ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ -ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Πτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Η έννοια της χρήσης του κρατούμενου στην πρόσθεση και την αφαίρεση με τη χρήση του κινέζικου άβακα σε εφαρμογή android.

Της φοιτήτριας: Σακελλαρίου Μάρθας

Επιβλέπον καθηγητής: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος

ΦΛΩΡΙΝΑ 2023

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ -ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Η έννοια της χρήσης του κρατούμενου στην πρόσθεση και την αφαίρεση με τη χρήση του κινέζικου άβακα σε εφαρμογή android.

Σακελλαρίου Μάρθα

Επιτροπή επίβλεψης Πτυχιακής Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπον Καθηγητής:	Συν-Επιβλέπον:
Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος	Μπράτιτσης Θαρρενός
Καθηγητής	Καθηγητής

Η συγγραφέας Σακελλαρίου Μάρθα βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος έργου είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας και ότι έχει γίνει η κατάλληλη αναφορά στις εργασίες τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία έχει σκοπό να διερευνήσει αν οι μαθητές/τριες της Β΄τάξης ενός Δημοτικού Σχολείου γνωρίζουν την έννοια του κρατουμένου στην πρόσθεση και αφαίρεση στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Επίσης, επιδιώκεται η διαπίστωση κατά πόσο είναι δυνατόν να συμβάλει ο κινέζικος άβακας σε ηλεκτρονική έκδοση, ο οποίος ως χειραπτικό υλικό προέρχεται από την ιστορία των μαθηματικών, μπορεί να αυξήσει τις ικανότητες των μαθητών στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Στο πλαίσιο αυτό σχεδιάστηκε μια διδακτική παρέμβαση με βάση τον κινέζικο άβακα. Επιπλέον, σε αυτή ενσωματώθηκαν και στοιχεία της ιστορίας των μαθηματικών. Η παρέμβαση εφαρμόστηκε σε 5 μαθητές/τριες και αξιολογήθηκε θετικά ως προς τη συνεισφορά του κινέζικου άβακα στην επίτευξη των στόχων της έρευνας.

Λέξεις Κλειδιά: Κινέζικος άβακας, κρατούμενο, πρόσθεση, αφαίρεση, mobile learning

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή

Η επιστήμη των μαθηματικών παρουσιάζει στους μαθητές έννοιες, δεξιότητες και στρατηγικές σκέψης που είναι αναγκαίες για την καθημερινή ζωή και ενισχύουν τη μάθηση και σε άλλα διδακτικά αντικείμενα. Βοηθούν τα παιδιά να αντιληφθούν τις έννοιες των αριθμών, των μοτίβων και των σχημάτων που παρατηρούν γύρω τους. Ακόμη, προτείνει τρόπους αξιοποίησης των δεδομένων σε έναν κόσμο που όσο περνάνε τα χρόνια γίνεται ολοένα και πιο ψηφιακός και συνιστά μια κρίσιμη συμβολή στην εξέλιξή τους ως επιτυχημένων ατόμων. Στους μαθητές αρέσει η ενασχόληση με τα μαθηματικά όταν περιλαμβάνει επίλυση ενός προβλήματος, ειδικότερα όταν μέσω αυτής της διαδικασίας οδηγούνται σε μη αναμενόμενες ανακαλύψεις ή σε καινούργιες συνδέσεις. Με το πέρασμα του χρόνου, αυξάνεται η αυτοπεποίθηση τους και διεξάγεται αυθόρμητα η αναζήτηση μοτίβων, η αξιοποίηση λογικών συλλογισμών, η διατύπωση λύσεων και η εφαρμογή εναλλακτικών προσεγγίσεων σε προβλήματα.

Η επιστήμη των μαθηματικών δίνει τη δυνατότητα για μια καθοριστικής σημασίας κατανόηση του κόσμου που μας περιβάλει. Οι μαθητές εξασκούνται στο να ερευνούν και να τεκμηριώνουν για τις απόψεις τους κάνοντας χρήση συμβόλων, γραφημάτων αλλά και εξειδικευμένου λόγου. Τα μαθηματικά υπάρχουν εδώ και πολύ καιρό και μας έχουν βοηθήσει με πολλούς τρόπους. Η μελέτη των μαθηματικών βοηθά τα παιδιά να αναπτύξουν κριτική σκέψη, επίλυση προβλημάτων και ενισχύει τη δημιουργικότητά τους. Αυτό το τρίπτυχο σχετίζεται με αυτό που συχνά αναφέρεται ως ωφελιμιστικοί στόχοι. Τους διδάσκει, επίσης, πώς διαμορφώθηκε η οικονομία, η κοινωνία και ο πολιτισμός μας μέσω των μαθηματικών.

Για την διδασκαλία των μαθηματικών από την αρχαιότητα έχουν κατασκευαστεί και αξιοποιηθεί διάφορα εργαλεία. Τα εργαλεία αυτά έχουν συνήθως υλική υπόσταση ώστε να επιτυγχάνεται η οπτικοποίηση των αφηρημένων εννοιών. Οι εκπαιδευτικοί βρίσκουν συχνά χρήσιμο να χρησιμοποιούν χειραπτικά αντικείμενα για να διδάσκουν έννοιες μαθηματικών, επειδή αυτές οι έννοιες μπορούν να απεικονιστούν πιο εύκολα στο μυαλό των μαθητών. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα όταν διδάσκονται πιο αφηρημένες έννοιες.

Ένα εξ αυτών των χειραπτικών αντικειμένων είναι και ο άβακας, ένα δημοφιλές μέσο εδώ και αιώνες για την εκτέλεση αριθμητικών πράξεων, ο οποίος πλέον μπορεί να βρεθεί και σε ηλεκτρονική έκδοση. Ο άβακας χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα σε διάφορες χώρες ανά τον κόσμο. Ωστόσο, δεν έχει εξεταστεί κατά πόσο η ηλεκτρονική του έκδοση μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στο μάθημα των μαθηματικών και ιδίως στην καλύτερη κατανόηση της αξίας θέσης ψηφίου, όπως αυτή γίνεται αντιληπτή από την έννοια της χρήσης του κρατούμενου στην πρόσθεση και την αφαίρεση. Για τον λόγο αυτό διεξάγεται και η παρούσα εργασία.

Η εργασία αποτελείται συνολικά από τέσσερα κεφάλαια, συμπεριλαμβανομένου του παρόντος. Το επόμενο κεφάλαιο συνιστά το θεωρητικό πλαίσιο, όπου αναλύονται η αντίληψη του αριθμού και η αξία θέσης ψηφίου, η διδασκαλία με τη χρήση της τεχνολογίας με έμφαση στην κινητή μάθηση, καθώς και η χρήση και αποτελεσματικότητα των χειραπτικών υλικών στο μάθημα των μαθηματικών με έμφαση στον άβακα. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μέθοδος που ακολουθήθηκε για τη διεξαγωγή αυτής της έρευνας, καθώς και τα αποτελέσματα αυτής. Η συζήτηση των αποτελεσμάτων, τα τελικά συμπεράσματα της έρευνας και οι προτάσεις πρακτικής εφαρμογής και περαιτέρω έρευνας αποτελούν αντικείμενο του τέταρτου και τελευταίου κεφαλαίου αυτής της εργασίας.

2. Θεωρητικό πλαίσιο

2.1 Η αντίληψη του αριθμού

Η αίσθηση (αντίληψη) του αριθμού είναι μια περίπλοκη έννοια που μπορεί να ερμηνευθεί με ποικίλους τρόπους, για αυτό και έχουν διατυπωθεί πολλοί ορισμοί από διάφορους ερευνητές. Εξαιτίας αυτού, έχουν γίνει πολλές συζητήσεις μεταξύ εκπαιδευτικών, παιδαγωγών, σχεδιαστών προγραμμάτων σπουδών, ερευνητών και γνωστικών ψυχολόγων (Reys, Reys, Emanuelsson, Johansson, McIntosh & Yang, 1999).

Στις αναλύσεις αυτές καλύπτονται αρχικά οι βασικές αρχές της ορολογίας. Ακόμη, άλλα θέματα που αναλύονται είναι οι περιγραφές των μαθηματικών γνωρισμάτων σε μαθητές που διαθέτουν ή όχι σαφή αντίληψη του αριθμού και οι συνιστώμενες βαθμίδες της αντίληψης του αριθμού που αφορούν τον νοερό σχηματισμό των ακέραιων αριθμών από τα μαθητές ηλικίας 6 έως 12 ετών. Τέλος, σημαντική είναι και η συμπερίληψη της ανάλυση της σχετικής ορολογίας από επαγγελματίες ψυχικής υγείας, καθώς και οι διαβουλεύσεις αναφορικά με στρατηγικές διδασκαλίας που προωθούν την ανάπτυξη της αντίληψης του αριθμού (Reys et al., 1999).

Το υφιστάμενο αναλυτικό πρόγραμμα της δημοτικής εκπαίδευσης δίνει ιδιαίτερη βαρύτητα στην ανάπτυξη της αντίληψη του αριθμού. Η προσπάθεια οριοθέτησης αυτής της έννοιας είναι δύσκολο να αποτυπωθεί πρακτικά. Ωστόσο, περικλείει έννοιες με κοινό χαρακτηριστικό την δεξιότητα κατανόησης αριθμών και την εκτέλεση νοερών πράξεων, αποκλείοντας την αξιοποίηση σχετικών αλγορίθμων (Κολέζα, 2009, σελ. 255).

Αρκετά ιστορικά στοιχεία αναφέρουν ότι η έννοια «ποσοτική διαίσθηση» αποτελεί μια πρωταρχική απόδοση του όρου (Koleza & Koleli, 2014). Πιο μετά εμφανίστηκε ο όρος «αντίληψη του αριθμού» με απώτερο στόχο τον «αριθμητισμό» που χρησιμοποιήθηκε στη συνέχεια (McIntosh, Reys, & Reys, 1992).

Από το 1976 οι ερευνητές είχαν καταλήξει ότι απαραίτητη προϋπόθεση ώστε τα παιδιά να είναι σε θέση να αντιληφθούν την ποσότητα είναι η ακριβής εκτίμηση, κάτι το οποίο συνιστά την αντίληψη του αριθμού (Sowder, 1992). Ακόμη, οι Reys et al. (1982) στην προσπάθειά τους να διερευνήσουν τα γνωρίσματα των μαθητών που προβαίνουν σε εκτιμήσεις σωστές και με μεγάλη επιτυχία, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η αντίληψη του αριθμού έχει άμεση σχέση με την κατανόηση των δομικών λειτουργιών των πράξεων καθώς και της γνώσης της αξίας θέσης ψηφίου με τον υπολογισμό του αποτελέσματος. Μέσω της ίδιας έρευνας αποδείχτηκε ότι η αντίληψη του αριθμού σχετίζεται άμεσα και με την δυσκολία κατανόησης της λανθασμένης εκτίμησης. Σε αυτό συνηγορεί και η έρευνα της Threadgill-Sowder (1984), η οποία καταλήγει στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές που δίνουν εκτιμήσεις εντός λογικού πλαισίου φαίνεται να έχουν καλύτερη αντίληψη του αριθμού, σε αντίθεση με τις απαντήσει όσων ήταν εκτός ενός λογικού πλαισίου.

Η προσπάθεια οριοθέτησης της αντίληψης του αριθμού εμπεριέχει την ερμηνεία των αριθμών και των αριθμητικών σχέσεων αλλά και τις ποικίλες χρήσεις τους (McIntosh et al., 1992; Reys, & Yang 1998). Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση των Reys και Yang, οι οποίοι θεωρούν ότι στην έννοια της αντίληψης του αριθμού εμπεριέχονται οι λογικές εκτιμήσεις και κατά πόσο οι μαθητές είναι ικανοί να κάνουν έναν σωστό υπολογισμό μέσω της εκτίμησης. Παρεμφερή είναι και τα ερευνητικά αποτελέσματα σύμφωνα με τα οποία το παιδί μαθαίνει και κατανοεί μαθηματικά επί της ουσίας όταν στην πράξη έχει αίσθηση του αριθμού (Λεμονίδης, 2013). Η αντίληψη του αριθμού είναι το σημαντικό εκείνο στοιχείο που καθορίζει το κατά πόσο θα γίνουν κατανοητές οι αριθμητικές σχέσεις και κατά πόσο θα ανακύψουν δυσκολίες κατά την εκτέλεση των μαθηματικών πράξεων.

Η ερευνητική δραστηριότητα (McIntosh et al., 1992; Anghileri, 2000) έχει δείξει ότι είναι ουσιώδης η προσαρμοστικότητα στην δημιουργία τεχνικών για την ανάπτυξη της αντίληψης του αριθμού. Η έρευνα των McIntosh et al. (1992) κατέδειξε ότι υπάρχει άμεση σχέση ανάμεσα στους τρόπους και τις τεχνικές που χρησιμοποιεί κανείς για να ανταπεξέλθει σε ποικίλες αριθμητικές καταστάσεις και την γενική αντίληψη του αριθμού. Ειδικότερα, επικεντρώθηκε στους τρόπους που το άτομο αξιοποιεί την ίδια την αντίληψη για τον αριθμό ώστε να προσαρμόζεται στις εκάστοτε απαιτήσεις που σχετίζονται με τις αριθμητικές καταστάσεις. Η έρευνα του Anghileri (2000) ανέδειξε ότι όταν οι μαθητές επιτυγχάνουν να σκέφτονται με μαθηματικούς συλλογισμούς, τότε αντλούν την προσαρμοστικότητά τους από την αντίληψη του αριθμού.

Υπάρχουν έρευνες που έχουν δείξει ότι η αντίληψη του αριθμού έχει άμεση σχέση με τους προσεγγιστικούς υπολογισμούς, αποτελώντας ειδικότερα ένα στοιχείο της διαδικασίας των προσεγγιστικών υπολογισμών (Siegler, & Booth, 2005; Sowder, 1992). Ωστόσο άλλοι ερευνητές θεωρούν ότι προσεγγιστικοί υπολογισμοί είναι τμήμα της αντίληψης του αριθμού (Yang, 2005). Γενικότερα, μέσω της έρευνας διαπιστώνεται ότι οι νοεροί και προσεγγιστικοί υπολογισμοί είναι πρακτικά αδύνατο να διαχωριστούν από την έννοια της αντίληψης του αριθμού (Reyes et al., 1991). Έχει επίσης διαπιστωθεί ότι οι δυσκολίες στους προσεγγιστικούς υπολογισμούς μπορούν να καταδείξουν αντίστοιχες δυσκολίες στην αντίληψη του αριθμού (Reyes et al., 1991). Κατά συνέπεια οι νοεροί και προσεγγιστικοί υπολογισμοί δύναται να ενισχύσουν την αντίληψη του αριθμού. Στη βάση των ανωτέρω μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι, η αντίληψη του αριθμού είναι μια αφηρημένη έννοια που περιλαμβάνει τόσο τους νοερούς, όσο και τους προσεγγιστικούς υπολογισμούς.

Η αντίληψη του αριθμού έχει διερευνηθεί και μέσω των ρουτινών των νοερών υπολογισμών και των αριθμητικών προσεγγίσεων. Στη βάση αυτή η αντίληψη του αριθμού έχει περιγραφεί και ως οι διεργασίες που σχετίζονται με την λήψη αποφάσεων αναφορικά με ποσότητες, την εκτέλεση ορθών αριθμητικών εκτιμήσεων και την ενίσχυση της ικανότητας σωστών νοερών υπολογισμών Greeno (1991). Ακόμη, η αντίληψη του αριθμού έχει περιγραφεί και ως οι κατ’ εκτίμηση υπολογισμοί που δεν διαφέρουν αρκετά από τους νοερούς υπολογισμούς. Άλλωστε και στις δύο περιπτώσεις επιτελείται μία νοερή εκτέλεση.

Με άλλα λόγια, η ερευνητική δραστηριότητα έχει δείξει ότι οι νοεροί υπολογισμοί που έχουν ένα σαφές αποτέλεσμα όσο και οι κατά προσέγγιση υπολογισμοί που είναι πολύ κοντά στον σωστό υπολογισμό επιφέρουν καλύτερη ανάπτυξη της αντίληψης του αριθμού (McIntosh, 2004). Η εκμάθηση των υπολογισμών μέσω εκτίμησης ενισχύει την αντίληψη του αριθμού και τη συλλογιστική στα μαθηματικά γενικότερα (Tsao & Pan, 2011).

2.2 Η αξία θέσης ψηφίου

Η κατανόηση της αξίας της θέσης ψηφίου επηρεάζει την κατανόηση άλλων μαθηματικών εννοιών όπως η αίσθηση του αριθμού, ο ρητός αριθμός και η αναλογία (Brendefur, Strother & Rich, 2018). Όταν οι μαθητές μαθαίνουν για πρώτη φορά την ιδέα της θέσης ψηφίου δημιουργούν νόημα για την ομαδοποίηση των αριθμών, μία έννοια ιδιαίτερα σημαντική για τις αριθμητικές πράξεις και την κατανόηση μαθηματικών εννοιών (Disney & Eisenreich, 2018). Υποκείμενα χαρακτηριστικά της θέσης ψηφίου είναι η σχετική θέση (δεκάδες, εκατοντάδες, κ.λπ.), η ενοποίηση (η επίγνωση των μονάδων που είναι ένα κρίσιμο συστατικό για την ανάπτυξη κατανόησης και αίσθησης αριθμών) και η γλώσσα (πώς προφέρονται οι αριθμοί στη μητρική γλώσσα των μαθητών) (Brendefur et al., 2018). Άλλωστε, υποστηρίζεται πως ο λόγος (discourse) διαδραματίζει βασικό ρόλο βοηθώντας τα μικρά παιδιά να αναπτύξουν μια βαθιά κατανόηση των εννοιών της θέσης ψηφίου. Ο λόγος πρέπει να γίνεται αντιληπτός ως η διαδικασία στην οποία περνούν οι μαθητές για να κατανοήσουν τα μαθηματικά και όχι ως το εργαλείο που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να μιλήσουν για τα μαθηματικά (Disney & Eisenreich, 2018).

Κατά το παρελθόν υπήρχε η άποψη ότι η αξία θέσης ψηφίου είναι ένα πρόβλημα αναπαράστασης, δηλαδή ένα πρόβλημα διδασκαλίας κανόνων σχετικά με το ποιος αριθμός σε ποια στήλη αντιπροσωπεύει τις εκατοντάδες, τις δεκάδες κλπ. Η θεωρία και η έρευνα του Piaget σχετικά με τη φύση των εννοιών και της αναπαράστασης των αριθμών ισχυρίζεται ακριβώς το αντίθετο για τους εξής λόγους: α) οι έννοιες των αριθμών ανήκουν στη λογικομαθηματική γνώση, η πηγή της οποίας βρίσκεται στη νοητική δράση του παιδιού, και όχι σε σύνολα αντικειμένων στην εξωτερική πραγματικότητα, β) η αξία θέσης περιλαμβάνει πολλαπλασιασμό που δημιουργείται με πρόσθεση και δεν είναι μια απλή επέκταση της πρόσθεσης (Kamii, 1986).

Οι MacDonald et al. (2018) αναφέρονται σε ένα σύνολο μαθησιακών προόδων που εξηγούν τη νοητική δραστηριότητα στην οποία βασίζονται οι μαθητές όταν αναπτύσσουν την εννοιολογική αξία θέσης ψηφίου. Οι μαθητές ξεκινούν με συγκεκριμένη «χειριστική δέσμευση», έπειτα μεταβαίνουν προς μία αφηρημένη δέσμευση αριθμών και τελικά αναπτύσσουν αλγοριθμικές διαδικασίες για πολυψήφιους αριθμούς. Επίσης, η εννοιολογική ανάπτυξη της αξίας θέσης ψηφίου συντελείται και στη βάση της «δομής» των αριθμών, δηλαδή στην κατανόηση από μέρους των μαθητών ότι ο αριθμός είναι μια δομή και απαρτίζεται από μικρότερες δομές (παρόμοια με τη συλλογιστική εν μέρει-ολόκληρου). Σε αυτήν την περίπτωση τρία σύνολα νοητικής δραστηριότητας απαιτούνται για τη δόμηση των αριθμών: (α) συνδυασμοί και ανάπτυξη προτύπων, (β) κατασκευή μερικού πλήρους αριθμού και (γ) σχεσιακή σκέψη.

Ο McClain (2003) αναφέρεται στην εννοιολογική κατανόηση της θέσης ψηφίου σε σχέση με την πολυψήφια πρόσθεση και αφαίρεση, για να τονίσει τη σημασία της πρώτης προκειμένου οι μαθητές να αναπτύξουν στρατηγικές για την πραγματοποίηση ολοένα και πιο αφηρημένων αλλά αποτελεσματικών διαδικασιών επίλυσης πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης. Η κατανόηση των μαθητών για τη θέση ψηφίου και την πολυψήφια αριθμητική υπογραμμίζει επίσης τη σημασία της οικοδόμησης συνδέσεων μεταξύ των αναπαραστάσεων των μαθηματικών ιδεών και των χειρισμών αυτών σε ποσότητες από μέρους των μαθητών, σε αντίθεση με τον χειρισμό συμβόλων χωρίς νόημα. Σε αυτή τη διαδικασία, οι αναπαραστάσεις των μαθητών αντιμετωπίζονται ως εργαλεία που παρέχουν ένα αρχείο της δραστηριότητας που βοηθά τόσο στην επικοινωνία σχετικά με αυτές τις δραστηριότητες, όσο και στην παροχή συνδέσεων μεταξύ βασικών ιδεών.

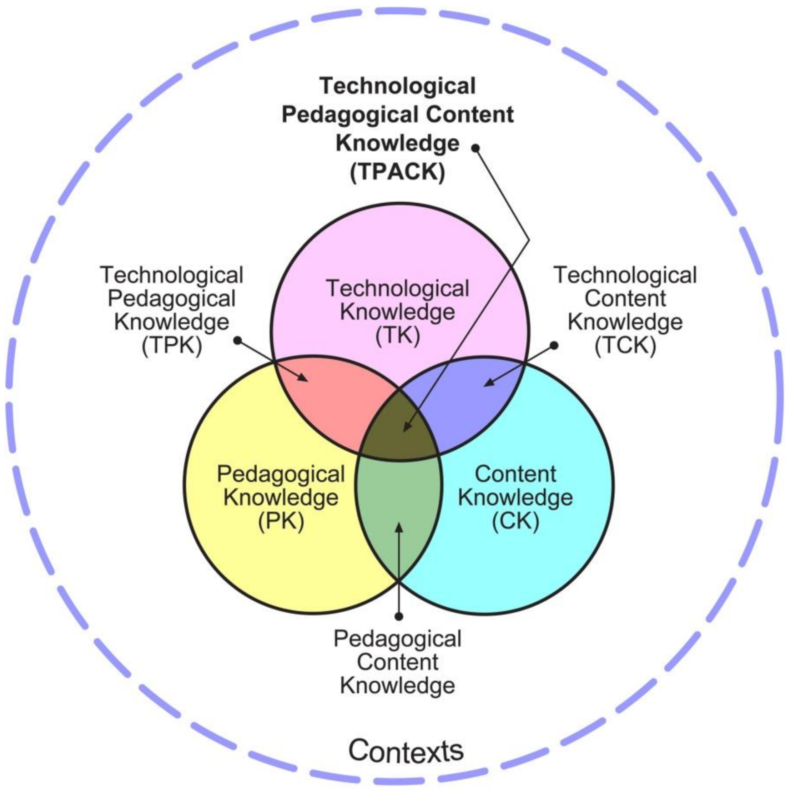
2.3 Διδασκαλία με τη χρήση της τεχνολογίας

2.3.1 Τεχνολογική και παιδαγωγική γνώση περιεχομένου (TPACK)

Το μοντέλο Τεχνολογικής, Παιδαγωγικής, Γνώσης, Περιεχομένου (Technological Pedagogical Content Knowledge - TPACK) αναπτύχθηκε προκειμένου να περιγραφεί το πλαίσιο των παραγόντων εκείνων που είναι κρίσιμοι για την ένταξη των Τεχνολογιών Πληροφορίας και Επικοινωνίας (ΤΠΕ) στη σχολική τάξη. Όπως αναφέρουν οι Koehler και Mishra (2009), το συγκεκριμένο μοντέλο αναπτύχθηκε προκειμένου να αντιμετωπίσει τις προκλήσεις με τις οποίες έρχονται αντιμέτωποι οι εκπαιδευτικοί όταν καλούνται να διδάξουν με τη χρήση της τεχνολογίας: α) οι ψηφιακές τεχνολογίες είναι χρήσιμες με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, μεταβάλλονται συνεχώς και δεν έχουν πάντα διαφανείς λειτουργίες, β) οι τεχνολογίες δεν είναι ούτε ουδέτερες ούτε αμερόληπτες. Αντίθετα, συγκεκριμένες τεχνολογίες έχουν τις δικές τους τάσεις, δυνατότητες και περιορισμούς που τις καθιστούν πιο κατάλληλες για συγκεκριμένες εργασίες έναντι άλλων και συνεπώς οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να γνωρίζουν τα ανωτέρω ώστε να επιλέξουν συγκεκριμένες τεχνολογίες για συγκεκριμένες εργασίες, γ) οι κοινωνικοί και οι περιβαλλοντικοί παράγοντες ενδέχεται να περιπλέκουν τις σχέσεις μεταξύ διδασκαλίας και τεχνολογίας, δ) οι εκπαιδευτικοί έχουν συχνά ανεπαρκή (ή ακατάλληλη) εμπειρία στη χρήση ψηφιακών τεχνολογιών στο πλαίσιο της εκπαιδευτικής διαδικασίας.

Το βασικό στοιχείο αυτού του μοντέλου είναι η αλληλοεπίδραση μεταξύ του περιεχομένου, της παιδαγωγικής και της τεχνολογίας (Koehler & Mishra, 2009). Το εν λόγω μοντέλο υποστηρίζει πως δεν θα πρέπει να μελετούνται απομονωμένα οι θεμελιώδεις συνιστώσες της [(η γνώση περιεχομένου (Περιεχόμενο), η παιδαγωγική γνώση (Παιδαγωγική), η τεχνολογική γνώση (Τεχνολογία)], αλλά θα πρέπει να δοθεί έμφαση στις σύνθετες συσχετίσεις μεταξύ τους, ορίζοντας τρεις νέες διαστάσεις, τις οποίες καλούνται οι εκπαιδευτικοί να κατανοήσουν και να αξιοποιήσουν συνθετικά στην πράξη: Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου, Τεχνολογική Γνώση Περιεχομένου, Τεχνολογική Παιδαγωγική Γνώση (Koehler & Mishra, 2009). Η σύνδεση αυτή αποτυπώνεται και στο πιο κάτω σχήμα.

Σχήμα 2.1 Το μοντέλο TPACK



Πηγή: Koehler και Mishra, 2009

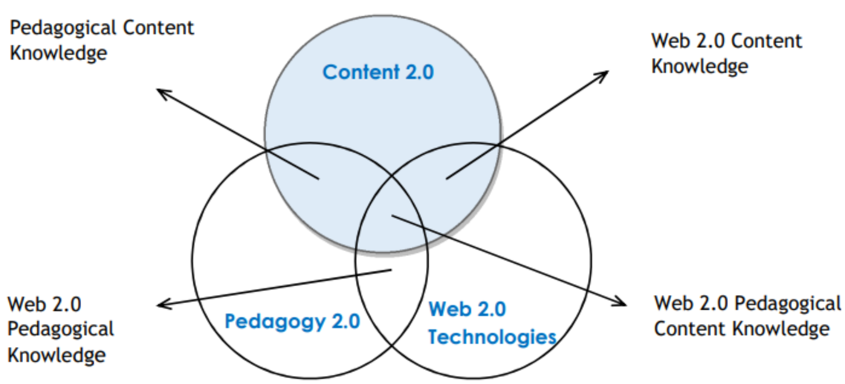
Η Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου (Pedagogical Content Knowledge) είναι η γνώση που χρειάζεται να διαθέτει ο εκπαιδευτικός ώστε να μετασχηματίζει τη γνώση του αντικειμένου που διδάσκει για να διευκολύνει τη μάθηση που συντελείται από μέρους των μαθητών. Αυτός ο μετασχηματισμός λαμβάνει χώρα καθώς ο εκπαιδευτικός ερμηνεύει το θέμα, βρίσκει διάφορους τρόπους να το αναπαραστήσει και προσαρμόζει το εκπαιδευτικό υλικό στις εναλλακτικές αντιλήψεις και τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών. Η συγκεκριμένη έννοια καλύπτει τις βασικές δραστηριότητες της διδασκαλίας, της μάθησης, του προγράμματος σπουδών, της αξιολόγησης, όπως οι συνθήκες που προάγουν τη μάθηση και οι σχέσεις μεταξύ του προγράμματος σπουδών, της αξιολόγησης και της παιδαγωγικής. Η επίγνωση των κοινών παρανοήσεων και των τρόπων εξέτασης τους, η σημασία της δημιουργίας συνδέσεων μεταξύ διαφορετικών ιδεών που βασίζονται στο περιεχόμενο, η προηγούμενη γνώση των μαθητών, οι εναλλακτικές στρατηγικές διδασκαλίας και η ευελιξία που προκύπτει από την εξερεύνηση εναλλακτικών τρόπων εξέτασης της ίδιας ιδέας ή προβλήματος είναι όλα απαραίτητα στοιχεία για την αποτελεσματική διδασκαλία (Koehler & Mishra, 2009).

Η Τεχνολογική Γνώση Περιεχομένου (Technological Content Knowledge) αναφέρεται στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο η τεχνολογία επηρεάζει το περιεχόμενο που πρόκειται να διδάξει ο εκπαιδευτικός. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να έχουν εις βάθος κατανόηση του τρόπου με τον οποίο το θέμα (ή τα είδη των αναπαραστάσεων που μπορούν να κατασκευαστούν) μπορεί να αλλάξει με την εφαρμογή συγκεκριμένων τεχνολογιών. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να κατανοήσουν ποιες συγκεκριμένες τεχνολογίες είναι οι καταλληλότερες για τη διδασκαλία συγκεκριμένων αντικειμένων και πώς το περιεχόμενο υπαγορεύει ή ίσως ακόμη και αλλάζει την τεχνολογία, ή το αντίστροφο (Koehler & Mishra, 2009).

Τέλος, η Τεχνολογική Παιδαγωγική Γνώση (Technological Pedagogical Knowledge) είναι η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο η διδασκαλία και η μάθηση μεταβάλλονται όταν συγκεκριμένες τεχνολογίες χρησιμοποιούνται με συγκεκριμένους τρόπους από τον εκπαιδευτικό. Αυτό περιλαμβάνει τη γνώση των παιδαγωγικών δυνατοτήτων και των περιορισμών διαφόρων τεχνολογικών εργαλείων καθώς σχετίζονται με συγκεκριμένα γνωστικά αντικείμενα και παιδαγωγικά σχέδια και στρατηγικές που είναι κατάλληλα με το αναπτυξιακό στάδιο των μαθητών. Για την οικοδόμηση της Τεχνολογικής Παιδαγωγικής Γνώσης απαιτείται μια βαθύτερη κατανόηση των περιορισμών και των δυνατοτήτων των τεχνολογιών και των γνωστικών αντικειμένων εντός των οποίων λειτουργούν (Koehler & Mishra, 2009).

Ο Jimoyiannis (2015) επέκτεινε το μοντέλο TPACK ώστε να συμπεριλάβει το Web 2.0 όχι ως μια απλή τεχνολογία, αλλά ως μια μαθησιακή στάση που πρέπει να καλλιεργηθεί τόσο από εκπαιδευτικούς όσο και από μαθητές, δημιουργώντας το TPACK 2.0. Το συγκεκριμένο μοντέλο καθορίζεται από τις θεωρητικές αρχές που προωθούν την ενσωμάτωση του Web 2.0 στο πρόγραμμα σπουδών και τις συνθήκες της εκάστοτε τάξης, αξιοποιώντας τα χαρακτηριστικά τους με επίκεντρο τον μαθητή, τη συμμετοχή και την κοινωνική δικτύωση. Η βασική ιδέα είναι ότι το Web 2.0 ενσωματώνει ένα ευρύ φάσμα εκπαιδευτικών προσόντων που μετασχηματίζουν τόσο την Παιδαγωγική (Παιδαγωγική 2.0, π.χ. αυτοκατευθυνόμενη, αναστοχαστική και κοινοτική μάθηση) όσο και το Περιεχόμενο (Περιεχόμενο 2.0, π.χ. κοινόχρηστο περιεχόμενο που δημιουργείται από τους μαθητές), τα οποία συσχετίζονται με πραγματικά εκπαιδευτικά πλαίσια. Υπό αυτήν την έννοια αποτελεί ένα ολοκληρωμένο πλαίσιο για την καθοδήγηση του σχεδιασμού εκμάθησης και των προγραμμάτων προετοιμασίας εκπαιδευτικών που υποστηρίζουν την ενσωμάτωση του Web 2.0 στην εκπαίδευση.

Σχήμα 2.2 Το μοντέλο TPACK 2.0



Πηγή: Jimoyiannis, 2015

PK: Πρόκειται για μια γενική μορφή παιδαγωγικής γνώσης χωρίς αναφορά σε συγκεκριμένο περιεχόμενο. Περιλαμβάνει την εις βάθος γνώση των εκπαιδευτικών σχετικά με τις θεωρίες μάθησης, τους γενικούς εκπαιδευτικούς στόχους, τις γενικές στρατηγικές, τις μεθόδους και τις πρακτικές στην τάξη που εμπλέκονται στη μάθηση των μαθητών, τον σχεδιασμό και την εφαρμογή της διδασκαλίας, τη διαχείριση της τάξης, την αξιολόγηση της κατανόησης των μαθητών κ.λπ. (π.χ. γνώση τεχνικών ή μεθόδων υποστήριξης της διερευνητικής μάθησης).

CK: Γνώση του αντικειμένου που πρέπει να διδαχθεί, χωρίς να ληφθούν υπόψη τα θέματα που αφορούν τη διδασκαλία. Περιλαμβάνει γνώση βασικών γεγονότων, εννοιών, θεωριών, διαδικασιών, επεξηγηματικών πλαισίων και δομών που χρησιμοποιούνται για την οργάνωση και τη σύνδεση ιδεών σε ένα δεδομένο επιστημονικό πεδίο (π.χ. γνώση επιστήμης, μαθηματικών ή λογοτεχνίας).

TK: Γνώσεις και δεξιότητες χρήσης υπολογιστών, διαφόρων λογισμικών και εργαλείων Web 2.0 (π.χ. γνώση χρήσης wiki).

PCK: Παιδαγωγικές γνώσεις που μπορούν να εφαρμοστούν στην πράξη για τη διδασκαλία ενός συγκεκριμένου περιεχομένου/θέματος. Αντιπροσωπεύει την ενσωμάτωση του περιεχομένου και της παιδαγωγικής σε μια συνεκτική κατανόηση του τρόπου με τον οποίο συγκεκριμένες πτυχές του θέματος οργανώνονται, προσαρμόζονται και μετασχηματίζονται για να γίνουν κατανοητές από τους μαθητές (π.χ. σχήματα και αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της γνώσης περιεχομένου στα μαθηματικά, προϋπάρχουσες γνώσεις και τις μαθησιακές δυσκολίες των μαθητών, αποτελεσματικές στρατηγικές στην πράξη).

TPK (Παιδαγωγική 2.0): Γνώση των δυνατοτήτων συγκεκριμένων τεχνολογιών Web 2.0 και γνώση του τρόπου με τον οποίο το Web 2.0 μπορεί να υποστηρίξει συγκεκριμένες παιδαγωγικές στρατηγικές ή στόχους, ιδίως περιβάλλοντα/πλαίσια διδασκαλίας και μάθησης, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη το αντικείμενο (π.χ. προώθηση και υποστήριξη της στοχαστικής μάθησης σε εκπαιδευτικές δραστηριότητες/έργα blogging).

TCK (Περιεχόμενο 2.0): Γνώση του τρόπου χρήσης συγκεκριμένων εργαλείων Web 2.0 για την αναπαράσταση, τη μετατροπή και τη δημιουργία περιεχομένου του υπό μελέτη θέματος, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη τα διδακτικά ζητήματα (π.χ. νέες μέθοδοι και μορφές σχετικά με την αναπαράσταση περιεχομένου, την κοινή χρήση περιεχομένου μεταξύ μαθητών και καθηγητών, περιεχόμενο που δημιουργείται από μαθητές και συλλογική δημιουργία περιεχομένου χρησιμοποιώντας διάφορα εργαλεία Web 2.0).

2.3.2 Κινητή μάθηση (mobile learning)

Ο όρος 'κινητή εκπαίδευση' καλύπτει τη μάθηση με φορητές τεχνολογίες, που εστιάζει στην τεχνολογία, την εκμάθηση σε διαφορετικά περιβάλλοντα, την κινητικότητα του μαθητευόμενου, την αλληλεπίδραση με τη φορητή ή σταθερή τεχνολογία, τη μάθηση σε μια κινητή κοινωνία, τον τρόπο με τον οποίο η κοινωνία και τα θεσμικά της όργανα μπορούν να φιλοξενήσουν και να υποστηρίξουν τη μάθηση ενός ολοένα και πιο κινητού πληθυσμού που δεν είναι ικανοποιημένος με τις υπάρχουσες μεθοδολογίες μάθησης (Alsaadat, 2017). Η κινητή μάθηση σημαίνει «μάθηση εν κινήσει», λαμβάνοντας χώρα οποτεδήποτε και οπουδήποτε μέσα από τη χρήση φορητών συσκευών. Με βάση αυτόν τον ορισμό διακρίνονται δύο βασικά χαρακτηριστικά της κινητής μάθησης: η φορητότητα των συσκευών και το ότι οι εν λόγω κινητές συσκευές είναι ασύρματες (Bora & Dhumane, 2012).

Τα θεωρητικά θεμέλια της κινητής μάθησης βασίζονται στην ανάλυση των Sharples et al. (2007). Οι συγγραφείς τοποθετούν την κινητικότητα και το πλαίσιο ως αντικείμενα της ανάλυσης στην κινητή εκπαίδευση. Αντί να υποθέσουν ότι η εκμάθηση λαμβάνει χώρα σε μια σταθερή τοποθεσία, όπως μια τάξη, και σε μια περιορισμένη χρονική περίοδο, εξετάζουν τον τρόπο με τον οποίο η μάθηση ρέει σε θέσεις, στο χρόνο, στα θέματα και στις τεχνολογίες. Οι συγγραφείς αποδίδουν ιδιαίτερη έμφαση στο «πλαίσιο» εντός του οποίου λαμβάνει χώρα η μάθηση. Στη συμβατική εκπαίδευση το «πλαίσιο» είναι μία μάλλον σταθερή έννοια, σε σύγκριση με την κινητή εκπαίδευση. Στη βάση αυτή, οι Sharples et al. (2007) προτείνουν ότι οι θεμελιώδεις διεργασίες με τις οποίες τα άτομα καταλαβαίνουν τον κόσμο και διαμορφώνουν τις γνώσεις τους είναι: η εξερεύνηση (κίνηση μέσα από εννοιολογικό χώρο, συνδέοντας εμπειρίες και έννοιες σε νέες γνώσεις), η συζήτηση (επιτρέπει την εκμάθηση μέσα σε και πέρα από τα περιβάλλοντα) και η συνεργατική οικοδόμηση γνώσης (αλληλεπίδραση).

Καθώς η κινητή μάθηση προσφέρει νέους τρόπους για την επέκταση της εκπαίδευσης έξω από την τάξη, στις συνομιλίες και τις αλληλεπιδράσεις της καθημερινής ζωής, αποτελεί μία κοινωνικο-πολιτιστική δραστηριότητα με τη μεσολάβηση κινητών τεχνολογιών (Sharples et al., 2017). Αυτό με τη σειρά του σημαίνει πως η κινητή μάθηση λαμβάνει χώρα όταν οι φορητές συσκευές μεσολαβούν μεταξύ του μαθητευόμενου και της γνώσης, ενώ παράλληλα έχει ως επίκεντρό της τον μαθητή και όχι την τεχνολογία (Bukharaev & Altaher, 2017).

Ο Alsaadat (2017) επισημαίνει την ευελιξία της κινητής μάθησης, με την έννοια ότι είναι προσβάσιμη σχεδόν από οπουδήποτε, παρέχοντας παράλληλα πρόσβαση σε όλα τα διαφορετικά διαθέσιμα υλικά εκμάθησης. Επισημαίνει ακόμα και το γεγονός ότι η κινητή μάθηση είναι συνεργατική, καθώς οι χρήστες μοιράζονται άμεσα το ίδιο περιεχόμενο, το οποίο με τη σειρά του θα οδηγήσει στη λήψη άμεσων ανατροφοδοτήσεων και συμβουλών. Επίσης, η κινητή μάθηση προσφέρει ισχυρή φορητότητα αντικαθιστώντας βιβλία και σημειώσεις με μικρές μνήμες RAM, που διαθέτουν με προσαρμοσμένα περιεχόμενα μάθησης. Επιπλέον, αυτό το είδος μάθησης είναι συναρπαστικό και διασκεδαστικό. Με αυτό το είδος μάθησης, είναι πολύ πιο εύκολο να συνδυαστούν παιχνίδια και μάθηση για μια πιο αποτελεσματική και διασκεδαστική εμπειρία μάθησης.

Η φορητότητα και η συνεργατικότητα αποτελούν εκτός από χαρακτηριστικά της κινητής εκπαίδευσης είναι και σημαντικά πλεονεκτήματα αυτής, σύμφωνα με τους Bora και Dhumane (2012), οι οποίοι προσθέτουν ακόμα την παρακίνηση: μαθητές που κάνουν χρήση φορητών συσκευών επιδεικνύουν αυξημένη αυτονομία στη μάθηση, λόγω της αυξημένης αυτοκατεύθυνσης και της ανάληψης πρωτοβουλιών που οδηγούν στην εύρεση τρόπων χρήσης των φορητών συσκευών. Η παρακίνηση και η αυτονομία στη μάθηση έχουν τονιστεί και από άλλους συγγραφείς ως σημαντικά οφέλη της κινητής μάθησης (Fu, 2013; Mango, 2015; Nishizaki, 2015; Dias & Victor, 2017).

Επίσης, οι εκπαιδευόμενοι αισθάνονται μεγαλύτερο ενθουσιασμό και ευχαρίστηση από τη χρήση κινητών συσκευών, σύμφωνα με τα όσα ισχυρίζονται ορισμένοι συγγραφείς (Bora & Dhumane, 2012; Morrone et al., 2012; Sarrab et al., 2012). Με τη διεξαγωγή δραστηριοτήτων και συζητήσεων που βασίζονται σε κινητές συσκευές, οι μαθητές βρίσκουν πιο διασκεδαστικό το μάθημα σε σύγκριση με μια τυπική τάξη που βασίζεται στο παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας (Morrone et al., 2012).

Επιπρόσθετα, η μάθηση επιτυγχάνεται μέσα από την πιο στενή αλληλεπίδραση μαθητών και εκπαιδευτικών, στη βάση της εξερεύνησης και της επιθυμίας ανταλλαγής γνώσεων (Burden et al., 2012). Κατά συνέπεια, ενισχύεται η αποτελεσματικότητα και η αποδοτικότητα του εκπαιδευτικού έργου, αυξάνεται η προσοχή των μαθητών στο μάθημα, ενώ παράλληλα προωθείται η ενεργός εμπλοκή των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία καθώς και η συνεργασία (Fu, 2013; Mango, 2015; Morris et al., 2016).

Όμως, θα πρέπει να σημειωθεί πως η κινητή μάθηση απαιτεί από τους εκπαιδευτικούς χρόνο προκειμένου να βρουν την κατάλληλη εφαρμογή, αλλά και να προσαρμοστεί το υλικό στη βάση των απαιτήσεων του μαθήματος (Fu, 2013; Hernandez, 2017). Επιπλέον, απαιτείται οι εκπαιδευτικοί να έχουν τις κατάλληλες γνώσεις, ικανότητες και δεξιότητες, κάτι που δεν ισχύει πάντα, τονίζοντας την αναγκαιότητα συναφούς επιμόρφωσης στο πλαίσιο της επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών (Asabere, 2013; Fu, 2013; Hernandez, 2017).

2.4 Χειραπτικά υλικά

2.4.1 Αποσαφήνιση των όρων

Τα χειραπτικά υλικά είναι στοιχεία που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να υποστηρίξουν την πρακτική μάθηση. Η χρήση αυτών των υλικών παρέχει οπτικοποιημένα μοντέλα που βοηθούν τους μαθητές να λύσουν προβλήματα και να αναπτύξουν έννοιες (Cockett & Kilgour, 2015; Jones & Tiller, 2017). Στην περίπτωση των μαθηματικών το χειραπτικό υλικό είναι ένα συγκεκριμένο οπτικό αντικείμενο που επιτρέπει σε έναν μαθητή να εξερευνήσει τις έννοιες των μαθηματικών χρησιμοποιώντας μια πρακτική και ενεργή προσέγγιση. Αυτά τα αντικείμενα μπορεί να περιλαμβάνουν μπλοκ, σχήματα, κύβους, χρήματα, πάγκους ή ακόμα και χαρτί (Cockett & Kilgour, 2015).

Σε παρόμοιο πλαίσιο, ο Γκούμας (2017, σελ. 85) επισημαίνει πως «τα χειραπτικά υλικά είναι φυσικά αντικείμενα που οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν, για να απεικονίσουν και να ανακαλύψουν τις μαθηματικές έννοιες

[…] είναι φυσικά αντικείμενα που τα χειρίζονται οι μαθητές είτε μεμονωμένα είτε σε μικρές ομάδες […] αποτελούν αντικείμενα που απευθύνονται σε διάφορες αισθήσεις και τα οποία μπορεί να αγγίξουν, να μετακινήσουν, να τακτοποιήσουν ή αλλιώς να χειριστούν τα παιδιά […]Είναι ένας τρόπος που κάνει τη μαθηματική μάθηση πιο ουσιαστική για τους μαθητές […] καθώς είναι υλικά σχεδιασμένα να αναπαριστούν ρητά και συγκεκριμένα μαθηματικές ιδέες που είναι αφηρημένες». Έτσι, «συχνά ορίζονται ως φυσικά αντικείμενα που χρησιμοποιούνται ως εργαλεία διδασκαλίας για να εμπλέξουν τους μαθητές σε χειραπτική μάθηση των μαθηματικών […] ως οποιαδήποτε απτά αντικείμενα, εργαλεία, μοντέλα, ή μηχανισμοί, που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να αποδείξουν μια σαφή και βαθιά κατανόηση ενός συγκεκριμένου μαθηματικού θέματος ή θεμάτων και κατά την επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων».

Τα χειραπτικά υλικά περιλαμβάνουν φυσικά αντικείμενα ή στοιχεία τεχνολογίας όπως διαδραστικούς πίνακες και παιχνίδια στον υπολογιστή που είναι δισδιάστατες αναπαραστάσεις του τρισδιάστατου χώρου (Cockett & Kilgour, 2015). Παρομοίως, ο Γκούμας (2017, σελ. 86) αναφέρεται στα φυσικά χειραπτικά υλικά (π.χ. συνδετήρες, οδοντογλυφίδες, χρήματα, κάρτες, χάρακες, αριθμομηχανές, γεωπίνακες), τα οποία μπορούν να λάβουν και εικονιστικές (pictorial) στατικές αναπαραστάσεις, δηλαδή «στατικά μοντέλα που βοηθούν τους μαθητές να οπτικοποιούν τις μαθηματικές έννοιες», υπογραμμίζοντας όμως ότι «εικόνα δεν έχει την απτικότητα και τις δυναμικές ιδιότητες του φυσικού χειραπτικού υλικού».

Ένα τελευταίο σημείο που έχει ενδιαφέρον να επισημανθεί είναι πως τα χειραπτικά υλικά δεν είναι μια πρόσφατη ή σύγχρονη ανακάλυψη στην εκπαίδευση. Πριν από το 1800, τα δάχτυλα κάποιου θεωρούνταν ένα από τα πρώτα χειραπτικά υλικά. Ωστόσο, άλλα αντικείμενα δεν θεωρούνταν ως χειραπτικά υλικά έως ότου η πολυπλοκότητα των μαθηματικών ξεπέρασε τη χρηστικότητα των δακτύλων κάποιου. Επομένως, μόλις το 1800, διάφορα αντικείμενα χρησιμοποιήθηκαν ως χειραπτικά υλικά και επομένως θεωρούνταν πιθανό εκπαιδευτικό εργαλείο. Έκτοτε, πολλοί εκπαιδευτικοί και ερευνητές έχουν υποστηρίξει τη συμπερίληψη αυτών στη διδασκαλία των μαθηματικών, καθώς πίστευαν στη σημασία της ύπαρξης αυθεντικών μαθησιακών εμπειριών στις οποίες συγκεκριμένα εργαλεία είναι βασικά χαρακτηριστικά για την επίτευξη ενός επιπέδου εις βάθος κατανόησης (Eby, 2022).

2.4.2 Χειραπτικά υλικά και μαθηματικά

Τα τελευταία χρόνια, ειδικά στα μαθηματικά, υπάρχει μία αμφισβήτηση ως προς το εάν η χρήση χειραπτικών υλικών είναι ωφέλιμη (Cockett & Kilgour, 2015; Foulkes et al., 2023), οδηγώντας στον ισχυρισμό ότι αυτά υπερεκτιμώνται ως διδακτικοί πόροι. Από την άλλη πλευρά, ωστόσο, έχει υποστηριχθεί πως αυτά τα υλικά μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν έννοιες των μαθηματικών σε μια συγκεκριμένη μορφή που είναι οπτική για τον μαθητή (Cockett & Kilgour, 2015; Eby, 2022). Επίσης μπορούν να παράσχουν νόημα στη μάθηση: μπορούν να είναι ένα σημαντικό εργαλείο για να βοηθήσουν τους μαθητές να σκεφτούν και να συλλογιστούν με πιο ουσιαστικό τρόπο. Με τον τρόπο αυτό δημιουργούν μια πιο ουσιαστική εμπειρία για τους μαθητές προσφέροντας μια συγκεκριμένη μορφή για την οποία οι μαθητές μπορούν στη συνέχεια να δουν τη συνάφειά τους. Επιπρόσθετα βοηθούν τη δέσμευση και την κατανόηση, καθώς είναι σε θέση να διευκολύνουν τη δημιουργία ενός μαθησιακού περιβάλλοντος που ενθαρρύνει τη δέσμευση και επιτρέπει την κατανόηση ιδίως δύσκολων και πιο περίπλοκων εννοιών, ενώ επίσης μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να εμπλακούν με μία εργασία για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, βοηθώντας τους αφενός να παραμείνουν συγκεντρωμένοι, λόγω του ότι οι ίδιοι εμπλέκονται ενεργά στη μάθηση και αφετέρου να αυξήσουν την αυτοπεποίθησή τους να ολοκληρώνουν δύσκολα μαθηματικά προβλήματα (Cockett & Kilgour, 2015).

Επιπρόσθετα, τα χειραπτικά υλικά βοηθούν τους μαθητές να μεταβούν από συγκεκριμένες εμπειρίες σε αφηρημένους συλλογισμούς, δημιουργώντας συνδέσεις και διαμορφώνοντας νόημα για συγκεκριμένες έννοιες (Clements, 1999; Carbonneau, Marley, & Selg, 2013; Cockett & Kilgour, 2015; Jones & Tiller, 2017; Eby, 2022). Με αυτόν τον τρόπο ενισχύεται η ικανότητα των μαθητών να εφαρμόζουν τη μάθηση σε εναλλακτικές καταστάσεις - κάτι που απαιτεί εννοιολογική κατανόηση - η οποία με τη σειρά της συνδέεται άμεσα με την εμπειρία με συγκεκριμένα αντικείμενα (Eby, 2022). Η συγκεκριμένη, αναπαραστατική, αφηρημένη διδασκαλία (Concrete, Representational, Abstract - CRA) είναι μια διαδικασία διδασκαλίας και εκμάθησης μαθηματικών εννοιών. Ξεκινώντας με τη χρήση των υλικών οι μαθητές οδηγούνται στη συνέχεια στο αναπαραστατικό επίπεδο και έπειτα στο αφηρημένο επίπεδο, στο οποίο χρησιμοποιούνται αριθμοί και σύμβολα για την επίδειξη της κατανόησης. Με σκοπό να παράσχει στους μαθητές μια πλήρη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, η διδασκαλία CRA επιτρέπει στους μαθητές να κάνουν συσχετίσεις από το ένα στάδιο της διαδικασίας στο άλλο (Jones & Tiller, 2017).

Ένα ακόμη όφελος που έχει σημειωθεί είναι η αυξημένη επίδοση των μαθητών που χρησιμοποιούν χειραπτικά υλικά: η χρήση αυτών των υλικών αυξάνει τις βαθμολογίες στα τεστ διακράτησης πληροφοριών και επίλυσης προβλημάτων. Όμως, αυτό το όφελος εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, όπως το επίπεδο ικανότητας του εκάστοτε μαθητή και το θέμα, δεδομένου ότι η χρήση ενός χειραπτικού υλικού «έχει νόημα» για ένα συγκεκριμένο θέμα. Επίσης, οι στάσεις των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά βελτιώνονται με τη χρήση των χειραπτικών υλικών όταν οι μαθητές έχουν οδηγίες με συγκεκριμένα υλικά που παρέχονται από καθηγητές που γνωρίζουν τη χρήση τους (Clements, 1999). Περαιτέρω, τα χειραπτικά υλικά ενθαρρύνουν τον πραγματικό κόσμο της γνώσης των μαθητών, παρέχουν στους μαθητές την ευκαιρία να αναπαραστήσουν μία έννοια για τη βελτίωση της κωδικοποίησης αυτής, αλλά και ευκαιρίες στους μαθητές να ανακαλύψουν τις μαθηματικές έννοιες μέσω της εξερεύνησης στη βάση της καθοδηγούμενης μάθησης (Carbonneau et al., 2013).

Εκτός των ανωτέρω, μπορούν να είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για την κάλυψη διαφορετικών στυλ μάθησης και είναι ιδιαίτερα κατάλληλα για κιναισθητικούς και οπτικούς μαθητές, παρέχοντας μια πραγματική αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών, καθώς και για μαθητές με χαμηλές επιδόσεις και με μαθησιακές δυσκολίες (Cockett & Kilgour, 2015). Για τον λόγο αυτό έχει υποστηριχθεί πως η αποτελεσματικότητά τους εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, όπως οι προτιμήσεις των μαθητών, αλλά και τα χειραπτικά υλικά που επιλέγονται και αξιοποιούνται στην εκπαιδευτική διαδικασία σε συνδυασμό με την ακρίβεια που παρέχουν (Foulkes et al., 2023). Άλλοι παράγοντες που μπορεί να επηρεάζουν τη θετική επίδραση των χειραπτικών υλικών στη μάθηση είναι η ταυτόχρονη έμφαση στη μάθηση και την κατανόηση, η αποσπασματική ή μη εκμάθηση χρήσης αυτών των υλικών, η σύνδεση των ενεργειών των μαθητών με το σύστημα σημειογραφίας που χρησιμοποιείται για την περιγραφή των ενεργειών, αλλά και ο αναστοχασμός όσον αφορά στη χρήση αναπαραστάσεων μαθηματικών ιδεών (Clements, 1999).

2.5 Ο κινέζικος άβακας

2.5.1 Ιστορική επισκόπηση

Οι πίνακες καταμέτρησης έχουν πάνω από 2.000 χρόνια τεκμηριωμένης χρήσης, που χρονολογούνται από Έλληνες και Ρωμαίους. Οι αρχαιότεροι τεκμηριωμένοι πίνακες καταμέτρησης ήταν απλές πέτρινες πλάκες με παράλληλες και οριζόντιες γραμμές που χρησίμευαν ως δείκτες αξίας θέσης. Η συνήθης μέθοδος υπολογισμού στην Αρχαία Ελλάδα και τη Ρώμη γινόταν με την κίνηση των μετρητών σε ένα λείο πίνακα ή τραπέζι με κατάλληλα σημειωμένα με γραμμές ή σύμβολα για να δείχνουν τις τοποθετήσεις και μετακινήσεις ψηφίων. Ένας εξ αυτών των μετρητών είναι και ο κινέζικος άβακας (Samoly, 2012).

Η αριθμητική με χάντρες είναι μια συγκεκριμένη μέθοδος υπολογισμού, στην οποία οι αριθμοί αντιπροσωπεύονται από ξύλινες χάντρες. Αυτές οι χάντρες τοποθετούνται συστηματικά σε ένα πλαίσιο γνωστό ως κινέζικος άβακας. Ο όρος ‘αριθμητική με χάντρες’ χρησιμοποιείται για να τη διακρίνει από την άλλη μορφή αριθμητικής στην οποία χρησιμοποιούνται γραπτοί αριθμοί (Ming, χ.χ.). Ο κινέζικος άβακας είναι μια πολύ δημοφιλής τεχνική που χρησιμοποιείται για αιώνες σε πολλά μέρη του κόσμου (κυρίως στην Κίνα) για την εκτέλεση αριθμητικών πράξεων. Η χρήση του κινέζικου άβακα είναι πολύ αποτελεσματική και παρόμοια αποτελεσματικότητα μπορεί να επιτευχθεί και σε ηλεκτρονική έκδοση (Maloberti & Gang, 1998).Ο κινέζικος άβακας είναι ένα μέσο (χειραπτικό εργαλείο) για την εκτέλεση αριθμητικών πράξεων στα μαθηματικά με τη μορφή τετράπλευρου και υπάρχουν σειρές από σφαιρίδια που μπορούν να μετακινηθούν πάνω / κάτω (Rusyani et al., 2022).

Ο άβακας τροποποιήθηκε στη μορφή του με επτά χάντρες πριν από 1.800 χρόνια στην Κίνα. Στην Ιαπωνία εισήχθη τον 16ο αιώνα, όπου προσαρμόστηκε και τροποποιήθηκε σε πέντε χάντρες για αυξημένη ταχύτητα και ακρίβεια των υπολογισμών. Η ιαπωνική έκδοση του άβακα που είναι γνωστή ως soroban χρησιμοποιεί μια δομή πέντε σφαιριδίων με μια σειρά από χάντρες πάνω από τη διαχωριστική ράβδο και τέσσερις σειρές κάτω από αυτήν (Yee, 1998).

Υπάρχουν δύο βασικές μορφές του άβακα, η πρώτη είναι ένας πίνακας μέτρησης, ο οποίος είναι μια ειδική σήμανση στην επιφάνεια που χρησιμοποιεί μικρές πέτρες ή φασόλια ως δείκτες. Η δεύτερη είναι ένας άβακας με πλαίσιο σφαιριδίων, ο οποίος είναι πλαίσιο με χάντρες κρεμασμένες σε σύρματα ή ράβδους. Και τα δύο εργαλεία υπολογίζουν με παρόμοιο τρόπο. Η προέλευση του φορητού πλαισίου σφαιριδίων άβακα δεν είναι γνωστή με ακρίβεια. Θεωρείται ότι προήλθε από ανάγκη για ταξιδιώτες εμπόρους. Μερικοί ιστορικοί αποδίδουν στους Κινέζους ως εφευρέτες του άβακα με πλαίσιο σφαιριδίων, ενώ άλλοι πιστεύουν ότι οι Ρωμαίοι εισήγαγαν τον άβακα στους Κινέζους μέσω του εμπορίου. Η Ρωσία και η Ιαπωνία ανέπτυξαν τις δικές τους εκδοχές του άβακα. Σήμερα ο άβακας χρησιμοποιείται σε αγροτικές περιοχές της Ασίας και της Αφρικής και έχει αποδειχθεί ότι είναι ένα διαχρονικό υπολογιστικό εργαλείο. Η λειτουργία του δίνει τη δυνατότητα σε όλους να υπολογίζουν μεγάλους αριθμούς χωρίς ηλεκτρονικές συσκευές (Samoly, 2012).

2.5.2 Οργάνωση του κινέζικου άβακα

Ο άβακας αποτελείται από ένα ορθογώνιο ξύλινο πλαίσιο το οποίο χωρίζεται κατά μήκος σε δύο άνισα μέρη με μια οριζόντια δοκό ή ράβδο. Μπορεί να έχει εννέα, έντεκα, δεκατρείς ή περισσότερες τεταγμένες στήλες από κινητές χάντρες, συνήθως κατασκευασμένες από ξύλο. Ο αριθμός των σφαιριδίων σε κάθε στήλη είναι επτά: δύο πάνω από τη δοκό (αλτοσφαιρίδια) και πέντε κάτω από αυτό (υποσφαιρίδια). Μια μορφή του άβακα περιέχει μόνο έξι κινητές κεφαλές σε κάθε στήλη τεταγμένων, ένα αλτοσφαιρίδιο και πέντε υποσφαιρίδια. Υπάρχει ακόμη ένας άλλος τύπος που περιέχει μόνο πέντε χάντρες σε κάθε σειρά, αλλά είναι κατάλληλος μόνο για πρόσθεση και αφαίρεση (Ming, χ.χ.).

Ο κινεζικός άβακας αποτελείται από ένα σύνολο στοιχείων ενότητας που αντιπροσωπεύουν τις διάφορες δεκάδες των δεκαδικών αριθμών. Κάθε στοιχείο έχει πέντε χάντρες με βάρος μονάδας και δύο χάντρες με βάρος πέντε. Ο κανόνας κωδικοποίησης στο κύριο μέρος του άβακα είναι θερμομετρικός, επομένως, για να αντιπροσωπεύει έναν αριθμό μικρότερο από 5, ο ίδιος αριθμός σφαιριδίων θα αυξηθεί στη μονάδα του κύριου τμήματος. Για αριθμούς μεγαλύτερους από 5 χρησιμοποιείται μια χάντρα με βάρος 5. Με αυτόν τον τρόπο, ένα βασικό στοιχείο μπορεί να αντιπροσωπεύει έναν δεκαδικό αριθμό που περιλαμβάνεται στην περιοχή από 0 (όλα τα σφαιρίδια ίσα με 0) έως 15 (όλα τα σφαιρίδια ίσα με 1). Το βασικό χαρακτηριστικό του κινέζικου άβακα είναι η χρήση δύο σφαιριδίων με βάρος 5. Επιπλέον, η χρήση του θερμομετρικού κώδικα επιτρέπει τη γρήγορη υλοποίηση στοιχειωδών αριθμητικών συναρτήσεων όπως η πρόσθεση και η αφαίρεση (Maloberti & Gang, 1998; Chowdhury, 2020).

Αναφορικά με την αξία θέσης ψηφίου, ο Ming (χ.χ.) αναφέρει πως, η τιμή ενός σφαιριδίου εξαρτάται από το ποια στήλη θεωρείται ότι είναι η στήλη της μονάδας. Οι χάντρες στην αριστερή στήλη είναι μεγαλύτερες από αυτές της δεξιάς στήλης. Μια μονάδα στην αριστερή στήλη είναι πάντα δέκα φορές μεγαλύτερη από μια μονάδα στη διπλανή στήλη στα δεξιά. Έτσι, αν υποθέσουμε ότι η πρώτη στήλη στη δεξιά πλευρά του πλαισίου θα είναι η θέση της μονάδας, ένα υποσφαιρίδιο στην πρώτη στήλη θα αξίζει μία μονάδα, ένα στη δεύτερη στήλη θα αξίζει δέκα μονάδες, ένα στην τρίτη στήλη θα ισούται με 100 μονάδες κλπ. Ομοίως, ένα σφαιρίδιο στην πρώτη στήλη θα είναι πέντε μονάδες, ένα στη δεύτερη στήλη θα ισούται με 50 μονάδες και ούτω καθεξής.

2.5.3 Ο κινέζικος άβακας στη διδασκαλία αριθμητικών πράξεων

Το κύριο πλεονέκτημά του είναι η οικονομία του χρόνου (Ming, χ.χ.). Επιπλέον, διαμέσου του άβακα οι μαθητές ενισχύουν τις γνωστικές και κινητικές τους δεξιότητες (Yee, 1998). Στα οφέλη της χρήσης του άβακα για τη διδασκαλία των μαθηματικών πράξεων έχουν αναφερθεί ακόμα τα εξής (Rusyani et al., 2022): α) η βελτιστοποίηση της λειτουργίας του εγκεφάλου, επειδή όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν τον άβακα επικεντρώνονται στο μέτρημα και χρησιμοποιούν παράλληλα τη φαντασία και τη λογική τους για να υπολογίσουν τα αποτελέσματα των μαθηματικών πράξεων που θα παρουσιαστούν αργότερα με τη μορφή σφαιριδίων, β) η καλλιέργεια της φαντασίας, της δημιουργικότητας, της λογικής, της συστηματικής σκέψης και της συγκέντρωσης, γ) η αύξηση της ταχύτητας και της ακρίβειας στη σκέψη δ) ενίσχυση ευαισθησίας των μαθητών στις χωρικές ρυθμίσεις λόγω της επίδρασης της φαντασίας του άβακα στο μυαλό ενός ατόμου, καθώς εάν ένα παιδί είναι σε θέση να φανταστεί μαθηματικούς υπολογισμούς μέσω του νου, τότε θα είναι εύκολο να φανταστεί κάτι αφηρημένο, ε) διδασκαλία παιδιών που έχουν δυσκολία απομνημόνευσης, ή ακόμα και διδασκαλία παιδιών με προβλήματα ακοής. Σύμφωνα και με τους León et al. (2021), η χρήση του άβακα από μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης έχει επίσης βρεθεί ότι οδηγεί σε σημαντικές βελτιώσεις στις γνωστικές παραμέτρους της συγκέντρωσης, της μνήμης, των αντιληπτικών στάσεων και της δημιουργικότητας.

Τα άτομα που έχουν εκπαιδευτεί να εργάζονται με τον άβακα μπορούν να εκτελέσουν τις αριθμητικές πράξεις και με νοητικούς υπολογισμούς, εκτός των πρακτικών, με μεγάλη ταχύτητα. Αυτό οφείλεται στο ότι η νοητική αριθμητική του άβακα περιλαμβάνει την επιδέξια απόκτηση διαφορετικών σημείων που αντιπροσωπεύουν μαθηματικούς αλγόριθμους για τον σωστό χειρισμό ενός φανταστικού άβακα. Από αυτή την άποψη, τα άτομα που χρησιμοποιούν τον άβακα αρχικά μαθαίνουν να εκτελούν μετρώντας χρησιμοποιώντας και τα δύο χέρια τους. Στη συνέχεια μαθαίνουν να φαντάζονται για να κάνουν μεθοδική μέτρηση με το μυαλό τους. Καθώς οι δεξιότητές τους στον υπολογισμό βελτιώνονται, το επόμενο βήμα είναι να εκτελέσουν τις ίδιες πράξεις με έναν φανταστικό άβακα, χωρίς πραγματικές κινήσεις με τα δάχτυλά τους. Σύμφωνα με μελέτες στον τομέα της ψυχολογίας και της νευροεπιστήμης, η χρήση του άβακα οδηγεί σε ορισμένα μοτίβα ενεργοποίησης του εγκεφάλου που είναι διαφορετικά από των ατόμων που δεν έχουν κάνει χρήση του συγκεκριμένου χειραπτικού αντικειμένου, λόγω αυξημένης νευρικής πλαστικότητας και συναπτικής βελτίωσης, αλλά και ενεργοποίησης και των δυο ημισφαιρίων του εγκεφάλου (το αριστερό ημισφαίριο εστιάζει σε λέξεις, συνειρμούς ακοής, λογική, ενώ το δεξί στα συναισθήματα, τη διαίσθηση, τις εικόνες) (Frank & Barner, 2012; Wang et al., 2013; León et al., 2021). Επί παραδείγματι, οι Frank και Barner (2012) εξετάζοντας τον διανοητικό άβακα (ένα σύστημα για την εκτέλεση ταχείας και ακριβούς αριθμητικής με χειρισμό μιας νοητικής αναπαράστασης ενός άβακα) βρήκαν πως αναπαρίσταται στην οπτική μνήμη εργασίας διασπώντας τον άβακα σε μια σειρά στηλών, καθεμία από τις οποίες αποθηκεύεται ανεξάρτητα ως μονάδα με τη δική της λεπτομερή υποδομή.

Ένα ακόμη σημαντικό όφελος που έχει αναφερθεί από τους Veena, Rajasekhar και Nandan (2018) είναι η μείωση του άγχους των μαθητών. Σε μεγάλο βαθμό οι μαθητές διέπονται από άγχος στο μάθημα των μαθηματικών, με αποτέλεσμα να εμποδίζεται η ικανότητα και η απόδοσή τους, ιδιαίτερα στην περίπτωση υψηλότερων νοητικών δραστηριοτήτων και εννοιολογικής διαδικασίας. Η χρήση του άβακα, όμως, βρέθηκε να μειώνει σημαντικά το άγχος των μαθητών στο μάθημα των μαθηματικών, καθώς η χρήση του συγκεκριμένου χειραπτικού αντικειμένου μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικές αλλαγές στη λειτουργία του εγκεφάλου και στη συμπεριφορά των μαθητών. Η εκπαίδευση στον άβακα παρουσιάζει ενδιαφέρον επειδή αποκτάται η ικανότητα χειρισμού ψηφίων με ταχύτητα και ακρίβεια, ενώ ταυτόχρονα βελτιώνονται οι βασικές γνωστικές ικανότητες.

Σε παρόμοιο πλαίσιο, σύμφωνα με τους Jin, Wang και Nan (2019), η διδασκαλία του άβακα δεν είναι μόνο μια άσκηση υπολογιστικών δεξιοτήτων, αλλά και μια ολόπλευρη βελτίωση της ποιότητας των μαθητών μέσω της συντονισμένης δράσης διαφόρων οργάνων για την προώθηση της υγιούς εκπαίδευσης του εγκεφάλου. Ο άβακας αναπτύσσει σημαντικά τη λειτουργία του δεξιού ημισφαιρίου και ως εκ τούτου η διαδικασία εκμάθησης άβακα του μαθητή είναι μια αποτελεσματική μέθοδος για την προώθηση της ανάπτυξης της σκέψης και την ενίσχυση των κινητικών δεξιοτήτων των χεριών. Ο άβακας μπορεί να αλλάξει τη στάση μάθησης και να αυξήσει τη συγκέντρωση των παιδιών, καθιστώντας παράλληλα το μάθημα ενδιαφέρον. Σημαντικό είναι και το γεγονός πως ο άβακας είναι σύμφωνος με τα ηλικιακά χαρακτηριστικά των μαθητών. Η εισαγωγή του άβακα στο μάθημα των μαθηματικών μπορεί να αναπτύξει τη σκέψη των μαθητών, να βελτιώσει το ενδιαφέρον των μαθητών για μάθηση, να καλλιεργήσει την προσοχή, τη μνήμη, την αντοχή και την αυτοπεποίθηση των μαθητών, ώστε να διευκολύνει τη μάθηση και την κατάκτηση άλλων θεμάτων.

Μία από τις πολλαπλές χρήσεις του άβακα στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι η απεικόνιση της πραγματικής φύσης του κρατουμένου και του δανεικού στην πρόσθεση και την αφαίρεση αντίστοιχα, κάτι το οποίο με τη σειρά του απαιτεί εις βάθος κατανόηση και γνώση της έννοιας της θέσης ψηφίου στο σύστημα δεκαδικών αριθμών. Συνήθως η πρόσθεση διδάσκεται με τη μορφή εκμάθησης του αλγορίθμου, που σημαίνει την εκτέλεση μιας σειράς βημάτων που αντιπροσωπεύουν τους συντακτικούς κανόνες του αλγορίθμου. Ωστόσο, η απόδοση ενός αλγορίθμου δεν απαιτεί βαθιά επίγνωση της σημασίας των διαδοχικών βημάτων, με αποτέλεσμα οι μαθητές να μην κατανοούν πάντοτε τι αντιπροσωπεύει το κρατούμενο. Το γεγονός ότι σε κάθε στήλη του άβακα μπορούν να αναπαρασταθούν αριθμοί έως και 15 (δηλαδή 15 μονάδες, 15 δεκάδες κ.λ.π.) και να γίνουν ανταλλαγές μεταξύ των στηλών, ενισχύει την κατανόηση της έννοιας του μεταφερόμενου αριθμού. Έτσι ο μεταφερόμενος αριθμός αποκτά μια υλική ουσία, που δεν είχε μέχρι τώρα, αφού ο αλγόριθμος πρόσθεσης συνήθως διδάσκεται χωρίς τη χρήση φυσικών χειρισμών. Επομένως, γίνεται κατανοητό μέσω της οπτικής και απτικής αντίληψης του κινέζικου άβακα. Ταυτόχρονα, η γνώση του μεταφερόμενου αριθμού συμβάλλει επίσης στη μείωση των αλγοριθμικών σφαλμάτων. Αυτή η οπτική και απτική αντίληψη του κινέζικου άβακα ισχύει και για την περίπτωση του δανεικού (Popotis & Nikolantonakis, χ.χ.).

Εκτός των ανωτέρω, η ηλεκτρονική έκδοση του άβακα μπορεί να έχει σημαντικά και πολλαπλά οφέλη, καθώς ενσωματώνει τις θετικές επιδράσεις διαφόρων μαθησιακών προσεγγίσεων στη διαδικασία διδασκαλίας και μάθησης (Lee, 2015). Ειδικότερα, μία ηλεκτρονική έκδοση του κινέζικου άβακα ενισχύει τη μάθηση μαθητών με οπτικό προσανατολισμό, που έχουν ισχυρή αίσθηση χρωμάτων και μαθαίνουν καλύτερα χρησιμοποιώντας εικόνες ή οπτικοποίηση. Είναι επίσης ωφέλιμη για μαθητές με κιναισθητικό προσανατολισμό, οι οποίοι μαθαίνουν μέσω πειράματος ή πρακτικής δραστηριότητας. Επιπρόσθετα, ο άβακας και σε ηλεκτρονική έκδοση έχει οφέλη που αποδίδονται στη θεωρία της εποικοδομητικής μάθησης (κονστρουκτιβισμός), βάσει της οποίας οι μαθητές δημιουργούν τη γνώση μόνοι τους, με έμφαση στη σημασία της ενεργού συμμετοχής όπου οι εκπαιδευόμενοι χρησιμοποιούν την τρέχουσα ή προηγούμενη γνώση τους για να κατασκευάσουν νέες ιδέες ή έννοιες. Ιδίως στο μάθημα των μαθηματικών, οι μαθητές θα πρέπει να κατασκευάσουν τη δική τους κατανόηση για κάθε μαθηματική έννοια, καθώς ο σκοπός της διδασκαλίας δεν είναι η παθητική μετάδοση γνώσεων, αλλά η δημιουργία καταστάσεων για να ενθαρρυνθούν οι μαθητές να κάνουν τις απαραίτητες νοητικές κατασκευές. Επιπλέον, ο κονστρουκτιβισμός επιτρέπει την κατανομή κάθε μαθηματικής έννοιας σε αναπτυξιακά βήματα. Έτσι, αντί οι εκπαιδευτικοί να ζητούν από τα παιδιά να επιλύουν μαθηματικές πράξεις με βάση τη συνήθη μέθοδο, τα παιδιά θα πρέπει να ενθαρρύνονται να αναπτύξουν τη δική τους γνώση με βάση τη δική τους κατανόηση. Τέλος, δεν θα πρέπει να παραβλεφθούν και τα οφέλη μάθησης διαμέσου του παιχνιδιού, ιδίως μέσω κινητών συσκευών, όπως αναφέρθηκαν παραπάνω. Όταν το παιχνίδι και η μάθηση συνδυάζονται μεταξύ τους, η μαθησιακή διαδικασία είναι πιο ευχάριστη και οδηγεί στην καλύτερη κατανόηση πληροφοριών και εννοιών, στη βάση της θεωρίας της γνωστικής συμπεριφοράς. Ως εκ τούτου, ο υπολογισμός του άβακα χρησιμοποιώντας μία εφαρμογή σε κινητές συσκευές μπορεί να ενισχύσει την οπτικοποίηση, την αίσθηση της αφής, καθώς και τα μαθησιακά αποτελέσματα διαμέσου της εποικοδομητικής μάθησης και της αξιοποίησης του παιχνιδιού.

Παρομοίως, οι Jarrah et al. (2022) αναφέρουν ότι, η μάθηση με βάση τα ψηφιακά παιχνίδια συμβάλει σε μαθησιακά αποτελέσματα υψηλότερου επιπέδου στη διδακτική διαδικασία σε σύγκριση με τις παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας, καθώς τα ψηφιακά παιχνίδια έχουν θετική επίδραση στα κίνητρα των μαθητών και οι μαθητές επικεντρώνονται σε μία άσκηση για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, ολοκληρώνοντας έτσι σωστά περισσότερες μαθηματικές εργασίες. Ως αποτέλεσμα ο κινέζικος άβακας σε ηλεκτρονική έκδοση μπορεί να οδηγήσει σε υψηλότερη επίδοση των μαθητών, ενώ παράλληλα ενθαρρύνει τους μαθητές να εργαστούν ομαδικά και να ρωτήσουν ο ένας τον άλλον για διαφορετικά μαθηματικά προβλήματα και πώς να λύσουν προβλήματα. Ως αποτέλεσμα οι μαθητές ενθαρρύνονται να μελετούν και να μαθαίνουν τόσο ομαδικά, όσο και ανεξάρτητα.

Από την άλλη πλευρά, όμως, με έναν ανειδίκευτο χειριστή είναι πιθανό να γίνει λάθος επειδή τα σφαιρίδια είναι κατάλληλα να μετακινηθούν από τη θέση τους ακούσια (Ming, χ.χ.). Επίσης, ένα ακόμη μειονέκτημα που καταγράφεται όσον αφορά στη χρήση του παραδοσιακού άβακα ως χειραπτικό αντικείμενο από τον (Lee, 2015) είναι πως δεν είναι τόσο αποτελεσματική, καθώς χαρακτηρίζεται από έλλειψη γνωστικής αλληλεπίδρασης. Ο παραδοσιακός τρόπος εκμάθησης χρήσης του άβακα απαιτεί από τους μαθητές να απομνημονεύσουν τη μέθοδο υπολογισμού. Όμως, η απομνημόνευση δεν είναι η πιο αποτελεσματική μέθοδος μάθησης, σε σύγκριση με την πλήρη κατανόηση πληροφοριών σε όλα τα γνωστικά επίπεδα.

3. Ερευνητικό μέρος

3.1 Σκοπός και σημαντικότητα της έρευνας

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να εξετάσει κατά πόσο ο κινέζικος άβακας σε ψηφιακή μορφή (εφαρμογή android) μπορεί να συμβάλει στην καλύτερη κατανόηση της αξίας θέσης ψηφίου, όπως αυτή γίνεται αντιληπτή από την έννοια της χρήσης του κρατούμενου στην πρόσθεση και του δανεικού στην αφαίρεση.

Η σημασία αυτής της έρευνας έγκειται αρχικά στο ότι τα αποτελέσματα θα συνεισφέρουν στον εμπλουτισμό της υφιστάμενης βιβλιογραφίας όσον αφορά στη χρήση ψηφιακών χειραπτικών υλικών - και συγκεκριμένα του κινέζικου άβακα σε ψηφιακή μορφή - στην καλύτερη κατανόηση μαθηματικών πράξεων, αλλά και αφηρημένων εννοιών (κρατούμενο, αξία θέσης ψηφίου). Επίσης, τα ευρήματα από την παρούσα μελέτη μπορούν να φανούν χρήσιμα σε εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, ούτως ώστε να αντιληφθούν την αξία των ψηφιακών χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία δύσκολων μαθηματικών εννοιών. Με τον τρόπο αυτό μπορούν να χρησιμοποιήσουν τα αποτελέσματα αυτά προκειμένου να ενισχύσουν τη διδασκαλία των μαθηματικών.

3.2 Ερευνητικά ερωτήματα

Με βάση τον σκοπό της έρευνας τα ερευνητικά ερωτήματα που διαμορφώνονται έχουν ως εξής:

1. Μπορεί ο κινέζικος άβακας σε ηλεκτρονική έκδοση να αυξήσει τις ικανότητες των μαθητών στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης;

2. Αποτελεί ο κινέζικος άβακας σε ηλεκτρονική έκδοση ένα εργαλείο που μπορεί να οδηγήσει στην κατανόηση των εννοιών του κρατουμένου και του δανεικού στην πρόσθεση και την αφαίρεση αντίστοιχα;

3.3 Δείγμα

Το δείγμα της έρευνας αποτελείται από πέντε μαθητές της Β΄ Δημοτικού. Η έρευνα υλοποιήθηκε τον Μάιο του 2022 ώστε να έχουν διδαχθεί νωρίτερα μέσα στη σχολική χρονιά την αφαίρεση με κρατούμενο. Αυτό οφείλεται στη διαπίστωση του Yee (1998) πως οι υπολογισμοί με άβακα βρίσκονται σε ένα ενδιάμεσο επίπεδο αφαίρεσης μεταξύ του υπολογισμού με μπλοκ στη βάση δεκάδων και των γραπτών υπολογισμών. Για αυτόν τον λόγο οι μαθητές πρέπει πρώτα να κατανοήσουν τις πράξεις όπως η πρόσθεση και η αφαίρεση και να κατανοήσουν τους συμπληρωματικούς αριθμούς (5 και 10) προτού μπορέσουν να χρησιμοποιήσουν τον άβακα για υπολογισμό. Να σημειωθεί πως ελήφθη από την ερευνήτρια ενυπόγραφη άδεια από τους γονείς για τη διεξαγωγή της έρευνας.

3.4 Μέθοδος

3.4.1 Pre-test

Το pre-test αποτελείται από ένα φύλλο εργασιών με τέσσερις ασκήσεις, όπως παρουσιάζονται αμέσως παρακάτω.

1. Ο Γιώργος έχει 15 μπαλάκια του τένις και η Κατερίνα 27. Πόσα μπαλάκια έχουν και οι δύο μαζί;
   Απάντηση:

2. Υπολογίζω το αποτέλεσμα των προσθέσεων:

	Δεκάδ.	Μονάδ.
	2	7
	1	4
+		2

	Δεκάδ.	Μονάδ.
		6
	1	5
+	2	4

	Δεκάδ.	Μονάδ.
	3	0
	1	6
+		8

	Δεκάδ.	Μονάδ.
	2	7
	1	4
+		2

3. Η πολυκατοικία έχει ύψος 31 μέτρα και το δέντρο που βρίσκεται δίπλα της είναι 13 μέτρα. Πόσα μέτρα πιο ψηλή είναι η πολυκατοικία από το δέντρο;
Απάντηση:

4. Βρίσκω ποιες αφαιρέσεις χρειάζονται κρατούμενα. Τα συμπληρώνω και κάνω τις αφαιρέσεις:

	2	6
-	1	4

	5	4
-	2	8

	2	4
-		7

	5	0
-	3	6

3.4.2 Post-test

Το post-test αποτελείται από ένα φύλλο εργασιών που εμπεριέχει ασκήσεις και ερωτήσεις ανοικτού τύπου, όπως παρουσιάζονται παρακάτω.

1. Μπορείς να προσθέσεις τους αριθμούς 14 και 9 με τον κινέζικο άβακα του τάμπλετ;
   Απάντηση:
   ____

   Προσπάθησε να εξηγήσεις πώς έκανες την πρόσθεση:
   ____
   ____

2. Μπορείς να προσθέσεις τους αριθμούς 26 και 39 με τον κινέζικο άβακα του τάμπλετ;
   Απάντηση:
   ____

   Προσπάθησε να εξηγήσεις πώς έκανες την πρόσθεση:
   ____
   ____

3. Υπολόγισε την πρόσθεση κάνοντας τα βήματα με τον άβακα που έχεις στο τάμπλετ σου. Ζωγράφισε το κάθε βήμα στους παρακάτω άβακες:

   13+29=……………..

$1^{ο}$ βήμα Βάζω τον αριθμό 13	$2^{ο}$ βήμα Προσθέτω 9 μονάδες	$3^{ο}$ βήμα Προσθέτω 2 δεκάδες
$4^{ο}$ βήμα Υπολογίζω το αποτέλεσμα		

4. Μπορείς να αφαιρέσεις από τον αριθμό 16 τον αριθμό 7 με τον κινέζικο άβακα του τάμπλετ;
   Απάντηση:

   ____

   Προσπάθησε να εξηγήσεις πώς έκανες την αφαίρεση:

   ____

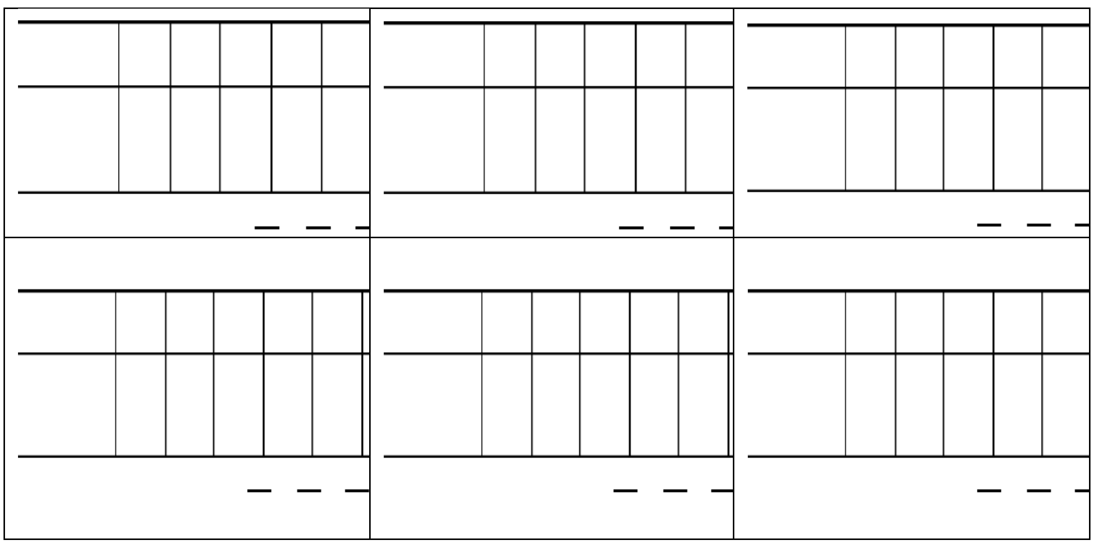
   ____

5. Μπορείς να προσθέσεις από τον αριθμό 42 τον αριθμό 17 με τον κινέζικο άβακα του τάμπλετ;
   Απάντηση:

Προσπάθησε να εξηγήσεις πώς έκανες την αφαίρεση:

6. Υπολόγισε την αφαίρεση 43-19 με τον άβακα που έχεις στο κινητό σου. Σχεδίασε τα βήματα στους άβακες που υπάρχουν στον παρακάτω πίνακα:

   43-19=……………..



7. Εξήγησε με δικά σου λόγια τι είναι το κρατούμενο:

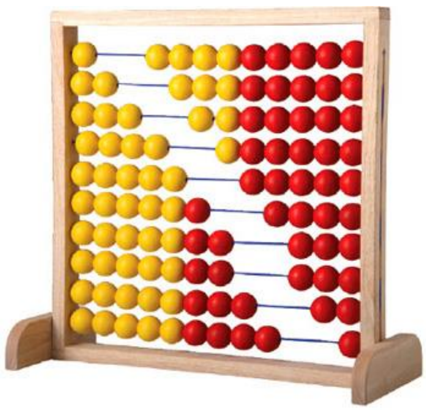
8. Εξήγησε με δικά σου λόγια τι είναι το δανεικό:

3.4.3 Παρουσίαση Διδακτικής Παρέμβασης

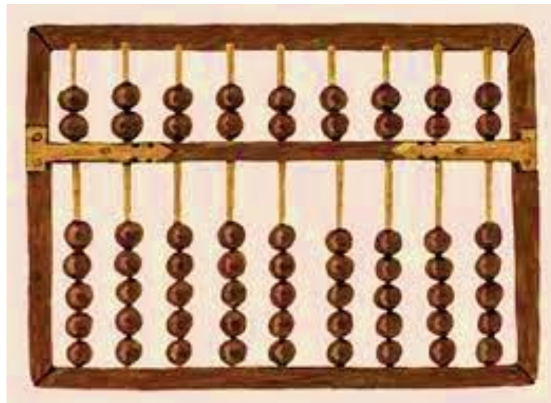
Η διδακτική παρέμβαση αποτελείται από τρεις φάσεις. Κατά την πρώτη φάση θα προβληθεί μία εικόνα του κλασικού άβακα, όπως παρουσιάζεται παρακάτω (Εικόνα 1).

Με βάση αυτή την εικόνα τα παιδιά θα ερωτηθούν αν γνωρίζουν αυτό το εργαλείο και ειδικότερα πώς αυτό χρησιμοποιείται. Στη συνέχεια θα προβληθεί μια εικόνα του κινέζικου άβακα (Εικόνα 2) και θα ζητηθεί από τα παιδιά να εντοπίσουν ομοιότητες και διαφορές με τον προηγούμενο άβακα.

Εικόνα 1. Κλασικός άβακας



Εικόνα 2. Κινέζικος άβακας



Κατά τη δεύτερη φάση θα αναλυθεί ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί ο κινέζικος άβακας. Τα παιδιά θα ανακαλύψουν αυτόν τον τρόπο λειτουργίας. Στη συνέχεια θα εξηγηθεί και το πώς αναπαριστούμε έναν διψήφιο αριθμό στον άβακα. Στη φάση αυτή αναμένεται να προκληθεί το ενδιαφέρον των μαθητών σχετικά με τον κινέζικο άβακα ώστε στη συνέχεια να δουλέψουν με αυτόν. Μετά θα δοθούνε οι φορητές συσκευές με την εφαρμογή του κινέζικου άβακα, ώστε οι μαθητές να εξοικειωθούν με την χρήση της εφαρμογής (https://play.google.com/store/apps/details?id=org.tezsoft.abacus_app).

Κατά την τελευταία φάση θα ζητηθεί από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν την εφαρμογή ώστε να σχηματίσουν μονοψήφιους και διψήφιους αριθμούς (5, 8, 13, 29) στον άβακα. Μετά θα δοθούν δύο φύλλα εργασιών (1º, 2º) με τα οποία στοχεύεται η μεγαλύτερη εξοικείωση των μαθητών με την αναπαράσταση των αριθμών σε ένα άβακα. Μετά, με καθοδήγηση και βοήθεια, θα υλοποιηθούν δύο άλλα φύλλα εργασιών (3º, 4º), τα οποία έχουν προσθέσεις και αφαιρέσεις που θα διεξαχθούν με την χρήση του άβακα, ώστε να γίνει κατανοητός ο τρόπος με τον οποίον χρησιμοποιείται το συγκεκριμένο εργαλείο.

1ο Φύλλο Εργασιών

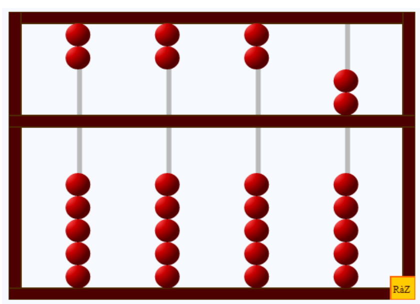
Χρωμάτισε σφαίρες στους παρακάτω άβακες ώστε να σχηματιστεί ο κάθε αριθμός

5

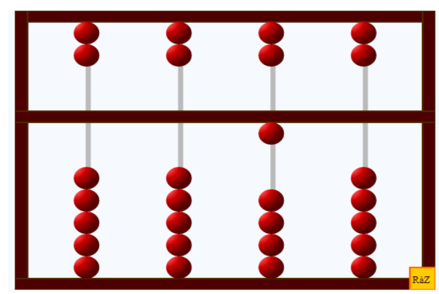
10

τίζεται στον

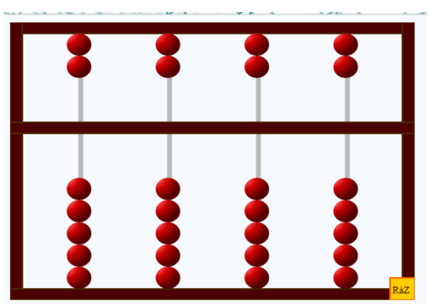
______



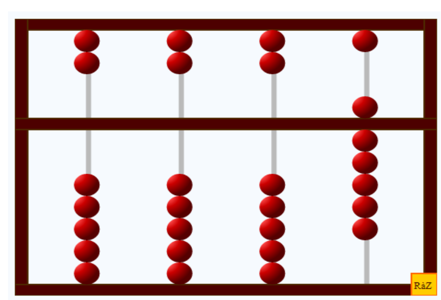
______



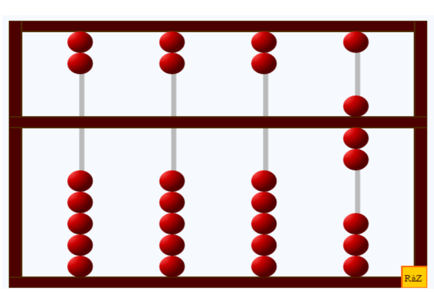
______



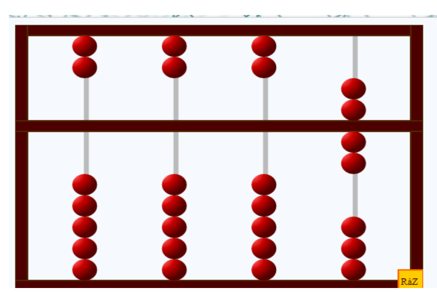
______



______

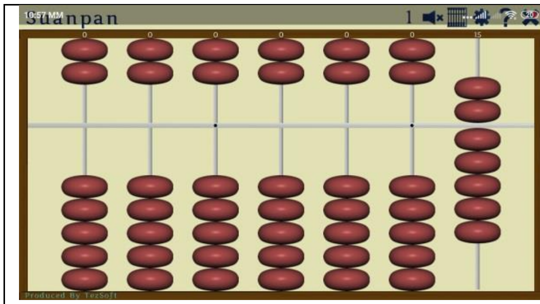
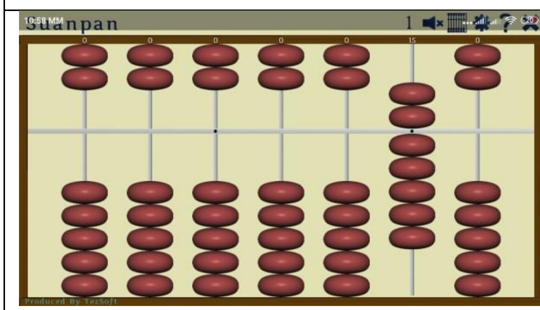
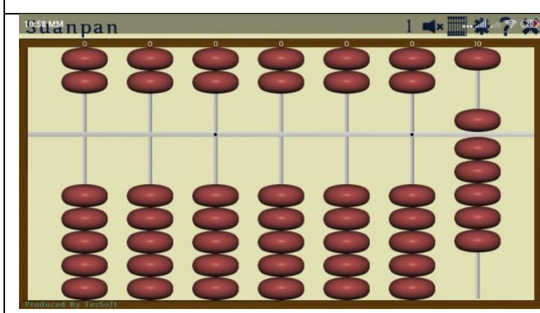
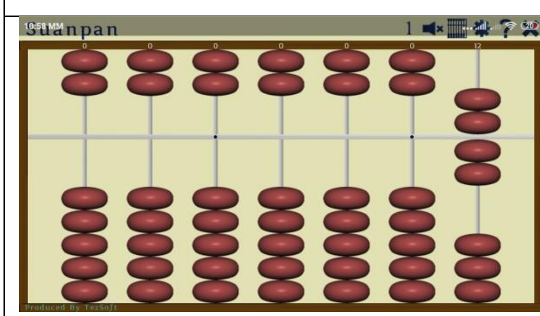


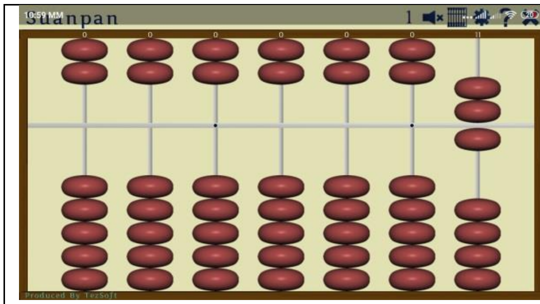
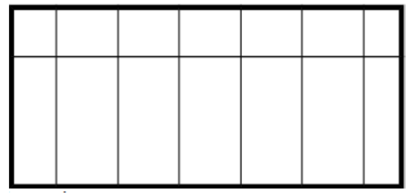
______



3º Φύλλο Εργασιών

Γράψε τον αριθμό που βλέπεις στον αριστερό άβακα στο μεσαίο κουτάκι. Μετά στα δεξιά σχημάτισε τον ίδιο αριθμό όπως είναι πιο σωστά.

	___	
	___	
	___	
	___	

	____ _	

$4^{ο}$ Φύλλο Εργασιών

Κάνε τις πράξεις που βλέπεις αρχικά κάθετα.Μετά σχημάτισέ κάθε βήμα στον κάθε άβακα με τη βοήθεια του τάμπλετ.

1) 17+6=

$1^{ο}$ βήμα Σχημάτισε τον αριθμό 17 με χάντρες.Γράψε τις δεκάδες και τις μονάδες από κάτω.	$2^{ο}$ βήμα Πρόσθεσε 6 μονάδες με χάντρες. Γράψε τις δεκάδες και τις μονάδες από κάτω.	$3^{ο}$ βήμα Κάνε τις αλλαγές των θέσεων αξίας όπου πρέπει
_ _ _	_ _ _	_ _ _

2) 38+14=

$1^{ο}$ βήμα Σχημάτισε τον αριθμό 38 με χάντρες. Γράψε τις δεκάδες και τις μονάδες από κάτω.	$2^{ο}$ βήμα Πρόσθεσε το 14 με χάντρες. Γράψε τις δεκάδες και τις μονάδεςαπό κάτω.	$3^{ο}$ βήμα Κάνε τις αλλαγές των θέσεων αξίας όπου πρέπει

3) 54+49=

$1^{ο}$ βήμα Σχημάτισε τον αριθμό 54 με χάντρες. Γράψε τις δεκάδες και τις μονάδες από κάτω.	$2^{ο}$ βήμα Πρόσθεσε το 49 με χάντρες. Γράψε τις δεκάδες και τις μονάδεςαπό κάτω.	$3^{ο}$ βήμα Κάνε τις αλλαγές των θέσεων αξίας όπου πρέπει.

4) 46+34=

$1^{ο}$ βήμα Σχημάτισε τον αριθμό 46 με χάντρες. Γράψε τις δεκάδες και τις μονάδες από κάτω.	$2^{ο}$ βήμα Πρόσθεσε το 34 με χάντρες. Γράψε τις δεκάδες και τις μονάδεςαπό κάτω.	$3^{ο}$ βήμα Κάνε τις αλλαγές των θέσεων αξίας όπου πρέπει.

5) 36-15=

$1^{ο}$ βήμα Ενεργοποίησε 3 δεκάδες.	$2^{ο}$ βήμα Ενεργοποίησε 6 μονάδες.	$3^{ο}$ βήμα Απενεργοποίησε 5 μονάδες
$4^{ο}$ βήμα Απενεργοποίησε 1 δεκάδα.		

6) 14-8=

1ο βήμα Σχημάτισε τον αριθμό 14 με χάντρες. Γράψε τις δεκάδες και τις μονάδες από κάτω. _ _ _	2ο βήμα Δεν μπορείς να αφαιρέσεις 8 μονάδες από 0. Δανείσου μια δεκάδα. Κάνε τις απαραίτητες ανταλλαγές. Σημείωσε το δανεικό. _ _ _	3ο βήμα Τώρα υπάρχουν 14 μονάδες για να αφαιρέσεις τις υπόλοιπες 4 από τις αρχικές 8. Κάνε την αφαίρεση. Γράψε τις δεκάδες και τις μονάδες από κάτω. _ _ _

7) 73-9=

1ο βήμα Σχημάτισε τον αριθμό 73 με χάντρες. Γράψε τις δεκάδες και τις μονάδες από κάτω. _ _ _	2ο βήμα Δεν μπορείς να αφαιρέσεις 9 μονάδες από 3. Δανείσου μια δεκάδα. Κάνε τις απαραίτητες ανταλλαγές. Σημείωσε το δανεικό. _ _ _	3ο βήμα Τώρα υπάρχουν 13 μονάδες για να αφαιρέσεις τις 9. Κάνε την αφαίρεση. Γράψε τις δεκάδες και τις μονάδες από κάτω. _ _ _

8) 45-36=

1^o βήμα Σχημάτισε τον αριθμό 45 με χάντρες. Γράψε τις δεκάδες και τις μονάδες από κάτω.	2^o βήμα Δεν μπορείς να αφαιρέσεις 6 μονάδες από 5. Δανείσου μια δεκάδα. Κάνε τις απαραίτητες ανταλλαγές. Σημείωσε το δανεικό.	3^o βήμα Τώρα υπάρχουν 15 μονάδες για να αφαιρέσεις τις 6. Κάνε την αφαίρεση. Γράψε τις δεκάδες και τις μονάδες από κάτω.
_ _ _	_ _ _	_ _ _

9) 61-59=

$1^{ο}$ βήμα Σχημάτισε τον αριθμό 61 με χάντρες. Γράψε τις δεκάδες και τις μονάδες από κάτω.	$2^{ο}$ βήμα Δεν μπορείς να αφαιρέσεις 9 μονάδες από 1. Δανείσου μια δεκάδα. Κάνε τις απαραίτητες ανταλλαγές. Σημείωσε το δανεικό.	$3^{ο}$ βήμα Τώρα υπάρχουν 11 μονάδες για να αφαιρέσεις τις 9. Κάνε την αφαίρεση. Γράψε τις δεκάδες και τις μονάδες από κάτω.
_ _ _	_ _ _	_ _ _

3.5 Αποτελέσματα της έρευνας

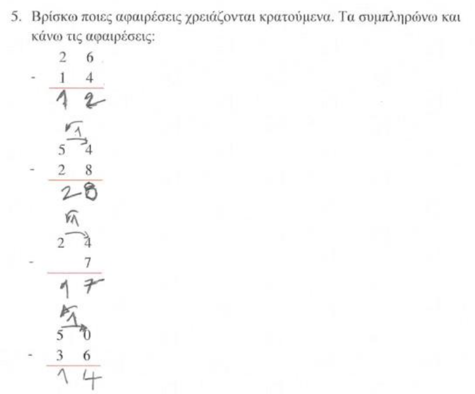
3.5.1 Ανάλυση αποτελεσμάτων Pre-test

Στην πρώτη άσκηση του φύλλου εργασιών πριν από τη διδακτική παρέμβαση όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά και έδειξαν να κατανοούν την πρόσθεση με κρατούμενο (15+27=42). Στη δεύτερη άσκηση οι μαθητές κλήθηκαν να υπολογίσουν τέσσερις προσθέσεις. Από το σύνολο των πέντε μαθητών, οι τέσσερις απάντησαν σωστά σε όλες, ενώ στην τελευταία ένας μαθητής δεν απάντησε σωστά (27+14+2). Συγκεκριμένα, ενώ το αποτέλεσμα ήταν ‘43’, ο μαθητής απάντησε ‘33’ που σημαίνει ότι δεν πρόσθεσε το κρατούμενο, παρά το ότι το ανέφερε κατά την απάντησή του και έδειξε ότι κατάλαβε τη χρήση του και ότι έπρεπε να το συμπεριλάβει στην πρόσθεση.

	Δεκάδ.	Μονάδ.	
	2	7	1
	1	4	
+		2	
	3	3	

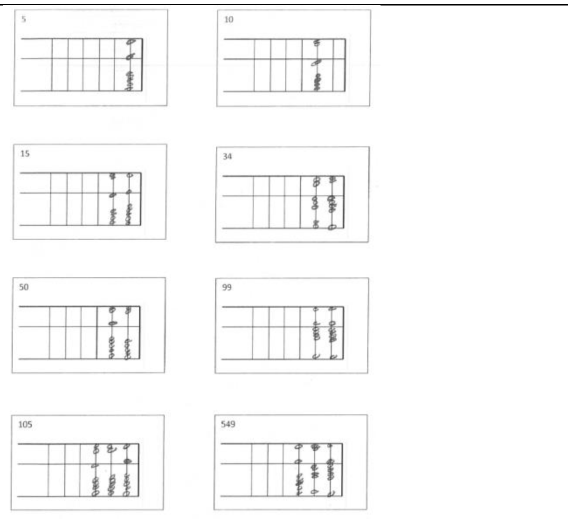
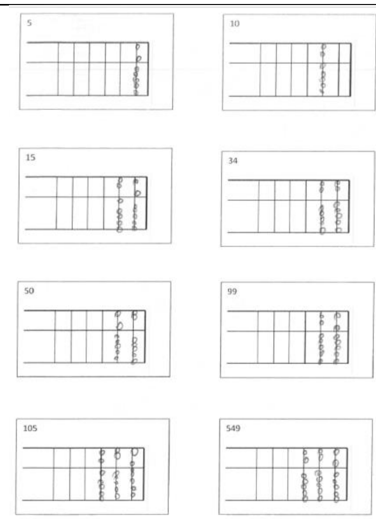
Στην επόμενη άσκηση οι μαθητές κλήθηκαν να προβούν σε μία αφαίρεση με κρατούμενο (31-13), όπου οι απαντήσεις όλων των μαθητών ήταν σωστές (31-

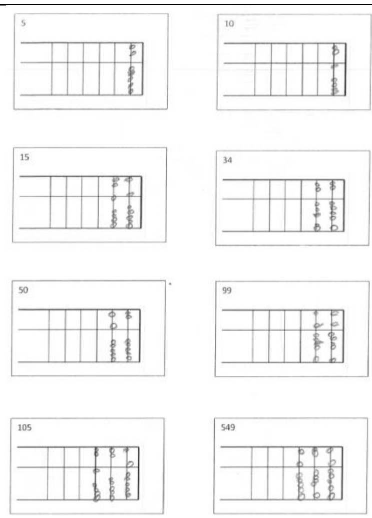
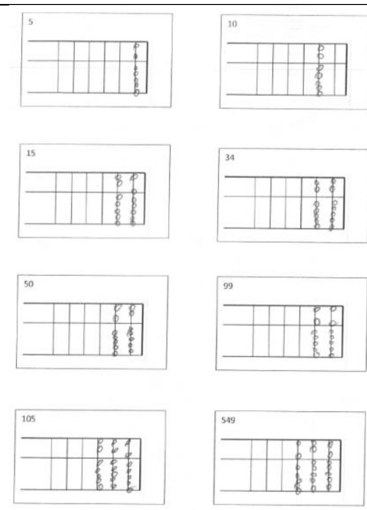
13=18).Στην πέμπτη άσκηση δόθηκαν στους μαθητές τέσσερις πράξεις αφαίρεσης, όπου έπρεπε να υπολογίσουν το αποτέλεσμα και να σημειώσουν σε ποιες από αυτές τις αφαιρέσεις χρειάζονται κρατούμενα. Από τις τέσσερις πράξεις μόνο σε μία δεν ήταν απαραίτητη η χρήση κρατούμενου. Όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά σε αυτό το σκέλος της ερώτησης και σημείωσαν με επιτυχία τους τρεις αφαιρέσεις όπου ήταν απαραίτητο το κρατούμενο. Ωστόσο, σε μία εκ των αφαιρέσεων με κρατούμενο όλοι οι μαθητές απάντησαν λανθασμένα (54-28=28 αντί του ορθού 54-28=26).



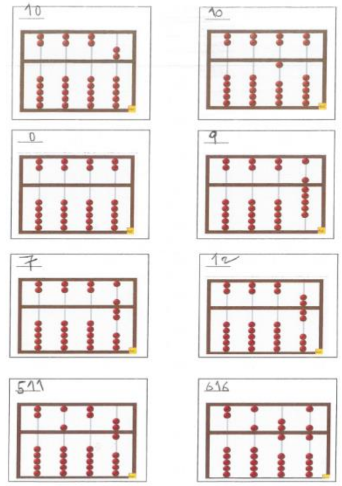
3.5.2 Ανάλυση αποτελεσμάτων φυλλαδίων εργασιών

Στο πρώτο φύλλο εργασιών οι μαθητές κλήθηκαν να ζωγραφίσουν τις σφαίρες στον άβακα προκειμένου να σχηματιστεί ο αριθμός που αναγράφεται. Αυτό που παρατηρήθηκε ήταν μία διαφοροποίηση μεταξύ των απαντήσεων των μαθητών όχι στον αριθμό των σφαιρών, αλλά στη διάταξη αυτών, όπως φαίνεται και από τις παρακάτω εικόνες. Αυτό το αποτέλεσμα υποδηλώνει πως ενώ οι μαθητές κατανοούν τον αριθμό των σφαιρών που θα πρέπει να εμπεριέχονται στην άνω και κάτω πλευρά του άβακα για να σχηματιστεί ο εκάστοτε αριθμός, δεν είναι σε θέση απόλυτα να κατανοήσουν τη θέση των σφαιρών.

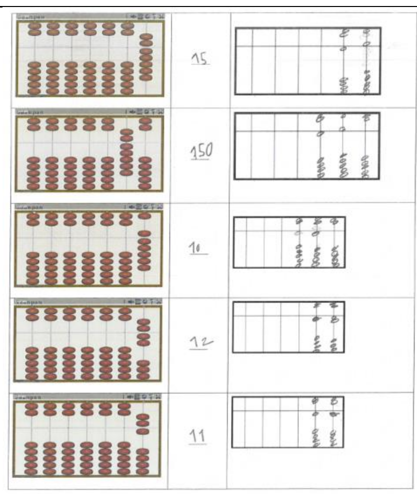
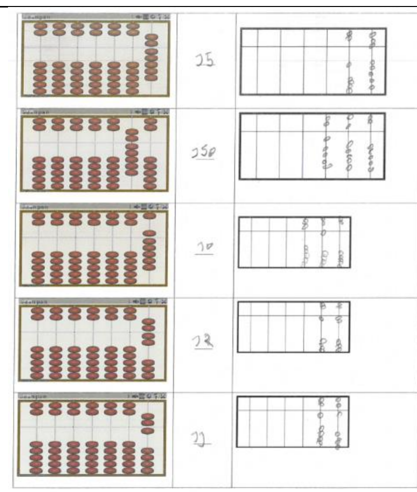
Απαντήσεις μαθητή Α	Απαντήσεις μαθητή Β
	

Απαντήσεις μαθητή Γ	Απαντήσεις μαθητή Δ
	

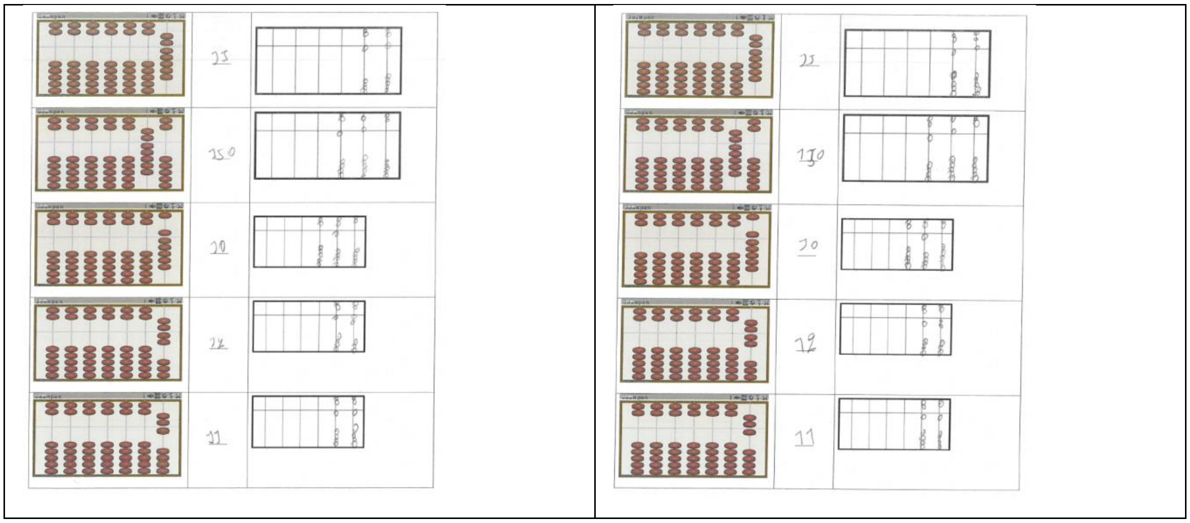
Αντίθετα, όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να σημειώσουν τους αριθμούς που σχηματίζονται από συγκεκριμένες διατάξεις των σφαιρών του άβακα, όλοι οι μαθητές απάντησαν ορθά. Η παρακάτω εικόνα απεικονίζει τις απαντήσεις όλων των μαθητών.



Περισσότερα λάθη σημειώθηκαν όταν κλήθηκαν οι μαθητές να υπολογίσουν τον αριθμό που έχει σχηματιστεί στον άβακα και να τον σχηματίσουν εκ νέου σωστά. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές υπολόγισαν ορθά τον αριθμό που αναπαριστούσε ο άβακας, αλλά μόνο ένας απάντησε σωστά στην πρώτη εικόνα και τέσσερις στη δεύτερη εικόνα. Αντίθετα, όλοι απάντησαν στις τρεις τελευταίες εικόνες. Τα λάθη που σημειώθηκαν στην πρώτη εικόνα αφορούσαν τόσο τον αριθμό των σφαιρών, όσο και τη διάταξή τους.

Απαντήσεις μαθητή Α	Απαντήσεις μαθητή Β
	

Απαντήσεις μαθητή Γ	Απαντήσεις μαθητή Δ



Στο τρίτο φύλλο εργασιών, στην πρώτη πράξη που ήταν πρόσθεση, όλοι οι μαθητές σημείωσαν σωστά την πράξη με το κρατούμενο (17+6=23). Επίσης όλοι οι μαθητές σημείωσαν σωστά τον αρχικό αριθμό (17) στον άβακα. Όταν κλήθηκαν να προσθέσουν τον αριθμό ‘6’, ένας μαθητής απάντησε λανθασμένα, με το λάθος να εντοπίζεται σον αριθμό και τη διάταξη των σφαιρών. Στον τελικό υπολογισμό (αριθμός ‘23’) ένας άλλος μαθητής σχημάτισε λανθασμένα τον αριθμό στον άβακα, με το λάθος να εντοπίζεται στον αριθμό των σφαιρών στο κάτω μέρος του άβακα.

Στη δεύτερη πράξη που ήταν πρόσθεση, όλοι οι μαθητές σημείωσαν σωστά την πράξη με το κρατούμενο (38+14=52). Επίσης όλοι οι μαθητές σημείωσαν σωστά τον αρχικό αριθμό (38) και την προσθήκη του δεύτερου αριθμού (‘14’) στον άβακα. Στον τελικό υπολογισμό (αριθμός ‘52) ένας μαθητής σχημάτισε λανθασμένα τον αριθμό στον άβακα, με το λάθος να εντοπίζεται στον αριθμό των σφαιρών στο πάνω μέρος του άβακα. Στην τρίτη πράξη που ήταν επίσης πρόσθεση, όλοι οι μαθητές σημείωσαν σωστά την πράξη με το κρατούμενο (54+49=103). Τέσσερις μαθητές σημείωσαν σωστά τον αρχικό αριθμό (54) με το λάθος να είναι στον αριθμό των σφαιρών στο πάνω μέρος του πίνακα. Ωστόσο, όλοι πρόσθεσαν σωστά τον αριθμό στον άβακα (‘49’) στον άβακα και όλοι σχημάτισαν σωστά τον τελικό αριθμό της πρόσθεσης. Στην τέταρτη πράξη που ήταν επίσης πρόσθεση, όλοι οι μαθητές σημείωσαν σωστά την πράξη με το κρατούμενο

(46+34=80). Όλοι οι μαθητές σημείωσαν σωστά τον αρχικό αριθμό (46) και όλοι πρόσθεσαν σωστά τον αριθμό στον άβακα (‘34) στον άβακα. Όμως, όλοι σχημάτισαν λάθος τον τελικό αριθμό της πρόσθεσης, με το λάθος να είναι στον υπολογισμό: ενώ όλοι σημείωσαν σωστά τον υπολογισμό στην πράξη, στον άβακα σχημάτισαν τον αριθμό ‘50’ αντί του αριθμού ‘80’.

Στις επόμενες πράξεις που ήταν αφαιρέσεις (36-15=21, 14-8=6, 73-9=64, 61-59=2) όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά στον υπολογισμό και στην πράξη στον άβακα. Σε μία επόμενη αφαίρεση (45-36=9) σημειώθηκαν λάθη στον τελικό σχηματισμό του υπολογισμού στον άβακα από έναν μαθητή, με το λάθος να εντοπίζεται στον αριθμό των σφαιρών στο πάνω μέρος του άβακα.

3.5.3 Ανάλυση αποτελεσμάτων Post-test

Αρχικά θα πρέπει να σημειωθεί πως οι μαθητές απάντησαν σωστά στις ερωτήσεις 1-6 που αφορούσαν πράξεις (προσθέσεις και αφαιρέσεις), τόσο στον υπολογισμό, όσο και στον σχεδιασμό της πράξης στον άβακα. Αξίζει όμως να σημειωθεί πως κατά την εξήγηση που έδωσαν σχετικά με το πώς σχημάτισαν τους τελικούς αριθμούς (π.χ. 42+17=52, 16-7=9) στον άβακα παρατηρείται μία διαφοροποίηση. Οι τρεις από τους πέντε συνολικά μαθητές κατά την εξήγηση της διαδικασίας ακολούθησαν έναν αλγόριθμο προσθήκης / αφαίρεσης δεκάδων / μονάδων που αντιστοιχεί στον τρόπο λειτουργίας του άβακα, ενώ οι δύο εξήγησαν τη διαδικασία με βάση περισσότερο το πώς γίνονται οι πράξεις χωρίς τη χρήση του άβακα (δηλαδή με πρακτικό τρόπο). Είναι χαρακτηριστικές οι απαντήσεις των μαθητών που παρατίθενται στις δύο πιο κάτω εικόνες.

Απαντήσεις μαθητή Α	Απαντήσεις μαθητή Β
4. Μπορείς να αφαιρέσεις από τον αριθμό 16 τον αριθμό 7 με τον κινέζικο άβακα του τάμπλ Απάντηση: 9 Προσπάθησε να εξηγήσεις πώς έκανες την αφαίρεση: Εχω 16 μοναδες και Εβγαλα 7 μοναδες και εχω 9 μοναδες	4. Μπορείς να αφαιρέσεις από τον αριθμό 16 τον αριθμό 7 με τον κινέζικο άβακα του τάμπλε Απάντηση: 16 − 7 = 9 Προσπάθησε να εξηγήσεις πώς έκανες την αφαίρεση: Έβαλα το 16. Έβγαλα 1 δεκάδα και την έβαλα στ μονάδες. Έχω 10+6−7=9 μονάδες.
5. Μπορείς να προσθέσεις από τον αριθμό 42 τον αριθμό 17 με τον κινέζικο άβακα του τάμπλετ; Απάντηση: 59 Προσπάθησε να εξηγήσεις πώς έκανες την αφαίρεση: Προσθετω το 7 με το 2 μονάδες και βγαινει 9. Μετα προσθετω το 4 με το 1 μοναδα και βγαινει 5	5. Μπορείς να προσθέσεις από τον αριθμό 42 τον αριθμό 17 με τον κινέζικο άβακα του τάμπλετ; Απάντηση: 42 + 17 = 59 Προσπάθησε να εξηγήσεις πώς έκανες την αφαίρεση: Έβαλα το 42. Έβαλα 1 δεκάδα και 7 μονάδες. 1+4=5 και 2+7=9. Έχω 5 δεκάδες και 9 μονάδες.

Στην ερώτηση σχετικά με το τι είναι το κρατούμενο, όλοι οι μαθητές σημείωσαν πως είναι εκείνο που «κρατάνε και πάει από τις μονάδες στις δεκάδες». Η απάντηση αυτή υποδηλώνει πως οι μαθητές έχουν κατανοήσει πως το κρατούμενο είναι ο αριθμός που σε μία πρόσθεση αντιπροσωπεύει τις δεκάδες του αθροίσματος ψηφίων και που μεταφέρεται στην αμέσως επόμενη μεγαλύτερη στήλη αριθμών. Παρομοίως, οι μαθητές έχουν κατανοήσει την έννοια του δανεικού στην αφαίρεση, δηλαδή όταν δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί μία αφαίρεση και έτσι δανείζονται μία δεκάδα. Τα αποτελέσματα αυτά καταδεικνύουν πως σε σύγκριση με τα pre-test, η χρήση του κινέζικου άβακα οδήγησε στον καλύτερο υπολογισμό μαθηματικών πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης, αλλά και στην κατανόηση των εννοιών του κρατουμένου και του δανεικού.

Απαντήσεις μαθητή Α	Απαντήσεις μαθητή Γ
7. Εξήγησε με δικά σου λόγια τι είναι το κρατούμενο: Κάνω την πρόσθεση. Κρατάω αυτό που πάει από τις μ δες στις δεκάδες	7. Εξήγησε με δικά σου λόγια τι είναι το κρατούμενο: Όταν θέλω να κάνω πρόσθεση, κρατάω αυτό που πάει στις δε
8. Εξήγησε με δικά σου λόγια τι είναι το δανεικό: Κάνω την αφαίρεση. Παίρνω μια δεκάδα και τη βάζω μονάδες. Τώρα μπορώ να κάνω την αφαίρεση.	8. Εξήγησε με δικά σου λόγια τι είναι το δανεικό: Όταν δεν μπορώ να κάνω αφαίρεση, παίρνω δανεικό από τις δεκάδες

4. Συμπεράσματα και προτάσεις

4.1 Συζήτηση αποτελεσμάτων και τελικά συμπεράσματα

Τα ευρήματα της μελέτης που διεξήχθη για τον σκοπό αυτής της εργασίας καταδεικνύουν τα εξής: α) πριν από τη διδακτική παρέμβαση οι μαθητές απάντησαν σωστά στις ερωτήσεις υπολογισμών πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης με ελάχιστες εξαιρέσεις, β) στα φύλλα εργασιών κατά τη διδακτική παρέμβαση οι μαθητές κατανόησαν τη χρήση του κινέζικου άβακα για τη διεξαγωγή πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης με λίγα λάθη να εντοπίζονται στον αριθμό και κυρίως στη διάταξη των σφαιρών στον άβακα, γ) μετά τη διδακτική παρέμβαση οι μαθητές απάντησαν σωστά στις ερωτήσεις υπολογισμών πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης με τη χρήση του άβακα, δ) οι μαθητές κατανόησαν την έννοια του κρατούμενου και του δανεικού.

Τα ευρήματα αυτά υποδηλώνουν πως ο κινέζικος άβακας αποτελεί ένα χειραπτικό εργαλείο, ακόμα και στην ηλεκτρονική του έκδοση, που μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές να κατανοήσουν έννοιες πιο αφηρημένες, όπως το κρατούμενο και το δανεικό, συμβάλλοντας στην καλύτερη επίδοσή τους σε μαθηματικές πράξεις, εν προκειμένω πρόσθεσης και αφαίρεσης. Επίσης, τα προαναφερθέντα ευρήματα υποδηλώνουν πως ο κινέζικος άβακας μπορεί να οδηγήσει σε καλύτερη κατανόηση της έννοιας της θέσης ψηφίου στις αριθμητικές πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Επιπρόσθετα, οι μαθητές φάνηκε να κατανοούν τον αλγόριθμο που χρησιμοποιείται για την εκτέλεση πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης τόσο με πρακτικό τρόπο, όσο και με τη χρήση άβακα, έπειτα από τη διδακτική παρέμβαση. Συνεπώς, εξάγονται τα εξής συμπεράσματα: α) ο κινέζικος άβακας μπορεί να οδηγήσει σε βελτίωση των ικανοτήτων συλλογισμού των μαθητών για την εκτέλεση πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης, β) ο κινέζικος άβακας μπορεί να οδηγήσει στην κατανόηση των αφηρημένων εννοιών του κρατούμενου και του δανεικού στην πράξη της πρόσθεσης και αφαίρεσης αντίστοιχα, γ) ο κινέζικος άβακας μπορεί να οδηγήσει στην κατανόηση της αξίας θέσης ψηφίου.

Τα συμπεράσματα που εξήχθησαν από την παρούσα εργασία δεν έρχονται σε αντίθεση με τα αποτελέσματα προηγούμενων μελετών. Στη μελέτη των Rusyani et al.

(2022) διαπιστώθηκε πως η χρήση άβακα οδήγησε σε βελτίωση των δεξιοτήτων αριθμητικών πράξεων αφαίρεσης σε παιδιά με απώλεια ακοής, όπως καταδείχθηκε στην αύξηση του μέσου επιπέδου των ικανοτήτων των μαθητών στις δεξιότητες λειτουργίας αριθμητικής αφαίρεσης.Ο Freeman (2014) διεξήγαγε μία διδακτική παρέμβαση στα μαθηματικά που πραγματοποιήθηκε σε περίοδο δέκα εβδομάδων, εξετάζοντας τα οφέλη από τη χρήση του ιαπωνικού άβακα σε μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με χαμηλή ακαδημαϊκή απόδοση σε ένα σχολείο του Ηνωμένου Βασιλείου. Μέσα από pre- και post-test διαπιστώθηκε πως η χρήση άβακα οδήγησε σε σημαντική πρόοδο των μαθητών σε διάφορα χαρακτηριστικά της απόδοσής τους, συμπεριλαμβανομένων των υπολογιστικών δεξιοτήτων, της προφορικής μέτρησης, της αναγνώρισης αριθμών, της μέτρησης αντικειμένων και της γλώσσας.

Οι Anam et al. (2019) στη μελέτη τους χρησιμοποίησαν τον άβακα για να βελτιώσουν την ικανότητα υπολογισμού της πρόσθεσης και της αφαίρεσης αριθμών από μέρους μαθητών της Β΄ Δημοτικού σε ένα σχολείο στην Ινδονησία και διαπίστωσαν πως πράγματι ο άβακας μπορεί να συνεισφέρει στην αύξηση των μαθησιακών επιτευγμάτων των μαθητών. Οι Popotis και Nikolantonakis (χ.χ.) οργάνωσαν ένα εργαστήριο με δραστηριότητες για να εξηγήσουν τον κινέζικο άβακα ως πηγή για τη διδασκαλία και την εκμάθηση της θέσης ψηφίου και τοποαξίας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, από όπου διαπιστώθηκε πως ο κινέζικος άβακας παρέχει τη δυνατότητα εκμάθησης της αξίας θέσης ψηφίου και μεταφοράς δεκάδων και μονάδων, με αποτέλεσμα να ενισχύεται η κατανόηση του κρατουμένου και του δανεικού και επομένως να υποστηρίζεται η μάθηση.

Ο Lee (2015) εξέτασε τη χρήση του άβακα στην ηλεκτρονική του έκδοση στην περίπτωση μαθητών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στη Μαλαισία. Ο συγγραφέας ανέπτυξε μία ηλεκτρονική έκδοση χρησιμοποιώντας το App Inventor στην πλατφόρμα Android. Διαπιστώθηκε πως αποτελεί μία αποτελεσματική προσέγγιση για να μάθουν τα παιδιά τον άβακα. Το παιχνίδι για κινητά χρησιμοποιείται για να προσελκύσει τα παιδιά να ενδιαφέρονται να μάθουν τον άβακα. Τέλος, διαπιστώθηκε πως ως μαθησιακό εργαλείο μπορεί να συνδυάσει διαφορετικές μαθησιακές προσεγγίσεις με θετικό αντίκτυπο στη μάθηση μαθηματικών πράξεων από τους μαθητές.

Η ιδέα της χρήσης χειραπτικών αντικειμένων έγκειται στο ότι οι μαθητές να μπορούν να αναπτύξουν τη νοητική τους εικόνα διαμέσου της οπτικής, όπως αναφέρθηκε παραπάνω (Cockett & Kilgour, 2015; Eby, 2022). Εάν οι μαθητές ξεκινήσουν με το χειρισμό πραγματικών αντικειμένων, την ταξινόμηση και την αναδιάταξη διαφορετικών συλλογών, εισάγονται σε μοτίβα που θα ταυτιστούν με αριθμητικές λέξεις. Έτσι, προτού να μπορέσουν να χειριστούν αφηρημένους αριθμούς, θα μάθουν να «μοντελοποιούν» καταστάσεις με κάποια μορφή συσκευής που μπορεί να αναπαραστήσει τα πραγματικά αντικείμενα (Anghileri, 2000). Η ιδέα της χρήσης φυσικών αναπαραστάσεων είναι να προωθήσει μια στροφή από τη χρήση συγκεκριμένων στρατηγικών σε πιο περίπλοκες αφηρημένες διαδικασίες που είναι συχνά αποτελεσματικές μέσω της δομής των δεκάδων (Beishuizen, 1993). Οι Askew και Brown (2003) υποστηρίζουν ότι η εργασία με δομημένο και συστηματικό τρόπο με ένα περιορισμένο αλλά αποτελεσματικό σύνολο αναπαραστάσεων μπορεί να είναι χρήσιμη για να προσφέρει στα παιδιά ένα ευρύ φάσμα αναπαραστάσεων. Επιπλέον, οι Carpenter et al. (1999) υποστηρίζουν ότι κατά τη χρήση μιας στρατηγικής μέτρησης, τα φυσικά αντικείμενα χρησιμοποιούνται από τον μαθητή για να παρακολουθεί τις μετρήσεις αντί για την αναπαράσταση αντικειμένων στο πρόβλημα, και αυτό υποδηλώνει ότι ένα παιδί χρησιμοποιεί το αντικείμενο σε πιο περίπλοκο επίπεδο.

Ο Anghileri (2000) επισημαίνει ότι τα σφαιρίδια του κινέζικου άβακα μπορούν να συνδεθούν μεταξύ τους και έτσι έχουν τη δυνατότητα να αναπαριστούν αριθμούς με δομημένο τρόπο. Οι Beishuizen και Anghileri (1998) υποστηρίζουν ότι τα σφαιρίδια εισάγονται δομημένα σε δεκάδες σε μια χορδή, ακολουθούμενες από μια σημειωμένη αριθμητική γραμμή και με αυτόν τον τρόπο η νοητική αναπαράσταση και η νοητική ενεργοποίηση διεγείρονται περισσότερο παρά μέσω της υποστήριξης μοντελοποίησης αριθμητικών μπλοκ. Περαιτέρω, ο Yee (1998) αναφέρει πως όταν χρησιμοποιούν τον άβακα για να προσθέτουν ή να αφαιρούν αριθμούς, οι μαθητές μπορεί να χρειαστεί να αφαιρούν ενώ προσθέτουν ή να προσθέτουν αφαιρώντας. Επομένως, μέσω του άβακα και οι δύο αυτές πράξεις διδάσκονται ταυτόχρονα. Επίσης, οι χάντρες του άβακα έχουν όλες το ίδιο μέγεθος και μια μοναδιαία χάντρα μπορεί να αντιπροσωπεύει ένα, δέκα ή εκατό ανάλογα με τη θέση του. Ως εκ τούτου, η εκμάθηση του χειρισμού ενός άβακα μπορεί να βοηθήσει τα παιδιά να αποκτήσουν την έννοια της αξίας θέσης ψηφίου (Yee, 1998).

4.2 Θεωρητική και πρακτική συμβολή της έρευνας

Σε θεωρητικό επίπεδο η παρούσα εργασία συνέβαλε στον εμπλουτισμό της υφιστάμενης διεθνούς βιβλιογραφίας όσον αφορά στη συνεισφορά του κινέζικου άβακα και μάλιστα σε ηλεκτρονική μορφή στη βελτίωση των ικανοτήτων των μαθητών να εκτελούν τις μαθηματικές πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, αλλά και της κατανόησης της αξίας θέσης ψηφίου διαμέσου των εννοιών του κρατουμένου και του δανεικού. Επίσης καταδείχθηκε και η αποτελεσματικότητα της ψηφιακής εφαρμογής του κινέζικου άβακα που χρησιμοποιήθηκε για τη συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση, γεγονός που αναδεικνύει περαιτέρω την αξία των ψηφιακών μαθηματικών παιχνιδιών στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών.

Σε πρακτικό επίπεδο τα ανωτέρω ευρήματα και τα τελικά συμπεράσματα που εξήχθησαν σημαίνουν πως, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να έχουν επίγνωση των κατάλληλων αναπαραστάσεων που μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να προχωρήσουν από έναν συγκεκριμένο σε έναν πιο αφηρημένο τρόπο επίλυσης προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης. Αυτή η διαπίστωση οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στον ισχυρισμό του Yee (1998) ότι ο τύπος της συνειδητής γνωστικής επεξεργασίας που συμβαίνει σε έναν μεμονωμένο μαθητή θα εξαρτηθεί από τη φιλοσοφία του εκάστοτε εκπαιδευτικού: μερικοί εκπαιδευτικοί ενθαρρύνουν τους μαθητές να «λογικοποιήσουν» τη σωστή κίνηση με βάση την κατανόησή τους για τις αξίες της θέσης ψηφίων και τους δεσμούς αριθμών του 5 και του 10, ενώ άλλοι εστιάζουν στο να επιτύχουν τον υπολογισμό του «νοητικού άβακα» και στις κινήσεις των σφαιριδίων με βάση τους κανόνες που διδάσκονται.

Συνεπώς, οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης θα πρέπει να κατέχουν τις απαραίτητες γνώσεις και δεξιότητες χρήσης του άβακα και εφαρμογής των κατάλληλων στρατηγικών διδασκαλίας με το συγκεκριμένο αντικείμενο, είτε στη φυσική του είτε στην ηλεκτρονική του έκδοση. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τον εμπλουτισμό του προγράμματος σπουδών τους με μαθήματα που αφορούν τα χειραπτικά αντικείμενα γενικά και τον άβακα ειδικότερα, καθώς και τη συνεχή τους επιμόρφωση με εκπαιδευτικά προγράμματα δια βίου μάθησης στο πλαίσιο της επαγγελματικής τους ανάπτυξης.

Επιπλέον, τα οφέλη που διαπιστώθηκαν από τη χρήση του άβακα σε πρακτικό επίπεδο διαμέσου αυτής της έρευνας, αλλά και σε θεωρητικό διαμέσου των όσων έχουν αναφέρει άλλοι μελετητές στο παρελθόν, οδηγούν στη διαπίστωση πως ενδεχομένως να πρέπει το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης να εμπλουτιστεί με χειραπτικά αντικείμενα, σε φυσική ή ηλεκτρονική μορφή. Εκτός από την ενίσχυση των μαθηματικών συλλογισμών και δεξιοτήτων των μαθητών, η χρήση αυτών των αντικειμένων μπορεί να βοηθήσει στο να αναπτύξουν οι μαθητές μία πιο θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά, ενισχύοντας παράλληλα την αυτοπεποίθησή τους.

4.3 Περιορισμοί και προτάσεις περαιτέρω έρευνας

Η παρούσα εργασία ανέδειξε τα οφέλη της χρήσης του ψηφιακού κινέζικου άβακα στην κατανόηση της αξίας θέσης ψηφίου, όπως αυτή γίνεται αντιληπτή στην κατανόηση των εννοιών του κρατουμένου και του δανεικού στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης αντίστοιχα. Στη βάση αυτή η ερευνήτρια προχώρησε και σε ορισμένες συστάσεις που αφορούν τη βελτίωση και απόκτηση των απαραίτητων γνώσεων και δεξιοτήτων από μέρους των εκπαιδευτικών, αλλά και την ένταξη του κινέζικου άβακα στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Όμως, τα αποτελέσματα αυτά δεν μπορούν να γενικευθούν, καθώς το δείγμα των μαθητών ήταν μικρό και προερχόταν από ένα συγκεκριμένο σχολείο. Επίσης, δεν εξετάστηκαν και περαιτέρω μαθηματικές πράξεις (π.χ. πολλαπλασιασμός, διαίρεση) και διδασκαλία και άλλων αφηρημένων μαθηματικών εννοιών (π.χ. κλάσματα, αναπαραστάσεις). Επιπρόσθετα, δεν εξετάστηκε συνολικά η συνεισφορά του κινέζικου άβακα στη νοητική, γνωστική και κιναισθητική ανάπτυξη των μαθητών, στη μείωση του άγχους τους στο μάθημα των μαθηματικών. Εκτός των ανωτέρω, δεν εξετάστηκαν στην παρούσα μελέτη και άλλα ζητήματα που άπτονται της χρήσης του άβακα, όπως είναι η προσέλκυση του ενδιαφέροντος των μαθητών, το κατά πόσο το μάθημα ήταν πιο ενδιαφέρον και διασκεδαστικό, η βελτίωση της ακαδημαϊκής τους απόδοσης συνολικά στο μάθημα των μαθηματικών.

Λαμβάνοντας υπόψη τα ανωτέρω, απαιτούνται καταρχήν περαιτέρω μελέτες σε ένα μεγαλύτερο δείγμα μαθητών και πιο αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού. Επιπλέον, κρίνονται ενδιαφέρουσες μελέτες που θα εξετάζουν και άλλα ζητήματα που σχετίζονται με τη χρήση του άβακα, όπως αναφέρθηκαν παραπάνω. Περαιτέρω μελέτες μπορούν να διερευνήσουν επίσης τη χρήση και άλλων χειραπτικών αντικειμένων, είτε σε φυσική είτε σε ψηφιακή μορφή.

Εκτός του αντικειμένου της έρευνας, το δείγμα επίσης μπορεί να διευρυνθεί σε επόμενες μελέτες. Επί παραδείγματι, μπορούν να πραγματοποιηθούν συγκριτικές μελέτες μεταξύ διαφόρων ομάδων μαθητών (π.χ. υψηλής και χαμηλής απόδοσης στο μάθημα των μαθηματικών, μαθητές με και χωρίς μαθησιακές δυσκολίες) προκειμένου να εξεταστούν τα οφέλη του άβακα, ή ακόμα και άλλων χειραπτικών αντικειμένων. Τέλος, μπορούν να διερευνηθούν και οι απόψεις των εκπαιδευτικών όσον αφορά στα οφέλη του άβακα, αλλά και σε άλλα συναφή θέματα, όπως οι γνώσεις και οι δεξιότητες χρήσης του, τομείς εκπαιδευτικών αναγκών των εκπαιδευτικών, τυχόν εμπόδια στη χρήση του, ή ακόμα και επιπρόσθετα οφέλη που έχουν διαπιστώσει κατά τη χρήση του άβακα ή και άλλων χειραπτικών αντικειμένων που έχουν υιοθετήσει στη διδασκαλία τους. Με τον τρόπο αυτό μπορούν να δημιουργηθούν συστάσεις πρακτικής εφαρμογής, αλλά και να εντοπιστούν ζητήματα που χρίζουν περαιτέρω διερεύνησης στο μέλλον για την ενίσχυση της απόδοσης και της ανάπτυξης των μαθητών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Βιβλιογραφικέςαναφορές

Alsaadat, K. (2017). Mobile Learning Technologies. *International Journal of Electrical and Computer Engineering*, *7*(5), 2833-2837.

Anam, F., Suteja, J. R., Septianto, A., Purnomo, A., & Utami, Y. P. (2019). Improving the Numeracy Mathematics Ability: The Role of Abacus Learning Model. *Journal of Physics: Conference Series, 1594,* doi:10.1088/1742-6596/1594/1/012041.

Anghileri, J. (2000). *Teaching number sense*. London: London.

Asabere, N. Y. (2013). Benefits and Challenges of Mobile Learning Implementation: Story of Developing Nations. *International Journal of Computer Applications, 73*(1), 23-27.

Askew, M., & Brown, M. (2003). How do we teach children to be numerate? A professional user review of UK research undertaken for the British Educational Research Association. Ανακτήθηκε από: http://musicmathsmagic.com/page2/files/BERANumeracyReview.pdf

Beishuizen, M., &Anghileri, J. (1998). Which mental strategies in the early number curriculum? A comparison of British ideas and Dutch views. *British Educational Research Journal, 24*(5), 519-538.

Bora, S.P., & Dhumane, P.B. (2012). Mobile Learning: It's Implication in Education and Training. *Online International Interdisciplinary Research Journal, 2*(2), 150-156.

Brendefur, J. L., Strother, S., & Rich, K. (2018). Building Place Value Understanding Through Modeling and Structure. *Journal of Mathematics Education, 11*(1), 31-45.

Bukharaev, N., & Altaher, A.W. (2017). Mobile Learning Education has Become More Accessible. *American Journal of Computer Science and Information Technology, 5*(2), 1-5.

Burden, K., Hopkins, P., Male, T., Martin, S., & Trala, C. (2012). IPad Scotland Evaluation. Ανακτήθηκεαπό: http://www.janhylen.se/wpcontent/uploads/2013/01/Skottland.pdf

Γκούμας, Ε. (2017). *Διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών με τη χρήση χειραπτικού και ψηφιακού υλικού σε μαθητές Δημοτικού Σχολείου 6 – 9 ετών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, που φοιτούν σε Τμήματα Ένταξης.* Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.

Carbonneau, K. J., Marley, S. C. &Selg, S. C. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology, 105*(2), 380-400.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., & Levi, L. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction.* Portsmouth: Heinemann.

Chowdhury, K. (2020). Chinese abacus (1200AD). Ανακτήθηκε από: https://www.researchgate.net/publication/346963140_Chinese_abacus_1200AD

Clements, D. H. (1999). 'Concrete' Manipulatives, Concrete Ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood, 1*(1), 45-60.

Cockett, A., & Kilgour, P. W. (2015). Mathematical manipulatives: Creating an environment for understanding, efficiency, engagement, and enjoyment. *Teach Collection of Christian Education, 1*(1), 47-54.

Dias, L., & Victor, A. (2017). Teaching and Learning with Mobile Devices in the 21st Century Digital World: Benefits and Challenges. *European Journal of Multidisciplinary Studies, 2*(5), 339-344.

Disney, A., & Eisenreich, H. (2018). Deepening Place Value Understanding in K-2 Through Explanation and Justification. *Proceedings of the Interdisciplinary*

STEM Teaching and Learning Conference, 2(9). doi: 10.20429/stem.2018.020109.

Eby, K. E. (2022). Effective Math Manipulatives To Use With The B.E.S.T. Standards In Grades K-6. *Transformations, 8*(1), 34-45.

Foulkes, M., Sella, F., Wege, T. E., & Gilmore, C. (2023). The Effects of Concreteness on Mathematical Manipulative Choice. *Mind, Brain, And Education, 17*(3), 185-196.

Frank, M. C., & Barner, D. (2012). Representing exact number visually using mental abacus. Journal of experimental psychology. *General, 141*(1), 134–149.

Freeman, N. (2014). Does the Japanese abacus improve underachieving children's performance in mathematics?. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 34*(3). Ανακτήθηκε από: https://bsrlm.org.uk/wp-content/uploads/2016/02/BSRLM-IP-34-3-03.pdf

Fu, J. S. (2013). ICT in Education: A Critical Literature Review and Its Implications. *International Journal of Education and Development using Information and Communication Technology, 9*(1), 112-125.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal forResearch in Mathematics Education, 22*(3), 170-218.

Hernandez, R. M. (2017). Impact of ICT on Education: Challenges and Perspectives. *Propósitos y Representaciones, 5*(1), 325-347.

Jarrah, A. M., Almassri, H., Johnson, J. D., & Wardat, Y. (2022). Assessing the impact of digital games-based learning on students' performance in learning fractions using (ABACUS) software application. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18*(10), https://doi.org/10.29333/ejmste/12421.

Jimoyiannis, A. (2015). TPACK 2.0: Towards a framework guiding Web 2.0 integration in educational practice. Στο: M. S. Khine (Ed.), New Directions in Technological Pedagogical Content Knowledge Research Multiple Perspectives (σελ. 83-108). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Jin, X-Z., Wang, B-R., & Nan, H. (2019). The influence of abacuses on children's mathematical ability. *IOSR Journal of Mathematics*, *15*(6), 36-38.

Jones, J. P., & Tiller, M. (2017). Using Concrete Manipulatives in Mathematical Instruction. *DimensionsofEarlyChildhood*, *45*(1), 18-23.

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών*. Αθήνα: Τόπος.

Kamii, C. (1986). Place Value: An Explanation of Its Difficulty and Educational Implications for the Primary Grades. *Journal of Research in Childhood Education, 1*(2), 75–86.

Koehler, M. J., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *9*(1), 60-70.

Koleza, E., & Koleli, M. (2014). Investigating prospective elementary teachers' number sense through mental computation strategies. *Menon: Journal Of Educational Research, 1st Thematic Issue Florina*, 126–143.

Λεμονίδης, Χ., (2013). *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής. Νοεροί υπολογισμοί.* Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Lee, J. S. (2015). *Abacus Educational Game for Primary School Children: Fun with Abacus.* Thesis, Universiti Teknologi PETRONAS.

León, S. P., Carcelén Fraile, M. C., & García-Martínez, I. (2021). Development of Cognitive Abilities through the Abacus in Primary Education Students: A

Randomized Controlled Clinical Trial. *Education Sciences, 11*. https://doi.org/10.3390/educsci11020083.

Maloberti, F., & Gang, C. (1998). The Chinese Abacus method: can we use it for digital arithmetic? *Proceedings of the 8th Great Lakes Symposium on VLSI*. doi:10.1109/glsv.1998.665224.

Mango, O. (2015). iPad use and student engagement in the classroom. *The Turkish Online Journal of Educational Technology, 14*(1), 53-57.

McClain, K. (2003). Supporting Preservice Teachers' Understanding of Place Value and Multidigit Arithmetic. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(4), 281–306.

MacDonald, B. L., Westenskow, A., -Packenham, P. S., & Child, B. (2018). Components of Place Value Understanding: Targeting Mathematical Difficulties When Providing Interventions. *School Science and Mathematics, 118*(1-2), 17-29.

McIntosh, A. (2004). Where we are today. Στο: A. McIntosh & L. Sparrow (Eds.), *Beyond written computation* (σελ. 3-14). Perth: MASTEC.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basicnumber sense. *For the learning of mathematics, 12*(3), 2-44.

Ming, K. T. (χ.χ.). The fundamental operations in bead arithmetic. How to use the Chinese abacus. Ανακτήθηκεαπό: https://archive.computerhistory.org/resources/access/text/2016/12/B1671.01-05-01-acc.pdf

Morris, N. P., Lambe, J., Ciccone, J., & Swinnerton, B. (2016). Mobile technology: students perceived benefits of apps for learning neuroanatomy. *Journal of Computer Assisted Learning, 32,* 430-442.

Morrone, A. S., Gosney, J., & Enge, S. (2012). Empowering Students and Instructors: Reflections on the Effectiveness of iPads for Teaching and Learning. Ανακτήθηκε από https://net.educause.edu/ir/library/pdf/ELIB1201.pdf

Nishizaki, D. M. (2015). *The Effects of Tablets on Learning: Does Studying from a Tablet Computer Affect Student Learning Differently Across Educational Levels.* Master Thesis, Claremont McKenna College.

Popotis, A., & Nikolantonakis, K. (n.d.). The contribution of the Chinese abacus to the development of the number sense. Ανακτήθηκε από: https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/ACF/ACF19045/ACF19045.pdf

Reys, R., Reys, B., Emanuelsson, G., Johansson, B., McIntosh, A., & Yang, D. C. (1999). Assessing number sense of students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. *School Science and Mathematics, 99*(2), 61-70.

Reys, R., Rybolt, J., Bestgen, B., & Wyatt, J. W. (1982). Processes used by good computationalestimators. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(3), pp. 183-201.

Reys, R., & Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth-and eighth-grade students in Taiwan. *Journal for Research inMathematics Education, 29*(2), 225-237.

Rusyani, E., Ratnengsih, E., Putra, A. S., Maryanti, R., Al Husaeni, D. F., & Ragadhita, R. (2022). The Drilling Method Application Using Abacus to Arithmetic Operations Skills in Student with Hearing Impairment at Special School. *Indonesian Journal of Community and Special Needs Education, 2*(1), 1-10.

Samoly, K. (2012). The History of the Abacus. *Ohio Journal of School Mathematics, 65,* 58-66.

Sarrab, M., Elgamel, L., & Aldabbas, H. (2012). Mobile learning (m-learning) and educational environments. *International Journal of Distributed and Parallel Systems, 3*(4), 31-38.

Sharples, M., Arnedillo-Sánchez, I., Milrad, M., & Vavoula, G. (2007). Mobile learning. Στο: S. Ludvigsen, N. Balacheff, T. de Jong, A. Lazonder, and S. Barnes (Eds.), *Technology-enhanced learning: Principles and products.* Dordrecht: Springer.

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation: A review. Στο: J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (σελ. 197-212). New York: Psychology Press.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. Στο: D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (σελ. 371-389). The National Council of Teachers of Mathematics.

Threadgill-Sowder, J. (1984). Computational estimation procedures of school children. *The Journal of Educational Research*, *77*(6), 332-336.

Tsao, Y. & Pan, T. (2011). Study on the Computational Estimation Performance and Computational Estimation Attitude of Elementary School Fifth Graders in Taiwan. *US-China Education Review, 8*(3), 264-275.

Veena, C. N., Rajasekhar, P., & Nandan, T. M. (2018). Effect of abacus training on maths anxiety. *National Journal of Physiology, Pharmacy and Pharmacology*, *8*(6), 854-857.

Wang, Y., Geng, F., Hu, Y., Du, F., & Chen, F. (2013). Numerical processing efficiency improved in experienced mental abacus children. *Cognition, 127*(2), 149–158.

Yang, D. C. (2005) Number sense strategies used by 6th-grade students in Taiwan. *Journal ofEducational Studies*, *31*(3), 317-333.

Yee F. P. (1998). Learning abacus: What cognitive processes do pupils use?. *REACT*, *2*, 24-29.