ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ- ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ - ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ – ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Α’ Ηλικιακός Κύκλος

Διπλωματική Εργασία

«Η σχέση της υπολογιστικής εκτίμησης με την επίλυση προβλήματος σε παιδιά Β’ και Δ’ δημοτικού»

του

Ευσταθόπουλου Κωνσταντίνου (Α.Ε.Μ:1050)

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Δεσλή Δέσποινα, Καθηγήτρια Π.Τ.Δ.Ε. , Α.Π.Θ

Εξεταστές: Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής

Αγαλιώτης Ιωάννης, Καθηγητής

Θεσσαλονίκη, Ιούλιος 2023

ΦΥΛΛΟ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

1. Επόπτρια: Δέσποινα Δεσλή, Καθηγήτρια

Βαθμός: ____

Υπογραφή: Ημερομηνία:

2. Δεύτερος Βαθμολογητής: Χαράλαμπος Λεμονίδης, Καθηγητής

Βαθμός: ____

Υπογραφή: Ημερομηνία:

3. Τρίτος Βαθμολογητής: Ιωάννης Αγαλιώτης, Καθηγητής

Βαθμός: ____

Υπογραφή: Ημερομηνία:

Γενικός βαθμός: ________________________________

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την καθηγήτριά μου, κα. Δέσποινα Δεσλή, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, την κατανόηση στις δύσκολες στιγμές, τη συνεχή υποστήριξη και την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε με τις συμβουλές και τις γνώσεις της σε όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας μας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές και τις καθηγήτριες του μεταπτυχιακού προγράμματος «Διδακτική των Μαθηματικών» για τις γνώσεις και τις εμπειρίες που μας προσέφεραν στα μαθήματά τους.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου και, πιο συγκεκριμένα, στους γονείς μου που πάντα έκαναν τη μέγιστη προσπάθεια για τη μόρφωσή μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

\

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι αφενός να εξετάσει την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος σε μικρά παιδιά και αφετέρου να διερευνήσει την ύπαρξη σχέσης ανάμεσα στις δύο ικανότητες. Για τον σκοπό αυτό, πραγματοποιήθηκε ποσοτική έρευνα με συγχρονικό ερευνητικό σχεδιασμό σε 94 παιδιά της Β’ και Δ’ δημοτικού στα οποία παρουσιάστηκαν ένα Έργο Υπολογιστικής Εκτίμησης και ένα Έργο Επίλυσης Προβλήματος. Το *Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης* ζητούσε από τους συμμετέχοντες να επιλέξουν, ανάμεσα σε τρεις πιθανές επιλογές απαντήσεων, εκείνη που θεωρούσαν ότι βρίσκεται πιο κοντά στο πραγματικό αποτέλεσμα της αριθμητικής πράξης. Το *Έργο της Επίλυσης Προβλήματος* ζητούσε από τους συμμετέχοντες να επιλύσουν με ακρίβεια μαθηματικά προβλήματα που προέρχονταν από διαφορετικές μαθηματικές περιοχές. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι οι συμμετέχοντες και των δύο ηλικιακών ομάδων είχαν πολύ καλές επιδόσεις τόσο στις δοκιμασίες υπολογιστικής εκτίμησης όσο και στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος. Επίσης, βρέθηκε υψηλή θετική συσχέτιση ανάμεσα στην επιτυχία των παιδιών στο Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης και την επίδοσή τους στο Έργο της Επίλυσης Προβλήματος. Συγκεκριμένα, όσοι συμμετέχοντες παρουσίασαν μεγάλο ποσοστό επιτυχών υπολογιστικών εκτιμήσεων έτειναν να εμφανίζουν μεγάλο ποσοστό επιτυχίας στην επίλυση προβλήματος. Το εύρημα αυτό μάλιστα ίσχυε και για τις δύο ηλικιακές ομάδες, γεγονός που αναδεικνύει την ισχυρή σχέση των δύο ικανοτήτων από νωρίς. Οι εκπαιδευτικές προεκτάσεις των αποτελεσμάτων της εργασίας συζητώνται αναφορικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Λέξεις-κλειδιά: υπολογιστική εκτίμηση, επίλυση προβλήματος, επίδοση, συνάφεια

ABSTRACT

The purpose of the present study is to examine young children's computational estimation and problem solving abilities as well as to investigate the relationship between them. For this purpose, a quantitative research based on a cross-sectional design was conducted with 94 Year 2 and Year 4 children, who were presented with a Computational Estimation Task and a Problem Solving Task. In the *Computational Estimation Task* participants were asked to choose, among three possible options, the one they judged to be closest to the exact computational result. In the *Problem Solving Task* participants had to accurately solve mathematical problems from different mathematical areas. The analysis of the results showed that participants in both age groups performed very well on both Computational Estimation and Problem Solving tasks. Moreover, a high positive correlation was found between children's success in the Computational Estimation Task and their performance in the Problem Solving Task. More specifically, those participants who performed successful computational estimations tended to have a high success rate in problem solving. This finding was true for both age groups and indicates the strong relationship between these two abilities from an early age. Educational implications of the study are discussed in relation to mathematics teaching.

Keywords: computational estimation, problem solving, performance, correlation

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια, οι εκτιμήσεις βρίσκονται ολοένα και περισσότερο στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος των ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης, καθώς πραγματοποιούνται νοερά και χρησιμοποιούνται με μεγάλη συχνότητα στην καθημερινή ζωή, προκειμένου να επιλύσουμε γρήγορα, εύκολα και αποτελεσματικά περίπλοκα υπολογιστικά ζητήματα (Δεσλή, 2021). Τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών για τα Μαθηματικά τονίζουν την αξία της εκτίμησης στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών, η οποία φαίνεται να προσλαμβάνει μία διττή όψη, καθώς αναφέρεται τόσο στη διαδικασία όσο και στο τελικό αποτέλεσμα (National Council of Teachers of Mathematics, 2006). Πιο συγκεκριμένα, η σημασία των εκτιμήσεων φαίνεται από την ευκολία πραγματοποίησής τους σε σχέση με οποιονδήποτε άλλο υπολογισμό που οδηγεί σε αποτέλεσμα με ακρίβεια (Reys & Bestgen, 1981 · LeFevre, Greenham, & Wahhed, 1993), από την πληθώρα στρατηγικών που δύνανται να χρησιμοποιηθούν και οδηγούν σε περισσότερο ή λιγότερο επιτυχείς εκτιμήσεις (Reys, Ryblot, Bestgen, & Wyatt, 1982· LeFevre, Greenham, & Waheed, 1993· Levine, 1982) αλλά και από το γεγονός ότι οι καταστάσεις που απαιτούν την πραγματοποίηση εκτιμήσεων ποτέ δεν οδηγούν σε μία και μοναδική σωστή απάντηση, κάνοντας αποδεκτό ένα ευρύτερο πεδίο τιμών (van de Walle, Lovin, Karp, & Bay-Williams, 2017), όπως επισημαίνει η Δεσλή (2021). Η ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων προσφέρει, λοιπόν, ένα μεγάλο φάσμα δυνατοτήτων στον λύτη, καθώς συμβάλλει στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού αλλά και στην ενίσχυση μιας γενικής αίσθησης σχετικά με την αναμενόμενη αριθμητική απάντηση. Επιπλέον, προσφέρει τη δυνατότητα άμεσου ελέγχου για την ακρίβεια ενός υπολογισμού, δηλαδή κατά πόσο λογικός ή/και σωστός είναι τελικά ο υπολογισμός (Δεσλή, 2021).

Ωστόσο, σύμφωνα με τη Δεσλή (2021), πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν πως τα παιδιά δεν είναι σε θέση να πραγματοποιούν εκτιμήσεις πριν από την ηλικία των 8-9 ετών, θέση που εξηγεί, κατά κάποιον τρόπο, τη σχετικά αργή εισαγωγή των μαθητών[1] στις εκτιμήσεις στα πλαίσια της τυπικής εκπαίδευσης. Αξιοσημείωτο είναι επίσης το γεγονός πως, ενώ γνωρίζουμε ότι πολύ πριν από την έναρξη της τυπικής εκπαίδευσης τα μικρά παιδιά είναι εξοικειωμένα και χρησιμοποιούν τις εκτιμήσεις στην καθημερινότητά τους με ιδιαίτερη

[1] Οι όροι «μαθητής» και «μαθητές» χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν και τα δύο φύλα. Ανάλογα χρησιμοποιούνται και οι όροι «εκπαιδευτικός», «εκπαιδευτικοί», «ερευνητής» και «ερευνητές».

επιτυχία (Sekeris, Empsen, Verschaffel, & Luwel, 2020· Δεσλή, 2011), όταν έρχονται σε επαφή μαζί τους στα πλαίσια της τυπικής εκπαίδευσης παρουσιάζουν έντονη προσκόλληση στους αλγορίθμους και την απομνημόνευση τεχνικών, με αποτέλεσμα να τείνουν να πραγματοποιούν κυρίως υπολογισμούς με ακρίβεια. Έτσι, παρά τη μεγάλη χρησιμότητα της εκτίμησης, που φαίνεται και έξω από το πεδίο των μαθηματικών, καθώς προσφέρει στήριξη στα άτομα για την καλύτερη κατανόηση του πραγματικού κόσμου, πολλές φορές ο τρόπος διδασκαλίας της στο σχολείο τείνει να αποτελεί τροχοπέδη στη μάθηση των μαθητών. Ειδικότερα, παράγοντες όπως ότι η ανισομέρεια στην διδασκαλία όλων των τύπων εκτίμησης σε συνδυασμό με την ελλιπή υποστήριξη προς τους εκπαιδευτικούς, δυσχεραίνουν ακόμη περισσότερο την προσπάθεια ενίσχυσης της ικανότητας των παιδιών για πραγματοποίηση εκτιμήσεων, ενώ παράλληλα ενισχύουν ένα φανερό κύμα αντίστασης μαθητών και ενηλίκων στην πραγματοποίηση εκτιμήσεων (Δεσλή, 2021).

Προκειμένου να συζητηθεί πιο σφαιρικά η έννοια της εκτίμησης, και πιο συγκεκριμένα της υπολογιστικής εκτίμησης, κρίνεται απαραίτητο να διαχωριστεί από εκείνη των νοερών υπολογισμών. Οι νοεροί υπολογισμοί ή νοερή αριθμητική, σε αντίθεση με τους γραπτούς υπολογισμούς, είναι ένα από τα πιο συνηθισμένα εργαλεία που χρησιμοποιούν συνήθως οι άνθρωποι για να επιλύσουν καθημερινά προβλήματα. Πιο συγκεκριμένα, η νοερή αριθμητική αποτελεί μια διαδικασία κατά την οποία οι υπολογισμοί εκτελούνται γρήγορα με το μυαλό, χωρίς εξωτερική βοήθεια (π.χ., χειραπτικά υλικά, χαρτί και μολύβι, αριθμομηχανές κλπ), προκειμένου να καταλήξουν σε ένα ακριβές αποτέλεσμα (Λεμονίδης & Λυγούρας, 2008· McLellan, 2001). Ωστόσο, η χρήση χαρτιού και μολυβιού για σημειώσεις που υποστηρίζουν τη μνήμη (π.χ., καταγραφή κάποιων συμβόλων) δεν είναι απαγορευτική, καθώς μπορεί να υποβοηθήσει τον μαθηματικό συλλογισμό, αλλά όχι των τυπικών αλγόριθμων (Mclellan, 2001). Αντίθετα, με τον όρο «υπολογιστική εκτίμηση» εννοούμε την ικανότητα να παρέχουμε μία προσεγγιστική απάντηση, ειδικά στην περίπτωση που οι αριθμοί που έχουμε να διαχειριστούμε είναι ιδιαίτερα μεγάλοι και συνεπώς λιγότερο διαχειρίσιμοι (Desli & Lioliou, 2020· Δεσλή, 2021). Όπως, επισημαίνουν οι Sowder (1992, στο Δεσλή, 2021) και Greeno (1991, στο Δεσλή, 2021), η υπολογιστική εκτίμηση αποτελεί μία ιδιαίτερα σύνθετη διαδικασία, αλλά και σημαντική προϋπόθεση για την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού, καθώς αναπτύσσει μια γενική αίσθηση της αναμενόμενης αριθμητικής ποσότητας.

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται έντονο ενδιαφέρον της μαθηματικής κοινότητας αναφορικά με τη σχέση ανάμεσα στην ικανότητα των μαθητών για υπολογιστική εκτίμηση και την επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Η Reys (1984, στο Δεσλή, 2021) αναφέρει πως η ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης προσφέρει έναν εναλλακτικό τρόπο αντίληψης και διαχείρισης των αριθμών, επιτρέποντας την ανάπτυξη νέων εννοιών που συνδέονται άμεσα με τους αριθμούς. Επιπλέον, καθώς ερχόμαστε αντιμέτωποι με ένα αριθμητικό πρόβλημα και πρέπει να προβούμε σε εκτιμήσεις, αντιλαμβανόμαστε, αποφασίζουμε και πράττουμε ανάλογα με τις εκάστοτε συνθήκες, προσπαθώντας να αποδώσουμε ένα ευρύτερο νόημα στο πρόβλημα. Η παραπάνω διαδικασία θεωρείται ένδειξη εννοιολογικής γνώσης που απαιτείται για την ικανότητα πραγματοποίησης υπολογιστικών εκτιμήσεων, όπως τονίζουν οι van de Walle et al. (2017, στο Δεσλή, 2021). Συνεπώς, διαφαίνεται μια δυναμική σχέση ανάμεσα στην υπολογιστική εκτίμηση και την επίλυση προβλήματος, καθώς η μία ενισχύει αλλά και συμπληρώνει την άλλη.

Σύμφωνα με τον Thomsen (2017, στο Δεσλή, 2021) η ενασχόληση των μαθητών με καταστάσεις επίλυσης προβλήματος που σχετίζονταν άμεσα με τις καθημερινές τους δραστηριότητες και επέτρεπαν τη συζήτηση μεταξύ των μαθητών είχε θετικό αντίκτυπο στη βελτίωση της ικανότητάς τους για υπολογιστική εκτίμηση. Αντίστοιχα ευρήματα άλλων ερευνών (π.χ., Desli & Lioliou, 2020· McIntosh, Reys, & Reys, 1992 κ.ά.) επιβεβαιώνουν την ύπαρξη μιας ισχυρής σχέσης ανάμεσα στην υπολογιστική εκτίμηση και άλλες συναφείς έννοιες, όπως η αξία θέσης ψηφίου, η αίσθηση του αριθμού, η επίλυση προβλήματος κλπ. Για παράδειγμα, οι Desli και Lioliou (2020) βρήκαν υψηλή θετική συσχέτιση ανάμεσα στην επιτυχία μαθητών έκτης τάξης και ενηλίκων σε έργα υπολογιστικής εκτίμησης και την επίδοσή τους σε έργα επίλυσης προβλήματος. Ειδικότερα, τα αποτελέσματα της έρευνας φανέρωσαν πως οι συμμετέχοντες που είχαν μεγάλο ποσοστό επιτυχών εκτιμήσεων είχαν παράλληλα εξίσου μεγάλο ποσοστό επιτυχίας στην επίλυση προβλήματος.

Είναι σημαντικό να τονιστεί πως το μεγαλύτερο μέρος των ερευνών γύρω από την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης αφορά σε μεγάλο βαθμό μεγαλύτερα παιδιά και ενήλικες, ενώ παράλληλα δεν υπάρχουν έρευνες που να εξετάζουν τη σχέση ανάμεσα στην ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης και επίλυσης προβλήματος σε μικρά παιδιά (Δεσλή, 2021). Αν και αρκετοί ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης θεωρούν απίθανη την εμφάνιση υπολογιστικής εκτίμησης πριν από την ηλικία των 8 ετών, υπάρχουν έρευνες που δείχνουν ότι μικρά παιδιά, ακόμη και βρέφη, εμφανίζουν σημάδια της ικανότητας αυτή (Δεσλή, 2021). Πιο συγκεκριμένα, διάφορες έρευνες σε μικρά παιδιά (π.χ., Δεσλή, 2011· Δεσλή & Τριανταφύλλου, 2019· Sekeris et al., 2020· Jordan, Mulhern, & Wylie, 2009· Jordan, Glutting, & Raminemi, 2010). Jordan et al., 2010 κ.ά.) έδειξαν ότι μπορούν να αντιλαμβάνονται ποσότητες που τους παρουσιάζονται κατά προσέγγιση, όταν πραγματοποιούν προσθέσεις και αφαιρέσεις μικρών συνόλων. Ειδικότερα, φαίνεται πως τα μικρά παιδιά είναι σε θέση να κρίνουν πότε μια εκτίμηση είναι λιγότερο ή περισσότερο ικανοποιητική και να παράγουν υπολογιστικές εκτιμήσεις, πριν ακόμα εκπαιδευτούν σε ακριβείς υπολογισμούς ή σε συγκεκριμένες στρατηγικές εκτίμησης (Δεσλή, 2021). Έρευνα της Δεσλή (2011) σε παιδιά νηπιαγωγείου έδειξε πως αυτά ήταν ιδιαίτερα ικανά να κρίνουν αν δύο παιδιά, σύμφωνα με το σενάριο της ιστορίας που τους παρουσιάστηκε, έκαναν καλές ή κακές εκτιμήσεις σε προσθέσεις με μικρούς αριθμούς, τα αθροίσματα των οποίων δεν ξεπερνούσαν το 10. Παράλληλα, όταν ζητήθηκε από τα ίδια παιδιά να πραγματοποιήσουν δικές τους εκτιμήσεις, σημείωσαν μεγάλη επιτυχία (με ένα ποσοστό μεγαλύτερο του 80%), γεγονός που ίσως μαρτυρά πως, όταν καλούνται να δώσουν τη δική τους απάντηση, νοηματοδοτούν καλύτερα την κατάσταση, σκέφτονται λογικά και τείνουν να αναπτύσσουν εναλλακτικές στρατηγικές εκτίμησης, που μπορεί να μη συνάδουν απόλυτα με αυτές της τυπικής εκπαίδευσης.

Διάφορες έρευνες έχουν μελετήσει την ικανότητα για υπολογιστική εκτίμηση σε σχέση με την ηλικία των παιδιών, ειδικότερα ως προς την επιλογή της καταλληλότερης στρατηγικής, την ευελιξία και την ακρίβεια στους υπολογισμούς, από τις οποίες προκύπτει μια διχογνωμία ευρημάτων. Έρευνα των Lemaire και Lecacheur (2011) έδειξε βελτίωση στην επιλογή της καλύτερης στρατηγικής με την αύξηση της ηλικίας, καθώς και μεγαλύτερη ευελιξία. Ωστόσο, έρευνα των Taillant, Ardiale και Lemaire (2015, στο Δεσλή, 2021) σε ενήλικες κατέληξε σε ευρήματα που έρχονται σε αντίθεση με εκείνα που προέκυψαν από την έρευνά τους σε μικρά παιδιά, καθώς οι μεγαλύτεροι ενήλικες ήταν λιγότερο ευέλικτοι και ικανοί να αναθεωρήσουν τις αρχικές επιλογές τους σε σχέση με τους νεότερους στην εναλλαγή στρατηγικής. Με άλλα λόγια, ενώ θα περίμενε κανείς πως οι μεγαλύτεροι σε ηλικία θα διαθέτουν μεγαλύτερη εμπειρία στους αριθμούς από τους νεότερους, όπως ακριβώς συνέβαινε με τα μεγαλύτερα παιδιά σε σχέση με τα μικρότερα, στην προκειμένη περίπτωση φάνηκε πως η ευελιξία μειώνεται με την ηλικία.

Με δεδομένο ότι αφενός φαίνεται πως υπάρχει σημαντική σχέση ανάμεσα στην ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης και την επίλυση προβλήματος για τους ενήλικες και τα μεγαλύτερα παιδιά και αφετέρου ότι τα μικρότερης ηλικίας παιδιά εμφανίζουν υψηλό επίπεδο επιτυχίας στην υπολογιστική εκτίμηση, έχει ενδιαφέρον να μελετηθεί περαιτέρω η σχέση ανάμεσα στην ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης και επίλυσης προβλήματος σε μικρά παιδιά. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση της σχέσης ανάμεσα στην ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος σε ηλικιακά μικρότερα παιδιά. Επομένως, το κύριο ερευνητικό ερώτημα αφορά στη σχέση ανάμεσα στις δύο παραπάνω ικανότητες και, προκειμένου να δοθεί απάντηση σε αυτό, πραγματοποιήθηκε έρευνα σε παιδιά Β' και Γ' Δημοτικού.

Επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα

Η παρούσα εργασία θα επιχειρήσει να εξετάσει:

1. Ποια είναι η ικανότητα των παιδιών Β' και Δ' δημοτικού για πραγματοποίηση υπολογιστικών εκτιμήσεων; Με δεδομένο ότι ορισμένες έρευνες που αναφέρθηκαν παραπάνω (π.χ., Sekeris et al., 2020· Δεσλή, 2011· Δεσλή & Λιόλιου, 2020 κ.ά.) δείχνουν πως και τα μικρά παιδιά εμφανίζουν σχετικά υψηλό επίπεδο επιτυχίας στην υπολογιστική εκτίμηση, αναμένεται και σε αυτή την έρευνα η ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης και στις δύο ηλικιακές ομάδες να είναι ικανοποιητική.

2. Ποια είναι η ικανότητα των παιδιών Β' και Δ' δημοτικού για επίλυση προβλήματος; Αναμένεται, σύμφωνα με προηγούμενες έρευνες (π.χ., Polya, 1945· Polya, 1973· Diezmann, Watters, & English, 2002 κ.ά), να παρατηρηθούν δυσκολίες και για τις δύο ηλικιακές ομάδες ως προς την επίλυση προβλήματος.

3. Υπάρχει σχέση ανάμεσα στην ικανότητα των παιδιών για πραγματοποίηση υπολογιστικών εκτιμήσεων και στην ικανότητα για επίλυση προβλήματος; Αναμένεται ότι τα ευρήματα θα είναι παρόμοια με αυτά που προέκυψαν από την έρευνα των Desli και Lioliou (2020). Δηλαδή, αναμένεται να υπάρξει συσχέτιση ανάμεσα στην ικανότητα των παιδιών για υπολογιστική εκτίμηση και στην ικανότητα για επίλυση προβλήματος.

4. Η σχέση αυτή διαφοροποιείται ως προς την ηλικία; Αναμένεται να μην παρατηρηθούν σημαντικές διαφορές αναφορικά με την πραγματοποίηση εκτιμήσεων και για τις δύο ηλικιακές ομάδες, όπως ακριβώς συνέβη και σε προηγούμενες έρευνες (π.χ., Desli & Lioliou, 2020). Παράλληλα, αναμένεται να διαπιστωθεί πως όσοι θεωρούνται καλοί εκτιμητές, είναι παράλληλα και καλοί λύτες προβλημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

Το πρώτο κεφάλαιο επιχειρεί να παρουσιάσει τη βιβλιογραφική επισκόπηση σχετικά με τις υπολογιστικές εκτιμήσεις και την επίλυση προβλήματος. Το παρόν κεφάλαιο απαρτίζεται από τρία μέρη. Το πρώτο μέρος πραγματεύεται την έννοια της εκτίμησης, και πιο συγκεκριμένα, τον όρο «υπολογιστική εκτίμηση», τις στρατηγικές που συνήθως χρησιμοποιούνται και τις επιδόσεις των μαθητών σε έργα υπολογιστικής εκτίμησης. Στο δεύτερο μέρος γίνεται μια προσπάθεια περιγραφής της έννοιας του προβλήματος και της επίλυσης προβλήματος, ενώ παράλληλα αναφέρονται ορισμένες από τις δυσκολίες που συχνά αντιμετωπίζουν οι λύτες κατά τη διαδικασία της επίλυσης. Σο τρίτο και τελευταίο μέρος του κεφαλαίου, παρουσιάζονται ευρήματα ερευνών για την ύπαρξη σχέσης ανάμεσα στην υπολογιστική εκτίμηση και την επίλυση προβλήματος.

Α. Εκτιμήσεις

Α.1. Αποσαφήνιση της έννοιας

Τα τελευταία χρόνια οι ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης έχουν στρέψει ολοένα και περισσότερο το ενδιαφέρον τους προς το πεδίο έρευνας των εκτιμήσεων. Οι εκτιμήσεις πραγματοποιούνται νοερά και χρησιμοποιούνται με μεγάλη συχνότητα στην καθημερινή ζωή, προκειμένου να υπολογιστεί γρήγορα και κατά προσέγγιση το αποτέλεσμα πολύπλοκων υπολογισμών που κρίνονται απαραίτητοι για την επίλυση διάφορων πρακτικών ζητημάτων (Δεσλή, 2021). Παραδείγματος χάριν, η εκτίμηση μας επιτρέπει να υπολογίσουμε προσεγγιστικά τα συνολικά μας έξοδα σε μια εκδρομή ή τον αριθμό των θεατών σε μία θεατρική παράσταση ή τον χρόνο που θα χρειαστούμε για να μετακινηθούμε από ένα μέρος σε ένα άλλο. Πολλοί ερευνητές, όπως επισημαίνει η Δεσλή (2021), τονίζουν τη σημασία των εκτιμήσεων, η οποία φαίνεται από την ευκολία πραγματοποίησής τους σε σχέση με οποιονδήποτε άλλο υπολογισμό που οδηγεί σε αποτέλεσμα με ακρίβεια (Reys & Bestgen, 1981 · LeFevre et al., 1993), από την πληθώρα στρατηγικών που δύνανται να χρησιμοποιηθούν και οδηγούν σε περισσότερο ή λιγότερο επιτυχείς εκτιμήσεις (Reys et al., 1982· LeFevre et al., 1993· Levine, 1982) αλλά και από το γεγονός ότι οι καταστάσεις που απαιτούν την πραγματοποίηση εκτιμήσεων ποτέ δεν οδηγούν σε μία και μοναδική σωστή απάντηση, κάνοντας αποδεκτό ένα ευρύτερο πεδίο τιμών (van de Walle et al., 2017). Η ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων προσφέρει, λοιπόν, ένα μεγάλο φάσμα δυνατοτήτων στον λύτη, καθώς συμβάλλει στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού αλλά και στην ενίσχυση μιας γενικής αίσθησης σχετικά με την αναμενόμενη αριθμητική απάντηση. Τέλος, προσφέρει τη δυνατότητα άμεσου ελέγχου για την ακρίβεια ενός υπολογισμού, δηλαδή κατά πόσο λογικός ή/και σωστός είναι τελικά ο υπολογισμός (Δεσλή, 2021).

Πολλοί ερευνητές έχουν υποστηρίξει πως οι εκτιμήσεις σχετίζονται με άλλες μαθηματικές έννοιες, όπως η αίσθηση του αριθμού και οι νοεροί υπολογισμοί. Πιο συγκεκριμένα, για τους McIntosh et al. (1992) οι νοεροί υπολογισμοί και οι εκτιμήσεις αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της αίσθησης του αριθμού και αποτελούν υποσύνολά της. Ο Reys (1984, στο Δεσλή, 2021) υποστηρίζει πως οι εκτιμήσεις και οι νοεροί υπολογισμοί συμβάλλουν στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού, ενδυναμώνοντας έναν δημιουργικό και έξυπνο τρόπο διαχείρισης και ελέγχου των αριθμών. Αντίστοιχα, η Sowder (1992, στο Threadgill-Sowder, 1984) τονίζει την σχέση ανάμεσα στις εκτιμήσεις και την αίσθηση του αριθμού, καθώς προκειμένου να πραγματοποιήσει κάποιος επιτυχείς εκτιμήσεις χρειάζεται να «αισθάνεται» τις ποσότητες που οι αριθμοί αναπαριστούν. Προκειμένου ένα να παιδί να εκτελέσει έναν νοερό υπολογισμό, προβαίνει σε διάφορους μετασχηματισμούς που σχετίζονται με τη γνώση των αριθμών και των ιδιοτήτων (Λεμονίδη, 2013), αναπτύσσει βασικές γνώσεις για τις πράξεις, συγκρίνει αριθμούς και κατανοεί την αξία θέσης των ψηφίων (McLellan, 2001). Ωστόσο, οι McIntosh και Dole (2012, στο Δεσλή & Λιόλιου, 2020) συνιστούν ιδιαίτερη προσοχή, καθώς οι υψηλές επιδόσεις στους νοερούς υπολογισμούς μπορεί να μην συνδέονται αποκλειστικά με την καλή αίσθηση του αριθμού, αλλά να προκύψουν μέσα από τη μηχανιστική χρήση νοερών στρατηγικών. Για τον λόγο αυτό, οι Heirdsfield και Cooper (2004, στο Λιόλιου, 2020) και οι Heirdsfield και Lamb (2005) τονίζουν πως τα αναλυτικά προγράμματα και οι εκπαιδευτικοί πρέπει να δίνουν περισσότερη έμφαση στη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών έναντι των γραπτών αλγόριθμων, οι οποίοι εμποδίζουν την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού.

Πέρα όμως από τους νοερούς υπολογισμούς, υπάρχουν και οι καταστάσεις εκτίμησης που απαιτούν μια συσχετιστική ή εννοιολογική κατανόηση. Για παράδειγμα, όπως αναφέρει η Δεσλή (2021), κατά την παρασκευή μιας συγκεκριμένης συνταγής, όπου απαιτείται η γνώση των αναλογιών, προβαίνουμε σε εκτιμήσεις και αλλάζουμε τα δεδομένα της, προσαρμόζοντάς τη στις δικές μας ανάγκες, στηριζόμενοι στην εμπειρία μας και την κοινή λογική. Τα άτομα που εκτελούν επιτυχώς νοερούς υπολογισμούς και εκτιμήσεις, διαθέτουν συσχετιστική κατανόηση και ευέλικτες προσεγγίσεις, έχουν επίγνωση των υπολογισμών και των μεθόδων που χρησιμοποιούν σε διαφορετικές καταστάσεις, στις οποίες απαιτούνται οι νοεροί ακριβείς ή κατά προσέγγιση υπολογισμοί, ενώ παράλληλα επιλέγουν με ευελιξία τις πιο χρήσιμες και αποτελεσματικές στρατηγικές. Όπως μας πληροφορεί η Reys (1984, 548, στο Δεσλή, 2021) οι νοεροί υπολογισμοί αποτελούν «τη βάση για τις ποικίλες αριθμητικές διαδικασίες που χρησιμοποιούνται στην υπολογιστική εκτίμηση». Όταν πραγματοποιεί κανείς μια εκτίμηση, είναι πιθανόν να προβεί και σε νοερό υπολογισμό, ενώ το αντίθετο δεν ισχύει. Ο Usiskin (1986, στο Δεσλή, 2021) καταλήγει στο συμπέρασμα πως μια εκτίμηση είναι λογικά προτιμότερη σε καταστάσεις νοερών υπολογισμών, όπου ο ακριβής υπολογισμός είναι περίπλοκος ή/και μη απαραίτητος. Έτσι, καθώς τα παιδιά έρχονται σε επαφή με μια νέα αριθμητική έννοια, μπορούν αρχικά να επικεντρωθούν στην αριθμητική πράξη και σταδιακά να δημιουργήσουν τα δικά τους δίκτυα γνώσης για τους αριθμούς και τις λειτουργίες τους. Ωστόσο, σύμφωνα με τη Dowker (2003, στο Δεσλή, 2021) ενδέχεται κάποιος που είναι καλός στους νοερούς υπολογισμούς να μην είναι πάντοτε το ίδιο καλός στις εκτιμήσεις, αν συγκρίνουμε επιδόσεις παιδιών σε έργα νοερών υπολογισμών και εκτιμήσεων.

Δεδομένου ότι η βαθύτερη γνώση των αριθμών, του αριθμητικού συστήματος, των βασικών αριθμητικών γεγονότων και των πράξεων αποτελούν απαραίτητες προϋποθέσεις για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων και νοερών υπολογισμών, η μεταξύ τους σχέση είναι εμφανής (McIntosh & Sparrow, 2004· Λεμονίδης, 2013). Επομένως, είναι αρκετά πιθανό να υπάρχει μια αμφίδρομη σχέση ανάμεσα στην αίσθηση του αριθμού από τη μία και στους νοερούς υπολογισμούς και τις εκτιμήσεις από την άλλη, όπου το ένα συμπληρώνει το άλλο. Ωστόσο, δεν υπάρχουν αρκετά διαθέσιμα ερευνητικά δεδομένα που να προσδιορίζουν με απόλυτη ακρίβεια και σαφήνεια τη μεταξύ τους σχέση, πέρα από το γεγονός ότι συνδέονται, όπως επισημαίνουν οι Sekeris, Verschaffel και Luwel (2019, στο Δεσλή, 2021).

Στο παρελθόν έχουν γίνει πολλές προσπάθειες προκειμένου να διατυπωθεί ένας σαφής ορισμός της έννοιας της εκτίμησης. Σύμφωνα με το NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 2006), στο οποίο στηρίζεται το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών ορισμένων πολιτειών των ΗΠΑ, η εκτίμηση περιλαμβάνει τόσο τη διαδικασία (τον κατά προσέγγιση υπολογισμό[2]) όσο και το αποτέλεσμα της εκτίμησης (την κατάληξη σε ένα κατά προσέγγιση συμπέρασμα για αυτούς τους υπολογισμούς). Με τον παραπάνω ορισμό

[2] Σύμφωνα με τη Sowder (1992, στο Δεσλή, 2021), η διάκριση ανάμεσα στις εκτιμήσεις και τις προσεγγίσεις δεν είναι σαφής και συχνά χρησιμοποιείται ο όρος «προσεγγιστικές διαδικασίες» ή «προσεγγιστικοί υπολογισμοί» για να περιγράψει τους τρόπους με τους οποίους καταλήγουμε σε ένα κατ' εκτίμηση αποτέλεσμα.

συμφωνούν οι Segovia και Castro (2009), καθώς αντιμετωπίζουν την εκτίμηση ως την απόφαση που προκύπτει ύστερα από πραγματοποίηση διάφορων αριθμητικών ενεργειών αλλά και την αποτίμηση αυτών των ενεργειών, ενώ ο Reys (1986, στο Δεσλή, 2021) ορίζει την εκτίμηση ως διαδικασία παροχής επαρκούς απάντησης σε ένα πρόβλημα. Πολλοί ερευνητές συμφωνούν με την ερμηνεία του Micklo (1999, 142, στο Δεσλή, 2021, 26) πως η εκτίμηση είναι μια «γρήγορη ιδέα για την ποσότητα ή το μέγεθος κάποιου αντικειμένου χωρίς διενέργεια υπολογισμού ή μέτρησης, αλλά και τη θέση του Clayton (1996, 87, στο Δεσλή, 2021, 26), σύμφωνα με τον οποίο η εκτίμηση αποτελεί μια «δεξιότητα διατύπωσης υποθέσεων σχετικά με την τιμή μιας απόστασης, το κόστος, το μέγεθος κλπ. ή σχετικά με αριθμητικούς υπολογισμούς». Γενικότερα, θα μπορούσε να ειπωθεί πως ανεξάρτητα από την υιοθέτηση οποιουδήποτε από τους προηγούμενους ορισμούς, όποιος προβαίνει σε εκτιμήσεις, μπορεί να «εικάσει» και να «προβλέψει», δηλαδή να διαθέτει μια γενική ιδέα σχετικά με αυτό που θα μετρήσει ή με τον υπολογισμό που θα πραγματοποιήσει προσεγγιστικά (Δεσλή, 2021).

Προκειμένου να προσεγγίσουμε πιο σφαιρικά την έννοια της εκτίμησης, κρίνεται απαραίτητο, πέρα από την παράθεση οποιουδήποτε ορισμού, να αναφερθούν και ορισμένα από τα βασικότερα χαρακτηριστικά της εκτίμησης. Οι Segovia, Castro, Castro και Rico (1989, στο Segovia & Castro, 2009) επέκτειναν και ανέπτυξαν την αρχική διατύπωση του Reys (1984, στο Δεσλή, 2021) σχετικά με τα χαρακτηριστικά της εκτίμησης, επισημαίνοντας πως πέρα από το γεγονός ότι η εκτίμηση προσφέρει μια κατά προσέγγιση ιδέα για την τιμή μιας αριθμητικής πράξης ή μιας ποσότητας, απαιτείται η αναγνώριση πληροφοριών και η στήριξη σε σημεία αναφοράς και προηγούμενες εμπειρίες. Η εκτίμηση πραγματοποιείται νοερά και γρήγορα μέσα από μια διαδικασία τροποποίησης ή μετασχηματισμού των εμπλεκόμενων αριθμών, προκειμένου να γίνουν απλούστεροι και διαχειρίσιμοι. Επιπλέον, οι ερευνητές τονίζουν πως το αποτέλεσμα της εκτίμησης δεν διασφαλίζει σε καμία περίπτωση την ακρίβεια στο τελικό αποτέλεσμα του υπολογισμού, αλλά βρίσκεται κοντά σε αυτό. Τέλος, επισημαίνουν την υποκειμενικότητα των αποτελεσμάτων μιας εκτίμησης, καθώς οι εκτιμήσεις μπορεί να διαφέρουν λόγω των διαφορετικών κριτηρίων που θέτει το εκάστοτε άτομο για την εκτίμηση μιας κατάστασης. Επομένως, σε τέτοιες περιπτώσεις μπορούμε να μιλάμε για περισσότερο ή λιγότερο επιτυχείς εκτιμήσεις (Δεσλή, 2021).

Ωστόσο, πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν πως τα παιδιά δεν είναι σε θέση να πραγματοποιούν εκτιμήσεις πριν από την ηλικία των 8-9 ετών, θέση που εξηγεί, κατά κάποιον τρόπο, τη σχετικά αργή εισαγωγή των μαθητών στις εκτιμήσεις στα πλαίσια της τυπικής εκπαίδευσης (Δεσλή, 2021). Αξιοσημείωτο είναι επίσης το γεγονός πως, ενώ γνωρίζουμε ότι πολύ πριν από την έναρξη της τυπικής εκπαίδευσης τα μικρά παιδιά είναι εξοικειωμένα και χρησιμοποιούν τις εκτιμήσεις στην καθημερινότητά τους με ιδιαίτερη επιτυχία (Sekeris et al., 2020· Δεσλή, 2011), όταν έρχονται σε επαφή μαζί τους στα πλαίσια της τυπικής εκπαίδευσης παρουσιάζουν έντονη προσκόλληση στους αλγορίθμους και την απομνημόνευση τεχνικών, με αποτέλεσμα να τείνουν να πραγματοποιούν κυρίως υπολογισμούς με ακρίβεια. Έτσι, παρά τη μεγάλη χρησιμότητα της εκτίμησης, που φαίνεται και έξω από το πεδίο των μαθηματικών, καθώς προσφέρει στήριξη στα άτομα για την καλύτερη κατανόηση του πραγματικού κόσμου, πολλές φορές ο τρόπος διδασκαλίας της στο σχολείο τείνει να αποτελεί τροχοπέδη στη μάθηση των μαθητών. Ειδικότερα, παράγοντες όπως ότι η ανισομέρεια στην διδασκαλία όλων των τύπων εκτίμησης σε συνδυασμό με την ελλιπή υποστήριξη προς τους εκπαιδευτικούς, δυσχεραίνουν ακόμη περισσότερο την προσπάθεια ενίσχυσης της ικανότητας των παιδιών για πραγματοποίηση εκτιμήσεων, ενώ παράλληλα ενισχύουν ένα φανερό κύμα αντίστασης μαθητών και ενηλίκων στην πραγματοποίηση εκτιμήσεων (Δεσλή, 2021).

Α.2 Είδη εκτίμησης

Στη διεθνή βιβλιογραφία κυριαρχούν τρεις βασικούς τύπους εκτίμησης που χρησιμοποιούν οι άνθρωποι για να αντιμετωπίσουν διάφορες καταστάσεις στην καθημερινή τους ζωή. Μάλιστα, σύμφωνα με τη Sowder (1992, στο Δεσλή, 2021), λαμβάνοντας υπόψιν την ιδιαιτερότητα της κάθε κατάστασης, κάθε τύπος εκτίμησης απαιτεί διαφορετική κατανόηση και διαφορετικές ικανότητες και δεξιότητες, ενώ οι Booth και Siegler (2006, στο Δεσλή, 2021) επισημαίνουν πως το μόνο κοινό τους στοιχείο είναι ότι οδηγούν σε μια προσεγγιστική απάντηση, δεδομένου ότι η ποικιλομορφία τους επικεντρώνεται σε διαφορές στα χαρακτηριστικά τους, στην ανάπτυξή τους και στους παράγοντες δυσκολίας. Αναλυτικότερα, οι τρεις τύποι εκτίμησης είναι οι εξής: η εκτίμηση πλήθους, η εκτίμηση μέτρησης και η υπολογιστική εκτίμηση (Λιόλιου, 2020· Δεσλή, 2021· Andrews, Xenofontos, & Sayers, 2021).

A.2.1. Εκτίμηση πλήθους

Η εκτίμηση πλήθους ή πληθικότητας ποσότητας (quantity or numerosity estimation) αναφέρεται «στον κατά προσέγγιση υπολογισμό του αριθμού των στοιχείων σε ένα σύνολο» (Δεσλή, 2021, 35). Οι Crites (1992, στο Andrews, et al., 2021) και οι Δεσλή & Λιόλιου (2020) συμφωνούν πως πρόκειται για την ικανότητα να διακρίνουμε ή να παράγουμε τον αριθμό των αντικειμένων σε ένα σύνολο, δίχως να καταφύγουμε στην καταμέτρηση. Οι Barth, Starr και Sullivan (2009) και οι Smets, Sasanguie, Szücs, και Reynvoet (2015), όπως γίνεται λόγος στο Andrews et al. (2021), κάνουν λόγο για μια δεξιότητα που εξαρτάται αμοιβαία από την ικανότητα μέτρησης και μειώνεται σε ακρίβεια όσο αυξάνεται η αριθμητικότητα/πληθικότητα του συνόλου των αντικειμένων. Η Δεσλή (2021) αναφέρει πως ως καταστάσεις εκτίμησης πλήθους ή πληθικότητας αναγνωρίζονται συνήθως εκείνες που απαντούν στην ερώτηση «Πόσα περίπου είναι αυτά;», όπως στην περίπτωση που θέλουμε να παράγουμε μια προσεγγιστική απάντηση σχετικά με τον αριθμό των φιλάθλων σε ένα στάδιο ή τον αριθμό των βιβλίων σε ένα ράφι της βιβλιοθήκης. Πολλοί ερευνητές, όπως π.χ. οι Sigler και Booth (2004, στο Δεσλή & Λιόλιου, 2020), εντάσσουν στη συγκεκριμένη κατηγορία και την εκτίμηση αριθμογραμμής (number estimation), η οποία περιλαμβάνει την εκτίμηση της θέσης ενός αριθμού πάνω σε μια αριθμογραμμή. Χαρακτηριστικά παραδείγματα εκτίμησης αριθμογραμμής αποτελούν τα παρακάτω: «Πού περίπου βρίσκεται ο αριθμός 78 σε μια αριθμογραμμή από το 1 έως το 100;», όπου αναζητούμε τη θέση ενός αριθμού πάνω στην αριθμογραμμή, ή «Ποιος αριθμός περίπου βρίσκεται εδώ;», όπου καταδεικνύουμε μια συγκεκριμένη θέση πάνω στην αριθμογραμμή (Δεσλή, 2021).

A.2.2. Εκτίμηση μέτρησης

Η εκτίμηση μέτρησης ή μέτρηση κατ' εκτίμηση (measurement estimation) αναφέρεται στον «κατά προσέγγιση προσδιορισμό της τιμής μιας μέτρησης χωρίς τη χρήση τυπικών εργαλείων μέτρησης (Δεσλή, 2021, 35). Σύμφωνα με τη Sowder (1992, στο Andrews et al., 2021), πρόκειται για ένα είδος μέτρησης που πραγματοποιείται χωρίς εργαλεία μέτρησης και επικαλείται διάφορες μορφές νοητικών αναφορών, για να παράξει ένα μέτρο της υπό εξέταση οντότητας, παίρνοντας συνήθως διάφορες μορφές (επανάληψη κατά μονάδα, σημεία αναφοράς, αποσύνθεση). Τέτοιου είδους εκτιμήσεις αφορούν την κατά προσέγγιση μέτρηση ενός χαρακτηριστικού ενός αντικειμένου ή μιας κατάστασης, όπως το μήκος, το ύψος, το βάρος, τον όγκο κ. ά. (Δεσλή, 2021· Δεσλή & Λιόλιου, 2020). Χαρακτηριστικές περιπτώσεις όπου κρίνεται απαραίτητη η εκτίμηση μέτρησης είναι εκείνες όπου, π.χ. θέλουμε να υπολογίσουμε αν το αυτοκίνητό μας χωράει σε μια θέση πάρκινγκ, πόση ώρα χρειαζόμαστε για να τελειώσουμε μια εργασία ή πόσα κιλά ζυγίζει ένα αντικείμενο (Δεσλή, 2021).

Α.2.3. Υπολογιστική εκτίμηση

Από όλους τους τύπους εκτίμησης, η υπολογιστική εκτίμηση (computational estimation) φαίνεται να είναι η λιγότερο καλά καθορισμένη. Στην εργασία των Andrews et al. (2021) παρατίθεται μια ποικιλία ορισμών για την εν λόγω έννοια, με τους οποίους αξίζει να ασχοληθούμε εκτενέστερα. Για παράδειγμα, ο Dowker (1992, 45) περιγράφει την υπολογιστική εκτίμηση ως διαδικασία "κατασκευής εύλογων εικασιών σχετικά με τις προσεγγιστικές απαντήσεις σε αριθμητικά προβλήματα, χωρίς ή πριν από την πραγματική εκτέλεση του υπολογισμού". Από την άλλη πλευρά, οι Ainsworth, Bibby και Wood (2002, 28) αναφέρονται στην υπολογιστική εκτίμηση ως "διαδικασία απλοποίησης ενός αριθμητικού προβλήματος, χρησιμοποιώντας κάποιο σύνολο κανόνων ή διαδικασιών για την παραγωγή μιας προσεγγιστικής, αλλά ικανοποιητικής απάντησης, μέσω νοερού υπολογισμού". Σε παρόμοιο πνεύμα, οι Siegler και Booth (2005, 199) υποστηρίζουν ότι πρόκειται για "την προσέγγιση του σωστού μεγέθους και όχι τον υπολογισμό της ακριβούς απάντησης". Εν ολίγοις, ενώ και οι τρεις ορισμοί εξισώνουν την εκτίμηση με την προσέγγιση, οι δύο τελευταίοι αποφεύγουν να χρησιμοποιήσουν όρους όπως «εικασία» ή «μάντεμα» (guess) και παραπέμπουν σε μορφές συστηματικής διαδικασίας, σύμφωνα με τις οποίες δύο άτομα που εφαρμόζουν τις ίδιες διαδικασίες στο ίδιο πρόβλημα θα καταλήγουν πάντα στην ίδια εκτίμηση. Αξίζει να αναφερθεί πως στο παρελθόν διάφοροι ερευνητές, όπως η Dowker (1992), χρησιμοποιούσαν όρους όπως «εικασία» ή «μάντεμα» (guess), οι οποίοι απέδιδαν μα σχετικά μειωτική σημασία στον όρο, καθώς δεν συνεπάγονται απαραίτητα ούτε κατάκτηση γνώσης ούτε συστηματική διδασκαλία, αλλά πολύ περισσότερο υποδηλώνουν τυχαιότητα. Στην πορεία όμως εμφανίστηκαν όροι όπως αριθμητική εκτίμηση (arithmetic estimation) ή προσεγγιστική εκτίμηση (approximate estimation), αλλά σταδιακά επικράτησε ο όρος υπολογιστική εκτίμηση (computational estimation). Λαμβάνοντας υπόψιν όλα τα παραπάνω, καταλήγουμε πως η εκτίμηση ενός υπολογισμού ή υπολογιστική εκτίμηση αναφέρεται «στον κατά προσέγγιση προσδιορισμό του αποτελέσματος ενός αριθμητικού υπολογισμού που δεν μπορούμε ή δεν μας ενδιαφέρει να πραγματοποιήσουμε με ακρίβεια» (Δεσλή, 2021, 34). Χρησιμοποιείται συνήθως σε καταστάσεις τύπου «Πόσο περίπου κάνει το…;» όπως, για παράδειγμα, όταν προσπαθούμε να υπολογίσουμε κατά προσέγγιση και νοερά το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού 21 x 8 ή της πρόσθεσης 4.578 + 3.547 + 1.936 (Δεσλή, 2021).

Σύμφωνα με τον van de Walle (2017, στο Δεσλή, 2021), η υπολογιστική εκτίμηση χρησιμοποιείται είτε στην περίπτωση όταν η εκτέλεση ενός αριθμητικού υπολογισμού είναι περίπλοκη να γίνει με ακρίβεια είτε στην περίπτωση όπου δεν απαιτείται ακριβής απάντηση δεδομένου του πλαισίου της κατάστασης. Πρόκειται, λοιπόν, για ένα στοιχείο με ιδιαίτερη σημασία, καθώς προσδιορίζει τον σκοπό της εκτίμησης. Το κύριο πλεονέκτημα της χρήσης της είναι ότι συνήθως απαιτεί λιγότερο χρόνο και προσοχή από τον ακριβή υπολογισμό κι έτσι μπορεί να αξιοποιηθεί σε περιστάσεις όπου αυτά τα δύο στοιχεία είναι αρκετά περιορισμένα (Δεσλή, 2021). Η υπολογιστική εκτίμηση πραγματοποιείται νοερά και συμβάλλει στη διαμόρφωση μιας γενικής αίσθησης σχετικά με την αναμενόμενη αριθμητική απάντηση, αποτελώντας έτσι μία από τις βασικότερες προϋποθέσεις για την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού, όπως επισημαίνουν οι Sowder (1992) και Greeno (1991) στο Δεσλή (2021). Η Dowker (1992, στο Δεσλή, 2021), όπως μας πληροφορεί τονίζει το στοιχείο της λογικότητας που διαδραματίζει κομβικό ρόλο στην υπολογιστική εκτίμηση. Αναλυτικότερα, όπως επισημαίνουν οι LeFevre, Greenham και Waheed (1993) και οι Sowder & Wheeler (1989) στο Δεσλή (2021), κατά τη διάρκεια που πραγματοποιείται ο υπολογισμός, καθώς δίνεται η ευκαιρία για έλεγχο του προσεγγιστικού αποτελέσματος, ώστε να διασφαλιστεί ότι ο υπολογισμός κινείται προς τη σωστή κατεύθυνση. Επίσης, μετά την ολοκλήρωση του υπολογισμού, η εκτίμηση προσφέρει την ευκαιρία να ανακληθεί η απάντηση. Συνεπώς, η χρήση της εκτίμησης επιτρέπει τον έλεγχο για το αν και κατά πόσο λογικός ή/και σωστός είναι ο ακριβής υπολογισμός που πραγματοποιείται αργότερα.

Οι LeFevre et al. (1993, στο Δεσλή, 2021, 58-59) περιγράφουν τη διαδικασία μέσα από την οποία πραγματοποιείται η υπολογιστική εκτίμηση. Πιο συγκεκριμένα, περιλαμβάνει την «απλοποίηση του αριθμητικού προβλήματος με τη χρήση ενός συνόλου κανόνων ή διαδικασιών προκειμένου να παραχθεί μια προσεγγιστική αλλά ικανοποιητική απάντηση μέσω νοερού υπολογισμού». Στην ουσία, η υπολογιστική εκτίμηση απαιτεί δύο διακριτές διαδικασίες, δηλαδή τη μετατροπή των εμπλεκόμενων αριθμών και την πραγματοποίηση νοερών υπολογισμών. Καθώς, λοιπόν, οι αρχικοί αριθμοί μετατρέπονται σε προσεγγιστικούς και έπειτα χρησιμοποιούνται σε νοερούς υπολογισμούς, το αριθμητικό αποτέλεσμα που προκύπτει «προσεγγίζει», δηλαδή βρίσκεται κοντά στο αποτέλεσμα του αντίστοιχου ακριβούς υπολογισμού. Παραδείγματος χάριν, σε μια πρόσθεση πρέπει αρχικά να αλλάξουμε τους αριθμούς που χρησιμοποιούνται (συχνά στρογγυλοποιώντας τους στην κοντινότερη δεκάδα, εκατοντάδα ή χιλιάδα) και στη συνέχεια να προσθέσουμε τους νέους αριθμούς, κάνοντας επιπλέον προσαρμογές όπου κρίνεται απαραίτητο. Φαίνεται, λοιπόν, πως η υπολογιστική εκτίμηση φέρει εξ ορισμού στοιχεία νοερών υπολογισμών και περιλαμβάνει την ικανότητα πραγματοποίησής τους. Συγκεκριμένα, συνδέεται άμεσα με την εφαρμογή μαθηματικών γνώσεων με ευελιξία, καθώς απομακρύνεται από την αυστηρή, χωρίς κατανόηση, εφαρμογή τεχνικών και διαδικασιών, ενώ στηρίζεται, αξιοποιεί και ενισχύει την κατανόηση του αριθμητικού συστήματος, των αριθμών και των ιδιοτήτων τους στην εκμάθηση των τυπικών αλγόριθμων. Συνολικά, πρόκειται για μια υψηλού επιπέδου ικανότητα και φανερώνει εννοιολογική γνώση κατά τη νοερή διαχείριση των αριθμών στους υπολογισμούς (Δεσλή, 2021).

Και οι τρεις τύποι εκτίμησης που αναφέρθηκαν παραπάνω αφορούν σε ποσοτικές αριθμητικές αναπαραστάσεις τις οποίες διαχειριζόμαστε μέσα από την πραγματοποίηση εκτιμήσεων. Οι Siegler και Booth (2005, 198 στο Δεσλή, 2021, 35) ερμηνεύουν την εκτίμηση ως «διαδικασία μετάφρασης μεταξύ εναλλακτικών ποσοτικών αναπαραστάσεων από τις οποίες τουλάχιστον η μία δεν είναι ακριβής», διαχωρίζοντας έτσι τις καταστάσεις εκτίμησης σε εκείνες που περιλαμβάνουν αριθμητικές αναπαραστάσεις και σε εκείνες που εμπεριέχουν μη αριθμητικές αναπαραστάσεις. Όταν εκτελούνται εκτιμήσεις που εμπεριέχουν αριθμητικές αναπαραστάσεις, κρίνεται απαραίτητη η διαχείριση των αριθμών που βρίσκονται στη μία ή και στις δύο πλευρές της μετάφρασης, όπως στους τρεις τύπους εκτίμησης που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Έτσι, η υπολογιστική εκτίμηση απαιτεί τη μετάφραση μιας αριθμητικής παράστασης (π.χ. 18 x 5) σε μια άλλη (περίπου 100). Η εκτίμηση πλήθους απαιτεί τη μετάφραση μιας μη αριθμητικής παράστασης (π.χ. η οπτική αναπαράσταση του συνόλου των σελίδων ενός βιβλίου) σε μια αριθμητική (περίπου 250 σελίδες). Παρόμοια, η εκτίμηση μέτρησης περιλαμβάνει τη μετάφραση μιας μη αριθμητικής παράστασης (π.χ. η οπτική αναπαράστασης του ύψους ενός κτηρίου) σε μια αριθμητική (περίπου 20 μέτρα). Αντίθετα, στην περίπτωση των μη αριθμητικών αναπαραστάσεων δεν υπάρχουν αριθμοί σε καμία από τις δύο πλευρές της μετάφρασης και απαιτείται η μετάφραση μιας μη αριθμητικής παράστασης 9π.χ. η φωτεινότητα μιας λάμπας) σε μια άλλη μη αριθμητική (π.χ. χωροταξία μιας περιοχής). Βέβαια, αξίζει να τονιστεί πως οι εκτιμήσεις με αριθμητικές αναπαραστάσεις αποτελούν την πιο συνηθισμένη και κυρίαρχη περίπτωση εκτίμησης (Δεσλή, 2021).

Η van den Heuvel-Panhuizen (2001a, στο Δεσλή, 2021) αναφέρει πως οι καταστάσεις στις οποίες χρησιμοποιούνται όλοι οι τύποι εκτίμησης δεν απαιτούν ακριβείς μετρήσεις ή υπολογισμούς, καθώς οι εκτιμήσεις αξιοποιούν και στηρίζονται στο σχετικό μέγεθος και τη διαχείριση των αριθμών. Από τη μία πλευρά, εκτίμηση πλήθους και η υπολογιστική εκτίμηση συνδέονται άμεσα με την ικανότητα για αίσθηση του αριθμού και συνήθως περιλαμβάνουν στρογγυλοποιήσεις των εμπλεκόμενων αριθμών, ενώ από την άλλη, οι εκτιμήσεις μέτρησης για ένα χαρακτηριστικό ή οι εκτιμήσεις αριθμογραμμής συνδέονται περισσότερο με την ικανότητα χωρικού συλλογισμού. Παρόλα αυτά, και οι τρεις τύποι εκτίμησης μπορούν να αξιοποιηθούν σε καταστάσεις που απαιτούν τον συνδυασμό και των δύο παραπάνω ικανοτήτων.

Α.3. Στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης

Οι στρατηγικές που χρησιμοποιούνται κατά την πραγματοποίηση ενός κατ' εκτίμηση υπολογισμού ποικίλουν ως προς το είδος και τα χαρακτηριστικά τους, τους λόγους επιλογής τους και την αποτελεσματικότητά τους Κάθε στρατηγική προσφέρει πληροφορίες για τον τρόπο με τον οποίο τα άτομα αντιλαμβάνονται διάφορες μαθηματικές αρχές, κατανοούν τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών και τις αριθμητικές πράξεις και εν τέλει κατακτούν την αίσθηση του αριθμού (Δεσλή, 2021). Επίσης, έχουν άμεση σύνδεση με την ικανότητα επίλυση προβλήματος, μιας και η επιλογή και χρήση της καταλληλότερης στρατηγικής αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους παράγοντες που συμβάλλουν στην επίλυσή του. Δεδομένου ότι όλα τα προβλήματα δεν επιλύονται πάντα με μία μόνο στρατηγική, η διαδικασία της επιλογής εγείρει το ζήτημα της ευελιξίας και προσαρμοστικότητας, δύο σημαντικών ικανοτήτων που επιτρέπουν στον λύτη να αξιοποιήσει μια ποικιλία στρατηγικών και να τις εναλλάσσει, προκειμένου να χρησιμοποιήσει την στρατηγική, ανάλογα με το εκάστοτε πρόβλημα και τον βαθμό επιδίωξης της επίλυσης του προβλήματος (Δεσλή, 2021). Επιπλέον, σύμφωνα με τους Lemaire και Lecacheur (2002) και τον Λεμονίδη (2013), η επιλογή και χρήση των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης αλλάζει με την ηλικία. Έρευνά που πραγματοποίησαν σε ενήλικες και παιδιά 9 και 11 ετών, προκειμένου να ελέγξουν την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης σε προβλήματα πρόσθεσης, έδειξε πως η χρήση και η αποτελεσματικότητα μιας στρατηγικής επηρεάζεται από την ηλικία, τα χαρακτηριστικά του προβλήματος και καταλληλότητα της στρατηγικής. Την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης των παιδιών σε προβλήματα πρόσθεσης μελέτησε και η Dowker (2003, στο Δεσλή &

Ανεστάκης, 2014) και κατέληξε στο συμπέρασμα πως η ικανότητα αυτή αυξάνεται με την ηλικία, το επίπεδο επίδοσης των μαθητών αλλά και τη γενική τους επίδοση στους υπολογισμούς, ενώ τα ποσοστά επιτυχίας αυξάνονται, καθώς τα παιδιά αναπτύσσουν περισσότερο κατάλληλες και σύνθετες στρατηγικές εκτίμησης.

Διάφορες έρευνες μαρτυρούν τη χρήση μιας πληθώρας στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης τόσο από παιδιά όσο και από ενήλικες, οι οποίες όμως φαίνεται να αλλάζουν στο πέρασμα των χρόνων ως προς τη συχνότητα και το είδος της χρήσης τους (Δεσλή, 2021). Έρευνα των LeFevre et al. (1993, στο Δεσλή, 2021) που ήθελε να εξετάσει την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης ενηλίκων και παιδιών σε πολλαπλασιαστικά προβλήματα, έδειξε πως η συνηθέστερη στρατηγική που χρησιμοποιούνταν ήταν η στρογγυλοποίηση. Επιπλέον, τα παιδιά χρησιμοποίησαν τη στρατηγική της προγενέστερης αντιστάθμισης, ενώ οι ενήλικες την μεταγενέστερη αντιστάθμιση. Αντίστοιχα ευρήματα προκύπτουν και από την έρευνα των Lemaire και Lecacheur (2002), καθώς τα μικρότερης ηλικίας παιδιά έδειξαν ξεκάθαρα την προτίμησή τους στην επιλογή της στρογγυλοποίησης και έπειτα σε άλλες στρατηγικές ανασύνθεσης. Δεδομένου ότι η στρατηγική της στρογγυλοποίησης είναι ήδη γνωστή στα παιδιά και χρησιμοποιείται αυθόρμητα ήδη από την ηλικία των 7 ετών (Lemaire & Lecacheur, 2002), οι Lemaire και Lecacheur (2011) εξέτασαν αν υπάρχουν ηλικιακές διαφορές σε παιδιά 8 έως 13 ετών ως προς την επιλογή των στρατηγικών της στρογγυλοποίησης προς τα πάνω και προς τα κάτω σε προβλήματα πρόσθεσης με διψήφιους αριθμούς. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι, αν και υπήρχε βελτίωση στη χρήση και των δύο παραλλαγών στρογγυλοποίησης με την ηλικία, τα παιδιά όλων των ηλικιών έδιναν γρηγορότερες και περισσότερο ακριβείς απαντήσεις όταν χρησιμοποιούσαν τη στρατηγική προς τα κάτω. Συγκεκριμένα, τα μικρότερα παιδιά των 8-9 ετών χρησιμοποιούσαν συχνότερα τη στρογγυλοποίηση προς τα κάτω σε σχέση με τη στρογγυλοποίηση προς τα πάνω και πιο συχνά συγκριτικά με τα μεγαλύτερα παιδιά. Τα μεγαλύτερα παιδιά των 10-11 και 12-13 ετών χρησιμοποιούσαν με παρόμοια συχνότητα μεταξύ τους και τις δύο στρατηγικές. Ηλικιακές διαφορές παρατηρήθηκαν ωστόσο και ως προς την επιλογή της καλύτερης στρατηγικής, με τα ποσοστά επιτυχούς χρήσης στρατηγικής να κυμαίνονται στο 60% για τα μικρότερα παιδιά και στο 75-80% για τα μεγαλύτερα. Αυτή η βελτίωση ως προς την επιλογή της στρατηγικής με την αύξηση της ηλικίας συνεπάγεται και μεγαλύτερη ευελιξία (Lemaire & Lecacheur, 2011).

Μπορεί η επιλογή της στρογγυλοποίησης ως της συνηθέστερης στρατηγικής να εξηγείται από τις περιορισμένες πιθανότητες να οδηγήσει σε υπολογιστικά λάθη (Lemaire και

Lecacheur, 2011), αλλά και από τη συστηματική διδασκαλία της στο σχολείο. Αυτό φαίνεται και από την έρευνα των Boz και Bulut (2012) με την στρογγυλοποίηση να αποτελεί-εάν όχι την μοναδική-την πιο γνωστή στρατηγική που διδάσκουν οι εκπαιδευτικοί στο σχολείο. Όμως, μια τέτοια επιλογή οδηγεί πολλές φορές παιδιά, εν ενεργεία εκπαιδευτικούς αλλά και ενήλικες σε παρανόηση, δηλαδή στην υιοθέτηση μιας λανθασμένης αντίληψης ότι η εκτίμηση και η στρογγυλοποίηση είναι συνώνυμες έννοιες (Boz & Bulut, 2012· Mildenhall, Hackling, & Swan, 2010· Desli & Lioliou, 2020). Σε αντίθεση με τα μικρότερα σε ηλικία παιδιά, τα μεγαλύτερα παιδιά και οι ενήλικες στηρίζονται συνήθως σε περισσότερο εκλεπτυσμένες στρατηγικές και να εμπλουτίζουν τις προηγούμενες. Για παράδειγμα, χρησιμοποιούν συχνά στρατηγικές αντιστάθμισης για να αναπροσαρμόσουν ή να τελειοποιήσουν την αρχική τους εκτίμηση, που είχε γίνει μέσω στρογγυλοποίησης.

Όπως τονίζουν οι Lemaire, Lecacheur και Farioli (2000, στο Δεσλή, 2021), η χρήση πιο εκλεπτυσμένων και σύνθετων στρατηγικών προϋποθέτει και μεγαλύτερο βαθμό εννοιολογικής κατανόησης της υπολογιστικής εκτίμησης και των επιμέρους στοιχείων της. Οι στρατηγικές μετάφρασης χρησιμοποιούνται με μικρότερη συχνότητα σε σχέση με τις στρατηγικές ανασύνθεσης και συχνότερα από τις στρατηγικές αντιστάθμισης. Περιλαμβάνουν κυρίως τη μετατροπές στο είδος της αριθμητικής πράξης και αλλάζουν τη μαθηματική δομή του αριθμητικού προβλήματος. Παρόλο που προσφέρουν μεγαλύτερη ευελιξία στον λύτη, δεν χρησιμοποιούνται πολύ συχνά, καθώς απαιτούν και ανώτερο επίπεδο εννοιολογικής κατανόησης της εκτίμησης και της αίσθησης του αριθμού, όπως επισημαίνουν οι Reys et al. (1982, στο Δεσλή, 2021). Από την άλλη, ερευνητές όπως οι LeFevre et al. (1993), Lemaire et al. (2000) και Reys et al. (1982), όπως μας πληροφορεί η Δεσλή (2021), παρατηρούν πως οι στρατηγικές αντιστάθμισης (κυρίως τη μεταγενέστερη αντιστάθμιση) χρησιμοποιούνται συνήθως από ενήλικες και πολύ πιο σπάνια από παιδιά (κυρίως την προγενέστερη αντιστάθμιση). Όπως αναφέρει και η Sowder (1992, στο Δεσλή, 2021), η χρήση της φαίνεται να αυξάνεται με το πέρας της ηλικίας, καθώς θεωρείται η πιο εκλεπτυσμένη στρατηγική υπολογιστικής εκτίμησης, η οποία απαιτεί καλή γνώση των στοιχείων της αίσθησης του αριθμού και επιτρέπει στα άτομα να κρίνουν τη λογικότητα της εκτίμησής τους, δηλαδή κατά πόσο κοντά ή μακριά είναι εκτίμησή τους από το πραγματικό αποτέλεσμα και να προβούν σε διορθώσεις μέσω αντιστάθμισης. Αυτή η ανάγκη για πραγματοποίηση της αντιστάθμισης συχνά μαρτυρά τη μεγάλη εξάρτηση των ατόμων στην ακρίβεια των υπολογισμών, καθώς θέλουν οι εκτιμήσεις τους να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στο ακριβές αποτέλεσμα.

Οι Ardiale και Lemaire (2013, στο Δεσλή, 2021) προσπαθώντας να ερευνήσουν κατά πόσο συνειδητές ή τυχαίες είναι οι στρατηγικές που επιλέγουν τα παιδιά για την πραγματοποίηση μιας εκτίμησης σε έναν υπολογισμό, βρήκαν ότι τα μικρότερα παιδιά άλλαζαν συχνότερα τις στρατηγικές τους σε σχέση με τα μεγαλύτερα παιδιά, ακόμα κι όταν αυτές ήταν κατάλληλες. Αντίθετα, τα μεγαλύτερα σε ηλικία παιδιά, άλλαζαν τη στρατηγική τους όταν αντιλαμβάνονταν ότι αυτή δεν ήταν η κατάλληλα, ενώ τη διατηρούσαν και την επαναλάμβαναν όταν αυτή ήταν η κατάλληλη. Αυτές τις βελτιωτικές αλλαγές στην επιλογή στρατηγικής απέδωσαν οι ερευνητές στην έλλειψη εμπειρίας με τους αριθμούς και τις ελλιπείς υπολογιστικές δεξιότητες των μικρών παιδιών, ενώ τα μεγαλύτερα παιδιά λόγω της μεγαλύτερης εξοικείωσής τους με τους υπολογισμούς βρίσκονταν σε ευνοϊκότερη θέση για να αποφασίσουν ποια στρατηγική ταιριάζει καλύτερα σε κάθε κατηγορία προβλημάτων. Επιπλέον, οι Taillant, Ardiale και Lemaire (2015, στο Δεσλή, 2021) διαπίστωσαν πως και οι ενήλικες μπορούν να αναθεωρήσουν τις αρχικές τους επιλογές σχετικά με τη χρήση στρατηγικής. Ωστόσο, διαπίστωσαν πως οι μεγαλύτεροι ενήλικες (60-80 ετών) ήταν λιγότερο ευέλικτοι σε σχέση με τους νεότερους ενήλικες (17-28 ετών) στην εναλλαγή στρατηγικής και λιγότερο ικανοί να αναθεωρήσουν τις αρχικές επιλογές τους, ακόμη και στην περίπτωση που δεν είχαν επιλέξει την καταλληλότερη στρατηγική. Πρόκειται για ένα εύρημα που έρχεται σε ρήξη με τα προηγούμενα που αναφέρθηκαν και αφορούσα παιδιά (π.χ., Lemaire και Lecacheur, 2011), καθώς, ενώ κανείς θα περίμενε ότι οι μεγαλύτεροι σε ηλικία θα είναι περισσότερο έμπειροι με τους αριθμούς, όπως συνέβαινε στην περίπτωση των μεγαλύτερων παιδιών σε σχέση με τα μικρότερα, στην προκειμένη περίπτωση συμβαίνει το αντίθετο. Προσπαθώντας να ερμηνεύσουν το εν λόγω εύρημα, οι ίδιοι ερευνητές προτείνουν πως η ευελιξία μειώνεται με την ηλικία λόγω περιορισμών στους γνωστικούς μηχανισμούς, βασιζόμενοι και σε αντίστοιχα ευρήματα ερευνών από τον χώρο της ψυχολογίας, όπως της Diamond (2013) και των Jurado και Rosselli (2007).

Α.4. Επιδόσεις σε έργα και καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης

Οι περισσότερες έρευνες που διερευνούν την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης αφορούν μεγάλα παιδιά (από τις μεγάλες τάξεις του δημοτικού και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση) και ενήλικες και συνήθως χρησιμοποιούν δύο τύπους έργων, δηλαδή έργα παραγωγής εκτιμήσεων (estimation production tasks) και έργα σύγκρισης εκτιμήσεων (estimation comparison tasks). Η van den Heuvel-Panhuizen (2001a, στο Δεσλή, 2021) αναφέρεται στους ίδιους τύπους έργων ως έργα άμεσης εκτίμησης (direct estimation) και έργα έμμεσης εκτίμησης (indirect estimation). Ο πρώτος τύπων έργων θεωρείται ο πιο διαδεδομένος στην έρευνα γύρω από την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης, καθώς παρουσιάζεται ένα αριθμητικό πρόβλημα τους συμμετέχοντες και τους ζητείται να πραγματοποιήσουν μία εκτίμηση, δίχως όμως να προβούν σε ακριβή υπολογισμό. Μια παραλλαγή είναι να τους ζητηθεί να επιλέξουν την εκτίμησή τους σε έναν υπολογισμό μέσα από μία γκάμα πολλών διαφορετικών απαντήσεων που τους προσφέρονται (Segovia & Castro, 2009). Έρευνες που χρησιμοποιούν τον συγκεκριμένο τύπο έργων δείχνουν, ότι παρά το γεγονός πως παρατηρείται μια σημαντική βελτίωση στην ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης με το πέρας της ηλικίας, ούτε τα παιδιά ούτε οι ενήλικες παρουσιάζουν μεγάλα ποσοστά επιτυχίας, με τις εκτιμήσεις τους να αποκλίνουν σημαντικά από τις ακριβείς απαντήσεις, όπως αναφέρουν οι LeFevre et al. (1993, στο Δεσλή, 2021).

Σε αντίθεση με τα έργα άμεσης εκτίμησης, στα έργα σύγκρισης εκτιμήσεων δίνεται στους συμμετέχοντες ένα αριθμητικό πρόβλημα και ένας αριθμός αναφοράς και τους ζητείται να εκτιμήσουν εάν η απάντηση θα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από τον αριθμό αναφοράς. Ο αριθμός αναφοράς μπορεί να ποικίλει, δηλαδή άλλοτε να είναι μεγαλύτερος κι άλλοτε μικρότερος από την ακριβή απάντηση. Αυτός ο τύπος έργων δεν απαιτεί έναν αριθμό αλλά μία απόφαση, όπως επισημαίνει η van den Heuvel-Panhuizen (2001a, στο Δεσλή, 2021), σχετικά με το αν το αποτέλεσμα είναι σωστό ή λανθασμένο, αν απέχει σημαντικά ή ελάχιστα από το ακριβές. Εναλλακτικά, μπορεί να ζητηθεί τους συμμετέχοντες να προσδιορίσουν την κατεύθυνση της τελικής απάντησης σε σχέση με τον αριθμό αναφοράς, δηλαδή να κρίνουν αν το αποτέλεσμα θα είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο. Σε διάφορες έρευνες, όπως της Ganor-Stern (2015, στο Δεσλή, 2021), που χρησιμοποιούν έργα σύγκρισης εκτιμήσεων φαίνεται συχνότερα μια προτίμηση των συμμετεχόντων για προσεγγιστικούς υπολογισμούς όταν ο αριθμός αναφοράς βρίσκεται κοντά στην ακριβή απάντηση, παρά όταν βρίσκεται μακριά της, γεγονός που οφείλεται μάλλον στην στήριξη τους στην αίσθηση του μεγέθους, η οποία τους επιτρέπει να απαντούν σωστά. Τόσο τα έργα παραγωγής όσο και τα έργα σύγκρισης εκτιμήσεων επιτρέπουν την ανάδειξη στρατηγικών και προϋποθέτουν ο λύτης να έχει ανεπτυγμένη αίσθηση του μεγέθους, όχι μόνο των εμπλεκόμενων αριθμών, αλλά και του πιθανού αριθμητικού αποτελέσματος (Δεσλή, 2021). Και οι δύο τύποι απαιτούν τόσο εννοιολογική όσο και διαδικαστική γνώση από τους λύτες. Η εννοιολογική γνώση απαιτείται για να αναγνωρίσει ο λύτης τις περιπτώσεις που η προσεγγιστική απάντηση είναι αποδεκτή και να αποφασίσει πόσο κοντά είναι ή θέλει να είναι η απάντησή του σε σχέση με την απάντηση που προκύπτει από τον ακριβή υπολογισμό, ενώ η διαδικαστική γνώση επιτρέπει στον λύτη να απλοποιήσει το αριθμητικό πρόβλημα και να προβεί στις απαραίτητες διορθώσεις μέσω της αντιστάθμισης.

Ένα σημαντικό ερώτημα που έχει αναπολήσει το ενδιαφέρον της ερευνητικής μαθηματικής κοινότητας σχετίζεται με το πόσο «ακριβής» θέλουμε να είναι η εκτίμησή μας για να θεωρηθεί καλή ή επιτυχής. Πρόκειται για ένα ζήτημα πρακτικής φύσεως, που έχει προσεγγιστεί με διαφορετικούς τρόπους από τους ερευνητές. Για παράδειγμα, διάφορες έρευνες που συγκρίνουν τις απαντήσεις παιδιών και ενηλίκων σε ακριβείς και κατ' εκτίμηση υπολογισμούς (π.χ., McIntosh et al., 1997· Ganor-Stern, 2018· Sekeris, Verschaffel, & Luwel, 2021 κ.ά.), δείχνουν πως η επίδοση στους υπολογισμούς με ακρίβεια είναι λίγο υψηλότερη σε σύγκριση με τους προσεγγιστικούς υπολογισμούς. καθώς οι μαθητές στηρίζονται υπερβολικά στη χρήση τυποποιημένων αλγόριθμων, χωρίς να αναπτύσσουν την ικανότητα για υπολογιστική εκτίμηση. Διαφορετικά ευρήματα παρουσιάζει η έρευνα των Pica, Lemer, Izard και Dehaene (2004) με Ιθαγενείς του Αμαζονίου, καθώς, παρά το γεγονός πως οι περισσότεροι από τους οποίους δεν έχουν παρακολουθήσει την τυπική εκπαίδευση, μπορούσαν να εκτιμήσουν το αποτέλεσμα αφαιρέσεων ακόμα και με μεγάλους αριθμούς με μεγαλύτερη επιτυχία σε σύγκριση με τους ακριβείς υπολογισμούς. Πρόκειται για τους Munduruku, οι οποίοι διαθέτουν περιορισμένο αριθμό λέξεων και καθόλου σύμβολα για τις αριθμητικές πράξεις. Έτσι, δεν χρησιμοποιούν λέξεις για ποσότητες μικρότερες των 5 στοιχείων, αλλά αναφέρονται σε αυτές προσεγγιστικά. Αυτές οι σημαντικές διαφορές που παρατηρήθηκαν στην εν λόγω έρευνα οφείλονται σε σημαντικό βαθμό στη μεγάλη εξάρτηση του ακριβούς υπολογισμού από το επίπεδο ανάπτυξης της ομιλούμενης γλώσσας, ενώ αντίθετα ο προσεγγιστικός υπολογισμός εμφανίζεται ακόμα κι όταν δεν έχει ολοκληρωθεί η ανάπτυξη της γλώσσας, ιδιαίτερα στα πολύ μικρά παιδιά (Pica, et all., 2004· Klein, Nuerk, Wood, Knops, & Willmes, 2009).

Όσον αφορά τις επιδόσεις και τις στρατηγικές των συμμετεχόντων σε έργα υπολογιστικής εκτίμησης, διάφορες έρευνες ακολουθούν ένα ελαστικό κριτήριο, προκειμένου να θεωρήσουν ότι μια εκτίμηση είναι επιτυχής (Δεσλή, 2021). Πιο συγκεκριμένα, επιτυχείς θεωρούνται οι εκτιμήσεις που έχουν ποσοστιαία απόκλιση κατά 10% ή 20% ή 30% από το ακριβές αποτέλεσμα. Βέβαια, ο προσδιορισμός της απόκλισης εξαρτάται από τον μεθοδολογικό σχεδιασμό κάθε έρευνας. Παρόμοια, οι Luwel και Verschaffel (2008) αναγνωρίζουν ως πολύ καλές εκτιμήσεις όσες απέκλιναν λιγότερο του 10% από το ακριβές αποτέλεσμα, ως καλές όσες απέκλιναν μεταξύ 10% και 25%, ενώ ως αδύναμες όσες είχαν απόκλιση μεγαλύτερη του 25%. Για παράδειγμα, για το αριθμητικό αποτέλεσμα «158» επιτυχείς θεωρούνται οι εκτιμήσεις από το 143 έως το 173, εφαρμόζοντας μια απόκλιση 10%.

Τέλος, πέρα από την ακρίβεια των εκτιμήσεων, ένας σημαντικό παράγοντας που επηρεάζει την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης είναι ο χρόνος. Έχει φανεί μέσα από έρευνες (π.χ. πως όταν ο χρόνος που διαθέτουν οι συμμετέχοντες είναι προκαθορισμένος ή λίγος, τότε εκείνοι τείνουν να προβαίνουν σε μαντέματα, δίχως να δίνουν νόημα στους αριθμούς που διαχειρίζονται (Reys, Reys, Nohda, Ishida, Yoshikawa, & Shimizu, 1991· Liu & Neber, 2012· Star & Rittle-Johnson, 2009). Αντίθετα, όταν δεν υπάρχει καθορισμένος χρόνος για να απαντήσουν, καταφεύγουν πολλές φορές σε νοερούς υπολογισμούς (Dowker, 1992· Δεσλή & Ανεστάκης, 2014· Desli & Lioliou, 2020). Τέλος, όταν οι ερευνητές προέβαιναν στη χρήση και των δύο παραπάνω συνθηκών, φάνηκε πως η χρόνος επηρεάζει σημαντικά την ποιότητα των εκτιμήσεων (Berry, Grant, McKinney, & Berube, 2014).

Οι περισσότερες έρευνες που μελετούν την ανάπτυξη της υπολογιστικής ικανότητας αφορούν παιδιά μεγαλύτερων ηλικιών και ενήλικες, ενώ ελάχιστες επικεντρώνονται σε μικρότερα παιδιά, εξαιτίας της ευρύτερης αντίληψης που επικρατεί στο πεδίο έρευνας των εκτιμήσεων, σύμφωνα με την οποία τα πολύ μικρά παιδιά δεν είναι σε θέση να πραγματοποιούν εκτιμήσεις πριν από την ηλικία των 8-9 ετών (Δεσλή, 2021). Αυτή η θέση εξηγεί, κατά κάποιον τρόπο, τη σχετικά αργή εισαγωγή των μαθητών στις εκτιμήσεις στα πλαίσια της τυπικής εκπαίδευσης, η οποία στις περισσότερες χώρες του κόσμου πραγματοποιείται μετά την τρίτη τάξη του δημοτικού σχολείου (Δεσλή, 2021). Ωστόσο, υπάρχουν έρευνες που δείχνουν ότι τα παιδιά από μικρή ηλικία είναι εξοικειωμένα και χρησιμοποιούν τις εκτιμήσεις στην καθημερινότητά τους με ιδιαίτερη επιτυχία, καθώς σταδιακά εμφανίζουν σημάδια της ικανότητας να σκέφτονται και να αντιλαμβάνονται ποσότητες που τους παρουσιάζονται κατά προσέγγιση, ιδιαίτερα όταν διαχειρίζονται μικρούς αριθμούς (π.χ., Δεσλή & Τριανταφύλλου, 2019) ή πραγματοποιούν προσθέσεις και αφαιρέσεις μικρών συνόλων (Sekeris, et al., 2020· Jordan et al., 2009 ·Δεσλή, 2011· Δεσλή & Τριανταφύλλου, 2019). Ήδη η Wynn (1992, στο Δεσλή, 2021) είχε διαπιστώσει ότι ακόμα και βρέφη είχαν την ικανότητα να αντιλαμβάνονται την αλλαγή της ποσότητας σε προσθέσεις και αφαιρέσεις μικρών συνόλων, ενώ οι McCrick και Wynn (2004, στο Δεσλή, 2021) κατέληξαν στο συμπέρασμα πως αυτή η ικανότητα δεν επηρεαζόταν από την ικανότητά τους για προφορική αρίθμηση, δείχνοντας πως ακόμη και βρέφη που δεν είχαν ακόμη αναπτύξει τη γλώσσα μπορούσαν να διακρίνουν ανάμεσα σε σωστά και λανθασμένα αποτελέσματα αριθμητικών συνόλων. Παρόμοια ευρήματα προέκυψαν και από έρευνα των Gilmore, McCarthy και Spelke, (2010), καθώς μικρά παιδιά μπορούσαν με επιτυχία να συγκρίνουν δύο ποσότητες με μία ποσότητα αναφοράς, που όλες παρουσιάζονταν με μη συμβολικά μέσα και περιελάμβαναν 5 έως 58 στοιχεία, αλλά και να πραγματοποιούν εκτιμήσεις όταν αυτές προσθέτονταν ή αφαιρούνταν.

Ειδικότερα, φαίνεται πως τα μικρά παιδιά είναι σε θέση να κρίνουν πότε μια εκτίμηση είναι λιγότερο ή περισσότερο ικανοποιητική και να παράγουν υπολογιστικές εκτιμήσεις, πριν ακόμα εκπαιδευτούν σε ακριβείς υπολογισμούς ή σε συγκεκριμένες στρατηγικές εκτίμησης (Δεσλή, 2021). Έρευνα της Δεσλή (2011) σε παιδιά νηπιαγωγείου έδειξε πως αυτά ήταν ιδιαίτερα ικανά να κρίνουν αν δύο παιδιά, σύμφωνα με το σενάριο της ιστορίας που τους παρουσιάστηκε, έκαναν καλές ή κακές εκτιμήσεις σε προσθέσεις με μικρούς αριθμούς, τα αθροίσματα των οποίων δεν ξεπερνούσαν το 10. Παράλληλα, όταν ζητήθηκε από τα ίδια παιδιά να πραγματοποιήσουν δικές τους εκτιμήσεις, παρατηρήθηκε ένα ποσοστό επιτυχίας μεγαλύτερο του 80%, γεγονός που ίσως μαρτυρά πως, όταν καλούνται να δώσουν τη δική τους απάντηση, νοηματοδοτούν καλύτερα την κατάσταση, σκέφτονται λογικά και αναπτύσσουν εναλλακτικές στρατηγικές εκτίμησης, που μπορεί να μη συνάδουν απόλυτα με αυτές της τυπικής εκπαίδευσης. Μια τέτοιου είδους παραγωγή και αξιοποίηση αυθεντικών υπολογιστικών εκτιμήσεων από μικρή ηλικία μπορεί να συμβάλλει σημαντικά στην ενεργή εμπλοκή των μαθητών στη διδασκαλία αλλά και στην ενίσχυση της αίσθησης του αριθμού (Δεσλή, 2011· Δεσλή, 2021). Αντίστοιχα δεδομένα επιβεβαιώνουν και οι McCrink και Spelke (2010), επεκτείνοντας την έρευνα με τα μη συμβολικά μέσα, καθώς παρατηρούν την ικανότητα παιδιών ηλικίας 5-7 ετών να εκτιμούν το γινόμενο δύο ποσοτήτων που πολλαπλασιάζονται.

Διαχρονική έρευνα των Jordan et al. (2009, στο Δεσλή, 2021) που μελετούσε την ύπαρξη ομοιότητας στις αριθμητικές ικανότητες των μικρών παιδιών, μέσα στα οποία συγκαταλέγεται και η ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης, έλεγξαν τέσσερις φορές σε διάστημα 18 μηνών τις ικανότητες των παιδιών, από την ηλικία των 5 και μέχρι να συμπληρώσουν τα 7 έτη της ηλικίας τους. Παρουσίασαν στα παιδιά προσθέσεις και αφαιρέσεις μαζί με δύο πιθανές απαντήσεις για την καθεμία, από τις οποίες η μία βρισκόταν πιο κοντά και η άλλη πιο μακριά στο πραγματικό αποτέλεσμα. Τα αποτελέσματά τους έδειξαν μικρές αλλά σημαντικές αλλαγές στη βελτίωση της ικανότητας για υπολογιστική εκτίμηση παράλληλα με την αύξηση της ηλικίας, επιβεβαιώνοντας τη γραμμική ανάπτυξη της εν λόγω ικανότητας. Σε βάθος χρόνου ακολούθησαν κι άλλες έρευνες, οι περισσότερες από τις οποίες δεν ασχολήθηκαν εντατικά με την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης των παιδιών, δίνοντας περισσότερη βαρύτητα στην εξέλιξη της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης και την ανάπτυξη του προσθετικού και πολλαπλασιαστικού συλλογισμού, καταλήγοντας σε παρόμοια ευρήματα. Ωστόσο, σημαντικό πρέπει να θεωρηθεί το εύρημα των Dehaene, Spelke, Pinel, Stanescu και Tsivkin (1999), σύμφωνα με το οποίο η ενεργοποίηση συγκεκριμένων περιοχών του εγκεφάλου, ιδίως αυτών που έχουν άμεση σχέση με τη γλώσσα και τη χωρική ικανότητα, επηρεάζει τις επιδόσεις των λυτών στους ακριβείς και προσεγγιστικούς συλλογισμούς, αντίστοιχα.

Μελετώντας εντατικά την ανάπτυξη της ικανότητας των παιδιών για υπολογιστική εκτίμηση, η Dowker (1997) εστίασε στις αλλαγές που εμφανίζονται στις εκτιμήσεις τους λόγω της δυσκολίας των εμπλεκόμενων αριθμών και πράξεων αλλά και της ανάπτυξης των αριθμητικών και υπολογιστικών δεξιοτήτων τους. Τα παιδιά της έρευνας αρχικά απάντησαν σε αριθμητικά προβλήματα που απαιτούσαν νοερούς υπολογισμούς πρόσθεσης και κατηγοριοποιήθηκαν ανάλογα με τις επιδόσεις τους. Στη συνέχεια, τους δόθηκαν έργα υπολογιστικής εκτίμησης μεγαλύτερου επιπέδου από αυτό των υπολογιστικών τους ικανοτήτων. Η ερευνήτρια έδειχνε στα παιδιά κάρτες με αριθμούς που προστίθενται και εκείνα προσπαθούσαν προφορικά να προβούν σε κατ’ εκτίμηση, και όχι ακριβείς, υπολογισμούς. Η Dowker διαπίστωσε πως όσο το επίπεδο δυσκολίας αυξανόταν τόσο μειωνόταν ο αριθμός των λογικών εκτιμήσεων των παιδιών. Με άλλα λόγια, τα παιδιά που βρίσκονταν στα ανώτερα επίπεδα υπολογιστικών δεξιοτήτων πραγματοποιούσαν λογικότερες εκτιμήσεις με απόκλιση έως και 30% σε σχέση με τα παιδιά που βρίσκονταν στα κατώτερα επίπεδα υπολογιστικών δεξιοτήτων.

Το παραπάνω εύρημα ίσως οφείλεται στην «επίδραση του μεγέθους του αριθμού» (number size effect), η οποία σύμφωνα με διάφορες έρευνες (π.χ., Δεσλή & Τριανταφύλλου, 2019), διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στις διαδικασίες εκτίμησης. Σύμφωνα με την ερευνήτρια, οι εκτιμήσεις των παιδιών κινούνται στη «ζώνη μερικής γνώσης και κατανόησης», η οποία επεκτείνεται μόλις πάνω από την ικανότητά τους να υπολογίζουν νοερά προσθέσεις με ακρίβεια. Η επίδραση του μεγέθους του αριθμού στους κατ’ εκτίμηση υπολογισμούς των παιδιών μαρτυρά ότι τα παιδιά δεν επιλέγουν τυχαία ή «μαντεύουν» την απάντησή που θα δώσουν, αλλά πολύ περισσότερο προσπαθούν να παράξουν εκτιμήσεις. Τον ρόλο που διαδραματίζει το μέγεθος της απόστασης ανάμεσα στο ακριβές αποτέλεσμα και την εκτιμώμενη απάντηση επισημαίνει και η Δεσλή (2011) σε έρευνά της σε παιδιά νηπιαγωγείου, όταν τους ζητήθηκε να κρίνουν αν δύο παιδιά, σύμφωνα με το σενάριο της ιστορίας που τους παρουσιάστηκε, έκαναν καλές ή κακές εκτιμήσεις σε προσθέσεις με μικρούς αριθμούς, τα αθροίσματα των οποίων δεν ξεπερνούσαν το 10. Τα παιδιά κατέγραφαν τις απαντήσεις τους σε μια κλίμακα, στην οποία παρουσιαζόταν ένα πρόσωπο σε πέντε διαβαθμίσεις (π.χ. 🙂 πολύ χαρούμενο ή ☹️ πολύ στεναχωρημένο), δηλώνοντας το πρόσωπο που θεωρούσαν ότι ανταποκρινόταν καλύτερα στην εκτίμηση των δύο παιδιών της ιστορίας. Τα παιδιά είχαν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας όταν τα αθροίσματα αφορούσαν ανακριβείς (π.χ., 3 + 3 = 10) ή καλές εκτιμήσεις (π.χ., 4 + 1 = 6), ενώ μικρότερα όταν αφορούσαν λιγότερο ανακριβείς εκτιμήσεις (π.χ., 6 + 3 = 7).

Με σκοπό να αναγνωρίσει τα στοιχεία που φανερώνουν ανάπτυξη της ικανότητας για υπολογιστική εκτίμηση με την ηλικία, η Ganor-Stern (2018) μελέτησε τις επιδόσεις μαθητών 10-12 ετών και ενηλίκων σε έργα με ακριβείς και προσεγγιστικούς υπολογισμούς. Τα έργα αυτά περιελάμβαναν πολλαπλασιασμούς με διψήφιους αριθμούς, τους οποίους οι μαθητές έπρεπε να εκτελέσουν γραπτά με κάθετο αλγόριθμο, αλλά και ίδιου επιπέδου δυσκολίας πολλαπλασιασμούς, όπου έπρεπε να εκτιμήσουν αν το αποτέλεσμά τους ήταν μεγαλύτερο ή μικρότερο από συγκεκριμένους αριθμούς αναφοράς που τους δίνονταν. Στο έργο υπολογιστικής εκτίμησης, οι αριθμοί αναφοράς άλλοτε ήταν πιο κοντά κι άλλοτε πιο μακριά από την ακριβή απάντηση, έτσι ώστε και οι επιλογές να καλύπτουν εκτιμήσεις να βρίσκονται, κατά αντίστοιχο τρόπο, είτε πολύ κοντά είτε πολύ μακριά από το πραγματικό αποτέλεσμα. Τα ευρήματα έδειξαν ένα μικρότερο ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων στο έργο των υπολογισμών με ακρίβεια από τα παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας σε σχέση με τα μικρότερα, ενώ δεν παρατηρήθηκαν ιδιαίτερες διαφορές στο έργο υπολογιστικής εκτίμησης, καθώς τα επίπεδα ορθότητας των απαντήσεων ήταν ίδια και σταθερά και για τέσσερις ηλικιακές ομάδες. Από άποψη χρόνου οι ενήλικες ήταν οι γρηγορότεροι στις διαδικασίες εκτίμησης, ενώ δεν φάνηκαν διαφορές μεταξύ των παιδιών. Παρόλο που υπήρχαν μεγαλύτερες αποκλίσεις στον αριθμό των σωστών απαντήσεων στο έργο των υπολογισμών με ακρίβεια, δεν παρατηρήθηκε συσχέτιση της επιτυχίας στο ένα έργο με την επιτυχία στο άλλο. Επίσης, παρά το γεγονός ότι οι αποκλίσεις αυτές μειώνονταν με την ηλικία στο έργο των υπολογισμών με ακρίβεια, κάτι τέτοιο δεν συνέβη και στην περίπτωση του έργου της υπολογιστικής εκτίμησης. Για αυτόν τον λόγο, η Ganor-Stern (2018) πιστεύει ότι ίσως απαιτούνται διαφορετικές δεξιότητες για την πραγματοποίηση υπολογισμών με ακρίβεια και την πραγματοποίηση κατ’ εκτίμηση υπολογισμών.

Μια διαφορετική άποψη προκύπτει από ευρήματα της έρευνας των Caviola, Mammarella, Cornoldi και Lucangeli (2012) σε 8χρονα και 9χρονα παιδιά στην Ιταλία, καθώς δεν εντόπισαν διαφορές ανάμεσα στους ακριβείς και προσεγγιστικούς υπολογισμούς. Στα μισά παιδιά κάθε ηλικιακής ομάδας έδωσαν προσθέσεις με διψήφιους και τριψήφιους όρους και εκείνα έπρεπε να επιλέξουν μεταξύ δύο απαντήσεων, από τις οποίες η μία ήταν το πραγματικό αριθμητικό αποτέλεσμα. Αντίστοιχα, τα άλλα μισά παιδιά είχαν τις ίδιες προσθέσεις να υπολογίσουν προσεγγιστικά και να επιλέξουν μεταξύ μίας καλής και μίας κακής εκτίμησης. Αν και παρατηρήθηκε μεγαλύτερη επιβάρυνση της εργαζόμενης μνήμης των παιδιών κατά τους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς συγκριτικά με τους ακριβείς υπολογισμούς, δεν βρέθηκαν διαφορές στις επιδόσεις ανάμεσα στους δύο υπολογισμούς. Αντίθετα, φάνηκε ότι και οι δύο υπολογισμοί δυσκόλεψαν τα παιδιά, εύρημα που συνάδει με αντίστοιχα προηγούμενων ερευνών (π.χ. Ganor-Stern, 2018). Επιπλέον, οι ερευνητές δεν βρήκαν βελτίωση των επιδόσεων των παιδιών με την ηλικία στους προσεγγιστικούς υπολογισμούς πέρα από την ταχύτητά τους. Συγκεκριμένα, τα 9χρονα παιδιά εκτελούσαν γρηγορότερα προσεγγιστικούς υπολογισμούς σε σχέση με τα 8χρονα παιδιά, χωρίς όμως να υπάρχουν διαφορές στα ποσοστά των σωστών απαντήσεών τους.

Λαμβάνοντας υπόψιν όλα τα παραπάνω ευρήματα, θα μπορούσε να ειπωθεί ότι αρχικά δεν υπάρχουν σημαντικές ηλικιακές διαφορές στα ποσοστά επιτυχίας των συμμετεχόντων σχετικά με τις εκτιμήσεις τους, τουλάχιστον σε έργα με πολλαπλασιασμούς και προσθέσεις. Ωστόσο, ορισμένες παρατηρούμενες ηλικιακές διαφορές που βρέθηκαν σε κάποιους τύπους δοκιμασιών δείχνει ότι υπάρχει κάτι που επηρεάζει τις επιδόσεις των παιδιών, το οποίο είτε ατονεί ή πάει εντελώς καθώς μεγαλώνουν. Συνεπώς, οι έρευνες αυτές μαρτυρούν μια αναπτυξιακή πορεία στην ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης, η οποία είναι σχετικά αργή τουλάχιστον μέχρι την ηλικία των 10-11 ετών και για πολυψήφιους υπολογισμούς. Όμως, μετά το πέρας της ηλικίας αυτής και μέχρι την εφηβεία και την ενηλικίωση παρατηρείται, σύμφωνα με τους LeFevre et al. (1993, στο Δεσλή, 2021), μία αλματώδης/ταχεία πρόοδος στην ικανότητα των μαθητών για υπολογιστική εκτίμηση.

Β. Πρόβλημα και Επίλυση προβλήματος

Ο Jonassen (2000, στο Δεσλή & Λιόλιου, 2020) θεωρεί πως ο όρος «πρόβλημα» χρησιμοποιείται τόσο στα Μαθηματικά όσο και στην καθημερινή ζωή, για να περιγράψει μια άγνωστη κατάσταση ή ένα σύνθετο κοινωνικό πρόβλημα. Οι Polya (1988) και Schoenfeld

(1992) αναπτύσσουν τη θέση του Jonassen και αντιμετωπίζουν το πρόβλημα ως μια προς διερεύνηση κατάσταση, την οποία επιδιώκουν οι εμπλεκόμενοι να επιλύσουν. Με αυτόν τον ορισμό φαίνεται να συμφωνούν οι Blum και Niss (1989), συμπληρώνοντας πως το πρόβλημα είναι μια κατάσταση που δημιουργεί ανοιχτές ερωτήσεις, που προκαλεί κάποιον να εμπλακεί νοητικά σε μια διαδικασία σκέψης. Γενικότερα, το μεγαλύτερο μέρος της ερευνητικής μαθηματικής κοινότητας αποδέχεται έναν ορισμό, σύμφωνα με τον οποίο ένα πρόβλημα αποτελεί μια κατάσταση, όπου κάποιος θέλει να φτάσει σε μία λύση, αλλά δεν γνωρίζει άμεσα μια συγκεκριμένη σειρά ενεργειών που πρέπει να ακολουθήσει (π.χ., Liljedahl, Santos-Trigo, Malaspina, & Bruder, 2016). Σύμφωνα με τον Polya (1973), η επίλυση προβλήματος αναφέρεται, εκτός από την επίτευξη του αποτελέσματος, στην κατάσταση της εύρεσης ενός τρόπου ή της ανακούφισης από τις προκλήσεις που προκύπτουν.

Μια επιπλέον κατηγορία μαθηματικών προβλημάτων σύμφωνα με την Κολέζα (2009, 109 στο Δεσλή & Λιόλιου, 2020) είναι τα παλιωμένα προβλήματα, τα οποία παίρνουν διάφορες μορφές (π.χ., λεκτικά, παιχνιδιού, παραμυθιού, σχήματος-γραφήματος, κ.ά.) και μοιάζουν με τα προβλήματα που μπορεί να συναντήσει κανείς στην καθημερινή ζωή, αποτελώντας παράλληλα «πεδίο εφαρμογής μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων». Αντίθετα, ο Ο Jonassen (2000, στο Δεσλή & Λιόλιου, 2020) διαχωρίζει τα προβλήματα σε δομημένα και με ελλιπή δομή. Τα δομημένα προβλήματα περιλαμβάνουν όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για την επίλυσή τους, απαιτούν την επιλογή και εφαρμογή των κατάλληλων αλγόριθμων και συνήθως επιδέχονται έναν συγκεκριμένο τρόπο λύσης και απάντησης. Από την άλλη πλευρά, τα ελλιπούς δομής ή αλλιώς μη δομημένα προβλήματα παραλείπουν σημαντικά στοιχεία και επιδέχονται πολλούς και διαφορετικούς τρόπους επίλυσης. Η Κολέζα (2009, στο Δεσλή & Λιόλιου, 2020) συμπληρώνει πως ενδέχεται να περιλαμβάνουν κάποια λανθασμένη πληροφορία στην εκφώνηση ή να ζητείται σύγκριση, αντιπαράθεση και γενίκευση λύση. Τέλος, η Sierprinska (1994) κατηγοριοποιεί τα προβλήματα σε ανοικτού και κλειστού τύπου, με τα πρώτα να επιδέχονται παραπάνω από μία σωστές λύσεις, ενώ τα δεύτερα δέχονται μία και μοναδική απάντηση.

Για τον Schoenfeld (1992) τα μαθηματικά προβλήματα είναι μαθηματικά έργα που χρησιμοποιούνται ως μέσα διδασκαλίας για την εξάσκηση μαθηματικών δεξιοτήτων και την αξιολόγηση του επιπέδου ανάπτυξης. Ένα μαθηματικό πρόβλημα χαρακτηρίζεται από τέσσερα στοιχεία: (α) μια κατάσταση που περιλαμβάνει δεδομένα και έναν επιθυμητό στόχο, (β) μια κατάσταση που περιλαμβάνει μαθηματικά, (γ) ένα πρόσωπο που επιθυμεί την επίλυση και (δ) ένα εμπόδιο μεταξύ των δεδομένων και του επιθυμητού στόχου. Παράλληλα, υπάρχει μια ποικιλία προβλημάτων ανάλογα με τη δομή και τον τρόπο επίλυσής τους (π.χ., προφορικά, γραπτά, λεκτικά, εικονιστικά κ.ά.). Από τους διαφορετικούς τύπους προβλημάτων τα λεκτικά είναι εκείνα που καταλαμβάνουν ένα σημαντικό μέρος των σχολικών βιβλίων, καθώς είναι σύντομα και περιέχουν χρήσιμες πληροφορίες που πρέπει να αποκωδικοποιηθούν, προκειμένου να οδηγήσουν τον λύτη στην επίλυση του προβλήματος.

Σύμφωνα με το NCTM (2000, 51), η επίλυση προβλήματος μεταφράζεται ως «εμπλοκή σε μια δραστηριότατα για την οποία η μέθοδος λύσης δεν είναι γνωστή από πριν». Πρόκειται μια πολυδιάστατη διαδικασία, όπως τονίζουν οι Καραντζής και Τσαγκάρης (2003, στο Δεσλή & Λιόλιου, 2020) που απαιτεί γνώση των βασικών αριθμητικών δεδομένων, των πράξεων και των αλγορίθμων, αλλά και κατανόηση της γλώσσας με την οποία εκφράζονται οι ποσοτικές σχέσεις σε ένα μαθηματικό πρόβλημα. Προκειμένου να οδηγηθούν οι μαθητές στην επίλυση του προβλήματος πρέπει να χρησιμοποιήσουν γνώσεις και στρατηγικές που ήδη έχουν κατακτήσει, να έχουν συλλογιστική σκέψη, να πραγματοποιούν συσχετισμούς και να αναπαριστούν το πρόβλημα, έτσι ώστε μέσα από αυτές τις διαδικασίες να είναι σε θέση να αναπτύξουν τη νέα μαθηματική γνώση, όπως αναφέρει ο van de Walle (2015, στο Δεσλή & Λιόλιου, 2020). Συνεπώς, φαίνεται ξεκάθαρα πως η επίλυση του προβλήματος δεν πρέπει να είναι μονάχα αυτοσκοπός, αλλά πολύ περισσότερο το μέσον για να επιτευχθεί.

Ο Polya (1973) δήλωσε ότι οι μαθητές χρειάζονται διανοητικό θάρρος, διανοητική ειλικρίνεια και σοφή αυτοσυγκράτηση όταν επιλύουν προβλήματα, χαρακτηριστικά που οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν όταν εκτίθενται σε δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων στην τάξη, καθώς τους βοηθούν να αναπτύξουν καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών και να γίνουν καλύτεροι λύτες. Δεδομένου ότι η επίλυση προβλημάτων αποτελεί χαρακτηριστικό της ανθρώπινης δραστηριότητας, καθώς και ότι όλα τα προβλήματα -συμπεριλαμβανομένων των μαθηματικών προβλημάτων- μπορεί να μην απαιτούν την εφαρμογή μίας μόνο λύσης, ο Polya προσδιόρισε τέσσερα συγκεκριμένα βήματα στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, τα οποία είναι τα εξής: (α) η κατανόηση του προβλήματος, (β) η επινόηση και οργάνωση ενός σχεδίου δράσης, (γ) η υλοποίηση του σχεδίου δράσης και (δ) ο έλεγχος και η αξιολόγηση του αποτελέσματος (ανασκόπηση) (Polya, 1973, 5· Thiangthung, 2016· Δεσλής & Δεσλή, 2019· Δεσλή & Λιόλιου, 2020). Η θεωρία του Polya και άλλες που ακολούθησαν χρησιμεύουν συχνά ως οδηγός για τους εκπαιδευτικούς και τους ερευνητές, προκειμένου να εργαστούν με στρατηγικές που εφαρμόζουν τα παιδιά και οι ενήλικες όταν ασχολούνται με την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.

Η Geary (2004, στο Desli & Lioliou, 2020) τονίζει τη σημασία τόσο της εννοιολογικής κατανόησης και όσο και της διαδικαστικής γνώσης, οι οποίες είναι απαραίτητες για την επίλυση προβλημάτων, καθώς ένα σύνολο γνωστικών και μη γνωστικών ενεργειών που απαιτούν συγκεκριμένες γνώσεις και δεξιότητες μπορεί να επιβάλλουν την εμπλοκή ενός λύτη στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ωφεληθούν μέσα από τη συμμετοχή τους στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, καθώς μπορούν να βελτιώσουν και να αναπτύξουν την ικανότητά τους να επιλύουν προβλήματα της πραγματικής ζωής, να αναπτύξουν κριτική σκέψη και κατανόηση των εμπλεκόμενων εννοιών, να γνωρίσουν και να πειραματιστούν με νέες στρατηγικές επίλυσης, τροποποιώντας τις γνώσεις που έχουν ήδη μάθει, μεταξύ άλλων (Schoenfeld, 1992· Lester, 2013). Για να επιτευχθούν αποτελεσματικά όλα τα παραπάνω, κρίνεται αναγκαίο να ειδωθεί η διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος ως αναπόσπαστο μέρος της μάθησης των μαθηματικών και όχι ως ξεχωριστό θέμα στα πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών. Χρειάζεται η επίλυση προβλήματος να διέπεται από συγκεκριμένες αρχές και προδιαγραφές, προκειμένου οι μαθητές να έρχονται σε επαφή με "καλά" μαθηματικά προβλήματα (π.χ., όχι «προβλήματα ρουτίνας», αλλά «ανοιχτά» και «πλούσια» προβλήματα, πλαισιωμένα ή ρεαλιστικά κ.λ.π.), ώστε να αναπτύσσονται "καλοί" λύτες προβλημάτων (Liljedahl et al., 2016). Τέτοιου είδους προτάσεις επισημαίνουν την προσπάθεια που πρέπει να καταβληθεί, έτσι ώστε να συμπεριληφθεί η επίλυση προβλήματος σε κάθε επίπεδο τάξης και σε κάθε μαθηματικό πλαίσιο.

Είναι πολύ συχνό το φαινόμενο οι μαθητές να αντιμετωπίζουν δυσκολίες κατά την επίλυση προβλήματος, η οποία επηρεάζεται τόσο από εξωτερικούς όσο και εσωτερικούς παράγοντες (Frensch & Fulke, 1995). Στους εξωτερικούς παράγοντες συγκαταλέγονται εκείνοι που σχετίζονται με την αναπαράσταση του προβλήματος (π.χ., η δομή και η γλώσσα του) και το μαθησιακό περιβάλλον, ενώ οι εσωτερικοί αφορούν στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του εκάστοτε λύτη, όπως επισημαίνουν οι Frensch και Fulke (1995) και ο Jonassen (2000, στο Δεσλή & Λιόλιου, 2020). Ένα επιπλέον στοιχείο που αξίζει να τονιστεί και που πρέπει να λαμβάνεται υπόψιν είναι οι περιπτώσεις όπου οι μαθητές εμφανίζουν ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες (Η.Ε.Α). Σύμφωνα με τους Lerner και Johns (2011, στο Αγαλιώτης & Ομπάσης, 2016), οι μαθητές με Ήπιες Εκπαιδευτικές Ανάγκες εμφανίζουν σχετικά μικρές ιδιαιτερότητες και αποκλίσεις από τον «τυπικό μαθητή», και χαρακτηρίζονται από ήπια νοητική αναπηρία, συναισθηματικές και συμπεριφορικές διαταραχές, προβλήματα-διαταραχές λόγου και ειδικές μαθησιακές δυσκολίες (Ε.Μ.Δ.). Ο Edyburn (2016, στο

Αγαλιώτης & Ομπάσης, 2016) αναφέρει πως συχνά οι μαθητές με Η.Ε.Α. εμφανίζουν ακαδημαϊκές δυσκολίες και προβλήματα κοινωνικο-συναισθηματικής προσαρμογής, ωστόσο ο Αγαλιώτης (2012, στο Αγαλιώτης & Ομπάσης, 2016) επισημαίνει πως με την κατάλληλη υποστήριξη μπορούν να πετύχουν ικανοποιητική μαθησιακή πρόοδο διδασκόμενοι με το πρόγραμμα του γενικού σχολείου. Σύμφωνα με τον Αγαλιώτη (2011), οι ειδικές μαθησιακές δυσκολίες έχουν πολλές διαστάσεις και είναι δυνατό να εμφανίζονται σε ποικίλους συνδυασμούς και με διάφορες μορφές. Έτσι, οι μαθητές με Ε.Μ.Δ δυσκολεύονται ιδιαίτερα στα μαθηματικά εξαιτίας γνωστικών αδυναμιών που αντανακλώνται σε ποικίλους άξονες του εν λόγω αντικειμένου (π.χ. πράξεις, προβλήματα, γεωμετρία, άλγεβρα κ.λ.π.). Απόρροια της παραπάνω διαπίστωσης είναι η εμφάνιση ενός συνόλου σημαντικών δυσκολιών που παρουσιάζουν οι μαθητές με διαγνωσμένες Ε.Μ.Δ, όπως, δυσκολίες στην αναγνωστική αποκωδικοποίηση (δυσλεξία) κατά την οποία εντοπίζονται ελλείμματα και δυσκολίες σε βασικές μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες, δυσκολίες στην κατανόηση απλών αριθμητικών εννοιών, την εκμάθηση διαδικασιών εύρεσης αποτελεσμάτων, την απόκτηση δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων, οπτική αντίληψη-απομνημόνευση-ανάκληση κ.ά. (Αγαλιώτης, 2011).

Μία επιπλέον σημαντική προϋπόθεση για την επίλυση του προβλήματος αποτελεί η επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής. Σύμφωνα με τον Siegler (2003, στο Λιόλιου, 2020), οι μαθητές αρχικά επιλέγουν απλούστερες στρατηγικές και με την πάροδο του χρόνου υιοθετούν και χρησιμοποιούν πιο σύνθετες και εκλεπτυσμένες στρατηγικές. Βέβαια, όπως τονίζουν οι Lemaire, Lecacheur και Farioli (2000, στο Δεσλή, 2021), η χρήση πιο εκλεπτυσμένων και σύνθετων στρατηγικών προϋποθέτει και μεγαλύτερο βαθμό εννοιολογικής κατανόησης. Επιπλέον, σημαντική για την επίλυση προβλήματος κρίνεται η σύνδεση της απάντησης με το πλαίσιο του προβλήματος, καθώς παρατηρείται συχνά μια αδυναμία των μαθητών να απαντήσουν σε λεκτικά προβλήματα που συνδέονται με ρεαλιστικές καταστάσεις, πράγμα που φαίνεται από το γεγονός ότι αδιαφορούν για τη λογικότητα της απάντησής τους (Polya, 1973).

Οι περισσότερες δυσκολίες στην επίλυση προβλήματος εμφανίζονται συνήθως στο στάδιο της μετάφρασης των στοιχείων του προβλήματος σε νοερή αναπαράσταση. Η έλλειψη νοερών αναπαραστάσεων συνήθως οφείλεται σε ασαφή γλωσσική διατύπωση του προβλήματος, αλλά και στην αδυναμία εύρεσης των κατάλληλων στοιχείων για την επιλογή των αντίστοιχων μαθηματικών πράξεων, όπως αναφέρουν ο Αγαλιώτης (2000) και οι Καραντζής και Τσαγγάρης (2003) στο Λιόλιου (2020). Έρευνα των Sepeng και Madzorera

(2014) σε μαθητές 16-17 ετών αναφορικά με την ικανότητα χρήσης της μαθηματικής γλώσσας και τη γνώση λεξιλογίου σε πλαίσιο επίλυσης προβλήματος ανέδειξε πως η πλειονότητα των μαθητών αντιμετώπιζε δυσκολίες κατανόησης του μαθηματικού λεξιλογίου, γεγονός που επηρέασε σημαντικά τις επιδόσεις τους στην επίλυση των λεκτικών προβλημάτων. Παρόμοια αποτελέσματα προκύπτουν και από έρευνες της Βοσνιαδού (1995, στο Δεσλή & Λιόλιου, 2020) σε μαθητές Α’ δημοτικού και των Zacharos και Koustourakis (2011) σε ενήλικες (μεταπτυχιακούς φοιτητές, εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης), αντίστοιχα, καθώς ανέδειξαν πως οι συμμετέχοντες αδυνατούσαν να ερμηνεύσουν το περιεχόμενο των προβλημάτων και να επιλέξουν την κατάλληλη πράξη που θα τους οδηγούσε στην επίλυσή τους.

Ένας ακόμη παράγοντας που επηρεάζει τις επιδόσεις των μαθητών στην επίλυση προβλήματος σχετίζεται με την ανάπτυξη κατάλληλων γνωστικών σχημάτων κατά τη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Οι Αγγελόπουλος και Αγαλιώτης (2021) αναφέρουν πως η ενεργοποίηση γνωστικών σχημάτων επιτρέπει στους λύτες να διακρίνουν τη δυναμική σχέση ανάμεσα στα δεδομένα και στα ζητούμενα ενός προβλήματος και να προβούν στις σωστές αριθμητικές πράξεις για να καταλήξουν στο αποτέλεσμα, παρά τις επιφανειακές ομοιότητες ή διαφορές που μπορεί να έχουν οι καταστάσεις που περιγράφονται στα προβλήματα. Όπως επισημαίνει ο Αγαλιώτης (2011), η ανάπτυξη των γνωστικών σχημάτων προκύπτει μετά την αρχική κατανόηση των δομικών στοιχείων του προβλήματος και την αντίληψη των δυναμικών σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ τους, ενώ παράλληλα αποτελεί μία από τις σημαντικότερες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες (Ε.Μ.Δ) και γενικότερα με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες. Σύμφωνα με τους Geary, Hoard, Nugent και Bailey (2012, στο Αγγελόπουλος και Αγαλιώτης, 2021), οι βασικότερες αιτίες αυτών των δυσκολιών είναι οι αδυναμίες των μαθητών με Ε.Μ.Δ να διακρίνουν (α) τις πραγματολογικές και εννοιολογικές ομοιότητες που μπορεί να έχουν καταστάσεις που διαφέρουν στην επιφανειακή δομή και παρουσίασή τους και (β) τις κρίσιμες και κεντρικές από τις περιφερειακές ή δευτερεύουσες πληροφορίες των καταστάσεων που πραγματεύονται. Χαρακτηριστική είναι η δυσκολία των μαθητών με Ε.Μ.Δ σε περιπτώσεις προβλημάτων που αναφέρονται σε μείωση, απώλεια, ελάττωση, δανεισμό ή καταστροφή αντικειμένων. Καθώς οι μαθητές επηρεάζονται από τις συνθήκες που περιγράφονται στα προβλήματα και δεν αντιλαμβάνονται ότι πάντα υπάρχει κάποια αρχική ποσότητα που μικραίνει μετά από κάποια ενέργεια, αδυνατούν να αντιληφθούν πως απαιτείται η πράξη της αφαίρεσης.

Έρευνα της Adetula (1990, στο Δεσλή & Λιόλιου, 2020) σε μαθητές τετάρτης δημοτικού στη Νιγηρία έδειξε πως η γλώσσα στην οποία παρουσιάζονται τα προβλήματα παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση ενός προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, φάνηκε πως οι μαθητές είχαν καλύτερες επιδόσεις όταν τα αριθμητικά προβλήματα που τους δόθηκαν ήταν διατυπωμένα στη μητρική τους γλώσσα, καθώς ήταν σε θέση να κατανοήσουν καλύτερα το περιεχόμενο του προβλήματος και να επιλέγουν με μεγαλύτερη ευκολία τις στρατηγικές που θα χρησιμοποιούσαν, ενώ χαμηλότερες επιδόσεις παρουσιάστηκαν στα αριθμητικά προβλήματα που ήταν διατυπωμένα στα αγγλικά. Τέλος, ορισμένες δυσκολίες στην επίλυση προβλήματος προκύπτουν από λανθασμένες αντιλήψεις των μαθητών και ενηλίκων για τη λειτουργία των πράξεων, όπως για παράδειγμα ότι ο πολλαπλασιασμός είναι μια επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ή η διαίρεση μικραίνει πάντα έναν αριθμό καθώς τον μοιράζει (Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985) ή/και την αδυναμία εξήγησης των ευρημάτων (Polya, 1973· Diezmann,Watters, & English, 2002). Μάλιστα, σύμφωνα με τον Polya (1973), η αδυναμία κατανόησης του προβλήματος φαίνεται ότι σε μεγάλο βαθμό οφείλεται στην έλλειψη συγκέντρωσης των μαθητών, καθώς εστιάζουν περισσότερο στα επιφανειακά χαρακτηριστικά του προβλήματος και λιγότερο στη δομή του, παρερμηνεύοντας πολλούς βασικούς όρους.

Γ. Η σχέση της υπολογιστικής εκτίμησης με την επίλυση προβλήματος

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται έντονο ενδιαφέρον της μαθηματικής κοινότητας αναφορικά με τη σχέση ανάμεσα στην ικανότητα των μαθητών για υπολογιστική εκτίμηση και την επίλυση προβλήματος. Ωστόσο, είναι πολύ λίγες οι έρευνες που μελετούν τη σχέση μεταξύ των δύο ικανοτήτων, αφορούν κυρίως μεγάλα παιδιά και ενήλικες και μελετούν κάπως επιδερμικά την εν λόγω σχέση, δίνοντας μεγαλύτερη βαρύτητα σε παρεμφερείς ή συναφείς έννοιες, όπως η αίσθηση του αριθμού, οι νοεροί υπολογισμοί, η επίλυση προβλήματος κ.ά. (π.χ., McIntosh et al., 1992· Lemonidis & Kaiafa, 2014· Kindrat & Osana, 2018· Desli & Lioliou, 2020· Δεσλή, 2021). Για παράδειγμα, οι Desli και Lioliou (2020) βρήκαν υψηλή θετική συσχέτιση ανάμεσα στην επιτυχία μαθητών έκτης τάξης και ενηλίκων σε έργα υπολογιστικής εκτίμησης και την επίδοσή τους σε έργα επίλυσης προβλήματος. Ειδικότερα, τα αποτελέσματα της έρευνας φανέρωσαν πως οι συμμετέχοντες που είχαν μεγάλο ποσοστό επιτυχών εκτιμήσεων είχαν παράλληλα εξίσου μεγάλο ποσοστό επιτυχίας στην επίλυση προβλήματος. Αυτό το εύρημα επιβεβαιώνει προηγούμενες έρευνες που έδειξαν ότι ο λύτης, όχι μόνο τροποποιεί και προσαρμόζει τους αριθμούς στο πρόβλημα, αλλά παράλληλα στοχάζεται για το είδος των προσαρμογών προτού ακόμα προβεί σε μια εύλογη εκτίμηση (McIntosh et al., 1992). Κάτι αντίστοιχο φαίνεται να συμβαίνει και στη μελέτη της σχέσης ανάμεσα στην ικανότητα για νοερούς υπολογισμούς και την επιτυχία στην επίλυση προβλήματος, όπου σε έρευνα των Gürbüz και Erdem (2016) διαπιστώθηκε ότι υπάρχει σημαντική θετική συσχέτιση ανάμεσα στις δύο ικανότητες σε παιδιά 11-12 ετών.

Πέρα από την επίλυση μαθηματικού προβλήματος, σημαντική πρέπει να θεωρηθεί και η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ της μαθηματικής συλλογιστικής και των δεξιοτήτων νοερού υπολογισμού. Οι περισσότερες έρευνες έχουν χρησιμοποιήσει μόνο απλές μετρήσεις της μαθηματικής συλλογιστικής καθώς και εργασίες μαθηματικής συλλογιστικής που δίνονται ως μέρος των τυπικών γραπτών σχολικών εξετάσεων. Σύμφωνα με τη Sowder (1992, στο Desli & Lioliou, 2020), έχει παρατηρηθεί πως η ανάπτυξη της ικανότητας για την πραγματοποίηση νοερών υπολογισμών ευνοεί μια ισχυρότερη εννοιολογική κατανόηση των ιδιοτήτων και της αίσθησης του αριθμού, η οποία με τη σειρά της υποστηρίζει τη μαθηματική συλλογιστική. Ωστόσο, απαιτούνται μελέτες που αφορούν την υπολογιστική εκτίμηση, η οποία συνδέεται στενά με τον νοερό υπολογισμό, για να επιβεβαιωθεί κάτι τέτοιο. Θεωρείται πολύ σημαντικό να διερευνηθεί περαιτέρω η υπολογιστική εκτίμηση, καθώς μπορεί να θεωρηθεί απαραίτητη για την ανάπτυξη ενός δυναμικού γνώσεων και δεξιοτήτων που απαιτούνται στην επίλυση προβλημάτων. Μάλιστα, η δύναμη της υπολογιστικής εκτίμησης και η σημασία της για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος φαίνεται και στις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται όταν αντιμετωπίζονται πολύπλοκες και γνωστικά απαιτητικές ιδέες σε προβλήματα (Desli & Lioliou, 2020).

Σύμφωνα με την Reys (1984, στο Δεσλή, 2021), η ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης προσφέρει έναν εναλλακτικό τρόπο αντίληψης και διαχείρισης των αριθμών, επιτρέποντας την ανάπτυξη νέων εννοιών που συνδέονται άμεσα με τους αριθμούς. Επιπλέον, καθώς ερχόμαστε αντιμέτωποι με ένα αριθμητικό πρόβλημα και πρέπει να προβούμε σε εκτιμήσεις, αντιλαμβανόμαστε, αποφασίζουμε και πράττουμε ανάλογα με τις εκάστοτε συνθήκες, προσπαθώντας να αποδώσουμε ένα ευρύτερο νόημα στο πρόβλημα. Η παραπάνω διαδικασία θεωρείται ένδειξη εννοιολογικής γνώσης που απαιτείται για την ικανότητα πραγματοποίησης υπολογιστικών εκτιμήσεων, όπως τονίζουν οι van de Walle et al. (2017, στο Δεσλή, 2021). Επιπλέον, ο Thomsen (2017, στο Δεσλή, 2021) θεωρεί πως η ενασχόληση των μαθητών με καταστάσεις επίλυσης προβλήματος που σχετίζονται άμεσα με τις καθημερινές τους δραστηριότητες και επιτρέπουν τη συζήτηση μεταξύ των μαθητών έχει θετικό αντίκτυπο στη βελτίωση της ικανότητάς τους για υπολογιστική εκτίμηση.

Οι Luwel και Verschafel (2008) υιοθετούν την οπτική του Reys (1986, στο Δεσλή, 2021) και υποστηρίζουν ότι η εκτίμηση είναι μια σύνθετη δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος που οδηγεί σε κατά προσέγγιση υπολογισμό, όπου απαιτούνται διάφορες δεξιότητες και μαθηματικές διαδικασίες, ενώ η επιτυχία στην εκτίμηση αναπτύσσεται και βελτιώνεται με το πέρασμα του χρόνου, διαμορφώνοντας μια γενικότερη στάση απέναντι στα μαθηματικά. Συνεπώς, για να αναπτυχθεί αποτελεσματικά, χρειάζεται να καλλιεργηθεί και να ενθαρρυνθεί κατά τη διάρκεια πολλών χρόνων ενασχόλησης με τα μαθηματικά Όπως και η επίλυση προβλήματος έτσι και η εκτίμηση δεν μπορεί να αποτελεί μια ξεχωριστή, απομονωμένη ενότητα των μαθηματικών, καθώς διαπερνά πολλούς-αν όχι όλους-θεματικούς άξονες στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών για τα μαθηματικά. Όταν διδάσκεται αποκομμένη από οποιαδήποτε άλλη έννοια ή πλαίσιο, όπως συμβαίνει συχνά, ενδέχεται να οδηγήσει ακόμη και σε αντίθετα αποτελέσματα, προκαλώντας την αντιπάθεια και δυσπιστία των μαθητών για την ίδια τη διαδικασία. (Δεσλή, 2021).

Λαμβάνοντας υπόψιν όλα τα παραπάνω, θα μπορούσε να ειπωθεί πως ίσως να υπάρχει μια δυναμική σχέση ανάμεσα στην υπολογιστική εκτίμηση και την επίλυση προβλήματος (καθώς και με συναφείς έννοιες, όπως την αξία θέσης ψηφίου, την αίσθηση του αριθμού, κ.ά.), καθώς η δεύτερη ενισχύει την πρώτη και έτσι διευκολύνεται και η εξέλιξη της επίλυσης. Ωστόσο, απαιτείται περισσότερη έρευνα για την ενίσχυση της σχέσης μεταξύ των δύο ικανοτήτων, καθώς όπως επισημαίνουν οι Sekeris, Verschaffel και Luwel (2019, στο Δεσλή, 2021), τα διαθέσιμα ευρήματα απλώς αποκαλύπτουν τη σχέση αυτή και θεωρούνται ακόμα ελλιπή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

2.1. Σκοπός της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσει τη σχέση ανάμεσα στην ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης και επίλυσης προβλήματος σε παιδιά Β’ και Δ’ δημοτικού. Πιο συγκεκριμένα, η συγκεκριμένα εργασία, πέρα από το κύριο ερευνητικό ερώτημα, θα επιχειρήσει να εξετάσει τα παρακάτω επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα:

1. Ποια είναι η ικανότητα των παιδιών Β’ και Δ’ δημοτικού για πραγματοποίηση υπολογιστικών εκτιμήσεων;

2. Ποια είναι η ικανότητα των παιδιών Β’ και Δ’ δημοτικού για επίλυση προβλήματος;

3. Υπάρχει σχέση ανάμεσα στην ικανότητα των παιδιών για πραγματοποίηση υπολογιστικών εκτιμήσεων και στην ικανότητα για επίλυση προβλήματος;

4. Η σχέση αυτή διαφοροποιείται ως προς την ηλικία;

Για τον σκοπό αυτό, πραγματοποιήθηκε έρευνα σε μαθητές Β’ και Δ δημοτικού που φοιτούσαν σε δημόσια δημοτικά σχολεία της δυτικής Θεσσαλονίκης.

2.2. Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 94 άτομα[3], προερχόμενα ισάριθμα από δύο ηλικιακές ομάδες. Από τους συμμετέχοντες, οι 47 ήταν μαθητές και μαθήτριες της Β’ Δημοτικού (ηλικίας από 7 χρονών και 3 μηνών έως 8 χρονών και 2 μηνών, με μέσο όρο ηλικίας τα 7 χρόνια και 9 μήνες), ενώ οι υπόλοιποι 47 ήταν μαθητές της Δ’ Δημοτικού (ηλικίας από 9 χρονών και 3 μηνών έως 10 χρονών και 10 μηνών, με μέσο όρο ηλικίας τα 9 χρόνια και 10 μήνες). Από το σύνολο των συμμετεχόντων, οι 46 ήταν αγόρια (48,9%), ενώ οι υπόλοιποι 48 ήταν κορίτσια (51,1%).

Όλοι οι μαθητές φοιτούσαν σε δημόσια δημοτικά σχολεία της δυτικής Θεσσαλονίκης. Προέρχονταν από διάφορα κοινωνικοοικονομικά επίπεδα και παρουσίαζαν διαφορετικά επίπεδα σχολικών επιδόσεων στα μαθηματικά. Η επιλογή του συνόλου των συμμετεχόντων

[3] Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων εξαιρέθηκαν συνολικά 5 μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες.

έγινε με τη μέθοδο της βολικής δειγματοληψίας. Αξίζει να σημειωθεί πως οι μαθητές δεν είχαν δεχθεί εξειδικευμένη διδασκαλία ούτε στις υπολογιστικές εκτιμήσεις ούτε στην επίλυση προβλήματος, παρά μόνον ό,τι ορίζει το Α.Π. των Μαθηματικών της τάξης τους.

Σημαντικό είναι να διευκρινιστεί ότι ανάμεσα στους συμμετέχοντες υπήρχαν και 5 μαθητές (4 αγόρια και 1 κορίτσι) με μαθησιακές δυσκολίες[4], οι οποίοι είχαν προηγουμένως διαγνωστεί με ΔΕΠΥ και παρακολουθούσαν τμήμα ένταξης ή διέθεταν παράλληλη στήριξη. Οι συγκεκριμένοι μαθητές συμμετείχαν κανονικά στην έρευνα, ωστόσο οι απαντήσεις τους δεν λήφθηκαν υπόψη στην ανάλυση των αποτελεσμάτων.

2.3. Σχεδιασμός της έρευνας - Εργαλείο έρευνας

Η έρευνα που πραγματοποιήθηκε ήταν ποσοτική με συγχρονικό ερευνητικό σχεδιασμό. Για τον σκοπό της παρούσας έρευνας, σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν σε όλους τους συμμετέχοντες δύο Έργα, ένα Έργο Υπολογιστικής Εκτίμησης (Έργο 1) και ένα Έργο Επίλυσης Προβλήματος (Έργο 2). Ο συνολικός αριθμός των δοκιμασιών ήταν 16, ισάριθμα προερχόμενος από τα δύο Έργα.

Το *Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης* αποτελούνταν συνολικά από οκτώ δοκιμασίες, δύο για κάθε αριθμητική πράξη (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση), έτσι ώστε να ελεγχθεί αν η επιτυχία στην υπολογιστική εκτίμηση επηρεάζεται από το είδος της πράξης. Πιο αναλυτικά, για κάθε δοκιμασία δίνονταν στους συμμετέχοντες μία αριθμητική πράξη και τρεις πιθανές απαντήσεις και τους ζητούνταν να επιλέξουν την απάντηση που θεωρούσαν ότι βρίσκεται πιο κοντά στο πραγματικό αποτέλεσμα της αριθμητικής πράξης. Οι τρεις επιλογές απαντήσεων που δίνονταν στους συμμετέχοντες σχεδιάστηκαν με βάση το ακριβές αποτέλεσμα της αριθμητικής πράξης, έτσι ώστε να διασφαλιστεί πως μία επιλογή απάντησης θα αφορά εκτίμηση που είναι πολύ κοντά στο ακριβές αποτέλεσμα, μία λιγότερο κοντά και μία που θα απέχει κατά πολύ από το ακριβές αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, στη δοκιμασία για το αποτέλεσμα της αριθμητικής πράξης «49 + 56», δόθηκαν οι εξής απαντήσεις προς επιλογή: α) περίπου 10, β) περίπου 80 και γ) περίπου 100, από τις οποίες η τελευταία βρίσκεται πολύ κοντά στο πραγματικό αποτέλεσμα. Αντίθετα, οι δύο πρώτες απαντήσεις

[4] Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο όρος «μαθησιακές δυσκολίες» δεν αφορά απλώς μαθητές της γενικής τάξης που παρουσιάζουν χαμηλές μαθηματικές επιδόσεις. Αντίθετα, αναφέρεται σε μαθητές με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες, που έχουν διαγνωστεί με ορισμένο είδος και βαθμό δυσκολιών από ΚΕΔΑΣΥ.

απέχουν κατά πολύ ή βρίσκονται λιγότερο κοντά στο ακριβές αποτέλεσμα της αριθμητικής πράξης, αντίστοιχα. Επιτυχείς θεωρήθηκαν οι εκτιμήσεις που είχαν τη μικρότερη δυνατή απόκλιση από το ακριβές-πραγματικό αποτέλεσμα. Τέλος, δόθηκε η οδηγία στους συμμετέχοντες να πραγματοποιήσουν τις εκτιμήσεις νοερά, χωρίς να χρησιμοποιήσουν χαρτί και μολύβι. Οι δοκιμασίες του Έργου 1 παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 2.1.

Το *Έργο της Επίλυσης Προβλήματος* αποτελούνταν συνολικά από οκτώ δοκιμασίες, καθεμιά από τις οποίες ζητούσε από τους συμμετέχοντες να επιλύσουν με ακρίβεια μαθηματικά προβλήματα. Όπως και στο Έργο 1, σε κάθε δοκιμασία παρουσιάζονταν τα προβλήματα και τρεις επιλογές απαντήσεων, από τις οποίες μόνο μία ήταν ακριβής και, κατ’ επέκταση, σωστή. Τα προβλήματα που παρουσιάστηκαν προέρχονταν από διαφορετικές μαθηματικές περιοχές και, πιο συγκεκριμένα, αφορούσαν μετρήσεις, (χρόνου και βάρους), γεωμετρία (περίμετρο), στατιστική (ανάγνωση και ερμηνεία πίνακα), αριθμητικές πράξεις (πρόσθεσης και αφαίρεσης) και μοτίβα (αριθμητικό και γεωμετρικό). Επιπρόσθετα, στις μισές δοκιμασίες τα προβλήματα μπορούσαν να επιλυθούν με παραπάνω από έναν τρόπους (Προβλήματα 1, 3, 5 και 6), ενώ στις άλλες μισές δοκιμασίες ο τρόπος επίλυσης των προβλημάτων ήταν ένας. Τέλος, οι συμμετέχοντες είχαν την ελευθερία να επιλύσουν τα προβλήματα με οποιονδήποτε τρόπο εκείνοι επιθυμούσαν, είτε νοερά είτε γραπτά. Ο Πίνακας 2.2. παρουσιάζει τις δοκιμασίες του Έργου 2 και τη μαθηματική περιοχή στην οποία αναφέρονται.

Προκειμένου να αποφευχθεί η πιθανότητα κόπωσης, οι συμμετέχοντες κατανεμήθηκαν τυχαία και ισάριθμα σε δύο διαφορετικές ομάδες (ομάδα Α και ομάδα Β), ανάλογα με τον τρόπο που τους παρουσιάστηκαν τα Έργα. Πιο συγκεκριμένα, στους συμμετέχοντες της ομάδας Α παρουσιάστηκε πρώτα το Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης (Έργο 1) και έπειτα το Έργο της Επίλυσης Προβλήματος (Έργο 2), ενώ στην ομάδα Β τα Έργα παρουσιάστηκαν με την αντίστροφη σειρά. Με αυτόν τον τρόπο, διασφαλιζόταν ότι οι πιθανές χαμηλές επιδόσεις των συμμετεχόντων σε κάποιες δοκιμασίες δεν θα ήταν αποτέλεσμα της σειράς παρουσίασης των δοκιμασιών. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί πως και στα δύο Έργα οι αριθμοί που αξιοποιήθηκαν στις δοκιμασίες δεν ξεπερνούν το 100. Η επιλογή αυτή έγινε για να περιοριστεί η πιθανότητα το μέγεθος των αριθμών να δυσκολεύει τις εκτιμήσεις στο Έργο 1 και την επίλυση προβλήματος στο Έργο 2.

Πίνακας 2.1 : Οι δοκιμασίες του Έργου Υπολογιστικής Εκτίμησης ως προς το είδος της αριθμητικής πράξης

Κύκλωσε την απάντηση που νομίζεις ότι βρίσκεται **πιο κοντά** στο σωστό αποτέλεσμα, χωρίς να χρησιμοποιήσεις μολύβι και χαρτί.

Δοκιμασίες	**Αριθμητική Πράξη**
1. 49 + 56 = α) περίπου 10 β) περίπου 80 γ) περίπου 100	Πρόσθεση
2. 28 + 39 = α) περίπου 50 β) περίπου 70 γ) περίπου 100	Πρόσθεση
3. 61 – 27 = α) περίπου 30 β) περίπου 50 γ) περίπου 90	Αφαίρεση
4. 88 – 22 = α) περίπου 20 β) περίπου 60 γ) περίπου 80	Αφαίρεση
5. 19 x 3 = α) περίπου 30 β) περίπου 40 γ) περίπου 60	Πολλαπλασιασμός
6. 33 x 2 = α) περίπου 60 β) περίπου 80 γ) περίπου 100	Πολλαπλασιασμός
7. 82 ÷ 10 = α) περίπου 4 β) περίπου 8 γ) περίπου 10	Διαίρεση
8. 64 ÷ 15 = α) περίπου 4 β) περίπου 6 γ) περίπου 10	Διαίρεση

Πίνακας 2.2 : Οι δοκιμασίες του Έργου Επίλυσης Προβλήματος ως προς τη μαθηματική περιοχή

Λύσε **με ακρίβεια** τα προβλήματα που ακολουθούν, κυκλώνοντας κάθε φορά τη σωστή απάντηση.

<table>
<tr><th>Δοκιμασίες</th><th>Μαθηματική Περιοχή</th></tr>
<tr><td>1. Η Ελένη είναι 8 χρονών. Ο αδερφός της ο Νίκος είναι 14 χρονών. Όταν η Ελένη γίνει 10 χρονών, πόσο χρονών θα είναι ο Νίκος;
α) 12 β) 16 γ) 20</td><td>Μετρήσεις</td></tr>
<tr><td>2. Ο Κώστας ζυγίζει 48 κιλά. Η τσάντα του ζυγίζει 4 κιλά. Πόσα κιλά έδειξε η ζυγαριά, όταν ο Κώστας ανέβηκε στη ζυγαριά κρατώντας την τσάντα του;
α) 42 β) 46 γ) 52</td><td>Μετρήσεις</td></tr>
<tr><td>3. Η Ευγενία φτιάχνει μια τετράγωνη κάρτα και θέλει να τη διακοσμήσει γύρω-γύρω με κορδέλα. Αν η μία πλευρά της κάρτας έχει μήκος 15 εκ., πόση κορδέλα θα χρειαστεί η Ευγενία για την κάρτα της;
α) 30 β) 50 γ) 60</td><td>Γεωμετρία</td></tr>
<tr><td>4. Στο σχολείο τα παιδιά ρωτήθηκαν πού θέλουν να πάνε εκδρομή.<table><tr><td>Κινηματογράφος</td><td>34</td></tr><tr><td>Θέατρο</td><td>18</td></tr><tr><td>Γήπεδο</td><td>27</td></tr></table>Πόσα παιδιά συνολικά ψήφισαν τους δύο πιο δημοφιλείς προορισμούς;
α) 35 β) 61 γ) 79</td><td>Στατιστική</td></tr>
</table>

5. Μια ομάδα ποδοσφαίρου έχει 30 παιδιά. Μετά από μία εβδομάδα φεύγουν από την ομάδα 11 παιδιά και έρχονται 2 καινούρια παιδιά. Πόσα παιδιά είναι τώρα στην ομάδα; α) 17 β) 21 γ) 43	Αριθμητικές πράξεις
6. Η Μαργαρίτα έχει 50 μαρκαδόρους. Δίνει σε καθέναν από τους δύο αδελφούς της 10 μαρκαδόρους. Πόσοι μαρκαδόροι της έμειναν; α) 20 β) 30 γ) 40	Αριθμητικές πράξεις
7. Παρατήρησε την παρακάτω σειρά αριθμών. 3 , 10 , 17 , 24 , … Ποιος νομίζεις ότι θα είναι ο επόμενος αριθμός; α) 30 β) 31 γ) 35	Μοτίβα
8. Παρατήρησε το παρακάτω μοτίβο. ○ ○ △ □ ○ Ποιο νομίζεις ότι θα είναι το επόμενο σχήμα; α) ○ β) △ γ) □	Μοτίβα

2.4 Διαδικασία

Πριν ξεκινήσει η υλοποίηση της έρευνας, τόσο οι μαθητές όσο και οι εκπαιδευτικοί των τάξεων ενημερώθηκαν πως η συμμετοχή των παιδιών στην έρευνα θα είναι ανώνυμη και δεν θα συνδέεται με την αξιολόγηση της σχολικής μονάδας, του διδακτικού προσωπικού και της επίδοσης των μαθητών στα σχολικά μαθήματα. Ακολούθησε μια σύντομη και τυπική γνωριμία με τους εκπαιδευτικούς των τάξεων, προκειμένου να ενημερωθούν αναφορικά με τον σκοπό της έρευνας και το μαθηματικό περιεχόμενο των Έργων που σχεδιάστηκαν.

Όλοι οι συμμετέχοντες εξετάστηκαν ατομικά στην τάξη τους. Εξαρχής, διευκρινίστηκε στους συμμετέχοντες πως οι δοκιμασίες υπολογιστικής εκτίμησης απαιτούσαν την πραγματοποίηση εκτιμήσεων και όχι την πραγματοποίηση υπολογισμών με ακρίβεια. Για αυτόν τον λόγο, επισημάνθηκε στους συμμετέχοντες ότι τους ζητείται να πραγματοποιήσουν τις εκτιμήσεις, κάνοντας χρήση του νου και δίχως να χρησιμοποιήσουν χαρτί και μολύβι για τους υπολογισμούς. Αντίθετα, στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος τονίστηκε η δυνατότητα επίλυσής τους με οποιονδήποτε τρόπο οι ίδιοι θεωρούσαν περισσότερο αποτελεσματικό (π.χ., νοερά ή γραπτά). Επιπλέον, πριν από την έναρξη της δοκιμασίας δόθηκαν παραδείγματα για κάθε Έργο και οι συμμετέχοντες διαβεβαιώθηκαν πως δεν υπήρχαν σωστές και λανθασμένες απαντήσεις. Σε όλους τους συμμετέχοντες οι δοκιμασίες των δύο Έργων δόθηκαν έντυπα σε πρωτόκολλο πάνω στο οποίο μπορούσαν να σημειώσουν τις απαντήσεις τους. Το πρωτόκολλο αυτό παρατίθεται στο Παράρτημα 1. Όλη η διαδικασία διήρκεσε περίπου 35-40 λεπτά.

2.5. Ανάλυση δεδομένων

Για κάθε σωστή απάντηση δόθηκε 1 βαθμός και για κάθε λανθασμένη 0 βαθμός. Το σύνολο των σωστών απαντήσεων δυνητικά ήταν 16, όσο και ο αριθμός των δοκιμασιών. Για την ανάλυση των δεδομένων έγινε χρήση του προγράμματος SPSS 28.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Το παρόν κεφάλαιο περιλαμβάνει την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της έρευνας και αποτελείται από τρία μέρη. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζονται τα στατιστικά στοιχεία της γενικής επίδοσης των συμμετεχόντων ως προς την ηλικιακή ομάδα (Β' και Δ' δημοτικού) και τον τρόπο παρουσίασης των Έργων (Ομάδα Α και Ομάδα Β). Στο δεύτερο μέρος εξετάζεται η επίδοση των συμμετεχόντων ξεχωριστά για τα δύο Έργα, ενώ στο τρίτο και τελευταίο μέρος ελέγχονται οι συσχετίσεις ανάμεσα στην υπολογιστική εκτίμηση και την επίλυση προβλήματος, τόσο στο σύνολο των Έργων όσο και σε κάθε Έργο ξεχωριστά.

3.1. Γενική Επίδοση των συμμετεχόντων στο σύνολο των δοκιμασιών

Η γενική επίδοση του συνόλου των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες που τους παρουσιάστηκαν ήταν αρκετά υψηλή και ξεπέρασε το 75% των επιτυχών απαντήσεων (μέσος όρος: 12,185, σε σύνολο 16 δοκιμασιών).

3.1.1. Γενική Επίδοση των συμμετεχόντων ως προς την ηλικιακή ομάδα

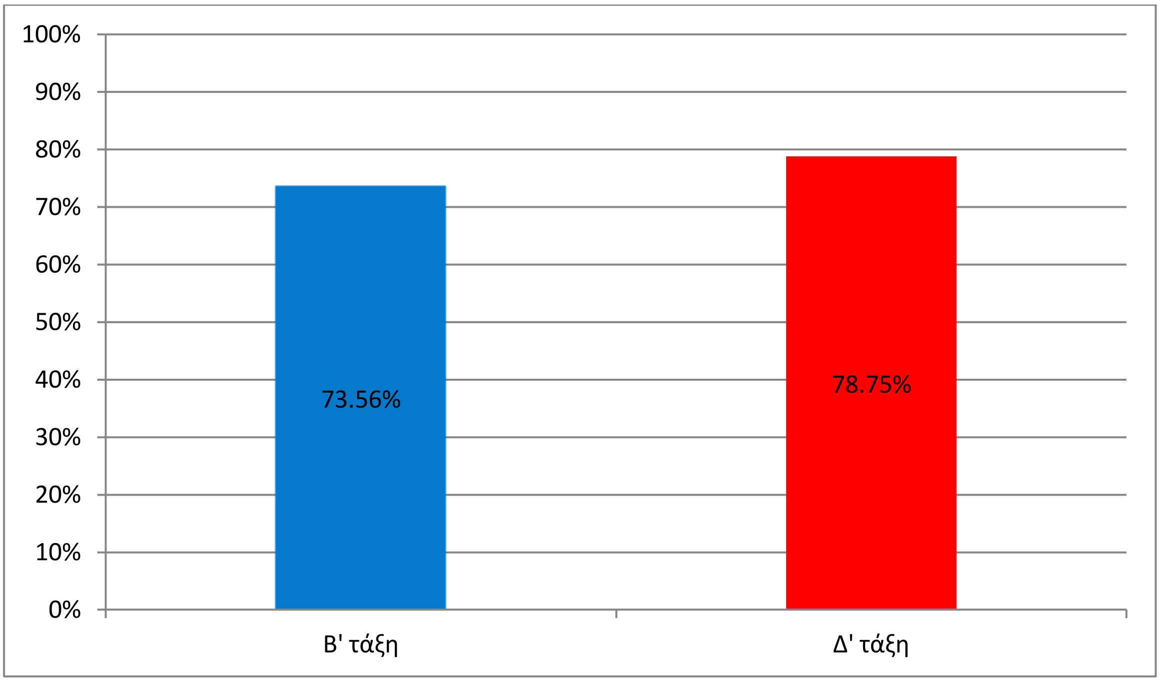
Προκειμένου να εξεταστεί αν οι επιδόσεις του συνόλου των συμμετεχόντων διαφοροποιούνταν ως προς την ηλικιακή ομάδα, πραγματοποιήθηκε t-τεστ[5] για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε στατιστικά σημαντικές διαφορές στον αριθμό των σωστών απαντήσεων ανάμεσα στα παιδιά της Β' και της Δ' τάξης ($t(92) = -1{,}398$, $p < .01$). Συγκεκριμένα, τα παιδιά της Δ' τάξης εμφάνισαν στατιστικά σημαντικά καλύτερες επιδόσεις από τα παιδιά της Β' τάξης (78,75% και 73,56%, αντίστοιχα). Το Σχήμα 3.1 παρουσιάζει τη γενική επίδοση των συμμετεχόντων στο σύνολο των δοκιμασιών ως προς την ηλικιακή ομάδα.

---

[5] Το t-τεστ χρησιμοποιείται για τη σύγκριση των μέσων όρων δύο συνόλων που διαφέρουν ως προς ένα χαρακτηριστικό. Η μηδενική υπόθεση στο συγκεκριμένο τεστ ελέγχου είναι ότι οι μέσοι όροι των δύο ομάδων δεν διαφέρουν μεταξύ τους και η εναλλακτική υπόθεση είναι ότι οι μέσοι όροι διαφέρουν μεταξύ τους (Field, 2009, στο Λιόλιου, 2020).

Σχήμα 3.1

Ποσοστά επιτυχίας στο σύνολο των δοκιμασιών ως προς την ηλικιακή ομάδα



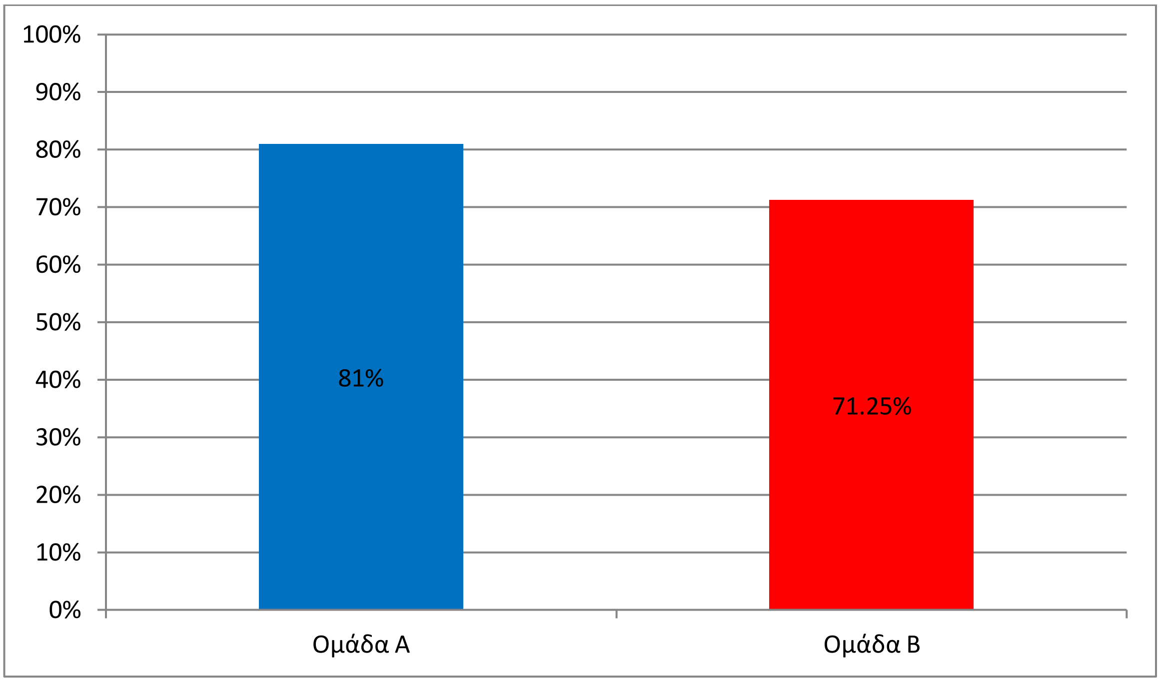
3.1.2. Γενική Επίδοση ως προς τη σειρά παρουσίασης των Έργων

Προκειμένου να εξεταστεί αν η σειρά παρουσίασης των Έργων[6] επηρέασε τις επιδόσεις των συμμετεχόντων, πραγματοποιήθηκε t-τεστ για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε πως δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις των συμμετεχόντων ως προς τη σειρά παρουσίασης των Έργων ($t(92) = 2{,}689$, $p = .237$). Με άλλα λόγια, η σειρά παρουσίασης των Έργων δεν επηρέασε τις επιδόσεις των συμμετεχόντων, δεδομένου ότι οι δύο ομάδες εμφάνισαν στο σύνολο των δοκιμασιών παρόμοια ποσοστά επιτυχίας (81% και 71,25% για τα παιδιά της Ομάδας Α και τα παιδιά της Ομάδας Β, αντίστοιχα). Στο Σχήμα 3.2 παρουσιάζεται η γενική επίδοση των συμμετεχόντων στο σύνολο των δοκιμασιών ως προς τη σειρά παρουσίασης των Έργων.

[6] Οι συμμετέχοντες κατανεμήθηκαν τυχαία και ισάριθμα σε δύο διαφορετικές ομάδες (Ομάδα Α και Ομάδα Β), ανάλογα με τον τρόπο που τους παρουσιάστηκαν τα Έργα. Πιο συγκεκριμένα, στους συμμετέχοντες της ομάδας Α παρουσιάστηκε πρώτα το Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης (Έργο 1) και έπειτα το Έργο της Επίλυσης Προβλήματος (Έργο 2), ενώ στην ομάδα Β τα Έργα παρουσιάστηκαν με την αντίστροφη σειρά.

Σχήμα 3.2

Ποσοστά επιτυχίας στο σύνολο των δοκιμασιών ως προς τη σειρά παρουσίασης των Έργων



3.2. Επίδοση στα Έργα

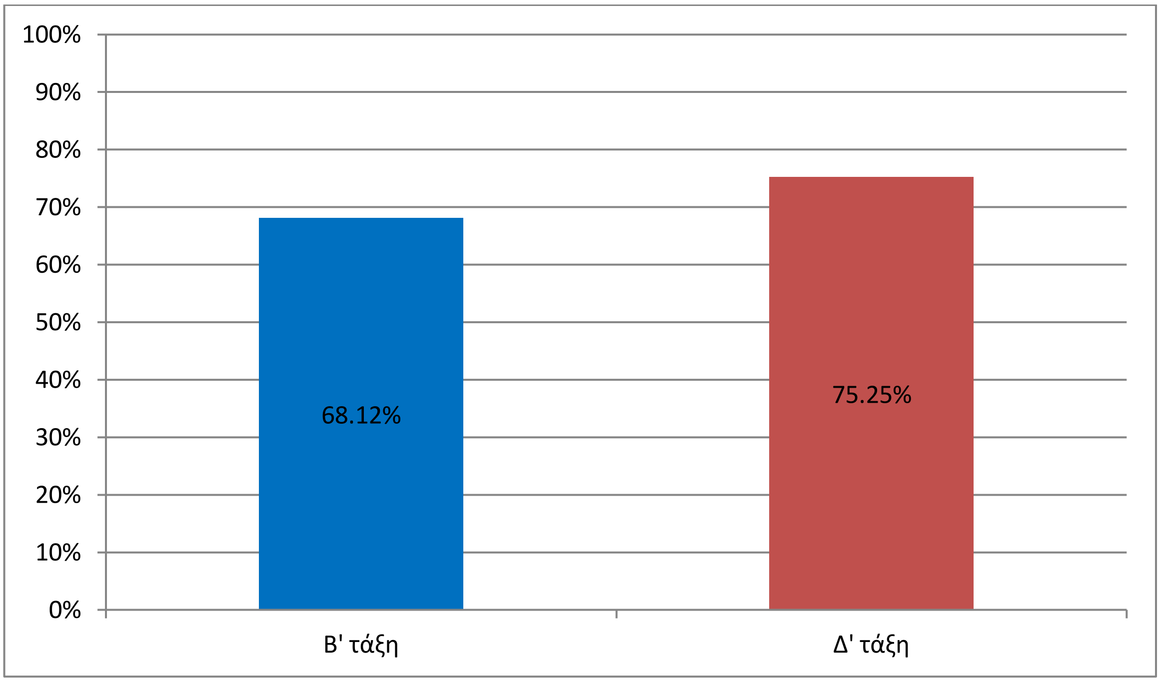
Η επίδοση των συμμετεχόντων μελετήθηκε ξεχωριστά για δύο Έργα, Υπολογιστικής Εκτίμησης και Επίλυσης Προβλήματος, και θα παρουσιαστούν αναλυτικά στις επόμενες ενότητες.

3.2.1. Επίδοση στο Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης ως προς την ηλικιακή ομάδα

Με σκοπό να διερευνηθεί αν η επίδοση των συμμετεχόντων στο Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης (Έργο 1) επηρεάστηκε από την ηλικιακή ομάδα, πραγματοποιήθηκε t-τεστ για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε πως η ηλικιακή ομάδα επηρέασε στατιστικά σημαντικά την επίδοση των συμμετεχόντων ($t(92) = -1{,}636$, $p < .01$). Αναλυτικότερα, βρέθηκε πως οι μαθητές της Δ' τάξης είχαν καλύτερες επιδόσεις στο σύνολο των δοκιμασιών του Έργου 1 (75,25%) σε σχέση με τους μαθητές της Β' τάξης (68,12%). Το Σχήμα 3.3 παρουσιάζει τη γενική επίδοση των συμμετεχόντων στο Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης ως προς την ηλικιακή ομάδα.

Σχήμα 3.3

Ποσοστά επιτυχίας στο Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης ως προς την ηλικιακή ομάδα



3.2.2. Επίδοση στο Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης ως προς την αριθμητική πράξη

Πραγματοποιήθηκε t-τεστ για συσχετισμένες ομάδες, έτσι ώστε να εξεταστεί εάν το είδος της αριθμητικής πράξης[7] επηρέασε την επίδοση των συμμετεχόντων. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε πως το σύνολο των συμμετεχόντων είχε στατιστικά σημαντικά καλύτερες επιδόσεις στις δοκιμασίες πρόσθεσης (82%) και στατιστικά σημαντικά χειρότερες επιδόσεις στις δοκιμασίες διαίρεσης (58%). Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί πως οι συμμετέχοντες εμφάνισαν παρόμοιες επιδόσεις μόνο ανάμεσα στις δοκιμασίες πρόσθεσης και αφαίρεσης ($t(93) = 1{,}416$, $p = .080$) και ανάμεσα στις δοκιμασίες αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού ($t(93)= 1{,}165$, $p = .124$). Ο Πίνακας 3.1 παρουσιάζει τα αποτελέσματα

[7] Το Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης αποτελούνταν συνολικά από οκτώ δοκιμασίες, δύο για κάθε αριθμητική πράξη (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση), έτσι ώστε να ελεγχθεί αν η επιτυχία στην υπολογιστική εκτίμηση επηρεάζεται από το είδος της πράξης.

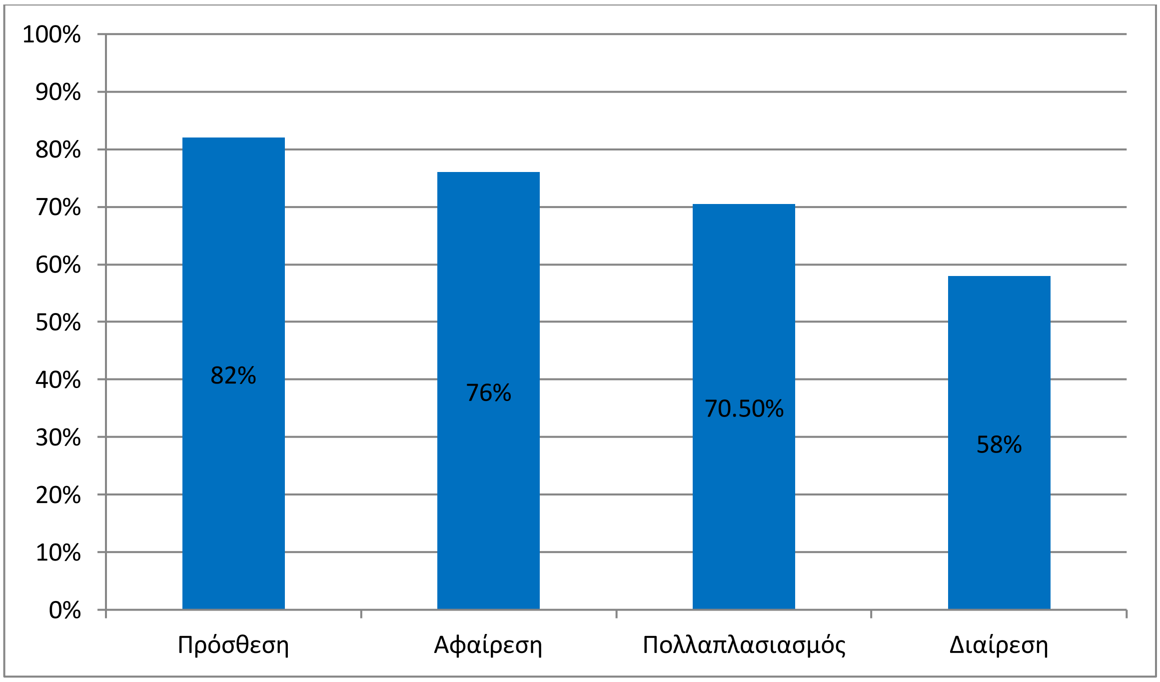
από τις αναλύσεις αυτές, ενώ στο Σχήμα 3.4 παρουσιάζονται τα ποσοστά επιτυχίας των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες ως προς την αριθμητική πράξη.

Πίνακας 3.1 : Αποτελέσματα t-τεστ στο Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης ως προς την αριθμητική πράξη για το σύνολο των συμμετεχόντων

Συγκρίσεις	**t-τεστ**	**Σημαντικότητα**
Πρόσθεση-Αφαίρεση	t (93) = 1,416	.080
Πρόσθεση-Πολλαπλασιασμός	t (93) = 3,211	<.001
Πρόσθεση-Διαίρεση	t (93) = 5,905	<.001
Αφαίρεση-Πολλαπλασιασμός	t (93) = 1,165	.124
Αφαίρεση-Διαίρεση	t (93) = 3,837	<.001
Πολλαπλασιασμός-Διαίρεση	t (93) = 2,941	<.01

Σχήμα 3.4

Ποσοστά επιτυχίας στο Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης ως προς την αριθμητική πράξη



Όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα, τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν σε μεγάλο βαθμό. Και στις δύο ηλικιακές ομάδες, οι δοκιμασίες πρόσθεσης ήταν αυτές στις οποίες οι συμμετέχοντες εμφάνισαν τις καλύτερες επιδόσεις (77,5% και 86% για τα παιδιά της Β' και της Δ' τάξης, αντίστοιχα). Ωστόσο, οι συμμετέχοντες της Β' τάξης αντιμετώπισαν δυσκολίες στις δοκιμασίες πολλαπλασιασμού και διαίρεσης (65% και 55,5%, αντίστοιχα), ενώ οι δοκιμασίες διαίρεσης ήταν αυτές στις οποίες οι συμμετέχοντες της Δ' τάξης παρουσίασαν τις χαμηλότερες επιδόσεις (60,5%). Τα αποτελέσματα από τις αναλύσεις αυτές για κάθε ηλικιακή ομάδα ξεχωριστά παρουσιάζονται στους Πίνακες 3.2 και 3.3. Το Σχήμα 3.5 παρουσιάζει τα ποσοστά επιτυχίας των συμμετεχόντων και των δύο ηλικιακών ομάδων στις δοκιμασίες του Έργου 1 ως προς την αριθμητική πράξη.

Πίνακας 3.2 : Αποτελέσματα t-τεστ στο Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης ως προς την αριθμητική πράξη για τη Β' τάξη

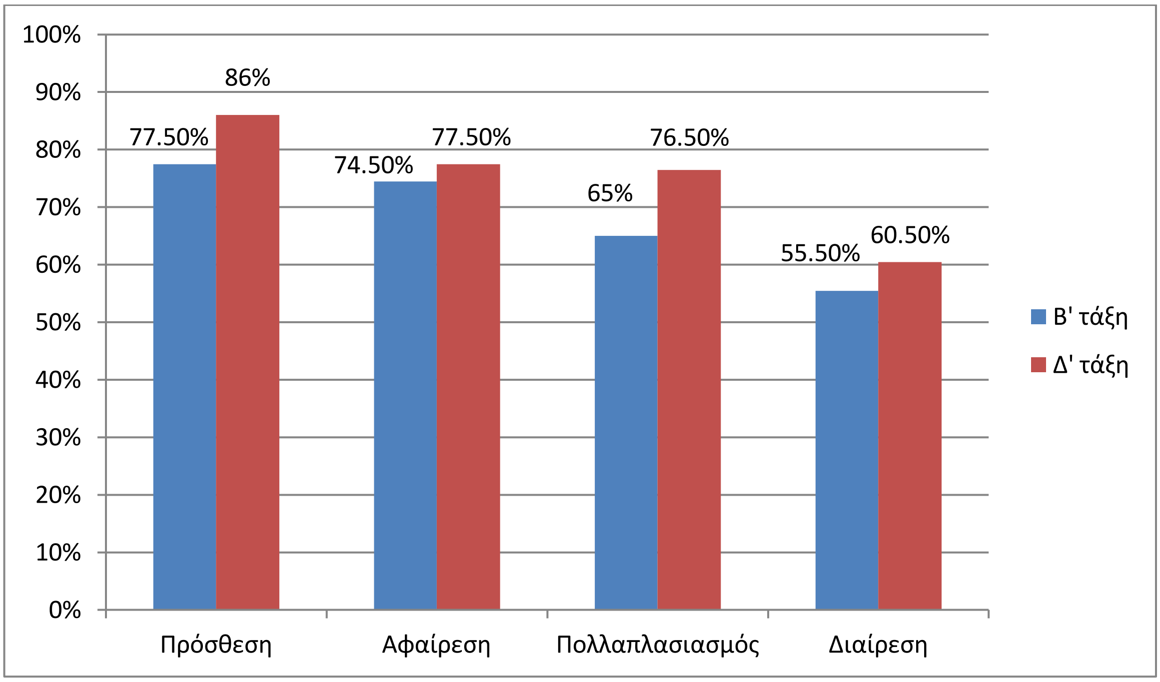
Συγκρίσεις	**t-τεστ**	**Σημαντικότητα**
Πρόσθεση-Αφαίρεση	t (46) = ,503	.309
Πρόσθεση-Πολλαπλασιασμός	t (46) = 2,885	<.01
Πρόσθεση-Διαίρεση	t (46) = 3,301	<.001
Αφαίρεση-Πολλαπλασιασμός	t (46) = 1,543	.065
Αφαίρεση-Διαίρεση	t (46) = 2,777	<.01
Πολλαπλασιασμός-Διαίρεση	t (46) = 1,499	.070

Πίνακας 3.3 : Αποτελέσματα t-τεστ στο Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης ως προς την αριθμητική πράξη για τη Δ' τάξη

Συγκρίσεις	**t-Τεστ**	**Σημαντικότητα**
Πρόσθεση-Αφαίρεση	t (46) = 1,594	.059
Πρόσθεση-Πολλαπλασιασμός	t (46) = 1,771	<.05
Πρόσθεση-Διαίρεση	t (46) = 5,636	<.001
Αφαίρεση-Πολλαπλασιασμός	t (46) =,158	.437
Αφαίρεση-Διαίρεση	t (46) = 2,618	<.01
Πολλαπλασιασμός-Διαίρεση	t (46) = 2,700	<.01

Σχήμα 3.5

Ποσοστά επιτυχίας στο Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης ως προς την αριθμητική πράξη και την ηλικιακή ομάδα



Πέρα από την γενικότερη επίδοση των συμμετεχόντων, έχει ενδιαφέρον να εξεταστεί η επίδοσή τους σε κάθε δοκιμασία του Έργου 1 ξεχωριστά. Πιο αναλυτικά, τα ποσοστά επιτυχίας των συμμετεχόντων για κάθε δοκιμασία και ως προς την ηλικιακή ομάδα παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.4.

Πίνακας 3.4 : Ποσοστά σωστών απαντήσεων στις δοκιμασίες του Έργου Υπολογιστικής Εκτίμησης ως προς την ηλικιακή ομάδα

Δοκιμασίες	**Β' τάξη**	**Δ' τάξη**
49 + 56	85,1%	91,5%
28 + 39	70,2%	80,9%
61 - 27	72,3%	66%
88 - 22	76,6%	89,4%
19 x 3	44,7%	72,3%
33 x 2	85,1%	80,9%
82 ÷ 10	66%	87,2%
64 ÷ 15	44,7%	34%

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, οι συμμετέχοντες είχαν αρκετά καλές επιδόσεις στις περισσότερες δοκιμασίες του Έργου 1, με τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας να βρίσκονται στον πολλαπλασιασμό «19 x 3» για τη Β' τάξη, καθώς και στη διαίρεση «64 ÷ 15» και για τις δύο τάξεις. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, αποτελεί η πρόσθεση «49 + 56» όπου σημειώθηκε μία μονάχα λανθασμένη απάντηση ανάμεσα στο σύνολο των συμμετεχόντων. Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί πως ακόμη και στην περίπτωση που οι συμμετέχοντες δεν επέλεγαν την απάντηση με την μικρότερη απόκλιση από το πραγματικό αποτέλεσμα της εκάστοτε αριθμητικής πράξης, έτειναν να μην επιλέγουν την απάντηση με τη μεγαλύτερη απόκλιση[8]. Για παράδειγμα, στην αφαίρεση «61 - 27» αρκετοί συμμετέχοντες έτειναν να επιλέγουν το «περίπου 50», και όχι το «περίπου 30», ως σωστή απάντηση. Ωστόσο, αυτό δεν ίσχυε για τις δοκιμασίες που τους δυσκόλεψαν πολύ, όπως στη διαίρεση «64 ÷ 15», όπου πολλά παιδιά επέλεγαν το «περίπου 10» ως σωστή απάντηση. Στον Πίνακα 3.5 παρουσιάζεται το σύνολο των σωστών και των λανθασμένων απαντήσεων στις δοκιμασίες του Έργου 1 ως προς την ηλικιακή ομάδα

Πίνακας 3. 5 : Αριθμός σωστών και λανθασμένων απαντήσεων στις δοκιμασίες του Έργου Υπολογιστικής Εκτίμησης ως προς την ηλικιακή ομάδα

	Σωστές (μικρή απόκλιση)		**Λανθασμένες (μεγάλη απόκλιση)**		**Λανθασμένες (πολύ μεγάλη απόκλιση)**	
Δοκιμασίες*	**Β'**	**Δ'**	**Β'**	**Δ'**	**Β'**	**Δ'**
49 + 56	40	43	6	4	1	-
28 + 39	33	38	13	8	1	1

8 *Για κάθε δοκιμασία δίνονταν στους συμμετέχοντες τρεις επιλογές απαντήσεων που δίνονταν στους συμμετέχοντες σχεδιάστηκαν με βάση το ακριβές αποτέλεσμα της αριθμητικής πράξης, έτσι ώστε να διασφαλιστεί πως μία επιλογή απάντησης θα αφορά εκτίμηση που είναι πολύ κοντά στο ακριβές αποτέλεσμα, μία λιγότερο κοντά και μία που θα απέχει κατά πολύ από το ακριβές αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, στη δοκιμασία για το αποτέλεσμα της αριθμητικής πράξης «49 + 56», το «100» βρίσκεται πολύ κοντά στο πραγματικό αποτέλεσμα, ακολουθεί το «80» που έχει ελαφρώς μεγαλύτερη απόκλιση και, τέλος, το «10» που βρίσκεται πολύ μακριά από το ακριβές αποτέλεσμα της αριθμητικής πράξης. Επομένως, επιτυχείς θεωρήθηκαν οι εκτιμήσεις που είχαν τη μικρότερη δυνατή απόκλιση από το ακριβές αποτέλεσμα.

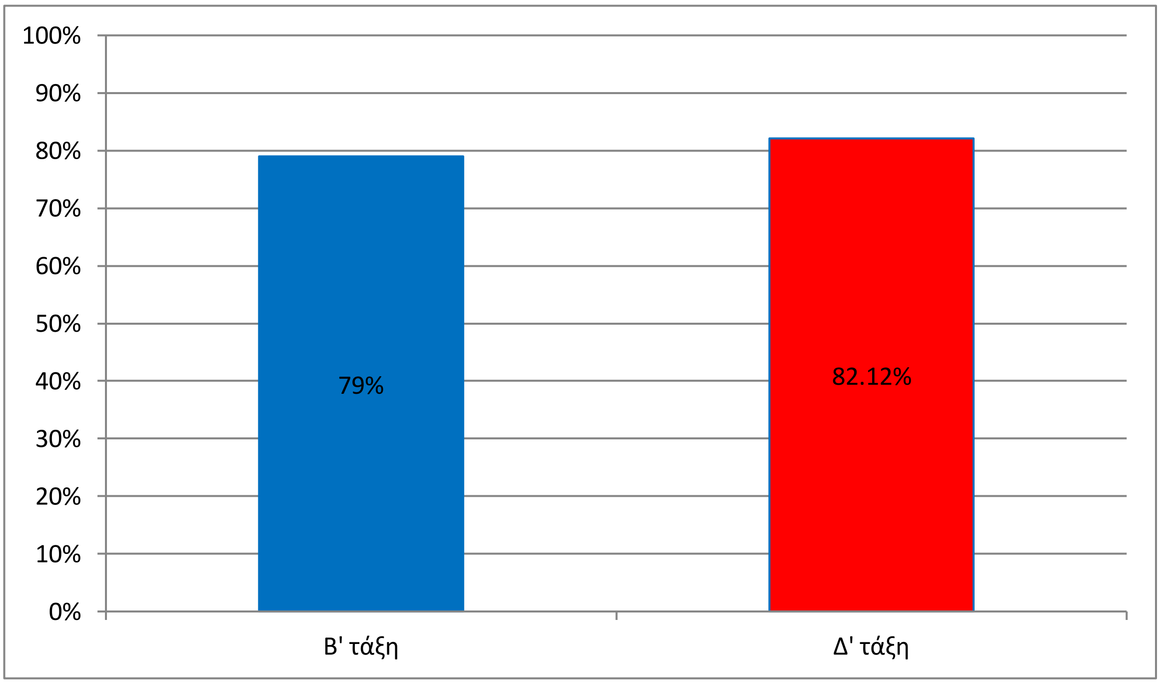
61 - 27	34	31	8	13	5	3
88 - 22	36	42	5	2	6	3
19 x 3	21	34	18	6	8	7
33 x 2	40	38	5	8	2	1
82 ÷ 10	31	41	14	2	2	4
64 ÷ 15	21	16	13	22	13	9

3.2.3. Επίδοση στο Έργο της Επίλυσης Προβλήματος ως προς την ηλικιακή ομάδα

Με σκοπό να εξεταστεί αν η επίδοση των συμμετεχόντων στο Έργο της Επίλυσης Προβλήματος (Έργο 2) επηρεάστηκε από την ηλικιακή ομάδα, πραγματοποιήθηκε t-τεστ για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση δεν έδειξε στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση των συμμετεχόντων ως προς την ηλικιακή ομάδα ($t(92)$ = ,751, p = .184.). Δηλαδή, παρατηρήθηκαν παρόμοιες επιδόσεις στο σύνολο των δοκιμασιών του Έργου 2 ανάμεσα στους μαθητές της Β' τάξης (79%) και τους μαθητές της Δ' τάξης (82,12%). Το Σχήμα 3.6 παρουσιάζει τη γενική επίδοση των συμμετεχόντων στο Έργο της Επίλυσης Προβλήματος ως προς την ηλικιακή ομάδα.

Σχήμα 3.6

Ποσοστά επιτυχίας στο Έργο της Επίλυσης Προβλήματος ως προς την ηλικιακή ομάδα



3.2.4. Επίδοση στο Έργο της Επίλυσης Προβλήματος ως προς τη μαθηματική περιοχή

Πραγματοποιήθηκε t-τεστ για συσχετισμένες ομάδες, έτσι ώστε να εξεταστεί εάν η μαθηματική περιοχή[9] από την οποία προέρχονταν τα προβλήματα επηρέασε την επίδοση του συνόλου των συμμετεχόντων. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε στατιστικά σημαντικές διαφορές οι οποίες οφείλονταν στις στατιστικά σημαντικά χαμηλότερες επιδόσεις των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες της Γεωμετρίας και της Στατιστικής (67%). Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί πως παρατηρήθηκαν παρόμοιες επιδόσεις στις δοκιμασίες που αφορούσαν Μετρήσεις και Αριθμητικές πράξεις ($t(93) = 1{,}209$, $p = .115$), στις δοκιμασίες που αφορούσαν Μετρήσεις και Μοτίβα (t(93) = -,293, p = .385) και, τέλος, στις δοκιμασίες που σχετίζονταν με Αριθμητικές πράξεις και Μοτίβα ($t(93) = -1{,}452$, $p = .075$). Ο Πίνακας 3.6 παρουσιάζει αναλυτικά τα αποτελέσματα αυτά, ενώ το Σχήμα 3.7 παρουσιάζει τα ποσοστά επιτυχίας του συνόλου των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες του Έργου 2 ως προς τη μαθηματική περιοχή.

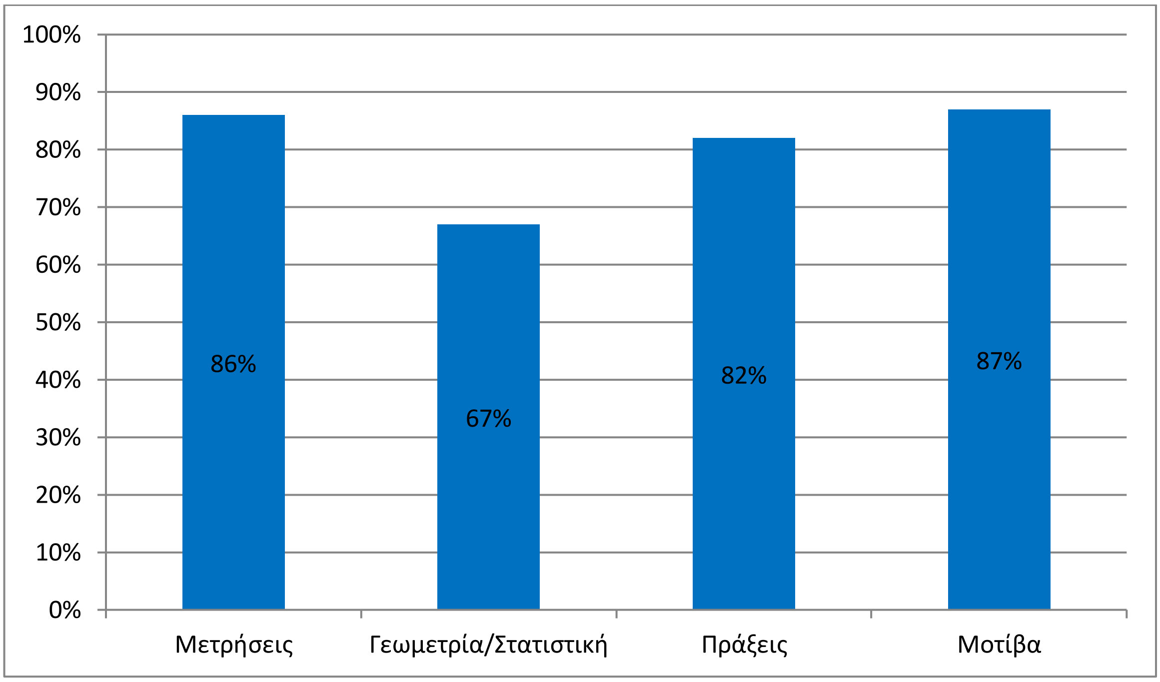
Πίνακας 3.6 : Αποτελέσματα t-τεστ στο Έργο της Επίλυσης Προβλήματος ως προς τη μαθηματική περιοχή

Συγκρίσεις	**t-τεστ**	**Σημαντικότητα**
Μετρήσεις - Γεωμετρία/Στατιστική	t (93) = 4,776	<.001
Μετρήσεις - Πράξεις	t (93) = 1,209	.115
Μετρήσεις - Μοτίβα	t (93) = -,293	<.385
Γεωμετρία/Στατιστική - Πράξεις	t (93) = -3,875	<.001
Γεωμετρία/Στατιστική - Μοτίβα	t (93) = -4,776	<.001
Πράξεις - Μοτίβα	t (93) = -1,452	.075

[9] Τα προβλήματα που παρουσιάστηκαν προέρχονταν από διαφορετικές μαθηματικές περιοχές και, πιο συγκεκριμένα, αφορούσαν μετρήσεις, (χρόνου και βάρους), γεωμετρία (περίμετρο), στατιστική (ανάγνωση και ερμηνεία πίνακα), αριθμητικές πράξεις (πρόσθεσης και αφαίρεσης) και μοτίβα (αριθμητικό και γεωμετρικό).

Σχήμα 3.7

Ποσοστά επιτυχίας στο Έργο της Επίλυσης Προβλήματος ως προς τη μαθηματική περιοχή



Όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα, τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν σε μεγάλο βαθμό. Πιο συγκεκριμένα, οι συμμετέχοντες της Β’ τάξης εμφάνισαν τις καλύτερες επιδόσεις στις δοκιμασίες που σχετίζονταν με τις Μετρήσεις (85%). Ωστόσο, η επίδοσή τους στις δοκιμασίες αυτές ήταν στατιστικά σημαντικά υψηλότερες μόνο σε σχέση με τις δοκιμασίες της Γεωμετρίας και της Στατιστικής ($t(46) = 2{,}920$, $p < 0.1$). Αντίθετα, οι συμμετέχοντες της Δ’ τάξης εμφάνισαν τις καλύτερες επιδόσεις στις δοκιμασίες με τα Μοτίβα (93,5%), στις οποίες οι επιδόσεις τους ήταν στατιστικά σημαντικά καλύτερες από την επίδοσή τους στις δοκιμασίες της Γεωμετρίας και της Στατιστικής ($t(46) = -5{,}511$, $p < .001$), και από την επίδοσή τους στις δοκιμασίες με τις Πράξεις ($t(46) = -{,}362$, $p < .01$). Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί πως οι συμμετέχοντες και των δύο ηλικιακών ομάδων εμφάνισαν εξίσου σημαντικές δυσκολίες στις δοκιμασίες που αφορούσαν Γεωμετρία/Στατιστική (71,5% και 63% για τη Β’ και για τη Δ’ τάξη, αντίστοιχα). Επιπλέον, σχετικά χαμηλές επιδόσεις παρατηρήθηκαν από τους συμμετέχοντες της Β’ τάξης και στις δοκιμασίες που αφορούσαν τις Αριθμητικές πράξεις (78,5%). Τα αποτελέσματα από τις αναλύσεις αυτές για κάθε ηλικιακή ομάδα ξεχωριστά παρουσιάζονται στους Πίνακες 3.7 και 3.8. Το Σχήμα 3.8 παρουσιάζει τα ποσοστά επιτυχίας των συμμετεχόντων και από τις δύο ηλικιακές ομάδες στις δοκιμασίες του Έργου 2 ως προς τη μαθηματική περιοχή.

Πίνακας 3.7 : Αποτελέσματα t-τεστ στο Έργο της Επίλυσης Προβλήματος ως προς τη μαθηματική περιοχή για τη Β’ τάξη

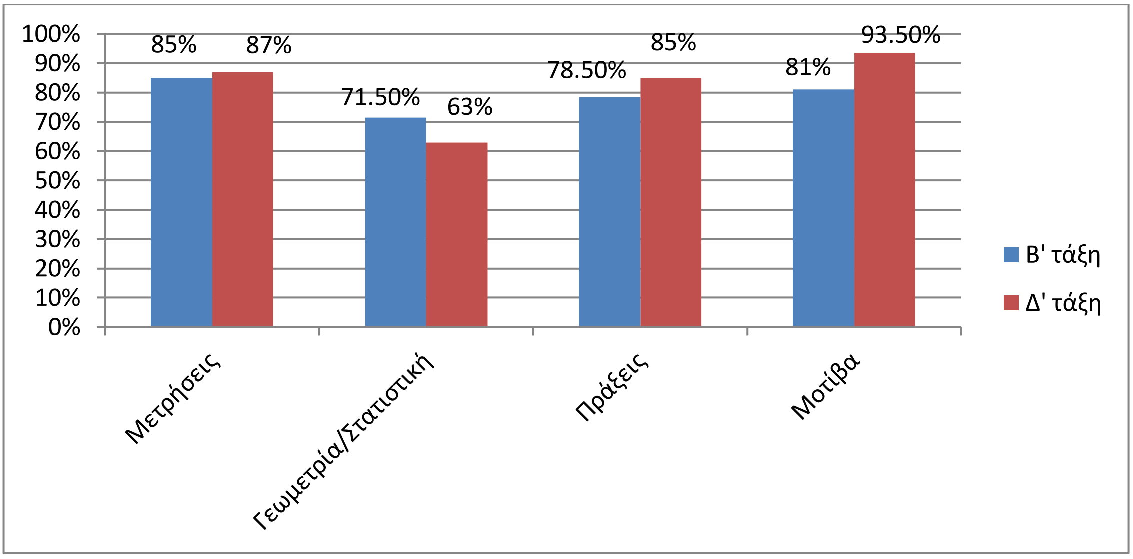
Συγκρίσεις	t-τεστ	Σημαντικότητα
Μετρήσεις-Γεωμετρία/Στατιστική	t (46) = 2,920	<.01
Μετρήσεις-Πράξεις	t (46) = 1,288	.102
Μετρήσεις-Μοτίβα	t (46) = ,727	.236
Γεωμετρία/Στατιστική- Πράξεις	t (46) = -1,478	.073
Γεωμετρία/Στατιστική- Μοτίβα	t (46) = -1,592	.059
Πράξεις-Μοτίβα	t (46) = -,362	.360

Πίνακας 3.8 : Αποτελέσματα t-τεστ στο Έργο της Επίλυσης Προβλήματος ως προς τη μαθηματική περιοχή για τη Δ’ τάξη

Συγκρίσεις	t-τεστ	Σημαντικότητα
Μετρήσεις-Γεωμετρία/Στατιστική	t (46) = 3,806	<.001
Μετρήσεις-Πράξεις	t (46) = ,423	.337
Μετρήσεις-Μοτίβα	t (46) = -1,521	.068
Γεωμετρία/Στατιστική- Πράξεις	t (46) = -3,953	<.001
Γεωμετρία/Στατιστική- Μοτίβα	t (46) = -5,511	<.001
Πράξεις-Μοτίβα	t (46) = -1,940	<.01

Σχήμα 3. 8

Ποσοστά επιτυχίας στο Έργο της Επίλυσης Προβλήματος ως προς τη μαθηματική περιοχή και την ηλικιακή ομάδα



Πέρα από την γενικότερη επίδοση των συμμετεχόντων, εξετάστηκε η επίδοσή τους σε κάθε δοκιμασία του Έργου 2 ξεχωριστά. Από την ανάλυση, φάνηκε πως οι συμμετέχοντες και των δύο ηλικιακών ομάδων εμφάνισαν τα υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας στη δοκιμασία κατά την οποία έπρεπε να συμπληρώσουν το γεωμετρικό μοτίβο (Πρόβλημα 8), ενώ παράλληλα είχαν εξίσου χαμηλές επιδόσεις στη δοκιμασία που προερχόταν από τη μαθηματική περιοχή της γεωμετρίας (Πρόβλημα 3), όπου έπρεπε να υπολογίσουν την περίμετρο της κάρτας της Ευγενίας. Πιο αναλυτικά, τα ποσοστά επιτυχίας που αφορούσαν τις σωστές απαντήσεις των συμμετεχόντων για κάθε δοκιμασία και ως προς την ηλικιακή ομάδα παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.9.

Πίνακας 3.9 : Ποσοστά σωστών απαντήσεων στις δοκιμασίες του Έργου Επίλυσης Προβλήματος ως προς την ηλικιακή ομάδα

Δοκιμασίες	Β’ τάξη	Δ’ τάξη
Πρόβλημα 1	80,9%	87,2%
Πρόβλημα 2	89,4%	87,2%
Πρόβλημα 3	63,8%	59,6%
Πρόβλημα 4	78,7%	66 %
Πρόβλημα 5	83%	91,5%
Πρόβλημα 6	74,5%	78,7%
Πρόβλημα 7	72,3%	89,4%
Πρόβλημα 8	89,4%	97,9%

3.3. Σχέση ανάμεσα στην Υπολογιστική Εκτίμηση και την Επίλυση Προβλήματος

Σκοπός της συγκεκριμένης έρευνας ήταν να διερευνηθεί η σχέση ανάμεσα στην υπολογιστική εκτίμηση και την επίλυση προβλήματος. Για αυτόν τον λόγο, ήταν σημαντικό να εξεταστεί αν υπήρχε συνάφεια ανάμεσα στις επιδόσεις των συμμετεχόντων στα δύο Έργα. Η διαδικασία αυτή πραγματοποιήθηκε στο σύνολο των συμμετεχόντων αλλά και για κάθε ηλικιακή ομάδα ξεχωριστά.

Πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις προκειμένου να εξεταστεί η ύπαρξη συνάφειας ανάμεσα στις επιδόσεις των συμμετεχόντων στην Υπολογιστική Εκτίμηση και την Επίλυση Προβλήματος. Τα αποτελέσματα έδειξαν υψηλή θετική συνάφεια ανάμεσα τις επιδόσεις των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες του Έργου της Υπολογιστικής Εκτίμησης και στις δοκιμασίες του Έργου της Επίλυσης Προβλήματος (Pearson's r = .481, p < .01) καθώς και ανάμεσα στις δοκιμασίες του Έργου της Υπολογιστικής Εκτίμησης και το σύνολο των δοκιμασιών και των δύο Έργων (Pearson's r = .867, p < .01). Με άλλα λόγια, όσοι συμμετέχοντες εμφάνιζαν καλές επιδόσεις στο Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης (Έργο 1) έτειναν να εμφανίζουν καλές επιδόσεις και στο Έργο της Επίλυσης Προβλήματος (Έργο 2) και το αντίθετο. Δηλαδή, όσοι από τους συμμετέχοντες αδυνατούσαν να πραγματοποιήσουν επιτυχείς υπολογιστικές εκτιμήσεις έτειναν να παρουσιάζουν δυσκολίες στην επίλυση προβλήματος. Τέλος, βρέθηκε υψηλή θετική συνάφεια ανάμεσα στις επιδόσεις των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες του Έργου της Επίλυσης Προβλήματος και το σύνολο των δοκιμασιών (Pearson's r = .854, p < .01). Ο Πίνακας 3.10 που ακολουθεί παρουσιάζει αναλυτικά τη συνάφεια ανάμεσα στις επιδόσεις στην Υπολογιστική Εκτίμηση και την Επίλυση Προβλήματος για το σύνολο των συμμετεχόντων.

Η παραπάνω ανάλυση επαναλήφθηκε προκειμένου να εξεταστεί αν υπάρχει συνάφεια ανάμεσα στις επιδόσεις των συμμετεχόντων στα δύο Έργα και για κάθε ηλικιακή ομάδα ξεχωριστά. Όπως φαίνεται και από τις περαιτέρω αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν, προκύπτουν παρόμοια αποτελέσματα, αναφορικά με τον έλεγχο της ύπαρξης συνάφειας στις επιδόσεις των συμμετεχόντων κάθε ηλικιακής ομάδας.

Πιο συγκεκριμένα, στους συμμετέχοντες της Β' τάξης, βρέθηκε υψηλή θετική συνάφεια ανάμεσα στις επιδόσεις τους στις δοκιμασίες του Έργου της Υπολογιστικής Εκτίμησης και στις δοκιμασίες του Έργου της Επίλυσης Προβλήματος (Pearson's r = .543, p < .01) καθώς και ανάμεσα στις δοκιμασίες του Έργου της Υπολογιστικής Εκτίμησης και το σύνολο των δοκιμασιών (Pearson's r = .891, p < .01). Παράλληλα, βρέθηκε υψηλή θετική συνάφεια ανάμεσα στις επιδόσεις των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες του Έργου της Επίλυσης Προβλήματος και το σύνολο των δοκιμασιών (Pearson's $r = .865$, $p < .01$).

Παρόμοια, τα αποτελέσματα έδειξαν υψηλή θετική συνάφεια ανάμεσα στις επιδόσεις των συμμετεχόντων της Δ' τάξης στις δοκιμασίες του Έργου της Υπολογιστικής Εκτίμησης και στις δοκιμασίες του Έργου της Επίλυσης Προβλήματος (Pearson's $r = .374$, $p < .01$) και ανάμεσα στις δοκιμασίες του Έργου της Υπολογιστικής Εκτίμησης και το σύνολο των δοκιμασιών και των δύο Έργων (Pearson's $r = .815$, $p < .01$). Επιπλέον, βρέθηκε υψηλή θετική συνάφεια ανάμεσα στις επιδόσεις των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες του Έργου της Επίλυσης Προβλήματος και το σύνολο των δοκιμασιών και των δύο Έργων (Pearson's $r = .842$, $p < .01$).

Συνοψίζοντας, υψηλή θετική συνάφεια βρέθηκε ανάμεσα στην ικανότητα των συμμετεχόντων και των δύο ηλικιακών ομάδων να πραγματοποιούν υπολογιστικές εκτιμήσεις και την ικανότητα να επιλύουν προβλήματα, καθώς όσοι ήταν σε θέση να πραγματοποιούν επιτυχείς υπολογιστικές εκτιμήσεις έτεινα να είναι σε θέση να επιλύουν προβλήματα. Οι Πίνακες 3.11 και 3.12 παρουσιάζουν τη συνάφεια ανάμεσα στις επιδόσεις των συμμετεχόντων για κάθε ηλικιακή ομάδα ξεχωριστά.

Πίνακας 3.10 : Συνάφεια ανάμεσα στις επιδόσεις στο σύνολο των συμμετεχόντων στα Έργα

	Σύνολο δοκιμασιών	**Υπολογιστική Εκτίμηση (Έργο 1)**	**Επίλυση Προβλήματος (Έργο 2)**
Υπολογιστική Εκτίμηση (Έργο 1)	,.867**	-	,481**
Επίλυση Προβλήματος (Έργο 2)	,854**	,481**	-

***Στατιστική σημαντικότητα στο p < .01.*

Πίνακας 3.11 : Συνάφεια ανάμεσα στις επιδόσεις των συμμετεχόντων στα Έργα για τη Β’ τάξη

	Σύνολο δοκιμασιών	Υπολογιστική Εκτίμηση (Έργο 1)	Επίλυση Προβλήματος (Έργο 2)
Υπολογιστική Εκτίμηση (Έργο 1)	,891**	-	,543**
Επίλυση Προβλήματος (Έργο 2)	,865**	,543**	-

***Στατιστική σημαντικότητα στο p < .01.*

Πίνακας 3.12 : Συνάφεια ανάμεσα στις επιδόσεις των συμμετεχόντων στα Έργα για τη Δ’ τάξη

	Σύνολο δοκιμασιών	Υπολογιστική Εκτίμηση (Έργο 1)	Επίλυση Προβλήματος (Έργο 2)
Υπολογιστική Εκτίμηση (Έργο 1)	,815**	-	,374**
Επίλυση Προβλήματος (Έργο 2)	,842**	,374**	-

***Στατιστική σημαντικότητα στο p < .01.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να εξετάσει την επίδοση παιδιών Β’ και Δ’ δημοτικού σε δοκιμασίες υπολογιστικής εκτίμησης και σε δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος, καθώς και να διερευνήσει την ύπαρξη σχέσης ανάμεσα στις δύο αυτές επιδόσεις. Αυτός ο σκοπός εξετάστηκε μέσα από δύο Έργα, ένα *Έργο Υπολογιστικής Εκτίμησης* και ένα *Έργο Επίλυσης Προβλήματος*. Αναλυτικότερα, το *Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης* απαιτούσε εκτιμήσεις με φυσικούς αριθμούς για κάθε αριθμητική πράξη (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση), ενώ το *Έργο της Επίλυσης Προβλήματος* αποτελούνταν από δοκιμασίες που ζητούσαν από τους συμμετέχοντες να επιλύσουν με ακρίβεια προβλήματα από διαφορετικές μαθηματικές περιοχές (μετρήσεις, γεωμετρία, στατιστική, αριθμητικές πράξεις και μοτίβα). Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων προέκυψαν τέσσερα κύρια ευρήματα που απαντούν στα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στην παρούσα έρευνα.

Πρώτον, η επίδοση των παιδιών τόσο της Β’ όσο και της Δ’ τάξης στο *Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης* ήταν αρκετά καλή και επηρεάστηκε τόσο από την ηλικία όσο και από το είδος των αριθμητικών πράξεων που εμπλέκονταν στις δοκιμασίες. Συγκεκριμένα, οι μαθητές της Δ’ τάξης είχαν καλύτερες επιδόσεις στο σύνολο των δοκιμασιών υπολογιστικής εκτίμησης (75,25%) σε σχέση με τους μαθητές της Β’ τάξης (68,12%). Αυτό το εύρημα επιβεβαιώνεται από ένα μεγάλο πλήθος ερευνών (π.χ., Lemaire & Lecacheur, 2011), σύμφωνα με τις οποίες τα μεγαλύτερα άτομα συχνά παρουσιάζουν περισσότερο ανεπτυγμένες επιδόσεις στις εκτιμήσεις και μεγαλύτερη ποικιλία στρατηγικών, ενώ παράλληλα αναγνωρίζουν ευκολότερα το εύρος των εκτιμήσεων που μπορούν να πραγματοποιηθούν. Αντίστοιχα, οι Jordan, Mulhern και Wylie (2009, στο Δεσλή, 2021) επισημαίνουν πως με την πάροδο της ηλικίας παρατηρούνται συνήθως μικρές αλλά σημαντικές αλλαγές στη βελτίωση της ικανότητας των παιδιών για υπολογιστική εκτίμηση, επιβεβαιώνοντας τη γραμμική ανάπτυξη της εν λόγω ικανότητας. Επίσης, η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε πως το σύνολο των συμμετεχόντων είχε καλύτερες επιδόσεις στις δοκιμασίες πρόσθεσης (82%) και χειρότερες επιδόσεις στις δοκιμασίες διαίρεσης (58%). Για παράδειγμα, τα παιδιά ήταν σε θέση να βρουν προσεγγιστικά το αποτέλεσμα του «49+56» με σχετική ευκολία, με αποτέλεσμα τα ποσοστά επιτυχίας των παιδιών της Β’ τάξης να φτάνουν το 85% και της Δ’ τάξης να ξεπερνά το 90%. Αντίθετα, οι δοκιμασίες διαίρεσης ήταν παρόμοια δυσκολίας και για τις δύο ηλικιακές ομάδες. Παραδείγματος χάριν, τα παιδιά αντιμετώπισαν μεγάλη δυσκολία στον υπολογισμό του «64÷15», όπου παρατηρήθηκαν ποσοστά επιτυχίας 45% για τη Β’ τάξη και 55% για τη Δ’ τάξη, ενώ λιγότερο δύσκολη φάνηκε στα παιδιά η διαίρεση «82÷10» (66% και 87,12%, αντίστοιχα). Αξίζει ακόμη να σημειωθεί πως οι εκτιμήσεις των παιδιών ήταν πάντα προς την σωστή κατεύθυνση, καθώς από τις τρεις επιλογές απάντησης που προσφέρονταν δεν επέλεγαν εκείνη με τη μεγαλύτερη απόκλιση, αλλά αντίθετα έτειναν να επιλέγουν σε μεγάλο βαθμό την εκτίμηση που ήταν πολύ ή λιγότερο κοντά στο ακριβές αποτέλεσμα. Ενδεχομένως, τα ευρήματα αυτά να προκύπτουν λόγω της μεγαλύτερης εξοικείωσης των μαθητών με τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης έναντι του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, αφού είναι οι πρώτες αριθμητικές πράξεις που διδάσκονται στο σχολείο. Επίσης, το γεγονός πως οι μαθητές από τη νεαρή ακόμα ηλικία γνωρίζουν και εισάγονται στις εκτιμήσεις στα πλαίσια της τυπικής εκπαίδευσης αλλά και τις χρησιμοποιούν συστηματικά στην καθημερινή τους ζωή, συμβάλλει σημαντικά στην καλλιέργεια μιας σταδιακά αναπτυσσόμενης εξοικείωσης με τις εκτιμήσεις.

Δεύτερον, στο *Έργο της Επίλυσης Προβλήματος* οι συμμετέχοντες και των δύο ηλικιακών ομάδων εμφάνισαν παρόμοιες επιδόσεις στο σύνολο των δοκιμασιών με ποσοστό επιτυχίας κοντά στο 80%. Ωστόσο, η μαθηματική περιοχή στην οποία ανήκαν τα προβλήματα ήταν ένας παράγοντας που επηρέασε την επίδοση των συμμετεχόντων και των δύο ομάδων, καθώς και οι δύο ηλικιακές ομάδες εμφάνισαν τις χαμηλότερες επιδόσεις τους στις δοκιμασίες της Γεωμετρίας και της Στατιστικής (67%). Από την άλλη, οι καλύτερες επιδόσεις των παιδιών παρατηρήθηκαν στις δοκιμασίες με τα Μοτίβα και τις Μετρήσεις. Μάλιστα, στα Μοτίβα η επιτυχία των παιδιών της Δ’ τάξης ξεπέρασε το 93%. Τα παραπάνω ευρήματα επιβεβαιώνουν σε μεγάλο βαθμό τόσο ότι τα μικρά παιδιά διαθέτουν την ικανότητα να επιλύουν προβλήματα όσο και ότι είναι σε θέση να αντιμετωπίζουν όσες δυσκολίες προκύπτουν κατά την επίλυση προβλήματος. Μια πιθανή εξήγηση αναφορικά με τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές κατά την επίλυση ορισμένων προβλημάτων θα μπορούσε να σχετίζεται με την επιλογή μιας λανθασμένης ή λιγότερο κατάλληλης στρατηγικής. Όπως αναφέρει ο Siegler (2003, στο Δεσλή & Λιόλιου, 2020), οι μαθητές συνήθως ξεκινούν από απλούστερες στρατηγικές και με την πάροδο του χρόνου υιοθετούν και χρησιμοποιούν πιο σύνθετες στρατηγικές, η χρήση των οποίων προϋποθέτει και έναν μεγαλύτερο βαθμό εννοιολογικής κατανόησης, όπως τονίζουν οι Lemaire, Lecacheur και Farioli (2000, στο Δεσλή, 2021). Επιπλέον, είναι πιθανόν η επίδοση των παιδιών να επηρεάστηκε από την ελλιπή σύνδεση της απάντησης με το πλαίσιο του εκάστοτε προβλήματος, καθώς παρατηρείται συχνά αδυναμία των μαθητών να απαντήσουν σε λεκτικά προβλήματα που συνδέονται με ρεαλιστικές καταστάσεις (π.χ., Polya, 1945· Polya, 1973· Diezmann,Watters

& English, 2002). Η επιφανειακή ανάγνωση του προβλήματος μπορεί να οδήγησε σε λανθασμένες επιλογές τους μαθητές τόσο στη διαδικασία υπολογισμού όσο και στο τελικό αποτέλεσμα, καθώς πιθανώς να δόθηκε μία απάντηση δίχως να ελεγχθεί ξανά το πρόβλημα. Τέλος, είναι πιθανόν ορισμένες δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές σε συγκεκριμένες μαθηματικέ περιοχές, όπως η Γεωμετρία, να οφείλονται στην έλλειψη οπτικο-χωρικής αντίληψης των παιδιών, δηλαδή της ικανότητας να κατανοούν αυτό που βλέπουν, να επεξεργάζονται νοητικά την οπτική πληροφορία με τέτοιον τρόπο ώστε να λύνουν προβλήματα και να ενεργούν ανάλογα με τις απαιτήσεις του περιβάλλοντος. Επομένως, τα παιδιά που έχουν προβλήματα που επηρεάζουν την οπτικο-χωρική αντίληψη, αντιμετωπίζουν δυσκολίες στο να αναγνωρίζουν, στο να θυμούνται, και να οργανώνουν τις οπτικές εικόνες με τρόπο ώστε να κατανοούν τα γραπτά και σχηματικά σύμβολα που χρησιμοποιούνται στη μάθηση, όπως διαγράμματα, χάρτες, γραφικά κ.ά. (Kurtz, 2006).

Τρίτον, όσοι συμμετέχοντες είχαν υψηλές επιδόσεις στο *Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης* έτειναν να εμφανίζουν καλές επιδόσεις και στο *Έργο της Επίλυσης Προβλήματος* και το αντίθετο. Δηλαδή, όσοι από τους συμμετέχοντες αδυνατούσαν να πραγματοποιήσουν επιτυχείς υπολογιστικές εκτιμήσεις έτειναν να παρουσιάζουν δυσκολίες στην επίλυση προβλήματος. Αντίστοιχα ευρήματα προκύπτουν και από προηγούμενες έρευνες που έδειξαν ότι η ικανότητα πραγματοποίησης υπολογιστικών εκτιμήσεων συσχετίζεται με την ικανότητα επίλυσης προβλήματος. Για παράδειγμα, οι Desli και Lioliou (2020) βρήκαν υψηλή θετική συσχέτιση ανάμεσα στην επιτυχία μαθητών έκτης τάξης και ενηλίκων σε έργα υπολογιστικής εκτίμησης και την επίδοσή τους σε έργα επίλυσης προβλήματος. Δηλαδή, όσοι συμμετέχοντες παρουσίασαν μεγάλο ποσοστό επιτυχών εκτιμήσεων εμφάνισαν παράλληλα μεγάλο ποσοστό επιτυχίας στην επίλυση προβλήματος. Αν και αρκετοί ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης θεωρούν απίθανη την εμφάνιση υπολογιστικής εκτίμησης πριν από την ηλικία των 8-9 ετών, ορισμένες έρευνες δείχνουν ότι μικρά παιδιά, ακόμη και βρέφη, εμφανίζουν σημάδια της ικανότητας αυτής (Δεσλή, 2021). Όπως τονίζουν οι Luwel και Verschafel (2008), η εκτίμηση είναι μια σύνθετη δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος που οδηγεί σε κατά προσέγγιση υπολογισμό, όπου απαιτούνται διάφορες δεξιότητες και μαθηματικές διαδικασίες, Πιο συγκεκριμένα, προσφέρει έναν εναλλακτικό τρόπο αντίληψης και διαχείρισης των αριθμών που επιτρέπει την ανάπτυξη νέων εννοιών που συνδέονται άμεσα με τους αριθμούς. Έτσι, όπως αναφέρει ο Polya (1992, στο Desli & Lioliou, 2020), καθώς τα παιδιά έρχονται αντιμέτωπα με ένα αριθμητικό πρόβλημα, τροποποιούν και προσαρμόζουν τους αριθμούς τους προβλήματος, ενώ παράλληλα στοχάζονται για το είδος των προσαρμογών προτού ακόμα προβούν σε εκτιμήσεις. Η παραπάνω διαδικασία, σύμφωνα με τους van de Walle et al. (2017, στο Δεσλή, 2021) αποτελεί ένδειξη εννοιολογικής γνώσης που απαιτείται για την ικανότητα πραγματοποίησης υπολογιστικών εκτιμήσεων. Η υπολογιστική εκτίμηση επιτρέπει την ανάπτυξη ενός δυναμικού γνώσεων και δεξιοτήτων που απαιτούνται στην επίλυση προβλημάτων και η σημασία της για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος φαίνεται και στις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται όταν αντιμετωπίζονται πολύπλοκες και γνωστικά απαιτητικές ιδέες σε προβλήματα (Desli & Lioliou, 2020). Συνεπώς, η ενασχόληση των μαθητών με καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης και επίλυσης προβλήματος που σχετίζονται άμεσα με τις καθημερινές τους δραστηριότητες, πιθανώς να συμβάλλει στη σταδιακή βελτίωση των δύο ικανοτήτων.

Τέλος, από τα ευρήματα της έρευνας φάνηκε πως η σχέση ανάμεσα στην ικανότητα των παιδιών για πραγματοποίηση υπολογιστικών εκτιμήσεων και στην ικανότητα για επίλυση προβλήματος δεν διαφοροποιήθηκε ως προς την ηλικία τους. Πιο συγκεκριμένα, η σχέση που βρέθηκε να υπάρχει ανάμεσα στις δύο ικανότητες είναι σταθερή, δηλαδή ισχύει και για τις δύο ηλικιακές ομάδες. Με άλλα λόγια, είτε μικρά είτε μεγαλύτερα παιδιά που πραγματοποιούν επιτυχείς εκτιμήσεις είναι και καλοί λύτες προβλημάτων. Αν και είναι λίγες οι έρευνες που μελετούν τη σχέση μεταξύ των δύο ικανοτήτων και αφορούν κυρίως μεγάλα παιδιά και ενήλικες (π.χ., Desli & Lioliou, 2020·), επιβεβαιώνουν την ύπαρξη μιας ισχυρής σχέσης ανάμεσα στην υπολογιστική εκτίμηση και άλλες συναφείς έννοιες, όπως η αξία θέσης ψηφίου, η αίσθηση του αριθμού, οι νοεροί υπολογισμοί, η επίλυση προβλήματος κ.ά. (π.χ., Sowder-Threadgill, 1984· Kindrat & Osana, 2018· Desli & Lioliou, 2020· Sekeris et al., 2021). Για παράδειγμα, η έρευνα των Desli και Lioliou (2020) βρήκε υψηλή θετική συσχέτιση ανάμεσα στις δύο ικανότητες, καθώς έδειξε πως τα μεγαλύτερα παιδιά και οι ενήλικες που ήταν καλοί στις εκτιμήσεις ήταν εξίσου καλοί στην επίλυση προβλήματος. Φαίνεται, λοιπόν, πως ο λύτης, όχι μόνο τροποποιεί και προσαρμόζει τους αριθμούς στο εκάστοτε πρόβλημα, αλλά παράλληλα στοχάζεται για το είδος των προσαρμογών προτού ακόμα προβεί σε μια εύλογη εκτίμηση (McIntosh et al., 1992). Βέβαια, κάτι αντίστοιχο φαίνεται να συμβαίνει και στη μελέτη της σχέσης ανάμεσα στην ικανότητα για νοερούς υπολογισμούς και την επιτυχία στην επίλυση προβλήματος, όπου διαπιστώθηκε ότι υπάρχει σημαντική θετική συσχέτιση ανάμεσα στις δύο ικανότητες σε παιδιά 11-12 ετών (Gürbüz & Erdem, 2016). Πιθανώς, η συστηματική ενασχόληση των παιδιών από τη νεαρή τους ακόμη ηλικία με τις εκτιμήσεις και την επίλυση προβλήματος να συμβάλλει σημαντικά σε μία σταδιακή ανάπτυξη των ικανοτήτων τους να διαχειρίζονται, να τροποποιούν και να προσαρμόζουν αριθμούς αναφορικά με τις μαθηματικές συνθήκες που επικρατούν. Επομένως, ενδέχεται η σχέση ανάμεσα στην ικανότητα των παιδιών για πραγματοποίηση υπολογιστικών εκτιμήσεων και στην ικανότητα για επίλυση προβλήματος να μην επηρεάζεται πάντοτε από την ηλικία των παιδιών, πράγμα που σημαίνει πως ακόμη και τα μικρά παιδιά μπορούν να είναι ταυτόχρονα και καλοί εκτιμητές και καλοί λύτες προβλημάτων.

Αξίζει να σημειωθούν και ορισμένοι περιορισμοί που προέκυψαν κατά τον σχεδιασμό και τη διεξαγωγή της έρευνας. Πιο συγκεκριμένα, η παρούσα έρευνα ήταν μικρής κλίμακας, καθώς διεξήχθη σε μικρό δείγμα ατόμων και η επιλογή του δείγματος έγινε με τη μέθοδο της βολικής δειγματοληψίας. Ωστόσο, η έρευνα διεξήχθη σε δύο σχολεία της δυτικής Θεσσαλονίκης και σε ανομοιογενή πληθυσμό (μαθητές με διαφορετικά επίπεδα επιδόσεων), δίχως να προηγηθεί εξειδικευμένη διδασκαλία των εκτιμήσεων, ενώ παράλληλα οι απαντήσεις των μαθητών αξιολογήθηκαν από δύο διαφορετικούς ερευνητές. Τα παραπάνω ευρήματα θα μπορούσαν μελλοντικά να μελετηθούν περαιτέρω σε μεγαλύτερο δείγμα, το οποίο θα μπορούσε να προέρχεται από διάφορα μέρη της χώρας ώστε να καλυφτούν περισσότερες και διαφορετικές κοινωνικοοικονομικές ή/και πολιτισμικές ομάδες, εξασφαλίζοντας ακόμη μεγαλύτερη αξιοπιστία. Επίσης, η εγκυρότητα της έρευνας προκύπτει μέσα από τον μεθοδολογικό σχεδιασμό της έρευνας, καθώς τα έργα που σχεδιάστηκαν ανταποκρίνονταν στην ηλικία των παιδιών και κάλυπταν τις απατήσεις των ερευνητικών ερωτημάτων που τέθηκαν.

Η παρούσα έρευνα μελετά τη σχέση ανάμεσα στην ικανότητα των μικρών παιδιών για πραγματοποίηση υπολογιστικών εκτιμήσεων και την ικανότητά τους για επίλυση προβλήματος. Δεδομένου ότι οι περισσότερες έρευνες εστιάζουν σε μεγαλύτερα παιδιά και ενήλικες, μελλοντικές έρευνες θα μπορούσαν να εξετάσουν την ύπαρξη σχέσης ανάμεσα σε κάποιο άλλο είδος εκτίμησης και την επίλυση προβλήματος σε μικρά παιδιά. Επιπλέον, θα είχε ενδιαφέρον να μελετηθούν ο τρόπος διδασκαλίας της υπολογιστικής εκτίμησης και επίλυσης προβλήματος στα πλαίσια της σχολικής εκπαίδευσης, καθώς και οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι συμμετέχοντες τόσο κατά την πραγματοποίηση εκτιμήσεων όσο και κατά την επίλυση προβλήματος, προκειμένου να προκύψει μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα αναφορικά με τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά σκέφτονται και αναπτύσσουν σταδιακά τις δύο παραπάνω ικανότητες.

Συμπερασματικά, φαίνεται να υπάρχει μια δυναμική σχέση ανάμεσα στην υπολογιστική εκτίμηση και την επίλυση προβλήματος, ωστόσο απαιτείται περισσότερη έρευνα για τη διερεύνηση και ενίσχυση της σχέσης μεταξύ των δύο ικανοτήτων, καθώς όπως επισημαίνουν οι Sekeris, Verschaffel και Luwel (2019, στο Δεσλή, 2021), τα ελάχιστα διαθέσιμα ευρήματα απλώς αποκαλύπτουν τη σχέση αυτή. Τόσο η επίλυση προβλήματος όσο και η εκτίμηση δεν μπορούν να αποτελούν ξεχωριστές και απομονωμένες ενότητες των μαθηματικών, καθώς διαπερνούν πολλούς-αν όχι όλους-θεματικούς άξονες στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών για τα μαθηματικά. Όταν διδάσκεται αποκομμένη από οποιαδήποτε άλλη έννοια ή πλαίσιο, όπως συμβαίνει συχνά, ενδέχεται να οδηγήσει ακόμη και σε αντίθετα αποτελέσματα, προκαλώντας την αντιπάθεια και δυσπιστία των μαθητών για την ίδια τη διαδικασία (Δεσλή, 2021). Συνεπώς, για να αναπτυχθεί αποτελεσματικά, χρειάζεται να καλλιεργηθεί και να ενθαρρυνθεί κατά τη διάρκεια πολλών χρόνων ενασχόλησης με τα μαθηματικά, όπως αναφέρει η Reys (1986, στο Δεσλή, 2021, 28). Μάλιστα, δεδομένου ότι βρέθηκε υψηλή θετική συσχέτιση ανάμεσα στις δύο ικανότητες που διαθέτουν τα μικρά παιδιά, αναδεικνύεται ακόμη περισσότερο η ανάγκη για περαιτέρω μελέτη και ενδυνάμωση αυτής της σχέσης από τη νεαρή ακόμη ηλικία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

Andrews, P., Xenofontos, C., & Sayers, J. (2021). Estimation in the primary mathematics curricula of the United Kingdom: Ambivalent expectations of an essential competence, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1868591

Berry, R.Q., Grant, M.R., McKinney, S.E., & Berube, C. (2014). Investigating estimation: Influences of time and confidence of urban middle school students. *International Journal of Academic Research in Education and Review*, 2(7), 141-151. https://doi.org/10.14662/IJARER2014.034

Boz, B., & Bulut, S. (2012). A case study about comptutational estimation strategies of seventh graders. *Elementary Education Online*, 11(4), 979-994, 2012.

Caviola, S., Mammarella, I.C., Cornoldi, C., & Lucangeli, D. (2012). The involvement of working memory in children’s exact and approximate mental addition. *Journal of Experimental Child Psychology*, 112(2), 141-60. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.02.005

Diamond, A. (2013). Executive functions. Annual Review of Psychology, 64, 135-168. In *Handbook of Clinical Neurology*, 173, 225-240. https://www.researchgate.net/publication/344354297_Executive_functions

Dehaene, S., Spelke, E., Pinel, P., Stanescu, R., & Tsivkin, S. (1999). Sources of mathematical thinking: Behavioral and brain-imaging evidence. *Science*, 284(5416), 970–974. https://psycnet.apa.org/doi/10.1126/science.284.5416.970

Desli, D., & Lioliou, A. (2020). Relationship between computational estimation and problem solving. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(3). https://doi.org/10.29333/iejme/8435

Diezmann, C.M., Watters, J.J., & English, L.D. (2002). Teacher behaviours that influence young children's reasoning. In A.D. Cockburn & E. Nardi (Eds), *Proceedings of the*

27th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 289-296. Norwich, UK.

Dowker, A. D. (1992). Computational Estimation Strategies of Professional Mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1):45-55. https://doi.org/10.2307/749163

Dowker, A. D. (1997). Young children's addition estimates. *Mathematical Cognition* 3(2):141-154. https://doi.org/10.1080/135467997387452

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 3–17. https://doi.org/10.2307/748969

Frensch, P.A., & Fulke, J. (1995). Definitions, traditions, and a general framework for understanding complex problem solving. In P.A. Frensch & J. Fulke (Eds.), *Complex problem solving: The European perspective* (pp.3-25). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ganor-Stern, D. (2018). Do exact calculation and computation estimation reflect the same skills? Developmental and individual differences perspectives. *Frontiers in Psychology 9* (Article 1316). https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.01316

Gilmore, C.K., McCarthy, S.E., & Spelke, E. (2010). Non-symbolic arithmetic abilities and mathematics achievement in the first year of formal schooling. *Cognition*, 115(3(, 394-406. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2010.02.002

Gürbüz, R., & Erdem, E. (2016). Relationship between Mental Computation and Mathematical Reasoning. *Cogent Education*, 3(1), 1-18. https://doi.org/10.1080/2331186X.2016.1212683

Heirdsfield, A., & Lamb, J. (2005). Mental Computation: The Benefits of Informed Teacher Instruction. In Groon, D, Horne, M, Pierce, Downton, A, Clarkson, P, & McDonough, A (Eds.) *Building Connections: Theory, Research and Practice* (Proceedings of the Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia) Volume 1. *Mathematics Education Research Group of Australasia*, Australia, pp. 419-426.

Jordan, N.C., Mulhern, G., & Wylie, J. (2009). Individual differences in trajectories of arithmetical development in typically achieving 5- to 7-year-olds. *Journal of Experimental Child Psychology*, 103 (4), 455-468. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2009.01.011

Jordan, N.C., Glutting, J., & Raminemi, C. (2010). The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences*, 20(2), 82-88. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2009.07.004

Jurado, M.B., & Rosselli, M. (2007). The elusive nature of executive functions: A review of our current understanding. *Neuropsychology Review*, 17(3), 213-33. https://doi.org/10.1007/s11065-007-9040-z

Klein, E., Nuerk, H.-C., Wood, G., Knops, A., & Willmes, K. (2009). The exact vs. approximate distinction in numerical cognition may not be exact, but only approximate: How different processes work together in multi-digit addition. *Brain and Cognition*, 69(2), 369-381. https://doi.org/10.1016/j.bandc.2008.08.031

Kindrat, A.N., & Osana, H. P. (2018). The relationship between mental computation and relational thinking in the seventh grade. *Fields Mathematics Education Journal*, 3(1), 1-22. https://doi.org/10.1186/s40928-018-0011-4

Kurtz, L.A. (2006). Visual Perception Problems in Children with AD/ HD. Autism and Other Learning Disabilities.

Lemaire, P., & Lecacheur, M. (2002). Children's strategies in computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 82(4):281-304. https://doi.org/10.1016/S0022-0965(02)00107-8

Lemaire, P., & Lecacheur, M. (2011). Age-related changes in children's executive functions and strategy selection: A study in computational estimation. *Cognitive Development*, 26(3), 282–294. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2011.01.002

Lemonidis, Ch. & Kaiafa, I. (2014). Fifth and sixth grade students' number sense in rational numbers and its relation with problem solving ability. *Menon: Online Journal of Educational Research*, 1st Thematic Issue, 61-74.

Lester, F. K. Jr. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1). https://doi.org/10.54870/1551-3440.1267

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). Problem solving in mathematics education. *Springer Open*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-40730-2_1

Liu, W., & Neber, H. (2012). Estimation Skills of Chinese and Polish Grade 6 Students on Pure Fraction Tasks. *Journal of Mathematics Education*, 5(1), 1-14.

Luwel, K., & Verschaffel, L. (2008). Flexibility in strategy use: Adaptation of numerosity judgement strategies to task characteristics. *European Journal of Cognitive Psychology*, 15(2), 247-266. https://doi.org/10.1080/09541440244000139

McCrink, K., & Spelke, E.S. (2010). Core multiplication in childhood. *Cognition*, 116(2), 204-216. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2010.05.003

McIntosh, A.J., Reys, B.J., Reys, R.E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8.

McIntosh, A., Reys, B., Reys, R., Bana, J., Farrell, B. (1997). *Number sense in school mathematics: student performance in four countries*. Perth, Australia: Mathematics, Science & Technology Education Centre, Edith Cowan University.

McIntosh, A., & Sparrow, L. (2004). *Beyond written computation*. Perth, Australia: Mathematics, Science & Technology Education Centre, Edith Cowan University.

McLellan, E. (2001). Mental Calculation: Its place in the development of numeracy. *Westminister Studies in Education*, 24(2), 145-154. https://doi.org/10.1080/0140672010240205

Mildenhall, P., Hackling, M., & Swan, P. (2010). Computational Estimation in the Primary School: A Single Case Study of One Teacher's Involvement in a Professional Learning Intervention. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education*: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (pp. 407-413). Fremantle: MERGA.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2006). *Principles and standards for school mathematics*, Reston, VA: NCTM.

Pica, P., Lemer, C., Izard, V., & Dehaene, S. (2004). Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group. *Science*, 306 (Article 5695), 499-503. https://doi.org/10.1126/science.1102085

Polya, G. (1973). *How to solve it*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Polya, G. (1988). *How to Solve It* : *A New Aspect of Mathematical Method* (2nd ed.). Princeton: Princeton University Press.

Reys, R.E., Reys, B.J., Nohda, N., Ishida, J., Yoshikawa, S., & Shimizu, K. (1991). Computational Estimation Performance and Strategies Used by Fifth- and Eighth-Grade Japanese Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(1), 39-58. https://doi.org/10.2307/749553

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem-solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Segovia, I., & Castro, E. (2009). Computational and measurement estimation: curriculum foundations and research carried out at the University of Granada, Mathematics Didactics Department. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 17(1), 499-539. https://doi.org/10.25115/ejrep.v7i17.1359

Sekeris, E., Empsen, M., Verschaffel, L. & Luwel, K. (2020). The development of computational estimation in the transition from informal to formal mathematics education. *European Journal of Psychology of Educations*, 1-20. https://doi.org/10.1007/s10212-020-00507-z

Sekeris, E., Verschaffel, L. & Luwel, K. (2021). Exact arithmetic, computational estimation and approximate arithmetic are different skills: Evidence from a study with 5-year-olds. *Infant and Child Development*, 30(5), 1-18. https://doi.org/10.1002/icd.2248

Sepeng, P., & Madzorera, A. (2014). Sources of Difficulty in Comprehending and Solving Mathematical Word Problems. I*nternational Journal of Educational Sciences*, 6(2), 217-225. https://doi.org/10.1080/09751122.2014.11890134

Sierprinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics: Social Research and Educational Studies Series: 2*. The Falmer Press.

Sowder, J.T. (1984). Computational Estimation Procedures of School Children. *The Journal of Educational Research*, 77(6), 332-336. https://doi.org/10.1080/00220671.1984.10885551

Star, J.R., & Rittle-Johnson, B. (2009). It Pays to Compare: An Experimental Study on Computational Estimation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 102(4), 408-426. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2008.11.004

Thiangthung, Y. (2016). Applying Polya's four-steps and Schoenfeld's behavior categories to enhance students' mathematical problem solving. *Journal of Advances in Humanities and Social Sciences*, 2(5), 261-268.

Zacharos, K., & Koustourakis, G. (2011). A critical approach to school mathematical knowledge: The case of “realistic” problems in Greek primary school textbooks for seven-year-old pupils. *Acta Didactica Napocensia*, 4(1), 39-50.

Ελληνική και ελληνόγλωσση βιβλιογραφία

Αγαλιώτης, Ι. (2011). Διδασκαλία μαθηματικών στην ειδική αγωγή και εκπαίδευση: Φύση και εκπαιδευτική διαχείριση των μαθηματικών δυσκολιών. Γρηγόρης.

Αγαλιώτης Ι., & Ομπάσης Ν. (2016). Αξιολόγηση κοινωνικό – συναισθηματικών παραμέτρων μάθησης και προσαρμογής παιδιών με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες με την τεχνική Q – sort. Πανελλήνιο Συνέδριο Επιστημών Εκπαίδευσης, 2015(2), 1041–1051. https://doi.org/10.12681/edusc.264

Αγγελόπουλος, Σ., & Αγαλιώτης, Ι. (2021). Αποτελεσματική διδασκαλία γνωστικού σχήματος προβλημάτων αφαίρεσης σε μαθητές με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες με τη χρήση πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης της γνώσης. Ψυχολογία: Ελληνική Ψυχολογική Εταιρεία, 26(1), 160-168.

Δεσλή, Δ. (2011). Ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης από παιδιά προσχολικής ηλικίας. *Στα Πρακτικά του 4ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών*. Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων και Εν.Ε.Δι.Μ.

Δεσλή, Δ., & Ανεστάκης, Π. (2014). Υπολογιστικές εκτιμήσεις και η διδασκαλία τους: επιδόσεις, στρατηγικές και στάσεις υποψήφιων εκπαιδευτικών. *Στα Πρακτικά του 5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ*. Φλώρινα: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

Δεσλής, Δ., & Δεσλή, Δ. (2019). Έλεγχος της λογικότητας ενός υπολογιστικού αποτελέσματος από παιδιά Ε' δημοτικού και ενήλικες: ικανότητες και δυσκολίες. Στο Κ. Χρίστου (Επιμ.), *Πρακτικά του 8ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών* (σς. 285-294). Λευκωσία, Κύπρος: Εν.Ε.Δι.μ.

Δεσλή, Δ., & Λιόλιου, Α. (2020). Η σχέση της υπολογιστικής εκτίμησης με την επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών: Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών. Φλώρινα: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

Δεσλή, Δ., & Τριανταφύλλου, Ε. (2019). Εκτιμήσεις αριθμητικών ποσοτήτων από παιδιά Α' και Β' Δημοτικού. *International Journal of Educational Innovation*, 1, 28-36.

Δεσλή, Δ. (2021). *Οι εκτιμήσεις στη μαθηματική εκπαίδευση: Είδη και εφαρμογές τους*. Αθήνα: Gutenberg.

Λεμονίδης, Χ., Λυγούρας, Γ., (2008). Η επίδοση και η ευελιξία των μαθητών της τρίτης Δημοτικού στους νοερούς υπολογισμούς. *Ευκλείδης Γ'*, τεύχος 68, σελ. 20-44, 2008.

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής. Νοεροί υπολογισμοί*. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Α. Εργαλείο έρευνας για τους συμμετέχοντες της Ομάδας Α

Φύλο: ____________ Ημερομηνία Γέννησης: ______________ Τάξη: _____

Κύκλωσε την απάντηση που νομίζεις ότι βρίσκεται **πιο κοντά** στο σωστό αποτέλεσμα, χωρίς να χρησιμοποιήσεις μολύβι και χαρτί.

1) 49 + 56 =	περίπου 10	περίπου 80	περίπου 100
2) 28 + 39 =	περίπου 50	περίπου 70	περίπου 100
3) 61 – 27 =	περίπου 30	περίπου 50	περίπου 90
4) 88 – 22 =	περίπου 20	περίπου 60	περίπου 80
5) 19 x 3 =	περίπου 30	περίπου 40	περίπου 60
6) 33 x 2 =	περίπου 60	περίπου 80	περίπου 100
7) 82 ÷ 10 =	περίπου 4	περίπου 8	περίπου 10
8) 64 ÷ 15 =	περίπου 4	περίπου 6	περίπου 10

Λύσε **με ακρίβεια** τα προβλήματα που ακολουθούν, κυκλώνοντας κάθε φορά τη σωστή απάντηση.

1) Η Ελένη είναι 8 χρονών. Ο αδερφός της ο Νίκος είναι 14 χρονών. Όταν η Ελένη γίνει 10 χρονών, πόσο χρονών θα είναι ο Νίκος;

   α) 12 β) 16 γ) 20

2) Ο Κώστας ζυγίζει 48 κιλά. Η τσάντα του ζυγίζει 4 κιλά. Πόσα κιλά έδειξε η ζυγαριά, όταν ο Κώστας ανέβηκε στη ζυγαριά κρατώντας την τσάντα του;

   α) 42 β) 46 γ) 52

3) Η Ευγενία φτιάχνει μια τετράγωνη κάρτα και θέλει να τη διακοσμήσει γύρω-γύρω με κορδέλα. Αν η μία πλευρά της κάρτας έχει μήκος 15 εκ., πόση κορδέλα θα χρειαστεί η Ευγενία για την κάρτα της;

   α) 30 β) 50 γ) 60

4) Στο σχολείο τα παιδιά ρωτήθηκαν πού θέλουν να πάνε εκδρομή.

Κινηματογράφος	34
Θέατρο	18
Γήπεδο	27

   Πόσα παιδιά συνολικά ψήφισαν τους δύο πιο δημοφιλείς προορισμούς;

   α) 35 β) 61 γ) 79

5) Μια ομάδα ποδοσφαίρου έχει 30 παιδιά. Μετά από μία εβδομάδα φεύγουν από την ομάδα 11 παιδιά και έρχονται 2 καινούρια παιδιά. Πόσα παιδιά είναι τώρα στην ομάδα;

α) 17 β) 21 γ) 43

6) Η Μαργαρίτα έχει 50 μαρκαδόρους. Δίνει σε καθέναν από τους δύο αδελφούς της 10 μαρκαδόρους. Πόσοι μαρκαδόροι της έμειναν;

α) 20 β) 30 γ) 40

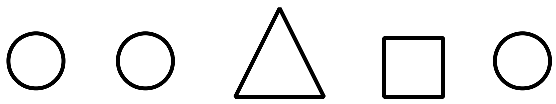
7) Παρατήρησε την παρακάτω σειρά αριθμών.

3 , 10 , 17 , 24 , …

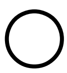
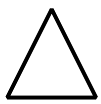
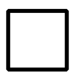
Ποιος νομίζεις ότι θα είναι ο επόμενος αριθμός;

α) 30 β) 31 γ) 35

8) Παρατήρησε το παρακάτω μοτίβο.



Ποιο νομίζεις ότι θα είναι το επόμενο σχήμα;

α)  β)  γ) 

Β. Εργαλείο έρευνας για τους συμμετέχοντες της Ομάδας Β

Φύλο: ____________ Ημερομηνία Γέννησης: ______________ Τάξη: _____

1) Η Ελένη είναι 8 χρονών. Ο αδερφός της ο Νίκος είναι 14 χρονών. Όταν η Ελένη γίνει 10 χρονών, πόσο χρονών θα είναι ο Νίκος;

   α) 12 β) 16 γ) 20

2) Ο Κώστας ζυγίζει 48 κιλά. Η τσάντα του ζυγίζει 4 κιλά. Πόσα κιλά έδειξε η ζυγαριά, όταν ο Κώστας ανέβηκε στη ζυγαριά κρατώντας την τσάντα του;

   α) 42 β) 46 γ) 52

3) Η Ευγενία φτιάχνει μια τετράγωνη κάρτα και θέλει να τη διακοσμήσει γύρω-γύρω με κορδέλα. Αν η μία πλευρά της κάρτας έχει μήκος 15 εκ., πόση κορδέλα θα χρειαστεί η Ευγενία για την κάρτα της;

   α) 30 β) 50 γ) 60

4) Στο σχολείο τα παιδιά ρωτήθηκαν πού θέλουν να πάνε εκδρομή.

Κινηματογράφος	34
Θέατρο	18
Γήπεδο	27

   Πόσα παιδιά συνολικά ψήφισαν τους δύο πιο δημοφιλείς προορισμούς;

   α) 35 β) 61 γ) 79

5) Μια ομάδα ποδοσφαίρου έχει 30 παιδιά. Μετά από μία εβδομάδα φεύγουν από την ομάδα 11 παιδιά και έρχονται 2 καινούρια παιδιά. Πόσα παιδιά είναι τώρα στην ομάδα;

α) 17 β) 21 γ) 43

6) Η Μαργαρίτα έχει 50 μαρκαδόρους. Δίνει σε καθέναν από τους δύο αδελφούς της 10 μαρκαδόρους. Πόσοι μαρκαδόροι της έμειναν;

α) 20 β) 30 γ) 40

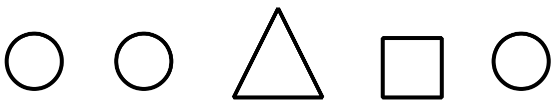
7) Παρατήρησε την παρακάτω σειρά αριθμών.

3 , 10 , 17 , 24 , …

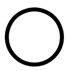
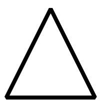
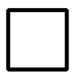
Ποιος νομίζεις ότι θα είναι ο επόμενος αριθμός;

α) 30 β) 31 γ) 35

8) Παρατήρησε το παρακάτω μοτίβο.



Ποιο νομίζεις ότι θα είναι το επόμενο σχήμα;

α)  β)  γ) 

Κύκλωσε την απάντηση που νομίζεις ότι βρίσκεται **πιο κοντά** στο σωστό αποτέλεσμα, χωρίς να χρησιμοποιήσεις μολύβι και χαρτί.

1) 49 + 56 =	περίπου 10	περίπου 80	περίπου 100
2) 28 + 39 =	περίπου 50	περίπου 70	περίπου 100
3) 61 – 27 =	περίπου 30	περίπου 50	περίπου 90
4) 88 – 22 =	περίπου 20	περίπου 60	περίπου 80
5) 19 x 3 =	περίπου 30	περίπου 40	περίπου 60
6) 33 x 2 =	περίπου 60	περίπου 80	περίπου 100
7) 82 ÷ 10 =	περίπου 4	περίπου 8	περίπου 10
8) 64 ÷ 15 =	περίπου 4	περίπου 6	περίπου 10