ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ- ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ - ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ – ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Α' Ηλικιακός κύκλος

Διπλωματική εργασία

«Η γνώση και η στάση των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική μοντελοποίηση και η ικανότητά τους στην επίλυση προβλήματος Fermi: Διαφοροποίηση μετά από διδακτική παρέμβαση»

Μπασδέκη Μαρία

Α.Μ. 1023

Επιβλέπων καθηγητής: Λεμονίδης Χαράλαμπος, καθηγητής - Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Εξεταστές: Δεσλή Δέσποινα, επίκουρη καθηγήτρια - Α.Π.Θ.

Χρήστου Κωνσταντίνος, επίκουρος καθηγητής - Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Φλώρινα, 2023

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Χαράλαμπο Λεμονίδη για τη βοήθεια και την καθοδήγησή του στην εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας. Ευχαριστώ, επίσης, για τη συμβολή τους, την κ. Δέσποινα Δεσλή και τον κ. Κωνσταντίνο Χρήστου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους δικούς μου ανθρώπους, καθώς η συναισθηματική υποστήριξή τους ήταν πολύτιμη για την ολοκλήρωση της εργασίας αυτής.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Περίληψη

Η παρούσα εργασία έχει στόχο να διερευνήσει τις στάσεις και τις γνώσεις των εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για τη μαθηματική μοντελοποίηση καθώς και τις ικανότητές τους στην επίλυση προβλήματος Fermi, πριν και μετά την παρακολούθηση μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης. Στην έρευνα πήραν μέρος 34 εκπαιδευτικοί. Για τη διερεύνηση των γνώσεων και των στάσεων για τη μαθηματική μοντελοποίηση, οι εκπαιδευτικοί απάντησαν σε ερωτηματολόγιο που είχε κατασκευαστεί από τον Asempapa (2016), ενώ για τη διερεύνηση της ικανότητας επίλυσης προβλήματος Fermi ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς να επιλύσουν ένα πρόβλημα Fermi. Στη συνέχεια, 14 από τους εκπαιδευτικούς παρακολούθησαν δύο τετράωρα μαθήματα μαθηματικής μοντελοποίησης και απάντησαν εκ νέου στο ερωτηματολόγιο αλλά και σε ένα δεύτερο πρόβλημα Fermi. Τα αποτελέσματα πριν την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης έδειξαν ότι περισσότεροι από τους μισούς εκπαιδευτικούς είχαν ανεπαρκή ή μέτρια ικανότητα επίλυσης των προβλημάτων Fermi, κάτι που πιθανώς οφείλεται στην περιορισμένη εμπειρία τους με τέτοιου είδους προβλήματα. Από την άλλη πλευρά, είχαν μία καλή παιδαγωγική γνώση περιεχομένου της μαθηματικής μοντελοποίησης, ωστόσο η γνώση περιεχομένου ήταν μέτρια, αφού δυσκολεύτηκαν να δώσουν έναν καλό ορισμό, δείχνοντας ότι ενώ γνωρίζουν κάποιες βασικές αρχές, δεν έχουν μία επαρκή κατανόηση της έννοιας της μαθηματικής μοντελοποίησης. Οι στάσεις των εκπαιδευτικών ήταν θετικές, ωστόσο δεν έδειξαν σιγουριά για το αν μπορούν να εντάξουν τη μαθηματική μοντελοποίηση στην τάξη τους, κάτι που μπορεί να οφείλεται στην έλλειψη εκπαίδευσής τους στην διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης κατά τη διάρκεια των σπουδών τους, αλλά και στην ανεπαρκή παρουσία της μαθηματικής μοντελοποίησης στο πρόγραμμα σπουδών και στα σχολικά εγχειρίδια. Μετά την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης, όλοι οι εκπαιδευτικοί παρουσίασαν μία καλή ή πολύ καλή ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi, ενώ τόσο οι στάσεις όσο και οι γνώσεις τους βελτιώθηκαν σε στατιστικά σημαντικό βαθμό, γεγονός που αναδεικνύει την ανάγκη επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών, ιδανικά κατά τη διάρκεια των σπουδών τους.

Λέξεις – κλειδιά: μαθηματική μοντελοποίηση, προβλήματα Fermi, γνώση εκπαιδευτικών, στάση εκπαιδευτικών

Abstract

This essay aims to investigate the attitudes and knowledge of primary and secondary school teachers about mathematical modeling as well as their abilities in solving Fermi problem, before and after attending mathematical modeling courses. 34 teachers participated in the research. To investigate knowledge and attitudes about mathematical modeling, the teachers answered a questionnaire constructed by Asempapa (2016), while about investigating Fermi problem solving ability, teachers were asked to solve a Fermi problem. Subsequently, 14 of the teachers attended two four-hour mathematical modeling courses and answered the questionnaire again as well as solving a second Fermi problem. The results before attending the mathematical modeling courses showed that more than half of the teachers had insufficient or moderate ability to solve Fermi problems, which is probably due to their limited experience with such problems. On the other hand, they had a good pedagogical content knowledge of mathematical modeling, however their content knowledge was moderate, as they struggled to give a good definition, showing that while they know some basic principles, they do not have an adequate understanding of the concept of mathematical modeling. Teachers' attitudes were positive although, they did not show confidence in their ability to integrate mathematical modeling in their classroom, which may be due to their lack of training in teaching mathematical modeling during their studies, but also to the insufficient attendance of mathematical modeling in the curriculum and school textbooks. After attending the mathematical modeling courses, all teachers showed a good or very good Fermi problem solving ability, while both their attitudes and knowledge improved to a statistically significant degree, fact that highlights the need of teacher training, ideally during their studies.

Keywords: mathematical modeling, Fermi problems, teachers' knowledge, teachers' attitude

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ - ΕΙΚΟΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια της εκτίμησης αποτελεί ένα σημαντικό μέρος της μαθηματικής γνώσης και η ικανότητα εκτίμησης σχετίζεται με την γενικότερη μαθηματική ικανότητα. Είναι επίσης απαραίτητη για την επίτευξη έργων μαθηματικής μοντελοποίησης και κεντρική για την επίλυση προβλημάτων Fermi. Η μαθηματική μοντελοποίηση θεωρείται μια σημαντική προσέγγιση, η οποία δίνει έμφαση στην αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθηματικών και του πραγματικού κόσμου και στην προετοιμασία των μαθητών να αντιμετωπίσουν τη δυναμική και πολύπλοκη κατάσταση της εποχής μας (Lesh & Doerr, 2003). Απαιτεί το να πηγαίνει κανείς πέρα από την απλή εφαρμογή διαδικασιών και να εφαρμόζει τη μαθηματική γνώση με ευέλικτους τρόπους, κάτι που αποτελεί θεμελιώδη στόχο της σύγχρονης διδασκαλίας των μαθηματικών (Siegler & Booth, 2005). Τα προβλήματα Fermi αποτελούν ένα τυπικό παράδειγμα της κατάστασης στην οποία ένα μαθηματικό μοντέλο αποτελεί την βάση για την εκτίμηση μιας δεδομένης ποσότητας (Albarracin & Gorgorio, 2019). Πρόκειται για ανοιχτά, μη τυπικά προβλήματα, τα οποία απαιτούν από τους μαθητές να κάνουν υποθέσεις για την προβληματική κατάσταση και να εκτιμούν ποσότητες, προτού εμπλακούν σε, συχνά, απλούς υπολογισμούς (Ärlebäck, 2009).

Αν και η ενασχόληση με έργα μαθηματικής μοντελοποίησης έχει πολλά οφέλη στην μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών, ωστόσο δεν έχει γίνει ακόμα αισθητή η παρουσία της στην πλειοψηφία των σχολικών αιθουσών (Albarracín & Gorgorió, 2020) ενώ απουσιάζει από το ελληνικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΔΕΠΠΣ, 2003) και τα σχολικά εγχειρίδια. Ταυτόχρονα, έρευνες αναδεικνύουν ότι και οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν δυσκολίες κατά την επίλυση προβλημάτων μοντελοποίησης και προβλημάτων Fermi (Karali & Durmus, 2015· Segura & Ferrando, 2021). Πέρα από την ικανότητα των εκπαιδευτικών στην επίλυση έργων μαθηματικής μοντελοποίησης, σημαντικό θέμα αποτελεί η γνώση και η στάση τους για την μαθηματική μοντελοποίηση, καθώς αφενός η γνώση περιεχομένου των εκπαιδευτικών σχετίζεται με την επίδοση των μαθητών (Hill, Rowan, & Ball, 2005) και αφετέρου οι στάσεις των εκπαιδευτικών απέναντι στα μαθηματικά έχουν ουσιαστική επίδραση στη διδασκαλία των μαθηματικών και στη μάθηση (Thiel, 2010). Έρευνες έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί θεωρούν δύσκολη τη μαθηματική μοντελοποίηση (Blum & Ferri, 2009), έχουν κακή κατανόηση των μαθηματικών μοντέλων και της μοντελοποίησης και περιορισμένη εμπειρία σχετικά με την έννοια της μαθηματικής μοντελοποίησης στην μαθηματική εκπαίδευση (Frejd, 2012).

Τα εκπαιδευτικά προγράμματα για την μαθηματική μοντελοποίηση που απευθύνονται σε εκπαιδευτικούς, φαίνεται να έχουν θετική επίδραση τόσο στις γνώσεις τους για την μαθηματική μοντελοποίηση όσο και στην επίδοσή τους σε έργα μοντελοποίησης, αλλά και στη στάση τους για τη μαθηματική μοντελοποίηση, αν και κάποιες στάσεις φαίνεται να είναι περισσότερο ανθεκτικές.

Η έρευνα της παρούσας διπλωματικής εργασίας έχει στόχο να διερευνήσει τις στάσεις και τις γνώσεις των εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για τη μαθηματική μοντελοποίηση καθώς και τις ικανότητές τους στην επίλυση προβλήματος Fermi, πριν και μετά την παρακολούθηση μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης. Η εργασία αποτελείται από ένα θεωρητικό και ένα ερευνητικό μέρος. Στο Κεφάλαιο 1 αναλύονται η έννοια και τα οφέλη της μαθηματικής μοντελοποίησης στην εκπαίδευση, η παρουσία της μαθηματικής μοντελοποίησης στο Πρόγραμμα σπουδών και στα σχολικά εγχειρίδια της Ελλάδας και η εκπαίδευση των εκπαιδευτικών στην μαθηματική μοντελοποίηση. Επιπλέον, παρουσιάζονται έρευνες σχετικές με επίλυση προβλημάτων Fermi από μαθητές και εκπαιδευτικούς, έρευνες για τη στάση και τη γνώση των εκπαιδευτικών σχετικά με τη μαθηματική μοντελοποίηση αλλά και για την επίδραση εκπαιδευτικών προγραμμάτων στις στάσεις και στις γνώσεις των εκπαιδευτικών. Τα Κεφάλαια που ακολουθούν αφορούν το ερευνητικό μέρος: Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται ο σκοπός της έρευνας, η σημασία της και τα ερευνητικά ερωτήματα. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται η μεθοδολογία της έρευνας, ενώ στα Κεφάλαια 4 και 5 αναλύονται τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα της έρευνας αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

1.1 Η έννοια της εκτίμησης

Η Sowder (1992) θεώρησε την εκτίμηση ως μια μέθοδο επίλυσης προβλημάτων που συνδυάζει νοερό υπολογισμό και στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων για να βρεθεί η τιμή που βρίσκεται πλησιέστερα στην πραγματική τιμή. Έτσι, δίνεται μια λογική εκτίμηση -αντί για ακριβή υπολογισμό- γρήγορα, χωρίς τη χρήση χαρτιού και μολυβιού. Σύμφωνα με τους Siegler & Booth (2005, σ. 198), *«εκτίμηση είναι μία διαδικασία μετάφρασης μεταξύ διαφορετικών ποσοτικών αναπαραστάσεων, εκ των οποίων τουλάχιστον η μία δεν είναι ακριβής. Οι ποσοτικές αναπαραστάσεις μπορούν είτε να είναι αριθμητικές είτε όχι».*

Η αριθμητική εκτίμηση, ανήκει στην κατηγορία των έργων εκτίμησης όπου η μία ή και οι δύο πλευρές μετάφρασης περιλαμβάνουν αριθμούς (Siegler & Booth, 2005). Για παράδειγμα, η υπολογιστική εκτίμηση περιλαμβάνει μετάφραση από μία αριθμητική αναπαράσταση σε μία άλλη. Η εκτίμηση πλήθους απαιτεί μετάφραση μίας μη αριθμητικής αναπαράστασης (π.χ. οπτική αναπαράσταση του όγκου ή της πυκνότητας των ζαχαρωτών μέσα σε ένα βάζο) σε έναν αριθμό. Όμοια και η εκτίμηση μέτρησης (μήκους, εμβαδού, χρόνου, όγκου, βάρους, κ.α.). Η εκτίμηση σε αριθμογραμμή απαιτεί την μετάφραση ενός αριθμού σε μία χωρική θέση πάνω σε μία αριθμογραμμή ή το αντίστροφο.

Ένα είδος μαθηματικής δραστηριότητας, η οποία θεωρείται επίσης εκτίμηση, είναι ο υπολογισμός των τιμών που λαμβάνονται σε προγνωστικές δραστηριότητες και περιλαμβάνουν την προσέγγιση μιας πραγματικότητας με βάση τη χρήση μοντέλων που αντιπροσωπεύουν μια κατάσταση (Albarracin & Gorgorio, 2019). Αυτός ο τύπος δραστηριότητας είναι κοινός σε επιστημονικά και τεχνικά έργα ή σε κοινωνικές μελέτες ανώτατου επιπέδου, όπως για παράδειγμα στην εκτίμηση της αύξησης του ΑΕΠ μιας χώρας ή στην εκτίμηση των κλιμακούμενων αποστάσεων του ηλιακού συστήματος. Ωστόσο, αν και η εκτίμηση που βασίζεται σε έργα μοντελοποίησης χρησιμοποιείται σε επιστημονικές εργασίες, δεν συμβαίνει το ίδιο στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ένα καλό παράδειγμα του τύπου της κατάστασης στην οποία ένα μαθηματικό μοντέλο είναι η βάση για την εκτίμηση μιας δεδομένης ποσότητας –και μπορεί να εφαρμοστεί και σε τάξεις της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης– είναι τα λεγόμενα προβλήματα Fermi (Albarracin & Gorgorio, 2019).

1.1.1 Η σημασία και τα οφέλη της εκτίμησης στην μαθηματική εκπαίδευση

Η εκτίμηση αποτελεί ένα σημαντικό μέρος της μαθηματικής γνώσης. Η παρουσία της είναι διάχυτη στην καθημερινή ζωή τόσο των παιδιών όσο και των ενηλίκων, αφού, ίσως χρησιμοποιείται πιο συχνά από οποιαδήποτε άλλη διαδικασία ποσοτικοποίησης (Siegler & Booth, 2005· Λεμονίδης 2020).

Πέρα από την πρακτική της σημασία, η ικανότητα εκτίμησης σχετίζεται σημαντικά με την εκμάθηση λειτουργίας του πραγματικού κόσμου αλλά και τη μεταγενέστερη εκμάθηση των μαθηματικών (Sunde et al., 2021). Υπάρχει μια ιδιαίτερα ισχυρή σχέση μεταξύ εκτίμησης και της αίσθησης αριθμού (Sowder, 1992) και σχετίζεται με γενικές μετρήσεις μαθηματικής ικανότητας, όπως η επίτευξη υψηλής βαθμολογίας σε μαθηματικά τεστ αλλά και με συγκεκριμένες πτυχές της μαθηματικής ικανότητας, όπως η αριθμητική ικανότητα (Siegler & Booth, 2005) και η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων (Λεμονίδης, 2020). Συμβάλλει, επίσης, στη μεταγνωστική ικανότητα των μαθητών (Λεμονίδης, 2020· Δεσλή, 2021).

Πιο συγκεκριμένα, η υπολογιστική εκτίμηση θεωρείται ως μια εγγενώς πολύτιμη μαθηματική ικανότητα, λόγω της στενής σχέσης της με την ακριβή αριθμητική (Sekeris, Verschaffel & Luwel, 2019). Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέσο διδασκαλίας και μάθησης σημαντικών μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων, όπως η κατανόηση της αξίας θέσης (Sowder, 1992). Η εκτίμηση πλήθους, σύμφωνα με τους Bartelet, Vaessen, Blomert & Ansari. (2014) είναι πρόδρομος της μεταγενέστερης αριθμητικής ικανότητας. Η υπολογιστική εκτίμηση και η εκτίμηση πλήθους φαίνεται να είναι οι τύποι εκτίμησης που συνδέονται περισσότερο με την ικανότητα αίσθησης αριθμού ενώ η εκτίμηση μέτρησης και η εκτίμηση σε αριθμογραμμή με την ικανότητα χωρικού συλλογισμού, αν και όλοι οι τύποι εκτίμησης χρησιμοποιούνται σε καταστάσεις που μπορεί να απαιτείται συνδυασμός των δύο αυτών ικανοτήτων (Δεσλή, 2021). Ωστόσο, το αν η ικανότητα εκτίμησης σχετίζεται αιτιωδώς με άλλες πτυχές της μαθηματικής ικανότητας είναι άγνωστο, αν και υπάρχουν ενδείξεις γι’ αυτό (Siegler & Booth, 2005).

Ένας άλλος λόγος για τον οποίο η ικανότητα εκτίμησης έχει μεγάλη σημασία, είναι το γεγονός ότι πολλοί τύποι εκτίμησης απαιτούν το να πηγαίνει κανείς πέρα από την απλή εφαρμογή διαδικασιών και να εφαρμόζει τη μαθηματική γνώση με ευέλικτους τρόπους. Αυτός ο προσαρμοστικός τύπος επίλυσης προβλημάτων είναι ένας θεμελιώδης στόχος της σύγχρονης διδασκαλίας των μαθηματικών (Siegler & Booth, 2005). Η Hagena (2015) υποστήριξε ότι η αίσθηση μέτρησης και η εκτίμηση είναι απαραίτητες για την επιτυχή επίλυση πολλών έργων μοντελοποίησης και κεντρική για την επίλυση προβλημάτων Fermi.

Παρόλο που η ικανότητα εκτίμησης είναι τόσο σημαντική, πολλά παιδιά σχολικής ηλικίας αλλά και ενήλικες αντιμετωπίζουν δυσκολίες (Siegler & Booth, 2005). Η έρευνα των Yang & Wu (2012) έδειξε ότι το ποσοστό των μαθητών που χρησιμοποιούν την εκτίμηση για την επίλυση προβλημάτων είναι πολύ χαμηλό και οι περισσότεροι μαθητές βασίζονται σε γραπτούς υπολογισμούς, με στόχο να βρουν την ακριβή απάντηση. Σύμφωνα με τους ερευνητές, οι μαθητές στερούνταν της ικανότητας να κάνουν χρήση της εκτίμησης για την επίλυση των προβλημάτων επειδή οι εκπαιδευτικοί δίνουν έμφαση στην ακρίβεια της απάντησης, περιορίζοντας τους μαθητές να αναπτύξουν ικανότητες εκτίμησης. Έρευνα που πραγματοποιήθηκε σε 235 μαθητές Ε' τάξης Δημοτικού (Tsao & Pan, 2011), έδειξε μέτρια συνολική επίδοση στην υπολογιστική εκτίμηση. Αλλά και οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται ακόμα και σε απλές πράξεις υπολογιστικής εκτίμησης, όπως έχει φανεί από έρευνες. Για παράδειγμα, έρευνα σε προπτυχιακούς εκπαιδευτικούς έδειξε ότι κάνουν λάθη τόσο στους υπολογισμούς όσο και στην στρατηγική εκτίμησης (Lemonidis & Kaimakami, 2013) ενώ οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί δείχνουν μία μέτρια επίδοση στην υπολογιστική εκτίμηση (Tsao, 2013· Λεμονίδης & Μουράτογλου, 2014) και δεν γνωρίζουν τις διάφορες στρατηγικές της υπολογιστικής εκτίμησης (Λεμονίδης & Μουράτογλου, 2014).

1.2 Προβλήματα Fermi

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, τα προβλήματα Fermi αποτελούν ένα τυπικό παράδειγμα της κατάστασης στην οποία ένα μαθηματικό μοντέλο αποτελεί τη βάση για την εκτίμηση μιας δεδομένης ποσότητας. Σύμφωνα με τον Ärlebäck (2009), τα προβλήματα Fermi είναι ανοικτά, μη τυπικά προβλήματα, τα οποία απαιτούν από τους μαθητές να κάνουν υποθέσεις για την προβληματική κατάσταση και να εκτιμούν ποσότητες, προτού εμπλακούν σε, συχνά, απλούς υπολογισμούς.

Ο όρος "προβλήματα Fermi", προέρχεται από τον νομπελίστα φυσικής Enrico Fermi (1901 – 1954), ο οποίος έθεσε την κλασική πλέον ερώτηση: «Πόσοι κουρδιστές πιάνου υπάρχουν στο Σικάγο;». Έπειτα, χρησιμοποιώντας λογικές υποθέσεις και εκτιμήσεις, έδωσε μια απίστευτα ακριβή και λογική απάντηση. Ο ίδιος ήταν της άποψης ότι ένας καλός φυσικός (όπως και οποιοσδήποτε σκεπτόμενος άνθρωπος), μπορεί να εκτιμήσει οποιοδήποτε μέγεθος με ακρίβεια μέχρι τον παράγοντα 10, απλώς «χρησιμοποιώντας το μυαλό του», δηλαδή μέσω συλλογισμού και έξυπνων εκτιμήσεων. Σύμφωνα με όσα είναι γνωστά, ο ίδιος δεν καθόρισε τα χαρακτηριστικά αυτών των προβλημάτων και οι διάφοροι συγγραφείς στη βιβλιογραφία δίνουν έμφαση σε διαφορετικά σημεία (Ärlebäck & Bergsten, 2013).

Σύμφωνα με τους Ross & Ross (όπως αναφέρεται στο Ärlebäck & Bergsten, 2013), *«η ουσία ενός προβλήματος Fermi είναι ότι ένα καλά ενημερωμένο άτομο μπορεί να το λύσει (προσεγγιστικά) με μια σειρά εκτιμήσεων».* (σ. 175) και ότι *«το διακριτικό χαρακτηριστικό ενός προβλήματος Fermi είναι η πλήρης εξάρτηση από πληροφορίες που είναι αποθηκευμένες στο κεφάλι του λύτη των προβλημάτων… Η επίλυση προβλημάτων Fermi παρουσιάζει μια τεχνητή πρόκληση»* (σ. 181).

Άλλα χαρακτηριστικά που αποδίδονται στα προβλήματα Fermi, είναι η προσβασιμότητα ή η αυτοδιαφοροποιούμενη φύση τους, καθώς μπορεί να επεξεργαστεί και να λυθεί από διαφορετικές τάξεις καθώς και σε διαφορετικά επίπεδα πολυπλοκότητας (Kittel & Marxer όπως αναφέρεται στο Ärlebäck & Bergsten, 2010). Επίσης, όπως εκφράστηκε από την Sowder (1992, σ. 372), δε θα πρέπει να υπάρχει ακριβής απάντηση: *«τα προβλήματα αυτά πρέπει να απαντώνται με εκτίμηση, αφού η ακριβής απάντηση δεν είναι διαθέσιμη».*

Ορισμένοι συγγραφείς ορίζουν τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων Fermi περιγράφοντας τα βήματα που χρειάζονται, τις κατανοήσεις ή τις γνώσεις που πρέπει να επιτευχθούν, για να βρουν επιτυχώς μια απάντηση. Για παράδειγμα, οι Dirks και Edge (όπως αναφέρεται στο Ärlebäck & Bergsten, 2013) απαριθμούν τέσσερα «*πράγματα που συνήθως απαιτούνται*» κατά την επίλυση προβλημάτων Fermi, τα οποία είναι τα εξής: *«επαρκής κατανόηση του προβλήματος για να αποφασίσουμε ποια δεδομένα μπορεί να είναι χρήσιμα για την επίλυσή του, διορατικότητα για τη σύλληψη χρήσιμων απλουστευτικών υποθέσεων, ικανότητα εκτίμησης φυσικών ποσοτήτων και κάποιες συγκεκριμένες επιστημονικές γνώσεις»* (σ. 602).

Σύμφωνα με τους Sriraman & Lesh (2006), αυτές οι δραστηριότητες εκτίμησης μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ένας τρόπος για την έναρξη της μαθηματικής μοντελοποίησης, για την προώθηση της ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών (και διαδικασιών) και την καλλιέργεια κριτικής σκέψης και κριτικού γραμματισμού.

1.2.1 Προβλήματα Fermi και μοντελοποίηση

Ο Niss (1989) αναφέρει ότι η μαθηματική μοντελοποίηση υπερβαίνει τα όρια των παραδοσιακών λεκτικών προβλημάτων: Μπορεί να θεωρηθεί ως μια «τριπλέτα» αποτελούμενη από μια πραγματική κατάσταση, μια συλλογή μαθηματικών οντοτήτων και των σχέσεων που συνδέουν αυτά τα δύο. Ωστόσο, σύμφωνα με τον Peter-Koop (2004), τα παραδοσιακά μαθηματικά προβλήματα δεν αποτελούν το καλύτερο πλαίσιο για την ανάπτυξη δεξιοτήτων μαθηματικής μοντελοποίησης, γιατί συχνά η συγκεκριμένη διατύπωση αυτών των προβλημάτων, υποδηλώνει ήδη την επιλογή της πράξης που θα συνδεθεί με τους δοθέντες αριθμούς, κι έτσι η σχέση μεταξύ του πραγματικού περιβάλλοντος και των μαθηματικών δε χρειάζεται να διερευνηθεί.

Αντίθετα, τα προβλήματα Fermi είναι κατάλληλα και χρήσιμα για την εισαγωγή της μαθηματικής μοντελοποίησης στην τάξη, αφού είναι ένας τύπος έργου που επιτρέπει στους μαθητές να αναπτύσσουν τις δικές τους στρατηγικές επίλυσης, βασισμένοι στη διατύπωση ερωτήσεων σχετικά με πτυχές της πραγματικής ζωής, χωρίς να παρέχουν πολλές πληροφορίες για τα φαινόμενα που πρόκειται να μελετηθούν (Ferri, 2017). Πρόσφατες έρευνες έχουν μελετήσει τα προβλήματα Fermi σε σχέση με την μοντελοποίηση, ενισχύοντας την παραπάνω άποψη.

Οι Albarracín & Gorgorió (2019), μελέτησαν την ανάπτυξη των μαθηματικών μοντέλων από μαθητές 10 και 11 χρονών κατά τη διάρκεια επίλυσης προβλημάτων Fermi εκτίμησης μεγάλων αριθμών. Τα αποτελέσματα της έρευνάς τους έδειξαν ότι, όταν οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες, αναπτύσσουν στρατηγικές συμπεριλαμβανομένης της ανάπτυξης μαθηματικών μοντέλων, όπως η κατανομή πλέγματος, η χρήση σημείου αναφοράς και η πυκνότητα πληθυσμού.

Οι Ferrando & Albarracín (2021), μελέτησαν τα μαθηματικά μοντέλα που αναπτύχθηκαν από μαθητές 8 – 16 ετών κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος Fermi -ίδιο για όλες τις ηλικίες- σχετικό με εκτίμηση πλήθους. Σύμφωνα με τους ίδιους, προσδιορίζοντας τη δυνατότητα ενός προβλήματος Fermi να προάγει την δημιουργία διαφορετικών μαθηματικών μοντέλων σε μαθητές διαφορετικών ηλικιών, μας παρέχει αρκετή γνώση για τον σχεδιασμό εκπαιδευτικών ακολουθιών, οι οποίες θα επιτρέπουν στους μαθητές να αναπτύσσουν δεξιότητες μοντελοποίησης. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι μαθητές προσαρμόζουν τις λύσεις τους, προκειμένου να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα με τις διαθέσιμες γνώσεις τους.

Τέλος, οι Arleback & Bergsten (2013) διερεύνησαν τη δυνατότητα χρήσης προβλημάτων Fermi για την εισαγωγή της μοντελοποίησης σε Σουηδούς μαθητές ανώτερης δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (ηλικίας 17 – 19), οι οποίοι φοιτούσαν σε προπαρασκευαστικό πανεπιστημιακό έτος. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε τρεις ομάδες και κλήθηκαν να λύσουν ένα πρόβλημα Fermi. Για να αναλύσουν αυτή την περίπλοκη διαδικασία επίλυσης, τη χώρισαν σε 6 στάδια (υποδραστηριότητες), λαμβάνοντας υπόψη τα στάδια της μαθηματικής μοντελοποίησης: ανάγνωση προβλήματος (κατανόηση), δημιουργία μοντέλου (απλοποίηση, δόμηση του στόχου και μαθηματικοποίηση), εκτίμηση, μαθηματικός υπολογισμός και έλεγχος (ερμηνεία, επαλήθευση και επικύρωση των αποτελεσμάτων, των υπολογισμών και του ίδιου του μοντέλου). Αν και η αρχική αντίδραση των μαθητών στο πρόβλημα ήταν έκπληξη και εκνευρισμός από την έλλειψη δεδομένων απαραίτητων για την επίλυση, στη συνέχεια οι μαθητές πέρασαν από όλα τα προκαθορισμένα στάδια. Παρατηρήθηκε, μάλιστα, ότι οι μαθητές δεν κινούνταν μεταξύ των σταδίων γραμμικά, αλλά επέστρεφαν σε προηγούμενα στάδια πολλές φορές ώστε να τα βελτιώσουν, κάτι που σύμφωνα με τους ερευνητές αναπαριστά τον κύκλο της μαθηματικής μοντελοποίησης. Επιπλέον, η δυναμική της ομάδας μαθητών φαίνεται να είναι σημαντική για την εξέλιξη και την ενεργοποίηση των διαφορετικών σταδίων κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, καθώς οι συζητήσεις και οι αλληλεπιδράσεις στις ομάδες, όταν διαφορετικές απόψεις έρχονται αντιμέτωπες, είναι αυτές που καθοδηγούν και διαμορφώνουν τη διαδικασία μοντελοποίησης.

1.2.2 Προβλήματα Fermi και κριτική σκέψη

Ορισμένοι ερευνητές, υποστηρίζουν ότι η έννοια των προβλημάτων Fermi είναι καλύτερη και πιο χρήσιμη εάν κάποιος επιτρέψει τα προβλήματα να μην είναι καθαρά διανοητικής φύσης, αλλά να βρίσκονται στον πραγματικό κόσμο και σε καθημερινό πλαίσιο (Peter-Koop, 2004· Sriraman & Lesh, 2006· Sriraman & Knott, 2009). Και αυτό διότι, τα προβλήματα Fermi που σχετίζονται άμεσα με το καθημερινό περιβάλλον, είναι πιο ουσιαστικά και προσφέρουν περισσότερες παιδαγωγικές δυνατότητες από καθαρά πνευματικές ασκήσεις, όπως π.χ. ο υπολογισμός του αριθμού των κουρδιστών πιάνου σε μια πόλη ή του αριθμού των κόκκων άμμου σε ένα ποτήρι (Sriraman & Knott, 2009).

Τα προβλήματα Fermi παρουσιάζουν, επιπλέον, τη δυνατότητα διεπιστημονικών δραστηριοτήτων με άλλους τομείς των προγραμμάτων σπουδών και κριτικού γραμματισμού (Sriraman & Lesh, 2006). Προβλήματα Fermi που αφορούν εκτιμήσεις οικολογικών παραμέτρων που έχουν προκύψει λόγω της υπερβολικής χρήσης ή κατάχρησης των φυσικών πόρων, όπως εκτιμήσεις κατανάλωσης πόσιμου νερού, κατανάλωσης καυσίμων, σπατάλης τροφίμων, ποσότητας σκουπιδιών που παράγονται κ.ο.κ., προσφέρουν τη δυνατότητα να οδηγήσουν σε ευαισθητοποίηση σχετικά με προβλήματα που σχετίζονται με το περιβάλλον στο οποίο ζούμε και σε ανάπτυξη κριτικής σκέψης κατά τον έλεγχο της ακρίβειας των υπολογισμών από διάφορους κυβερνητικούς και εταιρικούς πόρους (Sriraman & Knott, 2009).

Επιπλέον, δεδομένης της αφθονίας των πηγών πληροφόρησης, καθώς οι σημερινοί μαθητές ζουν σε μια εποχή όπου οι κοινωνίες κατακλύζονται από πληροφορίες από διάφορα πολυμέσα και πλέον είναι ευέλικτοι στη χρήση κινητών τηλεφώνων και έχουν πρόσβαση στον παγκόσμιο ιστό, είναι απαραίτητο να μπορούν να σκέφτονται κριτικά και να εξετάζουν την εγκυρότητα των πληροφοριών που λαμβάνουν. Τα μαθηματικά κατέχουν μια σημαντική θέση στο σύγχρονο κόσμο, ιδιαίτερα όταν πρόκειται να κατανοήσουμε τον καταιγισμό των ποσοτικών πληροφοριών που έχουν γίνει μέρος της καθημερινής ζωής (Sriraman & Knott, 2009).

Στην έρευνα των Albarracín & Gorgorió (2015) σε 15χρονους μαθητές, χρησιμοποιήθηκαν προβλήματα εκτίμησης μεγάλων αριθμών (πλήθος ανθρώπων) και μελετήθηκε η διαδικασία επίλυσής τους καθώς και με ποιους τρόπους αυτά τα προβλήματα παρείχαν γνώση κριτικής ανάλυσης των πληροφοριών που παρουσιάζονται στα ΜΜΕ (π.χ. αριθμός ατόμων σε μία συγκέντρωση διαμαρτυρίας). Η διαδικασία ξεκίνησε με ένα πρόβλημα πιο οικείο για τους μαθητές: Τον αριθμό των ατόμων που χωράνε στην αυλή του σχολείου για μία συναυλία. Οι ομάδες των μαθητών ανέπτυξαν διάφορες στρατηγικές επίλυσης, χρησιμοποιώντας και πραγματικές μετρήσεις στην αυλή τους. Στη συνέχεια, έπρεπε να λύσουν ανάλογα προβλήματα για περιοχές που δεν τους ήταν οικείες και περιλάμβαναν μεταβλητές που έπρεπε να λάβουν υπόψη, όπως δέντρα που ήταν στην περιοχή και περιοχές όπου ο κόσμος μπορεί να είναι καθιστός. Στο σημείο αυτό, αφού οι μαθητές έλυναν το πρόβλημα, στη συνέχεια έπρεπε να συγκρίνουν τις πληροφορίες που δόθηκαν από τα ΜΜΕ για αντίστοιχες περιπτώσεις και να τις απορρίψουν ή να τις δεχτούν. Για παράδειγμα, σε πρόβλημα με τον αριθμό ατόμων που έλαβαν μέρος σε μία πολιτική συνάντηση, οι μαθητές μπόρεσαν να δουν ότι τα στοιχεία που διατέθηκαν από το πολιτικό κόμμα ήταν υπερβολικά, ωστόσο ορισμένα από τα μέσα ενημέρωσης δεν τα αμφισβήτησαν. Σύμφωνα με τους ερευνητές, οι μαθητές κατάφεραν να αναπτύξουν την κριτική τους ικανότητα και να αποκτήσουν εργαλεία για την αξιολόγηση των δεδομένων που έχουν δημοσιοποιηθεί από τα ΜΜΕ, τα οποία περιλαμβάνουν μη δημόσιες μεθόδους καταμέτρησης και επηρεάζουν την κοινή γνώμη.

1.2.3 Έρευνες για τις στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων Fermi από τους μαθητές

Η επίλυση προβλημάτων Fermi, δεδομένου ότι είναι προβλήματα που σπάνια συναντούν οι μαθητές στην τάξη, απαιτεί από αυτούς να εμπλακούν και να επινοήσουν τις δικές τους στρατηγικές, ενώ επίσης απαιτεί να συμπεριλάβουν αυτές τις στρατηγικές στη βάση των μαθηματικών γνώσεων τους. Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1992), αυτό μπορεί να παίξει σημαντικό ρόλο στο να γίνουν οι μαθητές ικανοί λύτες προβλημάτων και προτείνει να βοηθηθούν ώστε να αναπτύξουν έναν μεγάλο αριθμό πιο συγκεκριμένων στρατηγικών επίλυσης και να δημιουργήσουν σαφείς δεσμούς μεταξύ διαφορετικών ειδών προβλημάτων. Με τον όρο στρατηγική εννοείται ένα σχέδιο δράσης ή πολιτικής, που αποσκοπεί στην επίτευξη ενός μεγάλου ή γενικού στόχου (Albarracín & Gorgorió, 2014).

Ορισμένοι ερευνητές ασχολήθηκαν με την διερεύνηση των στρατηγικών που ανέπτυξαν οι μαθητές πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κατά την επίλυση προβλημάτων Fermi. Τα προβλήματα αυτά ήταν προβλήματα εκτίμησης μεγάλων αριθμών (πλήθους ανθρώπων ή αντικειμένων) σε έναν δεδομένο χώρο/επιφάνεια.

Στις έρευνες των Albarracín & Gorgorió (2013) και Albarracín & Gorgorió (2014) κατηγοριοποιήθηκαν οι στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν από μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (12 – 16 ετών) κατά την επίλυση προβλημάτων Fermi που αφορούσαν την εκτίμηση πλήθους ατόμων/αντικειμένων σε συγκεκριμένη επιφάνεια/όγκο (π.χ. αριθμός ατόμων που χωράνε στην σχολική αυλή ή πόσα ποτήρια νερού μπορούν να γεμίσουν μια πισίνα) και τις ανέλυσαν ως προς την αποτελεσματικότητά τους. Οι μαθητές εργάστηκαν ατομικά και οι κατηγορίες στρατηγικών που προέκυψαν ήταν οι εξής:

- *Απουσία μιας καλά καθορισμένης στρατηγικής.* (Δεν απαντήθηκε, δεν ολοκληρώθηκε, ακατανόητες λύσεις, απέτυχαν να περιγράψουν επαρκώς τη διαδικασία).
- *Εξωτερική πηγή πληροφοριών.* (Η ευθύνη της απάντησης στο πρόβλημα μετατίθεται σε ένα τρίτο μέρος, που υποτίθεται ότι θα πρέπει να είναι η πηγή των πληροφοριών. Π.χ. «Τηλεφωνείς στην αστυνομία και τους ρωτάς»).
- *Εξαντλητική καταμέτρηση*. (Προτείνεται ότι πρέπει να γίνει χρήση ενός μηχανικού τεχνουργήματος μέτρησης. Π.χ. «Θα τοποθετούσα έναν ειδικό αισθητήρα στο σημείο που θα ξεκινούσε η διαδήλωση, έτσι ώστε όταν οι άνθρωποι πατούσαν πάνω, θα τους μετρούσε», «θα έβγαζα αεροφωτογραφίες» κ.α. ή στο πρόβλημα με τα ποτήρια νερού που γεμίζουν μία πισίνα: «Θα έπαιρνα ποτήρια και θα τα γέμιζα με νερό από την πισίνα και όταν το νερό της πισίνας θα τελείωνε, θα τα μετρούσα»).
- *Μείωση του προβλήματος και χρήση αναλογίας.* (Περιορισμός της μεγάλης περιοχής, σε μία μικρότερη περιοχή στην οποία είναι εφικτή η άμεση μέτρηση του αριθμού των ατόμων που περιέχονται, μειώνοντας το πρόβλημα σε μικρότερο και πολλαπλασιασμός του αποτελέσματος με τον συντελεστή αναλογίας που συσχετίζει τη συνολική επιφάνεια της παιδικής χαράς με τη συνολική επιφάνεια της επιλεγμένης περιοχής).
- *Χρήση μοντέλου κατανομής πλέγματος.* (Καθορισμός κατανομής ατόμων/αντικειμένων σε ένα πλέγμα (π.χ. γραμμές και στήλες) και υπολογισμός αριθμού ατόμων στη συνολική επιφάνεια, πολλαπλασιάζοντας).
- *Επανάληψη της μέτρησης μιας βασικής μονάδας αναφοράς.* (Προσδιορισμός της συνολικής μέτρησης της επιφάνειας όπου τοποθετούνται τα προς μέτρηση αντικείμενα διαιρώντας το με τη μέτρηση ενός μόνο αντικειμένου, δηλαδή υπολογίζουν τον αριθμό των στοιχείων με την εισαγωγή μιας μονάδας αναφοράς, π.χ. τον χώρο που καταλαμβάνει ένα άτομο).
- *Χρήση μετρήσεων συγκέντρωσης*. (Ο λόγος μεταξύ του αριθμού των αντικειμένων που κατανέμονται σε ένα δεδομένο χώρο και του χώρου που καταλαμβάνουν (π.χ. άνθρωποι ανά τετραγωνικό μέτρο). Πρόκειται για την ιδέα της πυκνότητας πλήθους.)

Στις συγκεκριμένες έρευνες δε ζητήθηκε από τους μαθητές η επίλυση των προβλημάτων αλλά μόνο η περιγραφή του σχεδίου επίλυσης. Έτσι, διερευνήθηκε σε ποιο βαθμό οι διαφορετικές στρατηγικές θα μπορούσαν να είναι χρήσιμες για την επίλυση των προβλημάτων που παρουσιάζονται. Το αν το σχέδιο επίλυσης θα ήταν τελικά αποτελεσματικό, κρίθηκε θεωρώντας δεδομένο ότι θα το έλυνε κάποιος με τις σωστές διαδικασίες, ακολουθώντας την συγκεκριμένη στρατηγική. Έτσι, δημιουργήθηκαν τρεις κατηγορίες:

Α) Το σχέδιο θα επέτρεπε την επίλυση του προβλήματος.

Β) Δεν θα οδηγούσε στην επίλυση του προβλήματος (ημιτελές, χρησιμοποιεί έννοιες με λάθος τρόπο, έχει κενά πληροφοριών στην περιγραφή του ή περιέχει σφάλματα υπολογισμού).

Γ) Θα έλυνε το πρόβλημα «μόνο στα χαρτιά», οπότε το προτεινόμενο σχέδιο είναι ανέφικτο. (Είναι τα σχέδια που δεν είναι εννοιολογικά λανθασμένα αλλά δεν μπορούν να εφαρμοστούν λόγω έλλειψης πόρων ή χρόνου, όπως στις περιπτώσεις όπου ο μαθητής προτείνει να μετρηθούν όλα τα στοιχεία που εμπλέκονται, κάτι που θα απαιτούσε πάρα πολύ χρόνο, επομένως είναι πρακτικά αδύνατο).

Τα αποτελέσματα της έρευνας των Albarracín & Gorgorió (2014) έδειξαν ότι τα σχήματα με το «φτωχότερο» περιεχόμενο—χωρίς στρατηγική, με χρήση εξωτερικής πηγής ή εξαντλητικής καταμέτρησης—αποτελούσαν το 52,9% του συνόλου και είναι αυτά που δεν επιτρέπουν την εργασία με μαθηματικό περιεχόμενο στην τάξη. Ωστόσο, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να πυροδοτήσουν μια συζήτηση σχετικά με το τι σημαίνει η επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος. Από την άλλη πλευρά, φάνηκε ότι σχεδόν οι μισοί μαθητές διαφορετικών ηλικιών, χωρίς καμία εμπειρία σε τέτοιου είδους προβλήματα, είναι σε θέση να δημιουργήσουν σχήματα που περιλαμβάνουν κατάλληλες μαθηματικές στρατηγικές για τα προβλήματα που παρουσιάζονται.

Στην έρευνα των Albarracín & Gorgorió (2013), τα σχέδια των μαθητών χωρίστηκαν σε τρεις κατηγορίες, όπως παραπάνω, και επιπλέον θεωρήθηκε ότι η κατηγορία των σχεδίων που έχουν θεωρηθεί ως «κατάλληλα για την επίλυση» μπορούν να οδηγήσουν σε μοντελοποίηση, σε αντίθεση με αυτά που δεν οδηγούν σε επίλυση ή που λύνουν το πρόβλημα «μόνο στα χαρτιά», τα οποία δεν θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε μοντελοποίηση.

Η έρευνα των Albarracín & Gorgorió (2018) εστίασε στην επίλυση μια σειράς προβλημάτων Fermi από μαθητές 16 χρονών, με τη διαφορά με τις προηγούμενες έρευνες, ότι θα εργάζονταν αρχικά ατομικά και έπειτα σε μικρές ομάδες, όπου θα μοιράζονταν τα αρχικά (ατομικά) τους σχέδια επίλυσης και θα κατέληγαν στον «καλύτερο τρόπο» για να τα λύσουν. Οι ερευνητές χαρακτήρισαν τα μοντέλα που δημιούργησαν οι μαθητές σύμφωνα με τις έννοιες στις οποίες βασίζονται οι στρατηγικές επίλυσης. Με αυτόν τον τρόπο παρατήρησαν ότι οι έννοιες που δημιουργούνται σε όλη την ακολουθία προβλημάτων υποστηρίζουν τρία διαφορετικά μοντέλα: κατανομή πλέγματος, επανάληψη μιας μονάδας αναφοράς και πυκνότητα πλήθους. Αυτά τα τρία μοντέλα εμφανίστηκαν από την αρχή, όταν οι μαθητές εργάζονταν ατομικά. Ωστόσο, στην συνέχεια παρατηρήθηκε ότι καθώς οι μαθητές εργάζονταν ομαδικά, σταδιακά εγκατέλειπαν τις «φτωχότερες» στρατηγικές, υιοθετώντας άλλες ανώτερες, και επιλέγοντας τελικά στις περισσότερες περιπτώσεις το μοντέλο της πυκνότητας πλήθους.

Οι Albarracín & Gorgorió (2019) διερεύνησαν τις στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν και τα μαθηματικά μοντέλα που αναπτύχθηκαν από μαθητές Ε’ και Στ’ τάξης, για την επίλυση προβλημάτων Fermi, ενώ εργάζονταν ομαδικά. Στους μαθητές δόθηκε η δυνατότητα εργασίας στο πεδίο. Τα προβλήματα χωρίστηκαν σε δύο τύπους: Α) Εκτίμηση πλήθους ανθρώπων που χωράνε σε μία συγκεκριμένη επιφάνεια, Β) Εκτίμηση ποσότητας αντικειμένων που χωράνε σε μία συγκεκριμένη επιφάνεια ή σε έναν ορισμένο όγκο. Για τον τύπο Α, οι στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν ήταν η μέτρηση συγκέντρωσης, το σημείο αναφοράς και το μοντέλο κατανομής πλέγματος. Για τον τύπο Β, οι επιπλέον στρατηγικές που εντοπίστηκαν ήταν η εξωτερική πηγή πληροφοριών και η μείωση του προβλήματος και χρήση αναλογίας. Η επικρατέστερη στρατηγική και στους δύο τύπους προβλημάτων ήταν το *μοντέλο κατανομής πλέγματος*, η χρήση της οποίας ήταν λιγότερο συχνή στην δευτεροβάθμια, όπως φάνηκε από προηγούμενη έρευνα των Albarracín & Gorgorió (2014). Αυτό οδήγησε τους ερευνητές στην κατανόηση ότι οι μαθητές πρωτοβάθμιας δεν έχουν ακόμη τη γνώση για την εφαρμογή άλλων τύπων εκτίμησης για το πρόβλημα, αλλά και ότι η κατανομή πλέγματος μπορεί να προταθεί ως πρωταρχικό μοντέλο για να εισάγει έννοιες όπως η πυκνότητα πλήθους.

Τέλος, η έρευνα των Ferrando & Albarracín (2021) διέφερε από τις προηγούμενες στο ότι οι συμμετέχοντες ήταν μαθητές και των δύο βαθμίδων, πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας (8-16 ετών) και χρησιμοποιήθηκε το ίδιο πρόβλημα Fermi (εκτίμηση πλήθους ανθρώπων που χωράνε στο προαύλιο του σχολείου για μία συναυλία) σε όλους. Οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες και το πρόβλημα τους δόθηκε στην τάξη, όπου είχαν χρόνο να συζητήσουν τις προτάσεις τους για την επίλυση. Στη συνέχεια, δόθηκε η δυνατότητα να βγουν στο προαύλιο του σχολείου και να συλλέξουν τα απαραίτητα δεδομένα και έπειτα επέστρεφαν στην τάξη, όπου έλυναν το πρόβλημα και συνέτασσαν εκθέσεις επίλυσης, στις οποίες έπρεπε να περιγράψουν τις μεθόδους επίλυσης και τα αποτελέσματα.

Το πρόβλημα της έρευνας αφορούσε μια δισδιάστατη κατάσταση και οι μαθητές αναμενόταν να επιχειρηματολογήσουν για την εκτίμηση του αριθμού των στοιχείων σε μια ορθογώνια επιφάνεια. Ωστόσο, κατά την ανάλυση των λύσεων των μαθητών, παρατηρήθηκε ότι πολλοί από αυτούς προσεγγίζουν το πρόβλημα από μονοδιάστατη σκοπιά.

Έτσι, σε σχέση με προηγούμενες έρευνες παρατηρήθηκαν οι εξής επιπλέον στρατηγικές:

- *Αποτελεσματική καταμέτρηση* (γρήγορη καταμέτρηση, ανά 4 άτομα)
- *Γραμμικό σημείο αναφοράς* (Εκτιμούν ότι ένας άνθρωπος καταλαμβάνει 30εκ. και διαιρούν το μήκος κάθε πλευράς -μετρημένο σε εκατοστά- με το 30).
- *Γραμμική μέτρηση συγκέντρωσης* (Μετρούν το μήκος και το πλάτος της επιφάνειας και έπειτα εκτιμώντας πόσοι άνθρωποι καταλαμβάνουν 1 μ., υπολογίζουν πόσοι υπάρχουν σε κάθε πλευρά και πολλαπλασιάζουν. Σύμφωνα με τους ερευνητές, σε αυτή τη στρατηγική υπάρχει μια διαισθητική ιδέα της πυκνότητας, ωστόσο γίνεται χρήση μονοδιάστατου μεγέθους – άνθρωποι / γραμμικό μέτρο).

Οι ερευνητές, αντιστοίχισαν τις στρατηγικές των μαθητών με μονοδιάστατα και δισδιάστατα μοντέλα. Έτσι, στην κατηγορία των μονοδιάστατων μοντέλων ανήκουν το *μοντέλο της καταμέτρησης* (στρατηγικές εξαντλητικής και αποτελεσματικής καταμέτρησης) και το *μοντέλο της κατανομής πλέγματος* (στρατηγικές αποτελεσματικής και εξαντλητικής καταμέτρησης, γραμμικό σημείο αναφοράς και γραμμική μέτρηση συγκέντρωσης). Στα δισδιάστατα μοντέλα ανήκει το *ακανόνιστο ομοιογενές μοντέλο*, όπου οι μαθητές θεώρησαν ότι η κατανομή πλήθους ήταν ακανόνιστη αλλά ομοιογενής ως προς την πυκνότητα ή τον εκτιμώμενο χώρο που καταλαμβάνει (στρατηγικές σημείου αναφοράς και μέτρησης συγκέντρωσης) και το *ακανόνιστο ανομοιογενές μοντέλο*, όπου χρησιμοποιούνται διαφοροποιημένες ή μεταβλητές πυκνότητες / χώρος που καταλαμβάνεται από ένα ή πολλά άτομα (στρατηγική μέτρησης συγκέντρωσης).

Παρατηρήθηκε ότι, καθώς αυξάνεται το επίπεδο των μαθητών, αυξάνεται ο αριθμός των στρατηγικών που βασίζονται σε δισδιάστατο συλλογισμό (Σημείο αναφοράς, μέτρηση συγκέντρωσης). Στην πρωτοβάθμια βρέθηκε μόνο 1 στρατηγική δισδιάστατου συλλογισμού, στην Στ' τάξη, ενώ στην δευτεροβάθμια οι λύσεις δισδιάστατου συλλογισμού ήταν κυρίαρχες.

1.3 Μοντέλα και μαθηματική μοντελοποίηση

Σύμφωνα με τους Lesh & Harel (2003), τα μοντέλα είναι εννοιολογικά συστήματα που γενικά τείνουν να εκφράζονται με την χρήση μιας ποικιλίας αλληλεπιδρώντων αναπαραστατικών μέσων, που μπορεί να περιλαμβάνουν γραπτά σύμβολα, προφορική γλώσσα, γραφικά και διαγράμματα σε υπολογιστή ή χαρτί και μεταφορές βασισμένες στην εμπειρία. Ο σκοπός τους είναι να κατασκευάσουν, να περιγράψουν ή να επεξηγήσουν άλλα συστήματα. Τα μοντέλα περιλαμβάνουν αφενός ένα εννοιολογικό σύστημα για την περιγραφή ή επεξήγηση των σχετικών μαθηματικών αντικειμένων, σχέσεων, δράσεων, μοτίβων και κανονικοτήτων που αποδίδονται στην κατάσταση της επίλυσης προβλήματος και αφετέρου τις συνοδευτικές διαδικασίες για τη δημιουργία χρήσιμων κατασκευών, χειρισμών ή προβλέψεων για την επίτευξη σαφώς αναγνωρισμένων στόχων. Σύμφωνα με τον Greer (1997), τα μοντέλα θα πρέπει να μπορούν να επαναχρησιμοποιηθούν σε διαφορετικές καταστάσεις.

Ενώ το τελικό προϊόν είναι γνωστό ως μοντέλο, οι γνωστικές δραστηριότητες που προηγούνται, οι οποίες περιλαμβάνουν και απαιτούν συλλογισμό, χαρακτηρίζονται ως «μοντελοποίηση» (Jacobs & Durandt, 2016). Η μαθηματική μοντελοποίηση δεν είναι ένα συγκεκριμένο σύνολο μαθηματικών γνώσεων αλλά μία διαδικασία και, όπως όλες οι διαδικασίες, έχει μία ποικιλία ορισμών με πανομοιότυπο νόημα (Lingefjärd, 2007).

Ο Pollak (1979) υποστήριξε ότι η μαθηματική μοντελοποίηση περιλαμβάνει τη μετάφραση μεταξύ του πραγματικού κόσμου και των μαθηματικών, όπου οι μαθητές χρησιμοποιούν μοντέλα για να αναλύσουν αυθεντικές καταστάσεις. Έτσι, η μαθηματική μοντελοποίηση αφορά τη χρήση μαθηματικών και μοντέλων για την διερεύνηση προβλημάτων και η διαδικασία περιλαμβάνει κατασκευή και αναθεώρηση ενός μαθηματικού μοντέλου για την αναπαράσταση και επίλυση πραγματικών καταστάσεων. Οι Lesh & Doerr (2003) αναφέρουν ότι η μαθηματική μοντελοποίηση περιλαμβάνει ακολουθίες επαναληπτικών κύκλων στις οποίες οι περιγραφές, οι επεξηγήσεις και οι προβλέψεις βελτιώνονται σταδιακά και αναθεωρούνται για να δημιουργήσουν ουσιαστικές αναπαραστάσεις. Αλλά και οι Zbiek & Conner (2006) θεωρούν τη μαθηματική μοντελοποίηση μια μη γραμμική διαδικασία που περιλαμβάνει στοιχεία τόσο ενός πραγματικού κόσμου όσο και ενός μαθηματικού. Εξήγησαν περαιτέρω, ότι η μοντελοποίηση είναι μια επαναληπτική διαδικασία που περιλαμβάνει αναθεωρήσεις πριν καταλήξει κανείς σε ένα αποδεκτό συμπέρασμα. Η διαδικασία συνεπάγεται κίνηση μεταξύ των στοιχείων, όπως η πραγματική κατάσταση, η μαθηματική οντότητα και η μαθηματική λύση.

Ένας κύκλος μαθηματικής μοντελοποίησης αποτελείται συνήθως από τέσσερις διαδοχικές φάσεις: 1) «μαθηματικοποίηση» (η μετάφραση ενός πραγματικού προβλήματος σε πρόβλημα μαθηματικών), 2) «εργασία με τα μαθηματικά» (η χρήση κατάλληλων μαθηματικών για την επίλυση του προβλήματος), 3) «ερμηνεία» (η κατανόηση της λύσης ως προς τη συνάφειά της και την καταλληλότητά της αναφορικά με την πραγματική κατάσταση) και 4) «αναστοχασμός» (η εξέταση των υποθέσεων και των επακόλουθων περιορισμών της προτεινόμενης λύσης) (Balakrishnan, Yen & Goh, 2010).

1.3.1 Η σημασία και τα οφέλη της μαθηματικής μοντελοποίησης στην μαθηματική εκπαίδευση

Η μαθηματική μοντελοποίηση θεωρείται μια σημαντική προσέγγιση, η οποία δίνει έμφαση στην αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθηματικών και του πραγματικού κόσμου και στην προετοιμασία των μαθητών να αντιμετωπίσουν τη δυναμική και πολύπλοκη κατάσταση της εποχής μας (Lesh & Doerr, 2003).

Οι δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης θεωρούνται δραστηριότητες «υψηλού γνωστικού επιπέδου», καθώς σε αυτές περιλαμβάνονται η επεξεργασία του αντικειμένου με κριτικό τρόπο και ανοιχτές ή μη δομημένες δραστηριότητες, όπου δεν υπάρχει μία προβλέψιμη πορεία για την προσέγγισή τους και οι μαθητές καλούνται να αυτενεργήσουν. Αντίθετα, στις δραστηριότητες «χαμηλού γνωστικού επιπέδου» η μάθηση έχει στόχο την απλή αναπαραγωγή και οι μαθητές ασχολούνται περισσότερο «μηχανικά» με το γνωστικό υλικό, μαθαίνοντάς το «απ’ έξω» ή αφορούν δραστηριότητες που για την ολοκλήρωσή τους απαιτούν διαδικασίες που είναι καθορισμένες «βήμα – βήμα», χωρίς απαραίτητα να υπάρχει πλήρης κατανόηση των διαδικασιών αυτών από τους μαθητές (Chin & Brown, 2000).

Η διδασκαλία της μοντελοποίησης, από τη σκοπιά της διδασκαλίας των μαθηματικών, ταιριάζει με την κονστρουκτιβιστική και κοινωνικο-κονστρουκτιβιστική άποψη της διδασκαλίας των μαθηματικών, σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων μοντελοποίησης (Mischo & Maaß, 2013). Στα παραδοσιακά μαθηματικά προβλήματα, οι μαθητές πρέπει να εφαρμόζουν συγκεκριμένες διαδικασίες και περιορισμένη μαθηματική σκέψη για να παρέχουν λύσεις. Οι δραστηριότητες μοντελοποίησης, από την άλλη πλευρά, περιλαμβάνουν ελλιπείς, διφορούμενες ή απροσδιόριστες πληροφορίες σχετικά με μια κατάσταση και οι μαθητές καλούνται να την μαθηματικοποιήσουν με τρόπους που έχουν νόημα γι’ αυτούς (Shahbari, 2018). Σύμφωνα με τους Asempapa & Brooks (2020), η κονστρουκτιβιστική παιδαγωγική συνήθως πιστεύει ότι τα παιδιά αντιλαμβάνονται τα μαθηματικά ως αποτέλεσμα που προέρχεται από πραγματικές καταστάσεις. Οι κονστρουκτιβιστικές διδακτικές προσεγγίσεις αναδεικνύουν τις αναστοχαστικές, διαπραγματευτικές, επαγωγικές και συνεργατικές συνιστώσες στη διδασκαλία (Tiilikainen et al., 2019). Ταυτόχρονα, η μαθηματική μοντελοποίηση συνήθως απαιτεί τη μετάφραση στοιχείων των τυπικών μαθηματικών σε όρους γεγονότων (προσωπικών ή κοινωνικών, μη μαθηματικών) όπως δηλώνει ο Hennig (2010). Έτσι, μπορεί να ειπωθεί ότι η μαθηματική μοντελοποίηση ενσωματώνει τη φιλοσοφία του κονστρουκτιβισμού στη διδασκαλία των μαθηματικών (Hidayat et al., 2021).

Τα έργα μοντελοποίησης έχει φανεί ότι αναπτύσσουν τον συλλογισμό και την ικανότητα επικοινωνίας των μαθητών και τους παρέχουν την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν πολλαπλές αναπαραστάσεις και να εφαρμόσουν τις κατάλληλες μαθηματικές μεθόδους με αποτέλεσμα την ανάπτυξη δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων (Pollak, 1979· Kang & Noh, 2012· Ng, 2013). Σημαντικό είναι και το ότι κατά τη διάρκεια ενασχόλησης με έργα μαθηματικής μοντελοποίησης, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να συμμετάσχουν σε μαθηματικές εργασίες που ταιριάζουν με την τρέχουσα εννοιολογική τους κατανόηση, παρουσιάζοντας ταυτόχρονα ευκαιρίες για πρόκληση και περαιτέρω ανάπτυξη (Flevares & Schiff, 2013).

Ένα ακόμα όφελος από την ενασχόληση με έργα μαθηματικής μοντελοποίησης είναι ότι αυτά ενσταλάζουν την αξία της ομαδικής εργασίας μέσω της κοινωνικής αλληλεπίδρασης και αποτελούν γόνιμο έδαφος για την μαθηματική ανάπτυξη (Asempapa, 2016). Επιπλέον, βελτιώνουν τις ικανότητες λήψης αποφάσεων καθώς συνδέουν την τάξη μαθηματικών με καταστάσεις πραγματικής ζωής κάνοντας την εκμάθηση των μαθηματικών σχετική και με νόημα (Jacobs & Durandt, 2016). Γενικότερα, η μαθηματική μοντελοποίηση φαίνεται να είναι κατάλληλη και για την διαμόρφωση μιας ευνοϊκής στάσης απέναντι στα μαθηματικά (Hidayat et al., 2021).

Αν και τα θεωρητικά πλεονεκτήματα της διδακτικής χρήσης της μαθηματικής μοντελοποίησης είναι γνωστά, ωστόσο δεν έχει γίνει ακόμα αισθητή η παρουσία της στην πλειοψηφία των σχολικών αιθουσών (Albarracín & Gorgorió, 2020). Υπάρχουν διάφοροι λόγοι για τους οποίους η χρήση της μαθηματικής μοντελοποίησης δεν έχει αυξηθεί στις τάξεις της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Για παράδειγμα, έχουν εντοπιστεί θεσμικοί περιορισμοί που καθιστούν δύσκολη την προσαρμογή των δραστηριοτήτων μοντελοποίησης στην κανονική λειτουργία των σχολείων (Barquero, Bosch & Romo, 2018) και οι εκπαιδευτικοί βλέπουν περισσότερα εμπόδια παρά πλεονεκτήματα από τη χρήση της (Schmidt, 2011), κάτι που παίζει σημαντικό ρόλο, αφού έχει παρατηρηθεί ότι οι στάσεις των εκπαιδευτικών και η εκπαίδευσή τους είναι το κλειδί για την τακτική χρήση δραστηριοτήτων μοντελοποίησης (Schmidt, 2011).

1.3.2 Η μαθηματική μοντελοποίηση στο ελληνικό Πρόγραμμα Σπουδών και στα σχολικά εγχειρίδια

Αν και η μαθηματική μοντελοποίηση και η ενασχόληση των μαθητών με έργα μαθηματικής μοντελοποίησης είναι τόσο σημαντική, παρατηρείται η απουσία της από το ελληνικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΔΕΠΠΣ, 2003), το οποίο είναι το ισχύον πρόγραμμα σπουδών της χώρας.

Αντίθετα, στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών του Δημοτικού (2022) υπάρχουν αναφορές στη μαθηματική μοντελοποίηση. Αρχικά, στη «σκοποθεσία» του Προγράμματος Σπουδών αναφέρεται: *«Το νέο ΠΣ φιλοδοξεί να προσφέρει σε όλους/ες τους/τις μαθητές/τριες την ευκαιρία να είναι σε θέση, μέσα από τη συμμετοχή τους στα μαθήματα, να αναπτύσσουν μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές, όπως (…) η μοντελοποίηση* (σ. 3). Επιπλέον, στο «Περιεχόμενο» αναφέρεται: «*Η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού από τους/τις μαθητές/-τριες από την υποχρεωτική εκπαίδευση έως και το Λύκειο* *περιλαμβάνει την αξιοποίηση της εννοιολογικής και της διαδικαστικής αριθμητικής γνώσης για τη μοντελοποίηση καταστάσεων, την επίλυση προβλημάτων και την επικοινωνία με τους άλλους.»* (σ. 5). Στα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα της Γ' τάξης Δημοτικού είναι οι μαθητές να *«διατυπώνουν ένα πρόβλημα πρόσθεσης, αφαίρεσης ή πολλαπλασιασμού που να μοντελοποιείται από δεδομένη αριθμητική παράσταση ή σχέση.»* (σ. 36), στην Δ' τάξη να *«διατυπώνουν ένα πρόβλημα με συνδυασμό δύο οποιωνδήποτε πράξεων που να μοντελοποιείται από δεδομένη αριθμητική παράσταση ή σχέση.»* (σ. 48), ενώ στην Στ' τάξη να *«επιλύουν προβλήματα της καθημερινής ζωής και μοντελοποιούν σε διάφορα πλαίσια χρησιμοποιώντας ποσοστά.»* (σ. 69), *«να χρησιμοποιούν τη γνώση των θετικών ρητών αριθμών και τις τέσσερις πράξεις για να μοντελοποιούν και να επιλύουν προβλήματα σε ρεαλιστικά και μαθηματικά πλαίσια.»* (σ. 70), να *«μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με ακέραιους αριθμούς σε πραγματικά / ρεαλιστικά και μαθηματικά πλαίσια.»* (σ. 71) και να *«διατυπώνουν ένα πρόβλημα που να μοντελοποιείται από δεδομένη αριθμητική παράσταση ή σχέση και το επιλύουν.»* (σ. 72).

Εκτός από τα προγράμματα σπουδών, σημαντικά θεωρούνται και τα σχολικά εγχειρίδια, καθώς το περιεχόμενό τους έχει άμεση επίδραση στο τι διδάσκεται στις σχολικές τάξεις και στο τι μαθαίνουν οι μαθητές (Schmidt et al., 2002· Reys et al., 2004· Pepin, 2008). Ακόμα, υποστηρίζεται ότι τα σχολικά εγχειρίδια είναι οι διαμεσολαβητές ανάμεσα *«στην πρόθεση του αναλυτικού προγράμματος και στη διδασκαλία που αναπτύσσεται στη σχολική τάξη»* (Valverde et al., 2002, σ. 2). Τα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών Δημοτικού και Γυμνασίου που χρησιμοποιούνται αυτή τη στιγμή στα σχολεία, εκδόθηκαν το 2006. Σχετικά με τα έργα μοντελοποίησης στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια, αυτά απουσιάζουν ή είναι ελάχιστα, κάτι που δεν προκαλεί εντύπωση, αφού το περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων στηρίζεται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα (Reys et al., 2004) και, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η μαθηματική μοντελοποίηση απουσιάζει από το ελληνικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΔΕΠΠΣ, 2003). Το 2018 αποσύρθηκε το βιβλίο μαθηματικών της Ε' τάξης και εγκρίθηκε νέο σχολικό εγχειρίδιο, το οποίο χρησιμοποιείται από το σχ. έτος 2018-19. Το συγκεκριμένο εγχειρίδιο βασίζεται εκτός από το Πρόγραμμα Σπουδών του 2003 και στο Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (2011) αλλά και σε αυτό το εγχειρίδιο εντοπίστηκε μόλις ένα πρόβλημα μαθηματικής μοντελοποίησης (Τετράδιο Εργασιών β' τεύχος, σ. 16).

1.4 Εκπαιδευτικοί και μαθηματική μοντελοποίηση

1.4.1 Η εκπαίδευση των εκπαιδευτικών σε έργα μοντελοποίησης

Με την επίλυση προβλημάτων και την μοντελοποίηση να κατέχουν πλέον εξέχουσα θέση σε πολλά μαθηματικά προγράμματα σπουδών για την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών, το ιδανικό θα ήταν οι δάσκαλοι να είναι καταρτισμένοι ώστε να εντάσσουν όλο και περισσότερο έργα μοντελοποίησης στις τάξεις τους (Jacobs & Durandt, 2016). Ωστόσο, πολλοί ερευνητές αναφέρουν την έλλειψη κατάλληλης προετοιμασίας των εκπαιδευτικών όσον αφορά την πλήρη κατανόηση και τη διδασκαλία της μοντελοποίησης (Ikeda, 2013· Ng, 2013· Karali & Durmus, 2015). Επιπλέον, η ανοιχτότητα των έργων μοντελοποίησης καθώς και η καλλιέργεια μιας νοοτροπίας στην τάξη που να ευνοεί την μοντελοποίηση, αποτελούν πρόκληση για τους εκπαιδευτικούς (Jacobs & Durandt, 2016· Asempapa & Sturgill, 2019) και θέτουν νέες απαιτήσεις, καθώς μπορούν ακόμη και να απαιτούν γνώσεις που υπερβαίνουν τα σχολικά αναλυτικά προγράμματα (Asempapa & Sturgill, 2019).

Στην έρευνα του Asempapa (2019) σε 61 εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας, το 77% των δασκάλων απάντησαν ότι δεν είχαν λάβει καμία εκπαίδευση στη μαθηματική μοντελοποίηση κατά τη φοίτησή τους στο Πανεπιστήμιο. Κάτι τέτοιο, σε συνδυασμό με το ότι οι δάσκαλοι μπορεί να μην είναι σε θέση να εκτιμήσουν τα οφέλη και τη σημασία των έργων μαθηματικής μοντελοποίησης για την ανάπτυξη των μαθηματικών ικανοτήτων των μαθητών τους, εάν οι ίδιοι δεν εκτεθούν επαρκώς σε τέτοια έργα και δραστηριότητες (Soon & Cheng, 2013) αλλά και ότι η περιορισμένη έκθεσή τους σε έργα μοντελοποίησης, προκαλεί την έλλειψη ετοιμότητάς τους να τα υλοποιήσουν (Ng, 2013), αναδεικνύει την ανάγκη της εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών. Πολλοί ερευνητές τονίζουν την ζωτική σημασία των εκπαιδευτικών προγραμμάτων των προπτυχιακών εκπαιδευτικών, τα οποία θα πρέπει να τους εκθέτουν στο βασικό περιεχόμενο της μοντελοποίησης, σε έργα μοντελοποίησης διαφόρων επιπέδων καθώς και στον τρόπο προσέγγισης και επίλυσής τους και τελικά στην παιδαγωγική της μοντελοποίησης (Liljedahl et al., 2009· Kang & Noh, 2012· Ng, 2013).

1.4.2 Έρευνες για την ικανότητα των εκπαιδευτικών στην επίλυση προβλημάτων μοντελοποίησης και προβλημάτων Fermi

Δεδομένης της σημασίας που έχει η μαθηματική μοντελοποίηση στη μαθηματική εκπαίδευση, έρευνες μελέτησαν την ικανότητα μελλοντικών και εν ενεργεία εκπαιδευτικών στην επίλυση τέτοιων έργων. Οι έρευνες αυτές, αν και περιορισμένες, ανέδειξαν ορισμένες δυσκολίες και λάθη των εκπαιδευτικών.

Σύμφωνα με ερευνητές, οι εκπαιδευτικοί θεωρούν δύσκολη τη μαθηματική μοντελοποίηση (Blum & Ferri, 2009), έχουν κακή κατανόηση των μαθηματικών μοντέλων και της μοντελοποίησης και περιορισμένη εμπειρία σχετικά με την έννοια της μαθηματικής μοντελοποίησης στην μαθηματική εκπαίδευση (Frejd, 2012). Επιπλέον, έχουν λίγες εμπειρίες στην καθοδήγηση μαθητών σε δραστηριότητες εκτίμησης στην τάξη και θα πρέπει να εκπαιδεύονται πώς να διδάσκουν την εκτίμηση (Yang & Wu, 2012).

Στην έρευνα των Karali & Durmus (2015) προπτυχιακοί εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, αφού έλυσαν προβλήματα μοντελοποίησης, εξέφρασαν την άποψη ότι αντιμετώπισαν δυσκολίες επειδή δεν είχαν συνηθίσει να αντιμετωπίζουν προβλήματα με περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις και δεν μπορούσαν να αποφασίσουν ποια επιλογή ήταν προτιμότερη από τις πολλές επιλογές που υπήρχαν.

Οι Segura & Ferrando (2021), μελέτησαν τα λάθη 224 προπτυχιακών δασκάλων (4^{ου} ακαδημαϊκού έτους) στην επίλυση 4 προβλημάτων Fermi σχετικών με την εκτίμηση πλήθους σε συγκεκριμένη επιφάνεια. Τα προβλήματα αυτά, απαιτούσαν να είναι ικανοί στη διαδικασία μοντελοποίησης, αλλά και να έχουν αποκτήσει δεξιότητες στη μέτρηση και την εκτίμηση, οι οποίες θεωρούνται όχι μόνο απαραίτητες αλλά κεντρικές για την επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μελλοντικοί δάσκαλοι αντιμετωπίζουν δυσκολίες και στις δύο διαδικασίες.

Οι στόχοι της έρευνας ήταν αφενός να αναπτυχθεί μια συγκεκριμένη κατηγοριοποίηση σφαλμάτων για τα προβλήματα Fermi, η οποία λαμβάνει υπόψη τόσο τις φάσεις της διαδικασίας μοντελοποίησης όσο και τις έννοιες και τις διαδικασίες που εμπλέκονται στην εκτίμηση και τη μέτρηση και αφετέρου να αναλύσει τις λύσεις των μελλοντικών εκπαιδευτικών χρησιμοποιώντας ένα σύστημα κατηγοριοποίησης. Επιπλέον, να αναλύσει εάν υπάρχει σχέση μεταξύ των χαρακτηριστικών του πλαισίου ενός προβλήματος Fermi και των τύπων των λαθών που έγιναν. Τα λάθη των προπτυχιακών δασκάλων κατηγοριοποιήθηκαν σε 4 κατηγορίες: Σφάλματα απλοποίησης, σφάλματα μαθηματικοποίησης, σφάλματα μαθηματικών υπολογισμών και σφάλματα ερμηνείας. Κάθε τύπος λαθών περιείχε υποκατηγορίες, δημιουργώντας έτσι 13 τύπους λαθών. Τα αποτελέσματα έδειξαν, ότι οι προπτυχιακοί δάσκαλοι έκαναν μεγάλο αριθμό λαθών (461) κατά την επίλυση των τεσσάρων προβλημάτων Fermi, τα οποία ήταν κυρίως εννοιολογικά, με το 74.11% των συμμετεχόντων να έχουν κάνει τουλάχιστον ένα λάθος. Η πλειονότητα των σφαλμάτων συγκεντρώθηκε στις κατηγορίες του σφάλματος απλοποίησης και του σφάλματος μαθηματικοποίησης, κάτι που σημαίνει ότι οι μεγαλύτερες δυσκολίες τους εντοπίζονται σε δύο φάσεις: Η πρώτη αφορά την κατανόηση της πραγματικής κατάστασης και της δημιουργίας ενός αρχικού (πραγματικού) μοντέλου του χώρου και της κατανομής των προς εκτίμηση στοιχείων (μέσω απλοποίησης και δόμησης) και η δεύτερη την ποσοτικοποίηση και μαθηματικοποίηση του αρχικού μοντέλου (μέσω της γεωμετρίας του χώρου και των στοιχείων και της εκτίμησης της μέτρησης των επιφανειών ή/και των μηκών). Στην κατηγορία της ερμηνείας υπήρχαν λιγότερα λάθη καθώς, εφόσον δεν απαιτούταν, λίγοι λύτες παρείχαν μια αριθμητική εκτίμηση που ερμηνεύεται και αντιπαραβάλλεται με την πραγματική κατάσταση. Έτσι, η μελέτη αυτή δεν παρέχει αρκετά στοιχεία για αυτή την κατηγορία λαθών. Σχετικά με τη σχέση μεταξύ των λαθών και των χαρακτηριστικών του πλαισίου των προβλημάτων Fermi, η έρευνα έδειξε ότι τα περισσότερα λάθη έγιναν στα προβλήματα με περιοχές ακανόνιστου σχήματος και άτακτης κατανομής των στοιχείων. Αντίθετα, φάνηκε ότι προβλήματα Fermi στα οποία τα προς εκτίμηση στοιχεία καταλαμβάνουν μεγάλη επιφάνεια, είναι κανονικού σχήματος και διατάσσονται με τη σειρά σε μια ορθογώνια επιφάνεια, διευκολύνουν τους λύτες.

1.4.3 Η στάση και η γνώση των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική μοντελοποίηση

Οι στάσεις ορίζονται από τον Philipp (2007, σ. 259) ως τρόποι δράσης, αίσθησης ή σκέψης που δείχνουν τη διάθεση ή τη γνώμη κάποιου. Σύμφωνα με τον Papageorgiou (όπως αναφέρεται στο Jacobs & Durandt, 2016), ο συναισθηματικός τομέας της μάθησης περιλαμβάνει συνήθως τρεις διαστάσεις: συναισθήματα, στάσεις και πεποιθήσεις. Οι στάσεις αλλάζουν πιο αργά από τα συναισθήματα, αλλά πιο γρήγορα από τις πεποιθήσεις (Philipp, 2007). Οι στάσεις, όπως και τα συναισθήματα, μπορεί να είναι θετικές ή αρνητικές, και βιώνονται με μικρότερη ένταση από τα συναισθήματα.

Οι στάσεις είναι περισσότερο γνωστικές από τα συναισθήματα αλλά λιγότερο από τις πεποιθήσεις (Philipp, 2007). Ο Aiken (όπως αναφέρεται στο Asempapa, 2016) υποστηρίζει ότι οι στάσεις είναι η προδιάθεση κάποιου να ανταποκρίνεται θετικά ή αρνητικά σε ορισμένα αντικείμενα, καταστάσεις, έννοιες ή πρόσωπα και έτσι αυτές διαθέτουν γνωστικές (πεποιθήσεις ή γνώσεις), συναισθηματικές (συναίσθημα, κίνητρο) και συμπεριφορικές (συμπεριφορά ή τάση για δράση) συνιστώσες. Υπάρχουν τρία κοινά παιδαγωγικά συστατικά του όρου «στάση»: Α) Συναισθηματικά: συναισθήματα σχετικά με το αντικείμενο που ερευνάται. Β) Γνωστικά: αντίληψη ενός ατόμου σε σχέση με το αντικείμενο. Γ) Συμπεριφορικά: η διάθεση του ατόμου να ενεργεί προς το αντικείμενο με συγκεκριμένο τρόπο (Olson & Zanna, 1993).

Όσον αφορά την γνώση των εκπαιδευτικών, το 1987 ο Shulman διέκρινε τη γνώση των εκπαιδευτικών σε επτά κατηγορίες ως εξής: α) Γενικές παιδαγωγικές γνώσεις, με ειδική αναφορά στις ευρείες αρχές και στρατηγικές διαχείρισης και οργάνωσης της τάξης, β) Γνώση για τους μαθητές και τα χαρακτηριστικά τους, γ) Γνώση του πλαισίου της εκπαίδευσης, από τη λειτουργία της ομάδας ή της τάξης, τη διακυβέρνηση και τη χρηματοδότηση των σχολικών περιοχών έως τον χαρακτήρα των κοινοτήτων και των πολιτισμών, δ) Γνώση των εκπαιδευτικών σκοπών και αξιών, ε) Γνώση περιεχομένου, στ) Γνώση του προγράμματος σπουδών και ζ) Παιδαγωγική γνώση περιεχομένου, ένα κράμα περιεχομένου και παιδαγωγικής. Ειδικά οι κατηγορίες της γνώσης περιεχομένου και της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου έχουν απασχολήσει τους ερευνητές σχετικά με την επάρκεια των εκπαιδευτικών και της σχέσης της με την μαθησιακή επίδοση των μαθητών (Ball et al., 2008· Kleickmann et al., 2013). Η γνώση περιεχομένου αναφέρεται στην ποσότητα και στην οργάνωση της γνώσης του εκπαιδευτικού για το γνωστικό αντικείμενο. Έμφαση δίνεται στη βαθιά κατανόηση του αντικειμένου που διδάσκεται (Shulman, 1986). Περιλαμβάνει την εννοιολογική γνώση (γνώση των εννοιών, συμπεριλαμβανομένων αρχών και ορισμών) καθώς και την διαδικαστική γνώση (γνώση διαδικασιών, συμπεριλαμβανομένων των ακολουθιών ενεργειών και των αλγορίθμων που χρησιμοποιούνται στην επίλυση προβλημάτων) (Star, 2005). Η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου αναφέρεται στη γνώση του αντικειμένου για τους σκοπούς της διδασκαλίας. Σύμφωνα με τον Shulman (1986), είναι η γνώση που απαιτείται για να γίνει το αντικείμενο προσιτό στους μαθητές. Προσδιόρισε δύο κεντρικά στοιχεία στην παιδαγωγική γνώση περιεχομένου: τη γνώση των στρατηγικών και αναπαραστάσεων της διδασκαλίας και τη γνώση των αντιλήψεων και των παρανοήσεων των μαθητών.

Η έρευνα για τη στάση και τη γνώση των εκπαιδευτικών, έχει παρακινηθεί από την πεποίθηση ότι παίζουν σημαντικό ρόλο στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών (Zan & Martino, 2007). Αποτελέσματα διάφορων ερευνών δείχνουν ότι οι στάσεις των εκπαιδευτικών απέναντι στα μαθηματικά έχουν ουσιαστική επίδραση στη διδασκαλία των μαθηματικών και στη μάθηση (Thiel, 2010) και η μαθηματική τους γνώση σχετίζεται με την επίδοση των μαθητών (Hill, Rowan, & Ball, 2005).

Ταυτόχρονα ωστόσο, έρευνες έχουν δείξει ότι γενικά οι εκπαιδευτικοί δεν θεωρούν την μοντελοποίηση μαθηματικά και αρκετοί από αυτούς δε νιώθουν αρκετά ικανοί, ώστε να εκτελέσουν έργα μαθηματικής μοντελοποίησης (Schmidt, 2011). Οι εκπαιδευτικοί παίζουν ζωτικό ρόλο στην επίδοση των μαθητών, άρα, η ανεπαρκής γνώση και η αρνητική στάση απέναντι στη μαθηματική μοντελοποίηση μπορεί να είναι επιζήμια για τις πρακτικές μοντελοποίησης στην τάξη (Asempapa, 2016).

1.4.3.1 Έρευνες για τη στάση των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική μοντελοποίηση

Η στάση των εκπαιδευτικών επηρεάζει τόσο φανερά όσο και κρυφά την ατμόσφαιρα της τάξης, η οποία επηρεάζει τις συμπεριφορές και τις αποκρίσεις τους σε σχέση με τις πρακτικές μαθηματικής μοντελοποίησης (Asempapa, 2016). Η έρευνα δείχνει ότι υπάρχουν σχέσεις μεταξύ της στάσης των εκπαιδευτικών, τη γνώση περιεχομένου και τα επιτεύγματα των μαθητών (Zan & Martino, 2007). Αυτό υποδηλώνει ότι η στάση των εκπαιδευτικών απέναντι στη μαθηματική μοντελοποίηση είναι ουσιαστικής σημασίας προκειμένου να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν μαθηματικές δεξιότητες, πρακτικές και διαδικασίες που απαιτούνται για τον 21ο αιώνα. Ως εκ τούτου, η στάση των εκπαιδευτικών απέναντι στην μαθηματική μοντελοποίηση έχει νόημα να διερευνηθεί και είναι σημαντικό για τους εκπαιδευτικούς να γνωρίζουν τον σημαντικό αντίκτυπο και τις συνέπειες που μπορεί να έχει η στάση τους απέναντι στη μαθηματική μοντελοποίηση στη μάθηση των μαθητών. Ωστόσο, έρευνες σχετικές με τη στάση των εκπαιδευτικών απέναντι στη μαθηματική μοντελοποίηση είναι σπάνιες (Asempapa, 2019).

Οι έρευνες σχετικά με τις στάσεις των εκπαιδευτικών δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν μία γενικά ευνοϊκή στάση απέναντι στη μαθηματική μοντελοποίηση, αναγνωρίζουν τα πλεονεκτήματα της χρήσης της μαθηματικής μοντελοποίησης στην τάξη, ωστόσο θεωρούν ότι υπάρχουν ορισμένα εμπόδια.

Στις έρευνες του Asempapa (2016· 2019) σε εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, οι εκπαιδευτικοί φάνηκε να έχουν γενικά ικανοποιητικά θετική στάση απέναντι στη μαθηματική μοντελοποίηση. Πιο συγκεκριμένα, το ερωτηματολόγιο των στάσεων των εκπαιδευτικών για την μαθηματική μοντελοποίηση, που κατασκευάστηκε από τον ίδιο, χωριζόταν σε 4 βασικούς άξονες, οι οποίοι είχαν σχέση με τον κονστρουκτιβιστικό τρόπο διδασκαλίας της μαθηματικής μοντελοποίησης, την κατανόηση των εκπαιδευτικών στο θέμα της μαθηματικής μοντελοποίησης, την σχετικότητα της μαθηματικής μοντελοποίησης με την πραγματική ζωή και το κίνητρο και ενδιαφέρον που προκαλεί η μαθηματική μοντελοποίηση στην διδασκαλία των Μαθηματικών. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν ευνοϊκότερες στάσεις στις δηλώσεις που ανήκαν στους άξονες του κονστρουκτιβισμού και της σχετικότητας με την πραγματική ζωή, ενώ χαμηλότερη βαθμολογία συγκέντρωσαν στους άξονες της κατανόησης και του κινήτρου / ενδιαφέροντος (Asempapa, 2016). Αντίστοιχα αποτελέσματα είχε και έρευνα που πραγματοποιήθηκε στην Ελλάδα με τη χρήση του ερωτηματολογίου του Asempapa σε 153 εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Τερζάκη & Λεμονίδης, 2022).

Ένα από τα πλεονεκτήματα της μαθηματικής μοντελοποίησης που αναγνωρίζουν οι εκπαιδευτικοί, είναι ότι η μαθηματική μοντελοποίηση είναι συνδεδεμένη με πραγματικές καταστάσεις και την καθημερινή ζωή, όπως φάνηκε από τις έρευνες των Karali & Durmus (2015) σε 14 προπτυχιακούς εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, οι οποίοι ασχολήθηκαν με μία δραστηριότητα μαθηματικής μοντελοποίησης και στην συνέχεια κλήθηκαν να εκφράσουν την γνώμη τους για την μαθηματική μοντελοποίηση, αλλά και από την έρευνα των Yu & Chang (2011), οι οποίοι διερεύνησαν τις αντιλήψεις και τα εμπόδια που αντιμετώπισαν 16 εκπαιδευτικοί δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, οι οποίοι στο πλαίσιο μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών παρακολούθησαν μαθήματα μαθηματικής μοντελοποίησης και συμμετείχαν στην επίλυση αντίστοιχων έργων. Αντίστοιχα αποτελέσματα για την σύνδεση της μαθηματικής μοντελοποίησης με την πραγματική ζωή, είχαν και οι έρευνες του Asempapa (2016· 2019) και των Τερζάκη και Λεμονίδη (2022), όπου ο Μ.Ο των απαντήσεων των εκπαιδευτικών στον άξονα του ερωτηματολογίου «Σχετικότητα με πραγματική ζωή» ήταν αρκετά υψηλός, υποδηλώνοντας τις ευνοϊκές στάσεις των εκπαιδευτικών.

Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι τα προβλήματα μοντελοποίησης είναι αποτελεσματικά στην απόκτηση δεξιοτήτων σκέψης υψηλότερου επιπέδου (αναλυτικής σκέψης και ανάπτυξης στρατηγικής) (Yu & Chang, 2011· Karali & Durmus, 2015) και ενισχύουν τις ικανότητες των μαθητών στην μάθηση των μαθηματικών (Yu & Chang, 2011· Asempapa, 2016). Άλλα θετικά χαρακτηριστικά της χρήσης μαθηματικής μοντελοποίησης που αναγνωρίζουν οι εκπαιδευτικοί έχουν να κάνουν με τον συνεργατικό της χαρακτήρα, αναφερόμενοι στην συνεργασία μεταξύ των μαθητών, τη συλλογική σκέψη και τη δημιουργία περιβάλλοντος για συζήτηση (Karali & Durmus, 2015).

Από την άλλη πλευρά, οι έρευνες για τη στάση των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική μοντελοποίηση αναδεικνύουν και τα εμπόδια που εντοπίζουν οι εκπαιδευτικοί. Ένα από αυτά είναι ο χρόνος που απαιτείται για να ολοκληρωθούν τα έργα μαθηματικής μοντελοποίησης (Schmidt, 2011· Yu & Chang, 2011· Karali & Durmus, 2015). Η έρευνα της Schmidt (2011) σε εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης έδειξε ότι η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών αναφέρει τρία εμπόδια για την υλοποίηση της μαθηματικής μοντελοποίησης, και ένα από αυτά είναι η έλλειψη χρόνου τόσο κατά την φάση της υλοποίησης στην τάξη όσο και κατά την φάση της προετοιμασίας από τους ίδιους. Ανέφεραν, μάλιστα, ότι καθώς το πρόγραμμα σπουδών είναι πολύ απαιτητικό, θέλουν να επικεντρωθούν σε αυτό και να μην «σπαταλούν χρόνο» με την μαθηματική μοντελοποίηση, μία δήλωση που ήταν σε σύγκρουση με την πραγματικότητα, καθώς η μοντελοποίηση αναφέρεται στο πρόγραμμα σπουδών της Βάδης-Βυρτεμβέργης -όπου έλαβε μέρος η έρευνα- ήδη 7 χρόνια πριν την μελέτη.

Το ότι οι δραστηριότητες μοντελοποίησης δε συνδέονται με το πρόγραμμα σπουδών, αναφέρουν και οι εκπαιδευτικοί στην έρευνα των Yu & Chang (2011). Πιο συγκεκριμένα, στην Ταϊβάν (όπου έλαβε μέρος η έρευνα) οι εκπαιδευτικοί βασίζονται στο περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων για τη διδασκαλία τους (όπως συμβαίνει στην Ελλάδα) και ανέφεραν ότι αυτές οι δραστηριότητες δεν έχουν ισχυρή σύνδεση με το σχολικό πρόγραμμα σπουδών και γι’ αυτό τον λόγο δε θα τις χρησιμοποιούσαν. Επιπλέον, καθώς οι μαθητές εκεί είναι υποχρεωμένοι να δώσουν εξετάσεις για να περάσουν στο Λύκειο και στο Πανεπιστήμιο, οι εκπαιδευτικοί αναφέρουν ως σκοπό της διδασκαλίας τους τους βαθμούς των μαθητών τους σε αυτές τις εξετάσεις και αυτό είναι ο κύριος παράγοντας για τον οποίο οι δάσκαλοι αντιστέκονται στη διδασκαλία μοντελοποίησης. Συνεπώς, λόγω του χρόνου που απαιτείται για να ολοκληρωθούν οι συγκεκριμένες δραστηριότητες και λόγω του ότι οι εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι δεν συνδέονται με το πρόγραμμα σπουδών, αναφέρουν ότι θα πρέπει να παρέχονται στους μαθητές ως project (Karali & Durmus, 2015) ή ως συμπληρωματικό υλικό (Yu & Chang, 2011) αντίστοιχα.

Επιπλέον, οι έρευνες δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί δε νιώθουν έτοιμοι ή ικανοί (Schmidt, 2011· Yu & Chang, 2011) ή δεν είναι σίγουροι ότι μπορούν να εφαρμόσουν έργα μοντελοποίησης στην τάξη (Asempapa, 2016· 2019· Τερζάκη & Λεμονίδης, 2022).

Όσον αφορά το ενδιαφέρον που μπορεί να προκαλέσει στους μαθητές η ενασχόληση με έργα μαθηματικής μοντελοποίησης σύμφωνα με τους εκπαιδευτικούς, οι έρευνες έχουν αντιφατικά αποτελέσματα. Οι εκπαιδευτικοί στην έρευνα των Karali & Durmus (2015) θεωρούν ότι οι μαθητές θα απολαύσουν τη διαδικασία. Ωστόσο, η έρευνα των Yu & Chang (2011) αναφέρει ότι οι εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι οι μαθητές μπορεί να έχουν αρνητική στάση γιατί δεν είναι εξοικειωμένοι με τέτοιου είδους δραστηριότητες. Αντίστοιχα, στις έρευνες του Asempapa (2016· 2019) και των Τερζάκη και Λεμονίδη (2022) ο άξονας «Κίνητρο και ενδιαφέρον των μαθητών» συγκεντρώνει τον χαμηλότερο μέσο όρο απαντήσεων, δείχνοντας ότι οι εκπαιδευτικοί, αν και δεν έχουν αρνητική στάση, έχουν μικρότερο βαθμό συμφωνίας σε σχέση με άλλους άξονες του ερωτηματολογίου, όπου η στάση τους ήταν ξεκάθαρα θετική.

Τέλος, άλλα εμπόδια που αναφέρονται από τους εκπαιδευτικούς είναι η έλλειψη κατάλληλων υλικών, η περιπλοκότητα της αξιολόγησης της επίδοσης των μαθητών (Schmidt, 2011) και το γεγονός ότι θα δημιουργείται χάος στην τάξη από την συζήτηση των ομάδων (Yu & Chang, 2011).

Όσον αφορά τη σχέση των δημογραφικών μεταβλητών και της στάσης των εκπαιδευτικών, οι έρευνες δε φαίνεται να συμφωνούν απόλυτα. Όσον αφορά το φύλο, στην έρευνα των Jacobs & Durandt (2016) σε προπτυχιακούς εκπαιδευτικούς Λυκείου (Grade 10-12), φάνηκε ότι οι γυναίκες, παρουσίασαν λιγότερο ευνοϊκές στάσεις απέναντι στην μαθηματική μοντελοποίηση. Αντίθετα, η έρευνα του Asempapa (2016), έδειξε ότι οι γυναίκες που δίδασκαν στην Πρωτοβάθμια (K- Grade 5) και στο Γυμνάσιο

(Grade 6-8) είχαν περισσότερο ευνοϊκές στάσεις σε σχέση με τους άντρες συναδέλφους τους, ενώ το φύλο δεν έπαιζε ρόλο στους εκπαιδευτικούς που δίδασκαν στο Λύκειο (Grade 9-12). Η έρευνα του Asempapa (2019) έδειξε ότι η θετική στάση απέναντι στη μαθηματική μοντελοποίηση δεν εξαρτάται από το φύλο. Η ίδια έρευνα έδειξε ότι η θετική στάση απέναντι στην μαθηματική μοντελοποίηση σχετίζεται με τη βαθμίδα που διδάσκουν οι εκπαιδευτικοί, καθώς οι εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας είχαν πιο ευνοϊκές στάσεις συγκριτικά με τους εκπαιδευτικούς που δίδασκαν σε Γυμνάσια και Λύκεια. Από την άλλη, σε ίδια έρευνα σε μεγαλύτερο δείγμα (Asempapa, 2016), η ανάλυση έδειξε ότι οι εκπαιδευτικοί του Γυμνασίου είχαν πιο ευνοϊκές στάσεις σε σχέση με τους εκπαιδευτικούς του Λυκείου, ενώ δεν υπήρχε στατιστικώς σημαντική διαφορά στη στάση των εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας έναντι των εκπαιδευτικών του Γυμνασίου. Επιπλέον, η ηλικία και η εκπαιδευτική εμπειρία δεν φάνηκε να παίζουν κάποιο σημαντικό ρόλο.

Ακόμη, η έρευνα του Asempapa (2016), έδειξε μία σημαντική σχέση ανάμεσα στην στάση και την γνώση των εκπαιδευτικών: Καθώς αυξάνεται η γνώση για τη φύση της μαθηματικής μοντελοποίησης, αυξάνεται επίσης η θετική στάση απέναντι στη μοντελοποίηση. Συγκεκριμένα, για κάθε αύξηση μιας μονάδας στη γνώση της μοντελοποίησης, το επίπεδο θετικής στάσης αυξάνεται κατά περίπου το ένα δέκατο της μονάδας. Αυτά τα αποτελέσματα, σύμφωνα με τον ερευνητή, υποδηλώνουν ότι η στάση των εκπαιδευτικών απέναντι στη μαθηματική μοντελοποίηση μπορεί να προβλεφθεί από τη γνώση τους για τη φύση της μαθηματικής μοντελοποίησης. Αντίστοιχα και η έρευνα των Τερζάκη και Λεμονίδη (2022), ανέδειξε μία θετική συσχέτιση μεταξύ της γνώσης και της στάσης των εκπαιδευτικών, αν και η συσχέτιση αυτή ήταν ασθενής, αλλά και οι Jacobs & Durandt (2016) αναφέρουν ότι οι εκπαιδευτικοί που σημείωσαν χαμηλό σκορ στα μαθηματικά είχαν λιγότερο ευνοϊκές στάσεις.

Συνοψίζοντας, σε γενικές γραμμές οι εκπαιδευτικοί φαίνεται να έχουν ευνοϊκή στάση απέναντι στη μαθηματική μοντελοποίηση, συμφωνώντας με τα οφέλη της στη μαθηματική εκπαίδευση, αναφέρουν όμως ότι υπάρχουν σημαντικά εμπόδια που τους αποτρέπουν από το να τη χρησιμοποιήσουν στην τάξη, όπως η έλλειψη χρόνου, η δυσκολία τους να την συνδέσουν με το πρόγραμμα σπουδών, η περιπλοκότητα της αξιολόγησης της επίδοσης των μαθητών και το γεγονός ότι δεν αισθάνονται αρκετά ικανοί να την υλοποιήσουν. Οι έρευνες δε συμφωνούν απόλυτα για το αν η στάση των εκπαιδευτικών σχετίζεται με το φύλο και τη βαθμίδα εκπαίδευσης, ενώ φαίνεται να σχετίζεται θετικά με την γνώση των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική μοντελοποίηση και να μη σχετίζεται με την ηλικία και την εκπαιδευτική εμπειρία.

1.4.3.2 Έρευνες για τη γνώση των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική μοντελοποίηση

Παρά τις διάφορες ερευνητικές μελέτες σχετικά με τη γνώση των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά, δεν έχουν γίνει πολλές έρευνες για τις γνώσεις των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική μοντελοποίηση (Asempapa, 2016).

Ο Frejd (2012), σε σχετική μελέτη περίπτωσης 18 εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στη Σουηδία, έδειξε ότι έχουν περιορισμένες εμπειρίες σχετικά με την μαθηματική μοντελοποίηση και το 50% από αυτούς δε γνώριζαν γι' αυτή μέχρι να λάβουν μέρος σε προηγούμενη έρευνα. Μόνο 5 από τους 17 εκπαιδευτικούς χρησιμοποιούσαν σκόπιμα δραστηριότητες μοντελοποίησης στο μάθημα των μαθηματικών αλλά η πλειοψηφία φάνηκε να μη δίνει προτεραιότητα στην ενσωμάτωση της μαθηματικής μοντελοποίησης στην καθημερινή διδασκαλία. Την περιορισμένη ή καθόλου εμπειρία σε πρακτικές μοντελοποίησης έδειξε και η έρευνα των Asempapa & Sturgill (2019) σε 80 εν ενεργεία και προπτυχιακούς εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στις Ηνωμένες Πολιτείες.

Όσον αφορά το πώς ορίζουν ή πώς περιγράφουν οι εκπαιδευτικοί την μαθηματική μοντελοποίηση, η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών στην έρευνα του Frejd (2012) εξέφρασε ότι η μαθηματική μοντελοποίηση είναι το να περιγράφουν ή να απλοποιούν «κάτι» με τα μαθηματικά, όπως ένα γεγονός, μια πραγματικότητα, κάτι ορατό κ.α. Οι εκπαιδευτικοί εξέφρασαν ότι δεν είχαν μια σαφή αντίληψη για την έννοια της μαθηματικής μοντελοποίησης και πολλοί συνέδεαν την μαθηματική μοντελοποίηση με τους τομείς της φυσικής ή της χημείας. Κάποιοι από τους εκπαιδευτικούς ταύτιζαν την επίλυση λεκτικού προβλήματος με την μαθηματική μοντελοποίηση. Μάλιστα, κάποιοι από αυτούς εξέφρασαν την άποψη ότι κάποια από τα έργα μαθηματικής μοντελοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα δεν θα τα χρησιμοποιούσαν στην τάξη καθώς θεωρούσαν ότι δεν περιλαμβάνουν μαθηματικά.

Σε έρευνα του Asempapa (2016) εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης απάντησαν σε ερωτηματολόγιο σχετικό με την γνώση και τη στάση τους για τη μαθηματική μοντελοποίηση και τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η πλειοψηφία έχει μία καλή γνώση για την μαθηματική μοντελοποίηση, ωστόσο το 63% των εκπαιδευτικών που πέτυχαν υψηλό σκορ στις ερωτήσεις κλειστού τύπου, απέτυχαν να ορίσουν τη μαθηματική μοντελοποίηση σε ερώτηση ανοιχτού τύπου. Ακόμη, αν και περισσότεροι από τους μισούς εκπαιδευτικούς ανέφεραν ότι διδάσκουν δραστηριότητες μοντελοποίησης, οι περισσότεροι από αυτούς απέτυχαν να ορίσουν τη μαθηματική μοντελοποίηση. Αντίστοιχα και στην έρευνα των Τερζάκη και Λεμονίδη (2022) σε εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης φάνηκε ότι αν και οι εκπαιδευτικοί είχαν μία καλή γνώση της μαθηματικής μοντελοποίησης, όπως αναδείχθηκε από το σκορ τους στις ερωτήσεις γνώσεων κλειστού τύπου, ωστόσο δυσκολεύονταν να δώσουν έναν ορισμό της μαθηματικής μοντελοποίησης. Όμοια, στην έρευνα των Asempapa & Sturgill (2019) φάνηκε ότι μόνο το 7% των εκπαιδευτικών μπόρεσε να δώσει έναν «εξαιρετικό» ορισμό της μαθηματικής μοντελοποίησης, ενώ η πλειοψηφία είχε παρανοήσεις, θεωρώντας ότι μαθηματική μοντελοποίηση είναι το να χρησιμοποιεί κανείς φυσικά αντικείμενα ή αναπαραστάσεις για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.

Αντίστοιχες παρανοήσεις για το τι είναι η μαθηματικό μοντέλο έδειξε και η έρευνα του Gould (2013), όπου ενώ η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών (σωστά) συμφώνησε ότι τα μαθηματικά μοντέλα μπορεί να είναι εξισώσεις, τύποι ή γραφήματα, επίσης συμφώνησαν ότι μπορεί να είναι και ένας χάρτης μίας χώρας ή ένα αρχιτεκτονικό σχέδιο. Επιπλέον, η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών δε γνώριζε ότι τα έργα μαθηματικής μοντελοποίησης πρέπει να προέρχονται από σενάρια της πραγματικής ζωής και ότι το να κάνεις επιλογές και υποθέσεις αποτελεί μέρος της διαδικασίας. Ακόμη, το 25% των εκπαιδευτικών δε γνώριζε ότι τα επαναλαμβανόμενα βήματα και οι αναθεωρήσεις είναι πιθανά αλλά δεν απαιτούνται κατά τη διαδικασία της μαθηματικής μοντελοποίησης και αυτό κατά τον ερευνητή ίσως υποδηλώνει ότι οι εκπαιδευτικοί δεν γνωρίζουν ότι η διαδικασία μαθηματικής μοντελοποίησης είναι συχνά κυκλική.

Σε παρόμοια συμπεράσματα κατέληξε και η έρευνα των Çiltaş et al. (όπως αναφέρεται στο Çiltaş & Isik, 2013), στην οποία συμμετείχαν 11 εκπαιδευτικοί δημοτικού σχολείου, με στόχο να μελετήσουν τις απόψεις τους για την μαθηματική μοντελοποίηση. Από τις συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών και την παρατήρηση της διδασκαλίας τους φάνηκε ότι δεν έχουν αρκετή γνώση για τη μαθηματική μοντελοποίηση, συγχέουν τους όρους μοντελοποίηση, μοντέλο, μαθηματική μοντελοποίηση και μαθηματικό μοντέλο και δεν χρησιμοποιούν μαθηματική μοντελοποίηση στην τάξη τους.

Επιπλέον, τα αποτελέσματα της μελέτης του Asempapa (2016) δείχνουν ότι οι γυναίκες εκπαιδευτικοί και οι εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας (K–5) διαφέρουν ως προς το επίπεδο γνώσης τους σχετικά με τη μαθηματική μοντελοποίηση. Συγκεκριμένα, οι γυναίκες εκπαιδευτικοί βρέθηκαν να έχουν υψηλότερα επίπεδα γνώσης της φύσης της μαθηματικής μοντελοποίησης από τους άνδρες εκπαιδευτικούς καθώς επίσης και οι εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας σε σχέση με τους εκπαιδευτικούς του Λυκείου.

Συνοψίζοντας, οι έρευνες έδειξαν ότι σε μεγάλο βαθμό οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν εμπειρίες σχετικές με την μαθηματική μοντελοποίηση, δεν την εφαρμόζουν στις τάξεις τους και δυσκολεύονται να την ορίσουν και να περιγράψουν την διαδικασία, έχοντας μάλιστα ορισμένες παρανοήσεις.

1.4.4 Έρευνες για την επίδραση των εκπαιδευτικών προγραμμάτων μαθηματικής μοντελοποίησης στις στάσεις και στη γνώση των εκπαιδευτικών και στην επίδοσή τους σε έργα μοντελοποίησης

Ορισμένες έρευνες, μελέτησαν την επίδραση εκπαιδευτικών προγραμμάτων μαθηματικής μοντελοποίησης στις στάσεις και στις γνώσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με την μαθηματική μοντελοποίηση και στις επιδόσεις τους σε έργα μαθηματικής μοντελοποίησης.

Η έρευνα των Jacobs & Durandt (2016) σε μια ομάδα 50 προπτυχιακών καθηγητών μαθηματικών η οποία εκτέθηκε σε μία δραστηριότητα μοντελοποίησης, στα πλαίσια του προγράμματος σπουδών τους, με στόχο τη διερεύνηση των στάσεών τους σχετικά με την μοντελοποίηση μετά τη συμμετοχή τους στην συγκεκριμένη δραστηριότητα, αποκάλυψε ότι η πλειοψηφία απόλαυσε και εκτίμησε τη δραστηριότητα, καθώς και ότι αυτό τους παρότρυνε να αναπτύξουν περαιτέρω τις γνώσεις και τις ικανότητές τους στην μοντελοποίηση. Υψηλό βαθμό ικανοποίησης των συμμετεχόντων σχετικά με την επαγγελματική τους εξέλιξη, ανέδειξε και η έρευνα των Maaß & Gurlitt (2011), στην οποία 155 εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης συμμετείχαν σε ένα πενθήμερο σεμινάριο επαγγελματικής ανάπτυξης σχετικό με την μαθηματική μοντελοποίηση, Ωστόσο, η ίδια έρευνα έδειξε ότι δεν υπήρξε επίδραση στις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών.

Παράλληλα, η έρευνα της Schmidt (2011) έδειξε ότι ενώ κάποιες στάσεις φαίνεται να αλλάζουν, κάποιες άλλες είναι περισσότερο ανθεκτικές. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και έδειξε την διαφορά στα αναφερόμενα εμπόδια των εκπαιδευτικών για την υλοποίηση της μαθηματικής μοντελοποίησης πριν και μετά την παρακολούθηση πέντε εκπαιδευτικών ενοτήτων για την μοντελοποίηση. Οι εκπαιδευτικοί, αν και ανέφεραν την έλλειψη κατάλληλων υλικών ως εμπόδιο πριν την εκπαίδευση, μετά την εκπαίδευση δεν αναφέρθηκε πλέον ως εμπόδιο. Από την άλλη πλευρά, η εκπαίδευση δεν άλλαξε την γνώμη τους για την πολυπλοκότητα της αξιολόγησης των μαθητών ενώ την άλλαξε οριακά ως προς την αναφερόμενη έλλειψη χρόνου. Σύμφωνα με τους Maasepp & Bobis (2014), για να επηρεασθούν θετικά οι στάσεις των εκπαιδευτικών, θα πρέπει να παρατηρήσουν και να βιώσουν πολλές θετικές εμπειρίες διδασκαλίας και μάθησης κατά τη διάρκεια των σπουδών τους.

Όσον αφορά την αυτοπεποίθηση των εκπαιδευτικών, σχεδόν οι μισοί εκπαιδευτικοί στην έρευνα των Jacobs & Durandt (2016) εξακολουθούσαν να μην έχουν αυτοπεποίθηση σχετικά με την διαχείριση προκλήσεων σχετικών με τα έργα μοντελοποίησης μετά την έκθεσή τους στην δραστηριότητα μαθηματικής μοντελοποίησης. Οι ίδιοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι είναι εξαιρετικά αμφίβολο ότι μια εφάπαξ παρέμβαση, με στόχο την ενίσχυση των ικανοτήτων των εκπαιδευτικών στην μαθηματική μοντελοποίηση, μπορεί να ενισχύσει την αυτοπεποίθησή τους και να αλλάξει τη στάση και τις θέσεις τους, αλλά περισσότερο απαιτείται συνεχής έκθεση και προβληματισμός σε έργα μοντελοποίησης. Αντίθετα, η έρευνα των Maaß & Gurlitt (2011) έδειξε ότι η συμμετοχή των εκπαιδευτικών στο πενθήμερο σεμινάριο είχε θετική επίδραση στην αυτο-αποτελεσματικότητά τους όσον αφορά τη μοντελοποίηση.

Σχετικά με τις γνώσεις των εκπαιδευτικών, η έρευνα των Maaß & Gurlitt (2011) έδειξε ότι η συμμετοχή των εκπαιδευτικών στο πενθήμερο σεμινάριο είχε ισχυρή θετική επίδραση στην παιδαγωγική γνώση περιεχομένου. Αντίστοιχα αποτελέσματα είχε και η έρευνα των Çiltaş & Isik (2013) σε 35 προπτυχιακούς εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, οι οποίοι συμμετείχαν σε ένα προ-τεστ μαθηματικής μοντελοποίησης και σε συνεντεύξεις, ακολούθησαν 42 ώρες διδασκαλίας με τη μέθοδο της μαθηματικής μοντελοποίησης και έπειτα συμμετείχαν στο μετά-τεστ μαθηματικής μοντελοποίησης και σε συνεντεύξεις. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το σκορ στο προ-τεστ ο μέσος όρος ήταν μόλις 25,35, ενώ στο μετά-τεστ σχεδόν τριπλασιάστηκε, φτάνοντας μέσο όρο 72,85. Επιπλέον, στις συνεντεύξεις πριν τη διδασκαλία οι εκπαιδευτικοί δεν μπόρεσαν να δώσουν έναν πλήρη ορισμό της μαθηματικής μοντελοποίησης, αντίθετα μετά τη διδασκαλία οι ορισμοί που δόθηκαν από τους εκπαιδευτικούς ήταν πολύ κοντά στους ορισμούς της βιβλιογραφίας.

Τέλος, σχετικά με την επίδοση των εκπαιδευτικών σε έργα μαθηματικής μοντελοποίησης, η έρευνα των Yasa & Karatas (2018), η οποία διερεύνησε την επίδραση της διδασκαλίας με τη μέθοδο της μαθηματικής μοντελοποίησης στην επίδοση 24 προπτυχιακών εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην επίλυση έργων μαθηματικής μοντελοποίησης, έδειξε ότι η διδασκαλία είχε θετική επίδραση στις επιδόσεις τους.

Συνοψίζοντας, όσον αφορά την επίδραση εκπαιδευτικών προγραμμάτων στις γνώσεις των εκπαιδευτικών για την μαθηματική μοντελοποίηση και στην επίδοσή τους σε έργα μοντελοποίησης, οι έρευνες δείχνουν ότι έχουν θετική επίδραση. Όσον αφορά τις στάσεις, οι εκπαιδευτικοί μετά την συμμετοχή τους στα εκπαιδευτικά προγράμματα φαίνεται να δηλώνουν μεγάλο βαθμό ικανοποίησης τόσο από την πλευρά της απόλαυσης και της εκτίμησης της διαδικασίας όσο και από την πλευρά της επαγγελματικής τους εξέλιξης, αναφέροντας μάλιστα ότι η συμμετοχή τους τούς παρείχε κίνητρο για περαιτέρω επιμόρφωση. Ωστόσο, κάποιες στάσεις είναι περισσότερο ανθεκτικές, όπως η έλλειψη αυτοπεποίθησης για την υλοποίηση έργων μοντελοποίησης, η αναφερόμενη έλλειψη χρόνου και η περιπλοκότητα της αξιολόγησης των μαθητών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η ΕΡΕΥΝΑ

2.1 Σκοπός της έρευνας

Η παρούσα έρευνα έχει σκοπό να διερευνήσει τις γνώσεις και τις στάσεις μεταπτυχιακών εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με τη μαθηματική μοντελοποίηση καθώς και την ικανότητά τους στην επίλυση προβλημάτων Fermi. Επιπλέον, να μελετήσει εάν και κατά πόσο μπορούν τόσο οι στάσεις και οι γνώσεις όσο και η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων Fermi να βελτιωθούν, έπειτα από την συμμετοχή τους σε δύο τετράωρα μεταπτυχιακά μαθήματα σχετικά με την μαθηματική μοντελοποίηση.

2.2 Ερευνητικά ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας έρευνας είναι τα εξής:

1) Ποια είναι η ικανότητα των εκπαιδευτικών στην επίλυση ενός προβλήματος Fermi;
2) Ποιες είναι οι γνώσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με την μαθηματική μοντελοποίηση;
3) Ποιες είναι οι στάσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης;
4) Η παρακολούθηση των μεταπτυχιακών μαθημάτων στην μοντελοποίηση δημιουργεί διαφορά στην ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi, στις γνώσεις και στις στάσεις των εκπαιδευτικών ως προς την μαθηματική μοντελοποίηση;

2.3 Σημασία της έρευνας

Όπως έχει αναφερθεί και στο θεωρητικό μέρος της εργασίας, αποτελέσματα διάφορων ερευνών δείχνουν ότι οι στάσεις των εκπαιδευτικών απέναντι στα μαθηματικά έχουν ουσιαστική επίδραση στη διδασκαλία των μαθηματικών και στη μάθηση (Thiel, 2010) και η μαθηματική τους γνώση σχετίζεται με την επίδοση των μαθητών (Hill, Rowan, & Ball, 2005). Επιπλέον, έρευνες έχουν δείξει ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν λίγες εμπειρίες στην καθοδήγηση μαθητών σε δραστηριότητες εκτίμησης στην τάξη και θα πρέπει να εκπαιδεύονται πώς να διδάσκουν την εκτίμηση (Yang & Wu, 2012), καθώς η περιορισμένη έκθεσή τους σε έργα μοντελοποίησης, προκαλεί την έλλειψη ετοιμότητάς τους να τα υλοποιήσουν (Ng, 2013). Επομένως, η ανεπαρκής εμπειρία στον τρόπο επίλυσης τέτοιων έργων, η ελλιπής γνώση και η αρνητική στάση απέναντι στη μαθηματική μοντελοποίηση μπορεί να είναι επιζήμια για τις πρακτικές μοντελοποίησης στην τάξη (Asempapa, 2016), κάτι που δεν είναι αμελητέο καθώς η επίλυση προβλημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης αναφέρεται στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών (2022).

Επομένως, η σημασία της παρούσας έρευνας έγκειται στο να αναδείξει εάν οι εκπαιδευτικοί έχουν επαρκείς γνώσεις και θετικές στάσεις καθώς και αν η ικανότητά τους στην επίλυση έργων μοντελοποίησης είναι ικανοποιητική, καθώς και κατά πόσο μπορεί να υπάρξει βελτίωση μετά από διδακτικές παρεμβάσεις στη μοντελοποίηση, ώστε να αναδειχθεί η ανάγκη επιμόρφωσης και κατάλληλης εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.1 Μέθοδος

Στην παρούσα έρευνα για την συλλογή και ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε τόσο η ποσοτική όσο και η ποιοτική μέθοδος.

Όσον αφορά τη διερεύνηση της ικανότητας των εκπαιδευτικών στην επίλυση προβλήματος Fermi χρησιμοποιήθηκε εξεταστικό δοκίμιο, όπου οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να επιλύσουν ένα πρόβλημα Fermi. Η ανάλυση των λύσεων των εκπαιδευτικών έγινε με ποιοτική μέθοδο, κατηγοριοποιώντας τες σε στρατηγικές επίλυσης, σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση προγενέστερων ερευνών (βλ. ενότητα 3.3.1). Στη συνέχεια, με την ποσοτική μέθοδο οι στρατηγικές επίλυσης κωδικοποιήθηκαν, για την εξαγωγή αποτελεσμάτων περιγραφικής στατιστικής και για τον έλεγχο των συσχετίσεων.

Όσον αφορά την διερεύνηση της γνώσης και της στάσης των εκπαιδευτικών, χρησιμοποιήθηκε η ποσοτική μέθοδος με την χρήση ερωτηματολογίου. Για την ανάλυση των δεδομένων που αφορούν την γνώση των εκπαιδευτικών, χρησιμοποιήθηκε και η ποιοτική μέθοδος, καθώς ένα από τα ερωτήματα (Α12) ζητούσε καταγραφή του ορισμού της μοντελοποίησης.

Οι απαντήσεις στο συγκεκριμένο ερώτημα ποσοτικοποιήθηκαν λαμβάνοντας μία αξιολόγηση από το 1-4, σύμφωνα με την ρουμπρίκα αξιολόγησης του Asempapa (2016), η οποία περιγράφεται αναλυτικότερα παρακάτω. Για να εξασφαλιστεί μεγαλύτερος βαθμός αξιοπιστίας στην αξιολόγηση των απαντήσεων, αυτές δόθηκαν και σε μία εκπαιδευτικό πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, η οποία είχε παρακολουθήσει το συγκεκριμένο μεταπτυχιακό πρόγραμμα σε προγενέστερο χρόνο και στην οποία δόθηκε τόσο η ρουμπρίκα αξιολόγησης του Asempapa όσο και οι ορισμοί της μαθηματικής μοντελοποίησης, σύμφωνα με την βιβλιογραφία. Στη συνέχεια, από τις αξιολογήσεις της ερευνήτριας και της εκπαιδευτικού προέκυψε ένας μέσος όρος βαθμολογίας για τον κάθε ορισμό. Σε περίπτωση που ο μέσος όρος ήταν δεκαδικός αριθμός, στρογγυλοποιήθηκε προς τα πάνω.

Τέλος, για να απαντηθεί το τέταρτο ερευνητικό ερώτημα, σχετικά με το αν θα προκύψει διαφορά στις γνώσεις, στις στάσεις και στην ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi από τους εκπαιδευτικούς μετά από την παρακολούθηση μαθημάτων σχετικών με τη μαθηματική μοντελοποίηση, τόσο το ερωτηματολόγιο όσο και το εξεταστικό δοκίμιο, δόθηκαν σε δύο χρόνους, πριν την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης και μετά την παρακολούθηση. Τα αποτελέσματα προέκυψαν από την σύγκριση μεταξύ των δύο εξετάσεων.

3.2 Διαδικασία εκτέλεσης έρευνας

Η συλλογή των δεδομένων έγινε σε δύο χρόνους, πριν την παρακολούθηση μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης και μετά την παρακολούθησή τους (Εξέταση Α' και Εξέταση Β') ως εξής: Αρχικά, στις 7 Μαΐου 2022, με τη βοήθεια του επιβλέποντα καθηγητή, δόθηκε σε 34 εκπαιδευτικούς τόσο το ερωτηματολόγιο για την αξιολόγηση της γνώσης και της στάσης των εκπαιδευτικών, όσο και το πρώτο πρόβλημα Fermi, τα οποία απαντήθηκαν πριν την παρακολούθηση του πρώτου μαθήματος. Στη συνέχεια, την ίδια μέρα οι εκπαιδευτικοί παρακολούθησαν ένα τετράωρο μάθημα μαθηματικής μοντελοποίησης στο πλαίσιο του Μεταπτυχιακού Προγράμματος. Στις 18 Ιουνίου 2022, οι εκπαιδευτικοί παρακολούθησαν το δεύτερο τετράωρο μάθημα μαθηματικής μοντελοποίησης και στο τέλος τους δόθηκε και πάλι το ερωτηματολόγιο καθώς και το δεύτερο πρόβλημα Fermi. Στην δεύτερη εξέταση συμμετείχαν -όσον αφορά το πρόβλημα- μόνο 14 από τους 34 εκπαιδευτικούς, καθώς αυτοί ήταν οι εκπαιδευτικοί που παρακολούθησαν τα μαθήματα μοντελοποίησης, εκ των οποίων οι 12 απάντησαν στο ερωτηματολόγιο.

Το ερωτηματολόγιο μοιράστηκε μέσω του εργαλείου "Φόρμες" της Google. Στην αρχή του ερωτηματολογίου δίνονταν οι απαραίτητες πληροφορίες στους συμμετέχοντες, όπως η ταυτότητα της ερευνήτριας, το μεταπτυχιακό πρόγραμμα στο πλαίσιο του οποίου διενεργείται η έρευνα, ο σκοπός της έρευνας αλλά και ότι θα διασφαλιστεί η ανωνυμία των συμμετεχόντων. Επιπλέον, υπήρχαν οδηγίες για την συμπλήρωση του ερωτηματολογίου και η παράκληση να απαντηθεί με ειλικρίνεια με βάση την γνώμη και τις γνώσεις τους.

Αντίστοιχα, το κάθε πρόβλημα Fermi συνοδευόταν από τα «ατομικά στοιχεία» που έπρεπε να συμπληρώσουν οι συμμετέχοντες, τα οποία αφορούσαν το φύλο, την ηλικία τους, τα έτη προϋπηρεσίας τους στην εκπαίδευση -εφόσον υπήρχαν- και τη βαθμίδα εκπαίδευσης στην οποία διδάσκουν. Επιπλέον, πριν το πρόβλημα υπήρχαν οδηγίες στις οποίες αναφερόταν ότι το πρόβλημα πρέπει να λυθεί με εκτίμηση και τους ζητούσε να καταγράψουν το πλάνο επίλυσης, δηλαδή να περιγράψουν με ποιον τρόπο εργάστηκαν για να φτάσουν στην λύση, καθώς και τις μαθηματικές διαδικασίες - πράξεις που ακολούθησαν.

Όσον αφορά το περιεχόμενο των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης που παρακολούθησαν οι εκπαιδευτικοί, αυτό περιελάμβανε το τι είναι η μαθηματική μοντελοποίηση, ποιος είναι ο κύκλος της μαθηματικής μοντελοποίησης, τη διαφορά της από την επίλυση λεκτικών προβλημάτων, θέματα διδασκαλίας της μαθηματικής μοντελοποίησης και παρουσίας της στα προγράμματα σπουδών καθώς και παρουσίαση του σχετικού ερευνητικού πεδίου και αναφορά ερευνών σχετικών με συμπεριφορές μαθητών και εκπαιδευτικών. Τέλος, οι εκπαιδευτικοί πραγματοποίησαν εφαρμογές και εξασκήθηκαν στην επίλυση προβλήματος μαθηματικής μοντελοποίησης καθώς και άσκηση μετατροπής ενός λεκτικού προβλήματος σε πρόβλημα μοντελοποίησης.

3.3 Μέσα συλλογής δεδομένων

3.3.1 Παρουσίαση των προβλημάτων Fermi

Τα προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν και στις δύο φάσεις της έρευνας (πριν και μετά τα μαθήματα μοντελοποίησης) ήταν προβλήματα Fermi εκτίμησης πλήθους ανθρώπων σε συγκεκριμένη επιφάνεια. Τα προβλήματα αυτά έχουν χρησιμοποιηθεί -μαζί με άλλα- σε προγενέστερες έρευνες για την διερεύνηση της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων Fermi από μαθητές πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Albarracín & Gorgorió, 2014· Albarracín & Gorgorió, 2018· Albarracín & Gorgorió, 2019· Ferrando & Albarracín, 2021) και ήταν τα εξής:

Πρόβλημα Α' Εξέτασης: *Το σχολείο στο οποίο εργάζεστε διοργανώνει μία συναυλία για τη λήξη της σχολικής χρονιάς. Για να γίνει αυτό, χρειάζεται να επιλεγεί ο κατάλληλος χώρος για τη διεξαγωγή της. Η προτιμώμενη επιλογή είναι να γίνει στο γήπεδο μπάσκετ του προαυλίου. Πόσα άτομα μπορούν να χωρέσουν εντός ενός τέτοιου χώρου;*

Πρόβλημα Β' Εξέτασης: *Πόσοι άνθρωποι πιστεύετε ότι χωράνε στην πλατεία δημαρχείου του δήμου σας, κατά τη διάρκεια μιας συγκέντρωσης διαμαρτυρίας;*

Οι ερευνητές των προγενέστερων ερευνών, αναλύοντας τις λύσεις των μαθητών, κατηγοριοποίησαν τις στρατηγικές τους και τις κατέταξαν ως προς την αποτελεσματικότητά τους για την επίλυση του προβλήματος, όπως έχει ήδη αναφερθεί στο θεωρητικό μέρος της παρούσας εργασίας (σελ.15). Επιλέγοντας προβλήματα που έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί σε προγενέστερες έρευνες, επιχειρήθηκε η ανάλυση των λύσεων των εκπαιδευτικών σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση των στρατηγικών που έχουν ήδη αναφερθεί από τους συγκεκριμένους ερευνητές.

Επιπλέον, καθώς ένας από τους στόχους της έρευνας είναι να διερευνήσει την διαφορά στην ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi μετά την παρακολούθηση μαθημάτων για την μαθηματική μοντελοποίηση (4^{ο} ερευνητικό ερώτημα), κρίθηκε σκόπιμο αφενός να μη δοθεί και τις δύο φορές το ίδιο πρόβλημα λόγω της πιθανής εξοικείωσης των εκπαιδευτικών και αφετέρου να είναι κατά το δυνατόν ίδιου βαθμού δυσκολίας, ώστε τα αποτελέσματα να είναι συγκρίσιμα.

Τα εξεταστικά δοκίμια με τα προβλήματα Fermi παρατίθενται στο Παράρτημα στις σελ. 106 - 108.

3.3.2 Παρουσίαση του ερωτηματολογίου για τη στάση και την γνώση των εκπαιδευτικών

Το εργαλείο που κρίθηκε κατάλληλο και χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα είναι ένα ερωτηματολόγιο κατασκευασμένο από τον Asempapa (2016) για την διεξαγωγή προγενέστερης έρευνας, η οποία είχε ως σκοπό την κατασκευή ενός εργαλείου για την διερεύνηση των στάσεων και γνώσεων των εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για την μαθηματική μοντελοποίηση. Στα ελληνικά, χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά στο πλαίσιο μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας σε έρευνα σε εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Τερζάκη, 2021).

Το ερωτηματολόγιο αποτελείται από τρία μέρη:

Το πρώτο μέρος περιλαμβάνει 11 δηλώσεις κλειστού τύπου, στις οποίες οι συμμετέχοντες καλούνται να επιλέξουν «ναι» ή «όχι» καθώς και μια ερώτηση ανοικτού τύπου. Οι δηλώσεις αφορούν τη γνώση για την έννοια και τη φύση της μαθηματικής μοντελοποίησης και στην ερώτηση ανοικτού τύπου οι συμμετέχοντες καλούνται να δώσουν έναν ορισμό για την μαθηματική μοντελοποίηση. Το πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου στοχεύει να δώσει απάντηση στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, σχετικά με τις γνώσεις των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική μοντελοποίηση.

Το δεύτερο μέρος αποτελείται από 28 δηλώσεις κλειστού τύπου και έχει στόχο να δώσει απάντηση στο τρίτο ερευνητικό ερώτημα, σχετικά με το ποιες είναι οι στάσεις των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική μοντελοποίηση. Οι συμμετέχοντες καλούνται να εκφράσουν το βαθμό συμφωνίας ή διαφωνίας τους μέσω της 6-βάθμιας κλίμακας Likert (1. διαφωνώ έντονα, 2. διαφωνώ, 3. κάπως διαφωνώ, 4. κάπως συμφωνώ, 5. συμφωνώ, 6. συμφωνώ έντονα). Πιο συγκεκριμένα, οι δηλώσεις 1-6 περιγράφουν τον κονστρουκτιβιστικό τρόπο διδασκαλίας και εκμάθησης της μαθηματικής μοντελοποίησης. Οι δηλώσεις 7-11 περιγράφουν την προσωπική κατανόηση στο θέμα της μαθηματικής μοντελοποίησης. Οι δηλώσεις 12-18 περιγράφουν την σχέση της μαθηματικής μοντελοποίησης με πραγματικές καταστάσεις. Τέλος, οι δηλώσεις 19-28 περιγράφουν το κίνητρο και το ενδιαφέρον που προκαλεί η μαθηματική μοντελοποίηση στην διδασκαλία των μαθηματικών.

Το τρίτο και τελευταίο μέρος του ερωτηματολογίου περιλαμβάνει 12 ερωτήσεις και μία ερώτηση ελεύθερης απάντησης, οι οποίες αφορούν τη συλλογή προσωπικών και επαγγελματικών στοιχείων των συμμετεχόντων και τους ζητείται να προσδιορίσουν την εμπειρία τους, αν έχουν, αναφορικά με πρακτικές μαθηματικής μοντελοποίησης.

Το ερωτηματολόγιο παρατίθεται στο Παράρτημα στη σελ. 109.

3.4 Λειτουργικοί ορισμοί

3.4.1 Ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi

Η ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi στην συγκεκριμένη μελέτη σχετίζεται αφενός με το αν οι εκπαιδευτικοί κατάφεραν να χρησιμοποιήσουν κάποια στρατηγική για να επιλύσουν το πρόβλημα και αφετέρου με το είδος της στρατηγικής που χρησιμοποίησαν. Στην περίπτωση της απουσίας μιας καλά καθορισμένης στρατηγικής, η ικανότητα των εκπαιδευτικών κρίνεται ως «ανεπαρκής». Η στρατηγική της «Κατανομής πλέγματος», έχει βρεθεί από προγενέστερες έρευνες (Albarracin & Gorgorio, 2014· Ferrando & Albarracín, 2021), ότι είναι μία στρατηγική που χρησιμοποιούν περισσότερο μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και θεωρείται στρατηγική «μονοδιάστατου συλλογισμού». Επομένως η χρήση αυτής της στρατηγικής από τους εκπαιδευτικούς για την επίλυση των προβλημάτων κρίνεται ως «μέτρια» ικανότητα. Η στρατηγική της «μέτρησης βασικής μονάδας αναφοράς» δείχνει μία «καλή» ικανότητα και τέλος η στρατηγική της «μέτρησης συγκέντρωσης» δείχνει μία «πολύ καλή» ικανότητα των εκπαιδευτικών. Οι δύο τελευταίες στρατηγικές θεωρούνται δισδιάστατου συλλογισμού και ειδικά η «μέτρηση συγκέντρωσης» αφορά την έννοια της πυκνότητας πλήθους.

3.4.2 Γνώση για τη μαθηματική μοντελοποίηση

Ο όρος «γνώση για τη μαθηματική μοντελοποίηση» στην παρούσα εργασία, αφορά τη γνώση περιεχομένου (ΓΠ) και την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου (ΠΓΠ) των εκπαιδευτικών. Η ΓΠ προκύπτει από την ικανότητα διατύπωσης ορισμού της μαθηματικής μοντελοποίησης από τους εκπαιδευτικούς και η ΠΓΠ από τη βαθμολογία τους στις ερωτήσεις κλειστού τύπου του ερωτηματολογίου των γνώσεων.

3.4.3 Στάση για τη μαθηματική μοντελοποίηση

Ο Asempapa (2016), ο οποίος δημιούργησε το ερωτηματολόγιο που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα έρευνα για τη διερεύνηση της στάσης και τη γνώσης των εκπαιδευτικών για την μαθηματική μοντελοποίηση, αναφέρει ότι στάση για την μαθηματική μοντελοποίηση στην συγκεκριμένη μελέτη θεωρείται η ευνοϊκή ή μη συναισθηματική απόκριση σχετικά με τις πρακτικές της μαθηματικής μοντελοποίησης. Ο ίδιος θεωρεί ότι κατά τη διερεύνηση των στάσεων των εκπαιδευτικών απέναντι στη μαθηματική μοντελοποίηση, είναι απαραίτητο να ληφθεί υπόψη όχι μόνο η στάση τους απέναντι στη μοντελοποίηση αλλά και η στάση τους απέναντι στη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης.

3.5 Το δείγμα

Στην παρούσα έρευνα συμμετείχαν 34 εκπαιδευτικοί (23 γυναίκες και 11 άνδρες) πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης εκ των οποίων 1 νηπιαγωγός, 17 δάσκαλοι και 16 καθηγητές μαθηματικών. Οι εκπαιδευτικοί φοιτούσαν στο Διιδρυματικό Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών «Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική Μαθηματικών» κατά το ακαδημαϊκό έτος 2021-22. Η ηλικία τους ήταν από 22 έως 59 ετών και η προϋπηρεσία τους από 0 έως 28 έτη. Η δειγματοληψία ήταν βολική, καθώς εξετάστηκαν φοιτητές οι οποίοι θα παρακολουθούσαν τα ίδια μαθήματα μαθηματικής μοντελοποίησης.

3.6 Στατιστικές τεχνικές

Για την ανάλυση των δεδομένων του ερωτηματολογίου χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο IBM SPSS Statistics 25. Η περιγραφή του δείγματος και τα αποτελέσματα των απαντήσεων των εκπαιδευτικών στο ερωτηματολόγιο έγινε μέσω περιγραφικής στατιστικής (μέσοι όροι, διάμεσοι, τυπικές αποκλίσεις, ποσοστά κ.α.).

Για την συσχέτιση μεταξύ μεταβλητών χρησιμοποιήθηκε ο συντελεστής συσχέτισης Spearman's rho (rs) και το Mann Whitney U test, ως μη παραμετρικοί έλεγχοι, καθώς το δείγμα ήταν μικρό και μη κανονικό. Τέλος, για τη σύγκριση του μέσου όρου σε ίδιο δείγμα και για την ίδια μεταβλητή, χρησιμοποιήθηκε ο μη παραμετρικός έλεγχος Wilcoxon. Το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας (a) ήταν το 0,05.

3.7 Εγκυρότητα και Αξιοπιστία

Για την εξασφάλιση της εγκυρότητας επιλέχθηκε ένα ερωτηματολόγιο και δύο προβλήματα Fermi, τα οποία έχουν χρησιμοποιηθεί από ερευνητές σε προγενέστερες έρευνες (π.χ. Albarracin & Gorgorio, 2014· Ferrando & Albarracín, 2021). Το ερωτηματολόγιο έχει δημιουργηθεί από τον ερευνητή Asempapa (2016) ως εργαλείο για την διερεύνηση του θέματος της παρούσας έρευνας, σχετικά με τις στάσεις και τις γνώσεις των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική μοντελοποίηση. Η εγκυρότητα περιεχομένου του ερωτηματολογίου εξασφαλίζεται από το ότι καλύπτει επαρκώς τα ερευνητικά ερωτήματα τα οποία επιδιώκει να διερευνήσει.

Για τον έλεγχο της αξιοπιστίας, όσον αφορά το ερωτηματολόγιο, εκτιμήθηκαν οι συντελεστές Cronbach's Alpha, όπου βρέθηκε βαθμός αξιοπιστίας a = 0,897, ο οποίος θεωρείται ένας υψηλός βαθμός αξιοπιστίας. Για τις ερωτήσεις των στάσεων ο βαθμός αξιοπιστίας ήταν a = 0,908.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα από την ανάλυση των απαντήσεων των εκπαιδευτικών στα προβλήματα Fermi και στο ερωτηματολόγιο, στις δύο φάσεις που πραγματοποιήθηκε η έρευνα.

Η σειρά με την οποία παρουσιάζονται τα αποτελέσματα είναι η εξής:

Αρχικά, περιγράφονται τα στοιχεία των συμμετεχόντων (προσωπικά και επαγγελματικά χαρακτηριστικά) καθώς και οι εμπειρίες τους σχετικά με την μαθηματική μοντελοποίηση, όπως προέκυψαν από το τρίτο μέρος του ερωτηματολογίου.

Έπειτα, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, αναφορικά με την ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi από τους εκπαιδευτικούς καθώς και τα αποτελέσματα για την ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi από τους εκπαιδευτικούς μετά την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης, που αντιστοιχούν στο τέταρτο ερευνητικό ερώτημα.

Ακολουθούν τα αποτελέσματα που αφορούν το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, σχετικά με το ποιες είναι οι γνώσεις των εκπαιδευτικών για την μαθηματική μοντελοποίηση και στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των γνώσεων των εκπαιδευτικών μετά την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης (4ο ερευνητικό ερώτημα).

Τέλος, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σχετικά με τις στάσεις των εκπαιδευτικών για την μαθηματική μοντελοποίηση και τα αποτελέσματα των στάσεων των εκπαιδευτικών μετά την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης, που αφορούν το τρίτο και τέταρτο ερευνητικό ερώτημα αντίστοιχα.

4.1 Προσωπικά και επαγγελματικά στοιχεία συμμετεχόντων

Στην έρευνα συμμετείχαν 34 εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας (νηπιαγωγός και δάσκαλοι) και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (μαθηματικοί), σχεδόν ισόποσα μοιρασμένοι στις δύο βαθμίδες. Το μεγαλύτερο μέρος των συμμετεχόντων ήταν γυναίκες (N=23). Ο μέσος όρος ηλικίας τους ήταν τα 33,9 έτη, με ελάχιστη ηλικία τα 22 έτη και μέγιστη τα 59. Τα έτη της εκπαιδευτικής προϋπηρεσίας τους, τόσο σε ιδιωτικά και δημόσια σχολεία όσο και σε φροντιστήρια, κυμαίνονταν από 0 έως 28 έτη, με μέσο όρο προϋπηρεσίας τα 6,6 έτη.

Πίνακας 4.1 Ατομικά και επαγγελματικά στοιχεία συμμετεχόντων στην έρευνα

		N	%
Φύλο	Γυναίκα	23	67,6
	Άνδρας	11	32,4
Κλάδος	Πρωτοβάθμια	18	52,9
	Δευτεροβάθμια	16	47,1
Ηλικία	22-29	15	44,1
	30-39	11	32,4
	40-49	2	5,9
	50 άνω	6	17,6
	Μ.Ο	33,97	
	Ελάχιστο-Μέγιστο	22-59	
Έτη προϋπηρεσίας	0	7	20,6

	1-5	12	35,3
	6-10	8	23,5
	11-15	2	5,9
	16-20	3	8,8
	21 άνω	2	5,9
	Μ.Ο	6,67	
	Ελάχιστο-Μέγιστο	0-28	
Επίπεδο σπουδών	Βασικό πτυχίο	20	58,8
	2ο πτυχίο	1	2,9
	Μεταπτυχιακό	13	38,2

4.2 Εμπειρίες εκπαιδευτικών σχετικά με τη μαθηματική μοντελοποίηση

Παρακάτω, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σχετικά με τις εμπειρίες των εκπαιδευτικών με τη μαθηματική μοντελοποίηση, που προέκυψαν από το τρίτο μέρος του ερωτηματολογίου.

Όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, η συντριπτική πλειοψηφία των εκπαιδευτικών (90,6%) αναφέρει ότι δεν παρακολούθησε κάποιο μάθημα σχετικό με την μαθηματική μοντελοποίηση κατά τη διάρκεια των σπουδών στο Πανεπιστήμιο.

Στο ερώτημα αν τα σχολικά εγχειρίδια περιλαμβάνουν προβλήματα μοντελοποίησης (βλ. Πίνακα 4.2) οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί (40,6%), απάντησαν ότι δεν είναι σίγουροι, ωστόσο αρκετοί δήλωσαν ότι τα σχολικά βιβλία δεν περιλαμβάνουν προβλήματα μοντελοποίησης (34,4%) ενώ ένας στους τέσσερις θεωρεί ότι περιλαμβάνουν.

Πίνακας 4.2 Εμπειρίες εκπαιδευτικών με τη μαθηματική μοντελοποίηση

	Όχι		**Ναι**		**Δεν είμαι σίγουρη/ος**		Σύνολο	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Γ7) Περιλαμβάνουν τα σχολικά σας εγχειρίδια προβλήματα μοντελοποίησης;	11	34,4	8	25,0	13	**40,6**	32	100
Γ8) Διδάσκετε δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης;	15	**53,6**	7	25,0	6	21,4	28	100
Γ10) Παρακολουθήσατε κάποιο μάθημα μαθηματικής μοντελοποίησης κατά την διάρκεια των σπουδών σας στο Πανεπιστήμιο;	29	**90,6**	3	9,4	0	0	32	100
Γ11) Η διεύθυνση του σχολείου, σας υποστηρίζει στην διδασκαλία μαθηματικής μοντελοποίησης;	4	16,0	2	8,0	19	**76,0**	25	100

Επιπλέον, όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα, 7 εκπαιδευτικοί δήλωσαν ότι διδάσκουν δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης. Σε αυτούς ζητήθηκε να προσδιορίσουν τον αριθμό μαθημάτων που διδάσκουν ανά εβδομάδα. Έξι εκπαιδευτικοί δήλωσαν ότι διδάσκουν 1 μάθημα μαθηματικής μοντελοποίησης την εβδομάδα και 1 δήλωσε ότι διδάσκει 2 μαθήματα. Με τη μέθοδο της διασταυρωμένης πινακοποίησης (Crosstabs), ελέγχθηκε πόσοι από τους εκπαιδευτικούς που δήλωσαν ότι διδάσκουν δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης δηλώνουν ότι τα σχολικά εγχειρίδια περιλαμβάνουν προβλήματα μοντελοποίησης. Πέντε εκπαιδευτικοί (71,4%) δήλωσαν «ναι», ενώ 1 εκπαιδευτικός δήλωσε ότι δεν είναι σίγουρος/η και 1 δήλωσε ότι τα σχολικά εγχειρίδια δεν περιλαμβάνουν προβλήματα μαθηματικής μοντελοποίησης.

Τέλος, στην ανοιχτή ερώτηση Γ12 ζητήθηκε προαιρετικά από τους εκπαιδευτικούς να περιγράψουν τις εμπειρίες τους αναφορικά με τη μαθηματική μοντελοποίηση ή άλλες πληροφορίες που θεωρούν ότι σχετίζονται με αυτή. Από τους 34 εκπαιδευτικούς, απάντησαν οι 6 (17,6%).

Οι μισοί εκπαιδευτικοί αναφέρουν την έλλειψη εμπειρίας τους και επιμόρφωσης στην μαθηματική μοντελοποίηση (βλ. Εικόνα 4.1). Επισημαίνουν, επιπλέον, τη δυσκολία τους να την υλοποιήσουν λόγω των ιδιαίτερων εργασιακών συνθηκών, αναφέροντας ως πρόβλημα και την έλλειψη διδακτικού χρόνου.

«Δεν έχω κάποιες εμπειρίες σχετικές με τη μοντελοποίηση, δεν έχω παρακολουθήσει σεμινάρια ή κάποια επιμόρφωση. Δυστυχώς η εκπαίδευση στη βαθμίδα του Λυκείου δεν μας «επιτρέπει» να κινηθούμε προς αυτή την κατεύθυνση λόγω έλλειψης διδακτικού χρόνου.»

«Καθώς διδάσκω μόνο σε ιδιαίτερα φροντιστηριακά μαθήματα, δεν έχω την δυνατότητα να πάρω πρωτοβουλίες και να κάνω δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης.»

«Δεν έχω εμπειρίες με την μαθηματική μοντελοποίηση.»

Εικόνα 4.1 Απαντήσεις εκπαιδευτικών για τις εμπειρίες τους με τη μοντελοποίηση

4.3 Ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi από τους εκπαιδευτικούς

4.3.1 Ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi από τους εκπαιδευτικούς πριν την παρακολούθηση μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης (Α' εξέταση)

Για να απαντηθεί το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, σχετικά με την ικανότητα επίλυσης ενός προβλήματος Fermi από τους εκπαιδευτικούς, τους δόθηκε το εξής πρόβλημα:

Το σχολείο στο οποίο εργάζεστε διοργανώνει μία συναυλία για τη λήξη της σχολικής χρονιάς. Για να γίνει αυτό, χρειάζεται να επιλεγεί ο κατάλληλος χώρος για τη διεξαγωγή της. Η προτιμώμενη επιλογή είναι να γίνει στο γήπεδο μπάσκετ του προαυλίου. Πόσα άτομα μπορούν να χωρέσουν εντός ενός τέτοιου χώρου;

Για την κατηγοριοποίηση των δεδομένων σε στρατηγικές επίλυσης κατά την ανάλυση των λύσεων των εκπαιδευτικών, χρησιμοποιήθηκε η τυπολογία που καθιερώθηκε στις έρευνες των Albarracin & Gorgorio (2014) και Ferrando & Albarracín (2021), όπως έχει ήδη αναφερθεί στο θεωρητικό μέρος της εργασίας (βλ. σελ. 15).

Από την ανάλυση των λύσεων των εκπαιδευτικών, ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό (38,2%) δεν κατάφερε να δώσει μία λύση στο πρόβλημα, απέτυχε να περιγράψει επαρκώς τη διαδικασία ή έδωσε ακατανόητες ή μη ολοκληρωμένες λύσεις, δείχνοντας μία ανεπαρκή ικανότητα επίλυσης. Το ποσοστό αυτό είναι μεγαλύτερο στους εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας (44,4%) σε σχέση με αυτούς της δευτεροβάθμιας (31,2%).

Πίνακας 4.3 Στρατηγικές επίλυσης προβλήματος Fermi από τους εκπαιδευτικούς

	Απουσία μιας καλά καθορισμένης στρατηγικής		**Κατανομή πλέγματος**		**Μέτρηση μονάδας αναφοράς**		**Μέτρηση συγκέντρωσης (άνθρωποι/τ.μ.)**		**Σύνολο**	
	N	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**
Πρωτοβάθμια	8	44,4	2	11,1	5	27,7	3	16,6	18	100
Δευτεροβάθμια	5	31,2	3	18,7	7	43,7	1	6,2	16	100
Σύνολο	13	**38,2**	5	**14,7**	12	**35,2**	4	**11,7**	34	100

Επιπλέον, η *κατανομή πλέγματος*, στρατηγική που θεωρείται «μονοδιάστατου συλλογισμού» (Ferrando & Albarracín, 2021) και αντιστοιχεί σε μία μέτρια ικανότητα επίλυσης, χρησιμοποιήθηκε από τους εκπαιδευτικούς σε ποσοστό 14,7%. Τέλος, οι στρατηγικές «δισδιάστατου συλλογισμού», δηλαδή η *μέτρηση μονάδας αναφοράς* και η *μέτρηση συγκέντρωσης*, οι οποίες αντιστοιχούν σε καλή και πολύ καλή ικανότητα εκτίμησης, αφορούσαν το 46,9% των απαντήσεων.

Ως παράδειγμα απουσίας μιας καλά καθορισμένης στρατηγικής, στις Εικόνες 4.2 και 4.3 παρουσιάζονται οι απαντήσεις ενός δασκάλου και ενός μαθηματικού αντίστοιχα:

Το συγκεκριμένο πρόβλημα μου θυμίζει το πρόβλημα με τον καπετάνιο το οποίο λόγω πληροφοριών που λείπουν ήταν αδύνατο να λυθεί. Όμως, σε πρώτη βάση σκοπός είναι η κατανόηση τους προβλήματος. Διαβάζοντάς το γίνεται κατανοητό αυτό που ζητείται να βρεθεί, ωστόσο επειδή λείπουν κάποια σημαντικά δεδομένα, όπως διαστάσεις, πλήθος καρεκλιών (αν υπάρχουν στις κερκίδες), θα υπάρχει κόσμος και στον υπόλοιπο χώρο; κλπ κλπ. κάτι τέτοιο είναι αδύνατο. Δεν έχω ακολουθήσει κάποια μαθηματική διαδικασία ή πράξη καθώς πιστεύω ότι πρέπει να επαναδιατυπωθεί το πρόβλημα με νέα δεδομένα. Σε αντίθετη περίπτωση, μπορεί να επιλυθεί μόνο αν χρησιμοποιήσουμε δικούς μας αριθμούς.

Εικόνα 4.2 Απουσία μιας καλά καθορισμένης στρατηγικής, απάντηση εκπαιδευτικού πρωτοβάθμιας

Οι πληροφορίες που δίνονται δεν επαρκούν για να λυθεί με μαθηματικό τρόπο, αλλά με λογικό. Στο γήπεδο του μπάσκετ καθημερινά, κάθε πρωί συγκεντρώνεται όλο το σχολείο με όλους τους μαθητές και δασκάλους, αλλά και κάποιους από τους γονείς και υπάρχει περίσσιος χώρος. Οπότε σίγουρα χωράνε όλοι οι μαθητές του σχολείου με τους δασκάλους και τους γονείς.

Εικόνα 4.3 Απουσία μιας καλά καθορισμένης στρατηγικής, απάντηση εκπαιδευτικού δευτεροβάθμιας

Η κυρίαρχη στρατηγική που χρησιμοποίησαν οι εκπαιδευτικοί για την επίλυση του προβλήματος Fermi, ήταν αυτή της *μέτρησης βασικής μονάδας αναφοράς* (35,2%). Με αυτή τη στρατηγική, οι εκπαιδευτικοί εκτιμούν αρχικά τη συνολική επιφάνεια του γηπέδου καθώς και τον χώρο που καταλαμβάνει ένα άτομο και στη συνέχεια διαιρούν, ώστε να βρουν το πλήθος των ατόμων που χωρούν στο γήπεδο, όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.4. Η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας χρησιμοποίησε αυτή τη στρατηγική για την επίλυση του προβλήματος, ενώ στους εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας αν και είναι επίσης η προτιμώμενη στρατηγική, το ποσοστό των έργων που δεν χρησιμοποίησαν μια καλά καθορισμένη στρατηγική είναι εμφανώς μεγαλύτερο, όπως ειπώθηκε παραπάνω.

Υποθέτουμε ότι το κάθε άτομο κατά μέσο όρο [καταλαμβάνει] *ένα χώρο ο οποίος είναι ένα τετράγωνο με πλευρά 0,7 μέτρα, άρα χρειάζεται 0,49 τετραγωνικά μέτρα. Το γήπεδο του μπάσκετ έχει διαστάσεις 25 μέτρα μήκος και 10 μέτρα πλάτος, οπότε το εμβαδόν του είναι 25*10=250 τετραγωνικά μέτρα. Η σκηνή για την συναυλία θα μπει κοντά στο ένα καλάθι και θα πιάσει 10 μέτρα στο πλάτος και 7 στο μήκος άρα το εμβαδόν της είναι 10*7=70 τετραγωνικά μέτρα. Για τους θεατές μένουν 250-70=180 τετραγωνικά μέτρα. Για να βρούμε πόσοι θεατές χωράνε τώρα θα κάνουμε 180/0,49=367,34 άρα 367 άτομα.*

Εικόνα 4.4 Επίλυση με Μέτρηση μονάδας αναφοράς

Επιπλέον, δε μπορούν να θεωρηθούν όλες οι απαντήσεις που προτείνουν την ίδια στρατηγική το ίδιο σύνθετες, καθώς κάποιες από τις απαντήσεις κατέληγαν σε αριθμητική λύση ενώ άλλες περιέγραφαν μόνο το πλάνο επίλυσης, χωρίς να καταλήξουν σε κάποια εκτίμηση πλήθους. Επιπλέον, κάποιες από τις απαντήσεις λάμβαναν υπόψη τους τον μη ωφέλιμο χώρο, αφαιρώντας τον από την συνολική επιφάνεια του γηπέδου.

Πίνακας 4.4 Συνθετότητα στρατηγικής μέτρησης μονάδας αναφοράς

	Μονάδα αναφοράς μόνο με αριθμητική λύση		**Μονάδα αναφοράς μόνο με υπολογισμό ωφέλιμου χώρου**		**Μονάδα αναφοράς με αριθμητική λύση και υπολογισμό ωφέλιμου χώρου**		**Μονάδα αναφοράς χωρίς αριθ/κή λύση και ωφέλιμο χώρο**		**Σύνολο**	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Πρωτ/μια	0	0	1	20	4	80	0	0	5	100
Δευτ/μια	1	14,2	1	14,2	4	57,1	1	14,2	7	100
Σύνολο	1	0,8	2	1,6	8	**66,6**	1	0,8	12	100

Από τον παραπάνω Πίνακα, βλέπουμε ότι η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών που επέλεξε την στρατηγική μέτρησης μονάδας αναφοράς, κατέληξε σε μία αριθμητική εκτίμηση υπολογίζοντας ταυτόχρονα και τον ωφέλιμο χώρο του γηπέδου (66,6%), με τους εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας σε μεγαλύτερο ποσοστό (80%) σε σχέση με αυτούς της δευτεροβάθμιας (57,1%).

Πέντε από τους εκπαιδευτικούς (14,7%) έλυσαν το πρόβλημα με τη στρατηγική της *κατανομής πλέγματος* (Εικόνα 4.5). Οι δύο από αυτούς (εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας), δεν έδωσαν κάποια αριθμητική εκτίμηση αλλά περιέγραψαν μόνο ένα πλάνο επίλυσης ενώ οι 3 μαθηματικοί επιχείρησαν να δώσουν μία αριθμητική λύση.

Έστω ότι οι διαστάσεις του γηπέδου (σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου) είναι: πλάτος 10 μέτρα και μήκος 17 μέτρα. Στην πρώτη σειρά (ως προς το πλάτος) μπορούν να τοποθετηθούν (υπό τον περιορισμό του 0.5 μέτρου απόστασης μεταξύ των μαθητών) 2x10+1=21 μαθητές. Στην πρώτη σειρά (ως προς το μήκος) μπορούν να τοποθετηθούν (υπό τον περιορισμό του 0.5 μέτρου απόστασης μεταξύ των μαθητών) 2x17+1=35 μαθητές. Οπότε στο χώρο μπορούν να χωρέσουν 21x35=735 μαθητές. Το πλήθος αυτό θα συγκριθεί με το πλήθος των μαθητών του σχολείου για να διαπιστωθεί η καταλληλόλητα ή μη του χώρου.

Εικόνα 4.5 Στρατηγική κατανομής πλέγματος

Τέλος, τη στρατηγική της *μέτρησης συγκέντρωσης* επέλεξε το 11,7% των εκπαιδευτικών και συγκεκριμένα 3 εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας και 1 δευτεροβάθμιας.

Πλάνο επίλυσης: Αν αναλογιστούμε πως θα γίνει μια σχολική συναυλία, θα υπάρχουν καρέκλες για τους γονείς και όσους το παρακολουθήσουν. Δεδομένου ότι κατά προσέγγιση τα γήπεδα έχουν διαστάσεις περίπου 30χ15 μέτρα, το εμβαδό του γηπέδου θα είναι 450 τ.μ. Αν αναλογιστούμε πως το 1/3 της επιφάνειας θα καταλαμβάνεται από τη σκηνή, στην οποία θα βρίσκεται η χορωδία, η εναπομείνασα επιφάνεια είναι 300 τ.μ. Αν αφαιρεθούν κάποια τ.μ. ως διάδρομοι και περιθώρια (εκτιμώ περίπου το 1/3 δηλαδή 100 τ.μ.), απομένουν 200 τ.μ. Αν πάρουμε ως δεδομένο σε 1τμ μπορούν να χωρέσουν 2 πλαστικές καρέκλες τότε, θα μπορέσουν να στηθούν 400 καρέκλες. Επομένως θα μπορούσαν να χωρέσουν περίπου 400 άτομα σε έναν τέτοιο χώρο. Μαθηματικές διαδικασίες / πράξεις: 30x15= 450 τ.μ. 450-1/3= 300τ.μ. 300-1/3=200 τ.μ. 2x200=400 καρέκλες

Εικόνα 4.6 Στρατηγική μέτρησης συγκέντρωσης

Στη συγκεκριμένη στρατηγική πολλαπλασιάζεται ο εκτιμώμενος χώρος του γηπέδου (σε τ.μ.) με τον αριθμό των ατόμων που εκτιμάται ότι χωράνε ανά τετραγωνικό και ουσιαστικά πρόκειται για την έννοια της πυκνότητας πλήθους (βλ. Εικόνα 4.6).

Όπως ειπώθηκε και παραπάνω, κάποιες από τις λύσεις θεωρήθηκαν πιο ολοκληρωμένες, καθώς οι εκπαιδευτικοί προχώρησαν σε αριθμητική εκτίμηση και δεν περιέγραψαν μόνο το πλάνο επίλυσης. Έτσι, αν και όλοι οι εκπαιδευτικοί έλαβαν υπόψη τους τον ωφέλιμο χώρο του γηπέδου, οι μισοί (2 εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας) έδωσαν μια πιο ολοκληρωμένη απάντηση, αφού η λύση τους ήταν αριθμητική.

Τέλος, κάποιοι από τους εκπαιδευτικούς, όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 4.2, δήλωσαν ότι διδάσκουν δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης. Έτσι, κρίθηκε σκόπιμο να διερευνηθεί εάν η επίδοση αυτών των εκπαιδευτικών στην επίλυση προβλήματος Fermi ήταν καλύτερη από τους υπόλοιπους εκπαιδευτικούς. Με τον έλεγχο της διασταυρωμένης πινακοποίησης (Cross tabulation), ελέγχθηκε αν οι εκπαιδευτικοί που δήλωσαν ότι διδάσκουν μαθηματική μοντελοποίηση, έχουν ταυτόχρονα καλή ή πολύ καλή ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi. Τα αποτελέσματα, έδειξαν το αντίθετο: Από τους 7 εκπαιδευτικούς που δήλωσαν ότι διδάσκουν δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης, οι 3 είχαν ανεπαρκή ικανότητα επίλυσης, 3 μέτρια ικανότητα επίλυσης ενώ μόνο 1 εκπαιδευτικός είχε πολύ καλή ικανότητα επίλυσης.

Πίνακας 4.5 Ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi εκπαιδευτικών σε σχέση με το αν δηλώνουν ότι διδάσκουν δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης

	Ανεπαρκής ικανότητα	Μέτρια ικανότητα	Καλή ικανότητα	Πολύ καλή ικανότητα	Σύνολο
	N (%)	N (%)	N (%)	N (%)	N (%)
Διδάσκει μαθηματική μοντελοποίηση	3 (42,9)	3 (42,9)	0 (0)	1 (14,3)	7 (100)
Δε διδάσκει μαθηματική μοντελοποίηση	4 (26,7)	0	9 (60)	2 (13,3)	15 (100)

Συνοψίζοντας, πάνω από τους μισούς εκπαιδευτικούς (18 από τους 34) σημείωσαν ανεπαρκή (38,2%) ή μέτρια (14,7%) ικανότητα επίλυσης των προβλημάτων Fermi. Οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας σε μεγαλύτερο ποσοστό (44,4%) σε σχέση με τους εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας (31,2%) δεν κατάφεραν να επιλύσουν το πρόβλημα Fermi. Το 35,2% των εκπαιδευτικών είχε μία καλή ικανότητα επίλυσης και το 11,7% πολύ καλή ικανότητα επίλυσης.

4.3.2 Ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi από τους εκπαιδευτικούς μετά την παρακολούθηση μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης (Β’ Εξέταση)

Όπως ειπώθηκε και στην ενότητα της διαδικασίας συλλογής δεδομένων, από τους 34 εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν στην πρώτη φάση, οι 14 παρακολούθησαν τα μαθήματα μοντελοποίησης και έλυσαν το 2^{ο} πρόβλημα αμέσως μετά. Οι υπόλοιποι δεν παρακολούθησαν τα συγκεκριμένα μαθήματα, επομένως δε συμμετείχαν στη δεύτερη φάση της έρευνας. Από τους 14 εκπαιδευτικούς, οι 3 ήταν εκπαιδευτικοί Πρωτοβάθμιας και οι 11 ήταν εκπαιδευτικοί Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Για τον λόγο αυτό, δεν θα εξεταστούν οι απαντήσεις σε σχέση με τη βαθμίδα εκπαίδευσης των συμμετεχόντων.

Το πρόβλημα που κλήθηκαν να λύσουν οι εκπαιδευτικοί ήταν το εξής:

Πόσοι άνθρωποι πιστεύετε ότι χωράνε στην πλατεία δημαρχείου του δήμου σας, κατά τη διάρκεια μιας συγκέντρωσης διαμαρτυρίας;

Τα αποτελέσματα της Β’ εξέτασης έδειξαν ότι μηδενίστηκε το ποσοστό των εκπαιδευτικών που οι απαντήσεις τους δεν είχαν κάποια καλά καθορισμένη στρατηγική. Αντίθετα, πριν τα μαθήματα μαθηματικής μοντελοποίησης, οι απαντήσεις αυτής της κατηγορίας αφορούσαν το 35,7% των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν και στις δύο εξετάσεις της έρευνας. Ακόμη, σε αυτή την εξέταση απουσίαζε εντελώς και η *κατανομή πλέγματος*, που είναι στρατηγική «μονοδιάστατου συλλογισμού». Έτσι, μετά την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης παρατηρείται αποκλειστικά επιλογή στρατηγικών «δισδιάστατου συλλογισμού», δηλαδή της *μέτρησης βασικής μονάδας* αναφοράς και της *μέτρησης συγκέντρωσης* (βλ. Πίνακα 4.5), οι οποίες αντιστοιχούν σε μια καλή και πολύ καλή ικανότητα επίλυσης. Η στρατηγική της *μέτρησης βασικής μονάδας αναφοράς* εξακολουθεί να είναι η προτιμώμενη στρατηγική στο σύνολο των εκπαιδευτικών.

Πίνακας 4.6 Σύγκριση επιλεγόμενων στρατηγικών στις δύο εξετάσεις

	Απουσία στρατηγικής		**Πλέγμα**		**Μέτρηση μονάδας αναφοράς**		**Μέτρηση συγκέντρωσης**		**Σύνολο**
	Α’ εξ.	Β’ εξ.	Α’ εξ.	Β’ εξ.	Α’ εξ.	Β’ εξ.	Α’ εξ.	Β’ εξ.	
	Ν (%)	Ν (%)	Ν (%)	Ν (%)	Ν (%)	Ν (%)	Ν (%)	Ν (%)	Ν (%)
Εκπαιδευτικοί	5 (35,7)	0 (0)	2 (14,2)	0 (0)	6 **(42,8)**	11 **(78,5)**	1 **(7,1)**	3 **(21,5)**	14 (100)

Επιπλέον, συγκρίνοντας τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι 14 εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν και στις δύο εξετάσεις (βλ. Πίνακα 4.6), παρατηρείται ότι η μέτρηση μονάδας αναφοράς είναι η προτιμώμενη στρατηγική και στις δύο εξετάσεις, αλλά ο αριθμός των εκπαιδευτικών που την χρησιμοποιούν σχεδόν διπλασιάζεται στην Β’ εξέταση.

Από τους 14 εκπαιδευτικούς οι 9 χρησιμοποίησαν είτε στρατηγικές πιο σύνθετες σε σχέση με την Α’ εξέταση είτε τις ίδιες αλλά με πιο σύνθετη λύση, ποσοστό που αντιστοιχεί στο 64,2% του συνόλου. Οι υπόλοιποι 5 εκπαιδευτικοί χρησιμοποίησαν τη μέτρηση βασικής μονάδας αναφοράς ως στρατηγική, τόσο στην Α’ όσο και στη Β’ εξέταση, χωρίς να παρατηρείται κάποια αλλαγή στη στρατηγική τους. Στον παρακάτω Πίνακα παρουσιάζονται αναλυτικά οι στρατηγικές του κάθε συμμετέχοντα σε καθεμία από τις δύο εξετάσεις.

Πίνακας 4.7 Στρατηγικές επίλυσης προβλήματος Fermi κάθε συμμετέχοντα στις δύο εξετάσεις

Συμμετέχοντες	**Α' Εξέταση**	**Β' Εξέταση**
Σ1	Σημείο αναφοράς +	Σημείο αναφοράς αριθμ.
Σ2	Σημείο αναφοράς +	Σημείο αναφοράς
Σ3	Σημείο αναφοράς	Σημείο αναφοράς
Σ4	Μη καλά καθορισμένη	**Σημείο αναφοράς αριθμ.**
Σ5	Μη καλά καθορισμένη	**Σημείο αναφοράς +**
Σ6	Πλέγμα	**Μέτρ. συγκέντρωσης αριθμ.**
Σ7	Μη καλά καθορισμένη	**Σημείο αναφοράς αριθμ.**
Σ8	Σημείο αναφοράς +	Σημείο αναφοράς +
Σ13	Μέτρ. συγκέντρωσης ωφ.χ.	**Μέτρ. συγκέντρωσης +**
Σ28	Σημείο αναφοράς +	Σημείο αναφοράς +
Σ29	Μη καλά καθορισμένη	**Σημείο αναφοράς +**
Σ30	Πλέγμα	**Σημείο αναφοράς +**
Σ33	Μη καλά καθορισμένη	**Σημείο αναφοράς ωφ.χ.**
Σ34	Σημείο αναφοράς αριθμ.	**Μέτρ. συγκέντρωσης αριθμ.**

* Με έντονη γραφή στην στήλη της Β' εξέτασης είναι τα έργα με πιο σύνθετες στρατηγικές συγκριτικά με την Α' εξέταση.

**ωφ.χ.= λύσεις που έλαβαν υπόψη τους τον ωφέλιμο χώρο , «αριθμ» = λύσεις που έδωσαν αριθμητική εκτίμηση

*** «+»= λύσεις με ωφ.χ. και με αριθμ.

Για να διαπιστωθεί αν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στην ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi από τους εκπαιδευτικούς πριν και μετά την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης, έγινε έλεγχος των αποτελεσμάτων της Α' και Β' εξέτασης με το μη παραμετρικό τεστ Wilcoxon. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά ($r = 0,623$ $p = 0,020 < 0,05$).

Συνοψίζοντας, η ικανότητα των εκπαιδευτικών μετά την παρακολούθηση μαθημάτων μοντελοποίησης βελτιώθηκε, αφού όλοι οι εκπαιδευτικοί κατάφεραν να λύσουν το πρόβλημα με μία «δισδιάστατου συλλογισμού» στρατηγική, με την πλειοψηφία των εκπαιδευτικών (78,5%) να σημειώνει μία καλή ικανότητα επίλυσης. Η διαφορά ανάμεσα στην Α' και Β' εξέταση είναι στατιστικά σημαντική.

4.3.3 Συσχετίσεις ικανότητας επίλυσης προβλήματος Fermi με προσωπικά και επαγγελματικά χαρακτηριστικά των εκπαιδευτικών

Με τον συντελεστή συσχέτισης Spearman (rs) και με το Mann – Whitney U test ελέγχθηκε η σχέση μεταξύ των προσωπικών και επαγγελματικών χαρακτηριστικών των εκπαιδευτικών και της ικανότητας επίλυσης προβλήματος Fermi. Η ανάλυση έδειξε ότι κανένα από τα τρία στοιχεία που ελέγχθηκαν (βαθμίδα εκπαίδευσης, προϋπηρεσία και επίπεδο σπουδών των εκπαιδευτικών) δε συσχετίζονται με την ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi.

Πίνακας 4.8 Συσχέτιση ικανότητας επίλυσης προβλήματος Fermi με προσωπικά και επαγγελματικά χαρακτηριστικά εκπαιδευτικών

	Βαθμίδα εκπαίδευσης		Προϋπηρεσία		Επίπεδο σπουδών	
	r	p*	r	p**	r	p**
Ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi	0,043	0,825	0,097	0,587	0,261	0,172

* Mann – Whitney U test ** Spearman's rho

4.4 Οι γνώσεις των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική μοντελοποίηση

Το πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου αφορούσε τις γνώσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με την μαθηματική μοντελοποίηση. Περιελάμβανε 11 ερωτήσεις κλειστού τύπου (ναι - όχι) (π.χ. «Οι δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης απαιτούν τη χρήση της τεχνολογίας», «Η μαθηματική μοντελοποίηση ευνοεί την κοινωνική αλληλεπίδραση των μαθητών») οι οποίες αφορούσαν τις παιδαγωγικές γνώσεις περιεχομένου και μία ανοιχτή ερώτηση, στην οποία οι εκπαιδευτικοί έπρεπε να δώσουν έναν ορισμό για την μαθηματική μοντελοποίηση, η οποία αντιστοιχεί στη γνώση περιεχομένου των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική μοντελοποίηση. Για τις ερωτήσεις κλειστού τύπου, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με 1 (άριστα το 11). Ο ορισμός των εκπαιδευτικών αξιολογήθηκε με μια βαθμολογία που είχε τιμές από το 1 έως το 4, σύμφωνα με την αξιολογική κατηγοριοποίηση του Asempapa (2016). Τέλος, η βαθμολογία του κάθε εκπαιδευτικού στις ερωτήσεις κλειστού τύπου και στον ορισμό αθροίστηκε, ώστε να προκύψει μία τελική βαθμολογία (άριστα το 15), η οποία αντικατοπτρίζει το σύνολο των γνώσεων για τη μαθηματική μοντελοποίηση.

4.4.1 Οι γνώσεις των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική μοντελοποίηση πριν την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης (Α' Εξέταση)

Από την ανάλυση των απαντήσεων στις 11 ερωτήσεις κλειστού τύπου, φάνηκε ότι οι ερωτήσεις απαντήθηκαν σωστά από την πλειοψηφία των εκπαιδευτικών (βλ. Πίνακα 4.9). Συγκεκριμένα, το 90,6% των απαντήσεων ήταν σωστές και το 9,4% λανθασμένες. Ο μέσος όρος των απαντήσεων των εκπαιδευτικών ήταν το 9,97 (άριστα 11).

Πίνακας 4.9 Αριθμός και ποσοστό σωστών και λάθος απαντήσεων στις ερωτήσεις γνώσεων

Ερωτήσεις	**Σωστές απαντήσεις (%)**			**Λάθος απαντήσεις (%)**		
	Σύνολο	**Πρωτ/μια**	**Δευτ/μια**	**Σύνολο**	**Πρωτ/μια**	**Δευτ/μια**
Α1	**32 (94,1)**	18 (100)	14 (87,5)	2 (5,9)	0 (0)	2 (12,5)
Α2	**30 (88,2)**	17 (94,4)	13 (81,3)	4 (11,8)	1 (5,6)	3 (18,8)
Α3	**34 (100)**	18 (100)	16 (100)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
Α4	**31 (91,2)**	15 (83,3)	16 (100)	3 (8,8)	3 (16,7)	0 (0)
Α5	**25 (73,5)**	13 (72,2)	12 (75)	9 (26,5)	5 (27,8)	4 (25)
Α6	**34 (100)**	18 (100)	16 (100)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
Α7	**28 (82,4)**	16 (88,9)	12 (75)	6 (17,6)	2 (11,1)	4 (25)
Α8	**28 (82,4)**	16 (88,9)	12 (75)	6 (17,6)	2 (11,1)	4 (25)
Α9	**32 (94,1)**	16 (88,9)	16 (100)	2 (5,9)	2 (11,1)	0 (0)
Α10	**31 (91,2)**	16 (88,9)	15 (93,8)	3 (8,8)	2 (11,1)	1 (6,3)
Α11	**34 (100)**	18 (100)	16 (100)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
Σύνολο	**339 (90,6)**	181 **(91,4)**	158 (**89,8**)	35 (9,4)	17 (8,6)	18 (10,2)

Υπήρξαν τρεις ερωτήσεις (Α3, Α6 και Α11) στις οποίες το σύνολο των εκπαιδευτικών απάντησαν σωστά. Συγκεκριμένα, όλοι οι εκπαιδευτικοί διαφώνησαν ότι η διαδικασία της μαθηματικής μοντελοποίησης είναι ίδια με την διαδικασία επίλυσης προβλημάτων (Α3) και συμφώνησαν ότι η μαθηματική μοντελοποίηση συνδέει τις μαθηματικές αναπαραστάσεις (Α6) και ευνοεί ουσιαστικές συζητήσεις οι οποίες αποκαλύπτουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών (Α11). Επιπλέον, η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών γνωρίζει ότι η μαθηματική μοντελοποίηση δεν είναι μια απλή διαδικασία ενός σταδίου (Α1) καθώς και ότι είναι μια διαδικασία μετάβασης από τον πραγματικό κόσμο στον κόσμο των μαθηματικών (Α2), ενθαρρύνει το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά (Α4) και υποστηρίζει την δημιουργική προσπάθεια στην μάθηση των μαθηματικών (Α9). Τέλος, οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί διαφωνούν ότι η μαθηματική μοντελοποίηση απαιτεί διαδικασίες χαμηλού γνωστικού επιπέδου (Α10).

Στην πλειοψηφία τους, αν και σε μικρότερο ποσοστό σε σχέση με τα άλλα ερωτήματα, οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν ότι η μαθηματική μοντελοποίηση περιλαμβάνει τη δημιουργία προβλήματος πριν την επίλυση του προβλήματος (Α5), καθώς και ότι ευνοεί την κοινωνική αλληλεπίδραση των μαθητών (Α8) και δεν απαιτεί τη χρήση τεχνολογίας (Α7).

Όσον αφορά τις διαφορές που βρέθηκαν μεταξύ των δύο βαθμίδων εκπαίδευσης, οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας σημείωσαν ελάχιστα μεγαλύτερο ποσοστό σωστών απαντήσεων (91,4%) σε σχέση με τους εκπαιδευτικούς της Δευτεροβάθμιας (89,8%). Και στις δύο βαθμίδες η ελάχιστη βαθμολογία ήταν 8 και η μέγιστη το 11, ενώ ο μέσος όρος ήταν 10,6 και 9,88 για την Πρωτοβάθμια και τη Δευτεροβάθμια αντίστοιχα (βλ. Πίνακα 4.10).

Πίνακας 4.10 Σύγκριση βαθμολογίας ερωτήσεων κλειστού τύπου στις δύο βαθμίδες εκπαίδευσης

	N	Μ. Ο.*	Διάμεσος	Ελάχιστο – Μέγιστο	Τ.Α.*	Εύρος
Πρωτοβάθμια	18	10,6	10	8 – 11	0,998	3
Δευτεροβάθμια	16	9,88	10	8 -11	1,088	3
Σύνολο	34	9,97	10	8 - 11	1,029	3

*Μ.Ο. = Μέσος Όρος , Τ.Α. = Τυπική απόκλιση

Ορισμός μαθηματικής μοντελοποίησης

Στο τελευταίο ερώτημα του μέρους του ερωτηματολογίου που αφορούσε τις γνώσεις, οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να δώσουν έναν σύντομο ορισμό της μαθηματικής μοντελοποίησης. Οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών βαθμολογήθηκαν από το 1 έως το 4 και αξιολογήθηκαν σύμφωνα με την ρουμπρίκα αξιολόγησης του Asempapa (2016), όπως φαίνεται παρακάτω.

Κατηγοριοποίηση ορισμών			
Εξαιρετικός = 4	**Καλός = 3**	**Μέτριος = 2**	**Ελλιπής= 1**
Ο ορισμός δείχνει πλήρη κατανόηση και παρέχει λεπτομερή εξήγηση. Δηλώνει σχεδόν όλα τα βήματα που εμπλέκονται στη διαδικασία μοντελοποίησης. Συνδέει τα μαθηματικά, τις πραγματικές καταστάσεις και τη μετάφραση μεταξύ των δύο.	Ο ορισμός δείχνει τη βασική κατανόηση και παρέχει μία ελάχιστη εξήγηση. Αναφέρει βήματα που εμπλέκονται στη διαδικασία μοντελοποίησης. Δεν υπάρχει σύνδεση μεταξύ των μαθηματικών και του πραγματικού κόσμου.	Ο ορισμός δείχνει λίγη κατανόηση και ελάχιστη έως καθόλου εξήγηση. Αναφέρει λιγότερα βήματα που εμπλέκονται στη διαδικασία μοντελοποίησης. Δεν υπάρχει σύνδεση με πραγματικές καταστάσεις.	Ο ορισμός δεν δείχνει στοιχεία κατανόησης της φράσης μαθηματική μοντελοποίηση.

Εικόνα 4.7 Ρουμπρίκα αξιολόγησης ορισμών

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται απαντήσεις των εκπαιδευτικών για καθεμία από τις τέσσερις αξιολογήσεις των ορισμών.

Ελλιπής ορισμός: *«Έκφραση στην γλώσσα των συμβόλων μιας έκφρασης της ομιλούμενης γλώσσας»*

Μέτριος ορισμός: *«Μια διαδικασία με την οποία μελετούμε και επεξεργαζόμαστε ένα μαθηματικό μοντέλο.»*

Καλός ορισμός: *«Είναι η ανάπτυξη μαθηματικής περιγραφής ενός φαινομένου, ενός συστήματος ή μιας διαδικασίας και η μελέτη τους με τη χρήση μαθηματικών εργαλείων. Τα εργαλεία αυτά μπορεί να είναι ένα σύστημα εξισώσεων, ένα σύνολο αριθμών, ένας αλγόριθμος, μια στοχαστική διαδικασία κλπ.»*

Εξαιρετικός ορισμός: *«Μαθηματική Μοντελοποίηση είναι η διαδικασία κατά την οποία ένα πρόβλημα του πραγματικού κόσμου οργανώνεται σύμφωνα με μαθηματικές έννοιες και αναγνωρίζοντας τα σχετικά μαθηματικά γίνονται υποθέσεις και γενικεύσεις μετατρέποντας το πραγματικό πρόβλημα σε μαθηματικό πρόβλημα.»*

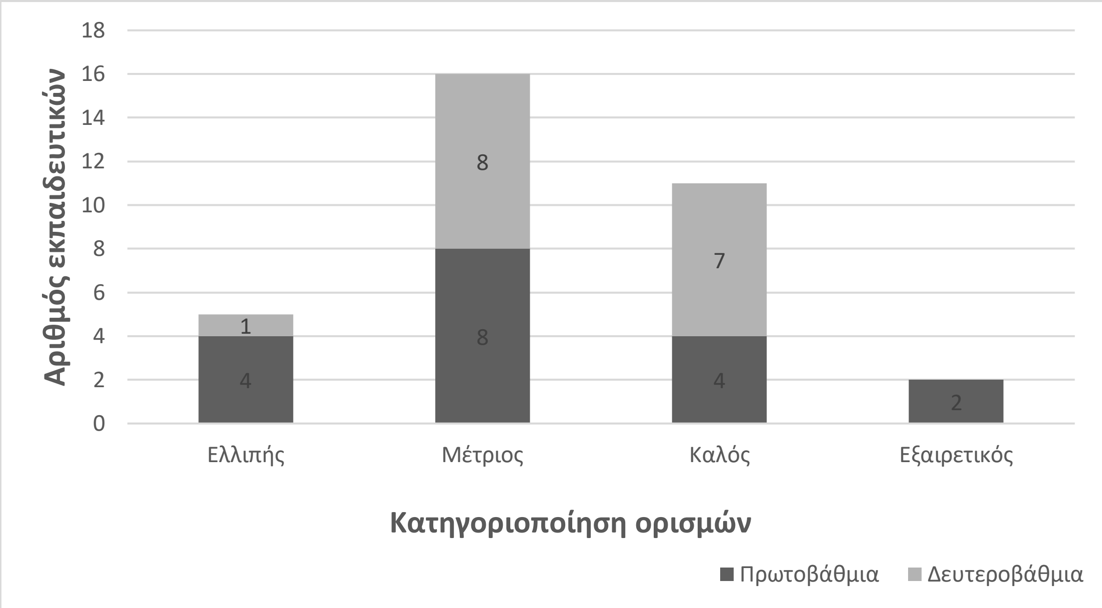
Από την αξιολόγηση και την ανάλυση των ορισμών που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί φάνηκε ότι η πλειοψηφία (61,8%) δεν κατάφερε να δώσει έναν εξαιρετικό ή καλό ορισμό της μαθηματικής μοντελοποίησης. Ο μέσος όρος της βαθμολογίας ήταν 2,29, με ελάχιστη το 1 και μέγιστη το 4 (βλ. Πίνακα 4.11).

Πίνακας 4.11 Αξιολόγηση ορισμών μαθηματικής μοντελοποίησης

	Ελλιπής N (%)	Μέτριος N (%)	Καλός N (%)	Εξαιρετικός N (%)	Σύνολο N (%)	Μ.Ο*	Ελάχιστο - Μέγιστο
Πρωτ/μια	4 (22,2)	**8 (44,4)**	4 (22,2)	2 (11,1)	18 (100)	2,22	1 - 4
Δευτ/μια	1 (6,3)	**8 (50)**	7(43,8)	0 (0)	16 (100)	2,38	1 - 3
Σύνολο	5 (14,7)	**16 (47,1)**	11 (32,4)	2 (5,9)	34 (100)	2,29	1 - 4

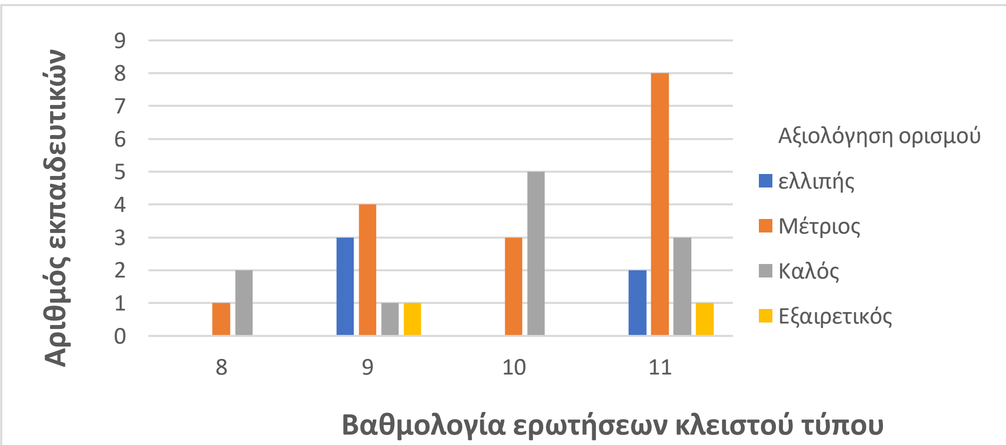
*ΜΟ = Μέσος Όρος

Σχεδόν οι μισοί εκπαιδευτικοί (16 από τους 34) έδωσαν έναν *μέτριο* ορισμό, δείχνοντας μικρή κατανόηση του όρου της μαθηματικής μοντελοποίησης, ενώ 5 εκπαιδευτικοί δεν φάνηκε να κατανοούν τον όρο της μαθηματικής μοντελοποίησης δίνοντας *ελλιπή* ορισμό, εκ των οποίων οι 4 ήταν εκπαιδευτικοί της Πρωτοβάθμιας. Από την άλλη, μόλις 2 εκπαιδευτικοί κατάφεραν να δώσουν έναν *εξαιρετικό* ορισμό, ενώ 11 εκπαιδευτικοί έδωσαν έναν *καλό* ορισμό. Στο Γράφημα 4.1 φαίνεται η κατανομή των ορισμών των εκπαιδευτικών σε κάθε κατηγορία αξιολόγησης.



Γράφημα 4.1 Κατανομή ορισμών σύμφωνα με την αξιολόγηση

Με τον συντελεστή συσχέτισης Spearman's rho, ελέγχθηκε αν υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα στο σκορ από τις ερωτήσεις γνώσεων κλειστού τύπου και στον ορισμό που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί για την μαθηματική μοντελοποίηση. Η ανάλυση έδειξε ότι δεν υπάρχει κάποια συσχέτιση μεταξύ τους ($r = 0{,}038$ $p = 0{,}830 > 0{,}05$).



Γράφημα 4.2 Διασταύρωση αξιολόγησης ορισμού και βαθμολογίας ερωτήσεων κλειστού τύπου

Μάλιστα, με την ανάλυση διασταυρωμένης πινακοποίησης (Cross tabulation), βρέθηκε ότι από τους 22 εκπαιδευτικούς που σημείωσαν ένα πολύ υψηλό σκορ στις ερωτήσεις γνώσεων κλειστού τύπου (βαθμολογία 10 - 11), μόνο οι 9 (40,9%) έδωσαν ταυτόχρονα και έναν καλό ή εξαιρετικό ορισμό της μαθηματικής μοντελοποίησης.

Από το άθροισμα της βαθμολογίας στις 11 ερωτήσεις κλειστού τύπου και της αξιολόγησης του ορισμού που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί, προέκυψε η τελική βαθμολογία (άριστα το 15) που αντικατοπτρίζει το σύνολο των γνώσεων των εκπαιδευτικών.

Ο μέσος όρος της βαθμολογίας των εκπαιδευτικών ήταν 12,26 με ελάχιστο το 10 και μέγιστο το 15, δείχνοντας μία σχετικά καλή γνώση των εκπαιδευτικών για την μαθηματική μοντελοποίηση. Μεταξύ των δύο βαθμίδων δε φάνηκε να υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά (βλ. Κεφ. 4.4.3).

Πίνακας 4.12 Βαθμολογία γνώσεων εκπαιδευτικών

	N	ΜΟ*	Διάμεσος	ΤΑ*	Ελάχιστο - Μέγιστο	Εύρος
Πρωτοβάθμια	18	12,28	13	1,406	10 - 15	5
Δευτεροβάθμια	16	12,25	12,5	1,183	10 - 14	4
Σύνολο	34	12,26	13	1,286	10 - 15	5

*ΜΟ = Μέσος Όρος, ΤΑ = Τυπική απόκλιση

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα από την Α' εξέταση, έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν μία καλή παιδαγωγική γνώση περιεχομένου για τη μαθηματική μοντελοποίηση, και μία μέτρια γνώση περιεχομένου, καθώς απάντησαν σωστά στην πλειοψηφία τους στις ερωτήσεις κλειστού τύπου, ωστόσο δυσκολεύτηκαν να ορίσουν την έννοια της μαθηματικής μοντελοποίησης, αφού 21 από τους 34 εκπαιδευτικούς έδωσαν έναν ελλιπή ή μέτριο ορισμό.

4.4.2 Οι γνώσεις των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική μοντελοποίηση μετά την παρακολούθηση μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης (Β' εξέταση)

Για να απαντηθεί το τέταρτο ερευνητικό ερώτημα, οι εκπαιδευτικοί απάντησαν στο ίδιο ερωτηματολόγιο μετά την παρακολούθηση μαθημάτων για την μαθηματική μοντελοποίηση, ώστε να ελεγχθεί αν υπάρχει διαφορά στις γνώσεις και τις στάσεις τους πριν και μετά τα μαθήματα και κατά πόσο αυτή η διαφορά είναι στατιστικά σημαντική. Από τους 34 εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν στην πρώτη φάση, οι 14 παρακολούθησαν τα μαθήματα μοντελοποίησης και από αυτούς οι 12 απάντησαν στο ερωτηματολόγιο.

Για την σύγκριση της επίδοσης των εκπαιδευτικών στην Α’ και Β’ εξέταση ώστε να διαπιστωθεί αν παρουσιάζει στατιστικά σημαντική διαφορά, χρησιμοποιήθηκε το μη παραμετρικό test Wilcoxon, καθώς το δείγμα είναι μικρό και μη κανονικό.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης των απαντήσεων των 12 εκπαιδευτικών στις ερωτήσεις γνώσεων έδειξαν ότι ο Μ.Ο. της βαθμολογίας τους στην Β’ εξέταση ήταν 10,50 (άριστα το 11) και αυξήθηκε από την Α’ εξέταση, όπου ο Μ.Ο. των ίδιων εκπαιδευτικών ήταν 9,75, ενώ η διάμεσος ήταν 10 στην Α’ εξέταση και 11 στην Β’ εξέταση.

Πίνακας 4.13 Σύγκριση Α’ και Β’ εξέτασης στις ερωτήσεις γνώσεων κλειστού τύπου

	Μ.Ο.	Διάμεσος	Ελάχιστο - Μέγιστο	Τ.Α.	Διασπορά
Α’ ΕΞΕΤΑΣΗ	9,75	10	8 - 11	1,138	1,295
Β’ ΕΞΕΤΑΣΗ	10,50	11	9 - 11	0,674	0,455

Όσον αφορά τη διαφορά στην αξιολόγηση των ορισμών της μαθηματικής μοντελοποίησης που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί στην Α’ και Β’ εξέταση, ο Μ.Ο. της αξιολόγησης για τον ορισμό της μαθηματικής μοντελοποίησης στη Β’ εξέταση ήταν 2,83 έχοντας αυξηθεί σε σχέση με την Α’ εξέταση, που ήταν 2,08.

Επιπλέον, στην Α’ εξέταση οι 9 από τους 12 εκπαιδευτικούς έδωσαν «ελλιπή» ή «μέτριο» ορισμό, δείχνοντας μικρό βαθμό κατανόησης του όρου της μαθηματικής μοντελοποίησης, ενώ δεν υπήρχε εκπαιδευτικός που να έδωσε έναν «εξαιρετικό» ορισμό. Στην Β’ εξέταση κανένας εκπαιδευτικός δεν έδωσε «ελλιπή» ορισμό, ενώ οι 8 από τους 12 έδωσαν έναν «καλό» ή «εξαιρετικό» ορισμό.

Πίνακας 4.14 Αξιολόγηση ορισμού μαθηματικής μοντελοποίησης στην Α’ και Β’ εξέταση

	Μ.Ο.	Διάμεσος	Ελάχιστο - Μέγιστο	Τ.Α.	«Ελλιπής» (Ν)	«Μέτριος» (Ν)	«Καλός» (Ν)	«Εξαιρετικός» (Ν)
Α’ ΕΞΕΤΑΣΗ	2,08	2	1 - 3	0,669	2	7	3	0
Β’ ΕΞΕΤΑΣΗ	2,83	3	2 - 4	0,718	0	4	6	2

*ΜΟ = Μέσος Όρος , ΤΑ = Τυπική απόκλιση

Το τελικό σκορ γνώσεων των εκπαιδευτικών για την μαθηματική μοντελοποίηση προέκυψε από το άθροισμα της βαθμολογίας στις ερωτήσεις γνώσεων και της βαθμολογίας από την αξιολόγηση των ορισμών που έδωσαν. Από την ανάλυση των απαντήσεών τους στην Α' και Β' εξέταση, φάνηκε ότι η γνώση των εκπαιδευτικών βελτιώθηκε, καθώς στην Α' εξέταση ο Μ.Ο. γνώσεων ήταν 11,83 (άριστα το 15) και στην Β' εξέταση 13,33.

Πίνακας 4.15 Σύγκριση Α' και Β' εξέτασης στο σύνολο των γνώσεων

	Μ.Ο.	Διάμεσος	Ελάχιστο - Μέγιστο	Τ.Α.	Διασπορά
Α' ΕΞΕΤΑΣΗ	11,83	12	10 - 13	1,030	1,061
Β' ΕΞΕΤΑΣΗ	13,33	13,5	11 - 15	1,073	1,152

Για να διαπιστωθεί αν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά των γνώσεων των εκπαιδευτικών πριν και μετά την παρακολούθηση μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης, έγινε έλεγχος των αποτελεσμάτων της Α' και Β' εξέτασης με το μη παραμετρικό τεστ Wilcoxon. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά ($r = 0,701$ $p = 0,015 < 0,05$). Επιπλέον, ελέγχθηκε ξεχωριστά η διαφορά ανάμεσα στις δύο εξετάσεις όσον αφορά την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου (ερωτήσεις γνώσεων κλειστού τύπου), η οποία δεν βρέθηκε να είναι στατιστικά σημαντική αλλά και για την γνώση περιεχομένου (ορισμοί που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί), όπου βρέθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά (βλ. Πίνακα 4.16).

Πίνακας 4.16 Αποτελέσματα test Wilcoxon για τη διαφορά στις γνώσεις των εκπαιδευτικών ανάμεσα στις δύο εξετάσεις

	r	p
Παιδαγωγική γνώση περιεχομένου	0,483	0,094
Γνώση περιεχομένου	0,572	**0,047**
Σύνολο γνώσεων	0,701	**0,015**

Συνοψίζοντας, μετά τα μαθήματα μαθηματικής μοντελοποίησης (Β' εξέταση), βελτιώθηκαν οι γνώσεις των εκπαιδευτικών σε στατιστικά σημαντικό βαθμό.

Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί βελτίωσαν τους ορισμούς που έδωσαν για την μαθηματική μοντελοποίηση, με την πλειοψηφία τους να δίνει έναν «καλό» ή «εξαιρετικό» ορισμό.

4.4.3 Συσχετίσεις γνώσεων με τα προσωπικά και επαγγελματικά χαρακτηριστικά των εκπαιδευτικών και με την εμπειρία τους με τη μαθηματική μοντελοποίηση

Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τον έλεγχο της συσχέτισης ανάμεσα στις γνώσεις, των εκπαιδευτικών για την μαθηματική μοντελοποίηση και την βαθμίδα εκπαίδευσης που διδάσκουν, την προϋπηρεσία τους και το επίπεδο των σπουδών τους, καθώς και ανάμεσα στις γνώσεις και στο αν δηλώνουν ότι διδάσκουν μαθηματική μοντελοποίηση. Ο έλεγχος της συσχέτισης έγινε με το Mann – Whitney U Test για τη βαθμίδα εκπαίδευσης και για το αν δηλώνουν ότι διδάσκουν ή όχι μοντελοποίηση και με τον συντελεστή συσχέτισης Spearman's rho για τις υπόλοιπες μεταβλητές.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, τόσο η βαθμίδα εκπαίδευσης όσο και η προϋπηρεσία των εκπαιδευτικών δε φάνηκε να συσχετίζονται με τις γνώσεις των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική μοντελοποίηση. Όσον αφορά το επίπεδο σπουδών των εκπαιδευτικών, βρέθηκε να έχει ασθενή θετική συσχέτιση με τη γνώση περιεχομένου ($r = 0{,}352$ $p = 0{,}041 < 0{,}05$), κάτι που σημαίνει ότι οι εκπαιδευτικοί που είναι κάτοχοι μεταπτυχιακού πτυχίου έδωσαν καλύτερους ορισμούς για τη μαθηματική μοντελοποίηση.

Πίνακας 4.17 Συσχετίσεις γνώσεων με τα προσωπικά και επαγγελματικά στοιχεία των εκπαιδευτικών

	Βαθμίδα εκπαίδευσης		Προϋπηρεσία		Επίπεδο σπουδών	
	r	p	r	p	r	p
Παιδαγωγική γνώση περιεχομένου	0,081	0,670	0,088	0,619	0,009	0,962
Γνώση περιεχομένου	0,127	0,506	-0,035	0,843	0,352	**0,041**
Σύνολο γνώσεων	0,012	0,959	-0,008	0,966	0,172	0,331

Κάποιοι από τους εκπαιδευτικούς, όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 4.2, δήλωσαν ότι διδάσκουν δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης. Κρίθηκε λοιπόν σκόπιμο, να διερευνηθούν οι γνώσεις των εκπαιδευτικών αυτών, ώστε να συγκριθούν με τις γνώσεις των υπόλοιπων εκπαιδευτικών, οι οποίοι δήλωσαν ότι δε διδάσκουν δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης.

Οι εκπαιδευτικοί που δήλωσαν ότι διδάσκουν δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης, είχαν ελάχιστα καλύτερη επίδοση στο σύνολο των γνώσεων, ωστόσο δε βρέθηκε κάποια στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο ομάδων ($r = 0{,}183$ $p = 0{,}447 > 0{,}05$). Επιπλέον, ελέγχθηκαν ξεχωριστά οι βαθμολογίες στις ερωτήσεις γνώσεων κλειστού τύπου και στην αξιολόγηση των ορισμών αλλά επίσης φάνηκε ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά σε σχέση με τους εκπαιδευτικούς που δήλωσαν ότι δε διδάσκουν μαθηματική μοντελοποίηση. Μάλιστα, η αξιολόγηση των ορισμών των εκπαιδευτικών που δήλωσαν ότι διδάσκουν μαθηματική μοντελοποίηση ήταν χαμηλότερη από την αντίστοιχη των εκπαιδευτικών που δήλωσαν ότι δε διδάσκουν.

Πίνακας 4.18 Σύγκριση γνώσεων εκπαιδευτικών σε σχέση με το αν διδάσκουν δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης

	Εκπαιδευτικοί που διδάσκουν μοντελοποίηση	Εκπαιδευτικοί που δε διδάσκουν μοντελοποίηση	r	p*
Παιδαγωγική γνώση περιεχομένου Μ.Ο (Τ.Α)	10,86 (0,143)	9,87 (1,187)	0,438	0,066
Γνώση περιεχομένου Μ.Ο (Τ.Α)	2 (0,309)	2,53 (0,640)	0,305	0,210
Σύνολο γνώσεων Μ.Ο. (Τ.Α.)	12,86 (0,261)	12,40 (1,121)	0,183	0,447

* Mann – Whitney U Test

Ακόμη, με διασταυρωμένη πινακοποίηση (Cross tabulation), φάνηκε ότι οι 5 από τους 7 εκπαιδευτικούς (71,4%) που δήλωσαν ότι διδάσκουν μαθηματική μοντελοποίηση, έδωσαν ελλιπή ή μέτριο ορισμό της μαθηματικής μοντελοποίησης (βλ. Πίνακα 4.19).

Πίνακας 4.19 Αξιολόγηση ορισμών εκπαιδευτικών που δήλωσαν ότι διδάσκουν μαθηματική μοντελοποίηση

	Εκπαιδευτικοί που δήλωσαν ότι διδάσκουν μαθηματική μοντελοποίηση	
	N (%)	Αθροιστική συχνότητα (%)
Ελλιπής ορισμός	2 (28,6)	28,5
Μέτριος ορισμός	3 (42,9)	71,4
Καλός ορισμός	2 (28,6)	100
Εξαιρετικός ορισμός	0 (0)	100

4.5 Η στάση των εκπαιδευτικών ως προς την μαθηματική μοντελοποίηση

Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα της έρευνας αντιστοιχεί στο μέρος του ερωτηματολογίου που αφορά τις στάσεις των εκπαιδευτικών ως προς την μαθηματική μοντελοποίηση και αποτελείται από 28 δηλώσεις κλειστού τύπου, όπου οι συμμετέχοντες εξέφρασαν τον βαθμό συμφωνίας ή διαφωνίας τους μέσω της 6-βάθμιας κλίμακας Likert (1 = Διαφωνώ έντονα, 2 = Διαφωνώ, 3 = Κάπως διαφωνώ, 4 = Κάπως συμφωνώ, 5 = Συμφωνώ, 6 = Συμφωνώ έντονα).

Οι δηλώσεις χωρίζονται σε τέσσερις βασικούς άξονες σύμφωνα με το περιεχόμενό τους: Ο πρώτος άξονας αφορά τις δηλώσεις 1 - 6 και περιγράφει τον κονστρουκτιβιστικό τρόπο διδασκαλίας και εκμάθησης της μαθηματικής μοντελοποίησης (π.χ. «Η ικανότητα ενός μαθητή στα μαθηματικά ενισχύεται όταν αναπτύσσει δεξιότητες έρευνας»). Ο άξονας αυτός θα αναφέρεται παρακάτω ως «Κονστρουκτιβισμός». Ο δεύτερος άξονας αφορά τις δηλώσεις 7-11, οι οποίες περιγράφουν την προσωπική κατανόηση στο θέμα της μαθηματικής μοντελοποίησης (π.χ. «Κατανοώ τη μαθηματική μοντελοποίηση», «Μπορώ να εντάξω εργασίες μαθηματικής μοντελοποίησης στα μαθήματα μου») και αναφέρεται παρακάτω ως «Κατανόηση». Ο τρίτος άξονας, ο οποίος αναφέρεται «Σχετικότητα με πραγματική ζωή», αφορά τις δηλώσεις 12-18, οι οποίες περιγράφουν την σχέση της μαθηματικής μοντελοποίησης με πραγματικές καταστάσεις (π.χ. «Η μοντελοποίηση δημιουργεί ευκαιρίες επίλυσης μαθηματικών έργων που δημιουργούνται από καταστάσεις της καθημερινής ζωής»). Τέλος, ο τέταρτος άξονας, που αναφέρεται ως «Κίνητρο και ενδιαφέρον», αποτελείται από τις δηλώσεις 19-28, οι οποίες περιγράφουν το κίνητρο και το ενδιαφέρον που προκαλεί η μαθηματική μοντελοποίηση στην διδασκαλία των μαθηματικών (π.χ. «Η μαθηματική μοντελοποίηση ενισχύει το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά»).

4.5.1 Η στάση των εκπαιδευτικών ως προς την μαθηματική μοντελοποίηση πριν την παρακολούθηση μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης (Α' εξέταση)

Η στάση των εκπαιδευτικών εκφράζεται από τον μέσο όρο των απαντήσεών τους στις δηλώσεις του ερωτηματολογίου των στάσεων. Έτσι, σύμφωνα με την κλίμακα Likert, οι βαθμολογίες 5 και 6 εκφράζουν μία θετική στάση των εκπαιδευτικών, αντίθετα οι βαθμολογίες 1 και 2 δείχνουν αρνητική στάση ως προς την διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης. Οι βαθμολογίες 3 και 4 εκφράζουν μάλλον αρνητική και μάλλον θετική στάση αντίστοιχα.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ο Μ.Ο. των απαντήσεων ήταν 4,87, το οποίο αποτυπώνει μία συνολικά θετική στάση των εκπαιδευτικών ως προς την μαθηματική μοντελοποίηση (βλ. Πίνακα 4.20). Οι δηλώσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί εκφράζουν μεγαλύτερο βαθμό συμφωνίας ανήκουν στον άξονα «Κονστρουκτιβισμός», ο οποίος έχει Μ.Ο. απαντήσεων 5,23. Ο άξονας που συγκεντρώνει τον μικρότερο Μ.Ο. (4,36) είναι αυτός της «Κατανόησης», ο οποίος είχε και το μεγαλύτερο εύρος απαντήσεων (2,8).

Πίνακας 4.20 Στατιστικά στοιχεία απαντήσεων εκπαιδευτικών στο ερωτηματολόγιο στάσεων

	ΜΟ (ΤΑ)	Διάμεσος	Ελάχιστο - Μέγιστο	Εύρος
Κονστρουκτιβισμός	5,23 (0,07)	5,16	4,5 – 6,0	1,50
Κατανόηση	4,36 (0,09)	4,40	2,8 – 5,6	2,80
Σχετικότητα με πραγματική ζωή	5,09 (0,49)	5,00	4,1 – 6,0	1,86
Κίνητρο και ενδιαφέρον	4,79 (0,61)	4,80	3,5 – 6,0	2,50
Σύνολο στάσης	4,87 (0,38)	4,93	4,1 – 5,7	1,61

Ανάμεσα στις δύο βαθμίδες παρατηρήθηκαν μικρές διαφορές, με την Δευτεροβάθμια να συγκεντρώνει μεγαλύτερο Μ.Ο. σε όλους τους επιμέρους άξονες αλλά και στο σύνολο της στάσης των εκπαιδευτικών, σε σχέση με την Πρωτοβάθμια. Ωστόσο, δε βρέθηκε συσχέτιση μεταξύ της βαθμίδας εκπαίδευσης και των στάσεων των εκπαιδευτικών (βλ. Κεφάλαιο 4.5.3).

Πίνακας 4.21 Στατιστικά στοιχεία στάσης εκπαιδευτικών στις δύο βαθμίδες εκπαίδευσης

	ΜΟ (ΤΑ)*		Διάμεσος		Ελάχιστο – Μέγιστο		Εύρος	
	Πρ/μια	Δευτ/μια	Πρ/μια	Δευτ/μια	Πρ/μια	Δευτ/μια	Πρ/μια	Δευτ/μια
Κονστρουκτιβισμός	5,19 (0,48)	5,28 (0,44)	5,0	5,3	4,5– 6,0	4,5 – 6,0	1,5	1,5
Κατανόηση	4,22 (0,58)	4,52 (0,52)	4,1	4,6	2,8– 5,0	3,6 – 5,6	2,2	2,0
Σχετικότητα με πραγματική ζωή	5,07 (0,50)	5,12 (0,49)	5,0	5,2	4,29 – 6,0	4,1 – 5,7	1,7	1,6
Κίνητρο και ενδιαφέρον	4,75 (0,71)	4,84 (0,49)	4,8	4,8	3,5 – 6,0	3,6 – 5,7	2,5	2,1
Σύνολο στάσης	4,81 (0,41)	4,94 (0,35)	4,8	4,9	4,11 – 5,73	4,1 – 5,4	1,6	1,3

*ΜΟ = Μέσος Όρος, ΤΑ = Τυπική απόκλιση

Παρακάτω παρουσιάζονται οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών σε καθεμία από τις δηλώσεις. Στον Πίνακα 4.22, φαίνεται ο βαθμός συμφωνίας των εκπαιδευτικών σε καθεμία από τις δηλώσεις των στάσεων -σε αριθμό απαντήσεων και σε ποσοστό- καθώς και ο Μέσος Όρος (ΜΟ) και η Τυπική Απόκλιση (ΤΑ) των απαντήσεων. Με έντονη γραφή σημειώνονται οι αριθμοί που αποτελούν την πλειοψηφία των απαντήσεων για την κάθε δήλωση.

Πίνακας 4.22 Σύνοψη απαντήσεων στο ερωτηματολόγιο στάσεων

	Διαφωνώ έντονα	**Διαφωνώ**	**Κάπως Διαφωνώ**	**Κάπως Συμφωνώ**	**Συμφωνώ**	**Συμφωνώ Έντονα**	
Δηλώσεις	**n (%)**	**n (%)**	**n(%)**	**n(%)**	**n(%)**	**n(%)**	**ΜΟ (ΤΑ)**
			Κονστρουκτιβισμός				
Β1	0 (0)	1(2,9)	0 (0)	0 (0)	**25 (73,5)**	8 (23,5)	5,2 (0,7)

B2	0 (0)	0 (0)	0 (0)	3 (8,8)	**16 (47,1)**	15 (44,1)	5,4 (0,6)
B3	0 (0)	0 (0)	0 (0)	2 (5,9)	**18 (52,9)**	14 (41,2)	5,4 (0,6)
B4	0 (0)	1 (2,9)	1 (2,9)	2 (5,9)	**17 (50)**	13 (38,2)	5,2 (0,9)
B5	0 (0)	0 (0)	0 (0)	6 (17,6)	**16 (47,1)**	12 (35,3)	5,2 (0,7)
B6	0 (0)	0 (0)	1 (2,9)	3 (8,8)	**18 (52,9)**	12 (35,3)	5,2 (0,7)
				Κατανόηση			
B7	0 (0)	1 (2,9)	2 (5,9)	13 (38,2)	**15 (44,1)**	3 (8,8)	4,5 (0,9)
B8	1 (2,9)	2 (5,9)	6 (17,6)	**17 (50)**	6 (17,6)	2 (5,9)	3,9 (1,1)
B9	0 (0)	1 (2,9)	4 (11,8)	**15 (44,1)**	13 (38,2)	1 (2,9)	4,3 (0,8)
B10	0 (0)	0 (0)	2 (5,9)	7 (20,6)	**20 (58,8)**	5 (14,7)	4,8 (0,8)
B11	0 (0)	2 (5,9)	3 (8,8)	**14 (41,2)**	12 (35,3)	3 (8,8)	4,3 (1,0)
				Σχετικότητα με πραγματική ζωή			
B12	0 (0)	0 (0)	0 (0)	2 (5,9)	**17 (50)**	15 (44,1)	5,4 (0,6)
B13	0 (0)	0 (0)	0 (0)	2 (5,9)	**18 (52,9)**	14 (41,2)	5,4 (0,6)
B14	0 (0)	0 (0)	1 (2,9)	7 (20,6)	**17 (50)**	9 (26,5)	5,0 (0,8)
B15	0 (0)	0 (0)	0 (0)	6 (17,6)	**19 (55,9)**	9 (26,5)	5,0 (0,7)
B16	0 (0)	0 (0)	2 (5,9)	8 (23,5)	**19 (55,9)**	5 (14,7)	4,8 (0,8)
B17	0 (0)	0 (0)	0 (0)	5 (14,7)	**21 (61,8)**	8 (23,5)	5,0 (0,6)
B18	0 (0)	0 (0)	1 (2,9)	7 (20,6)	**18 (52,9)**	8 (23,5)	5,0 (0,8)
				Κίνητρο και ενδιαφέρον			
B19	0 (0)	0 (0)	2 (5,9)	9 (26,5)	**17 (50)**	6 (17,6)	4,8 (0,8)
B20	0 (0)	0 (0)	0 (0)	3 (8,8)	**22 (64,7)**	9 (26,5)	5,2 (0,6)
B21	0 (0)	1 (2,9)	2 (5,9)	6 (17,6)	**19 (55,9)**	6 (17,6)	4,8 (0,9)
B22	0 (0)	1 (2,9)	2 (5,9)	10 (29,4)	**15 (44,1)**	6 (17,6)	4,7 (0,9)
B23	0 (0)	0 (0)	1 (2,9)	7 (20,6)	**18 (52,9)**	8 (23,5)	5,0 (0,8)
B24	0 (0)	0 (0)	1 (2,9)	8 (23,5)	**16 (47,1)**	9 (26,5)	5,0 (0,8)
B25	0 (0)	0 (0)	0 (0)	4 (11,8)	**23 (67,6)**	7 (20,6)	5,1 (0,6)
B26	0 (0)	0 (0)	2 (5,9)	9 (26,5)	**17 (50)**	6 (17,6)	4,8 (0,8)
B27	0 (0)	0 (0)	2 (5,9)	12 (35,3)	**16 (47,1)**	4 (11,8)	4,7 (0,8)
B28	0 (0)	2 (5,9)	9 (26,5)	**12 (35,3)**	7 (20,6)	4 (11,8)	4,1 (1,1)

Στον άξονα «Κονστρουκτιβισμός», ο οποίος ήταν ο άξονας που συγκέντρωσε τον μεγαλύτερο μέσο όρο θετικών στάσεων, οι εκπαιδευτικοί εκφράζουν μεγαλύτερο βαθμό συμφωνίας (ΜΟ = 5,4) στις δηλώσεις ότι η ικανότητα ενός μαθητή στα μαθηματικά ενισχύεται όταν αναπτύσσει δεξιότητες έρευνας (Β2) και ότι οι διερευνητικές δεξιότητες που αναπτύσσονται μέσω μαθηματικής μοντελοποίησης βοηθούν στην εννοιολογική κατανόηση (Β3). Μεγάλο βαθμό συμφωνίας (ΜΟ = 5,2) εκφράζουν οι εκπαιδευτικοί και στις υπόλοιπες δηλώσεις του άξονα, συμφωνώντας ότι οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα μαθηματικά όταν τους δίνεται η ευκαιρία να επεξεργαστούν δραστηριότητες οι οποίες επιτρέπουν πολλαπλά σημεία εισόδου (Β1), ότι οι αναστοχαστικές κρίσεις αποτελούν σημαντικά κριτήρια στη μάθηση της μαθηματικής μοντελοποίησης (Β4), ότι οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα μαθηματικά όταν τους δίνεται η ευκαιρία να δοκιμάσουν ιδέες με πιθανές λύσεις (Β5) και ότι η μοντελοποίηση δημιουργεί εμπειρίες που ευνοούν τις εξηγήσεις των μαθητών σε μαθηματικές έννοιες (Β6).

Ο άξονας «Σχετικότητα με πραγματική ζωή», ήταν ένας άξονας που επίσης συγκέντρωσε υψηλό μέσο όρο, φανερώνοντας τις θετικές στάσεις των εκπαιδευτικών. Οι εκπαιδευτικοί εξέφρασαν τον μεγαλύτερο βαθμό συμφωνίας (ΜΟ = 5,4) στις δηλώσεις ότι η μαθηματική μοντελοποίηση δημιουργεί ευκαιρίες επίλυσης μαθηματικών έργων που δημιουργούνται από καταστάσεις της καθημερινής ζωής (Β12) και ότι βοηθάει τους μαθητές να ερμηνεύουν τα μαθηματικά με χρήσιμο τρόπο (Β13). Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί συμφωνούν (ΜΟ = 5) με τις δηλώσεις ότι η μαθηματική μοντελοποίηση βοηθά τους μαθητές να λύσουν πρακτικά προβλήματα της καθημερινής ζωής (Β14), δίνει νόημα στη μάθηση των μαθηματικών για τους μαθητές (Β15), αποτελεί μία αξιόλογη έννοια για την κατανόηση των μαθηματικών (Β17) και βοηθά στην επίλυση προβλημάτων άλλων θεματικών πεδίων (Β18). Τέλος, η δήλωση ότι η μαθηματική μοντελοποίηση ανοίγει έναν εντελώς νέο τρόπο θεώρησης των μαθηματικών (Β16) έχει αρκετά μεγάλο βαθμό συμφωνίας (ΜΟ = 4,8), ωστόσο μικρότερο σε σχέση με τις υπόλοιπες δηλώσεις του άξονα.

Ο άξονας «Κίνητρο και ενδιαφέρον» συγκέντρωσε μικρότερο βαθμό συμφωνίας σε σχέση με τους δύο προηγούμενους. Τον μεγαλύτερο βαθμό συμφωνίας (ΜΟ = 5 – 5,2) οι εκπαιδευτικοί τον εξέφρασαν στις δηλώσεις ότι η μαθηματική μοντελοποίηση ευνοεί την συζήτηση στην τάξη κατά τη μάθηση των μαθηματικών (Β20), εμπλέκει τους μαθητές με τα μαθηματικά (Β25), ενισχύει το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά (Β23) και καθιστά τη διδασκαλία των μαθηματικών πιο ενδιαφέρουσα (Β24). Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί συμφωνούν (ΜΟ = 4,8) ότι η μαθηματική μοντελοποίηση παρακινεί τους μαθητές να μάθουν μαθηματικά (B19), τους βοηθά ώστε να προετοιμαστούν καλύτερα για το μέλλον (B21) και να απολαύσουν την εκμάθηση των μαθηματικών (B26), ενώ συμφωνούν με μικρότερο βαθμό σιγουριάς (ΜΟ = 4,7) ότι έχει περισσότερη αξία η μάθηση των μαθηματικών μέσω της μαθηματικής μοντελοποίησης παρά με τη χρήση παραδοσιακών λεκτικών προβλημάτων (B22) και η μαθηματική μοντελοποίηση συμβάλλει στον ενθουσιασμό των μαθητών για τα μαθηματικά (B27). Τέλος, οι εκπαιδευτικοί μάλλον συμφωνούν (ΜΟ = 4,1) ότι οι υψηλού γνωστικού επιπέδου εργασίες μοντελοποίησης προσελκύουν τους μαθητές (B28), ωστόσο 1 στους 4 εκπαιδευτικούς δηλώνει ότι μάλλον διαφωνεί με τη συγκεκριμένη δήλωση.

Ο άξονας που συγκέντρωσε τον μικρότερο μέσο όρο ήταν ο άξονας «Κατανόηση». Τον μικρότερο βαθμό συμφωνίας (ΜΟ = 3,9), τόσο στον συγκεκριμένο άξονα όσο και στο σύνολο, ήταν η δήλωση «Μπορώ να εντάξω εργασίες μαθηματικής μοντελοποίησης στα μαθήματά μου» (B8). Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί συμφωνούν χωρίς να είναι σίγουροι (ΜΟ = 4,3 – 4,5) ότι κατανοούν τη μαθηματική μοντελοποίηση (B7), την διαφορά μεταξύ λεκτικών προβλημάτων και της μαθηματικής μοντελοποίησης (B9) και τη διαφορά μεταξύ της επίλυσης προβλημάτων και μαθηματικής μοντελοποίησης (B11). Τέλος, οι εκπαιδευτικοί συμφωνούν (ΜΟ = 4,8) ότι η διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης απαιτεί χρόνο σε ένα μάθημα μαθηματικών (B10).

Από τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών φαίνεται ότι τα μεγαλύτερα ποσοστά συγκέντρωσε η απάντηση «Συμφωνώ», με τιμές που κυμαίνονταν από 44,1% στις δηλώσεις «Κατανοώ την μοντελοποίηση με μαθηματικά» (B7) και «Έχει περισσότερη αξία η μάθηση των μαθηματικών μέσω της μαθηματικής μοντελοποίησης παρά με χρήση των παραδοσιακών λεκτικών προβλημάτων» (B22) έως 73,5% στην δήλωση «Οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα μαθηματικά όταν τους δίνεται η ευκαιρία να επεξεργαστούν δραστηριότητες οι οποίες επιτρέπουν πολλαπλά σημεία εισόδου» (B1).

Από την άλλη πλευρά, ελάχιστες ή μηδενικές ήταν οι απαντήσεις «Διαφωνώ έντονα» και «Διαφωνώ». Η απάντηση «Κάπως διαφωνώ» είχε επίσης μικρά ποσοστά συνολικά, ωστόσο σε δύο δηλώσεις (B8 και B28), το ποσοστό των εκπαιδευτικών που απάντησαν «Κάπως διαφωνώ» δεν είναι αμελητέο. Συγκεκριμένα, όσον αφορά την δήλωση B8 (*«Μπορώ να εντάξω εργασίες μαθηματικής μοντελοποίησης στα μαθήματά μου»*), οι μισοί εκπαιδευτικοί (50%) απάντησαν ότι «Κάπως συμφωνούν», ωστόσο παρατηρήθηκε ότι το 26,5% των εκπαιδευτικών έδωσαν απαντήσεις από «Διαφωνώ απόλυτα» έως «Κάπως διαφωνώ». Επομένως, το 76,5% των εκπαιδευτικών διαφωνούν ή δεν είναι απόλυτα σίγουροι ότι μπορούν να εντάξουν εργασίες μαθηματικής μοντελοποίησης στα μαθήματά τους. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, η συγκεκριμένη δήλωση συγκεντρώνει και τον μικρότερο ΜΟ (3,9). Επιπλέον, στη δήλωση Β28 («οι υψηλού γνωστικού επιπέδου εργασίες μοντελοποίησης προσελκύουν τους μαθητές»), το 35,5% των εκπαιδευτικών «Κάπως συμφωνεί», ωστόσο παρατηρείται ότι το 32,4% «Διαφωνούν» ή «Κάπως διαφωνούν» (βλ. Πίνακα 4.23).

Πίνακας 4.23 Αθροιστική συχνότητα απαντήσεων στις δηλώσεις Β8 και Β28

	Μπορώ να εντάξω εργασίες μαθηματικής μοντελοποίησης στα μαθήματά μου (Β8)		Οι υψηλού γνωστικού επιπέδου εργασίες μοντελοποίησης προσελκύουν τους μαθητές (Β28)	
	N (%)	Αθροιστική συχνότητα (%)	N (%)	Αθροιστική συχνότητα (%)
Διαφωνώ έντονα	1 (2,9)	2,9	0 (0)	0
Διαφωνώ	2 (5,9)	8,8	2 (5,9)	5,9
Κάπως διαφωνώ	6 (17,6)	26,5	9 (26,5)	32,4
Κάπως συμφωνώ	17 (50)	76,5	12 (35,3)	67,6

Τέλος, ελέγχθηκε αν οι επιμέρους άξονες των στάσεων επηρεάζουν ο ένας τον άλλο ή είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους, καθώς και αν συσχετίζονται με το σύνολο των στάσεων. Βρέθηκε ότι όλοι οι άξονες συσχετίζονται θετικά με το σύνολο των στάσεων. Επιπλέον, ο άξονας «Κονστρουκτιβισμός» έχει θετική συσχέτιση με τον άξονα «Κίνητρο και ενδιαφέρον» και με τον άξονα «Σχετικότητα με πραγματική ζωή», ενώ και οι δύο τελευταίοι άξονες σχετίζονται θετικά μεταξύ τους. Αντίθετα, ο άξονας «Κατανόηση» δεν φάνηκε να συσχετίζεται με κανέναν από τους υπόλοιπους 3 άξονες.

Πίνακας 4.24 Συσχετίσεις αποτελεσμάτων επιμέρους αξόνων ερωτηματολογίου στάσεων

		r	**p***
Κονστρουκτιβισμός	Κατανόηση	0,091	0,611

	Σχετικότητα με πραγματική ζωή	**0,655**	**<0,001**
	Κίνητρο και ενδιαφέρον	**0,588**	**<0,001**
	Σύνολο στάσεων	**0,774**	**<0,001**
Κατανόηση	Σχετικότητα με πραγματική ζωή	0,241	0,171
	Κίνητρο και ενδιαφέρον	0,230	0,190
	Σύνολο στάσεων	**0,537**	**<0,001**
Σχετικότητα με πραγματική ζωή	Κίνητρο και ενδιαφέρον	**0,605**	**<0,001**
	Σύνολο στάσεων	**0,796**	**<0,001**
Κίνητρο και ενδιαφέρον	Σύνολο στάσεων	**0,802**	**<0,001**

*Spearman's rho

Συνοψίζοντας, κατά την Α' εξέταση οι εκπαιδευτικοί εξέφρασαν θετικές στάσεις για τη μαθηματική μοντελοποίηση, συμφωνώντας με τον κονστρουκτιβιστικό τρόπο διδασκαλίας της, με το κίνητρο και το ενδιαφέρον που προκαλεί στους μαθητές και με τη σχετικότητά της με την πραγματική ζωή, ωστόσο η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών φαίνεται να διαφωνούν ή να μην είναι σίγουροι ότι μπορούν να εντάξουν εργασίες μαθηματικής μοντελοποίησης στα μαθήματά τους και ότι οι υψηλού γνωστικού επιπέδου εργασίες μοντελοποίησης προσελκύουν τους μαθητές. Επιπλέον, η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών δήλωσαν ότι κατανοούν, χωρίς ωστόσο να είναι σίγουροι, τη μαθηματική μοντελοποίηση καθώς και τη διαφορά μεταξύ λεκτικών προβλημάτων και μαθηματικής μοντελοποίησης και μεταξύ επίλυσης προβλημάτων και μαθηματικής μοντελοποίησης.

4.5.2 Η στάση των εκπαιδευτικών ως προς την μαθηματική μοντελοποίηση μετά την παρακολούθηση μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης (Β' εξέταση)

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης των απαντήσεων των εκπαιδευτικών στις δηλώσεις στάσεων έδειξαν ότι ο Μ.Ο. των στάσεων μετά την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης ήταν 5,19 και αυξήθηκε σε σχέση με την Α' εξέταση, στην οποία ήταν 4,86 (βλ. Πίνακα 4.25).

Πίνακας 4.25 Στατιστικά στοιχεία στάσεων εκπαιδευτικών Α’ και Β’ εξέτασης

	Μ.Ο.	Διάμεσος	Ελάχιστο - Μέγιστο	Τ.Α.	Διασπορά	Εύρος
Α’ ΕΞΕΤΑΣΗ	4,86	4,93	4,11 – 5,42	0,41	0,17	1,31
Β’ ΕΞΕΤΑΣΗ	5,19	5,28	4,55 – 5,69	0,35	0,12	1,14

Επιπλέον, από την ανάλυση που έγινε στις απαντήσεις των εκπαιδευτικών για τον κάθε άξονα στάσεων ξεχωριστά, φάνηκε ότι υπήρξε βελτίωση των στάσεων κατά τη Β’ εξέταση σε όλους τους επιμέρους άξονες (βλ. Πίνακα 4.26).

Πίνακας 4.26 Μέσος όρος απαντήσεων εκπαιδευτικών στους επιμέρους άξονες των στάσεων

	Α’ ΕΞΕΤΑΣΗ	Β’ ΕΞΕΤΑΣΗ
	Μ. Ο. (Τ.Α.)	Μ. Ο. (Τ.Α.)
Κονστρουκτιβισμός	5,11 (0,45)	5,30 (0,41)
Κατανόηση	4,61 (0,56)	5,15 (0,47)
Πραγματική ζωή	5,03 (0,53)	5,25 (0,32)
Κίνητρο και ενδιαφέρον	4,70 (0,61)	5,05 (0,44)

Τον μικρότερο Μ.Ο. συγκεντρώνει ο άξονας «Κίνητρο και ενδιαφέρον» (5,05), σε αντίθεση με την Α’ εξέταση που τον μικρότερο Μ.Ο. είχε ο άξονας «Κατανόηση» (4,61).

Στον Πίνακα 4.27, παρουσιάζεται ο Μέσος Όρος των δηλώσεων των εκπαιδευτικών στις δύο εξετάσεις. Οι δύο δηλώσεις που συγκέντρωσαν τον μικρότερο Μ.Ο. (4,67) είναι - όπως και στην Α’ Εξέταση – η δήλωση Β8 *(«Μπορώ να εντάξω εργασίες μαθηματικής μοντελοποίησης στα μαθήματά μου»*) και η δήλωση Β28 *(«Οι υψηλού γνωστικού επιπέδου εργασίες μοντελοποίησης προσελκύουν τους μαθητές»).* Οι εκπαιδευτικοί μετά την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης φαίνεται να συμφωνούν ότι μπορούν να εντάξουν εργασίες μαθηματικής μοντελοποίησης στα μαθήματά τους (Β8) με περισσότερη σιγουριά συγκριτικά με την Α’ Εξέταση, όπου ο αντίστοιχος Μ.Ο. ήταν 4,17. Ωστόσο, υπάρχει μεγάλη τυπική απόκλιση στις απαντήσεις τους (1,07). Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί πριν την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης, εξέφραζαν αμφιβολίες για το αν οι υψηλού γνωστικού επιπέδου εργασίες μοντελοποίησης προσελκύουν τους μαθητές (Β28), συγκεντρώνοντας Μ.Ο. 3,83 στην συγκεκριμένη δήλωση, ενώ φαίνεται να συμφωνούν στην ίδια δήλωση μετά τα μαθήματα μαθηματικής μοντελοποίησης, αν και όχι με απόλυτη σιγουριά.

Τον μεγαλύτερο βαθμό συμφωνίας (Μ.Ο. 5,50) οι εκπαιδευτικοί τον εκφράζουν στις δηλώσεις «*Η διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης απαιτεί χρόνο σε ένα μάθημα μαθηματικών»* (Β10) και *«Η μοντελοποίηση δημιουργεί ευκαιρίες επίλυσης μαθηματικών έργων που δημιουργούνται από καταστάσεις της καθημερινής ζωής»* (Β12).

Πίνακας 4.27 Μέσος όρος στις δηλώσεις των στάσεων πριν και μετά τα μαθήματα μαθηματικής μοντελοποίησης

Δηλώσεις	**Α' Εξέταση Μ.Ο. (Τ.Α.)**	**Β' Εξέταση Μ.Ο. (Τ.Α.)**
	Κονστρουκτιβισμός	
Β1	5,17 (0,38)	5,25 (0,62)
Β2	5,17 (0,71)	5,42 (0,51)
Β3	5,25 (0,62)	5,33 (0,65)
Β4	4,75 (1,21)	5,42 (0,66)
Β5	5,17 (0,71)	5,25 (0,62)
Β6	5,17 (0,93)	5,17 (0,57)
	Κατανόηση	
Β7	4,83 (0,71)	5,25 (0,62)
Β8	4,17 (1,11)	4,67 (1,07)
Β9	4,42 (1,08)	5,25 (0,62)
Β10	5,17 (0,57)	5,50 (0,52)
Β11	4,50 (1,08)	5,08 (0,79)
	Σχετικότητα με πραγματική ζωή	

B12	5,33 (0,49)	5,50 (0,67)
B13	5,25 (0,62)	5,08 (0,66)
B14	4,75 (0,86)	5,25 (0,75)
B15	5,08 (0,66)	5,17 (0,57)
B16	4,75 (0,86)	5,00 (0,73)
B17	5,25 (0,62)	5,33 (0,65)
B18	4,83 (0,83)	5,42 (0,66)
Κίνητρο και ενδιαφέρον		
B19	4,67 (0,88)	5,08 (0,79)
B20	5,25 (0.62)	5,33 (0,49)
B21	4,50 (1,16)	5,25 (0,62)
B22	4,58 (1,24)	4,83 (1,03)
B23	4,83 (0,71)	5,00 (0,73)
B24	5,08 (0,79)	5,08 (0,90)
B25	5,08 (0,51)	5,42 (0,51)
B26	4,83 (0,93)	5,08 (0,28)
B27	4,42 (0,79)	4,83 (0,71)
B28	3,83 (1,11)	4,67 (0,77)

Για να διαπιστωθεί αν ανάμεσα στην Α’ και Β’ εξέταση υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά τόσο στο σύνολο των στάσεων των εκπαιδευτικών για την μαθηματική μοντελοποίηση όσο και στους επιμέρους άξονες, διενεργήθηκε το μη παραμετρικό test Wilcoxon. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στο σύνολο των στάσεων ($r = 0{,}838$ $p = 0{,}004 < 0{,}05$) αλλά και στους άξονες «Κατανόηση» ($r = 0{,}812$ $p = 0{,}005 < 0{,}05$) και «Κίνητρο και ενδιαφέρον» ($r = 0{,}629$ $p = 0{,}029 < 0{,}05$). Δεν βρέθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά στους άλλους δύο άξονες, «Κονστρουκτιβισμός» και «Πραγματική ζωή» (Βλ. Πίνακα 4.28).

Πίνακας 4.28 Αποτελέσματα test Wilcoxon για τους άξονες και το σύνολο των στάσεων

	r	p
Κονστρουκτιβισμός	0,532	0,065

Κατανόηση	**0,812**	**0,005**
Πραγματική ζωή	0,452	0,117
Κίνητρο και ενδιαφέρον	**0,629**	**0,029**
Σύνολο στάσεων	**0,838**	**0,004**

Συνοψίζοντας, μετά την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης (Β΄ εξέταση) υπήρξε βελτίωση των στάσεων των εκπαιδευτικών σε όλους τους επιμέρους άξονες. Βελτιώθηκε επίσης η αυτοπεποίθηση των εκπαιδευτικών στο ότι μπορούν να εντάξουν εργασίες μαθηματικής μοντελοποίησης στην τάξη τους (Β8), δήλωση που είχε τον μικρότερο βαθμό συμφωνίας πριν την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης. Η διαφορά που προέκυψε στους μέσους όρους ανάμεσα στην Α’ και Β’ εξέταση ήταν στατιστικά σημαντική στο σύνολο των στάσεων αλλά και στους άξονες «Κατανόηση» και «Κίνητρο και ενδιαφέρον».

4.5.3 Συσχετίσεις στάσεων με τα προσωπικά και επαγγελματικά χαρακτηριστικά των εκπαιδευτικών και με την εμπειρία τους με τη μαθηματική μοντελοποίηση

Με τον συντελεστή συσχέτισης Spearman (rs) και με το Mann – Whitney U Test, ελέγχθηκε η σχέση μεταξύ των προσωπικών και επαγγελματικών στοιχείων των εκπαιδευτικών και της στάσης τους για τη μαθηματική μοντελοποίηση. Η ανάλυση έδειξε ότι τόσο η βαθμίδα εκπαίδευσης όσο και η προϋπηρεσία των εκπαιδευτικών δε συσχετίζονται με τις στάσεις τους ως προς τη μαθηματική μοντελοποίηση (βλ. Πίνακα 4.29). Όσον αφορά το επίπεδο σπουδών των εκπαιδευτικών, βρέθηκε να έχει θετική συσχέτιση με τον άξονα «Κατανόηση» των στάσεων ($r = 0,365$ $p = 0,034 < 0,05$), κάτι που σημαίνει ότι οι εκπαιδευτικοί που είναι κάτοχοι μεταπτυχιακού πτυχίου δηλώνουν μεγαλύτερη κατανόηση σε θέματα που αφορούν τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης.

Πίνακας 4.29 Συσχετίσεις στάσεων με προσωπικά και επαγγελματικά στοιχεία εκπαιδευτικών

	Βαθμίδα εκπαίδευσης	Προϋπηρεσία	Επίπεδο σπουδών

	r	p*	r	p**	r	p**
Κονστρουκτιβισμός	0,131	0,463	0,169	0,340	0,010	0,955
Κατανόηση	0,238	0,175	0,065	0,714	0,365	**0,034**
Σχετικότητα με πραγματική ζωή	0,071	0,695	0,091	0,609	0,191	0,280
Κίνητρο και ενδιαφέρον	0,091	0,597	0,196	0,267	0,094	0,597
Σύνολο στάσεων	0,043	0,237	0,153	0,386	0,251	0,152

* Mann – Whitney U Test   ** Spearman's rho

Επιπλέον, ελέγχθηκαν ξεχωριστά οι στάσεις των εκπαιδευτικών που δήλωσαν ότι διδάσκουν δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης, τόσο συνολικά όσο και σε κάθε άξονα ξεχωριστά, ώστε να συγκριθούν με τους εκπαιδευτικούς που δήλωσαν ότι δε διδάσκουν.

Πίνακας 4.30 Σύγκριση στάσεων εκπαιδευτικών σε σχέση με το αν διδάσκουν δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης

	Εκπαιδευτικοί που διδάσκουν μαθηματική μοντελοποίηση Μ.Ο. (Τ.Α.)	Εκπαιδευτικοί που δε διδάσκουν μαθηματική μοντελοποίηση Μ.Ο. (Τ.Α.)	r	p*
Κονστρουκτιβισμός	5,35 (0,42)	5,35 (0,47)	0,007	1,000
Κατανόηση	4,60 (0,28)	4,38 (0,71)	0,143	0,535
Σχετικότητα με πραγματικές καταστάσεις	5,06 (0,38)	5,34 (0,42)	0,295	0,185
Κίνητρο και ενδιαφέρον	4,92 (0,47)	4,90 (0,69)	0,052	0,837

Σύνολο στάσεων	4,98 (0,29)	4,99 (0,37)	0,022	0,945

* Mann – Whitney U Test

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι στάσεις συνολικά των εκπαιδευτικών που δήλωσαν ότι διδάσκουν μαθηματική μοντελοποίηση σε σχέση με τις στάσεις των υπόλοιπων εκπαιδευτικών, δε διαφέρουν σε στατιστικά σημαντικό βαθμό (βλ. Πίνακα 4.29).

4.6 Συσχετίσεις μεταξύ γνώσεων, στάσεων και ικανότητας επίλυσης προβλήματος Fermi

Με τον συντελεστή συσχέτισης Spearman's rho ελέγχθηκε η συσχέτιση μεταξύ των γνώσεων και των στάσεων των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική μοντελοποίηση καθώς και με την ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi. Η ανάλυση δεν έδειξε κάποια στατιστικά σημαντική σχέση μεταξύ τους.

Συγκεκριμένα, από τον έλεγχο της συσχέτισης μεταξύ της γνώσης και της στάσης των εκπαιδευτικών ως προς την μαθηματική μοντελοποίηση δεν φάνηκε να υπάρχει κάποια συσχέτιση μεταξύ τους τόσο με το σύνολο των στάσεων ($r = 0,233$ $p = 0,185 > 0,05$) όσο και με τους επιμέρους άξονες των στάσεων. Επιπλέον, δεν βρέθηκε στατιστικά σημαντική σχέση ανάμεσα στην ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi από τους εκπαιδευτικούς και τις γνώσεις και τις στάσεις τους για την μαθηματική μοντελοποίηση (βλ. Πίνακα 4.31).

Πίνακας 4.31 Συσχετίσεις γνώσεων, στάσεων και ικανότητας επίλυσης προβλήματος Fermi

		r	p
Γνώσεις	**Κονστρουκτιβισμός**	0,171	0,333
	Κατανόηση	0,139	0,433
	Σχετικότητα με πραγματική ζωή	0,256	0,143
	Κίνητρο και ενδιαφέρον	0,286	0,102
	Σύνολο στάσεων	0,233	0,185

Ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi	**Γνώσεις**	-0,261	0,135
	Κονστρουκτιβισμός	0,260	0,137
	Κατανόηση	-0,174	0,324
	Σχετικότητα με πραγματική ζωή	0,130	0,464
	Κίνητρο και ενδιαφέρον	0,010	0,956
	Σύνολο στάσεων	0,085	0,634

4.7 Σύνοψη αποτελεσμάτων

4.7.1 Ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi από τους εκπαιδευτικούς

Τα αποτελέσματα για την ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi από τους εκπαιδευτικούς πριν την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης (Α' εξέταση), έδειξαν ότι περισσότεροι από τους μισούς εκπαιδευτικούς (18 από τους 34) είχαν ανεπαρκή (38,2%) ή μέτρια (14,7%) ικανότητα επίλυσης των προβλημάτων Fermi, αφού δεν κατάφεραν να χρησιμοποιήσουν κάποια στρατηγική για την επίλυση του προβλήματος ή χρησιμοποίησαν την στρατηγική «κατανομής πλέγματος», η οποία θεωρείται μία στρατηγική μονοδιάστατου συλλογισμού. Οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας σε μεγαλύτερο ποσοστό (44,4%) σε σχέση με τους εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας (31,2%) δεν κατάφεραν να επιλύσουν το πρόβλημα Fermi. Το 35,2% των εκπαιδευτικών είχε μία καλή ικανότητα επίλυσης αφού χρησιμοποίησε τη στρατηγική «μέτρησης βασικής μονάδας αναφοράς» και το 11,7% μία πολύ καλή ικανότητα επίλυσης, αφού χρησιμοποίησε την στρατηγική της «μέτρησης συγκέντρωσης».

Κατά τη Β' εξέταση, 14 εκπαιδευτικοί αφού παρακολούθησαν δύο μεταπτυχιακά μαθήματα μαθηματικής μοντελοποίησης, έλυσαν το δεύτερο πρόβλημα Fermi. Τα αποτελέσματα της Β' εξέτασης έδειξαν ότι όλοι οι εκπαιδευτικοί είχαν μία καλή ή πολύ καλή ικανότητα επίλυσης, αφού μηδενίστηκε ο αριθμός των εκπαιδευτικών που δεν κατάφεραν να λύσουν το πρόβλημα ή χρησιμοποίησαν τη στρατηγική «κατανομής πλέγματος». Οι 9 από τους 14 εκπαιδευτικούς χρησιμοποίησαν είτε στρατηγικές πιο σύνθετες σε σχέση με την Α’ εξέταση ή τις ίδιες αλλά με πιο σύνθετη λύση, ποσοστό που αντιστοιχεί στο 64,2% του συνόλου. Η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών (78,5%) σημείωσε μία καλή ικανότητα επίλυσης μετά την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης. Η διαφορά πριν και μετά την παρακολούθηση των μαθημάτων βρέθηκε να είναι στατιστικά σημαντική.

Τέλος, η βαθμίδα εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών, η προϋπηρεσία τους και το επίπεδο σπουδών τους δε φάνηκε να συσχετίζονται με την ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi.

4.7.2 Γνώσεις των εκπαιδευτικών για την μαθηματική μοντελοποίηση

Τα αποτελέσματα για τις γνώσεις των εκπαιδευτικών για την μαθηματική μοντελοποίηση πριν την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης (Α’ εξέταση), έδειξαν μία συνολικά σχετικά καλή γνώση των εκπαιδευτικών, αφού ο μέσος όρος της βαθμολογίας των εκπαιδευτικών στο ερωτηματολόγιο των γνώσεων ήταν 12,26 με άριστα το 15. Ανάμεσα στις δύο βαθμίδες δεν υπήρχε σημαντική διαφορά στην επίδοση. Ωστόσο, οι εκπαιδευτικοί φάνηκε να δυσκολεύονται να δώσουν έναν ορισμό της μαθηματικής μοντελοποίησης, αφού 21 από τους 34 εκπαιδευτικούς έδωσαν έναν ελλιπή ή μέτριο ορισμό.

Μετά την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης, 12 από τους εκπαιδευτικούς απάντησαν εκ νέου το ερωτηματολόγιο (Β’ εξέταση). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η γνώση των εκπαιδευτικών βελτιώθηκε, καθώς στην Α’ εξέταση ο Μ.Ο. γνώσεων ήταν 11,83 (άριστα το 15) ενώ στην Β’ εξέταση ήταν 13,33. Η διαφορά αυτή βρέθηκε να είναι στατιστικά σημαντική. Επιπλέον, κανένας εκπαιδευτικός δεν έδωσε «ελλιπή» ορισμό της μαθηματικής μοντελοποίησης, ενώ οι 8 από τους 12 έδωσαν έναν «καλό» ή «εξαιρετικό» ορισμό.

Η βαθμίδα εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών και η προϋπηρεσία τους δε βρέθηκε να συσχετίζεται με τις γνώσεις τους, ενώ όσοι εκπαιδευτικοί είναι κάτοχοι μεταπτυχιακού πτυχίου έδωσαν καλύτερους ορισμούς για τη μαθηματική μοντελοποίηση σε στατιστικά σημαντικό βαθμό. Τέλος, οι εκπαιδευτικοί που δήλωσαν ότι διδάσκουν μαθηματική μοντελοποίηση, δεν είχαν καλύτερες γνώσεις συνολικά, σε σχέση με τους υπόλοιπους εκπαιδευτικούς.

4.7.3 Στάσεις των εκπαιδευτικών ως προς την μαθηματική μοντελοποίηση

Τα αποτελέσματα για τις στάσεις των εκπαιδευτικών ως προς την μαθηματική μοντελοποίηση πριν την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης (Α’ εξέταση), έδειξαν μία συνολικά θετική στάση των εκπαιδευτικών. Ο Μ.Ο. των απαντήσεών τους στο ερωτηματολόγιο των στάσεων ήταν 4,87 (σε 6-βάθμια κλίμακα Likert). Οι εκπαιδευτικοί εξέφρασαν τον μεγαλύτερο βαθμό συμφωνίας στον άξονα «Κονστρουκτιβισμός» ενώ ο άξονας που συγκέντρωσε τον μικρότερο Μ.Ο. ήταν αυτός της «Κατανόησης». Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί φάνηκε να μην είναι σίγουροι για το αν μπορούν να εντάξουν τη μαθηματική μοντελοποίηση στην τάξη τους, αφού η αντίστοιχη δήλωση του ερωτηματολογίου (Β8) συγκέντρωσε τον μικρότερο βαθμό συμφωνίας κατά μέσο όρο.

Μετά την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης, 12 από τους εκπαιδευτικούς απάντησαν εκ νέου το ερωτηματολόγιο (Β’ εξέταση). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ο Μ.Ο. των στάσεων μετά την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης αυξήθηκε σε σχέση με την Α’ εξέταση, ενώ η διαφορά ανάμεσα στις δύο εξετάσεις βρέθηκε να είναι στατιστικά σημαντική. Τον μεγαλύτερο Μ.Ο. συνέχισε να έχει ο άξονας «Κονστρουκτιβισμός», ενώ τον μικρότερο Μ.Ο. συγκέντρωσε ο άξονας «Κίνητρο και ενδιαφέρον», σε αντίθεση με την Α’ εξέταση που τον μικρότερο Μ.Ο. είχε ο άξονας «Κατανόηση». Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί, μετά την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης, εκφράζουν μεγαλύτερη σιγουριά ότι μπορούν να εντάξουν εργασίες μαθηματικής μοντελοποίησης στα μαθήματά τους (δήλωση Β8) συγκριτικά με την Α’ Εξέταση, ωστόσο η συγκεκριμένη δήλωση συνεχίζει να συγκεντρώνει τον μικρότερο Μ.Ο.

Η βαθμίδα εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών και η προϋπηρεσία τους δε φάνηκε να συσχετίζεται με τις στάσεις τους, ενώ το επίπεδο σπουδών τους είχε θετική συσχέτιση με τον άξονα «Κατανόηση». Οι εκπαιδευτικοί που δήλωσαν ότι διδάσκουν μαθηματική μοντελοποίηση δε φάνηκε να έχουν πιο ευνοϊκές στάσεις σε σχέση με τους υπόλοιπους εκπαιδευτικούς σε στατιστικά σημαντικό βαθμό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

5.1 Συμπεράσματα και συζήτηση αποτελεσμάτων

Η παρούσα έρευνα είχε σκοπό να διερευνήσει τη στάση και τις γνώσεις εκπαιδευτικών Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για την μαθηματική μοντελοποίηση, καθώς και την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων Fermi πριν και μετά την παρακολούθηση μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης, στο πλαίσιο του Μεταπτυχιακού Προγράμματος «Διδακτική Μαθηματικών».

Παρακάτω, ακολουθούν τα συμπεράσματα της έρευνας για κάθε ερευνητικό ερώτημα.

Πρώτο ερευνητικό ερώτημα – Ποια είναι η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων Fermi από τους εκπαιδευτικούς;

Όσον αφορά τα αποτελέσματα του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος, σχετικά με την ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi πριν την παρακολούθηση μαθημάτων μοντελοποίησης, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι περίπου οι μισοί εκπαιδευτικοί έχουν ανεπαρκή (38,2%) ή μέτρια (14,7%) ικανότητα επίλυσης. Αν και δεν έχουν πραγματοποιηθεί έρευνες που να διερευνούν τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι εκπαιδευτικοί σε προβλήματα Fermi, τα αποτελέσματα των ερευνών των Karali & Durmus (2015) και Segura & Ferrando (2021), οι οποίες διερευνούσαν τις δυσκολίες και τα λάθη των εκπαιδευτικών σε τέτοιου είδους προβλήματα, έδειξε ότι οι εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες στην επίλυσή τους, κάτι που επιβεβαιώνεται από την παρούσα έρευνα καθώς το 38,2% των εκπαιδευτικών δεν κατάφεραν να επιλύσουν το πρόβλημα Fermi. Μάλιστα, για τους εκπαιδευτικούς της Πρωτοβάθμιας το ποσοστό αυτό έφτανε το 44,4%, αρκετά υψηλό αν συγκριθεί και με το αντίστοιχο ποσοστό μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην έρευνα των Albarracín & Gorgorió (2014), το οποίο ήταν 52,9%.

Επιπλέον, η στρατηγική της «κατανομής πλέγματος», την οποία χρησιμοποίησε το 14,7% των εκπαιδευτικών, ποσοστό που έφτανε το 18,7% για τους εκπαιδευτικούς της Δευτεροβάθμιας, είναι η επικρατέστερη στρατηγική σε μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, σύμφωνα με την έρευνα των Albarracín & Gorgorió (2014). Αντίστοιχα, οι Albarracín & Gorgorió (2021) παρατήρησαν ότι καθώς αυξάνεται το επίπεδο των μαθητών, αυξάνεται ο αριθμός των στρατηγικών που βασίζονται σε «δισδιάστατο συλλογισμό». Επομένως, η χρήση μίας στρατηγικής «μονοδιάστατου συλλογισμού» από εκπαιδευτικούς, αναδεικνύει μία χαμηλή ικανότητα για επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων, η οποία καθιστά δύσκολη την ένταξη μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης στην τάξη τους.

Η δυσκολία των εκπαιδευτικών πιθανώς να οφείλεται στο γεγονός ότι δεν είναι εξοικειωμένοι με προβλήματα Fermi, καθώς και οι εκπαιδευτικοί της έρευνας των Karali & Durmus (2015) δήλωσαν ότι δυσκολεύτηκαν στην επίλυση των συγκεκριμένων προβλημάτων διότι δεν είχαν έρθει ποτέ σε επαφή με τέτοιου είδους προβλήματα. Επιπλέον, το 90,6% των εκπαιδευτικών που πήραν μέρος στην έρευνα δήλωσαν ότι δεν είχαν παρακολουθήσει κάποιο μάθημα μαθηματικής μοντελοποίησης κατά τη διάρκεια των σπουδών τους, κάτι που πιθανώς επηρεάζει την επίδοσή τους σε δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης, καθώς σύμφωνα με τον Ng (2013), η περιορισμένη έκθεση των εκπαιδευτικών σε δραστηριότητες μοντελοποίησης, προκαλεί την έλλειψη ετοιμότητάς τους να τις υλοποιήσουν.

Δεύτερο ερευνητικό ερώτημα – Ποιες είναι οι γνώσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με την μαθηματική μοντελοποίηση;

Σχετικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, οι εκπαιδευτικοί φάνηκε να έχουν μία σχετικά καλή γνώση για τη μαθηματική μοντελοποίηση και συμφωνεί με τα αποτελέσματα της έρευνας του Asempapa (2016) σε εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, όπου τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η πλειοψηφία έχει μία καλή γνώση για την μαθηματική μοντελοποίηση, όπως και με την έρευνα των Τερζάκη και Λεμονίδη (2022) σε εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, οι οποίοι φάνηκε να έχουν αρκετά καλή γνώση. Από την άλλη πλευρά, άλλες έρευνες έχουν δείξει ότι οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν αρκετές γνώσεις για την μαθηματική μοντελοποίηση, όπως η έρευνα του Frejd (2012) όπου το 50% των συμμετεχόντων δεν γνώριζε για την μαθηματική μοντελοποίηση μέχρι να λάβει μέρος στην έρευνα και του Gould (2013), όπου η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών δεν γνώριζε βασικά στοιχεία των έργων της μαθηματικής μοντελοποίησης, όπως ότι πρέπει να προέρχονται από σενάρια της πραγματικής ζωής και ότι το να κάνεις επιλογές και υποθέσεις αποτελεί μέρος της διαδικασίας.

Ωστόσο, αν και οι εκπαιδευτικοί είχαν μία καλή παιδαγωγική γνώση περιεχομένου, όπως φάνηκε από την επίδοση στις ερωτήσεις κλειστού τύπου, ωστόσο φάνηκε να έχουν μία μέτρια γνώση περιεχομένου. Από την αξιολόγηση και την ανάλυση των ορισμών που έδωσαν φάνηκε ότι η πλειοψηφία (61,8%) δεν κατάφερε να δώσει έναν εξαιρετικό ή καλό ορισμό της μαθηματικής μοντελοποίησης. Ο μέσος όρος της αξιολόγησης των ορισμών ήταν 2,29 (άριστα το 4), δείχνοντας μικρή κατανόηση της έννοιας της μαθηματικής μοντελοποίησης. Όμοια αποτελέσματα είχε η έρευνα του Asempapa (2016) αλλά και η έρευνα του Asempapa & Sturgill (2019) όπου μόνο το 7% των εκπαιδευτικών μπόρεσε να δώσει έναν «εξαιρετικό» ορισμό της μαθηματικής μοντελοποίησης. Αντίστοιχα και στην έρευνα των Τερζάκη και Λεμονίδη (2022) σε εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης φάνηκε ότι αν και οι εκπαιδευτικοί είχαν μία καλή γνώση της μαθηματικής μοντελοποίησης, όπως αναδείχθηκε από το σκορ τους στις ερωτήσεις γνώσεων κλειστού τύπου, ωστόσο δυσκολεύτηκαν να δώσουν έναν ορισμό της μαθηματικής μοντελοποίησης. Δυσκολία των εκπαιδευτικών να ορίσουν τη μαθηματική μοντελοποίηση έδειξε και η έρευνα του Gould (2013), αναδεικνύοντας και κάποιες παρανοήσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με αυτή αλλά και η έρευνα των Çiltaş et al. (2011 στο Çiltaş & Isik, 2013), η οποία έδειξε ότι οι εκπαιδευτικοί συγχέουν τους όρους μοντελοποίηση, μοντέλο, μαθηματική μοντελοποίηση και μαθηματικό μοντέλο.

Επιπλέον, ανάμεσα στις βαθμολογίες των ερωτήσεων γνώσεων κλειστού τύπου και στον ορισμό της μαθηματικής μοντελοποίησης δεν βρέθηκε στατιστικά σημαντική σχέση, κάτι που δείχνει ότι όσοι συγκέντρωσαν ένα υψηλό σκορ στις ερωτήσεις γνώσεων δεν έδωσαν απαραίτητα και έναν καλό ή εξαιρετικό ορισμό της μαθηματικής μοντελοποίησης. Μάλιστα, από τους εκπαιδευτικούς που σημείωσαν ένα πολύ υψηλό σκορ στις ερωτήσεις γνώσεων κλειστού τύπου (βαθμολογία 10 - 11), μόνο το 40,9% έδωσαν ταυτόχρονα και έναν καλό ή εξαιρετικό ορισμό της μαθηματικής μοντελοποίησης. Τα αποτελέσματα αυτά, συμφωνούν με τα αποτελέσματα της έρευνας του Asempapa (2016), όπου το 63% των εκπαιδευτικών που πέτυχαν υψηλό σκορ στις ερωτήσεις κλειστού τύπου, απέτυχαν να ορίσουν τη μαθηματική μοντελοποίηση σε ερώτηση ανοιχτού τύπου.

Τέλος, στην παρούσα έρευνα οι εκπαιδευτικοί της Πρωτοβάθμιας και της Δευτεροβάθμιας είχαν παρόμοιο τελικό σκορ γνώσεων και γνώσης περιεχομένου (ικανότητα διατύπωσης του ορισμού της μαθηματικής μοντελοποίησης), ενώ στην παιδαγωγική γνώση περιεχομένου (ερωτήσεις κλειστού τύπου) οι εκπαιδευτικοί της Πρωτοβάθμιας συγκέντρωσαν ελάχιστα υψηλότερη βαθμολογία. Ωστόσο, δε βρέθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά στις γνώσεις ανάμεσα στις δύο βαθμίδες, σε αντίθεση με την έρευνα του Asempapa (2016), όπου οι εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας βρέθηκαν να έχουν υψηλότερα επίπεδα γνώσης της μαθηματικής μοντελοποίησης σε σχέση με εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας και συγκεκριμένα με εκπαιδευτικούς που δίδασκαν σε Λύκεια.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι αν και κάποιοι εκπαιδευτικοί δήλωσαν ότι διδάσκουν μαθήματα μαθηματικής μοντελοποίησης, ο μέσος όρος της αξιολόγησης των ορισμών που έδωσαν ήταν χαμηλότερος από τον μέσο όρο των υπόλοιπων εκπαιδευτικών. Ταυτόχρονα, η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών που δήλωσαν ότι διδάσκουν μαθήματα μαθηματικής μοντελοποίησης είχαν δηλώσει ότι τα σχολικά εγχειρίδια περιλαμβάνουν δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης, κάτι που -όπως αναφέρθηκε και στο θεωρητικό μέρος της εργασίας- δεν ισχύει. Τα αποτελέσματα αυτά πιθανώς δείχνουν κάποια παρανόηση των εκπαιδευτικών αυτών ως προς το τι σημαίνει δραστηριότητα μαθηματικής μοντελοποίησης. Από την άλλη πλευρά, δεν αποκλείεται το ενδεχόμενο της μη ειλικρινούς απάντησης των εκπαιδευτικών ως προς το αν διδάσκουν δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης.

Τα αποτελέσματα για τις γνώσεις των εκπαιδευτικών μας δείχνουν ότι ενώ οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν κάποιες βασικές αρχές της μαθηματικής μοντελοποίησης, (π.χ. ότι η διαδικασία της μαθηματικής μοντελοποίησης δεν είναι ίδια με την διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, ότι η μαθηματική μοντελοποίηση δεν είναι μια απλή διαδικασία ενός σταδίου κλπ.), ωστόσο δεν έχουν επαρκή κατανόηση της έννοιας της μαθηματικής μοντελοποίησης, αφού δυσκολεύτηκαν να δώσουν έναν καλό ορισμό. Μάλιστα, ένας στους πέντε εκπαιδευτικούς (21,4%) δήλωσε ότι δεν είναι σίγουρος/η ότι διδάσκει μαθηματική μοντελοποίηση ενώ η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών που δήλωσαν ότι διδάσκουν έδωσαν ελλιπείς ή μέτριους ορισμούς. Τα παραπάνω ενισχύουν την άποψη ότι οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν μια βαθύτερη κατανόηση της μαθηματικής μοντελοποίησης, κάτι που πιθανότατα οφείλεται στο ότι δεν έχουν παρακολουθήσει σχετικά μαθήματα κατά τη διάρκεια των σπουδών τους στο Πανεπιστήμιο. Πολλοί ερευνητές έχουν αναφέρει την έλλειψη κατάλληλης προετοιμασίας των εκπαιδευτικών όσον αφορά την πλήρη κατανόηση και τη διδασκαλία της μοντελοποίησης (Karali & Durmus, 2015· Ng, 2013· Ikeda, 2013).

Επίσης, ένας άλλος λόγος μπορεί να είναι ότι η μαθηματική μοντελοποίηση είναι ουσιαστικά απούσα από το Πρόγραμμα Σπουδών και από τα σχολικά βιβλία των μαθηματικών. Όπως σημειώνουν και οι Asempapa & Sturgill (2019) οι δραστηριότητες μαθηματικές μοντελοποίησης αποτελούν πρόκληση για τους εκπαιδευτικούς, καθώς μπορεί να απαιτούν γνώσεις που υπερβαίνουν τα σχολικά αναλυτικά προγράμματα.

Τρίτο ερευνητικό ερώτημα – Ποιες είναι οι στάσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης;

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν μία συνολικά θετική στάση για την μαθηματική μοντελοποίηση. Επιπλέον, οι δηλώσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί συγκέντρωσαν την υψηλότερη βαθμολογία, δείχνοντας και την ευνοϊκότερη στάση, ανήκαν στους άξονες του κονστρουκτιβισμού και της σχετικότητας με την πραγματική ζωή, ενώ πιο χαμηλή βαθμολογία είχαν στις δηλώσεις που ανήκαν στους άξονες του κινήτρου και ενδιαφέροντος και της κατανόησης. Όμοια ήταν και τα αποτελέσματα των ερευνών του Asempapa (2016· 2019), τόσο στο σύνολο της βαθμολογίας των στάσεων όσο και στους επιμέρους άξονες αλλά και της έρευνας των Τερζάκη και Λεμονίδη (2022) σε 153 εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Οι εκπαιδευτικοί έδειξαν μεγάλο βαθμό συμφωνίας στη δήλωση ότι η μαθηματική μοντελοποίηση βοηθάει τους μαθητές να ερμηνεύουν τα μαθηματικά με χρήσιμο τρόπο και ότι η μαθηματική μοντελοποίηση δημιουργεί ευκαιρίες επίλυσης μαθηματικών έργων που δημιουργούνται από καταστάσεις της καθημερινής ζωής, αποτέλεσμα το οποίο συμφωνεί με τις έρευνες των Karali & Durmus (2015), όπου οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ως πλεονέκτημα της μαθηματικής μοντελοποίησης το γεγονός ότι συνδέεται άμεσα με πραγματικές καταστάσεις και την καθημερινή ζωή αλλά και με την έρευνα των Yu & Chang (2011). Αντίστοιχα αποτελέσματα για την σύνδεση της μαθηματικής μοντελοποίησης με την πραγματική ζωή, είχαν και οι έρευνες του Asempapa (2016· 2019) και των Τερζάκη και Λεμονίδη (2022), όπου ο Μ.Ο των απαντήσεων των εκπαιδευτικών στον άξονα του ερωτηματολογίου «Σχετικότητα με πραγματική ζωή» ήταν αρκετά υψηλός.

Επιπλέον, η έρευνα έδειξε ότι οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι η μαθηματική μοντελοποίηση ενισχύει τις ικανότητες των μαθητών στα μαθηματικά. Αυτό φάνηκε από τον υψηλό βαθμό συμφωνίας τους στις δηλώσεις του άξονα

«Κονστρουκτιβισμός». Οι εκπαιδευτικοί εξέφρασαν υψηλό βαθμό συμφωνίας στο ότι η ικανότητα ενός μαθητή στα μαθηματικά ενισχύεται όταν αναπτύσσει δεξιότητες έρευνας, ότι οι διερευνητικές δεξιότητες που αναπτύσσονται μέσω μαθηματικής μοντελοποίησης βοηθούν στην εννοιολογική κατανόηση, ότι οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα μαθηματικά όταν τους δίνεται η ευκαιρία να επεξεργαστούν δραστηριότητες οι οποίες επιτρέπουν πολλαπλά σημεία εισόδου, ότι οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα μαθηματικά όταν τους δίνεται η ευκαιρία να δοκιμάσουν ιδέες με πιθανές λύσεις και ότι η μοντελοποίηση δημιουργεί εμπειρίες που ευνοούν τις εξηγήσεις των μαθητών σε μαθηματικές έννοιες. Αντίστοιχα ήταν τα αποτελέσματα στις έρευνες των Yu & Chang (2011) και Asempapa (2016), όπου οι εκπαιδευτικοί δήλωσαν ότι οι δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης ενισχύουν τις ικανότητες των μαθητών στην μάθηση των μαθηματικών.

Άλλο θετικό χαρακτηριστικό της χρήσης μαθηματικής μοντελοποίησης στην τάξη, που αναγνώρισαν οι εκπαιδευτικοί, είναι το γεγονός ότι η μαθηματική μοντελοποίηση ευνοεί τη συζήτηση στην τάξη κατά τη μάθηση των μαθηματικών. Αντίστοιχα, στην έρευνα των Karali & Durmus (2015), οι εκπαιδευτικοί αναγνώρισαν στα πλεονεκτήματα της μαθηματικής μοντελοποίησης τη συνεργασία μεταξύ των μαθητών, τη συλλογική σκέψη και τη δημιουργία περιβάλλοντος για συζήτηση.

Από την άλλη πλευρά, οι εκπαιδευτικοί της παρούσας έρευνας φάνηκε να έχουν μικρότερο βαθμό συμφωνίας στην δήλωση Β28 ότι «οι υψηλού γνωστικού επιπέδου εργασίες μοντελοποίησης προσελκύουν τους μαθητές», αφού το 35,5% των εκπαιδευτικών «Κάπως συμφωνεί», ωστόσο το 32,4% «Διαφωνούν» ή «Κάπως διαφωνούν» με τη συγκεκριμένη δήλωση. Αντίστοιχα, και στην έρευνα του Asempapa (2016), η συγκεκριμένη δήλωση συγκέντρωσε τον μικρότερο βαθμό συμφωνίας των εκπαιδευτικών. Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε αντίθεση με τον μεγαλύτερο βαθμό συμφωνίας τους σε άλλες παρόμοιες δηλώσεις, όπως ότι «Η μαθηματική μοντελοποίηση ενισχύει το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά» ή ότι «Η μαθηματική μοντελοποίηση συμβάλλει στον ενθουσιασμό των μαθητών για τα μαθηματικά». Μια πιθανή εξήγηση είναι ότι οι εκπαιδευτικοί ταύτισαν τις εργασίες «υψηλού γνωστικού επιπέδου» με εργασίες μεγάλης δυσκολίας. Ωστόσο, όπως έχει αναφερθεί και στο θεωρητικό μέρος της παρούσας εργασίας, οι δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης θεωρούνται δραστηριότητες «υψηλού γνωστικού επιπέδου», καθώς σε αυτές περιλαμβάνονται η επεξεργασία του αντικειμένου με κριτικό τρόπο και ανοιχτές ή μη δομημένες δραστηριότητες, οπού δεν υπάρχει μία προβλέψιμη πορεία για την προσέγγισή τους και οι μαθητές καλούνται να αυτενεργήσουν, αντίθετα από τις δραστηριότητες «χαμηλού γνωστικού επιπέδου». Η διάκριση αυτή δεν αφορά τον βαθμό δυσκολίας των δραστηριοτήτων.

Ένα ακόμα συμπέρασμα που μπορούμε να βγάλουμε από την ανάλυση των αποτελεσμάτων των στάσεων των εκπαιδευτικών, είναι ότι οι ίδιοι δε δείχνουν μεγάλη σιγουριά ως προς την προσωπική τους κατανόηση στο θέμα της μαθηματικής μοντελοποίησης, κάτι που έγινε φανερό από το γεγονός ότι ο άξονας «Κατανόηση» είχε τον μικρότερο Μ.Ο. βαθμολογίας. Επιπλέον, δεν εκφράζουν αρκετή αυτοπεποίθηση σχετικά με την χρήση της μαθηματικής μοντελοποίησης στην τάξη, όπως φάνηκε από τη δήλωση «Μπορώ να εντάξω εργασίες μαθηματικής μοντελοποίησης στα μαθήματά μου», η οποία ήταν η δήλωση με τον μικρότερο βαθμό συμφωνίας στο σύνολο του ερωτηματολογίου.

Τα παραπάνω δεν προκαλούν έκπληξη, αν λάβουμε υπόψη μας ότι το 90% των εκπαιδευτικών απάντησαν ότι δεν έχουν παρακολουθήσει κάποιο μάθημα μαθηματικής μοντελοποίησης κατά την διάρκεια των σπουδών τους στο Πανεπιστήμιο και το 75% όσων εργάζονται απάντησαν ότι δε διδάσκουν ή δεν είναι σίγουροι ότι διδάσκουν δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης στην τάξη τους, αφού σύμφωνα με τον Ng (2013) η περιορισμένη έκθεση των εκπαιδευτικών σε έργα μοντελοποίησης, προκαλεί την έλλειψη ετοιμότητάς τους να τα υλοποιήσουν.

Όμοια αποτελέσματα για την αυτοπεποίθηση των εκπαιδευτικών στην πραγματοποίηση δραστηριοτήτων μαθηματικής μοντελοποίησης στην τάξη είχαν και αρκετές άλλες έρευνες, οι οποίες έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί δε νιώθουν αρκετά ικανοί ή έτοιμοι ώστε να εκτελέσουν έργα μαθηματικής μοντελοποίησης (Yu & Chang, 2011· Schmidt, 2011) ή δεν είναι σίγουροι ότι μπορούν να εφαρμόσουν έργα μοντελοποίησης στην τάξη (Asempapa, 2016· 2019· Τερζάκη & Λεμονίδης, 2022).

Όσον αφορά τη σχέση ανάμεσα στις στάσεις των εκπαιδευτικών και στην εκπαιδευτική τους βαθμίδα, η παρούσα έρευνα δεν έδειξε κάποια συσχέτιση, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με τα ευρήματα της έρευνας του Asempapa (2019), η οποία έδειξε ότι η θετική στάση απέναντι στην μαθηματική μοντελοποίηση σχετίζεται με τη βαθμίδα που διδάσκουν οι εκπαιδευτικοί, καθώς οι εκπαιδευτικοί Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης είχαν πιο ευνοϊκές στάσεις από τους εκπαιδευτικούς Δευτεροβάθμιας. Ωστόσο, παλαιότερη έρευνα του Asempapa (2016) σε μεγαλύτερο πληθυσμό, έδειξε ότι δεν υπάρχει στατιστικώς σημαντική διαφορά στη στάση των εκπαιδευτικών της Πρωτοβάθμιας έναντι των εκπαιδευτικών του Γυμνασίου. Επιπλέον, δεν βρέθηκε να υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα στη στάση των εκπαιδευτικών ως προς τη μαθηματική μοντελοποίηση και της προϋπηρεσίας τους, αποτέλεσμα που συμφωνεί με την έρευνα του Asempapa (2016). Τέλος, από την ανάλυση των αποτελεσμάτων δεν προέκυψε κάποια στατιστικώς σημαντική συσχέτιση ανάμεσα στις γνώσεις των εκπαιδευτικών για την μαθηματική μοντελοποίηση και στις στάσεις τους, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με τα ευρήματα άλλων ερευνών (Asempapa, 2016· Asempapa & Sturgill, 2019), όπου έδειξαν ότι η γνώση και η στάση των εκπαιδευτικών είναι θετικά συσχετισμένες και στην έρευνα των Τερζάκη και Λεμονίδη (2022), όπου φάνηκε να υπάρχει θετική συσχέτιση, αν και ασθενής ($r<0,300$).

Τέταρτο ερευνητικό ερώτημα

Α) Ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi από τους εκπαιδευτικούς μετά την παρακολούθηση μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης

Τα αποτελέσματα έδειξαν βελτίωση της ικανότητας των εκπαιδευτικών σε σύγκριση με την Α' εξέταση και μάλιστα σε στατιστικά σημαντικό βαθμό. Το σύνολο των εκπαιδευτικών έλυσε το πρόβλημα με στρατηγικές «δισδιάστατου συλλογισμού», οι οποίες αντιστοιχούν σε καλή και πολύ καλή ικανότητα επίλυσης του προβλήματος. Οι εκπαιδευτικοί με καλή και πολύ καλή ικανότητα επίλυσης του προβλήματος διπλασιάστηκε σε σχέση με την πρώτη εξέταση (7 στην Α' εξέταση και 14 στην Β' εξέταση). Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με τα αποτελέσματα της έρευνας των Yasa & Karatas (2018), όπου φάνηκε ότι η διδασκαλία με τη μέθοδο της μαθηματικής μοντελοποίησης είχε θετική επίδραση στην επίδοση προπτυχιακών εκπαιδευτικών σε έργα μαθηματικής μοντελοποίησης αλλά και των Çiltaş & Isik (2013), όπου το σκορ των προπτυχιακών εκπαιδευτικών σε έργα μαθηματικής μοντελοποίησης τριπλασιάστηκε μετά την παρακολούθηση μαθημάτων.

Από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας για την ικανότητα των εκπαιδευτικών στην επίλυση προβλημάτων Fermi, τόσο πριν όσο και μετά την παρακολούθηση μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης, αναδεικνύεται η σημασία των εκπαιδευτικών προγραμμάτων για τους εκπαιδευτικούς, την οποία έχουν τονίσει πολλοί ερευνητές και τα οποία θα πρέπει να τους εκθέτουν στο βασικό περιεχόμενο της μοντελοποίησης, σε έργα μοντελοποίησης διαφόρων επιπέδων καθώς και στον τρόπο προσέγγισής τους και στην επίλυσή τους και τελικά στην παιδαγωγική της μοντελοποίησης (Liljedahl et al., 2009· Kang and Noh, 2012· Ng, 2013).

Β) Γνώσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη μαθηματική μοντελοποίηση μετά την παρακολούθηση μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί μετά την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης, βελτίωσαν τις γνώσεις τους σε στατιστικά σημαντικό βαθμό. Αντίστοιχα αποτελέσματα είχε και η έρευνα των Maaß & Gurlitt (2011), η οποία έδειξε ότι η συμμετοχή των εκπαιδευτικών σε πενθήμερο σεμινάριο είχε ισχυρή θετική επίδραση στην παιδαγωγική γνώση περιεχομένου. Επιπλέον, όμοια αποτελέσματα είχε και η έρευνα των Çiltaş & Isik (2013).

Οι εκπαιδευτικοί της παρούσας έρευνας, αν και είχαν μια καλή γνώση των βασικών αρχών της μαθηματικής μοντελοποίησης, όπως φάνηκε από τη βαθμολογία τους στις ερωτήσεις κλειστού τύπου, δυσκολεύτηκαν να δώσουν τον ορισμό της. Συγκεκριμένα, στην Α’ εξέταση οι 9 από τους 12 εκπαιδευτικούς έδωσαν «ελλιπή» ή «μέτριο» ορισμό, δείχνοντας μικρό βαθμό κατανόησης του όρου της μαθηματικής μοντελοποίησης, ενώ δεν υπήρχε εκπαιδευτικός που να έδωσε έναν «εξαιρετικό» ορισμό. Αντίθετα, μετά την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης, κανένας εκπαιδευτικός δεν έδωσε «ελλιπή» ορισμό, ενώ οι 8 από τους 12 έδωσαν έναν «καλό» ή «εξαιρετικό» ορισμό. Μάλιστα, η διαφορά ανάμεσα στην Α’ και Β’ εξέταση ήταν στατιστικά σημαντική. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με την έρευνα των Çiltaş & Isik (2013), όπου στις συνεντεύξεις πριν τη διδασκαλία οι εκπαιδευτικοί δεν μπόρεσαν να δώσουν έναν πλήρη ορισμό της μαθηματικής μοντελοποίησης, αντίθετα μετά τη διδασκαλία οι ορισμοί που δόθηκαν από τους εκπαιδευτικούς ήταν πολύ κοντά στους ορισμούς της βιβλιογραφίας. Τα αποτελέσματα αυτά τονίζουν τον σημαντικό ρόλο της εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών στη μαθηματική μοντελοποίηση τόσο σε προπτυχιακό επίπεδο όσο και με επιμορφώσεις και εκπαιδευτικά προγράμματα των εν ενεργεία εκπαιδευτικών.

Γ) Στάσεις των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική μοντελοποίηση μετά την παρακολούθηση μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι στάσεις των εκπαιδευτικών για την μαθηματική μοντελοποίηση μετά την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης βελτιώθηκαν, τόσο στο σύνολό τους όσο και στους επιμέρους άξονες. Η διαφορά αυτή ήταν στατιστικά σημαντική στο σύνολο των στάσεων αλλά και στους άξονες «Κατανόηση» και «Κίνητρο και ενδιαφέρον». Αντίστοιχα, και η έρευνα η έρευνα των Jacobs & Durandt (2016) είχε δείξει θετική επίδραση εκπαιδευτικών προγραμμάτων στις στάσεις των εκπαιδευτικών, ενώ η έρευνα της Schmidt (2011) έδειξε ότι ενώ κάποιες στάσεις φαίνεται να αλλάζουν, κάποιες άλλες είναι περισσότερο ανθεκτικές.

Κατά την Α’ Εξέταση, η δήλωση που συγκέντρωνε τον μικρότερο βαθμό συμφωνίας ήταν η δήλωση *«Μπορώ να εντάξω εργασίες μαθηματικής μοντελοποίησης στα μαθήματά μου»,* δείχνοντας ότι οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν αρκετή αυτοπεποίθηση για να εντάξουν την μαθηματική μοντελοποίηση στη διδασκαλία τους. Μετά την παρακολούθηση των μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης, ο βαθμός συμφωνίας στην συγκεκριμένη δήλωση αυξήθηκε, αν και εξακολουθούσε να είναι η δήλωση με τον μικρότερο Μ.Ο. Το θέμα της αυτοπεποίθησης των εκπαιδευτικών αναδείχθηκε και σε άλλες έρευνες, όπως στων Maaß & Gurlitt (2011) η οποία έδειξε ότι η συμμετοχή των εκπαιδευτικών σε πενθήμερο σεμινάριο μαθηματικής μοντελοποίησης είχε θετική επίδραση στην αυτο-αποτελεσματικότητά τους όσον αφορά τη μοντελοποίηση. Από την άλλη, στην έρευνα των Jacobs & Durandt (2016) σχεδόν οι μισοί εκπαιδευτικοί εξακολουθούσαν να μην έχουν αυτοπεποίθηση σχετικά με την διαχείριση προκλήσεων σχετικών με τα έργα μοντελοποίησης μετά την έκθεσή τους στην δραστηριότητα μαθηματικής μοντελοποίησης.

Από τα παραπάνω θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε ότι τα εκπαιδευτικά προγράμματα μαθηματικής μοντελοποίησης ενισχύουν τις θετικές στάσεις των εκπαιδευτικών, ωστόσο ίσως απαιτείται μία πιο συστηματική και μεγαλύτερης διάρκειας εκπαίδευση, ώστε να έχουν την αυτοπεποίθηση και τις ικανότητες να εντάξουν τη μαθηματική μοντελοποίηση στην διδασκαλία τους. Κάτι τέτοιο είναι ιδανικό να γίνει κατά τη διάρκεια της φοίτησής τους στο Πανεπιστήμιο, καθώς τότε υπάρχει ο απαραίτητος χρόνος αλλά και η δυνατότητα πρακτικής άσκησης των εκπαιδευτικών. Την άποψη αυτή ενισχύουν οι Jacobs & Durandt (2016), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι είναι εξαιρετικά αμφίβολο ότι μια εφάπαξ παρέμβαση, με στόχο την ενίσχυση των ικανοτήτων των εκπαιδευτικών στην μαθηματική μοντελοποίηση, μπορεί να ενισχύσει την αυτοπεποίθησή τους και να αλλάξει τη στάση και τις θέσεις τους, αλλά περισσότερο απαιτείται συνεχής έκθεση και προβληματισμός σε έργα μοντελοποίησης. Όμοια, οι Maasepp & Bobis (2014) υποστηρίζουν ότι για να επηρεασθούν θετικά οι στάσεις των εκπαιδευτικών, θα πρέπει να παρατηρήσουν και να βιώσουν πολλές θετικές εμπειρίες διδασκαλίας και μάθησης κατά τη διάρκεια των σπουδών τους.

5.2 Σύνοψη συμπερασμάτων έρευνας

Συνοψίζοντας, καταρχάς η παρούσα έρευνα έδειξε ότι ενώ οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν κάποιες βασικές αρχές της μαθηματικής μοντελοποίησης, ωστόσο δεν έχουν μία επαρκή κατανόηση της έννοιας της μαθηματικής μοντελοποίησης και των διαδικασιών της. Αυτό γίνεται φανερό τόσο από την αδυναμία τους να ορίσουν την έννοια της μοντελοποίησης αλλά και από τις απαντήσεις τους στον άξονα «Κατανόηση» των στάσεων, όπου οι εκπαιδευτικοί δηλώνουν ότι συμφωνούν χωρίς να είναι σίγουροι, ότι κατανοούν τη μαθηματική μοντελοποίηση, τη διαφορά μεταξύ λεκτικών προβλημάτων και της μαθηματικής μοντελοποίησης και τη διαφορά μεταξύ της επίλυσης προβλημάτων και μαθηματικής μοντελοποίησης. Επιπλέον, δεν έχουν αυτοπεποίθηση να εντάξουν τη μαθηματική μοντελοποίηση στη διδασκαλία τους αλλά και η ικανότητά τους στην επίλυση προβλημάτων Fermi δε φάνηκε ικανοποιητική. Όλα τα παραπάνω, πιθανότατα οφείλονται σε δύο παράγοντες: Στο γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί κατά μεγάλη πλειοψηφία (όπως δήλωσαν οι ίδιοι) δεν είχαν παρακολουθήσει μαθήματα σχετικά με τη μαθηματική μοντελοποίηση στο Πανεπιστήμιο και στο ότι η μαθηματική μοντελοποίηση είναι απούσα από το Πρόγραμμα Σπουδών αλλά και από τα σχολικά εγχειρίδια.

Ταυτόχρονα όμως, αφενός παρουσιάζουν μία συνολικά θετική στάση για την μαθηματική μοντελοποίηση και αφετέρου η παρακολούθηση μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης βελτίωσε σε στατιστικά σημαντικό βαθμό τόσο τις γνώσεις και τις στάσεις των εκπαιδευτικών, όσο και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος Fermi. Αυτά τα στοιχεία είναι αρκετά ενθαρρυντικά, καθώς δείχνουν ότι υπάρχει ένα «πρόσφορο έδαφος» για επιμόρφωση με σκοπό την ένταξη της μαθηματικής μοντελοποίησης στις σχολικές τάξεις. Ωστόσο, το ιδανικό είναι να υπάρχει κατάλληλη εκπαίδευση κατά τη διάρκεια των σπουδών των εκπαιδευτικών, καθώς φαίνεται ότι για να έχουν την αυτοπεποίθηση και την ικανότητα να εντάξουν τη μαθηματική μοντελοποίηση στη διδασκαλία τους απαιτείται συνεχής έκθεση και προβληματισμός των εκπαιδευτικών πάνω σε έργα μοντελοποίησης και όχι μία εφάπαξ ή μικρής διάρκειας επιμορφωτική παρέμβαση.

5.3 Περιορισμοί έρευνας

Η έρευνα παρουσιάζει ορισμένους περιορισμούς, επομένως τα συμπεράσματά της πιθανόν να μην γενικεύονται για όλο τον πληθυσμό των εκπαιδευτικών.

Αρχικά, ως συμμετέχοντες της έρευνας επιλέχθηκαν μεταπτυχιακοί φοιτητές, οι οποίοι φοιτούσαν στο Διιδρυματικό Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών «Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική Μαθηματικών», καθώς υπήρχε ανάγκη για πρόσβαση σε εκπαιδευτικούς και των δύο βαθμίδων οι οποίοι θα παρακολουθούσαν τα ίδια μαθήματα μαθηματικής μοντελοποίησης. Επομένως, η δειγματοληψία ήταν βολική και το δείγμα δεν ήταν πολύ μεγάλο. Επιπλέον, καθώς οι συμμετέχοντες ήταν φοιτητές ενός μεταπτυχιακού προγράμματος σχετικού με την Διδακτική Μαθηματικών, πιθανόν έχουν ευνοϊκότερες στάσεις και καλύτερες γνώσεις για την μαθηματική μοντελοποίηση σε σχέση με τον γενικό πληθυσμό των εκπαιδευτικών. Τέλος, τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν βελτίωση τόσο στην ικανότητα επίλυσης προβλημάτων Fermi, όσο και στις γνώσεις και στις στάσεις των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική μοντελοποίηση μετά από την παρακολούθηση μαθημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης, ωστόσο δεν μπορούν να αποδείξουν μία αιτιώδη σχέση μεταξύ τους, καθώς δεν χρησιμοποιήθηκε πειραματική ομάδα ελέγχου.

5.4 Προτάσεις για περαιτέρω διερεύνηση

Αρχικά, θα είχε ενδιαφέρον και θα προσέφερε μια περισσότερο σφαιρική εικόνα για τις γνώσεις και τη στάση των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική μοντελοποίηση καθώς και για την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων Fermi, μία μεγαλύτερη έρευνα με περισσότερους συμμετέχοντες, οι οποίοι δεν θα είναι στο σύνολό τους μεταπτυχιακοί φοιτητές. Επιπλέον, θα ήταν καλό το ερωτηματολόγιο για τις γνώσεις και τις στάσεις των εκπαιδευτικών να πλαισιωθεί και με ατομικές συνεντεύξεις.

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας επισημαίνουν την αναγκαιότητα και την χρησιμότητα των κατάλληλων εκπαιδευτικών προγραμμάτων μαθηματικής μοντελοποίησης, τόσο για τους προπτυχιακούς όσο και για τους εν ενεργεία εκπαιδευτικούς. Επομένως, μία έρευνα πολύ σημαντική για την μαθηματική εκπαίδευση θα ήταν η διερεύνηση των κατάλληλων συνιστωσών ενός τέτοιου εκπαιδευτικού προγράμματος, οι οποίες θα δημιουργούσαν ευνοϊκές στάσεις στους εκπαιδευτικούς και θα τους παρείχαν τις απαραίτητες γνώσεις και την κατάλληλη υποστήριξη, ώστε να είναι ικανοί να εντάξουν την μαθηματική μοντελοποίηση στην διδασκαλία τους. Μία τέτοια έρευνα θα απαιτούσε αρκετές ώρες επιμόρφωσης, παρακολούθηση διδασκαλίας στις σχολικές τάξεις, συζητήσεις και συνεντεύξεις με τους εκπαιδευτικούς καθώς και την ύπαρξη πειραματικών ομάδων ελέγχου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2013). Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *16*(3), 289-315.

Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational studies in mathematics*, *86*(1), 79-96.

Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2015). On the role of inconceivable magnitude estimation problems to improve critical thinking. *In Educational paths to mathematics* (pp. 263-277). Springer, Cham.

Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2018). Students estimating large quantities: From simple strategies to the population density model. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(10), em1579.

Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2019). Using large number estimation problems in primary education classrooms to introduce mathematical modelling. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, *27*(2).

Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2020). Mathematical modeling projects oriented towards social impact as generators of learning opportunities: A case study. *Mathematics*, *8*(11), 2034.

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *6*(3), 331–364.

Ärlebäck, J. B., & Bergsten, C. (2013). On the use of realistic Fermi problems in introducing mathematical modelling in upper secondary mathematics. In *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies: ICTMA 13* (pp. 597-609). Dordrecht: Springer Netherlands.

Asempapa, R. S. (2016). *Developing an Instrument to Assess Teachers' Knowledge of the Nature of Mathematical Modeling and Their Attitude Toward Such Modeling*. Ohio University.

Asempapa, R. S. (2019). Development and initial psychometric properties of the mathematical modeling attitude scale. *School Science and Mathematics, 119*(1), 14-23.

Asempapa, R. S., & Brooks, G. P. (2020). Factor analysis and psychometric evaluation of the mathematical modeling attitude scale for teachers of mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1-31.

Asempapa, R. S., & Sturgill, R. (2019). Mathematical modeling: Issues and challenges in mathematics education and teaching. *Editorial Team, 11*(5), 71.

Balakrishnan, G., Yen, Y. P., & Goh, L. E. E. (2010). Mathematical modelling in the Singapore secondary school mathematics curriculum. In *Mathematical Applications And Modelling: Yearbook 2010, Association of Mathematics Educators* (pp. 247-257).

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59,* 389–407.

Bartelet, D., Vaessen, A., Blomert, L., & Ansari, D. (2014). What basic number processing measures in kindergarten explain unique variability in first-grade arithmetic proficiency? *Journal of Experimental Child Psychology, 117*, 12–28. Crossref. PubMed.

Barquero, B., Bosch, M., & Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM*, *50*(1), 31-43.

Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application, 1*(1), 45-58.

Breckler, S. J. (1984). Empirical validation of affect, behavior, and cognition as distinct components of attitude. *Journal of personality and social psychology, 47*(6), 1191.

Chin, C. & Brown, D. E. (2000). Learning in science: A comparison of deep and surface approaches. *Journal of Research in Science Teaching: The Official Journal of the National Association for Research in Science Teaching, 37*(2), 109-138.

Ciltas, A., & Isik, A. (2013). The Effect of Instruction through Mathematical Modelling on Modelling Skills of Prospective Elementary Mathematics Teachers. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *13*(2), 1187-1192.

Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, ΦΕΚ 303Β/13-3-2003.

Δεσλή, Δ. (2021). *Οι εκτιμήσεις στη μαθηματική εκπαίδευση: Είδη και εφαρμογές τους.* Αθήνα: Gutenberg.

Ferrando, I., & Albarracín, L. (2021). Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: Analysis of emerging models. Mathematics Education Research Journal, 33(1), 61-78.

Ferri, R. B. (2017). Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education. Springer.Ferrando, I., & Albarracín, L. (2021). Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: Analysis of emerging models. *Mathematics Education Research Journal*, *33*(1), 61-78.

Flevares, L. M., & Schiff, J. R. (2013). Engaging young learners in integration through mathematical modeling: Asking big questions, finding answers, and doing big thinking. *Advances in Early Education and Day Care, 17*, 33–56

Frejd, P. (2012). Teachers' conceptions of mathematical modelling at Swedish Upper Secondary school. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(5), 17-40.

Gould, H. (2013). *Teachers' conceptions of mathematical modeling.* Columbia University.

Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning & Instruction, 7*, 293–307.

Hagena, M. (2015). Improving mathematical modelling by fostering measurement sense: An intervention study with pre-service mathematics teachers. In *Mathematical modelling in education research and practice* (pp. 185-194). Springer, Cham.

Hennig, C. (2010). Mathematical models and reality: A constructivist perspective. *Foundations of Science*, *15*(1), 29-48.

Hidayat, R., Idris, W. I. W., Qudratuddarsi, H., & Rahman, M. N. A. (2021). Validation of the Mathematical Modeling Attitude Scale for Malaysian Mathematics

Teachers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *17*(12), em2047.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*, 371–406.

Ikeda, T. (2013). Pedagogical reflections on the role of modelling in mathematics instruction. In G.A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, & J. P. Brown (Eds). *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice*, 255–276. London: Springer.

Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (2022). *Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στο Δημοτικό.* Ανακτήθηκε από http://iep.edu.gr/el/nea-ps-provoli

Jacobs, G. J., & Durandt, R. (2016). Attitudes of pre-service mathematics teachers towards modelling: A South African inquiry. *Eurasia journal of mathematics, science and technology education*, *13*(1), 61-84.

Kang, O., & Noh, J. (2012, July). Teaching mathematical modelling in school mathematics. In *12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 8-15).

Karali, D. & Durmuş, S. (2015). Primary school pre-service mathematics teachers' views on mathematical modeling. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(4), 803– 815.

Kleickmann, T., Richter, D., Kunter, M., Elsner, J., Besser, M., Krauss, S., & Baumert, J. (2013). Teachers' content knowledge and pedagogical content knowledge: The role of structural differences in teacher education. *Journal of teacher education*, *64*(1), 90-106.

Λεμονίδης, Χ. (2020). *Νοεροί υπολογισμοί και εκτιμήσεις: Από την έρευνα στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών.* Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (Eds). (2003). *Beyond constructivism: Models and modelling perspective on mathematics problem solving, learning, and teaching.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Lesh, R., & Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical thinking and learning*, *5*(2-3), 157-189.

Liljedahl, P., Durand-Guerrier, V., Winsløw, C., Bloch, I., Huckstep, P., Rowland, T., & Chapman, O. (2009). Components of mathematics teacher training. In R. Even & D. L. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics*, (pp. 25–33). US: Springer.

Lingefjärd, T. (2007). Mathematical modelling in teacher education—necessary or unnecessary. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.–W., Henn, & M. Niss, (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 333–340). New York, NY: Springer.

Maaß, K., & Gurlitt, J. (2011). LEMA–Professional development of teachers in relation to mathematical modelling. *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*, 629-639

Maasepp, B. & Bobis, J. (2014). Prospective primary teachers' beliefs about mathematics. *Mathematics Teacher Education and Development*, *16*(2), 89–107.

Mischo, C., & Maaß, K. (2013). The Effect of Teacher Beliefs on Student Competence in Mathematical Modeling--An Intervention Study. *Journal of Education and Training Studies*, *1*(1), 19-38.

Ng, K. E. D. (2013). Teacher readiness in mathematical modelling: Are there differences between preservice and in-service teachers? In G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, & J. P. Brown (Eds.), *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice,* 339–348. London: Springer.

Niss, M. (1989). Aims and scope of mathematical modelling in mathematics curricula. In W. Blum, J. Berry, R. Biehler, I. Huntley, R. Kaiser-Messmer, & K. Profke (Eds.), *Applications and modelling in learning and teaching mathematics* (pp. 22– 31). Chichester, United Kingdom: Horwood.

Olson, J. M., & Zanna, M. P. (1993). Attitude and attitude change. *Annual Review of Psychology*, 44, 117–154.

Pepin, B. (2008). Μια διεθνής σύγκριση των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών και της χρήσης τους από τους εκπαιδευτικούς – ποια εικόνα των μαθηματικών παρουσιάζουν στους μαθητές τα σχολικά βιβλία στην Αγγλία, Γαλλία και Γερμανία. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.) *Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών, 7ο διήμερο διαλόγου για διδασκαλία των μαθηματικών 15 & 16 Μαρτίου 2008* (σσ. 21-54). Θεσσαλονίκη.

Peter - Koop, A. (2004). Fermi problems in primary mathematics classrooms: Pupils' interactive modelling processes. *Mathematics education for the third millenium: Towards 2010*, 454-461.

Philipp R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F.K. Lester, Jr. (Ed.), *The second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.

257–315). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Pollak, H. O. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. In UNESCO (Ed.), *New trends in mathematics teaching* (Vol. 4, pp. 232–248). Paris, France: UNESCO.

Reys, B. J., Reys, R. E., & Chavez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. *Educational Leadership, 61*(5), 61-66.

Schmidt, B. (2011). Modelling in the classroom: Obstacles from the teacher's perspective. *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*, 641-651.

Schmidt, W., Houang, R., & Cogan, L. (2002). A coherent curriculum. *American Education, 26*(10), 1-18.

Segura, C., & Ferrando, I. (2021). Classification and Analysis of Pre-Service Teachers' Errors in Solving Fermi Problems. *Education Sciences, 11*(8), 451.

Sekeris, E., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2019). Measurement, development, and stimulation of computational estimation abilities in kindergarten and primary education: A systematic literature review. *Educational Research Review, 27,* 1-14.

Shahbari, J. A. (2018). Mathematics teachers' conceptions about modelling activities and its reflection on their beliefs about mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(5), 721-742.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1-22.

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation. *Handbook of mathematical cognition*, 197-212.

Soon, T. L. & Cheng, A. K. (2013). Pre-service secondary school teachers' knowledge in mathematical modelling. In G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum & J. P. Brown (Eds.), *Teaching mathematical modelling: connecting to research and practice* (pp. 373–383). London: Springer.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371–389). New York: Macmillan Publishing Company.

Sriraman, B., & Knott, L. (2009). The mathematics of estimation: Possibilities for interdisciplinary pedagogy and social consciousness. *INTERCHANGE: A Quarterly Review of Education, 40*(2), 205–223.

Sriraman, B., & Lesh, R. (2006). Modeling conceptions revisited. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(3), 248–254.

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for research in mathematics education, 36*(5), 404-411.

Sunde, P. B., Petersson, J., Nosrati, M., Rosenqvist, E., & Andrews, P. (2021). Estimation in the mathematics curricula of Denmark, Norway and Sweden: Inadequate conceptualisations of an essential competence. *Scandinavian Journal of Educational Research,* 1-16.

Τερζάκη, Ε. (2021). *Η γνώση και η στάση των εκπαιδευτικών μαθηματικών για τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης* (Μεταπτυχιακή εργασία). Ανακτήθηκε από: https://apothesis.eap.gr/handle/repo/52583

Τερζάκη, Ε., Λεμονίδης, Χ. (2022). Η γνώση και η στάση των εκπαιδευτικών των Μαθηματικών ως προς τη μαθηματική μοντελοποίηση. *Πρακτικά του 9ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ.* Βόλος, σελ. 258-266.

Thiel, O. (2010). Teachers' attitudes towards mathematics in early childhood education. *European Early Childhood Education Research Journal*, *18*(1), 105–115.

Tiilikainen, M., Karjalainen, J., Toom, A., Lepola, J., & Husu, J. (2019). The complex zone of constructivist teaching: a multi-case exploration in primary classrooms. *Research Papers in Education*, *34*(1), 38-60.

Valverde, G.A., Bianchi, L.J., Wolfe, R.G., Scmidt, W.H. and Houng, R.T. (2002) *According to the Book- Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Wong, T. T.-Y., Ho, C. S.-H., & Tang, J. (2016). Consistency of response patterns in different estimation tasks. *Journal of Cognition and Development*, *17*(3), 526–547. Crossref.

Yang, D. C., & Wu, S. S. (2012). Examining the Differences of the 8th-Graders' Estimation Performance between Contextual and Numerical Problems. *Online Submission.*

Yasa, G. K., & Karatas, I. (2018). Effects of the instruction with mathematical modeling on pre-service mathematics teachers' mathematical modeling performance. *Australian Journal of Teacher Education (Online)*, *43*(8), 1-14.

Yu, S. Y., & Chang, C. K. (2011). What did Taiwan mathematics teachers think of model-eliciting activities and modelling teaching?. *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*, 147-156.

Zan, R., & Martino, P. D. (2007). Attitudes towards mathematics: Overcoming positive/negative dichotomy [Monograph]. *Montana Mathematics Enthusiast, 3*, 157–168.

Zbiek, R., & Conner, A. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 89–112.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Εξεταστικό δοκίμιο επίλυσης προβλήματος Fermi (Α’ Εξέταση)

Ατομικά στοιχεία

Παρακαλώ συμπληρώστε τα παρακάτω ατομικά στοιχεία:

Ηλικία: ……

Βαθμίδα εκπαίδευσης:

Α) Νηπιαγωγός

Β) Δασκάλα - ος

Γ) Μαθηματικός

Μεταπτυχιακό: ΝΑΙ ΟΧΙ

Διδακτορικό: ΝΑΙ ΟΧΙ

Εμπειρία στην εκπαίδευση: ΝΑΙ ΟΧΙ

Έτη προϋπηρεσίας: **…………**

Πρόβλημα

Οδηγίες: Προσπαθήστε να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα με εκτίμηση. Να καταγράψετε το πλάνο επίλυσης, δηλαδή να περιγράψετε με ποιον τρόπο εργαστήκατε για να φτάσετε στην λύση καθώς και τις μαθηματικές διαδικασίες που ακολουθήσατε.

Το σχολείο στο οποίο εργάζεστε διοργανώνει μία συναυλία για τη λήξη της σχολικής χρονιάς. Για να γίνει αυτό, χρειάζεται να επιλεγεί ο κατάλληλος χώρος για τη διεξαγωγή της. Η προτιμώμενη επιλογή είναι να γίνει στο γήπεδο μπάσκετ του προαυλίου. Πόσα άτομα μπορούν να χωρέσουν εντός ενός τέτοιου χώρου;

Πλάνο επίλυσης:

Μαθηματικές διαδικασίες / πράξεις:

Εξεταστικό δοκίμιο επίλυσης προβλήματος Fermi (Β’ Εξέταση)

Πρόβλημα

Οδηγίες: Προσπαθήστε να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα με εκτίμηση. Να καταγράψετε το πλάνο επίλυσης, δηλαδή να περιγράψετε με ποιον τρόπο εργαστήκατε για να φτάσετε στην λύση καθώς και τις μαθηματικές διαδικασίες που ακολουθήσατε.

Πόσοι άνθρωποι πιστεύετε ότι χωράνε στην πλατεία δημαρχείου του δήμου σας, κατά τη διάρκεια μιας συγκέντρωσης διαμαρτυρίας;

Πλάνο επίλυσης:

Μαθηματικές διαδικασίες / πράξεις:

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Ερωτηματολόγιο έρευνας

Συνοδευτική επιστολή

Αγαπητές/οί συνάδελφοι,

Ονομάζομαι Μπασδέκη Μαρία και είμαι εκπαιδευτικός πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Είμαι μεταπτυχιακή φοιτήτρια στο Διατμηματικό – Διεπιστημονικό πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών «Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών» και διεξάγω έρευνα για τις γνώσεις και τις στάσεις των εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για τη μαθηματική μοντελοποίηση, στο πλαίσιο της διπλωματικής μου εργασίας.

Ο χρόνος συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου είναι περίπου 10 λεπτά. Η συμμετοχή σας είναι εθελοντική και ανώνυμη. Παρακαλώ απαντήστε τις ερωτήσεις με ειλικρίνεια, με βάση τις γνώσεις και τη γνώμη σας.

Ευχαριστώ για τη συμμετοχή σας.

Με εκτίμηση,

Μπασδέκη Μαρία

e-mail: basdeki.mar@gmail.com

ΜΕΡΟΣ Α:Αυτή η ενότητα των ερωτήσεων εστιάζει στη γνώση σχετικά με την φύση και την έννοια της μαθηματικής μοντελοποίησης. Σκεφτείτε πρακτικές μαθηματικής μοντελοποίησης για την διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Σκεφτείτε πώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη τάξη.

Α1) Η μαθηματική μοντελοποίηση είναι μια απλή διαδικασία ενός σταδίου

Ναι [ ] Όχι [ ]

Α2) Η μαθηματική μοντελοποίηση είναι μια διαδικασία μετάβασης από τον πραγματικό κόσμο στο κόσμο των μαθηματικών.

Ναι [ ] Όχι [ ]

Α3) Η διαδικασία της μαθηματικής μοντελοποίησης είναι η ίδια με την διαδικασία επίλυσης προβλημάτων.

Ναι [ ] Όχι [ ]

Α4) Η μαθηματική μοντελοποίηση αποθαρρύνει το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά.

Ναι [ ] Όχι [ ]

Α5) Η μαθηματική μοντελοποίηση περιλαμβάνει τη δημιουργία προβλήματος πριν την επίλυση του προβλήματος.

Ναι [ ] Όχι [ ]

Α6) Η μαθηματική μοντελοποίηση συνδέει τις μαθηματικές αναπαραστάσεις.

Ναι [ ] Όχι [ ]

Α7) Οι δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης απαιτούν τη χρήση της τεχνολογίας.

Ναι [ ] Όχι [ ]

Α8) Η μαθηματική μοντελοποίηση ευνοεί την κοινωνική αλληλεπίδραση των μαθητών.

Ναι [ ] Όχι [ ]

Α9) Η μαθηματική μοντελοποίηση υποστηρίζει την δημιουργική προσπάθεια στην μάθηση των μαθηματικών.

Ναι [ ] Όχι [ ]

Α10) Οι δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης απαιτούν διαδικασίες χαμηλού γνωστικού επιπέδου.

Ναι [ ] Όχι [ ]

Α11) Η μαθηματική μοντελοποίηση ευνοεί ουσιαστικές συζητήσεις οι οποίες αποκαλύπτουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών.

Ναι [ ] Όχι [ ]

Α12) Δώστε ένα συνοπτικό ορισμό της μαθηματικής μοντελοποίησης.

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

ΜΕΡΟΣ Β:Αυτή η ομάδα των ερωτήσεων εστιάζει στη στάση των εκπαιδευτικών μαθηματικών απέναντι στη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης.

<u>Οι ερωτήσεις 1-6 περιγράφουν τον κονστρουκτιβιστικό τρόπο διδασκαλίας και εκμάθησης της μαθηματικής μοντελοποίησης</u>

B1) Οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα μαθηματικά όταν τους δίνεται η ευκαιρία να επεξεργαστούν δραστηριότητες οι οποίες επιτρέπουν πολλαπλά σημεία εισόδου.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B2) Η ικανότητα ενός μαθητή στα μαθηματικά ενισχύεται όταν αναπτύσσει δεξιότητες έρευνας.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B3) Οι διερευνητικές δεξιότητες που αναπτύσσονται μέσω μαθηματικής μοντελοποίησης βοηθούν στην εννοιολογική κατανόηση.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B4) Οι αναστοχαστικές κρίσεις αποτελούν σημαντικά κριτήρια στη μάθηση της μαθηματικής μοντελοποίησης.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B5) Οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα μαθηματικά όταν τους δίνεται η ευκαιρία να δοκιμάσουν ιδέες με πιθανές λύσεις.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B6) Η μοντελοποίηση δημιουργεί εμπειρίες που ευνοούν τις εξηγήσεις των μαθητών σε μαθηματικές έννοιες.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

<u>Οι ερωτήσεις 7-11 περιγράφουν την προσωπική σας κατανόηση στο θέμα της μαθηματικής μοντελοποίησης.</u>

B7) Κατανοώ την μοντελοποίηση με μαθηματικά.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B8) Μπορώ να εντάξω εργασίες μαθηματικής μοντελοποίησης στα μαθήματα μου.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B9) Κατανοώ την διαφορά μεταξύ των λεκτικών προβλημάτων και της μαθηματικής μοντελοποίησης.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B10) Η διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης απαιτεί χρόνο σε ένα μάθημα μαθηματικών.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B11) Κατανοώ την διαφορά μεταξύ της επίλυσης προβλημάτων και μαθηματικής μοντελοποίησης.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

Οι ερωτήσεις 12-18 περιγράφουν την σχέση της μαθηματικής μοντελοποίησης με πραγματικές καταστάσεις

B12) Η μοντελοποίηση δημιουργεί ευκαιρίες επίλυσης μαθηματικών έργων που δημιουργούνται από καταστάσεις της καθημερινής ζωής.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B13) Η μαθηματική μοντελοποίηση βοηθάει τους μαθητές να ερμηνεύουν τα μαθηματικά με χρήσιμο τρόπο.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B14) Η μαθηματική μοντελοποίηση βοηθά τους μαθητές χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά να λύσουν πρακτικά προβλήματα της καθημερινής ζωής.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B15) Η μαθηματική μοντελοποίηση δίνει νόημα στη μάθηση των μαθηματικών για τους μαθητές.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B16) Η μαθηματική μοντελοποίηση ανοίγει έναν εντελώς νέο τρόπο θεώρησης των μαθηματικών.

- Διαφωνώ έντονα

- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B17) Η μαθηματική μοντελοποίηση αποτελεί μια αξιόλογη έννοια για την κατανόηση των μαθηματικών.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B18) Η μελέτη της μαθηματικής μοντελοποίησης βοηθάει στην επίλυση προβλημάτων άλλων θεματικών πεδίων.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

Οι ερωτήσεις από 19 έως 28 περιγράφουν το κίνητρο και το ενδιαφέρον που προκαλεί η μαθηματική μοντελοποίηση στην διδασκαλία των μαθηματικών.

B19) Η μαθηματική μοντελοποίηση παρακινεί τους μαθητές να μάθουν μαθηματικά.

- Διαφωνώ έντονα

- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B20) Η μαθηματική μοντελοποίηση ευνοεί τη συζήτηση στην τάξη κατά τη μάθηση των μαθηματικών.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B21) Η διδασκαλία των μαθηματικών μέσω της μαθηματικής μοντελοποίησης βοηθάει τους μαθητές ώστε να προετοιμαστούν καλύτερα για το μέλλον.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B22) Έχει περισσότερη αξία η μάθηση των μαθηματικών μέσω της μαθηματικής μοντελοποίησης παρά με χρήση των παραδοσιακών λεκτικών προβλημάτων.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ

- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B23) Η μαθηματική μοντελοποίηση ενισχύει το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B24) Η μαθηματική μοντελοποίηση καθιστά τη διδασκαλία των μαθηματικών πιο ενδιαφέρουσα.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B25) Η μαθηματική μοντελοποίηση εμπλέκει τους μαθητές με τα μαθηματικά.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ

- Συμφωνώ έντονα

B26) Οι εργασίες μοντελοποίησης βοηθούν τους μαθητές να απολαύσουν την εκμάθηση των μαθηματικών.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B27) Η μαθηματική μοντελοποίηση συμβάλλει στον ενθουσιασμό των μαθητών για τα μαθηματικά.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

B28) Οι υψηλού γνωστικού επιπέδου εργασίες μοντελοποίησης προσελκύουν τους μαθητές.

- Διαφωνώ έντονα
- Διαφωνώ
- Κάπως διαφωνώ
- Κάπως συμφωνώ
- Συμφωνώ
- Συμφωνώ έντονα

ΜΕΡΟΣ Γ: Δημογραφικά στοιχεία εκπαιδευτικού και εμπειρία με πρακτικές μαθηματικής μοντελοποίησης

Γ1) Φύλο:

Άνδρας [   ]   Γυναίκα [   ]

Γ2) Ποια είναι η ηλικία σας;

……….ετών

Γ3) Σπουδές :

2ºπτυχίο [   ]   Μεταπτυχιακό [   ]   Διδακτορικό [   ]

Γ4) Πόσα είναι τα έτη υπηρεσίας σας στη εκπαίδευση; (συνολικά δημόσια ή ιδιωτική ή και τα δύο)

………έτη

Γ5) Διδάσκετε σε μαθητές :

Νηπιαγωγείου [ ] Δημοτικού [ ] Γυμνάσιου[ ]   Λυκείου [ ]

Γ6) Περιλαμβάνουν τα σχολικά σας εγχειρίδια προβλήματα μοντελοποίησης;

Ναι [ ] Όχι [ ] Δεν είμαι σίγουρος/η [ ]

Γ7) Διδάσκετε δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης;

Ναι [ ]   Όχι [ ] Δεν είμαι σίγουρος/η [ ]

Γ8)Αν ναι, πόσα μαθήματα με δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης διδάσκετε την εβδομάδα ανά τάξη;

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5 ή περισσότερα

Γ10) Παρακολουθήσατε κάποιο μάθημα μαθηματικής μοντελοποίησης κατά την διάρκεια των σπουδών σας στο Πανεπιστήμιο;

Ναι [   ]   Όχι [   ]

Γ9) Η διεύθυνση του σχολείου, σας υποστηρίζει στην διδασκαλία μαθηματικής μοντελοποίησης;

- Ναι
- Όχι
- Δεν είμαι σίγουρος/η

Γ10)Αναφέρετε άλλες εμπειρίες σας με τη μαθηματική μοντελοποίηση ή άλλες πληροφορίες που θεωρείτε ότι σχετίζονται.

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………..