ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: *Μαθηματική Εκπαίδευση Β' Ηλικιακού κύκλου (13-18 χρονών)*

Διπλωματική εργασία

Διερεύνηση της ικανότητας εναλλαγής μεταξύ των διάφορων αναπαραστατικών μορφών της συνάρτησης από μαθητές Γ Λυκείου.

του

Καλέση Βασιλείου, Α.Ε.Μ.: 0698

Επιβλέπων Καθηγητής: Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε./Π.Δ.Μ.

Εξεταστές: Καλδρυμίδου Μαρία, Καθηγήτρια Π.Τ.Ν./Π.Ι.

Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε./Π.Δ.Μ.

Φλώρινα, Ιούνιος 2020

Στη μνήμη του
πατέρα μου
Δημήτρη.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΩΝ

Περίληψη

Ίσως η πιο πολυμελετημένη έννοια των Μαθηματικών αλλά και της Διδακτικής των Μαθηματικών είναι η συνάρτηση. Αρκεί κανείς να ξεφυλλίσει ένα σχολικό εγχειρίδιο και εύκολα θα διαπιστώσει το εύρος της ύλης που καταλαμβάνει και τη σημαντικότητά της στο μαθηματικό οικοδόμημα. Είναι, λοιπόν, επιβεβλημένη η σωστή διδασκαλία της, από τις μικρές ακόμα τάξεις που εμφανίζεται.

Η παρούσα εργασία επικεντρώθηκε στην μελέτη της συνάρτησης μέσα από το πρίσμα της αναγνώρισης, μετάφρασης και χρήσης της στην επίλυση προβλημάτων που περιέχουν συναρτήσεις. Σε αυτή συμμετείχαν 75 μαθητές της Γ τάξης του Γενικού Λυκείου του Νομού Θεσσαλονίκης, συμπληρώνοντας ένα οκτασέλιδο ερωτηματολόγιο με ερωτήματα επί των τριών προς μελέτη αξόνων. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι μαθητές είναι ικανοί να αναγνωρίσουν μια συνάρτηση ανεξαρτήτως του αναπαραστατικού πλαισίου που θα τους δοθεί. Παρόλα αυτά, δεν είναι σε θέση να κινηθούν με επιτυχία μεταξύ των αναπαραστατικών πλαισίων, με δυσκολότερη τη μετάβαση από το αλγεβρικό στο γραφικό πλαίσιο και αντίστροφα. Σε ότι αφορά την επίλυση προβλημάτων, οι μαθητές επιλέγουν τις αλγεβρικές πράξεις και διαδικασίες ως πρώτο τρόπος επίλυσης και μόνο όταν δεν μπορούν να δώσουν δεύτερο αλγεβρικό τρόπο καταφεύγουν σε άλλες αριθμητικές ή γραφικές προσεγγίσεις. Τέλος, καταγράφηκε μέτρια προς δυνατή σχέση μεταξύ ικανότητας αναγνώρισης και μετάφρασης, δυνατή σχέση μεταξύ ικανότητας μετάφρασης και επίλυσης προβλήματος και μέτρια σχέση μεταξύ ικανότητας αναγνώρισης και επίλυσης προβλήματος.

Λέξεις Κλειδιά: Συνάρτηση, ικανότητα, αναπαράσταση, μετάβαση, μετάφραση, γραφική παράσταση, αλγεβρικός τύπος, πίνακας τιμών, εναλλαγή, μαθητές Γ Λυκείου, συσχέτιση.

Abstract

Function is perhaps the most studied concept of Mathematics and Mathematics' Education. A single riffle of a school book is enough to realize the content range that occupies and its importance in the whole mathematical structure. It is, therefore, important to be introduced and taught properly in all educational levels.

The following essay focus on the research of the function's concept by studying the ability to identify, to transition and solve problems that contain functions. 75 students of high school from the region of Thessaloniki participated by filling in an 8-page questionnaire. The results revealed that students are able to identify a function, regardless of the representational framework that was given. However, the are not able to transition in functions' representational forms. The most difficult appears to be the transition in algebraic to graphical representation and vice versa. In terms of problem solving, students tend to manipulate algebraic processes instead of graphic and arithemic approaches. In respect of correlation, identification and transition ability seems to be moderately correlated, transition and solving ability seems to be strongly correlated, identification and solving ability moderately correlated.

Key-Words: Function, ability, representation, transition, translation, graphical representation, algebraic form, table of values, High school students, correlation.

Ευχαριστίες:

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Χαράλαμπο Λεμονίδη για την υπομονή που έδειξε, την καλή συνεργασία που είχαμε στην εκπόνηση της παρούσας εργασίας και την αρωγή του καθ' όλη τη διάρκεια της φοίτησής μου στο μεταπτυχιακό.

Επίσης, ευχαριστώ όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού της Διδακτικής των Μαθηματικών για τα εργαλεία, τα ερεθίσματα και τις γνώσεις που μου προσέφεραν κατά τη φοίτησή μου στο πρόγραμμα.

I would also like to thank professor Emeritus Tommy Dreyfus for his immediate response to my mail and the research material he provided me, in order to complete this essay.

Επίσης, ένα μεγάλο ευχαριστώ αξίζουν οι συνάδελφοι και οι μαθητές που βοήθησαν στην τελική διαμόρφωση του ερωτηματολογίου καθώς και την συμπλήρωση αυτού, ώστε να περατωθεί η εργασία.

Ευχαριστώ την οικογένειά μου για την υπομονή και στη στήριξη που έδειξαν σε όλη τη διάρκεια της εργασίας.

Ευχαριστώ επίσης και όλους εκείνους που συντέλεσαν σε μικρό ή μεγάλο βαθμό στο να εξαχθεί το παρόν πόνημα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια της συνάρτησης αποτελεί ακρογωνιαίο λίθο της Ανάλυσης αλλά της διδακτέας ύλης των τάξεων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Thompson,1994b). Έρευνες έδειξαν ότι εκτός από απαραίτητο εφόδιο για την τριτοβάθμια εκπαίδευση, αποτελεί και μια περίπλοκη στην κατανόηση έννοια (Breidenbach et al., 1992; Eisenberg, 1992; Hitt, 1998; Dubinsky & Harel, 1992; Tall & Vinner,1981). Από τη φύση της η συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί με διαφορετικούς αναπαραστατικούς τρόπους όπως λεκτικά, αριθμητικά, γραφικά, αλγεβρικά και κάθε ένας από αυτούς τους τρόπους δίνει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας. Οι διάφορες αναπαραστάσεις της αλληλοσυμπληρώνονται και δίνουν την πλήρη εικόνα της έννοιας (Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992). Κατά τους Lesh et al. (1987) η αποτελεσματική κατανόηση της συνάρτησης εξαρτάται από την ικανότητα αναγνώρισης της συνάρτησης σε κάθε αναπαραστατικό πλαίσιο, από την ικανότητα διαχείρισής της εντός του εκάστοτε πλαισίου αλλά και την ικανότητα μετάφραση της από ένα πλαίσιο σε ένα άλλο.

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια προσπάθεια να διερευνηθεί το βάθος της γνώσης και κατανόησης που έχουν οι μαθητές της Γ τάξης του Γενικού Λυκείου πάνω στην έννοια της συνάρτησης. Η ολοκληρωμένη γνώση της έννοιας της συνάρτησης προϋποθέτει ευχέρεια στην αναγνώριση, την εναλλαγή μεταξύ των αναπαραστατικών της πλαισίων και τη χρήση της στα διάφορα αναπαραστατικά πλαίσια ώστε να λυθούν προβλήματα που ενέχουν συναρτήσεις. Αυτές οι διαστάσεις της έννοιας συνάρτηση καθώς και η συσχέτιση μεταξύ τους ερευνήθηκαν, έτσι ώστε να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα που θα οδηγήσουν στην κατανόηση του τρόπου που αντιλαμβάνονται και χειρίζονται τις συναρτήσεις οι μαθητές. Η σημαντικότητα, λοιπόν, της έρευνας έγκειται στο γεγονός ότι τα συμπεράσματα που θα εξαχθούν στο τελευταίο κεφάλαιο θα ωφελήσουν τους διδάσκοντες να αντιληφθούν την εικόνα της έννοιας που έχουν οι μαθητές και να αναπροσαρμόσουν την διδασκαλία τους ώστε να εξαλείψουν λανθασμένες αντιλήψεις ή γνωστικά εμπόδια τους. Απώτερος στόχος του όλου εγχειρήματος είναι η δόμηση μιας ολοκληρωμένης εικόνας της έννοιας από την πλευρά των μαθητών.

Η εργασία χωρίστηκε σε πέντε κεφάλαια. Στο πρώτο πραγματοποιήθηκε μια ανασκόπηση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας πάνω σε θέματα που αφορούν τη συνάρτηση, καθώς και έρευνες που άπτονται παρόμοιων θεμάτων. Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφεται ο στόχος και τα ερευνητικά ερωτήματα που απασχόλησαν τον συγγραφέα. Το τρίτο κεφάλαιο αφιερώθηκε στην περιγραφή της μεθοδολογίας που ακολουθήθηκε ώστε να διεξαχθεί η έρευνα. Ειδικότερα αναφέρονται λεπτομέρειες σχετικά με τους συμμετέχοντες, το ερευνητικό εργαλείο του χρησιμοποιήθηκε καθώς και της υπόλοιπης διαδικασίας συλλογής δεδομένων. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρατίθενται τα ευρήματα που προέκυψαν από την ανάλυση των ερωτηματολογίων, μετά την ομαδοποίησή τους σε άξονες, καθώς και η ανάλυση αξιοπιστίας ενώ στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα και οι περιορισμοί που απορρέουν από την παρούσα έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ: 1^o

Θεωρητικό Μέρος

[1.1] Ορισμός της συνάρτησης και η παρουσία της στα ελληνικά σχολικά βιβλία

Η έννοια της συνάρτησης αποτελεί μία από τις σημαντικότερες έννοιες των Μαθηματικών και η κατανόησή της σε βάθος είναι αναγκαία προϋπόθεση για να μπορέσουν οι μαθητές, φοιτητές και εν γένει θετικοί επιστήμονες να ανταποκριθούν στις υψηλές απαιτήσεις της Άλγεβρας, της Ανάλυσης και του Απειροστικού Λογισμού. Από τους αρχαίους ακόμα χρόνους, η συνάρτηση αποτελούσε ασυναίσθητα ένα καθημερινό εργαλείο που διευκόλυνε την ζωή του ανθρώπου. Με αυτή τη λογική, η έννοια εξελίχθηκε με το πέρασμα των αιώνων, αναπτυσσόμενη βαθμιαία και χωρίς να υπάρχει ένας αυστηρός ορισμός, μιας και δεν είχε εμφανιστεί ακόμα η ανάγκη της αφηρημένης μαθηματικής γενίκευσης (Νεγρεπόντης et al., 1987). Μέχρι τον 13^o αιώνα η συνάρτηση είχε κάνει αισθητή την παρουσία της μέσω λεκτικής περιγραφής, αριθμητικής έκφρασης (πίνακας τιμών) και γραφικής παράστασης. Η ανάγκη για αυστηρό ορισμό της έννοιας της συνάρτησης προέκυψε με την έλευση του Απειροστικού Λογισμού ενώ ο όρος «συνάρτηση» (function στα αγγλικά) εμφανίστηκε για πρώτη φορά σε χειρόγραφο του Leibniz το 1673. Τα επόμενα 300 χρόνια ακολούθησαν πολλοί ορισμοί για τη συνάρτηση, οι οποίοι εξυπηρετούσαν το εκάστοτε μαθηματικό πεδίο που γινόταν χρήση της. Όλοι, όμως, περιστρέφονταν γύρω από τον ορισμό της ως μια διαδικασία αντιστοίχισης ενός μεταβλητού στοιχείου από ένα σύνολο σε ένα και μόνο στοιχείο ενός άλλου συνόλου.

Σε ότι αφορά την ελληνική πραγματικότητα, οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τη συνάρτηση στη Β' Γυμνασίου, όπου γίνεται η προσπάθεια δόμησης μιας εικόνας μέσα από παραδείγματα της πραγματικής ζωής. Όλες οι δραστηριότητες καταλήγουν στη δημιουργία μιας σχέσης μεταξύ μιας ανεξάρτητης μεταβλητής ποσότητας με μια άλλη εξαρτημένη. Τη γενίκευση των παραδειγμάτων ακολουθεί ο πρόχειρος ορισμός της, *ως μια σχέση που αντιστοιχίζει κάθε τιμή της μεταβλητής x σε μία μόνο τιμή της μεταβλητής y.* (Βλάμος et al., 2006, σελ.54). Στη συνέχεια το εγχειρίδιο εστιάζει στη μελέτη των συναρτήσεων $y = \alpha x$, $y = \alpha x + \beta, y = \alpha x^2$ και $y = \frac{\alpha}{x}$ και εξασκεί τους μαθητές στη συμπλήρωση του πίνακα τιμών καθώς και στη χάραξη της γραφικής παράστασής τους. Άξιο προσοχής αποτελεί το γεγονός ότι μέσα από τα παραδείγματα και τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου δεν αναδεικνύεται η ουσία του ορισμού, δηλαδή ότι **κάθε** τιμή της μεταβλητής x **σε μία και μόνο** τιμή της μεταβλητής y. Αυτό θα μπορούσε να γίνει μέσω αντιπαραδείγματος, ώστε να αναδειχθεί η σημαντικότητα αυτής της αντιστοίχισης και να αποφευχθούν παρανοήσεις (όπως ότι όλες οι συναρτήσεις είναι τύπου «1-1») στις επόμενες τάξεις. Στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ' Γυμνασίου, γίνεται επίκληση του ορισμού της προηγούμενης τάξης και οι συγγραφείς εστιάζουν στη μελέτη των παραβολών $y = ax^2$ και $y = ax^2 + \beta x + \gamma$. Μέσα σε δύο κεφάλαια (4.1 και 4.2) γίνεται μια προσπάθεια κατανόησης του ρόλου των παραμέτρων με απώτερο σκοπό τον προσδιορισμό της θέσης της στο επίπεδο. Γίνεται αναφορά στη συμμετρία της και τα σημεία που έχουν ίδια τεταγμένη αλλά δεν την συνδέει με τον ορισμό της συνάρτησης.

Σε ότι αφορά το Λύκειο, στο εγχειρίδιο της Α τάξης πραγματοποιείται μια πιο ολοκληρωμένη παρουσίαση της έννοιας συνάρτηση σε σχέση με τις προηγούμενες τάξεις, η οποία καταλαμβάνει δύο κεφάλαια της ύλης (6^{ο} και 7^{ο}). Στην αρχή του 6^{ου} κεφαλαίου, η έννοια εισάγεται εντοπιζόμενη μέσα σε προβλήματα της πραγματικής ζωής, όπως για παράδειγμα η σύνδεση των ωρών της ημέρας με τις αντίστοιχες θερμοκρασίες τους. Με πρόφαση την ανάγκη σύνδεσης δύο μεγεθών, παρατίθεται ο συνολοθεωρητικός ορισμός της συνάρτησης και συγκεκριμένα στην σελίδα 156 (Ανδρεαδάκης et al, 2012) αναφέρεται:

«Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β».

Ακολουθούν οι υποέννοιες που την συνοδεύουν (ανεξάρτητη/εξαρτημένη μεταβλητή, πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών), ενώ μέσω βελοδιαγραμμάτων δίνονται αντιπαραδείγματα ώστε να καταστεί σαφές πότε μια αντιστοίχιση αποτελεί συνάρτηση και πότε όχι. Στη συνέχεια, γίνεται αναφορά στα χαρακτηριστικά του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων και ορίζεται η γραφική παράσταση συνάρτησης. Αξιοσημείωτη είναι η αναφορά που γίνεται στο *κριτήριο της κατακόρυφης ευθείας*, η οποία αν τέμνει τη γραφική παράσταση σε παραπάνω από ένα σημεία, τότε αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση (ibid, σελ.155). Συγκεκριμένα:

Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο. Έτσι ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.

Στις επόμενες παραγράφους μελετάται η γραμμική συνάρτηση της μορφής $f(x) = ax + \beta$ και οι ιδιότητες γύρω από αυτήν (συντελεστής διεύθυνσης, γωνία με τον $x'x$, σημεία τομής με άξονες και γραφική παράσταση) ενώ γίνεται μια πρώτη εισαγωγή στις κλαδωτές γραμμικές συναρτήσεις μέσω της $f(x) = |x|$. Το 6^{ο} κεφάλαιο κλείνει με μελέτη των συμμετριών των συναρτήσεων (συμμετρία ως προς τους άξονες $x'x, y'y$ καθώς και την αρχή των αξόνων O$(0,0)$), τη θέση τους στο επίπεδο (ως προς τον $x'x$ και άλλες συναρτήσεις, κατακόρυφη-οριζόντια μετατόπιση), τα ακρότατα και τη μονοτονία τους. Περνώντας στο 7^{ο} κεφάλαιο, γίνεται μια προσπάθεια μελέτης των συναρτήσεων $f(x) = ax^2, f(x) = ax^3, f(x) = \frac{a}{x}$ και $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με χρήση των ιδιοτήτων του προηγούμενου κεφαλαίου. Αξίζει να σημειωθεί ότι στα δύο προαναφερθέντα κεφάλαια γίνεται αισθητή η προσπάθεια αναπαράστασης της συνάρτησης και στα τρία βασικά αναπαραστατικά της πεδία. Δηλαδή, δίπλα από την αλγεβρική διαδικασία παρατίθεται η γραφική της αναπαράσταση ή πίνακας τιμών, όπου αυτό είναι δυνατό. Τέλος, σε ότι αφορά τις ασκήσεις στο τέλος κάθε παραγράφου, σε σύνολο 63 ασκήσεων εντοπίστηκαν μόλις 7 προβλήματα που ενέπλεκαν συναρτήσεις ενώ δεν εντοπίστηκε πρόβλημα σε λυμένη εφαρμογή.

Στην Άλγεβρα της Β' Λυκείου η έννοια της συνάρτησης εντοπίζεται σε τρία κεφάλαια, το 2^{ο}, το 3^{ο} και το 5^{ο}. Αρχικά στο 2^{ο} κεφάλαιο, επαναλαμβάνονται ιδιότητες των συναρτήσεων όπως μονοτονία, ακρότατα, συμμετρίες, κατακόρυφη – οριζόντια μετατόπιση με σκοπό να χρησιμοποιηθούν στη μελέτη των υπερβατικών συναρτήσεων του 3^{ου} και 5^{ου} κεφαλαίου. Σε σχέση με την Α' Λυκείου, δίνονται περισσότερες λεπτομέρειες και αυστηρότεροι ορισμοί, οι οποίοι θα εμπλουτιστούν στο εγχειρίδιο της Γ' Λυκείου. Ειδικότερα, σε ότι αφορά τις τριγωνομετρικές, η ενασχόληση περιορίζεται στη μελέτη και τη χάραξη των συναρτήσεων $f(x) = \rho\eta\mu\omega x$, $f(x) = \rho\sigma\upsilon\nu\omega x$ και $f(x) = \varepsilon\varphi x$, ενώ αναφέρεται και ο ρόλος των παραμέτρων ρ, ω στη γραφική τους ερμηνεία. Στο 5^{ο} και τελευταίο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στη μελέτη της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$, με $0 < \alpha < 1$ και $\alpha > 1$ και των λογαριθμικών συναρτήσεων $f(x) = logx$, $f(x) = lnx$, με $x > 0$ (λογαριθμικές με βάση τα 10 και e). Συγκεκριμένα, οι συναρτήσεις μελετώνται στα 3 βασικά αναπαραστατικά πλαίσια (αριθμητικό, αλγεβρικό, γραφικό) και εντοπίζονται οι ιδιότητες που αναφέρθηκαν στο 2^{ο} κεφάλαιο. Τέλος, σε σύνολο 58 ασκήσεων εντοπίστηκαν 11 προβλήματα ενώ μόλις 3 λυμένες εφαρμογές περιείχαν πρόβλημα.

Στη Γ' Λυκείου, εμπλουτίζεται η ύλη των προηγούμενων τάξεων με νέα εργαλεία μελέτης των συναρτήσεων και σαφέστερους/επιστημονικότερους ορισμούς. Συγκεκριμένα, ο ορισμός της συνάρτησης επαναδιατυπώνεται σε αυστηρότερο πλαίσιο σε σχέση με αυτόν της Α ενώ εστιάζει στις πραγματικές συναρτήσεις. Αυτός θα αποτελέσει τον ορισμό της συνάρτησης για την παρούσα εργασία και έχει ως εξής:

«Έστω A ένα υποσύνολο του ℝ. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$». (Ανδρεαδάκης et al. 2016, σελ.15).

Επιπλέον, επαναλαμβάνεται το *κριτήριο της κατακόρυφης ευθείας*, όπως ακριβώς διατυπώθηκε και στο βιβλίο της Α' Λυκείου, ενώ ακολουθεί η μελέτη μερικών βασικών συναρτήσεων όπως οι $f(x) = ax + \beta, f(x) = ax^2,\ f(x) = ax^3,\ f(x) = \frac{a}{x},\ f(x) = \sqrt{x},$ $f(x) = a^x, f(x) = \eta\mu x, f(x) = \sigma\upsilon\nu x,$ σε αλγεβρικό και γραφικό επίπεδο. Στις επόμενες παραγράφους του 1ου κεφαλαίου ακολουθεί εκτενής αναφορά στις ιδιότητες, στη σύνθεση καθώς και στις πράξεις μεταξύ συναρτήσεων, ενώ παράλληλα δίνονται εξειδικευμένες μεθοδολογίες εύρεσης μονοτονίας, ακροτάτων, κυρτότητας και συμμετρίας. Γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στις συναρτήσεις τύπου «1-1», ενώ στις εφαρμογές που συνοδεύουν τη θεωρία παρατηρείται μια προτίμηση προς τις αλγεβρικές διαδικασίες επίλυσης. Στις 25 ασκήσεις των παραγράφων που αφορούν τις συναρτήσεις, μόλις οι 5 είναι προβλήματα. Τέλος, μελετώνται παραδείγματα κλαδικών συναρτήσεων, σημείο στο οποίο δεν είχαν αναφερθεί επαρκώς τα προηγούμενα σχολικά βιβλία. Είναι εμφανές ότι στην τελευταία τάξη του Λυκείου γίνεται η εκτενέστερη και πιο ολοκληρωμένη αναφορά στις συναρτήσεις ενώ με τις διαδικασίες της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης η έννοια της συνάρτησης παύει να είναι μόνο μια διαδικασία, αλλά γίνεται και αντικείμενο της θεωρίας.

[1.2] Δυσκολίες, εμπόδια και αντιλήψεις γύρω από την έννοια της συνάρτησης

Όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, η έννοια της συνάρτησης αποτελεί μια νοητική κατασκευή που ορίστηκε αυστηρά τα τελευταία χρόνια. Για να συμβεί αυτό ενοποιήθηκαν πολλές και διαφορετικές εμπειρίες, νοητικά εργαλεία, τα οποία με βάση το πεδίο εφαρμογής τους διαμόρφωσαν παρεμφερείς ορισμούς, με τον ευρέως διαδομένο συνολοθεωρητικό ορισμό να αποτελεί μόνο την κορυφή του παγόβουνου. Πόσο εύκολο είναι, λοιπόν, να διδαχθεί σε μαθητές μια έννοια που για τον ορισμό της και μόνο απασχόλησε τόσους μαθηματικούς επί τόσα έτη; Λαμβάνοντας υπόψη τον χρόνο που χρειάστηκε για να εξελιχθεί και να οριστεί πλήρως, συμπυκνώνοντας γνώση από διαφορετικά μαθηματικά πεδία, την εξέχουσα θέση της στα σύγχρονα προγράμματα σπουδών αλλά και τον αριθμό των ερευνών που αφορούν τις δυσκολίες/παρανοήσεις των μαθητών γύρω από αυτή, είναι σαφές ότι η συνάρτηση αποτελεί μία πολύπλοκη και δύσκολη στην κατανόηση έννοια (Kaldrimidou & Ikonomou, 1998; Even, 1998; Sfard, 1992; Καλδρυμίδου & Μορόγλου, 2007; Γραββάνη, 2006; Hitt 1998; Janvier, 1987).

Με σκοπό την διερεύνηση της εικόνας της έννοιας που έχουν στο μυαλό τους, οι Tall & MdNor (1992) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές διακατέχονται από ορισμένες λανθασμένες αντιλήψεις. Συγκεκριμένα, σε επίπεδο γραφικής παράστασης, οι μαθητές έχουν συνδέσει νοερά τα βασικά είδη συναρτήσεων με τις αντίστοιχες γραφικές τους παραστάσεις μέσω πρωτοτυπικών σχημάτων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, να χαρακτηρίζουν ως συνάρτηση κάθε γραφική παράσταση που μοιάζει στο πρωτοτυπικό σχήμα που έχουν στο μυαλό τους, ακόμα και αν αυτό διαφοροποιηθεί ελάχιστα (για παράδειγμα περιστραφεί κατά 90^o). Επιπλέον, ορμώμενοι από τις βασικές συναρτήσεις που διδάχθηκαν πιστεύουν ότι όλες οι συναρτήσεις έχουν έναν τύπο ενώ δεν αναγνωρίζουν ακραίες αλλά υπαρκτές περιπτώσεις συναρτήσεων που παριστάνονται από μη κανονικά σχήματα. Ως μη κανονικά σχήματα οι μαθητές θεωρούν τις γραφικές παραστάσεις με μύτες, παραπάνω από έναν κλάδους και γενικά όσες δεν έχουν αρμονία, καμπυλότητα, συνέχεια ή απλά δεν μοιάζουν με κάποιο πρωτοτυπικό τους σχήμα. Σε επίπεδο αλγεβρικού τύπου, οι μαθητές θεωρούν ότι οποιαδήποτε αλγεβρική έκφραση όπου το y παρουσιάζεται ως μια έκφραση του x, αποτελεί συνάρτηση. Αυτή η προκατάληψη τους οδηγεί σε λανθασμένες αναγνωρίσεις, καθότι δεν λαμβάνουν υπόψη τις τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή x, δηλαδή το πεδίο ορισμού. Ακόμα, το γεγονός ότι οι κλαδωτές συναρτήσεις δεν θυμίζουν κάποια από τις πρωτοτυπικές εκφράσεις που διδάχθηκαν αποτελεί τροχοπέδη στην αναγνώρισή τους ως έκφραση συνάρτησης. Οι ίδιοι ερευνητές (ibid, 1992) υποστηρίζουν ότι μια καθαρά θεωρητική εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης θα ήταν ανεπιτυχής, ενώ μια εισαγωγή με χρήση παραδειγμάτων θα δημιουργούσε πρωτοτυπικά μοντέλα στο μυαλό των μαθητών, τα οποία με τη σειρά τους θα οδηγούσαν σε λανθασμένες αντιλήψεις για την έννοια της συνάρτησης.

Οι Markovits et al. (1986) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές της δικής τους έρευνας είχαν δυσκολίες στα έργα που περιείχαν 1] σταθερές συναρτήσεις, 2] συναρτήσεις με διακοπτόμενη γραφική παράσταση και 3] συναρτήσεις πολλαπλού τύπου (κατά κλάδους). Άλλες δυσκολίες που συνάντησαν οι μαθητές ήταν η ένταξη του πεδίου ορισμού στην έννοια της συνάρτησης.

Οι Καλδρυμίδου & Οικονόμου (1992) κατέγραψαν τρεις διαφορετικές κατηγορίες εννοιολογικών αντιλήψεων για την συνάρτηση: την αλγεβρική, την συναρτησιακή και την γεωμετρική, ενώ σε επίπεδο τρόπου επεξεργασίας ξεχώρισαν τον σημειακό, τον βηματικό και τον ολιστικό που εμφανίζονται στο αναπαραστατικό πλαίσιο της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. Στην γεωμετρική αντίληψη, οι συμμετέχοντες θεώρησαν την γραφική παράσταση ως καμπύλη ανεξάρτητα από τους άξονες, στην αλγεβρική σε σχέση μόνο με τον άξονα Οx, ενώ στην συναρτησιακή σε σχέση με τους δύο άξονες Οx και Οy. Αντίστοιχα, ως προς τους τρόπους επεξεργασίας: η σημειακή περιλαμβάνει επεξεργασία μέσω του υπολογισμού σημείων της γραφικής παράστασης, η βηματική μέσω των βημάτων μελέτης της συνάρτησης και η ολιστική μέσω της κατηγορίας της συνάρτησης και της μεταφοράς των αξόνων.

Κατά τον Dubinsky (1991) η δυσκολία στην κατανόηση οφείλεται στην επιστημολογική πολυμορφία της συνάρτησης. Αναλόγως το πλαίσιο στο οποίο εμφανίζεται, μπορεί να θεωρηθεί ως μια *ενέργεια* (action), μια *διαδικασία* (process) ή ένα *αντικείμενο* (object). Οι μαθητές που αντιμετωπίζουν τη συνάρτηση ως *ενέργεια*, ουσιαστικά βλέπουν ένα σύνολο απομονωμένων πράξεων. Δηλαδή στην περίπτωση της συνάρτησης $f(x) = 2x + 1$, ο μαθητής πολλαπλασιάζει το εκάστοτε x με το 2 και στη συνέχεια προσθέτει το 1. Κάθε σετ εξαρτημένης – ανεξάρτητης μεταβλητής είναι ξεχωριστό και έτσι το ζεύγος 2 – 5 δεν έχει καμία σύνδεση με το 3 – 7, παρόλο που αποτελούν δεδομένα που παράγονται από την ίδια συνάρτηση. Η επανειλημμένη χρήση τέτοιου είδους υπολογισμών αρχίζει και δημιουργεί στο μυαλό των μαθητών αλυσιδωτές σχέσεις, οι οποίες τυποποιούν την διαδικασία εύρεσης του αποτελέσματος. Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση αντιμετωπίζεται ως *διαδικασία* και συνεπάγεται έναν δυναμικό χειρισμό ποσοτήτων. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x + 1$ για την τιμή $x = 2$ στο μυαλό των μαθητών γίνεται αντιληπτή ως η διαδικασία $2 \times 2 + 1$ η οποία παράγει το αποτέλεσμα 5. Με την εξάσκηση, η διαδικασία αυτή χρησιμοποιείται ως πρωταρχική έννοια στους υπολογισμούς χωρίς να ενδιαφέρει πλέον ο εσωτερικός τρόπος λειτουργίας της. Τέλος, η συνάρτηση αντιμετωπίζεται ως *αντικείμενο*, όταν οι μαθητές συμπυκνώνουν τις διαδικασίες και τις χρησιμοποιούν ως δεδομένα. Αυτό συμβαίνει όταν σταματούν, πλέον, να δίνουν σημασία στις λεπτομέρειες των πράξεων και στους αριθμούς και αποκτούν μια πιο ολιστική αίσθηση της συνάρτησης. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = 2x + 1$ είναι ουσιαστικά η $g(x) = 2x$ αν της προστεθεί το 1, κοινώς $f(x) = g(x) + 1$. Οι φύσεις πρέπει να είναι άρρηκτα συνδεδεμένες, αφού όλες μαζί συμπληρώνουν την καλή εικόνα της έννοιας της συνάρτησης. Η Sfard (1991, σελ.5) υποστήριξε ότι «η ικανότητα[1] να

[1] Κατά τους Shippmann et al. (2000, σελ. 706) ως *ικανότητα* ορίζεται μια τυποποιημένη απαίτηση,

αντιμετωπίζεις μια συνάρτηση *ή έναν αριθμό ή άλλη μαθηματική έννοια ταυτόχρονα ως διαδικασία και ως αντικείμενο είναι απαραίτητη για τη βαθιά κατανόηση των Μαθηματικών, όπως και αν ορίζεται η κατανόηση»*. Η ίδια (Sfard, 1992) εισήγαγε δύο προσεγγίσεις κατά την ανάπτυξη της έννοιας: Μια λειτουργική (operational) η οποία εστιάζεται σε διαδικασίες, αλγόριθμους και ενέργειες, και μια δομική (structural), η οποία εστιάζεται στα αντικείμενα.

Ακόμα, οι Dubinsky & Harel (1992), πέραν της επιστημολογικής πολυμορφίας της συνάρτησης, εντόπισαν μερικές περιοριστικές αντιλήψεις που διακατείχαν στα υποκείμενα της έρευνάς τους:

1] Ο περιορισμός του χειρισμού: Κάθε μια κατάσταση που ερμηνεύεται ως συνάρτηση, πρέπει να περιλαμβάνει σαφείς εκτελεστικούς χειρισμούς. Για παράδειγμα, ένας πίνακα με δύο στήλες δεδομένων δεν ερμηνεύεται πάντα ως αντιπροσωπευτικό είδος συνάρτησης, διότι δεν είναι σαφής η διάκριση μεταξύ της ανεξάρτητης (εισαγόμενα δεδομένα από την πρώτη στήλη του πίνακα) και της εξαρτημένης μεταβλητής (εξαγόμενα δεδομένα από την δεύτερη στήλη του πίνακα).

2] Ο περιορισμός της ποσότητας: Οι μεταβλητές πρέπει να είναι αριθμοί.

3] Ο περιορισμός της συνέχειας: Μια γραφική παράσταση που αντιπροσωπεύει μια συνάρτηση είναι πάντα συνεχής.

Λαμβάνοντας υπόψη την αλυσιδωτή φύση των μαθηματικών, είναι προφανές ότι για να εισαχθούν οι μαθητές στην έννοια της συνάρτησης, θα πρέπει πρωτίστως να γνωρίζουν καλά έννοιες που προηγούνται αυτής, όπως η συμμεταβολή, η μεταβλητή, η παράμετρος, τα αναλυτικά και αναπαραστατικά εργαλεία περιγραφής κ.ο.κ. Συνεπώς, μαθητές με γνωσιακά κενά στις συνδεδεμένες με την συνάρτηση έννοιες, αντιμετωπίζουν μεγαλύτερη δυσκολία στην κατανόησή της. Επί των δυσκολιών στην κατανόηση της συνάρτησης αναφέρθηκαν οι Vinner & Dreyfus (1989) διαπιστώνονται ότι οι μαθητές πιστεύουν λανθασμένα ότι:

1] Η συνάρτηση πρέπει να περιγράφεται από έναν τύπο. Αν δίνονται πολλαπλοί τύποι (π.χ. δίκλαδες συναρτήσεις) τότε περιγράφονται ισάριθμες συναρτήσεις.

2] Ο καθορισμός του πεδίου ορισμού δεν αποτελεί μέρος του ορισμού της συνάρτησης.

3] Θα πρέπει να υπάρχει μια πράξη στο x που να αποδίδει το y, γεγονός που αποκλείει άλλου είδους σχέσεις.

προκειμένου ένα άτομο να εκτελεί υπεύθυνα και αυτόνομα κάποια προκαθορισμένη εργασία/έργο ή λειτουργία. Η ικανότητα βασίζεται σε συνδυασμό γνώσεων και συμπεριφορών (προσωπικών, κοινωνικών), ενώ η αποτελεσματικότητα της συνδυασμένης εφαρμογής αυτών στην πράξη καθορίζει το επίπεδο ικανότητας.

4] Μια συνάρτηση υπάρχει μόνο αν υπάρχει αναλυτικός τύπος που την περιγράφει.

5] Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης πρέπει να έχει συμμετρικότητα, ομαλότητα, συνέχεια και να αυξάνεται, δηλαδή να έχει «καλή συμπεριφορά».

Αντίστοιχα ο Carlson (1998) αλλά και οι Tall & MdNor (1992) επισημαίνουν ότι οι μαθητές της δικής του έρευνας δεν αναγνώρισαν την σταθερή $y = 3$ ως συνάρτηση διότι οι τιμές του y δεν μεταβάλλονται.

Από τη δική της πλευρά η Sierpinska (1992) αναζητώντας εμπόδια που συναντούν οι μαθητές κατά την διδασκαλία της έννοιας εντοπίζει τα παρακάτω:

1] Η σύγχυση μεταξύ συνάρτησης και σχέσης.

2] Η διάκριση μεταξύ της χρήσης αριθμού και της ποσότητας, πράγμα που εν μέρει οφείλεται σε περιορισμένη κατανόηση του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

3] Η εντύπωση πως η συνάρτηση δίνεται από έναν αναλυτικό τύπο.

4] Η συμμετρία μεταξύ των x και y. Για παράδειγμα οι εξισώσεις της έλλειψης και του κύκλου έχουν παρεμφερή, συμμετρικό τύπο, με αποτέλεσμα να γίνεται σύγχυση μεταξύ εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής.

5] Το ασυνείδητο σχήμα σκέψης που αναφέρεται στις αλλαγές του κόσμου ως φαινόμενα χωρίς να επικεντρώνεται στις παραμέτρους της αλλαγής (τι και πως αλλάζει). Μια τέτοια στάση βλέπει υπό ένα ποιοτικότερο πρίσμα τον κόσμο, χωρίς να εστιάζει στις ποσοτικές σχέσεις.

6] Η σκέψη που αναπτύσσεται στην άλγεβρα και αφορά στο διαχωρισμό μεταξύ σταθερών και αγνώστων ποσοτήτων, η οποία παραπέμπει στην ιδέα της εξίσωσης και όχι τη συνάρτηση.

7] Το γεγονός ότι μια συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί με διαφορετικούς τρόπους (ως γραφική παράσταση, πίνακας τιμών, αναλυτικός τύπος κ.ο.κ.)

8] Η χρονικότητα της μεταβλητής.

9] Η λανθασμένη θεώρηση ότι όλες οι συναρτήσεις είναι τύπου 1-1 και η δυσκολία στην κατανόηση ότι μπορούν πολλά x να αντιστοιχηθούν σε ένα y.

Οι Kaldrimidou & Ikonomou (1998) επιβεβαιώνουν τα προβλήματα που προκύπτουν από τους πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης της συνάρτησης, σημειώνοντας πως οι μαθητές αδυνατούν να δεχτούν ότι οι διάφοροι αναπαραστατικοί τρόποι της ίδιας συνάρτησης αλληλοσυμπληρώνονται και συμβάλλουν στη συνολική της εικόνα. Οι ίδιοι (ibid, 1998) καθώς και οι Janvier (στο Hitt, 1998), Gagatsis & Shiakalli (2004) συμφωνούν στο γεγονός ότι οι μαθητές –αλλά και δάσκαλοι– όχι μόνο δυσκολεύονται στην κατανόηση αλλά και τη συσχέτιση των συναρτήσεων, λόγω της αναπαραστατικής τους ποικιλίας.

Επιπλέον, στην έρευνα των Schwarz & Hershkowitz (1999) οι μαθητές είχαν την τάση να πιστεύουν ότι όλες οι συναρτήσεις είναι γραμμικές ή τετραγωνικές και πως όλες οι γραφικές παραστάσεις παραβολοειδών παριστάνουν συνάρτηση, ανεξάρτητα της φοράς του U. Ακόμα, ο Thompson (1994) διαπίστωσε πως οι μαθητές βλέπουν τη συνάρτηση ως δύο εκφράσεις που ενώνονται με ένα ίσον ενώ πολλοί από αυτούς δεν είναι σε θέση να χειριστούν τα αλγεβρικά σύμβολα ή να προβούν σε βασικές αλγεβρικές διαδικασίες.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω εμπόδια, τις λανθασμένες αντιλήψεις που διακατέχουν τους μαθητές αλλά και του αφηρημένου της φύσης της συνάρτησης, είναι δόκιμο να ισχυριστούμε ότι η διδακτική μεταφορά της έννοιας αποτελεί μια δύσκολη διαδικασία.

[1.3] Η έννοια της αναπαράστασης στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών

Όπως προαναφέρθηκε, μια συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί με περισσότερους από έναν τρόπους, συνεπώς είναι επιτακτική η μελέτη της έννοιας *αναπαράσταση* σε μαθηματικά αντικείμενα εν γένει. Τι ακριβώς είναι αναπαράσταση ενός μαθηματικού αντικειμένου; Κατά τον Kaput (1987a) αναπαράσταση αποτελεί ένα νοητικό σύμβολο ή έννοια η οποία αντιπροσωπεύει ένα προκαθορισμένο υλικό σύμβολο. Ο όρος αναπαράσταση περιλαμβάνει: τις εικονικές αναπαραστάσεις, τα σύμβολα και τις νοητικές αναπαραστάσεις. Από την πλευρά του ο Goldin (1987) απαριθμεί πέντε ολότητες που εμπεριέχονται στην έννοια:

1] Την ολότητα που αναπαρίσταται,

2] την ολότητα που αναπαριστά,

3] τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας που αναπαρίσταται,

4] τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας που αναπαριστά, οι οποίες σχηματίζουν και την αναπαράσταση,

5] την αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο ολότητες.

Αντίστοιχα, η γνωστική ψυχολογία χρησιμοποιεί τον όρο *αναπαράσταση* με δύο τρόπους:

1] Κάποια οργάνωση που αντιστοιχεί σε κάποια οντότητα και αποτελεί μοντέλο διανοητικών ενεργειών.

2] Την οργάνωση της γνώσης στο ανθρώπινο νοητικό σύστημα. (Γραββάνη, 2006, σελ. 18)

Στα πλαίσια ενασχόλησης με τα μαθηματικά, οι μαθητές συναντούν αντικείμενα με πολλές αναπαραστάσεις. Για να επέλθει η αποτελεσματική κατανόησή τους θα πρέπει να είναι σε θέση να *αναγνωρίζουν* αποτελεσματικά την έννοια στα διάφορα αναπαραστατικά της πλαίσια αλλά και να *μεταφράζουν* την έννοια από το ένα πλαίσιο στο άλλο (Lesh et al. 1987). Στην ικανότητα μετάφρασης έχουν αναφερθεί οι Janvier (1987) και Hitt (1998) σημειώνοντας ότι η μάθηση μαθηματικών εννοιών αλλά και η αποτελεσματική επίλυσης προβλήματος εξαρτάται άμεσα από αυτήν.

Σε ότι αφορά τις αναπαραστάσεις, αυτές διακρίνονται σε εξωτερικές (ή σημειωτικές) και εσωτερικές (ή νοητικές).

1] Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις περιλαμβάνουν τις εικονικές και συμβολικές αναπαραστάσεις, σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση του Kaput (1987a). Αυτές διαδραματίζουν τον ρόλο του ερεθίσματος στις αισθήσεις και αποτελούνται από αναλυτικούς τύπους, γραφικές παραστάσεις, διαγράμματα, πίνακες τιμών, τυπικά μαθηματικά σύμβολα και γενικά παραστάσεις της γλώσσας των μαθηματικών. Ξεχωρίζουν για την ιδιότητά τους να κάνουν το αντικείμενο μάθησης πιο ελκυστικό, ενδιαφέρον και συχνά αποτελούν πεδία πρώτης αναφοράς των μαθητών προκειμένου να οικοδομήσουν βασικές έννοιες.

2] Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις περιλαμβάνουν τις νοητικές εικόνες (σχηματισμούς) που κατασκευάζει το άτομο για να παραστήσει την πραγματικότητα και δεν είναι προσβάσιμες απ' όλους (Janvier, 1987). Η φύση των νοητικών αυτών εικόνων είναι ασαφής, διαφέρει από άτομο σε άτομο και δεν μπορούν να γίνουν διακριτές άμεσα παρά μόνο με παρατήρηση της εξωτερικής συμπεριφοράς του ατόμου.

Από πλευράς εξωτερικών αναπαραστάσεων, αυτές δεν είναι απόλυτες αλλά εξαρτώνται άμεσα από τις εσωτερικές αναπαραστάσεις του κάθε ατόμου (Goldin, 1987; Kaput, 1987a). Κατά τον Von Glasersfeld (1987b) μια αναπαράσταση δεν είναι αυθύπαρκτη αλλά χρειάζεται ερμηνεία από το υποκείμενο. Το υποκείμενο αντιλαμβάνεται και ερμηνεύει μια εξωτερική αναπαράσταση βασιζόμενο στις εσωτερικές εικόνες που έχει δημιουργήσει από προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες του.

Τα είδη των αναπαραστάσεων συνδέονται με μια αμφίδρομη σχέση αλληλεπίδρασης. Το υποκείμενο μπορεί να εξωτερικεύσει σε φυσική μορφή πράξεις που αντλεί από τις νοητικές αναπαραστάσεις που έχει ή να εσωτερικεύσει εικονικές οι συμβολικές αναπαραστάσεις που συλλέγει από τον εξωτερικό κόσμο. Αυτές οι αμφίδρομες διαδικασίες πολλές φορές συμβαίνουν ταυτόχρονα (Kaput, 1987a; Goldin, 1987).

Από την μεριά της η Κολέζα (2000) υποστηρίζει ότι μια αναπαράσταση δεν μπορεί να κατηγοριοποιηθεί ως εσωτερική ή εξωτερική απλά και μόνο από τα μορφολογικά της χαρακτηριστικά. Μια γραφική παράσταση, ένα διάγραμμα δεν αποτελεί αποκλειστικά και μόνο εξωτερική αναπαράσταση αλλά υφίσταται και ως προϊόν εσωτερίκευσης μιας σημειωτικής αναπαράστασης. Σε ένα δεύτερο επίπεδο αφαίρεσης, αυτές οι εικόνες δύνανται να λειτουργήσουν ως ευρετικό πεδίο για την σύλληψη, την κατανόηση και την επεξεργασία συνθετότερων εννοιών. Στο ίδιο μοτίβο, ο Duval (1995a) αναφέρει ότι η νοητική επεξεργασία μαθηματικών αντικειμένων εξαρτάται άμεσα από το χρησιμοποιούμενο αναπαραστατικό σύστημα.

Όλες, όμως, αυτές οι μεγάλες ποσότητες πληροφοριών που προσφέρονται μέσω της αναπαράστασης εννοιών πρέπει να αποθηκευτούν στην μνήμη των μαθητών ως οργανωμένα συστήματα. Πολλά τέτοια αλληλοσυνδεόμενα συστήματα αποτελούν ένα *γνωστικό σχήμα*. Κατά τους Piaget et al. (1977) με τη βοήθεια του γνωστικού σχήματος οργανώνονται οι εμπειρίες ενός ατόμου ώστε:

1] Να είναι σε θέση να αναγνωρίσει νέες εμπειρίες και παρόμοιες γνώσεις με τις ήδη υπάρχουσες ή να διακρίνει ομοιότητες – διαφορές ανάμεσα σε παλιές και νέες,

2] να έχει πρόσβαση σε μια βάση δεδομένων που περιέχει τα ουσιώδη στοιχεία όλων των παραπλήσιων εμπειριών, συμπεριλαμβανομένων των γλωσσικών και μη γλωσσικών συνιστωσών,

3] να μπορεί να εξάγει συμπεράσματα, να κάνει εκτιμήσεις, να δημιουργεί στόχους και να αναπτύσσει σχέδια ενεργειών στηριζόμενος στο βασικό πλαίσιο και

4] να χρησιμοποιεί δεξιότητες, διαδικασίες και κανόνες όταν προσπαθεί να λύσει ένα πρόβλημα το οποίο κατέταξε σε κάποιο κατάλληλο βασικό πλαίσιο.

Τέλος, στα Μαθηματικά, πολλές είναι οι έννοιες που έχουν παραπάνω από έναν τρόπο αναπαράστασης (όπως για παράδειγμα η συνάρτηση). Σε αυτές τις περιπτώσεις ο μαθητής θα πρέπει να είναι σε θέση να συνειδητοποιήσει τις κοινές ιδιότητες της έννοιας στα διάφορα αναπαραστατικά της πλαίσια και να εξάγει τη δομή της. Κατά τους Lesh et al. (1987) οι πολλαπλές αναπαραστάσεις δίνουν διαφορετικές όψεις του αντικειμένου αποδίδοντάς του έναν πλουραλιστικό χαρακτήρα. Η αποτελεσματικότητα των μαθητών στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων εξαρτάται και από την ικανότητα αναγνώρισης αλλά και μετάβασης από το ένα αναπαραστατικό πλαίσιο στο άλλο (ibid, 1987; Even, 1998; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Γραββάνη, 2006; NCTM, 2000).

[1.4] Οι αναπαραστάσεις της συνάρτησης

[1.4α] Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην κατανόηση της συνάρτησης

Σε μια προσπάθεια ανάδειξης της σημαντικότητας της έννοιας συνάρτηση ο Eisenberg (1992) αναφέρει ότι «*η ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης στους μαθητές θα πρέπει να αποτελεί βασικό στόχο του αναλυτικού προγράμματος, τόσο της δευτεροβάθμιας όσο και της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης*» (σελ. 174). Ωστόσο, η πληθώρα διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας αλλά και οι δυσκολίες που προκύπτουν κατά τον συνδυασμό αυτών, δυσκολεύουν την επίτευξη του στόχου αυτού (Hitt, 1998). Ειδικότερα, μια συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί αναλυτικά μέσω του αλγεβρικού της τύπου, αριθμητικά μέσω πίνακα τιμών ή διατεταγμένο ζεύγος συντεταγμένων, γραφικά μέσω γραφικής παράστασης και λεκτικά, μέσω λεκτικής περιγραφής της σχέσης μεταξύ των μεγεθών της. Η παρούσα εργασία εστιάζει στα τρία πρώτα αναπαραστατικά πεδία.

Λαμβάνοντας υπόψη την σημαντικότητα της έννοιας συνάρτηση και το εύρος της σχολικής ύλης που καταλαμβάνει, είναι δικαιολογημένη η ανησυχία των εκπαιδευτικών για τη σωστή διδακτική μεταφορά της έννοιας, ώστε να γίνει πλήρως κατανοητή από τους μαθητές. Ενστερνιζόμενη αυτή την ανησυχία, η επιστημονική κοινότητα ερεύνησε το θέμα και εκπόνησε πλήθος ερευνών που αφορούν την κατανόηση και ερμηνεία της έννοιας σε συνδυασμό με τον ρόλο των διαφορετικών αναπαραστάσεων της. Κοινό συμπέρασμα αυτών των ερευνών είναι ότι η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων συντελεί στην βαθύτερη κατανόηση της έννοιας (Duval, 1995a; Even, 1998; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Γραββάνη, 2006). Μπορεί, όμως, κάθε αναπαραστατικός τρόπος να δώσει την πλήρη εικόνα της συνάρτησης;

Κατά τους Kaldrimidou & Ikonomou (1998) κάθε αναπαραστατικός τρόπος δίνει πληροφορίες για μια «πλευρά» της συνάρτησης, δεν μπορεί να την περιγράψει πλήρως και δεν αντιπροσωπεύει από μόνος του το σύνολο της έννοιας. Αντιθέτως, ο ένας συμπληρώνει τον άλλον και όλοι μαζί οικοδομούν τη συνολική εννοιολογική αντίληψη της έννοιας συνάρτηση. Επιπλέον, ο αριθμητικός και ο αλγεβρικός ως τρόποι έκφρασης της συνάρτησης είναι αναλογικοί, δηλαδή παρουσιάζουν μια πληροφορία ως μια αλληλουχία προτάσεων που μπορεί να διαβαστεί η μια μετά την άλλη. Αντίθετα, ο γραφικός τρόπος είναι ολιστικός, δηλαδή παρουσιάζει πολλές πληροφορίες της συνάρτησης ταυτόχρονα. Για την αλγεβρική παράσταση η Sfard (1992) συμπληρώνει ότι μπορεί να αντιμετωπιστεί είτε λειτουργικά, ως μια περιληπτική περιγραφή κάποιων σχέσεων, είτε δομικά, ως μια στατική σχέση δύο μεγεθών. Αντίστοιχα, η γραφική παράσταση υποστηρίζει μια δομική προσέγγιση, αφού τα πολλά συστατικά της συνδυάζονται σε αρμονία ώστε να αποτελέσουν μια ολότητα.

Επιπλέον, οι Eisenberg & Dreyfus (1994) αναφέρουν ότι η συνάρτηση μπορεί να αποτελέσει το διδακτικό εργαλείο που θα βοηθήσει τους μαθητές να μάθουν τον σωστό χειρισμό των μεταβλητών –μέσα σε κάθε μεμονωμένο αναπαραστατικό πλαίσιο– αλλά και να επιλύουν προβλήματα –μέσα από την επιλογή του σωστού αναπαραστατικού πλαισίου στο οποίο θα εργαστούν–.

Οι Zachariades et al. (2000) κατατάσσουν σε 3 γνωστικά επίπεδα τους συμμετέχοντες στην έρευνά τους με βάση τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες που μπορούν να αναγνωρίσουν σε μια συνάρτηση ανά πλαίσιο, ενώ καταλήγουν ότι λίγοι μπορούν να τα αξιοποιήσουν πλήρως ώστε να έχουν μια συνολική εικόνα της έννοιάς της.

Σε αντίστοιχη έρευνα, ο Proulx (2015) μελετά τις στρατηγικές που αναπτύσσουν οι μαθητές για να πραγματοποιήσουν πράξεις με συναρτήσεις σε γραφικό περιβάλλον. Στα ευρήματά του κατατάσσονται 3 είδη στρατηγικών: η αλγεβρική/παραμετρική, η γραφική/γεωμετρική και η γραφική/αριθμητική.

Άλλες έρευνες στράφηκαν στην καταγραφή των εννοιολογικών αντιλήψεων που έχουν οι μαθητές – φοιτητές – καθηγητές για την έννοια της συνάρτησης και στην μελέτη των διαδικασιών που χρησιμοποίησαν στα διάφορα αναπαραστατικά πλαίσια της. Ιδιαίτερο ρόλο, όμως, παίζουν οι μεταβάσεις μεταξύ των αναπαραστατικών πλαισίων της συνάρτησης και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν σε αυτές οι μαθητές.

[1.4β] Οι μεταβάσεις μεταξύ των αναπαραστατικών πλαισίων της συνάρτησης και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές

Όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, η γνώση της συνάρτησης σε καθένα από τα αναπαραστατικά της πλαίσια είναι αποσπασματική και δεν αρκεί για να δομηθεί μια σωστή εικόνα της συνάρτησης. Κατά τον Hitt (1998), καταλυτικό ρόλο παίζει η ευχέρεια εναλλαγής μεταξύ των αναπαραστατικών πλαισίων αλλά και η δυνατότητα συσχέτισης αυτών. Για τους Lesh et al. (1987) η αποτελεσματική κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας συνίσταται από:

α) την ικανότητα αναγνώρισης της έννοιας σε μια ποικιλία διαφορετικών αναπαραστατικών πεδίων,

β) την ικανότητα διαχείρισης της έννοιας εντός του δοθέντος αναπαραστατικού πεδίου καθώς και

γ) την ικανότητα μετάφρασης της έννοιας από ένα πεδίο στο άλλο.

Αυτό, όμως, αποτελεί και τον πυρήνα της δυσκολίας στην διδασκαλία της έννοιας συνάρτηση, αφού η εναλλαγή και συσχέτιση δυσκολεύουν τους μαθητές λυκείου (Hitt, 1998), τους απόφοιτους λυκείου (Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992; Even, 1998) αλλά και τους εκπαιδευτικούς (Hitt, 1998). Γι’ αυτό το λόγο, η ανάπτυξη ευχέρειας στην εναλλαγή μεταξύ των αναπαραστατικών πλαισίων χωρίς απώλεια πληροφοριών, αποτελεί τον βασικό στόχο της διδασκαλίας της έννοιας συνάρτηση (Janvier, 1987a; Even, 1998; Hitt, 1998).

Οι Kaldrimidou & Ikonomou (1998) υποστηρίζουν ότι ο χειρισμός και η επεξεργασία κάθε τρόπου αναπαράστασης απαιτεί διαφορετικό πλαίσιο επεξεργασίας της πληροφορίας. Για παράδειγμα ο αναλυτικός τύπος, σύμφωνα με τη γνωστική προσέγγιση, απαιτεί σειριακή επεξεργασία των δεδομένων, ενώ στη γραφική αναπαράσταση τα δεδομένα δίνονται ολιστικά. Δεν αρκεί, όμως, η ικανότητα επεξεργασίας πληροφοριών σε κάθε πλαίσιο μεμονωμένα, αλλά και η μετάβαση από το ένα πλαίσιο στο άλλο, σε πλήρη συμφωνία με τον ορισμό της συνάρτησης αλλά και χωρίς την απώλεια πληροφοριών. Τη μετάβαση αυτή ορίζουν ως μετάφραση αναπαραστάσεων.

Αναφερόμενος σε αυτή τη μετάβαση, ο Janvier (1987a) υποστηρίζει ότι δεν αποτελεί μια απλή μετάφραση πληροφοριών αλλά μια μεταφορά, διότι πριν την μετατροπή της πληροφορίας σε άλλο πεδίο προηγείται μια ανάλυση. Αυτή η ανάλυση παράγει μια νέα πληροφορία, η οποία εν τέλει εκφράζεται σε ένα άλλο συμβολικό σύστημα. Ειδικότερα, με τον όρο «μετάφραση αναπαραστάσεων» ο ίδιος (ibid, 1987a, σελ. 27) αναφέρεται στην «*ψυχολογική διαδικασία που λαμβάνει χώρα όταν μεταφερόμαστε από ένα σύστημα αναπαράστασης σε ένα άλλο, όπως για παράδειγμα από μια αλγεβρική εξίσωση σε γραφική παράσταση»*. Η ύπαρξη δύο τουλάχιστον μορφών αναπαράστασης, η αρχική (πηγή) και η τελική (στόχος) αποτελεί βασική προϋπόθεση για να καταστεί δυνατή η μετάφραση. Για παράδειγμα, μεταξύ του αλγεβρικού τύπου και της γραφικής παράστασης προκύπτουν δύο μεταφράσεις: από τον τύπο στην γραφική παράσταση και από την γραφική παράσταση στον τύπο. Οι Lesh et al. (1987) τονίζει ότι η αρχική αναπαράσταση πρέπει να ειδωθεί από την οπτική γωνία της τελικής. Ο τρόπος και η οπτική γωνία που ο μαθητής «βλέπει» την αναπαράσταση είναι αποτέλεσμα διδασκαλίας, χωρίς, όμως, να αντιγράφει τον καθηγητή, αλλά οργανώνοντας τη δική του εμπειρία (Von Glasersfeld, 1987b).

Ο Hitt (1998, σελ.125), στην προσπάθειά του να συνδέσει την έννοια της συνάρτησης με τον συνδυασμό των διαφόρων αναπαραστάσεών της, ανέδειξε την ύπαρξη πέντε επιπέδων κατανόησης της έννοιας:

1^{ο} Επίπεδο: Τα υποκείμενα έχουν ανακριβείς ιδέες για την έννοια (ένα ασαφές μείγμα των διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας).

2^{ο} Επίπεδο: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να αναγνωρίσουν τις διάφορες αναπαραστάσεις αλλά και τα συστήματα αναπαράστασης της έννοιας.

3^{ο} Επίπεδο: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να μεταφράσουν από το ένα αναπαραστατικό σύστημα σε άλλο, διατηρώντας το πλήρες νόημα της πληροφορίας.

4^{ο} Επίπεδο: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να συνδυάσουν με σαφήνεια δύο συστήματα αναπαράστασης.

5^{ο} Επίπεδο: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να συνδυάσουν σε σαφήνεια δύο συστήματα αναπαράστασης με σκοπό την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος.

Συνεπώς για να φτάσει το υποκείμενο στο $5^{ο}$ επίπεδο, δηλαδή να «κατακτήσει» την ικανότητα επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος, θα πρέπει πρώτα να έχει αναπτύξει την ικανότητα μετάφρασης από ένα σύστημα σε ένα άλλο, χωρίς απώλεια νοήματος της πληροφορίας.

Οι Lesh et al. (1987) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών παρουσιάζουν δυσκολίες στην κατανόηση των συμβόλων και της γλώσσας που απαιτείται στην αναπαράσταση και τον χειρισμό των μαθηματικών εννοιών που υπάρχουν στα προβλήματα. Αυτοί οι παράγοντες δυσχεραίνουν τους μετασχηματισμούς μέσα στο ίδιο πεδίο αλλά και τις μεταφράσεις από ένα αναπαραστατικό πεδίο σε ένα άλλο. Η υπερπήδηση αυτών των εμποδίων θα συντελέσει ουσιαστικά στην κατάκτηση της επιδιωκόμενης μαθηματικής έννοιας. Οι ίδιοι (ibid, 1987) συμπληρώνουν ότι οι μετασχηματισμοί μέσα στο ίδιο αναπαραστατικό πλαίσιο και οι μεταφράσεις μεταξύ των αναπαραστατικών πλαισίων βρίσκονται σε σχέση αλληλεξάρτησης.

Στην έρευνα που πραγματοποίησε σε φοιτητές μαθηματικών, η Even (1998) εστίασε στη σχέση γνώσης της συνάρτησης με την ευχέρεια εναλλαγής μεταξύ των αναπαραστατικών πλαισίων. Τα αποτελέσματα κατέδειξαν την ισχυρή σχέση της ικανότητας σύνδεσης των διαφόρων αναπαραστάσεων της συνάρτησης με τους διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης των συναρτήσεων, το πλαίσιο παρουσίασης και τη γνώση για τις υποκείμενες ιδέες που την περιβάλλουν. Για τη συνάρτηση, η προσέγγιση μπορεί να γίνει με δύο τρόπους: ολιστικά, όταν πρόκειται να εξεταστεί η συνολική της συμπεριφορά της ή κατά σημεία όταν πρόκειται να μελετηθούν συγκεκριμένα σημεία, όπως η εύρεση του πεδίου ορισμού από ένα δοσμένο γράφημα. Το υποκείμενο που μπορεί να χειριστεί εξίσου καλά και τους δύο τρόπους προσέγγισης και έχει βαθιά γνώση των υποκείμενων ιδεών, μπορεί και να μεταβεί με ευκολία από μια αναπαράσταση σε άλλη.

Ο Γαγάτσης et al. (2000) διαπίστωσαν ότι οι γραφικές παραστάσεις και οι πίνακες τιμών είναι τα είδη των αναπαραστάσεων τα οποία οι μαθητές δείχνουν να χειρίζονται αποτελεσματικότερα. Ο λόγος αποδόθηκε στο γεγονός ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν τις γραφικές παραστάσεις ως διαδικασία και όχι ως αντικείμενο. Η διάσταση διαδικασία αναπτύσσεται ευκολότερα από τον μαθητή μετά από επανειλημμένη χρήση/προστριβή με το γράφημα, σε αντίθεση με την διάσταση αντικείμενο που αποκτάται δυσκολότερα. Κατά την Sfard (1991) το ιδανικό θα ήταν να αναπτυχθούν και οι δύο διαστάσεις, γεγονός που θα οδηγήσει σε βαθιά κατανόηση του συνόλου της έννοιας.

Είναι, λοιπόν, σαφές ότι η ικανότητα αναγνώρισης και αναπαράστασης της ίδιας έννοιας σε διαφορετικά αναπαραστατικά πεδία καθώς και η ευχέρεια στην εναλλαγή και σύνδεση μεταξύ αυτών είναι σημαντική για την κατανόηση της έννοιας συνάρτησης (Even,1998). Ωστόσο, παρά τον ουσιαστικό ρόλο που διαδραματίζουν οι μεταφράσεις, οι στρατηγικές μετάφρασης σπάνια αποτελούν αντικείμενο διδασκαλίας μέσα στην τάξη (Lesh et al., 1987; Janvier, 1987a). Σε μια προσπάθεια απάντησης του φαινομένου, οι ίδιοι (ibid, 1987) καταγράφουν την παρανόηση ότι η μετάφραση είναι μια εύκολη, αν όχι τυπική διαδικασία, γι' αυτό και δεν τυγχάνει της δέουσας προσοχής.

Ένα εύρημα που απασχόλησε τους ερευνητές ήταν η αποτυχία αναγνώρισης της ίδιας συνάρτησης σε διαφορετικό πλαίσιο. Το γεγονός αποδόθηκε στην έλλειψη ελαστικότητας στην εναλλαγή μεταξύ των διαφορετικών μορφών αναπαράστασης (Hitt, 1998) αλλά και στην αδυναμία σύνδεσης των διαφόρων μορφών αναπαράστασης μεταξύ τους. Κατά τον Duval (2002) η μάθηση και η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας επιτυγχάνεται όταν υπάρχει εμπλοκή, συνδυασμός ή συνύπαρξη (coordination) δύο τουλάχιστον πεδίων αναπαράστασης της έννοιας από τους μαθητές. Αν ένας μαθητής είναι ικανός να επιτύχει ένα έργο που εμπλέκει συνάρτηση σε ένα αναπαραστατικό πεδίο και αποτυγχάνει σε ένα άλλο, τότε τείνει να ταυτίσει την έννοια με το αναπαραστατικό πλαίσιο στο οποίο σημείωσε επιτυχία. Ουσιαστικά διαλύει το παζλ της έννοιας συνάρτησης, διαχωρίζοντας τα κομμάτια (αναπαραστατικά πεδία) που το απαρτίζουν. Το φαινόμενο διαχωρισμού επιβεβαίωσαν και οι Elia et al. (2005), οι οποίοι διαπίστωσαν ότι οι μαθητές της έρευνάς τους δεν ήταν σε θέση να συνδυάσουν τα αναπαραστατικά πλαίσια της συνάρτησης, ούτε να περάσουν επιτυχώς από το ένα στο άλλο πεδίο χωρίς απώλεια πληροφοριών. Αυτό λειτούργησε εις βάρος της μάθησης και κατανόησης της έννοιας συνάρτηση. Οι ίδιοι του απέδωσαν τον όρο *σπονδυλοποίηση* ή *στεγανοποίηση*[2], ορμώμενοι από την ιδιότητα των σπονδύλων[3] να είναι αδιαπέραστοι μεταξύ τους. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγει και η Yerushalmy (1997) η οποία συμπληρώνει ότι οι μαθητές δεν δίνουν σημασία στη σημαντικότητα του περάσματος μεταξύ των αναπαραστατικών πλαισίων, γεγονός που σχετίζεται και με την γενικότερη γνώση της έννοιας.

Συνεπώς, κατά τον Schoenfeld (1992), η κατανόηση της συνάρτησης προϋποθέτει ουσιαστική γνώση ενός μεγάλου αριθμού προαπαιτούμενων γνώσεων, πολλαπλών αναπαραστάσεων του αντικειμένου αλλά και ικανότητα συντονισμένης μετακίνησης μεταξύ όλων αυτών των προοπτικών και αναπαραστάσεων. Κοινώς, η κατανόηση είναι μια πολύπλοκη διαδικασία ενώ διδακτικές, γνωστικές, επιστημολογικές και μαθηματικές μελέτες

[2] Ο όρος χρησιμοποιείται από τους Elia et al. 2005 για να περιγράψει την κατάσταση κατά την οποία ο μαθητής εργάζεται στο ένα πεδίο αναπαράστασης χωρίς να είναι σε θέση να επικοινωνεί τις ιδέες του με επιτυχία σε ένα άλλο.
[3] *Όρος Ψυχολογίας:* μονάδες επεξεργασίας πληροφοριών που αντιστοιχούν σε ένα μικροπεδίο (Fodor, 1983 στο Elia et al. 2005).

παρεμβαίνουν και αλληλεπιδρούν για τον συντονισμό των διαδικασιών που οδηγούν σε αυτή.

[1.4γ] Η εναλλαγή μεταξύ αλγεβρικού και γραφικού πλαισίου αναπαράστασης

Απ' όλες τις μεταβάσεις, αυτή που έχει απασχολήσει περισσότερο τους ερευνητές είναι το πέρασμα από το αλγεβρικό στο γραφικό πεδίο και αντίστροφα. Το ενδιαφέρον οφείλεται στην φύση αυτής της μετάβασης αφού, όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, πρόκειται για να μια ριζική αλλαγή στον τρόπο ανάγνωσης και επεξεργασίας των προσλαμβανόμενων πληροφοριών. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω (*βλ.* 1.4α), η γραφική παράσταση δίνει παράλληλα πολλές πληροφορίες σχετικά με τη συνάρτηση, ενώ η αλγεβρική δίνει σειριακά τις πληροφορίες. Λόγω της πληθώρας των δεδομένων και των διαδικασιών μετατροπής απαιτούνται περισσότερες γνώσεις για να αποκωδικοποιηθούν/ερμηνευτούν, περισσότερη επεξεργασία καθώς και ποιοτικότερη διδασκαλία με έμφαση στη μετάβαση αυτή.

Στην έρευνα του Knuth (2000) οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να διαλέξουν αλγεβρικές ή γραφικές προσεγγίσεις ώστε να επιλύσουν με τον ευκολότερο δυνατό τρόπο ένα σύνολο έργων. Να σημειωθεί ότι όλα τα έργα παρείχαν επαρκείς πληροφορίες ώστε να επιλυθούν και με τους δύο τρόπους. Τα ευρήματα έδειξαν ότι μια πλειοψηφία της τάξεως του 75% προτίμησε τις αλγεβρικές διαδικασίες, παρ' όλο που η γραφική επίλυση ήταν ευκολότερη και συντομότερη. Λαμβάνοντας υπόψη τους γνωστικούς και εκπαιδευτικούς παράγοντες, ο Knuth (2000) απέδωσε την προτίμηση στο ότι η αλγεβρική επίλυση ευνοεί την διαδικαστική προσέγγιση (διάσταση «διαδικασία» κατά Sfard, 1992, *βλ. 1.2*). Αντίστοιχα η γραφική επίλυση δεν ευνοεί τέτοιου είδους προσεγγίσεις λόγω της αδυναμίας να φανούν τα μεμονωμένα σημεία που περιέχονται σε μια γραφική παράσταση (Goldenberg, 1988; Moschkovich et al., 1993 στο Knuth 2000). Άρα κατά κάποιο τρόπο η γραφική παράσταση «κρύβει» τα χαρακτηριστικά της πίσω από τις πολλές πληροφορίες που προσφέρει ταυτόχρονα, ενώ είναι χρήσιμη σε όσους ξέρουν που θα επιστήσουν την προσοχή τους για να αντλήσουν πληροφορίες. Χαρακτηριστικά, ο Knuth (2000, σελ:506) αναφέρει ότι *«η πλειοψηφία των μαθητών δεν αναγνωρίζει ότι η επιλογή οποιουδήποτε σημείου της γραφικής παράστασης της ευθείας θα μπορούσε να είναι λύση της εξίσωσης της ευθείας»*.

Στην έρευνα των Eisenberg & Dreyfus (1992, στο Knuth, 2000) τα έργα ήταν σχεδιασμένα με τέτοιο τρόπο ώστε να ευνοούν την γραφική επίλυση. Παρόλα αυτά, ως πρώτο τρόπο οι συμμετέχοντες προτίμησαν την αλγεβρική επίλυση, ενώ όταν τους ζητήθηκε δεύτερος, επέμεναν να αναζητούν πάλι αλγεβρικές λύσεις. Αν δεν μπορούσαν να βρουν δεύτερη αλγεβρική λύση τότε κατέφευγαν σε γραφική. Οι ίδιοι υποστηρίζουν ότι οι μαθητές τείνουν να σκέφτονται αλγεβρικά παρά «οπτικά» (Eisenberg & Dreyfus, 1994).

Ένας ακόμα παράγοντας που ωθεί τους μαθητές να επιμένουν στις αλγεβρικές διαδικασίες είναι η φύση των ίδιων των έργων που τους δίνονται να φέρουν εις πέρας. Όταν ο μαθητής καλείται να λύσει μια εξίσωση, υποθέτει ότι υπάρχει μια ακριβής λύση, ένας αριθμός. Γι' αυτό το λόγο καταφεύγει σε μια αλγεβρική παρά γραφική διαδικασία. Είναι γεγονός ότι στο μυαλό των μαθητών υπάρχει η αντίληψη πως η γραφική επίλυση δίνει μια προσεγγιστική και όχι ακριβής λύση (ibid, 1994).

Επιπλέον, ο τρόπος διδασκαλίας αλλά και το πρόγραμμα σπουδών χαρακτηρίζεται από μια εστίαση στις αλγεβρικές αναπαραστάσεις και τον χειρισμό τους. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να θεωρούν περιττές τις γραφικές παραστάσεις ή ακόμα και διαχωρισμένες από τις αλγεβρικές (Yerushalmy, 1997). Άλλα, πάλι, διδακτικά εγχειρίδια εξασκούν τους μαθητές στο πέρασμα από αλγεβρικό στο γραφικό τρόπο αναπαράστασης, με αποτέλεσμα να υπονομεύεται το αντίστροφο. Ειδικά οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σπάνια εξασκούνται στη εύρεση του αλγεβρικού τύπου, δοθείσας της γραφικής παράστασης. Οι Leinhardt et al. (1990, στο Γραββάνη 2006) έδειξαν ότι οι μαθητές ασχολούνται κυρίως με προβλήματα που ζητούν μετάφραση από τον αλγεβρικό τύπο σε γραφική παράσταση, κατά την οποία κατασκευάζουν πρώτα τον πίνακα τιμών και στη συνέχεια σχεδιάζουν τα σημεία στο σύστημα αξόνων. Αυτή η παρεμβολή του αριθμητικού πλαισίου (πίνακας τιμών) συμβάλει θετικά στη σύνδεση εξίσωσης-γραφικής παράστασης και διευκολύνει τους μαθητές να αντιληφθούν ότι το σημείο ανήκει στη γραφική παράσταση μιας ευθείας αν ικανοποιεί την εξίσωση του. Στην έρευνα της Γραββάνη (2006) η αντίθετη σύνδεση φαίνεται δυσκολότερη και οι συμμετέχοντες στην έρευνα αντιμετώπισαν δυσκολίες στην μετατροπή της γραφικής παράστασης σε τύπο, γεγονός που καθιστά την κατανόηση περιορισμένη και μονόπλευρη. Τα έργα, στην έρευνα των Gagatsis & Shiakalli (2004), αφορούσαν τις ίδιες συναρτήσεις σε διαφορετικά αναπαραστατικά πλαίσια. Αυτό που διαπίστωσαν είναι πως οι συμμετέχοντες σημείωσαν τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας στην μετάφραση από γραφική σε αλγεβρική αναπαράσταση. Η ερμηνεία που έδωσαν είναι πως οι μαθητές αντιλαμβάνονται αυτές τις δύο αναπαραστάσεις ως διαφορετικά έργα και όχι τρόπους αναπαράστασης της ίδιας έννοιας. Οι ίδιοι, απαντώντας στο κύριο ερευνητικό τους ερώτημα, επισημαίνουν ότι υπάρχει σύνδεση της ικανότητας επίλυσης προβλήματος με την ικανότητα μετάφρασης της συνάρτησης. Τονίζουν δε, ότι η επίλυση προβλήματος δεν εξαρτάται μόνο από την ευχέρεια μετάφρασης, αλλά πρέπει να αναπτυχθούν και άλλες ικανότητες για να θεωρηθεί κανείς ικανός να επιλύει προβλήματα.

Κατά τους Καλδρυμίδου & Οικονόμου (1992) οι μαθητές δυσκολεύονται να απομονώσουν τις πληροφορίες που περιέχει η γραφική παράσταση γι' αυτό και δεν της δίνουν την απαιτούμενη σημασία. Συνηθίζουν να χειρίζονται μονομερώς αλγεβρικές εκφράσεις και διαδικασίες ώστε να προβούν σε αναγνώριση ή πράξεις μεταξύ των συναρτήσεων. Οι ίδιοι (ibid, 1992) επισημαίνουν πως η πηγή αυτών των δυσκολιών είναι:

1] Γνωστικής φύσης: περιλαμβάνει την δυσκολία της ολιστικής και επιλεκτικής φύση της εικόνας ως τρόπου παράστασης πληροφοριών.

2] Επιστημολογικής φύσης: περιλαμβάνει την επιστημολογία της μαθηματικής κοινότητας και της διδακτικής των σχολικών μαθηματικών (π.χ. το πλαίσιο της συνάρτησης στη δευτεροβάθμιας εκπαίδευση παρουσιάζεται περιορισμένο και καλλιεργείται κυρίως η μετάβαση από τον αλγεβρικό τύπο στην γραφική παράσταση της συνάρτησης και αντίστροφα).

3] Συναισθηματικής φύσης: περιλαμβάνει την αβεβαιότητα και το άγχος των υποκειμένων όταν αντιμετωπίζουν εικονικές ή γραφικές παραστάσεις.

Από πλευράς τους οι Bossé et al. (2011), έχοντας ερευνήσει τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών σε θέματα μετάφρασης συναρτήσεων, προτείνουν μια σειρά στρατηγικών ώστε να προληφθούν φαινόμενα όπως τα προαναφερθέντα. Συγκεκριμένα, συστήσουν οι εκπαιδευτικοί να επαναπροσδιορίσουν τις προσωπικές τους πεποιθήσεις σχετικά με το ποιες μεταφράσεις είναι ικανοί να διενεργήσουν οι μαθητές, να εντοπίσουν ποιες μεταφράσεις δυσκολεύουν περισσότερο τους δικούς τους μαθητές, να δώσουν ίδια βαρύτητα στη διδασκαλία κάθε αναπαραστατικού πλαισίου, να εξασκήσουν τους μαθητές στην εναλλαγή αυτών δημιουργώντας γέφυρες μεταξύ τους και να χρησιμοποιήσουν σύγχρονα μέσα αναπαράστασης καθώς και σενάρια της φύσης και της πραγματικής ζωής στη διδασκαλία τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ: $2^{ο}$

[2.1] Στόχος της έρευνας

Με βάση το θεωρητικό πλαίσιο που προηγήθηκε και λαμβάνοντας υπόψη το σημαντικό ρόλο που διαδραματίζουν οι συναρτήσεις στη Μαθηματική Εκπαίδευση αλλά και τα ευρήματα των προηγούμενων ερευνών, εκπονήθηκε η παρούσα εργασία με σκοπό να διερευνήσει την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης από μαθητές Γ τάξης του Γενικού Λυκείου. Στα πλαίσια αυτής της διερεύνησης, μελετήθηκαν βασικές διαστάσεις της κατανόησης της έννοιας όπως: η ικανότητα αναγνώρισης μια μαθηματικής έκφρασης ως συνάρτηση, η ικανότητα μετάφρασης μια συνάρτησης από ένα αναπαραστατικό πλαίσιο σε ένα άλλο και τέλος η ικανότητα αποτελεσματικής επίλυσης ενός προβλήματος που εμπεριέχει συναρτήσεις (χειρισμός συνάρτησης εντός πλαισίου). Τέλος, εξετάστηκε αν υπάρχει σύνδεση μεταξύ αυτών των ικανοτήτων.

[2.2] Ερευνητικά ερωτήματα

Συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα που τίθενται είναι:

1] Πόσο ικανοί είναι οι μαθητές της Γ Λυκείου στην αναγνώριση μιας συνάρτησης στο αριθμητικό, το αλγεβρικό και το γραφικό πλαίσιο; *(Άξονας αναγνώρισης).*

2] Πόσο ικανοί είναι οι μαθητές της Γ Λυκείου στη μετάφραση μιας συνάρτησης από ένα αναπαραστατικό πλαίσιο σε ένα άλλο; *(Άξονας μετάφρασης).*

3] Σε ποιο αναπαραστατικό πλαίσιο οι μαθητές της Γ Λυκείου επιλύουν αποτελεσματικότερα ένα μαθηματικό πρόβλημα που εμπεριέχει συναρτήσεις; *(Άξονας επίλυσης).*

4] Υπάρχει συσχέτιση της ικανότητας αναγνώρισης με την ικανότητα μετάφρασης μιας συνάρτησης στα αναπαραστατικά της πλαίσια; Υπάρχει συσχέτιση της ικανότητας μετάφρασης μιας συνάρτησης με την επίλυση προβλήματος που εμπλέκει συναρτήσεις; *(Συσχετίσεις ικανοτήτων).*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ: 3^{ο}

[3.1] Μεθοδολογία

Έχοντας ως γνώμονα τον βασικό στόχο της έρευνας και λαμβάνοντας υπόψη τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν, κρίθηκε αναγκαία η στατιστική επεξεργασία των δεδομένων και γι' αυτό το λόγο επιλέχτηκε η χρήση της ποσοτικής - περιγραφικής μεθόδου. Ειδικότερα, η έρευνα μπορεί να χαρακτηριστεί και ως δειγματοληπτική, καθότι έγινε συλλογή δεδομένων από ερωτηματολόγια ενός δείγματος μαθητών που φοίτησαν στην Γ τάξη του Γενικού Λυκείου, κατά το σχολικό έτος 2017-2018.

[3.2] Συμμετέχοντες

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 75 μαθητές της Γ Λυκείου, εκ των οποίων ζητήθηκε η εθελοντική συμπλήρωση ενός οχτασέλιδου ερωτηματολογίου (*βλ.* Παράρτημα IV). Οι συγκεκριμένοι μαθητές προέρχονταν από δημόσια και ιδιωτικά σχολεία του Νομού Θεσσαλονίκης. Ειδικότερα, τα αγόρια ήταν 46 και τα κορίτσια 29, ενώ τα 31 ακολούθησαν την κατεύθυνση των Σπουδών Πληροφορικής-Οικονομίας και οι υπόλοιποι 44 την κατεύθυνση Θετικών Σπουδών. Όλοι τους είχαν τα Μαθηματικά Προσανατολισμού ως εξεταζόμενο μάθημα στις Πανελλαδικές Εξετάσεις.

Ο χρόνος που είχαν στη διάθεσή τους οι μαθητές ήταν μια σχολική ώρα (45 λεπτά) και τα ερωτηματολόγια μοιράστηκαν στους μαθητές δύο βδομάδες πριν διαγωνιστούν στις Πανελλαδικές Εξετάσεις, συνεπώς ήταν καλά προετοιμασμένοι και είχαν διδαχθεί όλη την ύλη που αφορά τις συναρτήσεις, ώστε να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις του ερωτηματολογίου.

Στο δείγμα της έρευνας είχε διδαχθεί το σχολικό εγχειρίδιο της Γ τάξης του Γενικού Λυκείου (Ανδρεαδάκης *et al.,* 2016) σύμφωνα με το ισχύον πρόγραμμα σπουδών και τις ισχύουσες οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και την διδασκαλία των Μαθηματικών του Γενικού Λυκείου (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 1997, 2007). Παρ' όλα αυτά, οι μαθητές δεν ήρθαν σε επαφή με τη συνάρτηση για πρώτη φορά στην τελευταία τάξη αλλά μεταχειρίζονται την έννοια και τις ιδιότητες της από την πρώτη κιόλας τάξη του Γενικού Λυκείου (Α Λυκείου, 6^{ο} Κεφάλαιο, Ανδρεαδάκης *et al.,* 1998).

[3.3] Ερευνητικό εργαλείο

Το ερευνητικό εργαλείο της παρούσας εργασίας ήταν το ερωτηματολόγιο, όπως αυτό φαίνεται στο Παράρτημα IV. Το ερωτηματολόγιο αποτελείται σε 3 ομάδες ερωτήσεων. Κάθε μια από αυτές είχε ως στόχο να απαντήσει σε ένα από τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στο 2^{ο} Κεφάλαιο. Συγκεκριμένα, στο πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου (ερωτήσεις από Α1 έως Α14) δόθηκαν μαθηματικές εκφράσεις με 3 διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης (αριθμητική, αλγεβρική και γραφική αναπαράσταση) και ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να επιλέξουν ποιά πιστεύουν ότι παριστάνει συνάρτηση. Για τις εκφράσεις που δεν αποτελούσαν αναπαράσταση συνάρτησης ζητήθηκε αιτιολόγηση. Η πρώτη ομάδα ερωτήσεων είχε σκοπό να διερευνήσει την ικανότητα αναγνώρισης μιας συνάρτησης, γι' αυτό και εντάχθηκε στον άξονα αναγνώρισης. Στο δεύτερο μέρος (ερωτήσεις Β1 έως Β7) δόθηκαν μαθηματικές εκφράσεις και ζητήθηκε από τους μαθητές να τις μεταφράσουν από το δοθέν αναπαραστατικό πλαίσιο στα άλλα δύο. Επιπροσθέτως, στο τέλος κάθε ερώτησης ζητήθηκε να επιλέξουν την μετάφραση που θεώρησαν ευκολότερη. Η δεύτερη ομάδα ερωτήσεων είχε σκοπό να διερευνήσει την ικανότητα μετάφρασης μιας συνάρτησης από ένα αναπαραστατικό πλαίσιο σε ένα άλλο, γι' αυτό και εντάχθηκε στον άξονα μετάφρασης. Στην τρίτη και τελευταία ομάδα δόθηκαν δύο προβλήματα και ζητήθηκε από τους μαθητές να τα λύσουν με έναν ή και δεύτερο τρόπο, αν μπορούσαν. Σκοπός αυτής της ομάδας ερωτήσεων ήταν να ανακαλύψει το πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές επιλύουν αποτελεσματικότερα προβλήματα που ενέχουν συναρτήσεις. Οι ερωτήσεις αυτής της ομάδας εντάχθηκαν στον άξονα επίλυσης.

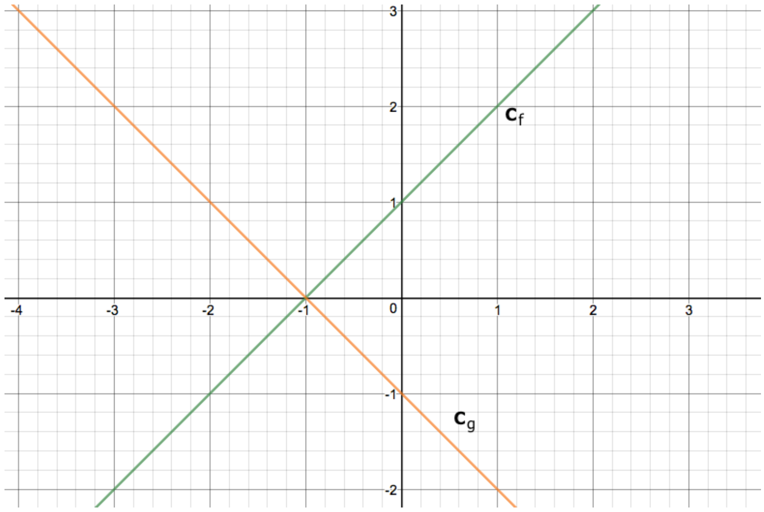
Ειδικότερα, στις ερωτήσεις Α1 έως Α4 δόθηκαν 4 πίνακες με ζεύγη συντεταγμένων, τα οποία αποτελούσαν τα αριθμητικά αποτελέσματα (αριθμητικές αναπαραστάσεις) των μαθηματικών εκφράσεων $x = 4$, $y = 3x$, $y = -1$, $y = x^2$ αντίστοιχα και ζητήθηκε από τους μαθητές να αναγνωρίσουν ποιοι από τους δοθέντες πίνακες θα μπορούσαν να αποτελέσουν έκφραση συνάρτησης. Για τους πίνακες που δεν αποτελούν έκφραση συνάρτησης, ζητήθηκε να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Από τη συγκεκριμένη ομάδα ερωτήσεων μόνο η Α1 ($x = 4$) δεν παρίστανε συνάρτηση ενώ ως αιτιολόγηση θα μπορούσε να αναφερθεί το γεγονός ότι ίδιες τιμές του x αντιστοιχίζονται σε διαφορετικά y, γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό της συνάρτησης. Στις ερωτήσεις Α5 έως Α8 δόθηκαν οι αλγεβρικές παραστάσεις των εκφράσεων $y = 3$, $x = -9$, $y^2 = x$, $y = -2x$ αντίστοιχα και ζητήθηκε από τους μαθητές να αναγνωρίσουν ποιοι αλγεβρικοί τύποι θα μπορούσαν να εκφράζουν συνάρτηση. Από τις προαναφερθείσες η Α7 δεν παρίστανε συνάρτηση ($y^2 = x$) και αρκούσε να δοθεί η ίδια ή όποια παραπλήσια αιτιολόγηση με αυτή της Α1. Τέλος, στις ερωτήσεις Α9 έως Α14 δόθηκαν οι γραφικές παραστάσεις των εκφράσεων $y = 3, y^2 = x, x = 5, y = 3x, \{y = x + 2$ για $x \leq 1$ και $y = x + 1$ για $x \geq 0\}$ δίκλαδη, $x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}y + 4{,}712\right) + 1$ για $-1 \leq y \leq 3$ αντίστοιχα και ζητήθηκε να αναγνωριστούν ποιες από τις παραπάνω θα μπορούσαν να παριστάνουν συνάρτηση. Για τις Α10, Α11, Α13 και Α14 θα έπρεπε να αιτιολογήσουν την απάντησή τους διότι δεν αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Παρόμοια ερωτήματα συναντώνται στην έρευνα των Gagatsis & Shiakalli (2004).

Όπως είναι κατανοητό, στις ερωτήσεις επιλέχτηκαν οικείες στους μαθητές εξισώσεις της μορφής $x = a, y = a, y = ax$, όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός, $y^2 = x$ και $y = x^2$. Στην περιγραφική στατιστική ανάλυση που ακολουθεί στο επόμενο κεφάλαιο, αναλύονται τα αποτελέσματα με βάση την κατηγοριοποίηση ως προς το αναπαραστατικό πλαίσιο αλλά και τον τύπο της μαθηματικής έκφρασης.

Η δεύτερη ομάδα απαρτίζεται από 7 έργα, τα οποία διερευνούν τον δεύτερο άξονα της εργασίας και αφορούν την ευχέρεια μετάφρασης/εναλλαγής μεταξύ των αναπαραστατικών πλαισίων της συνάρτησης. Συγκεκριμένα στις ερωτήσεις Β1, Β3, Β4 δόθηκαν οι αλγεβρικοί τύποι: $y = 2x + 1,\ x \cdot y = 1$, με $x \neq 0,\ y = \begin{cases} 3x, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ και ζητήθηκε η σχεδίασή τους στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων (μετάφραση από το αλγεβρικό πλαίσιο στο γραφικό) καθώς και η συμπλήρωση του πίνακα τιμών που προκύπτει (μετάφραση από το αλγεβρικό πλαίσιο στο αριθμητικό). Ακολούθως, στις ερωτήσεις Β5, Β6, Β7 δόθηκαν οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων $y = x^2$, $y = -2x + 2$, $y = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 2 \\ x, & x \geq 2 \end{cases}$ και ζητήθηκε η συμπλήρωση του πίνακα τιμών τους καθώς και οι αλγεβρικοί τους τύποι. Τέλος στην ερώτηση Β2 δόθηκε ένας πίνακας τιμών αποτελούμενος από τα ζεύγη συντεταγμένων $(-1, -1)$, $(0, -1)$, $(1, -1)$ και ζητήθηκε η γραφική του χάραξη και ο αλγεβρικός τύπος. Στη συγκεκριμένη ερώτηση δόθηκε προφορική διευκρίνιση ότι η συνάρτηση που περιγράφεται είναι σταθερή, συνεχής και ότι τα x, y είναι πραγματικοί αριθμοί. Στο τέλος κάθε ερώτηση ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να καταγράψουν ποια μετάβαση θεώρησαν ευκολότερη.

Στην τρίτη και τελευταία ομάδα έργων δόθηκαν μια άσκηση και ένα πρόβλημα, για τα οποία διευκρινίστηκε ότι μπορούν να επιλυθούν με οποιοδήποτε μαθηματικό τρόπο και σε οποιοδήποτε από τα 3 αναπαραστατικά πλαίσια (γραφικό, αλγεβρικό, αριθμητικό).

Στην άσκηση δόθηκαν οι γραφικές παραστάσεις των γραμμικών συναρτήσεων $f(x), g(x)$ και ζητήθηκε ο υπολογισμός του αθροίσματος $f(x) + g(x)$. Δεν δόθηκαν, όμως, οι αλγεβρικοί τύποι των συναρτήσεων παρά μόνο η αρίθμηση του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων, ώστε να είναι εφικτή η οπτική εξεύρεση των αριθμητικών τιμών των συντεταγμένων τους (προσδιορισμός των σημείων τομής με τους άξονες, μεταξύ τους, κ.ο.κ.). Ενδεικτικά, οι συμμετέχοντες θα μπορούσαν να προσδιορίσουν τους τύπους των συναρτήσεων από τα σημεία τομής με τους άξονες -αφού επρόκειτο για γραμμικές συναρτήσεις- και στη συνέχεια να τους αθροίσουν αλγεβρικά. Αξιοποιώντας μόνο το γραφικό πλαίσιο, οι μαθητές θα μπορούσαν να ισχυριστούν ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων ήταν κάθετες μεταξύ τους και συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$ (άρα αντίθετοι συντελεστές και αντίθετα σταθερά μέρη).



Εικόνα 3.1: *Το σχήμα που δόθηκε στην Γ1 άσκηση.*

Ο αριθμητικός τρόπος επίλυσης του εν λόγω έργου θα ήταν εφικτός αν οι μαθητές κατέγραφαν ενδεικτικά μερικά σημεία της κάθε συνάρτησης σε δύο πίνακες τιμών και άθροιζαν τις τεταγμένες που αντιστοιχούσαν στις ανάλογες τετμημένες. Όποιος τρόπος και να είχε επιλεχθεί θα κατέληγε στο μηδενικό άθροισμα. Η άσκηση αυτή πάρθηκε αυτούσια από την έρευνα του Proulx (2015) ενώ επιπλέον ζητήθηκε, αν ήταν δυνατόν, να δοθεί και δεύτερος τρόπος λύσης.

Στο τελευταίο έργο δόθηκε ένα πρόβλημα του πραγματικού κόσμου, στο οποίο οι μαθητές κλήθηκαν να πάρουν μια απόφαση, αφού πρώτα είχαν δημιουργήσει δύο γραμμικές συναρτήσεις. Συγκεκριμένα δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα:

> *Ένας οδηγός αυτοκινήτου έχει τις εξής δύο επιλογές: Να ανεφοδιαστεί με καύσιμα από ένα πρατήριο της χώρας του, όπου το κόστος μετάβασης στο πρατήριο είναι 2 ευρώ και το εν λόγω πρατήριο πουλάει το καύσιμο προς 1.5 ευρώ το λίτρο ή να μεταβεί σε πρατήριο μιας γειτονικής χώρας, όπου το κόστος μετάβασης στο πρατήριο είναι 18 ευρώ και το εκεί πρατήριο πουλάει το καύσιμο προς 1 ευρώ το λίτρο. Να βρεθεί για ποιά ποσότητα καυσίμων συμφέρει τον οδηγό το κάθε πρατήριο. Απάντησε και εξήγησε τον τρόπο με τον οποίο το έλυσες:*

Ειδικότερα, περιγράφηκαν λεκτικά τα κόστη ανεφοδιασμού ενός αυτοκινήτου από ένα εγχώριο και ένα πρατήριο καυσίμων γειτονικής χώρας, ως συνάρτηση των λίτρων καυσίμου. Η πρώτη συνάρτηση που έπρεπε να κατασκευαστεί ήταν η $f(x) = 1.5x + 2$ ενώ η δεύτερη ήταν η $g(x) = x + 18$, όπου x τα λίτρα καυσίμων ανεφοδιασμού και $f(x), g(x)$ τα κόστη ανεφοδιασμού σε ευρώ αν ο ιδιοκτήτης προτιμήσει το εγχώριο ή το πρατήριο της γειτονικής χώρας αντίστοιχα. Ένας τρόπος επίλυσης θα ήταν η γραφική απεικόνιση των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ στο ορθοκανονικό σύστημα και η εξεύρεση του σημείου τομής των δύο συναρτήσεων $(32,50)$, το οποίο στην πραγματικότητα μεταφράζεται ως εξής: αν ο οδηγός ανεφοδιαστεί με 32 λίτρα καυσίμων τότε θα πληρώσει 50 ευρώ και στα δύο πρατήρια. Αν, όμως, βάλει ποσότητα μεγαλύτερη των 32 λίτρων τότε τον συμφέρει να προτιμήσει το πρατήριο της ξένης χώρας ενώ αν βάλει μικρότερη των 32 λίτρων τον συμφέρει να προτιμήσει το εγχώριο (οπτικά από το γραφικό: C_f πάνω από την C_g για $x > 32$ ενώ C_f κάτω από την C_g για $x < 32$). Αλγεβρικά, θα μπορούσε να λυθεί η ανίσωση $f(x) > g(x) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow\ x > 32$ (ή $f(x) < g(x) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow\ x < 32$) ενώ αριθμητικά θα μπορούσαν να γίνουν δοκιμές στις συναρτήσεις αντικαθιστώντας διάφορες τιμές του x. Επειδή σκοπός του προβλήματος δεν ήταν η διερεύνηση της ικανότητας μοντελοποίησης των συμμετεχόντων, έγιναν υποδείξεις στην κατασκευή των απαιτούμενων συναρτήσεων ώστε να μην κολλήσουν στο εν λόγω βήμα.

[3.4] Αξιοπιστία και εγκυρότητα εργαλείου

Το εργαλείο μπορεί να θεωρηθεί αξιόπιστο καθώς δόθηκε σε κατάλληλο δείγμα, δηλαδή τη συγκεκριμένη κατηγορία μαθητών, στους οποίους είναι γνωστή η έννοια της συνάρτησης. Επιπλέον, είναι αξιόπιστο αφού πριν την τελική χορήγηση είχε πραγματοποιηθεί πιλοτικό τεστ ώστε να ελεγχθεί το περιεχόμενο και ο τρόπος διατύπωσης των ερωτήσεων. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύχθηκαν ασαφή και διφορούμενα ερωτήματα και διασφαλίστηκε η σταθερότητα των αποτελεσμάτων.

Επιπροσθέτως, η αξιοπιστία μετρήθηκε από τον δείκτη Cronbach's Alpha, τα αποτελέσματα του οποίου παρατίθενται αναλυτικά στο Παράρτημα ΙΙ. Συνοπτικά αναφέρεται ότι στον πρώτο άξονα (ερωτήσεις Α1 έως Α14) ο δείκτης είναι 0,926, τιμή που δείχνει υψηλή αξιοπιστία με την έννοια της εσωτερικής συνέπειας. Ομοίως, στους άλλους δύο άξονες οι τιμές του ίδιου δείκτη είναι 0,965 και 0,886. Σε όλες τις ερωτήσεις οι τιμές είναι μεγαλύτερες του +0,3 κατά συνέπεια υπάρχει ακόμα μια ένδειξη ότι η εσωτερική συνοχή της εκάστοτε υποκλίμακας είναι υψηλή.

Η εγκυρότητα του εργαλείου έχει εξασφαλισθεί αφού δομήθηκε με βάση τους ορισμούς των εννοιών, τα ερευνητικά ερωτήματα και την έγκριτη βιβλιογραφία στην οποία στηρίχθηκε, με γνώμονα πάντα, την ασφαλή εξαγωγή άρτιων συμπερασμάτων.

[3.5] Διαδικασία συλλογής δεδομένων

Όσον αφορά τη διαδικασία που ακολουθήθηκε για τη διενέργεια της έρευνας, τα βήματα είχαν ως εξής: συντάχθηκε ένα πιλοτικό ερωτηματολόγιο, το οποίο εν συνεχεία, δόθηκε προς συμπλήρωση/διαβούλευση σε μαθητές της Γ Λυκείου αλλά και καθηγητές που έχουν διδάξει την εν λόγω τάξη. Ειδικότερα επιλέχθηκαν 4 μαθητές διαφορετικών επιδόσεων στα Μαθηματικά, στους οποίους ανατέθηκε η συμπλήρωση του ερωτηματολογίου. Από αυτή την πιλοτική συμπλήρωση αναδιαμορφώθηκε το πλήθος των ερωτήσεων (αφαιρέθηκαν δύο ερωτήσεις από την Α και δύο από την Β ομάδα) ώστε να μειωθεί η έκταση του ερωτηματολογίου. Επίσης καταγράφηκε ο χρόνος επίλυσης όλων, ώστε να υπολογιστεί ο ακριβής χρόνος που απαιτείται για την πλήρη συμπλήρωσή του. Από την πλευρά τους οι δύο καθηγητές που διδάσκουν στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση επισήμαναν την δυσκολία των προβλημάτων και πρότειναν τη συμπλήρωση επιπλέον δεδομένων σε αυτά, ώστε να είναι πιο κατανοητά στους συμμετέχοντες.

Λαμβάνοντας υπόψη την ανατροφοδότηση αυτών των ομάδων, διαμορφώθηκε το τελικό ερωτηματολόγιο, όπως αυτό περιγράφεται παραπάνω (*βλ.* Κεφ. 3.3, Ερευνητικό εργαλείο) και απεικονίζεται στο Παράρτημα IV. Κατόπιν συνεννόησης με τον διδάσκοντα κάθε τμήματος, το ερωτηματολόγιο μοιράστηκε στα υποκείμενα της έρευνας, μαζί με σαφείς οδηγίες και 45 λεπτά χρόνο για την συμπλήρωσή του. Ο ερευνητής ήταν παρών κατά τη διάρκεια της ερευνητικής διαδικασίας και έδωσε διευκρινίσεις στους συμμετέχοντες σχετικά με το ερωτηματολόγιο.

[3.6] Κωδικοποίηση απαντήσεων

Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν κωδικοποιήθηκαν με βάσεις τις απαντήσεις των συμμετεχόντων ως εξής: Στις ερωτήσεις της πρώτης ομάδας, η επιτυχής αναγνώριση κωδικοποιήθηκε με *2*, η αποτυχημένη με *1* και *0* για όσους δεν έδωσαν απάντηση. Στις ερωτήσεις Α1, Α6, Α7, Α10, Α11, Α13 και Α14 οι δοθέντες αναπαραστάσεις δεν παρίσταναν συνάρτηση, συνεπώς οι συμμετέχοντες έπρεπε να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους. Κάθε σωστή αιτιολόγηση κωδικοποιήθηκε με *2*, κάθε λανθασμένη με *1* και *0* στην περίπτωση που δεν δόθηκε αιτιολόγηση. Στις ερωτήσεις της δεύτερης ομάδας, η επιτυχής μετάφραση από το δοθέν αναπαραστατικό πλαίσιο προς τα άλλα κωδικοποιήθηκε με *2*, η λανθασμένη με 1, ενώ στην περίπτωση που έμεινε κενό το ερώτημα σημειώθηκε *0*. Στο τέλος κάθε ερωτήματος ζητήθηκε η επιλογή του πλαισίου στο οποίο μετέβησαν ευκολότερα και οι απαντήσεις κωδικοποιήθηκαν με τους αριθμούς *1* για Αριθμητικό, *2* για Αλγεβρικό, *3* για Γραφικό πλαίσιο και *4* όπου δεν δόθηκε απάντηση. Τέλος, η σωστή απάντηση σε κάθε έργο της τρίτης ομάδας κωδικοποιήθηκε με *2*, η λανθασμένη με *1*, ενώ στην περίπτωση που δεν δόθηκε απάντηση σημειώθηκε *0.* Επιπροσθέτως, σε κάθε έργο, ανεξαρτήτως της ορθότητας της απάντησης, κωδικοποιήθηκε το πλαίσιο που κινήθηκε η λύση με τις ενδείξεις *1* για Αριθμητικό, *2* για Αλγεβρικό ή *3* για Γραφικό. Το ίδιο βήμα ακολουθήθηκε στην κωδικοποίηση του Β τρόπου επίλυσης.

[3.7] Ανάλυση δεδομένων

Τα αποτελέσματα της ποσοτικής ανάλυσης παρουσιάζονται μέσω περιγραφικής στατιστικής και στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε ανάλυση συσχέτισης μέσω επαγωγικής στατιστικής. Στα πλαίσια αυτής πραγματοποιήθηκε έλεγχος αξιοπιστίας με χρήση του δείκτη Cronbach's Alpha, συσχέτιση ποσοστών με τη βοήθεια των Z-scores, συσχέτιση με χρήση του μη-παραμετρικού στατιστικού δείκτη Spearman καθώς και σύγκριση ποσοστών μέσων όρων με τη χρήση του μη-παραμετρικού τεστ Wilcoxon. Το στατιστικό λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε ήταν το IBM SPSS V.22 (Creswell, J. & D., 2018; Ott, 1988; Snedecor & Cochran, 1980; Zar, 1999; Field, 2013). Σύμφωνα με αυτές τις αναλύσεις προκύπτουν τα ευρήματα του 4ου κεφαλαίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ: 4ο

Αποτελέσματα

[4.1] Ομάδα Ερωτήσεων Α (άξονας αναγνώρισης)

Στους ακόλουθους πίνακες παρατίθενται τα αποτελέσματα της ποσοτικής ανάλυσης στα ζητήματα του ερωτηματολογίου (*βλ.* Παράρτημα ΙΙ). Σε ότι αφορά την ομαδοποίηση και παρουσίαση των αποτελεσμάτων του πρώτου μέρους του ερωτηματολογίου (ερωτήσεις Α1 έως Α14, άξονας αναγνώρισης), αυτή έγινε με δύο τρόπους: αρχικά, ως προς το πλαίσιο που δόθηκαν (αριθμητικό, αλγεβρικό, γραφικό) και στη συνέχεια ως προς τον τύπο της εξίσωσης τους ($x = \alpha,\ y = \alpha x,\ y = \alpha,\ y^2 = x,$ με $\alpha \in \mathbb{R},\ x, y \in \mathbb{R}$).

Συγκεκριμένα στον Πίνακα 4.1 απεικονίζονται οι συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) επιτυχούς αναγνώρισης και αιτιολόγησης των ερωτήσεων Α1 έως Α4 οι οποίες δόθηκαν σε αριθμητικό πλαίσιο.

Πίνακας 4.1

Συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) επιτυχούς αναγνώρισης και αιτιολόγησης των ερωτήσεων Α1 έως Α4 (αριθμητικό πλαίσιο).

			Αναγνώριση (N=75)		
	Α1	Α2	Α3	Α4	Μ.Ο.
Σωστή	54 (72%)	62 (82.67%)	50 (66.67%)	57 (76%)	55.75 (74.34%)
			Αιτιολόγηση (N=75)		
Σωστή	38 (50.67%)	-	-	-	38 (50.67%)

Στις τέσσερις πρώτες ερωτήσεις όπου δόθηκαν εξισώσεις σε αριθμητικό πλαίσιο, η επιτυχία των μαθητών στην αναγνώριση κυμάνθηκε από 66.67% έως 82.67%, με μέσο όρο 74.34%. Σε ότι αφορά το ερώτημα Α1 όπου, λόγω του γεγονότος ότι η δοθείσα έκφραση ($x = 4$) δεν παρίστανε συνάρτηση, ζητήθηκε αιτιολόγηση, το ποσοστό των μαθητών που αιτιολόγησαν σωστά ήταν 50.67%, το οποίο αποτελεί και το υψηλότερο ποσοστό σωστής αιτιολόγησης σε όλο το πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου. Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί ότι το υψηλότερο ποσοστό (82.67%) σημειώθηκε στο ερώτημα Α2, όπου ζητήθηκε η αναγνώριση της $y = 3x$, ενώ το χαμηλότερο (66.67%) στο ερώτημα Α3, όπου η δοθείσα έκφραση ήταν η $y = -1$.

Περνώντας στη δεύτερη ομάδα ερωτήσεων, στον Πίνακα 4.2, απεικονίζονται οι συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) επιτυχούς αναγνώρισης και αιτιολόγησης των ερωτήσεων Α5 έως Α8, οι οποίες δόθηκαν στους συμμετέχοντες σε αλγεβρικό πλαίσιο.

Πίνακας 4.2

Συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) επιτυχούς αναγνώρισης και αιτιολόγησης των ερωτήσεων Α5 έως Α8 (αλγεβρικό πλαίσιο).

	Αναγνώριση (N=75)				
	Α5	Α6	Α7	Α8	Μ.Ο.
Σωστή	63 (84%)	52 (69.33%)	37 (49.33%)	68 (90.67%)	55 (73.33%)
	Αιτιολόγηση (N=75)				
Σωστή	-	25 (33.33%)	11 (14.67%)	- -	18 (24%)

Στα ζητήματα από Α5 έως Α8, τα οποία παρουσιάζουν εξισώσεις σε αλγεβρικό πλαίσιο, τα ποσοστά επιτυχούς αναγνώρισης κυμάνθηκαν από 49.33% έως 90.67%, με μέσο όρο 73.33%. Το χαμηλότερο ποσοστό παρατηρήθηκε στην ερώτηση Α7, όπου δόθηκε η εξίσωση $y^2 = x$, με αυτό να διαμορφώνεται στο 49.33% και να αποτελεί το χαμηλότερο ποσοστό επιτυχούς αναγνώρισης των ερωτήσεων Α ομάδας. Ιδιαιτέρως χαμηλά καταγράφηκαν τα ποσοστά ορθής αιτιολόγησης στις ερωτήσεις Α6 και Α7. Ειδικότερα, στην Α6, όπου δόθηκε η εξίσωση $x = -9$, μόλις 1 στους 3 αιτιολόγησε σωστά ότι δεν παριστάνει συνάρτηση. Επιπλέον, το χαμηλότερο ποσοστό σωστής αιτιολόγησης σε όλο το πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου σημειώθηκε στην ερώτηση Α7 (εξίσωση $y^2 = x$), όπου μόλις το 14.67% έδωσε σωστή αιτιολόγηση. Στον αντίποδα, το δεύτερο υψηλότερο ποσοστό σωστής αναγνώρισης των ερωτήσεων της Α ομάδας σημειώθηκε στην ερώτηση Α8 (εξίσωση $y = -2x$), με το 90.67% των μαθητών να έχει ισχυριστεί σωστά ότι μπορεί να εκφράζει συνάρτηση.

Στη συνέχεια, στον Πίνακα 4.3 παρουσιάζονται οι συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) επιτυχούς αναγνώρισης και αιτιολόγησης των ερωτήσεων Α9 έως Α14, οι οποίες δόθηκαν σε γραφικό πλαίσιο.

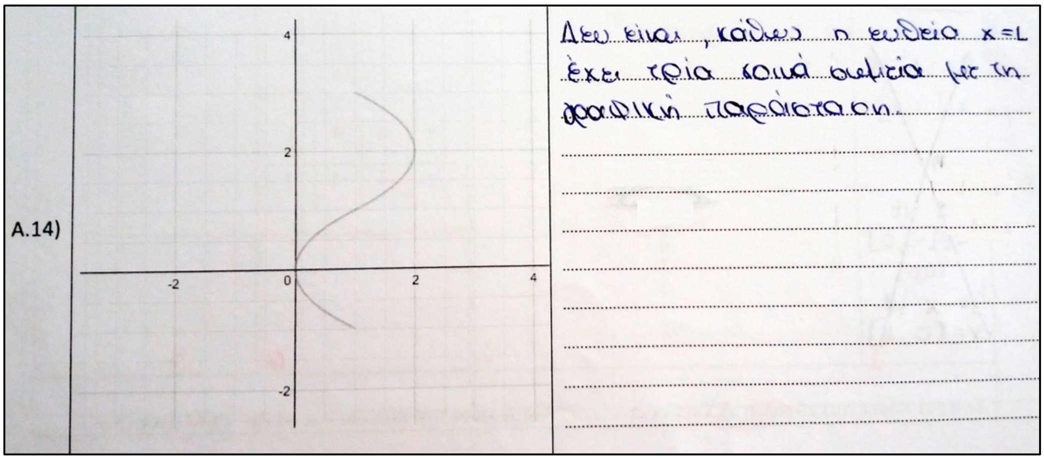
Πίνακας 4.3

Συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) επιτυχούς αναγνώρισης και αιτιολόγησης των ερωτήσεων Α9 έως Α14 (γραφικό πλαίσιο).

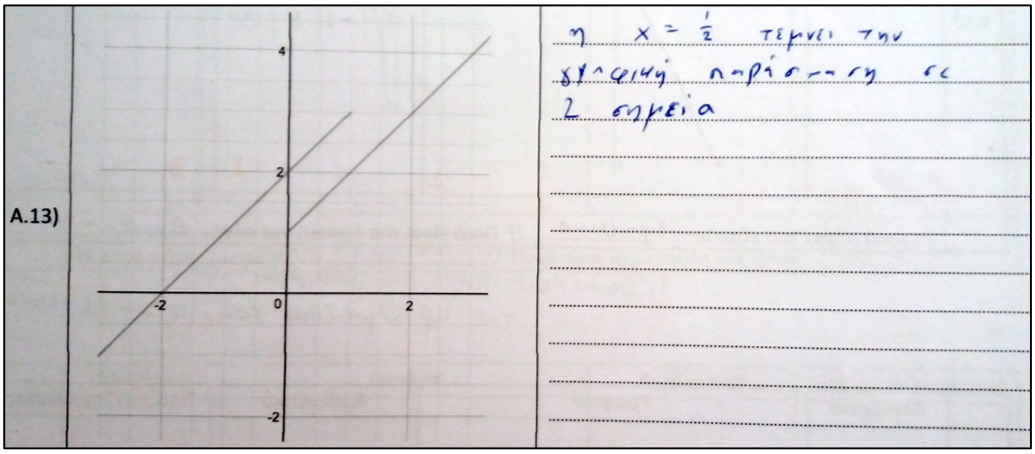
			Αναγνώριση (N=75)				
Ερώτηση	Α9	Α10	Α11	Α12	Α13	Α14	Μ.Ο.
Σωστή	60 (80%)	47 (62.67%)	50 (66.67%)	69 (92%)	48 (64%)	51 (68%)	54.17 (72.23%)
			Αιτιολόγηση (N=75)				
Σωστή	-	27 (36%)	25 (33.33%)	-	27 (36%)	31 (41.33%)	27.5 (36.66%)

Για τις ερωτήσεις που δόθηκαν σε γραφικό πλαίσιο (από Α9 έως Α14), τα ποσοστά επιτυχούς αναγνώρισης κυμάνθηκαν από 62.67% έως 92%, με μέσο όρο 72.23%. Τα γραφικά των ερωτήσεων Α10, Α11, Α13 και Α14 δεν παρίσταναν συναρτήσεις, συνεπώς οι μαθητές κλήθηκαν να αιτιολογήσουν τον λόγο για τον οποίο πιστεύουν ότι δεν παριστάνουν συναρτήσεις. Τα ποσοστά ορθής αιτιολόγησης κυμάνθηκαν από 33.33% έως 41.33%, με τον μέσο όρο να διαμορφώνεται στο 36.66%. Ειδικότερα, στην ερώτηση Α10, στην οποία δόθηκε η γραφική παράσταση της παραβολής $y^2 = x$, το 62.67% των ερωτηθέντων απάντησε ορθώς ότι δεν παριστάνει συνάρτηση ενώ το 36% έδωσε σωστή αιτιολόγηση. Στην ερώτηση Α11, όπου οι μαθητές κλήθηκαν να αναγνωρίσουν αν παριστάνει συνάρτηση η ευθεία $x = 5$, το 66.67% έκανε σωστή αναγνώριση ενώ μόλις 1 στους 3 έδωσε σωστή αιτιολόγηση. Το υψηλότερο ποσοστό επιτυχούς αναγνώρισης μεταξύ των ερωτήσεων της Α ομάδας σημειώθηκε στην Α12 με 92%, στην οποία δόθηκε γραφική αναπαράσταση της $y = 3x$. Σε ότι αφορά την ερώτηση Α13, στην οποία δόθηκε μια δίκλαδη γραμμική εξίσωση με αλληλοκάλυψη στα πεδία ορισμού των κλάδων, το 64% των μαθητών αναγνώρισε σωστά πως δεν παρίστανε συνάρτηση ενώ μόλις το 36% αιτιολόγησε ορθά. Τέλος, στην ερώτηση Α14, το 68% των ερωτηθέντων έκαναν σωστή αναγνώριση.

Ιδιαίτερης προσοχής χρίζει η παρατήρηση ότι πληθώρα μαθητών, στην αιτιολόγηση για το λόγο που δεν παριστάνει συνάρτηση το εκάστοτε ερώτημα, ανέφερε ότι *υπάρχει κατακόρυφη γραμμή που τέμνει την συνάρτηση παραπάνω από μια φορές*. Η εν λόγω αιτιολόγηση θεωρήθηκε ελλιπής και δεν καταμετρήθηκε ως σωστή. Χαρακτηριστικά παραδείγματα της εν λόγω ελλιπούς αιτιολόγησης παρουσιάζονται στις Εικόνες 4.1 και 4.2.



Εικόνα 4.1: *Δείγμα λανθασμένης αιτιολόγησης από ερωτηματολόγιο μαθητή*.



Εικόνα 4.2: *Δείγμα λανθασμένης αιτιολόγησης από ερωτηματολόγιο μαθητή 2.*

Εν κατακλείδι, η επιτυχής αναγνώριση στα τρία πλαίσια κυμάνθηκε κατά μέσο όρο στα ίδια ποσοστά, συγκεκριμένα στο αριθμητικό 74.23%, στο αλγεβρικό 73.33% και το γραφικό 72.23%.

Σε μια προσπάθεια βαθύτερης διερεύνησης, οι ερωτήσεις κατηγοριοποιήθηκαν με βάση τον τύπο της εξίσωσης τους ($x = \alpha,\ y = \alpha x,\ y = \alpha,\ y^2 = x$, με $\alpha \in \mathbb{R},\ x, y \in \mathbb{R}$) και προέκυψαν οι παρακάτω πίνακες:

Πίνακας 4.4

Συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) επιτυχούς αναγνώρισης και αιτιολόγησης των ερωτήσεων Α1, Α6, Α11 ($x = \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$ / δεν παριστάνει συνάρτηση).

Αναγνώριση (N=75)				
Ερώτηση	Α1 (αρ.)	Α6 (αλγ.)	Α11 (γρ.)	Μ.Ο.
Σωστή	54 (72%)	52 (69.33%)	50 (66.67%)	52 (69.33%)
Αιτιολόγηση (N=75)				
Σωστή	38 (50.67%)	25 (33.33%)	25 (33.33%)	29.33 (39.11%)

Στις ερωτήσεις Α1, Α6 και Α11 δόθηκε εξίσωση της μορφής $x = \alpha$, σε τρία διαφορετικά αναπαραστατικά πλαίσια. Οι σωστές αναγνωρίσεις κυμάνθηκαν σε ποσοστά από 66.67% έως 72%, με υψηλότερη αυτή που δόθηκε στο αριθμητικό πλαίσιο και χαμηλότερη στο γραφικό. Στο αριθμητικό πλαίσιο σημειώθηκε και το υψηλότερο ποσοστό ορθής αιτιολόγησης, με αυτό να φτάνει το 50.67%. Στο αλγεβρικό και γραφικό πλαίσιο οι σωστές αιτιολογήσεις κυμάνθηκαν στο ίδιο ποσοστό (33.33%), ενώ ο μέσος όρος σωστής αναγνώρισης στις 3 αυτές ερωτήσεις διαμορφώθηκε στο 69.33%, με το 39.11% να έχει δώσει σωστή αιτιολόγηση.

Επί των ποσοστών που προέκυψαν από τον Πίνακα 4.4 (αλλά και των ακόλουθων πινάκων), πραγματοποιήθηκαν συγκρίσεις μεταξύ των αποτελεσμάτων, ώστε να διαπιστωθεί αν η διαφορά των ποσοστών επιτυχίας είναι στατιστικά σημαντική. Στη συγκεκριμένη ερώτηση αλλά και σε όσες ήταν απαραίτητο, πραγματοποιήθηκαν συγκρίσεις με τη βοήθεια των z-scores (Ott, 1988; Snedecor & Cochran, 1980) και τα αποτελέσματα αυτών παρουσιάζονται στους πίνακες που βρίσκονται στο Παράρτημα Ι. Για τον εν λόγω πίνακα, βρέθηκε $z = 0.3587 < 1.96 = z_{0.05}$ συνεπώς δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά των ποσοστών επιτυχίας στις ερωτήσεις Α1 και Α6. Ομοίως, για τα ζεύγη ερωτημάτων Α1-Α11 και Α6-Α11 βρέθηκε ότι $z = 0.7083 < 1.96 = z_{0.05}$ και $z = 0.3501 < 1.96 = z_{0.05}$ συνεπώς και σε αυτά δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά (Πίνακες 4.4α,β,γ, Παράρτημα Ι).

Πίνακας 4.5

Συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) επιτυχούς αναγνώρισης των ερωτήσεων A2, A8, A12 ($y = \alpha x$).

	Αναγνώριση (N=75)			
Ερώτηση	A2 (αρ.)	A8 (αλγ.)	A12 (γρ.)	M.O.
Σωστή	62 (82.67%)	68 (90.67%)	69 (92%)	66.33 (88.45%)

Πίνακας 4.6

Συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) επιτυχούς αναγνώρισης/αιτιολόγησης της ερώτησης A13 ($y = \alpha x$, δίκλαδη, που δεν παριστάνει συνάρτηση).

	Αναγνώριση (N=75)	Αιτιολόγηση(N=75)
Ερώτηση	A13 (γρ.)	A13 (γρ.)
Σωστή	48 (64%)	27 (36%)

Με την ίδια λογική, τα αποτελέσματα των ερωτήσεων A2, A8, A12 εντάχθηκαν στον ίδιο πίνακα (Πίνακας 4.5), αφού περιείχαν εξίσωση της μορφής $y = \alpha x$, στα 3 αναπαραστατικά πλαίσια και η οποία παρίστανε συνάρτηση. Τα αποτελέσματα του ερωτήματος A13 εντάχθηκαν σε διαφορετικό πίνακα (Πίνακας 4.6) αφού σε αυτό δόθηκε μεν εξίσωση της μορφής $y = \alpha x$, στο γραφικό πλαίσιο αλλά με δύο κλάδους, χωρίς, όμως, αυτή να παριστάνει συνάρτηση.

Σε ότι αφορά τον Πίνακα 4.5, τα ποσοστά σωστής αναγνώρισης κυμάνθηκαν σε υψηλά επίπεδα, από 82.67% έως 92%, με μέσο όρο 88.45% ενώ το υψηλότερο ποσοστό σημειώθηκε στο γραφικό πλαίσιο (92%). Σε πολύ χαμηλότερα επίπεδα κυμάνθηκαν τα αποτελέσματα των απαντήσεων στο ερώτημα A13. Συγκεκριμένα, οι ορθές αναγνωρίσεις περιορίστηκαν στο 64%, ενώ επί του δείγματος των συμμετεχόντων το 36% αιτιολόγησε σωστά. Είναι εμφανές ότι η προσθήκη ενός ακόμα κλάδου στον τύπο της εξίσωσης έριξε κατά 28% το ποσοστό της επιτυχούς αναγνώρισης (διαφορά ποσοστών επιτυχούς αναγνώρισης μεταξύ ερωτήσεων A12 και A13).

Τα z-scores έδειξαν ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των ποσοστών επιτυχίας των ερωτήσεων A2-A8, A2-A12 και A8-A12 (συγκεκριμένα $z = 1.441 < 1.96 = z_{0.05}$, $z = 1.7184 < 1.96 = z_{0.05}$ και $z = 0.2902 < 1.96 = z_{0.05}$ αντίστοιχα). Αντίθετα, υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των ποσοστών επιτυχίας στις ερωτήσεις A12-A13, αφού $z = 4.1392 > 1.96 = z_{0.05}$ (Πίνακες 4.5α,β,γ,δ, Παράρτημα Ι).

Πίνακας 4.7

Συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) επιτυχούς αναγνώρισης των ερωτήσεων A3, A5, A9 ($y = \alpha$).

Αναγνώριση (N=75)				
Ερώτηση	A3 (Αρ.)	A5 (Αλγ.)	A9 (Γρ.)	Μ.Ο.
Σωστή	50 (66.67%)	63 (84%)	60 (80%)	57.67 (76.89%)

Στον Πίνακα 4.7 ομαδοποιήθηκαν τα αποτελέσματα των ερωτήσεων A3, A5 και A9 τα οποία έδειξαν ότι οι ερωτηθέντες αναγνώρισαν με μεγαλύτερη επιτυχία την $y = \alpha$, στο αλγεβρικό πλαίσιο (84%) στη συνέχεια ακολουθεί το γραφικό (80%) και τελευταίο έρχεται το αριθμητικό (66.67%). Ο μέσος όρος της επιτυχούς αναγνώρισης στην εν λόγω γραμμική εξίσωση διαμορφώθηκε στο 76.89%.

Τα z-scores έδειξαν ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των ποσοστών επιτυχίας των ερωτήσεων A3-A9 και A5-A9 (συγκεκριμένα $z = 1.8464 < 1.96 = z_{0.05}$ και $z = 0.6376 < 1.96 = z_{0.05}$ αντίστοιχα). Αντίθετα, υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των ποσοστών επιτυχίας στις ερωτήσεις A3-A5, αφού $z = 2.4623 > 1.96 = z_{0.05}$ (Πίνακες 4.7α,β,γ, Παράρτημα Ι).

Πίνακας 4.8

Συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) επιτυχούς αναγνώρισης και αιτιολόγησης των ερωτήσεων A7 και A10 ($y^2 = x$, δεν παριστάνει συνάρτηση).

Αναγνώριση (N=75)			
Ερώτηση	A7 (Αλγ.)	A10 (Γρ.)	Μ.Ο.
Σωστή	37 (49.33%)	47 (62.67)	42 (56)
Αιτιολόγηση (N=75)			
Ερώτηση	A7 (Αλγ.)	A10 (Γρ.)	Μ.Ο.
Σωστή	11 (14.67%)	27 (36%)	19 (25.33%)

Τέλος στον Πίνακα 4.8 συγκεντρώθηκαν τα αποτελέσματα των ερωτήσεων Α7 και Α10, στις οποίες δόθηκε εξίσωση της μορφής $y^2 = x$, στο αλγεβρικό και γραφικό πλαίσιο αντίστοιχα. Παρατηρήθηκε ότι στο γραφικό πλαίσιο οι μαθητές σημείωσαν μεγαλύτερη επιτυχία (62.67%) στην αναγνώριση έναντι του αλγεβρικού (49.33%) ενώ το ίδιο σημειώθηκε και στην αιτιολόγηση, όπου το 36% αιτιολόγησε σωστά στο γραφικό έναντι του 14.67% στο αλγεβρικό. Τα z-scores έδειξαν ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των ποσοστών επιτυχίας των ερωτήσεων Α7-Α10, συγκεκριμένα $z = 1.6449 < 1.96 = z_{0.05}$ (Πίνακας 4.8, Παράρτημα Ι).

Από τις παραστάσεις των μαθηματικών εκφράσεων που δόθηκαν στο αριθμητικό πλαίσιο (ερωτήσεις Α1 έως Α4), το 74.34% έκανε σωστή αναγνώριση. Το ποσοστό εκ πρώτης όψεως δείχνει υψηλό, που σημαίνει ότι ένας σημαντικός αριθμός μαθητών είναι σε θέση να αναγνωρίσει αν οι τιμές ενός πίνακα αναπαριστούν συνάρτηση. Ένας πιθανός λόγος που οι μαθητές χειρίζονται με ευκολία το εν λόγω πλαίσιο είναι η αντιμετώπισή του ως διαδικασία (Sfard, 1991; Γαγάτσης et al., 2000; Dubinsky & Harel, 1992), προσέγγιση που δείχνει να αναπτύσσεται πρωταρχικά στους μαθητές (Sfard, 1991). Επιπλέον, οι εκφράσεις αυτού του είδους είναι αναλογικές (Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1998), δηλαδή παρουσιάζουν μια πληροφορία ως μια αλληλουχία προτάσεων, που μπορεί να διαβαστεί και να αναγνωριστεί ευκολότερα. Παρόλα αυτά, τα αποτελέσματα θα πρέπει να αξιολογηθούν παράλληλα με τις σωστές αιτιολογήσεις. Ειδικότερα, στο ερώτημα Α1, όπου οι συμμετέχοντες σε ποσοστό 72% αναγνώρισαν σωστά, μόλις το 50.67% του συνόλου κατάφερε να δώσει ορθή αιτιολόγηση. Το χαμηλό ποσοστό στην αιτιολόγηση του Α1 μπορεί να αποδοθεί στη σύγχυση της $x = 4$ με την $y = 4$, η οποία παριστάνει συνάρτηση και η μόνη διαφορά της με την πρώτη είναι ότι οι σταθεροί αριθμοί είναι στη γραμμή του y. Επίσης, στην πρώτη ομάδα ερωτήσεων αξίζει να σχολιαστεί το υψηλό ποσοστό επιτυχίας στο ερώτημα Α2, όπου δόθηκε η αριθμητική αναπαράσταση της εξίσωσης $y = 3x$. Όπως φάνηκε, η πλειοψηφία των μαθητών (82.67%) παρατήρησαν ότι οι τιμές των y ήταν τριπλάσιες των x, γεγονός που παραπέμπει σε διαδικασία αντιστοίχισης και θυμίζει γραμμική εξίσωση. Οι μαθητές είναι οικείοι με την εν λόγω γραμμική εξίσωση, αφού την έχουν συναντήσει σε πολλές παραγράφους των σχολικών εγχειριδίων, οπότε για αυτούς αποτέλεσε μια πρωτοτυπική έκφραση (Tall & MdNor, 1992) γι' αυτό και την αναγνώρισαν εύκολα.

Στην ομάδα ερωτήσεων Α5 έως Α8 δόθηκαν αλγεβρικές αναπαραστάσεις εξισώσεων και ο μέσος όρος ορθής αναγνώρισης κυμάνθηκε στο 73.33%. Το ικανοποιητικό αυτό ποσοστό δείχνει μια ευχέρεια στην αναγνώριση αλγεβρικών εκφράσεων ως συναρτήσεις και μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι οι αλγεβρικές αναπαραστάσεις, ως τρόποι έκφρασης μιας συνάρτησης, είναι αναλογικοί (Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1998) και παρουσιάζουν μια πληροφορία ως αλληλουχία προτάσεων. Εστιάζοντας στην ερώτηση Α7, όπου δόθηκε η έκφραση $y^2 = x$, οι μισοί συμμετέχοντες (49.33%) αναγνώρισαν σωστά, ενώ μόλις το 14.67% κατάφερε να αιτιολογήσει επαρκώς. Τα ποσοστά αναγνώρισης και αιτιολόγησης αποκλίνουν πολύ από το μέσο όρο της ομάδας και μπορούν να αποδοθούν στην ομοιότητα της δοθείσας με την οικεία $y = x^2$, η οποία έχει μελετηθεί σε παλαιότερες τάξεις και παριστάνει συνάρτηση. Κατά τους Tall & MdNor (1992), η δυσκολία στην αναγνώριση μπορεί να οφείλεται στην λανθασμένη αντίληψη των μαθητών, ότι οποιαδήποτε αλγεβρική έκφραση όπου το y παρουσιάζεται ως μια έκφραση του x, αποτελεί συνάρτηση. Σε ότι αφορά την ερώτηση Α6, όπου δόθηκε η έκφραση $x = -9$, ένα ικανοποιητικό ποσοστό αναγνώρισε ότι δεν παριστάνει συνάρτηση, (69.33%) παρόλα αυτά, μόλις το 1/3 των συμμετεχόντων έδωσε σωστή αιτιολόγηση. Το εύρημα αυτό μπορεί επίσης να αποδοθεί στο γεγονός ότι οι μαθητές έχουν διδαχθεί την εξίσωση, έχει τονιστεί ότι δεν παριστάνει συνάρτηση, αλλά δεν ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν επαρκώς το λόγο. Στο ερώτημα Α5 όπου δόθηκε ο τύπος $y = 3$ οι συμμετέχοντες σε ποσοστό 84% αναγνώρισαν σωστά ότι παριστάνει συνάρτηση, γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με τα συμπεράσματα των Markovits et al. (1986), οι οποίοι διαπίστωσαν ότι οι συμμετέχοντες στην έρευνά τους αντιμετώπισαν δυσκολίες στα έργα που περιείχαν σταθερές συναρτήσεις. Τέλος, όπως ήταν αναμενόμενο, ο αλγεβρικός τύπος της Α8 ($y = -2x$) αναγνωρίστηκε από την συντριπτική πλειοψηφία των συμμετεχόντων (90.67%), αφού αποτελεί μια πολυδιδαγμένη έννοια των Μαθηματικών του Γυμνασίου και Λυκείου.

Στις ερωτήσεις Α9 έως Α14, δόθηκαν οι γραφικές παραστάσεις εξισώσεων και ο μέσος όρος ορθής αναγνώρισης κυμάνθηκε στο 72.23%. Το ποσοστό, σε πρώτη ανάγνωση, δείχνει μια ευχέρεια των συμμετεχόντων στην αναγνώριση γραφημάτων ως συναρτήσεις, παρόλα αυτά, ο μέσος όρος αιτιολόγησης βρίσκεται στο χαμηλό 36.66%, γεγονός που μπορεί να ερμηνευτεί ως εξής: οι περισσότεροι μαθητές γνώριζαν τον *κανόνα της κατακόρυφης ευθείας,* όπως αυτός αναφέρεται στα σχολικά εγχειρίδια των Α και Γ Λυκείου, τον οποίο και έκαναν χρήση. Αναγνώρισαν εμπειρικά τις γραφικές αναπαραστάσεις με χρήση του κανόνα, όμως, η αιτιολόγηση ότι μια τυχαία κάθετη ευθεία $x = k$ τέμνει το γραφικό σε 2 σημεία θεωρήθηκε ελλιπής, αφού αποτέλεσε προϊόν μεθοδολογίας και όχι βαθιάς κατανόησης του κανόνα (*βλ.* Εικόνα 4.1 & 4.2, Κεφάλαιο 4.1). Στο ερώτημα Α10 παρουσιάστηκε μια γραφική παράσταση που έμοιαζε με αυτήν της $f(x) = x^2$, με τη διαφορά ότι είχε περιστραφεί κατά 90^o δεξιόστροφα. Σε αυτό σημειώθηκε το χαμηλότερο ποσοστό αναγνώρισης (66.67%) ανάμεσα στα ερωτήματα της ίδιας ομάδας και το χαμηλό ποσοστό αιτιολόγησης (36%). Στο ίδιο ερώτημα, στην έρευνα των Tall & MdNor (1992), τα αποτελέσματα κυμάνθηκαν σε μονοψήφια νούμερα ενώ οι ερευνητές απέδωσαν το εύρημα στο ότι οι μαθητές έχουν συνδέσει νοερά τα βασικά είδη συναρτήσεων με τις αντίστοιχες γραφικές τους παραστάσεις μέσω πρωτοτυπικών σχημάτων. Εξίσου χαμηλά ήταν και τα ποσοστά επιτυχία στο ίδιο ερώτημα στις έρευνες των Καλδρυμίδου & Οικονόμου (1992). Το υψηλό ποσοστό (92%) που σημειώθηκε στην ερώτηση Α12, ήταν αναμενόμενο αφού η γραφική απεικόνιση της $y = 3x$ έχει αποτελέσει αντικείμενο διδασκαλίας σε πολλές τάξεις του Γυμνασίου και Λυκείου. Στο ερώτημα Α9, όπου δόθηκε η γραφική παράσταση της σταθερής $y = 3$ οι συμμετέχοντες σημείωσαν υψηλό ποσοστό επιτυχούς αναγνώρισης, εύρημα που έρχεται σε αντίθεση με τις έρευνες των Tall & MdNor (1992), Carlson (1998) και Markovits et al. (1986).

Συνοπτικά, η αναγνώριση και στα τρία πλαίσια κυμάνθηκε στα ίδια ποσοστά, γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με παρόμοιες έρευνες (Γαγάτσης et al., 2000; Hitt, 1998; Kaldrimidou & Ikonomou, 1998; Tall & MdNor, 1992; Καλδρυμίδου & Οικονόμου 1992), στις οποίες η αναγνώριση στο γραφικό πλαίσιο φάνηκε να είναι η δυσκολότερη.

Στη συνέχεια, οι ερωτήσεις ομαδοποιήθηκαν ως προς το είδος της εξίσωσης, με σκοπό να εξεταστεί αν αναγνωρίζονται ευκολότερα σε συγκεκριμένο πλαίσιο.

Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα των Πινάκων 4.4 και 4.4α,β,γ, όπου φαίνεται ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των ποσοστών επιτυχίας, μπορεί να συμπεραθεί ότι η αναγνώριση της γραμμικής εξίσωσης $x = a$ πραγματοποιείται με την ίδια επιτυχία. Αντίστοιχα, στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγει η σύγκριση ποσοστών της εξίσωσης $y = ax$, όπου και σε αυτήν οι στατιστικές διαφορές μεταξύ των ποσοστών της στα διάφορα αναπαραστατικά πλαίσια είναι μη σημαντικές (Πίνακες 4.5, 4.5α,β,γ). Αντιθέτως, η σύγκριση ποσοστών μεταξύ των αποτελεσμάτων των ερωτήσεων Α12 και Α13 (Πίνακες 4.5δ) έδειξε μια σημαντική διαφορά, η οποία επιτρέπει τον ισχυρισμό ότι η επιτυχία στην αναγνώριση γραμμικών εξισώσεων μειώνεται αισθητά, όταν προστίθεται και δεύτερος κλάδος στο γράφημα. Κατά τους Tall & MdNor (1992) και Markovits et al. (1986) τα γραφήματα με παραπάνω από έναν κλάδους θεωρούνται ως μη κανονικά και δεν αποτελούν έκφραση συνάρτησης. Ομοίως, για την εξίσωση της μορφής $y = a$, οι συσχετίσεις των ποσοστών επιτυχίας (Πίνακες 4.7 και 4.7α,β,γ) ανέδειξαν τη δυσκολία αναγνώρισής της στο αριθμητικό πλαίσιο, εύρημα που αναλύθηκε παραπάνω. Τέλος, η $y^2 = x$ φαίνεται να αναγνωρίζεται με παρόμοια ποσοστά επιτυχίας (Πίνακες 4.8 και 4.8α) και στα δύο πλαίσια που δόθηκε (αλγεβρικό και γραφικό).

[4.2] Ομάδα Ερωτήσεων Β (άξονας μετάφρασης)

Στη συνέχεια ακολουθούν οι πίνακες συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων (%) των αποτελεσμάτων της μετάφρασης μεταξύ των αναπαραστατικών πλαισίων της συνάρτησης καθώς και προτίμησης ευκολότερης μετάφρασης (ερωτήματα Β1 έως Β7, άξονας μετάφρασης). Στην αρχή παρουσιάζονται συνολικά τα αποτελέσματα των έργων όπως αυτά καταγράφηκαν από τα ερωτηματολόγια της έρευνας, ενώ στη συνέχεια παρουσιάζονται ομαδοποιημένα ανά δοθέν αναπαραστατικό πλαίσιο (αριθμητικό, αλγεβρικό, γραφικό). Στο τέλος ομαδοποιήθηκαν τα δεδομένα των ερωτημάτων Β1, Β6 και Β4, Β7, επειδή οι συναρτήσεις που εμπεριείχαν ήταν ίδιου τύπου, με σκοπό την βαθύτερη μελέτη των μεταφράσεων μεταξύ αλγεβρικού και γραφικού πλαισίου.

Πίνακας 4.9

Συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) αποτελεσμάτων μετάφρασης των ερωτήσεων Β1 έως Β7

Σωστή Μετάφραση σε (N=75)							
Ερώτηση	Β1 (Αλγ.)	Β2 (Αρ.)	Β3 (Αλγ.)	Β4 (Αλγ.)	Β5 (Γρ.)	Β6 (Γρ.)	Β7 (Γρ.)
αριθμητικό πλαίσιο	62 (82.67%)	-	49 (65.33%)	45 (60%)	53 (70.67%)	51 (68%)	59 (78.67%)
αλγεβρικό πλαίσιο	-	44 (58.67%)	-	-	48 (64%)	29 (38.67%)	31 (41.33%)
γραφικό πλαίσιο	47 (62.67%)	50 (66.67%)	26 (34.67%)	30 (40%)	-	-	-

Πίνακας 4.10

Συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) αποτελεσμάτων προτίμησης ως ευκολότερη μετάφραση των ερωτήσεων Β1 έως Β7.

Προτίμηση Μετάφρασης (N=75)							
Ερώτηση	Β1 (Αλγ.)	Β2 (Αρ.)	Β3 (Αλγ.)	Β4 (Αλγ.)	Β5 (Γρ.)	Β6 (Γρ.)	Β7 (Γρ.)
αριθμητικό πλαίσιο	51 (68%)	-	44 (58.67%)	42 (56%)	27 (36%)	44 (58.67%)	54 (72%)
αλγεβρικό πλαίσιο	-	19 (25.33%)	-	-	32 (42.67%)	9 (12%)	5 (6.67%)
γραφικό πλαίσιο	8 (10.67%)	38 (50.67%)	11 (14.67%)	11 (14.67%)	-	-	-

Ξεκινώντας από το ερώτημα Β1, το 82.67% των ερωτηθέντων μετέφρασε σωστά από το δοθέν αλγεβρικό πλαίσιο στο αριθμητικό, ενώ το 62.67% στο γραφικό. Σε ότι αφορά την προτίμηση, το 68% των ερωτηθέντων δήλωσε ότι η πρώτη μετάφραση ήταν ευκολότερη, έναντι του 10.67% που προτίμησε τη δεύτερη. Ακολούθως, στο Β2 το 66.67% των μαθητών μετέφρασε σωστά από το αριθμητικό στο γραφικό, ενώ το 58.67% στο αλγεβρικό. Αντίστοιχα οι προτιμήσεις συμβάδισαν με τις σωστές μεταφράσεις, με την πρώτη να επιλέγεται ως ευκολότερη από το 50.67% ενώ η δεύτερη από το 25.33%. Στο Β3 ερώτημα, οι ορθές μεταφράσεις από το αλγεβρικό πλαίσιο στο γραφικό περιορίστηκαν στο 34.67%, ενώ στο αριθμητικό έφτασαν το 65.33%. Τα ποσοστά προτίμησης ακολούθησαν την επιτυχία, με το 14.67% των ερωτηθέντων να προτιμά την μετάφραση από το αλγεβρικό στο γραφικό πλαίσιο και το 58.67% στο αριθμητικό. Εν συνεχεία στο Β4, το 40% των συμμετεχόντων μετέφρασε σωστά από το αλγεβρικό πλαίσιο στο γραφικό, ενώ το 60% στο αριθμητικό. Τα ποσοστά προτίμησης ήταν ανάλογα της επιτυχίας, συγκεκριμένα το 14.67% βρήκε ευκολότερη την μετάβαση στο γραφικό, έναντι του 56% που βρήκε ευκολότερη την μετάβαση στο αριθμητικό πλαίσιο. Προχωρώντας στο ερώτημα Β5, όπου το αρχικό πλαίσιο ήταν το γραφικό, η μετάβαση στο αλγεβρικό πραγματοποιήθηκε σωστά από το 64% των συμμετεχόντων ενώ στο αριθμητικό από το 70.67%. Λαμβάνοντας υπόψη τα z-scores, διαπιστώθηκε ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά των ποσοστών επιτυχούς μετάφρασης από το γραφικό στο αριθμητικό και στο αλγεβρικό αντίστοιχα ($z = 0.8705 < 1.96 = z_{0.05}$, Πίνακας 4.9α, Παράρτημα Ι). Σε επίπεδο προτίμησης, οι μαθητές προτίμησαν ως ευκολότερη τη μετάβαση στο αλγεβρικό με ποσοστό 42.67% έναντι 36% στο αριθμητικό. Παρόλα αυτά, τα z-scores έδειξαν ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά των δύο ποσοστών προτίμησης ($z = 0.8357 < 1.96 = z_{0.05}$, Πίνακας 4.10α, Παράρτημα Ι). Στην ερώτηση Β6, το 38.67% των ερωτηθέντων μετέφρασε σωστά στο αλγεβρικό πλαίσιο, ενώ το 68% στο αριθμητικό. Επιπλέον, ήταν φανερή η προτίμηση στο αριθμητικό πλαίσιο έναντι του αλγεβρικού, με τα ποσοστά αυτών να διαμορφώνονται στο 58.67% και 12% αντίστοιχα. Τέλος, στην ερώτηση Β7, όπου δόθηκε η γραφική παράσταση μιας γραμμικής κλαδωτής συνάρτησης, το 41.33% μετέφρασε σωστά στο αλγεβρικό πλαίσιο, ενώ το 78.67% στο αριθμητικό. Με μεγάλη διαφορά, οι συμμετέχοντες θεώρησαν ευκολότερη την μετάφραση στο αριθμητικό πλαίσιο με ποσοστό 72%, έναντι του αλγεβρικού με 6.67%.

Επιγραμματικά, μπορούν να διακριθούν τα εξής ευρήματα:

- Οι μαθητές προτίμησαν ως ευκολότερη μετάβαση αυτή στην οποία σημείωσαν και μεγαλύτερη επιτυχία στη μετάφραση. Εξαίρεση αποτελεί το Β5, όπου μετάφρασαν και προτίμησαν με παρόμοια ποσοστά και στα δύο πλαίσια προορισμού.

- Το υψηλότερο ποσοστό επιτυχούς μετάφρασης σημειώθηκε στο ερώτημα Β1, όπου δόθηκε ο αλγεβρικός τύπος της $y = 2x + 1$ και το 82.67% των συμμετεχόντων μετέφρασε ορθά στο αριθμητικό πλαίσιο.
- Το χαμηλότερο ποσοστό επιτυχούς μετάφρασης σημειώθηκε στο ερώτημα Β3, όπου μόνον 1 στους 3 συμμετέχοντες (34.67%) μετέφρασε ορθά από το αλγεβρικό στο γραφικό πλαίσιο. Εξίσου χαμηλά ποσοστά επιτυχούς μετάφρασης καταγράφηκαν στα ερωτήματα Β6 και Β7 (38.67% και 41.33% αντίστοιχα), όπου ζητήθηκε η μετάφραση γραμμικών συναρτήσεων από το γραφικό στο αλγεβρικό πλαίσιο. Στα ίδια ερωτήματα, τα ποσοστά μετάφρασης προς το αριθμητικό πλαίσιο ήταν σχεδόν διπλάσια.
- Οι συμμετέχοντες χαρακτήρισαν ως ευκολότερη τη μετάβαση από το γραφικό στο αριθμητικό του ερωτήματος Β7, με ποσοστό προτίμησης 78.67% και ακολούθησε η μετάφραση του ερωτήματος Β1 από το αλγεβρικό στο αριθμητικό, με ποσοστό 68%.
- Στα ίδια ερωτήματα, η μετάφραση από το αλγεβρικό στο γραφικό και αντίστροφα φαίνεται πως δυσκόλεψε τους συμμετέχοντες, μιας και σε αυτά καταγράφηκαν τα χαμηλότερα ποσοστά προτίμησης (6.67% και 10.67% αντίστοιχα).

Τα δεδομένα του Πίνακα 4.9 κατανεμήθηκαν με βάση το αρχικό πλαίσιο στο οποίο δόθηκε κάθε συνάρτηση, με αποτέλεσμα τη δημιουργία των ακόλουθων πινάκων.

Πίνακας 4.11

Συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) αποτελεσμάτων μετάφρασης της ερώτησης Β2, στην οποία η συνάρτηση δόθηκε στο αριθμητικό πλαίσιο (υπό μορφή πίνακα).

	Σωστή Μετάφραση (N=75)
Ερώτηση	Β2 (Αρ.)
αλγεβρικό πλαίσιο	44 (58.67%)
γραφικό πλαίσιο	50 (66.67%)

Στο ερώτημα Β2, όπου δόθηκε η αριθμητική αναπαράσταση της $y = -1$, παρατηρήθηκε ότι το 66.67% των συμμετεχόντων κατάφεραν να χαράξουν σωστά τη γραφική παράσταση έναντι του 58.67% που έδωσε σωστά τον αλγεβρικό της τύπο. Σε βαθύτερη ανάλυση, παρατηρήθηκε ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των ποσοστών μετάφρασης ($z = 1.013 < 1.96 = z_{0.05}$, Πίνακας 4.11α, Παράρτημα Ι).

Πίνακας 4.12

Συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) αποτελεσμάτων μετάφρασης των ερωτήσεων Β1, Β3 και Β4, στις οποίες οι συναρτήσεις δόθηκαν στο αλγεβρικό πλαίσιο.

Σωστή Μετάφραση από Αλγεβρικό πλαίσιο σε (Ν=75)				
Ερώτηση	Β1	Β3	Β4	Μ.Ο.
αριθμητικό πλαίσιο	62 (82.67%)	49 (65.33%)	45 (60%)	52 (69.33%)
γραφικό πλαίσιο	47 (62.67%)	26 (34.67%)	30 (40%)	34.33 (45.78%)

Στα ερωτήματα Β1, Β3, Β4 οι συναρτήσεις εκφράστηκαν μέσω του αλγεβρικού τους τύπου. Τα ποσοστά επιτυχούς μετάφρασης στο γραφικό πλαίσιο κυμάνθηκαν από 34.67% έως 62.67%, με μέσο όρο 45.78%. Τα αντίστοιχα ποσοστά μετάφρασης στο αριθμητικό πλαίσιο κυμάνθηκαν από 60% έως 82.67%, με μέσο όρο 69.33%. Βρέθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των μέσων όρων μετάφρασης στο αλγεβρικό έναντι του γραφικού πλαισίου ($z = 2.9190 > 1.96 = z_{0.05}$, Πίνακας 4.12α, Παράρτημα Ι).

Πίνακας 4.13

Συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) αποτελεσμάτων μετάφρασης των ερωτήσεων Β5, Β6 και Β7, στις οποίες οι συναρτήσεις δόθηκαν στο γραφικό πλαίσιο.

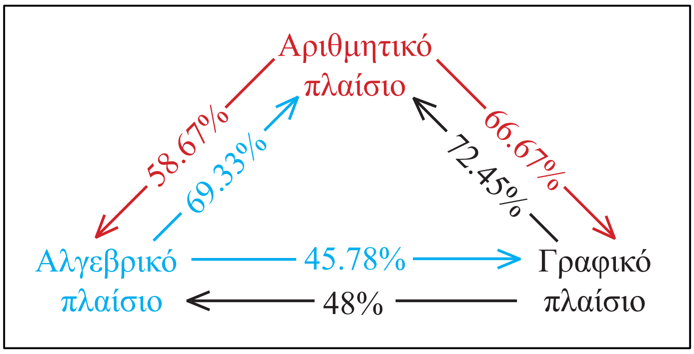
Σωστή Μετάφραση από Γραφικό πλαίσιο σε (Ν=75)				
Ερώτηση	Β5	Β6	Β7	Μ.Ο.
αριθμητικό πλαίσιο	53 (70.67%)	51 (68%)	59 (78.67%)	54.33 (72.45%)
αλγεβρικό πλαίσιο	48 (64%)	29 (38.67%)	31 (41.33%)	36 (48%)

Στα ερωτήματα Β5, Β6, Β7 οι συναρτήσεις εκφράστηκαν μέσω του γραφικού τους τύπου. Τα ποσοστά επιτυχούς μετάφρασης στο αλγεβρικό πλαίσιο κυμάνθηκαν από 38.67% έως 64%, με μέσο όρο 48%, ενώ σε υψηλότερα ποσοστά καταγράφηκε η μετάβαση στο αριθμητικό πλαίσιο με τα ποσοστά αυτής να διαμορφώθηκαν από 68% έως 78.67%, με μέσο όρο 72.45%. Με βάση τα z-scores υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο συγκρινόμενων μέσων όρων, αφού $z = 3.0578 > 1.96 = z_{0.05}$ (Πίνακας 4.13α, Παράρτημα Ι).

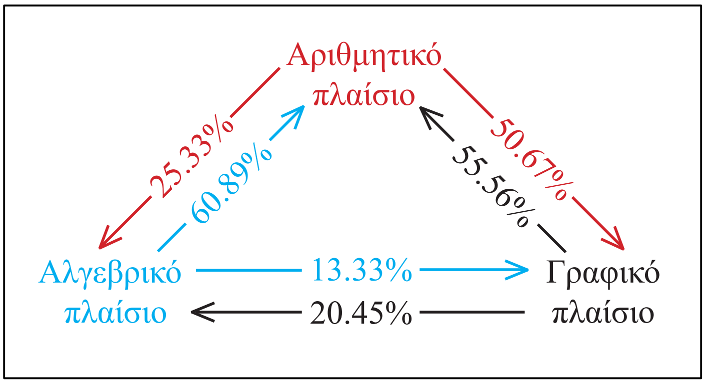
Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα της περιγραφικής και της επαγωγικής στατιστικής ανάλυσης, μπορούν να διακριθούν τα εξής δεδομένα:

- Δοθείσας της συνάρτησης στο αριθμητικό πλαίσιο, οι συμμετέχοντες μετέφρασαν με στατιστικά μη σημαντική διαφορά προς το γραφικό και το αλγεβρικό πλαίσιο.
- Δοθείσας της συνάρτησης στο αλγεβρικό πλαίσιο, οι συμμετέχοντες μετέφρασαν με μεγαλύτερη επιτυχία στο αριθμητικό πλαίσιο (69.33%), έναντι του γραφικού (34.33%).
- Δοθείσας της συνάρτησης στο γραφικό πλαίσιο, οι συμμετέχοντες μετέφρασαν με μεγαλύτερη επιτυχία στο αριθμητικό πλαίσιο (72.45%), έναντι του αλγεβρικού (48%).

Απομονώνοντας τους μέσους όρους των αποτελεσμάτων επιτυχούς μετάφρασης και προτίμησης ευκολότερης μετάβασης προκύπτουν τα παρακάτω δύο διαγράμματα:



Διάγραμμα 4.1: Μέσοι όροι ποσοστών επιτυχούς μετάφρασης μεταξύ των πλαισίων.



Διάγραμμα 4.2: Μέσοι όροι ποσοστών προτίμησης ευκολότερης μετάβασης.

Στα ερωτήματα Β1, Β3 και Β4, δόθηκαν αλγεβρικές αναπαραστάσεις τριών συναρτήσεων και ζητήθηκε η μετάβαση στα άλλα δύο πλαίσια. Με βάση τους Πίνακες 4.12 και 4.12α διαπιστώθηκε ότι η μετάβαση προς το αριθμητικό είναι ευκολότερη σε σχέση με το γραφικό πλαίσιο (69.33% έναντι 45.78%). Το εύρημα ήταν αναμενόμενο, καθότι η μετάβαση μεταξύ αλγεβρικού και γραφικού πλαισίου (και αντίστροφα) θεωρείται η δυσκολότερη όλων, αφού αποτελεί ριζική αλλαγή στον τρόπο ανάγνωσης και επεξεργασίας των προσλαμβανόμενων πληροφοριών. Εστιάζοντας στην αντίθετη μετάβαση, μελετήθηκε η ομάδα ερωτήσεων Β5, Β6 και Β7, όπου δόθηκαν οι γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων και ζητήθηκε η μετάβαση στο αλγεβρικό και αριθμητικό αντίστοιχα. Λαμβάνοντας υπόψη τους Πίνακες 4.13 και 4.13α διαπιστώθηκε ότι η μετάβαση προς το αριθμητικό πραγματοποιείται με πολύ μεγαλύτερη επιτυχία (72.45%) έναντι του αλγεβρικού (48%). Και από τις δύο ομάδες ερωτήσεων επιβεβαιώνεται η δυσκολία στην μετάβαση από αλγεβρικό σε γραφικό και αντίστροφα, η οποία έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης πολλών ερευνητών (Knuth, 2000; Sfard, 1992; Eisenberg & Dreyfus, 1994; Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992; Gagatsis & Shiakalli, 2004) και οφείλεται σε πλήθος παραγόντων (*βλ.* Κεφ.:1.4γ).

Στο ερώτημα Β2, όπου δόθηκε ο πίνακας τιμών μιας συνάρτησης, οι συμμετέχοντες μετάφρασαν στο αλγεβρικό και γραφικό πλαίσιο με την ίδια ευχέρεια. Το εύρημα ερμηνεύεται ως εξής: από το αριθμητικό στο αλγεβρικό πλαίσιο αρκούσε η παρατήρηση ότι όλες οι τιμές του y ήταν -1, συνεπώς ο αλγεβρικός τύπος προέκυψε άμεσα με μια απλή μετάβαση μεταξύ αναλογικών τρόπων έκφρασης της πληροφορίας, η οποία δεν απαιτεί ιδιαίτερη επεξεργασία και προσεγγίζεται λειτουργικά (Sfard, 1991; 1992). Αντίστοιχα, οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με την μετάφραση από το αριθμητικό στο γραφικό πλαίσιο, αφού για να χαράξουν μια αναπαράσταση συνηθίζουν να δημιουργούν πρώτα τον πίνακα τιμών (Leinhardt et al., 1990, στο Γραββάνη 2006). Συνεπώς το μόνο που είχαν να κάνουν ήταν να αντιμετωπίσουν ως μια ενέργεια (Dubinsky,1991) την μετάβαση και να σημειώσουν τα διατεταγμένα ζεύγη στους άξονες. Η συγκεκριμένη ενέργεια θα μπορούσε να ενταχθεί και στα πλαίσια της διαδικασίας, λόγω της επανειλημμένης χρήσης τέτοιου είδους υπολογισμών.

Άξιο μεμονωμένης μελέτης αποτελεί το ερώτημα Β5, όπου δόθηκε η γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$, ενώ ζητήθηκαν οι μεταβάσεις προς αλγεβρικό και αριθμητικό πλαίσιο. Με βάση τη συσχέτιση ποσοστών επιτυχούς μετάφρασης (Πίνακας 4.14α) παρατηρείται ότι οι μεταβάσεις προς τα δύο πλαίσια πραγματοποιήθηκαν με παρόμοια ποσοστά επιτυχίας (δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ των εξεταζόμενων ποσοστών). Ειδικότερα, η μετάβαση γραφικού σε αλγεβρικό πλαίσιο, όπως προαναφέρθηκε, εμφανίζει πολλές δυσκολίες. Παρόλα αυτά, στο εν λόγω παράδειγμα φαίνεται να επιτυγχάνεται εξίσου εύκολα με την μετάβαση από το γραφικό στο αριθμητικό. Το γεγονός οφείλεται στο πρωτοτυπικό σχήμα της δοθείσας συνάρτησης, το οποίο έχει συνδεθεί νοερά με τον αντίστοιχο τύπο (Tall & MdNor, 1992). Αντίστοιχα και η μετάβαση στο αριθμητικό πλαίσιο επιτυγχάνεται με ευκολία, για τους ίδιους λόγους που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη μετάβαση (Leinhardt et al., 1990; Dubinsky, 1991; Sfard, 1992).

Στο ερώτημα Β7 δόθηκε η γραφική παράστασης μιας συνάρτησης με 3 κλάδους. Η μετάβαση στο αριθμητικό πλαίσιο πραγματοποιήθηκε με διπλάσιο ποσοστό επιτυχίας έναντι του αλγεβρικού. Το φαινόμενο αντιμετωπίστηκε ως μια απλή καταγραφή σημείων. Δηλαδή ο μαθητής απομόνωσε από την ολιστική εικόνα μεμονωμένα σημεία, με τα οποία συμπλήρωσε τον πίνακα τιμών, στα πλαίσια μια ενέργειας, η οποία τείνει να γίνει διαδικασία μέσω της επανάληψης (Leinhardt et al., 1990; Dubinsky, 1991; Sfard, 1992).

Τα Διαγράμματα 4.1 και 4.2 αποτυπώνουν συνοπτικά την επιτυχία στις μεταβάσεις, όπως αυτές σχολιάστηκαν παραπάνω, αλλά και τις προτιμήσεις των μαθητών ως προς την ευκολότερη μετάβαση. Παρατηρήθηκε ότι η εναλλαγή μεταξύ αλγεβρικού και γραφικού πλαισίου εμφανίζει αφενός χαμηλά ποσοστά επιτυχίας, αφετέρου χαμηλά ποσοστά προτίμησης.

[4.3] Ομάδα Ερωτήσεων Γ (άξονας επίλυσης)

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του τρίτου μέρους του ερωτηματολογίου και συγκεκριμένα οι συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) του τρόπου επίλυσης των έργων Γ1 και Γ2. Στον Πίνακα 4.14 παρουσιάζεται συνολικά η επιτυχία στην επίλυση των ερωτημάτων Γ1 και Γ2, ενώ στον Πίνακα 4.15 η ίδια κατανέμεται ανά αναπαραστατικό πλαίσιο στο οποίο δόθηκε η λύση. Από τους συμμετέχοντες ζητήθηκε, αν ήταν δυνατόν, να εκπονηθεί και δεύτερος τρόπος επίλυσης (Β τρόπος).

Πίνακας 4.14

Συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) επιτυχούς επίλυσης των ερωτήσεων Γ1 και Γ2.

	Επίλυση (N=75)			
	Γ1		Γ2	
	Α τρόπος	Β τρόπος	Α τρόπος	Β τρόπος
Ορθές απαντήσεις	27 (36%)	17 (22.67%)	22 (29.33%)	12 (16%)

Τόσο στο ερώτημα Γ1, όσο και στο ερώτημα Γ2 η επιτυχία κυμάνθηκε σε χαμηλά επίπεδα. Συγκεκριμένα, 36% των συμμετεχόντων κατάφεραν να επιλύσουν σωστά το Γ1 και 29.33% το Γ2. Σε ότι αφορά τον Β τρόπο που ζητήθηκε, τα ποσοστά επιτυχία μειώνονται στο 22.67% και 16% αντίστοιχα για τα δύο ερωτήματα.

Πίνακας 4.15

Συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) επιτυχούς επίλυσης των ερωτήσεων Γ1 και Γ2 ανά τρόπο επίλυσης και πλαίσιο προτίμησης.

	Επιτυχής Επίλυση (N=75)			
	Γ1		Γ2	
	Α τρόπος	Β τρόπος	Α τρόπος	Β τρόπος
Αριθμητικό πλαίσιο	1 (1.33%)	7 (9.33%)	4 (5.33%)	0 (0%)
Αλγεβρικό πλαίσιο	22 (29.33%)	4 (5.33%)	18 (24%)	0 (0%)
Γραφικό πλαίσιο	4 (5.33%)	6 (8%)	0 (0%)	12 (16%)

Στο ερώτημα Γ1, το 29.33% των μαθητών που έλυσαν σωστά το πρώτο έργο επέλεξαν την αλγεβρική επίλυση. Μόλις 4 στους 75 μαθητές το έλυσαν γραφικά και ένας μαθητής το έλυσε αριθμητικά, δοκιμάζοντας τιμές. Σε ότι αφορά τον δεύτερο τρόπος επίλυσης, φαίνεται ότι οι μαθητές στράφηκαν στα άλλα δύο πλαίσια, με το ποσοστό ορθής επίλυσης στο αριθμητικό να είναι 9.33% και στο γραφικό πλαίσιο 8%.

Στο τελευταίο πρόβλημα του ερωτηματολογίου, το 24% των συμμετεχόντων έδωσε σωστή αλγεβρική λύση, ενώ το 5.33% σωστή αριθμητική. Κανένας από τους συμμετέχοντες δεν δοκίμασε να επιλύσει γραφικά το πρόβλημα, συνεπώς δεν σημειώθηκε σκορ στις σωστές απαντήσεις. Τέλος, το 16% όσων έδωσαν σωστό δεύτερο τρόπο κινήθηκαν στο γραφικό πλαίσιο.

Συνοψίζοντας, παρατηρήθηκαν τα εξής:

- Τα ποσοστά επίλυσης προβλημάτων βρίσκονται σε χαμηλά επίπεδα.
- Σε ότι αφορά τους πρώτους τρόπους επίλυσης, το υψηλότερο ποσοστό ορθής επίλυσης και στα δύο προβλήματα καταγράφηκε στο αλγεβρικό πλαίσιο.

Το εύρημα ήταν αναμενόμενο, αφού οι μαθητές επιμένουν να χρησιμοποιούν αλγεβρικές διαδικασίες και πράξεις, παρότι το αποτέλεσμα θα μπορούσε να αντιμετωπιστεί ευκολότερα γραφικά, ειδικά στο πρώτο πρόβλημα, το οποίο είχε δοθεί σε γραφικό πλαίσιο. Αντίστοιχο εύρημα επισήμαναν και οι Eisenberg & Dreyfus (1992; 1994) στη δική τους έρευνα, συμπληρώνοντας πως μόνον όταν οι μαθητές δεν μπορούσαν να δώσουν δεύτερη αλγεβρική λύση, κατέφευγαν στην γραφική. Τα ευρήματα έρχονται σε συμφωνία με αυτά των Knuth (2000), Goldenberg (1988), Moschkovich et al. (1993), Eisenberg & Dreyfus (1992, στο

Knuth, 2000), Gagatsis & Shiakalli (2004), με τα αίτια αυτής της εμμονής να κατηγοριοποιούνται σε γνωστικής, επιστημολογικής και συναισθηματικής φύσης (Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992).

[4.4] Συσχετίσεις ικανοτήτων

Στην προσπάθεια συσχέτισης των ευρημάτων ανά άξονα, δημιουργήθηκε η ανάγκη ελέγχου και αξιολόγησης της συνάφειας μεταξύ δύο μεταβλητών. Ο έλεγχος αυτός πραγματοποιείται με τον υπολογισμό των συντελεστών συνάφειας (r) των Pearson (παραμετρικό) και Spearman (μη παραμετρικό). Λαμβάνοντας υπόψη τον έλεγχο κανονικότητας που πραγματοποιήθηκε για κάθε μια από τις τρεις μεταβλητές (σκορ που σημειώθηκε στις ερωτήσεις των τριών ομάδων), παρατηρήθηκε ότι δεν ακολουθούν κανονική κατανομή, οπότε κρίθηκε κατάλληλη η χρήση του δείκτη συσχέτισης Spearman.

Σε ότι αφορά την αξιολόγηση του μεγέθους του δείκτη χρησιμοποιήθηκε η κλιμάκωση που παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.16 (Darren & Mallery, 2019; Bryman & Cramer, 2001):

Πίνακας 4.16

Ερμηνεία των τιμών του συντελεστή Spearman.

Τιμή	Ερμηνεία
Από 0.00 έως 0.20	Μηδενική σχέση
Από 0.21 έως 0.40	Μικρή σχέση
Από 0.41 έως 0.60	Μέτρια σχέση
Από 0.61 έως 0.80	Δυνατή σχέση
Από 0.81 έως 1.00	Εξαιρετικά δυνατή σχέση

Στη συνέχεια, η κάθε ερώτηση έλαβε τον αντίστοιχο βαθμό, ώστε να δημιουργηθεί ένα σκορ από κάθε ομάδα ερωτήσεων. Κάθε σωστή αναγνώριση της πρώτης ομάδας ερωτήσεων πήρε ένα βαθμό ενώ η λανθασμένη κανένα. Ομοίως στην δεύτερη ομάδα ερωτήσεων, η κάθε σωστή μετάφραση πήρε έναν βαθμό ενώ η λανθασμένη κανένα. Στην τρίτη ομάδα ερωτήσεων η σωστή επίλυση πήρε έναν βαθμό και η λανθασμένη κανένα. Συγκεκριμένα από την ομάδα ερωτήσεων Α προέκυψε το score_A, με μέγιστο σκορ το 14, από την ομάδα ερωτήσεων Β το score_B, με μέγιστο σκορ το 14 και από την ομάδα ερωτήσεων Γ το score_Γ, με μέγιστο σκορ το 4. Αυτά, με την κατάλληλη κλιμάκωσή τους αποτέλεσαν και τις προς συσχέτιση μεταβλητές.

Ειδικότερα, οι υποθέσεις ήταν:

$$H_o: r_s = 0 \text{ (δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών)}$$

$$H_1: r_s \neq 0 \text{ (υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών)}$$

Υπό το κριτήριο:

$$t = \frac{r_s}{\sqrt{\frac{1 - r_s^2}{n - 2}}}$$

Όπου:

$$Var(r) = \frac{1 - r_s^2}{n - 2}$$

Η υπόθεση απορρίπτεται για τις τιμές:

$$|t| > t_{\alpha/2;n}$$

Ειδικότερα, στον δίπλευρο έλεγχο (two-tailed) που πραγματοποιήθηκε διερευνήθηκε αν υπάρχει: α) σχέση της ικανότητας αναγνώρισης μιας συνάρτησης (score_A) με την ικανότητα μετάφρασης από ένα πλαίσιο σε ένα άλλο (score_B), β) σχέση της ικανότητας μετάφρασης (score_B) με την ικανότητα επίλυσης ενός προβλήματος που εμπεριέχει συναρτήσεις (score_Γ), γ) σχέση της ικανότητας αναγνώρισης (score_A) με την ικανότητα επίλυσης ενός προβλήματος που εμπεριέχει συναρτήσεις. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 4.17

Συσχετίσεις μεταξύ των αξόνων.

			score_A	score_B	score_Γ
Spearman's rho	score_A	Correlation Coefficient	1,000	,606**	,428**
		Sig. (2-tailed)	.	,000	,000
		N	75	75	75
	score_B	Correlation Coefficient	,606**	1,000	,665**
		Sig. (2-tailed)	,000	.	,000
		N	75	75	75
	score_Γ	Correlation Coefficient	,428**	,665**	1,000
		Sig. (2-tailed)	,000	,000	.
		N	75	75	75

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Από τον Πίνακα 4.17 φαίνεται ότι:

- Η σχέση μεταξύ της ικανότητας αναγνώρισης και την ικανότητα μετάφρασης για τους 75 μαθητές που αξιολογήθηκαν είναι 0.606 η οποία χαρακτηρίζεται ως στατιστικά σημαντική όπως διαπιστώνεται και από την παρατηρούμενη πιθανότητα $p = 0.000 < 0.01$ $(Sig.)$. Η σχέση είναι θετική μεταξύ των μεταβλητών, δηλαδή ανάλογη και αξιολογείται σε μέτρια με δυνατή σχέση.
- Η σχέση μεταξύ της ικανότητας μετάφρασης και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος για τους 75 μαθητές που αξιολογήθηκαν είναι 0.665, η οποία χαρακτηρίζεται ως στατιστικά σημαντική όπως διαπιστώνεται και από την παρατηρούμενη πιθανότητα $p = 0.000 < 0.01$. Η σχέση είναι θετική μεταξύ των μεταβλητών, δηλαδή ανάλογη και αξιολογείται σε δυνατή σχέση.
- Η σχέση μεταξύ της ικανότητας αναγνώρισης και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος για τους 75 μαθητές που αξιολογήθηκαν είναι 0.428 η οποία χαρακτηρίζεται ως στατιστικά σημαντική όπως διαπιστώνεται και από την παρατηρούμενη πιθανότητα $p = 0.000 < 0.01$. Η σχέση είναι θετική μεταξύ των μεταβλητών, δηλαδή ανάλογη και αξιολογείται σε μέτρια σχέση.

Τέλος, συγκρίθηκαν οι μέσοι όροι των ερωτήσεων των τριών ομάδων, με τη χρήση του μη-παραμετρικού τεστ Wilcoxon, με σκοπό να διαπιστωθεί η δυσκολία κάθε ομάδας. Μεταξύ της ομάδας αναγνώρισης και της ομάδας μετάφρασης υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά (p-value<0,001), με τους μαθητές να σημειώνουν καλύτερη επίδοση στην αναγνώριση (Πίνακες 4.29 και 4.30, Παράρτημα ΙΙΙ). Ομοίως, μεταξύ της ομάδας μετάφρασης και της ομάδας επίλυσης υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά (p-value<0,001), με τους μαθητές να σημειώνουν καλύτερη επίδοση στην μετάφραση (Πίνακες 4.31 και 4.32, Παράρτημα ΙΙΙ). Ακόμα, μεταξύ της ομάδας αναγνώρισης και της ομάδας επίλυσης υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά (p-value<0,001), με τους μαθητές να σημειώνουν καλύτερη επίδοση στην αναγνώριση (Πίνακες 4.31 και 4.32, Παράρτημα ΙΙΙ).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ: 5^o

[5.1] Συζήτηση - Συμπεράσματα

Στην παρούσα έρευνα διερευνήθηκε η ικανότητα των μαθητών της Γ Λυκείου στην αναγνώριση, μετάφραση και επίλυση προβλημάτων που ενέχουν συναρτήσεις, ως διαστάσεις της γνώσης της έννοιας συνάρτηση.

Σε ότι αφορά την πρώτη ομάδα ερωτήσεων που αποσκοπούσε στην διερεύνηση της ικανότητας αναγνώρισης, τα συμπεράσματα θα σχολιαστούν με βάση τις δύο ομαδοποιήσεις όπως παρουσιάστηκαν στο 4^o κεφάλαιο. Η πρώτη ομάδα έδειξε πως οι μαθητές της έρευνας είναι σε θέση να αναγνωρίσουν μια συνάρτηση εξίσου καλά, ανεξαρτήτως πλαισίου που θα τους δοθεί, αφού οι μέσοι όροι επιτυχίας βρίσκονται στα ίδια επίπεδα (74.34% αριθμητικό, 73.33% αλγεβρικό, 72.23% γραφικό). Όταν, όμως, ζητήθηκαν οι αιτιολογήσεις, σημειώθηκαν χαμηλότερα σκορ στις αντίστοιχες απαντήσεις (50.67% αριθμητικό, 24% αριθμητικό, 36.66% γραφικό), γεγονός που σηματοδοτεί χρήση μεθοδολογιών ή πρωτοτυπικών σχημάτων, τα οποία οι μαθητές χρησιμοποιούν χωρίς πολλές φορές να κατανοούν. Το εύρημα είναι έρχεται σε αντίθεση με αντίστοιχες έρευνες, όπου η αναγνώριση στο γραφικό πλαίσιο παρουσιάστηκε ως η δυσκολότερη, λόγω της φύσης του πλαίσιου (Γαγάτσης et al., 2000; Hitt, 1998; Kaldrimidou & Ikonomou, 1998; Tall & MdNor, 1992; Καλδρυμίδου & Οικονόμου 1992). Στη δεύτερη ομαδοποίηση η σταθερή $x = a$, αναγνωρίστηκε με παρόμοια ποσοστά επιτυχία και στα τρία πλαίσια (μ.ο. 69.33%), όπως και η γραμμική $y = ax$ (μ.ο. 66.33%). Παρόλα αυτά, η διαφορά στα ποσοστά επιτυχίας των Α12 και Α13 (92% και 64% αντίστοιχα) δείχνει ότι η προσθήκη και δεύτερου κλάδου μειώνει αισθητά την επιτυχία στην αναγνώριση, γεγονός που αποδόθηκε στην θεώρηση ότι οι κλαδωτές συναρτήσεις αποτελούν μη κανονικά σχήματα και δεν αποτελούν εκφράσεις συνάρτησης (Tall & MdNor, 1992; Markovits et al., 1986.

Συμπερασματικά, σε μια προσπάθεια απάντησης στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα, λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, είναι δόκιμο να ισχυριστούμε ότι οι μαθητές της Γ Λυκείου του δείγματος είναι εξίσου ικανοί στην αναγνώριση μιας συνάρτησης σε καθένα από τα τρία αναπαραστατικά πλαίσια που διαπραγματεύτηκε η παρούσα εργασία.

Στην δεύτερη ομάδα ερωτήσεων που αποσκοπούσε στην διερεύνηση της ικανότητας μετάφρασης, παρατηρήθηκε αρχικά ότι οι μεταβάσεις από και προς το αριθμητικό πλαίσιο παρουσίασαν τα μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας. Το εν λόγω εύρημα χαρακτηρίστηκε ως αναμενόμενο, με βάσεις τις έρευνες των Sfard (1991; 1992) και Leinhardt et al., (1990, στο Γραββάνη 2006), αφού ο αριθμητικός αποτελεί έναν αναλογικό τρόπο έκφρασης της συνάρτησης, ο οποίος είναι εύκολος στην επεξεργασία και ανάγνωση. Η μετάβαση από το αλγεβρικό στο αριθμητικό πλαίσιο είναι μια απλή αντικατάσταση, η οποία δεν απαιτεί ιδιαίτερη επεξεργασία και προσεγγίζεται λειτουργικά από τους μαθητές. Αντίστοιχα ο συνηθέστερος τρόπος χάραξης της γραφικής παράσταση προαπαιτεί τη δημιουργία πίνακα τιμών, διαδικασία με την οποία είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές. Συνεπώς, αντιμετωπίζουν την μετάβαση ως μια ενέργεια (Dubinsky, 1991) η οποία μετά από επανειλημμένη χρήση τείνει να γίνει διαδικασία. Κατά την δεύτερη ομαδοποίηση, έγινε προσπάθεια βαθύτερης διερεύνησης της μετάβασης μεταξύ αλγεβρικού – γραφικού, καθότι χαρακτηρίζεται ως η δυσκολότερη όλων των μεταβάσεων. Η ομάδα ερωτήσεων Β1, Β3 και Β4 ανάδειξε την δυσκολία στη μετάβαση από το αλγεβρικό στο γραφικό πλαίσιο, ενώ η ομάδα Β5, Β6 και Β7 την δυσκολία στην αντίθετη μετάβαση. Το εύρημα ήταν αναμενόμενο και σύμφωνο με τις έρευνες των Knuth (2000), Sfard (1992). Eisenberg & Dreyfus (1994), Καλδρυμίδου & Οικονόμου (1992) και Gagatsis & Shiakalli (2004) αφού απαιτεί ριζική αλλαγή στον τρόπο ανάγνωσης και επεξεργασίας των προσλαμβανόμενων πληροφοριών. Η δυσκολία επισημάνθηκε και από τα χαμηλά ποσοστά προτίμησης στην προαναφερθείσα εναλλαγή.

Συμπερασματικά, σε μια προσπάθεια απάντησης στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, είναι δόκιμο να ισχυριστούμε ότι οι μαθητές της Γ Λυκείου του δείγματος αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην εναλλαγή μεταξύ ορισμένων αναπαραστάσεων. Το κύριο πρόβλημα εντοπίζεται στη σύνδεση μεταξύ αλγεβρικού και γραφικού πλαισίου, εύρημα που δείχνει να συμφωνεί με τα ευρήματα παρόμοιων ερευνών (Gagatsis & Shiakalli, 2004; Hitt, 1998; Kaldrimidou & Ikonomou, 1998; Even, 1998; Lesh et al., 1987; NCTM, 2000). Επιπλέον, οι μεταβάσεις με τα υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας αλλά και προτίμησης από τους μαθητές φαίνεται πως είναι προς το αριθμητικό πλαίσιο.

Στο τρίτο σκέλος των ερωτήσεων που αποσκοπούσε στην διερεύνηση της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων που εμπεριέχουν συναρτήσεις, αρχικά επισημάνθηκε το χαμηλό ποσοστό επιτυχούς επίλυσης, γεγονός που αναδεικνύει τη δυσκολία των μαθητών στα προβλήματα. Σε δεύτερη ανάλυση, οι μαθητές προτίμησαν τη χρήση αλγεβρικών διαδικασιών και πράξεων, ακόμα και όταν έτερες προσεγγίσεις (π.χ. γραφική) έδιναν ευκολότερα και αμεσότερα απάντηση. Τα ευρήματα έρχονται σε συμφωνία με αυτά των Knuth (2000), Goldenberg (1988), Moschkovich et al. (1993), Eisenberg & Dreyfus (1992, στο Knuth, 2000), Gagatsis & Shiakalli (2004), με τα αίτια αυτής της εμμονής να κατηγοριοποιούνται σε γνωστικής, επιστημολογικής και συναισθηματικής φύσης κατά τους Καλδρυμίδου & Οικονόμου (1992).

Συνεπώς, επί του τρίτου ερευνητικού ερωτήματος, λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, είναι δόκιμο να ισχυριστούμε ότι οι μαθητές της Γ Λυκείου του δείγματος εμμένουν στην αλγεβρική επίλυση των προβλημάτων που ενέχουν συναρτήσεις.

Λαμβάνοντας υπόψη τους ελέγχους που πραγματοποιήθηκαν στο 4^{ο} Κεφάλαιο, σε μια προσπάθεια διερεύνησης των σχέσεων μεταξύ των ικανοτήτων που απασχόλησαν την παρούσα μελέτη, είναι δόκιμο να ισχυριστούμε ότι:

1] Υπάρχει μέτρια προς δυνατή σχέση μεταξύ της ικανότητας αναγνώρισης με την ικανότητα μετάφρασης.

2] Υπάρχει δυνατή σχέση μεταξύ ικανότητας μετάφρασης και πλαισίου προτίμησης επίλυσης.

3] Υπάρχει μέτρια σχέση μεταξύ ικανότητας αναγνώρισης και πλαισίου προτίμησης επίλυσης.

Και με αυτά τα αποτελέσματα δίνεται απάντηση στο τέταρτο και τελευταίο ερευνητικό ερώτημα της παρούσας εργασίας.

[5.2] Περιορισμοί της έρευνας

Αξιοσημείωτος περιορισμός για τη διεξαγωγή της έρευνας αποτέλεσε η επιλογή του χρονικού διαστήματος για τη διανομή και συμπλήρωση των ερωτηματολογίων από τους μαθητές. Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν μαθητές και μαθήτριες της Γ' τάξης Γενικών Λυκείων του Νομού Θεσσαλονίκης.

Καθώς η διδασκαλία όλης της ύλης του μαθήματος των Μαθηματικών Κατεύθυνσης στα συγκεκριμένα σχολεία ήταν απαραίτητη προϋπόθεση για τη συμπλήρωση των ερωτηματολογίων, θεωρήθηκε καταλληλότερο τα τελευταία να διανεμηθούν στους μαθητές με την ολοκλήρωση της διδασκαλίας της ύλης από το εκπαιδευτικό προσωπικό των σχολικών μονάδων, λίγο καιρό πριν τη διεξαγωγή των Πανελλήνιων εξετάσεων. Ωστόσο, αφενός η παραμονή τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο των περισσότερων μαθητών στο σπίτι για την καλύτερη προετοιμασία τους για τις εξετάσεις, αφετέρου η ανάγκη για συμπλήρωση του ερωτηματολογίου εντός της σχολικής τάξης παρουσία του ερευνητή, αποτέλεσαν σημαντικά εμπόδια για την έρευνα. Έτσι, ο αριθμητικός περιορισμός στο δείγμα της έρευνας (75 συμμετέχοντες), καθώς επίσης η ψυχολογική πίεση και το άγχος των μαθητών λόγων των επικείμενων εξετάσεων ήταν δύο από τα αρνητικά επακόλουθα της χρονικής επιλογής.

Ακόμη, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη πως, αν και τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας εκδηλώνουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, δεν αντιπροσωπεύουν το σύνολο των μαθητών της Γ Λυκείου. Και αυτό διότι για πρακτικούς λόγους, δεν κατέστη δυνατό να αποτελέσουν ερευνητικό δείγμα όλοι οι μαθητές της ελληνικής επικράτειας, παρά μόνο ένας αριθμός εξ αυτών του Νομού Θεσσαλονίκης. Λόγω των παραπάνω μεταβλητών, χρειάζεται να επιδειχθεί ιδιαίτερη προσοχή στην ερμηνεία και γενίκευση των αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων της έρευνας.

[5.3] Πρόταση για περαιτέρω έρευνα

Η κατανόηση της έννοιας συνάρτηση αποτελεί ένα σημαντικό κεφάλαιο της Μαθηματικής Παιδείας. Η παρούσα εργασία προσπάθησε να αποσαφηνίσει την εικόνα που έχουν για την έννοια οι μαθητές της Γ Λυκείου διερευνώντας βασικές διαστάσεις της κατανόησης της έννοιας, όπως η αναγνώριση της έννοιας στα διάφορα αναπαραστατικά της πλαίσια, η εναλλαγή μεταξύ αυτών και η προτίμηση πλαισίου επίλυσης προβλημάτων που ενέχουν συναρτήσεις.

Για σκοπούς μελλοντικής έρευνας θα ήταν χρήσιμο να εξεταστεί η εξελικτική πορεία κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης. Συγκεκριμένα, θα μπορούσαν να εξεταστούν οι ίδιοι μαθητές ως φοιτητές πλέον, ώστε να διαπιστωθεί αν έχουν αναπτυχθεί οι ικανότητες που μελετήθηκαν στην παρούσα εργασία. Επίσης, θα μπορούσε να διερευνηθεί η σύνδεση των παραπάνω ικανοτήτων με την επίδοσή τους στην Πανελλαδικές εξετάσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

Ξένη βιβλιογραφία

Bossé, M. Adu-Gyamfi, K., Cheetham, M. (2011). Translations Among Mathematical Representations: Teacher Beliefs and Practices. *International Journal for Mathematics Teaching & Learning, 1-23*.

Bryman, A. & Cramer, D. (2001). *Quantitative Data Analysis with SPSS Release 10 for WIndoes. A guide for social scientists*. New York: Routledge.

Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, 1*(7), 115-162. Providence, RI: American Mathematical Society.

Creswell, J. & D. (2018). *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches* (5th ed.). Los Angeles: SAGE.

Darren, G. & Mallery, P. (2019). IBM SPSS Statistics 25 Step By Step: A Simple Guide And Reference (15th ed.). New York: Routledge.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 95–126. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. In E. Dubinsky & G. Harel (Ed.), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy,* 85-106. Washington: The Mathematical Association of America.

Duval, R. (1987). The role of interpretation in the learning of mathematics. *Diastasi, 2,* 56-74.

Duval, R. (1995a). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processing. In R. Suttherland and J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, 142–157. Springer: Berlin.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*(2), 1-16.

Eisenberg, T.: (1991). Functions and associated learning difficulties. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking,* 140-152. Dordrecht: Kluwer.

Eisenberg, T. (1992). On the Development of a Sence for Functions. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy,* 153-174. Washington: The Mathematical Association of America.

Eisenberg T., Dreyfus T., (1994) On understanding how students learn to visualize function transformations. *Research on Collegiate Mathematics Education I*, 45 - 68. Washington: The Mathematical Association of America.

Elia., I., Gagatsis, A., & Gras, R. (2005). Can we “trace” the phenomenon of compartmentalization by using the I.S.A.? An application for the concept of function. In R. Gras, F. Spagnolo & J. David (Eds.), *Proceedings of the Third International Conference I.S.A. Implicative Statistic Analysis*, 175-185. Palermo, Italy: Universita degli Studi di Palermo.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils’ conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5,* 533-566.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 105-121.

Field, A., 2013. *Discovering Statistics Using IBM SPSS*. London: SAGE.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, 24*(5), 645-657.

Goldin, G. A. (1987). Levels of language in mathematics problem solving. In C. Janvier (Ed.) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics,* 59-65. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Goldin, G. A. & Kaput, J. J., (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing Mathematics. In Steffe, L. P., Nesher, P., Cobb, P., Goldin, G. A., & Greer, B. (Eds.), *Theories of Mathematical Learning,* 397-430. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134.

Janvier, C. (1987a). Translation Processes in Mathematics Education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics,* 27-32. Hillsdale. NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaldrimidou M. & Ikonomou A., (1998). Epistemological and metacognitive conceptions as factors involved in the learning of mathematics: A study which focuses on graphic representations of functions. In M. Bartolini-Bussi, A. Sierpinska, H. Steinbring (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom*, 271-288. NCTM: Reston VA.

Kaput, J. J., (1987a). Representation Systems and Mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics,* 19-26. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Knuth, J. E. (2000). Student understanding of the Cartesian connection: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 500-507.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and Translations Among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics,* 33-40. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Malik, M.A., (1980). Historical and pedagogical aspects of the definition of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 11* (4), 489-492.

Markovits, Z., Eylon, B.-S. & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics, 6*(2), 18-24.

Mousoulides, N., & Gagatsis, A. (2004). Algebraic and geometric approach in function problem solving. In M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3,* 385-392. Bergen University College.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston: Va, NCTM

Ott, L. (1988). *An introduction to statistical methods and data analysis* (3rd ed.). Boston, Massachusetts: PWS-KENT Publishing Company.

Piaget, J., Grize, J.B., Szeminska, A. & Bang, V. (1977). *Epistemology and Psychology of Functions.* Dordrecht: Reidel.

Presmeg, N (1992) Prototypes, metaphors metonymies and imaginative rationality in high school Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 23*(6), 595-610.

Proulx, J. (2015). Mental mathematics with mathematical objects other than numbers: The case of operation on functions*. Journal of Mathematical Behavior, 39,* 156-176.

Schoenfeld, A., H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem – Solving, Metacognition and Sense Making in Mathematics. In D. A. Crouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.334-368). New York: Macmillan.

Schwarz, B. B., & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: Brakes or levers in learning the function concept? The role of computer tools. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 362–389.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1- 36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - the case of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy,* 59-84. Washington: The Mathematical Association of America.

Shippmann, J. S., Ash, R. A., Battista, M., Carr, L., Eyde, L. D., Hesketh, B., Kehoe, J., Pearlman, K., and Sanchez, J. I. (2000). The practice of competency modeling. *Personnel Psychology, 53*, 703-740.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding the Notion of Function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, 25-28. Washington: The Mathematical Association of America.

Snedecor, G., & Cochran, W. (1980). *Statistical Methods* (7th ed.). Ames: The Iowa State University Press.

Tall, D. & MdNor, Bakar. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematics Education in Science & Technology*, *23*(1), 39–50.

Thompson, P. W. (1994b). Students, functions and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. I. CBMS Issues in Mathematics Education,* 21-44. Providence, RI: American Mathematical Society

Von Glasersfeld, E. (1987b). Preliminaries to any Theory of Representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics,* 215-225. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Vinner S., Dreyfus T., (1989) Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 356-366.

Yerushalmy, M. (1997). Designing representations: Reasoning about functions of two variables. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 431-466.

Zachariades, T., Christou, C., Papageorgiou, E. (2000). The difficulties and reasoning of undergraduate mathematics students in the identification of functions. *Proceedings of 2nd ICTM,* 353-362. Athens.

Zar, J. (1999). *Biostatistical Analysis* (4th ed.). New Jersey: Prentice Hall.

Ελληνική βιβλιογραφία

Γαγάτση, Α., Κυριακίδη, Λ., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ. (2000). Ο Ρόλος της Μετάφρασης μεταξύ των Διαφόρων Πεδίων Αναπαράστασης της Έννοιας της Συνάρτησης στη Μάθηση της Έννοιας. Στων Γεωργίου, Στ.. Κυριακίδη, Λ. & Χρίστου Κ. (Εκδ.), *Σύγχρονη Έρευνα στις Επιστήμες της Αγωγής,* 337-347. Λευκωσία: Παιδαγωγική Εταιρεία Κύπρου.

Γραββάνη, Κ. (2006). Αναπαραστάσεις συναρτήσεων και ο μετασχηματισμός τους από μαθητές Λυκείου. *Διπλωματική εργασία στα πλαίσια μεταπτυχιακού προγράμματος στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών.* Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών - Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Καλδρυμίδου, Μ., & Οικονόμου, Α. (1992). Δεξιότητα Χειρισμού Γραφικών Παραστάσεων Αποφοίτων Λυκείου. *Τετράδια Διδακτικής των Μαθηματικών, 10-11*, 21-43.

Καλδρυμίδου Μ., Μορόγλου, Ε. (2007), Αντιλήψεις για την έννοια της συνάρτησης και ο ρόλος του αναπαραστατικού πλαισίου, στο Χ. Σακονίδης, Δ. Δεσλή (επιμ.), *Πρακτικά 2ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ)*, 293-303. Αθήνα: Τυπωθήτω.

Κολέζα, Ε. (2000). Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών. Αθήνα: Leader Books.

Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ., Γιαννακούλιας, Ε. (1987). *Απειροστικός Λογισμός*, Τόμος 1, Αθήνα: Αίθρα.

Σχολικά Εγχειρίδια:

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Στ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α., (2012). *Άλγεβρα Β' Γενικού Λυκείου.* Αθήνα: ΟΕΒΔ.

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ. (2016). *Μαθηματικά Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου, Ομάδας προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής.* Αθήνα: ΙΤΥΕ Διόφαντος.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Στ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α., Αδαμόπουλος, Λ., Δαμιανού, Χ. (2012). *Άλγεβρα και στοιχεία Πιθανοτήτων Α' Λυκείου.* Αθήνα: ΙΤΥΕ Διόφαντος»

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Στ., Χρυσοβέργης, Μ., (2007) *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου.* Αθήνα: Πατάκη.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., Ρεκούμης, Κ., (2006). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου.* Αθήνα: Πατάκη.

Παράρτημα Ι

Πίνακας 4.4α

Συσχετίσεις ποσοστών των αποτελεσμάτων του Πίνακα 4.4

Συσχέτιση αποτελεσμάτων των ερωτημάτων Α1 και Α6	
Υπόθεση:	$H_0: p_1 = p_2$
	$H_1: p_1 \neq p_2$
$z = 0.3587 < 1.96 = z_{0.05}$	

Πίνακας 4.4β

Συσχετίσεις ποσοστών των αποτελεσμάτων του Πίνακα 4.4

Συσχέτιση αποτελεσμάτων των ερωτημάτων Α1 και Α11	
Υπόθεση:	$H_0: p_1 = p_2$
	$H_1: p_1 \neq p_2$
$z = 0.7083 < 1.96 = z_{0.05}$	

Πίνακας 4.4γ

Συσχετίσεις ποσοστών των αποτελεσμάτων του Πίνακα 4.4

Συσχέτιση αποτελεσμάτων των ερωτημάτων Α6 και Α11	
Υπόθεση:	$H_0: p_1 = p_2$
	$H_1: p_1 \neq p_2$
$z = 0.3501 < 1.96 = z_{0.05}$	

Πίνακας 4.5α

Συσχετίσεις ποσοστών των αποτελεσμάτων του Πίνακα 4.5

Συσχέτιση αποτελεσμάτων των ερωτημάτων Α2 και Α8	
Υπόθεση:	$H_0: p_1 = p_2$
	$H_1: p_1 \neq p_2$
$z = 1.441 < 1.96 = z_{0.05}$	

Πίνακας 4.5β

Συσχετίσεις ποσοστών των αποτελεσμάτων του Πίνακα 4.5

Συσχέτιση αποτελεσμάτων των ερωτημάτων Α2 και Α12	
Υπόθεση:	$H_0: p_1 = p_2$
	$H_1: p_1 \neq p_2$
$z = 1.7184 < 1.96 = z_{0.05}$	

Πίνακας 4.5γ

Συσχετίσεις ποσοστών των αποτελεσμάτων του Πίνακα 4.5

Συσχέτιση αποτελεσμάτων των ερωτημάτων Α8 και Α12	
Υπόθεση:	$H_0: p_1 = p_2$
	$H_1: p_1 \neq p_2$
$z = 0.2902 < 1.96 = z_{0.05}$	

Πίνακας 4.5δ

Συσχετίσεις ποσοστών των αποτελεσμάτων των Πινάκων 4.5 και 4.6

Συσχέτιση αποτελεσμάτων των ερωτημάτων Α12 και Α13	
Υπόθεση:	$H_0: p_1 = p_2$
	$H_1: p_1 \neq p_2$
$z = \mathbf{4.1392} > 1.96 = z_{0.05}$	

Πίνακας 4.7α

Συσχετίσεις ποσοστών των αποτελεσμάτων του Πίνακα 4.7

Συσχέτιση αποτελεσμάτων των ερωτημάτων Α3 και Α5	
Υπόθεση:	$H_0: p_1 = p_2$
	$H_1: p_1 \neq p_2$
$z = \mathbf{2.4623} > 1.96 = z_{0.05}$	

Πίνακας 4.7β

Συσχετίσεις ποσοστών των αποτελεσμάτων του Πίνακα 4.7

Συσχέτιση αποτελεσμάτων των ερωτημάτων Α3 και Α9	
Υπόθεση:	$H_0: p_1 = p_2$
	$H_1: p_1 \neq p_2$
$z = 1.8464 < 1.96 = z_{0.05}$	

Πίνακας 4.7γ

Συσχετίσεις ποσοστών των αποτελεσμάτων του Πίνακα 4.7

Συσχέτιση αποτελεσμάτων των ερωτημάτων Α5 και Α9	
Υπόθεση:	$H_0: p_1 = p_2$
	$H_1: p_1 \neq p_2$
$z = 0.6376 < 1.96 = z_{0.05}$	

Πίνακας 4.8α

Συσχετίσεις ποσοστών των αποτελεσμάτων του Πίνακα 4.8

Συσχέτιση αποτελεσμάτων των ερωτημάτων Α7 και Α10	
Υπόθεση:	$H_0: p_1 = p_2$
	$H_1: p_1 \neq p_2$
$z = 1.6449 < 1.96 = z_{0.05}$	

Πίνακας 4.9α

Συσχετίσεις ποσοστών επί των ερωτημάτων του Πίνακα 4.9

Συσχέτιση αποτελεσμάτων επιτυχούς μετάφρασης από γραφ. σε αριθμ. και αλγ. στο Β5	
Υπόθεση:	$H_0: p_1 = p_2$
	$H_1: p_1 \neq p_2$
$z = 0.8705 < 1.96 = z_{0.05}$	

Πίνακας 4.10α

Συσχετίσεις ποσοστών επί των ερωτημάτων του Πίνακα 4.10

Συσχέτιση αποτελεσμάτων προτίμησης μετάφρασης από γραφ. σε αριθμ. και αλγ. στο Β5	
Υπόθεση:	$H_0: p_1 = p_2$
	$H_1: p_1 \neq p_2$
$z = 0.8357 < 1.96 = z_{0.05}$	

Πίνακας 4.11α

Συσχετίσεις ποσοστών των αποτελεσμάτων του Πίνακα 4.11

Συσχέτιση αποτελεσμάτων αριθμητικού ⟶ αλγεβρικό και αριθμητικού ⟶ γραφικό πλαίσιο της ερώτησης Β2.	
Υπόθεση:	$H_0: p_1 = p_2$
	$H_1: p_1 \neq p_2$
$z = 1.013 < 1.96 = z_{0.05}$	

Πίνακας 4.12α

Συσχετίσεις ποσοστών των αποτελεσμάτων του Πίνακα 4.12

Συσχέτιση Μ.Ο. αποτελεσμάτων αλγεβρικού ⟶ αριθμητικό και αλγεβρικού ⟶ γραφικό πλαίσιο των ερωτήσεων Β1, Β3 και Β4.	
Υπόθεση:	$H_0: p_1 = p_2$
	$H_1: p_1 \neq p_2$
$z = 2.9190 > 1.96 = z_{0.05}$	

Πίνακας 4.13α

Συσχετίσεις ποσοστών των αποτελεσμάτων του Πίνακα 4.13

Συσχέτιση Μ.Ο. αποτελεσμάτων γραφικού ⟶ αριθμητικό και γραφικού ⟶ αλγεβρικό πλαίσιο των ερωτήσεων Β5, Β6 και Β7.	
Υπόθεση:	$H_0: p_1 = p_2$
	$H_1: p_1 \neq p_2$
$z = 3.0578 > 1.96 = z_{0.05}$	

Παράρτημα ΙΙ

Έλεγχος αξιοπιστίας με χρήση του δείκτη Cronbach's Alpha

Πρώτη διάσταση: Αναγνώριση

Πίνακας 4.20

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
,926	14

Πίνακας 4.21

Item Statistics

	Mean	Std. Deviation	N
A1_answ	1,65	,604	75
A2_answ	1,80	,465	75
A3_answ	1,60	,615	75
A4_answ	1,69	,592	75
A5_answ	1,79	,527	75
A6_answ	1,61	,634	75
A7_answ	1,43	,619	75
A8_answ	1,87	,445	75
A9_answ	1,72	,605	75
A10_answ	1,57	,597	75
A11_answ	1,61	,590	75
A12_answ	1,88	,434	75
A13_answ	1,53	,684	75
A14_answ	1,59	,660	75

Πίνακας 4.22

Item – Total Statistics

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item – Total Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
A1_answ	21,69	28,324	,803	,916
A2_answ	21,55	31,765	,357	,929
A3_answ	21,75	28,678	,728	,919
A4_answ	21,65	29,392	,640	,922
A5_answ	21,56	29,763	,662	,921
A6_answ	21,73	28,468	,736	,918
A7_answ	21,92	29,939	,521	,926

A8_answ	21,48	31,037	,527	,925
A9_answ	21,63	28,913	,702	,920
A10_answ	21,77	29,097	,683	,920
A11_answ	21,73	29,198	,675	,921
A12_answ	21,47	30,441	,673	,922
A13_answ	21,81	28,019	,740	,918
A14_answ	21,76	27,915	,789	,916

Δεύτερη διάσταση: Μετάφραση

Πίνακας 4.23
Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
,965	14

Πίνακας 4.24
Item Statistics

	Mean	Std. Deviation	N
B1_arith	1,77	,535	75
B1_graf	1,55	,643	75
B2_alg	1,48	,685	75
B2_graf	1,57	,661	75
B3_arith	1,55	,684	75
B3_graf	1,21	,664	75
B4_arith	1,47	,723	75
B4_graf	1,27	,684	75
B5_arith	1,63	,632	75
B5_alg	1,51	,724	75
B6_arith	1,61	,613	75
B6_alg	1,25	,680	75
B7_arith	1,72	,583	75
B7_alg	1,28	,689	75

Πίνακας 4.25
Item – Total Statistics

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item – Total Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
B1_arith	19,09	53,843	,567	,967

B1_graf	19,32	51,626	,708	,964
B2_alg	19,39	49,781	,861	,961
B2_graf	19,29	50,751	,784	,963
B3_arith	19,32	49,788	,862	,961
B3_graf	19,65	50,608	,797	,963
B4_arith	19,40	49,000	,895	,960
B4_graf	19,60	49,676	,874	,961
B5_arith	19,24	52,212	,653	,965
B5_alg	19,36	48,909	,903	,960
B6_arith	19,25	51,111	,809	,962
B6_alg	19,61	50,213	,820	,962
B7_arith	19,15	51,586	,795	,963
B7_alg	19,59	49,894	,843	,962

Σε ότι αφορά την **τρίτη διάσταση:**

Πίνακας 4.26
Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
,886	4

Πίνακας 4.27
Item Statistics

	Mean	Std. Deviation	N
G1_solut_A	,88	,915	75
G1_solut_B	,47	,844	75
G2_solut_A	,75	,887	75
G2_solut_B	,36	,747	75

Πίνακας 4.28
Item – Total Statistics

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item – Total Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
G1_solut_A	1,57	4,897	,715	,870
G1_solut_B	1,99	4,932	,797	,837
G2_solut_A	1,71	4,724	,809	,831
G2_solut_B	2,09	5,599	,699	,875

Παράρτημα ΙΙΙ

Σύγκριση μέσων όρων των ομάδων ερωτήσεων
με χρήση του μη-παραμετρικού τεστ Wilcoxon

Ι] Ικανότητα Αναγνώρισης – Ικανότητα Μετάφρασης

Πίνακας 4.29
Ranks

		N	Mean Rank	Sum of Ranks
Σύνολο σωστών μεταβάσεων_100 - Σύνολο σωστών αναγνωρίσεων_100	Negative Ranks	40[a]	34,05	1362,00
	Positive Ranks	17[b]	17,12	291,00
	Ties	18[c]		
	Total	75		

a. Σύνολο σωστών μεταβάσεων_100 < Σύνολο σωστών αναγνωρίσεων_100
b. Σύνολο σωστών μεταβάσεων_100 > Σύνολο σωστών αναγνωρίσεων_100
c. Σύνολο σωστών μεταβάσεων_100 = Σύνολο σωστών αναγνωρίσεων_100

Πίνακας 4.30
Test Statistics[a]

	Σύνολο σωστών μεταβάσεων_100 - Σύνολο σωστών αναγνωρίσεων_100
Z	-4,292[b]
Asymp. Sig. (2-tailed)	,000

a. Wilcoxon Signed Ranks Test
b. Based on positive ranks.

ΙΙ] Ικανότητα Μετάφρασης – Ικανότητα Επίλυσης

Πίνακας 4.31
Ranks

		N	Mean Rank	Sum of Ranks
Σύνολο σωστών επιλύσεων_100 - Σύνολο σωστών μεταβάσεων_100	Negative Ranks	60[a]	33,06	1983,50
	Positive Ranks	3[b]	10,83	32,50
	Ties	12[c]		
	Total	75		

a. Σύνολο σωστών επιλύσεων_100 < Σύνολο σωστών μεταβάσεων_100
b. Σύνολο σωστών επιλύσεων_100 > Σύνολο σωστών μεταβάσεων_100
c. Σύνολο σωστών επιλύσεων_100 = Σύνολο σωστών μεταβάσεων_100

Πίνακας 4.32

Test Statistics[a]

	Συνολο σωστών επιλύσεων_100 - Σύνολο σωστών μεταβάσεων_100
Z	-6,683[b]
Asymp. Sig. (2-tailed)	,000

a. Wilcoxon Signed Ranks Test

b. Based on positive ranks.

III] Ικανότητα Αναγνώρισης – Ικανότητα Επίλυσης

Πίνακας 4.33

Ranks

		N	Mean Rank	Sum of Ranks
Σύνολο σωστών επιλύσεων_100 - Σύνολο σωστών αναγνωρίσεων_100	Negative Ranks	64[a]	36,91	2362,50
	Positive Ranks	5[b]	10,50	52,50
	Ties	6[c]		
	Total	75		

a. Σύνολο σωστών επιλύσεων_100 < Σύνολο σωστών αναγνωρίσεων_100

b. Σύνολο σωστών επιλύσεων_100 > Σύνολο σωστών αναγνωρίσεων_100

c. Σύνολο σωστών επιλύσεων_100 = Σύνολο σωστών αναγνωρίσεων_100

Πίνακας 4.34

Test Statistics[a]

	Συνολο σωστών επιλύσεων_100 - Σύνολο σωστών αναγνωρίσεων_100
Z	-6,908[b]
Asymp. Sig. (2-tailed)	,000

a. Wilcoxon Signed Ranks Test

b. Based on positive ranks.

Παράρτημα IV

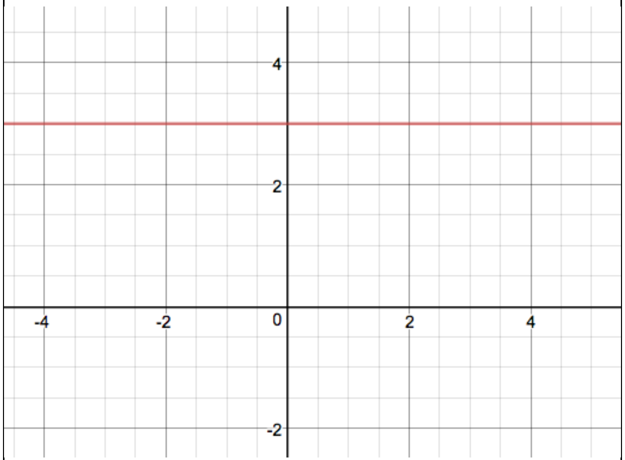
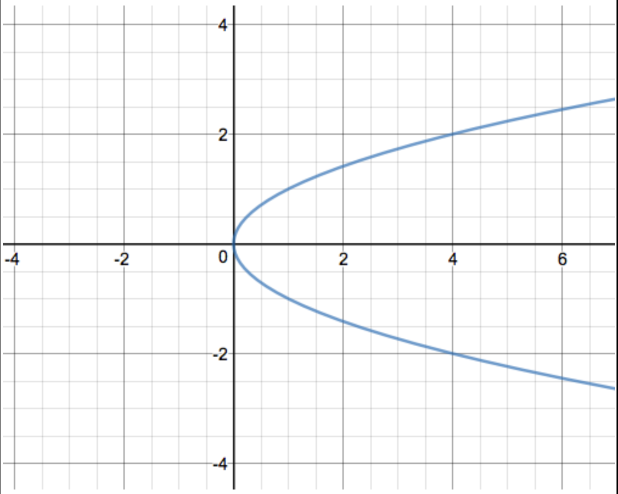
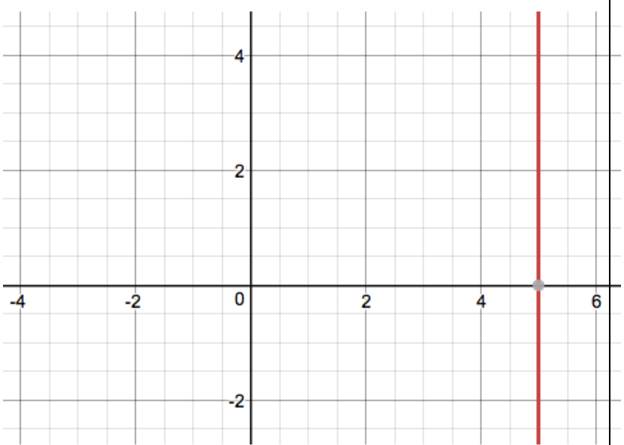
Φύλο: Άνδρας ☐ Γυναίκα: ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

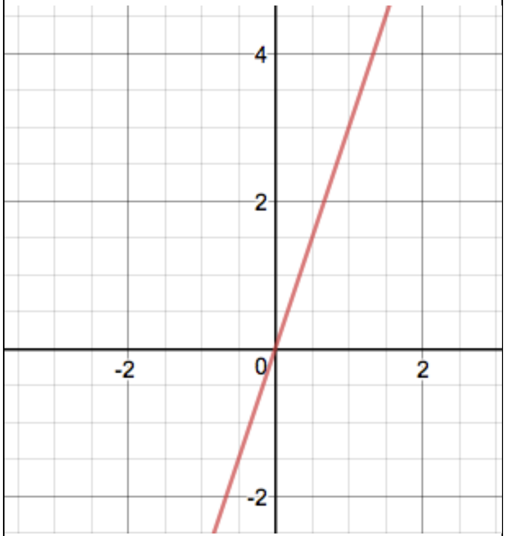
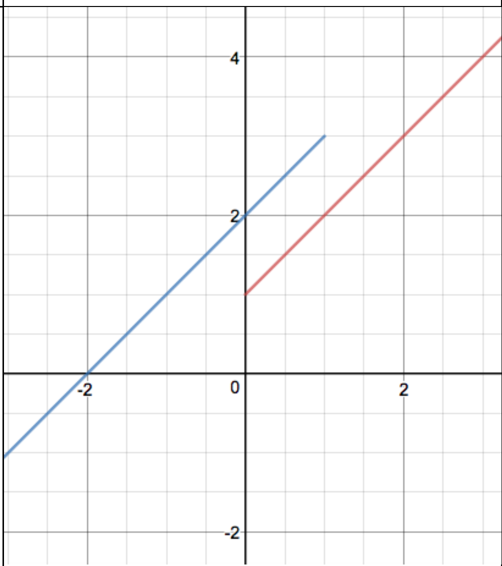
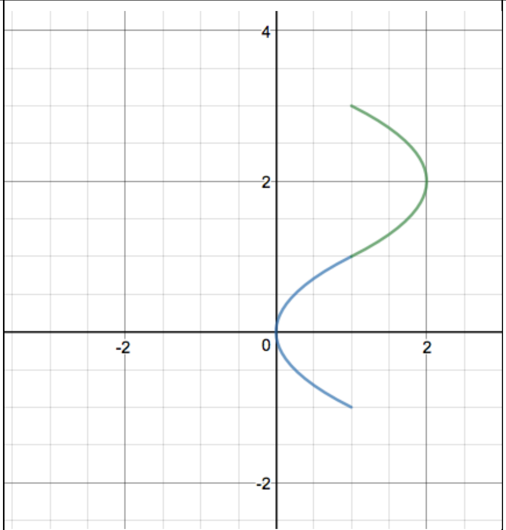
Ομάδα Προσανατολισμού: Πληροφορικής/Οικονομικών ☐ Θετικών Σπουδών ☐

Κάθε συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί σε καθένα από τα 3 αναπαραστατικά της πλαίσια, το αλγεβρικό, το γραφικό και το αριθμητικό (υπό μορφή πίνακα).

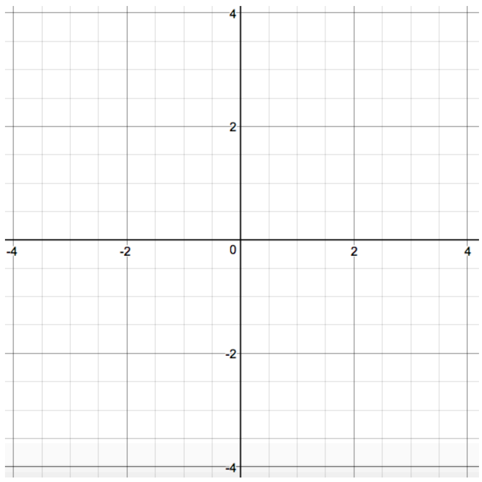
[Α] Σε κάθε μία από τις παρακάτω αναπαραστάσεις επέλεξε ποιά πιστεύεις ότι παριστάνει συνάρτηση, κυκλώνοντας τον αριθμό της ερώτησης. Στις υπόλοιπες, **γράψε τον λόγο (αιτιολόγηση)** για τον οποίο θεωρείς ότι δεν παριστάνουν συνάρτηση.

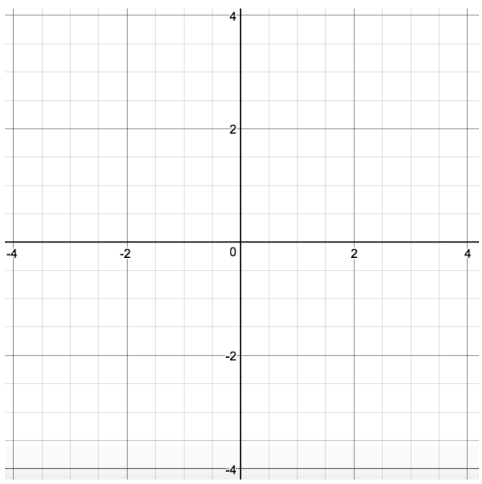
<table>
<tr><th></th><th>Αναπαράσταση</th><th>Αιτιολόγηση</th></tr>
<tr><td>Α.1)</td><td><table><tr><td>x</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>y</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr></table></td><td>..
....
....</td></tr>
<tr><td>Α.2)</td><td><table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>-3</td><td>0</td><td>3</td><td>6</td></tr></table></td><td>..
....
....</td></tr>
<tr><td>Α.3)</td><td><table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td></tr></table></td><td>..
....
....</td></tr>
<tr><td>Α.4)</td><td><table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td></tr></table></td><td>..
....
....</td></tr>
<tr><td>Α.5)</td><td>$y = 3$</td><td>..
....
....</td></tr>
<tr><td>Α.6)</td><td>$x = -9$</td><td>..
....
....</td></tr>
<tr><td>Α.7)</td><td>$y^2 = x$</td><td>..
....
....</td></tr>
<tr><td>Α.8)</td><td>$y = -2x$</td><td>..
....
....</td></tr>
</table>

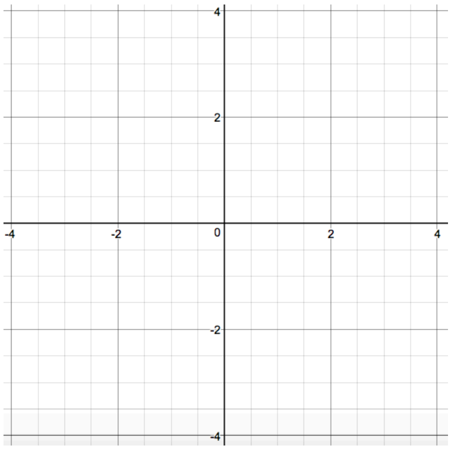
<table>
<tr><th></th><th>Αναπαράσταση</th><th>Αιτιολόγηση</th></tr>
<tr><td>Α.9)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Α.10)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Α.11)</td><td></td><td></td></tr>
</table>

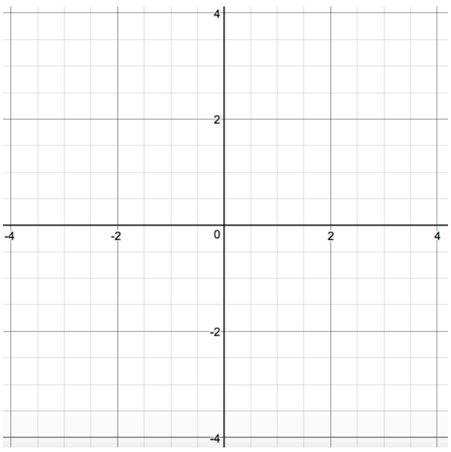
<table>
<tr><th></th><th>Αναπαράσταση</th><th>Αιτιολόγηση</th></tr>
<tr><td>Α.12)</td><td>
</td><td>…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………</td></tr>
<tr><td>Α.13)</td><td>
</td><td>…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………</td></tr>
<tr><td>Α.14)</td><td>
</td><td>…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………
…………………………………………</td></tr>
</table>

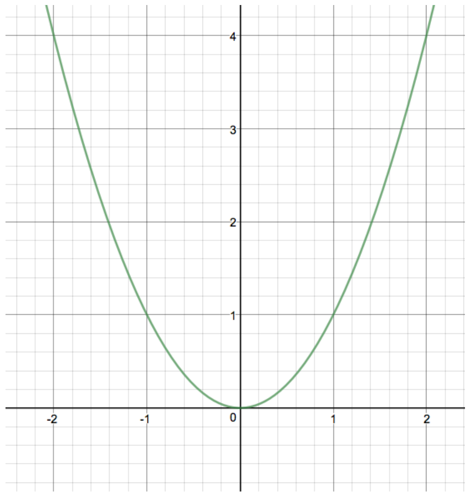
[B] Να μεταφράσεις τις παρακάτω εκφράσεις στο αλγεβρικό, γραφικό, και αριθμητικό αναπαραστατικό πλαίσιο. **Σε ποιά αναπαράσταση "πήγες" πιο εύκολα;** Σημείωσε την απάντησή σου στο τέλος κάθε ερωτήματος.

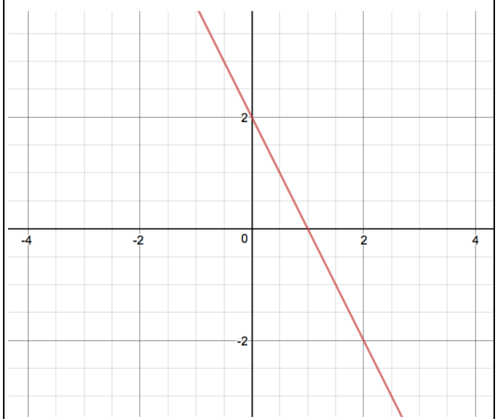
<table>
<tr><th></th><th>Αλγεβρικό</th><th>Γραφικό</th><th>Αριθμητικό</th><th>Πράξεις / Σημειώσεις</th></tr>
<tr><td rowspan="2">B.1)</td><td>$y = 2x + 1$</td><td></td><td><table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Σε ποιά αναπαράσταση πήγες πιο εύκολα; ....</td></tr>
</table>

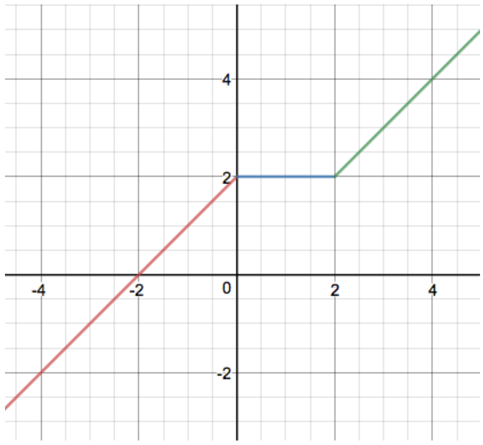
<table>
<tr><th></th><th>Αλγεβρικό</th><th>Γραφικό</th><th>Αριθμητικό</th><th>Πράξεις / Σημειώσεις</th></tr>
<tr><td rowspan="2">B.2)</td><td></td><td></td><td><table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>y</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Σε ποιά αναπαράσταση πήγες πιο εύκολα; ....</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Αλγεβρικό</th><th>Γραφικό</th><th>Αριθμητικό</th><th>Πράξεις / Σημειώσεις</th></tr>
<tr><td>Β.3)</td><td>$x \cdot y = 1$,
με $x \neq 0$</td><td>
</td><td><table><tr><td>x</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">Σε ποιά αναπαράσταση πήγες πιο εύκολα; ....</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Αλγεβρικό</th><th>Γραφικό</th><th>Αριθμητικό</th><th>Πράξεις / Σημειώσεις</th></tr>
<tr><td>Β.4)</td><td>$y = \begin{cases} 3x, x \geq 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$</td><td>
</td><td><table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">Σε ποιά αναπαράσταση πήγες πιο εύκολα; ....</td></tr>
</table>

	Αλγεβρικό	Γραφικό	Αριθμητικό	Πράξεις / Σημειώσεις
Β.5)			x y	
	Σε ποιά αναπαράσταση πήγες πιο εύκολα;			

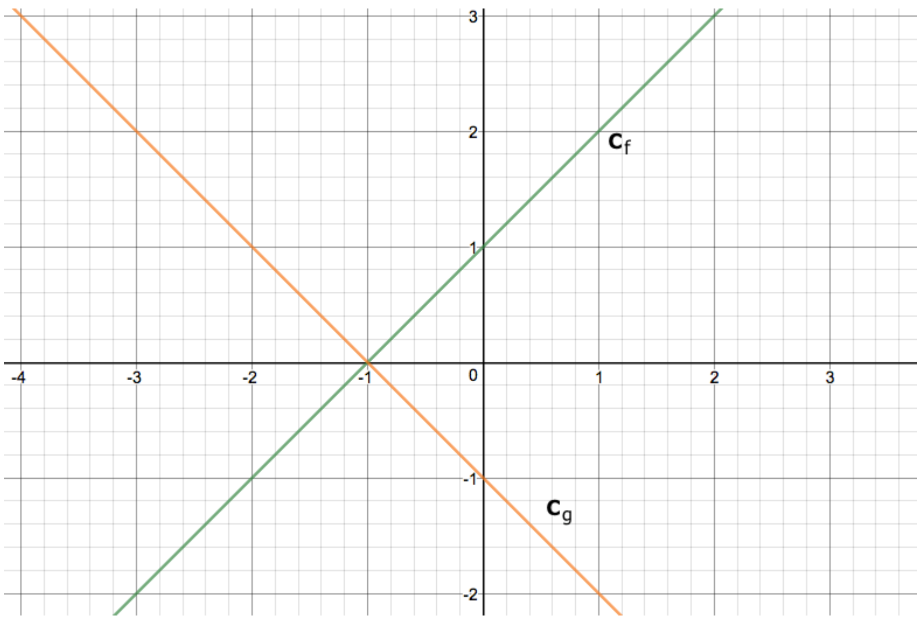
	Αλγεβρικό	Γραφικό	Αριθμητικό	Πράξεις / Σημειώσεις
Β.6)			x y	
	Σε ποιά αναπαράσταση πήγες πιο εύκολα;			

<table>
<tr><th></th><th>Αλγεβρικό</th><th>Γραφικό</th><th>Αριθμητικό</th><th>Πράξεις / Σημειώσεις</th></tr>
<tr><td>B.7)</td><td></td><td>
</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>-4</td><td>-2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">Σε ποιά αναπαράσταση πήγες πιο εύκολα; ....</td></tr>
</table>

[Γ] Να λύσεις τα παρακάτω προβλήματα.

<u>Σημείωση</u>: Τα προβλήματα μπορούν να επιλυθούν με οποιοδήποτε (μαθηματικό) τρόπο και σε οποιοδήποτε από τα 3 αναπαραστατικά πλαίσια (γραφικό, αλγεβρικό, αριθμητικό).

Γ1) Να υπολογίσεις το άθροισμα $f(x) + g(x)$



Απάντησε και εξήγησε τον τρόπο με τον οποίο το έλυσες:

....

....

....

Προσπάθησε να το λύσεις και με άλλον τρόπο από τον αρχικό:

....

....

....

....

....

....

Γ2) Ένας οδηγός αυτοκινήτου έχει τις εξής δύο επιλογές: Να ανεφοδιαστεί με καύσιμα από ένα πρατήριο της χώρας του, όπου το κόστος μετάβασης στο πρατήριο είναι 2 ευρώ και το εν λόγω πρατήριο πουλάει το καύσιμο προς 1.5 ευρώ το λίτρο ή να μεταβεί σε πρατήριο μιας γειτονικής χώρας, όπου το κόστος μετάβασης στο πρατήριο είναι 18 ευρώ και το εκεί πρατήριο πουλάει το καύσιμο προς 1 ευρώ το λίτρο. Να βρεθεί για ποιά ποσότητα καυσίμων συμφέρει τον οδηγό το κάθε πρατήριο. Απάντησε και εξήγησε τον τρόπο με τον οποίο το έλυσες:

....

....

....

....

....

Προσπάθησε να το λύσεις και με άλλον τρόπο από τον αρχικό:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....