

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
&
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ
ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Του
ΛΙΤΣΑ ΙΩΑΝΝΗ

ΑΕΜ: 115

Επιβλέπουσα: Καλογηράτου Ζαχαρούλα
Καθηγήτρια Τμήματος Πληροφορικής ΤΕ

Καστοριά 7/6/2023



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
&
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
ΚΑΙ ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του
ΛΙΤΣΑ ΙΩΑΝΝΗ

ΑΕΜ : 115

Επιβλέπουσα : Καλογηράτου Ζαχαρούλα
Καθηγήτρια Τμήματος Μηχανικών Πληροφορικής ΤΕ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ
ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ
ΛΙΤΣΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την [εδώ συμπληρώνεται η ημερομηνία](#)
εξέτασης της εργασίας.

.....
Ον/μο Μέλους
Ιδιότητα Μέλους

.....
Ον/μο Μέλους
Ιδιότητα Μέλους

.....
Ον/μο Μέλους
Ιδιότητα Μέλους

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ
ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ
ΛΙΤΣΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

Λίτσας Κ. Ιωάννης

Πτυχιούχος Μαθηματικός – Πανεπιστημίου Κρήτης

Καστοριά Μήνας - Έτος παρουσίασης της εργασίας

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ
ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ
ΛΙΤΣΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ
ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ
ΛΙΤΣΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερος την επιβλέπουσα καθηγήτρια μου,
Καλογηράτου Ζαχαρούλα για την υπόδειξη του θέματος καθώς και την
επιστημονική της καθοδήγηση καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας. Επιπλέον οφείλω
ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένεια και τους φίλους μου για την ηθική στήριξη
που μου προσέφεραν.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ
ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ
ΛΙΤΣΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

Στη μνήμη του αδερφού μου.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ
ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ
ΛΙΤΣΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

Περίληψη

Οι διαφορικές εξισώσεις αποτελούν ένα σημαντικό κομμάτι της μαθηματικής ανάλυσης και όχι μόνο, καθώς εφαρμογές τους συναντώνται σε διάφορους κλάδους των θετικών επιστημών όπως τη Φυσική, τη Χημεία και τη Βιολογία. Πολλοί από τους νόμους που διέπουν τη συμπεριφορά του φυσικού κόσμου αποτελούν σχέσεις οι οποίες εκφράζονται μαθηματικά μέσω των διαφορικών εξισώσεων. Διαφορικές εξισώσεις ανακύπτουν σε πολλές περιοχές της επιστήμης και τεχνολογίας. Η επίλυση των προβλημάτων όμως δεν είναι πάντα εφικτή ή απαιτεί αρκετό υπολογιστικό έργο. Τη λύση στις περιπτώσεις αυτές δίνουν οι υπολογιστικές μέθοδοι, μέσω των οποίων υπολογίζεται μία προσεγγιστική τιμή της λύσης με τη βοήθεια της χρήσης των υπολογιστών. Κάθε χρόνο, σε όλον το κόσμο, εκατοντάδες άνθρωποι πεθαίνουν από μεταδοτικές ασθένειες, όπως ιλαρά, γρίπη και φυματίωση. Η μαθηματική μοντελοποίηση μεταδοτικών ασθενειών είναι ένα εγχειρίδιο για τη δημόσια υγεία μιας και αποτελεί χρήσιμο εργαλείο για την εξαγωγή συμπερασμάτων και πρόβλεψη συμπεριφοράς των ασθενειών. Σημαντικός παράγοντας στην μαθηματική μοντελοποίηση μεταδοτικών ασθενειών είναι ο βασικός αριθμός αναπαραγωγής που έχει οριακή συμπεριφορά. Εάν ο μέσος αριθμός των δευτερογενών λοιμώξεων που προκαλούνται από ένα μολυσματικό άτομο είναι μικρότερος από τη μονάδα τότε μια ασθένεια θα εξαφανιστεί, ενώ αν είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα τότε θα υπάρξει επιδημία για τα μοντέλα επιδημίας ή αντίστοιχα για τα ενδημικά μοντέλα μια ασθένεια θα γίνει ενδημική.

Λέξεις Κλειδιά: Διαφορική εξίσωση, Σύστημα Διαφορικών Εξισώσεων, Αριθμητική Λύση, Αναλυτική Λύση, Πρόβλημα Αρχικών Τιμών, Αριθμητική Μέθοδος, Μέθοδος Runge-Kutta, Μέθοδος Euler, Μέθοδος Taylor, Μέθοδος Butcher, Σφάλμα Αποκοπής, Εκτιμηθέν Σφάλμα Επί τις Εκατό.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ
ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ
ΛΙΤΣΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις.

1.1 Ιστορικά Στοιχεία.....15

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ
ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ
ΛΙΤΣΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

1.2 Βασικοί ορισμοί και θεωρήματα.....	17
--	----

Κεφάλαιο 2. Υπολογιστικές Μέθοδοι.

2.1 Εισαγωγή.....	21
2.2 Ακρίβεια αριθμητικών μεθόδων.....	22
2.3 Μέθοδος Euler.....	25
2.4 Μέθοδος Taylor.....	26
2.5 Μέθοδος Runge-Kutta.....	29
2.6 Η ακρίβεια της μεθόδου.....	45

Κεφάλαιο 3. Μέθοδοι Runge - Kutta

3.1 Μέθοδοι 3 ^{ης} τάξης.....	54
3.2 Μέθοδοι 4 ^{ης} τάξης.....	55

Κεφάλαιο 4. Μεταδοτικές ασθένειες

4.1 Ιστορική Αναδρομή	57
4.2 Λοιμός των Αθηνών	58
4.3 Πανώλη της εποχής του Ιουστινιανού	58
4.4 Λέπρα του 11ου αιώνα	59
4.5 Μαύρη Πανώλη	59
4.6 Επιδημίες χολέρας	60
4.7 Κίτρινος πυρετός του Μέμφις	61
4.8 Ρωσική γρίπη	61
4.9 Ισπανική γρίπη.....	62
4.10 Επιδημία Πολιομυελίτιδας.....	62
4.11 Επιδημία ανεμοβλογιάς	63
4.12 HIV/AIDS	63

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ
ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ
ΛΙΤΣΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

4.13 SARS.....	64
4.14 COVID-19	64

Κεφάλαιο 5. Χρήση μαθηματικών μοντέλων στην επιδημιολογία

5.1 Εισαγωγή.....	65
5.2 Βασικός Αριθμός Αναπαραγωγής.....	67
5.3 Αριθμός επαφής σ και αριθμός αντικατάστασης R	68
5.4 SIR Μοντέλο.....	70
5.5 SEIR Μοντέλο.....	76
5.6 SI Μοντέλο.....	79
5.7 SIS Μοντέλο.....	82
Βιβλιογραφία.....	83

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις.

1.1 Ιστορικά Στοιχεία

Οι διαφορικές εξισώσεις ξεκίνησαν την εμφάνιση τους από την εποχή του Newton (1642-1727) και του Leibniz (1646-1716). Ο Newton ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε διαφορικές εξισώσεις για την περιγραφή της κίνησης των σωμάτων, περιορισμένος βέβαια στις απλές μορφές:

$$\frac{dx}{dy} = f(x) \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial x} = f(y) \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial x} = f(x,y)$$

Έπειτα ο Leibniz κατάφερε να αναπτύξει τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών, των ομογενών πρώτης τάξης, καθώς και των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Στον Leibniz επίσης οφείλονται και οι συμβολισμοί της παραγώγου dx / dy .

Λίγο αργότερα κατά τον 18^ο αιώνα, σημαντικοί μαθηματικοί, όπως οι Riccati (1676- 1754), Jacob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli (1667-1748), Clairaut (1713- 1765), ασχολήθηκαν με τις εκφράσεις των λύσεων διαφορικών εξισώσεων.

Εκείνη την περίοδο, ο σπουδαίος μαθηματικός Euler (1707-1783), ασχολήθηκε με τη μοντελοποίηση προβλημάτων της Μηχανικής μέσω διαφορικών εξισώσεων και την ανάπτυξη μεθόδων για τη λύση τους.

Σημαντικές εργασίες στις διαφορικές εξισώσεις έγιναν και από τους Γάλλους μαθηματικούς Cauchy (1789-1857), Lagrange (1736-1813) και Laplace (1749-1827) με τους δύο τελευταίους να παραδίδουν την πρώτη επιστημονική εργασία με θέμα τις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους.

Σημαντική ήταν και η συμβολή του Peano (1858-1932), ο οποίος το 1890, χρησιμοποιώντας την πολυγωνική μέθοδο των Euler και Cauchy, έδωσε μια αυστηρή απόδειξη για το θεώρημα ύπαρξης λύσης σε μία διαφορική εξίσωση. Την ίδια περίοδο, αποδείχτηκε από τον Lipschitz (1832-1903), το 1876 και τον Picard (1856-1941), το 1890 πως η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων δίνει εξίσου μια απόδειξη για την ύπαρξη και τη μοναδικότητα των λύσεων του προβλήματος αρχικής τιμής, το οποίο είναι γνωστό και ως πρόβλημα του Cauchy.

Το ίδιο χρονικό διάστημα, ξεκίνησε η μελέτη της ποιοτικής συμπεριφοράς των λύσεων, μέσα από τις έρευνες των Poincare (1854-1912) και Liapunov (1857-1918).

Έπειτα κατά το πρώτο μισό του 20^{ου} αιώνα, έγιναν μεγάλες πρόοδοι στην ποιοτική θεωρία των διαφορικών εξισώσεων από σπουδαίους μαθηματικούς όπως τους Birkhoff (1884- 1972) και Lefschetz (1884-1972).

Τα τελευταία χρόνια έχουν συμβάλει με τις εργασίες τους στην ποιοτική ανάπτυξη της θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων σύγχρονοι μαθηματικοί όπως οι Cesari, Hale, Lasalle(1916-1983), Arnold, Yoshizawa και Sell.

Σήμερα οι διαφορικές εξισώσεις αποτελούν σημαντικό μέρος της Μαθηματικής ανάλυσης με εφαρμογές σε διάφορους κλάδους της Επιστήμης και της Τεχνολογίας.

1.2 Βασικοί ορισμοί και θεωρήματα

Ορισμός 1.2.1

Διαφορική εξίσωση ονομάζεται κάθε εξίσωση που περιέχει μια μεταβλητή x , μία συνάρτηση $y(x)$ και ορισμένες (ή όλες) από τις παραγώγους της y' , y'' , \dots , $y^{(n)}$ ως προς x .

Η μεγαλύτερη παράγωγος που εμφανίζεται στη διαφορική εξίσωση λέγεται τάξη της διαφορικής εξίσωσης.

Οι διαφορικές εξισώσεις τάξης $n \geq 1$ έχουν τη μορφή:

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad n \geq 1 \quad (1.2.1)$$

Λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.2.1) ονομάζεται μία συνάρτηση

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ τέτοια ώστε } F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Μια διαφορική εξίσωση έχει, εν γένει, άπειρες στο πλήθος λύσεις. Για παράδειγμα η διαφορική εξίσωση $y' = y$ έχει ως λύσεις όλες τις συναρτήσεις της μορφής $y(x) = ce^x$, όπου $c \in \mathbb{R}$, ενώ η εξίσωση $y'' = y$ έχει ως λύσεις όλες τις συναρτήσεις της μορφής $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$, όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Για την εξασφάλιση μοναδικής λύσης σε μία διαφορική εξίσωση θα πρέπει να υπάρχουν οριακές συνθήκες. Οριακές συνθήκες καλούνται οι συνθήκες οι οποίες καθορίζονται για τις τιμές της συνάρτησης ή των παραγώγων αυτής στα όρια του διαστήματος. Όταν οι οριακές συνθήκες προσδιορίζονται σε ένα σημείο, συνήθως στην αρχή του πεδίου ορισμού τότε έχουμε

το πρόβλημα των αρχικών τιμών ή πρόβλημα του Cauchy, ενώ όταν οι οριακές συνθήκες προσδιορίζονται και στα δύο άκρα του πεδίου ορισμού έχουμε το πρόβλημα των οριακών τιμών. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα των αρχικών τιμών.

Ορισμός 1.2.2

Μία συνάρτηση $f(x, y)$ λέγεται ότι ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz ως προς τη

μεταβλητή y πάνω στο σύνολο $D \subseteq \mathbb{R}^2$, εάν υπάρχει σταθερά $L > 0$ τέτοια ώστε: $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$

για κάθε $(x, y_1), (x, y_2) \in D$.

Η σταθερά L ονομάζεται σταθερά Lipschitz για την f .

Παράδειγμα 1.2.1

Έστω $f(x, y) = x|y|$ και $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 4\}$ τότε για κάθε ζεύγος

(x, y_1) και (x, y_2) που ανήκουν στο D , έχουμε:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |x|y_1| - x|y_2|| = |x| ||y_1| - |y_2|| \leq 2|y_1 - y_2|$$

Άρα η συνάρτηση f ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz στο D για τη μεταβλητή y , με σταθερά Lipschitz $L = 2$.

Ορισμός 1.2.3

Ένα σύνολο $D \subset \mathbb{R}^2$ λέγεται κυρτό, όταν για κάθε $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ και $\lambda \in [0, 1]$,

το σημείο $((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2) \in D$.

Γεωμετρικά, ένα σύνολο D ονομάζεται κυρτό, όταν για οποιαδήποτε δύο σημεία που ανήκουν στο σύνολο, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία αυτά, ανήκει επίσης στο σύνολο D .

Θεώρημα 1.2.1

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x, y)$ ορίζεται σε ένα κυρτό σύνολο $D \subset \mathbb{R}^2$.
Αν υπάρχει

σταθερά $L > 0$ με

$$\left| \frac{df}{dy}(x, y) \right| \leq L, \quad \forall (x, y) \in D$$

τότε η συνάρτηση f ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz ως προς τη μεταβλητή y , στο σύνολο D .

Θεώρημα 1.2.2

Έστω η συνάρτηση $f(x, y)$ η οποία είναι συνεχής στο σύνολο

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}.$$

Αν η f ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz ως προς τη μεταβλητή y , στο σύνολο D , τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'(x) = f(x, y), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = a \quad \text{θα έχει μοναδική λύση } y(x),$$

για $a \leq x \leq b$.

Ορισμός 1.2.4

Το πρόβλημα αρχικών τιμών $f(x, y) = y'(x)$, $x \in [a, b]$, $y(a) = y_0$ λέγεται ότι είναι καλά τοποθετημένο αν:

- i. υπάρχει μοναδική λύση $y(x)$ του προβλήματος
- ii. υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την ιδιότητα ότι υπάρχει μοναδική λύση, $u(x)$, του προβλήματος $u' = f(x, y) + \delta(x)$, $x \in [a, b]$, για κάθε $|\varepsilon_0| < \varepsilon$ και $|\delta(x)| < \varepsilon \forall x \in [a, b]$
- iii. υπάρχει σταθερά $k > 0$ έτσι ώστε, $u(x)$, του $u(a) = y_0 + \varepsilon_0$
 $|u(x) - y(x)| < k\varepsilon \forall x \in [a, b]$

Θεώρημα 1.2.3

Αν $D = \{(x, y) / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$f(x, y) = y'(x), x \in [a, b], y(a) = y_0$$

Είναι καλά τοποθετημένο, αρκεί η f να είναι συνεχής και να ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz ως προς y στο σύνολο D .

Κεφάλαιο 2. Υπολογιστικές Μέθοδοι.

2.1 Εισαγωγή

Αναλυτική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται ένας κλειστός τύπος μέσω του οποίου μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης της λύσης σε κάθε σημείο x .

Αριθμητική λύση της διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται ένα σύνολο προσεγγιστικών τιμών της λύσης σε διακεκριμένα σημεία του πεδίου ορισμού της.

Για τον υπολογισμό των προσεγγιστικών τιμών κινούμαστε στο διάστημα που αναζητούμε τη λύση, κατασκευάζοντας βήμα-βήμα τις προσεγγιστικές τιμές της λύσης στα διακεκριμένα σημεία.

Έστω ότι έχουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών $f(x, y) = y'(x)$, $x \in [a, b]$, $y(a) = y_0$ και την ακολουθία των διακεκριμένων σημείων $\{x_n\}$, τα οποία ορίζονται από τη σχέση:

$$x_n = a + nh, n=0,1,2,\dots,N$$

όπου $h = b - a$ και N θετικός ακέραιος. Ο θετικός αριθμός h ονομάζεται βήμα.

Μια N αριθμητική μέθοδος, σε κάθε σημείο της διαμέρισης x , υπολογίζει μια προσέγγιση της $y(x_n)$, όπου $y(x_n)$ η τιμή της αναλυτικής λύσης στο σημείο x_n .

Υπάρχουν δύο βασικές κατηγορίες μεθόδων για τον υπολογισμό των προσεγγιστικών τιμών, οι οποίες είναι οι:

- i. Μέθοδοι απλού βήματος
- ii. Μέθοδοι πολλαπλού βήματος

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με τις μεθόδους απλού βήματος. Βασικό χαρακτηριστικό των μεθόδων αυτών είναι ότι γνωρίζουμε την προσέγγιση y στο n σημείο x_n και με αυτόν τον τρόπο

υπολογίζουμε την προσέγγιση y_{n+1} στο επόμενο σημείο $x_{n+1} = x_n + h$ χρησιμοποιώντας την προηγούμενη προσέγγιση.

2.2 Ακρίβεια αριθμητικών μεθόδων

Δύο βασικές κατηγορίες σφαλμάτων που προκύπτουν σε μία αριθμητική μέθοδο είναι το σφάλμα στρογγύλευσης και το σφάλμα αποκοπής.

Σφάλμα στρογγύλευσης

Ως γνωστόν οι υπολογιστές κάνουν αριθμητική με συγκεκριμένο αριθμό ψηφίων και ως εκ τούτου προκύπτουν λάθη στρογγυλοποίησης. Σφάλμα το οποίο οφείλεται στην αδυναμία των υπολογιστών να κάνουν ακριβή αριθμητική το ονομάζουμε σφάλμα στρογγύλευσης.

Σφάλμα αποκοπής.

Το σφάλμα αποκοπής οφείλεται στην αριθμητική μέθοδο που χρησιμοποιούμε και υφίσταται ακόμα και όταν οι αριθμητικές πράξεις μπορούν να εκτελεστούν ακριβώς. Για την ακρίβεια, σε κάθε βήμα της μεθόδου μετράει την αποτυχία της θεωρητικής λύσης να ικανοποιήσει τη μέθοδο.

Μεταξύ των δύο παραπάνω σφαλμάτων υπάρχει μία σχέση αλληλεπίδρασης. Για παράδειγμα το σφάλμα αποκοπής μπορεί να μειωθεί εάν ελαττώσουμε την τιμή του βήματος h , αυτό

όμως μπορεί να έχει ως συνέπεια την αύξηση του σφάλματος στρογγύλευσης.

Στις περισσότερες περιπτώσεις, για τον υπολογισμό της ακρίβειας μιας αριθμητικής λύσης χρησιμοποιούμε το σφάλμα αποκοπής.

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ.

Η έννοια της ευστάθειας για τις αριθμητικές λύσεις μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης είναι ανάλογη, αλλά διαφορετική, από την ευστάθεια της ίδιας της διαφορικής εξίσωσης. Όπως είναι γνωστό, μία διαφορική εξίσωση είναι ευσταθής αν οι καμπύλες των λύσεών της δεν αποκλίνει η μία από την άλλη όταν αυξάνει το x .

Ομοίως μία αριθμητική μέθοδος είναι ευσταθής αν μικρές διαταραχές δεν επιτρέπουν οι αριθμητικές λύσεις που προκύπτουν να αποκλίνει η μία από την άλλη χωρίς κάποιο φράγμα, διαφορετικά θα είναι ασταθής.

Τέτοιες αποκλίσεις των αριθμητικών λύσεων μπορεί να οφείλονται είτε στην αστάθεια της διαφορικής εξίσωσης που επιλύεται, είτε και στην ίδια την αριθμητική μέθοδο, ακόμη και αν η διαφορική εξίσωση είναι ευσταθής.

Αριθμητικές μέθοδοι

Αρκετές διαφορικές εξισώσεις είναι δυνατόν να λυθούν με αναλυτικές τεχνικές. Τις περισσότερες φορές όμως, η αναλυτική λύση είναι ιδιαίτερα δύσκολη ή ακόμα και αδύνατη. Τη λύση σε αυτή την κατηγορία προβλημάτων δίνουν οι αριθμητικές μέθοδοι, με βάση τις οποίες υπολογίζεται μια προσεγγιστική λύση. Στη συνέχεια θα δούμε ορισμένες από τις πιο γνωστές αριθμητικές μεθόδους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων.

2.3 Μέθοδος Euler

Η απλούστερη και παλαιότερη αριθμητική μέθοδος για την επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών είναι η μέθοδος του Euler. Στην πραγματικότητα χρησιμοποιείται σπάνια λόγω της χαμηλής ακρίβειας που παρέχει. Η απλότητα της χρήσης της όμως, την καθιστά χρήσιμη για παραδειγματικούς σκοπούς.

Έστω ότι έχουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Αν $y(x)$ είναι η ακριβής λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, τότε από τον ορισμό της παραγώγου της συνάρτησης θα έχουμε:

$$y'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

Όπου αν θεωρήσουμε την τιμή h πολύ μικρή μπορούμε να πάρουμε προσεγγιστικά

$$y'(x) \cong \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

Θέτοντας $x = x_0$ η παραπάνω εξίσωση θα γίνει $y_1 \cong y_0 + hy'_0$.

Στο επόμενο βήμα για $x = x_1$ θα έχουμε $y_2 \cong y_1 + hy'_1$.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ο αναδρομικός τύπος:

$$y_{n+1} \cong y_n + hy'_n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε βήμα η τιμή της (1) προκύπτει από τον υπολογισμό της προηγούμενης τιμής y_n .

Για να εξετάσουμε την αποτελεσματικότητα της μεθόδου είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε το τοπικό σφάλμα αποκοπής.

Εάν συμβολίσουμε με y_{ia} τις αναλυτικές λύσεις και με y_{ip} τις προσεγγιστικές λύσεις στα σημεία $x_i = 0, 1, 2, \dots$ τότε το τοπικό σφάλμα αποκοπής δίνεται από τον τύπο:

$$E_{\iota} = |y_{ia} - y_{ip}|$$

2.4 Μέθοδος Taylor

Η μέθοδος Taylor βασίζεται στο ανάπτυγμα Taylor για τον υπολογισμό της λύσης της διαφορικής εξίσωσης $y' = f(x, y)$ με $y(x_0) = y_0$ σε διαδοχικά $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Παίρνοντας το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το σημείο $x = x_0$, έχουμε:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x-x_0) + y''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} \dots$$

Εάν θέσουμε $x = x_1$ η παραπάνω σχέση γίνεται

$$y(x_1) = y_0 + y'(x_0)h + y''(x_0)\frac{h^2}{2!} + y'''(x_0)\frac{h^3}{3!} \dots (1)$$

Όπου $h = x_1 - x_0$.

Κρατώντας ορισμένους όρους από την σχέση (1) θα έχουμε μια προσεγγιστική τιμή της λύσης στο σημείο x_1 την y_1 .

Για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής της λύσης στο σημείο x_2 χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το σημείο $x = x_1$.

$$\text{Δηλαδή } y(x) = y_1 + y'(x_1)(x - x_1) + y''(x_1)\frac{(x-x_1)^2}{2!} + \dots (2)$$

Θέτοντας στην σχέση (2) $x = x_2$ και κρατώντας ορισμένους όρους, θα έχουμε μια προσεγγιστική τιμή της λύσης στο σημείο x_2 την y_2 .

Γενικεύοντας, καταλήγουμε στη σχέση

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \dots + \frac{h^n}{n!} y_i^{(n)} (3)$$

Όπου y_{i+1} είναι η προσεγγιστική τιμή της λύσης στο σημείο x_{i+1} και y_i η προσεγγιστική τιμή της λύσης στο σημείο x_i .

Απαραίτητο επίσης κρίνεται το να γνωρίζουμε τις τιμές των παραγώγων $y'_i, y''_i, \dots, y_i^{(n)}$ για τον υπολογισμό της σχέσης (3). Οι τιμές των παραγώγων δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{aligned}
 y'(x_i) &= f(x_i, y_i) \\
 y''(x_i) &= \left[\frac{df}{dx} \right]_{x=x_i} = \left[\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx} \right]_{x=x_i} \\
 y'''(x_i) &= \left[\frac{d^2 f}{dx^2} \right]_{x=x_i} = \frac{d}{dx} \left[\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx} \right]_{x=x_i} \\
 &= \left[\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dx dy} f + \frac{d^2 f}{dy dx} f + \frac{d^2 f}{dy^2} f^2 + \frac{df}{dy} \frac{df}{dx} + \left(\frac{df}{dy} \right)^2 \right]_{x=x_i}
 \end{aligned}$$

Ή μπορούμε να τις υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση

$$f^{(j+1)} = f^{(j)} + f^{(j)} f, \quad j=0,1,2,\dots$$

$$\text{Όπου } f^{(0)} = f \text{ και } f_x = \frac{df}{dx}, \quad f_y = \frac{df}{dy}.$$

Λόγω της δυσκολίας υπολογισμού παραγώγων ανώτερης τάξης συνηθώς χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Taylor για μικρής τάξης n .

Το τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου τάξης n δίνεται από τον τύπο

$$E_i = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in [x_i, x_{i+1}]$$

Συμπίπτει δηλαδή με το υπόλοιπο Taylor.

2.5 Μέθοδος Runge-Kutta

Εισαγωγή.

Μια πολύ σημαντική κατηγορία μεθόδων αριθμητικής επίλυσης προβλημάτων αρχικών τιμών την οποία και θα αναπτύξουμε μακροσκελώς, είναι η μέθοδος των Runge-Kutta. Στην αριθμητική ανάλυση οι μέθοδοι αυτές αποτελούν μια σημαντικότερη οικογένεια εξειδικευμένων μεθόδων προσδιορισμού λύσεων διαφορικών εξισώσεων.

Αναπτύχθηκε περίπου το 1900 από δυο Γερμανούς μαθηματικούς, τους C. Runge και M.W. Kutta. Όπως είδαμε, η μέθοδος του Euler χρειάζεται πολύ μικρό βήμα ή προκειμένου να έχουμε καλή ακρίβεια, το οποίο έχει ως συνέπεια να αυξάνεται το σφάλμα στρογγυλεύσεις. Από την άλλη μεριά η μέθοδος του Taylor παρόλο που μας παρέχει υψηλή ακρίβεια παρουσιάζει δυσκολίες στον υπολογισμό υψηλής τάξης παραγωγών. Τα μειονεκτήματα αυτά των προηγούμενων μεθόδων έρχεται να ξεπεράσει η μέθοδος των Runge-Kutta, η οποία παρέχει υψηλή ακρίβεια.

Η εφαρμογή της μεθόδου των Runge-Kutta στα συστήματα διαφορικών εξισώσεων είναι μια απλή επέκταση του τρόπου εφαρμογής της στις διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης.

Χρησιμοποιεί τις εξισώσεις του συστήματος για να υπολογίσει την κατάλληλη κλίση της κάθε άγνωστης συνάρτησης, με την οποία θα υπολογίσει την επομένη τιμή της, εφαρμόζοντας, επί της ουσίας, τη λογική της μεθόδου του Euler:

$$(Νέα\ τιμή) = (παλιά\ τιμή) + (κατάλληλη\ κλίση) (\Delta x)$$

Runge-Kutta.

Πρόκειται για ένα σύνολο μεθόδων ενός βήματος με δεδομένο ότι η τιμή της εξαρτημένης τιμής στο τέλος του βήματος, όπως και στη μέθοδο του Euler, εξαρτάται από την πληροφορία που προέρχεται από

συγκεκριμένο βήμα. Δηλαδή η τιμή y_{i+1} εξαρτάται μόνο από την τιμή της προηγούμενης τιμής y_i .

Αρχικά θα θεωρήσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών πρώτης τάξης:

$$y' = f(x, y)$$

Η γενική μορφή των μεθόδων Runge – Kutta είναι :

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1g_1 + b_2g_2 + \dots + b_s g_s)$$

Όπου:

$$g_1 = f(x_n, y_n)$$

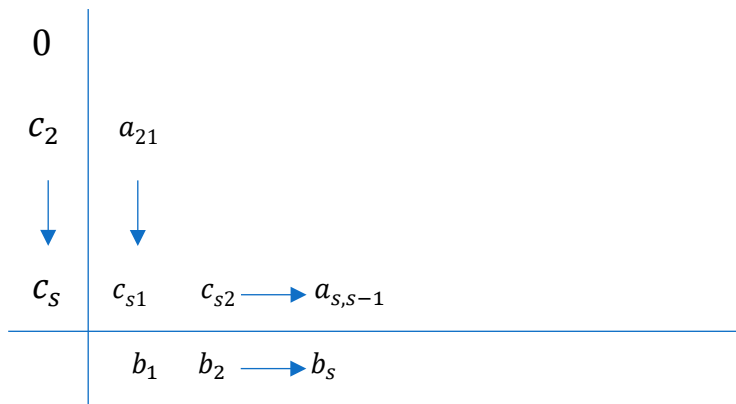
$$g_2 = f(x_n + c_2h, y_n + ha_{21}g_1)$$

$$g_3 = f(x_n + c_3h, y_n + a_{32}g_2)$$



$$g_s = f(x_n + c_s h, y_n + h(a_{s1} + a_{s2}g_2 + \dots + a_{s,s-1}g_{s-1}))$$

Ο Butcher έγραψε τα παραπάνω σε πίνακα στη μορφή :



Η απλούστερη όλων είναι η Runge- Kutta 2^{ης} τάξης, η οποία περιγράφεται από τη σχέση :

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{h}{2}\right) [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i)] \quad (1)$$

Η (1) προκύπτει εφαρμόζοντας τη μέθοδο Euler δύο φορές ή την πεπλεγμένη Euler για μία μόνο επανάληψη. Πρώτα υπολογίζουμε την ενδιάμεση τιμή η οποία προκύπτει με βάση τη θεωρία που ακολουθεί:

$$y'_{i+1} = Y_i + h f(x_i, y_i)$$

και στη συνέχεια την τελική τιμή:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{h}{2}\right) [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y'_{i+1})]$$

Συνοπτικά λοιπόν, η Runge – Kutta 2^{ης} τάξης είναι:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

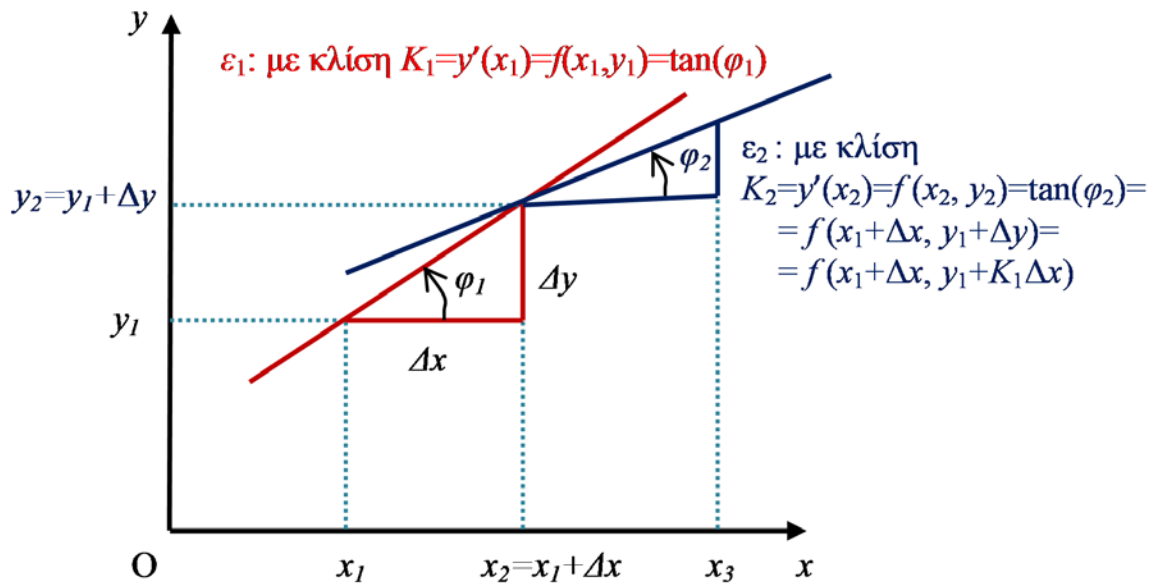
$$k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (k_1 + k_2) \text{ όπου } i = 0, 1, 2, \dots$$

Όλα αυτά φαίνονται παραστατικά στην επόμενη εικόνα:

Οι ευθείες ε_1 και ε_2 , με τις κλίσεις της λύσης $y(x)$ στα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) . Παρατηρώντας τις δύο ευθείες (ε_1 και ε_2) βγάζουμε τα παρακάτω σημαντικά συμπεράσματα:

- Η κλίση της άγνωστης συνάρτησης $y(x)$ (η οποία αποτελεί τη μερική λύση της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης, αντιστοιχώντας στην αρχική συνθήκη (x_1, y_1)) μειώνεται, καθώς το x μεγαλώνει.



Οι Runge - Kutta μεγαλύτερης τάξης προκύπτουν με παρόμοιο τρόπο εφαρμόζοντας μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης μεγαλύτερης τάξης.

Η Runge – Kutta 3^{ης} τάξης , εφαρμόζοντας τον 1^ο κανόνα Simpson ,
δίνεται από τις σχέσεις:

$$k_1 = h f (x_i , y_i)$$

$$k_2 = h f \left(x_i + \frac{h}{2} , y_i + \frac{k_1}{2} \right)$$

$$k_3 = h f (x_i + h , y_i + k_2)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3) \text{ με } i = 0,1,2,..$$

Οι ποσότητες k_1 , k_2 , k_3 προσεγγίζουν τις παραγώγους της εξαρτημένης μεταβλητής στα σημεία του αντίστοιχου υπό-διαστήματος.

Η γενική μορφή Runge – Kutta 4^{ης} τάξης είναι

$$y_{i+1} = y_i + h (ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4)$$

Όπου

k_1 , k_2 , k_3 , k_4 οι ποσότητες είναι προσεγγιστικές τιμές της $\frac{dy}{dx}$ σε διαφορετικά σημεία του υπό – διαστήματος $[x_i , x_i + h]$.

Και δίνεται από τις σχέσεις:

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ
ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ
ΛΙΤΣΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_3\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Καθώς και από τις εξής:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3} k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{2h}{3} k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{8} (k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1. Οι τάξεις των τύπων των Runge – Kutta εκφράζουν την «ισοδυναμία» τους με τους τύπους της αντίστοιχης τάξης του Taylor.
2. Μεγάλο πλεονέκτημα των τύπων των Runge – Kutta αποτελεί το γεγονός πως δεν χρειάζεται να υπάρξουν διαδοχικές παραγωγίσεις της διαφορικής εξίσωσης, προκειμένου να υπολογίσουμε τις παράγωγους ανώτερης τάξης $y''(x)$, $y'''(x)$ και $y^{(4)}(x)$. Έτσι, στην περίπτωση που ο τύπος του β' μέλους της διαφορικής εξίσωσης (η $f(x, y)$) είναι ιδιαίτερα περίπλοκος, η επιλογή της μεθόδου των Runge – Kutta είναι η πλέον ενδεδειγμένη.
3. Στο Excel, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το πλεονέκτημα της μεθόδου των Runge – Kutta, εκμεταλλευόμενοι τη δυνατότητα του Excel να αντιγράφει από ένα κελί στο άλλο, τον τύπο που περιέχει το πρώτο. Αρκεί να δομήσουμε το φύλλο μας, έτσι ώστε αυτό να είναι δυνατό.
4. Η μέθοδος Runge – Kutta 4^{ης} τάξης αποτελεί την πιο συνηθισμένη επιλογή, για την αριθμητική ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων, σε ερευνητικά προβλήματα Φυσικής. Η ευκολία προγραμματισμού της σε κάποια γλώσσα προγραμματισμού H/Y, καθώς και η δυνατότητα επανάληψης της χιλιάδες ή και εκατομμύρια φορές, μας επιτρέπει, από τη μια να χρησιμοποιήσουμε αρκετά μικρό βήμα, έτσι ώστε να επιτύχουμε την επιθυμητή ακρίβεια των υπολογισμών και από την άλλη να βρούμε τη λύση για πολύ μεγάλο διάστημα τιμών του x .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Δίνεται η διαφορική εξίσωση:

$$y' = f(x, y) = 2xy + x^3$$

με αρχική συνθήκη $y(0)=2$ και ζητούνται:

- Να λυθεί η διαφορική εξίσωση αναλυτικά και να βρεθεί η μερική της λύση.
- Η αριθμητική της λύση με τη μέθοδο του Runge-Kutta 2^{ης} τάξης, βήμα $h=0.1$, μέχρι το σημείο $x=1$.
- Η αριθμητική της λύση με τη μέθοδο του Runge-Kutta 4^{ης} τάξης, βήμα $h=0.1$, μέχρι το σημείο $x=1$.
- Να υπολογιστούν τα σχετικά σφάλματα των δύο αριθμητικών λύσεων στον υπολογισμό της τιμής $y(1)$.

ΛΥΣΗ:

α) Υπολογίζουμε τη θεωρητική λύση (γενική και μερική).

$$y' = f(x, y) = 2xy + x^3 \Rightarrow y' - 2xy = x^3$$

όπου διαπιστώνουμε πως πρόκειται για γραμμική διαφορική εξίσωση με

$$P(x) = -2x \text{ και } Q(x) = x^3.$$

Λύνουμε λοιπόν, τα δύο ολοκληρώματα του τύπου επίλυσης:

$$\int P(x) dx = -\int 2x dx = -x^2$$

$$\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx = \int x^3 e^{-x^2} dx$$

θέτουμε $t = -x^2$

άρα $dt = -2x dx \Rightarrow -1/2 dt = x dx$

οπότε έχουμε

$$\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx = \int x^3 e^{-x^2} dx = -\int -x^2 e^{-x^2} x dx =$$

$$\frac{1}{2} \int t e^t dt = \frac{1}{2} (t e^t - e^t) = \frac{1}{2} e^t (t-1) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1)$$

Έτσι, η γενική λύση παίρνει τη μορφή:

$$y(x) = e^{-\int P(x) dx} [c + \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx] = e^{x^2} \left[c - \frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1) \right] \Rightarrow$$

$$y(x, c) = c e^{x^2} - \frac{1}{2} (x^2 + 1)$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας τις τιμές της αρχικής συνθήκης στη γενική λύση, υπολογίζουμε την τιμή του c που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη.

$$y(x, c) = c e^{x^2} - \frac{1}{2} (x^2 + 1)$$

$$y(0) = 2$$

Οπότε η μερική λύση είναι :

$$y(x) = \frac{5}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

β) Λύση με τη μέθοδο του Runge–Kutta 2^{ης} τάξης, ακολουθώντας τη λογική του Excel, αναπτύσσοντας τον πίνακα προς τα κάτω.

x	y	K ₁	x + h	y + hK ₁	K ₂	Ακριβές
0	2	0	0.2	2	0.80800	2
0.2	2.08080	0.84032	0.4	2.24886	1.86309	2.082027
0.4	2.35114	1.94491	0.6	2.74012	3.50415	2.353777
0.6	2.89605	3.69126	0.8	3.63430	6.32688	2.903324
0.8	3.89786	6.74858	1	5.24758	11.49515	3.921202
1	5.72223	12.44447	1.2	8.21113	21.43471	5.795705
1.2	9.11015	23.59236	1.4	13.82862	41.46415	9.33174
1.4	15.61580	46.46824	1.6	24.90945	83.80624	16.26832
1.6	28.64325	95.75440	1.8	47.79413	177.89087	30.55954
1.8	56.00778	207.46000	2	97.49978	397.99911	61.7143
2	474.21475	474.21475	2.2	211.39664	940.79321	133.9954

Όπου οι δύο χρωματισμένες στήλες αποτελούν τον πίνακα τιμών της άγνωστης συνάρτησης, όπως υπολογίστηκε από την αριθμητική μέθοδο.

Παράδειγμα υπολογισμού:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + h \frac{K_1 + K_2}{2} \Rightarrow$$

$$y(0.2) = y(0 + 0.2) = y(0) + 0.2 \frac{f(x_0, y_0) + f((x_0 + h), y(x_0 + hK_1))}{2}$$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ
ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ
ΛΙΤΣΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

Όπου $y(0)=2$

$$K_1 = f(0,2) = [2xy + x^3]_{x=0,y=2} = 0$$

$$K_2 = f(0.2, 2) = [2xy + x^3]_{x=0.2,y=2} = 0.808$$

$$y(0.2) = 2 + 0.2 \frac{(0 + 0.808)}{2} = 2.0808$$

γ) Λύση με τη μέθοδο του Runge – Kutta 4^{ης} τάξης , ακολουθώντας τη λογική του Excel, άλλωστε οι υπολογισμοί με το “χέρι” μοιάζουν ακατόρθωτοι...

Όπου οι δύο χρωματισμένες στήλες αποτελούν τον πίνακα τιμών της άγνωστης συνάρτησης , όπως υπολογίστηκε από τη μέθοδο.

x	Y	K_1	x+h/2	$y+hK_1/2$	K_2	x+h/2	$y+hK_2/2$	K_3	x+h	$y+hK_3$	K_4	Ακριβές
0	2	0	0.1	2	0.401	0.1	2.040	0.409	0.2	2.082	0.841	2
0.2	2.082	0.84081	0.3	2.166106	1.327	0.3	2.215	1.356	0.4	2.353	1.947	2.082027
0.4	2.354	1.947015	0.5	2.548471	2.673	0.5	2.621	2.746	0.6	2.903	3.700	2.353777
0.6	2.903	3.699954	0.7	3.273291	4.926	0.7	3.396	5.097	0.8	3.923	6.788	2.903324
0.8	3.921	6.78575	0.9	4.599668	9.008	0.9	4.822	9.408	1	5.803	12.606	3.921202
1	5.795	12.59053	1.1	7.054316	16.850	1.1	7.480	17.788	1.2	9.353	24.175	5.795705
1.2	9.330	24.11996	1.3	11.74198	32.726	1.3	12.603	34.964	1.4	16.323	48.448	9.33174
1.4	16.262	48.27638	1.5	21.0892	66.643	1.5	22.926	72.152	1.6	30.692	102.311	16.26832
1.6	30.534	101.8052	1.7	40.71466	143.343	1.7	44.868	157.466	1.8	62.027	229.130	30.55954
1.8	61.619	227.6612	1.9	84.38533	327.523	1.9	94.372	365.471	2	134.713	546.854	61.7143
2	133.636	542.5439	2.1	187.8904	798.401	2.1	213.476	905.860	2.2	314.808	1395.803	133.9954

Παράδειγμα υπολογισμού πρώτου βήματος :

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + h \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6}$$

$$y(0.2) = y(0 + 0.2) =$$

$$y(0) + 0.2 \frac{f(x_0, y_0) + 2f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y\left(x_0 + \frac{h}{2}, K_1\right)\right) + 2f\left(x_0 + \frac{h}{2}, K_2\right) + f(x_0 + h, y_0 + hK_3)}{6}$$

όπου $y(0)=2$

$$K_1 = f(0,2) = [2xy + x^3]_{x=0, y=2} = 0$$

$$K_2 = f(0.1, 2) = [2xy + x^3]_{x=0.1, y=2} = 0.401$$

$$K_3 = f(0.1, 2 + 0.1 \cdot 0.401) = f(0.1, 2.0401) = [2xy + x^3]_{x=0.1, y=2.0401} = 0.40902$$

$$K_4 = f(0.2, 2 + 0.2 \cdot 0.40909) = f(0.2, 2.081804) = [2xy + x^3]_{x=0.2, y=2.081804}$$

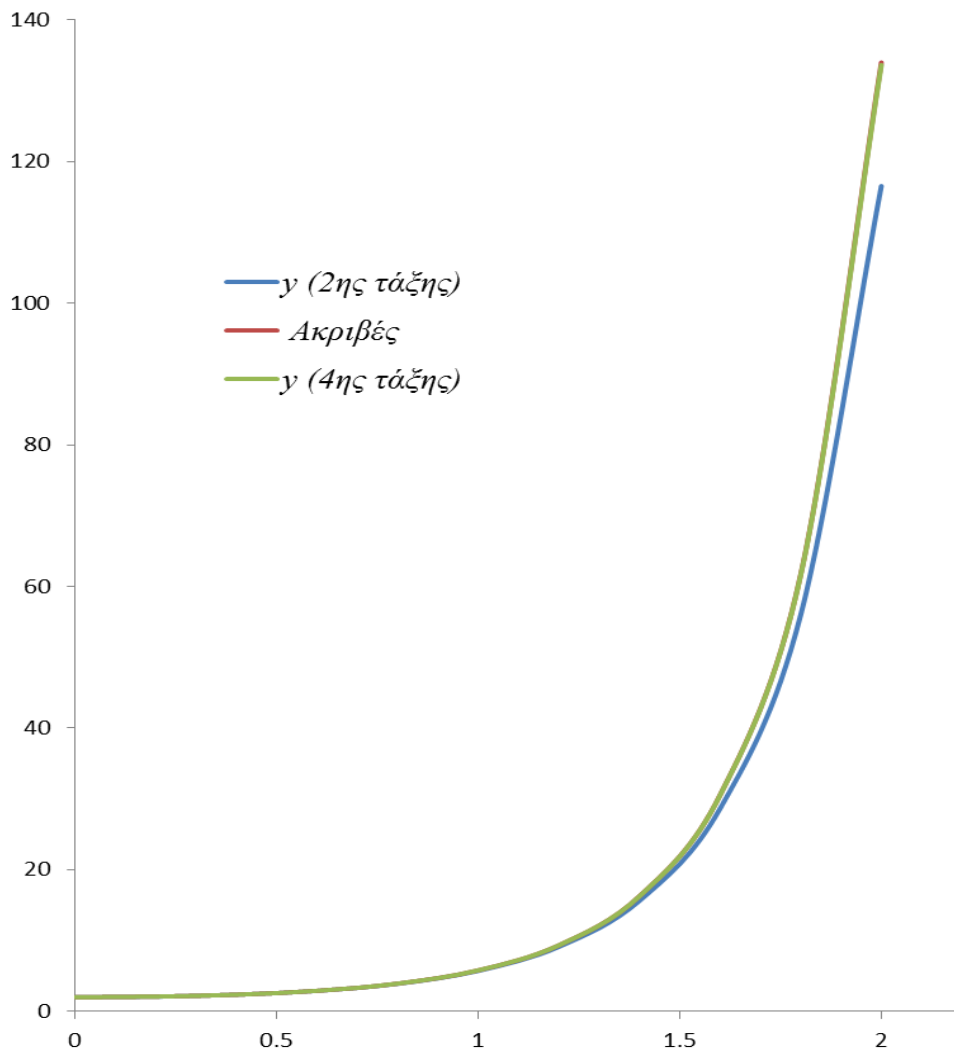
$$= 0.840722$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές βρίσκουμε :

$$y(0.2) = 2 + 0.2 \frac{(0 + 2 \cdot 0.401 + 2 \cdot 0.40909 + 0.840722)}{6}$$

δ) Γραφική παράσταση

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ
ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ
ΛΙΤΣΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ



Runge–Kutta , 2^{ης} και 4^{ης} τάξης.

Παρατηρούμε πως το αποτέλεσμα της 4^{ης} τάξης συμπίπτει με το ακριβές.

Παρατηρήσεις:

- Αρχικά παρατηρούμε πως το αποτέλεσμα της μεθόδου 2^{ης} τάξης έχει σχετικό σφάλμα αρκετά υψηλό (13,02%).

- Είναι ένα αποτέλεσμα αναμενόμενο , ειδικά σε περιπτώσεις όπου στη λύση εμφανίζεται ο παράγοντας e υψωμένος σε κάποια δύναμη , ενώ ταυτόχρονα το βήμα είναι ιδιαίτερα μεγάλο.
- Αντίθετα , εντυπωσιάζει η ακρίβεια της μεθόδου 4^{ης} τάξης , παρά το ιδιαίτερα μεγάλο βήμα.

2.6 ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ.

Αρχικά θα αναφερθούμε στα διάφορα σφάλματα που προκύπτουν όταν εφαρμόζουμε μία αριθμητική μέθοδο για την προσέγγιση της λύσης ενός προβλήματος.

Γενικά , μπορούμε να πούμε ότι μία αριθμητική μέθοδος για την προσέγγιση της λύσης ενός προβλήματος υποφέρει από δύο βασικές πηγές σφαλμάτων.

1) Σφάλμα στρογγύλευσης (rounding error)

Το σφάλμα αυτό οφείλεται στην πεπερασμένη ακρίβεια της αριθμητικής κινητής υποδιαστολής του υπολογιστή.

Στη συνέχεια , το συσσωρευμένο σφάλμα που προκύπτει από την κάθε μέθοδο Runge – Kutta είναι αντίστοιχο με την τάξη της μεθόδου.

Το σφάλμα ε_i ανάμεσα στην αριθμητική και αναλυτική τιμή της συνάρτησης $y(x)$ στο εκάστοτε βήμα ορίζεται από το μέρος της διαφοράς

$$\varepsilon_i = y_i - y(x_i),$$

όπου y_i και $y(x_i)$ η αριθμητική τιμή της $y(x)$ στο σημείο x_i αντίστοιχα.

Όταν το σφάλμα παραμένει πεπερασμένο και μάλιστα μειώνεται καθώς αυξάνει ο αριθμός των βημάτων, τότε η μέθοδος καλείται ευσταθής, ενώ αν το σφάλμα αυξάνει συνεχώς , τότε η μέθοδος θεωρείται ασταθής.

2) Σφάλμα αποκοπής (truncation error)

Το σφάλμα αυτό οφείλεται στην αριθμητική μέθοδο που εφαρμόζουμε, και θα υφίσταται ακόμη και αν όλες οι αριθμητικές πράξεις μπορούν να εκτελεστούν ακριβώς.

Το σφάλμα αποκοπής για την μέθοδο ορίζεται από τη σχέση :

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h \Phi(x_n, y(x_n), h)$$

και μετράει σε ένα βήμα , πόσο αποτυγχάνει η θεωρητική λύση του προβλήματος να ικανοποιήσει τη μέθοδο και μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα πρώτο μέτρο για την ακρίβεια της μεθόδου.

Τα δύο αυτά σφάλματα , αν και ξεκινούν από διαφορετικές πηγές , δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Για παράδειγμα , το σφάλμα αποκοπής συνήθως μπορεί να ελαττωθεί χρησιμοποιώντας ένα μικρότερο h , αλλά αυτό μπορεί να έχει σαν συνέπεια την αύξηση του σφάλματος στρογγύλευσης . Στις περισσότερες όμως περιπτώσεις , το σφάλμα αποκοπής αποτελεί τον κυρίαρχο παράγοντα υπολογισμού της ακρίβειας των αριθμητικών λύσεων των συνήθων διαφορικών εξισώσεων και επομένως μπορούμε να αγνοούμε το σφάλμα στρογγύλευσης.

Το σφάλμα αποκοπής της μεθόδου γενικά μπορεί να χωριστεί σε δύο τύπους. Το τοπικό σφάλμα αποκοπής και το ολικό σφάλμα αποκοπής.

- 1. Τοπικό σφάλμα αποκοπής T_k** (local truncation error) , το οποίο είναι το σφάλμα που γίνεται σε ένα βήμα της αριθμητικής μεθόδου , έστω το k βήμα.

Συγκεκριμένα :

$$T_k = y_k - u_{k-1}(x_k)$$

Όπου y_k είναι η προσεγγιστική λύση στο σημείο x_k , και u_{k-1} είναι το μέλος της οικογένειας της αναλυτικής λύσης της διαφορικής εξίσωσης το οποίο διέρχεται από το σημείο (x_{k-1}, y_{k-1}) .

2. Τοπικό σφάλμα αποκοπής E_k (global truncation error), το οποίο είναι η διαφορά της προσεγγιστικής λύσης και της ακριβούς λύσης η οποία ορίζεται από την αρχική συνθήκη στο αρχικό σημείο x_0 .

Συγκεκριμένα :

$$E_k = y_k - u_0(x_k) = y_k - y(x_k)$$

Το ολικό σφάλμα δεν είναι απαραίτητα ίσο με το άθροισμα των τοπικών σφαλμάτων. Το ολικό σφάλμα γενικά θα είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των τοπικών σφαλμάτων, αν η διαφορική εξίσωση είναι ασταθής, αλλά μπορεί να είναι μικρότερο αν η διαφορική εξίσωση είναι ευσταθής.

Γενικά, ενδιαφερόμαστε για μικρό σφάλμα, αλλά μπορούμε να έχουμε απ' ευθείας μόνο το τοπικό σφάλμα.

Έπειτα ας θεωρήσουμε μία διαφορική εξίσωση

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

με αρχική συνθήκη

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

Έστω y_i η προσεγγιστική λύση της εξίσωσης στο σημείο x_i . Σύμφωνα με τη μέθοδο Runge-Kutta η τιμή του y_{i+1} στο επόμενο σημείο $x_{i+1} = x_i + h$ υπολογίζεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left. \begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i \\ \Delta y_i &= \frac{1}{6} (K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

όπου:

$$\left. \begin{aligned} K_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i) \\ K_2^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}\right) \\ K_3^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right) \\ K_4^{(i)} &= hf(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι υπολογισμοί που περιγράφονται στον παρακάτω αλγόριθμο.

Ο πίνακας σχηματίζεται με τον εξής τρόπο :

1. Γράφονται οι τιμές των x_0, y_0 στην πρώτη γραμμή του πίνακα.
2. Υπολογίζεται η τιμή $f(x_0, y_0)$, πολλαπλασιάζεται με το h και το αποτέλεσμα εισάγεται στον πίνακα ως $K_1^{(0)}$.

3. Γράφονται οι τιμές των $x_o + \frac{h}{2}$, $y_o + \frac{K_1^{(0)}}{2}$ στη δεύτερη γραμμή.
4. Υπολογίζεται η τιμή $f\left(x_o + \frac{h}{2}, y_o + \frac{K_1^{(0)}}{2}\right)$, πολλαπλασιάζεται με το h και το αποτέλεσμα εισάγεται στον πίνακα ως $K_2^{(0)}$.
5. Γράφονται οι τιμές των $x_o + \frac{h}{2}$, $y_o + \frac{K_2^{(0)}}{2}$ στη τρίτη γραμμή.
6. Υπολογίζεται η τιμή $f\left(x_o + \frac{h}{2}, y_o + \frac{K_2^{(0)}}{2}\right)$, πολλαπλασιάζεται με το h και το αποτέλεσμα εισάγεται στον πίνακα ως $K_3^{(0)}$.
7. Γράφονται οι τιμές των $x_o + h$, $y_o + K_3^{(0)}$ στη τέταρτη γραμμή του πίνακα.
8. Υπολογίζεται η τιμή $f(x_o + h, y_o + K_3^{(0)})$, πολλαπλασιάζεται με το h και το αποτέλεσμα εισάγεται στον πίνακα ως $K_4^{(0)}$.
9. Τοποθετούνται οι αριθμοί $K_1^{(0)}, 2K_2^{(0)}, 2K_3^{(0)}, K_4^{(0)}$ στη στήλη Δy .
10. Το άθροισμα των στοιχείων της στήλης Δy διαιρείται με το 6, και εισάγεται το αποτέλεσμα ως Δy_o .
11. Υπολογίζεται το $y_1 = y_o + \Delta y$

Έπειτα συνεχίζονται οι υπολογισμοί με τον ίδιο τρόπο, λαμβάνοντας το ζεύγος (x_1, y_1) ως αρχικό σημείο.

1.1 ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Σχηματική παράσταση της μεθόδου Runge-Kutta.

i	x	y	$K = hf(x, y)$	Δy
	x_o	y_o		
	$x_o + \frac{h}{2}$	$y_o + \frac{K_1^{(0)}}{2}$	$K_1^{(0)}$	$K_1^{(0)}$
	$x_o + \frac{h}{2}$	$y_o + \frac{K_2^{(0)}}{2}$	$K_2^{(0)}$	$2K_2^{(0)}$
	$x_o + \frac{h}{2}$	$y_o + \frac{K_3^{(0)}}{2}$	$K_3^{(0)}$	$2K_3^{(0)}$
	$x_o + h$	$y_o + K_4^{(0)}$	$K_4^{(0)}$	$K_4^{(0)}$

Το βήμα των υπολογισμών μπορεί να είναι μεταβλητό από σημείο σε σημείο. Για να ελεγχθεί η καταλληλότητα του h υπολογίζεται το παρακάτω κλάσμα:

$$\theta = \frac{|K_2^{(i)} - K_3^{(i)}|}{|K_1^{(i)} - K_2^{(i)}|} \quad (5)$$

Η ποσότητα θ δεν θα πρέπει να ξεπερνά μερικά εκατοστά, διαφορετικά επιβάλλεται η μείωσή του. Η τάξη ακρίβειας της μεθόδου Runge-Kutta είναι h^4 σε ολόκληρο το διάστημα $[x_o, X]$. Η εκτίμηση του σφάλματος με αυτή τη μέθοδο είναι μάλλον δύσκολη. Το σφάλμα μπορεί να υπολογιστεί πρόχειρα από την παρακάτω σχέση:

$$|y_n^* - y(x_n)| \approx \frac{|y_n^* - y_n|}{15}$$

όπου $y(x_n)$ είναι η ακριβής λύση της εξίσωσης (1) για το σημείο x_n , και y_n^*, y_n οι προσεγγιστικές τιμές που επιτυγχάνονται με $\frac{h}{2}$ και h αντίστοιχα.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε ένα απλό παράδειγμα της κλασικής μεθόδου Runge-Kutta (RK4). Έστω η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

Με αρχικές συνθήκες $x=0, y=1$.

Η μέθοδος στηρίζεται στον αναδρομικό τύπο:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

Όπου :

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ
ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ
ΛΙΤΣΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

Ένα απλό πρόγραμμα που επιλύει τη διαφορική εξίσωση είναι:

```
clear;

x0 = input("initial value of x = ");
y0 = input("initial value of y = ");
x1 = input("upper limit of x = ");
N = input("number of steps = ");

function z = f1(x, y)
    z = x*y;
end

x = zeros(N, 1);
y = zeros(N, 1);

h = (x1-x0) / N;
x(1) = x0;
y(1) = y0;

for i=1:N
    k1 = h * f1(x(i),y(i));
    k2 = h * f1(x(i) + h/2.0, y(i) + 0.5 * k1);
    k3 = h * f1(x(i) + h/2.0, y(i) + 0.5 * k2);
    k4 = h * f1(x(i) + h, y(i) + k3);
    y(i+1) = y(i) + (k1 + 2.0*k2 + 2.0*k3 + k4 ) / 6.0;
    x(i+1) = x(i) + h;
end

[x]
```

Κεφάλαιο 3. Μέθοδοι Runge – Kutta

3.1 Μέθοδοι 3ης τάξης

Συνεχίζοντας όλα τα παραπάνω, για την εύρεση των συντελεστών μιας μεθόδου τρίτης τάξης Runge – Kutta θεωρούμε την παρακάτω μέθοδο τριών σταδίων:

$$h_{n+1} = y_n + h(b_1g_1 + b_2g_2 + b_3g_3)$$

Όπου:

$$g_1 = f(x_n, y_n)$$

$$g_2 = f(x_n + c_2h, y_n + ha_{21}g_1)$$

$$g_3 = f(x_n + c_3h, y_n + h(a_{31}g_1 + a_{32}g_2))$$

Από την αντίστοιχη διαδικασία για την δεύτερης τάξης μέθοδο, έχουμε:

$$f'(x, y) = f_x + f \cdot f_y$$

$$f''(x, y) = f_{xx} + f_x \cdot f_y + 2f \cdot f_{xy} + f^2_y \cdot f + f^2 \cdot f_{yy}$$

$$f'''(x, y) = \frac{d}{dx}f''(x, y) = \frac{d}{dx}(f_{xx} + f_x \cdot f_y + 2f \cdot f_{xy} + f^2_y \cdot f + f^2 \cdot f_{yy})$$

3.2 Μέθοδοι 4^{ης} τάξης

Μια μέθοδος τέταρτης τάξης τεσσάρων σταδίων έχει την ακόλουθη μορφή:

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1g_1 + b_2g_2 + b_3g_3 + b_4g_4)$$

Όπου:

$$g_1 = f(x_n, y_n)$$

$$g_2 = f(x_n + c_2h, y_n + ha_{21})$$

$$g_3 = f(x_n + c_3h, y_n + h(a_{31}g_1 + a_{32}g_2))$$

$$g_4 = f(x_n + c_4h, y_n + h(a_{41}g_1 + a_{42}g_2 + a_{43}g_3))$$

Με βάση τις προηγούμενες διαδικασίες και παρόμοιους τρόπους μπορούμε να βρούμε συνθήκες που απαιτούνται για την κατασκευή μιας μεθόδου τέταρτης τάξης τεσσάρων σταδίων.

Το σύστημα των συνθηκών τάξης είναι το παρακάτω:

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1$$

$$b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4 = \frac{1}{2}$$

$$b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 + b_4 c_4^2 = \frac{1}{3}$$

$$b_2 c_2^3 + b_3 c_3^3 + b_4 c_4^3 = \frac{1}{4}$$

$$b_3 a_{32} c_2 + b_4 (a_{42} + a_{43} c_3) = \frac{1}{6}$$

$$b_3 c_3 a_{32} c_2 + b_4 c_4 (a_{42} c_2 + a_{43} c_3) = \frac{1}{8}$$

$$b_3 c_2^2 a_{32} + b_4 (a_{42} c_2^2 + a_{43} c_3^2) = \frac{1}{12}$$

$$b_4 c_2 a_{32} = \frac{1}{24}$$

και οι συνθήκες γραμμής $a_{21} = c_2, a_{31} + a_{32} = c_3, a_{41} + a_{42} + a_{43} = c_4$, όπου για την κατασκευή μιας μεθόδου 4^{ης} τάξης απαιτείται η επίλυση του άνωθεν συστήματος εξισώσεων.

Κεφάλαιο 4.

Μεταδοτικές ασθένειες.

4.1. Ιστορική Αναδρομή

Οι μεταδοτικές ασθένειες αποτελούν απειλή για την ανθρωπότητα από τη στιγμή δημιουργίας των πρώτων κοινοτήτων. Ελονοσία, πανώλη, φυματίωση, λέπρα, ευλογιά, χολέρα και γρίπη αποτελούν κομμάτι του ανθρώπινου βίου και επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό την πορεία της ανθρωπότητας. Κάθε χρόνο εκατομμύρια άνθρωποι πεθαίνουν από ιλαρά, λοιμώξεις του αναπνευστικού συστήματος, διάρροια και άλλες ασθένειες που αντιμετωπίζονται εύκολα και δεν θεωρούνται επικίνδυνες στον δυτικό κόσμο. Θα μας απασχολήσουν τόσο οι επιδημίες, που είναι ξεσπάσματα μιας ασθένειας όσο και οι ενδημικές καταστάσεις, κατά των οποίων μια ασθένεια είναι πάντα παρούσα. Ασθένειες όπως η ελονοσία, ο τύφος και η χολέρα αποτελούν παραδείγματα ενδημικών καταστάσεων.

4.2. Λοιμός των Αθηνών

Ο Λοιμός των Αθηνών ή «σύνδρομο του Θουκυδίδη» αποτελεί μια καταστροφική επιδημία η οποία εκδηλώθηκε στην Αθήνα κατά το δεύτερο έτος του Πελοποννησιακού αγώνα, το 430 π.Χ. Ο λοιμός εμφανίστηκε και σε άλλες περιοχές της ανατολικής Μεσογείου, επέστρεψε δύο φορές, το 429 π.Χ. και τον χειμώνα του 427/426 π.Χ. Ήταν σημαντικό πλήγμα για τον πληθυσμό των Αθηναίων και την εξέλιξη του πολέμου μιας και εξαφάνισε περίπου το 1/3 του πληθυσμού.

Ανάμεσα στους θανάτους ήταν και αυτός του Περικλή και των μελών της οικογένειάς του. Ο επιζών από την επιδημία, Θουκυδίδης περιγράφει με σημαντικές λεπτομέρειες την επιδημία, έργο ανεκτίμητο για τη μελέτη των γεγονότων. Ο ίδιος αναφέρει ότι η επιδημία άλλαξε τις στρατιωτικές ισορροπίες στον πόλεμο Αθήνας με Σπάρτη.

Με την πάροδο του χρόνου, οι μελέτες ανέπτυξαν αρκετές θεωρίες και συσχέτισαν τον Λοιμό των Αθηνών με δεκάδες σύγχρονες ασθένειες, όπως χολέρα, ελονοσία, ευλογιά και βουβωνική πανώλη. Ωστόσο τα συμπτώματα που εμφανίσθηκαν εκείνη την χρονική περίοδο στην Αθήνα, δεν ταιριάζουν ακριβώς με τα αντίστοιχα των εν λόγω επιδημιών στην σύγχρονη εποχή.

4.3. Πανώλη της εποχής του Ιουστινιανού

Η Πανώλη του Ιουστινιανού ήταν μια πανδημία που ξέσπασε το 541-542 μ.Χ. με επίκεντρο την Κωνσταντινούπολη και προκάλεσε το θάνατο περίπου το 25% με 30% του πληθυσμού της Βυζαντινής Αυτοκρατορίας. Σύμφωνα με σύγχρονες έρευνες, πάνω από 5000 άτομα την μέρα έχαναν τη ζωή τους εξαιτίας της ασθένειας αυτής στην Κωνσταντινούπολη. Επανεμφανίστηκε κατά τη διάρκεια των 6ου, 7ου και 8ου αιώνα με χαμηλότερη ισχύ. Μετά το 750, η πανδημία δεν εμφανίστηκε ξανά μέχρι τον μαύρο θάνατο του 14ου αιώνα.

4.4. Λέπρα του 11ου αιώνα

Η λέπρα είναι μια επιδημία που ταλαιπωρούσε την Ευρώπη για πολλούς αιώνες και τον 11ο αιώνα μετατράπηκε σε πανδημία. Είναι μια βακτηριαδική θανατηφόρα ασθένεια που ξεκινούσε με εμφάνιση πληγών και παραμορφώσεων με κατάληξη την αναπηρία και τελικά το θάνατο και είναι πλέον γνωστή ως η ασθένεια του Χάνσεν. Απέκτησε θρησκευτικές διαστάσεις αφού θεωρούταν ως τιμωρία για τις ανθρώπινες αμαρτίες.

Για την αντιμετώπιση της ασθένειας υπήρχαν γύρω στα 19000 ειδικά νοσοκομεία στην Ευρώπη, τα λεπροκομεία. Ένα τέτοιο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η Σπιναλόγκα στην Ελλάδα, όπου αποτέλεσε νησί εξορίας για τους λεπρούς. Παρόλο που η πανδημία έχει εμφανιστεί εδώ και αρκετούς αιώνες και έχουν αναπτυχθεί σχετικές θεραπείες, η λέπρα συνεχίζει να πλήττει μεγάλο ποσοστό του παγκόσμιου πληθυσμού μέχρι τις μέρες μας.

4.5 Μαύρη Πανώλη

Η πιο γνωστή περίπτωση επιδημίας είναι η Μαύρη Πανώλη ή Μαύρος Θάνατος (πιθανώς ή βουβωνική πανώλη). Αποτελεί μία από τις πιο καταστροφικές πανδημίες στην ανθρώπινη ιστορία. Εξαπλώθηκε από την Ασία σε όλη την Ευρώπη κατά τον 14ο αιώνα. Πιο συγκεκριμένα ξεκίνησε από την κεντρική Ασία ή κατά μια άλλη θεωρία από την Κριμαία και εισήλθε στην Ευρώπη από τη Μεσίνα της Σικελίας στα μέσα Αυγούστου του 1347 μέσω γενοβέζικων εμπορικών πλοίων. Εξαπλώθηκε προς την ιταλική χερσόνησο και τη νότια Γαλλία και το 1348 κυριάρχησε σε όλη τη Νότια Ευρώπη ενώ το 1350 σημειώθηκε εξάπλωση της πανδημίας στη Σκωτία, στο μεγαλύτερο μέρος της Γερμανίας, στις Κάτω Χώρες, στη Σουηδία, στη Δανία, στη Φρανκφούρτη και στο Πσκοβ της Ρωσίας. Το 1351 και το 1352 έχουμε έξαρση της πανούκλας στο Κίεβο, το Νόβγκοροντ, τη Μόσχα και την Κωνσταντινούπολη. Μέσω εμπορίου, η πανδημία εξαπλώθηκε στην Αίγυπτο και τα καραβάνια την μετέφεραν στην Περσία,

στο Ιράκ και στη Συρία ενώ παράλληλα μολύνθηκε η Μέκκα και η νότια Αραβία μέσω των προσκυνητών. Το 1353 η πανούκλα έλαβε τέλος στην Ευρώπη αλλά επανεμφανίστηκε το 1500. Το 1665-66 η μεγάλη πανούκλα του Λονδίνου έγινε η αιτία θανάτου 80.000 ανθρώπων. Το 1720-72, η ίδια προκάλεσε το θάνατο περίπου 50000 ανθρώπων στη Μασσαλία και το 1770 έπληξε τη Μόσχα.

Δεδομένου ότι η πανούκλα εξαπλώθηκε ανεξέλεγκτα σε ορισμένες περιοχές ενώ άφησε ανεπηρέαστες περιοχές όπως την κεντρική Αφρική, την Ινδία και την Ινδονησία, είχε μια βαθιά επίδραση στις πολιτικές και οικονομικές εξελίξεις στη μεσαιωνική εποχή.

4.6. Επιδημίες χολέρας

Η χολέρα αναφέρεται πρώτη φορά το 1642 ως ασθένεια των «Ανατολικών Ινδιών» – η σημερινή Ινδία. Έως το 1817 εμφανίζεται σε περιοχές της Ινδίας, ώσπου μέσω των εμπορικών οδών, περνάει στη Ρωσία. Εκεί, προκάλεσε το θάνατο περίπου 1 εκατομμυρίου ανθρώπων. Αποτελεί μια βακτηριαδική ασθένεια που μεταδίδεται μέσω νερού και τροφής, πράγμα που οδήγησε στη μόλυνση Βρετανών στρατιωτών μέσω των οποίων η πανδημία εξαπλώθηκε από την Ινδία προκαλώντας των θάνατο εκατομμυρίων ανθρώπων. Μεγάλος αριθμός θανάτων υπήρξε και στην Ισπανία, Αφρική, Ινδονησία, Κίνα, Ιαπωνία, Ιταλία, Γερμανία και Αμερική σε διάφορες πανδημικές φάσεις. Παρόλο που το 1885 αναπτύχθηκε το εμβόλιο, η ισχύς της πανδημίας συνεχίστηκε μέχρι και το 1960 εξαιτίας του φτωχού τρόπου ζωής των ανθρώπων [1][9].

4.7. Κίτρινος πυρετός του Μέμφις

Ο κίτρινος πυρετός είναι μια ιογενής λοίμωξη που μεταδίδεται στους ανθρώπους μέσω των κουνουπιών. Ξεκίνησε στην Αφρική και μεταφέρθηκε στην Αμερική το 16ο αιώνα. Τον 17ο αιώνα σημειώθηκαν επιδημίες στην Αφρική, την Αμερική και την Ευρώπη. Το 1878 χιλιάδες Κουβανοί μετέφεραν τον κίτρινο πυρετό στην Αμερική άθελά τους καθώς εγκατέλειπαν την πατρίδα τους, λόγω του πολέμου ανεξαρτησίας από την Ισπανία. Η επιδημία εξαπλώθηκε στη Νέα Ορλεάνη και μετέπειτα στο Μέμφις. Το κλείσιμο της χρονιάς συνοδεύεται με το θάνατο περίπου 5000 ανθρώπων στο Μέμφις και 20000 ανθρώπων στην κοιλάδα του Μισισίπη.

4.8. Ρωσική γρίπη

Η ρωσική γρίπη αποτελεί αντικείμενο μελέτης για το αν οφείλεται σε ιό γρίπης ή σε κορονοϊό. Πρόσφατες έρευνες δείχνουν ότι μάλλον πρόκειται για κορονοϊό. Ξεκίνησε το Μάιο του 1889 από την Μπουχάρα. Προκάλεσε το θάνατο περίπου 1 εκατομμυρίων ανθρώπων στην Ασία και στην Ευρώπη και εξαπλώθηκε μέχρι και την Αμερική. Σημειώνεται σταδιακή επέκταση της από τον Οκτώβριο του 1889 μέχρι και τα τέλη του 1890. Το δεύτερο ξέσπασμα κράτησε από το Μάρτιο έως τον Ιούνιο του 1891 ενώ το τρίτο από το Νοέμβριο του 1891 μέχρι και τον Ιούνιο του 1892. Υπήρξαν άλλες 2 εμφανίσεις της ασθένειας τον χειμώνα του 1893-1894 και στις αρχές του 1895 που αποτέλεσε και το σημείο τερματισμού για τον κύκλο της ρωσικής γρίπης.

4.9. Ισπανική γρίπη

Η λεγόμενη ισπανική γρίπη αποτελεί μια πανδημία που ξεκίνησε από την Κίνα και μεταδόθηκε στον υπόλοιπο κόσμο μέσω των Κινέζων εργατών. Εξαπλώθηκε στη βόρεια Αμερική και στη συνέχεια στην Ευρώπη με κορύφωση την Ισπανία και ειδικά τη Μαδρίτη το 1918, πράγμα που δικαιολογεί και την ονομασία της πανδημίας. Η ασθένεια αυτή μεταδόθηκε στους ανθρώπους μέσω των πτηνών και ήταν η αιτία θανάτου για περίπου 50 εκατομμυρίων ανθρώπων, αριθμός μεγαλύτερος και από τους νεκρούς του Α΄ Παγκοσμίου πολέμου κατά τον οποίο εκδηλώθηκε.

Η ασθένεια έπληξε περίπου το 27% του παγκόσμιου πληθυσμού. Έρευνες του 2007 δείχνουν ότι η ισχύς της γρίπης δεν ήταν μεγαλύτερη από άλλες ασθένειες αλλά το εύρος διάδοσής ήταν μεγάλο, πράγμα που δικαιολογείται από τον υποσιτισμό, τον υπερπληθυσμό στα νοσοκομεία και την κακή υγιεινή. Η πανδημία έλαβε τέλος το καλοκαίρι του 1919

4.10. Επιδημία πολιομυελίτιδας

Το καλοκαίρι του 1916 έγινε το ξέσπασμα της πολιομυελίτιδας στη Νέα Υόρκη. Στα τέλη του 20ου αιώνα, μετατράπηκε σε μια θανατηφόρα επιδημία που έπληξε ολόκληρες Ηπείρους. Η προσπάθεια εξάλειψης της μετάδοσης της νόσου οδήγησε τις ΗΠΑ να επιβάλλουν καραντίνα στις πληγείσες περιοχές και συγχρόνως στην υιοθέτηση μέτρων δημόσιας υγιεινής. Η ασθένεια προκάλεσε την αναπηρία περίπου 20000 ανθρώπων και πέντε εκατομμυρίων ανθρώπων. Έρευνες δείχνουν ότι κάθε χρόνο νοσούν 200000 ασθενείς.

Το 1950 ο Jonas Salk κατάφερε να ανακαλύψει το σχετικό εμβόλιο.

4.11. Επιδημία ανεμοβλογιάς

Γύρω στα μέσα του 1970 εξαπλώθηκε η επιδημία της ανεμοβλογιάς με επίκεντρο την Ινδία. Νόσησαν περίπου 100000 άνθρωποι ενώ πέθαναν γύρω στους 20000 ανθρώπους. Αφού πέρασε ένα χρονικό διάστημα παρακολούθησης από διεθνή επιτροπή, η Ινδία κατόρθωσε να άρει την καραντίνα από τις περιοχές που είχαν πληγεί, τον Μάιο του 1985 .

4.12. HIV/AIDS

Η επιδημία του AIDS πλήττει ανθρώπους από το 1981 μέχρι και σήμερα και αποτελεί παράδειγμα ενδημικής ασθένειας. Το AIDS είναι καταστροφικό για το ανοσοποιητικό σύστημα κάνοντας τους ασθενείς επικίνδυνα ευάλωτους σε άλλες λοιμώξεις. Προκαλείται από τον ιό HIV και εμφανίζει συμπτώματα όπως πυρετό και πονοκέφαλο. Ήδη από το 1960 το AIDS εμφανίστηκε στην Αϊτή και την επόμενη δεκαετία στη Νέα Υόρκη και το Σαν Φρανσίσκο. Παρόλου που υπήρξε εξέλιξη στον τρόπο αντιμετώπισης της ασθένειας, δεν έχει βρεθεί οριστική θεραπεία με αποτέλεσμα να γίνει αιτία θανάτου για περίπου 35 εκατομμυρίων ανθρώπων. Ακόμα και σήμερα καταγράφονται θάνατοι εξαιτίας του AIDS κυρίως στην Αφρική.

4.13. SARS

Ο ιός του SARS ξεκίνησε από την Ασία το 2003 και είναι ο λόγος δημοσιότητας της χειρουργικής μάσκας. Κατάφερε να εξαπλωθεί σε πάνω από είκοσι χώρες της Βόρειας και Νότιας Αμερικής, της Ευρώπης και της Ασίας. Στη διάρκεια 6 μηνών σημειώθηκαν 774 θάνατοι και περισσότερα από 8000 κρούσματα. Η ισχύς της επιδημίας ελαττώθηκε τον Ιούλιο του 2003. Όμως μέχρι και σήμερα δεν υπάρχει ουσιαστική θεραπεία κατά του ιού.

Παρόλα αυτά, ο Παγκόσμιος Οργανισμός Υγείας κατευθύνει τους πολίτες σε μέτρα πρόληψης του SARS.

4.14. COVID-19

Η πανδημία του COVID ξεκίνησε από το 2020. Η νόσος του κορονοϊού (COVID-19) είναι μια μολυσματική ασθένεια που προκαλείται από τον ιό SARS-CoV-2. Οι περισσότεροι ασθενείς εμφανίζουν ήπια έως μέτρια συμπτώματα και αναρρώνουν χωρίς κάποια ειδική θεραπεία.

Βέβαια, υπάρχει και ένα ποσοστό των ανθρώπων που θα νοσήσουν σοβαρά και θα χρειαστούν ιατρική φροντίδα. Οι ηλικιωμένοι και οι ευπαθείς ομάδες είναι αυτοί που κινδυνεύουν περισσότερο να κολλήσουν και να εμφανίσουν σοβαρά συμπτώματα.

Τρόποι πρόληψης αποτελεί η μάσκα, η τήρηση αποστάσεων και η τήρηση των κανόνων υγιεινής. Η μετάδοση του ιού γίνεται από το στόμα ή τη μύτη. Μέχρι στιγμής έχει γίνει καταγραφή πάνω από 153,5 εκατομμύρια κρούσματα και πάνω από 3,2 εκατομμύρια άνθρωποι έχουν χάσει τη ζωή τους σε παγκόσμιο επίπεδο.

Κεφάλαιο 5.

Χρήση μαθηματικών μοντέλων στην επιδημιολογία.

5.1 Εισαγωγή

Οι σοβαρές επιπτώσεις των μεταδοτικών ασθενειών στην ανθρωπότητα και τα μεγάλα ποσοστά θνησιμότητας καθιστούν τη χρήση μαθηματικών μοντέλων ιδιαίτερα σημαντική αφού περιέχει τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά μιας λοίμωξης και του τρόπου μετάδοσής της.

Η μαθηματική μοντελοποίηση στην επιδημιολογία εξηγεί την εξάπλωση της ασθένειας και προτείνει στρατηγικές ελέγχου. Παράλληλα η ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων επιδημίας και ενδημίας απαντάει σε ερωτήματα με χαρακτηριστικά παραδείγματα: πόσο θα κρατήσει μια επιδημία ή μια ενδημία αντίστοιχα, εάν η καραντίνα βοηθά στην εξάλειψη της νόσου, πόσοι άνθρωποι χρειάζεται να εμβολιαστούν για να αποφευχθεί μια ενδημική ασθένεια κ.α.

Η ύπαρξη ή όχι επιδημίας ή ενδημίας αντίστοιχα συσχετίζεται με την οριακή συμπεριφορά του μέσου αριθμού των δευτερογενών λοιμώξεων που προκαλούνται από έναν φορέα

της ασθένειας. Ειδικότερα, εάν ο μέσος αριθμός των δευτερογενών λοιμώξεων είναι μικρότερος από 1 τότε οδηγούμαστε σε εξασθένηση της ασθένειας ενώ αν είναι μεγαλύτερος από 1 τότε υφίσταται επιδημία ή ενδημική κατάσταση αντίστοιχα.

Αυτή η συμπεριφορά συνδέεται με την εκτίμηση της αποτελεσματικότητας του εμβολιασμού και την πιθανότητα εξάλειψης της ασθένειας. Βέβαια υπάρχουν και ερωτήματα που τα μοντέλα επιδημιών και ενδημιών αδυνατούν να απαντήσουν λόγω ορισμένων περιορισμών που διαθέτουν.

Επίσης, υψηλής χρησιμότητας είναι η χρήση μαθηματικών μοντέλων για τη σύγκριση διαφορετικών ασθενειών στον ίδιο πληθυσμό, για τη σύγκριση της ίδιας ασθένειας σε διαφορετικούς πληθυσμούς και για τη σύγκριση της ίδιας ασθένειας σε διαφορετικές χρονικές περιόδους.

Σημαντικές είναι οι τιμές των παραμέτρων των μοντέλων για τις προβλέψεις και συνεπώς η ανάλυση και η εκτίμηση τους είναι υψηλής αξίας. Η αδυναμία ακριβούς υπολογισμού των παραμέτρων αυτών οδηγεί σε ένα βαθμό αβεβαιότητας των ποσοτικών προβλέψεων των επιδημιολογικών μοντέλων, όμως συνήθως αποδεικνύονται αξιόπιστες και έγκυρες.

Τα μαθηματικά μοντέλα επιδημίας και ενδημίας αποτελούν διαμερισματικά μοντέλα καθώς ο πληθυσμός χωρίζεται σε ομάδες. Ασθένειες με μόνιμη ανοσία έχουν διαφορετική δομή από αυτές χωρίς ανοσία. Οι φορείς μετάδοσης ανάμεσα στα διαμερίσματα αναπαρίστανται ως παράγωγοι σε σχέση με το χρόνο των μεγεθών των διαμερισμάτων και συνεπώς τα μαθηματικά μοντέλα στην επιδημιολογία παρουσιάζονται με τη μορφή διαφορικών εξισώσεων.

Ο απλούστερος τρόπος για τη μοντελοποίηση της εξάπλωσης της επιδημίας είναι η ταξινόμηση των ανθρώπων σε πληθυσμιακές ομάδες ή διαμερίσματα (compartments). Τα διαμερισματικά μοντέλα (Compartmental models) οδηγούν σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων όπου ο πληθυσμός

χωρίζεται σε διαφορετικές ομάδες με βάση την κατάσταση κινδύνου ή μόλυνσης.

5.2 Βασικός Αριθμός Αναπαραγωγής

Σε πολλά μοντέλα επιδημίας και ενδημίας, ο βασικός αριθμός αναπαραγωγής-basic reproduction number (ή ρυθμός αναπαραγωγής) R_0 έχει οριακή συμπεριφορά και ορίζεται ως ο μέσος αριθμός των δευτερογενών λοιμώξεων που παράγονται όταν ένα μολυσμένο άτομο εισέλθει σε έναν πληθυσμό όπου όλοι είναι ευπαθείς.

Θα μελετήσουμε την οριακή συμπεριφορά του ρυθμού αναπαραγωγής τόσο σε μια επιδημία όσο και σε μία ενδημική κατάσταση. Πιο συγκεκριμένα, ο ρόλος του R_0 συσχετίζεται με το αν θα υπάρξει μια επιδημία ή μια ενδημία αντίστοιχα ή όχι.

Για τα ντετερμινιστικά επιδημιολογικά μοντέλα, εάν ο ρυθμός αναπαραγωγής είναι μεγαλύτερος από 1 ($R_0 > 1$) τότε υπάρχει επιδημία, αλλιώς αν είναι μικρότερος από 1 ($R_0 < 1$) τότε δεν υφίσταται μόλυνση.

Όσον αφορά τα ενδημικά μαθηματικά μοντέλα, όταν ο ρυθμός αναπαραγωγής ξεπερνά τη μονάδα ($R_0 > 1$) τότε η ασθένεια είναι ενδημική. Διαφορετικά, αν ο ρυθμός αναπαραγωγής είναι μικρότερος από τη μονάδα ($R_0 < 1$) τότε η ασθένεια βρίσκεται σε ύφεση.

Ειδικότερα, εάν ο ρυθμός αναπαραγωγής είναι μικρότερος από 1 ($R_0 < 1$) τότε το σύστημα έχει disease-free σημείο ισορροπίας (disease-free equilibrium point DFE), το οποίο είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Διαφορετικά αν είναι μεγαλύτερος από 1 ($R_0 > 1$) τότε το disease-free σημείο

ισορροπίας είναι ασταθές αλλά υπάρχει το ενδημικό σημείο ισορροπίας που είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

5.3 Αριθμός επαφής σ και αριθμός αντικατάστασης R

Ο αριθμός επαφής (contact Number) σ ορίζεται ως ο μέσος αριθμός επαφών ενός ατόμου που μολύνθηκε και μπορεί να μεταδώσει την ασθένεια κατά τη διάρκεια της περιόδου μόλυνσης. Ο αριθμός αντικατάστασης R (replacement Number) είναι ο μέσος αριθμός των δευτερογενών λοιμώξεων που παράγονται από κάποιον μολυσματικό καθ' όλη τη διάρκεια της μόλυνσης.

Ο ρυθμός αναπαραγωγής (basic reproduction number) R_0 που αναλύσαμε παραπάνω ισούται με τον αριθμό επαφής (contact number) σ και τον αριθμό αντικατάστασης R (replacement number) στην αρχή της περιόδου μόλυνσης όπου όλος ο πληθυσμός ανήκει στην ευπαθή ομάδα.

Για τα περισσότερα μοντέλα, ο αριθμός επαφής (contact number) σ παραμένει σταθερός κατά τη διάρκεια εξάπλωσης της μόλυνσης και συνεπώς ισούται με τον ρυθμό αναπαραγωγής (basic reproduction number) R_0 . Όμως, καθώς η ασθένεια πλήττει τον πληθυσμό, είναι πιθανό να προκύψουν νέες κλάσεις μολυσματικών με χαμηλότερη μεταδοτικότητα από τις ήδη υπάρχουσες.

Στην περίπτωση αυτή, ο αριθμός επαφής (contact number) σ είναι μικρότερη ποσότητα από το ρυθμό αναπαραγωγής (basic reproduction number) R_0 . Ο αριθμός αντικατάστασης R (replacement number) συσχετίζεται με το ρυθμό μεταβολής της ευπαθούς ομάδας και κυρίως με την προοπτική

εξαφάνισής της – δηλαδή με την περίπτωση μόλυνσης ολόκληρου του πληθυσμού.

Για το λόγο αυτό ο αριθμός αντικατάστασης (replacement number) R είναι πάντα μικρότερος από το ρυθμό αναπαραγωγής (basic reproduction number) R_0 .

Μετά την εισαγωγή ενός μολυσματικού ασθενούς στον πληθυσμό, το ποσοστό της ευπαθούς ομάδας γίνεται μικρότερο του 1 και αυτό συνεπάγεται ότι όλες οι επαφές δεν καταλήγουν σε μία νέα μόλυνση.

Γι' αυτό το λόγο, ο αριθμός αντικατάστασης (replacement Number) R είναι πάντα μικρότερος από τον αριθμό επαφών (contact Number) σ μετά την εισροή ενός μολυσματικού στον πληθυσμό.

Από όλα τα παραπάνω προκύπτει η σχέση:

$$R_0 \geq \sigma \geq R$$

Η ισότητα ισχύει στο αρχικό στάδιο εξάπλωσης της ασθένειας. Για τα περισσότερα μοντέλα όπως αναφέραμε και παραπάνω ισχύει ότι $R_0 = \sigma$, ενώ για όλα τα μοντέλα μετά την εισαγωγή μολυσματικού στον πληθυσμό ισχύει ότι $\sigma > R$.

5.4 SIR Μοντέλο.

Ένα από τα πιο απλά μοντέλα είναι το SIR μοντέλο ή Kermack-McKendrick επιδημιολογικό μοντέλο, το οποίο είναι από τα πρώτα επιτεύγματα στον τομέα της μαθηματικής μοντελοποίησης στην επιδημιολογία το 1927.

Πρόκειται για ένα επιδημιολογικό διαμερισματικό μαθηματικό μοντέλο κατά το οποίο τα άτομα που αναρρώνουν αποκτούν μόνιμη ανοσία και δεν είναι πλέον φορείς της ασθένειας. Πιο συγκεκριμένα, ο πληθυσμός χωρίζεται σε τρεις κλάσεις:

- Ευπαθείς : είναι τα άτομα του πληθυσμού που είναι υγιείς αλλά μπορούν να μολυνθούν. Συμβολίζονται με S.
- Μολυσματικοί : είναι τα άτομα που έχουν κολλήσει και μπορούν να μεταδώσουν την ασθένεια και συμβολίζονται με I.
- Ανοσοποιημένοι : είναι τα άτομα που έχουν μολυνθεί και στη συνέχεια έχει αφαιρεθεί η πιθανότητα να μολυνθούν ξανά ή να εξαπλώσουν τη λοίμωξη. Για σταθερό πληθυσμό, δεν υπάρχουν θάνατοι από ασθένεια και έτσι η κατηγορία αυτή είναι ουσιαστικά είναι τα άτομα που έχουν αναρρώσει και έχουν αποκτήσει ανοσία.

Με β συμβολίζουμε το ρυθμό μόλυνσης (ή ρυθμό επαφής) και με α το ρυθμό ανάρρωσης.

Ορίζουμε τη διάρκεια μόλυνσης ως $\frac{1}{\alpha}$.

Με το γινόμενο $\lambda = \beta \frac{I}{N}$ ορίζουμε το ρυθμό επαφής β επί την πιθανότητα μόλυνσης δεδομένης της επαφής $\frac{I}{N}$ σε ένα συνολικό πληθυσμό N .

Ο αριθμός των μολυσματικών αυξάνεται σύμφωνα με τον αριθμό των επαφών μεταξύ των μολυσματικών και των ευπαθών κατά λS .

Ο αριθμός των ευπαθών ελαττώνεται ανάλογα με τον αριθμό των επαφών μεταξύ μολυσματικών και ευπαθών κατά λS .

Ο αριθμός των ανοσοποιημένων αυξάνεται ανάλογα με τον αριθμό των ασθενών κατά aI .

Ο αριθμός των μολυσματικών μειώνεται με τον αριθμό των ασθενών κατά aI .

Δεν υπάρχει είσοδος ή αποχώρηση από τον πληθυσμό εκτός πιθανώς από θάνατο μέσω ασθένειας.

Επειδή ο ρυθμός μόλυνσης β και ο ρυθμός ανάρρωσης a είναι πολύ ταχύτεροι από τη διάρκεια των γεννήσεων και των θανάτων, οι παράγοντες αυτοί παραλείπονται από το μοντέλο.

Το μοντέλο SIR παρουσιάζεται με τη μορφή διαφορικών εξισώσεων ως εξής :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-\beta SI}{N}, S(0) = S_0 \geq 0$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{-\beta SI}{N} - aI, I(0) = I_0 \geq 0$$

$$\frac{dR}{dt} = aI, R(0) = R_0 \geq 0$$

$$\text{Ισχύει ότι } S(t) + I(t) + R(t) = N$$

Εφόσον το N παραμένει σταθερό, αυτό συνεπάγεται ότι δεν υπάρχουν θάνατοι από την ασθένεια. Έτσι η κλάση των ανοσοποιημένων αποτελείται από τα άτομα που έχουν αναρρώσει και έχουν αποκτήσει μόνιμη ανοσία.

Διαιρώντας τις παραπάνω εξισώσεις με το σταθερό συνολικό πληθυσμό N προκύπτει:

$$\frac{ds}{dt} = -\beta Si, s(0) = s_0 \geq 0$$

$$\frac{di}{dt} = -\beta Si - ai, i(0) = i_0 \geq 0$$

$$\frac{dR}{dt} = ai, r(0) = r_0 \geq 0$$

Με s_0 , i_0 και r_0 συμβολίζονται το ποσοστό των ευπαθών, μολυσματικών και ανοσοποιημένων, αντίστοιχα, την χρονική στιγμή εκκίνησης της πανδημίας.

Επιπλέον για τις παραπάνω κλασματικές ποσότητες ισχύει ότι:

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1.$$

Συνεπώς η ποσότητα $r(t)$ μπορεί να παραλειφθεί από το βασικό μοντέλο αφού μπορεί να προκύψει από τις $s(t)$ και $i(t)$ με $r(t) = 1 - s(t) - i(t)$.

Έτσι προκύπτει το μοντέλο (5.1) :

$$\frac{ds}{dt} = -\beta Si, \quad s(0) = s_0 \geq 0$$

$$\frac{di}{dt} = -\beta Si - ai, \quad i(0) = i_0 \geq 0$$

στο οποίο υπάρχουν μοναδικές λύσεις για όλο το θετικό χρόνο και έτσι το μοντέλο είναι μαθηματικά και επιδημιολογικά καλά ορισμένο.

Ο ρυθμός αναπαραγωγής R_0 , ορίζεται ως ο μέσος αριθμός των λοιμώξεων που προκαλούνται όταν ένας μολυσματικός ασθενής εισέρχεται σε ένα πληθυσμό όπου όλοι είναι

ευπαθείς ($N \approx S_0$) και ισούται με το γινόμενο του ρυθμού μόλυνσης β επί τη διάρκεια μόλυνσης $\frac{1}{\alpha}$ επί s_0 .

Δηλαδή: $R_0 = \frac{\beta}{\alpha} s_0$.

Επειδή όμως στα περισσότερα επιδημιολογικά μοντέλα ξεκινάμε με 100% ποσοστό ευπαθών και συνεπώς $s_0 = 1$ συνεπάγεται ότι: $R_0 = \frac{\beta}{\alpha}$

Ο αριθμός επαφής σ ισούται με το γινόμενο του ρυθμού μόλυνσης β επί την περίοδο μόλυνσης: $\sigma = \frac{\beta}{\alpha}$

Τη χρονική στιγμή 0, ο αριθμός αντικατάστασης R ισούται με το γινόμενο του αριθμού επαφής σ και του ποσοστού της ομάδας των ευπαθών τη χρονική στιγμή 0, s_0 .

Δηλαδή: $R = \sigma s_0$

Στη συνέχεια αν έχουμε άπειρο αριθμός σημείων ισορροπίας με $i_\infty = 0$, τότε $\frac{di}{dt} = i(\beta s - \alpha)$.

Συνεπώς η ποσότητα $\beta s - \alpha$ είναι ιδιαίτερα σημαντική για τη συμπεριφοράς του ποσοστού των μολυσματικών $i(t)$ και οδηγούμαστε στο παρακάτω θεώρημα:

Έστω $(s(t), i(t))$ λύση του 5.1 στο σύνολο T .

Αν η ποσότητα s_0 είναι μικρότερη από 1 ή ίση με 1 ($\sigma \leq \frac{1}{s_0}$) τότε το ποσοστό των μολυσματικών $i(t)$ ακολουθεί μια καθοδική πορεία και τείνει στο 0 καθώς το t τείνει στο άπειρο.

Εάν $\sigma > \frac{1}{s_0}$ τότε το ποσοστό των μολυσματικών αυξάνεται και φτάνει σε ένα μέγιστο σημείο :

$$i_{max} = i_0 + s_0 - \frac{1}{\sigma} - \frac{[\ln(\sigma s_0)]}{\sigma}$$

και στη συνέχεια μειώνεται και τείνει στο 0 όταν το t τείνει στο άπειρο.

Αυτό σημαίνει ότι :

για $\sigma \leq \frac{1}{s_0}$

οι μολυσματικοί θα εξαφανιστούν και η ασθένεια θα εξαλειφθεί

ενώ για $\sigma > \frac{1}{s_0}$

το ποσοστό των μολυσματικών αυξάνεται, το οποίο σηματοδοτεί την ύπαρξη ασθένειας, φτάνει σε ένα μέγιστο και στη συνέχεια μειώνεται και τείνει στο 0, δηλαδή τελικά οι μολυσματικοί εξαφανίζονται και η ασθένεια πλέον δεν υφίσταται.

5.5 SEIR μοντέλο

Σε αυτό το μοντέλο, μετά τη μόλυνση ενός ατόμου ακολουθεί η περίοδος επώασης (ή λανθάνουσα περίοδος μοντέλο). Μόλις τελειώσει η περίοδος αυτή, τότε το άτομο είναι σε θέση να μεταδώσει την ασθένεια. Στη συνέχεια, το άτομο που αναρρώνει αποκτά μόνιμη ανοσία. Η διαφορά του με το SIR μοντέλο είναι ότι προστίθεται η κλάση του πληθυσμού Εκτεθειμένοι στην οποία ανήκουν τα άτομα που έχουν μολυνθεί από την ασθένεια αλλά δεν την μεταδίδουν ακόμη (φορείς της μόλυνσης).

Συμβολίζουμε το ρυθμό επαφής με β , το ρυθμό επώασης με κ και με α το ρυθμό ανάρρωσης.

Η περίοδος μόλυνσης ορίζεται ως: $\frac{1}{\alpha}$

Η περίοδος επώασης ορίζεται ως: $\frac{1}{\kappa}$

Συμβολίζουμε ως $\lambda = \frac{\beta I}{N}$ το γινόμενο του ρυθμού επαφής β επί την πιθανότητα N μόλυνσης δεδομένης της επαφής $\frac{I}{N}$ σε ένα συνολικό πληθυσμό N .

Η ομάδα των N ευπαθών μειώνεται κατά λS ενώ η κλάση των εκτεθειμένων αυξάνεται κατά λs .

Για τον ρυθμό επώασης, τα εκτεθειμένα άτομα γίνονται μολυσμένα. Συνεπώς η ομάδα των εκτεθειμένων μειώνεται κατά kE και η κλάση των μολυσματικών αυξάνεται κατά kE .

Με το ρυθμό ανάρρωσης a , τα μολυσμένα άτομα εισέρχονται στην κατηγορία των ανοσοποιημένων.

Αυτό σημαίνει ότι η κλάση των μολυσματικών μειώνεται κατά aI ενώ η ομάδα των ανοσοποιημένων αυξάνεται κατά aI .

Το SEIR μοντέλο παρουσιάζεται με τη μορφή διαφορικών εξισώσεων ως εξής:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-\beta SI}{N}, S(0) = S_0 \geq 0$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - kE, E(0) = E_0 \geq 0$$

$$\frac{dI}{dt} = kE - aI, I(0) = I_0 \geq 0$$

$$\frac{dR}{dt} = aI, R(0) = R_0 \geq 0$$

Ο πληθυσμός N είναι σταθερός και ισούται με

$$N = S(t) + I(t) + R(t) + E(t)$$

Θεωρούμε το πληθυσμό N σταθερό, δεν υπάρχουν θάνατοι από την ασθένεια και έτσι η ομάδα των ανοσοποιημένων είναι στην ουσία τα άτομα που έχουν αναρρώσει και έχουν αποκτήσει ανοσία.

Όπως και στο μοντέλο SIR θα ασχοληθούμε με τα ποσοστά των κλάσεων:

$$s(t) = \frac{S(t)}{N}$$

$$e(t) = \frac{E(t)}{N}$$

$$i(t) = \frac{I(t)}{N}$$

$$\text{και } r(t) = \frac{R(t)}{N}$$

Διαιρώντας τις παραπάνω εξισώσεις με N προκύπτει :

$$\frac{ds}{dt} = -\beta si, \quad s(0) = s_0 \geq 0$$

$$\frac{de}{dt} = \beta si - ke, \quad e(0) = e_0 \geq 0$$

$$\frac{di}{dt} = ke - ai, \quad i(0) = i_0 \geq 0$$

$$\frac{dr}{dt} = ai, \quad r(0) = r_0 \geq 0$$

$$\text{και ισχύει } s(t) + e(t) + i(t) + r(t) = 1$$

Συνεπώς το $r(t)$ μπορεί να προκύψει από τις κλασματικές ποσότητες ως εξής :

$r(t) = 1 - s(t) - e(t) - i(t)$ με αποτέλεσμα την απλοποίηση του μοντέλου.

5.6 SI μοντέλο

Στο SI μοντέλο όταν ένα άτομο έρθει σε επαφή με ένα μολυσμένο άτομο, τότε αυτό μολύνεται. Η διαφορά του με το SIR μοντέλο είναι ότι λείπει η κλάση των ανοσοποιημένων, το οποίο σημαίνει ότι ο πληθυσμός μολύνεται χωρίς να αποκτήσει ανοσία.

Έστω ο ρυθμός $\lambda = \frac{\beta I}{N}$ να είναι το γινόμενο του ρυθμού επαφής β επί την N πιθανότητα μόλυνσης δεδομένης της επαφής $\frac{I}{N}$ σε ένα συνολικό πληθυσμό N .

Η ομάδα των ευπαθών μειώνεται κατά λS ενώ η κλάση των μολυσματικών αυξάνεται κατά λs .

Οι διαφορικές εξισώσεις του SI μοντέλου είναι οι εξής,

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\beta SI}{N}, S(0) = S_0 \geq 0$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N}, I(0) = I_0 \geq 0$$

Ο πληθυσμός N θεωρείται σταθερός και ίσος με $N = S(t) + I(t)$.

Διαιρώντας τις εξισώσεις του παραπάνω συστήματος με τη σταθερά N προκύπτει,

$$\frac{ds}{dt} = -\beta si, s(0) = s_0 \geq 0$$

$$\frac{di}{dt} = \beta si, i(0) = i_0 \geq 0$$

όπου με $s(t)$ να είναι το ποσοστό των ευπαθών και με $i(t)$ να είναι το ποσοστό των μολυσματικών.

Δηλαδή ,

$$s(t) = \frac{s(t)}{N} \text{ και } i(t) = \frac{i(t)}{N}$$

$$\text{και ισχύει } s(t) + i(t) = 1$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις με αρχικές συνθήκες $s(0)=s_0$ και $i(0) = i_0$ προκύπτει μια συνήθης διαφορική εξίσωση Bernoulli της μορφής

$$s'(t) + \beta s(t) = \beta s^2(t)$$

5.7 SIS μοντέλο

Στο SIS μοντέλο όσοι μολύνονται και γίνονται φορείς της ασθένειας εισέρχονται ξανά στην κλάση των ευπαθών. Η διαφορά τους με το απλό SIR μοντέλο είναι ότι δεν υπάρχει ανοσία κατά την επαναμόλυνση. Το SIS μοντέλο απευθύνονται σε ασθένειες από βακτήρια σε αντίθεση με το SIR μοντέλο που απευθύνεται σε ασθένειες από ιό.

Ας υποθέσουμε ότι ο ρυθμός $\lambda = \frac{\beta I}{N}$ είναι το γινόμενο του ρυθμού επαφής β επί την N πιθανότητα μόλυνσης δεδομένης της επαφής σε ένα συνολικό πληθυσμό N .

Η ομάδα των ευπαθών μειώνεται κατά λS ενώ η κλάση των μολυσματικών αυξάνεται κατά λs .

Η ομάδα των ευπαθών αυξάνεται ανάλογα με τον αριθμό των ασθενών κατά αI ενώ η ομάδα των μολυσματικών μειώνεται ανάλογα με τον αριθμό των ασθενών κατά αI .

Οι διαφορικές εξισώσεις του μοντέλου είναι οι εξής :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-\beta SI}{N} + aI, S(0) = S_0 \geq 0$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - aI, I(0) = I_0 \geq 0$$

Βιβλιογραφία

1. Γ. Ακρίβης - Β. Δούγαλης
Γεώργιος Ακρίβης , Βασίλειος Δούγαλης , Εισαγωγή στην αριθμητική
ανάλυση, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
2. Αριθμητική ανάλυση, Κικίλιας , Λαμπίρης , Πετράκης.
3. Κυβεντίδης, Θ. Α. (1994). Λογισμός Μεταβολών, Εκδόσεις Ζήτη.
4. Bryson, Jr. and Ho, Y. C. (1975). Applied Optimal Control, Optimization,
Estimation and Control, Hemisphere Publishing Corporation, New York.
5. Allen, B. T. (1966). An Investigation into Direct Methods for solving some
calculus of variations problems, The Computer Journal.
6. Ανδριανόπουλος Β., Οι σημαντικότερες πανδημίες στην ιστορία, Documento,
(16.03.2020), <https://www.documentonews.gr/article/oi-shmantikotes-pandhmies-sthn-istoria/>
7. Ιγνατιάδης Β., Δέκα πανδημίες που άλλαξαν την ιστορία, Ιatronet,
(03.05.2021), <https://www.iatronet.gr/article/101005/deka-pandhmies-poy-allaxan-thn-istoria>
8. Μηχανή του Χρόνου, Ο λοιμός. Οι μεγαλύτερες πανδημίες που άλλαξαν την
παγκόσμια ιστορία. Πως ξεκίνησαν και με ποιο τρόπο αντιμετωπίστηκαν,
<https://www.mixanitouxronou.gr/o-loimos-oi-megalyteres-pandimies-poy-allaxan-tin-pagkosmia-istoria-pos-xekinisan-kai-me-poio-tropo-antimetopistikan/>

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ
ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ
ΛΙΤΣΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

9. Κομηνέας Σ., Χαρμανδάρης Ε., Μαθηματική Μοντελοποίηση, Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.
10. Ταρουδάκης Μ. Ι., Μαθηματική Μοντελοποίηση.