάσεων των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά.

Στις εργασίες των Λερή (2008) και Λαγοδόντη (2014) παρουσιάζονται έρευνες από την ελληνική αλλά και διεθνή βιβλιογραφία, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν στο πλαίσιο της αξιοποίησης της Μαθηματικής Λογοτεχνίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών σε σχολικές τάξεις της Πρωτοβάθμιας και της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, εξετάζοντας παράλληλα και την ικανοποίηση των στόχων που τίθενται από το Πρόγραμμα Σπουδών. Το συμπέρασμα ήταν ότι με αφορμή ένα λογοτεχνικό κείμενο ή την αφήγηση μιας ιστορίας οι μαθητές:

- Συζητούσαν και διατύπωναν τους ισχυρισμούς τους μέσα σε ένα κλίμα διαπραγμάτευσης μαθηματικών ιδεών (Borasi & Siegel, 1990; Kliman, 1993; Siegel et al, 1996; Μητακίδου & Τρέσσου, 2005; Sriraman, 2004).
- Καλλιέργησαν την κριτική σκέψη μέσα από την επιχειρηματολογία (Sriraman, 2004).
- Συνέδεσαν τα Μαθηματικά με λύσεις προβλημάτων της καθημερινής τους ζωής (Burnett & Wichman, 1997).
- Συνέδεσαν τα Μαθηματικά με το ιστορικό τους πλαίσιο (Κοταρίνου, 2007).
- Επιχείρησαν να εκφράσουν τις απόψεις τους χρησιμοποιώντας τη γλώσσα και τη μαθηματική ορολογία προφορικά και γραπτά (Ανέστη & Τριανταφυλλίδης, 2005; Μητακίδου & Τρέσσου, 2005)

Η αξιοποίηση λογοτεχνικών κειμένων, βιβλίων της μαθηματικής λογοτεχνίας ή μαθηματικών ιστοριών στη Διδακτική των Μαθηματικών εμφανίζεται να είναι μια καινοτόμος διδακτική προσέγγιση που ικανοποιεί τους στόχους και είναι σύμφωνη με τα Προγράμματα Σπουδών. Η προσέγγιση αυτή μπορεί να έχει διαθεματικό χαρακτήρα με βάση το Δ.Ε.Π.Π.Σ., εκλαϊκευτικό χαρακτήρα, χαρακτήρα λέσχης ανάγνωσης, επικοινωνιακό ή συναισθηματικό.

Όταν έχει διαθεματικό χαρακτήρα μπορεί είτε να ενσωματώνει τη Λογοτεχνία με τα Μαθηματικά για τη διδασκαλία αμφότερων, είτε το λογοτεχνικό κείμενο να παίζει το ρόλο του μέσου, εργαλείου, για να συνδεθούν διαφορετικοί τομείς των Μαθηματικών ή των Μαθηματικών με άλλα πεδία γνώσεων. Στην περίπτωση του εκλαϊκευτικού χαρακτήρα, το απόσπασμα μαθηματικής λογοτεχνίας λειτουργεί ως μαθησιακό εργαλείο για να γίνουν τα Μαθηματικά προσιτά και να οικειοποιηθούν οι μαθητές, μαθηματικές έννοιες. Η λέσχη ανάγνωσης φαίνεται να έχει ψυχαγωγικό χαρακτήρα και μέσα από ένα περιβάλλον επικοινωνίας τα Μαθηματικά συνδέονται με τον πολιτισμό ή άλλα γνωστικά πεδία. Η προσέγγιση με επικοινωνιακό χαρακτήρα βασίζεται στην ανάπτυξη συγκεκριμένων στρατηγικών για την κατανόηση μαθηματικών ιστοριών, ενώ, με συναισθηματικό χαρακτήρα στην παραγωγή θετικών συναισθημάτων για τα Μαθηματικά.

Οι διαφορετικές αυτές προσεγγίσεις, βέβαια, δεν κινούνται ανεξάρτητα η μία από την άλλη, αλλά μοιράζονται σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό κοινά στοιχεία. Οι στόχοι που επιτυγχάνονται μέσα από μια τέτοια διδακτική διαδικασία είναι τόσο γνωστικοί όσο και συναισθηματικοί. Σε ένα τέτοιο περιβάλλον μάθησης, ο μαθητής αισθάνεται ως μέλος της μαθητικής ομάδας και μαθαίνει να συζητά, να διαφωνεί και να τεκμηριώνει τους ισχυρισμούς του μέσα από τη διαπραγμάτευση.

Ειδικότερα, για τη χρήση της ιστορικής αφήγησης στη διδασκαλία των Μαθηματικών η Καφούση (2002), βασιζόμενη σε αποτελέσματα ερευνών, αναφέρει ότι:

- Βοηθά στον «εξανθρωπισμό» και την «απομυθοποίηση» της μαθηματικής επιστήμης, καθώς δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι τα σχολικά Μαθηματικά δεν είναι ένα σύνολο από μαγικούς κανόνες, αλλά προϊόν της ανθρώπινης δραστηριότητας που αναπτύχθηκε ανάλογα με τις ανάγκες της κάθε εποχής.
- Παρέχει στους μαθητές τη δυνατότητα να κατανοήσουν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες με τις οποίες ασχολούνται και να συνειδητοποιήσουν την αξία των σύγχρονων τεχνικών και διαδικασιών.
- Επιτρέπει την εμπλοκή των μαθητών σε καταστάσεις έρευνας και προβληματισμού γύρω από ένα μαθηματικό θέμα.
- Βοηθά στην ανάπτυξη μιας πολυπολιτισμικής προσέγγισης της διδασκαλίας των Μαθηματικών.
- Διευκολύνει την προσπάθεια αλλαγής των απόψεων των μαθητών για τη μαθηματική δραστηριότητα, καθώς τους δίνει τη δυνατότητα να αντιληφθούν ότι οι δυσκολίες και τα προβλήματα αποτελούν αναπόσπαστο στοιχείο στη διαδικασία κατασκευής της καινούργιας γνώσης.
- Συμβάλλει στη συνειδητοποίηση του καθοριστικού ρόλου των Μαθηματικών στην ανάπτυξη της κοινωνίας.
- Διευκολύνει την ανάπτυξη διαθεματικών δραστηριοτήτων και επομένως τη σύνδεση των Μαθηματικών με άλλα γνωστικά αντικείμενα.

4.4. Αναζήτηση της πολιτισμικής αξίας των Μαθηματικών και Μαθηματική Λογοτεχνία.

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στο ελληνικό σχολείο αποτελεί κοινή διαπίστωση ότι δεν έχει απεμπλακεί από τις ακαδημαϊκές καταβολές της. Έτσι, η επικοινωνία και η μαθηματική συζήτηση στην τάξη δεν μπορεί να βρει τη θέση που της αρμόζει στο σχολικό πρόγραμμα. Η παρουσίαση των Μαθηματικών σύμφωνα με το πρότυπο «Ορισμός-Θεώρημα-Απόδειξη-Ασκήσεις» τόσο από τους διδάσκοντες όσο και από τα σχολικά εγχειρίδια επηρεάζει την κατανόηση αλλά και τη στάση των μαθητών για τα Μαθηματικά. Οι μαθητές δεν δέχονται να στηρίζουν τη σκέψη τους σε ορισμούς, θεωρήματα και πρότερες αξιωματικές παραδοχές αμφιβάλλοντας για την επιλογή τους, καθώς στην πλειονότητά τους δεν αισθάνονται την ανάγκη για αποδείξεις ή αιτιολογήσεις. Η απομνημόνευση του περιεχομένου (ορισμών, θεωρημάτων, αποδείξεων) και των τεχνικών επίλυσης ασκήσεων για εξεταστική κατανάλωση δεν συνδέονται με το συναίσθημα, το πάθος, τη συγκίνηση, την εμπειρία και την καθημερινή ζωή των μαθητών καθώς και τις ιστορικές συνθήκες που γέννησαν τα Μαθηματικά.

Μέσα από την ιστορική και πολιτισμική εξέλιξη η συγκρότηση της μαθηματικής γνώσης φαίνεται να είναι στενά συνυφασμένη με τη λύση προβλημάτων. Η Ιστορία των Μαθηματικών σηματοδοτείται από σημαντικές επιστημονικές διαμάχες, κρίσεις και αμφισβητήσεις που αποτέλεσαν το ερέθισμα για την ανάδυση νέων μεθόδων και θεωριών, οδηγώντας μέσα από γόνιμες αναθεωρήσεις, σε σημαντική πρόοδο της επιστήμης και του πολιτισμού. Αφηγήσεις με θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών μπορούν να αποτελέσουν κίνητρο για την εμπλοκή των μαθητών και να αναδείξουν το ιστορικό και πολιτισμικό πλαίσιο της ανάπτυξης των Μαθηματικών (Young & Marroquin, 2006; Κόσυβας, 2014).

Τα Μαθηματικά και η Λογοτεχνία, όπως προαναφέρθηκε, είναι δύο διαφορετικοί τρόποι έκφρασης που κινούνται ανάμεσα στην πραγματικότητα και τη φαντασία και η μεταξύ τους σχέση τροφοδοτεί ποικίλες διερευνήσεις, καθώς οι απόλυτες και ανέκκλητες βεβαιότητες σπανίζουν σε έναν κόσμο που διαρκώς αλλάζει. Το εγχείρημα εναλλακτικών διδακτικών προσεγγίσεων δίνει τροφή στη συζήτηση για τη σύνδεση των Μαθηματικών με τη Λογοτεχνία (Whitin, 2002; Lamberg & Andrews, 2011). Στο πλαίσιο αυτό κατέχουν κεντρική θέση η επικοινωνία, η συναισθηματική νοημοσύνη και οι πολλαπλές ευφυΐες. Ο Goleman (1998) αναφέρει ότι τα συναισθήματα επηρεάζουν τη σκέψη μας. Όταν οι μαθητές λύνουν μαθηματικά προβλήματα μπορεί να αισθάνονται γοητεία ή αποστροφή, φόβο ή αγάπη. Η λογική και το συναίσθημα δεν είναι καταστάσεις αντίθετες και αποκλειόμενες, αλλά οι συναισθηματικές λειτουργίες είναι συνυφασμένες με τις λογικές διεργασίες, είναι αλληλένδετες και συμπληρωματικές (Goleman, 1998). Ο Gardner (1990) σημειώνει ότι η αισθητική εμπειρία παρέχει ευκαιρίες για επεξεργασία πλήθους συμβόλων μέσα από τα οποία μπορούν να διατυπωθούν ολιστικά νοήματα και να εκφραστούν συναισθηματικές καταστάσεις διαφόρων όψεων της πραγματικότητας, βοηθώντας στη σύλληψη όσων δεν είναι κατανοητά μέσω ορθολογικών επιχειρημάτων. Στη σύζευξη των Μαθηματικών με τη λογοτεχνία, η φαντασία κατέχει ιδιαίτερη βαρύτητα στη μαθηματική δημιουργικότητα και την πλήρη ανάπτυξη της προσωπικότητας των μαθητών (Sriraman, 2004; Zambo,2005; Kliman, 1993).

Στις τρεις περίπου τελευταίες δεκαετίες σημειώνεται αυξημένο ενδιαφέρον για τη Μαθηματική Λογοτεχνία και αναπτύσσεται εποικοδομητικός διάλογος για τη δημόσια κατανόηση των Μαθηματικών και τη διασύνδεσή τους με διάφορες μορφές τέχνης (Χρονάκη & Μουντζούρη, 2011). Οργανώνονται ημερίδες, συνέδρια, αναρτώνται κείμενα σε εφημερίδες στον ημερήσιο τύπο και σε επιστημονικά περιοδικά. Στο πλαίσιο αυτό ιδιαίτερη σημασία δίνεται στη συνεξέταση των Μαθηματικών με ποικίλες μορφές της λογοτεχνίας όπως η ποίηση, το μυθιστόρημα, το θέατρο, τα έργα επιστημονικής φαντασίας, η εκλαϊκευμένη ιστορία των Μαθηματικών, οι βιογραφίες μαθηματικών, τα κόμικς, η δραματική τέχνη, το παραμύθι, κ.λπ.

Η Μαθηματική Λογοτεχνία αποτελεί πλέον ένα πολιτισμικό αγαθό, για το οποίο γίνεται προσπάθεια από ορισμένους πρωτοπόρους μαθηματικούς να μεταφερθεί στο ευρύ κοινό (Ανέστη & Τριανταφυλλίδης, 2005). Ιδρύονται κοινότητες πρακτικής, επιχειρείται να γεφυρωθεί η Λογοτεχνία με τα Μαθηματικά και να μυηθούν οι ενδιαφερόμενοι, μαθητές ή ενήλικες, στα μυστικά της επιστήμης. Στην προσπάθεια δημόσιας διάδοσης και κατανόησης των Μαθηματικών επιδεικνύει πλούσια δράση η Ομάδα «Θαλής + Φίλοι» (https://thalesandfriends.org).

Ο Μιχαηλίδης (2019, ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ), αναφερόμενος σε όσα αποκομίζει (μέσα από τις επαφές που πραγματοποιεί στα σχολεία) σχετικά με τη διδασκαλία των Μαθηματικών και την αναζήτηση από την πλευρά των διδασκόντων νέων προσεγγίσεων οι οποίες να κάνουν τα Μαθηματικά πιο προσιτά και ενδιαφέροντα για τους μαθητές, σημειώνει ότι πιστεύει πάρα πάρα πολύ σε αυτό που έλεγε ο Βολταίρος: «Ο καθένας να φροντίσει τον κήπο του». Λέει ότι πιστεύει, δηλαδή, πάρα πολύ στους ανθρώπους και έχει την ευτυχία και μέσω της Ομάδας «Θαλής + Φίλοι», να είναι σε επαφή με πολλούς, που έχουν τη διάθεση να κάνουν ένα μάθημα διαφορετικό. Και επειδή το κάνουν κινούμενοι από δική τους ευχαρίστηση, για να βγουν από το τέλμα τους, από την καθημερινή ρουτίνα της τάξης τους, συνήθως το κάνουν πάρα πολύ καλά. Τονίζει ακόμη πως είναι πολύ αισιόδοξο το γεγονός ότι συχνά αφήνοντας στην άκρη την αδράνεια των επίσημων φορέων και πέρα από τις εγκυκλίους ή τις κατευθυντήριες γραμμές που κατά καιρούς δίνονται ή δεν δίνονται από το Υπουργείο Παιδείας, πολλοί εκπαιδευτικοί, σε διάφορα σχολεία της χώρας, αποφασίζουν να παρασύρουν τους μαθητές σε ένα ξεχωριστό ταξίδι από το οποίο μαθαίνουν κάτι παραπάνω, κάτι που θα το πάρουν μαζί τους και θα το θυμούνται.

Είναι πλέον κοινή διαπίστωση ότι η διδασκαλία των Μαθηματικών έχει ανάγκη από ριζική μεταμόρφωση στην οποία η δημιουργία κλίματος επικοινωνίας θα έχει πρωτεύοντα ρόλο. Η αξιοποίηση της Μαθηματικής Λογοτεχνίας βοηθάει προς αυτή την κατεύθυνση, εισάγοντας τις μαθηματικές ιδέες με όμορφο τρόπο, παρακάμπτοντας την αυστηρή και άκαμπτη μαθηματική ορολογία και τον υπερβολικό φορμαλισμό, επιχειρώντας τη διατύπωση εικασιών, αποδείξεων και ευχάριστων προβλημάτων μέσα στην πλοκή του λογοτεχνικού έργου. Η ανταλλαγή σκέψεων βοηθά να ελέγχονται οι εικασίες και αναβαθμίζονται οι διαπροσωπικές σχέσεις, ενώ ταυτόχρονα βελτιστοποιεί τα αποτελέσματα της μορφωτικής διαδικασίας στο σύνολό της. Στις εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις πρωταγωνιστούν η διερεύνηση, η αναθεώρηση, ενώ αμφισβητείται η βεβαιότητα των Μαθηματικών. Σε ένα περιβάλλον που ανθίζει η δημιουργική αμφιβολία, η σύνταξη επιχειρημάτων, η μαθηματική αλληλεπίδραση οι μαθητές αποκτούν γόνιμες μαθησιακές εμπειρίες και βλέπουν με ενδιαφέρον τα Μαθηματικά. Εξάλλου, η διανοητική και συναισθηματική εμπλοκή τους στη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι θεμελιώδης στόχος της Μαθηματικής Εκπαίδευσης.

Η Μαθηματική Λογοτεχνία είναι ένα θαυμάσιο μέσο επικοινωνίας με τους μαθητές, μιλά στη γλώσσα τους, τους συγκινεί και τους συναρπάζει. Η απλή και κατανοητή γλώσσα καθημερινών μαθηματικών ιστοριών είναι ιδιαίτερα αποδεκτή από τα παιδιά. Καλλιεργεί φιλικές σχέσεις με τους αναγνώστες. Απευθύνεται σε όλους τους μαθητές και όχι μόνο σε εκείνους που έχουν υψηλές επιδόσεις στα Μαθηματικά. Όχι μόνο στους μυημένους, τους άριστους και τους λίγους, αλλά και τους αδύνατους και παραμελημένους (Shih & Giorgis, 2004; Borasi et al, 1998). Είναι η γλώσσα της καθημερινής τους ζωής. Αρχίζει με τις εμπειρίες και τα βιώματα των μαθητών. Είναι η ζωντανή γλώσσα της αφήγησης που απευθύνεται στο συναισθηματικό τους κόσμο και βλέπει τον μαθητή στην καθημερινότητά του. Ο Μιχαηλίδης (2019, ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ), εξάλλου, σημειώνει ότι η αφήγηση είναι ένα πάρα πάρα πολύ σημαντικό και δυνατό εργαλείο στα χέρια του εκπαιδευτικού, καθώς αποτελεί μια εναλλακτική πύλη εισόδου στα Μαθηματικά.

Αναζητώντας, λοιπόν, τρόπους με τους οποίους η αφήγηση θα ήταν δυνατό να αφήσει ένα μικρό απόσταγμα θαυμασμού στους μαθητές, να τους δημιουργήσει μια πνευματική έλξη για να εκτιμήσουν τον πολιτισμικό ρόλο των Μαθηματικών, να επιδράσει στην ανάπτυξη της μαθηματικής εμπειρίας και γενικότερα της λογικής σκέψης των μαθητών, πολλοί καθηγητές και δάσκαλοι ανά την επικράτεια έχουν αναλάβει αξιόλογες πρωτοβουλίες για διδακτικές παρεμβάσεις που συνδέουν επιτυχώς τα Μαθηματικά με την καθημερινότητα καθώς και με τις άλλες επιστήμες, αναδεικνύοντας τα Μαθηματικά ως πολιτισμικό αγαθό, εμπλέκοντας ενεργά τους μαθητές στο διδακτικό σχεδιασμό, αξιοποιώντας τη Μαθηματική Λογοτεχνία και την Ιστορία των Μαθηματικών ως μέσον για την παρακίνηση του μαθησιακού ενδιαφέροντος των μαθητών τους.

Εστιάζοντας στο βιβλίο του Μιχαηλίδη, «Αχμές, ο γιος του φεγγαριού» παρουσιάζουμε στη συνέχεια μια διαθεματική διδακτική πρόταση για τα αρχαία αιγυπτιακά μαθηματικά μέσω της μεθόδου του Εκπαιδευτικού Δράματος που πραγματοποιήθηκε με τη μορφή ανοιχτού βιωματικού εργαστηρίου. Σε αυτό συμμετείχαν ο συγγραφέας του εν λόγω βιβλίου και οι θεατρικές ομάδες του 13ου Γυμνασίου και του 19ου Γενικού Λυκείου (Μαρασλείου) Θεσσαλονίκης, υπό την αιγίδα της Περιφέρειας Κεντρικής Μακεδονίας και των συμβούλων Μαθηματικών και Φιλολόγων Ανατολικής Θεσ/νίκης (Ζουρνά & Κοτζαβαΐδου, 2016).

Ξεκινώντας το εργαστήριο πραγματοποιήθηκαν διάφορες τεχνικές για να ενισχυθεί η αυτοσυγκέντρωση, η εστιασμένη ακρόαση και η γνωριμία μεταξύ των μελών της ομάδας (σε κύκλο ο καθένας ανέφερε το όνομα των προηγουμένων του και τελευταίο το δικό του και στη συνέχεια το ίδιο με αντίστροφη σειρά).

Έπειτα με κατάλληλη μουσική υπόκρουση έγινε αφήγηση μιας περιληπτικής θα λέγαμε εισαγωγής, με σκοπό να αποκαλυφθούν στην ομάδα βασικά στοιχεία της βιογραφίας και της προσωπικότητας του πρωταγωνιστή, συστήνοντας, έτσι, τους ήρωες της ιστορίας (Αχμές και Άμανθυ) στην ομάδα μέσα από την παρουσίαση στοιχείων για την καταγωγή τους, τη γνωριμία τους και τις καταστάσεις εκείνες που οδήγησαν στη δημιουργία μιας στενής φιλίας μεταξύ τους.

Στη συνέχεια, χωρισμένοι σε τέσσερις ομάδες, οι συμμετέχοντες αυτοσχεδίασαν και παρουσίασαν σκηνές από την καθημερινότητα του ήρωα (με την οικογένειά του, με τον κολλητό του φίλο Άμανθυ, με τον δάσκαλο Ονέχ, με συμμαθητές του στη σχολή γραφέων). Στόχος ήταν να φανεί ότι ως μαθητής ο Αχμές αντιμετώπιζε δυσκολίες και δεν είναι ικανοποιημένος από τη ρουτίνα του σχολείου (λόγω είτε της στάσης σώματος των γραφέων, είτε της πολύωρης προσπάθειας, είτε της δυσκολίας γραφής των ιερογλυφικών με τη γραφίδα και την πινακίδα). Να φανεί επίσης ποια ήταν η αντίδραση των σημαντικών άλλων στη ζωή του. Παράλληλα ο εμψυχωτής, δίνοντας οδηγίες για τα σταθερά δεδομένα της ιστορίας, αλλά και σχετικά αποσπάσματα από το βιβλίο βοηθούσε τους συμμετέχοντες ώστε να μην ξεφύγουν από το θέμα, καθώς ήταν πιθανόν να μην έχουν διαβάσει εκ των προτέρων το βιβλίο. Στο τέλος κάθε σκηνής γινόταν παρακολούθηση σκέψης, η οποία είναι μια τεχνική που αποκαλύπτει τις σκέψεις που βρίσκονται στο πίσω μέρος του μυαλού των πρωταγωνιστών.

Κατόπιν, με αφορμή αποσπάσματα του βιβλίου όπου περιγράφονται σκηνές από τη ζωή και την εκπαίδευση των πρωταγωνιστών, οι συμμετέχοντες ασχολήθηκαν με ασκήσεις και δραστηριότητες, όπως:

- Προσπάθησαν να αποκρυπτογραφήσουν, να διαβάσουν και να γράψουν στα ιερογλυφικά τον τίτλο του εν λόγω βιβλίου, καθημερινές λέξεις, ονόματα μερικών σημαντικών προσώπων, το δικό τους όνομα, επιτυγχάνοντας έτσι μια πρώτη επαφή με την αρχαία ιερογλυφική γραφή των Αιγυπτίων και προσωπική εμπλοκή στο μύθο που εκτυλισσόταν.
- Ασχολήθηκαν με την επίλυση «σουντόκου» κλιμακούμενης δυσκολίας, όπου έπρεπε να συμπληρωθούν τα κενά με ιερογλυφικά σύμβολα αριθμών ή γραμμάτων ή τμημάτων από το Μάτι του Ώρου, ώστε να γνωρίσουν και να εξοικειωθούν με τους ακέραιους αριθμούς και τα μοναδιαία κλάσματα που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι Αιγύπτιοι.
- Κατέγραψαν, σε μια ατομική δραστηριότητα συγγραφής ημερολογίου, μπαίνοντας ο καθένας στη θέση του Αχμές (πριν αρχίσει η φοίτησή του στη σχολή γραφέων), τις βαθύτερες σκέψεις τους για το μέλλον, τις ελπίδες τους, την αγωνία τους για το αν θα μπορούσαν να ανταποκριθούν στις προσδοκίες τις δικές τους και των άλλων, με στόχο την παραγωγή πρωτότυπου γραπτού λόγου και τη ρητή έκφραση συναισθημάτων και προσδοκιών ανταπόκρισης στο ρόλο και στη συνέχεια το διάβασαν στην ολομέλεια.
- Παρουσίασαν αφήγηση για την πρώτη γνωριμία των δυο νέων με τη Γεωμετρία στον ναό του Φθα (όπου διδάχθηκαν τις μονάδες μέτρησης μήκους, επιφάνειας και όγκου, καθώς και τα κλασματικά μέρη με σύμβολα από το μάτι του Ώρου) και για τον πρώτο προβληματισμό του Αχμές σχετικά με τον υπολογισμό του εμβαδού ενός κύκλου (με δοσμένη ακτίνα) και του όγκου μιας πυραμίδας.
- Έκαναν, στην ολομέλεια, αποκρυπτογράφηση ενός γνωστού προβλήματος από τον πάπυρο του Αχμές (γραμμένο στην ιερογλυφική γραφή), προσπάθησαν στις ομάδες να το λύσουν με όσο το δυνατόν περισσότερους διαφορετικούς τρόπους και στη συνέχεια να εξηγήσουν μέσα από συζήτηση τον τρόπο επίλυσής του από τον Αχμές.
- Περπάτησαν στο χώρο σε δύο ομόκεντρους κύκλους, ενώ παράλληλα γινόταν αφήγηση για την απουσία του Άμανθυ από τη σχολή λόγω του θανάτου του πατέρα του και τις επιπτώσεις που είχε η απουσία αυτή στην συμπεριφορά του Αχμές. Στη δραστηριότητα αυτή οι δύο κύκλοι έκαναν εναλλαγή ρόλων (από την πλευρά άλλοτε του Αχμές και άλλοτε του αρχιερέα Τζάου) με στόχο τη συναισθηματική εμπλοκή, την ενσυναίσθηση, τη ρητή έκφραση συναισθημάτων, την αυτοεπίγνωση, την κριτική σκέψη και τη ρητή διατύπωση νουθεσιών.
- Ανέλαβαν να λύσουν μια άσκηση γεωμετρίας, από αυτές που αναφέρονται στο βιβλίο. Τους ζητήθηκε να τη λύσουν όπως οι αρχαίοι Αιγύπτιοι και να συζητήσουν

επί των λύσεων με στόχο να μάθουν πώς έκαναν τότε πολλαπλασιασμό και διαίρεση, με τόσο διαφορετικό τρόπο από αυτόν που χρησιμοποιείται σήμερα.

- Συμμετείχαν σε μια προσομοίωση του επαγγέλματος του αρπεδονάπτη με αφορμή την απασχόληση του Άμανθυ ως αρπεδονάπτη στα χωράφια του άρχοντα Ιφάρ (όπως ήταν και ο θετός του πατέρας Πανέμπ) και με στόχο μια πρώτη γνωριμία με την πρακτική γεωμετρία των αρχαίων Αιγυπτίων.
- Εξέφρασαν στην ολομέλεια με καταιγισμό ιδεών και στη συνέχεια παίρνοντας ο καθένας που επιθυμούσε τον λόγο, το σκεπτικό βάσει του οποίου θα επέλεγαν να αντιγράψουν κάποιον από τους παπύρους της βιβλιοθήκης στο Ναό του Φθα με στόχο την προσωπική εμπλοκή και τη συνειδητοποίηση της συμβολής του καθενός στη διατήρηση της συλλογικής ανθρώπινης ιστορίας για της μελλοντικές γενιές.
- Επιχειρηματολόγησαν σχετικά με το γιατί θα έπρεπε να πουληθεί ο πάπυρος ή γιατί θα έπρεπε να παραδωθεί στις Αρχές απέναντι σε ένα δίλημμα που έθεσε ο αφηγητής για την απόφαση που θα έπρεπε να πάρουν εάν ως εργάτες μιας ανασκαφής στην Αίγυπτο έβρισκαν τον πάπυρο του Αχμές με τα 84 προβλήματα.
- Σχημάτισαν με συνοδεία μουσικής ένα ανθρώπινο γλυπτό όπου ο καθένας εξέφρασε με τη γλώσσα του σώματος (το βλέμμα, τη στάση, το ύφος) τη θέση να διασώσει την κληρονομιά των προηγούμενων γενιών για χάρη των επόμενων, για να επιτευχθεί η σταδιακή συναισθηματική αποστασιοποίηση, η σωματοποίηση αφηρημένων εννοιών και η ολοκλήρωση του δράματος.
- Συζήτησαν με τον συγγραφέα του βιβλίου και συμπλήρωσαν φύλλο αξιολόγησης όπου σχολίασαν την πρωτοτυπία των φυλλαδίων εργασίας, εξέφρασαν την ικανοποίησή τους από την επαφή τους με τα αρχαία αιγυπτιακά μαθηματικά και την ιερογλυφική γραφή, την προσωπική τους εμπλοκή στην εξέλιξη του μύθου, την αντιμετώπιση ηθικών διλημμάτων και προκλήσεων, αναφέρθηκαν στη δυσκολία τους για την ανεύρεση επιχειρημάτων και τον αυτοσχεδιασμό.

Το συγκεκριμένο βιβλίο, όπως και ο Μιχαηλίδης (2019, ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ) αναφέρει, έχει αξιοποιηθεί διδακτικά, παρόλο που αυτό δεν ήταν στις αρχικές προθέσεις του συγγραφέα. Επίσης αναφέρει ότι είδε μερικά πάρα πολύ πρωτότυπα και εντυπωσιακά πράγματα, ειδικά στον Αχμές, που καθώς φαίνεται είναι ένα έργο που προσφέρεται πάρα πολύ.

Πραγματικά, με μια περιήγηση στο διαδίκτυο μπορεί να βρει κανείς πολλές δράσεις που συνδέονται με την αξιοποίησή του. Μερικές από αυτές σημειώνουμε ενδεικτικά παρακάτω:

- Παιχνίδι κάλυψης επιφανειών με πλακάκια διαφόρων σχημάτων.
- Σχεδιασμός επιτραπέζιου παιχνιδιού εμπνευσμένο από τον Αχμές, προσπαθώντας κατά κάποιον τρόπο να αναπαραχθεί το «σκυλιά και τσακάλια», αυτό το μυστηριώδες αιγυπτιακό παιχνίδι, που δεν ξέρουμε ακριβώς πώς παιζόταν.
- Κατασκευές και εργασίες, όπως παζλ με στοιχεία από την ιστορία της Αιγύπτου, τα φαγητά της αρχαίας Αιγύπτου, σχέδια με τους φαραώ και τις πυραμίδες της Αιγύπτου.
- Παρουσίαση με τις πυραμίδες της Αιγύπτου.

- Κρεμαστό διακοσμητικό (μόμπιλε) με χάρτινες πυραμίδες και τετράεδρα που οι μαθητές κατασκεύασαν.
- Συγκέντρωση και παρουσίαση σημαντικών πληροφοριών για την αρχαία Αίγυπτο (γεωγραφική θέση, χάρτης, θρησκευτικά στοιχεία, τέχνη, αρχιτεκτονική, ιατρική, τεχνολογία, καθημερινές συνήθειες, ταφικά έθιμα) και σύγκριση πτυχών του αιγυπτιακού πολιτισμού με αντίστοιχες πτυχές του αρχαιοελληνικού πολιτισμού.
- Παρουσίαση της ιερατικής και της ιερογλυφικής γραφής των αρχαίων Αιγυπτίων και γραφή ονομάτων των μαθητών με σύμβολα από διαφορετικά αρχαία αλφάβητα (ιερογλυφικά, γραμμική Β, αρχαϊκό αλφάβητο).
- Παρουσίαση πληροφοριών σχετικά με τους γραφείς, την κοινωνική τους θέση, την εκπαίδευσή τους.
- Σύντομο βιογραφικό σημείωμα για τον Θαλή τον Μιλήσιο και υπολογισμός του ύψους της πυραμίδας του Χέοπος με την τεχνική που χρησιμοποίησε ο ίδιος ο Θαλής (αν και δεν μας είναι γνωστή με ακρίβεια).
- Εισαγωγή στις μονάδες μέτρησης μήκους των αρχαίων Αιγυπτίων.
- Γνωριμία με τα αρχαία αιγυπτιακά μαθηματικά και τις πηγές τους (πάπυρος Rhind, πάπυρος της Μόσχας, πάπυρος Kahun), καθώς και παραδείγματα με παραστάσεις αριθμών, αριθμητικών πράξεων (πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση), κλασμάτων και τμημάτων από το Μάτι του Ώρου.
- Παρουσίαση λυμένων προβλημάτων από τον πάπυρο του Αχμές.
- Το Πυθαγόρειο Θεώρημα στην ιστορία των πολιτισμών (ευρωπαϊκή παράδοση, ελληνικός πολιτισμός, Άραβες, Βαβυλώνιοι, Κινέζοι, Ινδοί).
- Στοιχεία για τους Έλληνες πρόσφυγες και μετανάστες σε διάφορες ιστορικές περιόδους, με αφορμή την ιστορία του Άμανθυ, που βρέθηκε πρόσφυγας και αυτός στην Αίγυπτο.
- Ηχοϊστορίες, όπου ένας μαθητής διαβάζει/αφηγείται κομμάτι του βιβλίου και οι άλλοι μαθητές της ομάδας, βέβαια με καθοδήγηση εκπαιδευτικού που έχει και μουσική παιδεία, παράγουν ήχους με ευτελή υλικά (όπως κονσερβοκούτια, μπουκάλια με χαλίκια) που ντύνουν την αφήγηση.
- Χορευτικό δρώμενο με θέμα την ιστορία του Αχμές.

4.5. Προτάσεις για διδακτικές παρεμβάσεις.

Από όσα προαναφέρθηκαν διαπιστώνεται, κυρίως στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση μέσα από τις ερευνητικές εργασίες των μαθητών και τις Λέσχες Ανάγνωσης, μια προσπάθεια και στη χώρα μας για εναλλακτική προσέγγιση στη διδασκαλία των Μαθηματικών που θα κινητοποιεί και θα εμπλέκει τους μαθητές αλλάζοντας ταυτόχρονα και την οπτική τους απέναντι σε ένα αντικείμενο το οποίο συχνά συνδέεται με αρνητικά συναισθήματα. Στο πλαίσιο αυτό η αξιοποίηση της Μαθηματικής Λογοτεχνίας και της Ιστορίας των Μαθηματικών προβάλλει μέσα από τη διαθεματική προσέγγιση που θέτουν τα Προγράμματα Σπουδών ως πολύτιμο εργαλείο και αρωγός στη Μαθηματική Εκπαίδευση.

Αντίθετα, στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση παρατηρείται έλλειμμα, όπως και από την προσωπική μας εμπειρία προκύπτει, στον σχεδιασμό και την υλοποίηση ανάλογων πρωτοβουλιών. Για το λόγο αυτό κρίνουμε σκόπιμο **να παραθέσουμε ενδεικτικά κάποιες προτάσεις για διδακτικές παρεμβάσεις,** οι οποίες θα μπορούσαν να εφαρμοστούν σε μαθητές μικρότερων ηλικιών, όπως οι μαθητές του Δημοτικού, αξιοποιώντας την Ιστορία των Μαθηματικών και τη Λογοτεχνία μέσα από αποσπάσματα του βιβλίου «Αχμές ο γιος του φεγγαριού», ένα έργο λογοτεχνικής μυθοπλασίας που στηρίχθηκε στην ιστορική εξέλιξη των αρχαίων αιγυπτιακών μαθηματικών, όπως έχουμε ήδη προαναφέρει.

Όπως ο Μιχαηλίδης (2019, ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ) σημειώνει, το βιβλίο, παρόλο που αρχικά δεν γράφτηκε για αυτό το σκοπό, είναι απόλυτα εκμεταλλεύσιμο εκπαιδευτικά σε μικρότερες ηλικίες, σε μαθητές Δημοτικού, γιατί αναφέρεται σε έννοιες μαθηματικές οι οποίες συνδέονται με την εποχή που γεννιόντουσαν τα εμπειρικά μαθηματικά, συνάδει δηλαδή με την περίοδο που θέλουμε να προσεγγίσουν και οι μαθητές του Δημοτικού τα Μαθηματικά εμπειρικά. Επίσης, καθώς είναι μια ιστορία που ακολουθεί ένα παιδάκι από την κούνια μέχρι τα βαθιά γεράματα, βοηθάει τους μαθητές που διαβάζουν αυτή την ιστορία να ταυτίζονται κιόλας.

Αξίζει να επισημάνουμε, επίσης, ότι **πέρα από τους επιμέρους διδακτικούς στόχους στις αντίστοιχες διδακτικές ενότητες**, όπως αυτοί αναφέρονται στο αναλυτικό πρόγραμμα και στα βιβλία των εκπαιδευτικών, **θα θέλαμε να εστιάσουμε κυρίως**:

- στη διέγερση του ενδιαφέροντος των μαθητών για τα Μαθηματικά, χρησιμοποιώντας ως εφαλτήριο την αφήγηση και την Ιστορία των Μαθηματικών μέσα από ένα λογοτεχνικό έργο.
- στη στάση των μαθητών, προκειμένου να δουν τα Μαθηματικά ως μια συναρπαστική, πολιτιστική και ανθρώπινη δραστηριότητα και να τα κάνουν να συνδεθούν με αυτά μέσα από νέους τρόπους.
- στη σύγκριση παλαιότερων και σύγχρονων τρόπων για υπολογισμούς και επίλυση προβλημάτων.
- στην ανάπτυξη ευκαιριών για μαθηματική συζήτηση μέσα από τη χρήση στοιχείων της Ιστορίας των Μαθηματικών.
- στη δυνατότητα να αντιληφθούν οι μαθητές ότι τα Μαθηματικά αναπτύσσονται και εξελίσσονται μέσα σε συγκεκριμένο ιστορικό, κοινωνικό και γεωγραφικό πλαίσιο για να εξυπηρετήσουν συγκεκριμένες ανθρώπινες ανάγκες.

<u>Α. Η πρώτη πρότασή μας για διδακτικές παρεμβάσεις συνδέεται με το απόσπασμα που αναφέρεται στο πρώτο μάθημα της Αριθμητικής στο σχολείο του Ονέχ (σελ. 58-60 του βιβλίου)</u>, απευθύνεται σε μαθητές της Γ΄και Δ΄ τάξης (αλλά και της Ε΄ με κάποιες τροποποιήσεις) και αφορά τη γνωριμία με το αριθμητικό σύστημα των αρχαίων Αιγυπτίων.

Σε συνέχεια της γνωριμίας με τα αριθμητικά συστήματα των αρχαίων Ελλήνων και των Ρωμαίων (που έχουν ήδη διδαχθεί από το εγχειρίδιο της Γ΄ Δημοτικού), οι μαθητές θα μπορούσαν να γνωρίσουν το αιγυπτιακό σύστημα γραφής των αριθμών. Μέσα από την ανάγνωση του συγκεκριμένου αποσπάσματος ο εκπαιδευτικός μπορεί να κινητοποιήσει το ενδιαφέρον των μαθητών σχετικά με την εκπαίδευση στην αρχαία

Αίγυπτο. Έτσι οι μαθητές, χωρισμένοι σε ομάδες, θα μπορούσαν (σε συνεργασία και με τον εκπαιδευτικό της Πληροφορικής), να αναζητήσουν στο διαδίκτυο, να συλλέξουν και να παρουσιάσουν πληροφορίες για τη γραφή στην αρχαία Αίγυπτο, για την εκπαίδευση και για το επάγγελμα των γραφέων, καθώς και για τα αρχαία αιγυπτιακά σύμβολα των αριθμών. Επίσης θα μπορούσαν να εμπλακούν στη διαδικασία ερμηνείας αυτών των αριθμητικών συμβόλων και με τη βοήθεια ενός εικονικού πληκτρολογίου (σε σύνδεση με τον ιστότοπο https://discoveringegypt.com/), χρησιμοποιώντας αρχαία αιγυπτιακά σύμβολα, να πειραματιστούν με τη γραφή διάφορων αριθμών.

Επιπλέον στο μάθημα των Εικαστικών θα μπορούσαν να εκτυπώσουν, να χρωματίσουν και να πλαστικοποιήσουν καρτέλες με τα αριθμητικά σύμβολα των αρχαίων Αιγυπτίων για να τις χρησιμοποιήσουν σε διάφορες δραστηριότητες, όπως να τραβά κάθε ομάδα ή κάθε παίκτης μια καρτέλα με έναν αριθμό γραμμένο στο δικό μας αριθμητικό σύστημα και να τον σχηματίζει χρησιμοποιώντας τις καρτέλες με τα αρχαία αιγυπτιακά σύμβολα, παίρνοντας και τους αντίστοιχους πόντους που θα έχουν συμφωνήσει για το παιχνίδι.

Μέσα από τη γνωριμία με τα αριθμητικά συστήματα των αρχαίων λαών μπορούν οι μαθητές, καθοδηγούμενοι με κατάλληλη συζήτηση, να οδηγηθούν στη διαπίστωση ότι τα αριθμητικά σύμβολα, τα οποία χρησιμοποιούμε και μαθαίνουμε από την Α΄ Δημοτικού για να γράφουμε τους αριθμούς και να κάνουμε τις πράξεις, κρύβουν μέσα τους μια ιστορία χιλιάδων αιώνων. Επιπλέον, ότι οι αρχαίοι λαοί είχαν τα δικά τους συστήματα αρίθμησης, χρησιμοποιούσαν σύμβολα για να απεικονίσουν αριθμούς και να λύσουν τα καθημερινά προβλήματα υπολογισμών και ότι οι αριθμοί που χρησιμοποιούμε σήμερα προέρχονται από τους Άραβες οι οποίοι τους εξέλιξαν, αφού τους πήραν από τους Ινδούς.

Οι δυσκολίες που βιώνουν οι μαθητές του Δημοτικού Σχολείου σχετικά με την κατανόηση της δομής του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης έχουν καταγραφεί από αρκετούς ερευνητές (Cobb & Wheatley, 1988; Fuson, 1992; Καφούση & Ντζιαχρήστος, 1998). Το βασικό συμπέρασμα αυτών των ερευνών είναι ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν τους φυσικούς αριθμούς και τις τεχνικές των πράξεων ως ένα σύνολο συμβόλων χωρίς νόημα. Για παράδειγμα μπορούν να εκτελέσουν με επιτυχία τους τυπικούς αλγόριθμους των πράξεων, αλλά δεν φαίνεται να κατανοούν την ομαδοποίηση των μονάδων μιας τάξης για τη δημιουργία μονάδων μεγαλύτερης τάξης.

Μπορούν, λοιπόν, οι μαθητές να προσπαθήσουν να κάνουν προσθέσεις γράφοντας το άθροισμα που προκύπτει με τα αρχαία αιγυπτιακά σύμβολα, κατανοώντας έτσι καλύτερα και την έννοια αυτού που ονομάζουμε κρατούμενο, αφού δέκα σύμβολα μιας τάξης θα πρέπει να τα αντικαθιστούν με το σύμβολο της αμέσως επόμενης τάξης. Μέσα από συζήτηση στις ομάδες θα μπορούσαν να οδηγηθούν στη διαπίστωση ότι οι αρχαίοι Αιγύπτιοι πραγματοποιούσαν την πρόσθεση ευκολότερα συγκριτικά με το σημερινό τρόπο, αφού βασίζονταν στην αντικατάσταση συμβόλων, χωρίς να χρειάζεται να απομνημονεύουν αθροίσματα και κρατούμενα.

Η Καφούση (2002) επισημαίνει στην εργασία της ότι κατά την ενασχόληση των μαθητών με δραστηριότητες που αφορούσαν την εκτέλεση πράξεων σε διαφορετικά συστήματα αρίθμησης, δόθηκε η ευκαιρία να συνειδητοποιήσουν τη σημασία του «κρατούμενου» κατά την εκτέλεση της διαδικασίας της πρόσθεσης, όταν τους ζητήθηκε να κάνουν συγκρίσεις σε σχέση με τον τυπικό αλγόριθμο της πρόσθεσης στο δικό μας σύστημα αρίθμησης.

Επίσης μπορούν οι μαθητές να συζητήσουν, παίρνοντας αφορμή και πάλι από το συγκεκριμένο απόσπασμα του βιβλίου, για τα χαρακτηριστικά του δικού μας αριθμητικού συστήματος, το οποίο είναι:

- Ψηφιακό: οι μονάδες του παριστάνονται με διαφορετικά σύμβολα και όχι με επανάληψη του ίδιου συμβόλου.
- Δεκαδικό: κάθε φορά που συμπληρώνονται δέκα μονάδες δημιουργείται μια μονάδα ανώτερης τάξης.
- Θεσιακό: η αξία του κάθε ψηφίου καθορίζεται από τη θέση του μέσα στον αριθμό.
- Επιπλέον χρησιμοποιεί το «μηδέν» και για τη γραφή των δεκαδικών χρησιμοποιεί την υποδιαστολή.

Οι μαθητές μπορούν να συγκρίνουν αυτά τα συστήματα γραφής των αριθμών που έχουν γνωρίσει, να συζητήσουν για τα μειονεκτήματα που αυτά παρουσιάζουν σε σχέση με το αραβικό σύστημα που εμείς χρησιμοποιούμε (πολλά σύμβολα, απουσία μηδενός) και να διαπιστώσουν την αναγκαιότητα χρήσης ενός μικρού αριθμού απλών συμβόλων που πρέπει να χαρακτηρίζει ένα σύστημα αρίθμησης προκειμένου να υπάρχει οικονομία στη γραφή των αριθμών **Ενδεικτικά παραθέτουμε και ένα φύλλο εργασίας αντίστοιχο με κάποιες από τις προτεινόμενες δραστηριότητες ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1.**

Θα προτείναμε ακόμα να χωριστούν οι μαθητές σε ομάδες και, σε μια διαθεματική προσέγγιση με το μάθημα της Ιστορίας, να δημιουργήσουν δικούς τους διαλόγους για ένα θεατρικό δρώμενο στο οποίο να παραλαμβάνουν και να καταγράφουν εμπορεύματα (κρασί, λάδι, σιτηρά, μεταλλεύματα) που προέρχονται από διάφορα λιμάνια των αρχαίων λαών της Μεσογείου και έχουν φορτωθεί χρησιμοποιώντας στην καταγραφή τους το αρχαιοελληνικό, το ρωμαϊκό και το αιγυπτιακό σύστημα αρίθμησης. Με τον τρόπο αυτό μπορούν να διαπιστώσουν τις δυσκολίες από την ύπαρξη διαφορετικών αριθμητικών συστημάτων και συμβόλων στην καταγραφή και τη διακίνηση των εμπορευμάτων. Επιπλέον με κατάλληλη καθοδήγηση οι ομάδες μπορούν να οδηγηθούν σε συζήτηση και σύνταξη επιχειρημάτων για να αναδειχθεί η ανάγκη για την ύπαρξη ενός κοινού συστήματος αρίθμησης ώστε να εξυπηρετούνται καλύτερα οι συναλλαγές και το εμπόριο.

Τα επιθυμητά αποτελέσματα σε αυτό το ηλικιακό επίπεδο έχουν να κάνουν κυρίως την ευκαιρία για εμπλοκή των μαθητών σε μαθηματικές συζητήσεις μέσα από την αφήγηση και τη χρήση στοιχείων της Ιστορίας των Μαθηματικών αλλά και με τη στάση τους, καθώς θέλουμε να δουν τα Μαθηματικά ως μια συναρπαστική, πολιτιστική και ανθρώπινη δραστηριότητα και να τα κάνουν να συνδεθούν με αυτά μέσα από νέους τρόπους. Βέβαια, δεν θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών έχει πάντα θετικά αποτελέσματα, καθώς αυτή θα αποτελεί ένα από τα πολλά στοιχεία που ένας δάσκαλος χρησιμοποιεί ταυτόχρονα για να προσελκύσει τους μαθητές του. Για τον δάσκαλο, ωστόσο, το σημαντικό είναι να βλέπει απλά τους μαθητές να κινητοποιούνται και να συμμετέχουν.

Β. Η δεύτερη πρότασή μας για διδακτικές παρεμβάσεις συνδέεται με το απόσπασμα που αναφέρεται στην τεχνική του αιγυπτιακού πολλαπλασιασμού που ο Κεχεπέρα εξηγεί στον Αχμές (σελ. 80-83 του βιβλίου), απευθύνεται σε μαθητές της Δ΄ τάξης (αλλά και της Ε΄ με κάποιες τροποποιήσεις) και μπορεί να ενταχθεί στη διδασκαλία της ενότητας για τον πολλαπλασιασμό των φυσικών, για παράδειγμα κεφάλαιο 10 «Επιλύω Προβλήματα» (Βαμβακούση, Καργιωτάκης, Μπομποτίνου & Σαΐτης, 2015α).

Ο πολλαπλασιασμός αποτελεί μια πράξη με την οποία οι μαθητές έρχονται σε επαφή από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου, στις οποίες δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στην εκμάθηση της προπαίδειας, που θα αποτελέσει τη βάση για να στηριχθεί στη συνέχεια και η διδασκαλία του αλγόριθμου του πολλαπλασιασμού, της λύσης προβλήματος και άλλων μαθηματικών εννοιών.

Οι Τράχηλου, Χρίστου & Λεμονίδης (2008) αναφερόμενοι στα ευρήματα της σχετικής βιβλιογραφίας, σημειώνουν ότι ο αλγόριθμος του πολλαπλασιασμού εισάγεται, επίσης, σε μικρή ηλικία, μετά την εκμάθηση της προπαίδειας, με στόχο να λύνουν οι μαθητές προβλήματα και ασκήσεις πολλαπλασιαστικής δομής. Συχνά, όμως, στην κατανόηση και στην εκτέλεση του αλγόριθμου του πολλαπλασιασμού οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες, οι οποίες είναι πολλές φορές αποτέλεσμα των παρανοήσεων που τους δημιουργούνται κατά τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού.

Επίσης σημειώνουν ότι σε πολλά σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα υποστηρίζεται πως οι αλγόριθμοι για τις πράξεις δεν πρέπει να διδάσκονται από πολύ νωρίς, προτού οι μαθητές αναπτύξουν τις δικές τους άτυπες μεθόδους υπολογισμού, όπως γινόταν παλαιότερα. Οι μαθητές σήμερα, με βάση τις άτυπες μεθόδους των υπολογισμών τους, οδηγούνται να ανακαλύψουν και να κατανοήσουν τους τυποποιημένους γραπτούς αλγορίθμους που διδάσκονται, τα μειονεκτήματα των οποίων τονίζουν αρκετές μελέτες. Έχει διαπιστωθεί ότι οι μαθητές είναι σε θέση να εφεύρουν μεθόδους υπολογισμού, οι οποίες μπορεί να είναι πιο φυσικές και ενστικτώδεις για τους ίδιους. Ακόμη, πολλές μελέτες συγκλίνουν στο ότι θα πρέπει να ενθαρρύνονται οι μαθητές στην επινόηση και χρήση των δικών τους μεθόδων, επειδή με αυτόν τον τρόπο προωθείται η κατανόηση των αριθμών (Τράχηλου, Χρίστου & Λεμονίδης, 2008).

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στο Α.Π.Σ. των Μαθηματικών για τη Δ΄ Δημοτικού, και στη Θεματική Ενότητα «Αριθμοί και πράξεις» προτείνεται στις ενδεικτικές δραστηριότητες ο τρόπος που οι αρχαίοι Αιγύπτιοι έκαναν τον πολλαπλασιασμό των φυσικών. Επιπλέον στο βιβλίο δασκάλου της Δ΄ Δημοτικού (Βαμβακούση, Καργιωτάκης, Μπομποτίνου & Σαΐτης, 2015β, σ. 52-53) σημειώνεται στις **προτεινόμενες δραστηριότητες η σύνδεση με το μάθημα της Γλώσσας και της Ιστορίας και αναφέρεται:**

> Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι έκαναν τον πολλαπλασιασμό των φυσικών με τον εξής τρόπο: Για να πολλαπλασιάσουν, π.χ. 11 φορές το 23 έβρισκαν το διπλάσιο, τετραπλάσιο, οχταπλάσιο του 23.

Δηλ. 1 φορά το 23 =23

2 φορές το 23=46

4 φορές το 23=92

8 φορές το 23 =184 .

Πρόσθεταν τους 23+46+184=253 διότι το άθροισμα 1+2+8=11. Συζητάμε και εξηγούμε πώς λειτουργεί ο αλγόριθμος του Αιγυπτιακού πολλαπλασιασμού (επιμεριστική ιδιότητα, ανάλυση του 11 σε δυνάμεις του 2). 11x23 = (1+2+8)x23.

Σε συνέχεια μάλιστα του Ελληνικού Πολλαπλασιασμού, τον οποίο έχουν ήδη γνωρίσει οι μαθητές από το εγχειρίδιο της Γ΄ Δημοτικού, που διδάχτηκαν κατά την προηγούμενη σχολική χρονιά, μπορούν να ασχοληθούν με έναν ακόμα διαφορετικό τρόπο πολλαπλασιασμού φυσικών αριθμών.

Σε άρθρο του ο Fisher (2004) κάνει αναφορά στον Αιγυπτιακό πολλαπλασιασμό και τονίζει ότι η τεχνική γύρω από αυτόν τον αλγόριθμο είναι πολύ απλή για να ακολουθηθεί, αφού απλά με το να διπλασιάζουμε, αυτό που δημιουργείται είναι μια σειρά από πίνακες πολλαπλασιασμού ο ένας κάτω από τον άλλο. Στο χαρτί μπορούμε να σχηματίζουμε δύο στήλες, μία στα δεξιά και μία στα αριστερά. Γράφουμε τον αριθμό 1 στην αριστερή στήλη και τον μεγαλύτερο από τους αριθμούς που πρέπει να πολλαπλασιάσουμε στη δεξιά στήλη. Συνεχίζουμε διπλασιάζοντας και τις δύο στήλες μέχρι ο αριθμός στην αριστερή στήλη να είναι μεγαλύτερος από το μισό του μικρότερου αριθμού που πολλαπλασιάζεται. Στη συνέχεια σχηματίζουμε το μικρότερο αριθμό προσθέτοντας τους αριθμούς της αριστερής στήλης, διαγράφουμε όποιους αριθμούς δε μας χρειάζονται από την αριστερή στήλη και τους αντίστοιχους αριθμούς από τη δεξιά στήλη. Προσθέτουμε τους αριθμούς που δεν διαγράψαμε στη δεξιά στήλη και παίρνουμε την τελική απάντηση

Από τους Τράχηλου, Χρίστου & Λεμονίδη (2008) αναφέρεται ότι στην έρευνα που πραγματοποίησαν, οι μαθητές, πριν διδαχθούν τον κάθετο αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού, χρησιμοποίησαν την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση για να απαντήσουν στα έργα του δοκιμίου που τους είχε δοθεί. Η στρατηγική αυτή είναι όμοια με τον αιγυπτιακό πολλαπλασιασμό, ο οποίος θεωρείται ότι είναι συμβατός με τις άτυπες στρατηγικές των μαθητών «του ολόκληρου αριθμού».

Επίσης από την Καφούση (2002) επισημαίνεται ότι μέσα από τη μελέτη του πολλαπλασιασμού των αρχαίων Αιγυπτίων δόθηκε η ευκαιρία στους μαθητές να αναπτύξουν διάφορους τρόπους υπολογισμού γινομένων, να εμβαθύνουν στον τυπικό αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού, ενώ κάποιοι από αυτούς φάνηκε να οικειοποιήθηκαν τη στρατηγική των αρχαίων Αιγυπτίων.

Έτσι, με αφορμή το συγκεκριμένο απόσπασμα από το εν λόγω βιβλίο, οι μαθητές κινητοποιούνται να γνωρίσουν, μαζί με τον Αχμές, τη διαδικασία του αιγυπτιακού πολλαπλασιασμού, έναν από τους τρόπους υπολογισμού που υποβοηθούν τους νοερούς υπολογισμούς, την κατανόηση των μερικών γινομένων και του σύγχρονου αλγόριθμου που χρησιμοποιούμε για τον πολλαπλασιασμό, <u>διαπιστώνοντας ότι πολλά χρόνια πριν οι άνθρωποι είχαν επινοήσει έναν τρόπο διαφορετικό από αυτόν που εμείς σήμερα χρησιμοποιούμε για να πολλαπλασιάζουν</u>. **Προς το σκοπό αυτό**

παραθέτουμε ενδεικτικά και ένα φύλλο εργασίας σχετικό με τον αιγυπτιακό πολλαπλασιασμό ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2.

Γ. Η τρίτη πρότασή μας για διδακτικές παρεμβάσεις συνδέεται με το απόσπασμα που αναφέρεται στην επίλυση προβλημάτων με τη μέθοδο της «αυθαίρετης παραδοχής» (σελ. 119-120 του βιβλίου), απευθύνεται σε μαθητές της ΣΤ΄ τάξης (αλλά και της Α΄ Γυμνασίου με κάποιες τροποποιήσεις) και μπορεί να ενταχθεί στη διδασκαλία της ενότητας για τις εξισώσεις.

Η μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα είναι για τους μαθητές μια δύσκολη διαδικασία, αφού εισάγονται στην ουσία σε ένα καινούργιο χώρο που χρησιμοποιεί το δικό του σύστημα γραφής και διαφορετικό τρόπο σκέψης, συναντώντας πολλές διαφορές από τις γνώσεις που ήδη έχουν αποκτήσει με την Αριθμητική. Φαίνεται ωστόσο πως οι προϋπάρχουσες γνώσεις τους δεν τους βοηθούν να χειριστούν τα γράμματα όπως τους αριθμούς και να κάνουν πράξεις με αυτά, αλλά και να κατανοήσουν τη χρήση (και την ουσία) των συμβόλων που χρησιμοποιούνται ως μεταβλητές στην Άλγεβρα.

Ιδιαίτερα έντονες είναι οι δυσκολίες στην κατανόηση βασικών εννοιών όπως η μεταβλητή, της οποίας οι διαφορετικές χρήσεις στη διδασκαλία (όπου δε διαχωρίζονται και δεν επεξηγούνται κάθε φορά) δημιουργούν στους μαθητές διαφορετικές αντιλήψεις και συγκεχυμένα συμπλέγματα, που για πολύ καιρό παραμένουν ρευστά, με αποτέλεσμα να εμφανίζονται αντιφάσεις και συγχύσεις ως προς τη χρήση της (Δεμίρη et al., 1994). Επιπλέον, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολία στο σχηματισμό ακόμα και μιας απλής εξίσωσης που προκύπτει σε ένα αλγεβρικό πρόβλημα (Kieran, 1992).

Μια άλλη δυσκολία προκύπτει από την παρουσία των συμβόλων, τα οποία αντιμετωπίζονται με διαφορετικό τρόπο στην Αριθμητική από ότι στην Άλγεβρα. Το σύμβολο της ισότητας, για παράδειγμα, εμφανίζεται στην Άλγεβρα με σημασία που δεν είναι συμβατή με τη σημασία του στην Αριθμητική, αφού οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να το ερμηνεύουν όχι μόνο ως ένα σύμβολο που δίνει ένα αποτέλεσμα αλλά ως ταυτότητα, ως μια σχέση ισοδυναμίας ή ως ένα σύμβολο προσδιορισμού ή ορισμού για κάτι που βρίσκεται στα αριστερά του (Cortes et al., 1990).

Ένας ακόμα λόγος για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι είναι η διαφορά στη μέθοδο επίλυσης ενός προβλήματος στην Άλγεβρα από την Αριθμητική. Στην Αριθμητική δε χρειάζεται να δικαιολογήσουν τις διαδικασίες που χρησιμοποιούν για την επίλυση ενός προβλήματος κυρίως γιατί εργάζονται βασιζόμενοι περισσότερο στη διαίσθησή τους και με στόχο να δοθεί μια γρήγορη και τελική αριθμητική απάντηση. Αντίθετα, η επίλυση ενός προβλήματος στην Άλγεβρα (όπου περιλαμβάνεται και η δημιουργία μιας εξίσωσης) απαιτεί έναν αλγοριθμικό τρόπο σκέψης από τους μαθητές, με κανόνες ανεξάρτητους από τα δεδομένα και τις σχέσεις που υπάρχουν στο πρόβλημα, όπως συμβαίνει κατά την αναπαράσταση με εξισώσεις προβλημάτων που δίνονται με λόγια (Λεμονίδης, 1996).

Είναι σημαντικό λοιπόν οι διδάσκοντες να δουν ότι σε ανάλογες περιπτώσεις (όπου οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες κατανόησης εννοιών, συνδεόμενες με τη μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα) η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να δώσει διεξόδους και ιδέες σχετικά με τους στόχους και τους σκοπούς που τίθενται για την παρουσίαση της διδασκαλίας στη σχολική τάξη, αλλά και να αποτελέσει οδηγό για την οργάνωση της διδασκαλίας. Πιο συγκεκριμένα με:

- Πληροφορίες για την ιστορική εξέλιξη της έννοιας και τις δυσκολίες μέχρι τον καθορισμό της
- Υποστήριξη και βοήθεια στην οργάνωση μιας διδασκαλίας που θα είναι κοντά στις δυνατότητες των μαθητών, θα τους εμπλέκει ενεργά, θα προκαλεί το ενδιαφέρον τους και θα τους επιτρέπει να δημιουργούν και να εκφράζουν τις δικές τους σκέψεις και ιδέες.
- Ανάδειξη των εμποδίων που είναι πιθανό να συναντήσουν οι μαθητές και ικανότητα για πρόβλεψη. Επομένως και δυνατότητα για αντιμετώπιση αυτού που στη γλώσσα των μαθητών εκφράζεται με φράσεις όπως «δεν καταλαβαίνω», «είναι δύσκολα», «έχω άγχος», «είναι μπερδεμένα» και λοιπά.
- Βοήθεια και έμπνευση για την ανάπτυξη ενός κατάλληλου διδακτικού πλαισίου, για παράδειγμα μιας δραστηριότητας η οποία όχι μόνο θα προκαλέσει και θα κινητοποιήσει ευχάριστα όλους τους μαθητές, αλλά ίσως πετύχει και μια σημαντική ανατροπή ως προς την αρνητική στάση κάποιων μαθητών για τα Μαθηματικά.

Επίσης, είναι σημαντικό να γίνει αντιληπτό ότι ο διδακτικός σχεδιασμός θα πρέπει να μην περιορίζεται απλώς στην ενσωμάτωση ιστορικών σημειωμάτων ή στην παρουσίαση της λύσης ιστορικών προβλημάτων, αλλά στη χρήση δραστηριοτήτων μέσα από την Ιστορία των Μαθηματικών που αναδεικνύουν τις αρχαίες μαθηματικές πρακτικές που οδήγησαν από την Αριθμητική στις απαρχές της Άλγεβρας με στόχο την ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στο 2ο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας τα αιγυπτιακά μαθηματικά, κατά το μεγαλύτερο μέρος τους, ήταν αριθμητικά με εφαρμογές στη μέτρηση γεωμετρικών σχημάτων. Υπάρχουν όμως σε αυτά μερικά σημεία, τα οποία θεωρήθηκαν πρόδρομοι σε θέματα που, σύμφωνα με τα σύγχρονα μαθηματικά, εμπίπτουν στον τομέα της Άλγεβρας. Πρόκειται για προβλήματα όπου εμφανίζεται μια άγνωστη ποσότητα και είναι γνωστά ως προβλήματα "aha", επειδή αρχίζουν συχνά με την αιγυπτιακή λέξη ꜥḥꜥ. Η λέξη αυτή πιθανώς σημαίνει «την ποσότητα» (που ζητείται να βρεθεί) και είχε προταθεί να προφέρεται "hau" και αργότερα "aha" (Van der Waerden, 1961).

Τα προβλήματα, για τα οποία θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ο όρος αλγεβρικά, δεν αναφέρονται σε συγκεκριμένα αντικείμενα, όπως το ψωμί και ο ζύθος, ούτε ζητούν πράξεις με γνωστούς αριθμούς. Αντίθετα, απαιτούν κάποιες λύσεις αντίστοιχες των γραμμικών εξισώσεων του τύπου $x + ax = b$ ή $x + ax + bx = c$, όπου οι a, b και c είναι γνωστοί και ο x είναι άγνωστος. Ο άγνωστος αναφέρεται ως "aha" ή ποσότητα. Η λύση αυτών των προβλημάτων στον πάπυρο δεν μοιάζει με αυτή των σύγχρονων εγχειριδίων, αλλά με τη διαδικασία που είναι γνωστή ως μέθοδος της «αυθαίρετης παραδοχής» και χρησιμοποιούνταν από τους μαθηματικούς της δυτικής Ευρώπης για μεγάλο χρονικό διάστημα. Μια συγκεκριμένη τιμή επιλέγεται για την ποσότητα, κατά πάσα πιθανότατα μια λανθασμένη, και στη συνέχεια με αυτή την τιμή στη θέση του αγνώστου εκτελούνται οι πράξεις που αναγράφονται στην αριστερή πλευρά της ισότητας. Το αποτέλεσμα αυτών των πράξεων συγκρίνεται με το ζητούμενο αποτέλεσμα και με τη χρήση των αναλογιών οδηγείται στη σωστή απάντηση.

Οι μαθητές λοιπόν με αφορμή το σχετικό απόσπασμα μπορούν να ασχοληθούν με τα προβλήματα, όπως αυτά παρουσιάζονται στο βιβλίο, και με τον τρόπο του «βολικού αριθμού» που χρησιμοποιούσε ο Αχμές για να τα λύσει. Έτσι γνωρίζουν έναν τρόπο επίλυσης, διαφορετικό από αυτόν που παρουσιάζουν τα σχολικά εγχειρίδια, περισσότερο θα λέγαμε ρητορικό, που βασιζόταν στην καταγραφή των συλλογισμών του λύτη, οι οποίοι βήμα βήμα οδηγούσαν στη λύση. Με την κατάλληλη καθοδήγηση και μέσα από συζήτηση στις ομάδες διαπιστώνουν ότι από πολύ παλιά οι άνθρωποι ασχολήθηκαν με διαχείριση προβληματικών καταστάσεων που απαιτούσαν τον υπολογισμό άγνωστων αριθμών/ ποσοτήτων. Επίσης διαπιστώνουν ότι σε εκείνη τη μακρινή εποχή δεν χρησιμοποιούνταν τα σύμβολα (μεταβλητή, σύμβολα πράξεων) που εμείς σήμερα χρησιμοποιούμε για τους υπολογισμούς.

Στη συνέχεια μπορούν να επιχειρήσουν τη λύση των προβλημάτων χρησιμοποιώντας μεταβλητή και τον σύγχρονο συμβολισμό που έχουν διδαχθεί. Επιπλέον θα μπορούσαν να ασχοληθούν με την επίλυση ενός αντίστοιχου προβλήματος χρησιμοποιώντας και τους δύο τρόπους, αυτόν που προτείνει ο Αχμές και τον σύγχρονο. Αυτό θα μπορούσε να αποτελέσει και μια πρώτης τάξεως ευκαιρία για να συγκρίνουν οι μαθητές τους τρόπους επίλυσης και να συζητήσουν σχετικά με τα πλεονεκτήματα (συντομία, ευελιξία, ακρίβεια) που μας προσφέρουν οι σύγχρονοι συμβολισμοί. Ακόμα θα άξιζε να εστιάσουμε στο σημείο όπου ο Αχμές έσπευσε να υποστηρίξει τη λύση που είχε προτείνει κάνοντας στην ουσία επαλήθευση. Διαπιστώνεται έτσι ένα ακόμα σημαντικό βήμα στην ανάπτυξη των Μαθηματικών, όπου η επαλήθευση αποτελεί μια απλή περίπτωση απόδειξης. **Ενδεικτικά παραθέτουμε και ένα φύλλο εργασίας αντίστοιχο με κάποιες από τις προτεινόμενες δραστηριότητες ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3.**

Η συγκεκριμένη διδακτική πρόταση συνδέεται με δύο πολύ σημαντικά και κρίσιμα ζητήματα της Μαθηματικής Εκπαίδευσης που αφορούν τη μετάβαση των μαθητών από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο, αλλά και το πέρασμα από την Αριθμητική στην Άλγεβρα. Παρά τις όποιες επιφυλάξεις μπορεί να διατυπωθούν σχετικά με την πληθώρα της ύλης, την έλλειψη χρόνου και πόρων, αξίζει να αναζητήσουμε τρόπους και να επενδύσουμε μέσω της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών γιατί τα οφέλη είναι μακροπρόθεσμα, αφού οι μαθητές κινητοποιούνται, αποκτώντας μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά, αλλά τίθενται και κάποια σπέρματα προβληματισμού για τη συλλογιστική και τη χρησιμότητα της άλγεβρας.

Ανάλογες διδακτικές παρεμβάσεις θα μπορούσαν, βέβαια, να σχεδιαστούν με αφορμή και άλλα αποσπάσματα από το συγκεκριμένο λογοτεχνικό έργο όπου μπορούμε να εντοπίσουμε διάφορες αξιοποιήσιμες ιστορικές αναφορές, όπως ο αριθμός του κύκλου (αριθμός π), οι αρπεδονάπτες με τις μετρήσεις τους, το αιγυπτιακό ημερολόγιο και άλλα. Επισημαίνοντας, βέβαια, ότι το ζητούμενο δεν είναι αυτές να γίνονται σε όλη την έκταση της ύλης αλλά επιλεκτικά και στοχευμένα, προκειμένου να επιτευχθούν τα καλύτερα αποτελέσματα στη διδασκαλία συγκεκριμένων μαθηματικών θεμάτων.

Επιπλέον, αξίζει να υπογραμμίσουμε ότι από όσα προαναφέρθηκαν προβάλλει αναντίρρητα επιτακτική η ανάγκη για επιμόρφωση των εκπαιδευτικών ώστε να είναι σε θέση να οργανώσουν και να χειριστούν παρόμοιες διδακτικές καταστάσεις, καθώς έτσι διευρύνεται η γνώση τους για τη διδασκαλία μαθηματικών θεμάτων που συνδέονται με το εκάστοτε τρέχον πρόγραμμα σπουδών, αλλά παράλληλα ενισχύεται και η προετοιμασία τους για την αποδοχή και διαχείριση μελλοντικών αλλαγών στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών (Smestad, Jankvist, & Clark, 2014).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

Συζήτηση – Συμπεράσματα – Προτάσεις.

Το ελληνικό σχολείο αναλώνεται στην πολυγνωσία, αποδίδοντας δευτερεύουσα σημασία στην ανάπτυξη δεξιοτήτων σκέψης των μαθητών, την προώθηση της γνωστικής αυτονομίας τους και τις διαδικασίες που βοηθούν στην καλλιέργεια της ανθρώπινης επικοινωνίας. Χωρίς αμφιβολία, στην εποχή μας, που χαρακτηρίζεται από την υπερπληροφόρηση, την έντονη παρέμβαση της τεχνολογίας και των μηχανισμών αποξένωσης, το ζητούμενο είναι η δημιουργία κατάλληλων συνθηκών που ευνοούν τις επικοινωνιακές σχέσεις, αλλάζουν το κλίμα και την καθημερινή ζωή στο σχολείο.

Με αφετηρία τις διαπιστώσεις των ερευνητικών δεδομένων για την αναποτελεσματικότητα της κυρίαρχης πρακτικής στη διδασκαλία των Μαθηματικών και στο πλαίσιο της αναζήτησης εναλλακτικών προσεγγίσεων, οι οποίες θα αξιοποιούν μαθησιακά τις απεριόριστες δυνατότητες της ανθρώπινης φαντασίας και θα εμπλέκουν ενεργά τους μαθητές στην κατάκτηση της γνώσης, εξετάσαμε νέες διαδρομές με όχημα τη Λογοτεχνία και την Ιστορία των Μαθηματικών, προκειμένου ένα αντικείμενο όπως τα Μαθηματικά, που από πολλούς θεωρούνται κατ' εξοχήν δύσκολο, να αποκτήσουν έναν ανθρώπινο, προσιτό και γιατί όχι ελκυστικό χαρακτήρα.

Από τα στοιχεία που παραθέσαμε, ανάμεσα στα Μαθηματικά και τη Λογοτεχνία, δυο κόσμους που θεωρούνταν διαφορετικοί, φαίνεται να αναδεικνύεται μια σχέση συμπληρωματική αλλά και μια σχέση αμφίδρομη. Ο αφηγηματικός τρόπος σκέψης συμπληρώνει το λογικο-επιστημονικό και η λογοτεχνική γλώσσα επιδρά στην κατανόηση της μαθηματικής γλώσσας, αφού η μαθηματική σκέψη συμβάλλει στη σύλληψη του «μηνύματος» που βρίσκεται πίσω από τον φανταστικό - μυθιστορηματικό κόσμο. Στον ενδιάμεσο χώρο μεταξύ των Μαθηματικών και της Λογοτεχνίας μπορούν να αναδειχθούν τα κοινά τους στοιχεία, καθώς η χρήση των Μαθηματικών στην αφήγηση ιστοριών και η χρήση ιστοριών για την εξήγηση των Μαθηματικών είναι δύο πλευρές του ίδιου νομίσματος. Η αναζήτηση και η επιδίωξη της αισθητικής, της αρμονίας, του ωραίου, η δημιουργικότητα, η ανάπτυξη της σκέψης και της φαντασίας, κυρίως μέσα από τη χρήση του αναλογικού συλλογισμού, μπορούν να θεωρηθούν τα βασικά κοινά χαρακτηριστικά των Μαθηματικών και της Λογοτεχνίας. Επιχειρώντας την κατανόηση μιας νέας έννοιας μέσα από τη σύγκρισή της με μια άλλη έννοια, ήδη γνωστή και κατανοητή, οι άνθρωποι κάνουν χρήση της μεταφοράς και στα Μαθηματικά και στη Λογοτεχνία.

Η αξιοποίηση της Λογοτεχνίας στη Μαθηματική Εκπαίδευση αναδεικνύει ότι Μαθηματικά και Λογοτεχνία δε δρουν ανταγωνιστικά μεταξύ τους. Αντίθετα, αποτελούν δύο συμπληρωματικούς τρόπους για να φτάσει κανείς στον ίδιο προορισμό, στην αναζήτηση και εξερεύνηση του άγνωστου, του ακατανόητου. Μέσα από τον κατάλληλο χειρισμό της γλώσσας, δυνατότητα που προσφέρει η Λογοτεχνία, οι μαθηματικές έννοιες γίνονται πιο κατανοητές για τους μαθητές, ενώ ταυτόχρονα τα Μαθηματικά δανείζουν χαρακτηριστικά από τη δική τους γλώσσα στη Λογοτεχνία. Η Λογοτεχνία δημιουργεί ευκαιρίες για την προσέγγιση, ενσωμάτωση και εξέταση των Μαθηματικών μέσα από ενδιαφέροντα συμφραζόμενα και προσφέρει στο μάθημα των Μαθηματικών τη χαμένη συναισθηματική παράμετρο, την ανθρώπινή τους διάσταση, που χάνεται μέσα από την προσήλωση σε αριθμητικές πράξεις, περίπλοκους υπολογισμούς και σύμβολα.

Η σύνδεση Λογοτεχνίας και Μαθηματικών μέσα στην τάξη μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές στην επέκταση της γνώσης και της προσωπικής εμπειρίας, στην επανεξέταση και αναθεώρηση ή απόρριψη του τρόπου σκέψης τους, στην απόκτηση «ειδικών» γνώσεων. Επίσης δραστηριότητες που βασίζονται σε λογοτεχνικά κείμενα μπορούν να αξιοποιηθούν ώστε να επεκτείνουν τη φυσική περιέργεια των μαθητών, να τους ενθαρρύνουν στην αναζήτηση νοήματος, να συνεισφέρουν στον εμπλουτισμό του λεξιλογίου τους, να ενθαρρύνουν την αισθητική εκτίμηση των Μαθηματικών και να βοηθούν στην ανάπτυξη νέων τρόπων σκέψης για τον κόσμο τους.

Στο πλαίσιο, λοιπόν, του προβληματισμού σχετικά με τη **δυνατότητα υλοποίησης μιας διαφορετικής διδακτικής προσέγγισης στην εκπαιδευτική πράξη μέσω της σύζευξης Μαθηματικών και Λογοτεχνίας** αναφέρονται κάποιες προϋποθέσεις, όπως: μια διαφορετική από την κυρίαρχη σήμερα θεώρηση της μάθησης (που θα αντιμετωπίζει τις συναισθηματικές λειτουργίες όχι μόνο ως ισότιμες, αλλά ως προϋποθέσεις για την ανάπτυξη των γνωστικών λειτουργιών), μια διαφορετική από την επικρατούσα προσέγγιση των Μαθηματικών (ως επιστημονικής πρακτικής και σχολικής γνώσης), μια διαφορετική αντιμετώπιση της ανάγνωσης κειμένων και του ρόλου της στη μάθηση των Μαθηματικών.

Μέσα από τα κείμενα, όμως, συχνά αναδεικνύεται μια ακόμη παράμετρος και ο ρόλος της στη Μαθηματική Εκπαίδευση, που δεν είναι άλλη από την Ιστορία των Μαθηματικών. Με κυρίαρχη ιδέα τη χρήση της ιστορίας ως μέσο για να κινητοποιηθούν οι μαθητές, προκειμένου να ασχοληθούν με ορισμένες μαθηματικές έννοιες και να επιτευχθούν ποικίλοι διδακτικοί στόχοι, αναπτύχθηκαν διάφορες απόψεις σχετικά με την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη, τους λόγους και τους τρόπους αξιοποίησής της, αλλά και τη δυνατότητα των εκπαιδευτικών που διδάσκουν Μαθηματικά να ανταπεξέλθουν στο ρόλο αυτό.

Η ιστορική διάσταση στη Μαθηματική Εκπαίδευση συνδέεται με την αξιοποίηση της ιστορίας είτε ως εργαλείο, παρέχοντας βοηθητικά μέσα στην καθημερινή διδακτική διαδικασία του μαθήματος των Μαθηματικών, είτε ως στόχος, δίνοντας έμφαση στην ανάπτυξη και εξέλιξη των Μαθηματικών ως ανεξάρτητο επιστημονικό αντικείμενο. Η ιστορική προσέγγιση συνεισφέρει στη διδασκαλία με διάφορους τρόπους: στο επίπεδο της εισαγωγής νέων μαθηματικών εννοιών, στην ανάδειξη της εσωτερικής δομής των Μαθηματικών, στην αποκάλυψη των παραγόντων, κοινωνικών και πολιτισμικών, που επηρέασαν ιστορικά την εξέλιξη και διαμόρφωση των μαθηματικών αντικειμένων, στη δημιουργία κινήτρων και θετικών στάσεων των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά. Έτσι, τα Μαθηματικά αποκτούν μια διάσταση πιο ανθρώπινη, καθώς η εκμάθησή τους δεν περιορίζεται μόνο στη γνώση των διάφορων θεωριών και συμβόλων και στη συσσώρευση τελικών γνώσεων. Οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν τα λάθη, τις αμφιβολίες και τις εικασίες ως μέρος της μαθηματικής δημιουργίας, ώστε να μην απογοητεύονται από αυτά. Μπορούν, επίσης, να αναγνωρίσουν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της σύγχρονης μορφής των Μαθηματικών σε σχέση με παλαιότερες μορφές τους. Ακόμα, η ιστορική διάσταση προσφέρει στους μαθητές πολλές ευκαιρίες να γνωρίσουν τους αρχαίους πολιτισμούς και μέσα από αυτούς ποικίλες κοινωνικές δομές, τους ενθαρρύνει να κατανοήσουν και να αξιολογήσουν τον τρόπο που τα Μαθηματικά αναπτύχθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν στο πλαίσιο διάφορων πολιτισμών μέσα στην πορεία του χρόνου, αποκαλύπτει τις συσχετίσεις μεταξύ των Μαθηματικών και των άλλων επιστημονικών περιοχών, βοηθώντας παράλληλα και στην ανάπτυξη ερευνητικών δεξιοτήτων. Από την πλευρά των εκπαιδευτικών η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να βοηθήσει στον εμπλουτισμό του διδακτικού τους ρεπερτορίου με εναλλακτικούς τρόπους για προσέγγιση και διδασκαλία ενός θέματος, στην εύρεση τρόπων για κινητοποίηση των μαθητών τους, στην πρόβλεψη και ερμηνεία των λαθών που οι μαθητές κάνουν, στον εντοπισμό τυχόν δυσκολιών και εμποδίων που μπορεί να εμφανιστούν στην τάξη, καθώς και των τρόπων με τους οποίους μπορούν αυτά να ξεπεραστούν, αλλά και στην ανακάλυψη και επιλογή αποτελεσματικών στρατηγικών διδασκαλίας, ειδικά όσον αφορά τη χρήση των μαθηματικών εργαλείων και γενικότερα του μαθηματικού υλικού. Μέσα από την Ιστορία των Μαθηματικών, τέλος, μπορεί να γίνει κατανοητό, ότι τα Μαθηματικά αποτελούν μέρος της τοπικής πολιτιστικής παράδοσης (παρόλο που σήμερα θεωρούνται συχνά αποτέλεσμα του δυτικού πολιτισμού) και ότι η εξέλιξή τους συνδέεται τόσο με εσωτερικούς λόγους, διανοητικής περιέργειας και καθαρής ευχαρίστησης όσο και με πρακτικούς λόγους, εξυπηρέτησης συγκεκριμένων αναγκών (κάτω από την επίδραση συγκεκριμένων κοινωνικών και πολιτιστικών παραγόντων).

Από τη μελέτη της βιβλιογραφίας καταγράφηκε ότι από τη συζήτηση που διεξάγεται για την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία διατυπώθηκαν και ορισμένες αντιρρήσεις. Αυτές μπορεί να είναι επιστημολογικού κυρίως χαρακτήρα, που υποστηρίζουν πως η ιστορία δεν είναι Μαθηματικά και πως δεν υπάρχει λόγος να ασχολείται κανείς με τα περίπλοκα πράγματα που μπορεί να έγιναν στο παρελθόν. Αυτά μπορεί να προκαλέσουν σύγχυση στους μαθητές, οι οποίοι δεν έχουν, κυρίως σε μικρότερες ηλικίες, καλή αίσθηση του παρελθόντος, και αν η χρήση της ιστορίας δεν γίνει σωστά, μπορεί να οδηγήσει μέχρι και στην καλλιέργεια πολιτισμικού σωβινισμού. Επίσης, υπάρχουν και αντιρρήσεις καθαρά πρακτικού και διδακτικού χαρακτήρα, που υποστηρίζουν ότι ο χρόνος στα προγράμματα σπουδών συνήθως είναι ήδη περιορισμένος, ότι οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν την κατάλληλη επιμόρφωση για να διαχειριστούν με αυτοπεποίθηση το εν λόγω θέμα, ότι το διαθέσιμο υλικό είναι ελάχιστο και ότι δεν υπάρχει εμπειρική τεκμηρίωση για το κατά πόσο η ιστορική διάσταση μπορεί να βελτιώσει τη διδασκαλία στο μάθημα των Μαθηματικών. Όλα αυτά δεν δημιουργούν ξεκάθαρα κίνητρα για να ωθήσουν τους εκπαιδευτικούς να ασχοληθούν περισσότερο, αλλά και για τους ίδιους τους μαθητές η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να θεωρείται εξίσου βαρετό μάθημα με τα Μαθηματικά και με την Ιστορία. Επιπλέον, είναι δύσκολο αυτή να ενσωματωθεί στις διαδικασίες αξιολόγησης, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει κίνητρο για τους μαθητές να ασχοληθούν, αφού δεν έχουν και το κατάλληλο υπόβαθρο για να την εκτιμήσουν.

Η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη, μπορεί να γίνει με την παροχή και άμεση ενσωμάτωση ιστορικού υλικού, είτε με τη μορφή συνοδευτικών σημειωμάτων είτε με τη μορφή αυτοτελών μαθημάτων. Μπορεί, επίσης, να γίνει με τη χρήση κάποιας διδακτικής προσέγγισης είτε εμπνεόμενης από την ιστορία είτε για την καλλιέργεια βαθύτερης συνείδησης για τα Μαθηματικά αυτά καθ' αυτά και το κοινωνικό και πολιτιστικό πλαίσιό τους. Η εφαρμογή στην τάξη μπορεί να γίνει μέσω άμεσης επαφής με ιστορικό υλικό και γεγονότα, κάνοντας χρήση ιστορικών σημειωμάτων, με επισκέψεις σε μουσεία, με προβολή ταινιών, με λεπτομερώς δομημένες ερευνητικές δραστηριότητες, με τη χρήση του διαδικτύου ως πηγή πληροφόρησης, καθώς και με δραστηριότητες πιο εμπειρικές, όπως η χρήση κάποιων εργαλείων, οι θεατρικές αναπαραστάσεις ιστορικών συζητήσεων και αντιπαραθέσεων.

Μέσα στο πλαίσιο, λοιπόν, του προβληματισμού πάνω στα νέα δεδομένα για τη Μαθηματική Εκπαίδευση, που επιβάλλουν την αναζήτηση και επιλογή εναλλακτικών διδακτικών προσεγγίσεων που να κινητοποιούν τους μαθητές και δραστηριοτήτων που να τους εμπλέκουν ενεργά στην κατάκτηση της γνώσης, **επιλέχθηκε το βιβλίο του Τεύκρου Μιχαηλίδη «Αχμές, ο γιος του φεγγαριού»**, στο οποίο συνδυάζεται η Λογοτεχνία και η Ιστορία των Μαθηματικών. Μέσα από την ιστορία του Αχμές παρέχεται το υλικό για να γνωρίσουμε τα αρχαία αιγυπτιακά μαθηματικά, την ανάπτυξη, την ιστορική τους εξέλιξη, τη σύνδεσή τους με τον αρχαίο αιγυπτιακό πολιτισμό και δημιουργείται ένα πλαίσιο κατάλληλο για να ερευνήσουμε τις δυνατότητες και τους περιορισμούς της διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών. Για το λόγο αυτό κρίθηκε σκόπιμο να ασχοληθούμε με τη μελέτη της ιστορικής εξέλιξης των αρχαίων αιγυπτιακών μαθηματικών προκειμένου να τη συνδέσουμε με τη διδακτική αξιοποίηση του συγκεκριμένου λογοτεχνικού έργου, το οποίο στηρίζεται μυθοπλαστικά σε στοιχεία αυτής της εξέλιξης. Έτσι γίνεται στην ουσία προσιτό και ελκυστικό ένα θέμα που κάτω από άλλες συνθήκες θα φάνταζε αυστηρά επιστημονικό και απρόσιτο.

Από τα στοιχεία, που παραθέσαμε σχετικά με τους **παλαιότερους και νεότερους τρόπους προσέγγισης των πρωτότυπων πηγών, σε συνδυασμό με τα περιεχόμενα του βιβλίου αλλά και με όσα καταγράψαμε στη συνάντηση με τον κ. Τεύκρο Μιχαηλίδη**, θα μπορούσαμε να τεκμηριώσουμε μια απάντηση για το **πρώτο ερευνητικό μας ερώτημα**:

- Πόσο έγκυρη είναι η ιστορική γνώση που αποκτούμε από την ανάγνωση ενός έργου Μαθηματικής Λογοτεχνίας;

Στην ιστοριογραφία των ελληνικών μαθηματικών -και γενικότερα των μαθηματικών της αρχαιότητας- διακρίνονται δύο κύριες μεθοδολογικές τάσεις. Σύμφωνα με την πρώτη, η προσέγγιση γίνεται από τη σκοπιά του μαθηματικού, και μάλιστα του σύγχρονου μαθηματικού, ενώ σύμφωνα με τη δεύτερη από τη σκοπιά του ιστορικού των επιστημών. Έτσι προκύπτει η «παραδοσιακή Ιστορία των Μαθηματικών» και η «νέα Ιστορία των Μαθηματικών», ονομασίες που απηχούν και την εξέλιξη των δύο τάσεων. Οι οπαδοί της παραδοσιακής ιστοριογραφίας, κατά κανόνα επαγγελματίες μαθηματικοί, αντιμετώπιζαν τα μαθηματικά του παρελθόντος ως ουδέτερα, αυτοτελή φυσικά αντικείμενα, στα οποία ενσωματώνονταν ρητά ή υπόρρητα όλες οι ιδέες, τα μηνύματα και τα διδάγματά τους. Οι νέοι ιστορικοί των Μαθηματικών, από τη δική τους πλευρά, εξέφρασαν την άποψη ότι η παραπάνω προσέγγιση πρέπει να απορριφθεί, αφού δεν μπορεί να γίνει δεκτή ως ιστορική προσέγγιση. Έτσι, κάτω από μια νέα προοπτική, για τη μελέτη των αρχαίων μαθηματικών κειμένων λαμβάνεται υπόψη το κοινωνικό, οικονομικό, πολιτιστικό πλαίσιο, στο οποίο δημιουργήθηκαν και εξελίχθηκαν οι έννοιες και τα επιτεύγματα των Μαθηματικών σε παλαιότερες εποχές, αναγνωρίζοντας ότι δεν αρκεί η ερμηνεία και η απόδοσή τους με σύγχρονους μαθηματικούς όρους, αλλά απαιτείται και η σύνδεσή τους με την κοινωνία από την οποία προέρχονται.

Ο συγγραφέας του βιβλίου που επιλέξαμε για διδακτική αξιοποίηση, απαντώντας σε σχετική ερώτηση αναφορικά με κείμενα από ιστορικές πηγές, τα οποία επέλεξε να βάλει αυτούσια στο στόμα των ηρώων του, αναφέρει ότι δεν ήταν κατά κύριο λόγο στις αρχικές προθέσεις του να μεταφέρει στον αναγνώστη (και κατ' επέκταση στους μαθητές μέσα από τη διδακτική αξιοποίηση του βιβλίου) ακριβή ιστορικά στοιχεία της εποχής. Κατά βάση, ήθελε πρώτα ο ίδιος να αισθανθεί ότι μέσω των δύο ηρώων του, του Άμανθυ και του Αχμές, ζει σε εκείνη την εποχή και για το λόγο αυτό, όπου βρήκε αυτούσια λόγια αντιγραμμένα από παπύρους, από τοιχογραφίες και τέτοια, φρόντισε με τον ένα ή τον άλλο τρόπο να τα βάλει στο στόμα τους, για να μπει κι ο ίδιος στο «κλίμα», τοποθετώντας τους χαρακτήρες του έργου στο ιστορικό πλαίσιο της μυθοπλασίας.

Επίσης σε ερώτηση σχετικά με το ποιες είναι οι μεγαλύτερες δυσκολίες για έναν συγγραφέα που αποφασίζει να γράψει μια ιστορία με ήρωες που έζησαν σε τόσο μακρινές εποχές, σημειώνει ότι ακόμα και οι τεκμηριωμένες ιστορικές θέσεις είναι συχνά αντικρουόμενες. Οπότε ένας μυθοπλάστης που θέλει να είναι και πιστός στο ιστορικό μυθιστόρημα καλείται να επιλέξει, χωρίς να είναι ειδικός αρχαιολόγος ή ιστορικός, τη σωστότερη (και συνήθως δεν υπάρχει και η σωστότερη) ή αυτήν που τον βολεύει πιο πολύ μυθοπλαστικά. Η δυσκολία αλλά και ο σκοπός του «παιχνιδιού» είναι ότι πρέπει να βουτήξει στην ιστορία, πράγμα που, όπως δηλώνει, για τον ίδιο είναι πραγματικά απόλαυση. Και μάλιστα στην ιστορία με επίκεντρο την καθημερινότητα, δηλαδή να διαβάσει πράγματα ακόμα και από πρωτογενείς πηγές. Για τη συγγραφή του συγκεκριμένου βιβλίου λέει χαρακτηριστικά: «Εγώ, ας πούμε, είχα την ευκαιρία, επειδή υπάρχουν τώρα πια μεταφρασμένα, να διαβάσω από παπύρους μεταφρασμένους στα Αγγλικά. Βέβαια, τα παραμύθια τα διάφορα, τα οποία υπήρξαν μία γευσούλα από το καθένα, αλλά πρέπει να κάνεις έρευνα. Για κανένα από τα βιβλία μου δεν θυμάμαι να μην έχω κάνει έρευνα και μάλιστα, επειδή έχω πάντα και τα Μαθηματικά που είτε έλκουν είτε έλκονται από την ιστορία μου συνήθως έρευνες σε δύο επίπεδα και στα Μαθηματικά και στα ιστορικά-πολιτιστικά στοιχεία, καμιά φορά και σε άλλα πράγματα» (Μιχαηλίδης, 2019, ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ).

Γίνεται φανερό, επομένως, ότι με τον έναν ή τον άλλο τρόπο και ανεξάρτητα από τις αρχικές προθέσεις του συγγραφέα η ιστορική γνώση, που έτσι κι αλλιώς κυριαρχεί σε ένα ιστορικό μυθιστόρημα, περνάει στον αναγνώστη και κατ΄ επέκταση και στον μαθητή μέσα από τη διδακτική αξιοποίηση. Η εγκυρότητά της διαπιστώνουμε ότι συνδέεται άρρηκτα με την ιστορική έρευνα και μελέτη του συγγραφέα, πράγμα απαραίτητο για τη συγγραφή ενός ιστορικού μυθιστορήματος. Πίσω από τον περισσότερο ή λιγότερο διάφανο ιστό της μυθοπλασίας, υπάρχει η ιστορική γνώση και η λεπτή ισορροπία ή και σύνθεση ανάμεσα στην τεκμηριωμένη ιστορική ερμηνεία (που είναι έργο των ιστορικών) και τη μυθοπλασία (που είναι έργο του λογοτέχνη) απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή, καθώς παίζει καθοριστικό ρόλο στη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Ο ιστορικός, ακολουθώντας τις αρχές της επιστημονικής έρευνας στον κλάδο του, διατυπώνει μόνο τα συμπεράσματα εκείνα που στηρίζονται στη μελέτη των πηγών και δεν επεκτείνεται σε αυθαίρετες γενικεύσεις ή μυθοπλασίες. Ο λογοτέχνης, αντίθετα, δεν δεσμεύεται από τους περιορισμούς της ιστορικής έρευνας και χρησιμοποιεί σε μεγάλο βαθμό τη φαντασία του, με αποτέλεσμα να κυριαρχεί στη λογοτεχνική αφήγηση το στοιχείο της μυθοπλασίας. Για τον ιστορικό, παραδείγματος χάρη, ο Ahmes δεν είναι παρά μία υπογραφή σε έναν πάπυρο με μαθηματικά προβλήματα και μόνο μέσα από τη μελέτη αυτών προβλημάτων μπορεί να εξάγει κάποια ασφαλή συμπεράσματα για τις μαθηματικές γνώσεις του και κατ' επέκταση για τα αρχαία Αιγυπτιακά Μαθηματικά. Για το λογοτέχνη, όμως, το όνομα και ο πάπυρος λειτούργησαν ως κίνητρο για την αναβίωση της ζωής, της κοινωνικής οργάνωσης και της εκπαίδευσης στην αρχαία Αίγυπτο.

Εστιάζοντας στο βιβλίο που επιλέχθηκε για διδακτική αξιοποίηση η ισορροπία ανάμεσα στην ιστορική πραγματικότητα και τη λογοτεχνική μυθοπλασία, άρα και η εγκυρότητα της ιστορικής γνώσης, συνδέεται με:

- τις μαθηματικές γνώσεις του συγγραφέα (τα Μαθηματικά, όπως μας δήλωσε, ήταν πάντα αυτό που τον τραβούσε).
- την ιστορική έρευνα, την σύνδεση του περιεχομένου απευθείας με πηγές και ως εκ τούτου με την ιστορική περίοδο στην οποία εντάσσεται η πλοκή της υπόθεσης.
- την λογοτεχνική δεινότητα που ταξιδεύει τον αναγνώστη σε μια εποχή πολύ μακρινή αλλά και πολύ κοντινή μέσα από την τόσο γλαφυρή αφήγηση.

Είναι πολύ σημαντικό, βέβαια, να υιοθετηθεί από τους εκπαιδευτικούς μια κριτική στάση απέναντι στα ιστορικά στοιχεία είτε πρόκειται για αυτά που περιλαμβάνονται στα βιβλία του σχολείου είτε για αυτά που περιλαμβάνονται σε έργα μυθοπλασίας είτε για κάποια που οι ίδιοι θα αναζητήσουν προκειμένου να τα εντάξουν στη διδασκαλία τους.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι ο Heiede (1996) επισημαίνει σχετικά πως η Ιστορία των Μαθηματικών υπάρχει κίνδυνος να αποδοθεί εσφαλμένα. Είναι πολύ δύσκολο να διατηρηθεί πλήρως η ιστορική ορθότητα κατά την εισαγωγή της Ιστορίας των Μαθηματικών στην τάξη, γιατί όσοι διδάσκουν Μαθηματικά δεν είναι επαγγελματίες ιστορικοί των Μαθηματικών και πρέπει να στηριχτούν σε δευτερογενείς ή και τριτογενείς πηγές. Έτσι μέσα από πολύχρωμα αλλά αναληθή ιστορικά ανέκδοτα αναπαράγονται ιστορικές αναφορές με λανθασμένα στοιχεία ή με αναχρονισμούς. Προσοχή χρειάζεται, επίσης, στα βιογραφικά στοιχεία και στις πληροφορίες για το έργο μεγάλων μαθηματικών που πολλές φορές διανθίζονται με ελκυστικές αλλά αναληθείς λεπτομέρειες. Για το λόγο αυτό, πρέπει οι εκπαιδευτικοί πραγματικά να επαγρυπνούν απέναντι στην αδικαιολόγητη αποδοχή λανθασμένων ή ψευδών στοιχείων. Πρέπει όμως, επίσης, να γίνει κατανοητό πως δεν μπορεί κανείς να είναι σίγουρος ότι μπορεί να προφυλαχτεί εντελώς από αυτό το ενδεχόμενο. Σε αυτή την κριτική στάση θα πρέπει να μυηθούν και οι μαθητές, καθώς τα Μαθηματικά είναι ένα αντικείμενο το οποίο δίνει αυτή τη δυνατότητα για αμφισβήτηση και έρευνα.

Από τα στοιχεία που έχουμε συμπεριλάβει σχετικά με την **αξιοποίηση της Μαθηματικής Λογοτεχνίας και της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη**, σε συνδυασμό με το περιεχόμενο του βιβλίου αλλά και με όσα ο κ. Τεύκρος Μιχαηλίδης ανέφερε στη συνέντευξη, μπορούμε να τεκμηριώσουμε μια απάντηση και για το **δεύτερο ερευνητικό μας ερώτημα**:

- Ποιοι διδακτικοί στόχοι της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι συμβατοί με την Ιστορία των Μαθηματικών και τη Μαθηματική Λογοτεχνία;

Η ανάγνωση και αφήγηση ιστοριών βοηθά τους μαθητές να ανακαλύψουν και να εκτιμήσουν πλευρές των Μαθηματικών που συμβάλλουν στην ιστορία και τον πολιτισμό της ανθρωπότητας. Για το λόγο αυτό έχει αναπτυχθεί έντονο ενδιαφέρον για τη Μαθηματική Λογοτεχνία, καθώς η χρήση της δεν υποκαθιστά τη διδασκαλία των Μαθηματικών, αλλά την υποστηρίζει και την εμπλουτίζει. Επιπλέον μέσα από τα Προγράμματα Σπουδών για τα Μαθηματικά εισάγονται στη Μαθηματική Εκπαίδευση δύο βασικές καινοτομίες, η διαθεματική προσέγγιση και η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών, ώστε εκπαιδευτικοί και μαθητές να ασχοληθούν με εναλλακτικές διαστάσεις της μάθησης των Μαθηματικών και να δοκιμάσουν νέους τρόπους διδασκαλίας, επικοινωνίας και αλληλεπίδρασης μεταξύ τους. Επιπλέον η αξιοποίηση λογοτεχνικών κειμένων, βιβλίων της μαθηματικής λογοτεχνίας ή μαθηματικών ιστοριών στη Διδακτική των Μαθηματικών εμφανίζεται να είναι μια καινοτόμος διδακτική προσέγγιση που ικανοποιεί τους στόχους και είναι σύμφωνη με τα Προγράμματα Σπουδών. Η προσέγγιση αυτή μπορεί να έχει διαθεματικό χαρακτήρα με βάση το Δ.Ε.Π.Π.Σ., εκλαϊκευτικό χαρακτήρα, χαρακτήρα λέσχης ανάγνωσης, επικοινωνιακό ή συναισθηματικό.

Η σύνδεσή, επομένως, με το Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ. των Μαθηματικών αναδεικνύεται μέσα από την καταγραφή στοιχείων που αφορούν τη διαθεματικότητα, την ομαδοσυνεργατική διδασκαλία, την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών και της Λογοτεχνίας. Ακόμη μέσα από στοιχεία που σημειώνονται στις προτεινόμενες δραστηριότητες για σύνδεση με το μάθημα της Γλώσσας και της Ιστορίας, όπως για παράδειγμα στο βιβλίο δασκάλου της Δ΄ Δημοτικού. Σε μια προσπάθεια για εναλλακτική προσέγγιση στη διδασκαλία των Μαθηματικών που θα κινητοποιεί και θα εμπλέκει τους μαθητές αλλάζοντας ταυτόχρονα και την οπτική τους απέναντι σε ένα αντικείμενο το οποίο συχνά συνδέεται με αρνητικά συναισθήματα, η αξιοποίηση της Μαθηματικής Λογοτεχνίας και της Ιστορίας των Μαθηματικών προβάλλει μέσα από τη διαθεματική προσέγγιση που θέτουν τα Προγράμματα Σπουδών ως πολύτιμο εργαλείο και αρωγός στη Μαθηματική Εκπαίδευση.

Επίσης η συμβατότητα των διδακτικών στόχων της διδασκαλίας των Μαθηματικών με την Ιστορία των Μαθηματικών και τη Μαθηματική Λογοτεχνία αναδεικνύεται και από τις πολλαπλές διδακτικές παρεμβάσεις οι οποίες στηρίχθηκαν στο εν λόγω έργο, πράγμα που εξέπληξε θετικά και τον ίδιο τον συγγραφέα, μέσα από δραστηριότητες συχνά πρωτότυπες και εντυπωσιακές, όπως μπορεί κανείς να διαπιστώσει και με μια απλή περιήγηση στο διαδίκτυο.

Επιπλέον, όπως φάνηκε και από τις **προτάσεις για διδακτικές παρεμβάσεις,** τις οποίες αναπτύξαμε στην **ενότητα 4.5.**, είναι δυνατό να δημιουργηθούν διδακτικές δραστηριότητες οι οποίες θα υπηρετούν διδακτικούς στόχους συμβατούς με την Ιστορία των Μαθηματικών και τη Μαθηματική Λογοτεχνία. Το σκεπτικό μας για τη δημιουργία τους συνδέεται με το έλλειμμα που παρατηρείται στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση στον σχεδιασμό και την υλοποίηση ανάλογων πρωτοβουλιών. Για το λόγο αυτό θεωρήσαμε ως πρόκληση την σύνταξη διδακτικών προτάσεων, οι οποίες θα μπορούσαν να εφαρμοστούν σε μαθητές μικρότερων ηλικιών, όπως οι μαθητές του Δημοτικού, αξιοποιώντας την Ιστορία των Μαθηματικών και τη Λογοτεχνία μέσα από αποσπάσματα του βιβλίου «Αχμές ο γιος του φεγγαριού», ένα έργο λογοτεχνικής μυθοπλασίας που στηρίχθηκε στην ιστορική εξέλιξη των αρχαίων αιγυπτιακών μαθηματικών, όπως έχουμε ήδη προαναφέρει.

Προς την κατεύθυνση αυτή θα λέγαμε ότι είχαμε την ενθάρρυνση και του ίδιου του συγγραφέα, που στη συνέντευξή του σημειώνει πως το βιβλίο, παρόλο που αρχικά δεν γράφτηκε για αυτό το σκοπό, είναι απόλυτα εκμεταλλεύσιμο εκπαιδευτικά σε μικρότερες ηλικίες, σε μαθητές Δημοτικού, γιατί έχει έννοιες μαθηματικές που γεννήθηκαν την εποχή που άρχισε η δημιουργία των Μαθηματικών μέσα από την επίλυση πρακτικών προβλημάτων, δηλαδή την εποχή που θέλουμε να γεννηθούν και μέσα στα μυαλά των μαθητών του Δημοτικού τα Μαθηματικά εμπειρικά. Επίσης, καθώς είναι μια ιστορία που ακολουθεί ένα παιδάκι από την κούνια μέχρι τα βαθιά γεράματα, βοηθάει τους μαθητές που διαβάζουν αυτή την ιστορία να ταυτίζονται κιόλας (Μιχαηλίδης, 2019, ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ).

Αξίζει να επισημάνουμε, ακόμα, ότι πέρα από τους επιμέρους διδακτικούς στόχους στις αντίστοιχες διδακτικές ενότητες, όπως αυτοί αναφέρονται στο αναλυτικό πρόγραμμα και στα βιβλία των εκπαιδευτικών, **με τις προτάσεις μας θα θέλαμε να εστιάσουμε κυρίως**:

- στη διέγερση του ενδιαφέροντος των μαθητών για τα Μαθηματικά, χρησιμοποιώντας ως εφαλτήριο την αφήγηση και την Ιστορία των Μαθηματικών μέσα από ένα λογοτεχνικό έργο.
- στη στάση των μαθητών, προκειμένου να δουν τα Μαθηματικά ως μια συναρπαστική, πολιτιστική και ανθρώπινη δραστηριότητα και να τα κάνουν να συνδεθούν με αυτά μέσα από νέους τρόπους.
- στη σύγκριση παλαιότερων και σύγχρονων τρόπων για υπολογισμούς και επίλυση προβλημάτων.
- στην ανάπτυξη ευκαιριών για μαθηματική συζήτηση μέσα από τη χρήση στοιχείων της Ιστορίας των Μαθηματικών.
- στη δυνατότητα να αντιληφθούν οι μαθητές ότι τα Μαθηματικά αναπτύσσονται και εξελίσσονται μέσα σε συγκεκριμένο ιστορικό, κοινωνικό και γεωγραφικό πλαίσιο για να εξυπηρετήσουν συγκεκριμένες ανθρώπινες ανάγκες.

- **Η πρώτη πρότασή μας συνδέεται με το απόσπασμα που αναφέρεται στο πρώτο μάθημα της Αριθμητικής στο σχολείο του Ονέχ (σελ. 58-60 του βιβλίου)**, απευθύνεται σε μαθητές της Γ΄ και Δ΄ τάξης (αλλά και της Ε΄ με κάποιες τροποποιήσεις) και συνδέεται με δραστηριότητες για τη γνωριμία των μαθητών με το αριθμητικό σύστημα των αρχαίων Αιγυπτίων. Τα επιθυμητά αποτελέσματα σε αυτό το ηλικιακό επίπεδο έχουν να κάνουν κυρίως τη δημιουργία ευκαιριών για εμπλοκή των μαθητών σε μαθηματικές συζητήσεις μέσα από την αφήγηση και τη χρήση στοιχείων της Ιστορίας των Μαθηματικών αλλά και με τη στάση τους, καθώς θέλουμε να δουν τα Μαθηματικά ως μια συναρπαστική, πολιτιστική και ανθρώπινη δραστηριότητα και να τα κάνουν να συνδεθούν με αυτά μέσα από νέους τρόπους. Βέβαια, ποτέ δεν θα μπορέσουμε να αποδείξουμε ότι η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών με τους μαθητές έχει πάντα θετικά αποτελέσματα, καθώς αυτή θα αποτελεί πάντα ένα από τα πολλά στοιχεία που ένας δάσκαλος χρησιμοποιεί ταυτόχρονα για να προσελκύσει τους μαθητές του. Για τον δάσκαλο, ωστόσο, τέτοια αποδεικτικά στοιχεία δεν είναι απαραίτητα, αφού είναι αρκετό να βλέπει απλά τους μαθητές να κινητοποιούνται και να συμμετέχουν.

- **<u>Η δεύτερη πρότασή μας συνδέεται με το απόσπασμα που αναφέρεται στην τεχνική του αιγυπτιακού πολλαπλασιασμού που ο Κεχεπέρα εξηγεί στον Αχμές (σελ. 80-83 του βιβλίου)</u>**, απευθύνεται σε μαθητές της Δ΄ τάξης (αλλά και της Ε΄ με κάποιες τροποποιήσεις) και μπορεί να ενταχθεί στη διδασκαλία της ενότητας για τον πολλαπλασιασμό των φυσικών. Με αφορμή το συγκεκριμένο απόσπασμα από το εν λόγω βιβλίο, οι μαθητές κινητοποιούνται να γνωρίσουν, μαζί με τον Αχμές, τη διαδικασία του αιγυπτιακού πολλαπλασιασμού, έναν από τους τρόπους υπολογισμού που υποβοηθούν τους νοερούς υπολογισμούς, την κατανόηση των μερικών γινομένων και του σύγχρονου αλγόριθμου που χρησιμοποιούμε για τον πολλαπλασιασμό, διαπιστώνοντας ότι πολλά χρόνια πριν οι άνθρωποι είχαν επινοήσει έναν τρόπο διαφορετικό από αυτόν που εμείς σήμερα χρησιμοποιούμε για να πολλαπλασιάζουν.
- **<u>Η τρίτη πρότασή μας συνδέεται με το απόσπασμα που αναφέρεται στην επίλυση προβλημάτων με τη μέθοδο της «αυθαίρετης παραδοχής» (σελ. 119-120 του βιβλίου)</u>**, απευθύνεται σε μαθητές της ΣΤ΄ τάξης (αλλά και της Α΄ Γυμνασίου με κάποιες τροποποιήσεις) και μπορεί να ενταχθεί στη διδασκαλία της ενότητας για τις εξισώσεις. Η συγκεκριμένη διδακτική πρόταση συνδέεται με δύο πολύ σημαντικά και κρίσιμα ζητήματα της Μαθηματικής Εκπαίδευσης που αφορούν τη μετάβαση των μαθητών από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο, αλλά και το πέρασμα από την Αριθμητική στην Άλγεβρα. Παρά τις όποιες επιφυλάξεις μπορεί να διατυπωθούν σχετικά με την πληθώρα της ύλης, την έλλειψη χρόνου και πόρων, αξίζει να αναζητήσουμε τρόπους και να επενδύσουμε μέσω της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών γιατί τα οφέλη είναι μακροπρόθεσμα, αφού οι μαθητές κινητοποιούνται, αποκτώντας μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά, αλλά τίθενται και κάποια σπέρματα προβληματισμού για τη συλλογιστική και τη χρησιμότητα της άλγεβρας.

Ολοκληρώνοντας κρίνουμε σκόπιμο να αναφερθούμε σε κάποιες **προτάσεις για**

μελλοντική έρευνα:

- ❖ Υλοποίηση των προτεινόμενων διδακτικών παρεμβάσεων στην τάξη.
- ❖ Καταγραφή εμπειριών από τον σχεδιασμό των διδακτικών παρεμβάσεων και την εφαρμογή τους στην τάξη.
- ❖ Διερεύνηση τυχόν αλλαγής στη στάση των μαθητών σχετικά με την κινητοποίηση και την ενεργή εμπλοκή τους κατά την υλοποίηση των προτεινόμενων διδακτικών παρεμβάσεων στην τάξη.
- ❖ Διερεύνηση της επίδρασης του οικογενειακού περιβάλλοντος ως ισχυρού παράγοντα που επηρεάζει την εκπαίδευση και τις επιλογές στον επαγγελματικό προσανατολισμό των νέων.

Κλείνοντας θα θέλαμε να επισημάνουμε ότι αναζητώντας τρόπους που θα μπορούσαν να δώσουν νέα πνοή στη διδασκαλία των Μαθηματικών στο σχολείο και να προκαλέσουν το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών για τα Μαθηματικά, νέες πρακτικές όπως η αξιοποίηση της Μαθηματικής Λογοτεχνίας και της Ιστορίας των Μαθηματικών, αναμφισβήτητα δεν πρέπει να αγνοηθούν. Η εισαγωγή τους στη διδακτική πράξη τροφοδοτεί αδιάλειπτες αναζητήσεις και επιτρέπει στους μαθητές να μυηθούν στα Μαθηματικά με ένα νέο και ασυνήθιστο τρόπο που τους προκαλεί ενδιαφέρον, περιέργεια και έκπληξη, αναδεικνύοντας διάφορες πλευρές τους, όπως μεθοδολογικές, γνωστικές, μεταγνωστικές και κυρίως συναισθηματικές. Στις καταστάσεις αφήγησης, επικοινωνίας και προβληματισμού, οι μαθητές εκφράζουν ελεύθερα τις σκέψεις και τα συναισθήματα τους, υποδύονται ρόλους, δρουν και σκέφτονται όπως οι ήρωες μιας ιστορίας και βιώνουν καταστάσεις ενσυναίσθησης, κατανοώντας τη συμπεριφορά και τα κίνητρα άλλων προσώπων. Οι αφηγήσεις προκαλούν έκπληξη στους μαθητές, οι οποίοι με τη σειρά τους εκπλήσσουν πολλαπλά και τους διδάσκοντες.

Έτσι το μάθημα των Μαθηματικών γίνεται πηγή χαράς και δημιουργικότητας. Οι μαθητές ανακουφίζονται από το φόβο και το άγχος και εμβαθύνουν στην κατανόηση. Ενισχύεται η αυτοπεποίθηση ότι όλοι είναι ικανοί και μπορούν να προχωρήσουν χωρίς αξεπέραστες δυσκολίες. Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί ανοίγουν τα πανιά για νέα, συναρπαστικά ταξίδια, αναλαμβάνουν πρωτοβουλίες για να δοκιμάσουν κάτι πρωτόγνωρο και καινοτόμο, εμπλουτίζουν τις δικές τους εμπειρίες και βλέπουν με άλλη ματιά το διδακτικό τους έργο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abdulaziz, A. (2008). On the Egyptian method of decomposing 2/n into unit fractions. *Historia Mathematica, 35*: 1–18.

Ascher, M. (2002). *Mathematics Elsewhere. An Exploration of Ideas across Cultures*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Bagni, G. T. (2004). History of Mathematics and Didactics: Reflections on Teachers Education. *Paper presented at the tenth International Congress on Mathematics Education (ICME 10),* Discussion Group 6, Copenhagen.

Beckmann, P. (1971). *A history of π.* St Martin’s Press.

Blatner, D. (1997). *The joy of π*. Penguin.

Borasi, R., & Siegel, M. (1990). Reading to learn mathematics: New connections, new questions, new challenges. *For the learning of mathematics*, 10(3): 9-16.

Borasi, R., Siegel, M., Fonzi, J., & Smith, C. F. (1998). Using transactional reading strategies to support sense-making and discussion in mathematics classrooms: An exploratory study. *Journal for research in mathematics education*, 29(3): 275-305.

Bottazzini, U., & Dalmedico, A. D. (2001). Introduction. In U. Botazzini and A. D. Dalmedico (eds), *Changing images in mathematics: from the French revolution to the new millennium*, pp.1–14. Routledge.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* New York: Kluwer Academic Publishers.

Bruner, J. (1986). Two Modes of thought. In J. Bruner (Ed.) *Actual minds, possible worlds,* pp. 11-43*.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Burnett, S.J., Wichman, A. M. (1997). *Mathematics and Literature: An Approach to Success*. Action Research Project, Saint Xavier University.

Butzer, K. W. (1976). *Early hydraulic civilization in Egypt*. University of Chicago Press.

Cantor, M. (1880). *Vorlesungen uber Geschichte der Mathematik*. Leipzig: Teubner.

Christianidis, J. (2004). *Classics in the history of Greek mathematics.* Boston Studies in the Philosophy of Science, 240, Kluwer.

Clagett, M. (1999). *Ancient Egyptian Science. A Source Book. Volume III: Ancient Egyptian Mathematics*. Philadelphia: American Philosophical Society.

Cobb, P., & Wheatley, G. (1988). Children's initial understanding of ten. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 10 (3): 1–28.

Confrey, J. (1990). What constructivism implies for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*. Monograph 4, pp. 107-210.

Corry, L. (2007). Calculating the limits of poetic license: Fictional narrative and the history of mathematics. *Configurations*, 15(3): 195-226.

Cortes, A., Vergnaud, G., & Kavafian, N. (1990). From arithmetic to algebra: negotiating a jump in the learning process. In G. Booker, P. Cobb, & T. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth PME Conference*, Vol II, pp. 27-34. Mexico: International Conference for the Psychology of Mathematics Education.

Damasio, A. R. (2000). A second chance for emotion. In R. D. Lane & L. Nadel (Eds.), *Series in affective science. Cognitive neuroscience of emotion,* pp. 12-23. New York, NY, US: Oxford University Press.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1982). *The Mathematical Experience.* Boston: Houghton Mifflin.

DeBellis, V. A., & Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2): 131-147.

Eisenlohr, A. (1877). *Ein mathematisches Handbuch der alten Agypter: Papyrus Rhind des British Museums*. Leipzig: Hinrichs.

Engels, H. (1977). Quadrature of the circle in ancient Egypt. *Historia Mathematica*, 4(2): 137–140.

Farmaki, V., & Paschos, T. (2007). Employing genetic "moments" in the history of mathematics in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 66: 83–106.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics,* 11 (2): 3 -6.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (1997). *"The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics'1:* Discussion document for an ICMI study (1997 - 2000). *Mathematics in School*, 26(3): 10-11.

Fisher, I. (2004). Multicultural Multiplication. *Mathematics in School*, 33(1): 23-26

Fowler, D. (1999). *The mathematics of Plato's Academy: a new reconstruction*. Oxford: Clarendon Press.

Freudenthal, H. (1981). Should a mathematics teacher know something about thehistory of mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 2 (1): 30-33.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Boston/Lancaster: Dordrecht.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Frucht, W. (1999). *Imaginary Numbers: An Anthology of Marvelous Mathematical Stories, Diversions, Poems and Musings*. New York: Wiley.

Furinghetti, F. (1997). History of mathematics, mathematics education, school practice: Case studies in linking different domains. *For the Learning of Mathematics*, 17(1): 55-61.

Fuson, K.C. (1992). Research on whole number. Addition and subtraction. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*, pp: 243-275. New York: Macmllian.

Gardiner, A. H. (1927). *Egyptian Grammar. Being an Introduction to the Study of Hieroglyphs.* London: Oxford University Press.

Gardner, H. (1990). *Art education and human development*. Los Angeles CA: The Getty.

Gardner, H. (1993). *Multiple Intelligences: The Theory In Practice* New York: Basic Books.

Gillings, R. J. (1972). *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. Cambridge, Mass: The MIT Press.

Goleman, D. (1998).*Working with Emotional intelligence*. New York: Bentam Books.

Greene, M. T. (1992). *Natural knowledge in preclassical antiquity*. Johns Hopkins University Press.

Gulikers, I., & Blom, K. (2001). "A Historical Angle", a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, 47: 223–258.

Hannula, M. S. (2006a). Motivation in mathematics: Goals reflected in emotions. *Educational studies in mathematics*, 63(2): 165-178.

Hannula, M. S. (2006b). Affect in Mathematical Thinking and learning: Towards integration of emotion, motivation, and cognition. In J. Maaß & W. Schlöglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice,* pp. 209-232. Rotterdam: Sense.

Hardy, B. (1968). Towards a poetics of fiction: An approach through narrative. *Novel: A forum on fiction, 2*(1): 5-14.

Hardy, G. H. (1984). *A mathematician's apology*. Cambridge University Press.

Heiede, T. (1996). History of mathematics and the teacher. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematical Historical research and integration with teaching,* pp. 231-243. Washington, DC: MAA.

Herrera, T., & Owens, D. (2001). The «New New Math»: Two reform movements in Mathematics Education. *Theory into Practice,* 40 (2): 84-92.

Hoyrup, J. (1996). Changing trends in the historiography of Mesopotamian mathematics: an insider's view. *History of Science,* 34: 1–32.

Høyrup, J. (1999). Pythagorean 'rule' and 'theorem' – mirror of the relation between Babylonian and Greek mathematics. In J. Renger (Ed.), *Babylon: Focus mesopotamischer Geschichte, Wiege früher Gelehrsamkeit, Mythos in der Moderne*, pp. 393-407. Saarbrücken: Saarbrücker Druckerei und Verlag.

Høyrup, J. (2002). *Lengths, widths, surfaces: a portrait of Old Babylonian algebra and its kin*. Springer.

Imhausen, A. (2002). The algorithmic structure of the Egyptian mathematical problem texts. In J. M. Steele and A. Imhausen (Eds), *Under one sky: astronomy and mathematics in the ancient Near East*, pp. 147-166. Münster: Ugarit-Verlag.

Imhausen, A. (2003a). Egyptian mathematical texts and their contexts. *Science in Context*, 16(3): 367-389.

Imhausen, A. (2003b). Calculating the daily bread: Rations in theory and practice. *Historia Mathematica*, 30: 3–16.

Imhausen, A. (2006). Ancient Egyptian mathematics: New perspectives on old sources. *The Mathematical Intelligencer*, 28(1): 19-27.

Imhausen, A. (2009). Traditions and myths in the historiography of Egyptian mathematics. In E. Robson & J. Stedall (Eds.), *The Oxford handbook of the history of mathematics*, pp.781–800. Oxford: Oxford University Press.

Imhausen, A., & Ritter, J. (2004). Mathematical Fragments: UC32114, UC32118, UC32134, UC32159–UC32162. In M. Collier and S. Quirke (Eds), *The UCL Lahun Papyri: Religious, Literary, Legal, Mathematical and Medical,* pp. 71–96. Oxford: Archaeopress.

Jahnke, H. N. (2001). Cantor's cardinal and ordinal infinities: An epistemological and didactic view. *Educational Studies in Mathematics,* 48: 175–197.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3): 235–261.

Johnson, D. R. (2007). The Element of Surprise: An Effective Classroom Technique. *Mathematics Teacher* 100: 56-59.

Keller, J. M. (2010). *Motivational design for learning and performance: The ARCS approach*. New York: Springer.

Kieran, C. (1992). The learning and Teaching of the School algebra. In D. Grouws (Ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* pp. 390-419. New York.

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics,* 48: 137-174.

Kliman, M. (1993). Integrating mathematics and literature in the elementary classroom. *The Arithmetic Teacher*, *40* (6): 318-321.

Koehler, D. O. (1982). Mathematics and Literature. *Mathematics Magazine*, 55 (2): 81-95.

Lamberg T., & Andrews, C. (2011). Integrating Literature and Math. *Connections Teaching Children Mathematics* 17: 372-376.

Leary, K. A. (2004). *The status of literature in the secondary mathematics classroom*. (Doctoral dissertation, University of Alaska Anchorage).

Legrand, L. (1969). *Pour une pédagogie de l'étonnement.* Suisse: Neuchâtel.

Lesh, R. & Larson, C. (2006). The Power of Stories in Mathematics Learning & Problem Solving. *In Presentation in Symbolic Cognition Symposium January 3 (Vol. 9)*. The White House of Wilmington.

Lindemann, F. (1982). Uber die Zahl π. *Mathematische Annalen*, 20: 213–225.

Linnenbrink, E. A., & Pintrich, P. R. (2000). Multiple pathways to learning and achievement: The role of goal orientation in fostering adaptive motivation, affect, and cognition. In C. Sansone & J. M. Harackiewicz (eds.), *Intrinsic and extrinsic motivation*, pp. 195-227. New York: Academic Press.

Maor, E. (1998). *Trigonometric delights*. Princeton: Princeton University Press.

Neugebauer, O. (1926). *Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung.* Springer.

Neugebauer, O. (1969). *The exact sciences in antiquity.* New York: Dover.

Neugebauer, O. (1975). *A history of ancient mathematical astronomy*. Springer.

Niss, M. (2001). University mathematics based on problem-oriented student projects: 25 years of experience with the Roskilde model. In D. Holton (Ed), *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study*, pp. 153–165. Dordrecth: Kluwer Academic Publishers.

Niss, M. (2001a). Indledning. In M. Niss (Ed.), *Matematikken og verden*, Fremads debatbøger— Videnskab til debat. Copenhagen: Forfatterne og Forlaget A/S.

Papadimitriou, C. H. (2003). MythematiCS: in praise of storytelling in the teaching of computer science and math. *SIGCSE BULLETIN*, 35(4): 7-9.

Peet, T. E. (1923). *The Rhind mathematical papyrus*. Hodder & Stoughton.

Philippou, G. N., & Christou, C. (1998). The effects of a preparatory mathematics program in changing prospective teachers' attitudes towards mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 35: 189–206.

Pycior, H., M. (1994). Mathematics and prose literature. In L. Grahham and Guiness, (Eds.), *Companion encyclopedia of the history and philosophy of mathematical sciences, II*, pp. 1633-1643. Rautledge.

Ritter, J. (1995). Measure for measure: mathematics in Egypt and Mesopotamia. In M. Serres (Ed.), *A history of scientific thought: elements of a history of science,* pp.44–72. Oxford and Cambridge, Mass.: Blackwell.

Ritter, J. (2000). Egyptian mathematics. In H. Selin (Ed), *Mathematics across cultures. The History of Non-Western Mathematics*, pp.115–136. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Ritter, J. (2002). Closing the eye of Horus. In J. Steele and A. Imhausen (eds), *Under one sky: Astronomy and Mathematics in the ancient Near East,* pp.297–323. Münster: Ugarit-Verlag

Ritter, J. (2004). Reading Strasbourg 368: A Thrice-Told Tale. In K. Chemla (Ed.), *History of science, history of text,* pp.177–200. Dordrecht: Kluwer.

Robson, E. (1999). *Mesopotamian mathematics, 2100–1600 BC: technical constants in bureaucracy and education.* Oxford: Clarendon Press.

Robson, E. (2009). Mathematics education in an Old Babylonian scribal school In E. Robson & J. Stedall (Eds.), *The Oxford handbook of the history of mathematics*, pp.199–227. Oxford: Oxford University Press

Rossi, C. (2004). Architecture and mathematics in ancient Egypt, Cambridge: Cambridge University Press.

Schiro, M. (1997). *Integrating children's literature and mathematics in the classroom: Children as meaning makers, problem solvers, and literary critics*. New York: Teachers College Press.

Schunk, D. H., & Richardson, K. (2011). Motivation and self-efficacy in mathematics education. In D. J. Brahier (ed.), *Motivation and disposition: Pathways to learning mathematics: 73rd Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*, pp. 13-30.

Shih, J. C., & Giorgis, C. (2004). Building the Mathematics and Literature Connection through Children's Responses. *Teaching Children Mathematics*, 10(6): 328-333.

Shute, C. (2001) Mathematics. In D. B Redford (Ed.), *The Oxford encyclopedia of ancient Egypt*, vol 2, pp.348–351. Oxford University Press.

Siegel, M., Borasi, R., Fonzi, J., & Smith, C.F. (1996). *Beyond word-problems and textbooks: Using reading generatively in the mathematics classroom*, National Science Foundation, Arlington, V.A.

Siu, M. K. (2006). No, I don't use history of mathematics in my class. Why? In F. Furinghetti, S. Kaisjer, & C. Tzanakis (eds), P*roceedings HPM 2004 & ESU 4*: 268

– 277. Greece: University of Crete.
Smestad, B., Jankvist, U. T., & Clark, K. (2014). Teachers' mathematical knowledge for teaching in relation to the inclusion of history of mathematics in teaching. *Nordic Stud Math Educ*, 19(3-4): 169-183.
Snow, C. P. (1998). *The two Cultures: With Introduction by Stefan Collini*. Cambridge University Press.
Sriraman, B. (2004). Mathematics and Literature (the sequel): Imagination as a pathway to advanced mathematical ideas and philosophy. *The Australian Mathematics Teacher*. 60 (1): 17-23.
Stevens, B. (2000). Mathematics and Literature: Cross Fertilization. *The Pacific Institute for the Mathematical Sciences Newsletter,* 4 (3): 1-8.
Struve, W. W. (1930). Mathematischer Papyrus des Staatlichen Muséums der schönen Künste in Moskau. In *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Part A, Quellen,I. Berlin.
Tardif, J. (1997). *Pour un enseignement stratégique*. Montréal: Éditions Logiques.
Thomaidis, Y., & Tzanakis, C. (2007). The notion of historical "parallelism" revisited. Historical evolution and students' conception of the order relation on the number line. *Educational Studies in Mathematics,* 66: 165 – 183.
Toeplitz, O. (2007). *The Calculus. A Genetic Approach*. Chicago: The University of Chicago Press.
Triandafillidis, T. A. (2006). Wishes, lies and dreams: poetry writing in the mathematics classroom. *For the learning of mathematics*, *26* (2): 2-9.
Tymoczko, T. (1986). *New directions in the philosophy of Mathematics* (Introduction, pp. xiii-xvii). Boston: Birkhauser.
Tzanakis, C., Arcavi, A. et al. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, pp. 201 – 240. Dordrecth: Kluwer Academic Publishers.
Tzanakis, C., & Kourkoulos, M. (2007). May history and physics provide a useful aid for introducing basic statistical concepts? Some epistemological remarks and classroom observations. In F. Furinghetti, S. Kaijer, & C. Tzanakis (Eds), *Proceedings HPM 2004 & ESU 2004*, pp. 284–295. Uppsala: Uppsala Universitet.
Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks. *For the Learning of Mathematics,* 20(1): 44–55.
Unguru, S. (1975). On the need to rewrite the history of Greek mathematics. *Archive for history of exact sciences*, 15(1): 67-114.
Urton, G. (1997). *The Social Life of Numbers. A Quechua Ontology of Numbers and Philosophy of Arithmetic*. Austin, Texas: University of Texas Press.
Van der Waerden, B. L. (1961). *Science awakening*. New York: Oxford University Press.
Viau, R. (2003). *La motivation en context scolaire.* Bruxelles: De Boeck.
Vygotsky, L. S. (1987). The collected works of LS Vygotsky, R.W. Rieber & A.S.

Carton, (Eds.). Vol. 4, *The History of the Development of Higher Mental Functions*. New York and London: Plenum Press.

Whitin, D. J. (2002). The potentials and pitfalls of integrating Literature into the Mathematics Program. *Teaching Children Mathematics*, 8(9): 503-505.

Young, E., & Marroquin, C. L. (2006). Posing Problems from Children's Literature. *Teaching Children Mathematics* 12(7): 362-366.

Zambo, R. (2005). The power of two: Linking mathematics and literature. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 10(8): 394-399.

Boyer, B. C., & Merzbach, C. U. (1997). *Η Ιστορία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Πνευματικός.

Bunt, H. N. L., Jones, S. P., & Bedient, D. J. (1981). *Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών.* Αθήνα: Πνευματικός.

Iggers, G. G. (2006). *Η ιστοριογραφία στον 20ο αιώνα.* Αθήνα: Νεφέλη.

Neugebauer, O. (1986). *Οι θετικές επιστήμες στην αρχαιότητα.* Αθήνα: Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης.

Αλαχιώτης, Σ. (2002). Για ένα σύγχρονο εκπαιδευτικό σύστημα. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών θεμάτων*, 7: 7-18, Αθήνα, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Ανέστη, Δ. & Τριανταφυλλίδης, Τ. (2005). Η διαμόρφωση μιας κοινότητας μάθησης μέσα από τη διδακτική σύνδεση λογοτεχνίας και Μαθηματικών. *Πρακτικά 1ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών,* σ. 259-268. Αθήνα.

Αραγεώργης Α., & Κιντή, Β., (2006). «Μαθηματικά και Αφήγηση». Συνέντευξη με τον Απόστολο Δοξιάδη. *Cogito 04*: 20-27.

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α., & Σαΐτης Α. (2015α). Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού. Βιβλίο Μαθητή. ΥΠΠΕΘ/ ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α., & Σαΐτης Α. (2015β). Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού. Βιβλίο Δασκάλου. ΥΠΠΕΘ/ ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Βάμβουκας, Μ. Ι. (2008). Η κατανόηση κειμένων μοντέλα και παράγοντες κατανόησης. *Σύγχρονη Κοινωνία, Εκπαίδευση και Ψυχική Υγεία*, 1: 7-22.

Γαλέρη, Ι. (2018). *Μελέτη, σχεδιασμός και ανάπτυξη προγράμματος επιμόρφωσης εκπαιδευτικών στα ζητήματα διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών*. Διπλωματική Εργασία Δ.Δ.Π.Μ.Σ. Διδακτική των Μαθηματικών. Θεσσαλονίκη: Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

Γιαννικοπούλου, Α. (2002). Λογοτεχνία και Μαθηματικά. Στο Μ. Καϊλά, Φ. Καλαβάσης, & Ν. Πολεμικός (Επιμ.), *Μύθοι, Μαθηματικά, Πολιτισμοί: Αποσιωπημένες Σχέσεις στην Εκπαίδευση*, σ. 71-101. Αθήνα: Ατραπός.

Δεμίρη, Ε., Μαρκέτος, Α., & Μπάρμπας, Γ. (1994). Οι αντιλήψεις των μαθητών της Α' γυμνασίου για τη μεταβλητή. *Διάσταση*, 63-70, Εκδόσεις Ε.Μ .Ε Κεντρικής Μακεδονίας.

Δοξιάδης Α (2004). Η αφήγηση ως γνώση και η περίπτωση της βιογραφίας. *Εκ των Υστέρων,* Τεύχος 10, ΕΞΑΝΤΑΣ.

Δοξιάδης, Α. (1992). *Ο θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλντμπαχ.* Αθήνα: Καστανιώτης.

Ζουρνά, Χ. & Κοτζαβαΐδου, Θ. (2016): Τα αρχαία αιγυπτιακά μαθηματικά μέσω του Εκπαιδευτικού Δράματος – Διδακτική πρόταση με βάση το βιβλίο «Αχμές, ο γιος του φεγγαριού». *Πρακτικά 8ης Μαθηματικής Εβδομάδας, Τόμος Α΄*, σ. 396-406. Θεσσαλονίκη: Παράρτημα Ε.Μ.Ε.

Θωμαΐδης, Γ. (2014). Θεωρητικό πλαίσιο ενός μεταπτυχιακού μαθήματος με θέμα «Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους» Στο Κ. Κούρκουλος, & Κ. Τζανάκης (Επιμ.). *Επιστήμες Αγωγής, Θεματικό Τεύχος 2014*, σ. 16-37. Ρέθυμνο: Πανεπιστήμιο Κρήτης, Π.Τ.Δ.Ε.

Θωμαΐδης, Γ., & Τζανάκης, Κ. (2006). Ανάγνωση ιστορικών κειμένων και συζητήσεις για την έννοια της απόδειξης σε μια διαθεματική προσέγγιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Στο Γ. Θωμαΐδης, Ν. Καστάνης, & Κ. Τζανάκης (Επιμ.), *Ιστορία και Μαθηματική Εκπαίδευση*, σ. 253–270. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Καγκουρά, Θ., Σπύρου, Π., Ηλία, Ι. & Μονογυιού, Α. (2008). Αλλαγή των στάσεων και πεποιθήσεων των μαθητών για τα Μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Στο Ε. Φτιάκα, Σ. Συμεωνίδου & Μ. Σωκράτους (Επιμ.) *Ποιότητα στην εκπαίδευση: έρευνα και διδασκαλία*, σ. 195-212. Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Καραγεώργος, Δ. (1998). Το ενιαίο πλαίσιο προγράμματος σπουδών, τα προγράμματα σπουδών, τα διδακτικά βιβλία και το συνοδευτικό διδακτικό υλικό για τα μαθηματικά της γενικής εκπαίδευσης. *Πρακτικά του 15ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας*, σ. 229-250. Χίος: Ε.Μ.Ε.

Καρατζιά - Σταυλιώτη, Ε. (2002). Η διαθεματικότητα στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών: Παραδείγματα από την ευρωπαϊκή εμπειρία και πρακτική. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 7: 52-65.

Κατσάρκας, Α. (2007). Λογοτεχνία και μαθηματικά: Αμφίδρομες σχέσεις. Στο Δ. Χασάπης (επιμ.) *Μαθηματικά & Λογοτεχνία. Πρακτικά 6ου Διημέρου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, σ. 81-94. Θεσσαλονίκη: City Publish.

Καφούση, Σ. (2002). Συζητώντας για την Ιστορία των Μαθηματικών στη σχολική τάξη. *Πρακτικά 19ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας – Τα μαθηματικά Διαχρονικός Παράγοντας Πολιτισμού*, σ. 175-184. Αθήνα: Ε.Μ.Ε.

Καφούση, Σ. & Ντζιαχρήστος, Β. (1998). Οι μαθηματικές γνώσεις των παιδιών της Τρίτης τάξης του Δημοτικού Σχολείου σχετικά με την αξία θέσης ψηφίου, την πρόσθεση και την αφαίρεση τριψήφιων αριθμών. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, 49-50: 205-217.

Καψάλης, Α. (2000). *Παιδαγωγική Ψυχολογία*. Θεσσαλονίκη: Αδελφοί Κυριακίδη.

Κολέζα Ε. (2007). Τα Μαθηματικά μέσα από τον καθρέφτη της Λογοτεχνίας: ένα ταξίδι στη χώρα των θαυμάτων. Στο Δ. Χασάπης (επιμ.) *Μαθηματικά & Λογοτεχνία. Πρακτικά 6ου Διημέρου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, σ. 27-47. Θεσσαλονίκη: City Publish.

Κολιάδης, Ε. (2002). *Γνωστική ψυχολογία, γνωστική νευροεπιστήμη και εκπαιδευτική πράξη: Μοντέλο επεξεργασίας πληροφοριών*. Αθήνα: Ιδιωτική Έκδοση.

Κολίτση, Φ. (2009). Έλληνες συγγραφείς και «μαθηματική λογοτεχνία»: Επιστήμη, φαντασία και νεωτερικότητα. *Ανακοίνωση στην ΙΒ΄ Επιστημονική Συνάντηση του*

Τμήματος Φιλολογίας (ΑΠΘ): «Η νεωτερικότητα στη νεοελληνική λογοτεχνία και κριτική» (26-29 Μαρτίου 2009).

Κόσυβας, Γ. (2014). Αριθμητική προσέγγιση ή γεωμετρική ακρίβεια; Αυθόρμητες αντιλήψεις δωδεκάχρονων που αγγίζουν την αρρητότητα. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών* 7: 9-48.

Κόσυβας,Γ. (2015). *Μπορεί η «μαθηματική λογοτεχνία» να κεντρίσει το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών για τα Μαθηματικά; Στο* Η. Ανδριανός & Σ. Καρύδης (Επιμ.) *Πρακτικά Διημερίδας, Οι θετικές Επιστήμες ως Πολιτισμικό Αγαθό: Προσεγγίσεις των Θετικών Επιστημών εκτός Αναλυτικού Προγράμματος, σ. 143-162. Αθήνα: Ροπή.*

Κοταρίνου, Π. (2007). Η λογοτεχνία και οι δραματικές τέχνες στη διδασκαλία της γεωμετρίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. *Πρακτικά 6ου Διημέρου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, σ. 197-216. Θεσσαλονίκη: City Publish.

Λαγοδόντη Α. (2014). *Διερευνώντας τη σχέση Μαθηματικών και Αφήγησης. Δυνατότητα αξιοποίησης στη διδασκαλία των Μαθηματικών*. Διπλωματική Εργασία Δ.Δ.Π.Μ.Σ. Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών. Αθήνα: Πανεπιστήμιο Αθηνών – Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Λαλαγιάννη, Β. (2005). Λογοτεχνία και Επιστήμες. Στο *Λογοτεχνία και Διαθεματικότητα: ερευνητικές προσεγγίσεις των σχολικών εγχειριδίων και της διδακτικής πράξης.* Ερευνητικό πρόγραμμα. Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας – Επιτροπή ερευνών.

Λεμονίδης, Χ. (1996). Δυσκολίες και αντιλήψεις των μαθητών κατά το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα. *Ευκλείδης Γ'*, 13/45: 61–70.

Λέρη Β. (2008). *Η αξιοποίηση της «Μαθηματικής Λογοτεχνίας» ως μέσο βελτίωσης των στάσεων των μαθητών για τα Μαθηματικά*. Διπλωματική Εργασία Δ.Δ.Π.Μ.Σ. Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών. Αθήνα: Πανεπιστήμιο Αθηνών – Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Μηλιώνης, Χ. (2001). Μαθηματική λογοτεχνία: Ένα εργαλείο για τη διδασκαλία των μαθηματικών. *Πρακτικά 18ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας.* ΕΜΕ, σ. 586-596.

Μητακίδου, Σ., & Τρέσσου, Ε.(2005). *Διδάσκοντας Γλώσσα και Μαθηματικά με Λογοτεχνία*. Εκδόσεις Επίκεντρο, Θεσ/νίκη.

Μιχαηλίδης, Τ. (2002). Μαθηματική λογοτεχνία: μια πρόκληση. *Πρακτικά 19ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας.* ΕΜΕ, σ. 634-642.

Μιχαηλίδης Τ. (2004α). Μαθηματικές Μυθοπλασίες. Μια προσπάθεια ταξινομίας στη λογοτεχνία των μαθηματικών. *Εφημερίδα ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΗ (Επτά Ημέρες) 10-11/4/2004*. Ανακτήθηκε 21-05-2019 από: https://thalesandfriends.org/wp-content/uploads/2012/03/math_mythmaking.pdf

Μιχαηλίδης Τ. (2004β). Η μυστική γοητεία των αριθμών. Μια διαχρονική περιδιάβαση στη μαθηματική λογοτεχνία. *Εφημερίδα ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΗ (Επτά Ημέρες) 10-11/4/ 2004.* Ανακτήθηκε 21-05-2019 από: http://users.sch.gr/gkaripid/keimena/walk_math_literature.pdf

Μιχαηλίδης Τ. (2006). Όταν τα Μαθηματικά προσφέρουν τον στόχο στη λογοτεχνία.

Εφημερίδα ΕΛΕΥΘΕΡΟΤΥΠΙΑ (ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ) 24/11/ 2006.

Μιχαηλίδης, Τ. (2009). *Αχμές, ο γιος του φεγγαριού*. Αθήνα: Πόλις.

Μιχαηλίδης, Τ. (2010α). *Από τον Αισχύλο στους μεταμοντέρνους: μαθηματική λογοτεχνία.* Ανακτήθηκε 21-05-2019 από: https://thalesandfriends.org/wp-content/uploads/2012/03/aeschylus_metamodern.pdf

Μιχαηλίδης, Τ. (2010β). *Τα Μαθηματικά στη Λογοτεχνία της Επιστημονικής Επανάστασης*. Ανακτήθηκε 21-05-2019 από: https://thalesandfriends.org/wp-content/uploads/2008/02/literature_science_revolution.pdf

Μιχαηλίδης, Τ. (2019). Συνέντευξη 15-06-2019. Παράρτημα Γ της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (1997). *Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών*.

Παναγάκος, Ι. (2002). Η σπουδαιότητα της διαθεματικής προσέγγισης της γνώσης και η προοπτική στο Δημοτικό Σχολείο. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 7: 72-79.

Παναγάκος, Ι. (2004). Η διαθεματική προσέγγιση στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών. *Πρακτικά του 21ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας*, σ. 192-201. Τρίκαλα: Ε.Μ.Ε.

Πολυπόρτης, Σ. (2016). *Η ιστορία της άλγεβρας και η χρήση της στις έρευνες της Διδακτικής*. Διπλωματική Εργασία, Π.Μ.Σ. Διδακτικής και Μεθοδολογίας Μαθηματικών. Αθήνα: Τμήμα Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α.

Σακονίδης, Χ. (2004). *Μαθαίνοντας και διδάσκοντας μαθηματικά Εκπαίδευση Μουσουλμανοπαίδων* 2002-2004 Αθήνα: ΥΠΕΠΘ- Πανεπιστήμιο Αθηνών. Ανακτήθηκε 25-02-2019 https://www.kleidiakaiantikleidia.net/book31/book31.pdf

Σκούρας, Α. (2002). Εμπλουτίζοντας τη διδασκαλία των Μαθηματικών με διαθεματικές προσεγγίσεις. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 7: 101–110.

Σπύρου, Π. (2007). Λογοτεχνία και Μαθηματικά: Όρια και συγκλίσεις. Στο Δ. Χασάπης (επιμ.) *Μαθηματικά & Λογοτεχνία. Πρακτικά 6ου Διημέρου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, σ. 59-70. Θεσσαλονίκη: City Publish.

Τζανάκης Κ., (2009). Η αξιοποίηση των σχέσεων μεταξύ Ιστορίας των Μαθηματικών και Μαθηματικής Εκπαίδευσης: Συζήτηση σχετικά με τα υπέρ και τα κατά, βάσει της διεθνούς εμπειρίας. Στο Βαμβακούση Ξ., Θωμαΐδης Γ., Πάσχος Θ. (Επιμ.) *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών* σ. 17-39. Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Τζανάκης, Κ., & Κούρκουλος, Μ. (2000). Η παροχή Μαθηματικής Παιδείας και τα χαρακτηριστικά του μαθηματικού σκέπτεσθαι: η περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. *Σύγχρονη Εκπαίδευση,* 111: 66-73.

Τζεκάκη, Μ. (2000) (επιμ.). *Εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις για την διδασκαλία των Μαθηματικών*. ΥΠΕΠΘ-ΚΕΕ.

Τουμάσης, Μ. (1999). *Πώς να ενεργοποιήσουμε τα παιδιά στο μάθημα των Μαθηματικών.* Χαλκίδα: Κωστόγιαννος.

Τράχηλου, Ε., Χρίστου, Ζ., & Λεμονίδης, Χ., (2008). Οι άτυπες στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές στον πολλαπλασιασμό. *Πρακτικά 10ου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης*, σ. 449-462.

ΦΕΚ 303, τ. Β΄, 13-03-2003, τόμος Α΄. *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών για την Υποχρεωτική Εκπαίδευση*. Αθήνα: Υ.Π.Ε.Π.Θ.

Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (2001). *Κείμενα Παιδείας: Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των Μαθηματικών.* Αθήνα: Άτροπος.

Χασάπης, Δ. (2005). Κοινωνικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης: Όψεις και ζητήματα. Στο Δ. Χασάπης (επιμ.) *Κοινωνικές & πολιτισμικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης. Πρακτικά 4ου Διήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, σ. 1-16. Θεσσαλονίκη.

Χασάπης, Δ. (2007). Μαθηματικά και Λογοτεχνία: Μια αιτούμενη σχέση. Στο Δ. Χασάπης (επιμ.) *Μαθηματικά & Λογοτεχνία. Πρακτικά 6ου Διημέρου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, σ. 3-14. Θεσσαλονίκη: City Publish.

Χατζηγεωργίου, Ι. (2012). *Γνώθι το curriculum.* Αθήνα: Διάδραση.

Χατζηκυριάκου, Κ. (2006). Η ιστορία της ιστορίας των μαθηματικών: Δυο-τρία πράγματα που ξέρω γι' αυτήν. Στο Δ. Χασάπης (επιμ.) *Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση. Πρακτικά 5ου Διήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. σ. 47-62. Θεσσαλονίκη.

Χατζηκυριάκου, Κ. (2007). Η διδακτική αξιοποίηση της μαθηματικής λογοτεχνίας στο μάθημα «Διασκεδαστικά Μαθηματικά-Επίλυση Προβλημάτων». Στο Δ. Χασάπης (επιμ.) *Μαθηματικά & Λογοτεχνία. Πρακτικά 6ου Διημέρου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, σ. 277-284. Θεσσαλονίκη: City Publish.

Χιονίδου – Μοσκοφόγλου, Μ. (2002). Το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών στην υποχρεωτική εκπαίδευση. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 7: 80–100.

Χρονάκη, Α., & Μουντζούρη, Γ. (2011). Λογοτεχνία και Μαθηματικά στις μικρές ηλικίες: Πολυφωνικές αφηγήσεις και αναδυόμενες δεξιότητες αριθμητισμού». Στο Δ. Χασάπης (επιμ.), *Μαθηματικά και Τέχνες στην εκπαίδευση, 9ο Διήμερο διαλόγου για τη διδασκαλία των Μαθηματικών.* Θεσσαλονίκη: Ομάδα έρευνας της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, σ. 183-202.

Χρυσαφίδης, Κ. (2006). *Βιωματική-Επικοινωνιακή διδασκαλία: η εισαγωγή της μεθόδου project στο σχολείο*. Αθήνα: Gutenberg.

ΙΣΤΟΤΟΠΟΙ:

http://thalesandfriends.org.

https://discoveringegypt.com/

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΑΠΟΣΠΑΣΜΑΤΑ

για τις διδακτικές προτάσεις

1η διδακτική πρόταση

Μετά από μερικές μέρες, οι πιο έξυπνοι τουλάχιστον, ήταν σε θέση να διαβάσουν μόνοι τους τα κείμενα που τους μοίραζε ο Ονέχ. Όπως είχε προβλέψει ο παππούς του Αχμές μερικά από τα κείμενα ήταν πολύ διασκεδαστικά και άρεσαν στους νεαρούς μαθητευόμενους. Εκτός από την ιστορία του Σινουχέ*, που τους την είχε διηγηθεί κι ο Καάπερ, οι νεαροί μαθητευόμενοι αντέγραφαν και αποστήθισαν την ιστορία του ναυαγού που η θάλασσα τον ξεβράζει στο νησί του φιδιού και την ιστορία του καταραμένου πρίγκιπα που έμελλε να πεθάνει νέος ή από σκύλο, ή από φίδι ή από κροκόδειλο. Ωστόσο όλοι ανυπομονούσαν να διαβάσουν τις πιο τολμηρές ιστορίες για τις οποίες είχαν ακούσει από μεγαλύτερα παιδιά, ιστορίες όπου ανακατεύονταν έρωτες, μοιχείες, προδοσίες και εντυπωσιακές εκδικήσεις. Κι αφού ο συντηρητικός Ονέχ δεν τους έδινε ποτέ τέτοια κείμενα, θα έπρεπε να αρκεστούν στις διηγήσεις των συνομηλίκων τους.

Μια μέρα, μπαίνοντας στην τάξη, οι νεαροί μαθητές απόρησαν: Αντί για τις συνηθισμένες πινακίδες με το κείμενο της ημέρας, ο καθένας βρήκε στη θέση του μερικά ραβδιά από σκληρό βούρλο, λίγο μεγαλύτερα από αυτά που χρησιμοποιούσαν για να γράφουν.

«Πόσα ραβδιά έχεις μπροστά σου, Μοζ;» ρώτησε ο Ονέχ.

«Τρία», απάντησε ο μικρός.

«Ωραία. Για να γράφουμε τον αριθμό 3 σχεδιάζουμε τρία ραβδιά». Με το πινέλο του ο Ονέχ σχεδίασε στον τοίχο: |||

«Εσύ, Ντακά;»

«Πέντε».

«Πέντε λοιπόν ραβδιά θα σχεδιάσουμε για να γράφουμε το 5. Εσύ, Άμανθυ;»

«Εφτά. Θα ζωγραφίσω 7 ραβδιά».

«Ωραία λοιπόν, καταλάβατε. Για να γράφουμε έναν αριθμό από το 1 μέχρι το 9 γράφουμε τόσα ραβδιά όσα λέει ο αριθμός».

«Κι αν έχουμε μεγαλύτερο αριθμό;» ρώτησε ο Αχμές. Δεν μου φαίνεται και τόσο βολικό να σχεδιάσω ας πούμε 42 ραβδιά».

Ο Ονέχ κοίταξε παραξενεμένος τον Αχμές. Παρόλο που οι επιδόσεις του στο γράψιμο ήταν αρκετά καλές, ο γιος του Πιανκί δεν τον είχε συνηθίσει σε ενεργή συμμετοχή στο μάθημα το οποίο συνήθως παρακολουθούσε βαριεστημένα.

«Έχεις δίκιο, Αχμές. Όταν έχουμε μεγάλους αριθμούς χρησιμοποιούμε μια άλλη τεχνική. Δέκα μονάδες μαζί μάς κάνουν μια δεκάδα. Κάθε δεκάδα συμβολίζεται με ένα χερούλι καλαθιού: ∩».

«Βάζουμε δηλαδή τις μονάδες μέσα σ' ένα καλάθι και παίρνουμε το χερούλι», πέταξε ο αιώνια πλακατζής Ντακά.

«Σωστά. Τι παριστάνει λοιπόν το σύμβολο ∩|||;»

«Το 13!» πετάχτηκε ο Αχμές. «Και το 42 που έλεγα πριν θα είναι ∩∩∩∩||».

Στην τάξη επικράτησε ενθουσιασμός. Όλοι έσπευδαν να βάλουν προβλήματα στον διπλανό τους είτε γράφοντας αριθμούς που ζητούσαν από τον συμμαθητή τους να διαβάσει είτε αντίστροφα ζητώντας του να γράφει τον αριθμό που του έλεγαν.

«∩∩∩|».

«31».

«Και το 55;»

«∩∩∩∩∩|||||».

Το κλίμα ευφορίας ήρθε να διαταράξει πάλι ο Αχμές:

«Και το 324; Πόσα χερούλια πρέπει να ζωγραφίσω για να το γράφω;»

Ο Ονέχ σοβάρεψε: «Όπως είπαμε δέκα μονάδες κάνουν μια δεκάδα που τη συμβολίζουμε με το χερούλι του καλαθιού. Δέκα δεκάδες κάνουν μια εκατοντάδα. Αυτή τη συμβολίζουμε μ' ένα τυλιγμένο σχοινί...»

«Εμ βέβαια, σχοινί για να δέσουμε τα καλάθια», πετάχτηκε πάλι ο αδιόρθωτος Ντακά.

«Οπότε το 324 θα είναι τρία τυλιγμένα σχοινιά, δύο χερούλια και τέσσερα ραβδιά», συμπέρανε ο Αχμές. 𓍢𓍢𓍢 𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺.

«Σωστά. Μπορούμε αν θέλετε να συνεχίσουμε, αν και δεν νομίζω ότι θα σας χρειαστούν ποτέ τόσο μεγάλοι αριθμοί. Δέκα εκατοντάδες μας κάνουν μια χιλιάδα: ένα άνθος του λωτού. Δέκα χιλιάδες είναι ένα χοντρό δάχτυλο. Δέκα δεκάδες χιλιάδες, μια εκατοντάδα χιλιάδα δηλαδή, συμβολίζεται μ' έναν γυρίνο. Και τέλος δέκα εκατοντάδες χιλιάδες, ένα εκατομμύριο, συμβολίζεται μ' έναν άνθρωπο που σηκώνει τα χέρια του εκστατικά στον ουρανό».

«Τι να κάνει ο άνθρωπος, απελπίστηκε με τόσο μεγάλο αριθμό!» σχολίασε ο Ντακά.

𓏺	1	Απλό ραβδί
𓎆	10	Χερούλι καλαθιού
𓍢	100	Τυλιγμένο σχοινί
𓆼	1.000	Άνθος λωτού
𓂭	10.000	Δάχτυλο
𓆐	100.000	Γυρίνος
𓁨	1.000.000	Άνθρωπος σε έκσταση

Πίνακας 1: Τα ιερογλυφικά σύμβολα των αριθμών

2η διδακτική πρόταση

Έτσι ύστερα από ένα σωρό δισταγμούς και παλινωδίες, φορτωμένα με φυλαχτά ικανά να εκδιώξουν όλα τα κακόβουλα πνεύματα, γηγενή και εισαγόμενα, με προμήθειες αρκετές για να θρέψουν έναν μικρό στρατό για περισσότερο από έναν μήνα και με ακόμα περισσότερες συμβουλές, προτροπές και προειδοποιήσεις τα δυο παιδιά μαζί με τον Πανέμπ είχαν επιβιβαστεί στη βάρκα του επόπτη Κεχεπέρα και κατευθύνονταν, κατεβαίνοντας τον ποταμό, προς τα κτήματα του άρχοντα Ιφάρ.

Ο Κεχεπέρα είχε ανοιγμένο πάνω στα πόδια του έναν κύλινδρο που έφερε τη σφραγίδα του Φαραώ. «Πριν από την πλημμύρα ο Ιφάρ είχε στην περιοχή 300 σετχάτ καλλιεργήσιμης γης».

«Ένα σετχάτ είναι ένα τετράγωνο που η πλευρά του είναι ένα κετ», εξήγησε ο Πανέμπ στα παιδιά.

«Οι πληροφορίες λένε ότι φέτος η πλημμύρα άπλωσε τη μαύρη λάσπη σε βάθος 25 κετ από την όχθη», συνέχισε ο Κεχεπέρα. «Οπότε θα πρέπει να αναγνωρίσουμε στον άρχοντα Ιφάρ...»

«12 κετ κατά μήκος του ποταμού», πετάχτηκε ο Αχμές.

Ο Κεχεπέρα που δεν γνώριζε τον Αχμές γούρλωσε τα μάτια του με έκπληξη. «Σωστά!» φέλλισε. «Πώς το βρήκες;»

«Ένα σετχάτ είναι ένα τετράγωνο με πλευρά ένα κετ, είπε ο Αχμές. Αν αραδιάσω 25 τετράγωνα με πλευρά ένα κετ, το ένα πίσω από τ' άλλο, θα έχω μια λωρίδα με επιφάνεια 25 σετχάτ. Αν αραδιάσω δίπλα της άλλη μια λωρίδα θα έχω άλλα 25 σετχάτ. Θα χρειαστώ 12 λωρίδες για να έχω 300 σετχάτ. Και δώδεκα λωρίδες κατά μήκος του ποταμού θα εκτείνονται σε 12 κετ». Όλα αυτά ο Αχμές τα είπε αδιάφορα, με τον πιο φυσικό τρόπο του κόσμου. Αντίθετα ο Πανέμπ, παρόλο που γνώριζε τις ικανότητες του Αχμές, δεν μπόρεσε να κρύψει την έκπληξή του. Όσο για τον Κεχεπέρα, αυτός είχε μείνει άφωνος. Ο Άμανθυς έλαμπε από υπερηφάνεια. Καμάρωνε για το κατόρθωμα του φίλου του σαν να το είχε πετύχει ο ίδιος.

«Είσαι πολύ καλός, γιε του Πιανκί», είπε ο Κεχεπέρα, μόλις συνήλθε από την έκπληξη. «Αν συνεχίσεις έτσι θα γίνεις ο πρώτος αρπεδονάπτης στην Άνω και Κάτω Αίγυπτο».

«Όχι, δεν είμαι και τόσο καλός», απάντησε ο Αχμές. Η έκφρασή του ήταν ανεπιτήδευτη. Φανέρωνε ένα ειλικρινές παράπονο και όχι κάποια υποκριτική μετριοφροσύνη με σκοπό να προκαλέσει επαίνους. «Όταν θέλω να προσθέσω πολλές φορές τον ίδιο αριθμό δυσκολεύομαι».

«Δηλαδή;»

«Ας πούμε πως ένα χωράφι έχει μήκος 13 κετ και πλάτος 5. Για να βρω πόσα σετχάτ είναι πρέπει να αραδιάσω τη μία δίπλα στην άλλη 13 στήλες από 5 τετράγωνα. Ύστερα θα προσθέσω 5+5+5+..., δεκατρείς φορές. Νά, αυτό με δυσκολεύει. Κι αν οι αριθμοί είναι ακόμα πιο περίπλοκοι, ας πούμε 19 και 37, το πράγμα δυσκολεύει ακόμη περισσότερο».

«Αυτό μη σε απασχολεί, γιε του Πιανκί. Θα σου δείξω εγώ έναν τρόπο να κάνεις εύκολα τις πράξεις. Έχεις μια πινακίδα;»

Ο Αχμές βιάστηκε να βγάλει απ' το καλάθι του το σημειωματάριο του Πανέμπ, που δεν το αποχωριζόταν ποτέ. «Ας γράφουμε εδώ», είπε σε κατάσταση υπερδιέγερσης.

«Γράψε στη δεξιά στήλη το 5 και στην αριστερή το 1».

1	5

«Διπλασίασε τώρα τους αριθμούς της πρώτης γραμμής και γράψε τους από κάτω».

1	5
2	10

«Κάνε το ίδιο όσες φορές χρειάζεται. Θα σταματήσεις όταν η αριστερή στήλη θα ετοιμάζεται να ξεπεράσει το 13».

1	5
2	10
4	20
8	40

«Σταματάω εδώ», είπε ο Αχμές, «γιατί αν διπλασιάσω το 8 θα βρω 16 που ξεπερνάει το 13».

«Ωραία», είπε ο Κεχεπέρα που είχε αρχίσει να συνηθίζει στη γρήγορη αντίληψη του Αχμές. Σημείωσε τώρα στην αριστερή στήλη όσους αριθμούς χρειάζεσαι για να φτιάξεις το 13».

\1	5
2	10
\4	20
\8	40

«Οχτώ και τέσσερα, δώδεκα και ένα δεκατρία», είπε ο Αχμές σημειώνοντας ταυτόχρονα τους αντίστοιχους αριθμούς.

«Αν τώρα προσθέσεις τους αντίστοιχους αριθμούς της άλλης στήλης θα βρεις πόσο κάνει 13 φορές το 5».

\1	\5
2	10
\4	\20
\8	\40
13	65

Τα μάτια του Αχμές έλαμψαν από ενθουσιασμό. «65» φώναξε όλος χαρά. Γιά να δοκιμάσουμε κάτι πιο δύσκολο. 19 φορές το 37:»

\1	\37
\2	\74
4	148
8	296
\16	\592
19	703

«703!» φώναξε ενθουσιασμένος. «Ξέρεις πόσο έχω παιδευτεί για να το βρω αυτό;»

Εδώ και λίγη ώρα ο Άμανθυς είχε ξεκόψει από την παρέα. Ακουμπισμένος στην κουπαστή της βάρκας χάζευε την ακτή. Πρώτος τον πρόσεξε ο Πανέμπ. «Ρεμβάζεις, αγόρι μου;» τον ρώτησε.

Ο Άμανθυς χαμογέλασε. «Προσπαθώ να διακρίνω τα μέρη απ' όπου είχα περάσει πριν δυο χρόνια, όταν το έσκασα από το καράβι», απάντησε.

«Άδικα προσπαθείς. Κάθε χρόνο η πλημμύρα αλλάζει τη διαμόρφωση της ακτής. Ο Νείλος, εκτός από ποτάμι της ζωής είναι και ποτάμι της λήθης. Πρέπει ν' ακολουθήσεις το παράδειγμά του. Πρέπει να ξεχάσεις».

3η διδακτική πρόταση

νο λάδι με το οποίο ήταν αλειμμένο. Φορούσε έναν απλό λευκό χιτώνα και ήταν ξυπόλυτος. Μόλις μπήκε στην αίθουσα, οι δυο υποψήφιοι σηκώθηκαν και υποκλίθηκαν.

«Ποιος από σας είναι ο Αχμές, ο γιος του Πιανκί;» ρώτησε.

«Εγώ», απάντησε ο Αχμές.

«Ο Ονέχ μου γράφει ότι έχεις ταλέντο με τους αριθμούς και τα σχήματα», είπε. «Γιά να δούμε, λοιπόν. Είσαι στ' αλήθεια ικανός; Ένας αριθμός και το τέταρτο μέρος του κάνουν 15. Μπορείς να βρεις τον αριθμό;[7]»

Ο Αχμές σκέφτηκε. «Δώδεκα», είπε σε λίγο.

Κι αν ο Τζάου εντυπωσιάστηκε από την ταχύτητα της απάντησης, πάντως δεν το έδειξε. «Από έναν αριθμό παίρνω το πέμπτο μέρος του και μένει το 48. Ποιος είναι ο αριθμός;» ρώτησε αμέσως, χωρίς ν' αφήσει τον Αχμές να πάρει ανάσα.

Ούτε και τώρα άργησε η σωστή απάντηση: «Εξήντα».

Ήταν φανερό πως ο Τζάου έκανε προσπάθεια για να κρύψει τον θαυμασμό του. «Από έναν αριθμό παίρνω το μισό του και το τέταρτο μέρος του και μένει 5. Βρες τον».

Αυτή τη φορά, στο άκουσμα της σωστής απάντησης –είκοσι– ο Τζάου δεν έκρυψε καθόλου τον ενθουσιασμό του. Τρεις σωστές απαντήσεις στη σειρά δεν μπορεί να ήταν τυχαίες. «Είσαι πολύ δυνατός, νεαρέ», είπε. «Μπορείς να μας εξηγήσεις πώς το βρήκες;»

«Είναι μια δική μου μέθοδος*. Διαλέγω έναν βολικό αριθμό, έστω κι αν είναι λανθασμένος. Ας πούμε το 4 που το μισό του είναι 2 και το τέταρτο μέρος του είναι 1. Αν απ' το 4 πάρω

7. Πρόβλημα 26.

το μισό και το τέταρτο μέρος του, θα βρω 1. Για να γίνει το 1 ίσο με 5 πρέπει να το πολλαπλασιάσω με 5. Αν πολλαπλασιάσω το 4 με 5 θα βρω 20. Η σωστή απάντηση λοιπόν είναι 20».

Ο Τζάου έμεινε να τον κοιτάζει χωρίς να μιλά. Ο Αχμές εξέλαβε τη σιωπή του για αμφιβολία. Έτσι έσπευσε να υποστηρίξει τη λύση του: «Το μισό του 20 είναι 10 και το τέταρτο μέρος του 5. Αν από τα 20 πάρω 10 και 5 θα μείνουν 5. Αυτό που έπρεπε».

«Βλέπω πως οι αριθμοί δεν έχουν πολλά μυστικά από σένα, γιε του Πιανκί», είπε χαμογελώντας ο Αρχιερέας.

«Αντίθετα, έχουν πάρα πολλά μυστικά», είπε ο Αχμές. «Κάθε φορά που ανακαλύπτω κάτι καινούργιο, ανακαλύπτω και πόσο μεγάλη είναι η άγνοιά μου».

«Μεγάλη κουβέντα αυτή για τόσο νέο άνθρωπο. Και τι είναι παρακαλώ αυτό που αγνοείς και θα ήθελες να μάθεις;»

«Πολλά. Μα η σοβαρότερη απορία μου αφορά την ίδια τη φύση των αριθμών».

«Δηλαδή;»

«Όλοι μου λένε πως οι αριθμοί είναι ένα δημιούργημα του ανθρώπου, ένα εργαλείο για να λύνει τις πρακτικές του ανάγκες, να λογαριάζει, να συναλλάσσεται, να μετρά».

«Και;»

«Εγώ δεν πιστεύω πως οι αριθμοί είναι αυθαίρετα προϊόντα του πνεύματός μας. Υπάρχουν έξω από εμάς με την ίδια αναγκαιότητα που παρουσιάζουν και τα χειροπιαστά αντικείμενα και τους ανακαλύπτουμε με τον ίδιο τρόπο που ανακαλύπτουμε τα ζώα, τα φυτά, τα ορυκτά... Πιστεύω πως το καθετί στη φύση έχει έναν αριθμό μόνο που καμιά φορά... δεν μπορούμε να τον ανακαλύψουμε αυτό τον αριθμό».

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

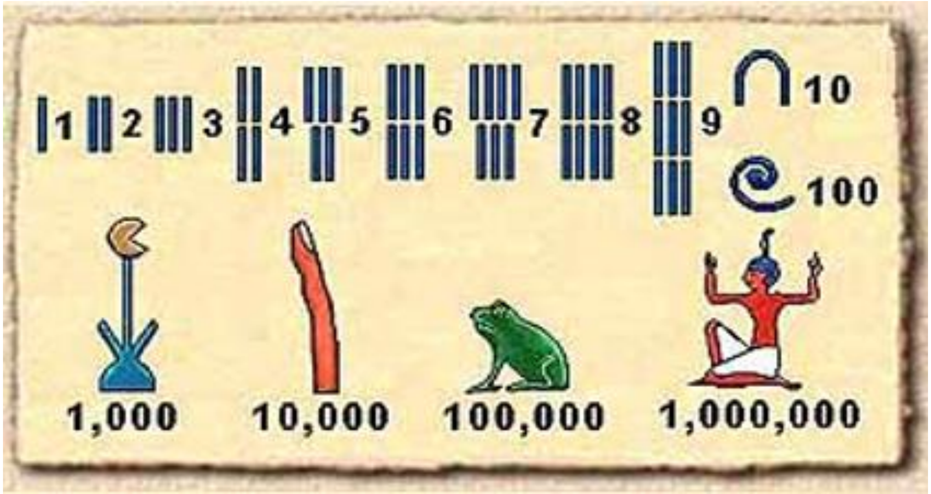
ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

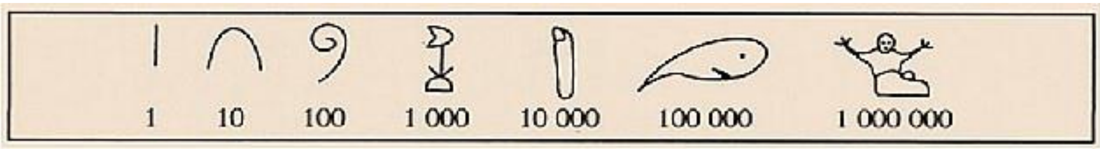
για τις διδακτικές προτάσεις

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

Φανταστείτε ότι ζείτε στην Αρχαία Αίγυπτο και πηγαίνετε στο σχολείο του Ονέχ μαζί με τον Αχμές και τον Άμανθυ. Ας γνωρίσουμε μαζί τους τα σύμβολα που χρησιμοποιούσαν για τους αριθμούς σε εκείνη τη μακρινή εποχή.

Τα αριθμητικά σύμβολα των αρχαίων Αιγυπτίων

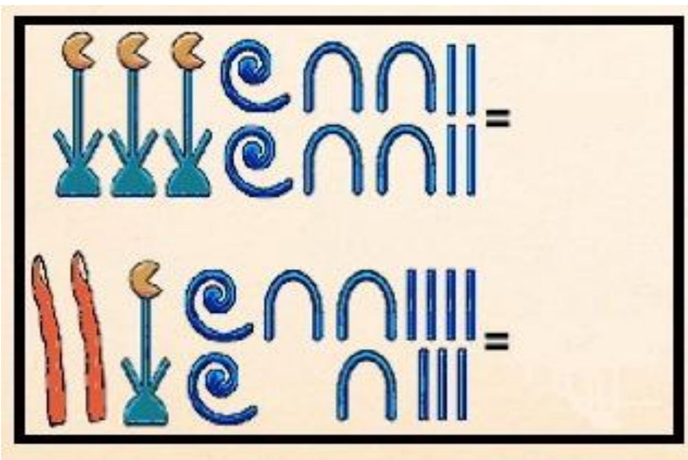




Διαβάζουμε πάλι στην ομάδα το απόσπασμα του βιβλίου «Αχμές, ο γιος του φεγγαριού» (σελ. 58-60) για να θυμηθούμε πώς έγραφαν τους αριθμούς χρησιμοποιώντας τα παραπάνω σύμβολα.

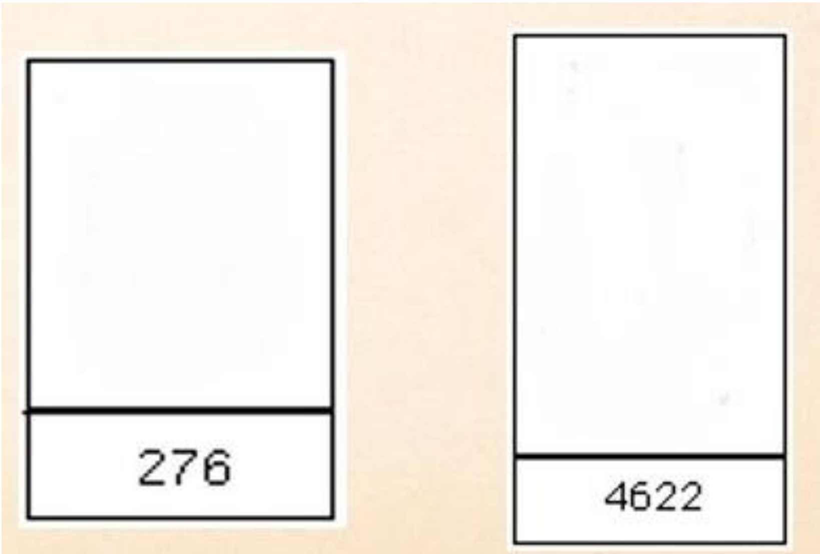
ΕΡΓΑΣΙΕΣ

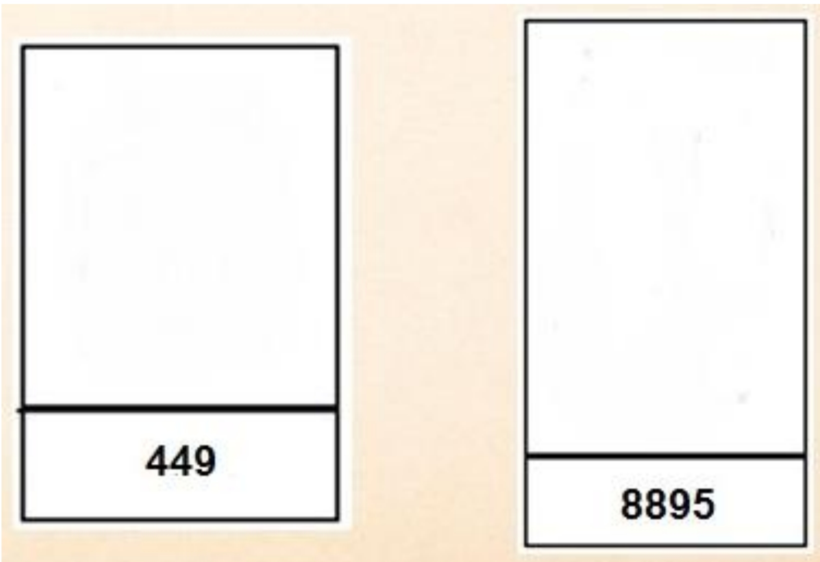
1. Ποιοι είναι οι αριθμοί που σημειώνονται παρακάτω; Ας προσπαθήσουμε να τους γράψουμε με τα δικά μας σύμβολα.



2. Συνδεθείτε στον ιστότοπο https://discoveringegypt.com/egyptian-hieroglyphic-writing/hieroglyphic-typewriter/ και χρησιμοποιείστε το πληκτρολόγιο της εφαρμογής για να γράψετε αριθμούς με τα σύμβολα των αρχαίων Αιγυπτίων.
Καθένας με τη σειρά μπορεί να αναθέσει στα υπόλοιπα μέλη της ομάδας να γράψουν από τρεις αριθμούς

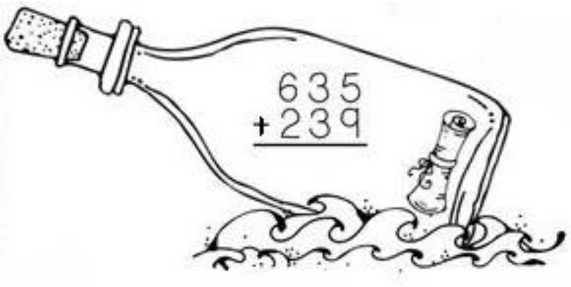
3. Ας προσπαθήσουμε τώρα να γράψουμε τους παρακάτω αριθμούς με τα σύμβολα που χρησιμοποιούσαν στην αρχαία Αίγυπτο:

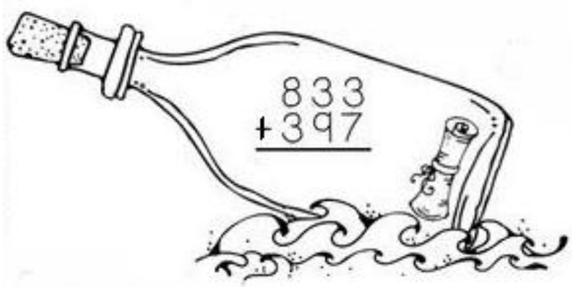


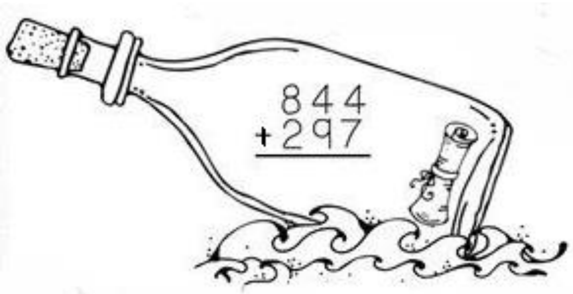


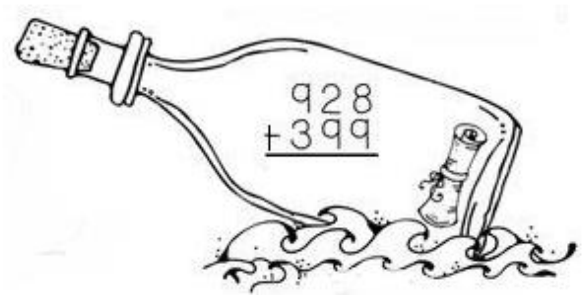
Τι παρατηρείτε; Τι σημαίνουν τα δύο όμοια ψηφία στους παραπάνω αριθμούς: 449, 4622, 8895 στο δικό μας αριθμητικό σύστημα;

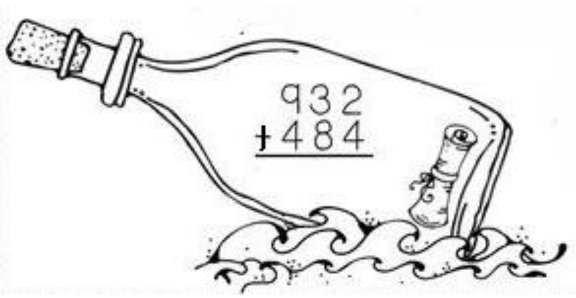
4. Ας ανακαλύψουμε τους αριθμούς που κρύβονται μέσα στα μπουκάλια που ταξίδευαν για πολλά χρόνια μέσα στη θάλασσα. Γράψτε στις ομάδες σας το αποτέλεσμα της κάθε πράξης χρησιμοποιώντας τα αρχαία αιγυπτιακά σύμβολα για να βρείτε τι γράφει ο τυλιγμένος πάπυρος σε κάθε μπουκάλι.

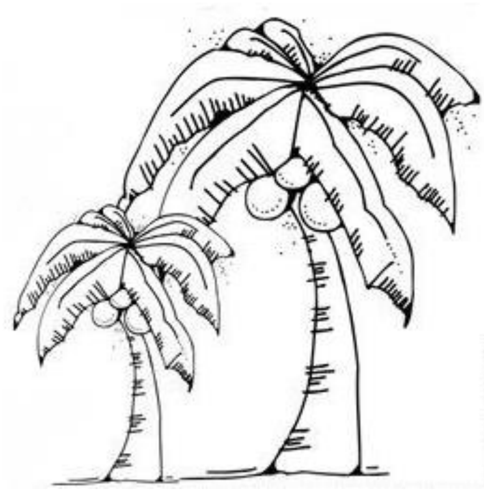












Μπορείτε να ξανακάνετε τις πράξεις χρησιμοποιώντας για όλους τους αριθμούς τα αρχαία αιγυπτιακά σύμβολα; Ποιες διαφορές μπορείτε να σημειώσετε συγκρίνοντας τον τρόπο που εμείς κάνουμε πρόσθεση; Χρειάζονταν οι αρχαίοι Αιγύπτιοι να θυμούνται κρατούμενα; Γιατί;

5. Ας προσπαθήσουμε να γράψουμε τον παρακάτω αριθμό με τα αρχαία αιγυπτιακά σύμβολα. Τι παρατηρείτε; Πόσα σύμβολα χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε; Πόσο χώρο χρειαζόμαστε;

9.999.991=

6. Συζητείστε στις ομάδες και καταγράψτε τους λόγους για τους οποίους νομίζετε ότι οι αρχαίοι Αιγύπτιοι σκέφτηκαν να χρησιμοποιήσουν διαφορετικά σύμβολα για τους αριθμούς 10, 100, 1.000, 10.000, 1.000.000. Σημειώστε ακόμα τις απόψεις σας σχετικά με το αριθμητικό σύστημα που εμείς σήμερα χρησιμοποιούμε. Είναι πιο πρακτικό; Μας διευκολύνει περισσότερο στη γραφή των αριθμών και στους υπολογισμούς; Έχει κάποια πλεονεκτήματα σε σχέση με τα αριθμητικά συστήματα παλαιότερων εποχών που έχουμε γνωρίσει;

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

Διαβάζοντας το απόσπασμα του βιβλίου «Αχμές, ο γιος του φεγγαριού» (σελ. 80-83), ακούσαμε τον Κεχεπέρα να εξηγεί την τεχνική του πολλαπλασιασμού. Ας προσπαθήσουμε κι εμείς να λογαριάσουμε μαζί με τον Αχμές:

Ένα εύκολο παράδειγμα:

Ας υπολογίσουμε	**24 X 33**	Σχηματίζουμε μια αριστερή και δεξιά στήλη.
Αριστερή	Δεξιά	Βάζουμε το 1 στην αριστερή στήλη
1	33	και τον μεγαλύτερο από τους αριθμούς που έχουμε να πολλαπλασιάσουμε στη δεξιά στήλη.
2	66	Συνεχίζουμε τον διπλασιασμό και στις δύο στήλες …
4	132	
8	264	μέχρι που ο αριθμός στην αριστερή στήλη να είναι μεγαλύτερος από
16	528	το μισό του μικρότερου από τους αριθμούς που έχουμε να πολλαπλασιάσουμε (24).
Αριστερή	Δεξιά	
~~1~~	~~33~~	Τώρα σχηματίζουμε τον μικρότερο αριθμό (24) προσθέτοντας
~~2~~	~~66~~	αριθμούς από την αριστερή στήλη. Διαγράφουμε αυτούς που δεν
~~4~~	~~132~~	χρειαζόμαστε μαζί με τους αντίστοιχους στη δεξιά στήλη.
8	264	Προσθέτουμε τους αριθμούς που έχουν μείνει στη δεξιά στήλη
16	528 +	και έτσι έχουμε την απάντησή μας.
24	**792**	
	24 X 33=792	

Ας συνεχίσουμε ακολουθώντας τα ίδια βήματα ….

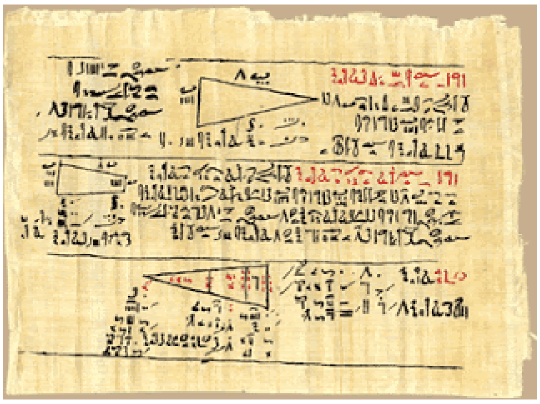
Ένα πιο δύσκολο παράδειγμα:

Ας υπολογίσουμε	**43 Χ 62**	Σχηματίζουμε μια αριστερή και δεξιά στήλη.
Αριστερή	Δεξιά	Βάζουμε το 1 στην αριστερή στήλη
1	62	και ….
Αριστερή	Δεξιά	

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον τρόπο για να κάνουμε και τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς στις ομάδες μας:

12 Χ 41=….., 14 Χ 32=….., 17 Χ 68=….., 24 Χ 54=….., 25 Χ 35=….., 29 Χ 34=…..

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3
ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ … ΠΑΡΕΑ ΜΕ ΤΟΝ ΑΧΜΕΣ



Στο απόσπασμα που διαβάσαμε από το βιβλίο «Αχμές, ο γιος του φεγγαριού» (σελ. 119) ο αρχιερέας Τζάου θέτει στον Αχμές δύο προβλήματα για να διαπιστώσει την ικανότητά του στα Μαθηματικά.

1. Πρώτο πρόβλημα:

Ένας αριθμός και το τέταρτο μέρος του κάνουν 15. Μπορείς να βρεις τον αριθμό;

Στον αρχαίο πάπυρο προτείνεται από τον Αχμές η παρακάτω λύση:

Υπολογίζουμε (Επιλέγουμε να δοκιμάσουμε) με το 4	(βολικός αριθμός ή αλλιώς λανθασμένη παραδοχή)
Από αυτό πρέπει να πάρουμε το τέταρτο μέρος, δηλαδή 1(το ¼ του 4 είναι 1)	
Μαζί με το 4 (που αρχικά επιλέξαμε) έχουμε 5	(λανθασμένο αποτέλεσμα)
Θα έπρεπε όμως (σύμφωνα με το πρόβλημα) να έχουμε 15 ως αποτέλεσμα	
Δηλαδή το τριπλάσιο του 5 (αφού 15:5=3)	(σύγκριση)
Άρα το 4 (η αρχική, λανθασμένη, παραδοχή) θα πρέπει κι αυτή να τριπλασιαστεί 4. 3=12.	(διόρθωση)
Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι το 12	(σωστό αποτέλεσμα)
Πραγματικά το 12 μαζί με το τέταρτο μέρος του, που είναι το 3, κάνουν 15.	(επαλήθευση)

2. Δεύτερο πρόβλημα:

Μέσα από το απόσπασμα του βιβλίου μπορείτε να βρείτε και να σημειώσετε παρακάτω το δεύτερο πρόβλημα που έπρεπε να λύσει ο Αχμές;

____

____

Μπορείτε να καταγράψετε και τη διαδικασία που πρότεινε ο Αχμές για τη λύση του, όπως κάναμε και για το πρώτο πρόβλημα;

3. Ένας άλλος τρόπος:

α. Εμείς σήμερα πώς ονομάζουμε τον αριθμό/ποσότητα που δεν γνωρίζουμε σε ένα πρόβλημα; Γιατί; Πως τον συμβολίζουμε;

____
____
____
____

β. Ορίστε στις ομάδες σας από μια μεταβλητή για να συμβολίσετε τον άγνωστο αριθμό σε κάθε ένα από τα παραπάνω προβλήματα. Με τη βοήθεια αυτής της μεταβλητής σχηματίστε μια ισότητα που να απεικονίζει όσα λέει το κάθε πρόβλημα και στη συνέχεια λύστε τη για να βρείτε τον ζητούμενο αριθμό:

Πρώτο πρόβλημα:

Ορίζουμε μια μεταβλητή: ____

Σχηματίζουμε με τη βοήθειά της μια ισότητα: ___________________________

Λύνουμε την ισότητα:

____
____
____
____

Δεύτερο πρόβλημα:

Ορίζουμε μια μεταβλητή: ____

Σχηματίζουμε με τη βοήθειά της μια ισότητα: ___________________________

Λύνουμε την ισότητα:

____
____
____

4. Ας προσπαθήσουμε τώρα να λύσουμε μαζί με τον Αχμές το παρακάτω πρόβλημα και με τους δύο τρόπους που είδαμε:

Στα βιβλία της βιβλιοθήκης που έχει ένα πολιτιστικό κέντρο, αν προστεθεί 1/5 του αριθμού των βιβλίων, τότε το πλήθος τους θα είναι 3.600. Πόσα βιβλία υπάρχουν τώρα στη βιβλιοθήκη;

Ο Αχμές προτείνει τον δικό του τρόπο, του «βολικού αριθμού»:

Εμείς προτείνουμε τον δικό μας τρόπο με τις εξισώσεις:

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

5. Συζήτηση στην ομάδα:

- Συγκρίνουμε τους δύο τρόπους που χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε τον άγνωστο αριθμό στα παραπάνω προβλήματα. Σημειώνουμε ομοιότητες και διαφορές.
- Καταγράφουμε τις απόψεις μας σχετικά με τον τρόπο επίλυσης που θεωρούμε ότι μας βοηθάει να αποτυπώσουμε πιο ξεκάθαρα, συνοπτικά και κωδικοποιημένα τις μαθηματικές σχέσεις.
- Μας βοηθούν τα σύγχρονα Μαθηματικά, ώστε να έχουμε περισσότερες επιλογές και να αποδίδουμε με συντομία, σαφήνεια και ακρίβεια τους υπολογισμούς μας;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ Τ. ΜΙΧΑΗΛΙΔΗ

(Χανιά, 15-06-2019)

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ ΜΕ Τ. ΜΙΧΑΗΛΙΔΗ (Χανιά, 15-06-2019)
(Όπου Φ: Φοιτήτρια και Σ: Συγγραφέας)

Ερώτηση 1

Φ.: Στο βιβλίο σας αναφέρετε (σελίδα 9) ότι βάλατε στο στόμα των ηρώων σας κείμενα που υπάρχουν αυτούσια σε ιστορικές πηγές. Ήταν στις προθέσεις σας να μεταφέρετε στον αναγνώστη και κατ' επέκταση στον/στην μαθητή/μαθήτρια (μέσα από τη διδακτική αξιοποίηση του βιβλίου) ακριβή ιστορικά στοιχεία της εποχής ή ήταν η απαραίτητη προϋπόθεση για να τοποθετηθούν οι χαρακτήρες του έργου στο ιστορικό πλαίσιο της μυθοπλασίας;

Σ.: Κατά βάση το δεύτερο. Δηλαδή, ε, ήθελα πρώτα εγώ να αισθανθώ ότι μέσω των δύο ηρώων μου, του Άμανθυ και του Αχμές, ζω σ' εκείνη την εποχή. Και επομένως όπου βρήκα αυτούσια λόγια αντιγραμμένα από παπύρους, από τοιχογραφίες και τέτοια, φρόντισα με τον ένα ή τον άλλο τρόπο να τα βάλω στο στόμα τους, για να μπω εγώ στο κλίμα. Αυτό το βιβλίο…, δεν είχε διδακτικούς σκοπούς. Δε γράφτηκε δηλαδή εκ των προτέρων για να διδάξει. Άλλα βιβλία μου έχουν γραφτεί γι' αυτό. Το «Μιλώντας στην Άννα για τα Μαθηματικά», το «Μιλώντας στην Αθηνά για το χάος και την πολυπλοκότητα», αυτά είναι αυτό που εγώ ονομάζω προσχηματική μυθοπλασία. Δηλαδή είχανε ένα προσχηματικό και μάλλον χαλαρό μύθο ως χαλί για να διδάξω ορισμένα πράγματα. Εδώ ήταν το ανάποδο. Δηλαδή εγώ ήθελα να ζήσω μια περιπέτεια στην Αίγυπτο του 1.700 π.Χ. και ο πάπυρος του Αχμές, δηλαδή τα Μαθηματικά, ήταν αυτή τη φορά αυτό που με τράβαγε. Όχι αυτό που έκανα εγώ για να τραβήξω τα Μαθηματικά, για να δώσω Μαθηματικά, αλλά αυτό που με τράβαγε. Είχα ένα πάπυρο, ένα πάπυρο που τον έγραψε κάποιος, ο οποίος εκτός από την ημερομηνία γέννησής του περίπου και το γραφικό του χαρακτήρα σημειωτέον, δεν ξέρουμε τίποτα άλλο… για τους μεγάλους Έλληνες σοφούς ξέρουμε πάρα πολλά πράγματα, αλλά όχι το γραφικό τους χαρακτήρα, αλλά αυτός είναι ένας πάπυρος που τον έγραψε με το χέρι του και τον πήρε στον τάφο του! Λοιπόν και θέλησα, ταξιδεύοντας στην Αίγυπτο, να δω τι ζωή μπορεί να έζησε ένας άνθρωπος που άφησε στην ανθρωπότητα αυτό τον πάπυρο με τα 84 λυμένα προβλήματα. Άρα ουσιαστικά, τα Μαθηματικά με τραβούσαν… δεν ήταν ο σκοπός μου να τα… διδάξω. Βεβαίως το τελικό αποτέλεσμα, αααα… σαφώς ξέρω ότι έχει χρησιμοποιηθεί πάρα πολύ διδακτικά και η χαρά είναι μεγάλη για μένα, αλλά δεν ήταν αυτός ο σκοπός μου.

Ερώτηση 2

Φ.: Μάλιστα… πολύ ωραία! Τι ήταν αυτό που σας έκανε να ασχοληθείτε με τα αρχαία αιγυπτιακά μαθηματικά (γιατί όχι π. χ. βαβυλωνιακά ή ελληνικά);

Σ.: Ήτανε η πρόκληση του έχω ένα σχεδόν ανώνυμο έργο τέχνης, που ήταν αυτός ο πάπυρος, και πρέπει να του βάλω μια ζωή. Εεεε..., δηλαδή η πρόκληση! Πρέπει να πω ότι από τελείως άλλο χώρο, η ιδέα είναι της Tracy Chevalier, η οποία μπροστά στον πίνακα «Το κορίτσι με το μαργαριταρένιο σκουλαρίκι», έβλεπε τον πίνακα και έφτιαξε μια ιστορία απ' το μυαλό της τελείως. Βεβαίως μέσα σ' αυτή την ιστορία ενέταξε την κοινωνία την αναγεννησιακή της Ολλανδίας και τέτοια. Αυτή ήτανε και η δική μου πρόθεση. Είχα ένα έργο τέχνης, γιατί αυτός ο πάπυρος έτσι όπως είναι δομημένος, με τα παραδείγματά του όπως είναι χτισμένα ,το ένα μετά το άλλο, ομαδοποιημένα, θεματικές ενότητες, νοηματικές αυτές… ό,τι κάνουμε σήμερα οι φοβεροί παιδαγωγοί και κάνουμε κα διδακτορικά πάω σ' αυτό, αυτός τα 'χει κάνει εκεί πέρα και λέω αυτό το έργο κάποιος το 'γραψε. Και εκτός που το 'γραψε είχε και μια ζωή . Ήταν δηλαδή καθαρά λογοτεχνική η πρόκληση για να κάνω αυτό το πράγμα, βεβαίως λογοτεχνική, που σχετίζεται μ' πράγματα που ξέρω, δηλαδή τα Μαθηματικά. Εεεεε..., δεν έχω αντίρρηση κάποτε να κάνω δηλαδή και τα βαβυλωνιακά μαθηματικά με προκαλούν ιδιαίτερα. Η άλλη πρόκληση είναι να βουτήξεις σε έναν πολιτισμό που δεν τον ξέρεις τόσο καλά απ' το σχολείο. Δηλαδή, για να μπω στα ελληνικά μαθηματικά, να γράψω μια βιογραφία του Αρχιμήδη ας πούμε; Δε… δεν μου έλεγε τίποτα εκείνη τη στιγμή. Ανοίγω παρένθεση για να πω, ότι παρόλα αυτά, αυτό που γράφω τώρα, που θα βγει το φθινόπωρο, είναι ένα ταξίδι στα μαθηματικά της ύστερης αρχαιότητας, της περιόδου του Ιουστινιανού, με ήρωες το Νεφτό και τον Ανθέμιο και τον Ισίδωρο, δηλαδή αυτούς που επιμελήθηκαν τα έργα του Αρχιμήδη, διότι έτσι μού 'κατσε. Δηλαδή, είναι το θέμα να σε προκαλεί η εποχή. Δεν… ένα λογοτεχνικό βιβλίο, όσο κι αν έχει γέφυρες προς την επιστήμη, δεν γράφεται βάσει παιδαγωγικού σχεδίου. Γράφεται γιατί έτσι γουστάρεις! (γέλια)

Ερώτηση 3

Φ.: Μέσα στο βιβλίο αναφέρεται ο μύθος για το μάτι του Ώρου. Η αναπαραγωγή αυτού του μύθου έγινε συνειδητά για τη μυθοπλαστική διάσταση; Γνωρίζατε τις νέες προσεγγίσεις της ιστοριογραφίας (Ritter, Robson, Imhaussen);

Σ.: Τις γνώριζα, αλλά όχι από τόσο σοβαρούς ιστορικούς όσο αυτούς που αναφέρετε. Τις γνώριζα από το Deni Gedj, ο οποίος εκτός απ' το «Θεώρημα του παπαγάλου κι ένα σωρό άλλα μυθιστορήματα, έχει γράψει κι ένα βιβλίο που το ονομάζει «Η αυτοκρατορία των αριθμών», δεν έχει μεταφραστεί στα ελληνικά, στο οποίο είδα την ανάλυση του ματιού του Ώρου και τα συγκεκριμένα κομμάτια του ματιού που αντιστοιχούν στα αντίστροφα των δυνάμεων του 2, ½, ¼, 1/8… αυτό το ήξερα. Από κει και πέρα το να βρω τον κλασικό μύθο για το μάτι του Ώρου, δεν είχα καμία δυσκολία, βιβλία πάρα πολλά. Και συνέδεσα αυτά τα δύο μαζί και μου έδωσε και την ευκαιρία να αγγίξω λίγο αυτή την έννοια που ήθελα πάρα πολύ να την ψάχνουνε ο Αχμές και ο Άμανθυς, ο καθένας από τη δική του σκοπιά, ο Αχμές αλγοριθμικά γιατί ήταν Αιγύπτιος και ο Άμανθυς θεωρητικά αποδεικτικά γιατί ήταν εντός εισαγωγικών Έλληνας… εκεί πέρα παραβιάσαμε λίγο την ιστορία, δεν ξέρουμε πόσο Έλληνας ήτανε, Μινωίτης, αλλά δεν έχει ιδιαίτερη σημασία, την έννοια του απείρου και του απειροστού. Γιατί αυτή η διαδικασία της αναδόμησης, της ανασύνθεσης του ματιού το Ώρου, που δημιουργεί το ½, το ¼… καταλήγει στα 63/64. Και αν κοιτάξετε όλους τους αιγυπτιακούς μύθους, ακόμα και τον μύθο… γιατί οι Αιγύπτιοι λάτρευαν την διαδικασία της αποσύνθεσης και ανασύνθεσης. Υπάρχει και ο μύθος του Όσιρι, τον οποίο ο κακός αδερφός του τον έκανε κομμάτια και η πιστή γυναίκα του η Ίσις βρήκε τα κομμάτια του και τα ανασύνθεσε και πάλι κάτι έλειπε. Δηλαδή το… το μοτίβο ανασύνθεση με κάτι που λείπει είναι ένα μοτίβο που τρέχει πολύ στον αιγυπτιακό μύθο. Σε μένα τώρα ως μαθηματικό είναι το πεπερασμένο άθροισμα που έχει ένα όριο, αλλά αν το σταματήσω πάντα κάτι θα λείπει. Ήτανε αρκετά, αν θέλετε προκλητικό να παίξω μ' αυτές τις δύο έννοιες.

Ερώτηση 4

Φ.: Πολύ ενδιαφέρον! Μέσα από την αξιοποίηση του βιβλίου σε λέσχες ανάγνωσης και άλλες διδακτικές προσεγγίσεις πώς είδατε τις διάφορες ιδέες των εκπαιδευτικών και των μαθητών;

Σ.: Εεεε… Πρέπει να πω ότι είναι εντυπωσιακές. Βέβαια οι εκπαιδευτικοί με τους οποίους συνεργάστηκα… ε, είναι λιγουλάκι η αφρόκρεμα της ελληνικής εκπαίδευσης, δημόσιας και ιδιωτικής, είναι δηλαδή οι άνθρωποι που επέλεξαν ένα μέρος των διακοπών τους το 2010, το 2009, τότε που γινόντουσαν, να το αφιερώσουν σε μια επιμόρφωση που παρείχε η ομάδα «Θαλής και φίλοι» για το πώς μπορούμε να λειτουργήσουμε τις λέσχες ανάγνωσης είτε σε ετήσια βάση, είτε παρεμβατικά με ένα φλας σε ένα μάθημα. Εεεε… πρέπει να πω όμως ότι είδα μερικά πάρα πάρα πολύ εντυπωσιακά πράγματα, ειδικά στον Αχμές… ααα, είναι ένα έργο που απ' ό,τι φαίνεται προσφέρεται πάρα πολύ… είδα ας πούμε πρόσφατα σ' ένα σχολείο, είχαν τα παιδιά φτιάξει και παιχνίδι επιτραπέζιο με βάση τον Αχμές. Δηλαδή προσπαθώντας κατά κάποιον τρόπο να αναπαράγουν μες στο μυαλό τους το «σκυλιά και τσακάλια», αυτό το μυστηριώδες παιχνίδι, που δεν ξέρουμε ακριβώς πώς παιζότανε , το αιγυπτιακό. Είδα καταπληκτικές εφαρμογές, ε, μια απ' αυτές σας προτείνω να τη δείτε στο link που σας έδωσα, ηχοαφήγηση. Δηλαδή ένα παιδί διαβάζει κομμάτι του βιβλίου και τα άλλα παιδιά της ομάδας, βέβαια με καθοδήγηση μιας δασκάλας που έχει και μουσική παιδεία, κάνουν τους ήχους με ευτελή υλικά. Κονσερβοκούτια, μπουκάλια γεμάτα χαλίκια, χτυπάν τα πόδια τους, αυτό, και ντύνουν την αφήγηση. Είδα και τέτοια καταπληκτικά πράγματα, βεβαίως είδα και πολύ κλασικές εφαρμογές, που κι αυτές είναι πολύ χρήσιμες, γιατί κακά τα ψέματα, τα αιγυπτιακά αριθμητικά συστήματα προσφέρονται πάρα πολύ στο δάσκαλο. Δηλαδή αυτή η ιδέα ότι το αιγυπτιακό αριθμητικό σύστημα είναι δεκαδικό, όχι θεσιακό αλλά επαναληπτικό, δεν έχουμε σύμβολα για το πλήθος των μονάδων, έχουμε σύμβολα για το είδος των μονάδων, σύμβολα για τη μονάδα, τη δεκάδα, την εκατοντάδα… αυτό όμως όταν το δίνεις σ' ένα παιδί και το αντιπαραβάλει με το δικό του σύστημα το δεκαδικό, έχει πάρα πολύ μεγάλο εκπαιδευτικό πλούτο. Ακόμα και το γεγονός της πρόσθεσης. Θέλω να προσθέσω το 37 με το 45. Άρα θα έχω στον ένα αριθμό 7 μπαστουνάκια και στον άλλο αριθμό 5 μπαστουνάκια και όλα μαζί θα κάνουνε 12 μπαστουνάκια. Κι απ' αυτά τα 12 μπαστουνάκια θα πάρω τα 10 και θα τα αντικαταστήσω μ' ένα καλαθάκι, που είναι η δεκάδα. Δηλαδή, τέτοιου είδους παιχνίδια, ε, που προκύπτουν κατευθείαν μέσα από το βιβλίο, θεωρώ ότι έχουν πολύ μεγάλη διδακτική αξία. Επαναλαμβάνω, είτε για σχολεία που το δούλεψαν το βιβλίο σε βάθος χρόνου, ως μια λέσχη ανάγνωσης που συναντιόταν μια φορά την εβδομάδα ή το δεκαπενθήμερο, για 3, 4, 5 μήνες, είτε ακόμα και σαν μία μοναδική παρέμβαση. Σε μια έκτη δημοτικού, σε μια Πέμπτη δημοτικού, μια μέρα διαβάζουμε την ιστορία του πώς έμαθε ο Αχμές τους αριθμούς και έχουμε καρτελάκια, που τα φτιάχνουμε τώρα πια με το computer μας με ευτελή υλικά κι εμείς, με χαρτάκια τα οποία κόβουμε και παίζουμε τέτοια πράγματα. Νομίζω ότι α…, όλα αυτά τα οποία οι παιδαγωγικές μέθοδοι της Zener κι όλα αυτά τα πράγματα τα έχουνε συστήσει ως συστηματική μέθοδο εκμάθησης, ακόμα κι αν δεν ακολουθούμε αυτή τη συστηματική μέθοδο, με την αφορμή της μυθοπλασίας μπορούμε να τα κάνουμε μία φορά. Θεωρώ ότι και μια φορά στη ζωή του ένα παιδί να έχει δει κάτι διαφορετικό που να το 'χει διασκεδάσει, θα το θυμάται.

Ερώτηση 5

Φ.: Ναι! Σίγουρα. Υπάρχει κάποιο στοιχείο που θεωρείτε ότι δεν έχει αναδειχθεί επαρκώς και θα άξιζε να αναδειχθεί;

Σ.: Δεν το κατάλαβα αυτό…

Φ.: Μέσα από τουυυ…, μέσα από τις λέσχες ανάγνωσης ή τις διδακτικές παρεμβάσεις, κάποιο στοιχείο που υπάρχει στο βιβλίο, που δεν έχει αναδειχθεί ή δεν έχει δουλευτεί επαρκώς και θα άξιζε να αναδειχθεί διδακτικά;

Σ.: Έχω δει τόσες πολλές λέσχες, που νομίζω ότι… όλα όσα έχω κατά νου και μερικά που δεν τα φανταζόμουνα και τα οποία τα ανέδειξαν οι συνάδελφοι μόνοι τους, έχουνεεε αναδειχτεί. Αλλά τέλος πάντων, τα πολύ πολύ πολύ βασικά, που είναι όπως είπα το σύστημα αρίθμησης και οι πράξεις, παρεμπιπτόντως και ο αιγυπτιακός πολλαπλασιασμός, που είναι κι ένας πολύ ωραίος αλγοριθμικός τρόπος και που μας εισάγει απ' το παράθυρο στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης είναι κάτι πολύ σημαντικό. Εεεε…, η μέθοδος aha επίλυσης εξισώσεων, η λεγόμενη regula falsi, ααα…, θεωρώ ότι επίσης ότι είναι πολύ σημαντικό εργαλείο να το δει κανείς. Εεεε…, αυτά τα hint για το άπειρο, είναι hint για το άπειρο. Δεν είναι τίποτα παραπάνω. Το άπειρο είναι μια δύσκολη έννοια, είναι και πολύ μακριά. Είναι πιο μακριά απ' όσο έκανα για να' ρθω να σας βρω. (γέλια) Λοιπόοον, εεεε, η έννοια της προόδου πολύ απλά με το μοντέλο με το μάτι του Ώρου, εεε, είναι, εεε, κάτι που… αλλά όλα αυτά σίγουρα δεν τα ανέδειξε μία λέσχη. Αλλά είναι τόσες πολλές που το δούλεψαν πουυυυ…

Φ.: Χμ

Σ.: Δε νομίζω ότι έχω κάτι που είπα, «για δες ρε παιδί μου, αυτό δεν το έπιασε κανένας!».

Ερώτηση 6

Φ.: Ωραία! Τι αποκομίζετε μέσα από τις επαφές σας για τη διδασκαλία των Μαθηματικών; Υπάρχει κάποιος προβληματισμός σε σχέση με την αλλαγή της προσέγγισης στη διδασκαλία; Αναζητούν οι διδάσκοντες νέες προσεγγίσεις, οι οποίες να κάνουν τα Μαθητικά πιο προσιτά και ενδιαφέροντα για τους μαθητές;

Σ.: Εεεεεε…, στο θέμα των στρατηγικών διδασκαλίας, έχω μια άποψη λιγουλάκι αναρχική. Δηλαδή, δεν πιστεύω στη δυνατότητα της κεντρικής παρέμβασης. Εεεε…, τουλάχιστον στην Ελλάδα, τουλάχιστον αυτή την εποχή. Ααα, θε, θεωρώ ότι είναι τόσο μεγάλη η αδράνεια που έχει επικρατήσει για διάφορους λόγους και εργασιακούς και ψυχολογικούς και πολλούς, που δεν νομίζω ότι μπορεί, υπάρχει τρόπος να κινητοποιήσει κανείς το σύνολο του σώματος σε ένα νέο μοντέλο. Άλλωστε η πολιτεία έχει δείξει ότι ακόμα και τις σπάνιες φορές που έχει μια καλή ιδέα, βρίσκει τον τρόπο

να την ευτελίζει. Αααα…, χαρακτηριστικότερο παράδειγμα όλων είναι οι περίφημες ερευνητικές εργασίες. Που επινόησε η πολιτεία για την πρώτη και τη δευτέρα λυκείου και ενώ ξεκίνησε σαν ένα πολύ αισιόδοξο πρόγραμμα, το ευτέλιζε κάνοντάς το μια ωρίτσα για να συμπληρώσουν πρόγραμμα οι συνάδελφοι της τάδε ειδικότητας πουυυυ… λόγω της αλλαγής, τέλος πάντων αυτό. Πιστεύω πάρα πάρα πολύ σ' αυτό που έλεγε ο Βολταίρος, «ο καθένας να φροντίσει τον κήπο του». Πιστεύω δηλαδή πάρα πολύ στους ανθρώπους και έχω την ευτυχία και μέσω του «Θαλής και φίλοι», να είμαι σε επαφή με τέτοιους ανθρώπους, πάρα πάρα πάρα πολύ, που θέλουν για τη δική τους ευχαρίστηση να κάνουν ένα μάθημα διαφορετικό. Και επειδή το κάνουν για τη δική τους ευχαρίστηση για να βγουν από το τέλμα τους, για να βγουν απ' τη ρουτίνα τους, για να βγουν από τη μούχλα τους, συνήθως το κάνουνε πάρα πολύ καλά. Εεε, αυτό το πράγμα τώρα δημιουργεί αυτό που λέμε εστίες αντίδρασης. Ένα είδος μη οργανωμένου κλεφτοπόλεμου μπροστά στην… αδράνεια. Δεν θα αλλάξει αυτό τη Ελλάδα, α, ωστόσο εκεί που ο καθένας μπορεί, ο καθένας που το' χει κάνει μπορεί να λέει «έκανα αυτό το πράγμα, για μία χρονιά σε 25 παιδιά και 12 απ' αυτά έμαθαν κάτι παραπάνωωω, έμαθαν κάτι που το θυμούνται…». Μόνο έτσι… και αυτού του είδους, δηλαδή, ο μεγαλύτερος εφιάλτης μου είναι να υιοθετήσει το Υπουργείο Παιδείας τις λέσχες ανάγνωσης «Θαλής και φίλοι». (γέλια) Μόλις το κάνει εγώ θα αποχωρήσω. Γιατί θα το κάνει με ένα σύστημα γραφειοκρατικό, δομημένο, εκείνο, το άλλο, θα έρχονται να το υλοποίησουν στους εκπαιδευτικούς κάποιοι άνθρωποι που δεν το ξέρουν, δεν το καταλαβαίνουν και δεν το πιστεύουν, αλλά ξέρουν ότι αυτή είναι η δουλειά τους. Δε, δεν νομίζω ότι γίνεται έτσι. Είναι λίγο απαισιόδοξο. Αλλά το πολύ αισιόδοξο είναι ότι αν υπάρχουν άνθρωποι εεε, σας λέω, μια δασκάλα στο Σουφλί, μια άλλη στο Βόλο. Ένας συνάδελφος στο Χαλάνδρι, ααα, που κάνουνε κάτι, αυτό το κάτι. Και αυτοί το ζουν, δηλαδή αλλάζει τη ρουτίνα τους, και σίγουρα τα παιδιά το παίρνουνε μαζί τους.
Φ.: Χμ

Ερώτηση 7

Φ.: Πώς θα βλέπατε την αξιοποίηση του βιβλίου σε μικρότερες ηλικίες Δ΄, Ε΄, Στ΄ Δημοτικού ή Α΄ Γυμνασίου, στο πέρασμα δηλαδή από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο;
Σ.: Εεε νομίζω ότι αυτό το βιβλίο, παρόλο που είναι γραμμένο για ενήλικες…
Φ.: Χμ
Σ.: Ααα είναι απόλυτα εκμεταλλεύσιμο εκπαιδευτικά από την Ε΄ Δημοτικού, ας πούμε, και πάνω, Ε΄ και το' χω δει και να γίνεται, δεν είναι ότι το λέω έτσι μόνο θεωρητικά.
Φ.: Χμ
Σ.: Εεε γιατί έχει… έννοιες… μαθηματικές που γεννήθηκαν… την εποχή που γεννιόντουσαν τα Εμπειρικά Μαθηματικά, δηλαδή την εποχή που θέλουμε να γεννηθούν και μέσα στα μυαλά των μαθητών του Δημοτικού τα Μαθηματικά εμπειρικά. Επομένως, νομίζω ότι, α, ταιριάζει πάρα πάρα πάρα πολύ. Επίσης, καθώς είναι μια ιστορία που ακολουθεί ένα παιδάκι από την κούνια μέχρι τα βαθιά γεράματα, βοηθάει τους μαθητές που διαβάζουν αυτή την ιστορία να ταυτίζονται κιόλας…
Φ.: Χμ

Σ.: … ε με τον Αχμές, με τον Άμανθυ, βέβαια απ' την άλλη μεριά υπάρχουν κάποιες σκληρές σκηνές… αλλά για τα παιδιά μας σκληρές σκηνές είναι αυτά που τα βάζουμε να βλέπουνε όταν στην τηλεόραση έχει διάλειμμα για διαφημίσεις (γέλιο), δηλαδή τα παιδιά τα σημερινά ζουν τόσο πολύ α την εεε τη βία λεκτική, οπτική που δεν νομίζω ότι ε ααα οι κάποιες σκηνές εντός εισαγωγικών ενηλίκων που περιέχει αυτό το βιβλίο θα δημιουργήσουν πρόβλημα.

Φ.: Πιθανόν να περνάνε και σχεδόν απαρατήρητες σε κάποιους…

Σ.: Ναι.

Φ.: … λόγω οικογενειακού περιβάλλοντος ή τρόπου διασκέδασης.

Σ.: Ναι ναι, βέβαια μία φορά που πήγα σε ένα σχολείο, είχα μεταφράσει τα Αστέρια της Βερενίκης του Guedj και πήγα σε ένα σχολείο να μιλήσουμε για αυτό και βγήκε ένας πιτσιρικάς και μου είπεεε «καλά» λέει «γιατί γράφετε τέτοια βρωμόλογα, αφού… ε δεν ντρέπεστε». Λέω «δεν θα τα 'γραφα» του λέω, αλλά είχα εποπτεία στο διάλειμμα και τα άκουσα από σας».

Φ.: Χαχαχα

Ερώτηση 8

Φ.: Θα εστιάζατε εσείς σε κάποιο θέμα συγκεκριμένα… για τα μικρότερα παιδιά;

Σ.: Νομίζω ότι το είπα και πριν ότι η Εισαγωγή της Αρίθμησης και των Πράξεων είναι εκεί που μπορεί περισσότερο από ο,τιδήποτε άλλο νααα… να χρησιμοποιηθεί ή αν περάσουμε και στα πιο εφαρμοσμένα Μαθηματικά, όλες αυτές οι ιστορίες για το ημερολόγιοοο, ααα για το φεγγάρι πουυυ έχασε στα ζάρια ένα μέρος απ' το φως του εε… Όλα αυτά είναι εκμεταλλεύσιμα, αλλά εκεί που σίγουρα αν μου έλεγε κάποιος «μία εφαρμογή αυτού του βιβλίου για παιδιά Δημοτικού», θα έλεγα το αριθμητικό σύστημα και η αντιπαραβολή του, α, με το δικό μας. Εεε… Ηηη Γεωμετρία, δηλαδή, παρόλο που και αυτή είναι πολύ ενδιαφέρουσα, δηλαδή ο κύκλος, το εμβαδόν του κύκλου, α δεν νομίζω ότι έχει πάρα πολλά πράγματα να προσθέσει σε αυτή την ηλικία. Είναι καλύτερα για παιδιά Β΄, Γ΄ Γυμνασίου, α μπορούν να κερδίσουν πιο πολλά με την έννοια του… πώς προσεγγίζεται και τέτοια πράγματα... ααα αλλά και ακόμα βεβαίως… αυτό που δεν το κάνουμε πολύ εμείς στα παιδιά του Δημοτικού ή μπορεί να γίνεται και να μην το 'χω πάρει είδηση, η λεγόμενη «αναγνώριση προτύπου», "pattern recognition".

Φ.: Χμμ

Σ.: Εεε που βγαίνει και με τη γεωμετρική πρόοδοοο, με τααα αντίστροφα των δυνάμεων του 2 και όλα αυτά τα πράγματα. Και αυτό είναι κάτι που μπορεί να ααα να το εκμεταλλευτεί κανείς σε πιο γενική έννοια.. στοοο…

Ερώτηση 9

Φ.: Ποιες είναι οι μεγαλύτερες δυσκολίες για έναν συγγραφέα που αποφασίζει να γράψει μια ιστορία με ήρωες που έζησαν σε τόσο μακρινές εποχές;

Σ.: Εεε… δεν θα τις έλεγα δυσκολίες. Καταρχήν… μεταξύ μας και κάτω απ' το τραπέζι όσο πιο μακρινή είναι η εποχή τόσο πιο εύκολο είναι να λες ανακρίβειες.

Φ.: Χαχαχα

Σ.: Και να μην σε πάρουνε χαμπάρι. Θέλω να πω το εξής και πέρα από την πλάκα, εεε γιααα εποχή 1700-1600 π. Χ. ακόμα και οι τεκμηριωμένες ιστορικές θέσεις είναι συχνά αντικρουόμενες, οπότε για έναν μυθοπλάστη που θέλει να είναι και πιστός στο ιστορικό μυθιστόρημα μπορεί γενικά να επιλέξει όχι αυτήν που θεωρεί σωστότερη, ότι συνήθως εάν δεν είναι ειδικός αρχαιολόγος, ας πούμε, δεν ξέρει και ποια είναι η σωστότερη και συνήθως δεν υπάρχει και η σωστότερη, εδώ… αλλά αυτή που τον βολεύει πιο πολύ μυθοπλαστικά.

Φ.: Χμμ

Σ.: Επομένως, δεν υπάρχει τέτοια δυσκολία. Η δυσκολία είναι, αλλάάά αυτός είναι και ο σκοπός του παιχνιδιού, δηλαδή εγώ αυτό απολαμβάνω… ότι πρέπει να βουτήξεις στην ιστορία. Α και μάλιστα στην ιστορίαα… α με επίκεντρο την καθημερινότητα, δηλαδή να διαβάσει πράγματα ακόμα και από πρωτογενείς πηγές. Εγώ, ας πούμε, είχα την ευκαιρία, επειδή υπάρχουν τώρα πια μεταφρασμένα, να διαβάσω, από παπύρους μεταφρασμένους στα Αγγλικά. Βέβαια, τα παραμύθια τα διάφορα, τα οποία υπήρξαν μία γευσούλα από το καθένα, αλλά πρέπει να κάνεις έρευνα. Για κανένα από τα βιβλία μου δεν θυμάμαι να μην έχω κάνει έρευνα και μάλιστα, επειδή έχω πάντα και τα Μαθηματικά που είτε έλκουν είτε έλκονται από την ιστορία μου, εε, συνήθως έρευνες σε δύο επίπεδα και στα Μαθηματικά και στα… ιστορικά-πολιτιστικά στοιχεία, καμιά φορά και σε άλλα πράγματα.

Ερώτηση 10

Φ.: Ήταν στο σκεπτικό σας να αναδειχθεί η επίδραση του οικογενειακού περιβάλλοντος ως ισχυρού παράγοντα που επηρεάζει την εκπαίδευση και τις επιλογές των νέων;

Σ.: Όχι.

Φ.: Χαχαχα…

Σ.: Δεν το κατάλαβα. Τι ήταν, τι σήμαινε όλο αυτό; (γέλια)

Φ.: Αν ήταν στο σκεπτικό σας μέσα στο βιβλίο να αναδειχτεί η επιρροή της οικογένειας εεε σε σχέση με την εκπαίδευση και τις επιλογές του επαγγέλματος, ας πούμε, του επαγγελματικού προσανατολισμού;

Σ.: Όχι.

Φ.: Όχι, καθόλου.

Σ.: Βγήκε μόνο του. Το μόνο που νομίζω ότι έκανα είναι ότι έκανα την Ταντινανέφερ μια καλή γνήσια Ελληνίδα μάνα, παρόλο που δεν είναι Ελληνίδα (γέλιο) ααα και τον Αχμές αντίστοιχα έναν γιο ε δεν… όχι δεν… είχα τίποτα τέτοιο στο μυαλό μου. Μου βγήκανε αυτό το κομμάτι μάλλον ααα αβίαστα… και πρέπει να πω ότι ε με βοήθησε και πάρα πολύ και η ιστορία, δηλαδή απάνω στο διάβασμα βρήκα και την ιστορία της Χερίτ, που είναι πραγματική ιστορία, που ήτανε κόρη του… και ότι ήθελε να την παντρέψουνε με τον… ε ιστορίες που επαναλαμβάνονται (γέλιο) ανά αιώνες ε και τις έβαλα μέσα, μα μα μου ταιριάξανε πάρα πάρα πολύ φυσικά. Όχι, δεν είχα εκεί τέτοιο σχέδιο κανένα.

Ερώτηση 11

Φ.: Έχετε κάτι άλλο να συμπληρώσετε;

Σ.: Εεε… θεωρώ

Φ.: Χμ

Σ.: … ότι η αφήγηση είναι ένα πάρα πάρα πολύ σημαντικό και δυνατό εργαλείο στα χέρια του εκπαιδευτικού.

Φ.: Χμ

Σ.: Ααα είτε του εξειδικευμένου βιβλίου π.χ. Αχμές είτε ακόμα και του οποιουδήποτε βιβλίου, δηλαδή εεε το να να αποτελεί η αφήγηση μια εναλλακτική πύλη εισόδου στα Μαθηματικά… θεωρώ ότι είναι κάτι το πάρα πάρα πάρα πολύ δυνατό και αρκετά… εεε υποτιμημένο, δηλαδή… δε βλέπω εσείς δε… αυτό που είπα. Βέβαια, το είπα και πριν ότι δεν πιστεύω στην κεντρική παρέμβαση, …

Φ.: Ωραία.

Σ.: … αλλά δεν έχω δει και πάρα πολλές θεωρίες που να λένε, δηλαδή εγώ ειδικά σε μια τάξη Δημοτικού…

Φ.: Χμ

Σ.: … θα έπαιρνα, εάν κάποτε μου λέγανε ε έχεις αυτήν την Ε΄ Δημοτικού δική σου ευθύνη μες σ' ένα χρόνο να' χουν μάθει κάτι, στο Δημοτικό λέω που μαθαίνεις απ' όλα. Θα έπαιρνα ένα βιβλίο και μέσα απ' αυτό το βιβλίο, μεσ' απ' αυτήν την αφήγηση θα έκανα και τη Γεωγραφία μου και την Αριθμητική μου και τη Δημιουργική Γραφή μου, όλα τα πράγματα μέσα από αυτή την αφήγηση, δηλαδή θα είχα ως κεντρικό κορμό ένα μύθο, μια ιστορία, ένα έργο μυθοπλασίας και σ' αυτό τον κεντρικό κορμό θα κρεμούσα τσαμπάκια και γι' αυτό λέω ως δάσκαλος, επομένως ως κατά κάποιον τρόπο πανεπιστήμων, σε αντίθεση με τους εεε… ειδικευμένους καθηγητές της Μέσης, θα κρεμούσα τσαμπάκιααα εκπαίδευσης, νησάκια εκπαίδευσης. Εεε έχω δει ένα δυο τέτοια μοντέλα στο παρελθόν που ποτέ δεν ευδοκίμησαν, δηλαδή ποτέ δεν κέρδισαν την κε ε γενική αποδοχή, αλλά εγώ πιστεύω ότι πραγματικά εάν... ααα εάν μου συνέβαινε αυτό θα έκανα… ή θα ήθελα πάρα πολύ να το κάνω μια φορά…

Φ.: Χμ!

Σ.: … στη ζωή μου.

Φ.: Ευχαριστούμε πάρα πολύ.