Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Σχολή Κοινωνικών και Ανθρωπιστικών Επιστημών
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
Διϊδρυματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών με τίτλο:
«Επιστήμες της αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών»
Κατεύθυνση: «Α' Ηλικιακός κύκλος (5-12 χρονών)»

Διπλωματική εργασία με θέμα:

«Ανάπτυξη Σύντομου Εργαλείου Μέτρησης Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας: μια πιλοτική εφαρμογή»

Μελισσανίδου Ιωάννα, (Α.Ε.Μ. 1064)

Επιβλέπων Καθηγητής: Χρήστου Κωνσταντίνος, Επίκουρος Καθηγητής

Μέλη τριμελούς επιτροπής: Μάρκος Άγγελος, Αναπληρωτής Καθηγητής
Τζεκάκη Μαριάννα. Καθηγήτρια

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Ιούλιος, 2023

"Development of a brief Early Mathematical Competence Measurement Tool (EMCMT-B): a pilot study."

Περίληψη

Η έρευνα στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης ολοένα και περισσότερο μελετά την πρώιμη μαθηματική επάρκεια, καθώς και τη σημαντικότητά της στην οικοδόμηση μεταγενέστερων μαθηματικών δεξιοτήτων, αλλά και στη γενικότερη ακαδημαϊκή επίδοση. Η κατάκτηση ή μη της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας δύναται να ελεγχθεί μέσα από μια πληθώρα εργαλείων μέτρησης, που έχει σχεδιαστεί για τον σκοπό αυτό. Ωστόσο, δεν υπάρχει συναίνεση σχετικά με το καταλληλότερο εργαλείο μέτρησής της, τη διάρκεια χορήγησης, καθώς και τις κατηγορίες των πρώιμων μαθηματικών γνώσεων, που θα πρέπει να περιλαμβάνει αυτό. Σκοπός της παρούσας μελέτης ήταν η ανάπτυξη και ο έλεγχος ενός σύντομου και πρακτικού εργαλείου μέτρησης της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας, που θα απευθύνεται σε μαθητές ηλικίας 4 έως 6 ετών. Το εργαλείο που σχεδιάστηκε για τους σκοπούς της μελέτης (Early Mathematical Competence Measurement Tool-Brief, EMCMT-B), αποτελείται από 25 έργα, τα οποία αξιολογούν τις γνώσεις και δεξιότητες των προνηπίων και νηπίων σε βασικές κατηγορίες μαθηματικής γνώσης για το Νηπιαγωγείο, όπως: λεκτική αρίθμηση, καταμέτρηση, άμεση αναγνώριση, σύγκριση και διάταξη, αριθμοί και πράξεις με μικρούς αριθμούς, επίλυση πλαισιωμένων λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης, μέτρηση και γεωμετρικές έννοιες (σχήματα, κανονικότητες). Το εργαλείο αυτό εφαρμόστηκε πιλοτικά και ελέγχθηκε η αξιοπιστία του, προκειμένου να προταθούν πιθανές βελτιώσεις για μελλοντική χρήση. Ακόμα, ελέγχθηκαν ενδεχόμενες διακυμάνσεις στην πρώιμη μαθηματική επάρκεια, μεταξύ των συμμετεχόντων, και των διαφορετικών κατηγοριών πρώιμης μαθηματικής γνώσης. Στην παρούσα έρευνα συμμετείχαν 66 παιδιά νηπιαγωγείων, εκ των οποίων τα 31 ήταν προνήπια και τα 35 ήταν κορίτσια. Στα ερευνητικά δεδομένα εφαρμόστηκε το μοντέλο Rasch, το οποίο έδειξε υψηλή αξιοπιστία (Person Reliability) και καλή προσαρμογή στα δεδομένα. Οι συμμετέχοντες σημείωσαν καλύτερη επίδοση στον τομέα των αριθμών και της αριθμητικής και χαμηλότερη επίδοση στα πλαισιωμένα λεκτικά προβλήματα. Δεν παρουσιάστηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ούτε ανάμεσα σε προνήπια και νήπια, ούτε ανάμεσα σε αγόρια και κορίτσια.

Λέξεις-κλειδιά: πρώιμη μαθηματική επάρκεια, εργαλείο μέτρησης, νήπια, προνήπια.

Summary

The research in the field of mathematics education increasingly focuses on early mathematical competence, as well as its significance in the development of later mathematical skills and overall academic performance. The level of early mathematical competence can be assessed through a variety of measurement tools designed for this purpose. However, there is no consensus on the most suitable measurement tool, its characteristics, duration of administration, as well as the categories of early mathematical knowledge it should include. The aim of this study was to develop and test a brief and practical measurement tool for early mathematical competence targeting students aged 4 to 6 years. The tool (Early Mathematical Competence Measurement Tool-Brief, EMCMT-B) designed for the purposes of the study consists of 25 tasks that assess the knowledge and skills of prekindergarten and kindergarten children in basic categories of mathematical knowledge for preschool, such as verbal counting, object counting, subitizing, comparison and ordering, numbers and operations with small numbers, solving verbal story addition and subtraction problems, measurement, and geometric concepts (shapes, patterns). This tool was pilot-tested, and its reliability was tested to propose possible improvements for future implementation. Additionally, potential variations in early mathematical competence were tested among the participants, as well as among different categories of early mathematical knowledge. In this research, 66 children from kindergartens participated, of whom 31 were prekindergartens and 35 were girls. Rasch model was applied to the research data, which showed high reliability (Person Reliability) and good fit to the data. The participants achieved better performance in numbers and arithmetic, and lower performance in verbal story problems. No statistically significant differences were found either between prekindergartens and kindergartners or between boys and girls.

Key-words: Early mathematical competence, measurement tool, prekindergartens, kindergartens.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλους όσους συνέβαλαν στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας και ιδιαίτερα στον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Κωνσταντίνο Χρήστου για την επιστημονική καθοδήγηση, την αμέριστη κατανόηση και υποστήριξη που μου παρείχε, καθ’ όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας. Οι παρατηρήσεις και οι προτάσεις του ήταν πάντοτε ακριβείς και στοχευμένες.

Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Άγγελο Μάρκο, για την σημαντική καθοδήγηση που μου παρείχε και για τη συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή της παρούσας μελέτης, η οποία με τίμησε.

Ακόμη, θέλω να ευχαριστήσω την κ. Μαριάννα Τζεκάκη, η οποία με τίμησε με τη συμμετοχή της στην τριμελή επιτροπή.

Επιπλέον, θέλω να ευχαριστήσω όλους τους συμμετέχοντες της μελέτης, καθώς και τους εκπαιδευτικούς και προϊσταμένους των νηπιαγωγείων, διότι χωρίς τη συμβολή τους, η έρευνα δε θα μπορούσε να είχε ολοκληρωθεί.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω θερμά τους φίλους, την οικογένεια και ιδιαίτερα τον σύντροφό μου, για την κατανόηση και την ηθική υποστήριξη που μου παρείχαν καθ’ όλη τη διάρκεια της εκπόνησής της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Ανά τα χρόνια, πολλοί ερευνητές μελέτησαν την πρώιμη μαθηματική επάρκεια χρησιμοποιώντας διαφορετική ορολογία. Για παράδειγμα, η πρώιμη μαθηματική επάρκεια έχει αναφερθεί ως: βασικές δεξιότητες αριθμών (Geary 1994, όπ. αναφ. στο Aunio, Aubrey, Godfrey, Pan & Liu, 2008), προπαρασκευαστικές αριθμητικές δεξιότητες (Schopman, Van Luit & Van de Rijt 1996, όπ. αναφ. στο Aunio et al., 2008), έννοιες αριθμών και καταμέτρησης (Fuson, 1988, όπ. αναφ. στο Aunio et al., 2008), άτυπες μαθηματικές γνώσεις (Ginsburg, Choi, Lopez, Netly & Chi. 1997, όπ. αναφ. στο Aunio et al., 2008), δομικά στοιχεία αριθμών (Butterworth, 1999, όπ. αναφ. στο Aunio et al., 2008) και αίσθηση αριθμού (Dehaene, 1997, όπ. αναφ. στο Aunio et al., 2008) μέχρι να αποκτήσει τη σύγχρονη ορολογία. Ωστόσο, όλοι αυτοί οι όροι, παρά τις ποικίλες και διαφορετικές ορολογίες, αναφέρονται στις γνώσεις και δεξιότητες που κατακτούν και επιδεικνύουν τα παιδιά προσχολικής εκπαίδευσης και που θεωρούνται αναγκαίες για την εκμάθηση των τυπικών σχολικών μαθηματικών (Van de Rijt, Van Luit & Pennings, 1994, όπ. αναφ. στο Μπάρμπας, Βερμέουλεν, Κιοσέογλου & Μενεξές, 2008; Aunio et al., 2008).

Τα παιδιά είναι πολύ ικανά στα μαθηματικά ήδη από τα πρώτα χρόνια ζωής τους (Clements & Sarama, 2016). Αναλυτικότερα, υπάρχουν καλά τεκμηριωμένα στοιχεία, τα οποία υποστηρίζουν πως τα παιδιά αρχίζουν να αναπτύσσουν μαθηματικές ικανότητες στη βρεφική ηλικία ως μέρος της φυσικής τους αναπτυξιακής πορείας (Ginsburg, Cannon, Eisenband & Pappas, 2006). Με βάση το παραπάνω, ολοένα και περισσότεροι αμφισβήτησαν την ιδέα πως οι μαθητές νηπιαγωγείου δεν ήταν έτοιμοι να μάθουν μαθηματικά (Weiland, Wolfe, Hurwitz, Clements, Sarama & Yoshikawa, 2012), εξαιτίας της αδυναμίας τους να χρησιμοποιήσουν συνειδητά αφηρημένη αριθμητική σημειογραφία, όπως γραπτούς αριθμούς ή σύμβολα πράξεων (Starkey, Klein & Wakeley, 2004). Ακόμα, σύμφωνα με μελέτες (LeFevre, Fast, Skwarchuk, Smith-Chant, Bisanz, Kamawar & Penner-Wilger, 2010; Watts, Duncan, Siegler & Davis-Kean, 2014; Nguyen, Watts, Duncan, Clements, Sarama, Wolfe & Spitler, 2016), η μαθηματική επάρκεια μαθητών προσχολικής εκπαίδευσης έχει βρεθεί πως συνδέεται με την υψηλή επίδοση στα Μαθηματικά σε μεταγενέστερες τάξεις και αποτελεί ισχυρό προγνωστικό παράγοντα για την μαθηματική επίδοση σε μεγαλύτερες τάξεις, καθώς και για την γενικότερη ακαδημαϊκή επίδοση. Ο έγκαιρος εντοπισμός των μαθητών με ελλείμματα σε πτυχές της μαθηματικής γνώσης, αποτελεί βασική προϋπόθεση για την υποστήριξη των μαθητών αυτών, μέσα από την καθοδήγηση εκπαιδευτικών πρακτικών προς αντιμετώπιση αυτών των ελλειμμάτων (Raghubar & Barnes, 2017, όπ. αναφ. στο Tsigilis, Krousorati, Gregoriadis & Grammatikopoulos, 2023).

Η αυξανόμενη εστίαση στην πρώιμη μαθηματική εκπαίδευση και η ανάγκη για δημιουργία προγραμμάτων σπουδών για τα Μαθηματικά Προσχολικής εκπαίδευσης, που τεκμηριώνονται με βάση τη διεθνή βιβλιογραφία, έχουν ενισχύσει επίσης την ανάγκη για καλύτερες αξιολογήσεις των πρώιμων μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων (Weiland, et al., 2012). Παρά το πλήθος των εργαλείων πρώιμης μαθηματικής επάρκειας που έχει αναπτυχθεί, έχει ασκηθεί κριτική πως η πλειονότητα των εργαλείων δεν αξιολογεί μεγάλο εύρος μαθηματικών δεξιοτήτων, είναι χρονοβόρα και συνεπώς δύσκολη στην χορήγηση και δεν δύναται να εντοπίσει με ασφάλεια ατομικές διαφορές στην πρώιμη μαθηματική επάρκεια (Clements, Sarama & Liu, 2008; Weiland, et al., 2012).

Με αφορμή την επιτακτική ανάγκη που υπάρχει για την ανάπτυξη νέων εργαλείων μέτρησης των πρώιμων μαθηματικών, σκοπός της παρούσας μελέτης ήταν η δημιουργία ενός σύντομου και εύχρηστου εργαλείου, που θα αξιολογεί μεγάλο μέρος του συνόλου των γνώσεων και των δεξιοτήτων που απαρτίζουν την πρώιμη μαθηματική επάρκεια και θα τεκμηριώνεται από τη διεθνή βιβλιογραφία. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω, η παρούσα μελέτη οργανώνεται ως εξής:

Αρχικά, παρατίθεται η βιβλιογραφική ανασκόπηση της παρούσας μελέτης, η οποία αποτελείται από 2 κεφάλαια. Στο 1ο κεφάλαιο παρουσιάζεται η βιβλιογραφική ανασκόπηση που αφορά την πρώιμη μαθηματική επάρκεια. Αναλυτικότερα, ορίζεται και αποσαφηνίζεται η έννοια της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας. Έπειτα, παρουσιάζονται και αναλύονται οι βασικές προσεγγίσεις που έχουν διατυπωθεί για την έννοια αυτή. Με άλλα λόγια, αναφέρονται οι επιμέρους μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες που, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, απαρτίζουν την πρώιμη μαθηματική επάρκεια. Ακόμη, αναλύεται η πρώιμη μαθηματική επάρκεια, όπως ορίζει το νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) για τα Μαθηματικά για την Προσχολική Εκπαίδευση.

Η βιβλιογραφική ανασκόπηση ολοκληρώνεται με το 2ο κεφάλαιο, στο οποίο αρχικά παρουσιάζονται ορισμένα σημαντικά εργαλεία που έχουν σχεδιαστεί για τη μέτρηση της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας ή επιμέρους πτυχών της, αναλύοντας τα βασικά χαρακτηριστικά τους, τους τομείς μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων που εξετάζουν, καθώς και των ψυχομετρικών χαρακτηριστικών που έχει το καθένα. Επιπλέον, παρατίθενται τα ευρήματα ορισμένων μελετών της διεθνούς βιβλιογραφίας, που αφορούν τυχόν διαφορές που εντοπίστηκαν μέσα από την μέτρηση της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας, με βάση την ηλικία και το φύλο. Τέλος, αναδύεται η σημαντικότητα της παρούσας μελέτης, λόγω της αυξανόμενης προσοχής που δίνεται στην πρώιμη μαθηματική εκπαίδευση και των ελλείψεων των σύγχρονων εργαλείων μέτρησης της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας.

Το 3^{ο} κεφάλαιο της εργασίας αποτελείται από τη μεθοδολογία. Πιο συγκεκριμένα, διατυπώνεται ο σκοπός της μελέτης, καθώς και τα τρία ερευνητικά της ερωτήματα, πάνω στα οποία θα βασιστεί η ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων και η διατύπωση των συμπερασμάτων. Ακολούθως, παρουσιάζεται και τεκμηριώνεται η μεθοδολογική προσέγγιση που επιλέχθηκε. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται αναλυτικά τα δημογραφικά στοιχεία των συμμετεχόντων, καθώς και το εργαλείο συλλογής δεδομένων που σχεδιάστηκε και χορηγήθηκε πιλοτικά στους συμμετέχοντες. Περιγράφεται αναλυτικά το κάθε έργο, με τη χρήση εικόνων από το εργαλείο, καθώς και οι κατηγορίες μαθηματικής ικανότητας, που αξιολογούνται μέσα από το εργαλείο. Ακόμη, περιγράφεται η διαδικασία που ακολουθείται για τη χορήγηση του εργαλείου και τέλος, παρουσιάζεται και τεκμηριώνεται η μέθοδος που επιλέχθηκε για την ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων.

Το 4^{ο} κεφάλαιο της παρούσας μελέτης αφορά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των απαντήσεων που έδωσαν οι μαθητές κατά τη χορήγηση του εργαλείου. Αρχικά, αναλύεται η αξιοπιστία και εγκυρότητα του εργαλείου. Ακολούθως, παρουσιάζεται τόσο η συνολική επίδοση στο EMCMT-B, όσο και η επίδοση των μαθητών στα επιμέρους έργα των κατηγοριών μαθηματικής γνώσης. Στη συνέχεια, ακολουθούν τα αποτελέσματα της ανάλυσης Rasch, που διενεργήθηκε, και περιγράφεται τόσο η προσαρμογή των έργων στη συγκεκριμένη ανάλυση, όσο και η δυσκολία τους. Τέλος, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των ελέγχων που έγιναν, προκειμένου να προσδιοριστούν τυχόν διαφορές στην πρώιμη μαθηματική επάρκεια, με βάση την ηλικία και το φύλο.

Στο 5^{ο} κεφάλαιο της έρευνας, γίνεται η συζήτηση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν και η σύγκριση τους με αντίστοιχα αποτελέσματα, που έχουν καταγραφεί στη βιβλιογραφία, με σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων. Έπειτα, αναφέρονται οι περιορισμοί της παρούσας μελέτης, προτείνονται τροποποιήσεις στο εργαλείο, προκειμένου να αυξηθεί η αξιοπιστία του, επισημαίνονται οι παιδαγωγικές εφαρμογές του και τέλος, προτείνονται πιθανές μελλοντικές ερευνητικές προσπάθειες.

Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Η βιβλιογραφική ανασκόπηση απαρτίζεται από 2 κεφάλαια και πρόκειται να πλαισιώσει την παρούσα μελέτη, παρουσιάζοντας ζητήματα πρώιμης μαθηματικής επάρκειας. Στο 1ο κεφάλαιο θα μελετηθεί η μαθηματική εκπαίδευση στη βαθμίδα του νηπιαγωγείου, θα αποσαφηνιστούν οι όροι της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας και θα αναλυθούν οι προσεγγίσεις της και οι πτυχές της, τόσο σύμφωνα με τη διεθνή βιβλιογραφία, όσο και με βάση το νέο ελληνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) για τα Μαθηματικά στο Νηπιαγωγείο. Στο 2ο κεφάλαιο της βιβλιογραφικής ανασκόπησης, θα παρουσιαστούν ορισμένα από τα εργαλεία που έχουν σχεδιαστεί με σκοπό τη μέτρηση της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας και θα αναφερθούν τυχόν αναπτυξιακές ή φυλετικές διαφορές, που έχουν καταγραφεί στη διεθνή βιβλιογραφία, μέσα από την αξιολόγησή της με αντίστοιχα εργαλεία μέτρησης. Τέλος, πρόκειται να αναδειχθεί η σημαντικότητα της παρούσας μελέτης.

1ο Κεφάλαιο: Πρώιμη Μαθηματική Επάρκεια

1.1. Μαθηματική εκπαίδευση στο Νηπιαγωγείο

Εδώ και πλέον τρεις δεκαετίες, η εκπαίδευση των Μαθηματικών δεν περιορίζεται μόνο στην εκμάθηση κανόνων και την εκτέλεση πράξεων. Αντιθέτως, η μαθηματική εκπαίδευση πλέον εστιάζει στην ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων (Τζεκάκη, 2011). Όπως επισημαίνει και η Keitel (2006, όπ. αναφ. στο Τζεκάκη, 2011), η σύγχρονη μαθηματική εκπαίδευση δεν στοχεύει μονάχα στην εκμάθηση εννοιών και διαδικασιών, αλλά στη μύηση των μαθητών σε μια στάση αντίληψης και ενέργειας με μαθηματικό τρόπο, εξάσκησης στην επίλυση προβλημάτων, καθώς και ανάπτυξης της αναστοχαστικής σκέψης, προκειμένου να συνειδητοποιήσουν το νόημα των Μαθηματικών.

Είναι σαφές πλέον από τη διεθνή βιβλιογραφία, πως οι μαθητές προσχολικής ηλικίας θα πρέπει να συμμετέχουν στη διδασκαλία των μαθηματικών για πολλούς λόγους. Η άποψη πως τα μικρά παιδιά μπορούν να αντιληφθούν μόνο απλά μαθηματικά αντικαθίσταται από την άποψη, ότι τα μικρά παιδιά είναι σε θέση να ανταποκριθούν σε μεγάλα μαθηματικά νοήματα. Η μαθηματική επάρκεια των μικρών παιδιών περιλαμβάνει κυρίως άτυπες καθημερινές, λεκτικές και απτές γνώσεις (π.χ. λεκτική αρίθμηση, αναγνώριση γεωμετρικών σχημάτων), οι οποίες αποτελούν τα θεμέλια για την εκμάθηση σχολικών (κατά κύριο λόγο γραπτών) μαθηματικών (Ginsburg, 2002; Baroody, Clements & Sarama, 2019).

Η διδασκαλία των μαθηματικών στην προσχολική ηλικία είναι πολύ σημαντική, καθώς αφενός αμβλύνει τις πρώιμες ατομικές διαφορές, και αφετέρου ενισχύει τη μάθηση παιδιών, που διαφορετικά θα είχαν μεγάλη πιθανότητα να εμφανίσουν μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά (Baroody, Clements & Sarama, 2019). Συνεπώς, η πρώιμη μαθηματική εκπαίδευση οφείλει να είναι ποιοτική, περιλαμβάνοντας τρία βασικά συστατικά (Sarama & Clements, 2009a, όπ. αναφ. στο Guss, Clements & Sarama, 2022). Αρχικά, το περιεχόμενο της διδασκαλίας των Μαθηματικών πρέπει να στοχεύει σε έννοιες μαθηματικά συναφείς και εστιασμένες στο αντικείμενο των Μαθηματικών (Guss, Clements & Sarama, 2022). Δεύτερον, ο σχεδιασμός και η εφαρμογή των διδακτικών πρακτικών θα πρέπει να έχει ως πυρήνα τον τρόπο σκέψης και μάθησης των μαθητών. Τρίτον, πρέπει να επιλέγονται διδακτικές πρακτικές που λαμβάνουν υπόψη τόσο την πειθαρχία των μαθηματικών, όσο και τις ιδιαιτερότητες του κάθε παιδιού (π.χ. κουλτούρα, οικογένεια, τρόπος σκέψης και μάθησης, κ.α.) (Carpenter, Fennema, Franke, Levi & Empson, 2014, όπ. αναφ. στο Guss, Clements & Sarama, 2022).

Μια προσέγγιση που συνδυάζει τα τρία παραπάνω συστατικά μιας ποιοτικής μαθηματικής εκπαίδευσης είναι η προσέγγιση της τροχιάς μάθησης (Learning Trajectory) (Sarama & Clements, 2009a; Guss, Clements & Sarama, 2022). Οι τροχιές μάθησης ορίζονται ως:

«οι περιγραφές της σκέψης και της μάθησης των παιδιών σε έναν συγκεκριμένο μαθηματικό τομέα, και μια σχετική εικαζόμενη διαδρομή διαμέσου ενός συνόλου διδακτικών έργων που έχουν σχεδιαστεί για να προκαλέσουν αυτές τις διανοητικές διαδικασίες ή ενέργειες. Αυτές υποθέτονται για να μετακινήσουν τα παιδιά διαμέσου μιας αναπτυξιακής πορείας της σκέψης, που δημιουργήθηκε με σκοπό την υποστήριξη των επιδόσεων των παιδιών σε συγκεκριμένους στόχους αυτού του μαθηματικού πεδίου» (Clements & Sarama, 2004, σελ. 83).

Κάθε τροχιά μάθησης απαρτίζεται από έναν στόχο, μια αναπτυξιακή πορεία, καθώς και σχετικές διδακτικές πρακτικές. Τον στόχο της τροχιάς μάθησης δεν αποτελεί μονάχα μια συμπεριφορά, αλλά μια σειρά μαθηματικών εννοιών, δεξιοτήτων και πρακτικών (Guss, Clements & Sarama, 2022).

Συνεχίζοντας την προσπάθεια για μια προσχολική εκπαίδευση υψηλής ποιότητας, η παραπάνω προσέγγιση επικεντρώνεται στην ανάπτυξη των μαθητών, σχεδιάζοντας διδακτικές πρακτικές που θα την υποστηρίξουν. Αναλυτικότερα, όπως κάθε τομέας έχει μια πορεία ανάπτυξης, κατακτώντας τις δεξιότητες βήμα-βήμα, με τον ίδιο τρόπο, πρόκειται οι μαθητές να μάθουν τα μαθηματικά, ακολουθώντας, δηλαδή τις φυσικές αναπτυξιακές πορείες. Σε αυτή τη διαδικασία συμβάλλουν κατά πολύ οι δάσκαλοι, οι οποίοι αντιλαμβανόμενοι τα επίπεδα της αναπτυξιακής πορείας, διαμορφώνουν τα μαθησιακά περιβάλλοντα για τα Μαθηματικά με τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι κατάλληλα, αποτελεσματικά και ουσιαστικά στο αναπτυξιακό επίπεδο των μαθητών (Clements & Sarama, 2009; Guss, Clements & Sarama, 2022).

Το τελευταίο χαρακτηριστικό της προσέγγισης της τροχιάς μάθησης αποτελούν οι διδακτικές πρακτικές, οι οποίες διαμορφώνονται με βάση το επίπεδο της αναπτυξιακής πορείας των μαθητών. Οι διδακτικές πρακτικές περιλαμβάνουν τόσο το εκπαιδευτικό περιβάλλον, όσο και τις σχέσεις και τις δραστηριότητες που λαμβάνουν χώρα μέσα στην τάξη, το σύνολο των οποίων πρέπει να συμβαδίζει με το αναπτυξιακό επίπεδο των μαθητών. Συνεπώς, καθίσταται σαφές πως οι προϋποθέσεις για μια μαθηματική εκπαίδευση υψηλής ποιότητας είναι πλήρως εναρμονισμένες με την προσέγγιση της τροχιάς μάθησης (Clements & Sarama, 2009; Guss, Clements & Sarama, 2022). Μια ποιοτική μαθηματική εκπαίδευση, η οποία βασίζεται στην προσέγγιση των τροχιών μάθησης, έχει ως απώτερο σκοπό, την κατάκτηση της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας από μαθητές νηπιαγωγείου (προνήπια και νήπια), η έννοια της οποίας πρόκειται να αναλυθεί στη συνέχεια.

1.2. Ορισμοί πρώιμης μαθηματικής επάρκειας

Το να κατέχει κάποιος επαρκώς μια ικανότητα (δηλαδή να είναι επαρκής) σε κάποιον τομέα της ζωής του (προσωπικής, επαγγελματικής ή κοινωνικής), σημαίνει πως κατέχει σε καλό βαθμό, την ικανότητα να διαμορφώνει τις συνθήκες σε επιμέρους πτυχές αυτού του πεδίου (Niss, 2002). Με άλλα λόγια, με τον όρο «επάρκεια» δεν εννοείται μόνο η θεωρητική γνώση, αλλά και η αποτελεσματική αξιοποίηση των γνώσεων, στρατηγικών αλλά και των δεξιοτήτων ενός ατόμου, με σκοπό την επίλυση τυχόν ζητημάτων-προκλήσεων σε ποικίλα πλαίσια (Μπάρμπας, Βερμέουλεν, Κιοσέογλου & Μενεξές, 2008; Niss & Hojgaard, 2011; Niss & Hojgaard, 2019). Στην αποτελεσματική αξιοποίηση των γνώσεων, σημαντικός είναι ο ρόλος της ολοκληρωμένης και καλά τεκμηριωμένης κρίσης για την χρήση των γνώσεων και των ικανοτήτων του ατόμου (Niss & Hojgaard, 2019).

Με τον όρο «μαθηματική επάρκεια», στην προκειμένη περίπτωση, εννοείται η ικανότητα του ατόμου να κατανοεί και να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά σε ποικίλες καταστάσεις και πλαίσια. Αυτά τα πλαίσια μπορεί να είναι είτε ενδο-μαθηματικά, δηλαδή να έχουν άμεση σχέση με την επιστήμη των μαθηματικών, είτε εξω-μαθηματικά, μέσα στα οποία τα μαθηματικά διαδραματίζουν ή θα μπορούσαν να παίξουν κάποιο ρόλο (Niss, 2002; Niss & Hojgaard, 2019). Η μαθηματική επάρκεια, δηλαδή, δεν αφορά μονάχα την απόκτηση ορισμένων σημαντικών μαθηματικών δεξιοτήτων, αλλά και την εφαρμογή τους για την επίλυση προβλημάτων της καθημερινότητας (Fuchs & Fuchs, 1996, όπ. αναφ. στο Fuchs, Fuchs & Courey, 2005).

Σύμφωνα με τους Van de Rijt, Van Luit & Pennings (1994, όπ. αναφ. στο Μπάρμπας και συν., 2008, σελ. 7):

«Η πρώιμη μαθηματική επάρκεια αναφέρεται στο σύνολο των γνώσεων και των δεξιοτήτων που αποτελούν προϋπόθεση για να εισαχθεί αποτελεσματικά ένα παιδί προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας στα σχολικά μαθηματικά της τυπικής εκπαίδευσης».

Με τον παραπάνω ορισμό συμφωνούν και οι Niss και Højgaard (2019, σ. 4), οι οποίοι ορίζουν τη μαθηματική επάρκεια ως:

«*η διορατική ετοιμότητα κάποιου να ενεργήσει κατάλληλα, ως απάντηση σε κάθε είδους μαθηματική πρόκληση που σχετίζεται με δεδομένες καταστάσεις*».

Ο όρος αυτός θα μπορούσε αλλιώς να ερμηνευτεί ως ο βαθμός ετοιμότητας ενός παιδιού (Μπάρμπας και συν., 2008).

Συνεπώς, καθίσταται σαφές από τους ορισμούς, πως η πρώιμη μαθηματική επάρκεια αποτελείται από ένα πλήθος μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων. Αυτό όμως που δεν είναι σαφές είναι το τι περιλαμβάνει. Επομένως, με βάση τη διεθνή βιβλιογραφία, γίνεται αντιληπτό πως οι κατηγορίες των μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων που απαρτίζουν την πρώιμη μαθηματική επάρκεια διαφέρουν ανάλογα με την εκάστοτε προσέγγιση.

1.3. Προσεγγίσεις πρώιμης μαθηματικής επάρκειας

Η πρώιμη μαθηματική επάρκεια, όπως προαναφέρθηκε, απαρτίζεται από ένα σύνολο μαθηματικών ικανοτήτων. Συνεπώς, οι επιμέρους μαθηματικές ικανότητες αποτελούν διακριτά και βασικά συστατικά της έννοιας αυτής. Αυτό συμβαίνει γιατί με βάση τους ορισμούς που έχουν προαναφερθεί, η μαθηματική επάρκεια αφορά την ετοιμότητα του ατόμου να δράσει με αποτελεσματικότητα έναντι διαφόρων ειδών μαθηματικών προκλήσεων που απαιτούν διαφορετικές ικανότητες (Niss, 2003; Niss & Hojgaard, 2011).

Αναλυτικότερα, η μαθηματική επάρκεια προϋποθέτει την βαθιά και έγκυρη γνώση τόσο των αριθμητικών εννοιών, όσο και των σχέσεων που τις διέπουν. Η ικανότητα και η θέληση για εφαρμογή μαθηματικών αναπαραστάσεων (μοντέλα, τύπους κ.α.) και τρόπων σκέψης (λογική και χωρική σκέψη) απαρτίζουν την μαθηματική επάρκεια (Μπάρμπας και συν., 2008).

Σύμφωνα με τους Van de Rijt, Van Luit και Pennings (1994, όπ. αναφ. στο Van de Rijt, Van Luit, & Pennings, 1999), η πρώιμη μαθηματική επάρκεια αποτελεί προϋπόθεση για την εισαγωγή ενός μαθητή προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας στην τυπική εκπαίδευση. Συνεπώς, αφορά κατά κύριο λόγο την ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού. Για την αξιολόγησή της, είναι σημαντικό να ελεγχθούν δεξιότητες από πτυχές της αριθμητικής και μη αριθμητικής γνώσης, όπως οι δεξιότητες της σύγκρισης, της ταξινόμησης και διάταξης, της αντιστοίχισης ενός προς ένα, της χρήσης των αριθμολέξεων, της αποτελεσματικής και δομημένης καταμέτρησης, καθώς και της γενικής γνώσης των αριθμών.

Αναλυτικότερα, οι έννοιες σύγκρισης αφορούν τη σύγκριση ανάμεσα σε δύο άνισες καταστάσεις, απόλυτες, τακτικές και μετρήσιμες. Για παράδειγμα, ο προσδιορισμός του μικρότερου ή μεγαλύτερου αντικειμένου, της περισσότερης ή της λιγότερης ποσότητας, που όπως υποστήριξαν και οι Gelman και Baillargeon (1983, όπ.

αναφ. στο Van de Rijt, Van Luit, & Pennings, 1999), οι μαθητές νηπιακής ηλικίας είναι σε θέση να το κάνουν. Μια άλλη πτυχή αφορά στην ταξινόμηση (Piaget, 1965, όπ. αναφ. στο Van de Rijt, Van Luit, & Pennings, 1999). Αποτελεί την ικανότητα ομαδοποίησης αντικειμένων έχοντας ως κριτήριο ένα ή περισσότερα κοινά χαρακτηριστικά. Η επόμενη πτυχή έχει σχέση με την αντιστοίχιση ένα προς ένα (Piaget, 1965, όπ. αναφ. στο Van de Rijt, Van Luit, & Pennings, 1999). Πιο συγκεκριμένα, αφορά την ένα προς ένα αντιστοίχιση δυο ομάδων αντικειμένων, τα οποία παρουσιάζονται στον μαθητή την ίδια χρονική στιγμή. Η τέταρτη πτυχή σχετίζεται με την σειριοθέτηση (Piaget, 1965, όπ. αναφ. στο Van de Rijt, Van Luit, & Pennings, 1999), ή αλλιώς με τον πλέον διαδεδομένο όρο, διάταξη. Η διάταξη αναφέρεται στην τοποθέτηση των αντικειμένων ή των συνόλων στη σειρά με βάση ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά (π.χ. το μέγεθος). Ακολούθως, η πέμπτη πτυχή έχει σχέση με τη χρήση των λέξεων αρίθμησης έως τον αριθμό 20. Για να θεωρηθεί πως ο μαθητής κατέχει αυτή την πτυχή της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας θα πρέπει να είναι σε θέση να απαριθμεί τόσο με αύξουσα σειρά, όσο και με φθίνουσα, έχοντας ως αφετηρία τον αριθμό που του ζητείται (Van de Rijt, Van Luit, & Pennings, 1999).

Οι επόμενες δυο πτυχές αφορούν τη δομημένη και την αποτελεσματική καταμέτρηση. Αναλυτικότερα, με τον όρο «δομημένη καταμέτρηση» εννοείται η καταμέτρηση μη συνεχών ποσοτήτων με συγχρονισμένο και δομημένο τρόπο, η οποία ωστόσο, διευκολύνεται από την κατάδειξη ή μετακίνηση των αντικειμένων με το δάχτυλο (Van de Rijt, Van Luit, & Pennings, 1999; Μπάρμπας, Βερμέουλεν, Κιοσέογλου & Μενεξές, 2008). Από την άλλη, η αποτελεσματική καταμέτρηση αναφέρεται στην ακριβή καταμέτρηση δομημένων ή μη, διακριτών αντικειμένων και την πληθικότητα, την αναφορά, δηλαδή, του τελευταίου αριθμού ως αποτέλεσμα της καταμέτρησης, μέσα από νοερές αριθμητικές δομές και στρατηγικές που τους επιτρέπουν να υλοποιήσουν αυτού του είδους την καταμέτρηση (Van de Rijt, Van Luit, & Pennings, 1999; Μπάρμπας, Βερμέουλεν, Κιοσέογλου & Μενεξές, 2008).

Τέλος, την όγδοη πτυχή αποτελεί η γενική γνώση των αριθμών. Πιο συγκεκριμένα, περιλαμβάνει τη χρήση των αριθμητικών γνώσεων (για παράδειγμα, πράξεις) σε καταστάσεις της καθημερινότητας, που παρουσιάζονται εικονικά με τη μορφή ζωγραφιών και σχεδίων (Van de Rijt, Van Luit, & Pennings, 1999).

Από την άλλη, μια λίγο διαφορετική προσέγγιση της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας και της αξιολόγησής της είναι και η προσέγγιση που αναπτύχθηκε στη Δανία, από μια επιτροπή με πρόεδρο τον Niss (Niss, 2003). Το έργο αυτό που ονομάστηκε Danish KOM Project είχε ως σκοπό να προτείνει λύσεις για τα προβλήματα που εντοπίζονταν στη μαθηματική εκπαίδευση, καθώς και να ενισχύσει τη διδασκαλία των μαθηματικών στη χώρα τους, μέσα από καινοτόμες ιδέες. Κατά την υλοποίησή του, εντόπισαν στην πρώιμη μαθηματική επάρκεια οκτώ επιμέρους ικανότητες, οι οποίες χωρίζονται σε δύο ομάδες. Η πρώτη ομάδα, η οποία περιλαμβάνει τις τέσσερις πρώτες, σχετίζεται με την ικανότητα οι μαθητές να διατυπώνουν και να απαντούν σε ερωτήματα με τα μαθηματικά, καθώς και μέσα από αυτά:

Η πρώτη ικανότητα αφορά τον μαθηματικό τρόπο σκέψης. Με άλλα λόγια, να μπορεί ο μαθητής να κατανοεί και να χειρίζεται μια έννοια καθώς και τους περιορισμούς της, και να μπορεί να διευρύνει το πεδίο εφαρμογής της αφαιρώντας ορισμένες από τις ιδιότητές της. Ακόμα, να είναι σε θέση να εντοπίζει τις διαφορές στις διαφορετικές μαθηματικές δηλώσεις (π.χ. υποθέσεις, ορισμοί, θεωρήματα) και να θέτει ερωτήσεις χαρακτηριστικές των μαθηματικών, έχοντας ήδη γνώση το είδος των απαντήσεων που δύναται να αποκομίσει από τα μαθηματικά (Niss, 2003).

Η επόμενη ικανότητα αναφέρεται στην θέση και επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων. Ο μαθητής θα πρέπει να μπορεί να αναγνωρίσει και να προσδιορίσει το είδος του μαθηματικού προβλήματος που καλείται να λύσει (π.χ. ανοιχτό ή κλειστό), καθώς και να μπορεί να επιλύει με ποικίλους τρόπους (εάν ζητείται), τα διαφορετικά είδη των μαθηματικών προβλημάτων (Niss, 2003).

Η μαθηματική μοντελοποίηση, και πιο συγκεκριμένα η ανάλυση και η κατασκευή μαθηματικών μοντέλων αποτελεί την τρίτη ικανότητα. Αναλυτικότερα, περιλαμβάνεται η ικανότητα των μαθητών, σε ήδη υπάρχοντα μοντέλα, να αναλύουν τα θεμέλια και τις ιδιότητες τους, και ακόμα το εύρος και την εγκυρότητά τους. Επιπρόσθετα, περιλαμβάνεται η ικανότητα των μαθητών να μεταφράζουν και να ερμηνεύουν τα επιμέρους στοιχεία των μαθηματικών μοντέλων, με όρους της πραγματικότητας. Η τρίτη διάσταση αυτής της ικανότητας προϋποθέτει οι μαθητές να μπορούν να μοντελοποιήσουν σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο, περνώντας μέσα απ’ όλες τις φάσεις της μαθηματικής μοντελοποίησης (δόμηση του πεδίου, απασχόληση με το μοντέλο, καθώς και μέσα από αυτό, επιλύοντας και προβλήματα που προκύπτουν, επικύρωση του μοντέλου, ανάλυση και κριτική αυτού, επικοινωνία για το μοντέλο και τα αποτελέσματά του και τέλος, έλεγχο της συνολικής διαδικασίας) (Niss, 2003).

Σύμφωνα με τον Niss (2003), η τελευταία ικανότητα αυτής της ομάδας έχει να κάνει με τον μαθηματικό συλλογισμό. Αρχικά, οι μαθητές θα πρέπει να δύνανται να αντιλαμβάνονται και να αξιολογούν μια σειρά από επιχειρήματα που διατυπώνουν άλλοι. Επίσης, να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν μια μαθηματική απόδειξη, έχοντας γνώση των ιδιοτήτων που την διαφοροποιούν από άλλα είδη μαθηματικού συλλογισμού, όπως τις ευρετικές. Μεγάλο ρόλο παίζει και ο εντοπισμός των σημαντικών ιδεών σε μια δεδομένη γραμμή επιχειρημάτων, παραλείποντας τις λεπτομέρειες. Τέλος, απαραίτητη για την μαθηματική επάρκεια είναι και η ικανότητα ανάπτυξης τυπικών και άτυπων μαθηματικών επιχειρημάτων και μετατροπής των ευρετικών επιχειρημάτων σε έγκυρες αποδείξεις.

Η άλλη ομάδα περιλαμβάνει τις υπόλοιπες 4 ικανότητες και αναφέρεται στην διαχείριση της μαθηματικής γλώσσας και των μαθηματικών εργαλείων. Η πρώτη απ' αυτές αναφέρεται στην αναπαράσταση μαθηματικών αντικειμένων και καταστάσεων με τους εξής τρόπους: αρχικά, αναγνωρίζοντας και χρησιμοποιώντας τα διαφορετικά είδη αναπαραστάσεων τους, έπειτα κατανοώντας και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις, τα πλεονεκτήματα και τους περιορισμούς, που υπάρχουν ανάμεσα σε διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου μαθηματικού αντικειμένου και τέλος, επιλέγοντας και εναλλάσσοντας μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων (Niss, 2003).

Επιπλέον, μια απαραίτητη ικανότητα είναι και η διαχείριση των μαθηματικών τύπων και των συμβόλων. Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να διαχειρίζονται, να αναλύουν και να ερμηνεύουν τη μαθηματική γλώσσα (συμβολική και τυπική), να αντιλαμβάνονται τις ομοιότητες και διαφορές με τη φυσική γλώσσα, καθώς και το αντίθετο, να μεταφράζουν, δηλαδή από τη φυσική γλώσσα στην τυπική και συμβολική μαθηματική γλώσσα. Ακόμα, σημαντικό είναι οι μαθητές να κατανοήσουν τη φύση και τους κανόνες των τυπικών μαθηματικών συστημάτων, συμπεριλαμβανομένου της σύνταξης και της σημασιολογίας (Niss, 2003).

Επιπρόσθετα, ο Niss (2003) και οι συνεργάτες του θεωρούν προϋπόθεση και την επικοινωνία μέσα, με, και για τα μαθηματικά. Αυτό επιτυγχάνεται όταν οι μαθητές κατανοούν γραπτά, οπτικά και προφορικά μαθηματικά κείμενα άλλων, καθώς και όταν εκφράζονται με οποιαδήποτε μορφή (γραπτή, οπτική, προφορική) για μαθηματικά ζητήματα.

Την τελευταία ικανότητα της δεύτερης ομάδας αποτελεί η στοχαστική χρήση εργαλείων και βοηθημάτων στα μαθηματικά, όπως για παράδειγμα η πληροφορική. Αυτό δύναται να συμβεί εάν οι μαθητές έχουν γνώση των ιδιοτήτων και του εύρους αυτών των μαθηματικών εργαλείων, αλλά και τους περιορισμούς τους (Niss, 2003).

Ακόμη, όλες οι ικανότητες που έχουν διατυπωθεί από τον Niss (2003) και τους συνεργάτες του, αναφέρονται σε αυστηρά μαθηματικές διαδικασίες, ενέργειες ή συμπεριφορές, τόσο νοητικές, όσο και σωματικές. Θα μπορούσε να ειπωθεί πως είναι διττές, καθώς αφενός δίνεται έμφαση στην ανάλυση (κατανόηση, ερμηνεία, έλεγχος και αξιολόγηση) και αφετέρου, στην παραγωγή (κατασκευή, εκτέλεση).

Πέρα από τις δυο προσεγγίσεις που αναλύθηκαν προηγουμένως, μεταγενέστερα έχουν διατυπωθεί και άλλες προσπάθειες προσέγγισης της έννοιας της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας. Πιο συγκεκριμένα επιδιώχτηκε να προσδιοριστεί το πότε ένας μαθητής έχει κατακτήσει ή όχι την πρώιμη μαθηματική επάρκεια. Σύμφωνα με τις Αρχές και τα Πρότυπα του NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), ένας μαθητής νηπιαγωγείου θεωρείται μαθηματικά επαρκής όταν έχει κατακτήσει έννοιες των Μαθηματικών προσχολικής εκπαίδευσης, τα οποία οργανώνονται σε πέντε τομείς: Αριθμοί και πράξεις, Άλγεβρα, Γεωμετρία, Μέτρηση και Ανάλυση δεδομένων και Πιθανότητες (NCTM. 2000). Ωστόσο, σύμφωνα με την Ομάδα Εργασίας του συνεδρίου, στις Αρχές και τα Πρότυπα του NCTM αναφέρονται μονάχα οι προσδοκίες, χωρίς να αναλύονται οι μεγάλες ιδέες του κάθε τομέα (Clements, 2004). Νεότερα ερευνητικά δεδομένα αναδεικνύουν τις βασικές ιδέες και τους τομείς δεξιοτήτων των Μαθηματικών για μαθητές προσχολικής ηλικίας (Baroody, 2004; Clements, Sarama, & DiBiase, 2004, όπ. αναφ. στο Clements, Sarama & Liu, 2008). Σε μελέτη των Clements και Sarama (2007, όπ. αναφ. στο Clements, Sarama, & Liu, 2008) εξετάστηκαν όλες οι μαθηματικές δεξιότητες ως προς συγκεκριμένα κριτήρια. Κριτήρια για την επιλογή των συγκεκριμένων μαθηματικών δεξιοτήτων, ο έλεγχος των οποίων θα μπορούσε να διακρίνει έναν μαθηματικά επαρκή μαθητή νηπιαγωγείου από έναν μη επαρκή, αποτέλεσαν οι δεξιότητες αυτές να είναι μαθηματικά κεντρικές και συνεκτικές, κατάλληλες για το αναπτυξιακό επίπεδο των παιδιών και να αποτελούν βάση για μεταγενέστερη εκμάθηση των Μαθηματικών (Clements, Sarama & DiBiase, 2004, όπ. αναφ. στο Clements, Sarama, & Liu, 2008). Οι τομείς μαθηματικών δεξιοτήτων που πληρούσαν όλα τα κριτήρια ήταν: οι αριθμοί (λεκτική αρίθμηση, καταμέτρηση, άμεση αναγνώριση αριθμού, σύγκριση και διάταξη αριθμών, αναγνώριση αριθμητικών συμβόλων, σύνθεση και ανάλυση αριθμών, πρόσθεση και αφαίρεση), η γεωμετρία (αναγνώριση σχημάτων, ανάλυση και σύνθεση γεωμετρικών σχημάτων, κατασκευή και μετασχηματισμό σχημάτων), η μέτρηση και οι κανονικότητες (Clements, Sarama & Liu, 2008). Πέρα από τη δεξιότητα της ταξινόμησης, η οποία εκτός από τον τομέα των αριθμών, υπαγόταν και στον τομέα της ανάλυσης δεδομένων, καμία δεξιότητα από τους τομείς της ανάλυσης δεδομένων και των πιθανοτήτων δεν πληρούσε τα κριτήρια επιλογής για αυτό το ηλικιακό επίπεδο (Clements & Sarama, 2007, όπ. αναφ. στο Clements, Sarama, & Liu, 2008).

Αν και δεν αποτελούσαν συστατικό στοιχείο της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας, σύμφωνα με τις προηγούμενες προσεγγίσεις, ολοένα και περισσότερα ερευνητικά ευρήματα υποδηλώνουν πως οι κανονικότητες πως παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στη μαθηματική ανάπτυξη (Zippert, Douglas & Rittle-Johnson, 2020) και η βελτίωσή τους συνεπάγεται και βελτίωση στις μαθηματικές γνώσεις νηπίων και προνηπίων (Papic, Mulligan, & Mitchelmore, 2011). Οι κανονικότητες αφορούν την εύρεση μιας προβλέψιμης ακολουθίας και η πρώτη ενασχόληση των παιδιών με αυτά συνήθως αφορά την αντιγραφή, επέκταση ή αναπαραγωγή επαναλαμβανόμενων μοτίβων (Rittle-Johnson, Fyfe, Hofer & Farran, 2017). Τέλος, σύμφωνα με τις νεότερες προσεγγίσεις, βασική για την πρώιμη μαθηματική επάρκεια θεωρείται και η γνώση των σχημάτων και των ιδιοτήτων τους, διότι αποτελεί τη βάση για τη μεταγενέστερη γεωμετρική σκέψη (Common Core State Standards, 2010, όπ. αναφ. στο Rittle-Johnson et al., 2017), αλλά και προγνωστικός παράγοντας για μεταγενέστερα επιτεύγματα στα μαθηματικά γενικότερα (Rittle-Johnson et al., 2017).

Τα τελευταία χρόνια διατυπώνονται όλο και πιο πρόσφατες προσεγγίσεις της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας και των βασικών ιδεών της. Με βάση τα νέα ερευνητικά δεδομένα των τελευταίων δεκαετιών, έχουν υπάρξει τροποποιήσεις και στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών ανά τον κόσμο, συμπεριλαμβανομένου και της Ελλάδας.

1.4. Η πρώιμη μαθηματική επάρκεια, σύμφωνα με το νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) για τα Μαθηματικά στο Νηπιαγωγείο

Σε συμφωνία με τις παραπάνω προσεγγίσεις βρίσκεται και η πρώιμη μαθηματική εκπαίδευση στην Ελλάδα, στην οποία, προσφάτως (2021) δημοσιεύθηκαν νέα αναλυτικά προγράμματα σπουδών, τα οποία προσδιορίζουν ποιες μαθηματικές δεξιότητες περιλαμβάνει η πρώιμη μαθηματική επάρκεια. Το νέο πρόγραμμα σπουδών για την προσχολική εκπαίδευση εφαρμόστηκε πιλοτικά την περσινή και τρέχουσα χρονιά (2021-2022 και 2022-2023) σε πειραματικά νηπιαγωγεία, προτού δημοσιευτεί η δεύτερη έκδοση του νέου ΑΠΣ-ΔΕΠΠΣ (Πεντέρη, Χλαπάνα, Μέλλιου, Φιλιππίδη & Μαρινάτου, 2022). Το νέο ΑΠΣ-ΔΕΠΠΣ έχει τη βάση του στο προηγούμενο πιλοτικό ΑΠΣ (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011), το οποίο έθεσε τις βασικές αρχές, τις κατηγορίες και τα πεδία μαθηματικής γνώσης με έναν σύγχρονο τρόπο, προσφέροντας επίσης δραστηριότητες για κάθε πεδίο. Το πιλοτικό ΑΠΣ (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011) εφάρμοζε πιο συστηματικά τις τροχιές μάθησης και τα ευρήματα της σύγχρονης βιβλιογραφίας. Ωστόσο, στην παρούσα μελέτη πρόκειται να αναλυθεί το νέο πρόγραμμα ΑΠΣ-ΔΕΠΠΣ (Πεντέρη και συν., 2022), το οποίο βέβαια παρουσιάζει τις ίδιες κατηγορίες μαθηματικής γνώσης με το πιλοτικό ΑΠΣ (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011), διότι αυτό καλούνται πλέον να εφαρμόσουν οι εκπαιδευτικοί νηπιαγωγείων.

Το μαθησιακό περιεχόμενο στο νηπιαγωγείο διακρίνεται σε 4 θεματικά πεδία: α) Παιδί και Επικοινωνία, β) Παιδί, Εαυτός και Κοινωνία, γ) Παιδί και Θετικές Επιστήμες και τέλος, δ) Παιδί, Σώμα, Δημιουργία και Έκφραση. Κάθε πεδίο χωρίζεται σε ενότητες, κάθε ενότητα σε άξονες ή υποενότητες, οι οποίες με τη σειρά τους περιλαμβάνουν γνώσεις, δεξιότητες και στάσεις (Πεντέρη και συν., 2022). Στην προκειμένη περίπτωση, πρόκειται να αναλυθεί το τρίτο θεματικό πεδίο, στο οποίο εντάσσεται η μαθηματική εκπαίδευση.

Για την εκπαίδευση στις θετικές επιστήμες, ο σκοπός πρόκειται να επιτευχθεί μέσα από δραστηριότητες διερευνητικής μάθησης, κατάλληλες για την ηλικία του παιδιού, στις οποίες σημαντικό ρόλο θα έχει το παιχνίδι, ώστε να υιοθετήσουν οι μαθητές σωστή στάση προς τον επιστημονικό τρόπο σκέψης (Πεντέρη και συν., 2022). Άλλωστε, η παιδαγωγική αξία του ελεύθερου παιχνιδιού στην κατάκτηση και εξέλιξη των πρώιμων μαθηματικών εννοιών περιγράφεται και από τους Clements και Sarama (2005), οι οποίοι διακρίνουν 6 κατηγορίες εννοιών, στην εκμάθηση των οποίων συμβάλλει σημαντικά το παιχνίδι. Αυτές οι κατηγορίες εννοιών είναι η ομαδοποίηση και ταξινόμηση, η σύγκριση μεγεθών, η αρίθμηση και η καταμέτρηση, αλλά και οι δυναμικές μετατροπές (Clements & Sarama, 2005).

Το νέο ΑΠΣ-ΔΕΠΠΣ διακρίνει τη μαθηματική εκπαίδευση, και συνεπώς την πρώιμη μαθηματική επάρκεια σε 3 θεματικές ενότητες:

1) Γεωμετρία και Μετρήσεις
2) Αριθμοί-Πράξεις και Άλγεβρα
3) Στοχαστικά Μαθηματικά

Η πρώτη θεματική ενότητα, της Γεωμετρίας και των Μετρήσεων, περιλαμβάνει 4 υποενότητες που αποτελούνται από μια πληθώρα γνώσεων, δεξιοτήτων και στάσεων. Αρχικά, η πρώτη υποενότητα αφορά τις έννοιες του χώρου ως σύστημα αναφοράς. Οι μαθητές, δηλαδή, θα πρέπει να είναι σε θέση να κατανοούν και να αναγνωρίζουν τις σχέσεις γειτνίασης, σειράς, αλλά και εγκλεισμού μεταξύ δύο ή και περισσότερων στοιχείων σε οργανωμένα ή μη περιβάλλοντα, καθώς και σε σχέση με το ίδιο τους το σώμα. Ακόμη, κάθε μαθητής θα πρέπει να μπορεί να εντοπίζει και να περιγράφει θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς, περιβάλλοντα και χάρτες, αλλά και μέσα από νοερές εικόνες. Για αυτά, σημαντικό είναι να συνειδητοποιήσουν την αξία των αναπαραστάσεων του χώρου, καθώς και να εξασκηθούν στη χρήση μαθηματικού λεξιλογίου για τον προσανατολισμό (Πεντέρη και συν., 2022).

Η δεύτερη υποενότητα της Γεωμετρίας και των Μετρήσεων αφορά τα γεωμετρικά σχήματα. Οι μαθητές, στην προκειμένη περίπτωση, θα πρέπει να μπορούν να κατανοήσουν σχέσεις συνέπειας-ασυνέπειας στις γραμμές και στις επιφάνειες (π.χ. ανοιχτές και κλειστές μορφές), και να συνδέουν τα αντικείμενα της καθημερινότητας με τα γεωμετρικά σχήματα, και τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα με τα στερεά. Επίσης, απαραίτητο είναι να έχουν την ικανότητα να αναγνωρίζουν, να συγκρίνουν και να διατάσσουν γεωμετρικά επίπεδα και στερεά με βάση χαρακτηριστικά και ιδιότητες (π.χ. μεγέθη, αριθμός πλευρών, κ.α.), αλλά και να κατασκευάζουν και να αναλύουν επίπεδα και στερεά γεωμετρικά σχήματα (Πεντέρη και συν., 2022).

Η τρίτη υποενότητα της γεωμετρίας περιλαμβάνει τις σχέσεις στο χώρο. Αναλυτικότερα, οι μαθητές με το πέρας της προσχολικής εκπαίδευσης θα πρέπει να δύνανται να εκτιμούν τη συμμετρία σε μορφές στο περιβάλλον, να κατανοούν το αναλλοίωτο ενός σχήματος και να αντιλαμβάνονται την κλίμακα, σε οπτικές αναπαραστάσεις δισδιάστατων και τρισδιάστατων κατασκευών. Επιπλέον, η αναγνώριση των συμμετρικών σχημάτων, ο εντοπισμός των αξόνων συμμετρίας και η κατανόηση των διαφορετικών οπτικών γωνιών παίζει βασικό ρόλο σε αυτήν την υποενότητα (Πεντέρη και συν., 2022).

Η τελευταία υποενότητα έχει σχέση με τις μετρήσεις. Κατά την προσχολική μαθηματική εκπαίδευση οι μαθητές μαθαίνουν να ξεχωρίζουν τα διαφορετικά μεγέθη (μήκος, επιφάνεια, όγκος), να τα μετρούν με μη συμβατικές μονάδες μέτρησης και να συνειδητοποιούν πως το αριθμητικό αποτέλεσμα της μέτρησης δεν εξαρτάται από τη θέση του αντικειμένου στο χώρο, αλλά από τη μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιείται. Επιπρόσθετα, μαθαίνουν να εκτιμούν το μέγεθος, να το συγκρίνουν και να χρησιμοποιούν τυπικά εργαλεία μέτρησης, με τα οποία μετρούν τις επιφάνειες που κατασκευάζουν. Τέλος, σημαντικό είναι να κατανοήσουν την αξία των μετρήσεων σε καθημερινά προβλήματα (Πεντέρη και συν., 2022).

Η δεύτερη θεματική ενότητα των Μαθηματικών είναι οι Αριθμοί-Πράξεις και Άλγεβρα και περιλαμβάνει τρεις υποενότητες. Η πρώτη υποενότητα σχετίζεται με τους αριθμούς και τα σύμβολα. Αρχικά, αναφέρονται οι γνώσεις των μαθητών αναφορικά με τη διατήρηση του αριθμού, την πληθικότητα και τη διάταξη. Ακόμη, οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να απαριθμούν λεκτικά και γραπτά έως το 20 και αντίστροφα (χρησιμοποιώντας τα αριθμητικά σύμβολα και τις αριθμολέξεις), να αναγνωρίζουν ποσότητες άμεσα χωρίς καταμέτρηση, να καταμετρούν αντικείμενα μέχρι το 20, να συγκρίνουν και να διατάσσουν ποσότητες και αριθμούς και να αναλύουν και να συνθέτουν αριθμούς έως το 20 (Πεντέρη και συν., 2022).

Η επόμενη υποενότητα της Άλγεβρας αφορά τη διαχείριση των ποσοτικών μαθηματικών σχέσεων. Προϋπόθεση αποτελεί να μπορούν οι μαθητές να μελετούν τις σταθερές σχέσεις των αριθμών μέχρι το 20 (ποσότητα σταθερή, καθορισμένος αριθμός πιθανών συνδυασμών για σύνθεση του 20) και τις υποδιαιρέσεις της μονάδας σε καθημερινές δραστηριότητες (π.χ. συνταγή), να εισάγονται στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (βάζω μαζί, βγάζω κ.α.), αλλά και του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης μέσω ομαδοποίησης ή μοιράσματος ενός συνόλου αντικειμένων. Επιπλέον, προάγοντας ταυτόχρονα τη συνεργατική μάθηση, στο νηπιαγωγείο οι μαθητές μαθαίνουν να δουλεύουν ομαδικά για να εκτελέσουν απλές πράξεις και να λύσουν προβλήματα της καθημερινότητας, μέσα από τα Μαθηματικά (Πεντέρη και συν., 2022).

Την τρίτη και τελευταία υποενότητα της Άλγεβρας αποτελούν οι γνώσεις, δεξιότητες και στάσεις που έχουν σχέση με την διαχείριση των ποιοτικών σχέσεων στα Μαθηματικά. Στην προκειμένη περίπτωση, οι μαθητές θα πρέπει να εξερευνούν τις σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς και στα σύμβολα, τα σχήματα κ.α., ενώ παράλληλα γνωρίζουν τις σχέσεις ισότητας ή ανισότητας που τις χαρακτηρίζουν. Βασικός είναι και ο ρόλος των κανονικοτήτων, καθώς οι μαθητές θα πρέπει εισερχόμενοι στη βαθμίδα του Δημοτικού να αναγνωρίζουν (εικονικά ή χειραπτικά) τη μονάδα της κανονικότητας που επαναλαμβάνεται, να δύνανται να τη συνεχίσουν, να τη διορθώσουν, αλλά και να κατασκευάσουν ένα μοτίβο περιγράφοντας και εξηγώντας τη διαδικασία κατασκευής του (Πεντέρη και συν., 2022).

Η τελευταία θεματική ενότητα του πεδίου των Μαθηματικών για την προσχολική εκπαίδευση είναι τα Στοχαστικά Μαθηματικά. Η ενότητα αυτή απαρτίζεται από δύο επιμέρους ενότητες. Η πρώτη υποενότητα αφορά την επίλυση απλών μαθηματικών προβλημάτων συλλογής και οργάνωσης πληροφοριών. Αναλυτικότερα, οι μαθητές είναι απαραίτητο να έχουν κατακτήσει την έννοια του αριθμού (αποτελεί και στόχο της προηγούμενης ενότητας), ώστε να μπορούν να λύνουν μαθηματικά προβλήματα, αναγνωρίζοντας τα στάδια επίλυσής τους και αναλύοντας τα σε βήματα. Ακόμα, τα παιδιά σ’ αυτήν την ηλικία, όπως ορίζει το νέο ΑΠΣ-ΔΕΠΠΣ, θα πρέπει να είναι ικανά να διατυπώσουν ορθά τα ερωτήματα των μαθηματικών προβλημάτων, να συλλέγουν δεδομένα μέσα από μικρές έρευνες με διάφορα εργαλεία και να τα οργανώνουν σε πίνακες και γραφικές παραστάσεις (διαγράμματα και εικονογράμματα) χρησιμοποιώντας σύμβολα και αντικείμενα που προέρχονται από την καθημερινότητά τους. Σε αυτήν την υποενότητα βασική είναι η σταδιακή εισαγωγή στην μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων (αλγοριθμική σκέψη) για να ερμηνεύουν καταστάσεις της καθημερινότητας, καθώς και η διατύπωση υποθέσεων με βάση τις γνώσεις και τις εκτιμήσεις τους (Πεντέρη και συν., 2022).

Τέλος, η δεύτερη και τελευταία υποενότητα των Στοχαστικών Μαθηματικών, και γενικότερα του θεματικού πεδίου των Μαθηματικών, εισάγει τους μαθητές στον συλλογισμό των πιθανοτήτων. Πιο συγκεκριμένα, κατά τη φοίτησή τους στο νηπιαγωγείο οι μαθητές πρόκειται να μάθουν να μελετούν τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών, των συμβόλων, των σχημάτων και των συνόλων, και να έχουν την κρίση να χαρακτηρίσουν ένα γεγονός με βάση την πιθανότητα πραγματοποίησής του (βέβαιο, πιθανό, αδύνατο). Επιπρόσθετα, εξοικειώνονται με την υλοποίηση απλών πειραμάτων τύχης και τη διατύπωση των πιθανών αποτελεσμάτων τους. Ο βασικός σκοπός αυτής της υποενότητας είναι οι μαθητές να υιοθετήσουν σταδιακά την πιθανολογική σκέψη, προκειμένου να είναι σε θέση να επεξεργαστούν και να αντιληφθούν καταστάσεις που προκύπτουν στα πλαίσια της καθημερινότητάς τους (εντός και εκτός του σχολείου) (Πεντέρη και συν., 2022).

Συνοψίζοντας, όλα τα παραπάνω αποτελούν συστατικά στοιχεία της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας. Επομένως, γίνεται αντιληπτό πως η μέτρηση της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας συνεπάγεται τον έλεγχο όλων των παραπάνω δεξιοτήτων.

2ο Κεφάλαιο: Μεθοδολογίες και εργαλεία μέτρησης της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας

2.1. Εργαλεία μέτρησης της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας

Για την αξιολόγηση της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας έχει σχεδιαστεί πλήθος δοκιμασιών και εργαλείων. Ορισμένα εξετάζουν πολλαπλές πτυχές της μαθηματικής επάρκειας των μαθητών 4 έως 6 ετών, ενώ άλλα περιορίζονται σε συγκεκριμένες πτυχές, όπως για παράδειγμα την αριθμητική. Επιλέχθηκε να αναλυθούν παρακάτω, εργαλεία σταθερά, τα οποία έχουν χορηγηθεί σε μεγάλο πλήθος ατόμων και παρουσιάζουν αξιοσημείωτα ψυχομετρικά χαρακτηριστικά.

2.1.1. Utrecht Early Mathematical Competence Scales (1999)/ Ψυχομετρικό Κριτήριο Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης (2008)

Η Κλίμακα Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης κατασκευάστηκε από τους Van de Rijt, Van Luit και Pennings το 1999. Σταθμίστηκε στα ελληνικά από τους Μπάρμπας, Βερμέουλεν, Κιοσέογλου και Μενεξές το 2008, και έκτοτε χρησιμοποιείται και στην Ελλάδα. Αποτελείται από δύο κλίμακες (Α) και (Β), που η καθεμία περιέχει 40 έργα. Απευθύνεται σε μαθητές ηλικίας από 4-7 ετών και αξιολογεί τις έννοιες της σύγκρισης, της ταξινόμησης και σειριοθέτησης (ο όρος αυτός χρησιμοποιείται εδώ, όπως ορίζουν οι συγγραφείς, σε αντίθεση με την παρούσα μελέτη, κατά την οποία χρησιμοποιείται ο όρος «διάταξη»), της αντιστοίχισης ένα προς ένα, της χρήσης λέξεων αρίθμησης, της δομημένης και αποτελεσματικής καταμέτρησης, καθώς και της γενικής κατανόησης των αριθμών (δεν αξιολογούνται δεξιότητες της γεωμετρίας, των κανονικοτήτων και της μέτρησης). Τα περισσότερα έργα του κριτηρίου έχουν τη μορφή εικόνων, πάνω στις οποίες τα παιδιά αναμένεται να δείξουν τη σωστή απάντηση. Άλλα έργα έχουν τη μορφή προφορικών ερωτήσεων, ενώ σε κάποια άλλα έργα τα παιδιά χειρίζονται κάποιο υλικό (κυβάκια) ή σχεδιάζουν την απάντηση σε φύλλα εργασίας. Για το λόγο αυτό, ο αξιολογητής οφείλει να έχει εξοικειωθεί με τη διαδικασία χορήγησης, προτού το χορηγήσει με σκοπό τη βαθμολόγηση (Μπάρμπας και συν., 2008). Η χορήγησή του δεν ξεπερνάει τα 30 λεπτά (Van de Rijt, Van Luit & Pennings, 1999). Σχετικά με τη βαθμολόγηση, οι μαθητές αρχικά συγκεντρώνουν μια βαθμολογία με βάση το άθροισμα των σωστών απαντήσεων και στις οκτώ ενότητες, η οποία στη συνέχεια μετατρέπεται σε βαθμό επάρκειας (Μπάρμπας και συν., 2008).

Τέλος, το εργαλείο παρουσιάζει υψηλά επίπεδα αξιοπιστίας. Η αξιοπιστία ανά ηλικιακή ομάδα παρουσιάζει συντελεστές Άλφα που κυμαίνονται από 0,80 έως 0,91. Η αξιοπιστία της διπλής αξιολόγησης φαίνεται από τη τιμή της συσχέτισης μεταξύ των δυο χορηγήσεων (r = 0,85, p < 0,001). Όσον αφορά την εγκυρότητα, το εργαλείο έχει εσωτερική συνοχή καθώς οι διάμεσες τιμές των δεικτών διάκρισης σε κάθε ομάδα ηλικίας που παρουσιάζει κυμαίνονται από 0,24 έως 0,47 (Μπάρμπας και συν., 2008).

2.1.2. Test of Early Mathematics Ability – Τρίτη Έκδοση (2003)

Το TEMA-3 (Test of Early Mathematics Ability, Ginsburg & Baroody, 2003) είναι ένα μέτρο άτυπων και τυπικών δεξιοτήτων αριθμητικής για παιδιά ηλικίας 3 ετών έως 8 ετών και 11 μηνών. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο αναφοράς ή διαγνωστικό εργαλείο για μεγαλύτερους μαθητές που αντιμετωπίζουν δυσκολίες στα μαθηματικά (Hoffman & Grialou, 2005). Επιπλέον, χρησιμοποιείται για να εντοπίσει τους μαθητές που είναι σημαντικά πιο προχωρημένοι από τους συνομηλίκους τους στη μαθηματική σκέψη, να προσδιορίσει τις αδυναμίες, αλλά και τα δυνατά σημεία των μαθητών στα μαθηματικά, να τεκμηριώσει την πρόοδο στην εκμάθηση της αριθμητικής και να καθοδηγήσει τις εκπαιδευτικές πρακτικές μέσα από τα δεδομένα που παρέχει. Το TEMA-3 αποτελείται από 72 έργα που καλύπτουν έννοιες από την καταμέτρηση έως την απλή διαίρεση και δίνονται σε μορφή ερώτησης και απάντησης (Bliss, 2006). Σε σύγκριση με την προηγούμενη έκδοση, στο TEMA-3 αξιολογείται η μη λεκτική παραγωγή, η πρόσθεση και η αφαίρεση, η κατανόηση της σχέσης μέρους-όλου, η έννοια της ίσης κατανομής και η συμβολική προσθετική αντιμεταθετικότητα. Ακόμη, το εργαλείο συνοδεύεται από χειραπτικό υλικό και έγχρωμες εικόνες αλλά και μια νέα εναλλακτική φόρμα που περιλαμβάνει τώρα δύο έντυπα (Έντυπα Α και Β) (Hoffman & Grialou, 2005).

Η χορήγηση του τεστ είναι σχετικά φιλική προς το χρήστη. Οι οδηγίες χορήγησης περιλαμβάνονται στις καρτέλες με εικόνες για κάθε έντυπο (Hoffman & Grialou, 2005). Οι εξεταστές προτού προχωρήσουν σε ερωτήσεις που βαθμολογούνται, δίνουν στους μαθητές αρκετές ερωτήσεις για να εξασκηθούν. Κάθε σωστή απάντηση, δίνει έναν βαθμό, ενώ οι λανθασμένες δεν δίνουν κανέναν βαθμό. Προκειμένου να κατανοήσει πλήρως και να εξοικειωθεί ο αξιολογητής με τη διαδικασία χορήγησης είναι απαραίτητη η εξάσκηση. Σχετικά με η διάρκεια χορήγησης, το TEMA-3 δεν είναι ένα χρονομετρημένο τεστ. Ωστόσο, αναφέρεται πως το μέσο παιδί θα πρέπει να μπορεί να ολοκληρώσει το τεστ σε περίπου 45 λεπτά (Bliss, 2006).

Το TEMA-3 έχει ισχυρή εσωτερική αξιοπιστία. Οι συντελεστές Άλφα για την εσωτερική συνέπεια που βρέθηκαν ανά ηλικιακή ομάδα, φύλο, εθνικότητα και ομάδα χαμηλών επιτευγμάτων στα μαθηματικά, υπερέβησαν όλες τις 0,90 (Hoffman & Grialou, 2005). Επίσης, μελετήθηκε η αξιοπιστία της διπλής αξιολόγησης. Η αξιοπιστία του Έντυπου A (0,82), αν και είναι αποδεκτή, είναι χαμηλή συγκριτικά με την αξιοπιστία του Έντυπου B (0,93). Όσον αφορά την εγκυρότητα του κριτηρίου, αυτή καθορίστηκε μέσω της ταυτόχρονης χορήγησης του TEMA-3 και άλλων τεστ που υποτίθεται ότι μετρούν την πρώιμη μαθηματική ικανότητα. Οι συσχετίσεις μεταξύ του TEMA-3 και άλλων τεστ κυμαίνονταν από 0,54 (το συμπληρωματικό τεστ Βασικές Έννοιες του KeyMath R) έως 0,91 (για το μαθηματικό πηλίκο του Τεστ Επιτεύξεων Μικρών Παιδιών), υποδεικνύοντας μέτριες έως ισχυρές σχέσεις μεταξύ του TEMA- 3 και άλλων τεστ αξιολογούν την πρώιμη μαθηματική ικανότητα (Bliss, 2006).

Συνοψίζοντας, πρόκειται για ένα εύχρηστο εργαλείο με επίκεντρο τα παιδιά (μορφές ερωτήσεων, εικόνες κ.α.) που επιτρέπει την άτυπη και τυπική προβολή της γνώσης (Hoffman & Grialou, 2005). Ωστόσο, οι χρήσεις του είναι περιορισμένες, λόγω της μοναδικής συνολικής βαθμολογίας. Για παράδειγμα, για να προσδιοριστεί ο τομέας που δυσκολεύεται ένας μαθητής (καταμέτρηση, πρόσθεση, αφαίρεση), ο αξιολογητής πρέπει να επανεξετάσει τις μεμονωμένες απαντήσεις του μαθητή, διαδικασία που απαιτεί πολύ χρόνο (Bliss, 2006). Ακόμη, είναι χρονοβόρο στη χορήγηση, καθώς είναι εκτενές και δεν αξιολογεί βασικούς τομείς της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας, όπως η γεωμετρία, οι κανονικότητες και η μέτρηση (Weiland, Wolfe, Hurwitz, Clements, Sarama & Yoshikawa, 2012).

2.1.3. Child Math Assessment (2004)

Το Child Math Assessment (CMA) αναπτύχθηκε από τους Starkey, Klein και Wakeley (2004) στα πλαίσια της έρευνάς τους. Είχε ως σκοπό να αξιολογήσει την άτυπη μαθηματική γνώση και ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων. Αρχικά, απευθύνεται σε μαθητές προσχολικής ηλικίας, 3 έως 5 ετών. Αποτελείται από 16 ερωτήσεις, με τις οποίες ελέγχεται η μαθηματική γνώση των μαθητών στους τομείς των αριθμών, της αριθμητικής, του χώρου/γεωμετρίας, της μέτρησης, των κανονικοτήτων και των λογικών σχέσεων. Αναλυτικότερα, τα έργα για την αξιολόγηση της γνώσης των αριθμών ήταν η καταμέτρηση αντικειμένων και ενός υποσυνόλου, η γνώση της διαδοχής των αριθμών και η διάταξη, η σύγκριση και αναπαραγωγή αριθμών. Τα αριθμητικά έργα περιλάμβαναν πρόσθεση και αφαίρεση τόσο με συγκεκριμένα αντικείμενα, όσο και χωρίς, καθώς και πρόσθεση δύο συνόλων. Ακόμη, τα έργα που μετρούσαν τις γνώσεις στο χώρο/γεωμετρία και στη μέτρηση ήταν η αναγνώριση των σχημάτων και η αντιστοίχιση τους, η συλλογιστική για μετασχηματισμό τριγώνων και η μέτρηση με μη τυπικές μονάδες μέτρησης. Επίσης, τον τομέα των κανονικοτήτων και των λογικών σχέσεων, τον αξιολογούσαν έργα με αντιγραφή και επέκταση επαναλαμβανόμενων και εξελισσόμενων μοτίβων και με διάταξη των αντικειμένων με βάση το μέγεθος και προσθήκη ενός αντικειμένου παραπάνω. Κάθε έργο αποτελούταν από πολλά προβλήματα. Τέλος, η επιλογή και ο σχεδιασμός των έργων, τα οποία έχουν αυξανόμενη δυσκολία, έγινε με βάση τη βιβλιογραφία για την πρώιμη μαθηματική ανάπτυξη (Starkey, Klein & Wakeley, 2004).

Ως προς τη βαθμολόγηση, βαθμολογείται διχοτομικά και κάθε σωστή απάντηση πήρε 1 βαθμό. Ωστόσο, λόγω της διαφοράς στο πλήθος των προβλημάτων κάθε έργου, βγαίνει μια μέση βαθμολογία σωστών απαντήσεων για κάθε έργο. Εκτός από τις επιμέρους βαθμολογίες των έργων, υπολογίζεται και μια συνολική βαθμολογία από τους μέσους όρους κάθε έργου (Starkey, Klein & Wakeley, 2004).

Το CMA χορηγείται μεμονωμένα σε κάθε μαθητή από εξεταστή, ο οποίος προηγουμένως έχει εκτεταμένα εκπαιδευτεί σχετικά με τη χορήγηση του CMA. Η χορήγησή του συνήθως μοιράζεται σε 2 συνεδρίες, σε διαφορετικές μέρες, περίπου 20-30 λεπτών. Κατά την πρώτη συνεδρία αξιολογούνται οι τομείς των αριθμών και αριθμητικής. Οι υπόλοιποι τομείς εξετάζονται στη δεύτερη συνεδρία (Starkey, Klein & Wakeley, 2004). Συνεπώς, αν και αξιολογεί μεγάλο εύρος δεξιοτήτων της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας, έχει το μειονέκτημα πως δεν είναι πρακτικό λόγω της μεγάλης διάρκειας χορήγησής του.

Τέλος, όσον αφορά τις ψυχομετρικές ιδιότητες του εργαλείου για παιδιά προσχολικής ηλικίας, είναι αρκετά καλές. Αναλυτικότερα, το CMA παρουσιάζει αξιοπιστία διπλής αξιολόγησης σε διάστημα 2 εβδομάδων 0,91 και εσωτερική συνέπεια 0,92. Ακόμα, έχει βρεθεί και ταυτόχρονη εγκυρότητα με το TEMA-3, καθώς οι βαθμολογίες των δυο εργαλείων συσχετίζονται θετικά (r = 0,74, p < 0,01) για παιδιά 4 και 5 ετών (Barnes, Klein, Swank, Starkey, McCandliss, Flynn, Zucker, Huang, Fall & Roberts, 2016).

2.1.4. Number Sense Brief (2010)

Το σύντομο εργαλείο Number Sense Brief (NSB) σχεδιάστηκε από τους Jordan, Glutting και Ramineni (2010). Αποτελεί τη σύντομη εκδοχή του Number Sense Core Battery (Jordan, Kaplan, Olah & Locuniak 2006; Jordan, Kaplan, Locuniak & Ramineni 2007), του οποίου ο χρόνος χορήγησης είναι περίπου 35 λεπτά, καθιστώντας το δύσκολο στην εφαρμογή (Jordan, Glutting, Ramineni & Watkins, 2010). Η σύντομη έκδοση αποτελείται από 33 στοιχεία, τα οποία αξιολογούν τους τομείς της αρίθμησης και καταμέτρησης, της αναγνώρισης των αριθμητικών συμβόλων, της διάταξης και της σύγκρισής τους, των νοερών υπολογισμών, των πλαισιωμένων λεκτικών προβλημάτων, καθώς και των αριθμητικών συνδυασμών (Jordan, Glutting, & Ramineni, 2010). Το εργαλείο, όπως υποδεικνύει και η ονομασία του, αξιολογεί μόνο έννοιες της αίσθησης του αριθμού και όχι επιμέρους πτυχές της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας, όπως γεωμετρία, μέτρηση και κανονικότητες.

Στο NSB κάθε έργο βαθμολογείται με 0 (λάθος) ή 1 (σωστό). Η μέγιστη συνολική βαθμολογία στο εργαλείο είναι 33. Το εργαλείο αυτό είναι μη χρονομετρημένο. Ωστόσο, η χορήγησή του διαρκεί περίπου 15 λεπτά. Κατά την χορήγηση, τόσο στα πλαισιωμένα προβλήματα, όσο και στους αριθμητικούς συνδυασμούς, οι μαθητές έχουν στη διάθεσή τους ένα μολύβι, ένα φύλλο χαρτί, αλλά και μια λίστα με τους αριθμούς από το 1 έως το 10. Αυτά διατίθενται προς χρήση από τους μαθητές, για να διευκολύνουν την ορθή απόκριση στα έργα (Jordan, Glutting, Ramineni & Watkins, 2010).

Το NSB παρουσιάζει εσωτερική συνέπεια με τον συντελεστή Άλφα να αγγίζει και να ξεπερνά το 0,80 σε κάθε χρονική στιγμή στο νηπιαγωγείο και την πρώτη τάξη του Δημοτικού. Όσον αφορά την αξιοπιστία διπλής αξιολόγησης, όπως είναι λογικό, είναι υψηλότερη, όταν μεσολαβούν μεταξύ των αξιολογήσεων μικρά χρονικά διαστήματα και κυμαίνονται από 0,61 έως 0,86 (Jordan, Glutting, Ramineni & Watkins, 2010). Τέλος, το εργαλείο χαρακτηρίζεται από μεγάλη προγνωστική εγκυρότητα, καθώς παρουσιάζει ισχυρές συσχετίσεις με την επίδοση και την ανάπτυξη στα μαθηματικά, από την πρώτη έως την τρίτη τάξη (Jordan, Glutting, Dyson, Hassinger-Das & Irwin, 2012).

2.1.5. Πρόγραμμα i-Ready (2011)

Η Curriculum Associates, LLC. ανέπτυξε το πρόγραμμα i-Ready Diagnostic για τα μαθηματικά, για την παροχή δεδομένων και εκπαιδευτικής υποστήριξης σε δασκάλους και εξεταστές. Απευθύνεται σε μαθητές νηπιαγωγείου έως και 12ης τάξης. Οι αξιολογήσεις i-Ready Diagnostic είναι διαδικτυακές, προσαρμοσμένες σε υπολογιστή αξιολογήσεις που εντοπίζουν τις ανάγκες των μαθητών με χαμηλή επίδοση και βοηθούν στην παρακολούθηση του βαθμού, στον οποίο οι μαθητές βρίσκονται για την επίτευξη των στόχων τους στο τέλος του έτους. Χορηγείται 3 φορές μέσα στη χρονιά και με την πρώτη να λαμβάνει χώρα κατά τις πρώτες 2–3 εβδομάδες της σχολικής χρονιάς, (φθινόπωρο) σε δύο συνεδρίες 45–50 λεπτών. Η χορήγηση του εργαλείου συνήθως διαρκεί 35-60 λεπτά, ανά άτομο. Ωστόσο, δεν πρόκειται για ένα χρονομετρημένο τεστ, καθώς οι μαθητές μπορούν να σταματήσουν τη συμπλήρωσή του, και να συνεχίσουν από εκεί που είχαν μείνει την επόμενη μέρα (Swain, Randel & Norman Dvorak, 2020). Περιλαμβάνει βασικούς τομείς στα μαθηματικά, όπως αριθμοί και πράξεις, άλγεβρα και αλγεβρική σκέψη, μέτρηση και δεδομένα, και γεωμετρία (Peltier, Vannest, Tomaszewski, Morin, Sallese & Pulos, 2020). Ωστόσο, δεν είναι ένα πρακτικό εργαλείο, διότι απαιτεί πολύ χρόνο για τη χορήγησή του και συγκεκριμένο διαδικτυακό περιβάλλον.

Το εργαλείο i-Ready Diagnostic έχει αποδεδειγμένη αξιοπιστία βαθμολογίας του τεστ. Οι συντελεστές αξιοπιστίας κυμαίνονται από 0,92 έως 0,96 και οι συντελεστές αξιοπιστίας διπλής αξιολόγησης κυμαίνονται από 0,71 έως 0,86 για τα μαθηματικά έως την Πέμπτη τάξη. Όσον αφορά την εγκυρότητα του εργαλείου, σε μελέτες που εξέτασαν τη συσχέτιση μεταξύ του i-Ready Diagnostic και των αθροιστικών αξιολογήσεων Smarter Balanced, του Partnership for Assessment of Readiness for College and Careers (PARCC) και των κρατικών προγραμμάτων αξιολόγησης, παρατηρούνται ισχυροί συσχετισμοί μεταξύ των βαθμολογιών του i-Ready Diagnostic και των βαθμολογιών σε αυτά τα εθνικά και κρατικά τεστ. Οι μέσες συσχετίσεις μεταξύ των βαθμών μεταξύ του iReady Diagnostic για τα μαθηματικά κυμαίνονταν από 0,82 (Αξιολογήσεις τέλους Βαθμού της Βόρειας Καρολίνας) και 0,88 (Smarter Balanced και Michigan M-STEP). Αυτές οι μελέτες παρέχουν επίσης στοιχεία ότι το περιεχόμενο του i-Ready Diagnostic είναι πολύ συνεπές με αυτό που αναμένεται να μάθουν οι μαθητές σε όλες τις Ηνωμένες Πολιτείες (Curriculum Associates, 2019, όπ. αναφ. στο Swain, Randel & Norman Dvorak, 2020).

2.1.6. Σύντομο REMA (2012)

Το σύντομο REMA είναι μια σύντομη έκδοση του πλήρους REMA των 125 έργων. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αξιολόγηση των δεξιοτήτων αριθμητικής και γεωμετρίας των παιδιών πριν από το νηπιαγωγείο καθώς και στο νηπιαγωγείο. Το σύντομο REMA περιλαμβάνει 19 έργα, τα οποία επιλέχθηκαν από τομείς περιεχομένου, που σύμφωνα με τη διεθνή βιβλιογραφία, αποτελούν θεμέλια για την μετέπειτα μαθηματική ανάπτυξη και μπορούν εύκολα να γίνουν αντιληπτά σε μικρά παιδιά (Sarama & Clements, 2009, όπ. αναφ. στο Weiland, Wolfe, Hurwitz, Clements, Sarama & Yoshikawa, 2012). Περιλαμβάνονται έργα που αξιολογούν την άμεση αναγνώριση του αριθμού, τη σύνθεση του αριθμού (πρώιμοι αριθμητικοί συνδυασμοί), τη σύγκριση και διάταξη αριθμού, τη λεκτική αρίθμηση και την καταμέτρηση. Ακόμη, στη σύντομη έκδοση συμπεριλήφθηκαν έργα που εξετάζουν την αντιστοίχιση των αριθμητικών συμβόλων με τις αντίστοιχες ποσότητες, και την πρόσθεση, προκειμένου να εντοπιστούν τα υψηλότερα και τα χαμηλότερα επίπεδα δεξιοτήτων των μαθητών. Επίσης, αξιολογούνται και γεωμετρικές ικανότητες, όπως τα σχήματα και η σύνθεση τους, και οι κανονικότητες. Απουσιάζουν από τη σύντομη έκδοση έργα για την αξιολόγηση της μέτρησης, αν και υπάρχουν στην πλήρη έκδοση του REMA (Clements, Sarama & Liu, 2008). Κατά μέσο όρο, η σύντομη έκδοση χρειάζεται 15–20 λεπτά για τη χορήγηση (Weiland et al., 2012).

Η σύντομη έκδοση του REMA παρουσιάζει επαρκή αξιοπιστία. Ο συντελεστής Άλφα του Cronbach (0,71), υποδεικνύει λογική εσωτερική συνέπεια του εργαλείου. Ακόμη, η αξιοπιστία των έργων (περίπου 1,00) και των ατόμων (0,68) ερμηνεύεται ως επαρκής. Όσον αφορά την εγκυρότητα, οι βαθμολογίες της σύντομης έκδοσης έδειξαν ισχυρές συσχετίσεις με τις βαθμολογίες του πλήρους REMA εντός κάθε χρονικού σημείου [στην αρχή του της σχολικής χρονιάς για τα προνήπια, 0,71 ($p < 0{,}001$) και στο τέλος της σχολικής χρονιάς, 0,74 ($p < 0{,}001$)]. Συνεπώς, η σύντομη έκδοση έχει καλή ταυτόχρονη εγκυρότητα με το πλήρες REMA. Τέλος, οι βαθμολογίες της σύντομης έκδοσης παρουσιάζουν συσχέτιση [0,74 ($p < 0{,}001$)] με τις βαθμολογίες του Woodcock-Johnson Applied Problems (Woodcock et al., 2001, όπ. αναφ. στο Weiland et al., 2012).

2.1.7. Woodcock-Johnson IV Tests of Achievement (2014)

Το Woodcock-Johnson IV Tests of Achievement (WJ IV ACH; Schrank, Mather, & McGrew, 2014a, όπ. αναφ. στο Villarreal, 2015) είναι ένα εξατομικευμένο μέτρο που περιέχει τεστ ανάγνωσης, μαθηματικών, γραπτού λόγου και ακαδημαϊκών γνώσεων. Οι συγγραφείς του τεστ σημειώνουν ότι το WJIV ACH μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βοηθήσει στον προσδιορισμό των ακαδημαϊκών δυνατοτήτων και αδυναμιών ενός ατόμου, στη διάγνωση συγκεκριμένων ικανοτήτων και αναπηριών και στον εκπαιδευτικό προγραμματισμό (Schrank et al., 2014a, όπ. αναφ. στο Villarreal, 2015). Το τεστ μπορεί να χορηγηθεί σε άτομα ηλικίας από 2 έως 90 ετών. Για τη χορήγησή του, οι εξεταστές θα πρέπει έχουν ακριβή γνώση των διαδικασιών χορήγησης και βαθμολόγησης της WJ IV ACH. Σχετικά με την εκπαιδευτική και ψυχολογική αξιολόγηση, συνιστάται εκπαίδευση σε επίπεδο μεταπτυχιακού. Οι περισσότερες από τις εξετάσεις στο WJIVACH απαιτούν 5 έως 10 λεπτά για τη χορήγηση. Ωστόσο, ορισμένα απαιτούν 15 έως 20 λεπτά. Εξετάζονται η επίλυση προβλημάτων και οι υπολογιστικές δεξιότητες, η αριθμητική ευχέρεια, ο αυτοματισμός και ο μαθηματικός συλλογισμός. Η βαθμολόγηση και η ερμηνεία των απαντήσεων γίνεται μέσα από το διαδικτυακό πρόγραμμα βαθμολόγησης (https://www.wjscore.com/) (Villarreal, 2015), γεγονός που ενδεχομένως το κάνει να μην είναι προσβάσιμο σε όλους.

Το WJIV ACH παρουσιάζει υψηλότερη αξιοπιστία των βαθμολογιών (0,92 - 0,97) συγκριτικά με μεμονωμένα τεστ. Οι συσχετίσεις διπλής αξιολόγησης, στις περισσότερες περιπτώσεις, ήταν στο αποδεκτό έως εξαιρετικό εύρος (0,83 - 0,95), υποδεικνύοντας επαρκή σταθερότητα. Ακόμη, σχετικά με την εγκυρότητα του περιεχομένου, τα αποτελέσματα υποδηλώνουν επαρκή εγκυρότητα περιεχομένου, σύμφωνα με το τεχνικό εγχειρίδιο (McGrew, LaForte, & Schrank, 2014, όπ. αναφ. στο Villarreal, 2015). Ως προς τη δομική εγκυρότητα οι συσχετίσεις είναι υψηλότερες μεταξύ των σχετικών τεστ του εργαλείου από ότι μεταξύ άσχετων. Για την ταυτόχρονη εγκυρότητα εξετάστηκαν οι βαθμολογίες WJ IV ACH και οι βαθμολογίες από το Kaufman Test of Educational Achievement–Second Edition (KTEA-II; Kaufman & Kaufman, 2004), το Wechsler Individual Achievement Test–Third Edition (WIAT-III; Wechsler, 2009), και η Προφορική και Γραπτή Γλώσσα Κλίμακες–Γραπτή Έκφραση (OWLS-WE; Carrow Woolfolk, 1996). Βρέθηκε πως το παρόν εργαλείο είχε τις υψηλότερες συσχετίσεις με τις μετρήσεις των ίδιων σύνθετων τομέων KTEA-II και WIAT-III (Villarreal, 2015).

2.1.8. Early Numeracy Assessment (2015)

Το παρόν αποτελεί ένα σύνολο εργαλείων πρώιμης αξιολόγησης των μαθηματικών που είναι σύντομο, ψυχομετρικά έγκυρο, εύκολο στη διαχείριση και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αξιολόγηση των πρώιμων μαθηματικών δεξιοτήτων. Απευθύνεται σε ηλικίες από 3,13 έως 5,98 ετών. Στο 1ο και το 2ο έτος, τα παιδιά αξιολογούνται σε 12 διαφορετικές έργα, όπως: λεκτική αρίθμηση, καταμέτρηση, καταμέτρηση μερών-όλου, σύγκριση συνόλων, άμεση αναγνώριση, σύγκριση αριθμών, σύγκριση συλλογών διακριτών ποσοτήτων, διάταξη αριθμών, σύνολο προς αριθμούς, προβλήματα με πλαίσιο και αριθμητικούς συνδυασμούς. Στο 2ο έτος, τα παιδιά αξιολογούνται επίσης στα δευτερεύοντα τεστ των Εφαρμοσμένων Προβλημάτων και Υπολογισμού των Δοκιμών Επίτευξης Woodcock-Johnson II, από το οποίο αφαιρέθηκαν περιττά έργα. Ως αποτέλεσμα της αφαίρεσης περιττών αντικειμένων, κάθε έργο μπορεί να χορηγηθεί σε λιγότερο από πέντε λεπτά και τα περισσότερα χρειάζονται λιγότερο από δύο ή τρία λεπτά. Η χορήγηση των εργαλείων γίνεται από αξιολογητές, που προηγουμένως έχουν επιμορφωθεί, ώστε να διασφαλίζεται η ευχέρεια και η ακρίβεια σε όλα τα εργαλεία αξιολόγησης. Ο συνολικός χρόνος χορήγησης είναι περίπου 60 έως 90 λεπτά ανά παιδί και χωρίζεται σε τρεις ξεχωριστές συνεδρίες που συνήθως διεξάγονται σε διαφορετικές ημέρες (Purpura & Lonigan, 2015). Ωστόσο, η μεγάλη διάρκεια της αξιολόγησης μειώνει την πρακτικότητα της.

Η επίδοση των παιδιών στο εργαλείο σε κάθε έργο σχετίζεται σημαντικά με την επίδοση στο ίδιο έργο και ευρύτερα εργαλεία των μαθηματικών, ένα χρόνο αργότερα (με μερικές αξιοσημείωτες εξαιρέσεις). Ακόμη, σχετικά με την εγκυρότητα, όλες οι εργασίες συσχετίστηκαν σημαντικά με τις ίδιες εργασίες που δόθηκαν ένα χρόνο αργότερα, με μοναδική εξαίρεση το έργο για τον πληθάριθμο, που δεν ήταν σημαντική πρόβλεψη από μόνη της ένα χρόνο αργότερα για τα μικρότερα παιδιά (Purpura & Lonigan, 2015).

Το παρόν εργαλείο παρουσιάζει ικανοποιητική προς υψηλή εσωτερική συνοχή με τον συντελεστή Άλφα να κυμαίνεται από 0,69 έως 0,90 για όλες τις κατηγορίες έργων. Ακόμη, τα έργα του εργαλείου συσχετίστηκαν σημαντικά με δύο επιμέρους δοκιμασίες του Woodcock-Johnson III (Εφαρμοσμένα Προβλήματα και Υπολογισμός), υποδηλώνοντας πως αξιολογούσαν, επίσης, μέρος της μαθηματικής επάρκειας (Purpura & Lonigan, 2015).

2.1.9. Preschool Early Numeracy Skills Screener- Brief (2015)

Το Preschool Early Numeracy Skills Screener Brief (PENS-B), σχεδιάστηκε από τους Purpura, Reid, Eiland και Baroody (2015). Σκοπεύει στην αξιολόγηση μονάχα του τομέα της αριθμητικής σε μαθητές προσχολικής ηλικίας και δύναται να εντοπίσει παιδιά ηλικίας 3, 4 και 5 ετών, που έχουν υψηλή πιθανότητα να παρουσιάσουν μαθηματικές δυσκολίες (Purpura, Reid, Eiland & Baroody, 2015). Περιλαμβάνει 24 έργα, τα οποία, έχουν επιλεγεί από έργα που αναπτύχθηκαν σε προηγούμενες έρευνες (Purpura & Lonigan, 2015) και αποτελούν αντιπροσωπευτικές δραστηριότητες για την αξιολόγηση δεξιοτήτων που μετρούν και άλλα αντίστοιχα εργαλεία (Clements, Sarama, & Liu, 2008; Ginsburg & Baroody, 2003, όπ. αναφ. στο Hoffman & Grialou, 2005; Jordan, Kaplan, Locuniak, & Ramineni, 2007). Περιλαμβάνει έργα καταμέτρησης, καταμέτρησης ενός υποσυνόλου, αναγνώρισης και σύγκρισης αριθμητικών συμβόλων, διάταξης αριθμών, σχετικού μεγέθους, σύγκρισης συνόλων, πλαισιωμένων προβλημάτων, καθώς και αριθμητικών συνδυασμών.

Η χορήγηση του PENS-B δεν ξεπερνά τα 5 λεπτά (Purpura, Reid, Eiland & Baroody, 2015). Κατά τη χορήγηση του εργαλείου, δεν απαιτείται η χρήση χειραπτικού υλικού, καθώς 21 από τις ερωτήσεις παρουσιάζονται οπτικά και οι υπόλοιπες 3 προφορικά (λεκτικά προβλήματα). Η βαθμολόγηση των ερωτήσεων γίνεται διχοτομικά (0 για λανθασμένη απάντηση ή αδυναμία απόκρισης, 1 για σωστή), με μέγιστη δυνατή βαθμολογία τους 24 βαθμούς (Tsigilis, Krousorati, Gregoriadis & Grammatikopoulos, 2023).

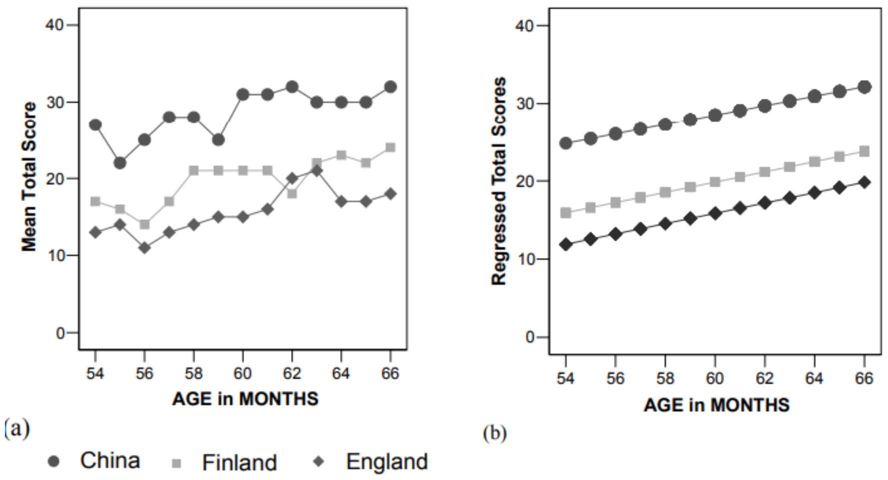
Το PENS-B παρουσιάζει υψηλή εσωτερική συνέπεια (α= 0,93). Η αξιοπιστία των ημίκλαστων ήταν επίσης υψηλή (r = 0,90). Τέλος, συσχετισμοί μεταξύ των TEMA-3 και PENS-B έδειξαν υψηλή εγκυρότητα σύγκλισης (r = 0,78) για το PENS-B (Purpura, Reid, Eiland & Baroody, 2015).

2.2. Διαφορές στην πρώιμη μαθηματική επάρκεια

Μέσα από τη μέτρηση της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας με εργαλεία μέτρησης, όπως τα παραπάνω, έχει μελετηθεί το αν παρουσιάζονται διαφορές στην πρώιμη μαθηματική επάρκεια μεταξύ των μαθητών, ποιοι είναι οι παράγοντες διαφοροποίησης στις επιδόσεις, αλλά και αν αυτές οι διαφορές είναι στατιστικά σημαντικές. Ένας από αυτούς τους παράγοντες που έχει μελετηθεί είναι η ηλικία.

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, οι άτυπες μαθηματικές γνώσεις αναπτύσσονται σε αρκετά παιδιά, προτού ξεκινήσουν να φοιτούν στο Νηπιαγωγείο και ενισχύονται μέσα από καθημερινές δραστηριότητες που εμπεριέχουν τα μαθηματικά (Ginsburg, 2002). Έτσι, τα παιδιά στο Νηπιαγωγείο ενδέχεται να εμφανίζουν σημαντικές διαφορές στις μαθηματικές δεξιότητες (Wright, 1991b, όπ. αναφ. στο Wright, Martland & Stafford, 2006). Αρκετοί ερευνητές έχουν μελετήσει τις διαφορές στην πρώιμη μαθηματική επάρκεια με βάση την ηλικία. Οι Clarke, Cheeseman και Clarke (2006) μελέτησαν τις μαθηματικές γνώσεις σε μαθητές προπαρασκευαστικής τάξης. Η είσοδος στην προπαρασκευαστική τάξη προϋποθέτει τη συμπλήρωση 5 ετών πριν τον Απρίλιο της σχολικής χρονιάς, αν και περίπου το 86% των παιδιών, δεν έχουν κλείσει 5 χρόνια ζωής, όταν ξεκινούν. Επομένως, γίνεται λόγος για μια σχολική βαθμίδα αντίστοιχη με αυτήν του Νηπιαγωγείου. Οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν έργα αρίθμησης και καταμέτρησης, διάταξης και ταξινόμησης, σύγκρισης, αντιστοίχισης ένα προς ένα, κανονικοτήτων, άμεσης αναγνώρισης, αντιστοίχισης αριθμητικών συμβόλων με ποσότητες και κατανόησης της έννοιας μέρους-όλου, σε ατομικές συνεντεύξεις που πραγματοποιήθηκαν 2 φορές (μια στην αρχή της χρονιάς και μια στο τέλος της). Τα ευρήματα της έρευνας έδειξαν πως στο τέλος της σχολικής χρονιάς η επίδοση ήταν καλύτερη (το ποσοστό σωστών απαντήσεων στην άμεση αναγνώριση αυξήθηκε από 9% σε 44%, στην ταξινόμηση από το μικρότερο στο μεγαλύτερο, αυξήθηκε από 50% στο 91%, στην καταμέτρηση αυξήθηκε από 39% στο 90% και στην λεκτική αρίθμηση από 57% στο 96%). Συνεπώς, φαίνεται πως στη συγκεκριμένη έρευνα υπήρξε διαφορά στην επίδοση με το πέρας μιας ακαδημαϊκής χρονιάς (Clarke, Cheeseman & Clarke, 2006).

Μια ακόμη έρευνα είναι των Aunio, Aubrey, Godfrey, Pan και Liu (2008), οι οποίοι μελέτησαν μια επιμέρους πτυχή της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας, τους αριθμούς και τις πράξεις (early numeracy) σε μαθητές ηλικίας 4,5 έως 5,5 ετών σε τρεις χώρες, την Κίνα, τη Φινλανδία και την Αγγλία. Όπως φαίνεται και στα διαγράμματα, τα οποία έχουν δημιουργήσει (Εικόνα 2.1.), η συνολική επίδοση των προνηπίων και για τις 3 χώρες, είναι χαμηλότερη από τη συνολική επίδοση των νηπίων. Παρόμοια ευρήματα έχουν και τα διαγράμματα που αφορούν τις σχεσιακές δραστηριότητες και την καταμέτρηση. Ωστόσο, δεν αναφέρεται εάν αυτές οι διαφορές στην επίδοση μεταξύ νηπίων-προνηπίων είναι στατιστικά σημαντικές (Aunio et al., 2008). Επίσης, τα ευρήματα της παραπάνω έρευνας ενισχύουν και οι Litkowski, Duncan, Logan, και Purpura (2020), οι οποίοι στην αξιολόγηση έργων των αριθμών και της αριθμητικής (αντιστοίχιση ένα προς ένα, πληθικότητα, λεκτική αρίθμηση, πλαισιωμένα λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης, αναγνώριση αριθμών και πρόσθεση) βρήκαν πως η μέση επίδοση των παιδιών που είχαν ηλικία 5,5 έτη, ήταν υψηλότερη από την μέση επίδοση των προνηπίων (4 ετών) σε κάθε μαθηματική δεξιότητα που αξιολογήθηκε.



Εικόνα 2.1.

Διαγράμματα μέσου όρου και γραμμικής παλινδρόμησης της συνολικής βαθμολογίας ανά ηλικία και χώρα (Aunio et al., 2008).

Αντίστοιχα αποτελέσματα είχαν και η Jordan με τους συνεργάτες της (2010), οι οποίοι με τη χρήση του εργαλείου που σχεδίασαν (Number Sense Brief), μελετούσαν επί 4 έτη, την πτυχή της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας, τους αριθμούς και τις πράξεις σε μαθητές νηπιαγωγείου έως τρίτης τάξης. Η συνολική επίδοση στο εργαλείο, μετά το πέρας του νηπιαγωγείου, ήταν μεγαλύτερη απ' ότι στις αρχές της προσχολικής εκπαίδευσης (Jordan et al., 2010). Σύμφωνοι με τα παραπάνω είναι και οι Starkey et al., (2004) και Weiland και Yoshikawa (2013), οι οποίοι επισημαίνουν τη στατιστικά σημαντική θετική επίδραση της προσχολικής εκπαίδευσης στην μαθηματική ανάπτυξη των προνηπίων, τόσο αυτών που προέρχονται από χαμηλό οικονομικό επίπεδο, όσο και αυτών από μέτριο οικονομικό επίπεδο (Starkey et al., 2004).

Ένας δεύτερος παράγοντας διαφοροποίησης στις επιδόσεις σε έργα πρώιμης μαθηματικής επάρκειας είναι και το φύλο. Πολλές ερευνητικές προσπάθειες έχουν γίνει προκειμένου να μελετηθεί και ο παράγοντας αυτός. Ωστόσο, το μεγαλύτερο μέρος αυτών των ερευνών αφορούν μαθητές γυμνασίου και λυκείου. Αυτό δικαιολογείται από το γεγονός πως στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση οι διαφορές φύλου στις ποσοτικές ικανότητες είναι πιο εμφανείς (Halpern, 2000, όπ. αναφ. στο Carr, Steiner, Kyser & Biddlecomb, 2008). Αξίζει να σημειωθεί, όμως, πως υπάρχουν ενδείξεις πως οι διαφορές φύλου στις μαθηματικές δεξιότητες εμφανίζονται κατά τη διάρκεια του δημοτικού σχολείου, ενώ άλλοι πιστεύουν πως υπάρχουν ήδη από την προσχολική ηλικία (Robinson, Abbott, Berninger & Busse, 1996, όπ. αναφ. στο Carr et al., 2008).

Αναλυτικότερα, οι Aunola, Leskinen, Lerkkanen και Nurmi (2004, όπ. αναφ. στο Carr et al., 2008) μελέτησαν την ανάπτυξη των μαθηματικών από την προσχολική ηλικία έως τη δεύτερη τάξη. Δεν εντοπίστηκαν διαφορές στη μαθηματική επίδοση μεταξύ των δυο κυρίαρχων φύλων. Ωστόσο, αυτό που παρατηρήθηκε είναι πως ο ρυθμός ανάπτυξης ήταν ταχύτερος για τα αγόρια, και ιδιαίτερα για αυτά με πολύ υψηλή επίδοση και πιο αργός για τα κορίτσια. Υπάρχουν, όμως και έρευνες που αποφαίνονται πως τα αγόρια δεν πετυχαίνουν καλή επίδοση ούτε στα μαθηματικά, ούτε και στη φυσική. Σύμφωνα με το Τμήμα Εκπαίδευσης της Αγγλίας (Department for Education), τα κορίτσια ηλικίας 5 έως 7 ετών, φαίνεται να σημειώνουν καλύτερη επίδοση, τόσο στην ανάγνωση και τη φυσική, όσο και στα μαθηματικά απ’ ότι τα αγόρια (D.f.E., 2010, όπ. αναφ. στο Χαρίση, 2018).

Άλλες έρευνες υποστηρίζουν πως τα κορίτσια είναι καλύτερα στον μαθηματικό τομέα της Άλγεβρας, λόγω της γλωσσικής δομής της άλγεβρας, στην οποία τα κορίτσια υπερέχουν, αλλά δεν τα πηγαίνουν το ίδιο καλά με τα ποσοτικά τεστ (Halpern, 2000, όπ. αναφ. στο Χαρίση, 2018). Στην ίδια πλευρά βρίσκονται και όσοι υποστηρίζουν πως τα αγόρια έχουν καλύτερη επίδοση σε έργα που προϋποθέτουν καλή οπτικο-χωρική αντίληψη και οπτικο-κινητικό συντονισμό, καθώς βάσει ερευνητικών αποτελεσμάτων, φαίνεται να χρησιμοποιούν περισσότερο το δεξί ημισφαίριο του εγκεφάλου τους, σε αντίθεση με τα κορίτσια, τα οποία φαίνεται να χρησιμοποιούν περισσότερο το αριστερό, το οποίο τους προσφέρει υπεροχή έναντι του άλλου φύλου στην γραφή, ανάγνωση και ομιλία (The Education Alliance, 2007, όπ. αναφ. στο Χαρίση, 2018).

Από την άλλη μεριά, υποστηρίζεται έντονα πως στις ηλικίες που μελετιούνται στην παρούσα εργασία, δεν παρατηρούνται σημαντικές διαφορές στην επίδοση μεταξύ των δυο κυρίαρχων φύλων. Αναλυτικότερα, σύμφωνα με τα επίσημα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (2008, όπ. αναφ. στο Χαρίση, 2018), ο παράγοντας του φύλου επηρεάζει όλο και λιγότερο την ακαδημαϊκή επίδοση γενικότερα, όσο μικρότερη είναι η ηλικία των μαθητών. Γενικότερα, θα μπορούσε να ειπωθεί πως η κατανόηση των βασικών αριθμητικών εννοιών είναι ομοιόμορφη μεταξύ των δυο κυρίαρχων φύλων στο Νηπιαγωγείο, σε αρκετές χώρες (Geary, 1994, όπ. αναφ. στο Lachance & Mazzocco, 2006). Το παραπάνω υποστηρίζεται και από τους Milburn, Lonigan, DeFlorio και Klein (2019), οι οποίοι μέσα από έρευνα που έκαναν σε 1630 παιδιά ηλικίας 3 έως 6 χρονών, χρησιμοποιώντας το Child Math Assessment, βρήκαν πως δεν υπήρξε στατιστικά σημαντική διαφορά στη μέση συνολική βαθμολογία μεταξύ των αγοριών και των κοριτσιών του δείγματος. Με άλλα λόγια, φαίνεται πως δεν υπάρχει ομοφωνία των ερευνητών, ούτε ένα ξεκάθαρο πλεονέκτημα του ενός φύλου, έναντι του άλλου για τις ηλικίες 4-6 ετών (Lachance & Mazzocco, 2006).

2.3. Σημαντικότητα της έρευνας

Οι μαθηματικές δεξιότητες των παιδιών προσχολικής εκπαίδευσης αποτελούν τα θεμέλια, τόσο για την απόκτηση μεταγενέστερων δεξιοτήτων, όσο και για τη μελλοντική ακαδημαϊκή τους επίδοση (LeFevre et al., 2010; Aunola et al., 2004, όπ. αναφ. στο Purpura & Lonigan, 2015). Αυτό υποστηρίζεται και από πρόσφατες μελέτες (Nguyen et al., 2016; Watts et al., 2014), οι οποίες έδειξαν πως η μαθηματική επάρκεια μαθητών προσχολικής εκπαίδευσης συνδέεται με την υψηλή επίδοση στα μαθηματικά σε μεταγενέστερες τάξεις και αποτελεί ισχυρό προγνωστικό παράγοντα. Οι μαθητές όταν ξεκινούν το σχολείο εμφανίζουν σημαντικές διαφορές στις μαθηματικές δεξιότητες (Wright, 1991b, όπ. αναφ. στο Wright, Martland & Stafford, 2006). Τα παιδιά, τα οποία ξεκινώντας το σχολείο βρίσκονται πίσω από τους συνομηλίκους τους στη μαθηματική επίδοση, έχουν την τάση να παραμένουν στα χαμηλότερα επίπεδα δεξιοτήτων, αυξάνοντας το χάσμα με τα παιδιά που βρίσκονται στα μεσαία ή ανώτερα επίπεδα δεξιοτήτων (Wright, Martland & Stafford, 2006).

Τα τελευταία χρόνια, για τους παραπάνω λόγους, υπάρχει ολοένα και μεγαλύτερο ενδιαφέρον για την πρώιμη μαθηματική επάρκεια, καθώς και για την αξιολόγησή της. Παρά το πλήθος των εργαλείων πρώιμης μαθηματικής επάρκειας που έχει αναπτυχθεί, έχει ασκηθεί κριτική πως η πλειονότητα των εργαλείων δεν αξιολογεί μεγάλο εύρος μαθηματικών δεξιοτήτων και δεν δύναται να εντοπίσει με ασφάλεια ατομικές διαφορές στην πρώιμη μαθηματική επάρκεια (Clements, Sarama & Liu, 2008). Για παράδειγμα, η επιμέρους δοκιμασία του Woodcock Johnson III (Woodcock, McGrew, & Mather, 2001, όπ. αναφ. στο Weiland et al., 2012), η δοκιμασία Εφαρμοσμένων Προβλημάτων (Applied Problems), αν και έχει πολλά πλεονεκτήματα (αξιολόγηση ενός ευρέος φάσματος ικανοτήτων και ηλικιών, δείκτες αξιοπιστίας άνω των 0,80), περιέχει πολλαπλές εργασίες, στις οποίες οι συμμετέχοντες πρέπει να μετρήσουν ένα υποσύνολο, όλα με αριθμούς από το 1 έως το 4, και μεταπηδά απότομα σε προχωρημένη και τυπική γνώση. Επιπλέον, το TEMA-3 (Ginsburg & Baroody, 2003) αν και έχει αξιολογηθεί θετικά, δεν περιλαμβάνει ερωτήσεις για αξιολόγηση σημαντικών μαθηματικών δεξιοτήτων, για παράδειγμα δεξιοτήτων της Γεωμετρίας και της Μέτρησης (Weiland et al., 2012).

Επιπλέον, πέρα από τα ισχυρά ψυχομετρικά χαρακτηριστικά που θα πρέπει να έχουν τα εργαλεία αυτά, θα πρέπει και να ακολουθούν μια αναπτυξιακά κατάλληλη χορήγηση (Clements & Sarama, 2016; Dong et al., 2021, όπ. αναφ. στο Tsigilis et al., 2023). Σε πολλά εργαλεία έχει ασκηθεί κριτική για την πολύπλοκη χορήγηση (για παράδειγμα απαιτούνται χειραπτικά υλικά, όπως κάρτες, κύβοι κ.α.) και για τη μεγάλη διάρκεια χορήγησής τους (π.χ. παραπάνω από μία συνεδρίες, από 20 τουλάχιστον λεπτά η καθεμιά) (Purpura & Lonigan, 2015).

Όσον αφορά την Ελλάδα, υπάρχει μονάχα μια κλίμακα πρώιμης μαθηματικής επάρκειας (the Utrecht Early Mathematical Competence Scales; Van de Rijt et al., 1999), η οποία έχει επικυρωθεί από τους Μπάρμπας και συν. (2008). Όπως έχει προαναφερθεί, το Ψυχομετρικό Κριτήριο Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης αποτελείται από 40 έργα και η χορήγησή του είναι χρονοβόρα. Επίσης, ένα ακόμα έργο το οποίο έχει ευρέως χρησιμοποιηθεί στην Ελλάδα είναι το TEMA-3 (Test of Early Mathematics Ability; Ginsburg & Baroody, 2003), το οποίο όμως δεν έχει επικυρωθεί (Papadakis, Kalogiannakis & Zaranis, 2016, όπ. αναφ. στο Tsigilis et al., 2023). Πρόσφατα μεταφράστηκε στην ελληνική από τους Tsigilis et al. (2023) και εφαρμόστηκε σε Έλληνες μαθητές, το Preschool Early Numeracy Skills Screener Brief (PENS-B) (Purpura et al., 2015). Ωστόσο, το PENS-B καλύπτει περιορισμένο εύρος μαθηματικών δεξιοτήτων, καθώς αξιολογεί μόνο δεξιότητες αριθμητικής.

Επομένως, υπάρχει μεγάλη ανάγκη για πρόσθετες ερευνητικές προσπάθειες για την αξιολόγηση των δεξιοτήτων της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας, μέσα από ένα εργαλείο εύχρηστο, σύντομο στη χορήγηση και προσβάσιμο σε όλους τους εκπαιδευτικούς προσχολικής αγωγής, που να εστιάζει και να αξιολογεί τις διαστάσεις της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας που θέτει το ελληνικό ΑΠΣ.

3ο Κεφάλαιο: Μεθοδολογία έρευνας

3.1. Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Στόχος της παρούσας έρευνας είναι αναπτυχθεί και να ελεγχθεί ένα σύντομο και εύχρηστο εργαλείο μέτρησης της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας των μαθητών νηπιαγωγείου. Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν είναι τα εξής:

α) Ποια είναι τα βασικά χαρακτηριστικά ενός εργαλείου μέτρησης της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας;

β) Τι διακυμάνσεις εμφανίζονται στη πρώιμη μαθηματική επάρκεια σε παιδιά νηπιαγωγείου σε σχέση με τα διαφορετικά πεδία της πρώιμης μαθηματικής γνώσης;

γ) Διαπιστώνονται αναπτυξιακές διαφορές και διαφορές φύλου στην πρώιμη μαθηματική επάρκεια;

3.2. Μεθοδολογική προσέγγιση

Για την πραγμάτωση της παρούσας μελέτης επιλέχθηκε η ποσοτική μέθοδος με σκόπιμη δειγματοληψία, προκειμένου να διερευνηθούν, να περιγραφούν και να ερμηνευτούν οι πρώιμες μαθηματικές δεξιότητες των μαθητών σε συνάρτηση με το φύλο, καθώς και την ηλικία. Η μέθοδος της ποσοτικής δειγματοληπτικής έρευνας προτιμήθηκε, εξαιτίας των δυνατοτήτων της, καθώς επιτρέπει τη συλλογή στοιχείων από ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα ενός πληθυσμού (μαθητών νηπιαγωγείου) και έτσι, ο ερευνητής δύναται να γενικεύσει τα συμπεράσματά του/της. Επίσης, με τη συγκεκριμένη μέθοδο, διευκολύνονται οι διαδικασίες επεξεργασίας των δεδομένων και εξαγωγής συμπερασμάτων.

3.3. Συμμετέχοντες

Στην παρούσα έρευνα συμμετείχαν νήπια και προνήπια, ηλικίας 4 έως 6 ετών, που φοιτούν σε νηπιαγωγεία της Βόρειας Ελλάδας. Η επιλογή του δείγματος ήταν σκόπιμη, καθώς επιλέχθηκε δείγμα ευκολίας. Το δείγμα αποτέλεσαν 66 συμμετέχοντες, ώστε αυτή να αποτελέσει μια καλή πιλοτική μελέτη του εργαλείου. Από αυτούς οι 31 ήταν προνήπια (46,969 %), δηλαδή 4-5 ετών, ενώ οι 35 ήταν νήπια (53,03%), δηλαδή 5-6 ετών. Περίπου 47% του δείγματος ήταν αγόρια (n= 31), ενώ περίπου το 53 % ήταν κορίτσια (n= 35). Όλοι οι συμμετέχοντες ήταν μαθητές τυπικής ανάπτυξης (δεν υπήρχε διάγνωση, έως την ημερομηνία χορήγησης του εργαλείου) και είχαν ως μητρική τους γλώσσα την ελληνική.

3.4. Εργαλείο συλλογής δεδομένων

Το εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα μελέτη είναι το Σύντομο Εργαλείο Μέτρησης της Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας EMCMT-B (Early Mathematical Competence Measurement Tool - Brief), το οποίο, αν και σχεδιάστηκε από τη φοιτήτρια, έχει τις ρίζες του σε αντίστοιχα διεθνή εργαλεία.

Για το σχεδιασμό του παρόντος εργαλείου, επιλέγησαν έργα που εξετάζουν μαθηματικές δεξιότητες που αναμένεται τα παιδιά να έχουν αναπτύξει στη βαθμίδα του νηπιαγωγείου, σύμφωνα με το Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003; αρίθμηση, καταμέτρηση, σύγκριση, ταξινόμηση, διάταξη, αντιστοίχηση, απλές πράξεις, επίλυση προβλημάτων, σχήματα, μέτρηση, κανονικότητες), και αποτελούν θεμέλια για την μετέπειτα μαθηματική ανάπτυξη σύμφωνα με τη διεθνή βιβλιογραφία (Sarama & Clements, 2009, όπ. αναφ. στο Weiland et al., 2012). Δεν συμπεριλήφθηκαν έργα μαθηματικών περιοχών που αναφέρονται στο Δ.Ε.Π.Π.Σ. του 2022 για το νηπιαγωγείο (για παράδειγμα έργα πιθανοτήτων, μοντελοποίησης και άλλα) (Πεντέρη και συν., 2022), καθώς αυτό δεν έχει ακόμα ενταχθεί και εναρμονιστεί με τις εκπαιδευτικές πρακτικές στο σύνολο των νηπιαγωγείων, παρά μόνο πιλοτικά σε πειραματικά νηπιαγωγεία. Ένας ακόμα λόγος είναι πως, όπως προαναφέρθηκε, σύμφωνα με μελέτη των Clements και Sarama (2007, όπ. αναφ. στο Clements, Sarama, & Liu, 2008) καμία δεξιότητα από τους τομείς των πιθανοτήτων και της ανάλυσης δεδομένων δεν βρέθηκε να είναι κατάλληλη για αυτό το ηλικιακό επίπεδο. Το εργαλείο περιλαμβάνει 25 έργα (31 έργα, εάν συμπεριλάβουμε και τα υποερωτήματα ορισμένων έργων) που χωρίζονται σε: έργα λεκτικής αρίθμησης-καταμέτρησης, σύγκρισης, άμεσης αναγνώρισης του αριθμού, διάταξης, πλαισιωμένα λεκτικά προβλήματα, καθώς και έργα που αφορούν τους αριθμούς και την αριθμητική (πράξεις), τις κανονικότητες, τα σχήματα και τη μέτρηση (βλ. Πίνακα 3.1. και Παράρτημα 1).

Πίνακας 3.1.

Συγκεντρωτικός πίνακας με τις μαθηματικές ικανότητες που αξιολογούνται στο εργαλείο και την ποσότητα των έργων για κάθε ικανότητα.

Μαθηματική Ικανότητα	Ποσότητα έργων
Λεκτική αρίθμηση - Καταμέτρηση	4
Σύγκριση	3
Άμεση αναγνώριση	2
Πλαισιωμένα λεκτικά προβλήματα	2
Διάταξη	2
Αριθμοί - Αριθμητική	3
Κανονικότητες	3
Σχήματα	3
Μέτρηση	3
Σύνολο	25

Στους πίνακες που ακολουθούν γίνεται αναφορά στα έργα του εργαλείου ανά κατηγορία, με αναφορές στα εργαλεία μέτρησης της διεθνούς βιβλιογραφίας, που χρησιμοποιούν αντίστοιχο έργο. Αναλυτικότερα, για την αξιολόγηση της αρίθμησης και της καταμέτρησης (Πίνακας 3.2.), επιλέγησαν 2 έργα λεκτικής αρίθμησης (ένα έως το 5 και ένα έως το 20), ένα καταμέτρησης (Εικόνα 3.1.) και ένα αντίστροφης αρίθμησης από το 10 έως το 1. Επιλέχθηκε ένα παραπάνω έργο αρίθμησης (λεκτική αρίθμηση ως το 5), προκειμένου να προσδιοριστεί το χαμηλότερο επίπεδο μαθηματικών δεξιοτήτων στο δείγμα, όπως συμβαίνει και σε άλλα εργαλεία (Weiland et al., 2012).

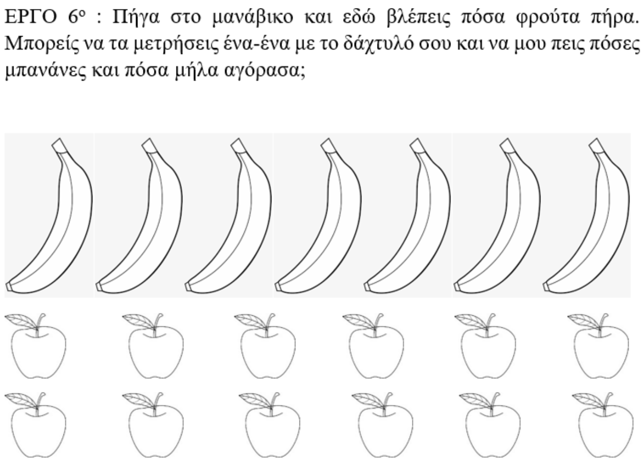
Πίνακας 3.2.

Πίνακας για τη λεκτική αρίθμηση – καταμέτρηση και τα έργα τα οποία περιλαμβάνουν.

Αριθμός του έργου	Περιγραφή έργου
1	Λεκτική αρίθμηση έως το 5. *(α, β, ε, στ)*
5	Λεκτική αρίθμηση έως το 20. *(α, β, ε, στ)*
6	Καταμέτρηση αντικειμένων *(α, β, γ, δ, ζ)*
14	Αντίστροφη λεκτική αρίθμηση *(α)*

Παρόμοιο με έργο (ή έργα) από:
*(α)*Research-Based Early Mathematics Assessment –REMA (Clements, Sarama & Liu, 2008),
(β) REMA- Brief (Weiland, Wolfe, Hurwitz, Clements, Sarama & Yoshikawa, 2012)
(γ) Child Math Assessment (Starkey, Klein & Wakeley, 2004)
(δ) Preschool Early Numeracy Skills Screener- Brief (Purpura, Reid, Eiland & Baroody, 2015)
(ε) Number Sense Core (Jordan, Kaplan, Locuniak & Ramineni, 2007)

(στ) Ψυχομετρικό Κριτήριο Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης (Μπάρμπας, Βερμέουλεν, Κιοσέογλου & Μενεξές, 2008)
(ζ) Early Numeracy Assessment (Purpura & Lonigan, 2015).



Εικόνα 3.1.

Έργο 6: Καταμέτρηση αντικειμένων.

Για την αξιολόγηση της σύγκρισης (Πίνακας 3.3.), από τα 3 έργα τα οποία σχεδιάστηκαν, το ένα (έργο 16) αφορούσε τον προσδιορισμό του αριθμού που βρίσκεται πιο κοντά από άλλους, στον ζητούμενο αριθμό (Relative size). Έτσι από τους μαθητές ζητήθηκε να απαντήσουν ποιος από τους αριθμούς 4, 9, 2 ή 7, που τους παρουσιάζονταν οπτικά, βρίσκεται πιο κοντά στον αριθμό 6 (Εικόνα 3.2.). Από τα υπόλοιπα, το ένα (έργο 15) αφορούσε τη σύγκριση αριθμών που τους παρουσιάζονταν προφορικά («Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος; Το 11 ή το 16;) και το άλλο σχετιζόταν με τη σύγκριση ποσοτήτων (έργο 4). Πιο συγκεκριμένα στο έργο 4, οι μαθητές κλήθηκαν να προσδιορίσουν ποιο δέντρο από αυτά που είδαν για λίγο, περιλαμβάνει την μεγαλύτερη ποσότητα μήλων (βλ. Εικόνα 3.3.). Σ’ αυτό το έργο δεν επιτρεπόταν η καταμέτρηση, μονάχα η άμεση σύγκριση. Με τα τρία αυτά έργα καλύπτεται επαρκώς η έννοια της σύγκρισης στην πρώιμη αριθμητική.

Πίνακας 3.3.

Πίνακας για τη σύγκριση και τα έργα τα οποία περιλαμβάνει.

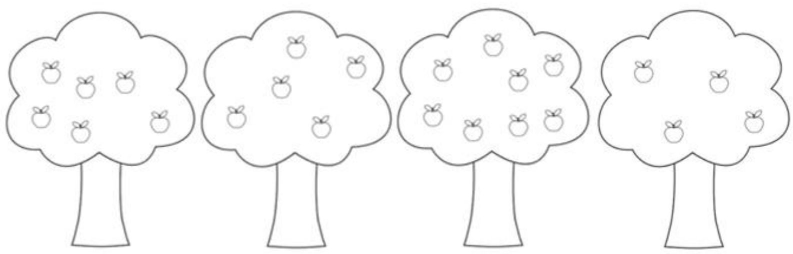
Αριθμός του έργου	Περιγραφή έργου
4	Σύγκριση ποσοτήτων. *(α, β, δ, στ)*
15	Σύγκριση αριθμών (11 ή 16). *(α, β, γ, δ, στ, ζ)*

16	Προσδιορισμός πλησιέστερου αριθμού στο 6, μεταξύ 4 αριθμών (4,9,2,7). *(α, δ, ε)*

Παρόμοιο με έργο (ή έργα) από:
*(α)*Research-Based Early Mathematics Assessment –REMA (Clements, Sarama & Liu, 2008)
(β) REMA- Brief (Weiland et al., 2012)
(γ) Child Math Assessment (Starkey, Klein & Wakeley, 2004)
(δ) Preschool Early Numeracy Skills Screener- Brief (Purpura et al., 2015)
(ε) Number Sense Core (Jordan et al., 2007)
(στ) Ψυχομετρικό Κριτήριο Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης (Μπάρμπας και συν., 2008)
(ζ) Early Numeracy Assessment (Purpura & Lonigan, 2015).

Εικόνα 3.2.

Έργο 16: Προσδιορισμός πλησιέστερου αριθμού στο 6, μεταξύ 4 αριθμών.



Εικόνα 3.3.

Έργο 4: Προσδιορισμός του δέντρου που έχει περισσότερα μήλα πάνω του.

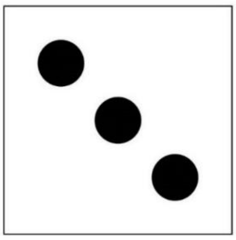
Η άμεση αναγνώριση του αριθμού (Subitizing) εξετάστηκε μέσα από 2 έργα, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 3.4. Για αυτά τα δυο έργα, χρησιμοποιήθηκαν συγκεκριμένα πρότυπα αριθμών. Αναλυτικότερα, στο πρώτο έργο (έργο 3) ζητήθηκε η άμεση αναγνώριση ενός μικρού αριθμού (3), με τη μορφή που παρουσιάζεται στα ζάρια, ενώ στο επόμενο (έργο 13) η δυσκολία αυξήθηκε, ζητώντας την άμεση αναγνώριση ενός μεγαλύτερου αριθμού (10), με τη μορφή που παρουσιάζεται στα πλακίδια του παιχνιδιού domino (δηλαδή το πρότυπο του αριθμού 5 εις διπλούν). Τα 2 αυτά έργα, προκειμένου να εξαλειφθεί η πιθανότητα ο μαθητής/τρια να καταμετρά τις τελείες, παρουσιάστηκαν για σύντομο χρονικό διάστημα (2 δευτερόλεπτα), κατά το οποίο το παιδί έβλεπε μια εικόνα με 3 διακριτές τελείες αρχικά, και έπειτα με 10 διακριτές τελείες (Εικόνες 3.4. και 3.5.). Άλλωστε, και σε διεθνή εργαλεία με ισχυρά ψυχομετρικά χαρακτηριστικά, ακόμα και στα σύντομα, παρατηρείται να περιλαμβάνονται δύο ή και παραπάνω έργα αυτής της κατηγορίας (Weiland et al., 2012).

Πίνακας 3.4.

Πίνακας για την άμεση αναγνώριση αριθμού και τα έργα τα οποία περιλαμβάνει.

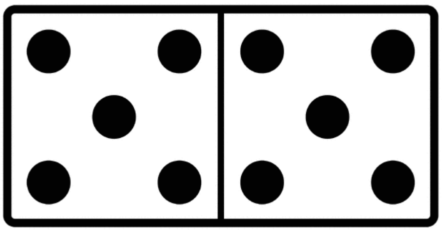
Αριθμός του έργου	Περιγραφή έργου
3	Άμεση αναγνώριση ποσότητας (3) σε 2 δευτερόλεπτα. *(α, β)*
13	Άμεση αναγνώριση ποσότητας (10) σε 2 δευτερόλεπτα. *(α, β)*

Παρόμοιο με έργο (ή έργα) από:
*(α)*Research-Based Early Mathematics Assessment –REMA (Clements, Sarama & Liu, 2008)
(β) REMA- Brief (Weiland et al., 2012)



Εικόνα 3.4.

Έργο 3: Άμεση αναγνώριση 3 τελειών.



Εικόνα 3.5.

Έργο 13: Άμεση αναγνώριση 10 τελειών.

Τα λεκτικά προβλήματα με πλαίσιο αξιολογήθηκαν μέσα από 2 έργα (βλ. Πίνακα 3.5.). Το πρώτο αφορούσε την πρόσθεση («Εσύ φούσκωσες 4 μπαλόνια και ο/η φίλος/η σου φούσκωσε 2 μπαλόνια. Πόσα μπαλόνια έχετε φουσκώσει μαζί;») και το δεύτερο την αφαίρεση («Είχες 6 φράουλες και έδωσες στον/στη φίλο/η σου τις 3. Πόσες φράουλες έχεις τώρα;»). Δεν συμπεριλήφθηκαν έργα με τις υπόλοιπες δυο πράξεις (πολλαπλασιασμός και διαίρεση), καθώς αυτές οι έννοιες πιο σπάνια καλλιεργούνται στο νηπιαγωγείο. Τέλος, στο πλαίσιο δεν υπήρχαν άσχετες πληροφορίες.

Πίνακας 3.5.

Πίνακας για τα πλαισιωμένα λεκτικά προβλήματα και τα έργα τα οποία περιλαμβάνουν.

Αριθμός του έργου	Περιγραφή έργου
11	Πλαισιωμένο λεκτικό πρόβλημα με πρόσθεση. *(δ, ε, στ, ζ)*
17	Πλαισιωμένο λεκτικό πρόβλημα με αφαίρεση. *(δ, ε, στ, ζ)*

Παρόμοιο με έργο (ή έργα) από:
*(α)*Research-Based Early Mathematics Assessment –REMA (Clements, Sarama & Liu, 2008)
(β) REMA- Brief (Weiland et al., 2012)
(γ) Child Math Assessment (Starkey, Klein & Wakeley, 2004)
(δ) Preschool Early Numeracy Skills Screener- Brief (Purpura et al., 2015)
(ε) Number Sense Core (Jordan et al., 2007)
(στ) Ψυχομετρικό Κριτήριο Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης (Μπάρμπας και συν., 2008)
(ζ) Early Numeracy Assessment (Purpura & Lonigan, 2015).

Οι δεξιότητες της διάταξης μελετήθηκαν με 2 έργα (Πίνακας 3.6.). Καθένα από αυτά, εξέταζε μια διαφορετική πτυχή της διάταξης. Το πρώτο έργο αυτής της κατηγορίας (έργο 7) ελέγχει την κατανόηση τακτικού αριθμού και ζητούσε από τον μαθητή να δείξει ποιο παιδί θα μπει δεύτερο στο λεωφορείο (Εικόνα 3.6.). Το δεύτερο έργο της διάταξης (έργο 12), αξιολογεί προφορικά τη διάταξη των αριθμών και απαρτίζεται από 2 υποερωτήματα. Συνεπώς οι μαθητές δίνουν 2 απαντήσεις, για κάθε υποερώτημα ξεχωριστά (για παράδειγμα, μια απάντηση για το υποερώτημα «Μπορείς να μου πεις ποιος αριθμός είναι μετά το 12;» και μια απάντηση για το υποερώτημα «Μπορείς να μου πεις τώρα ποιος αριθμός είναι πριν το 8;»). Με αυτόν τον τρόπο επιδιώκεται μια ευρεία και επαρκή αξιολόγηση της έννοιας.

Πίνακας 3.6.

Πίνακας για τη διάταξη και τα έργα τα οποία περιλαμβάνει.

Αριθμός του έργου	Περιγραφή έργου
7	Κατανόηση τακτικού αριθμού. *(α, γ, δ, στ,)*
12	Προσδιορισμός του επόμενου και του προηγούμενου αριθμού από τον ζητούμενο. *(α, γ, δ, ε, ζ)*

Παρόμοιο με έργο (ή έργα) από:
*(α)*Research-Based Early Mathematics Assessment –REMA (Clements, Sarama & Liu, 2008)
(β) REMA- Brief (Weiland et al., 2012)
(γ) Child Math Assessment (Starkey, Klein & Wakeley, 2004)
(δ) Preschool Early Numeracy Skills Screener- Brief (Purpura et al., 2015)
(ε) Number Sense Core (Jordan et al., 2007)
(στ) Ψυχομετρικό Κριτήριο Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης (Μπάρμπας και συν., 2008)
(ζ) Early Numeracy Assessment (Purpura & Lonigan, 2015).

Εικόνα 3.6.

Έργο 7: Κατανόηση τακτικού αριθμού.

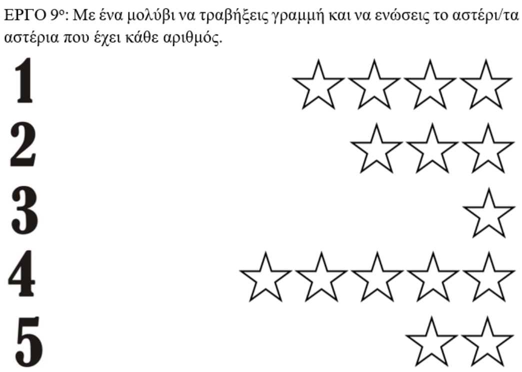
Η γνώση των αριθμών και της αριθμητικής (πράξεις), όπως παρουσιάζεται και στον Πίνακα 3.7., εξετάστηκε μέσα από 3 έργα. Το πρώτο (έργο 9) αφορούσε τη γνώση των αριθμητικών συμβολων από το 1 έως το 5, αντιστοιχίζοντάς τα με τις ποσότητες που περιλαμβάνουν (Εικόνα 3.7.). Το δεύτερο έργο αυτής της κατηγορίας (έργο 10), περιλάμβανε την εικόνα από 7 μπανάνες στη σειρά (Εικόνα 3.8.) και αξιολογούσε τη σύνθεση του αριθμού 7 με την εξής οδηγία: «Αγόρασα 7 μπανάνες. Τώρα θα κρύψω μερικές, χωρίς να με δεις, και θέλω εσύ να μου πεις πόσες κρύβω κάτω από το χαρτάκι». Το τελευταίο έργο της κατηγορίας (έργο 18) αφορούσε την αριθμητική (νοερή πρόσθεση). Αναλυτικότερα για έργο 18, οι μαθητές καλούνταν να εκτελέσουν μια απλή νοερή πρόσθεση (2+2). Αυτό το έργο συμπεριλήφθηκε προκειμένου να εντοπιστεί το υψηλότερο επίπεδο μαθηματικών δεξιοτήτων στο δείγμα, όπως συμβαίνει και σε άλλα εργαλεία (Weiland et al., 2012).

Πίνακας 3.7.

Πίνακας για τους αριθμούς και την αριθμητική και τα έργα τα οποία περιλαμβάνουν.

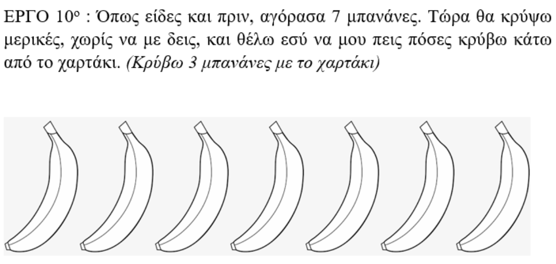
Αριθμός του έργου	Περιγραφή έργου
9	Αντιστοίχιση αριθμητικών συμβόλων 1- 5 με τις αντίστοιχες ποσότητες. *(α, β, δ, στ, ζ)*
10	Σύνθεση του αριθμού 7. *(α, β)*
18	Νοερή πρόσθεση. *(α, β, γ, δ, ε, ζ)*

Παρόμοιο με έργο (ή έργα) από:
*(α)*Research-Based Early Mathematics Assessment –REMA (Clements, Sarama & Liu, 2008)
(β) REMA- Brief (Weiland et al., 2012)
(γ) Child Math Assessment (Starkey, Klein & Wakeley, 2004)
(δ) Preschool Early Numeracy Skills Screener- Brief (Purpura et al., 2015)
(ε) Number Sense Core (Jordan et al., 2007)
(στ) Ψυχομετρικό Κριτήριο Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης (Μπάρμπας και συν., 2008)
(ζ) Early Numeracy Assessment (Purpura & Lonigan, 2015).



Εικόνα 3.7.

Έργο 9: Αντιστοίχιση αριθμητικών συμβόλων με τις αντίστοιχες ποσότητες.



Εικόνα 3.8.

Έργο 10: Σύνθεση του αριθμού 7.

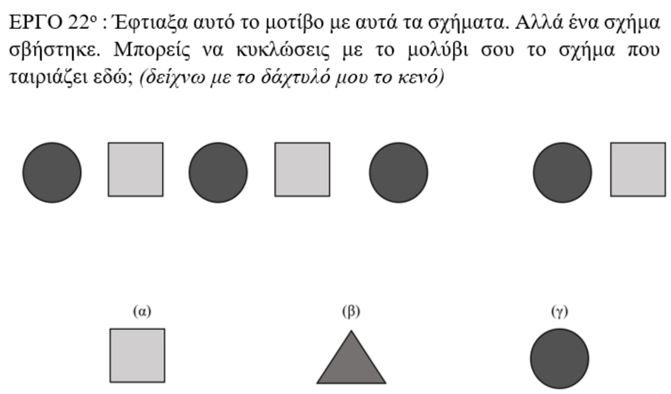
Οι πρώιμες μαθηματικές δεξιότητες που αφορούν τις κανονικότητες αξιολογήθηκαν με 3 έργα (Πίνακας 3.8.). Επιλέγησαν δυο έργα επέκτασης του μοτίβου και ένα (έργο 22) εύρεσης του μέρους που λείπει από μοτίβο ΑΒΑΒ_ΒΑΒ (Εικόνα 3.9.). Από τα δυο έργα επέκτασης, το ένα (έργο 20) αποτελούταν από επαναλαμβανόμενο μοτίβο τύπου ΑΒ (Εικόνα 3.10.), ενώ το δεύτερο μοτίβο ήταν εξελισσόμενο μοτίβο τύπου Α-ΑΑ-ΑΑΑ-ΑΑΑΑ (Εικόνα 3.11.), κάτι που δε συναντάται σε πολλά εργαλεία (Papic, Mulligan & Mitchelmore, 2011). Συνεπώς, όλα τα έργα διέφεραν μεταξύ τους, επιδιώκοντας την καλύτερη δυνατή αξιολόγηση της κατανόησης των κανονικοτήτων.

Πίνακας 3.8.

Πίνακας για τις κανονικότητες και τα έργα τα οποία περιλαμβάνουν.

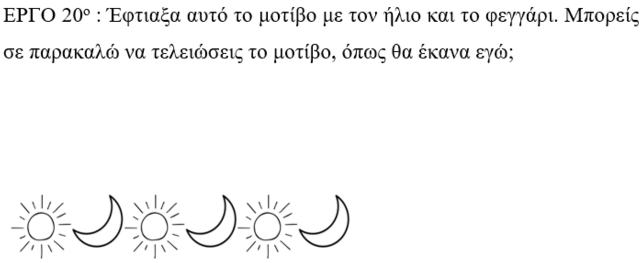
Αριθμός του έργου	Περιγραφή έργου
20	Επέκταση επαναλαμβανόμενου μοτίβου ΑΒ. *(α, β, γ, η)*
21	Επέκταση εξελισσόμενου μοτίβου. *(η)*
22	Εύρεση του μέρους που λείπει. *(α, β)*

Παρόμοιο με έργο (ή έργα) από:
*(α)*Research-Based Early Mathematics Assessment –REMA (Clements, Sarama & Liu, 2008)
(β) REMA- Brief (Weiland et al., 2012)
(γ) Child Math Assessment (Starkey, Klein & Wakeley, 2004)
(η) Early Mathematical Patterning Assessment - EMPA (Papic, Mulligan & Mitchelmore, 2011)



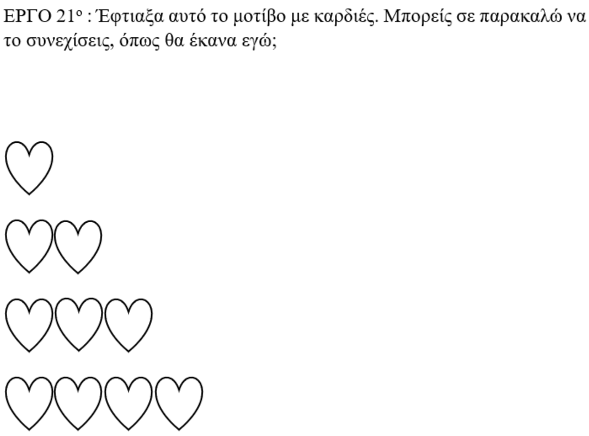
Εικόνα 3.9.

Έργο 22: Εύρεση του μέρους που λείπει.



Εικόνα 3.10.

Έργο 20: Επέκταση επαναλαμβανόμενου μοτίβου ΑΒ.



Εικόνα 3.11.

Έργο 21: Επέκταση εξελισσόμενου μοτίβου.

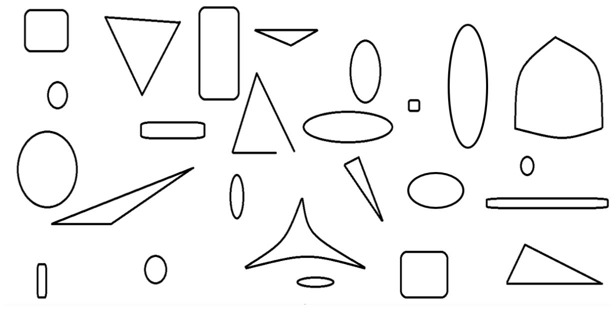
Οι δεξιότητες που αφορούν την κατανόηση των σχημάτων μελετήθηκαν με 3 έργα. Επιλέχθηκε το έργο 19 για την αναγνώριση σχήματος (τριγώνου), το έργο 23 για την κατασκευή σχήματος μονάχα από τις κορυφές του και την αναγνώριση του (ορθογωνίου παραλληλογράμματος), καθώς και το έργο 25 για την ανάλυση σχήματος (τετράγωνο) (Πίνακας 3.9.). Πιο συγκεκριμένα, στο έργο 19 ζητήθηκε από τους μαθητές να κυκλώσουν όλα τα τρίγωνα που βλέπουν ανάμεσα σε 25 σχήματα που φαίνονται στην Εικόνα 3.12., ενώ στο έργο 23 οι μαθητές κλήθηκαν να ενώσουν τις τελείες και έπειτα, να αναγνωρίσουν τι σχήμα είναι (Εικόνα 3.13.). Ακόμα, στο έργο 25, στην ανάλυση τετραγώνου, οι μαθητές κλήθηκαν να αναγνωρίσουν τα σχήματα που θα προέκυπταν, εάν χώριζαν το τετράγωνο στη μέση (είτε κατακόρυφα-οριζόντια, είτε διαγώνια). Τη λεκτική εκφώνηση του έργου αυτού συνόδευε και μια εικόνα ενός τετραγώνου (Εικόνα 3.14.). Σε αυτό το έργο επιτράπηκε στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν, είτε το χέρι τους ως «χώρισμα», είτε να χωρίσουν στη μέση το τετράγωνο τραβώντας μια γραμμή με το μολυβι που είχαν στη διάθεσή τους, ώστε να είναι κατάλληλο με το αναπτυξιακό τους επίπεδο. Με αυτόν τον τρόπο, διερευνήθηκαν διάφορες πτυχές της έννοιας των σχημάτων, χρησιμοποιώντας διαφορετικά κάθε φορά σχήματα.

Πίνακας 3.9.

Πίνακας για τα σχήματα και τα έργα τα οποία περιλαμβάνουν.

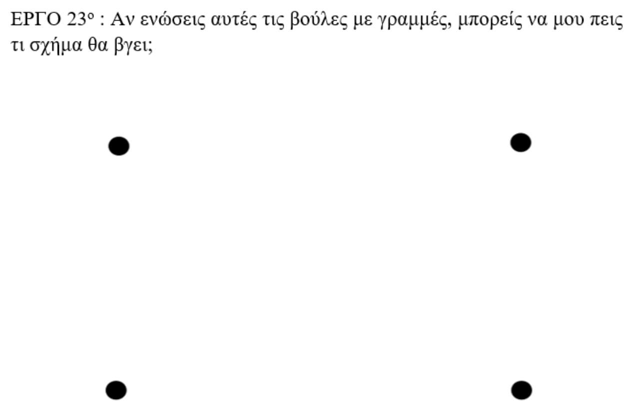
Αριθμός του έργου	Περιγραφή έργου
19	Προσδιορισμός και αναγνώριση 5 τριγώνων από 25 σχήματα. *(α, β)*
23	Κατασκευή ορθογωνίου από μέρη και αναγνώρισή του. *(α, β, γ)*
25	Ανάλυση τετραγώνου. *(α, β)*

Παρόμοιο με έργο (ή έργα) από:
*(α)*Research-Based Early Mathematics Assessment –REMA (Clements, Sarama & Liu, 2008)
(β) REMA- Brief (Weiland et al., 2012)
(γ) Child Math Assessment (Starkey, Klein & Wakeley, 2004)



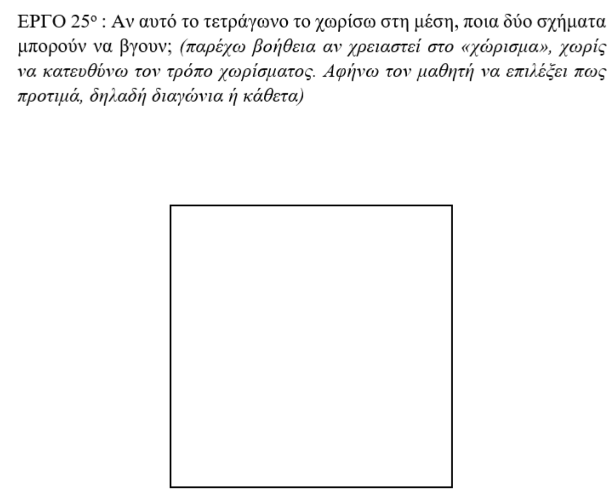
Εικόνα 3.12.

Έργο 19: Αναγνώριση των 5 τριγώνων ανάμεσα σε 25 σχήματα.



Εικόνα 3.13.

Έργο 23:Κατασκευή ορθογωνίου παραλληλογράμματος από τις κορυφές του και αναγνώρισή του.



Εικόνα 3.14.

Έργο 25: Ανάλυση τετραγώνου.

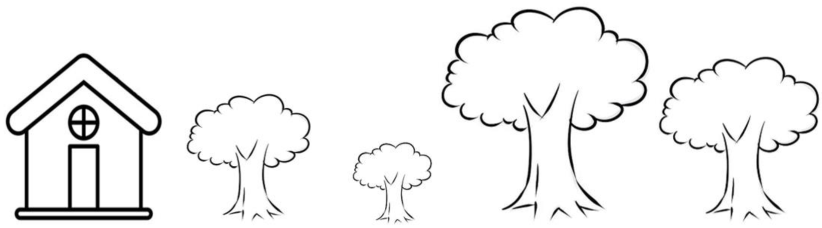
Ακόμη, στο εργαλείο συμπεριλήφθηκαν και 3 έργα μέτρησης (Πίνακας 3.10.), που αν και δε συναντώνται σε πολλά διεθνή εργαλεία πρώιμης μαθηματικής επάρκειας, σύμφωνα με το ΔΕΠΠΣ, βρίσκονται ανάμεσα στις δεξιότητες που αναμένεται οι μαθητές να αποκτήσουν κατά τη φοίτησή τους στο νηπιαγωγείο. Το πρώτο έργο μέτρησης αφορά τη σύγκριση μήκους (έργο 2). Οι μαθητές κλήθηκαν να προσδιορίσουν το δέντρο, που είναι πιο ψηλό από το σπίτι της εικόνας (Εικόνα 3.15.). Το δεύτερο έργο, που αξιολογούσε τη διάταξη, είναι το έργο 8, το οποίο αφορούσε τη σύγκριση συνεχούς ποσότητας και διάταξης. Στο έργο 8 οι μαθητές έπρεπε να δείξουν με το δάχτυλό τους το σύνολο των εικόνων, το οποίο είναι καταταγμένο στη σειρά από το μεγαλύτερο λουλούδι, προς το μικρότερο, δηλαδή έχει μειούμενο μέγεθος (Εικόνα 3.16.). Το τελευταίο έργο της κατηγορίας (έργο 24) αφορούσε την άμεση σύγκριση επιφανειών (Εικόνα 3.17.). Αξίζει να σημειωθεί πως το συγκεκριμένο έργο βασίστηκε σε αντίστοιχο έργο (ίδια εκφώνηση, αλλά διαφορετικό οπτικό υλικό) της πλήρης έκδοσης του REMA (Clements, Sarama & Liu, 2008), το οποίο οι συγγραφείς, το περιέγραφαν ως «έμμεση σύγκριση μήκους» (Indirect length comparer). Ωστόσο, στο παρόν εργαλείο, περιγράφεται ως «άμεση σύγκριση επιφανειών». Αυτό προκύπτει καθώς, για το έργο 24 τα παιδιά καλούνται να δείξουν το αντικείμενο-σχήμα, το οποίο τους φαίνεται πως καλύπτει περισσότερο χώρο στο πάτωμα, χωρίς να προβούν σε περαιτέρω μετρήσεις.

Πίνακας 3.10.

Πίνακας για τη μέτρηση και τα έργα τα οποία περιλαμβάνει.

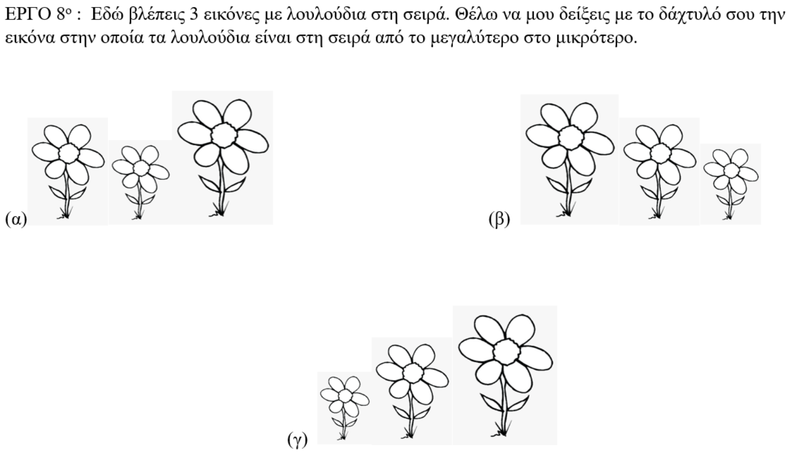
Αριθμός του έργου	Περιγραφή έργου
2	Σύγκριση μήκους. *(στ)*
8	Σύγκριση συνεχούς ποσότητας και διάταξης. *(α, στ)*
24	Άμεση σύγκριση επιφανειών *(α)*

Παρόμοιο με έργο (ή έργα) από:
*(α)*Research-Based Early Mathematics Assessment –REMA (Clements, Sarama & Liu, 2008)
(στ) Ψυχομετρικό Κριτήριο Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης (Μπάρμπας και συν., 2008)



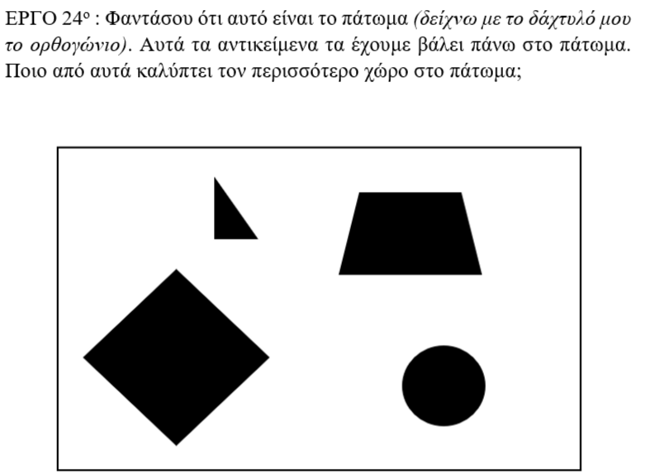
Εικόνα 3.15.

Έργο 2: Προσδιορισμός του δέντρου που είναι ψηλότερο από το σπίτι.



Εικόνα 3.16.

Έργο 8: Σύγκριση συνεχούς ποσότητας και διάταξης.



Εικόνα 3.17.

Έργο 24: Άμεση σύγκριση επιφανειών.

Η σειρά με την οποία εξετάζονται τα έργα δεν είναι τυχαία. Στην αρχή έχουν τοποθετηθεί τα πιο εύκολα έργα, με τη δυσκολία σταδιακά να αυξάνεται. Ακόμη, οι εικόνες των αντικειμένων που χρησιμοποιούνται, αποτελούν κομμάτι της καθημερινότητας των μαθητών (για παράδειγμα, λουλούδι, δέντρο, σπίτι) με τα οποία είναι εξοικειωμένα.

Τέλος, ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε στη δημιουργία ενός σύντομου και εύκολα χορηγήσιμου εργαλείου. Αποτέλεσε στόχο η αξιολόγηση πολλών δεξιοτήτων σε σύντομο χρονικό διάστημα, καθώς και η μη χρήση αντικειμένων, ώστε να είναι πιο εύκολη η εφαρμογή του εντός του σχολικού περιβάλλοντος από εκπαιδευτικούς.

3.5. Ερευνητική διαδικασία

Ο/η εξεταστής/-τρια μαζί με τον/την μαθητή/-τρια κατά τη διάρκεια της εξέτασης βρίσκονται σε έναν χώρο με ησυχία, μόνοι τους. Κάθονται σε ένα θρανίο και ο/η μαθητής/-τρια έχει στη διάθεση του ένα μολύβι και μια σβήστρα. Ο/η εξεταστής/-τρια, προτού ξεκινήσει, ενημερώνει τον/την μαθητή-τρια πως θα του/της κάνει μερικές ερωτήσεις. Έπειτα, χορηγεί τα έργα ένα ένα, παρουσιάζοντας τα υλικά στα παιδια (εικόνες) και λέγοντας προφορικά την ερώτηση-οδηγία που τα συνοδεύει. Η διάρκεια χορήγησης δεν ξεπερνά τα 15 λεπτά.

Κάθε μαθητής/-τρια βαθμολογείται με 1 βαθμό για κάθε σωστή απάντηση ή επιτυχή εκτέλεση έργου και με 0 βαθμούς για κάθε λανθασμένη ή ελλιπή απάντηση. Ειδικότερα, τα έργα 6 και 12, αποτελούνται απο 2 υποερωτήματα, τα οποία βαθμολογούνται ξεχωριστά με 1 (σωστό) ή 0 (λάθος). Ακόμη, το έργο 9, αποτελείται από 5 υποερωτήματα, τα οποία επίσης, βαθμολογούνται ξεχωριστά. Τέλος, για το έργο 19, ως σωστή θεωρείται η περίπτωση ο/η μαθητής/τρια να αναγνωρίσει έστω 4 από τα 5 τρίγωνα σωστά, έχοντας περιθώριο να επιλέξει έως και 2 σχήματα που μπερδεύουν τους μαθητές (distractors). Σε περίπτωση που ο/η μαθητής/τρια αναγνωρίσει λιγότερα από 4 τριγωνα, επιλέξει περισσότερα από 2 σχήματα που μπερδεύουν τους μαθητές ή επιλέξει ως τρίγωνο κάποιο οβάλ σχήμα, αυτό θεωρείται ως λάθος και βαθμολογείται με 0.

3.6. Μέθοδοι ανάλυσης δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων του ερωτηματολογίου (πρώτο ερευνητικό ερώτημα) εφαρμόστηκε το διχοτομικό μοντέλο Rasch (Boone 2016). Το μοντέλο Rasch, που πήρε το όνομά του από τον Δανό μαθηματικό Georg Rasch (Bond & Fox, 2001), είναι ένα πιθανοθεωρητικό μοντέλο που εφαρμόζεται συχνά σε δεδομένα από ερωτηματολόγια γνώσεων. Το μοντέλο αυτό επιλέχθηκε έναντι της απλής ανάλυσης των σωστών απαντήσεων ανά έργο, διότι έχει τα παρακάτω πλεονεκτήματα: α) η εκτίμηση της ικανότητας κάθε ατόμου γίνεται ταυτόχρονα με την εκτίμηση της δυσκολίας κάθε έργου. Αυτή η ιδιότητα είναι χρήσιμη κατά την κατασκευή ενός εργαλείου, καθώς επιτρέπει την αξιολόγηση τόσο των ικανοτήτων των ατόμων, όσο και της καταλληλότητας των έργων της δοκιμασίας, β) μπορεί να αξιολογηθεί ο βαθμός στον οποίο το μοντέλο προσαρμόζεται σε κάθε έργο ξεχωριστά. Αυτό βοηθά στον εντοπισμό προβληματικών έργων ή έργων που χρειάζονται επαναδιατύπωση και κατά συνέπεια, επιτρέπει τη βελτίωση του ερωτηματολογίου, γ) οι τιμές των παραμέτρων του μοντέλου δεν επηρεάζονται ούτε από τα έργα του εργαλείου, ούτε από τα άτομα που τις έχουν απαντήσει, δ) η ανάλυση Rasch προϋποθέτει ότι οι απαντήσεις σε όλα τα έργα οφείλονται σε μία λανθάνουσα εννοιολογική κατασκευή, δηλαδή την πρώιμη μαθηματική επάρκεια, και ε) το μοντέλο επιτρέπει την οπτικοποίηση της πιθανότητας ένα έργο να απαντηθεί σωστά από άτομα χαμηλής, μεσαίας και υψηλής ικανότητας, κάτι που οδηγεί στην αξιολόγηση του τρόπου με τον οποίο "λειτουργεί" κάθε έργο στο εργαλείο (Bond & Fox, 2001).

Με την ανάλυση Rasch δύναται να εκτιμηθεί η πιθανότητα σωστής απάντησης σε ένα έργο, ως συνάρτηση δύο παραμέτρων: την ικανότητα του ατόμου και τη δυσκολία του έργου. Συγκεκριμένα, εκτιμά την πιθανότητα σωστής απάντησης, που προκύπτει ως η διαφορά μεταξύ της παραμέτρου ικανότητας, θ του συμμετέχοντα και της δυσκολίας του έργου, β: $\theta - \beta$ (Πετρίδης, 2015). Στην προκειμένη περίπτωση, η παράμετρος θ αφορά στην επάρκεια του μαθητή στα μαθηματικά, ενώ η παράμετρος β στο βαθμό δυσκολίας του έργου, που περιλαμβάνει το παρόν εργαλείο. Συνεπώς, όσο μεγαλύτερη η ικανότητα-επάρκεια του ατόμου σε ένα δύσκολο έργο, τόσο μεγαλύτερη η πιθανότητα να έχει απαντήσει σωστά στο συγκεκριμένο έργο. Στην περίπτωση που οι τιμές των δύο παραμέτρων είναι ίσες, δηλαδή ένα άτομο με μέτρια ικανότητα-επάρκεια καλείται να απαντήσει σε ένα έργο μέτριας δυσκολίας, τότε η πιθανότητα να απαντήσει σωστά είναι 50% (ή 0,5) (Πετρίδης, 2015). Για λόγους ευκολίας, κατά την παρουσίαση και ερμηνεία των αποτελεσμάτων της παρούσας μελέτης, ως «Ικανότητα» θα εννοείται η Πρώιμη Μαθηματική Επάρκεια και κατ' αυτόν τον τρόπο θα αναφέρεται παρακάτω.

Η πιθανότητα ένα άτομο να απαντήσει σωστά σε ένα έργο σωστού-λάθους ισούται με την πιθανότητα που δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\Pr(X_i = 1 \mid \theta_j, \beta_i) = \frac{e^{\theta_j - \beta_i}}{1 + e^{\theta_j - \beta_i}}$$

όπου $X_i = 1$ είναι η σωστή απάντηση στο έργο σωστού/λάθους X_i , θ_j είναι η ικανότητα-επάρκεια του ατόμου j και β_i είναι η δυσκολία του έργου i (Πετρίδης, 2015).

Για λόγους ευκολίας, η μέτρηση της ικανότητας του ατόμου και της δυσκολίας του έργου γίνεται σε μονάδες logit. Το logit είναι ο φυσικός λογάριθμος πιθανότητας ενός ατόμου να απαντήσει σωστά σε ένα έργο (ικανότητα του ατόμου), αλλά και ενός έργου να απαντηθεί σωστά (δυσκολία έργου) (Πετρίδης, 2015). Συνήθως, η τιμή 0 logit (ή τιμές στο διάστημα -0,5 έως +0,5 logit) αντιστοιχεί στο μέσο όρο ικανότητας-δυσκολίας, τιμές κάτω του -0,5 αντιστοιχούν σε χαμηλά επίπεδα ικανότητας-δυσκολίας, ενώ τιμές άνω του +0,5 αντιστοιχούν σε υψηλά επίπεδα ικανότητας-δυσκολίας (Bond & Fox, 2001).

Η προσαρμογή του μοντέλου Rasch στα δεδομένα ελέγχθηκε μέσω του δείκτη MADaQ3. Όσο πιο κοντά βρίσκεται η τιμή του δείκτη στο 0, τόσο καλύτερη είναι η προσαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα (Bourdeaud'Hui, Aesaert, & van Braak, 2021). Η αξιοπιστία εσωτερικής συνοχής ελέγχθηκε μέσω του δείκτη Person Reliability. Τιμές μεγαλύτερες του δείκτη μεγαλύτερες του 0,8 θεωρούνται γενικά ικανοποιητικές (Bond & Fox, 2001). Για τη διερεύνηση της εγκυρότητας εννοιολογικής κατασκευής του ερωτηματολογίου της έρευνας, αρχικά εφαρμόστηκε η Διερευνητική Ανάλυση Παραγόντων.

Για τη διερεύνηση των διαφορών στην πρώιμη μαθηματική επάρκεια ως προς το φύλο και την ηλικία (τρίτο ερευνητικό ερώτημα) εφαρμόστηκαν διαδοχικοί t-έλεγχοι για ανεξάρτητα δείγματα αφού ελέγχθηκαν οι προϋποθέσεις εφαρμογής τους. Όλες οι αναλύσεις πραγματοποιήθηκαν με το λογισμικό JAMOVI εκδ. 21 και ως επίπεδο σημαντικότητας των στατιστικών ελέγχων ορίστηκε το 5%.

4^{ο} Κεφάλαιο: Αποτελέσματα

Για τις στατιστικές αναλύσεις, τα υποερωτήματα του εργαλείου βαθμολογήθηκαν ξεχωριστά. Για παράδειγμα, το έργο 6 (καταμέτρηση 7 και 12 αντικειμένων) και το έργο 2 (προσδιορισμός του επόμενου αριθμού από το 12 και του προηγούμενου από το 8) είχαν από δύο υπο-ερωτήματα το καθένα (6-1 και 6-2, 12-1 και 12-2), ενώ το έργο 9 (αντιστοίχιση αριθμητικών συμβόλων με τις αντίστοιχες ποσότητες) είχε πέντε υποερωτήματα (9-1, 9-2, 9-3, 9-4, 9-5). Αυτή η διαδικασία οδήγησε σε 31 έργα συνολικά. Στη στατιστική ανάλυση, ωστόσο, δεν συμπεριλήφθηκαν οι απαντήσεις στα έργα 1 (λεκτική αρίθμηση έως το 5) και 2 (σύγκριση ύψους), καθώς απαντήθηκαν σωστά από όλους τους συμμετέχοντες. Συνεπώς, συμπεριλαμβανομένων των υποερωτημάτων και παραλείποντας τα δύο πρώτα έργα του εργαλείου, η στατιστική ανάλυση έγινε στις απαντήσεις 66 μαθητών σε 29 έργα. Ακόμη, όπως προαναφέρθηκε, ως «Ικανότητα» θα εννοείται η πρώιμη μαθηματική επάρκεια.

4.1. Αξιοπιστία και εγκυρότητα του ερευνητικού εργαλείου

Η εφαρμογή της Διερευνητικής Ανάλυσης Παραγόντων στα 29 βαθμολογημένα έργα (σωστό/λάθος) έδειξε ότι αυτά μετρούν την ίδια εννοιολογική κατασκευή, με τον μοναδικό παράγοντα να εξηγεί το 26,37% της συνολικής διακύμανσης (κριτήριο του Kaiser, παράγοντες με ιδιοτιμή > 1). Επομένως, επιβεβαιώνεται η παραγοντική εγκυρότητα του εργαλείου, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως μονοδιάστατο, δηλαδή ότι όλα τα έργα του αξιολογούν την πρώιμη μαθηματική επάρκεια. Στη συνέχεια, εφαρμόστηκε το διχοτομικό μοντέλο Rasch στα δεδομένα των απαντήσεων των 66 μαθητών στα 29 έργα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το μοντέλο προσαρμόζεται ικανοποιητικά στα δεδομένα της έρευνας (τιμή του δείκτη MADaQ3 = 0,130). Επιπλέον, ο δείκτης αξιοπιστίας ατόμων (Person reliability) βρέθηκε ίσος με 0,837, κάτι που φανερώνει υψηλή αξιοπιστία εσωτερικής συνοχής του ερευνητικού εργαλείου.

4.2. Συνολική επίδοση στο EMCMT-B.

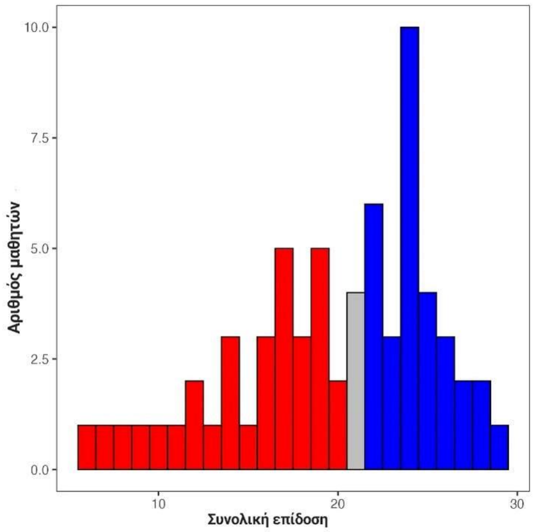
Όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.1., που συνοψίζει τις επιδόσεις, οι μαθητές απάντησαν σωστά σε 19 με 20 έργα κατά μέσο όρο (19,8) με τυπική απόκλιση 5,49 έργα, κάτι που φανερώνει σχετικά υψηλές επιδόσεις των μαθητών του δείγματος, κατά μέσο όρο, αλλά με αρκετά μεγάλη διακύμανση. Η μαθήτρια με την πιο χαμηλή επίδοση απάντησε σωστά σε μόλις 6 έργα (χαμηλότερο επίπεδο ικανότητας -3,25 logits), ενώ η μαθήτρια με την πιο υψηλή επίδοση, απάντησε σωστά και τα 29 έργα (υψηλότερο επίπεδο ικανότητας 3,88 logits). Η διάμεσος της επίδοσης ήταν 21 έργα, που αντιστοιχεί σε επίπεδο ικανότητας 0 logits.

Πίνακας 4.1.

Σύνοψη των επιδόσεων στη δοκιμασία πρώιμης μαθηματικής επάρκειας.

	Μέγεθος δείγματος	Ελάχιστη τιμή	Μέγιστη τιμή	Μέσος όρος	Διάμεσος	Τυπική απόκλιση	Τυπικό σφάλμα
Σύνολο	66	6	29	19,8	21	5,49	0,676
Επίπεδο ικανότητας (logits)		-3,25	3,88	0,0	-	1.40	-

Στο Διάγραμμα 4.1. παρουσιάζεται η κατανομή της επίδοσης των συμμετεχόντων. Το κόκκινο χρώμα συμβολίζει τους συμμετέχοντες με επίδοση χαμηλότερη της διαμέσου (από 0 έως 20 περίπου σωστές απαντήσεις), το γκρι χρώμα συμβολίζει τους συμμετέχοντες με επίδοση ίση με τη διάμεσο (21 σωστές απαντήσεις), ενώ το μπλε χρώμα συμβολίζει τους συμμετέχοντες με υψηλή επίδοση (από 22 και άνω σωστές απαντήσεις). Όπως προκύπτει από το διάγραμμα, από τους 66 μαθητές του δείγματος, οι 31 είχαν χαμηλή επίδοση, οι 4 είχαν μέτρια επίδοση και οι υπόλοιποι 31 πέτυχαν υψηλή επίδοση. Ακόμα, στο ιστόγραμμα φαίνεται η επικρατούσα τιμή της επίδοσης, δηλαδή 24 σωστές απαντήσεις, την οποία είχαν 10 μαθητές. Κατά συνέπεια, η κατανομή των επιδόσεων παρουσιάσει αρνητική ασυμμετρία, δηλαδή απέχει από την κανονική κατανομή στο ότι εμφανίζονται περισσότερες υψηλές επιδόσεις από το αναμενόμενο (βλ. Προτάσεις).



Διάγραμμα 4.1.

Η κατανομή της συνολικής επίδοσης

4.3. Επίδοση ανά κατηγορία έργων

Ειδικότερα, παρουσιάζονται παρακάτω τα αποτελέσματα για τα επιμέρους έργα του εργαλείου. Η πρώτη κατηγορία μαθηματικής γνώσης αφορά την λεκτική αρίθμηση-καταμέτρηση. Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 4.2., η καλύτερη επίδοση σημειώθηκε στο έργο 6-1 (καταμέτρηση 7 αντικειμένων) με ποσοστό σωστών απαντήσεων 89,39%, ενώ στο δεύτερο υποερώτημα του ίδιου έργου (καταμέτρηση 12 αντικειμένων), η επίδοση είναι χαμηλότερη (75,75%). Οι περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις, όμως, ήταν πολύ κοντά στον αριθμό 12 (π.χ. 10, 11, 13, 14). Πολύ καλή επίδοση (77,27%) σημείωσαν οι μαθητές και στο έργο 5 (λεκτική αρίθμηση έως το 20). Από τους 15 που δεν απάντησαν σωστά, οι περισσότεροι κατάφεραν να φτάσουν μόνο μέχρι το 12, ενώ 2 ήταν μόνο οι μαθητές που έφτασαν ως το 20 με δυο ή τρεις παραλείψεις αριθμών. Επίσης, εμφανής είναι η δυσκολία των μαθητών στο έργο 14 (αντίστροφη λεκτική αρίθμηση από το 10 έως το 1), με τους μισούς και παραπάνω μαθητές να μην το απαντούν σωστά (46,96%). Οι περισσότεροι προέβαιναν σε λεκτική αρίθμηση από το 1 έως το 10, σα να μην κατάλαβαν σωστά το έργο, ακόμη και μετά από επανάληψη της οδηγίας που τους δόθηκε. Κάποιοι προσπάθησαν, αλλά παρέλειπαν πολλούς αριθμούς, ενώ 3 ήταν αυτοί που έκαναν λάθος μόνο σε έναν αριθμό.

Πίνακας 4.2.

Πλήθος και ποσοστά σωστών απαντήσεων στα έργα της λεκτικής αρίθμησης-καταμέτρησης.

Έργα	Σωστές Απαντήσεις	Ποσοστό (%)
6-1: Καταμέτρηση 7 αντικειμένων.	59	89,39%
5:Λεκτική αρίθμηση έως το 20.	51	77,27%
6-2: Καταμέτρηση 12 αντικειμένων.	50	75,75%
14:Αντίστροφη λεκτική αρίθμηση.	31	46,96%

Η δεύτερη κατηγορία μαθηματικής γνώσης περιέχει έργα σύγκρισης. Η καλύτερη επίδοση σημειώθηκε στο έργο 4 (σύγκριση ποσοτήτων) με μόνο 1 συμμετέχοντα να απαντά λάθος (98,48% επιτυχία). Αρκετά καλή (78,78%) ήταν η επίδοση στο έργο της σύγκρισης των αριθμών 11 και 16 (έργο 15), ενώ, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 4.3., δυσκολία (48,48%) φαίνεται να υπήρξε στο έργο 16, το οποίο ζητά από τους μαθητές να προσδιορίσουν ποιος αριθμός από τους 4 που τους παρουσιάζονται οπτικά, βρίσκεται πιο κοντά στον αριθμό 6. Από τους 36 που απάντησαν λάθος, οι 17 επέλεξαν τον αριθμό «4» ως πλησιέστερο στο 6, οι 12 επέλεξαν τον αριθμό «2» και 5 μαθητές επέλεξαν τον αριθμό «9».

Πίνακας 4.3.

Πλήθος και ποσοστά σωστών απαντήσεων στα έργα της σύγκρισης.

Έργα	Σωστές Απαντήσεις	Ποσοστό (%)
4: Σύγκριση ποσοτήτων.	65	98,48%
15: Σύγκριση αριθμών.	52	78,78%
16: Προσδιορισμός πλησιέστερου αριθμού στο 6.	32	48,48%

Η επόμενη κατηγορία μαθηματικής γνώσης είναι η άμεση αναγνώριση. Οι συμμετέχοντες της έρευνας κατάφεραν με ευκολία να αναγνωρίσουν άμεσα τον αριθμό 3 (σύμφωνα με τον Πίνακα 4.4., μόνο 3 έκαναν λάθος), πράγμα που δε συνέβη, όταν η ποσότητα πλέον ήταν 10 (έργο 13), καθώς ενδεχομένως να μην είναι εξοικειωμένοι με το πρότυπο του αριθμού 10. Λιγότεροι από τους μισούς (40,90%) απάντησαν σωστά στο έργο 13, καθώς η πλειονότητα επεδίωκε την καταμέτρηση, ενώ άλλοι την εκτίμηση των 10 τελειών. Δεν προλάβαιναν να τις καταμετρήσουν σε 2 δευτερόλεπτα, με αποτέλεσμα η συντριπτική πλειονότητα (23 από τους 39) των λανθασμένων απαντήσεων να είναι ο αριθμός 5, δηλαδή οι μισές τελείες. Όσοι επεδίωξαν να εκτιμήσουν την ποσότητα, δεν τα κατάφεραν, καθώς απείχαν από το 10, τουλάχιστον 2 αριθμούς (οι πλησιέστερες απαντήσεις στο 10, ήταν «6, 7 και 14»).

Πίνακας 4.4.

Πλήθος και ποσοστά σωστών απαντήσεων στα έργα της άμεσης αναγνώρισης.

Έργα	Σωστές Απαντήσεις	Ποσοστό (%)
3: Άμεση αναγνώριση 3 τελειών.	63	95,45%
13: Άμεση αναγνώριση 10 τελειών.	27	40,90%

Η τέταρτη κατηγορία μαθηματικής γνώσης, η οποία μελετάται, είναι η επίλυση απλών πλαισιωμένων λεκτικών προβλημάτων. Η επίδοση σε αυτή την κατηγορία έργων, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 4.5., δεν ήταν καλή, καθώς σε κανένα πρόβλημα, οι σωστές απαντήσεις δεν ξεπέρασαν το 50%. Στο πρόβλημα της πρόσθεσης (έργο 11) η επίδοση ήταν καλύτερη (45,45%), συγκριτικά με το πρόβλημα της αφαίρεσης (έργο 17 με επίδοση 28,78%). Στο πρόβλημα της πρόσθεσης («Εσύ φούσκωσες 4 μπαλόνια και ο/η φίλος/η σου φούσκωσε 2 μπαλόνια. Πόσα μπαλόνια έχετε φουσκώσει μαζί;»), 13 μαθητές φαίνεται πως δεν έχουν αντιληφθεί την έννοια της πρόσθεσης, καθώς απάντησαν αριθμό (2, 3, 4), μικρότερο από τον αριθμό των μπαλονιών που, όπως λέει το πρόβλημα, φούσκωσαν οι ίδιοι. Από τους υπόλοιπους, οι 18 φαίνεται να έχουν αντιληφθεί την έννοια, ωστόσο δεν υπολόγισαν σωστά (έδωσαν ως απάντηση τους αριθμούς 5, 7 και 8), ενώ οι υπόλοιποι 5 έδωσαν ως απάντηση αριθμούς πολύ μεγαλύτερους (από το 10 και πάνω). Σχετικά με το πρόβλημα αφαίρεσης («Είχες 6 φράουλες και έδωσες στον/στη φίλο/η σου τις 3. Πόσες φράουλες έχεις τώρα;»), από αυτούς που απάντησαν λάθος, οι 32 φάνηκε πως αντιλήφθηκαν ότι η ποσότητα μειώνεται, αλλά έκαναν λάθος στον υπολογισμό και έδωσαν ως απάντηση τους αριθμούς 2, 4 και 5. Οι υπόλοιποι 15 έδωσαν ως απάντηση αριθμούς μεγαλύτερους της αρχικής ποσότητας (6), όπως 8, 9, 10, 12 και 16. Η επίδοση των μαθητών στο έργο 17, ήταν η δεύτερη χαμηλότερη σε όλο το εργαλείο.

Πίνακας 4.5.

Πλήθος και ποσοστά σωστών απαντήσεων στα έργα των πλαισιωμένων λεκτικών προβλημάτων.

Έργα	Σωστές Απαντήσεις	Ποσοστό (%)
11: Πλαισιωμένο λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης.	30	45,45%
17: Πλαισιωμένο λεκτικό πρόβλημα αφαίρεσης.	19	28,78%

Ακολούθως, στον Πίνακα 4.6., παρουσιάζεται η επίδοση των συμμετεχόντων στον τομέα της διάταξης. Αναλυτικότερα, οι συμμετέχοντες ανταποκρίθηκαν αρκετά καλά (78,78%) στο έργο 7, το οποίο τους ζητούσε να προσδιορίσουν το παιδί που βρίσκεται δεύτερο στη σειρά. Από τις λανθασμένες απαντήσεις που δόθηκαν, οι 9 αφορούσαν το τρίτο στη σειρά παιδί και οι 5 το πρώτο στη σειρά. Ακόμα, στο πρώτο υποερώτημα του 12 (προσδιορισμός του επόμενου αριθμού από το 12), η επίδοση ήταν πολύ καλή (84,84%), αλλά μειώθηκε λίγο (54,54%) στο δεύτερο υποερώτημα του 12 (προσδιορισμός του προηγούμενου αριθμού από το 8). Το πιο σύνηθες λάθος, ήταν πως έλεγαν τον επόμενο αριθμό από το 8, δηλαδή το 9, και όχι τον προηγούμενο, ακόμα και μετά από επανάληψη της οδηγίας του έργου.

Πίνακας 4.6.

Πλήθος και ποσοστά σωστών απαντήσεων στα έργα της διάταξης.

Έργα	Σωστές Απαντήσεις	Ποσοστό (%)
12-1: Προσδιορισμός επόμενου αριθμού από 12.	56	84,84%
7: Κατανόηση τακτικού αριθμού.	52	78,78%
12-2: Προσδιορισμός προηγούμενου αριθμού από 8.	36	54,54%

Ο επόμενος μαθηματικός τομέας αφορά τους αριθμούς και την αριθμητική. Σύμφωνα και με τον Πίνακα 4.7., οι συμμετέχοντες της έρευνας πέτυχαν πολύ καλή επίδοση στην συγκεκριμένη κατηγορία μαθηματικής γνώσης. Αναλυτικότερα, σε όλα τα υποερωτήματα του έργου 9 (αντιστοίχιση αριθμητικών συμβόλων με ποσότητες έως το 5), η επίδοση ήταν πολύ υψηλή (89,39% έως 92,42%). Ακριβώς οι μισοί κατάφεραν να συνθέσουν τον αριθμό 7 (έργο 10), δηλαδή 4 (που είναι ορατά σε αυτούς) + 3 (που είναι κρυμμένα). Σ' αυτό το έργο, οι περισσότεροι συμμετέχοντες προσπαθούσαν να μαντέψουν την ποσότητα που επικαλυπτόταν από το χαρτάκι, μετρώντας «με το μάτι» και όχι να σκεφτούν «πόσα ακόμα χρειάζομαι για να φτάσω τον αριθμό 7;». Ελαφρώς καλύτερη επίδοση (63,63%) σημείωσαν στη νοερή πρόσθεση 2+2 (έργο 18). Στο έργο αυτό το πιο σύνηθες λάθος ήταν η απάντηση «3», δηλαδή ο επόμενος αριθμός από το 2. Οι υπόλοιποι απάντησαν είτε «2», πράγμα που δείχνει πως δεν έχουν αντιληφθεί την έννοια της πρόσθεσης και τη μεταβολή στην ποσότητα, είτε «5», ενδεχομένως κάνοντας λάθος στον υπολογισμό.

Πίνακας 4.7.

Πλήθος και ποσοστά σωστών απαντήσεων στα έργα των αριθμών και της αριθμητικής.

Έργα	Σωστές Απαντήσεις	Ποσοστό (%)
9-1: Αντιστοίχιση «1» με ένα αστέρι.	61	92,42%
9-2: Αντιστοίχιση «2» με δύο αστέρια.	61	92,42%
9-3: Αντιστοίχιση «3» με τρία αστέρια.	60	90,90%
9-4: Αντιστοίχιση «4» με 4 αστέρια.	59	89,39%
9-5: Αντιστοίχιση «5» με 5 αστέρια.	59	89,39%
18: Νοερή πρόσθεση (2+2).	42	63,63%
10: Σύνθεση του αριθμού 7.	33	50,00%

Η επόμενη κατηγορία σχετίζεται με τις κανονικότητες. Η επίδοση του δείγματος σε αυτήν την κατηγορία μαθηματικής γνώσης είναι αρκετά καλή με μια εξαίρεση, όπως διαφαίνεται και στον Πίνακα 4.8. Αν και οι συμμετέχοντες έδειξαν πως τα καταφέρνουν πολύ καλά με την επέκταση επαναλαμβανόμενων μοτίβων ΑΒ (89,39% για το έργο 20) και με την εύρεση του μέρους που λείπει από μοτίβο τύπου ΑΒΑΒΑ_ΑΒ (81,81% για το έργο 22), φάνηκαν να δυσκολεύονται κάπως στην επέκταση του εξελισσόμενου μοτίβου (53,03% για το έργο 21). Πολλά από τα λάθη αφορούσαν απλή αντιγραφή του εξελισσόμενου μοτίβου από κάτω, ενώ άλλα αφορούσαν την καθρεπτική απεικόνιση του μοτίβου από κάτω (συμμετρία).

Πίνακας 4.8.

Πλήθος και ποσοστά σωστών απαντήσεων στα έργα των κανονικοτήτων.

Έργα	Σωστές Απαντήσεις	Ποσοστό (%)
20: Επέκταση επαναλαμβανόμενου μοτίβου ΑΒ.	59	89,39%
22: Εύρεση του μέρους που λείπει.	54	81,81%
21: Επέκταση εξελισσόμενου μοτίβου.	35	53,03%

Επίσης, στην κατηγορία των σχημάτων, η επίδοση των μαθητών του δείγματος ήταν μέτρια προς χαμηλή (βλ. Πίνακα 4.9.). Την καλύτερη επίδοση από τα έργα της κατηγορίας, σημείωσαν οι συμμετέχοντες κατά την ανάλυση ενός τετραγώνου σε 2 επιμέρους σχήματα (έργο 25), καθώς απάντησαν σωστά λίγοι παραπάνω από τους μισούς (56,06%). Αν και ορθά χώριζαν στη μέση το τετράγωνο, το πιο σύνηθες λάθος τους ήταν στην αναγνώριση των δυο επιμέρους σχημάτων, καθώς τα αναγνώριζαν ως «δυο τετράγωνα» ή ως αντικείμενα της καθημερινότητάς τους (π.χ. δυο μαξιλάρια, μισό τοστ). Ακολούθως, σχεδόν οι μισοί (48,48%) αναγνώρισαν τα 5 τρίγωνα ανάμεσα σε 25 σχήματα (έργο 19). Αξίζει να σημειωθεί πως μονάχα 1 μαθήτρια εκτέλεσε ολόσωστα το έργο, χωρίς να επιλέξει κανένα σχήμα που να μπερδεύει τους μαθητές (distractors). Όλοι οι υπόλοιποι είχαν επιλέξει έστω ένα από αυτά, με εξαίρεση 3 μαθητές, οι οποίοι είχαν επιλέξει μόνο οβάλ σχήματα. Η χαμηλότερη επίδοση, τόσο σε όλο το εργαλείο, όσο και στη συγκεκριμένη κατηγορία σημειώθηκε στο έργο 23, κατά το οποίο οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να κατασκευάσουν και να αναγνωρίσουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, μονάχα από τις κορυφές του. Ενώ σχεδόν όλοι το κατασκεύασαν σωστά (μόνο 2 μαθητές ένωσαν τις γραμμές χιαστί), υπήρξε δυσκολία στην αναγνώρισή του. Οι περισσότερες απαντήσεις που δόθηκαν ήταν «τετράγωνο», με μόνο 13 μαθητές από τους 66 (19,69%), να απαντούν σωστά («ορθογώνιο» ή «παραλληλόγραμμο»). Ακόμη, υπήρξαν και δυο μαθητές, οι οποίοι αναγνώρισαν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ως «τραπέζιο» και «μαξιλάρι».

Πίνακας 4.9.

Πλήθος και ποσοστά σωστών απαντήσεων στα έργα των σχημάτων.

Έργα	Σωστές Απαντήσεις	Ποσοστό (%)
25: Ανάλυση τετραγώνου.	37	56,06%
19: Αναγνώριση τριγώνων.	32	48,48%
23:Κατασκευή ορθογωνίου από μέρη του και αναγνώρισή του.	13	19,69%

Η τελευταία κατηγορία μαθηματικής γνώσης σχετιζόταν με τη μέτρηση και περιλάμβανε δυο έργα (Πίνακας 4.10.). Η επίδοση των μαθητών στο έργο 24, κατά το οποίο έπρεπε να καταδείξουν ποιο από τα 4 σχήματα, καταλάμβανε περισσότερο χώρο (άμεση σύγκριση επιφανειών), ήταν αρκετά καλή, καθώς 54 από τους 66 απάντησαν σωστά (81,81%). Από την άλλη μεριά, η πλειονότητα του δείγματος δεν τα πήγε και τόσο καλά στο έργο σύγκρισης συνεχούς ποσότητας και διάταξης (έργο 8). Από όσους απάντησαν λάθος, οι 30 επέλεξαν το σύνολο που είχε αυξανόμενο μέγεθος, ενώ οι υπόλοιποι 9 επέλεξαν την επιλογή «α», στην οποία τα λουλούδια δεν ακολουθούν κάποια συγκεκριμένη διάταξη.

Πίνακας 4.10.

Πλήθος και ποσοστά σωστών απαντήσεων στα έργα της μέτρησης.

Έργα	Σωστές Απαντήσεις	Ποσοστό (%)
24: Άμεση σύγκριση επιφανειών.	54	81,81%
8: Σύγκριση συνεχούς ποσότητας και διάταξης.	27	40,90%

Συνοψίζοντας, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 4.11., οι συμμετέχοντες της έρευνας, με βάση τη μέση επίδοση, τα πήγαν καλύτερα στον τομέα των αριθμών και της αριθμητικής (πράξεις) , με μέση επίδοση 81,16%. Ακολουθούν σε φθίνουσα σειρά οι επιδόσεις στον τομέα της σύγκρισης (75,25%), των κανονικοτήτων (74,74%), της διάταξης (72,72%), της λεκτικής αρίθμησης-καταμέτρησης (72,34%), της άμεσης αναγνώρισης (68,18%) και της μέτρησης (61,36%). Οι δυο κατηγορίες, στις οποίες σημειώθηκε η χαμηλότερη επίδοση, είναι των σχημάτων (41,41%) και των πλαισιωμένων λεκτικών προβλημάτων (37,12%).

Πίνακας 4.11.

Μέση επίδοση ανά κατηγορία μαθηματικής γνώσης.

Κατηγορία μαθηματικής γνώσης	Μέση επίδοση
Αριθμοί - Αριθμητική	81,16%
Σύγκριση	75,25%
Κανονικότητες	74,74%
Διάταξη	72,72%
Λεκτική αρίθμηση - Καταμέτρηση	72,34%
Άμεση αναγνώριση	68,18%
Μέτρηση	61,36%
Σχήματα	41,41%
Πλαισιωμένα λεκτικά προβλήματα	37,12%

4.4. Δυσκολία και προσαρμογή Rasch ανά έργο

Στην ανάλυση που ακολουθεί, μελετήθηκε η δυσκολία των έργων και η προσαρμογή τους στο μοντέλο Rasch. Αρχικά, η δυσκολία του κάθε έργου γίνεται αντιληπτή μέσα από τη δεύτερη στήλη (ικανότητα σε logits) του πίνακα 4.12. Πιο συγκεκριμένα, όσα έργα έχουν τιμή μεγαλύτερη από +0,5 logits, χαρακτηρίζονται δύσκολες, καθώς μπορούν να απαντηθούν σωστά από άτομα με δείκτη ικανότητας μεγαλύτερου του μέσου όρου (–0,5 έως +0,5 logits). Αντίθετα, όσα έργα έχουν τιμή μικρότερη από –0,5 logits, χαρακτηρίζονται εύκολες, καθώς δύναται να απαντηθούν σωστά από άτομα με δείκτη ικανότητας κάτω του μέσου όρου. Συνεπώς, τα έργα που αξιολογούσαν την σύγκριση συνεχούς ποσότητας και διάταξης (έργο 8), την άμεση αναγνώριση 10 τελειών (έργο 13), την ικανότητα επίλυσης ενός πλαισιωμένου λεκτικού προβλήματος αφαίρεσης (έργο 17) και την ικανότητα κατασκευής ενός ορθογωνίου παραλληλογράμματος μονάχα από τις κορυφές του (έργο 23) θεωρούνται δύσκολα. Ιδιαίτερα το έργο 23, το οποίο αποτέλεσε το πιο δύσκολο έργο του EMCMT-B, με 51 μαθητές να αναγνωρίζουν το ορθογώνιο που ορθά κατασκεύασαν από τις κορυφές του, ως τετράγωνο. Για το έργο 8, όπως προαναφέρθηκε, το πιο σύνηθες λάθος ήταν η επιλογή του συνόλου με αυξανόμενο μέγεθος, ενώ για το έργο 13, το πιο σύνηθες ήταν οι συμμετέχοντες να επιδιώκουν την καταμέτρηση και να απαντούν «5», καθώς δεν προλάβαιναν να καταμετρήσουν τις τελείες σε 2 δευτερόλεπτα. Ακόμη, για το πλαισιωμένο λεκτικό πρόβλημα της αφαίρεσης, οι περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις ήταν κοντά στη σωστή απάντηση. Ωστόσο, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, μάλλον είχε γίνει λάθος στον υπολογισμό του αποτελέσματος. Από την άλλη μεριά, εύκολα θεωρούνται τα έργα 3 – 7 (άμεση αναγνώριση 3 τελειών, σύγκριση ποσοτήτων, λεκτική αρίθμηση έως το 20, καταμέτρηση 7 μπανανών και 12 μήλων, κατανόηση τακτικού αριθμού), τα πέντε υποερωτήματα του έργου 9 (αντιστοίχιση αριθμητικών συμβόλων με ποσότητες έως το 5), το έργο 12-1 (προσδιορισμός του επόμενου αριθμού από το 12), το έργο 15 (σύγκριση αριθμών), το έργο 18 (νοερή πρόσθεση 2+2), το έργο 20 (επέκταση επαναλαμβανόμενου μοτίβου AB), το έργο 22 (εύρεση του μέρους του μοτίβου που λείπει, τύπου ABABA_AB) και τέλος, το έργο 24 (άμεση σύγκριση επιφανειών). Τα υπόλοιπα έργα (10, 11, 12-2, 14, 16, 19, 21 και 25) θεωρούνται μέτριας δυσκολίας.

Πίνακας 4.12.

Ικανότητα (logits) και δείκτες Infit/Outfit ανά έργο

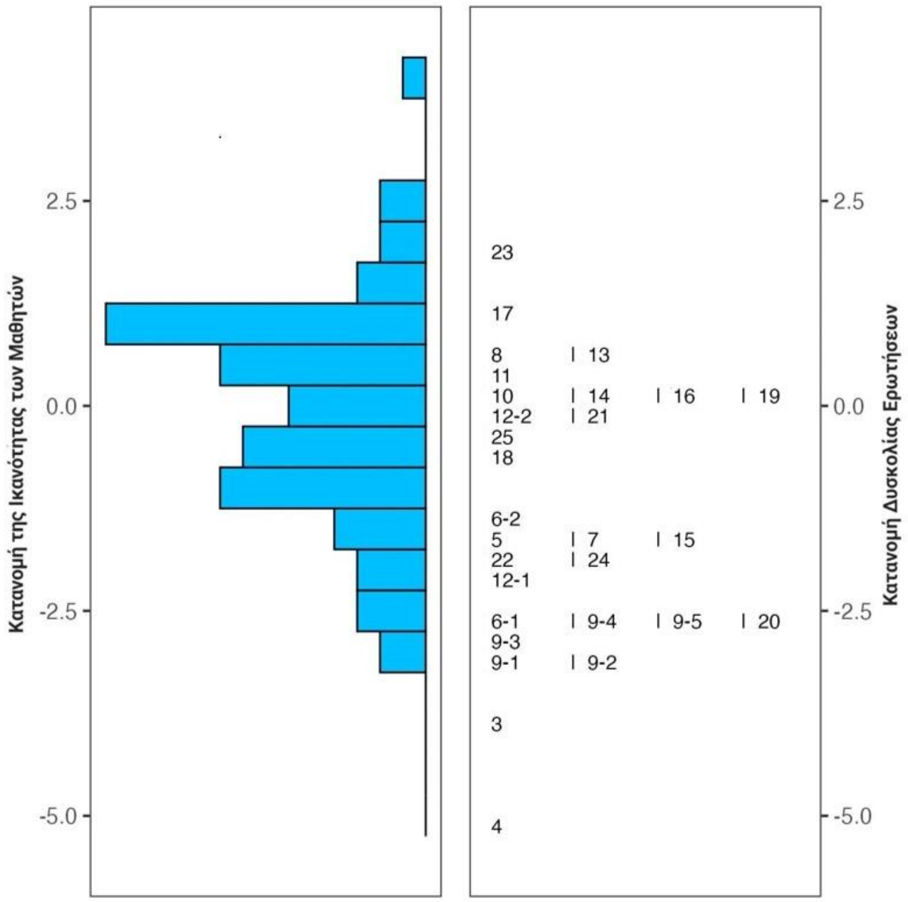
Έργα	Ικανότητα (logits)	Infit	Outfit
3: Άμεση αναγνώριση 3 τελειών.	-3,7843	0,833	**0,338**
4: Σύγκριση ποσότητας.	-4,9959	0,922	**0,191**
5: Λεκτική αρίθμηση έως το 20.	-1,5999	0,858	0,713
6-1: Καταμέτρηση 7 μπανανών.	-2,7324	1,278	1,121
6-2: Καταμέτρηση 12 μήλων.	-1,4907	0,982	1,158
7: Κατανόηση τακτικού αριθμού.	-1,7138	0,925	0,698
8: Σύγκριση συνεχούς ποσότητας και διάταξης.	0,5055	1,216	1,468
9-1: Αντιστοίχιση «1» με ένα αστέρι.	-3,1685	0,807	**0,312**
9-2: Αντιστοίχιση «2» με δυο αστέρια.	-3,1685	0,768	**0,300**
9-3: Αντιστοίχιση «3» με τρία αστέρια.	-2,9359	0,671	**0,278**
9-4: Αντιστοίχιση «4» με τέσσερα αστέρια.	-2,7324	0,678	**0,311**
9-5: Αντιστοίχιση «5» με πέντε αστέρια.	-2,7324	0,678	**0,311**
10: Σύνθεση του αριθμού 7.	0,0189	1,370	**1,646**
11: Πλαισιωμένο λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης.	0,2609	0,779	0,681
12-1: Προσδιορισμός επόμενου αριθμού από 12.	-2,2330	0,936	0,921
12-2: Προσδιορισμός προηγούμενου αριθμού από 8.	-0,2240	0,842	0,748
13: Άμεση αναγνώριση 10 τελειών.	0,5055	0,809	0,707
14: Αντίστροφη λεκτική αρίθμηση.	0,1801	0,859	0,789
15: Σύγκριση αριθμών.	-1,7138	1,207	1,311
16: Προσδιορισμός πλησιέστερου αριθμού.	0,0995	1,139	**1,502**

17: Πλαισιωμένο λεκτικό πρόβλημα αφαίρεσης.	1,2029	0,963	1,086
18: Νοερή πρόσθεση.	-0,7271	1,082	1,166
19: Αναγνώριση τριγώνων.	0,0995	1,422	**1,721**
20: Επέκταση μοτίβου AB.	-2,7324	0,890	0,528
21: Επέκταση εξελισσόμενου μοτίβου.	-0,1427	1,082	1,123
22: Εύρεση του μέρους του μοτίβου που λείπει.	-1,9586	1,025	1,016
23: Κατασκευή και αναγνώριση ορθογωνίου.	1,8292	1,076	1,163
24: Άμεση σύγκριση επιφανειών.	-1,9586	1,299	**1,938**
25: Ανάλυση τετραγώνου.	-0,3058	0,965	1,004

Ακόμη, με μια παρατήρηση στις δυο τελευταίες στήλες του Πίνακα 4.12. (Infit και Outfit) φαίνεται ποια έργα προσαρμόζονται καλά στο μοντέλο του Rasch. Αυτός είναι ένας σημαντικός έλεγχος με σκοπό τη διασφάλιση της ποιότητας του εργαλείου, καθώς σε περίπτωση που κάποιο από τα έργα δεν προσαρμόζεται στο μοντέλο, θα μπορούσε να σημαίνει ότι το εργαλείο μπορεί να μετρήσει περισσότερες από μία μεταβλητές (Boone, 2016). Το αποδεκτό εύρος τιμών είναι από +0,5 έως +1,5. Όσα έργα έχουν δείκτη μεγαλύτερο από +1,5, θα πρέπει να τροποποιηθούν ή να αντικατασταθούν. Όπως παρατηρείται στη στήλη του “Infit”, όλα τα έργα είναι εντός του αποδεκτού εύρους τιμών. Αντιθέτως, στην τελευταία στήλη, του “Outfit”, παρατηρούνται αρκετά έργα με τιμές εκτός του αποδεκτού εύρους. Αρχικά, τιμές χαμηλότερες του αποδεκτού εύρους παρουσιάζουν τα έργα 3 και 4 (άμεση αναγνώριση 3 τελειών και σύγκριση ποσοτήτων) και τα πέντε υποερωτήματα του 9 (αντιστοίχιση αριθμητικών συμβόλων με ποσότητες έως το 5). Αυτό δείχνει, πως ενδεχομένως να πλεονάζουν αυτά τα έργα και να είναι περιττά. Οι τιμές αυτές ίσως να επηρεάζονται από την μεγάλη ευκολία των συγκεκριμένων έργων και το υψηλό ποσοστό σωστών απαντήσεων (το χαμηλότερο ποσοστό επίδοσης ήταν 89,39% για τα έργα 9-4 και 9-5). Ωστόσο, οι χαμηλές τιμές δεν δημιουργούν θέμα στο εργαλείο και δεν υποβαθμίζουν την αξιοπιστία του (Gustafsson, 1980).

Σε αντίθεση, η μέτρηση της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας είναι προβληματική με τα έργα που παρουσιάζουν τιμές των δύο δεικτών μεγαλύτερες του +1,5 (βλ. Πίνακα 4.12.). Αυτά τα έργα είναι το 16 (η επιλογή του πλησιέστερου αριθμού στον αριθμό 6, μεταξύ 4 αριθμών) με οριακή τιμή, το 19 (αναγνώριση 5 τριγώνων μεταξύ 25 σχημάτων), το 10 (σύνθεση του αριθμού 7), καθώς και το 24 (άμεση σύγκριση επιφανειών). Τα έργα με τιμές “Outfit” άνω του 1,5 δημιουργούν «θόρυβο» στα δεδομένα και ίσως η διατύπωσή τους να έχει μπερδέψει τους μαθητές και να επιδέχεται βελτίωση. Με άλλα λόγια, ενδέχεται ένα έργο, αν και θεωρείται γενικά δύσκολο, να απαντάται σωστά από ορισμένους μαθητές με χαμηλή συνολική επίδοση. Από την άλλη, ένα έργο θα μπορούσε, επίσης, να μην προσαρμόζεται στο μοντέλο Rasch, καθώς απαντάται λανθασμένα από μαθητές με υψηλή επίδοση, ενώ θεωρείται γενικά εύκολο (Boone, 2016).

Παρακάτω παρουσιάζεται ο χάρτης Wright (Εικόνα 4.1.) ή χάρτης ικανότητας ατόμου – δυσκολίας έργου. Ο χάρτης αυτός χρησιμοποιήθηκε για την αξιολόγηση της "ευθυγράμμισης" (targeting) μεταξύ των συμμετεχόντων και των έργων. Στην ιδανική περίπτωση, αφενός η μέση ικανότητα ατόμου και η μέση δυσκολία έργου θα πρέπει να είναι σχετικά κοντά μεταξύ τους (η περίπτωση της καλής ευθυγράμμισης) και αφετέρου το εύρος δυσκολίας των έργων θα πρέπει να μπορεί να καλύπτει ένα σημαντικό εύρος ικανότητας (Lindner, Linacre & Hermansson, 2009). Η ικανότητα του ατόμου, αλλά και η δυσκολία των έργων παρουσιάζονται σε γραμμική κλίμακα σε μονάδες logits. Το logit, όπως προαναφέρθηκε, είναι ο φυσικός λογάριθμος των πιθανοτήτων, αφενός ενός ατόμου να απαντήσει σωστά σε ένα έργο (ικανότητα του ατόμου) και αφετέρου ένα έργο να απαντηθεί σωστά (δυσκολία έργου). Συνήθως, η τιμή 0 logit αποτυπώνει τη μέση δυσκολία ενός έργου. Με άλλα λόγια, ένα άτομο με ικανότητα 0 logits, έχει περίπου 50% πιθανότητα να απαντήσει σωστά σε έργα μέτριας δυσκολίας, μεγαλύτερη πιθανότητα σωστής απάντησης στα ευκολότερα έργα (όσα δηλαδή έχουν τιμή μικρότερη από -0,5 logits) και μικρότερη πιθανότητα σωστής απόκρισης στα πιο δύσκολα έργα (όσα έχουν τιμή υψηλότερη από το +0,5 logits) (Bond & Fox, 2001).



Εικόνα 4.1.: Χάρτης Wright

Χάρτης ικανότητας ατόμου – δυσκολίας έργου

Στο αριστερό τμήμα του χάρτη παρουσιάζεται η ικανότητα των μαθητών, στην προκειμένη περίπτωση η πρώιμη μαθηματική τους επάρκεια (από -3,25 έως +3,88 logits). Αναλυτικότερα, στο αριστερό τμήμα του χάρτη, φαίνεται πως το δείγμα είναι σχετικά ομοιόμορφα κατανεμημένο σχεδόν σε όλα τα επίπεδα ικανότητας. Οι περισσότεροι μαθητές εντοπίζονται κοντά στο μέσο όρο (ικανότητα από -0,5 έως +0,5 logits), ενώ τα μοναδικά επίπεδα ικανότητας, από τα οποία απουσιάζουν έργα είναι τα επίπεδα ικανότητας από +3 έως +4 logits, καθώς και από -3,5 έως -5 logits.

Ακολούθως, στη δεξιά μεριά του χάρτη, παρουσιάζονται τα έργα ιεραρχημένα με βάση τη δυσκολία τους. Στο πάνω μέρος εντοπίζονται τα δύσκολα έργα. Εκεί εντοπίζονται τα έργα 23 (κατασκευή και αναγνώριση ενός ορθογωνίου παραλληλογράμματος, μονάχα από τις κορυφές του), 17 (πλαισιωμένο λεκτικό πρόβλημα αφαίρεσης), 8 (σύγκριση συνεχούς ποσότητας και διάταξης) και 13 (άμεση αναγνώριση 10 τελειών). Ακολουθούν τα έργα μέτριας δυσκολίας, όπως το έργο ανάλυσης τετραγώνου σε δυο μέρη (25), το έργο προσδιορισμού του προηγούμενου αριθμού από το 8 (12-2), της επέκτασης ενός εξελισσόμενου μοτίβου (21), της σύνθεσης του αριθμού 7 (10), της αντίστροφης λεκτικής αρίθμησης από το 10 έως το 1 (14), το έργο του προσδιορισμού του πλησιέστερου αριθμού στο 6, μεταξύ 4 αριθμών (16), της αναγνώρισης 5 τριγώνων ανάμεσα σε 25 σχήματα (19) και του πλαισιωμένου λεκτικού προβλήματος πρόσθεσης (11). Αντίθετα, στο κάτω μέρος εντοπίζονται τα πιο εύκολα έργα του εργαλείου, όπως το έργο σύγκρισης ποσότητας (4), άμεσης αναγνώρισης 3 τελειών (3), αντιστοίχισης αριθμητικών συμβόλων 1-3 με τις αντίστοιχες ποσότητες (9-1, 9-2, 9-3), καταμέτρησης 7 μπανανών (6-1), αντιστοίχισης αριθμητικών συμβόλων 4 και 5 με τις αντίστοιχες ποσότητες (9-4, 9-5) και επέκτασης επαναλαμβανόμενου μοτίβου ΑΒ (20). Επίσης, προς το κέντρο βρίσκονται όσα είναι λιγότερο εύκολα, αλλά εξακολουθούν να κατατάσσονται στο επίπεδο μικρής δυσκολίας, όπως το έργο προσδιορισμού του επόμενου αριθμού από το 12 (12-1), της εύρεσης του μέρους του μοτίβου που λείπει (22), της άμεσης σύγκρισης επιφανειών (24), της λεκτικής αρίθμησης ως το 20 (5), της κατανόησης τακτικού αριθμού (7), της σύγκρισης αριθμών (15), της καταμέτρησης 12 μήλων (6-2) και της νοερής πρόσθεσης (18). Όλα τα παραπάνω επιβεβαιώνονται και από τον Πίνακα 4.12. (στη στήλη της «Ικανότητας»), καθώς και από τους Πίνακες 4.2. έως 4.10., ανάλογα με την κατηγορία στην οποία ανήκει το κάθε έργο (στα ποσοστά των σωστών απαντήσεων). Με μια γρήγορη ματιά, παρατηρείται πως τα περισσότερα έργα εντοπίζονται κοντά στο μέσο όρο ικανότητας/δυσκολίας και ελαφρώς πιο κάτω, με αποτέλεσμα στο πάνω μέρος του χάρτη να υπάρχουν ελάχιστα έργα. Αυτό δείχνει, πως στο εργαλείο θα πρέπει να συμπεριληφθούν και πιο δύσκολα έργα, τα οποία αναμένεται να εμφανιστούν στο πάνω μέρος του χάρτη για να καλύψουν αυτό το κενό (βλ. Προτάσεις για βελτίωση του εργαλείου). Ακόμη, συγκρίνοντας τα δύο τμήματα του χάρτη Wright (Εικόνα 4.1.), θα μπορούσε να ειπωθεί πως η μέση ικανότητα ατόμου και η μέση δυσκολία έργου βρίσκονται σχετικά κοντά. Επομένως, η δυσκολία του εργαλείου είναι αρκετά καλά ευθυγραμμισμένη με την ικανότητα των ατόμων. Επιπλέον, φαίνεται πως στον άξονα δυσκολίας των έργων, αν και καλύπτει αρκετά μεγάλο μέρος της ικανότητας των ατόμων, υπάρχουν κάποια κενά, τα οποία καλό θα ήταν να καλυφθούν με τις απαραίτητες τροποποιήσεις στο εργαλείο (βλ. Προτάσεις για βελτίωση του εργαλείου).

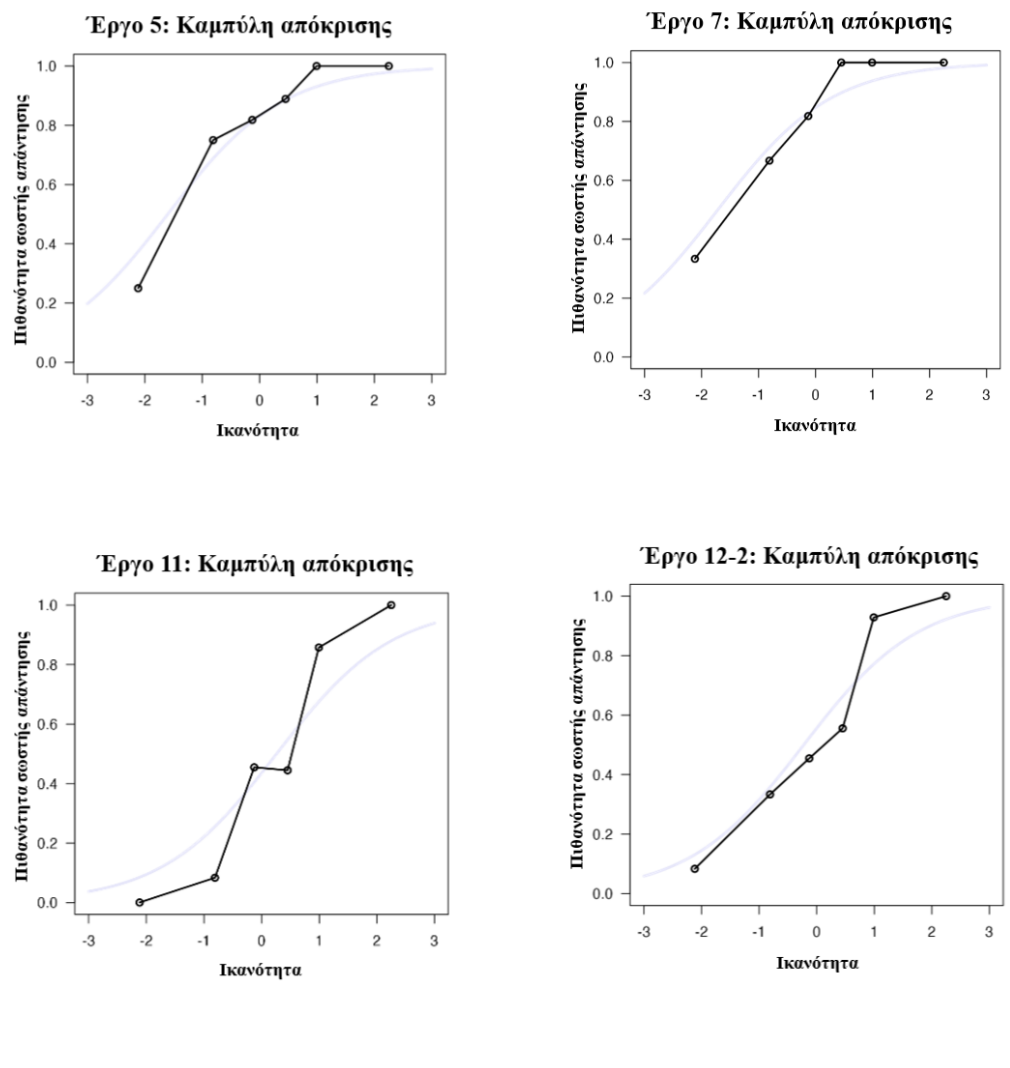
Για μια πιο ολοκληρωμένη ανάλυση, εξετάστηκαν και οι καμπύλες απόκρισης των έργων (item information curves). Σε ένα διάγραμμα καμπύλης απόκρισης έργου, ο κάθετος άξονας αντιστοιχεί στην πιθανότητα σωστής απάντησης στο συγκεκριμένο έργο, η οποία παίρνει τιμές από 0 έως 1 (εάν μετατραπούν σε ποσοστά, από 0% έως 100%). Στο οριζόντιο άξονα, παρουσιάζονται τα επίπεδα ικανότητας στην πρώιμη μαθηματική επάρκεια, από -3 (χαμηλότερο επίπεδο ικανότητας) έως +3 (υψηλότερο επίπεδο ικανότητας) logits. Μεταξύ -0,5 και +0,5 logits εντοπίζονται οι μαθητές που ανήκουν γύρω από τον μέσο όρο ικανότητας. Η πιθανότητα σωστής απάντησης σε κάθε επίπεδο ικανότητας αποτυπώνεται με την καμπύλη με μαύρο χρώμα. Επιπλέον, στο διάγραμμα υπάρχει και μια καμπύλη με γκρίζο χρώμα, η οποία αντιστοιχεί στην ιδανική καμπύλη για το συγκεκριμένο έργο σύμφωνα με το μοντέλο Rasch. Επομένως, είμαι θεμιτό οι δυο αυτές καμπύλες να βρίσκονται όσο το δυνατό πιο κοντά μεταξύ τους. Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα με τις καμπύλες απόκρισης, τα οποία κατηγοριοποιήθηκαν σε ομάδες, με κριτήριο το αν οι δυο καμπύλες βρίσκονται κοντά η μια στην άλλη, και με την ύπαρξη ή όχι συγκεκριμένων φαινομένων (π.χ. πιθανότητα απάντησης στην τύχη, αυξομοιώσεις πιθανότητας και ικανότητα διάκρισης, που αναλύονται παρακάτω).

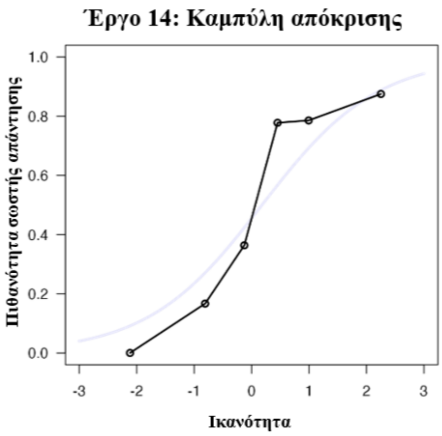
Όπως φαίνεται στον πίνακα διαγραμμάτων 4.1., οι δύο καμπύλες είναι κοντά μεταξύ τους στα έργα 5 (λεκτική αρίθμηση έως το 20), 7 (κατανόηση τακτικού αριθμού), 11 (πλαισιωμένο λεκτικό πρόβλημα με πρόσθεση), 12-2 (προσδιορισμός του προηγούμενου αριθμού από το 8), 14 (αντίστροφη λεκτική αρίθμηση), 17 (πλαισιωμένο λεκτικό πρόβλημα αφαίρεσης), 18 (νοερή πρόσθεση), 21 (επέκταση εξελισσόμενου μοτίβου) και 25 (ανάλυση τετραγώνου). Τα συγκεκριμένα έργα είναι και αυτά που προσαρμόζονται καλύτερα στο μοντέλο Rasch και θεωρούνται έργα υψηλής ποιότητας. Πιο συγκεκριμένα, στο έργο 17 (πλαισιωμένο λεκτικό πρόβλημα αφαίρεσης), παρατηρούνται δυο ακόμα φαινόμενα. Αρχικά, οι μαθητές με επίπεδο ικανότητας κάτω του μέσου όρου έχουν σχεδόν μηδενική πιθανότητα σωστής απάντησης, πράγμα που αλλάζει απότομα, όταν το επίπεδο ικανότητας υπερβεί τον μέσο όρο. Επομένως, αυτό το έργο δύναται να διακρίνει αποτελεσματικά ένα μαθητή με υψηλή ικανότητα, από ένα μαθητή μετρίου ή χαμηλού επιπέδου ικανότητας (στην προκειμένη περίπτωση, έναν μαθηματικά επαρκή μαθητή από έναν μη επαρκή). Το δεύτερο φαινόμενο που παρατηρείται σε αυτό το έργο είναι πως για κάποιον λόγο, οι μαθητές με επίπεδο ικανότητας +1, αν και θα έπρεπε να έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα να το απαντήσουν σωστά, απ' ότι όσοι βρίσκονται στο επίπεδο ικανότητας +0,5, έχουν χαμηλότερη πιθανότητα σωστής απάντησης (φαινόμενο "Slipping") (Liu, Douglas &

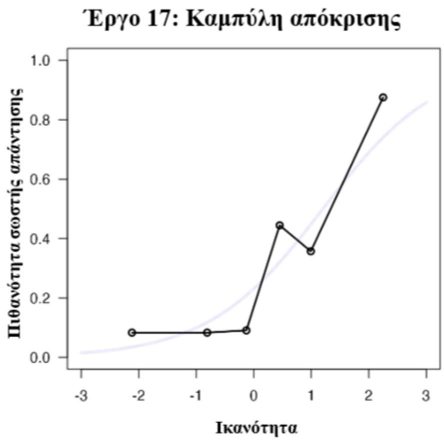
Henson, 2009). Ακριβώς το ίδιο φαινόμενο παρατηρείται και στο έργο 21 (επέκταση εξελισσόμενου μοτίβου), για το οποίο οι συμμετέχοντες με επίπεδο ικανότητας +2, αν και θα έπρεπε να έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα να το απαντήσουν σωστά, συγκριτικά με όσους βρίσκονται στο επίπεδο ικανότητας +1, είχαν την ίδια πιθανότητα και ελαφρώς χαμηλότερη. Παρομοίως και το έργο 25 (ανάλυση τετραγώνου), στο οποίο οι συμμετέχοντες με επίπεδο ικανότητας +0,5, είχαν χαμηλότερη πιθανότητα από όσους βρίσκονταν στο επίπεδο ικανότητας 0, αν και η πιθανότητα σωστής απάντησης για το επίπεδο ικανότητας +0,5 ήταν υψηλότερη.

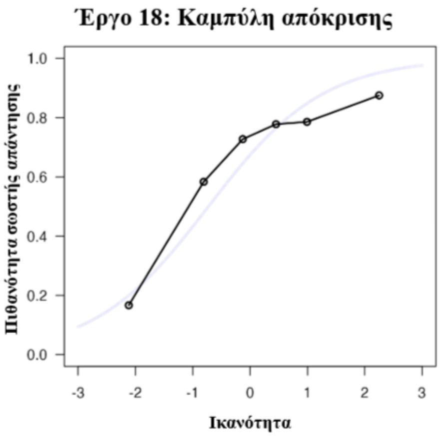
Πίνακας Διαγραμμάτων 4.1.

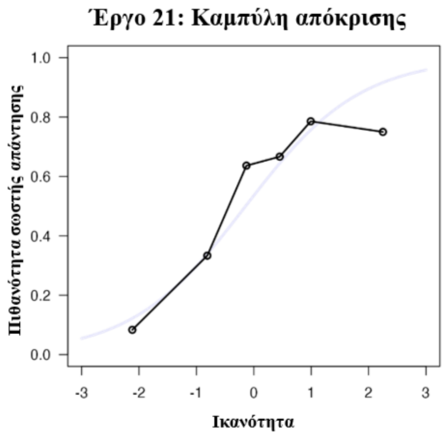
Καμπύλες απόκρισης για κάθε επίπεδο ικανότητας, όταν οι καμπύλες έχουν παρόμοια πορεία και υπάρχει χαμηλή πιθανότητα απάντησης στην τύχη.

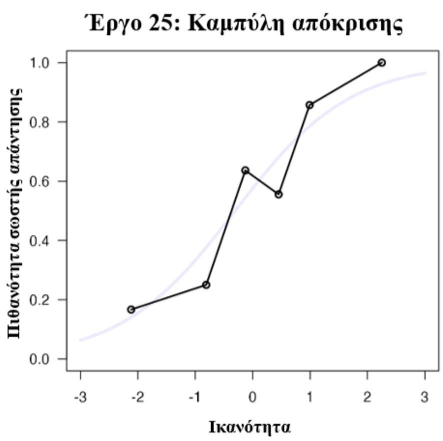








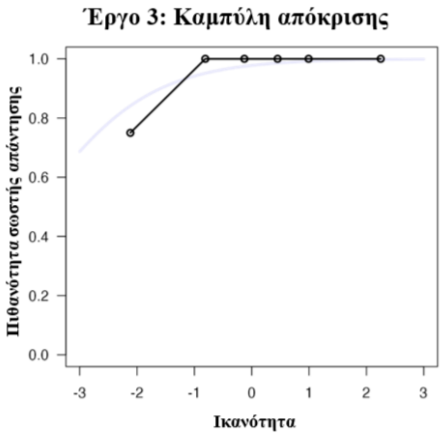


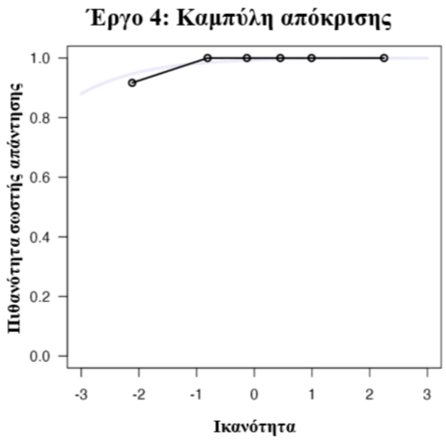


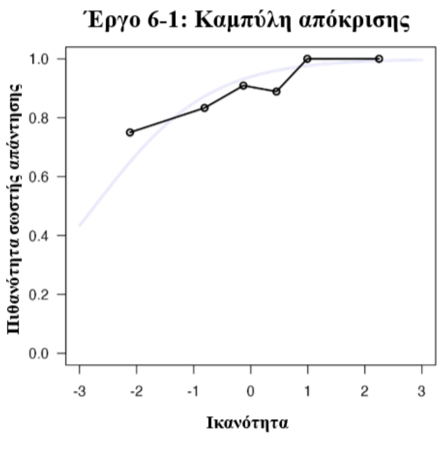
Επιπλέον, μικρή απόσταση μεταξύ των καμπύλων και σχεδόν ταύτιση υπάρχει και για τα έργα 3 (άμεση αναγνώριση 3 τελειών), 4 (σύγκριση ποσοτήτων), 6-1 (καταμέτρηση 7 μπανανών), στα 5 υποερωτήματα του 9 (αντιστοίχιση αριθμητικών συμβόλων με ποσότητες), 12-1 (προσδιορισμός του επόμενου αριθμού από το 12), 15 (σύγκριση αριθμών), 20 (επέκταση επαναλαμβανόμενου μοτίβου ΑΒ) και 22 (εύρεση του μέρους του μοτίβου που λείπει). Με άλλα λόγια, και αυτά τα έργα προσαρμόζονται αρκετά καλά στο μοντέλο Rasch. Αξίζει όμως να σημειωθεί, πως εδώ παρατηρείται επιπλέον το φαινόμενο της απάντησης στην τύχη (Guessing) (Liu, Douglas & Henson, 2009). Αναλυτικότερα, όπως φαίνεται και στον πίνακα διαγραμμάτων 4.2, ακόμα και συμμετέχοντες της έρευνας με επίπεδο ικανότητας -2 (πολύ χαμηλό), έχουν μεγάλη πιθανότητα σωστής απάντησης στα παραπάνω έργα (πάνω από 40%). Πρόκειται, λοιπόν, είτε για πολύ εύκολα έργα, είτε για έργα τα οποία οι συμμετέχοντες μπορούν να μαντέψουν τη σωστή απάντηση.

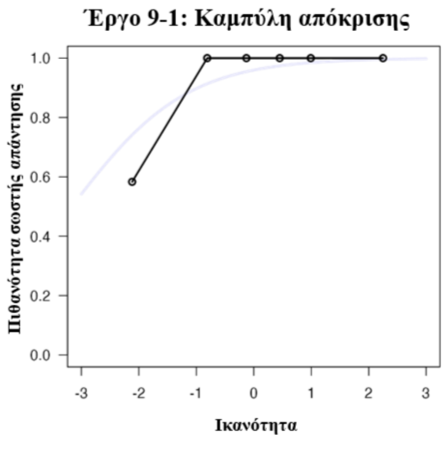
Πίνακας Διαγραμμάτων 3.2.

Καμπύλες απόκρισης για κάθε επίπεδο ικανότητας, όταν οι καμπύλες έχουν παρόμοια πορεία και υπάρχει μεγάλη πιθανότητα απάντησης στην τύχη.

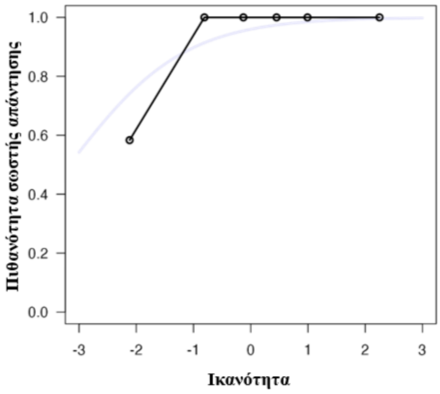




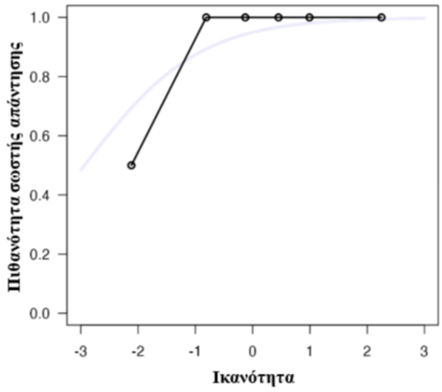




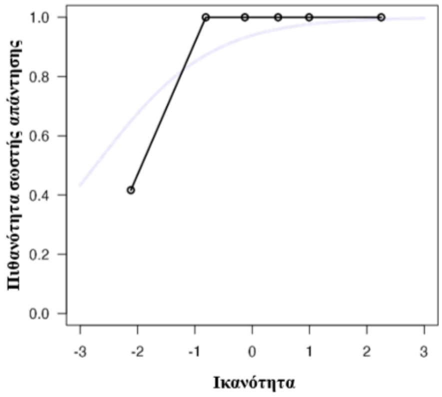
Έργο 9-2: Καμπύλη απόκρισης



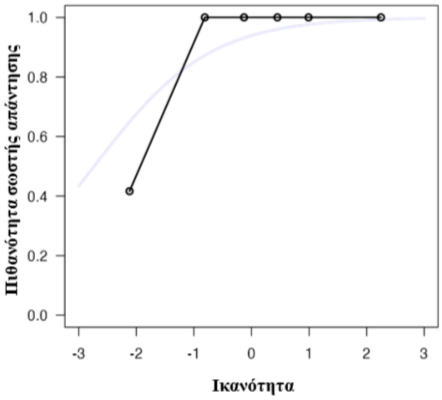
Έργο 9-3: Καμπύλη απόκρισης



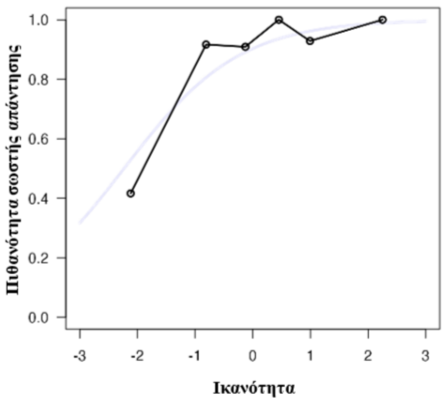
Έργο 9-4: Καμπύλη απόκρισης



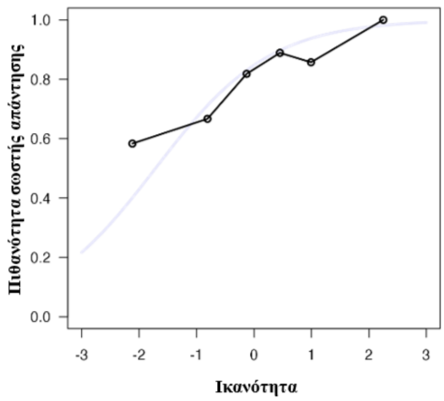
Έργο 9-5: Καμπύλη απόκρισης

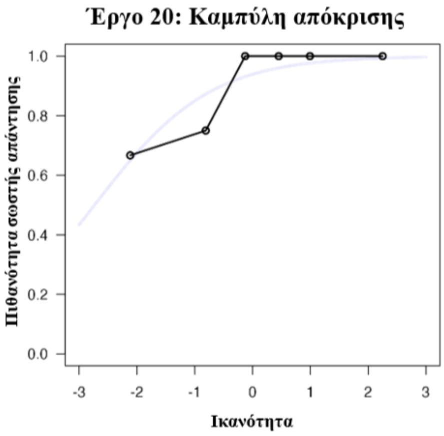


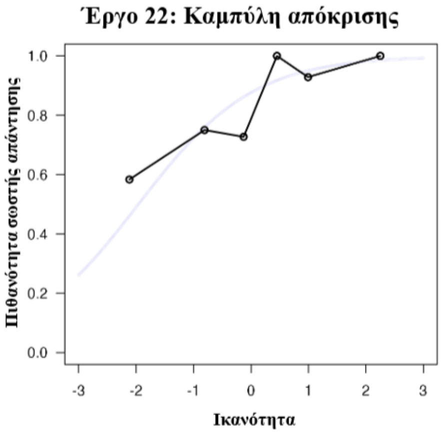
Έργο 12-1: Καμπύλη απόκρισης



Έργο 15: Καμπύλη απόκρισης





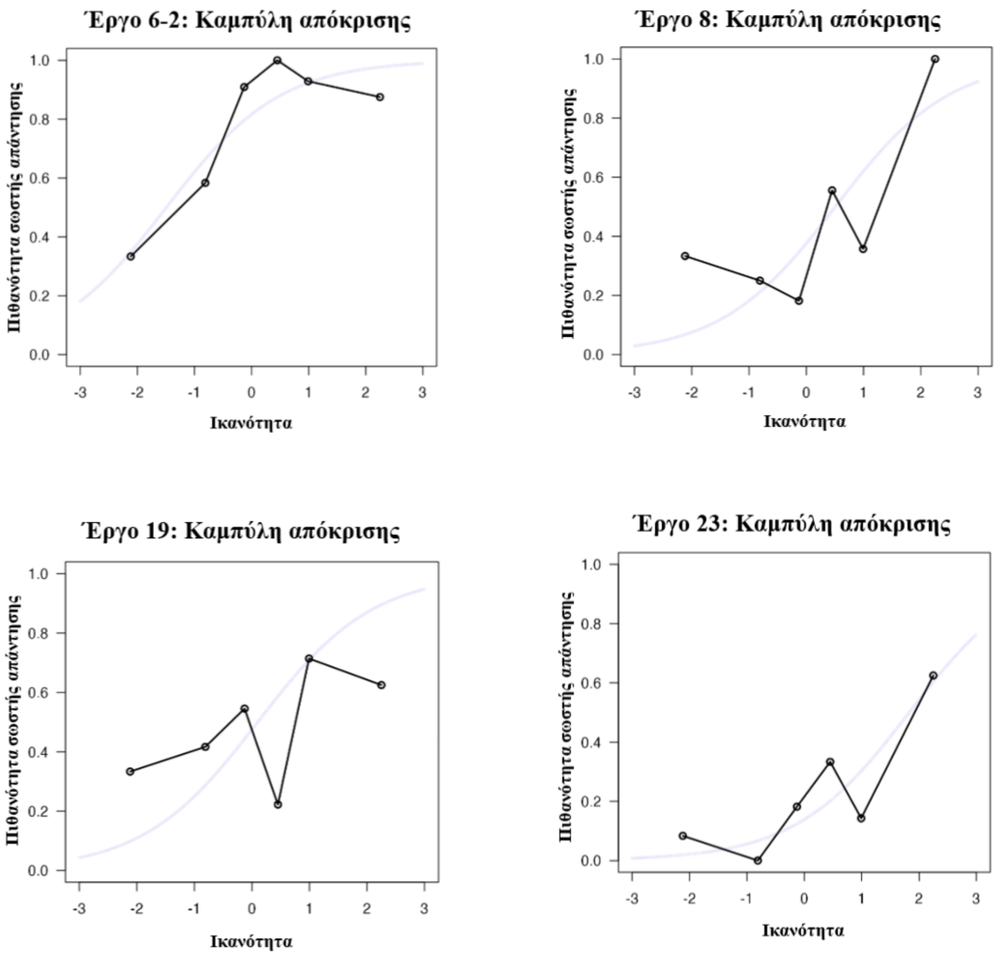


Σε αντίθεση, σε ορισμένα έργα, δεν υπάρχει ταύτιση των δυο γραμμών, άρα και καλή προσαρμογή στο μοντέλο Rasch, κάτι που θα μπορούσε να οφείλεται στην ευκολία των έργων ή σε προβληματική διατύπωση. Σε αυτά τα έργα παρουσιάζονται και τα δύο φαινόμενα που αναφέρθηκαν παραπάνω (guessing, slipping). Αναλυτικότερα, όπως φαίνεται και στον πίνακα διαγραμμάτων 4.3., στο έργο 6-2 (καταμέτρηση 12 μήλων), οι συμμετέχοντες με υψηλό επίπεδο ικανότητας, άνω του μέσου όρου (επίπεδο ικανότητας +1 και +2), ενδεχομένως να μπερδεύονται και να έχουν χαμηλότερη πιθανότητα σωστής απάντησης, απ' όσους βρίσκονται στο μεσαίο επίπεδο ικανότητας.

Μεγαλύτερη σύγχυση των συμμετεχόντων φαίνεται να υπάρχει και σε άλλα τρία έργα, τα οποία παρουσιάζονται στον πίνακα διαγραμμάτων 4.3. Αρχικά, στο έργο 8 (σύγκριση συνεχούς ποσότητας και διάταξης), παρατηρούνται αυξομειώσεις στην πιθανότητα σωστής απάντησης, παρά την αύξηση της ικανότητας. Όσοι βρίσκονται στο επίπεδο ικανότητας -2 και +0,5, έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα σωστής απάντησης σ' αυτό το έργο, απ' όσους βρίσκονται στο επίπεδο ικανότητας 0 και +1 αντίστοιχα. Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και στα έργα 19 (προσδιορισμός και αναγνώριση 5 τριγώνων μεταξύ 25 σχημάτων) και 23 (κατασκευή ορθογωνίου παραλληλογράμμου μονάχα από τις κορυφές του). Στα έργα που μόλις αναφέρθηκαν (6-2, 8, 19 και 23) παρατηρείται επίσης και σχετικά μεγάλη πιθανότητα σωστής απάντησης, για όσους βρίσκονται στο επίπεδο ικανότητας -2 ή αλλιώς πιθανότητα να μαντέψουν τη σωστή απάντηση (φαινόμενο «guessing»).

Πίνακας Διαγραμμάτων 4.3.

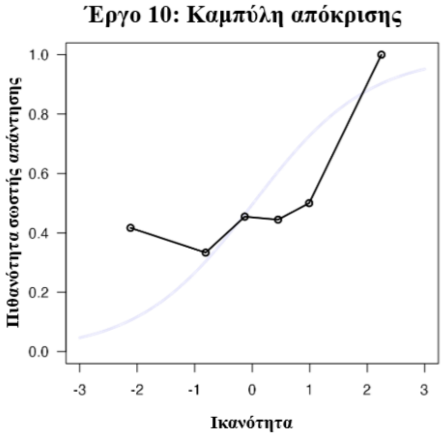
Καμπύλες απόκρισης για κάθε επίπεδο ικανότητας, όταν οι καμπύλες δεν έχουν παρόμοια πορεία, αλλά έχουν μεγάλη πιθανότητα απάντησης στην τύχη (guessing) ή/και απροσδόκητα χαμηλότερη πιθανότητα σωστής απάντησης (slipping) από μαθητές υψηλότερου επιπέδου ικανότητας.

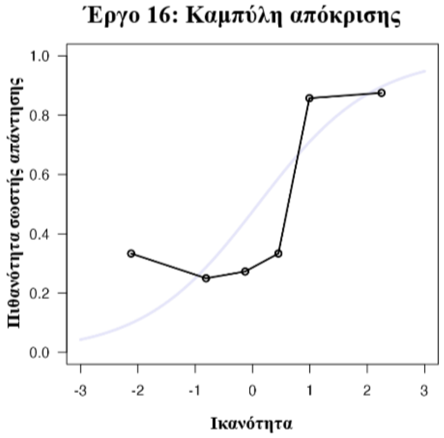


Επιπρόσθετα, τα έργα 10 (σύνθεση του αριθμού 7) και 16 (προσδιορισμός του πλησιέστερου αριθμού στο 6, μεταξύ 4 αριθμών) παρουσιάζουν ομοιότητες όπως φαίνεται και στον Πίνακα διαγραμμάτων 4.4. Αρχικά, και στα δυο έργα υπάρχει σχετικά μεγάλη πιθανότητα να απαντήσει σωστά κάποιο παιδί με επίπεδο ικανότητας -2 (ή να μαντέψει τη σωστή απάντηση με ποσοστό περίπου 40%). Ακόμη, στο έργο 10 (σύνθεση του αριθμού 7) παρατηρούνται αυξομειώσεις στην πιθανότητα σωστής απάντησης, καθώς αυξάνεται η ικανότητα. Με άλλα λόγια, μαθητές με επίπεδο ικανότητας -2 και +0,5 έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα σωστής απάντησης, απ’ όσους έχουν επίπεδο ικανότητας -1 και 0 αντίστοιχα. Στο έργο 16 (προσδιορισμός του πλησιέστερου αριθμού στο 6, μεταξύ 4 αριθμών), οι μαθητές με επίπεδο ικανότητας -2 είχαν την ίδια πιθανότητα σωστής απάντησης, με όσους βρίσκονται στο επίπεδο ικανότητας +0,5. Το γεγονός ότι μαθητές σε υψηλότερα επίπεδα ικανότητας είχαν χαμηλότερη πιθανότητα σωστής απάντησης σε έργα που μαθητές σε χαμηλότερα επίπεδα ικανότητας είχαν μεγάλη πιθανότητα σωστής απάντησης, όπως προαναφέρθηκε, ενδεχομένως να οφείλεται στη διατύπωση του έργου. Μια ακόμα ομοιότητα είναι πως στα διαγράμματα των δυο αυτών έργων, παρατηρούνται απότομες μεταβολές στην πιθανότητα, οι οποίες υποδεικνύουν ότι τα συγκεκριμένα έργα έχουν καλή ικανότητα διάκρισης των μαθητών υψηλής ικανότητας από αυτούς της χαμηλής ικανότητας. Αναλυτικότερα, στο έργο 10, ενώ μαθητές επιπέδου ικανότητας +1 έχουν περίπου 50% πιθανότητα να απαντήσουν σωστά, μαθητές επιπέδου ικανότητας +2 έχουν πιθανότητα σωστής απάντησης 100%. Έτσι, και στο 16, ενώ η πιθανότητα σωστής απάντησης για τους μαθητές με επίπεδο ικανότητας +0,5 είναι στο 35% περίπου, η πιθανότητα σωστής απάντησης αυξάνεται απότομα και φθάνει το 90% περίπου, για όσους συμμετέχοντες βρίσκονται στο επίπεδο επάρκειας 1. Με αυτό τον τρόπο διακρίνονται τα διαφορετικά επίπεδα ικανότητας και οι μαθητές που κατατάσσονται σε αυτά.

Πίνακας Διαγραμμάτων 4.4.

Καμπύλες απόκρισης για κάθε επίπεδο ικανότητας, όταν οι καμπύλες δεν έχουν παρόμοια πορεία, αλλά έχουν μεγάλη πιθανότητα απάντησης στην τύχη (guessing) ή/και απότομες μεταβολές στην πιθανότητα.

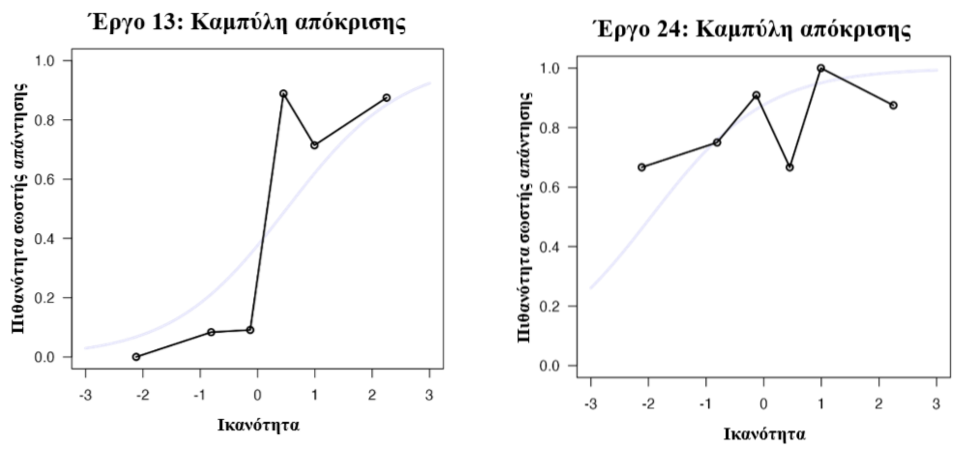




Επιπλέον, τα έργα 13 (άμεση αναγνώριση 10 τελειών) και 24 (άμεση σύγκριση επιφανειών) παρουσιάζουν αρκετές ιδιαιτερότητες (πίνακας διαγραμμάτων 4.5.). Αρχικά, στο έργο 24, υπάρχει μεγάλη πιθανότητα οι συμμετέχοντες να μαντέψουν τη σωστή απάντηση, καθώς η πιθανότητα σωστής απάντησης είναι υψηλή (περίπου 65%), ακόμα και στο επίπεδο ικανότητας -2. Επίσης, στο έργο 13 παρατηρείται απότομη αλλαγή στην πιθανότητα σωστής απάντησης. Ενώ μαθητές με επίπεδο ικανότητας 0 έχουν περίπου 10% πιθανότητα να απαντήσουν σωστά, όταν το επίπεδο ικανότητας αυξάνεται και φθάνει το +0,5, η πιθανότητα σωστής απάντησης αυξάνεται απότομα και φθάνει το 95% περίπου. Συνεπώς, το έργο αυτό μπορεί να διακρίνει τους μαθητές με βάση το επίπεδο της πρώιμης μαθηματικής τους επάρκειας. Τέλος, και στα δυο έργα παρατηρούνται αυξομειώσεις στην πιθανότητα. Πιο συγκεκριμένα, στο έργο 13 (άμεση αναγνώριση ποσότητας 10 τελειών) τα επίπεδα ικανότητας +0,5 και +2 είχαν την ίδια πιθανότητα σωστής απάντησης, ενώ το επίπεδο ικανότητας +1, είχε χαμηλότερη πιθανότητα. Αντίστοιχα, στο έργο 24 (άμεση σύγκριση επιφανειών), οι μαθητές του επιπέδου ικανότητας 0, είχαν μεγαλύτερη πιθανότητα σωστής απάντησης, απ’ ότι οι μαθητές με επίπεδο ικανότητας +0,5. Τέλος, οι μαθητές με επίπεδο ικανότητας +2,5 είχαν χαμηλότερη πιθανότητα σωστής απάντησης, απ’ ότι όσοι βρίσκονται στο επίπεδο ικανότητας +1.

Πίνακας Διαγραμμάτων 4.5.

Καμπύλες απόκρισης για κάθε επίπεδο ικανότητας, όταν οι καμπύλες δεν έχουν παρόμοια πορεία και συνδυάζουν 2 ή περισσότερα φαινόμενα (ικανότητα διάκρισης, πιθανότητα απάντησης στην τύχη, απροσδόκητα χαμηλότερη πιθανότητα σωστής απάντησης από μαθητές υψηλότερου επιπέδου ικανότητας).



4.5. Διαφορές στην επίδοση με βάση την ηλικία

Για να απαντηθεί το ερευνητικό ερώτημα που αφορά το κατά πόσο μπορεί το εργαλείο να ανιχνεύσει αναπτυξιακές διαφορές, έγινε ανάλυση μέσων όρων ανά ηλικία. Σύμφωνα με τον Πίνακα 4.13., κατά μέσο όρο, τα προνήπια απάντησαν σωστά σε 19 περίπου έργα (*Μ.Ο.* = 18,6, *Τ.Α.* = 5,73), ενώ τα νήπια απάντησαν σωστά σε 21 περίπου έργα (*Μ.Ο.* = 20,9, *Τ.Α.* = 5,12). Συνεπώς, τα προνήπια του δείγματος απάντησαν σωστά σε 2 έργα λιγότερα απ' ότι τα νήπια. Ωστόσο, ο t-έλεγχος για ανεξάρτητα δείγματα έδειξε ότι η διαφορά αυτή δεν είναι στατιστικά σημαντική (t = -1,68 , p = 0,098 > 0,05). Αυτό σημαίνει ότι δεν ανιχνεύθηκαν σημαντικές αναπτυξιακές διαφορές ανάμεσα στις δυο ηλικίες των συμμετεχόντων.

Πίνακας 4.13.

Μέσοι όροι επίδοσης ανά ηλικιακή ομάδα.

	Ομάδα	Πλήθος	Μέσος όρος
Σύνολο	Προνήπια	31	18,645
	Νήπια	35	20,886
Μέτρηση σε μονάδες logits	Προνήπια	31	-0,313
	Νήπια	35	0,260

4.6. Διαφορές στην επίδοση με βάση το φύλο

Τέλος, για να απαντηθεί το τελευταίο ερευνητικό ερώτημα που αφορά το κατά πόσο μπορούν να εντοπιστούν φυλετικές διαφορές μέσα από το συγκεκριμένο εργαλείο, έγινε ανάλυση μέσων όρων ανά φύλο. Όπως φαίνεται στον πίνακα 4.14., τα κορίτσια απάντησαν σωστά σε περίπου 19 έργα κατά μέσο όρο (*Μ.Ο.* = 19,086, *Τ.Α.* = 5,45), ενώ τα αγόρια είχαν ελαφρώς καλύτερη επίδοση, με 20-21 έργα κατά μέσο όρο (*Μ.Ο.* = 20,667, *Τ.Α.* = 5,50). Ωστόσο, η διαφορά στην επίδοση ανάμεσα στα δυο φύλα δεν βρέθηκε στατιστικά σημαντική (t = 1,18, p = 0,243 > 0,05). Αυτό σημαίνει πως δεν ανιχνεύθηκαν σημαντικές διαφορές ανάμεσα στα δυο φύλα.

Πίνακας 4.14.

Μέσοι όροι επίδοσης ανά φύλο.

	Ομάδα	Πλήθος	Μέσος όρος
Σύνολο	Αγόρια	31	20,667
	Κορίτσια	35	19,086
Μέτρηση σε μονάδες logits	Αγόρια	31	0,191
	Κορίτσια	35	-0,186

5ο Κεφάλαιο

5.1. Συμπεράσματα- Συζήτηση

Η παρούσα μελέτη είχε ως σκοπό να αναπτύξει ένα εργαλείο για την μέτρηση της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας, το οποίο θα αποτελούταν από λίγα έργα και δεν θα απαιτούσε το χειρισμό αντικειμένων από τους μαθητές, προκειμένου να είναι σύντομο, πρακτικό και προσβάσιμο σε όλο το εκπαιδευτικό προσωπικό των Νηπιαγωγείων, για να το εφαρμόζουν. Εκτός αυτού, η παρούσα μελέτη είχε ως στόχο να προσδιορίσει τα βασικά χαρακτηριστικά ενός εργαλείου μέτρησης της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας και με βάση το εργαλείο που σχεδιάστηκε στην παρούσα εργασία, να μελετήσει τις διακυμάνσεις στην πρώιμη μαθηματική επάρκεια των μαθητών ανά κατηγορία μαθηματικής γνώσης. Ο τελευταίος στόχος της μελέτης ήταν να διερευνήσει τυχόν διαφορές στην πρώιμη μαθηματική επάρκεια, οι οποίες οφείλονται στην ηλικία και στο φύλο.

Αρχικά, όσον αφορά το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, προσδιορίστηκαν τα βασικά χαρακτηριστικά ενός εργαλείου μέτρησης της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (NCTM, 2000, όπ. αναφ. στο Clements, 2004; Clements & Sarama, 2007, όπ. αναφ. στο Clements, Sarama, & Liu, 2008; Πεντέρη και συν., 2022), οι κατηγορίες μαθηματικών δεξιοτήτων που απαρτίζουν την πρώιμη μαθηματική επάρκεια είναι οι εξής: η λεκτική αρίθμηση και καταμέτρηση, η σύγκριση και διάταξη, η άμεση αναγνώριση αριθμών, η αριθμητική (πρόσθεση και αφαίρεση), η αναγνώριση αριθμητικών συμβόλων, η σύνθεση και ανάλυση αριθμών, οι κανονικότητες, η αναγνώριση, η σύγκριση, η σύνθεση και ανάλυση γεωμετρικών σχημάτων, η κατασκευή και ο μετασχηματισμός γεωμετρικών σχημάτων, η μέτρηση, η ανάλυση δεδομένων και οι πιθανότητες. Στην παρούσα μελέτη, έγινε μια επιλογή ορισμένων κατηγοριών της μαθηματικής γνώσης. Αυτές είναι: η λεκτική αρίθμηση και καταμέτρηση, η σύγκριση και η διάταξη, η άμεση αναγνώριση, οι αριθμοί και η αριθμητική, τα πλαισιωμένα λεκτικά προβλήματα, τα σχήματα και οι κανονικότητες, και η μέτρηση. Έπειτα, σχεδιάστηκαν κατάλληλα έργα ανά κατηγορία, με σκοπό την πληρέστερη αξιολόγηση της κάθε κατηγορίας μαθηματικής γνώσης. Τα αποτελέσματα της Διερευνητικής Ανάλυσης Παραγόντων στα 29 βαθμολογημένα έργα του παρόντος εργαλείου, υποστηρίζουν την προαναφερθείσα επιλογή κατηγοριών μαθηματικής γνώσης, αλλά και των έργων που επιλέχθηκαν για την αξιολόγησή τους, διότι δείχνουν πως το εργαλείο έχει παραγοντική εγκυρότητα και μπορεί να θεωρηθεί ως μονοδιάστατο. Αυτά τα ευρήματα ενισχύουν τα ευρήματα άλλων ερευνών (Starkey, Klein & Wakeley, 2004; Jordan et al., 2007; Clements, Sarama & Liu, 2008; Μπάρμπας και συν., 2008; Purpura et al., 2015; Purpura & Lonigan, 2015), καθώς έδειξαν πως μέσω όλων αυτών των έργων, αξιολογείται η ίδια εννοιολογική κατασκευή, δηλαδή η πρώιμη μαθηματική επάρκεια.

Σχετικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, στόχος της έρευνας ήταν να μελετήσει τις διακυμάνσεις που εμφανίζουν τα παιδιά νηπιαγωγείου στην πρώιμη μαθηματική επάρκεια, σε σχέση με τα διαφορετικά πεδία της μαθηματικής γνώσης. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν πως οι συμμετέχοντες βρίσκονται σε μέτριο προς καλό επίπεδο πρώιμης μαθηματικής επάρκειας. Αναλυτικότερα, αρκετά καλή ήταν η επίδοσή τους στον τομέα των αριθμών και της αριθμητικής, ιδιαίτερα στην αντιστοίχιση των αριθμητικών συμβόλων με τις αντίστοιχες ποσότητες, όπως αναμενόταν, σύμφωνα με τα ευρήματα των ερευνών των Clarke et al. (2006) και Tsigilis et al. (2023).

Καλή ήταν η επίδοση και στον τομέα της σύγκρισης. Πιο συγκεκριμένα, στο έργο σύγκρισης ποσότητας οι μαθητές είχαν άριστη επίδοση ενισχύοντας τα ευρήματα των Tsigilis et al. (2023), αλλά και των Bertelli, Joanni, and Martlew (1998, όπ. αναφ. στο Clarke et al., 2006), οι οποίοι βρήκαν πως ακόμη και τα παιδιά ηλικίας 3 ετών, που δεν έχουν ακόμα κατακτήσει τη λεκτική αρίθμηση, μπορούν να προσδιορίσουν τη μεγαλύτερη ποσότητα. Ωστόσο, χαμηλή ήταν η επίδοση στον προσδιορισμό του πλησιέστερου αριθμού. Οι μαθητές του δείγματος σ' αυτό το έργο δεν είχαν την αναμενόμενη επίδοση, με βάση τα ευρήματα άλλων ερευνών (Tsigilis et al., 2023)

Στον τομέα των κανονικοτήτων, η επίδοση ήταν αρκετά καλή όπως αναμενόταν σύμφωνα με ερευνητικά δεδομένα άλλων ερευνών (Clarke et al., 2006). Ωστόσο, η επίδοση στην επέκταση εξελισσόμενου μοτίβου ήταν χαμηλή ενισχύοντας αντίστοιχα ευρήματα των Papic, Mulligan και Mitchelmore (2011), που δείχνουν πως οι μαθητές δυσκολεύονται στην επέκταση εξελισσόμενων μοτίβων.

Στον τομέα της λεκτικής αρίθμησης και της καταμέτρησης, οι μαθητές τα πήγαν αρκετά καλά στα έργα της καταμέτρησης, όπως αναμενόταν και από άλλες έρευνες (Tsigilis et al., 2023). Αν και η επίδοση στο έργο λεκτικής αρίθμησης έως το

20 ήταν καλή και μάλιστα υψηλότερη απ’ ότι σε άλλες έρευνες (Purpura & Lonigan, 2015; Litkowski et al., 2020), η επίδοση στο έργο αντίστροφης λεκτικής αρίθμησης ήταν μέτρια, υποστηρίζοντας αντίστοιχα ερευνητικά ευρήματα (Clarke et al., 2006).

Όσον αφορά την επίδοση των συμμετεχόντων στον τομέα της διάταξης, οι μαθητές, αν και τα πήγαν αρκετά καλά στον προσδιορισμό του επόμενου αριθμού, όπως υποστηριζόταν από άλλες έρευνες (Clarke et al., 2006; Purpura & Lonigan, 2015; Tsigilis et al., 2023), δυσκολεύτηκαν στον προσδιορισμό του προηγούμενου αριθμού. Επομένως, σε συνδυασμό με τη χαμηλή επίδοση στο έργο αντίστροφης λεκτικής αρίθμησης, φαίνεται πως οι μαθητές δυσκολεύονται στον προσδιορισμό του προηγούμενου αριθμού, όπως έχει αναφερθεί και στη βιβλιογραφία (Clarke et al., 2006).

Μέτρια ήταν η επίδοση στους τομείς της άμεσης αναγνώρισης. Πιο αναλυτικά, οι μαθητές του δείγματος παρόλο που τα πήγαν εξαιρετικά στον άμεσο προσδιορισμό της ποσότητας των 3 τελειών, η επίδοση ήταν σημαντικά χαμηλότερη, όταν η ποσότητα των τελειών αυξήθηκε σε 10. Φαίνεται πως οι μαθητές δεν έχουν εξοικειωθεί με μεγαλύτερα πρότυπα αριθμών ή τον συνδυασμό αυτών (για παράδειγμα 5+5), όπως γίνεται αντιληπτό και από τα ευρήματα της έρευνας των Clarke et al. (2006).

Σχετικά με τον τομέα της μέτρησης, η επίδοση ήταν μέτρια με τους περισσότερους συμμετέχοντες να δυσκολεύονται στη σύγκριση συνεχούς ποσότητας και διάταξης. Τα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης δείχνουν χαμηλότερη επίδοση σε τέτοιου είδους έργα απ’ ότι στην έρευνα των Clarke et al. (2006). Βέβαια, αξίζει να σημειωθεί πως η διάταξη που ελεγχόταν στην μελέτη των Clarke et al. (2006) είχε αυξανόμενο μέγεθος, αυτό δηλαδή που επέλεξε και η πλειονότητα των συμμετεχόντων, και όχι μειούμενο, όπως στην προκειμένη περίπτωση.

Επιπλέον, η επίδοση ήταν χαμηλή στον τομέα των σχημάτων και ιδιαίτερα στην αναγνώριση τριγώνων και ορθογωνίου παραλληλογράμματος. Φαίνεται πως υπάρχει μεγάλη σύγχυση των μαθητών αυτής της ηλικίας ανάμεσα στα σχήματα και όσων μοιάζουν με αυτά (distractors). Τα μικρά παιδιά φαίνεται πως δυσκολεύονται να αντιληφθούν τη διαφορά μεταξύ του ορθογωνίου και του τετραγώνου, όπως και ενός τριγώνου με ένα ημιτελές σχήμα, που μοιάζει με τρίγωνο, όπως υποστηρίζεται και από την Milburn et al. (2019).

Στην τελευταία κατηγορία, των πλαισιωμένων λεκτικών προβλημάτων, οι περισσότεροι συμμετέχοντες της έρευνας δεν κατάφεραν να επιλύσουν απλά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης, με τη μεγαλύτερη δυσκολία να εντοπίζεται στα προβλήματα αφαίρεσης. Η επίδοση σ' αυτήν την κατηγορία είναι χαμηλή και δε συμβαδίζει με αυτή αντίστοιχων ερευνών (Litkowski et al., 2020; Tsigilis et al., 2023). Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί πως τόσο στην έρευνα των Tsigilis et al. (2023), όσο και στην έρευνα των Litkowski et al. (2020), οι αριθμοί που έπρεπε να διαχειριστούν οι μαθητές ήταν μικρότεροι (έως 4), πράγμα που ενδεχομένως συνέβαλε στο να απαντήσουν περισσότεροι σωστά. Άλλωστε, όπως προαναφέρθηκε, τα πιο συνήθη λάθη της κατηγορίας ήταν οι λάθος υπολογισμοί και όχι η ελλιπής αντίληψη της έννοιας της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Σχετικά με το τρίτο ερευνητικό ερώτημα, οι διαφορές που βρέθηκαν στην επίδοση, τόσο μεταξύ των αγοριών και των κοριτσιών, όσο και ανάμεσα στα νήπια και στα προνήπια, δεν είναι στατιστικά σημαντικές. Όσον αφορά τον παράγοντα της ηλικίας, τα ευρήματα της παρούσας μελέτης βρίσκονται σε αντίθεση με παλαιότερες έρευνες (Clarke, Cheeseman & Clarke, 2006; Aunio et al., 2008; Jordan et al., 2010; Weiland & Yoshikawa, 2013). Αξίζει, όμως να σημειωθεί πως η μικρή διαφορά στην επίδοση ανάμεσα στα προνήπια και τα νήπια, δεν είναι στατιστικά σημαντική για το συγκεκριμένο δείγμα. Αυτό ίσως να οφείλεται στο μέγεθος του δείγματος, όπως αναφέρεται και παρακάτω στους περιορισμούς της μελέτης.

Τέλος, σχετικά με τον παράγοντα του φύλου, στην παρούσα μελέτη βρέθηκε πως δεν διαφοροποιείται η επίδοση ανάμεσα στα αγόρια και τα κορίτσια. Τα ευρήματα αυτά υποστηρίζουν παλαιότερες έρευνες (Geary, 1994, όπ. αναφ. στο Lachance & Mazzocco, 2006; Lachance & Mazzocco, 2006; Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi, 2004, όπ. αναφ. στο Carr et al., 2008; Ελληνική Στατιστική Αρχής, 2008, όπ. αναφ. στο Χαρίση, 2018; Milburn et al., 2019), οι οποίες, επίσης, βρήκαν πως οι διαφορές στην πρώιμη μαθηματική επάρκεια μεταξύ των δυο κυρίαρχων φύλων δεν είναι στατιστικά σημαντικές.

5.2. Περιορισμοί της μελέτης

Είναι σημαντικό να τονιστεί πως τα αποτελέσματα της μελέτης υπόκεινται σε αρκετούς περιορισμούς. Αρχικά, πρόκειται για μια πιλοτική εφαρμογή του εργαλείου και το δείγμα που χρησιμοποιήθηκε, παρότι είναι ικανοποιητικό για ορισμένα συμπεράσματα στην παρούσα μελέτη, δεν είναι αντιπροσωπευτικό λόγω του μεγέθους του. Όπως φάνηκε και στα αποτελέσματα (βλ. Εικόνα 4.1.: χάρτη Wright), από τους συμμετέχοντες λείπουν μαθητές με πολύ υψηλή ικανότητα και με πολύ χαμηλή. Επομένως, τα αποτελέσματα της έρευνας δεν μπορούν με ασφάλεια να οδηγήσουν σε γενικεύσεις.

Επιπλέον, το παρόν εργαλείο, όπως προαναφέρθηκε, απευθύνεται σε μαθητές ηλικίας 4 έως 6 ετών. Πρόκειται για πολύ μικρά παιδιά, που ενδεχομένως να μην είναι ακόμα απολύτως εξοικειωμένα με το σχολικό περιβάλλον και η διαδικασία της χορήγησης του εργαλείου από έναν άγνωστο άνθρωπο, ίσως, να τους προκάλεσε άγχος. Το άγχος αυτό ενδέχεται να συνέβαλε σε μειωμένη συγκέντρωση και κατ’ επέκταση επίδοση.

5.3. Προτάσεις για βελτίωση του εργαλείου

Με βάση τα ερευνητικά δεδομένα που προέκυψαν από την πιλοτική εφαρμογή του εργαλείου (EMCMT-B), προτείνονται ορισμένες αλλαγές, με σκοπό τη βελτίωση του, καθώς και την βελτίωση της αξιοπιστίας του. Αρχικά, όπως προαναφέρθηκε, το έργο 1 (λεκτική αρίθμηση έως το 5) και 2 (σύγκριση μήκους) δεν συμπεριλήφθηκαν στην ανάλυση των αποτελεσμάτων, καθώς απαντήθηκαν σωστά απ’ όλους τους συμμετέχοντες. Επομένως, πρόκειται για 2 έργα που δεν προσέφεραν κανένα στοιχείο στην ανάλυση, ούτε επηρέασαν τα αποτελέσματα και καλό θα ήταν να αφαιρεθούν από το εργαλείο. Προτείνεται, ωστόσο, να χρησιμοποιηθούν ως ερωτήσεις «δοκιμής», οι οποίες θα δίνουν στους εξεταζόμενους μια ιδέα για το τι περίπου πρόκειται να ερωτηθούν. Και αυτό γιατί παρατηρήθηκε κατά τη δειγματοληψία, πως η πλειονότητα των μαθητών φαινόταν πιο άνετη, έπειτα από αυτά τα δυο εύκολα έργα και δεν ήταν το ίδιο αγχωμένη με την αρχή.

Ακόμη, παρατηρήθηκε από την ανάλυση Rasch που έγινε, πως 4 έργα φαίνεται να μην λειτουργούν καλά μέσα στο εργαλείο και ενδεχομένως να χρειάζονται τροποποίηση. Αυτά τα έργα είναι το 16 (προσδιορισμός πλησιέστερου αριθμού στο 6, μεταξύ 4 αριθμών) με οριακή τιμή, το 10 (σύνθεση του αριθμού 7), το 19 (αναγνώριση τριγώνων) και το 24 (άμεση σύγκριση επιφανειών). Τα παραπάνω έργα δεν λειτουργούν καλά, διότι φάνηκε πως τα απάντησαν σωστά ορισμένοι μαθητές με χαμηλό επίπεδο ικανότητας, ενώ κάποια άτομα με υψηλό επίπεδο ικανότητας μπερδεύτηκαν, με αποτέλεσμα να τα απαντήσουν λάθος. Αυτό ίσως να οφείλεται είτε στη διατύπωση των έργων, είτε στο οπτικό υλικό που τα συνόδευε. Κρίνεται αναγκαίο, λοιπόν, αυτά τα έργα είτε να τροποποιηθούν και να ξανά ελεγχθούν, είτε να αφαιρεθούν και να αντικατασταθούν από άλλα, που αξιολογούν τις ίδιες μαθηματικές δεξιότητες.

Τέλος, το εργαλείο που σχεδιάστηκε περιέχει πολλά εύκολα έργα. Αυτό είναι εμφανές από δυο σημεία. Αρχικά, στην ανάλυση Rasch που έγινε και προσδιορίστηκε η δυσκολία του κάθε έργου (Πίνακας 4.12. στη στήλη «Ικανότητα») φαίνεται πως τα περισσότερα έργα είναι εύκολα, καθώς έχουν αρνητικές τιμές (κάτω από -0,5). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, μαθητές με χαμηλό επίπεδο ικανότητας, να τα πηγαίνουν αρκετά καλά σ' αυτά τα έργα, δυσχεραίνοντας έτσι, την διάκριση των μαθητών σε μαθηματικά επαρκείς ή μη. Ακόμα, στον ίδιο πίνακα (Πίνακας 4.12. στις στήλες «Infit» και «Outfit»), φαίνεται πως πέρα από τη μεγάλη ευκολία των έργων, υπάρχουν και έργα τα οποία φαίνεται να είναι περιττά. Αυτά είναι τα έργα που παρουσιάζουν τιμές Infit και Outfit χαμηλότερες του αποδεκτού εύρους τιμών, για παράδειγμα τα έργα 3 (άμεση αναγνώριση 3 τελειών), 4 (σύγκριση ποσότητας) και όλα τα υποερωτήματα του έργου 9 (αντιστοίχιση αριθμητικών συμβόλων 1-5 με τις αντίστοιχες ποσότητες). Συνεπώς, αυτά τα έργα θα μπορούσαν να αντικατασταθούν από έργα μεγαλύτερης δυσκολίας, τα οποία πρόκειται να τοποθετηθούν στο πάνω μέρος του χάρτη ικανότητας-δυσκολίας (βλ. Εικόνα 4.1.: χάρτη Wright) και θα μπορούν να διακρίνουν έναν μαθηματικά επαρκή μαθητή από έναν μη επαρκή. Με αυτόν τον τρόπο και με την χορήγηση του εργαλείου σε περισσότερους μαθητές με υψηλό επίπεδο ικανότητας, το εργαλείο θα είναι πιο καλά ευθυγραμμισμένο μεταξύ της ικανότητας των συμμετεχόντων και της δυσκολίας των έργων (targeting). Ακόμη, μια τέτοια αλλαγή πιθανά να δείξει και αναπτυξιακές διαφορές ανάμεσα σε νήπια και προνήπια, που το παρόν εργαλείο δεν έδειξε.

5.4. Παιδαγωγικές εφαρμογές

Η παρούσα μελέτη, αν και αποτελεί μια πιλοτική εφαρμογή, παρέχει σημαντικές πληροφορίες και συνεισφέρει στην πρώιμη μαθηματική εκπαίδευση στην Ελλάδα, καθώς προτείνει ένα νέο εργαλείο μέτρησης της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας, το οποίο με τις απαραίτητες αλλαγές, θα μπορέσει να χρησιμοποιηθεί από τα νηπιαγωγεία ως μέσο αξιολόγησης των μαθηματικών γνώσεων των μαθητών. Άλλωστε, σκοπός της μελέτης ήταν ο σχεδιασμός ενός σύντομου και εύχρηστου από το εκπαιδευτικό προσωπικό των νηπιαγωγείων, εργαλείο μέτρησης της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας, το οποίο θα είναι προσβάσιμο σε όλους και δε θα απαιτεί ειδικές γνώσεις ή κάποια επιμόρφωση από το άτομο που πρόκειται να το χορηγήσει.

Οι επιδόσεις των μαθητών προσχολικής ηλικίας είναι καλό να μετριούνται για να γίνονται αντιληπτές η προϋπάρχουσα γνώση, οι ελλείψεις και οι δυσκολίες των μαθητών, και το πως αυτές άλλαξαν κατά τη διάρκεια της χρονιάς. Με τον τρόπο αυτό, δύνανται οι νηπιαγωγοί να καθοδηγούν εκπαιδευτικές πρακτικές, προς κάλυψη των ελλείψεων και των δυσκολιών τους, ώστε οι μαθητές της προσχολικής εκπαίδευσης να είναι έτοιμοι για την μετάβασή τους στα τυπικά, ή αλλιώς τα «σχολικά» Μαθηματικά.

5.5. Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Με βάση τη βιβλιογραφική ανασκόπηση, αναδύεται η ανάγκη να οριστεί τι ακριβώς περιλαμβάνει η πρώιμη μαθηματική επάρκεια, διότι αν και υπάρχει πληθώρα εργαλείων, όπως προαναφέρθηκε, αυτά είτε εξετάζουν μονάχα επιμέρους κατηγορίες μαθηματικής γνώσης, είτε δεν είναι εύκολα στη χορήγηση. Συνεπώς, καλό θα ήταν να προσδιοριστούν ακριβώς οι κατηγορίες μαθηματικής γνώσης και έπειτα να κατασκευαστούν νέα εργαλεία, τα οποία θα συνδυάζουν τη συντομία και τον έλεγχο όλων αυτών των κατηγοριών.

Ακόμα, πολύ σημαντικό θα ήταν να γίνουν οι αλλαγές που προτείνονται προηγουμένως και το νέο πλέον εργαλείο να εφαρμοστεί πάλι πιλοτικά σε ικανοποιητικό δείγμα, με σκοπό τη μετέπειτα στάθμισή του. Με αυτόν τον τρόπο, θα μπορέσει να αποτελέσει ένα καλό εργαλείο στα χέρια του εκπαιδευτικού της τάξης.

Τέλος, μια ακόμα πρόταση είναι η διερεύνηση της δυσκολίας ή/και επίδοσης των μαθητών στις επιμέρους κατηγορίες της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας. Αυτά τα ερευνητικά δεδομένα θα συνέβαλαν σημαντικά στο να δοθεί περισσότερη προσοχή από τους νηπιαγωγούς σε κάποια κατηγορία μαθηματικής γνώσης, στην οποία ορισμένοι μαθητές πιθανά να αντιμετωπίζουν δυσκολίες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Aunio, P., Aubrey, C., Godfrey, R., Pan, Y., & Liu, Y. (2008). Children's early numeracy in England, Finland and People's Republic of China. *International Journal of Early Years Education*, *16*(3), 203-221.
- Barnes, M. A., Klein, A., Swank, P., Starkey, P., McCandliss, B., Flynn, K., Zucker, T., Huang, C.W., Fall, A., M. & Roberts, G. (2016). Effects of tutorial interventions in mathematics and attention for low-performing preschool children. *Journal of Research on Educational Effectiveness*, *9*(4), 577-606.
- Baroody, A. J., Clements, D. H., & Sarama, J. (2019). Teaching and learning mathematics in early childhood programs. *Handbook of early childhood care and education*, 329-353.
- Bliss, S. (2006). Test of early mathematics ability–Third edition. *Journal of psychoeducational Assessment*, *24*(1), 85-98.
- Bond, T. G., & Fox, C. M. (2001). *Applying the Rasch Model: Fundamental Measurement in the Human Sciences.* Mahwah, N.J. : Lawrence Erlbaum Associates.
- Boone, W. J. (2016). Rasch analysis for instrument development: Why, when, and how?. *CBE—Life Sciences Education*, *15*(4).
- Bourdeaud'Hui, H., Aesaert, K., & van Braak, J. (2021). Exploring the validity of a comprehensive listening test to identify differences in primary school students' listening skills. *Language Assessment Quarterly*, *18*(3), 228-252.
- Carr, M., Steiner, H. H., Kyser, B., & Biddlecomb, B. (2008). A comparison of predictors of early emerging gender differences in mathematics competency. *Learning and Individual Differences*, *18*(1), 61-75.
- Clarke, B., Cheeseman, J., & Clarke, D. (2006). The mathematical knowledge and understanding young children bring to school. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(1), 78-102.
- Clements, D. H. (2004). Major themes and recommendations. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*, 7-72.
- Clements, D. H. & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6, 81-89.

- Clements, D. H., & Sarama, J. (2016). Math, science, and technology in the early grades. *The Future of Children*, *26*(2), 75–94. https://doi.org/10.1353/foc.2016.0013
- Clements, D.H., Sarama, J.H., & Liu, X.H. (2008). Development of a measure of early mathematics achievement using the Rasch model: The research-based early mathematics assessment. *Educational Psychology*, *28*(4), 457–482.
- Clements, D. H., Sarama, J., & Wolfe, C. B. (2011). *TEAM—Tools for Early Assessment in Mathematics.* Columbus, OH: McGraw-Hill Education.
- ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ (2003). Διαθεματικό ενιαίο πλαίσιο προγραμμάτων σπουδών και αναλυτικά προγράμματα σπουδών υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, ΦΕΚ 304Β/13-03-2003. Ανακτήθηκε από: http://www.pi-schools.gr/programs/depps/
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., & Courey, S. J. (2005). Curriculum-based measurement of mathematics competence: From computation to concepts and applications to real-life problem solving. *Assessment for Effective Intervention*, *30*(2), 33-46.
- Ginsburg, H. (2002). Little Children, Big Mathematics: Learning and Teaching in the PreSchool. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 003-014). Norwich: UEA, Norwich. Ανακτήθηκε από: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED476078.pdf
- Ginsburg, H. P., Cannon, J., Eisenband, J., & Pappas, S. (2006). Mathematical Thinking and Learning. *Blackwell Handbook of Early Childhood Development*, 208-229.
- Guss, S. S., Clements, D. H., & Sarama, J. H. (2022). High-Quality Early Math: Learning and Teaching With Trajectories and Technologies. In *Handbook of Research on Innovative Approaches to Early Childhood Development and School Readiness*, 349-373. IGI Global.
- Gustafsson, J. E. (1980). Testing and obtaining fit of data to the Rasch model. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, *33*(2), 205-233.
- Hoffman, H., & Grialou, T. (2005). Test of Early Mathematics Ability (3rd ed.) by Ginsburg, H. P., & Baroody, A. J. (2003). Austin, TX: PRO-ED. *Assessment for Effective Intervention*, *30*(4), 57–60.
- Ινστιτούτο, Π. (2011). ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα)-Νέο Πρόγραμμα Σπουδών , στους Άξονες Προτεραιότητας 1, 2, 3 - Οριζόντια Πράξη», με κωδικό MIS 295450. *Εκπόνηση Προγραμμάτων Σπουδών Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας*

Εκπαίδευσης και οδηγών για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων». Ανακτήθηκε από: *www.pdeionion.gr/wp-content/uploads/2019/03/2011-2ο-ΜΕΡΟΣ-Π.Σ.-ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟΥ.pdf*

- Jordan, N. C., Glutting, J., Dyson, N., Hassinger-Das, B., & Irwin, C. (2012). Building kindergartners' number sense: A randomized controlled study. *Journal of educational psychology*, *104*(3), 647-660.
- Jordan, N. C., Glutting, J., & Ramineni, C. (2010). The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences*, *20(*2), 82–88. https://doi:10.1016/j.lindif.2009.07.004
- Jordan, N. C., Glutting J., Ramineni C., & Watkins M., W. (2010). Validating a Number Sense Screening Tool for Use in Kindergarten and First Grade: Prediction of Mathematics Proficiency in Third Grade, *School Psychology Review*, *39*(2), 181-195.
- Jordan, N. C., Kaplan, D., Locuniak, M. N., & Ramineni, C. (2007). Predicting first-grade math achievement from developmental number sense trajectories. *Learning Disabilities Research and Practice*, *22*(1), 36–46.
- Jordan, N. C., Kaplan, D., Olah, L., & Locuniak, M. N. (2006). Number sense growth in kindergarten: A longitudinal investigation of children at risk for mathematics difficulties. Child Development, 77, 153–175.
- Lachance, J. A., & Mazzocco, M. M. (2006). A longitudinal analysis of sex differences in math and spatial skills in primary school age children. *Learning and individual differences*, *16*(3), 195-216.
- LeFevre, J.-A., Fast, L., Skwarchuk, S.-L., Smith-Chant, B. L., Bisanz, J., Kamawar, D., & Penner-Wilger, M. (2010). Pathways to mathematics: Longitudinal predictors of performance. *Child Development*, *81*(6), 1753–1767. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2010.01508.x
- Λεμονίδης, Χ. (2015). Παρουσίαση, ανάλυση και σύγκριση του ισχύοντος και δύο σύγχρονων Προγραμμάτων Σπουδών της Γεωμετρίας. Προσκεκλημένη ομιλία στο *13ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Χώρος και Γεωμετρία στην προσχολική και σχολική εκπαίδευση*. 8-9 Μαΐου, Θες/νίκη.
- Lindner, H. Y., Linacre, J. M., & Hermansson, L. (2009). Assessment of capacity for myoelectric control: evaluation of construct and rating scale. *Journal of Rehabilitation Medicine*, *41*(6), 467-474.

- Litkowski, E. C., Duncan, R. J., Logan, J. A., & Purpura, D. J. (2020). When do preschoolers learn specific mathematics skills? Mapping the development of early numeracy knowledge. *Journal of experimental child psychology, 195,* 104846.
- Liu, Y., Douglas, J. A., & Henson, R. A. (2009). Testing person fit in cognitive diagnosis. *Applied psychological measurement, 33*(8), 579-598.
- Μπάρμπας, Γ., Βερμέουλεν, Φ., Κιοσέογλου Γ. & Μενεξές Γ. (2008). *Ψυχομετρικό κριτήριο πρώιμης μαθηματικής επάρκειας της Ουτρέχτης (προσαρμογή – στάθμιση)*, στο πλαίσιο του έργου ΕΠΕΑΕΚ «Ψυχομετρική - διαφορική αξιολόγηση παιδιών και εφήβων με μαθησιακές δυσκολίες», Θεσσαλονίκη.
- Milburn, T. F., Lonigan, C. J., DeFlorio, L., & Klein, A. (2019). Dimensionality of preschoolers' informal mathematical abilities. *Early childhood research quarterly, 47,* 487-495.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In *3rd Mediterranean conference on mathematical education*, 115-124.
- Niss, M., & Højgaard, T. (2011). Competencies and mathematical learning. *Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark, 485*.
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, *102*, 9-28.
- Nguyen, T., Watts, T. W., Duncan, G. J., Clements, D. H., Sarama, J. S., Wolfe, C., & Spitler, M. E. (2016). Which preschool mathematics competencies are most predictive of fifth grade achievement?. *Early childhood research quarterly, 36,* 550-560.
- Papic, M. M., Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(3), 237-268.
- Πεντέρη, Ε., Χλαπάνα, Ε., Μέλλιου, Κ., Φιλιππίδη, Α., & Μαρινάτου, Θ. (2022). Πρόγραμμα Σπουδών Για την Προσχολική Εκπαίδευση – Διευρυμένη Εκδοχή (2η Έκδοση, 2022 ΙΕΠ). Στο πλαίσιο της Πράξης «*Αναβάθμιση των Προγραμμάτων*

Σπουδών και Δημιουργία Εκπαιδευτικού Υλικού Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης» του ΙΕΠ με MIS 5035542.

- Peltier, C., Vannest, K. J., Tomaszewski, B. R., Morin, K., Sallese, M. R., & Pulos, J. M. (2020). Criterion validity of a computer adaptive universal screener to an end-of-year state mathematics assessment. *Exceptionality*, 1-17.
- Πετρίδης, Δ. (2015). *Ανάλυση πολυμεταβλητών τεχνικών* [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. Ανακτήθηκε από: https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/2126/3/petridis(whole)_KOY.pdf
- Purpura, D. J., & Lonigan, C. J. (2015). Early numeracy assessment: The development of the preschool early numeracy scales. *Early education and development*, *26*(2), 286-313.
- Purpura, D. J., Reid, E. E., Eiland, M. D., & Baroody, A. J. (2015). Using a brief preschool early numeracy skills screener to identify young children with mathematics difficulties. *School Psychology Review*, *44*(1), 41-59.
- Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Hofer, K. G., & Farran, D. C. (2017). Early math trajectories: Low-income children's mathematics knowledge from ages 4 to 11. *Child Development*, *88*(5), 1727-1742.
- Swain, M., Randel, B., & Norman Dvorak, R. (2020). Impact Evaluation of Mathematics" i-Ready Instruction" for Elementary Grades Using 2018-19 Data. Final Report. No. 106. *Human Resources Research Organization (HumRRO)*.
- Τζεκάκη, Μ. (2011). Μαθηματική Δραστηριότητα και Μαθηματικά Έργα. (Κεντρική Ομιλία). Στο Καλδρυμίδου, Μ. & Βαμβακούση, Ξ. (επιμ.). Πρακτικά από το 4ο Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών, 51-66. Ιωάννινα, ΕΝΕΔΙΜ - Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.
- Tsigilis, N., Krousorati, K., Gregoriadis, A. & Grammatikopoulos, V. (2023). Psychometric Evaluation of the Preschool Early Numeracy Skills Test–Brief Version within the Item Response Theory Framework. *Educational Measurement: Issues and Practice*, *42*(2), 32-41.
- Van de Rijt, B. A. M., Van Luit, J. E. H., & Pennings, A. H. (1999). The construction of the Utrecht early mathematical competence scales. *Educational and psychological measurement*, *59*(2), 289-309.

- Villarreal, V. (2015). Test Review: Schrank, F. A., Mather, N., & McGrew, K. S. (2014). Woodcock-Johnson IV Tests of Achievement. *Journal of Psychoeducational Assessment*, *33*(4), 391–398. https://doi.org/10.1177/0734282915569447
- Watts, T. W., Duncan, G. J., Siegler, R. S., & Davis-Kean, P. E. (2014). What's past is prologue: Relations between early mathematics knowledge and high school achievement. *Educational Researcher*, *43*(7), 352-360.
- Weiland, C., & Yoshikawa, H. (2013). Impacts of a prekindergarten program on children's mathematics, language, literacy, executive function, and emotional skills. *Child development*, *84*(6), 2112-2130.
- Weiland, C., Wolfe, C. B., Hurwitz, M. D., Clements, D. H., Sarama, J. H., & Yoshikawa, H. (2012). Early mathematics assessment: Validation of the short form of a prekindergarten and kindergarten mathematics measure. *Educational Psychology*, *32*(3), 311-333.
- Wright, R. J., Martland, J., & Stafford, A. K. (2006). *Early numeracy: Assessment for teaching and intervention*. Sage.
- Χαρίση, Μ. Α. (2018). *Φύλο και μαθηματική επάρκεια* (Μεταπτυχιακή εργασία).
- Zippert, E. L., Douglas, A.-A., & Rittle-Johnson, B. (2020). *Finding patterns in objects and numbers: Repeating patterning in pre-K predicts kindergarten mathematics knowledge. Journal of Experimental Child Psychology, 200,* 104965. https://doi:10.1016/j.jecp.2020.104965

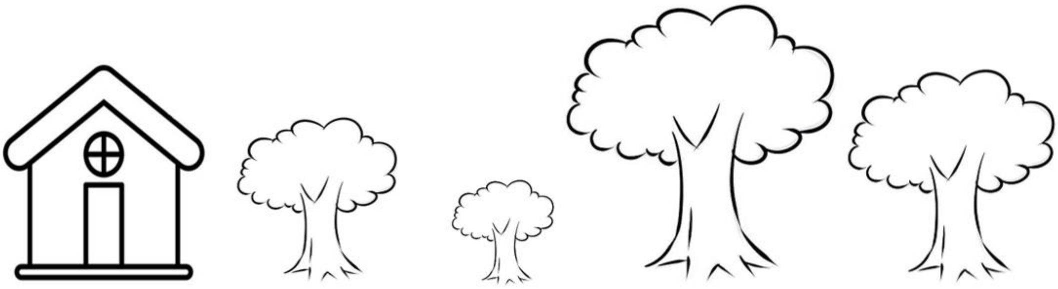
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1:

ΣΥΝΤΟΜΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ (ΣΕΜΜΕΝ)

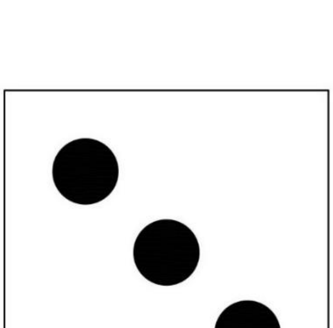
(ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΗΛΙΚΙΑΣ 4-6)

ΕΡΓΟ 1ο : Μπορείς να μετρήσεις μέχρι το 5;

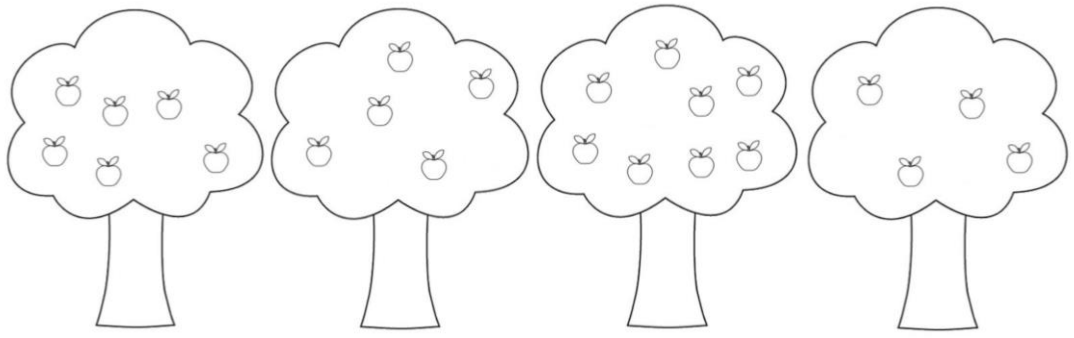
ΕΡΓΟ 2ο : Μπορείς να μου δείξεις με το δάχτυλό σου, το δέντρο που είναι πιο ψηλό από το σπίτι της εικόνας;



ΕΡΓΟ 3ο : Θα σου δείξω, για λίγο μόνο, μια εικόνα που θα έχει πάνω βούλες, όπως τα ζάρια. Θέλω να την κοιτάξεις προσεκτικά, και όταν την κρύψω να μου πεις, πόσες βούλες είδες. *(Δείχνω την εικόνα για 2 δευτερόλεπτα μόνο).*

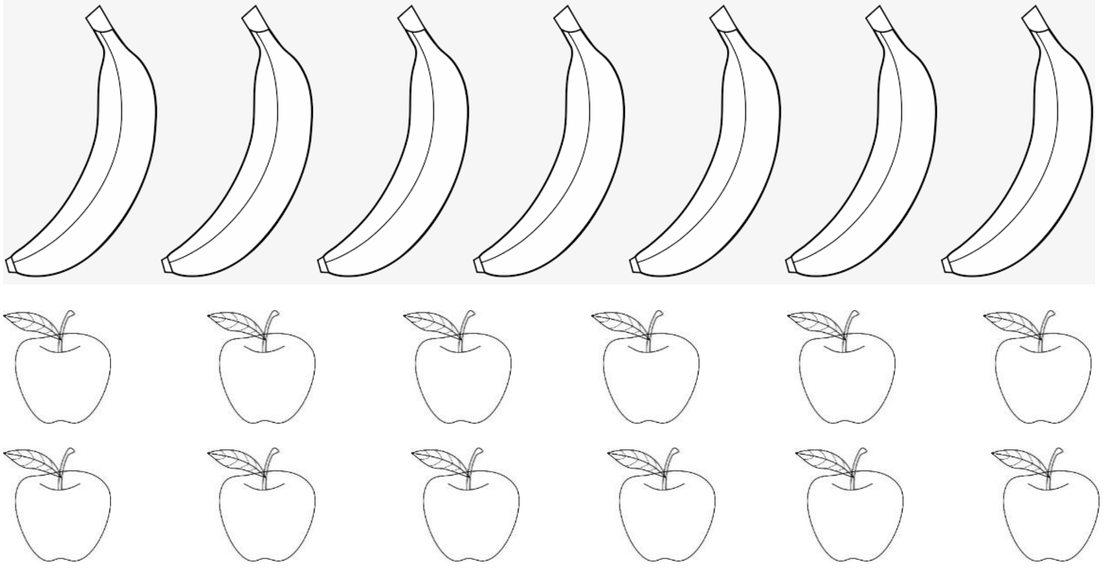


ΕΡΓΟ 4ο : Μπορείς να μου δείξεις με το δάχτυλό σου το δέντρο που έχει περισσότερα μήλα πάνω του;



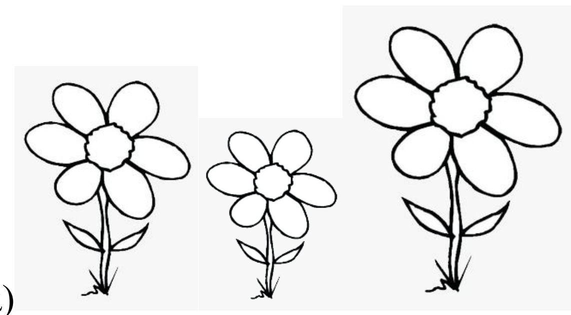
ΕΡΓΟ 5ο : Μπορείς να μετρήσεις μέχρι το 20;

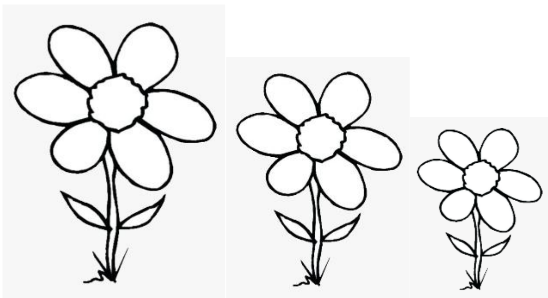
ΕΡΓΟ 6ο : Πήγα στο μανάβικο και εδώ βλέπεις πόσα φρούτα πήρα. Μπορείς να τα μετρήσεις ένα-ένα με το δάχτυλό σου και να μου πεις πόσες μπανάνες και πόσα μήλα αγόρασα;

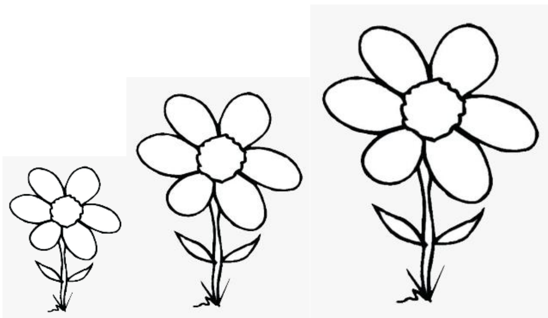


ΕΡΓΟ 7ο : Τα παιδάκια περιμένουν στη σειρά για να μπούνε μέσα στο σχολικό λεωφορείο. Δείξε μου με το δάχτυλό σου ποιο παιδάκι θα μπει δεύτερο στο λεωφορείο;

ΕΡΓΟ 8ο : Εδώ βλέπεις 3 εικόνες με λουλούδια στη σειρά. Θέλω να μου δείξεις με το δάχτυλό σου την εικόνα στην οποία τα λουλούδια είναι στη σειρά από το μεγαλύτερο στο μικρότερο.

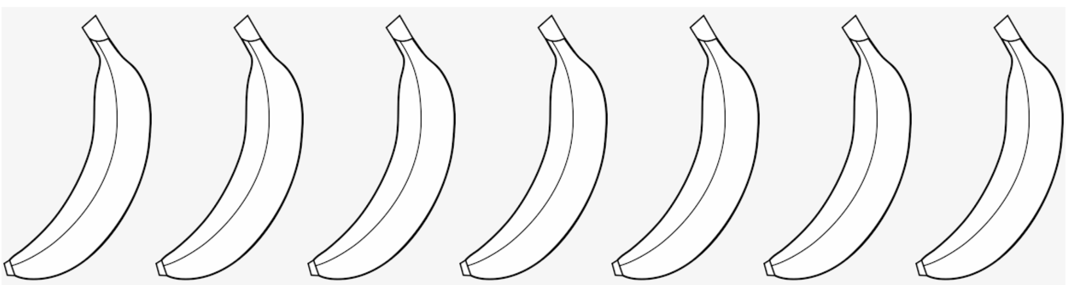
(α) 

(β) 

(γ) 

ΕΡΓΟ 9ο: Με ένα μολύβι να τραβήξεις γραμμή και να ενώσεις το αστέρι/τα αστέρια που έχει κάθε αριθμός.

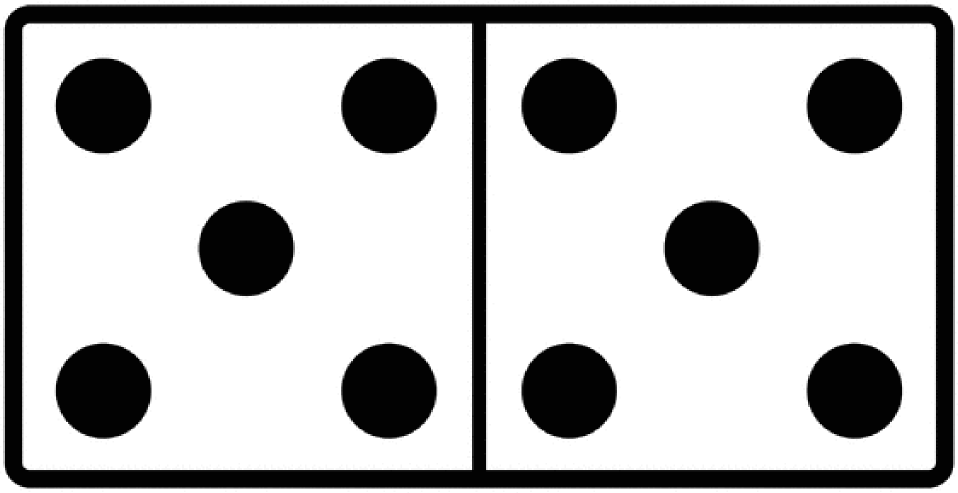
ΕΡΓΟ 10ο : Όπως είδες και πριν, αγόρασα 7 μπανάνες. Τώρα θα κρύψω μερικές, χωρίς να με δεις, και θέλω εσύ να μου πεις πόσες κρύβω κάτω από το χαρτάκι. *(Κρύβω 3 μπανάνες με το χαρτάκι)*



ΕΡΓΟ 11ο : Κάνεις πάρτι για τα γενέθλια σου. Ο/η φίλος/η σου σε βοηθάει με τα μπαλόνια. Εσύ φούσκωσες 4 μπαλόνια και ο/η φίλος/η σου φούσκωσε 2 μπαλόνια. Πόσα μπαλόνια έχετε φουσκώσει μαζί;

ΕΡΓΟ 12ο : Μπορείς να μου πεις ποιος αριθμός είναι μετά το 12; Μπορείς να μου πεις τώρα ποιος αριθμός είναι πριν το 8;

ΕΡΓΟ 13ο : Θα σου δείξω πάλι, για λίγο μόνο, μια εικόνα που θα έχει πάνω βούλες, όπως στο ντόμινο. Θέλω να την κοιτάξεις προσεκτικά, και όταν την κρύψω να μου πεις, πόσες βούλες είδες. *(Δείχνω την εικόνα για 2 δευτερόλεπτα μόνο).*



ΕΡΓΟ 14ο : Μπορείς να μετρήσεις ανάποδα; Ξεκίνα από το 10 και φτάσε έως το 1.

ΕΡΓΟ 15ο : Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος: το 11 ή το 16;

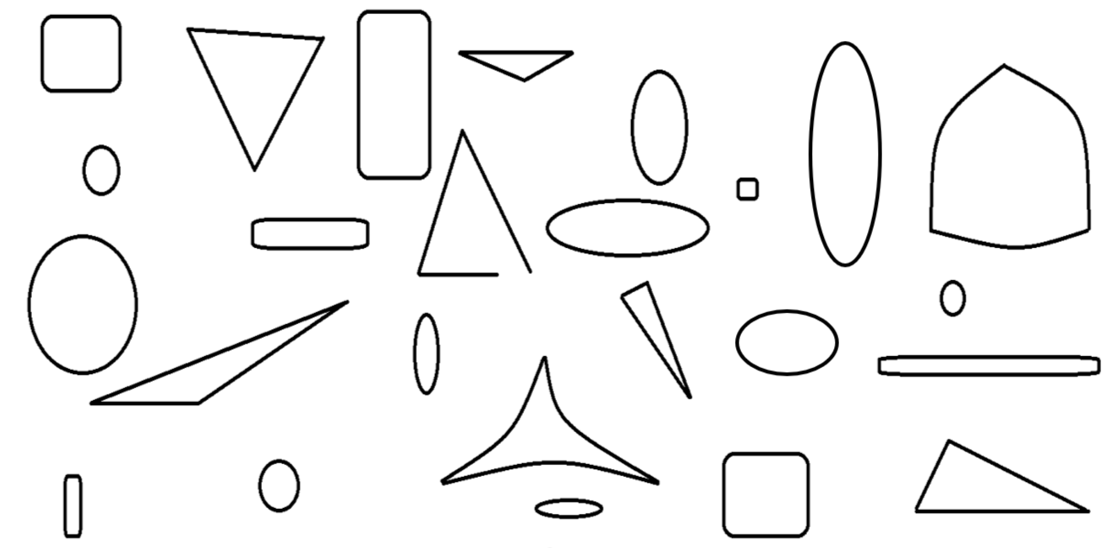
ΕΡΓΟ 16ο : Ποιος από αυτούς τους αριθμούς είναι πιο κοντά στο 6;

4 9 2 7

ΕΡΓΟ 17ο : Είχες 6 φράουλες και έδωσες στον/στη φίλο/η σου τις 3. Πόσες φράουλες έχεις τώρα;

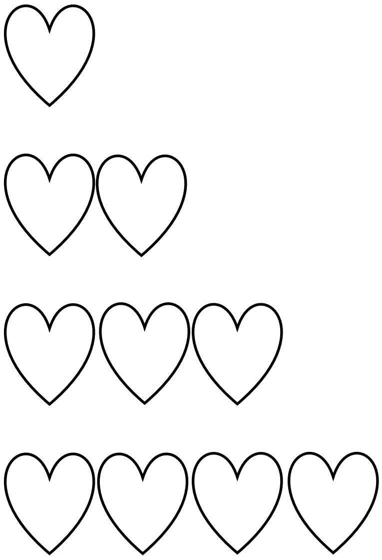
ΕΡΓΟ 18ο : Πόσο κάνει 2 + 2;

ΕΡΓΟ 19ο : Μπορείς να κυκλώσεις με το μολύβι όλα τα τρίγωνα;

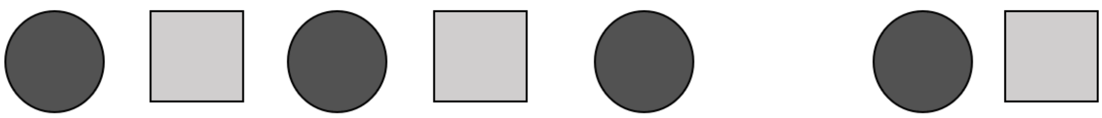


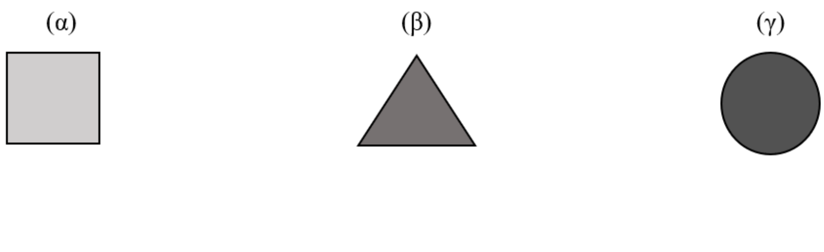
ΕΡΓΟ 20ο : Έφτιαξα αυτό το μοτίβο με τον ήλιο και το φεγγάρι. Μπορείς σε παρακαλώ να τελειώσεις το μοτίβο, όπως θα έκανα εγώ;

ΕΡΓΟ 21^{ο} : Έφτιαξα αυτό το μοτίβο με καρδιές. Μπορείς σε παρακαλώ να το συνεχίσεις, όπως θα έκανα εγώ;



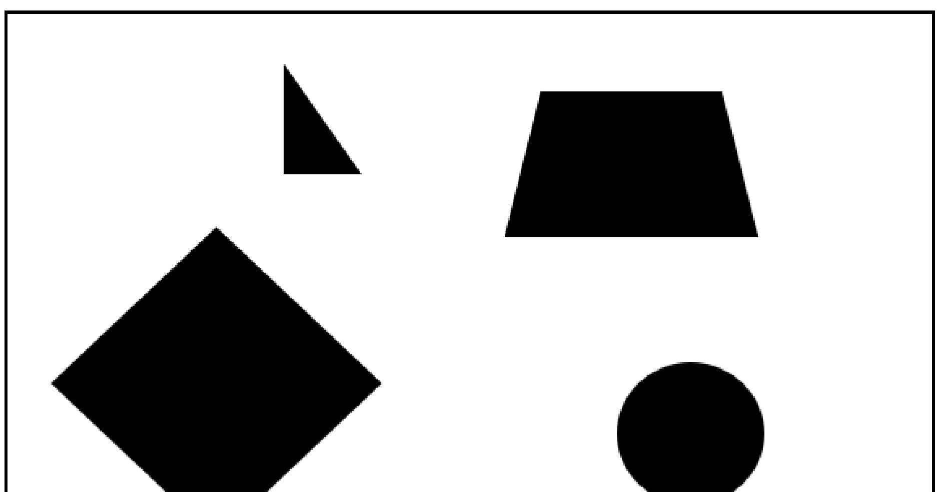
ΕΡΓΟ 22^{ο} : Έφτιαξα αυτό το μοτίβο με αυτά τα σχήματα. Αλλά ένα σχήμα σβήστηκε. Μπορείς να κυκλώσεις με το μολύβι σου το σχήμα που ταιριάζει εδώ; *(δείχνω με το δάχτυλό μου το κενό)*





ΕΡΓΟ 23^{ο} : Αν ενώσεις αυτές τις βούλες με γραμμές, μπορείς να μου πεις τι σχήμα θα βγει;

ΕΡΓΟ 24^{ο} : Φαντάσου ότι αυτό είναι το πάτωμα *(δείχνω με το δάχτυλό μου το ορθογώνιο)*. Αυτά τα αντικείμενα τα έχουμε βάλει πάνω στο πάτωμα. Ποιο από αυτά καλύπτει τον περισσότερο χώρο στο πάτωμα;



ΕΡΓΟ 25ο : Αν αυτό το τετράγωνο το χωρίσω στη μέση, ποια δύο σχήματα μπορούν να βγουν; *(παρέχω βοήθεια αν χρειαστεί στο «χώρισμα», χωρίς να κατευθύνω τον τρόπο χωρίσματος. Αφήνω τον μαθητή να επιλέξει πως προτιμά, δηλαδή διαγώνια ή κάθετα)*