ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Μαθηματική εκπαίδευση Α΄ Ηλικιακού Κύκλου

Διπλωματική εργασία

Δυσκολίες κατανόησης του ορισμού των γεωμετρικών εννοιών από μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού και ο ρόλος της Ιστορίας των Μαθηματικών στην αντιμετώπισή τους

Αλεξανδρίδου Γαρυφαλλιά

Α.Ε.Μ.: 928

Επιβλέπων Καθηγητής

Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος

Εξεταστική επιτροπή:

Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας

Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας

Χρονάκη Άννα, Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Φλώρινα, Ιούνιος 2020

Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
Διατμηματικό – Διαπανεπιστημιακό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Διδακτική των Μαθηματικών»
Κατεύθυνση: Μαθηματική εκπαίδευση Α΄ Ηλικιακού Κύκλου

Αλεξανδρίδου Γαρυφαλλιά

«Δυσκολίες κατανόησης του ορισμού των γεωμετρικών εννοιών από μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού και ο ρόλος της Ιστορίας των Μαθηματικών στην αντιμετώπισή τους»

διπλωματική εργασία

Φλώρινα, Ιούνιος 2020

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη 4

Abstract……………………………………………………………………………...5

Ευχαριστίες.. 6

Εισαγωγή 8

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}: Θεωρητική Θεμελίωση και Ανασκόπηση της Βιβλιογραφίας …...15

1.1 Περί ορισμού.. 16

1.1.1 Ο ρόλος του ορισμού ……………………………………………………...16

1.1.2 Τα χαρακτηριστικά ενός "καλού ορισμού"……………………………..18

1.1.3 Η διαδικασία απόδοσης ορισμού (defining process)……………………………..20

1.2 Η εικόνα της έννοιας (concept image) και ο ορισμός της έννοιας (concept definition)...22

1.3 Η θεωρία των σχηματικών εννοιών (figural concepts) του E.Fischbein……………....27

1.3.1 Ο ορισμός, η εικόνα και η σχηματική έννοια…………………………………...29

1.3.2 Εννοιολογικές συγκρούσεις και διδακτικές προτάσεις…………………………30

1.4 Η θεωρία των επιπέδων ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης κατά Van Hiele......... .33

1.5 Η στρατηγική "παραγωγής παραδειγμάτων" και οι "παραδειγματικοί χώροι"……....36

1.6 Προσδιορισμός των δυσκολιών των μαθητών: ερευνητικά δεδομένα………………39

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}: Ιστορική εξέλιξη των βασικών γεωμετρικών εννοιών 45

2.1 Γένεση και εξέλιξη της Γεωμετρίας: μια σύντομη ιστορική αναδρομή 47

2.2 Οι ορισμοί στα στοιχεία του Ευκλείδη………………………………………………50

2.2.1 Περί κύκλου.. 52

2.2.2 Περί τριγώνων 57

2.2.3 Περί τετραπλέυρων.. 59

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}: Η σχολική Γεωμετρία και οι ορισμοί του κύκλου και του ρόμβου στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση.. 64

3.1 Η σχολική Γεωμετρία στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση από τον 19^{ου} αιώνα έως σήμερα.. 65

3.2 Οι ορισμοί του κύκλου και του ρόμβου στα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού από το1870 έως σήμερα ....………………………………..…69
3.2.1 Συμπεράσματα……………………………...…………………...................81

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{o}: Ανάλυση Προγραμμάτων Σπουδών Δημοτικού 85
4.1 Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών Δημοτικού..... 88
4.2 Οδηγίες διδασκαλίας γεωμετρικών εννοιών και γεωμετρικών σχημάτων 89
4.3 Συμπεράσματα 96

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{o}: Σχεδιασμός διδακτικής παρέμβασης 98
5.1 Ανίχνευση των δυσκολιών κατανόησης ορισμών…………………………….....99
5.2 Πρόταση σχεδιασμού της διδασκαλίας……………………………………………..102
5.2.1 Πρόταση διδασκαλίας για την έννοια του κύκλου…………………………….104
5.2.2. Πρόταση διδασκαλίας για την έννοια του ρόμβου…………………………....110

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{o}: Συζήτηση - Συμπεράσματα ……………………………………….114
6.1 Περιορισμοί - προτάσεις για μελλοντική εκπαιδευτική έρευνα……………….......119

Βιβλιογραφία 121

Παράρτημα 128
Ερωτηματολόγιο μαθητών 128
Φύλλο εργασίας για τον κύκλο 133
Φύλλο εργασίας για τον ρόμβο……………………………………………………....134

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία προτείνεται ο σχεδιασμός μιας διδακτικής παρέμβασης για τις έννοιες του Κύκλου και του Ρόμβου, με σκοπό να εξεταστεί κατά πόσο οι μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού είναι ικανοί να προσεγγίσουν εννοιολογικά τις ανωτέρω σχηματικές έννοιες μέσω των ορισμών τους. Η διδακτική παρέμβαση δομήθηκε με βάση την ιστορική εξέλιξη των ορισμών των εννοιών και τις αρχές της θεωρίας των σχηματικών εννοιών του Efraim Fischbein (1993). Στοχεύει στον εντοπισμό και την καταγραφή των δυσκολιών που εμφανίζουν οι μαθητές στην αναγνώριση των σχηματικών εννοιών του κύκλου και του ρόμβου και στην διατύπωση των αντίστοιχων ορισμών τους, καθώς και στην ενεργή συμμετοχή των μαθητών σε μια διαδικασία απόδοσης ορισμού η οποία έχει ως στόχο την προοδευτική μετάβαση των μαθητών, μέσω χειραπτικών δραστηριοτήτων και διαλεκτικής συζήτησης, στην κατασκευή ενός αποδεκτού ορισμού για τις ανωτέρω έννοιες. Μεταξύ των δραστηριοτήτων που προτείνονται περιλαμβάνεται και η μελέτη πρωτότυπων ιστορικών κειμένων από τους μαθητές, η οποία τους βοηθά να κατανοήσουν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες που διδάσκονται.

Λέξεις κλειδιά: ορισμός, κύκλος, ρόμβος, διαδικασία απόδοσης ορισμού, ορισμός της έννοιας, εικόνα της έννοιας, θεωρία σχηματικών εννοιών, Ιστορία των Μαθηματικών.

Abstract

In the present thesis we propose the designing of a teaching intervention for the concepts of Circle and Rhombus, in order to examine the ability of 6th Grade students to conceptually approach the above figural concepts through their definitions. The didactic intervention was structured, based on the historical evolution of the definitions of the above concepts and the principles of Efraim Fischbein's theory of Figural Concepts (1993). It aims both to detect and register the difficulties that students show in recognizing the figural concepts of the circle and the rhombus and in wording their respective definitions, as well as in the active participation of students in a defining process, which aims at their progressive advancement - via activities offering actual experience to the students and dialectic approach - into constructing an acceptable definition of the above concepts. Among the activities suggested is the study of original historical texts by students, which helps them better comprehend the mathematical concepts taught.

Keywords: definition, circle, rhombus, defining process, concept definition, concept image, figural concepts theory, History of Mathematics.

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Διατμηματικού - Διαπανεπιστημιακού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτική των Μαθηματικών», του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας υπό την επίβλεψη του κ. Νικολαντωνάκη Κωνσταντίνου, Καθηγητή του Π.Τ.Δ.Ε. του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας.

Αφορμή για την επιλογή διερεύνησης του συγκεκριμένου θέματος αποτέλεσε η παρακολούθηση του μαθήματος «Ιστορία και Επιστημολογία των Μαθηματικών και της Μαθηματικής Εκπαίδευσης Διδακτικής των Μαθηματικών» στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών. Τρέφοντας ανέκαθεν συναισθήματα αγάπης προς τα μαθηματικά και όντας η ίδια εκπαιδευτικός πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, επιδίωξα την ανάληψη και διεκπεραίωση της παρούσας εργασίας, ελπίζοντας ότι θα συμβάλω με τον τρόπο αυτό στη διαφώτιση ορισμένων πτυχών των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν τα παιδιά στο σχολικό τους περιβάλλον. Η υλοποίηση όμως και η ολοκλήρωσή της, δεν θα ήταν δυνατή χωρίς την πολύτιμη βοήθεια ορισμένων ανθρώπων, τους οποίους οφείλω να ευχαριστήσω.

Πρώτιστα, να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Ιωάννη Θωμαΐδη, πρώην σχολικό σύμβουλο Μαθηματικών, για την πολύπλευρη συμπαράσταση και τις επιστημονικές του συμβουλές. Τα σχόλια και οι υποδείξεις του, από το ξεκίνημα της διπλωματικής μου εργασίας, υπήρξαν για μένα πολύτιμος οδηγός και σημείο αναφοράς για τη συνέχιση του έργου μου.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στον πρώτο επιβλέποντα της εργασίας κ. Κωνσταντίνο Νικολαντωνάκη για την ουσιαστική βοήθεια που μου προσέφερε με την αρμονική συνεργασία, τις πολύτιμες συμβουλές και την καθοδήγησή του σε όλη τη διάρκεια της πραγματοποίησης αυτής της εργασίας.

Ευχαριστώ τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής, τον Καθηγητή του Π.Τ.Δ.Ε. του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας κ. Χαράλαμπο Λεμονίδη και την Καθηγήτρια του Παιδαγωγικού Τμήματος Προσχολικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας κα. Άννα Χρονάκη, για την τιμή που μου έκαναν να μελετήσουν και να κρίνουν τη διπλωματική μου εργασία.

Ευχαριστώ τη συνάδελφο και φίλη κα. Αντωνία Πατσιοδήμου για τις πολύτιμες συμβουλές της αλλά και για την ηθική της συμπαράσταση κατά την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής.

Ευχαριστώ τον καλό μου φίλο κ. Αθανάσιο Παπαδόπουλο για την υποστήριξή του σε όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Τα αισιόδοξα μηνύματα και τα λόγια του με ξεκούραζαν και με ενθάρρυναν στο έργο μου αυτό.

Ευχαριστώ τη φίλη μου κα. Φιλάνθη Ζώη, καθηγήτρια αγγλικών, για την πολύτιμη βοήθειά της στη μετάφραση του κειμένου της περίληψης στην αγγλική γλώσσα.

Ευχαριστώ θερμά τον σύζυγό μου Θωμά και τα παιδιά μας Αγγελική, Σοφία και Αντώνη για την αμέριστη συμπαράσταση, την κατανόηση και την υπομονή που έδειξαν κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου. Τους ευχαριστώ και τους ζητώ συγνώμη για τις πολλές ώρες απουσίας μου από κοντά τους τα τελευταία δύο χρόνια.

Τέλος, αφιερώνω τη διπλωματική μου εργασία στη μνήμη του πατέρα μου Χρήστου Αλεξανδρίδη, που χάσαμε εντελώς ξαφνικά στο πρώτο έτος των μεταπτυχιακών μου σπουδών, ο οποίος ήταν πάντα στο πλευρό μου στηρίζοντας την κάθε μου επιλογή.

Εισαγωγή

Η σπουδαιότητα των μαθηματικών ορισμών στη διδασκαλία και την εκμάθηση μαθηματικών είναι αδιαμφισβήτητη. Ο ορισμός μιας έννοιας, από τη στιγμή που αναφέρεται στο πρόγραμμα σπουδών, επηρεάζει την προσέγγιση στη διδασκαλία των μαθηματικών, τη διδακτική ακολουθία των μαθημάτων, το σύνολο των θεωρημάτων και των αποδείξεων προς διδασκαλία. Οι ορισμοί και ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζονται στους μαθητές, διαμορφώνουν τη σχέση ανάμεσα στην εικόνα της έννοιας και του ορισμού της, αποτελώντας έτσι ένα ουσιώδες συστατικό της δομής της γνώσης του ατόμου που επηρεάζει τις διαδικασίες σκέψης του μαθητή (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1991).

Η ικανότητα δημιουργίας ορισμών αποτελεί βασικό συστατικό της μαθηματικής γνώσης και η διαδικασία απόδοσης ορισμού κατέχει σημαντική θέση μεταξύ των σχολικών μαθηματικών δραστηριοτήτων, καθώς οι μαθητές θα πρέπει να αφομοιώνουν νοητικά αντικείμενα που ανήκουν σε μια σχετική θεωρία. Η εκμάθηση της διαδικασίας αυτής είναι ένα βασικό πρόβλημα στη μαθηματική εκπαίδευση (Vinner, 1991; de Villiers, 1998; Leikin & Winicky-Landman, 2000). Οι ορισμοί των βασικών γεωμετρικών σχημάτων δεν είναι απλά κανόνες σε ένα πλαίσιο καθαρά αυθόρμητων γεγονότων. Η γεωμετρία μπορεί να διατηρεί την αυτονομία της ως θεωρητικός τομέας, αλλά την ίδια ώρα, εξαρτάται από την πραγματικότητα. Αυτό σημαίνει ότι, οι γεωμετρικές έννοιες ανήκουν σε ένα θεωρητικό σύστημα, αλλά την ίδια στιγμή δεν είναι απολύτως ελεύθερες. Πρέπει να αναφέρονται σε μια σημασία που να έχει τις ρίζες της στην πραγματικότητα και να έχει θεμελιωθεί γερά κατά το πέρασμα των αιώνων.

Η μακρά αυτή παράδοση των γεωμετρικών εννοιών καθιστά δύσκολη την αντίληψη της πολυπλοκότητας αυτής της διαδικασίας. Από τη μία, η διαισθητική σημασία των γεωμετρικών εννοιών είναι ριζωμένη στην εμπειρία, αλλά η θεωρητική τους όψη απαιτεί την απόλυτη αυτονομία από εμπειρικά δεδομένα. Από την άλλη, το γεγονός ότι τα μαθηματικά στο Δημοτικό παρουσιάζονται ως έτοιμη γνώση, επικαλύπτει τη μακρά διαδικασία από την οποία προήλθαν και οδηγεί αυτόματα σε αυθόρμητες συσχετίσεις με την εμπειρία. Είμαστε πλέον τόσο συνηθισμένοι σε κάποιες έννοιες όπως η γραμμή, ο κύκλος, η καθετότητα, που δε θα μπορούσαμε να σκεφτούμε διαφορετικά. Οι έννοιες αυτές μοιάζουν τόσο προφανείς, που φαίνονται να είναι οι μόνες πιθανές ιδέες που προέρχονται από την εμπειρία μας, αλλά και οι πιο κατάλληλες για να την εξηγήσουν. Στην πραγματικότητα όμως, η απόσταση μεταξύ γεωμετρίας και αυθόρμητης εννοιολογικής αντίληψης της φυσικής εμπειρίας είναι πολύ μεγαλύτερη απ΄ότι γενικά θεωρείται και συχνά υποτιμάται (Mariotti & Fischbein, 1997).

Αρκετές έρευνες έχουν πραγματοποιηθεί για να αναδείξουν την ανάγκη της ενεργής συμμετοχής των μαθητών σε δραστηριότητες ορισμού των γεωμετρικών εννοιών, προκειμένου να επιτευχθεί βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση των ορισμών τους (Vinner, 1991; Linchevski et al., 1992; Mariotti & Fischbein, 1997; Edwards, 1997; DeVilliers,1998). Ο Vinner (1976) ισχυρίστηκε ότι οι μαθητές έχουν κάποιες δικές τους ιδέες σχετικά με το τι είναι ένας ορισμός και ότι οι διαφωνίες μεταξύ της εμπειρικής και της θεωρητικής προσέγγισης μπορούν να αποτελέσουν πραγματικό εμπόδιο στην κατανόηση των μαθητών. Για το λόγο αυτό, το πρόβλημα της εισαγωγής των μαθητών σε μια μαθηματική διαδικασία απόδοσης ορισμών αποτελεί ένα κρίσιμο σημείο στη μαθηματική εκπαίδευση που πρέπει να αντιμετωπιστεί άμεσα.

Σύμφωνα με τον Θωμαΐδη (2014), η διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών, και συγκεκριμένα μια διδακτική προσέγγιση που θα αξιοποιεί στοιχεία από την ιστορική εξέλιξη μιας έννοιας, θα μπορούσε να συμβάλλει στην ανάδειξη των διαφορετικών όψεων της έννοιας και την καλύτερη κατανόησή τους. Ο ίδιος αναφέρεται στην σπουδαιότητα της έννοιας του *«ιστορικού παραλληλισμού»*, η οποία ορίζεται ως η επιχειρούμενη συσχέτιση ανάμεσα στην ιστορική γέννηση και εξέλιξη μιας μαθηματικής έννοιας, και τον τρόπο με τον οποίο αυτή προσλαμβάνεται από τους μαθητές σε μια σύγχρονη σχολική τάξη. Διότι, οι ίδιες δυσκολίες που αναδύθηκαν και επηρέασαν την ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών σε όλη τους την ιστορική εξέλιξη, μπορούν να δυσχεράνουν την κατανόηση των ίδιων εννοιών από τους σημερινούς μαθητές. Επομένως, η ιστορική ανάλυση μιας έννοιας, η γνώση και η κατανόηση αυτών των δυσκολιών μπορεί να μας βοηθήσει στην πρόβλεψή τους και να συμβάλει στην όσο δυνατόν καλύτερη διδακτική αντιμετώπισή τους.

Σύμφωνα με τη θεωρία των σχηματικών εννοιών (Figural Concepts) του Fischbein (1993), η επίτευξη και η σωστή χρήση ενός ορισμού απαιτεί την ύπαρξη μιας αρμονίας μεταξύ των δύο όψεων των γεωμετρικών εννοιών, της σχηματικής και της εννοιολογικής. Οι δυσκολίες προκαλούνται από τη σύγχυση που προκύπτει συχνά μεταξύ της ανάγκης για διαφοροποίηση που προβάλλεται από τις ισχυρές σχηματικές δομές και την απαίτηση για γενίκευση που προβάλλεται από την γεωμετρική εννοιολόγηση. Μια συγκεκριμένη εικόνα, μια συγκεκριμένη περίπτωση τείνει να γίνει το παραδειγματικό μοντέλο (πρότυπο) για όλη την τάξη. Το πρότυπο όμως, μπορεί να παρουσιάζει ιδιότητες, οι οποίες δεν ταιριάζουν με τις γενικές απαιτήσεις του ορισμού, με αποτέλεσμα να προκαλείται σύγχυση στους μαθητές.

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Δημοτικό Σχολείο έχει ως αντικείμενο τη μη τυπική Γεωμετρία, την αντίληψη δηλαδή των γεωμετρικών σχημάτων με βάση τις αισθήσεις και την εμπειρία (Καλαϊτζίδης, Παππά & Σακονίδης, 2017). Παρατηρείται όμως, ότι η διδασκαλία εισάγει τους μαθητές στα αντικείμενα και τα προβλήματά της Γεωμετρίας, δίνοντας έμφαση κυρίως στη θεωρητική τους φύση. Οι μαθητές δε συμμετέχουν στη πραγματικότητα σε διαδικασίες ορισμού εννοιών. Συχνά τους παρουσιάζονται ανούσιες όψεις μιας έννοιας χωρίς να τους παρέχεται η ευκαιρία να συλλάβουν οι ίδιοι το λόγο της σπουδαιότητάς τους (Mariotti & Fischbein, 1997). Ακόμη, υπάρχουν περιπτώσεις που οι μαθητές γνωρίζουν τους μαθηματικούς ορισμούς αλλά αδυνατούν να τους εφαρμόσουν. Για παράδειγμα, γνωρίζουν τον ορισμό του ύψους ενός τριγώνου αλλά δυσκολεύονται να το χαράξουν, ειδικά σε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο (Καλαϊτζίδης κ.ά., 2017).

Οι δυσκολίες αυτές που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη διαδικασία της εννοιολογικής κατανόησης των γεωμετρικών εννοιών στο Δημοτικό Σχολείο δυστυχώς παραμένουν, με αποτέλεσμα το πρόβλημα να εντείνεται κατά το δύσκολο στάδιο της μετάβασης από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Την εικόνα αυτή αποτύπωσαν τα ευρήματα της έρευνας της Μίχου (2019) σε μαθητές Α΄ Γυμνασίου, από την οποία προέκυψε ότι οι μαθητές αναγνωρίζουν τις εικόνες των εννοιών του Κύκλου και των Παραλληλογράμμων με βάση τις προσωπικές τους σχηματικές εικόνες, οι οποίες καθορίζονται από τα περιορισμένα πρότυπα παραδείγματα και όχι από τους ορισμούς τους. Επίσης, φάνηκε ότι στην πλειοψηφία τους οι μαθητές δεν ήταν ικανοί να αναγνωρίσουν το Ρόμβο σε μη πρότυπους προσανατολισμούς και οι ορισμοί που έδιναν για τις έννοιες του Κύκλου και των Παραλληλογράμμων φαίνεται να ήταν επηρεασμένοι από τη διαίσθηση και τις προηγούμενες εμπειρίες τους. Συνεπώς, τα ανωτέρω ευρήματα οδηγούν σε νέους ερευνητικούς προβληματισμούς για τον τρόπο διδασκαλίας και μάθησης των γεωμετρικών εννοιών και των αντίστοιχων ορισμών τους στο Δημοτικό Σχολείο.

Αναγνωρίζοντας λοιπόν, τη σημασία του ρόλου των ορισμών στη μαθηματική εκπαίδευση και την έλλειψη ερευνητικών δεδομένων σχετικά με τις δυσκολίες που εμφανίζουν οι μαθητές της χώρας μας στην κατανόησή τους, η παρούσα εργασία επιδιώκει να ερμηνεύσει διαφωνίες και δυσκολίες των μαθητών ΣΤ΄ τάξης που παρατηρούνται συχνά στη σχολική πρακτική, αναφορικά με τους ορισμούς των γεωμετρικών εννοιών του κύκλου και του ρόμβου. Η πρωτοτυπία του εγχειρήματος έγκειται στο γεγονός ότι συνδυάζει τη μελέτη των ανωτέρω δυσκολιών σε επίπεδο πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με την ιστορική εξέλιξη των αντίστοιχων εννοιών και προτείνει τη διδακτική αξιοποίησή της.

Επιλέχθηκαν συγκεκριμένα ο κύκλος και ο ρόμβος διότι είναι μερικά από τα βασικά επίπεδα σχήματα που αποτελούν αντικείμενο διδασκαλίας της Γεωμετρίας στο Δημοτικό Σχολείο (κύκλος, τετράγωνο, ορθογώνιο, τρίγωνο, ρόμβος). Ειδικότερα, ο κύκλος συγκαταλέγεται στα πρώτα σχήματα τα οποία αναγνωρίζουν διαισθητικά οι μαθητές, ενώ από την άλλη ο ρόμβος αποτελεί μια έννοια με την οποία ασχολούνται από νωρίς, αλλά όχι τόσο συστηματικά. Δεν συμπεριλήφθηκαν οι έννοιες του τετραγώνου, των ορθογωνίων και των παραλληλογράμμων γενικότερα, προκειμένου να αποφευχθεί η πολυπλοκότητα της ιεραρχικής ταξινόμησης στο επίπεδο του δημοτικού.

Στόχος – Ερευνητικά Ερωτήματα

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση του επιπέδου κατανόησης των ορισμών των γεωμετρικών εννοιών του κύκλου και του ρόμβου των μαθητών της ΣΤ΄ τάξης Δημοτικού. Ειδικότερα, επιχειρείται η καταγραφή των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην αναγνώριση των σχηματικών εννοιών και στην διατύπωση των αντίστοιχων ορισμών τους και γίνεται μια προσπάθεια παρατήρησης φαινομένων «ιστορικού παραλληλισμού» ανάμεσα στους πρωταρχικούς ορισμούς που εμφανίζονται στην πορεία της εξέλιξης των Μαθηματικών για τις ανωτέρω έννοιες και στους ορισμούς που διατυπώνουν συνήθως οι μαθητές. Παράλληλα, η εργασία στοχεύει στον σχεδιασμό μιας διδακτικής παρέμβασης με αξιοποίηση στοιχείων από την ιστορική εξέλιξη των εννοιών, η οποία έχει σκοπό τόσο την ανίχνευση των δυσκολιών αυτών, όσο και την καλύτερη δυνατή προσέγγισή τους μέσω της εμπλοκής των μαθητών σε μια διαδικασία απόδοσης ορισμού.

Συγκεκριμένα, η παρούσα μελέτη επιχειρεί να απαντήσει στα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

1. Ποιες δυσκολίες αντιμετωπίζουν οι μαθητές της ΣΤ΄ τάξης στη διατύπωση των ορισμών του κύκλου και του ρόμβου, σύμφωνα με την ελληνική και ξένη βιβλιογραφία;
2. Ποιες δυσκολίες αντιμετωπίζουν οι μαθητές της ΣΤ΄ τάξης στην αναγνώριση των γεωμετρικών σχημάτων του κύκλου και του ρόμβου, σύμφωνα με την ελληνική και ξένη βιβλιογραφία;
3. Παρατηρούνται φαινόμενα «ιστορικού παραλληλισμού» ανάμεσα στους ορισμούς που χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθηματικούς στο παρελθόν και στους ορισμούς που διατυπώνουν συνήθως οι μαθητές;
4. Ποια είναι τα χαρακτηριστικά μιας διδακτικής παρέμβασης που αξιοποιεί την ιστορική εξέλιξη των γεωμετρικών εννοιών με στόχο την ανίχνευση των δυσκολιών των μαθητών και την εμπλοκή τους σε μια διαδικασία απόδοσης ορισμού;

Όσον αφορά τη διάρθρωσή της, η εργασία αναπτύσσεται σε έξι κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο περιλαμβάνει τη θεωρητική θεμελίωση και τη βιβλιογραφική ανασκόπηση της εργασίας. Αναλυτικότερα, το κεφάλαιο ξεκινά με την επισήμανση της σημασίας των ορισμών στη μαθηματική εκπαίδευση και την ανάλυση των μαθηματικών αλλά και των διδακτικών χαρακτηριστικών τους. Τονίζεται επίσης, η ανάγκη ενεργούς συμμετοχής των μαθητών στη διαδικασία απόδοσης ορισμού μιας μαθηματικής έννοιας, καθώς η απλή γνώση ενός ορισμού δεν εγγυάται την κατανόηση της έννοιας (Vinner, 1991). Στη συνέχεια, αναλύεται η θεωρία του Vinner και των συναδέλφων του που σχετίζεται με τον σχηματισμό και τη διαχείριση μαθηματικών εννοιών και η θεωρία των σχηματικών εννοιών (figural concepts) του Efraim Fischbein (1993), βάσει της οποίας δομήθηκε η διδακτική παρέμβαση. Ακολουθεί μια σύντομη περιγραφή της θεωρίας Van Hiele για τα επίπεδα ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών, καθώς για την ανάλυση και το σχεδιασμό του ερωτηματολογίου ανίχνευσης δυσκολιών των μαθητών χρησιμοποιήθηκαν ορισμένα στοιχεία από εργασίες που στηρίζονται σε αυτό το θεωρητικό μοντέλο. Επεξηγείται επίσης, η διδακτική στρατηγική «παραγωγής παραδειγμάτων» η οποία μπορεί να αποτελέσει ένα ισχυρό παιδαγωγικό αλλά και ερευνητικό εργαλείο (Watson & Mason, 2005; Zaskis & Leikin, 2007). Τέλος, γίνεται μια σύντομη αναφορά στις βασικότερες έρευνες που έχουν διεξαχθεί τα τελευταία χρόνια και έχουν αναδείξει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τόσο οι μαθητές στην κατανόηση των ορισμών των γεωμετρικών εννοιών, όσο και οι εκπαιδευτικοί στη διατύπωση τους αλλά και τη διδακτική τους διαχείριση.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται αρχικά μια σύντομη ιστορική ανασκόπηση της επιστήμης της Γεωμετρίας και ακολούθως καταγράφεται η ιστορική πορεία εξέλιξης των ορισμών των γεωμετρικών εννοιών του κύκλου, των τριγώνων και των τετραπλεύρων, ξεκινώντας από την πρωταρχική χρήση τους από τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς και εξετάζοντας μετέπειτα τις μεταβολές τους κατά το πέρασμα των αιώνων.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται συνοπτική αναφορά στην ιστορική εξέλιξη της διδασκαλίας της γεωμετρίας στο δημοτικό σχολείο καθώς και στην εξέλιξη των ορισμών των γεωμετρικών εννοιών του κύκλου και του ρόμβου, όπως αυτοί παρουσιάζονται στα σχολικά εγχειρίδια που χρησιμοποιήθηκαν για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας από τα τέλη του 19^{ου} αιώνα έως σήμερα.

Το τέταρτο κεφάλαιο αφορά στην παρουσίαση και ανάλυση των προγραμμάτων σπουδών του δημοτικού ώστε να διαπιστωθεί ο τρόπος με τον οποίο οργανώνεται η διδασκαλία των ανωτέρω γεωμετρικών εννοιών, να περιγραφούν οι στόχοι της σχολικής γεωμετρίας, οι διαθέσιμες διδακτικές ώρες και οι προτάσεις διδακτικής προσέγγισης των εννοιών τόσο από το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών όσο και από τις Οδηγίες διδασκαλίας των μαθηματικών και τα βιβλία του δασκάλου.

Ακολουθεί το πέμπτο κεφάλαιο με την περιγραφή του σχεδιασμού της διδακτικής παρέμβασης, η οποία προτείνεται να υλοποιηθεί σε δύο φάσεις. Σε πρώτη φάση προτείνεται η χορήγηση ενός ερωτηματολογίου/διαγνωστικού δοκιμίου στους μαθητές ώστε να αποτυπωθούν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στην κατανόηση των ορισμών των γεωμετρικών εννοιών του κύκλου και του ρόμβου. Έπειτα, ακολουθεί η περιγραφή της προτεινόμενης πορείας διδασκαλίας, η οποία εμπεριέχει στοιχεία από την ιστορική εξέλιξη των ορισμών του κύκλου και του ρόμβου και στοχεύει στην ενεργή συμμετοχή των μαθητών σε μια διαδικασία κατασκευής ενός αποδεκτού ορισμού για τις παραπάνω έννοιες με σκοπό τη βαθύτερη εννοιολογική τους κατανόηση.

Στο έκτο κεφάλαιο περιγράφονται και συζητούνται τα βασικά συμπεράσματα που προέκυψαν από την παρούσα βιβλιογραφική μελέτη και τον σχεδιασμό της διδακτικής παρέμβασης, ενώ παράλληλα διατυπώνονται προτάσεις για μελλοντικές ερευνητικές προσπάθειες.

Η εργασία ολοκληρώνεται με την αναφορά της βιβλιογραφίας που μελετήθηκε για την εκπόνησή της και συνοδεύεται από παράρτημα, όπου παρατίθενται το ερωτηματολόγιο των μαθητών και τα φύλλα εργασίας που δημιουργήθηκαν στα πλαίσια του σχεδιασμού της διδακτικής παρέμβασης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

Θεωρητική Θεμελίωση και Ανασκόπηση της Βιβλιογραφίας

1.1 Περί ορισμού

1.1.1. Ο ρόλος του ορισμού

Τα μαθηματικά αποτελούν ένα θεωρητικό σύστημα στο οποίο οι ορισμοί παίζουν βασικό ρόλο. Καταρχάς, όλα τα αντικείμενα προς μάθηση πρέπει να παρουσιαστούν και να οριστούν ξεκάθαρα. Έπειτα, οι ιδιότητες από συγκεκριμένα αντικείμενα θεωρούνται αληθείς μόνο εάν πηγάζουν από άλλες αληθείς δηλώσεις, μέσω επιχειρημάτων πάνω στα οποία υπάρχει συμφωνία από την επιστημονική κοινότητα.

Σύμφωνα με τους Mariotti & Fischbein (1997), οι ορισμοί εκφράζουν τις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τα «αντικείμενα» μιας θεωρίας και τις συσχετίζουν στο εσωτερικό ενός θεωρητικού συστήματος. Οι νέες ιδιότητες των ορισμένων αντικειμένων και οι νέες σχέσεις μεταξύ τους μπορούν να θεμελιώσουν περαιτέρω τα αντικείμενα της θεωρίας μέσω της παραγωγικής διαδικασίας. Το βασικό, εξάλλου, χαρακτηριστικό της γεωμετρικής μεθόδου έγκειται στον παραγωγικό (ή απαγωγικό) της χαρακτήρα, σύμφωνα με τον οποίο, ξεκινώντας από ένα περιεκτικό συνθετικό στοιχείο ή ορισμό, παράγουμε το σύνολο των επιμέρους ιδιοτήτων του όλου. Με άλλα λόγια, η γεωμετρική μέθοδος προχωρά από το όλο στο μέρος, και όχι το αντίστροφο, όπως ισχύει για την αναλυτική – επαγωγική μέθοδο. Για παράδειγμα, οι ιδιότητες του κύκλου δεν επάγονται αναλυτικά, εξετάζοντας σταδιακά, βήμα προς βήμα, την κατασκευή του κύκλου, αλλά αντιστρόφως, ξεκινώντας από τον συνθετικό ορισμό του κύκλου, παράγονται αναγκαία όλες του οι ιδιότητες (Γουδέλη, 2015).

Στα μαθηματικά, δύο είναι οι πιθανοί τύποι ορισμών: α) οι ορισμοί που εισάγουν τα βασικά αντικείμενα μιας θεωρίας και β) οι ορισμοί που εισάγουν ένα νέο στοιχείο μέσα στην ίδια θεωρία (Mariotti & Fischbein, 1997). Οι ορισμοί που διατυπώνονται μέσω των αξιωμάτων χαρακτηρίζουν τα αντικείμενα που διαχειρίζεται μια θεωρία. Αλλά η θεωρητική συστηματοποίηση είναι μόνο το τελικό στάδιο από μια μακρά και παραγωγική διαδικασία, στην οποία οι ορισμοί προκύπτουν από μια διαπραγμάτευση μεταξύ αυστηρότητας και δημιουργικότητας. Στη Γεωμετρία ειδικότερα, υπάρχει μια προνομιούχα σχέση ανάμεσα σε αυτήν και την πραγματική ζωή. Παρ’ όλα αυτά, η γεωμετρία δεν είναι μια εμπειρική επιστήμη. Δεν είναι δυνατόν και θα ήταν λάθος να προσπαθήσουμε να υποβαθμίσουμε τη γεωμετρία σε εμπειρική γνώση. Ακόμα και η «Πρακτική Γεωμετρία»[1], η οποία αποτελεί αντικείμενο διδασκαλίας στο Δημοτικό και στην Α΄ και Β΄ Γυμνασίου, δε μπορεί να θεωρηθεί «εμπειρική γνώση», καθώς ακόμα και στις απλές γεωμετρικές μετρήσεις και κατασκευές που διδάσκονται στο Δημοτικό χρησιμοποιούνται θεωρητικές γνώσεις. Για παράδειγμα, για τη μέτρηση μιας γωνίας με το μοιρογνωμόνιο ουσιαστικά καθιστούμε τη γωνία επίκεντρη και μετρούμε το αντίστοιχο τόξο (θεωρητική γνώση Γεωμετρίας Α΄ Λυκείου), ενώ για την κατασκευή της παράλληλης προς μία ευθεία από ένα σημείο με κανόνα και γνώμονα ουσιαστικά κάνουμε μια μεταφορά της ευθείας (γεωμετρικός μετασχηματισμός).

Από την άλλη, όταν ένα νέο δεδομένο παρουσιάζεται μέσα από μια θεωρία, η εισαγωγή του νέου στοιχείου, του νέου ονόματος, επιτρέπεται από ένα θεώρημα το οποίο δηλώνει την ύπαρξη του στοιχείου αυτού της θεωρίας που χαρακτηρίζεται από συγκεκριμένες ιδιότητες (Mariotti & Fischbein, 1997). Από τη μαθηματική πλευρά, οι ορισμοί των νέων στοιχείων μιας θεωρίας έχουν έναν δημιουργικό ρόλο. Στην πραγματικότητα, ένας νέος ορισμός παρουσιάζει μια νέα έννοια, η οποία παρόλο που συσχετίζεται με όλες τις άλλες, δεν υπήρχε παλαιότερα. Επομένως, ένας ορισμός δεν πρέπει μόνο να είναι σωστός θεωρητικά, αλλά να είναι και παραγωγικός. Να δημιουργεί, δηλαδή, νέα προβλήματα και νέους τρόπους προσέγγισης στην επίλυση παλαιότερων προβλημάτων.

Οι ορισμοί των μαθηματικών εννοιών, οι δομές τους και η διαδικασία απόδοσης ορισμού θεωρούνται θεμελιώδη συστατικά και της βασικής προσωπικής γνώσης των εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά. Η προσωπική γνώση των μαθηματικών ορισμών των εκπαιδευτικών επηρεάζει α) τις αποφάσεις τους αναφορικά με ποια έννοια θα διδαχθεί και β) την παιδαγωγική τους αντίληψη σχετικά

[1] Ένα κομβικό σημείο στη διδασκαλία και μάθηση της Γεωμετρίας αποτελεί η μετάβαση από τις εμπειρικές – πρακτικές γνώσεις στις οποίες στηρίζεται η Πρακτική Γεωμετρία που διδάσκεται στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο, στις θεωρητικές γνώσεις που εντάσσονται στο αυστηρό θεωρητικό πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, στην οποία εισάγονται οι μαθητές στο Λύκειο. Η μέθοδος που ακολουθείται στην Πρακτική Γεωμετρία είναι η εύρεση ή επαλήθευση των ιδιοτήτων και σχέσεων ανάμεσα στα γεωμετρικά σχήματα με βάση τη μέτρηση, για την οποία χρησιμοποιείται ο διαβαθμισμένος κανόνας (υποδεκάμετρο) και το μοιρογνωμόνιο. Η διαφοροποίηση της Πρακτικής Γεωμετρίας από τη Θεωρητική ή Ευκλείδεια Γεωμετρία συνίσταται στη συστηματική χρήση της λογικής για να θεμελιώσει τις γνώσεις μας για το χώρο, ξεφεύγοντας από μετρήσεις και επιμέρους συμπεράσματα. (Αργυρόπουλος κ.ά., 2017).

με τον τρόπο που οι μαθητές μπορούν να κατακτήσουν τις έννοιες αυτές (Zazkis & Leikin, 2008).

1.1.2 Τα χαρακτηριστικά ενός «καλού» ορισμού

Η Morgan (2005) αναφέρει ότι ένα επιπλέον χαρακτηριστικό των μαθηματικών ορισμών είναι η πιθανότητα ύπαρξης πολλών ισοδύναμων ορισμών για την ίδια έννοια. Οι Leikin & Winicky-Landman (2000) ανέλυσαν το ρόλο των ισοδύναμων μαθηματικών δηλώσεων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ορισμοί μιας μαθηματικής έννοιας. Έγινε διαχωρισμός μεταξύ μαθηματικών και διδακτικών χαρακτηριστικών των μαθηματικών ορισμών. Βασιζόμενοι σε μελέτες γνωστών μαθηματικών (Khinchin, 1968, Poincare, 1952, Solow, 1984, Vinner, 1991), τόνισαν ότι οι λογικές αρχές που πρέπει να ικανοποιούνται στον ορισμό μαθηματικών εννοιών είναι οι εξής:

- ορίζω σημαίνει δίνω ένα όνομα: η δήλωση που χρησιμοποιείται ως ορισμός παρουσιάζει το όνομα της έννοιας και αυτός ο όρος (όνομα) εμφανίζεται μόνο μια φορά στη δήλωση
- ένας ορισμός καθιερώνει τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες της έννοιας
- στον ορισμό μιας νέας έννοιας μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο έννοιες που έχουν οριστεί προηγουμένως
- το σύνολο των ικανών και αναγκαίων συνθηκών πρέπει να είναι το ελάχιστο δυνατό[2] και
- ο ορισμός είναι αυθαίρετος

Εξετάζοντας τις λογικές συνδέσεις μεταξύ των δηλώσεων που σχετίζονται με μια έννοια, μπορεί να καθιερωθεί μια ισοδύναμη τάξη δηλώσεων ορισμού. Κάθε δήλωση που ανήκει σε αυτή την τάξη μπορεί να επιλεχθεί αυθαίρετα ως ορισμός, όταν οι άλλες δηλώσεις αυτής της τάξης είναι θεωρήματα που αποτελούν τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες της έννοιας. Η Borasi (1992) δίνει ένα παράδειγμα εναλλακτικών ισοδύναμων ορισμών για την έννοια του κύκλου, αναφέροντας ότι στις μικρότερες τάξεις χρησιμοποιείται κυρίως ο μετρικός ορισμός που εστιάζει στην ιδέα

[2] Σύμφωνα με τον Vinner (1991) οι ορισμοί πρέπει να είναι ελάχιστοι (minimal). Με τον όρο αυτόν εννοείται ότι οι ορισμοί δεν πρέπει να περιέχουν μέρη τα οποία μπορούν να συναχθούν μαθηματικά από άλλα μέρη του ορισμού. Για παράδειγμα, εάν κάποιος θέλει να ορίσει ένα ορθογώνιο στην Ευκλείδεια Γεωμετρία με κριτήριο τις γωνίες του, είναι προτιμότερο να το ορίσει ως «το τετράπλευρο με τρεις ορθές γωνίες» παρά ως «το τετράπλευρο που έχει τέσσερις ορθές γωνίες» γιατί εάν ένα τετράπλευρο έχει 3 ορθές γωνίες μπορεί να αποδειχθεί ότι και η τέταρτη γωνία του είναι επίσης ορθή.

ότι όλα τα σημεία του κύκλου ισαπέχουν από ένα δοσμένο κέντρο, ενώ στις μεγαλύτερες προτιμάται ο αναλυτικός ορισμός που εκφράζεται με τη μορφή μιας ισότητας όπως η

$$(x - \alpha)^2 + (x - b)^2 = r^2$$

Μπορούν να χρησιμοποιηθούν και οι δύο ορισμοί στην επίλυση ενός προβλήματος όπως «Βρείτε τον κύκλο που διέρχεται από τρία δοσμένα σημεία», αλλά η επιλογή του ορισμού είναι αυτή που θα κάνει τη διαφορά στη διαδικασία επίλυσης. Ακόμη, ένα από τα στοιχεία της πειραματικής προσέγγισης που χρησιμοποίησε ο de Villiers (1998) ήταν η ενθάρρυνση των μαθητών να συνειδητοποιήσουν ότι μπορεί να υπάρχουν εναλλακτικοί ορισμοί για την ίδια έννοια.

Παρόλα αυτά, ο Poincare (1952) τόνισε ότι στη διδασκαλία των μαθηματικών, η ικανοποίηση των λογικών αυτών αρχών είναι μια αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη για τη χρήση μιας δήλωσης ως ορισμού. Είναι σημαντικό για τη μαθησιακή διαδικασία ο επιλεγμένος ορισμός να είναι και *διδακτικά κατάλληλος*. Κάθε διδακτική απόφαση βασίζεται στη σχέση μεταξύ της φύσης των μαθηματικών και τη φύση της μαθησιακής διαδικασίας. Ένας διδακτικά κατάλληλος ορισμός μιας νέας έννοιας πρέπει να στηρίζεται μόνο σε έννοιες που είναι ήδη γνωστές στο μαθητή.

Επιπλέον, σύμφωνα με τα ευρήματα της έρευνας των Leikin & Winicky-Landman (2000), οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι οι πιο ακριβείς ορισμοί βοηθούν στην αποφυγή μαθησιακής σύγχυσης κατά τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών και προτιμούν ορισμούς οι οποίοι εμπεριέχουν χαρακτηριστικά όπως διαισθητικότητα, ικανοποίηση των μαθησιακών αναγκών σε συνδυασμό με τη γνώση των μαθητών, σαφήνεια και ευκολία κατανόησης, άνεση για την εφαρμογή τους στην επίλυση προβλήματος και ενεργοποίηση μαθηματικών γενικεύσεων.

Για να υποστηριχθεί η διαλεκτική ανάπτυξη του μαθητή ο ορισμός θα πρέπει να ανήκει στη ζώνη επικείμενης ανάπτυξής του (ΖΕΑ)[3] (Vygotsky, 2000). Είναι επιθυμητό, επίσης, ο ορισμός να είναι διαισθητικός, να βασίζεται δηλαδή, όσο το δυνατόν περισσότερο στις διαισθήσεις του μαθητή (Fischbein, 1987; Mariotti &

[3] Η ΖΕΑ περιγράφεται ως η απόσταση ανάμεσα στο παρόν επίπεδο νοητικής ανάπτυξης του ατόμου (τι μπορεί τώρα να κάνει) και στο επίπεδο επικείμενης ανάπτυξης (τι μπορεί να κάνει με καθοδήγηση). Με τα λόγια του Vygotsky (2000): είναι η «απόσταση μεταξύ του παρόντος επιπέδου ανάπτυξης, όπως αυτό προσδιορίζεται από τα προβλήματα που επιλύει κανείς μόνος του, και του επιπέδου της επικείμενης ανάπτυξης, όπως αυτό καθορίζεται από το είδος των προβλημάτων που επιλύει με καθοδήγηση από τον έμπειρο ενήλικα ή σε συνεργασία με τους πιο ικανούς συνεργάτες».

Fischbein, 1997) και κομψός. Για παράδειγμα, κάποιοι μαθηματικοί θεωρούν ότι ο ορισμός για τους πρώτους αριθμούς ως «ο αριθμός που έχει ακριβώς δύο διαφορετικούς διαιρέτες» είναι πιο κομψός από τον ορισμό «ο αριθμός που είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα και διαιρείται μόνο από τη μονάδα και τον εαυτό του» (Vinner, 1991).

1.1.3 Η διαδικασία απόδοσης ορισμού (defining process)

Η διαδικασία απόδοσης ορισμού πρέπει να προσεγγιστεί στην πολυπλοκότητά της από δύο πλευρές: ως στοιχείο του γεωμετρικού συλλογισμού, αλλά και ως μια διαδικασία μαθηματικής δραστηριότητας, καθώς η δεύτερη συχνά λείπει από τη σχολική πρακτική (Mariotti & Fischbein, 1997).

Η άμεση διδασκαλία των γεωμετρικών ορισμών χωρίς να δίνεται έμφαση στη διαδικασία δημιουργίας ορισμών από τους ίδιους τους μαθητές έχει συχνά δεχθεί αρνητική κριτική από μαθηματικούς και στελέχη της μαθηματικής εκπαίδευσης. Για παράδειγμα, ήδη από το 1908 η Benchara Blandford (στο de Villiers, 1998) έγραφε:

> «Μου φαίνεται μια εξαιρετικά βάρβαρη μέθοδος, ειδικά στη Γεωμετρία, αν όχι σε άλλα μαθήματα, να δίνεις στο παιδί έτοιμους ορισμούς, προκειμένου στη συνέχεια να τους απομνημονεύσει αφού έχουν προηγουμένως εξηγηθεί με λιγότερη ή περισσότερη προσοχή. Όταν το κάνεις αυτό πετάς συνειδητά έναν από τους πιο πολύτιμους παράγοντες της διανοητικής εξάσκησης. Η ένταξη ενός εύπλαστου ορισμού στην δραστηριότητα του παιδιού, καθοδηγούμενη από τις κατάλληλες ερωτήσεις είναι ενδιαφέρουσα και συνάμα υψηλά εκπαιδευτικής αξίας».

Ο γνωστός μαθηματικός Hans Freudenthal (1973) επίσης κατέκρινε την παραδοσιακή πρακτική της άμεσης παράθεσης των γεωμετρικών ορισμών, η οποία κατά τη γνώμη του εμποδίζει τη συμμετοχή των μαθητών σε μαθηματική αλληλεπίδραση και πρότεινε ότι οι μαθητές θα πρέπει να ενθαρρύνονται να δημιουργούν τους δικούς τους ορισμούς ως μέρος της εκμάθησής τους.

Ο Ohtani (1996) ισχυρίστηκε ότι η παραδοσιακή πρακτική της απλής αναφοράς των ορισμών στους μαθητές είναι μια μέθοδος που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί για να ελέγχουν τους μαθητές, για την απόκτηση ενός βαθμού ομοιομορφίας στην τάξη και προς αποφυγή διαχείρισης των ιδεών των μαθητών και πιθανών προβληματικών αλληλεπιδράσεων με αυτούς. Ο Vinner (1991) παρουσίασε επιχειρήματα και εμπειρικά δεδομένα και ανέφερε ότι η απλή γνώση ενός ορισμού από τον μαθητή δεν εγγυάται την κατανόηση μιας γεωμετρικής έννοιας. Για παράδειγμα, παρόλο που οι μαθητές μπορεί να έχουν διδαχθεί και να είναι σε θέση να αναπαράγουν τον ορισμό του παραλληλόγραμμου ως το τετράπλευρο με τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, μπορεί να μη θεωρούν ότι τα ορθογώνια, τα τετράγωνα και οι ρόμβοι είναι παραλληλόγραμμα, καθώς για κάποιους μαθητές η εικόνα της έννοιας του παραλληλογράμμου είναι αυτή στην οποία δεν επιτρέπεται όλες οι πλευρές ή οι γωνίες να είναι ίσες.

Επιπρόσθετα, ακόμα και οι φοιτητές μαθηματικών δεν γνωρίζουν ότι οι ορισμοί στη γεωμετρία θα πρέπει να είναι οικονομικοί (να μην έχουν περιττές πληροφορίες) και αυθαίρετοι (με την έννοια, ότι μπορεί να υπάρχουν διαφορετικοί εναλλακτικοί ορισμοί) (Linchevski, Vinner & Karsenty, 1992). Αυτό πιθανόν να οφείλεται στη παλαιότερη σχολική τους εμπειρία, όπου οι ορισμοί διδασκόταν άμεσα σε αυτούς. Συνεπώς, προκειμένου να αυξηθεί η κατανόηση των γεωμετρικών ορισμών και των εννοιών με τις οποίες συσχετίζονται, είναι ουσιώδης και απαραίτητη η εμπλοκή των μαθητών στη διαδικασία απόδοσης ορισμού των γεωμετρικών εννοιών. Επιπλέον, η δημιουργία ορισμών (defining) αποτελεί μια μαθηματική δραστηριότητα όχι μικρότερης αξίας από άλλες διαδικασίες όπως η επίλυση προβλήματος, η διατύπωση υποθέσεων, η γενίκευση, η απόδειξη και επομένως δε θα έπρεπε να απορρίπτεται από τη διδασκαλία των μαθηματικών ως δραστηριότητα δευτερεύουσας σημασίας.

Ο De Villiers (1998) πραγματοποίησε μελέτες όπου ενέπλεξε τους μαθητές στην κατασκευή δικών τους τυπικών ορισμών για γεωμετρικές έννοιες και παρουσίασε θετικά αποτελέσματα αυτής της εμπειρίας. Υποστήριξε ότι οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν την ικανότητά τους να ορίζουν γεωμετρικά σχήματα, εάν συμμετέχουν ενεργά στη διαδικασία κατασκευής του ορισμού. Τόνισε επίσης, ότι δε θα έπρεπε να δίνονται προκατασκευασμένοι ορισμοί στους μαθητές και να αναμένεται από αυτούς να τους μάθουν άμεσα και να είναι σε θέση να τους χρησιμοποιούν λειτουργικά. Αντιθέτως, θα έπρεπε να τους δίνεται η ευκαιρία να ανακαλύψουν οι ίδιοι τους ορισμούς μέσω μιας διαδικασίας κατασκευής τους. Η Edwards (1997) αναγνώρισε τα παιδαγωγικά οφέλη της μεθόδου αυτής στη διευκόλυνση των μαθητών να πετύχουν μια βαθύτερη κατανόηση και εκτίμηση της μαθηματικής δραστηριότητας, αλλά επικαλέστηκε επίσης ότι χρειάζεται προσοχή, αναφερόμενη στη μέθοδο αυτή ως «ενδεχομένως προβληματική». Στην έρευνά της έδειξε ότι κάποιες δραστηριότητες ορισμού ενισχύουν την αίσθηση στους μαθητές ότι οι ορισμοί μπορεί να είναι «σωστοί» ή «λάθος» και ότι η άσκηση ορισμού είναι για να ανακαλύψουν τον «σωστό» ορισμό μιας έννοιας.

Στα μαθηματικά μπορούμε να ξεχωρίσουμε δύο τύπους διαδικασίας ορισμού των εννοιών, τον *περιγραφικό* (a posteriori) και τον *εποικοδομητικό* (a priori) ορισμό. Κατά τον περιγραφικό ορισμό μιας έννοιας, η έννοια και οι ιδιότητές της είναι ήδη γνωστές για κάποιο χρονικό διάστημα και η έννοια ορίζεται μετέπειτα. Η διαδικασία αυτή επιτυγχάνεται επιλέγοντας ένα κατάλληλο υποσύνολο ενός συνόλου ιδιοτήτων της έννοιας από το οποίο όλες οι άλλες ιδιότητες μπορούν να συναχθούν μέσω της παραγωγικής – αποδεικτικής διαδικασίας. Αυτό το υποσύνολο λειτουργεί έπειτα ως ορισμός και οι υπόλοιπες εναπομείναντες ιδιότητες πηγάζουν λογικά από αυτό ως θεωρήματα (de Villiers, 1998) .

Ο εποικοδομητικός ορισμός μιας έννοιας λαμβάνει χώρα όταν ένας ήδη υπάρχων ορισμός τροποποιείται, μέσω του αποκλεισμού, της γενίκευσης, της εξειδίκευσης, της αντικατάστασης ή της προσθήκης ιδιοτήτων, έτσι ώστε κατά τη διαδικασία αυτή να προκύπτει μια νέα έννοια (Freudenthal, 1973; de Villiers, 1998). Ο κύριος σκοπός ή λειτουργία του περιγραφικού ορισμού είναι η συστηματοποίηση της ήδη υπάρχουσας γνώσης, ενώ η κύρια λειτουργία του εποικοδομητικού ορισμού είναι η δημιουργία νέας γνώσης (de Villiers, 1998).

1.2 Η εικόνα της έννοιας (concept image) και ο ορισμός της έννοιας (concept definition)

Πολλές έννοιες που συναντούμε στα μαθηματικά έχουν μετατραπεί από μια μορφή σε κάποια άλλη, προτού οριστούν επίσημα καθώς στο νου του κάθε ατόμου υπάρχει μια πολύπλοκη γνωστική δομή, η οποία αποδίδει μια ποικιλία προσωπικών νοερών εικόνων όταν ανακαλείται μια έννοια.

Όταν βλέπουμε ή ακούμε το όνομα μιας έννοιας, ενεργοποιείται η μνήμη και αυτομάτως κάτι μας έρχεται στο νου. Συνήθως, δεν είναι ο ορισμός της έννοιας, ακόμα και στην περίπτωση που η έννοια έχει ορισμό. Είναι αυτό που οι Tall & Vinner (1981) αποκαλούν «εικόνα της έννοιας» (concept image). Ο όρος αυτός χρησιμοποιήθηκε για να περιγράψει τη «συνολική γνωστική δομή που σχετίζεται με την έννοια, η οποία περιλαμβάνει όλες τις νοερές εικόνες και τις συναφείς ιδιότητες και διαδικασίες» (Tall & Vinner, 1981).

Η «εικόνα της έννοιας» εμπεριέχει όλες τις συσχετίσεις με την έννοια, συμπεριλαμβάνοντας λεκτικούς, οπτικούς, φωνητικούς και πιθανόν και άλλους αισθητηριακούς συσχετισμούς (Vinner, 2011). Μπορεί να είναι μια εικονική αναπαράσταση της έννοιας ή μια συλλογή από εντυπώσεις ή εμπειρίες που μπορούν να μετατραπούν σε λεκτικές μορφές. Οι μορφές αυτές όμως δεν είναι αυτές που μας έρχονται πρώτες στο νου αλλά δημιουργούνται σε ένα μετέπειτα στάδιο, καθώς η «εικόνα της έννοιας» διαμορφώνεται με τα χρόνια μέσω των εμπειριών του ατόμου και αλλάζει όταν αυτό έρχεται σε επαφή με νέα ερεθίσματα που σχετίζονται με την έννοια. Επομένως, η εικόνα της έννοιας μπορεί να διαφέρει από άτομο σε άτομο και από κουλτούρα σε κουλτούρα (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1991; Vinner, 2011).

Ο όρος «ορισμός της έννοιας» (concept definition) από την άλλη, διατυπώθηκε από τους Tall & Vinner (1981) ως «ένα λεκτικό σχήμα που χρησιμοποιείται για να προσδιορίσει την έννοια». Ο ορισμός μπορεί απλά να απομνημονευτεί (αποστήθιση) ή να συσχετιστεί σε μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό με την έννοια ως σύνολο. Μπορεί, επίσης, οι ίδιοι οι μαθητές να κατασκευάζουν τον δικό τους προσωπικό ορισμό (personal concept definition), ο οποίος στην περίπτωση αυτή είναι ο συνδυασμός των λέξεων που χρησιμοποιεί ο μαθητής για την εξήγηση της δικής του εικόνας της έννοιας. Ο ορισμός της έννοιας μπορεί να τροποποιηθεί με τον καιρό από τον ίδιο το μαθητή ανάλογα με τις εμπειρίες του και τα ερεθίσματα που δέχεται. Με τον τρόπο αυτό, ο προσωπικός ορισμός της έννοιας μπορεί να διαφέρει από έναν τυπικό ορισμό της έννοιας (formal concept definition), ο οποίος είναι γενικά αποδεκτός από τη μαθηματική κοινότητα.

Για να κατακτήσουν οι μαθητές μια έννοια, πρέπει να σχηματίσουν μια εικόνα της έννοιας για αυτήν. Μπορεί να αποστηθίζουν τον ορισμό της έννοιας αλλά αυτό δεν εγγυάται την κατανόησή της. Πρέπει οι λέξεις να συσχετίζονται με ένα συγκεκριμένο νόημα. Πολλές έννοιες της καθημερινής ζωής, όπως σπίτι, πορτοκάλι, γάτα κ.α., κατακτιούνται χωρίς την εμπλοκή ορισμών. Από την άλλη, κάποιες έννοιες μπορούν να εξηγηθούν καλύτερα από τους ορισμούς. Η λέξη «δάσος» μπορεί να παρουσιαστεί σε ένα παιδί λέγοντας «πολλά, πολλά δέντρα μαζί». Τέτοιου είδους ορισμοί βοηθούν να σχηματιστεί η εικόνα της έννοιας. Από τη στιγμή που θα σχηματιστεί η εικόνα της έννοιας, ο ορισμός γίνεται περιττός. Θα παραμείνει ανενεργός ή μπορεί ακόμα και να ξεχαστεί κατά τη διαχείριση δηλώσεων σχετικά με την έννοια. Ο ρόλος του ορισμού κατά το σχηματισμό μιας έννοιας μπορεί να παρομοιαστεί και με μια «σκαλωσιά», η οποία απομακρύνεται μετά το πέρας της κατασκευής ενός κτιρίου (Vinner, 1991).

Στην προσπάθειά του να παρουσιάσει τις ιδέες του με σχεδιαγράμματα ο Vinner (1991) υπέθεσε την ύπαρξη δύο διαφορετικών «κελιών» στη γνωστική δομή του ατόμου. Το ένα κελί αντιστοιχεί στον ορισμό της έννοιας και το άλλο στην εικόνα της έννοιας. Ένα κελί ή και τα δύο μπορεί να είναι κενά. Το κελί της εικόνας της έννοιας θεωρείται κενό για όσο διάστημα δεν συσχετίζεται κάποιο νόημα με το όνομα της έννοιας. Αυτό μπορεί να συμβεί σε πολλές περιπτώσεις όπου ο ορισμός της έννοιας απλά απομνημονεύεται χωρίς σημασία. Τα δύο κελιά μπορεί να αλληλεπιδρούν παρόλο που μπορούν να σχηματιστούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Ένας μαθητής για παράδειγμα, μετά από μελέτη και παρατήρηση πολλών γραφημάτων σε διάφορες περιπτώσεις μπορεί να έχει σχηματίσει μια εικόνα της έννοιας για το σύστημα συντεταγμένων όπου οι δύο άξονες τέμνονται κάθετα. Στην πορεία, μπορεί ο καθηγητής μαθηματικών να ορίσει ένα σύστημα συντεταγμένων ως οποιεσδήποτε δύο ευθείες γραμμές που τέμνονται σε ένα σημείο. Ως αποτέλεσμα, τρία πιθανά ενδεχόμενα μπορεί να συμβούν:

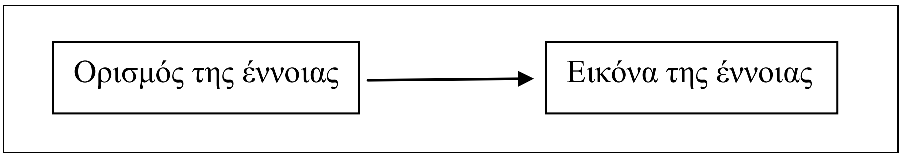
- Η εικόνα της έννοιας μπορεί να αλλάξει, ώστε να συμπεριλάβει και τα συστήματα συντεταγμένων των οποίων οι άξονες δεν είναι κάθετοι (ικανοποιητική ανακατασκευή της εικόνας της έννοιας).
- Η εικόνα της έννοιας μπορεί να παραμείνει ίδια. Το κελί του ορισμού θα συμπεριλάβει τον ορισμό του εκπαιδευτικού για ένα σύντομο χρονικό διάστημα, αργότερα όμως ο ορισμός αυτός θα ξεχαστεί και όταν ο μαθητής θα κληθεί να ορίσει το σύστημα συντεταγμένων, θα αναφερθεί και πάλι σε άξονες που σχηματίζουν ορθή γωνία (Στην περίπτωση αυτή δεν αφομοιώθηκε ο τυπικός ορισμός της έννοιας).
- Και τα δύο κελιά θα παραμείνουν ως έχουν. Μπορεί ο μαθητής τη στιγμή εκείνη να επαναλάβει τον ορισμό του εκπαιδευτικού αλλά σε όλες τις άλλες περιπτώσεις να θεωρεί το σύστημα συντεταγμένων ως αυτό που έχει δύο κάθετους άξονες.

Μια παρόμοια διαδικασία μπορεί να λάβει χώρα κατά την μακροπρόθεσμη διαδικασία σχηματισμού μια έννοιας (διάγραμμα 1). Όταν μια νέα έννοια παρουσιάζεται για πρώτη φορά στον μαθητή μέσω ενός ορισμού, το κελί της εικόνας της έννοιας είναι αρχικά κενό και γεμίζει σταδιακά μετά από πολλά παραδείγματα και επεξηγήσεις. Παρόλα αυτά, δεν αναπαριστά απαραιτήτως όλες τις όψεις του ορισμού της έννοιας.

Ορισμός της έννοιας	⟷	Εικόνα της έννοιας

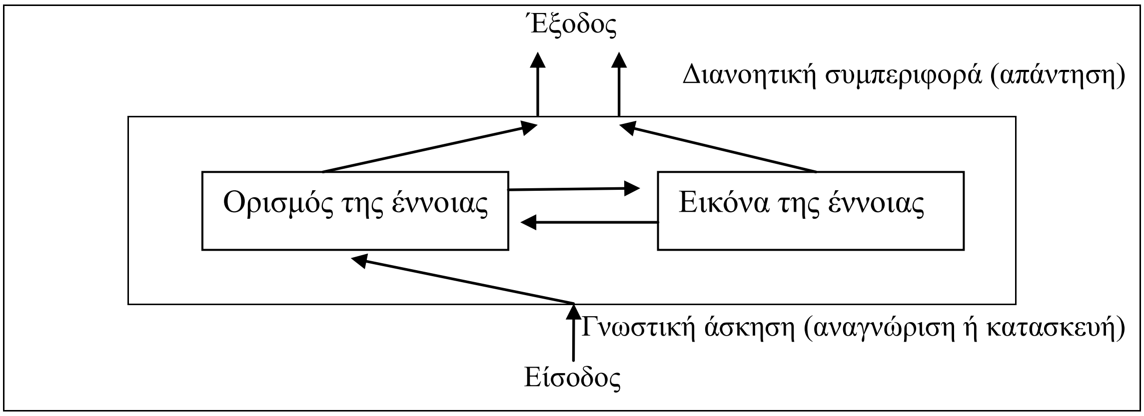
Διάγραμμα 1: Αλληλεπίδραση μεταξύ εικόνας της έννοιας και ορισμού της έννοιας

Επιπρόσθετα, παρατηρείται το φαινόμενο πολλοί εκπαιδευτικοί δευτεροβάθμιας αλλά και τριτοβάθμιας εκπαίδευσης να αναμένουν μια μονόδρομη διαδικασία σχηματισμού της έννοιας (διάγραμμα 2). Θεωρούν ότι η εικόνα της έννοιας θα σχηματιστεί μέσω του ορισμού της και θα ελέγχεται πλήρως από αυτόν.

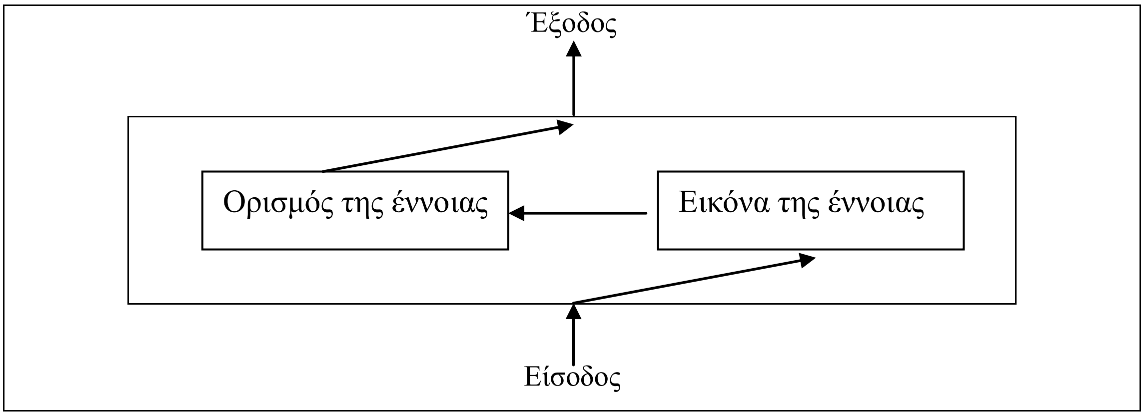


Διάγραμμα 2: Γνωστική ανάπτυξη μιας τυπικής έννοιας

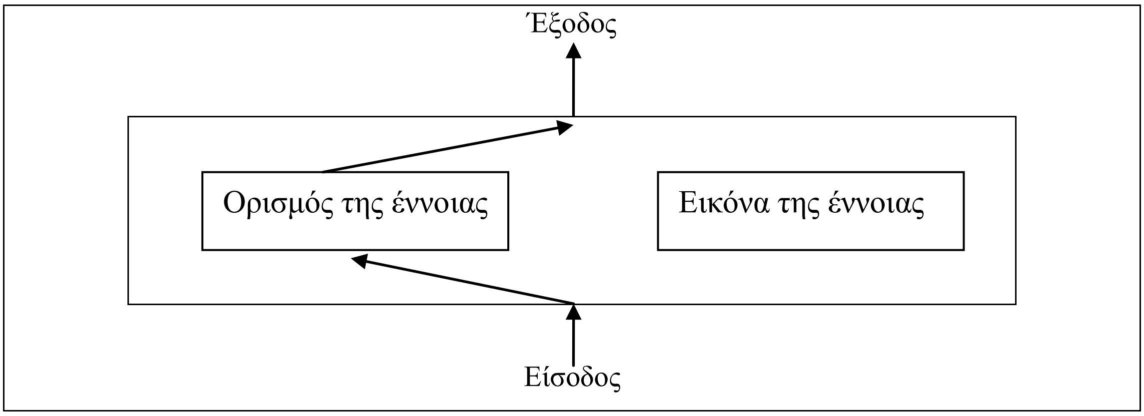
Εκτός από την διαδικασία σχηματισμού της έννοιας υπάρχουν και οι διαδικασίες της επίλυσης προβλημάτων ή διάφορων άλλων ασκήσεων. Όταν μια γνωστική δραστηριότητα ανατίθεται στον μαθητή, τα κελιά της εικόνας της έννοιας και του ορισμού της έννοιας ενεργοποιούνται, αλληλεπιδρούν και μέσω του ορισμού οδηγείται ο μαθητής στη λύση. Σύμφωνα με τον Vinner (1991) οι διανοητικές διαδικασίες που εμπλέκονται κατά τη διάρκεια επίλυσης ασκήσεων ή προβλημάτων εκφράζονται σχηματικά με ένα από τα τρία παρακάτω διαγράμματα:



Διάγραμμα 3: Αλληλεπίδραση μεταξύ εικόνας της έννοιας και ορισμού της έννοιας

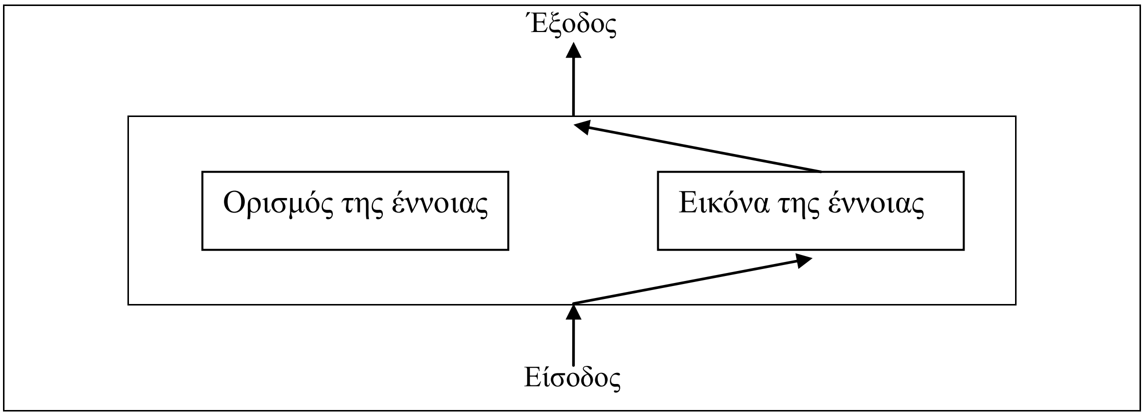


Διάγραμμα 4: Επαγωγή μετά από διαισθητική σκέψη



Διάγραμμα 5: Καθαρά τυπική επαγωγή

Το κοινό χαρακτηριστικό όλων των διαδικασιών που παρουσιάζονται στα διαγράμματα, είναι ότι ανεξάρτητα με τον τρόπο που αντιδράει το σύστημα συσχετίσεων όταν ανατίθεται σε κάποιον μια γνωστική δραστηριότητα, συμβουλεύεται πρώτα τον ορισμό της έννοιας προτού οδηγηθεί και σχηματίσει τη λύση. Αυτή βέβαια είναι η ιδανική επιθυμητή διαδικασία. Δυστυχώς όμως, στην πράξη τα πράγματα είναι διαφορετικά. Για τις διαδικασίες που συμβαίνουν στην πραγματικότητα ο Vinner (1991) προτείνει ένα πιο κατάλληλο μοντέλο (διάγραμμα 6) όπου το κελί του ορισμού της έννοιας (παρόλο που δεν είναι κενό) δεν ενεργοποιείται κατά τη διάρκεια επίλυσης προβλημάτων ή ασκήσεων. Η καθημερινότητα και οι συνήθεις σκέψεις επικρατούν και ο μαθητής δε νιώθει την ανάγκη να συμβουλευτεί τον επίσημο ορισμό.



Διάγραμμα 6: Διαισθητική απάντηση

1.3 Η Θεωρία των Σχηματικών Εννοιών (Figural Concepts) του E.Fischbein

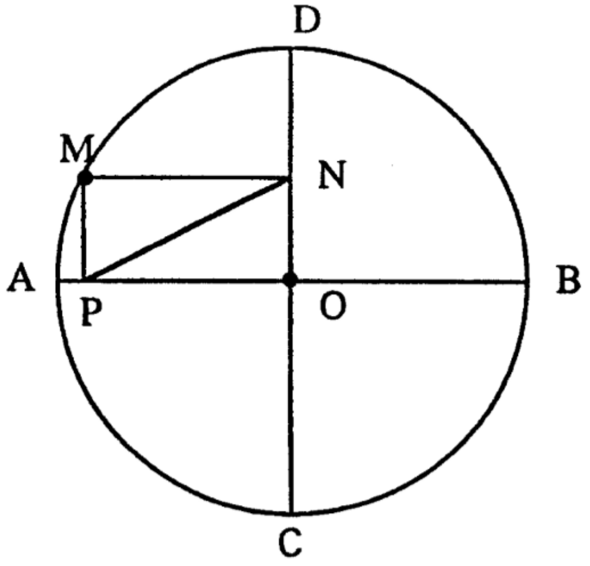
Στις πρόσφατες ψυχολογικές γνωστικές θεωρίες οι έννοιες και οι εικόνες θεωρούνται δύο βασικές και διαφορετικές κατηγορίες νοερών οντοτήτων. Ο Piéron στο "Vocabulaire de la Psychologie", ορίζει την «έννοια» ως τη «συμβολική αναπαράσταση (σχεδόν πάντα λεκτική) που χρησιμοποιείται στη διαδικασία αφηρημένης σκέψης και έχει μια γενικότερη σημασία που αντιστοιχεί σε ένα σύνολο απτών αναπαραστάσεων αναφορικά με τα κοινά τους στοιχεία» (Piéron, 1957). Αυτό που χαρακτηρίζει μια έννοια είναι το γεγονός ότι εκφράζει μια ιδέα, μια γενική, ιδεατή αναπαράσταση μιας κατηγορίας αντικειμένων, με βάση τα κοινά τους χαρακτηριστικά. Αντιθέτως, μια εικόνα (νοερή) είναι μια αισθητηριακή αναπαράσταση ενός αντικειμένου ή φαινομένου. Οι οπτικές εικόνες μερικές φορές περιγράφονται και ως 'εικόνες στο μυαλό' διότι κατέχουν χωροταξικές ιδιότητες όπως διαστάσεις, σχήμα, θέση, μέγεθος (Fischbein & Nachlieli, 1998). Η έννοια π.χ. του μετάλλου είναι η γενική ιδέα μιας κατηγορίας ουσιών που έχουν κάποιες κοινές ιδιότητες. Η εικόνα ενός μεταλλικού αντικειμένου είναι η αισθητηριακή αναπαράσταση από το αντίστοιχο αντικείμενο (που συμπεριλαμβάνει χρώμα, μέγεθος, κλπ).

Οι δύο αυτές κατηγορίες, εικόνες και έννοιες, φαίνεται να είναι ασύμβατες παρότι συνήθως αλληλεπιδρούν κατά τη διάρκεια μιας νοερής δραστηριότητας. Μια έννοια δεν κατέχει χωροταξικές ιδιότητες, είναι ιδανική και αφηρημένη, ενώ μια εικόνα δεν ανάγεται σε ιδέα εξαιτίας των αισθητηριακών της ιδιοτήτων (Fischbein & Nachlieli, 1998).

Ο Fischbein (1993) υποστήριξε ότι στον γεωμετρικό συλλογισμό διαχειριζόμαστε και μια τρίτη κατηγορία νοερών αντικειμένων τα οποία κατέχουν ταυτόχρονα εννοιολογικές αλλά και σχηματικές ιδιότητες και αναφέρεται σε αυτά με τον όρο «σχηματικές έννοιες» (figural concepts). Η σχηματική έννοια στερείται οποιασδήποτε απτής ή αισθητηριακής ιδιότητας (όπως χρώμα, βάρος, πυκνότητα, κλπ), εμφανίζει όμως σχηματικές ιδιότητες (σχήμα, θέση, μέγεθος). Η σχηματική αυτή κατασκευή ελέγχεται από λογικούς κανόνες και οι ιδιότητές της προκύπτουν από τους ορισμούς στο πλαίσιο ενός συγκεκριμένου αξιωματικού συστήματος. Από την άποψη αυτή, ένα γεωμετρικό σχήμα έχει και εννοιολογική φύση. Ένα τετράγωνο δεν είναι απλά μια εικόνα σχεδιασμένη σε ένα φύλλο χαρτιού. Είναι ένα σχήμα που ελέγχεται από τον ορισμό του. Ένα τετράγωνο είναι ένα ορθογώνιο που έχει ίσες πλευρές. Ξεκινώντας από τις ιδιότητες αυτές μπορεί κανείς να οδηγηθεί στην ανακάλυψη κι άλλων ιδιοτήτων του τετραγώνου (ισότητα των γωνιών οι οποίες είναι όλες ορθές, ισότητα των διαγωνίων, κλπ).

Όταν φανταζόμαστε έναν κύκλο, φανταζόμαστε έναν σχεδιασμένο κύκλο (που συμπεριλαμβάνει για παράδειγμα, το χρώμα του μελανιού) και όχι τον ιδεατό, τέλειο κύκλο. Ο μαθηματικός κύκλος, όμως, που είναι αντικείμενο του μαθηματικού μας συλλογισμού, δεν έχει χρώμα, υλική υπόσταση, μάζα, κλπ και θεωρητικά είναι ιδανικά τέλειος. Έχει όλες τις ιδιότητες μιας έννοιας και μπορεί να συμμετέχει σε έναν μαθηματικό συλλογισμό.

Προκειμένου να γίνει περισσότερο κατανοητή η θεωρία του, ο Fischbein αναφέρει μερικά παραδείγματα. Ένα από αυτά είναι το εξής: «Σε έναν κύκλο με κέντρο O σχεδιάζουμε δύο κάθετους διαμέτρους AB και CD. Επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο M του κύκλου και σχεδιάζουμε τις καθέτους MN και MP πάνω στις δύο διαμέτρους. Πόσο είναι το μήκος του PN;»



Με μια πρώτη ματιά φαίνεται πως το πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί διότι τα μήκη των τμημάτων MP και MN εξαρτώνται από τη θέση του σημείου M. Ξαφνικά όμως, κάποιος θα παρατηρήσει ότι το MPON είναι ένα ορθογώνιο και ότι το τμήμα MO είναι η μια διαγώνιος του ορθογωνίου. Συνεπώς, PN = MO και MO είναι η ακτίνα του κύκλου. Η ισότητα των διαγωνίων του ορθογωνίου και των ακτινών του κύκλου δεν αμφισβητείται. Οι σχέσεις αυτές δεν εξαρτώνται από το σχέδιο αλλά επιβάλλονται από ορισμούς και θεωρήματα. Το συμπέρασμα δεν προκύπτει εξετάζοντας χωριστά την εικόνα και τους τυπικούς περιορισμούς, αλλά μέσω μιας διαδικασίας κατά την οποία εξετάζεται ένα λεπτομερές σχήμα και αποκαλύπτονται λογικές σχέσεις. Η διαδικασία ιδανίκευσης του σχήματος λαμβάνει χώρα αυτόματα ώστε να μετατραπεί σε αναπόσπαστο κι ενεργό κομμάτι ενός αυστηρού λογικού συλλογισμού.

Το γεγονός ότι οδηγούμαστε στιγμιαία στο συμπέρασμα ότι PN = MO = ακτίνα, ακριβώς τη στιγμή που αντιλαμβανόμαστε την ύπαρξη του ορθογωνίου PONM, χωρίς περαιτέρω διερεύνηση, υποστηρίζει την ιδέα ότι το εξεταζόμενο σχήμα είναι εξ' αρχής όχι μια απλή και συνηθισμένη εικόνα, αλλά μια κατασκευή που είναι ήδη λογικά ελεγχόμενη. Η συνένωση μεταξύ της έννοιας και της εικόνας φαίνεται να είναι στην περίπτωση αυτή ολοκληρωμένη.

1.3.1 Ο ορισμός, η εικόνα και η σχηματική έννοια

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, η έννοια του γεωμετρικού σχήματος εμπεριέχει τρεις κατηγορίες νοερών οντοτήτων: τον ορισμό (the definition), την εικόνα (the image) (που βασίζεται σε αισθητηριακές εμπειρίες, όπως η εικόνα ενός σχεδίου) και την σχηματική έννοια (the figural concept).

Είμαστε τόσο συνηθισμένοι στο να διακρίνουμε τις εικόνες (ως «εικόνες στο μυαλό μας») από τις έννοιες (ως γενικές, μη αισθητηριακές ιδέες) που καθιστά πολύ δύσκολο να δεχτούμε μια κατασκευή που θα έχει ταυτόχρονα εννοιολογικές και εικονικές χωρικές ιδιότητες. Η δυσκολία αυτή καθορίζεται από το γεγονός ότι αντιλαμβανόμαστε άμεσα μόνο τη νοερή αναπαράσταση της αντίστοιχης έννοιας (που συμπεριλαμβάνει διάφορες αισθητηριακές ιδιότητες όπως το χρώμα). Χρειάζεται μια εννοιολογική προσπάθεια προκειμένου να κατανοήσουμε ότι οι μαθηματικο-λογικοί χειρισμοί ελέγχουν μόνο μια ιδανική εκδοχή της εικόνας, το χωρικό-σχηματικό περιεχόμενο της εικόνας. Η σχηματική έννοια έχει κάποιο νόημα. Η ιδιαιτερότητα αυτού του είδους νοήματος είναι ότι περιέχει το σχήμα ως εγγενή ιδιότητα. Το αυθεντικό νόημα της λέξης «κύκλος» στη γεωμετρία δεν μπορεί να συρρικνωθεί σε έναν καθαρό τυπικό ορισμό. Είναι μια εικόνα που ελέγχεται ολοκληρωτικά από έναν ορισμό. Χωρίς αυτού του είδους τις χωρικές εικόνες η γεωμετρία δε θα υπήρχε ως κλάδος των μαθηματικών.

Ο όρος «μορφή» ή «σχήμα» (figure) είναι αμφιλεγόμενος και του έχουν αποδοθεί διάφορα νοήματα. Στη παρούσα θεωρία ο όρος αναφέρεται μόνο στις χωρικές εικόνες. Το σχήμα κατέχει συνήθως μια συγκεκριμένη δομή ή μορφή (gestalt). Τα γεωμετρικά σχήματα (geometrical figures) αντιστοιχούν σ' αυτή την περιγραφή με ορισμένες όμως διευκρινήσεις: α) ένα γεωμετρικό σχήμα είναι μια νοερή εικόνα, οι ιδιότητες της οποίας ελέγχονται απόλυτα από έναν ορισμό β) ένα σχέδιο δεν είναι το ίδιο το γεωμετρικό σχήμα, αλλά μια γραφική ή απτή, υλική αποτύπωσή του γ) η νοερή εικόνα ενός γεωμετρικού σχήματος είναι συνήθως η αναπαράσταση του υλικού προτύπου του. *Το γεωμετρικό σχήμα είναι μόνο η αντίστοιχη ιδέα που αντιστοιχεί στο σχέδιο, η αφηρημένη, ιδεατή, αγνή σχηματική οντότητα (the figural concept) που καθορίζεται αυστηρά από τον ορισμό της (the definition)* (Fischbein, 1993).

Όπως προαναφέρθηκε, οι σχηματικές έννοιες συνιστούν μόνο το ιδανικό όριο, το σημείο απόλυτης αρμονίας μια διαδικασίας συνένωσης και αλληλεπίδρασης μεταξύ των εννοιολογικών και σχηματικών όψεων. Η αρμονική αυτή αλληλεπίδραση μεταξύ έννοιας και εικόνας στο γεωμετρικό συλλογισμό εκφράζει μια ιδανική, εξαιρετική κατάσταση που συνήθως δεν κατακτιέται απόλυτα λόγω ψυχολογικών περιορισμών. Στη Γεωμετρία, η ιδανική σχηματική έννοια (figural concept) αντιστοιχεί στον «ορισμό της έννοιας», ενώ η νοερή της αντανάκλαση με όλους τους συνειρμούς της και τις ασάφειές της αντιστοιχεί σε αυτό που οι Tall & Vinner αποκάλεσαν «εικόνα της έννοιας» (Fischbein, 1993).

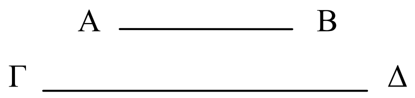
1.3.2 Εννοιολογικές συγκρούσεις και διδακτικές προτάσεις

Σε μια ιδανική περίπτωση, η αλληλεπίδραση μεταξύ έννοιας και σχήματος πρέπει να είναι αρμονική, απόλυτη. Υπό συνήθεις ψυχολογικούς όρους, τα σχηματικά και τα εννοιολογικά χαρακτηριστικά μιας σχηματικής έννοιας έχουν μεταξύ τους σχέση εξάρτησης με συγκεκριμένους περιορισμούς. Το γεγονός αυτό, οδηγεί πολύ συχνά σε αντιθέσεις, συγκρούσεις και εσωτερικές εντάσεις, έως τον απόλυτο διαχωρισμό της σχηματικής έννοιας στα δύο βασικά της συστατικά. Η εννοιολογική, όμως, οργάνωση θα πρέπει να κυριαρχεί απόλυτα πάνω στις σχηματικές ιδιότητες και σχέσεις. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι οι εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες μένουν υπό την επιρροή των αντίστοιχων συστημάτων, του εννοιολογικού και του σχηματικού. Πολύ συχνά, οι σχηματικοί περιορισμοί μπορεί να διαφύγουν από τον εννοιολογικό έλεγχο και να επιβληθούν στη σκέψη με ερμηνείες που είναι σε συμφωνία με το σχήμα αλλά δεν υπόκεινται πια σε εννοιολογικούς περιορισμούς.

Παρόλο που ο μαθητής γνωρίζει τον ορισμό του παραλληλογράμμου (το τετράπλευρο του οποίου οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες), μπορεί να του είναι δύσκολο να το αναγνωρίσει μεταξύ των διάφορων σχημάτων που ανταποκρίνονται στον ορισμό αυτό, της ίδιας μορφής, της ίδιας κατηγορίας σχημάτων. Ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο, ένα ορθογώνιο, ένα τετράγωνο είναι σχηματικά τόσο διαφορετικά που το ενοποιητικό στοιχείο της κοινής έννοιας απλά εξαφανίζεται. Εδώ, η έννοια δεν μπορεί να ελέγξει το σχήμα όχι γιατί ο μαθητής δεν κατέχει σωστά την έννοια, αλλά επειδή το σχήμα εξακολουθεί να είναι φορέας μορφολογικών χαρακτηριστικών εμπνεόμενων από την πράξη. Για την ακρίβεια, η πλήρης συμβίωση των εννοιολογικών και των σχηματικών όψεων της έννοιας δεν υπάρχει ακόμα.

Η σχέση μεταξύ των αντικειμένων και του ορισμού τους είναι διαφορετική στις εμπειρικές επιστήμες και στα μαθηματικά. Ενώ στις εμπειρικές επιστήμες ο ορισμός ελέγχεται απόλυτα από τις ιδιότητες μιας κατηγορίας αντικειμένων, στα μαθηματικά είναι ο ορισμός αυτός που θα επιβάλει άμεσα ή μέσω της παραγωγικής διαδικασίας, τις ιδιότητες της αντίστοιχης κατηγορίας αντικειμένων. Συνεπώς, η λειτουργία του σχηματικού συστατικού ενός γεωμετρικού σχήματος θα πρέπει να εξαρτάται πλήρως από τους λογικούς περιορισμούς. Η ιδέα αυτή δεν είναι πάντα κατανοητή και συχνά ξεχνιέται από τους μαθητές. Το σχηματικό συστατικό τείνει να ξεχωρίζει τον εαυτό του από τον τυπικό έλεγχο και να συμπεριφέρεται αυτόνομα σε συμφωνία με τα πρότυπα (π.χ. το γεγονός ότι μετά από την απόδειξη ενός θεωρήματος ως απόλυτη εγγύηση για την εγκυρότητα του θεωρήματος, οι μαθητές απαιτούν επιπλέον ελέγχους για κάθε υποκατηγορία της τάξης των σχημάτων). Αυτή η δυσκολία στον χειρισμό των γεωμετρικών σχηματικών εννοιών, δηλαδή η τάση να απορρίπτουν τον ορισμό υπό την πίεση σχηματικών περιορισμών, αποτελεί ένα μεγάλο εμπόδιο στον γεωμετρικό συλλογισμό.

Ένα παράδειγμα: Συγκρίνοντας το σύνολο των σημείων στα τμήματα ΑΒ και ΓΔ θα χρειαστεί να έρθει αντιμέτωπος κάποιος με τη σύγκρουση μεταξύ του ισχυρισμού ότι στο ΓΔ υπάρχουν περισσότερα σημεία και στον ισχυρισμό ότι τα δύο σύνολα είναι ίσα (διότι τα σημεία που περιέχουν είναι άπειρα). Η σωστή ερμηνεία της έννοιας του σημείου είναι ότι αυτό είναι μια σχηματική έννοια. Εννοιολογικά, το σημείο είναι μια οντότητα που δεν έχει διαστάσεις. Σχηματικά (χωροταξικά) ένα σημείο υποδεικνύει μια θέση. Αλλά επειδή η θέση δεν μπορεί να αναπαρασταθεί με άλλο τρόπο, παρά μόνο εικονικά, τα σημεία αποκτούν διαστάσεις (δισδιάστατη αναπαράσταση). Η σχηματική αυτή έννοια λοιπόν, χάνει την καθαρότητά της και δημιουργεί μια σύγχυση. Όταν ισχυριζόμαστε ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα περιέχει άπειρα σημεία, αναφερόμαστε στις οντότητες μηδενικών διαστάσεων. Ταυτόχρονα, η σχηματική όψη (η θέση) τείνει να γίνει αυτόματα μια εικονική τεκμηρίωση που οδηγεί στη σιωπηλή πεποίθηση της ανισότητας των δύο συνόλων των σημείων.



Όλα τα ανωτέρω οδηγούν στο συμπέρασμα ότι οι διαδικασίες δόμησης των σχηματικών εννοιών στο μυαλό των μαθητών δε θα έπρεπε να θεωρούνται ένα αυθόρμητο γεγονός των συνηθισμένων μαθημάτων γεωμετρίας. Η ερμηνεία των εννοιολογικών και σχηματικών ιδιοτήτων στις μοναδικές νοερές κατασκευές, με την κυριαρχία των εννοιολογικών περιορισμών πάνω στους σχηματικούς, δεν είναι μια φυσική διαδικασία. Θα έπρεπε να αποτελεί μια συνεχή, συστηματική και κύρια ενασχόληση του εκπαιδευτικού.

Προκειμένου λοιπόν, να παραχθεί μια επαρκής ενσωμάτωση σχήματος και έννοιας στον γεωμετρικό συλλογισμό, με την κυριαρχία των λογικών περιορισμών, πρέπει να χρησιμοποιούνται αντικρουόμενες καταστάσεις. Ο μαθητής θα πρέπει να εξασκηθεί να ακολουθεί προσεκτικά της απαιτήσεις του ορισμού, κάποιες φορές σε αντίθεση με τα στοιχεία που προβάλλει το σχήμα. Σε αυτό μπορεί να βοηθήσει η προσέγγιση της γεωμετρικής έννοιας όχι με μια μόνο εικόνα, αλλά μέσα από διαφορετικά είδη σε διαφορετικές θέσεις, προκειμένου να δοθεί έμφαση στην κυριαρχία του ορισμού πάνω στο σχέδιο κατά τη χρήση και ερμηνεία της σχηματικής έννοιας. Μια δεύτερη πρόταση είναι η χρήση διάφορων γεωμετρικών τόπων. Στην περίπτωση αυτή η απόλυτη σχέση μεταξύ εννοιολογικής και σχηματικής όψης εφαρμόζεται ρητά. Ένας γεωμετρικός τόπος είναι ένα σχήμα (μια γραμμή ή μια επιφάνεια) όλα τα σημεία του οποίου ικανοποιούν μια συγκεκριμένη ιδιότητα και ταυτόχρονα ανταποκρίνονται στην αντίστοιχη ιδιότητα του αντίστοιχου σχήματος.

Για παράδειγμα, αν ο κύκλος είναι μια σχηματική έννοια καθορίζεται από την απόλυτη αντιστοίχιση μεταξύ όλων των σημείων του και μια συγκεκριμένη σχέση που ορίζεται μετρικά ή αλγεβρικά. Όλα τα σημεία του κύκλου έχουν την ίδια απόσταση (ακτίνα ρ) από ένα σημείο Κ (κέντρο) και όλα τα σημεία που έχουν ίση απόσταση από το κέντρο Κ βρίσκονται πάνω στον αντίστοιχο κύκλο. Αλγεβρικά ισχύει

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2.$$

Δεν είναι δυνατόν να επινοηθούν ή να ανακαλυφθούν ιδιότητες του κύκλου που δεν θα πηγάζουν από τον ορισμό του. Παρόλο που ο κύκλος είναι μια εικόνα, μια χωροταξική αναπαράσταση, η ύπαρξή του και οι ιδιότητές του επιβάλλονται πλήρως από έναν τυπικό ορισμό. Τίποτα δεν είναι σωστό σχηματικά το οποίο δεν είναι σωστό και αποδεικτέο εννοιολογικά και το αντίστροφο.

Συνοψίζοντας, σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, όλες οι γεωμετρικές έννοιες έχουν διπλή φύση που χαρακτηρίζεται από δύο όψεις, την σχηματική και την εννοιολογική. Οι σχηματικές έννοιες είναι αφηρημένες, γενικές, ιδανικές, καθαρές, λογικά καθοριζόμενες οντότητες, παρόλο που ακόμα ανακλούν και ασχολούνται με νοερές αναπαραστάσεις χωροταξικών ιδιοτήτων (όπως σχήμα, θέση, μετρικά μεγέθη). Έτσι, σύμφωνα με την άποψη αυτή, ο γεωμετρικός συλλογισμός χαρακτηρίζεται από μια διαλεκτική αλληλεπίδραση ανάμεσα στις δύο αυτές όψεις. Παρά το γεγονός ότι οι δύο όψεις πρέπει να αλληλεπιδρούν αρμονικά, στην πραγματικότητα δεν ισχύει αυτό και εμφανίζεται μια προσωρινή αυτονομία της κάθε όψης, με αποτέλεσμα να προκαλείται σύγχυση στους μαθητές και να εμφανίζουν δυσκολίες στην κατανόηση των εννοιών.

1.4 Η θεωρία των επιπέδων ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης κατά Van Hiele

Το μοντέλο των Ολλανδών Piere Marie Van Hiele και της συζύγου του Dina Van Hiele-Geldol, σύμφωνα με το οποίο η γεωμετρική σκέψη των παιδιών εξελίσσεται σε διαδοχικά επίπεδα, προέκυψε το 1957 με την εκπόνηση των διδακτορικών διατριβών τους. Τα πέντε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης που προτείνονται από τους δύο Ολλανδούς παιδαγωγούς αριθμήθηκαν αρχικά από το 0 έως το 4, μέχρι που ο Senk (1989) υποστήριξε ότι θα πρέπει να είναι από το 1 έως το 5, χρησιμοποιώντας το επίπεδο 0 για τα παιδιά που δεν βρίσκονται ούτε στο «βασικό» επίπεδο του Van Hiele. Σε πρόσφατα έργα του, ο Van Hiele φαίνεται πως χρησιμοποιεί και ο ίδιος την αρίθμηση 1 έως 5 για τα πέντε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης που περιγράφονται παρακάτω:

- *Επίπεδο 1: Αναγνώρισης ή Οπτικοποίησης*. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα γεωμετρικά σχήματα ως ολότητα, με βάση τη μορφή τους και δεν μπορούν να αντιληφθούν ότι αποτελούνται από διάφορα μέρη (πλευρές, γωνίες, κτλ.), ούτε ότι έχουν κάποιες ιδιότητες που τα χαρακτηρίζουν.

- *Επίπεδο 2: Περιγραφικό ή Ανάλυσης*. Οι μαθητές μέσω του πειραματισμού και της παρατήρησης αρχίζουν να αναγνωρίζουν τα συστατικά στοιχεία των σχημάτων και να περιγράφουν τις ιδιότητές τους, ενώ ταυτόχρονα αναπτύσσουν το κατάλληλο λεξιλόγιο.
- *Επίπεδο 3: Άτυπης αφαίρεσης ή Διάταξης*. Οι μαθητές μπορούν να διατάσσουν λογικά τα σχήματα και τις ιδιότητές τους, να αντιληφθούν το ρόλο των ορισμών τους και να αναγνωρίσουν κλάσεις (π.χ. το τετράγωνο αναγνωρίζεται ως ειδική περίπτωση του ορθογωνίου).
- *Επίπεδο 4: Τυπικής αφαίρεσης ή Επαγωγής*. Οι μαθητές κατανοούν το ρόλο των απροσδιόριστων (αρχικών) όρων, των αξιωμάτων, των ορισμών, των θεωρημάτων και της συσχέτισης των ικανών και αναγκαίων συνθηκών, ενώ χρησιμοποιούν αποδεικτικές μεθόδους όπως η εις άτοπον απαγωγή.
- *Επίπεδο 5: Αυστηρότητας*. Οι μαθητές κατανοούν τη σημασία και τη διαδικασία οικοδόμησης ενός αξιωματικού μαθηματικού συστήματος και τις σχέσεις ανάμεσα σε διαφορετικά συστήματα. Το ανώτερο αυτό επίπεδο γεωμετρικής σκέψης δεν είχε αναπτυχθεί στις αρχικές εργασίες του Van Hiele, καθώς ακόμη και οι τελειόφοιτοι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σπάνια το κατακτούν (Τουμάσης, 2004).

Βασικό χαρακτηριστικό του μοντέλου Van Hiele είναι ότι οι μαθητές περνούν διαδοχικά από το ένα επίπεδο στο άλλο χωρίς να είναι δυνατή η υπερπήδησή τους. Για να φτάσουν δηλαδή σε ένα ορισμένο επίπεδο, θα πρέπει πρώτα να έχουν κατακτήσει τα προηγούμενα. Η ωρίμανση και η μετάβαση σε ανώτερο επίπεδο δεν εξαρτώνται από την ηλικία, αλλά από τη γεωμετρική εμπειρία. Θα μπορούσε στο επίπεδο 1 να βρίσκεται ένας μαθητής της Δ΄ δημοτικού, όπως και κάποιος του Λυκείου. Επιπλέον, ένας μαθητής που βρίσκεται σε ένα επίπεδο δεν μπορεί να επικοινωνήσει με μαθητές άλλου επιπέδου ή να κατανοήσει θέματα στα πλαίσια μιας διδασκαλίας ανωτέρου επιπέδου (Κολέζα, 2000).

Ταυτόχρονα με την ανάπτυξη των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης λειτουργούν και καλλιεργούνται ορισμένες γεωμετρικές δεξιότητες χρήσιμες για την ομαλή εξέλιξη των μαθητών στα επίπεδα αυτά: α) οπτικές δεξιότητες, β) λεκτικές δεξιότητες, γ) σχεδιαστικές δεξιότητες, δ) λογικές δεξιότητες (ανάπτυξη της κριτικής σκέψης), και ε) δεξιότητες εφαρμογής. Οι δεξιότητες αυτές κρίνονται βασικές και η έλλειψή τους εμποδίζει σοβαρά τη μάθηση της Γεωμετρίας (Τουμάσης, 2004).

Όσον αφορά τους μαθητές του Δημοτικού σχολείου, σημειώνεται ότι δύσκολα μπορούν να ξεπεράσουν το 2^o επίπεδο γεωμετρικής σκέψης καθώς η πλειοψηφία τους κατατάσσεται στην «ενδιάμεση απόκτηση» του επιπέδου 2 (Σαλονικιός, 2008), ενώ στην πρόσφατη έρευνα των Καλαϊτζίδης κ.ά. (2017), κανένας μαθητής της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης δεν κατατάχθηκε στο 3^o επίπεδο. Από την έρευνα αυτή προέκυψε επίσης, ότι η πλειονότητα των μαθητών του Δημοτικού σχολείου και του Γυμνασίου κατατάσσονται στο 1^o και 2^o επίπεδο Van Hiele, με τις επιδόσεις των μαθητών του Γυμνασίου να είναι ελαφρώς υψηλότερες.

Σύμφωνα με τους Mariotti & Fischbein (1997), το μοντέλο Van Hiele μπορεί να αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για την ανάλυση της ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης ενός ατόμου, δεν μπορεί ωστόσο να συλλάβει την πολυπλοκότητα της διαδικασίας απόδοσης ενός ορισμού. Τείνει να παραβλέπει τη δυναμική των εννοιών και των σχημάτων. Για παράδειγμα, ακόμα και κάποιος που γνωρίζει τον ορισμό μιας συγκεκριμένης κατηγορίας, μπορεί να μην αναγνωρίσει σωστά την κατηγορία στην οποία ανήκει ένα συγκεκριμένο σχήμα. Ένας μαθητής μπορεί να αναφέρει σωστά κάποιες ιδιότητες του ορισμού (βασικά χαρακτηριστικά) και να παραβλέψει άλλες ή να βασίζεται έμμεσα κάποιες φορές σε μη αναγκαίες ιδιότητες. Οι έννοιες συχνά διαταράσσονται έμμεσα ή άμεσα από μορφές. Ένας μαθητής μπορεί να δέχεται τη δήλωση ότι ένα παραλληλεπίπεδο έχει δύο προς δύο παράλληλες επιφάνειες και την ίδια στιγμή να απορρίπτει την ιδέα ότι ο κύβος είναι παραλληλεπίπεδο επειδή θεωρεί ότι σε ένα παραλληλεπίπεδο οι επιφάνειες δεν είναι ίσες.

Η βασική υπόθεση της θεωρίας Van Hiele είναι ότι τα σχηματικά μοντέλα τείνουν να εξαφανίζονται με την πρόοδο της γεωμετρικής σκέψης. Οι Mariotti & Fischbein (1997) θεωρούν ότι αυτό που αλλάζει με την ηλικία και τις διδακτικές οδηγίες, είναι οι σχέσεις μεταξύ του σχήματος και της έννοιας στον γεωμετρικό συλλογισμό. Αρχικά, οι σχηματικές μορφές κυριαρχούν. Βαθμιαία, ο ρόλος των τυπικών περιορισμών γίνεται όλο και πιο σημαντικός μέχρις ωσότου να συσταθεί η σχηματική έννοια (figural concept). Κατά τη διάρκεια αυτής της προοδευτικής ανάπτυξης δεν εξαφανίζεται ποτέ η διαλεκτική δυναμική μεταξύ έννοιας και σχημάτων στον γεωμετρικό συλλογισμό. Μπορεί να αναδυθούν οι αντικρουόμενες σχέσεις μεταξύ εννοιολογικών και σχηματικών περιορισμών κυρίως διότι η αυθόρμητη απόδοση νοήματος σε κάποια αντικείμενα δεν ταιριάζει με τον γεωμετρικό ορισμό τους.

1.5 Η στρατηγική «παραγωγής παραδειγμάτων» και οι «παραδειγματικοί χώροι»

Σύμφωνα με τον Skemp (1987), για τον σχηματισμό μιας έννοιας απαιτείται ένας αριθμός εμπειριών ή παραδειγμάτων που έχουν κάτι κοινό. Τα παραδείγματα θεωρείται ότι έχουν έναν ρόλο ζωτικής σημασίας για τις επεξηγηματικές οδηγίες των εκπαιδευτικών (Leinhardt, 1993). Επιπλέον, εκπαιδευτικοί και μαθητές έχουν βιώσει ένα σύνολο παραδειγμάτων που ανταποκρίνονται σε αυτά που διδάσκουν και σε αυτά που μαθαίνουν.

Σχετικά με την εκμάθηση μέσω παραδειγμάτων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης, η πιο κοινή αναφορά είναι τα «επεξεργασμένα παραδείγματα» (worked examples) (Zhu & Simon, 1987), τα οποία είναι λεπτομερείς λύσεις σε ασκήσεις, οι οποίες παρουσιάζονται από κάποιον καθοδηγητή ή παρέχονται σε ένα κείμενο. Τα παραδείγματα αυτά παρουσιάζουν τη χρήση συγκεκριμένων τεχνικών, τις οποίες πρόκειται στη συνέχεια να μιμηθούν ή να τροποποιήσουν ελαφρώς οι μαθητές για να χειριστούν παρόμοιες ασκήσεις. Στην περίπτωση αυτή, τα παραδείγματα παρέχονται από μια αυθεντία (εκπαιδευτικό ή βιβλίο) και αυτοί που μαθαίνουν από τα παραδείγματα είναι οι μαθητές.

Τα παραδείγματα όμως, μπορεί να διαδραματίσουν έναν διαφορετικό ρόλο στη μαθηματική εκπαίδευση, αλλάζοντας τη θέση μεταξύ αυτών που τα παρέχουν και αυτών που μαθαίνουν από αυτά. Η «παραγωγή παραδειγμάτων» είναι μια διδακτική στρατηγική κατά την οποία ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν τα δικά τους παραδείγματα μαθηματικών εννοιών υπό συγκεκριμένους όρους. Οι Watson & Mason (2005) ισχυρίστηκαν ότι η μέθοδος αυτή μπορεί να αποτελέσει ένα ισχυρό παιδαγωγικό εργαλείο για την ενίσχυση της εκμάθησης των μαθηματικών σε διάφορα επίπεδα. Οι Zazkis & Leikin (2007) υποστήριξαν ότι το παιδαγωγικό αυτό εργαλείο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως ερευνητικό εργαλείο, καθώς τα παραδείγματα που δημιουργούν οι μαθητές «αντικατοπτρίζουν την αντίληψή τους για τα μαθηματικά αντικείμενα που εμπλέκονται σε μια άσκηση δημιουργίας παραδειγμάτων, τη παιδαγωγική τους γνώση, τις δυσκολίες και τις πιθανές ανεπάρκειες στην κατανόησή τους».

Επιπρόσθετα, οι Watson & Mason (2005) εισήγαγαν την ιδέα των «παραδειγματικών χώρων», οι οποίοι είναι συλλογές παραδειγμάτων που εκπληρώνουν μια συγκεκριμένη λειτουργία. Θεωρούν ότι οι παραδειγματικοί χώροι επηρεάζονται από την πείρα και τη μνήμη του ατόμου, αλλά και από τις συγκεκριμένες απαιτήσεις της άσκησης παραγωγής παραδειγμάτων. Ξεχώρισαν διάφορα είδη παραδειγματικών χώρων:

Προσωπικοί παραδειγματικοί χώροι ενταγμένοι σε πλαίσιο, που μπορεί να ενεργοποιηθούν από μια άσκηση, από πληροφορίες, από το περιβάλλον καθώς επίσης και από κάποια πρόσφατη εμπειρία.

Εν δυνάμει προσωπικοί παραδειγματικοί χώροι από τους οποίους επιλέγεται ένας χώρος, αποτελούμενος από την προηγούμενη εμπειρία του ατόμου (όχι απαραίτητα λεπτομερώς εκκαλούμενη) και ο οποίος δεν μπορεί να κατασκευαστεί με τρόπους που απαιτούν εύκολη πρόσβαση.

Τυπικοί παραδειγματικοί χώροι, όπως γενικά γίνονται αντιληπτοί και όπως αυτοί παρουσιάζονται στα βιβλία, στους οποίους ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να μυήσει τους μαθητές του.

Κοινοί και πλαισιωμένοι παραδειγματικοί χώροι, σε μια τάξη ή σε άλλη ομάδα σε μια συγκεκριμένη στιγμή, που λειτουργούν ως τυπικοί παραδειγματικοί χώροι.

Όπως παρατήρησαν οι Watson & Mason (2005), η μέθοδος αυτή είναι α) υποκειμενική διότι βασίζεται στη γνώση και την εμπειρία του εκπαιδευόμενου και β) εξαρτώμενη από το πλαίσιο αναφοράς, καθώς πλαισιώνεται από τις υποδείξεις και τις συνθήκες κάτω από τις οποίες παρουσιάζεται η γνώση. Προκειμένου να διεξαχθούν συμπεράσματα σχετικά με τη γνώση των συμμετεχόντων από τα παραδείγματα που παράγουν, πρέπει να γίνεται έλεγχος της κατάστασης, τους τρόπους με τους οποίους καλούνται να παράγουν παραδείγματα. Οι δύο τύποι ασκήσεων παραγωγής παραδειγμάτων (μαθηματικά αντικείμενα και μαθηματικά προβλήματα) μπορεί να φαίνονται πολύ διαφορετικοί στον σκοπό και τη δομή τους. Οι διαφορές τους εξαρτώνται όχι μόνο από τη φύση ή την πολυπλοκότητα της ίδιας της άσκησης, αλλά και από τους συμμετέχοντες που την απαντούν.

Συνεπώς, ανάλογα με τα άτομα που συμμετέχουν, μαθητές ή εκπαιδευτικοί, τα παραδείγματα που παράγουν μας επιτρέπουν να αναλύσουμε τη μαθηματική ή την παιδαγωγική τους γνώση. Έτσι, ενώ τα παραδείγματα των μαθητών αντικατοπτρίζουν τη μαθηματική τους γνώση, τα παραδείγματα των εκπαιδευτικών δείχνουν και τη μαθηματική τους αλλά και τη παιδαγωγική τους επάρκεια. Οι Zazkis & Leikin (2007) υποστηρίζουν ότι και στις δύο περιπτώσεις, έρχονται στην επιφάνεια όμοια χαρακτηριστικά των παραδειγμάτων, τα οποία συμπεριλαμβάνουν συνήθως τα εξής συστατικά: προσβασιμότητα και ορθότητα, ποικιλία και γενίκευση.

Προσβασιμότητα και ορθότητα: Η κατηγορία αυτή εξετάζει εάν τα παραδείγματα πληρούν τους όρους της άσκησης και εάν δημιουργήθηκαν με ευκολία ή με κόπο. Εάν παράχθηκαν μέσω συγκεκριμένων διαδικασιών ή επιλέχθηκαν απευθείας από πηγές. Ειδικότερα, για την ανάλυση της ορθότητας των παραδειγμάτων των μαθητών για τους ορισμούς των γεωμετρικών εννοιών γίνεται συσχέτιση με τη λογική δομή μιας μαθηματικής πρότασης και την απλότητα ενός ορισμού. Η σωστή λογική δομή ενός ορισμού περιέχει τους ικανούς αλλά και τους αναγκαίους όρους μιας έννοιας.

Ποικιλία: Στην κατηγορία αυτή ελέγχεται εάν τα παραδείγματα ποικίλουν σε είδος και δομή και εάν τοποθετούνται σε κάποιο συγκεκριμένο πλαίσιο (όπως π.χ. των προγραμμάτων σπουδών) ή επιλέγονται από ένα πλήθος πλαισίων (εμπειρίες της τάξης). Με ποιο τρόπο μοιάζει ή διαφέρει ο προσωπικός παραδειγματικός χώρος από τον τυπικό.

Γενίκευση: Τα παραδείγματα μπορεί να είναι γενικά ή συγκεκριμένα. Χρειάζεται προσοχή, καθώς στη μαθηματική εκπαίδευση φαίνεται να υπερισχύουν οι προτιμήσεις προς τις γενικές επεξηγήσεις απ' ότι σε πιο συγκεκριμένες. Επιδιώκουμε συνήθως να «βλέπουμε το γενικό στο συγκεκριμένο» και να εκτιμούμε περισσότερο τις γενικευμένες λύσεις. Παρατηρείται ότι ενώ «κάποια γενικά παραδείγματα που χαρακτηρίζουν κατηγορίες αντικειμένων, μπορούν να ληφθούν ως ένδειξη μαθηματικής κατανόησης, κάποια άλλα γενικά παραδείγματα μπορεί να αναδείξουν τις ελλείψεις στην κατανόηση. Με άλλα λόγια, η «γενίκευση» μπορεί να λειτουργήσει ως γεννήτρια, αλλά και ως ασπίδα προστασίας (Zazkis & Leikin, 2007). Παρόλα αυτά, στην περίπτωση των ορισμών, το επίπεδο της επιθυμητής γενίκευσης είναι ενσωματωμένο στην ίδια την άσκηση ορισμού: για το τετράγωνο π.χ. ο ορισμός πρέπει να συσχετίζεται στο γενικό αντικείμενο του τετραγώνου παρά σε ένα συγκεκριμένο τετράγωνο.

Στην παρούσα εργασία υιοθετείται η άποψη των Watson & Mason (2005) ότι «το να καταλαβαίνεις μαθηματικά σημαίνει, μεταξύ άλλων, να είσαι εξοικειωμένος με τους τυπικούς παραδειγματικούς χώρους». Από την οπτική αυτή, θεωρείται ότι οι προσωπικοί παραδειγματικοί χώροι των μαθητών καθώς και η σχέση τους με τους τυπικούς, μπορούν να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς να εξετάσουν τη γνώση και την κατανόηση των μαθητών για τα μαθηματικά. Επομένως, αναλύοντας τα χαρακτηριστικά των παραδειγμάτων ορισμών των γεωμετρικών εννοιών που διατυπώνουν οι μαθητές, διερευνάται η εξοικείωσή τους με τους τυπικούς ορισμούς των εννοιών και οι πιθανές δυσκολίες που εμφανίζουν στην κατανόησή τους.

1.6 Προσδιορισμός των δυσκολιών των μαθητών: ερευνητικά δεδομένα

Έρευνες στη διδακτική των μαθηματικών έχουν επανειλημμένως επισημάνει ότι οι μαθητές σε όλα τα επίπεδα εκπαίδευσης, ακόμα και οι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν δυσκολίες όχι μόνο στην ερμηνεία νέων ορισμών, αλλά και στη σωστή χρήση τους και δεν εκτιμούν πλήρως το ρόλο τους στην επίλυση προβλημάτων ή στη δημιουργία αποδείξεων.

Ο Wilson (1990, στο Öztoprakçi, 2014) μελέτησε τη χρήση των μαθηματικών ορισμών και των παραδειγμάτων γεωμετρικών εννοιών από μαθητές της 6ης και 8ης βαθμίδας. Για τον σκοπό αυτό, ζητήθηκε από τους μαθητές αρχικά να σχεδιάσουν τρία διαφορετικά τρίγωνα, ορθογώνια και τετράγωνα και έπειτα να διατυπώσουν γραπτούς ορισμούς για τις έννοιες αυτές. Ο Wilson (1990) διαπίστωσε ότι οι ιδέες που παρουσίαζαν δεν ήταν συναφείς με την επίσημη μαθηματική πρακτική, καθώς περιείχαν ασυνέπειες ανάμεσα στους ορισμούς τους, τα παραδείγματά τους και την κατανόηση των εννοιών του τετραγώνου, του ορθογωνίου και τη μεταξύ τους σχέση. Επιπλέον, οι περισσότεροι μαθητές δεν αντιλαμβάνονταν ότι οι ιδέες τους ήταν αντιφατικές. Για παράδειγμα, ενώ οι περισσότεροι μαθητές συμφωνούσαν ότι όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια, σχεδόν οι μισοί από αυτούς δεν περιλάμβαναν τα τετράγωνα ως παραδείγματα των ορθογωνίων. Ο Wilson (1990) απέδωσε τις αντιφατικές ιδέες των μαθητών στην πολύπλοκη φύση των ορισμών και των παραδειγμάτων των γεωμετρικών εννοιών και υποστηρίζει ότι αυτές προέρχονται από την έλλειψη κατανόησης των ικανών και αναγκαίων συνθηκών ενός ορισμού, αλλά και από τη χρήση ανακριβών λέξεων και περιορισμένων πρότυπων σχημάτων.

Σε επίπεδο πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, οι Neel-Romine, Paul και Shafer (2012) προσπάθησαν να ωθήσουν μαθητές ηλικίας 12 έως 13 ετών σε συμμετοχή στη περιγραφική διαδικασία απόδοσης ορισμού του κύκλου μέσω μιας δραστηριότητας που ζητούσε από τους μαθητές να διατυπώσουν γραπτά τους δικούς τους πιθανούς ορισμούς για τον κύκλο. Εξετάστηκε η ακρίβεια των ορισμών που απέδωσαν, συζητώντας εάν θα μπορούσαν αυτοί να ισχύουν και για άλλα σχήματα που δεν ήταν κύκλοι, σχεδιάζοντας τα σχήματα αυτά στον πίνακα και ξεχωρίζοντας τους αποδεκτούς από τους μη αποδεκτούς ορισμούς για τον κύκλο. Στο σημείο αυτό ήταν ξεκάθαρο ότι οι μαθητές δε μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν κάποιον από τους ορισμούς που έδωσαν για να σχεδιάσουν αποκλειστικά και μόνο έναν κύκλο. Τέλος, χρησιμοποιώντας πλαστελίνη ως μέσο μοντελοποίησης και με τη βοήθεια καθοδηγητικών ερωτήσεων του εκπαιδευτικού, οι μαθητές συσχέτισαν τη διαδικασία κατασκευής του κύκλου με τη διαδικασία ορισμού του και κατέληξαν ομόφωνα στον εξής ορισμό: «Ένας κύκλος είναι ένα σχήμα δύο διαστάσεων με ένα άπειρο σύνολο σημείων που ισαπέχουν από ένα δοσμένο σημείο». Συνεπώς, η ενεργή συμμετοχή των μαθητών στη διαδικασία απόδοσης ορισμού τους οδήγησε στη χρήση σωστής ορολογίας και την κατασκευή τυπικού ορισμού.

Παρόμοια ευρήματα είχε καταγράψει και ο De Villiers (1998) ο οποίος διερεύνησε κατά πόσο η συμμετοχή των μαθητών της 10^{ης} βαθμίδας σε μια διαδικασία αναδόμησης της γνώσης βελτίωσε την ικανότητά τους να κατασκευάζουν τυπικούς και οικονομικούς ορισμούς σε σύγκριση με την άμεση διδασκαλία τους. Για τον σκοπό της έρευνας οι μαθητές χωρίστηκαν σε μια πειραματική ομάδα και μια ομάδα ελέγχου. Στην πειραματική ομάδα οι μαθητές κλήθηκαν να δώσουν ορισμό για το ρόμβο, μια έννοια την οποία είχαν ξανασυναντήσει οι μαθητές αλλά δεν την είχαν ορίσει παλαιότερα. Οι μαθητές, δημιουργώντας αρχικά μια λίστα με όλες τις γνωστές ιδιότητές του ρόμβου κατασκεύασαν ορισμούς, οι οποίοι αναγνωρίστηκαν ως ορθοί αλλά μη οικονομικοί. Έπειτα, για να βοηθήσει ο ερευνητής τους μαθητές να διατυπώσουν πιο οικονομικούς ορισμούς, τους ενέπλεξε σε ασκήσεις παραγωγικού συλλογισμού, όπου δίνονταν ορισμοί παραλληλογράμμων και έπρεπε οι μαθητές να εξάγουν λογικά όλες τις άλλες ιδιότητες (οι οποίες δεν ήταν διατυπωμένες στους ορισμούς). Τα ευρήματα της μελέτης έδειξαν ότι το ποσοστό των μαθητών που ανέπτυξαν σωστούς και οικονομικούς ορισμούς ήταν υψηλότερο στην πειραματική ομάδα, απ’ ότι στην ομάδα ελέγχου στην οποία διδάχθηκαν οι ορισμοί με άμεση διδασκαλία.

Σύμφωνα με την έρευνα της Keazer (2004), οι μαθητές της 6^{ης} βαθμίδας δυσκολεύονται να αναφέρουν εάν ένα δοσμένο (αμβλυγώνιο) τρίγωνο στο οποίο αναφέρονται τα μέτρα των γωνιών του, είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο. Επίσης, οι μαθητές της έρευνας των Cooper & Krainer (1990), ηλικίας 7 έως 8 ετών, αναγνώρισαν πιο εύκολα ως ορθογώνια τα τρίγωνα που οι κάθετες πλευρές τους είχαν καθετο – οριζόντιο προσανατολισμό, ένα εύρημα το οποίο είχε αναδείξει και η έρευνα των Hershkowitz, Bruckheimer & Vinner (1987), στην οποία φάνηκε ότι η επιτυχία των παιδιών, ηλικίας 5 έως 8 ετών, είναι μεγαλύτερη στο ορθογώνιο τρίγωνο που είναι σε κατακόρυφη θέση και μικραίνει σημαντικά όταν η ορθή γωνία είναι «από επάνω».

Στην έρευνα των Marchini & Rinaldi (2005) οι μαθητές, ηλικίας 8 έως 9 ετών, αναγνώρισαν πιο εύκολα από μια λίστα με διάφορα τρίγωνα, τα ισοσκελή τρίγωνα που είχαν τον συνήθη «κανονικό» προσανατολισμό, τα ισοσκελή δηλαδή στα οποία η άνιση πλευρά τους βρίσκεται στον οριζόντιο ή τον κάθετο άξονα έχοντας τη μορφή της στέγης ή της σημαίας. Παρόμοια συμπεράσματα είχε και η έρευνα των Hershkowitz et al. (1987), όπου μαθητές και δάσκαλοι αναγνώρισαν ευκολότερα τα ισοσκελή τρίγωνα που «κάθονται όρθια στη βάση τους» σε σύγκριση με αυτά που έχουν περιστραφεί.

Με σκοπό να διερευνήσουν την επιρροή ατομικών παραγόντων, όπως η ηλικία και οι μαθηματικές ικανότητες αλλά και οπτικών επιρροών (όπως ομοιότητες και διαφορές σχημάτων, θέσης και μορφολογικών χαρακτηριστικών) στην αλληλεπίδραση μεταξύ των εννοιολογικών και των σχηματικών ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων κατά τη διαδικασία μαθηματικού συλλογισμού, οι Fischbein & Nachlieli (1998) διέθεσαν ένα ερωτηματολόγιο σε 218 μαθητές της $9^{ης}$ και $10^{ης}$ βαθμίδας και πήραν και κάποιες συνεντεύξεις από ορισμένους από τους μαθητές. Κάποιες από τις ερωτήσεις ζητούσαν από τους μαθητές να ορίσουν ένα παραλληλόγραμμο και έπειτα να το αναγνωρίσουν μεταξύ ορισμένων εικόνων γεωμετρικών σχημάτων. Τα ευρήματα της έρευνας έδειξαν ότι το ποσοστό των μαθητών που ταξινόμησαν τα σχήματα με βάση τους ορισμούς που έδωσαν ήταν πολύ χαμηλότερο από το ποσοστό των μαθητών (περίπου 90%) που όρισαν σωστά το παραλληλόγραμμο. Άρα, για πολλούς μαθητές το σχήμα δεν ελέγχεται αυστηρά από τους τυπικούς περιορισμούς του (ορισμό). Μια πιθανή εξήγηση για τα αποτελέσματα αυτά είναι ότι οι μαθητές συνήθως αναγνωρίζουν τα σχήματα σύμφωνα με ένα σχήμα που λειτουργεί ως «πρότυπο». Εάν ένα συγκεκριμένο σχήμα διαφέρει οπτικά από το πρότυπο (παρόλο που μπορεί να ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις του ορισμού), ο μαθητής μπορεί να αποφασίσει λανθασμένα (π.χ. στην αναγνώριση ενός τετραγώνου ως παραλληλόγραμμου). Επιπλέον, οι Fischbein & Nachlieli (1998) διαπίστωσαν ότι δεν είναι η ηλικία που επηρεάζει τις αντιδράσεις των μαθητών αλλά η μαθηματική τους ικανότητα. Οι πιο δυνατοί μαθητές, ανεξαρτήτου ηλικίας, είναι πιο ικανοί να ξεπεράσουν τη σύγχυση που προκαλείται μεταξύ της έννοιας και την ποικιλία των διαφορετικών σχηματικών περιπτώσεων.

Σε παρόμοια ευρήματα κατέληξαν και οι Heinze & Ossietzky (2002) οι οποίοι ερεύνησαν εάν η κατανόηση των εννοιών του τετραγώνου και του ορθογωνίου ήταν επαρκής σε 106 μαθητές της 8ης βαθμίδας, ώστε να μπορέσουν να αναγνωρίσουν τους ισοδύναμους ορισμούς των εννοιών αυτών, να βρουν αντιπαραδείγματα και να εντοπίσουν τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες ενός ορισμού. Οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα πως οι μαθητές περιορίζονται στις δικές τους προσωπικές εικόνες της έννοιας και αγνοούν τους ορισμούς των εννοιών όταν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουν τις έννοιες.

Σημαντικά ευρήματα σε επίπεδο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ανέδειξε και η έρευνα της Μίχου (2019), η οποία διενεργήθηκε σε 36 μαθητές της Α΄ Γυμνασίου, υλοποιώντας ένα διδακτικό πείραμα, με σκοπό να εξεταστεί κατά πόσο οι μαθητές της τάξης αυτής μπορούν να προσεγγίσουν εννοιολογικά τα γεωμετρικά σχήματα του κύκλου και των παραλληλογράμμων μέσω των ορισμών τους. Από τη διερεύνηση των δυσκολιών που συναντούν οι μαθητές στην αναγνώριση των ανωτέρω σχηματικών εννοιών και στη δημιουργία των αντίστοιχων ορισμών τους παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές στην πλειοψηφία τους ταυτίζουν τον κύκλο με τον κυκλικό δίσκο, ενώ μόνο το 39% των μαθητών αναγνώρισε σωστά τους κύκλους από τη συλλογή σχημάτων που τους δόθηκε. Στο διαγνωστικό δοκίμιο μάλιστα της συγκεκριμένης ερευνητικής εργασίας, κανένας μαθητής δεν έδωσε ορθό ορισμό για τον κύκλο, ενώ ακόμα και μετά την υλοποίηση του πειράματος φάνηκε ότι η πλειοψηφία των μαθητών παρουσιάζει μια εμφανή αδυναμία στο να χρησιμοποιήσει τα κρίσιμα χαρακτηριστικά του κύκλου κατά τη δημιουργία του ορισμού του. Για την έννοια του ρόμβου, παρατηρήθηκε ότι η πλειοψηφία των μαθητών εξακολουθούσε μετά το διδακτικό πείραμα να μη δίνει σωστούς ορισμούς και να μην αντιλαμβάνεται εννοιολογικά τη σχηματική έννοια του ρόμβου. Οι περισσότεροι μαθητές αδυνατούσαν να αναγνωρίσουν τον ρόμβο σε μη πρότυπους προσανατολισμούς, γεγονός που επιβεβαιώνει την ύπαρξη πρότυπων εικόνων στην προσωπική σχηματική έννοια των μαθητών.

Στην μελέτη τους, οι Fujita and Jones (2007) διερεύνησαν την κατανόηση των ορισμών και τη γνώση 263 εκπαιδευόμενων δασκάλων πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης για τα τετράπλευρα και τις σχέσεις μεταξύ τους. Οι ερευνητές εντόπισαν ένα «χάσμα» μεταξύ των προσωπικών σχηματικών εννοιών (personal figural concepts) και των επίσημων σχηματικών εννοιών (formal figural concepts) των συμμετεχόντων. Φάνηκε πως, ενώ σχεδόν όλοι οι εκπαιδευόμενοι μπόρεσαν να σχεδιάσουν σωστές αναπαραστάσεις παραλληλογράμμων, τετραγώνων, ορθογωνίων και τραπεζίων, οι περισσότεροι από αυτούς δεν κατάφεραν να ορίσουν σωστά τις ανωτέρω γεωμετρικές έννοιες, γεγονός που υποδεικνύει ότι οι εικόνες επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό τις προσωπικές σχηματικές έννοιες των εκπαιδευόμενων και κυριαρχούν στην προσπάθειά τους να ορίσουν τα βασικά τετράπλευρα. Τα αποτελέσματα παρόμοιας έρευνας που διεξήγαγε ο Pickreign (2007) έδειξαν ότι οι εκπαιδευόμενοι μαθηματικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης δεν ήταν σε θέση να παρέχουν έναν ολοκληρωμένο ορισμό για τις γεωμετρικές έννοιες του ορθογωνίου και του ρόμβου.

Οι Zazkis & Leikin (2008), εξέτασαν τα παραδείγματα των ορισμών (εικόνα 2) που έδωσαν σαράντα (40) υποψήφιοι καθηγητές μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για τη γεωμετρική έννοια του τετραγώνου και οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι οι φοιτητές παρουσιάζουν λογικές δυσκολίες στην αντίληψη και τον διαχωρισμό των ικανών από τις αναγκαίες συνθήκες της έννοιας, οι οποίες μπορεί να οφείλονται είτε στην έλλειψη κατανόησης της συγκεκριμένης έννοιας και των βασικών χαρακτηριστικών της, είτε στην έλλειψη κατανόησης της έννοιας του ορισμού της. Σε παρόμοια ευρήματα είχαν καταλήξει και οι Shir and Zaslavsky (2001), οι οποίοι εξέτασαν την κατανόηση είκοσι (20) καθηγητών μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στους μαθηματικούς ορισμούς του τετραγώνου και οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι υπήρχε διαφωνία μεταξύ τους όσον αφορά τον διαχωρισμό των αναγκαίων από τις ικανές συνθήκες της έννοιας και τη χρήση κατάλληλης μαθηματικής ορολογίας.

Για παράδειγμα, ο ορισμός του τετραγώνου ως «ένα γεωμετρικό αντικείμενο με τέσσερις ίσες πλευρές και τέσσερις γωνίες των 90°» δεν είναι επαρκής, καθώς περιέχει αναγκαίες αλλά μη ικανές συνθήκες για τον προσδιορισμό του τετραγώνου και δεν εντάσσει το τετράγωνο στη γενικότερη κλάση των τετραπλεύρων ή παραλληλογράμμων. Έτσι, μπορεί να οδηγήσει σε παρανοήσεις του ρόλου του ορισμού στα μαθηματικά: ότι το τετράγωνο είναι η συγκεκριμένη περίπτωση ενός συνδυασμού των αντικειμένων που ορίστηκαν από αυτή την πρόταση.

Από την άλλη, κάποια παραδείγματα μπορεί να περιείχαν συγκεκριμένες ιδιότητες που δεν είναι αναγκαίες συνθήκες για το γεωμετρικό αντικείμενο (τετράγωνο) και ισχύουν μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Το αντικείμενο, για παράδειγμα, που ορίζεται ως «το τετράπλευρο που έχει τέσσερις γωνίες των 90° και τέσσερις πλευρές ίσες με δύο εκατοστά η καθεμία» μπορεί να είναι τετράγωνο, αλλά η πρόταση αυτή δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ορισμός, καθώς περιλαμβάνει ικανές αλλά όχι αναγκαίες συνθήκες.

Αξίζουν να αναφερθούν κάποιοι από τους αποδεκτούς ορισμούς που έδωσαν οι φοιτητές στην έρευνα των Zazkis & Leikin (2008), οι οποίοι καταγράφηκαν στον παρακάτω πίνακα:

<u>Τετράγωνο είναι:</u> 1. Ένα κανονικό τετράπλευρο. 2. Ένα τετράπλευρο με όλες τις γωνίες και όλες τις πλευρές του ίσες. 3. Ένα τετράπλευρο με όλες τις πλευρές του ίσες και μια γωνία 90°. 4. Ένα ορθογώνιο με ίσες πλευρές. 5. Ένα ορθογώνιο με κάθετες διαγώνιους. 6. Ένας ρόμβος με ίσες γωνίες. 7. Ένας ρόμβος με ίσες διαγώνιους. 8. Ένα παραλληλόγραμμο με ίσες διαδοχικές γωνίες και ίσες διαδοχικές πλευρές. 9. Ένα παραλληλόγραμμο με ίσες και κάθετες διαγώνιους. 10. Ένα τετράπλευρο που έχει τέσσερις άξονες συμμετρίας. 11. Ένα τετράπλευρο συμμετρικό υπό περιστροφή 90°. 12. Ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων στο χώρο για τα οποία το άθροισμα των αποστάσεων από δύο δοσμένες κάθετες γραμμές είναι σταθερό. 13. Ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων στο χώρο για τα οποία το μέγιστο των αποστάσεων από δύο δοσμένες κάθετες γραμμές είναι σταθερό.

Ορισμοί τετραγώνου από τον παραδειγματικό χώρο φοιτητών

Οι Tsamir et al. (2014) μελέτησαν τις εικόνες της έννοιας και τους ορισμούς των εννοιών του τριγώνου, του κύκλου και του κυλίνδρου που διατύπωσαν εκπαιδευτικοί προσχολικής εκπαίδευσης. Από τους εκπαιδευτικούς ζητήθηκε να αρχικά να ορίσουν τις ανωτέρω έννοιες και έπειτα να αναγνωρίσουν διάφορα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα για τις έννοιες αυτές. Διερευνήθηκε επίσης και η χρήση σωστής και ακριβής μαθηματικής γλώσσας και η ικανότητα διαχωρισμού των κρίσιμων από τα μη κρίσιμα χαρακτηριστικά ενός ορισμού. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί αντιμετώπιζαν δυσκολίες στη διαδικασία απόδοσης ορισμού του κύκλου, παρόλο που ήταν ικανοί να αναγνωρίζουν παραδείγματα και αντιπαραδείγματα της έννοιας. Αρκετοί από αυτούς απέρριπταν κάποια κρίσιμα χαρακτηριστικά της έννοιας, ενώ κάποιοι άλλοι παρουσίαζαν δυσκολίες στην εύρεση της κατάλληλης μαθηματικής ορολογίας. Οι δυσκολίες αυτές οφείλονται, σύμφωνα με τους ερευνητές, στην τάση των εκπαιδευτικών να βασίζονται στην δική τους προσωπική εικόνα της έννοιας του κύκλου παρά στον ορισμό της έννοιας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{o}

Ιστορική εξέλιξη των βασικών γεωμετρικών εννοιών

Η απόδοση ενός ορισμού δε σημαίνει απλώς ότι δίνεται ένα όνομα, όπως μπορεί κάποιες φορές να παρερμηνευτεί, αλλά ότι καθιερώνονται οι ιδιότητες και τα στοιχεία της έννοιας που ορίζεται. Η ιστορική εξέλιξη κάποιων μαθηματικών εννοιών φανερώνει αυτή την όψη της διαδικασίας απόδοσης ορισμού (Leikin & Winicky-Landman, 2000).

Τα τελευταία χρόνια, πολλές έρευνες της διδακτικής των μαθηματικών έχουν στραφεί στον τρόπο με τον οποίο θα μπορούσε ακόμη και η ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών να συμβάλλει στη διδακτική τους προσέγγιση. Οι μέχρι τώρα έρευνες στο πεδίο αυτό επικεντρώνονται σε δύο κυρίως άξονες (Καφούση, 2002):

α) στα αυθεντικά ιστορικά μαθηματικά κείμενα και την αξιοποίησή τους στη διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών, και

β) στη διδασκαλία μιας μαθηματικής έννοιας με βάση την ιστορική πορεία ανάπτυξής της.

Σχετικά με τον πρώτο άξονα, οι έρευνες έχουν δείξει ότι η κατάλληλη επιλογή και παρουσίαση αυθεντικών ιστορικών μαθηματικών κειμένων μπορεί να συμβάλλει στη δημιουργική σύνθεση απόψεων και ιδεών, μέσα από γόνιμες συζητήσεις μεταξύ των μελών της σχολικής τάξης (Arcavi & Bruckheimer, 2000). Με τον τρόπο αυτό, δίνεται στους μαθητές η ευκαιρία να γνωρίσουν και να συνειδητοποιήσουν, παράλληλα, ότι η γένεση και η εξελικτική πορεία μιας μαθηματικής έννοιας ήταν το επιστέγασμα πολλών, χρονοβόρων και επίμονων προσπαθειών. Έτσι, θα μπορέσουν να κατανοήσουν οι μαθητές σε βάθος την ανάγκη κατασκευής συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών και να εκτιμήσουν τις δικές τους προσπάθειες επίλυσης των διάφορων καταστάσεων προβληματισμού.

Όσον αφορά το δεύτερο άξονα των ερευνών, έχουν εκφραστεί διάφορες απόψεις από τους ερευνητές. Μία από τις απόψεις που ξεχώρισε έχει καταγραφεί στη διδακτική των μαθηματικών ως το *γενετικό μοντέλο διδασκαλίας* και θέλει τη διδασκαλία μιας μαθηματικής έννοιας να παραλληλίζεται πλήρως με τις ιστορικές συνθήκες δημιουργίας και ανάπτυξής της (Γαγάτσης, 1993). Ειδικότερα, στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, το παραπάνω μοντέλο συνάδει με τη ρεαλιστική προσέγγιση της διδασκαλίας, σύμφωνα με την οποία η διδασκαλία μιας μαθηματικής έννοιας είναι θετικό να αρχίζει με αφορμή τα προβλήματα που και στο παρελθόν έκαναν έκδηλη την ανάγκη της δημιουργίας της. Αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι θα αναπαραχθεί ακριβώς η ίδια διαδικασία του παρελθόντος, αλλά θα αποτελέσει τη βάση πάνω στην οποία θα στηριχθεί η μαθησιακή διαδικασία με στόχο την οικοδόμηση και ανάπτυξη της συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας (Κολέζα, 2000).

Στην παρούσα εργασία επιχειρείται, μεταξύ άλλων, η κατασκευή εργαλείου για την παρατήρηση τυχόν φαινομένων «ιστορικού παραλληλισμού» ανάμεσα στους ορισμούς που διατυπώνουν οι μαθητές για τις γεωμετρικές έννοιες του κύκλου και του ρόμβου και σε αυτούς που χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθηματικούς του παρελθόντος. Επομένως, στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα βασικά στοιχεία της ιστορικής εξέλιξης των ορισμών του κύκλου, των τριγώνων και των τετραπλεύρων. Αρχικά, γίνεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή στις βασικότερες στιγμές ιστορικής εξέλιξης της Γεωμετρίας και ακολουθεί η παρουσίαση της εξέλιξης των ορισμών των ανωτέρω γεωμετρικών εννοιών, όπως αυτές καταγράφονται στα Στοιχεία του Ευκλείδη αλλά και από άλλους κορυφαίους μαθηματικούς του παρελθόντος.

2.1 Γένεση και εξέλιξη της Γεωμετρίας: μια σύντομη ιστορική αναδρομή

Το ξεκίνημα της γεωμετρικής σκέψης έχει τις απαρχές του στα τεχνικά επιτεύγματα των λαών της αρχαίας Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας. Οι γεωμετρικές γνώσεις των λαών αυτών συνίστανται κυρίως, στον υπολογισμό επιφανειών και όγκων και χρησιμοποιούνται για να εξυπηρετήσουν πρακτικές ανάγκες, ιδιαίτερα τις ανάγκες της γεωργίας, της μηχανικής και του εμπορίου (Εξαρχάκος, 1993). Ουδεμία αναφορά υπάρχει που να σηματοδοτεί γεωμετρικές έννοιες και γενικές αρχές του χώρου, τα προβλήματα που αντιμετωπίζονται είναι, ως επί το πλείστον, εμπειρικής προέλευσης και η λύση που δίνεται δε συνιστά λογική απόδειξη (Αργυρόπουλος κ.α., 2017).

Η θεωρητική μορφή των μαθηματικών οφείλεται αποκλειστικά στους αρχαίους Έλληνες. Η μορφή, δηλαδή, εκείνη που στηρίζεται στην καθαρά λογική εξέταση των μαθηματικών εννοιών και που έχει θεμελιωμένη και ιεραρχημένη σειρά στις αποδείξεις των θεωρητικών προτάσεων και την επίλυση των προβλημάτων (Εξαρχάκος, 1993).

Η θεωρητικοποίηση της Γεωμετρίας συνδέεται ιστορικά με τον Θαλή το Μιλήσιο (625 – 550 π.Χ.), ο οποίος επινοεί ο ίδιος πολλά θεωρήματα, θέτει ερωτήματα για τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων και χρησιμοποιεί συλλογιστικές μεθόδους, και εξελίσσεται έπειτα από τον Πυθαγόρα (586 – 500 π.Χ.), τους μαθητές του και τους μεγάλους Έλληνες μαθηματικούς που ακολούθησαν. Η Γεωμετρία αρχίζει από τότε να παίρνει τη μορφή που γνωρίζουμε σήμερα, αφού οι αρχαίοι Έλληνες αναπτύσσουν ένα σύστημα θεωρημάτων όπου κάθε θεώρημα έχει απόδειξη, η οποία προκύπτει από άλλα αποδεδειγμένα θεωρήματα. Είχαν ξεκαθαρίσει επίσης, ότι η αποδεικτική διαδικασία δεν είναι απλά ένας παραγωγικός συλλογισμός αλλά πρέπει να έχει και κάποια δεδομένα (υποθέσεις). Εισήγαγαν ορισμούς για συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα και καθόρισαν ένα σύνολο αποδεικτικών κανόνων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μια αποδεικτική διαδικασία. Η Γεωμετρία μετασχηματίζεται σε αποδεικτική επιστήμη. Στοιχεία της αξιωματικής θεμελίωσης μας δίνει και ο Αριστοτέλης, ο οποίος συντέλεσε στην παραπέρα ανάπτυξη της αποδεικτικής μεθόδου με το έργο του «Αναλυτικά ύστερα», όπου αναφέρεται στις *αρχικές έννοιες* (τις θέσεις), στους *ορισμούς*, στα *αξιώματα*[4], στην *αποδεικτική διαδικασία* και στην *απόδειξη* (Εξαρχάκος κ.ά., 2001; Εξαρχάκος, 1993).

Η μεγαλειώδης εφαρμογή της αξιωματικής θεμελίωσης έγινε από τον Ευκλείδη με το έργο του τα «Στοιχεία», ένα από τα σημαντικότερα μαθηματικά έργα όλων των εποχών, το οποίο επισκιάζει και βάζει σε δεύτερη μοίρα όλα τα προηγούμενα γραπτά κείμενα γύρω από τα Μαθηματικά (Εξαρχάκος, 1993). Από την περίοδο συγγραφής του, η οποία χρονολογείται γύρω στο 300 π.Χ. και για περισσότερο από 2.300 χρόνια, χρησιμεύει ως το βασικό κείμενο για τη διδασκαλία των Μαθηματικών και της Γεωμετρίας σε πολλές χώρες του κόσμου. Το έργο είναι σήμερα γνωστό από πάρα πολλές εκδόσεις και μεταφράσεις που έχουν γίνει κατά καιρούς σε πολλές γλώσσες, ο αριθμός των οποίων φαίνεται να ξεπερνά τις 2.000 (Εξαρχάκος κ.ά., 2001).

Το περιεχόμενο των Στοιχείων δεν είναι έργο μόνο του Ευκλείδη, αλλά στηρίζεται στο έργο όλων των κορυφαίων μαθηματικών και φιλοσόφων που προηγήθηκαν. Ο Ευκλείδης συγκέντρωσε τα έργα τους, ταξινόμησε την ύλη τους, την ανέλυσε, τη συμπλήρωσε, την ιεράρχησε και την ενέταξε μέσα σε ένα νέο αξιωματικό μαθηματικό σύστημα. Καθόρισε τους ορισμούς, τα αιτήματα, τις κοινές έννοιες και τις προτάσεις του νέου συστήματος και με βάση αυτά καθιέρωσε μια γεωμετρική μορφή απόδειξης στα Μαθηματικά που πλησιάζει την τελειότητα[5] και δεσπόζει για πάρα πολλούς αιώνες (Εξαρχάκος κ.ά., 2001). Δεν περιορίστηκε βέβαια μόνο στην

[4] Αξιώματα ονομάζουμε τους ισχυρισμούς που τους δεχόμαστε ως αληθείς χωρίς απόδειξη (Αργυρόπουλος κ.ά., 2017).

[5] Ο Ευκλείδης καθιέρωσε έναν τρόπο και μια διαδικασία παρουσίασης της ύλης, με γενικές αποδείξεις άψογες, όπου κάθε πρόταση τοποθετείται στην κατάλληλη θέση και ακολουθεί η επόμενη πρόταση με μια αυστηρώς λογική τάξη, με τις λιγότερο δυνατές υποθέσεις, χωρίς να παρεμβάλλεται τίποτε άσχετο ή περιττό (Εξαρχάκος κ.ά., 2001).

ταξινόμηση των προτάσεων των προηγούμενων έργων, αλλά πολλές από αυτές τις συμπλήρωσε και τις τελειοποίησε, ενώ πρόσθεσε και νέες. Επιπρόσθετα, δίνει αυστηρές αποδείξεις σε κάποιες προτάσεις που οι προηγούμενοι μαθηματικοί δεν είχαν αποδείξει με αυστηρά μαθηματικό τρόπο. Στο έργο του η θεωρητική γνώση εκτίθεται χωρίς καμιά αναφορά στην εμπειρική προέλευση των εννοιών ή τις εφαρμογές τους και χωρίς φανερές διδακτικές προθέσεις. Μοναδικό κριτήριο και σημείο αναφοράς φαίνεται να αποτελούν οι εσωτερικές ανάγκες ανάπτυξης της μαθηματικής θεωρίας (Θωμαΐδης, 2002).

Για το έργο του Ευκλείδη υπάρχουν πολλές πληροφορίες, μαρτυρίες, αναφορές και σχόλια σε αρκετά έργα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών, αστρονόμων, φιλοσόφων και σχολιαστών μέχρι και τον 6^{ο} μ.Χ., όπως ο Αρχιμήδης, ο Απολλώνιος, ο Πτολεμαίος, ο Γέμινος ο Ρόδιος, ο Ήρων ο Αλεξανδρινός, ο Πάππος, ο Πορφύριος, ο Θέων ο Αλεξανδρινός, ο Πρόκλος και ο Σιμπλίκιος. Ο πρώτος ίσως αρχαίος Έλληνας μαθηματικός που σχολίασε τα Στοιχεία του Ευκλείδη ήταν ο Ήρων ο Αλεξανδρινός (2^{ος} μ.Χ.), του οποίου τα κείμενα δε σώζονται αλλά υπάρχουν αρκετές μαρτυρίες και αναφορές σε αυτά από τον Πρόκλο και πολλούς Άραβες συγγραφείς και μαθηματικούς. Επίσης, τα σχόλια του Πρόκλου (410-485 μ.Χ.) πάνω στο πρώτο βιβλίο του Ευκλείδη αποτελούν ένα σημαντικό έργο το οποίο είχε μεγάλη σημασία για όλες τις εκδόσεις των Στοιχείων που ακολούθησαν.

Από τον 6^{ο} αιώνα μ.Χ. τα έργα των μεγάλων Ελλήνων μαθηματικών, αστρονόμων και φιλοσόφων άρχισαν να μεταφράζονται με μεγάλο ζήλο. Ο Ευκλείδης, ο Πτολεμαίος και ο Αριστοτέλης έγιναν οι μεγάλες αυθεντίες της Γεωμετρίας, της Αστρονομίας και της Φιλοσοφίας αντίστοιχα. Από την περίοδο αυτή και μετέπειτα παρατηρείται ένα πλήθος μεταφράσεων, εκδόσεων, επανεκδόσεων, αναθεωρημένων ή ειδικών εκδόσεων των Στοιχείων του Ευκλείδη σε διάφορες γλώσσες.

Στις μέρες μας, το πιο αυθεντικό κείμενο του έργου του Ευκλείδη περιέχεται στο “Euclidis Opera Omnia”, ένα σπουδαίο έργο των J.L.Heiberg και H.Menge, το οποίο εκδόθηκε στη Λειψία κατά την περίοδο 1883 – 1916 και αποτελεί μια κριτική έκδοση στην οποία περιέχονται τα Στοιχεία και τα άλλα μέχρι τότε γνωστά έργα του Ευκλείδη. Το έργο αυτό έχει μεταφραστεί στα Αγγλικά από τον επιφανή άγγλο ιστορικό των ελληνικών μαθηματικών Sir Thomas L.Heath (1908), με δική του εισαγωγή και σχόλια και έχει τίτλο “Euclid’s The Thirteen Books of the Elements”. Επιπρόσθετα, το έργο των Heiberg και Menge αναπαράχθηκε και εκδόθηκε στα ελληνικά την περίοδο 1952 – 1957 και από τον Ευάγγελο Σταμάτη, ο οποίος διατήρησε το αρχαίο ελληνικό κείμενο του Heiberg και μετέφρασε τα Λατινικά στα Ελληνικά (απλή καθαρεύουσα) (Εξαρχάκος κ.ά., 2001).

Πρωταγωνιστικό ρόλο για τη σχολική Γεωμετρία έπαιξε το έργο «Στοιχεία Γεωμετρίας» του Legendre που εκδόθηκε αρχικά το 1794 και άφησε τα ίχνη του μέχρι τις μέρες μας. Στη Γεωμετρία του Legendre σε σχέση με τον Ευκλείδη γίνεται μια αναδόμηση του περιεχομένου, ενώ ταυτόχρονα επιχειρείται μια λογική αυστηρότητα με τη βοήθεια της αριθμητικής και της άλγεβρας. Η πρόσληψη των γεωμετρικών εννοιών γίνεται αποκλειστικά με ενορατικό τρόπο και περιορίζονται οι γεωμετρικές κατασκευές. Με το σύγγραμμα αυτό έγινε προσπάθεια να παρουσιαστεί με μεγαλύτερη σαφήνεια η εννοιολογική και αξιωματική συγκρότηση και η συνοχή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (Καστάνης, 1986).

Μεγάλη αλλαγή στο γεωμετρικό τρόπο σκέψης επέφερε το βιβλίο «Θεμέλια της Γεωμετρίας» του D.Hilbert το οποίο εκδόθηκε για πρώτη φορά το 1899 και δεν ξεπεράστηκε μέχρι σήμερα. Τα βασικά χαρακτηριστικά της γεωμετρίας Hilbert που την ξεχωρίζουν από τη γεωμετρία του Ευκλείδη και του Legendre είναι η απουσία ορισμών των αρχικών εννοιών και η στήριξη της θεωρίας πάνω στις αυστηρά καθορισμένες μεταξύ τους θέσεις (Καστάνης, 1986). Τις αρχικές έννοιες τις αναφέρει απλά ως δοσμένα στοιχεία και με τον τρόπο αυτό απελευθερώνονται οι αρχικές έννοιες από τη μοναδική ερμηνεία τους και εισάγεται η μεταβλητή σημασία τους, δεσμεύονται δηλαδή μόνο από τις μεταξύ τους σχέσεις και ιδιότητες που είναι αναγκαίες για τη λειτουργική ανάπτυξη της θεωρίας και δεν εξαρτώνται από ένα συγκεκριμένο περιεχόμενο (Καστάνης, 1986).

2.2 Οι ορισμοί στα Στοιχεία του Ευκλείδη

Σήμερα γνωρίζουμε ότι τα Στοιχεία έχουν γραφτεί σε 13 βιβλία στα οποία περιέχονται 121 ορισμοί, 5 αιτήματα[6], 9 κοινές έννοιες[7] (αξιώματα) και 465 προτάσεις (θεωρήματα).

[6] Κατά τον Αριστοτέλη «αίτημα» είναι μια πρόταση που επιδέχεται απόδειξη, αλλά εμείς τη θεωρούμε ως δεδομένη χωρίς απόδειξη.

[7] Ο Ευκλείδης, για να αποκαλέσει τα αξιώματα «κοινές έννοιες», ακολούθησε το παράδειγμα του Αριστοτέλη, ο οποίος χρησιμοποιεί ως εναλλακτική έκφραση για τη λέξη «αξιώματα» τους όρους «κοινά» (πράγματα), «κοινές απόψεις». Οι κοινές έννοιες έχουν γενικότερη εφαρμογή. Δεν εφαρμόζονται δηλαδή μόνο στη Γεωμετρία, αλλά και σε άλλες επιστήμες (Heath, 2001, σελ. 456).

Η λέξη που χρησιμοποιείται για τους ορισμούς είναι «ὅρος». Η αρχική σημασία της λέξης αυτής φαίνεται πως ήταν «όριο», «σημάδι». Τη συναντάμε στον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη με την έννοια μιας βασικής αρχής, η οποία είναι στενά συνδεδεμένη με την έννοια του ορισμού. Ο Αριστοτέλης χρησιμοποιεί και τις δύο λέξεις «ὅρος» και «ὁρισμός», όταν αναφέρεται σε ορισμούς (Heath, 1908, σελ.143).

Οι ορισμοί των Στοιχείων είναι αρκετά περιορισμένοι σε αριθμό και είναι είτε επεξηγήσεις κάποιων πραγμάτων, είτε υποθέσεις, είτε παραδοχές, δηλαδή προτάσεις που τις θεωρούμε αληθείς. Βασικό χαρακτηριστικό των ορισμών είναι ότι ο Ευκλείδης ορίζει τα γεωμετρικά αντικείμενα προϋποθέτοντας την ύπαρξή τους, χωρίς να καθιερώσει τις αρχικές έννοιες.[8] Σε αυτό είναι σύμφωνος με τον Αριστοτέλη, ο οποίος στα «Αναλυτικά Ύστερα» αναφέρει ότι «ο ορισμός διαφέρει από την απόδειξη, γιατί ο ορισμός δεν έχει ως στόχο την ύπαρξη του αντικειμένου». Ένας ορισμός αποτελεί μια απάντηση στην ερώτηση τι είναι («τί ἐστι») το αντικείμενο και όχι ότι υπάρχει («ὅτι ἔστι»). Η ύπαρξη των αντικειμένων που ορίζονται πρέπει να αποδεικνύεται, με εξαίρεση κάποιων βασικών αντικειμένων σε κάθε επιστήμη, η ύπαρξη των οποίων είναι μη αποδείξιμη και πρέπει να υποτεθεί. Για παράδειγμα, τα σημεία και οι γραμμές στη Γεωμετρία υποτίθενται ότι υπάρχουν, ενώ η ύπαρξη όλων των υπολοίπων αντικειμένων (π.χ. των διαφόρων σχημάτων και των ιδιοτήτων τους) πρέπει να αποδεικνύεται (Heath, 1908, σελ.143).

Επίσης, όπως αναφέρει ο Brunschvicg (στο Εξαρχάκος κ.ά., 2001): «Οι ευκλείδειοι ορισμοί είναι ορισμοί *ονοματικοί,* και σχηματίζονται με μοναδικό σκοπό να επιτύχουν τη μέγιστη γλωσσική σαφήνεια λαμβάνοντας υπόψη τα στοιχειώδη δεδομένα της εμπειρίας».

Έτσι παρατηρείται π.χ. ότι, ενώ ο ορισμός 20 εξηγεί τι σημαίνει ισόπλευρο τρίγωνο, προτείνεται έπειτα η κατασκευή του στην πρόταση Ι.1 και αφού κατασκευαστεί, αποδεικνύεται ότι αυτή συμφωνεί με τον ορισμό του. Επίσης, όταν ορίζεται το τετράγωνο στον ορισμό 22, παραμένει ανοιχτό το ερώτημα ύπαρξης αυτού του αντικειμένου μέχρι την πρόταση Ι.46, όπου προτείνεται η κατασκευή του η οποία έπειτα αποδεικνύεται ότι ικανοποιεί τον ορισμό του. Η μετάβαση αυτή από τους υποκειμενικούς ονοματικούς ορισμούς στους αντικειμενικούς ορισμούς των

[8] Ο Ευκλείδης δεν αισθάνεται την ανάγκη να ορίσει ακόμα και βασικά γεωμετρικά αντικείμενα (π.χ. δεν υπάρχει ο ορισμός για το παραλληλόγραμμο, το τραπέζιο, το πεντάγωνο κλπ.) ή βασικές μαθηματικές έννοιες. Μερικοί μάλιστα ορισμοί αποτελούν οι ίδιοι τις αρχικές έννοιες, όπως είναι η έννοια του σημείου, της γραμμής κλπ.

αντικειμένων, πραγματοποιείται στη Γεωμετρία μέσω των κατασκευών, ενώ σε άλλες επιστήμες μέσω της εμπειρίας (Heath, 1908, σελ.146).

Το πρώτο συστατικό μιας αξιωματικής μεθόδου είναι οι ορισμοί. Έτσι, όσα βιβλία των Στοιχείων περιέχουν ορισμούς αρχίζουν με αυτούς. Στο βιβλίο Ι των Στοιχείων, το οποίο περιέχει συνολικά 23 ορισμούς, αναφέρονται και οι ορισμοί του κύκλου και του ρόμβου που αποτελούν αντικείμενα μελέτης της παρούσας εργασίας. Σύμφωνα με τον Heath (2001, σελ. 456), οι περισσότεροι από τους ορισμούς υιοθετήθηκαν, πιθανώς, από εκπαιδευτικά βιβλία που είχαν δημοσιευθεί πριν από την εποχή του Ευκλείδη. Κάποιοι άλλοι μοιάζουν να προστέθηκαν απλώς από σεβασμό προς την παράδοση, όπως π.χ. οι ορισμοί του ετερομήκους, του ρόμβου και του ρομβοειδούς, οι οποίοι δε χρησιμοποιούνται ποτέ στα Στοιχεία.

2.2.1 Περί κύκλου

Η έννοια του κύκλου είναι αρχαιότατη και πολύ συχνά αναφέρεται στην πλειονότητα της αρχαιοελληνικής γραμματείας χωρίς μαθηματική σημασία. Για παράδειγμα, στην Ιλιάδα (8^{ος} π.Χ.) (Λ. 33 κ.ε.) αναφέρεται η έκφραση «κύκλοι δέκα χαλκέοι» (δέκα χάλκινοι κύκλοι) που κοσμούσαν μια ασπίδα, ενώ στην Οδύσσεια (Δ. 722) βρίσκουμε την έκφραση «κύκλῳ ἀπάντῃ» (κυκλικά). Ο Ηράκλειτος αναφέρει «ξυνοῦ γὰρ ἀρχῆ καὶ πέρας ἐπί κύκλου περιφερεἶας» (είναι κοινή η αρχή και το τέλος στην περιφέρεια του κύκλου) και η ιδιότητα αυτή είναι κοινή κάθε κλειστής γραμμής. Ο Δημόκριτος αναφέρεται σε ισότητα και ανισότητα κύκλων (D.V. 55 B155, στο Ντζιαχρήστος & Κοντογιάννης, 2002, σελ.311) «ἐξ ἴσων συγκείμενος καὶ οὐκ ἀνίσων κύκλων, ὅπέρ ἐστιν ἀτοπώτατον» (από ίσους κύκλους αποτελείται και όχι από άνισους, πράγμα άτοπο). (Ντζιαχρήστος & Κοντογιάννης, 2002).

Στον Πλάτωνα η λέξη κύκλος εμφανίζεται πολλές φορές είτε σαν έκφραση της καθομιλουμένης είτε σαν μαθηματικός όρος. Π.χ. στον «Τίμαιο» (34 Β): «ψυχή δε …κύκλῳ δῂ κύκλον στρεφόμενον οὐρανόν ἓνα μόνον ἓρημον κατέστησεν» (Την ψυχή του κόσμου την τοποθέτησε στο κέντρο του κύκλου) (Ντζιαχρήστος & Κοντογιάννης, 2002). Στο διάλογο «Παρμενίδης» (Parmenides 137E) ο Πλάτωνας χρησιμοποιεί τους όρους «περιφερές» και «στρογγύλον». Μάλιστα, ορίζει το κυκλικό (στρογγύλον) σχήμα ως «εκείνο του οποίου τα πλέον απομακρυσμένα (τά ἔσχατα) σημεία βρίσκονται στην ίδια απόσταση – και προς όλες τις διευθύνσεις – από το μέσον του (κέντρο του)» (Heath, 2001, σελ. 365). Συγκεκριμένα:

«στρογγύλον γέ πού ἐστι τοῦτο, οὗ ἂν τὰ ἒσχατα πανταχῇ ἀπὸ τοῦ μέσου ἳσον ἀπέχῃ»

Παρατηρείται πως, ο ορισμός του «στρογγύλου» από τον Πλάτωνα δεν περιορίζεται στα επίπεδα σχήματα (θα μπορούσε να περιλαμβάνει π.χ. και τη σφαίρα).

Επίσης, και στον Αριστοτέλη υπάρχουν εκφράσεις όπως «το κυκλικό (περιφερόγραμμον) σχήμα που οριοθετείται από μία γραμμή», χωρίς ωστόσο αυτές να αποτελούν ορισμό του κύκλου. Επίσης, συγκρίνει με τον κύκλο «οποιαδήποτε άλλο σχήμα το οποίο δεν έχει τις γραμμές από το μέσο ίσες, όπως για παράδειγμα ένα ωοειδές σχήμα (egg-shaped figure)» (Heath, 1908, σελ. 184). Στο έργο του «Περί Ουρανού» (269 B20) γράφει: «καὶ τῇ μὲν εὐθεῖα πρόσθεσίς ἐστιν ἀεί, τῇ δὲ τοὺ κύκλου οὒδέποτε» (και πάντα μπορούμε να προσθέσουμε τμήματα μιας ευθείας αλλά ποτέ ενός κύκλου). Από το εδάφιο αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε πως ο Αριστοτέλης ονομάζει κύκλο αυτό που οι σύγχρονοί του ονόμαζαν περιφέρεια του κύκλου (Ντζιαχρήστος & Κοντογιάννης, 2002, σελ. 311).

Στον παρακάτω πίνακα παρατίθενται οι ορισμοί ιε΄, ις΄, ιζ, και κβ΄ του Α΄ βιβλίου των «Στοιχείων» του Ευκλείδη όπως αναφέρονται στο Σταμάτης (1975) και η απόδοσή τους στη δημοτική γλώσσα (Εξαρχάκος κ.ά., 2001).

Οι ορισμοί ιε΄, ις΄, ιζ, και ιη΄ του Α΄ βιβλίου των «Στοιχείων» του Ευκλείδη	**Απόδοση στη νεοελληνική γλώσσα**
ιε΄. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἣ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.	15. Κύκλος (κυκλικός δίσκος) είναι το επίπεδο σχήμα το οποίο περιέχεται από μία γραμμή που ονομάζεται περιφέρεια (κύκλος), της οποίας τα σημεία ισαπέχουν από ένα σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου.
ις΄. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.	16. Το σημείο αυτό ονομάζεται κέντρο του κύκλου.
ιζ΄. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.	17. Διάμετρος κύκλου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, τα άκρα του είναι σημεία του κύκλου και διαιρεί τον κύκλο σε δυο ίσα μέρη.
ιη΄. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.	18. Ημικύκλιο ονομάζεται το σχήμα που περιέχεται από τη γραμμή που αποτελείται από μια διάμετρο του κύκλου και από το αντίστοιχο στη διάμετρο τόξο. Κέντρο του ημικυκλίου είναι το κέντρο του κύκλου.

Ο Russo (1998) αναφέρει ότι στον πάπυρο Herculanensis αρ. 1061 περιέχεται μόνο ένας ορισμός, ο οποίος είναι ο ορισμός του κύκλου:

«Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, πρὸς ἣν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν».

Ακριβώς τον ίδιο ορισμό χρησιμοποίησε και ο Σέξτος Εμπειρικός. Ο ορισμός αυτός δεν περιέχει τις φράσεις [ἣ καλεῖται περιφέρεια] και [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν], οι οποίες προστέθηκαν στο κείμενο του Ευκλείδη μεταγενέστερα και έχουν μπει σε παρένθεση από τον Heiberg[9], καθώς και ο ίδιος παρατήρησε ότι αυτές έχουν παραληφθεί από πολλές αρχαίες πηγές, όπως ο Πρόκλος, ο Σέξτος Εμπειρικός και Βοήθιος (Heath, 1908, σελ.184; Russo, 1998). Φαίνεται λοιπόν, πως ο Ευκλείδης δε διστάζει να χρησιμοποιεί γεωμετρικούς όρους που δεν είχε ορίσει προηγουμένως, παρόλο που οι ίδιοι όροι έχουν οριστεί από αρχαιότερους συγγραφείς, όπως συμβαίνει με τον όρο «περιφέρεια», ο ορισμός του οποίου λείπει από το αρχικό κείμενο του ορισμού 15 των Στοιχείων, αλλά χρησιμοποιείται έπειτα από τον Ευκλείδη στους ορισμούς 17 και 18.

Αντίθετα, ο Ήρων δίνει ορισμό του κύκλου (ορισμός κζ΄) στον οποίο ορίζει και την περιφέρεια αλλά παραλείπει τη δεύτερη έκφραση [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν]:

> *«Κύκλος ἐστὶ τό ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον ἐπίπεδον· τό μέν οὖν σχῆμα καλεῖται κύκλος, ἡ δέ περιέχουσα γραμμή αὐτό περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐάν μέν οὖν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τό σημεῖον ᾖ, κέντρον καλεῖται, ἐάν δέ μή ᾖ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, πόλος ὡς ἔχει ἐπί τῶν ἐν ταῖς σφαίραις κύκλων. λέγεται δε και ἄλλως κύκλος γραμμή, ἥτις πρός πάντα τά μέρη [πάντα] ἴσα ποιεῖ τά διαστήματα. γίνεται δε κύκλος, ἐπάν εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὑπάρχουσα μένοντος τοῡ ἑνός πέρατος τῷ ἑτέρῳ περιενεχθεῖσα εἰς τό αὐτό πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι»* (Heath, 1908; Κηπουρός, 1995) .

[9] Ο Heiberg επιχείρησε να «συμπληρώσει» το κείμενο του Ευκλείδη εισάγοντας διάφορους όρους που θεωρούσε ότι λείπουν, αλλά δεν τόλμησε να παραλείψει οποιαδήποτε αυθεντική λέξη (Russo, 1998). Ο ίδιος είναι βέβαιος ότι οι λέξεις στις παρενθέσεις προστέθηκαν λόγω της εμφάνισης του όρου «περιφέρεια» στους ορισμούς 17 και 18, αμέσως μετά και χωρίς καμία εξήγηση.

Ο ανωτέρω ορισμός σύμφωνα με τον Κηπουρό (1995) αποδίδεται στη νεοελληνική γλώσσα ως εξής:

«Κύκλος είναι το επίπεδο [χωρίο] που περιβάλλεται από μια γραμμή. Το σχήμα λέγεται κύκλος και η γραμμή που το περιβάλλει, περιφέρεια, προς την οποία, όλες οι ευθείες που προσπίπτουν από ένα σημείο από τα εσωτερικά του σχήματος, είναι μεταξύ τους, ίσες. Εάν το σημείο βρίσκεται στο ίδιο [με την περιφέρεια] επίπεδο, καλείται κέντρο, ενώ αν δεν βρίσκεται στο αυτό επίπεδο, καλείται πόλος, όπως συμβαίνει με τους κύκλους που βρίσκονται στην επιφάνεια σφαίρας. Με άλλα λόγια, κύκλος είναι το μόνο επίπεδο σχήμα που έχει την ιδιότητα: να υπάρχει άξονας περιστροφής κάθετος προς το επίπεδό του, τέτοιος ώστε, η τομή του κύκλου, με επίπεδο (αυθαίρετα επιλεγμένο αλλά σταθερό) παράλληλο προς τον άξονα περιστροφής (η οποία τομή είναι μια χορδή) να παραμένει ίση προς εαυτήν, κατά την περιστροφή. Γράφεται ένας κύκλος, όταν μια ευθεία του επιπέδου, στρέφεται περί το ένα άκρο της, το οποίον παραμένει σταθερό, έως ότου το άλλο, επανέλθει στην αρχική του θέση».

Σύμφωνα με τον Heath (1908), ο ορισμός του Ήρωνα έχει γενετικό χαρακτήρα, ενώ του Ευκλείδη αποτελεί έναν προσωρινό ορισμό, ο οποίος δεν κατοχυρώνει την ύπαρξη του μαθηματικού αντικειμένου που ορίζει, αλλά απλώς εξηγεί τι σημαίνει η λέξη «κύκλος». Δεν μπορεί, επομένως, να χρησιμοποιηθεί έως ότου αποδειχθεί η ύπαρξη του κύκλου με τη βοήθεια μιας πραγματικής κατασκευής. Ο ίδιος θεωρεί ότι η πιθανότητα κατασκευής του κύκλου όπως ορίζεται (και συνεπώς η ύπαρξή του), έχει θεμελιωθεί από το 3$^{\text{ο}}$ αίτημα (γ΄): *«Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι»*. (Με κέντρο ένα τυχαίο σημείο και ακτίνα κάθε τμήμα, είναι δυνατό να γράψουμε κύκλο).

Η μεγάλη ομοιότητα του ορισμού του Ήρωνα με τον αυθεντικό ορισμό που καταγράφεται στον πάπυρο Herculanensis, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο Ήρων είχε πάρει τον ορισμό από τον Ευκλείδη (Russo, 1998).

Ο Σπινόζα[10] αναφέρει επίσης, ότι ο σωστός ορισμός είναι αυτός που δηλώνει τον τρόπο γέννησης του κύκλου, οπότε ο ζητούμενος ορισμός του κύκλου είναι *το*

[10] Ο Μπέντο ντε Σπινόζα (1632 – 1677) ήταν Ολλανδός φιλόσοφος, εβραϊκής καταγωγής και θεωρείται ένας από τους μεγάλους ορθολογιστές της φιλοσοφίας του 17$^{\text{ου}}$ αιώνα. Το αριστούργημά του, η «Ηθική», έχει αναγνωριστεί ως μείζον φιλοσοφικό έργο. Κάθε μέρος της Ηθικής διαρθρώνεται με ένα αρχικό αριθμημένο σύνολο ορισμών και αξιωμάτων και ακολουθείται από μια μακρά σειρά αριθμημένων προτάσεων, που συνοδεύονται από τις αποδείξεις τους, σχόλια και παραρτήματα. Αρκετοί σχολιαστές εξαντλούν τη χρήση της γεωμετρικής μεθόδου του Σπινόζα στην αδιαμφισβήτητη μορφολογική ομοιότητα της Ηθικής με τα Στοιχεία του Ευκλείδη (Γουδέλη, 2015).

σχήμα που προκύπτει από την περιστροφή ενός ευθύγραμμου τμήματος γύρω από ένα σταθερό άκρο του (Γουδέλη, 2015). Παρομοίως, ο Heath (1908) αναφέρει ότι ένας γενετικός ορισμός μπορεί να δηλώνει ότι ένας κύκλος είναι το σχήμα που γράφεται, όταν μια ευθεία γραμμή, η οποία παραμένει πάντα στο ίδιο επίπεδο, κινείται γύρω από το ένα άκρο της ως σταθερό σημείο, μέχρι να επιστρέψει στην αρχική της θέση (όπως αναφέρεται και στον ορισμό 27 του Ήρωνα) (Heath, 1908, σελ. 184).

Αξίζει να αναφερθεί ότι, η λέξη «περιφέρεια» δεν εμφανίζεται στον Πλάτωνα, αλλά χρησιμοποιείται αρκετές φορές από τον Αριστοτέλη είτε με τη γενική σημασία του περιγράμματος (χωρίς να έχει κάποιο ιδιαίτερο μαθηματικό νόημα), είτε αναφερόμενος στο ουράνιο τόξο και την περιφέρεια ή στο τόξο ενός κύκλου. Ο An – Nairizī (στο Heath, 1908, σελ.184) αναφέρει ότι ο ορισμός του κύκλου από τον Ευκλείδη ως ένα επίπεδο σχήμα, εννοεί ολόκληρη την επιφάνεια που οριοθετείται από την περιφέρεια και όχι την ίδια την περιφέρεια. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις όπου με τη λέξη «κύκλος» εννοείται η «περιφέρεια του κύκλου», όπως π.χ. στο βιβλίο ΙΙΙ, στην πρόταση 10: *«Ένας κύκλος δεν τέμνει έναν κύκλο σε περισσότερα από δύο σημεία»* (Heath, 1908, σελ.185).

Ο ορισμός 16 εγγυάται την ύπαρξη και τη μοναδικότητα του κέντρου του κύκλου και σύμφωνα με τον Mueller (στο Εξαρχάκος κ.ά., 2001) αποτελεί μια ένδειξη του κατασκευαστικού χαρακτήρα των Στοιχείων.

Ο Ήρων, ο Πρόκλος και ο Σιμπλίκιος επισημαίνουν ότι το κέντρο δεν είναι το μόνο σημείο του κύκλου που ισαπέχει από όλα τα σημεία της περιφέρειας, αλλά το μοναδικό σημείο *στο επίπεδο του κύκλου* («που βρίσκεται στο εσωτερικό του σχήματος» σύμφωνα με τον Ευκλείδη) που ισαπέχει από αυτά. Οποιοδήποτε άλλο σημείο εκτός επιπέδου του κύκλου το οποίο ισαπέχει από όλα τα σημεία της περιφέρειας είναι ένας πόλος. Σύμφωνα με τον Πρόκλο (στο Heath, 1908, σελ.185), εάν τοποθετήσουμε μια κατακόρυφη ράβδο στο κέντρο ενός κύκλου (μια γραμμή μέσω του κέντρου, κάθετη στο επίπεδο του κύκλου), το άνω άκρο της είναι ένας πόλος. Η κατακόρυφη είναι ο γεωμετρικός τόπος για όλους αυτούς τους πόλους.

Στον ορισμό 17 ο Ευκλείδης δεν αναφέρεται στην διάμετρο οποιουδήποτε σχήματος, αλλά ειδικά του κύκλου και προσθέτει την έκφραση ότι «η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη», η οποία είναι ένα από τα θεωρήματα που αποδίδονται στο Θαλή (Heath, 2001, σελ. 457). Ο Πρόκλος αναφέρει ότι ο Θαλής ήταν ο πρώτος που απέδειξε ότι η διάμετρος διχοτομεί τον κύκλο: «τό μέν οὖν διχοτομεῖσθαι τοῦ κύκλου ὑπὸ τῆς διαμέτρου πρῶτον Θαλῆν ἐκεῖνον ἀποδεῖξαι φασίν». Την πληροφορία αυτή μας αναφέρει και ο Ποσειδώνιος (Εξαρχάκος κ.ά., 2001). Όμως, η προσθήκη αυτή ήταν πραγματικά απαραίτητη, καθώς χωρίς αυτή την εξήγηση ο Ευκλείδης δε θα είχε δικαιωθεί όταν περιέγραφε ένα ημικύκλιο ως το τμήμα του κύκλου που αποκόπτεται από τη διάμετρο (Heath, 2001, σελ. 457).

Ο Σιμπλίκιος παρατηρεί ότι η διάμετρος αποκαλείται έτσι διότι διασχίζει όλη την επιφάνεια του κύκλου σαν να την μετράει, αλλά και επειδή διαιρεί τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη. Στον Αριστοτέλη «τά κατά διάμετρον κείμενα» στο χώρο είναι αυτά που απέχουν τη μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ τους (are at their maximum distance apart) (Heath, 1908, σελ.185).

Επίσης, η λέξη «διάμετρος» ήταν συνηθισμένη στον Ευκλείδη και αναφερόταν και στη διάμετρο του τετραγώνου αλλά και του παραλληλογράμμου, ενώ ο όρος «διαγώνιος» εισήχθη αργότερα από τον Ήρωνα (Heath, 1908, σελ.185).

Σχετικά με τον ορισμό του ημικυκλίου, ο Ήρων δίνει και τον εξής ορισμό: «῾Ημικύκλιον ἐστίν τὸ ὑπό διαμέτρου κύκλου καὶ περιφερείας περιεχόμενον σχῆμα». Επίσης, ο Πρόκλος θεωρεί ότι το ημικύκλιο είναι το μόνο επίπεδο σχήμα του οποίου το κέντρο βρίσκεται στην περίμετρό του (Εξαρχάκος κ.ά., 2001).

2.2.2 Περί τριγώνων

Οι ορισμοί των τριγώνων εμπεριέχονται στον 19^{ο}, 20^{ο} και 21^{ο} ορισμό των Στοιχείων:

Οι ορισμοί ιθ΄, κ΄ και κα΄ του Α΄ βιβλίου των «Στοιχείων» του Ευκλείδη	**Απόδοση στη νεοελληνική γλώσσα**
ιθ΄. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τά ὑπό εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μέν τά ὑπό τριῶν, τετράπλευρα δέ τά ὑπό τεσσάρων, πολύπλευρα δέ τά ὑπό πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.	19.Ευθύγραμμα σχήματα είναι αυτά που περικλείονται από ευθύγραμμα τμήματα, τρίπλευρα (τρίγωνα), αυτά που περικλείονται από τρεις, τετράπλευρα από τέσσερις, πολύπλευρα (πολύγωνα) από περισσότερες των τεσσάρων γραμμές.
κ΄. Τῶν δέ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μέν τρίγωνόν ἐστι τό τάς τρεῖς ἴσας ἒχον πλευράς, ἰσοσκελές δέ τό τάς δύο μόνας ἴσας πλευράς, σκαληνόν δέ τό τάς τρεῖς ἀνίσους ἒχον πλευράς.	20. Από τα τρίπλευρα σχήματα αυτό που έχει ίσες τις τρεις πλευρές ονομάζεται ισόπλευρο τρίγωνο, αυτό που έχει δυο μόνο πλευρές ίσες ισοσκελές και σκαληνό αυτό που έχει τις τρεις πλευρές άνισες.

κα΄. Ἔτι δέ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μέν τρίγωνόν ἐστι τό ἔχον ὀρθήν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δέ τό ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δέ τό τάς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας (Σταμάτης, 1975).	21. Από τα τρίπλευρα σχήματα, ορθογώνιο τρίγωνο είναι αυτό που έχει μια γωνία ορθή, αμβλυγώνιο αυτό που έχει μια γωνία αμβλεία και οξυγώνιο αυτό που έχει τις γωνίες οξείες.

Σε ορισμένες εκδόσεις των στοιχείων ο ορισμός 19 είναι χωρισμένος σε τέσσερις (4) ορισμούς. Οι όροι τρίπλευρο, τετράπλευρο και πολύπλευρο δεν υπάρχουν στα κείμενα του Πλάτωνα, ενώ στον Αριστοτέλη υπάρχουν μόνο στα έργα του «Μηχανικά» και «Προβλήματα». Οι όροι «τρίπλευρο» και «πολύπλευρο» δεν επικράτησαν πλήρως στα επόμενα χρόνια και δε χρησιμοποιούνται στις μέρες μας, σε αντίθεση με τον όρο «τετράπλευρο». Με τη χρήση του όρου «τετράπλευρο» φαίνεται επίσης, πως ο Ευκλείδης δίνει ένα τέλος στην ασάφεια της χρήσης της λέξης «τετράγωνο» που μέχρι τότε τη χρησιμοποιούσαν πολλές φορές οι μαθηματικοί για τα τετράπλευρα σχήματα.

Στον ορισμό 20 ο Ευκλείδης ταξινομεί τα τρίγωνα ως προς τις πλευρές τους χρησιμοποιώντας τους όρους «ισόπλευρο», «ισοσκελές» και «σκαληνό», οι οποίοι είναι αρκετά παλιοί και τους χρησιμοποίησαν και ο Πλάτωνας και ο Αριστοτέλης στα κείμενά τους. Ο Αριστοτέλης χρησιμοποιεί τον όρο «σκαληνής» ως ένα τρίγωνο που δεν έχει δύο ίσες πλευρές (Heath, 1908, σελ.187). Ο Πλάτωνας εφαρμόζει τον όρο «σκαληνός» στους περιττούς αριθμούς, ενώ για τους ζυγούς χρησιμοποιεί τον όρο «ισοσκελής». Ο Πρόκλος αναφέρει ότι η λέξη «σκαληνός»[11] προέρχεται από τη λέξη «σκάζω» (με την έννοια κουτσαίνω, χωλαίνω, “to limp”), ενώ άλλοι από τη λέξη «σκολιός» (στραβός, σκυφτός, λοξός). Ο Απολλώνιος χρησιμοποιεί τον όρο για τον πλάγιο κυκλικό κώνο (oblique circular cone). Ο όρος αυτός χρησιμοποιήθηκε για τους περιττούς αριθμούς και από τον Νικόμαχο Γερασινό.

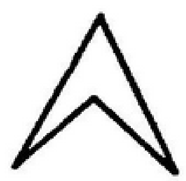
Στον ορισμό 21 φαίνεται ο διαχωρισμός των τριγώνων ως προς τις γωνίες σε «ορθογώνιο», «αμβλυγώνιο» και «οξυγώνιο». Ο ίδιος διαχωρισμός σε είδη τριγώνων τόσο ως προς τις πλευρές (ισόπλευρα, ισοσκελή και σκαληνά όπως στον ορισμό 20) όσο και ως προς τις γωνίες (ορθογώνια, αμβλυγώνια και οξυγώνια όπως στον ορισμό 21), επικράτησε και υπάρχει και σήμερα (Εξαρχάκος κ.ά., 2001).

[11] Τον όρο «σκαληνός» τον συναντάμε σε πολλούς αρχαίους και Βυζαντινούς συγγραφείς, όπως στους Θεόφραστο, Ιπποκράτη, Δημόκριτο, Πλάτωνα, Ευκλείδη, Απολλώνιο, Νικόμαχο Γερασινό, Στωβαίο, Επιφάνιο, κ.ά.

Σύμφωνα με τον Heath (2001, σελ.457), οι ορισμοί των διαφορετικών ειδών του τριγώνου, με βάση τη διπλή ταξινόμησή τους, είναι *προσωρινοί*, εν όψει της απόδειξης της ύπαρξής τους μέσω της γεωμετρικής κατασκευής.

Ο Πρόκλος ταξινομεί τα τρίγωνα σε 7 διαφορετικά είδη: 1) το ισόπλευρο τρίγωνο, 2) τα τρία είδη των ισοσκελών τριγώνων (ορθογώνιο, αμβλυγώνιο, οξυγώνιο) και 3) τα τρία είδη των σκαληνών τριγώνων (ορθογώνιο, αμβλυγώνιο, οξυγώνιο) (Εξαρχάκος κ.ά., 2001).

Ο Πρόκλος δίνει μια παράξενη αιτιολόγηση για τη διπλή ταξινόμηση των τριγώνων με βάση τις πλευρές και τις γωνίες και ειδικότερα, αναφέρει ότι ο Ευκλείδης είχε επίγνωση του γεγονότος ότι δεν είναι κάθε τρίγωνο τρίπλευρο. Αυτή τη δήλωση την εξηγεί αναφερόμενος σε ένα σχήμα το οποίο κάποιοι το αποκαλούν «ἀκιδοειδές», ενώ ο Ζηνόδωρος το ονόμασε «κοιλογώνιο». Ο Πρόκλος αναφέρεται στο τετράπλευρο τρίγωνο ως «ένα από τα παράδοξα στη Γεωμετρία». Αυτό το «τρίγωνο» είναι απλά ένα τετράπλευρο με μία εισέχουσα (re-entrant) γωνία και η ιδέα ότι έχει



μόνο τρεις γωνίες οφείλεται στη μη αναγνώριση της τέταρτης γωνίας (η οποία είναι μεγαλύτερη από δύο ορθές γωνίες) ως γωνία (Heath, 1908, σελ. 188).

2.2.3 Περί τετραπλεύρων

Ο ορισμός κβ΄ του Α΄ βιβλίου των «Στοιχείων» του Ευκλείδη	**Απόδοση στη νεοελληνική γλώσσα**
κβ΄ [22]. *Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιον: τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω*.	22. Από τα τετράπλευρα σχήματα, τετράγωνα είναι εκείνα τα οποία είναι ισόπλευρα και ορθογώνια, ετερομήκη είναι εκείνα που είναι ορθογώνια αλλά όχι ισόπλευρα, ρόμβοι είναι εκείνα που είναι ισόπλευρα αλλά όχι ορθογώνια και ρομβοειδή είναι εκείνα που έχουν τις απέναντι πλευρές και γωνίες ίσες, αλλά δεν είναι ισόπλευρα ή ορθογώνια. Τα υπόλοιπα τετράπλευρα ονομάζονται τραπέζια.

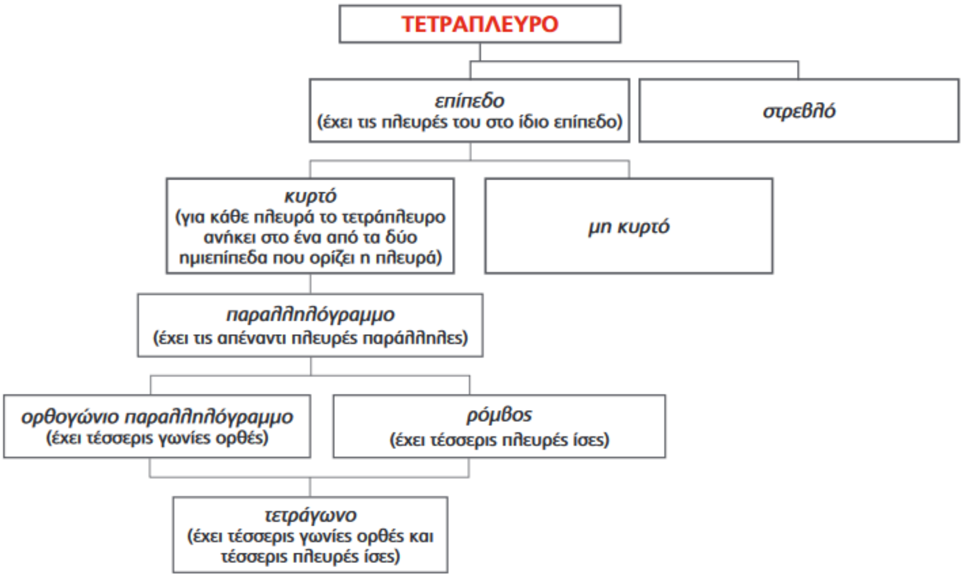
Η ταξινόμηση[12] που προτείνει ο Ευκλείδης (διάγραμμα 1) δε στηρίζεται στην έννοια της παραλληλίας, καθώς αυτή εισάγεται αργότερα στα Στοιχεία. Για τους τρείς πρώτους όρους φαίνεται ότι λαμβάνει ως βάση τις συνθήκες «έχει ίσες πλευρές» και «έχει ορθές γωνίες» και τις αρνήσεις τους. Έτσι, ο όρος «τετράγωνο» χρησιμοποιήθηκε από τον Ευκλείδη για να περιγράψει το ισόπλευρο και ορθογώνιο τετράπλευρο, το «ετερομήκες» (δηλαδή το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο) για τα ορθογώνια αλλά όχι ισόπλευρα τετράπλευρα, ενώ ο «ρόμβος» για τα ισόπλευρα αλλά όχι ορθογώνια τετράπλευρα. Ως «ρομβοειδή» (δηλαδή τα πλάγια παραλληλόγραμμα) ορίζει τα τετράπλευρα που δεν είναι ισόπλευρα ή ορθογώνια, η έννοια δηλαδή στηρίζεται στην συνθήκη της ισότητας των απέναντι πλευρών και γωνιών και όχι στην παραλληλία των απέναντι πλευρών. Τραπέζιο ονομάζει οποιοδήποτε τετράπλευρο κι όχι ό,τι σήμερα εννοούμε με τον όρο αυτό (δηλαδή το τετράπλευρο με δύο μόνο πλευρές παράλληλες). Τον όρο τραπέζιο, με τη σύγχρονη έννοια, τον συναντάμε αργότερα στον Αρχιμήδη (Αργυρόπουλος κ.ά., 2017).

Διάγραμμα 1: Η Ευκλείδεια ταξινόμηση των τετραπλεύρων (Αργυρόπουλος κ.ά., 2017)

Η ταξινόμηση αυτή αποδεικνύεται μη λειτουργική και μάλλον άβολη. Στα χρόνια που ακολούθησαν κάποιοι μαθηματικοί τη διατήρησαν, ενώ υπήρχαν και πολλοί που προσπάθησαν να τη διορθώσουν και να την τροποποιήσουν. Σήμερα, η

[12] Σύμφωνα με τον DeVilliers (1994) υπάρχουν δύο είδη ταξινόμησης των εννοιών. Η ιεραρχική ταξινόμηση (hierarchical classification), όπου οι πιο συγκεκριμένες και ειδικές έννοιες σχηματίζουν υποσύνολα των γενικότερων εννοιών και η διαχωριστική ταξινόμηση (partition classification), όπου τα διάφορα υποσύνολα των εννοιών απλά θεωρούνται διαχωρισμένα μεταξύ τους. Έτσι, σε μια ιεραρχική ταξινόμηση τα ορθογώνια και οι ρόμβοι είναι υποσύνολα των παραλληλογράμμων και το τετράγωνο αποτελεί την τομή μεταξύ των ορθογωνίων και των ρόμβων, ενώ στη διαχωριστική ταξινόμηση τα παραλληλόγραμμα, τα τετράγωνα, τα ορθογώνια και οι ρόμβοι διακρίνονται μεταξύ τους ως διαφορετικά υποσύνολα των τετραπλεύρων.

υποδιαίρεση των τετραπλεύρων γίνεται αρχικά σε επίπεδα και στρεβλά, ανάλογα με το αν οι κορυφές τους βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή όχι (διάγραμμα 2). Τα επίπεδα τετράπλευρα, έπειτα διαιρούνται σε κυρτά (όπως το παραλληλόγραμμο) και μη κυρτά, ανάλογα με το αν η κάθε πλευρά τους αφήνει το σχήμα εξ ολοκλήρου στο ένα από τα δυο ημιεπίπεδα που ορίζει η πλευρά αυτή ή όχι. Ο ρόμβος, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και το τετράγωνο ανήκουν στην οικογένεια των παραλληλογράμμων (Αργυρόπουλος κ.ά., 2017; Βανδουλάκης κ.ά., 2016).



Διάγραμμα 2: Η σύγχρονη ταξινόμηση των τετραπλεύρων (Αργυρόπουλος κ.α., 2017)

Παρατηρείται λοιπόν, πως το «τετράγωνο» σήμερα θεωρείται ότι ανήκει ιεραρχικά στα παραλληλόγραμμα και στα ορθογώνια, ενώ μπορεί να αποτελεί και ειδική περίπτωση του ρόμβου. Αντιθέτως, στην ταξινόμηση του Ευκλείδη, διαχωρίζεται από τις άλλες έννοιες ως υποκατηγορία των τετραπλεύρων.

Η έννοια «τετράγωνο» είναι πολύ παλιά και γνωστή στους Πυθαγόρειους. Τη συναντάμε αρκετές φορές στον Πλάτωνα (π.χ. στο διάλογο «Μένων» ο Σωκράτης θέτει το πρόβλημα: Να κατασκευαστεί τετράγωνο διπλάσιο από δοσμένο τετράγωνο) αλλά και στον Αριστοτέλη (π.χ. στο έργο του «Μετά τα Φυσικά» αναφέρεται σε ισογώνια τετράγωνα, που θα μπορούσε να σημαίνει ότι ο Αριστοτέλης ονομάζει τετράγωνα τα τετράπλευρα). Πολλοί συγγραφείς μετά τον Ευκλείδη χρησιμοποιούν την έκφραση αυτή, όπως π.χ. ο Ήρων, ο οποίος στον ορισμό του κύβου γράφει: «Κύβος ἐστί σχῆμα ὑπὸ ἕξ τετραγώνων ἰσοπλεύρων καί ὀρθογωνίων περιεχόμενον»

(Εξαρχάκος κ.ά., 2001), ενώ ο Πρόκλος στο σχόλιό του για το «τετράπλευρο τρίγωνο» προσθέτει ότι «μπορεί να υπάρχουν τετράγωνα με περισσότερες από τέσσερις πλευρές» (Heath, 1908, σελ. 188). Ο Ήρωνας έδωσε και άψογους ορισμούς για τα τετράπλευρα, οι οποίοι είναι παρόμοιοι με του Ευκλείδη:

Τετράγωνα: «Τά μέν οὖν ὀρθογώνια ἰσόπλευρα»

Ετερομήκη: «Τά δέ ὀρθογώνια μέν, μή ἰσόπλευρα δέ,…»

Ρόμβοι: «Τά δέ ἰσόπλευρα μέν, μη ὀρθογώνια δέ,…»

Ρομβοειδή: «Τά μήτε ἰσόπλευρα μήτε ὀρθογώνια, τάς δε ἀπέναντι πλευράς τε και γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχοντα» (Εξαρχάκος κ.ά., 2001).

Σύμφωνα με τον Heath (1908, σελ. 189) ο ορισμός του Ευκλείδη για το τετράγωνο περιλαμβάνει περισσότερα από τα αναγκαία χαρακτηριστικά, καθώς αρκεί να έχει μία ορθή γωνία, αφού είναι ισόπλευρο. Δεν ικανοποιεί δηλαδή τη λογική αρχή σύμφωνα με την οποία το σύνολο των αναγκαίων και επαρκών συνθηκών που είναι απαραίτητες για τον πλήρη χαρακτηρισμό της οριζόμενης έννοιας πρέπει να είναι το ελάχιστο δυνατό. Το ίδιο συμβαίνει και με τον ορισμό του ρομβοειδούς. Βέβαια, για τον Ευκλείδη όσα περισσότερα ουσιώδη χαρακτηριστικά ενός αντικειμένου μπορούν να συμπεριληφθούν στον ορισμό του τόσο το καλύτερο, με την προϋπόθεση ότι ο ορισμός χρησιμοποιείται αφού αποδειχθεί η ύπαρξη του αντικειμένου που ορίζεται και η κατοχή όλων αυτών των χαρακτηριστικών. Έτσι, ο Ευκλείδης δεν χρησιμοποιεί τον όρο «τετράγωνο» πριν την κατασκευή του στην πρόταση Ι.46.

Ο όρος «ετερομήκες» (με πλευρές διαφορετικού μήκους) είναι επίσης Πυθαγόρειος (όπως και το «τετράγωνο»). Με τη λέξη «ορθογώνιο» που εμπεριέχεται στον ορισμό για τα τετράπλευρα, φαίνεται πως εννοείται το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (το τετράπλευρο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές) (Heath, 1908, σελ. 188).

Η λέξη «*ρόμβος»* προφανώς προέρχεται από τη λέξη «ρέμβω» που σημαίνει «γυρίζω γύρω γύρω». Ο Πρόκλος ενώ αναφέρεται στον ρόμβο σαν να είναι ένα «κλονισμένο», «παραμορφωμένο τετράγωνο» και για το ρομβοειδές ως ένα επιμήκες που μετακινήθηκε, προσπαθεί να εξηγήσει το ρόμβο με αναφορά στην εμφάνισή του ως ένα τετράγωνο περιστρεφόμενο («τετράγωνον ρομβούμενον»). Επιπλέον, ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί τον όρο «στερεός ρόμβος» για να ονομάσει ένα στερεό σχήμα φτιαγμένο από δυο ορθούς κώνους με μία κοινή κυκλική βάση και κορυφές στραμμένες προς αντίθετες κατευθύνσεις (Heath, 1908, σελ. 189).

Ο ορισμός του «ρομβοειδούς» φαίνεται πως περιλαμβάνει περισσότερες από τις αναγκαίες ιδιότητες (όπως και ο ορισμός του τετραγώνου), καθώς αναφέρει ότι πρέπει να έχει ίσες τις απέναντι πλευρές αλλά και τις γωνίες (Heath, 1908, σελ.189). Επομένως, δεν μπορεί να περιγραφεί ως «ελάχιστος» ορισμός, αφού δεν περιέχει τον ελάχιστο αριθμό ιδιοτήτων που είναι απαραίτητες για τον πλήρη χαρακτηρισμό της οριζόμενης έννοιας.

Ο Γαληνός ορίζει τα *ρομβοειδή* ως τα ισόπλευρα αλλά όχι ορθογώνια σχήματα και χρησιμοποιεί τη λέξη ρομβοειδές με τη σημασία του σχήματος του ρόμβου, που δεν είναι σύμφωνη με τον ορισμό που απαντάται στα Στοιχεία. Αυτή η απόκλιση πιθανόν να προκάλεσε τη μετέπειτα προσθήκη του ορισμού στα Στοιχεία (Russo, 1998).

Σύμφωνα με τον Russo (1998), οι προτάσεις που ακολουθούν μετά τον ορισμό του τετραγώνου πιθανόν να είναι μεταγενέστερες προσθήκες, διότι το ετερομήκες, ο ρόμβος, το ρομβοειδές και το τραπέζιο είναι σχήματα που δεν χρησιμοποιούνται ποτέ στα Στοιχεία. Όλοι οι σύγχρονοι μελετητές συμφωνούν ότι οι ορισμοί αυτοί προέρχονται από παλαιότερα κείμενα και εισήχθησαν στα Στοιχεία προς χάριν «πληρότητας» του έργου, είτε από τον ίδιο τον Ευκλείδη, είτε από κάποιον μεταγενέστερο εκδότη.

Αξίζει να αναφερθεί, επίσης, ότι το παραλληλόγραμμο δεν ορίζεται, καθώς ο Ευκλείδης δεν έχει ορίσει ακόμα τις παράλληλες ευθείες. Η ύπαρξη του αποδεικνύεται για πρώτη φορά στην πρόταση Ι.33, στην επόμενη πρόταση Ι.34 καλείται «παραλληλόγραμμον χωρίον», ενώ στην πρόταση Ι.35 ονομάζεται πλέον παραλληλόγραμμο (Heath, 1908, σελ. 322-326).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Η ΣΧΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΡΟΜΒΟΥ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Η σχολική Γεωμετρία και οι ορισμοί του κύκλου και του ρόμβου στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση

3.1 Η σχολική Γεωμετρία στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση από τον 19ο αιώνα έως σήμερα

Μια προσπάθεια για ανασυγκρότηση της ελληνικής εκπαίδευσης ξεκίνησε από τις αρχές του 19ου αιώνα με την ίδρυση των πρώτων αλληλοδιδακτικών σχολείων στο νεοσύστατο ελληνικό κράτος. Στο «Εγχειρίδιον» για τα αλληλοδιδακτικά σχολεία, ή αλλιώς «Οδηγό της αλληλοδιδακτικής μεθόδου υπό Σαραζίνου», περιγράφεται η διδασκαλία της «Γραμμικής Ιχνογραφίας», ένα διδακτικό αντικείμενο που διδάσκονταν μόνο στους μαθητές που είχαν τελειώσει τις τέσσερις πρώτες κλάσεις[13] της Γραφής, διαιρούμενο σε 8 κλάσεις. Η ηλικία των μαθητών που διδάσκονταν αυτό το μάθημα δεν ήταν καθορισμένη, αφού σε κάθε κλάση του μαθήματος συμμετείχαν όσοι μαθητές είχαν το ίδιο επίπεδο γνώσεων. Στην Α΄ κλάση οι μαθητές μαθαίνουν να γράφουν γραμμές, ευθείες (κάθετες και παράλληλες), γωνίες και να διαιρούν γραμμές και γωνίες. Στη Β΄ κλάση ιχνογραφούν τρίγωνα και τετράπλευρα. Στη Γ΄ κλάση πολύγωνα ακανόνιστα, τρίγωνα και πολύγωνα όμοια. Στην Δ΄ κλάση πυραμίδες και πρίσματα. Στην Ε΄ κλάση τον κύκλο και τα κανονικά πολύγωνα. Στην ΣΤ΄ τάξη την έλλειψη, τον κώνο, τον κύλινδρο και τη σφαίρα. Στη Ζ΄ κλάση αγγεία, έκτυπα κλπ. και στην Η΄ κλάση προστάσεις, δηλαδή παραστάσεις προσόψεων κτιρίων, σχέδια, προβολές, εικόνες μηχανών κλπ. (Κοκκώνης, 1830 στο Σδρόλιας, 2004).

Με το νόμο ΧΘ΄ του 1878 παρατηρείται μια στροφή προς τα «πρακτικά» μαθήματα καθώς ορίστηκαν πιο συγκεκριμένα τα μαθήματα που θα διδάσκονταν στα δημοτικά σχολεία και ανάμεσα σε αυτά δίνονται οδηγίες ότι θα πρέπει να διδάσκονται πρακτικοί ορισμοί των γεωμετρικών σχημάτων και γραμμική ιχνογραφία (όπως περιγράφηκε παραπάνω). Η μέθοδος διδασκαλίας εξακολουθούσε να είναι η αλληλοδιδακτική, η οποία είχε αρχίσει να αμφισβητείται έντονα, μέχρι το 1880 όταν παύει να ισχύει οριστικά.

---

[13] Η «κλάση» ήταν σύνολο μαθητών, διαφορετικής ηλικίας με το ίδιο «επίπεδο» γνώσεων σε κάθε γνωστικό αντικείμενο. Η αλλαγή κλάσης σήμαινε και την κατάκτηση του γνωστικού της επιπέδου. Αυτό μπορούσε να γίνει περισσότερες από μια φορά σε κάθε σχολικό έτος (Σδρόλιας, 2004).

Αξίζει να σημειωθεί ότι μέχρι το 1881 δεν υπήρχε ωρολόγιο πρόγραμμα μαθημάτων στα δημοτικά σχολεία ούτε ακολουθούνταν ιδιαίτερη διδακτική μεθοδολογία. Ο δάσκαλος, επομένως, καθόριζε πότε και πώς θα γίνει η διδασκαλία του κάθε μαθήματος και το πιθανότερο είναι ότι στις σχολικές τάξεις κυριαρχούσε ο μονόλογος του δασκάλου, ο οποίος συνοδευόταν από υπαγόρευση των εννοιών και επανάληψή της από τους μαθητές, καθώς υπήρχε σχεδόν ολική έλλειψη διδακτικών βιβλίων.

Λίγο αργότερα, στα νομοσχέδια του 1889 καθιερώνεται ως αυτόνομο μάθημα η «Στοιχειώδης Γεωμετρία» και διδάσκεται ξέχωρα από την αριθμητική στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού αλλά και στο Γυμνάσιο. Στα νομοσχέδια του 1913 το δημοτικό σχολείο γίνεται πλέον εξατάξιο και η «Στοιχειώδης Γεωμετρία» εξακολουθεί να αποτελεί αυτόνομο μάθημα στο αναλυτικό πρόγραμμα. Τα επίπεδα σχήματα, οι ιδιότητές τους και τα χαρακτηριστικά τους προσεγγίζονται και μελετώνται μέσα από τα στερεά σώματα[14]. Έτσι, στην Ε΄ τάξη η διδακτέα ύλη επικεντρώνεται στη μελέτη του κύβου, του ορθογώνιου και του πλάγιου παραλληλεπιπέδου, της τριγωνικής και της κόλουρης πυραμίδας ενώ στην ΣΤ΄ τάξη στη μελέτη του κυλίνδρου, του κώνου, του κόλουρου κώνου και της σφαίρας.

Το 1921 το Υπουργείο Παιδείας εξέδωσε νέο αναλυτικό πρόγραμμα για το εξατάξιο δημοτικό σχολείο, όπου η γεωμετρία διδασκόταν μία ώρα την εβδομάδα στην Ε΄ τάξη και μία ώρα την εβδομάδα στην ΣΤ΄ τάξη, ενώ για την αριθμητική προβλέπονταν τρεις ώρες την εβδομάδα για τις τάξεις αυτές. Η διδακτέα ύλη ήταν ακριβώς αυτή που προβλέπονταν και στα νομοσχέδια του 1913.

Ακολουθεί η περίοδος της κατοχής κατά την οποία προκαλούνται σοβαρά προβλήματα στη λειτουργία των σχολείων και γίνεται επαναφορά του σχήματος εξάχρονου δημοτικού και εξάχρονου γυμνασίου, που είχε καταργηθεί στα προηγούμενα χρόνια (Δημαράς, 1986). Μετά τη δύσκολή αυτή περίοδο η εκπαίδευση γυρίζει ουσιαστικά στο προκατοχικό καθεστώς και η διδακτέα ύλη της Γεωμετρίας εξακολουθεί να παραμένει η ίδια για τρεις δεκαετίες και περισσότερο.

Το 1959 διακηρύχθηκε η ανάγκη ανανέωσης των σχολικών μαθηματικών. Στο πλαίσιο αυτής της ανανέωσης ακούστηκαν και απόψεις που έθεταν την Ευκλείδεια Γεωμετρία εκτός των αναλυτικών προγραμμάτων (κυριαρχούσε μάλιστα το σύνθημα ‘να φύγει ο Ευκλείδης’) και τη διδασκαλία των βασικών γεωμετρικών εννοιών

---

[14] Για παράδειγμα, ο κύκλος περιλαμβάνεται στη μελέτη του κυλίνδρου ή το τετράγωνο στη μελέτη του κύβου.

«διαισθητικά» στις ηλικίες 11 έως 14 ετών (Σκουμπουρδή, 2009). Τα «Νέα» μαθηματικά δέχτηκαν πολλές επικρίσεις. Εκλήφθηκε τότε, πως η υπερβολική ενασχόληση με τη δομή και την αυστηρότητα του περιεχομένου ήταν υπεύθυνη για τη μείωση των επιδόσεων των μαθητών. Στην Ελλάδα εγκαταλείπεται το 1961 στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ο παραδοσιακός διαχωρισμός αριθμητικής – άλγεβρας και πρακτικής Γεωμετρίας, η οποία χάνει την αυτονομία της για χάρη της ενότητας των σύγχρονων μαθηματικών (Θωμαΐδης, 1991). Κάτι ανάλογο συμβαίνει και στις κατώτερες εκπαιδευτικές βαθμίδες με τη συρρίκνωση των ενοτήτων όπου μελετώνται γεωμετρικές έννοιες.

Μια νέα μεταρρυθμιστική προσπάθεια στο χώρο της εκπαίδευσης ξεκινά το 1964 και αποτυπώνεται στο νόμο 4379/1964 με τον οποίο καθιερώνεται η εννιάχρονη υποχρεωτική εκπαίδευση, η δωρεάν διανομή των σχολικών βιβλίων[15], η αύξηση της διάρκειας σπουδών στις Παιδαγωγικές Ακαδημίες κατά ένα έτος και η ίδρυση του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου (Δημαράς, 2000). Με την επιβολή όμως της δικτατορίας στην Ελλάδα τον Απρίλιο του 1967, καταργούνται όλες οι μεταρρυθμιστικές προσπάθειες των προηγουμένων ετών και η εκπαίδευση επαναφέρεται στην προηγούμενη διάρθρωσή της.

Με την πτώση της χούντας, ξεκίνησε η μεταπολιτευτική περίοδος η οποία επανέφερε τη δημοκρατία στην Ελλάδα αλλά και κάποιες νέες μεταρρυθμιστικές κινήσεις. Έτσι, με το νόμο 309/1976 «Περί οργανώσεως και διοικήσεως της Γενικής Εκπαιδεύσεως» επανήλθαν σε ισχύ οι βασικές αλλαγές της μεταρρύθμισης του 1964 και επιπλέον, καθιερώνεται η νεοελληνική γλώσσα σε όλες τις βαθμίδες της Εκπαίδευσης. Ανάμεσα στα μαθήματα που διδάσκονται στο δημοτικό σχολείο ανήκει και το «Αριθμητική και Γεωμετρία» το οποίο σύμφωνα με το ωρολόγιο πρόγραμμα διδασκόταν τέσσερις διδακτικές ώρες στην πέμπτη τάξη και τέσσερις στην έκτη για τα πενταθέσια και πάνω σχολεία, ενώ για τα ολιγοθέσια οι ώρες αυτές περιορίζονταν.

Το 1985 εκδίδονται νέα αναλυτικά προγράμματα για τα μαθηματικά του δημοτικού σχολείου, όπου οι γεωμετρικές έννοιες περιέχονται μέσα στην ευρύτερη διδακτέα ύλη των μαθηματικών, δηλαδή δεν αποτελούν αυτοτελή ενότητα. Ο Καραγεώργος (1996, σελ. 266) υπογραμμίζει ότι:

---

[15]Μέχρι το 1964 όλα τα διδακτικά βιβλία που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές τα αγόραζαν οι ίδιοι και ήταν βιβλία που έπαιρναν έγκριση από επιτροπές που κατά καιρούς σύστηνε το Υπουργείο Παιδείας. Είναι χαρακτηριστικό το «εμπόριο» βιβλίων που διενεργούνταν μεταξύ των παλαιότερων και των νεότερων μαθητών λόγω του οικονομικού βάρους που απαιτούνταν για την ετήσια αγορά καινούριων βιβλίων.

«Οι γεωμετρικές έννοιες σε κάθε τάξη διαχέονται σε περισσότερα από δυο σημεία, δηλαδή δεν αποτελούν αυτοτελή ενότητα. Ως νέα ύλη έχει προστεθεί μόνο η μέτρηση της κανονικής πυραμίδας. Σε όλο το αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών έγινε προσπάθεια να υπάρχει ενιαία ορολογία π.χ. να μη λέμε περιφέρεια κύκλου στο Δημοτικό και κύκλο στο Γυμνάσιο».

Για την υποβοήθηση των εκπαιδευτικών εκδίδονται τα «βιβλία για τον δάσκαλο» που περιέχουν αναλυτικές οδηγίες για τη διδασκαλία των επιμέρους ενοτήτων και εισάγονται νέα διδακτικά βιβλία των μαθητών τα οποία διαφοροποιούνται από τα προηγούμενα ως προς την εμφάνιση αλλά και το περιεχόμενο. Τα βιβλία αυτά χρησιμοποιήθηκαν στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση έως το 2006.

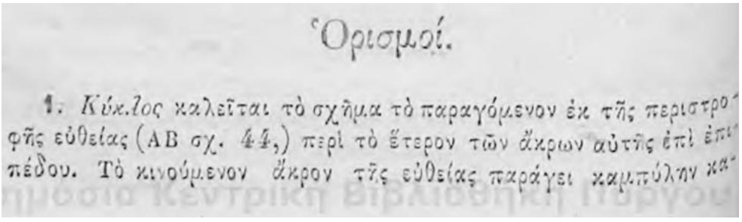
Αργότερα, το 1996, στο πλαίσιο της γενικότερης προσπάθειας που άρχισε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο με την οικονομική στήριξη της Ευρωπαϊκής Κοινότητας για την αναδιατύπωση και τον εκσυγχρονισμό των Προγραμμάτων Σπουδών, άρχισε να υλοποιείται η δημιουργία ενός Ενιαίου Πλαισίου Προγράμματος Σπουδών (ΕΠΠΣ) των Μαθηματικών της Υποχρεωτικής εκπαίδευσης και της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Το ΕΠΠΣ θεωρεί τα μαθηματικά με ενιαίο τρόπο από την προσχολική ηλικία μέχρι το Λύκειο, στοχεύει στον εκσυγχρονισμό και στην ποιοτική αναβάθμιση της εκπαίδευσης στο σύνολό της και αποτελεί μια από τις σημαντικότερες μεταρρυθμίσεις του 20^{ου} αιώνα (Σκουμπουρδή, 2009).

Εξέλιξη του προγράμματος ΕΠΠΣ είναι το νέο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ), το οποίο συντάχθηκε το 2001, και τα ΑΠΣ για την υποχρεωτική εκπαίδευση με τα οποία υιοθετήθηκε και η διαθεματική προσέγγιση της γνώσης και επιχειρήθηκε η διασύνδεση των γνωστικών αντικειμένων. Τα προγράμματα αυτά στόχευαν στη διασφάλιση της συνέχειας της διδασκόμενης ύλης, στην εξάλειψη της αποσπασματικότητας της γνώσης, στην αποφυγή επικαλύψεων της ύλης, καθώς και στη δημιουργία ενός πλαισίου που θα διασφάλιζε μεγαλύτερη αυτονομία στον εκπαιδευτικό. Τα καινούρια σχολικά εγχειρίδια για όλες τις τάξεις του δημοτικού έχουν σχεδιαστεί με βάση το ΔΕΠΠΣ και χρησιμοποιούνται από τη σχολική χρονιά 2006-07 έως σήμερα (Σκουμπουρδή, 2009).

3.2 Οι ορισμοί του κύκλου και του ρόμβου στα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού από το 1870 έως σήμερα

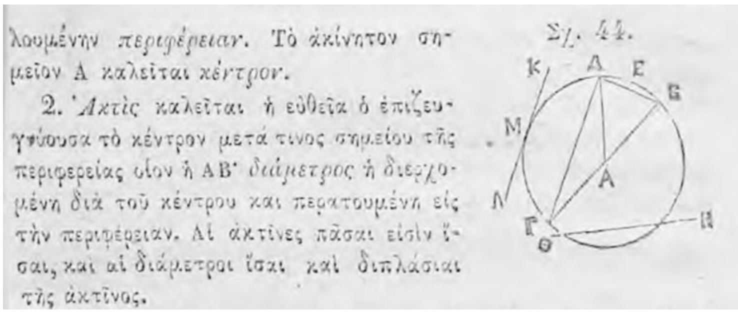
♦ *Αντώνιος Φατσέας (μετ.) (1870). Επιτομή της γεωμετρίας Α.Μ. Λεγένδρου: πρός χρήσιν των ελληνικών σχολείων*

Η Γεωμετρία αυτή αποτελεί επιτομή της Γεωμετρίας Α.Μ. Λεγένδρου (Legendre) και χρησιμοποιούταν στα ελληνικά σχολεία, σύμφωνα με το υπουργικό πρόγραμμα της 5ης Σεπτεμβρίου 1857. Όπως αναφέρεται και στον Πρόλογό της, το σύγγραμμα αυτό είναι κλασικό και η μετάφρασή του χρησιμοποιείται και στο Γυμνάσιο, επομένως ο μαθητής θα διευκολυνθεί όταν θα συναντήσει και εκεί αυτή τη μέθοδο διδασκαλίας.



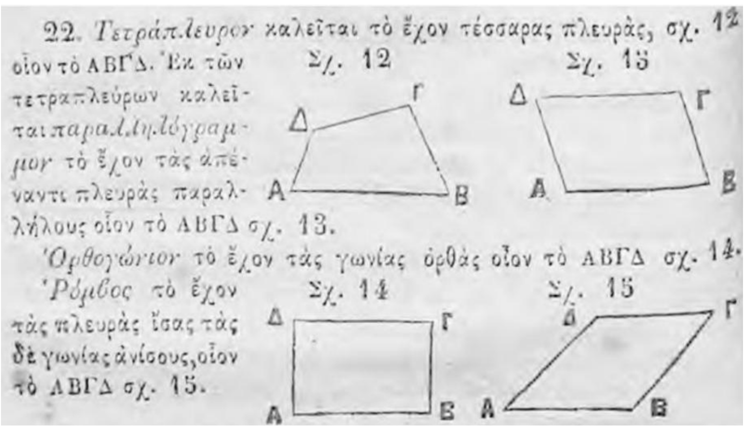
Ὁρισμοί.

1. *Κύκλος* καλεῖται τὸ σχῆμα τὸ παραγόμενον ἐκ τῆς περιστροφῆς εὐθείας (ΑΒ σχ. 44,) περὶ τὸ ἕτερον τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐπὶ ἐπιπέδου. Τὸ κινούμενον ἄκρον τῆς εὐθείας παράγει καμπύλην κα-



λουμένην *περιφέρειαν*. Τὸ ἀκίνητον σημεῖον Α καλεῖται *κέντρον*.

2. *Ἀκτὶς* καλεῖται ἡ εὐθεῖα ὁ ἐπιζευγνύουσα τὸ κέντρον μετά τινος σημείου τῆς περιφερείας οἷον ἡ ΑΒ· *διάμετρος* ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη εἰς τὴν περιφέρειαν. Αἱ ἀκτῖνες πᾶσαι εἰσὶν ἴσαι, καὶ αἱ διάμετροι ἴσαι καὶ διπλάσιαι τῆς ἀκτῖνος.



22. *Τετράπλευρον* καλεῖται τὸ ἔχον τέσσαρας πλευράς, σχ. 12 οἷον τὸ ΑΒΓΔ. Ἐκ τῶν τετραπλεύρων καλεῖται *παραλληλόγραμμον* τὸ ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους οἷον τὸ ΑΒΓΔ σχ. 13.

Ὀρθογώνιον τὸ ἔχον τὰς γωνίας ὀρθὰς οἷον τὸ ΑΒΓΔ σχ. 14.

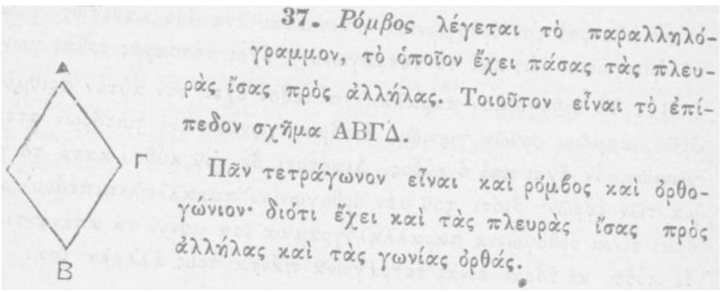
Ῥόμβος τὸ ἔχον τὰς πλευρὰς ἴσας τὰς δὲ γωνίας ἀνίσους, οἷον τὸ ΑΒΓΔ σχ. 15.

Το βιβλίο αυτό αρχίζει όπως το πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη, εισάγοντας πρώτα τους ορισμούς των βασικών εννοιών και αποδεικνύοντας έπειτα τις «προτάσεις» που ακολουθούν. Ο κύκλος ορίζεται ως: «*το σχήμα το παραγόμενον εκ της περιστροφής ευθείας, περί το έτερον των άκρων αυτής επί επιπέδου*». Ο ορισμός αυτός είναι γενετικός και παρουσιάζει, όπως ο Ήρων και ο Σπινόζα, τη «γέννηση» του κύκλου από την περιστροφή ενός ευθυγράμμου τμήματος, που παραμένει στο ίδιο επίπεδο, γύρω από το ένα του άκρο.

Ο ρόμβος ορίζεται ως το τετράπλευρο «*το έχον τας πλευράς ίσας τας δε γωνίας άνισας*». Ο ορισμός είναι διαχωριστικός[16] και δίνεται με κριτήριο την ισότητα των πλευρών και των γωνιών των τετραπλεύρων. Επίσης, οι ορισμοί όλων των γεωμετρικών εννοιών συνοδεύονται από παραδείγματα (σχήματα) στο βιβλίο.

♦ *Αθανάσιος Καραγιαννίδης (1906). Πρακτική γεωμετρία δια την Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ τάξιν*

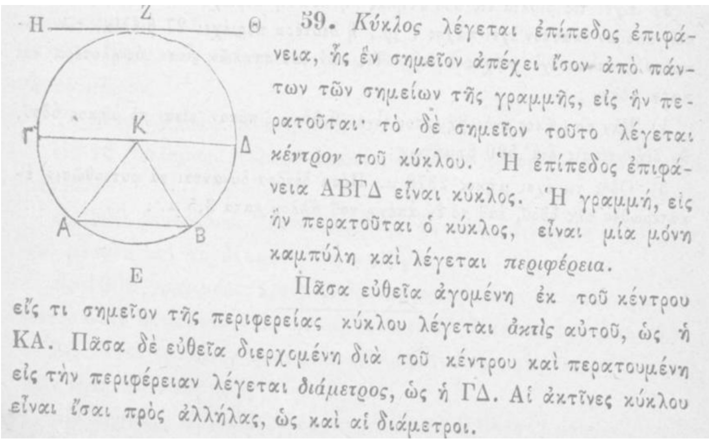
Στη Γεωμετρία του Καραγιαννίδη, τα επίπεδα σχήματα, οι ιδιότητές τους και τα χαρακτηριστικά τους προσεγγίζονται και μελετώνται μέσα από τα στερεά σώματα. Το βιβλίο χωρίζεται σε τρία μέρη (βιβλία Α, Β και Γ). Στο πρώτο μέρος ορίζεται ο ρόμβος ως *«το παραλληλόγραμμον, το οποίο έχει πάσας τα πλευράς ίσας προς αλλήλας»*. Ο ορισμός αυτός είναι ιεραρχικός, καθώς εντάσσει τον ρόμβο στην οικογένεια των παραλληλογράμμων.



37. *Ρόμβος* λέγεται τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει πάσας τὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας. Τοιοῦτον εἶναι τὸ ἐπίπεδον σχῆμα ΑΒΓΔ.

Πᾶν τετράγωνον εἶναι καὶ ρόμβος καὶ ὀρθογώνιον· διότι ἔχει καὶ τὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ τὰς γωνίας ὀρθάς.

Αναφέρεται επίσης ρητά ότι όλα τα τετράγωνα είναι και ρόμβοι και ορθογώνια διότι έχουν και τις πλευρές ίσες μεταξύ τους αλλά και τις γωνίες ορθές. Η ταξινόμηση αυτή είναι σύμφωνη με τη σύγχρονη ιεραρχική ταξινόμηση των τετραπλεύρων, όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 2.2.3.



59. *Κύκλος* λέγεται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, ἧς ἓν σημεῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς γραμμῆς, εἰς ἣν περατοῦται· τὸ δὲ σημεῖον τοῦτο λέγεται *κέντρον* τοῦ κύκλου. Ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ΑΒΓΔ εἶναι κύκλος. Ἡ γραμμή, εἰς ἣν περατοῦται ὁ κύκλος, εἶναι μία μόνη καμπύλη καὶ λέγεται *περιφέρεια*.

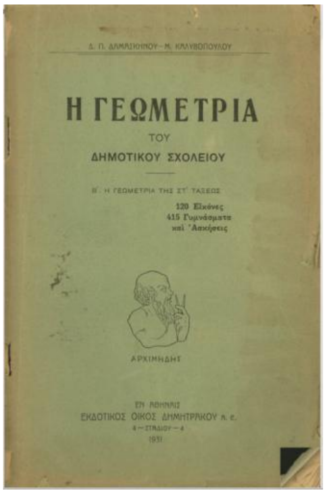
Πᾶσα εὐθεῖα ἀγομένη ἐκ τοῦ κέντρου εἴς τι σημεῖον τῆς περιφερείας κύκλου λέγεται *ἀκτὶς* αὐτοῦ, ὡς ἡ ΚΑ. Πᾶσα δὲ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη εἰς τὴν περιφέρειαν λέγεται *διάμετρος*, ὡς ἡ ΓΔ. Αἱ ἀκτῖνες κύκλου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ὡς καὶ αἱ διάμετροι.

Το δεύτερο μέρος ξεκινά με την ενότητα για τη μελέτη της σφαίρας, όπου υπάρχει ο ορισμός του κύκλου ως η «*επίπεδος επιφάνεια, ης εν σημείον απέχει ίσον από πάντων των σημείων της γραμμής, εις ην*

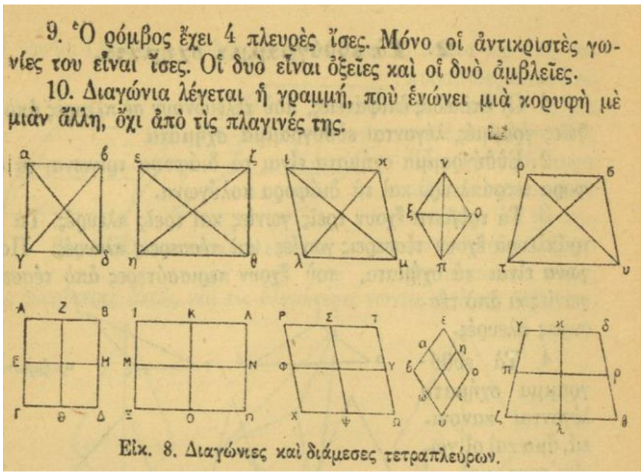
[16] Ο DeVilliers (1994), υποστηρίζει ότι η ταξινόμηση οποιουδήποτε συνόλου εννοιών εξαρτάται από τη διαδικασία δημιουργίας ορισμού των αντίστοιχων εννοιών. Για παράδειγμα, για να ταξινομηθεί ιεραρχικά ένα παραλληλόγραμμο ως τραπέζιο, απαιτείται να ορισθεί αρχικά ένα τραπεζοειδές ως «ένα τετράπλευρο με τουλάχιστον ένα ζεύγος απέναντι πλευρών παράλληλες» (ιεραρχικός ορισμός). Αντιθέτως, εάν θέλουμε να αποκλείσουμε τα παραλληλόγραμμα από τα τραπέζια πρέπει το τραπέζιο να οριστεί ως ένα «τετράπλευρο με μόνο ένα ζεύγος απέναντι πλευρών παράλληλες» (διαχωριστικός ορισμός).

περατούται. Το δε σημείον τούτο λέγεται κέντρον του κύκλου». Ο ορισμός αυτός είναι σύμφωνος με τον ορισμό του Ευκλείδη. Έτσι, με τον όρο «κύκλο» εννοείται ο κυκλικός δίσκος, ενώ η «*γραμμή εις ην περατούται ο κύκλος, είναι μια μόνη καμπύλη και λέγεται περιφέρεια*».

♦ *Δ. Π. Δαμασκηνός, Μ. Καλυβόπουλος (1931). Η γεωμετρία του Δημοτικού Σχολείου Β,΄ Η Γεωμετρία της ΣΤ΄ τάξεως*

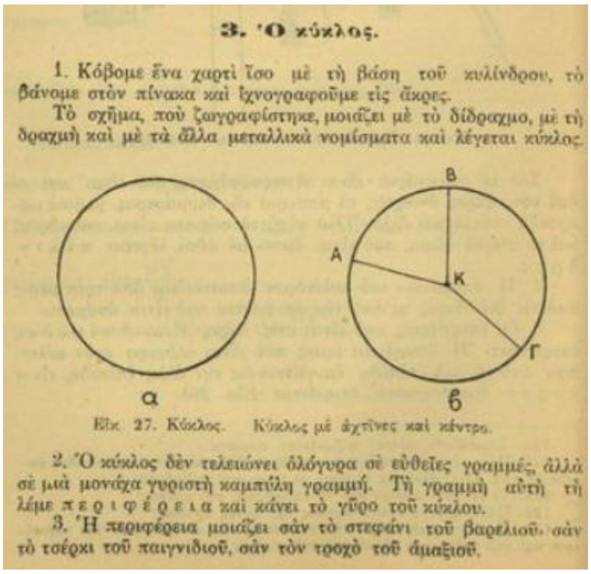


Και στο βιβλίο αυτό η μελέτη των επίπεδων σχημάτων γίνεται μέσω της στερεομετρίας. Στην εισαγωγή του γίνεται μια σύντομη επανάληψη στις γεωμετρικές έννοιες που διδασκόταν οι μαθητές στην Ε΄ τάξη. Στην ύλη της Ε΄ τάξης ανήκαν και τα τετράπλευρα τα οποία όπως αναφέρεται είναι το τετράγωνο, το ορθογώνιο, το παραλληλόγραμμο, το τραπέζιο, ο ρόμβος και το ακανόνιστο. Για τον ρόμβο πιο συγκεκριμένα, αναφέρει ότι έχει 4 πλευρές ίσες και ότι μόνο οι αντικριστές γωνίες του είναι ίσες. Οι δύο είναι οξείες και οι δύο αμβλείες. Ο κύκλος από την άλλη, μελετάται στην ενότητα για τον κύλινδρο. Δεν υπάρχει ξεκάθαρη διατύπωση ενός τυπικού ορισμού. Η προσέγγιση της έννοιας γίνεται διαισθητικά, καθώς ξεκινάει ζητώντας από τους μαθητές να κόψουν ένα χαρτί ίσο με τη βάση ενός κυλίνδρου και αφού το βάλουν στον πίνακα να ιχνογραφήσουν τις άκρες του. Το σχήμα που ζωγραφίζεται παρομοιάζεται έπειτα με το δίδραχμο, τη δραχμή και τα άλλα μεταλλικά νομίσματα και ονομάζεται κύκλος. Αναφέρεται επίσης ότι «*ο κύκλος δεν τελειώνει ολόγυρα σε ευθείες γραμμές, αλλά σε μία μονάχα γυριστή καμπύλη γραμμή. Τη γραμμή αυτή τη λέμε περιφέρεια και κάνει το γύρο του κύκλου. Ο κύκλος είναι μια επιφάνεια. Ο γύρος του είναι η περιφέρεια*», απ' όπου φαίνεται ότι και εδώ ως «κύκλος» εννοείται ο κυκλικός δίσκος. Στη συνέχεια, γίνεται αναφορά στο κέντρο του κύκλου, την αχτίνα και τη διάμετρο. Συγκεκριμένα:


9. Ὁ ρόμβος ἔχει 4 πλευρὲς ἴσες. Μόνο οἱ ἀντικριστὲς γωνίες του εἶναι ἴσες. Οἱ δυὸ εἶναι ὀξεῖες καὶ οἱ δυὸ ἀμβλεῖες.

10. Διαγώνια λέγεται ἡ γραμμή, ποὺ ἑνώνει μιὰ κορυφὴ μὲ μιὰν ἄλλη, ὄχι ἀπὸ τὶς πλαγινές της.

Εἰκ. 8. Διαγώνιες καὶ διάμεσες τετραπλεύρων.



3. Ὁ κύκλος.

1. Κόβομε ἕνα χαρτὶ ἴσο μὲ τὴ βάση τοῦ κυλίνδρου, τὸ βάνομε στὸν πίνακα καὶ ἰχνογραφοῦμε τὶς ἄκρες.

Τὸ σχῆμα, ποὺ ζωγραφίστηκε, μοιάζει μὲ τὸ δίδραχμο, μὲ τὴ δραχμὴ καὶ μὲ τὰ ἄλλα μεταλλικὰ νομίσματα καὶ λέγεται κύκλος.

Εἰκ. 27. Κύκλος. Κύκλος μὲ ἀκτῖνες καὶ κέντρο.

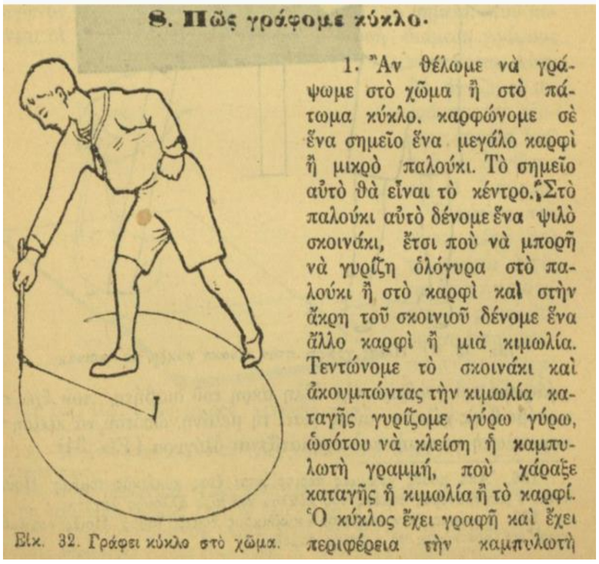
2. Ὁ κύκλος δὲν τελειώνει ὁλόγυρα σὲ εὐθεῖες γραμμές, ἀλλὰ σὲ μιὰ μονάχα γυριστὴ καμπύλη γραμμή. Τὴ γραμμὴ αὐτὴ τὴ λέμε περιφέρεια καὶ κάνει τὸ γῦρο τοῦ κύκλου.

3. Ἡ περιφέρεια μοιάζει σὰν τὸ στεφάνι τοῦ βαρελιοῦ, σὰν τὸ τσέρκι τοῦ παιγνιδιοῦ, σὰν τὸν τροχὸ τοῦ ἁμαξιοῦ.

Στη μέση του κύκλου υπάρχει ένα σημείο, που η απόσταση απ'όλα τα μέρη της περιφέρειας είναι η ίδια. Το σημείο αυτό λέγεται κέντρο. Η ευθεία που ενώνει το κέντρο με ένα σημείο της περιφέρειας λέγεται αχτίνα. Η απόσταση από το κέντρο σε όλα τα μέρη της περιφέρειας είναι η ίδια. Γι αυτό και όλες οι αχτίνες στον ίδιο κύκλο είναι ίσες.

Η ευθεία που ενώνει δύο σημεία της περιφέρειας και περνά από το κέντρο, λέγεται διάμετρος του κύκλου. Κάθε διάμετρος είναι ίση με δυο αχτίνες. Και επειδή όλες οι αχτίνες στον ίδιο κύκλο είναι ίσες, είναι και οι διάμετρες ίσες.

Έπειτα, δίνονται οδηγίες για το πώς σχεδιάζουμε έναν κύκλο στο χώμα, στον πίνακα και στο τετράδιο με τη βοήθεια του διαβήτη.



8. Πῶς γράφομε κύκλο.

1. Ἂν θέλωμε νὰ γράψωμε στὸ χῶμα ἢ στὸ πάτωμα κύκλο, καρφώνομε σὲ ἕνα σημεῖο ἕνα μεγάλο καρφὶ ἢ μικρὸ παλούκι. Τὸ σημεῖο αὐτὸ θὰ εἶναι τὸ κέντρο. Στὸ παλούκι αὐτὸ δένομε ἕνα ψιλὸ σκοινάκι, ἔτσι ποὺ νὰ μπορῆ νὰ γυρίζη ὁλόγυρα στὸ παλούκι ἢ στὸ καρφὶ καὶ στὴν ἄκρη τοῦ σκοινιοῦ δένομε ἕνα ἄλλο καρφὶ ἢ μιὰ κιμωλία. Τεντώνομε τὸ σκοινάκι καὶ ἀκουμπώντας τὴν κιμωλία καταγῆς γυρίζομε γύρω γύρω, ὡσότου νὰ κλείση ἡ καμπυλωτὴ γραμμή, ποὺ χάραξε καταγῆς ἡ κιμωλία ἢ τὸ καρφί. Ὁ κύκλος ἔχει γραφῆ καὶ ἔχει περιφέρεια τὴν καμπυλωτὴ

Εἰκ. 32. Γράφει κύκλο στὸ χῶμα.

- *Ε. Μιχαηλίδης (1946, 6η έκδοση). Ο Μικρός Γεωμέτρης Πρακτική Γεωμετρία. Δια Μαθητάς Δημοτικών Σχολείων και Κατωτέρων Επαγγελματικών Σχολών κατά τας αρχάς του Σχολείου Εργασίας*

Ε. ΜΙΧΑΗΛΙΔΟΥ

Ο

ΜΙΚΡΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΗΣ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΜΑΘΗΤΑΣ ΔΗΜΟΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ ΚΑΙ ΚΑΤΩΤΕΡΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ ΚΑΤΑ ΤΑΣ ΑΡΧΑΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

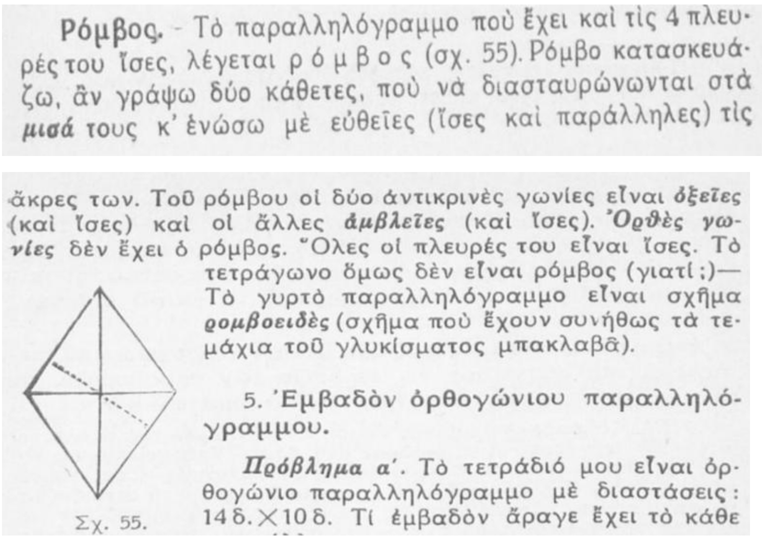
ΕΚΔΟΣΙΣ 6η

ΣΥΝΙΣΤΑΤΑΙ ΠΑΡΑ ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΙΔΚ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ ΚΑΙ Σιας Α.Ε.
1946

Το βιβλίο αυτό αποτελεί μαθητικό βοήθημα για το μάθημα της Γεωμετρίας στο Δημοτικό και περιλαμβάνει θεωρία και ασκήσεις, για την πρακτική εφαρμογή της Γεωμετρίας στην καθημερινή ζωή. Είναι το μοναδικό βοήθημα με ξεχωριστά κεφάλαια για τα κορίτσια, με εφαρμογές στη γυναικεία χειροτεχνία, που πρώτη φορά εμφανίζονται σε ελληνική Γεωμετρία.


Ρόμβος. - Τὸ παραλληλόγραμμο ποὺ ἔχει καὶ τὶς 4 πλευρές του ἴσες, λέγεται ρ ό μ β ο ς (σχ. 55). Ρόμβο κατασκευάζω, ἂν γράψω δύο κάθετες, ποὺ νὰ διασταυρώνωνται στὰ ***μισά*** τους κ' ἑνώσω μὲ εὐθεῖες (ἴσες καὶ παράλληλες) τὶς ἄκρες των. Τοῦ ρόμβου οἱ δύο ἀντικρινὲς γωνίες εἶναι ***ὀξεῖες*** (καὶ ἴσες) καὶ οἱ ἄλλες ***ἀμβλεῖες*** (καὶ ἴσες). ***Ὀρθὲς γωνίες*** δὲν ἔχει ὁ ρόμβος. Ὅλες οἱ πλευρές του εἶναι ἴσες. Τὸ τετράγωνο ὅμως δὲν εἶναι ρόμβος (γιατί;)— Τὸ γυρτὸ παραλληλόγραμμο εἶναι σχῆμα ***ρομβοειδὲς*** (σχῆμα ποὺ ἔχουν συνήθως τὰ τεμάχια τοῦ γλυκίσματος μπακλαβᾶ).

Σχ. 55.

5. Ἐμβαδὸν ὀρθογώνιου παραλληλόγραμμου.

Πρόβλημα α'. Τὸ τετράδιό μου εἶναι ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο μὲ διαστάσεις: 14δ.×10δ. Τί ἐμβαδὸν ἄραγε ἔχει τὸ κάθε

Η μελέτη των επίπεδων σχημάτων γίνεται και στο βιβλίο αυτό μέσω της στερεομετρίας. Ο ορισμός του ρόμβου δίνεται στην ενότητα του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, όπου αφού αναφέρει αρχικά ποια σχήματα ονομάζονται παραλληλόγραμμα (δεν υπάρχει τυπικός ορισμός παραλληλογράμμου), ορίζει τον ρόμβο ως *«το παραλληλόγραμμο που έχει και τις 4 πλευρές του ίσες»*. Ακολουθούν έπειτα, οδηγίες κατασκευής ενός ρόμβου και δηλώνεται ξεκάθαρα ότι το τετράγωνο δεν είναι ρόμβος. Ο ανωτέρω ορισμός είναι ιεραρχικός αλλά όχι ελάχιστος και δεν εμφανίζει ομοιότητες με τον ορισμό του Ευκλείδη. Αξίζει να αναφερθεί ότι, από όλα τα βιβλία Γεωμετρίας που μελετήθηκαν για την παρούσα εργασία, μόνο στο βιβλίο αυτό εμπεριέχεται η έννοια «ρομβοειδές». Συγκεκριμένα, αναφέρεται ότι *«το γυρτό παραλληλόγραμμο είναι σχήμα ρομβοειδές (σχήμα που έχουν συνήθως τα τεμάχια του γλυκίσματος μπακλαβά)»*.


2. Κύκλος.—Ἀντιγράφω τὴ βάση τοῦ κώνου καὶ παίρνω τὸ Σχ. 101. Τὸ ***ἐπίπεδο*** αὐτὸ σχῆμα λέγεται ***κύκλος***. Ἡ βάση τοῦ κώνου εἶναι ***κυκλική***. Ὁ κύκλος περιορίζεται ἀπὸ μιὰ κλειστὴ καὶ κανονικὴ καμπύλη γραμμή. Ἡ κλειστὴ καὶ κανονικὴ αὐτὴ γραμμὴ λέγεται ***περιφέρεια***.

Γιὰ νὰ γράψω περιφέρεια: (σχ. 102α), παίρνω κλωστὴ μὲ ὡρισμένο μῆκος καὶ στερεώνω τὴ μιά της ἄκρια σ' ἕνα σημεῖο δένω γραφίδα (μολύβι, κιμωλία...) στὴν ἄλλη της ἄκρια, καὶ ***περιφέρω*** (περιστρέφω) τὴ γραφίδα μὲ τεντωμένη τὴν κλωστή, γύρω στὸ ἀκίνητο σημεῖο (Κ). Ἡ γραφίδα τότε χαράζει μιὰ κλειστὴ καμπύλη γραμμή: τὴν ***περιφέρεια***.

Σχ. 100. Σχ. 101. Σχ. 102α.

Τὸ ἀκίνητο σημεῖο (Κ) λέγεται ***κέντρο*** καὶ ἡ εὐθεῖα (τὸ μῆκος τῆς κλωστῆς), ποὺ ἑνώνει τὸ κέντρο μὲ τὴν περιφέρεια, λέγεται ***ἀκτίνα***.

Οἱ ἀκτῖνες τοῦ κύκλου εἶναι ἄπειρες.

Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφέρειας βρίσκονται σὲ ἴση ἀπόσταση ἀπὸ τὸ κέντρο.

Ὅλες οἱ ἀκτῖνες τοῦ (ἴδιου) ***κύκλου εἶναι ἴσες***· (γιατί;)

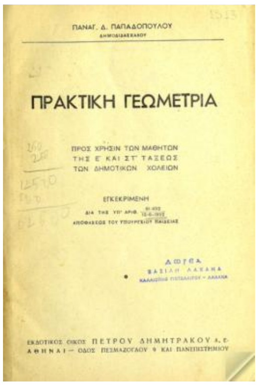
Δύο (ἢ περισσότεροι) ***κύκλοι εἶναι ἴσοι, ἂν εἶναι ἴσες οἱ ἀκτῖνες των.*** Ἂν συμπέσουν τὰ κέντρα τους, θὰ συμπέσουν καὶ οἱ περιφέρειές των. (Καὶ τὸ ἀντίστροφο...)

Σχ. 102β.

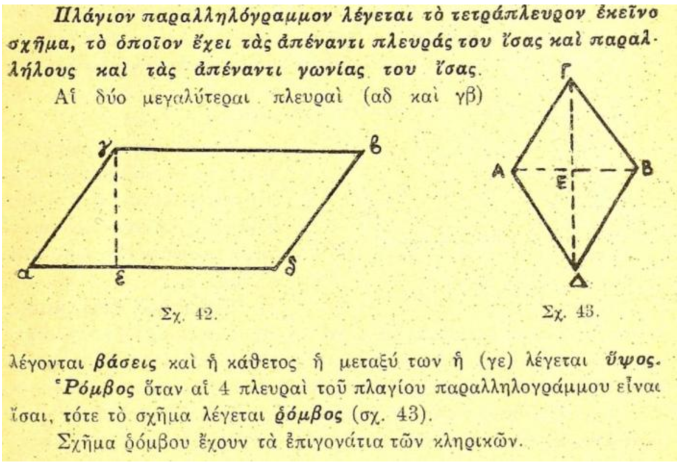
Με τον όρο λοιπόν, ρομβοειδές εννοείται το πλάγιο παραλληλόγραμμο, όπως και στα Στοιχεία του Ευκλείδη.

Ο κύκλος μελετάται στην ενότητα για τον κώνο. Η προσέγγιση της έννοιας γίνεται και εδώ διαισθητικά, καθώς οι μαθητές καλούνται να αντιγράψουν τη βάση ενός κώνου και το σχήμα που θα προκύψει θα ονομαστεί κύκλος. «*Ο κύκλος περιορίζεται από μια κλειστή και κανονική καμπύλη γραμμή. Η κλειστή και κανονική αυτή γραμμή* *λέγεται περιφέρεια. Το ακίνητο σημείο Κ λέγεται κέντρο και η ευθεία που ενώνει το κέντρο με την περιφέρεια, λέγεται αχτίνα. Οι αχτίνες του κύκλου είναι άπειρες. Όλα τα σημεία της περιφέρειας βρίσκονται σε ίση απόσταση από το κέντρο».*

- *Παναγιώτης Δ. Παπαδόπουλος (1952). Πρακτική γεωμετρία προς χρήσιν των μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξεως των Δημοτικών Σχολείων*



Το εγχειρίδιο αυτό αποτελεί μαθητικό βοήθημα Γεωμετρίας Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού που περιλαμβάνει θεωρία, παραδείγματα, ασκήσεις και προβλήματα και εστιάζει στα γεωμετρικά σχήματα και σώματα και στην μέτρησή τους. Όπως και στα προηγούμενα σχολικά εγχειρίδια, έτσι και στη Γεωμετρία του Παπαδόπουλου, μελετώνται αρχικά τα στερεά σώματα και έπειτα τα σχήματα των πλευρών τους. Έτσι, παρατηρούμε ότι ο ρόμβος μελετάται στην ενότητα του πλάγιου παραλληλόγραμμου και ορίζεται ως το πλάγιο παραλληλόγραμμο που έχει τις τέσσερις πλευρές ίσες. Ειδικότερα: *«όταν αι 4 πλευραί του πλαγίου παραλληλογράμμου είναι ίσαι, τότε το σχήμα λέγεται ρόμβος».*


Πλάγιον παραλληλόγραμμον λέγεται τὸ τετράπλευρον ἐκεῖνο σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ τὰς ἀπέναντι γωνίας του ἴσας.

Αἱ δύο μεγαλύτεραι πλευραὶ (αδ καὶ γβ)

Σχ. 42.

Σχ. 43.

λέγονται **βάσεις** καὶ ἡ κάθετος ἡ μεταξύ των ἡ (γε) λέγεται **ὕψος.**

Ῥόμβος ὅταν αἱ 4 πλευραὶ τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι, τότε τὸ σχῆμα λέγεται **ῥόμβος** (σχ. 43).

Σχῆμα ῥόμβου ἔχουν τὰ ἐπιγονάτια τῶν κληρικῶν.

Μετέπειτα, και αφού προηγηθεί η μελέτη του κυλίνδρου, εισάγονται οι μαθητές στην ενότητα του κύκλου όπου αρχικά ονομάζεται κύκλος το σχήμα που δημιουργείται από την τοποθέτηση ενός κυλίνδρου στον πίνακα με μια από τις βάσεις του και αφού σύρουμε την κιμωλία γύρω από αυτήν. Ακολουθεί ο τυπικός ορισμός του κύκλου «*Κύκλος λοιπόν λέγεται η επίπεδος επιφάνεια, η οποία περικλείεται υπό μιας καμπύλης γραμμής της οποίας όλα τα σημεία απέχουν εξίσου εξ ενός σημείου της επιφάνειας ταύτης, που ευρίσκεται εις το μέσον και λέγεται κέντρον του κύκλου».* Ο ορισμός αυτός είναι παρόμοιος με τον ορισμό που δίνει ο Ευκλείδης και φαίνεται πως με την έννοια «κύκλος» εννοείται και εδώ ο κυκλικός δίσκος.

'Εὰν στηρίξωμεν τὸν κύλινδρον ἐπὶ τοῦ πίνακος μὲ μίαν ἀπὸ τὰς βάσεις αὐτοῦ καὶ σύρωμεν τὴν κιμωλίαν πέριξ αὐτῆς θὰ γραφῇ τὸ ἀνωτέρω σχῆμα (σχ. 68).

Τὸ σχῆμα τοῦτο, τὸ ὁποῖον, ὅπως βλέπομεν, περικλείεται ὑπὸ καμπύλης γραμμῆς, λέγεται ***κύκλος***.

Ἡ γραμμὴ ἡ ὁποία τὸ περικλείει, λέγεται ***περιφέρεια*** τοῦ κύκλου.

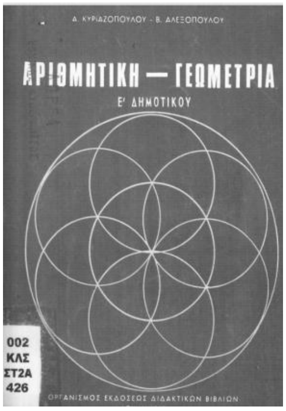
Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ κύκλου καὶ λέγεται ***κέντρον*** αὐτοῦ.

Κύκλος λοιπὸν λέγεται ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία περικλείεται ὑπὸ μιᾶς καμπύλης γραμμῆς τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἐξ ἑνὸς σημείου τῆς ἐπιφανείας ταύτης, ποὺ εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον καὶ λέγεται κέντρον τοῦ κύκλου.

Ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν φέρομεν ἀπὸ τοῦ κέντρου εἰς τὴν περιφέρειαν, λέγεται ***ἀκτίς***. Εἰς τὸ παρακείμενον σχῆμα ἡ εὐθεῖα ΚΑ εἶναι ἀκτὶς (σχ. 69).

Ἡ εὐθεῖα ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ καταλήγει καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη εἰς τὴν περιφέρειαν, λέγεται ***διάμετρος***. Εἰς τὸ

♦ *Α. Κυριαζόπουλος, Β. Αλεξόπουλος (1969, 1η έκδοση). Αριθμητική - Γεωμετρία Ε΄ τάξεως Δημοτικού Σχολείου*



Το συγκεκριμένο σχολικό εγχειρίδιο χωρίζεται σε δύο μέρη, την Αριθμητική και την Γεωμετρία. Στη Γεωμετρία μελετώνται πρώτα όλα τα στερεά σώματα κι έπειτα όλα τα επίπεδα σχήματα.

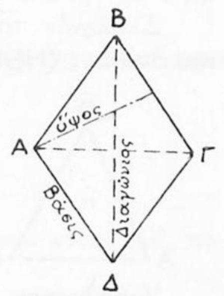
Ο ρόμβος εξετάζεται στην ενότητα των παραλληλογράμμων όπου αναφέρεται ότι εκτός από το τετράγωνο και το ορθογώνιο (τα οποία μελετήθηκαν σε προηγούμενες ενότητες) στα παραλληλόγραμμα ανήκουν και το πλάγιο παραλληλόγραμμό και ο ρόμβος. Ο ιεραρχικός ορισμός που δίνεται είναι ο εξής: *«Ρόμβος είναι πλάγιον παραλληλόγραμμον, το οποίον έχει όλας τας πλευράς του ίσας».*

Τὸ παραλληλόγραμμον αὐτὸ λέγεται **ρόμβος**. Μὲ τὸν διαβήτην ἐσχηματίσαμεν τὰς 4 πλευράς του ἴσας. Αἱ γωνίαι $\widehat{Α}$ καὶ $\widehat{Γ}$ εἶναι ἀμβλεῖαι, αἱ δὲ γωνίαι $\widehat{Β}$ καὶ $\widehat{Δ}$ εἶναι ὀξεῖαι.

Ρόμβος εἶναι πλάγιον παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας.

Σχῆμα ρόμβου εὑρίσκομεν συνήθως εἰς μερικὰ κάγκελα.

Σημείωσις : 'Εφ' ὅσον εἶναι πλάγιον παραλληλόγραμμον, ἔχει τὰς δύο γωνίας ὀξείας καὶ τὰς δύο ἀμβλείας.



Στην ενότητα για τον κύκλο παρατηρείται πως και εδώ η έννοια προσεγγίζεται αρχικά διαισθητικά κι έπειτα δίνεται ο ορισμός της. Έτσι *«Κύκλος λέγεται το επίπεδον τμήμα, το οποίον περικλείεται από μιαν κλειστήν καμπύλην γραμμήν, της οποίας όλα τα σημεία απέχουν εξ ίσου από εν σημείον, το οποίον λέγεται κέντρον».*

1. Ἔννοια καὶ στοιχεῖα.

α) Τὸ ἐπίπεδον μέρος τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου ἢ ἑνὸς κώνου, δηλαδὴ ἡ βάσις των, περικλείεται ἀπὸ μίαν κλειστὴν καμπύλην γραμμήν. Τὸ ἐπίπεδον σχῆμα, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ αὐτὴν τὴν γραμμήν, λέγεται κύκλος καὶ ἡ κλειστὴ καμπύλη γραμμή, περιφέρεια τοῦ κύκλου.

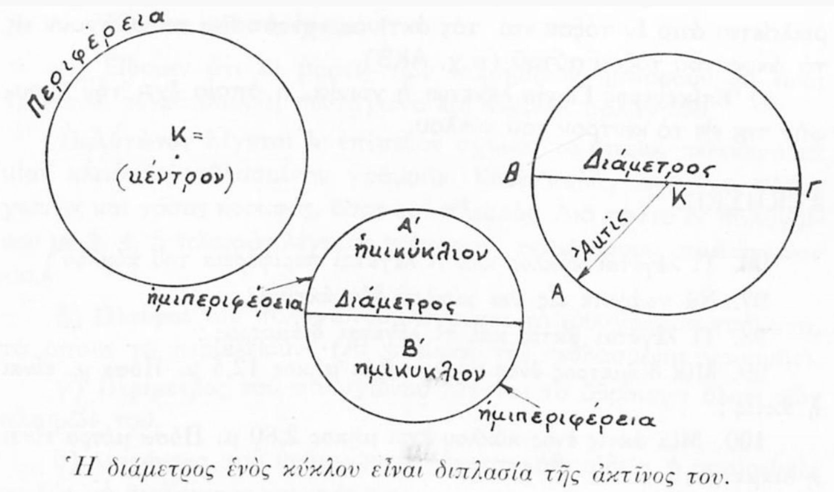
Σχῆμα κύκλου ἔχουν αἱ βάσεις τῶν κυτίων τοῦ γάλακτος, τὰ μεταλλικὰ νομίσματα, οἱ δίσκοι τῶν ὡρολογίων, ἡ τομὴ ἑνὸς λεμονιοῦ, πορτοκαλιοῦ κ.λ.π., δηλαδὴ *ἡ τομὴ μιᾶς σφαίρας*.

β) Γράφομεν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου μὲ τὸν διαβήτην. Τὸ σημεῖον, ὅπου ἀκουμβᾶ τὸ μυτερὸ σκέλος τοῦ διαβήτου, λέγεται κέντρον τοῦ κύκλου καὶ τὸ σημειώνομεν μὲ τὸ γράμμα Κ. Τὸ ἄλλο σκέλος τοῦ διαβήτου γράφει τὴν γραμμήν, τὴν ὁποίαν ὠνομάσαμεν περιφέρειαν. Ἑπομένως ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρον.

Κύκλος λέγεται τὸ ἐπίπεδον σχῆμα, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ μίαν κλειστὴν καμπύλην γραμμήν, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται *κέντρον*.

γ) **Ἀκτὶς κύκλου** λέγεται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἑνώνει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου (Κ) μὲ οἱονδήποτε σημεῖον τῆς περιφερείας του (π.χ. ΚΑ). Εἰς κάθε κύκλον δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὅσας ἀκτῖνας θέλομεν. *Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι.*

δ) **Διάμετρος τοῦ κύκλου** λέγεται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ τελειώνει εἰς δύο σημεῖα τῆς περιφερείας (π.χ. ΒΚΓ). Εἰς κάθε κύκλον δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὅσας διαμέτρους θέλομεν.



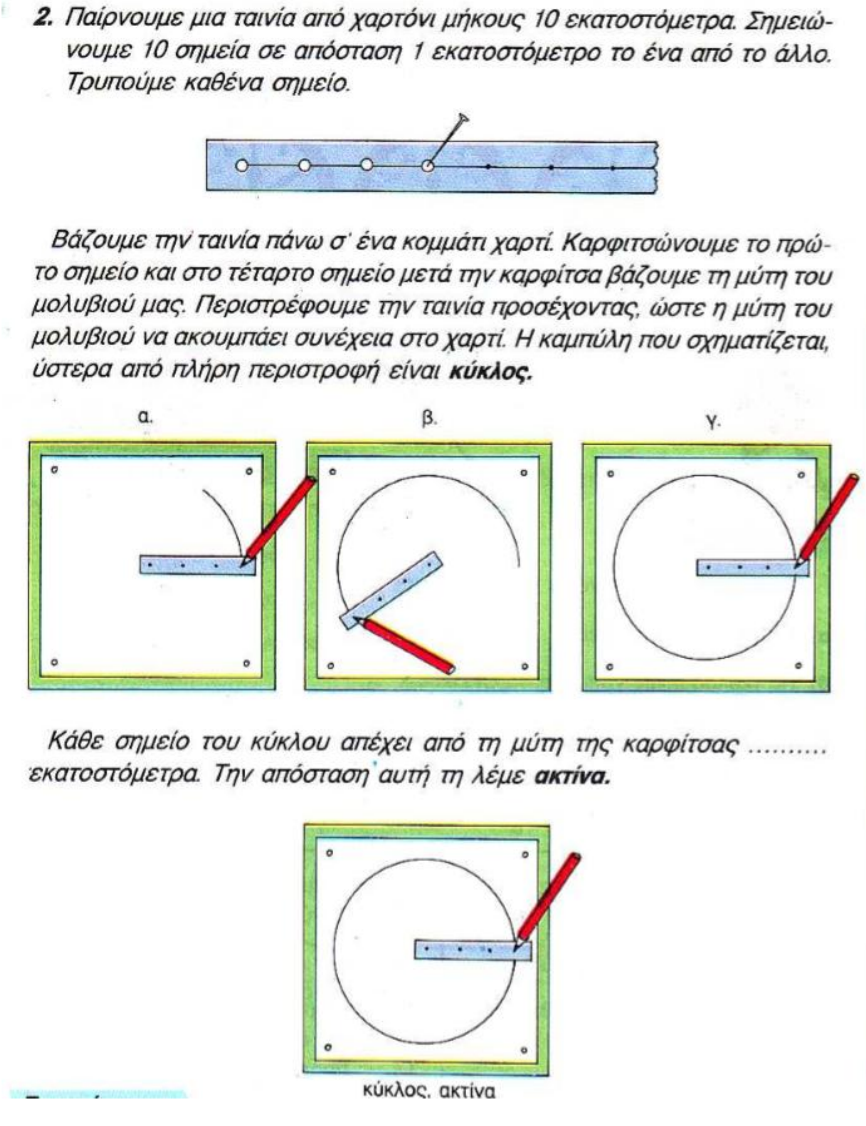
Ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος του.

ε) Ἡ διάμετρος χωρίζει τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα ἐπίπεδα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ἡμικύκλια. Κάθε διάμετρος χωρίζει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα καμπύλα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ἡμιπεριφέρειαι.

♦ *Σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών που χρησιμοποιήθηκαν κατά την περίοδο 1982-2005*

Τα μαθηματικά μου – Δ΄ τάξη δημοτικού, πρώτο μέρος

Η έννοια του κύκλου προσεγγίζεται διαισθητικά, μέσω της κατασκευής του, ώστε να οδηγηθούν οι μαθητές στο συμπέρασμα ότι κύκλος είναι η καμπύλη που σχηματίζεται ύστερα από μια πλήρη περιστροφή του άκρου της ταινίας γύρω από ένα σταθερό σημείο.


2. Παίρνουμε μια ταινία από χαρτόνι μήκους 10 εκατοστόμετρα. Σημειώνουμε 10 σημεία σε απόσταση 1 εκατοστόμετρο το ένα από το άλλο. Τρυπούμε καθένα σημείο.

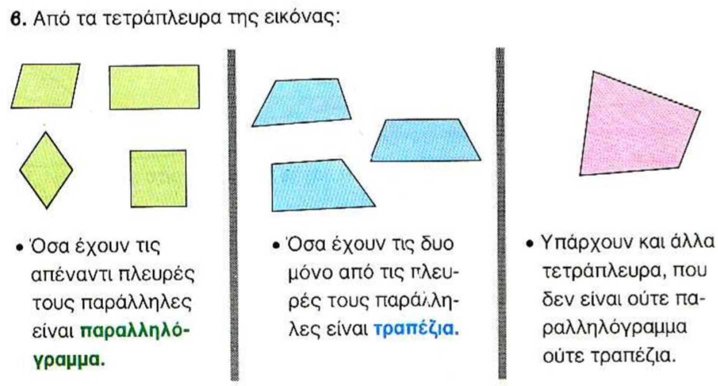
Βάζουμε την ταινία πάνω σ' ένα κομμάτι χαρτί. Καρφιτσώνουμε το πρώτο σημείο και στο τέταρτο σημείο μετά την καρφίτσα βάζουμε τη μύτη του μολυβιού μας. Περιστρέφουμε την ταινία προσέχοντας, ώστε η μύτη του μολυβιού να ακουμπάει συνέχεια στο χαρτί. Η καμπύλη που σχηματίζεται, ύστερα από πλήρη περιστροφή είναι **κύκλος**.

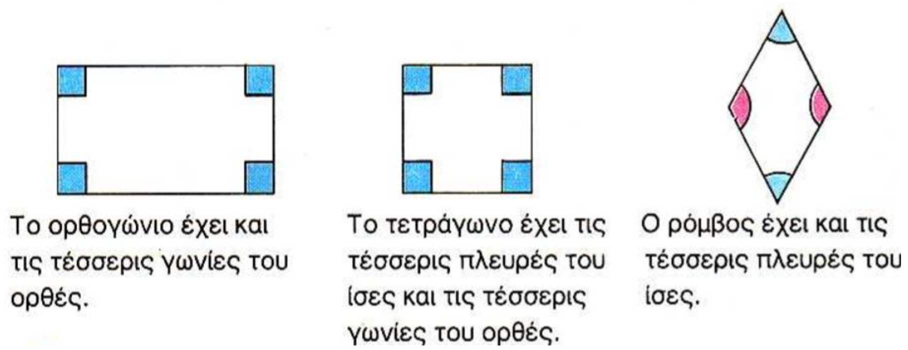
Κάθε σημείο του κύκλου απέχει από τη μύτη της καρφίτσας .... εκατοστόμετρα. Την απόσταση αυτή τη λέμε **ακτίνα**.

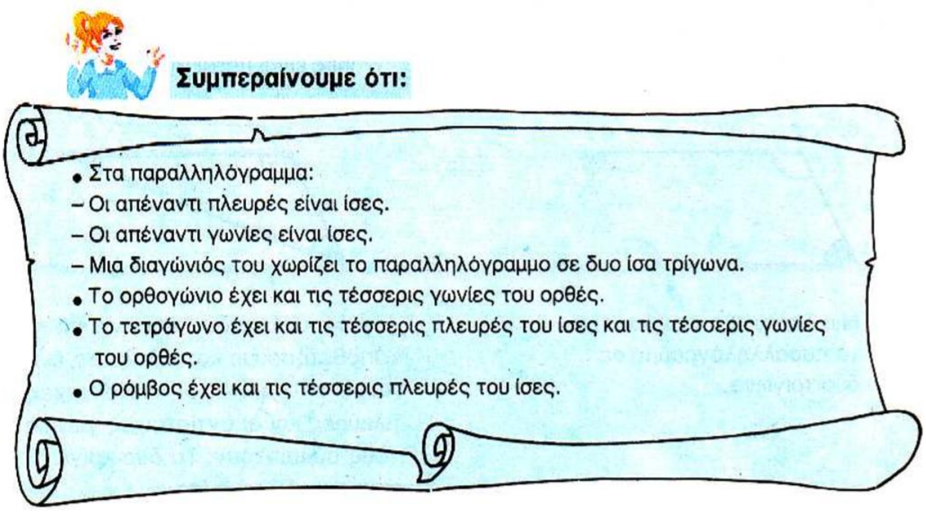
κύκλος, ακτίνα

Τα μαθηματικά μου – Ε΄ τάξη δημοτικού: Β μέρος

Στην Ε΄ τάξη μελετώνται αρχικά τα γεωμετρικά στερεά (στο α΄ μέρος) και λίγο αργότερα τα επίπεδα σχήματα (στο β΄ μέρος). Αρχικά, γίνεται μια εισαγωγή των μαθητών στα τετράπλευρα, τα οποία χωρίζονται στα παραλληλόγραμμα, στα τραπέζια και τα υπόλοιπα τετράπλευρα τα οποία δεν είναι ούτε παραλληλόγραμμα, ούτε τραπέζια. Όπως φαίνεται από την παρακάτω εικόνα, ο ρόμβος εντάσσεται στην οικογένεια των παραλληλογράμμων. Έπειτα, οι μαθητές με τη βοήθεια γεωμετρικών οργάνων συγκρίνουν μεταξύ τους τις πλευρές και τις γωνίες των παραλληλογράμμων και προβαίνουν σε διάφορα συμπεράσματα για τις ιδιότητές τους. Για τον ρόμβο αναφέρεται ότι έχει και τις τέσσερις πλευρές του ίσες, χωρίς αυτό να αποτελεί ωστόσο έναν τυπικό ορισμό της έννοιας. Παρατηρώντας την παρακάτω εικόνα, ο μαθητής μπορεί να οδηγηθεί και στο συμπέρασμα ότι στον ρόμβο οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.







Στο επόμενο κεφάλαιο ακολουθεί η διδασκαλία της εννοιας του κύκλου και του κυκλικού δίσκου.

Πρόβλημα:

Η κ. Φανή έδεσε το γαϊδουράκι της στο λιβάδι να βοσκήσει. Το ζώο βόσκησε σε όση επιφάνεια του επέτρεπε το σκοινί, με το οποίο ήταν δεμένο.

***α.** Ποια είναι η επιφάνεια αυτή.*
***β.** Ποια στοιχεία της μπορούμε να διακρίνουμε.*
***γ.** Πώς μπορούμε να τη σχεδιάσουμε.*

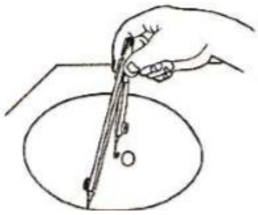
Σκεφτόμαστε:

α. Η επιφάνεια, που βόσκησε το γαϊδουράκι, περιορίζεται από μια γραμμή, που είναι ένας **κύκλος.** Ο κύκλος, μαζί με την επιφάνεια που περικλείει, είναι ένας **κυκλικός δίσκος.**

β. Το σημείο Ο είναι το **κέντρο** του κύκλου. Όλα τα σημεία του κύκλου απέχουν εξίσου από το κέντρο του.

- Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΓ, που ενώνει το κέντρο με ένα σημείο του κύκλου, είναι μια **ακτίνα** του κύκλου.
- Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, που ενώνει δυο σημεία του κύκλου και περνά από το κέντρο, είναι μια **διάμετρος.**
- Το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ, που ενώνει δυο σημεία του κύκλου χωρίς να περνά από το κέντρο, είναι μια **χορδή.**
- Τα μέρη του κύκλου, που έχουν ως άκρα τα άκρα της χορδής ΔΕ, είναι **τόξα** του κύκλου.

γ. Γράφουμε κύκλους με τη βοήθεια του διαβήτη.

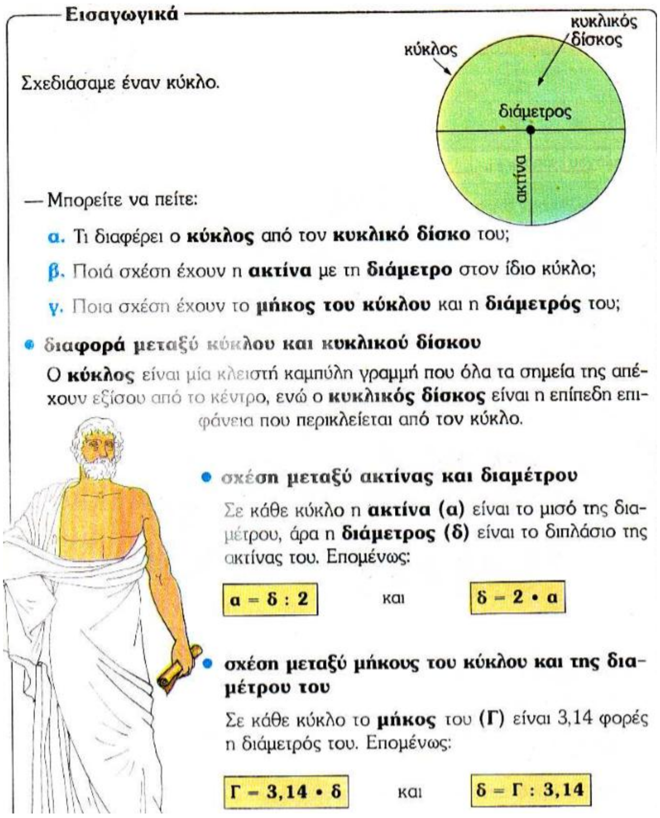


Συμπεραίνουμε ότι:

- Ο κύκλος, μαζί με την επιφάνεια που περικλείει, είναι ένας κυκλικός δίσκος.
- Όλα τα σημεία του κύκλου απέχουν εξίσου από το κέντρο του.
- Στον ίδιο κύκλο οι διάμετροι είναι μεταξύ τους ίσες· το ίδιο και οι ακτίνες.

Με την εισαγωγική δραστηριότητα διευκολύνονται οι μαθητές στο να διαχωρίζουν την έννοια του κύκλου από αυτή του κυκλικού δίσκου και διαπραγματεύονται τις παραπάνω έννοιες, όπως αυτές προσδιορίζονται από την ελεύθερη κίνηση που κάνει το γαϊδουράκι στο λιβάδι (με μοναδικό περιορισμό το μήκος του σχοινιού). Έπειτα, ονομάζεται κύκλος η γραμμή που περιορίζει την επιφάνεια που βόσκησε το γαϊδουράκι, ενώ ως κυκλικός δίσκος ορίζεται ο κύκλος μαζί με την επιφάνεια που περικλείει.

Τα μαθηματικά μου – ΣΤ΄ τάξη δημοτικού: Α μέρος



Εισαγωγικά

Σχεδιάσαμε έναν κύκλο.

— Μπορείτε να πείτε:

α. Τι διαφέρει ο **κύκλος** από τον **κυκλικό δίσκο** του;

β. Ποιά σχέση έχουν η **ακτίνα** με τη **διάμετρο** στον ίδιο κύκλο;

γ. Ποια σχέση έχουν το **μήκος του κύκλου** και η **διάμετρός** του;

- **διαφορά μεταξύ κύκλου και κυκλικού δίσκου**

Ο **κύκλος** είναι μία κλειστή καμπύλη γραμμή που όλα τα σημεία της απέχουν εξίσου από το κέντρο, ενώ ο **κυκλικός δίσκος** είναι η επίπεδη επιφάνεια που περικλείεται από τον κύκλο.

- **σχέση μεταξύ ακτίνας και διαμέτρου**

Σε κάθε κύκλο η **ακτίνα (α)** είναι το μισό της διαμέτρου, άρα η **διάμετρος (δ)** είναι το διπλάσιο της ακτίνας του. Επομένως:

$\boxed{\alpha = \delta : 2}$ και $\boxed{\delta = 2 \cdot \alpha}$

- **σχέση μεταξύ μήκους του κύκλου και της διαμέτρου του**

Σε κάθε κύκλο το **μήκος** του **(Γ)** είναι 3,14 φορές η διάμετρός του. Επομένως:

$\boxed{\Gamma = 3{,}14 \cdot \delta}$ και $\boxed{\delta = \Gamma : 3{,}14}$

Στην ΣΤ΄ τάξη θεωρείται πως οι μαθητές ήδη γνωρίζουν την έννοια του κύκλου και του κυκλικού δίσκου, καθώς την έχουν ήδη διδαχτεί από την προηγούμενη τάξη. Επομένως, το μάθημα για τη διδασκαλία του κύκλου ξεκινάει με κάποιες εισαγωγικές, επαναληπτικές ερωτήσεις κι έπειτα παρατίθεται ο ορισμός τους: *«Ο κύκλος είναι μια κλειστή καμπύλη γραμμή που όλα τα σημεία της απέχουν εξίσου από το κέντρο, ενώ ο κυκλικός δίσκος είναι η επίπεδη επιφάνεια που περικλείεται από τον κύκλο».*

♦ *Σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών που χρησιμοποιούνται από το 2006 έως σήμερα*

Στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών που χρησιμοποιούνται σήμερα, τα οποία είναι γραμμένα σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) και το ισχύον Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) του 2003 για τα μαθηματικά, η διδασκαλία της Γεωμετρίας γίνεται διαισθητικά χωρίς καμία αναφορά σε τυπικούς ορισμούς για την έννοια του κύκλου και του ρόμβου. Στο Κεφάλαιο 4 της παρούσας εργασίας γίνεται αναλυτική αναφορά για τον τρόπο διδασκαλίας των ανωτέρω εννοιών στο Δημοτικό σχολείο, καθώς και τις σχετικές δραστηριότητες που εμπεριέχουν τα σημερινά σχολικά εγχειρίδια.

3.2.1 Συμπεράσματα

Από τη μελέτη των σχολικών εγχειριδίων που χρησιμοποιήθηκαν για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση από το 1870 έως σήμερα έγινε φανερό ότι κατά το παρελθόν αποτελούσε παράδοση η προσέγγιση των γεωμετρικών εννοιών, που συνδέονται με τη μία ή τις δύο διαστάσεις, να γίνεται μέσα από τη διδασκαλία της στερεομετρίας. Έτσι, για παράδειγμα ο κύκλος περιλαμβανόταν στη μελέτη του κυλίνδρου ή το τετράγωνο στη μελέτη του κύβου.

Για τη διδασκαλία των ορισμών των γεωμετρικών εννοιών στο δημοτικό σχολείο, παρατηρήθηκε πως τα παλαιότερα σχολικά εγχειρίδια συμπεριλάμβαναν και τους τυπικούς ορισμούς των εννοιών, ενώ στα σημερινά σχολικά εγχειρίδια επικρατεί η διαισθητική προσέγγιση των γεωμετρικών εννοιών με ελάχιστες αναφορές στους ορισμούς τους.

Σχετικά με τους ορισμούς της έννοιας του κύκλου, φαίνεται πως στην Επιτομή της Γεωμετρίας του Λεγένδρου του Φατσέα (1870) δίνεται γενετικός ορισμός για τον κύκλο, ο οποίος περιγράφει τον τρόπο κατασκευής του (όπως ο ορισμός του Ήρωνα και του Σπινόζα) ενώ στα υπόλοιπα σχολικά εγχειρίδια οι ορισμοί έχουν περισσότερα κοινά στοιχεία με τον ορισμό του Ευκλείδη. Παρατηρείται επίσης, ότι κατά το πέρασμα των χρόνων μεταβάλλεται το νόημα που αποδίδεται στον όρο «κύκλος». Ο Ευκλείδης με τον ορισμό του κύκλου θεσμοθετεί την επιφάνεια που οριοθετείται από την περιφέρειά του, όπως ομοίως παρατηρείται στα σχολικά εγχειρίδια της σχολικής Γεωμετρίας μέχρι το 1982, όπου με τον όρο «κύκλο» εννοείται ο κυκλικός δίσκος και διαχωρίζεται από την «περιφέρεια». Σήμερα, ο όρος «κύκλος» αντιστοιχεί στην περιφέρεια του κύκλου, όπως φαίνεται στα σχολικά εγχειρίδια που χρησιμοποιήθηκαν κατά την περίοδο 1982 – 2006, όπου παρουσιάζεται για πρώτη φορά ο όρος «κυκλικός δίσκος» και διαχωρίζεται ξεκάθαρα από τον όρο «κύκλο» ως *«η επίπεδη επιφάνεια που περικλείεται από τον κύκλο»*.

Όσον αφορά την έννοια του ρόμβου, παρατηρήθηκε ότι ο συνηθέστερος ορισμός που εμφανίζεται στα σχολικά εγχειρίδια είναι «το παραλληλόγραμμο που έχει και τις τέσσερις πλευρές του ίσες», ο οποίος είναι ιεραρχικός καθώς εντάσσει το ρόμβο στην οικογένεια των παραλληλογράμμων. Σε δύο περιπτώσεις, ωστόσο, δίνονται διαχωριστικοί ορισμοί με κριτήριο την ισότητα των πλευρών και των γωνιών των τετραπλεύρων, οι οποίοι είναι πανομοιότυποι με τον ορισμό των Στοιχείων. Ο όρος «ρομβοειδές» εμφανίζεται μόνο σε ένα σχολικό εγχειρίδιο, το «Μικρός

Γεωμέτρης» του Μιχαηλίδη (1946), όπου με τον όρο αυτό εννοείται το πλάγιο παραλληλόγραμμο, όπως και στα στοιχεία του Ευκλείδη.

Αξίζει να αναφερθεί επίσης, ότι από τα 23 σχολικά εγχειρίδια που μελετήθηκαν για τις ανάγκες της συγγραφής της παρούσας ενότητας, η έννοια του ρόμβου αναφέρεται σε μόλις 9 από αυτά, γεγονός που υποδηλώνει ότι ο ρόμβος δεν αποτελούσε αντικείμενο προτεραιότητας στη διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών στο επίπεδο πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Για την καλύτερη παρουσίαση της πορείας εξέλιξης των ορισμών τόσο του κύκλου όσο και του ρόμβου στα σχολικά εγχειρίδια συντάχθηκαν οι παρακάτω πίνακες:

Διδακτικά Εγχειρίδια	**Ορισμοί κύκλου**
Φατσέας, Α. (μετ.) (1870). *Επιτομή της γεωμετρίας Α.Μ. Λεγένδρου: πρός χρήσιν των ελληνικών σχολείων*	«*το σχήμα το παραγόμενον εκ της περιστροφής ευθείας, περί το έτερον των άκρων αυτής επί επιπέδου*».
Καραγιαννίδης, Α. (1906). *Πρακτική γεωμετρία δια την Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ τάξιν*	η «*επίπεδος επιφάνεια, ης εν σημείον απέχει ίσον από πάντων των σημείων της γραμμής, εις ην περατούται. Το δε σημείον τούτο λέγεται κέντρον του κύκλου*».
Δαμασκηνός, Δ.Π. & Καλυβόπουλος, Μ. (1931). *Η γεωμετρία του Δημοτικού Σχολείου Β,΄ Η Γεωμετρία της ΣΤ΄ τάξεως*	*«Ο κύκλος δεν τελειώνει ολόγυρα σε ευθείες γραμμές, αλλά σε μία μονάχα γυριστή καμπύλη γραμμή. Τη γραμμή αυτή τη λέμε περιφέρεια και κάνει το γύρο του κύκλου. Ο κύκλος είναι μια επιφάνεια. Ο γύρος του είναι η περιφέρεια*». *Στη μέση του κύκλου υπάρχει ένα σημείο, που η απόσταση απ' όλα τα μέρη της περιφέρειας είναι η ίδια. Το σημείο αυτό λέγεται κέντρο. Η ευθεία που ενώνει το κέντρο με ένα σημείο της περιφέρειας λέγεται αχτίνα. Η απόσταση από το κέντρο σε όλα τα μέρη της περιφέρειας είναι η ίδια. Γι αυτό και όλες οι αχτίνες στον ίδιο κύκλο είναι ίσες.*
Μιχαηλίδης, Ε. (1946). *Ο Μικρός Γεωμέτρης Πρακτική Γεωμετρία. Δια Μαθητάς Δημοτικών Σχολείων και Κατωτέρων Επαγγελματικών Σχολών κατά τας αρχάς του Σχολείου Εργασίας.*	«*Ο κύκλος περιορίζεται από μια κλειστή και κανονική καμπύλη γραμμή. Η κλειστή και κανονική αυτή γραμμή λέγεται περιφέρεια. Το ακίνητο σημείο Κ λέγεται κέντρο και η ευθεία που ενώνει το κέντρο με την περιφέρεια, λέγεται αχτίνα. Οι αχτίνες του κύκλου είναι άπειρες. Όλα τα σημεία της περιφέρειας βρίσκονται σε ίση απόσταση από το κέντρο*».
Παπαδόπουλος, Π.Δ. (1952). *Πρακτική γεωμετρία προς χρήσιν των μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξεως των Δημοτικών Σχολείων*	«*Κύκλος λοιπόν λέγεται η επίπεδος επιφάνεια, η οποία περικλείεται υπό μιας καμπύλης γραμμής της οποίας όλα τα σημεία απέχουν εξίσου εξ ενός*

	σημείου της επιφάνειας ταύτης, που ευρίσκεται εις το μέσον και λέγεται κέντρον του κύκλου».
Κυριαζόπουλος, Α. & Αλεξόπουλος, Β. (1969) *Αριθμητική - Γεωμετρία Ε΄ τάξεως Δημοτικού Σχολείου*	*«Κύκλος λέγεται το επίπεδον τμήμα, το οποίον περικλείεται από μιαν κλειστήν καμπύλην γραμμήν, της οποίας όλα τα σημεία απέχουν εξ ίσου από εν σημείον, το οποίον λέγεται κέντρον».*
Σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών που χρησιμοποιήθηκαν κατά την περίοδο 1982-2005	<u>Δ΄ τάξη</u>: η έννοια του κύκλου προσεγγίζεται διαισθητικά, μέσω της κατασκευής του, ώστε να οδηγηθούν οι μαθητές στο συμπέρασμα ότι κύκλος είναι η καμπύλη που σχηματίζεται ύστερα από μια πλήρη περιστροφή του άκρου μιας ταινίας γύρω από ένα σταθερό σημείο. <u>Ε΄ τάξη</u>: ονομάζεται κύκλος η γραμμή που περιορίζει την επιφάνεια που βόσκησε το γαϊδουράκι, ενώ ως κυκλικός δίσκος ορίζεται ο κύκλος μαζί με την επιφάνεια που περικλείει. <u>ΣΤ΄ τάξη</u>: «Ο κύκλος είναι μια κλειστή καμπύλη γραμμή που όλα τα σημεία της απέχουν εξίσου από το κέντρο, ενώ ο κυκλικός δίσκος είναι η επίπεδη επιφάνεια που περικλείεται από τον κύκλο».
Σχολικά εγχειρίδια που χρησιμοποιούνται από το 2006 έως σήμερα	Δεν υπάρχουν τυπικοί ορισμοί των εννοιών. Η προσέγγισή τους γίνεται διαισθητικά.

Διδακτικά Εγχειρίδια	**Ορισμοί ρόμβου**
Φατσέας, Α. (μετ.) (1870). *Επιτομή της γεωμετρίας Α.Μ. Λεγένδρου: πρός χρήσιν των ελληνικών σχολείων*	Το τετράπλευρο «*το έχον τας πλευράς ίσας τας δε γωνίας άνισας*».
Καραγιαννίδης, Α. (1906). *Πρακτική γεωμετρία δια την Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ τάξιν*	*«το παραλληλόγραμμον, το οποίο έχει πάσας τα πλευράς ίσας προς αλλήλας».*
Δαμασκηνός, Δ.Π. & Καλυβόπουλος, Μ. (1931). *Η γεωμετρία του Δημοτικού Σχολείου Β,΄ Η Γεωμετρία της ΣΤ΄ τάξεως*	Τον κατατάσσει στα τετράπλευρα κι έπειτα αναφέρει ότι έχει 4 πλευρές ίσες και ότι μόνο οι αντικριστές γωνίες του είναι ίσες. Οι δύο είναι οξείες και οι δύο αμβλείες. (περιγραφή που δεν αποτελεί τυπικό ορισμό της έννοιας).
Μιχαηλίδης, Ε. (1946). *Ο Μικρός Γεωμέτρης Πρακτική Γεωμετρία. Δια Μαθητάς Δημοτικών Σχολείων και Κατωτέρων Επαγγελματικών Σχολών κατά τας αρχάς του Σχολείου Εργασίας.*	*«το παραλληλόγραμμο που έχει και τις 4 πλευρές του ίσες».* *«το γυρτό παραλληλόγραμμο είναι σχήμα ρομβοειδές (σχήμα που έχουν συνήθως τα τεμάχια του γλυκίσματος μπακλαβά)».*

Παπαδόπουλος, Π.Δ. (1952). *Πρακτική γεωμετρία προς χρήσιν των μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξεως των Δημοτικών Σχολείων*	Το πλάγιο παραλληλόγραμμο που έχει τις τέσσερις πλευρές ίσες. Ειδικότερα: *«όταν αι 4 πλευραί του πλαγίου παραλληλογράμμου είναι ίσαι, τότε το σχήμα λέγεται ρόμβος»*.
Κυριαζόπουλος, Α. & Αλεξόπουλος, Β. (1969) *Αριθμητική - Γεωμετρία Ε΄ τάξεως Δημοτικού Σχολείου*	*«Ρόμβος είναι πλάγιον παραλληλόγραμμον, το οποίον έχει όλας τας πλευράς του ίσας»*.
Σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών που χρησιμοποιήθηκαν κατά την περίοδο 1982-2005	Ε τάξη: Τον κατατάσσει στα παραλληλόγραμμα. Αναφέρεται ότι έχει και τις τέσσερις πλευρές του ίσες (περιγραφή που δεν αποτελεί τυπικό ορισμό της έννοιας).
Σχολικά εγχειρίδια που χρησιμοποιούνται από το 2006 έως σήμερα	Δεν υπάρχουν τυπικοί ορισμοί των εννοιών. Η προσέγγισή τους γίνεται διαισθητικά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο}

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Ανάλυση Προγραμμάτων Σπουδών Δημοτικού

Στο ισχύον Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003) για τα Μαθηματικά, γίνεται μια νέα προσέγγιση της διδασκαλίας των μαθηματικών, η οποία παλαιότερα στηριζόταν σε διδακτικές πρακτικές που ήταν συμβατές με το «παραδοσιακό» μαθησιακό περιβάλλον. Σε γενικές γραμμές ο ρόλος του δασκάλου ήταν να δείξει στα παιδιά πώς θα κάνουν τις προσδιορισμένες εργασίες του βιβλίου (μετωπική - δασκαλοκεντρική διδασκαλία) με έμφαση στην εκμάθηση και εφαρμογή γνώσεων διαδικαστικού τύπου (αλγορίθμων, κανόνων, τεχνικών).

Σήμερα, προτεραιότητα της διδασκαλίας δεν αποτελεί μόνο η εκμάθηση τεχνικών και αλγορίθμων αλλά και η κατάκτηση από τους μαθητές μιας βαθύτερης εννοιολογικής κατανόησης. Η κατανόηση εννοιών μέσα σε πολλαπλά πλαίσια (συσχετική κατανόηση) βοηθά στην οικοδόμηση της γνώσης και έχει πολλαπλά οφέλη στους μαθητές (ενισχύει τη μνήμη, προκαλεί θετικό αυτοσυναίσθημα, βοηθά στην εκμάθηση νέων εννοιών και διαδικασιών, βελτιώνει τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων, βοηθά στην αποφυγή της παπαγαλίας). Οι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης μετατοπίζονται κυρίως από την εκμάθηση των αλγορίθμων των τεσσάρων πράξεων και των τύπων χωρίς κατανόηση, στην εκμάθηση λύσης προβλημάτων μέσα από την καθημερινή ζωή με νόημα για τα παιδιά (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2006).

Το ΔΕΠΠΣ (2003) δε βασίζεται σε κάποια συγκεκριμένη διδακτική θεωρία, περιέχει όμως στοιχεία από σύγχρονες θεωρίες μάθησης, οι οποίες δεν είναι φανερές αλλά μένουν υπονοούμενες. Η φιλοσοφία του φαίνεται να επηρεάζεται από τις αρχές των Ρεαλιστικών Μαθηματικών που υποστηρίζουν ότι οι μαθηματικές έννοιες, αλλά και η χρήση τους πηγάζουν από την ίδια την πραγματικότητα που βιώνουν τα άτομα. Επομένως, η ενεργοποίηση των παιδιών σε καταστάσεις και προβλήματα που τους είναι οικεία, και προέρχονται από το βιωματικό τους περιβάλλον, συνεπάγεται περισσότερα κίνητρα και αποτελεσματικότερη μάθηση (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2006).

Επίσης, σύμφωνα με τις σύγχρονες θεωρίες οικοδόμησης της μάθησης (εποικοδομητισμός – κονστρουκτιβισμός), οι γνώσεις και οι δεξιότητες κατακτώνται από κάθε μαθητή σταδιακά και σε προσωπικούς ρυθμούς, ανάλογα με το βαθμό ετοιμότητας και ωρίμανσής του. Έτσι, παρατηρείται η σπειροειδής διάταξη της ύλης, όπου οι νέες έννοιες συνδέονται μεταξύ τους και εντάσσονται σε πολλές και διαφορετικές γνωστικές περιοχές, από το χαμηλότερο στο υψηλότερο επίπεδο, και εξελίσσονται σε όλη την ύλη τόσο στη διάρκεια της χρονιάς όσο και σε κάθε μάθημα.

Το ΔΕΠΠΣ (2003) που εφαρμόζεται στα δημοτικά σχολεία της χώρας μας για τα μαθηματικά, διαρθρώνεται στους εξής επτά άξονες γνωστικού περιεχομένου (ή θεματικές ενότητες): α) Επίλυση προβλημάτων, β) Αριθμοί και πράξεις, γ) Μετρήσεις, δ) Γεωμετρία, ε) Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων στ) Λόγοι και αναλογίες και η) Εξισώσεις. Από αυτούς, οι τέσσερις πρώτοι άξονες παρουσιάζονται σε όλες τις τάξεις του δημοτικού, ο πέμπτος εμφανίζεται από την Δ΄ τάξη μέχρι την ΣΤ΄ και οι δυο τελευταίοι μόνο στην ΣΤ΄ τάξη.

Σύμφωνα με το Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003), με τη διδασκαλία των γεωμετρικών ενοτήτων σε κάθε τάξη του δημοτικού σχολείου επιδιώκεται οι μαθητές:

• *Α' δημοτικού*: Να εξασκούνται στον προσανατολισμό στο χώρο, στη σχεδίαση, αναπαραγωγή, αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση σχημάτων. Να διακρίνουν τα στερεά: τον κύβο, το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τον κύλινδρο και τη σφαίρα. Να παρατηρούν εικόνες και σχήματα συμμετρικά ως προς άξονα.

• *Β' δημοτικού*: Να εξασκούνται στη σχεδίαση, αναπαραγωγή σχημάτων και να αναγνωρίζουν τα χαρακτηριστικά των σχημάτων αυτών. Να καθορίζουν σημεία και να σχεδιάζουν ευθύγραμμα τμήματα και ευθείες. Να αναγνωρίζουν εμπειρικά τις παράλληλες και κάθετες ευθείες. Να διακρίνουν τα στερεά: τον κύβο, το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τον κύλινδρο και τη σφαίρα. Να παρατηρούν αν ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας και να συμπληρώνουν το συμμετρικό ενός σχήματος.

• *Γ' δημοτικού*: Να εξασκούνται στην περιγραφή, αναπαραγωγή και σχεδιασμό γεωμετρικών σχημάτων και στερεών σωμάτων καθώς και στην εφαρμογή τεχνικών σχεδίασης κάθετων ευθειών με τη βοήθεια των γεωμετρικών οργάνων. Να γνωρίσουν τις έννοιες κορυφή, ακμή, ορθή γωνία και έδρα. Να εξασκηθούν στην κατασκευή συμμετρικών σχημάτων ως προς άξονα.

• *Δ' δημοτικού*: Να εξασκούνται με τη βοήθεια οργάνων στη χάραξη παράλληλων και κάθετων ευθειών, στο σχεδιασμό γεωμετρικών σχημάτων και στον υπολογισμό περιμέτρου απλών σχημάτων. Να κατανοήσουν διαισθητικά την έννοια του εμβαδού. Να εξασκηθούν στην κατασκευή συμμετρικών σχημάτων ως προς άξονα σε τετραγωνισμένο χαρτί.

• *Ε' δημοτικού*: Να χαράζουν γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια οργάνων. Να υπολογίζουν τις περιμέτρους και τα εμβαδά βασικών γεωμετρικών σχημάτων, καθώς και το μήκος ενός κύκλου. Να γνωρίζουν την ονομασία γωνιών και τριγώνων, να τα ταξινομούν και να τα κατασκευάζουν. Να εξασκούνται στην κατασκευή αναπτυγμάτων απλών στερεών.

• *Στ' δημοτικού*: Να εξασκούνται στο σχεδιασμό ευθύγραμμων σχημάτων και κύκλων με κανόνα (χάρακα) και διαβήτη. Να υπολογίζουν το μήκος κύκλου και εμβαδόν κυκλικού δίσκου, τα εμβαδά και τους όγκους βασικών στερεών σχημάτων. Να αναπαράγουν, να κατασκευάζουν και να συγκρίνουν γωνίες. Να σχεδιάζουν το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς άξονα και να διενεργούν μεταφορές, μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις.

4.1 Η Διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών Δημοτικού

Το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) για τα μαθηματικά περιγράφει για κάθε τάξη και για κάθε θεματική ενότητα τους επιμέρους στόχους, τον ενδεικτικό χρόνο διδασκαλίας, ενδεικτικές δραστηριότητες και διαθεματικά σχέδια εργασίας. Όσον αφορά τη θεματική ενότητα της Γεωμετρίας, οι μαθητές εισάγονται σε έννοιες γεωμετρικών σχημάτων και του χώρου οι οποίες παρουσιάζονται και αναπτύσσονται εξελικτικά από τις μικρότερες προς τις μεγαλύτερες τάξεις.

Οι στόχοι του αναλυτικού προγράμματος στην ενότητα της Γεωμετρίας σε σχέση με τα *επίπεδα σχήματα* για τους μαθητές είναι οι εξής:

Τάξη	Διατιθέμενος χρόνος Γεωμετρίας	Στόχοι
Α΄	8 ώρες	Να διακρίνουν τα σχήματα των επιπέδων: του τριγώνου, του τετράγωνου, του ορθογωνίου, του κύκλου και των στερεών: τριγωνικής πυραμίδας, κύβου, ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, κυλίνδρου και της σφαίρας.
Β΄	12 ώρες	Να αναγνωρίζουν τα γεωμετρικά σχήματα: τον κύκλο, το τετράγωνο, το ορθογώνιο, το τρίγωνο. Να σχεδιάζουν σχήματα με το χάρακα σε λευκό και σε τετραγωνισμένο χαρτί και να αναπαράγουν σχήματα.
Γ΄	9 ώρες	Να σχεδιάζουν γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια οργάνων. Να αναπαράγουν, να περιγράφουν και να σχεδιάζουν ορισμένα συνήθη επίπεδα γεωμετρικά σχήματα (ορθογώνιο, τετράγωνο).
Δ΄	10 ώρες	Να σχεδιάζουν γεωμετρικά σχήματα και στερεά με τη βοήθεια οργάνων. Να μπορούν να περιγράφουν και να σχεδιάζουν τα συνήθη επίπεδα γεωμετρικά σχήματα.
Ε΄	8 ώρες	Να χαράζουν γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια οργάνων. Να αναγνωρίζουν σχήματα που είναι μέρη ενός σύνθετου σχήματος. Να υπολογίζουν το μήκος ενός κύκλου.

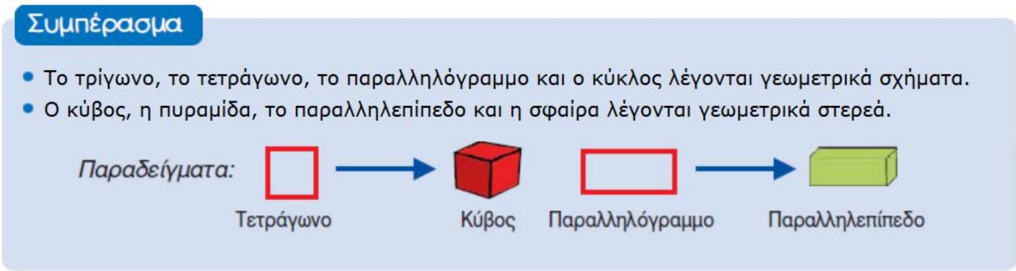
ΣΤ΄	16 ώρες	Να αναγνωρίζουν σχήματα σε ένα σύνθετο περιβάλλον και να χαράζουν γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια οργάνων.

4.2 Οδηγίες διδασκαλίας γεωμετρικών εννοιών και γεωμετρικών σχημάτων

Σύμφωνα με τις Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Δημοτικό για το σχολικό έτος 2019 – 2020 και τα βιβλία των δασκάλων, η πορεία της διδασκαλίας των γεωμετρικών εννοιών προτείνεται ως εξής:

Α΄ τάξη: Η γεωμετρία παρουσιάζεται με εμπειρικό τρόπο. Χρησιμοποιώντας συνθέσεις εικόνων που αποτελούνται μόνο από γεωμετρικά σχήματα καθώς και αντικείμενα της καθημερινής ζωής, εισάγονται οι έννοιες των γεωμετρικών σχημάτων (κύκλος, τετράγωνο, τρίγωνο, ορθογώνιο) και των στερεών σωμάτων (σφαίρα, κύβος, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, κύλινδρος και πυραμίδα). Οι μαθητές καθοδηγούνται στο να διακρίνουν τα διάφορα γεωμετρικά σχήματα με βάση τη μορφή τους και να τα ονομάζουν. Συνθέτουν εικόνες δέντρων, προσώπων κ.α. χρησιμοποιώντας κύκλους, τρίγωνα και τετράγωνα και ασκούνται στη δεξιότητα χάραξης γραμμών και σχημάτων με το χέρι αλλά και με το χάρακα. Ασκούνται επίσης στην ανάλυση και σύνθεση γεωμετρικών σχημάτων με παζλ (τάγκραμ), μωσαϊκά και πλακόστρωτα, διεργασίες που είναι πολύ σημαντικές για την ανάπτυξη των γεωμετρικών οπτικών ικανοτήτων.

Β΄ τάξη: Η γεωμετρία χρησιμοποιείται διαισθητικά, αλλά με σαφή σύνδεσή της με εκφάνσεις στην καθημερινή ζωή και μέσα από παιχνίδια. Οι μαθητές αναγνωρίζουν τα γεωμετρικά στερεά και τα συσχετίζουν με τα αντίστοιχα γεωμετρικά σχήματα. Μαθαίνουν επίσης να ονομάζουν ένα γεωμετρικό σχήμα με διαδοχικά γράμματα της αλφαβήτου (δεξιόστροφα). Ασκούνται στη χάραξη και τη μέτρηση οριζόντιων και κάθετων ευθύγραμμων τμημάτων και ακολουθούν οδηγίες προκειμένου να κατασκευάσουν ή να προεκτείνουν ένα γεωμετρικό σχήμα (ορθογώνιο τρίγωνο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τετράγωνο και μη κανονικό πολύγωνο) πάνω σε πλέγμα και με τα κομμάτια του τάγκραμ. Ανακαλύπτουν ότι στο τετράγωνο όλες οι πλευρές είναι ίσες και αναγνωρίζουν πολύγωνα (κανονικά ή μη). Επίσης, με τη βοήθεια του γνώμονα αναγνωρίζουν διαισθητικά και διακρίνουν τις κάθετες από τις τεμνόμενες ή τις παράλληλες ευθείες. Έτσι, αναγνωρίζουν την ορθή γωνία και οδηγούνται στο συμπέρασμα ότι το τετράγωνο, το ορθογώνιο τρίγωνο και το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχουν ορθή γωνία, ενώ το πλάγιο παραλληλόγραμμο δεν έχει.



Συμπέρασμα

- Το τρίγωνο, το τετράγωνο, το παραλληλόγραμμο και ο κύκλος λέγονται γεωμετρικά σχήματα.
- Ο κύβος, η πυραμίδα, το παραλληλεπίπεδο και η σφαίρα λέγονται γεωμετρικά στερεά.

Παραδείγματα: Τετράγωνο → Κύβος, Παραλληλόγραμμο → Παραλληλεπίπεδο

Στις Οδηγίες διδασκαλίας τονίζεται ιδιαίτερα ότι στις δύο πρώτες τάξεις του Δημοτικού πρέπει να αποφεύγεται η στείρα απομνημόνευση και να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση αρχικά σε χειραπτικό υλικό και σε δεύτερο στάδιο σε εικονιστικό υλικό.

Γ΄ τάξη: Στην τάξη αυτή, η διδασκαλία της γεωμετρίας ακολουθεί, όπως και στις προηγούμενες τάξεις, την εμπειρική προσέγγιση και συνδέεται με την τέχνη και τον πολιτισμό. Οι μαθητές γνωρίζουν ήδη τα ονόματα των βασικών γεωμετρικών σχημάτων και στερεών και ασκούνται πλέον στην αναγνώριση των σχημάτων σε διάφορες θέσεις στο χώρο και όχι μόνο στην πρότυπη. Για παράδειγμα, στην παρακάτω εικόνα το δεύτερο σχήμα αναγνωρίζεται δυσκολότερα από το πρώτο. Στόχος αποτελεί επίσης να αναγνωρίζουν ένα σχήμα σε όλες τις πιθανές εκδοχές του, όπως να θεωρούν και τα δύο εικονιζόμενα παρακάτω στερεά σώματα ως κυλίνδρους.

Με δραστηριότητες κατά τις οποίες οι μαθητές χειρίζονται κατασκευές σχημάτων έτσι φτιαγμένες, ώστε να αλλάζουν και να δίνουν νέα σχήματα γίνεται μια προεργασία ώστε τα παιδιά να κατανοήσουν εμπειρικά τις σχέσεις μεταξύ των σχημάτων και τις ιδιότητές τους. Εμφανίζεται για πρώτη φορά η έννοια του ρόμβου και ασκούνται στη χάραξη σχημάτων με γεωμετρικά όργανα ακολουθώντας συγκεκριμένες εντολές. Επιπλέον, με δραστηριότητες όπως το παζλ (τάνγκραμ) και το πλακόστρωτο αναπτύσσονται χρήσιμες οπτικές γεωμετρικές ικανότητες και εμβαθύνουν οι μαθητές στις ιδιότητες των σχημάτων.

Ρόμβος και τετράγωνο

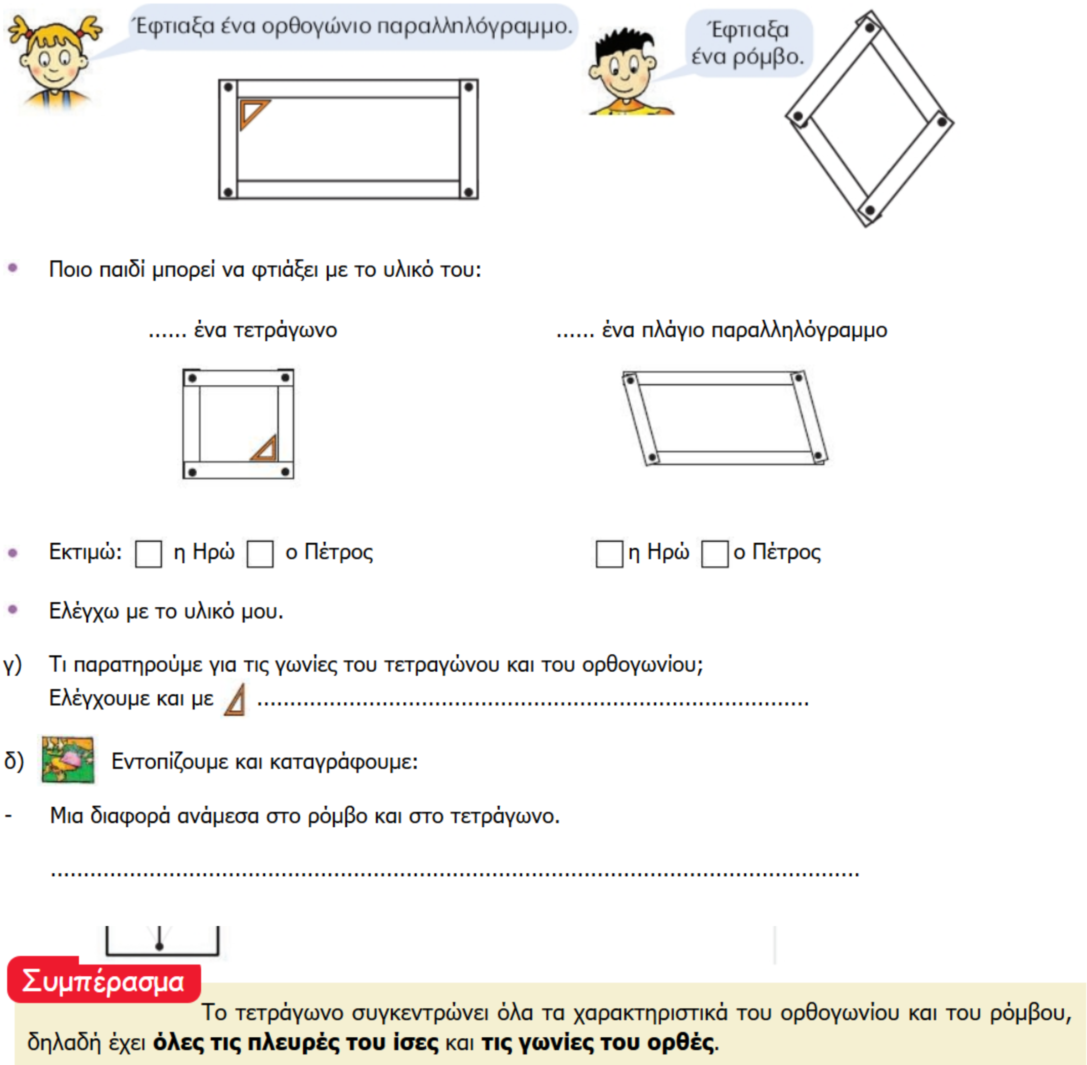
Κόψτε τέσσερις ίσες λωρίδες από χαρτόνι,ενώστε τις άκρες τους με διπλόκαρφα και φτιάξτε ένα αρθρωτό τετράγωνο.Μετακινήστε μια κορυφή

Δ΄ τάξη: Τα παιδιά εξοικειώνονται περισσότερο με την έννοια του πολυγώνου. Εμβαθύνουν στις έννοιες της ορθής γωνίας, της καθετότητας και της παραλληλίας. Χρησιμοποιούν γεωμετρικά όργανα για να ελέγξουν την καθετότητα και για να χαράξουν κάθετες και παράλληλες μεταξύ τους ευθείες, καθώς και την απόσταση σημείου από ευθεία. Αντιλαμβάνονται ότι οι δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες σχηματίζουν 4 ορθές γωνίες. Γνωρίζουν και περιγράφουν τα παραλληλόγραμμα με βάση τα χαρακτηριστικά τους που αφορούν στο πλήθος των κορυφών, στο πλήθος και το είδος των γωνιών (ορθές – μη ορθές), στη σχέση μεταξύ των μηκών των πλευρών και στην παραλληλία των πλευρών. Ασκούνται στον σχεδιασμό του τετραγώνου, του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και του ρόμβου με τη βοήθεια γεωμετρικών οργάνων. Αντιλαμβάνονται ότι το τετράγωνο είναι ειδική περίπτωση ρόμβου και ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Αξίζει να αναφερθεί ότι στην τάξη αυτή, στο Κεφάλαιο 32 «Παραλληλόγραμμα», μέσα στο ευρύτερο πλαίσιο της διδασκαλίας των παραλληλογράμμων εντάσσεται και η διδασκαλία του ρόμβου. Προτεινόμενος χρόνος διδασκαλίας του μαθήματος είναι μια (1) μόνο διδακτική ώρα και ο κύριος διδακτικός στόχος είναι η διαχείριση του τετραγώνου, του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, του ρόμβου και του πλάγιου παραλληλόγραμμου από τους μαθητές. Αναλυτικά, οι στόχοι του μαθήματος εστιάζουν στο να είναι ικανά τα παιδιά:

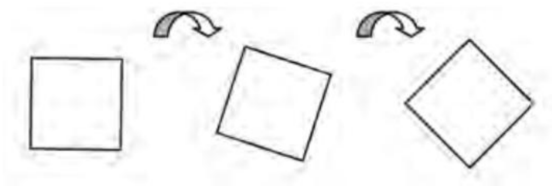
- να αναγνωρίζουν τα παραλληλόγραμμα σε σύνθετο σχήμα,
- να γνωρίζουν τα χαρακτηριστικά του κάθε παραλληλογράμμου που αφορούν στο πλήθος των κορυφών, στο πλήθος και στο είδος των γωνιών (ορθές-μη ορθές), στη σχέση μεταξύ των μηκών των πλευρών, στην παραλληλία των πλευρών,
- να περιγράφουν τα παραλληλόγραμμα βάσει αυτών των χαρακτηριστικών,
- να σχεδιάζουν το τετράγωνο και το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με ή χωρίς πλέγμα, με τη βοήθεια γεωμετρικών οργάνων,
- να σχεδιάζουν τον ρόμβο αξιοποιώντας την ιδιότητα των διαγωνίων του να διχοτομούνται κάθετα (να σχηματίζουν «σταυρό»),
- να αντιλαμβάνονται ότι το τετράγωνο είναι ειδική περίπτωση ρόμβου και ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Οι μαθητές καλούνται να επεξεργαστούν τα χαρακτηριστικά των παραλληλογράμμων, κόβοντας αρχικά λωρίδες από χαρτόνι από το υλικό που υπάρχει στο τέλος του βιβλίου και προβλέποντας τι είδους τετράπλευρο μπορεί να έχει όλες του τις πλευρές ίσες μεταξύ τους (ρόμβος, τετράγωνο) και τι είδους τετράπλευρο μπορεί να έχει μόνο τις απέναντι πλευρές του ίσες (ορθογώνιο παραλληλόγραμμο – όχι τετράγωνο, πλάγιο παραλληλόγραμμο – όχι ρόμβος). Στη συνέχεια, παρατηρούν ότι μεταβάλλοντας κατάλληλα τις γωνίες του ρόμβου και του ορθογωνίου παραλληλογράμμου μπορούν να φτιάξουν τετράγωνο και πλάγιο παραλληλόγραμμο αντίστοιχα (και αντιστρόφως). Έπειτα, καλούνται τα παιδιά να παρατηρήσουν ποιες ευθείες είναι ανά δύο παράλληλες μεταξύ τους προκειμένου να οδηγηθούν στο συμπέρασμα ότι οι απέναντι πλευρές στο πλάγιο και ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, καθώς και στο ρόμβο και το τετράγωνο είναι παράλληλες μεταξύ τους. Η διαπίστωση αυτή συνδέεται με τον όρο «παραλληλόγραμμο».

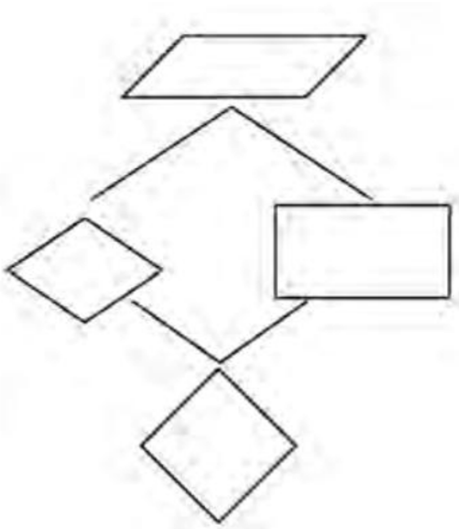


Μετά από τις δραστηριότητες ανακάλυψης, οι μαθητές καλούνται να σχεδιάσουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ένα τετράγωνο με βάση τα χαρακτηριστικά τους, ενώ η μέθοδος σχεδιασμού του ρόμβου γίνεται με τη βοήθεια των διαγωνίων. Οι μαθητές καλούνται να παρατηρήσουν τα χαρακτηριστικά του «σταυρού» των διαγωνίων (είναι μεταξύ τους κάθετες και η μια τέμνει την άλλη «στη μέση»).

Προκειμένου να κατανοήσουν οι μαθητές βαθύτερα ότι το τετράγωνο αποτελεί ειδική περίπτωση του ρόμβου, προτείνεται να χρησιμοποιήσει ο



δάσκαλος ένα τετράγωνο από χαρτόνι, το οποίο στρέφει, ρωτώντας αν το σχήμα παραμένει τετράγωνο, μέχρι να το φέρουμε στη θέση του παρακάτω σχήματος. Έτσι, θα βγει το συμπέρασμα ότι «αν οι γωνίες ενός ρόμβου είναι ορθές, τότε είναι τετράγωνο». Αν ο δάσκαλος κρίνει ότι το επίπεδο της τάξης το επιτρέπει, μπορεί να εμβαθύνει στη σχέση που έχουν τα παραλληλόγραμμα μεταξύ τους, αξιοποιώντας την παρακάτω εναλλακτική διδακτική πρόταση.



Ο δάσκαλος περιγράφει το τυχόν παραλληλόγραμμο ως ένα τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες. Έπειτα αναφέρει ότι αν «προσθέσουμε» την επιπλέον ιδιότητα να έχει όλες τις πλευρές του ίσες (αντίστοιχα όλες τις γωνίες του ορθές), τότε προκύπτει ένας ρόμβος (αντίστοιχα ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο). Συνεχίζει λέγοντας πως αν θέλουμε να έχει και τις δύο επιπλέον ιδιότητες, τότε προκύπτει ένα τετράγωνο. Επομένως, κάθε ρόμβος και κάθε ορθογώνιο είναι παραλληλόγραμμο, το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Επιπλέον, κάθε τετράγωνο είναι και ρόμβος, και ορθογώνιο και ασφαλώς, παραλληλόγραμμο. Το αντίστροφο δεν ισχύει (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2006).

Σύμφωνα με τις Οδηγίες διδασκαλίας, κατά την μελέτη των ομοιοτήτων και των διαφορών των γεωμετρικών σχημάτων οι γενικεύσεις και οι ομαδοποιήσεις οφείλουν να είναι χαλαρές, καθώς, σύμφωνα με την θεωρία των Van Hiele, οι μαθητές αυτής της τάξης αδυνατούν, μάλλον, να εξηγήσουν τις ιδιότητες, τις σχέσεις και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σχημάτων, ενώ και οι ορισμοί δεν είναι ακόμη πλήρως κατανοητοί. Όταν περιγράφεται ένα αντικείμενο, μάλλον απαριθμούνται όλες οι ιδιότητες, που ήδη είναι γνωστές, δίχως όμως να μπορεί να διακρίνεται, ποιες ιδιότητες είναι απαραίτητες και ποιες αρκετές για να περιγραφεί το γεωμετρικό σχήμα.

Ε΄ τάξη: Οι μαθητές μελετούν τα είδη των γωνιών και εργάζονται με τη μέτρησή τους. Συγκρίνουν τις γωνίες με τη χρήση διαφόρων (υλικών και μη) μέσων και τις μετρούν με τυπικές μονάδες και μοιρογνωμόνιο. Στη συνέχεια, διερευνούν τα είδη των τριγώνων ως προς τις γωνίες και τις πλευρές (ταξινομούν τα τρίγωνα με βάση τις ιδιότητες όπως αριθμός πλευρών, σύγκριση γωνιών, μήκος πλευρών κ.λπ.) καθώς και την έννοια της καθετότητας και της σχεδίασης/κατασκευής των υψών σε τρίγωνα. Έπειτα, οι μαθητές μελετούν τον κύκλο. Αναγνωρίζουν και ονομάζουν το κέντρο, την περιφέρεια, την ακτίνα και τη διάμετρο ως στοιχεία του κύκλου, εξηγείται ο αριθμός π και ασκούνται στον υπολογισμό του μήκους κύκλου με βάση τον τύπο. Επιπλέον, αναγνωρίζουν και ταξινομούν σχήματα (επίπεδα και στερεά) με βάση τις ιδιότητές τους (αριθμός κορυφών, πλευρών, μήκος πλευρών) και τα σχεδιάζουν σε διάφορους καμβάδες. Υπολογίζουν τα εμβαδά του τετραγώνου, του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και του ορθογωνίου τριγώνου, επεκτείνουν την αναγνώριση επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων ως εδρών στερεών, διερευνούν τις σχέσεις μεταξύ επίπεδων και στερεών γεωμετρικών σχημάτων (π.χ. τετραγώνου - κύβου, κύκλου - σφαίρας) και σχεδιάζουν αναπτύγματα στερεών.

Παρατηρείται πως στην τάξη αυτή δε γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στην έννοια του ρόμβου, υπάρχει ωστόσο ένα μάθημα (Κεφ.44 «Κύκλος – μήκος κύκλου») για τη διδασκαλία του κύκλου, όπου οι μαθητές έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με τις έννοιες κέντρο κύκλου, ακτίνα, διάμετρος, μήκος κύκλου, αριθμός π. Ο κύκλος και τα στοιχεία του προτείνεται να διδαχθούν σε μια (1) μόνο διδακτική ώρα. Στόχος του μαθήματος είναι να μπορούν οι μαθητές:

- να ονομάζουν τα κύρια στοιχεία του κύκλου,
- να αναγνωρίζουν την περιφέρεια, την ακτίνα και τη διάμετρο κύκλων,
- να υπολογίζουν το μήκος κύκλου,
- να εξηγούν τον αριθμό π.

Το μάθημα ξεκινάει με την παρακάτω δραστηριότητα διερεύνησης.

Διερεύνηση

1. Γνωρίζουμε το σχήμα του κύκλου:

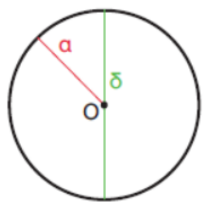
1. Κόβουμε προσεχτικά τον μπλε κύκλο από το παράρτημα.
2. Διπλώνουμε το χαρτί σε δύο ίσα μέρη. Ζωγραφίζουμε πράσινη τη γραμμή δίπλωσής του.
3. Διπλώνουμε και πάλι το χαρτί, ώστε να σχηματιστούν τέσσερα ίσα μέρη. Ζωγραφίζουμε κόκκινη τη δεύτερη γραμμή δίπλωσής του.
4. Ζωγραφίζουμε μαύρο το σημείο Ο στο οποίο τέμνονται οι γραμμές δίπλωσης.

α. Ονομάζουμε την πράσινη και την κόκκινη γραμμή και το σημείο Ο.
πράσινη: ……........…… κόκκινη: …….......… σημείο Ο: ….....…….……

β. Παρατηρώντας το σχήμα του κύκλου, συμπληρώνουμε τις προτάσεις.

- Η …………………………… είναι διπλάσια της ……………..
- .Η μέτρηση της ……….........… γραμμής μας δίνει το μήκος του κύκλου.

Έπειτα, οι μαθητές εντοπίζουν σχήματα του κύκλου σε αντικείμενα της τάξης και με τη βοήθεια μιας μεζούρας ή ενός σπάγκου κάνουν μετρήσεις και οδηγούνται σταδιακά σε συμπεράσματα σχετικά με την τη σχέση της ακτίνας/διαμέτρου και το μήκος κύκλου. Επειδή το μήκος κύκλου εξαρτάται από τη διάμετρο, κάθε κύκλος με διαφορετική διάμετρο έχει και διαφορετικό μήκος κύκλου. Επειδή η ακτίνα είναι η μισή της διαμέτρου, δύο κύκλοι με διαφορετικό μέγεθος ακτίνας δεν μπορεί να έχουν το ίδιο μήκος κύκλου.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Τα κύρια στοιχεία του κύκλου είναι: το **κέντρο** Ο, η **ακτίνα** α και η **διάμετρος** δ.	 Η διάμετρος του κύκλου είναι 3 εκ.
Για να υπολογίσουμε το μήκος κύκλου, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό π με τη διάμετρο του κύκλου. **μήκος κύκλου = π x δ = 3,14 x δ**	
Ο αριθμός που συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα **π** είναι με προσέγγιση εκατοστού **3,14**.	Επομένως: μήκος κύκλου = π x δ=3,14 x 3=9,42 εκ.

Ιστορικό σημείωμα Από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα, το πηλίκο της διαίρεσης του μήκους οποιουδήποτε κύκλου με τη διάμετρό του προσεγγίζεται όλο και με μεγαλύτερη ακρίβεια και είναι ο αριθμός 3,14159265… που έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία.
Ο αριθμός αυτός συμβολίζεται σε όλον τον κόσμο με το ελληνικό γράμμα π και στους υπολογισμούς χρησιμοποιούμε την προσεγγιστική του τιμή 3,14.

ΣΤ΄ τάξη: Οι μαθητές εμβαθύνουν στη μελέτη των σχημάτων και των στερεών σωμάτων και ασκούνται στην αποτύπωσή τους στο χαρτί με τη βοήθεια των γεωμετρικών οργάνων. Ξεκινούν από τις γωνίες και τα πολύγωνα και μαθαίνουν τις ιδιότητες των τετραπλεύρων σχημάτων και τους τύπους υπολογισμού των εμβαδών των σχημάτων (τριγώνου, παραλληλογράμμου, τραπεζίου, κυκλικού δίσκου). Όσον αφορά τα στερεά σώματα μελετάται ο κύβος, το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και ο κύλινδρος. Οι μαθητές μαθαίνουν πώς να κατασκευάζουν αυτά τα σώματα (ανάπτυγμα) και πώς να βρίσκουν το εμβαδό της επιφάνειάς τους και τον όγκο τους.

Σύμφωνα με τον Λεμονίδη (2015), μελετώντας λεπτομερώς τις προτάσεις ανά τάξη, παρατηρείται ότι ακολουθούν τη λογική των ιεραρχικά διατεταγμένων επιπέδων γεωμετρικής σκέψης Van Hiele (0 – 2). Η θεμελίωση αυτή, ωστόσο, μένει υπονοούμενη και η εξελικτική ανάπτυξη των περιεχομένων από τάξη σε τάξη δε γίνεται φανερή με αποτέλεσμα ο εκπαιδευτικός να μην κατανοεί την αναγκαιότητα της συγκεκριμένης σειράς προτάσεων και να μην μπορεί να σχηματίσει μια συνολική εικόνα για την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών του. Κατά συνέπεια, ενδεχομένως να εμφανίσει δυσκολίες στον εντοπισμό του επιπέδου του κάθε μαθητή, στην πρόβλεψη και αντιμετώπιση των δυσκολιών των μαθητών αλλά και των αιτιών που τις δημιουργούν και τις αναπαράγουν.

4.3 Συμπεράσματα

Είναι φανερό πως η Γεωμετρία στο Δημοτικό σχολείο προσεγγίζεται διαισθητικά, με εμπειρικό τρόπο και βασίζεται στις παραστάσεις των μαθητών. Οι έννοιες των γεωμετρικών σχημάτων εισάγονται αρχικά χρησιμοποιώντας αντικείμενα της καθημερινής ζωής, συνθέσεις εικόνων και παιχνίδια, δίνοντας περισσότερη έμφαση σε χειραπτικό και εικονιστικό υλικό. Με το πέρασμα των τάξεων εμπλουτίζεται η γεωμετρική εμπειρία των μαθητών και εμβαθύνεται σταδιακά η μελέτη των σχημάτων και των στερεών σωμάτων.

Από τους στόχους του ΑΠΣ για τα μαθηματικά παρατηρείται πως αυτοί εστιάζουν στην ικανότητα των μαθητών στην αναγνώριση, την περιγραφή και τον σχεδιασμό των βασικών επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων. Από τη μελέτη των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών διαπιστώθηκε ότι μέχρι την Ε΄ τάξη αναγράφονται ελάχιστοι τυπικοί ορισμοί των βασικών γεωμετρικών εννοιών, ενώ στην Στ΄ τάξη σημειώνεται μια προσπάθεια καταγραφής γεωμετρικών ορισμών και τύπων χωρίς ωστόσο να περιλαμβάνονται σε αυτούς οι ορισμοί των βασικών γεωμετρικών εννοιών όπως είναι ο κύκλος και ο ρόμβος. Επίσης, φαίνεται πως στις Οδηγίες διδασκαλίας δεν προτείνονται στους εκπαιδευτικούς πιθανοί τρόποι παρουσίασης και σχεδιασμού της διδασκαλίας των ορισμών των γεωμετρικών εννοιών.

Σχετικά με τις έννοιες του κύκλου και του ρόμβου, οι οποίες αποτελούν τα αντικείμενα μελέτης της παρούσας εργασίας, παρατηρείται ότι ο κύκλος είναι μια έννοια η οποία μελετάται πολύ συχνά σε όλες τις τάξεις του δημοτικού, ενώ από την άλλη διακρίνεται μια ελλιπής ενασχόληση των μαθητών με την έννοια του ρόμβου, η οποία εμφανίζεται για πρώτη φορά ως αντικείμενο διδασκαλίας (κι όχι μόνο για οπτική αναγνώριση) στην Γ΄ δημοτικού. Στην τάξη αυτή, γίνεται μια προεργασία ώστε τα παιδιά να κατανοήσουν εμπειρικά τις σχέσεις μεταξύ ρόμβου και τετραγώνου και τις ιδιότητές τους, μέσω δραστηριοτήτων όπου οι μαθητές χειρίζονται κατασκευές σχημάτων που μπορούν να αλλάζουν και να δίνουν νέα σχήματα. Επιπλέον, από τις προτεινόμενες δραστηριότητες της Δ΄ τάξης, διαφαίνεται μια προσπάθεια να τονιστούν οι ιεραρχικές σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων, με ιδιαίτερη έμφαση στην κατανόηση από τους μαθητές ότι το τετράγωνο αποτελεί ειδική περίπτωση του ρόμβου και του ορθογωνίου. Στην Ε΄ τάξη δε γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στην έννοια του ρόμβου, επιχειρείται όμως μια βαθύτερη προσέγγιση της έννοιας του κύκλου, καθώς οι μαθητές έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με τους όρους που αφορούν τα κύρια στοιχεία του κύκλου (κέντρο κύκλου, ακτίνα, διάμετρος, μήκος κύκλου, αριθμός π).

Τέλος, διαπιστώνεται ότι οι διδακτικές ενότητες γεωμετρικών εννοιών είναι πολύ λίγες στο δημοτικό σε σχέση με το Γυμνάσιο και η θέση τους είναι «άτακτη» μέσα στο αναλυτικό πρόγραμμα, γεγονός που οδηγεί τον εκπαιδευτικό στο να χειρίζεται το περιεχόμενο της Γεωμετρίας αποσπασματικά. Συγκεκριμένα, για τις Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ τάξεις προβλέπονται αντίστοιχα 8, 12, 9, 10, 8 και 16 διδακτικές ώρες Γεωμετρίας σε σύνολο 120 ωρών ανά τάξη για τη διδασκαλία των μαθηματικών κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους. Από την άλλη, στην Α΄ Γυμνασίου προβλέπονται 41 διδακτικές ώρες Γεωμετρίας σε σύνολο 101 ωρών διδασκαλίας μαθηματικών (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2003). Παρατηρείται λοιπόν, μια υποβάθμιση της Γεωμετρίας στο Δημοτικό σχολείο. Στην Α΄ Γυμνασίου αυξάνονται βέβαια οι ώρες που αφιερώνονται στις γεωμετρικές έννοιες, οι οποίες περιορίζονται στην επιπεδομετρία, με εύλογη την απορία για την επάρκεια των γνώσεων που έχουν αποκτήσει τα παιδιά στο Δημοτικό και στην οποία θα στηριχθεί η περαιτέρω οικοδόμηση και επέκτασή τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{ο}

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Κεφάλαιο 5ο

Σχεδιασμός διδακτικής παρέμβασης

Σκοπός του κεφαλαίου, είναι να δώσει μια περιεκτική περιγραφή του σχεδιασμού της διδακτικής παρέμβασης που προτείνεται στην παρούσα εργασία, η οποία δομήθηκε με βάση την ιστορική εξέλιξη των εννοιών του κύκλου και του ρόμβου και της αρχές της θεωρίας των σχηματικών εννοιών του Fischbein (1993).

Η προτεινόμενη παρέμβαση στοχεύει τόσο στον εντοπισμό και την καταγραφή των δυσκολιών των μαθητών, όσο και στην οργάνωση της διδασκαλίας των εννοιών του κύκλου και του ρόμβου. Αρχικά, αναλύεται η δομή του ερωτηματολογίου που κατασκευάστηκε για την ανίχνευση των δυσκολιών κατανόησης των ορισμών των ανωτέρω εννοιών από τους μαθητές της ΣΤ΄ δημοτικού. Έπειτα, παρουσιάζεται ο σχεδιασμός μιας διδασκαλίας, η οποία έχει ως στόχο την προοδευτική μετάβαση των μαθητών μέσω χειραπτικών δραστηριοτήτων και διαλεκτικής συζήτησης στην κατασκευή ενός αποδεκτού ορισμού για τις έννοιες του κύκλου και του ρόμβου. Αυτό που επιδιώκεται στην ουσία είναι να κατασκευάσουν οι ίδιοι οι μαθητές τους ορισμούς των γεωμετρικών εννοιών, ανακαλύπτοντας και χρησιμοποιώντας τις βασικές ιδιότητές τους, όπως ακριβώς έκανε και ο Ευκλείδης στα «Στοιχεία» του. Μεταξύ των δραστηριοτήτων που προτείνονται περιλαμβάνεται και η μελέτη πρωτότυπων ιστορικών κειμένων από τους μαθητές, η οποία βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες που διδάσκονται.

5.1 Ανίχνευση των δυσκολιών κατανόησης ορισμών

Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας κατασκευάστηκε ένα ερωτηματολόγιο - διαγνωστικό δοκίμιο (βλ. Παράρτημα), το οποίο οργανώθηκε σε δύο άξονες ερωτημάτων σε αντιστοιχία με τα δύο πρώτα ερευνητικά ερωτήματα:

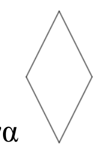
- Ο πρώτος άξονας ερωτημάτων αφορά στη διατύπωση των ορισμών του κύκλου και του ρόμβου.
- Ο δεύτερος άξονας ερωτημάτων αφορά στην αναγνώριση των σχηματικών εννοιών του κύκλου και του ρόμβου.

Στόχος του διαγνωστικού δοκιμίου, είναι να καταγράψει σε ποιο βαθμό οι μαθητές είναι ικανοί να ορίζουν τις γεωμετρικές έννοιες του κύκλου και του ρόμβου, καθώς και να αναγνωρίζουν διάφορα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα των εννοιών αυτών. Το διαγνωστικό δοκίμιο κατασκευάστηκε λαμβάνοντας υπόψη τα ευρήματα των ερευνών σχετικά με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές επιπέδου πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην κατανόηση των ορισμών των γεωμετρικών εννοιών, τα οποία παρουσιάστηκαν στην ενότητα 1.6 της παρούσας εργασίας. Αποτελείται από 10 ερωτήσεις (βλ. Παράρτημα). Από αυτές, οι ερωτήσεις 2 και 8 είναι κλειστού τύπου και αποτελούν παραλλαγές του Van Hiele Geometry Test του Usiskin (1982), τρεις ερωτήσεις (5,6 και 10) είναι σχεδίασης (οι ερωτήσεις 5 και 6 ζητούν και επιπλέον αιτιολόγηση) και πέντε (1, 3, 4, 7 και 9) είναι ανοιχτού τύπου. Τέλος, η ερώτηση 9 αποτελεί παραλλαγή των ασκήσεων που χρησιμοποίησαν οι Human & Nel et al (1989b στο De Villiers, 1998) στο διδακτικό τους πείραμα, ενώ η ερώτηση 6 προέρχεται από το διαγνωστικό δοκίμιο που χρησιμοποίησε η Μίχου (2019) στην έρευνά της.

Το διαγνωστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος «Περί κύκλου» (ερωτήσεις 1 έως 6) αφορά την έννοια του κύκλου, ενώ το δεύτερο «Περί ρόμβου», την έννοια του ρόμβου (ερωτήσεις 7 έως 10).

Στο πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου «Περί κύκλου», ζητείται αρχικά από τους μαθητές να ορίσουν τον κύκλο, καθώς σύμφωνα με τον Vinner (1991), η άμεση ερώτηση είναι ο φυσικός τρόπος για να μάθουμε τον «ορισμό της έννοιας» των μαθητών διότι οι ορισμοί είναι λεκτικοί και ξεκάθαροι. Από την άλλη, για να μάθουμε την «εικόνα της έννοιας» των μαθητών πρέπει να θέτουμε έμμεσες ερωτήσεις, καθώς η εικόνα της έννοιας είναι συνήθως νοερή και ασαφής.

Στη συνέχεια, ακολουθεί μια σειρά εικόνων και κάτω από κάθε εικόνα καλούνταν οι μαθητές να επιλέξουν εάν «είναι κύκλος» ή «δεν είναι κύκλος». Αντίστοιχη σειρά ερωτήσεων ακολουθείται και στο δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου «Περί ρόμβου».

Στην επιλογή των εικόνων λήφθηκαν υπόψη και μαθηματικές αλλά και διδακτικές διαστάσεις. Αυτό σημαίνει ότι δεν ελήφθη υπόψη μόνο εάν η εικόνα αποτελεί παράδειγμα ή αντιπαράδειγμα του συγκεκριμένου γεωμετρικού σχήματος, αλλά και τι ζητήματα γνωστικής και αναπτυξιακής φύσεως μπορεί να προκύψουν κατά την αναγνώριση των γεωμετρικών σχημάτων. Ειδικότερα, διερευνήθη εάν το σχήμα θα αναγνωριστεί διαισθητικά από τους μαθητές ως παράδειγμα ή αντιπαράδειγμα της έννοιας. Για παράδειγμα, αναφορικά με το ρόμβο, η εικόνα  μπορεί να θεωρηθεί ως πρωτοτυπικό παράδειγμα και για το λόγο αυτό να αναγνωρίζεται διαισθητικά ως ρόμβος και να είναι αποδεκτό χωρίς την αίσθηση ότι απαιτείται αιτιολόγηση. (Hershkowitz 1990, Tsamir 2008). Ο πλάγιος ρόμβος μπορεί να θεωρηθεί ως μη διαισθητικό παράδειγμα εξαιτίας της «λεπτότητας» του. Τα αντιπαραδείγματα κάθε σχήματος επιλέχθηκαν με σκοπό να ανατρέπουν - ακυρώνουν ορισμένα ουσιώδη χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα, ο ανοιχτός κύκλος, το ημικύκλιο, το σπιράλ ή ο ανοιχτός ρόμβος έρχεται σε αντίθεση με το βασικό χαρακτηριστικό ότι οι κύκλοι/ρόμβοι είναι κλειστά σχήματα. Ο στρογγυλεμένος ρόμβος δεν συμφωνεί με την ανάγκη να είναι οι κορυφές μυτερές και αιχμηρές. Το δωδεκάγωνο είναι οπτικά όμοιο με έναν κύκλο, ενώ το σχήμα «χαρταετός» (kite) μοιάζει με ρόμβο. Ενώ ο κύκλος και το τραπέζιο μπορεί να θεωρηθούν ως διαισθητικά αντιπαραδείγματα του ρόμβου, το σχήμα «χαρταετός» μπορεί να ληφθεί ως μη διαισθητικό παράδειγμα λόγω της οπτικής ομοιότητας με το πρωτοτυπικό ρόμβο.

Ενώ οι ρόμβοι μπορεί να ποικίλουν ανάλογα με το μέτρο των γωνιών τους παρέχοντάς μας μια ποικιλία παραδειγμάτων, η συμμετρία του κύκλου περιορίζει την ποικιλομορφία των χαρακτηριστικών του στοιχείων. Ουσιαστικά, μόνο το μέγεθος του κύκλου (το μήκος της ακτίνας) μπορεί να αλλάξει. Επομένως, στα παραδείγματα του κύκλου συμπεριλήφθησαν μόνο 2 κύκλοι, ένας μεγαλύτερος κι ένας μικρότερου μεγέθους.

Οι επόμενες ερωτήσεις σχετίζονται με την κατανόηση των βασικών χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων του κύκλου. Συγκεκριμένα, με τις ερωτήσεις 3 και 5 διερευνάται εάν οι μαθητές είναι ικανοί να εντοπίσουν, να αναγνωρίσουν και να σχεδιάσουν τα βασικά στοιχεία ενός κύκλου, όπως το κέντρο, την ακτίνα και τη διάμετρο. Η ερώτηση 4, ζητά από τους μαθητές να περιγράψουν την χαρακτηριστική ιδιότητα που έχουν όλα τα σημεία του κύκλου, ενώ η ερώτηση 6 έχει ως στόχο να αναγνωρίσουν βιωματικά οι μαθητές τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες της έννοιας του κύκλου, ζητώντας από τους μαθητές να κατασκευάσουν σημεία που ισαπέχουν από ένα σταθερό, δοσμένο σημείο. Έπειτα καλούνται οι μαθητές να εξηγήσουν ξανά με λίγα λόγια τι είναι ο κύκλος προκειμένου να εξεταστεί η ικανότητά τους στην απόδοση ορισμού της γεωμετρικής έννοιας του κύκλου.

Στο δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου «Περί ρόμβου», οι ερωτήσεις 7 και 8 είναι παρόμοιες με την 1 και 2 που τέθηκαν για τον κύκλο. Έτσι, στην ερώτηση 7 ζητείται από τους μαθητές να περιγράψουν με λίγα λόγια τι είναι ο «ρόμβος» κι έπειτα στην ερώτηση 8 καλούνται να αναγνωρίσουν σωστά τους ρόμβους από δοσμένα γεωμετρικά σχήματα προκειμένου να εξεταστούν οι εικόνες που έχουν σχηματίσει οι μαθητές γύρω από την έννοια του «ρόμβου».

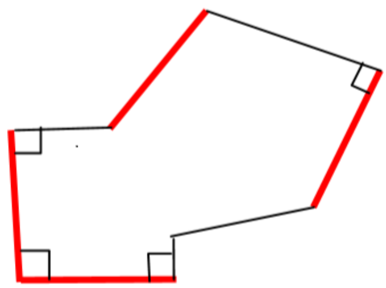
Η ερώτηση 9 αποτελεί, όπως προαναφέρθηκε, παραλλαγή των ασκήσεων που χρησιμοποίησαν οι Human & Nel et al (1989b στο De Villiers, 1998) στο διδακτικό τους πείραμα και έχει ως στόχο την αναγνώριση από τους μαθητές των ικανών και αναγκαίων συνθηκών της έννοιας του ρόμβου, μέσω της παρατήρησης και καταγραφής των βασικών ιδιοτήτων της σχηματικής έννοιας. Οι μαθητές καλούνται είτε εποπτικά, είτε με τη χρήση χάρακα και μοιρογνωμονίου να μετρήσουν, να παρατηρήσουν τις σχηματικές έννοιες του ρόμβου και να καταγράψουν τις βασικές τους ιδιότητες. Έπειτα, καλούνται να εξηγήσουν ξανά με λίγα λόγια τι είναι ο ρόμβος. Βασικό στοιχείο της συγκεκριμένης ερώτησης, όπως και των προηγούμενων, είναι η περιγραφή της σκέψης των παιδιών που τους ζητείται με σκοπό την βαθύτερη κατανόηση της απάντησής τους.

Η δέκατη ερώτηση αποτελεί σχεδιαστική άσκηση. Οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν γεωμετρικά όργανα για να σχεδιάσουν δύο κύκλους και δύο ρόμβους. Αυτή η ερώτηση ερευνά τις ιδιότητες που τα παιδιά διαφοροποιούν κάθε φορά για να φτιάξουν έναν «άλλο» κύκλο ή ρόμβο, καθώς και τη σχέση του σχήματος που σχεδιάζουν με τον ορισμό που δίνουν για την αντίστοιχη γεωμετρική έννοια.

5.2 Πρόταση σχεδιασμού της διδασκαλίας

Η προτεινόμενη διδακτική παρέμβαση προορίζεται για μαθητές της ΣΤ΄ τάξης, καθώς στην τάξη αυτή οι μαθητές έχουν ήδη διδαχθεί τις έννοιες του κύκλου (Ε’ τάξη) και του ρόμβου (Γ΄ και Δ’ τάξη). Σύμφωνα με τα ΑΠΣ οι μαθητές στο επίπεδο αυτό θα πρέπει να είναι ικανοί να αναλύουν χαρακτηριστικά και ιδιότητες των επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και να αναπτύσσουν μαθηματικά επιχειρήματα για τις γεωμετρικές σχέσεις.

Βέβαια, οι μαθητές μπορεί να έχουν σχηματίσει μια προσωπική τους εικόνα της έννοιας για τον κύκλο ή τον ρόμβο, αλλά δε συμμετέχουν συνήθως σε διαδικασίες απόδοσης ορισμού εννοιών. Οι περισσότεροι είναι ικανοί να αναγνωρίζουν τις αναγκαίες συνθήκες ενός ορισμού αλλά παρουσιάζουν συνήθως δυσκολίες στον προσδιορισμό των ικανών του συνθηκών. Ουσιαστικά, ορίζουν μια έννοια βασιζόμενοι σε μια λίστα ιδιοτήτων της έννοιας που πολλές φορές μπορεί να οδηγήσει σε κάτι τελείως διαφορετικό. Για παράδειγμα, ο ορισμός του τετραγώνου ως «ένα πολύγωνο με τέσσερις ίσες πλευρές και τέσσερις γωνίες των 90 μοιρών» δεν είναι επαρκής καθώς τα πολύγωνα δεν περιορίζονται μόνο στα τετράπλευρα. Θα μπορούσε κανείς να σχεδιάσει ένα οχτάγωνο με τέσσερις ίσες πλευρές και τέσσερις ορθές γωνίες (σχήμα) που ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες αλλά δεν είναι τετράγωνο (Zaskis & Leikin, 2008).



Παράδειγμα πολυγώνου με τέσσερις ίσες πλευρές και τέσσερις γωνίες των 90°

Τα ερωτήματα που διεγείρονται επομένως, είναι με ποιο τρόπο θα μπορούσαμε να καθοδηγήσουμε τους μαθητές σε μια διαδικασία απόδοσης ορισμού, η οποία περιλαμβάνει την εκμάθηση των χαρακτηριστικών ενός ορισμού; Με ποιο τρόπο μπορεί η ιστορική προσέγγιση των ορισμών των γεωμετρικών εννοιών να αξιοποιηθεί διδακτικά, ώστε να συμβάλει στη βαθύτερη κατανόησή τους;

Σύμφωνα με την θεωρία του Fischbein (1993), οι μαθηματικές έννοιες καλό θα ήταν να εισάγονται με διάφορα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα, μέσω των οποίων θα αναδυθούν γνωστικές συγκρούσεις μεταξύ της εννοιολογικής και της σχηματικής όψης της έννοιας. Επίσης, ο εκπαιδευτικός δεν πρέπει απλά να εισάγει τον ορισμό αλλά να υποδείξει τις αντιθέσεις μεταξύ της εικόνας της έννοιας (σχηματική όψη) και του τυπικού ορισμού της (εννοιολογική όψη) και να γίνεται εκ βαθέως συζήτηση σχετικά με τα δύσκολα παραδείγματα, ένα εγχείρημα που επιδιώκεται στο πρώτο βήμα των προτεινόμενων φύλλων εργασίας.

Για τη δημιουργία των φύλλων εργασίας λήφθηκε εξίσου υπόψη η άποψη των Zazkis & Leikin (2008), ότι τα παραδείγματα που διατυπώνουν οι μαθητές αντικατοπτρίζουν την κατανόησή τους για συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ισχυρό παιδαγωγικό εργαλείο για την ενίσχυση της εκμάθησης των μαθηματικών. Συνεπώς, μέσα από την εκτίμηση και ερμηνεία των παραδειγμάτων ορισμών που θα διατυπώσουν οι μαθητές (στο βήμα $1^{ο}$), μπορούν να διεξαχθούν συμπεράσματα σχετικά με τις μαθηματικές τους ικανότητες και τις πιθανές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στη κατανόηση των ορισμών του κύκλου και του ρόμβου.

Επίσης, σύμφωνα με τον DeVilliers (1998), οι μαθητές θα πρέπει να συμμετέχουν ενεργά σε δραστηριότητες απόδοσης ορισμού εννοιών και να τους δίνεται η ευκαιρία να επιλέγουν οι ίδιοι τους ορισμούς τους καθώς αυτό μπορεί να τους οδηγήσει στη χρήση σωστής ορολογίας και την κατασκευή επίσημου ορισμού. (Neel-Romine, Paul & Shafer, 2012; De Villiers, 1998) Έτσι, στα φύλλα εργασίας προτείνονται δραστηριότητες μέσα από τις οποίες αναμένεται να ανακαλύψουν οι μαθητές τις ιδιότητες των γεωμετρικών εννοιών που εξετάζονται και να οδηγηθούν σταδιακά και πάντα υπό την επίβλεψη του εκπαιδευτικού στη διατύπωση ενός αποδεκτού ορισμού.

Στην παρούσα εργασία προτείνεται παράλληλα και η χρήση πρωτότυπων ιστορικών πηγών για την ολοκλήρωση της διδασκαλίας των ορισμών του κύκλου και του ρόμβου. Η χρήση πρωτότυπων πηγών για τη διδασκαλία μιας μαθηματικής έννοιας αποτελεί ένα δύσκολο εγχείρημα. Αυτό που επιδιώκεται είναι να διατυπωθούν οι κατάλληλες ερωτήσεις που θα οδηγήσουν τους μαθητές στο ζητούμενο της εκάστοτε διδασκαλίας μέσα από την ιστορική πηγή. Στη συγκεκριμένη περίπτωση προσδοκάται να γίνει αντιληπτό από τους μαθητές ότι η μαθηματική έννοια του κύκλου και του ρόμβου που σήμερα χρησιμοποιούμε με τόση ευκολία και τις θεωρούμε τετριμμένες, συνάντησαν αρκετές δυσκολίες και εμπόδια στο παρελθόν. Μέσω των ερωτήσεων, αναμένεται επίσης να αναδειχθεί και η αλλαγή του νοήματος που αποδίδεται στον όρο «κύκλος» κατά το πέρασμα των αιώνων.

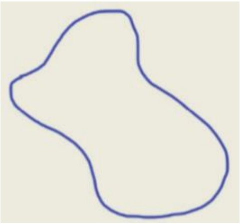
Συνεπώς, μέσα από τη χρήση των ιστορικών πηγών στη διδασκαλία και τα σχόλια που θα διατυπώσουν οι μαθητές, λαμβάνοντας υπόψη και τις αρχικές τους απαντήσεις στο ερωτηματολόγιο ανίχνευσης δυσκολιών, επιδιώκεται και η διεξαγωγή κάποιων συμπερασμάτων για το ζήτημα του «ιστορικού παραλληλισμού».

5.2.1 Πρόταση διδασκαλίας για την έννοια του κύκλου (5 διδακτικές ώρες)

Βήμα 1^{ο}: Καταγραφή ορισμών

Ξεκινώντας, ο εκπαιδευτικός χωρίζει τους μαθητές σε ομάδες ανάλογα με το δυναμικό της τάξης. Έπειτα, ζητείται από τους μαθητές να γράψει ο καθένας έναν δικό του ορισμό για την έννοια του κύκλου και να τον μοιραστεί με τους υπόλοιπους της ομάδας του. Στη συνέχεια, ο εκπαιδευτικός ζητάει από τους μαθητές να αναφέρουν τους ορισμούς που διατύπωσαν και τους καταγράφει στον πίνακα. Στο σημείο αυτό αναμένουμε κάποιοι μαθητές να δώσουν ορισμούς βασιζόμενοι στην οπτική εμφάνιση του σχήματος της έννοιας (όπως π.χ. ότι έχει στρογγυλό σχήμα, ότι μοιάζει με τη ρόδα ενός αυτοκινήτου ή με ένα νόμισμα, ότι δεν έχει γωνίες κ.α.), ενώ κάποιοι άλλοι μπορεί να αναφερθούν στις ιδιότητες της έννοιας (όπως π.χ. ότι δεν έχει πλευρές, γωνίες ή κορυφές, ότι είναι μια γωνία 360°, ότι περιέχει διάμετρο και ακτίνα, ότι όλοι οι διάμετροι ή οι ακτίνες έχουν το ίδιο μήκος, κ.α.)

Αφού καταγραφούν όλοι οι ορισμοί ο εκπαιδευτικός ελέγχει την ορθότητά τους. Σκοπός στην παρούσα φάση είναι να παρουσιαστεί στους μαθητές ο τρόπος που μπορεί να ελεγχθεί ένας ορισμός επιχειρώντας να σχεδιάσουμε στον πίνακα ένα σχήμα - αντιπαράδειγμα που συνάδει με τον ορισμό αλλά δεν είναι κύκλος. Για παράδειγμα, η πρόταση «κύκλος είναι ένα στρογγυλό σχήμα που μοιάζει με ένα νόμισμα» θα μπορούσε να συμπεριλαμβάνει κι άλλα σχήματα που δεν είναι κύκλοι και μπορεί να τα σχεδιάσει ο εκπαιδευτικός στον πίνακα. Για την πρόταση «κύκλος είναι μια κλειστή καμπύλη γραμμή που δεν έχει πλευρές, γωνίες ή κορυφές» θα μπορούσε να σχεδιαστεί το σχήμα 1, ενώ για την πρόταση «ο κύκλος αποτελείται από καμπύλες γραμμές χωρίς κανένα άνοιγμα» μπορεί να σχεδιαστεί ένα σχήμα όπως το σχήμα 2.



Σχήμα 1

Σχήμα 2

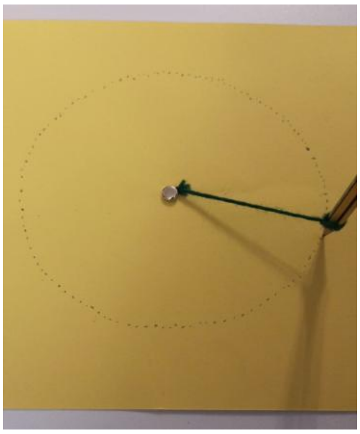
Η παραγωγική συζήτηση που θα προκύψει από την παραπάνω διαδικασία μπορεί να προκαλέσει μεγάλο ενδιαφέρον στους μαθητές. Ιδανικό θα ήταν να σηκωθούν και οι ίδιοι στον πίνακα να ελέγξουν κάποιους ορισμούς.

Πολύ πιθανό είναι επίσης, να προκύψουν και προτάσεις που αποτελούν αληθείς δηλώσεις για τον κύκλο. Οι προτάσεις αυτές μπορούν να καταγραφούν ως «ιδιότητες του κύκλου»

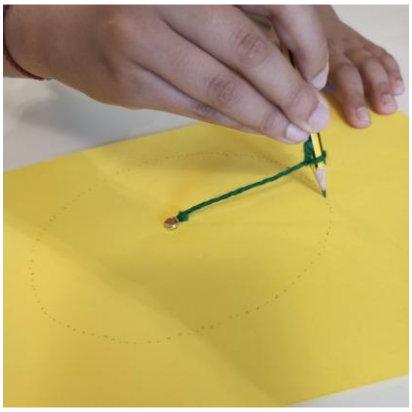
Βήμα 2ο: Κατασκευή κύκλου

Ο εκπαιδευτικός χορηγεί στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας (βλ. Παράρτημα), το οποίο περιέχει οδηγίες για την κατασκευή μοντέλου ενός κύκλου χρησιμοποιώντας ένα κομμάτι χαρτόνι, ένα διπλόκαρφο, ένα μικρό κομματάκι νήμα ή σπάγκο (5 – 10 εκατοστά) κι ένα μολύβι. Οι μαθητές μπορούν να εργαστούν είτε ατομικά είτε με τον διπλανό τους στο θρανίο. Οι οδηγίες περιλαμβάνουν τα εξής:

1. Τοποθετήστε το διπλόκαρφο στο κέντρο περίπου του χαρτονιού κι ανοίξτε το από κάτω ώστε να στερεωθεί καλά και να μη βγαίνει από το χαρτόνι.
2. Στη συνέχεια, δέστε τη μια άκρη του νήματος κάτω από την «κεφαλή» του διπλόκαρφου (όχι πολύ σφιχτά ώστε να μπορεί να περιστρέφεται) και την άλλη άκρη στο μολύβι (κοντά στη μύτη του).
3. Τεντώστε το νήμα και κάντε μια κουκίδα με τη μύτη του μολυβιού στο χαρτόνι. Σηκώστε ξανά το μολύβι και με τον ίδιο τρόπο κάντε μια άλλη κουκίδα σε ένα διαφορετικό σημείο του χαρτονιού.
4. Φροντίστε το νήμα να είναι πάντα τεντωμένο.



Σκοπός της δραστηριότητας είναι να μπορέσουν οι μαθητές να εστιάσουν στην κατασκευή του σχήματος του κύκλου δημιουργώντας πολλά σημεία που ισαπέχουν από ένα δοσμένο σημείο. Όσο περισσότερες κουκίδες δημιουργούν τόσο πιο εμφανής γίνεται ο κύκλος. Είναι πολύ σημαντικό να ενθαρρύνονται οι μαθητές καθ’ όλη τη διάρκεια της δραστηριότητας και να τους καταστεί σαφές ότι πρέπει να δημιουργούνε κουκίδες αντί να σέρνουν το μολύβι κυκλικά. Το πιο σημαντικό σημείο στην παρούσα φάση, είναι να κατανοήσουν οι μαθητές τη σύνδεση μεταξύ της διαδικασίας κατασκευής του κύκλου και του ορισμού του. Για να επιτευχθεί αυτό, χρειάζεται συχνά ένας προσανατολισμός από τον εκπαιδευτικό μέσα από κατάλληλα διατυπωμένες ερωτήσεις.



Βήμα 3^{ο}: Κατασκευή ορισμού με καθοδήγηση

Αφού ολοκληρώσουν όλοι οι μαθητές της τάξης την προηγούμενη δραστηριότητα, ο εκπαιδευτικός θέτει ερωτήσεις που εστιάζουν στην κατασκευή των σχημάτων που έχουν δημιουργήσει οι μαθητές και μπορεί να καταλήξουν σε έναν αποδεκτό ορισμό της έννοιας του κύκλου.

Ερώτηση 1^{η}: Πόσα σημεία μπορούν να δημιουργηθούν με αυτόν τον τρόπο πάνω στο χαρτόνι;

Σκοπός της ερώτησης αυτής είναι να γίνει η μετάβαση από τη συζήτηση για κουκίδες στο χαρτόνι σε συζήτηση για σημεία πάνω σε κύκλους και μέσω της διερεύνησης του αριθμού των σημείων που απαιτούνται για τον ορισμό του κύκλου να εξοικειωθούν οι μαθητές με πιο επίσημες μαθηματικές ορολογίες. Για να διευκολύνει ο εκπαιδευτικός τους μαθητές μπορεί να τους επισημάνει ότι πάντα μεταξύ δύο οποιοδήποτε σημείων υπάρχει ένα ακόμα σημείο, προκειμένου να οδηγηθούν σταδιακά στο συμπέρασμα ότι τα σημεία πάνω σε έναν κύκλο μπορεί να είναι άπειρα.

Ερώτηση 2^{η}: Τι θα γινόταν αν συνεχίζατε να δημιουργείτε κουκίδες (σημεία) για τις επόμενες ώρες; Θα χρειαζόταν να ενώσουμε τα σημεία;

Σκοπός της ερώτησης είναι να διαπιστώσουν οι μαθητές, μετά από σκέψη και συζήτηση σε μικρές ομάδες στην τάξη, ότι τα σημεία βρίσκονται τόσο κοντά το ένα με το άλλο που φαίνονται ενωμένα αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι.

Ερώτηση 3^{η}: Τι ρόλο έχουν το διπλόκαρφο, το μολύβι και το σχοινί σε αυτή την δραστηριότητα;

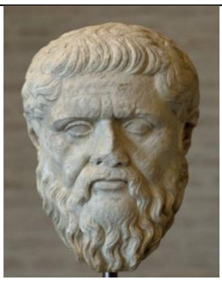
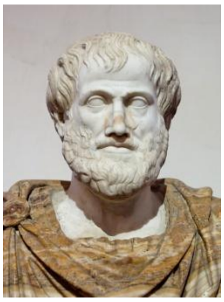
Οι μαθητές παρατηρούν ότι όλα τα σημεία σχηματίζονται μετακινώντας το μολύβι γύρω από το διπλόκαρφο κι ότι αυτά απέχουν πάντα την ίδια απόσταση από το διπλόκαρφο, το οποίο βρίσκεται στο κέντρο. Σκοπός της ερώτησης είναι να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι η θέση του διπλόκαρφου αντιπροσωπεύει το κέντρο του κύκλου και το νήμα την ακτίνα του κύκλου, η οποία παίζει σημαντικό ρόλο στην κατασκευή του.

Ερώτηση 4^{η}: Γράψτε έναν ορισμό για τον κύκλο.

Η ερώτηση αυτή στοχεύει στην κατασκευή ενός αποδεκτού ορισμού για τον κύκλο από τους μαθητές αφού έχουν προηγουμένως κατανοήσει και καταγράψει τις βασικές ιδιότητες της έννοιας, όπως ότι τα σημεία του κύκλου είναι άπειρα, ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο (το κέντρο) και ότι ουσιαστικά ο κύκλος είναι ένα σύνολο από σημεία.

Βήμα 4ο: Χρήση ιστορικών πηγών

Αφού έχει κατασκευαστεί ένας αποδεκτός ορισμός για τον κύκλο και τον καταγράψουν οι μαθητές, ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει στην τάξη τον παρακάτω πίνακα με κάποιους από τους ορισμούς που έχουν διατυπώσει οι αρχαίοι μαθηματικοί και φιλόσοφοι του παρελθόντος, αλλά και αυτόν που εμπεριέχεται σήμερα στο σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου.

Συγγραφείς		**Ορισμοί**
	**Πλάτωνας** (427 – 437 π.Χ.) αρχαίος Έλληνας φιλόσοφος από την Αθήνα	*«εκείνο του οποίου τα πλέον απομακρυσμένα σημεία βρίσκονται στην ίδια απόσταση – και προς όλες τις διευθύνσεις – από το μέσον του (κέντρο του)»*
	**Αριστοτέλης** (384 – 322 π,Χ.) αρχαίος Έλληνας φιλόσοφος και επιστήμονας	*«το κυκλικό (περιφερόγραμμον) σχήμα που οριοθετείται από μία γραμμή»*
	**Ευκλείδης** (300 π.Χ.) κορυφαίος έλληνας μαθηματικός, θεωρείται από πολλούς ο «πατέρας της Γεωμετρίας»	*«κύκλος είναι το επίπεδο σχήμα το οποίο περιέχεται από μία γραμμή που ονομάζεται περιφέρεια, της οποίας τα σημεία ισαπέχουν από ένα σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου. Το σημείο αυτό ονομάζεται κέντρο του κύκλου»*

 **Ήρωνας ο Αλεξανδρινός** (2^{ος} μ.Χ.) έλληνας μηχανικός, γεωμέτρης και εφευρέτης	*«γράφεται ένας κύκλος, όταν μια ευθεία του επιπέδου, στρέφεται περί το ένα άκρο της, το οποίον παραμένει σταθερό, έως ότου το άλλο, επανέλθει στην αρχική του θέση»*
 **Σπινόζα** (1632 – 1677) Ολλανδός φιλόσοφος, εβραϊκής καταγωγής.	*«το σχήμα που προκύπτει από την περιστροφή ενός ευθύγραμμου τμήματος γύρω από ένα σταθερό άκρο του»*
Σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου (σήμερα)	*«Κύκλος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση από ένα σταθερό σημείο Ο. Το σημείο Ο λέγεται κέντρο του κύκλου»*

Έπειτα τους καλεί να συμμετέχουν σε μια συζήτηση, η οποία θα κατευθύνεται από τα εξής ερωτήματα:

- Είναι κατά τη γνώμη σου χρήσιμοι οι ανωτέρω ορισμοί για την κατανόηση της έννοιας του κύκλου;
- Ποιος ορισμός θεωρείς ότι περιγράφει καλύτερα την έννοια του κύκλου;
- Ποιον ορισμό καταλαβαίνεις καλύτερα;
- Ποιοι ορισμοί αναδεικνύουν τον τρόπο δημιουργίας ενός κύκλου;
- Ποιο ήταν το νόημα της έννοιας του κύκλου κατά το παρελθόν;
- Ποιο είναι το νόημα της έννοιας του κύκλου σήμερα;
- Ποιος ορισμός ταιριάζει περισσότερο με τον ορισμό που διατυπώσαμε στη τάξη;
- Ποιον ορισμό θα χρησιμοποιούσες για να περιγράψεις τι σημαίνει «κύκλος» σε έναν συμμαθητή ή έναν φίλο σου;

Σκοπός της συζήτησης είναι η παρακίνηση του ενδιαφέροντος των μαθητών, και η βαθύτερη κατανόηση των ορισμών του κύκλου. Προσεγγίζοντας τους ορισμούς μέσα από την ιστορία, ανακαλύπτουν την αναγκαιότητα ύπαρξής τους. Με αυτόν τον τρόπο, είναι πιο εύκολο για τους μαθητές να τους «δεχτούν» και να προσπαθήσουν να καταλάβουν το νόημα των εννοιών, σε σύγκριση με την άμεση διδασκαλία τους.

5.2.3 Πρόταση διδασκαλίας για την έννοια του ρόμβου (5 διδακτικές ώρες)

Βήμα 1ο: Καταγραφή ορισμών

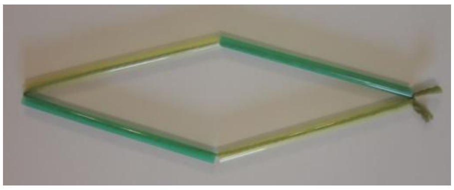
Στη φάση αυτή ακολουθείται ακριβώς η ίδια διαδικασία, όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα για τον κύκλο, με τη διαφορά ότι αντί για τον ορισμό του κύκλου ο εκπαιδευτικός ζητάει από τους μαθητές να διατυπώσουν τους δικούς τους προσωπικούς ορισμούς για την έννοια του ρόμβου.

Βήμα 2ο: Κατασκευή ρόμβου

Ο εκπαιδευτικός χορηγεί στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας (βλ. Παράρτημα), το οποίο περιέχει οδηγίες για την κατασκευή μοντέλου ενός ρόμβου χρησιμοποιώντας καλαμάκια και λίγο νήμα ή σπάγκο. Για την ολοκλήρωση του φύλλου εργασίας οι μαθητές θα χρειαστούν μολύβι, ψαλίδι και γεωμετρικά όργανα μέτρησης. Οι μαθητές μπορούν να εργαστούν είτε ατομικά είτε με τον διπλανό τους στο θρανίο. Οι οδηγίες περιλαμβάνουν τα εξής:

1. Πάρτε 4 καλαμάκια και κόψτε τα έτσι, ώστε να έχουν ίδιο μήκος μεταξύ τους.
2. Περάστε το νήμα μέσα στα καλαμάκια, τεντώστε το καλά και δέστε τις άκρες μεταξύ τους. Κόψτε το νήμα που περισσεύει.
3. Φτιάξτε ένα τετράγωνο όπως στην εικόνα.

4. Τραβήξτε τις 2 κορυφές του τετραγώνου ώστε να αλλάξει σχήμα. Τι σχήμα προέκυψε;



Βήμα 3^{o}: Κατασκευή ορισμού με καθοδήγηση

Αφού ολοκληρώσουν όλοι οι μαθητές της τάξης την προηγούμενη δραστηριότητα, ο εκπαιδευτικός θέτει ερωτήσεις – οδηγίες, που εστιάζουν στα σχήματα του ρόμβου που έχουν δημιουργήσει οι μαθητές, καθώς και στην αναγνώριση και καταγραφή των βασικών ιδιοτήτων των σχημάτων που μπορεί να καταλήξουν σε έναν αποδεκτό ορισμό της έννοιας του ρόμβου.

Ερώτηση 1^{η}: Τι αλλάζει καθώς μετακινείται το σχήμα; Τι παραμένει το ίδιο;

Σκοπός των ερωτήσεων, είναι να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι με την «κίνηση» του σχήματος οι πλευρές παραμένουν ίδιες, αλλάζουν όμως οι γωνίες του. Μέσω της συζήτησης μπορούν να οδηγηθούν στο συμπέρασμα ότι οι γωνίες του νέου σχήματος δεν είναι ορθές όπως στο τετράγωνο και ότι ο ρόμβος πάντα αποτελείται από δύο οξείες γωνίες και δύο αμβλείες.

Ερώτηση 2^{η}: Αποτυπώστε το περίγραμμα του νέου σχήματος σε χαρτί και χαράξτε τις διαγώνιές του. Έπειτα υπολογίστε: α) τα μήκη των πλευρών του β) τα μέτρα των γωνιών του γ) τα μήκη των διαγώνιών του δ) αν οι δύο διαγώνιες τέμνονται στο σημείο Κ, να υπολογίσετε τα μήκη των τεσσάρων τμημάτων που σχηματίζονται από το Κ ως τις κορυφές. Τι παρατηρείτε;

Σκοπός των παραπάνω εργασιών, είναι μέσω της παρατήρησης και της μέτρησης να αντιληφθούν οι μαθητές τα βασικά χαρακτηριστικά του σχήματος του ρόμβου και να τα γράψουν με σκοπό να δημιουργήσουν στη συνέχεια μια λίστα με τις ιδιότητες του ρόμβου.

Ερώτηση 3^{η}: *Ποιες από τις παραπάνω ιδιότητες θεωρείτε ότι χρειάζονται για τον ορισμό του ρόμβου;*

Οι μαθητές καλούνται να αναλογιστούν ποιες από τις ιδιότητες που καταγράψανε είναι αναγκαίες για να οριστεί η γεωμετρική έννοια του ρόμβου και ποιες δευτερεύουσες. Στη φάση αυτή, είναι πολύ σημαντική η σωστή καθοδήγηση της συζήτησης στην τάξη από τον εκπαιδευτικό.

Ερώτηση 4^{η}: *Γράψτε ένα ορισμό για τον ρόμβο.*

Η ερώτηση αυτή στοχεύει στην κατασκευή ενός αποδεκτού ορισμού για τον ρόμβο από τους μαθητές αφού έχουν προηγουμένως κατανοήσει και καταγράψει τις βασικές ιδιότητες της έννοιας.

Βήμα 4^{ο}: Χρήση ιστορικών πηγών

Αφού ολοκληρωθεί το 3^{ο} βήμα, παρουσιάζει ο εκπαιδευτικός τον παρακάτω πίνακα με τους ορισμούς για την έννοια του ρόμβου που έχουν διατυπωθεί στο παρελθόν από τον Ευκλείδη, τον Ήρωνα και τον Πρόκλο (απλή περιγραφή) αλλά και αυτόν που διδάσκεται σήμερα και αναγράφεται στο βιβλίο μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου.

Συγγραφείς	**Ορισμοί**
 **Ευκλείδης** (300 π.Χ.) κορυφαίος μαθηματικός, θεωρείται από πολλούς ο «πατέρας της Γεωμετρίας»	*«Από τα τετράπλευρα σχήματα ρόμβοι είναι εκείνα που είναι ισόπλευρα αλλά όχι ορθογώνια»*
 **Ήρωνας ο Αλεξανδρινός** (2^{ος} μ.Χ.) έλληνας μηχανικός, γεωμέτρης και εφευρέτης	*«Τά δέ ἰσόπλευρα μέν, μη ὀρθογώνια δέ,..» (Αυτά που είναι μεν ισόπλευρα, αλλά όχι ορθογώνια)*
Πρόκλος (412-485 μ.Χ.), νεοπλατωνικός φιλόσοφος, ένας από τους τελευταίους, σημαντικότερους κλασικούς φιλοσόφους	προσπαθεί να εξηγήσει το ρόμβο με αναφορά στην εμφάνισή του ως ένα τετράγωνο περιστρεφόμενο («τετράγωνον ρομβούμενον»)
Σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου (σήμερα)	*«Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες»*

Έπειτα, τους καλεί να συμμετέχουν σε μια συζήτηση, η οποία θα κατευθύνεται από τα εξής ερωτήματα:

- Είναι κατά τη γνώμη σου χρήσιμοι οι ανωτέρω ορισμοί για την κατανόηση της έννοιας του ρόμβου;
- Ποιος ορισμός θεωρείς ότι περιγράφει καλύτερα την έννοια του ρόμβου;

- Ποιον ορισμό καταλαβαίνεις καλύτερα;
- Μπορεί να θεωρηθεί η περιγραφή του Πρόκλου ως ορισμός της έννοιας του ρόμβου;
- Σε τι διαφέρει ο σημερινός ορισμός από αυτούς που έδωσαν ο Ευκλείδης και ο Ήρωνας;
- Ποιος ορισμός ταιριάζει περισσότερο με τον ορισμό που διατυπώσαμε στη τάξη;
- Ποιον ορισμό θα χρησιμοποιούσες για να περιγράψεις τι σημαίνει «ρόμβος» σε έναν συμμαθητή ή έναν φίλο σου;

Η παραγωγική συζήτηση στην οποία θα περιέλθουν οι μαθητές στοχεύει στην άσκηση της κριτικής τους σκέψης, μέσω μιας διαδικασίας σύγκρισης των ορισμών που παρουσιάζονται, καθώς και στη βαθύτερη κατανόηση των ορισμών του ρόμβου. Οι μαθητές θα έχουν επίσης τη δυνατότητα, μέσω αυτής της δραστηριότητας, να αντιπαραβάλλουν τους ορισμούς που κατασκεύασαν οι ίδιοι με αυτούς που τους παρουσιάζονται, κάτι που θα μπορούσε τους οδηγήσει στο επιθυμητό συμπέρασμα ότι είναι απαραίτητο ένας ορισμός να περιέχει μόνο τα αναγκαία και επαρκή χαρακτηριστικά που καθορίζουν την έννοια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{o}

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Κεφάλαιο 6ο

Συζήτηση - Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία επιχειρήθηκε η μελέτη των δυσκολιών κατανόησης των ορισμών των γεωμετρικών εννοιών του κύκλου και του ρόμβου των μαθητών ΣΤ΄ τάξης, καθώς και η παρατήρηση πιθανών φαινομένων «ιστορικού παραλληλισμού» ανάμεσα στους ορισμούς που χρησιμοποίησαν οι μαθηματικοί στο παρελθόν και σε αυτούς που διατυπώνουν συνήθως οι μαθητές. Η μελέτη προσέγγισε τις βασικές αρχές της θεωρίας των σχηματικών εννοιών του Fischbein (1993) σε συνδυασμό με τη θεωρία του Vinner (1991) και των συνεργατών του, καθώς και την ιστορική εξέλιξη των ορισμών του κύκλου και του ρόμβου που αναγράφονται στα σχολικά εγχειρίδια διδασκαλίας της Γεωμετρίας από το 1870 έως σήμερα και τις οδηγίες διδασκαλίας που δίνονται στους εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Ωστόσο, δεύτερο σημαντικό άξονα της εργασίας αποτέλεσε ο σχεδιασμός μιας πρωτότυπης διδακτικής παρέμβασης με αξιοποίηση στοιχείων από την Ιστορία των Μαθηματικών, που έχει ως στόχο την ανίχνευση των δυσκολιών των μαθητών καθώς και την ενεργή συμμετοχή τους σε ασκήσεις απόδοσης ορισμού εννοιών, οι οποίες αποτελούν μια πολύτιμη δραστηριότητα, μαθηματική αλλά και παιδαγωγική, για να προωθήσουν μια βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών γενικότερα αλλά και της φύσης και του ρόλου των ορισμών ειδικότερα.

Από τη βιβλιογραφική πλαισίωση, σε συνδυασμό με τη μελέτη των σχολικών εγχειριδίων και το σχεδιασμό της διδακτικής παρέμβασης, προέκυψαν κάποια γενικά συμπεράσματα, τα οποία παρατίθενται παρακάτω και φαίνεται πως εμπεριέχουν απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στην παρούσα εργασία.

Για το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, αναφορικά με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη διατύπωση των ορισμών του κύκλου και του ρόμβου, η συγκριτική μελέτη διεθνούς και ελληνικής βιβλιογραφίας ανέδειξε ότι οι γεωμετρικές έννοιες προσεγγίζονται διαισθητικά στο δημοτικό σχολείο, ενώ παρατηρήθηκε η έλλειψη τυπικών ορισμών στα σημερινά σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών. Επομένως, οι ορισμοί που δίνουν οι μαθητές για τις έννοιες φαίνεται να είναι επηρεασμένοι από τη διαίσθηση και τις προηγούμενες εμπειρίες τους, ενώ παρουσιάζουν αδυναμίες στην απόδοση ενός τυπικού ορισμού.

Από τη μελέτη των σχολικών δραστηριοτήτων στα σχολικά εγχειρίδια, παρατηρείται ότι οι μαθητές δε συμμετέχουν στην πραγματικότητα σε διαδικασίες ορισμού εννοιών, ενώ από τη βιβλιογραφία προκύπτει ότι πολλές φορές γνωρίζουν τους μαθηματικούς ορισμούς, αλλά αδυνατούν να τους εφαρμόσουν. Για παράδειγμα, μπορεί κάποιος μαθητής να γνωρίζει τον ορισμό μιας κατηγορίας σχημάτων, αλλά να μην αναγνωρίσει σωστά την κατηγορία στην οποία ανήκει ένα συγκεκριμένο σχήμα. Οι περισσότεροι είναι ικανοί να αναγνωρίζουν τις αναγκαίες συνθήκες ενός ορισμού αλλά παρουσιάζουν συνήθως δυσκολίες στον προσδιορισμό των ικανών του συνθηκών. Τυπικά, ορίζουν μια έννοια βασιζόμενοι σε μια λίστα ιδιοτήτων της έννοιας που πολλές φορές δεν οδηγεί στο προσδοκώμενο αποτέλεσμα. Για τον κύκλο συγκεκριμένα, φαίνεται πως οι μαθητές δυσκολεύονται να χρησιμοποιήσουν τα κρίσιμα χαρακτηριστικά του κατά τη δημιουργία του ορισμού του, ενώ για τον ρόμβο η πλειοψηφία των μαθητών παρουσιάζει αδυναμία απόδοσης ενός σωστού ορισμού.

Σχετικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα που αφορά τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην αναγνώριση των σχηματικών εννοιών του κύκλου και του ρόμβου, τα βασικά ευρήματα των σχετικών ερευνών δείχνουν ότι για πολλούς μαθητές το σχήμα δεν ελέγχεται αυστηρά από τους τυπικούς περιορισμούς του (ορισμό). Συνήθως αναγνωρίζουν τα σχήματα σύμφωνα με ένα σχήμα που λειτουργεί ως «πρότυπο». Έτσι, εάν ένα συγκεκριμένο σχήμα διαφέρει οπτικά από το πρότυπο (παρόλο που μπορεί να ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις του ορισμού), ο μαθητής μπορεί να αποφασίσει λανθασμένα (π.χ. στην αναγνώριση ενός τετραγώνου ως παραλληλόγραμμου). Ως επακόλουθο, οι μαθητές περιορίζονται στις δικές τους προσωπικές εικόνες της έννοιας και αγνοούν τους ορισμούς των εννοιών όταν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουν τις έννοιες. Έτσι, παρατηρείται ότι οι μαθητές αδυνατούν να αναγνωρίσουν τον ρόμβο σε μη πρότυπους προσανατολισμούς και επιπλέον, στην πλειοψηφία τους ταυτίζουν τον κύκλο με τον κυκλικό δίσκο.

Όσον αφορά το τρίτο ερευνητικό ερώτημα, μετά από προσεκτική μελέτη και ανάλυση των ερευνών που αφορούν τη διερεύνηση των δυσκολιών των μαθητών στην κατανόηση των ορισμών διαφόρων γεωμετρικών εννοιών, συμπεραίνεται ότι παρατηρούνται φαινόμενα ιστορικού παραλληλισμού ανάμεσα στους ορισμούς που χρησιμοποιήθηκαν κατά το παρελθόν και σε αυτούς που διατυπώνουν οι μαθητές. Για παράδειγμα στην πρόταση που έδωσε μαθητής της ΣΤ΄ τάξης ότι «ο κύκλος είναι ένα σχήμα που περιέχει στροφή 360 μοιρών» φαίνεται η προσπάθεια του μαθητή να συσχετίσει το σχήμα με τον τρόπο δημιουργίας του. Η περιγραφή του κύκλου ως η «καμπύλη γραμμή χωρίς άνοιγμα» μοιάζει να χει κοινά στοιχεία με τον ορισμό που έδωσε ο Αριστοτέλης *«το κυκλικό (περιφερόγραμμον) σχήμα που οριοθετείται από μία* *γραμμή» Παρόμοια* φαινόμενα παρατηρούνται και στους ορισμούς που δίνουν οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου, όπως για παράδειγμα στον ορισμό «όλα τα σημεία του κύκλου απέχουν ίση απόσταση από το κέντρο του κύκλου προς τις πλευρές του. Ο κύκλος είναι ένα γεωμετρικό σχήμα με κέντρο και ίσες αποστάσεις από αυτό ως τις πλευρές του» στον οποίο παρατηρούνται ομοιότητες με τον ορισμό που έδωσε ο Πλάτωνας: *«εκείνο του οποίου τα πλέον απομακρυσμένα σημεία βρίσκονται στην ίδια απόσταση – και προς όλες τις διευθύνσεις – από το μέσον του (κέντρο του)»*

Για τον ρόμβο αντίστοιχα, έχουν καταγραφεί ορισμοί από τους μαθητές όπως «Ο ρόμβος έχει όλες τις πλευρές του ίσες σαν ένα ανάποδο τετράγωνο» και «Ο ρόμβος είναι σαν το τετράγωνο. Έχει κι αυτός 4 ίσες πλευρές απλώς ο ρόμβος είναι γυρισμένος κάθετα» οι οποίοι μοιάζουν με την παρομοίωση που έκανε ο Πρόκλος για τον ρόμβο ως ένα τετράγωνο περιστρεφόμενο («τετράγωνον ρομβούμενον»), ενώ κάποιοι άλλοι ορισμοί διατυπώνονται με κριτήριο τις πλευρές και τις γωνίες («Ρόμβος είναι ένα σχήμα που έχει 4 πλευρές και 4 γωνίες ίσες», «Ρόμβος είναι ένα σχήμα που έχει 4 γωνίες και 4 πλευρές. Όλες οι πλευρές του είναι ίσες», «Ρόμβος λέγεται το τετράπλευρο που έχει όλες τις πλευρές ίσες και τις γωνίες λιγότερο από 90°») και έρχονται πιο κοντά στους ορισμούς του Ευκλείδη και του Ήρωνα, οι οποίοι διατύπωσαν ότι οι ρόμβοι είναι τα τετράπλευρα σχήματα που είναι ισόπλευρα αλλά όχι ορθογώνια.

Επιπρόσθετα, από τα παραδείγματα των ορισμών που θα διατυπώσουν οι μαθητές στο προτεινόμενο ερωτηματολόγιο της παρούσας εργασίας, αναμένεται να παρατηρηθούν παρόμοια φαινόμενα «ιστορικού παραλληλισμού» που θα διαφωτίσουν περισσότερο τα συμπεράσματα της παρούσας μελέτης. Συγκεκριμένα, αναμένεται να διατυπωθούν απαντήσεις από τους μαθητές, οι οποίες μπορεί να μην αποτελούν τον τυπικό ορισμό της έννοιας του κύκλου ή του ρόμβου, αλλά να εκφραστούν με τέτοιο τρόπο που να εμφανίζει αναλογίες με τους ορισμούς που χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθηματικούς στο παρελθόν. Από την άλλη, υπάρχει η πιθανότητα διατύπωσης παραδειγμάτων ορισμών από τους μαθητές, οι οποίοι μπορεί να συμπίπτουν με τους τυπικούς ορισμούς των ανωτέρω εννοιών και την ιστορική τους εξέλιξη, αλλά η διατύπωσή τους να αντανακλά την έλλειψη βαθύτερης εννοιολογικής κατανόησης.

Για το τέταρτο ερευνητικό ερώτημα, μπορούμε να πούμε ότι μια διδακτική παρέμβαση με στόχο τον εντοπισμό των δυσκολιών των μαθητών και την εμπλοκή τους σε μια διαδικασία απόδοσης ορισμού που αξιοποιεί ταυτόχρονα και την ιστορική εξέλιξη των ορισμών των γεωμετρικών εννοιών θα πρέπει να δίνει έμφαση στην παραγωγή παραδειγμάτων ορισμού από τους μαθητές, καθώς τα παραδείγματα αυτά μπορεί να λειτουργήσουν ως μέσο για την αποκάλυψη της γνώσης και της κατανόησής τους για τις γεωμετρικές έννοιες που εξετάζονται.

Επιπλέον, γνωρίζοντας ότι κριτήριο και παράγοντας αποτελεσματικής γεωμετρικής λειτουργίας είναι η ικανότητα του ατόμου να διατηρεί τη διπλή φύση των γεωμετρικών σχημάτων κατά την επεξεργασία τους, ο εκπαιδευτικός δεν πρέπει απλά να εισάγει τον ορισμό, αλλά να υποδεικνύει ταυτόχρονα και τις αντιθέσεις μεταξύ της εικόνας της έννοιας και του τυπικού ορισμού της και να γίνεται εκ βαθέως συζήτηση σχετικά με τα δύσκολα παραδείγματα. Αυτό μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στο να διακρίνουν ανάμεσα στα παραδείγματα και μη παραδείγματα της έννοιας με σιγουριά, αποφασιστικότητα και λειτουργικά.

Η διδασκαλία θα πρέπει να εμπεριέχει δραστηριότητες με χειραπτικά υλικά που προάγουν τη διερευνητική ικανότητα των μαθητών και τους καθοδηγούν στην ενεργή συμμετοχή τους σε μια διαδικασία κατασκευής του σχήματος και απόδοσης ορισμού των γεωμετρικών εννοιών. Η ανακαλυπτική πλευρά των δραστηριοτήτων είναι ιδιαίτερα σημαντική για τους μαθητές μιας και η χαρά της ανακάλυψης είναι αυτή που τους ικανοποιεί και κεντρίζει το ενδιαφέρον τους, τους ωθεί στην εξερεύνηση, αυξάνει την αυτοπεποίθηση και τη θέλησή τους για περαιτέρω μάθηση. Η αποτελεσματική χρήση των χειραπτικών υλικών μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να συνδέσουν τις ιδέες τους και να ενσωματώσουν τις γνώσεις τους, έτσι ώστε να αποκτήσουν μια βαθύτερη κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών.

Μια ακόμη βασική παράμετρος της διδασκαλίας είναι η ομαδοσυνεργατική ατμόσφαιρα μάθησης, η οποία συμβάλλει στο να μάθουν οι μαθητές πολλά περισσότερα πέραν των αυστηρά μαθηματικών εννοιών. Τα μέλη της ομάδας διατυπώνουν ιδέες και προτείνουν λύσεις προς τα άλλα μέλη της ομάδας, τις συζητούν, αντιπαρατίθενται, συμφωνούν και διαφωνούν. Με αυτόν τον τρόπο η προηγούμενη γνώση του κάθε μέλους εμπλουτίζεται, αναδιοργανώνεται και μετασχηματίζεται μέσα σε ένα κλίμα επικοινωνίας και συνεργασίας. Η αλληλεπίδραση των μαθητών μεταξύ τους αλλά και με το δάσκαλο επιδρά στο τι μαθαίνουν και πως το μαθαίνουν.

Τέλος, βασικό και ουσιώδες στοιχείο της διδασκαλίας αποτελεί η διδακτική αξιοποίηση στοιχείων από την ιστορική εξέλιξη των ορισμών των εννοιών, η οποία μπορεί να συμβάλλει στην ανάδειξη των διαφορετικών όψεων των γεωμετρικών εννοιών και την καλύτερη κατανόησή τους. Ειδικότερα, η διδασκαλία εστιάζει στη χρήση πρωτότυπων πηγών, καθώς μέσα από τη σύγκριση πρωτότυπων ιστορικών κειμένων προκαλούνται αντιπαραθέσεις που οδηγούν σε δημιουργικό μαθηματικό διάλογο με στόχο την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης των μαθητών, την επίτευξη βαθύτερης εννοιολογικής κατανόησης των ορισμών και την αποφυγή της μηχανιστικής εκμάθησής τους.

Η υλοποίηση μιας διδακτικής παρέμβασης με τα ανωτέρω χαρακτηριστικά αναμένεται να διαφωτίσει περισσότερο τις αντιλήψεις των μαθητών που σχετίζονται με τις μαθηματικές έννοιες και να φανερώσει πως τα παραδείγματα που συνάγονται από τους συμμετέχοντες μπορούν να λειτουργήσουν ως μέσο για την κατανόηση των εννοιών. Επιπρόσθετα, αναμένεται να γίνει αντιληπτό ότι η ενεργή συμμετοχή των μαθητών σε μια διαδικασία απόδοσης ορισμού εννοιών μπορεί να τους οδηγήσει στη χρήση σωστής ορολογίας και την κατασκευή επίσημου ορισμού και να αναδειχθεί η σπουδαιότητα και τα παιδαγωγικά οφέλη της ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών.

6.1 Περιορισμοί - προτάσεις για μελλοντική εκπαιδευτική έρευνα

Στο σημείο αυτό, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι μια εμπειρική έρευνα θα μπορούσε να προσδώσει μεγαλύτερο βάθος στα συμπεράσματα της παρούσας μελέτης, αλλά δεν κατέστη εφικτό λόγω των πρωτοφανών και έκτακτων εξελίξεων στη χώρα μας το τελευταίο διάστημα σχετικά με την πανδημία του Covid-19, οι οποίες είχαν ως συνέπεια το κλείσιμο των σχολικών μονάδων σε όλη την επικράτεια.

Ωστόσο, η παρούσα εργασία μπορεί να αποτελέσει μια στέρεη βάση για μια πιθανή έρευνα που θα υλοποιηθεί από άλλους επιστήμονες ή την ίδια τη συγγραφέα μελλοντικά.

Αν και η συγκεκριμένη μελέτη εστιάζει στις γεωμετρικές έννοιες του κύκλου και του ρόμβου, θα μπορούσε κάλλιστα να επεκταθεί και σε άλλες γεωμετρικές έννοιες που παρουσιάζουν δυσκολίες κατανόησης και δημιουργούν παρανοήσεις στους μαθητές, σε όλο το εύρος της διδακτέας ύλης της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Για παράδειγμα, θα μπορούσαν να διερευνηθούν οι δυσκολίες κατανόησης των ορισμών των γεωμετρικών εννοιών των παραλληλογράμμων και να συγκριθούν τα ευρήματα με τα ανάλογα ευρήματα της έρευνας της Μίχου (2019) στο Γυμνάσιο.

Επίσης, ένα σημαντικό θέμα για μελλοντική έρευνα αφορά τις δυσκολίες που εμφανίζουν οι εκπαιδευτικοί διάφορων εκπαιδευτικών βαθμίδων στην διατύπωση ορισμών των γεωμετρικών εννοιών, καθώς δεν είναι λίγες οι έρευνες που αναδεικνύουν ότι ακόμα και οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να παρέχουν έναν ολοκληρωμένο ορισμό για γεωμετρικές έννοιες. Συνεπώς, θα ήταν ενδιαφέρον να διερευνηθεί η ικανότητα των εκπαιδευτικών να ξεχωρίζουν μεταξύ των αναγκαίων και ικανών συνθηκών μιας έννοιας, η ικανότητα να αποδίδουν την κατάλληλη μαθηματική ορολογία και κυρίως, οι αντιλήψεις τους για το «τι είναι ένας μαθηματικός ορισμός».

Επιπρόσθετα, προκειμένου να είναι σε θέση οι εκπαιδευτικοί να καθοδηγούν τους μαθητές τους σε μια διαδικασία απόδοσης ορισμού μιας έννοιας, θα πρέπει να έχουν την ικανότητα να εμπλέκονται και οι ίδιοι σε μια ανάλογη διαδικασία. Κρίνεται επιτακτική επομένως η ανάγκη για μια συστηματική επιμόρφωση εκπαιδευτικών σχετικά με το ρόλο των ορισμών στη μαθηματική εκπαίδευση, την αναγνώριση των βασικών χαρακτηριστικών τους και τη διαδικασία ορισμού μιας μαθηματικής έννοιας.

Ολοκληρώνοντας την παρούσα εργασία, θεωρείται απαραίτητο να επισημανθεί ότι ο ρόλος του ορισμού στη μαθηματική σκέψη είναι κατά κάποιο τρόπο παραμελημένος στα σημερινά σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης και στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών. Δεν είναι σαφές εάν αυτό συμβαίνει γιατί θεωρείται δεδομένος ή απλά γιατί παραβλέπεται. Οφείλουμε ωστόσο να θυμόμαστε ότι υπάρχουν περιεχόμενα στα οποία η αναφορά σε έναν τυπικό ορισμό είναι ουσιώδης σημασίας για την σωστή εκτέλεση των ασκήσεων (μεταξύ αυτών είναι η αναγνώριση των παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων μιας έννοιας, η επίλυση προβλήματος και οι μαθηματικές αποδείξεις). Από την άλλη, πρέπει να είμαστε ρεαλιστικοί σχετικά με τη πιθανότητα επίτευξης των εκπαιδευτικών στόχων, καθώς δεν είναι όλοι οι μαθητές ικανοί να ανταποκριθούν με ευχέρεια στο μάθημα της Γεωμετρίας. Ακόμη κι αυτό, μπορεί να επιτευχθεί μόνο μέσω της κατάλληλης παιδαγωγικής προσέγγισης και υπό τις κατάλληλες συνθήκες μάθησης.

Βιβλιογραφία

Αργυρόπουλος. Η., Βλάμος. Π., Κατσούλης. Γ., Μαρκάτης. Σ., & Σιδέρης, Π. (2017). *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ Γενικού Λυκείου*. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Arcavi, A., & Bruckheimer, M. (2000). Didactical uses of primary sources from the History of Mathematics. *Themes in Education, Vol. 1*.

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., & Φερεντίνος, Σ. (2016). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου*, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Borasi, R. (1992). *Learning Mathematics Through Inquiry*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Γαγάτσης, Α. (1993). *Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Αδελφοί Κυριακίδη.

Γουδέλη, Κ. (2015). *Εισαγωγή στη φιλοσοφία του Σπινόζα*. Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Cooper, M., & Krainer, K. (1990). Children's recognition of right-angled triangles in unlearned positions. In G. Booker, B. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education with the North American Chapter 12th PME-NA Conference, Vol. 2*, 227-234. Mexico: PME.

Δαμασκηνός, Δ. Π., & Καλυβόπουλος,Μ. (1931). *Η γεωμετρία του Δημοτικού Σχολείου Β΄ Η Γεωμετρία της ΣΤ΄ τάξεως*. Αθήνα: Δημητράκου. Ανακτήθηκε από http://e-library.iep.edu.gr/iep/collection/browse/item.html?code=01-17717&tab=01

Δημαράς, Α. (1986). (Επ). *Η μεταρρύθμιση που δεν έγινε (Τεκμήρια ιστορίας). Τόμος Β'*, Αθήνα: Νέα Ελληνική Βιβλιοθήκη.

Δημαράς, Α. (2000). Εκπαίδευση: πόλεμος, κατοχή, εμφύλιος (1940-1949). *Ιστορία του Ελληνικού Έθνους. Τόμος ΙΣΤ'*, 548-558, Εκδοτική Αθηνών.

De Villiers, M. (1994). The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. *For the learning of mathematics*, *14*(1), 11-18.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or to teach to define? In A. Olivier, & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol.2*, 248-255, University of Stellenbosch: RSA.

Εξαρχάκος, Θ. (1993). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις «Ελληνικά Γράμματα».

Εξαρχάκος, Θ. (2001). Εισαγωγή στο *Ευκλείδη ¨Στοιχεία¨. Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή, επεξηγήσεις και σχολιασμό. Τόμος Ι: Η γεωμετρία του επιπέδου, βιβλία Ι,ΙΙ,ΙΙΙ,IV,V,VI*, Αθήνα: Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.

Εξαρχάκος, Θ., Κοντογιάννης, Δ., Ντζιαχρήστος Β., & Τσιγώνη Τ. (2001). *Ευκλείδη ¨Στοιχεία¨. Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή, επεξηγήσεις και σχολιασμό. Τόμος Ι: Η γεωμετρία του επιπέδου, βιβλία Ι,ΙΙ,ΙΙΙ,IV,V,VI*, Αθήνα: Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.

Edwards, B. (1997). An undergraduate student's understanding and use of mathematical definitions in real analysis. In J. Dossey, J. Swafford, M. Parmantie, & A. Dossey (Eds.), *Proceedings of the 19th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol.1*, 17-22, Columpus, OH: The ERIC Clearing house for Science, Mathematics and Environment Education.

Θωμαΐδης, Γ. (1991). Οι συντεταγμένες της σχολικής γεωμετρίας στην Ελλάδα (1960-1990). *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, *61*, 27-38.

Θωμαΐδης, Γ. (2002). Ιστορικές παρεκβάσεις στα όρια της πρακτικής και θεωρητικής γεωμετρίας. Στο Δ. Χασάπης (επιμ.), Η *Ιστορία των Μαθηματικών ως μέσο διδασκαλίας των μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο και στο Γυμνάσιο.1ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών,* Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης – Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης – Διδασκαλείο Δημοτικής Εκπαίδευσης «Δημήτρης Γληνός», Θεσσαλονίκη.

Θωμαΐδης, Γ. (2014). Θεωρητικό Πλαίσιο ενός Μεταπτυχιακού Μαθήματος με Θέμα: «Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους». Στο Τζανάκης & Κούρκουλος (επιμ.), *Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση. Επιστήμες Αγωγής, Θεματικό Τεύχος 2014*, 13-16. Πανεπιστήμιο Κρήτης - Σχολή Επιστημών Αγωγής - Παιδαγωγικό Τμήμα Δ.Ε.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach*. Dordrecht: Kluwer.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139-162.

Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, *20*(10), 1193-1211.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education, 9*(1), 3-20.

Heath, T. L. (1908). *The thirteen books of Euclid's Elements* (2nd ed.) *Vol.1*: *Introduction and Books I, II*. (translated from the text of Heiberg). New York: Dover Publications.

Heath, T. L. (2001). *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, Τόμος Ι: Από το Θαλή στον Ευκλείδη.* Αθήνα: Κέντρο Έρευνας Επιστήμης & Εκπαίδευσης – «Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.»

Heinze, A., & Ossietzky, C. (2002). "... because a square is not a rectangle"-Students' knowledge of simple geometrical concepts when starting to learn proof. In A. D. Cockburn (Ed.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3,* 81-88. UK: Norwich.

Hershkowitz, R., Bruckheimer, M., & Vinner, S. (1987). Activities with teachers based on cognitive research. In M. M. Lindquist, & A. P. Shutle (Eds.), *Learning and teaching geometry K-12, Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics,* 222-135, Reston, VA: NCTM.

Καλαϊτζίδης, Π., Παππά, Α., & Σακονίδης, Χ. (2017). Διερεύνηση των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης των τελειόφοιτων μαθητών του Δημοτικού Σχολείου και του Γυμνασίου κατά Van Hiele. *Επιστήμες Αγωγής*, *1*, 114-135.

Καραγεώργος, Α. (1996). Το νέο αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Στο *Εισηγήσεις σε επιμορφωτικό σεμινάριο για τους Σχολικούς Συμβούλους όλων των βαθμίδων (26-30 Σεπτεμβρίου 1994),* 263-272, Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Καραγιαννίδης, Α. (1906). *Πρακτική γεωμετρία δια την Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ τάξιν*, Αθήνα: Εκδ. Ηλία Ν. Δίκαιου. Ανακτήθηκε από http://e-library.iep.edu.gr/iep/collection/browse/index.html

Καστάνης, Ν. (1986). «Να φύγει ο Ευκλείδης», «Δεν θα γίνουμε εθνικοί Μειοδότες» Μια ιστορικό - διδακτική εξέταση της αντίφασης στη σχολική μας γεωμετρία. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, *31*, 3-18.

Καφούση, Σ. (2002). Η Ιστορία των Μαθηματικών ως Πηγή Κατασκευής Δραστηριοτήτων στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση. Στο Μ. Καΐλα, Φ. Καλαβάσης, & Ν. Πολεμικός (επιμ.), *Μύθοι, Μαθηματικά, Πολιτισμοί: Αποσιωπημένες σχέσεις στην εκπαίδευση*. Αθήνα: Ατραπός.

Κηπουρός, Χ. (1995). *Ήρωνος Αλεξανδρέως - Ονόματα Γεωμετρικών Όρων – Γεωμετρικά.* Ανακτήθηκε από http://www.hms.gr/apothema/?s=ss&i=2

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών.* Αθήνα: Leader Books.

Κολέζα, Ε. (2000). *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση*. Αθήνα: Leader Books.

Κυριαζόπουλος, Α., & Αλεξόπουλος, Β. (1969). *Αριθμητική - Γεωμετρία Ε΄ τάξεως Δημοτικού Σχολείου,* (1η Έκδοση), Αθήνα: ΟΕΔΒ. Ανακτήθηκε από http://e-library.iep.edu.gr/iep/collection/browse/item.html?code=03-20555977&tab=01

Keazer, L. (2004). Students’ misconceptions in middle school mathematics. *B.S. Undergraduate Mathematics Exchange, 2*(1).

Khinchin, A. Y. (1968). *The teaching of mathematics*. London: The English Universities Press.

Λεμονίδης, Χ. (2015). *Παρουσίαση, ανάλυση και σύγκριση του ισχύοντος και δύο σύγχρονων Προγραμμάτων Σπουδών της Γεωμετρίας*. Προσκεκλημένη ομιλία στο 13ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Χώρος και Γεωμετρία στην προσχολική και σχολική εκπαίδευση. 8-9 Μαΐου, Θεσσαλονίκη.

Leikin, R., & Winicky-Landman, G. (2000). On equivalent and nonequivalent definitions II. *For the Learning of Mathematics, 20*(2), 24-29.

Leinhardt, G. (1993). ‘On teaching’. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology, 4,* 1-54, Hillsdale, NJ, Erlbaum.

Linchevski, L., Vinner, S., & Karsenty, R. (1992). To be or not to be minimal? Student teachers’ views about definitions in geometry. In W. Geeslin & K. Graham (Eds.), *Proceedings of PME 16, 2*, 48-55, Durham, NH: University of New Hampshire.

Μιχαηλίδης, Ε. (1946). *Ο Μικρός Γεωμέτρης Πρακτική Γεωμετρία. Δια Μαθητάς Δημοτικών Σχολείων και Κατωτέρων Επαγγελματικών Σχολών κατά τας αρχάς του Σχολείου Εργασίας* (6η Έκδοση), Αθήνα: Ι.Δ. Κολλάρος & Σια. Ανακτήθηκε από http://e-library.iep.edu.gr/iep/collection/browse/item.html?code=03-20560573&tab=01

Μίχου, Β. (2019). *Δυσκολίες κατανόησης του ορισμού των γεωμετρικών εννοιών από μαθητές της Α΄ Γυμνασίου. Προτάσεις για την αντιμετώπισή τους με αξιοποίηση στοιχείων της ιστορικής εξέλιξης*. Διπλωματική εργασία, Φλώρινα: Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας.

Marchini, C., & Rinaldi, M. G. (2005). Geometrical pre-conceptions of 8 years old pupils. *Proceedings of CERME 4*, Group 7, 748-755.

Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34*(3), 219-248.

Morgan, C. (2005). Word, Definitions and Concepts in Discourses of Mathematics, Teaching and Learning, *Language and Education*, *19* (2), 102-116.

Ντζιαχρήστος, Β., & Κοντογιάννης, Δ.Γ. (2002). Η διαχρονική παρουσία των εννοιών «κύκλος» «σφαίρα» και η συμβολή τους στην ανάπτυξη και κατανόηση των μαθηματικών. *Πρακτικά του 19ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας - Τα μαθηματικά Διαχρονικός Παράγοντας Πολιτισμού,* Κομοτηνή, 8-9-10 Νοεμβρίου 2002. Ανακτήθηκε από http://www.hms.gr/apothema/?s=se&i=754.

Neel-Romine, L. E., Paul, S., & Shafer, K. G. (2012). Get to know a circle. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *18*(4), 222– 227.

*Οδηγίες για τη διαχείριση της ύλης για τα μαθηματικά του Δημοτικού σχολείο*υ για το σχολικό έτος 2019 – 2020. Ανακτήθηκε από https://www.esos.gr/sites/default/files/articles-legacy/mathimatikon-2019-2020.pdf

Ohtani, M. (1996). Telling definitions and conditions: An ethnomethodological study of sociomathematical activity in classroom interaction. In L. Puig, & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of PME 20*, *4*, 75-82. Valencia, Spain.

Öztoprakçi, S. E. Ç. İ. L. (2014). *Pre-service middle school mathematics teachers' understanding of quadrilaterals through the definitions and their relationships* (doctoral dissertation). Turkey, Ankara: Middle East Technical University.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών – Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης*, Τόμος Α΄, Αθήνα.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά Α' Δημοτικού, Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής, Βιβλίο Δασκάλου*, Αθήνα.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά Β' Δημοτικού, Βιβλίο Δασκάλου*, Αθήνα.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά Γ' Δημοτικού, Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής, Βιβλίο Δασκάλου*, Αθήνα.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού, Βιβλίο Δασκάλου*, Αθήνα.

Παπαδόπουλος, Π. Δ. (1952). *Πρακτική γεωμετρία προς χρήσιν των μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξεως των Δημοτικών Σχολείων*, Αθήνα: εκδ. Π.Δημητράκου. Ανακτήθηκε από http://e-library.iep.edu.gr/iep/collection/browse/item.html?code=20-01513&tab=01

Pickreign, J. (2007). Rectangles and rhombi: How well do preservice teachers know them? *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, *Vol.1* (Content Knowledge).

Piéron, H. (1957). *Vocabulaire de la Psychologie*. Paris: PUF.

Poincare, H. (1909/1952). *Science and method*. New York, NY: Dover.

Russo, L. (1998). The Definitions of Fundamental Geometric Entities Contained in Book I of Euclid's Elements. *Archive for History of Exact Sciences*, *52* (3), 195 – 219.

Σαλονικιός, Δ. (2008). *Τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και οι ιδιότητές τους στα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού σχολείου. Ανάλυση με βάση τη θεωρία Van Hiele για τη γεωμετρική σκέψη*. Διπλωματική Εργασία, Θεσσαλονίκη: Α.Π.Θ., Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης.

Σδρόλιας, Κ. (2004). *Η οικοδόμηση των γεωμετρικών εννοιών κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο*. Διδακτορική Διατριβή, Βόλος: Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Σταμάτης, Ε. Σ. (1975). *Ευκλείδου Γεωμετρία. Στοιχείων – βιβλία 1, 2, 3, 4. Τόμος Ι*, Αθήνα: *ΟΕΔΒ*. Ανακτήθηκε από: https://parmenides52.blogspot.gr

Σκουμπουρδή, Χ. (2009). Οι μεταρρυθμίσεις του εκπαιδευτικού συστήματος στην Ελλάδα και τα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, *159*, 95-118.

Senk, S.L. (1989). Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(3), 309-321.

Shir, K., & Zaslavsky, O. (2001). What constitutes a (good) definition? The case of square. In M. van den Heuvel -Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 161–168. Utrecht, Netherlands: Utrecht University.

Skemp, R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. London, UK: Penguin Books.

Solow, D. (1984). *Reading, writing and doing mathematical proofs*. Book I. Palo Alto, CA: Dale Seymour.

Τουμάσης, Μ. (2004). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics – With particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R., & Tabach, M. (2015). Early-years teachers' concept images and concept definitions: triangles, circles, and cylinders. *ZDM Mathematics Education*, *47*(3), 497-509.

ΥΠΕΠΘ & Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2004). *Τα μαθηματικά μου Δ΄ τάξη δημοτικού Πρώτο μέρος*, Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β. Ανακτήθηκε από http://users.sch.gr/vaskitsios/katsba/dim/biblia/index.htm#6

ΥΠΕΠΘ & Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2004). *Τα μαθηματικά μου Ε΄ τάξη δημοτικού Δεύτερο μέρος*, Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β. Ανακτήθηκε από http://users.sch.gr/vaskitsios/katsba/dim/biblia/index.htm#6

ΥΠΕΠΘ & Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2004). *Τα μαθηματικά μου ΣΤ΄ τάξη δημοτικού Πρώτο μέρος*, Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β. Ανακτήθηκε από http://users.sch.gr/vaskitsios/katsba/dim/biblia/index.htm#6

Φατσέας, Α. (1970). *Επιτομή της γεωμετρίας Α. Μ. Λεγένδρου: πρός χρήσιν των ελληνικών σχολείων,* Αθήνα. Ανακτήθηκε από http://e-library.iep.edu.gr/iep/collection/browse/item.html?code=86-84215&tab=01

Vinner, S. (1976). The naive conception of definition in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 7,* 413-429.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 65-81, Dortrecht: Kluwer.

Vinner, S. (2011). The role of examples in the learning of mathematics and in everyday thought processes. *ZDM Mathematics Education*, *43*(2), 247-256.

Vinner S. (2018). Concept Formation in Mathematics: Concept Definition and Concept Image. In Mathematics, Education, and Other Endangered Species. *Mathematics in Mind*, Springer, Cham.

Vygotsky, L. S. (2000). *Νους στην κοινωνία. Η ανάπτυξη των ανώτερων ψυχολογικών διαδικασιών.* Στ. Βοσνιάδου (επιμ.), Αθήνα: Gutenberg.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generated examples*, Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum.

Zaskis, R., & Leikin, R. (2007). Generating examples: From pedagogical tool to a research tool. *For the Learning of Mathematics*, *27* (2), 15-21.

Zaskis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, *69*, 131-148.

Zhu, S., & Simon, H. (1987). Learning mathematics from examples and by doing, *Cognition and Instruction*, *4*, 137-166.

Παράρτημα

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Ονοματεπώνυμο: ………………………………………… Ημερομηνία: …………….

Σχολείο: ……..……………………………………..….Τάξη: ……..Ηλικία: ……. ..

Περί κύκλου

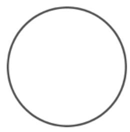
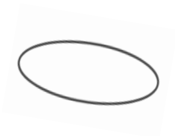
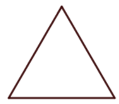
1) Μπορείς να περιγράψεις με λίγα λόγια τι είναι ο «κύκλος»;

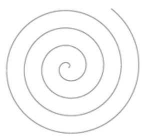
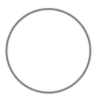
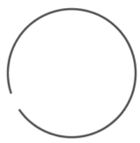
………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………..

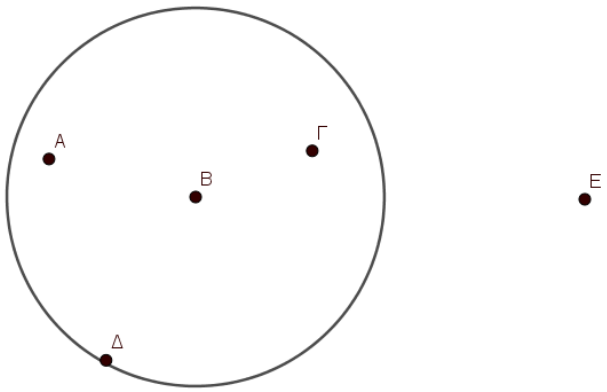
2) Ποια από τα παρακάτω επίπεδα σχήματα είναι κύκλοι; (βάλε ✓ στο σωστό κουτάκι)

					
Είναι κύκλος					
Δεν είναι κύκλος					

					
Είναι κύκλος					
Δεν είναι κύκλος					

3) Ποιο σημείο πιστεύεις ότι είναι το κέντρο του κύκλου στο παρακάτω σχήμα;

…………………………………………………………………………………………….



Για ποιο λόγο επέλεξες το συγκεκριμένο σημείο;

……………………………………………………………………………………………

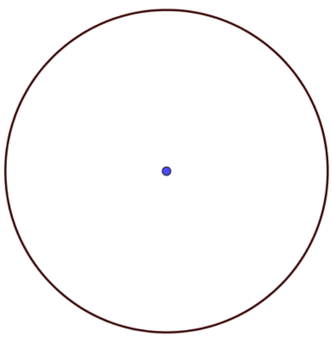
…………………………………………………………………………………………….

4) Γνωρίζεις ποια ιδιότητα έχουν όλα τα σημεία του κύκλου;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

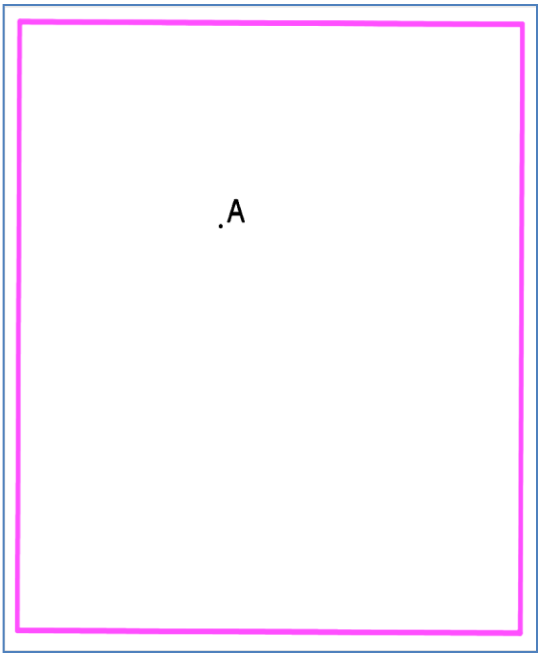
5) Να σχεδιάσεις μια διάμετρο δ και μια ακτίνα α στον παρακάτω κύκλο:



Γνωρίζεις ποια σχέση έχει η διάμετρος με την ακτίνα ενός κύκλου;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………..

6) Στο διπλανό πλαίσιο δίνεται ένα σημείο Α.



α) Κατασκεύασε ένα σημείο Β που να απέχει από το σημείο Α 2 cm.

β) Μπορείς να βρεις ένα άλλο σημείο, διαφορετικό από το σημείο Β, που να απέχει από το σημείο Α 2 cm;

γ) Πόσα τέτοια σημεία μπορείς να βρεις;

…………………………………………………

δ) Τι σχήμα δημιουργείται;

…………………………………………………

Πώς θα εξηγούσες με λίγα λόγια τι είναι αυτό το σχήμα σε κάποιον που δεν το γνωρίζει;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………..

Περί ρόμβου

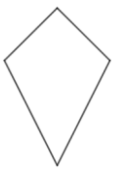
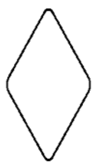
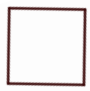
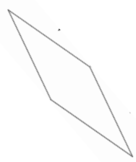
7) Περιέγραψε με λίγα λόγια τι είναι ο «ρόμβος»

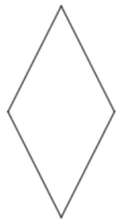
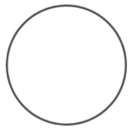
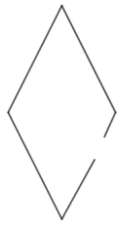
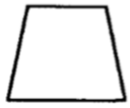
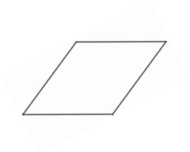
……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

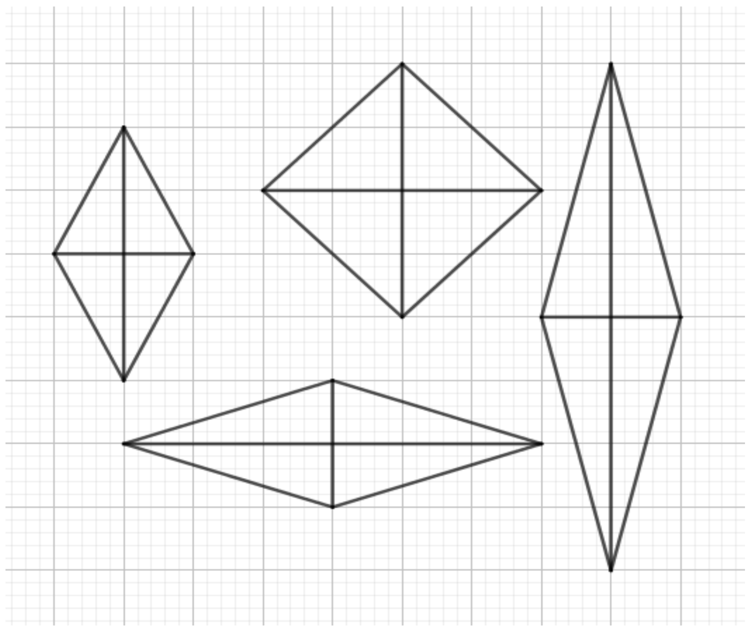
…………………………………………………………………………………………….

8) Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι ρόμβοι; (βάλε ✓ στο σωστό κουτάκι)

					
Είναι ρόμβος					
Δεν είναι ρόμβος					

					
Είναι ρόμβος					
Δεν είναι ρόμβος					

9) Κάνε μια λίστα με τις κοινές ιδιότητες που έχουν τα παρακάτω σχήματα. Για την καταγραφή να χρησιμοποιήσεις χαρακτηριστικά, όπως πλευρές, γωνίες, διαγώνιοι και μέτρησε με τον χάρακα εάν χρειαστεί.



▪
▪
▪
▪
▪
▪

Πώς ονομάζονται αυτά τα τετράπλευρα;…………………………………………….

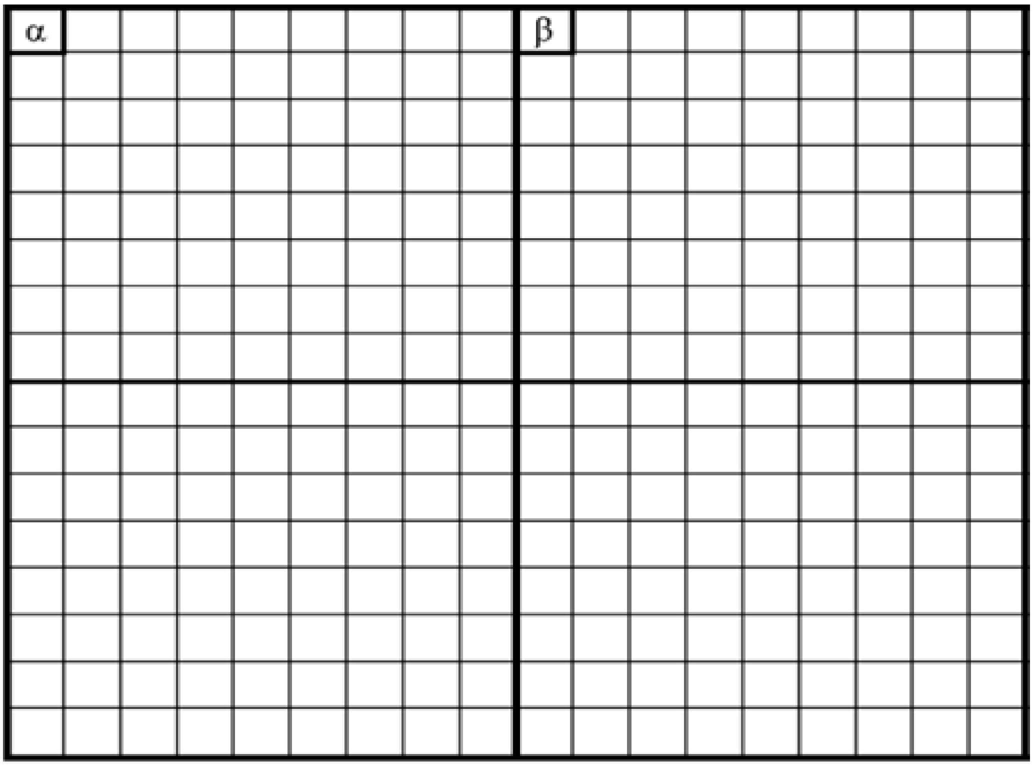
Πώς θα εξηγούσες με λίγα λόγια τι είναι αυτά τα τετράπλευρα σε κάποιον που δεν τα γνωρίζει;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

10) Σχεδίασε α) 2 κύκλους β) 2 ρόμβους



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

Δραστηριότητα

Υλικά που θα χρειαστούμε:

- Ένα κομμάτι χαρτόνι
- Ένα διπλόκαρφο
- Ένα μικρό κομμάτι σπάγκο ή νήμα
- Ένα μολύβι

Οδηγίες κατασκευής:

1. Τοποθετήστε το διπλόκαρφο στο κέντρο περίπου του χαρτονιού κι ανοίξτε το από κάτω ώστε να στερεωθεί καλά και να μη βγαίνει από το χαρτόνι.
2. Στη συνέχεια, δέστε τη μια άκρη του νήματος κάτω από την «κεφαλή» του διπλόκαρφου (όχι πολύ σφιχτά ώστε να μπορεί να περιστρέφεται) και την άλλη άκρη στο μολύβι (κοντά στη μύτη του).
3. Τεντώστε το νήμα και κάντε μια βουλίτσα με τη μύτη του μολυβιού στο χαρτόνι. Σηκώστε ξανά το μολύβι και με τον ίδιο τρόπο κάντε μια άλλη βουλίτσα σε ένα διαφορετικό σημείο του χαρτονιού.
4. Φροντίστε το νήμα να είναι πάντα τεντωμένο.

Ερωτήσεις:

1) Πόσα σημεία μπορούν να δημιουργηθούν με αυτόν τον τρόπο πάνω στο χαρτόνι;

____

____

____

2)Τι θα γινόταν αν συνεχίζατε να δημιουργείτε βουλίτσες (σημεία) για τις επόμενες ώρες; Θα χρειαζόταν να ενώσουμε τα σημεία;

____

____

____

3)Τι ρόλο έχουν το διπλόκαρφο, το μολύβι και το νήμα σε αυτή την δραστηριότητα;

____

____

____

4) Γράψτε έναν ορισμό για τον κύκλο.

____

____

____

____

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΡΟΜΒΟ

Δραστηριότητα

Υλικά που θα χρειαστούμε:

- Τέσσερα καλαμάκια
- Λίγο σπάγκο ή νήμα
- Ένα ψαλίδι
- Ένα μολύβι
- Χάρακα - μοιρογνωμόνιο

Οδηγίες κατασκευής:

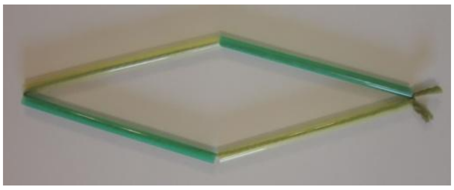
1. Πάρτε 4 καλαμάκια και κόψτε τα έτσι, ώστε να έχουν ίδιο μήκος μεταξύ τους.
2. Περάστε το νήμα μέσα στα καλαμάκια, τεντώστε το καλά και δέστε τις άκρες μεταξύ τους. Κόψτε το νήμα που περισσεύει.
3. Φτιάξτε ένα τετράγωνο όπως στην εικόνα.

4.Τραβήξτε τις 2 κορυφές του τετραγώνου ώστε να αλλάξει σχήμα. Τι σχήμα προέκυψε; ____

Ερωτήσεις:

1) Τι αλλάζει καθώς μετακινείται το σχήμα; _________________________________

Τι παραμένει το ίδιο; ____

2) Αποτυπώστε το περίγραμμα του νέου σχήματος σε χαρτί και χαράξτε τις διαγώνιές του. Έπειτα υπολογίστε:

α) τα μήκη των πλευρών του ____

β) τα μέτρα των γωνιών του ____

γ) τα μήκη των διαγώνιών του ____

δ) αν οι δύο διαγώνιες τέμνονται στο σημείο Κ, να υπολογίσετε τα μήκη των τεσσάρων τμημάτων που σχηματίζονται από το Κ ως τις κορυφές

____

Τι παρατηρείτε;____

Κάντε μια λίστα με τις ιδιότητες του νέου σχήματος.

1η ____

2η ____

3η ____

4η ____

5η ____

3) Ποιες από τις παραπάνω ιδιότητες θεωρείτε ότι χρειάζονται για τον ορισμό του ρόμβου;

4) Γράψτε έναν ορισμό για τον ρόμβο.