



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ**  
**ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ- ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ**  
**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ -**  
**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ – ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ**  
**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ**  
  
**ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ**  
**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

**«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»**

***ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Α΄ ΗΛΙΚΙΑΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ***

Διπλωματική Εργασία

**«Οι εκτιμήσεις στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ΄  
τάξης του δημοτικού σχολείου»**

της

**Σίσκου Πολυξένης, Α.Ε.Μ. 1072**

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Δεσλή Δέσποινα, Καθηγήτρια

Εξεταστές: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής

Χρονάκη Άννα, Καθηγήτρια

Φλώρινα, Ιούλιος 2023

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η ενσωμάτωση των εκτιμήσεων στη μαθηματική εκπαίδευση είναι σημαντική, καθώς αφενός αποτελούν αναπόσπαστο μέρος της καθημερινής ζωής των μαθητών και αφετέρου συμβάλλουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και της αίσθησης του αριθμού. Αν και η σημασία των εκτιμήσεων φαίνεται να έχει αναγνωριστεί από τα περισσότερα προγράμματα σπουδών για τα μαθηματικά στο εξωτερικό και στην Ελλάδα, η παρουσία τους στα προγράμματα σπουδών και, κατά συνέπεια, στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών είναι περιορισμένη. Καθώς τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν το κυριότερο μέσο που αξιοποιούν οι εκπαιδευτικοί κατά τη διδασκαλία τους, σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη της παρουσίας των δραστηριοτήτων εκτίμησης στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου. Για τον σκοπό αυτό, μελετήθηκαν όλες οι δραστηριότητες εκτίμησης ως προς τη συχνότητα εμφάνισής τους, τον τύπο εκτίμησης στον οποίο αναφέρονται, καθώς και ως προς τη σύνδεσή τους με την καθημερινή ζωή. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως, από το σύνολο των δραστηριοτήτων που περιλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ΄ τάξης, περίπου 10% αυτών είναι δραστηριότητες εκτίμησης. Περισσότερες από τις μισές δραστηριότητες εκτίμησης αφορούν στην υπολογιστική εκτίμηση, ενώ περίπου το 20% αφορά στις εκτιμήσεις μέτρησης. Ιδιαίτερα περιορισμένη έως μηδαμινή φαίνεται να είναι η παρουσία των δραστηριοτήτων εκτίμησης πλήθους και εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή. Αν και στις περισσότερες δραστηριότητες εκτίμησης αναδεικνύεται η σύνδεση των εκτιμήσεων με τον πραγματικό κόσμο (57,3%), το 74,2% των δραστηριοτήτων εκτίμησης περιλαμβάνουν υπολογισμούς με ακρίβεια μέσω της εκτέλεσης αλγοριθμικών πράξεων. Τα ευρήματα της παρούσας μελέτης αναδεικνύουν την ανάγκη αναθεώρησης του περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών ως προς τη διδασκαλία των εκτιμήσεων και προβάλλουν σημαντικά στοιχεία για τον σχεδιασμό των νέων σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών, που πρόκειται να δημοσιευτούν στην Ελλάδα τα επόμενα χρόνια.

**Λέξεις κλειδιά:** σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών, υπολογιστική εκτίμηση, εκτίμηση πλήθους, εκτίμηση μέτρησης, εκτίμηση πάνω στην αριθμογραμμή, Δ΄ τάξη

## ABSTRACT

Integration of estimation in mathematics education is important, as it is both an integral part of students' everyday life and contributes to the development of mathematical thinking and number sense. Even though the importance of estimation seems to have been recognized by most mathematics curricula abroad, including Greece, its presence in curricula and, consequently, in mathematics textbooks is limited. Since textbooks are the main tool used by teachers, the aim of this study is to investigate the presence of estimation activities in Greek mathematics textbooks at the 4th grade in elementary school. For this purpose, all estimation activities were studied in terms of their occurrence rate, their referred estimation type, as well as their connection with everyday life. According to the results, about 10% of all the activities included in mathematics grade 4 textbooks are estimation activities. More than half of the estimation activities are related to computational estimation, while about 20% are related to measurement estimation. Particularly, quantity estimation activities and number line estimation activities appear to be limited to zero. Although connection between estimation and the real world is highlighted in most estimation activities (57.3%), 74.2% of estimation activities involve precise calculations by performing algorithmic operations. Findings of the present study suggest the revision of mathematics textbooks content with regard to estimation teaching and provide important evidence for the design of the upcoming Greek mathematics textbooks.

**Key words:** mathematics textbooks, computational estimation, quantity estimation, measurement estimation, number line estimation, 4th grade

## Ευχαριστίες

*Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου, κ. Δέσποινα Δεσλή, για την επιστημονική καθοδήγηση και τη συνεχή υποστήριξη που μου πρόσφερε καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας. Η συμβολή της στη συγγραφή της παρούσας εργασίας ήταν πολύτιμη. Επίσης, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου και στα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, στον κ. Κωνσταντίνο Νικολαντωνάκη και στην κ. Άννα Χρονάκη, για τη συνεισφορά τους στην ολοκλήρωση του παρόντος έργου.*

*Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στους γονείς μου για τη διαρκή παρουσία τους και υποστήριξή τους σε κάθε βήμα των σπουδών μου, καθώς και στον άνθρωπό μου που αποτελεί πηγή δύναμης για την κατάκτηση κάθε στόχου που θέτω στη ζωή μου.*

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....</b>	<b>1</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>2</b>
<b>Ευχαριστίες.....</b>	<b>3</b>
<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....</b>	<b>10</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ.....</b>	<b>15</b>
1.1 Η έννοια των εκτιμήσεων .....	15
1.1.1 Εννοιολογική αποσαφήνιση .....	15
1.1.2 Τύποι εκτίμησης .....	17
1.1.3 Η σημασία και η χρησιμότητα των εκτιμήσεων.....	28
1.2 Η διδασκαλία των εκτιμήσεων στο δημοτικό σχολείο.....	31
1.2.1 Η παρουσία των εκτιμήσεων στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών του εξωτερικού για τα μαθηματικά πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης .....	31
1.2.2 Η παρουσία των εκτιμήσεων στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της Ελλάδας για τα μαθηματικά πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.....	35
1.2.3 Οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των εκτιμήσεων .....	39
1.3 Η διδασκαλία των εκτιμήσεων στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών .....	42
1.3.1 Η χρήση των σχολικών εγχειριδίων στη μαθηματική εκπαίδευση.....	42
1.3.2 Η παρουσία των εκτιμήσεων στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του εξωτερικού.....	45
1.3.3 Η παρουσία των εκτιμήσεων στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Ελλάδας.....	46
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ.....</b>	<b>50</b>
2.1 Ερευνητική Μέθοδος.....	50
2.2 Αντικείμενο μελέτης.....	51
2.3 Δείγμα.....	54
2.4 Εργαλείο ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων .....	58

2.5 Διαδικασία.....	62
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ .....</b>	<b>64</b>
3.1 Συχνότητα εμφάνισης των δραστηριοτήτων εκτίμησης με βάση τα τρία πρώτα κριτήρια ανάλυσης .....	64
3.1.1 Τύπος Εκτίμησης .....	66
3.1.2 Χαρακτηριστικά πλαισίου .....	67
3.1.3 Είδος Αριθμού .....	68
3.2 Επιμέρους χαρακτηριστικά για κάθε τύπο εκτίμησης.....	70
3.2.1 Υπολογιστική Εκτίμηση .....	70
3.2.2 Εκτίμηση Πλήθους .....	73
3.2.3 Εκτίμηση Μέτρησης.....	76
3.2.4 Εκτίμηση πάνω στην αριθμογραμμή.....	80
3.3 Σύνδεση των δραστηριοτήτων εκτίμησης με τις τρεις διαστάσεις σημαντικότητας .....	81
3.3.1 Σύνδεση με την καθημερινότητα.....	81
3.3.2 Επινόηση στρατηγικών.....	85
3.3.3 Επαλήθευση της απάντησης .....	87
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....</b>	<b>93</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....</b>	<b>100</b>
5.1 Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία .....	100
5.2 Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία .....	102

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

<i>Πίνακας 2.1.</i> Στόχοι αναφορικά με τη διδασκαλία της έννοιας της εκτίμησης σύμφωνα με το Δ.Ε.Π.Π.Σ για τα μαθηματικά της Δ΄ δημοτικού (ΥΠ.Ε.Π.Θ, 2003, σ. 264-266).....	53
<i>Πίνακας 2.2.</i> Πλήθος δραστηριοτήτων στο Βιβλίο Μαθητή και τα Τετράδια Εργασιών της Δ΄ δημοτικού .....	55
<i>Πίνακας 2.3.</i> Κατανομή του πλήθους των δραστηριοτήτων εκτίμησης στα κεφάλαια του Βιβλίου Μαθητή και των Τετραδίων Εργασιών .....	56
<i>Πίνακας 2.4.</i> Κριτήρια ανάλυσης των δραστηριοτήτων εκτίμησης .....	59
<i>Πίνακας 3.1.</i> Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης ως προς τον τύπο εκτίμησης.....	66
<i>Πίνακας 3.2.</i> Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης ως προς τα χαρακτηριστικά πλαισίου .....	67
<i>Πίνακας 3.3.</i> Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης ανά είδος αριθμού .....	69
<i>Πίνακας 3.4.</i> Συχνότητα εμφάνισης των δραστηριοτήτων υπολογιστικής εκτίμησης	71
<i>Πίνακας 3.5.</i> Συχνότητα εμφάνισης των δραστηριοτήτων εκτίμησης πλήθους .....	74
<i>Πίνακας 3.6.</i> Συχνότητα εμφάνισης των δραστηριοτήτων εκτίμησης μέτρησης .....	77
<i>Πίνακας 3.7.</i> Συχνότητα εμφάνισης των δραστηριοτήτων εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή.....	80

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

<i>Εικόνα 2.1.</i> Κατανομή της ύλης ανά περίοδο στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Δ' δημοτικού (Βαμβακούση κ.α., 2007α, σελ. 15).....	52
<i>Εικόνα 2.2.</i> Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας με έμμεση αναφορά στην έννοια της εκτίμησης (Βιβλίο Μαθητή, Κεφ. 54, σελ.134).....	56
<i>Εικόνα 3.1.</i> Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας υπολογιστικής εκτίμησης με φυσικούς αριθμούς (Βιβλίο Μαθητή, 1η Επανάληψη, σελ. 23).....	71
<i>Εικόνα 3.2.</i> Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας υπολογιστικής εκτίμησης με δεκαδικούς αριθμούς (Τετράδιο Εργασιών, Β' Τεύχος, Κεφ. 19, σελ. 15).....	72
<i>Εικόνα 3.3.</i> Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας υπολογιστικής εκτίμησης με συμμιγείς αριθμούς (Τετράδιο Εργασιών, Β' Τεύχος, Κεφ. 18, σελ. 13) .....	72
<i>Εικόνα 3.4.</i> Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας υπολογιστικής εκτίμησης με πράξεις πολλαπλασιασμού (Τετράδιο Εργασιών, Α' Τεύχος, Κεφ. 10, σελ. 26).73	
<i>Εικόνα 3.5.</i> Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας υπολογιστικής εκτίμησης με πράξεις διαίρεσης (Τετράδιο Εργασιών, Α' Τεύχος, Κεφ. 12, σελ. 30).....	73
<i>Εικόνα 3.6.</i> Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης πλήθους με δεκαδικούς αριθμούς (Βιβλίο Μαθητή, Τετράδιο Εργασιών, Β' Τεύχος, Κεφ. 15, σελ. 7)....	74
<i>Εικόνα 3.7.</i> Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης πλήθους με φυσικούς αριθμούς (Βιβλίο Μαθητή, Κεφ. 49, σελ. 122).....	75
<i>Εικόνα 3.8.</i> Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης πλήθους με συμμιγείς αριθμούς (Βιβλίο Μαθητή, 3η Επανάληψη, σελ. 52).....	76
<i>Εικόνα 3.9.</i> Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης μέτρησης μήκους με συμβολικό πλαίσιο (Βιβλίο Μαθητή, 3η Επανάληψη, σελ.52).....	76
<i>Εικόνα 3.10.</i> Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης μέτρησης εμβαδού με φυσικούς αριθμούς και χρήση μη τυποποιημένων μονάδων μέτρησης (Βιβλίο Μαθητή, Κεφ. 30, σελ.77).....	78
<i>Εικόνα 3.11.</i> Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης μέτρησης χωρητικότητας με χρήση τυποποιημένων μονάδων μέτρησης (Βιβλίο Μαθητή, Κεφ. 54, σελ.134) .....	78
<i>Εικόνα 3.12.</i> Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης μέτρησης εμβαδού με χρήση τυποποιημένων και μη τυποποιημένων μονάδων μέτρησης (Βιβλίο Μαθητή, Κεφ. 31, σελ. 78).....	79



<i>Εικόνα 3.13.</i> Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή (Βιβλίο Μαθητή, Κεφ. 48, σελ. 121) .....	81
<i>Εικόνα 3.14.</i> Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας υπολογιστικής εκτίμησης συνδεδεμένης με την καθημερινή ζωή (Βιβλίο Μαθητή, 3η Επανάληψη, σελ. 53) .....	83
<i>Εικόνα 3.15.</i> Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης πλήθους συνδεδεμένης με την καθημερινή ζωή (Τετράδιο Εργασιών, Β΄ Τεύχος, Κεφ. 25, σελ. 31) .....	84
<i>Εικόνα 3.16.</i> Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης μέτρησης συνδεδεμένης με την καθημερινή ζωή (Τετράδιο Εργασιών, Τεύχος Δ΄, Κεφ. 54, σελ. 37) .....	85
<i>Εικόνα 3.17.</i> Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας υπολογιστικής εκτίμησης συνδεδεμένης με την επινόηση στρατηγικών (Τετράδιο Εργασιών, Τεύχος Α΄, Κεφ. 10, σελ. 27) .....	86
<i>Εικόνα 3.18.</i> Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης πλήθους συνδεδεμένης με την επινόηση στρατηγικών (Τετράδιο Εργασιών, Τεύχος Γ΄, 6η Επανάληψη, σελ. 36) .....	87
<i>Εικόνα 3.19.</i> Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας υπολογιστικής εκτίμησης που λειτουργεί ως μέσο επαλήθευσης της απάντησης (Βιβλίο Μαθητή, 9η Επανάληψη, σελ. 141) .....	91
<i>Εικόνα 3.20.</i> Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης μήκους που λειτουργεί ως μέσο επαλήθευσης της απάντησης (Τετράδιο Εργασιών, Β΄ Τεύχος, Κεφ. 17, σελ. 10) .....	91
<i>Εικόνα 3.21.</i> Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης βάρους που λειτουργεί ως μέσο επαλήθευσης της απάντησης (Βιβλίο Μαθητή, Κεφ. 18, σελ. 47) .....	92

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

<i>Σχήμα 3.1.</i> Κατανομή συχνότητας του συνόλου των δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών της Δ' τάξης ως προς το είδος της δραστηριότητας .....	64
<i>Σχήμα 3.2.</i> Κατανομή συχνότητας του συνόλου των δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων της Δ' τάξης ως προς το είδος της δραστηριότητας και το είδος του σχολικού εγχειριδίου .....	65
<i>Σχήμα 3.3.</i> Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης ως προς το είδος των σχολικών εγχειριδίων .....	65
<i>Σχήμα 3.4.</i> Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης ανά τύπο εκτίμησης και είδος σχολικού εγχειριδίου .....	67
<i>Σχήμα 3.5.</i> Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης ως προς τα χαρακτηριστικά πλαισίου και το είδος του σχολικού εγχειριδίου .....	68
<i>Σχήμα 3.6.</i> Κατανομή συχνότητας δραστηριοτήτων εκτίμησης ως προς το είδος του αριθμού και το είδος του σχολικού εγχειριδίου .....	69
<i>Σχήμα 3.7.</i> Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης που συνδέονται με την καθημερινότητα ως προς τον τύπο εκτίμησης .....	82
<i>Σχήμα 3.8.</i> Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης που συνδέονται με την καθημερινότητα ανά τύπο εκτίμησης .....	82
<i>Σχήμα 3.9.</i> Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης που συνδέονται έμμεσα με την επινόηση στρατηγικών ως προς τον τύπο εκτίμησης .....	86
<i>Σχήμα 3.10.</i> Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης ως προς την επαλήθευση της απάντησης .....	88
<i>Σχήμα 3.11.</i> Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης ως προς τη σύνδεση με την επαλήθευση της απάντησης και το είδος του σχολικού εγχειριδίου .....	89
<i>Σχήμα 3.12.</i> Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης που λειτουργούν ως μέσο επαλήθευσης της ακριβούς απάντησης ως προς τον τύπο εκτίμησης ....	89
<i>Σχήμα 3.13.</i> Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης που λειτουργούν ως μέσο επαλήθευσης της ακριβούς απάντησης ανά τύπο εκτίμησης .....	90

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μια από τις αλλαγές που επιχειρήθηκαν στη μαθηματική εκπαίδευση τις προηγούμενες δεκαετίες, είναι η απομάκρυνση από τη στείρα απομνημόνευση κανόνων και τύπων και η στροφή προς την ανάπτυξη δεξιοτήτων, χρήσιμων για την καθημερινή ζωή (Desli & Giakoumi, 2017). Στο πλαίσιο αυτό, το ερευνητικό ενδιαφέρον έχει επικεντρωθεί στην έννοια των εκτιμήσεων, τόσο λόγω της πρακτικής τους εφαρμογής στην καθημερινή ζωή των παιδιών και των ενηλίκων (Siegler & Booth, 2005) όσο και λόγω του καθοριστικού ρόλου που διαδραματίζουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης (Schneider, Grabner & Paetsch, 2009).

Σε έναν από τους ορισμούς που απαντώνται στη διεθνή βιβλιογραφία, οι εκτιμήσεις ορίζονται ως εικασίες που βασίζονται σε λογικά δεδομένα και προσεγγίζουν την τιμή ενός μεγέθους, ενός κόστους, μιας απόστασης κλπ., ή ενός αριθμητικού υπολογισμού (Clayton, 1996). Από τη φύση τους, οι εκτιμήσεις δεν επιδέχονται μόνο μια σωστή απάντηση, αλλά περιλαμβάνουν ένα εύρος τιμών (Clayton, 1996), γεγονός που τις καθιστά λιγότερο περίπλοκες και πιο εύχρηστες ως διαδικασία συγκριτικά με τους ακριβείς υπολογισμούς (Siegler & Booth, 2005). Οι Segovia, Castro, Castro και Rico (1989, στο Segovia & Castro, 2009) επεκτείνουν τον ορισμό για τις εκτιμήσεις υπογραμμίζοντας την υποκειμενικότητα στις κρίσεις του εκάστοτε εκτιμητή, οι οποίες εξαρτώνται από ποικίλους παράγοντες.

Στη βιβλιογραφία διακρίνονται τρεις τύποι εκτίμησης: α) η εκτίμηση ενός υπολογισμού ή υπολογιστική εκτίμηση (computational estimation), β) η εκτίμηση πληθικότητας ή εκτίμηση πλήθους (numerosity estimation ή quantity estimation) και γ) η εκτίμηση μέτρησης ή μέτρηση κατ' εκτίμηση (measurement estimation) (Siegler & Booth, 2005). Αρκετοί ερευνητές αναγνωρίζουν και εντάσσουν στις εκτιμήσεις πληθικότητας και έναν ακόμη τύπο, την εκτίμηση αριθμογραμμής (number line estimation) (Δεσλή, 2021). Παρόλο που και οι τρεις τύποι καταλήγουν σε μια προσεγγιστική απάντηση, διαφέρουν σημαντικά ως προς τα χαρακτηριστικά τους, τον τρόπο ανάπτυξης και τους παράγοντες δυσκολίας (Δεσλή, 2021).

Η έννοια των εκτιμήσεων είναι παρούσα σε διάφορες πτυχές της καθημερινής μας ζωής. Για παράδειγμα, καθημερινά καλούμαστε να χρησιμοποιήσουμε εκτιμήσεις, είτε για τον υπολογισμό μιας μαθηματικής πράξης (π.χ., το σύνολο των εξόδων του μήνα) είτε για μια εκτιμώμενη μέτρηση ενός μεγέθους (π.χ., το βάρος μιας βαλίτσας)

ή του πλήθους ενός συνόλου (π.χ., ο αριθμός των ατόμων σε μια αίθουσα). Η πραγματοποίηση εκτιμήσεων σε καταστάσεις της πραγματικής ζωής είναι συχνή και ιδιαίτερα σημαντική καθώς, αφενός συμβάλλει στην εξοικονόμηση χρόνου και αφετέρου διευκολύνει τη διαχείριση δεδομένων *«που είτε προέρχονται από την καθημερινή ζωή είτε περιέχουν γνήσιο μαθηματικό περιεχόμενο»* (Δεσλή, 2021, σ. 32).

Εξίσου σημαντική, ωστόσο, είναι η συμβολή των εκτιμήσεων και στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού (Segovia & Castro, 2009), καθώς οι εκτιμήσεις μπορούν να αξιοποιηθούν *«ως μέσο πρόβλεψης ή στρατηγικής ελέγχου κατά την αξιολόγηση της λογικότητας μιας απάντησης»* (Δεσλή, 2021, σ. 32). Κατά την προσπάθεια επίλυσης ενός ακριβούς υπολογισμού, οι εκτιμήσεις που προηγούνται προσφέρουν την ευκαιρία να ελεγχθεί κατά πόσο η απάντηση βρίσκεται στη σωστή κατεύθυνση και ανταποκρίνεται στα λογικά πλαίσια του αποτελέσματος. Η διαδικασία αυτή ενισχύει την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού, η οποία προϋποθέτει την εις βάθος κατανόηση της έννοιας και του μεγέθους των αριθμών, των σχέσεων που αναπτύσσονται ανάμεσά τους, καθώς και των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από τις μαθηματικές πράξεις (Segovia & Castro, 2009).

Η παρουσία των εκτιμήσεων στην καθημερινή μας ζωή, σε συνδυασμό με τη σπουδαιότητά τους στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και της αίσθησης του αριθμού, καθιστούν «αναγκαία» την ενσωμάτωσή τους στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια όλων των τάξεων. Ωστόσο, παρόλο που η σημασία των εκτιμήσεων έχει αναγνωριστεί στα περισσότερα Προγράμματα Σπουδών για τα μαθηματικά στο εξωτερικό και στην Ελλάδα, η αξιοποίησή τους δεν περιγράφεται επαρκώς ή δίνεται έμφαση σε κάποιους τύπους εκτιμήσεων με διαφορές στη συχνότητα εμφάνισής τους (Andrews, Xenofontos & Sayers, 2021; Xenofontos, Hizli Alkan & Andrews, 2022; Sunde, Petersson, Nosrati, Rosenqvist & Andrews, 2022). Παράλληλα, οι εκπαιδευτικοί στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Son, Hu & Lim, 2019), αλλά και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Subramaniam, 2014), έχουν συχνά φτωχές αντιλήψεις σχετικά με την αξιοποίηση των εκτιμήσεων στη μαθηματική εκπαίδευση και δίνουν μεγαλύτερη βαρύτητα στους ακριβείς υπολογισμούς και τις ακριβείς μετρήσεις κατά τη διδασκαλία τους.

Η ποιότητα της διδασκαλίας των μαθηματικών εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από τα σχολικά εγχειρίδια που χρησιμοποιούνται κατά την εφαρμογή της, καθώς αυτά

επηρεάζουν άμεσα τις μεθόδους, τα υλικά, και τις δραστηριότητες που χρησιμοποιούνται από τους εκπαιδευτικούς για την επίτευξη των μαθησιακών στόχων (Lepik, Grevholm & Viholainen, 2015). Παρά τις σύγχρονες επιστημονικές κατευθύνσεις για τον ρόλο και την αξιοποίηση των σχολικών εγχειριδίων στη μαθηματική εκπαίδευση, για τους Έλληνες εκπαιδευτικούς το σχολικό εγχειρίδιο εξακολουθεί να αποτελεί το κυριότερο εργαλείο στον σχεδιασμό και την εφαρμογή της διδασκαλίας τους (Xenofontos & Papadopoulos, 2015; Μπίκος, 2016). Συνεπώς, η περιορισμένη παρουσία δραστηριοτήτων εκτίμησης στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών μπορεί να επηρεάσει το περιεχόμενο της διδασκαλίας των εκπαιδευτικών και κατ' επέκταση την ενσωμάτωση των εκτιμήσεων στη διδασκαλία τους (Chang, Males, Mosier & Gonulates, 2011).

Καθώς τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν το υλικό που αξιοποιείται εκτενώς από τους εκπαιδευτικούς, κρίνεται σημαντικό να μελετηθούν οι δραστηριότητες εκτίμησης που περιλαμβάνουν τα εγχειρίδια και να εξεταστεί η συχνότητα αλλά και ο τρόπος εμφάνισης των δραστηριοτήτων εκτίμησης σε αυτά. Συγκεκριμένα, σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να διερευνηθεί η παρουσία των δραστηριοτήτων των τριών τύπων εκτίμησης στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ' τάξης του δημοτικού σχολείου. Τα επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα που επιχειρεί να εξετάσει η παρούσα εργασία είναι:

1. Ποια είναι η συχνότητα εμφάνισης των δραστηριοτήτων εκτίμησης στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Δ' δημοτικού;

Προκειμένου να απαντηθεί το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, θα μελετηθεί το πλήθος των δραστηριοτήτων εκτίμησης που εμφανίζονται στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ' δημοτικού (Βιβλίο Μαθητή και Τετράδια Εργασιών). Σε συγκριτική μελέτη του περιεχομένου τριών σουηδικών σχολικών εγχειριδίων για τη διδασκαλία των μαθηματικών στην Α' δημοτικού η παρουσία των εκτιμήσεων βρέθηκε να είναι μηδαμινή (Sayers, Petersson, Rosenqvist & Andrews, 2021). Επιπλέον, σύμφωνα με τους Παπανικολάου και Καλαβάση (2017), οι δραστηριότητες εκτίμησης στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Α', Β' και Γ' δημοτικού φαίνεται να είναι σημαντικά λιγότερες σε σχέση με τις δραστηριότητες που απαιτείται απάντηση με ακρίβεια. Στην παρούσα μελέτη αναμένεται οι δραστηριότητες εκτίμησης

να είναι αριθμητικά λιγότερες σε σχέση με τις δραστηριότητες ακριβούς υπολογισμού και ακριβούς μέτρησης στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της Δ' δημοτικού.

2. Διαφοροποιείται η συχνότητα εμφάνισης των δραστηριοτήτων ως προς τους τρεις τύπους εκτίμησης;

Στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα θα μελετηθεί συγκριτικά το πλήθος των δραστηριοτήτων εκτίμησης ως προς τους τρεις τύπους εκτίμησης (υπολογιστική εκτίμηση, εκτίμηση πλήθους, εκτίμηση μέτρησης). Σε έρευνες όπου μελετήθηκαν τα Αναλυτικά Προγράμματα σπουδών των τεσσάρων χωρών του Ηνωμένου Βασιλείου (Andrews, et al., 2021) και των τριών χωρών της Σκανδιναβίας (Sunde et al., 2022) διαπιστώθηκε πως δίνεται μεγαλύτερη έμφαση, αν και περιορισμένη, στις δραστηριότητες υπολογιστικής εκτίμησης και μετρήσεων παρά στις δραστηριότητες εκτίμησης πλήθους και εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή. Επομένως, στην παρούσα έρευνα αναμένεται η πλειοψηφία των δραστηριοτήτων εκτίμησης να αποτελούν δραστηριότητες υπολογιστικής εκτίμησης.

3. Ποιες διαστάσεις σημαντικότητας της έννοιας της εκτίμησης εμπεριέχονται στις δραστηριότητες εκτίμησης των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών της Δ' δημοτικού;

Τέλος, στο τρίτο ερευνητικό ερώτημα θα μελετηθεί η σύνδεση των δραστηριοτήτων εκτίμησης με τις τρεις διαστάσεις σημαντικότητας της έννοιας της εκτίμησης (Παπανικολάου & Καλαβάσης, 2017): α) σύνδεση με την καθημερινότητα, β) επινόηση νέων και ευέλικτων στρατηγικών, πέρα από τη μηχανική εφαρμογή αλγορίθμων και γ) επαλήθευση της απάντησης με ακρίβεια. Σύμφωνα με τους Παπανικολάου και Καλαβάση (2017), στις περισσότερες δραστηριότητες εκτίμησης των τριών πρώτων τάξεων του δημοτικού σχολείου, οι εκτιμήσεις σχετίζονται κυρίως με τη σύνδεση με την καθημερινότητα, ενώ σε ελάχιστες δραστηριότητες οι εκτιμήσεις χρησιμοποιούνται ως μέσο επαλήθευσης της ακριβούς απάντησης. Παρομοίως, στην παρούσα έρευνα αναμένεται η πλειοψηφία των δραστηριοτήτων εκτίμησης να συνδέεται με την παρουσία των εκτιμήσεων στην καθημερινή ζωή.

Προκειμένου να εξεταστούν τα παραπάνω ερευνητικά ερωτήματα, στην παρούσα μελέτη διερευνάται το περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών της Δ' τάξης του δημοτικού σχολείου. Πιο συγκεκριμένα, η εργασία διαρθρώνεται σε πέντε κεφάλαια.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η βιβλιογραφική επισκόπηση της εργασίας. Πιο αναλυτικά, επιχειρείται η εννοιολογική αποσαφήνιση της έννοιας της εκτίμησης και η ανάδειξη της σημασίας και χρησιμότητάς της στη μαθηματική εκπαίδευση. Επιπλέον, περιγράφεται η παρουσία της έννοιας της εκτίμησης στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών του εξωτερικού και της Ελλάδας, καθώς και οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των εκτιμήσεων. Τέλος, επιχειρείται η ανάδειξη του ρόλου των σχολικών εγχειριδίων στη διδασκαλία των εκτιμήσεων και παρουσιάζονται έρευνες σχετικά με την παρουσία των δραστηριοτήτων εκτίμησης στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του εξωτερικού και της Ελλάδας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται αναλυτικά η μεθοδολογία της έρευνας. Συγκεκριμένα, περιγράφεται η μέθοδος έρευνας που χρησιμοποιήθηκε και παρατίθεται αναλυτικά η δομή και το περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων που μελετήθηκαν. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων εκτίμησης που επιλέχθηκαν, καθώς και τα κριτήρια με τα οποία πραγματοποιήθηκε η ανάλυσή τους. Τέλος, αναφέρεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε κατά την έρευνα και ο τρόπος εξαγωγής των αποτελεσμάτων.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας. Τα ευρήματα της μελέτης απαντούν στα τρία ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στην αρχή της ερευνητικής διαδικασίας και αφορούν στη συχνότητα εμφάνισης των δραστηριοτήτων εκτίμησης, καθώς και στη διαφοροποίησή τους ως προς τον τύπο εκτίμησης και ως προς άλλα επιμέρους χαρακτηριστικά. Επίσης, παρουσιάζονται αποτελέσματα σχετικά με τη σύνδεση των δραστηριοτήτων εκτίμησης με την καθημερινή ζωή, την επινόηση νέων στρατηγικών και την επαλήθευση της απάντησης με ακρίβεια.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η συζήτηση και τα συμπεράσματα της έρευνας. Συγκεκριμένα, δίνεται απάντηση στα τρία ερευνητικά ερωτήματα και συνοψίζονται τα βασικά συμπεράσματα που προκύπτουν από την παρούσα εργασία. Τέλος, αναφέρονται ορισμένοι περιορισμοί που αφορούν τη διεξαγωγή της μελέτης και διατυπώνονται ορισμένες προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

Η εργασία ολοκληρώνεται με το πέμπτο κεφάλαιο, στο οποίο παρατίθεται αναλυτικά η ελληνόγλωσση και η ξενόγλωσση βιβλιογραφία.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

Η βιβλιογραφική επισκόπηση της εργασίας διαρθρώνεται σε τρεις ενότητες. Στην πρώτη ενότητα επιχειρείται η εννοιολογική αποσαφήνιση της έννοιας της εκτίμησης, περιγράφονται αναλυτικά οι τρεις τύποι αριθμητικών εκτιμήσεων και επιχειρείται η ανάδειξη της σημασίας της εκτίμησης και της χρησιμότητάς της τόσο στην καθημερινή ζωή όσο και στην ανάπτυξη των μαθηματικών ικανοτήτων. Στη δεύτερη ενότητα εξετάζεται η παρουσία των εκτιμήσεων στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών του εξωτερικού και της Ελλάδας και παρουσιάζονται οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των εκτιμήσεων στη μαθηματική εκπαίδευση. Τέλος, η τρίτη ενότητα εστιάζεται στον ρόλο των σχολικών εγχειριδίων στη διδασκαλία των εκτιμήσεων και περιγράφονται ευρήματα ερευνών σχετικά με την παρουσία των εκτιμήσεων στα σχολικά εγχειρίδια του εξωτερικού και της Ελλάδας.

## 1.1 Η έννοια των εκτιμήσεων

### 1.1.1 Εννοιολογική αποσαφήνιση

Η έννοια της εκτίμησης (estimation) είναι παρούσα σε κάθε πτυχή της ζωής τόσο των παιδιών όσο και των ενηλίκων. Σε καθημερινή βάση, οι άνθρωποι έρχονται αντιμέτωποι με προβλήματα που απαιτούν γρήγορες απαντήσεις χωρίς την εμπλοκή πολύπλοκων και ακριβών υπολογισμών. Τα προβλήματα αυτά μπορεί να αφορούν έναν κατά προσέγγιση υπολογισμό (π.χ., το συνολικό κόστος των διακοπών), την εκτίμηση ενός πλήθους (π.χ., τον αριθμό των ατόμων σε μια αίθουσα) ή μια μέτρηση κατ' εκτίμηση (π.χ., το βάρος μιας σακούλας ή το εμβαδόν ενός διαμερίσματος). Σύμφωνα με τους Siegler και Booth (2005), οι εκτιμήσεις χρησιμοποιούνται καθημερινά πολύ συχνότερα από κάθε άλλη διαδικασία ακριβούς υπολογισμού ή μέτρησης, ενώ, κατά τη Reys (1992, στο Δεσλή, 2021), πάνω από το 80% των μαθηματικών ενασχολήσεων απαιτούν την πραγματοποίηση εκτιμήσεων παρά υπολογισμών με ακρίβεια.

Στη διεθνή βιβλιογραφία απαντώνται διάφοροι ορισμοί για την έννοια των εκτιμήσεων. Σύμφωνα με τον Λεμονίδη (2013), η εκτίμηση είναι μια άτυπη μέτρηση που στηρίζεται στη γνώμη και την εμπειρία των υποκειμένων και συμβάλλει στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού και της ικανότητας υπολογισμού. Κατά τον



Clayton (1996), οι εκτιμήσεις ορίζονται ως εικασίες που βασίζονται σε λογικά δεδομένα και προσεγγίζουν την τιμή ενός μεγέθους, ενός κόστους, μιας απόστασης κλπ., ή ενός αριθμητικού υπολογισμού. Παρόμοιος είναι ο ορισμός που δίνεται και από τον Smart (1982), κατά τον οποίο εκτίμηση είναι μια κατά προσέγγιση απάντηση που έχει τη μορφή ενός αριθμού, ποσού ή μεγέθους, η οποία είναι επαρκώς κοντά στο ακριβές αποτέλεσμα ώστε να μπορεί να αξιοποιηθεί για έναν συγκεκριμένο σκοπό. Οι Siegler και Booth (2005) με τη σειρά τους ορίζουν την εκτίμηση ως μια διαδικασία μετατροπής μεταξύ εναλλακτικών ποσοτικών αναπαραστάσεων, εκ των οποίων τουλάχιστον μία είναι ανακριβής.

Από τη φύση τους, οι εκτιμήσεις δεν επιδέχονται μόνο μια σωστή απάντηση, αλλά περιλαμβάνουν ένα εύρος τιμών (Clayton, 1996), γεγονός που τις καθιστά λιγότερο περίπλοκες και πιο εύχρηστες ως διαδικασία συγκριτικά με τους ακριβείς υπολογισμούς (Siegler & Booth, 2005). Οι Segovia, Castro, Castro και Rico (1989, στο Segovia & Castro, 2009) επεκτείνουν τον ορισμό των εκτιμήσεων υπογραμμίζοντας την υποκειμενικότητα στις κρίσεις του εκάστοτε εκτιμητή, οι οποίες εξαρτώνται από ποικίλους παράγοντες. Οι υποκειμενικές κρίσεις των εκτιμήσεων διαφαίνονται και μέσα από το πλήθος στρατηγικών εκτίμησης που αξιοποιούνται και οδηγούν άλλοτε σε ακριβείς και άλλοτε σε λιγότερο ακριβείς προσεγγίσεις (Siegler & Booth, 2005).

Παρά τους διαφορετικούς ορισμούς που έχουν προταθεί από τους ερευνητές, είναι ξεκάθαρο πως η έννοια των εκτιμήσεων δεν είναι συνυφασμένη με την έννοια του μαντέματος. Οι εκτιμήσεις βασίζονται στη λογική, όχι στην τύχη, και προϋποθέτουν την αξιοποίηση ορισμένων στρατηγικών που θα οδηγήσουν σε ένα κατά προσέγγιση αποτέλεσμα (Λεμονίδης, 2013).

Επιπλέον, ο Reys (1984) διατύπωσε ορισμένα χαρακτηριστικά της έννοιας των εκτιμήσεων, τα οποία αργότερα επεκτάθηκαν και αναπτύχθηκαν από τον Segovia και τους συνεργάτες του (1989, στο Segovia & Castro, 2009). Η εκτίμηση ορίζεται συχνότερα ως η τιμή μιας ποσότητας ή το αποτέλεσμα μιας αριθμητικής πράξης, ενώ το υποκείμενο που την πραγματοποιεί έχει κάποια εμπειρία ή πληροφορίες σχετικά με την κατάσταση που εκτιμάται. Επίσης, η εκτίμηση πραγματοποιείται νοερά, χωρίς τη χρήση κάποιου εργαλείου, αλλά και γρήγορα, με την αξιοποίηση όσο το δυνατόν απλούστερων αριθμών. Ακόμη, στην πλειοψηφία των περιπτώσεων το αποτέλεσμα της

εκτίμησης δεν είναι ακριβές, αλλά αρκετά κοντά στην ακριβή απάντηση και εξαρτάται πάντα από το υποκείμενο που την πραγματοποιεί.

Στη βιβλιογραφία, η έννοια των εκτιμήσεων συνυπάρχει αρκετά συχνά με δυο ακόμη έννοιες, την αίσθηση του αριθμού (number sense) και τους νοερούς υπολογισμούς (mental computations). Ως αίσθηση του αριθμού ορίζεται η *«γενική κατανόηση των αριθμών και των αριθμητικών πράξεων μαζί με την ικανότητα και την τάση για χρήση αυτής της κατανόησης με ευελιξία, προκειμένου να αναπτύξει κανείς χρήσιμες στρατηγικές για τη διαχείριση των αριθμών και των πράξεων με αυτούς»* (McIntosh, Reys & Reys, 1992, σ. 3). Με άλλα λόγια, η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού συνεπάγεται κατανόηση του νοήματος και του μεγέθους των αριθμών, των πολλαπλών σχέσεων που αναπτύσσονται μεταξύ τους, αλλά και αξιοποίηση αυτής της κατανόησης για την ανάπτυξη στρατηγικών και τη διαχείριση μαθηματικών καταστάσεων που προκύπτουν (NCTM, 1989, στο Segovia & Castro, 2009). Συνεπώς, η έννοια των εκτιμήσεων αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της αίσθησης του αριθμού, καθώς η ανάπτυξη της ικανότητας εκτίμησης προϋποθέτει τη βαθιά κατανόηση της έννοιας των αριθμών και την ευέλικτη διαχείρισή τους (Segovia & Castro, 2009).

Παρόμοια, άρρηκτα συνδεδεμένη με τις εκτιμήσεις είναι και η έννοια των νοερών υπολογισμών. Σύμφωνα με τους Segovia και Castro (2009), οι νοεροί υπολογισμοί έχουν κεντρικό ρόλο στην εκτίμηση του αποτελέσματος μιας πράξης ή τη μέτρηση μιας ποσότητας κατά προσέγγιση, καθώς κατά την πραγματοποίηση της εκτίμησης, οι υπολογισμοί γίνονται νοερά και επιλέγονται διάφορες στρατηγικές για την επίλυση του προβλήματος. Ωστόσο, οι δυο έννοιες δεν είναι ταυτόσημες, καθώς κατά τους νοερούς υπολογισμούς αναμένεται μια ακριβής απάντηση που βασίζεται σε νοερές διαδικασίες, χωρίς τη χρήση κάποιου βοηθητικού εργαλείου, όπως για παράδειγμα, χαρτί και μολύβι. Σε κάθε περίπτωση, η διδασκαλία των νοερών υπολογισμών είναι ιδιαίτερα σημαντική για τη διδασκαλία των εκτιμήσεων, καθώς προσφέρει στρατηγικές επίλυσης που είναι ιδιαίτερα χρήσιμες κατά τη διαχείριση των υπολογιστικών εκτιμήσεων (Reys, 1984).

### **1.1.2 Τύποι εκτίμησης**

Σύμφωνα με τους Siegler και Booth (2005), οι εκτιμήσεις για ποσοτικές αναπαραστάσεις διακρίνονται σε δυο κατηγορίες, τις αριθμητικές και τις μη

αριθμητικές. Αναλυτικότερα, οι αριθμητικές εκτιμήσεις αντιστοιχούν σε δραστηριότητες εκτίμησης, στις οποίες εμπεριέχονται αριθμοί. Οι αριθμητικές εκτιμήσεις διακρίνονται με τη σειρά τους στις εξής υποκατηγορίες: α) η εκτίμηση ενός υπολογισμού ή υπολογιστική εκτίμηση (computational estimation), κατά την οποία μια αριθμητική αναπαράσταση (π.χ., 22x5) μετατρέπεται σε μία άλλη αριθμητική αναπαράσταση (περίπου 100), β) η εκτίμηση πληθικότητας ή εκτίμηση πλήθους (numerosity estimation ή quantity estimation), κατά την οποία μια μη αριθμητική αναπαράσταση (π.χ., η οπτική αναπαράσταση του συνόλου των μαθητών σε μια σχολική αίθουσα) μετατρέπεται σε αριθμητική (περίπου 20 μαθητές) και γ) η εκτίμηση μέτρησης ή μέτρηση κατ' εκτίμηση (measurement estimation), κατά την οποία μια μη αριθμητική αναπαράσταση (π.χ., η οπτική αναπαράσταση του μήκους ενός τραπέζιου) μετατρέπεται σε αριθμητική (περίπου 1 μέτρο). Σύμφωνα με τους ίδιους ερευνητές, στη δεύτερη κατηγορία των μη αριθμητικών εκτιμήσεων, δεν εμπεριέχονται αριθμητικές αναπαραστάσεις και η εκτίμηση αφορά μετατροπή μιας μη αριθμητικής αναπαράστασης (π.χ., φωτεινότητα μιας λάμπας) σε μια άλλη μη αριθμητική αναπαράσταση (π.χ., χωρική θέση σε μια γραμμή).

Οι αριθμητικές εκτιμήσεις αποτελούν τη συνηθέστερη μορφή εκτιμήσεων που απαντώνται στη διεθνή βιβλιογραφία. Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στις αριθμητικές εκτιμήσεις και, συγκεκριμένα, στους τρεις τύπους στους οποίους διακρίνονται: υπολογιστική εκτίμηση, εκτίμηση πλήθους και εκτίμηση μέτρησης. Και οι τρεις τύποι εκτίμησης χαρακτηρίζονται από ποικιλομορφία, καθώς διαφέρουν ως προς τα χαρακτηριστικά τους, τον τρόπο ανάπτυξής τους και τους παράγοντες δυσκολίας, ωστόσο, όλοι καταλήγουν σε μια προσεγγιστική απάντηση (Δεσλή, 2021).

### **1.1.2.α Υπολογιστική Εκτίμηση**

Κατά τη Dowker (1992), η υπολογιστική εκτίμηση ορίζεται ως «η πραγματοποίηση λογικών εικασιών για τον κατά προσέγγιση προσδιορισμό απαντήσεων σε αριθμητικά προβλήματα, χωρίς ή πριν από την εκτέλεση ενός ακριβούς υπολογισμού» (σ. 45), ενώ σε έναν άλλο ορισμό περιγράφεται ως «η διαδικασία απλοποίησης ενός αριθμητικού προβλήματος με τη χρήση κάποιου συνόλου κανόνων ή διαδικασιών για την παραγωγή μιας κατά προσέγγιση απάντησης μέσω νοερών υπολογισμών» (Ainsworth, Bibby & Wood, 2002, σ. 28). Με απλά λόγια, η υπολογιστική εκτίμηση χρησιμοποιείται για να δοθεί απάντηση στο ερώτημα «Πόσο περίπου κάνει...»

(Δεσλή, 2021). Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα της υπολογιστικής εκτίμησης είναι ότι η πραγματοποίησή τους απαιτεί λιγότερο χρόνο και ενέργεια από τους ακριβείς υπολογισμούς και ενδείκνυται να χρησιμοποιηθεί σε περιστάσεις που απαιτούν μια ταχύτερη απάντηση (Ganor-Stern, 2018), όπως, για παράδειγμα, κατά τον υπολογισμό των εβδομαδιαίων εξόδων ενός νοικοκυριού.

Κατά την ανάπτυξη της υπολογιστικής εκτίμησης οι μαθητές χρησιμοποιούν μια ποικιλία στρατηγικών, τις οποίες στις περισσότερες περιπτώσεις δεν έχουν διδαχθεί, αλλά τις επινοούν βάσει της δομής του δεκαδικού συστήματος και των απαιτήσεων της μνήμης εργασίας που θέτει η υπολογιστική εκτίμηση (Siegler & Booth, 2005). Κατά τους Siegler και Booth (2005), οι στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης μπορούν να ταξινομηθούν σε διάφορα επίπεδα γενίκευσης. Σύμφωνα με τον Reys και τους συνεργάτες του (1982, στο Siegler & Booth, 2005), τόσο τα παιδιά όσο και οι ενήλικες χρησιμοποιούν γενικά τρεις κατηγορίες στρατηγικών. Η πρώτη κατηγορία στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης είναι η ανασύνθεση (reformulation), κατά την οποία οι εκτιμητές αλλάζουν τα αριθμητικά δεδομένα της πράξης, ώστε να είναι πιο εύκολο να πραγματοποιηθεί νοερά ο υπολογισμός. Για παράδειγμα, κατά τον υπολογισμό μιας πράξης (π.χ.,  $367+432$ ), μπορεί να πραγματοποιηθεί στρογγυλοποίηση των όρων της πράξης στην πλησιέστερη δεκάδα και έπειτα να υπολογισθεί το άθροισμα των δυο νέων αριθμών ( $370+430$ ). Η δεύτερη κατηγορία είναι η μετάφραση (translation), όπου η δομή ενός προβλήματος αλλάζει, ώστε να παραχθεί μια πιο διαχειρίσιμη μορφή του προβλήματος. Για παράδειγμα, κατά την εκτίμηση του αθροίσματος ενός μεγάλου πλήθους αριθμών (π.χ.,  $46+34+59+37+85$ ), εκτιμάται η μέση τιμή για όλους τους αριθμούς (περίπου 50), καθώς και για το πλήθος των αριθμών (περίπου 5), και στη συνέχεια υπολογίζεται το γινόμενο των δυο αριθμών ( $50 \times 5$ ). Η τρίτη κατηγορία είναι η αντιστάθμιση (compensation), κατά την οποία ο πρώτος όρος μιας αριθμητικής πράξης στρογγυλοποιείται προς τα πάνω και ο δεύτερος όρος στρογγυλοποιείται προς τα κάτω ή το αντίστροφο. Για παράδειγμα, κατά τον υπολογισμό του αθροίσματος δυο αριθμών (π.χ.,  $588+239$ ), οι δυο όροι στρογγυλοποιούνται προς τα πάνω και προς τα κάτω αντίστοιχα και έπειτα υπολογίζεται το άθροισμα των δυο νέων αριθμών ( $600+200$ ).

Αυτές οι τρεις κατηγορίες αντιπροσωπεύουν τις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης που χρησιμοποιούνται από εκτιμητές όλων των ηλικιών σε διάφορα πολιτισμικά πλαίσια, σύμφωνα με έρευνες που πραγματοποιήθηκαν και συμμετείχαν

ενήλικες και μαθητές ηλικίας 10 και 12 ετών στη Γαλλία (Lemaire & Lecacheur, 2002), μαθητές ηλικίας 13 ετών στην Τουρκία (Boz & Bulut, 2012), μαθητές ηλικίας 11 και 14 ετών στην Ιαπωνία (Reys, Reys, Nohda, Ishida, Yoshikawa & Shimizu, 1991) και στο Μεξικό (Reys, Reys & Peñafiel, 1991), καθώς και ενήλικες εκπαιδευτικοί στο Κουβέιτ (Alajmi, 2009). Τα αποτελέσματα των παραπάνω ερευνών επιβεβαιώνει μια πρόσφατη ανασκόπηση ερευνών σχετικά με τις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης που εφαρμόζονται από μαθητές νηπιαγωγείου και δημοτικού σχολείου (Sekeris, Verschaffel & Luwel, 2019).

Εκτός των παραπάνω ευρημάτων, πλήθος ερευνών έχει επικεντρωθεί στη μελέτη των επιδόσεων των μαθητών διαφόρων ηλικιακών τάξεων στις υπολογιστικές εκτιμήσεις. Πιο αναλυτικά, στην έρευνα του Liu (2009) μελετώνται οι επιδόσεις 403 Κινέζων μαθητών της τρίτης και πέμπτης δημοτικού στις υπολογιστικές εκτιμήσεις πολλαπλασιασμού ακέραιων αριθμών. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, οι μαθητές της πέμπτης δημοτικού ήταν περισσότερο ακριβείς στις εκτιμήσεις τους, καθώς εφάρμοζαν νοερά τον αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού για να προσεγγίσουν την ακριβέστερη απάντηση, σε αντίθεση με τους μαθητές της τρίτης δημοτικού που εφάρμοζαν κατά πλειοψηφία στρογγυλοποίηση. Επιπλέον, οι επιδόσεις των μαθητών ήταν καλύτερες όταν τα έργα εκτίμησης παρουσιάζονταν σε αυτούς γραπτά και όχι προφορικά, ενώ δεν παρατηρήθηκαν αξιοσημείωτες διαφορές μεταξύ των δυο φύλων. Σύμφωνα με τον Liu (2009), η χρήση νοερών αλγορίθμων από τους μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας υποδεικνύει πως οι μαθητές έχουν την τάση να υπολογίζουν με ακρίβεια τις απαντήσεις τους, ακόμη και σε έργα που αφορούν υπολογιστικές εκτιμήσεις.

Στην έρευνα των Yang και Wu (2012), στην οποία συμμετείχαν 198 μαθητές ηλικίας 14 ετών στη νότια Ταϊβάν, μελετήθηκαν οι διαφορές στις επιδόσεις υπολογιστικής εκτίμησης, κατά την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων και προβλημάτων πλαισίου. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, οι εκτιμήσεις των μαθητών ήταν περισσότερο επιτυχείς στα αριθμητικά προβλήματα (ποσοστό επιτυχίας 45%), σε σύγκριση με τα προβλήματα πλαισίου (ποσοστό επιτυχίας 33%), ανεξάρτητα από την στρατηγική υπολογιστικής εκτίμησης που εφάρμοζαν (μετάφραση, αναδόμηση, αντιστάθμιση). Επιπλέον, τα ευρήματα της έρευνας υποδεικνύουν πως οι συμμετέχοντες έτειναν να χρησιμοποιούν γραπτούς αλγορίθμους για την επίλυση των αριθμητικών προβλημάτων και των προβλημάτων πλαισίου, αντί να πραγματοποιούν υπολογιστικές εκτιμήσεις, όπως ζητούνταν.

Στην έρευνα των Lemonidis, Nolka και Nikolantonakis (2014), διερευνήθηκαν οι επιδόσεις 596 Ελλήνων μαθητών της πέμπτης και έκτης τάξης του δημοτικού σχολείου στην υπολογιστική εκτίμηση, καθώς και οι στρατηγικές και τα λάθη τους κατά την επίλυση των προβλημάτων. Επιπλέον, πραγματοποιήθηκε σύγκριση μεταξύ της ικανότητας των μαθητών να επεξηγούν τον τρόπο δράσης τους κατά την επίλυση των προβλημάτων υπολογιστικής εκτίμησης και της ικανότητάς τους στην επίλυση προβλημάτων. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, η πλειονότητα των μαθητών παρουσίασε χαμηλές επιδόσεις στις υπολογιστικές εκτιμήσεις. Οι ελλιπείς γνώσεις των μαθητών στις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης, τους οδηγούσαν στην επίλυση των προβλημάτων με την εφαρμογή νοερών αλγορίθμων, με αποτέλεσμα να καταλήγουν σε λανθασμένες απαντήσεις. Επίσης, από τα ευρήματα της έρευνας διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές που πραγματοποίησαν υπολογιστικές εκτιμήσεις και επεξήγησαν τον τρόπο σκέψης τους, είχαν μεγαλύτερη ικανότητα στην επίλυση προβλημάτων σε σύγκριση με τους υπόλοιπους μαθητές που προσπάθησαν να εφαρμόσουν νοερά αλγορίθμους.

Στη μελέτη των Tsao και Pan (2011) διερευνήθηκαν οι επιδόσεις 235 μαθητών της πέμπτης δημοτικού στην Ταϊβάν σε έργα υπολογιστικής εκτίμησης με ακεραίους, δεκαδικούς αριθμούς και κλάσματα, καθώς και η στάση των συμμετεχόντων απέναντι στις υπολογιστικές εκτιμήσεις. Σύμφωνα με τους ερευνητές, οι επιδόσεις των μαθητών στα έργα υπολογιστικής εκτίμησης που τους δόθηκαν ήταν γενικά μέτριες, ωστόσο οι μαθητές σημείωσαν καλύτερες επιδόσεις στα έργα που συμπεριελάμβαναν ακέραιους αριθμούς συγκριτικά με εκείνα που εμπριείχαν δεκαδικούς αριθμούς και κλάσματα. Όσον αφορά τη στάση των συμμετεχόντων απέναντι στις υπολογιστικές εκτιμήσεις, βρέθηκε οι μαθητές να είναι θετικά προσκείμενοι σε αυτές και να αναγνωρίζουν τη σημασία και χρησιμότητα των εκτιμήσεων στην καθημερινή ζωή.

Τέλος, οι Lemaire και Lecacheur (2011) μελέτησαν την ικανότητα 106 μαθητών της Γαλλίας, ηλικίας 13, 10 και 8 ετών, στην επιλογή της καταλληλότερης στρατηγικής για την επίλυση έργων υπολογιστικής εκτίμησης. Τα αποτελέσματά τους έδειξαν ότι τόσο οι επιδόσεις όσο και η ικανότητα επιλογής των κατάλληλων στρατηγικών στις υπολογιστικές εκτιμήσεις βελτιώνονται με την ηλικία. Τα ευρήματα αυτά επιβεβαιώνονται και από τη μεταγενέστερη έρευνα των Lemaire και Brun (2014) σε μαθητές της τρίτης και πέμπτης τάξης, όπου εκτός από τη βελτίωση της ταχύτητας και ακρίβειας των εκτιμήσεων, παρατηρήθηκε επίσης ότι το ποσοστό των μαθητών που

χρησιμοποιούσαν μία μόνο στρατηγική υπολογιστικής εκτίμησης μειώθηκε με την πάροδο της ηλικίας. Η σύνδεση της ικανότητας υπολογιστικής εκτίμησης με την ηλικιακή ανάπτυξη των μαθητών επισημαίνεται και στη βιβλιογραφική ανασκόπηση του Andrews και των συνεργατών του (2020), ενώ, σύμφωνα με τη Hammerstein και τους συνεργάτες της (2019), η βελτίωση στις επιδόσεις της υπολογιστικής εκτίμησης που επέρχεται με την ηλικία συνδέεται άμεσα με τη βελτίωση ορισμένων μαθηματικών ικανοτήτων, όπως η ευελιξία και η προσαρμοστικότητα στην επιλογή στρατηγικών.

### **1.1.2.β Εκτίμηση Πλήθους**

Η εκτίμηση πλήθους αφορά στην ικανότητα διάκρισης του αριθμού των αντικειμένων σε ένα σύνολο χωρίς καταμέτρηση (Sunde et al., 2022) και απαντά συνήθως στην ερώτηση «Πόσα περίπου είναι...;» (Δεσλή, 2021). Ο συγκεκριμένος τύπος εκτίμησης είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με την ικανότητα μέτρησης, συνεπώς η ακρίβεια των εκτιμήσεων μειώνεται όσο τα αντικείμενα του συνόλου αυξάνονται σε αριθμό (Smets, Sasanguie, Szűcs & Reynvoet, 2015). Η εκτίμηση πλήθους χρησιμοποιείται κυρίως για την πραγματοποίηση γρήγορων και κατά προσέγγιση απαντήσεων σε έργα που δεν απαιτείται ο προσδιορισμός μίας ποσότητας με ακρίβεια, ενώ χρησιμοποιείται συχνά και ως μέσο ελέγχου των απαντήσεων που απαιτούν πολύπλοκους ή ακριβείς υπολογισμούς (Δεσλή & Τριανταφύλλου, 2019).

Στις μελέτες που αφορούν στις εκτιμήσεις πλήθους αξιοποιούνται τρεις μορφές έργων: α) τα έργα αντίληψης, κατά τα οποία οι συμμετέχοντες εκτιμούν το πλήθος ενός συνόλου κουκκίδων που τους παρουσιάζεται, β) τα έργα σύγκρισης, κατά τα οποία οι συμμετέχοντες συγκρίνουν τα πλήθη ορισμένων συνόλων από κουκκίδες που τους παρουσιάζονται, γ) τα έργα παραγωγής, κατά τα οποία οι συμμετέχοντες παραγάγουν ένα σύνολο κουκκίδων ίσο με την αξία ενός αριθμού που αναπαρίσταται συμβολικά, και δ) τα έργα αναπαραγωγής, κατά τα οποία οι συμμετέχοντες αναπαραγάγουν ένα σύνολο κουκκίδων ίσης αριθμητικής αξίας με ένα σύνολο κουκκίδων που τους παρουσιάζεται (Andrews et al., 2021). Η ικανότητα εκτίμησης πλήθους μελετάται, επίσης, μέσω της αριθμογραμμής, καθώς η αναπαράσταση ποσοτήτων σε μία νοερή αριθμητική γραμμή ευνοεί τη σύνδεση της αναπαράστασης του μεγέθους ενός αριθμού με τη συμβολική του μορφή (Thompson & Opfer, 2010) αλλά και τη σύγκριση των αριθμητικών μεγεθών (Schneider et al., 2009). Για τον λόγο αυτόν, αρκετοί ερευνητές

αναγνωρίζουν και εντάσσουν στις εκτιμήσεις πληθικότητας και έναν ακόμη τύπο, την εκτίμηση πάνω στην αριθμογραμμή (number line estimation) (Δεσλή, 2021).

Η εκτίμηση πάνω στην αριθμογραμμή περιλαμβάνει την προσέγγιση της θέσης ενός αριθμού πάνω στην αριθμογραμμή ή την εκτίμηση του αριθμού που αναπαριστά μια συγκεκριμένη θέση πάνω στη αριθμογραμμή (Siegler et al., 2009). Στην έρευνα των Praet και Desoete (2014) καταγράφηκαν οι επιδόσεις 132 μαθητών σε έργα εκτίμησης αριθμογραμμής από το διάστημα φοίτησης στο νηπιαγωγείο μέχρι και τη δεύτερα δημοτικού. Σύμφωνα με τα ευρήματα της έρευνας, σε αριθμογραμμή κλίμακας 0-100 υπήρχε μια σταθερή μείωση των λαθών στα έργα εκτίμησης από το νηπιαγωγείο μέχρι την πρώτη δημοτικού και μια μέτρια μείωση μέχρι και τη δεύτερα δημοτικού. Σε γενικές γραμμές, λοιπόν, οι επιδόσεις των παιδιών στην εκτίμηση πάνω στην αριθμογραμμή βελτιώνονται με την ηλικία, την εμπειρία και την εκπαίδευση. Ωστόσο, το μέγεθος των αριθμών, το είδος των αριθμών (ακέραιοι αριθμοί, κλάσματα, δεκαδικοί αριθμοί) και η μορφή του έργου, επηρεάζουν σημαντικά την πραγματοποίηση εκτιμήσεων σε όλες τις ηλικιακές ομάδες (Iuculano & Butterworth, 2011; Δεσλή & Τριανταφύλλου, 2019; 2022).

Πιο αναλυτικά, στην έρευνα των Δεσλή και Τριανταφύλλου (2019), στην οποία εξετάστηκαν οι επιδόσεις 64 μαθητών Α΄ και Β΄ δημοτικού στις εκτιμήσεις πάνω στην αριθμογραμμή από το 0-100, οι συμμετέχοντες σημείωσαν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας στις εκτιμήσεις τους για τους μικρότερους αριθμούς από το 0-20, καθώς και για τους μεγαλύτερους αριθμούς από 81-100, συγκριτικά με τις εκτιμήσεις τους για τους μεσαίους αριθμούς από το 21-80 όπου οι επιδόσεις τους ήταν μέτριες. Συνεπώς, από τα ευρήματα της έρευνας αναδεικνύεται πως το μέγεθος των αριθμών επηρεάζει σημαντικά τις εκτιμήσεις που πραγματοποιούνται, αλλά και πως τα άκρα της αριθμογραμμής λειτουργούν βοηθητικά ως σημεία αναφοράς στα οποία βασίζονται οι μαθητές για τις εκτιμήσεις των αριθμών που βρίσκονται κοντά τους.

Εκτός από το μέγεθος, σημαντικό ρόλο στην επιτυχία των εκτιμήσεων έχει και το είδος των αριθμών. Οι Iuculano και Butterworth (2011) μελέτησαν τις επιδόσεις δεκάχρονων παιδιών και νεαρών ενηλίκων σε έργα όπου καλούνταν να εκτιμήσουν τη θέση κλασματικών, δεκαδικών και ακέραιων αριθμών πάνω στην αριθμογραμμή. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, οι επιδόσεις των συμμετεχόντων, συμπεριλαμβανομένων και των ενηλίκων, ήταν πολύ χαμηλότερες για τους



κλασματικούς αριθμούς συγκριτικά με τους δεκαδικούς και τους ακέραιους, όπου η επιτυχία των συμμετεχόντων κυμαινόταν στα ίδια περίπου ποσοστά. Τα παραπάνω ευρήματα επιβεβαιώνονται και από την πρόσφατη έρευνα των Δεσλή και Τριανταφύλλου (2022), όπου βρέθηκε πως οι εκτιμήσεις 88 παιδιών Στ' δημοτικού και ενηλίκων ήταν περισσότερο επιτυχείς για τους δεκαδικούς αριθμούς παρά για τα κλάσματα.

Στην έρευνα των Δεσλή και Τριανταφύλλου (2022) μελετήθηκε, επίσης, η επιρροή που ασκεί η μορφή του έργου στην αποτελεσματικότητα των εκτιμήσεων. Σύμφωνα με τα ευρήματα, όλοι οι συμμετέχοντες σημείωσαν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας στην κατά προσέγγιση εύρεση της θέσης ενός ρητού αριθμού πάνω στην αριθμογραμμή σε σύγκριση με τον κατά προσέγγιση προσδιορισμό της τιμής ενός ρητού αριθμού σε συγκεκριμένη θέση της αριθμογραμμής. Παρόμοια είναι τα ευρήματα και στην έρευνα των Iuculano και Butterworth (2011), στην οποία επισημαίνεται πως ο χρόνος στα έργα εκτίμησης της θέσης ενός αριθμού ήταν σχεδόν διπλάσιος από τον αντίστοιχο χρόνο στα έργα εκτίμησης της τιμής ενός αριθμού πάνω στην αριθμογραμμή. Σύμφωνα με τις Δεσλή και Τριανταφύλλου (2022), η παραπάνω διαφορά στις επιδόσεις των συμμετεχόντων οφείλεται πιθανώς στην εξοικείωση που έχουν οι μαθητές με τα έργα εύρεσης της θέσης ενός αριθμού πάνω στην αριθμογραμμή, καθώς αυτός ο τύπος έργων χρησιμοποιείται συχνότερα κατά τη διδασκαλία στο πλαίσιο του σχολείου.

Στη βιβλιογραφία τρεις είναι οι βασικές τάσεις, με τις οποίες γίνεται προσπάθεια να ερμηνευθούν οι αλλαγές που παρατηρούνται στις επιδόσεις των ατόμων αναφορικά με τις εκτιμήσεις πάνω στην αριθμογραμμή (για αναλυτική περιγραφή, βλ. Δεσλή, 2021). Σε έρευνα που διεξήγαγαν οι Siegler και Opfer (2003) με συμμετέχοντες παιδιά ηλικίας 8 και 10 ετών, τους ζητήθηκε να εκτιμήσουν σε μία αριθμογραμμή από το 0 έως το 1.000 το σημείο που τοποθετείται ο αριθμός 150. Η πλειονότητα των συμμετεχόντων εκτίμησε πως ο αριθμός 150 βρίσκεται πιο κοντά στο 1000 σε σχέση με το 0, σε αντίθεση με τους ενήλικες και τα μεγαλύτερα παιδιά ηλικίας 12 ετών που πραγματοποίησαν εκτιμήσεις στη βάση περισσότερο γραμμικών αναπαραστάσεων. Παρόμοια είναι τα ευρήματα στην έρευνα των Siegler και Booth (2004), με συμμετέχοντες παιδιά νηπιαγωγείου και δευτέρας τάξης δημοτικού, με τη χρήση αριθμογραμμής από το 1 έως το 100. Από τα ευρήματα των δυο παραπάνω ερευνών συμπεραίνεται ότι οι μαθητές των πρώτων τάξεων του δημοτικού τείνουν να

αντιλαμβάνονται τους μικρότερους αριθμούς ως πιο ευρέως διατεταγμένους πάνω στην αριθμογραμμή, ακολουθώντας μια λογαριθμική αναπαράσταση των αριθμών, ενώ με την πάροδο του χρόνου αναπτύσσουν σταδιακά μια γραμμική αναπαράσταση των αριθμών με ίσες αποστάσεις μεταξύ τους, που οδηγεί και σε ακριβέστερες εκτιμήσεις.

Ωστόσο, η μετάβαση από τη λογαριθμική στη γραμμική αναπαράσταση των αριθμών τίθεται υπό αμφισβήτηση στο έργο ορισμένων ερευνητών, οι οποίοι υποστηρίζουν ότι οι αλλαγές στις εκτιμήσεις των παιδιών οφείλονται στην εξέλιξη του αναλογικού τους συλλογισμού και στην εφαρμογή στρατηγικών που βασίζονται σε αυτόν (Barth & Paladino, 2011; Slusser, Santiago & Barth, 2013). Πιο αναλυτικά, στη μελέτη των Barth και Paladino (2011) βρέθηκε πως παιδιά ηλικίας 5 και 7 ετών εκτιμούν σωστά την τιμή ενός αριθμού σε συγκεκριμένη θέση σε μία αριθμογραμμή από το 1 έως το 100, χρησιμοποιώντας ορισμένα σημεία αναφοράς. Για παράδειγμα, ο αριθμός 50 τοποθετήθηκε από την πλειονότητα των εφτάχρονων παιδιών στο μέσο της αριθμογραμμής ακολουθώντας τον αναλογικό συλλογισμό για τη σχέση ανάμεσα στο 50 και το 100. Τα πεντάχρονα παιδιά, όμως, λάμβαναν υπόψη ως σημείο αναφοράς μόνο το 0, με αποτέλεσμα οι εκτιμήσεις τους να μην είναι το ίδιο ακριβείς. Στην έρευνα της Slusser και των συνεργατών της (2013), βρέθηκε ότι μαθητές ακόμη μεγαλύτερης ηλικίας, συγκεκριμένα 7-10 ετών, λάμβαναν υπόψη στις εκτιμήσεις τους και την τιμή ενός ενδιάμεσου σημείου, πέρα από τα σημεία έναρξης και τέλους της αριθμογραμμής, χρησιμοποιώντας έτσι τρία σημεία αναφοράς. Συνεπώς, με την πάροδο της ηλικίας και την ανάπτυξη του αναλογικού τρόπου σκέψης, οι μαθητές στηρίζουν τις εκτιμήσεις τους σε όλο και περισσότερα σημεία αναφοράς πάνω στην αριθμογραμμή, με αποτέλεσμα οι εκτιμήσεις τους να είναι πιο ακριβείς και να ακολουθούν ένα γραμμικό μοτίβο.

Τέλος, από μια τρίτη ομάδα ερευνητών υποστηρίζεται, πως οι αναπτυξιακές αλλαγές στις εκτιμήσεις πλήθους των μαθητών οφείλονται στην εξοικειώσή τους με τους αριθμούς. Συγκεκριμένα, στην έρευνα της Ebersbach και των συνεργατών της (2008) βρέθηκε πως οι εκτιμήσεις 78 παιδιών ηλικίας 5-9 ετών ήταν περισσότερο ακριβείς όταν τα έργα αφορούσαν αριθμούς με τους οποίους είχαν μεγαλύτερη εξοικείωση, παρά για έργα που περιελάμβαναν άγνωστους αριθμούς. Έτσι, κατέληξαν στο συμπέρασμα πως οι εκτιμήσεις των παιδιών μικρής ηλικίας εξηγούνται αποτελεσματικότερα από ένα διμερές γραμμικό μοντέλο, που αποτελείται από δυο γραμμικά τμήματα, πάρα από ένα λογαριθμικό ή γραμμικό μοντέλο.

### **1.1.2.γ Εκτίμηση Μέτρησης**

Η εκτίμηση μέτρησης αναφέρεται στον προσδιορισμό της τιμής ενός μεγέθους χωρίς τη χρήση εργαλείων μέτρησης (Hogan & Brezinski, 2003). Τα μεγέθη αυτά μπορεί να αφορούν, για παράδειγμα, το ύψος ενός ατόμου, το μήκος μιας απόστασης, το βάρος ενός αντικειμένου ή τον χρόνο που απαιτείται για μια ενέργεια. Οι μετρήσεις κατ' εκτίμηση μπορούν να πραγματοποιηθούν είτε χρησιμοποιώντας τις τυποποιημένες μονάδες μέτρησης (π.χ. εκατοστά, κιλά κοκ.) είτε συγκρίνοντας την προς εκτίμηση ποσότητα με οικεία αντικείμενα (Joram, Gabriele, Bertheau, Gelman, & Subrahmanyam, 2005). Τόσο τα παιδιά όσο και οι ενήλικες δυσκολεύονται να εκτιμούν σωστά διάφορα μεγέθη. Ωστόσο, οι εκτιμήσεις μέτρησης φαίνεται να βελτιώνονται μέσα από την εμπειρία και την εξοικείωση με σχετικά έργα, καθώς με το πέρασμα του χρόνου αναπτύσσονται άτυπες μονάδες αναφοράς και στρατηγικές που συμβάλλουν σε ακριβέστερες εκτιμήσεις (Joram, Subrahmanyam, & Gelman, 1998).

Η συνηθέστερη στρατηγική για τις εκτιμήσεις μέτρησης που απαντάται στη βιβλιογραφία είναι η χρήση σημείων αναφοράς. Τα σημεία αναφοράς μπορεί να είναι γνωστές μονάδες μέτρησης ή οικεία αντικείμενα των εκτιμητών, καθώς τους βοηθούν να πραγματοποιούν εύκολα συγκρίσεις μεταξύ του κατ' εκτίμηση μεγέθους του αντικειμένου και του γνωστού σημείου αναφοράς. Συγκεκριμένα, στην έρευνα της Joram και των συνεργατών της (2005), ένας από τους συμμετέχοντες, μαθητής της Γ' δημοτικού, χρησιμοποίησε ένα κουτί από πατατάκια ως σημείο αναφοράς, ώστε να το συγκρίνει με το μέγεθος ενός σχοιניού εννέα εκατοστών. Από τα ευρήματα της μελέτης, αναδείχθηκε η αποτελεσματικότητα της στρατηγικής, καθώς φάνηκε πως οι μαθητές που αξιοποιούσαν στις εκτιμήσεις τους σημεία αναφοράς σχημάτιζαν πιο ακριβείς αναπαραστάσεις των τυπικών μονάδων μέτρησης και παρουσίασαν υψηλές επιδόσεις στις δραστηριότητες εκτίμησης. Παρόμοια, στην έρευνα της Jones και των συνεργατών της (2009) βρέθηκε ότι οι επιδόσεις μαθητών γυμνασίου στην Αμερική βελτιώθηκαν σημαντικά στις εκτιμήσεις μέτρησης, όταν διδάχθηκαν πως να αξιοποιούν μέρη του σώματός τους για να εκτιμούν το μέγεθος διαφόρων αντικειμένων. Τα παραπάνω ευρήματα επιβεβαιώνονται και από την έρευνα της Gooya και των συνεργατών της (2011), στην οποία συμμετείχαν δεκαπεντάχρονες και δεκαεξάχρονες μαθήτριες από το Ιράν, οι οποίες πραγματοποίησαν πιο γρήγορες και επιτυχείς εκτιμήσεις μέτρησης μετά τη χρήση σημείων αναφοράς που αφορούσαν

οικεία σε αυτές αντικείμενα (π.χ. το μήκος του σώματος ή τους χεριού τους, τα πλακάκια του τοίχου ή του πατώματος κ.α).

Επιπλέον, σημαντικό ρόλο στις επιδόσεις εκτίμησης των μαθητών διαδραματίζει το είδος των μονάδων μέτρησης, η χρήση, δηλαδή, τυπικών ή άτυπων μονάδων μέτρησης. Στην έρευνα των Jones, Gardner, Taylor, Forrester και Andre (2012), οι επιδόσεις μαθητών γυμνασίου στις εκτιμήσεις μέτρησης μήκους ήταν χαμηλές όταν χρησιμοποιούνταν ως μονάδα μέτρησης το μέτρο, ενώ αντίθετα βελτιώνονταν όταν χρησιμοποιούνταν άτυπες μονάδες μέτρησης που ήταν πιο οικείες στους μαθητές. Παρόμοια, στην έρευνα των Desli και Giakoumi (2017) όπου 87 Έλληνες μαθητές τρίτης και πέμπτης δημοτικού κλήθηκαν να εκτιμήσουν το μήκος αντικειμένων χρησιμοποιώντας τυπικές και άτυπες μονάδες μέτρησης, οι εκτιμήσεις μήκους βάσει των άτυπων μονάδων μέτρησης ήταν ακριβέστερες σε σχέση με τις εκτιμήσεις μήκους βάσει τυπικών μονάδων μέτρησης.

Όσον αφορά τις επιδόσεις των μαθητών στις εκτιμήσεις μέτρησης εμβαδού, αυτές δεν είναι ιδιαίτερα ικανοποιητικές. Πιο συγκεκριμένα, στην έρευνα των Βαϊτσίδη και Σκουμπουρδή (2015) μαθητές της Δ' δημοτικού κλήθηκαν αρχικά να συγκρίνουν δυο επιφάνειες εκτιμώντας εκείνη που έχει μεγαλύτερο εμβαδόν και, στη συνέχεια, να μετρήσουν τα δυο εμβαδά με τη χρήση βοηθητικών εργαλείων (π.χ., ψαλίδι, χάρακας, τετράγωνα χαρτόνια, λωρίδες χαρτονιού κ.α). Οι επιδόσεις των μαθητών στις εκτιμήσεις κατά τη σύγκριση των δυο σχημάτων ήταν στην πλειοψηφία τους χαμηλές, καθώς μόνο δύο από τα 15 παιδιά κατάφεραν να συγκρίνουν αποτελεσματικά τα δυο εμβαδά και μάλιστα μετά από παρότρυνση. Επιπλέον, οι επιδόσεις τους κατά τη μέτρηση κυμάνθηκαν στα ίδια επίπεδα, αφού τα βοηθητικά μέσα που επιλέχθηκαν είτε δεν ήταν λειτουργικά για τη μέτρηση του εμβαδού είτε δε χρησιμοποιήθηκαν με τον κατάλληλο τρόπο. Τα ευρήματα αυτά επιβεβαιώθηκαν αργότερα και από την έρευνα των Δεσλή και Μυρόβαλη (2017), όπου η ικανότητα 80 μαθητών της Ε' και Στ' τάξης στην εκτίμηση του μεγέθους μιας επιφάνειας αναδείχθηκε περιορισμένη, παρά τη σχετική εξοικείωσή τους με την έννοια του εμβαδού. Μάλιστα, οι περισσότεροι μαθητές χρησιμοποίησαν τον χάρακα ως εργαλείο αξιοποιώντας τις τυπικές μονάδες μέτρησης και προσπάθησαν να υπολογίσουν το εμβαδόν με τον τυποποιημένο αλγόριθμο, γεγονός που τους οδήγησε σε λιγότερο επιτυχείς εκτιμήσεις.

Σε μια παλαιότερη έρευνα, οι Forrester και Shire (1994) μελέτησαν τις επιδόσεις 67 μαθητών, ηλικίας 8-11 ετών, στις εκτιμήσεις μέτρησης όγκου, καθώς και την επιρροή που ασκεί σε αυτές το μέγεθος του αντικειμένου, οι διαστάσεις του, καθώς και οι προηγούμενες εμπειρίες των μαθητών με παρόμοια έργα. Τα αποτελέσματα έδειξαν, πως οι επιδόσεις των μαθητών βελτιώνονταν με την ηλικία, καθώς οι μεγαλύτεροι μαθητές λάμβαναν υπόψη κατά τις εκτιμήσεις τους περισσότερες παραμέτρους του έργου (π.χ, το πλαίσιο που συνόδευε το έργο), λόγω των προηγούμενων εμπειριών τους. Επιπλέον, το μέγεθος και οι διαστάσεις των αντικειμένων φάνηκε να επηρεάζουν σημαντικά τις εκτιμήσεις των μαθητών, αφού όσο αυξανόταν το μέγεθος, αυξανόταν και ο βαθμός δυσκολίας για τους εκτιμητές. Επιπλέον, η Huang (2020), η οποία διεξήγαγε μια παρόμοια έρευνα σε 477 μαθητές στην Ταϊβάν, ηλικίας 11, 12 και 19 χρονών, βρήκε πως οι εκτιμήσεις των μαθητών ήταν περισσότερο ακριβείς στις μεγαλύτερες ηλικίες, ενώ το μέγεθος και οι διαστάσεις του αντικειμένου επηρέαζαν σημαντικά την αποτελεσματικότητα των εκτιμήσεων, χωρίς ωστόσο να υπάρχει κάποιος συσχετισμός μεταξύ των δυο παραγόντων.

Τέλος, παρά τα αποτελέσματα των ερευνών που παρουσιάστηκαν παραπάνω για τις εκτιμήσεις μέτρησης μήκους, εμβαδού και όγκου, οι επιδόσεις των μαθητών φαίνεται να είναι περισσότερο επιτυχείς όταν αφορούν την εκτίμηση για βάρος και χρόνο. Πιο αναλυτικά, στη μελέτη των Δεσλή και Κώστα (2018), όπου διερευνήθηκε η ικανότητα 60 μαθητών της Δ' και Στ' τάξης σε δραστηριότητες εκτίμησης βάρους, όλοι οι μαθητές ανεξαρτήτως ηλικίας παρουσίασαν σχετικά υψηλές επιδόσεις στα έργα εκτίμησης βάρους, με τα αγόρια να πετυχαίνουν μεγαλύτερα ποσοστά ακρίβειας. Παρόμοια, η ηλικία δεν φαίνεται να ασκεί μεγάλη επιρροή στις εκτιμήσεις μέτρησης χρόνου καθώς, όπως βρήκαν οι Δεσλή και Ξενίδου (2021), ενήλικες και μαθητές της Στ' τάξης παρουσίασαν παρόμοιες επιδόσεις σε έργα εκτίμησης χρόνου, βασιζόμενοι κυρίως σε γνωστά σημεία αναφοράς και αξιοποιώντας περισσότερο άτυπες μονάδες μέτρησης του χρόνου.

### **1.1.3 Η σημασία και η χρησιμότητα των εκτιμήσεων**

Από την παρουσίαση των παραπάνω ερευνών καθίσταται σαφές πως η έννοια των εκτιμήσεων έχει κεντρίσει το ενδιαφέρον των ερευνητών τόσο λόγω της εμπλοκής της σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής όσο και λόγω της σύνδεσής της με την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Η διδασκαλία των εκτιμήσεων αποτελεί πλέον

έναν από τους βασικότερους στόχους των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών για τα μαθηματικά και αρκετές δραστηριότητες έχουν ενταχθεί στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών στο εξωτερικό και στην Ελλάδα (Δεσλή, 2021). Η σημασία και η χρησιμότητα των εκτιμήσεων τεκμαίρεται από μια πληθώρα παραγόντων που σχετίζονται με την πρακτική εφαρμογή των μαθηματικών στην καθημερινότητά μας, την ενίσχυση των μαθηματικών ικανοτήτων καθώς και την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού.

Κατά τους Segovia και Castro (2009), τέσσερις είναι οι λόγοι που καθιστούν απαραίτητη την ενσωμάτωση των εκτιμήσεων στη μαθηματική εκπαίδευση. Πρώτον, μέσω των εκτιμήσεων είναι δυνατό να δοθούν απαντήσεις σε προβλήματα, για τα οποία οι γνώσεις μας δεν επαρκούν ώστε να δοθεί μια ακριβής απάντηση, όπως, για παράδειγμα, ο αριθμός των ατόμων που χωρούν σε ένα γήπεδο. Δεύτερον, προβλήματα που εμπεριέχουν μεγάλους ή μη οικείους αριθμούς (π.χ., δεκαδικοί αριθμοί) μπορούν να απλοποιηθούν και να επιλυθούν γρηγορότερα και ευκολότερα με την πραγματοποίηση μιας εκτίμησης. Για παράδειγμα, για έναν γρήγορο υπολογισμό του συνολικού κόστους κατά τις αγορές στο σούπερ μάρκετ, η στρογγυλοποίηση των τιμών και η εκτίμηση του τελικού κόστους μπορεί να προσεγγίσει με μεγαλύτερη επιτυχία το ακριβές ποσό, σε αντίθεση με την προσπάθεια πρόσθεσης των δεκαδικών αριθμών με ακρίβεια. Τρίτον, οι εκτιμήσεις συμβάλλουν στην κατανόηση πληροφοριών που εμπεριέχουν μεγάλους και δυσνόητους αριθμούς. Για παράδειγμα, η πληροφορία «ο πληθυσμός της Κίνας είναι 1.411.778.724 άνθρωποι» μπορεί να γίνει ευκολότερα κατανοητή ως «ο πληθυσμός της Κίνας είναι περίπου 1 δισεκατομμύριο άνθρωποι». Τέταρτον, υπάρχουν καταστάσεις κατά τις οποίες δεν είναι απαραίτητο να δοθεί μια ακριβής απάντηση, ενώ μια εκτίμηση μπορεί να είναι εξίσου χρήσιμη και αποτελεσματική. Μέσω της στρογγυλοποίησης και των υπολογισμών κατά προσέγγιση μπορεί να δοθεί μια γρήγορη απάντηση σε προβλήματα, όπως, για παράδειγμα, τον υπολογισμό του χρόνου που απαιτείται για την εκτέλεση μιας εργασίας ή του συνολικού κόστους των καλοκαιρινών διακοπών.

Επίσης, εκτός από τη χρησιμότητα που παρέχουν οι εκτιμήσεις στην καθημερινή ζωή, ιδιαίτερα σημαντικός είναι ο ρόλος τους και ως μέσο πρόβλεψης ή στρατηγική ελέγχου των αποτελεσμάτων αλγοριθμικών πράξεων (Siegler & Booth, 2005). Συγκεκριμένα, κατά τη διάρκεια πραγματοποίησης ενός κατά προσέγγιση υπολογισμού, η εκτίμηση μπορεί να παρέχει άμεσο ή έμμεσο έλεγχο, ώστε να είναι

βέβαιο ότι ο υπολογισμός οδηγείται σε μία λογική απάντηση (Δεσλή, 2021). Για παράδειγμα, εάν το γινόμενο  $18 \times 9$  υπολογιστεί κατά προσέγγιση, αναμένεται η απάντηση να είναι περίπου 200, καθώς οι όροι στρογγυλοποιούνται ως  $20 \times 10$ . Συνεπώς, σε περίπτωση που εφαρμοστεί ο γραπτός αλγόριθμος του πολλαπλασιασμού, η ακρίβεια της απάντησης μπορεί να ελεγχθεί έμμεσα μέσω σύγκρισης με το αποτέλεσμα της εκτίμησης που προηγήθηκε. Για παράδειγμα, αν μετά την εφαρμογή του γραπτού αλγορίθμου του πολλαπλασιασμού βρεθεί ότι το γινόμενο  $18 \times 9$  ισούται με 162, ο λύτης μπορεί να συγκρίνει το ακριβές αποτέλεσμα που βρήκε (π.χ., 162) με την εκτίμηση που προηγήθηκε (π.χ., 200) και να ελέγξει τη λογικότητα της απάντησής του. Η εκτίμηση, λοιπόν, προσφέρει στους λύτες τη δυνατότητα να προσεγγίζουν το αναμενόμενο αποτέλεσμα, να ελέγχουν τη λογικότητα των απαντήσεών τους, να εντοπίζουν τα λάθη τους και να είναι σε θέση να ανακαλούν άμεσα τους λανθασμένους υπολογισμούς (Δεσλή, 2021).

Στην έρευνα των Booth και Siegler (2006) επισημαίνεται πως ικανότητα μαθητών μικρότερων ηλικιών για επιτυχείς εκτιμήσεις συνδέεται με υψηλές επιδόσεις στα μαθηματικά τεστ αξιολόγησης, ενώ οι Daker και Lyons (2018) υποστηρίζουν πως οι επιτυχείς εκτιμήσεις των μαθητών στην αριθμογραμμή αποτελούν προγνωστικό παράγοντα για ανεπτυγμένες μαθηματικές ικανότητες. Επομένως, οι εκτιμήσεις συνδέονται άμεσα με την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και τη βαθύτερη κατανόηση της αίσθησης του αριθμού, καθώς ωθεί τους μαθητές στην εύρεση ευέλικτων και αποτελεσματικών τρόπων προσέγγισης μιας απάντησης μέσω της επιλογής ποικίλων στρατηγικών (Siegler & Booth, 2005).

Τέλος, είναι σημαντικό να επισημανθεί πως, παρόλο που η σημασία των εκτιμήσεων έχει αναγνωριστεί στα περισσότερα Προγράμματα Σπουδών για τα Μαθηματικά στο εξωτερικό και στην Ελλάδα, η αξιοποίησή τους δεν περιγράφεται επαρκώς ή δίνεται έμφαση κυρίως στις υπολογιστικές εκτιμήσεις (Andrews et al., 2021). Επιπλέον, κατά την εκπαιδευτική πράξη η διδασκαλία των εκτιμήσεων συνήθως παραγκωνίζεται και δίνεται βαρύτητα στη διδασκαλία των ακριβών υπολογισμών και των γραπτών αλγορίθμων (Subramaniam, 2014). Η παρουσία των εκτιμήσεων στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών για τα μαθηματικά καθώς και οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία τους περιγράφονται αναλυτικότερα στην ενότητα που ακολουθεί.

## **1.2 Η διδασκαλία των εκτιμήσεων στο δημοτικό σχολείο**

### **1.2.1 Η παρουσία των εκτιμήσεων στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών του εξωτερικού για τα μαθηματικά πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης**

Στην προηγούμενη ενότητα περιγράφηκε αναλυτικά τόσο η πρακτική χρησιμότητα των εκτιμήσεων στην καθημερινή ζωή των παιδιών και των ενηλίκων όσο και η συμβολή τους στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και την ενίσχυση των μαθηματικών τους ικανοτήτων. Τα τελευταία χρόνια, στη βιβλιογραφία αναδεικνύεται όλο και περισσότερο η αναγκαιότητα της παρουσίας των εκτιμήσεων στη μαθηματική εκπαίδευση και υπογραμμίζεται πως οι δυο πτυχές των μαθηματικών, η ακρίβεια και η προσέγγιση, είναι εξίσου σημαντικές κατά τη διεκπεραίωση των μαθηματικών έργων (Segonia & Castro, 2009). Για τους λόγους αυτούς, η εκτίμηση αναγνωρίζεται ως σημαντικό μαθηματικό περιεχόμενο και επισημαίνεται στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών πολλών χωρών, όπως των Η.Π.Α, της Ιαπωνίας, του Ηνωμένου Βασιλείου κ.α (Λεμονίδης, 2013). Παρόλα αυτά, η διδασκαλία της εκτίμησης εξακολουθεί να είναι διεθνώς ανεπαρκής, καθώς στα Προγράμματα Σπουδών η έννοια αυτή δεν συνδέεται με σαφείς στόχους, ενώ η πλειονότητα των αναφορών σχετίζεται με την υπολογιστική εκτίμηση έναντι των υπόλοιπων τύπων (Xenofontos et al., 2022).

Πιο αναλυτικά, οι Andrews, Xenofontos και Sayers (2021) μελέτησαν την παρουσία των εκτιμήσεων στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών για τα μαθηματικά στις τέσσερις χώρες του Ηνωμένου Βασιλείου, την Αγγλία, τη Σκωτία, την Ιρλανδία και την Ουαλία. Σύμφωνα με τα συμπεράσματα των ερευνητών, και τα τέσσερα προγράμματα σπουδών δίνουν έμφαση στη διδασκαλία της υπολογιστικής εκτίμησης ως μέσο πρόβλεψης ή ελέγχου των υπολογισμών με ακρίβεια. Αυτή η μονοδιάστατη παρουσίαση του ρόλου της εκτίμησης επικαλύπτει την ανάδειξη της υπολογιστικής εκτίμησης ως βασικής δεξιότητας ζωής, η οποία συμβάλλει σε γρήγορους υπολογισμούς, αλλά και στην ανάπτυξη σύνθετων μαθηματικών ικανοτήτων. Επιπλέον, παρόλο που σε όλα τα προγράμματα σπουδών αναδεικνύεται η διδασκαλία της στρογγυλοποίησης ως ένας βασικός στόχος, μόνο στο πρόγραμμα της Σκωτίας πραγματοποιείται σύνδεση μεταξύ των δυο εννοιών, καθώς η στρογγυλοποίηση παρουσιάζεται ως μια στρατηγική που εφαρμόζεται κατά τη διαδικασία της υπολογιστικής εκτίμησης.



Όσον αφορά τις εκτιμήσεις μέτρησης, επισημαίνεται από τους ερευνητές (Andrews et al., 2021) πως όλα τα προγράμματα αναφέρονται γενικά στην ανάπτυξη ικανοτήτων εκτίμησης μήκους και εμβαδού, ωστόσο οι στόχοι για τις εκτιμήσεις βάρους και όγκου διαφέρουν. Συγκεκριμένα, στο πρόγραμμα της Σκωτίας δεν υπάρχει καμία αναφορά στην εκτίμηση βάρους, σε αντίθεση με τα προγράμματα των υπόλοιπων τριών χωρών, ενώ η εκτίμηση όγκου συμπεριλαμβάνεται μόνο στο σκωτσέζικο και το αγγλικό πρόγραμμα σπουδών. Επιπλέον, παρόλο που και στα τέσσερα προγράμματα επισημαίνεται η ανάγκη χρήσης μη τυποποιημένων μονάδων μέτρησης, μόνο στα προγράμματα της Σκωτίας και της Ουαλίας, τίθεται ως στόχος η αξιοποίηση των άτυπων μονάδων μέτρησης για την εκτίμηση μεγεθών. Το ίδιο ισχύει και για την εκτίμηση του χρόνου, η οποία στα προγράμματα της Ιρλανδίας και της Αγγλίας αναφέρεται αόριστα ως μια έννοια που πρέπει να είναι σε θέση οι μαθητές να εκτιμούν, ενώ αντίθετα στα προγράμματα της Σκωτίας και της Ουαλίας ορίζονται συγκεκριμένοι στόχοι εκτίμησης.

Η εκτίμηση πλήθους αναφέρεται μόνο ονομαστικά στα προγράμματα της Ιρλανδίας, της Σκωτίας και της Ουαλίας, ενώ απουσιάζει εντελώς από το πρόγραμμα της Αγγλίας. Επίσης, η εκτίμηση πάνω στην αριθμογραμμή, η οποία μάλιστα αποτελεί ισχυρό προβλεπτικό παράγοντα των μετέπειτα μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά, παραλείπεται και από τα τέσσερα αναλυτικά προγράμματα σπουδών (Andrews et al., 2021).

Οι Sunde, Petersson, Nosrati, Rosenqvist και Andrews (2022) μελέτησαν τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών για τα μαθηματικά τριών χωρών της Σκανδιναβίας, συγκεκριμένα της Δανίας, της Νορβηγίας και της Σουηδίας. Σύμφωνα με τα ευρήματά τους, η παρουσία των εκτιμήσεων στα τρία προγράμματα σπουδών διαφέρει σημαντικά. Από τη μια πλευρά, το νορβηγικό πρόγραμμα εμπεριέχει ελάχιστες αναφορές στον ρόλο της εκτίμησης, ενώ από την άλλη το δανέζικο και το σουηδικό πρόγραμμα επικεντρώνονται στην υπολογιστική εκτίμηση και την εκτίμηση μέτρησης, παραγκωνίζοντας την εκτίμηση πλήθους και την εκτίμηση πάνω στην αριθμογραμμή.

Αναλυτικότερα, στα προγράμματα της Δανίας και της Σουηδίας η χρήση της υπολογιστικής εκτίμησης συνδέεται με την επίλυση προβληματικών καταστάσεων καθημερινής ζωής, ενώ παράλληλα αναδεικνύεται κυρίως ο ρόλος της ως μέσο ελέγχου των υπολογισμών που εκτελούνται με ακρίβεια. Παρόλα αυτά, όπως και στις χώρες

του Ηνωμένου Βασιλείου, οι υπόλοιπες πτυχές του ρόλου των υπολογιστικών εκτιμήσεων αποσιωπώνται σε όλα τα προγράμματα. Επίσης, εκτός από μια αναφορά του προγράμματος της Δανίας στη στρογγυλοποίηση, σε κανένα πρόγραμμα δεν γίνεται αναφορά σε στρατηγικές ή διαδικασίες με τις οποίες μπορεί να πραγματοποιηθούν υπολογιστικές εκτιμήσεις.

Η εκτίμηση μέτρησης αποτελεί κοινή συνισταμένη τόσο του δανέζικου όσο και του σουηδικού προγράμματος σπουδών, με επίκεντρο κυρίως την εκτίμηση χρόνου σε διάφορα πλαίσια και την εκτίμηση των φυσικών ιδιοτήτων των αντικειμένων. Ωστόσο, οι ερευνητές επισημαίνουν πως σε κανένα πρόγραμμα δεν αναδεικνύεται η σημασία της ικανότητας που σχετίζεται με την εκτίμηση, η οποία συνδέεται στενά με την ανάπτυξη μεταγενέστερων μαθηματικών ικανοτήτων (Sunde et al., 2022). Το μόνο κοινό σημείο μεταξύ των τριών προγραμμάτων σπουδών είναι η αναφορά στη χρήση μη τυποποιημένων μονάδων μέτρησης, όπου στο δανέζικο πρόγραμμα οι μη τυποποιημένες μονάδες μέτρησης συνδέονται σαφώς με την εκτίμηση, στο νορβηγικό δίνεται έμφαση στη χρήση τους γενικά, χωρίς καμιά αναφορά στην εκτίμηση, ενώ στο σουηδικό δεν αναφέρεται τίποτα σχετικό με τις μη τυποποιημένες μονάδες, με εξαίρεση μια απλή αναφορά στον μη θεσμοθετημένο οδηγό για την αξιολόγηση της μάθησης. Συνεπώς, ο βαθμός στον οποίο τα διαφορετικά σκανδιναβικά συστήματα προσπαθούν να συνδέσουν τις μη τυποποιημένες μονάδες μέτρησης με την εκμάθηση της εκτίμησης δεν είναι μόνο μεταβλητός, αλλά και ασαφής (Sunde et al., 2022).

Όσον αφορά την εκτίμηση πλήθους και κατ' επέκταση την εκτίμηση πάνω στην αριθμογραμμή, αυτή απουσιάζει και από τα τρία προγράμματα σπουδών της Σκανδιναβίας. Σύμφωνα με τους ερευνητές (Sunde et al., 2022), η μηδενική αναφορά στην εκτίμηση πάνω στην αριθμογραμμή είναι ένας από τους βασικούς λόγους που υποδεικνύουν την ανάγκη για αναθεώρηση των προγραμμάτων, καθώς η ελλιπής ικανότητα εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή συνδέεται με αρνητικές επιπτώσεις στην εκμάθηση άλλων μαθηματικών ικανοτήτων.

Τέλος, οι Xenofontos, Hizli Alkan και Andrews (2022) μελέτησαν τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών των μαθηματικών σε τρεις χώρες της Ανατολικής Μεσογείου, συμπεριλαμβανομένης της Ελλάδας. Όσον αφορά τα προγράμματα σπουδών της Κύπρου και της Τουρκίας, δίνεται εκτενής έμφαση στην υπολογιστική εκτίμηση. Και στα δυο προγράμματα, ενθαρρύνονται διάφορες στρατηγικές υπολογιστικής

εκτίμησης, ωστόσο, στο κυπριακό πρόγραμμα σπουδών παρέχονται συγκεκριμένα παραδείγματα εργασιών μέσω των οποίων υπονούνται τέτοιες στρατηγικές, ενώ το τουρκικό πρόγραμμα αναφέρεται ρητά σε αυτές, χωρίς να παραβάονται παραδείγματα. Παρ' όλα αυτά, και στα δύο προγράμματα, ο ρόλος της υπολογιστικής εκτίμησης ως βασικής δεξιότητας ζωής παραμένει έμμεσος (Xenofontos et al., 2022).

Αξιοσημείωτο είναι πως και στα δυο προγράμματα, της Κύπρου και της Τουρκίας, υπάρχουν αρκετές αναφορές σε εκτιμήσεις μέτρησης που σχετίζονται με τον χρόνο, καθώς και σε εκτιμήσεις που αφορούν τις φυσικές ιδιότητες των αντικειμένων, όπως η μάζα, το βάρος, το μήκος και το εμβαδόν. Και τα δύο προγράμματα σπουδών δίνουν έμφαση στη χρήση μη τυποποιημένων μονάδων μέτρησης και στον μετέπειτα έλεγχο της ακρίβειας των απαντήσεων με τη χρήση τυποποιημένων μονάδων. Το κυπριακό πρόγραμμα σπουδών, ωστόσο, διαφέρει, καθώς προσφέρει παραδείγματα εφαρμογής εκτιμήσεων που σχετίζονται με την πραγματική ζωή και κάνει σαφείς αναφορές σε νοητικές διεργασίες, σε αντίθεση με το τουρκικό πρόγραμμα σπουδών, στο οποίο οι αναφορές των εκτιμήσεων μέτρησης είναι περισσότερο γενικές (Xenofontos et al., 2022).

Παρόμοια με τις δυο προηγούμενες μελέτες που παρουσιάστηκαν, η εκτίμηση πάνω στην αριθμογραμμή απουσιάζει από τα προγράμματα σπουδών της Κύπρου και της Τουρκίας. Μόνο η εκτίμηση πλήθους η οποία, σύμφωνα με τον Xenofontos και τους συνεργάτες του (2022), αποτελεί ισχυρό προγνωστικό παράγοντα της μελλοντικής αριθμητικής ικανότητας των παιδιών, λαμβάνει περιορισμένη αναφορά στους στόχους των μικρότερων τάξεων, τόσο στο κυπριακό όσο και στο τουρκικό πρόγραμμα σπουδών.

Συμπερασματικά, τα προγράμματα σπουδών τόσο του Ηνωμένου Βασιλείου όσο και της Σκανδιναβίας και των δυο χωρών της Ανατολικής Μεσογείου, φαίνεται να παρέχουν περιορισμένες ευκαιρίες στα παιδιά να αναπτύξουν δεξιότητες εκτίμησης. Το σημαντικότερο είναι πως σε κανένα από αυτά δεν αναγνωρίζεται η σημασία της εκτίμησης πλήθους και εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή, η οποία συνδέεται στενά με την ανάπτυξη ικανοτήτων αρίθμησης, καθώς και την ενίσχυση εννοιολογικών συνδέσεων με άλλους τομείς των μαθηματικών (Andrews et al., 2021; Sunde et al., 2022; Xenofontos et al., 2022).

### 1.2.2 Η παρουσία των εκτιμήσεων στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της Ελλάδας για τα μαθηματικά πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης

Στην Ελλάδα, το αναλυτικό πρόγραμμα που βρίσκεται σε ισχύ τα τελευταία είκοσι χρόνια, είναι το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών - Δ.Ε.Π.Π.Σ για τα Μαθηματικά (ΥΠ.Ε.Π.Θ., 2003). Με βάση το Δ.Ε.Π.Π.Σ (2003), έχουν δομηθεί και τα σχολικά εγχειρίδια για τα μαθηματικά του δημοτικού, τα οποία αποτελούν, μάλιστα, το βασικότερο εργαλείο διδασκαλίας των Ελλήνων εκπαιδευτικών (Xenofontos & Papadopoulos, 2015). Όπως προαναφέρθηκε, το ελληνικό πρόγραμμα μελετήθηκε ως προς την παρουσία των εκτιμήσεων από τον Xenofontos και τους συνεργάτες του (2022), και συγκριτικά των δυο άλλων χωρών, της Τουρκίας και της Κύπρου, βρέθηκε να περιλαμβάνει τις λιγότερες αναφορές και για τους τρεις τύπους εκτίμησης. Σύμφωνα με τον Xenofontos και τους συνεργάτες του (2022), οι ελάχιστες αναφορές του ελληνικού προγράμματος στην εκτίμηση και σε συναφείς έννοιες (π.χ., στρογγυλοποίηση, προσέγγιση) δεν παρουσιάζονται με συναφή τρόπο ούτε συνδέονται με συγκεκριμένες δραστηριότητες.

Σύμφωνα με τη Δεσλή (2021), η υπολογιστική εκτίμηση περιλαμβάνεται ως συνοπτικός στόχος στις δυο τελευταίες τάξεις του δημοτικού και η αναφορά σε αυτήν πραγματοποιείται κυρίως μέσω των όρων «προσέγγιση» και «στρογγυλοποίηση». Ελάχιστοι στόχοι συνδέονται με προτεινόμενες δραστηριότητες, ενώ η αξία της υπολογιστικής εκτίμησης επικεντρώνεται στη χρήση της ως στρατηγική ελέγχου, χωρίς καμιά αναφορά στη σύνδεσή της με την καθημερινή ζωή. Συγκεκριμένα, στην Ε΄ τάξη, οι μαθητές πρέπει «να στρογγυλοποιούν φυσικούς αριθμούς όπου είναι δυνατόν», «να ελέγχουν προσεγγιστικά το αποτέλεσμα μιας πράξης», ώστε να πραγματοποιούν έναν «προσεγγιστικό υπολογισμό στην εκτίμηση της ορθότητας ενός αποτελέσματος» και να είναι σε θέση να εκτελούν «νοερούς υπολογισμούς και προσεγγιστικές εκτιμήσεις» (σ. 269). Παρομοίως, στη Στ΄ τάξη, οι μαθητές πρέπει «να στρογγυλοποιούν φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς», «να ελέγχουν το αποτέλεσμα μιας πράξης με νοερές διαδικασίες, εκτιμώντας το μέγεθος του αποτελέσματος αυτού» και να πραγματοποιούν έναν «προσεγγιστικό υπολογισμό στην εκτίμηση ενός αποτελέσματος πριν, μετά ή χωρίς την πραγματοποίηση μιας πράξης» (σ. 273).

Οι εκτιμήσεις μέτρησης αναφέρονται συνοπτικά μόνο σε δυο σημεία του Δ.Ε.Π.Π.Σ για τα μαθηματικά, παρόλο που η χρήση μη τυποποιημένων μονάδων μέτρησης προτείνεται ως στόχος για κάθε τάξη του δημοτικού σχολείου. Πιο

συγκεκριμένα, οι μαθητές της Α΄ δημοτικού πρέπει «να διακρίνουν και να εκτιμούν τη διάρκεια χρονικών διαστημάτων» (σ. 256), ενώ για τους μαθητές της Δ΄ δημοτικού προτείνεται «η διαισθητική προσέγγιση των μεγεθών: μήκους, επιφάνειας και χωρητικότητας με χρήση αυθαίρετων μονάδων μέτρησης επιφανειών και χωρητικότητας, όπως για παράδειγμα τετραγωνάκια και κυβάκια» (σ. 264).

Σε ολόκληρο το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, υπάρχει μόνο μια αναφορά στην εκτίμηση πλήθους, στην οποία οι μαθητές της Α΄ τάξης καλούνται να «αναγνωρίζουν γρήγορα ποσότητες με δομημένη μορφή ενός, δύο και τριών στοιχείων (άμεση εκτίμηση)» (σ. 255). Όσον αφορά την παρουσία αναφορών στη χρήση της αριθμογραμμής, αυτές είναι αρκετές ωστόσο δεν συνδέονται ξεκάθαρα με την έννοια της εκτίμησης. Συγκεκριμένα, στη Β΄ τάξη οι μαθητές καλούνται να «διατάσσουν αριθμούς και να χρησιμοποιούν αριθμούς, για να εντοπίζουν θέσεις στην αριθμογραμμή» (σ. 258). Ομοίως, στη Γ΄ τάξη στόχος είναι οι μαθητές «να χρησιμοποιούν αριθμούς για να προσδιορίσουν τη θέση ενός σημείου στην αριθμογραμμή» (σ. 261). Στην Ε΄ τάξη, εκτός από την τοποθέτηση «φυσικών αριθμών σε μια αριθμογραμμή», οι μαθητές καλούνται «να παρεμβάλουν έναν ή περισσότερους φυσικούς αριθμούς μεταξύ δύο άλλων, εφόσον είναι δυνατόν» (σ. 268) και «να χρησιμοποιούν δεκαδικούς αριθμούς για να εντοπίζουν θέσεις σε αριθμογραμμή» (σ. 269). Η μόνη άμεση αναφορά στην εκτίμηση της αριθμογραμμής εμφανίζεται στη Δ΄ τάξη, όπου οι μαθητές αναμένεται «να τοποθετούν με προσέγγιση δεκαδικά κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς στην αριθμογραμμή» (σ. 266).

Πρόσφατα, δημοσιεύτηκε στην Ελλάδα το νέο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών με τίτλο «Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο» (Υ.ΠΑΙ.Θ., 2021). Βασικοί σκοποί του νέου προγράμματος είναι η απόδοση αξίας στη μαθηματική διδασκαλία, η αξιοποίηση ποικίλων πόρων και εργαλείων στη διδασκαλία, η αναγνώριση συνδέσεων μεταξύ των μαθηματικών και άλλων πεδίων της ανθρώπινης δράσης, η χρήση των μαθηματικών για την κριτική κατανόηση του περιβάλλοντος και, τέλος, η κατανόηση και αξιοποίηση του μαθηματικού λόγου με την ανάλυση και ερμηνεία διάφορων αναπαραστατικών συστημάτων (Υ.ΠΑΙ.Θ., 2021). Γενικά, το ΠΣ για τα Μαθηματικά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης έχει σχεδιαστεί για να υποστηρίζει τους μαθητές να συγκροτήσουν μια σταθερή εννοιολογική βάση στα μαθηματικά που θα τους επιτρέπει να μαθαίνουν αποτελεσματικά και να οδηγούνται σταδιακά στην κατανόηση των εννοιών με τις οποίες εμπλέκονται. Στη βάση αυτή, η

έννοια της εκτίμησης έχει συμπεριληφθεί με περιεκτικό τρόπο στους στόχους όλων των τάξεων του δημοτικού σχολείου, καθώς υπάρχουν αρκετές αναφορές και στους τρεις τύπους εκτίμησης, ενώ παράλληλα κάθε στόχος είναι συνδεδεμένος με προτεινόμενες δραστηριότητες.

Πιο αναλυτικά, η υπολογιστική εκτίμηση εντάσσεται στους στόχους διδασκαλίας του δημοτικού από τη Δ' τάξη. Συγκεκριμένα, οι μαθητές καλούνται κατά την εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων με ρητούς αριθμούς να *«χρησιμοποιούν προσεγγιστικές και άλλες στρατηγικές για να ελέγξουν αν οι απαντήσεις τους είναι σωστές»* (Αρ.Ρ.4.8, σ. 45; Αρ.Ρ.4.7, σ. 46). Στην Ε' τάξη, στόχος είναι οι μαθητές να *«εκτιμούν και να υπολογίζουν το αποτέλεσμα πράξεων σε προβλήματα με δεκαδικούς αριθμούς και συμμιγείς αριθμούς»* (Αρ.Ρ.5.10, σ. 58), ενώ στη Στ' τάξη οι μαθητές αναμένεται να είναι σε θέση να *«εκτιμούν το αποτέλεσμα μιας πράξης στρογγυλοποιώντας το πλησιέστερο δεκαδικό ψηφίο»* (Αρ.Φ.6.9, σ. 68) καθώς και να *«εκτιμούν και υπολογίζουν το αποτέλεσμα αριθμητικών αναπαραστάσεων που περιλαμβάνουν θετικούς ρητούς αριθμούς»* (Αρ.Ρ.6.6, σ. 69).

Οι εκτιμήσεις μέτρησης συμπεριλαμβάνονται σε όλους τους στόχους των μετρήσεων σε κάθε τάξη του δημοτικού σχολείου. Συγκεκριμένα, στην Α' τάξη, οι μαθητές καλούνται να *«προβαίνουν σε εκτιμήσεις και συγκρίσεις μηκών και να συζητούν για την ανάγκη χρήσης κοινής μονάδας μέτρησης»* (Μ.Μ.1.4, σ. 17), να *«μετρούν και συγκρίνουν επιφάνειες με τη χρήση χειραπτικού υλικού και αναπαραστάσεων»* (Μ.Ε.1.5, σ. 18) και να *«εκτιμούν τον όγκο απλών στερεών και πραγματοποιούν συγκρίσεις με τη χρήση δομημένου χειραπτικού υλικού»* (Μ.Ο.1.3, σ. 18). Παρομοίως, στη Β' τάξη, οι μαθητές αναμένεται να *«να εκτιμούν και συγκρίνουν μήκη»* (Μ.Μ.2.6, σ. 28), να *«εκτιμούν το μέγεθος απλών επιφανειών κάνοντας συγκρίσεις με χρήση μη τυπικών μονάδων»* (Μ.Ε.2.5, σ. 29) και να *«εκτιμούν τον όγκο απλών στερεών και πραγματοποιούν συγκρίσεις με τη χρήση δομημένου χειραπτικού υλικού»* (Μ.Ο.2.4, σ. 28). Στη Γ' τάξη, οι στόχοι επικεντρώνονται μόνο στην εκτίμηση μήκους και όγκου. Συγκεκριμένα, οι μαθητές καλούνται να *«πραγματοποιούν εκτιμήσεις και μετρήσεις μηκών με τυπικές μονάδες μέτρησης στον περιβάλλοντα χώρο και σε διδιάστατες αναπαραστάσεις»* (Μ.Μ.3.4, σ. 39) καθώς και να εκτιμούν τον όγκο μιας ορθογώνιας κατασκευής μέσα από την *«εκτίμηση του αριθμού των κύβων ορθογώνιων κατασκευών που έχουν κατασκευάσει άλλες ομάδες και έλεγχο μέσα από αναλύσεις και συνθέσεις των αρχικών κατασκευών»* (Μ.Ο.3.1, σ. 40). Αργότερα, στη Δ' τάξη, οι μαθητές καλούνται

να «πραγματοποιούν εκτιμήσεις περιμέτρων σε διάφορα πλαίσια» (Μ.Μ.4.3, σ. 51), να «εκτιμούν και συγκρίνουν το εμβαδόν επιφανειών με χρήση τυπικών μονάδων (τ.δεκ.)» (Μ.Ε.4.3, σ. 51) καθώς και να «εκτιμούν και συγκρίνουν τον όγκο ορθογώνιων κατασκευών με τη χρήση δομημένου χειραπτικού υλικού» (Μ.Ο.4.3, σ. 52). Όμοια με τη Δ' τάξη, στην Ε' τάξη, τίθεται ως στόχος για τους μαθητές να «εκτιμούν και συγκρίνουν το εμβαδόν επιφανειών με χρήση τυπικών μονάδων (τ.δεκ., τ.εκ.)» (Μ.Ε.5.2, σ. 64) καθώς και να «εκτιμούν και συγκρίνουν τον όγκο ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων» (Μ.Ο.5.1, σ. 64). Τέλος, στη Στ' τάξη, στόχος είναι οι μαθητές να «εκτιμούν και συγκρίνουν μήκη κύκλων» (Μ.Μ.6.1, σ. 74) και να «εκτιμούν το εμβαδόν καμπυλόγραμμων επιφανειών, χρησιμοποιώντας ποικιλία εργαλείων και στρατηγικών» (Μ.Ε.6.3, σ. 75).

Οι στόχοι των εκτιμήσεων πλήθους είναι διατυπωμένοι με τον ίδιο τρόπο για όλες τις τάξεις του δημοτικού σχολείου, με μοναδική αλλαγή στο μέγεθος του πλήθους που προτείνεται να είναι σε θέση να εκτιμούν οι μαθητές. Συνεπώς, σε κάθε τάξη αντίστοιχα, στόχος είναι οι μαθητές να «εκτιμούν ποσότητες μέχρι 50 αντικειμένων» (Αρ.Φ.1.3, σ. 11), να «εκτιμούν με διαφορετικούς τρόπους την πληθικότητα ενός συνόλου που περιλαμβάνει μέχρι 100 στοιχεία» (Αρ.Φ.2.3, σ. 20), «...μέχρι 1000 στοιχεία» (Αρ.Φ.3.3, σ. 31), «...μέχρι 10000 στοιχεία» (Αρ.Φ.4.2, σ. 42) και «...μέχρι 1000000 στοιχεία» (Αρ.Φ.5.1, σ. 55; Αρ.Φ.6.1, σ. 67). Όσον αφορά τη χρήση της αριθμογραμμής, παρόλο που αναφέρεται ως στόχος σε κάθε τάξη του δημοτικού σχολείου, δεν πραγματοποιείται σε κανέναν από αυτούς σύνδεση με την έννοια της εκτίμησης.

Συνοψίζοντας, είναι εμφανές πως στον σχεδιασμό του νέου Προγράμματος Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο (Υ.ΠΑΙ.Θ., 2021) έχουν ληφθεί υπόψη τα νέα ερευνητικά δεδομένα που αναδεικνύουν τα οφέλη από την έκθεση των παιδιών σε δραστηριότητες εκτίμησης. Ωστόσο, στο Δ.Ε.Π.Π.Σ (ΥΠ.Ε.Π.Θ., 2003), το οποίο έχει ισχύ έως σήμερα, υποβιβάζεται η διδασκαλία της εκτίμησης και δεν καθίσταται σαφής ο τρόπος ενσωμάτωσής της στην καθημερινή διδακτική πράξη. Οι ανεπαρκείς αναφορές στην εκτίμηση και η βαρύτητα που δίνεται στους ακριβείς υπολογισμούς και τις ακριβείς μετρήσεις από τα προγράμματα σπουδών για τα μαθηματικά επηρεάζει ενδεχομένως την ετοιμότητα των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των εκτιμήσεων (Andrews et al., 2021).

### 1.2.3 Οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των εκτιμήσεων

Εκτός από τον σχεδιασμό των Προγραμμάτων Σπουδών, ιδιαίτερα σημαντικός κρίνεται και ο ρόλος των εκπαιδευτικών στην καλλιέργεια των ικανοτήτων εκτίμησης στους μαθητές. Οι αντιλήψεις τους σχετικά με την ενσωμάτωση της εκτίμησης στη μαθηματική εκπαίδευση, οι ικανότητες και στρατηγικές εκτίμησης που οι ίδιοι κατέχουν, καθώς και οι γνώσεις τους για την αποτελεσματική διδασκαλία των εκτιμήσεων επηρεάζουν σημαντικά την εκπαιδευτική πράξη (Son et al., 2019; Tsao & Pan, 2013). Παρόλο που στην πλειονότητα των ερευνών, οι εκπαιδευτικοί αναγνωρίζουν τα οφέλη και τη χρησιμότητα των εκτιμήσεων τόσο στην καθημερινή ζωή (Alajmi, 2009) όσο και στη μαθηματική εκπαίδευση (Mildenhall, 2009; Tsao, 2013), φαίνεται να έχουν χαμηλές επιδόσεις κατά τις δοκιμασίες αξιολόγησης των ικανοτήτων τους στις εκτιμήσεις και ελλειπείς γνώσεις για τη διδασκαλία της έννοιας της εκτίμησης στην τάξη.

Πιο αναλυτικά, στην έρευνα της Mildenhall (2009) επτά αυστραλιανοί δάσκαλοι της Στ' δημοτικού δήλωσαν στις συνεντεύξεις τους πως, παρόλο που αναγνωρίζουν τη σπουδαιότητα των εκτιμήσεων στη μαθηματική εκπαίδευση, δεν είναι σε θέση να διδάσκουν στους μαθητές τον τρόπο αξιοποίησής τους, παρά μόνο μέσω της στρογγυλοποίησης. Ορισμένοι από τους λόγους που επισήμαναν ως εμπόδιο στη διδακτική αξιοποίηση των εκτιμήσεων είναι η εστίαση στη διδασκαλία των γραπτών αλγορίθμων, η απουσία διδακτικού χρόνου καθώς και η απουσία από τη μεριά τους της γνώσης του κατάλληλου περιεχομένου για την ορθή διδασκαλία της εκτίμησης.

Αντίθετα, στη μελέτη της Alajmi (2009), από τους 59 εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στο Κουβέιτ, μόνο τα 2/3 αυτών αναγνώρισαν τα οφέλη της υπολογιστικής εκτίμησης στην καθημερινή ζωή, ενώ μόλις το 20% θεώρησε απαραίτητη την εισαγωγή της στα σχολικά εγχειρίδια. Συγκεκριμένα, οι συμμετέχοντες αντιλαμβάνονταν την υπολογιστική εκτίμηση μόνο ως στρογγυλοποίηση, οπότε θεωρούσαν πως η σχετική αναφορά που υπάρχει σε αυτήν στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της χώρας τους είναι αρκετή για την ενσωμάτωση των εκτιμήσεων στη μαθηματική τάξη.

Παρόμοια, στην έρευνα της Son και των συνεργατών της (2019), στην οποία έλαβαν μέρος 58 υποψήφιοι εκπαιδευτικοί των Η.Π.Α, πολλοί από τους συμμετέχοντες δεν είχαν κατανοήσει με σαφή τρόπο την έννοια της υπολογιστικής εκτίμησης, ούτε



αναγνώριζαν τη σημασία της στη μαθηματική εκπαίδευση. Επιπλέον, η πλειονότητα των εκπαιδευτικών είχε υψηλότερες επιδόσεις στις δοκιμασίες με ακριβείς υπολογισμούς, παρά σε εκείνες που εμπεριείχαν εκτιμήσεις, ενώ οι επιδόσεις τους ήταν ακόμα χαμηλότερες σε δοκιμασίες με εκτιμήσεις δεκαδικών αριθμών και κλασμάτων. Το ίδιο χαμηλές βρέθηκαν οι επιδόσεις υπολογιστικής εκτίμησης υποψηφίων εκπαιδευτικών στην Τουρκία (Senol, Dundar & Gunduz, 2015) και στις Η.Π.Α (Tsao, 2013).

Στην έρευνα των Pizarro, Gorgorió και Albarracín (2015) διερευνήθηκαν οι επιδόσεις 112 Ισπανών εκπαιδευτικών στις εκτιμήσεις μέτρησης. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, ορισμένοι συμμετέχοντες συνέχισαν την έννοια της εκτίμησης μέτρησης με τη μέτρηση με ακρίβεια. Επιπλέον, αντιμετώπιζαν τις εκτιμήσεις μέτρησης ως μια εικασία και δεν ήταν σε θέση να σχεδιάσουν μια αποτελεσματική δραστηριότητα για τη διδασκαλία των εκτιμήσεων μέτρησης στην τάξη. Παρόμοια, στην έρευνα του Subramaniam (2014), οι υποψήφιοι μαθηματικοί δεν ήταν σε θέση να σχεδιάσουν δραστηριότητες για τη διδασκαλία των εκτιμήσεων μέτρησης με τη χρήση σημείων αναφοράς, παρόλο που κατά την επίλυση δραστηριοτήτων μέτρησης έκαναν χρήση της στρατηγικής αυτής. Όπως ο ίδιος επισημαίνει, κατά τη διδασκαλία των εκτιμήσεων μέτρησης οι συμμετέχοντες βασίστηκαν μόνο σε τυποποιημένες δραστηριότητες που περιελάμβαναν ορισμούς, επεξηγήσεις και φύλλα εργασίας.

Οι Tsao και Pan (2013) μελέτησαν την ύπαρξη συσχέτισης μεταξύ των υψηλών μαθηματικών ικανοτήτων εκπαιδευτικών δημοτικού σχολείου και του τρόπου ενσωμάτωσης των εκτιμήσεων στη διδασκαλία τους. Σύμφωνα με τα ευρήματά τους, οι εκπαιδευτικοί με εμβάθυνση στην κατεύθυνση των μαθηματικών ήταν καλύτεροι στη διδασκαλία των εκτιμήσεων και στην ανάδειξη της χρησιμότητάς τους κατά τη διδασκαλία. Θετική συσχέτιση μεταξύ των υψηλών επιδόσεων εκτίμησης υποψηφίων εκπαιδευτικών και της στάσης τους απέναντι στη διδασκαλία των εκτιμήσεων βρήκαν και οι Son, Hu και Lim (2019), στην έρευνα των οποίων τα ποσοστά των υποψηφίων που παρουσίασαν υψηλές επιδόσεις στις δοκιμασίες υπολογιστικής εκτίμησης ήταν μικρά. Σύμφωνα με τα συμπεράσματα των ερευνητών (Son et al., 2019), η χαμηλή ικανότητα των εκπαιδευτικών στην υπολογιστική εκτίμηση επηρέαζε αρνητικά τη στάση τους στη χρησιμότητα των εκτιμήσεων και την ενσωμάτωσή τους στη διδασκαλία.

Όσον αφορά τους Έλληνες εκπαιδευτικούς, στην έρευνα των Lemonidis, Mouratoglou και Pnevmatikos (2014) βρέθηκε ότι 80 εν ενεργεία εκπαιδευτικοί παρουσίασαν μέτριες επιδόσεις στην υπολογιστική εκτίμηση και δεν γνώριζαν αρκετές από τις στρατηγικές των υπολογιστικών εκτιμήσεων, όπως του εμπρόσθιου άκρου και των συμβατών αριθμών. Η πλειονότητα των συμμετεχόντων χρησιμοποίησε κατά τις δοκιμασίες τη στρατηγική των ειδικών αριθμών, ενώ σχεδόν οι μισοί αξιοποίησαν και τη στρογγυλοποίηση. Στην έρευνα των Δεσλή και Ανεστάκη (2014) εξετάστηκαν 113 υποψήφιοι εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην επίλυση προβλημάτων υπολογιστικής εκτίμησης, ενώ διερευνήθηκαν και οι απόψεις τους για τη διδασκαλία τέτοιων προβλημάτων στο δημοτικό σχολείο. Σε αντίθεση με την προηγούμενη έρευνα, οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί παρουσίασαν αρκετά υψηλές επιδόσεις στις υπολογιστικές εκτιμήσεις και αξιοποίησαν ευέλικτες στρατηγικές κατά την επίλυση των προβλημάτων. Επιπλέον, σύμφωνα με τις απαντήσεις των συμμετεχόντων η στάση τους απέναντι στις υπολογιστικές εκτιμήσεις ήταν απόλυτα θετική, καθώς όλοι αναγνώριζαν την αξία και χρησιμότητά της στη μαθηματική εκπαίδευση και την καθημερινή ζωή.

Συνοψίζοντας, η επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών, οι ικανότητες τους στις εκτιμήσεις αλλά και η στάση που έχουν για την ενσωμάτωση των εκτιμήσεων στη διδασκαλία είναι καθοριστικοί παράγοντες για την επιτυχή εκμάθηση των εκτιμήσεων από τους μαθητές τους. Συνεπώς, δεν αρκεί μόνο ο επανασχεδιασμός των Προγραμμάτων Σπουδών αλλά και η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών σε τρόπους και μεθόδους αποτελεσματικής διδασκαλίας των εκτιμήσεων (Andrews et al., 2021). Ιδιαίτερα σημαντική βέβαια, κρίνεται και η παρουσία των εκτιμήσεων στα σχολικά εγχειρίδια, καθώς σε αυτά βασίζονται κυρίως οι εκπαιδευτικοί κατά τον σχεδιασμό της διδασκαλίας τους (Xenofontos & Papadopoulos, 2015). Στην επόμενη ενότητα, παρουσιάζεται ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων κατά τη διδασκαλία των εκπαιδευτικών καθώς και η παρουσία των εκτιμήσεων στα σχολικά εγχειρίδια της Ελλάδας και του εξωτερικού.

## **1.3 Η διδασκαλία των εκτιμήσεων στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών**

### **1.3.1 Η χρήση των σχολικών εγχειριδίων στη μαθηματική εκπαίδευση**

Σύμφωνα με τα ερευνητικά δεδομένα, η χρήση των σχολικών εγχειριδίων διαδραματίζει έναν από τους σημαντικότερους ρόλους στη μαθηματική εκπαίδευση (Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt & Houang, 2002). Τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών αποτελούν τη βασικότερη διδακτική πηγή, τόσο για τους μαθητές, κατά την εκπαιδευτική διαδικασία, όσο και για τους εκπαιδευτικούς, κατά την οργάνωση και τον σχεδιασμό της διδασκαλίας τους (Rezat, 2012). Συνεπώς, το περιεχόμενο και η δομή των σχολικών εγχειριδίων επηρεάζουν καθημερινά τη διδακτική πράξη και μπορεί να αποτελέσουν καθοριστικό παράγοντα για την ανάπτυξη των μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων των παιδιών (Valverde et al., 2002).

Οι Perin και Haggarty (2001), μελετώντας τις ομοιότητες και τις διαφορές στο περιεχόμενο των μαθηματικών ανάμεσα στα σχολικά εγχειρίδια της Γαλλίας, της Γερμανίας και της Αγγλίας, εξέτασαν τον τρόπο με τον οποίο αυτά χρησιμοποιούνται από τους εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κατά τη διδασκαλία. Από τις συνεντεύξεις των συμμετεχόντων, αναδείχθηκε ο σημαντικός ρόλος που ασκούν τα σχολικά εγχειρίδια στη διδασκαλία τους, ιδιαίτερα ως πηγή εύρεσης μαθηματικών δραστηριοτήτων. Μάλιστα, οι Γερμανοί και οι Γάλλοι συμμετέχοντες δήλωσαν πως η χρήση των σχολικών εγχειριδίων είναι καθημερινή και έγκειται κυρίως στην έλλειψη χρόνου για προετοιμασία και οργάνωση διαφορετικού εκπαιδευτικού υλικού.

Σε παρόμοια αποτελέσματα κατέληξε και ο Lepik (2015), όταν διερεύνησε τις απόψεις 164 εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Εσθονία αναφορικά με τη χρήση των σχολικών εγχειριδίων στο μάθημα των μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα, η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών είχε καλή γνώμη για το περιεχόμενο και τη δομή του σχολικού εγχειριδίου για τα μαθηματικά, ενώ το 65% των συμμετεχόντων δήλωσε πως το χρησιμοποιεί ως βασικό εργαλείο κατά τον σχεδιασμό και την πραγματοποίηση της διδασκαλίας. Επίσης, σχεδόν πάνω από τους μισούς συμμετέχοντες δήλωσαν πως περιορίζονται μόνο σε δραστηριότητες του βιβλίου, ενώ μόλις το 10% των εκπαιδευτικών διαφώνησε με τη δήλωση αυτή. Τέλος, αν και μόνο το 38% των εκπαιδευτικών δήλωσε πως στηρίζεται στις μεθοδολογικές προσεγγίσεις του βιβλίου,

σχεδόν όλοι οι εκπαιδευτικοί δήλωσαν πως αντλούν το μαθηματικό τους περιεχόμενο από την πηγή αυτή. Τα παραπάνω ευρήματα επιβεβαιώνονται και από μια μεγαλύτερη έρευνα των Lepik, Grevholm και Viholainen (2015), στην οποία έλαβαν μέρος 400 εκπαιδευτικοί δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης της Εσθονίας και της Φιλανδίας με σκοπό τη διερεύνηση των απόψεών τους αναφορικά με τη χρήση των σχολικών εγχειριδίων κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Σύμφωνα με τα ευρήματα των ερευνητών, σχεδόν οι μισοί συμμετέχοντες (49%) φάνηκε να χρησιμοποιούν το σχολικό εγχειρίδιο ως το βασικότερο εργαλείο στην εκπαιδευτική διαδικασία, ενώ η πλειοψηφία των συμμετεχόντων φάνηκε να αντλεί από αυτό το περιεχόμενο και τη δομή της διδασκαλίας τους.

Στην έρευνα των Fan, Chen, Zhu, Qiu και Hu (2004), μελετήθηκαν οι απόψεις 36 καθηγητών μαθηματικών και 272 μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Κίνα σχετικά με τη χρήση των σχολικών εγχειριδίων κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Βρέθηκε πως το σχολικό εγχειρίδιο αποτελεί τη βασικότερη πηγή για το περιεχόμενο και τον τρόπο διδασκαλίας του μαθήματος των μαθηματικών, ενώ το μεγαλύτερο μέρος του διδακτικού χρόνου δομείται γύρω από αυτό. Επιπλέον, το μεγαλύτερο μέρος του σχολικού εγχειριδίου αξιοποιείται από τους εκπαιδευτικούς κατά τη διδασκαλία, ωστόσο οι εκπαιδευτικοί δήλωσαν πως τροποποιούν ή παραλείπουν ορισμένες από τις δραστηριότητες, αν τις κρίνουν ακατάλληλες. Παρόμοια, σε μια πρόσφατη έρευνα των Fan, Cheng, Xie, Luo, Wang και Sun (2021), όπου διερευνήθηκαν οι απόψεις 133 καθηγητών μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στη Σανγκάη σχετικά με τον ρόλο του σχολικού εγχειριδίου στην τάξη των μαθηματικών, βρέθηκε πως οι εκπαιδευτικοί θεωρούν τα σχολικά εγχειρίδια βοηθητικά εργαλεία για την προετοιμασία και την κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου και για αυτόν τον λόγο τα χρησιμοποιούν σε μεγάλο βαθμό κατά τη διδασκαλία τους.

Επιπρόσθετα, έχει βρεθεί πως ο βαθμός χρήσης του σχολικού εγχειριδίου από τους εκπαιδευτικούς εξαρτάται από την ηλικία και τη διδακτική τους εμπειρία. Συγκεκριμένα, στην έρευνα των O'Keeffe και White (2017), μελετήθηκαν οι απόψεις 31 Άγγλων μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με τη χρήση των σχολικών εγχειριδίων στην τάξη των μαθηματικών. Σύμφωνα με τα ευρήματα, 18 στους 31 μαθηματικούς δήλωσαν πως χρησιμοποιούσαν τα σχολικά εγχειρίδια για λιγότερο από το 50% του διδακτικού χρόνου, ενώ 13 στους 31 συμμετέχοντες δήλωσαν πως τα αξιοποιούσαν κατά το 25% του διδακτικού χρόνου. Επίσης, βρέθηκε αρνητική

συσχέτιση μεταξύ της διδακτικής εμπειρίας των εκπαιδευτικών και της χρήσης του σχολικού εγχειριδίου για τον σχεδιασμό της διδασκαλίας τους. Με άλλα λόγια, βρέθηκε πως οι εκπαιδευτικοί με μικρότερη διδακτική εμπειρία στηρίζονταν σε μεγαλύτερο βαθμό στο σχολικό εγχειρίδιο κατά την οργάνωση της διδασκαλίας τους, συγκριτικά με εκείνους που είχαν μεγαλύτερη εμπειρία στις μαθηματικές τάξεις.

Εκτός από την ηλικία και τη διδακτική εμπειρία, ένας ακόμα σημαντικός παράγοντας που καθορίζει τη χρήση του σχολικού βιβλίου από τους εκπαιδευτικούς είναι η αυτοπεποίθησή τους για το μαθηματικό περιεχόμενο που διδάσκουν. Οι Jamieson-Proctor και Byrne (2008) μελέτησαν τις απόψεις 34 εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην Αυστραλία σχετικά με τη χρήση των σχολικών εγχειριδίων για τα μαθηματικά και τους παράγοντες που επηρεάζουν τις αποφάσεις των εκπαιδευτικών για την αξιοποίησή τους. Πιο συγκεκριμένα, βρήκαν ότι όλοι οι εκπαιδευτικοί είχαν υψηλή αυτοπεποίθηση για τη διδασκαλία του μαθήματος των μαθηματικών, ενώ η πλειονότητα χρησιμοποιούσε σε μέτριο βαθμό το σχολικό εγχειρίδιο. Αξιοσημείωτο είναι πως το 20% των συμμετεχόντων φάνηκε να αποφεύγει εντελώς τη χρήση του σχολικού εγχειριδίου κατά τη διδασκαλία, ενώ όλοι δήλωσαν πως σε αρκετές περιπτώσεις τροποποιούν το περιεχόμενο των βιβλίων και χρησιμοποιούν εναλλακτικές πηγές διδασκαλίας.

Συνοψίζοντας, τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν συχνά τον κύριο διδακτικό πόρο για τις περισσότερες χώρες και ιδιαίτερα για τα συγκεντρωτικά εκπαιδευτικά συστήματα, όπως της Κύπρου και της Ελλάδας (Xenofontos & Papadopoulos, 2015). Ο θεσμός του ενός και όχι του πολλαπλού σχολικού εγχειριδίου που επικρατεί στην Ελλάδα, καθώς και σε πολλές άλλες χώρες, ενισχύει τη διδακτική επιρροή των σχολικών εγχειριδίων, καθώς ολόκληρος ο μαθητικός πληθυσμός της χώρας διδάσκεται μέσα από αυτά (Μπίκος, 2016). Συνεπώς, η απουσία περιεχομένου σχετικά με την έννοια της εκτίμησης στα σχολικά εγχειρίδια μπορεί να αποτελέσει καθοριστικό παράγοντα για τη διδασκαλία των μαθηματικών και κατ' επέκταση για την ανάπτυξη σημαντικών μαθηματικών δεξιοτήτων στους μαθητές.

### 1.3.2 Η παρουσία των εκτιμήσεων στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του εξωτερικού

Όπως αναφέρθηκε στις προηγούμενες ενότητες, εκτός από τους εκπαιδευτικούς και τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών, σημαντικό παράγοντα στη διδασκαλία των εκτιμήσεων διαδραματίζει και το περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων. Τα σχολικά εγχειρίδια μπορεί να καθορίσουν τη μαθηματική εξέλιξη των παιδιών, καθώς αποτελούν ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία για την οργάνωση και υλοποίηση της διδασκαλίας από τους εκπαιδευτικούς (Valverde et al., 2002; Rezat, 2012). Αν και η μελέτη των σχολικών εγχειριδίων για τα μαθηματικά αποτελεί αντικείμενο αρκετών ερευνών, ελάχιστες είναι αυτές που αναλύουν την παρουσία των εκτιμήσεων σε αυτά.

Πιο συγκεκριμένα, οι Sayers, Petersson, Rosenqvist και Andrews (2021) ανέλυσαν το περιεχόμενο τριών σχολικών εγχειριδίων που επιλέγουν οι εκπαιδευτικοί της Σουηδίας για τη διδασκαλία των μαθηματικών σε μαθητές της πρώτης δημοτικού. Το πρώτο βιβλίο που μελετήθηκε ήταν γραμμένο από Σουηδούς συγγραφείς, το δεύτερο από Φιλανδούς και το τρίτο από Σιγκαπουριανούς συγγραφείς. Σκοπός της έρευνας ήταν η διερεύνηση των ευκαιριών που παρέχονται από τα τρία αυτά σχολικά εγχειρίδια για την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού στους μαθητές της πρώτης τάξης. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι και τα τρία εγχειρίδια διέφεραν σημαντικά ως προς τις ευκαιρίες που προσφέρονταν, καθώς το φιλανδικό βιβλίο εμπεριείχε αρκετά περισσότερες δραστηριότητες που στόχευαν στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού. Ωστόσο, η έννοια της εκτίμησης κατά βάση απουσίαζε και από τα τρία σχολικά εγχειρίδια, παρόλο που υπήρχαν ελάχιστες δραστηριότητες εκτίμησης στο σουηδικό βιβλίο, οι οποίες εισάγονταν κατά το δεύτερο εξάμηνο του έτους.

Οι Chang, Males, Mosier και Gonulates (2011) μελέτησαν τις δραστηριότητες εκτίμησης μέτρησης γραμμών σε σχολικά εγχειρίδια των Η.Π.Α για τις τρεις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου με σκοπό να εξετάσουν αφενός τον τρόπο με τον οποίο διδάσκεται η εκτίμηση μέτρησης γραμμών στους μαθητές και αφετέρου κατά πόσο οι σχετικές δραστηριότητες εκτίμησης είναι «ανοιχτές», αν είναι δηλαδή, διατυπωμένες με σαφή τρόπο, ώστε να εμπεριέχουν όλα τα απαραίτητα στοιχεία για την κατανόηση και αποτελεσματική επίλυση των δραστηριοτήτων. Συγκεκριμένα, σε κάθε δραστηριότητα εκτίμησης μέτρησης γραμμών εξετάστηκε αν ορίζεται: α) η διάσταση του μεγέθους που εκτιμάται, β) το αρχικό και το τελικό σημείο της εκτίμησης μέτρησης, γ) η μονάδα μέτρησης και δ) ο βαθμός ακρίβειας της εκτίμησης. Για

παράδειγμα, στη δραστηριότητα «Εκτιμήστε πόσοι κύβοι είναι το μάκρος μιας γόμας» (σ. 702), παρόλο που διατυπώνεται σαφώς η μονάδα μέτρησης, δεν ορίζεται ξεκάθαρα η διάσταση (π.χ., μήκος ή πλάτος της γόμας), τα δυο άκρα της εκτίμησης μέτρησης (π.χ., τα άκρα του μήκους ή του πλάτους) και ο βαθμός ακρίβειας της εκτίμησης (π.χ., χρήση ακέραιων αριθμών ή ρητών αριθμών). Σύμφωνα με τα ευρήματα της έρευνας, περίπου το ένα τέταρτο των δραστηριοτήτων εκτίμησης μέτρησης ήταν «ανοιχτές» σε ένα από τα τέσσερα στοιχεία που εξετάστηκαν, παραπάνω από το ένα τρίτο των δραστηριοτήτων ήταν «ανοιχτές» σε δύο στοιχεία, και περίπου το ένα τρίτο των δραστηριοτήτων ήταν «ανοιχτές» για τρία από τα στοιχεία που εξετάστηκαν. Επομένως, σχεδόν το 60% των δραστηριοτήτων εκτίμησης μέτρησης γραμμών ήταν διατυπωμένες με ασαφή τρόπο, χωρίς να ορίζονται στις περισσότερες τα τέσσερα αυτά στοιχεία. Σύμφωνα με τον Chang και τους συνεργάτες του (2011), η απουσία κατάλληλων επεξηγήσεων στη διατύπωση των δραστηριοτήτων εκτίμησης μέτρησης γραμμών μπορεί να οδηγήσει σε σύγχυση και να λειτουργήσει ανασταλτικά στην αποτελεσματική διδασκαλία των εκτιμήσεων, ιδιαίτερα κατά τις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου.

### **1.3.3 Η παρουσία των εκτιμήσεων στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Ελλάδας**

Στην Ελλάδα ορίζεται η χρήση ενός σχολικού εγχειριδίου για τη διδασκαλία του εκάστοτε μαθήματος σε κάθε τάξη του σχολείου, συνεπώς ο προσανατολισμός των εκπαιδευτικών γύρω από αυτό είναι ακόμα μεγαλύτερος (Μπίκος, 2016). Το γεγονός αυτό καθιστά ιδιαίτερα σημαντική τη μελέτη των σχολικών εγχειριδίων, καθώς το περιεχόμενό τους μπορεί να επηρεάσει άμεσα την ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων των μαθητών. Ιδιαίτερα, η απουσία της έννοιας της εκτίμησης από τα σχολικά εγχειρίδια, μπορεί να συμβάλλει στην έλλειψη σημαντικών δεξιοτήτων καθημερινής ζωής, αλλά και εμποδίζει την εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης (Δεσλή, 2021). Όπως και στο εξωτερικό, στην Ελλάδα ελάχιστες είναι οι έρευνες που μελετούν την παρουσία των εκτιμήσεων στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών.

Οι Παπανικολάου και Καλαβάσης (2017) μελέτησαν τις δραστηριότητες εκτίμησης που προτείνονται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών για τα μαθηματικά (2003), καθώς και αυτές που εμπεριέχονται στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών

για τις τρεις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου. Αναλυτικότερα, βρήκαν ότι οι δραστηριότητες εκτίμησης που προτείνονται από το ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ (2003) δεν ξεπερνούν το 1/3 του συνόλου των δραστηριοτήτων που προτείνονται ανά τάξη και αφορούν κυρίως στην εκτίμηση μέτρησης και στην εκτίμηση πάνω στην αριθμογραμμή. Όσον αφορά τα σχολικά εγχειρίδια κάθε τάξης (Βιβλίο Εκπαιδευτικού, Βιβλίο Μαθητή, Τετράδιο Εργασιών), οι δραστηριότητες εκτίμησης είναι ελάχιστες, με εξαίρεση τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Β΄ Δημοτικού, όπου στα Βιβλία Μαθητή οι δραστηριότητες εκτίμησης αποτελούν το 1/3 του συνόλου των δραστηριοτήτων και στα Τετράδια Εργασιών αποτελούν το 1/5 του συνόλου των δραστηριοτήτων.

Οι δραστηριότητες εκτίμησης που παρουσιάζονται στα σχολικά εγχειρίδια των τριών τάξεων δεν αφορούν μόνο την εκτίμηση μέτρησης και την εκτίμηση πάνω στην αριθμογραμμή, αλλά αναφέρονται και στην υπολογιστική εκτίμηση και την εκτίμηση πλήθους. Πιο αναλυτικά, στα τρία σχολικά εγχειρίδια της Α΄ δημοτικού, η πλειονότητα των δραστηριοτήτων εκτίμησης αναφέρεται στην εκτίμηση μέτρησης μεγεθών, ενώ περιλαμβάνεται και ένας μικρός αριθμός δραστηριοτήτων εκτίμησης πλήθους. Αντίθετα, στα σχολικά εγχειρίδια των επόμενων δυο τάξεων, οι δραστηριότητες υπολογιστικής εκτίμησης υπερτερούν έναντι των άλλων τύπων εκτίμησης, ενώ οι δραστηριότητες εκτίμησης πλήθους εμπεριέχονται σε πολύ μικρό βαθμό στη Β΄ δημοτικού, ή καθόλου στη Γ΄ δημοτικού. Όσον αφορά τις δραστηριότητες εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή, οι ελάχιστες που εντοπίστηκαν εμφανίζονται κυρίως στα σχολικά εγχειρίδια της Γ΄ δημοτικού.

Επίσης, οι Παπανικολάου και Καλαβάσης (2017) μελέτησαν τις δραστηριότητες εκτίμησης ως προς τη σύνδεσή τους με τέσσερις διαστάσεις της χρησιμότητας των εκτιμήσεων: τη σύνδεση με την καθημερινότητα, τη σύνδεση με την αίσθηση του αριθμού, τη σύνδεση με την επινόηση στρατηγικών και, τέλος, τη σύνδεση με την επαλήθευση της απάντησης με ακρίβεια. Αναλυτικότερα, οι δραστηριότητες εκτίμησης πλήθους που μελετήθηκαν στα εγχειρίδια της Α΄ δημοτικού συνδέονταν κυρίως με τη χρήση της εκτίμησης στην καθημερινή ζωή και την ενίσχυση της κατανόησης της αίσθησης του αριθμού, ενώ οι δραστηριότητες εκτίμησης μέτρησης βρέθηκε να συνδέονται και με την τρίτη διάσταση, που αφορά τη δημιουργία νέων και ευέλικτων στρατηγικών για την επίλυση μιας δραστηριότητας, πέρα από τη χρήση ενός τυποποιημένου αλγορίθμου. Οι δραστηριότητες υπολογιστικής εκτίμησης στη Β΄



δημοτικού συνδέονταν ως επί το πλείστον με τη χρήση της εκτίμησης στην καθημερινότητα. Τέλος, οι δραστηριότητες υπολογιστικής εκτίμησης και εκτίμησης μέτρησης μεγεθών στη Γ' δημοτικού συνδέονταν με όλες τις διαστάσεις χρησιμότητας της εκτίμησης. Συγκεκριμένα, η πλειονότητα των δραστηριοτήτων υπολογιστικής εκτίμησης συνδέονταν με τη χρήση στην καθημερινή ζωή, την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού και, σε μικρότερο βαθμό, με τη χρήση της εκτίμησης στην επαλήθευση της απάντησης ενός προβλήματος. Αντίθετα, οι περισσότερες δραστηριότητες εκτίμησης μέτρησης μεγεθών συνδέονταν με την καθημερινότητα και την ανάπτυξη της ικανότητας επινόησης νέων στρατηγικών.

Η Ιωσηφίδου (2018) επιχείρησε τη χαρτογράφηση των δραστηριοτήτων εκτίμησης μέτρησης μεγεθών που περιλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου. Σύμφωνα με τα ευρήματα της έρευνας, οι δραστηριότητες εκτίμησης μέτρησης που καταγράφηκαν στα σχολικά εγχειρίδια και των έξι τάξεων του δημοτικού σχολείου ήταν τέσσερις φορές λιγότερες από τις δραστηριότητες ακριβούς μέτρησης. Η πλειονότητα των δραστηριοτήτων εκτίμησης μέτρησης βρέθηκε στα σχολικά εγχειρίδια της Β' Δημοτικού (21/73), ένας μικρότερος αριθμός καταγράφηκε στα εγχειρίδια της Δ' (16/73), της Στ' (12/73), της Α' (11/73) και της Ε' Δημοτικού (9/73), ενώ ελάχιστες βρέθηκαν στα εγχειρίδια της Γ' Δημοτικού (4/73). Όσον αφορά τα μεγέθη στα οποία αναφέρονται οι δραστηριότητες, βρέθηκε πως η πλειοψηφία των δραστηριοτήτων εκτίμησης μέτρησης αφορούσε στη μέτρηση μήκους, αρκετές αφορούσαν στη μέτρηση εμβαδού και στη μέτρηση βάρους, ενώ ελάχιστες σχετίζονταν με την εκτίμηση μέτρησης όγκου. Τέλος, ενώ στην Α' δημοτικού οι δραστηριότητες εκτίμησης σχετίζονταν κυρίως με τη χρησιμότητα στην καθημερινότητα των μαθητών, στις τρεις τελευταίες τάξεις, οι περισσότερες δραστηριότητες εκτίμησης συνδέονταν με τη χρήση της εκτίμησης ως μέσου επαλήθευσης της ακριβούς απάντησης.

Συνοψίζοντας, η περιορισμένη παρουσία των εκτιμήσεων στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του εξωτερικού και της Ελλάδας είναι πιθανόν να αναστέλλει σημαντικά τη διδασκαλία των εκτιμήσεων. Καθώς τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν το βασικότερο μέσο που αξιοποιείται από τους εκπαιδευτικούς κατά τη διδασκαλία, κρίνεται σημαντικό να μελετηθούν οι δραστηριότητες εκτίμησης που περιλαμβάνουν τα σχολικά εγχειρίδια και να εξεταστεί η συχνότητα αλλά και ο τρόπος εμφάνισης των δραστηριοτήτων εκτίμησης σε αυτά. Στην Ελλάδα, η έννοια των εκτιμήσεων στα

σχολικά εγχειρίδια έχει εξεταστεί μόνο από τις δυο μελέτες που παρουσιάστηκαν (Παπανικολάου & Καλαβάσης, 2017; Ιωσηφίδου, 2018), χωρίς, ωστόσο, να μελετώνται όλοι οι τύποι εκτίμησης ταυτόχρονα. Για τον λόγο αυτόν, στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, θα πραγματοποιηθεί έρευνα με σκοπό την εξέταση της παρουσίας των εκτιμήσεων στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου. Η μεθοδολογία της έρευνας παρουσιάζεται αναλυτικότερα στο επόμενο κεφάλαιο.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη της παρουσίας των δραστηριοτήτων των τριών τύπων εκτίμησης στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ΄ δημοτικού. Συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα που επιχειρεί να απαντήσει η παρούσα μελέτη είναι τα εξής:

4. Ποια είναι η συχνότητα εμφάνισης των δραστηριοτήτων εκτίμησης στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Δ΄ δημοτικού;
5. Διαφοροποιείται η συχνότητα εμφάνισης των δραστηριοτήτων ως προς τους τρεις τύπους εκτίμησης;
6. Ποιες διαστάσεις σημαντικότητας της έννοιας της εκτίμησης εμπεριέχονται στις δραστηριότητες εκτίμησης των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών της Δ΄ δημοτικού;

Στο παρόν κεφάλαιο περιγράφεται η μεθοδολογία της έρευνας που διεξήχθη στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας. Στην πρώτη ενότητα παρουσιάζεται η ερευνητική μέθοδος που ακολουθήθηκε, ενώ στη δεύτερη και τρίτη ενότητα περιγράφεται αναλυτικά το περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών της Δ΄ δημοτικού, καθώς και τα κριτήρια επιλογής των δραστηριοτήτων εκτίμησης που συμπεριλήφθηκαν στην έρευνα. Στην τέταρτη ενότητα παρουσιάζεται το εργαλείο της έρευνας, τα κριτήρια, δηλαδή, βάσει των οποίων πραγματοποιήθηκε η κωδικοποίηση και η ανάλυση των δραστηριοτήτων. Τέλος, στην πέμπτη ενότητα περιγράφεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε κατά τη διεξαγωγή της έρευνας, η εξασφάλιση της εγκυρότητας και της αξιοπιστίας, καθώς και ο τρόπος ανάλυσης των δεδομένων που προέκυψαν από την κωδικοποίηση των δραστηριοτήτων εκτίμησης.

### 2.1 Ερευνητική Μέθοδος

Η μέθοδος που επιλέχθηκε για την πραγματοποίηση της μελέτης είναι η ανάλυση περιεχομένου (content analysis). Πρόκειται για μια ποιοτική μέθοδο έρευνας που χρησιμοποιείται για την εξαγωγή συμπερασμάτων που προκύπτουν από τη συστηματική ανάλυση του περιεχομένου ενός κειμένου μέσω ταξινόμησης,

κωδικοποίησης και εντοπισμού θεμάτων ή μοτίβων (Hsieh & Shannon, 2005). Αναλυτικότερα, στην παρούσα εργασία η επιλογή της συγκεκριμένης ερευνητικής μεθόδου έγινε με σκοπό τη συστηματική συλλογή, ταξινόμηση και μελέτη των δραστηριοτήτων εκτίμησης που εμπεριέχονται στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Δ' δημοτικού. Μέσω της ανάλυσης περιεχομένου των δραστηριοτήτων εκτίμησης επιδιώκεται να εξαχθούν συμπεράσματα σχετικά με τη συχνότητα εμφάνισης των δραστηριοτήτων εκτίμησης, τη διαφοροποίησή τους ως προς τους τρεις τύπους εκτίμησης, καθώς και τη σύνδεσή τους με τις τρεις διαστάσεις σημαντικότητας που εμπεριέχεται στην έννοια της εκτίμησης.

## 2.2 Αντικείμενο μελέτης

Όπως προαναφέρθηκε, αντικείμενο της παρούσας μελέτης αποτελούν οι δραστηριότητες εκτίμησης που εμπεριέχονται στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Δ' τάξης του δημοτικού σχολείου. Η επιλογή των σχολικών εγχειριδίων της συγκεκριμένης τάξης έγινε για δυο λόγους: α) σε καμία από τις δυο ελληνικές μελέτες που παρουσιάστηκαν στο πρώτο κεφάλαιο (Παπανικολάου & Καλαβάσης, 2017; Ιωσηφίδου, 2018) δεν μελετήθηκε η έννοια της εκτίμησης στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Δ' Δημοτικού ως προς τους τρεις τύπους εκτίμησης και β) το περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων για τα μαθηματικά της Δ' τάξης περιλαμβάνει ένα εύρος μαθηματικών περιοχών, άρα δυνητικά ενδείκνυται για τη μελέτη της παρουσίας των εκτιμήσεων σε αυτά.

Τα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών του δημοτικού σχολείου εισήχθησαν για πρώτη φορά στα ελληνικά σχολεία κατά το σχολικό έτος 2007-2008 και σχεδιάστηκαν σύμφωνα με τις αρχές και τους στόχους του Δ.Ε.Π.Π.Σ (2003) για τα μαθηματικά. Οι διδακτικοί στόχοι που προβλέπονται από το Δ.Ε.Π.Π.Σ (2003) για τα μαθηματικά της Δ' τάξης καταμερίζονται στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Δ' Δημοτικού σε τρεις περιόδους (Α', Β', Γ' περίοδος). Κάθε περίοδος χωρίζεται σε τρεις ενότητες. Στην Εικόνα 2.1, παρουσιάζονται οι περίοδοι, οι αντίστοιχες ενότητες και το αντικείμενο που κυρίως διαπραγματεύονται.

Στο Δ.Ε.Π.Π.Σ (2003) για τα μαθηματικά οι στόχοι που προτείνονται για τη διδασκαλία της έννοιας της εκτίμησης στη Δ' τάξη του δημοτικού σχολείου είναι μόνο

δύο και αφορούν την ικανότητα εκτίμησης μέτρησης και την ικανότητα εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή (βλ. Πίνακας 2.1).

<b>Πίνακας 2</b> <b>Κατανομή της ύλης ανά περίοδο</b>			
	<b>A´ Ενότητα</b>	<b>B´ Ενότητα</b>	<b>Γ´ Ενότητα</b>
<b>A´ Περίοδος</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Εμπέδωση και επέκταση των γνώσεων για τους αριθμούς μέχρι το 10.000.</li> <li>■ Παρουσίαση των αριθμών μέχρι το 20.000.</li> <li>■ Επανάληψη και επέκταση των γνώσεων για τα επίπεδα ακμήματα</li> <li>■ Εισαγωγή στη διαχείριση προβλήματος.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Επανάληψη και επέκταση των γνώσεων για τις 4 πράξεις και τις ιδιότητές τους.</li> <li>■ Διαχείριση και επίλυση προβλήματος.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Εμπέδωση των γνώσεων για τους δεκαδικούς αριθμούς με 2 δεκαδικά ψηφία και τα δεκαδικά κλάσματα.</li> <li>■ Μετρήσεις μήκους μάζας χρήματος.</li> <li>■ Εμφάνιση του 3ου δεκαδικού ψηφίου.</li> <li>■ Εμφάνιση των συμμιγών και των δεκαδικών κλασμάτων στο πλαίσιο των μετρήσεων.</li> <li>■ Προβληματικές καταστάσεις με δεκαδικούς αριθμούς με 2 δεκαδικά ψηφία.</li> </ul>
<b>B´ Περίοδος</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Επισήμοποίηση, σταθεροποίηση και επέκταση των γνώσεων για τους δεκαδικούς με 3 δεκαδικά ψηφία, τα δεκαδικά κλάσματα και τους συμμιγείς αριθμούς.</li> <li>■ Παρόμοια και για τις μονάδες μέτρησης μήκους και βάρους.</li> <li>■ Προβληματικές καταστάσεις με δεκαδικούς και συμμιγείς.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Εμπέδωση και επέκταση των γνώσεων για συνήθη επίπεδα ακμήματα.</li> <li>■ Η έννοια και η μέτρηση της επιφάνειας.</li> <li>■ Η έννοια της συμμετρίας.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Παρουσίαση και διαχείριση των αριθμών ως το 200.000.</li> <li>■ Επέκταση των γνώσεων για τις 4 πράξεις σε μεγαλύτερους αριθμούς.</li> <li>■ Διαχείριση και επίλυση προβλήματος.</li> </ul>
<b>Γ´ Περίοδος</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Εισαγωγή των αλγορίθμων του πολλαπλασιασμού με τριψήφιο πολλαπλασιαστή και της διαίρεσης με διψήφιο διαιρέτη.</li> <li>■ Διαχείριση και επίλυση προβλημάτων.</li> <li>■ Η μέθοδος της αναγωγής στη μονάδα.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Παρουσίαση και διαχείριση των αριθμών ως το 1.000.000.</li> <li>■ Διαχείριση και επίλυση προβλήματος.</li> <li>■ Μέτρηση χρόνου.</li> <li>■ Εμπέδωση και επέκταση της έννοιας του μοτίβου. Εισαγωγή στην έννοια του αναδρομικού μοτίβου.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Εμπέδωση και επέκταση των γνώσεων για τα στερεά σώματα.</li> <li>■ Εισαγωγή στην έννοια και τη μέτρηση της χωρητικότητας.</li> <li>■ Επισήμοποίηση και εφαρμογή των γνώσεων για τη Στατιστική.</li> </ul>

*Εικόνα 2.1. Κατανομή της ύλης ανά περίοδο στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Δ´ Δημοτικού (Βαμβακούση κ.α., 2007α, σελ. 15)*

**Πίνακας 2.1. Στόχοι αναφορικά με τη διδασκαλία της έννοιας της εκτίμησης σύμφωνα με το Δ.Ε.Π.Π.Σ για τα μαθηματικά της Δ΄ Δημοτικού (ΥΠ.Ε.Π.Θ, 2003, σ. 264-266)**

ΤΑΞΗ Δ΄		
Στόχοι	Θεματικές Ενότητες (διατιθέμενος χρόνος)	Ενδεικτικές δραστηριότητες
Να γνωρίσουν διαισθητικά την έννοια του λίτρου (l) και του (ml), τη σχέση τους και να λύνουν πραγματικά προβλήματα.	Μετρήσεις Μετρήσεις (μήκος, μάζα, χρόνος, επιφάνεια, χωρητικότητα) (10 ώρες)	Διαισθητική προσέγγιση των μεγεθών: μήκους, επιφάνειας και χωρητικότητας με χρήση αυθαίρετων μονάδων μέτρησης επιφανειών και χωρητικότητας, όπως για παράδειγμα τετραγωνάκια και κυβάκια.
Να τοποθετούν με προσέγγιση δεκαδικά κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς στην αριθμογραμμή.	Αριθμοί και πράξεις Δεκαδικά κλάσματα και δεκαδικοί αριθμοί. (14 ώρες)	Χρήση της αριθμογραμμής. Δραστηριότητες, για παράδειγμα, $1,3=1,30=1,300$ . Επίσης ανάμεσα στο 1,3 και 1,4 ή ακόμα στο 1,30 και 1,40 υπάρχουν και άλλοι δεκαδικοί, όπως οι 1,31, 1,32 ...1,39...

Το διδακτικό πακέτο για τα μαθηματικά της Δ΄ Δημοτικού αποτελείται από το έντυπο υλικό και το συνοδευτικό λογισμικό (Βαμβακούση, Καργιωτάκης, Μπομποτινίου & Σαϊτής, 2007a). Το έντυπο εκπαιδευτικό υλικό αποτελείται από ένα τεύχος του Βιβλίου Μαθητή (Βαμβακούση κ.α., 2007b), τέσσερα τεύχη του Τετραδίου Εργασιών Μαθητή (Βαμβακούση κ.α., 2007c; 2007d; 2007e; 2007f) και από το Βιβλίο του Εκπαιδευτικού (Βαμβακούση κ.α., 2007a).

Το Βιβλίο Μαθητή αποτελείται συνολικά από 56 δισέλιδα κεφάλαια, καθένα από τα οποία συνοδεύεται από το αντίστοιχο δισέλιδο στο Τετράδιο Εργασιών. Κάθε κεφάλαιο αντιστοιχεί σε 1 ή 2 διδακτικές ώρες (Βαμβακούση κ.α., 2007a). Ξεκινά με την ερώτηση αφόρμησης, η οποία δίνει την ευκαιρία στον εκπαιδευτικό να διερευνήσει

την προηγούμενη γνώση των παιδιών σε σχέση με τους διδακτικούς στόχους του κεφαλαίου. Στη συνέχεια ακολουθεί η Δραστηριότητα Ανακάλυψης, κατά την οποία τα παιδιά καλούνται να αξιοποιήσουν την προϋπάρχουσα γνώση τους, προκειμένου να αντιμετωπίσουν προβλήματα διαφόρων τύπων. Η Δραστηριότητα Ανακάλυψης ακολουθείται από Εργασίες, στις οποίες τα παιδιά επεξεργάζονται περαιτέρω τις έννοιες που αποτελούν τον στόχο του κεφαλαίου. Το κεφάλαιο κλείνει με το Συμπέρασμα, το οποίο επισημοποιεί τη γνώση που επεξεργάστηκαν τα παιδιά στο πλαίσιο του κεφαλαίου.

Στα Τετράδια Εργασιών (4 Τεύχη) υπάρχουν εργασίες διαφόρων τύπων και επιπέδων δυσκολίας, με τις οποίες τα παιδιά εξασκούνται, εμβαθύνουν και επεκτείνουν τις γνώσεις που αποτελούν τον διδακτικό στόχο του κεφαλαίου (Βαμβακούση κ.α., 2007α).

### **2.3 Δείγμα**

Από τα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Δ' δημοτικού μελετήθηκαν όλες οι δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στο σύνολο των κεφαλαίων του Βιβλίου Μαθητή και των Τετραδίων Εργασιών. Συνολικά οι δραστηριότητες που μελετήθηκαν είναι 734, από τις οποίες οι 319 βρίσκονται στο Βιβλίο Μαθητή και οι 415 στα Τετράδια Εργασιών. Πιο συγκεκριμένα, στο Βιβλίο Μαθητή υπάρχουν 131 Δραστηριότητες Ανακάλυψης και 188 Εργασίες. Τα Τετράδια Εργασιών αποτελούνται αποκλειστικά από Εργασίες, οι οποίες είναι 415 (βλ. Πίνακας 2.2).

Στην παρούσα μελέτη πραγματοποιήθηκε συστηματική συλλογή και ανάλυση των δραστηριοτήτων εκτίμησης. Στις δραστηριότητες εκτίμησης συμπεριελήφθησαν οι σχετικές Δραστηριότητες Ανακάλυψης και Εργασίες από το Βιβλίο Μαθητή, καθώς και οι σχετικές Εργασίες από το Τετράδιο Εργασιών. Οι δραστηριότητες που εμπειρεύσαν παραπάνω από ένα υποερώτημα καταμετρούνταν ανάλογα με το πλήθος των υποερωτημάτων. Για παράδειγμα, μια δραστηριότητα που αποτελούνταν από δυο υποερωτήματα, καταμετρήθηκε ως δυο δραστηριότητες.


**Πίνακας 2.2. Πλήθος δραστηριοτήτων στο Βιβλίο Μαθητή και τα Τετράδια Εργασιών της Δ΄ δημοτικού**

Περίοδος	Ενότητα	Βιβλίο Μαθητή		Τετράδια
		Πλήθος	Πλήθος	Εργασιών
		Δραστηριοτήτων Ανακάλυψης	Εργασιών	Πλήθος Εργασιών
Α΄ Περίοδος	Α΄	17	29	47
	Β΄	15	23	48
	Γ΄	17	25	52
Β΄ Περίοδος	Α΄	9	18	47
	Β΄	19	23	54
	Γ΄	15	15	45
Γ΄ Περίοδος	Α΄	19	17	44
	Β΄	10	19	42
	Γ΄	10	19	36
<b>Σύνολο</b>		<b>131</b>	<b>188</b>	<b>415</b>

Η συλλογή και ταξινόμηση των δραστηριοτήτων ως δραστηριότητες εκτίμησης έγινε σύμφωνα με συγκεκριμένες λέξεις – κλειδιά: «εκτιμώ», «εκτιμούμε», «εκτίμηση», «εκτιμώντας», «περίπου». Ωστόσο, εντοπίστηκαν και ορισμένες δραστηριότητες οι οποίες, αν και δεν εμπεριείχαν συγκεκριμένες λέξεις που να δηλώνουν άμεσα εκτίμηση, υπονοούσαν έμμεσα στο περιεχόμενό τους την έννοια αυτή. Για παράδειγμα, στην Εικόνα 2.2 ζητείται από τους μαθητές να απαντήσουν, σύμφωνα με την κρίση τους, σε δυο ερωτήσεις που αφορούν τη χωρητικότητα τεσσάρων ποτηριών. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα κατηγοριοποιήθηκε στις δραστηριότητες εκτίμησης μέτρησης, καθώς ζητείται έμμεσα από τους μαθητές να απαντήσουν κατά προσέγγιση, με βάση τις εκτιμήσεις τους για τη χωρητικότητα κάθε ποτηριού.



 Μπορούν δύο διαφορετικά ποτήρια να χωρούν την ίδια ποσότητα νερού;

α)  Κάθε παιδί άδειασε όλο τον χυμό του κουτιού στο ποτήρι του.

● Ποιο ποτήρι:

- έχει πιο πολύ χυμό;

.....

- χωράει πιο πολύ χυμό;

.....



**Εικόνα 2.2.** Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας με έμμεση αναφορά στην έννοια της εκτίμησης (Βιβλίο Μαθητή, Κεφ. 54, σελ.134)

Συνολικά, λοιπόν, χαρτογραφήθηκαν 89 δραστηριότητες εκτίμησης, η κατανομή των οποίων παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.3.

**Πίνακας 2.3.** Κατανομή του πλήθους των δραστηριοτήτων εκτίμησης στα κεφάλαια του Βιβλίου Μαθητή και των Τετραδίων Εργασιών

Περίοδοι	Ενότητα	Κεφάλαιο	Πλήθος Δραστηριοτήτων Εκτίμησης	
			Βιβλίο Μαθητή	Τετράδια Εργασιών
Α΄ Περίοδος	Α΄ Ενότητα	1. Θυμάμαι ό,τι έμαθα από την Γ΄ τάξη	0	1
		2. Διαχειρίζομαι αριθμούς ως το 10.000	3	2
		1η επανάληψη	4	0
	Β΄ Ενότητα	8. Προσθέτω και αφαιρώ	2	1
		10. Επιλύω προβλήματα	2	2
		12. Διαιρώ με διάφορους τρόπους	0	1

		13. Τέλεια και ατελής διαίρεση	1	0
		2η επανάληψη	0	1
	Γ' Ενότητα	15. Θυμάμαι τους δεκαδικούς αριθμούς	0	1
		17. Μετρώ και εκφράζω το μήκος	0	3
		18. Μετρώ το βάρος	1	2
		19. Προσθέτω και αφαιρώ δεκαδικούς αριθμούς (1)	1	1
		20. Προσθέτω και αφαιρώ δεκαδικούς αριθμούς (2)	1	0
		3η επανάληψη	5	3
<b>Β' Περίοδος</b>	A' Ενότητα	22. Διαχειρίζομαι δεκαδικούς αριθμούς	1	0
		23. Υπολογίζω με συμμιγείς και δεκαδικούς	1	1
		25. Επιλύω προβλήματα	0	2
		26. Διαχειρίζομαι δεκαδικούς αριθμούς	2	4
	B' Ενότητα	27. Γνωρίζω τις παράλληλες και τις τεμνόμενες ευθείες	0	1
		28. Σχεδιάζω κάθετες μεταξύ τους ευθείες	0	1
		29. Σχεδιάζω παράλληλες μεταξύ τους ευθείες	0	1
		30. Διακρίνω το περίγραμμα από την επιφάνεια	1	2
		31. Μετρώ την επιφάνεια, βρίσκω το εμβαδόν	1	0
		33. Υπολογίζω περιμέτρους και εμβαδά	2	0

		34. Επεξεργάζομαι συμμετρικά σχήματα	1	0
	Γ' Ενότητα	35. Διαχειρίζομαι αριθμούς ως το 20.000	1	1
		39. Εκτιμώ και υπολογίζω με τον νου	2	0
		6η επανάληψη	0	3
<b>Γ' Περίοδος</b>	A' Ενότητα	41. Πολλαπλασιάζω με τριψήφιο πολλαπλασιαστή	0	1
		42. Διαιρώ με διψήφιο διαιρέτη	0	1
		43. Αντίστροφα προβλήματα	0	2
		45. Διαχειρίζομαι σύνθετα προβλήματα	1	0
		7η επανάληψη	1	1
	B' Ενότητα	48. Διαχειρίζομαι αριθμούς ως το 1.000.000	1	0
		49. Διαχειρίζομαι προβλήματα με μεγάλους αριθμούς	3	1
		50. Μετρώ τον χρόνο (1)	1	0
		51. Μετρώ τον χρόνο (2)	1	1
		8η επανάληψη	0	3
	Γ' Ενότητα	54. Μαθαίνω για τη χωρητικότητα	1	2
		9η επανάληψη	2	0
<b>Σύνολο</b>			<b>43</b>	<b>46</b>

## 2.4 Εργαλείο ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων

Προκειμένου να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στην αρχή της ερευνητικής διαδικασίας, κάθε δραστηριότητα εκτίμησε αναλύθηκε σύμφωνα με

ορισμένα κριτήρια. Τα κριτήρια αυτά διαμορφώθηκαν βάσει των χαρακτηριστικών και της ταξινόμησης των έργων που χρησιμοποιήθηκαν στις έρευνες που παρουσιάστηκαν στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας. Τα κριτήρια ανάλυσης και οι κατηγορίες στις οποίες ταξινομήθηκαν και κωδικοποιήθηκαν οι δραστηριότητες εκτίμησης παρουσιάζονται συνοπτικά στον Πίνακα 2.4 που ακολουθεί και αναλύονται περαιτέρω.

**Πίνακας 2.4. Κριτήρια ανάλυσης των δραστηριοτήτων εκτίμησης**

<b>Κριτήρια Ανάλυσης</b>		
<b>Διάσταση</b>	<b>Ερώτημα στο οποίο απαντάει</b>	<b>Κατηγορίες και υποκατηγορίες</b>
<b>A. Τύπος εκτίμησης</b>	Ποιος είναι ο τύπος εκτίμησης στη δραστηριότητα;	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Υπολογιστική Εκτίμηση</li> <li>• Εκτίμηση Πλήθους</li> <li>• Εκτίμηση Μέτρησης</li> <li>• Εκτίμηση στην Αριθμογραμμή (Siegler &amp; Booth, 2005)</li> </ul>
<b>B. Χαρακτηριστικά πλαισίου</b>	Με ποιον τρόπο πλαισιώνεται η δραστηριότητα;	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Συμβολικό πλαίσιο σε αριθμητική μορφή</li> <li>• Λεκτικό πλαίσιο με ιστορία (Yang &amp; Wu, 2012)</li> </ul>
<b>Γ. Είδος Αριθμού</b>	Ποια είδη αριθμού περιλαμβάνονται στη δραστηριότητα;	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Φυσικοί αριθμοί</li> <li>• Δεκαδικοί αριθμοί</li> <li>• Συμμιγείς αριθμοί (Tsao &amp; Pan, 2011; Iuculano &amp; Butterworth, 2011; Δεσλή &amp; Τριανταφύλλου, 2022)</li> </ul>
<b>Δ. Σημαντικότητα</b>	Ποιες είναι οι διαστάσεις σημαντικότητας της εκτίμησης στη δραστηριότητα;	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Σύνδεση με καθημερινότητα</li> <li>• Επιπόνηση στρατηγικών</li> <li>• Επαλήθευση της απάντησης (Παπανικολάου &amp; Καλαβάσης, 2017)</li> </ul>
<b>E. Επιμέρους Χαρακτηριστικά</b>		

<b>α. Είδος πράξεων</b>	Ποιο είδος αριθμητικών πράξεων περιλαμβάνεται στις δραστηριότητες υπολογιστικής εκτίμησης;	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Πρόσθεση</li> <li>• Αφαίρεση</li> <li>• Πολλαπλασιασμός</li> <li>• Διαίρεση</li> <li>• Περισσότερες από μία πράξεις (Liu, 2009)</li> </ul>
<b>β. Μορφή του έργου</b>	Ποια είναι η μορφή των δραστηριοτήτων εκτίμησης στην αριθμογραμμή;	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Εύρεση της θέσης ενός αριθμού στην αριθμογραμμή</li> <li>• Προσδιορισμός της τιμής ενός αριθμού βάσει της θέσης του στην αριθμογραμμή (Δεσλή &amp; Τριανταφύλλου, 2022)</li> </ul>
<b>γ. Μέγεθος μέτρησης</b>	Ποιο μέγεθος αναφέρεται στις δραστηριότητες εκτίμησης μέτρησης;	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Μήκος (Desli &amp; Giakoumi, 2017)</li> <li>• Εμβαδόν (Δεσλή &amp; Μυρόβαλη, 2017)</li> <li>• Όγκος/ Χωρητικότητα (Forrester &amp; Shire, 1994)</li> <li>• Βάρος (Δεσλή &amp; Κώστα, 2018)</li> <li>• Χρόνος (Δεσλή &amp; Ξενίδου, 2021)</li> </ul>
<b>δ. Μονάδα μέτρησης</b>	Ποιο είδος μονάδων μέτρησης χρησιμοποιείται στις δραστηριότητες εκτίμησης μέτρησης;	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Τυποποιημένες μονάδες</li> <li>• Μη τυποποιημένες μονάδες</li> <li>• Καμία αναφορά</li> <li>• Και τα δύο (Jones et al., 2012; Desli &amp; Giakoumi, 2017)</li> </ul>

**A. Τύπος εκτίμησης:** Οι δραστηριότητες ταξινομήθηκαν ως προς τον τύπο εκτίμησης σε τέσσερις κατηγορίες. Οι δραστηριότητες εκτίμησης που αφορούσαν

υπολογισμούς και πράξεις εντάχθηκαν στην κατηγορία των *υπολογιστικών εκτιμήσεων*. Εκείνες που αφορούσαν την εκτίμηση ενός πλήθους ή μιας ποσότητας εντάχθηκαν στην κατηγορία *εκτίμησης πλήθους*, ενώ όσες αφορούσαν τον κατά προσέγγιση προσδιορισμό της τιμής ενός μεγέθους (π.χ. μήκος, εμβαδόν κ.α.) εντάχθηκαν στην κατηγορία *εκτίμησης μέτρησης*. Τέλος, οι δραστηριότητες που αφορούσαν τον κατά προσέγγιση προσδιορισμό της τιμής ενός αριθμού ή την κατά προσέγγιση εύρεση της θέσης του πάνω στην αριθμογραμμή εντάχθηκαν στην κατηγορία της *εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή*.

- Β. Χαρακτηριστικά πλαισίου:** Όσον αφορά τα χαρακτηριστικά πλαισίου, οι δραστηριότητες εκτίμησης ταξινομήθηκαν σε δυο κατηγορίες. Οι δραστηριότητες που είχαν συμβολική μορφή και δεν πλαισιώνονταν από κάποιο σενάριο εντάχθηκαν στην κατηγορία του *συμβολικού πλαισίου*. Αντίθετα, εκείνες που πλαισιώνονταν από κάποια ιστορία, συνήθως σχετική με καταστάσεις της καθημερινής ζωής, εντάχθηκαν στην κατηγορία του *λεκτικού πλαισίου*.
- Γ. Είδος αριθμού:** Ανάλογα με το είδος του αριθμού που εμπεριείχαν οι δραστηριότητες εκτίμησης εντάχθηκαν σε τρεις κατηγορίες: *φυσικοί αριθμοί*, *δεκαδικοί αριθμοί* και *συμμιγείς αριθμοί*. Τα κλάσματα δεν αποτέλεσαν μέρος της παρούσας κατηγοριοποίησης, καθώς δεν περιλαμβάνονται στη διδακτέα ύλη των σχολικών εγχειριδίων της Δ' τάξης του δημοτικού σχολείου.
- Δ. Σημαντικότητα:** Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, οι δραστηριότητες εκτίμησης ταξινομήθηκαν σε τρεις επιμέρους κατηγορίες. Πιο συγκεκριμένα, εκείνες που πλαισιώνονταν από ένα σενάριο της καθημερινής ζωής ταξινομήθηκαν στην κατηγορία *σύνδεσης με την καθημερινότητα*. Όσες δραστηριότητες παρακινούσαν τους μαθητές στη χρήση νέων στρατηγικών ταξινομήθηκαν στην κατηγορία της *επινόησης στρατηγικών*, ενώ εκείνες στις οποίες ζητούνταν ο προσδιορισμός της ακριβούς απάντησης, πριν ή μετά την εκτίμηση, χαρακτηρίστηκαν ως δραστηριότητες εκτίμησης που λειτουργούσαν ως *μέσο επαλήθευσης*. Ορισμένες δραστηριότητες εκτίμησης εντάχθηκαν σε παραπάνω από μία κατηγορίες και κωδικοποιήθηκαν αναλόγως.
- Ε. Επιμέρους χαρακτηριστικά:** Εκτός των παραπάνω τεσσάρων βασικών κριτηρίων τέθηκαν ακόμα τέσσερα κριτήρια για την περαιτέρω κατηγοριοποίηση των δραστηριοτήτων εκτίμησης. Συγκεκριμένα, οι δραστηριότητες υπολογιστικής εκτίμησης ταξινομήθηκαν επιπρόσθετα, με βάση το *είδος των αριθμητικών πράξεων* στις οποίες αναφέρονται, σε πέντε κατηγορίες: α) πρόσθεση, β) αφαίρεση,

γ) πολλαπλασιασμός, δ) διαίρεση και ε) περισσότερες από μία πράξεις. Οι δραστηριότητες εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή ταξινομήθηκαν ως προς τη *μορφή του έργου* σε δραστηριότητες όπου ζητούνταν: α) η εύρεση της θέσης ενός αριθμού στην αριθμογραμμή ή β) ο προσδιορισμός της τιμής ενός αριθμού βάσει της θέσης του στην αριθμογραμμή. Τέλος, οι δραστηριότητες εκτίμησης μέτρησης ταξινομήθηκαν βάσει του μεγέθους μέτρησης που αναφερόταν σε αυτές και των μονάδων μέτρησης που ζητούσαν να χρησιμοποιηθεί. Πιο αναλυτικά, ως προς το *μέγεθος μέτρησης* οι δραστηριότητες εκτίμησης μέτρησης ταξινομήθηκαν σε πέντε κατηγορίες: α) μήκος, β) εμβαδόν, γ) όγκος/χωρητικότητα, δ) βάρος και ε) χρόνος. Ως προς το *είδος των μονάδων μέτρησης*, οι δραστηριότητες εκτίμησης μέτρησης ταξινομήθηκαν σε τέσσερις κατηγορίες: α) δραστηριότητες που αναφέρονταν στη χρήση τυποποιημένων μονάδων μέτρησης, β) δραστηριότητες που αναφέρονταν στη χρήση μη τυποποιημένων μονάδων μέτρησης, γ) δραστηριότητες στις οποίες δεν υπήρχε καμία αναφορά, δηλαδή δεν απαιτούνταν η χρήση κάποιου συγκεκριμένου είδους μονάδων μέτρησης και δ) δραστηριότητες στις οποίες ζητούνταν η χρήση τυποποιημένων και μη τυποποιημένων μονάδων μέτρησης.

## 2.5 Διαδικασία

Με βάση τα κριτήρια που παρουσιάστηκαν παραπάνω, πραγματοποιήθηκε η ανάλυση των επιλεγμένων δραστηριοτήτων εκτίμησης των σχολικών εγχειριδίων της Δ' δημοτικού. Συγκεκριμένα, εξετάστηκαν προσεκτικά όλες οι δραστηριότητες (Δραστηριότητες Ανακάλυψης και Εργασίες) του Βιβλίου Μαθητή και των Τετραδίων Εργασιών, απομονώθηκαν εκείνες που χαρακτηρίστηκαν ως δραστηριότητες εκτίμησης, σύμφωνα με το περιεχόμενό τους και τις λέξεις-κλειδιά που αναφέρθηκαν, και στη συνέχεια ταξινομήθηκαν και κωδικοποιήθηκαν.

Η εγκυρότητα της έρευνας διασφαλίστηκε μέσω των κριτηρίων που τέθηκαν, ώστε να δοθεί απάντηση στα ερευνητικά ερωτήματα. Συγκεκριμένα, τα πρώτα τρία κριτήρια ανάλυσης (τύπος εκτίμησης, χαρακτηριστικά πλαισίου, είδος αριθμού) σχεδιάστηκαν προκειμένου να δοθεί απάντηση στα δύο πρώτα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν, ενώ με βάση το τέταρτο κριτήριο ανάλυσης (διάσταση σημαντικότητας) επιχειρήθηκε να απαντηθεί το τρίτο ερευνητικό ερώτημα. Η αξιοπιστία της έρευνας

διασφαλίστηκε μέσω του επανελέγχου των δραστηριοτήτων εκτίμησης μετά την πρώτη ολοκλήρωση της συλλογής και κωδικοποίησής τους.

Μετά την κατηγοριοποίηση των δραστηριοτήτων εκτίμησης, τα δεδομένα που προέκυψαν εισήχθησαν στο στατιστικό πακέτο SPSS 28 για στατιστική επεξεργασία. Τα αποτελέσματα της στατιστικής ανάλυσης παρουσιάζονται διεξοδικά στο επόμενο κεφάλαιο.

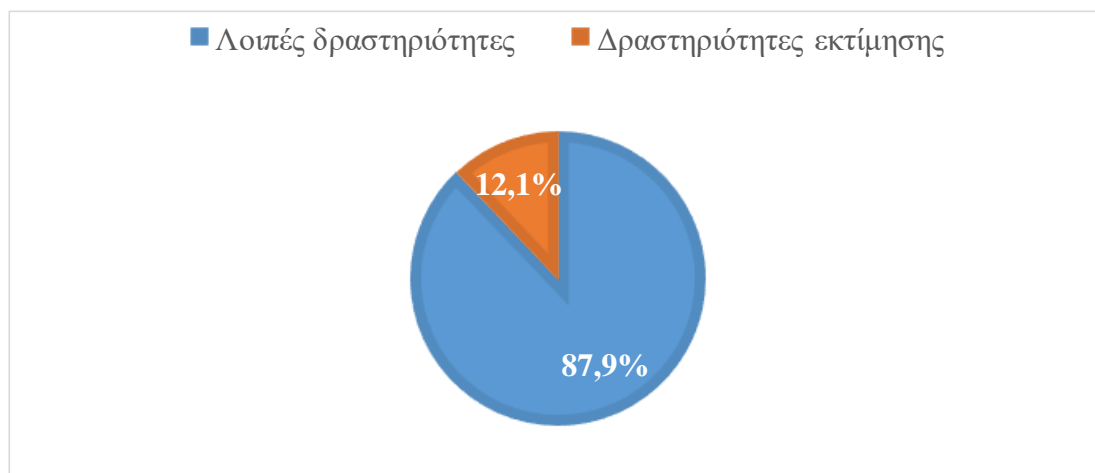


## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας μετά τη συστηματική συλλογή και ανάλυση των δραστηριοτήτων εκτίμησης στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Δ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου. Το παρόν κεφάλαιο διαρθρώνεται σε τρεις ενότητες. Στην πρώτη ενότητα παρουσιάζεται η κατηγοριοποίηση των δραστηριοτήτων εκτίμησης σύμφωνα με τα τρία πρώτα κριτήρια ανάλυσης που τέθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο (τύπος εκτίμησης, χαρακτηριστικά πλαισίου, είδος αριθμού) και περιγράφεται η συχνότητα εμφάνισής τους συλλογικά, αλλά και μεμονωμένα για κάθε είδος σχολικού εγχειριδίου (Βιβλίο Μαθητή και Τετράδια Εργασιών). Στη δεύτερη ενότητα παρουσιάζονται τα επιμέρους χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων για κάθε τύπο εκτίμησης. Τέλος, στην τρίτη ενότητα αναλύεται η σύνδεση των δραστηριοτήτων εκτίμησης με κάθε μία από τις τρεις διαστάσεις σημαντικότητας. Η σύνδεση των δραστηριοτήτων εκτίμησης με τις διαστάσεις σημαντικότητας εξετάζεται τόσο στο σύνολο των δραστηριοτήτων εκτίμησης όσο και για κάθε τύπο εκτίμησης.

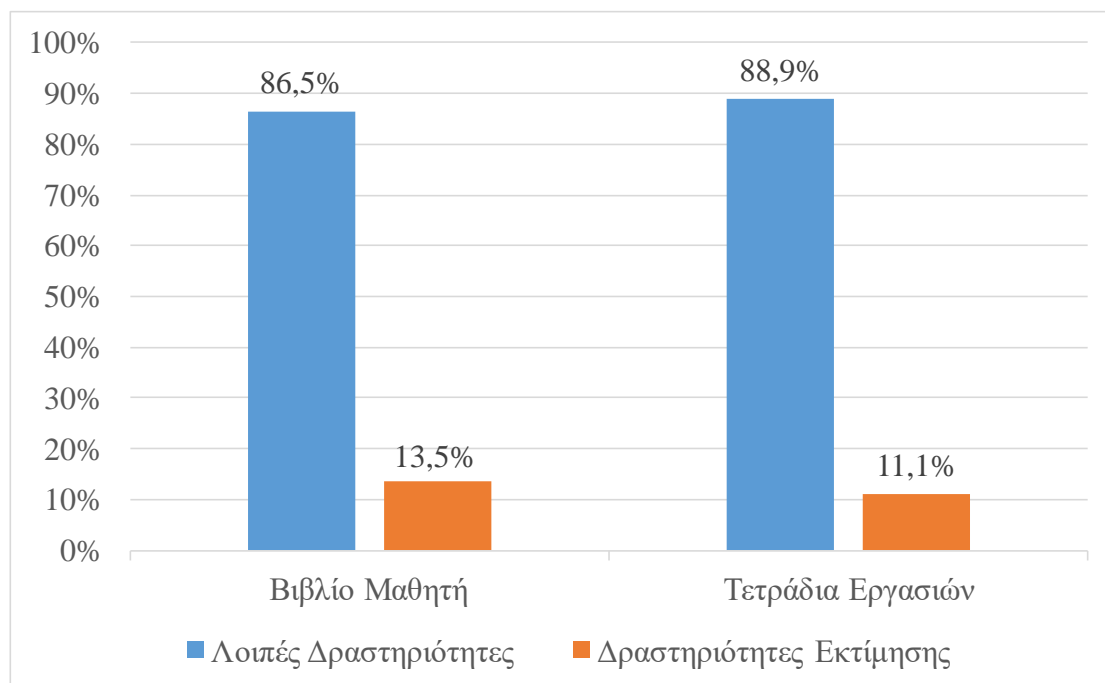
### 3.1 Συχνότητα εμφάνισης των δραστηριοτήτων εκτίμησης με βάση τα τρία πρώτα κριτήρια ανάλυσης

Από τις 734 δραστηριότητες που συνολικά μελετήθηκαν στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου, συλλέχθηκαν και αναλύθηκαν 89 δραστηριότητες εκτίμησης. Με άλλα λόγια, το 12,1% των δραστηριοτήτων που βρίσκονται στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ΄ τάξης αφορούν εκτιμήσεις (βλ. Σχήμα 3.1).



**Σχήμα 3.1.** Κατανομή συχνότητας του συνόλου των δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών της Δ΄ τάξης ως προς το είδος της δραστηριότητας

Πιο συγκεκριμένα, οι 43 δραστηριότητες βρίσκονται στο Βιβλίο Μαθητή. Δηλαδή, από το σύνολο των 319 δραστηριοτήτων που υπάρχουν στο Βιβλίο Μαθητή, οι 43 (13,5%) είναι δραστηριότητες εκτίμησης. Αντίστοιχα, από τις 415 δραστηριότητες που υπάρχουν συνολικά στα Τετράδια Εργασιών, οι 46 (11,1%) αποτελούν δραστηριότητες εκτίμησης (βλ. Σχήμα 3.2).



**Σχήμα 3.2. Κατανομή συχνότητας του συνόλου των δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων της Δ' τάξης ως προς το είδος της δραστηριότητας και το είδος του σχολικού εγχειριδίου**

Συνεπώς, εντοπίστηκαν και μελετήθηκαν 89 δραστηριότητες εκτίμησης, από τις οποίες οι 43 (48,3%) προέρχονται από το Βιβλίο Μαθητή και οι 46 (51,7%) από τα Τετράδια Εργασιών (βλ. Σχήμα 3.3).



**Σχήμα 3.3. Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης ως προς το είδος των σχολικών εγχειριδίων**

### 3.1.1 Τύπος Εκτίμησης

Η πλειονότητα των δραστηριοτήτων εκτίμησης στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Δ' Δημοτικού αναφέρεται στις υπολογιστικές εκτιμήσεις. Πιο συγκεκριμένα, από το σύνολο των 89 δραστηριοτήτων εκτίμησης, οι 60 δραστηριότητες (67,4%) αποτελούν δραστηριότητες υπολογιστικών εκτιμήσεων, οι 20 δραστηριότητες (22,5%) αναφέρονται στις εκτιμήσεις μέτρησης, ενώ οι 8 δραστηριότητες (9%) αφορούν εκτιμήσεις πλήθους. Ενδιαφέρον έχει το γεγονός ότι μόλις μία δραστηριότητα εκτίμησης (1,1%) αφορά εκτίμηση πάνω στην αριθμογραμμή (βλ. Πίνακας 3.1).

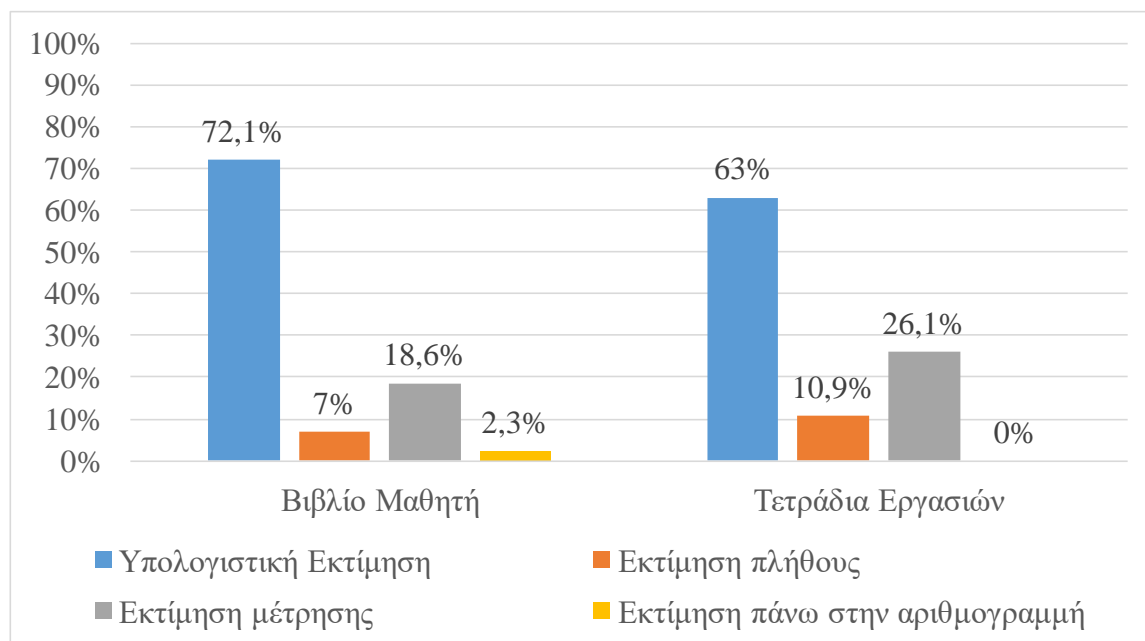
**Πίνακας 3.5. Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης ως προς τον τύπο εκτίμησης**

Τύπος Εκτίμησης	N	%
Υπολογιστική Εκτίμηση	60	67,4
Εκτίμηση Πλήθους	8	9
Εκτίμηση Μέτρησης	20	22,5
Εκτίμηση πάνω στην αριθμογραμμή	1	1,1
<b>Σύνολο</b>	<b>89</b>	<b>100</b>

Εξετάζοντας μεμονωμένα τα δυο είδη σχολικών εγχειριδίων, το Βιβλίο Μαθητή και τα Τετράδια Εργασιών, παρατηρείται ότι η συχνότητα εμφάνισης των τριών τύπων εκτίμησης είναι παρόμοια, ενώ οι δραστηριότητες υπολογιστικής εκτίμησης φαίνεται να υπερισχύουν και στα δυο είδη σχολικών εγχειριδίων. Αναλυτικότερα, από τις 43 δραστηριότητες εκτίμησης που εντοπίστηκαν στο Βιβλίο Μαθητή, οι δραστηριότητες υπολογιστικής εκτίμησης αποτελούν το 72,1% (N=31). Ακολουθούν οι δραστηριότητες εκτίμησης μέτρησης με ποσοστό 18,6% (N=8), ενώ οι δραστηριότητες εκτίμησης πλήθους αποτελούν το 7% (N=3). Η μοναδική δραστηριότητα εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή εντοπίστηκε στο Βιβλίο Μαθητή και αποτελεί το 2,3% του συνόλου των δραστηριοτήτων εκτίμησης στο εγχειρίδιο αυτό (βλ. Σχήμα 3.4).

Από τις 46 δραστηριότητες εκτίμησης των Τετραδίων Εργασιών, το 63% (N=29) εντάσσεται στις δραστηριότητες υπολογιστικής εκτίμησης, το 26,1% (N=12) στις

δραστηριότητες εκτίμησης μέτρησης, το 10,9% (N=5) στις δραστηριότητες εκτίμησης πλήθους, ενώ δεν υπάρχει καμία δραστηριότητα εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή (βλ. Σχήμα 3.4).



**Σχήμα 3.4.** Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης ανά τύπο εκτίμησης και είδος σχολικού εγχειριδίου

### 3.1.2 Χαρακτηριστικά πλαισίου

Όσον αφορά τα χαρακτηριστικά πλαισίου, πάνω από τις μισές δραστηριότητες εκτίμησης στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Δ' τάξης φαίνεται να πλαισιώνονται από κάποιο σενάριο (βλ. Πίνακας 3.2).

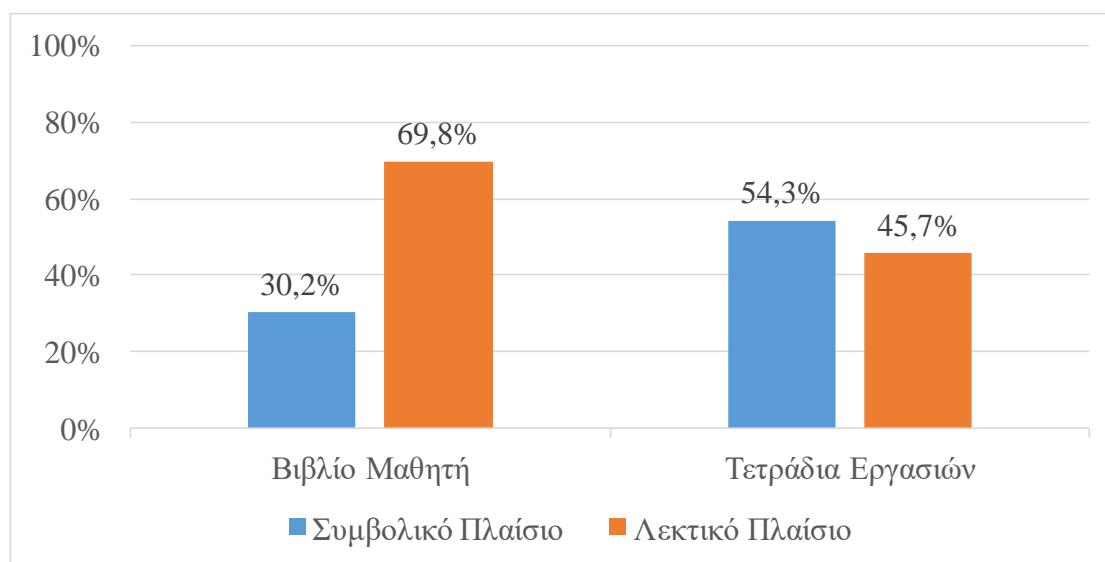
**Πίνακας 3.6.** Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης ως προς τα χαρακτηριστικά πλαισίου

Χαρακτηριστικά πλαισίου	N	%
Συμβολικό πλαίσιο	38	42,7
Λεκτικό πλαίσιο	51	57,3
<b>Σύνολο</b>	<b>89</b>	<b>100</b>

Συγκεκριμένα, από τις 89 δραστηριότητες εκτίμησης, οι 51 (57,3%) έχουν λεκτικό πλαίσιο, πλαισιώνονται, δηλαδή, από κάποια ιστορία, ενώ οι 38 (42,7%) έχουν συμβολικό πλαίσιο, περιλαμβάνουν, δηλαδή, μόνο αριθμητικά σύμβολα.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της ανάλυσης, η πλειονότητα των δραστηριοτήτων εκτίμησης στο Βιβλίο Μαθητή έχει λεκτική μορφή. Πιο αναλυτικά, από τις 43 δραστηριότητες εκτίμησης του Βιβλίου Μαθητή, το 69,8% (N=30) πλαισιώνεται από μια ιστορία, ενώ το 30,2% (N=13) διατυπώνεται μόνο με συμβολική μορφή (βλ. Σχήμα 3.5).

Αντιθέτως, στα Τετράδια Εργασιών παρατηρείται σχετική ομοιογένεια στην κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης ως προς το είδος πλαισίου. Συγκεκριμένα, από τις 46 δραστηριότητες εκτίμησης, οι δραστηριότητες με συμβολικό πλαίσιο υπερτερούν με ποσοστό 54,3% (N=25), ενώ οι δραστηριότητες με λεκτικό πλαίσιο αποτελούν το 45,7% (N=21) (βλ. Σχήμα 3.5).



**Σχήμα 3.5. Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης ως προς τα χαρακτηριστικά πλαισίου και το είδος του σχολικού εγχειριδίου**

### 3.1.3 Είδος Αριθμού

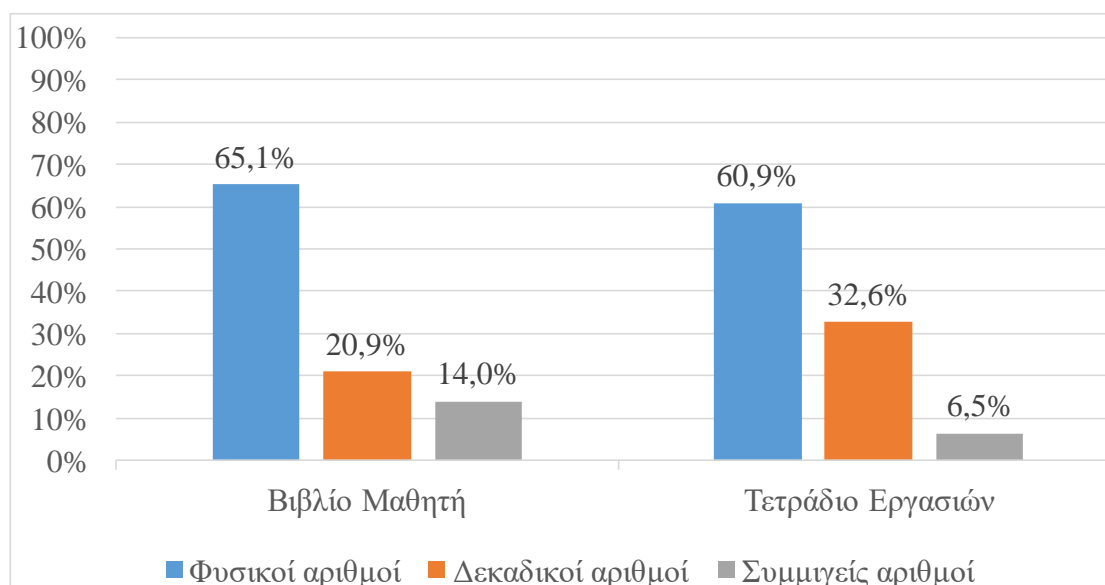
Οι δραστηριότητες εκτίμησης περιλαμβάνουν, ως επί το πλείστον, φυσικούς αριθμούς, ενώ ένα σημαντικό ποσοστό δραστηριοτήτων εκτίμησης περιλαμβάνει δεκαδικούς αριθμούς. Συγκεκριμένα, από τις 89 δραστηριότητες εκτίμησης, στις 56 (62,9%) αξιοποιούνται φυσικοί αριθμοί, ενώ στις 24 (27%) δεκαδικοί αριθμοί. Οι

συμμιγείς αριθμοί εμφανίζονται σε 9 (10,1%) δραστηριότητες εκτίμησης (βλ. Πίνακας 3.3).

**Πίνακας 3.7. Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης ανά είδος αριθμού**

Είδος Αριθμού	N	%
Φυσικοί αριθμοί	56	62,9
Δεκαδικοί αριθμοί	24	27
Συμμιγείς αριθμοί	9	10,1
<b>Σύνολο</b>	<b>89</b>	<b>100</b>

Εξετάζοντας το Βιβλίο Μαθητή και τα Τετράδια Εργασιών ως προς το είδος των αριθμών που εμπλέκονται στις δραστηριότητες εκτίμησης, παρατηρείται πως η πλειονότητα των δραστηριοτήτων εκτίμησης και στα δυο είδη σχολικών εγχειριδίων περιλαμβάνει φυσικούς αριθμούς. Ωστόσο, στα Τετράδια Εργασιών οι δραστηριότητες εκτίμησης με δεκαδικούς αριθμούς φαίνεται να είναι αριθμητικά περισσότερες σε σχέση με το Βιβλίο Μαθητή (βλ. Σχήμα 3.6).



**Σχήμα 3.6. Κατανομή συχνότητας δραστηριοτήτων εκτίμησης ως προς το είδος του αριθμού και το είδος του σχολικού εγχειριδίου**

Αναλυτικότερα, από τις 43 δραστηριότητες εκτίμησης του Βιβλίου Μαθητή, το 65,1% (N=28) αυτών αναφέρεται σε φυσικούς αριθμούς, το 20,9% (N=9) αναφέρεται σε δεκαδικούς αριθμούς, ενώ το 14% (N=6) περιλαμβάνει συμμιγείς αριθμούς. Όσον αφορά τα Τετράδια Εργασιών, από τις 46 δραστηριότητες εκτίμησης, το 60,9% (N=28) αναφέρεται σε φυσικούς αριθμούς, το 32,6% (N=15) αφορά δεκαδικούς αριθμούς και μόλις το 6,5% (N=3) περιλαμβάνει συμμιγείς αριθμούς.

## **3.2 Επιμέρους χαρακτηριστικά για κάθε τύπο εκτίμησης**

### **3.2.1 Υπολογιστική Εκτίμηση**

Σύμφωνα με την ανάλυση των δεδομένων, οι περισσότερες δραστηριότητες υπολογιστικής εκτίμησης φαίνεται να πλαισιώνονται από κάποιο σενάριο, εμπεριέχουν κυρίως φυσικούς αριθμούς και περιλαμβάνουν, ως επί το πλείστον, πράξεις πρόσθεσης (βλ. Πίνακας 3.4).

Πιο συγκεκριμένα, από τις 60 δραστηριότητες υπολογιστικής εκτίμησης, οι 38 (63,3%) πλαισιώνονται από κάποιο σενάριο, ενώ οι 22 (36,7%) έχουν συμβολική μορφή. Όσον αφορά το είδος του αριθμού, το 63,3% (N=38) των δραστηριοτήτων υπολογιστικής εκτίμησης περιλαμβάνει φυσικούς αριθμούς, το 25% (N=15) περιλαμβάνει δεκαδικούς αριθμούς, ενώ οι συμμιγείς αριθμοί εμπεριέχονται στο 11,7% (N=7) των δραστηριοτήτων που αναλύθηκαν. Τέλος, στην πλειονότητα των δραστηριοτήτων υπολογιστικής εκτίμησης κυριαρχούν οι προσθέσεις με ποσοστό 38,3% (N=23), ενώ σε 15 (25%) δραστηριότητες ζητείται η επίλυση περισσότερων από μία πράξεων. Η πράξη του πολλαπλασιασμού περιλαμβάνεται σε 9 (15%) δραστηριότητες, ενώ η πράξη της διαίρεσης εντοπίζεται σε 7 (11,7%) δραστηριότητες. Έχει ενδιαφέρον, ότι μόλις 6 (10%) δραστηριότητες υπολογιστικής εκτίμησης περιλαμβάνουν την πράξη της αφαίρεσης.

**Πίνακας 3.8. Συχνότητα εμφάνισης των δραστηριοτήτων υπολογιστικής εκτίμησης**

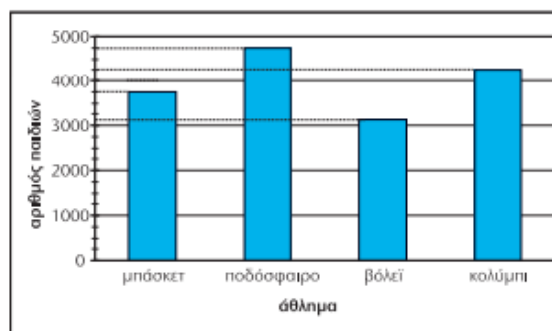
Επιμέρους Χαρακτηριστικά	Υπολογιστική Εκτίμηση	N	%
Χαρακτηριστικά πλαισίου	Συμβολικό Πλαίσιο	22	36,7
	Λεκτικό Πλαίσιο	38	63,3
Είδος αριθμού	Φυσικοί Αριθμοί	38	63,3
	Δεκαδικοί Αριθμοί	15	25
	Συμμιγείς Αριθμοί	7	11,7
Είδος πράξεων	Πρόσθεση	23	38,3
	Αφαίρεση	6	10
	Πολλαπλασιασμός	9	15
	Διαίρεση	7	11,7
	Περισσότερες από μία πράξεις	15	25
<b>Σύνολο</b>		<b>60</b>	<b>100</b>

Η δραστηριότητα που παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.1 αποτελεί ενδεικτικό παράδειγμα μιας δραστηριότητας υπολογιστικής εκτίμησης, πλαισιωμένης από κάποιο σενάριο (διεξαγωγή έρευνας), η οποία περιλαμβάνει τετραψήφιους φυσικούς αριθμούς. Το ερώτημα α μπορεί να επιλυθεί με την πράξη της πρόσθεσης, ενώ το

- 4) Σε μια μεγάλη σχολική περιφέρεια της Ελλάδας έγινε έρευνα με θέμα: «Τα πιο δημοφιλή αθλήματα με τα οποία ασχολούνται τα παιδιά».

Με τη βοήθεια του ραβδογράμματος συμπληρώνω τον πίνακα:

Άθλημα	Αριθμός παιδιών
.....	3.750
ποδόσφαιρο	.....
.....	3.125
κολύμπι	.....



- α) Πόσα παιδιά ασχολούνται με τα δύο πιο δημοφιλή αθλήματα; Εκτιμώ: περίπου ..... παιδιά. Υπολογίζω με ακρίβεια:


- β) Πόσα περισσότερα παιδιά παίζουν ποδόσφαιρο σε σχέση με τα παιδιά που παίζουν βόλεϊ; Εκτιμώ: περίπου ..... παιδιά. Υπολογίζω με ακρίβεια:


**Εικόνα 3.3. Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας υπολογιστικής εκτίμησης με φυσικούς αριθμούς (Βιβλίο Μαθητή, 1η Επανάληψη, σελ. 23)**



ερώτημα β μπορεί να επιλυθεί με περισσότερες από μία πράξεις (πρόσθεση ή αφαίρεση).

Στις Εικόνες 3.2 και 3.3 που ακολουθούν, παρουσιάζονται παραδείγματα δραστηριοτήτων υπολογιστικής εκτίμησης με δεκαδικούς αριθμούς (βλ. Εικόνα 3.2) και συμμιγείς αριθμούς (βλ. Εικόνα 3.3). Και οι δυο δραστηριότητες εντάσσονται σε ένα σενάριο καθημερινής ζωής (αγορές) και περιλαμβάνουν πράξεις πρόσθεσης.

6)  Η Ηρώ και ο αδερφός της έχουν 60 €. Ποια απ' τα παρακάτω παιχνίδια μπορούν ν' αγοράσουν;



• Αρχικά εκτιμούμε: .....

**Εικόνα 3.4.** Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας υπολογιστικής εκτίμησης με δεκαδικούς αριθμούς (Τετράδιο Εργασιών, Β' Τεύχος, Κεφ. 19, σελ. 15)

6) Ο Νικήτας μπορεί να κουβαλήσει ως το σπίτι του, το πολύ, 8 κιλά. Τι μπορεί να βάλει στην κάθε σακούλα;




περίπου 8 κιλά

**Εικόνα 3.5.** Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας υπολογιστικής εκτίμησης με συμμιγείς αριθμούς (Τετράδιο Εργασιών, Β' Τεύχος, Κεφ. 18, σελ. 13)

Στις Εικόνες 3.4 και 3.5 παρουσιάζονται παραδείγματα δραστηριοτήτων υπολογιστικής εκτίμησης με πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, αντίστοιχα. Και οι δυο δραστηριότητες έχουν αριθμητική μορφή και περιλαμβάνουν φυσικούς αριθμούς.

2)  Κάποια από τα παρακάτω αποτελέσματα δεν είναι λογικά. Με μια πρόχειρη εκτίμηση τ' ανακαλύπτουμε και εξηγούμε:

- $52 \times 6 = 3.012$  .....
- $15 \times 12 = 180$  .....
- $899 \times 5 = 4.491$  .....

**Εικόνα 3.6.** Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας υπολογιστικής εκτίμησης με πράξεις πολλαπλασιασμού (Τετράδιο Εργασιών, Α΄ Τεύχος, Κεφ. 10, σελ. 26)

1) Εκτιμώ ποια από τα παρακάτω αποτελέσματα είναι λανθασμένα και σημειώνω με ✓. Εντοπίζω πού έχει γίνει το λάθος και εξηγώ:

<input type="checkbox"/> $\begin{array}{r l} 1.008 & 2 \\ -10 & 54 \\ \hline 008 & \\ -8 & \\ \hline 0 & \end{array}$	<input type="checkbox"/> $\begin{array}{r l} 2.000 & 5 \\ -20 & 400 \\ \hline 000 & \end{array}$	<input type="checkbox"/> $\begin{array}{r l} 265 & 5 \\ -20 & 413 \\ \hline 6 & \\ -5 & \\ \hline 15 & \\ -15 & \\ \hline 0 & \end{array}$
---	--	--

**Εικόνα 3.7.** Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας υπολογιστικής εκτίμησης με πράξεις διαίρεσης (Τετράδιο Εργασιών, Α΄ Τεύχος, Κεφ. 12, σελ. 30)

### 3.2.2 Εκτίμηση Πλήθους

Όσον αφορά τις δραστηριότητες εκτίμησης πλήθους, τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι και οι 8 (100%) δραστηριότητες πλαισιώνονται από κάποια ιστορία, ενώ η κατανομή τους όσον αφορά το είδος των αριθμών που περιλαμβάνουν

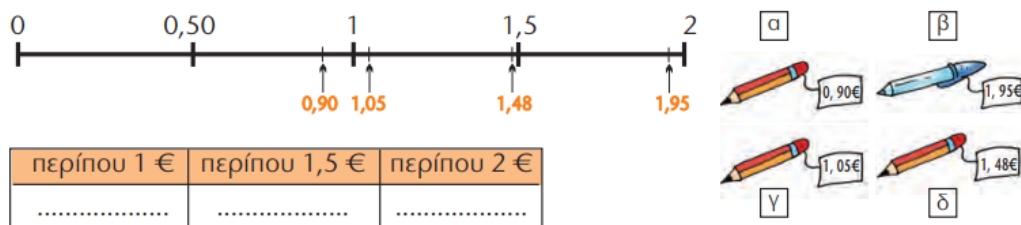
είναι σχεδόν ισομερές. Συγκεκριμένα, 3 (37,5%) δραστηριότητες περιλαμβάνουν φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς αντίστοιχα, ενώ 2 (25%) δραστηριότητες εκτίμησης πλήθους περιλαμβάνουν συμμιγείς αριθμούς (βλ. Πίνακας 3.5).

*Πίνακας 3.9. Συχνότητα εμφάνισης των δραστηριοτήτων εκτίμησης πλήθους*

Επιμέρους Χαρακτηριστικά	Εκτίμηση Πλήθους	N	%
Χαρακτηριστικά πλαίσιο	Συμβολικό Πλαίσιο	-	-
	Λεκτικό Πλαίσιο	8	100
Είδος αριθμού	Φυσικοί Αριθμοί	3	37,5
	Δεκαδικοί Αριθμοί	3	37,5
	Συμμιγείς Αριθμοί	2	25
<b>Σύνολο</b>		<b>8</b>	<b>100</b>

Η δραστηριότητα εκτίμησης πλήθους στην Εικόνα 3.6 περιλαμβάνει δεκαδικούς αριθμούς και πλαισιώνεται από ένα σενάριο της καθημερινής ζωής που σχετίζεται με τα χρήματα και τις τιμές των προϊόντων.

**8)** Πόσο περίπου κοστίζει κάθε συτλό; Παρατηρώ την αριθμογραμμή και σημειώνω κατάλληλα τα γράμματα στον πίνακα.



*Εικόνα 3.8. Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης πλήθους με δεκαδικούς αριθμούς (Βιβλίο Μαθητή, Τετράδιο Εργασιών, Β' Τεύχος, Κεφ. 15, σελ. 7)*

Στην Εικόνα 3.7 παρουσιάζεται μια δραστηριότητα εκτίμησης πλήθους με εξαψήφιους φυσικούς αριθμούς. Το σενάριο με το οποίο πλαισιώνεται η δραστηριότητα αφορά οικονομικές συναλλαγές στα πλαίσια δωρεών ανθρωπιστικής βοήθειας.

- Το 2003 η Ελλάδα, ως μέλος της Ε.Ε., ενίσχυσε οικονομικά κάποια κράτη που είχαν πληγεί από φυσικές καταστροφές ή πολέμους.

Κράτος	Οικονομική Βοήθεια
Μογγολία	188.900
Ιράκ	4.000.000
Κίνα	189.190
Νότια Αφρική	200.500
Τουρκία	489.000
Γεωργία	250.000

- Ποια κράτη έλαβαν περισσότερα των 100.000 € και λιγότερα των 250.000 €;  
.....  
.....
- Για 3 από τα κράτη αυτά η Ελλάδα διαθέσε συνολικά περίπου 950.000 €. Ποια μπορεί να είναι αυτά τα κράτη;  
.....


Χρήματα (σε €) που παρείχε η Ελλάδα προς άλλες χώρες κατά το έτος 2003.



Η Τουρκία έλαβε περίπου 400.000 €.



Η Τουρκία έλαβε περίπου 500.000 €.

-  Ποιο παιδί εκτιμά με μεγαλύτερη ακρίβεια; Εξηγούμε: .....

**Εικόνα 3.9.** Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης πλήθους με φυσικούς αριθμούς (Βιβλίο Μαθητή, Κεφ. 49, σελ. 122)

Τέλος, στην Εικόνα 3.8 παρουσιάζεται μια δραστηριότητα εκτίμησης πλήθους με συμμιγείς αριθμούς. Το σενάριο με το οποίο πλαισιώνεται η δραστηριότητα είναι σχετικό με τον αθλητισμό και αφορά τη μονάδα μέτρησης των κιλών.

1) Στο αγώνισμα της άρσης βαρών συμμετείχαν αθλητές από διάφορες χώρες. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις πέντε καλύτερες επιδόσεις:

ΧΩΡΑ	Βάρος αθλητή	Σύνολο κιλών που σήκωσε
Βουλγαρία	88 κ. 98 γραμμ.	395
Γερμανία	88 κ. 88 γραμμ.	395
Ελλάδα	89 κ. 540 γραμμ.	402,5
Ιράν	87 κ. 905 γραμμ.	395
Περου	89 κ. 230 γραμμ.	387,5

• Οι αθλητές ποιων χωρών ζυγίζουν:

περίπου 87 κιλά	περίπου 88 κιλά
περίπου 89 κιλά	περίπου 90 κιλά

**Εικόνα 3.10.** Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης πλήθους με συμμεγείς αριθμούς (Βιβλίο Μαθητή, 3η Επανάληψη, σελ. 52)

### 3.2.3 Εκτίμηση Μέτρησης

Σύμφωνα με την ανάλυση των δραστηριοτήτων εκτίμησης μέτρησης, η πλειονότητα αυτών διατυπώνεται με συμβολική μορφή και περιλαμβάνει κυρίως φυσικούς αριθμούς. Όσον αφορά το μέγεθος μέτρησης, οι περισσότερες δραστηριότητες αναφέρονται στην εκτίμηση μέτρησης μήκους και, ως επί το πλείστον, δεν υπάρχει καμία αναφορά στο είδος της μονάδας μέτρησης (τυποποιημένες ή μη) που καλείται να χρησιμοποιήσει ο μαθητής κατά την εκτίμησή του (βλ. Πίνακας 3.6).

Συγκεκριμένα, από τις 20 δραστηριότητες εκτίμησης μέτρησης το 75% (N=15) έχει συμβολικό πλαίσιο, ενώ το υπόλοιπο 25% (N=5) έχει λεκτικό πλαίσιο.

Η Εικόνα 3.9 αποτελεί ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης μήκους, η οποία έχει καθαρά συμβολική μορφή.

2) Ποια από τις 2 γραμμές έχει μεγαλύτερο μήκος;



- Εκτιμώ: .....
- Ελέγχω μετρώντας με τον χάρακα:  
.....

**Εικόνα 3.11.** Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης μέτρησης μήκους με συμβολικό πλαίσιο (Βιβλίο Μαθητή, 3η Επανάληψη, σελ.52)

**Πίνακας 3.10. Συχνότητα εμφάνισης των δραστηριοτήτων εκτίμησης μέτρησης**

<b>Επιμέρους Χαρακτηριστικά</b>	<b>Εκτίμηση Μέτρησης</b>	<b>N</b>	<b>%</b>
<b>Χαρακτηριστικά πλαισίου</b>	Συμβολικό Πλαίσιο	15	75
	Λεκτικό Πλαίσιο	5	25
<b>Είδος αριθμού</b>	Φυσικοί Αριθμοί	14	70
	Δεκαδικοί Αριθμοί	6	30
	Συμμιγείς Αριθμοί	-	-
<b>Μέγεθος μέτρησης</b>	Μήκος	11	55
	Εμβαδόν	4	20
	Όγκος/ Χωρητικότητα	2	10
	Βάρος	3	15
	Χρόνος	-	-
<b>Μονάδα μέτρησης</b>	Τυποποιημένες μονάδες	5	25
	Μη τυποποιημένες μονάδες	1	5
	Καμία αναφορά	13	65
	Τυποποιημένες και μη	1	5
<b>Σύνολο</b>		<b>20</b>	<b>100</b>

Όσον αφορά το είδος αριθμού που εμπεριέχουν οι δραστηριότητες εκτίμησης μέτρησης, 14 δραστηριότητες (70%) περιλαμβάνουν φυσικούς αριθμούς και 6 (30%) περιλαμβάνουν δεκαδικούς αριθμούς. Οι συμμιγείς αριθμοί δεν εμπεριέχονται σε καμία δραστηριότητα εκτίμησης μέτρησης.

Η δραστηριότητα που παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.10 αναφέρεται στην εκτίμηση μέτρησης εμβαδού, δεν πλαισιώνεται από κάποιο σενάριο, περιλαμβάνει φυσικούς αριθμούς και προϋποθέτει τη χρήση μη τυποποιημένων μονάδων μέτρησης (εικόνες).

- 2) Στην Καρτέλα 9 βρίσκω τις εικόνες με τα λουλούδια. Εκτιμώ πόσες εικόνες χρειάζομαι για να καλύψω την επιφάνεια του πίνακα. Τις τοποθετώ και ελέγχω την εκτίμησή μου.




Χρειάστηκα ..... εικόνες.

**Εικόνα 3.12.** Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης μέτρησης εμβαδού με φυσικούς αριθμούς και χρήση μη τυποποιημένων μονάδων μέτρησης (Βιβλίο Μαθητή, Κεφ. 30, σελ.77)

Όσον αφορά το μέγεθος μέτρησης, περισσότερες από τις μισές δραστηριότητες, συγκεκριμένα 11 δραστηριότητες (55%), αναφέρονται στην εκτίμηση μέτρησης μήκους, 4 (20%) στην εκτίμηση μέτρησης εμβαδού, 3 (15%) στην εκτίμηση μέτρησης βάρους, 2 (10%) στην εκτίμηση μέτρησης όγκου/χωρητικότητας, ενώ δεν υπάρχει καμία αναφορά για την εκτίμηση μέτρησης χρόνου.

Στην Εικόνα 3.11 παρουσιάζεται η μία από τις δύο δραστηριότητες εκτίμησης μέτρησης όγκου/χωρητικότητας. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα αφορά τη χωρητικότητα, πλαισιώνεται από μια εικονογραφημένη ιστορία και εμπεριέχει τυποποιημένες μονάδες μέτρησης (ml).

 Μπορούν δύο διαφορετικά ποτήρια να χωρούν την ίδια ποσότητα νερού;

- α)  Κάθε παιδί άδειασε όλο τον χυμό του κουτιού στο ποτήρι του.

• Ποιο ποτήρι:

- έχει πιο πολύ χυμό;

.....

- χωράει πιο πολύ χυμό;

.....



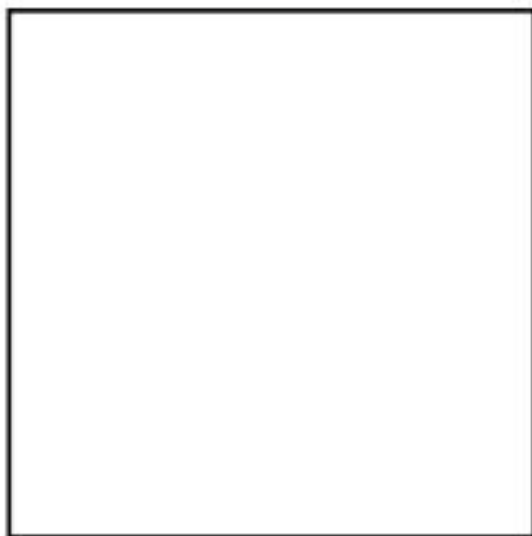
**Εικόνα 3.13.** Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης μέτρησης χωρητικότητας με χρήση τυποποιημένων μονάδων μέτρησης (Βιβλίο Μαθητή, Κεφ. 54, σελ.134)




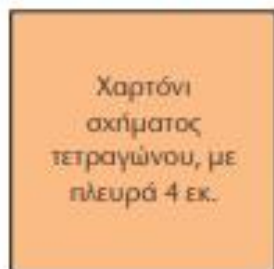
Τέλος, στο 65% (N=13) των δραστηριοτήτων εκτίμησης μέτρησης δεν ζητείται να χρησιμοποιηθεί κάποιο συγκεκριμένο είδος μονάδων μέτρησης κατά την εκτίμηση. Σε 5 (25%) δραστηριότητες αναφέρεται η χρήση τυποποιημένων μονάδων μέτρησης, σε μία (5%) ζητείται η χρήση μη τυποποιημένων μονάδων μέτρησης και σε άλλη μία (5%) αναφέρεται η χρήση τόσο των τυποποιημένων όσο και των μη τυποποιημένων μονάδων μέτρησης.

Στην Εικόνα 3.12 παρουσιάζεται η μοναδική δραστηριότητα εκτίμησης μέτρησης κατά την οποία ζητείται η χρήση τυποποιημένων και μη τυποποιημένων μονάδων μέτρησης. Η δραστηριότητα έχει συμβολικό πλαίσιο και αφορά την εκτίμηση μέτρησης εμβαδού.

α) Χρωματίζω με κίτρινο χρώμα την επιφάνεια του τετραγώνου και με πορτοκαλί την επιφάνεια του ορθογωνίου.



β)  Ποιο απ' τα δύο σχήματα έχει μεγαλύτερη επιφάνεια; Εκτιμούμε: ..... Χρησιμοποιούμε όσα από τα παρακάτω εργαλεία χρειαζόμαστε για να συγκρίνουμε τις δύο επιφάνειες.



**Εικόνα 3.14.** Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης μέτρησης εμβαδού με χρήση τυποποιημένων και μη τυποποιημένων μονάδων μέτρησης (Βιβλίο Μαθητή, Κεφ. 31, σελ. 78)



### 3.2.4 Εκτίμηση πάνω στην αριθμογραμμή

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν πως υπάρχει μόνο μία δραστηριότητα εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή (βλ. Πίνακας 3.7). Η συγκεκριμένη δραστηριότητα έχει συμβολική μορφή, περιλαμβάνει φυσικούς αριθμούς και αναφέρεται στην εύρεση της εκτιμώμενης θέσης ενός αριθμού πάνω στην αριθμογραμμή βάσει της τιμής του.

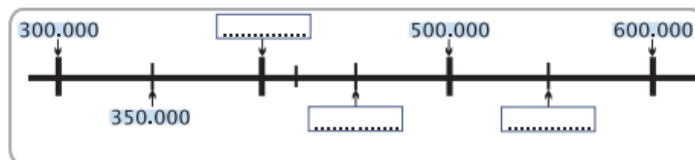
**Πίνακας 3.11. Συχνότητα εμφάνισης των δραστηριοτήτων εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή**

<b>Επιμέρους Χαρακτηριστικά</b>	<b>Εκτίμηση Πλήθους</b>	<b>N</b>	<b>%</b>
Χαρακτηριστικά πλαισίου	Συμβολικό Πλαίσιο	1	100
	Λεκτικό Πλαίσιο	-	-
Είδος αριθμού	Φυσικοί Αριθμοί	1	100
	Δεκαδικοί Αριθμοί	-	-
	Συμμιγείς Αριθμοί	-	-
Μορφή του έργου	Εύρεση της θέσης ενός αριθμού στην αριθμογραμμή	1	100
	Προσδιορισμός της τιμής ενός αριθμού βάσει της θέσης του στην αριθμογραμμή	-	-
<b>Σύνολο</b>		<b>1</b>	<b>100</b>

Στην Εικόνα 3.13 παρουσιάζεται η μοναδική δραστηριότητα εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή. Η δραστηριότητα εμφανίζεται στο Βιβλίο Μαθητή, στο Κεφάλαιο 48 που αφορά τη διαχείριση φυσικών αριθμών έως το 1.000.000. Σύμφωνα με το περιεχόμενό της, οι μαθητές καλούνται να διαχειριστούν εξαψήφιους φυσικούς

αριθμούς και να εκτιμήσουν τη θέση τους πάνω στην αριθμογραμμή βάσει της τιμής τους και των τιμών άλλων αριθμών που είναι τοποθετημένοι στην αριθμογραμμή.

- Συμπληρώνω στην αριθμογραμμή τους αριθμούς που λείπουν. Στη συνέχεια σημειώνω μ' ένα βελάκι τη θέση **περίπου** των αριθμών **342.700, 421.375** στην αριθμογραμμή.



- Συμπληρώνω:
- α) 421.375 → περίπου 420.000 ή .....
- β) 342.700 → περίπου ..... ή 300.000

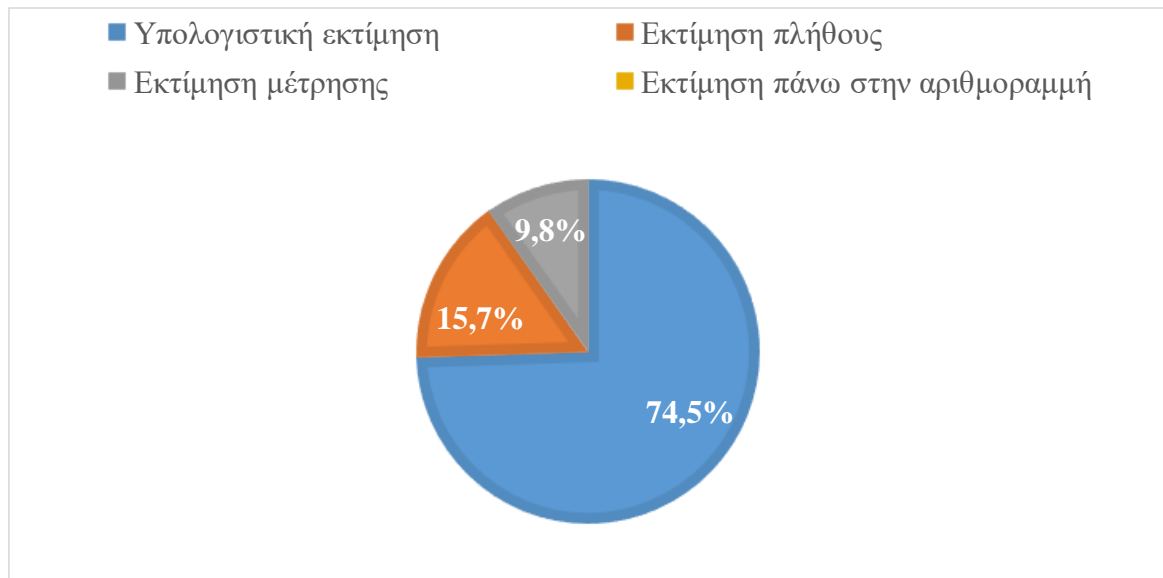
**Εικόνα 3.15.** Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή (Βιβλίο Μαθητή, Κεφ. 48, σελ. 121)

### 3.3 Σύνδεση των δραστηριοτήτων εκτίμησης με τις τρεις διαστάσεις σημαντικότητας

#### 3.3.1 Σύνδεση με την καθημερινότητα

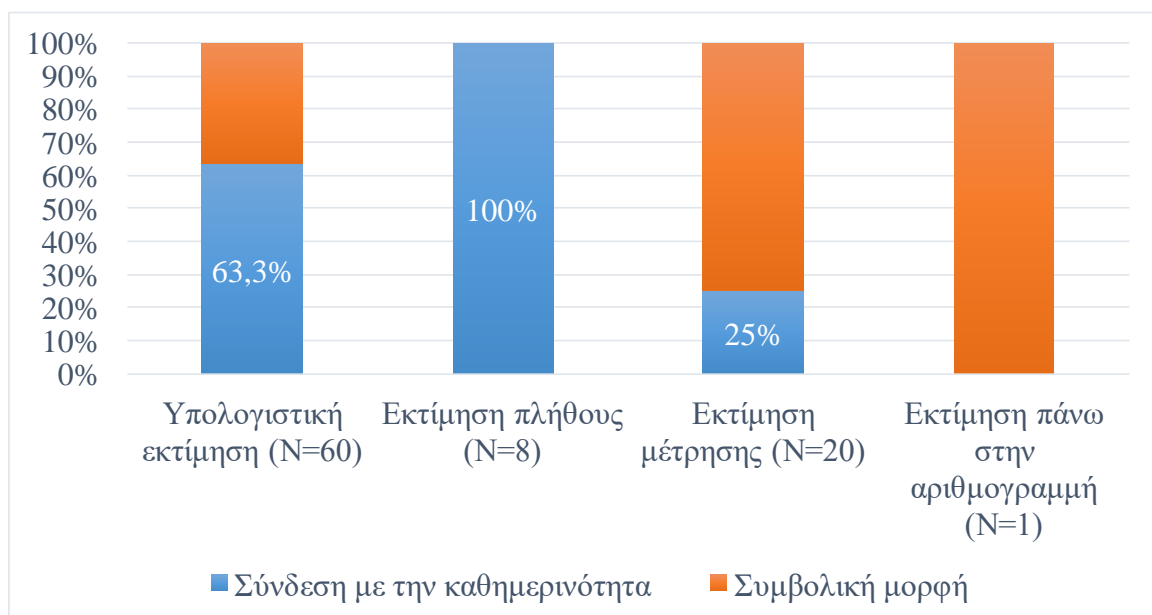
Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της ανάλυσης στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Δ' δημοτικού, περισσότερες από τις μισές δραστηριότητες εκτίμησης συνδέονται με την καθημερινότητα.

Συγκεκριμένα, από τις 89 δραστηριότητες εκτίμησης το 57,3% (N=51) πλαισιώνονται από κάποιο σενάριο σχετικό με την καθημερινή ζωή των μαθητών. Από τις 51 δραστηριότητες εκτίμησης που συνδέονται με την καθημερινότητα, οι περισσότερες, συγκεκριμένα, οι 38 (74,5%) αφορούν υπολογιστικές εκτιμήσεις, οι 8 (15,7 %) αφορούν εκτιμήσεις πλήθους, ενώ είναι αξιοσημείωτο πως μόλις 5 δραστηριότητες (9,8%) αφορούν εκτιμήσεις μέτρησης. Η μοναδική δραστηριότητα εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή έχει συμβολική μορφή και δεν πλαισιώνεται από κάποιο σενάριο καθημερινής ζωής (βλ. Σχήμα 3.7).



**Σχήμα 3.7. Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης που συνδέονται με την καθημερινότητα ως προς τον τύπο εκτίμησης**

Εξετάζοντας μεμονωμένα κάθε τύπο εκτίμησης, παρατηρείται ότι από τις 60 δραστηριότητες υπολογιστικής εκτίμησης, το 63,3% αυτών (N=38) συνδέονται με την καθημερινότητα. Αντίθετα, από τις 20 δραστηριότητες εκτίμησης μέτρησης, μόλις το 25% (N=5) πλαισιώνονται από σενάρια καθημερινής ζωής. Τέλος, και οι 8 (100%) δραστηριότητες εκτίμησης πλήθους συνδέονται με τον πραγματικό κόσμο, ενώ όπως προαναφέρθηκε η μοναδική δραστηριότητα εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή έχει συμβολικό πλαίσιο και δεν συνδέεται με την καθημερινή ζωή (βλ. Σχήμα 3.8).



**Σχήμα 3.8. Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης που συνδέονται με την καθημερινότητα ανά τύπο εκτίμησης**

Η Εικόνα 3.14 αποτελεί ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας υπολογιστικής εκτίμησης, η οποία πλαισιώνεται από ένα σενάριο καθημερινής ζωής. Το σενάριο αφορά ένα θέμα οικονομικής φύσεως (συγκέντρωση χρημάτων), ενώ παράλληλα ενισχύει την κοινωνική ευαισθησία των μαθητών, καθώς ο έρανος που περιγράφεται στη δραστηριότητα πραγματοποιείται για φιλανθρωπικούς σκοπούς. Η δραστηριότητα εντάσσεται στα άμεσα ενδιαφέροντα των μαθητών και συνδέεται στενά με τον πραγματικό τους κόσμο, καθώς παρόμοιες συγκεντρώσεις χρημάτων για κοινωφελείς λόγους πραγματοποιούνται συχνά στις σχολικές τάξεις. Επίσης, κρίνεται σημαντικό να διευκρινιστεί πως η χρήση της αριθμογραμμής στη συγκεκριμένη δραστηριότητα προτείνεται ως μέσο επαλήθευσης της ακριβούς απάντησης και όχι ως μέσο εκτίμησης. Για τον λόγο αυτόν, η δραστηριότητα ταξινομείται στις υπολογιστικές εκτιμήσεις και όχι στις εκτιμήσεις πάνω στην αριθμογραμμή.

- 4) Δύο τάξεις ενός σχολείου αποφάσισαν να κάνουν έρανο για τα παιδικά χωριά S.O.S. Αξιοποιώ τις πληροφορίες του πίνακα και απαντώ:


Ημέρες	Ποσό
Πέμπτη	73,05 €
Παρασκευή	82 € 50 λεπτά
Σάββατο	101 € 35 λεπτά
Κυριακή	86 ευρώ

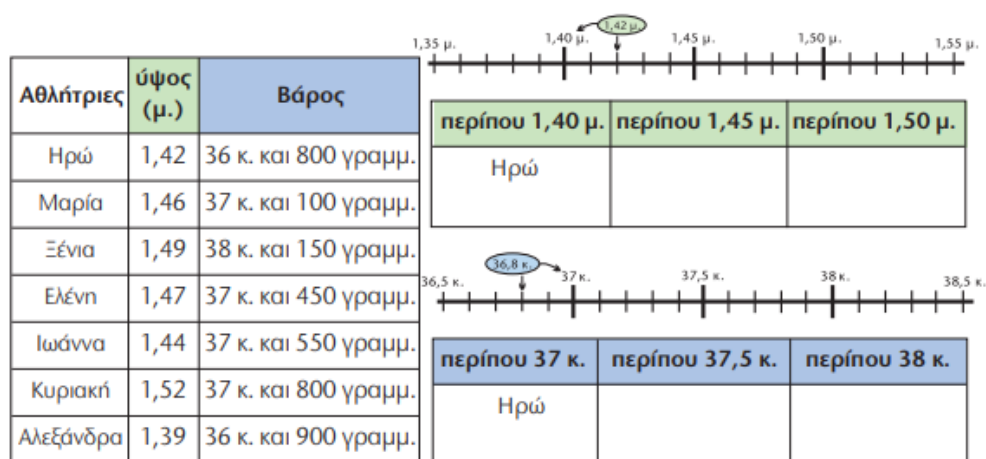
- α) Πόσα περισσότερα χρήματα συγκεντρώθηκαν το Σάββατο απ' ό,τι την Παρασκευή;  
Εκτιμώ: περίπου .....
- Υπολογίζω ακριβώς με τη βοήθεια της παρακάτω πρόχειρης αριθμογραμμής:

**Εικόνα 3.16.** Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας υπολογιστικής εκτίμησης συνδεδεμένης με την καθημερινή ζωή (Βιβλίο Μαθητή, 3η Επανάληψη, σελ. 53)

Στην Εικόνα 3.15 παρουσιάζεται μια δραστηριότητα εκτίμησης πλήθους, η οποία συνδέεται και πάλι με τη σχολική ζωή. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η δραστηριότητα αφορά τη μέτρηση ύψους και βάρους που πραγματοποιείται στα πλαίσια συμπλήρωσης ενός αθλητικού δελτίου και περιλαμβάνει δεκαδικούς (βλ.

ύψος) και συμμιγείς αριθμούς (βλ. βάρος). Η δραστηριότητα συνδέεται άμεσα με τον πραγματικό κόσμο των μαθητών, καθώς παρόμοιες μετρήσεις πραγματοποιούνται τόσο κατά τις επισκέψεις τους στον παιδίατρο όσο κατά τη συμπλήρωση του προσωπικού τους αθλητικού δελτίου για την παρακολούθηση του μαθήματος της γυμναστικής στην αρχή της σχολικής χρονιάς.

- 5)  Τα κορίτσια της ομάδας μπάσκετ του σχολείου μέτρησαν το ύψος τους και ζυγίστηκαν σε ηλεκτρονική ζυγαριά, για να συμπληρώσουν το ιατρικό τους δελτίο. Παρατηρούμε τα στοιχεία του πίνακα και, με τη βοήθεια των αριθμογραμμών, γράφουμε το όνομα του κάθε παιδιού στην κατηγορία που ταιριάζει.



**Εικόνα 3.17.** Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης πλήθους συνδεδεμένης με την καθημερινή ζωή (Τετράδιο Εργασιών, Β΄ Τεύχος, Κεφ. 25, σελ. 31)

Τέλος, παρουσιάζεται ενδεικτικά ένα παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης μέτρησης όγκου και βάρους (βλ. Εικόνα 3.16). Η συγκεκριμένη δραστηριότητα πλαισιώνεται από μια εικονογραφημένη ιστορία της καθημερινής ζωής των μαθητών, η οποία αφορά τη μέτρηση του νερού (όγκος) και της ζάχαρης (βάρος), δυο υλικών άμεσα συνδεδεμένων με την καθημερινότητα των μαθητών. Τέτοιου είδους μετρήσεις χρησιμοποιούνται συχνά στην καθημερινή ζωή των παιδιών, όπως, για παράδειγμα, στο πλαίσιο της μαγειρικής, της ζαχαροπλαστικής ή της προετοιμασίας του καθημερινού φαγητού.

6)



Γέμισα το δοχείο μου με νερό.



Γέμισα το δικό μου με ζάχαρη.



- Επιλέγουμε με ✓ αυτό που πιστεύουμε πως είναι σωστό.
- α) Τα δύο δοχεία έχουν την ίδια χωρητικότητα.
- β) Το δοχείο με τη ζάχαρη και το δοχείο με το νερό ζυγίζουν το ίδιο.
- Ελέγχουμε, κάνοντας το ίδιο πείραμα στην τάξη μας.

37

**Εικόνα 3.18.** Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης μέτρησης συνδεδεμένης με την καθημερινή ζωή (Τετράδιο Εργασιών, Τεύχος Δ', Κεφ. 54, σελ. 37)

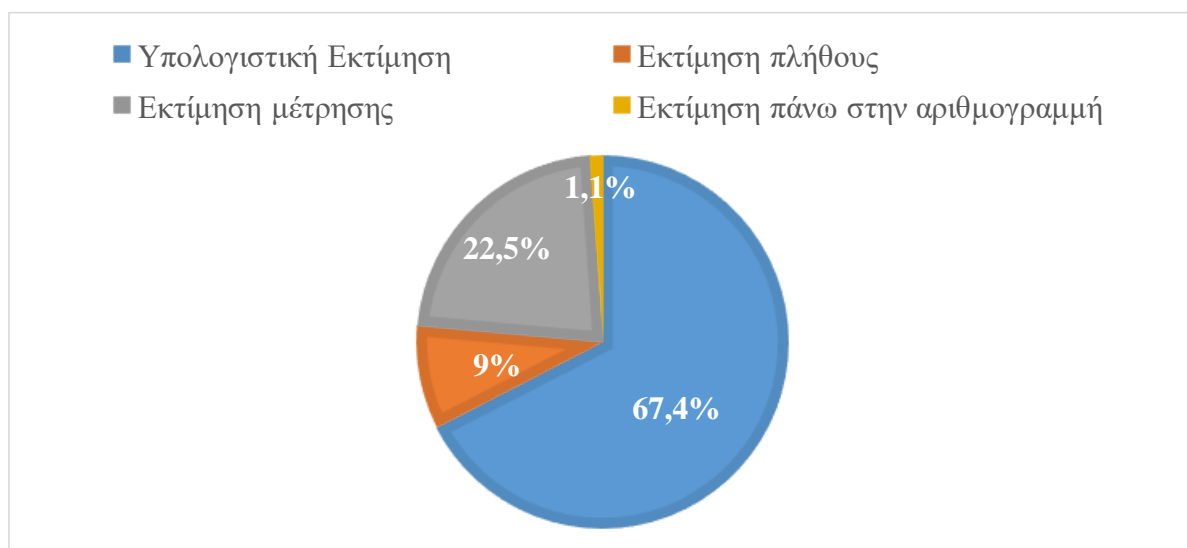
### 3.3.2 Επινόηση στρατηγικών

Σύμφωνα με την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων που πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, και οι 89 (100%) δραστηριότητες εκτίμησης φαίνεται να ωθούν έμμεσα τους μαθητές στην επινόηση νέων στρατηγικών για τις εκτιμήσεις τους, παρόλο που δεν υποδεικνύουν ξεκάθαρα τη χρήση κάποιας συγκεκριμένης στρατηγικής.

Επομένως, σύμφωνα με τα δεδομένα του Πίνακα 3.1 που παρουσιάστηκε σε προηγούμενη ενότητα, το μεγαλύτερο ποσοστό των δραστηριοτήτων εκτίμησης που συνδέεται με την επινόηση στρατηγικών, δηλαδή το 67,4% (N=60), αφορά υπολογιστικές εκτιμήσεις, το 22,5% (N=20) αφορά εκτιμήσεις μέτρησης, το 9% (N=8) είναι δραστηριότητες πλήθους, ενώ μόλις μία δραστηριότητα (1,1%) αποτελεί εκτίμηση πάνω στην αριθμογραμμή (βλ. Σχήμα 3.9).

Η Εικόνα 3.17 αποτελεί ένα ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας υπολογιστικής εκτίμησης, στην οποία οι μαθητές καλούνται να εκτιμήσουν το αποτέλεσμα και να επιλέξουν ανάμεσα σε τρεις προτεινόμενες απαντήσεις. Οι απαντήσεις που προτείνονται αποτελούνται από στρογγυλοποιημένους φυσικούς αριθμούς (600, 6.000, 60.000). Η στρογγυλοποιημένη μορφή των προτεινόμενων απαντήσεων αποσκοπεί, ενδεχομένως, στην καθοδήγηση των μαθητών, ώστε να

ανασυνθέσουν τις τιμές των δεδομένων του προβλήματος, στρογγυλοποιώντας τους αριθμούς στην πλησιέστερη δεκάδα.




**Σχήμα 3.9.** Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης που συνδέονται έμμεσα με την επινοήση στρατηγικών ως προς τον τύπο εκτίμησης

6) Σε ένα πολυκατάστημα υπάρχουν 29 προθήκες με ψηφιακούς δίσκους μουσικής. Κάθε προθήκη έχει 9 ράφια και κάθε ράφι χωράει 19 ψηφιακούς δίσκους. Πόσοι ψηφιακοί δίσκοι υπάρχουν στο πολυκατάστημα;

• Εκτιμώ και επιλέγω με ✓ .

• Το αποτέλεσμα είναι πιο κοντά στο:

• Ελέγχω με 

600

6.000






60.000

**Εικόνα 3.20.** Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας υπολογιστικής εκτίμησης συνδεδεμένης με την επινοήση στρατηγικών (Τετράδιο Εργασιών, Τεύχος Α', Κεφ. 10, σελ. 27)

Τέλος στην Εικόνα 3.18 παρουσιάζεται μια δραστηριότητα εκτίμησης πλήθους συνδεδεμένης με την επινοήση στρατηγικών. Πιο αναλυτικά, οι μαθητές καλούνται να εκτιμήσουν την αξία ορισμένων εξαψήφιων αριθμών, εφόσον πρώτα συμπληρώσουν τον πίνακα που βρίσκεται στην αρχή της δραστηριότητας. Στο υποερώτημα α, δίνεται αρχικά ένα παράδειγμα εκτίμησης πλήθους (περίπου 125.000 γεωμετρικά στερεά) σύμφωνα με το οποίο ο αρχικός αριθμός 125.100 στρογγυλοποιείται στην πλησιέστερη

χιλιάδα. Συνεπώς, μέσω του παραδείγματος, οι μαθητές ενθαρρύνονται στη στρογγυλοποίηση και των υπόλοιπων αριθμών του πίνακα.

- 1) Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται ποια είδη και πόσα από το καθένα κατασκευάστηκαν από ένα εργοστάσιο παραγωγής σχολικού εξοπλισμού την τελευταία τριετία. Συμπληρώστε, ό,τι λείπει:

Είδος	Παραγωγή διετίας		ΕΧ	ΔΧ	Χ	Ε	Δ	Μ
	Ολογράφως	Με αριθμούς	(100.000)	(10.000)	(1.000)	(100)	(10)	(1)
	Εκατόν είκοσι πέντε χιλιάδες εκατό							
		200.001						
		103.402						
			1	9	0	0	8	3
	ΕΝΕΝΉΝΤΑ ΕΝΝΕΑ χιλιάδες εξακόσια τριάντα							

- Αξιοποιώ τα στοιχεία του πίνακα και απαντώ:

α) Την τελευταία τριετία το εργοστάσιο κατασκεύασε **περίπου** 125.000 γεωμετρικά στερεά, ..... χάρτες, ..... γεωμετρικά όργανα, ..... υδρόγειες σφαίρες, ..... δοκιμαστικούς σωλήνες.

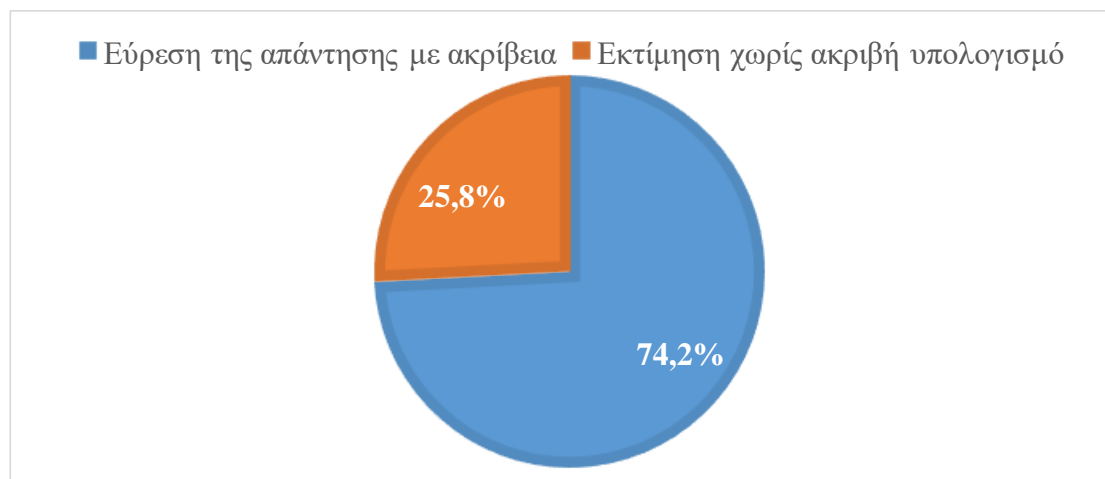
**Εικόνα 3.21.** Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης πλήθους συνδεδεμένης με την επινόηση στρατηγικών (Τετράδιο Εργασιών, Τεύχος Γ', 6η Επανάληψη, σελ. 36)

### 3.3.3 Επαλήθευση της απάντησης

Όσον αφορά το τελευταίο κριτήριο της παρούσας έρευνας, τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι στη συντριπτική πλειοψηφία των δραστηριοτήτων στις οποίες αρχικά ζητούνταν εκτίμηση, στη συνέχεια απαιτούνταν να δοθεί απάντηση με ακρίβεια. Έτσι, η πλειονότητα των δραστηριοτήτων εκτίμησης φαίνεται να λειτουργεί ως μέσο επαλήθευσης της ακριβούς απάντησης. Μάλιστα, στις περισσότερες από αυτές τις δραστηριότητες, υπάρχουν λέξεις (π.χ. «ελέγχο την εκτίμησή μου») στην εκφώνησή τους που παραπέμπουν σε έλεγχο της εκτίμησης με ακριβή υπολογισμό.



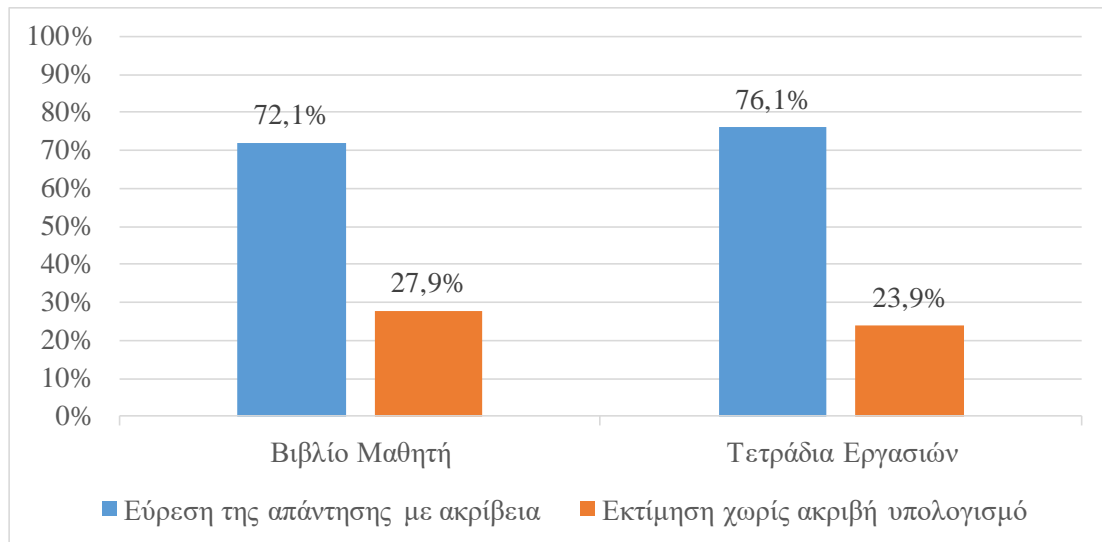
Πιο αναλυτικά, από τις 89 δραστηριότητες εκτίμησης, το 74,2% (N=66), ακολουθείται από ερώτηση ακριβούς απάντησης, ενώ το 25,8% (N=23) των δραστηριοτήτων περιλαμβάνει μόνο εκτίμηση χωρίς ακριβή απάντηση (βλ. Σχήμα 3.10).



**Σχήμα 3.10. Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης ως προς την επαλήθευση της απάντησης**

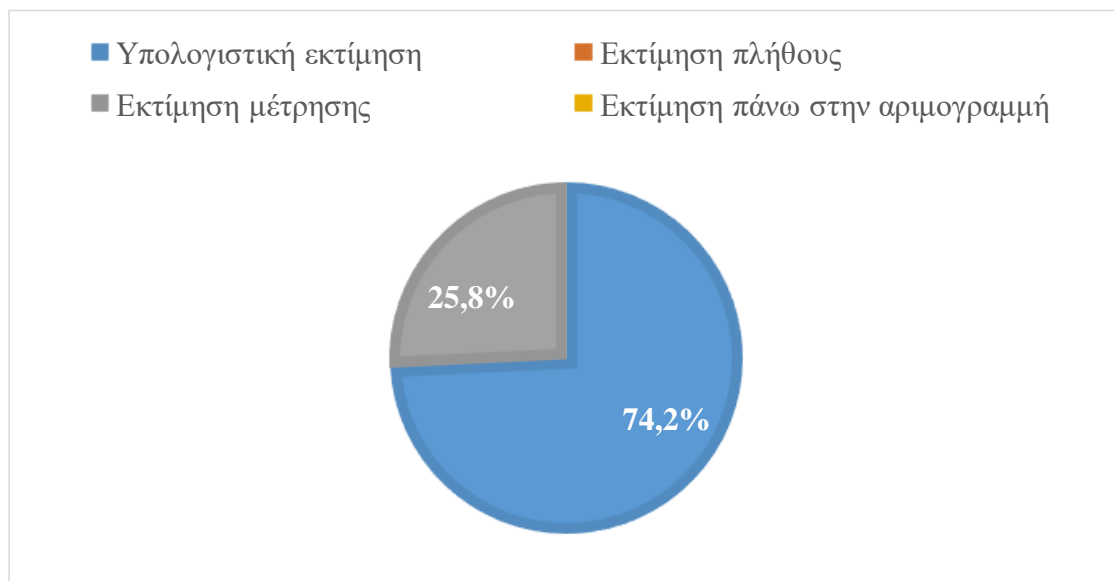
Στα σχολικά εγχειρίδια, δηλαδή στο Βιβλίο Μαθητή και στα Τετράδια Εργασιών, οι δραστηριότητες εκτίμησης που συνοδεύονται από απάντηση με ακρίβεια είναι κατανεμημένες με παρόμοιο τρόπο. Στο Βιβλίο Μαθητή, από τις 43 δραστηριότητες εκτίμησης, στις 31 δραστηριότητες (72,1%) οι εκτιμήσεις λειτουργούν ως μέσο επαλήθευσης της ακριβούς απάντησης, ενώ οι 12 δραστηριότητες (27,9%) περιλαμβάνουν μόνο εκτίμηση, χωρίς τον έλεγχο με εύρεση της απάντησης με ακρίβεια. Παρόμοια, από τις 46 δραστηριότητες εκτίμησης των Τετραδίων Εργασιών, οι 35 (76,1%) ζητούν και απάντηση με ακρίβεια, ενώ οι 11 (23,9%) ζητούν μόνο την εκτίμηση του αποτελέσματος (βλ. Σχήμα 3.11).

Ως προς τον τύπο εκτίμησης, αξίζει να σημειωθεί πως στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Δ' τάξης οι δραστηριότητες στις οποίες οι εκτιμήσεις λειτουργούν ως μέσο επαλήθευσης της ακριβούς απάντησης αφορούν μόνο υπολογιστικές εκτιμήσεις και εκτιμήσεις μέτρησης. Όλες οι δραστηριότητες εκτίμησης πλήθους καθώς και η μοναδική δραστηριότητα εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή απαιτούν μόνο εκτίμηση της απάντησης, χωρίς τον προσδιορισμό της με ακρίβεια.



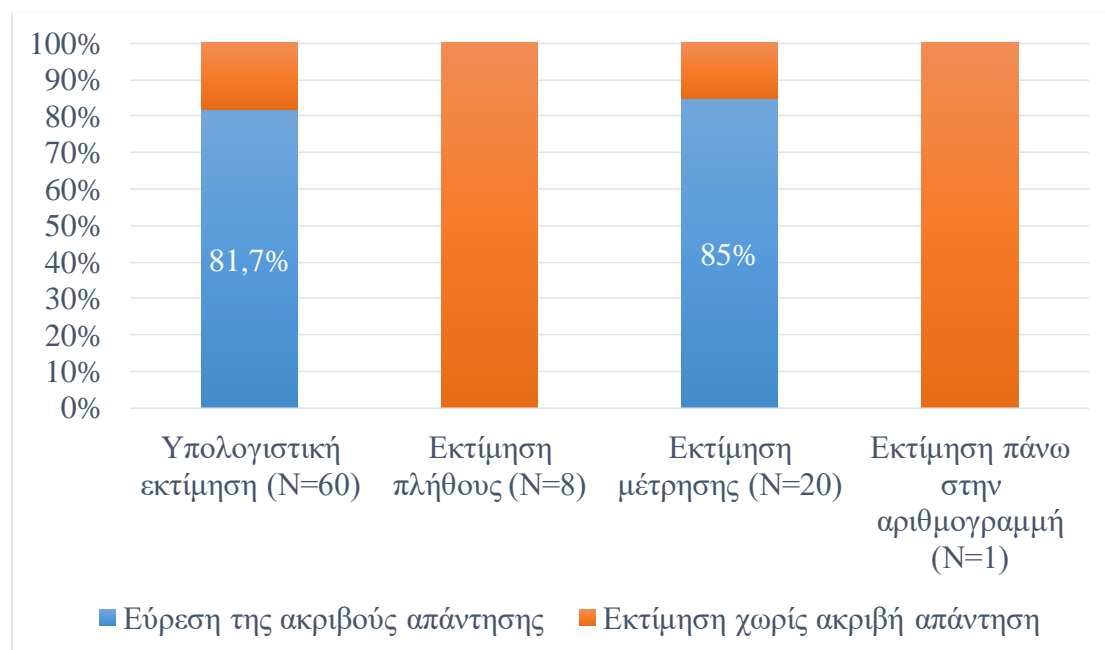
**Σχήμα 3.11.** Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης ως προς τη σύνδεση με την επαλήθευση της απάντησης και το είδος του σχολικού εγχειριδίου

Έτσι, από τις 66 δραστηριότητες εκτίμησης που ακολουθούνται από απάντηση με ακρίβεια, οι περισσότερες, συγκεκριμένα το 74,2% (N=49) αφορούν υπολογιστικές εκτιμήσεις, ενώ το υπόλοιπο ποσοστό, δηλαδή το 25,8% (N=17), αφορά εκτιμήσεις μέτρησης (βλ. Σχήμα 3.12).



**Σχήμα 3.12.** Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης που λειτουργούν ως μέσο επαλήθευσης της ακριβούς απάντησης ως προς τον τύπο εκτίμησης

Εξετάζοντας μεμονωμένα τον τύπο εκτίμησης, παρατηρείται ότι από τις 60 δραστηριότητες υπολογιστικής εκτίμησης, η συντριπτική πλειοψηφία, δηλαδή το 81,7% (N=49), απαιτούν την εύρεση της απάντησης με ακρίβεια. Παρόμοια, μεταξύ των 20 δραστηριοτήτων εκτίμησης μέτρησης, οι περισσότερες, δηλαδή το 85% (N=17) περιλαμβάνουν ακριβή μέτρηση (βλ. Σχήμα 3.13).



**Σχήμα 3.13. Κατανομή συχνότητας των δραστηριοτήτων εκτίμησης που λειτουργούν ως μέσο επαλήθευσης της ακριβούς απάντησης ανά τύπο εκτίμησης**

Η Εικόνα 3.19 αποτελεί ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας υπολογιστικής εκτίμησης με δεκαδικούς αριθμούς. Η δραστηριότητα πλαισιώνεται από ένα σενάριο καθημερινής ζωής και αναφέρεται σε οικονομικές συναλλαγές (αγορές σούπερ μάρκετ). Αρχικά ζητείται η εκτίμηση του αποτελέσματος μέσω πρόσθεσης και στη συνέχεια ο υπολογισμός της πράξης με ακρίβεια (βλ. «Υπολογίζω με ακρίβεια»).

Στην Εικόνα 3.20 περιγράφεται μια δραστηριότητα εκτίμησης μέτρησης μήκους. Η δραστηριότητα δεν πλαισιώνεται από κάποιο σενάριο, αλλά έχει καθαρά συμβολική μορφή. Εκτός από την αρχική εκτίμηση του μήκους, ζητείται μετέπειτα και η επαλήθευση της απάντησης μέσω της ακριβούς μέτρησης του μήκους των γραμμών (βλ. «Στη συνέχεια μετρώ και επαληθεύω»).

2) Η μητέρα του Σαλ εργάζεται σε παιδικό σταθμό. Σήμερα θα φτιάξει κρέμα και ρυζόγαλο για τα παιδάκια. Χρειάζεται τριάμισι λίτρα γάλα.

- Πόσα χρήματα θα ξοδέψει αν αγοράσει ;



α) • Εκτιμώ: .....

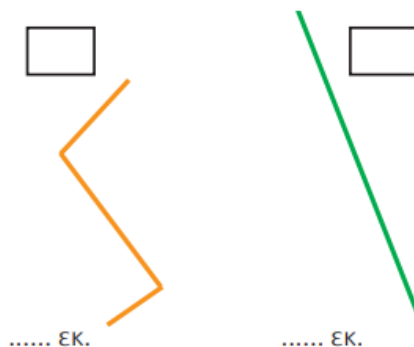
Υπολογίζω ακριβώς:

β) • Εκτιμώ: .....

Υπολογίζω ακριβώς:

Εικόνα 3.22. Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας υπολογιστικής εκτίμησης που λειτουργεί ως μέσο επαλήθευσης της απάντησης (Βιβλίο Μαθητή, 9η Επανάληψη, σελ. 141)

3) Εκτιμώ ποια γραμμή έχει το μεγαλύτερο μήκος. Σημειώνω με ✓. Στη συνέχεια μετρώ και επαληθεύω:



Εικόνα 3.23. Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης μήκους που λειτουργεί ως μέσο επαλήθευσης της απάντησης (Τετράδιο Εργασιών, Β' Τεύχος, Κεφ. 17, σελ. 10)

Τέλος, στην Εικόνα 3.21 παρουσιάζεται μια δραστηριότητα εκτίμησης βάρους. Σύμφωνα με την εκφώνηση της δραστηριότητας, αρχικά ζητείται από τους μαθητές να εκτιμήσουν το βάρος ορισμένων αντικειμένων που υπάρχουν καθημερινά στον χώρο της τάξης και στη συνέχεια να τα ζυγίσουν, ώστε να ελέγξουν την εκτίμησή τους βρίσκοντας το ακριβές βάρος των πραγμάτων (βλ. «Ελέγχουμε τις εκτιμήσεις μας με ζύγιση»).

- 1)** Εκτιμούμε το βάρος κάποιων αντικειμένων στην τάξη. Ελέγχουμε τις εκτιμήσεις μας με ζύγιση:

	Εκτιμούμε	Ζυγίζουμε
Το βιβλίο Μαθηματικών	.....	.....
Μια τσάντα με βιβλία	.....	.....
Η ίδια τσάντα χωρίς τα βιβλία	.....	.....
1 κουτί κιμωλίες	.....	.....

**Εικόνα 3.24.** Ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας εκτίμησης βάρους που λειτουργεί ως μέσο επαλήθευσης της απάντησης (Βιβλίο Μαθητή, Κεφ. 18, σελ. 47)

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η μελέτη της παρουσίας των δραστηριοτήτων των τριών τύπων εκτίμησης στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου. Πιο συγκεκριμένα, επιχειρήθηκε η κατηγοριοποίηση και ανάλυση των δραστηριοτήτων εκτίμησης, σύμφωνα με τα κριτήρια που τέθηκαν, καθώς και η διερεύνηση της σύνδεσής τους με την καθημερινή ζωή, την επινόηση νέων στρατηγικών και την επαλήθευση της απάντησης με ακρίβεια. Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζονται τα βασικά αποτελέσματα της παρούσας μελέτης και διατυπώνονται ορισμένα συμπεράσματα σχετικά με τη συνεισφορά της στη μαθηματική εκπαίδευση. Τέλος, αναγνωρίζονται ορισμένοι περιορισμοί που αφορούν τη διεξαγωγή της μελέτης και διατυπώνονται ορισμένες προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

Όσον αφορά τη συχνότητα εμφάνισης των δραστηριοτήτων εκτίμησης στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ΄ δημοτικού, χαρτογραφήθηκαν συνολικά 734 δραστηριότητες, από τις οποίες οι 89 δραστηριότητες ήταν δραστηριότητες εκτίμησης. Αυτές είναι κατανομημένες στο Βιβλίο Μαθητή και τα Τετράδια Εργασιών με παρόμοιο τρόπο. Αυτό σημαίνει ότι οι δραστηριότητες εκτίμησης στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ΄ τάξης αποτελούν περίπου το 1/10 του συνόλου των δραστηριοτήτων και στα δυο είδη των σχολικών εγχειριδίων. Σε αντίθεση με τα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Β΄ τάξης, όπου στα Βιβλία Μαθητή οι δραστηριότητες εκτίμησης αποτελούν το 1/3 του συνόλου των δραστηριοτήτων και στα Τετράδια Εργασιών αποτελούν το 1/5 του συνόλου των δραστηριοτήτων (Παπανικολάου & Καλαβάσης, 2017), η παρουσία των δραστηριοτήτων εκτίμησης στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Δ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου φαίνεται να είναι περιορισμένη. Ωστόσο, παρόμοια ευρήματα βρέθηκαν κατά τη μελέτη των ελληνικών σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών της Α΄ και Γ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου, όπου εντοπίστηκαν ελάχιστες δραστηριότητες εκτίμησης σε σύγκριση με τις δραστηριότητες ακριβούς μέτρησης (Παπανικολάου & Καλαβάσης, 2017), αλλά και από τη μελέτη τριών σουηδικών σχολικών εγχειριδίων για τη διδασκαλία των μαθηματικών στην Α΄ δημοτικού, όπου η έννοια των εκτιμήσεων φάνηκε να απουσιάζει εντελώς από τη διδακτέα ύλη των δύο, από τα τρία, σχολικών εγχειριδίων (Sayers et al., 2021).

Η πλειοψηφία των δραστηριοτήτων εκτίμησης φάνηκε να περιλαμβάνει φυσικούς αριθμούς, ενώ ένα σημαντικό ποσοστό, περίπου το 1/3 των δραστηριοτήτων, αναφέρεται σε δεκαδικούς αριθμούς. Αξιοσημείωτο είναι, επίσης, πως ένα μικρό ποσοστό δραστηριοτήτων εκτίμησης (περίπου 10%) περιλαμβάνει συμμιγείς αριθμούς. Η παρουσία δραστηριοτήτων εκτίμησης με δεκαδικούς και συμμιγείς αριθμούς στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ' δημοτικού είναι σημαντική για την εξοικείωση και περαιτέρω εμβάθυνση των μαθητών στις εκτιμήσεις, καθώς έχει βρεθεί πως οι επιδόσεις των μαθητών σε έργα εκτίμησης που περιλαμβάνουν δεκαδικούς και κλασματικούς αριθμούς είναι χαμηλότερες σε σύγκριση με τις επιδόσεις τους σε έργα εκτίμησης που περιλαμβάνουν φυσικούς αριθμούς (Tsao & Pan, 2011). Συνεπώς, η ακόμα μεγαλύτερη παρουσία δραστηριοτήτων εκτίμησης με ρητούς αριθμούς στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου θα μπορούσε να συμβάλλει αποτελεσματικά στη βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών σε έργα εκτίμησης αυτού του είδους.

Η συχνότητα εμφάνισης των δραστηριοτήτων εκτίμησης στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ' δημοτικού διαφοροποιείται από τον τύπο εκτίμησης, καθώς από την ανάλυση των αποτελεσμάτων βρέθηκε πως 6 στις 10 δραστηριότητες εκτίμησης αναφέρονται σε υπολογιστικές εκτιμήσεις. Περίπου το 1/5 (22,5%) των δραστηριοτήτων αποτελεί εκτιμήσεις μέτρησης και ένας πολύ μικρός αριθμός από το σύνολο των δραστηριοτήτων αναφέρεται σε εκτιμήσεις πλήθους (1 στις 10 δραστηριότητες). Είναι ενδιαφέρον το εύρημα ότι υπάρχει μόνο μία δραστηριότητα στο σύνολο των δραστηριοτήτων εκτίμησης που περιλαμβάνει εκτίμηση πάνω στην αριθμογραμμή. Τα ευρήματα αυτά συμφωνούν με τα αποτελέσματα των Παπανικολάου και Καλαβάση (2017), σύμφωνα με τα οποία οι δραστηριότητες υπολογιστικής εκτίμησης στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Β' και Γ' τάξης του δημοτικού σχολείου είναι αριθμητικά περισσότερες σε σύγκριση με τους υπόλοιπους τύπους εκτίμησης. Επιπλέον, τα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης συγκλίνουν και με τους στόχους που έχουν τεθεί στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών διαφόρων ευρωπαϊκών χωρών, συμπεριλαμβανομένης και της Ελλάδας, για τη διδασκαλία των εκτιμήσεων στο δημοτικό σχολείο, καθώς οι περιορισμένες αναφορές που υπάρχουν αφορούν κυρίως τις υπολογιστικές εκτιμήσεις και ελάχιστη μνεία γίνεται για τη διδασκαλία των υπόλοιπων τύπων εκτίμησης (Δεσλή, 2021; Andrews et al., 2021; Sunde et al., 2022; Xenofontos et al., 2022).

Οι δραστηριότητες υπολογιστικής εκτίμησης που χαρτογραφήθηκαν στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ΄ δημοτικού φάνηκε να περιλαμβάνουν, ως επί το πλείστον, πράξεις πρόσθεσης, ενώ εντοπίστηκαν λίγες δραστηριότητες με εκτιμήσεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Αν και η πράξη της αφαίρεσης εντοπίστηκε σε πολύ λίγες δραστηριότητες, το εύρημα αυτό οφείλεται ενδεχομένως στο περιεχόμενο αρκετών δραστηριοτήτων εκτίμησης που εντάχθηκαν στην κατηγορία «περισσότερες από μία πράξεις», καθώς μπορούσαν να εκτιμηθούν είτε με πράξη αφαίρεσης είτε με συμπληρωματική πρόσθεση. Η περιορισμένη παρουσία, ωστόσο, δραστηριοτήτων εκτίμησης με πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών φαίνεται να εξηγεί πιθανότατα τις χαμηλές επιδόσεις μαθητών του δημοτικού σχολείου σε έργα εκτίμησης με πράξεις πολλαπλασιασμού (Liu, 2009). Η συμπερίληψη περισσότερων δραστηριοτήτων εκτίμησης με πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου θα συνέβαλλε ενδεχομένως στην εξοικείωση των μαθητών με τις υπολογιστικές εκτιμήσεις που περιλαμβάνουν αυτού του είδους τις αριθμητικές πράξεις και θα ενίσχυε τις επιδόσεις τους σε παρόμοια έργα εκτίμησης.

Περισσότερες από τις μισές δραστηριότητες εκτίμησης μέτρησης που κατηγοριοποιήθηκαν στην παρούσα έρευνα, περιλαμβάνουν εκτιμήσεις μέτρησης μήκους, ενώ λίγες βρέθηκε να αναφέρονται σε εκτιμήσεις εμβαδού και βάρους. Το μέγεθος του όγκου εμφανίζεται σε ελάχιστες δραστηριότητες εκτίμησης μέτρησης, ενώ καμία δραστηριότητα δεν αναφέρεται σε εκτίμηση χρόνου. Τα ευρήματα αυτά δεν αποκλίνουν από τα αποτελέσματα που ανέδειξε η Ιωσηφίδου (2018), στην έρευνα της οποίας βρέθηκε πως οι περισσότερες δραστηριότητες εκτίμησης μέτρησης στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών όλων των τάξεων του δημοτικού σχολείου αφορούν στο μέγεθος του μήκους. Το εύρημα αυτό είναι πιθανόν να οφείλεται στη συχνότερη χρήση των εκτιμήσεων μήκους κατά την καθημερινότητα των μαθητών και την μεγαλύτερη εξοικείωση που έχουν με το συγκεκριμένο μέγεθος μέτρησης. Παρόλα αυτά, οι χαμηλές επιδόσεις που εμφανίζουν οι μαθητές σε εκτιμήσεις μέτρησης εμβαδού (Δεσλή & Μυρόβαλη, 2017) και σε εκτιμήσεις μέτρησης όγκου (Desli & Dimitropoulos, 2022) καθιστούν αναγκαία τη συμπερίληψη περισσότερων δραστηριοτήτων εκτίμησης μέτρησης εμβαδού και όγκου στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου.



Επιπλέον, τα ευρήματα της παρούσας μελέτης έδειξαν πως πάνω από τα 2/3 των δραστηριοτήτων εκτίμησης μέτρησης δεν περιλαμβάνουν καμία αναφορά στη χρήση συγκεκριμένου είδους μονάδων μέτρησης (τυποποιημένες ή μη τυποποιημένες), ενώ σε μία μόνο δραστηριότητα αναφέρεται η χρήση μη τυποποιημένων μονάδων μέτρησης. Παρόμοια ευρήματα βρέθηκαν στην έρευνα του Chang και των συνεργατών του (2011), όπου σχεδόν το 60% των δραστηριοτήτων εκτίμησης μέτρησης γραμμών ήταν διατυπωμένες με ασαφή τρόπο, χωρίς να ορίζονται συγκεκριμένα στοιχεία, όπως είναι το είδος της μονάδας μέτρησης. Κατά τον Chang και τους συνεργάτες του (2011), η απουσία κατάλληλων επεξηγήσεων στη διατύπωση των δραστηριοτήτων εκτίμησης μέτρησης μπορεί να οδηγήσει σε σύγχυση και να λειτουργήσει ανασταλτικά στην αποτελεσματική διδασκαλία των εκτιμήσεων. Εκτός αυτού, η απουσία δραστηριοτήτων εκτίμησης με χρήση μη τυποποιημένων μονάδων μέτρησης φαίνεται να αποκλίνει από τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος σπουδών για τα μαθηματικά της Δ' τάξης του δημοτικού σχολείου, όπου προτείνεται *«η διαισθητική προσέγγιση των μεγεθών: μήκους, επιφάνειας και χωρητικότητας με χρήση αυθαίρετων μονάδων μέτρησης επιφανειών και χωρητικότητας, όπως για παράδειγμα τετραγωνάκια και κυβάκια»* (ΥΠ.Ε.Π.Θ., 2003, σ. 264).

Η περιορισμένη έως μηδαμινή παρουσία των δραστηριοτήτων εκτίμησης πλήθους και εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή φαίνεται πως έρχεται σε συμφωνία με το ελληνικό πρόγραμμα σπουδών, καθώς στους στόχους του ΔΕΠΠΣ (2003) για τη διδασκαλία των εκτιμήσεων στη Δ' δημοτικού δεν υπάρχει καμία αναφορά στη διδασκαλία εκτίμησης πλήθους. Παράλληλα, στο ΔΕΠΠΣ των μαθηματικών για τη Δ' τάξη εντοπίζεται μόνο μία αναφορά στην εκτίμηση πάνω στην αριθμογραμμή, σύμφωνα με την οποία οι μαθητές αναμένεται *«να τοποθετούν με προσέγγιση δεκαδικά κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς στην αριθμογραμμή»* (ΥΠ.Ε.Π.Θ., 2003, σ. 266). Δεδομένου ότι η ικανότητα εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή συνδέεται με την ανάπτυξη των μαθηματικών ικανοτήτων των μαθητών (Sunde et al., 2022), η συμπερίληψη περισσότερων δραστηριοτήτων εκτίμησης πλήθους και εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή κρίνεται απαραίτητη. Ιδιαίτερα, κρίνεται σημαντική η συμπερίληψη περισσότερων έργων που αφορούν την εκτίμηση της τιμής ενός αριθμού βάσει της θέσης του στην αριθμογραμμή, καθώς φαίνεται οι μαθητές να είναι λιγότερο εξοικειωμένοι με τα έργα αυτά σε σύγκριση με την κατά προσέγγιση εύρεση της θέσης

ενός αριθμού πάνω στην αριθμογραμμική βάση της τιμής του (Δεσλή & Τριανταφύλλου, 2022; Iuculano & Butterworth, 2011).

Όσον αφορά τη σύνδεση των δραστηριοτήτων εκτίμησης με την καθημερινή ζωή, τα ευρήματα της παρούσας μελέτης υποδεικνύουν πως περισσότερες από τις μισές δραστηριότητες εκτίμησης στα σχολικά εγχειρίδια της Δ' δημοτικού πλαισιώνονται από κάποια ιστορία σχετική με την καθημερινότητα των παιδιών. Η σύνδεση των δραστηριοτήτων εκτίμησης με τον πραγματικό κόσμο των μαθητών είναι εμφανής και στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Α', Β' και Γ' δημοτικού που μελέτησαν οι Παπανικολάου και Καλαβάσης (2017). Τα περισσότερα σενάρια που πλαισιώνουν τις δραστηριότητες εκτίμησης στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ' τάξης σχετίζονται κυρίως με θέματα οικονομικής φύσης (π.χ., συναλλαγές χρημάτων ή αγορές σούπερ μάρκετ), με τον αθλητισμό ή το παιχνίδι, καθώς και με το φαγητό. Αν και οι περισσότερες δραστηριότητες εκτίμησης συνδέονται πράγματι με την καθημερινή ζωή, ενδέχεται αρκετές από αυτές να μην εντάσσονται στα άμεσα ενδιαφέροντα των μαθητών. Για τον λόγο αυτό, κρίνεται σημαντική για τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών η συμπερίληψη δραστηριοτήτων, πλαισιωμένων με σενάρια που εμπίπτουν άμεσα στην καθημερινή ζωή και τα ενδιαφέροντα των παιδιών.

Επιπρόσθετα, αν και οι δραστηριότητες εκτίμησης με λεκτική μορφή φάνηκε να είναι αριθμητικά περισσότερες σε σχέση με εκείνες που έχουν συμβολική μορφή, η κατανομή τους στα δυο είδη σχολικών εγχειριδίων (Βιβλίο Μαθητή και Τετράδια Εργασιών) δεν είναι ισομερής. Πιο συγκεκριμένα, η πλειονότητα των δραστηριοτήτων εκτίμησης στο Βιβλίο Μαθητή έχει λεκτική μορφή, ενώ, αντίθετα, στα Τετράδια Εργασιών οι περισσότερες δραστηριότητες εκτίμησης έχουν συμβολικό πλαίσιο. Στο εύρημα αυτό αντανakλάται ενδεχομένως ο σκοπός που εξυπηρετεί κάθε είδος σχολικού εγχειριδίου. Στο Βιβλίο Μαθητή, δηλαδή, επιχειρείται κυρίως η εννοιολογική κατανόηση της νέας γνώσης (Βαμβακούση κ.α., 2007a) και, κατά συνέπεια, αναμένεται οι περισσότερες δραστηριότητες να παρουσιάζονται μέσα σε ένα λεκτικό πλαίσιο. Αντίθετα, στα Τετράδια Εργασιών επιχειρείται η εξάσκηση, η εμπάθυνση και η επέκταση των γνώσεων που αποτελούν τον διδακτικό στόχο κάθε κεφαλαίου (Βαμβακούση κ.α., 2007a), επομένως αρκετές δραστηριότητες παρουσιάζονται με συμβολική μορφή. Ωστόσο, το γεγονός ότι οι εκτιμήσεις παρουσιάζονται στα Τετράδια Εργασιών περισσότερο συχνά χωρίς πλαίσιο και, κατά συνέπεια, χωρίς σύνδεση με τον

πραγματικό κόσμο, ίσως αντιβαίνει τη γενική θεώρηση ότι οι εκτιμήσεις έχουν σημασία ακριβώς μέσα από καταστάσεις της καθημερινής ζωής.

Τέλος, στη συντριπτική πλειοψηφία των δραστηριοτήτων εκτίμησης (πάνω από 70%) οι εκτιμήσεις συνδυάζονται με τις απαντήσεις με ακρίβεια. Με άλλα λόγια, οι περισσότερες δραστηριότητες εκτίμησης φάνηκε να λειτουργούν ως μέσο επαλήθευσης της ακριβούς απάντησης. Τα ευρήματα αυτά δεν συμφωνούν με τα αποτελέσματα των Παπανικολάου και Καλαβάση (2017), οι οποίοι βρήκαν πως ελάχιστες είναι οι δραστηριότητες εκτίμησης που συνδέονται με την επαλήθευση της απάντησης με ακρίβεια στα σχολικά εγχειρίδια της Α', Β' και Γ' δημοτικού. Μια πιθανή εξήγηση για αυτή την απόκλιση είναι ενδεχομένως πως τα σχολικά εγχειρίδια που μελετήθηκαν στην έρευνα των Παπανικολάου και Καλαβάση (2017) απευθύνονται σε παιδιά μικρότερης ηλικίας. Κάτι τέτοιο ίσως πραγματικά να ισχύει αν αναλογιστεί κανείς πως οι περισσότερες δραστηριότητες εκτίμησης μέτρησης στα σχολικά εγχειρίδια της Δ', Ε' και Στ' δημοτικού ακολουθούνταν από έλεγχο της εκτίμησης με ακριβή υπολογισμό (Ιωσηφίδου, 2018). Μάλιστα, το Βιβλίο Εκπαιδευτικού για τα μαθηματικά της Δ' τάξης του δημοτικού σχολείου αναφέρει με σαφή τρόπο πως «*η εκτίμηση μπορεί να λειτουργήσει και ως πρόβλεψη, και συνακόλουθα ως έλεγχος, των αποτελεσμάτων των πράξεων*» (Βαμβακούση κ.α., 2007α, σ. 11). Είναι σημαντικό, ωστόσο, τα σχολικά εγχειρίδια και το Βιβλίο Εκπαιδευτικού να αναδεικνύουν την αξία των εκτιμήσεων για τη μαθηματική εκπαίδευση, όχι μόνο ως μέσο ελέγχου των υπολογισμών με ακρίβεια, που τείνουν να καταλαμβάνουν το μεγαλύτερο μέρος της διδασκαλίας (Mildenhall, 2009; Son et al, 2019), αλλά και ως μέσο ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης και βαθύτερης κατανόησης της αίσθησης του αριθμού.

Συνοψίζοντας, τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Δ' τάξης του δημοτικού σχολείου, αν και εμπεριέχουν έναν αξιόλογο αριθμό δραστηριοτήτων εκτίμησης, εντούτοις δεν φαίνεται να δίνουν την ίδια βαρύτητα στη διδασκαλία όλων των τύπων εκτίμησης. Παράλληλα, είναι εμφανής η έμφαση που δίνεται στη διδασκαλία των υπολογισμών με ακρίβεια μέσω της εκτέλεσης αλγοριθμικών πράξεων, γεγονός που ενδεχομένως αποθαρρύνει τους εκπαιδευτικούς από την ενσωμάτωση των εκτιμήσεων στη διδασκαλία τους με περισσότερο ενεργό τρόπο. Επομένως, κρίνεται αναγκαία η συμπερίληψη περισσότερων δραστηριοτήτων εκτίμησης στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών, ιδιαίτερα δραστηριοτήτων εκτίμησης πλήθους και εκτίμησης πάνω στην αριθμογραμμή που φαίνεται να ενισχύουν την κατανόηση της

αίσθησης του αριθμού και να συμβάλλουν σημαντικά στην ανάπτυξη σύνθετων μαθηματικών ικανοτήτων (Siegler & Booth, 2005; Daker & Lyons, 2018). Ήδη στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο (Υ.ΠΑΙ.Θ., 2021), που δημοσιεύτηκε πρόσφατα στην Ελλάδα, οι εκτιμήσεις αναφέρονται ως στόχος διδασκαλίας σε όλες τις τάξεις του δημοτικού σχολείου, ενώ γίνονται εκτεταμένες αναφορές σε όλους τους τύπους εκτίμησης, με εξαίρεση την εκτίμηση πάνω στην αριθμογραμμή. Συνεπώς, τα ευρήματα της παρούσας μελέτης αφενός αναδεικνύουν την ανάγκη αναθεώρησης του περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών αναφορικά με τη διδασκαλία των εκτιμήσεων και αφετέρου προβάλλουν στοιχεία σημαντικά για τον σχεδιασμό των νέων σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών, που πρόκειται να δημοσιευτούν στη χώρα μας τα επόμενα χρόνια.

Τέλος, είναι σημαντικό να σημειωθεί πως η κατηγοριοποίηση των δραστηριοτήτων εκτίμησης δεν ήταν συχνά εύκολη. Αν και τα κριτήρια που τέθηκαν στην αρχή της ερευνητικής διαδικασίας ήταν σαφή και ξεκάθαρα, υπήρξαν δραστηριότητες που παρουσίασαν δυσκολία στην ταξινόμησή τους. Παρόλα αυτά, τέτοια εμπόδια παρακάμφθηκαν, καθώς οι δραστηριότητες εξετάστηκαν και επανελέγχθηκαν περισσότερες από δυο φορές, επιχειρώντας η κατηγοριοποίηση των δραστηριοτήτων εκτίμησης να είναι ακριβής και να εξασφαλιστεί η αξιοπιστία της εργασίας.

Λόγω της μεγάλης συνεισφοράς των εκτιμήσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών και ενόψει της συγγραφής των νέων σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών στην Ελλάδα, η παρουσία των εκτιμήσεων στη μαθηματική εκπαίδευση αξίζει να διερευνηθεί περαιτέρω. Για παράδειγμα, θα είχε ενδιαφέρον να διερευνηθεί η ενσωμάτωση των εκτιμήσεων στα νέα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Ελλάδας, καθώς και να μελετηθεί συγκριτικά η παρουσία των εκτιμήσεων στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο (Υ.ΠΑΙ.Θ., 2021) σε σχέση με αναλυτικά προγράμματα σπουδών άλλων χωρών που δεν έχουν διερευνηθεί έως τώρα.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### 5.1 Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

- Βαϊτσίδα, Γ., & Σκουμπουρδή, Χ. (2015). Σύγκριση επιφανειών μέσω εκτίμησης και μέτρησης με χρήση 'βοηθητικών μέσων'. *Πρακτικά του 6ου Πανελληνίου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ: Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις* (σσ. 369-378). Θεσσαλονίκη: ΕΝΕΔΙΜ.
- Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτινίου, Α., & Σαΐτης, Α. (2007a). *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού Βιβλίο Δασκάλου*. ΥΠΕΠΘ, ΟΕΔΒ, Αθήνα.
- Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτινίου, Α., & Σαΐτης, Α. (2007b). *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού Βιβλίο Μαθητή*. ΥΠΕΠΘ, ΟΕΔΒ, Αθήνα.
- Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτινίου, Α., & Σαΐτης, Α. (2007c). *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού Τετράδιο Μαθητή α' τεύχος*. ΥΠΕΠΘ, ΟΕΔΒ, Αθήνα.
- Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτινίου, Α., & Σαΐτης, Α. (2007d). *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού Τετράδιο Μαθητή β' τεύχος*. ΥΠΕΠΘ, ΟΕΔΒ, Αθήνα.
- Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτινίου, Α., & Σαΐτης, Α. (2007e). *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού Τετράδιο Μαθητή γ' τεύχος*. ΥΠΕΠΘ, ΟΕΔΒ, Αθήνα.
- Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτινίου, Α., & Σαΐτης, Α. (2007f). *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού Τετράδιο Μαθητή δ' τεύχος*. ΥΠΕΠΘ, ΟΕΔΒ, Αθήνα.
- Δεσλή, Δ. (2021). *Οι εκτιμήσεις στη μαθηματική εκπαίδευση*. Αθήνα: Gutenberg.
- Δεσλή, Δ., & Ανεστάκης, Π. (2014). Υπολογιστικές εκτιμήσεις και η διδασκαλία τους: επιδόσεις, στρατηγικές και στάσεις υποψηφίων εκπαιδευτικών. *Πρακτικά 5ου Πανελληνίου Συνεδρίου Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών: Τα Μαθηματικά στο Σχολείο και στην Καθημερινή Ζωή* (σσ. 1-10). Φλώρινα: ΕΝΕΔΙΜ.
- Δεσλή, Δ., & Κώστα, Φ. (2018). Εκτίμηση μέτρησης βάρους: Επιδόσεις και στρατηγικές των παιδιών. Στο Γρόσδος, Σ. & Τσιβάς, Α. (επιμ.) (2018). *Σχολείο ανοικτό στις παιδαγωγικές και κοινωνικές προκλήσεις*, Πρακτικά Πανελληνίου

Συνεδρίου, (σσ. 342-358). Θεσσαλονίκη: Περιφερειακή Διεύθυνση Π.Ε. & Δ.Ε. Κεντρικής Μακεδονίας.

Δεσλή, Δ., & Μυρόβαλη, Β. (2017). Επίδοση και στρατηγικές των παιδιών σε καταστάσεις που αφορούν εκτίμηση μέτρησης εμβαδού. *Πρακτικά 7ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών: Μαθηματική Γνώση και Διδακτικές Πρακτικές* (σσ. 773-783). Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ.

Δεσλή, Δ., & Ξενίδου, Ε. (2021). Εκτιμήσεις μέτρησης χρόνου: επιδόσεις και στρατηγικές παιδιών και ενηλίκων. *Διάλογοι! Θεωρία και πράξη στις επιστήμες αγωγής και εκπαίδευσης*, 7, 58-78.

Δεσλή, Δ., & Τριανταφύλλου, Ε. (2019). Εκτιμήσεις αριθμητικών ποσοτήτων από παιδιά Α' και Β' Δημοτικού. *International Journal of Educational Innovation*, 1, 28-36.

Δεσλή, Δ., & Τριανταφύλλου, Ε. (2022). Εκτιμήσεις πάνω σε αριθμογραμμή: Η περίπτωση των κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, 16, 5-25.

Ιωσηφίδου, Φ. (2018). *Εκτιμήσεις μέτρησης μεγεθών: η θέση τους στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου και οι επιδόσεις των παιδιών*. Αδημοσίευτη Μεταπτυχιακή Εργασία. ΠΤΔΕ, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη.

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής: νοεροί υπολογισμοί*. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Μπίκος, Γ. Δ. (2016). Το βιβλίο στο εκπαιδευτικό σύστημα της Δύσης και η έρευνα του παιδευτικού ρόλου των σχολικών εγχειριδίων. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση*, 61, 87-100.

Παπανικολάου, Χ., & Καλαβάσης, Φ. (2017). Μελέτη της εισαγωγής της έννοιας της εκτίμησης στα σχολικά μαθηματικά της Α', Β' και Γ' δημοτικού. *Πρακτικά του 7ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών* (σσ. 224- 234). Αθήνα: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων – ΥΠ.Ε.Π.Θ (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ) και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ) Δημοτικού- Γυμνασίου*. ΦΕΚ 303B & 304B/ 13-03-2003. Αθήνα: Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων – Υ.ΠΑΙ.Θ (2021). *Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο*. ΦΕΚ 5814/ 10-12-2021. Αθήνα: Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

## 5.2 Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

Ainsworth, S., Bibby, P., & Wood, D. (2002). Examining the effects of different multiple representational systems in learning primary mathematics. *The Journal of the Learning Sciences, 11*(1), 25-61.

Alajmi, A. (2009). Addressing computational estimation in the Kuwaiti curriculum: Teachers' views. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(4), 263–283.

Andrews, P., Bødtker Sunde, P., Nosrati, M., Petersson, J., Rosenqvist, E., Sayers, J., & Xenofontos, C. (2021). Computational estimation and mathematics education: A narrative literature review. *Journal of Mathematics Education, 14*(1), 6-27.

Andrews, P., Xenofontos, C., & Sayers, J. (2021). Estimation in the primary mathematics curricula of the United Kingdom: Ambivalent expectations of an essential competence. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 1*-27. doi: 10.1080/0020739X.2020.1868591.

Barth, H. C., & Paladino, A. M. (2011). The development of numerical estimation: Evidence against a representational shift. *Developmental Science, 14*(1), 125-135.

Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology, 42*(1), 189-201.

Boz, B., & Bulut, S. (2012). A case study about computational estimation strategies of seventh graders. *Elementary Education Online, 11*(4), 979–994.

- Chang, K. L., Males, L. M., Mosier, A., & Gonulates, F. (2011). Exploring US textbooks' treatment of the estimation of linear measurements. *ZDM*, *43*, 697-708.
- Clayton, J. (1996). A criterion for estimation tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *27*(1), 87-102.
- Daker, R. J., & Lyons, I. M. (2018). Numerical and non-numerical predictors of first graders' number-line estimation ability. *Frontiers in Psychology*, *9*, Article 2336.
- Dackermann, T., Huber, S., Bahnmüller, J., Nuerk, H. C., & Moeller, K. (2015). An integration of competing accounts on children's number line estimation. *Frontiers in Psychology*, *6*, Article 884.
- Desli, D., & Dimitropoulos, P. (2022). Investigating volume estimation performance and strategies of 6th-Grade children and adults. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-25. doi: 10.1080/0020739X.2022.2094295.
- Desli, D., & Giakoumi, M. (2017). Children's length estimation performance and strategies in standard and non-standard units of measurement. *International Journal for Research in Mathematics Education*, *7*(3), 61-84.
- Dowker, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(1), 45-55.
- Ebersbach, M., Luwel, K., Frick, A., Onghena, P., & Verschaffel, L. (2008). The relationship between the shape of the mental number line and familiarity with numbers in 5-to 9-year old children: Evidence for a segmented linear model. *Journal of Experimental Child Psychology*, *99*(1), 1-17.
- Fan, L., Cheng, J., Xie, S., Luo, J., Wang, Y., & Sun, Y. (2021). Are textbooks facilitators or barriers for teachers' teaching and instructional change? An investigation of secondary mathematics teachers in Shanghai, China. *ZDM—Mathematics Education*, *53*, 1313-1330.
- Fan, L., Chen, J., Zhu, Y., Qiu, X., & Hu, Q. (2004). Textbook use within and beyond Chinese mathematics classrooms: A study of 12 secondary schools in Kunming and Fuzhou of China. In L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), *How Chinese*



*learn mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 228–261). Singapore: World Scientific.

Forrester, M. A., & Shire, B. (1994). The influence of object size, dimension and prior context on children's estimation abilities. *Educational psychology, 14*(4), 451-465.

Ganor-Stern, D. (2018). Do exact calculation and computation estimation reflect the same skills? Developmental and individual differences perspectives. *Frontiers in Psychology, 9*, Article 1316.

Gooya, Z., Khosroshahi, L. G., & Teppo, A. R. (2011). Iranian students' measurement estimation performance involving linear and area attributes of real-world objects. *ZDM, 43*(5), 709-722.

Hammerstein, S., Poloczek, S., Lösche, P., Lemaire, P., & Büttner, G. (2019). Effects of working memory updating on children's arithmetic performance and strategy use: A study in computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology, 184*, 174-191.

Hogan, T. P., & Brezinski, K. L. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities?. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(4), 259-280.

Hsieh, H. F., & Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative health research, 15*(9), 1277-1288.

Huang, H. M. E. (2020). Effects of grade level and object size on students' measurement estimation performance. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 16*(12), 1-16.

Iuculano, T., & Butterworth, B. (2011). Rapid communication: Understanding the real value of fractions and decimals. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 64*(11), 2088-2098.

Jamieson-Proctor, R., & Byrne, C. (2008). Primary teachers' beliefs about the use of mathematics textbooks. In M. Goos, R. Brown, & K. Makar (Eds.), *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education: Meeting Research Group of Australasia-MERGA31: Navigating currents and charting directions* (pp. 295–302). Brisbane: MERGA.

- Jones, M. G., Gardner, G. E., Taylor, A. R., Forrester, J. H., & Andre, T. (2012). Students' accuracy of measurement estimation: Context, units, and logical thinking. *School Science and Mathematics, 112*(3), 171-178.
- Jones, G., Taylor, A., & Broadwell, B. (2009). Estimating linear size and scale: Body rulers. *International Journal of Science Education, 31*(11), 1495-1509.
- Joram, E., Gabriele, A. J., Bertheau, M., Gelman, R., & Subrahmanyam, K. (2005). Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(1), 4-23.
- Joram, E., Subrahmanyam, K., & Gelman, R. (1998). Measurement estimation: Learning to map the route from number to quantity and back. *Review of Educational Research, 68*(4), 413-449.
- Lemaire, P., & Brun, F. (2014). Effects of strategy sequences and response–stimulus intervals on children's strategy selection and strategy execution: A study in computational estimation. *Psychological Research, 78*(4), 506-519.
- Lemaire, P., & Lecacheur, M. (2002). Children's strategies in computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology, 82*(4), 281-304.
- Lemaire, P., & Lecacheur, M. (2011). Age-related changes in children's executive functions and strategy selection: A study in computational estimation. *Cognitive Development, 26*(3), 282-294.
- Lemonidis, C., Mouratoglou, A., & Pnevmatikos, D. (2014). Elementary teachers' efficiency in computational estimation problems. *MENON: Journal of Educational Research, 1st Thematic Issue*, 144-158.
- Lemonidis, C., Nolka, E., & Nikolantonakis, K. (2014). Students' behaviors in computational estimation correlated with their problem-solving ability. *MENON: Journal of Educational Research, 1st Thematic Issue*, 46-60.
- Lepik, M. (2015). Analyzing the use of textbook in mathematics education: the case of Estonia. *Acta Paedagogica Vilnensia, 35*, 90-102.
- Lepik, M., Grevholm, B., & Viholainen, A. (2015). Using textbooks in the mathematics classroom—the teachers' view. *Nordic Studies in Mathematics Education, 20*(3-4), 129-156.

- Liu, F. (2009). Computational estimation performance on whole-number multiplication by third- and fifth-grade Chinese students. *School Science and Mathematics*, 109(6), 325-337.
- McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-44.
- Mildenhall, P. (2009). A study of teachers' learning and teaching of computational estimation: Getting started. In C. Hurst, M. Kemp, B. Kissane, L. Sparrow, & T. Spencer (Eds.), *Mathematics: It's mine* (pp. 153–159). The Australian Association of Mathematics Teachers.
- O'Keeffe, L., & White, B. (2017). A snapshot of the role of the textbook in English secondary mathematics classrooms. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 18(3), 318-332.
- Pepin, B., & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 33, 158-175.
- Pizarro, N., Gorgorió, N., & Albarracín, L. (2015). Primary teacher' approach to measurement estimation activities. In K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3227–3233). Charles University in Prague and ERME.
- Praet, M., & Desoete, A. (2014). Number line estimation from kindergarten to grade 2: a longitudinal study. *Learning and Instruction*, 33, 19-28.
- Reys, R. E. (1984). Mental computation and estimation: Past, present, and future. *The Elementary School Journal*, 84(5), 547-557.
- Reys, R. E., Reys, B. J., Nohda, N., Ishida, J., Yoshikawa, S., & Shimizu, K. (1991). Computational estimation performance and strategies used by fifth- and eighth-grade Japanese students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(1), 39-58.

- Reys, B., Reys, R., & Peñafiel, A. (1991). Estimation performance and strategy use of Mexican 5th and 8th grade student sample. *Educational Studies in Mathematics*, 22(4), 353–375.
- Rezat, S. (2012). Interactions of teachers' and students' use of mathematics textbooks. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.), *From text to 'lived' resources: Mathematics curriculum materials and teacher development* (pp. 231–246). New York: Springer.
- Sayers, J., Petersson, J., Rosenqvist, E., & Andrews, P. (2021). Opportunities to learn foundational number sense in three Swedish year one textbooks: Implications for the importation of overseas-authored materials. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(4), 506-526.
- Schneider, M., Grabner, R. H., & Paetsch, J. (2009). Mental number line, number line estimation, and mathematical achievement: their interrelations in grades 5 and 6. *Journal of Educational Psychology*, 101(2), 359-372.
- Segovia, A. I., & Castro, E. (2009). Computational and measurement estimation: curriculum foundations and research carried out at the University of Granada, Mathematics Didactics Department. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 17(7), 499–536.
- Sekeris, E., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2019). Measurement, development, and stimulation of computational estimation abilities in kindergarten and primary education: A systematic literature review. *Educational Research Review*, 27, 1-14.
- Senol, A., Dundar, S., & Gunduz, N. (2015). Analysis of the relationship between estimation skills based on calculation and number sense of prospective classroom teachers. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 197, 1782-1788.
- Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 75(2), 428-444.
- Siegler, R.S., & Booth, J.L. (2005). Development of numerical estimation: A review. In J.I.D. Campbell (Ed.), *Handbook of Mathematical Cognition* (pp.197-212). New York: Psychology Press.

- Siegler, R. S., & Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science, 14*(3), 237-250.
- Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Opfer, J. E. (2009). The logarithmic-to-linear shift: One learning sequence, many tasks, many time scales. *Mind, Brain, and Education, 3*(3), 143-150.
- Slusser, E. B., Santiago, R. T., & Barth, H. C. (2013). Developmental change in numerical estimation. *Journal of Experimental Psychology: General, 142*(1), 193.
- Smets, K., Sasanguie, D., Szűcs, D., & Reynvoet, B. (2015). The effect of different methods to construct non-symbolic stimuli in numerosity estimation and comparison. *Journal of Cognitive Psychology, 27*(3), 310-325.
- Son, J. W., Hu, Q., & Lim, W. (2019). Computational estimation skill of preservice teachers: operation type and teacher view. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50*(5), 682-706.
- Subramaniam, K. (2014). Prospective secondary mathematics teachers' pedagogical knowledge for teaching the estimation of length measurements. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(2), 177-198.
- Sunde, P. B., Petersson, J., Nosrati, M., Rosenqvist, E., & Andrews, P. (2022). Estimation in the mathematics curricula of Denmark, Norway and Sweden: Inadequate conceptualisations of an essential competence. *Scandinavian Journal of Educational Research, 66*(4), 626-641.
- Thompson, C. A., & Opfer, J. E. (2010). How 15 hundred is like 15 cherries: Effect of progressive alignment on representational changes in numerical cognition. *Child Development, 81*(6), 1768-1786.
- Tsao, Y. L. (2013). Computational estimation and computational estimation attitudes of pre-service elementary teachers. *US-China Education Review B, 3*(11), 835-846.

- Tsao, Y. L., & Pan, T. R. (2011). Study on the computational estimation performance and computational estimation attitude of elementary school fifth graders in Taiwan. *US-China Education Review*, 8(3), 264-275.
- Tsao, Y. L., & Pan, T. R. (2013). The computational estimation and instructional perspectives of elementary school teachers. *Journal of Instructional Pedagogies*, 11, 1-15.
- Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. & Houang, R. T. (2002). *According to the book. Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Xenofontos, C., & Papadopoulos, C. (2015). Opportunities of learning through the history of mathematics: The example of national textbooks in Cyprus and Greece. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 16, 1-18.
- Xenofontos, C., Hizli Alkan, S., & Andrews, P. (2022). Estimation in the primary mathematics curricula of Cyprus, Greece and Turkey: A privileged or prevented competence?. *Athens Journal of Education*, 9, 1-22.
- Yang, D.-C., & Wu, S.-S. (2012). Examining the differences of the 8th Graders' estimation performance between contextual and numerical problems. *US-China Education Review A*, 12, 1061–1067.