



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Σχολή Κοινωνικών και Ανθρωπιστικών Επιστημών

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

Διιδρυματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών με τίτλο:

«Επιστήμες της αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών»

Κατεύθυνση: «Α' Ηλικιακός κύκλος (5-12 χρονών)»

Διπλωματική εργασία με θέμα:

**«Γνώση περιεχομένου και παιδαγωγική γνώση περιεχομένου  
εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στη διδασκαλία  
των εκτιμήσεων μέτρων»**

**Κυβερνητάκη Ραφαηλία (Α.Μ. 1059)**

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Δεσλή Δέσποινα

Μέλη τριμελούς επιτροπής: Σταθοπούλου Χαρούλα

Χρήστου Κωνσταντίνος

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Ιούλιος, 2023

**«Primary school teachers' Content Knowledge and  
Pedagogical Content Knowledge in teaching  
measurement estimation»**

## Περίληψη

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να εξετάσει τη Γνώση Περιεχομένου και την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου των εν ενεργεία εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στη διδασκαλία των εκτιμήσεων μέτρων. Για τον σκοπό αυτό, πραγματοποιήθηκε έρευνα στην οποία συμμετείχαν 72 εκπαιδευτικοί από διάφορους νομούς της Ελλάδας, που εργάζονταν σε δημόσια δημοτικά σχολεία. Σχεδιάστηκε ένα ερωτηματολόγιο που εξέταζε τα επίπεδα της Γνώσης Περιεχομένου (μέσα από δοκιμασίες εκτίμησης μήκους, εμβαδού και βάρους) και της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου (μέσα από δοκιμασίες που ζητούσαν την αναγνώριση του σκοπού μιας δραστηριότητας, την αναγνώριση της παρανόησης ενός μαθητή και τη διατύπωση τρόπων άρσης της παρανόησης) των συμμετεχόντων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι συμμετέχοντες είχαν χαμηλό επίπεδο Γνώσης Περιεχομένου, αφού απαντούσαν κατά μέσο όρο σωστά σε λιγότερες από τις μισές δοκιμασίες εκτίμησης μέτρων. Η Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου των εκπαιδευτικών βρέθηκε σχετικά περιορισμένη, με το 61% των συμμετεχόντων να αναγνωρίζει σωστά τον σκοπό της δραστηριότητας και το 46% να εντοπίζει την παρανόηση του μαθητή. Επιπλέον, μόνο το 50% των συμμετεχόντων πρότεινε εννοιολογικές προσεγγίσεις για την άρση της παρανόησης, δίνοντας έμφαση στην εκτίμηση και καθοδηγώντας τον μαθητή στη σταδιακή ανακάλυψη της απάντησης με τη χρήση αναπαραστάσεων και εποπτικού υλικού. Τέλος, η Γνώση Περιεχομένου των εκπαιδευτικών συσχετίστηκε θετικά με την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου τους, καθώς αφενός οι εκπαιδευτικοί που πραγματοποίησαν επιτυχείς εκτιμήσεις μέτρων έτειναν να αναγνωρίζουν σωστά την παρανόηση του μαθητή και αφετέρου όσοι αναγνώριζαν την παρανόηση του μαθητή έτειναν να την αντιμετωπίζουν με περισσότερο εννοιολογικές προσεγγίσεις.

**Λέξεις κλειδιά:** Γνώση Περιεχομένου (ΓΠ), Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου (ΠΓΠ), εκτίμηση μέτρων, εν ενεργεία εκπαιδευτικοί

## **Abstract**

The purpose of the present study was to examine the Content Knowledge and Pedagogical Content Knowledge of in-service primary school teachers in teaching measurement estimations. For this purpose, a study was conducted in which 72 teachers participated, all coming from different prefectures of Greece and working in state primary schools. A questionnaire was designed that examined the levels of Content Knowledge (through tasks examining length, area and weight estimation) and Pedagogical Content Knowledge (through tasks in which participants were asked to indicate the aim of an activity on length estimation, identify a student's misconception and suggest ways to remove the misconception) of the participants. Results showed that the Content Knowledge of the participants was quite low, with an average of less than half of the measurement estimation items answered correctly. Teachers' Pedagogical Content Knowledge was relatively limited, with 61% of them correctly indicated the aim of the activity and 46% identifying the misconception involved. In addition, only 50% of participants suggested conceptual approaches to eliminate misconceptions, emphasizing estimation and guiding the student to gradually discover the answer using representations and materials. Lastly, teachers' Content Knowledge was positively correlated with their Pedagogical Content Knowledge: on the one hand, teachers who performed better in content knowledge items tended to correctly identify misconceptions, and on the other hand, those who did identify the student's misconception tended to address it with more conceptual approaches.

**Key words:** Content Knowledge (CK), Pedagogical Content Knowledge (PCK), measurement estimation, in-service teachers

## Ευχαριστίες

Κατά τη διάρκεια διεκπεραίωσης της διπλωματικής μου εργασίας υπήρξαν άτομα τα οποία διαδραμάτισαν σπουδαίο ρόλο στην ολοκλήρωσή της. Αρχικά θέλω να ευχαριστήσω θερμά την καθηγήτρια και επόπτριά μου, κα. Δεσλή Δέσποινα, για την άριστη συνεργασία και στήριξη που μου παρείχε, καθώς και για τις σημαντικές γνώσεις και συμβουλές που μου προσέφερε.

Θέλω, επίσης, να ευχαριστήσω τους καθηγητές κα. Σταθοπούλου Χαρούλα και κ. Χρήστου Κωνσταντίνο, οι οποίοι με τιμήσαν με τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Ακόμη, θέλω να ευχαριστήσω όλους τους συμμετέχοντες εκπαιδευτικούς για την εθελοντική τους συμμετοχή στην έρευνα, καθώς χωρίς τη συμβολή τους η έρευνα δεν θα μπορούσε να ολοκληρωθεί.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους μου, που με στήριξαν καθ' όλη τη διάρκεια της συγγραφής της εργασίας.

## Περιεχόμενα

<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b> .....	11
<b>Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup> : Βιβλιογραφική επισκόπηση</b> .....	16
<b>Μέρος Α΄</b> .....	16
1.Α.1. Είδη γνώσης των εκπαιδευτικών.....	16
1.Α.2. Είδη γνώσης των εκπαιδευτικών στη διδασκαλία των μαθηματικών.....	17
1.Α.2.1. Γνώση Περιεχομένου στα μαθηματικά.....	18
1.Α.2.2. Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου στα μαθηματικά .....	19
1.Α.3. Γνώση Περιεχομένου και Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου στα μαθηματικά.....	21
<b>Μέρος Β΄</b> .....	23
1.Β.1. Η έννοια των εκτιμήσεων .....	23
1.Β.2. Είδη εκτίμησης.....	24
1.Β.3. Η αναγκαιότητα των εκτιμήσεων.....	25
1.Β.4. Επιδόσεις μαθητών στις υπολογιστικές εκτιμήσεις .....	26
1.Β.5. Επιδόσεις μαθητών στις εκτιμήσεις μέτρων.....	26
1.Β.6. Στρατηγικές μαθητών στις εκτιμήσεις μέτρων .....	28
<b>Μέρος Γ΄</b> .....	30
1.Γ.1. Απόψεις εκπαιδευτικών για τις εκτιμήσεις .....	30
1.Γ.2. Γνώση Περιεχομένου των εκπαιδευτικών για τις εκτιμήσεις .....	32
1.Γ.3. Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου των εκπαιδευτικών για τις εκτιμήσεις ..	35
<b>Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup> : Μεθοδολογία έρευνας</b> .....	38
2.1. Συμμετέχοντες .....	38
2.2. Σχεδιασμός – Εργαλείο έρευνας.....	41
2.3. Διαδικασία .....	45
<b>Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup> : Αποτελέσματα</b> .....	46
<b>Μέρος Α΄ : Αποτελέσματα για το 1<sup>ο</sup> έργο (Γνώση Περιεχομένου)</b> .....	46
3.Α.1. Κωδικοποίηση των δεδομένων .....	46
3.Α.2. Επιδόσεις στις δοκιμασίες εκτίμησης μέτρων .....	46
3.Α.3. Χρήση στρατηγικών στις δοκιμασίες εκτίμησης.....	49
<b>Μέρος Β΄ : Αποτελέσματα για το 2<sup>ο</sup> έργο</b> .....	57
3.Β.1. Κωδικοποίηση των δεδομένων .....	57

3.Β.2. Ανάλυση αποτελεσμάτων για το Έργο 2.....	57
<b>Μέρος Γ': Αποτελέσματα για το 3<sup>ο</sup> έργο (Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου)</b> .....	64
3.Γ.1. Κωδικοποίηση των δεδομένων.....	64
3.Γ.2. Ανάλυση αποτελεσμάτων για το Έργο 3 .....	66
<b>Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup> : Συζήτηση – Συμπεράσματα.....</b>	72
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....</b>	78
<b>Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία .....</b>	78
<b>Ξενόγλωσση βιβλιογραφία .....</b>	78
<b>Παράρτημα Α': Εργαλείο έρευνας.....</b>	85

## Κατάλογος εικόνων

Εικόνα 2.1.: Δημογραφικές ερωτήσεις.....	41
Εικόνα 2.2: Οι δοκιμασίες του Έργου 1.....	42
Εικόνα 2.3.: Οι προτάσεις του Έργου 2.....	43
Εικόνα 2.4: Σενάριο που αξιοποιήθηκε στο Έργο 3.....	44
Εικόνα 2.5.: Οι δοκιμασίες του Έργου 3.....	44



## Κατάλογος πινάκων

Πίνακας 2.1.: Φύλο συμμετεχόντων και σχέση εργασίας.....	38
Πίνακας 2.2.: Κατανομή συμμετεχόντων ως προς τα χρόνια προϋπηρεσίας.....	39
Πίνακας 2.3.: Τάξεις διδασκαλίας των συμμετεχόντων.....	39
Πίνακας 2.4.: Νομοί διδασκαλίας των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών.....	40
Πίνακας 3.1.: Αριθμός εκπαιδευτικών που απάντησαν σωστά στις δοκιμασίες Γνώσης Περιεχομένου ως προς τα χρόνια προϋπηρεσίας.....	48
Πίνακας 3.2.: Αριθμός εκπαιδευτικών που απάντησαν σωστά στις δοκιμασίες Γνώσης Περιεχομένου ως προς τη σχέση εργασίας.....	49
Πίνακας 3.3.: Συχνότητα χρήσης στρατηγικών στην 1 <sup>η</sup> δοκιμασία (περίμετρος φύλλου A4).....	53
Πίνακας 3.4.: Συχνότητα χρήσης στρατηγικών στην 2 <sup>η</sup> δοκιμασία (μήκος ευθείας σε συνδετήρες).....	54
Πίνακας 3.5.: Συχνότητα χρήσης στρατηγικών στην 3 <sup>η</sup> δοκιμασία (εμβαδόν ποδοσφαιρικού γηπέδου).....	55
Πίνακας 3.6.: Συχνότητα χρήσης στρατηγικών στην 4 <sup>η</sup> δοκιμασία (εμβαδόν σχολικού θρανίου).....	55
Πίνακας 3.7.: Συχνότητα χρήσης στρατηγικών στην 5 <sup>η</sup> δοκιμασία (βάρος μαρκαδόρου πίνακα).....	56
Πίνακας 3.8.: Συχνότητα χρήσης στρατηγικών στην 6 <sup>η</sup> δοκιμασία (βάρος ελέφαντα).....	56
Πίνακας 3.9. Μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις στις δηλώσεις του Έργου 2.....	58
Πίνακας 3.10.: Συνάφεια ανάμεσα στις απαντήσεις των συμμετεχόντων στις δηλώσεις για την διδασκαλία των εκτιμήσεων και τη Γνώση Περιεχομένου.....	63
Πίνακας 3.11.: Συσχετίσεις ανάμεσα σε Γνώση Περιεχομένου και Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου.....	71

## Κατάλογος σχημάτων

Σχήμα 3.1.: Ποσοστό επιτυχίας συμμετεχόντων στις δοκιμασίες της Γνώσης Περιεχομένου (Έργο 1).....	47
Σχήμα 3.2.: Συχνότητα χρήσης στρατηγικών στις δοκιμασίες εκτίμησης στο έργο Γνώσης Περιεχομένου.....	52
Σχήμα 3.3.: Ποσοστά συμφωνίας των εκπαιδευτικών στη Δήλωση 1.....	59
Σχήμα 3.4.: Ποσοστά συμφωνίας των εκπαιδευτικών στη Δήλωση 2.....	59
Σχήμα 3.5.: Ποσοστά συμφωνίας των εκπαιδευτικών στη Δήλωση 3.....	60
Σχήμα 3.6.: Ποσοστά συμφωνίας των εκπαιδευτικών στη Δήλωση 4.....	61
Σχήμα 3.7.: Ποσοστά συμφωνίας των εκπαιδευτικών στη Δήλωση 5.....	62
Σχήμα 3.8.: Ποσοστά συμφωνίας των εκπαιδευτικών στη Δήλωση 6.....	62
Σχήμα 3.9.: Ποσοστό επιτυχίας των συμμετεχόντων στην αναγνώριση του σκοπού της δραστηριότητας ως προς τα έτη προϋπηρεσίας.....	67
Σχήμα 3.10.: Ποσοστό επιτυχίας των συμμετεχόντων στην εύρεση της παρανόησης ως προς τα έτη προϋπηρεσίας.....	68
Σχήμα 3.11.: Συχνότητα χρήσης των προσεγγίσεων.....	69

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια οι εκτιμήσεις έχουν βρεθεί στο επίκεντρο της επιστημονικής έρευνας για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Μέσω αυτών δημιουργούνται νοερά αποτελέσματα από την επίλυση σύνθετων υπολογισμών, που συμβάλλουν στη διαχείριση και αντιμετώπιση καθημερινών ζητημάτων. Όπως αναφέρουν οι Hogan και Brezinski (2003), οι εκτιμήσεις διακρίνονται σε υπολογιστικές εκτιμήσεις, εκτιμήσεις πλήθους και εκτιμήσεις μέτρων, ενώ πλέον διακρίνεται και ένας τέταρτος τύπος, οι εκτιμήσεις αριθμογραμμής (Sunde, Petersson, Nosrati, Rosenqvist & Andrews, 2022). Η σημασία των εκτιμήσεων έχει αναγνωριστεί σε αρκετές έρευνες με τους Kramer, Bressan και Grassi (2018) να δηλώνουν ότι η εκτίμηση μέτρων είναι συσχετισμένη με μαθηματική επιτυχία και μαθηματική νοημοσύνη. Επίσης, οι Anestakis και Desli (2014) στην έρευνά τους διαπίστωσαν πως οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί αναγνώρισαν την αξία της υπολογιστικής εκτίμησης.

Στο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ, 2003) της Ελλάδας για τα μαθηματικά γίνεται φανερή η σπουδαιότητα ύπαρξης των εκτιμήσεων κατά τη διδασκαλία, καθώς αποτελούν σημαντικές μαθησιακές επιδιώξεις και έχουν συμπεριληφθεί από το 2006 στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών, με στόχο τη συστηματική διδασκαλία τους (Δεσλή, 2021). Επίσης, τόσο η έρευνα των Andrews, Xenofontos και Sayers (2021) για τα τέσσερα εθνικά προγράμματα σπουδών του Ηνωμένου Βασιλείου (Σκωτίας, Ουαλίας, Αγγλίας και Βόρειας Ιρλανδίας) όσο και η έρευνα των Sunde et al. (2022) για τα προγράμματα σπουδών των σκανδιναβικών χωρών (Δανίας, Νορβηγίας και Σουηδίας) συμφωνούν ότι δεν προσφέρονται στους μαθητές αρκετές ευκαιρίες απόκτησης ικανοτήτων εκτίμησης. Οι τελευταίοι προσθέτουν πως τα σκανδιναβικά προγράμματα σπουδών είναι ασθενώς παισιωμένα αναφορικά με τις εκτιμήσεις, δεν παρέχουν, δηλαδή, στους εκπαιδευτικούς αυστηρά καθορισμένους στόχους που πρέπει να επιτύχουν, αφήνοντάς τους έτσι την ευθύνη να αποφασίσουν τι πρέπει να διδαχθεί, πότε πρέπει να διδαχθεί και πώς πρέπει να διδαχθεί.

Οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να έχουν επαρκείς γνώσεις για το περιεχόμενο το οποίο διδάσκουν. Η γνώση αυτή ονομάζεται Γνώση Περιεχομένου (ΓΠ) και περιλαμβάνει τη γνώση των εννοιών, των θεωριών και γενικότερα του εκάστοτε αντικειμένου που διδάσκεται (Shulman, 1987). Οι Ball, Thames και Phelps (2008)

έχουν κατηγοριοποιήσει τη Γνώση Περιεχομένου σε: α) κοινή γνώση περιεχομένου (common content knowledge), β) εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου (specialized content knowledge) και γ) ορίζοντα μαθηματικής γνώσης (knowledge at the mathematical horizon). Παρόλο που οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γνωρίζουν τις έννοιες και τους κανόνες του θέματος που διδάσκουν εις βάθος (Shulman, 1986), πολλές έρευνες έχουν δείξει ότι οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν το απαιτούμενο επίπεδο ΓΠ στα μαθηματικά αντικείμενα που διδάσκουν (Şimşek, 2019; Venkat & Spaul, 2015).

Ο Shulman (1986) ανέδειξε, επίσης, τον σπουδαίο ρόλο που διαδραματίζει ο εκπαιδευτικός στη διαδικασία της μάθησης και εισήγαγε την έννοια της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου (ΠΓΠ). Ειδικότερα, η Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου αναφέρεται στις γνώσεις που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί για να μεταφέρουν ή να προσεγγίσουν διδακτικά ένα συγκεκριμένο θέμα. Περιλαμβάνει, επίσης, την κατανόηση των εκπαιδευτικών για το τι κάνει τη μάθηση συγκεκριμένων θεμάτων εύκολη ή δύσκολη, λαμβάνοντας υπόψη ταυτόχρονα τις πιθανές (λανθασμένες ή μη) αντιλήψεις των μαθητών<sup>1</sup> για το εκάστοτε θέμα. Πραγματοποιώντας ανασκόπηση 60 άρθρων για την ΠΓΠ, οι Depaepe, Verschaffel και Kelchtermans (2013) διαπίστωσαν ότι οι περισσότεροι μελετητές συγκλίνουν πως η ΠΓΠ αποτελεί σύνθετο είδος γνώσης των εκπαιδευτικών. Συγκεκριμένα, η ΠΓΠ α) συνδέει το περιεχόμενο του εκάστοτε κλάδου με την παιδαγωγική, β) έχει ως σημαντική και αναγκαία προϋπόθεση τη γνώση του περιεχομένου από τους εκπαιδευτικούς, γ) αφορά στη διδασκαλία συγκεκριμένων γνωστικών αντικειμένων και δ) έχει ως βασικά συστατικά τη γνώση των (λανθασμένων ή μη) αντιλήψεων των μαθητών και τη γνώση των διδακτικών στρατηγικών και αναπαραστάσεων.

Οι Ball, Thames και Phelps (2008) επιβεβαιώνουν ότι η άριστη γνώση των εκπαιδευτικών για το αντικείμενο που διδάσκουν, η επαρκής κατοχή της ΓΠ δηλαδή, είναι θεμελιώδες συστατικό για μια αποτελεσματική διδασκαλία. Ειδικότερα, αν δεν κατανοούν οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί πλήρως αυτό που διδάσκουν, τότε πιθανότατα δεν θα καταφέρουν να βοηθήσουν και τους μαθητές στην κατάκτησή του. Ωστόσο, η καλή γνώση ενός μαθηματικού αντικειμένου δεν είναι η μόνη προϋπόθεση για μια αποτελεσματική διδασκαλία. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να είναι σε θέση να δίνουν

---

<sup>1</sup> Στην παρούσα εργασία ο όρος μαθητής/μαθητές αναφέρεται και στα δύο φύλα.

μαθηματικό νόημα στις εργασίες των μαθητών και να επιλέγουν ισχυρούς τρόπους αναπαράστασης του εκάστοτε μαθηματικού αντικειμένου, ώστε να γίνεται κατανοητό στους μαθητές (Ball et al., 2008). Στην έρευνα των Cueto, León, Sorto και Miranda (2017) αναδείχθηκε η σπουδαιότητα της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου των εκπαιδευτικών, καθώς βρέθηκε πως οι μαθητές με υψηλότερες βαθμολογίες στις μαθηματικές δοκιμασίες είναι πιθανότερο να έχουν έναν εκπαιδευτικό με υψηλή ΠΓΠ.

Πολλές είναι οι έρευνες που εξετάζουν την ΠΓΠ των εκπαιδευτικών στα κλάσματα και στη Γεωμετρία. Για παράδειγμα, ο Serkan (2013) αναφέρει ότι η ΠΓΠ των εκπαιδευτικών δεν είναι επαρκώς ανεπτυγμένη στη διαίρεση των κλασμάτων και οι Şahin, Gökkuurt και Soylu (2016) επισημαίνουν πως οι συμμετέχοντες υποψήφιοι εκπαιδευτικοί δεν ανταποκρίνονται επαρκώς στις δοκιμασίες αναγνώρισης λαθών των μαθητών και δεν κατέχουν διδακτικές στρατηγικές για την εξάλειψη των λαθών στην ταξινόμηση, την πρόσθεση, την αφαίρεση και τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Αναφορικά με τη Γεωμετρία, αρκετές έρευνες εξετάζουν ή εφαρμόζουν εργαλεία μέτρησης της ΠΓΠ των εκπαιδευτικών ή γενικότερα μετρούν τα επίπεδα της ΠΓΠ (Kurt-Birel, Deniz & Önel, 2020; Martinovic & Manizade, 2017), ενώ οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί εμφανίζονται με χαμηλά επίπεδα ΠΓΠ στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς (Pinamang & Cofie, 2017).

Ωστόσο, οι έρευνες για τη ΓΠ και ΠΓΠ των εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στις εκτιμήσεις είναι περιορισμένες. Οι Anestakis και Desli (2014), σε έρευνά τους για τις απόψεις των μελλοντικών εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης για την υπολογιστική εκτίμηση και τη διδασκαλία της, αναφέρουν ότι το 28% των εκπαιδευτικών εμφάνισε αδυναμία να αναγνωρίσει τα είδη των εκτιμήσεων και πρότεινε εργασίες με διαφορετικό τύπο εκτίμησης από αυτόν που τους είχε ζητηθεί. Ακόμη, οι Son, Hu και Lim (2019) επισημαίνουν ότι οι εκπαιδευτικοί δεν αντιλαμβάνονται πλήρως την έννοια των εκτιμήσεων και δεν κατανοούν τη σπουδαιότητά της στη μαθηματική εκπαίδευση. Οι Pizarro, Gorgorió και Albarracín (2015) τονίζουν πως ένα μεγάλο μέρος των εκπαιδευτικών στη Χιλή δεν κατείχε επαρκείς γνώσεις για να διδάξει εργασίες εκτίμησης μέτρων στην τάξη και συνέχισαν την εκτίμηση μέτρων με τις μετρήσεις με ακρίβεια που βασίζονται στη χρήση μη τυποποιημένων εργαλείων μέτρησης, χωρίς να αναγνωρίζουν τη σημασία της αντίληψης κατά την εκτίμηση. Η μελέτη του Subramaniam (2014) δείχνει ότι οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν σημεία αναφοράς (οικεία αντικείμενα που γνωρίζουν

περίπου το μέγεθός τους) και συμβολικές αναπαραστάσεις, όταν χρειάζεται να εκτιμήσουν οι ίδιοι μεγέθη. Ωστόσο, κατά τη διδασκαλία τους για τις εκτιμήσεις μέτρων στηρίζονται στη χρήση δραστηριοτήτων, ενισχύοντας από τη μία τη δράση του μαθητή (διατυπώνοντας ορισμούς, παρουσιάζοντας εξηγήσεις και φύλλα εργασίας), χωρίς όμως να δημιουργούν έναν ουσιαστικό τρόπο διδασκαλίας, καθώς δεν περιλαμβάνουν τη στρατηγική των σημείων αναφοράς και τις συμβολικές αναπαραστάσεις.

Αν και η σπουδαιότητα για την ΓΠ και ΠΓΠ των εκπαιδευτικών γενικά αλλά και ειδικά στο θέμα των εκτιμήσεων έχει αναδειχθεί, οι σχετικές διαθέσιμες έρευνες είναι περιορισμένες. Η παρούσα εργασία έχει σκοπό να εξετάσει τη Γνώση Περιεχομένου και την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου των εν ενεργεία εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης για τη διδασκαλία των εκτιμήσεων μέτρων. Τα επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα που επιχειρεί η παρούσα εργασία να απαντήσει είναι:

1. Ποιο είναι το επίπεδο της ΓΠ των εκπαιδευτικών για τις εκτιμήσεις μέτρων;

Τα ευρήματα ερευνών για το επίπεδο της ΓΠ των εκπαιδευτικών για τις εκτιμήσεις γενικά είναι διφορούμενα. Υπάρχουν έρευνες που έχουν δείξει ότι οι εκπαιδευτικοί διαθέτουν ικανοποιητικό επίπεδο ΓΠ στις υπολογιστικές εκτιμήσεις (Δεσλή & Ανεστάκης, 2014; Lemonidis, Mouratoglou & Pnevmatikos, 2014), ενώ άλλες έρευνες δείχνουν ότι το επίπεδο της ΓΠ των εκπαιδευτικών είναι σε χαμηλά επίπεδα (Alajmi, 2009; Son, Hu & Lim, 2019). Ωστόσο, καθώς το επίπεδο της ΓΠ για τις εκτιμήσεις μέτρων είναι γενικότερα χαμηλότερη από το επίπεδο της ΓΠ στις υπολογιστικές εκτιμήσεις (Kaya & Demirci, 2022), αναμένεται στην παρούσα έρευνα να βρεθεί ότι οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης διαθέτουν χαμηλό επίπεδο ΓΠ στις εκτιμήσεις μέτρων.

2. Ποιο είναι το επίπεδο της ΠΓΠ των εκπαιδευτικών για τις εκτιμήσεις μέτρων;

Δεδομένου ότι οι εκπαιδευτικοί διαθέτουν χαμηλά επίπεδα ΠΓΠ για τις υπολογιστικές εκτιμήσεις (Son, Hu & Lim, 2019), αλλά και για άλλες μαθηματικές έννοιες (Şahin, Gökçurt & Soylu, 2016; Serkan, 2013), αναμένεται στην παρούσα εργασία να βρεθούν παρόμοια αποτελέσματα.

3. Υπάρχει σχέση ανάμεσα στη ΓΠ και την ΠΓΠ των εκπαιδευτικών για τις εκτιμήσεις μέτρων;

Ευρήματα ερευνών έχουν δείξει ότι η κατοχή της ΓΠ είναι απαραίτητη για την επιτυχή κατάκτηση της ΠΓΠ (Agathangelou & Charalambous, 2021). Στην παρούσα εργασία αναμένεται, επίσης, να υπάρξει σύνδεση μεταξύ της ΓΠ και της ΠΓΠ των εκπαιδευτικών στη διδασκαλία των εκτιμήσεων μέτρων.

Για τον σκοπό αυτό, θα πραγματοποιηθεί έρευνα στα πλαίσια της οποίας θα διερευνηθεί η ΓΠ και η ΠΓΠ των εν ενεργεία εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης για τη διδασκαλία των εκτιμήσεων μέτρων.

## Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup> : Βιβλιογραφική επισκόπηση

Το παρόν κεφάλαιο, το οποίο χωρίζεται σε τρία μέρη, επιχειρεί να αναδείξει ζητήματα σχετικά με τη Γνώση Περιεχομένου και την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου<sup>2</sup> των εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στον τομέα των εκτιμήσεων μέτρων. Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο μέρος περιγράφονται τα είδη γνώσης των εκπαιδευτικών τόσο αναφορικά με τη διδασκαλία γενικά όσο και με τη διδασκαλία των μαθηματικών συγκεκριμένα. Αναφέρονται, επίσης, ευρήματα ερευνών για το επίπεδο της ΓΠ και ΠΓΠ των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά. Στο δεύτερο μέρος επιχειρείται η εννοιολογική αποσαφήνιση των εκτιμήσεων και παρουσιάζονται οι υποκατηγορίες τους, η χρησιμότητα των εκτιμήσεων, καθώς και οι επιδόσεις και οι στρατηγικές των μαθητών, όταν εμπλέκονται σε δοκιμασίες εκτιμήσεων. Το τρίτο και τελευταίο μέρος της βιβλιογραφικής επισκόπησης περιέχει στοιχεία για τη ΓΠ και την ΠΓΠ των εκπαιδευτικών αναφορικά με τις εκτιμήσεις.

### Μέρος Α΄

#### 1.Α.1. Είδη γνώσης των εκπαιδευτικών

Οι εκπαιδευτικοί κατά τη διδασκαλία χρησιμοποιούν διάφορα είδη γνώσης, τα οποία έχουν αναλυθεί και ερμηνευθεί από αρκετούς ερευνητές. Μία ανάλυση των ειδών των γνώσεων, που κυριαρχεί στη βιβλιογραφία, είναι η ανάλυση του Shulman (1987) ο οποίος διαχωρίζει τα είδη γνώσης σε:

- *γνώση περιεχομένου*, δηλαδή γνώση των εννοιών, της θεωρίας και γενικότερα του αντικειμένου διδασκαλίας,
- *γενική παιδαγωγική γνώση*, που αφορά τις γενικές αρχές και στρατηγικές διαχείρισης της τάξης και της οργάνωσης αυτής,
- *γνώση του αναλυτικού προγράμματος*, που περιλαμβάνει την κατανόηση του υλικού και του προγράμματος,

---

<sup>2</sup> Στην παρούσα εργασία η Γνώση Περιεχομένου και η Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου αναφέρονται ως ΓΠ και ΠΓΠ, αντίστοιχα.



- *παιδαγωγική γνώση περιεχομένου, που εμπεριέχει τον συνδυασμό της γνώσης περιεχομένου και της γενικής παιδαγωγικής γνώσης,*
- *γνώση για τους μαθητές και τα χαρακτηριστικά τους,*
- *γνώση των εκπαιδευτικών πλαισίων και*
- *γνώση των εκπαιδευτικών σκοπών, στόχων και αξιών και της φιλοσοφική και ιστορική βάση αυτών.*

Η Kennedy (2002), προσπαθώντας να κατηγοριοποιήσει τις γνώσεις των εκπαιδευτικών ανάλογα με την πηγή προέλευσής τους, αναφέρεται σε τρεις διαφορετικές κατηγορίες γνώσεων. Στην πρώτη κατηγορία εντάσσεται η *πρακτική γνώση* (craft knowledge), η οποία αποκτάται κυρίως μέσω της εμπειρίας και είναι ιδιοσυγκρασιακή και διαισθητική. Τη δεύτερη κατηγορία αποτελεί η *συστηματική γνώση* (systematic knowledge), η οποία είναι εννοιολογική, θεωρητική και κωδικοποιημένη, και αποκτάται κυρίως μέσω μαθημάτων επαγγελματικής ανάπτυξης σε πανεπιστήμια ή κολέγια. Μπορεί επίσης να προέρχεται από μελέτες ερευνητικών άρθρων. Την τρίτη κατηγορία αποτελεί η *καθοδηγητική γνώση* (prescriptive knowledge), η οποία χρησιμοποιείται από τους εκπαιδευτικούς για να αποφασίσουν τι θα διδάξουν και τους προσφέρει μεγαλύτερη σιγουριά για το περιεχόμενο διδασκαλίας, καθώς αντλούν πληροφορίες από τα σχολικά εγχειρίδια και το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθημάτων.

### 1.A.2. Είδη γνώσης των εκπαιδευτικών στη διδασκαλία των μαθηματικών

Η μαθηματική γνώση που πρέπει να έχουν οι εκπαιδευτικοί για την επιτυχή διδασκαλία των μαθηματικών κατηγοριοποιήθηκε από τους Ball, Thames και Phelps (2008) οι οποίοι διευκρίνισαν ότι απαραίτητες συνιστώσες της μαθηματικής γνώσης αποτελούν η γνώση περιεχομένου και η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου.

### 1.A.2.1. Γνώση Περιεχομένου στα μαθηματικά

Ως γνώση περιεχομένου ορίζεται η γνώση των εκπαιδευτικών για το αντικείμενο που διδάσκουν. Οι εκπαιδευτικοί δεν πρέπει απλώς να γνωρίζουν τις έννοιες και τους κανόνες αλλά να τους κατανοούν εις βάθος, να μπορούν να αιτιολογούν γιατί ισχύει αυτό που διδάσκουν και να διακρίνουν τα βασικά θέματα του γνωστικού τους αντικειμένου από τα δευτερεύοντα (Shulman, 1986).

Ειδικότερα, για τη γνώση περιεχομένου των εκπαιδευτικών στη διδασκαλία των μαθηματικών έχουν επισημανθεί τρεις διαφορετικοί τύποι (Ball et al., 2008):

- η κοινή γνώση περιεχομένου (common content knowledge), που περιλαμβάνει τον απλό υπολογισμό μιας απάντησης ή, γενικότερα, τη σωστή επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, δηλαδή, τις μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες που χρησιμοποιούνται και σε περιβάλλοντα εκτός της διδασκαλίας. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γνωρίζουν το υλικό που διδάσκουν, να αναγνωρίζουν πότε οι μαθητές τους δίνουν λανθασμένες απαντήσεις ή πότε το σχολικό βιβλίο δίνει έναν ανακριβή ορισμό.
- η εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου (specialized content knowledge), δηλαδή οι απαραίτητες μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες που είναι μοναδικές για τη διδασκαλία των μαθηματικών και πρέπει να τις έχουν οι εκπαιδευτικοί όπως, για παράδειγμα, η δεξιότητα εύρεσης παρανοήσεων των μαθητών και,
- ο ορίζοντας μαθηματικής γνώσης (knowledge at the mathematical horizon), δηλαδή η επίγνωση του τρόπου με τον οποίο το μαθηματικό περιεχόμενο συνδέεται από τη μία τάξη στην επόμενη.

Η εννοιολογική και διαδικαστική γνώση συμπεριλαμβάνονται επίσης στη γνώση περιεχομένου και είναι απαραίτητο εφόδιο των εκπαιδευτικών. Συγκεκριμένα, η εννοιολογική γνώση αναπτύσσεται με τη δημιουργία σχέσεων μεταξύ της υπάρχουσας γνώσης και της καινούργιας και αποτελείται κυρίως από τη γνώση εννοιών. Αντίθετα, η διαδικαστική γνώση περιλαμβάνει την εξοικείωση με τα σύμβολα, τους κανόνες, τις διαδικασίες και τις στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων (Hiebert & Lefevre, 1986).

Η γνώση περιεχομένου έχει, επίσης, κατηγοριοποιηθεί σε τρεις διαφορετικούς γνωστικούς τύπους ανάλογα με το επίπεδο των γνώσεων που έχει ο εκάστοτε

εκπαιδευτικός. Ο πρώτος τύπος περιλαμβάνει τη *χαμηλή γνώση περιεχομένου* και περιέχει μόνο τη γνώση των πράξεων και των διαδικασιών. Ο δεύτερος τύπος περιλαμβάνει τη *μεσαία γνώση περιεχομένου* με γνώση των εννοιών και των συνδέσεων μεταξύ τους και ο τρίτος τύπος περιλαμβάνει την *υψηλή γνώση περιεχομένου* στην οποία συγκαταλέγεται η γνώση μαθηματικών μοντέλων και γενικεύσεων (Tchoshanov et al., 2017).

Η γνώση περιεχομένου που έχουν οι εκπαιδευτικοί στα μαθηματικά έχει μελετηθεί από διάφορους ερευνητές. Οι Venkat και Spraul (2015), για παράδειγμα, αναζητώντας το επίπεδο γνώσης περιεχομένου που έχουν οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί της 6ης τάξης στη νότια Αφρική δημιούργησαν δοκιμασίες που περιείχαν μαθηματικά στοιχεία από την 4<sup>η</sup>, 5<sup>η</sup>, 6<sup>η</sup>, 7<sup>η</sup>, 8<sup>η</sup> και 9<sup>η</sup> τάξη. Τα ευρήματα δείχνουν ότι το 17% των συμμετεχόντων έχει γνώση του μαθηματικού αντικειμένου που αντιστοιχεί σε επίπεδο χαμηλότερο της 4ης ή της 5ης τάξης και 62% των συμμετεχόντων έχει γνώσεις αντίστοιχες της 4ης ή της 5ης τάξης. Μόλις το 21% των συμμετεχόντων της έρευνας έχει γνώσεις μαθηματικών που αντιστοιχούν στην 6η τάξη ή σε μεγαλύτερες. Επιπροσθέτως, έχει βρεθεί ότι η εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου των υποψηφίων εκπαιδευτικών σχετικά με τον αναλογικό συλλογισμό είναι χαμηλή (Chinnappan & White, 2015) και ότι μεγάλο μέρος των εκπαιδευτικών δεν είναι σε θέση να κατανοήσει πλήρως την ταξινόμηση των τετράπλευρων (Şimşek, 2019). Ωστόσο, παρά τις χαμηλές επιδόσεις των εκπαιδευτικών στις δοκιμασίες γνώσης περιεχομένου στα μαθηματικά, έχει φανεί ότι οι εκπαιδευτικοί που έχουν υψηλότερες επιδόσεις έχουν αντίστοιχα μαθητές με καλύτερες επιδόσεις και καλύτερους βαθμούς στα μαθηματικά (Tchoshanov et al., 2017), ενώ εκπαιδευτικοί με χαμηλές βαθμολογίες σε δοκιμασίες ΓΠ έχουν μαθητές οι οποίοι επίσης αδυνατούν να ανταπεξέλθουν στις μαθηματικές εργασίες (Shirvani, 2015). Τα ευρήματα αυτά καταδεικνύουν ότι είναι σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να γνωρίζουν το μαθηματικό περιεχόμενο που διδάσκουν, προκειμένου οι μαθητές τους να ανταποκρίνονται καλύτερα στις μαθηματικές απαιτήσεις.

#### 1.A.2.2. Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου στα μαθηματικά

Η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου περιλαμβάνει όχι μόνο τη γνώση περιεχομένου του εκάστοτε γνωστικού αντικειμένου αλλά και τους τρόπους

αναπαράστασης και διατύπωσης του αντικειμένου με τρόπο κατανοητό στους άλλους. Ενσωματώνει, επίσης, την κατανόηση συγκεκριμένων θεμάτων που καθιστούν τη μάθηση εύκολη ή δύσκολη, καθώς και τη γνώση στρατηγικών για την αντιμετώπιση πιθανών παρανοήσεων (Shulman, 1986). Επιχειρώντας οι Depaepe, Verschaffel και Kelchtermans (2013) να εξετάσουν πώς παρουσιάζεται στη βιβλιογραφία η ΠΓΠ των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά, πραγματοποίησαν συστηματική επισκόπηση 60 μελετών. Βρέθηκε ότι περίπου στις μισές μελέτες, οι βασικές παράμετροι της ΠΓΠ είναι αυτές που παρουσίασε ο Shulman, δηλαδή η γνώση των τρόπων αναπαράστασης και διατύπωσης των μαθηματικών αντικειμένων με κατανοητό τρόπο και η κατανόηση των θεμάτων που κάνουν την εκμάθηση των μαθηματικών εύκολη ή δύσκολη. Εννιά από τις 60 μελέτες υιοθέτησαν τον διαχωρισμό των Ball, Thames και Phelps (2008), σε α) γνώση του περιεχομένου και των μαθητών, β) γνώση περιεχομένου και της διδασκαλίας και γ) γνώση του αναλυτικού προγράμματος σπουδών, ενώ 10 από τις 60 δεν περιείχαν κανέναν ορισμό για την ΠΓΠ.

Η κατηγοριοποίηση της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου από τους Ball et al. (2008) περιλαμβάνει αναλυτικότερα:

- τη γνώση του περιεχομένου και των μαθητών (knowledge of content and students), δηλαδή, την αλληλεπίδραση μεταξύ της ειδικής μαθηματικής γνώσης και της εξοικείωσης με τους μαθητές και τη μαθηματική τους σκέψη
- τη γνώση περιεχομένου και τη διδασκαλία (knowledge of content and teaching), δηλαδή, την αλληλεπίδραση μεταξύ της ειδικής μαθηματικής γνώσης με την κατανόηση των παιδαγωγικών ζητημάτων που επηρεάζουν τη μάθηση των μαθητών και
- τη γνώση του αναλυτικού προγράμματος σπουδών (knowledge of curriculum), δηλαδή, τη γνώση του αναλυτικού προγράμματος σπουδών της χώρας στα μαθηματικά.

Αρκετές έρευνες έχουν εξετάσει τον βαθμό στον οποίο οι εκπαιδευτικοί κατέχουν την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου στα μαθηματικά. Πολλές από αυτές συμφωνούν ότι οι εκπαιδευτικοί διαθέτουν χαμηλά επίπεδα ΠΓΠ (Lee, 2017; Moh'd, Uwamahoro, Joachim & Orodho, 2021; Şahin, Gökkurt & Soyulu, 2016; Yusof & Zakaria, 2010). Εκπαιδευτικοί που διδάσκουν σε παιδιά ηλικίας 3-5 ετών, ενώ μπορούν να παρατηρήσουν μαθηματικές καταστάσεις εντός τάξης, δεν μπορούν να τις

ερμηνεύσουν και να ενισχύσουν τη μαθηματική σκέψη των μαθητών (Lee, 2017). Οι Moh'd, Uwamahoro, Joachim και Orodho (2021) προσθέτουν ότι οι συμμετέχοντες στην έρευνά τους εκπαιδευτικοί δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Τανζανία, παρόλο που στην αυτοαξιολόγηση κατατάσσουν την ΠΓΠ που έχουν σε ένα μέτριο επίπεδο, στην τάξη φάνηκε ότι παρουσιάζουν αρκετές αδυναμίες στην ΠΓΠ, κυρίως σε θέματα αναπαράστασης και στρατηγικών για τα μαθηματικά αντικείμενα και γνώσης για τα ζητήματα μάθησης των μαθητών. Ακόμη, οι Yusof και Zakaria (2010) βρήκαν πως οι τρεις εκπαιδευτικοί δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης της έρευνάς τους έχουν μέτρια επίπεδα ΠΓΠ με ελλείψεις στην εννοιολογική γνώση και αδυναμίες απόδοσης των διδασκόμενων εννοιών. Στην Τουρκία υποψήφιοι εκπαιδευτικοί, ενώ μπορούν να εντοπίσουν τις παρανοήσεις των μαθητών τους, δεν είναι σε θέση να διδάξουν σε αυτούς στρατηγικές και μεθόδους για να τις αντιμετωπίσουν (Şahin, Gökkurt & Soylu, 2016). Είναι ενδεικτική η αδυναμία τους αυτή, καθώς θεωρούν πως θα τις διορθώσουν αποκλειστικά με την επανάληψη των κανόνων

Παρόλο που η ΠΓΠ των εκπαιδευτικών βρίσκεται σε χαμηλά επίπεδα, η σπουδαιότητά της έχει αναδειχθεί. Οι An, Kulm και Wu (2004) αναφέρουν ότι η βαθιά και ευρεία παιδαγωγική γνώση περιεχομένου είναι σημαντική και απαραίτητη για την αποτελεσματική διδασκαλία. Οι εκπαιδευτικοί χρειάζεται να οικοδομούν τις μαθηματικές ιδέες των μαθητών συνδέοντας την προηγούμενη γνώση και τα συγκεκριμένα μοντέλα με τη νέα γνώση, εστιάζοντας στην εννοιολογική κατανόηση και την ανάπτυξη διαδικασιών. Επιπλέον, πρέπει να είναι σε θέση να εντοπίζουν τις λανθασμένες αντιλήψεις των μαθητών και να τις διορθώνουν με διερευνητικές ερωτήσεις ή με την παροχή επιπλέον δραστηριοτήτων (An et al., 2004). Ο Ngo (2013) συμφωνεί ότι όσο υψηλότερη ΠΓΠ έχει ένας εκπαιδευτικός στο μαθηματικό αντικείμενο που διδάσκει τόσο περισσότερο θα ωφεληθούν και θα μάθουν οι μαθητές του.

### 1.A.3. Γνώση Περιεχομένου και Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου στα μαθηματικά

Η γνώση περιεχομένου και η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου αποτελούν τις βασικές γνώσεις που χρειάζεται να κατέχει ο εκπαιδευτικός για μια αποτελεσματική

διδασκαλία γενικότερα αλλά και ειδικότερα στα μαθηματικά (Ball et al., 2008). Οι γνώσεις αυτές πολλές φορές εξετάζονται και αναλύονται συνδυαστικά και παράλληλα στις σχετικές έρευνες. Οι Agathangelou και Charalambous (2021) έχουν δείξει ότι η ύπαρξη της ΓΠ αποτελεί προϋπόθεση της ΠΓΠ. Στην έρευνά τους οι εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης δυσκολεύονται περισσότερο στις δοκιμασίες που απαιτούν χρήση της ΠΓΠ παρά σε αυτές που χρειάζεται απλώς η ΓΠ. Αντίστοιχη δυσκολία αντιμετωπίζουν και συμμετέχοντες υποψήφιοι εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε έρευνα στο Βέλγιο (Deraere et al., 2015). Αναλυτικότερα, από τις δοκιμασίες αξιολόγησης της ΓΠ και της ΠΓΠ στους δεκαδικούς αριθμούς βρέθηκε ότι έχουν καλύτερες επιδόσεις στις δοκιμασίες της ΓΠ. Παρατηρήθηκε, επίσης, ότι, όταν λύνουν επιτυχώς δοκιμασίες της ΠΓΠ, λύνουν επιτυχώς και τις αντίστοιχες δοκιμασίες της ΓΠ. Αντίθετα, όταν ολοκληρώνουν με επιτυχία τις σχετικές με τη ΓΠ δοκιμασίες, δεν μπορούν πάντοτε να ανταπεξέλθουν στις αντίστοιχες δοκιμασίες της ΠΓΠ. Το εύρημα αυτό ενισχύει περισσότερο την άποψη ότι η ΓΠ αποτελεί προϋπόθεση για την κατοχή της ΠΓΠ. Ένα επιπλέον εύρημα της έρευνας των Deraere et al. (2015) είναι ότι, αν και οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί των πρώτων τάξεων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης έχουν υψηλότερες επιδόσεις από τους εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στη ΓΠ, οι επιδόσεις τους στην ΠΓΠ κυμαίνονται στα ίδια επίπεδα. Δηλαδή, αν και οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης έχουν περισσότερες γνώσεις για το μαθηματικό περιεχόμενο σε σχέση με τους εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, η ΠΓΠ των εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δεν είναι υψηλότερη, αλλά αντιθέτως βρίσκεται στα ίδια επίπεδα με την ΠΓΠ των εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Περαιτέρω έρευνες έχουν δείξει τις ελλείψεις των εκπαιδευτικών στην ΠΓΠ. Για παράδειγμα, υποψήφιοι εκπαιδευτικοί στη Γκάνα, αν και έχουν επαρκείς γνώσεις στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, οι επιδόσεις τους στην ΠΓΠ είναι ανεπαρκείς (Pinamang & Cofie, 2017). Στην Τουρκία εν ενεργεία εκπαιδευτικοί φαίνεται να έχουν μόνο διαδικαστική γνώση για τη διαίρεση των κλασμάτων, χωρίς καθόλου εννοιολογική κατανόηση, καθώς δεν είναι σε θέση να δώσουν περαιτέρω εξηγήσεις για τη διαίρεση των κλασμάτων ή δυσκολεύονται να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα σχετικά με συγκεκριμένες διαιρέσεις κλασμάτων που τους παρουσιάζεται (Serkan, 2013). Στην ίδια έρευνα, η ΠΓΠ που κατέχουν για τη διδασκαλία της διαίρεσης των κλασμάτων αξιολογείται, επίσης, ως ανεπαρκής.

Είναι σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να ενισχύσουν τη γνώση περιεχομένου που έχουν στα μαθηματικά για να ενισχυθεί η ΠΓΠ και να είναι αποτελεσματικότεροι στη διδασκαλία που προσφέρουν (Capraro et al., 2005). Υπάρχουν ενδείξεις ότι η συμμετοχή των εκπαιδευτικών σε περαιτέρω επιμορφώσεις και καταρτίσεις σχετικές με το αντικείμενο των μαθηματικών αυξάνουν το επίπεδο της γνώσης περιεχομένου που έχουν (Marshall & Sorto, 2012). Η ενίσχυση του επιπέδου της ΓΠ είναι σημαντική, καθώς έχει φανεί ότι οι μαθητές εκπαιδευτικών με υψηλό επίπεδο ΓΠ και ΠΓΠ στα μαθηματικά είναι πιθανότερο να έχουν καλές επιδόσεις στα μαθηματικά (Marshall & Sorto, 2012). Τέλος, επισημαίνεται ότι οι βαθμολογίες των μαθητών στα μαθηματικά είναι χαμηλότερες σε σχολεία στα οποία αφιερώνεται περισσότερος χρόνος στην αντιγραφή και την ατομική επίλυση προβλημάτων και υψηλότερες όταν χρησιμοποιούνται πιο παραγωγικές δραστηριότητες, που εμπλέκουν τους μαθητές στη διαδικασία μάθησης, όπως η εργασία σε ομάδες (Marshall & Sorto, 2012).

## **Μέρος Β΄**

### **1.B.1. Η έννοια των εκτιμήσεων**

Η έννοια των εκτιμήσεων έχει μελετηθεί από πολλούς ερευνητές κατά τη διάρκεια των χρόνων, οι οποίοι έχουν επιχειρήσει κατά καιρούς να την αποσαφηνίσουν. Ο Reys (1984) όρισε τις εκτιμήσεις προσδίδοντας σε αυτές τα εξής τέσσερα χαρακτηριστικά: 1) εκτελούνται νοερά, 2) εκτελούνται με ταχύτητα, 3) οι απαντήσεις που προκύπτουν δεν είναι ακριβείς αλλά είναι επαρκείς για τη λήψη αποφάσεων εκείνης της στιγμής και 4) αντανακλούν ατομικές προσεγγίσεις και γι' αυτό μπορούν να προκύψουν διαφορετικές απαντήσεις. Για παράδειγμα, για να βρεθεί το γινόμενο  $190 \times 240$  μπορεί κάποιος να επιλέξει να το μετατρέψει σε  $200 \times 240$ , ενώ άλλος σε  $200 \times 200$ . Και οι δύο αυτές μετατροπές θα βοηθήσουν στο να υπολογιστεί κατά προσέγγιση το αποτέλεσμα με τη διαφορά ότι το γινόμενο του  $200 \times 240$  θα δώσει ένα αποτέλεσμα πιο κοντά στο ακριβές (Δεσλή, 2021). Οι Segovia, Castro, Rico και Castro (1989, στο Segovia & Castro, 2009) επέκτειναν και ανέπτυξαν τα παραπάνω χαρακτηριστικά και αναφέρουν για την έννοια των εκτιμήσεων ότι: αποτελείται από την εκτίμηση της τιμής μιας ποσότητας ή του αποτελέσματος μιας αριθμητικής πράξης,

το πρόσωπο που προβαίνει στην εκτίμηση έχει κάποιες πληροφορίες, αναφορές ή εμπειρίες σχετικά με την κατάσταση που πρόκειται να εκτιμηθεί, η εκτίμηση γίνεται νοερά και γρήγορα, χρησιμοποιώντας τους απλούστερους δυνατούς αριθμούς και το αποτέλεσμα δεν είναι ακριβές και μπορεί να διαφέρει ανάλογα με το άτομο που κάνει την εκτίμηση. Πιο πρόσφατα, για το NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 2006, στο Δεσλή, 2021), η έννοια της εκτίμησης περιέχει τον κατά προσέγγιση υπολογισμό και το κατά προσέγγιση αποτέλεσμα.

Ο νοερός υπολογισμός έχει κεντρικό ρόλο στις διαδικασίες εκτίμησης ενός αποτελέσματος μιας πράξης ή μιας ποσότητας. Παρόλο που μια εκτίμηση μπορεί να εκτελεστεί και με χαρτί και μολύβι, αυτό δεν είναι πάντα εφικτό ή επιθυμητό και, ως εκ τούτου, πραγματοποιείται νοερά (Segovia & Castro, 2009). Ο νοερός υπολογισμός, ωστόσο, δεν πρέπει να ταυτίζεται με τις εκτιμήσεις. Τα χαρακτηριστικά που προσδίδονται στον νοερό υπολογισμό είναι ότι παράγει ακριβείς απαντήσεις χωρίς τη χρήση εξωτερικών εργαλείων, όπως μολύβι και χαρτί (Reys, 1984, στο Segovia & Castro, 2009).

### 1.B.2. Είδη εκτίμησης

Οι εκτιμήσεις διακρίνονται σε τρία είδη: 1) υπολογιστικές εκτιμήσεις, 2) εκτιμήσεις πλήθους και 3) εκτιμήσεις μέτρων (Hogan & Brezinski, 2003). Οι υπολογιστικές εκτιμήσεις (computational estimation) αφορούν την κατά προσέγγιση εύρεση αποτελεσμάτων που προκύπτουν από αριθμητικές πράξεις και σχετίζονται με την ερώτηση «Πόσο περίπου κάνει...;». Οι εκτιμήσεις πλήθους (numerosity estimation) αναφέρονται στην κατά προσέγγιση εύρεση του πλήθους στοιχείων που απαρτίζουν ένα σύνολο. Η εκτίμηση πλήθους, δηλαδή, περιλαμβάνει εκείνες τις καταστάσεις όπου χρειάζεται να απαντηθεί η ερώτηση «Πόσα περίπου είναι αυτά...;» (Δεσλή, 2021). Για παράδειγμα, πόσα είναι τα βιβλία στο ράφι; Στην κατηγορία αυτή, εντάσσεται και η εκτίμηση αριθμογραμμής (number line estimation), δηλαδή, αφενός η εκτίμηση της θέσης αριθμών πάνω σε μια δοθείσα αριθμογραμμή και αφετέρου η εύρεση αριθμών πάνω συγκεκριμένα δοθέντα σημεία της αριθμογραμμής. Τέλος, οι εκτιμήσεις μέτρων (measurement estimation) αφορούν τον κατά προσέγγιση καθορισμό του αποτελέσματος μιας μέτρησης (π.χ., βάρους), που δεν περιλαμβάνει τη



χρήση τυπικών εργαλείων μέτρησης. Για παράδειγμα, η αναζήτηση και εύρεση του βάρους ενός αντικειμένου χωρίς να χρησιμοποιηθεί ζυγαριά ή άλλο όργανο μέτρησης βάρους. Οι εκτιμήσεις μετρήσεων περιλαμβάνουν, ανάμεσα σε άλλα, τις εκτιμήσεις μήκους, εμβαδού, όγκου, χρόνου και βάρους (Δεσλή, 2021).

### 1.B.3. Η αναγκαιότητα των εκτιμήσεων

Η χρησιμότητα των εκτιμήσεων εμφανίζεται σε πολλούς διαφορετικούς τομείς, τέσσερις εκ των οποίων έχουν αναδειχθεί και αναλυθεί από τους Segovia και Castro (2009). Αρχικά, υπάρχουν περιπτώσεις στη ζωή του ανθρώπου που καλείται να κάνει υπολογισμούς με τιμές για τις οποίες δεν γνωρίζει τους ακριβείς όρους, όπως, για παράδειγμα, τον αριθμό των οχημάτων που ταξιδεύουν ένα συγκεκριμένο Σαββατοκύριακο (Δεσλή, 2021). Δεύτερον, υπάρχουν αριθμοί (π.χ., περιοδικοί αριθμοί και δεκαδικοί αριθμοί με πολλά δεκαδικά ψηφία) που είναι δύσκολο να χρησιμοποιηθούν με τις ακριβείς τιμές τους για την εύρεση ενός ακριβούς αποτελέσματος και σε αυτή την περίπτωση η εκτίμηση του αποτελέσματος είναι προτιμότερη ή αναγκαία. Τρίτον, η εκτίμηση συμβάλλει στην παρουσίαση των αριθμών με τρόπο σαφέστερο, απλούστερο και πιο κατανοητό, που πολλές φορές είναι απαραίτητο. Τα μέσα μαζικής ενημέρωσης, για παράδειγμα, προτιμούν να πουν «100 χιλιάδες ευρώ για 63 χιλιάδες μαθητές» παρά «98.863 ευρώ για 59.786 μαθητές», προκειμένου να γίνει ευκολότερα και ταχύτερα η κατανόηση της είδησης. Τέταρτον, οι εκτιμήσεις προσφέρουν ευκολία και ταχύτητα στους υπολογισμούς, και στις περιπτώσεις που η εύρεση ακριβούς απάντησης δεν είναι απαραίτητη, μια κατά προσέγγιση απάντηση είναι γρήγορη, ικανοποιητική και χρήσιμη, όπως αναφέρουν οι Segovia και Castro (2009). Τέλος, οι εκτιμήσεις χρησιμεύουν ως μέσο πρόβλεψης ενός αποτελέσματος ή ως στρατηγική για τον έλεγχο της ορθότητας ενός αποτελέσματος (Yang, 2019).

#### 1.B.4. Επιδόσεις μαθητών στις υπολογιστικές εκτιμήσεις

Στη βιβλιογραφία γίνονται συχνές αναφορές ότι τόσο τα παιδιά όσο και οι ενήλικες έχουν μέτριες επιδόσεις στις υπολογιστικές εκτιμήσεις (Tsao & Pan, 2011). Ειδικότερα, οι Tsao και Pan (2011) στην έρευνά τους στην Ταϊβάν εξετάζουν τις επιδόσεις μαθητών της πέμπτης τάξης στις υπολογιστικές εκτιμήσεις και τις χαρακτηρίζουν μέτριες αναφέροντας πως η κατηγορία δοκιμασιών με τις χαμηλότερες βαθμολογίες είναι αυτές που αφορούν κλάσματα, μετά εκείνες με δεκαδικούς αριθμούς και, τέλος, οι δοκιμασίες με ακέραιους αριθμούς. Αυτό ερμηνεύεται από το γεγονός ότι το πρόγραμμα σπουδών της Ταϊβάν προσφέρει περισσότερες ευκαιρίες ενασχόλησης με αντικείμενα, των οποίων η ποσότητα αντανακλά κυρίως ακέραιους αριθμούς. Με τα παραπάνω ευρήματα συμφωνούν και οι Hanson και Hogan (2000), αφού οι συμμετέχοντες στην έρευνά τους, ηλικίας 18-21 χρονών, πραγματοποιώντας εκτιμήσεις καταλήγουν σε σωστές απαντήσεις για τα περισσότερα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης με ακέραιους αριθμούς, ενώ αντίθετα στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση δεκαδικών αριθμών και στην αφαίρεση κλασμάτων έχουν χαμηλές επιδόσεις. Ακόμη, είναι καλύτεροι στην επίλυση υπολογιστικών προβλημάτων από ό,τι στην πραγματοποίηση εκτιμήσεων. Επιπλέον, οι Tsao και Pan (2011), αναλύοντας διάφορες συνιστώσες, τονίζουν ότι παρόλο που οι μαθητές θεωρούν ότι η υπολογιστική εκτίμηση είναι πολύτιμη και επιθυμούν να τη μελετήσουν και να προσπαθήσουν να λύσουν προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης, η εμπειρία τους στη χρήση της υπολογιστικής εκτίμησης είναι ανεπαρκής.

#### 1.B.5. Επιδόσεις μαθητών στις εκτιμήσεις μέτρων

Τα παιδιά και οι ενήλικες αναφέρονται συχνά στη βιβλιογραφία ως αδύναμοι στις εκτιμήσεις μέτρων (Hagena, 2014). Οι Desli και Giakoumi (2017) περιγράφουν τις χαμηλές επιδόσεις μαθητών στις εκτιμήσεις μέτρων, καθώς στην έρευνά τους για τις εκτιμήσεις μήκους, οι μαθητές της τρίτης τάξης έχουν ποσοστό επιτυχίας 45% και οι μαθητές πέμπτης τάξης 53%. Παρατηρήθηκε μια σύνθετη αλληλεπίδραση μεταξύ των επιδόσεων των μαθητών και της ηλικίας, καθώς οι μαθητές της πέμπτης τάξης έχουν μεν καλύτερες επιδόσεις αλλά μόνο στις δοκιμασίες που περιλαμβάνουν

εκτιμήσεις μήκους με μη τυπικές μονάδες μέτρησης (π.χ., με μολύβια). Στις δοκιμασίες εκτίμησης μήκους με εκατοστά οι μαθητές της τρίτης και της πέμπτης τάξης έχουν παρόμοιες επιδόσεις. Οι δοκιμασίες εκτίμησης μήκους με εκατοστά φάνηκε να δυσκολεύει γενικότερα τους μαθητές περισσότερο, καθώς οι επιδόσεις στις δοκιμασίες εκτίμησης με μη τυπικές μονάδες είναι υψηλότερες για το σύνολο των μαθητών.

Οι παράγοντες που ενδέχεται να επηρεάζουν τις επιδόσεις των μαθητών στις εκτιμήσεις μέτρων έχουν μελετηθεί και από άλλους ερευνητές. Η πρόσφατη έρευνα της Huang (2020) στην Ταϊβάν ανέδειξε ότι η ηλικία και το μέγεθος του προς εκτίμηση αντικειμένου επηρεάζουν τις επιδόσεις στις εκτιμήσεις μέτρων και συγκεκριμένα στις εκτιμήσεις μήκους, εμβαδού και όγκου. Αναλυτικότερα, στη συγκεκριμένη έρευνα συμμετείχαν μαθητές της πέμπτης και της έκτης τάξης και προπτυχιακοί φοιτητές τμημάτων εκπαίδευσης που βρίσκονταν στο πρώτο έτος φοίτησης. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι όσο αυξάνεται η ηλικία αυξάνεται και η γενικότερη ικανότητα εκτίμησης μέτρων. Οι φοιτητές, δηλαδή, έχουν κατά μέσο όρο πολύ καλύτερες επιδόσεις από τους μαθητές της έκτης τάξης, ενώ οι μαθητές της έκτης τάξης έχουν καλύτερες επιδόσεις από τους μαθητές της πέμπτης τάξης. Ωστόσο, από τις αναλύσεις δεν φαίνεται κάποια συσχέτιση μεταξύ του μεγέθους του προς εκτίμηση αντικειμένου και της ηλικίας των συμμετεχόντων, καθώς στην εκτίμηση αντικειμένων (εκτίμηση μήκους, εμβαδού και όγκου) μεσαίου μεγέθους όλες οι ηλικιακές ομάδες σημειώνουν τις καλύτερες επιδόσεις συγκριτικά με τα αντικείμενα μικρού και μεγάλου μεγέθους. Επίσης, οι μαθητές της έκτης τάξης και οι φοιτητές έχουν καλύτερες επιδόσεις στις εκτιμήσεις αντικειμένων (εκτιμήσεις μήκους, εμβαδού και όγκου) μικρού μεγέθους από ότι μεγάλου μεγέθους, ενώ οι μαθητές πέμπτης τάξης έχουν ισοδύναμες επιδόσεις στις εκτιμήσεις αντικειμένων μικρού και μεγάλου μεγέθους. Χαρακτηριστικό είναι ότι όλες οι ηλικιακές ομάδες υποεκτιμούν τα αντικείμενα μεγάλου μεγέθους. Η ίδια ερευνήτρια σε προηγούμενη της έρευνα (Huang, 2014) αναφέρει πως οι βαθμίδες εκπαίδευσης επηρεάζουν τις επιδόσεις των μαθητών στις εκτιμήσεις μέτρων, καθώς σε όσο μεγαλύτερη βαθμίδα φοιτούν οι μαθητές τόσο υψηλότερες είναι και οι επιδόσεις τους στο σύνολο των δοκιμασιών της εκτίμησης μέτρων. Ειδικότερα, στις εκτιμήσεις εμβαδού οι μαθητές πέμπτης και έκτης τάξης έχουν καλύτερα αποτελέσματα από τους μαθητές της τετάρτης τάξης, ενώ για την εκτίμηση μήκους δεν καταγράφονται σημαντικές διαφορές.

Τα παραπάνω ευρήματα έχουν προκαλέσει περαιτέρω ερευνητικά ερωτήματα, όπως το κατά πόσο οι επιδόσεις των μαθητών στις εκτιμήσεις μέτρων μπορούν να βελτιωθούν. Το ερώτημα αυτό απαντήθηκε σε μια μελέτη (Hagena, 2014), στην οποία μια ομάδα μαθητών διδάχτηκε στρατηγικές αναφοράς για την κατ' εκτίμηση μέτρηση μήκους και εμβαδού. Διδάχτηκε, δηλαδή, στρατηγικές σύγκρισης του προς εκτίμηση αντικείμενου με κάποια πρότυπη μονάδα ή με ένα αντικείμενο με γνωστή μέτρηση. Υπήρξε ακόμη μια ομάδα μαθητών στη μελέτη, η οποία δεν διδάχθηκε τις αντίστοιχες στρατηγικές. Για να συγκριθούν οι δύο ομάδες χορηγήθηκαν τεστ πριν και μετά τη διδασκαλία. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι μαθητές που συμμετείχαν στην ομάδα παρέμβασης είχαν στο τέλος καλύτερες επιδόσεις στην εκτίμηση μέτρων από τους μαθητές που δεν εκπαιδεύτηκαν σε αντίστοιχες στρατηγικές. Έτσι, η παραπάνω μελέτη καταλήγει στο συμπέρασμα ότι είναι δυνατόν να ενισχυθούν οι επιδόσεις των μαθητών στην εκτίμηση μέτρων μέσω της διδασκαλίας στρατηγικών αναφοράς. Γι' αυτό, είναι σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να παρέχουν στους μαθητές πολλές ευκαιρίες ανάπτυξης γνώσεων και εμπειριών για τις εκτιμήσεις, προκειμένου να αναπτυχθούν οι ικανότητες των μαθητών στην εκτίμηση μέτρων (Huang, 2014).

#### 1.B.6. Στρατηγικές μαθητών στις εκτιμήσεις μέτρων

Η στρατηγική των σημείων αναφοράς για εκτιμήσεις μέτρων θεωρείται ότι συμβάλλει στην πραγματοποίηση επιτυχών εκτιμήσεων (Desli & Giakoumi, 2017). Επίσης, αποτελεί την κύρια επιλογή των μαθητών (Huang, 2020), ενώ επιλέγεται και από τους χαρισματικούς μαθητές (Erdoğan & Erben, 2020). Μαθητές της πέμπτης και της έκτης τάξης, καθώς και πρωτοετείς προπτυχιακοί φοιτητές τμημάτων εκπαίδευσης, χρησιμοποιούν κυρίως μέρη του σώματός τους και γνωστά τους αντικείμενα ως σημεία αναφοράς για τις εκτιμήσεις μέτρων (Huang, 2020).

Μια ακόμη στρατηγική που έχει καταγραφεί είναι η επανάληψη της μονάδας, κατά την οποία τα άτομα έχοντας ένα συγκεκριμένο μέγεθος στο μυαλό τους το επαναλαμβάνουν έως ότου καλύψουν και μετρήσουν νοερά το μέγεθος που τους ζητείται να εκτιμήσουν (Erdoğan & Erben, 2020). Η στρατηγική αυτή έχει φανεί ότι είναι επιτυχημένη για εκτιμήσεις μέτρων και προτιμάται σε μεγάλη συχνότητα από τους μαθητές (Desli & Giakoumi, 2017), αν και η έρευνα των Erdoğan και Erben

(2020) έδειξε ότι οι χαρισματικοί μαθητές δεν την επιλέγουν αρκετά συχνά. Στην έρευνα της Huang (2020), η παραπάνω στρατηγική συνδέεται με τη στρατηγική των μαθητών να εκτιμούν παρατηρώντας το δοθέν μέγεθος («eyeballing») και με τη στρατηγική κατασκευής ενός νοερού χάρακα που περιλαμβάνει συγκεκριμένες τιμές (π.χ., 1 εκατοστό, 10 εκατοστά κ.λπ.) που χρησιμοποιούνται για σύγκριση με το προς εκτίμηση μέγεθος και την πραγματοποίηση της εκτίμησης. Η στρατηγική «eyeballing» αναφέρεται και σε έρευνα με χαρισματικούς μαθητές (Erdoğan & Erben, 2020), οι οποίοι φαίνεται να επιλέγουν κυρίως αυτή τη στρατηγική, λέγοντας ότι πραγματοποιούν εκτιμήσεις μέτρων είτε απλώς κοιτώντας το προς εκτίμηση αντικείμενο είτε μαντεύοντας την απάντηση. Αντίστοιχες αναφορές για πραγματοποίηση εκτιμήσεων μέτρων με μάντεμα ή με eyeballing βρίσκονται και σε άλλες έρευνες (Desli & Giakoumi, 2017; Huang, 2014).

Η διαίρεση του προς εκτίμηση αντικειμένου σε μικρότερα μέρη είναι μια επιπλέον στρατηγική εκτίμησης μέτρων. Τα άτομα που χρησιμοποιούν τη συγκεκριμένη στρατηγική χωρίζουν το προς εκτίμηση αντικείμενο σε μικρότερα μέρη, έπειτα εκτιμούν νοερά το μικρότερο μέγεθος ώστε να εκτιμήσουν στη συνέχεια το αρχικό μέγεθος που θέλουν (Desli & Giakoumi, 2017; Erdoğan & Erben, 2020). Η συγκεκριμένη στρατηγική έχει παρατηρηθεί ότι δεν προτιμάται από τους μαθητές, καθώς ένα μικρό ποσοστό αυτών τη χρησιμοποιεί για να εκτιμήσει το ζητούμενο μέγεθος (Desli & Giakoumi, 2017; Erdoğan & Erben, 2020).

Τέλος, η ανάκληση και χρήση προηγούμενων γνώσεων και εμπειριών για την εκτίμηση μέτρων αποτελεί στρατηγική, κατά την οποία ο μαθητής γνωρίζει εκ των προτέρων το μήκος, το εμβαδόν ή το μέτρο όγκου του αντικειμένου που πρόκειται να εκτιμήσει και, χρησιμοποιώντας τη γνώση αυτή, εκτιμά το μέγεθος που του ζητείται (Erdoğan & Erben, 2020). Έχει ενδιαφέρον το γεγονός ότι οι μαθητές για την εκτίμηση μέτρων ενδέχεται να χρησιμοποιούν πάνω από μία στρατηγική, να κάνουν δηλαδή έναν συνδυασμό των στρατηγικών, όπως χρήση προηγούμενης γνώσης και ταυτόχρονα διαίρεση του ζητούμενου μεγέθους σε μικρότερη μεγέθη (Erdoğan & Erben, 2020; Huang, 2014; Huang, 2020).

## Μέρος Γ'

### 1.Γ.1. Απόψεις εκπαιδευτικών για τις εκτιμήσεις

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενες ενότητες, ο ρόλος των εκτιμήσεων έχει αναδειχθεί από πολλούς ερευνητές (Segovia & Castro, 2009; Yang, 2019), μέσα από έρευνες που επικεντρώνονται κυρίως στις υπολογιστικές εκτιμήσεις. Η αξία της υπολογιστικής εκτίμησης, τόσο στη διδασκαλία των μαθηματικών όσο και στην καθημερινή ζωή, έχει αναγνωριστεί από υποψήφιους εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην Ελλάδα (Δεσλή & Ανεστάκης, 2014). Η έρευνα των Anestakis και Desli (2014) συμφωνεί με το παραπάνω εύρημα και προσθέτει ότι οι Έλληνες υποψήφιοι δάσκαλοι είναι θετικοί με την προσθήκη της εκτίμησης στο πρόγραμμα σπουδών, θεωρώντας ότι έτσι και οι μαθητές θα γνωρίσουν την αξία της εκτίμησης και θα επωφεληθούν από τα πλεονεκτήματά της. Στα πλεονεκτήματά της οι υποψήφιοι δάσκαλοι της ίδιας έρευνας συμπεριλαμβάνουν τον προσαρμοστικό και ευέλικτο τρόπο σκέψης που αποδεσμεύει τους μαθητές από την αποκλειστική χρήση αλγορίθμων και κανόνων, ωθώντας τους σε μια μαθηματική συλλογιστική που περιλαμβάνει προσεγγιστικές απαντήσεις και άτυπες μεθόδους για την εύρεση αποτελέσματος (Anestakis & Desli, 2014). Άλλα οφέλη της υπολογιστικής εκτίμησης που έχουν επισημανθεί από υποψήφιους δασκάλους είναι ότι συμβάλλει στη λήψη υπολογιστικών αποφάσεων και στην κατανόηση της σημασίας των πράξεων (Son, Hu & Lim, 2019). Οι υποψήφιοι δάσκαλοι αναφέρονται συχνότερα στα οφέλη της καθαυτήν εκτίμησης, δηλαδή, στην ταχύτητα που προσφέρουν οι εκτιμήσεις για την εύρεση ενός αποτελέσματος (Alajmi, 2009), αλλά και στα οφέλη που προκύπτουν κατά τη διαδικασία των εκτιμήσεων (Son, Hu & Lim, 2019). Τέτοια οφέλη είναι: α) η περαιτέρω ανάπτυξη μαθηματικών γνώσεων, όπως η αίσθηση του αριθμού (Alajmi, 2009), β) η ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων (π.χ., ανάπτυξη της λογικής σκέψης και της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων) και γ) η παράλληλη συμβολή της διδασκαλίας των εκτιμήσεων στην προετοιμασία των μαθητών για τις εξετάσεις (Son, Hu & Lim, 2019). Λίγοι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί συμπεριλαμβάνουν στα οφέλη της εκτίμησης την ανάπτυξη θετικής στάσης απέναντι στα μαθηματικά, δηλώνοντας ότι η εκτίμηση κάνει τα μαθηματικά πιο φιλικά προς τον χρήστη (Son, Hu & Lim, 2019). Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι οι εκτιμήσεις είναι ένα σημαντικό μέρος των

μαθηματικών (Mildenhall, 2009) και υποστηρίζουν πως η διδασκαλία των εκτιμήσεων αποτελεί ένα απλό και διασκεδαστικό θέμα διδασκαλίας (Bozkurt & Yavaşca, 2021). Αξίζει, ακόμα, να σημειωθεί πως η θετική στάση των εκπαιδευτικών προς τις εκτιμήσεις έχει συσχετιστεί με καλύτερες επιδόσεις των εκπαιδευτικών στον τομέα των εκτιμήσεων (Son, Hu & Lim, 2019).

Οι παραπάνω απόψεις των εκπαιδευτικών δεν μπορούν να χαρακτηριστούν ως καθολικές, καθώς έχει γίνει φανερό ότι υπάρχουν εκπαιδευτικοί που έχουν αντίθετη γνώμη για τις εκτιμήσεις (Alajmi, 2009). Αναλυτικότερα, στην έρευνα του Alajmi (2009), στην οποία συμμετέχουν εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, περίπου οι μισοί από αυτούς βρέθηκε να συμφωνούν ότι η υπολογιστική εκτίμηση δεν είναι σημαντική για τα μαθηματικά και αναφέρουν πως είναι ένα δύσκολο θέμα που προκαλεί σύγχυση στους μαθητές. Οι Boz-Yaman και Bulut (2017) αναφέρουν αντίστοιχα ευρήματα από καθηγητές μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης: οι καθηγητές δεν ασχολούνται με τη διδασκαλία των εκτιμήσεων, καθώς αυτές δεν ζητούνται στις εθνικές εξετάσεις και αποτελούν θέμα στο οποίο και οι ίδιοι παρουσιάζουν χαμηλές επιδόσεις. Οι εκπαιδευτικοί τονίζουν, επίσης, ότι στα μαθηματικά είναι σημαντική η ακριβής απάντηση και επομένως δεν χρειάζεται να υποβληθούν οι μαθητές στη διαδικασία εκμάθησης της εκτίμησης (Alajmi, 2009), εύρημα στο οποίο συμφωνεί και το 9% των συμμετεχόντων υποψήφιων εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην έρευνα των Anestakis και Desli (2014). Στην έρευνα της Alajmi (2009) ένας εκπαιδευτικός υποστηρίζει πως ναι μεν μέσω της εκτίμησης μπορεί να ελεγχθεί ένα αποτέλεσμα, αλλά αυτό μπορεί να γίνει και με άλλους τρόπους και γι' αυτό η εκτίμηση δεν είναι απαραίτητη. Στην ίδια έρευνα, η πλειονότητα των εκπαιδευτικών συμφωνεί ότι η εκτίμηση είναι πολύτιμη μόνο για την καθημερινή ζωή των μαθητών και ορισμένοι προσθέτουν ότι είναι μια δεξιότητα που αναπτύσσεται μόνη της μέσω της εμπειρίας. Επιπλέον, οι ίδιοι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι οι υπολογιστικές εκτιμήσεις θα πρέπει να συζητούνται στην τάξη μόνο όταν οι μαθητές έχουν κατακτήσει πλήρως τους αλγορίθμους, καθώς οι αλγόριθμοι είναι σημαντικότεροι από τις εκτιμήσεις και ενδεχομένως η διδασκαλία των υπολογιστικών εκτιμήσεων να δυσχεράνει την εκμάθηση των τυπικών αλγορίθμων (Alajmi, 2009).

Παρά το γεγονός ότι οι απόψεις των εκπαιδευτικών για την αξία των εκτιμήσεων δίστανται, είναι πολύ σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να αναγνωρίσουν τη σπουδαιότητα της εκτίμησης και να ενισχύσουν τις ικανότητές τους στον συγκεκριμένο

τομέα. Η θετική στάση των εκπαιδευτικών προς τις εκτιμήσεις είναι πιθανό να μεταφερθεί και στους μαθητές εντός της σχολικής τάξης (Δεσλή & Ανεστάκης, 2014).

### 1.Γ.2. Γνώση Περιεχομένου των εκπαιδευτικών για τις εκτιμήσεις

Οι γνώσεις των εκπαιδευτικών για τις εκτιμήσεις είναι ποικίλες και εξαρτώνται από διάφορους παράγοντες. Γενικά, οι εν ενεργεία Έλληνες εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν αποτελεσματικά τις υπολογιστικές εκτιμήσεις (Lemonidis, Mouratoglou & Pnevmatikos, 2014) και οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί έχουν υψηλές επιδόσεις στα προβλήματα λογικής κρίσης που περιέχουν υπολογιστικές εκτιμήσεις (Δεσλή & Ανεστάκης, 2014). Όταν τα προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης παρουσιάζονται μέσα σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο, τότε οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί έχουν υψηλότερες επιδόσεις (Δεσλή & Ανεστάκης, 2014). Οι επιδόσεις των εκπαιδευτικών είναι, επίσης, καλύτερες όταν πραγματεύονται εκτιμήσεις με πράξεις ακεραίων αριθμών (Son, Hu & Lim, 2019) και κυρίως με την πράξη της πρόσθεσης (Lemonidis, Mouratoglou & Pnevmatikos, 2014). Αντίθετα, φαίνεται οι εκπαιδευτικοί να δυσκολεύονται στις υπολογιστικές εκτιμήσεις, όταν παρουσιάζονται προβλήματα χωρίς πλαίσιο (Δεσλή & Ανεστάκης, 2014) ή πράξεις με κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς (Lemonidis, Mouratoglou & Pnevmatikos, 2014; Son, Hu & Lim, 2019). Οι επιδόσεις αυτές των εν ενεργεία εκπαιδευτικών στις δοκιμασίες υπολογιστικής εκτίμησης φαίνεται να μην επηρεάζονται από τα έτη προϋπηρεσίας τους, σύμφωνα με τους Lemonidis, Mouratoglou και Pnevmatikos (2014).

Τα ευρήματα για το επίπεδο της ΓΠ των εκπαιδευτικών στις εκτιμήσεις είναι, ωστόσο, αμφισβητούμενα, καθώς έχει φανεί από έρευνες ότι πολλοί εκπαιδευτικοί δεν έχουν σαφή κατανόηση της εκτίμησης (Son, Hu & Lim, 2019), δεν γνωρίζουν τι είναι η εκτίμηση και ποιες είναι οι στρατηγικές της (Boz-Yaman & Bulut, 2017). Η συντριπτική πλειονότητα των εκπαιδευτικών στο Κουβέιτ δεν μπορεί να κατανοήσει πλήρως την έννοια και τη σημασία της υπολογιστικής εκτίμησης (Alajmi, 2009). Υποψήφιοι εκπαιδευτικοί έχουν μέτριο ή απλώς καλό επίπεδο δεξιοτήτων υπολογιστικής εκτίμησης και αποτυγχάνουν σε δραστηριότητες εκτίμησης (Gunes, 2022), ενώ γενικότερα οι δεξιότητες τους στις δραστηριότητες των εκτιμήσεων είναι ανεπαρκείς (Senol, Dundar & Gunduz, 2015). Ακόμη, όταν τους ζητείται να δημιουργήσουν προβλήματα υπολογιστικών εκτιμήσεων, δυσκολεύονται και



δημιουργούν προβλήματα που είτε απαιτούν άλλον τύπο εκτίμησης είτε δεν απαιτείται η εκτίμηση για να λυθούν (Anestakis & Desli, 2014). Έτσι, γίνεται αντιληπτό ότι οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί συγχέουν τα είδη των εκτιμήσεων μεταξύ τους και δυσκολεύονται να διακρίνουν την υπολογιστική εκτίμηση (Anestakis & Desli, 2014). Η υπολογιστική εκτίμηση συγχέεται, επίσης, και με τους νοερούς υπολογισμούς (Boz-Yaman & Bulut, 2017), ενώ η εκτίμηση των μέτρων συγχέεται με την καθαυτή μέτρηση και ταυτίζεται με την εικασία (Pizarro, Gorgorió & Albarracín, 2015).

Τα επίπεδα της ΓΠ που έχουν οι εκπαιδευτικοί για τις εκτιμήσεις αξιολογούνται και από τους ορισμούς που δίνουν για αυτές. Αρκετοί εκπαιδευτικοί ορίζουν τις εκτιμήσεις αναφέροντας τον σκοπό για τον οποίο πραγματοποιούνται (Son, Hu & Lim, 2019). Οι εκπαιδευτικοί με σπουδές στις θετικές επιστήμες συνήθως χρησιμοποιούν ορισμούς, ενώ οι εκπαιδευτικοί που δεν έχουν σπουδές στις θετικές επιστήμες αλλά ενδιαφέρονται για τα μαθηματικά χρησιμοποιούν εφαρμογές των εκτιμήσεων στην καθημερινή ζωή, προκειμένου να εξηγήσουν το περιεχόμενό τους (Tsao & Pan, 2013). Επίσης, έχει παρατηρηθεί ότι, όταν οι εκπαιδευτικοί δίνουν ορισμούς για τις εκτιμήσεις, αναφέρονται κυρίως στις υπολογιστικές εκτιμήσεις και στις εκτιμήσεις μέτρων, χρησιμοποιώντας λέξεις όπως «στρογγυλοποίηση, περισσότερο ή λιγότερο» (Boz-Yaman & Bulut, 2017). Ακόμη, θεωρούν ότι ένα ακριβές αποτέλεσμα μπορεί να είναι επίσης και εκτίμηση (Boz-Yaman & Bulut, 2017). Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να καθορίσουν πότε το αποτέλεσμα μιας εκτίμησης είναι λογικό ή όχι (Alajmi, 2009). Στην έρευνα της Alajmi (2009), το 69% των συμμετεχόντων δηλώνει ότι μια εκτίμηση είναι λογική αν δεν απέχει πολύ από την ακριβή απάντηση, χωρίς όμως να διευκρινίζεται πόσο κοντά πρέπει να είναι η εκτιμώμενη απάντηση από την ακριβή. Από τους υπόλοιπους εκπαιδευτικούς στην ίδια έρευνα (Alajmi, 2009) δηλώνει αρκετοί δηλώνουν ότι δεν γνωρίζουν πότε μια εκτίμηση είναι λογική, ενώ άλλοι υποστηρίζουν ότι στα μαθηματικά είναι απαραίτητες μόνο οι ακριβείς απαντήσεις και έτσι δεν υπάρχει λόγος να συζητείται το θέμα των εκτιμήσεων.

Οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί για την πραγματοποίηση των εκτιμήσεων είναι ένα ακόμα βασικό στοιχείο για τον καθορισμό του επιπέδου της ΓΠ που κατέχουν. Στις υπολογιστικές εκτιμήσεις η συχνότερη στρατηγική που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί είναι η στρογγυλοποίηση (Alajmi, 2009; Gunes, 2022; Kaya & Demirci, 2022; Lemonidis, Mouratoglou & Pnevmatikos, 2014; Son, Hu & Lim, 2019). Έχει παρατηρηθεί ότι οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν ένα περιορισμένο εύρος στρατηγικών (Lemonidis, Mouratoglou & Pnevmatikos, 2014), δεν είναι

γνώστες της πληθώρας των στρατηγικών που μπορούν να αξιοποιηθούν (Gunes, 2022) και δεν μπορούν να κατονομάσουν το είδος της στρατηγικής που ενδεχομένως έχουν χρησιμοποιήσει (Boz-Yaman & Bulut, 2017). Αρκετοί εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν ανεπιτυχείς (Alajmi, 2009) ή τυχαίες στρατηγικές και δεν μπορούν να εφαρμόσουν μια σωστή και αποτελεσματική στρατηγική (Kaya & Demirci, 2022). Επιπλέον, ορισμένοι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί, όταν τους ζητείται να εκτιμήσουν το αποτέλεσμα εύκολων πράξεων, επιλέγουν να το υπολογίσουν ακριβώς και δεν υιοθετούν καμιά στρατηγική εκτίμησης (Kaya & Demirci, 2022). Φαίνεται, λοιπόν, ότι υπάρχει ένα σημαντικό κενό στις στρατηγικές που κατέχουν οι εκπαιδευτικοί (Lemonidis, Mouratoglou & Pnevmatikos, 2014) και είναι σημαντικό να μπορέσουν οι εκπαιδευτικοί να γνωρίσουν όλες τις στρατηγικές εκτίμησης, προκειμένου να εφαρμόζουν κάθε φορά την πιο κατάλληλη (Gunes, 2022; Kaya & Demirci, 2022).

Η ΓΠ των εκπαιδευτικών για τις εκτιμήσεις πλήθους και μέτρων είναι πιο περιορισμένη απ' ό,τι για τις υπολογιστικές εκτιμήσεις (Kaya & Demirci, 2022). Αυτό μπορεί να εξηγηθεί από το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί έρχονται συχνότερα αντιμέτωποι με δραστηριότητες υπολογιστικών εκτιμήσεων (Kaya & Demirci, 2022). Στις δραστηριότητες που απαιτείται η εκτίμηση μέτρων οι εκπαιδευτικοί προτιμούν να χρησιμοποιούν τη στρατηγική των σημείων αναφοράς, η οποία είναι συνήθως αποτελεσματική (Subramaniam, 2014). Επιλέγουν, δηλαδή, οικεία και γνωστά για αυτούς αντικείμενα τα οποία χρησιμοποιούν ως σημεία αναφοράς για να υπολογίσουν κατ' εκτίμηση το δοθέν μέγεθος (μήκος, όγκος, μάζα, εμβαδόν). Ωστόσο, οι εκπαιδευτικοί δεν χρησιμοποιούν πάντα την ίδια στρατηγική για την εκτίμηση των διαφορετικών μεγεθών. Για παράδειγμα, οι Kaya και Demirci (2022) επισημαίνουν πως οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί, ενώ στην εκτίμηση του ύψους της πόρτας παρέχουν ακριβείς απαντήσεις οπτικοποιώντας νοερά το μέγεθος της πόρτας, για την εκτίμηση της ποσότητας των μήλων που περιέχονται σε ένα κιλό μήλα, δεν μπορούν να δώσουν ικανοποιητικές εκτιμήσεις, αν και χρησιμοποιούν τις προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες που έχουν. Αξίζει να αναφερθεί πως, οι χαμηλές επιδόσεις που παρουσιάζουν οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί στις δραστηριότητες εκτίμησης μέτρων που αφορούν καθημερινές συναλλαγές είναι ανησυχητικές (Kaya & Demirci, 2022).

Στις εκτιμήσεις πλήθους καταγράφονται, επίσης, χαμηλές επιδόσεις από τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς δίνουν λιγότερο επιτυχείς εκτιμήσεις (Kaya & Demirci, 2022). Όταν στις δραστηριότητες υπάρχουν εικόνες, προτιμούν να μετρούν τα στοιχεία/ αντικείμενα που περιέχονται σε αυτές,

όποτε αυτό είναι εφικτό, και οι εκτιμήσεις τους είναι πιο ακριβείς. Όταν δεν υπάρχουν εικόνες, επιλέγουν να κάνουν εκτιμήσεις χρησιμοποιώντας τη στρατηγική των προηγούμενων γνώσεων και εμπειριών τους και καταλήγουν σε μη ικανοποιητικά αποτελέσματα (Kaya & Demirci, 2022).

Έχει διαπιστωθεί γενικά ότι οι επιλογές των εκπαιδευτικών για την υιοθέτηση στρατηγικών εκτίμησης διαφοροποιούνται ανάλογα με τον τύπο προβλήματος (Kaya & Demirci, 2022; Son, Hu & Lim, 2019). Η προϋπηρεσία που έχουν οι εκπαιδευτικοί στη διδασκαλία μπορεί επίσης να επηρεάζει την ευελιξία των στρατηγικών εκτίμησης (Tsao & Pan, 2013). Στους υποψήφιους εκπαιδευτικούς φαίνεται ότι το έτος εκπαίδευσης στο οποίο βρίσκονται διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην επιλογή αποτελεσματικών στρατηγικών, καθώς οι τελειόφοιτοι φοιτητές έχουν τις καλύτερες επιδόσεις (Gunes, 2022).

### 1.Γ.3. Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου των εκπαιδευτικών για τις εκτιμήσεις

Τα υψηλά επίπεδα κατοχής ΠΓΠ από τους εκπαιδευτικούς είναι απαραίτητα για μια αποτελεσματική διδασκαλία (An, Kulm & Wu, 2004). Δυστυχώς, η βιβλιογραφία αναφέρει συχνά λανθασμένες αντιλήψεις και ελαττωματικές διδακτικές πρακτικές που έχουν οι εκπαιδευτικοί στον τομέα των εκτιμήσεων (Bozkurt & Yavaşca, 2021). Ειδικότερα, έχει βρεθεί ότι δάσκαλοι σε δημοτικά σχολεία χρησιμοποιούν δασκαλοκεντρικές μεθόδους διδασκαλίας για τις εκτιμήσεις, εκτελώντας επιφανειακά και σε περιορισμένο χρονικό διάστημα τις δραστηριότητες εκτίμησης, οι οποίες περιλαμβάνουν κυρίως διαλέξεις και ερωτο-απαντήσεις (Bozkurt & Yavaşca, 2021). Οι εκπαιδευτικοί δεν δίνουν χρόνο για να αναλύσουν οι μαθητές τον συλλογισμό και τις στρατηγικές τους και αρκούνται στο να μάθουν το αποτέλεσμα που προέκυψε από τις εκτιμήσεις (Bozkurt & Yavaşca, 2021). Αξιοσημείωτο είναι ότι οι ίδιοι αυτοί δάσκαλοι χαρακτηρίζουν τη διδασκαλία των εκτιμήσεων που παρέχουν ως επιτυχημένη. Από την άλλη πλευρά, υπάρχουν εκπαιδευτικοί οι οποίοι, αν και αναγνωρίζουν την αξία της εκτίμησης, είτε προτιμούν απλά να μην τη διδάσκουν είτε τη διδάσκουν με τη χρήση ακατάλληλων εκπαιδευτικών τεχνικών και υλικών (Boz-Yaman & Bulut, 2017).

Συγκεκριμένα, για τις υπολογιστικές εκτιμήσεις έχει φανεί ότι οι εκπαιδευτικοί δεν διαθέτουν τις απαραίτητες παιδαγωγικές γνώσεις περιεχομένου για να διδάξουν

αποτελεσματικά τις στρατηγικές των υπολογιστικών εκτιμήσεων (Mildenhall, 2009). Παρόλο που προτείνουν στους μαθητές να εκτελέσουν εκτιμήσεις, δεν μπορούν να τους καθοδηγήσουν επαρκώς και να τους εξοικειώσουν με κατάλληλες στρατηγικές εκτίμησης (Mildenhall, 2009). Οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών, με σπουδές στις θετικές επιστήμες και ενδιαφέρον για τα μαθηματικά, φαίνεται να έχουν το υψηλότερο επίπεδο ΠΓΠ (Tsao & Pan, 2013). Οι εκπαιδευτικοί αυτοί προτιμούν να εντάσσουν στη διδασκαλία των εκτιμήσεων ένα πλαίσιο, προερχόμενο από την καθημερινή ζωή και τις εμπειρίες των μαθητών (Tsao & Pan, 2013). Υποψήφιοι εκπαιδευτικοί συμφωνούν με την πρακτική αυτή και προσπαθούν να συνδέουν την υπολογιστική εκτίμηση με καθημερινές εμπειρίες, δραστηριότητες και πολιτιστικές πρακτικές από τη ζωή των μαθητών (Anestakis & Desli, 2014).

Αναφορικά με τις παιδαγωγικές γνώσεις περιεχομένου των εκπαιδευτικών για τις εκτιμήσεις μέτρων, χρειάζεται αρχικά να σημειωθεί ότι υπάρχουν ελάχιστες έρευνες (Subramaniam, 2014). Οι Pizarro, Gorgorió και Albarracín (2015) διεξήγαγαν έρευνα στη Χιλή με σκοπό να διερευνήσουν το επίπεδο της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου των εν ενεργεία εκπαιδευτικών στη διδασκαλία των εκτιμήσεων μέτρων. Από τους συμμετέχοντες ζητήθηκε να εκτιμήσουν αρχικά πόσες φορές ένα μικρό τετράγωνο χωράει σε ένα μεγάλο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και στη συνέχεια να εξηγήσουν με ποιον τρόπο θα πραγματευόντουσαν μια παρόμοια δραστηριότητα στην τάξη τους, προκειμένου να αναπτύξουν την ικανότητα εκτίμησης των μαθητών. Από τις αναλύσεις των απαντήσεων βρέθηκε ότι μόλις το 13,1% των συμμετεχόντων θα διαχειριζόταν τη δραστηριότητα σωστά, θα την παρουσίαζε πράγματι, δηλαδή, ως δραστηριότητα εκτίμησης. Οι υπόλοιποι εκπαιδευτικοί δεν πρότειναν ικανοποιητικούς τρόπους διδασκαλίας της δραστηριότητας, καθώς ο τρόπος με τον οποίο την πραγματεύτηκαν δεν θα βοηθούσε στην ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών για την εκτίμηση μέτρων. Ορισμένοι εκπαιδευτικοί, δηλαδή, θα πραγματευόντουσαν τη δραστηριότητα ως δραστηριότητα μέτρησης ή ως δραστηριότητα για τη λύση της οποίας απαιτείται η χρήση εργαλείων.

Η έρευνα του Subramaniam (2014) αποσκοπεί, επίσης, στη διερεύνηση της ΠΓΠ των υποψήφιων εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στις εκτιμήσεις μέτρων και, συγκεκριμένα, στις εκτιμήσεις μήκους. Οι εκπαιδευτικοί της έρευνας αναφέρουν ότι η διδασκαλία των εκτιμήσεων των μέτρων δεν πρέπει να επικεντρώνεται στην απλή διάλεξη, καθώς οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα όταν οπτικοποιούν έννοιες, και προτείνουν κυρίως δραστηριότητες που εμπλέκουν τη δράση

των μαθητών. Προτείνουν δραστηριότητες στις οποίες οι ίδιοι οι μαθητές μετρούν τα χέρια τους και τα συγκρίνουν με άλλα αντικείμενα παρόμοιου μεγέθους προερχόμενα από την τάξη τους ή μετρούν το μέγεθος του παπουτσιού τους και του χεριού τους και τα συγκρίνουν μεταξύ τους. Οι προτάσεις αυτές των εκπαιδευτικών είναι αντίθετες με τη στρατηγική που οι ίδιοι ακολούθησαν, όταν τους ζητήθηκε να εκτιμήσουν διάφορα μεγέθη. Οι εκπαιδευτικοί, όταν χρειάστηκε να πραγματοποιήσουν εκτιμήσεις μέτρων, προτίμησαν να χρησιμοποιήσουν τη στρατηγική των σημείων αναφοράς. Ωστόσο, δεν αναφέρθηκε από κανέναν εκπαιδευτικό της έρευνας ότι στη διδασκαλία της εκτίμησης των μέτρων θα συμπεριληφθεί και η στρατηγική των σημείων αναφοράς. Φαίνεται, λοιπόν, ότι, παρόλο που οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν τουλάχιστον μια στρατηγική της εκτίμησης των μέτρων, δεν την εντάσσουν στη διδασκαλία τους.

Είναι αδήριτη ανάγκη οι εκπαιδευτικοί να αυξήσουν το επίπεδο της ΠΓΠ στη διδασκαλία τους για τις εκτιμήσεις, καθώς οι επιδόσεις των μαθητών βελτιώνονται, όταν οι εκπαιδευτικοί που τους διδάσκουν έχουν υψηλά επίπεδα ΠΓΠ (Mouratoglou & Lemonidis, 2019). Η Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου των εκπαιδευτικών στις εκτιμήσεις φαίνεται να βελτιώνονται, όταν συμμετέχουν σε στοχευμένα και οργανωμένα προγράμματα επιμόρφωσης. Εκπαιδευτικοί που παρακολούθησαν αντίστοιχα προγράμματα κατάφεραν να εντάξουν πιο βιωματικές και παιγνιώδεις μεθόδους στη διδασκαλία των εκτιμήσεων. Συνειδητοποίησαν, επίσης, ότι η εκτίμηση μπορεί να συμπεριληφθεί σχεδόν σε όλες τις μαθηματικές περιοχές και ταυτόχρονα άρχισαν να αναγνωρίζουν τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές τους, όταν εκτελούν εκτιμήσεις (Mouratoglou & Lemonidis, 2019).

## Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup> : Μεθοδολογία έρευνας

### 2.1. Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 72 εν ενεργεία εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Αναλυτικότερα, 21 συμμετέχοντες ήταν άντρες (29,2%) και 51 γυναίκες (70,8%). Οι μόνιμοι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην έρευνα ήταν 56 (77,8%), ενώ οι αναπληρωτές 16 (22,2%). Από τον συνολικό αριθμό των αντρών συμμετεχόντων, οι 20 ήταν μόνιμοι και 1 μόνο ήταν αναπληρωτής εκπαιδευτικός, ενώ, από τον συνολικό αριθμό των γυναικών συμμετεχουσών, οι 36 ήταν μόνιμες και οι 15 ήταν αναπληρώτριες εκπαιδευτικοί (Πίνακας 2.1).

**Πίνακας 2.1.:** Φύλο συμμετεχόντων και σχέση εργασίας

Συμμετέχοντες			
Σχέση εργασίας	Άντρας	Γυναίκα	Σύνολο
Μόνιμος	20	36	56
Αναπληρωτής	1	15	16
Σύνολο	21	51	72

Τα έτη προϋπηρεσίας των συμμετεχόντων κυμαίνονταν από 1 έως 36 χρόνια, με τον μέσο όρο προϋπηρεσίας τους να είναι τα 18,42 χρόνια. Ειδικότερα, για τους μόνιμους εκπαιδευτικούς ο μέσος όρος προϋπηρεσίας ήταν τα 22,6 χρόνια και για τους αναπληρωτές εκπαιδευτικούς τα 3,5 χρόνια. Τα χρόνια προϋπηρεσίας των εκπαιδευτικών ομαδοποιήθηκαν σε τέσσερις κατηγορίες: 0-5 χρόνια, 6-10 χρόνια, 11-20 χρόνια και 21+ χρόνια. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2.2., περίπου οι μισοί συμμετέχοντες ήταν πολύ έμπειροι εκπαιδευτικοί (47,2%), αφού είχαν πάνω από 21 χρόνια προϋπηρεσίας. Περίπου 1 στους 4 (23,6%) είχε λιγότερο από 5 χρόνια προϋπηρεσίας.

**Πίνακας 2.2.:** Κατανομή συμμετεχόντων ως προς τα χρόνια προϋπηρεσίας

Χρόνια προϋπηρεσίας	<i>N</i>	%
0-5 χρόνια	17	23,6%
6-10 χρόνια	4	5,6%
11-20 χρόνια	17	23,6%
21+ χρόνια	34	47,2%
Σύνολο	72	100%

Οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί κατά τη χρονιά υλοποίησης της έρευνας ήταν οι κύριοι εκπαιδευτικοί σε μια ποικιλία τάξεων του δημοτικού σχολείου, όπως δείχνει αναλυτικά ο Πίνακας 2.3. Οχτώ από τους συμμετέχοντες (11,1%) ήταν είτε υπεύθυνοι στο ολοήμερο είτε δίδασκαν σε τμήμα υποδοχής είτε δίδασκαν σε δύο διαφορετικές τάξεις παράλληλα.

**Πίνακας 2.3.:** Τάξεις διδασκαλίας των συμμετεχόντων

Τάξη	<i>N</i>	%
A' Δημοτικού	12	16,7%
B' Δημοτικού	15	20,8%
Γ' Δημοτικού	8	11,1%
Δ' Δημοτικού	7	9,7%
E' Δημοτικού	9	12,5%
ΣΤ' Δημοτικού	13	18,1%
Άλλο	8	11,1%
Σύνολο	72	100%

Οι εκπαιδευτικοί της έρευνας υπηρετούσαν σε διάφορους νομούς της ελληνικής επικράτειας, καλύπτοντας ένα εύρος γεωγραφικών διαμερισμάτων, όπως φαίνεται αναλυτικά στον Πίνακα 2.4. Οι περισσότεροι συμμετέχοντες (62,5%) δίδασκαν στον νομό Πέλλας, ενώ υπήρχαν και εκπαιδευτικοί από την Κρήτη (5 εκπαιδευτικοί), τη Μακεδονία (11 εκπαιδευτικοί) και την Αττική (5 εκπαιδευτικοί). Τέλος, οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί επιλέχθηκαν με τη μέθοδο της βολικής δειγματοληψίας.

**Πίνακας 2.4.:** Νομοί διδασκαλίας των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών

Νομός	<i>N</i>	%
Αιτωλοακαρνανία	1	1,4%
Αττική	5	6,9%
Δωδεκάνησα	1	1,4%
Ευρυτανία	1	1,4%
Ημαθία	1	1,4%
Θεσσαλονίκη	8	11,1%
Κιλκίς	1	1,4%
Κύθηρα	1	1,4%
Κυκλάδες	1	1,4%
Λασιθί	1	1,4%
Μαγνησία	1	1,4%
Πέλλα	45	62,5%
Ρέθυμνο	1	1,4%
Χαλκιδική	1	1,4%
Χανιά	3	4,1%
Σύνολο	72	100%



## 2.2. Σχεδιασμός – Εργαλείο έρευνας

Η έρευνα της παρούσας εργασίας ήταν ποσοτική και ακολουθήθηκε συγχρονικό ερευνητικό σχέδιο. Για τους σκοπούς της σχεδιάστηκε ένα ερωτηματολόγιο, που περιείχε **πέντε εισαγωγικές ερωτήσεις** σχετικές με τα δημογραφικά στοιχεία των συμμετεχόντων και **τρία έργα** που εξετάζαν τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας εργασίας. Πιο συγκεκριμένα, τα δημογραφικά στοιχεία αφορούσαν το φύλο των συμμετεχόντων, τα έτη προϋπηρεσίας, τη σχέση εργασίας (μόνιμος ή αναπληρωτής), την τάξη στην οποία δίδασκαν και τον νομό στον οποίο εργάζονταν τη συγκεκριμένη σχολική χρονιά που πραγματοποιήθηκε η έρευνα. Οι δημογραφικές ερωτήσεις παρουσιάζονται στην Εικόνα 2.1.

Φύλο:	<input type="checkbox"/> Άντρας	<input type="checkbox"/> Γυναίκα	<input type="checkbox"/> Άλλο
Έτη προϋπηρεσίας:	.....		
Σχέση εργασίας:	<input type="checkbox"/> Μόνιμος/η	<input type="checkbox"/> Αναπληρωτής/τρια	
Σε ποια τάξη του δημοτικού σχολείου διδάσκετε φέτος:	.....		
Σε ποιο νομό εργάζεστε φέτος:	.....		

**Εικόνα 2.1.:** Δημογραφικές ερωτήσεις

Το πρώτο έργο (**Έργο 1**) αποσκοπούσε στην εξέταση της Γνώσης Περιεχομένου των εκπαιδευτικών για τις εκτιμήσεις μέτρων και, ειδικότερα, για τις εκτιμήσεις μήκους, εμβαδού και βάρους. Αναλυτικότερα, περιλαμβάνονταν έξι δοκιμασίες στις οποίες ζητούνταν από τους εκπαιδευτικούς αρχικά να εκτιμήσουν το μήκος, το εμβαδόν και το βάρος αντικειμένων και στη συνέχεια να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους. Οι δύο πρώτες δοκιμασίες αναφέρονταν στις εκτιμήσεις μήκους, οι δύο επόμενες στις εκτιμήσεις εμβαδού και οι δύο τελευταίες στις εκτιμήσεις βάρους. Στην Εικόνα 2.2. φαίνονται οι δοκιμασίες του πρώτου έργου.

Το Έργο 1 δημιουργήθηκε υιοθετώντας τα κλασικά έργα αξιολόγησης εκτιμήσεων που ακολουθούν οι περιορισμένες για τις εκτιμήσεις έρευνες (π.χ., Desli & Giakoumi, 2017; Subramaniam, 2014). Η επιλογή των αντικειμένων για τα οποία ζητήθηκαν εκτιμήσεις ήταν τέτοια ώστε αυτά να αφορούν μικρά και μεσαία αντικείμενα, από τα οποία όλα ήταν πολύ γνωστά στους συμμετέχοντες, για κάποια μάλιστα είχαν και οπτική επαφή.

Το δεύτερο έργο (Έργο 2) εξέταζε τις απόψεις των εκπαιδευτικών για τις εκτιμήσεις και τη σημασία τους στη διδασκαλία των μαθηματικών και την καθημερινή ζωή. Στο έργο αυτό, παρουσιάστηκαν έξι δηλώσεις αυτοαναφοράς και οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να σημειώσουν τον βαθμό συμφωνίας τους χρησιμοποιώντας μια πεντάβαθμη κλίμακα τύπου Likert (από «συμφωνώ καθόλου» έως «συμφωνώ πολύ»). Οι προτάσεις του Έργου 2 παρουσιάζονται στην Εικόνα 2.3.


**1. Εκτιμήστε περίπου (χωρίς τη χρήση εργαλείων):**

α) την περίμετρο ενός φύλλου Α4: .....

Εξηγήστε πώς το βρήκατε:.....

.....

β) το μήκος της παρακάτω συνεχόμενης ευθείας σε συνδετήρες (λαμβάνοντας υπόψη σας τον εικονιζόμενο συνδετήρα):.....



---

Εξηγήστε πώς το βρήκατε:.....

.....

γ) το εμβαδόν ενός ποδοσφαιρικού γηπέδου: .....

Εξηγήστε πώς το βρήκατε:.....

.....

δ) το εμβαδόν ενός σχολικού θρανίου: .....

Εξηγήστε πώς το βρήκατε:.....

.....

ε) το βάρος ενός μαρκαδόρου πίνακα: .....

Εξηγήστε πώς το βρήκατε:.....

.....

στ) το βάρος ενός ελέφαντα: .....

Εξηγήστε πώς το βρήκατε:.....

.....

**Εικόνα 2.2:** Οι δοκιμασίες του Έργου 1

**2. Σημειώστε τον βαθμό συμφωνίας σας στις παρακάτω προτάσεις:**

	Καθόλου	Λίγο	Μέτρια	Αρκετά	Πολύ
Οι εκτιμήσεις είναι χρήσιμες στην καθημερινή ζωή.					
Οι εκτιμήσεις πρέπει να διδάσκονται στο σχολείο.					
Η ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων συμβάλλει στην περαιτέρω ανάπτυξη άλλων μαθηματικών δεξιοτήτων.					
Η ικανότητα εύρεσης απαντήσεων με ακρίβεια είναι σημαντικότερη από την ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων.					
Αισθάνομαι ασφαλής να διδάξω τις εκτιμήσεις.					
Για να είναι κάποιος καλός στις εκτιμήσεις πρέπει να είναι καλός και στους υπολογισμούς με ακρίβεια.					

**Εικόνα 2.3.:** Οι προτάσεις του Έργου 2

Το τρίτο και τελευταίο έργο (**Έργο 3**) ήταν εμπνευσμένο από το ερευνητικό εργαλείο των Pizarro, Gorgorió και Albarracín (2015) και αποσκοπούσε στη διερεύνηση της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των εκτιμήσεων μέτρων. Στο Έργο 3 (Εικόνα 2.4.) αρχικά δόθηκε ένα σενάριο, σύμφωνα με το οποίο παρουσιάζεται η απάντηση ενός μαθητή Ε' τάξης σε μια δραστηριότητα που δόθηκε στην τάξη και περιγράφεται ο τρόπος που ο μαθητής αυτός πραγματοποίησε τη δραστηριότητα. Οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί της έρευνας, αφού διάβασαν το σενάριο, κλήθηκαν να απαντήσουν σε τρεις ερωτήσεις. Στην πρώτη ερώτηση, τους ζητήθηκε να εντοπίσουν και να διατυπώσουν τον διδακτικό στόχο της δραστηριότητας που τους παρουσιάστηκε. Στη δεύτερη ερώτηση, τους ζητήθηκε να σχολιάσουν τη μέθοδο που ακολούθησε ο μαθητής του σεναρίου και στην τρίτη ερώτηση να δώσουν ανατροφοδότηση στον μαθητή του σεναρίου, βασισμένοι στην απάντηση που αυτός έδωσε. Στο συγκεκριμένο σενάριο, ο μαθητής παρουσιάζεται να πραγματοποιεί μετρήσεις με ακρίβεια, ενώ θα έπρεπε να προβεί σε εκτιμήσεις, καθώς αυτό ζητείται από την εκφώνηση της δοθείσας δραστηριότητας. Η συγκεκριμένη επιλογή στο σενάριο προέκυψε από τη μελέτη της βιβλιογραφίας, σύμφωνα με την οποία τα παιδιά προβαίνουν σε ακριβείς υπολογισμούς ακόμα και όταν τους ζητείται να κάνουν εκτιμήσεις (Alajmi, 2009). Οι δοκιμασίες του τρίτου έργου παρουσιάζονται στην Εικόνα 2.5.

3. Η παρακάτω δραστηριότητα δόθηκε σε μαθητές Ε' τάξης.

*«Εκτίμησε πόσες φορές περίπου μπορεί να χωρέσει το τετράγωνο μέσα στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο»*



Ο εκπαιδευτικός, αφού διάβασε το πρόβλημα στους μαθητές, τους ζήτησε να το μελετήσουν για ορισμένα λεπτά. Λίγα λεπτά αργότερα ένας μαθητής, αφού ολοκλήρωσε τη δραστηριότητα, είπε:

*«Αρχικά μέτρησα το μήκος και το πλάτος του τετραγώνου και βρήκα το εμβαδόν του, είναι  $1 \times 1 = 1$  τ.εκ. Στη συνέχεια, μέτρησα το μήκος και το πλάτος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και βρήκα το εμβαδόν του, είναι  $7 \times 11 = 77$  τ.εκ. Έπειτα, κάνοντας διαίρεση,  $77 : 1 = 77$ , κατέληξα ότι το τετράγωνο μπορεί να χωρέσει 77 φορές μέσα στο ορθογώνιο».*

**Εικόνα 2.4:** Σενάριο που αξιοποιήθηκε στο Έργο 3

α) Ποιος πιστεύετε ότι είναι ο σκοπός της συγκεκριμένης δραστηριότητας;.....

.....

β) Πώς σχολιάζετε τη μέθοδο που ακολούθησε ο μαθητής για να βρει το αποτέλεσμα;.....

.....

.....

.....

γ) Αν ήσασταν εσείς ο εκπαιδευτικός της τάξης, ποια θα ήταν η ανατροφοδότησή σας στον συγκεκριμένο μαθητή;.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Εικόνα 2.5.:** Οι δοκιμασίες του Έργου 3

Τα τρία έργα παρουσιάστηκαν σε όλους τους συμμετέχοντες με τη μορφή ερωτηματολογίου. Το ερωτηματολόγιο της παρούσας έρευνας, όπως δόθηκε στους συμμετέχοντες, παρατίθεται στο Παράρτημα Α'.

### 2.3. Διαδικασία

Αρχικά, πραγματοποιήθηκε πιλοτική έρευνα σε τρεις εκπαιδευτικούς οι οποίοι κλήθηκαν πρώτα να συμπληρώσουν το ερωτηματολόγιο και έπειτα να επισημάνουν στην ερευνήτρια τυχόν ασάφειες και αοριστίες, καθώς και τη χρονική διάρκεια που χρειάστηκαν για την ολοκλήρωσή του. Η τελική μορφή του ερωτηματολογίου διαμορφώθηκε μετά τις επισημάνσεις των εκπαιδευτικών. Στη συνέχεια τα ερωτηματολόγια διανεμήθηκαν στο σύνολο των συμμετεχόντων είτε σε έντυπη είτε σε ηλεκτρονική μορφή.

Η διανομή και η συλλογή των ερωτηματολογίων πραγματοποιήθηκε τον Μάρτιο του 2023. Η συμμετοχή στην έρευνα ήταν εθελοντική και ανώνυμη. Όσοι συμμετέχοντες συμπλήρωσαν το ερωτηματολόγιο σε έντυπη μορφή κλήθηκαν να το επιστρέψουν οι ίδιοι στην ερευνήτρια. Το ποσοστό των συμπληρωμένων ερωτηματολογίων που επεστράφησαν έφτασε το 80%. Για τα ερωτηματολόγια που διανεμήθηκαν σε ηλεκτρονική μορφή, αξιοποιήθηκε η πλατφόρμα Google Form και δεν είναι γνωστός ο συνολικός αριθμός των παραληπτών, καθώς το ερωτηματολόγιο εμφανίστηκε σε πολλές ομάδες εκπαιδευτικών.

Ο μέσος χρόνος συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου ήταν περίπου 15-20 λεπτά.

## **Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup> : Αποτελέσματα**

Το παρόν κεφάλαιο αποτελείται από τρία μέρη, στα οποία γίνεται αναλυτική περιγραφή των αποτελεσμάτων, όπως αυτά προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων. Ειδικότερα, στο πρώτο μέρος παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τις επιδόσεις των συμμετεχόντων στο 1<sup>ο</sup> έργο, το οποίο περιείχε τις δοκιμασίες εκτίμησης μέτρων και εξέταζε τη Γνώση Περιεχομένου των εν ενεργεία εκπαιδευτικών. Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου αναλύονται τα αποτελέσματα για το 2<sup>ο</sup> έργο, το οποίο περιείχε έξι προτάσεις σχετικά με τη διδασκαλία των εκτιμήσεων, για να σημειώσουν οι συμμετέχοντες τον βαθμό συμφωνίας τους, χρησιμοποιώντας πεντάβαθμη κλίμακα τύπου Likert. Στο τρίτο και τελευταίο μέρος του κεφαλαίου παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το 3<sup>ο</sup> έργο, το οποίο εξέταζε την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου των συμμετεχόντων για τη διδασκαλία των εκτιμήσεων μέτρων.

### **Μέρος Α' : Αποτελέσματα για το 1<sup>ο</sup> έργο (Γνώση Περιεχομένου)**

#### **3.A.1. Κωδικοποίηση των δεδομένων**

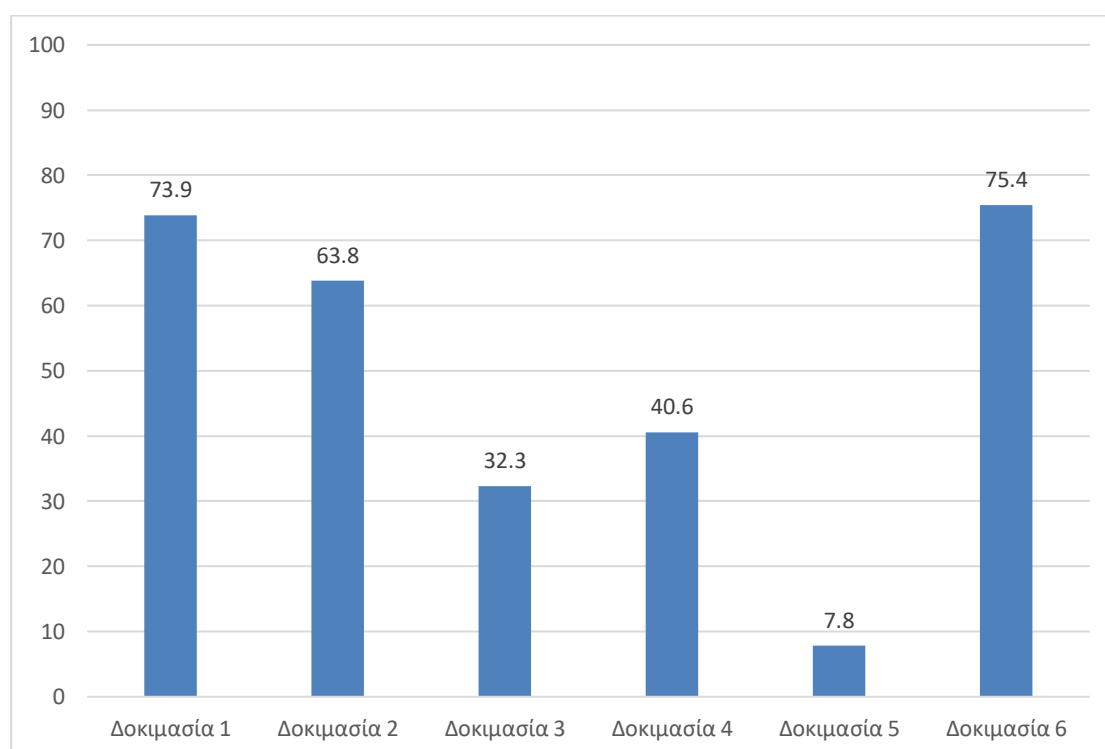
Το 1<sup>ο</sup> έργο εξέταζε τη Γνώση Περιεχομένου που διαθέτουν οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στις εκτιμήσεις μέτρων, μέσω των έξι δοκιμασιών που περιείχε. Σε κάθε σωστή απάντηση δόθηκε ο βαθμός 1, ενώ σε κάθε λανθασμένη απάντηση ο βαθμός 0. Σωστές απαντήσεις θεωρήθηκαν οι απαντήσεις που βρίσκονταν εντός του εύρους του 20% της ακριβούς απάντησης. Η περίμετρος ενός φύλλου A4 (Δοκιμασία 1), για παράδειγμα, είναι 100 εκατοστά. Εφαρμόζοντας το εύρος του 20% της ακριβούς απάντησης, που είναι τα 100 εκατοστά, προκύπτουν τα 80 εκατοστά (-20%) και τα 120 εκατοστά (+20%). Επομένως, σωστές απαντήσεις για τη Δοκιμασία 1 θεωρήθηκαν οι απαντήσεις μεταξύ των 80 εκ. και των 120 εκ. Αυτές οι απαντήσεις βαθμολογήθηκαν με 1, ως σωστές, ενώ όσες απαντήσεις ήταν <80 εκ. ή >120 εκ. βαθμολογήθηκαν με 0, ως λανθασμένες.

#### **3.A.2. Επιδόσεις στις δοκιμασίες εκτίμησης μέτρων**

Η επίδοση των συμμετεχόντων ήταν αρκετά χαμηλή, καθώς από τις 6 δοκιμασίες του έργου της ΓΠ, οι συμμετέχοντες κατά μέσο όρο απαντούσαν σωστά σε

λιγότερες από τις μισές δοκιμασίες (περίπου 48%). Συγκεκριμένα, ο μέσος όρος των σωστών απαντήσεων ήταν 2,93 και η τυπική απόκλιση ήταν 1,336, γεγονός που δείχνει ότι υπήρχε αρκετά μεγάλη ανομοιογένεια στις επιδόσεις των εκπαιδευτικών.

Στη Δοκιμασία 6 («Εκτιμήστε το βάρος ενός ελέφαντα») οι συμμετέχοντες παρουσίασαν το μεγαλύτερο ποσοστό σωστών απαντήσεων (75,4%) με τη Δοκιμασία 1 («Εκτιμήστε την περίμετρο ενός φύλλου A4») και τη Δοκιμασία 2 («Εκτιμήστε το μήκος της παρακάτω συνεχόμενης ευθείας σε συνδετήρες») να ακολουθούν (73,9% και 63,8%, αντίστοιχα). Τα χαμηλότερα ποσοστά σωστών απαντήσεων καταγράφηκαν στη Δοκιμασία 5 («Εκτιμήστε το βάρος ενός μαρκαδόρου πίνακα») με 7,8% και στη Δοκιμασία 3 («Εκτιμήστε το εμβαδόν ενός ποδοσφαιρικού γηπέδου») με 32,3%. Με άλλα λόγια, οι συμμετέχοντες δυσκολεύτηκαν πολύ να εκτιμήσουν το βάρος ενός μαρκαδόρου πίνακα, παρόλο που είναι ένα αντικείμενο καθημερινής χρήσης του επαγγέλματος, αλλά δεν δυσκολεύτηκαν να εκτιμήσουν το βάρος ενός ελέφαντα, που αποτελεί μεγάλο αντικείμενο και καθόλου οικείο από την καθημερινή ζωή. Δυσκολεύτηκαν, επίσης, αρκετά στην εκτίμηση εμβαδού, τόσο για μεγάλες επιφάνειες όπως ένα ποδοσφαιρικό γήπεδο (32,3% των συμμετεχόντων απάντησε σωστά) όσο και για μικρές επιφάνειες όπως ένα σχολικό θρανίο (40,6% των συμμετεχόντων απάντησε σωστά). Οι συμμετέχοντες δεν είχαν δυσκολία στις εκτιμήσεις μήκους. Τα ποσοστά σωστών απαντήσεων ανά δοκιμασία φαίνονται αναλυτικά στο Σχήμα 3.1.



**Σχήμα 3.1.:** Ποσοστό επιτυχίας συμμετεχόντων στις δοκιμασίες της Γνώσης Περιεχομένου (Έργο 1)

Οι περισσότεροι συμμετέχοντες (18 άτομα) απάντησαν σωστά σε 4 από τις 6 δοκιμασίες. Αναλυτικότερα, 4 σωστές απαντήσεις έδωσε το 23,1% των εκπαιδευτικών με 0-5 χρόνια υπηρεσίας, οι μισοί εκπαιδευτικοί (50%) με 6-10 χρόνια υπηρεσίας, το 43% των εκπαιδευτικών με 11-20 χρόνια και το 27,6% των πολύ έμπειρων εκπαιδευτικών με περισσότερα από 20 χρόνια υπηρεσίας. Δεκαέξι (16) συμμετέχοντες απάντησαν σωστά σε 3 δοκιμασίες, το 15,4% εκ των οποίων είχε 0-5 χρόνια υπηρεσίας, το 21,4% 11-20 χρόνια υπηρεσίας και το 37,9% είχε περισσότερα από 21 χρόνια υπηρεσίας. Κανένας συμμετέχοντας δεν κατάφερε να απαντήσει σωστά σε όλες τις δοκιμασίες. Ωστόσο, οι πιο έμπειροι εκπαιδευτικοί έτειναν να απαντούν σωστά σε πάνω από τις μισές δοκιμασίες, σε αντίθεση με τους λιγότερο έμπειρους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι συνήθως απαντούσαν σωστά σε λιγότερες από τις μισές δοκιμασίες. Αναλυτικά, τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.1. που ακολουθεί.

**Πίνακας 3.1.:** Αριθμός εκπαιδευτικών που απάντησαν σωστά στις δοκιμασίες Γνώσης Περιεχομένου ως προς τα χρόνια προϋπηρεσίας

Αριθμός δοκιμασιών	Χρόνια προϋπηρεσίας							
	0-5 χρόνια		6-10 χρόνια		11-20 χρόνια		21+ χρόνια	
	N	%	N	%	N	%	N	%
0 δοκιμασίες	2	15,4	-	-	-	-	1	3,5
1 δοκιμασία	2	15,4	-	-	3	21,4	2	6,9
2 δοκιμασίες	4	30,7	1	50	1	7,1	3	10,3
3 δοκιμασίες	2	15,4	-	-	3	21,4	11	37,9
4 δοκιμασίες	3	23,1	1	50	6	43	8	27,6
5 δοκιμασίες	-	-	-	-	1	7,1	4	13,8
<b>Σύνολο<sup>3</sup></b>	<b>13</b>	<b>100</b>	<b>2</b>	<b>100</b>	<b>14</b>	<b>100</b>	<b>29</b>	<b>100</b>

<sup>3</sup> Στην παρούσα εργασία, η απόλυτη και σχετική συχνότητα των συμμετεχόντων όπως παρουσιάζονται στους πίνακες και στα σχήματα, αφορούν τον συνολικό αριθμό των συμμετεχόντων που απάντησαν στην εκάστοτε δοκιμασία. Αν, δηλαδή, ένας συμμετέχοντας δεν απάντησε σε κάποια δοκιμασία αφαιρείται από το σύνολο των συμμετεχόντων της συγκεκριμένης δοκιμασίας.



Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.2., οι περισσότεροι μόνιμοι εκπαιδευτικοί απάντησαν σωστά σε 3 δοκιμασίες (29,8%) και σε 4 δοκιμασίες (34,1%). Αντίθετα, οι περισσότεροι αναπληρωτές εκπαιδευτικοί (36,3%) απάντησαν σωστά σε 2 από τις 6 δοκιμασίες. Επίσης, αν και το 10,6% των μόνιμων εκπαιδευτικών κατάφερε να απαντήσει σωστά σε 5 από τις 6 δοκιμασίες, κανένας αναπληρωτής συμμετέχοντας δεν κατάφερε να απαντήσει σωστά σε περισσότερες από 4 δοκιμασίες.

**Πίνακας 3.2.:** Αριθμός εκπαιδευτικών που απάντησαν σωστά στις δοκιμασίες Γνώσης Περιεχομένου ως προς τη σχέση εργασίας

Αριθμός δοκιμασιών	Σχέση εργασίας			
	Μόνιμοι		Αναπληρωτές	
	<i>N</i>	%	<i>N</i>	%
0 δοκιμασίες	2	4,3	1	9,1
1 δοκιμασία	5	10,6	2	18,2
2 δοκιμασίες	5	10,6	4	36,3
3 δοκιμασίες	14	29,8	2	18,2
4 δοκιμασίες	16	34,1	2	18,2
5 δοκιμασίες	5	10,6	-	-
<b>Σύνολο</b>	<b>47</b>	<b>100</b>	<b>11</b>	<b>100</b>

### 3.A.3. Χρήση στρατηγικών στις δοκιμασίες εκτίμησης

Στο πρώτο έργο, οι συμμετέχοντες καλούνταν, αμέσως μετά την εκτίμηση που πραγματοποιούσαν, να εξηγήσουν την απάντησή τους. Οι εξηγήσεις που δόθηκαν ταξινομήθηκαν σε έξι κατηγορίες απαντήσεων, καθεμία από τις οποίες φανερώνει τη στρατηγική που ακολούθησαν οι συμμετέχοντες. Αναλυτικότερα, οι κατηγορίες απαντήσεων με τους κωδικούς που δόθηκαν σε καθεμία είναι οι εξής:

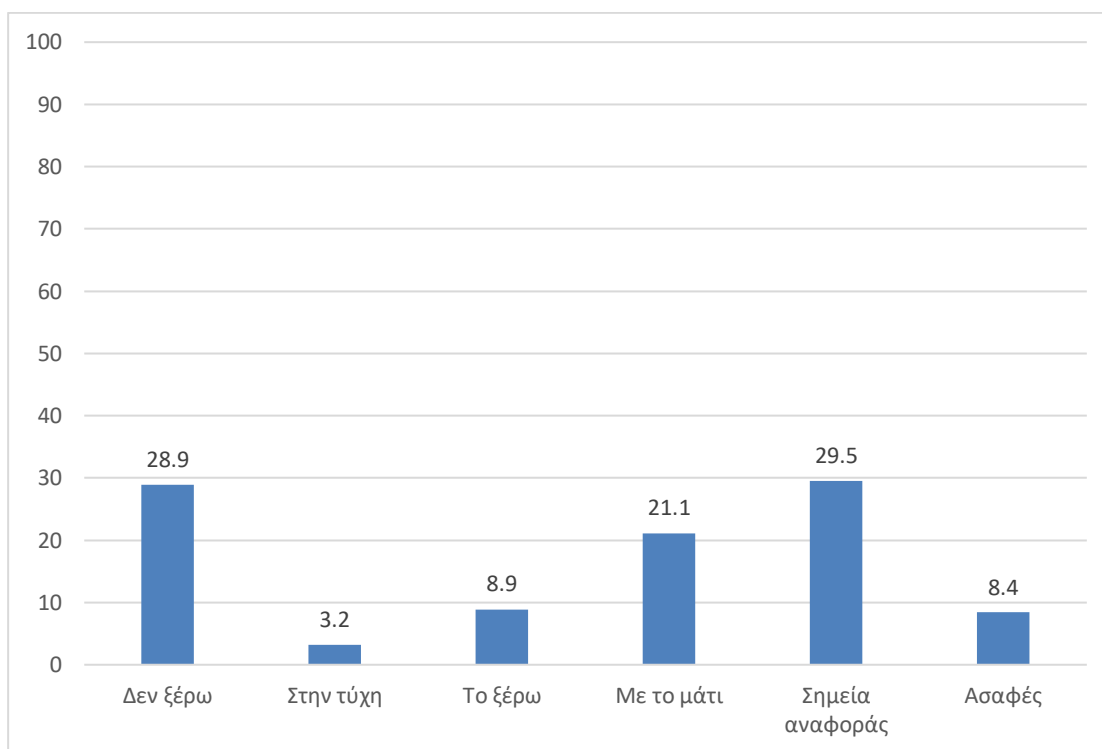
- **0 – Δεν ξέρω.** Όσοι δεν μπορούσαν να αιτιολογήσουν την απάντησή τους και κατέφευγαν σε μη αιτιολογημένες και γενικευμένες απαντήσεις έλαβαν τον κωδικό 0. Χαρακτηριστικές φράσεις που κωδικοποιούνταν με 0 είναι οι εξής: «Δεν ξέρω», «Έκανα εκτίμηση».
- **1 – Στην τύχη.** Τον κωδικό 1 έλαβαν οι απαντήσεις που δόθηκαν στην τύχη ή προέκυψαν με εικασίες. Παραδείγματα τέτοιων απαντήσεων αποτελούν οι φράσεις «απάντησα στην τύχη», «έκανα απλή υπόθεση» και «απάντησα εντελώς υποθετικά».
- **2 – Το ξέρω.** Ο κωδικός 2 δόθηκε για τις απαντήσεις στις οποίες οι συμμετέχοντες ανέφεραν ότι γνωρίζουν την απάντηση. Για παράδειγμα, μια εκπαιδευτικός με 18 χρόνια προϋπηρεσίας για τη Δοκιμασία 1 (εκτίμηση περιμέτρου φύλλου Α4) εξήγησε: «Ξέρω ότι οι διαστάσεις ενός φύλλου Α4 είναι περίπου 30x20, άρα περίπου 100εκ.» και μια άλλη εκπαιδευτικός με 4 χρόνια προϋπηρεσίας για τη Δοκιμασία 6 (εκτίμηση βάρους ελέφαντα) είπε: «Το θυμόμουν από εγκυκλοπαίδεια, περίπου 5 τόνοι». Ακόμη, ένας άντρας με 27 χρόνια προϋπηρεσίας για τη Δοκιμασία 3 (εκτίμηση εμβαδού ποδοσφαιρικού γηπέδου) ανέφερε: «Γνωρίζω ότι ένα ποδοσφαιρικό γήπεδο έχει διαστάσεις από 100-110 μ. μήκος με 70 μ. πλάτος περίπου, άρα το εμβαδόν είναι περίπου 7.700 τ.μ.». Επομένως, φράσεις όπως «το γνωρίζω» και «το έχω διαβάσει» ήταν χαρακτηριστικές φράσεις που έλαβαν τον κωδικό 2.
- **3 – Με το μάτι.** Οι απαντήσεις που δόθηκαν έπειτα από εκτίμηση με το μάτι ή που αιτιολογήθηκαν με αναφορές στις εμπειρίες των συμμετεχόντων κωδικοποιήθηκαν με τον κωδικό 3. Η στρατηγική αυτή χρησιμοποιήθηκε ιδιαίτερα στη Δοκιμασία 2 (εκτίμηση μήκους δοθείσας ευθείας σε συνδετήρες), όπου για παράδειγμα μία εκπαιδευτικός με 4 χρόνια προϋπηρεσίας εξήγησε: «Με το μάτι τοποθέτησα τους συνδετήρες στη σειρά, αντιστοιχούν περίπου 8 συνδετήρες στην ευθεία» και ένας εκπαιδευτικός με 21 χρόνια προϋπηρεσίας είπε: «Εκτίμησα με το μάτι το μήκος του συνδετήρα και έβαλα σε παράταξη εικονικούς συνδετήρες, είναι περίπου το μήκος 9-10 συνδετήρων». Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν και οι απαντήσεις που προέρχονταν από τις εμπειρίες των συμμετεχόντων. Μία τέτοια απάντηση, που έδωσε μια εκπαιδευτικός με 26 χρόνια προϋπηρεσίας για τη Δοκιμασία 5 (εκτίμηση βάρους μαρκαδόρου πίνακα), είναι η εξής: «Το βάρος του μαρκαδόρου το βρήκα

*εμπειρικά από τη συνεχή χρήση, είναι περίπου 10 γραμμάρια». Οι φράσεις «με το μάτι» και «εμπειρικά», επομένως, αποτελούσαν χαρακτηριστικές φράσεις που λάμβαναν τον κωδικό 3.*

- **4 – Σημεία αναφοράς.** Ο κωδικός 4 δόθηκε στις απαντήσεις που οι συμμετέχοντες ανέφεραν, πως κατά την εκτίμησή τους χρησιμοποίησαν κάποιο σημείο αναφοράς. Για παράδειγμα, ένας συμμετέχων με 36 χρόνια προϋπηρεσίας για τη Δοκιμασία 6 (εκτίμηση βάρους ελέφαντα) είπε: *«Έχει το βάρος περίπου ενός μικρού φορτηγού, δηλαδή περίπου 6 τόνοι»* και ένας άλλος με 35 χρόνια προϋπηρεσίας, για την ίδια δοκιμασία, ανέφερε: *«Υπολόγισα τέσσερις φορές το βάρος του αυτοκινήτου μου, περίπου 4 τόνοι»*. Για τη Δοκιμασία 4 (εκτίμηση εμβαδού σχολικού θρανίου), μια γυναίκα με 8 χρόνια προϋπηρεσίας εξήγησε: *«Η επιφάνεια ενός θρανίου μπορεί να καλυφθεί με 10 κόλλες A4, κάθε κόλλα A4 έχει περίμετρο περίπου 100 εκ., άρα το εμβαδόν είναι περίπου  $10 \times 100 = 1000$  τ.εκ.»*. Όλες οι παρόμοιες απαντήσεις, στις οποίες χρησιμοποιήθηκε η στρατηγική των σημείων αναφοράς, έλαβαν τον κωδικό 4.
- **5 – Ασαφές.** Ο κωδικός 5 δημιουργήθηκε για τις εξηγήσεις που δεν εντάσσονται σε καμία από τις παραπάνω περιπτώσεις. Παραδείγματα τέτοιων εξηγήσεων που κωδικοποιήθηκαν με 5 είναι *«με μαθηματική πράξη»*, *«με στρογγυλοποίηση»* και *«ρώτησα το διαδίκτυο»*.

Από την ανάλυση της συχνότητας χρήσης των στρατηγικών προέκυψε ότι η πιο συχνή στρατηγική που χρησιμοποιήθηκε είναι αυτή των *«σημείων αναφοράς»*, καθώς η συγκεκριμένη στρατηγική αναφέρθηκε στο 29,5% των εξηγήσεων που δόθηκαν. Φάνηκε, δηλαδή, ότι οι εκπαιδευτικοί προτιμούσαν να χρησιμοποιούν κάποιο σημείο αναφοράς, για να πραγματοποιήσουν τις εκτιμήσεις μέτρων. Τα σημεία αναφοράς που αξιοποίησαν ήταν ποικίλα, καθώς έγιναν αναφορές σε συγκρίσεις με βάση την παλάμη τους και διάφορα οικεία αντικείμενά τους, όπως το στυλό, η σοκολάτα και το αυτοκίνητό τους. Για παράδειγμα, μια εκπαιδευτικός με 3 χρόνια προϋπηρεσίας, για να εκτιμήσει το βάρος ενός μαρκαδόρου πίνακα, έκανε σύγκριση με μια σοκοφρέτα αναφέροντας: *«Την εκτίμηση την έκανα καθώς συνέκρινα με μια σοκοφρέτα 40 γραμμαρίων με τον μαρκαδόρο. Ο μαρκαδόρος ζυγίζει περίπου 50 γραμμάρια»*. Ωστόσο, έχει ενδιαφέρον ότι περίπου 1 στους 3 (28,9%) δεν ήταν σε θέση να αιτιολογήσει πώς κατέληξε στις εκτιμήσεις που έκανε. Αρκετοί εκπαιδευτικοί, δηλαδή, αν και πραγματοποίησαν τις ζητούμενες εκτιμήσεις, δεν γνώριζαν ή δεν μπορούσαν να

αιτιολογήσουν πώς προέκυψε η εκτίμηση που εκτέλεσαν. Το 21,1% των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών, για την πραγματοποίηση των εκτιμήσεων, αξιοποίησε τη στρατηγική «Με το μάτι». Οι εκπαιδευτικοί αυτοί επέλεξαν να εκτιμήσουν είτε με το μάτι ή είτε με βάση τις προηγούμενες εμπειρίες που διέθεταν. Αναλυτικά, η συχνότητα χρήσης κάθε στρατηγικής παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.2.



**Σχήμα 3.2.:** Συχνότητα χρήσης στρατηγικών στις δοκιμασίες εκτίμησης στο έργο Γνώσης Περιεχομένου

Βλέποντας κάθε δοκιμασία ξεχωριστά φαίνεται ότι οι συμμετέχοντες προτιμούν συγκεκριμένες στρατηγικές. Οι Πίνακες 3.3 έως και 3.8. δείχνουν τη συχνότητα χρήσης των στρατηγικών σε κάθε μία δοκιμασία ξεχωριστά. Ειδικότερα, στη Δοκιμασία 1 («*Εκτιμήστε την περίμετρο ενός φύλλου Α4*») χρησιμοποιήθηκαν περισσότερο τα σημεία αναφοράς με 34,3% (Πίνακας 3.3.). Η πλειονότητα των συμμετεχόντων (περίπου το 69,5%) που αξιοποίησε τα σημεία αναφοράς, χρησιμοποίησε ως μέσο εύρεσης της απάντησης την παλάμη του χεριού. Για παράδειγμα, μία αναπληρώτρια εκπαιδευτικός με 5 χρόνια προϋπηρεσίας εξήγησε: «*Το άνοιγμα της παλάμης μου είναι 20 εκ. Το μήκος του χαρτιού είναι περίπου μιάμιση παλάμη και το πλάτος μία. Κάνω πρόσθεση τις πλευρές και βρίσκω ότι η περίμετρος είναι περίπου 100εκ*». Επιπλέον, ως σημείο αναφοράς για τη συγκεκριμένη δοκιμασία

αναφέρθηκε και ο χάρακας, με βάση τον οποίο συγκρίθηκαν και εκτιμήθηκαν οι πλευρές του φύλλου Α4. Για παράδειγμα, μια εκπαιδευτικός με 22 χρόνια προϋπηρεσίας εξήγησε: «Πιστεύω ότι το μήκος είναι όσο περίπου ένας μεγάλος χάρακας 25 εκ. Και το πλάτος είναι από 15 μέχρι 20 εκ. Επομένως, η περίμετρος ενός φύλλου Α4 είναι 80-90εκ.». Αξίζει ακόμα να αναφερθεί ότι, από το σύνολο των συμμετεχόντων που χρησιμοποίησε τα σημεία αναφοράς και έδωσε απάντηση, το 71,4% απάντησε σωστά. Ωστόσο, ένα σημαντικό ποσοστό συμμετεχόντων (28,4%) δεν ήταν σε θέση να αιτιολογήσει πώς πραγματοποίησε την απαιτούμενη εκτίμηση για τη συγκεκριμένη δοκιμασία.

**Πίνακας 3.3.:** Συχνότητα χρήσης στρατηγικών στην 1<sup>η</sup> δοκιμασία (περίμετρος φύλλου Α4)

Στρατηγική	N	%
0 – Δεν ξέρω	19	28,4
1 – Στην τύχη	-	-
2 – Το ξέρω	7	10,4
3 – Με το μάτι	14	20,9
4 – Σημεία αναφοράς	23	34,3
5 - Ασαφές	4	6
<b>Σύνολο</b>	<b>67</b>	<b>100</b>

Στη Δοκιμασία 2 («Εκτιμήστε το μήκος της παρακάτω συνεχόμενης ευθείας σε συνδετήρες») αξιοποιήθηκε περισσότερο η στρατηγική 3 («Με το μάτι»), αφού δόθηκε στο 41,3% των απαντήσεων (Πίνακας 3.4.). Αρκετοί εκπαιδευτικοί, λοιπόν, στη συγκεκριμένη δοκιμασία επέλεξαν να εκτιμήσουν το μήκος της δοθείσας ευθείας με το μάτι. Για παράδειγμα, μια εκπαιδευτικός με 4 χρόνια προϋπηρεσίας αναφέρει: «Με το μάτι τοποθέτησα τους συνδετήρες στη σειρά, αντιστοιχούν περίπου 8 συνδετήρες στην ευθεία». Το 28,6% των συμμετεχόντων χρησιμοποίησε τη στρατηγική των σημείων αναφοράς, οι περισσότεροι από τους οποίους αξιοποίησαν ως σημείο αναφοράς το δάχτυλό τους ή κάποιο μέρος αυτού (π.χ., το νύχι τους). Για παράδειγμα, μια εκπαιδευτικός με 28 χρόνια προϋπηρεσίας έγραψε: «Χρησιμοποίησα το δάχτυλό μου και βρήκα ότι χωράνε 10 δάχτυλα στη γραμμή. Ο συνδετήρας είναι 1,5 δάχτυλο, άρα χωράει περίπου 7 φορές». Ακόμη, χρησιμοποιήθηκαν ως σημεία αναφοράς γόμες και

συνδετήρες παρόμοιου μεγέθους με τον δοθέντα εικονικό συνδετήρα, καθώς επίσης και μολύβια και στυλό.

**Πίνακας 3.4.:** Συχνότητα χρήσης στρατηγικών στην 2<sup>η</sup> δοκιμασία (μήκος ευθείας σε συνδετήρες)

Στρατηγική	N	%
0 – Δεν ξέρω	15	23,8
1 – Στην τύχη	-	-
2 – Το ξέρω	-	-
3 – Με το μάτι	26	41,3
4 – Σημεία αναφοράς	18	28,6
5 - Ασαφές	4	6,3
<b>Σύνολο</b>	<b>63</b>	<b>100</b>

Στη Δοκιμασία 3 («Εκτιμήστε το εμβαδόν ενός ποδοσφαιρικού γηπέδου») και τη Δοκιμασία 4 («Εκτιμήστε το εμβαδόν ενός σχολικού θρανίου») σχεδόν οι μισές απαντήσεις (43,1% και 48,5%, αντίστοιχα) ήταν μη αιτιολογημένες και οι συμμετέχοντες δεν μπόρεσαν να εξηγήσουν πώς κατέληξαν στο εκάστοτε αποτέλεσμα (Πίνακας 3.5. και Πίνακας 3.6., αντίστοιχα). Φαίνεται, λοιπόν, ότι οι εκτιμήσεις εμβαδού, δυσκόλεψαν πολλούς εκπαιδευτικούς, καθώς δεν κατάφεραν να αξιοποιήσουν καμιά στρατηγική για την πραγματοποίηση των εκτιμήσεών τους. Η στρατηγική 4 («Σημεία αναφοράς») χρησιμοποιήθηκε από το 24,6% των συμμετεχόντων για την 3<sup>η</sup> δοκιμασία και από το 27,3% των συμμετεχόντων για την 4<sup>η</sup> δοκιμασία. Ειδικότερα, για τη Δοκιμασία 3, το 75% του συνόλου των εκπαιδευτικών που αξιοποίησε τη στρατηγική των σημείων αναφοράς, χρησιμοποίησε ως σημεία αναφοράς τα βήματα και το άνοιγμα των ποδιών. Άλλα σημεία αναφοράς που αξιοποιήθηκαν αφορούσαν συγκρίσεις με το ύψος ενός ανθρώπου και με τις διαστάσεις σπιτιού.

Στη Δοκιμασία 4, από τους 18 συμμετέχοντες που χρησιμοποίησαν τα σημεία αναφοράς, οι 10 (περίπου το 55,5%) ανέφεραν ότι εκτίμησαν το εμβαδόν ενός σχολικού θρανίου με βάση την παλάμη τους. Άλλα σημεία αναφοράς που αξιοποιήθηκαν σχετίζονταν με συγκρίσεις με κόλλες A4, με το άνοιγμα χεριού και το άνοιγμα αντίχειρα και δείκτη και με χάρακα. Ενδιαφέρουσα είναι η εξήγηση μιας

εκπαιδευτικού με 19 χρόνια προϋπηρεσίας, η οποία αναφέρει: «Στο θρανίο κάθονται 2 μαθητές. Ο καθένας έχει παραπάνω από μισό μέτρο, αν σκεφτούμε τα χέρια τους. Επίσης, χωράει άνετα ένα βιβλίο στο πλάτος του θρανίου, άρα  $110 \times 50 = 5500 \text{τ.εκ.}$ ». Με το σκεπτικό αυτό η συγκεκριμένη εκπαιδευτικός κατέληξε σε επιτυχή εκτίμηση για το εμβαδόν ενός σχολικού θρανίου.

**Πίνακας 3.5.:** Συχνότητα χρήσης στρατηγικών στην 3<sup>η</sup> δοκιμασία (εμβαδόν ποδοσφαιρικού γηπέδου)

Στρατηγική	N	%
0 – Δεν ξέρω	28	43,1
1 – Στην τύχη	3	4,6
2 – Το ξέρω	9	13,9
3 – Με το μάτι	3	4,6
4 – Σημεία αναφοράς	16	24,6
5 - Ασαφές	6	9,2
<b>Σύνολο</b>	<b>65</b>	<b>100</b>

**Πίνακας 3.6.:** Συχνότητα χρήσης στρατηγικών στην 4<sup>η</sup> δοκιμασία (εμβαδόν σχολικού θρανίου)

Στρατηγική	N	%
0 – Δεν ξέρω	32	48,5
1 – Στην τύχη	2	3
2 – Το ξέρω	2	3
3 – Με το μάτι	7	10,6
4 – Σημεία αναφοράς	18	27,3
5 - Ασαφές	5	7,6
<b>Σύνολο</b>	<b>66</b>	<b>100</b>

Στη Δοκιμασία 5 («Εκτιμήστε το βάρος ενός μαρκαδόρου πίνακα») χρησιμοποιήθηκε η στρατηγική «Με το μάτι» από το 41% των συμμετεχόντων (Πίνακας 3.7.). Πιο συγκεκριμένα, οι εκπαιδευτικοί αξιοποίησαν την εμπειρία που είχαν από τη συνεχή χρήση του αντικειμένου και πραγματοποίησαν εκτιμήσεις για το βάρος του. Το 29,5% χρησιμοποίησε σημεία αναφοράς και έκανε συγκρίσεις,

προκειμένου να επιτευχθούν οι εκτιμήσεις. Ως σημεία αναφοράς αναφέρθηκαν το γλειφιτζούρι, η σοκολάτα, η σοκοφρέτα, το τετράδιο, το κινητό και τα βαρίδια.

**Πίνακας 3.7.:** Συχνότητα χρήσης στρατηγικών στην 5<sup>η</sup> δοκιμασία (βάρος μαρκαδόρου πίνακα)

Στρατηγική	N	%
0 – Δεν ξέρω	7	11,5
1 – Στην τύχη	4	6,5
2 – Το ξέρω	-	-
3 – Με το μάτι	25	41
4 – Σημεία αναφοράς	18	29,5
5 - Ασαφές	7	11,5
<b>Σύνολο</b>	<b>61</b>	<b>100</b>

Για την τελευταία δοκιμασία, τη Δοκιμασία 6 («*Εκτιμήστε το βάρος ενός ελέφαντα*»), το 32,8% των συμμετεχόντων επέλεξε να χρησιμοποιήσει τη στρατηγική 4 («*Σημεία αναφοράς*») (Πίνακας 3.8.). Τα σημεία αναφοράς αφορούσαν συγκρίσεις με το βάρος του ανθρώπου, οχημάτων (φορτηγά και αυτοκίνητα), μηχανημάτων και άλλων ζώων (αγελάδα και άλογο). Το 27,6% των εκπαιδευτικών χρησιμοποίησε γνώσεις που ήδη είχε, είτε από βιβλία είτε από ντοκιμαντέρ, για την εύρεση της απάντησης.

**Πίνακας 3.8.:** Συχνότητα χρήσης στρατηγικών στην 6<sup>η</sup> δοκιμασία (βάρος ελέφαντα)

Στρατηγική	N	%
0 – Δεν ξέρω	9	15,5
1 – Στην τύχη	3	5,2
2 – Το ξέρω	16	27,6
3 – Με το μάτι	5	8,6
4 – Σημεία αναφοράς	19	32,8
5 - Ασαφές	6	10,3
<b>Σύνολο</b>	<b>58</b>	<b>100</b>



## Μέρος Β' : Αποτελέσματα για το 2<sup>ο</sup> έργο

### 3.B.1. Κωδικοποίηση των δεδομένων

Στο 2<sup>ο</sup> έργο οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να σημειώσουν τον βαθμό συμφωνίας τους μέσω μιας πεντάβαθμης κλίμακας τύπου Likert (από «συμφωνώ καθόλου»... έως «συμφωνώ πολύ»), σε έξι δηλώσεις σχετικές με τις εκτιμήσεις και τη διδασκαλία τους. Κατά την ανάλυση των αποτελεσμάτων ακολουθήθηκε η εξής κωδικοποίηση: τον κωδικό 1 έλαβαν όσοι είχαν επιλέξει «*συμφωνώ καθόλου*», τον κωδικό 2 όσοι είχαν επιλέξει «*συμφωνώ λίγο*», τον κωδικό 3 όσοι είχαν επιλέξει «*συμφωνώ μέτρια*», τον κωδικό 4 όσοι είχαν επιλέξει «*συμφωνώ αρκετά*» και τον κωδικό 5 όσοι είχαν επιλέξει «*συμφωνώ πολύ*». Ο μεγαλύτερος αριθμός στην κωδικοποίηση, δηλαδή, αντιπροσώπευε τον μεγαλύτερο βαθμό συμφωνίας.

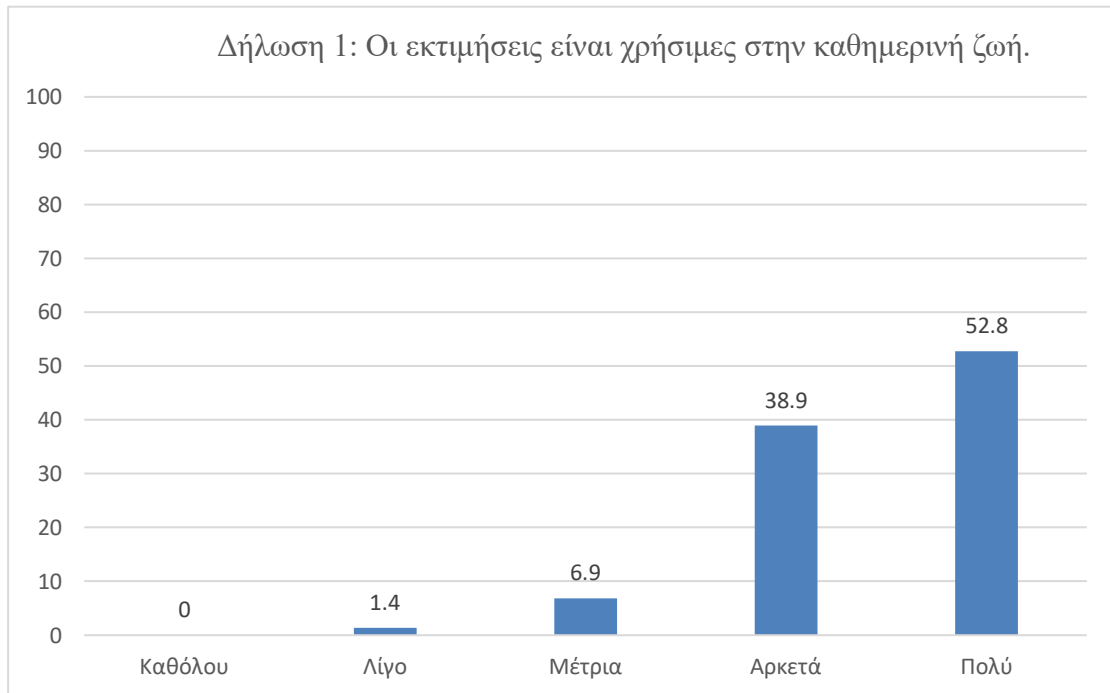
### 3.B.2. Ανάλυση αποτελεσμάτων για το Έργο 2

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων προέκυψε ότι για τη Δήλωση 1 («*Οι εκτιμήσεις είναι χρήσιμες στην καθημερινή ζωή*») ο μέσος όρος των απαντήσεων των εκπαιδευτικών της έρευνας ήταν 4,43, απαντούσαν, δηλαδή, ως επί το πλείστον, είτε ότι συμφωνούν αρκετά είτε ότι συμφωνούν πολύ. Παρόμοια αποτελέσματα βρέθηκαν και για τις Δηλώσεις 2 και 3 («*Οι εκτιμήσεις πρέπει να διδάσκονται στο σχολείο*» και «*Η ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων συμβάλλει στην περαιτέρω ανάπτυξη άλλων μαθηματικών δεξιοτήτων*») με τους συμμετέχοντες να συμφωνούν από αρκετά έως πολύ, καθώς ο μέσος όρος για τη Δήλωση 2 ήταν 4,31 και για τη Δήλωση 3 ήταν 4,35. Χαμηλότερο μέσο όρο είχαν οι επόμενες τρεις δηλώσεις («*Η ικανότητα εύρεσης απαντήσεων με ακρίβεια είναι σημαντικότερη από την ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων*», «*Αισθάνομαι ασφαλής να διδάξω τις εκτιμήσεις*» και «*Για να είναι κάποιος καλός στις εκτιμήσεις πρέπει να είναι καλός και στους υπολογισμούς με ακρίβεια*»), δείχνοντας ότι η γνώμη των εκπαιδευτικών ήταν κάπου στη μέση και δεν έτειναν στο να διαφωνούν ή να συμφωνούν πολύ. Αναλυτικά οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις για κάθε δήλωση παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.9.

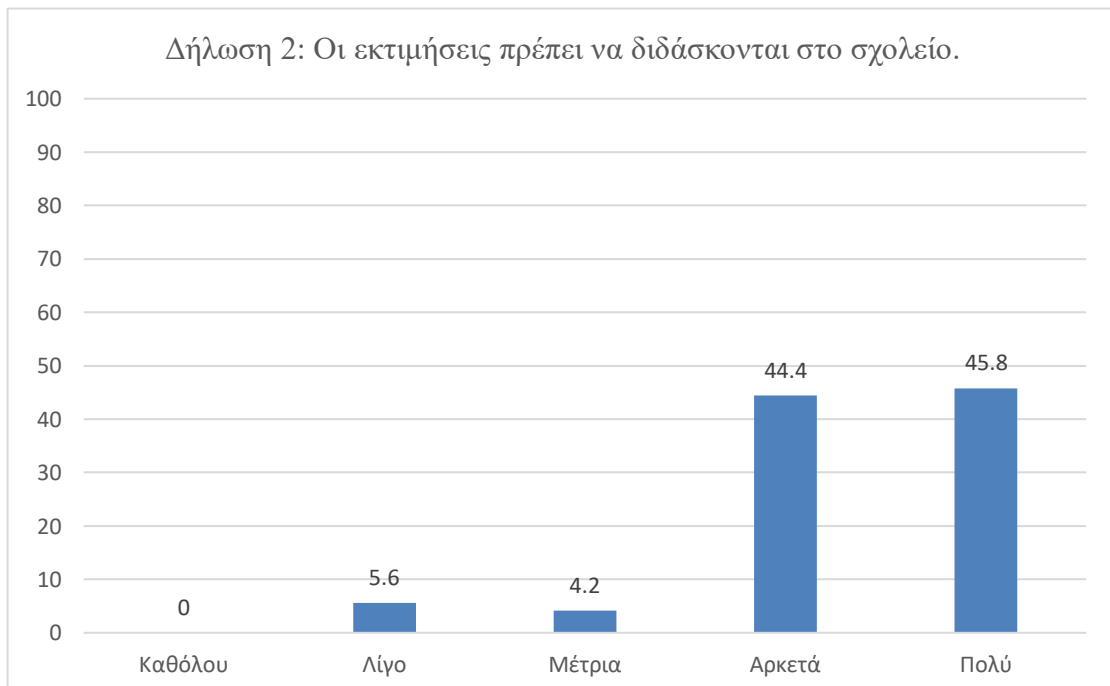
**Πίνακας 3.9.** Μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις στις δηλώσεις του Έργου 2

Δηλώσεις	M.O.	Τυπική απόκλιση
1. Οι εκτιμήσεις είναι χρήσιμες στην καθημερινή ζωή.	4,43	,688
2. Οι εκτιμήσεις πρέπει να διδάσκονται στο σχολείο.	4,31	,799
3. Η ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων συμβάλλει στην περαιτέρω ανάπτυξη άλλων μαθηματικών δεξιοτήτων.	4,35	,754
4. Η ικανότητα εύρεσης απαντήσεων με ακρίβεια είναι σημαντικότερη από την ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων.	3,10	1,280
5. Αισθάνομαι ασφαλής να διδάξω τις εκτιμήσεις.	3,56	,933
6. Για να είναι κάποιος καλός στις εκτιμήσεις πρέπει να είναι καλός και στους υπολογισμούς με ακρίβεια.	3,54	1,138

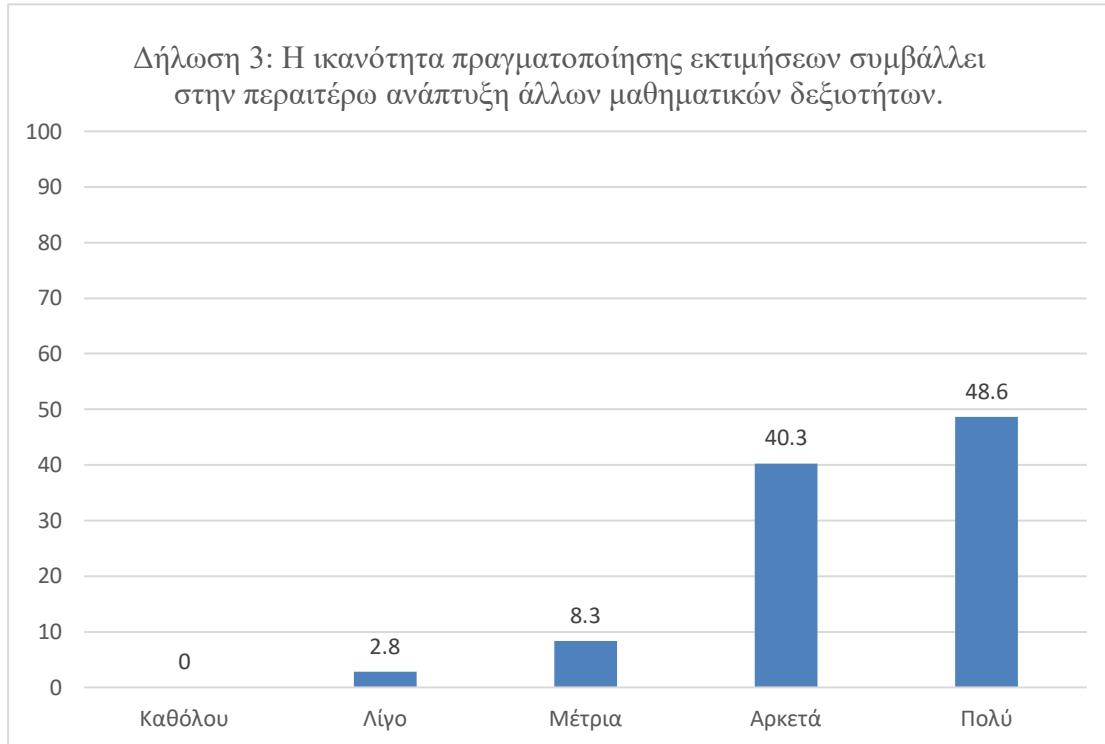
Πιο συγκεκριμένα, η Δήλωση 1 είχε το μεγαλύτερο ποσοστό συμφωνίας, καθώς το 52,8% των συμμετεχόντων συμφώνησε πολύ, το 38,9% συμφώνησε αρκετά και κανένας δεν διαφώνησε (Σχήμα 3.3.). Περισσότεροι από τους μισούς εκπαιδευτικούς, δηλαδή, συμφώνησαν για τη χρησιμότητα των εκτιμήσεων στην καθημερινή ζωή. Η πλειονότητα των εκπαιδευτικών συμφώνησε, επίσης, για την αναγκαιότητα της διδασκαλίας των εκτιμήσεων στο σχολείο, καθώς η Δήλωση 2 είχε τα δεύτερα μεγαλύτερα ποσοστά συμφωνίας (το 45,8% των συμμετεχόντων συμφώνησε πολύ, το 44,4% συμφώνησε αρκετά και κανένας δεν επέλεξε το συμφωνώ καθόλου) (Σχήμα 3.4.). Υπήρχαν, ωστόσο, 4 εκπαιδευτικοί (5,6%) που δήλωσαν πως συμφωνούν λίγο με τη διδασκαλία των εκτιμήσεων στο σχολείο. Παρόμοια αποτελέσματα βρέθηκαν και για τη Δήλωση 3 (Σχήμα 3.5.), με το 48,6% των εκπαιδευτικών της έρευνας να έχει συμφωνήσει πολύ και το 40,3% να έχει συμφωνήσει αρκετά, ότι η ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων συμβάλλει στην περαιτέρω ανάπτυξη άλλων μαθηματικών δεξιοτήτων.



**Σχήμα 3.3.:** Ποσοστά συμφωνίας των εκπαιδευτικών στη Δήλωση 1



**Σχήμα 3.4.:** Ποσοστά συμφωνίας των εκπαιδευτικών στη Δήλωση 2



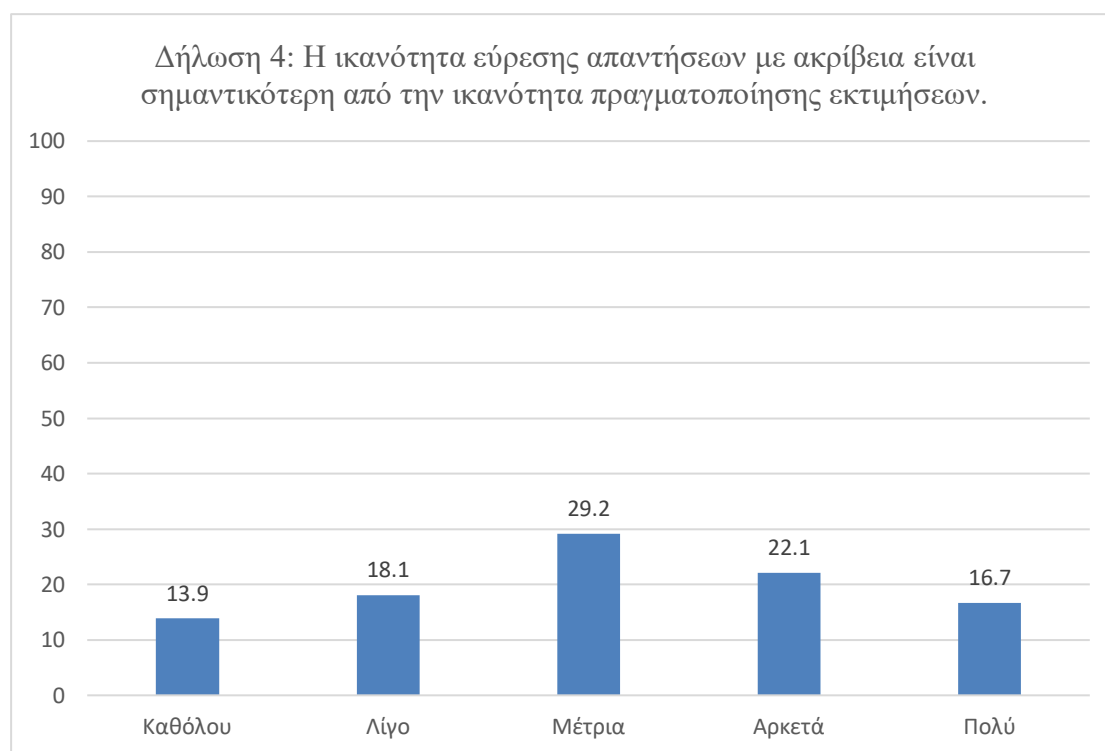
**Σχήμα 3.5.:** Ποσοστά συμφωνίας των εκπαιδευτικών στη Δήλωση 3

Η Δήλωση 4 (Σχήμα 3.6.), συγκριτικά με τις υπόλοιπες δηλώσεις, είχε τα μικρότερα ποσοστά συμφωνίας των συμμετεχόντων (16,7% συμφωνώ πολύ και 22,1% συμφωνώ αρκετά) και τα μεγαλύτερα ποσοστά διαφωνίας (18,1% συμφωνώ λίγο και 13,9% συμφωνώ καθόλου). Το 32% των συμμετεχόντων, επομένως, φάνηκε να αναγνωρίζει τη σημαντικότητα της ικανότητας πραγματοποίησης εκτιμήσεων, καθώς διαφώνησε με τη δήλωση πως η ικανότητα εύρεσης απαντήσεων με ακρίβεια είναι σημαντικότερη από την ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων. Αντίθετα, το 38,8% των συμμετεχόντων συμφώνησε με τη δήλωση, δείχνοντας τη σπουδαιότητα που έχει για αυτούς η ικανότητα εύρεσης απαντήσεων με ακρίβεια, ενώ το 29,2% των συμμετεχόντων διατήρησε ουδέτερη στάση.

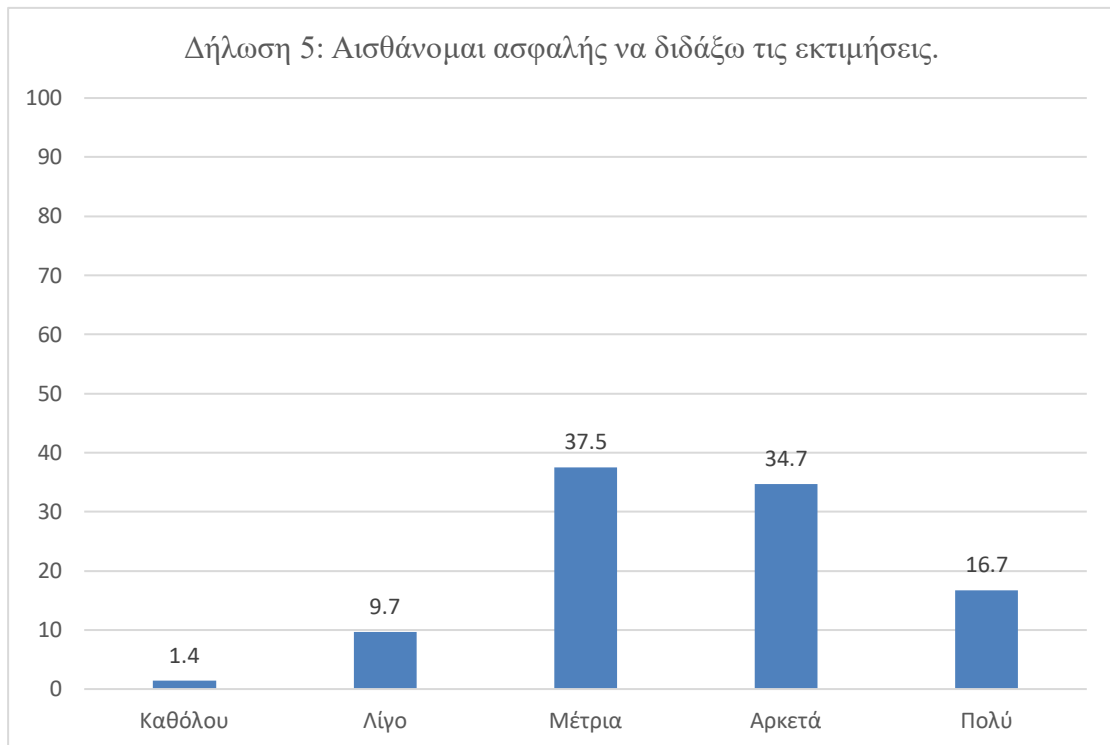
Στη Δήλωση 5 (Σχήμα 3.7.) η πλειονότητα των συμμετεχόντων απάντησε είτε ότι συμφωνεί μέτρια (37,5%) είτε ότι συμφωνεί αρκετά (34,7%) ή πολύ (16,7%). Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι περισσότεροι από τους μισούς συμμετέχοντες συμφωνούν από μέτρια έως πολύ ότι νιώθουν ασφαλείς να διδάξουν τις εκτιμήσεις. Το μεγαλύτερο ποσοστό των συμμετεχόντων, δηλαδή, θεωρεί ότι μπορεί να διδάξει επαρκώς και με αποτελεσματικότητα τις εκτιμήσεις. Μόνο το 1,4% των

συμμετεχόντων δεν συμφώνησε καθόλου (ή συμφώνησε λίγο, 9,7%), δείχνοντας την ανασφάλεια που έχει για τη διδασκαλία των εκτιμήσεων.

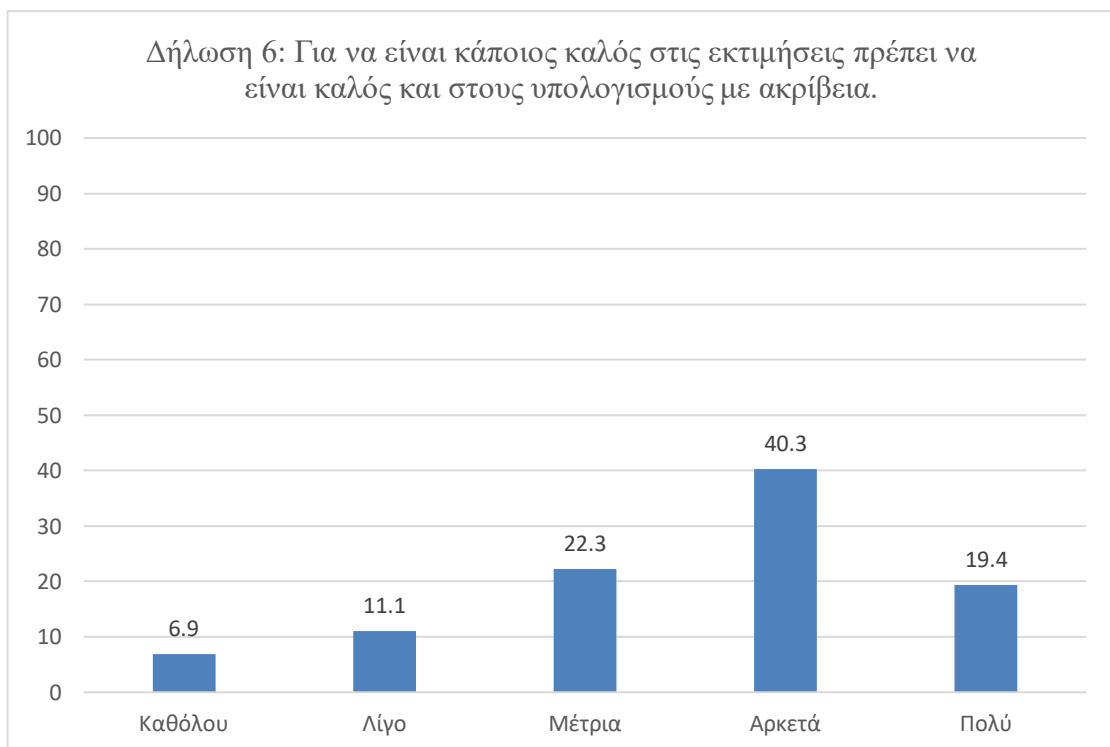
Στην τελευταία δήλωση, τη Δήλωση 6 (Σχήμα 3.8.), η πλειονότητα των εκπαιδευτικών συμφώνησε από αρκετά έως πολύ (40,3% αρκετά και 19,4% πολύ), το 22,3% συμφώνησε μέτρια, το 11,1% συμφώνησε λίγο και το 6,9% δεν συμφώνησε καθόλου. Φαίνεται ότι οι εκπαιδευτικοί έτειναν να συμφωνούν πως, για να είναι κάποιος καλός στις εκτιμήσεις, πρέπει να είναι καλός και στους υπολογισμούς με ακρίβεια. Η πλειονότητα των συμμετεχόντων, δηλαδή, θεωρεί ότι οι καλές επιδόσεις στους υπολογισμούς με ακρίβεια αποτελεί προϋπόθεση για να υπάρξουν καλές επιδόσεις και στην πραγματοποίηση εκτιμήσεων.



**Σχήμα 3.6.:** Ποσοστά συμφωνίας των εκπαιδευτικών στη Δήλωση 4



**Σχήμα 3.7.:** Ποσοστά συμφωνίας των εκπαιδευτικών στη Δήλωση 5



**Σχήμα 3.8.:** Ποσοστά συμφωνίας των εκπαιδευτικών στη Δήλωση 6

Ενδιαφέρον έχει η εξέταση των απαντήσεων των συμμετεχόντων στις δηλώσεις του Έργου 2 σε σχέση με τις επιδόσεις τους στις δοκιμασίες εκτίμησης του 1<sup>ου</sup> έργου. Για τον σκοπό αυτό, πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις συνάφειας από τις οποίες αναδείχθηκαν δύο υψηλές συσχετίσεις. Πρώτον, βρέθηκε υψηλή θετική συνάφεια ανάμεσα στις απαντήσεις των συμμετεχόντων στη Δήλωση 2 («Οι εκτιμήσεις πρέπει να διδάσκονται στο σχολείο») και τις επιδόσεις τους στις δοκιμασίες εκτίμησης (Pearson's  $r = ,267, p < .05$ ). Με άλλα λόγια, όσοι συμμετέχοντες συμφώνησαν ότι οι εκτιμήσεις πρέπει να διδάσκονται στο σχολείο έτειναν να έχουν υψηλό επίπεδο Γνώσης Περιεχομένου στις εκτιμήσεις μέτρων, καθώς έτειναν να πραγματοποιούν επιτυχείς εκτιμήσεις μέτρων.

Δεύτερον, υψηλή θετική συνάφεια βρέθηκε ανάμεσα στις απαντήσεις των συμμετεχόντων στη Δήλωση 5 («Αισθάνομαι ασφαλής να διδάξω τις εκτιμήσεις») και την επιτυχία τους στις εκτιμήσεις μέτρων (Pearson's  $r = ,367, p < .01$ ). Οι εκπαιδευτικοί που δήλωσαν ότι νιώθουν ασφάλεια να διδάξουν τις εκτιμήσεις έτειναν να έχουν υψηλότερα επίπεδα Γνώσης Περιεχομένου. Στον Πίνακα 3.10. φαίνονται αναλυτικά τα στοιχεία για τη συνάφεια ανάμεσα στις απαντήσεις των συμμετεχόντων στις δηλώσεις του Έργου 2 και τη Γνώση Περιεχομένου, όπως προέκυψε από τις επιδόσεις των συμμετεχόντων στο 1<sup>ο</sup> έργο.

**Πίνακας 3.10.:** Συνάφεια ανάμεσα στις απαντήσεις των συμμετεχόντων στις δηλώσεις για την διδασκαλία των εκτιμήσεων και τη Γνώση Περιεχομένου

Δηλώσεις	ΓΠ
1. Οι εκτιμήσεις είναι χρήσιμες στην καθημερινή ζωή.	,193
2. Οι εκτιμήσεις πρέπει να διδάσκονται στο σχολείο.	,267*
3. Η ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων συμβάλλει στην περαιτέρω ανάπτυξη άλλων μαθηματικών δεξιοτήτων.	,007
4. Η ικανότητα εύρεσης απαντήσεων με ακρίβεια είναι σημαντικότερη από την ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων.	-,048
5. Αισθάνομαι ασφαλής να διδάξω τις εκτιμήσεις.	,367**
6. Για να είναι κάποιος καλός στις εκτιμήσεις πρέπει να είναι καλός και στους υπολογισμούς με ακρίβεια.	-,122

\*Στατιστική σημαντικότητα στο  $p < .05$ ,

\*\* Στατιστική σημαντικότητα στο  $p < .01$

## Μέρος Γ': Αποτελέσματα για το 3<sup>ο</sup> έργο (Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου)

### 3.Γ.1. Κωδικοποίηση των δεδομένων

Το 3<sup>ο</sup> και τελευταίο έργο εξέταζε την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου των εν ενεργεία εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στις εκτιμήσεις μέτρων, μέσω των τριών δοκιμασιών που περιείχε. Αναλυτικότερα, η Δοκιμασία 1 εξέταζε την ικανότητα εύρεσης του σκοπού μιας δραστηριότητας και για την κωδικοποίησή της χρησιμοποιήθηκαν οι βαθμοί 0 και 1. Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με 1 βαθμό και κάθε λανθασμένη απάντηση με 0 βαθμούς. Σωστές απαντήσεις θεωρήθηκαν οι απαντήσεις που περιείχαν τον όρο «εκτίμηση» ή «περίπου» και έδειχναν πως οι συμμετέχοντες αναγνώριζαν σωστά τον σκοπό της δραστηριότητας που δόθηκε. Για παράδειγμα, οι απαντήσεις *«Να μάθει ο μαθητής να εκτιμά στο περίπου το εμβαδόν χωρίς πράξεις και εργαλεία»*, *«Η εξάσκηση στην εκτίμηση»* και *«Η εκτίμηση μεγεθών»* βαθμολογήθηκαν με 1 ως σωστές, ενώ οι απαντήσεις *«Ο σκοπός της δραστηριότητας είναι να κατανοήσουν τα παιδιά τη χωρητικότητα»*, *«Να παίρνει τα δεδομένα και να βρίσκει τα ζητούμενα»* και *«Σύγκριση μονάδων μέτρησης, αναλογίες, κατανόηση της έννοιας του εμβαδού»* βαθμολογήθηκαν με 0 ως λανθασμένες.

Η Δοκιμασία 2 του 3<sup>ου</sup> έργου, που έλεγχε την ικανότητα των εκπαιδευτικών να εντοπίσουν την παρανόηση του μαθητή του σεναρίου, κωδικοποιήθηκε με τους βαθμούς 0 και 1. Σε κάθε σωστή απάντηση δόθηκε ο βαθμός 1 και σε κάθε λανθασμένη απάντηση ο βαθμός 0. Σωστές απαντήσεις θεωρήθηκαν οι απαντήσεις στις οποίες οι συμμετέχοντες αναγνώριζαν σωστά την παρανόηση του μαθητή και δήλωναν ότι ο μαθητής του σεναρίου υπολόγισε με ακρίβεια χωρίς να προβεί σε εκτίμηση. Για παράδειγμα, οι απαντήσεις *«Ο μαθητής δεν εκτίμησε αλλά υπολόγισε με ακρίβεια»*, *«Δεν εκτίμησε, μέτρησε με χάρακα»* και *«Προσπέρασε την εκτίμηση και πήγε απευθείας στην απάντηση»* βαθμολογήθηκαν με 1 ως σωστές, ενώ οι απαντήσεις *«Αναλυτική μέθοδος με βάση τον αλγόριθμο του εμβαδού»*, *«Σωστή σκέψη! Ο καθένας με όποιον τρόπο νιώθει περισσότερη ασφάλεια δουλεύει!»* και *«Είναι ορθή»* βαθμολογήθηκαν με 0 ως λανθασμένες.



Τέλος, η Δοκιμασία 3 ζητούσε από τους συμμετέχοντες να παρέχουν ανατροφοδότηση στον μαθητή του σεναρίου, σχετική με την απάντησή του, διατυπώνοντας προτάσεις διδασκαλίας για την αντιμετώπιση της παρανόησης. Οι απαντήσεις που δόθηκαν ταξινομήθηκαν σε 5 κατηγορίες ανάλογα με την προσέγγιση που ακολούθησε κάθε συμμετέχοντας. Η πρώτη κατηγορία ονομάστηκε «Χάρακας/τύπος εμβადού» και σε αυτή την κατηγορία εντάχθηκαν όλες οι απαντήσεις-προσεγγίσεις που επιβράβευαν τη μέθοδο του μαθητή. Στην κατηγορία αυτή, οι εκπαιδευτικοί επαίνεσαν τον μαθητή του σεναρίου για τη χρήση του χάρακα και την εφαρμογή του τύπου του εμβადού, θεώρησαν ότι δεν χρειάζεται να γίνει κάποια επισήμανση στον μαθητή και ανέφεραν ότι και οι ίδιοι θα έλυναν τη δραστηριότητα με τον ίδιο τρόπο. Η απάντηση ενός εκπαιδευτικού με 24 χρόνια προϋπηρεσίας ήταν χαρακτηριστική: *«Είναι αυτό που σου δείχνει το βιβλίο, το ίδιο θα έκανα»*. Παρόμοια, μία εκπαιδευτικός με 2 χρόνια προϋπηρεσίας σημείωσε: *«Θα του έλεγα πως τα πήγε μια χαρά και δεν είναι απαραίτητη κάποια διορθωτική ενέργεια»*.

Η δεύτερη κατηγορία ονομάστηκε «Έμφαση στην εκτίμηση». Στην κατηγορία αυτή συμπεριλήφθηκαν οι απαντήσεις – προσεγγίσεις κατά τις οποίες δόθηκε έμφαση στην έννοια της εκτίμησης και στην εξήγηση και ανάλυση των εκτιμήσεων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της κατηγορίας αποτελεί η απάντηση μιας γυναίκας εκπαιδευτικού με 3 χρόνια προϋπηρεσίας, η οποία έγραψε: *«Θα του πρότεινα να προσπαθήσει να εκτιμήσει νοερά, τονίζοντας παράλληλα την αξία των εκτιμήσεων. Θα του επισήμαινα πως δεν χρειάζονται ακριβείς μετρήσεις με χρήση εργαλείων μέτρησης»*.

Η τρίτη κατηγορία είναι η κατηγορία «Κάλυψη επιφάνειας με αντικείμενο». Όλες οι απαντήσεις που ανέφεραν ότι θα ζητούσαν από τον μαθητή να καλύψει με κάποιο αντικείμενο την επιφάνεια του ορθογώνιου σχήματος της δραστηριότητας, για να δει πόσες φορές χωράει το εκάστοτε αντικείμενο μέσα στο ορθογώνιο, εντάχθηκαν σε αυτήν την κατηγορία. Πολλές απαντήσεις αυτής της κατηγορίας ζητούσαν από τον μαθητή να κόψει το μικρό τετράγωνο και να το τοποθετήσει μέσα στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο για να βρει πόσες φορές χωράει ή να ζωγραφίσει σε χαρτόνι τα σχήματα και έπειτα, αφού τα κόψει, να μετρήσει πόσες φορές χωράει το μικρό σχήμα μέσα στο μεγάλο. Χαρακτηριστικά παραδείγματα απαντήσεων που εντάχθηκαν στην τρίτη κατηγορία αποτελούν η απάντηση μιας εκπαιδευτικού με 8 χρόνια προϋπηρεσίας, η οποία έγραψε: *«Θα προέτρεπα τον μαθητή να κόψει το τετράγωνο και να μετρήσει*

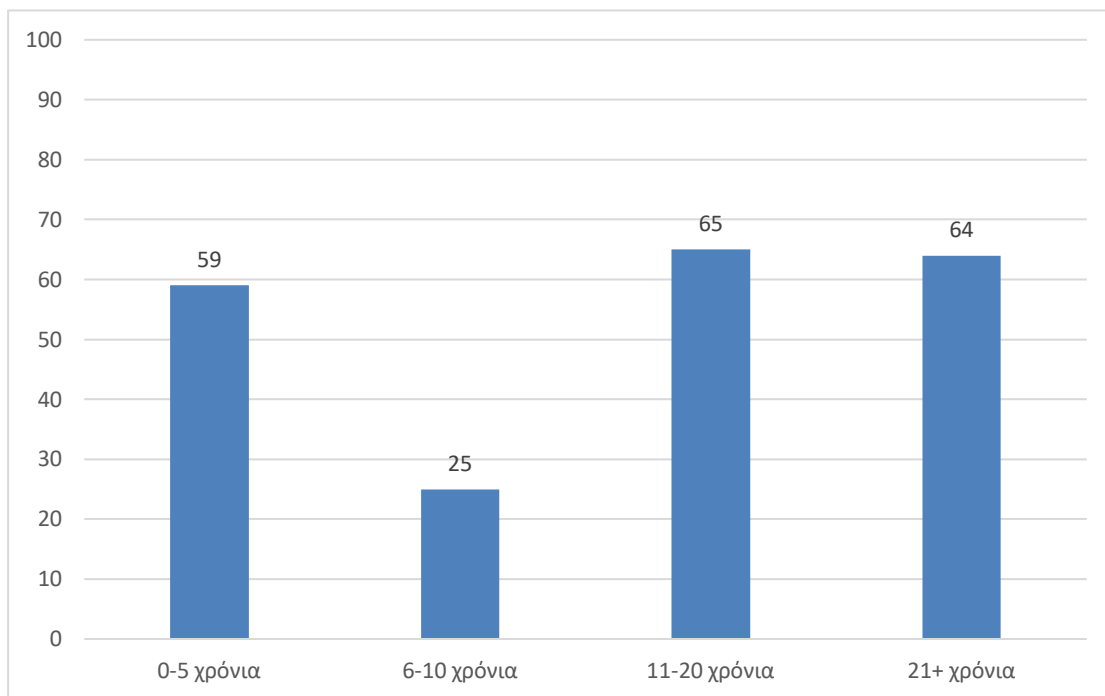
*πόσες φορές χωράει μέσα στο μεγάλο σχήμα, προκειμένου να κατανοήσει την έννοια του εμβαδού» και η απάντηση μιας άλλης εκπαιδευτικού με 20 χρόνια προϋπηρεσίας, η οποία έγραψε: «Σαν μορφή χειροτεχνίας να καλύψει την επιφάνεια με τετραγωνάκια ίδιου μεγέθους που θα κόψει».*

Η τέταρτη κατηγορία απαντήσεων ονομάστηκε «Επανάληψη/άλλες ασκήσεις». Όλες οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών που ανέφεραν ότι θα ζητούσαν από τον μαθητή να λύσει εκ νέου την άσκηση ή θα έδιναν και άλλες ασκήσεις και παραδείγματα στον μαθητή εντάχθηκαν στη συγκεκριμένη κατηγορία. Στην τέταρτη κατηγορία ανήκουν, δηλαδή, όλες οι απαντήσεις που προτείνουν είτε να δοθούν περαιτέρω παραδείγματα είτε να γίνουν επιπλέον ασκήσεις. Παραδείγματα απαντήσεων της κατηγορίας αυτής είναι η απάντηση ενός άντρα εκπαιδευτικού με 35 χρόνια προϋπηρεσίας, ο οποίος ανέφερε: *«Θα έκανα και άλλα παρόμοια προβλήματα χωρητικότητας σε επιφάνειες»*, η απάντηση μιας εκπαιδευτικού με 1 χρόνο προϋπηρεσίας, η οποία ανέφερε: *«Επιπλέον ασκήσεις με το συγκεκριμένο περιεχόμενο»* και η απάντηση μιας άλλης εκπαιδευτικού με 23 χρόνια προϋπηρεσίας, η οποία έγραψε: *«Θα του ζητούσα να επαναλάβει τη δραστηριότητα δίνοντας απάντηση κατ' εκτίμηση».*

Στην πέμπτη και τελευταία κατηγορία («Ασαφές») εντάχθηκαν οι ασαφείς απαντήσεις των συμμετεχόντων. Τέτοιες απαντήσεις είναι *«να στρογγυλοποιήσει το 77», «ίσως το ίδιο»* και *«λύνοντας με πράξη και εκτίμηση».*

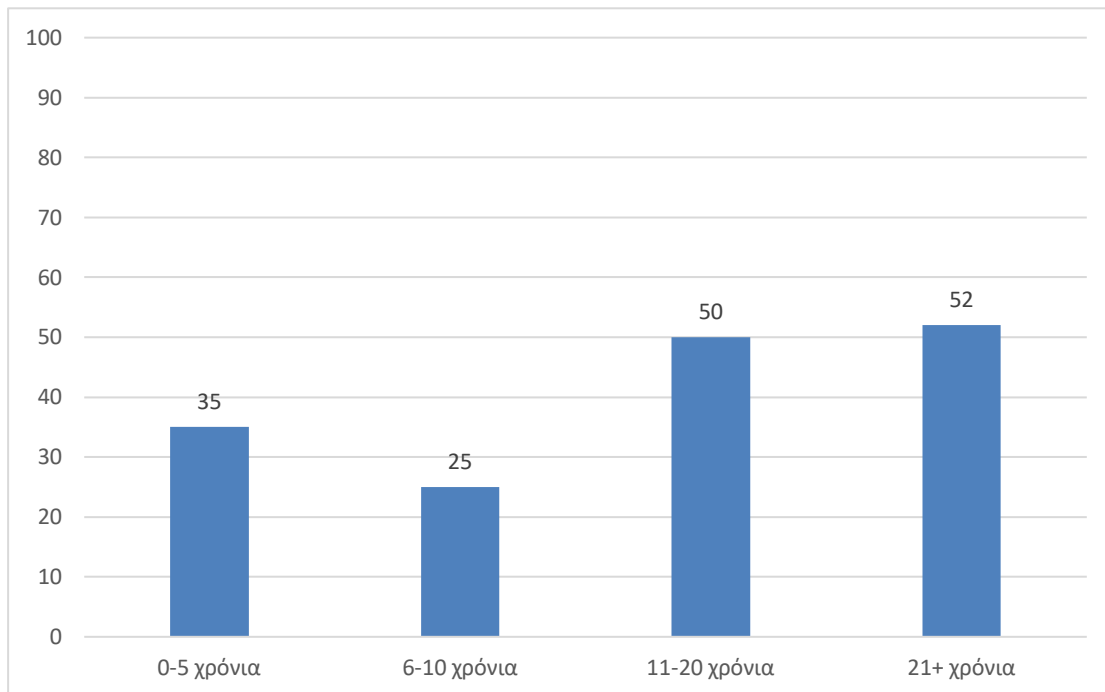
### 3.Γ.2. Ανάλυση αποτελεσμάτων για το Έργο 3

Το 61% των συμμετεχόντων αναγνώρισε σωστά τον σκοπό της δραστηριότητας που τους παρουσιάστηκε. Τα μεγαλύτερα ποσοστά σωστών απαντήσεων προέρχονται από τους έμπειρους εκπαιδευτικούς, καθώς το 65% των εκπαιδευτικών με 11-20 χρόνια υπηρεσίας και το 64% των εκπαιδευτικών με 21+ χρόνια υπηρεσίας απάντησαν σωστά. Σωστά απάντησε, επίσης, και το 59% των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών με 0-5 χρόνια υπηρεσίας και το 25% των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών με 6-10 χρόνια υπηρεσίας. Τα ποσοστά αυτά παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.9.



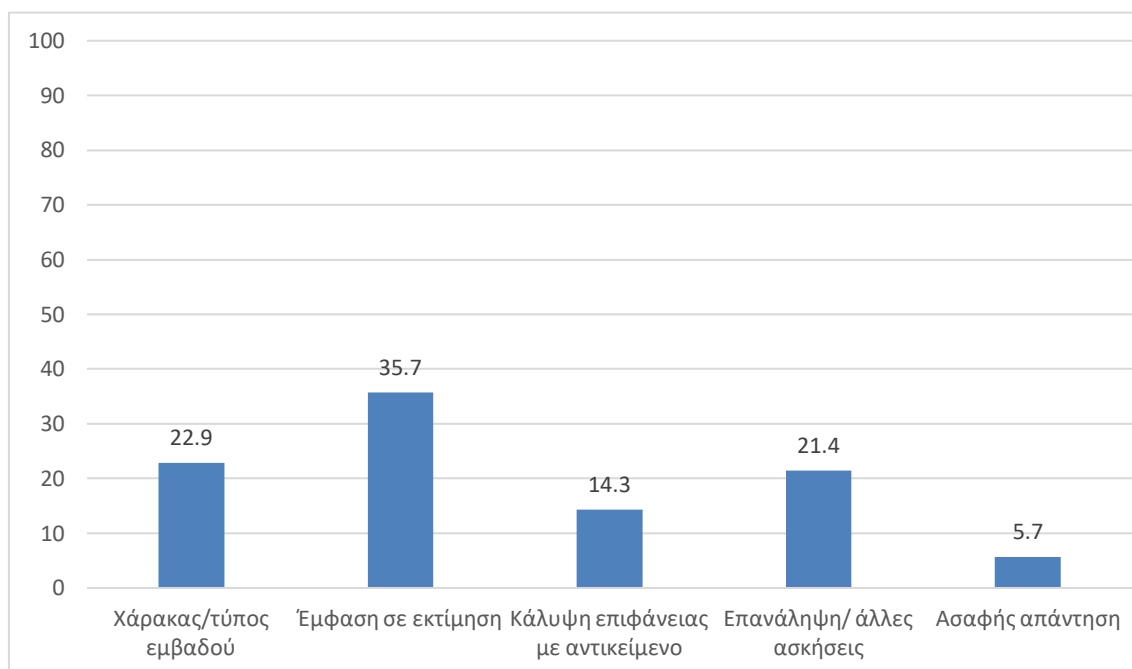
**Σχήμα 3.9.:** Ποσοστό επιτυχίας των συμμετεχόντων στην αναγνώριση του σκοπού της δραστηριότητας ως προς τα έτη προϋπηρεσίας

Στη Δοκιμασία 2 του 3<sup>ου</sup> έργου, όπου οι εκπαιδευτικοί έπρεπε να σχολιάσουν τη μέθοδο που ακολούθησε ο μαθητής για τη λύση της δραστηριότητας, μόνο το 46% των συμμετεχόντων κατάφερε να εντοπίσει την παρανόηση του μαθητή. Λιγότεροι από τους μισούς εκπαιδευτικούς, δηλαδή, ανέφεραν ότι ο μαθητής δεν έκανε εκτίμηση αλλά υπολόγισε με ακρίβεια. Οι περισσότεροι συμμετέχοντες θεώρησαν τη λύση του μαθητή ορθή και επιτυχημένη και δεν σχολίασαν τη μέθοδο ακριβείας που ακολουθήθηκε αντί της εκτίμησης. Στη Δοκιμασία 2 καταγράφηκαν, παρόμοια με τη Δοκιμασία 1, τα πιο υψηλά ποσοστά σωστών απαντήσεων από τους έμπειρους εκπαιδευτικούς. Συγκεκριμένα, το 52% των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών με 21+ χρόνια προϋπηρεσίας και το 50% των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών με 11-20 χρόνια προϋπηρεσίας κατάφεραν να εντοπίσουν την παρανόηση. Αντίθετα, 1 στους 4 εκπαιδευτικούς με 6-10 χρόνια προϋπηρεσίας (25%) αναφέρθηκε επιτυχώς στην παρανόηση, ενώ περίπου 1 στους 3 εκπαιδευτικούς που είχαν 0-5 χρόνια προϋπηρεσίας (35%) αναγνώρισε την παρανόηση. Τα παραπάνω στοιχεία παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.10 που ακολουθεί.



**Σχήμα 3.10.:** Ποσοστό επιτυχίας των συμμετεχόντων στην εύρεση της παρανόησης ως προς τα έτη προϋπηρεσίας

Στην ερώτηση για την ανατροφοδότηση που θα μπορούσαν οι συμμετέχοντες να παρέχουν στον μαθητή του σεναρίου (Δοκιμασία 3) αν ήταν οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί στην τάξη του μαθητή, το 35,7% των εκπαιδευτικών ανέφερε ότι θα έδινε έμφαση στην αξία της εκτίμησης, εξηγώντας περαιτέρω για αυτήν. Το 22,9% των συμμετεχόντων έδωσε έμφαση στην εφαρμογή του τύπου του εμβαδού και στη χρήση του χάρακα επιβραβεύοντας τον μαθητή για τον τρόπο με τον οποίο έλυσε τη δραστηριότητα και τονίζοντας ότι δεν χρειάζονται διορθωτικές κινήσεις. Το 21,4% των εκπαιδευτικών της έρευνας αποφάσισε ότι η επανάληψη της άσκησης και η παροχή επιπλέον παραδειγμάτων και ασκήσεων είναι η κατάλληλη ανατροφοδότηση προς τον μαθητή. Ένα χαμηλό ποσοστό των συμμετεχόντων, το 14,3%, θα προέτρεπε τον μαθητή να καλύψει τη ζητούμενη επιφάνεια με τετράγωνα από χαρτόνι για να βρει πόσες φορές χωράει το μικρό σχήμα στο μεγάλο σχήμα. Τέλος, υπήρξε και ένα μικρό ποσοστό εκπαιδευτικών (5,7%) που έδωσε μη κατανοητές και ασαφείς απαντήσεις, οι οποίες δεν ήταν δυνατό να κατηγοριοποιηθούν. Οι προσεγγίσεις αυτές παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.11 που ακολουθεί.



**Σχήμα 3.11.:** Συχνότητα χρήσης των προσεγγίσεων

Οι παραπάνω προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών διακρίθηκαν σε διαδικαστικές και εννοιολογικές και βαθμολογήθηκαν είτε με 0 μονάδες (διαδικαστικές προσεγγίσεις) είτε με 1 μονάδα (εννοιολογικές προσεγγίσεις). Διαδικαστικές προσεγγίσεις θεωρήθηκαν οι απαντήσεις που διατυπώθηκαν και συμπεριλήφθηκαν στην πρώτη και την τέταρτη κατηγορία. Είναι εκείνες οι προσεγγίσεις, δηλαδή, που είτε επαινούσαν τον μαθητή για τη χρήση του χάρακα και την εφαρμογή του τύπου του εμβადού είτε πρότειναν την αναδιατύπωση της ερώτησης, την πιστή εφαρμογή και επανάληψη της διαδικασίας του τυπικού αλγόριθμου και τη διατύπωση της απάντησης από τον εκπαιδευτικό (π.χ., «Θα του έλεγα ότι απλώς χρειάζεται να βρει το μήκος και το πλάτος του ορθογωνίου, που είναι 7 επί 11. Άρα, θα χωρέσουν 77 τετραγωνάκια συνολικά», όπως απάντησε μια εκπαιδευτικός με 2 χρόνια προϋπηρεσίας). Αντίθετα, ως εννοιολογικές προσεγγίσεις θεωρήθηκαν οι απαντήσεις που συμπεριλήφθηκαν στη δεύτερη και την τρίτη κατηγορία. Είναι οι προσεγγίσεις, δηλαδή, που έδιναν έμφαση στην εκτίμηση και παρότρυναν τον μαθητή, συνήθως μέσα από τη χρήση αναπαραστάσεων και εποπτικού υλικού, στη σταδιακή ανακάλυψη της απάντησης με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού. Στο Σχήμα 3.11. φαίνεται ότι οι διαδικαστικές και εννοιολογικές προσεγγίσεις διατυπώθηκαν σχεδόν ισόποσα από τους συμμετέχοντες.

Πιο συγκεκριμένα, το 50% των συμμετεχόντων παρείχε κάποια εννοιολογική προσέγγιση και το 44,3% παρείχε κάποια διαδικαστική προσέγγιση.

Τέλος, εξετάστηκε αν υπάρχει συνάφεια ανάμεσα στη Γνώση Περιεχομένου των εκπαιδευτικών για τις εκτιμήσεις μέτρων και την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των εκτιμήσεων μέτρων. Βρέθηκε υψηλή θετική συσχέτιση μεταξύ της Γνώσης Περιεχομένου και της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου στην παράμετρο της αναγνώρισης της παρανόησης του μαθητή (Pearson's  $r = ,271, p < .05$ ). Όσοι, δηλαδή, είχαν υψηλές επιδόσεις στις δοκιμασίες εκτίμησης μέτρων, έτειναν να είναι σε θέση να εντοπίσουν την παρανόηση του μαθητή του σεναρίου. Δεν βρέθηκε καμία συνάφεια ανάμεσα στη Γνώση Περιεχομένου και την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου αναφορικά με τις δύο παραμέτρους της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου, την εύρεση του σκοπού της δραστηριότητας αλλά και τη διατύπωση εννοιολογικών προσεγγίσεων για την άρση της παρανόησης. Ωστόσο, υπήρξε υψηλή θετική συνάφεια ανάμεσα στην ικανότητα αναγνώρισης της παρανόησης και την ικανότητα εύρεσης του σκοπού (Pearson's  $r = ,609, p < .01$ ). Οι εκπαιδευτικοί οι οποίοι εντόπιζαν σωστά τον σκοπό της δραστηριότητας έτειναν να εντοπίζουν σωστά και την παρανόηση του μαθητή.

Τέλος, υψηλή θετική συσχέτιση βρέθηκε ανάμεσα στις δύο παραμέτρους της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου που εξετάστηκαν, και, συγκεκριμένα, ανάμεσα στην αναγνώριση της παρανόησης και στους τρόπους άρσης της παρανόησης (Pearson's  $r = ,366, p < .01$ ). Δηλαδή, οι συμμετέχοντες που αναγνώριζαν με επιτυχία την παρανόηση έτειναν να ακολουθούν περισσότερο εννοιολογικές προσεγγίσεις στις απαντήσεις που έδιναν για την ανατροφοδότηση προς τον μαθητή και το αντίθετο. Οι εκπαιδευτικοί που δεν αναγνώριζαν με επιτυχία την παρανόηση έτειναν να δίνουν περισσότερο διαδικαστικές προσεγγίσεις. Ο Πίνακας 3.11 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.

**Πίνακας 3.11.:** Συσχετίσεις ανάμεσα σε Γνώση Περιεχομένου και Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου

		Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου		
		Εύρεση σκοπού	Αναγνώριση παρανόησης	Προσεγγίσεις
Γνώση Περιεχομένου		,242	,271*	-,048
	Εύρεση σκοπού	-	,609**	,141
	Αναγνώριση παρανόησης	,609**	-	,366**
	Προσεγγίσεις	,141	,366**	-

\*Στατιστική σημαντικότητα στο  $p < .05$ ,

\*\* Στατιστική σημαντικότητα στο  $p < .01$

## Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup> : Συζήτηση – Συμπεράσματα

Η παρούσα εργασία είχε κύριο σκοπό να εξετάσει τη Γνώση Περιεχομένου και την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου των εν ενεργεία εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης για τη διδασκαλία των εκτιμήσεων μέτρων. Τέθηκαν τρία ερευνητικά ερωτήματα, τα οποία επιχειρεί να απαντήσει και να αναλύσει το παρόν κεφάλαιο.

1<sup>ο</sup> ερευνητικό ερώτημα: Ποιο είναι το επίπεδο της ΓΠ των εκπαιδευτικών για τις εκτιμήσεις μέτρων;

Η Γνώση Περιεχομένου των εκπαιδευτικών που συμμετέχουν στην παρούσα έρευνα χαρακτηρίζεται ως χαμηλή, καθώς κατά μέσο όρο οι συμμετέχοντες απαντούσαν σωστά σε λιγότερες από τις μισές δοκιμασίες (περίπου 48%). Αντίστοιχα ευρήματα αναφέρουν και οι Senol, Dundar και Gunduz (2015), στην έρευνα των οποίων οι υποψήφιοι συμμετέχοντες δάσκαλοι παρουσίασαν χαμηλές επιδόσεις σε δοκιμασίες υπολογιστικών εκτιμήσεων. Οι υποψήφιοι δάσκαλοι στην έρευνα της Gunes (2022) εμφάνισαν, επίσης, μέτριο επίπεδο επιτυχίας σε δοκιμασίες υπολογιστικών εκτιμήσεων. Ένα επιπλέον εύρημα της έρευνας είναι ότι το 44,7% των μόνιμων εκπαιδευτικών, με 22,6 χρόνια προϋπηρεσίας κατά μέσο όρο, απάντησε σωστά σε περισσότερες από τρεις δοκιμασίες (από το σύνολο των έξι δοκιμασιών), ενώ το 18,2% των αναπληρωτών εκπαιδευτικών, με 3,5 χρόνια προϋπηρεσίας κατά μέσο όρο, κατάφερε να απαντήσει σωστά σε περισσότερες από τρεις δοκιμασίες. Παρόμοια ευρήματα εντόπισε η Gunes (2022), επισημαίνοντας ότι όσο μεγαλύτερο ήταν το έτος στο οποίο φοιτούσαν οι υποψήφιοι δάσκαλοι τόσο καλύτερες επιδόσεις είχαν. Στην παρούσα έρευνα παρατηρήθηκε, επίσης, ότι οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύτηκαν αρκετά στην εκτίμηση βάρους μικρού αντικειμένου (μόνο 7,8% εκτίμησε με επιτυχία το βάρος ενός μαρκαδόρου) και στις εκτιμήσεις εμβαδού (32,3% εκτίμησε με επιτυχία το εμβαδόν ποδοσφαιρικού γηπέδου και 40,6% το εμβαδόν σχολικού θρανίου).

Περίπου ένας στους τρεις εκπαιδευτικούς (29,5%) αξιοποίησε τα σημεία αναφοράς για την πραγματοποίηση των εκτιμήσεων, εύρημα το οποίο επιβεβαιώνει αντίστοιχα ευρήματα του Subramaniam (2014), καθώς οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί της έρευνας που διεξήγαγε για τις εκτιμήσεις μέτρων φάνηκε να προτιμούν τη στρατηγική των σημείων αναφοράς. Στην παρούσα εργασία τα πιο συνηθισμένα σημεία αναφοράς



που αξιοποιήθηκαν κατά τις εκτιμήσεις μήκους και εμβαδού ήταν τα μέρη του σώματος των συμμετεχόντων (π.χ., παλάμη, νύχι, βήματα), ενώ για τις εκτιμήσεις βάρους προτιμήθηκαν κυρίως συγκρίσεις με οικεία αντικείμενα ή ζώα (π.χ., σοκοφρέτα, γλειφιτζούρι, αυτοκίνητο). Ωστόσο, έχει ενδιαφέρον να επισημανθεί ότι περίπου ένας στους τρεις εκπαιδευτικούς (28,9%) δεν αξιοποίησε κάποια στρατηγική και δεν ήταν σε θέση να αιτιολογήσει την απάντηση που έδωσε και τον τρόπο με τον οποίο οδηγήθηκε σε εκτίμηση. Το ποσοστό των συμμετεχόντων που δεν αξιοποίησε κάποια στρατηγική είναι ακόμα μεγαλύτερο στις δοκιμασίες εκτίμησης εμβαδού, αφού περίπου ένας στους δύο εκπαιδευτικούς δεν ήταν σε θέση να αιτιολογήσει τον τρόπο με τον οποίο οδηγήθηκε στις ζητούμενες εκτιμήσεις εμβαδού. Τα ευρήματα αυτά συμφωνούν με ευρήματα άλλων ερευνών, καθώς αναφέρεται στη βιβλιογραφία ότι αρκετοί εν ενεργεία εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν ανεπιτυχείς στρατηγικές (Alajmi, 2009) και ότι αρκετοί υποψήφιοι δάσκαλοι διαλέγουν τυχαίες στρατηγικές, χωρίς να είναι σε θέση να εφαρμόσουν μια σωστή και αποτελεσματική στρατηγική (Kaya & Demirci, 2022). Οι Lemonidis, Mouratoglou και Pnevmatikos (2014), επίσης, συμφωνούν τονίζοντας ότι οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν ένα περιορισμένο εύρος στρατηγικών.

## 2<sup>ο</sup> ερευνητικό ερώτημα: Ποιο είναι το επίπεδο της ΠΓΠ των εκπαιδευτικών για τις εκτιμήσεις μέτρων;

Το επίπεδο της ΠΓΠ των εκπαιδευτικών στις εκτιμήσεις μέτρων βρέθηκε σχετικά περιορισμένο. Συγκεκριμένα, το 61% των συμμετεχόντων κατάφερε να εντοπίσει με επιτυχία τον σκοπό της δραστηριότητας που τους παρουσιάστηκε, ο οποίος αφορούσε την πραγματοποίηση εκτιμήσεων, ενώ το υπόλοιπο 39% δεν έκανε καμιά αναφορά στις εκτιμήσεις. Ενδεικτική της προσκόλλησης στους υπολογισμούς με ακρίβεια είναι η απάντηση μίας εκπαιδευτικού με 17 χρόνια προϋπηρεσίας, η οποία υποστήριξε αναφορικά με τον σκοπό της δραστηριότητας ότι: *«Στα μαθηματικά θα πρέπει τεκμηριωμένα να οδηγούμαστε στη λύση των προβλημάτων με ακρίβεια και όχι στο περίπου»*. Το επίπεδο της ΠΓΠ που παρουσίασαν οι συμμετέχοντες στην παράμετρο της εύρεσης του σκοπού της δραστηριότητας ίσως εξηγείται από το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί είναι μάλλον εξοικειωμένοι με την αναζήτηση του σκοπού των δραστηριοτήτων, καθώς συχνά αναζητούν ή δημιουργούν δραστηριότητες,

προκειμένου να εκπληρώσουν διδακτικούς σκοπούς που συγκεκριμένα έχουν θέσει. Παράλληλα, η δυσκολία κάποιων εκπαιδευτικών στον εντοπισμό του σκοπού της δραστηριότητας ενδέχεται να οφείλεται στο γεγονός ότι τα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια περιλαμβάνουν κυρίως δραστηριότητες στις οποίες ζητούνται ακριβή αποτελέσματα και όχι κατ' εκτίμηση, με αποτέλεσμα οι εκπαιδευτικοί να μην είναι αρκετά εξοικειωμένοι με τις εκτιμήσεις.

Η παρανόηση στην οποία προβαίνει ο μαθητής στο σενάριο που συνόδευε τη δραστηριότητα εντοπίστηκε σωστά από το 46% των συμμετεχόντων. Φαίνεται, δηλαδή, ότι περισσότεροι από τους μισούς εκπαιδευτικούς δεν ήταν σε θέση να αναγνωρίσουν την παρανόηση που παρουσίασε ο μαθητής για το συγκεκριμένο θέμα των εκτιμήσεων, παρόλο που ο εντοπισμός των παρανοήσεων των μαθητών αποτελεί βασικό κριτήριο για την αξιολόγηση της ΠΓΠ (Ball et al., 2008). Ίσως το χαμηλό επίπεδο ΠΓΠ των συμμετεχόντων της παρούσας έρευνας στην παράμετρο της εύρεσης της παρανόησης να σχετίζεται με το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί δεν προχωρούν πάντοτε στη διαδικασία ανάλυσης και ερμηνείας των λαθών των μαθητών τους.

Όταν ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να περιγράψουν την ανατροφοδότηση που θα παρείχαν στον μαθητή του σεναρίου, οι προσεγγίσεις που πρότειναν ήταν σχεδόν ισόποσα κατανοημένες σε διαδικαστικές και εννοιολογικές. Πιο συγκεκριμένα, το 50% των συμμετεχόντων αναφέρθηκε σε εννοιολογικές προσεγγίσεις, δίνοντας έμφαση στις εκτιμήσεις και παροτρύνοντας τον μαθητή στη σταδιακή ανακάλυψη της απάντησης κυρίως μέσα από τη χρήση αναπαραστάσεων και εποπτικού υλικού. Αντίστοιχα είναι και τα ευρήματα στην έρευνα του Subramaniam (2014), καθώς οι εκπαιδευτικοί της έρευνάς του πρότειναν δραστηριότητες που καλούσαν τους μαθητές να μετρήσουν και να συγκρίνουν οι ίδιοι μέρη του σώματός τους και άλλα αντικείμενα. Αντίθετα, το 44,3% των συμμετεχόντων της παρούσας έρευνας αναφέρθηκε σε διαδικαστικές προσεγγίσεις, επαινώντας, για παράδειγμα, τον μαθητή για την απάντηση που έδωσε ή προτείνοντας την επανάληψη της ίδιας δραστηριότητας. Στη βιβλιογραφία υπάρχουν, επίσης, αντίστοιχα ευρήματα που αναφέρονται σε παρόμοιες τακτικές των εκπαιδευτικών στη διδασκαλία των εκτιμήσεων (Bozkurt & Yavaşca, 2021) και στις δασκαλοκεντρικές μεθόδους των δασκάλων, οι οποίες περιλαμβάνουν κυρίως διαλέξεις και ερωτο-απαντήσεις (Bozkurt & Yavaşca, 2021).

Είναι ενθαρρυντικό, ωστόσο, το γεγονός ότι, όπως φάνηκε από τις δηλώσεις στο Έργο 2, οι εκπαιδευτικοί αναγνωρίζουν τη σπουδαιότητα των εκτιμήσεων στην καθημερινή ζωή και την ανάγκη διδασκαλίας τους στο πλαίσιο του σχολείου. Με το εύρημα αυτό συμφωνούν αρκετές έρευνες, καθώς αναφέρουν ότι οι εκπαιδευτικοί αντιλαμβάνονται την αξία των εκτιμήσεων τόσο στην καθημερινή ζωή (Δεσλή & Ανεστάκης, 2014) όσο και στη διδασκαλία των μαθηματικών (Δεσλή & Ανεστάκης, 2014; Anestakis & Desli, 2014). Ωστόσο, αντίθετα ευρήματα παρουσιάζει η Alajmi (2009), αφού περίπου οι μισοί εκπαιδευτικοί της έρευνάς της θεωρούν ότι η υπολογιστική εκτίμηση δεν είναι σημαντική για τα μαθηματικά. Στην παρούσα έρευνα βρέθηκε, επίσης, ότι η πλειονότητα των εκπαιδευτικών (88,9%) συμφωνεί στη συμβολή των εκτιμήσεων στην περαιτέρω ανάπτυξη άλλων μαθηματικών δεξιοτήτων, εύρημα το οποίο επισήμαναν οι Son, Hu και Lim (2019), αναφέροντας ότι οι εκτιμήσεις συμβάλλουν στην ανάπτυξη άλλων μαθηματικών δεξιοτήτων, όπως είναι η ανάπτυξη της λογικής σκέψης και της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων. Ακόμη, το 32% των εκπαιδευτικών (περίπου ένας στους τρεις εκπαιδευτικούς) της παρούσας έρευνας συμφωνεί ότι η ικανότητα εύρεσης απαντήσεων με ακρίβεια είναι σημαντικότερη από την ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων, εύρημα στο οποίο συμφωνούν και οι εκπαιδευτικοί στην έρευνα της Alajmi (2009), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι στα μαθηματικά είναι σημαντική η ακριβής απάντηση. Με το εύρημα αυτό συμφωνεί, επίσης, και το 9% των συμμετεχόντων υποψήφιων εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην έρευνα των Anestakis και Desli (2014).

3<sup>ο</sup> ερευνητικό ερώτημα: Υπάρχει σχέση ανάμεσα στη ΓΠ και την ΠΓΠ των εκπαιδευτικών για τις εκτιμήσεις μέτρων;

Οι αναλύσεις συνάφειας για τη συσχέτιση ανάμεσα στη ΓΠ και την ΠΓΠ έδειξαν ότι υπάρχει συσχέτιση μεταξύ της Γνώσης Περιεχομένου και της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου μόνο στην παράμετρο της αναγνώρισης της παρανόησης του μαθητή. Οι εκπαιδευτικοί, δηλαδή, που είχαν υψηλές επιδόσεις στις δοκιμασίες της ΓΠ έτειναν να εντοπίζουν την παρανόηση του μαθητή του σεναρίου. Επιπρόσθετα, βρέθηκε δυνατή συσχέτιση μεταξύ των παραμέτρων της ΠΓΠ. Αναλυτικότερα, όσοι εκπαιδευτικοί εντόπιζαν την παρανόηση του μαθητή έτειναν να αναγνωρίζουν και το σκοπό της δραστηριότητας και να προτείνουν περισσότερο εννοιολογικές προσεγγίσεις για την άρση της παρανόησης. Αντίστοιχα ευρήματα έχουν

βρει και οι Agathangelou και Charalambous (2021), σύμφωνα με τους οποίους η ΓΠ αποτελεί προϋπόθεση της ΠΓΠ. Οι Depaere et al. (2015), επίσης, συμφωνούν ότι η ΓΠ είναι προϋπόθεση της ΠΓΠ, καθώς όπως βρήκαν στην έρευνά τους οι εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης που έλυναν επιτυχώς δοκιμασίες της ΠΓΠ, έλυναν επιτυχώς και τις αντίστοιχες δοκιμασίες της ΓΠ, ενώ όταν ολοκλήρωναν με επιτυχία τις σχετικές με τη ΓΠ δοκιμασίες δεν ήταν πάντοτε σε θέση να ανταπεξέλθουν στις αντίστοιχες δοκιμασίες της ΠΓΠ.

Τέλος, υψηλή θετική συνάφεια εντοπίστηκε και μεταξύ της ΓΠ και της δήλωσης ότι οι εκτιμήσεις πρέπει να διδάσκονται στο σχολείο, καθώς και μεταξύ της ΓΠ και της δήλωσης ότι οι εκπαιδευτικοί αισθάνονται ασφαλείς να διδάξουν τις εκτιμήσεις. Τα ευρήματα αυτά δείχνουν, δηλαδή, ότι όσο υψηλότερο επίπεδο ΓΠ έχουν οι εκπαιδευτικοί για τις εκτιμήσεις τόσο περισσότερο συμφωνούν ότι πρέπει να διδάσκονται οι εκτιμήσεις στο σχολείο και τόσο περισσότερο νιώθουν ασφαλείς για τη διδασκαλία των εκτιμήσεων. Οι Son, Hu και Lim (2019) αναφέρουν, παρόμοια, πως η θετική στάση των εκπαιδευτικών προς τις εκτιμήσεις συσχετίζεται με υψηλότερο επίπεδο ΓΠ στις εκτιμήσεις.

Είναι σκόπιμο να αναφερθούν ορισμένες αδυναμίες και περιορισμοί που προέκυψαν κατά τη διάρκεια της έρευνας. Αρχικά, ο αριθμός του δείγματος της έρευνας ήταν σχετικά μικρός, δεδομένης της συχνής άρνησης των εκπαιδευτικών να συμμετέχουν στην έρευνα. Έτσι, τα αποτελέσματα δεν μπορούν να χαρακτηριστούν ως καθολικά και γενικεύσιμα. Είναι σημαντικό, επίσης, να αναγνωριστεί ότι πιθανότατα στην έρευνα συμμετείχαν εκπαιδευτικοί με ενδιαφέρον για τα μαθηματικά ή την έρευνα. Ενδέχεται, δηλαδή, το ερωτηματολόγιο να συμπληρώθηκε από τους πιο ευαισθητοποιημένους εκπαιδευτικούς ή από τους εκπαιδευτικούς που νιώθουν πιο ασφαλείς με το θέμα των εκτιμήσεων και έτσι δεν υπάρχει ολοκληρωμένη εικόνα για τα επίπεδα της ΠΓΠ όλων των εκπαιδευτικών που ρωτήθηκαν. Τέλος, το γεγονός ότι τα δεδομένα προήλθαν αποκλειστικά από ερωτηματολόγια δημιουργεί την ανάγκη αναζήτησης περισσότερων στοιχείων, πιθανότατα μέσα από παρατήρηση.

Η παρούσα εργασία θα μπορούσε να διευρυνθεί και να συμπεριλάβει ποιοτικά στοιχεία για τη διδασκαλία των εκτιμήσεων μέτρων. Ειδικότερα, η παρατήρηση των εκπαιδευτικών εντός τάξης, κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας τους για τις εκτιμήσεις γενικά, αλλά και τις εκτιμήσεις μέτρων συγκεκριμένα, μπορεί να παρέχει περισσότερες και πιο λεπτομερείς πληροφορίες για το επίπεδο της ΠΓΠ των εκπαιδευτικών.

Ενδιαφέρουσα θα ήταν, επίσης, η πραγματοποίηση έρευνας που θα περιλαμβάνει πρόγραμμα επιμόρφωσης για τις εκτιμήσεις. Η εξέταση του επιπέδου της ΓΠ και της ΠΓΠ των εκπαιδευτικών πριν και μετά την επιμόρφωσή τους δυνητικά θα αναδείξει στοιχεία σχετικά με το πώς η επιμόρφωση μπορεί να συμβάλει στην ανάπτυξη της ΓΠ και της ΠΓΠ των εκπαιδευτικών στις εκτιμήσεις. Οι εκπαιδευτικοί, άλλωστε, παρά τη σχετικά περιορισμένη ΓΠ και ΠΓΠ, έδειξαν να αναγνωρίζουν τη σπουδαιότητα των εκτιμήσεων τόσο κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών όσο και στην καθημερινή ζωή.

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

### **Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία**

Δεσλή, Δ. (2021). *Οι εκτιμήσεις στη μαθηματική εκπαίδευση*. Αθήνα: Gutenberg.

Δεσλή, Δ., & Ανεστάκης, Π. (2014). Υπολογιστικές εκτιμήσεις και η διδασκαλία τους: επιδόσεις, στρατηγικές και στάσεις υποψηφίων εκπαιδευτικών. *Πρακτικά 5ου Συνεδρίου Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (Ε.ΝΕ.ΔΙ.Μ)*. Φλώρινα: ΕΝΕΔΙΜ.

### **Ξενόγλωσση βιβλιογραφία**

Agathangelou, S. A., & Charalambous, C. Y. (2021). Is content knowledge prerequisite of pedagogical content knowledge? An empirical investigation. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 24(5), 431-458.

Alajmi, A. H. (2009). Addressing computational estimation in the Kuwaiti curriculum: teachers' views. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12, 263-283.

An, S., Kulm, G., & Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and the US. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7(2), 145-172.

Andrews, P., Xenofontos, C., & Sayers, J. (2022). Estimation in the primary mathematics curricula of the United Kingdom: Ambivalent expectations of an essential competence. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(8), 2199-2225.

Anestakis, P., & Desli, D. (2014). Computational estimation in primary school: Tasks proposed for its teaching. *MENON: Journal of Educational Research, Thematic Issue*, 1, 75-89.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Bozkurt, E., & Yavaşca, H. (2021). Investigation of primary school teachers' perceptions and teaching processes about mathematical estimation skill. *Journal of Computer and Education Research*, 9(11), 225-247.

Boz-Yaman, B., & Bulut, S. (2017). Middle school mathematics teachers' opinions on estimation. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education*, 11(1), 48-80.

Capraro, R. M., Capraro, M. M., Parker, D., Kulm, G., & Raulerson, T. (2005). The mathematics content knowledge role in developing preservice teachers' pedagogical content knowledge. *Journal of Research in Childhood Education*, 20(2), 102-118.

Chinnapan, M., & White, B. (2015). Specialised content knowledge: Evidence of pre-service teachers' appraisal of students' errors in proportional reasoning. In M. Marshman, V. Gieger & A. Benisson (Eds.). *Proceedings of the 38th Annual Conference of the mathematics research group of Australasia* (pp. 157–164). Sunshine Coast, Australia: Merga.

Cueto, S., León, J., Sorto, M. A., & Miranda, A. (2017). Teachers' pedagogical content knowledge and mathematics achievement of students in Peru. *Educational Studies in Mathematics*, 94(3), 329-345.

Depaepe, F., Verschaffel, L., & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education*, 34, 12-25.

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education*, 47, 82-92.

Desli, D., & Giakoumi, M. (2017). Children's length estimation performance and strategies in standard and non-standard units of measurement. *International Journal for Research in Mathematics Education*, 7(3), 61-84.

Erdoğan, F. & Erben, T. (2020). An investigation of the measurement estimation strategies used by gifted students. *Journal of Computer and Education Research*, 8(15), 201-223.

Gunes, G. (2022). Investigation of the computational estimation skills of and strategies employed by pre-service primary school teacher. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 17(3), em0689.

Hagena, M. (2014). Fostering students' measurement estimation performances in a short period of time. In S. Oesterle, C. Nicol, P. Liljedahl, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 6, p. 89). Vancouver, Canada: PME.

Hanson, S. A., & Hogan, T. P. (2000). Computational estimation skill of college students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 483.

Hiebert, J. & LeFevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Eds.). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1–27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hogan, T. P., & Brezinski, K. L. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities?. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(4), 259-280.

Huang, H. M. E. (2014). Investigating children's ability to solve measurement estimation problems. In S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 3, p. 353-360). Vancouver, Canada: PME.

Huang, H. M. E. (2020). Effects of grade level and object size on students' measurement estimation performance. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 16(12), em1923.

Kaya, T. B., & Demirci, S. Ç. (2022). Examination of the estimation skills and strategies of pre-service elementary mathematics teachers. *International Journal of Research in Education and Science*, 8(2), 243-261.



Kennedy, M. M. (2002). Knowledge and teaching. *Teachers and Teaching*, 8(3), 355-370.

Kramer, P., Bressan, P., & Grassi, M. (2018). The SNARC effect is associated with worse mathematical intelligence and poorer time estimation. *Royal Society Open Science*, 5(8), 172362.

Kurt-Birel, G., Deniz, Ş., & Önel, F. (2020). Analysis of primary school teachers' knowledge of geometry. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 12(4), 303-309.

Lee, J. E. (2017). Preschool teachers' pedagogical content knowledge in mathematics. *International Journal of Early Childhood*, 49(2), 229-243.

Lemonidis, C., Mouratoglou, A., & Pnevmatikos, D. (2014). Elementary teachers' efficiency in computational estimation problems. *MENON: Journal of Educational Research, 1st Thematic Issue: "Behaviour of students, teachers and future teachers in mental calculation and estimation*, 144-158.

Marshall, J. H., & Sorto, M. A. (2012). The effects of teacher mathematics knowledge and pedagogy on student achievement in rural Guatemala. *International Review of Education*, 58(2), 173-197.

Martinovic, D., & Manizade, A. G. (2017). Using grounded theory to extend existing PCK framework at the secondary level. *Education Sciences*, 7(2), 60.

Mildenhall, P. (2009). A study of teachers' learning and teaching of computational estimation: Getting started. In B. Kissane, M. Kemp, L. Sparrow, C. Hurst & T. Spencer (Eds.), *Mathematics it's mine: Proceedings of the 22nd biennial conference of The Australian Association of Mathematics Teachers* (pp. 153-158). Fremantle: AAMT.

Moh'd, S. S., Uwamahoro, J., Joachim, N., & Orodho, J. A. (2021). Assessing the level of secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(6), 178-193.

- Mouratoglou, A., & Lemonidis, C. (2019). How teachers' knowledge is influenced by a professional intervention in estimation. *International Journal of Education and Research* (7)9, 87-100.
- Ngo, F. J. (2013). The distribution of pedagogical content knowledge in Cambodia: Gaps and thresholds in math achievement. *Educational Research for Policy and Practice*, 12(2), 81-100.
- Pinamang, I., & Cofie, P. O. (2017). Pre-service teachers' content knowledge and pedagogical content knowledge in teaching geometric transformation. *African Journal of Educational Studies in Mathematics and Sciences*, 13, 63-70.
- Pizarro, N., Gorgorió, N., & Albarracín, L. (2015). Primary teacher' approach to measurement estimation activities. In K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3227-3233). Prague: CERME
- Reys, R. E. (1984). Mental computation and estimation: Past, present, and future. *The Elementary School Journal*, 84(5), 547-557.
- Şahin, Ö., Gökkurt, B., & Soylu, Y. (2016). Examining prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge on fractions in terms of students' mistakes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(4), 531-551.
- Segovia, I., & Castro, E. (2009). Computational and measurement estimation: curriculum foundations and research carried out at the University of Granada, Mathematics Didactics Department. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, (17)1, 499-539.
- Senol, A., Dundar, S., & Gunduz, N. (2015). Analysis of the relationship between estimation skills based on calculation and number sense of prospective classroom teachers. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 197, 1782-1788.
- Serkan, Ö. (2013). An analysis of in-service teachers' pedagogical content knowledge of division of fractions. *The Anthropologist*, 16(1-2), 1-5.

- Shirvani, H. (2015). Pre-service elementary teachers' mathematics content knowledge: a predictor of sixth graders' mathematics performance. *International Journal of Instruction*, 8(1), 133-142.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15, 4-14.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23.
- Şimşek, Z. Z. (2019). Investigating pre-service teachers' ability to recognize and classify geometric concepts hierarchically. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 10(3), 680-710.
- Son, J.-W., Hu, Q., & Lim, W. (2019). Computational estimation skill of preservice teachers: Operation type and teacher view. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(5), 682–706.
- Subramaniam, K. (2014). Prospective secondary mathematics teachers' pedagogical knowledge for teaching the estimation of length measurements. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17, 177-198.
- Sunde, P. B., Petersson, J., Nosrati, M., Rosenqvist, E., & Andrews, P. (2022). Estimation in the mathematics curricula of Denmark, Norway and Sweden: Inadequate conceptualisations of an essential competence. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 66(4), 626-641.
- Tchoshanov, M., Cruz, M. D., Huereca, K., Shakirova, K., Shakirova, L., & Ibragimova, E. N. (2017). Examination of lower secondary mathematics teachers' content knowledge and its connection to students' performance. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(4), 683-702.
- Tsao, Y. L., & Pan, T. R. (2011). Study on the computational estimation performance and computational estimation attitude of elementary school fifth graders in Taiwan. *US-China Education Review*, 8(3), 264-275.

Venkat, H., & Spaul, N. (2015). What do we know about primary teachers' mathematical content knowledge in South Africa? An analysis of SACMEQ 2007. *International Journal of Educational Development*, 41, 121-130.

Yang, D. C. (2019). Performance of fourth graders when judging the reasonableness of a computational result. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(1), 197-215.

Yusof, Y. M., & Zakaria, E. (2010). Investigating secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge: A case study. *Journal of Education and Sociology*, 1(1), 32-39.

# **Παράρτημα Α΄:**

## **Εργαλείο έρευνας**

## ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Το παρόν ερωτηματολόγιο έχει σχεδιαστεί στα πλαίσια μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας στη διδακτική των μαθηματικών. Απευθύνεται **μόνο σε εν ενεργεία εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης ΠΕ 70** και διερευνά τις απόψεις τους για τις εκτιμήσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Η συμμετοχή σας στην έρευνα είναι ανώνυμη και εμπιστευτική. Η συμβολή σας στη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου είναι πολύτιμη.

*Εκτιμωμένη διάρκεια: 15-20 λεπτά*

Φύλο:  Άντρας  Γυναίκα  Άλλο

Έτη προϋπηρεσίας: .....

Σχέση εργασίας:  Μόνιμος/η  Αναπληρωτής/τρια

Σε ποια τάξη του δημοτικού σχολείου διδάσκετε φέτος: .....

Σε ποιο νομό εργάζεστε φέτος: .....

### 1. Εκτιμήστε περίπου (χωρίς τη χρήση εργαλείων):

α) την περίμετρο ενός φύλλου Α4: .....

Εξηγήστε πώς το βρήκατε:.....

β) το μήκος της παρακάτω συνεχόμενης ευθείας σε συνδετήρες (λαμβάνοντας υπόψη σας τον εικονιζόμενο συνδετήρα):.....



---

Εξηγήστε πώς το βρήκατε:.....

.....

γ) το εμβαδόν ενός ποδοσφαιρικού γηπέδου: .....

Εξηγήστε πώς το βρήκατε:.....

.....

δ) το εμβαδόν ενός σχολικού θρανίου: .....

Εξηγήστε πώς το βρήκατε:.....

.....

ε) το βάρος ενός μαρκαδόρου πίνακα: .....

Εξηγήστε πώς το βρήκατε:.....

.....

στ) το βάρος ενός ελέφαντα: .....

Εξηγήστε πώς το βρήκατε:.....

.....

2. Σημειώστε τον βαθμό συμφωνίας σας στις παρακάτω προτάσεις:

	Καθόλου	Λίγο	Μέτρια	Αρκετά	Πολύ
Οι εκτιμήσεις είναι χρήσιμες στην καθημερινή ζωή.					
Οι εκτιμήσεις πρέπει να διδάσκονται στο σχολείο.					
Η ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων συμβάλλει στην περαιτέρω ανάπτυξη άλλων μαθηματικών δεξιοτήτων.					
Η ικανότητα εύρεσης απαντήσεων με ακρίβεια είναι σημαντικότερη από την ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων.					
Αισθάνομαι ασφαλής να διδάξω τις εκτιμήσεις.					
Για να είναι κάποιος καλός στις εκτιμήσεις πρέπει να είναι καλός και στους υπολογισμούς με ακρίβεια.					

3. Η παρακάτω δραστηριότητα δόθηκε σε μαθητές Ε' τάξης.

«Εκτίμησε πόσες φορές περίπου μπορεί να χωρέσει το τετράγωνο μέσα στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο»



Ο εκπαιδευτικός, αφού διάβασε το πρόβλημα στους μαθητές, τους ζήτησε να το μελετήσουν για ορισμένα λεπτά. Λίγα λεπτά αργότερα ένας μαθητής, αφού ολοκλήρωσε τη δραστηριότητα, είπε:

«Αρχικά μέτρησα το μήκος και το πλάτος του τετραγώνου και βρήκα το εμβαδόν του, είναι  $1 \times 1 = 1$  τ.εκ. Στη συνέχεια, μέτρησα το μήκος και το πλάτος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και βρήκα το εμβαδόν του, είναι  $7 \times 11 = 77$  τ.εκ. Έπειτα, κάνοντας διαίρεση,  $77 : 1 = 77$ , κατέληξα ότι το τετράγωνο μπορεί να χωρέσει 77 φορές μέσα στο ορθογώνιο».

α) Ποιος πιστεύετε ότι είναι ο σκοπός της συγκεκριμένης δραστηριότητας;.....  
.....

β) Πώς σχολιάζετε τη μέθοδο που ακολούθησε ο μαθητής για να βρει το αποτέλεσμα;.....  
.....  
.....  
.....

γ) Αν ήσασταν εσείς ο εκπαιδευτικός της τάξης, ποια θα ήταν η ανατροφοδότησή σας στον συγκεκριμένο μαθητή;.....  
.....  
.....  
.....  
.....