ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ-ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ - ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ – ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΉΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Α΄ Ηλικιακού Κύκλου (5-12 χρονών)

Διπλωματική εργασία

“Η αίσθηση του αριθμού σε πλαισιωμένα και μη πλαισιωμένα προβλήματα”

Της **Γιάγκου Αποστολίας**
Α.Ε.Μ.: 1047

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Δεσλή Δέσποινα, Καθηγήτρια Π.Τ.Δ.Ε., Α.Π.Θ.

Εξεταστές: Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε., Π.Δ.Μ.

Αγαλιώτης Ιωάννης, Καθηγητής, Ε.Κ.Π., ΠΑ.ΜΑΚ

ΦΛΩΡΙΝΑ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2023

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια της ολοκλήρωσης των σπουδών μου στο Διατμηματικό-Διαπανεπιστημιακό Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών “Διδακτική των Μαθηματικών”.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου κα Δεσλή Δέσποινα για την καθοδήγηση, τις πολύτιμες συμβουλές και τη βοήθεια που μου παρείχε καθ’ όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Λεμονίδη Χαράλαμπο και τον κ. Αγαλιώτη Ιωάννη που δέχτηκαν να αποτελούν μέλη της τριμελούς επιτροπής.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για τις αξίες που μου μετέδωσαν και την την υποστήριξή τους τόσο κατά τη διάρκεια φοίτησής μου σε αυτό το μεταπτυχιακό πρόγραμμα όσο και σε κάθε βήμα της ζωής μου.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Σχημάτων

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσει αφενός την ικανότητα παιδιών Δ΄ και Ε΄ τάξης για αίσθηση του αριθμού σε έργα με δεκαδικούς αριθμούς και αφετέρου να μελετήσει τον ρόλο του πλαισίου στην ικανότητα αυτή. Για τον σκοπό αυτό, πραγματοποιήθηκε έρευνα σε 30 παιδιά Δ΄ τάξης και 30 παιδιά Ε΄ τάξης. Σχεδιάστηκαν τέσσερα έργα στη βάση των συστατικών στοιχείων της αίσθησης του αριθμού (Σχετικό μέγεθος των αριθμών, Πολλαπλή αναπαράσταση αριθμών και πράξεων, Λογικότητα των εκτιμήσεων, Επίδραση των πράξεων στους αριθμούς). Στους μισούς παιδιά κάθε ηλικιακής ομάδας τα έργα παρουσιάστηκαν πλαισιωμένα με σενάριο από την καθημερινή ζωή και στους υπόλοιπους μισούς χωρίς πλαίσιο. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων βρέθηκε ότι η γενική επίδοση των συμμετεχόντων ήταν μέτρια (63,87%), με τους μαθητές της Ε΄ τάξης να εμφανίζουν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας από τους μαθητές της Δ΄ τάξης. Οι καλύτερες επιδόσεις και των δυο ηλικιακών ομάδων σημειώθηκαν στο Έργο της Επίδρασης των πράξεων στους αριθμούς, ενώ τα έργα του Σχετικού μεγέθους των αριθμών, της Πολλαπλής αναπαράστασης αριθμών και πράξεων και της Λογικότητας των εκτιμήσεων ήταν πιο απαιτητικά. Αν και στο σύνολο των δοκιμασιών η παρουσία πλαισίου δεν επηρέασε τις επιδόσεις των συμμετεχόντων, αντιφατικά ήταν τα αποτελέσματα για κάθε ηλικιακή ομάδα. Ενώ τα παιδιά της Δ΄ τάξης εμφάνισαν καλύτερη επίδοση όταν τα έργα δεν συνοδεύονταν από πλαίσιο, για τα παιδιά της Ε΄ τάξης το πλαίσιο είτε ευνόησε τις επιδόσεις τους είτε δεν τις επηρέασε καθόλου. Τα αποτελέσματα αυτά συζητώνται σε μια προσπάθεια αξιοποίησής τους στη μαθηματική εκπαίδευση, αναδεικνύοντας τη σημασία της ανάπτυξης της αίσθησης του αριθμού με στόχο την καλλιέργεια στρατηγικών αίσθησης του αριθμού και την απομάκρυνση από τη συστηματική χρήση αλγόριθμων.

Λέξεις κλειδιά: αίσθηση του αριθμού, συστατικά στοιχεία αίσθησης του αριθμού, δεκαδικοί αριθμοί, ρόλος του πλαισίου, δημοτικό σχολείο

ABSTRACT

The present aimed study to examine 4th and 5th grade children's number sense when solving context-based and non-context-based problems with decimal numbers. For this purpose, 30 4th grade students and 30 5th grade students took place in the study. Four tasks were designed on the bases of the components of number sense (Relative number size, Different types of numerical and operations, Reasonableness of estimates, Effects of operations on numbers). Half of the participants in each age group were presented tasks with context-based problems with stories from everyday life whereas the other half were presented with non-context-based problems. The analysis of the results revealed that participant's overall performance was quite (63,87%), with 5th grade students showing higher success rates than 4th grade students. Both age groups showed their best performance on the "Effects of Operations on Numbers" task, whereas the othes tasks were more demanding. Although the presence of the context did not affect the overall performance of the participants, the results were contradictory according to each age group. While 4th grade students performed better when tasks were not accompanied by a context, context either increased the success rate of 5th graders or did not affect it at all. These results are discussed with regards to mathematics education, highlighting the importance of developing number sense and number sense strategies as well as revealing the need to move away from the systematic use of algorithms.

Key words: number sense, number sense traits, decimal numbers, context-based problems and non-context-based problems, primary school

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού είναι ζήτημα διεθνούς ενδιαφέροντος και απασχολεί τόσο την ερευνητική όσο και την εκπαιδευτική κοινότητα των μαθηματικών, εξαιτίας της σημασίας της στη μαθηματική ανάπτυξη και πορεία των μαθητών (Jordan, Glutting & Ramineni, 2010; Yang, Li & Lin, 2008). Η αίσθηση του αριθμού είναι σημαντική για τα μικρά παιδιά, καθώς προάγει την αυτοπεποίθηση και δημιουργεί άνεση και ευελιξία στη διαχείριση των αριθμών στα αριθμητικά προβλήματα που σχετίζονται με τις καθημερινές εμπειρίες (McIntosh, Reys, & Reys, 1992; Κολέζα, 2009). Αποτελέσματα ερευνών επισημαίνουν ότι η ικανότητα των μαθητών[1] για αίσθηση του αριθμού επηρεάζει τη γενικότερη μαθηματική πορεία τους και αποτελεί τη βάση για την ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών τα επόμενα χρόνια (Jordan et al., 2010). Για αυτόν τον λόγο, η έγκαιρη ανάπτυξή της στα πλαίσια της τυπικής εκπαίδευσης είναι ζωτικής σημασίας προκειμένου οι μαθητές να αποκτήσουν καλή εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών (Jordan, Kaplan, Olah, & Locuniac, 2006). Επιπλέον, η σημασία της εκδηλώνεται και στα νέα αναλυτικά προγράμματα σπουδών για τα μαθηματικά και τονίζεται η αναγκαιότητα της ανάπτυξης της αίσθησης του αριθμού από τις πρώτες κιόλας τάξεις, η οποία καταλαμβάνει κεντρικό μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

Η αίσθηση του αριθμού (number sense) συνδέεται με την ερμηνεία των μαθηματικών ως δραστηριότητας που δημιουργεί νοήματα, καθώς εμπλέκει τα άτομα σε διαδικασίες διαχείρισης αριθμητικών και ποσοτικών μεγεθών προκειμένου να επεξεργαστεί, να ερμηνεύσει και να μεταδώσει πληροφορίες (McIntosh, Reys, & Reys, 1992; Reys & Yang, 1998). Αφορά στη γενικότερη κατανόηση του αριθμού και δεν μπορεί να οριστεί σε ένα στενό πλαίσιο. Η αίσθηση του αριθμού απαρτίζεται από ένα σύνολο ιδεών με βασικά στοιχεία την ικανότητα διερεύνησης και ερμηνείας των αριθμών και των πράξεων, χωρίς την εκτέλεση τυποποιημένων αλγόριθμων (Κολέζα, 2009). Ως έννοια αναφέρεται στη σχέση μεταξύ των αριθμών, στην ανάπτυξη ευέλικτων και αποτελεσματικών στρατηγικών (συμπεριλαμβανομένων των νοερών υπολογισμών και των εκτιμήσεων), οι οποίες συμβάλλουν στην πολλαπλή αναπαράσταση των αριθμών

1 Με τον όρο "μαθητών" χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία για να δηλώσει τα δύο φύλα.

και των πράξεων κατά την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων (Κολέζα, 2009; McIntosh et al., 1992; Reys & Yang, 1998). Η αίσθηση του αριθμού αναπτύσσεται βαθμιαία με την πάροδο του χρόνου μέσω συνεχούς και καθημερινής εστίασης της διδασκαλίας των μαθηματικών προς αυτόν τον στόχο (Thornton & Tucker, 1989).

Παρόλο που υπάρχει δυσκολία στον ορισμό της αίσθησης του αριθμού, οι περισσότεροι ερευνητές συμφωνούν ότι τα βασικά δομικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού (components of number sense) είναι: η ικανότητα της ένα προς ένα μέτρησης σε συνδυασμό με την κατανόηση της βασικής σημασίας των αριθμών και την ακολουθία τους (counting), η αναγνώριση του μεγέθους των αριθμών με ή χωρίς σημεία αναφοράς (number knowledge), οι αριθμητικές μετατροπές και η κατανόηση της σχετικής επίδρασης των πράξεων στους αριθμούς (number transformation), οι στρατηγικές που αφορούν τις εκτιμήσεις (estimation) και τις νοερές πράξεις (mental computations) για την επίλυση προβλημάτων (Jordan et al., 2006; McIntosh et al., 1992; Reys & Yang, 1998), καθώς και η δυνατότητα αξιολόγησης της λογικότητας ενός μαθηματικού αποτελέσματος (reasonableness) (Yang, 2005).

Με βάση τα αποτελέσματα ερευνών η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού επηρεάζεται από τα δομικά στοιχεία που την απαρτίζουν. Ο Yang (2005) εξέτασε σε μαθητές στην Ταϊβάν τα δομικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού και εντόπισε αφενός μέτριες επιδόσεις για κάθε ένα από τα δομικά στοιχεία και αφετέρου μια τάση των μαθητών να διαχειρίζονται τα μαθηματικά έργα με αλγοριθμικούς κανόνες. Αντίστοιχα, στην έρευνα των Yang και Huang (2004) οι υψηλές επιδόσεις των μαθητών στους γραπτούς υπολογισμούς δε συμβάδιζαν με τις επιδόσεις τους σε μαθηματικά έργα αίσθησης του αριθμού που απαιτούσαν την πολλαπλή ερμηνεία των αριθμών και των πράξεων.

Οι ικανότητες των μαθητών στους νοερούς υπολογισμούς και στις εκτιμήσεις, δομικά στοιχεία που συνδέονται με την καλή ικανότητα για αίσθηση του αριθμού, φαίνεται να είναι περιορισμένες για αρκετούς μαθητές. Για παράδειγμα οι Λεμονίδης και Καΐάφα (2014) βρήκαν ότι οι νοεροί υπολογισμοί δεν προτιμώνται από τους μαθητές, οι οποίοι παρουσίαζαν χαμηλά ποσοστά στη χρήση τουλάχιστον δυο στρατηγικών νοερών υπολογισμών. Όσον αφορά τις εκτιμήσεις, ερευνητικά δεδομένα αναδεικνύουν τις μειωμένες στρατηγικές εκτίμησης των μαθητών και, παράλληλα, συχνά παρατηρούνται δυσκολίες στη στρογγυλοποίηση λόγω υπερβολικής χρήσης γραπτών αλγόριθμων (Yang, 2005; Reys & Yang, 1998; Reys, Reys & Penafiel, 1991). Αξίζει να σημειωθεί ότι και σε εκπαιδευτικούς έχουν παρατηρηθεί προβλήματα στην εκτίμηση του μεγέθους των αριθμών με τη διαχείριση σημείων αναφοράς (Δεσλή & Ανεστάκης, 2014). Πέρα από τις εκτιμήσεις και τους νοερούς υπολογισμούς, ένα ακόμη συστατικό στοιχείο που συνδέεται με την αίσθηση του αριθμού είναι η λογική κρίση ενός μαθηματικού αποτελέσματος, στην οποία φαίνεται οι μαθητές να εμφανίζουν δυσκολίες, όπως για παράδειγμα στην έρευνα των Yang, Li και Lin (2008), όπου οι συμμετέχοντες εμφάνισαν χαμηλότερες επιδόσεις στη λογικότητα των εκτιμήσεων σε σύγκριση με τις επιδόσεις που αφορούν το μέγεθος του αριθμού.

Οι McIntosh et al. (1992) υποστηρίζουν ότι κάποια στοιχεία της αίσθησης του αριθμού εντοπίζονται σχετικά νωρίς στα μικρά παιδιά, όμως αυτό δε διασφαλίζει απαραίτητα την ανάπτυξή της, διότι ο τρόπος διδασκαλίας συμβάλλει καθοριστικά σε αυτή. Αποτελέσματα ερευνών δείχνουν ότι η τυπική διδασκαλία με την επιμονή στους αλγόριθμους δημιουργεί συχνά εμπόδιο στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού, καθώς το φάσμα των στρατηγικών φαίνεται να μικραίνει και η σκέψη περιορίζεται σε διαδικαστικούς κανόνες (McIntosh et al., 1992; Reys & Yang, 1998; Yang, Hsu & Huang, 2004). Επομένως, η προσκόλληση στην εκμάθηση τυποποιημένων αλγόριθμων οδηγεί αφενός σε συλλογιστική βασισμένη σε τεχνικές και κανόνες των τυπικών αλγόριθμων και αφετέρου στην έλλειψη εναλλακτικών στρατηγικών διαχείρισης των αριθμών (Yang et al., 2004; Yang, 2005; Reys & Yang, 1998; McIntosh et al., 1992). Για παράδειγμα, σε έρευνα στην Ταϊβάν οι Yang et al. (2004) παρατήρησαν τη δυσκολία των μαθητών στην εξήγηση του τρόπου εργασίας τους ως αποτέλεσμα της προσκόλλησής τους σε μεθόδους βασισμένες σε κανόνες. Αυτή η μακροχρόνια συνήθεια των μαθητών για επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων με αλγόριθμους δημιούργησε την ίδια δυσκολία στον τρόπο εξήγησης ακόμα και σε μαθητές που είχαν αναπτύξει στρατηγικές που σχετίζονται με την αίσθηση του αριθμού.

Επιπλέον, συχνά στα ευρήματα ερευνών διαπιστώνεται ότι πολλές φορές το σωστό αριθμητικά αποτέλεσμα που προέρχεται από αλγοριθμική λύση δε συνδέεται με καλή αίσθηση του αριθμού, καθώς η συλλογιστική δε συνδέεται με στρατηγικές διαχείρισης των αριθμών, αλλά με τεχνικές και κανόνες. Για παράδειγμα στην έρευνα του Yang (2005) τα ελάχιστα σωστά αριθμητικά αποτελέσματα των συμμετεχόντων προέρχονταν από αλγοριθμικούς τρόπους επίλυσης, γεγονός που φανερώνει περιορισμένη σκέψη και έλλειψη ευελιξίας κατά τη διαχείριση των αριθμών. Ομοίως, στην έρευνα των Λεμονίδη και Καΐάφα (2014) παρατηρήθηκε ότι οι σωστές απαντήσεις των μαθητών προέρχονταν από χρήση διαδικαστικών στρατηγικών.

Πολλοί ερευνητές τονίζουν ότι οι αδυναμίες σε διεργασίες που σχετίζονται με την αίσθηση του αριθμού, όπως δυσκολία στην αναγνώριση του συμβολικού αριθμού ή μειωμένη ικανότητα για απαρίθμηση και ελλιπής αναγνώριση της επίδρασης των πράξεων, αποτελούν τη βάση των περισσότερων μαθηματικών σφαλμάτων (Jordan et al., 2010; Yang, Li & Lin, 2008). Με άλλα λόγια δεν υπάρχει αμφιβολία ότι η αίσθηση του αριθμού αποτελεί ισχυρό προβλεπτικό παράγοντα στη μετέπειτα μαθηματική πορεία (Jordan et al., 2010; Yang, Li & Lin, 2008). Ως εκ τούτου, η έλλειψη ικανότητας της αίσθησης του αριθμού δημιουργεί ανυπέρβλητα εμπόδια στην εκμάθηση των μαθηματικών, γεγονός που αναδεικνύει τη σημασία της ανάπτυξής της (Ekenstam, 1977, στο Yang, 2005). Άλλωστε, η καλλιέργεια της αίσθησης του αριθμού μέσα από ευκαιρίες εξερεύνησης των αριθμών, των πράξεων και των μεταξύ τους σχέσεων επιδρά θετικά στις επιδόσεις των μαθητών σε αντίθεση με τις επιδόσεις των μαθητών που διδάσκονται μόνο διαδικαστικούς κανόνες (Reys & Yang, 1998; Yang et al., 2004).

Η αίσθηση του αριθμού φαίνεται ότι επηρεάζεται από την ηλικία. Οι Jordan et al. (2006) τονίζουν ότι τα παιδιά στο νηπιαγωγείο έχουν καλύτερες επιδόσεις από τα παιδιά μικρότερης ηλικίας. Η επιλογή των στρατηγικών και οι εκτιμήσεις φαίνεται να βελτιώνονται με την ηλικία (Lemaire & Lecacheur, 2011). Σε αυτό συμφωνούν και οι Δεσλή και Μυρόβαλη (2017), οι οποίες βρήκαν σε έρευνά τους ότι παιδιά της Στ΄ τάξης είχαν καλύτερες επιδόσεις συγκριτικά με παιδιά της Ε΄ τάξης σε έργα που αφορούν την αίσθηση του αριθμού.

Η ύπαρξη ή μη ενός πλαισίου στα προβλήματα επιδρά τόσο στην καλλιέργεια της αίσθησης του αριθμού όσο και στις επιδόσεις σε έργα που αφορούν την αίσθηση του αριθμού. Τα ευρήματα δείχνουν ότι η έκθεση σε μαθηματικά προβλήματα με πλαίσιο ενισχύει την αίσθηση των αριθμού (Irwin, 2001; McIntosh et al., 1992). Ωστόσο, υπάρχουν και ερευνητές που υποστηρίζουν ότι οι μαθητές εμφανίζουν καλύτερες επιδόσεις σε αριθμητικά προβλήματα χωρίς πλαίσιο παρά σε προβλήματα με πλαίσιο, κυρίως λόγω της δυσκολίας στη μετατροπή των λεκτικών πληροφοριών σε μαθηματικές σχέσεις (Yang & Wu, 2012). Επιπλέον, ευρήματα ερευνών επισημαίνουν την τάση των μαθητών να εστιάζουν σε λέξεις κλειδιά χωρίς να κατανοούν το πλαίσιο, να χρησιμοποιούν τυπικούς αλγόριθμους και συχνά να εφιστούν την προσοχή τους στην εκτέλεση της πράξης, αγνοώντας τη λογικότητα των αποτελεσμάτων τους (Yang, Li & Lin 2008). Οι Can και Ozdemir (2018) διερεύνησαν την αίσθηση του αριθμού σε πλαισιωμένα και μη προβλήματα και συμπέραιναν ότι το πλαίσιο δεν επηρέασε τον τρόπο εργασίας των μαθητών, καθώς τα παιδιά επιδίδονταν σε καλές επιδόσεις, χρησιμοποιώντας τεχνικές βασισμένες κατά βάση σε κανόνες τόσο στα πλαισιωμένα όσο και στα μη πλαισιωμένα προβλήματα. Επίσης, οι ίδιοι τόνισαν στα αποτελέσματά τους το ενδεχόμενο της ύπαρξης γλωσσικών δυσκολιών στα πλαισιωμένα προβλήματα.

Η πλειοψηφία των ερευνών εστιάζει κυρίως στην αίσθηση του αριθμού σε φυσικούς αριθμούς και κλάσματα, αποκαλύπτοντας ότι οι μαθητές έχουν καλύτερες επιδόσεις σε δοκιμασίες που αφορούν φυσικούς αριθμούς σε σύγκριση με τους ρητούς (Purnomo, Alyani, & Assiti, 2014), καθώς στους ρητούς εντοπίζονται παρανοήσεις εξαιτίας της προκατάληψης των φυσικών αριθμών (Christou, 2015). Οι Δεσλή και Παπαχρήστος (2019) μελέτησαν τις στρατηγικές μαθητών και ενηλίκων σε νοερούς υπολογισμούς στα κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς με τη χρήση πλαισίου και βρήκαν ό,τι και οι δυο ηλικιακές ομάδες είχαν καλύτερες επιδόσεις στους δεκαδικούς αριθμούς από ότι στα κλάσματα, ενώ παράλληλα η ύπαρξη του πλαισίου δεν έδειξε να επηρεάζει την επίδοση τους.

Λαμβάνοντας υπόψη την αξία και τη σημαντικότητα της αίσθησης του αριθμού στη μαθηματική εκπαίδευση, αλλά και τα συχνά αντιφατικά ευρήματα αναφορικά με την επίδραση του “πλαισίου” στην ικανότητα για αίσθηση του αριθμού δημιουργείται η ανάγκη για διερεύνηση και μελέτη της αίσθησης του αριθμού και της επιρροής του πλαισίου μόνο σε δεκαδικούς αριθμούς σε μαθητές δημοτικού. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να μελετήσει τις επιδόσεις παιδιών δημοτικού σχολείου σε έργα αίσθησης του αριθμού με δεκαδικούς αριθμούς. Συγκεκριμένα, διερευνάται αφενός η ικανότητα των παιδιών Δ΄ τάξης και Ε΄ τάξης για αίσθηση του αριθμού σε έργα με δεκαδικούς αριθμούς και αφετέρου ο ρόλος των πλαισιωμένων και μη πλαισιωμένων προβλημάτων στην ικανότητα αυτή.

Τα επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα που η παρούσα εργασία επιχειρεί να απαντήσει είναι:

Α) Ποια είναι η ικανότητα των παιδιών (μαθητών Δ΄ και Ε΄ Δημοτικού) για αίσθηση του αριθμού με δεκαδικούς αριθμούς και κατά πόσο επηρεάζεται από την ηλικία;

Σε γενικές γραμμές, οι μαθητές συγκεντρώνουν ικανοποιητικές επιδόσεις για κάθε ένα από τα δομικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού (Yang, 2005) και τείνουν να χρησιμοποιούν κατά βάση αλγορίθμους (Reys & Yang, 1998; Yang, 2005; Yang, 2007; Alsawaie, 2011). Με δεδομένο ότι οι έρευνες δείχνουν ικανοποιητικές επιδόσεις των παιδιών σε φυσικούς αριθμούς (Purnomo et al., 2014) και υπάρχει γενικότερη δυσκολία στους ρητούς (Purnomo et al., 2014) αναμένονται μέτριες επιδόσεις στα έργα αίσθησης του αριθμού και στους δεκαδικούς αριθμούς.

Επίσης, καθώς οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές φαίνεται να βελτιώνονται με την ηλικία (Jordan et al., 2006; Lemaire & Lecacheur, 2011; Δεσλή & Μυρόβαλη, 2014; Δεσλή & Παπαχρήστος, 2019), αναμένεται οι μεγαλύτεροι μαθητές να έχουν καλύτερες επιδόσεις από τους μικρότερους μαθητές.

Β) Υπάρχουν δομικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού στα οποία η επίδοση (μαθητών Δ΄ και Ε΄ Δημοτικού) είναι καλύτερη;

Αποτελέσματα ερευνών έδειξαν ότι οι μαθητές παρουσιάζουν διαφοροποιήσεις ως προς τις επιδόσεις τους στα δομικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού (Yang, 2005; Yang, Li & Lin, 2008; Yang & Li 2015; Yang, Reys & Reys, 2009; Tsao, 2004; Λεμονίδης & Καΐάφα, 2014; Δεσλή & Ανεστάσκης 2014; Δεσλή & Λιόλιου, 2017). Επομένως, αναμένεται διαφοροποίηση και στις επιδόσεις των παιδιών στα δομικά στοιχεία σε έργα που σχετίζονται με την αίσθηση του αριθμού και στους δεκαδικούς αριθμούς. Πιο συγκεκριμένα, αναμένεται καλή επίδοση σε έργα αναγνώρισης σχετικού μεγέθους και στην επίδραση των πράξεων και χαμηλή επίδοση σε έργα που σχετίζονται με την πολλαπλή αναπαράσταση των αριθμών και των αριθμητικών πράξεων, τις εκτιμήσεις και τη λογικότητα των αποτελεσμάτων.

Γ) Η αίσθηση του αριθμού ευνοείται σε πλαισιωμένα ή μη πλαισιωμένα προβλήματα;

Με δεδομένο ότι τα αποτελέσματα σχετικά με την επίδραση του πλαισίου σε έργα αίσθησης του αριθμού είναι αντιφατικά (Yang, 2003; Yang & Wung, 2012; Yang & Li, 2008; Reys, Reys & Penafiel, 1999; Can & Ozdemir, 2018; Deslis & Desli, 2022; Δεσλή & Μυρόβαλη, 2014, Δεσλή & Παπαχρήστος, 2019; Δεσλή & Λιόλιου, 2017) επιχειρείται να εξεταστεί αν το πλαίσιο που συνοδεύει τα έργα αίσθησης του αριθμού με δεκαδικούς αριθμούς επηρεάζει τις επιδόσεις των μαθητών.

Προκειμένου να εξεταστούν τα παραπάνω ερευνητικά ερωτήματα, θα πραγματοποιηθεί έρευνα όπου θα μελετηθεί η ικανότητα μαθητών Δ΄ και Ε΄ τάξης για αίσθηση του αριθμού με δεκαδικούς αριθμούς σε πλαισιωμένα και μη πλαισιωμένα προβλήματα.

Κεφάλαιο 1: Βιβλιογραφική Επισκόπηση

Το πρώτο κεφάλαιο επιχειρεί τη βιβλιογραφική επισκόπηση σχετικά με την αίσθηση του αριθμού και τον ρόλο του πλαισίου, που συνοδεύει τις μαθηματικές δραστηριότητες, στην επίδοση των ατόμων σχετικά με την ικανότητά τους για αίσθηση του αριθμού. Το παρόν κεφάλαιο αποτελείται από δύο διακριτά μέρη. Στο πρώτο μέρος γίνεται μια προσπάθεια να οριστεί η αίσθηση του αριθμού και τα συστατικά της στοιχεία, καθώς και να αναδειχθεί η σημασία της αίσθησης του αριθμού στην τυπική μαθηματική εκπαίδευση. Στη συνέχεια, μέσα από ευρήματα ερευνών περιγράφεται η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού και οι επιδόσεις που εμφανίζουν ενήλικες σε δοκιμασίες αίσθησης αριθμού. Στο δεύτερο μέρος αναλύεται η επίδραση της ύπαρξης ή μη πλαισίου στις στρατηγικές των ατόμων.

Α. Αίσθηση του αριθμού

Α.1. Τι είναι η αίσθηση του αριθμού;

Η αίσθηση του αριθμού (number sense) είναι μια έννοια σύνθετη και πολυδιάστατη, στην οποία εμπεριέχονται πολλές ερμηνείες και, ως εκ τούτου, έχουν προταθεί διάφοροι ορισμοί από τους ερευνητές. Κατά την Κολέζα (2009, σ. 255), "η αίσθηση του αριθμού είναι δύσκολο να οριστεί σε ένα στενό πλαίσιο και το βασικότερο στοιχείο της είναι η ικανότητα διερεύνησης και ερμηνείας των αριθμών και πράξεων χωρίς την εκτέλεση υπολογιστικών αλγόριθμων".

Ο πρώτος όρος που αναφερόταν στην αίσθηση του αριθμού ήταν ο όρος "αριθμητισμός" (numeracy), ο οποίος επινοήθηκε από τον Crowther (1959, στο McIntosh et al., 1992) και αφορούσε ένα σύνολο ικανοτήτων που σχετίζονταν με μαθηματικές εργασίες. Σταδιακά ο όρος "αριθμητισμός" κατέληξε να συνδέεται με δεξιότητες αριθμητικής, κανόνες και τύπους και για αυτόν τον λόγο αντικαταστάθηκε από τους McIntosh et al. (1992) με τον όρο "αίσθηση του αριθμού" (number sense).

Οι McIntosh et al. (1992, σ. 3) ορίζουν ως αίσθηση του αριθμού "τη γενική κατανόηση των αριθμών και των αριθμητικών πράξεων, προκειμένου να αναπτυχθούν χρήσιμες στρατηγικές για τη διαχείριση των αριθμών και των μεταξύ τους πράξεων με ευελιξία". Οι ίδιοι επισημαίνουν ότι πρόκειται για μια διαδικασία δημιουργίας νοημάτων μέσω της οποίας τα άτομα εμπλέκονται σε διαδικασίες διαχείρισης αριθμητικών και ποσοτικών μεγεθών, ώστε να είναι σε θέση να επεξεργαστούν και να ερμηνεύσουν πληροφορίες με σκοπό την επικοινωνία. Για αυτούς, η αίσθηση του αριθμού σχετίζεται με τη γνώση και την άνεση με τους αριθμούς, τη γνώση και την άνεση με τις αριθμητικές πράξεις και την εφαρμογή αυτών των γνώσεων σε υπολογιστικά πλαίσια.

Για την Sowder (1992), η αίσθηση του αριθμού είναι ένα καλά οργανωμένο εννοιολογικό δίκτυο που επιτρέπει τη συσχέτιση των αριθμών και των ιδιοτήτων τους με σκοπό την αναγνώριση του σχετικού μεγέθους ενός αριθμού, τις συγκρίσεις μεταξύ των αριθμών, την κατανόηση της λογικής κρίσης ενός αποτελέσματος μέσω της χρήσης ευέλικτων μη αλγοριθμικών τεχνικών κατά την επίλυση προβλημάτων. Μάλιστα, οι Gesten και Chard (1999) τονίζουν ότι η άνεση και η ευελιξία που αναπτύσσονται με την καλλιέργεια της αίσθησης του αριθμού οδηγούν αφενός στην αυτοματοποίηση αριθμητικών συνδυασμών και αφετέρου στην καλλιέργεια δεξιοτήτων που αφορούν τη λήψη αποφάσεων και την επιλογή αποδοτικών και ευέλικτων στρατηγικών κατά την επίλυση προβλημάτων.

Η πλειοψηφία των ερευνητών δίνει έμφαση στον ρόλο που διαδραματίζει η ικανότητα για ευελιξία κατά τη διαχείριση των αριθμών στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού (McIntosh et al., 1992; Gesten & Chard, 1999; Yang, 2005; Yang et al., 2004, Yang, Reys & Reys, 2009) και κάποιοι ερευνητές συχνά ερμηνεύουν αυτή την ευελιξία ως ευρηματικότητα σε νέα μαθηματικά προβλήματα (Greeno, 1991). Υπό αυτή την έννοια, η ευελιξία δίνει τη δυνατότητα στα άτομα όχι μόνο να λύνουν γνώριμα προβλήματα, αλλά κατά την επίλυση νέων προβλημάτων να επινοούν νέες διαδικασίες και τεχνικές, να διαχειρίζονται νοερά τους αριθμούς αξιοποιώντας και προσαρμόζοντας στρατηγικές χωρίς δυσκολία ακόμα και σε δύσκολους αριθμούς (McIntosh et al., 1992; Markovits & Sowder, 1994). Για παράδειγμα, ο Yang (2005) ορίζει την αίσθηση του αριθμού ως τη γενική κατανόηση των αριθμών και των αριθμητικών πράξεων και την ικανότητα για ευελιξία στον χειρισμού αυτών των διαδικασιών σε καταστάσεις της πραγματικής ζωής. Δίνοντας έμφαση σε αυτή την οπτική, οι Yang, Reys και Reys (2009) τονίζουν τη σύνδεση της αίσθησης του αριθμού με την ευελιξία στην εύρεση και χρήση αποτελεσματικών στρατηγικών, όπως είναι οι στρατηγικές στις νοερές πράξεις και τις εκτιμήσεις, με σκοπό την αντιμετώπιση αριθμητικών προβλημάτων.

Η απόδοση νοήματος που προκύπτει από τις διεργασίες μαθηματικών έργων σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με την αίσθηση του αριθμού και τους ορισμούς της. Για τους McIntosh, Reys, Reys, Bana και Farrell (1997), η αίσθηση του αριθμού συνεπάγεται τη διαχείριση των αριθμών και των πράξεων σαν ολότητες που έχουν και δίνουν κάποιο νόημα, το οποίο καλούνται τα άτομα να επεξεργαστούν και να ελέγξουν μέσω της κατάλληλης επιλογής σχετικών στρατηγικών για τον έλεγχο της λογικότητας των μαθηματικών αποτελεσμάτων.

Η αίσθηση του αριθμού συνδέεται με τους νοερούς και τους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς, μιας και απαιτούν την πολλαπλή αναπαράσταση των αριθμών και των πράξεων κατά την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων και παράλληλα ενισχύουν την αίσθηση του αριθμού (Κολέζα, 2009; McIntosh et al., 1992; Reys & Yang, 1998). Για κάποιους ερευνητές, οι νοεροί υπολογισμοί και οι εκτιμήσεις αποτελούν συστατικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού (Yang, 2005; McIntosh et al., 1992; Reys & Yang, 1998), ενώ για άλλους είναι το μέσο που οδηγεί στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού (Sowder, 1992; Greeno, 1991). Για παράδειγμα, οι McIntosh et al. (1992) θεωρούν ότι η αίσθηση του αριθμού είναι ένας ευρύτερος όρος που περιλαμβάνει τους νοερούς υπολογισμούς και τις εκτιμήσεις. Ομοίως, για τους Reys και Yang (1998), στοιχεία της αίσθησης του αριθμού αποτελούν η ικανότητα εκτίμησης του αποτελέσματος ενός υπολογισμού και η προσέγγιση αριθμητικών υπολογισμών στη βάση της λογικής. Από την άλλη, η Sowder (1992) αναγνωρίζει την εκτίμηση ως το μέσο για την καλλιέργεια της αίσθησης του αριθμού, καθώς μια δυσκολία σε αυτή σημαίνει αδυναμία και στην αίσθηση του αριθμού. Παρόμοια, ο Greeno (1991) συνδέει τον όρο της αίσθησης του αριθμού με την ευελιξία στους νοερούς υπολογισμούς, τις αριθμητικές εκτιμήσεις και την αντίληψη ποσοτικών μεγεθών με στόχο την εξαγωγή συμπερασμάτων, διότι, για αυτόν, οι υπολογιστικές εκτιμήσεις συνεπικουρούν στην αντίληψη σχετικά με την προσδοκώμενη απάντηση και, ως εκ τούτου, αποτελούν προϋπόθεση για την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού.

A.2.1 Τα συστατικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού

Στην προσπάθεια να αναγνωριστούν τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα που έχουν τα άτομα με αίσθηση του αριθμού, οι McIntosh et al. (1992) διέκριναν τα στοιχεία της αίσθησης του αριθμού σε τρεις κατηγορίες με υποκατηγορίες στην κάθε κατηγορία. Όλες οι υποκατηγορίες εκδηλώνουν αριθμητικές σχέσεις και μέσω της διασύνδεσης αυτών των κατηγοριών επισημαίνεται η μεταγνωστική διάστασή τους (Silver, 1989, στο Δεσλή, 2021). Πιο συγκεκριμένα, η αίσθηση του αριθμού διακρίνεται σε: α) γνώση και άνεση με τους αριθμούς, β) γνώση και άνεση με τις πράξεις, γ) εφαρμογή αυτής της γνώσης και άνεσης με τους αριθμούς και τις πράξεις σε υπολογιστικά περιβάλλοντα (McIntosh et al., 1992).

Αυτή η διάκριση δεν επιδιώκει την υπεργενίκευση των στοιχείων της αίσθησης του αριθμού, ούτε την αντιμετώπιση καθενός στοιχείου ως αποκομμένων γνώσεων ή ξεχωριστών δεξιοτήτων, αλλά τη διασύνδεση μεταξύ τους, δίνοντας έμφαση στη "δημιουργική χρήση και αντίληψη των αριθμητικών σχέσεων" (Δεσλή, 2021, σελ. 40). Υπό αυτή την έννοια, τα άτομα που έχουν αναπτύξει την αίσθηση του αριθμού είναι σε θέση να χρησιμοποιούν τα κύρια στοιχεία της για δημιουργική δραστηριοποίηση σε νέες μαθηματικές καταστάσεις (Greeno, 1991), έτσι ώστε να συνδέουν τους αριθμούς με τρόπους που δεν σχετίζονται με αλγοριθμικές τεχνικές (Howden, 1989, στο Δεσλή, 2021). Στον Πίνακα 1.1 που ακολουθεί παρουσιάζονται τα συστατικά της στοιχεία στα οποία διακρίνεται η ικανότητα για αίσθηση του αριθμού.

Πίνακας 1.1: Τα συστατικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού των McIntosh, Reys και Reys (1992). Προσαρμογή από Δεσλή (2021)

1. Γνώση και άνεση με τους αριθμούς
Αίσθηση της τακτικότητας των αριθμών
Πολλαπλές αναπαραστάσεις των αριθμών
Αίσθηση του σχετικού και απόλυτου μεγέθους των αριθμών
Συστήματα αναφοράς
2. Γνώση και άνεση με τις αριθμητικές πράξεις
Κατανόηση της επίδρασης των πράξεων
Κατανόηση των ιδιοτήτων
Κατανόηση της σχέσης μεταξύ των αριθμητικών πράξεων
3. Εφαρμογή της γνώσης και της άνεσης με τους αριθμούς και τις αριθμητικές πράξεις σε υπολογιστικά περιβάλλοντα
Κατανόηση της σχέσης ανάμεσα στο πλαίσιο και στον κατάλληλο υπολογισμό
Επίγνωση της ύπαρξης πολλών στρατηγικών
Χρήση κατάλληλης αναπαράστασης ή μεθόδου
Έλεγχος της λογικότητας των δεδομένων και του αποτελέσματος

Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τους McIntosh et al. (1992), η πρώτη κατηγορία αφορά την αίσθηση της τακτικότητας των αριθμών (την αξία θέσης ψηφίων, τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών και τη διάταξή τους), τις πολλαπλές αναπαραστάσεις (τα διαγράμματα και τα σύμβολα, τη σύνθεση-αναδόμηση στις ισοδυναμίες και τις συγκρίσεις με σημεία αναφοράς), την αίσθηση του σχετικού και του απόλυτου μεγέθους των αριθμών και τα συστήματα αναφοράς.

Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει την κατανόηση της επίδρασης των αριθμητικών πράξεων με φυσικούς αριθμούς, κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς, την κατανόηση των σχέσεων ανάμεσα στις αριθμητικές πράξεις και την κατανόηση των ιδιοτήτων τους.

Η τρίτη κατηγορία αφορά την κατανόηση της σχέσης και της σύνδεσης μεταξύ ενός προβλήματος και του απαραίτητου υπολογισμού. Αυτή σχετίζεται με την ικανότητα επινόησης και επιλογής κατάλληλων στρατηγικών, τη χρήση ποικίλων μεθόδων, όπως νοεροί υπολογισμοί, αλγόριθμοι ή χρήση αριθμομηχανής και την ικανότητα για έλεγχο της λογικότητας των δεδομένων και του αποτελέσματος.

Παρόλο που η αίσθηση του αριθμού είναι μια σύνθετη διαδικασία και περιλαμβάνει πολλά αλληλένδετα συστατικά στοιχεία, το ερευνητικό ενδιαφέρον των ερευνητών προσανατολίζεται σε πέντε γνωρίσματα των ατόμων (McIntosh et al., 1992; Sowder 1992; Yang 2005; Yang, Li, and Lin 2008):

1) Αναγνώριση της σημασίας του αριθμού. Για παράδειγμα, να μπορεί να γνωρίζει κάποιος τι σημαίνει το 5 στο 1054 ή να κατανοεί ότι η μετακίνηση της υποδιαστολής στους δεκαδικούς αριθμούς στα αριστερά μειώνει τον αριθμό.

2) Αναγνώριση του σχετικού μεγέθους των αριθμών. Για παράδειγμα, να είναι σε θέση κάποιος να χρησιμοποιεί το 1 και το 1/2 ως σημεία αναφοράς κατά τη σύγκριση δύο κλασμάτων.

3) Κατανόηση πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης των αριθμών και των αριθμητικών πράξεων. Για παράδειγμα, να μπορεί κάποιος να αναπαραστήσει τον αριθμό 0,5 με ισοδύναμες εκφράσεις, δηλαδή 0,5, 1/2, 50%, 1-0,5, 2-1,5, 0,25+0,25.

4) Αναγνώριση της επίδρασης των πράξεων στους αριθμούς. Για παράδειγμα, να είναι σε θέση κάποιος να κατανοεί ότι το αποτέλεσμα της πράξης 199X0,99 θα δώσει μικρότερο αριθμό από τον 199.

5) Ικανότητα για λογική κρίση του αποτελέσματος σε έναν υπολογισμό, χωρίς την εκτέλεση τυποποιημένων αλγόριθμων, αλλά μέσω εκτίμησης και νοερών πράξεων. Για παράδειγμα, να είναι σε θέση κάποιος να κατανοεί ότι το αποτέλεσμα της πράξης 99X5 είναι λιγότερο από 500, γιατί το 99 είναι μικρότερο από το 100.

A.2.2 Αναγνώριση της σημασίας της αίσθησης του αριθμού

Η σημασία της αίσθησης του αριθμού τονίζεται στα αναλυτικά προγράμματα και αποτελεί βασικό στόχο στην τυπική εκπαίδευση για τα μαθηματικά. Αυτή η αναγκαιότητα της διδασκαλίας της αίσθησης του αριθμού στα μαθηματικά προκύπτει αφενός από την αναγνώρισή της ως μέσο επικοινωνίας που συνδράμει στην επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής (McIntosh et al., 1992) και αφετέρου από το γεγονός ότι επιδρά στη γενική μαθηματική επίδοση των μαθητών (Yan, Li & Lin, 2008). Αναλυτικότερα, οι Yan, Li και Lin (2008) επισημαίνουν την αλληλεπίδραση της αίσθησης του αριθμού με τις επιδόσεις στα μαθηματικά και εξηγούν ότι παιδιά με χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά συνήθως έχουν μειωμένη αίσθηση του αριθμού και, αντίθετα, παιδιά με υψηλές επιδόσεις στα μαθηματικά παρουσιάζουν καλή αίσθηση του αριθμού. Άλλοι ερευνητές επιβεβαιώνουν αυτή τη σχέση με τη διαπίστωση ότι οι χαμηλές επιδόσεις των μαθητών στα μαθηματικά έργα συχνά δεν οφείλονται σε περιορισμένες γνώσεις, αλλά σε μειωμένη ικανότητά τους να διαχειρίζονται τους αριθμούς και τις μεταξύ τους σχέσεις (McIntosh et al.,1992; McIntosh et al.,1997; Berch, 2005).

Έχει παρατηρηθεί ότι η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού γίνεται σταδιακά και κάποια στοιχεία της αίσθησης υπάρχουν στα παιδιά πριν αυτά ξεκινήσουν την τυπική εκπαίδευση (McIntosh et al.,1992; Gestern & Chard, 1999; Jordan et al., 2006), χωρίς αυτό να σημαίνει ότι με την είσοδο των παιδιών στο σχολείο αυτά τα στοιχεία της αίσθησης του αριθμού θα εξελιχθούν με τον ίδιο τρόπο και με τον ίδιο ρυθμό, αφού ο τρόπος διδασκαλίας παίζει καθοριστικό ρόλο. Ωστόσο, σε διαχρονική έρευνα βρέθηκε ότι η αίσθηση του αριθμού στα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης είναι προβλεπτικός παράγοντας της πορείας των μαθητών στα μαθηματικά για τα επόμενα σχολικά χρόνια (Jordan et al., 2010). Αυτό επιβεβαιώνεται και από το γεγονός ότι συχνά βασικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού στα νήπια, όπως η αναγνώριση του μεγέθους μικρών αριθμών και η κατανόηση βασικών αριθμητικών πράξεων, αποτελούν τη βάση για την καλλιέργεια της ευελιξίας και της ευχέρειας στις μαθηματικές πράξεις και κατ' επέκταση για την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού (Berch, 2005).

Όσον αφορά τη διδασκαλία της αίσθησης του αριθμού, ερευνητικά δεδομένα δείχνουν ότι η έμφαση της διδασκαλίας στους διαδικαστικούς κανόνες με την επίμονη εκμάθηση των αλγόριθμων οδηγεί σε μέτριες ή χαμηλές επιδόσεις σε δοκιμασίες που αφορούν τα δομικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού (Yang et al., 2004; Yang, 2005; Reys & Yang, 1998; McIntosh et al., 1992). Ως εκ τούτου, οι δυσκολίες στα δομικά στοιχεία αποτελούν στην πραγματικότητα τη βάση για τα περισσότερα μαθηματικά σφάλματα (Jordan et al., 2010; Yang, Li & Lin, 2008). Συνεπώς, η εμμονή στη διδασκαλία των αλγόριθμων περιορίζει τη σκέψη και αποτελεί ανασταλτικό παράγοντα στην καλλιέργεια της ευελιξίας στη διαχείριση των αριθμών, με αποτέλεσμα τη μειωμένη ικανότητα για αίσθηση του αριθμού και τη δημιουργία εμποδίων στην εκμάθηση των μαθηματικών.

Α.3 Η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού σε παιδιά

Κατά τον Gelman (1990), σε κάθε άτομο υπάρχουν στοιχειώδεις αριθμητικές ικανότητες, οι "θεμελιώδεις αρχές" (skeletal principles), οι οποίες προηγούνται της μάθησης και αποτελούν τον σκελετό πάνω στον οποίο τα μικρά παιδιά χτίζουν την ικανότητα για αίσθηση του αριθμού σε αλληλεπίδραση με το περιβάλλον. Αυτές οι "θεμελιώδεις αρχές", σύμφωνα με τον Berch (2005), μπορούν να αναδειχθούν μέσω δραστηριοτήτων που περιλαμβάνουν αριθμούς, προκειμένου να ενισχύουν την αίσθηση του αριθμού πριν από την είσοδο των παιδιών στο σχολείο. Άλλωστε, σύμφωνα με τον ίδιο, η αίσθηση του αριθμού είναι μια δεξιότητα που καλλιεργείται με την εμπειρία (Berch, 2005). Παρόμοια, οι Thornton και Tucker (1989, σ. 21) συνηγορούν στη βαθμιαία ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού, τονίζοντας ότι "η αίσθηση του αριθμού αναπτύσσεται με την πάροδο του χρόνου μέσω της συνεπούς εστίασης των δραστηριοτήτων στην ανάπτυξη των δομικών στοιχείων της αίσθησης του αριθμού".

Η βαθμιαία ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού επιβεβαιώνεται σε ευρήματα ερευνών, καθώς τα παιδιά εκδηλώνουν στοιχεία της αίσθησης του αριθμού ήδη από το νηπιαγωγείο (Jordan, Glutting, Dyson, Hassinger-Das & Irwin, 2012), με τα περισσότερα από αυτά τα στοιχεία να φαίνονται πιο αναπτυγμένα σε παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας (Reys, Reys, McIntosh, Emanuelsson, & Yang, 1999; Δεσλή & Μυρόβαλη, 2017; Lemaire & Lecacheur, 2011). Χαρακτηριστικό παράδειγμα της βαθμιαίας ανάπτυξης της αίσθησης του αριθμού αποτελούν τα ευρήματα των Lemaire και Lecacheur (2011), οι οποίοι επισημαίνουν τη βελτίωση των μαθητών στην επιλογή στρατηγικών, όπως είναι οι στρατηγικές στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς, με την ηλικία. Ομοίως, οι Δεσλή και Μυρόβαλη (2017) σε πιο πρόσφατη έρευνα για τις επιδόσεις μαθητών Ε΄ και Στ΄ τάξης σε δοκιμασίες αίσθησης του αριθμού βρήκαν ότι οι μεγαλύτεροι μαθητές της Στ΄ τάξης δεν παρουσίασαν δυσκολίες σε κάποιο χαρακτηριστικό της αίσθησης του αριθμού, σε αντίθεση με τους μαθητές της Ε΄ τάξης που δυσκολεύτηκαν στα προβλήματα σχετικού μεγέθους και πολλαπλών αναπαραστάσεων. Παρόμοια διαφορά ως προς την ηλικία και την επιλογή στρατηγικών βρήκαν και οι Δεσλή και Λιόλιου (2017) που μελέτησαν τις επιδόσεις και τις στρατηγικές μαθητών Γ΄ και Δ΄ τάξης στις νοερές πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης, οι οποίες τους παρουσιάστηκαν με και χωρίς πλαίσιο. Συγκεκριμένα, παρόλο που οι περισσότεροι από τους μισούς συμμετέχοντες επέλεξαν αλγοριθμικές διαδικασίες κατά την επίλυση και παρά τις ικανοποιητικές επιδόσεις αναφορικά με τις σωστές απαντήσεις και στις δυο ηλικιακές ομάδες, βρέθηκε ότι τα παιδιά της Δ΄ τάξης προτίμησαν περισσότερο τους νοερούς υπολογισμούς, χρησιμοποιώντας τη στρατηγική του διαχωρισμού, σε σχέση με τα παιδιά της Γ΄ τάξης που έτειναν να χρησιμοποιούν τους τυπικούς αλγόριθμους.

Ωστόσο, στα μεγαλύτερα παιδιά συχνά παρατηρείται διαφοροποίηση ως προς τις επιδόσεις ανάμεσα στα διαφορετικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού (Yang & Li, 2015). Για παράδειγμα, οι Yang και Li (2015) στην έρευνά τους στην Ταϊβάν για τα κύρια γνωρίσματα της αίσθησης του αριθμού σε 195 μαθητές βρήκαν σημαντικά καλύτερες επιδόσεις των παιδιών πέμπτης τάξης σε έργα για το σχετικό μέγεθος των αριθμών σε σχέση με τις επιδόσεις τους σε έργα λογικής κρίσης. Οι ερευνητές τόνισαν την έντονη τάση των μαθητών για επιλογή αλγόριθμων. Μάλιστα, η αλγοριθμική εκτέλεση των πράξεων αναδείχθηκε ως η πρώτη επιλογή των μαθητών και σε συνδυασμό με την περιορισμένη χρήση στρατηγικών της αίσθησης του αριθμού, η αίσθηση του αριθμού κρίθηκε μειωμένη. Πέρα από αυτά τα ευρήματα, οι μαθητές παρουσίασαν ελλιπή εννοιολογική κατανόηση και παρανοήσεις στους κλασματικούς αριθμούς, όπως, για παράδειγμα, παρανόηση σχετικά με τον ισομερή χωρισμό των μερών στους κλασματικούς αριθμούς. Παρόμοια αποτελέσματα αναφορικά με τις επιδόσεις σε δοκιμασίες λογικής κρίσης είχε επισημάνει και η προγενέστερη έρευνα των Yang, Li και Lin (2008), οι οποίοι μελετώντας τα κύρια γνωρίσματα της αίσθησης του αριθμού βρήκαν ότι οι μαθητές είχαν καλύτερες επιδόσεις στο σχετικό μέγεθος των αριθμών, αλλά χειρότερες στην αξιολόγηση της λογικότητας ενός μαθηματικού αποτελέσματος.

Παρατηρείται ότι οι διαφορετικές επιδόσεις των μαθητών ως προς τα δομικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού σημειώνονται με την είσοδο των παιδιών στο σχολείο, καθώς ο τρόπος διδασκαλίας επιδρά στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού. Επιπρόσθετα, η πλειοψηφία των ερευνών συμφωνεί ότι η ικανότητα για αίσθηση του αριθμού δεν αναπτύσσεται παράλληλα με την εκμάθηση των υπολογιστικών αλγόριθμων (Reys et al., 1999; Yang, 2005; Reys & Yang, 1998; Alsawaie, 2011). Αντιθέτως, φαίνεται ότι η εμμονή στους αλγόριθμους δεν διευκολύνει την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού, μιας και οι μαθητές τείνουν να επιλέγουν αυτή τη διαδικαστική μέθοδο έναντι των στρατηγικών αίσθησης του αριθμού. Μπορεί τα παιδιά να εμφανίζουν καλύτερες επιδόσεις, όμως αυτές οφείλονται στην απομνημόνευση βημάτων και όχι στη βαθιά κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των αριθμών. Για παράδειγμα, η μελέτη του Alsawaie (2011) σε μαθητές της έκτης τάξης στα Ηνωμένα Αραβικά Εμιράτα κατέληξε σε αποθαρρυντικά αποτελέσματα για τις επιδόσεις των μαθητών σε δοκιμασίες σχετικές με την ικανότητά τους για αίσθηση του αριθμού εξαιτίας της έντονης χρήσης αλγόριθμων. Ο ερευνητής βρήκε ότι οι μαθητές κατέφευγαν πολύ συχνά σε αλγόριθμους και κανόνες, με αποτέλεσμα να εμφανίζουν ελλιπή αίσθηση του αριθμού.

Είναι αξιοσημείωτο ότι στην έρευνα των Reys και Yang (1998) οι μαθητές παρουσίασαν καλύτερες επιδόσεις σε έργα που απαιτούν αλγόριθμο σε σχέση με τα έργα που απαιτούν στρατηγικές αίσθησης του αριθμού. Οι ερευνητές μελέτησαν την ικανότητα για αίσθηση του αριθμού σε μαθητές έκτης και όγδοης τάξης (12 και 14 ετών) στην Ταϊβάν και επισήμαναν ότι οι μαθητές είχαν αναπτύξει ελάχιστες στρατηγικές αίσθησης του αριθμού, όπως, για παράδειγμα, τη χρήση σημείων αναφοράς, ενώ οι περισσότερες σωστές απαντήσεις τους δεν συνδέονταν με στρατηγικές αίσθησης του αριθμού, αλλά με υπολογισμούς βασισμένους σε κανόνες. Για παράδειγμα, πολλοί μαθητές ακολούθησαν τον κανόνα τοποθέτησης της υποδιαστολής για να υπολογίσουν το γινόμενο "534,6 Χ 0,545", αντί να εκτιμήσουν ότι το γινόμενο θα είναι περίπου το μισό του πρώτου παράγοντα. Ταυτόχρονα πάνω από τους μισούς μαθητές δεν εκτίμησαν ότι το "12/13 + 7/8" είναι περίπου 2, αλλά υπολόγισαν το άθροισμα με ακρίβεια.

Κατά τον Yang (2005), η υπερβολική προσκόλληση στους αλγόριθμους φέρει αρνητική επίδραση στην καλλιέργεια της αίσθησης του αριθμού, καθώς περιορίζει την ανάπτυξη της σκέψης και του συλλογισμού. Όπως επισημαίνει, οι περιορισμένες στρατηγικές εκτίμησης και οι δυσκολίες στη λογική κρίση ενός μαθηματικού αποτελέσματος των μαθητών της έκτης τάξης είναι απόρροια της μειωμένης ευελιξίας των μαθητών που ενισχύεται από τη μεγάλη εξάρτησή τους στους διαδικαστικούς κανόνες. Στην πραγματικότητα αυτή η μειωμένη ευελιξία δημιουργεί εμπόδιο στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού. Για παράδειγμα, οι μαθητές δυσκολεύονταν να εκτιμήσουν το αποτέλεσμα μιας διαίρεσης με δεκαδικό αριθμό, μιας και υπήρχε η παρανόηση ότι η διαίρεση μικραίνει. Επίσης, αρκετοί μαθητές κατέφυγαν σε γραπτό αλγόριθμο εξαιτίας της δυσκολίας στη στρογγυλοποίηση τόσο φυσικών αριθμών όσο και δεκαδικών αριθμών κατά τον υπολογισμό του αθροίσματος “53,687 + 8365 + 1638 + 28”. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αδυναμίας σημειώθηκε, όταν οι ερευνητές ζήτησαν την τοποθέτηση της υποδιαστολής στο αποτέλεσμα της πράξης “534,6Χ0,545=291357”. Σε αυτή τη δοκιμασία, μόνο τρεις μαθητές (από τους 21 μαθητές) απάντησαν σωστά χρησιμοποιώντας μόνο αλγοριθμικές τεχνικές (μετρώντας τα ψηφία μετά τις υποδιαστολές), ενώ κανένας δεν αναζήτησε μια λογική αιτιολόγηση (μείωση του αριθμού “534,6” στο μισό), προκειμένου να τοποθετήσει κατάλληλα την υποδιαστολή.

Στοιχεία μειωμένης αίσθησης του αριθμού εξαιτίας της μειωμένης ευελιξίας στις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές κατά την εκτέλεση πράξεων εντοπίζεται και στη μελέτη των Λεμονίδη και Καϊάφα (2014). Οι ερευνητές τονίζουν την προτίμηση των παιδιών Ε΄ και Στ΄ τάξης για διαχείριση των μαθηματικών προβλημάτων με στήριξη σε κανόνες και με αλγοριθμική εκτέλεση πράξεων, έναντι των στρατηγικών νοερών υπολογισμών. Στα ευρήματά τους τονίζουν το μικρό εύρος στρατηγικών σε νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς και την έλλειψη ευελιξίας στις πράξεις με ρητούς αριθμούς, στοιχεία που συνδέονται με χαμηλή αίσθηση του αριθμού. Για παράδειγμα, διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές που απάντησαν σωστά στις πράξεις “3/4 – 1/2” και “0,3 Χ 0,3”, χρησιμοποιούσαν μια μόνο στρατηγική και αυτή ήταν διαδικαστική στρατηγική.

Πρόσφατες έρευνες συνεχίζουν να αναδεικνύουν την απουσία στρατηγικών διαχείρισης των αριθμών, η οποία οδηγεί σε μειωμένη αίσθηση του αριθμού σε παιδιά ηλικίας δημοτικού, ακόμα και όταν τα μαθηματικά προβλήματα παρουσιάζονται με διαφορετική μορφή, δηλαδή με την πλαισίωση κάποιου σεναρίου ή χωρίς. Οι ελλιπείς στρατηγικές αναφορικά με την αίσθηση του αριθμού σε μαθητές τετάρτης τάξης αναδείχθηκε πρόσφατα από τους Can και Ozdemir

(2020) στην Τουρκία. Οι ερευνητές εξέτασαν, πέρα από τις επιδόσεις των μαθητών σε δοκιμασίες αίσθησης του αριθμού, και την επίδραση του πλαισίου που συνοδεύει τα μαθηματικά προβλήματα. Ένα από τα βασικά ευρήματα είναι ότι, είτε με τη συνοδεία πλαισίου είτε χωρίς, οι μαθητές είχαν ικανοποιητικές επιδόσεις, αλλά δεν παρουσίασαν στρατηγικές που φανερώνουν αίσθηση του αριθμού, καθώς ο τρόπος επίλυσής τους βασιζόταν σε κανόνες και γραπτούς υπολογισμούς. Στη συγκεκριμένη έρευνα, οι μαθητές παρουσίασαν μειωμένη ευελιξία τόσο στον εντοπισμό των σημείων αναφοράς ώστε να στρογγυλοποιήσουν και να εκτιμήσουν μεγέθη όσο και στην αναγνώριση των σχέσεων μεταξύ των αριθμών, ώστε να προβούν σε νοερές πράξεις. Για παράδειγμα, οι μαθητές μπορούσαν να αναγνωρίσουν τα σημεία αναφοράς σε απλές δοκιμασίες, όπως στη δοκιμασία "98X50" πολλαπλασίασαν "100X50", και να βρουν κατά προσέγγιση το ζητούμενο. Όμως, προτίμησαν τον αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού σε δοκιμασίες που ήταν αναγκαίες πρόσθετες προσαρμογές, όπως στη δοκιμασία που απαιτούσε την κατανόηση της σχέσης του "100" με την πράξη "490:5". Σε αυτή τη δοκιμασία δεν αρκούσε να πουν ότι το "490" είναι κοντά στο "500", αλλά έπρεπε να προβούν σε επιπλέον συμπεράσματα και να εξηγήσουν ότι το 1/5 του 500 είναι το 100, άρα και το 1/5 του 490 πρέπει να είναι μικρότερο από το 100. Επιπρόσθετα, οι ερευνητές παρατηρώντας την ικανότητα για ευελιξία μερικών λίγων μαθητών, που χρησιμοποίησαν στρατηγικές αίσθησης του αριθμού, διαπίστωσαν ότι αυτοί ήταν λιγότερο πιθανό να κάνουν λάθος και, ταυτόχρονα, ήταν σε θέση να βρουν μια δεύτερη εναλλακτική στρατηγική, σε σχέση με τους υπόλοιπους που εμφάνισαν δυσκολία στην εύρεση μη αλγοριθμικού τρόπου επίλυσης.

Α.4 Επιδόσεις εκπαιδευτικών και ενηλίκων σε έργα αίσθησης του αριθμού

Η μελέτη των επιδόσεων και των γνώσεων των ενηλίκων σχετικά με ένα γνωστικό αντικείμενο συχνά βοηθούν στην παρακολούθηση του τρόπου με τον οποίο εξελίσσεται το γνωστικό αντικείμενο με την ηλικία. Επιπλέον, οι επιδόσεις και οι στάσεις των εκπαιδευτικών για το γνωστικό αντικείμενο που διδάσκουν επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί αξιοποιούν αυτές τις γνώσεις στα διδακτικά τους καθήκοντα. Οι περισσότερες έρευνες τόσο στην ελληνική όσο και στη διεθνή βιβλιογραφία, που αφορούν την ικανότητα των ενηλίκων και των εκπαιδευτικών για αίσθηση του αριθμού εστιάζουν κυρίως στις υπολογιστικές εκτιμήσεις και στους νοερούς υπολογισμούς.

Περιορισμένη χρήση των στρατηγικών αίσθησης του αριθμού εντόπισε ο Yang (2007) στην έρευνα του με 15 υποψήφιους εκπαιδευτικούς στην Ταϊβάν. Στα ευρήματά του τόνισε τη μειωμένη ικανότητα των υποψήφιων εκπαιδευτικών για ευελιξία κατά την επίλυση δοκιμασιών και των τεσσάρων κύριων γνωρισμάτων της αίσθησης του αριθμού. Βρήκε πως οι εκπαιδευτικοί ένιωθαν συχνά ανασφαλείς να εξηγήσουν τον τρόπο εργασίας τους και είχαν την τάση να επιλέγουν αλγόριθμους και τεχνικές βασισμένες σε κανόνες όπως: εύρεση κοινού παρανομαστή στις συγκρίσεις κλασμάτων, μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς ή εκτέλεση αλγόριθμων για ακριβείς υπολογισμούς. Για παράδειγμα, όταν ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να αξιοποιήσουν στρατηγικές εκτίμησης ώστε να τοποθετήσουν την υποδιαστολή στην πράξη “0,4975×9428,8=46908280”, εκείνοι συχνά κατέφευγαν στην τεχνική της καταμέτρησης των δεκαδικών ψηφίων. Επιπλέον, φαίνεται ότι οι εκπαιδευτικοί είτε δεν ήταν εξοικειωμένοι με στρατηγικές εκτίμησης είτε δεν γνώριζαν την έννοια της εκτίμησης. Ως εκ τούτου, προσπαθούσαν να βρουν την ακριβή απάντηση, γεγονός που αφενός περιόρισε τη σκέψη τους και αφετέρου συνδέεται με μειωμένη αίσθηση του αριθμού. Συνήθως, επιθυμούσαν να ακολουθήσουν συγκεκριμένα διαδικαστικά βήματα χωρίς να επανεξετάσουν την καταλληλότητα των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν ή χωρίς να ελέγξουν τη λογικότητα των αποτελεσμάτων που βρήκαν.

Η προσκόλληση των εκπαιδευτικών σε αλγοριθμικές διαδικασίες αναδείχθηκε και από τους Yang, Reys και Rey (2009) στην έρευνά τους στην Ταϊβάν με δείγμα 280 υποψήφιους εκπαιδευτικούς. Η πλειοψηφία των συμμετεχόντων είχε καλές επιδόσεις σε έργα αναγνώρισης του σχετικού μεγέθους των αριθμών, αλλά παρουσίασε αδυναμία στην εφαρμογή τα σημείων αναφοράς στα προβλήματα υπολογιστικών εκτιμήσεων. Οι γενικές επιδόσεις στις δοκιμασίες της έρευνας δείχνουν ότι λιγότερο από το ένα τρίτο των υποψήφιων εκπαιδευτικών χρησιμοποίησε στρατηγικές βασισμένες στην αίσθηση του αριθμού και ακόμα πιο λίγοι εκπαιδευτικοί πραγματοποίησαν εκτιμήσεις ή αξιολόγησαν τη λογικότητα των αποτελεσμάτων τους. Για παράδειγμα, όταν ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να συγκρίνουν τους αριθμούς “0.4828, 13/38, 8/15, 17/16, 7/29”, περισσότεροι από τους μισούς δεν μπόρεσαν να βρουν σημεία αναφοράς προκειμένου να πραγματοποιήσουν εκτιμήσεις. Αντίθετα, χρησιμοποίησαν μέθοδο βασισμένη σε κανόνες, μετατρέποντας όλους του αριθμούς σε δεκαδικούς αριθμούς.

Σύμφωνα με την Tsao (2004), οι υψηλές επιδόσεις των ενηλίκων στους γραπτούς υπολογισμούς δεν συμπίπτουν απαραίτητα με καλή αίσθηση του αριθμού, καθώς αυτές οι επιδόσεις μπορεί να προέρχονται από απομνημόνευση διαδικαστικών βημάτων και όχι από στρατηγικές που συνδέονται με αίσθηση του αριθμού. Η ερευνήτρια μελέτησε τη σχέση της αίσθησης του αριθμού με τους νοερούς υπολογισμούς και τους γραπτούς υπολογισμούς σε 155 μελλοντικούς εκπαιδευτικούς και επισήμανε ότι το ποσοστό των σωστών απαντήσεων στον ακριβή υπολογισμό ήταν υψηλότερο από αυτό στα έργα που αφορούσαν την αίσθηση του αριθμού (αναγνώριση σχετικού μεγέθους, σύνθεσης/ανασύνθεσης αριθμών, αξιοποίηση σημείων αναφοράς, αναγνώριση της επίδρασης των πράξεων στους αριθμούς, στρατηγικές νοερών υπολογισμών και εκτιμήσεων). Τα δεδομένα συμφωνούν και με τα ευρήματα των Reys και Yang (1998), οι οποίοι τόνισαν ότι η αίσθηση του αριθμού δεν αναπτύσσεται απαραίτητα με την ικανότητα στον γραπτό υπολογισμό με χρήση αλγόριθμου. Ωστόσο, τα αποτελέσματα μεταγενέστερης έρευνας της Tsao (2013) για τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς φάνηκαν πιο ενθαρρυντικά, καθώς βρήκε ότι 84 μελλοντικοί εκπαιδευτικοί στην Αμερική παρουσίασαν πιο αυξημένο ποσοστό επιτυχίας στις στρατηγικές εκτίμησης (65,8%) σε σχέση με τα ποσοστά προγενέστερων ερευνών.

Αισιόδοξα αποτελέσματα για την αξιοποίηση στρατηγικών αίσθησης του αριθμού από ενήλικες και εκπαιδευτικούς εντοπίζονται και σε άλλες μελέτες. Οι Δεσλή και Ανεστάκης (2014), για παράδειγμα, διερεύνησαν τις επιδόσεις και τις στρατηγικές 113 υποψηφίων εκπαιδευτικών στην Ελλάδα κατά την επίλυση προβλημάτων υπολογιστικής εκτίμησης και βρήκαν ότι οι συμμετέχοντες παρουσίασαν υψηλές επιδόσεις σε προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης μιας και χρησιμοποίησαν ευέλικτες στρατηγικές στηριζόμενοι σε συνδυασμούς στοιχείων, τα οποία παραπέμπουν σε καλή αίσθηση του αριθμού. Οι ερευνητές επισήμαναν την τάση των μελλοντικών εκπαιδευτικών για αποδέσμευση από την αποκλειστική χρήση κανόνων, με εξαίρεση τα προβλήματα σημείων αναφοράς, Έτσι, παρόλο που οι επιδόσεις των εκπαιδευτικών δεν ήταν ίδιες σε όλες τις κατηγορίες προβλημάτων, εμφάνισαν εξαιρετικά καλές επιδόσεις στα προβλήματα λογικής κρίσης, επιβεβαιώνοντας, πέρα από την καλή αίσθηση του αριθμού, και την αναγκαιότητα της σύνδεσης των εκτιμήσεων με καταστάσεις της καθημερινής ζωής

(Δεσλή & Ανεστάκης, 2014).

Άλλη μια πρόσφατη έρευνα για τις επιδόσεις στην αίσθηση του αριθμού πραγματοποιήθηκε σε μελλοντικούς εκπαιδευτικούς που φοιτούσαν στο δεύτερο και τρίτο έτος των πανεπιστημιακών τους σπουδών στην Τουρκία από τους Aktas και özdemir (2017). Στην έρευνα σημειώθηκαν ικανοποιητικά ποσοστά αναφορικά με την ικανότητα για αίσθηση του αριθμού, παρόλο που αυξημένη ήταν η χρήση κανόνων και αλγόριθμων από τους συμμετέχοντες. Πιο συγκεκριμένα, οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί εμφάνισαν καλές επιδόσεις και χρησιμοποίησαν στρατηγικές της αίσθησης του αριθμού στις δοκιμασίες, που σχετίζονται με τη γνώση και την ευελιξία με τους αριθμούς και τις πράξεις (59,3% για τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς δεύτερου έτους και 53,09% για τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς τρίτου έτους). Ωστόσο, οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί του δεύτερου έτους σημείωσαν χαμηλότερες επιδόσεις στις δοκιμασίες που αφορούν τη χρήση του σημείου αναφοράς (42,98%), σε αντίθεση με τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς τρίτου έτους που εμφάνισαν αυξημένο ποσοστό επιτυχίας (67,47%) σε αυτές τις δοκιμασίες, πιθανότατα εξαιτίας της ενασχόλησής τους με το θέμα σε μάθημα του προγράμματος σπουδών που παρακολουθούσαν. Ως εκ τούτου, τίθεται το ζήτημα της επιμόρφωσης των μελλοντικών ή εν ενεργεία εκπαιδευτικών στη γνώση μαθηματικού περιεχομένου μιας και η ενασχόληση με στρατηγικές ενθαρρύνει την επιλογή τους στις μαθηματικές δραστηριότητες και ενισχύει την αίσθηση του αριθμού.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τις επιδόσεις των ενηλίκων έχουν τα ευρήματα των Δεσλή και Παπαχρήστου (2019), οι οποίοι διερεύνησαν τις επιδόσεις και τις στρατηγικές παιδιών και ενηλίκων σε νοερούς υπολογισμούς πρόσθεσης και αφαίρεσης στην Ελλάδα. Βρήκαν ότι οι ενήλικες διέθεταν νοερές στρατηγικές για τους ρητούς αριθμούς σε ικανοποιητικό βαθμό και εμφάνιζαν συχνότερα εναλλακτικές στρατηγικές στους νοερούς υπολογισμούς σε σχέση με τα παιδιά, όπως στρατηγικές μετατροπής και ισοδύναμων εκφράσεων, που δίνουν τη δυνατότητα για ολιστική διαχείριση των αριθμών και συνδέονται με στοιχεία αίσθησης του αριθμού. Αναλυτικότερα, οι ενήλικες παρουσίασαν υψηλά ποσοστά επιτυχίας στη στρατηγική των μετατροπών με το πέρασμα στη δεκάδα και την αλλαγή πράξης τόσο σε δοκιμασίες πρόσθεσης όσο και αφαίρεσης

Σε μια πρόσφατη έρευνα των Zübeyde και Artut (2021) για τις επιδόσεις 15 εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας και 15 εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας στις στρατηγικές αίσθησης του αριθμού στην Τουρκία εξετάστηκαν οι στρατηγικές στα συστατικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού, χρησιμοποιώντας προβλήματα αίσθησης του αριθμού. Τα αποτελέσματα της έρευνας ανέδειξαν διαφορετικές επιδόσεις ανάμεσα στους εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας και τους εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Ειδικότερα, οι εκπαιδευτικοί δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης είχαν καλύτερες επιδόσεις και χρησιμοποίησαν στρατηγικές αίσθησης του αριθμού στα προβλήματα σε ικανοποιητικό ποσοστό (58,9%), ενώ λίγοι από αυτούς έλυσαν τα προβλήματα βασιζόμενοι σε κανόνες. Αντίθετα, οι εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας παρουσίασαν μειωμένη αίσθηση του αριθμού, καθώς προτίμησαν τεχνικές βασισμένες σε κανόνες και αλγόριθμους σε ποσοστό 55,4%. Επιπλέον, οι τρόποι επίλυσης των προβλημάτων με χρήση στρατηγικών που μαρτυρούν την αίσθηση του αριθμού, όπως χρήση σημείων αναφοράς, στρατηγικές εκτίμησης και κατανόηση της επίδρασης των πράξεων στους αριθμούς, κυμάνθηκαν σε χαμηλό ποσοστό (32,8%). Για παράδειγμα, όταν ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να υπολογίσουν το άθροισμα “715,347 + 589,2 + 4,553”, ένας εκπαιδευτικός πρωτοβάθμιας τοποθέτησε τους αριθμούς τον έναν κάτω από τον άλλον για να εκτελέσει τον αλγόριθμο της πρόσθεσης, ενώ ένας εκπαιδευτικός δευτεροβάθμιας στρογγυλοποίησε τα ακέραια μέρη προς τα πάνω ή προς τα κάτω και έπειτα υπολόγισε νοερά το άθροισμα “715 + 590 + 4=1309”. Ομοίως, ένας άλλος εκπαιδευτικός δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στρογγυλοποίησε τους αριθμούς σε “700, 600 και 5” και έπειτα αθροίζοντας νοερά βρήκε “περίπου 1300”. Οι Zübeyde και Artut (2021) συμπεραίνουν την αναγκαιότητα για καλλιέργεια της αίσθησης του αριθμού στου εκπαιδευτικούς, ώστε να είναι σε θέση να την υποστηρίξουν στη διδασκαλία τους.

B. Ο ρόλος του πλαισίου στην αίσθηση του αριθμού

Πολλοί ερευνητές έχουν μελετήσει την επίδραση του πλαισίου που συνοδεύει τις μαθηματικές δραστηριότητες στην επίδοση των ατόμων σχετικά με την ικανότητά τους για αίσθηση του αριθμού, χωρίς συχνά να συμφωνούν στα αποτελέσματά τους. Σε κάποιες έρευνες η ύπαρξη πλαισίου δείχνει ενθαρρυντικά αποτελέσματα τόσο ως προς την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού (Irwin, 2001; McIntosh et al., 1992; Markovits & Sowder, 1994) όσο και ως προς την ευελιξία κατά την εύρεση στρατηγικών ή και τις επιδόσεις σε έργα αίσθησης του αριθμού (Δεσλή & Λιόλιου, 2017; Yang, 2003; McIntosh, Reys & Reys, 1997, Reys & Yang, 1998). Επίσης, υπάρχουν ευρήματα που υποστηρίζουν ότι η ύπαρξη λεκτικού πλαισίου στα μαθηματικά προβλήματα μπορεί να ευνοήσει τα άτομα να ξεπεράσουν δυσκολίες με συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες. Για παράδειγμα, στην έρευνα των Deslis και Desli (2022) οι συμμετέχοντες είχαν καλύτερες επιδόσεις στους φυσικούς αριθμούς παρά στους δεκαδικούς αριθμούς σε προβλήματα χωρίς πλαίσιο, ενώ οι επιδόσεις σε δεκαδικούς αριθμούς φάνηκαν να ευνοούνται στα πλαισιωμένα προβλήματα, γεγονός που υποδηλώνει ότι το πλαίσιο βοήθησε στην ερμηνεία των δεκαδικών αριθμών μέσα από καταστάσεις καθημερινότητας.

Αντίθετα, σε κάποιες άλλες έρευνες βρέθηκε αρνητική επίδραση του πλαισίου, καθώς οι μαθητές, έχοντας την τάση να χρησιμοποιούν διαδικαστικές στρατηγικές είτε παρουσιάζουν πιο χαμηλές επιδόσεις στα πλαισιωμένα προβλήματα αίσθησης του αριθμού είτε εμφανίζουν καλύτερες επιδόσεις σε μη πλαισιωμένα προβλήματα (Δεσλή & Μυρόβαλη, 2017; Yang & Wu, 2012, Can & Ozdemir, 2020). Ωστόσο, υπάρχουν και αποτελέσματα μελετών σύμφωνα με τις οποίες οι μαθητές δεν επηρεάζονται σημαντικά από την παρουσία του πλαισίου (π.χ. Δεσλή & Παπαχρήστος, 2019).

Πέρα από την επίδραση της ύπαρξης ή μη ενός πλαισίου στις μαθηματικές δραστηριότητες δεν πρέπει να παραλειφθεί και ο παράγοντας του είδους του πλαισίου, καθώς οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με τη διαχείριση ενός ενδιάμεσου παράγοντα που είναι η διαχείριση του κειμένου. Κατά τους Phonapichat, Wongwanich και Sujiva (2014) οι μαθητές συχνά δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις λέξεις κλειδιά που εμφανίζονται στα προβλήματα αλλά και να διακρίνουν τις απαραίτητες πληροφορίες, ειδικότερα όταν το πλαίσιο είναι μακροσκελές, με αποτέλεσμα να μην μπορούν να ερμηνεύσουν τις λεκτικές πληροφορίες σε μαθηματική ορολογία. Οι ίδιοι τονίζουν ότι αυτή η δυσκολία των μαθητών στη διαχείριση των λεκτικών πληροφοριών οδηγεί τους μαθητές να μαντεύουν μια απάντηση. Παρόμοια διαπίστωση σχετικά με τους γλωσσικούς περιορισμούς που ενδεχομένως αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την ερμηνεία των λεκτικών πληροφοριών έκαναν και οι Can και Ozdemir (2020) σε δική τους έρευνα που μελετούσε την επίδραση του πλαισίου που συνοδεύει έργα που εξετάζουν την ικανότητα για αίσθηση του αριθμού. Οι ίδιοι ερευνητές επισήμαναν ότι η δυσκολία στην ερμηνεία των πληροφοριών μπορεί να δημιουργεί εμπόδιο στις επιδόσεις των παιδιών. Με άλλα λόγια, τέτοιου είδους δυσκολίες από τους μαθητές μπορεί να δημιουργήσουν λανθασμένη εικόνα σχετικά με την ικανότητά τους για αίσθηση του αριθμού.

Β.1 Νοεροί υπολογισμοί και ο ρόλος του πλαισίου

Υπάρχουν έρευνες που υποστηρίζουν ότι η ύπαρξη ενός πλαισίου σε έργα που απαιτούν νοερούς υπολογισμούς δεν επηρεάζει τις επιδόσεις των παιδιών. Για παράδειγμα, οι Δεσλή και Παπαχρήστος (2019) διερεύνησαν τις επιδόσεις και τις στρατηγικές 41 παιδιών ηλικίας 12 ετών και 41 ενηλίκων σε νοερούς υπολογισμούς σε προσθέσεις και αφαιρέσεις και βρήκαν ότι η παρουσία του πλαισίου δεν επηρέασε την επιτυχία των συμμετεχόντων. Πιο συγκεκριμένα, η παρουσία του πλαισίου δεν φάνηκε να θέτει εμπόδια στην εκτέλεση νοερών υπολογισμών, αλλά ούτε και να συμβάλλει στην καλύτερη ερμηνεία των υπολογιστικών πράξεων. Παρόλα αυτά, οι ερευνητές τονίζουν στα ευρήματά τους ότι τα παιδιά έδειξαν να επηρεάζονται κάπως περισσότερο από την παρουσία του πλαισίου, καθώς οι στρατηγικές που χρησιμοποιούσαν αναφορικά με τις νοερές αναπαραστάσεις και ισοδύναμες εκφράσεις έφεραν ως αποτέλεσμα επιτυχείς νοερούς υπολογισμούς στα προβλήματα με πλαίσιο. Αντίθετα, δε βρέθηκε κάποια στρατηγική των ενηλίκων που να ευνοείται περισσότερο στις δοκιμασίες με πλαίσιο. Επίσης, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι συχνά κατά την εκτέλεση νοερών πράξεων με ρητούς αριθμούς εντοπίστηκαν περιπτώσεις μαθητών, οι οποίοι έκαναν αναφορές σε οικείες καταστάσεις για να δώσουν νόημα στις νοερές πράξεις. Για παράδειγμα, στη δοκιμασία ¨1-1/4” ένας μαθητής είπε: “έχω μία σοκολάτα σε τέσσερα ίσα μέρη, αν μου πάρεις το ένα κομμάτι θα μείνουν τρία κομμάτια σοκολάτας από τα τέσσερα που είχα στην αρχή, άρα 3/4”.

Με σκοπό να εξετάσουν την επίδραση του πλαισίου στις επιδόσεις και τις στρατηγικές σε έργα αίσθησης του αριθμού, οι Can και Ozdemir (2020) πραγματοποίησαν έρευνα στην οποία συμμετείχαν 383 μαθητές στην Τουρκία. Οι συγκεκριμένοι ερευνητές βρήκαν ότι η ύπαρξη πλαισίου στις δοκιμασίες δεν επηρέασε τις στρατηγικές των μαθητών. Αν και οι επιδόσεις των μαθητών ήταν ικανοποιητικές, στα μη πλαισιωμένα προβλήματα αυτές ήταν ελαφρώς καλύτερες σε σχέση με τα πλαισιωμένα προβλήματα. Αυτό δείχνει ότι τα προβλήματα που συνοδεύονται από σενάριο δυσκολεύουν περισσότερο τους μαθητές, δεδομένου ότι χρειάζεται να ερμηνεύσουν τις λεκτικές πληροφορίες και να βρουν ένα σχέδιο επίλυσης. Ωστόσο, παρά τις ικανοποιητικές επιδόσεις στα έργα, η ύπαρξη πλαισίου στις δοκιμασίες φαίνεται ότι δεν επηρέασε ούτε τις στρατηγικές των μαθητών, καθώς η πλειοψηφία αυτών δεν χρησιμοποιούσε στρατηγικές νοερών υπολογισμών, αλλά αλγόριθμους τόσο στα πλαισιωμένα όσο και στα μη πλαισιωμένα έργα. Με άλλα λόγια, ο τρόπος επίλυσης των δοκιμασιών ήταν βασισμένος σε κανόνες, ανεξαρτήτως πλαισίου, και όχι σε στρατηγικές νοερών υπολογισμών, γεγονός που συνδέεται με μειωμένη αίσθηση του αριθμού. Για παράδειγμα, όταν ζητήθηκε η επίλυση του προβλήματος πρόσθεσης “39+23+52+48+61+77”, το οποίο αφορούσε τη στρατηγική της αναγνώρισης ζευγαριών με άθροισμα “100”, σημειώθηκε η τάση των μαθητών να εστιάζουν μόνο σε ένα σημείο του προβλήματος και να αναζητούν μια ακριβή απάντηση μέσω εκτέλεσης πράξεων αλγοριθμικά. Δηλαδή, οι μαθητές δεν επιχειρούσαν τον εντοπισμό και την αξιολόγηση σχέσεων μεταξύ των αριθμών του προβλήματος είτε αυτό συνοδευόταν από πλαίσιο είτε όχι. Οι ερευνητές επισημαίνουν ότι στις δοκιμασίες που συνοδεύονταν από πλαίσιο ήταν περιορισμένη η ευελιξία εκείνων των μαθητών που προτιμούσαν αλγόριθμους στις στρατηγικές υπολογισμών, ακόμα και μετά από παρότρυνση για την εύρεση εναλλακτικής λύσης. Αναλυτικότερα, όταν ζητήθηκε μια δεύτερη εναλλακτική λύση από τους μαθητές που αρχικά χρησιμοποίησαν τρόπους επίλυσης βασισμένους σε κανόνες, οι μισοί από αυτούς δεν ήταν σε θέση να βρουν μια μη αλγοριθμική διαδικασία, ενώ οι μαθητές που συνήθως χρησιμοποιούσαν στρατηγικές νοερών υπολογισμών ήταν πιο πιθανό να βρουν αντίστοιχες εναλλακτικές στρατηγικές.

Η επίδραση του πλαισίου σε έργα αίσθησης του αριθμού που απαιτούσαν νοερούς υπολογισμούς μελετήθηκε από τις Δεσλή και Μυρόβαλη (2017) σε μαθητές Ε΄ και Στ΄ τάξης. Όσον αφορά τις στρατηγικές των μαθητών στις νοερές πράξεις, οι ερευνήτριες τονίζουν ότι και οι δυο ηλικιακές ομάδες εμφάνισαν ικανοποιητικές στρατηγικές νοερών υπολογισμών στις δοκιμασίες χωρίς λεκτικό περιεχόμενο, αλλά παρουσίασαν μειωμένη χρήση τους στα έργα που συνοδεύτηκαν με πλαίσιο. Δηλαδή, στα προβλήματα με πλαίσιο υπήρχε η τάση των μαθητών να εφαρμόζουν πιο συχνά αλγοριθμικές μεθόδους και κανόνες, χωρίς να δίνουν σαφείς εξηγήσεις για τον τρόπο σκέψης τους.

Αντίθετα, οι Δεσλή και Λιόλιου (2017) εντόπισαν τη θετική επίδραση της ύπαρξης οικείου πλαισίου σε νοερές πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης με διψήφιους και τριψήφιους αριθμούς σε μαθητές ηλικίας 9-10 ετών. Με άλλα λόγια, όσοι είδαν τις δοκιμασίες με πλαίσιο παρουσίασαν σημαντικά καλύτερη επίδοση από όσους είδαν τις δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο. Ωστόσο, η παρουσία του πλαισίου φάνηκε να μην επηρεάζει την προτίμησή τους σε νοερούς ή γραπτούς υπολογισμούς. Μια πιθανή αιτία, σύμφωνα με τις ερευνήτριες, μπορεί να είναι η επικέντρωση των μαθητών στο είδος της πράξης ή στην επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής, αγνοώντας το πλαίσιο που συνόδευε τις δοκιμασίες.

Β.2 Εκτιμήσεις και ο ρόλος του πλαισίου

Διφορούμενα είναι τα αποτελέσματα των ερευνών σχετικά με την επίδραση της ύπαρξης πλαισίου στην ενεργοποίηση των στρατηγικών εκτίμησης, καθώς κάποιες έρευνες υποστηρίζουν ότι το περιεχόμενο που συνοδεύει τα προβλήματα βοηθά στην ανάπτυξη στρατηγικών αίσθησης του αριθμού όπως, για παράδειγμα, στρατηγικές εκτίμησης, ενώ κάποιες άλλες ότι αποτελεί εμπόδιο.

Η έρευνα για την επίδραση του πλαισίου στις στρατηγικές εκτίμησης έχει αναδείξει ότι η ύπαρξη ενός σεναρίου στα μαθηματικά έργα μπορεί να ευνοήσει την επιλογή στρατηγικών από τους μαθητές, όπως παρατηρήθηκε στην έρευνα των Markovits και Sowder (1994), στην οποία οι μαθητές επινόησαν ένα πλαίσιο προκειμένου να δώσουν νόημα σε έναν πολλαπλασιασμό. Από την ίδια σκοπιά, οι McIntosh, Reys και Reys (1997) τονίζουν ότι η ύπαρξη λεκτικού περιεχομένου στις δοκιμασίες επηρεάζει τόσο τις επιδόσεις όσο και την επιλογή των στρατηγικών, καθώς οι μαθητές γυμνασίου είναι πιθανότερο να χρησιμοποιήσουν αλγορίθμους σε δραστηριότητες χωρίς πλαίσιο. Αντίθετα, τείνουν να εμπλέκονται συχνότερα στην εύρεση στρατηγικών και μαθηματικών σχέσεων σε προβλήματα πλαισιωμένα με καταστάσεις από την καθημερινή ζωή και ειδικότερα σε προβλήματα που σχετίζονται με χρηματικά ποσά. Για παράδειγμα, όπως οι ίδιοι εξηγούν, ο υπολογισμός της πράξης “1,65 + 0,99”, χωρίς τη συνοδεία πλαισίου, οδηγεί τους μαθητές σε αλγοριθμική επίλυση. Όμως ενσωματώνοντας αυτούς του αριθμούς σε ένα πλαίσιο, ώστε οι αριθμοί να αντιστοιχούν σε τιμές καταναλωτικών προϊόντων, ενεργοποιούνται στρατηγικές εκτίμησης, δηλαδή το πλαίσιο ωθεί τους μαθητές να σκεφτούν ότι ο αριθμός “0,99” είναι κοντά στο “1” και έτσι να καταλήξουν ότι το ζητούμενο άθροισμα θα είναι περίπου “2,65”.

Στη θετική επίδραση του πλαισίου στα προβλήματα κατέληξε και η έρευνα της Irwin (2001) σε 16 μαθητές ηλικίας 11-12 ετών στη Νέα Ζηλανδία. Συγκεκριμένα, η ύπαρξη πλαισίου στα μαθηματικά έργα συνέβαλε στη βελτίωση της εννοιολογικής κατανόησης των παιδιών για τους δεκαδικούς αριθμούς. Όπως επισήμανε, τα προβλήματα που περιέχουν καταστάσεις από την καθημερινή ζωή, πρώτον, δημιουργούν τον χώρο για διεύρυνση των εννοιολογικών γνώσεων στους δεκαδικούς αριθμούς και, κατά συνέπεια, για την καλύτερη εκτίμηση των μεγεθών και, δεύτερον, δίνουν ευκαιρίες για αντιμετώπιση παρανοήσεων μέσα από τη συζήτηση οικείων προβληματικών καταστάσεων οδηγώντας τους μαθητές στον αναστοχασμό των γνώσεών τους. Αντίθετα, η απουσία του πλαισίου από τα μαθηματικά έργα δεν βρέθηκε να ευνοεί την πρόκληση γνωστικών συγκρούσεων, με επακόλουθο τη διατήρηση των παρανοήσεων. Έτσι, οι μαθητές που δούλεψαν σε οικείες καταστάσεις αύξησαν την εννοιολογική τους γνώση για τους δεκαδικούς αριθμούς και χρησιμοποίησαν στρατηγικές αίσθησης του αριθμού, όπως στρατηγικές εκτιμήσεων, προκειμένου να λύσουν τα προβλήματα. Για παράδειγμα, δυο μαθητές στην προσπάθειά τους να εκτιμήσουν την ποσότητα ενός υγρού που θα έμενε “αν αφαιρούσαν 225 ml από ένα μπουκάλι 1,5L”, υπολόγισαν κατά προσέγγιση και κατέληξαν στην απάντηση “1L και κάτι”.

Τη συμβολή του πλαισίου που συνοδεύει τα προβλήματα αίσθησης αριθμού στην ικανότητα των μαθητών για αίσθηση του αριθμού εξηγούν οι Reys και Yang (1998) σε δική τους έρευνα με 234 μαθητές ηλικίας 11 και 13 ετών. Παρατήρησαν ότι, παρόλο που οι μαθητές είχαν καλές επιδόσεις σε υπολογιστικά έργα κάνοντας ακριβείς υπολογισμούς και όχι εκτιμήσεις, η επιλογή των στρατηγικών από τους μαθητές άρχισε να γίνεται πιο συχνή όταν μετά από παρότρυνση των ερευνητών επιχείρησαν την ερμηνεία των λεκτικών πληροφοριών του πλαισίου. Με άλλα λόγια, η προτροπή των ερευνητών για αξιοποίηση και ερμηνεία του πλαισίου οδήγησε στη διεύρυνση και πιο συστηματική αξιοποίηση των στρατηγικών εκτίμησης.

Επιχειρώντας τη διερεύνηση της επίδρασης του πλαισίου των μαθηματικών δραστηριοτήτων στην καλλιέργεια της αίσθησης του αριθμού, ο Yang (2003) σχεδίασε και εφάρμοσε για έξι μήνες δραστηριότητες με σκοπό την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού σε μαθητές 10 ετών και βρήκε ότι τα λεκτικά προβλήματα, σε συνδυασμό με τις εικονικές αναπαραστάσεις, βοηθούν στην ανάπτυξη στρατηγικών αίσθησης του αριθμού. Πιο συγκεκριμένα, το πλαίσιο που σχετίζεται με την καθημερινότητα των μαθητών σε συνδυασμό με τις ενδιάμεσες ερωτήσεις που στοχεύουν στην καλλιέργεια της ευελιξίας και την εμβάθυνση στην εννοιολογική γνώση βοηθούν στην ενίσχυση των στρατηγικών αίσθησης του αριθμού και ειδικότερα στην εύρεση σημείων αναφοράς κατά τις εκτιμήσεις. Για παράδειγμα, κατά τη διάρκεια της συνέντευξης οι μαθητές της πειραματικής ομάδας, που είχαν διδαχθεί στρατηγικές αίσθησης του αριθμού σε προβλήματα με ρεαλιστικό πλαίσιο, χρησιμοποίησαν τη στρατηγική της εύρεσης ενός σημείου αναφοράς για να υπολογίσουν κατά προσέγγιση το άθροισμα “4/5+6/7”. Δηλαδή, βασίστηκαν στο γεγονός ότι οι αριθμοί “4/5” και “6/7” είναι πολύ κοντά στο “1”, οπότε το άθροισμα τους είναι περίπου “2”.

Ωστόσο, εντοπίζονται αποτελέσματα ερευνών σε μαθητές πρωτοβάθμιας, δευτεροβάθμιας και τριτοβάθμιας εκπαίδευσης που δε συμφωνούν με τη θετική επίδραση του πλαισίου στις επιδόσεις και τις στρατηγικές εκτίμησης. Ειδικότερα, η λεκτική περιγραφή και το πλαίσιο που συνοδεύει τα προβλήματα δημιουργούν συχνά εμπόδια στην ανάπτυξη των στρατηγικών εκτίμησης. Είναι πιθανόν το πλαίσιο να καλλιεργεί ένα κλίμα ανασφάλειας στους μαθητές, με αποτέλεσμα την εμφάνιση δυσκολιών κατά τη διαδικασία των εκτιμήσεων και τη στροφή των μαθητών προς τους ακριβείς υπολογισμούς λόγω ασφάλειας (Reys, Reys & Penafiel, 1991). Επιπλέον, αρκετές έρευνες συμφωνούν με το γεγονός ότι αναφορικά με τις στρατηγικές εκτίμησης στα πλαισιωμένα προβλήματα, οι μαθητές αντιμετωπίζουν περισσότερες δυσκολίες κατά την εύρεση των σημείων αναφοράς, προκειμένου να βρουν ή να εκτιμήσουν το σχετικό μέγεθος ενός αριθμού από ό,τι στα αντίστοιχα έργα χωρίς πλαίσιο (Δεσλή & Μυρόβαλη, 2017; Can & Ozdemir, 2020; Yang & Wu, 2012).

Στην έρευνα των Can και Ozdemir (2020), όπως προαναφέρθηκε στην ενότητα Β.1, το πλαίσιο έδειξε να μην επηρεάζει τις επιδόσεις των μαθητών, μιας και οι μαθητές χρησιμοποίησαν κατά πλειοψηφία αλγοριθμικές διαδικασίες. Στις δοκιμασίες που αναμένονταν από τους συμμετέχοντες να χρησιμοποιήσουν στρατηγικές εκτίμησης παρατηρήθηκε η τάση για ακριβή απάντηση μέσω εκτέλεσης αλγόριθμων ανεξαρτήτως πλαισίου. Επιπλέον, συχνά οι μαθητές δεν επεξεργάζονταν σωστά τις πληροφορίες ώστε να βρουν σημεία αναφοράς για να στρογγυλοποιήσουν και να προβούν σε εκτιμήσεις. Για παράδειγμα, οι επιδόσεις των μαθητών ήταν καλύτερες στη δοκιμασία επιλογής κοντινότερου αριθμού στο "50X98" μέσα από τρεις πιθανές λύσεις "500 ή 5.000 ή 50.000" χωρίς τη συνοδεία πλαισίου, ενώ όταν τους παρουσιάστηκε με πλαίσιο "Ένα εργοστάσιο είχε 98 κουτιά που το καθένα είχε 50 κουμπιά. Ποιο από τα παρακάτω είναι πιο κοντά στον αριθμό των κουμπιών που αγόρασε; 50 ή 5.000 ή 50.000;", εντοπίστηκε αδυναμία στη μεταφορά των λεκτικών πληροφοριών σε μαθηματικές σχέσεις, γεγονός που οδήγησε σε δυσκολίες στη διαχείριση των αριθμών και, κατά συνέπεια, σε ελαφρώς χαμηλότερες επιδόσεις. Φαίνεται ότι οι επιδόσεις των μαθητών επηρεάστηκαν με την παρουσία πλαισίου, λόγω γλωσσικών περιορισμών κατά την ερμηνεία των λεκτικών πληροφοριών. Έτσι, οι ερευνητές σε αυτή την έρευνα ανέδειξαν και τη δυσκολία των μαθητών στην ερμηνεία των λεκτικών προβλημάτων, η οποία λειτουργεί ανασταλτικά στον τρόπο που επιλέγουν να λύσουν ένα πρόβλημα.

Με σκοπό να εξηγήσουν την επίδραση του πλαισίου στις στρατηγικές εκτίμησης 198 μαθητών 14 ετών στην Ταϊβάν, οι Yang και Wu (2012) σχεδίασαν δοκιμασίες εκτίμησης με και χωρίς πλαίσιο. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι επιδόσεις των μαθητών ήταν καλύτερες στα αριθμητικά έργα χωρίς πλαίσιο και ο πιο δημοφιλής τρόπος εργασίας των μαθητών ήταν ο ακριβής γραπτός υπολογισμός και όχι οι εκτιμήσεις. Αυτό σημαίνει ότι, όταν προστίθεται μια περιγραφή καταστάσεων στα μαθηματικά έργα, η δυσκολία για εκτιμήσεις αυξάνεται, καθώς οι μαθητές πρέπει να μετατρέψουν τις λεκτικές πληροφορίες σε μαθηματικές πράξεις. Παράλληλα, παρατηρήθηκε η τάση των μαθητών να επιλέγουν αριθμούς με τη σειρά εμφάνισής τους στις εκφωνήσεις και συχνά να παραλείπουν την ερμηνεία του πλαισίου και των αριθμητικών σχέσεων που περιγράφονται σε αυτό ή ακόμα και να παρερμηνεύουν αυτές τις πληροφορίες.

Β.3 Λογικότητα του αποτελέσματος και ο ρόλος του πλαισίου

Ο έλεγχος της λογικότητας ενός αποτελέσματος φανερώνει την κατανόηση της έννοιας των αριθμών σε βάθος, ενθαρρύνει τον αναστοχασμό σε ένα αποτέλεσμα και αποτελεί ένδειξη καλής αίσθησης του αριθμού (McIntosh et al., 1997; Markovits & Sowder, 1994; Sowder, 1992). Η λογική κρίση ενός αποτελέσματος αφορά στην επίδραση των πράξεων πάνω στους αριθμούς

(McIntosh et al., 1997) και συχνά τα ευρήματα ερευνών υποστηρίζουν ότι οι μαθητές δεν είναι σε θέση να κρίνουν κατά πόσο τα αποτελέσματα των πράξεών τους είναι συμβατά με την πραγματικότητα, καθώς επικεντρώνονται στην αριθμητική πράξη χωρίς να έχουν αίσθηση της σημασίας των αριθμών σε αυτές τις πράξεις (Greeno, 1991).

Η ύπαρξη ενός περιεχομένου στα προβλήματα φαίνεται ότι επηρεάζει και την ικανότητα των μαθητών για αξιολόγηση της λογικότητας μιας απάντησης, η οποία συνδέεται με καλή αίσθηση του αριθμού. Στην έρευνα των Δεσλή και Μυρόβαλη (2017), οι μαθητές Ε΄ και Στ΄ τάξης εφάρμοζαν κατά βάση αλγοριθμικούς κανόνες στα πλαισιωμένα προβλήματα και δεν ήταν σε θέση να ελέγξουν τη λογικότητα του αποτελέσματος, καθώς τέτοιες στρατηγικές δεν συμβάδιζαν με τον συνήθη τρόπο εργασίας τους σε αντίστοιχα προβλήματα στο σχολείο. Αντίθετα, στα έργα χωρίς πλαίσιο οι μαθητές επιδίδονταν σε καλύτερες επιδόσεις αναφορικά με τη λογική κρίση του αποτελέσματος.

Ακόμα πιο αποθαρρυντικά ήταν τα αποτελέσματα σχετικά με τη λογική κρίση ενός αποτελέσματος στην έρευνα των Can και Ozdemir (2020), αφού και σε αυτή την έρευνα οι μαθητές είχαν την τάση να χρησιμοποιούν στρατηγικές βασισμένες σε κανόνες. Μάλιστα, στην προσπάθειά τους να καταλήξουν σε αποτελέσματα με ακρίβεια, δεν επιχειρούσαν την εξέταση της λογικότητας του αποτελέσματός τους τόσο στα πλαισιωμένα όσο και στα μη πλαισιωμένα έργα. Για παράδειγμα, δεν έλαβαν υπόψη ότι το γινόμενο 24X9 θα πρέπει να είναι μικρότερο, αλλά πολύ κοντά στο 240, και επιχείρησαν την εκτέλεση του αλγόριθμου (Can & Ozedemir, 2020).

Η λογικότητα ενός μαθηματικού αποτελέσματος που προκύπτει από την επίδραση των πράξεων τόσο σε πλαισιωμένα όσο και σε μη πλαισιωμένα προβλήματα σε μαθητές 10 ετών και σε ενήλικες μελετήθηκε και από τους Deslis και Desli (2023). Στα ευρήματα της έρευνάς τους τονίζεται ότι τα αποτελέσματα που αφορούν τις επιδόσεις των παιδιών στη λογική κρίση ενός αποτελέσματος είναι σε γενικές γραμμές ενθαρρυντικά, όμως σε σύγκριση με τους ενήλικες, οι δεύτεροι είχαν την τάση να επιλέγουν συχνότερα στρατηγικές εκτίμησης και νοερούς υπολογισμούς προκειμένου να δώσουν νόημα στα αποτελέσματα. Ωστόσο, οι κύριες στρατηγικές που χρησιμοποιούσαν όλοι οι συμμετέχοντες ήταν βασισμένες σε κανόνες και αλγόριθμους και όχι σε στρατηγικές που σχετίζονται με αίσθηση του αριθμού. Η ύπαρξη του πλαισίου στα μαθηματικά έργα φάνηκε ευνοϊκότερη στους ενήλικες, διότι έδιναν πιο συχνά λογικές απαντήσεις στα πλαισιωμένα προβλήματα σε σχέση με τα παιδιά. Αντίθετα, οι μαθητές έδιναν σε σημαντικό ποσοστό μη λογικές απαντήσεις τόσο στα πλαισιωμένα όσο και στα μη πλαισιωμένα προβλήματα, γεγονός που μαρτυρά αφενός την προσκόλλησή τους στους αλγόριθμους, ακόμα και σε περιπτώσεις που η χρήση τους ήταν ανεπαρκής, και αφετέρου την εξοικείωσή τους μόνο με δραστηριότητες σχολικού τύπου χωρίς πλαίσιο (Mann, 2006 στο Deslis & Desli, 2023).

Τέλος, οι μαθητές παρουσίασαν δυσκολίες στην αξιολόγηση των αποτελεσμάτων τους εξαιτίας της παρουσίας πλαισίου στην έρευνα που διεξήχθη από τους Yang, Li και Lin (2008) σε 808 μαθητές τρίτης τάξης στην Ταϊβάν. Οι μαθητές εμφάνισαν χαμηλές επιδόσεις στην αξιολόγηση της λογικότητας των απαντήσεών τους στις δοκιμασίες με πλαίσιο. Οι ερευνητές σύνδεσαν αυτές τις χαμηλές επιδόσεις των παιδιών με το γεγονός ότι συχνά δεν εστίαζαν στο περιεχόμενου του πλαισίου με αποτέλεσμα να μην το κατανοούν, αλλά έδιναν βάση κυρίως στους αριθμούς. Ως εκ τούτου, δεν αντιλαμβάνονταν κατά πόσο η λύση τους ανταποκρινόταν στο πλαίσιο των δοκιμασιών.

Κεφάλαιο 2: Μεθοδολογία της έρευνας

Με σκοπό να απαντηθούν τα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα πραγματοποιήθηκε έρευνα η μεθοδολογία της οποία περιγράφεται στο κεφάλαιο αυτό.

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η μελέτη των επιδόσεων παιδιών Δ΄ και Ε΄ τάξης, σε έργα αίσθησης του αριθμού με δεκαδικούς αριθμούς και ο ρόλος των πλαισιωμένων και μη πλαισιωμένων προβλημάτων στην ικανότητα αυτή. Ειδικότερα, η έρευνα επιχειρεί να απαντήσει τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

Α) Ποια είναι η ικανότητα των παιδιών για αίσθηση του αριθμού με δεκαδικούς αριθμούς και κατά πόσο επηρεάζεται από την ηλικία;

Β) Υπάρχουν δομικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού στα οποία η επίδοση είναι καλύτερη;

Γ) Η αίσθηση του αριθμού ευνοείται σε πλαισιωμένα ή μη πλαισιωμένα προβλήματα;

Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά των συμμετεχόντων και του εργαλείου συλλογής δεδομένων. Ακολουθεί η περιγραφή της διαδικασίας συλλογής δεδομένων και ο τρόπος ανάλυσης των δεδομένων.

2.1 Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 60 συμμετέχοντες, προερχόμενοι από δυο ηλικιακές ομάδες: 30 (50%) μαθητές/-τριες Δ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου (ηλικίας από 9 χρονών και 3 μηνών έως 10 χρονών και 2 μηνών) με μέσο όρο ηλικίας τα 9 χρόνια και 10 μήνες και 30 (50%) μαθητές/-τριες Ε΄ τάξης του δημοτικού σχολείου (ηλικίας από 10 χρονών και 4 μηνών έως 11 χρονών και 4 μηνών) με μέσο όρο ηλικίας τα 10 χρόνια και 10 μήνες. Από το σύνολο των συμμετεχόντων, οι 27 ήταν κορίτσια (11 Δ΄ τάξης και 16 Ε΄ τάξης), ενώ οι υπόλοιποι 33 ήταν αγόρια (19 Δ΄ τάξης και 14 Ε΄ τάξης). Ο πίνακας 2.1 παρέχει πληροφορίες σχετικά με τη σύνθεση των δυο ηλικιακών ομάδων.

Όλοι οι συμμετέχοντες της έρευνας φοιτούσαν σε δημόσια δημοτικά σχολεία των Κυθήρων και της Ρόδου και κάλυπταν διαφορετικά κοινωνικοοικονομικά επίπεδα. Επίσης, η σχολική τους επίδοση στα Μαθηματικά χαρακτηριζόταν από ποικιλία. Η επιλογή των συμμετεχόντων έγινε με τη μέθοδο της βολικής δειγματοληψίας. Τέλος, οι συμμετέχοντες δεν είχαν δεχθεί εξειδικευμένη διδασκαλία σχετικά με την αίσθηση του αριθμού, πέρα από όσα προσφέρονται μέσα από τη διδασκαλία των μαθηματικών στο πλαίσιο του σχολείου.

Πίνακας 2.1: Απόλυτη (και σχετική) συχνότητα του αριθμού των συμμετεχόντων ως προς το φύλο και την τάξη

Τάξη	Φύλο		
	Κορίτσια	Αγόρια	Σύνολο
Δ΄	11	19	30 (50%)
Ε΄	16	14	30 (50%)
Σύνολο	27	33	60 (100%)

2.2 Σχεδιασμός-Εργαλείο έρευνας

Για τους σκοπούς της έρευνας πραγματοποιήθηκε ποσοτική έρευνα και εφαρμόστηκε συγχρονικό ερευνητικό σχέδιο, καθώς οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να απαντήσουν σε δοκιμασίες έργων σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Σχεδιάστηκαν και χρησιμοποιήθηκαν τέσσερα έργα στη βάση των συστατικών στοιχείων της αίσθησης του αριθμού, όπως αυτά έχουν προταθεί στη σχετική βιβλιογραφία (McIntosh et al., 1992; Reys & Yang, 1998; Yang, 2005). Τα έργα παρουσιάστηκαν σε όλους τους συμμετέχοντες.. Σε κάθε έργο υπήρχαν τέσσερις δοκιμασίες και οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να απαντήσουν σε συνολικά 16 δοκιμασίες.

Πιο αναλυτικά, το **Έργο 1** αφορούσε στο **σχετικό μέγεθος των αριθμών** και εξέταζε την ικανότητα αναγνώρισης της θεσιακής αξίας των ψηφίων στους δεκαδικούς αριθμούς κατά τη σύγκριση αριθμών (π.χ., "Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να πεις ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι μικρότερος; α) 2,76 ή β) 2,749), καθώς και κατά την αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη των δεκαδικών αριθμών (π.χ., "Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βάλεις τους παρακάτω αριθμούς σε σειρά από τον μεγαλύτερο στον μικρότερο; 14,02, 14,025, 4,025, 4,25, 14,2").

Το **Έργο 2** αφορούσε στις **πολλαπλές αναπαραστάσεις αριθμών και αριθμητικών πράξεων** και διερευνούσε την ικανότητα για αναγνώριση των διαφορετικών τρόπων αναπαράστασης των δεκαδικών αριθμών και των αριθμητικών πράξεων με αυτούς (π.χ., "Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να πεις αν η παρακάτω ισότητα ισχύει; 2,42 + 3,7 = 2,32 + 0,10 + 3,7"), και την ικανότητα της δημιουργίας ισοδύναμων εκφράσεων (π.χ., "Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να κάνεις την παρακάτω ισότητα να ισχύει; 12,3 + 10 = 25,5 - ___.").

Ο **έλεγχος της λογικότητας των εκτιμήσεων** διερευνήθηκε στο **Έργο 3**, το οποίο επιχείρησε να εξετάσει την ικανότητα για πραγματοποίηση κατ' εκτίμηση υπολογισμών (π.χ., "Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, υπολόγισε πόσο περίπου κάνει 20 X 1,99: α) 4 ή β) 40 ή γ) 400") και για λογική κρίση του αριθμητικού αποτελέσματος σε έναν υπολογισμό (π.χ., "Χωρίς να κάνεις υπολογισμό με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βρεις ποια από τις παρακάτω απαντήσεις είναι το πιο πιθανό πηλίκο; 28 : 4, _ _ α) 5,5, β) 6,5, γ) 7,5").

Τέλος, το **Έργο 4** μελετούσε την ικανότητα για **αναγνώριση της σχετικής επίδρασης των πράξεων στους αριθμούς** (π.χ., "Χωρίς να υπολογίσεις με χαρτί και μολύβι, μπορείς να εκτιμήσεις αν το αποτέλεσμα της διαίρεσης 3,5 : 0,4 είναι: α) μεγαλύτερο από 3 ή β) μικρότερο από 3"). Οι δοκιμασίες στο έργο αυτό κάλυπταν και τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις.

Προκειμένου να εξεταστεί η επίδραση του πλαισίου στις επιδόσεις σε έργα αίσθησης αριθμού, οι συμμετέχοντες σε κάθε ηλικιακή ομάδα τυχαία κατανεμήθηκαν σε δύο ομάδες. Συγκεκριμένα στους μισούς τα έργα παρουσιάστηκαν με πλαίσιο από την καθημερινή ζωή (Ομάδα Α) και στους υπόλοιπους μισούς χωρίς πλαίσιο (Ομάδα Β). Για παράδειγμα προκειμένου να εξεταστεί η επίδοση στο σχετικό μέγεθος των αριθμών (Έργο1) στα μισά παιδιά της Ομάδας Α οι δοκιμασίες συνοδεύονταν από πλαίσιο, (π.χ., "Η Κατερίνα κολύμπησε 23,6 μέτρα και ο Γιάννης 23,17 μέτρα. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βρεις ποιος κολύμπησε περισσότερα μέτρα;"). Αντίθετα, στους συμμετέχοντες της Ομάδας Β οι ίδιες δοκιμασίες παρουσιάστηκαν χωρίς πλαίσιο (π.χ., "Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να πεις ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι μεγαλύτερος; α. 23,6 ή β. 23,17).

Όλες οι δοκιμασίες αφορούσαν δεκαδικούς αριθμούς με το ακέραιο μέρος να μην ξεπερνά το 100 και το δεκαδικό μέρος να έχει έως και τρία δεκαδικά ψηφία. Οι αριθμοί ήταν ίδιοι τόσο στις δοκιμασίες με πλαίσιο όσο και στις δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο, ώστε το είδος των αριθμών να μην επηρεάσει τις απαντήσεις των συμμετεχόντων.

Προκείμενου να αποφευχθούν φαινόμενα κόπωσης, ειδικότερα στις δοκιμασίες, που θα παρουσιάζονταν τελευταίες, δημιουργήθηκαν δύο σειρές παρουσίασης των έργων. Έτσι, οι συμμετέχοντες που κατανεμήθηκαν στη μια σειρά παρουσίασης (Σειρά 1) είδαν τα έργα με τη σειρά Έργο 1, Έργο 2, Έργο3 και Έργο 4, ενώ οι συμμετέχοντες της δεύτερης σειρά παρουσίασης (Σειρά 2) πρώτα το Έργο 3 και το Έργο 4 και μετά το Έργο 1 και το Έργο 2.

Στους πίνακες που ακολουθούν παρουσιάζονται τα τέσσερα έργα με τις δοκιμασίες που είτε συνοδεύονταν με πλαίσιο από την καθημερινή ζωή είτε παρουσιάζονται χωρίς πλαίσιο. Στο Παράρτημα της εργασίας παρατίθενται τα έργα, όπως παρουσιάστηκαν στους συμμετέχοντες με τη μορφή ερωτηματολογίου.

Πίνακας 2.2: Δοκιμασίες με πλαίσιο και χωρίς πλαίσιο στο Έργο 1

Με πλαίσιο	**Χωρίς πλαίσιο**
ΕΡΓΟ 1 : Σχετικό μέγεθος των αριθμών	
Ο Γιώργος περπάτησε 2,76 χιλιόμετρα και η Μαρίνα 2,749 χιλιόμετρα. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βρεις ποιος περπάτησε λιγότερα χιλιόμετρα;	Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να πεις ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι μικρότερος; α) 2,76 β) 2,749
Η Κατερίνα κολύμπησε 23,6 μέτρα και ο Γιάννης 23,17 μέτρα. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βρεις ποιος κολύμπησε περισσότερα μέτρα;	Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να πεις ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι μεγαλύτερος; α) 23,6 β) 23,17
Παρακάτω φαίνονται οι βαθμολογίες που συγκέντρωσαν κάποιες χώρες στους Ολυμπιακούς Αγώνες για το άθλημα της ενόργανης. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, βάλε σε σειρά τις χώρες ξεκινώντας από αυτή που συγκέντρωσε υψηλότερη βαθμολογία.	Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βάλεις τους παρακάτω αριθμούς σε σειρά από τον μεγαλύτερο στον μικρότερο; 14,02 14,025 4,025 4,25 14,2

Ιταλία: 14,02, Ελλάδα: 14,025, Ισπανία:4,025, Γερμανία: 4,25, Ολλανδία: 14,2	
Παρακάτω φαίνονται οι πόντοι που συγκέντρωσαν κάποιοι μαθητές στο άθλημα της τοξοβολίας. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, βάλε σε σειρά τους αθλητές ξεκινώντας από αυτόν που συγκέντρωσε χαμηλότερη βαθμολογία. Παναγιώτης: 63,09, Μαρία: 63,9, Κατερίνα: 60,39, Δέσποινα: 63,092, Δημήτρης: 60,309	Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βάλεις τους αριθμούς σε σειρά από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο; 63,09 63,9 60,39 63,092 60,309

Πίνακας 2.3: Δοκιμασίες με πλαίσιο και χωρίς πλαίσιο στο Έργο 2

Με πλαίσιο	**Χωρίς πλαίσιο**
ΕΡΓΟ 2: Πολλαπλή αναπαράσταση αριθμών και πράξεων	
Η Κατερίνα έβαλε στο πλυντήριο 0,18L απορρυπαντικό. Όμως οι οδηγίες έλεγαν ότι έπρεπε να βάλει 0,25L και τότε πρόσθεσε 0,17L απορρυπαντικό. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να πεις αν τελικά η Κατερίνα έβαλε σωστά την ποσότητα του απορρυπαντικού στο πλυντήριο;	Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να πεις αν η παρακάτω ισότητα ισχύει; 0,18 + 0,17 = 0,25
Ας υποθέσουμε ότι κάνεις πράξεις με ένα κουμπιουτεράκι του οποίου έχει χαλάσει το πλήκτρο 4. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, πώς θα κάνεις την πράξη 2,42 + 3,7 με το κουμπιουτεράκι αυτό;	Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να πεις αν η παρακάτω ισότητα ισχύει; 2,42 + 3,7 = 2,32 + 0,10 + 3,7
Δυο ορειβάτες ξεκίνησαν την ορειβασία τους, έχοντας στόχο να ανέβουν τα ίδια μέτρα. Ο ένας ορειβάτης ανέβηκε 20,5 μέτρα, έκανε μια στάση και ανέβηκε ακόμη 5,1 μέτρα για να ολοκληρώσει τον στόχο. Ο άλλος ορειβάτης έχει ανέβει 18 μέτρα και αυτή τη στιγμή κάνει στάση. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βρεις πόσα μέτρα πρέπει να ανέβει ο δεύτερος ορειβάτης για να ανέβει όσα μέτρα έχει ανέβει ο πρώτος ορειβάτης;	Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να κάνεις την παρακάτω ισότητα να ισχύει; 20,5 + 5,1 = 18 + ___
Ένας φούρναρης φτιάχνει κάθε εβδομάδα	Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με

κουλουράκια χρησιμοποιώντας συγκεκριμένη ποσότητα αλεύρι. Συνήθως βάζει το αλεύρι σε δύο δόσεις, δηλαδή πρώτα βάζει 12,3 κιλά και μετά 10 κιλά. Σήμερα όμως έκανε λάθος και έβαλε 25,5 κιλά αλεύρι. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βρεις πόσο αλεύρι πρέπει τώρα ο φούρναρης να βγάλει για να κάνει τα κουλουράκια;	χαρτί και μολύβι, μπορείς να κάνεις την παρακάτω ισότητα να ισχύει; 12,3 + 10 = 25,5 - ___

Πίνακας 2.4: Δοκιμασίες με πλαίσιο και χωρίς πλαίσιο στο Έργο 3

Με πλαίσιο	**Χωρίς πλαίσιο**
ΕΡΓΟ 3: Λογικότητα των εκτιμήσεων	
Ένα εργοστάσιο φτιάχνει σοκολάτες και τις συσκευάζει σε κουτιά των 20 τεμαχίων. Αν κάθε σοκολάτα κοστίζει 1,99 ευρώ, χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βρεις πόσα ευρώ περίπου κοστίζει ένα κουτί με σοκολάτες; α) 4 β) 40 γ) 400	Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, υπολόγισε πόσο περίπου κάνει 20 Χ 1,99 α) 4 β) 40 γ) 400
Ο Μάριος αγόρασε πράγματα για την παραλία από ένα σούπερ μάρκετ. Πήρε μια ομπρέλα που κόστιζε 18,2 ευρώ, ένα στρώμα θαλάσσης που κόστιζε 7,9 ευρώ, μια καρέκλα παραλίας που κόστιζε 24,60 ευρώ και ένα αντηλιακό που κόστιζε 10,40 ευρώ. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορεί να πεις πόσα ευρώ περίπου πλήρωσε για όλα αυτά τα πράγματα;	Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, υπολόγισε πόσο περίπου κάνει 18,2 + 7,9 + 24,60 + 10,40
Ένας μαθητής ξέχασε να βάλει υποδιαστολή στο παρακάτω αποτέλεσμα. Χωρίς να κάνεις υπολογισμό με χαρτί και μολύβι, μπορείς να τοποθετήσεις σωστά την υποδιαστολή; 3,90 Χ 7,9 = 30810	Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να τοποθετήσεις σωστά την υποδιαστολή ώστε να ισχύει η ισότητα; 3,90 Χ 7,9 = 30810
Δυστυχώς χύθηκε μελάνι στο χαρτί και δε φαίνεται καθαρά το δεκαδικό μέρος στην παρακάτω διαίρεση 28 : 4, _ _ Χωρίς να κάνεις υπολογισμό με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βρεις ποια από τις παρακάτω απαντήσεις είναι το πιο πιθανό πηλίκο; α) 5,5 β) 6,5 γ) 7,5	Χωρίς να κάνεις υπολογισμό με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βρεις ποια από τις παρακάτω απαντήσεις είναι το πιο πιθανό πηλίκο; 28 : 4, _ _ α) 5,5 β) 6,5 γ) 7,5

Πίνακας 2.5: Δοκιμασίες με πλαίσιο και χωρίς πλαίσιο στο Έργο 4

Με πλαίσιο	**Χωρίς πλαίσιο**
ΕΡΓΟ 4: Σχετική επίδραση των πράξεων στους αριθμούς	
Η Κορίνα έχει 20 ευρώ και θέλει να αγοράσει ένα παντελόνι που κοστίζει 12,5 ευρώ και μια μπλούζα που κοστίζει 6,7 ευρώ. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να πεις αν φτάνουν τα 20 ευρώ για να τα αγοράσει;	Χωρίς να υπολογίσεις με χαρτί και μολύβι, μπορείς να εκτιμήσεις αν το αποτέλεσμα της πρόσθεσης 12,5 + 6,7 είναι: α) μεγαλύτερο από 20 β) μικρότερο από 20
Η Μαρία έχει 32,7 ευρώ και αγόρασε πράγματα από το βιβλιοπωλείο συνολικής αξίας 27,2 ευρώ. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, πιστεύεις ότι η Μαρία έχει τώρα στο πορτοφόλι της: α) περισσότερα από 10 ευρώ β) λιγότερα από 10 ευρώ	Χωρίς να υπολογίσεις με χαρτί και μολύβι, μπορείς να εκτιμήσεις αν το αποτέλεσμα της αφαίρεσης 32,7 - 27,2 είναι: α) μεγαλύτερο από 10 β) μικρότερο από 10
Ο κύριος Γιάννης έχει 3,5 κιλά καφέ και θέλει να τον μοιράσει σε συσκευασίες των 0,4 κιλών. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να υπολογίσεις πόσες συσκευασίες θα φτιάξει; α) περισσότερες από 3 συσκευασίες β) λιγότερες από 3 συσκευασίες	Χωρίς να υπολογίσεις με χαρτί και μολύβι, μπορείς να εκτιμήσεις αν το αποτέλεσμα της διαίρεσης 3,5 : 0,4 είναι: α) μεγαλύτερο από 3 β) μικρότερο από 3
Ο Χρήστος και ο Νίκος κάνουν μια εκτίμηση για το γινόμενο 6 Χ 2,5. Ο Χρήστος σκέφτεται ότι το γινόμενο αυτό βρίσκεται κοντά στο 5 Χ 3,5. Ο Νίκος πιστεύει ότι το γινόμενο αυτό είναι πιο κοντά στο 7 Χ 1,5. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να πεις ποιο από τα δυο παιδιά είναι πιο κοντά στο πραγματικό αποτέλεσμα;	Χωρίς να υπολογίσεις με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βρεις ποιο από τα παρακάτω γινόμενα είναι πιο κοντά στο 6 Χ 2,5 α) 5 Χ 3,5 β) 7 Χ 1,5

2.3 Διαδικασία

Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε τον Μάρτιο του 2023. Οι μαθητές απάντησαν στις δοκιμασίες των έργων ατομικά στην αίθουσα διδασκαλίας τους, ταυτόχρονα με τους συμμαθητές τους, κατά τη διάρκεια του ωρολογίου προγράμματος. Τα έργα παρουσιάστηκαν στους συμμετέχοντες με τη μορφή ερωτηματολογίου. Τα ερωτηματολόγια χορηγήθηκαν από την ερευνήτρια και στον χώρο επικρατούσαν συνθήκες ησυχίας, ώστε να υπάρχει η δυνατότητα συγκέντρωσης. Η συμμετοχή στην έρευνα ήταν ανώνυμη και εθελοντική και έγινε σαφές στους μαθητές ότι η διαδικασία δεν συνδέεται με την αξιολόγησή τους στα σχολικά μαθήματα ή το μάθημα των Μαθηματικών.

Πριν από τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου, δόθηκαν σε όλους κοινές οδηγίες. Συγκεκριμένα, οι συμμετέχοντες καθοδηγήθηκαν στη συμπλήρωση των στοιχείων που αφορούσαν το φύλο τους, την τάξη φοίτησής τους και την ημερομηνία γέννησής τους. Επιπλέον, ενθαρρύνθηκαν να διαβάσουν προσεκτικά τις ερωτήσεις και είχαν στη διάθεσή τους όσο χρόνο χρειάζονταν χωρίς περιορισμούς για να απαντήσουν στις δοκιμασίες. Η μέση χρονική διάρκεια για όσους συμμετέχοντες είδαν τις δοκιμασίες με πλαίσιο ήταν περίπου 55 λεπτά, ενώ για όσους είδαν τις δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο ήταν περίπου 40 λεπτά.

2.4 Ανάλυση των δεδομένων

Η κωδικοποίηση των απαντήσεων και η επεξεργασία των δεδομένων που προέκυψαν έγινε με τη χρήση του στατιστικού πακέτου SPSS 28. Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με 1 βαθμό, ενώ κάθε λανθασμένη βαθμολογήθηκε με 0 βαθμούς. Όσον αφορά τη δοκιμασία 2 του Έργου 3, που ζητούσε απάντηση κατά προσέγγιση, το εύρος σωστών απαντήσεων που θεωρήθηκαν σωστές ήταν κάθε απάντηση που βρέθηκε με 10% απόκλιση από την ακριβή απάντηση (5% πριν και 5% μετά), δηλαδή κωδικοποιήθηκαν ως σωστές οι απαντήσεις μεταξύ 58-64. Επιπλέον, σε αυτή τη δοκιμασία κωδικοποιήθηκαν ως λάθος οι ακριβείς απαντήσεις, αυτές που προήλθαν από κάθετη πράξη και οι απαντήσεις που περιείχαν δεκαδικούς αριθμούς, καθώς στόχος ήταν η εκτίμηση του ζητούμενου αθροίσματος και όχι μια ακριβής απάντηση. Ο μέγιστος αριθμός σωστών απαντήσεων που μπορούσε να συγκεντρώσει κάθε συμμετέχοντας ήταν 16, δεδομένου ότι υπήρχαν 4 έργα με 4 δοκιμασίες σε κάθε έργο (4Χ4=16).

Κεφάλαιο 3: Αποτελέσματα

Το παρόν κεφάλαιο περιλαμβάνει την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της έρευνας και αποτελείται από τρία μέρη. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζονται στα στατιστικά στοιχεία της γενικής επίδοσης των συμμετεχόντων ανά ηλικιακή ομάδα (Δ΄ τάξη και Ε΄ τάξη), φύλο και σειρά παρουσίασης Έργων (Α΄ και Β΄ ομάδα). Στο δεύτερο μέρος περιγράφονται οι επιδόσεις των μαθητών των δύο τάξεων σε καθένα από τα συστατικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού, τα οποία εκπροσωπούνται από κάθε Έργο. Στη συνέχεια περιγράφονται τα αποτελέσματα από τη σύγκριση των επιδόσεων των συμμετεχόντων στα τέσσερα Έργα. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με το τρίτο μέρος στο οποίο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τον ρόλο του πλαισίου στις επιδόσεις των μαθητών στα Έργα και τον ρόλο του πλαισίου στις επιδόσεις κάθε ηλικιακής ομάδα ανά Έργο.

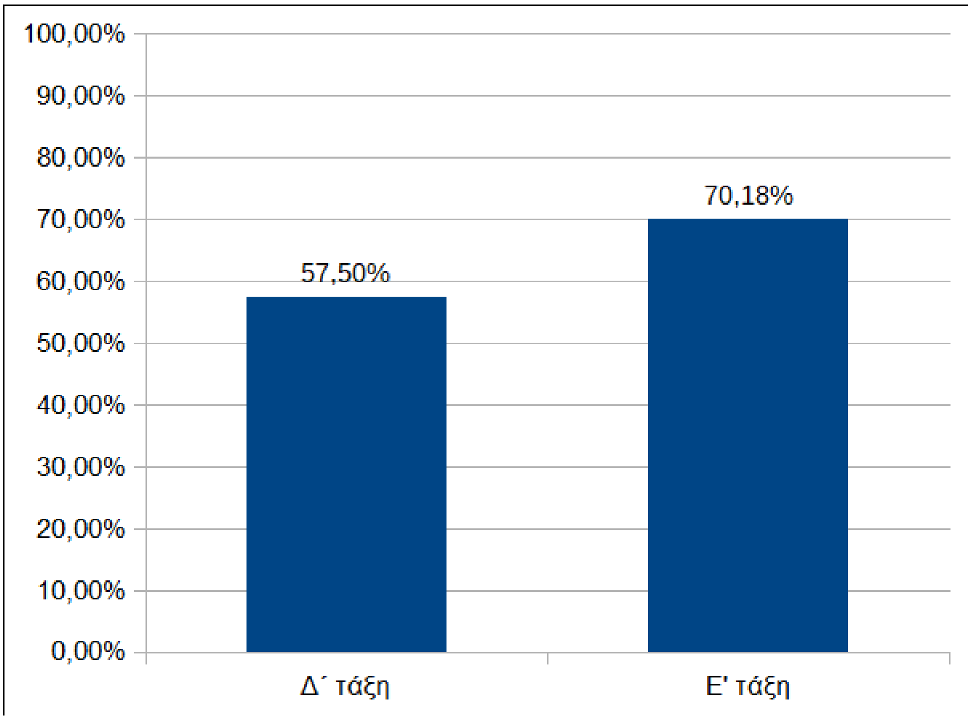
3.1 Γενική επίδοση

3.1.1 Γενική Επίδοση των συμμετεχόντων

Η γενική επίδοση των συμμετεχόντων ήταν σχετικά μέτρια, καθώς από τις συνολικά 16 δοκιμασίες των έργων, οι συμμετέχοντες απαντούσαν σωστά σε περίπου 10 από αυτές (63,87%). Συγκεκριμένα, ο μέσος όρος των σωστών απαντήσεων ήταν 10,22 και η τυπική απόκλιση ήταν 3,168, γεγονός που δείχνει ότι υπήρχε αρκετά μεγάλη ανομοιογένεια στην επίδοση των συμμετεχόντων.

3.1.2 Γενική Επίδοση των συμμετεχόντων ως προς την ηλικιακή ομάδα

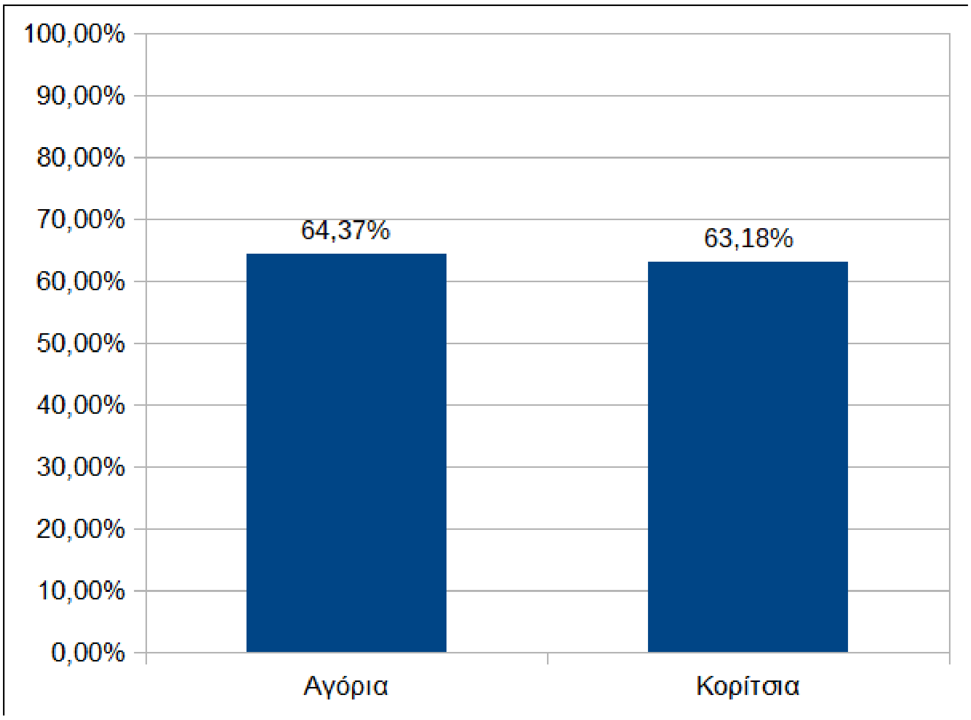
Προκειμένου να εξεταστεί αν η ηλικιακή ομάδα επηρέασε τις επιδόσεις των συμμετεχόντων, πραγματοποιήθηκε t-τεστ για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις επιδόσεις των παιδιών της Δ΄ τάξης και τις επιδόσεις των παιδιών της Ε΄ τάξης στο σύνολο των δοκιμασιών (t (58) = -2,605, p < .01). Συγκεκριμένα, τα παιδιά της Ε΄ τάξης εμφάνισαν στατιστικά σημαντικά καλύτερες επιδόσεις (ποσοστό επιτυχίας: 70,18%) στο σύνολο των δοκιμασιών σε σχέση με τα παιδιά της Δ΄ τάξης (ποσοστό επιτυχίας: 57,5%). Το Σχήμα 1 που ακολουθεί παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



Σχήμα 1: Ποσοστό επιτυχίας στο σύνολο των δοκιμασιών ως προς την ηλικιακή ομάδα

3.1.3 Γενική επίδοση των συμμετεχόντων ως προς το φύλο

Με σκοπό να διερευνηθεί αν διαφέρουν οι επιδόσεις των συμμετεχόντων ως προς το φύλο, πραγματοποιήθηκε t-τεστ για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε ότι δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις των παιδιών στο σύνολο των δοκιμασιών ως προς το φύλο (t (58) = ,232, p = .409). Αυτό σημαίνει ότι είχαν παρόμοιες επιδόσεις τα αγόρια (ποσοστό επιτυχίας: 64,37%) με τα κορίτσια (ποσοστό επιτυχίας: 63,18%) στο σύνολο των δοκιμασιών. Το Σχήμα 2 παρουσιάζει τις επιδόσεις των αγοριών και των κοριτσιών.



Σχήμα 2: Ποσοστό επιτυχίας στο σύνολο των δοκιμασιών ως προς το φύλο

3.1.4 Γενική επίδοση των συμμετεχόντων ως προς τη σειρά παρουσίασης των Έργων

Πραγματοποιήθηκε ανάλυση t-τεστ για ανεξάρτητα δείγματα για να εξεταστεί αν η επίδοση των συμμετεχόντων στο σύνολο των δοκιμασιών επηρεάστηκε από τον τρόπο παρουσίασης των Έργων[2]. Η ανάλυση έδειξε ότι δεν υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στη γενική επίδοση (t (58) = .086, p = .466) ως προς τη σειρά παρουσίασης των Έργων. Με άλλα λόγια, οι συμμετέχοντες, που κλήθηκαν να απαντήσουν στα Έργα με διαφορετική σειρά παρουσίασης για μεθοδολογικούς λόγους, δηλαδή για να αποφευχθούν φαινόμενα κόπωσης και αντιγραφής, φαίνεται ότι είχαν παρόμοιο ποσοστό επιτυχίας είτε έβλεπαν τα Έργα στην Ομάδα Α (ποσοστό επιτυχίας: 64,06%) είτε στην Ομάδα Β (ποσοστό επιτυχίας: 63,62%).

2 Οι συμμετέχοντες και από τις δυο ηλικιακές ομάδες κατανεμήθηκαν τυχαία σε δύο ομάδες. Στην Ομάδα Α απαντούσαν στα Έργα με τη σειρά Έργο 1, Έργο 2, Έργο 3, Έργο 4, ενώ στην Ομάδα Β απαντούσαν στα Έργα με τη σειρά Έργο 3, Έργο 4, Έργο 2, Έργο 1.

3.2 Επίδοση στα Έργα (δομικά συστατικά της αίσθησης του αριθμού)

Σε αυτό το μέρος εξετάζεται η επίδοση των παιδιών σε κάθε έργο ξεχωριστά και έπειτα ακολουθεί η σύγκριση της επίδοσης των παιδιών στο σύνολο των τεσσάρων έργων. Αξίζει να σημειωθεί ότι το κάθε έργο εξέταζε καθένα από τα συστατικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού. Πιο συγκεκριμένα, το Έργο 1 εξέταζε την ικανότητα αναγνώρισης του σχετικού μεγέθους των αριθμών, το Έργο 2 μελετούσε την ικανότητα για πολλαπλή αναπαράσταση αριθμών και πράξεων, το Έργο 3 αφορούσε στον έλεγχο της λογικότητας των εκτιμήσεων και το Έργο 4 εξέταζε την ικανότητα για αναγνώριση της σχετικής επίδρασης των πράξεων στους αριθμούς.

3.2.1 Επίδοση στο Έργο 1 (Σχετικό μέγεθος αριθμών)

Όταν εξετάστηκε η επίδοση των παιδιών στο σύνολο των δοκιμασιών του Έργου 1 ως προς την ηλικιακή ομάδα, δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές (t (58) = -,850, p = .199). Αυτό σημαίνει ότι στο Έργο 1 τόσο οι μαθητές της Δ΄ τάξης (ποσοστό επιτυχίας: 57,5%) όσο και της Ε΄ τάξης (ποσοστό επιτυχίας: 64,25%) είχαν παρόμοια ποσοστά επιτυχίας.

Εξετάζοντας ξεχωριστά τις δοκιμασίες του Έργου, διαπιστώνεται πως ιδιαίτερα μεγάλη επιτυχία σημείωσαν τα παιδιά και των δυο ηλικιακών ομάδων στην πρώτη δοκιμασία. Η δοκιμασία αυτή εξέταζε την ικανότητα για αναγνώριση της θεσιακής αξίας των αριθμών κατά τη σύγκριση δεκαδικών αριθμών και ζητούσε από τους συμμετέχοντες να διαλέξουν τον μικρότερο δεκαδικό αριθμό ανάμεσα στους δεκαδικούς αριθμούς 2,76 και 2,749. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το 73,3% των παιδιών της Δ΄ και το 83,3% των παιδιών της Ε΄ τάξης απάντησαν σωστά στην πρώτη δοκιμασία (βλ. Πίνακα 3.1).

Πίνακας 3.1[3]: Επιδόσεις των συμμετεχόντων ανά ηλικιακή ομάδα στην πρώτη δοκιμασία του Έργου 1

Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι μικρότερος; α) 2,76 β) 2,749	Σ		Λ	
	n	*%*	*n*	*%*
Τάξη Δ΄	22	73,3%	8	26,7,%
Τάξη Ε΄	25	83,3%	5	16,7%

Αντίστοιχα υψηλό ποσοστό επιτυχίας παρουσίασαν οι μαθητές και των τάξεων στη δεύτερη δοκιμασία, η οποία ζητούσε την αναγνώριση του μεγαλύτερου δεκαδικού αριθμού ανάμεσα στους αριθμούς 23,6 και 23,17 (βλ. Πίνακα 3.2). Αναλυτικότερα, 8 στους 10 μαθητές μαθητές της Δ΄ τάξης (ποσοστό επιτυχίας: 80%) απαντούσαν σωστά στη δοκιμασία αυτή, και ομοίως υψηλό ποσοστό επιτυχίας σημειώθηκε και από τους μαθητές της Ε΄ τάξης (90%), από τους οποίους οι 9 στους 10 μαθητές μπορούσαν να αναγνωρίσουν σωστά τον μεγαλύτερο δεκαδικό αριθμό.

Πίνακας 3.2: Επιδόσεις των συμμετεχόντων ανά ηλικιακή ομάδα στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 1

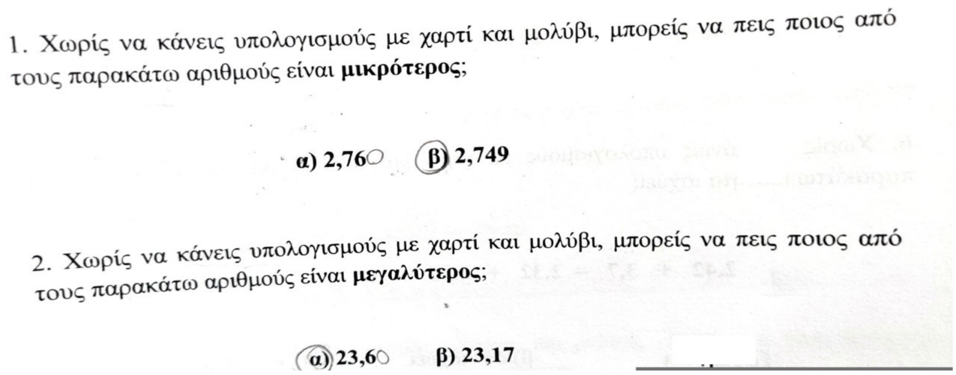
Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι μεγαλύτερος; α) 23,6 β) 23,17	Σ		Λ	
	n	*%*	*n*	*%*
Τάξη Δ΄	24	80%	6	20%
Τάξη Ε΄	27	90%	3	10%

Αξιοσημείωτα παραδείγματα σωστών απαντήσεων στις δύο πρώτες δοκιμασίες δόθηκαν από μια μαθήτρια της Ε΄ τάξης (Αρ. Πρ. 9), όπως φαίνεται

3 Στους Πίνακα.1 έως Πίνακα 16 το Σ αντιστοιχεί στον αριθμό των σωστών απαντήσεων, ενώ το Λ στον αριθμό των λανθασμένων απαντήσεων.

στην Εικόνα 1. Οι απαντήσεις της μαθήτριας φανερώνουν την ικανότητά της για αναγνώριση της θεσιακής αξίας των ψηφίων, μιας και στις δυο δοκιμασίες, προκειμένου να προβεί σε σύγκριση αριθμών επιδίωξε να υπάρχει ο ίδιος αριθμός ψηφίων στο δεκαδικό μέρος των δεκαδικών αριθμών, μετατρέποντας τα δέκατα σε εκατοστά και προσθέτοντας μηδενικά.

Εικόνα 1: Απαντήσεις μαθήτριας Ε΄ τάξης (Αρ. Πρ. 9) στην πρώτη και δεύτερη δοκιμασία του Έργου 1



1. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να πεις ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι **μικρότερος**;

α) 2,760 β) 2,749

2. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να πεις ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι **μεγαλύτερος**;

α) 23,60 β) 23,17

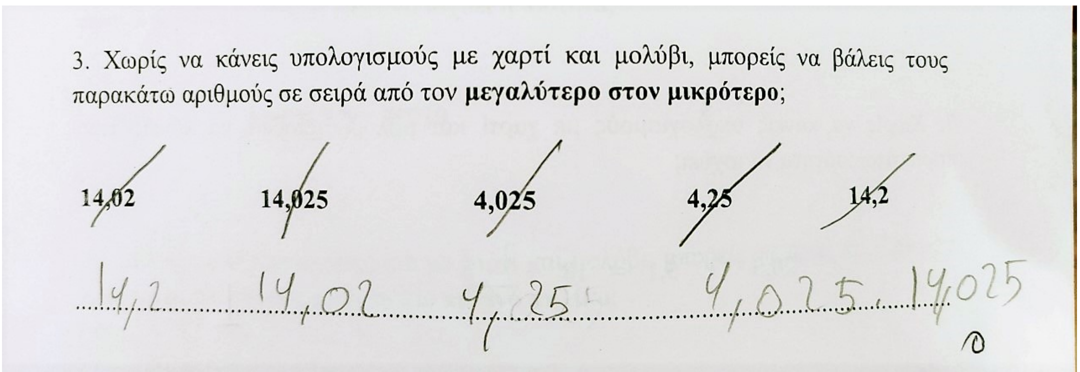
Η τρίτη δοκιμασία του Έργου 1 ζητούσε τη φθίνουσα διάταξη δεκαδικών αριθμών και φαίνεται ότι δυσκόλεψε τους συμμετέχοντες περισσότερο από όλες τις δοκιμασίες του Έργου, καθώς στη μια ηλικιακή ομάδα τα ποσοστά επιτυχίας ήταν τα πιο χαμηλά από τις δοκιμασίες όλου του έργου και στην άλλη οι επιδόσεις ήταν μέτριες. Αναλυτικότερα, οι μαθητές της Δ΄ τάξης παρουσίασαν τη χαμηλότερη επίδοσή τους σε σχέση με τις υπόλοιπες δοκιμασίες με ποσοστό επιτυχίας 33,3%. Επιπλέον, φαίνεται ότι και οι μαθητές της Ε΄ τάξης δυσκολεύτηκαν σε αυτή τη δοκιμασία και, παρόλο που το ποσοστό επιτυχίας τους ήταν υψηλότερο από αυτό των μαθητών της Δ΄ τάξης, οι επιδόσεις τους δεν θεωρούνται υψηλές (βλ Πίνακα 3.3). Με άλλα λόγια, μπορεί οι μαθητές της Ε΄ τάξης να δυσκολεύτηκαν λιγότερο σε αυτή τη δοκιμασία από τους μαθητές της Δ΄ τάξης, ωστόσο παρατηρείται ότι με βάση το ποσοστό επιτυχίας λιγότεροι από τους μισούς μαθητές και στις δυο ηλικιακές ομάδες κατάφεραν να ολοκληρώσουν τη δοκιμασία με επιτυχία.

Πίνακας 3.3: Επιδόσεις των συμμετεχόντων ανά ηλικιακή ομάδα στην τρίτη δοκιμασία του Έργου 1

Βάλε τους αριθμούς σε σειρά από τον μεγαλύτερο στον μικρότερο **14,02 14,025 4,025 4,25 14,2**	**Σ**		**Λ**	
	n	***%***	***n***	***%***
Τάξη Δ΄	10	33,3%	20	66,7%
Τάξη Ε΄	13	43,3%	17	56,7%

Χαρακτηριστική δυσκολία σε αυτή τη δοκιμασία αποτελούσε η αδυναμία των μαθητών να διακρίνουν το δεκαδικό μέρος από το ακέραιο σε έναν αριθμό. Παρατηρήθηκε ότι για να κατατάξουν τους αριθμούς σε φθίνουσα σειρά, συχνά εστίαζαν σε ένα από τα δυο μέρη του αριθμού, είτε το δεκαδικό είτε το ακέραιο μέρος και, επιπλέον, εντοπίστηκε δυσκολία στη διάκριση της θεσιακής αξίας των αριθμών στο δεκαδικό μέρος. Για παράδειγμα, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2, η μαθήτρια της Δ΄ τάξης (Αρ. Πρ. 46) αδυνατεί να διακρίνει το δεκαδικό μέρος από το ακέραιο, αλλά παράλληλα δυσκολεύεται και στην αναγνώριση της αξίας θέσης ψηφίου, αφού φαίνεται πως μάλλον συγκρίνει τους αριθμούς ανά δύο, δηλαδή "14,2 με 14,02", "4,25 με 4,025", χωρίς να αξιολογεί την αξία του αριθμού "14,025". Στο τέλος, αγνοεί το ακέραιο μέρος του αριθμού "14,025" και τον τοποθετεί τελευταίο στην κατάταξη, παρόλο που το ακέραιο μέρος αυτού του αριθμού ήταν μεγαλύτερο από τον προηγούμενο αριθμό της κατάταξης.

Εικόνα 2: Απάντηση μαθήτριας Δ΄ τάξης (Αρ. Πρ. 46) στην τρίτη δοκιμασία του Έργου 1

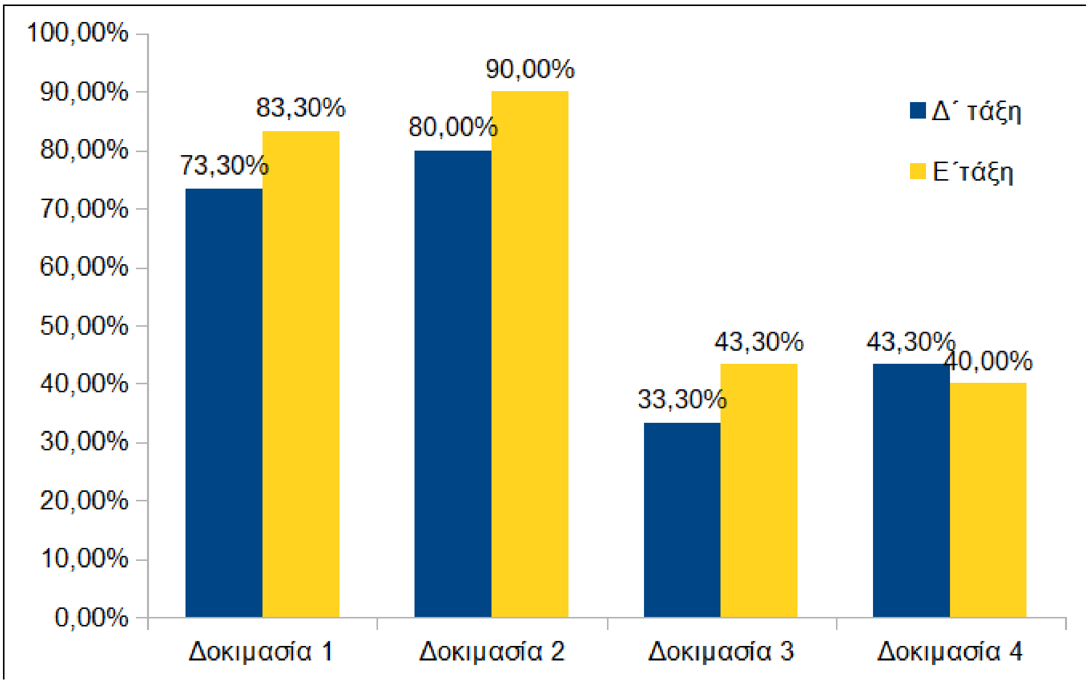


Σχετικά με την τελευταία δοκιμασία του Έργου, η οποία ζητούσε την αύξουσα διάταξη δεκαδικών αριθμών, οι μαθητές και των δύο ηλικιακών ομάδων παρουσίασαν παρόμοια ποσοστά επιτυχίας μεταξύ τους. Πιο συγκεκριμένα, όπως φαίνεται στον Πίνακα 4, οι μαθητές της Δ΄ τάξης είχαν ποσοστό επιτυχίας 43,3% και παρόμοια επίδοση σημειώθηκε και από τους μαθητές της Ε΄ τάξης (ποσοστό επιτυχίας: 40%). Το ποσοστό μάλιστα αποτελούσε το χαμηλότερο ποσοστό επιτυχίας που επέδειξαν τα παιδιά της Ε΄ τάξης σε σχέση με τις επιδόσεις τους στις υπόλοιπες δοκιμασίες του Έργου 1. Φαίνεται, δηλαδή, ότι η δοκιμασία αυτή προκάλεσε σύγχυση στους μαθητές και των δύο τάξεων, αφού περισσότεροι από τους μισούς συμμετέχοντες κάθε τάξης δεν κατάφεραν να κατατάξουν τους αριθμούς από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο.

Πίνακας 3.4: Επιδόσεις των συμμετεχόντων ανά ηλικιακή ομάδα στην τέταρτη δοκιμασία του Έργου 1

Βάλε τους αριθμούς σε σειρά από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο **63,09 63,9 60,39 63,092 60,309**	**Σ**		**Λ**	
	n	***%***	***n***	***%***
Τάξη Δ΄	13	43,3%	17	56,7%
Τάξη Ε΄	12	40%	18	60%

Το Σχήμα 3 συνοπτικά παρουσιάζει τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες του Έργου 1 ανά ηλικιακή ομάδα. Παρατηρείται ότι και στις δυο ηλικιακές ομάδες καλύτερες επιδόσεις σημειώθηκαν στην πρώτη και τη δεύτερη δοκιμασία, δηλαδή στις δοκιμασίες που αφορούσαν τη σύγκριση δυο δεκαδικών αριθμών, σε σχέση με την τρίτη και τέταρτη δοκιμασία, δηλαδή στις δοκιμασίες που απαιτούσαν τη σύγκριση πολλών δεκαδικών αριθμών και την αύξουσα ή φθίνουσα διάταξή τους.



Σχήμα 3: Ποσοστό επιτυχίας στις δοκιμασίες του Έργου 1 (Σχετικό μέγεθος των αριθμών) ως προς την ηλικιακή ομάδα

3.2.2 Επίδοση στο Έργο 2 (Πολλαπλή αναπαράσταση αριθμών και πράξεων)

Η επίδοση των μαθητών στο σύνολο των δοκιμασιών του Έργου 2 βρέθηκε στατιστικά σημαντικά να διαφέρει ως προς την ηλικιακή ομάδα (t (58) = -2,507, p < .01). Με άλλα λόγια, στις δοκιμασίες που μελετούσαν την ικανότητα για πολλαπλή αναπαράσταση των αριθμών και των αριθμητικών πράξεων εντοπίστηκαν διαφορετικές επιδόσεις ανάμεσα στους μαθητές της Δ΄ και τους μαθητές της Ε΄ τάξης. Φαίνεται ότι λίγο λιγότεροι από τους μισούς μαθητές της Δ΄ τάξης ανταποκρίθηκαν στις δοκιμασίες σωστά, μιας και το ποσοστό επιτυχίας τους ήταν 47,5%. Από την άλλη μεριά, οι μαθητές της Ε΄ τάξης παρουσίασαν ικανοποιητικές επιδόσεις στις δοκιμασίες σημειώνοντας ποσοστό επιτυχίας 66,75%.

Πιο αναλυτικά, στην πρώτη δοκιμασία του Έργου 2, στην οποία οι μαθητές κλήθηκαν να κρίνουν αν η ισότητα “0,18 + 0,17 = 0,25” ισχύει, οι μαθητές και των δύο ηλικιακών ομάδων εμφάνισαν υψηλό ποσοστό επιτυχίας (80% για τους μαθητές της Δ΄ τάξης και 96,7% για τους μαθητές της Ε΄ τάξης).

Πίνακας 3.5: Επιδόσεις των συμμετεχόντων ανά ηλικιακή ομάδα στην πρώτη δοκιμασία του Έργου 2

Μπορείς να πεις αν η παρακάτω ισότητα ισχύει; "0,18 + 0,17 = 0,25" α) ισχύει β) δεν ισχύει	**Σ**		**Λ**	
	n	***%***	***n***	***%***
Τάξη Δ΄	24	80%	6	20%
Τάξη Ε΄	29	96,7%	1	3,3%

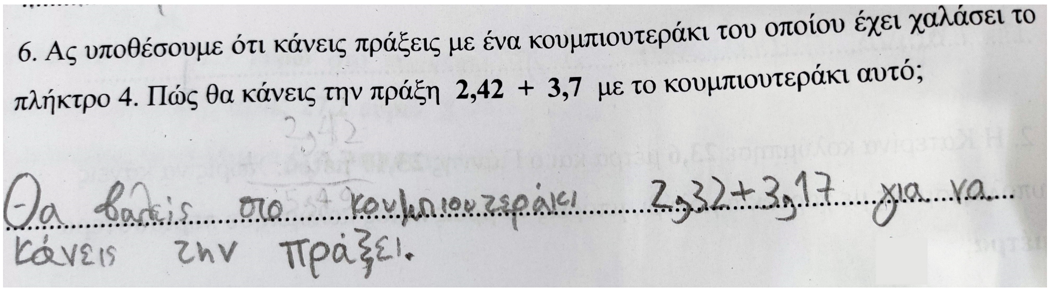
Σημαντικές διαφορές σημειώθηκαν στις επιδόσεις των δυο ηλικιακών ομάδων στην επόμενη δοκιμασία του Έργου 2. Η δοκιμασία ζητούσε την αναπαράσταση του αθροίσματος "2,42 + 3,7" με έναν διαφορετικό τρόπο σε μια αριθμομηχανή με χαλασμένο το πλήκτρο 4. Φαίνεται ότι οι μαθητές της Δ΄ τάξης δυσκολεύτηκαν αρκετά, καθώς εμφάνισαν χαμηλό ποσοστό επιτυχίας (23,3%), και είτε δεν απαντούσαν στη δοκιμασία είτε αδυνατούσαν να αναπαραστήσουν τον αριθμό "2,42" ή ολόκληρο το ζητούμενο άθροισμα "2,42 + 3,7" με ένα εναλλακτικό ισοδύναμο άθροισμα ή μια διαφορά άλλων αριθμών. Αντίθετα, οι μαθητές της Ε΄ τάξης σημείωσαν ικανοποιητικό ποσοστό επιτυχίας (69,6%), καθώς αρκετοί από αυτούς ήταν σε θέση να βρουν ένα εναλλακτικό ισοδύναμο άθροισμα.

Πίνακας 3.6: Επιδόσεις των συμμετεχόντων ανά ηλικιακή ομάδα στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 2

Ας υποθέσουμε ότι κάνεις πράξεις με ένα κουμπιουτεράκι του οποίου έχει χαλάσει το πλήκτρο 4. Πώς θα κάνεις την πράξη με το κουμπιουτεράκι αυτό; "2,42 + 3,7";	**Σ**		**Λ**	
	n	***%***	***n***	***%***
Τάξη Δ΄	7	23,3%	23	76,7%
Τάξη Ε΄	16	69,6%	14	46,7%

Για παράδειγμα, ένας μαθητής της Δ΄ τάξης (Αρ. Πρ. 55) στη δοκιμασία αυτή με πλαίσιο (“Ας υποθέσουμε ότι κάνεις πράξεις με ένα κουμπιουτεράκι του οποίου έχει χαλάσει το πλήκτρο 4. Πώς θα κάνεις την πράξη “2,42 + 3,7”;), η απάντηση του οποίου παρουσιάζεται στην Εικόνα 3, δεν μπόρεσε να αναπαραστήσει με διαφορετικό τρόπο το ζητούμενο άθροισμα. Συγκεκριμένα, αφαίρεσε 0,10 από το 2,42 και έτσι το 2,42 έγινε 2,32. Στη συνέχεια πρόσθεσε τον αριθμό “1” στη θέση των δεκάτων του αριθμού 3,7, θεωρώντας ότι προσθέτει 0,10 στο 3,7 και έτσι, το 3,7 γίνεται 3,17. Ενδεχομένως δεν κατανοεί ότι, προκειμένου να προσθέσει τον αριθμό 0,10 στο 3,7 πρέπει να κάνει πρόσθεση στα δέκατα και όχι να μετατοπίσει τον αριθμό αυτής της θέσης στη διπλανή, δηλαδή, να αλλάξει την αξία του ψηφίου 7.

Εικόνα 3: Απάντηση μαθητή Δ΄ τάξης (Αρ. Πρ. 55) στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 2

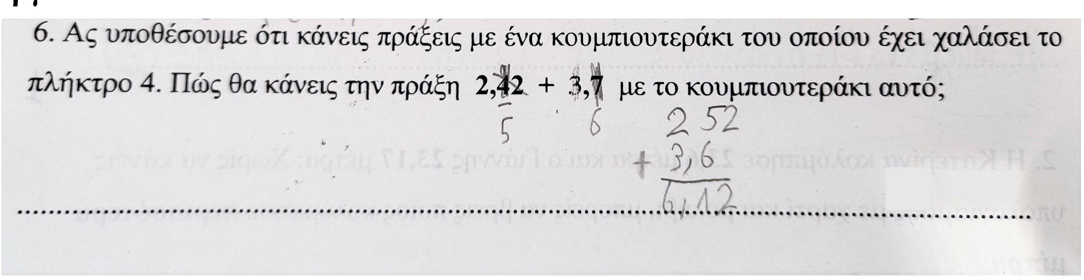

6. Ας υποθέσουμε ότι κάνεις πράξεις με ένα κουμπιουτεράκι του οποίου έχει χαλάσει το πλήκτρο 4. Πώς θα κάνεις την πράξη **2,42 + 3,7** με το κουμπιουτεράκι αυτό;

2,42

Θα βάλεις στο κουμπιουτεράκι 2,32+3,17 για να κάνεις την πράξη.

Από την άλλη, ένας άλλος μαθητής της Δ΄ τάξης (Αρ. Πρ. 51), όπως φαίνεται στην Εικόνα 4, αλλάζει την αξία και των δύο δεκαδικών αριθμών της πρόσθεσης αυξάνοντας τον έναν όρο και μειώνοντας τον άλλον όρο κατά 0,10, προκειμένου να αναπαραστήσει το άθροισμα με έναν εναλλακτικό τρόπο. Στο τέλος, επιβεβαιώνει αυτή τη στρατηγική του εφαρμόζοντας τον κάθετο αλγόριθμο της πρόσθεσης.

Εικόνα 4: Απάντηση μαθητή Δ΄ τάξης (Αρ. Πρ. 51) στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 2

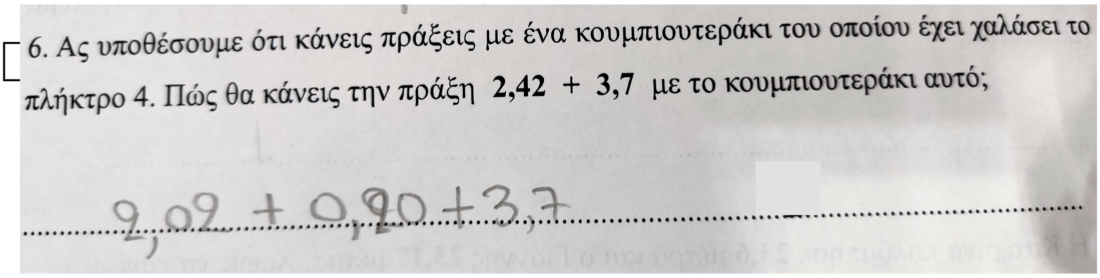

6. Ας υποθέσουμε ότι κάνεις πράξεις με ένα κουμπιουτεράκι του οποίου έχει χαλάσει το πλήκτρο 4. Πώς θα κάνεις την πράξη **2,42 + 3,7** με το κουμπιουτεράκι αυτό;

5 6

2,52
+ 3,6
6,12

Επίσης, χαρακτηριστική απάντηση αποτελεί η απάντηση ενός μαθητή Ε΄ τάξης (Αρ. Πρ. 29), όπως φαίνεται στην Εικόνα 5, ο οποίος βρήκε ένα ισοδύναμο άθροισμα αναπαριστώντας τον αριθμό “2,42” ως άθροισμα δύο άλλων δεκαδικών αριθμών, δηλαδή, “2,02 + 0,20 + 3,7”.

Εικόνα 5: Απάντηση μαθητή Ε΄ τάξης (Αρ. Πρ. 29) στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 2


6. Ας υποθέσουμε ότι κάνεις πράξεις με ένα κουμπιουτεράκι του οποίου έχει χαλάσει το πλήκτρο 4. Πώς θα κάνεις την πράξη **2,42 + 3,7** με το κουμπιουτεράκι αυτό;

2,02 + 0,20 + 3,7

Στην τρίτη δοκιμασία του Έργου 2 οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν το δεύτερο μέρος μιας ισότητας που περιλάμβανε πράξεις πρόσθεσης σε κάθε μέρος, “20,5 + 5,1 = 18 + __”. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι επιδόσεις των δυο ηλικιακών ομάδων ήταν παρόμοιες (βλ. Πίνακα 3.7) (ποσοστά επιτυχίας: 46,7% και 56,7%, για τα παιδιά της Δ΄ και της Ε΄ τάξης, αντίστοιχα).

Πίνακας 3.7: Επιδόσεις των συμμετεχόντων ανά ηλικιακή ομάδα στην τρίτη δοκιμασία του Έργου 2

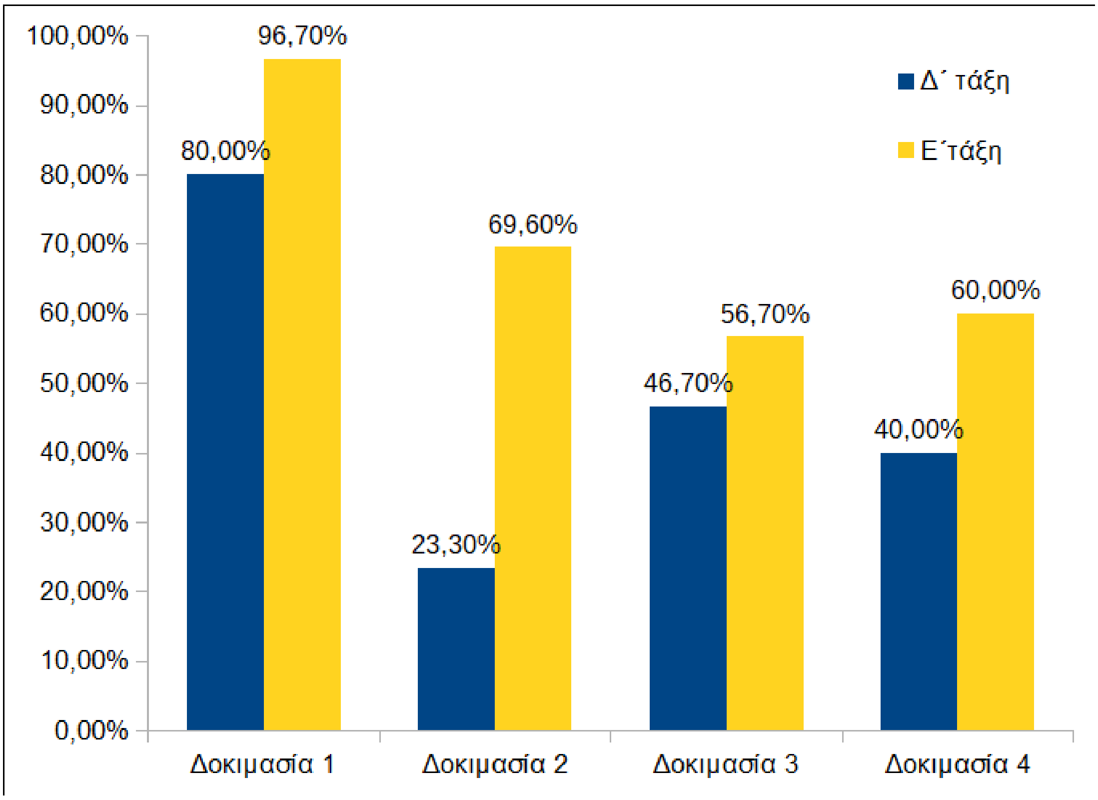
Κάνε την ισότητα να ισχύει	**Σ**		**Λ**	
20,5 + 5,1 = 18 + ___	***n***	***%***	***n***	***%***
Τάξη Δ΄	14	46,7%	16	53,3%
Τάξη Ε΄	17	56,7%	13	43,3%

Στην τελευταία δοκιμασία του Έργου 2, οι μαθητές έπρεπε να συμπληρώσουν το δεύτερο μέρος μιας ισότητας που αποτελείται από μια πρόσθεση στο ένα μέρος και από μια διαφορά στο άλλο μέρος “12,3 + 10 = 25,5 - __”. Τα αποτελέσματα επισήμαναν διαφορές στις επιδόσεις των συμμετεχόντων ανά τάξη (βλ. Πίνακα 3.8). Οι μαθητές της Ε΄ τάξης παρουσίασαν καλύτερες επιδόσεις, με ποσοστό επιτυχίας 60%, από τους μαθητές της Δ΄ τάξης που είχαν ποσοστό επιτυχίας 40%. Με άλλα λόγια, οι μαθητές της Δ΄ τάξης δυσκολεύτηκαν περισσότερο από τους μαθητές της Ε΄ τάξης να φτάσουν σε έναν αριθμό στόχο επινοώντας μια διαφορά ώστε να κάνουν την ισότητα να ισχύει.

Πίνακας 3.8: Επιδόσεις των συμμετεχόντων ανά ηλικιακή ομάδα στην τέταρτη δοκιμασία του Έργου 2

Κάνε την ισότητα να ισχύει	Σ		Λ	
12,3 + 10 = 25,5 - ___	*n*	*%*	*n*	*%*
Τάξη Δ΄	12	40%	18	60%
Τάξη Ε΄	18	60%	12	40%

Το Σχήμα 4 συνοπτικά παρουσιάζει τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες του Έργου 2 ανά ηλικιακή ομάδα. Παρατηρείται ότι και στις δυο ηλικιακές ομάδες καλύτερες επιδόσεις σημειώθηκαν στην πρώτη δοκιμασία, που σημαίνει ότι οι μαθητές δεν δυσκολεύτηκαν να διαπιστώσουν αν ισχύουν τα δύο μέρη μιας ισότητα, η οποία έχει ένα άθροισμα στο ένα μέρος και το αποτέλεσμα του αθροίσματος στο άλλο μέρος. Αντίθετα, φαίνεται ότι στη δεύτερη δοκιμασία οι μαθητές μικρότερης ηλικίας δυσκολεύτηκαν αρκετά να αντιληφθούν αν μια ισότητα με αθροίσματα και στα δυο μέρη ισχύει, καθώς σημείωσαν τις πιο χαμηλές επιδόσεις τους σε όλο το Έργο και παρουσίασαν σημαντική απόκλιση από τις επιδόσεις των μαθητών της Ε΄ τάξης. Όσον αφορά την τρίτη και την τέταρτη δοκιμασία, όπου οι μαθητές έπρεπε να συμπληρώσουν το ένα μέρος μιας ισότητας προκειμένου να ισχύει (μέσω της κατασκευής ενός αθροίσματος στη δοκιμασία 3 και μέσω της κατασκευής μιας διαφοράς στη δοκιμασία 4), σημειώθηκαν μέτριες επιδόσεις με μικρές διαφορές στις δυο ηλικιακές ομάδες και, πιο συγκεκριμένα, με τους μαθητές της Ε΄ τάξης να είναι σε θέση να συμπληρώνουν την ισότητα σωστά συχνότερα. Ωστόσο, οι χαμηλότερες επιδόσεις των μαθητών της Ε΄ τάξης εντοπίστηκαν στη δοκιμασία 3. Με άλλα λόγια, οι μαθητές της Δ΄ τάξης δυσκολεύτηκαν πιο πολύ στον έλεγχο μιας ισότητας με δύο αθροίσματα (δοκιμασία 2), ενώ οι μαθητές της Ε΄ τάξης εμφάνισαν αδυναμία κατά τη συμπλήρωση ενός αθροίσματος προκειμένου μια ισότητα να ισχύει (δοκιμασία 3).



Σχήμα 4: Ποσοστό επιτυχίας στις δοκιμασίες του Έργου 2 (Πολλαπλή αναπαράσταση αριθμών και πράξεων) ως προς την ηλικιακή ομάδα

3.2.3 Επίδοση στο Έργο 3 (Λογικότητα των εκτιμήσεων)

Προκειμένου να εξεταστούν οι επιδόσεις των δυο ηλικιακών ομάδων στο Έργο 3, το οποίο εξέταζε την ικανότητα για έλεγχο της λογικότητας ενός μαθηματικού αποτελέσματος, ως προς την ηλικία, πραγματοποιήθηκε t-τεστ για ανεξάρτητα δείγματα. Εντοπίστηκαν στατιστικά σημαντικά διαφορές ως προς την ηλικιακή ομάδα στο σύνολο των δοκιμασιών (t (58) = -2,575 p < .01). Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές της Δ΄ τάξης και της Ε΄ τάξης εμφάνισαν διαφορές στις επιδόσεις τους στις δοκιμασίες του Έργου 3 που δείχνει ότι διαφέρουν. Ειδικότερα, 3 στους 4 μαθητές της Ε΄ τάξης (75%) απαντούσαν σωστά στις δοκιμασίες, και έδειξαν εμφανώς καλύτερες επιδόσεις από τους μαθητές της Δ΄ τάξης, οι οποίοι είχαν ποσοστό επιτυχίας 57,5% .

Αναλυτικότερα, στην πρώτη δοκιμασία του Έργου 3, που ζητούσε από του μαθητές να εκτιμήσουν το γινόμενο “20 Χ 1,99” και να διαλέξουν ανάμεσα σε τρεις πιθανές απαντήσεις, “α) 4, β) 40, γ) 400”, και οι δυο ηλικιακές ομάδες έδειξαν υψηλό ποσοστό επιτυχίας (80% για τους μαθητές της Δ΄ τάξης και 90% για τους μαθητές της Ε΄ τάξης). Τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.9 που ακολουθεί.

Πίνακας 3.9: Επιδόσεις των συμμετεχόντων ανά ηλικιακή ομάδα στην πρώτη δοκιμασία του Έργου 3

Πόσο περίπου κάνει “20 Χ 1,99”;	**Σ**		**Λ**	
α) 4 β) 40 γ) 400	***n***	***%***	***n***	***%***
Τάξη Δ΄	24	80%	6	20%
Τάξη Ε΄	27	90%	3	10%

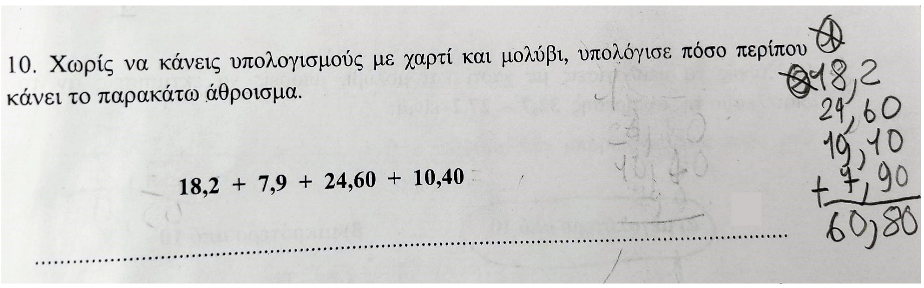
Στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 3, όπου οι μαθητές έπρεπε να εκτιμήσουν το άθροισμα “18,2 + 7,9 + 24,6 + 10,40”, εντοπίστηκαν διαφορετικές επιδόσεις στις δύο ηλικιακές ομάδες μαθητών (βλ. Πίνακα 3.10). Οι μαθητές της Δ΄ τάξης παρουσίασαν αδυναμία σε αυτή τη δοκιμασία, καθώς είχαν ποσοστό επιτυχίας μόλις 20%, που σημαίνει ότι 8 στους 10 μαθητές δεν ήταν σε θέση να εκτιμήσει με επιτυχία το συγκεκριμένο άθροισμα. Επιπλέον, παρόλο που οι μαθητές της Ε΄ τάξης παρουσίασαν καλύτερη εικόνα σε σύγκριση με τους μαθητές της Δ΄ τάξης, φαίνεται ότι περίπου οι μισοί δυσκολεύτηκαν σε αυτή τη δοκιμασία (ποσοστό επιτυχίας: 53,3%).

Πίνακας 3.10: Επιδόσεις των συμμετεχόντων ανά ηλικιακή ομάδα στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 3

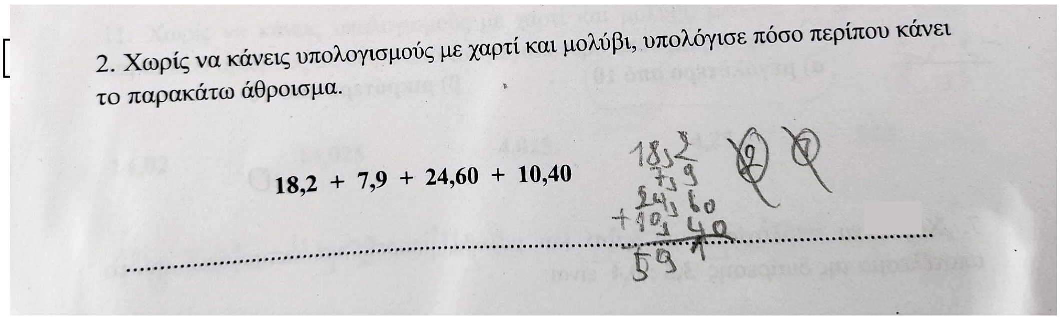
Πόσο περίπου κάνει “18,2 + 7,9 + 24,60 + 10,40”	**Σ**		**Λ**	
	n	***%***	***n***	***%***
Τάξη Δ΄	6	20%	24	80%
Τάξη Ε΄	16	53,3%	14	46,7%

Οι μαθητές και των δύο τάξεων αντιμετώπισαν δυσκολία στην εύρεση ενός υπολογισμού κατά προσέγγιση και αρκετοί κατέφυγαν σε τεχνικές βασισμένες σε κανόνες. Για παράδειγμα, κάποιοι απάντησαν με ακρίβεια στη συγκεκριμένη δοκιμασία και αρκετοί κατέφυγαν στην εκτέλεση κάθετης πράξης, αγνοώντας την εκφώνηση της δοκιμασίας στην οποία τονίστηκε να μην κάνουν υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, αλλά να βρουν περίπου πόσο κάνει το ζητούμενο “άθροισμα”. Τέτοιες περιπτώσεις απαντήσεων εντοπίστηκαν και στις δυο τάξεις. Συγκεκριμένα, μια μαθήτρια της Δ΄ τάξης (Αρ. Πρ. 47) έκανε χρήση του αλγόριθμου της πρόσθεσης. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 6, τοποθέτησε τους αριθμούς κάθετα και εκτέλεσε εσφαλμένα τον αλγόριθμο. Παρόμοια εσφαλμένη απάντηση με εκτέλεση αλγόριθμου δόθηκε και από έναν μαθητή της Ε΄ τάξης (Αρ. Πρ. 15), η απάντηση του οποίου παρουσιάζεται στην Εικόνα 7.

Εικόνα 6: Απάντηση μαθήτριας Δ΄ τάξης (Αρ. Πρ. 47) στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 3

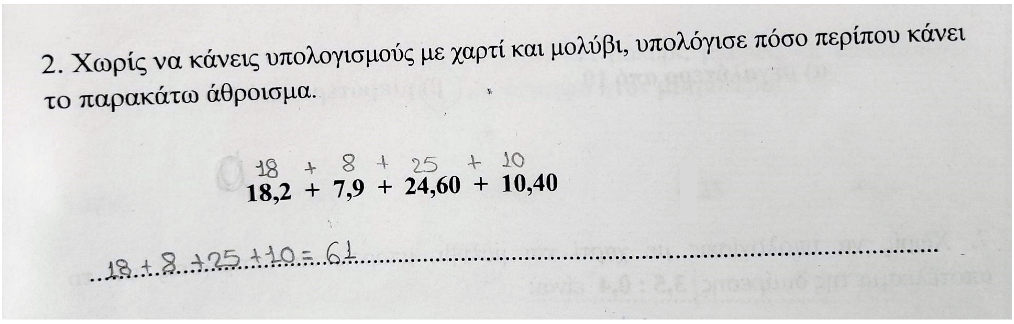


Εικόνα 7: Απάντηση μαθητή Ε΄ τάξης (Αρ. Πρ. 15) στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 3

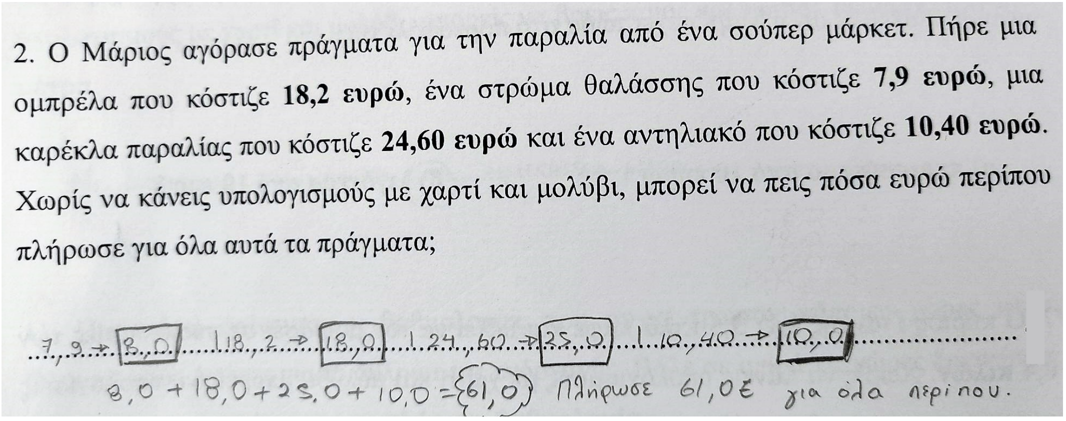


Ωστόσο, υπήρξαν και μαθητές που εκδήλωσαν στρατηγικές εκτίμησης και στρογγυλοποίησαν τους αριθμούς, ώστε να υπολογίσουν κατά προσέγγιση το αποτέλεσμα της ζητούμενης αριθμητική πράξης. Στις Εικόνες 8 και 9 παρουσιάζονται οι απαντήσεις από δυο μαθήτριες της Ε΄ τάξης (Αρ. Πρ. 12 και 19), οι οποίες χρησιμοποίησαν στρατηγικές εκτίμησης και, αφότου στρογγυλοποίησαν τους δεκαδικούς αριθμούς στο ψηφίο των μονάδων, άθροισαν νοερά τους στρογγυλοποιημένους αριθμούς.

Εικόνα 8: Απάντηση μαθήτριας Ε΄ τάξης (Αρ. Πρ. 12) στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 3



Εικόνα 9: Απάντηση μαθήτριας Ε΄ τάξης (Αρ. Πρ. 19) στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 3



2. Ο Μάριος αγόρασε πράγματα για την παραλία από ένα σούπερ μάρκετ. Πήρε μια ομπρέλα που κόστιζε **18,2 ευρώ**, ένα στρώμα θαλάσσης που κόστιζε **7,9 ευρώ**, μια καρέκλα παραλίας που κόστιζε **24,60 ευρώ** και ένα αντηλιακό που κόστιζε **10,40 ευρώ**. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορεί να πεις πόσα ευρώ περίπου πλήρωσε για όλα αυτά τα πράγματα;

7,9 → $\boxed{8,0}$ | 18,2 → $\boxed{18,0}$ | 24,60 → $\boxed{25,0}$ | 10,40 → $\boxed{10,0}$

8,0 + 18,0 + 25,0 + 10,0 = 61,0 Πλήρωσε 61,0€ για όλα περίπου.

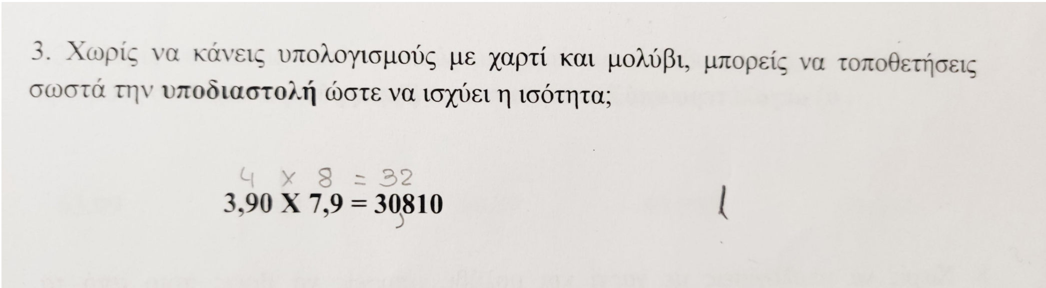
Διαφορές στις επιδόσεις των μαθητών εντοπίστηκαν και στην τρίτη δοκιμασία του Έργου 3, στην οποία οι μαθητές κλήθηκαν να τοποθετήσουν την υποδιαστολή στο γινόμενο “3,90 Χ 7,9 =30810”. Οι μαθητές της Ε΄ τάξης σημείωσαν ιδιαίτερα καλές επιδόσεις με ποσοστό επιτυχίας που ανέρχεται στο 86,7%. Ωστόσο, οι επιδόσεις των μαθητών της Δ΄ τάξης φαίνεται ότι ήταν μέτριες, μιας και είχαν ποσοστό επιτυχίας 63,30%. Τα ποσοστά επιτυχίας των δύο ηλικιακών ομάδων δείχνουν ότι υπήρξε μεγαλύτερη δυσκολία από τους μικρότερους ηλικιακά μαθητές στον έλεγχο λογικότητας ενός γινομένου με δεκαδικούς αριθμούς.

Πίνακας 3.11: Επιδόσεις των συμμετεχόντων ανά ηλικιακή ομάδα στην τρίτη δοκιμασία του Έργου 3

Τοποθέτησε την υποδιαστολή σωστά, ώστε να ισχύει η ισότητα “3,90 Χ 7,9 = 30810”	**Σ**		**Λ**	
	n	***%***	***n***	***%***
Τάξη Δ΄	19	63,3%	11	36,7%
Τάξη Ε΄	26	86,7%	4	13,3%

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η απάντηση μιας μαθήτριας της Ε΄ τάξης (Αρ. Πρ. 12), καθώς χρησιμοποίησε τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης και αποτελεί ένδειξη για ικανότητα λογικής κρίσης ενός γινομένου. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 10, η μαθήτρια στρογγυλοποίησε τους δεκαδικούς αριθμούς “3,90” και “7,9” στο ψηφίο των μονάδων (σε 4 και 8, αντίστοιχα) και, αφού σκέφτηκε ότι το γινόμενο “4Χ8” είναι “32”, δηλαδή διψήφιος αριθμός, τοποθέτησε την υποδιαστολή σε τέτοια θέση, ώστε στο αποτέλεσμα της πράξης να υπάρχει διψήφιο ακέραιο μέρος.

Εικόνα 10: Απάντηση μαθήτριας Ε΄ τάξης (Αρ. Πρ. 12) στην τρίτη δοκιμασία του Έργου 3

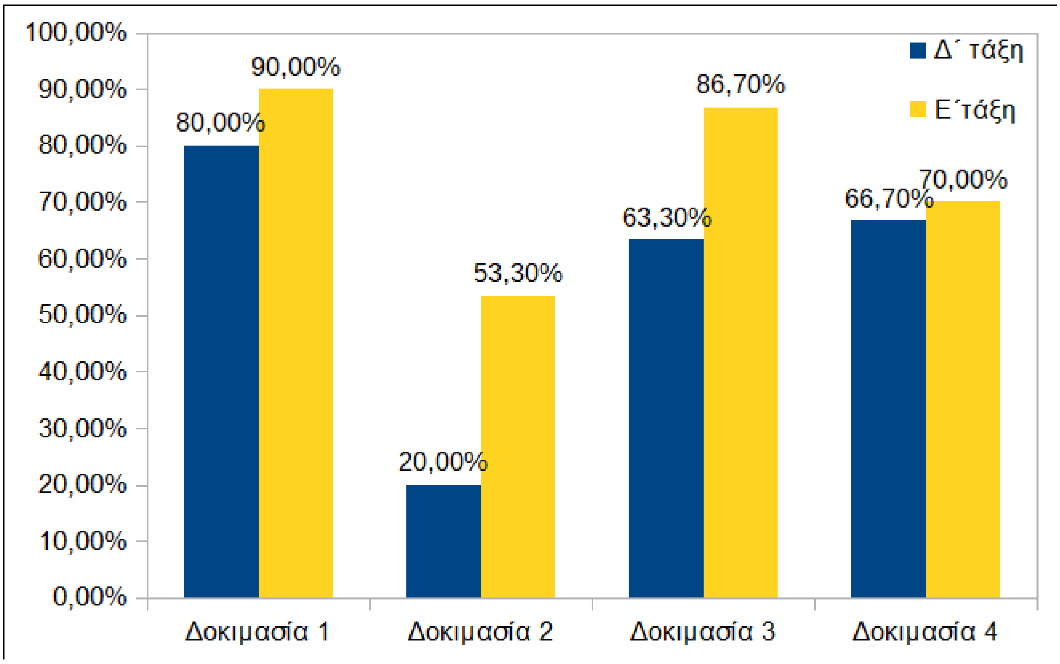


Η τέταρτη δοκιμασία του Έργου 3 απαιτούσε από τους μαθητές να βρουν ανάμεσα σε τρεις πιθανές απαντήσεις το πιο πιθανό πηλίκο της διαίρεσης του 28 με έναν δεκαδικό αριθμό, ο οποίος είχε τον αριθμό 4 στο ακέραιο μέρος, ενώ στο δεκαδικό μέρος μπορούσε να έχει έως και δύο οποιαδήποτε δεκαδικά ψηφία (“28 : 4, _ _ ”). Σε αυτή τη δοκιμασία, δεν υπήρχαν ιδιαίτερες διαφορές στις επιδόσεις των δυο ηλικιακών ομάδων, καθώς σημειώθηκαν παρόμοιες απαντήσεις και στις δυο ηλικιακές ομάδες (ποσοστά επιτυχίας: 66,7% για τους μαθητές Δ΄ τάξης και 70% για τους μαθητές της Ε΄ τάξης).

Πίνακας 3.12: Επιδόσεις των συμμετεχόντων ανά ηλικιακή ομάδα στην τέταρτη δοκιμασία του Έργου 3

Ποια από τις παρακάτω απαντήσεις είναι το πιο πιθανό πηλίκο για το 28 : 4,_ _ α) 5,5 β) 6,5 γ) 7,5	Σ		Λ	
	n	*%*	*n*	*%*
Τάξη Δ΄	20	66,7%	10	33,3%
Τάξη Ε΄	21	70%	9	30%

Το Σχήμα 5 συνοπτικά παρουσιάζει τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες του Έργου 3 αναφορικά με την ικανότητα για έλεγχο της λογικότητας των εκτιμήσεων ανά ηλικιακή ομάδα. Όπως φαίνεται, και οι δυο ηλικιακές ομάδες σημείωσαν στη Δοκιμασία 1, όπου έπρεπε να εκτιμήσουν ένα γινόμενο, τις καλύτερες επιδόσεις, ενώ στη Δοκιμασία 2, που ζητούσε την εκτίμηση ενός αθροίσματος, τις χειρότερες επιδόσεις. Οι μαθητές επέδειξαν μέτριες επιδόσεις στις Δοκιμασίες 3 και 4 με τους μαθητές της Ε΄ τάξης να σημειώνουν καλύτερες επιδόσεις από τους μαθητές της Δ΄ τάξης τόσο στη δοκιμασία που αφορούσε την τοποθέτηση της υποδιαστολής σε ένα γινόμενο (Δοκιμασία 3) όσο και σε αυτή που έπρεπε να εκτιμήσουν το πιο πιθανό πηλίκο σε μια διαίρεση (Δοκιμασία 4).



Σχήμα 5: Ποσοστό επιτυχίας στις δοκιμασίες του Έργου 3 (Λογικότητα των εκτιμήσεων) ως προς την ηλικιακή ομάδα

3.2.4 Επίδοση στο Έργο 4 (Σχετική επίδραση των πράξεων στους αριθμούς)

Οριακά δεν εντοπίστηκαν στατιστικά σημαντικά διαφορές στις επιδόσεις των δυο ηλικιακών ομάδων στις δοκιμασίες του Έργου 4 (t (58) = -1,430 p = .079). Με άλλα λόγια, παρόμοια ήταν τα ποσοστά επιτυχίας των δυο ηλικιακών ομάδων στις δοκιμασίες του Έργου 4, που μελετούσε την αναγνώριση της σχετικής επίδρασης των πράξεων στους αριθμούς. Πιο συγκεκριμένα, το 67,5% των μαθητών της Δ΄ τάξης και το 75% των μαθητών της Ε΄ τάξης απάντησαν σωστά στις δοκιμασίες του Έργου 4.

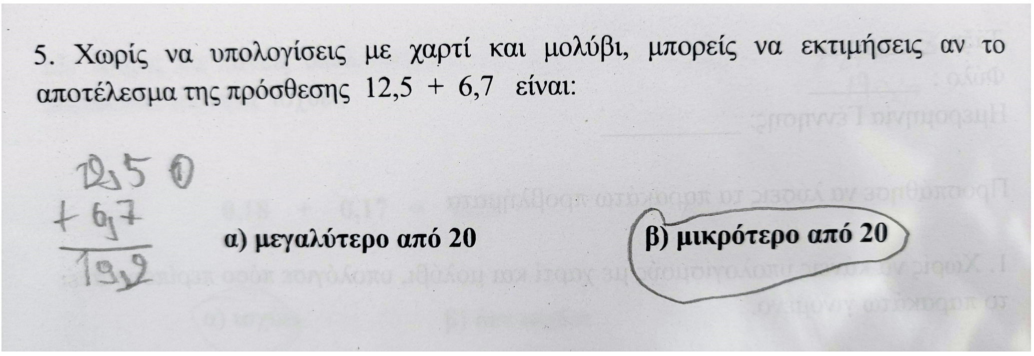
Αναλυτικότερα, στην πρώτη δοκιμασία του Έργου 4, η οποία εξέταζε την αναγνώριση της επίδρασης των πράξεων αναφορικά με την πράξη της πρόσθεσης με δεκαδικούς αριθμούς, οι μαθητές κλήθηκαν να διαλέξουν αν το άθροισμα “12,5 + 6,7” δίνει αποτέλεσμα μεγαλύτερο ή μικρότερο του 20. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές των δύο ηλικιακών ομάδων είχαν ακριβώς το ίδιο ποσοστό επιτυχίας (86,7%), το οποίο μπορεί να χαρακτηριστεί πολύ ικανοποιητικό. Αυτό σημαίνει ότι μόνο 4 συμμετέχοντες σε κάθε ηλικιακή ομάδα δεν ήταν σε θέση να απαντήσουν σωστά.

Πίνακας 3.13: Επιδόσεις των συμμετεχόντων ανά ηλικιακή ομάδα στην πρώτη δοκιμασία του Έργου 4

Μπορείς να εκτιμήσεις αν το αποτέλεσμα της πρόσθεσης “12,5 + 6,7” είναι α) μεγαλύτερο από 20 β) μικρότερο από 20	**Σ**		**Λ**	
	n	***%***	***n***	***%***
Τάξη Δ΄	26	86,7%	4	13,3%
Τάξη Ε΄	26	86,7%	4	13,3%

Αξίζει να σημειωθεί ότι κάποιοι συμμετέχοντες κατέφυγαν στην εκτέλεση κάθετης πράξης για να επιλέξουν την απάντησή τους καταλήγοντας είτε σε σωστή απάντηση είτε σε λανθασμένη απάντηση. Ωστόσο, η εφαρμογή του τυπικού αλγόριθμου δεν παραπέμπει σε αίσθηση του αριθμού. Για παράδειγμα, ένας μαθητής της Ε΄ τάξης (Αρ. Πρ. 15), η απάντηση του οποίου παρατίθενται στην Εικόνα 11, χρησιμοποίησε τεχνικές βασισμένες σε χαρτί και μολύβι, που δείχνουν έλλειψη στρατηγικών αίσθησης του αριθμού. Συγκεκριμένα, τοποθέτησε κάθετα τους αριθμούς και εκτέλεσε τον αλγόριθμο για να βρει την απάντηση.

Εικόνα 11: Απάντηση μαθητή Ε΄ τάξης (Αρ. Πρ. 15) στην πρώτη δοκιμασία του Έργου 4


5. Χωρίς να υπολογίσεις με χαρτί και μολύβι, μπορείς να εκτιμήσεις αν το αποτέλεσμα της πρόσθεσης 12,5 + 6,7 είναι:

12,5
+ 6,7
19,2

α) μεγαλύτερο από 20 β) μικρότερο από 20

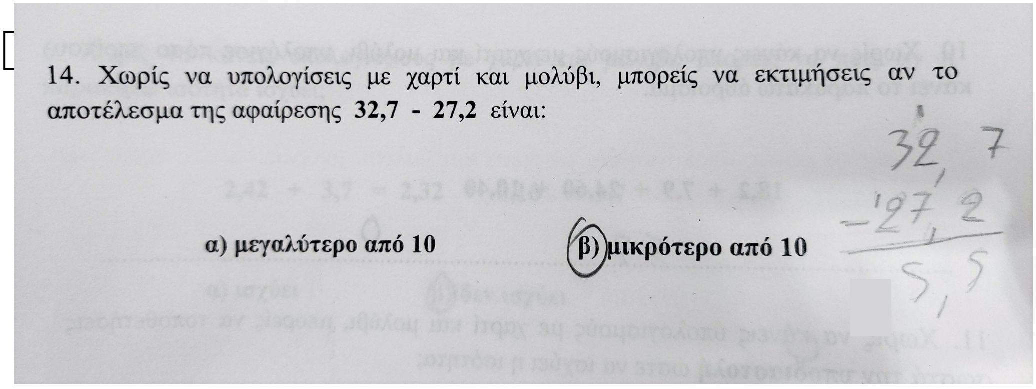
Διαφορές στις επιδόσεις μεταξύ των δυο ηλικιακών ομάδων εντοπίστηκαν στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 4, η οποία μελετούσε την αναγνώριση της επίδρασης των πράξεων για την πράξη της αφαίρεσης με δεκαδικούς αριθμούς. Η δοκιμασία απαιτούσε την εκτίμηση της διαφοράς "32,7 – 27,2" και οι μαθητές έπρεπε να κρίνουν αν το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο του 10. Οι απαντήσεις των παιδιών έδειξαν ότι η δοκιμασία δυσκόλεψε περισσότερο τους μαθητές της Δ΄ τάξης, οι μισοί από τους οποίους απάντησαν σωστά (ποσοστό επιτυχίας: 56,7%), σε σύγκριση με τους μαθητές της Ε΄ τάξης, στους οποίους περίπου οι 3 στους 4 (ποσοστό επιτυχίας: 76,7%) απάντησαν σωστά.

Πίνακας 3.14: Επιδόσεις των συμμετεχόντων ανά ηλικιακή ομάδα στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 4

Μπορείς να εκτιμήσεις αν το αποτέλεσμα της αφαίρεσης "32,7 – 27,2" είναι α) μεγαλύτερο από 10 β) μικρότερο από 10	**Σ**		**Λ**	
	n	***%***	***n***	***%***
Τάξη Δ΄	17	56,7%	13	43,3%
Τάξη Ε΄	23	76,7%	7	23,3%

Αξίζει να αναφερθεί ότι στις απαντήσεις των μαθητών εντοπίστηκε, όπως και στην προηγούμενη δοκιμασία, η τάση για εύρεση μιας λύσης με ακρίβεια μέσω της εκτέλεσης της κάθετης πράξης. Δηλαδή, παρουσιάστηκαν τεχνικές βασισμένες σε κανόνα που δεν αντιστοιχούν σε στρατηγικές εκτίμησης. Για παράδειγμα, ένας μαθητής της Δ΄ τάξης (Αρ. Πρ. 34), όπως φαίνεται στην Εικόνα 12, τοποθέτησε τους δεκαδικούς αριθμούς κάθετα και εκτέλεσε τον αλγόριθμο της αφαίρεσης, προκειμένου να βρει το υπολογιστικό αποτέλεσμα με ακρίβεια και να διαλέξει τη σωστή απάντηση.

Εικόνα 12: Απάντηση μαθητή Ε΄ τάξης (Αρ. Πρ. 34) στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 4


14. Χωρίς να υπολογίσεις με χαρτί και μολύβι, μπορείς να εκτιμήσεις αν το αποτέλεσμα της αφαίρεσης **32,7 - 27,2** είναι:

α) μεγαλύτερο από 10 **β) μικρότερο από 10**

32,7
-27,2
5,5

Η τρίτη δοκιμασία του Έργου 4 εξέταζε τη σχετική επίδραση της διαίρεσης με δεκαδικούς αριθμούς. Ειδικότερα, μελετούσε την ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν ότι το πηλίκο είναι μεγαλύτερο από τον διαιρετέο, όταν ο διαιρέτης είναι μικρότερος της μονάδας. Οι μαθητές κλήθηκαν να κρίνουν αν το πηλίκο της διαίρεσης "3,5 : 0,4" είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από 3. Τα αποτελέσματα έδειξαν παρόμοια εικόνα στις δυο ηλικιακές ομάδες, με ιδιαίτερα ικανοποιητικά ποσοστά επιτυχίας (76,7% για τους μαθητές της Δ΄ τάξης και 86,7% για τους μαθητές της Ε΄ τάξης). Αξίζει να σημειωθεί ότι σε αυτή τη δοκιμασία δεν εντοπίστηκε καμία απάντηση στην οποία να πραγματοποιούνται κάθετες διαιρέσεις, όπως έγινε στις δύο προηγούμενες δύο δοκιμασίες αυτού του Έργου που αφορούσαν προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Πίνακας 3.15: Επιδόσεις των συμμετεχόντων ανά ηλικιακή ομάδα στην τρίτη δοκιμασία του Έργου 4

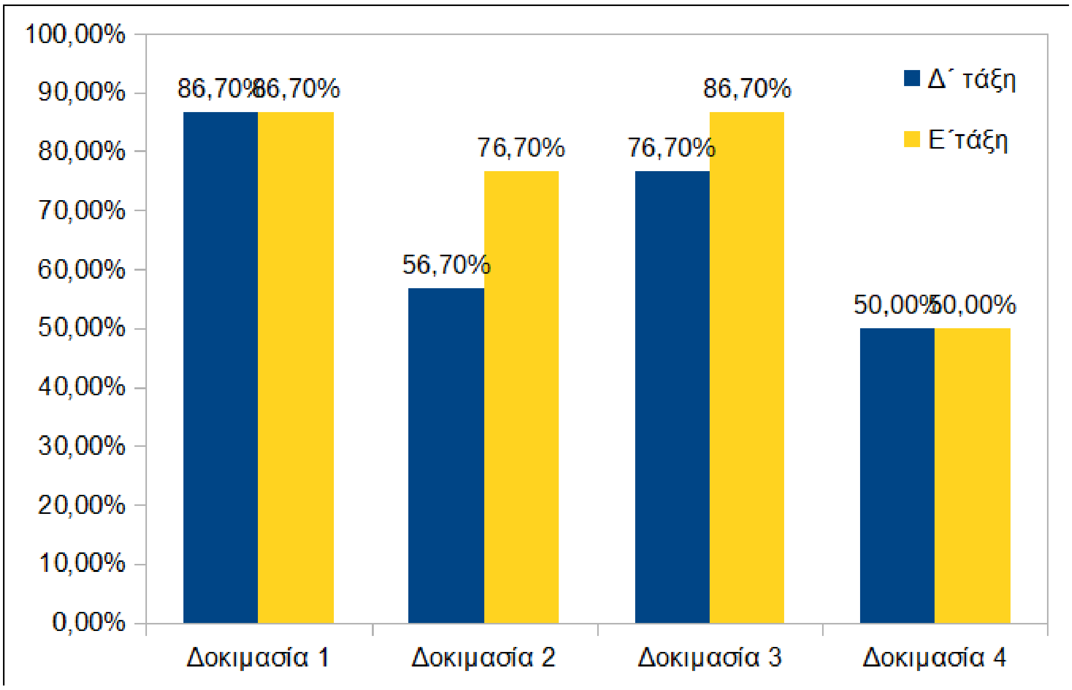
Μπορείς να εκτιμήσεις αν το αποτέλεσμα της διαίρεσης "3,5 : 0,4" είναι **α) μεγαλύτερο από 3 β) μικρότερο από 3**	**Σ**		**Λ**	
	n	***%***	***n***	***%***
Τάξη Δ΄	23	76,7%	7	23,3%
Τάξη Ε΄	26	86,7%	4	13,3%

Στην τελευταία δοκιμασία του Έργου 4, στην οποία τα παιδιά έπρεπε να εκτιμήσουν το πιο κοντινό γινόμενο του “6 Χ 2,5” μεταξύ του “5 Χ 3,5” και “7 Χ 1,5”. εξετάσθηκε η ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν τι σημαίνει πολλαπλασιασμός με μικρό ή μεγάλο παράγοντα μέσω της τέταρτης δοκιμασίας. Τα αποτελέσματα ανέδειξαν ακριβώς το ίδιο ποσοστό επιτυχίας (50%) και στις δυο ηλιακές ομάδες. Αυτό σημαίνει ότι τόσο οι μεγάλοι μαθητές όσο και οι μικροί δυσκολεύτηκαν στον ίδιο βαθμό σε αυτή τη δοκιμασία και, επιπλέον, μόνο οι μισοί συμμετέχοντες από κάθε ηλικιακή ομάδα αναγνώρισαν με επιτυχία το πιο κοντινό γινόμενο του “6 Χ 2,5” ανάμεσα σε δύο γινόμενα.

Πίνακας 3.16: Επιδόσεις των συμμετεχόντων ανά ηλικιακή ομάδα στην τέταρτη δοκιμασία του Έργου 4

Μπορείς να πεις ποιο από τα παρακάτω γινόμενα είναι πιο κοντά στο 6 Χ 2,5 **α) 5 Χ 3,5 β) 7 Χ 1,5**	**Σ**		**Λ**	
	n	***%***	***n***	***%***
Τάξη Δ΄	15	50%	15	50%
Τάξη Ε΄	15	50%	15	50%

Το Σχήμα 6 δείχνει τα ποσοστά επιτυχίας στις δοκιμασίες του Έργου 4 που μελετούσε την ικανότητα για αναγνώριση της επίδρασης των πράξεων στους αριθμούς. Παρατηρείται ότι οι συμμετέχοντες επέδειξαν τις καλύτερες επιδόσεις στη Δοκιμασία 1 και έπειτα στη Δοκιμασία 3. Αυτό σημαίνει ότι και στις δυο ηλικιακές ομάδες οι μαθητές αναγνώρισαν σε ικανοποιητικό βαθμό την επίδραση των πράξεων της πρόσθεσης και της διαίρεσης στους αριθμούς. Ακολουθούν οι επιδόσεις στη Δοκιμασία 2, όπου εντοπίζεται και διαφορά στις επιδόσεις των δυο ηλικιακών ομάδων με τους μεγαλύτερους μαθητές να έχουν καλύτερες επιδόσεις αναφορικά με την ικανότητά τους για αναγνώριση της επίδρασης της αφαίρεσης. Τέλος, φαίνεται ότι στη Δοκιμασία 4 σημειώθηκαν οι πιο χαμηλές επιδόσεις των συμμετεχόντων σε σχέση με τις υπόλοιπες δοκιμασίες του Έργου 4, καθώς μόνοι οι μισοί μαθητές της κάθε ηλικιακής ομάδας κατάφεραν να εντοπίσουν ποιο γινόμενο ανάμεσα σε δυο βρίσκεται πιο κοντά στο γινόμενο που τους δόθηκε.



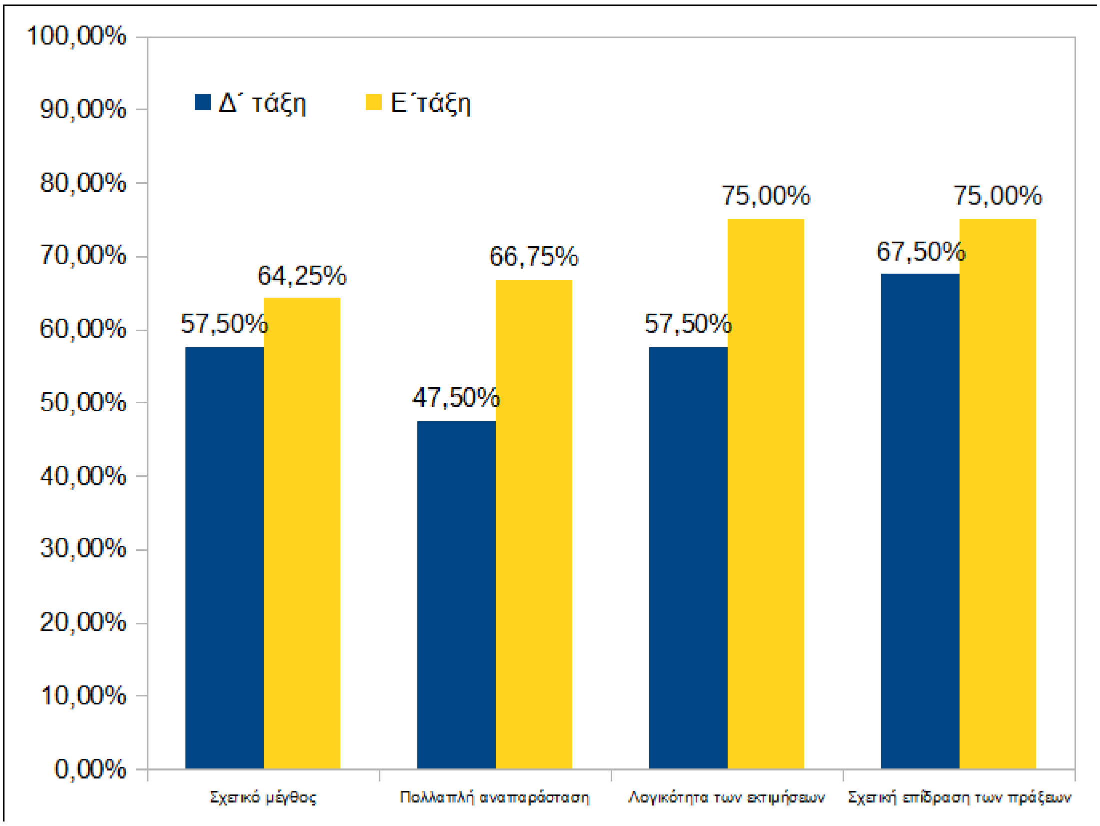
Σχήμα 6: Ποσοστό επιτυχίας στις δοκιμασίες του Έργου 4 (Σχετική επίδραση των πράξεων στους αριθμούς) ως προς την ηλικιακή ομάδα

3.2.5 Σύγκριση Επιδόσεων στα Έργα

Με σκοπό να ελεγχθεί αν οι επιδόσεις των παιδιών διαφοροποιήθηκαν ως προς τα έργα, πραγματοποιήθηκε t-τεστ για συσχετισμένες ομάδες. Η ανάλυση έδειξε ότι, για το σύνολο των συμμετεχόντων, το Έργο 2 ήταν πιο απαιτητικό σε σχέση με το Έργο 3 ($t(59) = -2{,}251$, $p < .05$) και με το Έργο 4 ($t(59) = -3{,}579$, $p < .001$), ενώ το Έργο 4 ήταν αυτό στο οποίο οι συμμετέχοντες εμφάνισαν καλύτερες επιδόσεις σε σχέση με το Έργο 1 ($t(59) = -2{,}424$, $p < .01$) και με το Έργο 2 ($t(59) = -3{,}579$, $p < .001$).

Όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε για κάθε ηλικιακή ομάδα ξεχωριστά, τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν σε μεγάλο βαθμό. Πιο συγκεκριμένα, οι επιδόσεις των παιδιών της Δ΄ τάξης στο Έργο 2 ήταν στατιστικά σημαντικά χαμηλότερες σε σχέση με το Έργο 1 ($t(29) = 1{,}755$, $p < .05$), με το Έργο 3 ($t(29) = -2{,}449$, $p < .05$) και με το Έργο 4 ($t(29) = -3{,}449$, $p < .001$).

Αναφορικά με τις επιδόσεις των παιδιών της Ε΄ τάξης το t-test για συσχετισμένες ομάδες έδειξε ότι στο Έργο 1 αυτές ήταν στατιστικά σημαντικά χαμηλότερες σε σχέση με το Έργο 3 ($t(29) = -1{,}718$, $p < .05$) και με το Έργο 4 ($t(29) = -1{,}783$, $p < .05$). Στο Σχήμα 7 παρατίθενται αναλυτικά τα ποσοστά επιτυχίας των συμμετεχόντων ως προς το είδος του έργου και την ηλικία.



Σχήμα 7: Ποσοστό επιτυχίας στα συστατικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού ως προς την ηλικιακή ομάδα

3.3 Ο ρόλος του πλαισίου

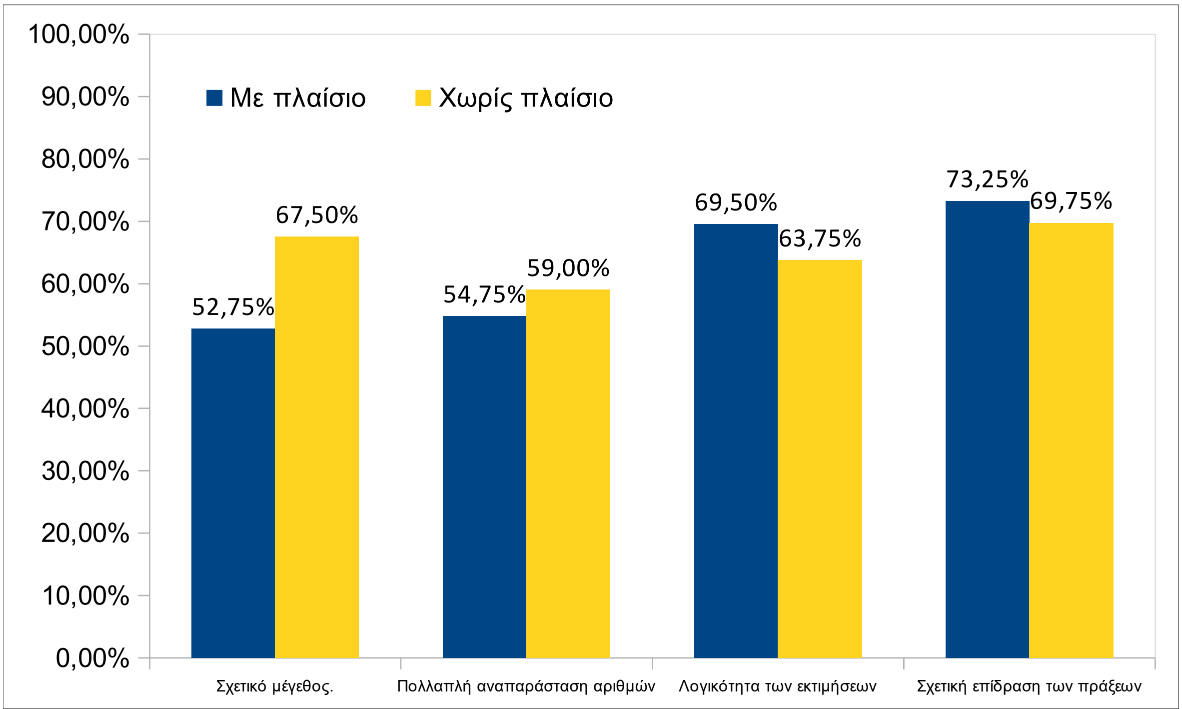
3.3.1 Ο ρόλος του πλαισίου στις επιδόσεις ανά έργο

Προκειμένου να ελεγχθεί αν η ύπαρξη ενός πλαισίου στα Έργα[4] επηρέασε τις επιδόσεις των συμμετεχόντων πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε ότι στο σύνολο των δοκιμασιών δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις ($t\ (58) = -{,}476$, $p = .318$), δηλαδή δεν έπαιξε ρόλο η παρουσία του πλαισίου στις επιδόσεις των συμμετεχόντων. Με άλλα λόγια, οι μαθητές παρουσίασαν παρόμοιες επιδόσεις τόσο στα έργα με πλαίσιο όσο και στα έργα χωρίς πλαίσιο. Ειδικότερα, το ποσοστό επιτυχίας στις

[4] Οι μισοί συμμετέχοντες από κάθε ηλικιακή ομάδα είδε τις δοκιμασίες όλων των έργων με πλαίσιο, ενώ οι υπόλοιποι μισοί χωρίς πλαίσιο.

δοκιμασίες με πλαίσιο ήταν 62,5 % και στις δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο ήταν 64,93%.

Όταν η ίδια ανάλυση έγινε ξεχωριστά για κάθε έργο, στατιστικά σημαντικές διαφορές βρέθηκαν μόνο στο Έργο 1 (t (58) = -1,903, p < .05). Συγκεκριμένα, τα παιδιά που είδαν τις δοκιμασίες του Έργου 1 (Σχετικό μέγεθος των αριθμών) χωρίς πλαίσιο είχαν στατιστικά σημαντικά καλύτερες επιδόσεις (ποσοστό επιτυχίας: 67,5%) σε σχέση με τα παιδιά που είδαν τις ίδιες δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο (ποσοστό επιτυχίας: 52,75%). Σε κανένα άλλο έργο, το πλαίσιο δεν επηρέασε τις επιδόσεις των παιδιών (t (58) = -,553, p = .291, t (58) = ,810, p = .211 και t (58) = -,646, p = .261, αντίστοιχα για το Έργο 2, το Έργο 3 και το Έργο 4). Με άλλα λόγια, ευνοούνταν η επιτυχία των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες για το Σχετικό μέγεθος των αριθμών, όταν αυτές δεν συνοδεύονταν από κάποιο σενάριο. Αντίθετα, δεν βρέθηκε να στηρίζονται οι συμμετέχοντες στο πλαίσιο που συνόδευε τις δοκιμασίες για την Πολλαπλή αναπαράσταση των αριθμών. Το Σχήμα 8 που ακολουθεί παρουσιάζει αυτά τα στοιχεία.



Σχήμα 8: Ποσοστό επιτυχίας των συμμετεχόντων σε κάθε έργο ως προς την παρουσία πλαισίου

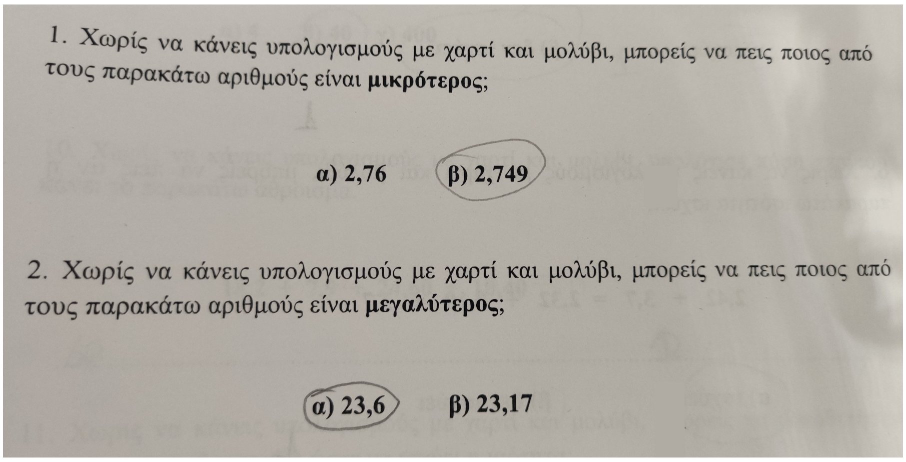
3.3.2 Ο ρόλος του πλαισίου ανά ηλιακή ομάδα

Τέλος, εξετάστηκε ο ρόλος του πλαισίου στις επιδόσεις κάθε ηλικιακής ομάδας ξεχωριστά και πραγματοποιήθηκαν t-tests για ανεξάρτητα δείγματα. Οι αναλύσεις έδειξαν αντιφατικά αποτελέσματα για τις δυο ηλικιακές ομάδες. Πιο συγκεκριμένα, η ύπαρξη πλαισίου στα έργα ευνόησε περισσότερο τους μαθητές της Ε΄ τάξης, ενώ η απουσία πλαισίου στις δοκιμασίες έφερε καλύτερες επιδόσεις στους μαθητές της Δ΄ τάξης.

Πιο αναλυτικά, βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις των μαθητών της Δ΄ τάξης ως προς τον ρόλο του πλαισίου στο Έργο 1 (t (28) = -1,972, p < .05), στο Έργο 3 (t (28) = -3,791, p < .001) και στο Έργο 4 (t (28) = -1,838, p < .05), ενώ οριακά δεν εντοπίστηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στο Έργο 2 (t (28) = -1,564, p = .065). Η ανάλυση αυτή δείχνει ότι οι επιδόσεις των παιδιών της Δ ΄τάξης στα έργα που αφορούσαν το σχετικό μέγεθος των αριθμών, τον έλεγχο της λογικότητας των εκτιμήσεων και την αναγνώριση της σχετικής επίδρασης των πράξεων στους αριθμούς (Έργα 1, 3 και 4 αντίστοιχα) επηρεάστηκαν από την ύπαρξη πλαισίου στις δοκιμασίες.

Για παράδειγμα, για έναν μαθητής της Δ΄ τάξης (Αρ. Πρ. 38), όπως φαίνεται στην Εικόνα 13, ήταν πιο εύκολο να βρει τον μικρότερο ή τον μεγαλύτερο αριθμό ανάμεσα σε δύο, όταν δεν υπήρχε πλαίσιο στην πρώτη και δεύτερη δοκιμασία του Έργου 1, παρά όταν παρουσιάζονταν με πλαίσιο, όπως φαίνεται (βλ. Εικόνα 14) από μια άλλη μαθήτρια στην ίδια ηλικιακή ομάδα (Αρ. Πρ. 53), η οποία δεν απάντησε σωστά στις ίδιες πλαισιωμένες δοκιμασίες.

Εικόνα 13: Απάντηση μαθητή Δ΄ τάξης (Αρ. Πρ. 38) στην πρώτη και τη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 1 χωρίς πλαίσιο



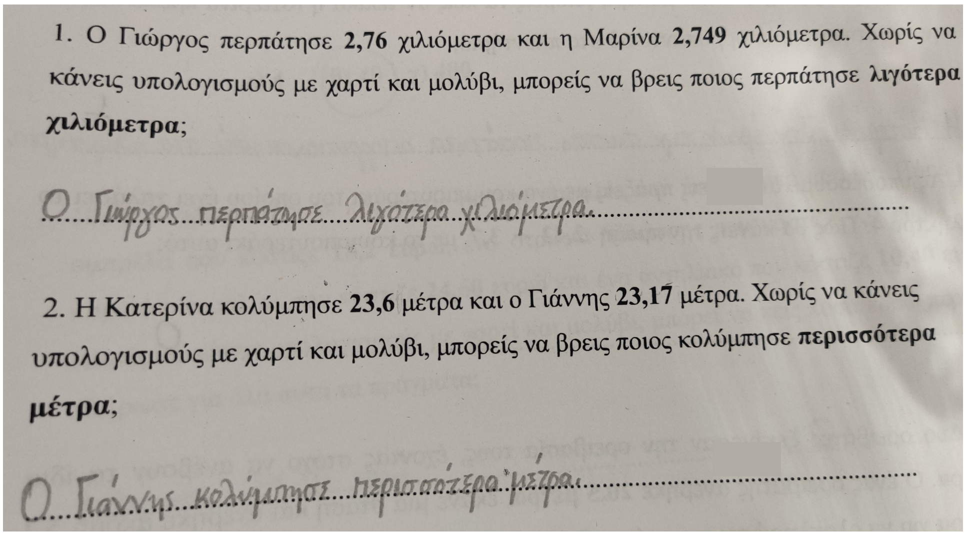
1. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να πεις ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι **μικρότερος**;

α) 2,76 **β) 2,749**

2. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να πεις ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι **μεγαλύτερος**;

α) 23,6 **β) 23,17**

Εικόνα 14: Απάντηση μαθήτριας Δ΄ τάξης (Αρ. Πρ. 53) στην πρώτη και τη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 1 με πλαίσιο


1. Ο Γιώργος περπάτησε **2,76** χιλιόμετρα και η Μαρίνα **2,749** χιλιόμετρα. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βρεις ποιος περπάτησε **λιγότερα χιλιόμετρα**;

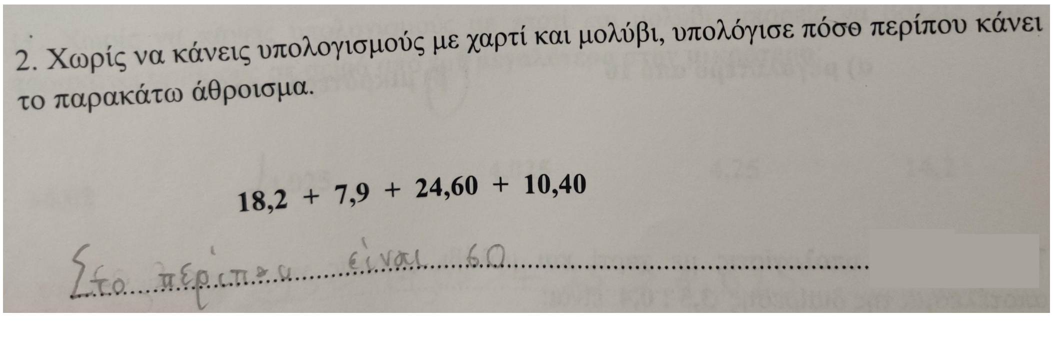
Ο Γιώργος περπάτησε λιγότερα χιλιόμετρα.

2. Η Κατερίνα κολύμπησε **23,6** μέτρα και ο Γιάννης **23,17** μέτρα. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βρεις ποιος κολύμπησε **περισσότερα μέτρα**;

Ο Γιάννης κολύμπησε περισσότερα μέτρα.

Αντίστοιχο παράδειγμα εντοπίστηκε και στις δοκιμασίες του Έργου 3. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 15, ένας μαθητής της Δ΄ τάξης (Αρ. Πρ. 40) κατάφερε να εκτιμήσει σωστά το άθροισμα “18,2 + 7,9 + 24,60 + 10,40” της δεύτερης δοκιμασίας, η οποία δεν ήταν πλαισιωμένη. Από την άλλη, ένας άλλος μαθητής της Δ΄ τάξης (Αρ. Πρ. 56), η απάντηση του οποίου φαίνεται στην Εικόνα 16, είδε την ίδια δοκιμασία με πλαίσιο και, ενδεχομένως, αυτό επηρέασε την απάντησή του, καθώς δεν κατάφερε να εκτιμήσει το άθροισμα και κατέφυγε στην πρόσθεση με κάθετη πράξη, την οποία εκτέλεσε και με λάθος τρόπο.

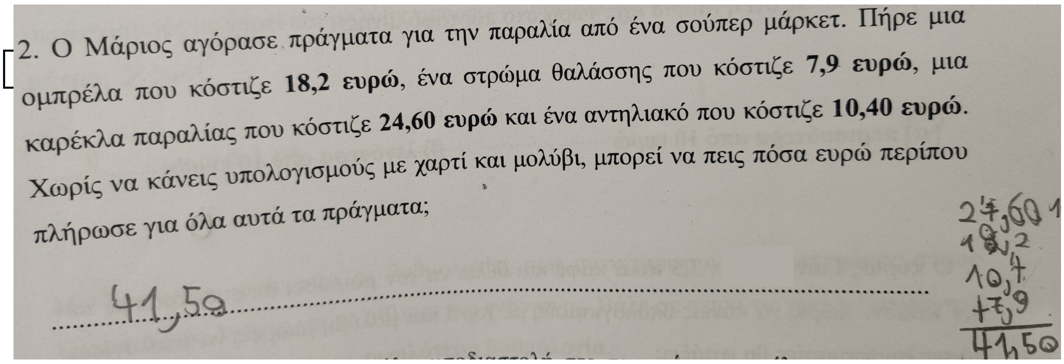
Εικόνα 15: Απάντηση μαθητή Δ΄ τάξης (Αρ. Πρ. 40) στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 3 χωρίς πλαίσιο


2. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, υπολόγισε πόσο περίπου κάνει το παρακάτω άθροισμα.

18,2 + 7,9 + 24,60 + 10,40

Στο περίπου είναι 60

Εικόνα 16: Απάντηση μαθητή Δ΄ τάξης (Αρ. Πρ. 56) στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 3 με πλαίσιο



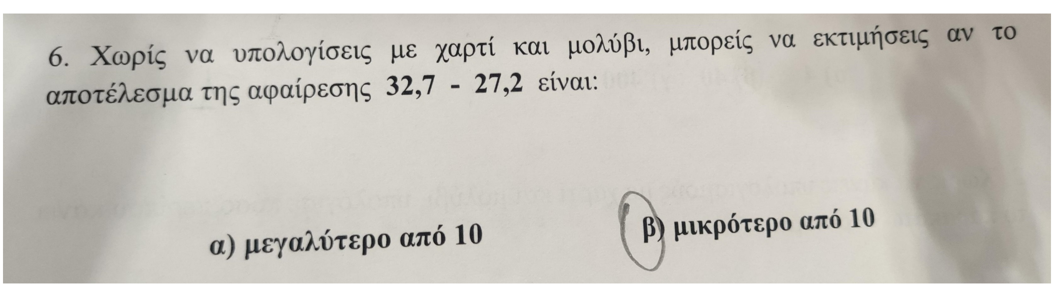
2. Ο Μάριος αγόρασε πράγματα για την παραλία από ένα σούπερ μάρκετ. Πήρε μια ομπρέλα που κόστιζε **18,2 ευρώ**, ένα στρώμα θαλάσσης που κόστιζε **7,9 ευρώ**, μια καρέκλα παραλίας που κόστιζε **24,60 ευρώ** και ένα αντηλιακό που κόστιζε **10,40 ευρώ**. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορεί να πεις πόσα ευρώ περίπου πλήρωσε για όλα αυτά τα πράγματα;

41,50

24,60
18,2
10,4
+7,9
41,50

Σχετικά με την επίδραση του πλαισίου στις επιδόσεις που παρουσίασαν οι μαθητές της Δ΄ τάξης στις δοκιμασίες του Έργου 4 εντοπίσθηκαν εξίσου αξιοσημείωτα παραδείγματα, που δείχνουν ότι το πλαίσιο είχε αρνητική επίδραση στις επιδόσεις των παιδιών αυτής της ηλικιακής ομάδας. Για παράδειγμα, στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 4, όπου οι μαθητές έπρεπε να εκτιμήσουν αν το αποτέλεσμα της αφαίρεσης “32,7-27,2” είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από 10, δυο μαθητές (Αρ. Πρ. 40 και Αρ. Πρ. 46) που είδαν τις δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο απάντησαν σωστά στη δοκιμασία (βλ. Εικόνα 16 και Εικόνα 17). Από την άλλη πλευρά, δυο διαφορετικοί μαθητές (Αρ. Πρ. 53 και Αρ. Πρ. 60) που είδαν τη δοκιμασία πλαισιωμένη, φαίνεται ότι επηρεάστηκαν από το πλαίσιο και δεν κατάφεραν να εκτιμήσουν το αποτέλεσμα της αφαίρεσης, όπως φαίνεται στην Εικόνα 18 και την Εικόνα 19. Για την ακρίβεια, οι επιδόσεις τους ήταν σημαντικά καλύτερες όταν δεν υπήρχε το πλαίσιο (65%, 67,5% και 72,5%, για τα Έργα 1, 3 και 4 αντίστοιχα).

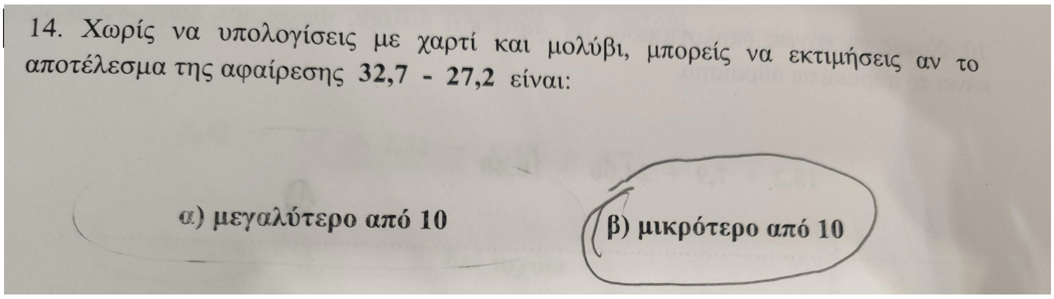
Εικόνα 17: Απάντηση μαθητή Δ΄ τάξης (Αρ. Πρ. 40) στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 4 χωρίς πλαίσιο



6. Χωρίς να υπολογίσεις με χαρτί και μολύβι, μπορείς να εκτιμήσεις αν το αποτέλεσμα της αφαίρεσης **32,7 - 27,2** είναι:

α) μεγαλύτερο από 10 **β) μικρότερο από 10**

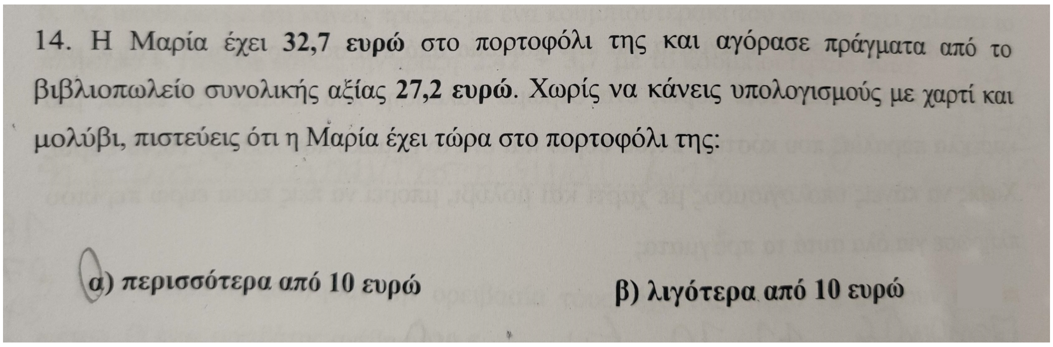
Εικόνα 18: Απάντηση μαθητή Δ΄ τάξης (Αρ. Πρ. 46) στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 4 χωρίς πλαίσιο



14. Χωρίς να υπολογίσεις με χαρτί και μολύβι, μπορείς να εκτιμήσεις αν το αποτέλεσμα της αφαίρεσης **32,7 - 27,2** είναι:

α) μεγαλύτερο από 10 **β) μικρότερο από 10**

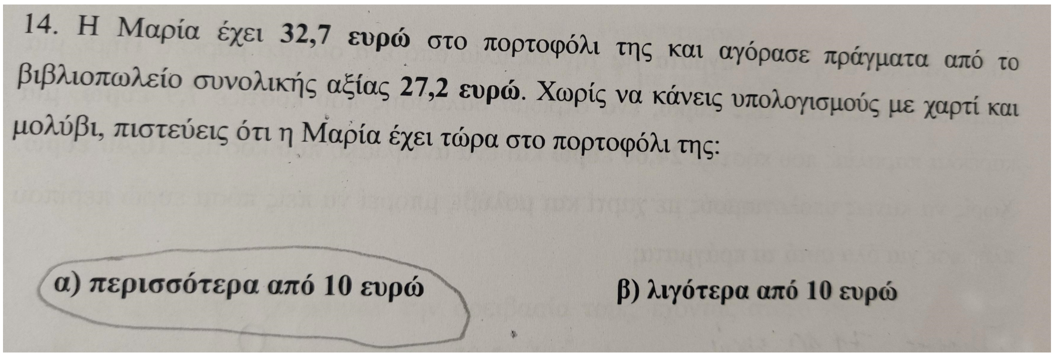
Εικόνα 19: Απάντηση μαθήτριας Δ΄ τάξης (Αρ. Πρ. 53) στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 4 με πλαίσιο



14. Η Μαρία έχει **32,7 ευρώ** στο πορτοφόλι της και αγόρασε πράγματα από το βιβλιοπωλείο συνολικής αξίας **27,2 ευρώ**. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, πιστεύεις ότι η Μαρία έχει τώρα στο πορτοφόλι της:

α) περισσότερα από 10 ευρώ **β) λιγότερα από 10 ευρώ**

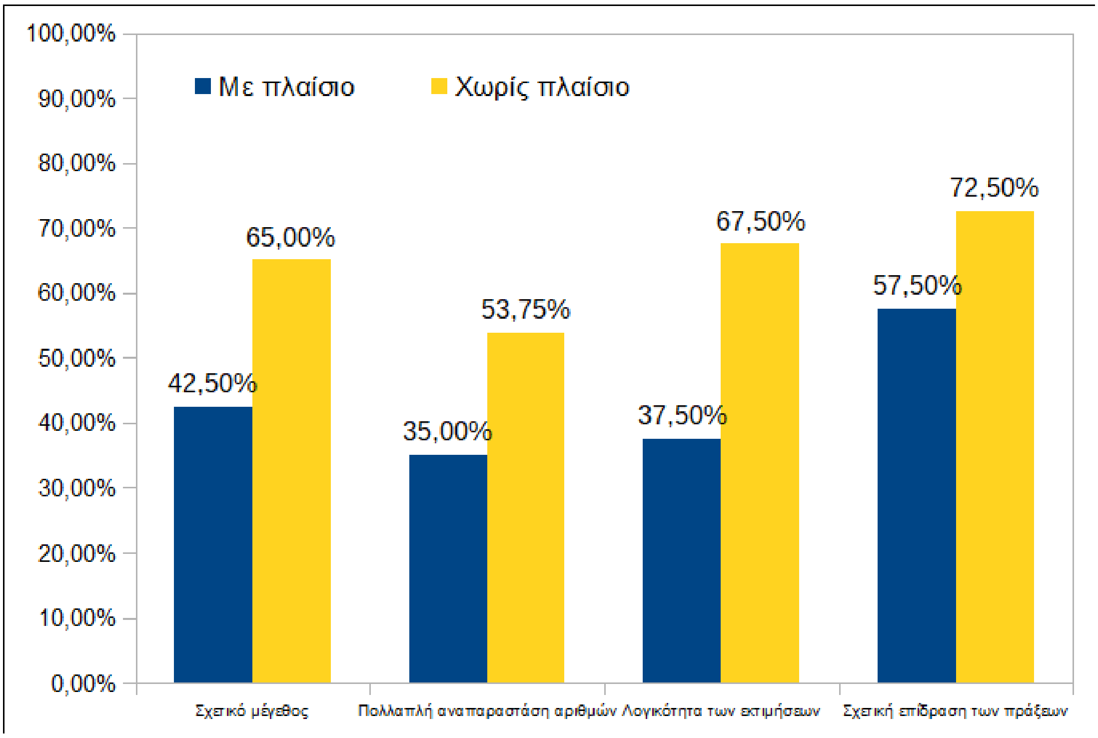
Εικόνα 20: Απάντηση μαθητή Δ΄ τάξης (Αρ. Πρ. 60) στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 4 με πλαίσιο



14. Η Μαρία έχει **32,7 ευρώ** στο πορτοφόλι της και αγόρασε πράγματα από το βιβλιοπωλείο συνολικής αξίας **27,2 ευρώ**. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, πιστεύεις ότι η Μαρία έχει τώρα στο πορτοφόλι της:

α) περισσότερα από 10 ευρώ **β) λιγότερα από 10 ευρώ**

Ωστόσο, η παρουσία ή η απουσία του πλαισίου δεν βρέθηκε οριακά να επηρεάζει τις επιδόσεις των παιδιών της Δ΄ τάξης στο Έργο 2 που αφορούσε την πολλαπλή αναπαράσταση αριθμών και αριθμητικών πράξεων. Στο Σχήμα 9 παρουσιάζονται τα ποσοστά επιτυχίας της επίδοσης των παιδιών της Δ΄ τάξης για κάθε έργο είτε αυτό συνοδευόταν από πλαίσιο είτε δεν συνοδεύονταν.

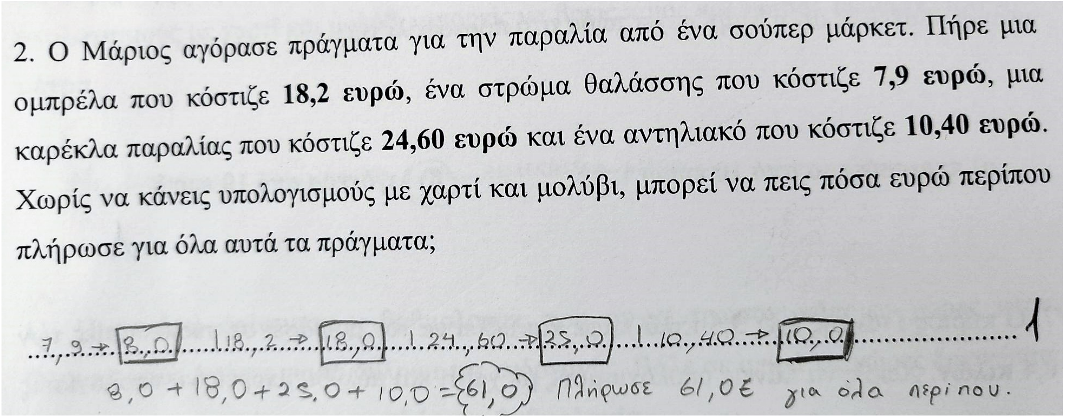


Σχήμα 9: Ποσοστά επιτυχίας σε κάθε έργο ως προς την παρουσία πλαισίου για τα παιδιά της Δ΄ τάξης

Όταν έγινε η ίδια ανάλυση για τους μαθητές της Ε΄ τάξης, εντοπίστηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές αναφορικά με τον ρόλο του πλαισίου στο Έργο 3 (t (28) = 3,509 p < .001) και στο Έργο 4 (t (28) = 2,745, p < .01). Με άλλα λόγια, σε αυτά τα δύο έργα το πλαίσιο επηρέασε τις επιδόσεις των παιδιών, οι οποίες ήταν υψηλότερες όταν υπήρχε πλαίσιο (ποσοστά επιτυχίας: 88,25% για το Έργο 3 και 82,25% για το Έργο 4), παρά όταν δεν υπήρχε.

Για παράδειγμα, στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 3 φαίνεται πως το πλαίσιο να ευνόησε τις απαντήσεις κάποιων μαθητών. Η μαθήτρια της Ε΄ τάξης (Αρ. Πρ. 19), η απάντηση της οποίας παρουσιάζεται στην Εικόνα 20, είδε τις δοκιμασίες με πλαίσιο και κατάφερε να εκτιμήσει το άθροισμα ¨18,2 + 7,9 + 24,6 + 10,4", χρησιμοποιώντας τη στρατηγικής της στρογγυλοποίησης, η οποία εμπίπτει σε στρατηγικές της αίσθησης του αριθμού. Αντίθετα, ένας άλλος μαθητής (Αρ. Πρ. 3) της ίδιας ηλικιακής ομάδας, που είδε τις δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο δεν εκτίμησε το άθροισμα, αλλά η απουσία ενός πλαισίου οδήγησε τον μαθητή στην εύρεση μιας απάντησης με ακρίβεια, όπως φαίνεται στην Εικόνα 21.

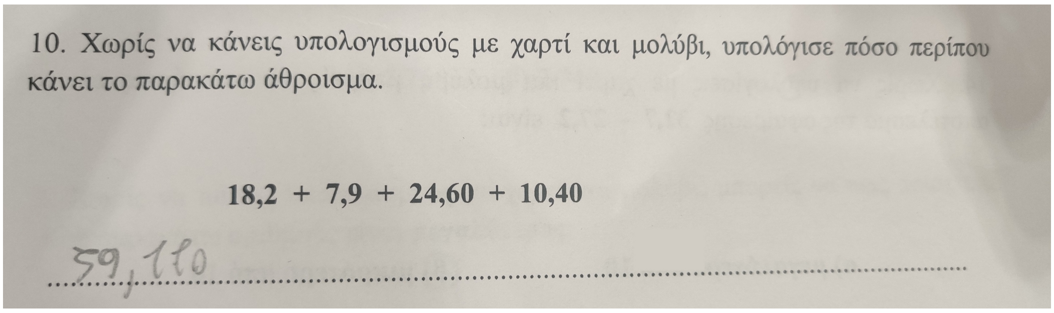
Εικόνα 21: Απάντηση μαθήτριας Ε΄ τάξης (Αρ. Πρ. 19) στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 3 με πλαίσιο


2. Ο Μάριος αγόρασε πράγματα για την παραλία από ένα σούπερ μάρκετ. Πήρε μια ομπρέλα που κόστιζε **18,2 ευρώ**, ένα στρώμα θαλάσσης που κόστιζε **7,9 ευρώ**, μια καρέκλα παραλίας που κόστιζε **24,60 ευρώ** και ένα αντηλιακό που κόστιζε **10,40 ευρώ**. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορεί να πεις πόσα ευρώ περίπου πλήρωσε για όλα αυτά τα πράγματα;

7,9 → 8,0 | 18,2 → 18,0 | 24,60 → 25,0 | 10,40 → 10,0 1

8,0 + 18,0 + 25,0 + 10,0 = 61,0 Πλήρωσε 61,0€ για όλα περίπου.

Εικόνα 22: Απάντηση μαθητή Ε΄ τάξης (Αρ. Πρ. 3) στη δεύτερη δοκιμασία του Έργου 3 χωρίς πλαίσιο

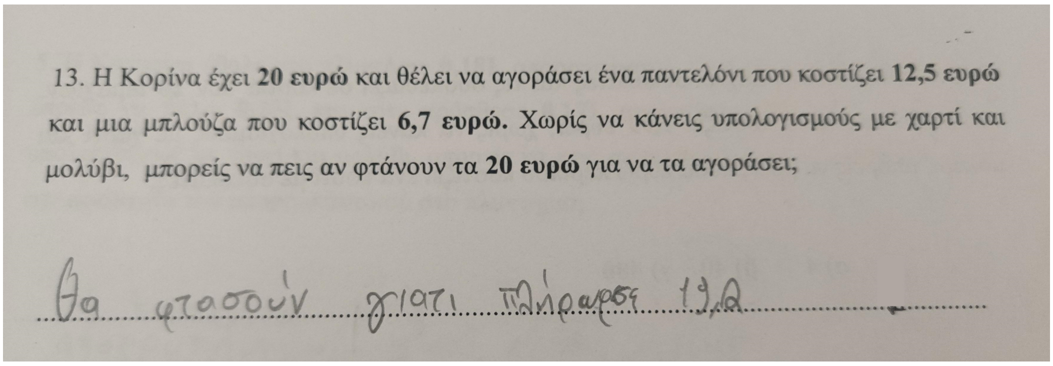

10. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, υπολόγισε πόσο περίπου κάνει το παρακάτω άθροισμα.

18,2 + 7,9 + 24,60 + 10,40

59,110

Αξιοσημείωτο παράδειγμα της επίδρασης του πλαισίου εντοπίστηκε και στην πρώτη δοκιμασία του Έργου 4. Η δοκιμασία ζητούσε από τα παιδιά να αξιολογήσουν αν το αποτέλεσμα της πρόσθεσης “12,5 + 6,7” είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από 20. Ο μαθητής της Ε΄ τάξης (Αρ. Πρ. 24) φαίνεται ότι ευνοήθηκε από το πλαίσιο, καθώς απάντησε σωστά στην ερώτηση της δοκιμασίας, καταλήγοντας σε μια απάντηση, ενδεχομένως, μετά από νοερούς υπολογισμούς (βλ. Εικόνα 22). Αντίθετα, όταν ένας άλλος μαθητής της Ε΄ τάξης (Αρ. Πρ. 15) είδε την ίδια δοκιμασία χωρίς κανένα πλαίσιο και ίσως αυτό τον κατεύθυνε σε μια αλγοριθμική διαδικασία προκειμένου να απαντήσει στη δοκιμασία, η οποία σε καμία περίπτωση δεν παραπέμπει σε στρατηγική αίσθησης του αριθμού και ως εκ τούτου η απάντηση κωδικοποιήθηκε ως λάθος (βλ. Εικόνα 23).

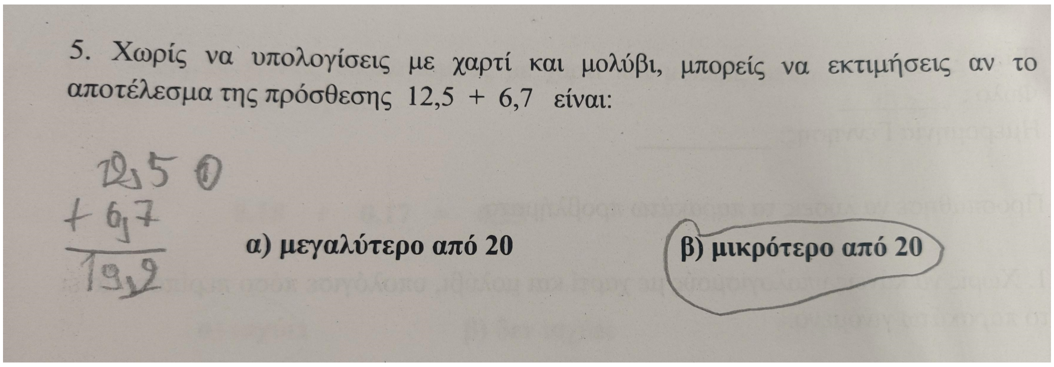
Εικόνα 23: Απάντηση μαθητή Ε΄ τάξης (Αρ. Πρ. 24) στην πρώτη δοκιμασία του Έργου 4 με πλαίσιο



13. Η Κορίνα έχει **20 ευρώ** και θέλει να αγοράσει ένα παντελόνι που κοστίζει **12,5 ευρώ** και μια μπλούζα που κοστίζει **6,7 ευρώ.** Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να πεις αν φτάνουν τα **20 ευρώ** για να τα αγοράσει;

Θα φτασούν γιατί πλήρωσε 19,2

Εικόνα 24: Απάντηση μαθητή Ε΄ τάξης (Αρ. Πρ. 15) στην πρώτη δοκιμασία του Έργου 4 χωρίς πλαίσιο

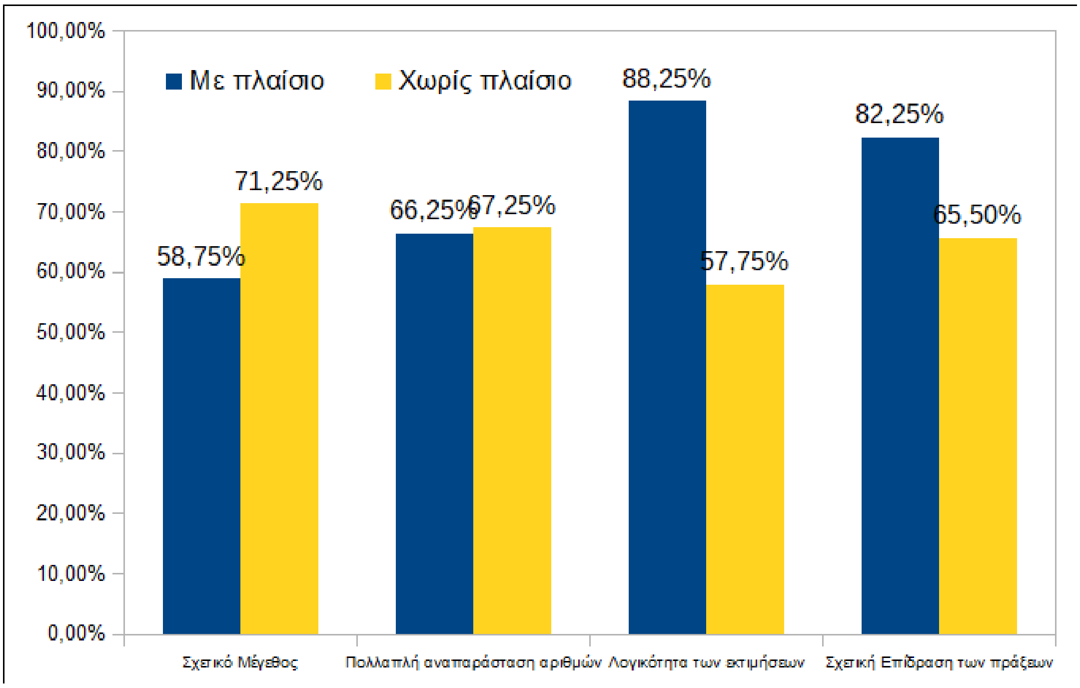


5. Χωρίς να υπολογίσεις με χαρτί και μολύβι, μπορείς να εκτιμήσεις αν το αποτέλεσμα της πρόσθεσης 12,5 + 6,7 είναι:

12,5 0
+ 6,7
19,2

α) μεγαλύτερο από 20 **β) μικρότερο από 20**

Ωστόσο, η ίδια ανάλυση δεν έδειξε στατιστικά σημαντικές διαφορές στο Έργο 1 (t (28) = -1,126, p = .135) και στο Έργο 2 (t (28) = -,110, p = .456). Δηλαδή, το πλαίσιο δεν επηρέασε σε στατιστικά σημαντικά τις επιδόσεις των παιδιών της Ε΄ τάξης σε αυτά τα δύο έργα, καθώς τα ποσοστά επιτυχίας τους τόσο στις πλαισιωμένες δοκιμασίες όσο και στις μη πλαισιωμένες ήταν παρόμοια. Στο Σχήμα 10 παρουσιάζονται τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων των μαθητών της Ε΄ τάξης στα έργα με την παρουσία πλαισίου και χωρίς αυτό.



Σχήμα 10: Ποσοστό επιτυχίας σε κάθε έργο ως προς την παρουσία πλαισίου για τα παιδιά της Ε΄ τάξης

Κεφάλαιο 4 : Συμπεράσματα-Συζήτηση

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να εξετάσει την ικανότητα παιδιών Δ΄ τάξης και Ε΄ τάξης για αίσθηση του αριθμού σε έργα με δεκαδικούς αριθμούς και την επίδραση των πλαισιωμένων και μη πλαισιωμένων προβλημάτων στην ικανότητα αυτή. Τρία είναι τα κύρια ευρήματα.

Το πρώτο εύρημα αφορά την ικανότητα των παιδιών για αίσθηση του αριθμού στους δεκαδικούς αριθμούς, η οποία βρέθηκε να είναι σε σχετικά μέτριο επίπεδο, καθώς απαντούσαν σωστά σε περίπου 10 από τις 16 δοκιμασίες (ποσοστό επιτυχίας: 64,87%). Αυτό το εύρημα συμφωνεί με τα αποτελέσματα προγενέστερων ερευνών. Για παράδειγμα, ο Yang (2005) επισήμανε τις μειωμένες επιδόσεις των μαθητών έκτης τάξης στην Ταϊβάν σε έργα αίσθησης αριθμού με ρητούς αριθμούς. Στην έρευνα αυτή η περιορισμένη ικανότητα για αίσθηση του αριθμού εξηγείται από τις περιορισμένες στρατηγικές της αίσθησης του αριθμού και συγκεκριμένα από την προσκόλληση των μαθητών σε διαδικαστικούς κανόνες. Ομοίως, τόσο ο Alsawaie (2011) βρήκε αποθαρρυντικά αποτελέσματα για την ικανότητα των μαθητών έκτης τάξης για αίσθηση του αριθμού στα Ηνωμένα Αραβικά Εμιράτα, όσο και οι Reys και Yang (1998) βρήκαν τις επιδόσεις των μαθητών έκτης και όγδοης τάξης στην Ταϊβάν μειωμένες.

Η ικανότητα των συμμετεχόντων για αίσθηση του αριθμού διαφέρει ανά ηλικιακή ομάδα, μιας και οι μαθητές της Ε΄ τάξης εμφάνισαν καλύτερες και αρκετά ικανοποιητικές επιδόσεις (70,18%) σε σχέση με τους μαθητές της Δ΄ τάξης (57,50%). Επομένως, το εύρημα αυτό επιβεβαιώνει ευρήματα άλλων ερευνών που υποστηρίζουν τη βαθμιαία ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού. Για παράδειγμα, οι Lemaire και Lecacheur (2011) υποστήριξαν τη διεύρυνση των στρατηγικών αίσθησης του αριθμού που χρησιμοποιούν οι μαθητές με την ηλικία. Παρόμοια, οι Δεσλή και Μυρόβαλη (2017) βρήκαν καλύτερες τις επιδόσεις των μαθητών της Στ΄ τάξης από αυτές των μαθητών της Ε΄ τάξης και, επιπλέον, οι Δεσλή και Λιόλιου (2017) επισήμαναν στα ευρήματα της έρευνάς τους ότι οι μαθητές της Δ΄ τάξης χρησιμοποιούσαν περισσότερο στρατηγικές αίσθησης του αριθμού σε σχέση με τους μαθητές της Γ΄ τάξης που συχνά κατέφευγαν σε αλγοριθμικές διαδικασίες. Αν και στην παρούσα έρευνα δεν εξετάστηκαν οι στρατηγικές των παιδιών, η διαφοροποίηση στην ικανότητα αίσθησης του αριθμού ανάμεσα στις δυο ηλικιακές ομάδες ενδεχομένως εξηγείται αφενός από το γεγονός ότι οι μαθητές μεγαλύτερης τάξης έχουν αναπτύξει σε μεγαλύτερο βαθμό στρατηγικές αίσθησης του αριθμού και αφετέρου είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με τους δεκαδικούς αριθμούς.

Ένα δεύτερο εύρημα που αναδείχθηκε από την παρούσα μελέτη είναι η ύπαρξη κάποιων συγκεκριμένων δομικών στοιχείων της αίσθησης του αριθμού που ευνοούν τις επιδόσεις των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, και οι δυο ηλικιακές ομάδες επέδειξαν καλύτερες επιδόσεις στο έργο της "Επίδρασης των πράξεων στους αριθμούς" σε σχέση με τα υπόλοιπα έργα. Το παραπάνω εύρημα επιβεβαιώνει τα αποτελέσματα των Δεσλή και Μυρόβαλη (2014), στην έρευνα των οποίων οι μαθητές Ε΄ και Στ΄ τάξης εμφάνισαν καλύτερες επιδόσεις στα προβλήματα αριθμητικών πράξεων σε σχέση με τα υπόλοιπα έργα. Αυτό μπορεί να φαίνεται λογικό, καθώς το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών αφιερώνει πολλές διδακτικές ώρες στις αριθμητικές πράξεις τόσο στους φυσικούς, όσο και στους δεκαδικούς αριθμούς και, ως εκ τούτου, οι μαθητές εκδηλώνουν ευχέρεια σε αυτές. Είναι χαρακτηριστικό ότι μεγάλο μέρος της ύλης της Δ΄ τάξης αφορά στις πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς, γεγονός που σημαίνει ότι τα παιδιά και των δυο ηλικιακών ομάδων αφιερώνουν αρκετό χρόνο στις πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους.

Σημαντικές διαφορές ως προς τις επιδόσεις των δυο ηλικιακών ομάδων σημειώθηκαν στο έργο που αφορούσε τη "Λογικότητα των εκτιμήσεων", αφού οι μαθητές της Ε΄ τάξης είχαν αρκετά ικανοποιητικές επιδόσεις (75%), ενώ οι μαθητές της Δ΄ τάξης παρουσίασαν χαμηλές επιδόσεις (57,50%). Οι εξαιρετικά καλές επιδόσεις των μαθητών της Ε΄ τάξης βασίζονταν κυρίως σε στρογγυλοποίηση, στρατηγική που συνδέεται με την αίσθηση του αριθμού. Για παράδειγμα, μια μαθήτρια της Ε΄ τάξης, όταν της ζητήθηκε να τοποθετήσει την υποδιαστολή στο αποτέλεσμα της πράξης "3,90 Χ 7,9 = 30810", στρογγυλοποίησε πρώτα τους δεκαδικούς αριθμούς στο ψηφίο των ακέραιων μονάδων, υπολόγισε μετά το γινόμενο των στρογγυλοποιημένων αριθμών και, τέλος, τοποθέτησε σωστά την υποδιαστολή. Αντίθετα, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές της Δ΄ τάξης κατέφευγαν συχνά σε αλγόριθμους και τεχνικές βασισμένες στους κανόνες, στοιχεία που δεν παραπέμπουν σε αίσθηση του αριθμού. Σε ένα ακόμη παράδειγμα μια μαθήτρια της Δ΄ τάξης προκειμένου να υπολογίσει το άθροισμα "18,2 + 7,9 + 24,6 + 10,40", τοποθέτησε κάθετα τους αριθμούς, εκτέλεσε την πράξη και βρήκε με ακρίβεια το αποτέλεσμα της πρόσθεσης μέσω του αλγόριθμου, ενώ μια άλλη μαθήτρια της Ε΄ τάξης στρογγυλοποίησε τους αριθμούς στο ψηφίο των μονάδων και υπολόγισε κατά προσέγγιση το άθροισμα. Τα ευρήματα προγενέστερων ερευνών συμφωνούν με τα ευρήματα που βρέθηκαν για τους μαθητές της Δ΄ τάξης. Συγκεκριμένα, οι μελέτες εντοπίζουν δυσκολίες στους μαθητές σχετικά με τη “Λογικότητα των εκτιμήσεων”, εξαιτίας της τάσης των μαθητών για αλγοριθμική επίλυση των προβλημάτων όπως, για παράδειγμα, στην έρευνα των Yang και Li (2015) σε μαθητές πέμπτης τάξης στη Ταϊβάν, αλλά και στη μελέτη του Yang (2005) σε μαθητές έκτης τάξης στη Ταϊβάν. Χαρακτηριστικά ο Yang (2005) σε παρόμοια δοκιμασία για την εκτίμηση ενός αθροίσματος εντόπισε την προτίμηση των μαθητών στον γραπτό αλγόριθμο, λόγω της έντονης δυσκολίας των παιδιών στη στρογγυλοποίηση και, επιπλέον, ο ίδιος τονίζει στα ευρήματά του την αποτυχία των μαθητών σε παρόμοια δοκιμασία σχετικά με την τοποθέτηση της υποδιαστολής σε ένα γινόμενο. Η χαμηλή επίδοση των μαθητών της Δ΄ τάξης πιθανόν να συνδέεται με το γεγονός ότι το πρόγραμμα σπουδών, αλλά και οι εκπαιδευτικοί, εστιάζουν συχνά στα βήματα για την εκτέλεση των αλγόριθμων, προκειμένου να λυθεί ένα πρόβλημα, και στην εκμάθηση πιο τυποποιημένων μεθόδων και λιγότερο στην αξιολόγηση ενός υπολογιστικού αποτελέσματος και στον έλεγχο της λογικότητας του. Από την άλλη το υψηλό ποσοστό επιτυχίας των μαθητών της Ε΄ τάξης στη Λογικότητα των εκτιμήσεων ενδεχομένως να οφείλεται στη μεγαλύτερη εξοικείωση των μαθητών τόσο στους δεκαδικούς αριθμούς, όσο και στη συχνότερη ενασχόληση τους με προβλήματα του νέου σχολικού βιβλίου των μαθηματικών, τα οποία είναι προσανατολισμένα σύμφωνα με τους συγγραφείς στην καλλιέργεια στρατηγικών αίσθησης του αριθμού (Βρυώνης, Δουκάκης, Καρακώστα, Μπαραλής & Σταύρου, 2018)

Στο έργο που εξέταζε το “Σχετικό μέγεθος των αριθμών” οι μαθητές εμφάνισαν μέτριες επιδόσεις και παρατηρήθηκαν δυσκολίες στην αύξουσα και τη φθίνουσα διάταξη των δεκαδικών αριθμών. Για παράδειγμα, ήταν δύσκολο να τοποθετήσουν τους αριθμούς από το μικρότερο στον μεγαλύτερο και αντίστροφα, μιας και, όπως φάνηκε από τις απαντήσεις των παιδιών, υπήρξε δυσκολία στη διάκριση του δεκαδικού από το ακέραιο μέρος και, συχνά, οι μαθητές και των δύο ηλικιακών ομάδων αντιμετώπιζαν το ακέραιο και το δεκαδικό μέρος μεμονωμένα. Ωστόσο, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα ευρήματα στο έργο που μελετούσε την “Πολλαπλή αναπαράσταση των αριθμών”, δηλαδή την ικανότητα των μαθητών να εκφράσουν με διαφορετικούς τρόπους τους δεκαδικούς αριθμούς, αφού στο έργο αυτό και οι δύο ηλικιακές ομάδες εμφάνισαν χαμηλές επιδόσεις. Ήταν το πιο απαιτητικό έργο, καθώς λιγότεροι από τους μισούς μαθητές της Δ΄ τάξης απάντησαν σωστά στις δοκιμασίες (47,50%). Το έργο ήταν δύσκολο ακόμα και για τους μαθητές της Ε΄ τάξης, που είχαν σε αυτό τη χαμηλότερη επίδοσή τους σε σχέση με όλα τα έργα και επέδειξαν μέτριες επιδόσεις (66,75%). Παρόμοια ευρήματα σχετικά με τις δυσκολίες των μαθητών της Ε΄ τάξης στα έργα που αφορούν το "Σχετικό μέγεθος των αριθμών" και την "Πολλαπλή αναπαράσταση αριθμών και πράξεων" επιβεβαιώνει τα αποτελέσματα της έρευνα των Δεσλή και Μυρόβαλη (2017), οι οποίες τόνισαν ότι, παρόλο που οι μαθητές της Στ΄ τάξης δεν εμφάνισαν ιδιαίτερες δυσκολίες, οι μικρότεροι μαθητές της Ε΄ τάξης δυσκολεύτηκαν αρκετά. Τα συγκεκριμένα ευρήματα ενδεχομένως φανερώνουν πως οι μαθητές και των δυο ηλικιακών ομάδων χρειάζονται περισσότερο διδακτικό χρόνο στην αναγνώριση του "Σχετικού μεγέθους των αριθμών" και, πιο συγκεκριμένα, στη διάταξη δεκαδικών αριθμών, μιας και, όπως προαναφέρθηκε, εντοπίζεται δυσκολία στη διάκριση του δεκαδικού από το ακέραιο μέρος. Επιπλέον, όσον αφορά το εύρημα για την "Πολλαπλή αναπαράσταση αριθμών και πράξεων" φαίνεται εύλογο, καθώς καταναλώνεται πολύτιμος διδακτικός χρόνος στις πράξεις και δεν αφιερώνεται ιδιαίτερος χρόνος, ειδικότερα στις μικρές ηλικίες, στην κατανόηση των διάφορων μορφών έκφρασης των αριθμών με αποτέλεσμα να μη γίνεται εμβάθυνση στη δομή των αριθμών και των ισοδύναμων εκφράσεών τους.

Το τρίτο σημαντικό εύρημα που εξάγεται από την παρούσα έρευνα αφορά τον ρόλο του πλαισίου που συνοδεύει τα έργα αίσθησης του αριθμού. Στο σύνολο των δοκιμασιών της αίσθησης αριθμού η παρουσία πλαισίου δεν επηρέασε τις επιδόσεις των συμμετεχόντων, καθώς εμφάνισαν παρόμοιες επιδόσεις είτε υπήρχε το πλαίσιο (62,5%) είτε αυτό δεν υπήρχε (64,93%). Ωστόσο, τα αποτελέσματα είναι κάπως αντιφατικά, όταν εξετάζεται ο ρόλος του πλαισίου σε καθένα από τα συστατικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού και την ηλικιακή ομάδα. Φαίνεται ότι τα μη πλαισιωμένα έργα έφεραν καλύτερες επιδόσεις για τους μαθητές της Δ΄ τάξης από ότι τα πλαισιωμένα έργα, ενώ το πλαίσιο είτε ευνόησε είτε δεν επηρέασε τους μαθητές της Ε΄ τάξης. Πιο συγκεκριμένα, στις δοκιμασίες για το "Σχετικό μέγεθος των αριθμών" οι επιδόσεις των συμμετεχόντων της Δ΄ τάξης ήταν καλύτερες όταν δεν υπήρχε πλαίσιο. Αυτό το εύρημα επιβεβαιώνει και η έρευνα των Δεσλή και Παπαχρήστου (2019), οι οποίοι βρήκαν ότι η παρουσία ενός πλαισίου στα έργα με νοερούς υπολογισμούς δεν επηρέασε τις επιδόσεις των συμμετεχόντων. Το εύρημα ότι οι επιδόσεις των μαθητών στο "Σχετικό μέγεθος των αριθμών" να είναι καλύτερες στις δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο, μπορεί να συνδέεται με το γεγονός ότι οι μαθητές έχουν συνηθίσει στις σύντομες ερωτήσεις που αφορούν αριθμούς χωρίς να υπάρχει κάποιο σενάριο, μιας και τέτοιες ερωτήσεις υπάρχουν στα σχολικά βιβλία ή συχνά τέτοιες ερωτήσεις γίνονται από τον εκπαιδευτικό της τάξης. Επιπλέον, το εύρημα φαίνεται εύλογο, μιας και όταν δεν υπάρχει πλαίσιο, οι μαθητές δεν χρειάζεται να ερμηνεύσουν τις πληροφορίες, οπότε εστιάζουν περισσότερο στο μαθηματικό περιεχόμενο (Mann, 2006 στο Deslis & Desli, 2023).

Πιο αναλυτικά, η ύπαρξη ενός πλαισίου στα έργα ευνόησε τις επιδόσεις των μαθητών της Ε΄ τάξης στα έργα που μελετούσαν τη "Λογικότητα των εκτιμήσεων" και τη "Σχετική επίδραση των πράξεων". Αξίζει να σημειωθεί ότι το υψηλό ποσοστό επιτυχίας των μαθητών της Ε΄ τάξης γενικότερα στο έργο που μελετούσε στη Λογικότητα των εκτιμήσεων οφείλεται κυρίως στις καλές επιδόσεις των παιδιών αυτής της ηλικιακής ομάδας στα πλαισιωμένα προβλήματα. Παρόμοια θετική επίδραση του πλαισίου στις επιδόσεις σε νοερές πράξεις πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης βρήκαν οι Δεσλή και Λιόλιου (2017) στη δική τους έρευνα. Ομοίως, οι Reys και Yang (1998) είχαν παρατηρήσει ότι, μετά από παρότρυνση για ερμηνεία των λεκτικών πληροφοριών του πλαισίου ενός προβλήματος, αυξάνεται η χρήση στρατηγικών αίσθησης του αριθμού. Ενδεχομένως, οι μαθητές της Ε΄ τάξης ευνοήθηκαν από την ύπαρξη πλαισίου στα έργα, αφού μάλλον το πλαίσιο βοήθησε στην καλύτερη ερμηνεία των δεδομένων και, ως εκ τούτου, οι μαθητές ενεργοποίησαν στρατηγικές αίσθησης του αριθμού, όπως τις εκτιμήσεις. Κάτι ανάλογο επισήμαναν οι Deslis και Desli (2022), οι οποίοι βρήκαν ότι οι επιδόσεις των μαθητών σε έργα με δεκαδικούς αριθμούς ευνοούνται στα πλαισιωμένα προβλήματα, γιατί οι καταστάσεις της καθημερινότητας δίνουν νόημα στους αριθμούς. Επίσης, όπως προαναφέρθηκε, τα νέα σχολικά βιβλία των μαθηματικών της Ε΄ τάξης περιέχουν πολλά πλαισιωμένα προβλήματα που στοχεύουν στην καλλιέργεια και την ευέλικτη χρήση στρατηγικών εκτίμησης (Βρυώνης, κ.α., 2018) και, έτσι, οι μαθητές της Ε΄ τάξης είναι περισσότερο εξοικειωμένοι στην επεξεργασία πληροφοριών με προβλήματα αίσθησης του αριθμού που συνοδεύονται από πλαίσιο. Εξάλλου, ο Yang (2003) είχε επισημάνει ότι όταν οι μαθητές εκτίθενται σε προβλήματα με λεκτικό περιεχόμενο από την καθημερινή ζωή, καλλιεργούν στρατηγικές αίσθησης αριθμού και τείνουν να τις αξιοποιούν σε αντίστοιχα προβλήματα.

Αντίθετα, η ύπαρξη πλαισίου δυσκόλεψε τους μαθητές της Δ΄ τάξης, μιας και οι τελευταίοι παρουσίασαν καλύτερες επιδόσεις όταν δεν υπήρχε πλαίσιο και, πιο συγκεκριμένα, η διαφοροποίηση στις επιδόσεις εντοπίστηκε στα έργα που εξέταζαν το “Σχετικό μέγεθος των αριθμών”, τη “Λογικότητα των εκτιμήσεων” και τη “Σχετική επίδραση των πράξεων στους αριθμούς”. Αρκετές έρευνες επιβεβαιώνουν αυτό το εύρημα, όπως, για παράδειγμα, στην έρευνα των Yang και Wuang (2017) οι μαθητές ηλικίας 14 ετών είχαν καλύτερες επιδόσεις στα αριθμητικά έργα χωρίς πλαίσιο και, επιπλέον, ο δημοφιλέστερος τρόπος εργασίας τους ήταν ο γραπτός υπολογισμός βασισμένος σε διαδικαστικά βήματα. Παρόμοια, στην έρευνα των Yang και Li (2008) οι μαθητές τρίτης τάξης στην Ταϊβάν παρουσίασαν χαμηλές επιδόσεις στη λογική κρίση των απαντήσεών τους στις δοκιμασίες με πλαίσιο. Ένας λόγος για την αρνητική επίδραση του πλαισίου στους μαθητές της Δ΄ τάξης μπορεί να είναι η ανασφάλεια που αυτό τους δημιούργησε, γεγονός που ίσως τους οδήγησε και στην αλγοριθμική διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων. Το ζήτημα της ανασφάλειας που μπορεί να δημιουργήσει η ύπαρξη πλαισίου στα προβλήματα αίσθησης του αριθμού είχε τονιστεί και από τους τους Reys, Reys και Penafiel (1991), οι οποίοι ανέφεραν ότι αυτό το κλίμα ανασφάλειας μπορεί να συνδέεται με την εμφάνιση δυσκολιών και τη στροφή των μαθητών σε επίλυση βασισμένη στους κανόνες. Επιπλέον, ένας ακόμα λόγος που μπορεί να συνδέεται με αυτές τις επιδόσεις των παιδιών ίσως είναι κάποια δυσκολία των μαθητών στη διαχείριση λεκτικών πληροφοριών (Phonapichat et al., 2014) ή ακόμα και σε αδιάγνωστες Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες. Οι Can και Ozdemir (2020) είχαν τονίσει στα ευρήματα της έρευνας τους ότι οι επιδόσεις των μαθητών στα πλαισιωμένα προβλήματα αίσθησης του αριθμού μπορεί να συνδέονται με πιθανές δυσκολίες στη διαχείριση των λεκτικών πληροφοριών. Συμπερασματικά, για τα μικρότερα παιδιά οι επιδόσεις ήταν καλύτερες όταν δεν υπήρχε πλαίσιο, ενώ για τα μεγαλύτερα παιδιά το πλαίσιο είτε δεν επηρέασε είτε επέφερε καλύτερες επιδόσεις όταν υπήρχε στις δοκιμασίες.

Η παρούσα έρευνα διεξήχθη σε περιορισμένο δείγμα ατόμων που προέρχονταν από δύο περιφέρειες της Ελλάδας. Η διεξαγωγή της έρευνας σε μεγαλύτερο δείγμα παιδιών που να προέρχεται από περισσότερες και διαφορετικές περιοχές θα επέτρεπε την εκτενέστερη μελέτη των ευρημάτων και τη γενίκευσή τους στον ευρύτερο μαθητικό πληθυσμό. Επιπρόσθετα, λόγω ερευνητικού σχεδιασμού δε συμπεριλήφθηκαν συνεντεύξεις για να μελετηθούν αναλυτικά οι στρατηγικές των μαθητών σε κάθε έργο, οπότε αυτό θα μπορούσε να συμβεί σε μια μεταγενέστερη μελέτη.

Η μελέτη της ικανότητας για αίσθηση του αριθμού αξίζει να διερευνηθεί περαιτέρω. Μελλοντικές έρευνες θα μπορούσαν να αναδείξουν τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές όταν επιλύουν προβλήματα με πλαίσιο και χωρίς πλαίσιο, όπως επίσης, να συμπεριληφθούν και άλλοι αριθμοί, δηλαδή, να μελετηθούν οι επιδόσεις των μαθητών στην ικανότητα για αίσθηση του αριθμού σε κλάσματα, φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς. Ενδιαφέρον θα παρουσίαζε αν σχεδιαζόταν μια έρευνα που θα εξέταζε τις επιδόσεις και τις στρατηγικές παιδιών και ενηλίκων σε πλαισιωμένα και μη πλαισιωμένα προβλήματα, ώστε να διαμορφωθεί μια ολοκληρωμένη εικόνα για τον τρόπο σκέψης παιδιών και ενηλίκων.

Εν κατακλείδι, η παρούσα εργασία επιχείρησε να ερευνήσει τις επιδόσεις των μαθητών Δ΄ και Ε΄ τάξης του δημοτικού σε έργα αίσθησης του αριθμού με δεκαδικούς αριθμούς, μελετώντας τις επιδόσεις στα δομικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού και διερευνώντας κατά πόσο αυτές οι επιδόσεις επηρεάζονται από την ηλικία και την ύπαρξη πλαισίου. Συμπερασματικά, τόσο από την υπάρχουσα βιβλιογραφία όσο και από την παρούσα έρευνα, κρίνεται αναγκαία η καλλιέργεια της αίσθησης τους αριθμού σε παιδιά δημοτικού σχολείου, αφού αφενός αποτελεί προβλεπτικό δείκτη και διαδραματίζει εξαίσιο ρόλο στη μετέπειτα μαθηματική πορεία (Yang, Li & Lin, 2008) και αφετέρου η ικανότητα για αίσθηση του αριθμού παίζει καθοριστικό ρόλο στην επίλυση προβλημάτων καθημερινής ζωής (McIntosh et al., 1992).

Βιβλιογραφικές αναφορές

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

Aktas, C. M., & Özdemir, t. E. (2017). An Examination of the Number Sense Performances of Preservice Elementary Mathematics Teachers. *Online Submission European Journal of Education Studies*, *3*(12), 133-144.

Alsawaie, O. N. (2011). Number sense-based strategies used by high-achieving sixth grade students who experienced reform textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*, 1071–1097.

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 38*(4), 333–339.

Can, D., & Özdemir, İ. E. (2020). An examination of fourth-grade elementary school students' number sense in context-based and non-context-based problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(7), 1333-1354.

Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM*, *47*(5), 747-758.

Deslis, D., & Desli, D. (2023). Does this answer make sense? Primary school students and adults judge the reasonableness of computational results in context-based and context-free mathematical tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *21*, 71-91.

Gelman, R. (1990). First principles organize attention to and learning about relevant data: Number and the animate–inanimate distinction as examples. *Cognitive Science*, *14*, 79–106.

Gersten, R., & Chard, D. (1999). Number sense: Rethinking arithmetic instruction for students with mathematical disabilities. *The Journal of Special Education, 33*(1), 18-28. http://dx.doi.org/10.1177/002246699903300102

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*, 170-218.

Irwin, K. C. (2001). Using everyday knowledge of decimals to enhance understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(4), 399–420.

Jordan, N. C., Glutting, J., Dyson, N., Hassinger-Das, B., & Irwin, C. (2012). Building kindergartners' number sense: A randomized controlled study.

Journal of Educational Psychology, 104(3), 647–660.

Jordan, N. C., Glutting, J., & Ramineni, C. (2010). The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences, 20*(2), 82-88.

Jordan, N. C., Kaplan, D., Nabors Oláh, L., & Locuniak, M. N. (2006). Number sense growth in kindergarten: A longitudinal investigation of children at risk for mathematics difficulties. *Child Development, 77*(1), 153-175.

Lemaire, P., & Lecacheur, M. (2002). Children's strategies in computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology, 82(*4), 281-304.

Lemaire, P., & Lecacheur, M. (2011). Age-related changes in children's executive functions and strategy selection: A study in computational estimation. *Cognitive Development*, *26*(3), 282-294.

Markovits, Z., & Sowder, J. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(1), 4–29.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2-44.

McIntosh, A., Reys, R. E., & Reys, B. J. (1997). Mental computation in the middle grades: The importance of thinking strategies. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *2*(5), 322-327.

Phonapichat, P., Wongwanich, S., & Sujiva, S. (2014). An analysis of elementary school students' difficulties in mathematical problem solving. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 116*, 3169–3174.

Purnomo, Y. W., Alyani, F., & Assiti, S. S. (2014). Assessing number sense performance of Indonesian elementary school students. *International Education Studies*, *7*(8), 74-84.

Reys, R., Reys, B., Emanuelsson, G., Johansson, B., McIntosh, A., & Yang, D. C. (1999). Assessing number sense of students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. *School Science and Mathematics, 99*(2)*, 61–70.*

Reys, B. J., Reys, R. E., & Peñafiel, A. F. (1991). Estimation performance and strategy use of Mexican 5th and 8th grade student sample. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(4), 353-375.

Reys, R., & Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth-and eighth-grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(2), 225-237.

Sowder, J. T. (1992). Estimation and number sense. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371–389). New York: Macmillan.

Thornton, C. A., & Tucker, S. C. (1989). Lesson planning: The key to developing number sense. *Arithmetic Teacher, 36*(2), 18-21.

Tsao, Y. L. (2004). Exploring the connections among number sense, mental computation performance, and the written computation performance of elementary preservice school teachers. *Journal of College Teaching and Learning, 1*(12), 71-90.

Tsao, Y. L. (2013). Computational estimation and computational estimation attitudes of pre-service elementary teachers. *US-China Education Review B*, *3*(11), 835-846.

Yang, D. C. (2003). Teaching and learning number sense–an intervention study of fifth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*,*1*, 115-134.

Yang, D.C. (2005). Number sense strategies used by 6th-grade students in Taiwan. *Journal of Educational Studies, 31*(3), 317-333.

Yang, D. C. (2007). Investigating the strategies used by pre-service teachers in Taiwan when responding to number sense questions. *School Science and Mathematics, 107*(7), 293-301.

Yang, D. C., Hsu, C. J., & Huang, M. C. (2004). A study of teaching and learning number sense for sixth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *2*(3), 407-430.

Yang, D., & Huang, F. (2004). Relationships among computational performance, pictorial representation, symbolic representation and number sense of sixth-grade students in Taiwan. *Educational Studies, 30*(4), 373–389.

Yang, D. C., Li, M. N., & Lin, C. I. (2008). A study of the performance of 5th graders in number sense and its relationship to achievement in mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 6,* 789–807.

Yang, D. C., & Lin, Y. C. (2015). Assessing 10-to 11-year-old children's performance and misconceptions in number sense using a four-tier diagnostic test. *Educational Research, 57*(4), 368-388.

Yang, D.C. & Reys, R.E. (2002). Fractional number sense strategies possessed by sixth grade students in Taiwan. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 10*, 53–70.

Yang, D. C., Reys, R. E., & Reys, B. J. (2009). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*(2), 383- 403.

Yang, D. C., & Wu, S. S. (2012). Examining the differences of 8th graders' estimation performance between contextual and numerical problems. *US-China Educational Review, 12*, 1061–1067.

Zübeyde, E. R., & Artut, P. D. (2021). Investigation of number sense strategies used by primary school teachers and mathematics teachers. *Eğitim Kuram ve Uygulama Araştırmaları Dergisi*, *7*(1), 48-61.

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

Βρυώνης, Κ., Δουκάκης, Σ., Καρακώστα, Β., Μπαράλης, Γ., & Σταύρου Ι. (2018). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού. Βιβλίο δασκάλου.* Αθήνα: Διόφαντος.

Δεσλή, Δ. (2021). *Οι εκτιμήσεις στη μαθηματική εκπαίδευση.* Αθήνα: Gutenberg.

Δεσλή, Δ., & Ανεστάκης, Π. (2014). Υπολογιστικές εκτιμήσεις και η διδασκαλία τους: επιδόσεις, στρατηγικές και στάσεις υποψήφιων εκπαιδευτικών. Στα *Πρακτικά του 5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ*. Φλώρινα: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

Δεσλή, Δ. & Λιόλιου, Α. (2017). Νοεροί υπολογισμοί κατά την επίλυση πλαισιωμένων και μη πλαισιωμένων προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης. Στα *Πρακτικά του 3ου Διεθνούς Συνεδρίου για την προώθηση της εκπαιδευτικής καινοτομίας* (Τόμος Α΄, σελ. 274-284). Επιστημονική Ένωση για την Προώθηση της Εκπαιδευτικής Καινοτομίας.

Δεσλή, Δ., & Μυρόβαλη, Β. (2017). Η αίσθηση του αριθμού σε παιδιά Ε' και Στ' Δημοτικού και οι στρατηγικές τους κατά την επίλυση πλαισιωμένων και μη πλαισιωμένων προβλημάτων. Στα *Πρακτικά του 31ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας* (σελ. 280-289). Βέροια: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Δεσλή, Δ., & Παπαχρήστος, Γ. (2019). Επίδοση και στρατηγικές παιδιών και ενηλίκων σε νοερούς υπολογισμούς με κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς: ο ρόλος του πλαισίου. Στα *Πρακτικά του 8ο Πανελλήνιου Συνεδρίο της*

Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (σελ. 285-294). Λευκωσία-Κύπρος.

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών*. Αθήνα: Τόπος.

Λεμονίδης, Χ., & Καϊάφα, Ι. (2014). Κατανόηση και ευελιξία των μαθητών Ε' και Στ' τάξης στους υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς. Στα *Πρακτικά του 5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ.* Φλώρινα: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πρωτόκολλο καταγραφής απαντήσεων των συμμετεχόντων

Τάξη: _________
Φύλο : ________
Ημερομηνία Γέννησης: __________

Προσπάθησε να λύσεις τα παρακάτω προβλήματα

1. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να πεις ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι **μικρότερος**;

α) 2,76 β) 2,749

2. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να πεις ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι **μεγαλύτερος**;

α) 23,6 β) 23,17

3. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βάλεις τους παρακάτω αριθμούς σε σειρά από τον **μεγαλύτερο στον μικρότερο**;

14,02 14,025 4,025 4,25 14,2

....

4. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βάλεις τους αριθμούς σε σειρά από τον **μικρότερο στον μεγαλύτερο**;

63,09 **63,9** **60,39** **63,092** **60,309**

....

5. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να πεις αν η παρακάτω ισότητα ισχύει;

0,18 + 0,17 = 0,25

α) ισχύει **β) δεν ισχύει**

6. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να πεις αν η παρακάτω ισότητα ισχύει;

2,42 + 3,7 = 2,32 + 0,10 + 3,7

α) ισχύει **β) δεν ισχύει**

7. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να κάνεις την παρακάτω ισότητα να ισχύει;

20,5 + 5,1 = 18 + ____

8. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να κάνεις την παρακάτω ισότητα να ισχύει;

12,3 + 10 = 25,5 - ____

9. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, υπολόγισε πόσο περίπου κάνει το παρακάτω γινόμενο.

20 X 1,99

α) 4 β) 40 γ) 400

10. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, υπολόγισε πόσο περίπου κάνει το παρακάτω άθροισμα.

18,2 + 7,9 + 24,60 + 10,40

....

11. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να τοποθετήσεις σωστά την **υποδιαστολή** ώστε να ισχύει η ισότητα;

3,90 X 7,9 = 30810

12. Χωρίς να κάνεις υπολογισμό με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βρεις ποια από τις παρακάτω απαντήσεις είναι **το πιο πιθανό πηλίκο**;

28 : 4, _ _

α) 5,5 β) 6,5 γ) 7,5

13. Χωρίς να υπολογίσεις με χαρτί και μολύβι, μπορείς να εκτιμήσεις

αν το αποτέλεσμα της πρόσθεσης 12,5 + 6,7 είναι:

α) μεγαλύτερο από 20 **β) μικρότερο από 20**

14. Χωρίς να υπολογίσεις με χαρτί και μολύβι, μπορείς να εκτιμήσεις αν το αποτέλεσμα της αφαίρεσης **32,7 - 27,2** είναι:

α) μεγαλύτερο από 10 **β) μικρότερο από 10**

15. Χωρίς να υπολογίσεις με χαρτί και μολύβι, μπορείς να εκτιμήσεις αν το αποτέλεσμα της διαίρεσης **3,5 : 0,4** είναι:

α) μεγαλύτερο από 3 **β) μικρότερο από 3**

16. Χωρίς να υπολογίσεις με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βρεις ποιο από τα παρακάτω γινόμενα είναι πιο κοντά στο **6 X 2,5**

α) 5 X 3,5 **β) 7 X 1,5**

Τάξη: _________ Φύλο : ________ Ημερομηνία Γέννησης: __________

Προσπάθησε να λύσεις τα παρακάτω προβλήματα

1. Ο Γιώργος περπάτησε **2,76** χιλιόμετρα και η Μαρίνα **2,749** χιλιόμετρα. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βρεις ποιος περπάτησε λιγότερα χιλιόμετρα;

....

2. Η Κατερίνα κολύμπησε **23,6** μέτρα και ο Γιάννης **23,17** μέτρα. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βρεις ποιος κολύμπησε **περισσότερα μέτρα**;

....

3. Παρακάτω φαίνονται οι βαθμολογίες που συγκέντρωσαν κάποιες χώρες στους Ολυμπιακούς Αγώνες για το άθλημα της ενόργανης. Βάλε σε σειρά τις χώρες ξεκινώντας από αυτή που συγκέντρωσε **υψηλότερη βαθμολογία**.

Ιταλία: **14,02,** Ελλάδα: **14,025**, Ισπανία:**4,025**, Γερμανία: **4,25,** Ολλανδία: **14,2**

....

4. Παρακάτω φαίνονται οι πόντοι που συγκέντρωσαν κάποιοι μαθητές στο άθλημα της τοξοβολίας. Βάλε σε σειρά τους αθλητές ξεκινώντας από αυτόν που συγκέντρωσε **χαμηλότερη βαθμολογία**.

Παναγιώτης: **63,09**, Μαρία: **63,9**, Κατερίνα: **60,39**, Δέσποινα: **63,092,** Δημήτρης: **60,309**

....

5. Η Κατερίνα έβαλε στο πλυντήριο **0,18L** απορρυπαντικό. Όμως οι οδηγίες έλεγαν ότι έπρεπε να βάλει **0,25L** και τότε πρόσθεσε **0,17L** απορρυπαντικό. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να πεις αν τελικά η Κατερίνα έβαλε σωστά την ποσότητα του απορρυπαντικού στο πλυντήριο;

....

6. Ας υποθέσουμε ότι κάνεις πράξεις με ένα κουμπιουτεράκι του οποίου έχει χαλάσει το πλήκτρο **4**. Πώς θα κάνεις την πράξη **2,42 + 3,7** με το κουμπιουτεράκι αυτό;

....

7. Δυο ορειβάτες ξεκίνησαν την ορειβασία τους, έχοντας στόχο να ανέβουν τα ίδια μέτρα. Ο ένας ορειβάτης ανέβηκε **20,5 μέτρα**, έκανε μια στάση και ανέβηκε ακόμη **5,1 μέτρα** για να ολοκληρώσει τον στόχο. Ο άλλος ορειβάτης έχει ανέβει **18 μέτρα** και αυτή τη στιγμή κάνει στάση. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βρεις πόσα μέτρα πρέπει να ανέβει ο δεύτερος ορειβάτης για να κάνει όσα μέτρα έχει ανέβει ο πρώτος ορειβάτης;

……………………………………………………………………………………………

8. Ένας φούρναρης φτιάχνει κάθε εβδομάδα κουλουράκια χρησιμοποιώντας συγκεκριμένη ποσότητα αλεύρι. Συνήθως βάζει το αλεύρι σε δύο δόσεις, δηλαδή πρώτα βάζει **12,3** κιλά και μετά **10** κιλά. Σήμερα όμως έκανε λάθος και έβαλε **25,5** κιλά αλεύρι. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βρεις πόσο αλεύρι πρέπει τώρα ο φούρναρης να βγάλει για να κάνει κουλουράκια;

……………………………………………………………………………………………

9. Ένα εργοστάσιο φτιάχνει σοκολάτες και τις συσκευάζει σε κουτιά των **20** τεμαχίων. Αν κάθε σοκολάτα κοστίζει **1,99** ευρώ, χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βρεις πόσα ευρώ περίπου κοστίζει ένα κουτί με σοκολάτες;

α) 4 β) 40 γ) 400

10. Ο Μάριος αγόρασε πράγματα για την παραλία από ένα σούπερ μάρκετ. Πήρε μια ομπρέλα που κόστιζε **18,2 ευρώ**, ένα στρώμα θαλάσσης που κόστιζε **7,9 ευρώ**, μια καρέκλα παραλίας που κόστιζε **24,60 ευρώ** και ένα αντηλιακό που κόστιζε **10,40 ευρώ**. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορεί να πεις πόσα ευρώ περίπου πλήρωσε για όλα αυτά τα πράγματα;

……………………………………………………………………………………………

11. Ένας μαθητής ξέχασε να βάλει υποδιαστολή στο παρακάτω αποτέλεσμα. Χωρίς να κάνεις υπολογισμό με χαρτί και μολύβι, μπορείς να

τοποθετήσεις σωστά την **υποδιαστολή**;

3,90 X 7,9 = 30810

12. Δυστυχώς χύθηκε μελάνι στο χαρτί και δε φαίνεται καθαρά το δεκαδικό μέρος στην παρακάτω διαίρεση **28 : 4, _ _**

Χωρίς να κάνεις υπολογισμό με χαρτί και μολύβι, μπορείς να βρεις ποια από τις παρακάτω απαντήσεις είναι **το πιο πιθανό πηλίκο**;

α) 5,5 β) 6,5 γ) 7,5

13. Η Κορίνα έχει **20 ευρώ** και θέλει να αγοράσει ένα παντελόνι που κοστίζει **12,5 ευρώ** και μια μπλούζα που κοστίζει **6,7 ευρώ.** Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να πεις αν φτάνουν τα **20 ευρώ** για να τα αγοράσει;

....

14. Η Μαρία έχει **32,7 ευρώ** στο πορτοφόλι της και αγόρασε πράγματα από το βιβλιοπωλείο συνολικής αξίας **27,2 ευρώ**. Χωρίς να κάνεις

υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, πιστεύεις ότι η Μαρία έχει τώρα στο πορτοφόλι της:

α) περισσότερα από 10 ευρώ **β) λιγότερα από 10 ευρώ**

15. Ο κύριος Γιάννης έχει **3,5 κιλά** καφέ και θέλει να τον μοιράσει σε συσκευασίες των **0,4 κιλών**. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να υπολογίσεις πόσες συσκευασίες θα φτιάξει;

α) περισσότερες από 3 συσκευασίες **β) λιγότερες από 3 συσκευασίες**

16 Ο Χρήστος και ο Νίκος κάνουν μια εκτίμηση για το γινόμενο **6 Χ 2,5**.
Ο Χρήστος σκέφτεται ότι το γινόμενο αυτό βρίσκεται κοντά στο **5 Χ 3,5.**
Ο Νίκος πιστεύει ότι το γινόμενο αυτό είναι πιο κοντά στο **7 Χ 1,5**.
Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, μπορείς να πεις ποιο από τα δυο παιδιά είναι πιο κοντά στο πραγματικό αποτέλεσμα;

....

.