Διιδρυματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Διδασκαλία Εννοιών Στατιστικής με Ιστορική Προοπτική

Παπαδόπουλος Αθανάσιος

Α.Μ. 919

Επιβλέπων Καθηγητής

Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος

Εξεταστική Επιτροπή:

Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής,

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Δυτ. Μακεδονίας

Τσακιρίδου Ελένη, Καθηγήτρια,

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Δυτ. Μακεδονίας

Σταθοπούλου Χαρούλα, Καθηγήτρια,

Παιδαγωγικό Τμήμα Ειδικής Αγωγής, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Φλώρινα, Ιούνιος 2020

“If all sciences require measurement - and statistics is the logic of measurement - it follows that the history of statistics can encompass the history of all science”

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτική των Μαθηματικών», του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας. υπό την επίβλεψη του κ. Νικολαντωνάκη Κωνσταντίνου, Καθηγητή του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας.

Με τη συμβολή του στη συγγραφή, την επεξεργασία και τη διαμόρφωση της μεταπτυχιακής διατριβής, συντέλεσε στα μέγιστα στην επιτυχή ολοκλήρωση των σπουδών μου. Η άρτια επιστημονική κατάρτιση, η σωστή καθοδήγηση και η απαραίτητη ενθάρρυνση από τον ίδιο, ήταν στοιχεία σημαντικά όλο αυτό το χρονικό διάστημα της συνεργασίας μας. Χάρις στον κ. Νικολαντωνάκη κατάφερα να ξεπεράσω κάθε εμπόδιο και να φέρω εις πέρας το δύσκολο έργο της συγγραφής της διπλωματικής εργασίας. Τον ευχαριστώ θερμά για όλη του την προσπάθεια.

Παράλληλα, ευχαριστώ τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, την κα. Τσακιρίδου Ελένη, καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας, καθώς και την κα. Σταθοπούλου Χαρούλα, καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας για τη μελέτη της διπλωματικής εργασίας και την κριτική τους αποτίμηση.

Όλη η μεταπτυχιακή πορεία εξελίχθηκε εξαιρετικά χάρις στη συμφοιτήτρια και φίλη κα. Αλεξανδρίδου Γαρυφαλλιά. Η παρουσία της αυτά τα δύο χρόνια, αποτελεί παράδειγμα προς μίμηση. Η επιτυχής ολοκλήρωση των μεταπτυχιακών μου σπουδών οφείλεται κατά κύριο λόγο στις συμβουλές της, στις καίριες παρεμβάσεις αλλά και την αστείρευτη υπομονή της. Την ευχαριστώ από καρδιάς και της εύχομαι καλή συνέχεια στις ακαδημαϊκές και εκπαιδευτικές της αναζητήσεις.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου για τη στήριξη και την υπομονή της σε κάθε βήμα όλης της προσπάθειας που έκανα στην ακαδημαϊκή μου πορεία.

Περίληψη

Η Στατιστική αποτελεί το επίκεντρο σε αρκετές δραστηριότητες του σύγχρονου ανθρώπου. Η ανάγκη για την εφαρμογή της σε πολλούς τομείς γίνεται ολοένα και πιο εμφανής, καθώς καθημερινά παρουσιάζονται στατιστικά δεδομένα. Πολιτικές δημοσκοπήσεις, οικονομικές προβλέψεις, ιατρικές μελέτες, χρηματιστηριακές αναλύσεις και άλλα πολλά αποδεικνύουν έμπρακτα την ανάγκη για την εκμάθηση του κλάδου αυτού των Μαθηματικών, μέσα από τη διδασκαλία της Στατιστικής στους μαθητές από τα πρώτα στάδια της σχολικής τους διαδρομής.

Η παρούσα διπλωματική επιχειρεί να αναλύσει τις συχνότερες στατιστικές έννοιες που διδάσκονται οι μαθητές καθ' όλη τη σχολική διαδρομή τους, να μελετήσει τα εμπόδια που εντοπίζονται κατά τη χρήση και την εφαρμογή τους, τα λάθη και τις παρανοήσεις που γίνονται και να προσπαθήσει μέσα από μια πρωτότυπη διδακτική πρόταση με ιστορικό υπόβαθρο να βοηθήσει τους διδασκόμενους να ξεπεράσουν όσο το δυνατόν τις δυσκολίες αυτές. Με την εμπλοκή της Ιστορίας στη διδακτική διαδικασία, οι διδασκόμενοι έχουν τη δυνατότητα να παρατηρήσουν την εξελικτική πορεία των εννοιών, να μελετήσουν τα εμπόδια που παρουσιάστηκαν σε όλη τη διαδρομή τους και να μπορέσουν να οδηγηθούν σε μια βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση των Στατιστικών εννοιών και των εφαρμογών της.

Λέξεις κλειδιά: Διδασκαλία Στατιστικής, Χρήση Ιστορίας, Διερευνητική Μάθηση, Quetelet

Abstract

Statistics has been the focal point of several contemporary human activities. The need for its application in many areas is becoming more and more apparent, as statistical data are presented daily. Political polls, economic predictions, medical studies, stock market analysis and many more are the practical proof that there is a necessity to learn the specific field of Mathematics, through the teaching of Statistics to the students from the early stages of their university studies.

This study attempts to analyze the most common statistical concepts that students are taught during their entire course, to study the obstacles identified in their use and application, the errors and misunderstandings that occur and to try through a teaching proposal with a historical background to help learners overcome these difficulties as much as possible. By involving History in the teaching process, learners have the opportunity to observe the evolutionary course of concepts, to study the obstacles which were faced and to be led to a deeper conceptual understanding of Statistical concepts and its applications.

Key words: Teaching Statistics, Use of History, Inquiry Based Learning, Quetelet

Εισαγωγή

Η επιστήμη των Μαθηματικών αποτελεί διαχρονικά αντικείμενο καθημερινής συζήτησης και μελέτης. Το πεδίο εφαρμογής τους έχει διαδοθεί σε τεράστιο βαθμό, σε κάθε επιστήμη και σε ποικίλες μορφές. Το ενδιαφέρον για την εξερεύνηση των δυνατοτήτων και των πιθανών συνδυασμών με άλλες επιστήμες προσελκύει τις τελευταίες δεκαετίες ερευνητές, επιστήμονες, καθηγητές, φοιτητές καθώς και μαθητές. Πέρα από τα «καθαρά» Μαθηματικά τα οποία διδασκόμαστε από τα πρώτα χρόνια της σχολικής διαδρομής και τα οποία σκεφτόμαστε αυθορμήτως στο άκουσμα της επιστήμης αυτής, γίνεται προσπάθεια να δανειστούν επιπλέον στοιχεία, τα οποία βοηθούν στη σκέψη, στον καθημερινό τρόπο ζωής, στην προσέγγιση διάφορων προβλημάτων και ζητημάτων, καθώς και στον τρόπο διδασκαλίας εννοιών.

Από τις αρχές του 21ου αιώνα, επίκεντρο της ανθρωπότητας είναι η πληροφορία. Εξαιτίας των πολλών δεδομένων και στοιχείων που εξετάζονται καθημερινά, η ανάγκη για διαχείριση και επεξεργασία αυτών των πληροφοριών αποτελεί μονόδρομο στις ανθρώπινες ενέργειες. Μέσα από την προσπάθεια να ελεγχθεί όλος αυτός ο όγκος των δεδομένων, αναπτύχθηκε μια στενή σχέση με την επιστήμη των Μαθηματικών. Η οργάνωση, η κατανομή και η εξαγωγή συμπερασμάτων οδηγούν αναπόφευκτα στη χρησιμοποίηση των Μαθηματικών.

Ακόμα και ο ίδιος ο κλάδος των Μαθηματικών, λόγω του εξαιρετικά μεγάλου όγκου πληροφοριών και δεδομένων που κατέχει, διασπάται σε επιμέρους τομείς, οι οποίοι εστιάζουν με τη σειρά τους σε μικρότερα και πιο εξειδικευμένα μέρη. Ένας πολύ γνωστός τομέας, διαδεδομένος κυρίως τις τελευταίες δεκαετίες, ο τομέας της Στατιστικής, είναι ένας από τους ραγδαία αυξανόμενους ερευνητικά και εφαρμόσιμους τομείς των Μαθηματικών. Ο όρος «Στατιστική» προέρχεται από τη λατινική λέξη *status*. Η επιστήμη της Στατιστικής προσφέρει τη δυνατότητα της συγκέντρωσης, επεξεργασίας, αξιολόγησης και διαχείρισης μεγάλου εύρους δεδομένων. Θεωρείται πως η πρώτη εμφάνισή της έγινε περίπου το 2238 π.Χ. στην Κίνα και συγκεκριμένα από τον αυτοκράτορα ΥΑΟ, μέσα από μια στοιχειώδη συλλογή στατιστικών στοιχείων (Μαλαπάνη, 2017).

Η επιστήμη της Στατιστικής αν και εμφανίστηκε πολλά χρόνια πριν, τις τελευταίες δεκαετίες έχει επικεντρώσει το ενδιαφέρον πολλών, εξαιτίας των εφαρμογών της και των αποτελεσμάτων τα οποία είναι πλέον απαραίτητα για το σύγχρονο καθημερινό τρόπο ζωής. Πάρα πολλές ανθρώπινες ανάγκες και δραστηριότητες βασίζονται σε μοντέλα στατιστικής τα οποία επεξεργάζονται τα εκάστοτε ζητούμενα, προκειμένου να εξαγάγουν χρήσιμα και άμεσα συμπεράσματα. Ιατρικές μελέτες, πολιτικές δημοσκοπήσεις, δημογραφικά στοιχεία, φαρμακευτικές αγωγές, περιβαλλοντολογικές και κλιματικές αλλαγές, εκτιμήσεις για χρηματιστηριακές συναλλαγές, προβλέψεις εκλογικών αποτελεσμάτων και άλλα πολλά τα οποία θα πρέπει να επεξεργαστούν με μια συγκεκριμένη διαδικασία. Πρώτο βήμα είναι η μελέτη του αντικειμένου, έπειτα η επιλογή ενός συγκεκριμένου αντιπροσωπευτικού δείγματος, η ανάλυση όλων των παραμέτρων οι οποίες επηρεάζουν το δείγμα και το αποτέλεσμα, η επεξεργασία των δεδομένων με τα κατάλληλα στατιστικά εργαλεία (χρήση προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή, στατιστικών μοντέλων κ.ά.) και η εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων – αποτελεσμάτων.

Η συμμετοχή της Στατιστικής αυξάνεται σημαντικά σε όλους τους τομείς, με αποτέλεσμα η ανάγκη για την εκμάθησή της να είναι επιβλητική. Καθημερινά παρουσιάζονται στοιχεία και έννοιες όπως «πιθανό», «μέση τιμή», «εκτίμηση», «προσέγγιση» κ.ά. Έννοιες οι οποίες ανήκουν στην επιστήμη της Στατιστικής και ουσιαστικά αποδεικνύουν έμπρακτα την αναγκαιότητα της ενασχόλησης με αυτή. Επίσης, μια θεμελιώδης έννοιά της, αυτή της «αβεβαιότητας», επιβεβαιώνει πως κάθε ενέργεια, κάθε απόφαση περιέχει παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν την τελική έκβαση και ουσιαστικά περιέχουν ένα ρίσκο. Η έννοια της Πιθανότητας, η οποία αποτελεί πλέον στοιχείο άρρηκτα συνδεδεμένο με τη Στατιστική, εμφανίζεται σε κάθε βήμα του ανθρώπου. Η συνύπαρξη αυτών των δύο κλάδων των Μαθηματικών, δημιουργεί ισχυρά μοντέλα τα οποία είναι ικανά να δώσουν απαντήσεις σε πολύ σημαντικά σύγχρονα θέματα, όπως ιατρικές μελέτες, προβλέψεις για φάρμακα και άλλων ειδών πρόγνωσης.

Επομένως γίνεται εύκολα αντιληπτό πως η Στατιστική υπάρχει σε κάθε βήμα, σε κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα. Η σπουδαιότητα και η ανάγκη κατανόησής της και εφαρμογής της είναι πλέον δεδομένη. Η στατιστική σκέψη κυριαρχεί σε πολλές ενέργειες και αρκετές φορές χωρίς να γίνεται εκούσια αντιληπτή. Γι' αυτό και κρίνεται αναγκαίο η επιστήμη της Στατιστικής και οι έννοιες με τις οποίες διαπραγματεύεται, να διδάσκονται στις σχολικές μονάδες.

Πολλοί διεθνείς οργανισμοί UNESCO (United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization), NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), ICOTS (International Conference on Teaching Statistics) και IASE (International Association for Statistical Education) τονίζουν την ανάγκη εισαγωγής της Στατιστικής στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Και αυτό στηρίζεται ως επί το πλείστον στο γεγονός ότι:

- ✓ Η σημερινή καθημερινότητα του ανθρώπου εμπεριέχει συνεχώς ζητήματα τα οποία έχουν ως κύριο συστατικό τους την αβεβαιότητα, το ρίσκο. Πολλές σημαντικές αποφάσεις επηρεάζονται από διάφορες παραμέτρους οι οποίες είναι δύσκολο να αναλυθούν και να συμπεριληφθούν στο τελικό αποτέλεσμα. Η στατιστική αντίληψη είναι αυτή που επιτρέπει τον καθορισμό διαφόρων αποφάσεων. Το ανώτερο όριο ταχύτητας σε έναν αυτοκινητόδρομο για τη μικρότερη δυνατή πιθανότητα ατυχημάτων, το επιτρεπτό όριο συντηρητικών ουσιών στα τρόφιμα για αποφυγή ακραίων παρενεργειών, η κατάλληλη δοσολογία ενός φαρμάκου το οποίο προτείνεται για την ίαση μίας ασθένειας, βάση φύλου, βάρους, ηλικίας κτλ.

- ✓ Η επιστήμη της Στατιστικής διαδραματίζει ένα σπουδαίο και θεμελιώδη ρόλο καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών των μαθητών. Αυτό γίνεται αντιληπτό αν παρατηρήσει κανείς τα προγράμματα σπουδών της Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης. Το μάθημα της Στατιστικής αποτελεί ένα εργαλείο απαραίτητο για κάθε κλάδο της επιστήμης και γι' αυτό διδάσκεται σχεδόν σε όλα τα Τμήματα της χώρας αλλά και παγκοσμίως. Οι κοινωνικές επιστήμες, για τη συγκέντρωση στοιχείων και την εξαγωγή συμπερασμάτων γύρω από τη συμπεριφορά του ανθρώπου, καταφεύγουν σε εργαλεία της Στατιστικής. Η ιατρική για την αποτελεσματικότητα και τις παρενέργειες ενός φαρμάκου, την εξέλιξη των ασθενειών καθώς και τις διάφορες αλληλεπιδράσεις που ενδέχεται να υπάρχουν μεταξύ τους. Στις οικονομικές επιστήμες γίνεται ένας συνδυασμός των Πιθανοτήτων με τη Στατιστική προκειμένου να εκτιμηθούν διάφορες καταστάσεις ή να κατασκευαστούν μοντέλα για τη βέλτιστη λύση η οποία επιφέρει μεγάλα κέρδη σε συνδυασμό με το μικρότερο δυνατό κόστος για μια επιχείρηση.
- ✓ Η εφαρμογή της επιστήμης της Στατιστικής σε όλους τους τομείς είναι ένα φαινόμενο παγκόσμιο και καθολικά αποδεκτό. Μέσα στην καθημερινότητα του κάθε ανθρώπου χρησιμοποιούνται έννοιες και λέξεις οι οποίες είναι άμεσα συνυφασμένες με το αντικείμενο της επιστήμης. Ένας μέσος όρος μιας σχολικής επίδοσης, μια πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός – πόσο πιθανό είναι ή απίθανο να συμβεί, μία εκτίμηση κόστους για μια κατασκευή ή ένα έργο, διάφορα γραφήματα σε πολιτικές δημοσκοπήσεις, χρηματιστηριακοί δείκτες, πρόγνωση του καιρού και ο τρόπος μεταβολής της θερμοκρασίας με την πάροδο του χρόνου. Όλα αυτά και πολλά περισσότερα αποδεικνύουν έμπρακτα ότι η Στατιστική είναι ένα κομμάτι της ζωής μας και πως η ορθή χρήση και κατανόησή της επηρεάζει άμεσα τον κάθε πολίτη, μαθητή κτλ.
- ✓ Με τη βοήθεια της Στατιστικής δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να πραγματοποιήσουν δικά τους πειράματα και έρευνες, τα οποία θα τους βοηθήσουν να κατανοήσουν σε βάθος τον κόσμο γύρω τους αλλά και την επιστήμη των Μαθηματικών γενικότερα. Οι δραστηριότητες αυτές, που μπορούν να πραγματοποιηθούν εντός αλλά και εκτός των σχολικών μονάδων, συνδέουν ουσιαστικά τον πραγματικό κόσμο με τα στοιχεία που έχουν στα χέρια τους, τα

δεδομένα τα οποία οι ίδιοι συνέλλεξαν και χρησιμοποίησαν για την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Όλα τα παραπάνω αποδεικνύουν την εφαρμοσιμότητα της Στατιστικής και τη σπουδαιότητά της. Ο κοινός παρονομαστής σε όλα αυτά όμως είναι αναμφίβολα το σχολείο. Από εκεί ξεκινά το μεγάλο ταξίδι της επιστήμης. Ο εκπαιδευτικός και οι μαθητές οφείλουν μέσα από μια στενή συνεργασία να εξερευνήσουν το μαγικό αυτό κόσμο και να προσδώσουν νόημα και απτό λόγο ύπαρξης και ενασχόλησης με τη Στατιστική.

Η παρούσα διπλωματική στοχεύει στο να παρουσιάσει μια διδακτική πρόταση η οποία συνδυάζει την Ιστορία με τις διάφορες έννοιες της Στατιστικής που παρουσιάζονται. Το πρωτότυπο αυτό εγχείρημα στηρίζεται στην ανάλυση των προηγούμενων ερευνών που πραγματοποιήθηκαν σε μαθητές όλων των βαθμίδων, προκειμένου να εντοπιστούν οι συχνότερες παρανοήσεις και τα διάφορα χαρακτηριστικά της κάθε στατιστικής έννοιας, στη μελέτη ιστορικών πηγών για τη χρήση τους κατά την κατασκευή του διδακτικού υλικού και τον εντοπισμό της εξελικτικής πορείας που ακολούθησε η Στατιστική με τις επί μέρους έννοιές της στο πέρασμα του χρόνου. Ο συνδυασμός των εννοιών που παρουσιάζονται με τη χρήση της Ιστορίας, αποσκοπούν σε μια βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση, η οποία θα συμβάλλει στη μείωση των παρανοήσεων και σε μια πληρέστερη γνώση γύρω από τις έννοιες που μελετώνται.

Η δομή της παρούσας εργασίας έχει ως εξής:

- Στο πρώτο κεφάλαιο καταγράφεται η σπουδαιότητα της Ιστορίας, τα πλεονεκτήματα της ένταξής της στο εκπαιδευτικό έργο καθώς και διάφορες μεθοδολογικές προσεγγίσεις που έχουν καταγραφτεί στη σχετική βιβλιογραφία.
- Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια ιστορική αναδρομή των εννοιών που παρουσιάζονται, το σημείο αναφοράς τους και την εξελικτική πορεία τους, τα σημαντικότερα πρόσωπα και τη συμβολή τους, καθώς και τη σύνδεση της Στατιστικής με άλλες επιστήμες.
- Το τρίτο κεφάλαιο αναλύει τα προγράμματα σπουδών σε όλες τις τάξεις της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, καθώς και τη διαδρομή της Διδακτικής της Στατιστικής στη χώρα.
- Στο τέταρτο κεφάλαιο αναλύονται τα εμπόδια και οι δυσκολίες των μαθητών σε κάθε μια από τις έννοιες της Στατιστικής που μελετώνται, καθώς επίσης και οι διάφορες παρανοήσεις στη Περιγραφική Στατιστική και τη Στατιστική Λογική.
- Το πέμπτο κεφάλαιο περιγράφει αναλυτικά τη διδακτική πρόταση και τον τρόπο παρουσίασής της, το στόχο της εργασίας και τα ερευνητικά ερωτήματα που τη συνοδεύουν.

Κεφάλαιο 1ο:

Ιστορία στην Εκπαίδευση & Διερευνητική Μάθηση

1.1 Χρήση της Ιστορίας στη διδασκαλία

Η εκπαιδευτική διαδικασία αποτελεί ένα διαχρονικά πολύπλοκο αντικείμενο ερευνών. Η αναζήτηση για καλύτερες διδακτικές μεθόδους αποσκοπεί στη μείωση των παρανοήσεων αλλά και των λαθών από τους μαθητές, καθώς και σε μια βαθύτερη κατανόηση του αντικειμένου που διδάσκεται. Κάθε έννοια έχει διατρέξει τη δική της εξελικτική πορεία μέσα στο χρόνο προκειμένου να αποκτήσει τη μορφή και τη σημασία που έχει σήμερα. Όλη αυτή η διαδρομή, μαρτυρά τα προβλήματα αλλά και τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν όλοι εκείνοι οι ερευνητές που ασχολήθηκαν και προσπάθησαν να κατανοήσουν, αλλά και να εξελίξουν το αντικείμενο έρευνάς τους. Όλες αυτές οι δυσκολίες που έχουν καταγραφεί, αιτιολογούν σε ένα βαθμό και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν σήμερα οι μαθητές. Οι ίδιες δυσκολίες που μπορούν να δυσχεράνουν την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών σε όλη τους την ιστορική εξέλιξη, μπορούν να μπλοκάρουν την κατανόηση των ίδιων εννοιών από τους σημερινούς μαθητές. Επομένως, η ιστορική ανάλυση μιας έννοιας, η γνώση και η κατανόηση αυτών των δυσκολιών μπορεί να βοηθήσει στην πρόβλεψή τους και να συμβάλει στην όσο δυνατόν καλύτερη διδακτική αντιμετώπισή τους. Μια διδακτική προσέγγιση που θα αξιοποιεί στοιχεία από την ιστορική εξέλιξη, θα μπορούσε να συμβάλλει στην ανάδειξη των διαφορετικών όψεων της έννοιας των στατιστικών εννοιών και την καλύτερη κατανόησή τους.

Αρκετοί ερευνητές στην προσπάθειά τους να μελετήσουν τη συμβολή της Ιστορίας στο διδακτικό έργο, εντόπισαν ορισμένα επιχειρήματα, τα οποία προτρέπουν τη χρήση της και μάλιστα αιτιολογούν το εγχείρημα αυτό. Συγκεκριμένα, οι Tzanakis et al. (2000), εντόπισαν δεκαεπτά επιχειρήματα υπέρ της χρήσης της Ιστορίας, τα οποία μπορούν να οργανωθούν σε πέντε βασικούς άξονες. Οι άξονες αυτοί στοχεύουν σε μια γενική προσέγγιση, με συνοχή και τεκμηρίωση με επιχειρήματα. Ειδικότερα, οι πέντε αυτές κατευθύνσεις είναι:

- Η εκμάθηση των Μαθηματικών
- Η συναισθηματική προδιάθεση των μαθητών για την επιστήμη των Μαθηματικών
- Η φύση των Μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας γενικότερα
- Η εκτίμηση των μαθηματικών, μέσα από ένα πολιτιστικό υπόβαθρο
- Η διδακτική αξιοποίηση από τους εκπαιδευτικούς

Στον πρώτο άξονα, περιλαμβάνεται ουσιαστικά το μαθηματικό περιεχόμενο. Μέσα από τη μελέτη της Ιστορίας, οι μαθητές κατανοούν καλύτερα τις έννοιες που διδάσκονται καθώς και τις διαδικασίες που χρησιμοποιούνται. Παράλληλα, η μελέτη της ιστορίας μπορεί να συνδυάσει άριστα και άλλες επιστήμες. Τα Μαθηματικά αποκτούν διαφορετικό νόημα μέσα από τη διαφορετική σκοπιά της Φιλοσοφίας και της Λογοτεχνίας. Επομένως η Ιστορία των Μαθηματικών ενισχύει διεπιστημονικές προσεγγίσεις, δημιουργώντας μια ολοκληρωμένη άποψη η οποία συνδέει διάφορα κομμάτια γνώσεων, τα οποία δε θα μπορούσαν να εμφανιστούν με την απουσία της Ιστορίας.

Στο δεύτερο, αναλύονται οι βραχυπρόθεσμοι αλλά και οι μακροπρόθεσμοι συναισθηματικοί στόχοι, δηλαδή συναισθήματα και συμπεριφορές των μαθητών για τα Μαθηματικά τόσο άμεσα όσο και σε βάθος χρόνου. Με την παρουσίαση διάφορων ιστορικών στοιχείων, το ενδιαφέρον των μαθητών αυξάνεται με αποτέλεσμα την ενεργή συμμετοχή τους σε δραστηριότητες που αποσκοπούν στην καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών που διδάσκονται. Μέσα από μια διαρκή αξιοποίηση της Ιστορίας, αυτή μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν θετικές στάσεις απέναντι στα Μαθηματικά. Επιπρόσθετα, παρουσιάζοντας στους μαθητές όλες τις δυσκολίες που αναπτύχθηκαν κατά την ιστορική διαδρομή των μαθηματικών εννοιών, τους δίνεται η δυνατότητα να ξεπεράσουν λάθη και αποτυχίες στο σχολείο, ακόμα και να διαχειριστούν καλύτερα αρνητικά συναισθήματα γύρω από αυτά.

Η τρίτη κατεύθυνση αναλύει όλη την ανθρώπινη προσπάθεια που προηγήθηκε και με βάση αυτή, γίνεται αντιληπτή η μαθηματική δομή και ο τρόπος με τον οποίο αυτή κατασκευάστηκε με το πέρασμα του χρόνου. Όλη η προσπάθεια γίνεται προκειμένου να βρεθούν λύσεις για προβλήματα που απασχολούν τους ερευνητές της κάθε εποχής, για το πώς θα οργανώσουν καλύτερα τις ανθρώπινες δραστηριότητες. Η ανάλυση αυτή δίνει τη δυνατότητα και για μια σύγκριση παλαιότερων και πιο σύγχρονων μαθηματικών εργαλείων, διάφορα σύμβολα, μεθόδους υπολογισμού, μαθηματικές αποδείξεις κ.ά. Δημιουργείται μια συζήτηση γύρω από τη σαφήνεια και την αποτελεσματικότητα των εργαλείων της κάθε εποχής, τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά τους, η οποία βοηθά τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν τη δυναμική φύση των Μαθηματικών. Παράλληλα, αντιλαμβάνονται πως κάθε εμπόδιο στην ιστορική εξέλιξη, αποτελούσε κινητήριο δύναμη για περισσότερη προσπάθεια και για γενικότερη ανάπτυξη της επιστήμης σε συνδυασμό με αρκετές άλλες, τα οποία αποτελούν αποτέλεσμα όλων αυτών των δυσκολιών.

Στον τέταρτο άξονα η Ιστορία προσπαθεί να παρουσιάσει στους μαθητές πως η επιστήμη των Μαθηματικών έχει επηρεαστεί σε μεγάλο βαθμό από πολιτιστικούς και κοινωνικούς παράγοντες. Τα Μαθηματικά λειτουργούσαν πάντα σε συνδυασμό με την καθημερινότητα των επιστημόνων της κάθε εποχής και με τις διάφορες εφαρμογές τους για τη βελτίωση του τρόπου ζωής. Η επιστήμη αυτή έχει ενεργό ρόλο σε αρκετές τεχνολογικές κατασκευές. Ταυτόχρονα έχει χρησιμοποιηθεί και ως μέσο αναψυχής.

Ο πέμπτος άξονας περιλαμβάνει τα οφέλη της Ιστορίας στους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι κατά τη χρήση της, εμπλουτίζουν τον τρόπο διδασκαλίας τους, αλλά και τους εξοπλίζει με εναλλακτικούς τρόπους παρουσίασης συγκεκριμένου μαθηματικού περιεχομένου. Επιπρόσθετα, κατά την αξιοποίηση της Ιστορίας στο διδακτικό έργο, ο εκπαιδευτικός είναι σε θέση να εντοπίσει επιστημολογικά εμπόδια τα οποία θα μπορούσαν να μπουν εμπόδιο στη γνωστική εξέλιξη των μαθητών. Με τον τρόπο αυτό, ο εκπαιδευτικός προλαμβάνει ουσιαστικά τυχόν αρνητικά συναισθήματα από την πλευρά των μαθητών και ενισχύει τη θετική στάση τους απέναντι στα Μαθηματικά (Nikolantonakis et al., 2020).

Η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να ενσωματωθεί σε διάφορες μορφές όπως ιστορίες, βιογραφίες, χρονοδιαγράμματα, προβλήματα, ιστορικές πηγές, δραστηριότητες εμπνευσμένες από αυτή καθώς και διεπιστημονικά έργα. Ο πρώτος τρόπος χρήσης της Ιστορίας είναι μέσω καταστάσεων όπου η διδασκαλία εμπλουτίζεται με ιστορικές πληροφορίες. Ο δεύτερος τρόπος είναι οι ενότητες οι οποίες μπορούν να είναι είτε σύντομες είτε μακροσκελείς, περιλαμβάνοντας ιστορικά πακέτα, διάφορα έργα, μέσα στο πλαίσιο του μαθήματος, πάνω σε ένα συγκεκριμένο θέμα. Προσεγγίσεις οι οποίες βασίζονται στην Ιστορία είναι ο τρίτος τρόπος, όπου αυτή δε μελετάται άμεσα, όμως καθορίζει τη σειρά και τον τρόπο διδασκαλίας ενός θέματος ή μιας έννοιας.

Επομένως, αναφέροντας στοιχεία από την ιστορική εξέλιξη, μπορούν αυτά να αξιοποιηθούν εποικοδομητικά στη διδασκαλία, στοχεύοντας στο να διευκολύνουν με τον τρόπο αυτό τους μαθητές να ανακαλύψουν την αναγκαιότητά της και να καταλάβουν το νόημά της. Η ιστορική διαδρομή των μαθηματικών εννοιών είναι η καλύτερη σύνδεσή τους με τη φυσική τους υπόσταση. Για το λόγο αυτό, κομμάτι της διδακτικής διαδικασίας πρέπει να είναι απαραιτήτως η ιστορία, η οποία μεταφέρει τις δυσκολίες και τους προβληματισμούς του παρελθόντος, δίνοντας τη δυνατότητα στους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς να κατανοήσουν ουσιαστικά το αντικείμενο. Ειδικότερα, για τις στατιστικές έννοιες που μελετώνται στην παρούσα εργασία, κρίνεται σημαντικό να εκμεταλλευτούν τα ιστορικά δεδομένα και να κατασκευαστεί ένα διδακτικό μοντέλο, το οποίο σε συνδυασμό με την Ιστορία θα προσδώσει μια δυναμικότερη προσέγγιση, για να μπορέσουν οι διδασκόμενοι να εμβαθύνουν στον κλάδο της Στατιστικής επιστήμης και στις έννοιες που διδάσκονται.

Παράλληλα, αξίζει να σημειωθούν οι μεθοδολογικές προσεγγίσεις που έχουν καταγραφεί στη σχετική βιβλιογραφία, για τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στο διδακτικό έργο:

- Η ιστορική – γενετική προσέγγιση του Toeplitz
- Η προσέγγιση με καθοδηγούμενη επανα-ανακάλυψη του Freudenthal
- Η προσέγγιση με σχεδιασμό διδακτικών καταστάσεων του Brousseau
- Η προσέγγιση με την κοινωνική – πολιτισμική οπτική του Radford

- Η προσέγγιση με το παιχνίδι των φωνών και των αντηχήσεων του Boero.

Στην πρώτη, περιλαμβάνονται οι προσεγγίσεις που είτε εμπνέονται, είτε βασίζονται στην εξέλιξη και την Ιστορία των Μαθηματικών. Η βασικότερη ιδέα είναι η καταλληλότερη παρουσίαση των μεθόδων με συγκεκριμένη σειρά, για την καλύτερη παρουσίαση μιας μαθηματικής έννοιας. Ουσιαστικά, η μέθοδος αυτή ακολουθεί σε γενικές γραμμές στη γένεση της γνώσης στο άτομο, την ίδια πορεία που διέγραψε η γένεση της γνώσης στο ανθρώπινο είδος (Γαβριήλ, 2014).

Ο Freudenthal το 1973 ερμήνευσε τη γενετική προσέγγιση με τη μέθοδο της καθοδηγούμενης επανα-ανακάλυψης. Μέσα από αυτή, θεωρούσε πως η διδασκαλία των εννοιών με γενετικό τρόπο, δε συνεπάγεται ότι πρέπει να ακολουθείται η ίδια ακριβώς ιστορική σειρά, ούτε να παρουσιάζονται τα «αδιέξοδα» που προκύπταν από τους ερευνητές. Θα πρέπει να παρουσιάζεται μια βελτιωμένη και καλύτερα καθοδηγούμενη πορεία της ιστορίας.

Βασικός άξονας της θεωρίας του Brousseau είναι ότι ο μαθητής μέσα στο πλαίσιο και τους περιορισμούς μιας συγκεκριμένης κατάστασης, προσπαθεί να προσεγγίσει τη νέα γνώση. Μια τέτοια κατάσταση είναι μια συνισταμένη σχέσεων ανάμεσα στον εκπαιδευτικό και το μαθητή, οι οποίοι έχουν κοινό στόχο την εκμάθηση της νέας γνώσης (Brousseau, 1986). Επομένως ο διδάσκων προτείνοντας κατάλληλες δραστηριότητες και προβλήματα, προκαλεί στο διδασκόμενο την κατασκευή της γνώσης και ουσιαστικά την κατανόηση του μαθηματικού αντικειμένου που παρουσιάζεται (Brousseau, 1997).

Η κοινωνική – πολιτισμική οπτική του Radford υποστηρίζει ότι η μαθηματική γνώση αποτελεί μια πολιτισμικά διαμεσολαβημένη γνωσιακή πράξη, που το περιεχόμενό της εξαρτάται από τον πολιτισμό στον οποίο παρέχεται (Γαβριήλ, 2014).

Η προσέγγιση του Boero βασίζεται στο γεγονός ότι κάποιες λεκτικές και μη εκφράσεις, εκφράζουν με πυκνό τρόπο σημαντικά άλματα της εξέλιξης των Μαθηματικών. Κάθε έκφραση, μεταφέρει ένα μαθηματικό νόημα, μια οργάνωση του λόγου και τον πολιτισμικό ορίζοντα του ιστορικού άλματος (Γαβριήλ, 2014).

Μαζί με όλα τα επιχειρήματα τα οποία παρουσιάστηκαν και υποστηρίζουν τη χρήση της Ιστορίας στα Μαθηματικά, αξίζει να αναφερθούν και ορισμένες απόψεις οι οποίες είναι κατά της αξιοποίησής της. Ορισμένοι βασικοί άξονες πάνω σε αυτή την κατεύθυνση είναι επιστημολογικού – φιλοσοφικού και πρακτικού – διδακτικού χαρακτήρα.

<u>Στον πρώτο άξονα:</u>

Σχετικά με τη φύση των Μαθηματικών:

- Πρώτα πρέπει να διδάσκεται το θέμα και μετά η ιστορία του

- Η πρόοδος στα Μαθηματικά συνίσταται στο να κάνει τα δύσκολα προβλήματα, ρουτίνα. Επομένως η ενασχόληση με το παρελθόν δεν αποσκοπεί πουθενά.
- Η ανάλυση του παρελθόντος μπορεί να προκαλέσει σύγχυση και όχι αποσαφήνιση

Σχετικά με τις ενδογενείς δυσκολίες του εγχειρήματος:

- Η ανάγνωση πρωτότυπων κειμένων αποτελεί δύσκολο εγχείρημα
- Με τον τρόπο αυτόν καλλιεργείται πολιτισμικός σωβινισμός και στενόμυαλος εθνικισμός
- Οι μαθητές έχουν αποσπασματική αίσθηση του (ιστορικού) χρόνου

Στο δεύτερο άξονα:

Σχετικά με το υπόβαθρο και τη στάση των διδασκόντων:

- Δεν υπάρχει αρκετός διδακτικός χρόνος
- Δε μπορεί κάθε εκπαιδευτικός να γνωρίζει επαρκώς τα στοιχεία για ορθή παρουσίασή τους
- Δεν υπάρχει διαθέσιμο κατάλληλο διδακτικό υλικό
- Δε διαθέτουν την κατάλληλη επιμόρφωση
- Πως μπορεί να ενσωματωθεί η ιστορική διάσταση στις εξεταστικές διαδικασίες

Σχετικά με το υπόβαθρο και τη στάση των διδασκομένων:

- Θεωρείται μάθημα Ιστορίας
- Θεωρείται εξίσου χρονοβόρο με τα Μαθηματικά
- Δε διαθέτουν ευρύτερη παιδεία προκειμένου να εκτιμήσουν το ιστορικό περιεχόμενο

(Tzanakis, 2009).

1.2 Διερευνητική Μάθηση – Inquiry Based Learning

Η εκμάθηση με βάση την έρευνα είναι μια μορφή ενεργούς μάθησης που ξεκινά θέτοντας ερωτήσεις, προβλήματα ή σενάρια, σε αντίθεση με την παραδοσιακή εκπαίδευση, όπου ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει γεγονότα και τις γνώσεις του για ένα θέμα. Η διερευνητική μάθηση συχνά πραγματοποιείται από έναν επόπτη ο οποίος εντοπίζει και ερευνά θέματα και ερωτήσεις για την ανάπτυξη γνώσεων. Περιλαμβάνει τη μάθηση που βασίζεται σε προβλήματα και χρησιμοποιείται γενικά σε έρευνες και έργα μικρής κλίμακας. Η διδασκαλία αυτή σχετίζεται κυρίως με την ανάπτυξη και την πρακτική των δεξιοτήτων σκέψης και επίλυσης προβλημάτων. Οι συγκεκριμένες διαδικασίες μάθησης στις οποίες συμμετέχουν οι διδασκόμενοι κατά τη διάρκεια της διερεύνησης-μάθησης περιλαμβάνουν:

- ✓ Δημιουργία δικών τους ερωτήσεων
- ✓ Αναζήτηση αποδεικτικών στοιχείων για τις απαντήσεις σε κάθε ερώτηση

- ✓ Ανάλυση των στοιχείων που συλλέχθηκαν
- ✓ Σύνδεση της απάντησης με τις γνώσεις που αποκτήθηκαν από τη διερευνητική διαδικασία
- ✓ Δημιουργία ενός επιχειρήματος και αιτιολόγησης της εξήγησης

Στο άρθρο *The Many Levels of Inquiry* των Banchi & Bell (2008) περιγράφονται τα διάφορα επίπεδα της εκπαιδευτικής αυτής μεθόδου.

Επίπεδο 1: Έρευνα επιβεβαίωσης

Ο επιβλέπων έχει διδάξει μια συγκεκριμένη έννοια και στη συνέχεια αναπτύσσει ερωτήσεις μέσα από μια διαδικασία που καθοδηγεί τους μαθητές σε μια δραστηριότητα όπου τα αποτελέσματα είναι ήδη γνωστά. Αυτή η μέθοδος είναι ιδανική για να ενισχύσει τις έννοιες που διδάσκονται και να εισάγει τους μαθητές στο να ακολουθούν τις διαδικασίες, να συλλέγουν και να καταγράφουν σωστά τα δεδομένα, να επιβεβαιώνουν και να εμβαθύνουν στην έννοια.

Επίπεδο 2: Δομημένη έρευνα

Ο οργανωτής θέτει την αρχική ερώτηση και την περιγραφή της διαδικασίας. Οι μαθητές πρέπει να διατυπώσουν εξηγήσεις για τα ευρήματά τους μέσω αξιολόγησης και ανάλυσης των δεδομένων που συλλέγουν.

Επίπεδο 3: Καθοδηγούμενη έρευνα

Ο επιβλέπων παρέχει μόνο την ερευνητική ερώτηση στους μαθητές, οι οποίοι είναι υπεύθυνοι για το σχεδιασμό και την παρακολούθηση των δικών τους διαδικασιών για τη δοκιμή αυτής της ερώτησης και στη συνέχεια γνωστοποιούν τα αποτελέσματα και τα ευρήματά τους.

Επίπεδο 4: Ανοιχτή / Αληθινή έρευνα

Οι μαθητές διατυπώνουν τις δικές τους ερευνητικές ερωτήσεις, σχεδιάζουν και ακολουθούν μια εξελιγμένη διαδικασία και κοινοποιούν τα ευρήματα και τα αποτελέσματά τους.

Οι Banchi & Bell (2008) επισημαίνουν ότι οι επιβλέποντες πρέπει να ξεκινήσουν τις οδηγίες τους στα χαμηλότερα επίπεδα και να εργαστούν βήμα βήμα προκειμένου να αναπτύξουν αποτελεσματικά τις δεξιότητες έρευνας των μαθητών. Οι ανοιχτές ερευνητικές δραστηριότητες είναι επιτυχημένες μόνο εάν οι μαθητές παρακινούνται από παρόμοια ενδιαφέροντα και αν είναι εξοπλισμένοι με δεξιότητες για τη διεξαγωγή της δικής τους ερευνητικής μελέτης.

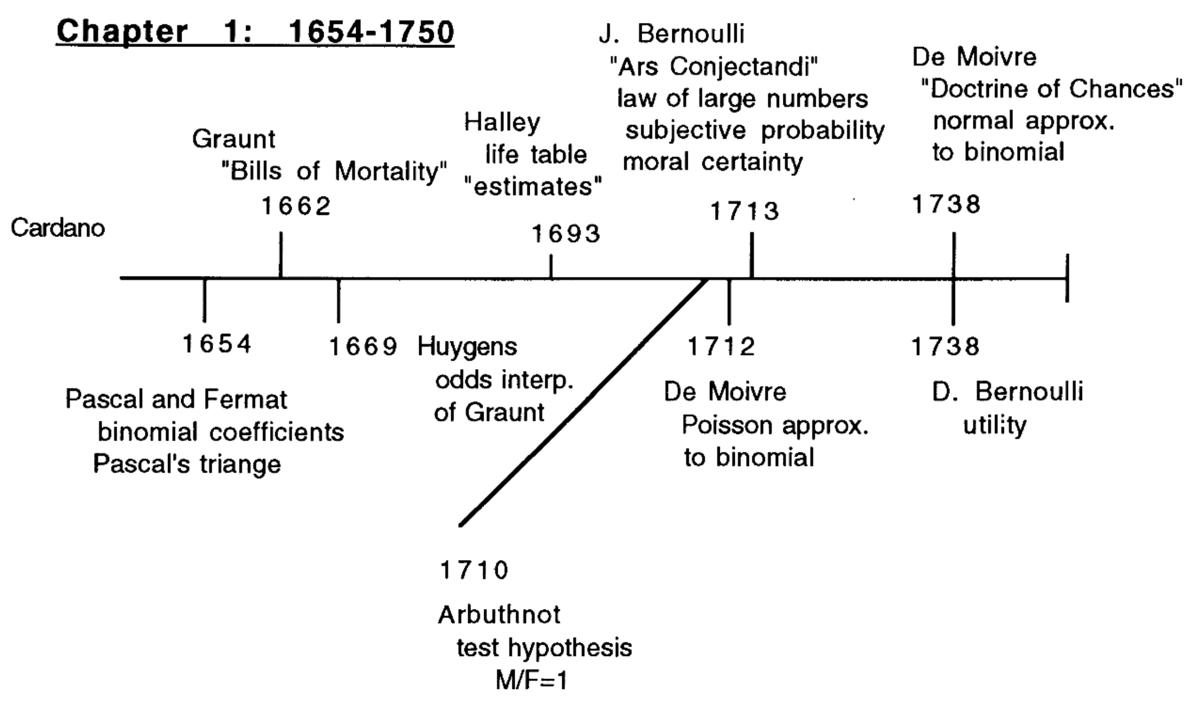
Κεφάλαιο 2ο:

Ιστορική Εξέλιξη – Εμφάνιση εννοιών

2.1 Ιστορική Αναδρομή και Εξέλιξη

Αν και η επιστήμη της Στατιστικής γνωρίζει μεγάλη άνθηση και προσελκύει τεράστιο ενδιαφέρον τα τελευταία κυρίως χρόνια, υπάρχουν πηγές οι οποίες μαρτυρούν την ύπαρξή της πολλούς αιώνες πριν. Όμως η αναζήτηση της εξέλιξής της ανά τους αιώνες αποτελεί ένα δύσκολο έργο μιας και υπάρχουν αρκετές «παγίδες» οι οποίες μπορούν να αλλοιώσουν την πραγματική διαδρομή που έχει ακολουθήσει. Η έννοια και το αντικείμενο που γνωρίζουμε για την επιστήμη της Στατιστικής προσδιορίστηκε περίπου το 17^{ο} αιώνα. Προηγούμενες αναφορές της Στατιστικής έχουν παρατηρηθεί σε διάφορα άρθρα τα οποία όμως μπορεί να περιγράφουν κάτι τελείως διαφορετικό. Για παράδειγμα, ο Ιταλός ιστορικός Girolamo Ghilini (1589) αναφέρεται σε έργο του σε *civile, politica, statistica e militare scienza.*

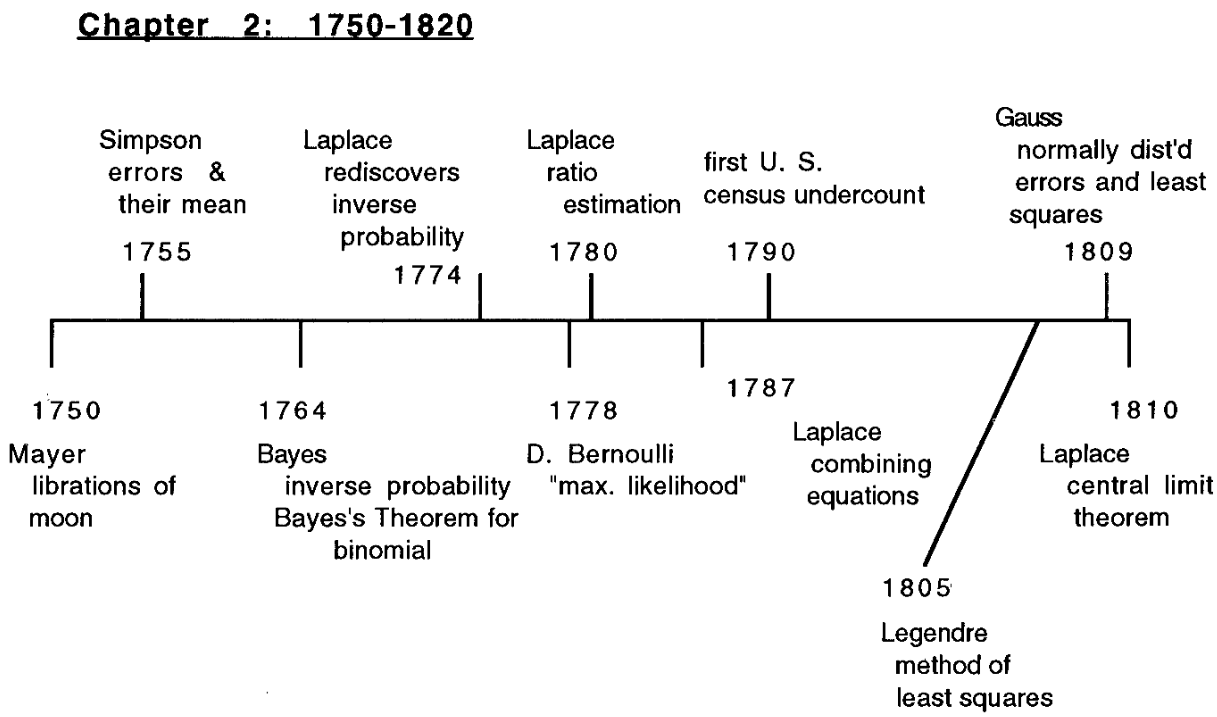
Εάν όλες οι επιστήμες απαιτούν μέτρηση - και η Στατιστική είναι η λογική της μέτρησης - προκύπτει ότι η ιστορία της μπορεί να περιλαμβάνει την ιστορία όλων των επιστημών (Stigler, 1986). Μέσα από την αναζήτηση της ιστορικής αναδρομής της Στατιστικής, ο Fienberg (1992) καταφέρνει να προσδιορίσει ορισμένα χρονικά σημεία – κλειδιά, τα οποία σηματοδοτούν την πορεία της στο πέρασμα του χρόνου.



Μελετώντας έναν κατάλληλο χρονικά διαχωρισμό των σημαντικότερων γεγονότων, ξεχωρίζουν τέσσερα κεφάλαια με τα σημαντικότερα έργα τα οποία χάραξαν τη μοναδική πορεία της Στατιστικής. Στο πρώτο κεφάλαιο και περίπου το 1650 μ.Χ., ο Ιταλός μαθηματικός Girolamo

Cardano, εμπνεύστηκε από τα τυχερά παιχνίδια τη δημιουργία και την ανάπτυξη ιδεών σχετικά με τις πιθανότητες. Από το 1654 έως και το 1665 έχουν βρεθεί αναφορές σε αλληλογραφία μεταξύ του Blaise Pascal και του Pierre de Fermat για τη δημιουργία διωνυμικών αποτελεσμάτων, συμπεριλαμβανομένου του διωνυμικού συντελεστή και του τριγώνου του Pascal. Ουσιαστικά, η περίοδος αυτή συμβάλλει στην εμφάνιση της έννοιας της Πιθανότητας, χωρίς όμως να γίνεται αναφορά της λέξης αυτής. Έπειτα, ακολουθεί μια σχετική στασιμότητα 50 ετών, η οποία περιλαμβάνει μόνο το έργο του Graunt «Bills of Mortality», ο οποίος προσπαθεί να ερμηνεύσει ενδεχόμενα από το έργο του Graunt, καθώς και το 1693 του Halley με την εκτίμησή του για το όριο ζωής του ανθρώπου. Έτσι φτάνουμε στη δεκαετία από το 1708 όπου εντοπίζονται έργα του Pierre Rémond de Montmort, του Bernoulli και του De Moivre, στα οποία παρατηρείται μια συνεκτική θεωρία των Πιθανοτήτων. Από τα πιο σημαντικά έργα εκείνης της εποχής θεωρείται αυτό του J. Bernoulli, το οποίο δημοσιεύτηκε το 1713 και περιλαμβάνει θεωρητικά στοιχεία για τους μεγάλους αριθμούς αλλά και αναφορές για να εισαχθεί ίσως για πρώτη φορά η υποκειμενική αντίληψη ότι η πιθανότητα είναι προσωπική και ποικίλλει ανάλογα με τις γνώσεις ενός ατόμου. Από το 1718 έως το 1738 γίνεται προσπάθεια ενοποίησης και επέκτασης των δεδομένων, φτάνοντας στον De Moivre, ο οποίος στο βιβλίο *The Doctrine of Chances* ανέπτυξε την κανονική προσέγγιση του διωνύμου. Η απόκλιση της κανονικής προσέγγισης ήταν μια προσπάθειά του να βελτιώσει το όριο του Bernoulli σχετικά με το μέγεθος δείγματος το οποίο μπορεί να επιτυγχάνει συγκεκριμένη βεβαιότητα. Αναγνώρισε την αξία του $\sqrt{n}$, όπου n ο αριθμός των δοκιμών. Ενώ το έργο του De Moivre έγινε πολύ γνωστό και κατάφερε να ολοκληρώσει με επιτυχία αυτό που σήμερα ονομάζουμε θεωρία κλασσικής πιθανότητας, το χρονικό διάστημα μέχρι το επόμενο ιστορικό κεφάλαιο δεν περιέχει έργα αντίστοιχα με θεωρία στατιστικών. Όλες οι συνεισφορές πριν από το 1750 περιλάμβαναν κυρίως παραδείγματα ανάλυσης δεδομένων, χωρίς τη χρήση της έννοιας της αβεβαιότητας. Το πρωτότυπο μοντέλο περιγραφικής στατιστικής ανάλυσης του John Graunt το 1662 δημιούργησε μια σειρά από αναλυτικές προσεγγίσεις δεδομένων οι οποίες περιείχαν (1) εξέταση της αξιοπιστίας των οικονομικών δεδομένων που δημοσιεύθηκαν πάνω από 60 χρόνια, (2) αναλυτική περιγραφή της θνησιμότητας λόγω της πανούκλας, (3) λεπτομερή περιγραφή και ανάλυση της συχνότητας των φύλων (αναλογία του αριθμού των ανδρών σε σχέση με τον αριθμό των γυναικών), των γεννήσεων και των θανάτων στο Λονδίνο και (4) την ανάπτυξη ενός μέρους ενός εμπειρικού πίνακα ζωής, με σκοπό την απάντηση ερωτήσεων σχετικά με τον αριθμό των ανδρών στο Λονδίνο οι οποίοι είναι ικανοί για μάχη. Σχετικά με την αναλογία των φύλων, 50 χρόνια μετά ο John Arbuthnot προσπάθησε να ελέγξει την υπόθεση ότι η αναλογία των δύο φύλων είναι 1, χρησιμοποιώντας ένα διωνυμικό μοντέλο. Ο Bernoulli συνεχίζοντας την υπόθεση αυτή, εξερεύνησε περαιτέρω την καταλληλότητα του διωνυμικού μοντέλου για το πρόβλημα αυτό.

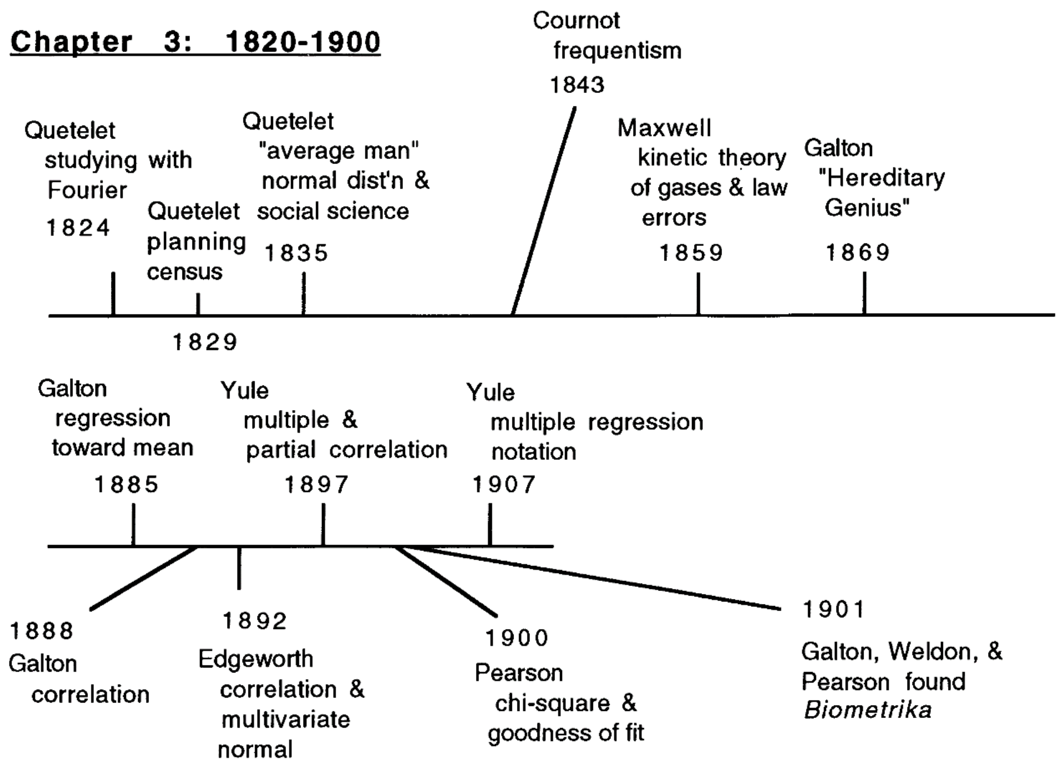
Αν και η προέλευση της θεωρίας της κλασσικής πιθανότητας είναι στενά συνδεδεμένη με το τζόγο και τα τυχερά παιχνίδια, πολλοί από τους αναφερθέντες πρωταγωνιστές της εξέλιξης αυτής ήταν βαθιά θρησκευόμενοι άνδρες, όπως για παράδειγμα ο Blaise Pascal, των οποίων οι ενέργειες και τα έργα για πιθανολογικά προβλήματα, επηρεάστηκαν σε μεγάλο βαθμό από τις θεολογικές τους απόψεις, σχετικά με την απόδειξη της ύπαρξης του Θεού ή του ρόλου Του σε διάφορα προβλήματα, όπως το στοίχημα του Pascal. Τέλος, ο Jakob Bernoulli αναφέρει σε συζήτησή του με τους Arbuthnot και Conjectandi το 1712 την ηθική βεβαιότητα για τη θεϊκή πρόνοια. Αυτοί οι συγγραφείς πίστευαν πως ο κόσμος ήταν ντετερμινιστικός αφού *«ο Θεός δεν αφήνει τίποτα στην τύχη»*. Παρ' όλα αυτά επικεντρώθηκαν στην πιθανότητα να περιγράψουν τόσο τα τυχερά παιχνίδια όσο και τα ζητήματα της ηθικής και της θεολογίας.



Στο δεύτερο κεφάλαιο της ιστορικής εξέλιξης, το οποίο περιλαμβάνει τις χρονολογίες περίπου από το 1750 έως το 1820, παρατηρούνται δύο αλληλένδετα γεγονότα-έργα τα οποία αποτελούν τα θεμέλια για τα γνωστά σε όλους στατιστικά μαθηματικά. Το πρώτο σκέλος αναλύει την ανάπτυξη συμπερασμάτων με βάση την πιθανότητα, που εξελίσσονται από το έργο των Bernoulli και De Moivre και το δεύτερο περιλαμβάνει την ανάπτυξη της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων για την εκτίμηση άγνωστων συντελεστών σε γραμμικές εξισώσεις. Στην περίοδο αυτή που μελετάται, σημειώνονται σημαντικά ιστορικά γεγονότα τα οποία σηματοδοτούν την ανάπτυξη των Πιθανοτήτων και των κατανομών.

Αναφορικά με το πρώτο σκέλος, ο Thomas Bayes, βασιζόμενος στο έργο του Thomas Simpson το 1755, ανέπτυξε το 1764 και ουσιαστικά χρησιμοποίησε το αντίστροφο όρισμα πιθανότητας, γνωστό σήμερα ως το Θεώρημα του Bayes. Στη συνέχεια σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη αυτή έπαιξε ο Γάλλος Μαθηματικός και Αστρονόμος Pierre Simon Laplace, ο οποίος προσέγγισε για πρώτη φορά το διωνυμικό πρόβλημα χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα αντίστροφης πιθανότητας παρόμοιο με εκείνο του Bayes. Έπειτα προσπάθησε να επεκτείνει τη χρήση του για μια ποικιλία άλλων κατανομών. Όλα αυτά οδήγησαν το 1810 τον Laplace σε μια σαφή διατύπωση του κεντρικού οριακού θεωρήματος, το οποίο είναι σε θέση να αιτιολογήσει τη χρήση της κανονικής κατανομής για την προσέγγιση της κατανομής των ποσών (ή των μέσων όρων) από σχεδόν οποιαδήποτε κατανομή πιθανότητας. Στο άρθρο του ο Stigler αναφέρει ότι *ο Simpson είχε παρατηρήσει ότι η έννοια των κατανομών των σφαλμάτων επέτρεπε μια εναλλακτική πρόσβαση στη μέτρηση της αβεβαιότητας. Γι' αυτό και ο Laplace διέφυγε στη συγκεκριμένη εναλλακτική «είσοδο» με σκοπό να χρησιμοποιήσει αργότερα τη γνωστή άμεση μέθοδο η οποία όμως είχε ήδη ανακαλυφθεί από τον Bayes*. Αν και αρχικά είχε σημειώσει αργή πρόοδο, ο Laplace μόλις αντιλήφθηκε τη δύναμη της αντίστροφης προσέγγισης πιθανότητας, κατάφερε να προχωρήσει γρήγορα και να βρει λύση στα προβλήματα που είχαν απασχολήσει τον Bayes. Έτσι, η συνεισφορά του Bayes είχε τελικά μικρή επίδραση στην ανάπτυξη της θεωρίας των μαθηματικών στατιστικών κατά την περίοδο εκείνη.

Το δεύτερο σκέλος αυτής της χρονικής περιόδου σχετίζεται με την εξέλιξη μιας γενικής στατιστικής προσέγγισης για το συνδυασμό παρατηρήσεων οι οποίες καταλήγουν στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Πίσω από αυτές τις ανακαλύψεις υπήρχε μια μεγάλη σειρά προβλημάτων σχετικά με δεδομένα στην αστρονομία η οποία περιλάμβανε παρατηρήσεις πλανητικών θέσεων, τροχιών και γεωδαισιακών τόξων. Η μελέτη του Johann Tobias Mayer το 1750 σχετικά με την ταλάντευση της Σελήνης πρότεινε μια έξυπνη μέθοδο για την επίλυση 27 εξισώσεων με τρεις αγνώστους με τη δημιουργία τριών εξισώσεων οι οποίες προκύπταν από το άθροισμα εννέα εξισώσεων σε καθεμιά από τις τρεις προσεκτικά κατασκευασμένες ομάδες. Το βασικό ερώτημα σε αυτά τα δύο κομμάτια ήταν πώς ταιριάζει η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων με τον ποσοτικό προσδιορισμό της αβεβαιότητας. Ο συνδετικός κρίκος αυτών των δύο αποδείχθηκε ο μεγάλος Γερμανός μαθηματικός Carl Friedrich Gauss, ο οποίος το 1809 χρησιμοποιώντας ένα κυκλικό επιχείρημα[1], δικαιολόγησε τη χρήση κανονικά κατανεμημένων σφαλμάτων για συστήματα γραμμικών εξισώσεων και στη συνέχεια απέδειξε ότι μεγιστοποιώντας την οπίσθια κατανομή[2] των σφαλμάτων, αυτά ήταν ισοδύναμα με τη χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Αυτή η μέθοδος είχε άμεσο αντίκτυπο στον Laplace, ο οποίος το 1810 αναγνώρισε ότι ο κανονικός όρος σφάλματος θα μπορούσε να δικαιολογηθεί από τα δικά του αποτελέσματα στο κεντρικό οριακό θεώρημα. Η ενοποίηση των δύο αυτών σκελών σε μια ισχυρή στατιστική προσέγγιση εφαρμόζεται σε ένα μεγάλο πλήθος φυσικών προβλημάτων.



Στον τρίτο ιστορικό διαχωρισμό η ανάπτυξη των εννοιών των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής αρχίζουν και συσχετίζονται σε τέτοιο βαθμό που δημιουργούν νέα μοντέλα, τα οποία μελετώνται ακόμα και σήμερα. Πρώτη σημαντική αφετηρία, η έρευνα του Γάλλου μαθηματικού και Αστρονόμου Adolphe Quetelet σχετικά με τις Πιθανότητες και τη Στατιστική, η οποία αναφέρεται από τον Joseph Fourier, που αυτός με τη σειρά του μελέτησε τον Laplace. Ο Quetelet προσπάθησε να εφαρμόσει την εκτίμηση του Laplace από το 1780, προκειμένου να εκτιμήσει την αναλογία γεννήσεων και θανάτων, ως μέρος της ανάλυσης προηγούμενων απογραφικών δεδομένων αλλά και

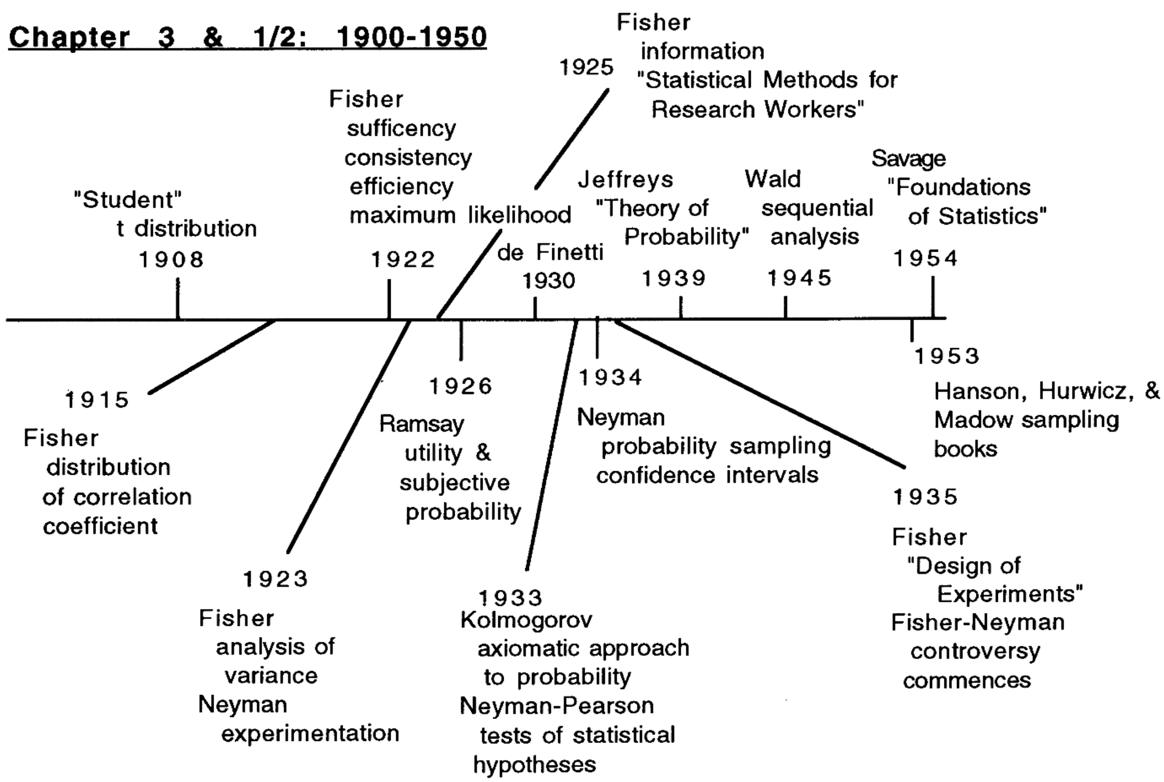
[1] Κυκλικό επιχείρημα ονομάζεται η μέθοδος που ακολουθεί ο ερευνητής, κατά την οποία ξεκινά από το συμπέρασμα, από αυτό δηλαδή που θέλει να αποδείξει.
[2] Η οπίσθια προγνωστική κατανομή σε ειδικές περιπτώσεις είναι αρνητική διωνυμική κατανομή, η οποία μερικές φορές ονομάζεται και Γάμμα – Poisson κατανομή.

για το σχεδιασμό της απογραφής του 1829. Λόγω των μεγάλων ποσοτήτων που απαιτούνταν και των διαφορών μεταξύ ομάδων στον πληθυσμό για τις οποίες έπρεπε να λάβει υπόψη, τελικά επικεντρώθηκε στη μακρο-ανάλυση των κοινωνικών δεδομένων, χρησιμοποιώντας στατιστικές μεθόδους χωρίς την πιθανή ανάλυση της αβεβαιότητας σε εκτιμήσεις και μετρήσεις οι οποίες ήταν συνυφασμένες με τη μέθοδο αυτή του Laplace. Ο Γάλλος μπορεί να θεωρηθεί ο πατέρας της ποσοτικής κοινωνικής επιστήμης καθώς με τις δύο σημαντικές συνεισφορές του, την έννοια του «μέσου ανθρώπου» στο βιβλίο του το 1835 και τη μεταγενέστερη προσαρμογή της κανονικής κατανομής σε πολλά ομαδοποιημένα δεδομένα κοινωνικής επιστήμης, σε συνδυασμό με την ερμηνεία της σταθερότητας των αντίστοιχων κοινωνικών φαινομένων, τα οποία κυριάρχησαν στο χώρο για αρκετές δεκαετίες.

Κατά τη διάρκεια αυτής της χρονικής περιόδου παρατηρείται άνοδος της στατιστικής σκέψης, καθώς είναι πολλοί εκείνοι που προχωρούν πιο μπροστά από εκεί που προσπάθησε ο Quetelet. Ο Poisson, ο I. J. Bienayme, ο Wilhelm Lexis, ο William Farr, ο Auguste Comte, ο Antoine Augustin Cournot και ο Gustov Theodor Fechner συνεισφέρουν στην ανάπτυξη αυτή, με προσανατολισμό προς την εφαρμογή στις κοινωνικές και συμπεριφοριστικές επιστήμες. Ειδικότερα, το έργο του Cournot χαρακτηρίστηκε ως «έλευση μιας νέας ερμηνείας της μαθηματικής πιθανότητας αποκλειστικά όσον αφορά τις αντικειμενικές συχνότητες». Επίσης ο ίδιος ήταν μεταξύ των πρώτων που αναγνώρισε ότι η κλασσική προσέγγιση της πιθανότητας ήταν μια ερμηνεία, διαφορετική από τη μαθηματική πιθανότητα αυτή καθ' αυτή. Με την άνοδο αυτή παρατηρείται μια αλλαγή από την υποκειμενική έννοια της πιθανότητας που ενυπάρχει στο έργο του Laplace, στην έννοια της συχνότητας που επρόκειτο να εμφανιστεί τον 20^{ο} αιώνα.

Παρ' όλα αυτά, κατά τη δεκαετία του 1870 δεν υπήρξε σημαντική πρόοδος στην ανάπτυξη της στατιστικής μεθοδολογίας. Η περίοδος από το 1880 έως και το 1900 σημείωσε αξιόλογη αλλαγή στο ρυθμό των στατιστικών εξελίξεων, ειδικά στην Αγγλία όπου η συνεισφορά των Francis Galton, Francis Ydidro Edgeworth, Karl Pearson και George Udny Yule έπαιξε σημαντικό ρόλο. Ο Stigler στο κείμενό του αναφέρεται στον Galton ως «ρομαντική φιγούρα στην ιστορία των ερευνητών της Στατιστικής». Πριν στραφεί στις στατιστικές μελέτες και έρευνες, ο Galton εξερεύνησε την Αφρική και μελέτησε μετεωρολογικά προβλήματα καθώς και ζητήματα σχετικά με την κληρονομικότητα. Μέσα από τη δική του μελέτη στο βιβλίο του Hereditary Genius το 1869 ουσιαστικά λαμβάνονται οι πρώτες αντιλήψεις των ιδεών του για την παλινδρόμηση. Αργότερα το 1885 παρουσίασε στην προεδρική του ομιλία, στο ανθρωπολογικό τμήμα της Βρετανικής Ένωσης για την Προώθηση της Επιστήμης, την πρώτη στατιστική περιγραφή του φαινομένου της παλινδρόμησης και της σύνδεσής της με τις κανονικές κατανομές. Το 1888 διατύπωσε τη σχετική έννοια του συσχετισμού. Οι ιδέες του Galton για παλινδρόμηση και συσχέτιση υιοθετήθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν άμεσα από πολλούς. Το πιο αξιοσημείωτο έργο πάνω σε αυτές τις ιδέες είναι αυτό του Edgeworth, ο οποίος κατά τη δεκαετία του 1880 προσπάθησε να αξιοποιήσει τις ιδέες της στατιστικής ανάλυσης, οι οποίες αναπτύχθηκαν δεκαετίες νωρίτερα στην αστρονομία, τη γεωδαισία και να τις εφαρμόσει στα στατιστικά γύρω από την κοινωνία και τη γεωδαισία. Λόγω της γνώσης του σχετικά με τη θεωρία των ελαχίστων τετραγώνων και την αντίστροφη πιθανότητα, ο Edgeworth κατάφερε να συνδέσει τις έννοιες της παλινδρόμησης και της συσχέτισης του Galton με τις προηγούμενες μεθόδους και με αυτό τον τρόπο εισήγαγε το ισοδύναμο της σύγχρονης έννοιας για τον πίνακα συσχέτισης.

Ο 19ος αιώνας ολοκληρώνεται με τη συμβολή του Pearson και των συνεργατών του, με το x^2 test και την ίδρυση του πρώτου ανεξάρτητου περιοδικού Στατιστικής με τίτλο Biometrika.



Ο τελευταίος χρονικά διαχωρισμός που πραγματοποιείται από τον Fienberg, αναφέρεται στο πρώτο μισό του 20ου αιώνα. Είναι η περίοδος που διαμορφώνει την εικόνα της Στατιστικής σχεδόν όπως τη γνωρίζουμε στις μέρες μας. Ο Άγγλος Στατιστικός Ronald A. Fischer μέσα από τα έργα του παρουσιάζει την ανάπτυξη των εννοιών του στατιστικού μοντέλου, της επάρκειας, της πιθανότητας, της στατιστικής αντίληψης της τυχαιοποίησης, της θεωρίας του πειραματικού σχεδιασμού και της μεθόδου της ανάλυσης της διακύμανσης. Θεωρείται από τους σπουδαιότερους της εποχής του, καθώς άλλαξε την πορεία της στατιστικής ανάπτυξης. Τα έργα του αποτελούνται από 140 εργασίες περί γενετικής, 129 περί Στατιστικής και 16 για άλλα θέματα, τα οποία έχουν δημοσιευθεί και τα τέσσερα βιβλία του σε ένα σύνολο έξι τόμων έκαστο. Ο Fisher ασχολήθηκε και με τη θεωρία του Charles Darwin για την προέλευση των ειδών και συνέχισε μια εξαιρετικά δημιουργική καριέρα στη γενετική και τη Στατιστική. Η πρώτη του εργασία δημοσιεύθηκε το 1909 όταν και εισήλθε στο πανεπιστήμιο του Cambridge. Το 1919 αποδέχθηκε τη νεοσύστατη θέση του Στατιστικού στο Rothamsted Experimental Station. Εκεί, οι ιδέες του είχαν άμεσο αντίκτυπο στην επιστημονική ανάλυση των δεδομένων. Ωστόσο, μερικές από τις έννοιες τις οποίες παρουσίασε, έγιναν αντικείμενο αντιπαράθεσης. Ειδικότερα, η διατύπωση για τη στατιστική σημαντικότητα και η προσέγγιση που έκανε στα πιθανολογικά βασισμένα διαστήματα εμπιστοσύνης, προκάλεσαν τη μεγαλύτερη στατιστική διαμάχη του πρώτου μισού αιώνα.

Ο Πολωνός Στατιστικός Jerzy Neyman ταξίδεψε στην Αγγλία το 1925 για να εργασθεί στο εργαστήρι του Karl Pearson. Ο ίδιος ήδη είχε συγγράψει το 1923 μια εξαιρετικά πρωτότυπη διδακτορική διατριβή σχετικά με την εφαρμογή της Στατιστικής στο γεωργικό πειραματισμό, στην οποία χρησιμοποίησε την έννοια των υποθετικών απαντήσεων οι οποίες αντιστοιχούσαν σε αυτό που θα μπορούσε να παρατηρηθεί εάν η θεραπεία μεταβαλλόταν. Ο Neyman συνεργάστηκε με τον Egon, γιο του Pearson με τον οποίο οδηγήθηκε στη θεωρία της δοκιμής υποθέσεων, κατά την οποία ισχυρίστηκαν ότι βελτίωσε την προσέγγιση δοκιμής του Fisher, αναγνωρίζοντας ρητά το ρόλο των αντίθετων υποθέσεων. Το 1934 ο Neyman έθεσε τα θεμέλια για τη στατιστική θεωρία της δειγματοληψίας και έδωσε την πρώτη περιγραφή του διαστήματος εμπιστοσύνης, βασισμένη σε μια απειριζόμενη ακολουθία επαναλαμβανομένων δειγμάτων. Επίσης, επεξεργάστηκε τη μέθοδο των διαστημάτων εμπιστοσύνης σε συνδυασμό με τη θεωρία δοκιμής των υποθέσεων.

Με την πάροδο του χρόνου, τα ελαττώματα της μεθόδου του Fisher έγιναν εμφανή σε αρκετούς στατιστικολόγους όπως περιγράφονται στο βιβλίο The Empire of Chance μιας ομάδας αποτελούμενης από έξι συγγραφείς. Το 1937 ο Neyman μετακομίζοντας στις Ηνωμένες Πολιτείες, βοήθησε στην ανάπτυξη ιδεών γύρω από τις δειγματοληψίες μεγάλης κλίμακας από την κυβέρνηση. Ο ίδιος ήταν ο βασικός παράγοντας για την άνοδο της Στατιστικής στις Η.Π.Α. στις δεκαετίες 1930 και 1940 μαζί με τους Harold Hotelling, Abraham Wald και Samuel Wilks.

Ένας από τους επίσης πολύ γνωστούς για την προσφορά του στις Πιθανότητες, ο Ρώσος Μαθηματικός A.N. Kolmogorov, παρουσίασε το 1930 μια αξιωματική προσέγγιση στη θεωρία της πιθανότητας, τα οποία είχαν ως βάση τα μαθηματικά πεδία της θεωρίας των συνόλων καθώς και τη θεωρία των συχνοτήτων τα οποία ξεκίνησαν την πιθανότητα ως μια ξεχωριστή υποκατηγορία της επιστήμης των Μαθηματικών. Τα αξιώματά του καθώς και η θεωρητική προσέγγιση έδωσαν ένα μαθηματικό υπόβαθρο στην προηγούμενη θεωρία της πιθανότητας και παρείχαν μια ισχυρή βάση για την απόδειξη των μαθηματικών αποτελεσμάτων στη στατιστική θεωρία.

Ο ειδικός ρόλος των στατιστικών στη συμμαχική προσπάθεια κατά τη διάρκεια του Β’ Παγκοσμίου πολέμου χρησίμευσε τόσο στις Ηνωμένες Πολιτείες όσο και τη Μεγάλη Βρετανία ως κίνητρο για την περαιτέρω ανάπτυξη και επέκταση της Στατιστικής ως πεδίο για τη δημιουργία ξεχωριστών τμημάτων στην ανώτατη εκπαίδευση.

2.2 Στατιστική – Φιλοσοφία – Κοινωνιολογία

Η επιστήμη της Στατιστικής ξεκίνησε να σχηματίζεται κατά το 17^{ο} αιώνα περίπου και ουσιαστικά να αναγνωρίζεται με το σημερινό τρόπο θεώρησής της. Από εκείνο τον αιώνα και μέχρι σήμερα η επιστήμη αυτή εμπεριέχεται ενεργά στον κοινωνικό χώρο, σε χώρους όπου οι μετρήσεις παίζουν κυρίαρχο ρόλο, ενώ αυτονομείται ως προς την καθαρά μαθηματική της διάσταση, κινούμενη μαζί με τις Πιθανότητες. Αναλύοντας τις έννοιες «στατιστική» και «στατιστικός», αντιλαμβάνεται κανείς την πολυδιάστατη μορφή της. Για κάποιους, αποτελεί μια διοικητική δραστηριότητα καταγραφής διάφορων δεδομένων, η οποία παρουσιάζει μη αμφισβητήσιμα αποτελέσματα και αριθμούς και τροφοδοτεί την κοινωνική συζήτηση και προσανατολίζει τις ενέργειες των ανθρώπων. Για άλλους, η Στατιστική είναι ένας κλάδος της επιστήμης των Μαθηματικών που διδάσκεται στο πανεπιστήμιο και χρησιμοποιείται από άλλες επιστήμες, όπως αυτή της Ιατρικής, της Βιολογίας, της Οικονομίας και της Ψυχολογίας. Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα οι δύο αυτές «ιδέες» αυτονομήθηκαν, όταν καθιερώθηκαν και διαδόθηκαν οι τεχνικές της παλινδρόμησης και της συσχέτισης από τον Karl Pearson. Μαζί με την Επαγωγική Στατιστική του Ronald Fischer, η Στατιστική εμφανίζεται πλέον ως κλάδος των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών (Αθανασιάδης, 2005).

Σπουδαίο ρόλο στη χρήση και κατανόηση των στατιστικών εννοιών κατέχει ο Adolphe Quetelet, ο οποίος με τα έργα του έδωσε μια νέα διάσταση στην επεξήγηση και στη χειροπιαστή λογική των αριθμών. Ο A. Quetelet (1796-1874) ήταν ένας Βέλγος αστρονόμος, μαθηματικός, στατιστικός και κοινωνιολόγος. Ίδρυσε και διεύθυνε το ίδρυμα «Brussels Observatory» και είχε επιρροή στην εισαγωγή στατιστικών μεθόδων στις κοινωνικές επιστήμες. Στα μέσα περίπου του 19^{ου} αιώνα, ο Quetelet προσπάθησε μέσα από τα κείμενά του να συνδυάσει την επιστήμη της Στατιστικής με τη Φιλοσοφία, την Κοινωνιολογία και ουσιαστικά να προσδώσει ένα πραγματικό νόημα σε αυτή. Τα κείμενα που μελετήθηκαν αρκετά και παραμένουν αντικείμενα ερευνών και προβληματισμού είναι αυτά με τίτλο «Στατιστική περί τα ηθικά», στα οποία διαπραγματεύονται και διερευνώνται στοιχεία γύρω από την ελεύθερη βούληση του ατόμου (Statistique Morale).

Οι επιστήμες των Μαθηματικών και της Φιλοσοφίας καθ' όλη τη διάρκεια της ιστορίας τους, συμβαδίζουν και δημιουργούν ισχυρούς δεσμούς οι οποίοι λειτουργούν γόνιμα και για τις δύο πλευρές. Η Στατιστική σε συνδυασμό με τις Πιθανότητες, περιλαμβάνουν την έννοια του τυχαίου, της αβεβαιότητας, έννοιες οι οποίες εμπεριέχουν και ένα φιλοσοφικό υπόβαθρο. Ο συνδυασμός αυτών των επιστημών έχει χρησιμοποιηθεί ελάχιστα στην εκπαιδευτική διαδικασία. Όμως στις λίγες διδακτικές παρεμβάσεις που έχει χρησιμοποιηθεί υλικό το οποίο ενώνει τις επιστήμες αυτές, φαίνεται πως λειτουργεί θετικά στην κατανόηση των εμπλεκόμενων εννοιών και στη γενικότερη στάση των μαθητών στα μαθήματα της Στατιστικής. Ένα πολύ χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής αυτού του συνδυασμού αποτελεί η διδακτική προσέγγιση που πραγματοποιήθηκε σε ένα εισαγωγικού επιπέδου σεμινάριο Στατιστικής και Πιθανοτήτων στο οποίο συμμετείχαν 29 τριτοετείς και τεταρτοετείς φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Κρήτης (26 γυναίκες και 3 άνδρες). Στο κείμενό τους, οι Κούρκουλος & Τζανάκης, το οποίο δημοσιεύτηκε το 2014 στο περιοδικό «Επιστήμες της Αγωγής», περιγράφουν αναλυτικά τη χρήση ιστορικών κειμένων και πηγών. Μέσα από τη μελέτη και την ανάλυση των κειμένων του Quetelet, γίνεται μια έρευνα, κατά την οποία οι συμμετέχοντες εμπλέκονται στην αποκωδικοποίηση των στατιστικών δεδομένων που παρουσιάζονται, καθώς προσπαθούν να νοηματοδοτήσουν τους αριθμούς στα αποτελέσματά τους. Τα τελικά συμπεράσματα είναι άκρως ενθαρρυντικά, μιας και οι φοιτητές όχι μόνο κατανόησαν τις στατιστικές έννοιες που χρησιμοποίησαν, αλλά κυρίως γιατί πλέον η Στατιστική για τους ίδιους δεν είναι ένα ανούσιο, απλησίαστο μάθημα, χωρίς νόημα και λογική στην καθημερινότητά τους.

Τα κείμενα του Quetelet στη «Στατιστική περί τα ηθικά και την ελεύθερη βούληση», μελετούν διάφορα κοινωνικά φαινόμενα και θεωρούνται καινοτόμα και πρωτοπόρα στη χρήση της Στατιστικής με τις κοινωνικές επιστήμες. Έχοντας εξοικειωθεί με τη θεωρία πιθανοτήτων της εποχής του, με τις μεθόδους παρατήρησης της αστρονομίας, της γεωδαισίας, της μετεωρολογίας καθώς και τη σχετική θεωρία σφαλμάτων, ο Quetelet θεωρούσε ότι τα ποσοτικά δεδομένα που αντλούνται από κοινωνικά φαινόμενα μπορούν να αναλυθούν σε μέσες τιμές που σχετίζονται με σταθερά αίτια και σε διακυμάνσεις γύρω από αυτές τις μέσες τιμές που σχετίζονται με τυχαία αίτια. Επιπρόσθετα, σημείωνε πως στην περίπτωση όπου εξετάζονται μεγάλοι πληθυσμοί και άρα επεξεργάζεται μεγάλος αριθμός παρατηρήσεων, τότε λόγω του *Νόμου των Μεγάλων Αριθμών* (ΝΜΑ) και του *Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος* (ΚΟΘ), η συσσωρευτική επίδραση των τυχαίων αιτιών στα εξαγόμενα στατιστικά αποτελέσματα ουσιαστικά εξουδετερώνονται και έτσι εντοπίζονται με μεγαλύτερη ευκολία κανονικότητες και μοτίβα (Κούρκουλος & Τζανάκης, 2014). Μέσα από τα έργα του ο Quetelet, προσπαθούσε να αποδείξει πως η χρήση της Στατιστικής στις κοινωνικές επιστήμες μπορεί να αποκαλύψει διάφορες σχέσεις μεταξύ των κοινωνικών φαινομένων, τις οποίες αποκαλεί και κοινωνικούς νόμους και μάλιστα η συνύπαρξη αυτή μπορεί να αποφέρει μια βαθύτερη κατανόηση των φαινομένων αυτών. Κατά την ανάλυση διάφορων κοινωνικών φαινομένων της εποχής του, κατάφερε να βρει σημαντικές σχέσεις σε γάμους, εγκλήματα, θανάτους και άλλα. Όμως οι απόψεις του για τη γενικότητα και τη σταθερότητα των κοινωνικών νόμων δέχθηκαν κριτική, καθώς η χρήση της Στατιστικής για την εξαγωγή τέτοιων συμπερασμάτων φαινόταν την εποχή εκείνη μη-εφαρμόσιμη. Τη μεγαλύτερη κριτική τη δέχτηκε κυρίως για το όραμά του ότι μπορεί να οικοδομηθεί ένα συνεκτικό σύστημα τέτοιων νόμων το οποίο το αποκαλούσε «Κοινωνική Φυσική».

Στις έρευνές του ο Quetelet εντόπιζε αξιοσημείωτη στατιστική σταθερότητα από χρόνο σε χρόνο σε διάφορα φαινόμενα ή γεγονότα, μεταξύ των οποίων ήταν εγκλήματα, αυτοκτονίες, γάμοι και διαζύγια. Φυσικά, για τον εντοπισμό της σταθερότητας αυτής, σημαντική προϋπόθεση ήταν ότι οι κοινωνικές συνθήκες της εξεταζόμενης χώρας ή περιοχής να παρέμεναν περίπου σταθερές. Επομένως μέσα από αυτή τη σταθερότητα, προκύπταν αρκετά ακριβή στατιστικά αποτελέσματα τα οποία προέβλεπαν τα ανωτέρω γεγονότα. Αξίζει να αναφερθεί πως δημιουργήθηκε μάλιστα μια γαλλοβελγική σχολή το 1825 από τους A. Quetelet & M. Guerry, η οποία προσπάθησε να χαρτογραφήσει την εγκληματικότητα κατά χώρα και γεωγραφική περιοχή και να τη συνδέσει με περιβαλλοντικούς, κοινωνικούς και οικονομικούς παράγοντες.

Στα γεγονότα που προσπάθησε να αναλύσει, εξετάστηκε και η ελεύθερη βούληση του ανθρώπου, η οποία επηρεάζει άμεσα τα γεγονότα αυτά. Σύμφωνα με τα δεδομένα της εποχής εκείνης αλλά και της σύγχρονης, η ελεύθερη βούληση ουσιαστικά διαφεύγει από κάθε δυνατότητα πρόβλεψης. Σε αυτή τη λογική θεώρηση, ο Βέλγος Μαθηματικός μέσα από τα στατιστικά του αποτελέσματα, έδωσε μια διαφορετική προσέγγιση και εξήγηση. Η σταθερότητα των στατιστικών του αποτελεσμάτων και η συνακόλουθη δυνατότητα πρόβλεψης, καταδεικνύει περιορισμούς όσον αφορά τις μακροσκοπικές επιδράσεις της ανθρώπινης ελεύθερης βούλησης και ουσιαστικά θέτει εύλογα ερωτήματα αναθεώρησης των ιδεών που επικρατούν για την έννοια αυτή. Και σε αυτή τη μελέτη του ο Quetelet κατηγορήθηκε για φαταλισμό και υλισμό. Η Στατιστική περί τα ηθικά δεχόταν κριτική ότι επιχειρεί να μετρήσει τα πάθη και τις κλίσεις των ανθρώπων, πράγμα όχι μόνο αδύνατο αλλά και παράλογο και ότι αυτό είναι μια προσπάθεια «…να αλυσοδέσει το μέλλον των ανθρώπων σε μια άκαμπτη μαθηματική φόρμουλα…» (Quetelet, 1847). Στην περίπτωση όπου εξετάζονται μεμονωμένα περιπτώσεις, η ελεύθερη βούληση δρα με τρόπο απρόβλεπτο και ακατάστατο που μοιάζει παράλογο να υποθέσουμε και να αναζητήσουμε κανονικότητες. Ωστόσο, όταν μελετώνται μεγάλοι πληθυσμοί, η επίδραση των ιδιαιτεροτήτων των ατομικών ελεύθερων βουλήσεων εξαφανίζεται και ουσιαστικά κυριαρχούν οι γενικές τάσεις εξαιτίας των οποίων η κοινωνία υπάρχει και διαρκεί. Επομένως, γίνεται εύκολα αντιληπτό πως τελικά η ελεύθερη βούληση του ανθρώπου επηρεάζεται άμεσα και ουσιαστικά από τις αντιλήψεις της κοινωνίας, τα στερεότυπα, τις προκαταλήψεις και πως η πορεία του ανθρώπου δεν είναι και τόσο απρόβλεπτη και τυχαία. Αυτή η θεμελιώδης ιδιότητα της ανθρώπινης ελεύθερης βούλησης επιτρέπει στο έργο του Quetelet και τη Στατιστική περί τα ηθικά να εξάγει χρήσιμα αποτελέσματα, τα οποία εμπεριέχουν και ένα φιλοσοφικό περιεχόμενο, μιας και μας πληροφορεί ότι η επίδραση των ατομικών ιδιαιτεροτήτων της δράσης του ανθρώπου βρίσκεται περιορισμένη σε μια σφαίρα τέτοια, ώστε οι νόμοι της φύσης παραμένουν ανεπηρέαστοι (Κούρκουλος & Τζανάκης, 2014). Επιπρόσθετα, δείχνει πως νόμοι διατήρησης μπορούν να υπάρχουν και στον πνευματικό κόσμο, όπως αυτό συμβαίνει και στο φυσικό (Quetelet, 1847).

Παρουσιάζονται επίσης διάφορα παραδείγματα στατιστικών δεδομένων κατά την περίοδο 1841-1845, η οποία είναι μια περίοδος κοινωνικής σταθερότητας για το Βέλγιο. Στις μελέτες του Quetelet για το γάμο, αναλύει τους ετήσιους αριθμούς σε γάμους χήρων με χήρες, σε πόλεις και σε χωριά. Στις μελέτες του σε άνδρες και γυναίκες ηλικίας 25 έως 30 ετών που παντρεύτηκαν στις πόλεις παρουσιάζει τους αντίστοιχους ετήσιους αριθμούς. Όλα τα στατιστικά δεδομένα του, δείχνουν μικρή μεταβλητότητα και άρα αξιοσημείωτη ετήσια σταθερότητα.

Εκτός από το χώρο δράσης του Quetelet στο Βέλγιο, κι άλλες χώρες εμπλέκουν τη Στατιστική στα κοινωνικά τους δρώμενα και την προσπάθειά τους να συλλέξουν και να επεξεργαστούν μεγάλο όγκο δεδομένων. Ο Γάλλος Alain Desrosières, στατιστικός, κοινωνιολόγος και ιστορικός της επιστήμης στη Γαλλία, γνωστός για το έργο του στην ιστορία της Στατιστικής, περιγράφει τη διαδρομή της στην Αγγλία και τη Γερμανία κατά τον 17^{o} αιώνα και αναφέρει πως στην *Αριθμητική Πολιτική* της Αγγλίας, τα δεδομένα θνησιμότητας χρησιμεύουν για να τεκμηριώσουν τα ισόβια εισοδήματα ή τα ασφάλιστρα στις ασφάλειες ζωής. Οι εκτιμήσεις πληθυσμών κατά νομό είναι σημαντικές για τη φορολόγηση και τη στρατολόγηση.

Στη Γερμανία η Στατιστική χρησιμοποιείται με τέτοιο τρόπο που προτείνει στον Ηγεμόνα ή στον υπάλληλο του κράτους ένα πλαίσιο οργάνωσης των διαθέσιμων διαφορετικών και μοναδικών γνώσεων για ένα κράτος. Ο Γερμανός Hermann Conring (1606-1681) αναζητά ένα σύστημα ικανό να κάνει τα γεγονότα της κοινωνίας πιο ευκολομνημόνευτα, πιο προσιτά στη διδασκαλία, πιο εύχρηστα στην κυβέρνηση. Αντίστοιχα στη Γαλλία, το κράτος είναι συγκεντρωτικό και το ίδιο συμβαίνει και με τη Στατιστική από σκοπιά τόσο διοικητική όσο και γεωγραφική. Στη Μεγάλη Βρετανία οι διοικητικές υπηρεσίες λειτουργούν αυτόνομα, ενώ οι νομοί και οι δήμοι έχουν περισσότερες εξουσίες συγκριτικά με τη Γαλλία. Οι δυο κύριοι τομείς εφαρμογής είναι από τη μία το εξωτερικό εμπόριο και οι επιχειρήσεις και από την άλλη ο πληθυσμός, η φτώχεια, η υγιεινή και η δημόσια υγεία. Στις Ηνωμένες Πολιτείες, οι δραστηριότητες της Δημόσιας Στατιστικής ενεργοποιούνται κάθε δεκαετία με τις απογραφές, με σκοπό να κατανεμηθούν τα οικονομικά βάρη και οι έδρες των Αντιπροσώπων στη Βουλή. Στη Νορβηγία, ο Kiaer οργανώνει το 1894 έρευνα όπου άτομα ερωτώνται για τα επαγγέλματα, τα εισοδήματα, το γάμο, τον αριθμό τέκνων και άλλα (Αθανασιάδης, 2005).

Οι στατιστικές έννοιες της μέσης τιμής, της διακύμανσης, της συσχέτισης και της παλινδρόμησης αποτέλεσαν κομβικά σημεία στην εξέλιξη της επιστήμης. Η μέση τιμή είχε αρχικά σχέση με αστρονομικές παρατηρήσεις. Ο Tycho Brahe προκειμένου να απαλείψει σφάλματα στις παρατηρήσεις του, προσφεύγει σε έναν αριθμητικό μέσο. Το 1632 ο Γαλιλαίος εισάγει μια προβληματική που εντάσσεται στο πεδίο της θεωρίας σφαλμάτων. Ο De Moivre είναι ο πρώτος που χρησιμοποιεί την κωδωνοειδή καμπύλη και ανακαλύπτει τον τύπο για την περιγραφή του νόμου της κανονικής κατανομής ή αλλιώς νόμο των Gauss-Laplace, ο οποίος αργότερα θα ονομαστεί και νόμος σφαλμάτων (Αθανασιάδης, 2005).

2.3 Εμφάνιση εννοιών Μέσης Τιμής, Διαμέσου, Κανονικής Κατανομής, Γραφικών Αναπαραστάσεων

Μέσα από τη μελέτη της ιστορικής εξέλιξης της επιστήμης της Στατιστικής, γίνεται και μια προσπάθεια εντοπισμού των εννοιών που διαπραγματεύεται η παρούσα διπλωματική εργασία. Στις διάφορες ιστορικές πηγές, παρουσιάζονται οι έννοιες της μέσης τιμής, της διαμέσου, της κανονικής κατανομής και των διαφόρων γραφικών αναπαραστάσεων, καθώς και την πρώτη αναφορά τους σε κείμενα της εποχής εκείνης.

Η έννοια της μέσης τιμής υπάρχει εδώ και αιώνες. Από την εποχή του Πυθαγόρα υπάρχουν ενδείξεις ότι κατανοήθηκαν τα αριθμητικά, γεωμετρικά και υποσυμβατικά μέσα, όπου υποσυμβατικός εννοείται ο αρμονικός μέσος όπως είναι γνωστός σήμερα. Η μέση τιμή εμφανίζεται για πρώτη φορά ως όρος, στα γραπτά του Pearson το 1894, στο βιβλίο του «Contributions to the Mathematical Theory of Evolution». «*Εχω βρει πως είναι βολικό να χρησιμοποιώ τον όρο μέση τιμή* *για την τετμημένη που αντιστοιχεί στην τεταγμένη της μέγιστης συχνότητας»*, ανέφερε χαρακτηριστικά (Walter, 1931).

Ο Francis Galton επιχειρηματολογεί για τη χρήση της λέξης 'διάμεσος' σε επιστολή του προς το συντάκτη του περιοδικού Nature Magazine το 1907. Είναι ο πρώτος που χρησιμοποίησε τον όρο αυτόν και ουσιαστικά η ιδέα αυτή ξεκίνησε από το 1869, όμως εμφανίστηκε σε γραπτό λόγο το 1883 (Walter, 1931).

Αναφορικά με την εμφάνιση της κανονικής κατανομής, μια πρώτη αναφορά εντοπίζεται στο έργο του Abraham De Moivre «A Method of Approximating the Sum of the Terms of the Binomial» γραμμένο στα Λατινικά, το οποίο μεταφράστηκε το 1733 στα Αγγλικά. Ο De Moivre ασχολήθηκε με την προσέγγιση των τιμών των μεγαλύτερων συντελεστών σε διωνυμική επέκταση. Η πρώτη του έκδοση το 1718 περιέχει μια αφιέρωση στο Isaac Newton και μια αναγνώριση του ρόλου που διαδραματίζει η συμβολή του. Έπειτα από μια δεκαετία, μέσα από μια συνεργασία του με τον James Stirling, αναπτύσσει τη σχέση η οποία είναι γνωστή και ως εξίσωση του Stirling. Ο DeMoivre κατάφερε να φτάσει σε μια προσέγγιση για το μεσαίο όρο μιας συμμετρικής διωνυμικής κατανομής:

$$_{n}C_{n/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}$$

όπου n είναι η δύναμη στην οποία η διωνυμική υψώνεται. Χρησιμοποιώντας το λογάριθμο του Newton ln [(1+x)/(1−x)], παράγει μια συνάρτηση ισοδύναμη με την κανονική κατανομή.

Το 1857 στο Διεθνές Στατιστικό Συνέδριο παρουσιάστηκε το θέμα των γραφημάτων. Στις Η.Π.Α. η 9η απογραφή το 1872 έπρεπε να πραγματοποιηθεί γραφικά. Το ζήτημα αυτό εξετάστηκε από μια μεικτή επιτροπή για τα πρότυπα γραφικών αναπαραστάσεων. Στην προκαταρκτική έκθεση που δημοσιεύθηκε στην Εφημερίδα της Αμερικανικής Στατιστικής Ένωσης το Δεκέμβριο του 1915, η επιτροπή αναφέρει: *Αν απλά και βολικά πρότυπα μπορούν να βρεθούν και να γίνουν γνωστά, θα είναι δυνατή μια πιο καθολική χρήση γραφικών μεθόδων με επακόλουθο κέρδος για την ανθρωπότητα λόγω της μεγαλύτερης ταχύτητας και ακρίβειας με την οποία μπορούν να μεταδοθούν και να ερμηνευθούν πολύπλοκες πληροφορίες.* Έπειτα παρουσιάζονται δεκαεπτά προτάσεις για τη γραφική παράσταση δεδομένων. Οι τέσσερις βασικότερες είναι:

1. Η γενική διάταξη ενός διαγράμματος πρέπει να ξεκινάει από τα αριστερά προς τα δεξιά.
2. Όπου αυτό είναι δυνατό, να γίνεται αναγραφή των ποσοτήτων που αντιπροσωπεύονται με γραμμικά μεγέθη, μιας και είναι πιθανό να γίνει παρερμηνεία αυτών.

3. Για μια καμπύλη, η κάθετη κλίμακα πρέπει, όταν αυτό είναι δυνατό, να σχεδιαστεί έτσι ώστε να είναι εμφανές το σημείο 0.
4. Αν δεν εμφανίζεται το 0 στη γραμμή της κάθετης κλίμακας, η γραμμή του μηδενός θα πρέπει να εμφανίζεται με τη χρήση οριζόντιας «διακοπής» στο διάγραμμα.

Όλη αυτή η διεργασία της μεικτής επιτροπής είχε ως αποτέλεσμα τη λογική, ορθή και καθολική χρήση των διαγραμμάτων, προς αποφυγή ασάφειας και χαοτικής απόκλισης ανά περίπτωση.

Κεφάλαιο 3ο:

Διδασκαλία της Στατιστικής στην Πρωτοβάθμια & Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

3.1 Η Στατιστική στο Ελληνικό σχολείο

Όπως και η ιστορική διαδρομή της επιστήμης της Στατιστικής, έτσι και η Διδακτική της Στατιστικής ακολουθεί το δικό της δρόμο μέσα από τον οποίο αλλάζει συνεχώς μορφές και εξελίσσεται στο μοντέλο που χρησιμοποιείται τα τελευταία χρόνια. Επίκεντρο ασφαλώς της εξέλιξης αυτής αποτελεί η χώρα μας, η οποία προσπαθώντας να ακολουθήσει τις σύγχρονες μεθόδους, προσαρμόζει τα προγράμματα σπουδών.

Η διδασκαλία της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων εισήχθη στα ελληνικά σχολεία με τη μεταρρύθμιση «Νέα Μαθηματικά» ή «Μοντέρνα Μαθηματικά», τα οποία ξεκίνησαν μια δύσκολη αποστολή, να γεφυρώσουν το χάσμα που υπάρχει ανάμεσα στις έννοιες που διαπραγματεύεται το σχολείο και σε αυτές των Πανεπιστημιακών, με γνώμονα την προσαρμογή της μαθηματικής παιδείας στις ανάγκες της σύγχρονης Μαθηματικής Εκπαίδευσης (Βαϊνάς, 1998).

Το διεθνές συνέδριο O.E.C.D. (Ο.Ο.Σ.Α.)[3] που πραγματοποιήθηκε σε δύο σκέλη τα έτη 1959-1960 σε Γαλλία και Γιουγκοσλαβία αντίστοιχα, έδωσε ορισμένες κατευθυντήριες γραμμές σχετικά με τη διδαχθείσα ύλη, τον τρόπο διδασκαλίας και προσέγγισης αλλά και την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών (Μαλαπάνη, 2017).

Η Στατιστική εντοπίστηκε για πρώτη φορά ως αυτοτελής ενότητα στο βιβλίο της πειραματικής διδασκαλίας των Μαθηματικών της Γ’ Γυμνασίου το 1964. Έπειτα στην Άλγεβρα του Η. Ντζιώρα της Ε’ τάξης Πρακτικού Γυμνασίου (αντίστοιχα σημερινή Β’ Λυκείου). Το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο της χώρας ανέλαβε τη συγγραφή νέων διδακτικών εγχειριδίων για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Το 1983 με την ολοκλήρωση του έργου αυτού, το Π.Ι. το βιβλίο της Γ’ Γυμνασίου περιείχε δύο ανεξάρτητα κεφάλαια, με στοιχεία και έννοιες από την Περιγραφική Στατιστική και τις Πιθανότητες. Ταυτόχρονα, το βιβλίο της Γ’ Λυκείου «Μαθηματικά Ι» το οποίο διδασκόταν στους μαθητές της 1ης δέσμης, περιείχε τα κεφάλαια Συνδυαστικής, Στατιστικής και Πιθανοτήτων. Ύλη αντίστοιχη και στο βιβλίο «Μαθηματικά ΙΙ» για τη 2η και 4η δέσμη (Μαλαπάνη, 2017). Στη νέα σειρά διδακτικών βιβλίων τα οποία διδάσκονταν έως και το 2007, υπήρχαν σημαντικές προσθήκες αναφορικά με τις έννοιες των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής. Ειδικότερα, από την Α’ κιόλας Γυμνασίου οι μαθητές έρχονταν σε μια πρώτη επαφή με την ανάγνωση καθώς και την κατασκευή διαγραμμάτων.

[3] Οργανισμός Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης

3.2 Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση

Το σημερινό πρόγραμμα σπουδών για τις τάξεις του Δημοτικού, εισάγει τις πρώτες στατιστικές έννοιες στη Δ' Δημοτικού, καθώς και ορισμένα ακόμα στοιχεία στην Ε' και Στ' τάξη. Ο βασικός διδακτικός στόχος για τη διδασκαλία της Στατιστικής στο Δημοτικό, είναι η συλλογή και επεξεργασία δεδομένων.

Αναλυτικότερα, στην Δ' Δημοτικού γίνονται δύο αναφορές, μία στο 6^{ο} μάθημα με τίτλο «Οργάνωση δεδομένων και πληροφοριών» όπου περιγράφεται η διαδικασία κατά την οποία οργανώνουμε τα δεδομένα όταν έχουμε πολλές πληροφορίες για ένα θέμα. Γίνεται μια μικρή εισαγωγή στους πίνακες δεδομένων αλλά και τη γραφική αναπαράστασή τους. Στο 39^{ο} μάθημα με τίτλο «Στατιστικά στοιχεία για τους μαθητές του δημοτικού» γίνεται μια ανάλυση των γραφικών απεικονίσεων των δεδομένων και εξηγείται η χρησιμότητά τους. Οι διδακτικοί στόχοι της τάξης αυτής είναι:

- ✓ Να εξασκούνται στη συλλογή, οργάνωση, παράσταση και ερμηνεία ερευνητικών δεδομένων
- ✓ Να γνωρίσουν την έννοια της πιθανότητας

Για την Ε' Δημοτικού υπάρχει μια ολόκληρη ενότητα όπου χωρισμένη σε μαθήματα, παρουσιάζει διάφορες έννοιες Στατιστικής και Πιθανοτήτων. Πιο αναλυτικά, στην ενότητα 4, η οποία αποτελείται από τρία μαθήματα, «Συλλογή οργάνωση και παράσταση δεδομένων», «Χαρακτηριστικές τιμές δεδομένων – Μέση τιμή» και «Πιθανότητες» γίνεται μια καλύτερη οργάνωση και παρουσίαση των στοιχείων που διδάχθηκαν στην προηγούμενη τάξη, καθώς επίσης εισάγονται και νέες έννοιες, όπως η μέση τιμή, πείραμα τύχης, πιθανότητα κτλ. Οι διδακτικοί στόχοι είναι:

- ✓ Να εισαχθούν στην έννοια του διατεταγμένου ζεύγους
- ✓ Να εξασκηθούν στην ανάγνωση και κατασκευή ραβδογράμματος, εικονογράμματος και γραφικών παραστάσεων
- ✓ Να εξασκηθούν στην οργάνωση δεδομένων σε πίνακες
- ✓ Να εξοικειωθούν με την έννοια της πιθανότητας
- ✓ Να διατυπώνουν προβλέψεις και να υπολογίζουν το μέσο όρο

Στην Στ' Δημοτικού αφιερώνεται ολόκληρη η 4^{η} θεματική ενότητα με τίτλο «Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων» με τέσσερα μαθήματα όπου παρουσιάζονται διάφορες γραφικές αναπαραστάσεις και πως γίνεται η εξαγωγή δεδομένων και συμπερασμάτων καθώς και η εύρεση του μέσου όρου. Ουσιαστικά πρόκειται για μια επανάληψη της προηγούμενης τάξης. Οι διδακτικοί στόχοι είναι:

- ✓ Να εξασκούνται στη συλλογή και καταγραφή των δεδομένων ενός προβλήματος

- ✓ Να κατασκευάζουν πίνακες δεδομένων και γραφικές παραστάσεις (ραβδογράμματα, ιστογράμματα)
- ✓ Να μετατρέπουν προφορικά ή γραπτά δεδομένα σε γραφικές παραστάσεις και αντιστρόφως
- ✓ Να διατυπώνουν προβλέψεις για την εξέλιξη ενός φαινομένου
- ✓ Να εξοικειωθούν με την έννοια του διατεταγμένου ζεύγους

3.3 Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (Γυμνάσιο)

Η διδασκαλία της Στατιστικής σταματά στην Α' Γυμνασίου, όπου δεν υπάρχει καμιά αναφορά σε αυτή. Στη Β' Γυμνασίου, το 4ο κεφάλαιο της Άλγεβρας με τίτλο «Περιγραφική Στατιστική» περιέχει πέντε μαθήματα, τις «Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός – Δείγμα», «Γραφικές Παραστάσεις», «Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων», «Ομαδοποίηση παρατηρήσεων» και «Μέση τιμή – Διάμεσος». Οι μαθητές έχουν, ήδη, επεξεργαστεί στο Δημοτικό σχολείο δεδομένα (ταξινόμηση, παράσταση δεδομένων και υπολογισμό του μέσου όρου) και έχουν εμπειρίες από γραφικές αναπαραστάσεις δεδομένων. Το νέο στο κεφάλαιο αυτό είναι οι έννοιες του πληθυσμού, του δείγματος και της διαμέσου. Στο κεφάλαιο αυτό θα μπορούσαν οι ίδιοι οι μαθητές να εμπλακούν στη συλλογή και επεξεργασία δεδομένων καθώς και στην ερμηνεία γραφικών παραστάσεων αναφορικά με θέματα που ενδιαφέρουν τους ίδιους (Οδηγίες διδασκαλίας Μαθηματικών Γυμνασίου, 2020).

Στο βιβλίο της Γ' Γυμνασίου παρουσιάζεται ένα κεφάλαιο αποκλειστικά αφιερωμένο στις Πιθανότητες, παρουσιάζοντας για πρώτη φορά έννοιες όπως σύνολα, δειγματικός χώρος, ενδεχόμενα, έννοια της πιθανότητας.

3.4 Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (Λύκειο)

Στην Α' Λυκείου, όπως και στην προηγούμενη τάξη, παρουσιάζονται ξανά στο 1^{ο} κεφάλαιο αποκλειστικά έννοιες Πιθανοτήτων, σε δύο μόλις μαθήματα, χωρίς ουσιαστικά νέα στοιχεία και έννοιες. Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές επαναλαμβάνουν και εμβαθύνουν στις ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών με στόχο να βελτιώσουν την κατανόηση της δομής του. Η επανάληψη και περαιτέρω εξάσκηση των μαθητών στον αλγεβρικό λογισμό (αλγεβρικές πράξεις, παραγοντοποίηση, ταυτότητες κ.ά.) δεν αποτελεί τον κύριο στόχο αυτού του κεφαλαίου, στο οποίο προτείνεται να διατεθούν 19 διδακτικές ώρες (Οδηγίες διδασκαλίας Μαθηματικών Λυκείου, 2020). Για τη Β' Λυκείου δεν υπάρχει αναφορά σε στοιχεία Στατιστικής, ούτε Πιθανοτήτων.

Στη Γ’ Λυκείου στο Α’ μέρος υπάρχουν τα Στοχαστικά Μαθηματικά, τα οποία χωρίζονται σε δύο ενότητες. Η πρώτη ενότητα «Στατιστική» όπου προτείνεται να διδαχθεί σε 12 ώρες έχει ως διδακτικό στόχο οι μαθητές:

- ✓ Να γνωρίζουν τις βασικές έννοιες της Στατιστικής (πληθυσμός και δείγμα, μεταβλητή, ποιοτικές και ποσοτικές μεταβλητές), να τις διακρίνουν σε κατάλληλα παραδείγματα και να τις χρησιμοποιούν στην τεκμηρίωση των απόψεών τους.
- ✓ Να κατασκευάζουν πίνακες κατανομής συχνοτήτων.
- ✓ Να γνωρίζουν τις διάφορες μορφές των γραφικών παραστάσεων κατανομών συχνοτήτων.
- ✓ Να παριστάνουν γραφικά μια κατανομή συχνοτήτων.
- ✓ Να αντλούν πληροφορίες και να ερμηνεύουν κριτικά στατιστικά γραφήματα.
- ✓ Να επιλέγουν την κατάλληλη μορφή γραφικής παράστασης που μπορεί να απαντήσει σε συγκεκριμένα ερωτήματα που τίθενται.
- ✓ Να γνωρίζουν και να υπολογίζουν: τις παραμέτρους θέσεως μιας κατανομής συχνοτήτων, τις παραμέτρους διασποράς μιας κατανομής συχνοτήτων.

Στη 2η ενότητα «Πιθανότητες» όπου προτείνεται να διδαχθούν σε 13 ώρες οι μαθητές θα πρέπει:

- ✓ Να γνωρίζουν τις βασικές έννοιες των πιθανοτήτων (πείραμα τύχης, δειγματικός χώρος, ενδεχόμενο) και να χρησιμοποιούν με σωστό τρόπο τη σχετική ορολογία.
- ✓ Να γνωρίζουν τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων και τις εφαρμογές του, και να τον χρησιμοποιούν στην επίλυση αλλά και στην ερμηνεία αποτελεσμάτων προβλημάτων Πιθανοτήτων.
- ✓ Να γνωρίζουν τη βασική αρχή απαρίθμησης και να μπορούν να τη χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.
- ✓ Να γνωρίζουν τις έννοιες των μεταθέσεων και των διατάξεων και να μπορούν να τις χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων
- ✓ Να γνωρίζουν την έννοια του συνδυασμού και να μπορούν να τη χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων

(Οδηγίες διδασκαλίας Μαθηματικών Λυκείου, 2020).

Κεφάλαιο 4ο:

Εμπόδια – Αποτελέσματα ερευνών – Συχνότερες παρανοήσεις στις Στατιστικές έννοιες

4.1 Εμπόδια και δυσκολίες από τους μαθητές

Μέσα από τη μελέτη των εννοιών της Στατιστικής και την κατασκευή μοντέλων διδασκαλίας για κάθε τάξη, γίνεται μια προσπάθεια ανάλυσης του διδακτικού αυτού έργου, προκειμένου να εντοπιστούν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν συχνά οι μαθητές. Αυτές οι δυσκολίες αποτελούν μια τεράστια πηγή πληροφοριών, οι οποίες βοηθούν στη βελτίωση της διδακτικής των εννοιών αυτών και στη μείωση των δυσκολιών από τους μαθητές.

Αρχικά θα πρέπει να γίνει κατανοητό τι ακριβώς είναι η δυσκολία, το φαινόμενο δηλαδή που παρατηρείται στους μαθητές όταν έρχονται σε επαφή με νέες πληροφορίες. *Η δυσκολία είναι κάτι που εμποδίζει το διδασκόμενο να ολοκληρώσει σωστά ή να κατανοήσει γρήγορα μία συγκεκριμένη έννοια. Δυσκολίες μπορεί να οφείλονται σε πολλές αιτίες οι οποίες σχετίζονται με την έννοια που παρουσιάζεται, με τη μέθοδο διδασκαλίας που χρησιμοποιεί ο διδάσκων, τις προηγούμενες γνώσεις του διδασκόμενου ή ακόμα και την ικανότητά του γενικότερα* (Centeno, 1988). Βασικό στοιχείο στον εντοπισμό και την ανάλυση αυτών των δυσκολιών, αποτελεί το γεγονός πως οι δυσκολίες και τα λάθη που εμφανίζονται, δε παρουσιάζονται ως ένα τυχαίο και μη-αναμενόμενο γεγονός. Είναι σύνηθες το φαινόμενο κατά το οποίο οι δυσκολίες εμφανίζονται σε διάφορα μοτίβα, τα οποία μπορούν μάλιστα να κατηγοριοποιηθούν. Οι Ausubel et al., (1983) παρουσιάζουν μια ευρέως διαδεδομένη αρχή της εκπαιδευτικής ψυχολογίας κατά την οποία *ο σημαντικότερος παράγοντας ο οποίος επηρεάζει τη μάθηση, είναι η προηγούμενη γνώση του μαθητή· πρέπει να την εντοπίσουμε και να διδάξουμε κατάλληλα*. Επομένως η προηγούμενη γνώση δεν επιτρέπει στο μαθητή να επιλύσει σωστά συγκεκριμένα προβλήματα και ουσιαστικά η γνώση αυτή θεωρείται ακατάλληλη ή ανεπαρκής όταν αυτή εφαρμόζεται σε ένα γενικότερο πλαίσιο. Η πρώιμη γνώση σχετικά με τις διδασκόμενες έννοιες, μπορεί στην πραγματικότητα να αποτελέσει φραγμό στην κατανόησή τους από τους μαθητές, λόγω της έμφυτης τάσης των παιδιών να στρεβλώνουν τις νέες πληροφορίες, ώστε να ταιριάζουν με τις προηγούμενες γνώσεις τους (Stafylidou & Vosniadou, 2004). Εδώ παρουσιάζεται ένα *γνωστικό εμπόδιο* το οποίο μπορεί να αιτιολογήσει τα λάθη και τις δυσκολίες που παρατηρούνται. Τα εμπόδια αυτά, σύμφωνα με το Brousseau περιέχουν τα εξής στοιχεία:

- Ένα εμπόδιο είναι γνώση, όχι έλλειψη/απουσία γνώσης.
- Ο μαθητής επιστρατεύει τη γνώση αυτή για να απαντήσει σωστά σε ένα συγκεκριμένο περιεχόμενο, το οποίο συνήθως επιτυγχάνει.
- Όταν η γνώση αυτή χρησιμοποιείται έξω από το περιεχόμενο αυτό, δημιουργεί λάθη. Μια απάντηση γενική απαιτεί και διαφορετικό «οπτικό» πεδίο.

- Ο μαθητής αγνοεί τις αντιφάσεις που δημιουργούνται από το εμπόδιο και αυτό εμποδίζει τη δημιουργία βαθύτερης γνώσης. Είναι σημαντικό να αναγνωριστεί το εμπόδιο και να αντικατασταθεί με τη νέα γνώση.
- Αφού ο μαθητής ξεπεράσει το εμπόδιο, αναγνωρίζοντας την αβεβαιότητά του, συνεχίζει να επαναλαμβάνεται σποραδικά.

Τέλος, ο Brousseau εντόπισε τρία είδη εμποδίων, τα οντογόνα (ή αλλιώς ψυχογενετικά), τα διδακτικά και τα επιστημολογικά.

4.2 Λάθη & Παρανοήσεις στην Περιγραφική Στατιστική

Στον τομέα της Περιγραφικής Στατιστικής έχει δοθεί μικρότερη προσοχή από ψυχολόγους και ερευνητές. Παρ' όλα αυτά, έρευνες οι οποίες εξετάζουν στατιστικές έννοιες όπως η κατανομή, ο μέσος όρος, το δείγμα και η τύχη, αναδεικνύουν εννοιολογικές δυσκολίες. Ερευνητές από το Πρόγραμμα Ποσοτικού Εγγραματισμού (Quantitative Literacy Project) κατέληξαν στο συμπέρασμα πως πολλοί μαθητές Γυμνασίου, ακόμα και σε μια απλή δραστηριότητα κατασκευής μιας απλής γραφικής παράστασης ή ευθείας, δυσκολεύονται στην κατανόηση του τι είναι αριθμογραμμή, καθώς και η ανάλυση και επεξήγηση απλών πινάκων με δεδομένα αποτελεί κάτι ακατανόητο και δύσκολο προς αυτούς (Garfieli & Ahlgren, 1988). Οι Pollatsek, Lima & Well (1981) αναφέρουν τις δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση του πως να σταθμίσουν τα δεδομένα όταν προσπαθούν να υπολογίσουν ένα μέσο όρο. Φοιτητές στους οποίους ζητήθηκε να συνδυάσουν δύο μέσους όρους από διαφορετικά μαθήματα, δε κατάφεραν να φέρουν εις πέρας τη διαδικασία. Στην έρευνά τους αυτή αναφέρουν πως για πολλούς φοιτητές, ο μέσος όρος είναι μια υπολογιστική παρά μια εννοιολογική πράξη και πως η γνώση ενός υπολογιστικού κανόνα όχι μόνο δεν συνεπάγεται πραγματική κατανόηση της βασικής υποκείμενης έννοιας, αλλά μπορεί στην πραγματικότητα να εμποδίσει την απόκτηση καταλληλότερης (σχεσιακής) κατανόησης.

4.3 Πίνακες συχνοτήτων και γραφική παράσταση δεδομένων

Η ικανότητα ανάγνωσης, ανάλυσης και επεξήγησης, με κριτικό πνεύμα, των δεδομένων που παρουσιάζονται καθημερινά, είναι μια συνιστώσα της μαθηματικής παιδείας και της αναγκαιότητας που χαρακτηρίζουν το σύγχρονο τρόπο ζωής, στην κοινωνία της πληροφορίας, της τεχνολογίας και της αβεβαιότητας (Batanero et al., 1994). Επομένως όταν γίνεται αυτή η προσπάθεια προσέγγισης των δεδομένων, κυρίως μέσω των πινάκων, των συχνοτήτων και της γραφικής παράστασης δεδομένων, ο Curcio (1987) διακρίνει τρία διαφορετικά επίπεδα κατανόησής τους:

- Μελέτη των δεδομένων χωρίς να χρειάζεται η ανάλυσή τους. Ουσιαστικά όταν ζητούνται μόνο στοιχεία από γράφημα ή πίνακα τα οποία εκφράζονται ρητά.
- Μελέτη των δεδομένων και ανάλυσή τους, κάτι το οποίο απαιτεί συγκρίσεις και χρήση μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων.
- Μελέτη πέρα των δεδομένων, όπου δηλαδή απαιτείται επέκταση του προβλήματος σε κάτι πιο γενικό, πρόβλεψη με βάση τα στοιχεία ή και εξαγωγή συμπερασμάτων βάσει αυτών.

Ο ίδιος αξιολόγησε την επίδραση της προηγούμενης γνώσης του μαθηματικού περιεχομένου και της γραφικής μορφής στην κατανόηση των μαθηματικών σχέσεων, εργαλείων, στοιχείων που εκφράζονται σε γραφήματα. Κατέληξε στο συμπέρασμα πως οι συχνότερες δυσκολίες εμφανίζονται στα δύο υψηλότερα επίπεδα που ανέφερε.

Στην έρευνά τους σε γραφικές παραστάσεις σε μαθητές 9 έως 11 ετών οι Pereira-Mendoza & Mellor (1991) παρατήρησαν λάθη στις κλίμακες, στην αναγνώριση των προβλέψεων και των μοτίβων και εσφαλμένη χρήση των δεδομένων που είχαν στη διάθεσή τους. Πιο αναλυτικά, η έρευνά τους πραγματοποιήθηκε σε μαθητές Δ’ και Στ’ τάξης, στην οποία συμμετείχαν 121 και 127 μαθητές αντίστοιχα. Δόθηκαν στους μαθητές συνολικά 12 διαφορετικές γραφικές παραστάσεις, οι οποίες περιείχαν θέματα όπως το ύψος των παιδιών, αριθμός παιχνιδιών, αριθμός δένδρων και άλλα. Εκτός από τα διαφορετικά θέματα, τα δεδομένα οργανώθηκαν έτσι ώστε να παρουσιάζονται είτε μορφοποιημένα είτε χωρίς μορφοποίηση. Όλα τα γραφήματα περιείχαν τρεις ερωτήσεις, μια κυριολεκτική ερώτηση, μια η οποία απαιτούσε ερμηνεία των δεδομένων και μια ερώτηση πρόβλεψης. Στην πρώτη κατηγορία ερωτήσεων παρατηρήθηκαν ελάχιστες δυσκολίες, καθώς δόθηκαν σωστές απαντήσεις από το 95% των παιδιών της Δ’ τάξης και από το 98% της Στ’. Στη δεύτερη κατηγορία ερωτήσεων το ποσοστό επιτυχίας μειώνεται αισθητά καθώς απάντησε σωστά μόλις το 52% και 78% αντίστοιχα. Τα περισσότερα λάθη εδώ οφείλονται κυρίως σε υπολογιστικά λάθη ή σε λανθασμένη ανάγνωση-ερμηνεία είτε του προβλήματος είτε των κλιμάκων. Και αυτό αποδεικνύεται εύκολα καθώς τα εντοπισμένα σφάλματα τα οποία δε μπορούσαν να ερμηνευτούν μέσα από γνωστά μοτίβα παρανοήσεων ή διαδικαστικών λαθών έφταναν μόλις το 8% και 4% για τις τάξεις Δ’ και Στ’. Οι σημαντικότερες δυσκολίες όπως αναμενόταν σημειώθηκαν στην τρίτη κατηγορία ερωτήσεων, με ποσοστό επιτυχίας 16% και 18% αντίστοιχα. Ειδικότερα στα γραφήματα όπου απουσίαζε η λογική πρόβλεψη τα ποσοστά μειώνονται κι άλλο, στο 5% και 7%. Η έρευνα εστιάζει κυρίως σε δύο κατηγοριοποιήσεις λαθών, την κατηγοριοποίηση δεδομένων και την περίπτωση όπου δεν είναι εμφανείς οι πληροφορίες στα δοσμένα γραφήματα.

Οι Li & Shen (1992) στη δική τους έρευνα τονίζουν πως για να γίνει κατανοητό ένα στατιστικό μοντέλο, πρέπει οι αναγνώστες του να εντοπίζουν το θέμα της μελέτης, να επιλέγουν κατάλληλα τα δεδομένα ανάλογα με το θέμα, να παρουσιάζουν, να αναλύουν και να ερμηνεύουν τα επιλεγμένα δεδομένα και τα εξαγόμενα αποτελέσματα και τέλος να είναι σε θέση να διατυπώνουν τα τελικά συμπεράσματά τους. Από το 1986 πραγματοποιείται ένας ετήσιος Στατιστικός διαγωνισμός στο Χονγκ Κονγκ, όπου συμμετέχουν μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Οι ερευνητές διαπίστωσαν αρκετές περιπτώσεις λανθασμένης επιλογής γραφήματος σε αρκετά στατιστικά project. Μάλιστα, κατά την κατασκευή αρκετών γραφημάτων από τους μαθητές, παρατηρήθηκαν αρκετά λάθη και παρανοήσεις. Ειδικότερα, ορισμένοι κατασκεύασαν γράφημα σε πρόβλημα ποιοτικών μεταβλητών. Άλλοι έφτιαξαν στήλες οι οποίες αντιπροσώπευαν την αριθμητική εξέλιξη ενός δείκτη κατά το πέρασμα του χρόνου. Μέσα σε όλα αυτά, παρατηρήθηκε πως η συνεχής χρήση γραφικών λογισμικών στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές επιδεινώνει την κατάσταση. Η έλλειψη γνώσης των μαθητών σχετικά με τα προγράμματα αυτά, οδηγεί πολύ συχνά σε λανθασμένες επιλογές. Άλλες κοινές τεχνικές που παρατηρήθηκαν:

- Οι κλίμακες ενός ή και των δύο αξόνων παραλείπονται.
- Δεν καθορίζεται η προέλευση των συντεταγμένων.
- Οι διαιρέσεις στις κλίμακες των αξόνων είναι ανεπαρκείς.
- Δε γίνεται ονομασία των αξόνων.
- Σύγκριση ανόμοιων πραγμάτων στο ίδιο γράφημα, με τη χρήση λογισμικού.
- Στη χρήση λογισμικού οι αναλογίες στα διαγράμματα δεν αντιστοιχούν στις συχνότητές τους.

4.4 Μέτρα Θέσης

4.4.1 Μέση Τιμή (mean)

Μία από τις πιο σημαντικές και άκρως διαδεδομένες στατιστικές έννοιες, αυτή της μέσης τιμής, αποτελεί ένα διαχρονικό εργαλείο στην καθημερινότητα του ανθρώπου. Παρ' όλη τη σπουδαιότητα και τη συχνότητα χρήσης της, παρατηρούνται αρκετά συχνά δυσκολίες και λάθη από μαθητές. Κατά τη διαδικασία εύρεσης μιας μέσης τιμής, η οποία αποτελεί θεωρητικά απλή διαδικασία, οι Pollatsek et al. (1981) παρατήρησαν λάθη στο συνδυασμό δύο σταθμισμένων μέσων, αντιμετωπίζοντάς τους σαν δύο ξεχωριστές τιμές. Η έρευνά τους πραγματοποιήθηκε σε 37 προπτυχιακούς φοιτητές, η οποία συμπεριλήφθηκε ως μέρος ενός γραπτού διαγνωστικού τεστ στην αρχή ενός μαθήματος εισαγωγικών στατιστικών για τους πτυχιούχους ψυχολογίας του Πανεπιστημίου της Μασαχουσέτης. Η πλειοψηφία των φοιτητών απάντησε λανθασμένα στο πρόβλημα που τους δόθηκε, το οποίο απαιτούσε τον υπολογισμό του GPA[4] σε διάφορα κολέγια. Μόνο 14 από τους φοιτητές κατάφεραν να υπολογίσουν σωστά το ζητούμενο μέσο όρο βαθμολογιών (3.56 η σωστή απάντηση) στη σχολή. Η πιο συνηθισμένη απάντηση, το 3.5, είναι ο μη σταθμισμένος μέσος όρος των GPA για το κολέγιο A (3.2) και το κολέγιο B (3.8). Δύο φοιτητές απάντησαν 1.4, κάτι το οποίο προέκυψε ως πρόσθεση του 3.2 και 3.8 και έπειτα διαίρεση του αθροίσματος με το 5 και μάλιστα δε τους προβλημάτιζε το γεγονός ότι το 1.4 ήταν μικρότερο από το 3.2 ή το 3.8. Μετά το πέρας της έρευνάς τους, καταλήγουν στο συμπέρασμα πως υπάρχουν πολλά είδη γνώσεων τα οποία πρέπει να συμπεριλαμβάνονται σε ένα κατάλληλο σχήμα του μέσου όρου. Τρία είδη γνώσεων που μπορούν να διακριθούν είναι:

1. γνώση λειτουργική,
2. γνώση υπολογιστική και
3. γνώση αναλογική.

Η συγκεκριμένη διαδικασία εύρεσης σταθμισμένων μέσων δυσκολεύει τους μαθητές, καθώς αδυνατούν να εντοπίσουν την περίπτωση αυτή, όπου απαιτείται ειδικός υπολογισμός. Οι Li & Shen αναφέρουν πως οι μαθητές αγνοούν τη συχνότητα κάθε ενός από τα διαστήματα κατά τον υπολογισμό του μέσου όρου.

Στο κείμενό του ο Skemp (1978) διαχωρίζει τις δυσκολίες που εντοπίζονται σχετικά με την έννοια αυτή σε δύο κατηγορίες, την οργανική και τη σχεσιακή κατανόηση. Η οργανική κατανόηση προτείνεται στην ύπαρξη μιας συλλογής απομονωμένων κανόνων για την απάντηση σε συγκεκριμένα προβλήματα. Η σχεσιακή κατανόηση συνίσταται στην ύπαρξη κατάλληλων συστημάτων, επαρκών για την επίλυση μιας πολύ ευρύτερης κατηγορίας προβλημάτων. Η Mevarech (1983) ερευνά 103 πρωτοετείς και δευτεροετείς φοιτητές, παιδαγωγικής κατεύθυνσης στο πρώτο πείραμα. Από αυτούς, οι 56 πρωτοετείς εξετάστηκαν έπειτα από την ολοκλήρωση ενός εισαγωγικού μαθήματος σχετικό με την περιγραφική Στατιστική και οι υπόλοιποι 47 δευτεροετείς διδάχθηκαν δύο εισαγωγικά μαθήματα περιγραφικής Στατιστικής (περιγραφικής και συμβολικής) και ένα με αντικείμενο το σχεδιασμό εκπαιδευτικής έρευνας. Για τον εντοπισμό των παρανοήσεων, η Mevarech χρησιμοποίησε το διαγνωστικό μοντέλο των Brown & Burton από το 1978, όπου σε δοσμένα

[4] Grade Point Average – GPA, ο σταθμισμένος μέσος υπολογισμού βαθμών επίδοσης

προβλήματα-δοκιμασίες, αναλύονται προσεκτικά οι απαντήσεις των φοιτητών από ένα εξειδικευμένο αναλυτή. Στη δική της έρευνα, το ρόλο της «δοκιμασίας» αναλαμβάνει ένας φοιτητής του οποίου οι παρανοήσεις πρέπει να εντοπιστούν από τους αναλυτές-συμφοιτητές του οι οποίοι συμμετείχαν στη μελέτη. Ένα χαρακτηριστικό ερώτημα το οποίο στοχεύει στον εντοπισμό της εσφαλμένης αντίληψης σχετικά με τον ταυτοτικό αριθμό:

Η τιμή (0) προστέθηκε σε μια ομάδα πέντε αριθμών: 52, 68, 74, 86 και 90. Οι αριθμοί αυτοί είχαν μέσο όρο 74. Ποιος είναι ο νέος μέσος όρος της ομάδας;

Με αυτόν τον τρόπο, οι αναλυτές ανέλαβαν στατιστικά προβλήματα τα οποία είτε είχαν απαντηθεί σωστά είτε εσφαλμένα. Ουσιαστικά, η παρέμβαση των αναλυτών ήταν της μορφής Σωστό – Λάθος, κατά την επεξεργασία των απαντήσεων. Και εφόσον ο στόχος της έρευνας ήταν να εντοπιστούν παρανοήσεις και όχι υπολογιστικά λάθη, οι αναλυτές παράβλεπαν τα υπολογιστικά λάθη. Η διαδικασία αποτελούνταν συνολικά από 15 αντικείμενα, στα οποία ζητούνταν ο υπολογισμός μέσων όρων, και η κατανόηση γενικότερων στατιστικών μηχανισμών. Όλοι οι συμμετέχοντες διέθεταν τις απαραίτητες υπολογιστικές γνώσεις, όπως ελέγχθηκαν από τρία προκαταρκτικά σημεία ελέγχου. Επίσης, όλοι αναγνώρισαν τους υπολογιστικούς τύπους για τον απλό, τον σταθμισμένο μέσο όρο και τη διακύμανση, αν και ένας μικρός αριθμός παρουσίασε δυσκολίες με τα δεδομένα που παρουσιάστηκαν σε έναν πίνακα. Παρ' όλα αυτά, οι προαναφερόμενες υπολογιστικές γνώσεις δεν ήταν αρκετές για τους περισσότερους φοιτητές προκειμένου να αποκτήσουν τον κατάλληλο στατιστικό τρόπο σκέψης. Παρά το γεγονός ότι κάθε μαθητής γνώριζε τους τύπους και δεν είχε κανένα πρόβλημα στις τέσσερις μαθηματικές πράξεις, μόνο λίγοι από αυτούς κατείχαν το σύνολο των εννοιολογικών δομών οι οποίες απαιτούνται για την επίλυση όλων των δοσμένων προβλημάτων. Η ίδια ανέφερε πως μια πιθανή αιτιολόγηση για τα λάθη των μαθητών κατά τη διαδικασία επίλυσης, είναι ότι υποθέτουν πως ένα σύνολο αριθμών μαζί με τη λειτουργία του αριθμητικού μέσου, συνθέτουν μια ομάδα η οποία ικανοποιεί τα τέσσερα αξιώματα της κλειστότητας, της συσχετιστικότητας, του ταυτοτικού στοιχείου και του αντιστρόφου. Και φυσικά αυτή η πεποίθηση προφανώς ως εσφαλμένη, αιτιολογείται στα δύο εξής παραδείγματα:

1. Κατά τον υπολογισμό του συνολικού μέσου όρου τριών αριθμών, υπολογίζοντας το μέσο όρο των δύο πρώτων με τον τρίτο αριθμό, είτε τους δύο τελευταίους και έπειτα με τον πρώτο.
2. Ο ταυτοτικός αριθμός δεν υπάρχει, επειδή η τιμή του μέσου επηρεάζεται από την αξία κάθε τιμής στην κατανομή. Παρ' όλα αυτά κάποιοι μαθητές θεωρούν πως προσθέτοντας μια μηδενική τιμή στην κατανομή, δεν επηρεάζεται η αξία του μέσου όρου.

Οι Strauss & Bichler (1988) με επίκεντρο τις υπολογιστικές πτυχές του μέσου όρου, εντοπίζουν ορισμένες ιδιότητες οι οποίες εμφανίζονται στην προσπάθεια των μαθητών να κατανοήσουν την έννοια της μέσης τιμής:

- Ο μέσος όρος εντοπίζεται ανάμεσα στις ακραίες τιμές.
- Το άθροισμα των αποκλίσεων από το μέσο όρο είναι μηδέν.
- Ο μέσος όρος επηρεάζεται από όλες τις τιμές.
- Ο μέσος όρος δεν είναι απαραίτητα ίσος με μία από τις τιμές που προστέθηκαν.
- Ο μέσος όρος μπορεί να είναι κλάσμα το οποίο δεν εμφανίζεται στον πραγματικό κόσμο.
- Κατά τον υπολογισμό του μέσου όρου, η μηδενική τιμή πρέπει να λαμβάνεται υπόψιν.
- Ο μέσος όρος είναι αντιπροσωπευτικός των τιμών που υπολογίζονται.

Τέλος, οι Russel & Mokros (1991) στη δική τους έρευνα διερευνούν τις βασικότερες αντιλήψεις και παρανοήσεις μέσα από τις οποίες τα παιδιά και οι ενήλικες δημιουργούν τα μοντέλα περιγραφικών στατιστικών. Εν αντιθέσει με άλλες εμπειρικές έρευνες, μελετώνται οι απόψεις των ανθρώπων για την ιδέα του μέσου όρου και ερευνάται η σχέση μεταξύ άτυπων ιδεών σχετικά με τις έννοιες «αντιπροσωπευτικό» και «μέσο», σε σχέση με τους επίσημους ορισμούς οι οποίοι διδάσκονται στο σχολείο. Συμμετείχαν 21 παιδιά (7 από τη Δ’ τάξη, 7 από την Στ’, 7 από τη Β’ Γυμνασίου) καθώς και 8 εκπαιδευτικοί (1 από Δ’ τάξη, 1 από Ε’ τάξη, 1 από Στ’, 2 από Α’ Γυμνασίου, 1 από Β’ Γυμνασίου και 2 μαθηματικοί συντονιστές, ο ένας με επίπεδο στοιχειώδους γνώσης και ένας με επίπεδο μέσης εκπαίδευσης), όπου ερωτήθηκαν χρησιμοποιώντας μια σειρά προβλημάτων με αόριστη λύση-απάντηση μέσα από τις οποίες εξετάστηκαν οι αντιλήψεις τους για το μέσο όρο. Μέσα στις κλινικές συνεντεύξεις οι οποίες περιείχαν ένα μέσο εξέτασης, επέκτασης και ανίχνευσης ιδεών των συμμετεχόντων, δόθηκαν προβλήματα τα οποία περιλάμβαναν περιγραφή, περίληψη, σύγκριση και λογική γύρω από διάφορα στατιστικά δεδομένα. Για παράδειγμα, σε ένα γράφημα το οποίο αναπαριστά τα χρηματικά ποσά που δίνουν στα παιδιά τους οι γονείς, καθώς και τη συχνότητα του χρηματικού ποσού ανά τους μαθητές, ζητείται από αυτούς να αποφασίσουν ποιο χρηματικό ποσό θα επιθυμούσαν να επιλέξουν και για ποιο λόγο, σύμφωνα πάντα με τα δεδομένα που διέθεταν.

Μελετώντας τις πεποιθήσεις των συμμετεχόντων, παρουσίασαν τέσσερις κατηγορίες οι οποίες ουσιαστικά περιγράφουν τις παρανοήσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών σχετικά με τη μέση τιμή:

- ✓ Μέσος όρος είναι η πιο συχνή τιμή που εμφανίζεται.
- ✓ Μέσος όρος είναι η λογική τιμή.
- ✓ Μέσος όρος είναι η τιμή που βρίσκεται στη μέση των αριθμών που δόθηκαν.

- ✓ Μέσος όρος είναι μια αλγοριθμική σχέση μεταξύ των δοσμένων αριθμών.

Λαμβάνοντας υπόψιν όλες τις παραπάνω έρευνες, γίνεται εύκολα κατανοητό πως οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σχετικά με τη στατιστική αυτή έννοια, οφείλονται κυρίως στο γεγονός ότι δεν έχουν αποκτήσει ακόμα μια καθαρή εικόνα για την έννοια. Και ασφαλώς η γνώση και μόνο ενός κανόνα υπολογισμού δε συνεπάγεται βαθιά κατανόηση, αλλά μπορεί μάλιστα να λειτουργήσει ως εμπόδιο στην καλύτερη και πληρέστερη εννοιολογική γνώση (Batanero et. Al., 1994).

4.4.2 Διάμεσος (median)

Ο υπολογισμός της διαμέσου διδάσκεται με έναν διαφορετικό αλγόριθμο για δεδομένα που ομαδοποιούνται σε διαστήματα, παρά σε μη ομαδοποιημένα δεδομένα. Ο Estepa (1990) παρατήρησε στην έρευνά του, τις δυσκολίες των μαθητών κατά την ερμηνεία του γραφήματος της αθροιστικής συχνότητας. Μια τιμή στον άξονα y μπορεί να έχει δύο διαφορετικές εικόνες ή πολλές διαφορετικές τιμές στον άξονα αυτόν να έχουν την ίδια εικόνα. Ο Schuyten (1991) επεσήμανε τη μεγάλη απόσταση μεταξύ της εννοιολογικής γνώσης της διαμέσου και του αλγορίθμου που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της. Η διαδικασία εύρεσης της διαμέσου αποτελείται από δύο περιπτώσεις, όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος ή περιττός αριθμός. Στην πρώτη περίπτωση, η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο παρατηρήσεων, κατά αύξουσα σειρά, που βρίσκονται στη μέση, ενώ στη δεύτερη είναι ο αριθμός που βρίσκεται ακριβώς στη μέση των κατά αύξουσα σειρά τοποθετημένων παρατηρήσεων. Κατά τη μετάβαση από τον ορισμό με τις δύο περιπτώσεις, στον υπολογισμό της, υπάρχουν βήματα τα οποία δεν είναι πάντοτε επαρκώς δηλωμένα ή κατανοητά. Ο τελικός αλγόριθμος προκύπτει μέσα από την επίλυση της ανισότητας $F(x) \leq n/2$, όπου n ο αριθμός των παρατηρήσεων. Στη λύση της ανισότητας, το $F(x)$ είναι η εμπειρική κατανομή και δε μπορεί να βρεθεί με αλγεβρικό τρόπο, παρά μόνο μέσω ενός πίνακα αριθμητικών τιμών.

Ο Barr (1980) εντόπισε την έλλειψη κατανόησης της διαμέσου σε μια πιλοτική μελέτη σε μαθητές ηλικίας από 17 έως 21 ετών. Περίπου το 50% των ερωτηθέντων απάντησε εσφαλμένα στην ερώτηση:

Η διάμεσος στο ακόλουθο σύνολο αριθμών: 1,5,1,6,1,6,8 είναι:

Α) 1 Β) 4 Γ) 5 Δ) 6 Ε) άλλη τιμή ΣΤ) δε γνωρίζω.

Το μεγαλύτερο μέρος των ερωτηθέντων είχε καταλάβει πως η διάμεσος είναι μια κεντρική αξία σε κάτι. Ο προβληματισμός ως προς τι ακριβώς είναι αυτό το κάτι, είναι εμφανής. Οι συμμετέχοντες θα μπορούσαν να ερμηνεύσουν τη διάμεσο ως το μεσαίο σημείο των αριθμών στον πίνακα συχνοτήτων ή ως το μεσαίο σημείο στις τιμές της μεταβλητής ή και το μεσαίο σημείο στο σύνολο αριθμών πριν αυτά ταξινομηθούν.

4.5 Μέτρα Διασποράς

4.5.1 Εύρος – Διακύμανση – Τυπική Απόκλιση – Συντελεστής Μεταβολής

Τα μέτρα διασποράς που συνήθως χρησιμοποιούνται από τους μαθητές είναι το εύρος, η διακύμανση, η τυπική απόκλιση και ο συντελεστής μεταβολής. Αυτές οι έννοιες βοηθούν στην κατανόηση των δεδομένων και τον τρόπο με τον οποίο αυτά μεταβάλλονται. Οι διαφορετικοί βαθμοί μεταβλητότητας ουσιαστικά αποδεικνύουν πως η ανάλυση των συχνοτήτων δε μπορεί να περιοριστεί στη μελέτη και τη χρήση του μέσου όρου. Ο Campbell (1974) επισημαίνει πως ένα από τα πιο συχνά λάθη είναι να αγνοείται η διασπορά, το πώς είναι τα δεδομένα «διασκορπισμένα» στο δείγμα που εξετάζεται. Οι Lovie & Lovie (1976) αναφέρουν πως κατά τον υπολογισμό μέσων τιμών, ένας παράγοντας είναι η διακύμανση και πως η ακρίβεια στον υπολογισμό της διακύμανσης εξαρτάται από τα μεγέθη που εμπλέκονται. Η τυπική απόκλιση μετρά με ποιο τρόπο τα δεδομένα απομακρύνονται από την κεντρική τάση που έχουν. Οι Loosen et al. (1985) σημειώνουν πως πολλά σχολικά εγχειρίδια δίνουν περισσότερο έμφαση στην ετερογένεια μεταξύ των παρατηρήσεων παρά στις αποκλίσεις τους από την κεντρική τάση. Αναφέρει επίσης, πως οι γνωστές στατιστικές έννοιες των μέτρων διασποράς, διακύμανση, μεταβλητότητα, διασκόρπιση, εμπεριέχουν διαφορετικές ερμηνείες. Γίνεται μια αναφορά στη διαισθητική έννοια της μεταβλητότητας και το πώς αυτή ασχολείται με την «ατέλεια», δηλαδή πόσο οι παρατηρήσεις διαφέρουν μεταξύ τους.

4.6 Κανονική Κατανομή

Ο υπολογισμός της κανονικής κατανομής (z-scores) γίνεται με τη χρήση της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης. Οι περισσότεροι μαθητές δε παρουσιάζουν κάποια δυσκολία στον υπολογισμό όλων αυτών. Παρ’ όλα αυτά στο άρθρο τους οι Huck et al. (1986) παρατήρησαν δύο παρανοήσεις σχετικά με το φάσμα των μεταβολών των z-scores, τα οποία υπολογίζονται από ένα πεπερασμένο δείγμα ή από μια ομοιόμορφη κατανομή. Στην πρώτη περίπτωση, θεωρούν πως τα z-scores πάντα θα κυμαίνονται από -3 έως +3. Άλλοι μαθητές πιστεύουν πως δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός στις μέγιστες θετικές και αρνητικές τιμές στα z. Κάθε μία από αυτές τις πεποιθήσεις συνδέεται με μια εσφαλμένη αντίληψη της κανονικής κατανομής. Οι μαθητές στην πρώτη περίπτωση, λειτουργούν με τον τρόπο αυτό επειδή έχουν συνηθίσει να χρησιμοποιούν ένα συγκεκριμένο πίνακα ή εικόνα με το συγκεκριμένο εύρος διακύμανσης. Αντίστοιχα, στη δεύτερη περίπτωση έχουν διδαχθεί πως τα άκρα της κανονικής κατανομής είναι ασυμπτωτικά στην τετμημένη και ουσιαστικά γενικεύουν εσφαλμένα καθώς δε παρατηρούν ότι καμία πεπερασμένη κατανομή δεν είναι ακριβώς κανονική.

4.7 Εντοπισμός παρανοήσεων στη Στατιστική Λογική

Για την εύρεση των συχνότερων παρανοήσεων και παρερμηνειών σχετικά με τη στατιστική συλλογιστική, έχουν συμβάλλει κυρίως οι ψυχολόγοι οι οποίοι με τις έρευνες τους αναζητούν τις αιτίες και τα συχνότερα λάθη. Οι Piaget & Inhelder (1975) αναφέρουν πως η έρευνα στα στάδια ανάπτυξης του ανθρώπου βοηθά στο να αποκαλυφθούν οι δυσκολίες των μαθητών στις θεωρητικές έννοιες της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων. Βέβαια, η μονόπλευρη αυτή κλασσική προσέγγιση δέχθηκε αρκετά επικριτικά σχόλια, αφού τα πειράματά τους στις έννοιες που διαπραγματευόταν δεν εμπεριείχαν σύνδεση με την έννοια της τύχης, του ενδεχομένου κ.ά., καθώς συχνά χρησιμοποιούσαν κλάσματα και συγκρίσεις με αυτά (Kapadia, 1985).

Μια ενδιαφέρουσα ερευνητική πρόταση με τίτλο «Κρίση υπό αβεβαιότητα» έχει εμφανιστεί τα τελευταία χρόνια η οποία αναλύεται κυρίως στο βιβλίο των Kahneman, Slovic & Tversky (1982). Μέσα σε αυτό αναλύεται η ιδέα της αντιπροσωπευτικότητας, η οποία αναφέρεται σε ποικιλίες της ιδέας ότι ένα συμβάν είναι πιθανό στο βαθμό του «τυπικού». Στη δειγματοληπτική μορφή της παρερμηνείας της αντιπροσωπευτικότητας, τα μικρά δείγματα πιστεύεται γενικά ότι είναι πιο αξιόπιστοι εκπρόσωποι ενός πληθυσμού από ό,τι είναι στατιστικά πιθανό. Επίσης, η διαθεσιμότητα είναι μια ακόμα μορφή υπό εξέταση, όταν δηλαδή μια κατηγοριοποίηση είναι πιθανή στο βαθμό που οι περιπτώσεις της μπορούν να επεξεργαστούν με το ανθρώπινο μυαλό, καθώς και η αιτιότητα από τη συσχέτιση. Ακόμη ένα σχετικό πεδίο είναι η συσχετισμένη μεταβλητότητα και ο έλεγχος, όπου το κεντρικό συμπέρασμα είναι ότι οι άνθρωποι δεν είναι πιθανό να εντοπίσουν μια συσχέτιση εκτός αν το περιμένουν – και αν το περιμένουν έχουν την τάση να βλέπουν μία, ακόμη κι αν δεν υπάρχει. Στο βιβλίο τους οι Kahneman et al. (1982) εντοπίζουν πως η λανθασμένη συλλογιστική είναι (α) ευρέως διαδεδομένη και μόνιμη, (β) παρόμοια σε όλα τα επίπεδα ηλικίας, (γ) εντοπισμένη ακόμα και σε έμπειρους ερευνητές και (δ) είναι πολύ δύσκολο να διορθωθεί.

Σε μια έρευνα που πραγματοποίησε ομάδα εκπαιδευτικών στην Ευρώπη, διερευνήθηκε η διαίσθηση των μαθητών καθ' όλη τη διάρκεια της διαδρομής μέχρι και την ανώτατη εκπαίδευση σχετικά με τις πιθανότητες. Σε συνεργασία με το Κέντρο Στατιστικής Εκπαίδευσης με έδρα το

Sheffield της Αγγλίας και το Ινστιτούτο Διδακτικής των Μαθηματικών του Πανεπιστημίου του Bielefeld της Γερμανίας, παρουσιάστηκαν τα πρώτα αποτελέσματα στο 1º Διεθνές Συνέδριο Διδακτικής της Στατιστικής το οποίο πραγματοποιήθηκε στο Sheffield και στο οποίο έγινε μια πρώτη προσπάθεια να περιγραφούν τα στάδια στην ανάπτυξη της πιθανοτικής σκέψης (Falk, 1983; Fischbein & Gazit, 1983; Green, 1983).

Κεφάλαιο 5ο:

Στόχος & Ερευνητικά Ερωτήματα – Μέθοδος – Δείγμα – Διαδικασία Συλλογής Δεδομένων

5.1 Στόχος & Ερευνητικά Ερωτήματα

Η καθημερινή εφαρμογή της Στατιστικής στο σύγχρονο τρόπο ζωής, καθώς και η σπουδαιότητά της, προτρέπουν στην περαιτέρω έρευνα και ανάλυση των εννοιών της. Έτσι, έπειτα από τη μελέτη όλων των προηγούμενων ερευνών, τα ερευνητικά εργαλεία τους αλλά και τα χρήσιμα εξαγόμενα αποτελέσματα, η παρούσα διπλωματική εργασία επιχειρεί να κατασκευάσει μια πρωτότυπη διδακτική πρόταση, η οποία βασίζεται σε δραστηριότητες διερευνητικής μάθησης (Inquiry Based Learning), συνδυασμένες με ιστορικά στοιχεία. Στόχος της πρότασης, είναι να εντοπιστούν οι δυσκολίες και οι παρανοήσεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σχετικά με τις στατιστικές έννοιες που διαπραγματεύονται, ούτως ώστε να μπορέσουν να τις κατανοήσουν σε βάθος και να βελτιώσουν στο μέγιστο δυνατό βαθμό τον τρόπο προσέγγισης και αντιμετώπισής τους, μέσα από τη διδακτική παρέμβαση. Η πρόταση αυτή, με χρήση στοιχείων από την Ιστορία, αποσκοπεί στο να μπορέσουν οι μαθητές μέσα από τα στοιχεία της ιστορικής εξέλιξης των εννοιών που θα τους παρουσιαστούν, να αντιληφθούν τη χρησιμότητά τους, την αναγκαιότητα αλλά και την εννοιολογική τους υπόσταση.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που τίθενται είναι τα εξής:

- Ποιες οι δυσκολίες και τα λάθη που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές κατά την κατασκευή και ερμηνεία γραφικών παραστάσεων, κατά τον υπολογισμό των μέτρων θέσης (μέση τιμή και διάμεσος) και κατά τον υπολογισμό των μέτρων διασποράς (εύρος, διακύμανση, τυπική απόκλιση, συντελεστής μεταβολής);
- Μπορεί η Ιστορία να συμβάλλει θετικά στη διδασκαλία των εννοιών Στατιστικής που παρουσιάζονται;

5.2 Δείγμα – Ερευνητικό Εργαλείο – Μέσο Συλλογής Δεδομένων

Το δείγμα μπορεί να αποτελείται από μαθητές Δευτεροβάθμιας και Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Οι μαθητές της Γ’ Λυκείου διαθέτουν όλο το απαραίτητο υπόβαθρο προκειμένου να μπορέσουν να εργαστούν πάνω στο υλικό αυτό και να κατανοήσουν τις έννοιες που παρουσιάζονται στο διδακτικό υλικό. Παράλληλα, σχεδόν όλα τα Τμήματα της Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης διαθέτουν στο Πρόγραμμα Σπουδών τους μάθημα με Στατιστικό περιεχόμενο ή ακόμα και μελέτη εννοιών Πιθανοτήτων, επομένως είναι δυνατή η αξιοποίηση και εφαρμογή του μοντέλου αυτού και στη βαθμίδα αυτή.

Η διδακτική αυτή πρόταση σχεδιάστηκε για να παρουσιασθεί σε μαθητές της Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Ειδικότερα, στους προπτυχιακούς φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας με έδρα τη Φλώρινα και ειδικότερα αυτούς που επέλεξαν το μάθημα «Στοιχεία Γεωμετρίας και Επίλυσης Προβλημάτων», από τα Κατ' Επιλογής Υποχρεωτικά μαθήματα Κατεύθυνσης Θετικών Επιστημών.

Το ερευνητικό εργαλείο αποτελείται από τρία διακριτά τμήματα. Προκειμένου να εντοπιστούν τα συχνότερα λάθη και οι παρανοήσεις των φοιτητών, στις στατιστικές έννοιες που μελετώνται, σχεδιάστηκε ως μέσο συλλογής δεδομένων αρχικά ένα ερωτηματολόγιο (pre-test), το οποίο αποτελείται από πέντε ασκήσεις. Αυτές διαχωρίζονται στις τέσσερις κατηγορίες με βάση τις οποίες κατασκευάστηκε η διδακτική πρόταση. Πρώτα εξετάζονται τα μέτρα θέσης, με τη μέση τιμή και τη διάμεσο στην πρώτη άσκηση. Εκεί, μέσα από το πρώτο υποερώτημα και τις δύο περιπτώσεις υπολογισμού του μέσου όρου, εξετάζεται η παρανόηση σχετικά με το μηδενικό στοιχείο, μιας και κατά τη Mevarech (1983), ορισμένοι μαθητές δεν το λαμβάνουν υπόψιν κατά τον υπολογισμό αριθμών με διαφορετικό πρόσημο. Στο δεύτερο υποερώτημα αναζητείται η διαισθητική αντίληψη των μαθητών σχετικά με τη διάμεσο και την προσέγγισή της χωρίς υπολογισμό, σύμφωνα με την έρευνα του Barr (1980). Τέλος, στο τρίτο υποερώτημα εξετάζεται η δυσκολία των μαθητών στον υπολογισμό σταθμισμένου μέσου, προκειμένου να εντοπιστεί το είδος γνώσης, κατά την έρευνα των Pollatsek et al. (1981).

Έπειτα, τα μέτρα διασποράς με τη διακύμανση, την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής στη δεύτερη, όπου μέσα από τυχαίους αριθμούς γίνεται ανάλυση των δυσκολιών τους κατά τη χρήση και τον υπολογισμό των μέτρων αυτών. Παράλληλα, εξετάζεται και η ικανότητα υπολογισμού της διαμέσου σε άρτιο και περιττό πλήθος αντίστοιχα.

Ακολούθως εξετάζεται η κανονική κατανομή στην τρίτη άσκηση. Εκεί παρουσιάζοντας την καμπύλη της κανονικής κατανομής με τα ποσοστά και τις πιθανές τιμές, γίνεται προσπάθεια εντοπισμού της παρανόησης γύρω από τα z-scores που σημείωσαν οι Huck et al. (1986).

Τέλος, στις ασκήσεις 4 και 5 γίνεται η παρουσίαση των στατιστικών δεδομένων με διάφορες γραφικές παραστάσεις κατανομής συχνοτήτων. Στην τέταρτη άσκηση δίνεται ένα ραβδόγραμμα το οποίο περιγράφει τα ύψη παιδιών μιας οικογενείας. Στο πρώτο ερώτημα μέσα από μια πολλαπλής επιλογής διαδικασία ελέγχεται το πρώτο από τα επίπεδα κατανόησης του Curcio (1987), όπου ζητείται από τους μαθητές απάντηση χωρίς καμία ανάλυση των δεδομένων. Ομοίως, η δεύτερη ερώτηση ανήκει στην κατηγορία αυτή. Τα ερωτήματα τρία και τέσσερα, του δεύτερου επιπέδου κατανόησης, στοχεύουν σε κάτι το οποίο απαιτεί συγκρίσεις και χρήση μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων. Οι δύο τελευταίες ερωτήσεις, ανήκουν στο τρίτο επίπεδο κατανόησης, όπου απαιτείται επέκταση του προβλήματος σε κάτι πιο γενικό, πρόβλεψη με βάση τα στοιχεία ή και εξαγωγή συμπερασμάτων βάσει αυτών. Η τελευταία άσκηση του ερωτηματολογίου προσπαθεί να εξετάσει τις ικανότητες κατασκευής κυκλικού διαγράμματος από τους μαθητές και τον τρόπο με τον οποίο σκοπεύουν να διαχειριστούν τα διάφορα στατιστικά στοιχεία, ανάλογα με το μέγεθός τους και ουσιαστικά την αντίστοιχη αναλογία σε ποσοστό και την αποτύπωσή τους σε αυτό το διάγραμμα για να εντοπιστούν οι τεχνικές που εντόπισαν οι Li & Shen (1992).

Ερωτηματολόγιο (Pre-Test)

Έτος σπουδών: ……   Ηλικία: ……

1) i) Υπολογίστε το μέσο όρο των αριθμών:

   α) 12, 8, 10, 0, 4, 5, 2, 6, 7, 1

   β) 15, -2, 9, -11, -1, 7, 0, 8, -6, 4, 3, 0

   ii) Έχουμε ένα δείγμα ν=10 παρατηρήσεων, όπου κάθε παρατήρηση μπορεί να είναι 1, 2 ή 3. Η μέση τιμή είναι δυνατόν να είναι:

   Α) 4   Β)1   Γ) 1.8

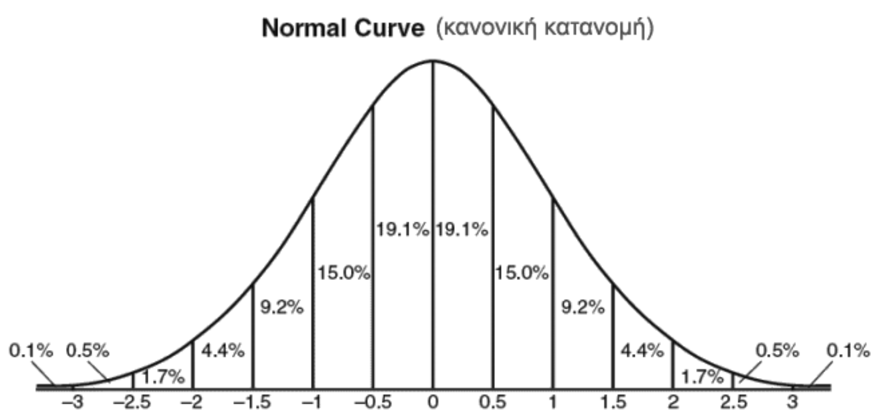
   iii) Η επίδοση ενός μαθητή σε πέντε μαθήματα είναι 12, 10, 16, 18, 14. Αν τα μαθήματα είχαν συντελεστή βαρύτητας (στάθμισης) 2, 3, 1, 1 και 3 αντίστοιχα, ποια είναι η μέση επίδοσή του;

2) Υπολογίστε τη διάμεσο, τη διακύμανση, την τυπική απόκλιση καθώς και το συντελεστή μεταβολής στις παρακάτω περιπτώσεις:

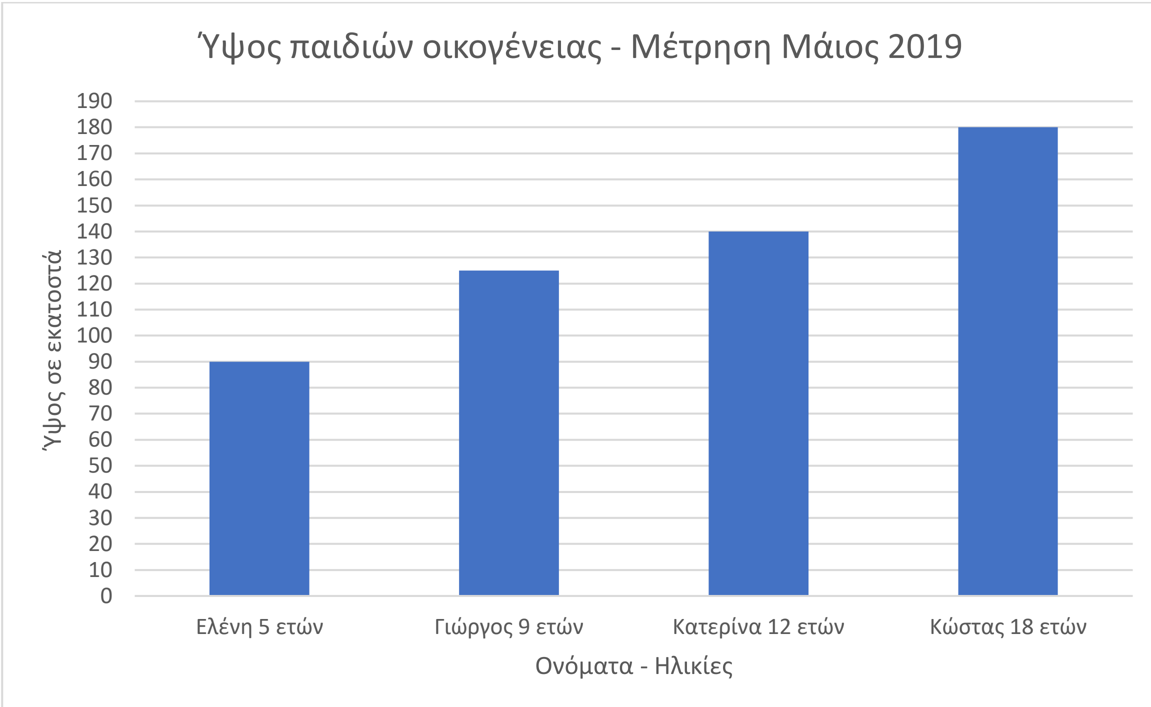
   α) 7, 11, 10, 13, 15, 3, 12, 11, 4, 14

   β) 6, 2, 10, 1, 8, 5, 0

3) Η γραφική παράσταση της παρακάτω κανονικής κατανομής απεικονίζει τα ποσοστά και τις διάφορες τιμές της. Μέχρι πού μπορεί να φτάσει η καμπύλη της; Γράψτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.



4) Δίνεται το παρακάτω ραβδόγραμμα:



α) Το διάγραμμα περιγράφει: (Επιλέξτε μία από τις παρακάτω)

i) Το βάρος τεσσάρων παιδιών μιας οικογένειας;

ii) Τη σχολική επίδοση τεσσάρων παιδιών μιας οικογένειας;

iii) Το ύψος τεσσάρων παιδιών μιας οικογένειας;

iv) Το αγαπημένο χρώμα τεσσάρων παιδιών μιας οικογένειας;

β) Ποιο είναι το ύψος της Ελένης;

γ) Ποιο είναι το ψηλότερο παιδί της οικογένειας;

δ) Πόση διαφορά ύψους έχει η Ελένη από τον Κώστα;

ε) Το Μάιο του 2020 ο Γιώργος έχει ψηλώσει κατά 35 εκατοστά και η Κατερίνα κατά 10 εκατοστά. Ποιο από τα δύο παιδιά είναι ψηλότερο με τη νέα μέτρηση και κατά πόσο;

στ) Ένα πέμπτο παιδί της οικογένειας, η Γεωργία είναι 10 ετών. Μπορείτε να βρείτε το ύψος της; Αν ναι, σχεδιάστε στο παραπάνω ραβδόγραμμα την αντίστοιχη στήλη και εξηγήστε την απάντησή σας. Αν όχι, αιτιολογήστε την απάντησή σας.

5) Κατασκευάστε ένα κυκλικό διάγραμμα (piechart), χρησιμοποιώντας ως δεδομένα: το 52% διαλέγει μαύρο, το 33% άσπρο, το 10% πορτοκαλί και το 5% καφέ.

Μετά το πέρας της διδακτικής πρότασης, στο δεύτερο τμήμα του ερευνητικού εργαλείου εξετάζονται εκ νέου τα στοιχεία αυτά, στο ερωτηματολόγιο (post-test), το οποίο έχει την ίδια μορφή με το αρχικό ερωτηματολόγιο, ίδιο τρόπο παρουσίασης των ασκήσεων και ουσιαστικά υπάρχουν μικρές αποκλίσεις με το pre-test. Οι διαφορές με το αρχικό ερωτηματολόγιο στηρίζονται στα νέα στοιχεία που παρουσιάστηκαν κατά τη διδακτική πρόταση, τα οποία εντοπίζονται στην άσκηση 2 όπου στο δεύτερο υποερώτημα, εξετάζεται η αντίληψη των φοιτητών σχετικά με τη διασπορά των παρατηρήσεων, όπως τόνισε στην έρευνά του ο Campbell (1974). Όπως και στην άσκηση 3 με την κανονική κατανομή, όπου εξετάζονται στοιχεία μέσα από την παρουσίαση της κανονικής κατανομής και τη σχέση της με την τυπική κανονική κατανομή και τον υπολογισμό πιθανοτήτων. Παράλληλα στο τέλος του ερωτηματολογίου αυτού, ζητείται από τους φοιτητές να κατασκευάσουν αυτή τη φορά ένα χρονόγραμμα, αντί για το κυκλικό διάγραμμα του pre-test.

Ερωτηματολόγιο (Post-Test)

Έτος σπουδών: …… Ηλικία: ……

1) i) Υπολογίστε το μέσο όρο των αριθμών:

   α) 15, 1, 7, 6, 0, 4, 8, 2, 0, 1

   β) -6, 4, -12, 2, 7, -14, 0, 1, -5, -8, 0, 1

   ii) Έχουμε ένα δείγμα ν=20 παρατηρήσεων, όπου κάθε παρατήρηση μπορεί να είναι 3, 4 ή 5. Η μέση τιμή είναι δυνατόν να είναι:

   Α) 3 Β) 4.3 Γ) 7

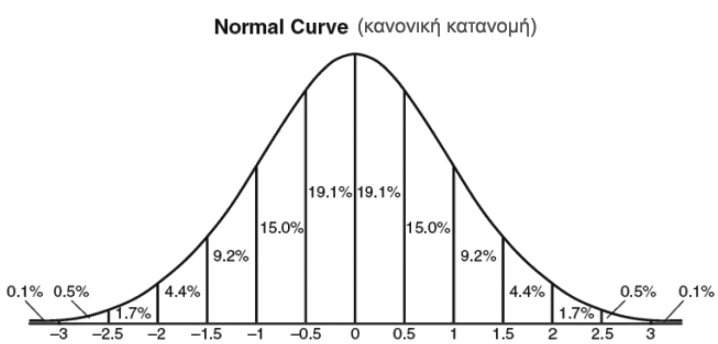
   iii) Η επίδοση ενός μαθητή σε έξι μαθήματα είναι 18, 15, 11, 17, 20, 16. Αν τα μαθήματα είχαν συντελεστή βαρύτητας (στάθμισης) 1.2, 0.8, 1, 1.2, 0.8 και 1 αντίστοιχα, ποια είναι η μέση επίδοσή του;

2) Υπολογίστε τη διάμεσο, τη διακύμανση, την τυπική απόκλιση, το εύρος και το συντελεστή μεταβολής στις παρακάτω περιπτώσεις:

   α) 4, 0, 12, 7, 5, 1, 6, 8

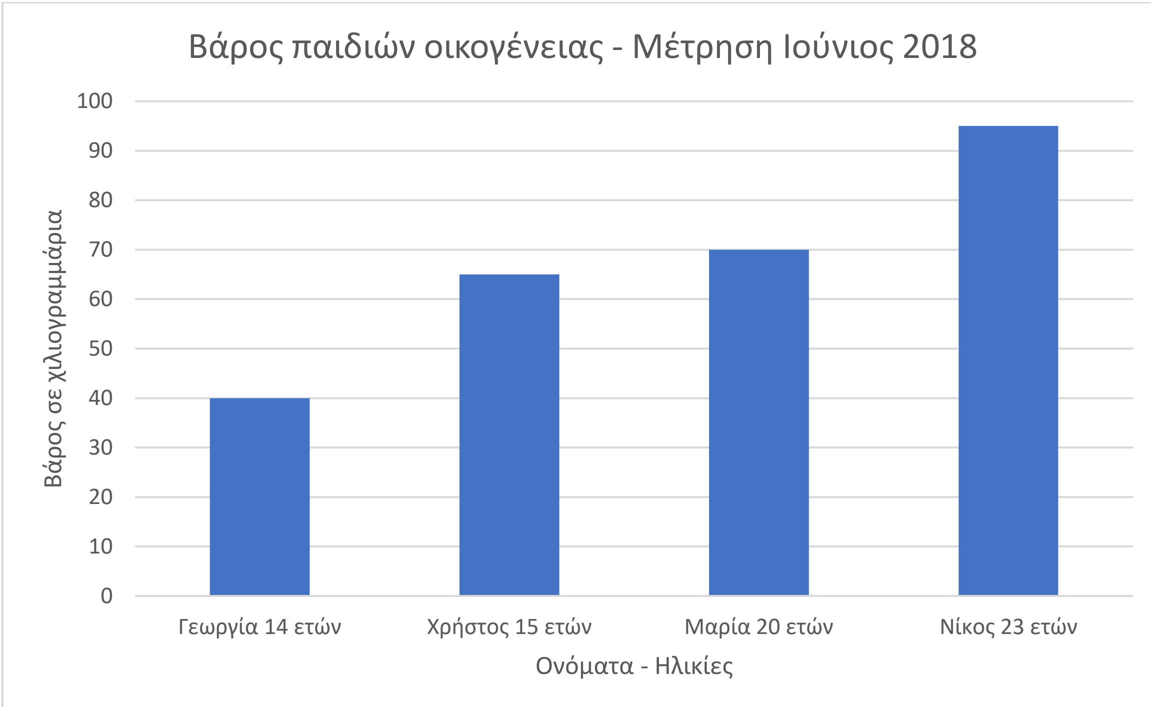
   β) 1, 27, 5, 35, 6, 12, 40, 2, 5

3) Η γραφική παράσταση της παρακάτω κανονικής κατανομής απεικονίζει τα ποσοστά και τις διάφορες τιμές της. Μέχρι πού μπορεί να φτάσει η καμπύλη της; Γράψτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.



Μπορείτε να συνδυάσετε την παράσταση αυτή με τη διακύμανση; Πώς μπορούν να υπολογιστούν πιθανότητες οι οποίες ακολουθούν την κανονική κατανομή;

4) Δίνεται το παρακάτω ραβδόγραμμα:



α) Το διάγραμμα περιγράφει: (Επιλέξτε μία από τις παρακάτω)

i) Τη σχολική επίδοση τεσσάρων παιδιών μιας οικογένειας;

ii) Το βάρος τεσσάρων παιδιών μιας οικογένειας;

iii) Το ύψος τεσσάρων παιδιών μιας οικογένειας;

iv) Το αγαπημένο χρώμα τεσσάρων παιδιών μιας οικογένειας;

β) Ποιο είναι το βάρος της Γεωργίας;

γ) Ποιο παιδί της οικογένειας έχει το περισσότερο βάρος;

δ) Πόση διαφορά βάρους έχει η Γεωργία από το Νίκο;

ε) Τον Ιούνιο του 2020 ο Χρήστος έχει αυξήσει το βάρος του κατά 15 κιλά και η Μαρία κατά 10 κιλά. Ποιο από τα δύο παιδιά έχει το περισσότερο βάρος με τη νέα μέτρηση και κατά πόσο;

στ) Ένα πέμπτο παιδί της οικογένειας, η Ζωή είναι 10 ετών. Μπορείτε να βρείτε το βάρος της; Αν ναι, σχεδιάστε στο παραπάνω ραβδόγραμμα την αντίστοιχη στήλη και εξηγήστε την απάντησή σας. Αν όχι, αιτιολογήστε την απάντησή σας.

5) Κατασκευάστε ένα χρονόγραμμα (time series graph) στο οποίο θα απεικονίζετε την εξέλιξη του ύψους των μελών της οικογένειάς σας από το 2000 έως σήμερα.

Το ερευνητικό εργαλείο ολοκληρώνεται με τη χορήγηση ενός ερωτηματολογίου μεταγνωστικής συνειδητοποίησης. Το ερωτηματολόγιο αυτό στοχεύει στην ανάλυση των απόψεων των συμμετεχόντων σχετικά με το υλικό που διδάχθηκαν. Σκοπός του τεστ αυτού είναι να αξιολογηθεί η αποτελεσματικότητα της διδακτικής παρέμβασης, να διερευνηθούν παραλείψεις ή και λάθη κατά την εφαρμογή της καθώς και να αξιολογηθεί ο συνδυασμός της μάθησης με διάφορα άλλα στοιχεία, όπως εδώ με τη χρήση της Ιστορίας. Οι συμμετέχοντες έχουν την ευκαιρία να αξιολογήσουν κάθε πτυχή του έργου καθώς και τον επιβλέπων, τις έννοιες, τη διαχείριση του χρόνου κ.ά. Εξετάζονται οι αντιλήψεις των φοιτητών για τις έννοιες και τον τρόπο που τις διδάχθηκαν, τη χρήση της Ιστορίας και τη σύνδεσή της με τη Στατιστική και τυχόν προτάσεις ή και σχόλια εκ μέρους τους. Επίσης, μέσα από ερωτήσεις, αναζητείται το υλικό που έκανε τη μεγαλύτερη εντύπωση σε αυτούς, τη στατιστική έννοια που κατανόησαν περισσότερο καθώς και σε ποια έννοια γνώρισαν τη μεγαλύτερη απόκλιση στις γνώσεις που είχαν αρχικά και μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής πρότασης, με σκοπό να αποκαλυφθεί το επίκεντρο των περισσότερων παρανοήσεων και δυσκολιών.

Επομένως, το ερωτηματολόγιο αυτό αξιολογεί όλο το διδακτικό πακέτο και τους συμμετέχοντες, με γνώμονα τη βελτιστοποίηση της πρότασης σχετικά με τις έννοιες αυτές αλλά και τον τρόπο διαχείρισης των παρανοήσεων των συμμετεχόντων και των ανατροφοδοτήσεών τους πάνω σε αυτό.

Ερωτηματολόγιο Μεταγνωστικής Συνειδητοποίησης

Έτος σπουδών: …… Ηλικία: ……

1) Σημειώστε με ένα ✓ στο κουτάκι που θεωρείτε καταλληλότερο, ως προς το βαθμό που μείνατε ικανοποιημένοι, ανάλογα με την κάθε κατηγορία που αναφέρεται.

Αξιολόγηση ως προς:	***Καθόλου***	***Λίγο***	***Μέτρια***	***Πολύ***
Το εκπαιδευτικό υλικό που παρουσιάστηκε				
Τον τρόπο παρουσίασης του υλικού				
Το βαθμό κατανόησης του υλικού				
Τη σύνδεση Στατιστικής & Ιστορίας				
Τη χρήση της Ιστορίας στην εκπαίδευση				
Τη διδακτική διαδικασία και τον διδάσκων				

2) Σημειώστε τις δικές σας παρατηρήσεις, προτάσεις, σχόλια για τη διδακτική πρόταση που παρακολουθήσατε.
3) Ποια στατιστική έννοια κατανοήσατε περισσότερο; Ποιο σημείο σας εξέπληξε από όλη τη διδακτική διαδικασία;
4) Πού πιστεύετε ότι παρατηρήσατε τη μεγαλύτερη απόκλιση ως προς την εικόνα που είχατε για μια έννοια πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση;

5.3 Περιγραφή της διαδικασίας κατά την εφαρμογή του διδακτικού υλικού

Το διδακτικό πακέτο το οποίο σχεδιάστηκε, αποτελείται από τέσσερις διδακτικές ενότητες. Κάθε ενότητα χωρίζεται αναλόγως τον όγκο των δεδομένων και τις απαιτήσεις των στατιστικών εννοιών που παρουσιάζονται. Στόχος της κάθε ενότητας είναι να παρουσιάζονται αρχικά οι έννοιες μέσα από ένα σύντομη ιστορική διαδρομή, να γίνεται μια συζήτηση γύρω από αυτή και έπειτα να παρουσιάζονται οι ορισμοί και οι έννοιες όπως είναι γνωστές σήμερα. Ακολουθούν διάφορες εφαρμογές και παραδείγματα, όπου εκεί οι φοιτητές μπορούν να μελετήσουν τον τρόπο χρήσης των εννοιών και να εντοπίσουν μέσα από ορισμένες σημαντικές παρατηρήσεις τα σημεία όπου μπορεί να δημιουργηθεί παρανόηση. Κάθε ενότητα περιέχει ασκήσεις εμπέδωσης, όπου οι φοιτητές μπορούν να δοκιμάσουν τις δυνάμεις τους και να εφαρμόσουν τις έννοιες που διδάχθηκαν.

Βασικός άξονας σε όλες τις ενότητες, είναι η συνεργασία ανάμεσα στον διδάσκων και τον εκπαιδευόμενο, την ανταλλαγή απόψεων και ιδεών και την εναλλαγή φυλλαδίων εργασίας. Μέσα στη διδακτική πρόταση, παρουσιάζονται αναλυτικά τα βήματα σε κάθε ενότητα καθώς και τα χρονικά περιθώρια που δίνονται στους φοιτητές για τη μελέτη κάθε μέρους του υλικού που έχουν μπροστά τους. Μετά το πέρας κάθε ενότητας, συλλέγονται όλες οι απαντήσεις τους και οι ενότητες που διδάχθηκαν, προκειμένου να λάβουν το επόμενο τμήμα. Αξίζει να σημειωθεί πως σε κάθε διδακτική ενότητα, πρώτα δίνεται το ιστορικό κομμάτι της κάθε στατιστικής έννοιας, αυτό μελετάται προσεκτικά και έπειτα δίδεται στους φοιτητές το θεωρητικό πλαίσιο.

Σε κάθε διδακτική ενότητα, στόχος του διδάσκοντα είναι σε κάθε συζήτηση να αναλύονται προσεκτικά όλα τα στοιχεία που συλλέχθηκαν είτε από την ιστορική αναδρομή είτε από τις εφαρμογές που παρουσιάζονται σε κάθε τμήμα των τεσσάρων ενοτήτων. Γίνεται προσπάθεια οι φοιτητές να δημιουργούν τα δικά τους ερωτήματα και να επιδιώκουν οι ίδιοι να απαντήσουν σε αυτά μέσα από το διάλογο στην ολομέλεια και τελικά να καταλήγουν σε τεκμηριωμένες απαντήσεις. Τα εξαγόμενα αυτά συμπεράσματα οφείλουν να συμβαδίζουν πάντοτε με τις γνώσεις που αποκτήθηκαν από όλη τη διαδικασία διερεύνησης. Η εμπλοκή όλων των διδασκόμενων στη συζήτηση αυτή επιδιώκει μια σφαιρική προσέγγιση, με πληθώρα απόψεων και αιτιολογήσεων, καθώς και στη δημιουργία ερωτήσεων ή προβληματισμών. Η προσπάθεια αιτιολόγησης είναι το κλειδί για την καλύτερη κατανόηση των εννοιών.

Κάθε φοιτητής έχει στη διάθεσή του ένα ξεχωριστό φύλλο απαντήσεων, στο οποίο μπορεί να καταγράψει τις απόψεις του, τις απαντήσεις σε κάθε δραστηριότητα και άσκηση καθώς και να σημειώσει τυχόν απορίες. Για τις ομαδικές δραστηριότητες, δίδεται στους φοιτητές ξεχωριστό φύλλο απαντήσεων, το οποίο επιτρέπει τη συνεργασία μεταξύ τους και την καταγραφή των απόψεών τους.

5.4 Ανάλυση της διδακτικής παρέμβασης

Το διδακτικό υλικό το οποίο σχεδιάστηκε, αποτελείται από τέσσερις ενότητες. Η πρώτη ενότητα περιλαμβάνει τα μέτρα θέσης, η δεύτερη τα μέτρα διασποράς, η τρίτη την κανονική κατανομή και η τέταρτη τις γραφικές παραστάσεις κατανομής συχνοτήτων. Κάθε ενότητα διαχωρίζεται με βάση το υλικό, τον τρόπο παρουσίασης και την προκαθορισμένη διαδικασία λειτουργίας. Διδάσκεται σε συγκεκριμένες διδακτικές ώρες, κατά τις οποίες ο ερευνητής-εκπαιδευτικός και οι φοιτητές μέσα σε ένα μαθητοκεντρικό κλίμα διαλόγου και λεπτομερούς ανάλυσης των στατιστικών εννοιών, προσπαθούν να φθάσουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα, το οποίο είναι η καλύτερη δυνατή κατανόηση της επιστήμης της Στατιστικής, μέσα από μια σύντομη ιστορική διαδρομή.

Η πρώτη ενότητα περιλαμβάνει τη μέση τιμή και τη διάμεσο και χωρίζεται σε τρία επιμέρους τμήματα. Ξεκινώντας την ενότητα αυτή και το πρώτο τμήμα, γίνεται μια σύντομη περιγραφή των μέτρων που χρησιμοποιούνται στη Στατιστική. Έπειτα, ακολουθεί ένα ιστορικό κείμενο, μέσα στο οποίο εντοπίζονται οι πρώτες αναφορές των εννοιών της ενότητας αυτής. Σκοπός του κειμένου αυτού είναι να μπορέσουν οι φοιτητές να αντιληφθούν την αναγκαιότητα των μέτρων θέσης, τον τρόπο διαχωρισμού τους αλλά και τα πιθανά πεδία εφαρμογών τους. Στη δραστηριότητα που ακολουθεί, δίνεται η δυνατότητα στους φοιτητές να συζητήσουν τα συμπεράσματά τους, να αναλύσουν τις ιδέες τους και να προτείνουν τρόπους αξιοποίησης. Μετά από τη συζήτηση αυτή, δίνονται οι μαθηματικοί ορισμοί των εννοιών της μέσης τιμής και της διαμέσου. Το πρώτο τμήμα ολοκληρώνεται με μια εκ νέου συζήτηση σχετικά με τις διαφορές στις απόψεις των φοιτητών συγκριτικά με το ιστορικό κείμενο (πριν) και τους μαθηματικούς ορισμούς (μετά).

Μέτρα Θέσης (2 διδακτικές ώρες)

Φυλλάδιο (1/3)

Οι έννοιες της Στατιστικής που μελετούμε, χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Για να μπορέσουμε να ορίσουμε κάποια **μέτρα** (αριθμητικά μεγέθη), αναζητούμε **α)** τη θέση του «κέντρου» των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα και **β)** τη διασπορά των παρατηρήσεων, δηλαδή πόσο αυτές εκτείνονται γύρω από το «κέντρο» τους. Τα πρώτα ονομάζονται **μέτρα θέσης** της κατανομής (location measures) και τα δεύτερα **μέτρα διασποράς ή μέτρα μεταβλητότητας** (measures of variability).

Τα πιο συνηθισμένα μέτρα που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της θέσης ενός συνόλου δεδομένων πάνω στον οριζόντιο άξονα οx, εκφράζοντας την «κατά μέσο όρο» απόστασή τους από την αρχή των αξόνων, είναι ο αριθμητικός μέσος ή **μέση τιμή** (arithmetic mean or average), η **διάμεσος** (median) και η κορυφή ή επικρατούσα τιμή (mode).

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Η λέξη «μέσος όρος» υπάρχει εδώ και αιώνες. Υπάρχουν ενδείξεις ότι στην εποχή του Πυθαγόρα χρησιμοποιήθηκαν ορισμένα μέσα, όπως το αριθμητικό και το γεωμετρικό. Η μέση τιμή εμφανίζεται για πρώτη φορά ως όρος, στα γραπτά του Pearson το 1894, στο βιβλίο του «Contributions to the Mathematical Theory of Evolution». «*Έχω βρει πως είναι βολικό να χρησιμοποιώ τον όρο μέση τιμή για την τετμημένη που αντιστοιχεί στην τεταγμένη της μέγιστης συχνότητας»,* ανέφερε χαρακτηριστικά.

Σε μια επιστολή προς τον εκδότη του περιοδικού Nature Magazine το 1907, ο Sir Francis Galton δίνει ένα επιχείρημα για τη χρήση αυτού που ονομάζουμε διάμεσο σε ορισμένες καταστάσεις. Ο Galton είναι ο πρώτος που χρησιμοποίησε τον όρο «διάμεσος». Παρόλο που είχε ήδη αναφέρει την έννοια το 1869, η πρώτη φορά που εμφανίστηκε σε έντυπη μορφή ήταν το 1883.

Μια συγκεκριμένη κατηγορία προβλημάτων δε φαίνεται να επιλύεται ακόμη, σύμφωνα με τους επιστημονικούς κανόνες, αν και είναι πολύ σημαντικά και συχνά επαναλαμβάνονται. Αρκούν δύο παραδείγματα. (1) Η κριτική επιτροπή πρέπει να εκτιμήσει τις ζημίες. (2) Το συμβούλιο μιας κοινωνίας πρέπει να καθορίσει ένα χρηματικό ποσό, κατάλληλο για κάποιο συγκεκριμένο σκοπό. Κάθε ψηφοφόρος, είτε της κριτικής επιτροπής είτε του συμβουλίου, έχει την ίδια εξουσία με κάθε έναν από τους συναδέλφους του. Πώς μπορεί να επιτευχθεί το σωστό συμπέρασμα, λαμβάνοντας υπόψη ότι μπορεί να υπάρχουν τόσες διαφορετικές εκτιμήσεις όσο υπάρχουν μέλη; Αυτό το συμπέρασμα δεν είναι σαφώς ο μέσος όρος όλων των εκτιμήσεων, οι οποίες θα έδιναν δύναμη ψήφου στους ιδιότροπους σε αναλογία με την ιδιοτροπία τους. Μια παράλογα μεγάλη ή μικρή εκτίμηση θα αφήσει μεγαλύτερη επίπτωση στο αποτέλεσμα από ένα εύλογο ποσό και όσο περισσότερο μια εκτίμηση αποκλίνει από το μεγαλύτερο μέρος των υπόλοιπων, τόσο μεγαλύτερη επιρροή θα ασκεί. Θα ήθελα να επισημάνω ότι η εκτίμηση στην οποία μπορεί να προβληθεί η ελάχιστη αντίρρηση είναι η μεσαία εκτίμηση, ο αριθμός των ψήφων που είναι πολύ υψηλός ισορροπείται ακριβώς από τον αριθμό των ψήφων που είναι πολύ χαμηλός. Κάθε άλλη εκτίμηση καταδικάζεται από την πλειοψηφία των ψηφοφόρων ως υπερβολικά *υψηλή ή πολύ χαμηλή, ενώ ο ενδιάμεσος μόνος του ξεφεύγει από αυτόν τον υπολογισμό. Ο αριθμός των ψηφοφόρων μπορεί να είναι μονός ή ζυγός. Αν είναι μονός, υπάρχει μια μεσαία τιμή. Έτσι σε 11 ψήφους ο ενδιάμεσος είναι ο 6ος. Σε 99 ψήφους, ο ενδιάμεσος είναι ο 50ος. Εάν ο αριθμός των ψήφων είναι ζυγός, υπάρχουν δύο μεσαίες τιμές, των οποίων πρέπει να ληφθεί η μέση τιμή τους. Έτσι, σε 12 ψήφους, ο ενδιάμεσος βρίσκεται μεταξύ του 6ου και του 7ου. Σε 100 ψήφους μεταξύ του 50ου και του 51ου. Σε γενικές γραμμές, σε 2ν - 1 ψήφους ο ενδιάμεσος είναι ο ν-οστός, σε 2ν ψήφους βρίσκεται μεταξύ του ν-οστού και του (ν + 1)-ού. Προτείνω ότι η διαδικασία για μια κριτική επιτροπή για τη συνταξιοδότησή τους θα πρέπει να είναι (1) για συζήτηση και ανταλλαγή απόψεων (2) για κάθε κριτή να γράψει τη δική του ανεξάρτητη εκτίμηση σε ξεχωριστό χαρτί (3) για τον προϊστάμενο να τακτοποιήσει τα δελτία με τη σειρά των τιμών που αναγράφονται σε αυτά (4) να πάρει το μέσο όρο του 6ου και του 7ου ως την ετυμηγορία, η οποία θα μπορούσε τελικά να εγκριθεί ως ουσιαστική πρόταση. Ομοίως, όσον αφορά τα ψηφίσματα των συμβουλίων, να λαμβάνονται υπόψη οι (2ν - 1) και 2ν παρατηρήσεις.*

Francis Galton

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Τι συμπεράσματα εξάγονται από αυτό το κείμενο του Galton; Ποια η διαφορά της μέσης τιμής από τη διάμεσο; Πότε χρησιμοποιείται η μία και πότε η άλλη;
Μπορείτε να προτείνετε τρόπους αξιοποίησής τους καθώς και διάφορα παραδείγματα και εφαρμογές;
Οι απαντήσεις δίνονται στο ξεχωριστό φύλλο απαντήσεων (10 λεπτά).

Μέση Τιμή ($\bar{x}$)

Η δημοφιλέστερη στατιστική έννοια, αυτή της μέσης τιμής, εμφανίζεται καθημερινά μέσα από διάφορες έρευνες, μελέτες, παρουσίαση στατιστικών δεδομένων κ.ά.
Το μέτρο αυτό, ορίζεται ως το άθροισμα των παρατηρήσεων, δια του πλήθους των παρατηρήσεων. Όταν δηλαδή σε ένα δείγμα μεγέθους ν, οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ είναι $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ τότε η μέση τιμή συμβολίζεται με $\bar{x}$.

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_\nu}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i$$

όπου το σύμβολο ∑ παριστάνει το άθροισμα των $t_1 + t_2 + \ldots + t_\nu$ και διαβάζεται «άθροισμα των t_i από i=1 έως ν».

<u>Διάμεσος (δ)</u>

Σε ορισμένες περιπτώσεις, όπου οι παρατηρήσεις μας περιέχουν ορισμένες ακραίες τιμές, δηλαδή τιμές πολύ μεγαλύτερες ή μικρότερες από το μεγαλύτερο ποσοστό των παρατηρήσεών μας, τότε η μέση τιμή επηρεάζεται από αυτές και δε μας δίνει μια καθαρή εικόνα για το σύνολο των δεδομένων. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούμε ένα άλλο μέτρο θέσης, το οποίο δεν επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις. Η διάμεσος ορίζεται ως εξής:

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το ν είναι άρτιος αριθμός.

Στο τέλος του 1ου φυλλαδίου, συλλέγονται οι απαντήσεις των φοιτητών και γίνεται μια συζήτηση όπου παρουσιάζονται συνολικά οι απόψεις τους και αναλύονται τα εξής:

- ✓ Εντοπίσατε διαφορές στις απόψεις σας για τα μέτρα θέσης πριν και μετά την αναλυτική παρουσίασή τους;
- ✓ Μπορούν να διαχωριστούν οι δύο αυτές έννοιες;
- ✓ Έχει γίνει κατανοητή η εφαρμογή τους;

Συζήτηση (<u>5 λεπτά</u>)

Στο δεύτερο τμήμα της ενότητας αυτής, παρουσιάζονται ορισμένα παραδείγματα-εφαρμογές, μέσα από τα οποία οι διδασκόμενοι αντιλαμβάνονται τον τρόπο εφαρμογής των μέτρων θέσης, τη διαδικασία επίλυσης και διαχείρισης των στατιστικών στοιχείων. Σε μια σύντομη διερεύνηση που ακολουθεί, γίνεται μια πρακτική σύγκριση των δύο αυτών μέτρων, τις διαφορές στην εφαρμογή τους ανά περίπτωση και το εξαγόμενο αποτέλεσμα, ανάλογα με την επιλογή του μέτρου. Το επόμενο παράδειγμα παρουσιάζει μια πιο αλγεβρική σκοπιά της μέσης τιμής και της διαμέσου, όπου ζητείται να υπολογιστούν βάσει ορισμένων δεδομένων και με τη βοήθεια εξισώσεων πρώτου βαθμού για την επίλυση. Οι παρατηρήσεις αποσκοπούν στην αποσαφήνιση της μεθόδου επίλυσης, μέσα από ορισμένες σημαντικές λεπτομέρειες για τη διάμεσο. Μετά τα λυμένα παραδείγματα, οι φοιτητές προσπαθούν με τη σειρά τους να διαχειριστούν στατιστικά στοιχεία για τον υπολογισμό σταθμισμένου μέσου, με τη βοήθεια μιας παρατήρησης που ουσιαστικά διαχωρίζει τον τρόπο υπολογισμού από το μέσο όρο. Τα προβλήματα που ακολουθούν δίνουν έμφαση στα στοιχεία που διδάχθηκαν και επιδιώκουν την άμεση εφαρμογή τους σε πραγματικά σενάρια, με τους ίδιους πρωταγωνιστές, για μεγαλύτερο ενδιαφέρον και πρακτική αντιμετώπιση. Το δεύτερο τμήμα ολοκληρώνεται και πάλι με μια σύντομη συζήτηση, αναλύοντας τις απαντήσεις των φοιτητών και αποσαφηνίζοντας τυχόν απορίες τους.

Φυλλάδιο (2/3)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Α) Ας υποθέσουμε ότι για 10 άνδρες, το βάρος τους σε χιλιογραμμάρια είναι:

84, 76, 84, 84, 86, 58, 84, 86, 61, 86

Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τη διάμεσο, θα πρέπει να ταξινομήσουμε κατά αύξουσα σειρά τα δεδομένα:

58, 61, 76, 84, 84, 84, 84, 86, 86, 86 (10 το πλήθος παρατηρήσεις – άρτιο πλήθος – διάμεσος προκύπτει από το μέσο όρο $5^{ης}$ και $6^{ης}$ παρατήρησης.

Επομένως, η διάμεσος είναι 84 και η μέση τιμή είναι 78.9 η οποία προέκυψε από το άθροισμα όλων των παρατηρήσεων, διαιρεμένο με το πλήθος τους.

Β) Έστω οι παρακάτω θερμοκρασίες το μήνα Δεκέμβριο στην πόλη της Κοζάνης. Να βρεθεί ο μέσος όρος θερμοκρασίας.

-10, 0, 6, 2, -4, 5, 1, 0, -7, 9, -2, 8, 3, -8, 4, 0, -5, 4, 11, -1, -7, 2, -9, 1, 0, 12, 3, -11, 0, 5, 1.

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής λαμβάνουμε υπόψιν όλες τις τιμές:

Αθροίζοντας τις θερμοκρασίες βρίσκουμε σύνολο 13. Διαιρώντας με το πλήθος που είναι 31, βρίσκουμε ότι τελικά ο μέσος όρος για το μήνα Δεκέμβριο είναι 0.4 βαθμοί κελσίου.

Διερεύνηση

Με βάση τη συζήτηση και το παράδειγμα που προηγήθηκε, τελικά πως καταλαβαίνουμε ποιο μέτρο θέσης πρέπει να χρησιμοποιούμε σε κάθε περίπτωση;

- ✓ Η μέση τιμή είναι πιο χρήσιμη όταν όλες οι τιμές είναι ισορροπημένες

- ✓ Η διάμεσος είναι πιο χρήσιμη όταν μερικές τιμές είναι σημαντικά μικρότερες ή μεγαλύτερες από τις υπόλοιπες και επομένως είναι πιθανό να μεταβάλλουν το μέσο όρο και στις δύο κατευθύνσεις. Και αυτό ουσιαστικά το αποτέλεσμα δε θα ήταν αντιπροσωπευτικό.

Σημαντική Παρατήρηση: Εάν ο μέσος όρος και η διάμεσος είναι κοντά η μία με την άλλη, τότε συμπεραίνουμε πως τα δεδομένα μας είναι ισορροπημένα ως προς το μέσο όρο. Αντίθετα, όταν δηλαδή υπάρχει μεγάλη απόκλιση ανάμεσα στα δύο αυτά μέτρα, τότε καταλαβαίνουμε ότι υπάρχουν ορισμένες ακραίες παρατηρήσεις στα δεδομένα μας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

x_i	ν_i
2	1
3	3
4	1
5	2
6	;
7	1

Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X με τις αντίστοιχες συχνότητές τους. Η πέμπτη συχνότητα χάθηκε! Μπορείτε να την ανακαλύψετε, εάν γνωρίζετε ότι

α) η μέση τιμή είναι 4.4

β) η διάμεσος είναι το 4.5

α) Έστω ότι x η συχνότητα που λείπει. Τότε έχουμε $(2*1 + 3*3 + 4*1 + 2*5 + 6*x + 7*1) / 8 + x$, που είναι ο τρόπος υπολογισμού της μέσης τιμής, η οποία γνωρίζουμε ότι είναι 4.4. Επομένως λύνοντας την εξίσωση με μοναδικό άγνωστο το x, βρίσκουμε ότι η $\nu_5 = 2$.

x_i	ν_i
2	1
3	3
4	1
δ	**4.5**
5	2
6	;
7	1

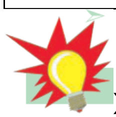
β) **Σημαντική Παρατήρηση:** Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει ένα σύνολο παρατηρήσεων σε δύο ίσα μέρη, όταν οι παρατηρήσεις αυτές τοποθετηθούν με σειρά τάξης μεγέθους.

Πιο συγκεκριμένα, η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτή. Οπότε, αφού δ = 4.5, παρατηρούμε ότι η διάμεσος «κόβει» τον πίνακα στη μέση. Εφόσον στο πρώτο μισό έχουμε 5 παρατηρήσεις, αυτό σημαίνει πως θα έχουμε τόσες και από κάτω αντίστοιχα. Επομένως $\nu_5 = 2$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στον παρακάτω πίνακα περιγράφονται οι βαθμοί μιας μαθήτριας. Ποιος θα είναι ο τελικός βαθμός της αν γνωρίζετε ότι κάθε μάθημα έχει διαφορετικό συντελεστή;

Βαθμοί Μαθημάτων	**Συντελεστές Βαρύτητας**
18	6
16	3
19	2
17	8



Σημαντική Παρατήρηση: Η βασική διαφορά κατά τον υπολογισμό ενός σταθμισμένου μέσου, από τον μέσο όρο, είναι ότι μετά τον υπολογισμό του αθροίσματος των παρατηρήσεων οι οποίες έχουν πολλαπλασιαστεί με τον αντίστοιχό τους συντελεστή, αυτό διαιρείται με το άθροισμα των σταθμίσεων και όχι με το πλήθος των παρατηρήσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1) Προσπαθήστε να υπολογίσετε το δικό σας μέσο όρο επίδοσης στη σχολή. Έπειτα, υπολογίστε ξανά με βάση τους συντελεστές βαρύτητας. Υποθέτουμε ότι κάθε υποχρεωτικό μάθημα έχει βαρύτητα 2, κάθε κατ' επιλογήν υποχρεωτικό 1.5 και ελεύθερης επιλογής 1.
2) Συλλέγοντας δεδομένα από τους συμφοιτητές σας, προσπαθήστε να υπολογίσετε τη διάμεσο για τον υπολογισμό του ύψους. Ταυτόχρονα υπολογίστε και το μέσο όρο. Τι παρατηρείτε;

Οι απαντήσεις δίνονται στο ξεχωριστό φύλλο απαντήσεων (<u>10 λεπτά</u>).

Στο τέλος του 2ου φυλλαδίου, συλλέγονται οι απαντήσεις των φοιτητών και γίνεται μια συζήτηση σχετικά με τα παραδείγματα που παρουσιάστηκαν, τις παρατηρήσεις και τις ασκήσεις που επεξεργάστηκαν (<u>5 λεπτά</u>).

Το τρίτο και τελευταίο τμήμα της ενότητας, περιέχει μια ομαδική δραστηριότητα, κατά την οποία εξετάζονται οι φοιτητές στον υπολογισμό των μέτρων θέσης, μέσα από έναν πίνακα δεδομένων διπλής εισόδου. Η ενότητα των μέτρων αυτών ολοκληρώνεται με μια δραστηριότητα, στην οποία συνοψίζονται όλες οι πληροφορίες, παρουσιάζεται μια σφαιρική πλέον προσέγγιση της θεωρίας που διδάχθηκε, με σκοπό την καλύτερη δυνατή κατανόηση των εννοιών αυτών από τους φοιτητές.

Φυλλάδιο (3/3)

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας δεδομένων. Σε ομάδες των τριών ατόμων, προσπαθήστε μέσα από τη μελέτη του πίνακα και τη συζήτηση μεταξύ σας, να απαντήσετε στα ερωτήματα που ακολουθούν.

Ύψη ανδρών σε εκατοστά	Ύψη των αδερφών τους σε εκατοστά													Σύνολο	Διάμεσος
	<160	161	164	166	169	171	174	177	179	182	184	186	>188		
188 και πάνω	1	1	-	-	-	-	-	1	1	-	5	3	12	24	-
186	-	-	-	-	-	1	3	4	8	3	3	2	3	27	-
184	-	-	-	-	1	1	6	5	9	9	8	3	5	47	180
182	-	1	-	1	2	8	11	18	14	20	9	4	-	88	
179	-	-	1	1	7	19	30	45	36	14	9	8	1	171	177
177	-	1	2	1	11	20	36	55	44	17	5	4	2	198	176
174	-	1	5	9	18	38	46	36	30	11	6	3	-	203	174
171	2	4	8	26	35	38	38	20	18	8	1	1	-	199	172
169	4	3	10	33	28	35	20	12	7	2	1	-	-	155	
166	3	3	15	18	33	36	8	2	1	1	-	-	-	110	169
164	3	8	12	15	10	8	5	2	1	-	-	-	-	64	167
161	5	2	8	3	3	4	1	1	-	1	-	-	1	20	-
Κάτω από 160	5	5	3	3	4	2	-	-	-	-	-	-	1	23	-
Σύνολο	23	29	64	110	152	200	204	201	169	86	47	28	25	1.329	

Πηγή: (Galton (1886b; 1889, p. 210))

1. Σε τι αναφέρεται ο πίνακας; Ποιο είναι το θέμα της στατιστικής πηγής;

2. Πότε δημιουργήθηκε η στατιστική πηγή και από ποιόν;
3. Βρείτε τη διάμεσο των αδελφών για άνδρες με ύψος 182 εκατοστά.
4. Βρείτε τη διάμεσο των αδελφών για άνδρες με ύψος 169 εκατοστά.
5. Ποιο είναι το μέσο ύψος των αδελφών ανδρών ύψους 182 εκατοστών;
6. Ποιο είναι το μέσο ύψος των αδελφών ανδρών ύψους 174 εκατοστών;
7. Παρατηρώντας τον πίνακα δεδομένων, τι συμπεράσματα βγάζετε για τα ύψη των ανδρών και των αδερφών τους; Πού θεωρείται ότι συγκεντρώνεται ο μεγαλύτερος όγκος δεδομένων;

Οι απαντήσεις δίνονται στο ξεχωριστό φύλλο απαντήσεων (10 λεπτά).

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Συζητήστε με τους συμφοιτητές σας στην κάθε ομάδα για τις δύο στατιστικές έννοιες που μελετήσατε. Ποιες οι διαφορές τους; Που χρησιμεύουν; Τι υπολογίζει η κάθε μια;

Αντλείστε δεδομένα από την καθημερινότητά σας και εφαρμόστε τα μέτρα θέσης, για να εξάγετε τα δικά σας συμπεράσματα.

Έχετε σχηματίσει μια ολοκληρωμένη εικόνα για τα μέτρα θέσης;

Οι απαντήσεις δίνονται στο ξεχωριστό φύλλο απαντήσεων (10 λεπτά).

Στο τέλος του 3ου φυλλαδίου, συλλέγονται οι απαντήσεις των φοιτητών και γίνεται μια ανακεφαλαίωση των στοιχείων που διδάχθηκαν, αναλύονται οι απαντήσεις τους και αναφέρονται οι εφαρμογές και τα παραδείγματά τους.

Τέλος 1ης διδακτικής ενότητας

Στη δεύτερη ενότητα, οι φοιτητές έρχονται αντιμέτωποι με τα μέτρα διασποράς, σε δύο τμήματα. Ακολουθώντας το ίδιο μοτίβο με την πρώτη ενότητα, στο πρώτο τμήμα τους δίνεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή κατά την οποία παρουσιάζεται η ανάγκη δημιουργίας μιας νέας στατιστικής έννοιας, αυτής της διακύμανσης. Η δραστηριότητα εμπλέκει τους φοιτητές σε έναν προβληματισμό γύρω από τα μέτρα θέσης. Έπειτα, παρουσιάζονται οι μαθηματικοί ορισμοί για τη διακύμανση, την τυπική απόκλιση, το εύρος αλλά και το συντελεστή μεταβολής, προκειμένου να γίνει η σύνδεσή του με τα υπόλοιπα μέτρα, για την πληρέστερη παρουσίαση των στατιστικών εννοιών και την κατανόηση των εξαγόμενων αποτελεσμάτων τους. Κάθε έννοια αναλύεται με προσοχή και εντοπίζονται τα κύρια σημεία στα οποία εφαρμόζονται και διαφέρουν η μία από την άλλη. Το πρώτο τμήμα ολοκληρώνεται με την καθιερωμένη συζήτηση της ολομέλειας, όπου γίνεται η σύγκριση των μαθηματικών ορισμών και της ιστορικής αναδρομής.

Μέτρα Διασποράς (1.5 διδακτική ώρα)

Φυλλάδιο (1/2)

Τα μέτρα διασποράς εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής γύρω από τα μέτρα κεντρικής τάσης. Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς είναι η διακύμανση, η τυπική απόκλιση και το εύρος.

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Ο όρος διακύμανση παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τον Ronald Fisher το 1918 στο άρθρο «The Correlation Between Relatives on the Supposition of Mendelian Inheritance».

Το σώμα των διαθέσιμων στατιστικών στοιχείων μας δείχνει ότι οι αποκλίσεις μιας ανθρώπινης μέτρησης από την μέση τιμή της ακολουθούν την κανονική κατανομή και ως εκ τούτου, η μεταβλητότητα μπορεί να μετρηθεί ομοιόμορφα από την τυπική απόκλιση που αντιστοιχεί στην τετραγωνική ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος. Όταν υπάρχουν δύο ανεξάρτητες αιτίες μεταβλητότητας, αυτές είναι ικανές να παράγουν μια ομοιόμορφη κατανομή του πληθυσμού με τυπικές αποκλίσεις. Διαπιστώθηκε ότι η κατανομή αυτή έχει μια τυπική απόκλιση. Ως εκ τούτου, είναι προτιμότερο στην ανάλυση των αιτίων της μεταβλητότητας να ασχοληθούμε με το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης ως μέτρο της μεταβλητότητας. Θα ονομάζουμε την ποσότητα αυτή διακύμανση...

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Τι συμπεράσματα μπορείτε να εξάγετε από το κείμενο του Fisher; Μπορείτε να αντιληφθείτε τι ακριβώς είναι η διακύμανση και ποια η σχέση της με τα άλλα μέτρα διασποράς που αναφέρονται; Οι απαντήσεις δίνονται στο ξεχωριστό φύλλο απαντήσεων (5 λεπτά).

Διακύμανση (s^2)

Για να υπολογίσουμε τη διασπορά των παρατηρήσεων t_1, t_2, …, t_ν μιας μεταβλητής X είναι να αφαιρέσουμε τη μέση τιμή $\bar{x}$ από κάθε παρατήρηση και βρούμε τον αριθμητικό μέσο των διαφορών αυτών, δηλαδή

$$\frac{(t_1-\bar{x})+(t_2-\bar{x})+\ldots+(t_\nu-\bar{x})}{\nu}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})}{\nu}$$

Ο αριθμός όμως αυτός είναι ίσος με μηδέν, αφού

$$\frac{(t_1-\bar{x})+(t_2-\bar{x})+\ldots+(t_\nu-\bar{x})}{\nu}=\frac{t_1+t_2+\ldots+t_\nu}{\nu}-\frac{\nu\bar{x}}{\nu}=\bar{x}-\bar{x}=0$$

Γι' αυτό ως ένα μέτρο διασποράς παίρνουμε το μέσο όρο των τετραγώνων των αποκλίσεων των t_i από τη μέση τιμή τους $\bar{x}$. Το μέτρο αυτό καλείται **διακύμανση ή διασπορά** (variance) και ορίζεται από τη σχέση:

$$s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2$$

Για την περίπτωση όπου η μέση τιμή δεν είναι ακέραιος αριθμός, η παρακάτω σχέση διευκολύνει σημαντικά τους υπολογισμούς:

$$s^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}t_i\right)^2}{\nu}\right\}$$

Όταν συγκρίνουμε δύο δείγματα, αυτό με τη μεγαλύτερη διακύμανση, παρουσιάζει μεγαλύτερη μεταβλητότητα σε σχέση με το άλλο δείγμα.

Τυπική Απόκλιση (s)

Η διακύμανση είναι μια αξιόπιστη παράμετρος διασποράς, αλλά έχει ένα μειονέκτημα. Δεν εκφράζεται με τις μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις. Αν όμως πάρουμε τη θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης, τότε θα έχουμε ένα μέτρο διασποράς που θα εκφράζεται με την ίδια μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού, όπως ακριβώς είναι και όλα τα άλλα μέτρα θέσης που εξετάσαμε ως τώρα. Η ποσότητα αυτή λέγεται **τυπική απόκλιση** και δίνεται από τη σχέση:

$$s = \sqrt{s^2}$$

Εύρος (R)

Το απλούστερο μέτρο διασποράς είναι το **εύρος ή κύμανση (range)** που ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης από τη μέγιστη παρατήρηση. Δηλαδή:

Εύρος R = Μεγαλύτερη παρατήρηση – Μικρότερη παρατήρηση

Το εύρος είναι ένα αρκετά απλό μέτρο που υπολογίζεται εύκολα. Δε θεωρείται όμως αξιόπιστο μέτρο διασποράς, καθώς βασίζεται μόνο στις δύο ακραίες παρατηρήσεις.

Συντελεστής Μεταβολής (CV)

Ένα μέτρο το οποίο μας βοηθά στη σύγκριση ομάδων τιμών που είτε εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης, είτε εκφράζονται στην ίδια – αλλά έχουν σημαντικά διαφορετικές μέσες τιμές, είναι ο **συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας** (coefficient of variation) ο οποίος για μέση τιμή διάφορη του μηδενός ορίζεται από το λόγο:

$$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} = \frac{s}{\bar{x}}$$

Ο συντελεστής μεταβολής είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης, εκφράζεται επί τοις εκατό και παριστάνει ένα μέτρο **σχετικής διασποράς** των τιμών και όχι της απόλυτης διασποράς, όπως έχουμε μελετήσει μέχρι τώρα.

Όταν ο συντελεστής μεταβολής είναι CV $\leq$ 10% τότε λέμε ότι το δείγμα μας είναι ομοιογενές.

Στο τέλος του 1ου φυλλαδίου, συλλέγονται οι απαντήσεις των φοιτητών και γίνεται μια συζήτηση όπου παρουσιάζονται συνολικά οι απόψεις τους και αναλύονται τα εξής:

- ✓ Εντοπίσατε διαφορές στις απόψεις σας για τα μέτρα διασποράς πριν και μετά την αναλυτική παρουσίασή τους;

- ✓ Μπορείτε να διαχωρίσετε τις έννοιες και πως μπορούν να χρησιμοποιηθούν;
- ✓ Μπορείτε να σκεφθείτε πιθανούς τρόπους εφαρμογής τους;

Συζήτηση (5 λεπτά)

Το δεύτερο τμήμα ξεκινά με ένα παράδειγμα όπου παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού των μέτρων αυτών. Ακολουθούν ασκήσεις κατά τις οποίες οι φοιτητές μπορούν να εφαρμόσουν τα μέτρα διασποράς σε προβλήματα της καθημερινότητας και να εξάγουν χρήσιμα συμπεράσματα. Η δεύτερη διδακτική ενότητα ολοκληρώνεται με μια ανακεφαλαίωση όσων διδάχθηκαν, συζητούνται απόψεις και προτάσεις για εφαρμογή των μέτρων διασποράς.

Φυλλάδιο (2/2)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ο διπλανός πίνακας συχνοτήτων δίνει το βάρος ανδρών και γυναικών. Να υπολογιστούν

α) Η διακύμανση

β) Η τυπική απόκλιση

Βάρος Xi	Συχνότητα Vi
50	4
55	6
60	8
65	12
70	14
75	10
80	6

α) Για τον υπολογισμό της διακύμανσης, θα πρέπει να υπολογίσουμε τη μέση τιμή, η οποία με τη βοήθεια ενός πίνακα θα μας βοηθήσει στην υπόλοιπη διαδικασία.

Βάρος Xi	**Συχνότητα Vi**	**XiVi**	**Xi^2Vi**
50	4	200	10000
55	6	330	18150
60	8	480	28800
65	12	780	50700
70	14	980	68600
75	10	750	56250
80	6	480	384000
Σύνολο	**v=60**	**$\Sigma x_i v_i = 4000$**	**$\Sigma x_i^2 v_i = 270900$**

Οπότε τώρα μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τη μέση τιμή:

$\bar{x} = \frac{\Sigma\, xivi}{\nu} = \frac{4000}{60}$ άρα $\bar{x} \simeq 66.67$ kg

Για τον υπολογισμό της διακύμανσης, εφόσον η μέση τιμή δεν είναι ακέραιος αριθμός, προτιμούμε τη δεύτερη σχέση: $s^2 = \frac{1}{60}\{270900 - \frac{(4000)^\wedge 2}{60}\} = 70.56$ kg^2

β) Και έτσι η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{70{,}56} = 8.4$ kg.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1) Να υπολογίσετε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση για καθεμιά από τις παρακάτω λίστες δεδομένων (κέρδη σε χιλ. ευρώ μιας επιχείρησης, ανά 5μηνο). Συγκρίνοντας τα δεδομένα και τα αποτελέσματα τι συμπέρασμα βγάζετε;

   α) 1, 3, 4, 5, 7 β) 3, 9, 12, 15, 21

   γ) 6, 8, 9, 10, 12 δ) -1, -3, -4, -5, -7

2) Η βαθμολογία δέκα μαθητών σε ένα διαγώνισμα ήταν: 18, 14, 9, 20, 15, 11, 17, 19, 12, 10. Να υπολογίσετε:

   α) το εύρος, την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής.

Οι απαντήσεις δίνονται στο ξεχωριστό φύλλο απαντήσεων (1<u>5 λεπτά</u>).

Στο τέλος του 2ου φυλλαδίου, συλλέγονται οι απαντήσεις των φοιτητών και γίνεται μια συζήτηση όπου παρουσιάζονται οι απόψεις του καθενός και τα αποτελέσματα της κάθε άσκησης.

Τέλος, γίνεται μια σύντομη ανακεφαλαίωση των στοιχείων που διδάχθηκαν, τον τρόπο διαχωρισμού των εννοιών και αναφέρονται οι διάφορες εφαρμογές τους στην καθημερινότητα
(<u>10 λεπτά</u>).

Τέλος 2ης διδακτικής ενότητας

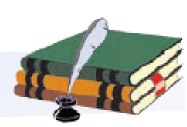
Η τρίτη διδακτική ενότητα περιλαμβάνει δύο τμήματα. Η ιστορική αναδρομή του πρώτου τμήματος περιγράφει τη συμβολή πολλών διάσημων μαθηματικών στη δημιουργία της κανονικής κατανομής και στους διάφορους τρόπους εφαρμογής της. Η σημαντική συμβολή του Quetelet και η σύνδεση της κατανομής αυτής με τη διωνυμική ξεχωρίζουν στο κείμενο αυτό. Παρουσιάζεται μάλιστα αυτούσιο το παράδειγμα του Quetelet στο οποίο υπολογίζει μια συμμετρική διωνυμική κατανομή, καθώς και η γραφική παράστασή του και ο πίνακας δεδομένων. Έπειτα, ακολουθεί η θεωρητική προσέγγιση της κανονικής κατανομής και τις διάφορες μορφές της. Παρουσιάζεται ταυτόχρονα και η τυπική κανονική κατανομή μαζί με την καμπύλη της, προκειμένου να γίνει ο συνδυασμός των κατανομών αυτών και να αντιληφθούν οι φοιτητές την άμεση σχέση μεταξύ τους και τη χρήση της τυπικής κανονικής κατανομής για τον υπολογισμό διαφόρων πιθανοτήτων. Ορισμένα σημαντικά στοιχεία για τις κατανομές αυτές στοχεύουν στη σχολαστική μελέτη τους και τον προσεκτικό διαχωρισμό τους. Γίνεται μια σύνδεση της κανονικής κατανομής με τα προηγούμενα μέτρα διασποράς, τα οποία συνδέονται για την ανάλυση των παρατηρήσεων κάθε περίπτωσης. Στην επόμενη δραστηριότητα αναλύονται και πάλι τα ιστορικά στοιχεία με τα μαθηματικά εργαλεία που παρουσιάστηκαν και εξάγονται διάφορα συμπεράσματα. Το τμήμα ολοκληρώνεται με την ανακεφαλαίωση, το διάλογο ανάμεσα στον εκπαιδευτικό και τους φοιτητές και τα χρήσιμα συμπεράσματα που εξάγονται.

Κανονική Κατανομή (1.5 διδακτική ώρα)

Φυλλάδιο (1/2)

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστεί η σημαντικότερη από τις συνεχείς κατανομές και η πιο σπουδαία ίσως από τις υπάρχουσες. Η κατανομή αυτή είναι γνωστή και ως κατανομή του Gauss ή κατανομή του Laplace.

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ



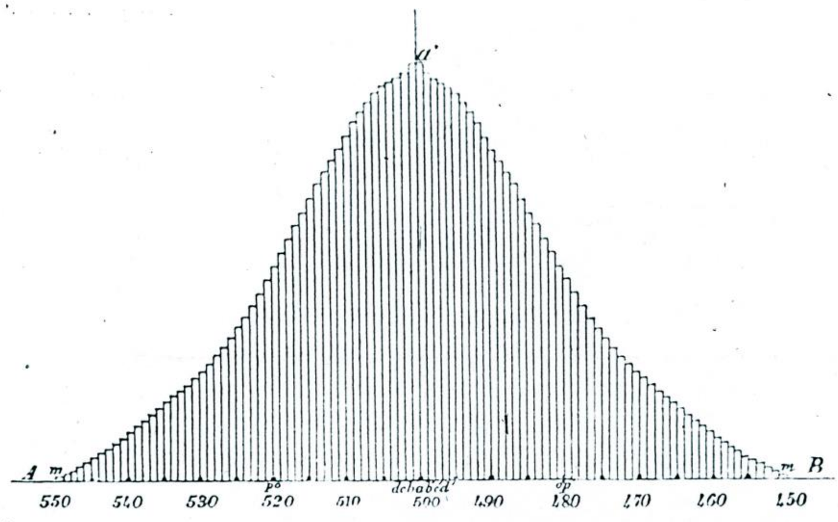
Πολλοί ερευνητές και διάσημοι μαθηματικοί ασχολήθηκαν με την κανονική κατανομή και προέβαλαν τον κορυφαίο της ρόλο. Οι Gauss (1777-1855) και Laplace (1749-1827) ανέδειξαν το ρόλο της κατανομής αυτής στη θεωρία των σφαλμάτων. Οι Quetelet (1796-1874) και Galton (1822-1911) απέδειξαν ότι η κανονική κατανομή μοντελοποιεί πάρα πολύ καλά μετρήσεις όπως το ύψος και το βάρος οντοτήτων. Ορίστηκε όμως η κανονική κατανομή περί το 1720 από το Γάλλο

Μαθηματικό Abraham De Moivre (1667-1754) ως η προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής B(n,p) όταν η παράμετρος n της κατανομής είναι πολύ μεγάλη. Έκτοτε η κατανομή αυτή χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση προβλημάτων σε κάθε έκφραση της επιστήμης και της τεχνολογίας.

Το 1657 ο Huygens φτάνει στο Παρίσι για να μάθει από τον Roberval τα νέα μαθηματικά της τύχης που ανέπτυξαν οι Pascal και Fermat. Το 1823 ο Adolphe Quetelet κάνει ένα παρόμοιο ταξίδι. Ο αρχικός λόγος του να έρθει στο Παρίσι αφορούσε την ίδρυση ενός παρατηρητηρίου στις Βρυξέλλες. Εκεί μαθαίνει τη δύναμη της κανονικής διανομής των Laplace και Gauss από τον Fourier. Αφιέρωσε πολύτιμο χρόνο στις κοινωνικές επιστήμες, εφαρμόζοντας τη χρήση αυτού του εργαλείου για να περιγράψει τον *l'homme moyen* (το μέσο άνθρωπο). Ακολουθούν ορισμένα παραδείγματα για το πώς χρησιμοποίησε την κανονική διανομή στο βιβλίο του 1846 με τίτλο Lettres a S.A.R. Le Duc Regnant de Saxe-Cobourg et Gotha sur la Theoriedes Probabilities appliquee aux sciences morales et politiques.

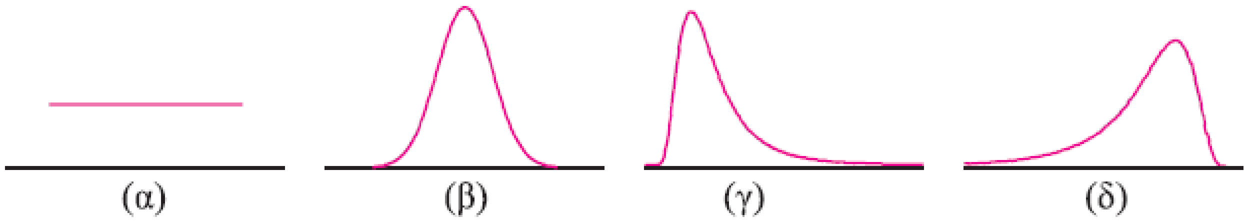
<u>Παράδειγμα</u>: Υπολογισμός συμμετρικής διωνυμικής κατανομής

Προκειμένου να προσεγγίσει την κανονική κατανομή ο Quetelet, υπολόγισε προσεκτικά μια συμμετρική διωνυμική κατανομή. Υπέθεσε ότι υπήρχε ένα δοχείο που περιείχε μεγάλο αριθμό μπαλών, οι μισές από τις οποίες ήταν λευκές και μισές μαύρες. Το πείραμα ήταν να αντλήσει 999 μπάλες από το δοχείο. Στη συνέχεια, ο Quetelet υπολόγισε τις πιθανότητες για 499 λευκές μπάλες (και 500 μαύρες), 498 λευκές μπάλες, 497 λευκές μπάλες και ούτω καθεξής. (Δεδομένου ότι η κατανομή είναι συμμετρική, υπολόγισε μόνο τις τιμές όπου υπήρχαν λιγότερες λευκές από τις μαύρες μπάλες). Το γράφημα ολόκληρης της κατανομής και ένα τμήμα του πίνακα από τον οποίο κατασκευάστηκε το γράφημα φαίνονται παρακάτω:



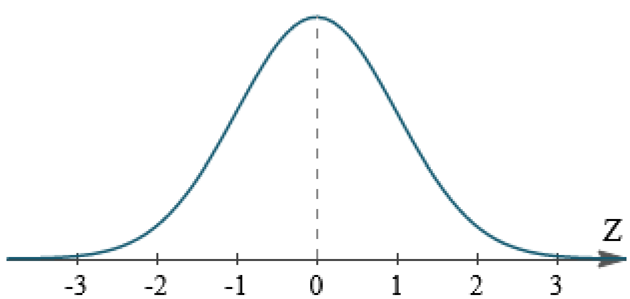
GROUPES DE	RANG des GROUPES.	ÉCHELLE de possibilité. — PROBABILITÉ du tirage de chaque GROUPE. Table A.	ÉCHELLE de précision. — SOMMES des probabilités à partir du groupe le plus probable. Table B.	ÉCHELLE de possibilité. — PROBABILITÉ relative du tir. de chaque GROUPE. Table C.
499 boules blanches et 500 noires. .	1	0.025225	0.025225	1.000000
498 id. 501 id. . .	2	0.025124	0.050349	0.996008
497 id. 502 id. . .	3	0.024924	0.075273	0.988072
496 id. 503 id. . .	4	0.024627	0.099900	0.976285
495 id. 504 id. . .	5	0.024236	0.124136	0.960789
494 id. 505 id. . .	6	0.023756	0.147892	0.941764
493 id. 506 id. . .	7	0.023193	0.171085	0.919429
492 id. 507 id. . .	8	0.022552	0.193637	0.894040
491 id. 508 id. . .	9	0.021842	0.215479	0.865882
490 id. 509 id. . .	10	0.021069	0.236548	0.835261
489 id. 510 id. . .	11	0.020243	0.256791	0.802506
488 id. 511 id. . .	12	0.019372	0.276163	0.767956
487 id. 512 id. . .	13	0.018464	0.294627	0.731958
486 id. 513 id. . .	14	0.017528	0.312155	0.694860
485 id. 514 id. . .	15	0.016573	0.328728	0.657008
484 id. 515 id. . .	16	0.015608	0.344335	0.618736
483 id. 516 id. . .	17	0.014640	0.358975	0.580364
482 id. 517 id. . .	18	0.013677	0.372652	0.542197
481 id. 518 id. . .	19	0.012726	0.385378	0.504516
480 id. 519 id. . .	20	0.011794	0.397172	0.467576
479 id. 520 id. . .	21	0.010887	0.408060	0.431609
478 id. 521 id. . .	22	0.010008	0.418070	0.396815
477 id. 522 id. . .	23	0.009166	0.427236	0.363366
476 id. 523 id. . .	24	0.008360	0.435595	0.331407

Η μορφή μιας κατανομής συχνοτήτων εξαρτάται από το πώς είναι κατανεμημένες οι παρατηρήσεις σε όλη την έκταση του εύρους τους. Μερικές χαρακτηριστικές καμπύλες συχνοτήτων που συναντάμε συχνά είναι οι:



Η κατανομή (β) με «κωδωνοειδή» μορφή λέγεται **κανονική κατανομή** (normal distribution) και παίζει σπουδαίο ρόλο στη Στατιστική. Όταν οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα σε ένα διάστημα [α, β] όπως στην (α) κατανομή, αυτή λέγεται ομοιόμορφη. Όταν οι παρατηρήσεις δεν είναι συμμετρικά κατανεμημένες, η κατανομή λέγεται ασύμμετρη με θετική συμμετρία, όπως στη (γ) ή αρνητική ασυμμετρία όπως στη (δ) κατανομή.

Όταν η κανονική κατανομή έχει μέση τιμή 0 και διακύμανση 1 (συμβολίζεται N(0,1)), τότε αυτή ονομάζεται **τυπική κανονική κατανομή** (standard normal distribution) και είναι πολύ σημαντική μιας και οποιαδήποτε κανονική κατανομή μπορεί να μετασχηματισθεί στην αντίστοιχη τυπική κανονική. Η κατανομή αυτή είναι συμμετρική γύρω από το 0 στους άξονες και η γραφική της παράσταση είναι:



Με τη βοήθεια της τυπικής κανονικής κατανομής, μπορούμε να υπολογίσουμε διάφορα στοιχεία σχετικά με τα στατιστικά δεδομένα που επεξεργαζόμαστε.

Σημαντικά στοιχεία που πρέπει να θυμόμαστε:

- ✓ Είναι συμμετρική (γύρω από το μέσο όρο) κωδωνοειδής (καμπάνα) κατανομή
- ✓ Όσο το $x \to \pm\infty$ οι ουρές της κατανομής $\to 0$

- ✓ Η τυχαία μεταβλητή της κανονικής κατανομής συμβολίζεται με X
- ✓ Η τυχαία μεταβλητή της τυπικής κανονικής κατανομής συμβολίζεται με Z

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική ή περίπου κανονική, τότε η τυπική απόκλιση s έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

i) το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα

$$(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$$

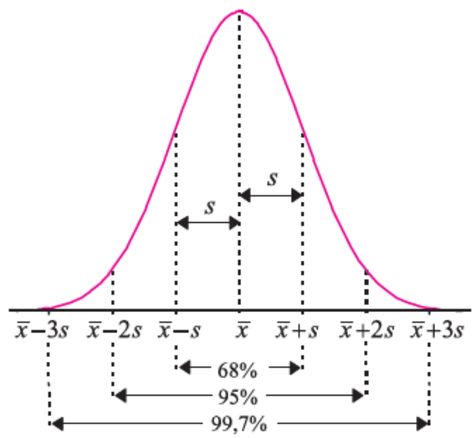
ii) το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα

$$(\bar{x}-2s, \bar{x}+2s)$$

iii) το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα

$$(\bar{x}-3s, \bar{x}+3s)$$

iv) το εύρος ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R \approx 6s$.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Με βάση τα ιστορικά στοιχεία που παρουσιάστηκαν και τη θεωρία για τις κατανομές, προσπαθήστε να περιγράψετε το ρόλο της κανονικής κατανομής στον τρόπο επεξεργασίας των στατιστικών δεδομένων. Τι μας βοηθά να υπολογίσουμε; Πως μπορούμε να υπολογίσουμε διάφορα στατιστικά στοιχεία; Με ποιο τρόπο επιτυγχάνεται αυτό;

Οι απαντήσεις δίνονται στο ξεχωριστό φύλλο απαντήσεων (<u>5 λεπτά</u>).

Στο τέλος του 1ου φυλλαδίου, συλλέγονται οι απαντήσεις των φοιτητών και γίνεται μια συζήτηση σχετικά με τα ιστορικά δεδομένα, τον τρόπο χρήσης της κατανομής και τη στάση τους απέναντι στα νέα δεδομένα που τους παρουσιάστηκαν.

Συζήτηση (<u>5 λεπτά</u>)

Στο δεύτερο τμήμα γίνεται μια προσπάθεια διεύρυνσης της θεωρίας, μέσα από ένα παράδειγμα χρήσης των δύο κατανομών, για τον υπολογισμό μιας πιθανότητας. Εκεί αναλύεται η διαδικασία μετατροπής της μεταβλητής από την κανονική στην τυπική κανονική καθώς και ο πίνακας της τυπικής κανονικής κατανομής που μας βοηθά να υπολογίσουμε πιθανότητες αναλόγως τα δεδομένα της κάθε άσκησης. Ως άσκηση για τους φοιτητές, παρουσιάζεται εν συντομία η διωνυμική κατανομή, προκειμένου να γίνει η σωστή σύνδεση με το ιστορικό πλαίσιο στο οποίο έγινε αναφορά στην αρχή της ενότητας. Η διδακτική ενότητα ολοκληρώνεται με τη συμμετοχή της ολομέλειας στη συζήτηση για τις κατανομές, τις διαφορές μεταξύ τους, την ανάλυση της καμπύλης της καθεμιάς και τα διάφορα συμπεράσματα των φοιτητών.

Φυλλάδιο (2/2)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω ότι η βαθμολογία 500 διαγωνιζομένων ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 45 και τυπική απόκλιση 20. Εάν το 20% των διαγωνιζομένων έχει πάρει άριστα, από ποια βαθμολογία και πάνω δόθηκε το άριστα;

Έστω X = η βαθμολογία των διαγωνιζομένων η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή ~ N(45,20).
Επομένως ψάχνουμε εκείνη την τιμή, για την οποία να ισχύει:

$$P(X > x) = 0.2 \Rightarrow P(X < x) = 0.8$$

Όμως εδώ πρέπει να προσέξουμε διότι η X ακολουθεί την κανονική κατανομή και όχι την τυπική κανονική. Θα πρέπει από το X να περάσουμε στο Z για να έχουμε έτσι στη διάθεσή μας και τους πίνακες.

Η μετατροπή αυτή γίνεται ως εξής:

$X \sim N(\mu,\sigma^2) \underset{\Leftarrow}{\overset{\Rightarrow}{}} Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$, όπου μ η μέση τιμή και σ^2 η διακύμανση. Άρα

$$P(X < x) = 0.8 \Rightarrow P(X - 45 < x - 45) = 0.8 \Rightarrow P\left(\frac{X-45}{20} < \frac{x-45}{20}\right) = 0.8$$

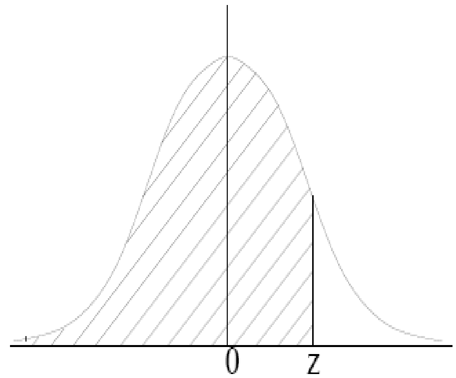
$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{x-45}{20}\right) = 0.8$$

οπότε τώρα ψάχνουμε στον πίνακα, εκείνη την τιμή z, η οποία μας δίνει πιθανότητα περίπου 0.8. Από τον πίνακα βρίσκουμε ότι η z = 0.84 μας δίνει πιθανότητα 0.8.

Οπότε

$$\frac{x-45}{20} \approx 0.84 \Rightarrow x \approx 45 + 20 \times 0.84 = 61.8$$

Ο πίνακας ο οποίος μας βοηθά στον υπολογισμό πιθανοτήτων της μορφής P(Z<z) για την κατανομή αυτή:



z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0.1	0.5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0.2	0.5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0.3	0.6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0.4	0.6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0.5	0.6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0.6	0.7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0.7	0.7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0.8	0.7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0.9	0.8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1.0	$\boxed{0.8413}$	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1.1	0.8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830

- ✓ Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε π.χ. P(Z<1) τότε από τον παραπάνω πίνακα βρίσκουμε ότι P(Z<1.0)=0.8413.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Μελετήστε τη διωνυμική κατανομή

Υπάρχουν πολλά προβλήματα της επιστήμης και της καθημερινότητας τα οποία μπορούν να θεωρηθούν ως τυχαία πειράματα που οδηγούν σε δύο δυνατά αποτελέσματα δυαδικής μάλιστα φύσης, ένα αποτέλεσμα ή το εντελώς αντίθετό του. Για παράδειγμα:

α) Η συμμετοχή σε μια εξεταστική διαδικασία είναι ένα τυχαίο πείραμα αφού κανείς δε μπορεί να προβλέψει με βεβαιότητα το αποτέλεσμα. Υπάρχουν όμως δύο δυνατά αποτελέσματα. Το ένα είναι επιτυχία στην εξέταση και το άλλο, το εντελώς αντίθετό του, αποτυχία στην εξέταση.
β) Σε μια έρευνα σχετικά με το κάπνισμα στο φοιτητικό πληθυσμό. Κάθε φοιτητής που συμμετέχει στην έρευνα και ερωτάται για το αν καπνίζει ή όχι, μπορεί να θεωρηθεί ως τυχαίο πείραμα αφού κανείς δε μπορεί να προβλέψει με βεβαιότητα την απάντηση. Υπάρχουν όμως δύο δυνατές απαντήσεις: να καπνίζει και η εντελώς αντίθετή της, να μην καπνίζει.
γ) Στον έλεγχο ποιότητας σε μια γραμμή παραγωγής ενός εργοστασίου, παραγόμενα προϊόντα επιλέγονται στην τύχη και ελέγχεται η ποιότητά τους. Η εξέταση ενός προϊόντος συνιστά τυχαίο πείραμα αφού δε μπορεί να προβλεφθεί με βεβαιότητα αν το συγκεκριμένο προϊόν είναι ποιοτικά σύμφωνο με τις προδιαγραφές ή όχι. Υπάρχουν όμως δύο δυνατές περιπτώσεις. Το προϊόν να είναι τέλειο ή να παρουσιάζει ελαττώματα.
Κοινό χαρακτηριστικό των προηγούμενων παραδειγμάτων είναι ότι πρόκειται για τυχαία πειράματα με δύο δυνατά αποτελέσματα, Ε (επιτυχία) και Α (αποτυχία). Ένα τυχαίο πείραμα με δύο δυνατά αποτελέσματα ονομάζεται **δοκιμή Bernoulli**.
Όταν τα πειράματα που πραγματοποιούνται πληρούν τις εξής προϋποθέσεις:

1) Αποτελούνται από προκαθορισμένο αριθμό επαναλήψεων
2) Σε κάθε επανάληψη υπάρχουν δύο δυνατά αποτελέσματα, Ε και Α,

τότε τα πειράματα αυτά θα λέγονται διωνυμικά τυχαία πειράματα.
Όταν μάλιστα ισχύουν και τα εξής:

3) Οι επαναλήψεις είναι ανεξάρτητες η μια από την άλλη
4) Η πιθανότητα Ε παραμένει αμετάβλητη από επανάληψη σε επανάληψη

τότε λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί **διωνυμική κατανομή** (binomial distribution) με παραμέτρους n το πλήθος και p ($0 \leq p \leq 1$) και συμβολίζεται $X \sim B(n,p)$.

Στο τέλος του $2^{ου}$ φυλλαδίου γίνεται συζήτηση σχετικά με τις δύο κατανομές. Δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζεται η καμπύλη της κατανομής και τι συμπεράσματα εξάγονται (<u>10 λεπτά</u>).

<u>*Τέλος 3ης διδακτικής ενότητας*</u>

Η τελευταία ενότητα της διδακτικής πρότασης, χωρισμένη σε δύο τμήματα, περιλαμβάνει αρκετές γραφικές παραστάσεις κατανομής συχνοτήτων, οι οποίες συμβάλλουν στην παρουσίαση των στατιστικών δεδομένων. Στο πρώτο τμήμα και την ιστορική αναδρομή παρουσιάζονται στους φοιτητές διάφορα διαγράμματα κατά την περίοδο εμφάνισής τους. Ένα διάγραμμα συχνοτήτων του 10ου αιώνα, ένα χρονόγραμμα του 18ου αιώνα, ένα ραβδόγραμμα κατασκευασμένο το 1786, δύο κυκλικά διαγράμματα του 1801, ένα γράφημα κύκλων του ίδιου έτους, ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων από το 1833, μια αθροιστική κατανομή συχνότητας του 1889 και ένα διάγραμμα διασποράς από το 1925. Στη δραστηριότητα που ακολουθεί, οι διδασκόμενοι μελετούν με προσοχή όλα τα παραπάνω, με στόχο να κατανοήσουν την ανάγκη της κάθε εποχής για καταγραφή διαφόρων δεδομένων, με κάθε δυνατό τρόπο. Εργαζόμενοι σε ομάδες, ζητείται να εντοπίσουν στοιχεία σημαντικά για κάθε γραφική παράσταση τα οποία είναι απαραίτητα για την κατασκευή τους. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται αναλυτικά πέντε τύποι διαγραμμάτων, το ραβδόγραμμα, το διάγραμμα συχνοτήτων, το κυκλικό διάγραμμα, το σημειόγραμμα και το χρονόγραμμα μαζί με τις απαραίτητες πληροφορίες που πρέπει να τα συνοδεύουν σε κάθε περίπτωση και τον τρόπο κατασκευής τους. Στην επόμενη δραστηριότητα, γίνεται μια προσπάθεια διάκρισης του κάθε γραφήματος, του τρόπου κατασκευής και της ορθής επιλογής τους για κάθε περίπτωση. Το πρώτο τμήμα ολοκληρώνεται με μια σύντομη ανακεφαλαίωση όλων των πληροφοριών που διδάχθηκαν οι φοιτητές.

Παρουσίαση Στατιστικών Δεδομένων – Γραφική Παράσταση Κατανομής Συχνοτήτων (3 διδακτικές ώρες)

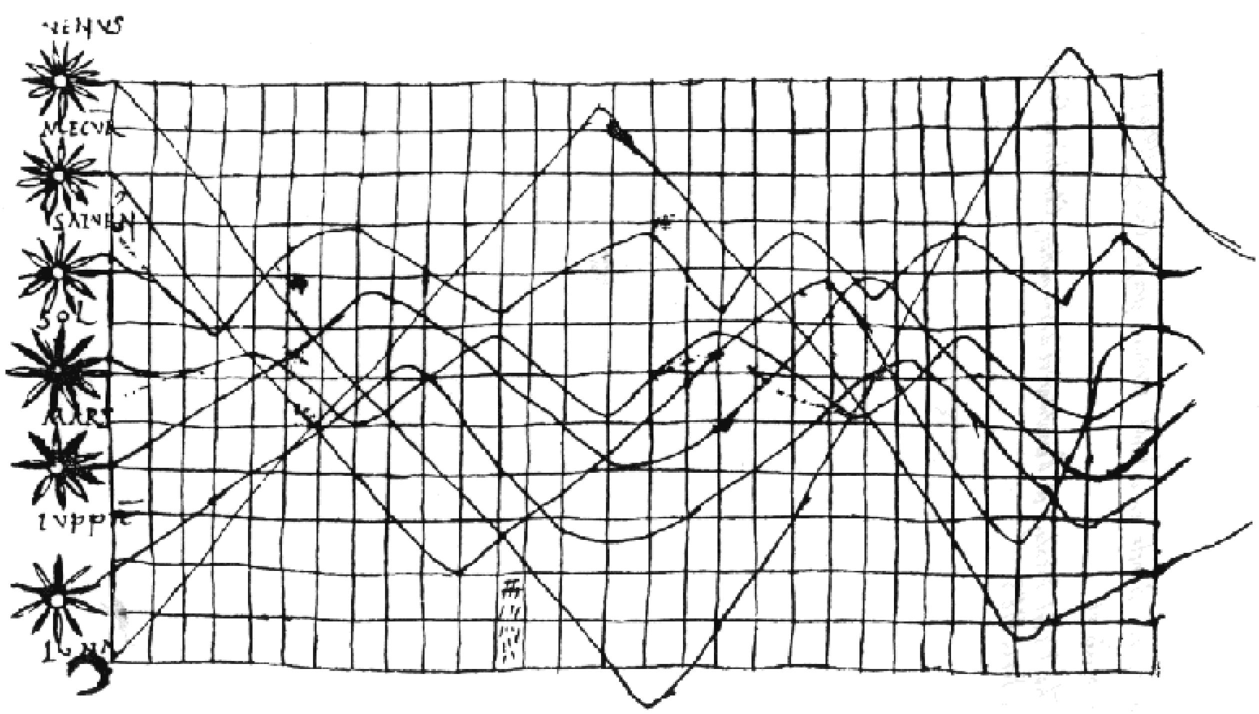
Φυλλάδιο (1/2)

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Το πρώτο τυπωμένο παράδειγμα διαγράμματος συχνότητας είναι στα τέλη του $10^{ου}$ ή στις αρχές του $11^{ου}$ αιώνα. Ο H. Gray Funkhouser δήλωσε τα εξής:

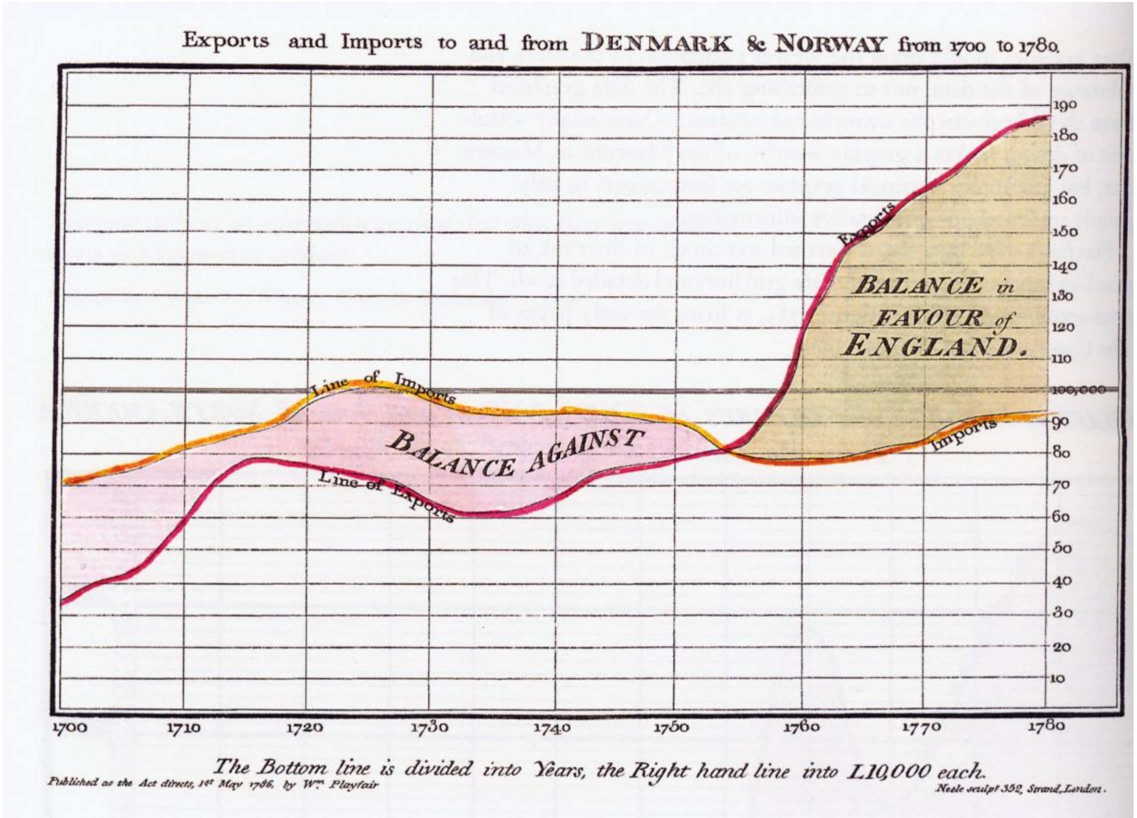
Το διάγραμμα αντιπροσωπεύει μια γραφική παράσταση των κλίσεων των πλανητικών τροχιών σε συνάρτηση με το χρόνο. Για το σκοπό αυτό, η ζώνη του ζωδιακού κύκλου αναπαρίστανται στο επίπεδο με τον οριζόντιο άξονα. Ο κάθετος άξονας καθορίζει το πλάτος του ζωδιακού κύκλου. Η οριζόντια κλίμακα φαίνεται να έχει επιλεγεί για κάθε πλανήτη ξεχωριστά για τις περιόδους.

<u>Διάγραμμα συχνοτήτων $10^{ου}$ αιώνα:</u>



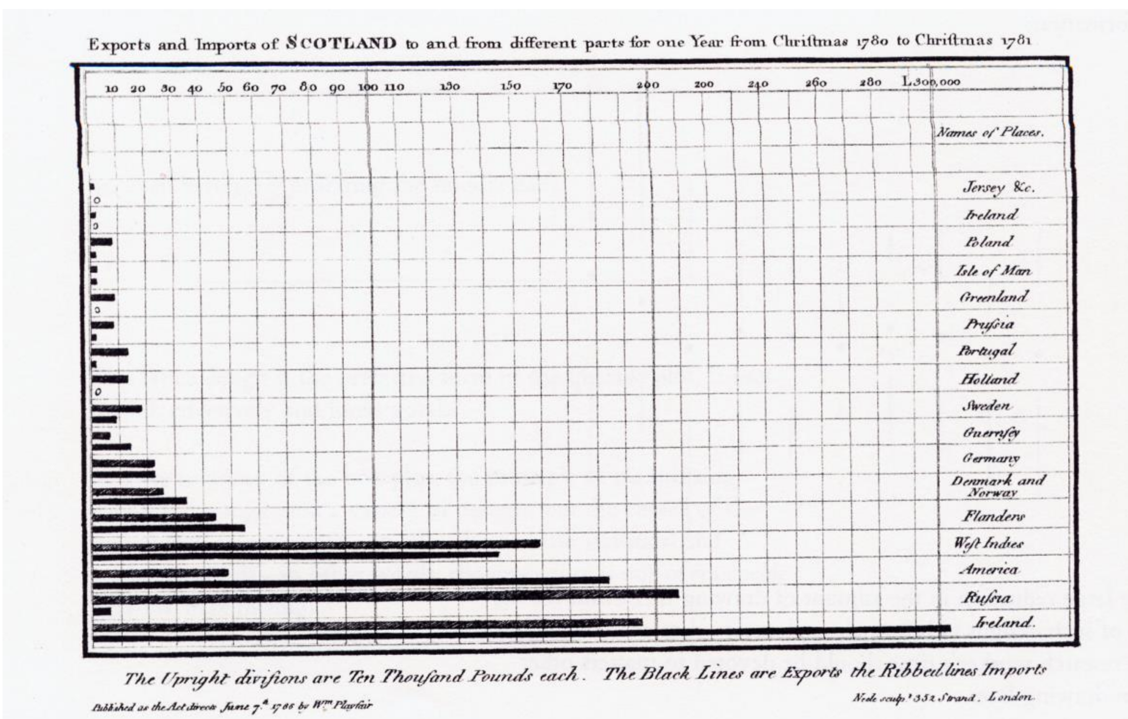
Το γράφημα αντιπροσωπεύει μια γραφική παράσταση των κλίσεων των πλανητικών τροχιών ως συνάρτηση του χρόνου. Για το σκοπό αυτό, η ζώνη του ζωδιακού κύκλου αναπαρίστανται σε επίπεδο με οριζόντιο άξονα. Ο κάθετος άξονας καθορίζει το πλάτος του ζωδιακού κύκλου. Η οριζόντια κλίμακα φαίνεται να έχει επιλεγεί για κάθε πλανήτη ξεχωριστά για τις περιόδους και δεν μπορεί να συμβιβαστεί. Το συνοδευτικό κείμενο αναφέρεται μόνο στα πλάτη. Οι καμπύλες δεν σχετίζονται χρονικά.

<u>Χρονόγραμμα 18ου αιώνα από τον William Playfair:</u>



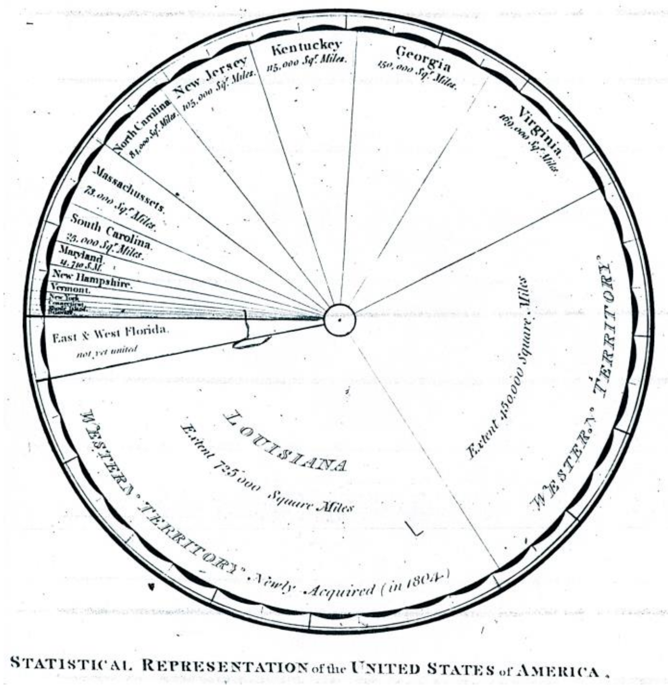
Απεικονίζονται οι εισαγωγές και οι εξαγωγές από Δανία και Νορβηγία από το 1700 έως το 1780, κατά και υπέρ της Αγγλίας.

<u>Ραβδόγραμμα από τον William Playfair το 1786:</u>

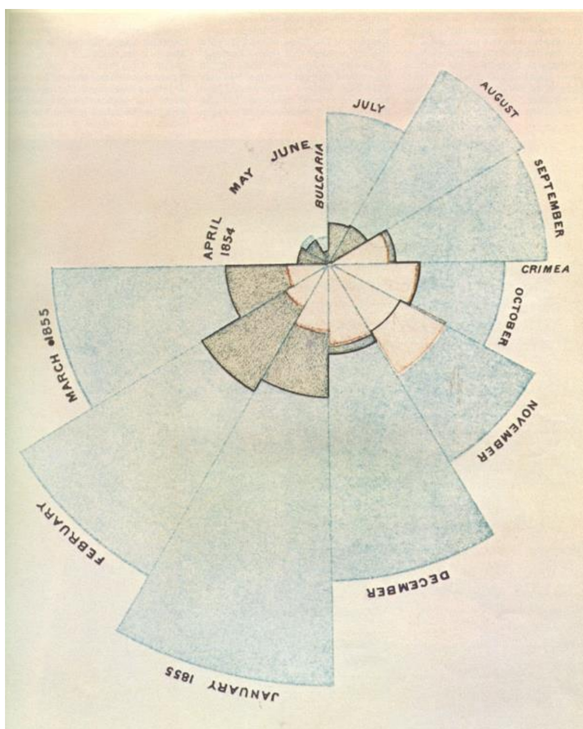


Απεικονίζονται οι εισαγωγές και οι εξαγωγές της Σκωτίας σε διάφορα μέρη από το 1780 έως το 1781.

Κυκλικά Διαγράμματα από τον William Playfair το 1801:

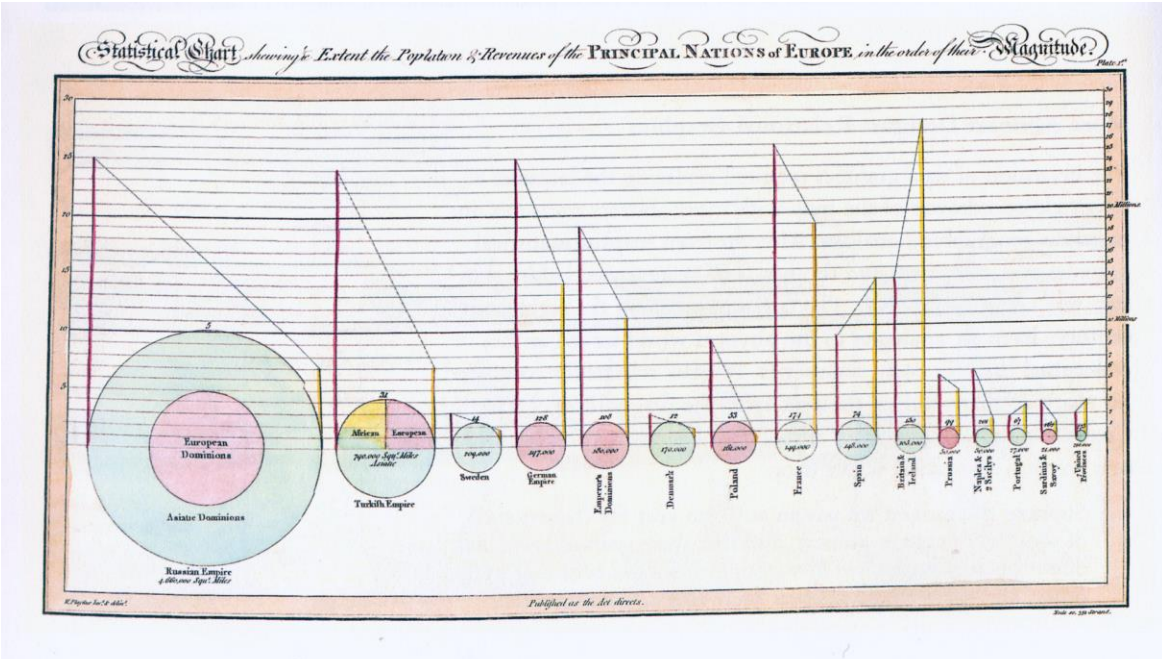


Κάθε κομμάτι της πίτας αντιπροσωπεύει τη συνολική μάζα εδάφους μιας πολιτείας ή περιοχής. Το μέγεθος κάθε κομματιού σε σχέση με ολόκληρο τον κύκλο είναι ανάλογο με το μέγεθος κάθε πολιτείας σε σχέση με ολόκληρη τη χώρα.



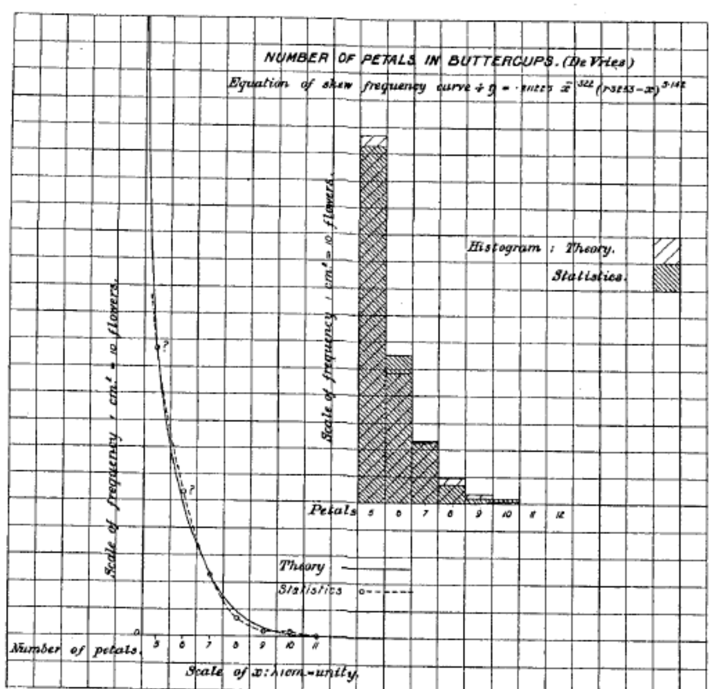
Κάθε κομμάτι στο γράφημα αντιπροσωπεύει το μηνιαίο ποσοστό θανάτου κατά τη χρονική περίοδο από τον Απρίλιο 1854 έως τον Μάρτιο του 1855. Κάθε σφήνα χωρίζεται σε τρία τμήματα που αντιπροσωπεύουν διαφορετικές αιτίες θανάτου. Ο εσωτερικός δείχνει θάνατο λόγω πληγών. Το σκοτεινό, μεσαίο τμήμα αντιπροσωπεύει «άλλες αιτίες» και το μεγαλύτερο εξωτερικό τμήμα εμφανίζει το θάνατο από ασθένειες που μπορούν να προληφθούν.

Γράφημα κύκλων από τον William Playfair το 1801:



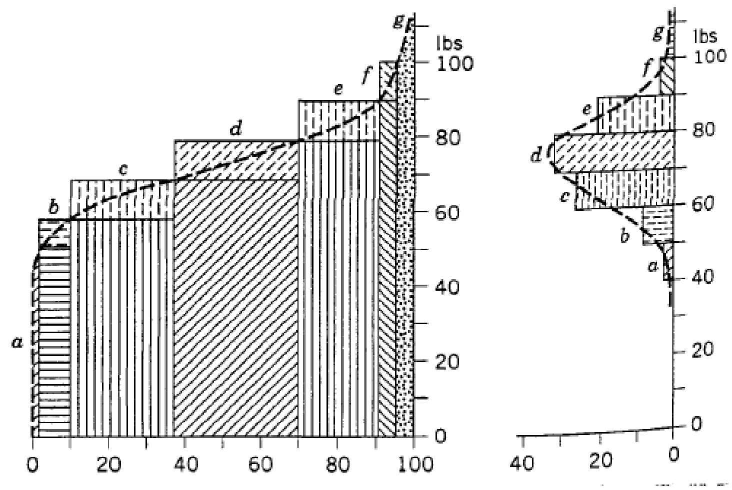
Σε αυτό το γράφημα, το Playfair σχεδιάζει κύκλους για να εκπροσωπήσει την περιοχή κάθε χώρας των «Κύριων Εθνών στην Ευρώπη». Οι κάθετες γραμμές στα αριστερά κάθε κύκλου αντιπροσωπεύουν τον πληθυσμό κάθε χώρας (μετράται σε εκατομμύρια.) Οι κάθετες γραμμές στα δεξιά κάθε κύκλου αντιπροσωπεύουν τα έσοδα κάθε χώρας (μετρημένα σε εκατομμύρια λίρες στερλίνες.) Οι διακεκομμένες γραμμές συνδέουν τιμές ανήκουν στην ίδια χώρα.

Ιστόγραμμα Συχνοτήτων από τον A.M. Guerry το 1833:



Απεικονίζεται ο αριθμός των πετάλων στα λουλούδια

Αθροιστική Κατανομή Συχνότητας από τον Galton το 1889:



Strength of pull in pounds for 519 males aged 23-26 (Hald,1998 p. 602)

Ισχύς έλξης σε λίβρες για 519 άνδρες ηλικίας 23-26 ετών

Διάγραμμα Διασποράς από τον R.A.Fisher το 1925:

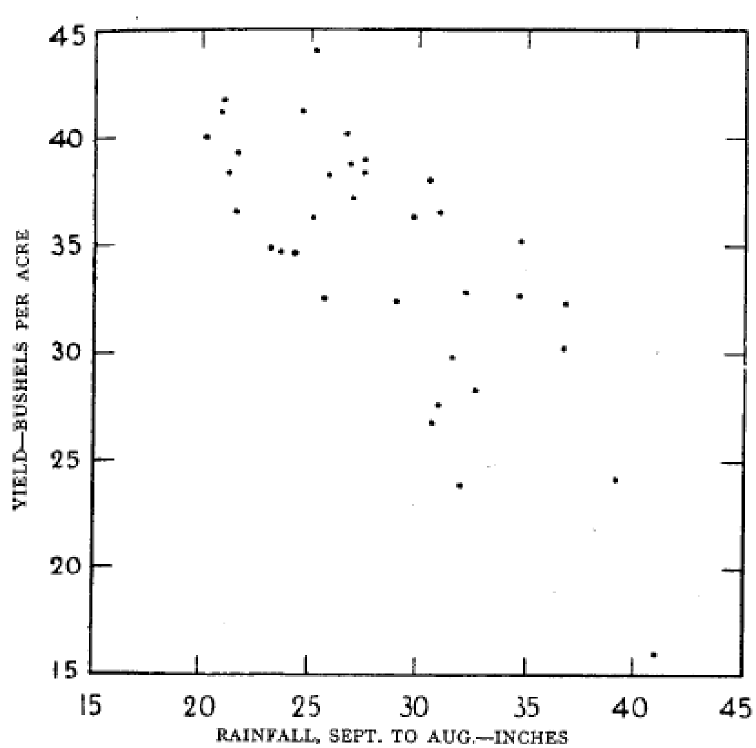


FIG. 2.—Wheat yield and rainfall for 35 years, 1854-1888.

Απόδοση και βροχόπτωση σίτου για 35 χρόνια, 1854-1888.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Προσπαθήστε μελετώντας τα παραπάνω εννιά διαγράμματα, να εντοπίσετε το θέμα, τον τρόπο παρουσίασής τους και τα δεδομένα που μπορούν να εξαχθούν μέσα από αυτά.

Ποια είναι τα πιο σημαντικά στοιχεία στο κάθε ένα;

Μπορείτε να αναφέρετε για κάθε περίπτωση ξεχωριστά τις κλίμακες που χρησιμοποιούνται, την πηγή και το σκοπό κατασκευής τους;

Εργαστείτε σε ομάδες των δύο ατόμων.

Οι απαντήσεις δίνονται στο ξεχωριστό φύλλο απαντήσεων (15 λεπτά).

Μετά τη συλλογή των απαντήσεων των φοιτητών, γίνεται μια συζήτηση γύρω από τα ευρήματά τους, τον τρόπο παρουσίασης των δεδομένων με το πέρασμα του χρόνου, τη χρησιμότητά τους καθώς και τα πεδία εφαρμογής τους (15 λεπτά).

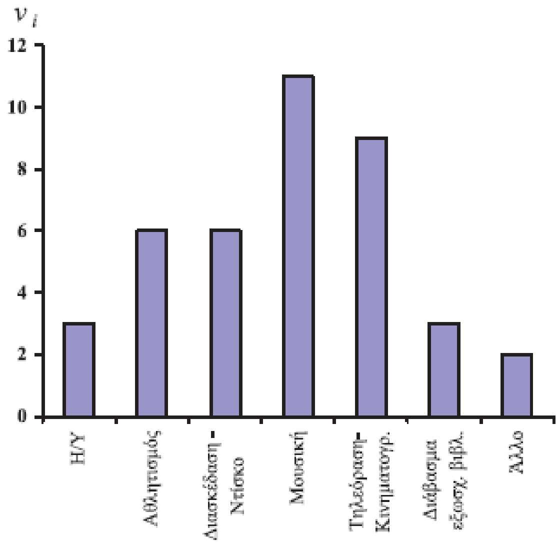
Γραφική Παράσταση Κατανομής Συχνοτήτων

Τα στατιστικά δεδομένα παρουσιάζονται πολλές φορές και υπό μορφή γραφικών παραστάσεων ή διαγραμμάτων. Οι γραφικές παραστάσεις παρέχουν πιο σαφή εικόνα του χαρακτηριστικού σε σχέση με τους πίνακες, είναι πολύ πιο ενδιαφέρουσες και ελκυστικές, χωρίς βέβαια να προσφέρουν περισσότερη πληροφορία από εκείνη που περιέχεται στους αντίστοιχους πίνακες συχνοτήτων. Επιπλέον, με τα διαγράμματα διευκολύνεται η σύγκριση μεταξύ ομοειδών στοιχείων για το ίδιο ή για διαφορετικά χαρακτηριστικά.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι γραφικής παρουσίασης, ανάλογα με το είδος των δεδομένων που έχουμε. Όμως, όπως οι στατιστικοί πίνακες έτσι και τα στατιστικά διαγράμματα πρέπει να συνοδεύονται από α) τον τίτλο, β) την κλίμακα με τις τιμές των μεγεθών που απεικονίζονται, γ) το υπόμνημα που επεξηγεί συνήθως τις τιμές της μεταβλητής και δ) την πηγή των δεδομένων.

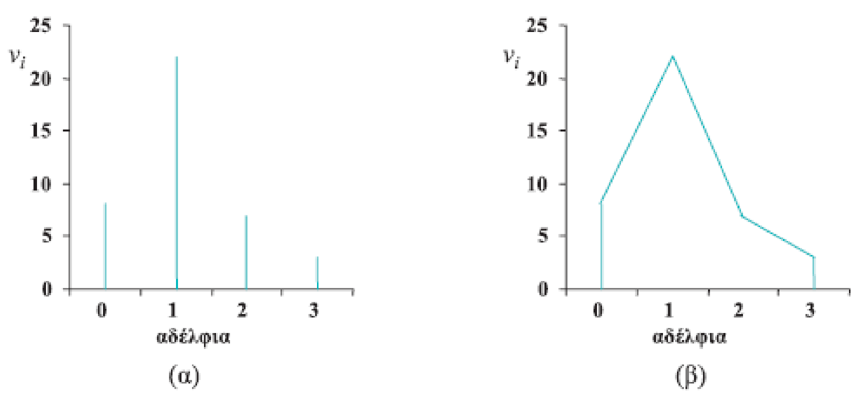
Τα πιο γνωστά διαγράμματα σήμερα είναι τα:

- Το **Ραβδόγραμμα** (bar chart) χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής. Το ραβδόγραμμα αποτελείται από ορθογώνιες στήλες που οι βάσεις τους βρίσκονται πάνω στον οριζόντιο ή τον κατακόρυφο άξονα. Σε κάθε τιμή της μεταβλητής Χ αντιστοιχεί μια ορθογώνια στήλη της οποίας το ύψος είναι ίσο με την αντίστοιχη συχνότητα ή σχετική συχνότητα. Έτσι έχουμε αντίστοιχα το ραβδόγραμμα συχνοτήτων και το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων. Τόσο η απόσταση μεταξύ των στηλών όσο και το μήκος των βάσεών τους καθορίζονται αυθαίρετα.



Ραβδόγραμμα συχνοτήτων για την απασχόληση μαθητών

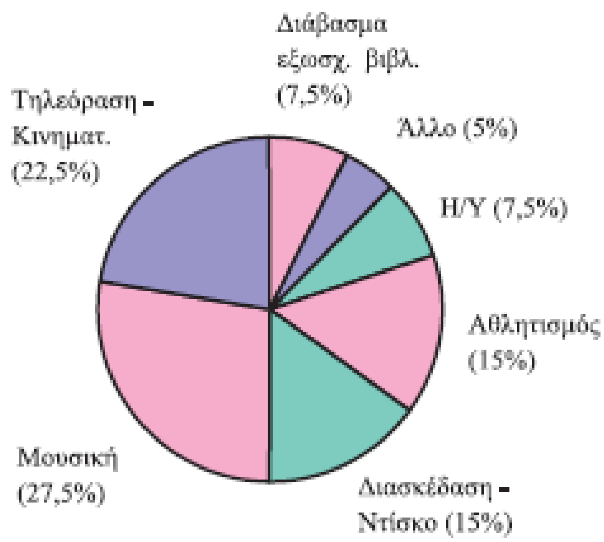
❖ Το **Διάγραμμα Συχνοτήτων** (line diagram) χρησιμοποιείται όταν έχουμε μια ποσοτική μεταβλητή, αντί του ραβδογράμματος. Αυτό μοιάζει με το ραβδόγραμμα με μόνη διαφορά ότι αντί να χρησιμοποιούμε συμπαγή ορθογώνια υψώνουμε σε κάθε x_i (υποθέτοντας ότι $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$) μια κάθετη γραμμή με μήκος ίσο προς την αντίστοιχη συχνότητα. Μπορούμε επίσης αντί των συχνοτήτων στον κάθετο άξονα να βάλουμε τις σχετικές συχνότητες, οπότε έχουμε το **διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων**. Ενώνοντας τα σημεία τους έχουμε το λεγόμενο πολύγωνο συχνοτήτων ή πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων, που μας δίνουν μια γενική ιδέα για τη μεταβολή της συχνότητας ή της σχετικής συχνότητας, όσο μεγαλώνει η τιμή της μεταβλητής που εξετάζουμε.



Διάγραμμα και Πολύγωνο Συχνοτήτων για τον αριθμό αδερφών των μαθητών

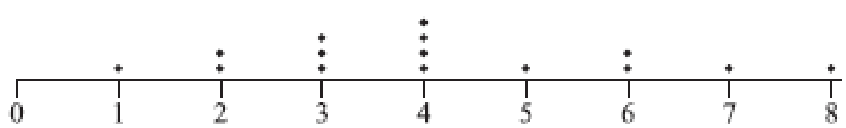
- Το **Κυκλικό Διάγραμμα** (pie chart) χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες. Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή, ισοδύναμα, τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες ν_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i των τιμών x_i της μεταβλητής. Αν συμβολίσουμε με α_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, τότε:

$$\alpha_i = \nu_i \frac{360^\circ}{\nu} = 360^\circ f_i \quad \text{για } i = 1, 2, \ldots, \kappa.$$

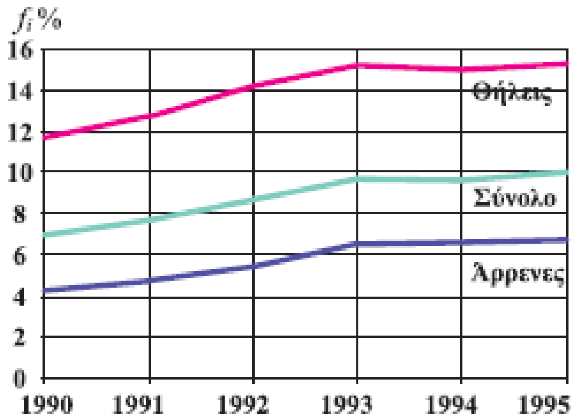


Κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων της απασχόλησης μαθητών

- Το **Σημειόγραμμα** (dot diagram) χρησιμοποιούμε όταν έχουμε λίγες παρατηρήσεις**.** Οι τιμές παριστάνονται γραφικά σαν σημεία υπεράνω ενός οριζοντίου άξονα.



- Το **Χρονόγραμμα** (times series graph) ή αλλιώς χρονολογικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική απεικόνιση της διαχρονικής εξέλιξης ενός οικονομικού, δημογραφικού ή άλλου μεγέθους. Ο οριζόντιος άξονας χρησιμοποιείται συνήθως ως άξονας μέτρησης του χρόνου και ο κάθετος ως άξονας μέτρησης της εξεταζόμενης μεταβλητής.



Ποσοστά ανεργίας στην Ελλάδα

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Με βάση τις κατηγορίες που προηγήθηκαν μπορείτε να περιγράψετε πως επιλέγουμε κάθε γράφημα ξεχωριστά και τι πρέπει να προσέξουμε κατά την κατασκευή τους;
Έχουν γίνει διακριτές οι διαφορές μεταξύ τους;

Στο τέλος του 1ου φυλλαδίου γίνεται μια σύντομη ανακεφαλαίωση όλων των γραφημάτων και πως εφαρμόζονται σε κάθε περίπτωση.
Συζήτηση (10 λεπτά)

Το δεύτερο τμήμα περιλαμβάνει πέντε ασκήσεις διαφόρων ειδών, στις οποίες οι φοιτητές δοκιμάζουν να εφαρμόσουν και να αξιοποιήσουν τις γνώσεις που διδάχθηκαν. Η πρώτη άσκηση εξετάζει την κατασκευή χρονογράμματος μέσα από έναν πίνακα δεδομένων και την εξαγωγή συμπερασμάτων γύρω από αυτό. Στη δεύτερη ζητείται να κατασκευασθεί ένα ραβδόγραμμα, από δεδομένα τα οποία παρουσιάζονται σε πίνακα. Η τρίτη άσκηση καλεί τους φοιτητές να κατασκευάσουν ένα διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων μέσα από ένα πρόβλημα της καθημερινότητας. Η τέταρτη, μια λογικής προσέγγισης άσκηση, προσπαθεί να προβληματίσει τους διδασκόμενους και να ελέγξει για την πλήρη κατανόηση του πολυγώνου σχετικών συχνοτήτων. Η πέμπτη και τελευταία άσκηση παρουσιάζει ένα ραβδόγραμμα και μέσα από αυτό γίνεται μια προσπάθεια διερεύνησης του τρόπου αντιμετώπισής του από τους φοιτητές, με ερωτήσεις οι οποίες απαιτούν ανάλυση και επεξεργασία των δεδομένων. Η τέταρτη ενότητα ολοκληρώνεται με τη συζήτηση στην οποία γίνεται μια ανακεφαλαίωση όλων όσων παρουσιάστηκαν και στην προσεκτική ανάλυση και κατασκευή κάθε γραφικής παράστασης ξεχωριστά.

Φυλλάδιο (2/2)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1) Στον παρακάτω πίνακα παριστάνονται οι χρόνοι (σε λεπτά και δευτερόλεπτα) των νικητών των Ολυμπιακών αγώνων στην κολύμβηση στα 400 μέτρα ελευθέρας (freestyle) ανδρών και γυναικών. Να δώσετε για κάθε φύλο χωριστά το χρονόγραμμα των δεδομένων αυτών. Τι συμπέρασμα βγάζετε;

Έτος	Χρόνος Ανδρών	Χρόνος Γυναικών	Έτος	Χρόνος Ανδρών	Χρόνος Γυναικών
1904	6:16.2	—	1956	4:27.3	4:54.6
1908	5:36.8	—	1960	4:18.3	4:50.6
1912	5:24.4	—	1964	4:12.2	4:43.3
1920	5:26.8	—	1968	4:09.0	4:31.8
1924	5:04.2	6:02.2	1972	4:00.3	4:19.4
1928	5:01.6	5:42.8	1976	3:51.9	4:09.9
1932	4:48.4	5:28.5	1980	3:51.3	4:08.8
1936	4:44.5	5:26.4	1984	3:51.2	4:07.1
1948	4:41.0	5:17.8	1988	3:47.0	4:03.9
1952	4:30.7	5:12.1	1992	3:45.0	4:07.2

Πηγή: The World Almanac and Book of Facts, 1994.

2) Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται τα μετάλλια που πήραν διάφορες χώρες στο 17ο Ευρωπαϊκό Πρωτάθλημα Στίβου το 1998. Να παρασταθούν τα δεδομένα σε ραβδόγραμμα.

Χώρα	Χρυσά	Ασημένια	Χάλκινα
Μ. Βρετανία	9	4	3
Γερμανία	8	7	8
Ρωσία	6	9	7
Πολωνία	3	4	1
Ρουμανία	3	2	2
Ουκρανία	3	2	1
Ιταλία	2	4	3
Πορτογαλία	2	3	1
Ισπανία	2	1	4
Γαλλία	2	1	1
Ελλάδα	1	0	2

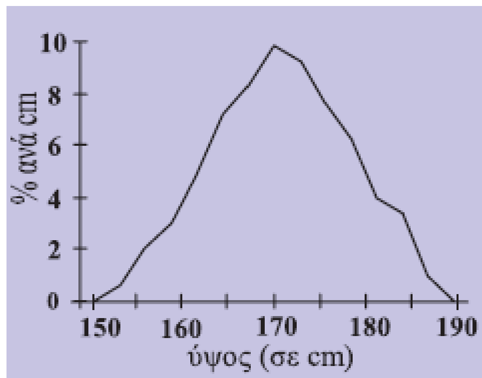
3) Τα παρακάτω δεδομένα αντιπροσωπεύουν την επίδοση 50 υποψηφίων για την πρόσληψή τους σε μια ιδιωτική σχολή (κλίμακα 0-10).

6 7 8 5 1 4 7 3 9 9 2 5 3 8 6 7 7 6 8 1 3 0 1 4 9

0 9 7 8 6 1 2 3 5 4 6 6 4 3 2 8 8 7 7 6 5 5 9 2 4

Να κατασκευάσετε το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

4) Ένας μαθητής έκανε το παρακάτω πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων για το ύψος των αγοριών της τάξης του. Είναι σωστό;

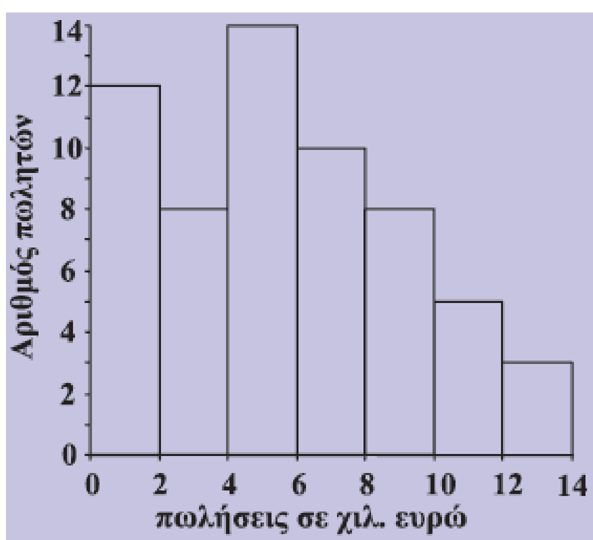


5) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα ύψη των πωλήσεων σε χιλιάδες ευρώ που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρίας κατά τη διάρκεια ενός έτους.

α) Πόσοι είναι οι πωλητές;

β) Πόσοι πωλητές έκαναν πωλήσεις πάνω από 5 χιλιάδες ευρώ;

γ) Πως θα μπορούσατε να υπολογίσετε τα συνολικά έσοδα της εταιρίας για το συγκεκριμένο έτος;



Οι απαντήσεις δίνονται στο ξεχωριστό φύλλο απαντήσεων (30 λεπτά).
Στο τέλος του 2^{ου} φυλλαδίου γίνεται μια ανακεφαλαίωση, επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον των φοιτητών στην ποικιλία των τρόπων παράστασης των δεδομένων, τα χρήσιμα συμπεράσματα καθώς και τα σημαντικά στοιχεία που πρέπει να διαθέτει απαραιτήτως το κάθε ένα (10 λεπτά).

Τέλος 4^{ης} διδακτικής ενότητας

Η διδακτική πρόταση ολοκληρώνεται με μια ελεύθερη συζήτηση η οποία λαμβάνει χώρα μετά το ερωτηματολόγιο μεταγνωστικής συνειδητοποίησης. Γίνεται ένας εποικοδομητικός διάλογος, στον οποίο εκφράζονται οι απόψεις των φοιτητών για ολόκληρη τη διδακτική διαδικασία, τα χρήσιμα συμπεράσματα και τις προτάσεις τους για τη βελτίωση του τρόπου διδασκαλίας, του υλικού αλλά και τη χρήση της Ιστορίας στο εκπαιδευτικό έργο.

Μετά το πέρας των τεσσάρων διδακτικών ενοτήτων, πραγματοποιείται μια συζήτηση γενικού περιεχομένου καθώς και μια αξιολόγηση του εκπαιδευτικό υλικού, τον τρόπο παρουσίασης, το βαθμό κατανόησης των στατιστικών εννοιών από τους φοιτητές καθώς και διάφορες προτάσεις από πλευράς τους για καλύτερη και αποτελεσματικότερη προσέγγιση, με στόχο τη μείωση των δυσκολιών στο ελάχιστο δυνατό. Ως επίλογο αυτής της συζήτησης, κρίνεται αναγκαία η ανάλυση των εκπαιδευόμενων ως προς το ιστορικό τους ενδιαφέρον και τη γενικότερη στάση τους στην επιστήμη της Στατιστικής και τον κλάδο των Μαθηματικών.

Αντί Επιλόγου

Η σπουδαιότητα της Στατιστικής αποτελεί γεγονός αναμφισβήτητο στην καθημερινότητα του σύγχρονου ανθρώπου. Η μελέτη του κλάδου αυτού των Μαθηματικών όχι μόνο δίνει τη δυνατότητα κατανόησης, μελέτης, επεξεργασίας και ανάλυσης δεδομένων αλλά ταυτόχρονα εμπλουτίζει την κριτική σκέψη, τον τρόπο διαχείρισης αποτελεσμάτων καθώς και τον έλεγχο της εγκυρότητάς τους. Η Στατιστική πρέπει να διδάσκεται σε κάθε βήμα της σχολικής διαδρομής ενός μαθητή και να παρουσιάζονται προβλήματα και στοιχεία μέσα από την καθημερινότητα με απώτερο σκοπό τη σύνδεση των εννοιών με την πραγματικό κόσμο. Μια ρεαλιστική προσέγγιση, προσελκύει τους μαθητές και τους δίνει τη δυνατότητα να εφαρμόσουν οι ίδιοι τις έννοιες και τα στατιστικά μοντέλα που διδάχθηκαν.

Όλο το διδακτικό υλικό που είναι διαθέσιμο σήμερα, είναι αποτέλεσμα πολλών ετών. Όλη η ιστορική διαδρομή κάθε έννοιας αποτελεί σημαντικό εργαλείο για κάθε εκπαιδευτικό. Γνωρίζοντας τα εμπόδια και τις δυσκολίες του παρελθόντος, γίνεται ευκολότερη η διαχείριση των εννοιών αλλά και της παρουσίασής τους στους μαθητές. Η συμβολή όλων των ερευνητών στο πέρασμα του χρόνου, τονίζει την αναγκαιότητα του ανθρώπου για τη διερεύνηση και την εφαρμογή της Στατιστικής σε κάθε δραστηριότητα. Η προσεκτική και κριτική μελέτη των ιστορικών δεδομένων αποκαλύπτει τις αιτίες δημιουργίας των στατιστικών εννοιών και συνάμα το τεράστιο εύρος εφαρμογής τους για την οργάνωση και τη διαχείριση μεγάλου όγκου δεδομένων. Ταυτόχρονα αιτιολογεί έμπρακτα την ανάγκη μελέτης όλων αυτών των στοιχείων σήμερα και αποκαλύπτει τη συνεχή εξέλιξη στις έρευνες και την επιστήμη των Μαθηματικών γενικότερα.

Στη βιβλιογραφική ανασκόπηση που προηγήθηκε, παρουσιάστηκαν έρευνες σχετικές με τις συχνότερες στατιστικές έννοιες που συναντώνται καθημερινά και μελετήθηκαν ούτως ώστε να εφαρμοστούν με τρόπο ανάλογο σε μια πρωτότυπη διδακτική πρόταση, εμπλουτισμένη με ιστορικά στοιχεία. Όλες οι ανωτέρω έρευνες που πραγματοποιήθηκαν σε μαθητές κάθε βαθμίδας, αποκαλύπτουν τη διαχρονική δυσκολία των μαθητών. Παρόλο που η Στατιστική έχει εμφανίσει μεγάλη πρόοδο τις τελευταίες δεκαετίες, οι έρευνες γύρω από αυτή είναι λιγοστές. Ειδικότερα στον τομέα της Στατιστικής εκπαίδευσης, κρίνεται αναγκαία μια μεγαλύτερη ενασχόληση με περισσότερες έρευνες, εξετάζοντας κάθε έννοια με πολλά διαφορετικά διδακτικά μοντέλα.

Η παρούσα διπλωματική προσπαθεί να εστιάσει σε δύο βασικά ερευνητικά ερωτήματα, μέσα από ένα πρωτότυπο εγχείρημα. Ποιες είναι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν, ποια τα λάθη που παρατηρούνται κατά την ενασχόληση των μαθητών με τα μέτρα θέσης, τα μέτρα διασποράς, την κανονική κατανομή και τη γραφική παράσταση δεδομένων. Για τον εντοπισμό αυτών, κατασκευάστηκε το ερωτηματολόγιο pre-test, με σκοπό να γίνουν εμφανή όλα τα εμπόδια, τα οποία έχουν καταγραφεί στη σχετική βιβλιογραφία, ούτως ώστε αυτά να διαχειριστούν στη διδακτική πρόταση που ακολουθεί. Για το δεύτερο ερώτημα, που αφορά τη χρήση της Ιστορίας και τη θετική συμβολή της στο διδακτικό έργο, απάντηση δίνει κυρίως το τελευταίο ερωτηματολόγιο, αυτό της μεταγνωστικής συνειδητοποίησης. Εκεί γίνεται ο τελικός έλεγχος και η ουσιαστική αξιολόγηση της χρήσης της Ιστορίας. Φυσικά, καθ' όλη την εφαρμογή του διδακτικού έργου, γίνεται αντιληπτό σταδιακά από τον επιβλέπων, σε τι βαθμό η παρουσίαση των ιστορικών στοιχείων συμβάλλει θετικά, όμως το τελικό στάδιο έρχεται να επιβεβαιώσει ή ακόμα και να διαψεύσει τις αρχικές αντιλήψεις. Παράλληλα, το τελευταίο αυτό ερωτηματολόγιο καταγράφει τις απόψεις των συμμετεχόντων για ολόκληρη τη διδακτική πρόταση, εστιάζοντας σε επιμέρους κατηγορίες, αξιολογώντας τον τρόπο παρουσίασης του διδακτικού υλικού, το βαθμό κατανόησής του, την αξιολόγηση του ίδιου του εκπαιδευτικού και τη διαδικασία κατά την παρουσίαση των εννοιών. Τέλος, δίνεται η δυνατότητα στους φοιτητές να σημειώσουν χωρίς περιορισμούς, τα δικά τους σχόλια και τις προτάσεις και να ξεχωρίσουν τα σημαντικότερα σημεία καθ' όλη τη διδακτική αυτή διαδρομή.

Τα φύλλα εργασίας που παρουσιάζονται, κατασκευάστηκαν βάσει όλων των παρανοήσεων που μελετήθηκαν από τις προηγούμενες έρευνες, καθώς και τα στοιχεία από την ιστορική εμφάνιση και εξέλιξη των εννοιών. Η χρήση πρωτότυπων ιστορικών κειμένων στην αρχή κάθε διδακτικής ενότητας αποσκοπεί στο να κεντρίσει το ενδιαφέρον και να εμπλέξει ενεργά όλους τους συμμετέχοντες, για να προβληματιστούν σχετικά με τα αίτια της εμφάνισης των εννοιών αυτών καθώς και τον τρόπο διαχείρισής τους από τους ερευνητές που συνέβαλλαν για την ανάπτυξή τους.

Η εκπόνηση της εργασίας πραγματοποιήθηκε σε μια δύσκολη εποχή για όλη την ανθρωπότητα. Η πανδημία που οφείλεται στον Covid-19, επηρέασε ασφαλώς και την πορεία της ακαδημαϊκής διαδρομής. Ο αρχικός σχεδιασμός για εφαρμογή του διδακτικού πλάνου και την εξαγωγή των αντίστοιχων αποτελεσμάτων της, τη μελέτη και την ανάλυσή τους, διακόπηκε λόγων των δύσκολων συνθηκών και των μέτρων για τη δημόσια υγεία. Το κλείσιμο όλων των εκπαιδευτικών μονάδων, είχε ως αποτέλεσμα να καταστεί αδύνατη η εφαρμογή της διδακτικής παρέμβασης που προτείνεται. Επομένως, όλη η προσπάθεια μετατράπηκε σε μια βιβλιογραφική ανασκόπηση και μια μελλοντική διδακτική πρόταση, με αρκετά πεδία εφαρμογής της. Αν και το δείγμα προορίζεται για φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος, η πρόταση αυτή μπορεί κάλλιστα να εφαρμοστεί σε μαθητές Γ' Λυκείου, οι οποίοι έχουν διδαχθεί τα απαραίτητα στατιστικά στοιχεία μέσα στη σχολική χρονιά. Επίσης, μπορεί να εφαρμοστεί σε φοιτητές αρκετών Τμημάτων Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης, όπου το μάθημα της Στατιστικής εμπεριέχει τις έννοιες αυτές και είναι απαραίτητο για όλη την ακαδημαϊκή πορεία και τη μετέπειτα καριέρα. Φοιτητές με αντικείμενο την Κοινωνιολογία, τη Ψυχολογία και άλλα παρόμοια, οφείλουν να γνωρίζουν άριστα έννοιες Στατιστικής.

Κλείνοντας, θεωρείται εξίσου σημαντικό να αναφερθεί πως η βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση και η σωστή πρακτική εξάσκηση απαιτεί ένα βάθος χρόνου. Μια συνεχής και διαχρονική διδασκαλία, μπορεί να εξαλείψει κάθε παρανόηση και εμπόδιο. Μέσα από αυτή, μπορεί κάθε μαθητής να αναζητεί το «γιατί» σε κάθε κανόνα ή μέθοδο, να αναπτύξει τη μαθηματική του σκέψη και την κριτική του ικανότητα, μένοντας μακριά από την παραδοσιακή και χωρίς κρίση αποστήθιση κανόνων. Μια αρμονική συνεργασία ανάμεσα στον εκπαιδευόμενο και τον εκπαιδευτικό, αποτελεί την καλύτερη διδακτική πρόταση για κάθε έννοια. Η μαθητοκεντρική τάξη, με βασικό άξονα τη γνώση και όχι την τυφλή προσκόλληση στα προγράμματα και τον προκαθορισμένο χρόνο για κάθε ενότητα, θα πρέπει να είναι ο οδηγός στη σύγχρονη εκπαίδευση και το σχεδιασμό της εκπαιδευτικής διαδικασίας.

Βιβλιογραφία

Αθανασιάδης, Η. (2015). Μια κοινωνιολογική και ιστορική παρουσίαση της Στατιστικής. *Παιδαγωγικά Ρεύματα στο Αιγαίο.*

Ausubel, D. I., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Mexico: Trillas.

Βαϊνάς, Κ. (1998). *Η ερώτηση ως μέσο αγωγής της σκέψης. Αποδεικτική απόπειρα με ιδιαίτερη έμφαση στη διδασκαλία του μαθήματος των μαθηματικών*. (Επιμ.) Γιώργος & Κώστας Δαρδανός, Αθήνα: Gutenberg.

Banchi, H., & Bell, R. (2008). The Many Levels of Inquiry. *Science and Children, 46*(2), 26–29.

Barr, G. V. (1980). Some student ideas on the median and the mode. *Teaching Statistics, 2* (2), 38-41.

Batanero, C., Godino, J., & Green, D. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts, *International Journal of Mathematical Education*, *25*(4), 527-547.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistémologiques et les problémes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 164-198.

Brousseau, G. (1986). La relation didactique: le milieu. In *Actes de la IVème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, 54-68, Paris: IREM Paris 7.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics* (Ed. & Trans., N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Γαβριήλ, Α. (2014). Το πρόβλημα της διδασκαλίας και μάθησης των αρνητικών αριθμών και ο ρόλος της Ιστορίας των Μαθηματικών στην αντιμετώπισή του. Διπλωματική Εργασία. Αθήνα: Ε.Κ.Π.Α., Τμήμα Μαθηματικών.

Campbell, S. K. (1974). *Flaws and Fallacies in Statistical Thinking,* New Jersey: Prentice-Hall.

Centeno, J. (1988). *Numeros decimates ¿por que? ¿para que?*, Madrid: Sintesis.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal of Research in Mathematics Education, 18* (5), 382-393.

Estepa-Castro, A. (1990). *Enseñanza de la Estadistica basada en el uso de ordenadores: Un Estudio exploratorio. Memoria de Tercer Ciclo.* Universidad de Granada: Departamento de Didactica de la Matematica.

Falk, R. (1983). Choice behavior in probabilistic situations. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett, & G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics*, 714-727, Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

Fienberg, S. (1992). A Brief History of Statistics in Three and One-Half Chapters: A Review Essay. *Statistical Science, 7* (2), 208-225. Published by: Institute of Mathematical Statistics.

Fischbein, E., & Gazit, A. (1983). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett, & G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics*, 738-753, Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

Garfieli, J., & Alhgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: implications for research. *Journal of Research in Mathematics Education, 19*(1), 44-63.

Green, D. R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett, & G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics*, 766-783, Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

Huck, S., Cross & Clark, S. B. (1986). Overcoming misconceptions about z-scores. *Teaching Statistics, 8*(2), 38 - 40.

Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Kapadia, R. (1985). A brief survey of research on probabilistic notions. In A. Bell, B. Low, & J. Kilpatrick (Eds.), *Theory, research and practice in mathematical education,* 261-265, Nottingham, UK: Shell Centre for Mathematical Education.

Κούρκουλος, Μ., & Τζανάκης, Κ. (2014). Στατιστική και Ελεύθερη Βούληση. *Επιστήμες της Αγωγής «Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση»,* 131-151. Κρήτη: Πανεπιστήμιο Κρήτης, Π.Τ.Δ.Ε.

Li, K. Y., & Shen, S. M. (1992). Students' weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics, 14*(1), 2-8.

Loosen, F., Lioen, M., & Lacante, M. (1985). The standard deviation: some drawbacks of an intuitive approach. *Teaching Statistics*, *7*(1), 2-5.

Lovie, P., & Lovie, A. A. (1976). Teaching intuitive Statistics: estimating means and variances. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.*, *7*(1), 29-39.

Μαλαπάνη, Ε. (2017). *Η διδασκαλία της Στατιστικής ως βασικό εργαλείο για την επίτευξη των στόχων που θέτει στις μέρες μας η Μαθηματική Εκπαίδευση,* Διπλωματική εργασία. Αθήνα: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών.

Mevarech, Z. R. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Math*ematics, *14*, 415-429.

Nikolantonakis, K., Anastasiadis, M., Tsiapou, V., Popotis, A., Deligiannidis, Tr. (2020). Integrating the History of Mathematics into Elementary Mathematics Education: Theory and Applied Examples. In E. Byker, & A. Horton (Eds.), *Elementary Education: Global Perspectives, Challenges and Issues of the 21st Century*, 191-244, New York: Nova Science Publishers.

Οδηγίες διδασκαλίας Μαθημάτων Γυμνασίου, 2020. Ανακτήθηκε από https://edu.klimaka.gr/mathimata/gymnasiou

Οδηγίες διδασκαλίας Μαθημάτων Λυκείου, 2020. Ανακτήθηκε από https://edu.klimaka.gr/mathimata/lykeiou & ΦΕΚ 4904/2019

Pereira-Mendoza, L., & Mellor, J. (1991). Students' concepts of bar graphs-some preliminary findings. In D. Vere-Jones (Ed.) *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics*, 150-157. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children*. London: Routledge & Kegan Paul.

Pollatsek, A., Lima, S., & Well, A. D. (1981). Concept or computation: students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 191-204.

Quetelet, A. (1847) Statistique morale. De l'influence du libre arbitre de l'homme sur les faits sociaux, et particulierement sur le nombre des mariages. *Bulletin de la Commission Centrale de Statistique, t.III.*, 135-155. Bruxelles: M. Hayez.

Russel, S. J., & Mokros, J. R. (1991). What's typical? children's ideas about average. In D. Vere-Jones (Ed.) *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics*, 307-313. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Schuyten, G. (1991). Statistical thinking in psychology and education. In D. Vere- Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics*, 486-490. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, November, 9-15.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14,* 503-518.

Stigler, S. (1986). *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900*. p. 410. Cambridge, M.A: Belknap Press of Harvard University Press.

Strauss, S., & Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal of Research in Mathematics Education*, *19* (1), 64-80.

Τζανάκης, Κ. (2009). Η αξιοποίηση των σχέσεων μεταξύ ιστορίας των μαθηματικών και μαθηματικής εκπαίδευσης: Συζήτηση σχετικά με τα υπέρ και τα κατά, βάσει της διεθνούς εμπειρίας. Στο Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών (Επιμ.) *Η Διδακτική Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών*, 17-39. Θεσσαλονίκη: Ζήτη.

Tzanakis, C., Arcavi, A., Correia de Sa, C., Isoda, M., Lit, C.-K., Niss, M., De Carvalho, J.P., Rodriguez, M., & Siu, M.-K. (2002). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds). *History in Mathematics Education*. New ICMI Study Series, vol 6. Springer, Dordrecht.

Walker, H. (1931). *Studies in the History of Statistical Method*. Baltimore: The Williams & Wilkens Company.

Παράρτημα

Απαντήσεις στις Ασκήσεις της Διδακτικής Παρέμβασης

Μέτρα Θέσης – Φυλλάδιο (1/3)

Δραστηριότητα

Για τον υπολογισμό του τελικού βαθμού εργαζόμαστε ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε τον κάθε βαθμό με τον αντίστοιχο συντελεστή του και έπειτα το αποτέλεσμα διαιρείται με το άθροισμα των συντελεστών βαρύτητας.

18*6 + 16*3 + 19*2 + 17*8 = 330, 6 + 3 + 2 + 8 = 19

330 / 19 = 17.36 ο τελικός βαθμός

Μέτρα Θέσης – Φυλλάδιο (3/3)

Σχέδιο Εργασίας

1. Αναφέρεται στα ύψη διαφόρων ανδρών και των αντίστοιχων αδερφών τους
2. Δημιουργήθηκε το 1886 από τον Galton
3. 179cm
4. 169cm
5. 178cm
6. 174cm

Μέτρα Διασποράς – Φυλλάδιο (2/3)

Ασκήσεις και Προβλήματα

1) α) $s^2 = 4$, $s = 2$ β) $s^2 = 36$, $s = 6$ γ) $s^2 = 4$, $s = 2$ δ) $s^2 = 4$, $s = 2$
2) $R = 20 – 9 = 11$, $\bar{x} = 14.5$, $s^2 = 15.39$, $s = 3.92$, $CV = 0.27$

Παρουσίαση Στατιστικών Δεδομένων – Γραφική Παράσταση Κατανομής Συχνοτήτων – Φυλλάδιο (2/2)

Ασκήσεις και Προβλήματα

4. Το εμβαδόν πρέπει να είναι 100, είχε δίκιο ο καθηγητής.

5. α) 60 β) 52 γ) Υπολογίζοντας για κάθε διάστημα το μέσο του.