ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β΄ΗΛΙΚΙΑΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Διπλωματική εργασία

Η μαθηματική και παιδαγωγική γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού

της **Ορφανίδου Ευαγγελίας**

Α.Ε.Μ. 706

Επιβλέπων Καθηγητής: Ζαχαριάδης Θεοδόσιος, Καθηγητής

Εξεταστές: Πόταρη Δέσποινα, (Καθηγήτρια), Σακονίδης Χαράλαμπος, (Καθηγητής)

Φλώρινα, Οκτώβριος 2020

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο ολοκλήρωσης των σπουδών μου στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών «Διδακτική των Μαθηματικών».

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

Τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ζαχαριάδη Θεοδόσιο, για την καθοδήγηση, τις υποδείξεις και την κατανόησή του στις δυσκολίες που παρουσιάστηκαν κατά τη διάρκεια της συνεργασίας μας.

Την κ. Πόταρη Δέσποινα και τον κ. Σακονίδη Χαράλαμπο για τη συμμετοχή τους στην τριμελή μου επιτροπή.

Τους συμφοιτητές, συναδέλφους και φίλους μου Ελένη, Άκη και Λένα για την αμέριστη συμπαράσταση και αγάπη.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στη μητέρα μου για την οικονομική, ψυχολογική και ηθική υποστήριξή της.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση της Μαθηματικής και Παιδαγωγικής Γνώσης των εκπαιδευτικών στη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού και συγκεκριμένα στη διδασκαλία του Ορίου. Η έννοια του Ορίου επιλέχθηκε γιατί αποτελεί το θεμέλιο του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού και οι δυσκολίες που παρουσιάζει αφορούν τόσο τους μαθητές όσο και τους ίδιους τους καθηγητές. Για το σκοπό αυτό συμμετείχαν στην έρευνα 6 εκπαιδευτικοί, τρεις με διδακτική εμπειρία σε δημόσια σχολεία και τρεις με διδακτική εμπειρία σε φροντιστήρια Μέσης Εκπαίδευσης. Μέσω ενός ερωτηματολογίου που περιείχε διδακτικά σενάρια και μιας συνέντευξης που παραχώρησαν, προέκυψαν κατηγορίες που περιγράφουν την ικανότητά τους να αναγνωρίζουν τις παρανοήσεις των μαθητών και τις αιτίες που τις δημιουργούν σχετικά με τα Όρια, καθώς και τους τρόπους που επιλέγουν οι ίδιοι να χειριστούν αυτές τις παρανοήσεις, τις παιδαγωγικές και διδακτικές επιλογές τους. Τα αποτελέσματα ερμηνεύθηκαν με βάση το θεωρητικό πλαίσιο της Ball και κατασκευάστηκε το παιδαγωγικό και διδακτικό προφίλ κάθε εκπαιδευτικού. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί αναγνωρίζουν επιτυχώς τις περισσότερες από τις παρανοήσεις των μαθητών, αδυνατούν όμως σε διδακτικές μεθόδους και στρατηγικές. Τέλος διαπιστώθηκε ότι οι τρεις εκπαιδευτικοί που εργάζονταν σε σχολεία παρουσίασαν υψηλότερη γνώση από αυτούς που εργάζονται σε φροντιστήρια. Η διαπίστωση αυτή δημιούργησε ερωτήματα για το αν ο χώρος διδασκαλίας επηρεάζει τις διδακτικές απόψεις και μεθόδους των εκπαιδευτικών, κάτι που ελπίζουμε να απαντήσουν επόμενες έρευνες.

Λέξεις κλειδιά: όρια, παρανοήσεις, μαθηματική γνώση, παιδαγωγική γνώση, διδακτικές επιλογές, εκπαιδευτικοί

ABSTRACT

The purpose of this research is to investigate the Mathematical and Pedagogical Knowledge of teachers in the teaching of Infinite Calculus and specifically in the teaching of the Limit. The concept of Limit was chosen because it is the foundation of Differential and Integral Calculus and the difficulties it presents concern both the students and the teachers themselves. For this purpose, 6 teachers participated in the research, three with teaching experience in public schools and three with teaching experience in secondary schools. Through a questionnaire containing instructional scripts and an interview they provided, categories emerged that describe their ability to recognize students' misunderstandings and the causes they create regarding the Limits, as well as the ways they choose to handle these misunderstandings, their pedagogical and didactic choices. The results were interpreted based on Ball's theoretical framework and the pedagogical and didactic profile of each teacher was constructed. The results showed that teachers successfully recognize most of the students' misunderstandings, but fail in teaching methods and strategies. Finally, it was found that the three teachers who worked in schools showed higher knowledge than those who work in tutoring. This finding raised the question of whether the teaching space influences the teaching views and methods of teachers, something that we hope will be answered in future research.

Keywords: limits, misunderstandings, mathematical knowledge, pedagogical knowledge, teaching choices, teachers

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η γνώση των εκπαιδευτικών για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους έχει αποτελέσει αντικείμενο έρευνας για πολλά χρόνια. Η εξέταση της γνώσης των εκπαιδευτικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση έχει ιδιαίτερη σημασία καθώς η μαθηματική γνώση γίνεται ολοένα και περισσότερο πολυδιάστατη και η ενσωμάτωση του μαθηματικού αντικειμένου με την παιδαγωγική είναι πιο δύσκολο να επιτευχθεί (Potari, Zachariades, Christou, Kyriazis & Pitta-Padazi, 2006).

Η παρούσα μελέτη επιχειρεί να διερευνήσει τη μαθηματική και παιδαγωγική γνώση των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στη διδασκαλία του λογισμού και ειδικότερα στην έννοια του ορίου. Πρέπει να σημειωθεί, ότι αν και έχει πραγματοποιηθεί εκτεταμένη έρευνα σχετικά με τη διδασκαλία του λογισμού, αυτή επικεντρώνεται κυρίως στη μάθηση και τις γνώσεις των μαθητών και όχι στις πρακτικές διδασκαλίας των εκπαιδευτικών και τον τρόπο με τον οποίο αυτές επηρεάζουν την κατανόηση των μαθητών (Potari et al., 2006).

Στην έρευνα επιλέχτηκε η έννοια του ορίου, καθώς οι δυσκολίες σχετικά με αυτήν αφορούν τόσο τους μαθητές όσο και τους εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Mastorides & Zachariades, 2004). Η έλλειψη της κατανόησης του ορίου δύναται να σταθεί εμπόδιο στην πορεία του μαθητή, καθώς αποτελεί σημείο εκκίνησης για την ανάπτυξη περισσότερο τυπικών τεχνικών απόδειξης, την απόδοση νοήματος σε ποσοτικά προσδιορισμένες μαθηματικές προτάσεις καθώς και τη μετάβαση στην αφηρημένη σκέψη (Ervynck, 1981, Tall, 1992, όπως αναφέρεται στο Swinyard & Larsen, 2012). Επιπλέον το όριο αποτελεί θεμέλιο του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού (Cornu, 1991) και σύμφωνα με τον Orton (1983a), οι περισσότερες από τις δυσκολίες των μαθητών σχετικά με τη μάθηση της έννοιας της παραγώγου και του ολοκληρώματος προκαλούνται από την ελλιπή κατανόηση της έννοιας του ορίου.

Στόχος της εργασίας είναι η διερεύνηση της μαθηματικής και της παιδαγωγικής γνώσης που διαθέτουν μαθηματικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Οι κατηγορίες που προκύπτουν περιγράφουν την ικανότητά τους να αναγνωρίζουν τις παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με τα όρια, τις αιτίες αυτών των παρανοήσεων, καθώς και τους τρόπους που επιλέγουν οι ίδιοι να χειριστούν αυτές τις παρανοήσεις, τις παιδαγωγικές και διδακτικές επιλογές τους. Συγκεκριμένα, τα κύρια ερευνητικά ερωτήματα που η μελέτη αυτή αποσκοπεί να απαντήσει είναι:

1. Μπορούν οι εκπαιδευτικοί να αναγνωρίσουν τις παρανοήσεις που αναπτύσσουν οι μαθητές στα όρια και τις αιτίες που τις δημιουργούν;

2. Με ποιον τρόπο οι εκπαιδευτικοί διαχειρίζονται διδακτικά τις παρανοήσεις και τα λάθη των μαθητών; Διαθέτουν την ικανότητα να προσφέρουν άλλες λύσεις και να δώσουν σαφή παραδείγματα για να ενισχύσουν την κατανόηση της έννοιας του ορίου;

3. Πώς εντάσσεται η διδακτική διάσταση της γνώσης των εκπαιδευτικών, στο θεωρητικό πλαίσιο της Ball και των συνεργατών της;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ

1.1 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΓΝΩΣΗ

Θεωρώντας τους εκπαιδευτικούς ως κύριους πρωταγωνιστές στην ανάληψη δράσης για τη βελτίωση της υπάρχουσας παιδείας, αναγνωρίζουμε την ύπαρξη μιας ξεχωριστής γνώσης την οποία πρέπει να κατέχουν και που διαφοροποιείται από την απλή γνώση του επιστημονικού αντικειμένου τους. Τι εννοούμε όμως όταν μιλάμε για «γνώση των δασκάλων των μαθηματικών»;

Η γνώση που απαιτείται να κατέχει ένας δάσκαλος των μαθηματικών περιλαμβάνει αναμφισβήτητα την καλή γνώση του μαθηματικού αντικειμένου που πρόκειται να διδάξει, αλλά δεν εξαντλείται μόνο σε αυτό. Περιλαμβάνει ακόμη πολλά είδη γνώσεων όπως τη γνώση που απορρέει από τη διδακτική του εμπειρία, τη γενική παιδαγωγική γνώση, τη γνώση των μαθητών, τη γνώση του εκπαιδευτικού πλαισίου, των εκπαιδευτικών στόχων, τη γνώση του αναλυτικού προγράμματος κλπ.

Ορισμένες μελέτες προσπάθησαν να περιγράψουν αυτή τη γνώση και φαίνεται ότι υπάρχει ομοφωνία σχετικά με τα τρία σημαντικότερα στοιχεία της: μαθηματική γνώση, γνώση των μαθητών και γνώση της μαθηματικής παιδαγωγικής (Lappan & Lubienski, 1994, Even & Tirosh, 1995 όπως αναφέρεται στο Potari et al., 2006). Η μαθηματική και παιδαγωγική γνώση συνιστά όχι μόνο να γνωρίζουμε το ποιος τι και γιατί, αλλά και να γνωρίζουμε να ενεργούμε τη στιγμή που πρέπει (Mason and Spence, 1999).

1.1.1 Η συμβολή του **Shulman**

Η επίδραση της καλής ή όχι γνώσης του αντικειμένου προς διδασκαλία στις παιδαγωγικές αποφάσεις του δασκάλου στην τάξη ήταν ένα βασικό ερώτημα που σύμφωνα με τον Shulman (1986a) έλειπε από τις έρευνες που αφορούσαν την εκπαίδευση. Στην συνέχεια ο Shulman (1986b, 1987) διαχώρισε τις γνώσεις των δασκάλων σε τρεις βασικές κατηγορίες:

- τη Γνώση του Αντικειμένου **(ΓΑ/Subject Matter Knowledge)**,
- τη Γνώση του Αναλυτικού Προγράμματος **(ΓΑΠ/ Knowledge of Curriculum)** και

- την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου **(ΠΓΠ, Pedagogical Content Knowledge)**.

Η **Γνώση του Αντικειμένου (ΓΑ)** αντιπροσωπεύει τις γνώσεις που πρέπει να κατέχει ένας ενήλικας με την αντίστοιχη βασική μαθηματική πανεπιστημιακή μόρφωση, ταυτόχρονα με την ικανότητα να κατανοεί τις βασικές έννοιες αλλά και τον τρόπο με τον οποίο ελέγχεται η αλήθεια μιας πρότασης. Αυτό σημαίνει ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να μπορούν να διατυπώνουν προτάσεις που είναι αληθείς, να έχουν την ικανότητα να της δικαιολογούν, και να αναγνωρίζουν τη σχέση μεταξύ των διαφόρων προτάσεων. Επιπλέον η ΓΑ αναφέρεται στη ικανότητα που πρέπει να έχει ο δάσκαλος να ξεχωρίζει πότε μια ενότητα μπορεί να είναι κεντρική ή περιφερειακή για το αντικείμενο διδασκαλίας του (Shulman, 1986b, p.9).

Η **Γνώση του Αναλυτικού Προγράμματος (ΓΑΠ)** αναφέρεται στη γνώση του προγράμματος σπουδών του αντικειμένου που διδάσκεται στην τάξη, τη γνώση του διαθέσιμου διδακτικού υλικού και των ενδείξεων και αντενδείξεων χρήσης του σε διάφορες περιστάσεις. Επιπλέον ο Shulman διακρίνει δυο επιπλέον διαστάσεις στη ΓΑΠ

- την πλευρική (lateral) ΓΑΠ και
- την κατακόρυφη (vertical) ΓΑΠ.

Η πλευρική ΓΑΠ αναφέρεται στη γνώση των συσχετίσεων που μπορεί να υπάρχουν μεταξύ του Αναλυτικού Προγράμματος που διδάσκεται με το Αναλυτικό Πρόγραμμα άλλων μαθημάτων. Η κατακόρυφη ΓΑΠ αναφέρεται στη ταυτόχρονη γνώση του περιεχομένου και των συσχετίσεων που υπάρχουν ανάμεσα στο Αναλυτικό Πρόγραμμα που διδάσκει ο εκπαιδευτικός με τα Αναλυτικά Προγράμματα του ίδιου μαθήματος διαφορετικών τάξεων (Shulman, 1986b, p.10).

Η **Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου (ΠΓΠ)**, συνίσταται στο ειδικό εκείνο κράμα περιεχομένου και παιδαγωγικής και αποτελεί ένα είδος ξεχωριστής επαγγελματικής γνώσης. Αυτό το είδος εξειδικευμένης γνώσης αποτελείται από δύο συνιστώσες: (α) Τον τρόπο που αναπαριστάται το γνωστικό αντικείμενο προκειμένου να γίνει κατανοητό. Εδώ συναντάμε τις πιο ισχυρές μορφές αναπαραστάσεων, καθώς και τα πιο ισχυρά παραδείγματα που κάνουν μια έννοια πιο εύκολα κατανοητή στους μαθητές, (β) Την αναγνώριση εκείνων των αιτιών που καθιστούν τη μάθηση ενός συγκεκριμένου θέματος εύκολη ή δύσκολη. Η ΠΓΠ επιτρέπει στο δάσκαλο να διακρίνει τις πεποιθήσεις και παρανοήσεις που φέρουν οι μαθητές και άλλοτε διευκολύνουν ενώ άλλοτε εμποδίζουν την κατανόηση συγκεκριμένων εννοιών (Shulman, 1986b, p.7).

1.1.2. Η συμβολή των **Tamir, Grossman, Marks** και **Carlsen**

Ο **Tamir (1988)** επιχείρησε να επεκτείνει τις κατηγορίες του Shulman ορίζοντας ένα γενικό πλαίσιο αναφορικά με τις απαιτούμενες γνώσεις που πρέπει να έχουν οι δάσκαλοι. Οι έρευνές του βασίστηκαν σε δασκάλους βιολογίας, ωστόσο το πλαίσιο που έθεσε μπορεί να χρησιμεύσει ως βάση για τη κατηγοριοποίηση των γνώσεων των δασκάλων σε κάθε αντικείμενο. Όρισε πέντε κύριες κατηγορίες:

a) Γενικές γνώσεις
b) Γνώση του αντικειμένου
c) Γενική παιδαγωγική γνώση
d) Παιδαγωγική γνώση του αντικειμένου και
e) Γνώση των θεμελίων του επαγγέλματος

Ειδικότερα η *Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου* αποτελείται από τέσσερις συνιστώσες: γνώση των μαθητών, γνώση του Αναλυτικού Προγράμματος, γνώση της διδασκαλίας και γνώση των μεθόδων αξιολόγησης. Επιπλέον ο Tamir (1988) ήταν ο πρώτος που διέκρινε και διχοτόμησε τη γνώση σε δύο τμήματα: γνώση (γνώση του ότι) και διαδικαστική γνώση (γνώση του πώς).

Ο **Grossman (1990)** ενσωμάτωσε τις κατηγορίες του Shulman σε τέσσερις γενικές περιοχές γνώσης των δασκάλων:

a) Γενική παιδαγωγική γνώση
b) Γνώση του αντικειμένου
c) Παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου (ΠΓΠ) και
d) Γνώση του πλαισίου.

Ως *Γενική παιδαγωγική γνώση* ορίζει τη γνώση των γενικών παιδαγωγικών αρχών, τη γνώση σχετικά με τη διαχείριση της τάξης και τους γενικούς σκοπούς της εκπαίδευσης. Ως *Γνώση του αντικειμένου* ορίζει τη γνώση του προς εκπαίδευση αντικειμένου, αλλά και των δομών που περιέχονται στο συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο. Ως *Παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου* ορίζει την ειδική γνώση που απαιτείται για τη διδασκαλία ενός αντικειμένου. Σύμφωνα με τον Grossman (1990) η παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου αποτελεί την κύρια κατηγορία γνώσης ενός εκπαιδευτικού και βασίζεται στις άλλες τρεις γνώσεις. Στη συνέχεια ανέπτυξε περαιτέρω την ΠΓΠ, διακρίνοντας τέσσερις βασικές υποκατηγορίες της: γνώση των στόχων της διδασκαλίας του αντικειμένου, γνώση του τρόπου κατανόησης των μαθητών, γνώση του Αναλυτικού Προγράμματος και γνώση των διδακτικών στρατηγικών. Τέλος ως *Γνώση του πλαισίου* ο Grossman (1990) ορίζει τη γνώση εκείνη που επιτρέπει τους δασκάλους να προσαρμόζουν τη διδασκαλία τους στις συνθήκες του σχολικού περιβάλλοντος στο οποίο διδάσκουν και περιλαμβάνει τη γνώση των συνθηκών του σχολείου και της τοπικής κοινωνίας.

Παράλληλα ο **Marks (1990)** επεκτείνοντας τον ορισμό του Shulman για την ΠΓΠ στο πεδίο των μαθηματικών, διέκρινε τέσσερις συνιστώσες της: γνώση του αντικειμένου για διδασκαλία, γνώση του τρόπου με τον οποίο κατανοούν οι μαθητές, γνώση των μέσων που βοηθούν τη διδασκαλία (βιβλία, και οποιοδήποτε διδακτικό υλικό) και γνώση της διδακτικής ακολουθίας για το αντικείμενο. Η τελευταία συνιστώσα αποτελείται από τρεις υποκατηγορίες: επικέντρωση στους μαθητές, στα διδακτικά μέσα και στην παρουσίαση και είναι ουσιαστικά μια επέκταση της γνώσης που περιγράφει ο Shulman (1986b) σχετικά με τις αναπαραστάσεις του αντικειμένου. Σύμφωνα με τον Marks (1990) ένα από τα ιδιαίτερα σημεία του μοντέλου αυτού είναι η έμφαση στη χρήση των μέσων ως εργαλεία και πηγή για τη διδασκαλία.

Ο **Carlsen (1999)**, ορίζοντας την ΠΓΠ, τη διέκρινε σε τέσσερις κατηγορίες: γνώση των παρανοήσεων των μαθητών, γνώση των μεθόδων διδασκαλίας, γνώση του Αναλυτικού Προγράμματος και γνώση των στόχων της διδασκαλίας του αντικειμένου. Συγκεκριμένα ως γνώση των μεθόδων διδασκαλίας όρισε τη γνώση που χρειάζεται να έχουν οι δάσκαλοι προκειμένου να διαλέγουν τα μοντέλα που χρησιμοποιούν στην τάξη και τον τρόπο που ρυθμίζουν τη συζήτηση στην τάξη.

1.1.3 Η συμβολή της **Ball**

Επιχειρώντας να οργανώσουν ένα θεωρητικό πλαίσιο σχετικά με τις γνώσεις των δασκάλων των μαθηματικών, η Ball και οι συνεργάτες της (Ball & Bass, 2003b), ασχολήθηκαν με το παρακάτω θεμελιώδες ερώτημα: τι πρέπει να γνωρίζουν οι δάσκαλοι των μαθηματικών, ώστε να είναι ικανοί να διδάσκουν αποτελεσματικότερα; Η πρώτη έννοια που ορίστηκε σε αυτό το πλαίσιο ήταν η **Μαθηματική Γνώση για τη Διδασκαλία (ΜΓΔ)**, η οποία αναφέρεται στην απαιτούμενη μαθηματική γνώση προκειμένου να διεκπεραιωθεί αποτελεσματικά η διδασκαλία των μαθηματικών. Το βασικό στοιχείο που διαφοροποιεί τη προσέγγιση της Ball από άλλες, είναι ότι η έμφαση δίνεται στη διδασκαλία και όχι στον ίδιο το δάσκαλο. Σύμφωνα με τον ορισμό της ομάδας της Ball (Ball, Thames & Phelps, 2008) οι δάσκαλοι των μαθηματικών πρέπει να μπορούν:

• Να δικαιολογούν τη χρήση των αλγορίθμων που διδάσκουν. Να γνωρίζουν δηλαδή πότε οι αλγόριθμοι εφαρμόζονται και γιατί κι επιπλέον να διαθέτουν την ικανότητα να προσαρμόζουν τις ασκήσεις στους διδακτικούς στόχους τους και στις ανάγκες των μαθητών.

• Να εντοπίζουν τις δυσκολίες που ενδέχεται να αντιμετωπίσουν οι μαθητές σε μια εργασία.

• Να αναλύουν τις αιτίες των παρανοήσεων των μαθητών.

• Να ακούν και να καταλαβαίνουν τις σκέψεις των μαθητών.

• Να επιλέγουν τις κατάλληλες αναπαραστάσεις και παραδείγματα προκειμένου να διευκολύνουν την κατανόηση των νέων εννοιών.

• Να βοηθούν στην επισήμανση των συνδέσεων τόσο μεταξύ των διαφορετικών κλάδων των μαθηματικών όσο και μεταξύ των μαθηματικών και άλλων γνωστικών περιοχών κλπ.

Στη συνέχεια η Ball και οι συνεργάτες της αναζήτησαν επιπλέον κατηγορίες στις οποίες να χωρίζεται η ΜΓΔ, ελέγχοντας τις υποθέσεις τους μέσα από την παρατήρηση και την ανάλυση της διδασκαλίας ενός αξιόλογου φάσματος δασκάλων μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Τα εμπειρικά δεδομένα βοήθησαν στη διόρθωση ή την απόρριψη των αρχικών υποθέσεων και την αντικατάσταση τους από άλλες βασισμένες στα δεδομένα των ερευνών τους. Οι βασικές υποκατηγορίες της ΜΓΔ τις οποίες σχηματοποίησε η ομάδα της Ball (Ball et al., 2008) με την παραπάνω διαδικασία είναι:

- η Κοινή Γνώση του Περιεχομένου **(ΚΓΠ/ Common Content Knowledge)**
- η Εξειδικευμένη Γνώση του Περιεχομένου **(ΕΓΠ/ Specialized Content Knowledge)**
- η Γνώση Ορίζοντα του Περιεχομένου **(ΓΟΠ/ Horizontal Content Knowledge)**
- η Γνώση του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας **(ΓΠΔ/ Knowledge Of Content And Teaching)**
- η Γνώση του Περιεχομένου και των Μαθητών **(ΓΠΜ/ Knowledge Of Content And Students)** και
- Γνώση του Περιεχομένου και του Αναλυτικού Προγράμματος **(ΓΠΑΠ/ Knowledge of Content and Curriculum)**.

Ως **Κοινή γνώση του περιεχομένου** ορίζεται η μαθηματική γνώση και επιδεξιότητες που απαιτούνται και σε άλλες καταστάσεις εκτός της διδασκαλίας. Η γνώση αυτή αποτελεί κοινό πεδίο για πολλές διαφορετικές γνωστικές περιοχές. Ένας μηχανικός, ένας φυσικός ή ένας μαθηματικός που δεν είναι δάσκαλος μαθηματικών μοιράζονται αυτή τη γνώση γιατί έχουν διδαχθεί την ίδια ύλη του Απειροστικού Λογισμού. Για παράδειγμα η ικανότητα επίλυσης ενός προβλήματος, η εύρεση της απάντησης σε ένα μαθηματικό ερώτημα, ο υπολογισμός μιας αλγεβρικής παράστασης κλπ είναι ικανότητες που μπορεί να τις διαθέτει οποιοσδήποτε έχει μια ανάλογη μαθηματική εκπαίδευση. Οι δάσκαλοι των μαθηματικών οφείλουν να μπορούν να επιλύσουν όλα τα προβλήματα που βάζουν στους μαθητές τους. Χρειάζεται να γνωρίζουν το υλικό που διδάσκουν, πρέπει να μπορούν να αναγνωρίσουν ένα μαθηματικό λάθος των μαθητών τους, πρέπει να χρησιμοποιούν τα σύμβολα και τα θεωρήματα με ακριβή και ορθό τρόπο.

Η **Εξειδικευμένη γνώση του περιεχομένου** είναι η μαθηματική γνώση και ικανότητα που είναι χρήσιμες μόνο στη διδασκαλία των μαθηματικών και δεν είναι απαραίτητες για την οποιαδήποτε άλλου είδους εφαρμογή τους. Η αναζήτηση της ύπαρξης κοινού μοτίβου στα λάθη των μαθητών, η εύρεση παραδειγμάτων που να αντιπροσωπεύουν τις ιδέες ενός μαθήματος, ο εντοπισμός των πιθανών συνδέσεων που μπορεί να κρύβει ένας ορισμός είναι μερικά από τα παραδείγματα της Εξειδικευμένης γνώσης που πρέπει να διαθέτει ένας δάσκαλος.

Η **Γνώση Ορίζοντα Περιεχομένου** είναι η γνώση της σύνδεσης των κεφαλαίων των μαθηματικών ≪κατά μήκος≫ του Αναλυτικού Προγράμματος. Περιλαμβάνει την κατανόηση του εκπαιδευτικού των συνεπειών που μπορεί να έχει ο τρόπος που θα αναπαραστήσει τις μαθηματικές έννοιες και την κατανόηση ότι κάθε απόφαση που λαμβάνει επηρεάζει θετικά ή αρνητικά την μελλοντική ανάπτυξη των μαθητών (Ball, Thames, Bass, Sleep, Lewis & Phelps, 2009a).

Η **Γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας** είναι η γνώση που συνδυάζει τη γνώση για τη διδασκαλία και τη γνώση για τα μαθηματικά. Λειτουργεί βοηθητικά στο σχεδιασμό και την επιλογή από τους δασκάλους της κατάλληλης διδασκαλίας και περιλαμβάνει τη γνώση διαφορετικών διδακτικών μοντέλων. Παραδείγματα της ΓΠΔ που έχει ένας δάσκαλος είναι η επιλογή του κατάλληλου παραδείγματος για την εισαγωγή μιας έννοιας, ο τρόπος που θα χειριστεί τις ερωτήσεις των μαθητών μέσα στην τάξη, η διαχείριση του χρόνου όπως το πότε θα αφήσει περισσότερο χρόνο στους μαθητές να σκεφτούν, πότε θα τους δώσει υποδείξεις ή ολοκληρωμένες απαντήσεις κλπ..

Η **Γνώση του περιεχομένου και των μαθητών** συνδυάζει παράλληλα τη γνώση για τους μαθητές με τη γνώση για τα μαθηματικό αντικείμενο. Ορίζεται κυρίως ως η γνώση των ιδεών και παρανοήσεων που έχουν οι μαθητές σε συγκεκριμένες έννοιες της ύλης. Για την καλύτερη κατανόηση της ΓΠΜ η ομάδα της Ball (Ball et al., 2008) αναφέρει ότι ο εντοπισμός της λανθασμένης χρήσης μιας ισοδυναμίας μεταξύ δυο ισχυρισμών είναι ΚΓΠ, ενώ η εύρεση της αιτίας που οδήγησε τον μαθητή στο λάθος είναι ΕΓΠ. Η ΠΓΜ εμφανίζεται ως η γνώση του κατά πόσο είναι συνηθισμένη μια τέτοια παρανόηση και η αντίληψη των αιτιών που δημιουργούν τέτοιες παρανοήσεις στους μαθητές. Η Γνώση του περιεχομένου και των μαθητών περιλαμβάνει επίσης την ικανότητα των δασκάλων να προβλέπουν τι μπορεί να παραπλανήσει τους μαθητές και να κατανοούν και να ερμηνεύουν τις συχνά ελλειπτικές προτάσεις και σκέψεις που εκφέρουν οι μαθητές.

Η **Γνώση του Περιεχομένου και του Αναλυτικού Προγράμματος** είναι η γνώση του Αναλυτικού Προγράμματος που ακολουθείται σε ένα μάθημα καθώς και η γνώση των αντίστοιχων παιδαγωγικών μεθόδων που απαιτούνται για την εφαρμογή του. Είναι ουσιαστικά η γνώση του Προγράμματος Σπουδών που όρισε και ο Shulman. Ωστόσο για την γνώση αυτή υπάρχει προβληματισμός από την Ball για το αν αποτελεί υποκατηγορία της Γνώσης Αντικειμένου ή αν θα έπρεπε να αποτελεί μέρος Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου.

Σχηματική αναπαράσταση της Μαθηματικής Γνώσης για τη διδασκαλία (Ball et al., 2009a).

1.1.4 Η συμβολή του **Rowland**

Οι Rowland, Huckstep and Twaites (2005) ορίζουν το κουαρτέτο της γνώσης (knowledge quartet) το οποίο αναλύει τη γνώση μελλοντικών εκπαιδευτικών και τη διδασκαλία τους κατά την περίοδο της πρακτικής άσκησης. Αναπτύχθηκε μέσα από την παρατήρηση διδασκαλιών, χρησιμοποιήθηκε τόσο στην ανάλυση διδακτικών επεισοδίων όσο και στη διευκόλυνση της αναστοχαστικής συζήτησης εκπαιδευτικών για την ανάπτυξη της δικής τους γνώσης για τη διδασκαλία (Ζωιτσάκος, 2017). Σύμφωνα με τους Rowland (2005) και Rowland, Jared & Thwaites (2011), η γνώση και οι πεποιθήσεις που αναδεικνύονται στη διδασκαλία των μαθηματικών αντικατοπτρίζονται σε τέσσερις κατηγορίες ή διαστάσεις:

- Θεμελιακή γνώση (foundation)
- Μετασχηματισμός (transformation)
- Σύνδεση (connection) και
- Απρόοπτη εξέλιξη (contingency)

Η **Θεμελιακή γνώση** συνίσταται από τη γνώση και την κατανόηση των μαθηματικών per se καθώς και από τις πεποιθήσεις σχετικά με τη φύση των μαθηματικών, τους σκοπούς της εκπαίδευσης των μαθηματικών και τις συνθήκες υπό τις οποίες οι μαθητές θα μάθουν καλύτερα τα μαθηματικά Η εκπαίδευση και οι γνώσεις που αποκτούν οι εκπαιδευτικοί στο Πανεπιστήμιο σχηματίζουν τις γνώσεις και τις πεποιθήσεις τους. Σύμφωνα με τους Rowland et al. (2005), οι γνώσεις των εκπαιδευτικών επηρεάζουν άμεσα τις αποφάσεις και τις στρατηγικές που υιοθετούν. Ως μαθηματική γνώση νοείται η γνώση του Μαθηματικού Αντικειμένου, η ικανότητα της αιτιολόγησης, και η σωστή χρήση της μαθηματικής ορολογίας. Οι πεποιθήσεις περιλαμβάνουν τις πεποιθήσεις για τη φύση των ίδιων των μαθηματικών, για τον στόχο που οφείλει να έχει η εκπαίδευση και για τις συνθήκες υπό τις οποίες το μαθηματικό αντικείμενο γίνεται κατανοητό στους μαθητές.

Ο **Μετασχηματισμός** αναφέρεται στη γνώση των εκπαιδευτικών να σχεδιάζουν τη διδασκαλία τους. Περιγράφει τις διδακτικές επιλογές και μεθόδους των εκπαιδευτικών με σκοπό μια κατανοητή μάθηση. Στην κατηγορία αυτή περιλαμβάνονται οι αναπαραστάσεις, η χρήση αναλογιών, οι επεξηγήσεις και η χρήση παραδειγμάτων, που επιλέγει ο εκπαιδευτικός για να παρουσιάσει μια μαθηματική έννοια, να αντιμετωπίσει τις παρανοήσεις των μαθητών να δικαιολογήσει ή να απορρίψει μια μαθηματική εικασία.

Η **Σύνδεση** περιγράφει τις επιλογές και τις αποφάσεις που λαμβάνει ο εκπαιδευτικός για τη διδασκαλία συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών. Μελετά τη συνέπεια του σχεδιασμού της διδασκαλίας που εμφανίζεται σε ένα επεισόδιο, ένα μάθημα ή μια σειρά μαθημάτων και τις συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών νοημάτων και περιγραφών συγκεκριμένων εννοιών. Η σύνδεση λοιπόν αναφέρεται στη σύνδεση των διαφορετικών νοημάτων και των διαφορετικών αναπαραστάσεων μια έννοιας και στη σύνδεση των διαφορετικών τρόπων εκτέλεσης αλγορίθμων.

Η **Απρόοπτη εξέλιξη** αφορά στη διδασκαλία μέσα στην τάξη και αναφέρεται σε εκείνα τα γεγονότα που δεν μπορεί προβλέψει εκ των προτέρων ο εκπαιδευτικός όταν σχεδιάζει τη διδασκαλία του. Περιλαμβάνει τόσο την ετοιμότητα του εκπαιδευτικού να ανταποκρίνεται στις ιδέες των μαθητών όσο και την ετοιμότητα να παρεκκλίνει από την καθορισμένη ατζέντα διδασκαλίας, όταν αυτό κρίνεται απαραίτητο. Η Απρόοπτη εξέλιξη λοιπόν, δείχνει την ικανότητα του δασκάλου να λαμβάνει αποφάσεις άμεσα και να ανταποκρίνεται κατάλληλα στις παρεμβάσεις των μαθητών κατά τη διάρκεια του μαθήματος.

Κάθε μια από τις παραπάνω διαστάσεις αποτελείται από υποκατηγορίες, τους κωδικούς, που καθιστούν το κουαρτέτο ως ένα εργαλείο για να κατανοήσουμε τον τρόπο που η γνώση του αντικειμένου έρχεται στην τάξη. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τους κωδικούς για τις παραπάνω διαστάσεις του κουαρτέτου.

Διάσταση	**Κωδικοί**
Θεμελίωση	Συνειδητοποίηση του σκοπού, αναγνώριση των λαθών των μαθητών, έκδηλη εμφάνιση της γνώσης του αντικειμένου, χρήση της μαθηματικής ορολογίας, προσκόλληση στο εγχειρίδιο, επικέντρωση στις διαδικασίες.
Μετασχηματισμός	Διδακτική επίδειξη, χρήση διδακτικών υλικών, επιλογή αναπαραστάσεων, επιλογή παραδειγμάτων.
Σύνδεση	Δημιουργία συνδέσεων μεταξύ διαδικασιών, δημιουργία συνδέσεων μεταξύ εννοιών, πρόβλεψη της πολυπλοκότητας, αποφάσεις για την αλληλουχία, αναγνώριση εννοιολογικής καταλληλότητας.
Απρόοπτη Εξέλιξη	Απόκριση στις ιδέες των μαθητών, απόκλιση από την ατζέντα του μαθήματος, διορατικότητα του δασκάλου, απόκριση στη (μη)διαθεσιμότητα εργαλείων και πηγών.

1.2 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Η μαθηματική και παιδαγωγική γνώση των εκπαιδευτικών, όπως αναφέρθηκε λαμβάνει αυξημένη ερευνητική προσοχή τα τελευταία χρόνια. Ωστόσο οι περισσότερες έρευνες είναι εστιασμένες στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Οι Potari, Zachariades, Christou, Kyriazis & Pitta-Pantazi (2006) ερεύνησαν τη μαθηματική και παιδαγωγική γνώση των καθηγητών μεγαλύτερων τάξεων της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στη διδασκαλία της Ανάλυσης. Παρότι υπάρχει εκτεταμένη έρευνα στη διδασκαλία της Ανάλυσης, φαίνεται να είναι επικεντρωμένη στη μάθηση των μαθητών και όχι στις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών. Οι ερευνητές επιχειρούν να ερευνήσουν:

α) τη μαθηματική γνώση των καθηγητών για τη διδασκαλία της παραγώγου,

β) τις σχέσεις ανάμεσα στις παιδαγωγικές πρακτικές των καθηγητών και τη μαθηματική τους γνώση και

γ) τους παράγοντες που επηρεάζουν την ανάπτυξη των μαθηματικών και παιδαγωγικών δραστηριοτήτων των καθηγητών.

Πρόκειται για μια ποιοτική έρευνα που διεξάχθηκε σε τρία σχολεία της Κύπρου. Περιλαμβάνει παρατηρήσεις στην τάξη εννιά καθηγητών στο μάθημα της Ανάλυσης, στο κεφάλαιο της Παραγώγου, ανεπίσημες συζητήσεις πριν και μετά τη διδασκαλία και συνεντεύξεις με κάθε καθηγητή. Οι συνεντεύξεις επικεντρώθηκαν στην α) εμπειρία των δασκάλων σχετικά με τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών, β) τις απόψεις των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών γενικότερα, και του λογισμικού και των παραγώγων ειδικότερα, και γ) τις ερμηνείες των εκπαιδευτικών για συγκεκριμένες παιδαγωγικές ενέργειες που εντοπίστηκαν κατά τις παρατηρήσεις. Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν αναλύθηκαν συστηματικά με βάση τη θεμελιωμένη θεωρητική προσέγγιση (Strauss & Corbin, 1998 όπως αναφ. στο Potari et. al., 2006)

Οι πτυχές της μαθηματικής γνώσης που προέκυψαν από τα δεδομένα ήταν α) εννοιολογική κατανόηση, β) διαδικαστική ευχέρεια, γ) ικανότητα των καθηγητών να κάνουν συνδέσεις και να δικαιολογούν, δ) αντίληψη του ρόλου των συμβόλων, ε) ικανότητα να αναστοχάζονται και να επεκτείνουν τη μαθηματική δραστηριότητα.

Εννοιολογική κατανόηση

Η έννοια που απασχόλησε τα μαθήματα που παρακολούθησαν οι ερευνητές ήταν η εφαπτομένη μιας καμπύλης. Οι περισσότεροι καθηγητές χρησιμοποίησαν την εφαπτομένη ενός κύκλου ως παράδειγμα για να ξεκινήσουν κι έπειτα παρουσίασαν την εφαπτομένη μιας καμπύλης κι έγραψαν την εξίσωση της στον πίνακα χωρίς να αναφέρουν ξανά την εφαπτομένη του κύκλου. Όπως φάνηκε από τις συνεντεύξεις, οι καθηγητές δεν αντιλαμβάνονταν ότι η εφαπτομένη ενός κύκλου ίναι μια ειδική περίπτωση της εφαπτομένης μιας καμπύλης. Αυτό είναι μια ένδειξη ότι η μαθηματική τους επίγνωση δεν έχει φτάσει στο επίπεδο επίγνωσης του επιστημονικού πεδίου. « Αισθάνομαι ότι πρέπει να βελτιώσω την κατανόηση μου...Μερικές φορές αναρωτιέμαι για κάποια μαθηματικά θέματα αλλά δεν μπορώ να δώσω απαντήσεις»(Γεωργία)

Διαδικαστική ευχέρεια

Όλοι οι καθηγητές έδωσαν έμφαση στον υπολογισμό της παραγώγου διαφόρων συναρτήσεων. Λίγοι από αυτούς όμως μετακινήθηκαν πέρα από την υπολογιστική διαδικασία και ζήτησαν από τους μαθητές τους να δικαιολογήσουν τους ισχυρισμούς τους, να συγκρίνουν διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης, να αναγνωρίσουν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά τους και να ψάξουν για μια γενική μέθοδο.

Ικανότητα να κάνουν συνδέσεις

Οι συνδέσεις που παρατηρήθηκαν ήταν τριών διαφορετικών τύπων: μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων, μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών περιοχών, μεταξύ μαθηματικών και άλλων επιστημονικών πεδίων. Όμως σε λίγες διδασκαλίες η δημιουργία συνδέσεων ήταν μια κεντρική διδακτική προσέγγιση. Οι περισσότεροι καθηγητές δεν χρησιμοποίησαν συχνά γραφικές παραστάσεις στη διδασκαλία τους. Ακόμη και στην περίπτωση της εφαπτομένης όπου όλοι οι καθηγητές χρησιμοποίησαν τη γραφική παράσταση για να εξηγήσουν την έννοια και να περάσουν στον τυπικό ορισμό, χρησιμοποίησαν αυτές τις δύο αναπαραστάσεις ανεξάρτητα. Αν και το θέμα της παραγώγου δίνει την ευκαιρία να γίνουν συνδέσεις με άλλες μαθηματικές περιοχές και με άλλους επιστημονικούς κλάδους, εν τούτοις αυτή η ευκαιρία δεν αξιοποιήθηκε στη διδασκαλία.

Μόνο δυο καθηγητές ανέπτυξαν τη διδασκαλία τους χρησιμοποιώντας διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας με ένα λειτουργικό τρόπο και ενθαρρύνοντας τους μαθητές να χτίσουν σχέσεις ανάμεσα σε διαφορετικές μαθηματικές και επιστημονικές περιοχές.

Ικανότητα να αποδεικνύουν και να δικαιολογούν

Οι περισσότεροι καθηγητές δίδαξαν τα θεωρήματα χωρίς να αναφέρουν τις συνθήκες κάτω από τις οποίες ισχύουν. Για παράδειγμα διατύπωσαν τον κανόνα της αλυσίδας χωρίς να λάβουν υπόψη τους αν οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις είχαν παράγωγο σε συγκεκριμένα σημεία. Πάνω από όλα έδινα έμφαση στον παραγόμενο τύπο που έπρεπε να απομνημονευτεί και να χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές για να υπολογίσουν τις παραγώγους συγκεκριμένων συναρτήσεων. Το αποτέλεσμα μιας τέτοιας προσέγγισης ήταν η εμφάνιση κάποιων μαθηματικών λαθών όταν ο καθηγητής αποδείκνυε κάτι ή εκτιμούσε την εγκυρότητα των απαντήσεων των μαθητών.

Αντίληψη του ρόλου των συμβόλων

Ο τρόπος που οι καθηγητές χρησιμοποίησαν τα σύμβολα στη διδασκαλία τους υποδήλωνε τη δική τους κατανόηση για συγκεκριμένα σύμβολα και για ορισμένες έννοιες όσον αφορά στη σημασία που τους απέδιδαν. Ένα πρόβλημα που παρατηρήθηκε ήταν ότι ο τύπος του συμβόλου υπερείχε της έννοιας. Ο ρόλος των συμβόλων στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών ήταν μια άλλη διάσταση που αναδύθηκε από τις παρατηρήσεις των ερευνητών. Κάποιοι καθηγητές εξέφρασαν το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο χρησιμοποιώντας διαφορετικά σύμβολα προκειμένου να προάγουν την κατανόηση των μαθητών.

Ικανότητα να αναστοχάζονται και να επεκτείνουν τη μαθηματική δραστηριότητα

Στις περισσότερες από τις διδασκαλίες που παρατήρησαν οι ερευνητές δεν υπήρχαν αποκλίσεις από τις σχεδιασμένες μαθηματικές δραστηριότητες. Επιπλέον η μαθηματική δραστηριότητα παρέμεινε στο επίπεδο της δράσης χωρίς περαιτέρω εξερευνήσεις σε ένα μεταγνωστικό επίπεδο. Όμως υπήρχαν και λίγες περιπτώσεις που συνέβαιναν και τέτοιες εξερευνήσεις. Για παράδειγμα ο Μιχάλης ρωτούσε συχνά «πως» και «γιατί» στη διδασκαλία του. Επίσης ενθάρρυνε τους μαθητές να κάνουν εικασίες και να σκεφτούν κάποιες ασυνήθιστες περιπτώσεις.

Σχέσεις που προκύπτουν ανάμεσα στη μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών και τη διδασκαλία

Το γεγονός ότι η μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών έχει μια επίδραση στις πρακτικές που χρησιμοποιούν είναι κάτι που έχει αναφερθεί από πολλούς ερευνητές. Το κύριο θέμα που αναδύεται στην έρευνα αυτή είναι ότι η αποτελεσματική διδασκαλία των μαθηματικών συμβαίνει μόνο σε περιπτώσεις όπου οι μη παραδοσιακές πρακτικές του εκπαιδευτικού συνυπάρχουν με μια πλούσια μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία.

Συμμετοχή των μαθητών και μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών

Μερικοί καθηγητές ενθάρρυναν τη συμμετοχή των μαθητών στη διδασκαλία τους στην οποία οι μαθητές αντιμετώπισαν, ατομικά ή σε ζευγάρια, κάποιες από τις μαθηματικές εργασίες. Ωστόσο οι εργασίες αυτές ήταν κυρίως ασκήσεις που δεν προσέφεραν μαθηματική πρόκληση και δεν ενθάρρυναν τη δημιουργικότητα των μαθητών. Ακόμη και στη περίπτωση όπου κάποια υλικά χρησιμοποιήθηκαν για να ενθαρρύνουν τη συμμετοχή, όπως φύλλα εργασίας, λειτούργησαν ως μέσα για τη διαχείριση της τάξης. Κάποιοι από τους μαθηματικούς της έρευνας είπαν στη συνέντευξη ότι τα υλικά αυτά χρησιμοποιήθηκαν για να κερδίσουν χρόνο και δεν μπορούσαν να δουν ότι τα φύλλα εργασίας βοηθούν τους μαθητές να αποκτήσουν κάποιες δεξιότητες. Όταν παρουσίαζαν μια καινούρια έννοια, η συμμετοχή των μαθητών ήταν ελάχιστη. Οι καθηγητές παρουσίαζαν στον πίνακα τη διαδικασία ορισμού της έννοιας και οι μαθητές απλά παρακολουθούσαν. Όταν οι καθηγητές άρχισαν να ρωτούν προκειμένου να αξιολογήσουν την κατανόηση των μαθητών, στις περισσότερες περιπτώσεις οι μαθητές δεν μπορούσαν να απαντήσουν. Αντιθέτως υπήρχε καθηγήτρια που χρησιμοποίησε φύλλα εργασίας με μια διαφορετική φιλοσοφία από τα σχολικά βιβλία. Η μαθηματική δραστηριότητα εστίαζε στην εννοιολογική κατανόηση των μαθητών και την ανάπτυξη υψηλότερων επιπέδων μαθηματικής σκέψης. Η συμμετοχή των μαθητών ήταν ενεργή και ουσιαστική, καθώς το φύλλο της εργασίας είχε ως σημείο εκκίνησης ένα πρόβλημα που σκόπευε στο να αρχίσει να γίνεται η συζήτηση. Αυτή η συζήτηση οδήγησε τους μαθητές να ορίσουν την έννοια και να αντιληφθούν την αιτία για την παρουσίαση της.

Μαθηματική επικοινωνία και μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών

Όλοι οι καθηγητές είχαν καλές σχέσεις με τους μαθητές τους και οι περισσότεροι ήταν ευαίσθητοι στις συναισθηματικές ανάγκες των μαθητών τους. Συχνά προσπαθούσαν να δημιουργήσουν συγκεκριμένους κανόνες που θα μπορούσαν να επιτρέψουν μια πιο πλούσια μαθηματική επικοινωνία. Πολλοί καθηγητές ενθάρρυναν τους μαθητές τους να σκεφτούν διαφορετικές λύσεις ή να αποδείξουν συγκεκριμένους τύπους για τον υπολογισμό παραγώγων στην περίπτωση που θα τους ξεχνούσαν. Αλλά ακόμα κι αυτοί οι κανόνες δε φάνηκαν να ήταν αρκετοί ώστε να επιτρέψουν την ανάπτυξη μιας πλούσιας επικοινωνίας. Φάνηκε ότι οι καθηγητές που είχαν μια πλούσια μαθηματική γνώση κατάφεραν να μεταμορφώσουν τη επικοινωνία της τάξης σε μια πραγματική μαθηματική επικοινωνία που ενθάρρυνε τέτοιες παραγωγικές καταστάσεις.

Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία

Όλοι οι καθηγητές που έλαβαν μέρος στην έρευνα είχαν πτυχίο Μαθηματικού. Ωστόσο όλοι θεωρούσαν ότι οι σπουδές τους δεν ήταν ιδιαίτερα χρήσιμες καθώς τους είχαν δώσει μόνο ένα γενικό μαθηματικό υπόβαθρο. Αυτό που βρήκαν χρήσιμο για τη διδακτική τους ανάπτυξη ήταν η εισαγωγική σειρά μαθημάτων που είχαν παρακολουθήσει ως αρχάριοι δάσκαλοι. Σε αυτά τα μαθήματα επισκέφτηκαν τάξεις, σχεδίασαν μαθήματα και παρακολούθησαν επίσης κάποια μαθήματα που εστίαζαν κυρίως στα παιδαγωγικά. Από τη μελέτη φάνηκε ότι η γενική μαθηματική γνώση και η γενική παιδαγωγική γνώση δεν συνεπάγονται μια ποιότητα της γνώσης των μαθηματικών για τη διδασκαλία. Δύο από τους καθηγητές που έλαβαν μέρος στην έρευνα, είχαν μεταπτυχιακό στη Διδακτική των Μαθηματικών. Κατά τη διάρκεια των σπουδών τους παρακολούθησαν διδασκαλίες που ενοποιούσαν την μαθηματική και τη παιδαγωγική γνώση σε συγκεκριμένες περιοχές του περιεχομένου. Μελέτησαν το ρόλο των διαφορετικών αναπαραστάσεων στη μάθηση και διδασκαλία συγκεκριμένων θεμάτων, αντιμετώπισαν έργα όπου έπρεπε να ερευνήσουν και τις μαθηματικές και τις παιδαγωγικές ιδέες και σχεδίασαν κάποιες διδακτικές παρεμβάσεις. Όπως φαίνεται στα ακόλουθα αποσπάσματα η συμμετοχή τους σε μια σειρά μαθημάτων διδακτικής της Ανάλυσης με την παραπάνω φιλοσοφία, βελτίωσε και τη μαθηματική και την παιδαγωγική τους γνώση.

«Έμαθα για τις παρανοήσεις και τα λάθη των μαθητών στην έννοια του ορίου. Έμαθα επίσης τρόπους για να υπερνικώ αυτά τα εμπόδια.»

«Ενώ δίδασκα έκανα κάποια πράγματα μηχανικά, ακόμα και τον ορισμό του ορίου. Τώρα ξέρω ότι η κατανόηση του ορισμού βοηθάει στα πάντα.»

«Ήξερα μόνο αυτό που είχα να πω, αυτό που υπήρχε στο αναλυτικό πρόγραμμα και στο σχολικό βιβλίο χωρίς να καταλαβαίνω πολλά πράγματα.»

Η γνώση του τρόπου διδασκαλίας μιας μαθηματικής ενότητας διαφέρει από τη γνώση του περιεχομένου της αλλά προφανώς συνδέεται άμεσα με αυτή. Ένας από τους καθηγητές που είχε μεταπτυχιακό στη Διοίκηση της Εκπαίδευσης, ανέπτυξε παιδαγωγική γνώση που τον βοήθησε να σκεφτεί και να προσπαθήσει να εφαρμόσει εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία του. Αυτό είχε αποτέλεσμα στον τρόπο που αλληλεπιδρούσε με τους μαθητές του. Όμως επειδή η γνώση αυτή ήταν ανεξάρτητη από το αντικείμενο της διδασκαλίας, δεν ήταν αρκετή για να αναπτύξει την απαραίτητη μαθηματική και παιδαγωγική αντίληψη στη συγκεκριμένη περιοχή της διδασκαλίας της Ανάλυσης.

Δυο βασικά στοιχεία της γνώσης του εκπαιδευτικού είναι η μαθηματική και η παιδαγωγική γνώση. Όταν αυτά τα δύο στοιχεία διαχωρίζονται και παραμένουν σε ένα βασικό επίπεδο, η διδασκαλία των μαθηματικών δεν έχει τα χαρακτηριστικά που οι Wilson, Cooney και Stinson (2005 όπως αναφ. στο Potari et. al., 2006) περιγράφουν ως καλή διδασκαλία. Η ανάμιξη μαθηματικών και παιδαγωγικής είναι απαραίτητη για την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία (Ball & Bass, 2000 όπως αναφ. στο Potari et. al., 2006). Όμως αυτή η γνώση είναι κάτι το ιδιαίτερο καθώς, το γεγονός ότι ο καθηγητής έχει αναπτύξει τη γνώση της Ανάλυσης για τη διδασκαλία, δε σημαίνει ότι αυτόματα τη μεταφέρει και σε άλλες περιοχές των μαθηματικών.

Από τα στοιχεία που οι ερευνητές συνέλεξαν στην τάξη καθώς και από τις συνεντεύξεις, φαίνεται ότι οι μαθηματικές εμπειρίες και οι παιδαγωγικές εμπειρίες δε μπορούν να είναι διαφορετικοί τύποι γνώσεις στην εκπαίδευση του δασκάλου. Η ανάπτυξη της γνώσης των εκπαιδευτικών σχετικά με τα χαρακτηριστικά που συζητήσαμε στην εργασία μας είναι δύσκολο να επιτευχθεί, ενώ οι εκπαιδευτικοί συμμετέχουν μόνο σε μαθήματα επίσημων μαθηματικών και παιδαγωγικών. Αυτό έχει αναγνωριστεί και από άλλους ερευνητές που προτείνουν ότι η ενσωμάτωση των μαθηματικών και της παιδαγωγικής είναι ένας τρόπος για την ανάπτυξη της γνώσης του εκπαιδευτικού προς την αποτελεσματική διδασκαλία (Cooney, 1999, McMahon et al, 2006 όπως αναφ. στο Potari et. al., 2006).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΡΙΑ

2.1.1 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

Το γεγονός ότι οι μαθητές φέρουν σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας του ορίου δεν προκαλεί έκπληξη, καθώς η τελική μορφή της έννοιας είναι αποτέλεσμα μιας διεργασίας που διήρκεσε πάνω από δύο χιλιετίες. Αναμφισβήτητα στο χρονικό αυτό διάστημα υπήρξαν λάθη και οπισθοδρομήσεις που τονίζουν πόσο σύνθετη είναι η έννοια του ορίου στα Μαθηματικά. Είναι λοιπόν αναγκαίο για το σχεδιασμό της διδασκαλίας της θεμελιώδους αυτής έννοιας να αναφερθούν τα βασικά εμπόδια που προέκυψαν στην εξέλιξή της, καθώς και ο τρόπος αντιμετώπισής τους. Ο Cornu (1991) επισημαίνει ότι η εισαγωγή της έννοιας του ορίου στόχευε κυρίως στην επίλυση τριών κατηγοριών προβλημάτων:

- Γεωμετρικά προβλήματα (υπολογισμοί εμβαδών και μηκών με τη μέθοδο της «εξάντλησης»),
- υπολογισμοί απείρων αθροισμάτων (σύγκλιση σειρών),
- προβλήματα παραγώγισης.

2.1.2 ΤΟ ΟΡΙΟ ΣΤΗΝ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ

Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί δυσκολεύονταν να ερμηνεύσουν φιλοσοφικά τις έννοιες του απείρου και του απειροστού και ως αποτέλεσμα δεν ασχολήθηκαν ουσιαστικά με την αυστηρή έννοια του ορίου. Επινόησαν ωστόσο μεθόδους εξαίρετης ευφυΐας, ανάμεσα στις οποίες ξεχωριστή θέση κατέχει η περίφημη «μέθοδος της εξάντλησης» του Ευδόξου. Η ιδέα του υπολογισμού του εμβαδού ενός κυκλικού δίσκου με χρήση εγγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων με όλο και μεγαλύτερο πλήθος πλευρών (που αποδίδεται στον Αντιφώντα) αποτέλεσε τη βάση της μεθόδου της εξάντλησης, που διατυπώθηκε πρώτα από τον Εύδοξο και στη συνέχεια εφαρμόστηκε από τον Ευκλείδη και τον Αρχιμήδη.

« Δύο μεγεθών άνισων εκκειμένων, εάν από του μείζονος αφαιρεθεί μείζον ή το ήμισυ και του καταλειπομένου μείζον ή το ήμισυ, και τούτο αεί γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ό έσται έλασσον του εκκειμένου ελάσσονος μεγέθους ».

Σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα η αρχή της εξάντλησης μπορεί να αποδοθεί ως εξής: Ας θεωρήσουμε δύο άνισα μεγέθη α και ε , με $\alpha > \varepsilon$. Αν από το α αφαιρεθεί μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του, από το υπόλοιπο αφαιρεθεί μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται επ ' άπειρον, τότε θα μείνει κάποιο μέγεθος μικρότερο του ε .

Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί που χρησιμοποίησαν τη μέθοδο της εξάντλησης δεν θεωρούσαν ότι η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβανόταν για άπειρο αριθμό βημάτων, ώστε να εξαντληθεί το αρχικό μέγεθος. Αντίθετα, θεωρούσαν ότι πάντοτε υπήρχε μια υπολειπόμενη ποσότητα, η οποία μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή θέλουμε (Boyer, 1939). Έτσι, κατά κάποιο τρόπο η έννοια του απείρου παραμένει συνδεδεμένη με την τότε μέθοδο της εξάντλησης. Ωστόσο, όσο η έννοια του απείρου εξακολουθεί να σχετίζεται με την έννοια του ορίου, συνεχίζουν να υπάρχουν ασάφειες σχετικά με τη διάκριση ανάμεσα στο δυνητικό και το πραγματικό άπειρο και κατ επέκταση με το ερώτημα του «αν το όριο τελικά επιτυγχάνεται».

2.1.3 Η ΓΕΝΝΗΣΗ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

Μέχρι το 16ο αιώνα δεν εμφανίζονταν ουσιαστικές διαφοροποιήσεις σχετικά με τις αντιλήψεις και τις μεθόδους των αρχαίων Ελλήνων αναφορικά με τις οριακές διαδικασίες. Την περίοδο εκείνη ο Ιταλός Luca Valerio και ο Φλαμανδός Simm Stevin κάνουν την πρώτη προσπάθεια να αποσαφηνίσουν την έννοια του ορίου, αποφεύγοντας τη χρήση της μεθόδου της εξάντλησης σε συνδυασμό με απαγωγή σε άτοπο. Το 17ο αιώνα η ανάπτυξη της Μηχανικής και της Αστρονομίας οδηγεί σε νέες ιδέες και ανακαλύψεις στον Απειροστικό Λογισμό. Προβλήματα όπως η εύρεση της εφαπτομένης μιας καμπύλης, ο υπολογισμός μεγίστων και ελαχίστων τιμών, απαιτούν νέες μεθόδους, οι οποίες δε θα αργήσουν να εμφανιστούν. Σημαντική επίδραση στη γενικότερη ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού έχει το σύγγραμα «Geometria Indivisibilibus.» (1635) του Bonaventura Cavalieri, στο οποίο κεντρική έννοια είναι το αδιαίρετο. Σχεδόν ταυτόχρονα (1634), ο Pierre de Fermat χρησιμοποιεί την ίδια έννοια, ενώ το 1638 διατυπώνει μία γενική μέθοδο για τον προσδιορισμό μεγίστων και ελαχίστων τιμών. Διακρίνονται δύο τάσεις στους ερευνητές της εποχής αυτής: η γεωμετρική (Cavalieri, Toricelli, Barrow) και η αλγεβρική (Fermat, Descartes, Wallis). Η πρόοδος στην επίλυση πρακτικών προβλημάτων (υπολογισμοί εμβαδών και όγκων, προσδιορισμός εφαπτομένης δοθείσας καμπύλης) είναι αξιοσημείωτη. Η θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού θα επιτευχθεί τον 17ο αιώνα από τους Isaac Newton και Gottfried Leibniz, που επινόησαν ταυτόχρονα το Διαφορικό και τον Ολοκληρωτικό Λογισμό. Ο Leibniz ανέπτυξε τον απειροελάχιστο λογισμό ο οποίος βασίστηκε στις απειροελάχιστες ποσότητες. Όπως αναφέρεται στο Ely (2010), αυτή η μέθοδος του λογισμού χρησιμοποιήθηκε και επεκτάθηκε από την πλειοψηφία των μεγάλων μαθηματικών του 18ου αιώνα, συμπεριλαμβανομένων των Bernoulli, Euler, και Legendre. Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου, έγιναν έντονες επιθέσεις στην ιδέα των απειροελάχιστων ποσοτήτων (Grabiner, 1981), όπως το διάσημο χαρτί του Berkeley το 1734, το οποίο έθεσε θεμελιώδη προβλήματα που δεν επιλύθηκαν για περισσότερο από έναν αιώνα. «Τι ήταν ένα απειροελάχιστο; Θα μπορούσε μία τέτοια ποσότητα να παραχθεί και να εξεταστεί στον πραγματικό κόσμο»; Για παράδειγμα, ποιος είναι ο «τελικός όρος»; Τέτοιου είδους ασάφειες οδήγησαν στην απόρριψη της ιδέας των απειροελάχιστων και στην ανάγκη για εδραίωση της ανάλυσης με περισσότερη αυστηρότητα. Ωστόσο, μεταγενέστερα αποδείχθηκε από τον Abraham Robinson (1961, όπως αναφέρεται στο Robinson, 1996) ότι το σύστημα που χρησιμοποίησε ο Leibniz σιωπηρά μπορεί να είναι τόσο συνεπές και ισχυρό όσο η συμβατική έκδοση της ανάλυσης (standard - analysis).

2.1.4 ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΕΣ ΓΙΑ ΜΙΑ ΑΥΣΤΗΡΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

Η σύγχυση και η διαμάχη για τη φύση και το ρόλο των απειροστών μεγεθών γέννησε έναν πλούσιο προβληματισμό γύρω από την ακριβή έννοια του ορίου. Καταρχάς, έγινε αντιληπτό ότι οι υπολογιστικές, γεωμετρικές θεωρήσεις των Newton και Leibniz έδιναν μεν τα σωστά αποτελέσματα, αδυνατούσαν όμως να αποτελέσουν αυστηρό θεωρητικό υπόβαθρο για τον Απειροστικό Λογισμό. Για παράδειγμα, ο Newton εννοούσε ως «όριο» ένα «αξεπέραστο σύνορο», πράγμα που δεν επαρκούσε για την απόδειξη γενικών θεωρημάτων σχετικών με τα όρια. Στη διάρκεια του 18ου αιώνα παρατηρείται μια προσπάθεια για διατύπωση του ορισμού του ορίου με χρήση του αλγεβρικού λογισμού και συγκεκριμένα των ανισοτήτων.

Στο άρθρο του στην Encyclopédie (1754), ο D. Alembert επιχειρεί για πρώτη φορά τη θεμελίωση του Λογισμού του Leibniz στην έννοια του ορίου. Διατυπώνει τα θεωρήματα της μοναδικότητας του ορίου και του ότι το όριο του γινομένου ισούται με το γινόμενο των ορίων. Δίνει έμφαση στο όριο του πηλίκου αντί για το πηλίκο δύο ορίων ίσων με μηδέν και αποβάλει την έννοια του απειροστού από τη θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού:

«Νιώθει κανείς ότι η υπόθεση ύπαρξης άπειρα μικρών ποσοτήτων γίνεται εδώ μόνο για διόρθωση και απλοποίηση του συλλογισμού, ότι στην ουσία ο διαφορικός λογισμός δεν απαιτεί την ύπαρξη αυτών των ποσοτήτων και ότι ο λογισμός αυτός συνίσταται μόνο στον αλγεβρικό προσδιορισμό του ορίου ενός πηλίκου».

Σύμφωνα με τον D.Alembert: «Ένα μέγεθος καλείται όριο ενός άλλου μεγέθους όταν το δεύτερο μπορεί να προσεγγίσει το πρώτο πλησιέστερα από ένα οσοδήποτε μικρό δοσμένο μέγεθος, χωρίς ωστόσο το προσεγγίζον μέγεθος να υπερβεί το μέγεθος που προσεγγίζεται». Από την παραπάνω διατύπωση και τις επεξηγήσεις που την ακολουθούν γίνεται σαφές ότι, κατά τον D.Alembert, μια ποσότητα δεν μπορεί να γίνει μεγαλύτερη ή ίση από το όριό της. Επίσης, ο χειρισμός της «απροσδιόριστης μορφής» 0/0 από δεν είναι ικανοποιητικός, μια και χρησιμοποιεί ξανά το «δεκανίκι» των απειροστών! Γενικά στο έργο του D.Alembert και των συγχρόνων του παρατηρείται μια πληθώρα νέων συμπερασμάτων και εξαγομένων, που όμως συνάγονται με ελλιπή, ασαφή και πολλές φορές τελείως λανθασμένη επιχειρηματολογία. Η ελευθεριότητα στη χρήση άπειρων διαδικασιών φαίνεται και από την αποδιδόμενη στον D.Alembert παρότρυνση:

«τραβήξτε μπροστά και η πίστη θα σας έρθει».

Ο Joseph Louis Lagrange είναι ο άλλος πρωταγωνιστής στην προσπάθεια μιας αυστηρής θεμελίωσης του Απειροστικού Λογισμού. Το 1772 επιχειρεί να θεμελιώσει το Λογισμό χρησιμοποιώντας άλγεβρα και το θεώρημα του Taylor. Προφανώς δεν ήταν ικανοποιημένος από την προσπάθειά του αυτή, μια και ως Πρόεδρος της Ακαδημίας του Βερολίνου το 1784 θέσπισε βραβείο για μια ικανοποιητική και αυστηρή παρουσίαση του Απειροστικού Λογισμού. Το βραβείο δόθηκε δυο χρόνια αργότερα στον S.A.J. Lhuilier, ο οποίος επιχείρησε τη θεμελίωση σε μια παραλλαγή της μεθόδου της εξάντλησης των αρχαίων Ελλήνων. Με τον ορισμό του ορίου κατά τον Lhuilier, η μεταβλητή ποσότητα είναι πάντοτε μεγαλύτερη ή πάντοτε μικρότερη από το όριό της (δεν μπορεί δηλαδή να ταλαντώνεται άλλοτε πάνω και άλλοτε κάτω από το όριό της). Το ερώτημα αν η μεταβλητή ποσότητα μπορεί ή όχι να γίνει ίση με το όριό της δεν απασχολεί τον Lhuilier. Παρόλα αυτά, αποδεικνύει μια σειρά θεωρημάτων πάνω στα όρια με μια προσοχή πρωτόγνωρη για την εποχή του, αν και κάποιες αποδείξεις του με χρήση άπειρων σειρών είναι ανεπαρκείς. Επιπλέον, δεν χρησιμοποιεί απειροστά και εισάγει την παράγωγο αλγεβρικά, θεωρώντας την ως όριο μιας μεταβλητής ποσότητας (του λόγου μεταβολής) και όχι ως πηλίκο δύο μηδενικών ορίων, όπως ο D.Alembert. Το 1797 έχουμε τρεις σημαντικές δημοσιεύσεις πάνω στο Λογισμό από τον Lagrange (Théorie des fonctions), τον Lazare Carnot και τον S.F.Lacroix αντίστοιχα. Ο Lagrange απορρίπτει τόσο την έννοια του ορίου όσο και αυτήν του απειροστού, επιχειρεί να αποδείξει αλγεβρικά το θεώρημα του Taylor και να θεμελιώσει πάνω του το Λογισμό. Για τον Lagrange η έννοια πράξη «μετάβαση στο όριο» είναι εντελώς ξένη προς το πνεύμα της Μαθηματικής Ανάλυσης και γι. αυτό τα όρια πρέπει να αποβληθούν εντελώς (Ο Cauchy επεσήμανε το 1821 ότι το σκεπτικό του Lagrange δεν μπορεί να υλοποιηθεί, αφού η άλγεβρα των πεπερασμένων ποσοτήτων δεν επεκτείνεται αυτόματα στις άπειρες διαδικασίες). Ο Carnot υιοθετεί έναν πολεμικό τόνο για την έννοια του ορίου και το έργο του, αν και δημοφιλές στην εποχή του, δεν συνεισφέρει στη βαθύτερη κατανόηση του Λογισμού.

Πιο φιλικός στην έννοια του ορίου είναι ο Lacroix, ο οποίος υποστηρίζει ότι «αυτή καλύτερα συμφιλιώνει τη συντομία με την αυστηρότητα στους συλλογισμούς». Παρά το ότι το έργο του υπήρξε εξαιρετικά δημοφιλές στη Γαλλία για πάνω από 75 χρόνια, ο Lacroix δεν απέφυγε κάποια από τα λάθη των προγενεστέρων του. Για παράδειγμα, εισάγοντας την έννοια της παραγώγου δεν αποφεύγει την παγίδα του πηλίκου δύο μηδενικών ορίων. Επιπλέον, η έμφαση που δίνει στο «μυστηριώδες» σύμβολο 0/0 δίνει τροφή στην κριτική για τη μη επαρκή θεμελίωση του Λογισμού.

Τα παράδοξα, τα οποία εμφανίστηκαν λόγω των απειροελάχιστων, οδήγησαν τους μαθηματικούς, μεταξύ των οποίων ήταν ο Cauchy και ο Bolzano, να εργαστούν ανεξάρτητα για να αναπτύξουν ένα θεμελιώδες σύστημα ορίων που θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν για να εδραιώσουν τη συμπεριφορά των άπειρων σειρών, των ακολουθιών και των συναρτήσεων. Η αυστηροποίηση του λογισμού κατέληξε στον τυπικό ορισμό του ορίου, που τελικά επισημοποιήθηκε από τον Weierstrass τη δεκαετία του 1860, σηματοδοτώντας τη γενική εξαφάνιση των απειροελάχιστων από τα θεμέλια του προηγμένου λογισμού (Grattan Guinness, 1970).

2.1.5 Ο ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ:

Με την έναρξη του 19ου αιώνα οι συνθήκες για μια αυστηρή θεμελίωση της έννοιας του ορίου, απαλλαγμένη από τις ασάφειες των απειροστών, είχαν πια ωριμάσει. Οι βασικότεροι λόγοι που συνετέλεσαν σε αυτό ήταν οι ακόλουθοι:

1. Η απαίτηση για πιο αυστηρή διατύπωση των μαθηματικών εννοιών.

2. Η ανάπτυξη της άλγεβρας των ανισοτήτων και η συνειδητοποίηση ότι μπορεί να αποτελέσει το στέρεο θεμέλιο του Λογισμού.

3. Η εμπειρία στη χρήση και η καλύτερη κατανόηση των βασικών εννοιών της Ανάλυσης (σύγκλιση, συνέχεια, παράγωγος, ολοκλήρωμα).

4. Η γενίκευση της διδασκαλίας των Ανώτερων Μαθηματικών στις πανεπιστημιακές σχολές, που άρχισαν να ιδρύονται με γοργούς ρυθμούς στην Ευρώπη. Πολλά βασικά ερωτήματα τέθηκαν και απαντήθηκαν κατά τη διάρκεια παραδόσεων από μεγάλους μαθηματικούς στις σχολές αυτές. Για παράδειγμα, ο Cauchy θεμελίωσε την Ανάλυση στο περίφημο σύγγραμά του *Cours d. Analyse* (1821), που χρησιμοποίησε ως διδακτικό εγχειρίδιο για τις διαλέξεις του στην *Ecole Polytechnique* του Παρισιού. Ο Dedekind ξεκίνησε να ασχολείται με το πρόβλημα της συνέχειας διδάσκοντας στη Ζυρίχη. Τέλος, ο Weierstrass εισήγαγε τα «θεμέλιά» του για τη Ανάλυση στις διαλέξεις του στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου.

Με στόχο την αποκάθαρση των Μαθηματικών από τις ασάφειες του παρελθόντος και με έμφαση στην ακρίβεια και αυστηρότητα της διατύπωσης, ο Weierstrass δόμησε την Ανάλυση πάνω σε μια καθαρά τυπική αριθμητική βάση, εντελώς απαλλαγμένη από τη γεωμετρική εποπτεία. Ο σημερινός και επίσημος ορισμός της έννοιας του ορίου μιας πραγματικής συνάρτησης σε ένα σημείο μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

«Λέμε ότι η πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A έχει όριο τον πραγματικό αριθμό l για $x \to a$, όπου α είναι πραγματικός αριθμός, και συμβολίζουμε $\lim_{x\to a} f(x) = l$ αν και μόνο αν: για κάθε ε>0 υπάρχει δ=δ(ε) τέτοιο ώστε αν $x \in A$ και $0 < |x - \alpha| < \delta$ τότε $|f(x) - l| < \varepsilon$».

Διαισθητικά ο ορισμός θα μπορούσε να διατυπωθεί, ως εξής:

«Το όριο μίας πραγματικής συνάρτησης είναι ένα σημείο ή ένας αριθμός *l* στον οποίο οι τιμές *y* της συνάρτησης μπορούν να βρεθούν οσοδήποτε κοντά, περιορίζοντας καταλλήλως τις αντίστοιχες τιμές των *x*». (Williams, 1991).

Χρησιμοποιώντας ομοίως την καθημερινή μας γλώσσα, ο παραπάνω ορισμός μπορεί να διατυπωθεί άτυπα ως εξής:

«Ένα όριο είναι ένα σημείο ή ένας αριθμός από τον οποίο όλες οι τιμές της ακολουθίας, που βρίσκονται από ένα κατάλληλα μεγάλο *n* και μετά, απέχουν μία *οσοδήποτε* μικρή απόσταση».

Παρόλο που ο τυπικός ορισμός του ορίου είναι θεμελιώδης καθώς οι μαθητές προχωρούν σε πιο επίσημα και αυστηρά μαθηματικά (Swinyard & Larsen, 2012), η εννοιολογική κατανόηση και η απόκτηση της έννοιας επιφέρει σημαντικές δυσκολίες στους μαθητές.

Η έρευνα των Tall & Vinner (1981) προτείνει ότι οι τυπικοί ορισμοί μπορεί να μην είναι κατάλληλη αφετηρία για την κατανόηση μιας έννοιας από τους μαθητές. Είναι φανερό ότι οι μαθητές χρειάζονται διαφορετικές και πλούσιες εικόνες της έννοιας, για να καταφέρουν να έχουν στο μυαλό τους τους ορισμούς για μεγάλο χρονικό διάστημα (Harel, 2004, όπως αναφέρεται στο Swinyard, 2011).

Μία εξήγηση για τις δυσκολίες των μαθητών σχετικά με τον τυπικό ορισμό της έννοιας του ορίου είναι ότι η αλγεβρική τους προετοιμασία πριν από το κεφάλαιο των ορίων αποτυγχάνει να τους προετοιμάσει κατάλληλα για την κατανόηση της έννοιας του ορίου (Cornu, 1991).

Ακόμη, ο συμβολισμός του ορίου αναπαριστά τόσο τη διαδικασία της προσέγγισης του ορίου «καθώς n→∞, $α_ν$→α », όσο και την τιμή του ορίου $α = \lim_{n\to\infty} α_n$. Αυτό προκαλεί ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα των μαθητών, καθώς δεν υπάρχει μια σαφής διαδικασία για τον υπολογισμό του ορίου, αλλά πρέπει να υπολογίζεται με έμμεσο τρόπο χρησιμοποιώντας κάποια θεωρήματα (Cornu, 1981, όπως αναφέρεται στο Gray & Tall, 1994). Αυτό είναι που προκαλεί εμπόδια στους μαθητές καθώς εναντιώνεται στις διαισθήσεις τους, οι οποίες έχουν δημιουργηθεί από την προηγούμενή τους εμπειρία (Gray & Tall, 1994).

Μια άλλη εξήγηση είναι ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τη σύνθετη δομή του ορισμού σχετικά με την σημειογραφία και την ποσοτικοποίηση (Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf & Vidakovic, 1996). Για παράδειγμα, ο Fernández (2004, όπως αναφέρεται στο Swinyard & Larsen, 2012) αναφέρει ότι ορισμένα προβλήματα των μαθητών αναφορικά με τον ορισμό του ορίου μίας συνάρτησης $\lim_{x\to c} f(x) = L$ σχετίζονταν με: (α) το τι αντιπροσωπεύουν οι αριθμοί $ε$ και $δ$, (β) τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών (και των αριθμών $ε$ και $δ$) στον ορισμό και (γ) γιατί η ποσότητα $|x-c|$ πρέπει να είναι θετική, ενώ η $|f(x)-L|$ όχι. Η Mamona-Downs (2001) επισημαίνει ότι το πρόβλημα είναι διπλό για τον μαθητή. Αφενός το λιτό στυλ της έκφρασης το οποίο όμως χρήζει μιας αρκετά ώριμης σκέψης, και αφετέρου το ίδιο το περιεχόμενο του ορισμού.

Ο Williams (2001, όπως αναφέρεται στο Τσαγκαράκης, 2018) λέει ότι: «Σχετικά με την έννοια του ορίου, οι ανεπίσημες αντιλήψεις των μαθητών που εξαρτώνται από την αντιμετώπιση του πραγματικού απείρου συναντούν το μαθηματικό φορμαλισμό. Δεδομένου ότι η αποφυγή του απείρου στα σύγχρονα μαθηματικά οφείλεται στην αποφυγή πολύπλοκων μαθηματικών παραδοξολογιών, δεν προκαλεί έκπληξη το ότι λίγοι μαθητές βλέπουν την ανάγκη να απορρίψουν το άτυπο μοντέλο τους. Αυτό εξηγεί εν μέρει τις εννοιολογικές δυσκολίες γύρω από το όριο, την εύρωστη φύση αυτών των δυσκολιών και τα προβλήματα που σχετίζονται με τη διδασκαλία και την εκμάθηση του τυπικού ορισμού. Αυτό σημαίνει ότι το άπειρο είναι το πιο σημαντικό εμπόδιο στην εκμάθηση του τυπικού ορισμού».

2.2 ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

2.2.1 ΓΕΝΙΚΑ

Η έννοια του ορίου κατέχει κεντρική θέση στη μαθηματική ανάλυση, και αποτελεί βάση της συνέχειας, του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού. Μια από τις μεγαλύτερες δυσκολίες στη διδασκαλία και τη μάθηση της έννοιας του ορίου εντοπίζεται στο βαθμό στον οποίο οι γνωστικές πτυχές δεν μπορούν να παραχθούν καθαρά από το μαθηματικό ορισμό. Η διάκριση μεταξύ του ορισμού και της ίδιας της έννοιας (που εξετάζεται λεπτομερώς από τον Vinner (1991) είναι πολύ σημαντική. Η απομνημόνευση του ορισμού του ορίου και η κατανόηση της έννοιας είναι δύο τελείως διαφορετικά θέματα. Ένα τμήμα αποτελεί η ιδέα της προσέγγισης, που συναντάται συνήθως για πρώτη φορά μέσω μιας δυναμικής έννοιας του ορίου, και ο τρόπος με τον οποίο η έννοια του ορίου εφαρμόζεται για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων που δε βασίζονται στον ορισμό αλλά σε πολλές διαφορετικές ιδιότητες της διαισθητικής έννοιας. Οι μαθητές συχνά πιστεύουν ότι κατανοούν τον ορισμό του ορίου χωρίς πραγματικά να καταλαβαίνουν όλες τις συνέπειες της τυπικής έννοιας. Είναι συχνά ικανοί να ολοκληρώσουν πολλές από τις ασκήσεις που τους ζητείται να λύσουν χωρίς να έχουν πρώτα κατανοήσει πλήρως την έννοια.

Τα περισσότερα βιβλία Μαθηματικών αφιερώνουν ένα κεφάλαιο στη γενική έννοια του ορίου (συμπεριλαμβανομένου φυσικά του τυπικού ορισμού), μια πρόταση για τη μοναδικότητά του, και θεωρήματα για τις αριθμητικές πράξεις που εφαρμόζονται στα όρια. Οι ασκήσεις δεν επικεντρώνονται στην έννοια του ορίου, αλλά σε ανισότητες, στη έννοια της απόλυτης τιμής και κυρίως στις πράξεις: το όριο αθροίσματος, γινομένου, κλπ. Αυτές οι ασκήσεις σχετίζονται πολύ περισσότερο με την άλγεβρα παρά με την ανάλυση. Έτσι δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι οι μαθητές αποκτούν υπονοούμενες πεποιθήσεις για τον τρόπο με τον οποίο αναμένονται να δράσουν.

Πολλές έννοιες που χρησιμοποιούμε δεν είναι καθόλου τυπικά ορισμένες. Τις μαθαίνουμε μέσω της εμπειρίας και της χρήσης τους σε κατάλληλα πλαίσια. Αργότερα οι εν λόγω έννοιες μπορούν να εκλεπτυνθούν ως προς το νόημά τους και να ερμηνευθούν με αυξανόμενη πολυπλοκότητα με ή δίχως την πολυτέλεια ενός ακριβούς ορισμού. Συνήθως σε αυτή τη διεργασία αποδίδεται στην έννοια ένα σύμβολο ή ένα όνομα το οποίο της δίνει τη δυνατότητα να μεταφερθεί μέσω της επικοινωνίας και συμβάλλει στο νοητικό της χειρισμό. Αλλά η πλήρης γνωστική δομή που χρωματίζει το νόημα της έννοιας είναι πολύ ανώτερη από την απλή ανάκληση ενός απλού συμβόλου. Κατά τις νοητικές διεργασίες της ανάκλησης και του χειρισμού μιας έννοιας, πολλές σχετιζόμενες διεργασίες ενεργοποιούνται, τόσο ενσυνείδητα όσο και ασυνείδητα και επηρεάζουν το νόημα και τον τρόπο χρήσης.

2.2.2 ΕΙΚΟΝΑ ΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑ

Ο όρος εικόνα της έννοιας (Tall & Vinner, 1981) χρησιμοποιείται για να περιγράψουμε ολόκληρη τη γνωστική δομή, η οποία σχετίζεται με μία έννοια (Bezuidenhout, 1998, σελ. 390). Αυτή η γνωστική δομή περιλαμβάνει όλες τις νοητικές εικόνες, διαδικασίες και ιδιότητες που συνδέονται με την έννοια. Αυτό σημαίνει ότι η εκμάθηση μίας μαθηματικής έννοιας αποτελεί μία κατασκευαστική διαδικασία όπου οι μαθητές αναπτύσσουν και τροποποιούν τις υπάρχουσες «εικόνες» τους (Bezuidenhout, 1998). Οι «εικόνες της έννοιας» που ένα άτομο κατασκευάζει μέσα από τις δικές του δραστηριότητες μπορεί να διαφέρει από τις επίσημες μαθηματικές έννοιες.

Η εικόνα μιας έννοιας που έχει διαμορφώσει ένα άτομο δομείται μέσα από τις εμπειρίες του και μεταβάλλεται καθώς το άτομο αυτό ωριμάζει μαθηματικά και συναντά νέα ερεθίσματα που συνδέονται με την έννοια. Η εικόνα μιας έννοιας περιλαμβάνει τον «ορισμό της έννοιας» (concept definition) που γνωρίζει το άτομο (αν γνωρίζει), αλλά είναι κάτι ευρύτερο. Η κατανόηση μίας έννοιας προϋποθέτει το σχηματισμό μιας εικόνας γι' αυτήν. Η αποστήθιση του τυπικού ορισμού της δεν εγγυάται την κατανόησή της. Για να την κατανοήσουμε πρέπει να διαθέτουμε μία σωστή εικόνα της.

Για τους Tall και Vinner (1981) ο «ορισμός μιας έννοιας» είναι κάτι τελείως διαφορετικό. Θα θεωρήσουμε τον ορισμό μίας έννοιας ως μια σύνταξη λέξεων που χρησιμοποιείται για να προσδιορίσει αυτή την έννοια. Ο ορισμός μπορεί να διδαχθεί από τον καθηγητή στο μαθητή ή μπορεί ο μαθητής να τον ανακατασκευάσει μόνος. Στη τελευταία περίπτωση, ο ορισμός της έννοιας είναι η σύνταξη των λέξεων που χρησιμοποιεί ο μαθητής για τη δική του εξήγηση της εικόνας της έννοιας και μπορεί να διαφέρει από έναν «τυπικό ορισμό». Η διάκριση ανάμεσα στην εικόνα της έννοιας και στον ορισμό της έννοιας γίνεται διότι ο ανθρώπινος εγκέφαλος δεν διέπεται πάντα από καθαρή λογική. Ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί είναι πολύπλοκος και συχνά είναι σε αντίθεση με τη λογική των μαθηματικών. Δεν είναι πάντοτε η καθαρή λογική που μας δίνει πληροφορίες ούτε είναι τυχαίο που μας οδηγεί στο να κάνουμε λάθη. Πρέπει λοιπόν να διαχωρίσουμε τις τυπικές μαθηματικές έννοιες και τις διαδικασίες με τις οποίες συλλαμβάνονται. Συνήθως η μαθηματική έννοια δίνεται με τη χρήση ενός συμβόλου ή ενός ονόματος που επιτρέπει την επικοινωνία και βοηθάει στον νοητικό χειρισμό της. Αλλά η συνολική γνωστική δομή που χρωματίζει το νόημα της έννοιας είναι πολύ μεγαλύτερη από την ανάκληση ενός μόνο συμβόλου.

Διαφορετικά ερεθίσματα μπορούν να ενεργοποιήσουν διαφορετικά τμήματα της εικόνας της έννοιας, αναπτύσσοντάς τα με τρόπο που δεν αποτελεί απαραίτητα μία συναφή ολότητα. Ονομάζουμε το τμήμα της εικόνας της έννοιας που ενεργοποιείται σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, *προκαλούμενη εικόνα της έννοιας (evoked concept image)*. Μόνο όταν συγκρουόμενες πτυχές της εικόνας της έννοιας προκαλούνται ταυτόχρονα υπάρχει πραγματική αίσθηση σύγκρουσης ή σύγχυσης. Ονομάζουμε ένα μέρος της εικόνας ή του ορισμού της έννοιας που μπορεί να έρθει σε σύγκρουση με ένα άλλο μέρος της εικόνας ή του ορισμού της έννοιας, *πιθανό ή δυνητικό παράγοντα σύγκρουσης (potential conflict factor)*. Αυτοί οι παράγοντες μπορεί και να μην προκληθούν ποτέ σε περιπτώσεις που προκαλούν *πραγματική γνωστική σύγκρουση (actual cognitive conflict)*, αλλά αν προκληθούν, τότε οι σχετικοί παράγοντες καλούνται *γνωστικοί παράγοντες σύγκρουσης*.

Για κάθε άτομο, ένας ορισμός της έννοιας δημιουργεί τη δική του εικόνα της έννοιας. Ο ορισμός της έννοιας, βέβαια, είναι μέρος της εικόνας της έννοιας. Σε κάποιους μπορεί να είναι κενός ενώ σε άλλους μπορεί να μην συμβαδίζει με τα υπόλοιπα μέρη της εικόνας (Tall & Vinner, 1981).

<u>2.2.3 ΕΙΚΟΝΕΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΟΡΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ</u>

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι εικόνες των μαθητών για μία έννοια περιλαμβάνουν τις παρανοήσεις, τις διαισθητικές αντιλήψεις, τις αυθόρμητες αντιλήψεις και γενικότερα όλες τις συνδέσεις και τις δομές που κατέχει κάποιο άτομο σχετικά με αυτήν την έννοια. Ένα μέρος της εικόνας μιας έννοιας που αξίζει ιδιαίτερη προσοχή αποτελούν οι παρανοήσεις των μαθητών γι’ αυτήν την έννοια.

Οι παρανοήσεις σχετικά με τις έννοιες που περιλαμβάνει ο Απειροστικός Λογισμός είναι ιδιαίτερα σημαντικές για τους καθηγητές, οι οποίοι θα πρέπει να αναγνωρίζουν την σπουδαιότητά τους και να έχουν την επίγνωση τους. Σύμφωνα με τον Denbel (2014) η αναγνώριση της φύσης των παρανοήσεων των μαθητών επιτρέπει στους εκπαιδευτικούς να αναπτύξουν ιδιαίτερες διδακτικές μεθόδους ώστε να αντιμετωπίσουν την κατάσταση, ενώ ο Olivier (1989) υποστηρίζει ότι τα λάθη και οι παρανοήσεις αποτελούν επακόλουθο της προσπάθειας των ανθρώπων να δημιουργήσουν τη δική τους γνώση. Κι αφού οι παρανοήσεις δεν μπορούν να αποφευχθούν (Davis & Vinner, 1986) αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την παρεμπόδιση της κατανόησης σημαντικών μαθηματικών εννοιών σε μεγάλο βαθμό. Αυτό δεν σημαίνει ότι δεν πρέπει να καταπολεμούνται οι παρανοήσεις που έχουν οι μαθητές, διότι αυτές μπορεί να επηρεάσουν αρνητικά τη νέα μάθηση (Olivier, 1989).

Για τον Olivier (1989) οι παρανοήσεις δεν πρέπει να αντιμετωπίζονται ως λάθη που επιβάλλεται να λυθούν. Αντί αυτού, είναι καλύτερο να θεωρούνται ως μέρος της διαδικασίας μάθησης. Πρέπει να δημιουργηθεί μια ατμόσφαιρα στην τάξη που είναι ανεκτική στα λάθη και τις παρανοήσεις. Οι παρανοήσεις πρέπει να ληφθούν υπόψιν κατά την ανάπτυξη στρατηγικών διδασκαλίας καθώς η ταυτοποίησή τους μπορεί να δημιουργήσει αξιόλογες ευκαιρίες για ενίσχυση της μάθησης.

Ο Williams (1991) εξέτασε τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με το όριο μιας συνάρτησης και τις απαντήσεις τους κατά την παρουσίαση παραδειγμάτων τα οποία έρχονταν σε αντίφαση με τις αντιλήψεις τους. Η μελέτη αυτή ανέδειξε μερικές από τις παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με το όριο. Ο Williams λέει ότι: «Σε μια προσπάθεια (α) να διερευνήσουμε λεπτομερέστερα αυτό που ο Cornu ανέφερε ως αυθόρμητα οριακά μοντέλα των μαθητών και (β) να μελετήσουμε τα μέσα με τα οποία αυτά τα μοντέλα μπορούν να τροποποιηθούν και να γίνουν πιο αυστηρά, η μελέτη διερεύνησε τις απόψεις 10 φοιτητών δεύτερου εξαμήνου σε μάθημα ανάλυσης, ως προς το τι είναι ένα όριο και στη συνέχεια παρουσιάστηκαν στους φοιτητές περιγραφές και παραδείγματα ορίων που έρχονταν σε αντίθεση με τις απόψεις τους».

Ο Williams έδωσε ένα ερωτηματολόγιο για τα όρια σε 341 φοιτητές του δεύτερου εξαμήνου. Οι ερωτήσεις περιλάμβαναν έξι προτάσεις σχετικά με τα όρια, που θα έπρεπε να χαρακτηριστούν ως αληθείς ή ψευδείς. Οι φοιτητές έπρεπε να επιλέξουν ποια από αυτές περιγράφει καλύτερα την έννοια του ορίου και να εξηγήσουν τι εκείνοι θεωρούν ότι είναι ένα όριο.

Από το ερωτηματολόγιο, καταγράφηκαν τα παρακάτω αποτελέσματα:

1. Ένα όριο περιγράφει το τρόπο με τον οποίο η συνάρτηση μετακινείται, καθώς οι τιμές του x κινούνται προς ένα συγκεκριμένο σημείο (δυναμικό θεωρητικό, 80%).

2. Ένα όριο υπολογίζεται τοποθετώντας στη συνάρτηση αριθμούς που βρίσκονται όλο και πιο κοντά σε ένα δοσμένο αριθμό, μέχρι το όριο να επιτευχθεί (δυναμικό πρακτικό, 43%)

3. Ένα όριο είναι ένας αριθμός ή ένα σημείο που η συνάρτηση πλησιάζει συνεχώς αλλά ποτέ δε φτάνει (απρόσιτο, 70%).

4. Ένα όριο είναι ένας αριθμός ή ένα σημείο πέρα από το οποίο η συνάρτηση δεν μπορεί να πάει (όριο ως αξεπέραστο, 33%)

5. Ένα όριο είναι μία προσέγγιση που μπορεί να γίνει οσοδήποτε ακριβής επιθυμούμε (όριο ως προσέγγιση, 49%).

Κανένα από αυτά τα φαινόμενα δεν καταγράφει πλήρως όσα περιγράφονται στον ορισμό του ορίου και γι' αυτό οι αντιλήψεις αυτές αποτελούν παρανοήσεις για την έννοια του ορίου. Παραδείγματος χάριν, η αντίληψη του ορίου ως απρόσιτο υποστηρίζει ότι δεν μπορεί να επιτευχθεί ένα όριο, δηλαδή ότι η τιμή συνάρτησης δεν μπορεί ποτέ να είναι ίση με την οριακή τιμή. ΚΙ ενώ υπάρχουν πολλές συναρτήσεις στις οποίες συμβαίνει το παραπάνω, υπάρχει κι ένας άπειρος αριθμός συναρτήσεων για τις οποίες το όριο υπάρχει.

Ο Williams (2001) διερεύνησε έπειτα τις σχέσεις που έχουν τα παραπάνω μοντέλα μεταξύ τους.

Διάλεξε δύο προπτυχιακούς φοιτητές μιας τάξης λογισμού, οι εικόνες των οποίων στηρίζονταν στην επαναληπτική επιλογή σημείων που πλησιάζουν την οριακή τιμή. Η έρευνα ήταν σχεδιασμένη με τέτοιον τρόπο ώστε να δημιουργηθεί κάποια γνωστική σύγκρουση. Ωστόσο, οι δύο φοιτητές συνέχισαν να πιστεύουν ότι το μοντέλο αυτό αποτελούσε το θεμελιώδη τρόπο κατανόησης τους. Οι δύο φοιτητές φάνηκε ότι έχουν ενσωματώσει το όριο μέσα στην υποκείμενη διαδικασία που ορίζει η δυναμική-πρακτική αντίληψη, θεωρώντας το όριο ως το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας. Το γεγονός αυτό προκάλεσε μία σύγχυση σχετικά με το αν το όριο επιτυγχάνεται ή όχι. Κι ενώ οι φοιτητές μπόρεσαν να κατανοήσουν ότι το όριο επιτυγχάνεται στις συνεχείς συναρτήσεις, αμφέβαλλαν σχετικά με το αν κατά τη διαδικασία εύρεσης του ορίου, το όριο επιτυγχάνεται στη πραγματικότητα. Η σύγχυση αυτή οφείλεται στη διάκριση των δύο μορφών που παίρνει το άπειρο , δυνητικό και πραγματικό όπως αναφέρεται στην έρευνα της Sierpińska (1987) .

Σε μία πιο πρόσφατη μελέτη, ο Amatangelo (2013) μελέτησε την κατανόηση των φοιτητών σχετικά με το όριο και τη συνέχεια. Για τη συλλογή των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε ένα ερωτηματολόγιο σε 861 φοιτητές και συνεντεύξεις σε 9 πρωτοετείς. Από τους 861 φοιτητές οι 392 παρακολουθούσαν ένα μάθημα λογισμού πρώτου εξαμήνου, οι 275 ένα μάθημα λογισμού δεύτερου εξαμήνου, οι 104 ένα μάθημα μαθηματικών για μηχανικούς πρώτου εξαμήνου, οι 32 ένα μάθημα μαθηματικών για μηχανικούς δεύτερου εξαμήνου, οι 37 ένα μάθημα λογισμού τρίτου εξαμήνου και οι 21 ένα μάθημα θεωρίας της ανάλυσης. Στο ερωτηματολόγιό του ο Amatangelo περιλάμβανε τη μελέτη των 5 παραπάνω παρανοήσεων που αναφέρθηκαν στην έρευνα του Williams (1991) συμπληρώνοντας σε αυτές ακόμη δύο, την αλγοριθμική αντίληψη και την αντίληψη εγγύτητας.

Η αλγοριθμική αντίληψη είναι η μέθοδος επίλυσης για να υπολογιστεί ένα όριο. ενώ η αντίληψη της εγγύτητας περιγράφει το όριο ως έναν αριθμό που οι τιμές μίας συνάρτησης έρχονται οσοδήποτε κοντά. Τα αποτελέσματα τις έρευνας ήταν τα παρακάτω:

• Δυναμική θεωρητική αντίληψη (91.93%)

• Δυναμική πρακτική αντίληψη (64.96%)

• Απρόσιτο όριο (67.33%)

• Όριο ως αξεπέραστο (28.59%)

• Όριο ως προσέγγιση (74.94%)

• Αλγοριθμική αντίληψη (54.76%)

• Όριο ως εγγύτητα (81.91%)

Ο Przenioslo (2004), σε έρευνα που αποτελούνταν από ένα δείγμα φοιτητών 3ου, 4ου και 5ου έτους κατά τη διάρκεια των μαθηματικών σπουδών τους, προσδιόρισε τις αλγοριθμικές αντιλήψεις ως εκείνες που επικεντρώνονταν στην εφαρμογή απομνημονευτικών αλγορίθμων για συγκεκριμένους τύπους ερωτήσεων. Τα αποτελέσματα φανέρωσαν ότι το 13% των φοιτητών είχαν μια αλγοριθμική αντίληψη για την έννοια του ορίου. Στη μελέτη του Przenioslo (2004) εντοπίστηκαν και περιγράφηκαν πολλές κατηγορίες εικόνων της έννοιας του ορίου οι οποίες, σύμφωνα με τις κύριες εστίες τους, κατηγοριοποιήθηκαν στις παρακάτω:

• Γειτονικές (10%)

• Προσέγγιση μέσω γραφήματος (34%)

• Προσέγγιση μέσω τιμών (16%)

• Το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού (18%)

• Το όριο της *f* στο x_0 ισούται με το $f(x_0)$ (9%)

• Αλγοριθμικές (13%)

Όπως παρατηρούμε, το 34% των συμμετεχόντων είχαν μία εικόνα της έννοιας όπου η βασική αντίληψη ήταν «προσέγγιση μέσω γραφήματος», στην οποία τα σημεία ενός γραφήματος προσέγγιζαν μία δεδομένη τιμή. Το 16% χαρακτηρίστηκε ως έχον μια εικόνα της έννοιας όπου η βασική αντίληψη ήταν «προσέγγιση μέσω τιμών», η οποία είναι ίδια με τη δυναμική-πρακτική σύλληψη (Williams, 1991).

Ο Przenioslo (2004) διαπίστωσε ότι το 18% των πανεπιστημιακών φοιτητών είχαν θεωρήσεις για μία συνάρτηση ότι πρέπει να ορίζεται στο σημείο που υπολογίζεται το όριο. Αυτή η αντίληψη του ορίου ως απλή αντικατάσταση αποτελεί το 9% της έρευνας του Przenioslo (2004). Η αντίληψη ότι το όριο της *f* στο x_0 ισούται με το $f(x_0)$ είναι μια πρακτική αντίληψη όπου ο φοιτητής υπολογίζει το όριο της συνάρτησης υπολογίζοντας την τιμή της συνάρτησης στο σημείο όπου τείνει η ανεξάρτητη μεταβλητή. Αυτές οι αλγοριθμικές αντιλήψεις μπορούν να περιγράφουν ως αποκλειστικά πρακτικές επειδή οι μαθητές τις χρησιμοποιούν όταν ασχολούνται μόνο με την εκτέλεση κάποιας διαδικασίας. Ο Williams (1991) έκανε κάποιες γενικεύσεις από το ποιοτικό μέρος της έρευνάς του, υποστηρίζοντας ότι:

«Οι σπουδαστές συχνά θεωρούσαν την ευκολία και την πρακτικότητα ενός οριακού μοντέλου σημαντικότερα από τη μαθηματική τυπικότητα. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα υπό την έννοια ότι τα μοντέλα ορίων που τους επιτρέπουν να αντιμετωπίζουν τις πραγματικότητες των ορίων στην τάξη, τείνουν να θεωρούνται επαρκή για τους περισσότερους μαθητές. Σημειώθηκε από πολλούς φοιτητές ότι ούτε τα τυπικά ούτε τα δυναμικά μοντέλα ορίων ευθύνονται ιδιαιτέρως για τις διαδικασίες που χρησιμοποιούν οι φοιτητές κατά την επίλυση ενός προβλήματος. Οι διαδικαστικές γνώσεις τους (πχ., αντικατάσταση τιμών σε συνεχείς συναρτήσεις, παραγώγιση, χρήση του κανόνα DHL) είναι σε μεγάλο βαθμό ξεχωριστές και αυτόνομες από τις εννοιολογικές τους γνώσεις.»

Υποστηρίζοντας την ίδια θέση, ο Bezuidenhout (2001) αναφέρει ότι: «Οι στερεότυπες ασκήσεις που αποτελούν χαρακτηριστικό πολλών κειμένων Απειροστικού Λογισμού συχνά ενθαρρύνουν μία μεμονωμένη προσέγγιση και όχι μια σχεσιακή κατανόηση των εννοιών του Απειροστικού Λογισμού. Αν σκεφτούμε ότι ο Απειροστικός Λογισμός έχει έναν διαδικαστικό προσανατολισμό, είναι λογικό το να συγχέει ο μαθητής τις διαδικαστικές δεξιότητες με μια πραγματική κατανόηση του περιεχομένου του».

Με βάση τις παραπάνω έρευνες, οι εικόνες της έννοιας του ορίου μίας συνάρτησης που εντοπίστηκαν περιγράφονται παρακάτω:

• Αντίληψη του ορίου ως απρόσιτο

• Αντίληψη του ορίου ως προσέγγιση.

• Αντίληψη του ορίου ως αξεπέραστο.

• Αντίληψη του ορίου ως μία δυναμική διαδικασία και όχι ως ένα στατικό αντικείμενο.

• Αντίληψη του ορίου με την έννοια της εγγύτητας.

• Το όριο μιας συνάρτησης μπορεί να βρεθεί τοποθετώντας σε αυτή αριθμούς που βρίσκονται όλο και πιο κοντά σε ένα δοσμένο αριθμό.

• Μπορούμε να βρούμε το όριο μίας συνάρτησης παρατηρώντας τη γραφική παράσταση αυτής.

• Μια συνάρτηση έχει πάντοτε όριο σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της.

• Για να έχει μία συνάρτηση όριο σε ένα σημείο, πρέπει να ορίζεται σε αυτό.

• Το όριο μίας συνάρτησης ισούται με την τιμή της συνάρτησης σε αυτό το σημείο, δηλαδή το όριο μπορεί πάντοτε να βρεθεί με μία μέθοδο απλής αντικατάστασης.

2.2.4 ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΑ ΕΜΠΟΔΙΑ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

Σύμφωνα με τον Cornu (1991) τα επιστημολογικά εμπόδια στην ιστορία της έννοιας του ορίου είναι τα παρακάτω:

1) Η αποτυχία σύνδεσης γεωμετρίας και αριθμών

Είναι γεγονός ότι η έννοια του ορίου δεν αποσαφηνίστηκε την περίοδο 430-300 π.Χ., όταν οι αρχαίοι Έλληνες ασχολήθηκαν με ζητήματα που ωθούσαν την ανάπτυξη της. Ένα από τα προβλήματα που έδωσε την ευκαιρία να αναπτυχθεί η έννοια ήταν αυτό του υπολογισμού του εμβαδού ενός κύκλου. Ο Ιπποκράτης ο Χίος (430 π.Χ.) θέλησε να αποδείξει ότι ο λόγος των εμβαδών δυο κύκλων είναι ίσος με τον λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους. Ενέγραψε κανονικά πολύγωνα στους δύο κύκλους και αυξάνοντας συνεχώς το πλήθος των πλευρών, προσέγγισε τα εμβαδά των δύο κύκλων. Σε κάθε βήμα ο λόγος των εμβαδών των εγγεγραμμένων πολυγώνων ισούται με το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων και από αυτό προκύπτει ότι «οριακά» αυτό θα ισχύει για τα εμβαδά των κύκλων.

Αυτή η μετάβαση προς το όριο, που εξηγείται πολύ απλά, θα καθοριζόταν ένα έτος αργότερα, μέσω της μεθόδου της εξάντλησης, την οποία έχουμε αναφέρει προηγουμένως. Όμως, παρά το γεγονός ότι η έννοια της εξάντλησης φαίνεται εξαιρετικά κοντά στην έννοια του ορίου, δεν μπορούμε να βεβαιώσουμε υπεύθυνα ότι οι Έλληνες κατείχαν τη σύγχρονη έννοια του ορίου. Η μέθοδος της εξάντλησης είναι ουσιαστικά μια γεωμετρική μέθοδος που επιτρέπει την απόδειξη αποτελεσμάτων χωρίς να πρέπει να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα του απείρου. Εφαρμόζεται σε γεωμετρικά μεγέθη, όχι σε αριθμούς. Δεν υπάρχει καμία μεταφορά από τα γεωμετρικά σχήματα σε μια καθαρά αριθμητική ερμηνεία, οπότε η έννοια του ορίου αριθμών απουσιάζει. Η γεωμετρική ερμηνεία και η επιτυχία της στην επίλυση των συναφών προβλημάτων φαίνεται ότι προκάλεσε ένα εμπόδιο που απέτρεψε τη μετάβαση στην έννοια του αριθμητικού ορίου.

2) Η έννοια του απείρως μεγάλου και του απείρως μικρού

Ιστορικά η έννοια του ορίου συναντά την υπόθεση για την ύπαρξη απείρως μικρών ποσοτήτων που είναι σχεδόν μηδέν χωρίς να έχουν ένα συγκεκριμένο «προσδιορίσιμο» μέγεθος. Είναι δυνατόν να υπάρχουν ποσότητες που είναι σχεδόν μηδενικές, και παρόλα αυτά το μέγεθός τους να μην προσδιορίζεται; Τι γίνεται όταν μια από τις ποσότητες αυτές μηδενίζεται; Τέτοια φιλοσοφικά προβλήματα απασχόλησαν πολυάριθμους μαθηματικούς. Ο Euler χρησιμοποίησε ελεύθερα την έννοια του απείρως μικρού ως μια ποσότητα που μπορεί, όταν απαιτείται, να θεωρηθεί ίση με το μηδέν. Αντίθετα, ο D'Albembert επεδίωξε να απομακρύνει τη χρήση του απείρως μικρού. Χρησιμοποίησε το επιχείρημα ότι μια ποσότητα ή είναι κάτι ή δεν είναι τίποτα. Αν είναι κάτι τότε δεν μπορεί να γίνει μηδέν και αν είναι τίποτε τότε είναι ήδη μηδέν. Έτσι, περιέγραψε την υπόθεση ότι υπάρχει μια ενδιάμεση κατάσταση μεταξύ των δύο σαν ένα κακό όνειρο.

Ο Cauchy χρησιμοποίησε επίσης την έννοια του απείρως μικρού. Όπως αναφέρει ο Boyer (1939, p.277), ο Cauchy, στο Cours d'analyse de l' Ecole Polytechnique (1821), όρισε τη συνεχή συνάρτηση ως εξής: «μια συνάρτηση f(x) λέγεται συνεχής μεταξύ δύο σημείων αν ανάμεσα σε αυτά μία απείρως μικρή αύξηση t στη μεταβλητή x, προκαλεί πάντοτε μία απείρως μικρή αύξηση f(x+t)-f(x) στην ίδια τη συνάρτηση». Επιπρόσθετα, όπως αναφέρει ο Boyer (1939, p.273), ο Cauchy εξήγησε την ιδέα του απειροελάχιστου ως εξής: «Λέμε ότι μια μεταβλητή ποσότητα γίνεται απείρως μικρή όταν η αριθμητική της τιμή μειώνεται διαρκώς κατά τέτοιο τρόπο ώστε να συγκλίνει στο όριο μηδέν». Έτσι, για τον Cauchy το απειροστό είναι απλά μία μεταβλητή, η οποία τείνει στο μηδέν. Η ιδέα ότι το όριο είναι μια ενδιάμεση κατάσταση μεταξύ της ύπαρξης και της ανυπαρξίας κάποιου πράγματος συναντάται συχνά στους σύγχρονους μαθητές. Το $\varepsilon>0$ θεωρείται ότι αναπαριστά ένα μη μηδενικό αριθμό μικρότερο από κάθε θετικό πραγματικό αριθμό. Με τον ίδιο τρόπο, κάποιοι μπορεί να πιστεύουν ότι το 0,999….. είναι ο τελευταίος αριθμός πριν από το 1 αλλά που δεν είναι ίσος με 1. Υπάρχει μια αντίστοιχη πίστη στην ύπαρξη ενός ακέραιου μεγαλύτερου από όλους τους άλλους, που όμως δεν είναι άπειρος.

3) Η μεταφυσική πλευρά της έννοιας του ορίου

Η έννοια του ορίου είναι δύσκολο να εισαχθεί στα μαθηματικά επειδή φαίνεται να έχει μεγαλύτερη σχέση με τη μεταφυσική ή με τη φιλοσοφία. Οι μαθηματικοί συχνά επιφυλάσσονται να μιλήσουν για τέτοιες έννοιες από την εποχή των αρχαίων Ελλήνων μέχρι τον D'Almbert, ο οποίος έγραψε «μπορεί κάποιος να τα καταφέρει εύκολα στον Απειροστικό Λογισμό χωρίς τα υπόλοιπα μεταφυσικά του απείρου». Ο Lagrange εξέφρασε παρόμοιο φόβο για τις μεταφυσικές πτυχές. Στις αρχές της σταδιοδρομίας του πίστευε ότι θα μπορούσε να καταστήσει αυστηρή τη χρήση των απειροελάχιστων και στη συνέχεια θεώρησε ότι τα απειροελάχιστα του Leibniz δεν έχουν καμία μεταφυσική βάση και προσπάθησε να θεμελιώσει τον Απειροστικό Λογισμό χρησιμοποιώντας άπειρες σειρές με γνήσια αλγεβρικούς όρους. Απέτυχε όμως διότι η άλγεβρα της εποχής του, όπως του παραδόθηκε από τον L. Euler, βασίστηκε σε ψευδή άποψη του άπειρου. Έτσι, με οποιονδήποτε τρόπο κι αν στράφηκαν οι μαθηματικοί στην ιστορική εξέλιξη του θέματος, ήρθαν αντιμέτωποι με βαθιές θεωρητικές δυσκολίες. Η μεταφυσική πτυχή της έννοιας του ορίου είναι ένα από τα κύρια εμπόδια για τους σημερινούς μαθητές, οι οποίοι μπορεί να έχουν δυσκολίες στην αντιμετώπιση της έννοιας του άπειρου. Το εμπόδιο αυτό καθιστά εξαιρετικά δύσκολη την κατανόηση της έννοιας του ορίου, κυρίως επειδή το όριο δεν μπορεί να υπολογιστεί βάσει του ορισμού χρησιμοποιώντας οικίες (για τους μαθητές) μεθόδους άλγεβρας και αριθμητικής.

4) Επιτυγχάνεται το όριο ή όχι;

Η ερώτηση αυτή αποτελεί μια αντιπαράθεση καθ όλη την ιστορία της έννοιας του ορίου. Ο Robins (1697-1751) εκτίμησε ότι το όριο δεν μπορεί ποτέ να επιτευχθεί και υποστήριξε ότι : « Δίνουμε την ονομασία έσχατο μέγεθος στο όριο το οποίο μια μεταβλητή μπορεί να προσεγγίσει όσο πολύ εμείς θέλουμε, αλλά με το οποίο ποτέ δεν μπορεί να γίνει απολύτως ίση ». Από την άλλη μεριά, ο Jurin (1685-1750) είπε ότι «ο έσχατος λόγος δύο ποσοτήτων είναι ο λόγος που επιτυγχάνεται τη στιγμή που αυτές εξουδετερώνονται», «το ζήτημα δεν είναι αν η αύξηση είναι μηδενική, αλλά το ότι εξαφανίζεται, ή ότι είναι το σημείο της εξαφάνισης», «υπάρχει ένας έσχατος λόγος των αυξήσεων που εξαφανίζονται», «μια αύξηση που γεννάται είναι μια αύξηση που αρχίζει να υπάρχει από το τίποτε, ή που αρχίζει να παράγεται, αλλά που πρέπει να φθάσει ένα μέγεθος το οποίο μπορεί να αποδοθεί σε τόσο μικρή ποσότητα». Για τον D'Almbert, μια ποσότητα δεν θα έπρεπε ποτέ να γίνει ίση με το όριο της : «Για να μιλήσουμε σωστά, το όριο δεν συμπίπτει ποτέ, ή δεν γίνεται ποτέ ίσο με την ποσότητα της οποίας είναι το όριο, αλλά πλησιάζει πάντα και μπορεί να διαφέρει από αυτήν οσοδήποτε λίγο κάποιος επιθυμεί». Αυτή η αντιπαράθεση παραμένει ζωντανή και στους σημερινούς μαθητές.

Σύμφωνα με την Sierpińska (1987) τα κύρια επιστημολογικά εμπόδια σχετικά με τα όρια είναι τα εξής:

• Πεποιθήσεις των μαθητών για τα μαθηματικά π.χ. τα μαθηματικά είναι μία εμπειρική επιστήμη, τα μαθηματικά είναι ένα τυπικό παιχνίδι συμβόλων, τα μαθηματικά έχουν ως κύριο στόχο την απόδειξη θεωρημάτων.

• Το άπειρο – π.χ. το άπειρο δεν υπάρχει, η μεταφυσική όψη του απείρου.

• Οι συναρτήσεις – π.χ. ο χρόνος είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή, μια συνάρτηση έχει πάντα αναλυτική έκφραση και περιορίζεται σε αυτή.

• Οι πραγματικοί αριθμοί – π.χ. η ελλιπής κατανόηση της δομής των πραγματικών αριθμών.

Η Sierpińska (1987) καταλήγει στο ότι οι πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με την επιστημονική γνώση αποτελεί μία πηγή επιστημολογικών εμποδίων. Σύμφωνα με την ερευνήτρια, η μαθηματική αλήθεια για τους μαθητές έγκειται στις πεποιθήσεις των μαθητών για τα μαθηματικά και σε αυτό που μπορούν «να φανταστούν», και όχι σε μία μαθηματική απόδειξη. Με άλλα λόγια, η μαθηματική αλήθεια προέρχεται κυρίως από εσωτερικές παρά από εξωτερικές πηγές εγκυροποίησης. Αυτό συμβαίνει καθώς η μαθηματική αλήθεια είναι σαν οποιαδήποτε άλλη αλήθεια και συνεπώς έχει τη βάση της στον ενσώματο κόσμο του κάθε ατόμου. Για τους μαθητές δεν αρκεί μία μαθηματική απόδειξη για να πειστούν σχετικά με την ισχύ μίας πρότασης. Οι εσωτερικές πηγές εγκυρότητας είναι αυτές που προσδιορίζουν μία δήλωση αληθή.

Η έρευνα του Szydlik (2000) αποκάλυψε μια σχέση μεταξύ των πεποιθήσεων των φοιτητών σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο καθιερώνεται η μαθηματική αλήθεια και την κατανόηση των ορίων. Οι σπουδαστές που προτιμούσαν αρχές όπως είναι οι διδάσκοντες και τα εγχειρίδια για την καθιέρωση της μαθηματικής αλήθειας κατείχαν ανεπαρκείς ορισμούς και παρανοήσεις των ορίων σε μεγαλύτερο βαθμό από τους σπουδαστές που βασίζονταν στη διαίσθηση, τη λογική και τα εμπειρικά στοιχεία. Τα αποτελέσματα δείχνουν μεγάλες διαφορές στις απόψεις των φοιτητών. Στο ένα άκρο του φάσματος είναι οι σπουδαστές που θεωρούν τα μαθηματικά κατακερματισμένα, που δεν περιμένουν να έχουν νόημα τα μαθηματικά και δεν δίνουν ιδιαίτερη σημασία στη θεωρία πίσω από τα μαθηματικά γεγονότα και τις διαδικασίες που μαθαίνουν. Για αυτούς τους μαθητές ο Szydlik (2000) πρότεινε την υιοθέτηση παιδαγωγικών προσεγγίσεων που υποστηρίζουν την ανακάλυψη ιδεών έτσι ώστε τα μαθηματικά να γίνουν μια δραστηριότητα που έχει νόημα για τα παιδιά. Στο άλλο άκρο του φάσματος είναι οι σπουδαστές που θεωρούν ότι ο λογισμός είναι λογικός και συνεπής. Αυτή η προβολή τους επιτρέπει την πρόσβαση σε τυπικούς ορισμούς, στην ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με όρια και σε εικόνες έννοιας χωρίς μεγάλες εσωτερικές ασυνέπειες. Επειδή η αντίληψη αυτών των μαθητών για το όριο είναι πιο πιθανό να είναι στατική, για τους φοιτητές αυτούς ο Szydlik (2000) πρότεινε παιδαγωγικές προσεγγίσεις πιο επίσημες, με έμφαση στους ορισμούς και την αυστηρότητα.

2.2.5 ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΚΕΣ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ

Οι αντιλήψεις για την έννοια του ορίου συχνά συγχέονται με ζητήματα που σχετίζονται με την υπόθεση ότι τα όρια είναι δυναμικές διαδικασίες ή στατικά αντικείμενα και ότι είναι εγγενώς συνδεδεμένα με έννοιες κίνησης (Williams, 1991). Ο τύπος της οριακής αντίληψης, ο οποίος έχει προσδιοριστεί σε προηγούμενες έρευνες και περιγράφει τη θεωρητική κίνηση μιας συνάρτησης ή μίας ακολουθίας, είναι μία έννοια στην οποία αναφερόμαστε ως δυναμική αντίληψη του ορίου (Tall & Vinner, 1981; Williams, 1991). Χρησιμοποιείται μια δυναμική αντίληψη του ορίου όταν οι μαθητές μιλάνε για το όριο προσδίδοντας σε αυτό μία αίσθηση κίνησης. Τέτοια περίπτωση αποτελεί, για παράδειγμα, μία ακολουθία η οποία «πλησιάζει», «τείνει» ή «προσεγγίζει» συνεχώς έναν αριθμό, ο οποίος συλλαμβάνεται ως το όριό της. Σε αντίθεση με τις δυναμικές εικόνες, υπάρχουν διάφορες στατικές αντιλήψεις που κυμαίνονται από ανεπίσημες και διαισθητικές (π.χ., «Το όριο μιας συνάρτησης είναι L αν όταν το x είναι κοντά στην οριακή τιμή a, η συνάρτηση είναι κοντά στο L» (Szydlik, 2000, σ. 268) μέχρι τον τυπικό ε - δ ορισμό.

Ο Williams (1991) διαχώρισε τη δυναμική αντίληψη σε δύο υποκατηγορίες, τη δυναμική- πρακτική και τη δυναμική-θεωρητική αντίληψη. Η δυναμική πρακτική αντίληψη οδηγεί τους μαθητές να υπολογίσουν τις τιμές της συνάρτησης σε σημεία που πλησιάζουν όλο και περισσότερο το οριακό σημείο και να δουν τι προσεγγίζουν αυτές οι τιμές. Η δυναμική θεωρητική αντίληψη περιγράφει πώς η συνάρτηση (ίσως μια εικόνα του γραφήματος) μετακινείται καθώς οι τιμές x κινούνται προς το οριακό σημείο. Στην ίδια έρευνα του Williams, όταν δόθηκε ένας κατάλογος με πιθανές οριακές αντιλήψεις, η πλειοψηφία των μαθητών επέλεξε ως σωστή τη δυναμική θεωρητική αντίληψη.

Σύμφωνα με τον Williams (1991), από τις εικόνες που κατέχουν οι μαθητές για την έννοια του ορίου, οι δυναμικές είναι πολύ ανθεκτικές και δύσκολες στην αλλαγή. Ο ίδιος δηλώνει ότι ο λόγος αυτής της αντίστασης μπορεί να είναι η πίστη των μαθητών στην εκ των προτέρων ύπαρξη γραφημάτων, οι προηγούμενες εμπειρίες τους με γραφήματα απλών συναρτήσεων, η αξία που δίνουν σε εννοιολογικά απλά και πρακτικά χρήσιμα μοντέλα και η τάση τους να βλέπουν ανώμαλα προβλήματα ως μικρές εξαιρέσεις από τους κανόνες.

Οι δυναμικές αντιλήψεις, εκτός από την ιδιότητά τους να είναι ανθεκτικές, αποτελούν μέρος της εικόνας των περισσότερων μαθητών. Η θέση αυτή αναδεικνύεται από την έρευνα του Williams (1991) όπου το 80% των απαντήσεων που συλλέχθηκαν από το ερωτηματολόγιο αντανακλούσαν μία τέτοια αντίληψη. Επιπλέον, αυτό επιβεβαιώθηκε όταν στην έρευνα των Tall και Vinner (1981) 70 υψηλόβαθμοι φοιτητές πανεπιστημιακών μαθηματικών πρώτου έτους κλήθηκαν να γράψουν, αν γνώριζαν, έναν ορισμό του $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Η πλειοψηφία των φοιτητών ανακάλεσε τον ορισμό άτυπα, χρησιμοποιώντας δυναμικές εικόνες.. Η πλειοψηφία αυτών που έδωσαν τον τυπικό ορισμό δεν μπόρεσαν τον διατύπωσε λάθος με διάφορους τρόπους. Η Przenioslo (2004) συμπληρώνει λέγοντας ότι τέτοιες δυναμικές εικόνες αποτελούν μέρος της εικόνας της έννοιας των σπουδαστών ακόμη και μετά την επίσημη διδασκαλία του ορίου.

Μία ερμηνεία για τα αίτια της πλειοψηφικής χρήσης των δυναμικών αντιλήψεων μπορεί να είναι ότι ο άτυπος ορισμός του ορίου συνεπάγεται αυτό το σιωπηρό νόημα ότι πλησιάζουμε το όριο συνεχώς και ποτέ δεν το φτάνουμε (Tall & Schwarzenberger, 1978). Σύμφωνα με τους Fernández-Plaza & Simpson (2016), η κατανόηση των μαθητών, αντί να υποδηλώνει κάποια απαραίτητη γνωστική διαδικασία, μπορεί να αντικατοπτρίζει τον τρόπο με τον οποίο διδάσκονται, δηλαδή, η δυναμική απεικόνιση μπορεί να είναι ένα χρήσιμο πολιτιστικό κατασκεύασμα και όχι απαραίτητα ένα γνωστικό. Πράγματι, ο Güçler (2013) επικεντρώνεται στον διδακτικό και μαθητικό λόγο (ομιλία) κατά τη διάρκεια των μαθημάτων σχετικά με το όριο μιας συνάρτησης σε ένα σημείο και τη συνέχεια. Τα ευρήματα έδειξαν ότι ο δάσκαλος τείνει να επικεντρώνεται στο όριο ως αντικείμενο, μετατοπίζοντας όμως τη συζήτηση στη μεταφορά του ορίου ως διαδικασία όταν αναφέρεται σε αυτό άτυπα. Οι φοιτητές φαινόταν να απορροφούν αυτές τις μεταφορές, αλλά τις χρησιμοποίησαν λιγότερο συνεκτικά και αγωνίστηκαν για να αντιμετωπίσουν την υπερβολική εξάρτηση από τις δυναμικές αντιλήψεις ώστε να κατανοήσουν το όριο ως αντικείμενο. Την ίδια άποψη συμμερίζεται ο Roh (2008) στην έρευνά του σχετικά με τα όρια ακολουθιών, ο οποίος υποστήριξε ότι οι δυναμικές εικόνες που χρησιμοποιούνται από πολλούς φοιτητές είναι αποτέλεσμα του τρόπου που αυτοί εισάχθηκαν στην έννοια του ορίου.

Σε αντίθεση με τη βιβλιογραφία που επικεντρώνεται στις δυναμικές εικόνες υπάρχουν έρευνες, όπως αυτή της Sierpińska (1987), η οποία, μεταξύ άλλων, σημείωσε ότι ορισμένοι μαθητές έχουν στατικές αντιλήψεις για το όριο. Ο Oehrtman (2009) στην έρευνά του, διαπίστωσε ότι μεταξύ πέντε βασικών μεταφορών που παρατηρήθηκαν στη συλλογιστική των μαθητών, σχετικά με το όριο, οι εικόνες κίνησης ήταν σχετικά σπάνιες. Ο ίδιος αναγνώρισε την κοινή χρήση της δυναμικής γλώσσας στους συμμετέχοντες του, αλλά υπέθεσε ότι αυτή η δυναμική γλώσσα αντιπροσωπεύει περισσότερο τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές μιλούν για τα όρια. Ωστόσο, ο Amatangelo (2013) σχολιάζει αυτή τη θέση του Oehrtman (2009) λέγοντας ότι στην έρευνά του φάνηκε πως οι μαθητές και μιλούν και σκέφτονται με αυτόν το τρόπο. Από τα παραπάνω διακρίνουμε ότι κάποιες μελέτες φαίνεται να έρχονται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι η κατανόηση των ορίων προϋποθέτει τη χρήση δυναμικών εικόνων.

Οι δυναμικές και στατικές πτυχές του ορίου επηρεάζουν την εικόνα ενός ατόμου, οδηγώντας σε διαφορετικές συλλήψεις της έννοιας (Güçler, 2013). Έτσι, οι εικόνες που διαθέτουν οι μαθητές για το όριο, είτε είναι περισσότερο δυναμικές είτε περισσότερο στατικές, είναι σημαντικό να αναγνωρίζονται και να λαμβάνονται υπόψιν κατά τη διδασκαλία. «Το ζήτημα δεν είναι να χρησιμοποιηθούν δυναμικές (ή στατικές) εικόνες στην διδασκαλία, αλλά μάλλον πώς να προκληθούν δυναμικές (ή στατικές) εικόνες που είναι συμβατές με τον ορισμό του ορίου» (Roh, 2008). Συνεπώς, η δυναμική ή στατική αντίληψη του ορίου δεν είναι αναγκαίο να αποβληθεί από την διδασκαλία της έννοιας του ορίου καθώς μπορεί να αποτελέσει το πιο σημαντικό εργαλείο για την αρχική σύλληψή της (Güçler, 2013).

2.2.6 ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ

Οι αντιλήψεις των μαθητών για το όριο και τη συνέχεια μπορούν διακριθούν σε πρακτικές και θεωρητικές αντιλήψεις. Μια καθαρά πρακτική αντίληψη σχετίζεται εξ' ολοκλήρου με μία διαδικασία που χρησιμοποιείται για την επίλυση ενός προβλήματος και μπορεί να χρησιμοποιηθεί, για παράδειγμα, όταν ένας μαθητής καλείται απλά να καθορίσει την ύπαρξη και την τιμή ενός συγκεκριμένου ορίου. Μια θεωρητική αντίληψη είναι αυτή που σχετίζεται με την σημασία της έννοιας του ορίου και μπορεί να χρησιμοποιηθεί, για παράδειγμα, όταν σε ένα μαθητή τίθεται η ερώτηση «τι αναπαριστά ένα όριο» ή «γιατί ένα όριο χρησιμοποιήθηκε σε μια συγκεκριμένη κατάσταση». Ο Przenioslo (2004) επισημαίνει οι πρακτικές αντιλήψεις είναι σημαντικές για τους μαθητές γιατί οι μαθητές στην έρευνά του συχνά επέστρεφαν στη χρήση αυτών των αντιλήψεων, ακόμα κι αν οι πρακτικές αντιλήψεις έρχονταν σε αντίθεση με άλλες αντιλήψεις της εικόνας της έννοιας που κατείχαν. Η διάκριση ανάμεσα στις θεωρητικές και τις πρακτικές αντιλήψεις που κατέχει κάποιος, είναι κάτι που ο Williams (2001) προσδιόρισε ως θεμελιώδες, προτείνοντας ότι οι φοιτητές θα πρέπει να είναι σε θέση να διακρίνουν τον τρόπο με τον οποίο σκέφτονται για τα όρια από το πώς πραγματικά υπολογίζουν τα όρια. Ο τρόπος με τον οποίο οι φοιτητές σκέφτονται για τα όρια (θεωρητικές αντιλήψεις) και ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζουν τα όρια (πρακτικές αντιλήψεις) είναι αναμφίβολα ευρείες κατηγορίες στις οποίες μπορούν επίσης να εξεταστούν και άλλες αντιλήψεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1 ΣΤΟΧΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο το οποίο ορίσαμε, αναγνωρίζουμε την ύπαρξη μιας ιδιαίτερης γνώσης που κατέχουν οι εκπαιδευτικοί και που σίγουρα είναι διαφορετική από την απλή γνώση του μαθηματικού αντικειμένου. Με βάση αυτές τις γνώσεις οι εκπαιδευτικοί μπορούν να κάνουν παιδαγωγικές επιλογές και να παίρνουν αποφάσεις που συμβάλλουν στην κατανόηση των μαθητών στα μαθηματικά. Η μελέτη επομένως αυτής της γνώσης αποτελεί αναντίρρητη ανάγκη προκειμένου να βρεθούν εκείνοι οι τρόποι που θα επιτρέψουν τη δόμηση μιας αποτελεσματικότερης διδασκαλίας. Η κατανόηση των διδακτικών προσεγγίσεων τους θα μπορούσε να οδηγήσει στη δημιουργία ενός καλύτερου προγράμματος εκπαίδευσης των δασκάλων μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Αν και τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει βήματα στην κατεύθυνση της διερεύνησης της γνώσης (μαθηματικής και παιδαγωγικής) ενός δασκάλου των μαθηματικών, εξακολουθούν να παραμένουν αναπάντητα πολλά ερωτήματα. Κι αυτό γιατί οι περισσότερες έρευνες είναι εστιασμένες στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Η διερεύνηση της μαθηματικής και παιδαγωγικής γνώση των καθηγητών της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και ειδικότερα στη διδασκαλία της Ανάλυσης είναι αναγκαία. Παρότι υπάρχει εκτεταμένη έρευνα στη διδασκαλία της Ανάλυσης, φαίνεται να είναι επικεντρωμένη στη μάθηση των μαθητών και όχι στις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών.

Ο σκοπός της έρευνας αυτής είναι να διαλευκάνει την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου (ΠΓΠ) έξι δασκάλων μαθηματικών διαμέσου των απαντήσεων τους σε υποθετικά διδακτικά σενάρια καθώς και της συνέντευξης που παραχώρησαν. Το ενδιαφέρον της παρούσας έρευνας συνίσταται στη διερεύνηση της παιδαγωγικής γνώσης καθηγητών των Μαθηματικών όχι γενικά, αλλά σε ένα συγκεκριμένο αντικείμενο διδασκαλίας, αυτό των Ορίων. Στην έρευνα επιλέχτηκε η έννοια του ορίου, καθώς οι δυσκολίες σχετικά με αυτήν αφορούν τόσο τους μαθητές όσο και τους εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Mastorides & Zachariades, 2004). Η έλλειψη της κατανόησης του ορίου δύναται να σταθεί εμπόδιο στην πορεία του μαθητή, καθώς αποτελεί σημείο εκκίνησης για την ανάπτυξη περισσότερο τυπικών τεχνικών απόδειξης, την απόδοση νοήματος σε ποσοτικά προσδιορισμένες μαθηματικές προτάσεις καθώς και τη μετάβαση στην αφηρημένη σκέψη (Ervynck, 1981, Tall, 1992, όπως αναφέρεται στο Swinyard & Larsen, 2012).

3.2 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Ο έλεγχος των στοιχείων της Μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία σε εκπαιδευτικούς που διδάσκουν σε διαφορετικά εκπαιδευτικά περιβάλλοντα είναι το ζητούμενο που προσπαθεί να απαντήσει η παρούσα έρευνα με τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

1. Μπορούν οι εκπαιδευτικοί να αναγνωρίσουν τις παρανοήσεις που αναπτύσσουν οι μαθητές στα όρια και τις αιτίες που τις δημιουργούν;
2. Με ποιον τρόπο οι εκπαιδευτικοί διαχειρίζονται διδακτικά τις παρανοήσεις και τα λάθη των μαθητών; Διαθέτουν την ικανότητα να προσφέρουν άλλες λύσεις και να δώσουν σαφή παραδείγματα για να ενισχύσουν την κατανόηση της έννοιας του ορίου;
3. Πώς εντάσσεται η διδακτική διάσταση της γνώσης των εκπαιδευτικών, στο θεωρητικό πλαίσιο της Ball και των συνεργατών της;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στην παρούσα μελέτη επιλέγεται η ποιοτική έρευνα γιατί στοχεύει στην περιγραφή, ανάλυση, ερμηνεία και κατανόηση κοινωνικών φαινομένων. Η ποιοτική έρευνα παρέχει τη δυνατότητα στον ερευνητή να αντλήσει πλούσιες πληροφορίες για το υπό εξέταση θέμα και αποτελεί την ενδεδειγμένη μεθοδολογία για να απαντηθούν τα ερωτήματα που σχετίζονται με το "Γιατί;" και το "Πώς;" των φαινομένων. (Ιωσηφίδης, 2003). Εκείνο που έχει βαρύτητα στις ποιοτικές μεθόδους είναι η κρίση του ερευνητή και όσων θα διαβάσουν την έρευνα (Eisner, 1991). Πάντοτε όμως τα αποτελέσματα μιας έρευνας αποτελούν την αφετηρία για μια σειρά ποιοτικών και ποσοτικών μεθοδολογικών ερευνών, γιατί τα ζητήματα προς μελέτη δεν σταματούν να υφίστανται και τα αποτελέσματά τους θέτουν συνεχείς προβληματισμούς στους ερευνητές.

Στη συνέχεια, ως προς το είδος της έρευνας, επιλέγεται η μελέτη περίπτωσης γιατί αναπαριστά με τον πιο λεπτομερή τρόπο το πλαίσιο μιας περίπτωσης που δεν είναι εφικτό στις στατιστικές έρευνες (Yin, 2009). Ειδικότερα, η μελέτη περίπτωσης είναι μια στρατηγική που αναφέρεται στη μελέτη μιας κατάστασης, ενός ατόμου, μιας ομάδας ή ενός οργανισμού (Robson, 2007). Έτσι, κατά τον Yin (2006) η ερευνητική στρατηγική της μελέτης περίπτωσης αφορά την εμπειρική διερεύνηση ενός συγκεκριμένου φαινομένου μέσα στο πλαίσιο του. Ενώ, σύμφωνα με τον Valsiner (1986) η μελέτη συγκεκριμένων περιπτώσεων ήταν πάντοτε η σημαντικότερη στρατηγική για την παραγωγή γνώσης (Valsiner στο Robson, 2007). Η μελέτη περίπτωσης είναι ιδιαιτεροποιημένη (particularistic) καθώς επικεντρώνεται σε ένα ιδιαίτερο άτομο μια δεδομένη χρονική περίοδο και σε συγκεκριμένο χώρο. Είναι φανερό ότι η επιλογή του συγκεκριμένου κεφαλαίου της Ανάλυσης και κατόπιν η επιλογή των έξι υποκειμένων της έρευνας έχει αυτόν το χαρακτήρα.

4.1 ΔΕΙΓΜΑ

Η μέθοδος επιλογής του δείγματος είναι η μη πιθανοτική δειγματοληψία ευχέρειας (Creswell, 2015) καθώς επιλέχθηκε με βάση τη δυνατότητα πρόσβασης και τη θέληση των υποψηφίων να συμμετάσχουν στη παρούσα έρευνα. Το δείγμα επιλογής, είναι μη αντιπροσωπευτικό και συνεπώς δεν μπορούν να γίνουν γενικεύσεις που αφορούν τα χαρακτηριστικά του πληθυσμού.

Τα έξι υποκείμενα της μελέτης που επιλέχθηκαν για τη παρούσα έρευνα είναι καθηγητές των

Μαθηματικών από το Δήμο Εορδαίας. Οι τρεις από τους έξι εργάζονται σε φροντιστήρια Μέσης Εκπαίδευσης και η συνολική τους εμπειρία στη διδασκαλία της Ανάλυσης είναι έξι, οχτώ και δέκα χρόνια. Οι υπόλοιποι τρεις μαθηματικοί έχουν δεκατέσσερα, δεκατέσσερα και δεκαοχτώ χρόνια διδακτικής εμπειρίας σε δημόσια σχολεία, ενώ η εμπειρία τους στη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού εκτιμάται στα οχτώ, δεκαοχτώ και δεκαεννιά χρόνια. Από τους έξι εκπαιδευτικούς οι τρεις που δουλεύουν σε φροντιστήριο έχουν παρακολουθήσει κάποιο μεταπτυχιακό πρόγραμμα στο παρελθόν.

Πίνακας 1: Χαρακτηριστικά των καθηγητών

Όνομα*	Φύλλο	Διδακτική εμπειρία σε φροντιστήριο (χρόνια)	Διδακτική εμπειρία σε σχολείο (χρόνια)	Συνολική Διδακτική εμπειρία της Ανάλυσης (χρόνια)	Μεταπτυχιακό
Νίκος	Α		14	8	
Χρήστος	Α	14		10	Ναι
Πέτρος	Α	8		8	Ναι
Στέλλα	Θ		14	19	
Ελένη	Θ	8		6	Ναι
Ηλίας	Α		18	18	

* Τα ονόματα δεν είναι τα πραγματικά ονόματα των υποκειμένων

4.2 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ

Μερικές από τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για τη διερεύνηση των γνώσεων ενός δασκάλου είναι η παρακολούθηση της διδασκαλίας του στην τάξη, η συνέντευξη μαζί του και η απάντηση γραπτών ερωτηματολογίων. Ένα από τα εργαλεία που θα μπορούσε να διερευνήσει τη γνώση ενός δασκάλου είναι τα υποθετικά διδακτικά σενάρια όπου περιγράφονται διάλογοι μεταξύ μαθητών ή ανάμεσα σε δάσκαλο και μαθητές, απαντήσεις από μαθητές σε ερωτήσεις ενός δασκάλου ή και αποσπάσματα από διδασκαλία στην τάξη.

Τα Διδακτικά Σενάρια

Στη διεθνή βιβλιογραφία διακρίνονται δύο περιπτώσεις διδακτικών σεναρίων που χρησιμοποιούνται ως βάση διδασκαλίας δασκάλων (Merseth,1996). Η πρώτη περίπτωση είναι όταν μια διδακτική κατάσταση χρησιμοποιείται ως υποδειγματική ή αντίθετα ως παράδειγμα προς αποφυγή. Η δεύτερη κατηγορία, η οποία και ακολουθήθηκε στην παρούσα έρευνα, είναι όταν τα υπό εξέταση σενάρια δεν αποτελούν υποδειγματικό παράδειγμα ή αντιπαράδειγμα. Με αυτόν τον τρόπο έρχονται στο προσκήνιο μια ποικιλία διδακτικές στρατηγικές, φιλοσοφίες και πεποιθήσεις των δασκάλων σε παιδαγωγικά και διδακτικά θέματα, σε θέματα διδασκαλίας αλλά και σε θέματα που άπτονται της κατανόησης των γνώσεων και των παρανοήσεων των μαθητών (Barnett, 1998). Με την μελέτη αντίστοιχων υποθετικών σεναρίων από τους δασκάλους προωθείται η παιδαγωγική και διδακτική σκέψη και διευκολύνεται η κατανόηση τους μέσα από την ανταλλαγή των απόψεων και των ισχυρισμών τους με τους συναδέλφους τους (Gordon & Heller, 1995).

Τα ερωτηματολόγια που βασίζονται σε υποθετικά διδακτικά επεισόδια αποτελούν πολύτιμη πηγή για την άντληση πληροφοριών σχετικά με τις γνώσεις των δασκάλων. Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν τα υλικά που συμπεριλαμβάνουν απαντήσεις μαθητών, διάλογοι μεταξύ μαθητών και δασκάλων, αποσπάσματα από τη παράδοση του μαθήματος σε μια τάξη κλπ. Η σημασία που θεωρείται ότι κατέχουν στη διερεύνηση αλλά και τη δημιουργία της ΜΓΔ τα παραπάνω υλικά φαίνεται και από το γεγονός ότι στις ΗΠΑ έχουν δημιουργηθεί πολλά ερευνητικά προγράμματα με κύριο εργαλείο παρόμοια ερωτηματολόγια. Το πρόγραμμα ASTEROID (A Study in Teacher Education Research on Instructional Design) το οποίο διενεργήθηκε τα πρώτα χρόνια της δεκαετίας του 2000 στο Πανεπιστήμιο του Pittsburgh είχε ως στόχο την εξακρίβωση των γνώσεων που αποκτούν οι δάσκαλοι των μαθηματικών κατά τη διάρκεια της συμμετοχής τους σε ένα μεταπτυχιακό μάθημα με χρήση παρόμοιων υλικών. Ως υλικά εννοούνται σε αυτή την περίπτωση ανάλυση γραπτών σεναρίων διδασκαλίας καθώς και βιντεοσκοπημένων μαθημάτων. Δια μέσου της αλληλεπίδρασης τόσο με τα υλικά αυτά όσο και μεταξύ τους οι δάσκαλοι συμμετείχαν σε ένα διάλογο που αφορούσε την παιδαγωγική και την μαθηματική πλευρά των επεισοδίων που παρακολούθησαν (Steele, 2005).

Από μια πιο θεωρητική γνωστική σκοπιά, η χρήση των διδακτικών σεναρίων παρέχει τη δυνατότητα στους δασκάλους να αντιμετωπίζουν τα συγκεκριμένα επεισόδια ως διδακτικά προβλήματα που απαιτούν σκέψη και προσεκτική θεώρηση προκειμένου να λυθούν, αντί της υιοθέτησης προσχεδιασμένων λύσεων. Οι γνωστικές θεωρίες που έχουν τη βάση τους στο έργο του Piaget (1952 όπως αναφέρεται στο Μεταξάς, 2011) υπογραμμίζουν το καθοριστικό ρόλο που μπορεί να παίξει η ανάγκη για αποκατάσταση της γνωστικής ισορροπίας που μπορεί κάποιος να νιώθει ότι διασαλεύεται όταν βρίσκεται αντιμέτωπος με μια αντιφατική, παράδοξη ή γενικά προβληματική κατάσταση. Έτσι, η χρήση διδακτικών σεναρίων όπως έχουν περιγραφεί προηγουμένως, όπου συγκεκριμένες διδακτικές καταστάσεις εμφανίζονται ως προβληματικές, μπορεί να οδηγήσει τους δασκάλους στην αναζήτηση άλλων λύσεων, δηλαδή σε αυτό που η γνωστική επιστήμη ονομάζει εννοιολογική ανάπτυξη και αλλαγή. Ένα διδακτικό σενάριο που οδηγεί στην μη εκπλήρωση ενός διδακτικού στόχου ή ένα κρυμμένο μαθηματικό λάθος σε μια πιθανή απάντηση ενός μαθητή, προβληματίζει το δάσκαλο που μελετά την δεδομένη περίπτωση και τον υποχρεώνει να ψάξει να εντοπίσει το λόγο πίσω από αυτή τη προβληματική κατάσταση. Η ίδια ανάγκη μπορεί να δημιουργηθεί κατά τη συζήτηση και την αντιπαραβολή της άποψηςενός δασκάλου με αυτή ενός άλλου. Τότε και πάλι μπορεί να δημιουργηθεί η ανάγκη για επανεξέταση των επιχειρημάτων ενός υπό το φως διαφορετικών απόψεων. Παράλληλα, η χρήση διδακτικών επεισοδίων έχει αποδειχθεί ότι είναι σημαντική και για την κατανόηση που μπορεί να μας προσφέρει σχετικά με τη ΜΓΔ των δασκάλων των μαθηματικών. Σε αντίθεση με την παράθεση ερωτήσεων προς τους δασκάλους σε ένα θεωρητικό και εκτός πλαισίου επίπεδο, έρευνες έχουν δείξει ότι οι απαιτήσεις –σε μαθηματικό και παιδαγωγικό επίπεδο- που δημιουργούν οι ερωτήσεις πάνω σε συγκεκριμένα διδακτικά επεισόδια, μπορούν να ανοίξουν σημαντικά παράθυρα κατανόησης στις πεποιθήσεις και γνώσεις των δασκάλων των μαθηματικών (Dawson, 1999). Η χρήση μελετών περιπτώσεων με δασκάλους δίνει την ευκαιρία να μελετούν τα ιδιαίτερα στοιχεία κάθε περίπτωσης διδασκαλίας, να εστιάζουν σε συγκεκριμένες πλευρά της διδακτικής, να αναστοχάζονται σε σχέση με τη δική τους πρακτική και να διαμορφώνουν γενικότερα συμπεράσματα σχετικά με τη τεχνική της διδασκαλίας (Sykes & Bird, 1992

Σύμφωνα με τους Biza, Nardi & Zachariades (2007), η ανάλυση των απαντήσεων των δασκάλων σε αντίστοιχες υποθετικές διδακτικές καταστάσεις, μπορεί να διευκολύνει την εύρεση των «κλίσεων» που μπορεί να έχουν:

α) προς συγκεκριμένες παιδαγωγικές μεθόδους που μπορεί να έχει ο κάθε δάσκαλος και την αλληλεπίδραση των προτιμήσεων αυτών με τη γνώση του αντικειμένου που έχει ο ίδιος. Για παράδειγμα η ενθάρρυνση της συμμετοχής των μαθητών στην επαναδιαπραγμάτευση λανθασμένων αποδείξεων σε μαθηματικά προβλήματα ή η χρήση ανοικτών προβλημάτων με σαφείς παιδαγωγικούς στόχους, αποτελούν χαρακτηριστικά εύκολα προσδιορίσιμα με χρήση τέτοιων υλικών.

β) προς συγκεκριμένες διδακτικές πρακτικές και ιδιαίτερα μέσω της ανατροφοδότησης που παρέχουν στον μαθητή. Για παράδειγμα η εισαγωγή των εννοιών πρώτα με διαισθητικό και περιγραφικό τρόπο κατά τη διδασκαλία ή η χρήση παραδειγμάτων ως μεθόδου αναπαράστασης, επεξήγησης κλπ. Ζητώντας από ένα δάσκαλο να σχολιάσει μια υποτιθέμενη (αλλά ρεαλιστική) απάντηση ενός μαθητή ή ενός υποτιθέμενου δασκάλου που περιλαμβάνει κάποιο δυσδιάκριτο μαθηματικό λάθος, μπορούμε να διαπιστώσουμε σε πρώτο επίπεδο αν το ίδιο το υποκείμενο μπορεί να εντοπίσει το μαθηματικό λάθος και να ελέγξουμε το μαθηματικό περιεχόμενο της διόρθωσης του. Σε ένα δεύτερο επίπεδο, μπορούμε να ανιχνεύσουμε την παιδαγωγική αντίληψη της κατάστασης που διαθέτει καθώς και τις διδακτικές μεθόδους που προτείνει προκειμένου να πετύχει το βέλτιστο διδακτικό αποτέλεσμα. Λαμβάνοντας υπόψη αυτές τις παρατηρήσεις, ο σχεδιασμός των διδακτικών επεισοδίων έγινε με τις παρακάτω παραδοχές (Biza et al., 2007):

α) Το μαθηματικό περιεχόμενο κάθε υποτιθέμενης διδακτικής κατάστασης να περιλαμβάνει ένα θέμα από την ύλη της Ανάλυσης του Λυκείου που να είναι γνωστό, από τη βιβλιογραφία ή την εμπειρία, ότι περιέχει μια δυσκολία για τους μαθητές εννοιολογικής κατανόησης.

β) Η απάντηση ή η ερώτηση του υποτιθέμενου μαθητή να αντανακλά αφενός συνήθεις μαθητικές παρανοήσεις ή λάθη και ταυτόχρονα να παρέχει τη δυνατότητα διόρθωσης από πλευράς του δασκάλου.

γ) Η αντίστοιχη απόκριση του υποτιθέμενου δασκάλου ή η διδασκαλία του να αντιπροσωπεύει συνήθεις διδακτικές πρακτικές.

δ) Όλοι οι υποτιθέμενοι διάλογοι να βοηθούν να αναδεικνύονται συνήθη παιδαγωγικά και διδακτικά προβλήματα, είτε από την πλευρά των μαθητών είτε από την πλευρά των δασκάλων, με σκοπό τη διευκόλυνση της ανάπτυξης θέσεων και προβληματισμού από τους δασκάλους-υποκείμενα της έρευνας.

Συνολικά, τα υποθετικά διδακτικά σενάρια προσφέρουν μια ευκαιρία για την εξερεύνηση και ανάπτυξη της ευαισθησίας των δασκάλων στις ανάγκες των μαθητών και τις δυσκολίες που τους παρουσιάζονται (Jaworski, 1994), καθώς και ένα τρόπο διακρίβωση της ΜΓΔ και ειδικότερα της ΠΓΠ που διαθέτουν. Με αυτά τα επιχειρήματα τεκμηριώνεται η δεύτερη επιλογή που έγινε κατά το σχεδιασμό της έρευνας και αφορούσε το υλικό στο οποίο βασίστηκαν τα ερωτηματολόγια και το μεταπτυχιακό μάθημα.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Ακολουθώντας αυτή την γραμμή σκέψης δημιουργήθηκαν συγκεκριμένα ερωτηματολόγια τα οποία ήταν εκείνα που δόθηκαν στους έξι εκπαιδευτικούς, με σκοπό την διερεύνηση των γνώσεων τους. Το ερωτηματολόγιο της παρούσας έρευνας περιλαμβάνει υποθετικά διδακτικά επεισόδια τα οποία δεν απέχουν πολύ από πραγματικές παιδαγωγικές και διδακτικές καταστάσεις και βασίστηκαν σε ζητήματα που η προηγούμενη έρευνα και εμπειρία έχει δείξει ότι είναι σημαντικά.

Λαμβάνοντας υπόψη την αντίστοιχη βιβλιογραφία (Jaworski, 1994; Biza, Nardi & Zachariades, 2007) ο σχεδιασμός των ερωτήσεων βασίζεται σε τρεις γενικές αρχές:

α) Το μαθηματικό περιεχόμενο κάθε ερώτησης πρέπει να αφορά ένα ζήτημα που είναι γνωστό ότι προκαλεί δυσκολίες ή παρανοήσεις στους μαθητές.

β) Η υποθετική απάντηση κάθε μαθητή στα διδακτικά σενάρια των ερωτήσεων, αντανακλά αυτή την ιδιαιτερότητα ή δυσκολία και παρέχει τη δυνατότητα για το δάσκαλο να σκεφτεί τον τρόπο με τον οποίο θα επιχειρούσε να κάνει τον μαθητή να ξεπεράσει τη δυσκολία ή την παρανόηση.

γ) Το μαθηματικό περιεχόμενο των ερωτήσεων και η υποθετική αντίδραση του μαθητή ή του δασκάλου που περιγράφονται, πρέπει να επιτρέπουν στο δάσκαλο που καλείται να την απαντήσει, να αναδείξει τις παιδαγωγικές και διδακτικές γνώσεις του.

Η επιλογή των ερωτήσεων-διδακτικών επεισοδίων έγινε με βάση τα ακόλουθα στοιχεία Sanchez & Llinares (2003):

α) Επιδιώχθηκε να υπάρχουν θέματα προερχόμενα από τρεις πηγές: από το σχολικό βιβλίο μαθηματικών κατεύθυνσης της Γ Λυκείου, θέματα εκτός του βιβλίου αλλά στο πνεύμα των εξετάσεων και τέλος θέματα που αντιστοιχούν στη συγκεκριμένη ύλη αλλά ξεπερνούν το τυπικό πνεύμα της διδακτέας ύλης και των εξετάσεων.

β) Το θεματικό περιεχόμενο περιελάμβανε αλγεβρικά-αλγοριθμικά ζητήματα, γεωμετρικούς τρόπους επίλυσης και διαισθητικές προσεγγίσεις-λύσεις.

γ) Προκειμένου να μπορεί να διερευνηθούν ευκολότερα οι συνιστώσες της ΜΓΔ των υποκειμένων, οι υποθετικοί μαθητές και οι δάσκαλοι που περιγράφονταν στα σενάρια άλλοτε εξέφραζαν συνήθεις παρανοήσεις και μαθηματικά λάθη και άλλοτε εξέφραζαν περισσότερο λεπτά και ασαφή ερωτηματικά.

Η γενική θεματική και ο τρόπος διάρθρωσης των επεισοδίων είχαν σκοπό να διευκολύνουν την έκφραση απόψεων σε διδακτικά και παιδαγωγικά θέματα των δασκάλων και αυτό κατέστη εφικτό μέσα από τις ερωτήσεις που συνόδευαν κάθε τέτοιο επεισόδιο.

Το παρών ερωτηματολόγιο αποτελείται από οι πέντε ερωτήσεις που αφορούν την έννοια του ορίου, του οποίου η δυσκολία κατανόησης έχει μελετηθεί εκτενώς στη διεθνή βιβλιογραφία. Ένα σημαντικό μέρος των ερευνών σχετικών με την κατανόηση της έννοιας του ορίου από τους μαθητές και τους φοιτητές, εστιάζει στην ερμηνεία που κάνουν οι μαθητές του μαθηματικού φορμαλισμού των ορίων και των ιδιοτήτων τους.

Η ερώτηση 1 εξετάζει τον τρόπο με τον οποίον εισάγουν οι καθηγητές τους μαθητές στην έννοα του ορίου.

Οι ερωτήσεις 2,3,4,5 περιγράφουν λάθη που κάνουν οι μαθητές όταν αντιμετωπίζουν τα όρια με αλγοριθμικό τρόπο.

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

Οι έξι εκπαιδευτικοί παραχώρησαν μια συνέντευξη η οποία είχε σαν στόχο τον έλεγχο κάποιων από των απαντήσεων τους στο τεστ στο οποίο κλήθηκαν να απαντήσουν καθώς και τη λήψη πληροφοριών σχετικά με τη μαθηματική και παιδαγωγική τους αντίληψη. Η μορφή των συνεντεύξεων αυτών ήταν ημιδομημένη. Αρχικά υπήρχε ένα κοινό πλάνο ερωτήσεων για τον κάθε καθηγητή, ωστόσο η πορεία της συζήτησης δημιούργησε και άλλες. Σχηματίστηκαν ερωτήσεις που βασίστηκαν στην Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου (ΓΠΜ, ΓΠΔ, ΓΠΑΠ όπως περιγράφονται από τους Ball & Bass (2003a, 2003b) καθώς και στις απαντήσεις που έδωσαν στο τεστ. Το γενικό πλαίσιο των ερωτήσεων που δημιουργήθηκε αρχικά παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

ΓΠΜ	ΓΠΔ	ΓΠΑΠ
Τι βρίσκουν δύσκολο οι μαθητές στα όρια	Χειρισμός ερωτήσεων των μαθητών	Γνώση της διδακτικής ακολουθίας των σχολικών βιβλίων
Τι βρίσκουν ενδιαφέρον οι μαθητές στα όρια	Παραδείγματα, εφαρμογές που χρησιμοποιούν	Γνώση του περιεχομένου των σχολικών βιβλίων
Ποιες είναι οι παρανοήσεις των μαθητών, αιτίες που της δημιουργούν	Που, πότε και γιατί χρησιμοποιεί κάθε μέθοδο	
Ερμηνεία της σκέψης των μαθητών	Τρόποι αναπαράστασης του γνωστικού αντικειμένου	

Η ροή της συζήτησης δημιούργησε μια σειρά επιπλέον ερωτήσεων που αφορούν στην ιδιοσυγκρασία κάθε καθηγητή και ουσιαστικά σε ένα είδος αυτογνωσίας σχετικά με την επίγνωση των διδακτικών και παιδαγωγικών τους αδυναμιών, εξέλιξης και αλλαγών.

4.3 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Από τη αρχή της ενασχόλησης με την παρούσα έρευνα, δημιουργήθηκε η ανάγκη ανίχνευσης των μαθηματικών και παιδαγωγικών γνώσεων τόσο των καθηγητών που έχουν εμπειρία σε σχολικές τάξεις όσο και των καθηγητών που η εμπειρία τους αποκτήθηκε μέσα από τα φροντιστήρια Μέσης Εκπαίδευσης. Αφού δημιουργήθηκαν τα ερωτηματολόγια που θα έπρεπε να απαντήσουν οι εκπαιδευτικοί, επόμενος στόχος ήταν η εύρεση των καθηγητών. Τα ερωτηματολόγια καθώς και οι διευκρινιστικές οδηγίες για την συμπλήρωση τους, παραδόθηκαν μέσω e mail τον Απρίλιο του 2020. Ο χρόνος που δόθηκε στους εκπαιδευτικούς ήταν 10 ημέρες. Ωστόσο οι εκπαιδευτικοί επέστρεψαν με τις απαντήσεις τους ένα μηνά μετά, καθώς οι ανειλημμένες υποχρεώσεις τους ως εκπαιδευτικοί εξαιτίας του covid-19 δεν τους επέτρεψαν να απαντήσουν νωρίτερα.

Τα ερωτηματολόγια διαβάστηκαν, αναλύθηκαν σε κατηγορίες που θα παρουσιαστούν παρακάτω κι έπειτα ξεκίνησε ο σχηματισμός των ερωτήσεων των επικείμενων συνεντεύξεων. Οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν μέσω Skype, μαγνητοφωνήθηκαν και απομαγνητοφωνήθηκαν στη συνέχεια.

Η ανάλυση των δεδομένων και η απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων έγιναν με βάση το θεωρητικό πλαίσιο της Ball και των συνεργατών της όπως αυτό αναλύθηκε στο πρώτο κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο περιλαμβάνονται τα αποτελέσματα της έρευνας για κάθε έναν από τα υποκείμενα μελέτης. Σε κάθε μια από τις 6 ενότητες αναλύεται η ΠΓΠ κάθε εκπαιδευτικού. Αρχικά δίνονται πληροφορίες σχετικά με το υπόβαθρο του καθενός ως δάσκαλου των Μαθηματικών για να κατανοηθούν οι διδακτικές και παιδαγωγικές του αντιλήψεις. Στη συνέχεια παρουσιάζονται αναλυτικά και αυτούσια οι απαντήσεις του καθενός και τέλος γίνεται η σύνδεση των απαντήσεων του ερωτηματολογίου και της συνέντευξης με την ΠΓΠ των υποκειμένων. Ξεκινώντας με βάση το θεωρητικό πλαίσιο της Ball και των συνεργατών της όπως αναφέρθηκε στο Θεωρητικό Πλαίσιο, η ΠΓΠ χωρίστηκε στις κατηγορίες ΓΠΔ, ΓΠΜ και ΓΠΑΠ.

Οι επιμέρους δείκτες της ΓΠΜ που προέκυψαν κατά τη διαδικασία ανάλυσης των δεδομένων ήταν:

- η γνώση των παρανοήσεων των μαθητών
- η ικανότητα του δασκάλου να κατανοεί και να ερμηνεύει το σκεπτικό ενός μαθητή
- η γνώση των θεμάτων που μπορεί να βρίσκουν οι μαθητές ενδιαφέροντα
- η γνώση προϋποθέσεων για να διευκολυνθεί κατανόηση των μαθητών

Οι επιμέρους δείκτες της ΓΠΔ που προέκυψαν κατά τη διαδικασία ανάλυσης των δεδομένων ήταν:

- η χρήση ανταγωνιστικών ισχυρισμών
- η συζήτηση στη διδασκαλία
- η σύνδεση με άλλα πεδία εντός κι εκτός των μαθηματικών
- η ιστορική ανακατασκευή εννοιών
- η διδασκαλία του φορμαλιστικού τρόπου διατύπωσης
- η χρήση διδακτικών παραδειγμάτων

Ο βασικός δείκτης της ΓΠΑΠ που προέκυψε κατά τη διαδικασία ανάλυσης των δεδομένων ήταν:

- η γνώση του περιεχομένου και της διδακτικής ακολουθίας του σχολικού βιβλίου

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Προφίλ του εκπαιδευτικού

Ο Νίκος, ολοκλήρωσε τις σπουδές του στα μαθηματικά το 1997 και έχει εμπειρία είκοσι τριών ετών στη διδασκαλία των μαθηματικών. Διδάσκει σε σχολεία της δημόσιας εκπαίδευσης για δεκατέσσερα χρόνια, από τα οποία τα οκτώ τελευταία χρόνια διδάσκει σε μαθητές της Γ Λυκείου. Ταυτόχρονα παραδίδει ιδιαίτερα μαθήματα μαθηματικών σε όλες τις τάξεις του Λυκείου. Μην έχοντας εξειδικευμένες προπτυχιακές γνώσεις, προσπαθεί με σεμινάρια να αποκτήσει γνώση πάνω στην Τεχνολογία Πληροφορικής και Επικοινωνιών (ΤΠΕ) καθώς και στην εκπαίδευση σε μαθητές με Μαθησιακά Προβλήματα. Οι γνώσεις του σχετικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών προέρχονται κυρίως από την εμπειρία του μέσα στην τάξη.

Στη συνέντευξη που παραχώρησε δήλωσε ότι "*τα τελευταία χρόνια αντιλαμβανόμενος τις εξελίξεις στην εκπαίδευση, προσπαθώ να δημιουργήσω νέους τρόπους παρουσίασης των μαθηματικών εννοιών προκειμένου να πετύχω μια καλύτερη διδασκαλία*". Θεωρεί ωστόσο ότι ο τρόπος που λειτουργεί το εκπαιδευτικό σύστημα, δεν του δίνει τη δυνατότητα να γίνει ο δάσκαλος που ονειρευόταν.

Απαντήσεις του Νίκου στο τεστ

<u>ΕΡΩΤΗΣΗ 1</u>

α) *Θα ξεκινήσω αναλύοντας την πυκνότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών, με στόχο να γίνει κατανοητή η έννοια της προσέγγισης του x απειροστά κοντά στο x_0. Κατόπιν αυτού, θα σχεδιάσω μια τυχαία γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, ώστε να οπτικοποιηθεί η προσέγγιση στο x_0 και να φανεί που συγκεντρώνονται οι αντίστοιχες τιμές της f(x). Θα επισημανθεί ότι το όριο στο x_0 μπορεί να υπολογιστεί ακόμη και όταν το x_0 δεν είναι ανήκει στο πεδίο ορισμού, αλλά είναι σημείο συσσώρευσης της συνάρτησης.*

Θα αναλυθούν οι έννοιες των πλευρικών ορίων σε σημείο όπου:

4. *Υπάρχουν τα πλευρικά όρια και είναι ίσα μεταξύ τους, άρα το όριο υπάρχει.*
5. *Υπάρχουν τα πλευρικά όρια και είναι άνισα, άρα δεν υπάρχει το όριο.*
6. *Υπάρχει μόνο το ένα πλευρικό όριο λόγω μορφής του πεδίου ορισμού, άρα ταυτίζεται με το όριο στο συγκεκριμένο σημείο. (π.χ. όριο στο 3 με πεδίο ορισμού το [3,9]).*

Στόχος είναι η πληρέστερη κατανόηση του ορίου μέσα από μελέτη διάφορων περιπτώσεων.

β)

1ο παράδειγμα: $\lim_{x\to 1}\left(x^2+1\right)$

Σε αυτήν την περίπτωση το 1εAf και 2εf(A) . Στόχος είναι να δούνε οι μαθητές ότι η συμπεριφορά της συνάρτησης στο 1 συμπίπτει με την τιμή της στο 1.

2ο παράδειγμα:

$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^2-8}$ και $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{2(x+2)}$

Στόχος εδώ είναι να διαπιστώσουν οι μαθητές, πως τα δυο όρια έχουν την ίδια συμπεριφορά κοντά στο 2, αλλά οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες.

3ο παράδειγμα:

$\lim_{x\to 0}\frac{-e^{2x}+1}{x^4-2}$

Εδώ θέλουμε οι μαθητές να παρατηρήσουν ότι δεν παίζει ρόλο που μηδενίζει ο αριθμητής, όταν παράλληλα δε μηδενίζει ο παρανομαστής και τελικά ο υπολογισμός του ορίου ανάγεται σε μια απλή αντικατάσταση.

4ο παράδειγμα:

$\lim_{x\to 2} f(x)$ με $f(x)=\begin{cases}4x^2-1, & x\in(-\infty,2)\\ 2x, & x\in[2,+\infty)\end{cases}$

Σκοπός εδώ είναι να διαπιστωθεί ότι δεν υπάρχει το όριο στο 2 λόγω μη ισότητας των πλευρικών ορίων.

γ) *Η παρανόηση που δημιουργείται στους μαθητές είναι η θεώρηση, ότι $x=x_0$, η οποία δημιουργείται από το γεγονός ότι για να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της f(x) κοντά στο x_0, αντικαθιστούμε όπου x το x_o. Αυτή μπορεί να ενισχυθεί αργότερα και στα όρια της μορφής $\frac{0}{0}$ όπου ο μαθητής μπλοκάρει όταν δημιουργηθεί το 0 στον παρανομαστή, κάτι που του επισημαίνεται καθ' όλη τη διάρκεια της σχολικής του ζωής. Επίσης, έχοντας διδαχθεί οι μαθητές την προαναφερθείσα περίπτωση, ενδέχεται να τους προκληθεί πρόβλημα όταν μηδενίζει μόνο ο αριθμητής και να αναλωθούν σε χρονοβόρες και* *άσκοπες προσπάθειες για την άρση της απροσδιοριστίας.*

ΕΡΩΤΗΣΗ 2

α) *Αρχικά, δε θα τους έλεγα τη σωστή απάντηση και θα προσπαθούσα να τους οδηγήσω σε αδιέξοδο, καθώς χώρισαν τα όρια, χωρίς να ξέρουν αν υπάρχει της f(x). Θα υπολογίζαμε στον πίνακα το* $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ *όπου εύκολα βγαίνει 0.*

Χωρίζοντας όμως τα όρια θα καταλήγαμε σε απροσδιοριστία, οπότε θα επεσήμανα ότι ούτε στο πρώτο όριο επιτρέπεται να χωριστούν τα όρια, όταν δε γνωρίζουμε αν υπάρχουν.

β) Θα τον βαθμολογούσα με 0, διότι στο συγκεκριμένο όριο εξετάζω αν θα το χωρίσει σε επιμέρους. Άρα πέφτοντας στην παγίδα, δεν έκανε αυτό που ήθελα.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3

α) *Στόχος της συγκεκριμένης άσκησης είναι να διαπιστώσουν οι μαθητές, ότι δυο άνισες συναρτήσεις, οι οποίες ενδεχομένως είναι φαινομενικά ίσες για τον μαθητή, έχουν την ίδια συμπεριφορά σε ένα συγκεκριμένο σημείο, το οποίο στη μία περίπτωση δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού, ενώ στην άλλη ανήκει. Δηλαδή έχουμε:*

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}, x\neq 2 \text{ και } g(x)=x+2 \text{ με } \lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} g(x)$$

β) *Αρχικά ο μαθητής να εφαρμόσει την ιδιότητα* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

αλλά διαπιστώνοντας ότι $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ *να το αναίρεσε. Στη συνέχεια παραγοντοποιεί αριθμητή και παρανομαστή, απλοποιεί και τελικά εφαρμόζει:*

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x), \text{ όπου } \lim_{x\to x_0} f(x) \text{ και } \lim_{x\to x_0} g(x) \text{ υπάρχουν.}$$

γ) *Αυτό που θα συζητούσα στην αίθουσα, θα ήταν το γεγονός ότι το όριο* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *τελικά ανάγεται στον υπολογισμού του* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ *και ότι η παραγοντοποίηση της ρητής συνάρτησης f(x) είναι ένα* *εργαλείο για τον υπολογισμό του* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Σκοπός είναι να κατανοήσουν, ότι δυο άνισες συναρτήσεις, οι οποίες ενδεχομένως είναι φαινομενικά ίσες για τον μαθητή, έχουν την ίδια συμπεριφορά σε ένα συγκεκριμένο σημείο, το οποίο στη μία περίπτωση δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού, ενώ στην άλλη ανήκει.

δ) Η συζήτηση στην τάξη θα μπορούσε να συνεχιστεί ζητώντας από τους μαθητές να σχεδιάσουν τις δυο συναρτήσεις σε δυο διαφορετικά Καρτεσιανά επίπεδα. Κατόπιν, θα ζητούσα να σχεδιάσουν τις εικόνες των σημείων που βρίσκονται απειροστά κοντά στο 2, ώστε να δουν τη συγκέντρωσή τους κοντά στο 4. Η οπτική αναπαράσταση θα οδηγήσει τους μαθητές στην εννοιολογική κατανόηση του πεπερασμένου ορίου σε σημείο.

<u>ΕΡΩΤΗΣΗ 4</u>

4) *Θα με ενδιέφερε να δω αν ο μαθητής είχε υπολογίσει τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g και f+g. Υπολογίζοντας τα θα ήταν σαφές ότι δεν είχε νόημα η αναζήτηση του ορίου της f+g στο 3, διότι δεν ήταν σημείο συσσώρευσης.*

<u>ΕΡΩΤΗΣΗ 5</u>

α) *Ο μαθητής κάνει λάθος στη θεώρησή του, ότι υπάρχει το όριο* $\lim\limits_{x \to +\infty} \eta\mu x$.

β) *Το συγκεκριμένο λάθος δεν το θεωρώ συνηθισμένο, διότι οι εκπαιδευτικοί επισημαίνουν τη μη ύπαρξή του όταν μπαίνουν στα όρια στο άπειρο, εξηγώντας το ή όχι. Παρ' όλ' αυτά, ένας μαθητής προχωρημένης μαθηματικής σκέψης και έχοντας υπόψιν τριγωνομετρικούς μετασχηματισμούς, θα μπορούσε να ασχοληθεί με αυτήν την περίπτωση.*

γ) Καταρχάς, θα επεσήμανα στον μαθητή αλλά και σε όλη την τάξη ότι οι συγκεκριμένες ενέργειες αποτελούν απόδειξη δια της ατόπου απαγωγής, ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to +\infty} \eta\mu x$. *Στη συνέχεια θα εξηγούσα τη μη ύπαρξη του ορίου με τον ορισμό του ορίου στο άπειρο, δηλαδή* $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 : \forall x > x_0$ να ισχύει $\left| f(x) - \alpha \right| < \varepsilon$

Τον συγκεκριμένο ορισμό θα τον αναπαριστούσα εικονικά για το ημx, έτσι ώστε οι μαθητές να πειστούν για τη μη ισχύ του και για το γεγονός ότι δε συγκεντρώνονται απειροστά κοντά σε μια τιμή οι τιμές του ημx στο άπειρο. Κατόπιν, θα έδινα ένα παράδειγμα για να πειστούν για την ισχύ του παραπάνω ορισμού, όπως τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ *και το όριό της στο άπειρο.*

δ) Η διδακτική αξιοποίηση του συγκεκριμένου λάθους, μετά και την επεξήγηση του, θα ήταν η σημείωση, ότι κάνοντας λανθασμένες υποθέσεις καταλήγουμε σε λάθος συμπεράσματα, κάτι το οποίο αποτελεί και τρόπο μαθηματικής απόδειξης.

<u>Η ΠΑΔΑΓΩΓΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ (ΠΓΠ) ΤΟΥ ΝΙΚΟΥ</u>

Προκειμένου να καταταχτούν οι γνώσεις του Νίκου αναπτύσσονται οι βασικές κατηγορίες των παιδαγωγικών και διδακτικών γνώσεων (ΠΓΠ), δηλαδή η ΓΠΜ, ΓΠΔ και ΓΠΑΠ.

Γνώση του περιεχομένου και των μαθητών (ΓΠΜ)

Γνώση των παρανοήσεων

Κατά την ανάλυση του τεστ που δόθηκε στον Νίκο, διαπιστώθηκε ότι σε όλες τις ερωτήσεις ο Νίκος αποκρυπτογράφησε σωστά τα λάθη των μαθητών. Σχολιάζοντας τα λάθη αυτά στη συνέντευξη που παραχώρησε, έκανε το ακόλουθο σχόλιο: *"Συναντώ σε πολλούς μαθητές τη λογική ότι μου δίνεται ένα όριο, τι θα κάνω, παραγοντοποιήσεις, αντικαταστάσεις, τέλος. Έχουν μάθει σε μια καθαρά αλγοριθμική μέθοδο και λύνουν ασκήσεις χωρίς να ελέγχουν τις απαραίτητες προϋποθέσεις."* Ο Νίκος αποδίδει τη λανθασμένη χρήση των ιδιοτήτων που εφαρμόζουν οι μαθητές σε μια ευρύτερη μέθοδο σκέψης, κάτι που αναδεικνύει τη συγκεκριμένη συνιστώσα που αναλύουμε.

Στην ερώτηση που τέθηκε στο Νίκο, μέσα από το τεστ αλλά και τη συνέντευξη, για τις παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με τα όρια, φάνηκε η αδυναμία αναγνώρισης πολλών από αυτών. Για το Νίκο οι παρανοήσεις των μαθητών είναι ουσιαστικά δύο: *"Η παρανόηση που δημιουργείται στους μαθητές είναι η θεώρηση, ότι* $x=x_0$, *η οποία δημιουργείται από το γεγονός ότι για* *να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της f(x) κοντά στο x_0, αντικαθιστούμε όπου x το x_o."* και *" πολλοί μαθητές δηλώνουν ότι το σημείο x_0 πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και ότι σε διαφορετική περίπτωση το όριο δεν έχει κανένα νόημα"*. Ο Νίκος εντοπίζει ορθά δύο από τις παρανοήσεις των μαθητών ωστόσο αδυνατεί να εντοπίσει σημαντικές παρανοήσεις που απαιτούν βαθιά κατανόηση της σκέψης των μαθητών, γεγονός που αντανακλά την έλλειψη συνδυασμένης κατανόησης τόσο της σκέψης όσο και των μαθηματικών εννοιών που μπλέκονται.

Ικανότητα του δασκάλου να κατανοεί και να ερμηνεύει το σκεπτικό ενός μαθητή

Η κατανόηση και η ερμηνεία του τρόπου σκέψης των μαθητών είναι άρρητα συνδεδεμένες με τη επιτυχή αντιμετώπιση των παρανοήσεων τους και κατ επέκταση με την επιλογή κατάλληλων διδακτικών μεθόδων.

Ο Νίκος στο ερωτηματολόγιο που του δόθηκε δεν προχωράει, σε καμιά από τις ερωτήσεις, σε μια βαθύτερη ερμηνεία του σκεπτικού τους, παρά μόνο στη διαπίστωση συγκεκριμένων τρόπων λύσης. Ωστόσο στη διάρκεια της συνέντευξης αναφέρθηκε στον τρόπο που οι μαθητές αντιλαμβάνονται και χρησιμοποιούν τις λέξεις. *" Σε όλο το κεφάλαιο των ορίων και βασικά σε όλα τα μαθηματικά οι μαθητές συναντούν λέξεις που είναι δύσκολες ή που σημαίνουν τελείως διαφορετικά πράγματα. Φαίνεται ότι αντιλαμβάνονται με διαφορετικό τρόπο κάποιες εκφράσεις"*. Το παράδειγμα που έδωσε *"Κάποιες λέξεις όπως προσεγγίζω ή τείνω προς, τις αντιλαμβάνονται οι μαθητές ανάλογα με το πως έχουν μάθει να τις χρησιμοποιούν στην προσωπική τους ζωή"*, αποτελεί μια δυνατή ένδειξη παιδαγωγικής γνώσης της σκέψης των μαθητών, καθώς είναι συνυφασμένο με ένα πλήθος αποτελεσμάτων σύγχρονων ερευνών. Αυτό που για τον Νίκο αποτέλεσε απλά ένα παράδειγμα, κρύβει στην ουσία ακόμη μια αναγνώριση παρανόησης των μαθητών σχετικά με τα όριο, παρόλο που σε ευθεία ερώτηση σχετικά με το ποιες είναι οι παρανοήσεις, δεν αναφέρθηκε πουθενά.

Για τον Νίκο *"η προηγούμενη εμπειρία των μαθητών είναι καταπέλτης στο σχηματισμό της τωρινής σκέψης των μαθητών"*. Θεωρεί ότι οι μαθητές όλες τις προηγούμενες χρονιές έχουν προετοιμαστεί να λύνουν τόσο σαφής αλγεβρικές ασκήσεις, που η μη σαφής διαδικασία για τον υπολογισμό του ορίου έρχεται σε αντίθεση με την προηγούμενη εμπειρία τους. *"Πάρτε δέκα ασκήσεις για παραγοντοποίηση, πάρτε είκοσι για εξισώσεις, τριάντα για ανισώσεις. Αυτό έμαθαν τα παιδιά, από εμάς τους ίδιους μη γελιόμαστε."* Ο Νίκος εδώ συνδυάζει την προηγούμενη εμπειρία των μαθητών και την επίγνωση της λάθος διδασκαλίας εκ μέρους των ίδιων των καθηγητών. Πιστεύει ότι το σκεπτικό των μαθητών είναι η απόρροια και των δύο.

Με αφορμή τις δύο αυτές παρατηρήσεις θα μπορούσε να ειπωθεί συνολικά ότι ο Νίκος σε κάποιες περιπτώσεις προχωράει σε μια βαθύτερη ερμηνεία του σκεπτικού τους, γεγονός που δείχνει ότι οι γνώσεις του βασίζονται κυρίως στην προσωπική, διδακτική του εμπειρία.

Γνώση των θεμάτων που μπορεί να βρίσκουν οι μαθητές ενδιαφέροντα

“ Από την εμπειρία μου όλα αυτά τα χρόνια έχω αντιληφθεί ότι οι μαθητές περιμένουν την έκπληξη, κάτι που θα τους προξενήσει εντύπωση, ένα παράδοξο, κάτι που τους φέρνει σε αντίθεση με ότι πίστευαν μέχρι εκείνη τη στιγμή”. Οι μαθητές συγκρατούν πολύ περισσότερο μια ιδέα ή μια πληροφορία που ξεφεύγει από την τετριμμένη στυγνή διδασκαλία των μαθηματικών.

Ο Νίκος τα τελευταία χρόνια προσπαθεί να εντάσσει στη διδασκαλία τη χρήση οπτικοποιημένων μοντέλων γιατί πιστεύει ότι οι μαθητές βρίσκουν πολύ ελκυστικές τις μεθόδους αυτές. “*Ξέρω ότι οι αναπαραστάσεις μέσα από υπολογιστή τραβούν πολύ το ενδιαφέρων των μαθητών, αλλά θα είμαι ειλικρινής, μόνο στα ιδιαίτερα μου καταφέρνω να διδάξω με αυτό τον τρόπο τις έννοιες που θέλω. Στο σχολείο σε 45 λεπτά και με όλη την ύλη που πρέπει να διδαχτεί, τα χέρια μου είναι δεμένα”.*

Γνώση προϋποθέσεων για να διευκολυνθεί κατανόηση των μαθητών

Ο Νίκος θεωρεί ότι η καλή γνώση της θεωρίας αποτελεί βασική προϋπόθεση στην αποτελεσματικότερη κατανόηση των μαθηματικών από τους μαθητές. Δηλώνει ότι η ουσία των μαθητικών βρίσκεται στην κατανόηση της θεωρίας και όχι στην επίλυση μεγάλου αριθμού ασκήσεων. *“Πως γίνεται οι μαθητές να καταλαβαίνουν τα μαθηματικά και να λύνουν ασκήσεις όταν δεν έχουν εντρυφήσει στη μαθηματική θεωρία; Για μένα είναι τόσο σημαντική που ακόμη και στα διαγωνίσματα το μεγαλύτερο μέρος των ερωτήσεων αποτελείται από θεωρητικές ασκήσεις”*. Αξίζει να αναφερθεί ότι η δικαιολόγηση του επιχειρήματος για την καλή γνώση της θεωρίας διαφέρει από τη μέθοδο διδασκαλίας που αντικρίζουμε στα σχολεία στην οποία επικρατεί κατά κόρων η επίλυση αλγεβρικών ασκήσεων.

Επιπλέον ο Νίκος αναφέρεται στην αναγκαιότητα της δημιουργίας προβληματισμού στον μαθητή. *“Το μπέρδεμα που προκαλείται σε εκείνες τις περιπτώσεις που ο μαθητής πρέπει να ανακαλύψει μόνος του την απάντηση είναι επιθυμητό γιατί σε αυτήν την περίπτωση υπάρχουν μεγαλύτερες πιθανότητες ο μαθητής να μάθει μια έννοια βαθύτερα”* .

Τα αποσπάσματα αυτά είναι τα μοναδικά που χαρακτηρίζουν τη συγκεκριμένη συνιστώσα που αναλύεται.

Γνώση του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας (ΓΠΔ)

Χρήση ανταγωνιστικών ισχυρισμών

Για τον Νίκο μέρος της διδακτικής μεθόδου του αποτελεί η μέθοδος της δημιουργίας αβεβαιότητας με σκοπό να φέρει τους μαθητές σε γνωστική σύγκρουση. Αυτό φαίνεται και στη δεύτερη ερώτηση του ερωτηματολογίου

Αρχικά, δε θα τους έλεγα τη σωστή απάντηση και θα προσπαθούσα να τους οδηγήσω σε αδιέξοδο, καθώς χώρισαν τα όρια, χωρίς να ξέρουν αν υπάρχει της f(x). Θα υπολογίζαμε στον πίνακα το $\lim_{x \to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-1}\right)$ *όπου εύκολα βγαίνει 0. Χωρίζοντας όμως τα όρια θα καταλήγαμε σε απροσδιοριστία, οπότε θα επεσήμανα ότι ούτε στο πρώτο όριο επιτρέπεται να χωριστούν τα όρια, όταν δε γνωρίζουμε αν υπάρχουν.*

Ο Νίκος στη συνέντευξη δήλωσε ότι χρησιμοποιεί συχνά παραδείγματα τα οποία οδηγούν τους μαθητές σε αβεβαιότητα και αμφιβολία. Μόλις δημιουργηθούν αυτές, αφήνει τους μαθητές να υπερασπιστούν μόνοι τους τα επιχειρήματά τους, χωρίς να μεσολαβεί. Έτσι όλοι αρχίζουν και αναδιοργανώνουν τις σκέψεις τους προσπαθώντας να βρουν τα κατάλληλα επιχειρήματα για να κάνουν τις δηλώσεις τους ισχυρές.

Περιγράφει με αυτόν τον τρόπο μια διδακτική μέθοδο που βασίζεται στην ομαδική συνεργασία έχοντας ο καθηγητής το ρόλο του καθοδηγητή, μέθοδος που οι έρευνες έχουν αποδείξει ότι είναι αποτελεσματική.

Ωστόσο οι δηλώσεις του αυτές έρχονται σε άμεση αντίθεση με τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου που του δόθηκε, όπου σε καμία περίπτωση δεν καταγράφτηκε αυτή η διδακτική μέθοδος. Σε όλες σχεδόν τις απαντήσεις του ο Νίκος δείχνει να επισημαίνει τις σωστές απαντήσεις την ίδια στιγμή που φανερώνεται το λάθος.

Συζήτηση στη διδασκαλία

Όπως φάνηκε στην προηγούμενη συνιστώσα, ο Νίκος χρησιμοποιεί το διάλογο μέσα στην τάξη. Το να θέτει ερωτήματα και να αφήνει τη συζήτηση να συνεχιστεί ακόμη κι όταν οι μαθητές βρουν τη σωστή απάντηση αποτελεί τη διδακτική του επιλογή προκειμένου να βοηθήσει στην ανάπτυξη του διαλόγου. Η αντίφαση αυτών που δήλωσε με τις απαντήσεις του στο ερωτηματολόγιο

δημιούργησαν την ανάγκη αποσαφήνισης των δηλώσεων του. *"Ναι, ίσως να μην αναφέρθηκα εκτενέστερα στις απαντήσεις μου σχετικά με τον τρόπο διδασκαλίας. Υπέθεσα ότι οι ερωτήσεις είχαν πιο μαθηματικό χαρακτήρα. Φυσικά και εφαρμόζω το διάλογο στην τάξη μου, εννοείται ανάλογα και με τον χρόνο που έχουμε. Τώρα αν έχουμε ήδη συζητήσει την αναγκαιότητα του να ελέγχουμε πχ αν υπάρχουν τα όρια για να πάρω τις ιδιότητες, ε τότε την επόμενη φορά απλά θα επισημάνω το λάθος".*
Η παραπάνω φράση, τηρουμένων των αναλογιών, είναι χαρακτηριστική ένδειξη ότι ο διάλογος μεταξύ των μαθητών υπάρχει υπό προϋποθέσεις και δεν αποτελεί τελικά βασική διδακτική μέθοδο του καθηγητή.

Σύνδεση με άλλα πεδία εντός κι εκτός των μαθηματικών

Σύμφωνα με τον Wilensky (1993, όπως αναφέρεται στο Μεταξάς, 2011), η σύνδεση με άλλα πεδία των μαθηματικών είναι ένα σημαντικό διδακτικό εργαλείο κατανόησης.
Κατά την ανάλυση των απαντήσεων του Νίκου δεν φάνηκε σε κανένα σημείο η ύπαρξη σύνδεσης της διδασκαλίας του με άλλα πεδία των εντός κι εκτός των μαθηματικών. Σε ερώτηση που του τέθηκε για την απουσία αυτή, ο Νίκος δήλωσε ότι: *"Ναι μπορώ να υποθέσω ότι εάν συνδυάσω τη διδασκαλία μου με περιοχές εντός κι εκτός των μαθηματικών κάποιες έννοιες ίσως γίνουν πιο χειροπιαστές. Παρόλα αυτά ομολογώ ότι δεν έχω καταπιαστεί και από μόνος με τέτοιες μεθόδους. Θα ήθελα όμως να εφαρμόσω εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία μου, όπως για παράδειγμα να αναφέρω ιστορικά γεγονότα που κρύβονται πίσω από τα μαθηματικά".*
Παρότι η ιστορική ανακατασκευή εννοιών του Νίκου θα αναλυθεί παρακάτω, θα μπορούσαμε να επισημάνουμε θετικά την εμφανή θέληση του να υιοθετήσει τη μέθοδο των συνδέσεων με πεδία εκτός των μαθηματικών.

Ιστορική ανακατασκευή εννοιών

Οι έρευνες στο χώρο της ιστορίας των μαθηματικών έχουν δείξει ότι η διδακτική μέθοδος της ιστορικής ανακατασκευής των εννοιών βοηθά σημαντικά στην κατανόηση των μαθητών (Heeffer, 2007, όπως αναφέρεται στο Μεταξάς, 2011)
Ο Νίκος όπως αναφέρθηκε, δεν χρησιμοποιεί θέματα από την ιστορία των μαθητικών. Πιστεύει ωστόσο ότι άρθρα βασισμένα στα αρχικά ιστορικά κείμενα μπορεί να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν διαφορετικούς τρόπους αντίληψης των ορίων. *"Στόχος μου είναι τα επόμενα χρόνια να βρω συνδέσεις ανάμεσα σε ασκήσεις που έχει το βιβλίο και σε αντίστοιχες στιγμές της ιστορίας των μαθηματικών, είμαι σίγουρος ότι κάτι τέτοιο θα κεντρίσει το ενδιαφέρον των μαθητών".*

Διδασκαλία του φορμαλιστικού τρόπου διατύπωσης

Ο Νίκος επιλέγει να εισάγει σταδιακά τους μαθητές στον μαθηματικό φορμαλισμό ξεκινώντας πρώτα από μια διαισθητική παρουσίαση της αποδεικτικής πορείας. Περιμένει από τους μαθητές να διερευνήσουν και να περιγράψουν διαισθητικά την παρουσίαση μιας μαθηματικής έννοιας, στη συνέχεια ωστόσο τους οδηγεί σε ένα επίπεδο αυστηρότητας. Η διδακτική αυτή που ακολουθεί φαίνεται στο πρώτο ζήτημα του ερωτηματολογίου και τον τρόπο που εισάγει στην τάξη την έννοια του ορίου.

“Θα ξεκινήσω αναλύοντας την πυκνότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών, με στόχο να γίνει κατανοητή η έννοια της προσέγγισης του x απειροστά κοντά στο x_0. Κατόπιν αυτού, θα σχεδιάσω μια τυχαία γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, ώστε να οπτικοποιηθεί η προσέγγιση στο x_0 και να φανεί που συγκεντρώνονται οι αντίστοιχες τιμές της f(x). Θα επισημανθεί ότι το όριο στο x_0 μπορεί να υπολογιστεί ακόμη και όταν το x_0 δεν είναι ανήκει στο πεδίο ορισμού, αλλά είναι σημείο συσσώρευσης της συνάρτησης...”.

Για τον Νίκο η διδασκαλία της αυστηρότητας και του φορμαλισμού είναι σημαντική, έχει σημασία όμως για εκείνον πρώτα να καταλάβει ο μαθητής την ουσία. *“Γνωρίζω ότι στις εξετάσεις θα πρέπει ότι λύνουν και αποδεικνύουν να το διατυπώνουν αυστηρά. Όμως κανένας μαθητής δεν θα διατηρήσει στη μνήμη του τις τυπικές διαδικασίες, αν δεν έχει μια άλλη εικόνα γι αυτές. Αυτό όμως καλούμαστε να κάνουμε δυστυχώς, να τους προετοιμάσουμε αυστηρά για τις εξετάσεις”.*

Χρήση διδακτικών παραδειγμάτων

Ο Νίκος στο εισαγωγικό μάθημα που κάνει για την έννοια του ορίου δίνει κάποια συγκεκριμένα παραδείγματα τα οποία θεωρεί πως περικλείουν τις περιπτώσεις όπου οι μαθητές συνήθως παρανοούν.

2ο παράδειγμα:

$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^2-8}$ και $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{2(x+2)}$

Στόχος εδώ είναι να διαπιστώσουν οι μαθητές, πως τα δυο όρια έχουν την ίδια συμπεριφορά κοντά στο 2, αλλά οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες.

3ο παράδειγμα:

$\lim_{x\to 0}\frac{-e^{2x}+1}{x^4-2}$

Εδώ θέλουμε οι μαθητές να παρατηρήσουν ότι δεν παίζει ρόλο που μηδενίζει ο αριθμητής, όταν παράλληλα δε μηδενίζει ο παρανομαστής και τελικά ο υπολογισμός του ορίου ανάγεται σε μια απλή αντικατάσταση.

4ο παράδειγμα:

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ με $f(x)=\begin{cases} 4x^2-1, & x\in(-\infty,2) \\ 2x, & x\in[2,+\infty) \end{cases}$

Σκοπός εδώ είναι να διαπιστωθεί ότι δεν υπάρχει το όριο στο 2 λόγω μη ισότητας των πλευρικών ορίων.

Ο στόχος του είναι η πληρέστερη κατανόηση του ορίου μέσα από την μελέτη διάφορων περιπτώσεων. Η άμεση αναφορά του στα παραδείγματα αυτά δείχνει την ύπαρξη μιας σειράς στις διδακτικές επιλογές του.

Σε καμία άλλη περίπτωση, σύμφωνα με τις απαντήσεις που έδωσε, δεν βρέθηκε η χρήση διδακτικών παραδειγμάτων.

“Αυτό που θα συζητούσα στην αίθουσα, θα ήταν το γεγονός ότι το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *τελικά ανάγεται στον υπολογισμού του* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ *και ότι η παραγοντοποίηση της ρητής συνάρτησης f(x) είναι ένα εργαλείο για τον υπολογισμό του* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *.”*

Στο σημείο αυτό φαίνεται ότι ο Νίκος υποδεικνύει στους μαθητές τις σωστές λύσεις χωρίς να δίνει παραδείγματα που προσφέρουν την καλύτερη κατανόηση. Συνολικά σε ελάχιστες περιπτώσεις χρησιμοποιεί παραδείγματα προκειμένου να κάνει περισσότερο αντιληπτό το λόγο του κι αυτό είναι ένα από τα πολύ σημαντικά χαρακτηριστικά της ΓΠΔ καθώς φανερώνει μια έλλειψη γνωστικής δομής διδακτικού περιεχομένου.

Γνώση του Περιεχομένου και του Αναλυτικού Προγράμματος (ΓΠΑΠ)

Γνώση του περιεχομένου και της διδακτικής ακολουθίας του σχολικού βιβλίου

“Δεν είναι η πρώτη φορά που οι μαθητές μπλέκουν με την έννοια του ορίου. Στην Α΄ Λυκείου στις συναρτήσεις, υπάρχει αναφορά για το πως συμπεριφέρεται μια συνάρτηση σε πολύ μικρές τιμές του x ή σε πολύ μεγάλες ενώ στη Β΄ Λυκείου σε κάποιο σημείο γίνεται αναφορά στο άθροισμα των άπειρων

όρων που ουσιαστικά μιλάμε για το όριο μιας ακολουθίας. Απλά δεν το ξέρουν!”

Η παρατήρηση του Νίκου σχετικά με το πώς παρουσιάζεται διαισθητικά η έννοια του ορίου σε κεφάλαια από προηγούμενες τάξεις, αναδεικνύει μια σημαντική γνώση της ακολουθίας παρουσίασης της έννοιας του ορίου.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Προφίλ του εκπαιδευτικού

Ο Χρήστος ολοκλήρωσε τις σπουδές του στα Μαθηματικά το 2004. Απέκτησε μεταπτυχιακό τίτλο στη Θεωρητική Πληροφορική και Θεωρίας Συστημάτων και Ελέγχου και έχει παρακολουθήσει δύο σεμινάρια παιδαγωγικού χαρακτήρα, καθώς θεωρεί ότι *"η σχολή ήταν απίστευτα ανεπαρκής σε θέματα διδασκαλίας και παιδαγωγικής"*. Εργάζεται ως μαθηματικός σε φροντιστήριο Μέσης Εκπαίδευσης από το 2006 έως σήμερα έχοντας έτσι αποκτήσει εμπειρία στη διδασκαλία των Μαθηματικών 14 χρόνια. Τα τελευταία 10 χρόνια διδάσκει Μαθηματικά σε μαθητές Γ΄ Λυκείου. Για τον Χρήστο η διδασκαλία στην τάξη αυτή αν και πιο απαιτητική, είναι πολύ πιο ενδιαφέρουσα. Θεωρεί ότι οι μαθητές είναι πιο συγκροτημένοι και προσεχτικοί, παραδέχεται ωστόσο ότι *"η αλήθεια είναι ότι στο φροντιστήριο τα τελευταία χρόνια μου δίνουν το τμήμα με τους άριστους μαθητές"*.

Απαντήσεις του Χρήστου στο τεστ.

<u>ΕΡΩΤΗΣΗ 1</u>

α) Στο εισαγωγικό μάθημα της έννοιας του ορίου παρουσιάζω την διαισθητική του έννοια και επειδή μια εικόνα είναι 1000 λέξεις αξιοποιώ το λογισμικό Geogebra. Στόχοι:

- Να κατανοήσει ο μαθητής ότι η εύρεση του $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ εμπεριέχει το στοιχείο της αλληλένδετης κίνησης του $x \to x_0$ και του $f(x) \to \alpha$, εδώ βοηθά πολύ το Geogebra.
- Να κατανοήσει ο μαθητής ότι για την εύρεση του $\lim_{x \to x_0} f(x)$ δεν είναι αναγκαίο το $x_0 \in D_f$ αλλά η f να ορίζεται σε γειτονιά γύρω και κοντά στο x_0 καθώς και την έννοια των πλευρικών.
- Να υπολογίζει γραφικά όρια συναρτήσεων.

β) • $\lim_{x\to 1} f(x)$ της $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ και της $f(x)=x+1$

• $\lim_{x\to 1^+} g(x)$ της $g(x)=\sqrt{x-1}$ για την κατανόηση των πλευρικών.

• $\lim_{x\to 1} h(x)$ της $h(x)=\begin{cases} e^x & \text{για } x\le 0 \\ -x+1 & \text{για } x>0 \end{cases}$ για την κατανόηση της ύπαρξης του ορίου.

• $\lim_{x\to 0} \varphi(x)$ της $\varphi(x)=\begin{cases} x+1 & \text{για } x\le 0 \\ -x-1 & \text{για } x>0 \end{cases}$ για την κατανόηση της μη ύπαρξης του ορίου.

γ) • Ο μαθητης θεωρεί "στατική" την έννοια του ορίου κάτι να τον εμποδίζει να υπολογίζει γραφικά ένα όριο. Το Geogebra βοηθά πολύ στο πρόβλημα αυτό.

• Ο μαθητης συχνά συγχέει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ με την τιμή $f(x_0)$

ΕΡΩΤΗΣΗ 2

α) Τονίζουμε ότι δεν εφαρμόζουμε ιδιότητες ορίων αν δεν γνωρίζουμε ότι υπάρχουν τα επιμέρους όρια. Για το λόγο αυτό εισάγω την βοηθητική συνάρτηση $g(x)=4f(x)-4x+2$ η οποία έχει $\lim_{x\to 1} g(x)=-10$ οπότε για την εύρεση του $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)+4x-2}{4}=\dots=-2$ εφαρμόζεις ιδιότητες ορίων που εξασφαλισμένα υπάρχουν.

β) Η βαθμολογία θα ήταν μηδέν. Ο μαθητης έπρεπε να εφαρμόζει σωστά το θεώρημα ελέγχοντας τις υποθέσεις του.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3

α) Η άρση της απροσδιοριστίας $\frac{0}{0}$ σε όριο ρητής συνάρτησης με παραγοντοποίηση αριθμητή – παρονομαστή και απλοποίηση.

β) $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$ στο τελευταίο βήμα $\lim_{x \to 2}(x+2) = 4$

γ) Συζήτηση για την ύπαρξη του ορίου της $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ και της $g(x) = x+2$ γραφικά.

δ) Θα έδινα το $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 4

7

Θα προέτρεπα τον μαθητή να υπολογίσει το πεδίο ορισμού της $f+g$ και στην συνέχεια να διαπιστώσει ότι αφού $D_{f+g} = (-\infty, -3] \cup \{3\}$ η συνάρτηση $f+g$ δεν ορίζεται κοντα στο $x_0 = 3$ και άρα δεν έχει νόημα το $\lim_{x \to 3}(f+g)(x)$. Θα τόνιζα έτσι πόσο βασικό είναι να υπολογίζουμε το πεδίο ορισμού πριν προβούμε στην εύρεση ενός ορίου.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5

α) Ο μαθητής εφαρμόζει λάθος τον μέθοδο της αντικατάστασης.
Πρέπει το όριο που προκύπτει μετά τον μετασχηματισμό να υπάρχει, κάτι που είναι προϋπόθεση του θεωρήματος.

Η

β) Δεν θα έλεγα πως είναι συχνό λάθος στο θεώρημα της αντικατάστασης, όμως σίγουρα οι μαθητές έχουν την τάση να αγνοούν τις υποθέσεις συχνά.

δ) Πέρα από την λάθος χρήση του θεωρήματος της αντικατάστασης θα τόνιζα γραφικά την μη ύπαρξη των $\lim_{x \to \pm\infty} ημx$ και $\lim_{x \to \pm\infty} συνx$

ΠΑΔΑΓΩΓΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ (ΠΓΠ) ΤΟΥ ΧΡΗΣΤΟΥ

Προκειμένου να καταταχθούν οι γνώσεις του Χρήστου αναπτύσσονται οι βασικές κατηγορίες των παιδαγωγικών και διδακτικών γνώσεων (ΠΓΠ), δηλαδή η ΓΠΜ, ΓΠΔ και ΓΠΑΠ.

Γνώση του περιεχομένου και των μαθητών (ΓΠΜ)

Γνώση των παρανοήσεων

Κατά την ανάλυση του τεστ που δόθηκε στον Χρήστο, διαπιστώθηκε επιτυχής αναγνώριση των λαθών που έκαναν οι μαθητές σε κάθε περίπτωση. *"Δεν συναντώ πολύ συχνά αυτά τα λάθη στους μαθητές μου. Βέβαια από την αρχή επισημαίνω τα 2-3 σημεία που πρέπει να προσέχουν. Η εμπειρία μου από το φροντιστήριο μου έδειξε ότι κάποιοι από τους μαθητές συγχέουν συχνά το όριο μιας συνάρτησης σε ένα σημείο, με την τιμή της στο σημείο αυτό. Αυτό είναι κι ένα θέμα που από την αρχή αποσαφηνίζω. Τα πρώτα χρόνια της διδασκαλίας μου, είχα στα τμήματα μου μαθητές που δεν ήταν τόσο καλοί. Εκεί συναντούσα συχνά την αδυναμία τους να κατανοήσουν ότι για να βρουν ένα όριο δεν είναι αναγκαίο το x να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης".*

Ο Χρήστος εντοπίζει δύο από τις παρανοήσεις των μαθητών. Η αδυναμία του να της αποσαφηνίσει ωστόσο και να βρει την αιτία αυτών ήταν εμφανής. Σε καμία του απάντηση είτε στο ερωτηματολόγιο είτε στην συνέντευξη, δεν μπόρεσε να αποκρυπτογραφήσει το σκεπτικό των μαθητών του. Ο Χρήστος φάνηκε να πιστεύει ότι η άριστη επίδοση των μαθητών του σε βαθμούς και διαγωνίσματα, καθιστά αυτόματα την μη ύπαρξη παρανοήσεων σχετικά με την έννοια του ορίου. Το γεγονός ότι στο φροντιστήριο διδάσκει σε τμήματα με άριστους μαθητές δεν υποδεικνύει σε καμία περίπτωση ότι αυτοί δεν αναπτύσσουν παρανοήσεις. Η ακόλουθη απάντηση του Χρήστου φανερώνει την έλλειψη μιας βαθύτερης διείσδυσης στο σκεπτικό των μαθητών του: "*Οι μαθητές έρχονται στο φροντιστήριο για να γράψουν καλά στις πανελλήνιες. Αυτό από μόνο του είναι αγχωτικό. Άρα ο στόχος μου είναι να καλύψουμε την ύλη ασκησιολογικά όσο είναι δυνατόν, δεν εμβαθύνω τόσο θεωρητικά σε έννοιες".*

Ικανότητα του δασκάλου να κατανοεί και να ερμηνεύει το σκεπτικό ενός μαθητή

Η ικανότητα αντίληψης του τρόπου σκέψης των μαθητών αναφέρεται και στον εντοπισμό των δυσκολιών που μπορεί να συναντήσουν κατά την επίλυση των ασκήσεων. Ο Χρήστος στις απαντήσεις του στο ερωτηματολόγιο έγραψε ότι ο μαθητής θεωρεί στατική την έννοια του ορίου κάτι που τους εμποδίζει να κατανοήσουν πλήρως την έννοια του. *"Δεδομένου ότι η θεωρία και οι ασκήσεις των σχολικών βιβλίων έχουν έναν διαδικαστικό χειρισμό, δεν πρέπει να μας παραξενεύει που οι μαθητές συγχέουν τις διαδικαστικές κινήσεις με το στοιχείο της κίνησης του x όταν τείνει στο* x_0 *και γενικά με την πραγματική κατανόηση του ορίου".* Στο σημείο αυτό φαίνεται ότι για τον Χρήστο την ευθύνη για τη δυσκολία αυτή φέρει το σχολικό βιβλίο και ο τρόπος που είναι δομημένο.

"Επιπλέον έχω παρατηρήσει ότι πολλοί μαθητές έχουν μια αλγεβρική προσέγγιση για τα όρια, χρησιμοποιούν δηλαδή γνωστές διαδικασίες από προηγούμενα χρόνια για τον υπολογισμό τους, ακόμη κι αν αυτές είναι ακατάλληλες για τις ασκήσεις. Όπως στα παραδείγματα που δώσατε στο τεστ που στις περισσότερα φαίνεται ότι οι μαθητές εφαρμόζουν ιδιότητες χωρίς να ελέγχουν αν γίνεται. Αυτό όμως έμαθαν τόσα χρόνια. Καθ όλη τη διδακτική μου πορεία έκανα μάθημα σε όλες τις τάξεις των Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Εξισώσεις - Ανισώσεις - Παραγοντοποιήσεις - Απόλυτα κλπ ανήκουν στην Άλγεβρα, εννοείται ότι αυτό το φέρουν μαζί τους οι μαθητές στην Ανάλυση".

Από τα δύο αυτά αποσπάσματα θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε ότι για τον Χρήστο το σκεπτικό των μαθητών οφείλεται σε εξωτερικούς παράγοντες (σχολικό βιβλίο, προηγούμενη εμπειρία των μαθητών στην Άλγεβρα). Η προσέγγιση της διαδρομής που ακολουθεί η σκέψη των μαθητών των μαθητών δεν φάνηκε σε κανένα σημείο.

Γνώση των θεμάτων που μπορεί να βρίσκουν οι μαθητές ενδιαφέροντα

Ο Χρήστος δίνει σημασία στο ρόλο των αναπαραστάσεων μέσω της τεχνολογίας στην κατανόηση των μαθητών, κάτι που φαίνεται και από τις διδακτικές μεθόδους του στην παρουσίαση της έννοιας του ορίου. Θεωρεί ότι μέσα από την τεχνολογία ο μαθητής μπορεί να κατασκευάσει την έννοια του ορίου, να ανακαλύψει γεγονότα και μεθόδους.

"...κι επειδή μια εικόνα είναι 1000 λέξεις, αξιοποιώ το λογισμικό Geogebra"

"Νομίζω ότι η διδασκαλία με στατικά μέσα οδηγεί τους μαθητές να καταφύγουν στην αποστήθιση εννοιών και κανόνων, χωρίς να τους έχουν καταλάβει πλήρως. Όπου μπορώ να χρησιμοποιήσω την τεχνολογία το κάνω, οι μαθητές πλέον στον αιώνα που ζούμε είναι άρρητα συνδεδεμένοι με αυτήν, εννοείται ότι τους προκαλεί το ενδιαφέρον και βλέπουν τα Μαθηματικά αλλιώς..."

Γνώση προϋποθέσεων για να διευκολυνθεί κατανόηση των μαθητών

Για τον Χρήστο βασική προϋπόθεση για να διευκολυνθεί η κατανόηση των μαθητών είναι η συνεχής εξάσκηση σε διαφορετικού είδους ασκήσεις. Θεωρεί ότι οι μαθητές πρέπει να δουν μπροστά τους ασκήσεις και παραδείγματα από κάθε κατηγορία που αφορά το όριο για να μπορέσουν να το κατανοήσουν πλήρως. Αντιτίθεται στην εκμάθηση της θεωρίας ως απαραίτητη προϋπόθεση γιατί *" οι μαθητές μαθαίνουν την θεωρία παπαγαλία, τους νοιάζει απλά να την ξέρουν για να την γράψουν όταν έρθει η ώρα των πανελληνίων"*.

"Πέρα από τις ασκήσεις όμως θεωρώ ότι ο ίδιος ο καθηγητής πρέπει να είναι ικανός και να ξέρει πως να διδάσκει κάθε έννοια για να γίνει κατανοητή, αυτό πιστεύω είναι η πρώτη προϋπόθεση"

Στην ερώτηση που του τέθηκε να διευκρινίσει τι εννοεί με το να είναι ικανός ο καθηγητής, αποκρίθηκε ως εξής*: "Πρέπει να γνωρίζει καλά την έννοια του ορίου ο ίδιος, να ψάχνει και να εμπλουτίζει συνεχώς το ασκησιολόγιο του και φυσικά να έχει την ικανότητα να μεταφέρει τις γνώσεις του"*.

Οι απαντήσεις του Χρήστου δεν φανερώνουν μια τεκμηριωμένη επίγνωση των συνθηκών που απαιτούνται προκειμένου να επιτευχθεί μια αποτελεσματικότερη μάθηση. Γίνεται φανερό ότι δεν επικεντρώνεται στον ίδιο τον μαθητή αλλά σε ότι τον περιβάλλει.

Γνώση του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας (ΓΠΔ)

Χρήση ανταγωνιστικών ισχυρισμών

Ο Χρήστος κατά τη διάρκεια της συνέντευξης του δήλωσε ότι κατά την εισαγωγή της έννοιας του ορίου αρχικά χρησιμοποιεί παραδείγματα απλά, αλλά στη συνεχεία δίνει αντιπαραδείγματα που να ανατρέπουν τα προηγούμενα δεδομένα έτσι ώστε να καταλάβουν οι μαθητές πότε μπορούν να εφαρμόζουν κάθε φορά τις ιδιότητες των ορίων. Στο τεστ που του δόθηκε δείχνει δύο από αυτά τα παραδείγματα.

$$\lim_{x\to 1} h(x) \text{ της } h(x)=\begin{cases} e^x & \text{για } x\le 0 \\ -x+1 & \text{για } x>0 \end{cases}$$ *Για την κατανόηση ύπαρξης του ορίου*

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) \text{ της } \varphi(x)=\begin{cases} x+1 & \text{για } x\le 0 \\ -x-1 & \text{για x } >0 \end{cases}$$ *Για να δουν τι γίνεται όταν το όριο δεν υπάρχει.*

“Μέσα από την χρήση των αντιπαραδειγμάτων, που γενικά χρησιμοποιώ, θέλω να προβληματίσω τους μαθητές μου, να δουν και να καταλάβουν πότε ισχύει και πότε όχι κάθε ισχυρισμός”

Οι διδακτικές μέθοδοι που εφαρμόζουν τεχνικές όπως την παραπάνω είναι σημαντικές γιατί έχουν πολλαπλά μαθησιακά οφέλη (Hadas & Hershkowitz, 2002 όπως αναφέρεται στο Μεταξάς, 2011)

Συζήτηση στη διδασκαλία

Η μεθοδολογία των αντιπαραδειγμάτων που χρησιμοποιεί ο Χρήστος περιλαμβάνει τη συζήτηση μέσα στην τάξη για την αντιμετώπιση των αντικρουόμενων ζητημάτων που προκύπτουν. Ωστόσο ο Χρήστος πέρα από αυτές τις περιπτώσεις φαίνεται να μην εντάσσει με άλλους τρόπους την συζήτηση κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας του. Οι απαντήσεις του στο ερωτηματολόγιο δεν φανερώνουν σε καμιά από τις περιπτώσεις το αντίθετο.

“Τονίζουμε ότι δεν εφαρμόζουμε ιδιότητες ορίων αν δεν γνωρίζουμε ότι υπάρχουν τα επιμέρους όρια.”

“Θα προέτρεπα τον μαθητή να υπολογίσει το πεδίο ορισμού της f+g και στη συνέχεια να

διαπιστώσει...”

“Θα τόνιζα γραφικά...”

Και στα τρία παραδείγματα ο Χρήστος φαίνεται να δίνει τις απαντήσεις την ίδια στιγμή στους μαθητές χωρίς να ξεκινήσει ένας κύκλος συζήτησης στην τάξη. Η στάση του δείχνει μια δασκαλοκεντρική προσέγγιση με εμβάθυνση στην αλγοριθμική προσέγγιση της διδασκαλίας χωρίς να προηγηθεί η εννοιολογική κατανόηση μέσα από το διάλογο καθηγητή και μαθητών.

Σύνδεση με άλλα πεδία εντός κι εκτός των μαθηματικών

Ο Χρήστος όπως φαίνεται στην ανάλυση του τεστ δεν στηρίζει αυτή τη διδακτική επιλογή ωστόσο δήλωσε ότι όποτε μπορεί χρησιμοποιεί συνδέσεις με παραδείγματα της καθημερινής ζωής. Θεωρεί ότι όταν μια ιδέα εισάγεται για πρώτη φορά με τρόπο ανεπίσημο, τότε η εκάστοτε έννοια που πραγματεύεται, χτίζεται πριν δοθεί επίσημα μαθηματικά. *“οι μαθητές αγαπούν τη φυσική γιατί νιώθουν σε ένα οικείο περιβάλλον, έτσι καμιά φορά όταν θέλω να εξηγήσω τι ουσιαστικά είναι το όριο φέρνω παραδείγματα με τη στιγμιαία ταχύτητα”.*

Ιστορική ανακατασκευή εννοιών

Όπως έχουν δείξει οι έρευνες η αναπαραγωγή της ιστορικής αναδρομής μιας έννοιας βοηθάει τους μαθητές να προσεγγίσουν βαθύτερα την ουσία των μαθηματικών.

“*Στο μάθημα μου για τα όρια δεν κάνω ιστορική αναδρομή της έννοιας. Δεν το σκέφτηκα ποτέ, δεν έχω την πολυτέλεια του χρόνου και δεν είμαι κι εγώ κατατοπισμένος με την ιστορία των μαθηματικών πάνω στη συγκεκριμένη έννοια. Στις μικρότερες τάξεις καμιά φορά οι μαθητές ρωτούσαν, πώς βγήκε αυτό, εκείνο, τότε έψαχνα κάποιες πηγές. Κυρίως στη Γεωμετρία το έβλεπα αυτό”*. Όπως φαίνεται από το παραπάνω απόσπασμα ο Χρήστος δεν εντάσσει στη διδακτική πρακτική του αυτή τη μέθοδο και αυτό προσθέτει ακόμη ένα στοιχείο στην γνώση παιδαγωγικού περιεχομένου που διαθέτει.

Διδασκαλία του φορμαλιστικού τρόπου διατύπωσης

Για τον Χρήστο η διδασκαλία του φορμαλιστικού τρόπου διατύπωσης της έννοιας του ορίου και των συνεπειών του είναι απαραίτητη. *“Στις πανελλήνιες δυστυχώς ή ευτυχώς χρειάζεται να είναι όλα γραμμένα αυστηρά και φορμαλιστικά. Δεν θα σου πω ότι είμαι υπέρ αυτού, ξέρω ότι οι μαθητές απλά διαβάζουν μηχανικά κάτι χωρίς να το πολυκαταλαβαίνουν, αλλά αυτό είναι απαραίτητο με το τωρινό* *εκπαιδευτικό σύστημα''.*

Η διδακτική επιλογή του Χρήστου φαίνεται να είναι αποτέλεσμα εξωτερικών παραγόντων (Πανελλήνιες) και λειτουργεί σε αυτή την περίπτωση αποτρεπτικά για την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών.

Χρήση διδακτικών παραδειγμάτων

''Πιστεύω ότι οι μαθητές μαθαίνουν όλους τους κανόνες των ορίων, όλες τις περιπτώσεις μέσα από κατάλληλα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα. Πολλές φορές χρησιμοποιώ Geogebra για να δείξω συγκεκριμένα παραδείγματα με γραφικές παραστάσεις γιατί πιστεύω ότι οι μαθητές παρατηρούν ευκολότερα τη συμπεριφορά της συνάρτησης και κατανοούν τη σχέση μεταξύ του ορίου και των τιμών της.''

Τα παραδείγματα που έδωσε ο Χρήστος αφορούν κυρίως την εισαγωγή των μαθητών στην έννοια του ορίου. Στις υπόλοιπες απαντήσεις του για την υποθετική διδασκαλία που θα έκανε σε παρόμοιες καταστάσεις δε φαίνεται να περιλαμβάνει άλλα παραδείγματα που να αναιρούν τις παρανοήσεις και τα λάθη των μαθητών.

Γνώση του Περιεχομένου και του Αναλυτικού προγράμματος (ΓΠΑΠ)

Γνώση του περιεχόμενου και της διδακτικής ακολουθίας του σχολικού βιβλίου

''Δεν ασχολούμαι γενικά με το σχολικό βιβλίο. Με ενδιαφέρει να ξέρω τι από εκεί είναι εκτός ύλης και τι όχι. Θεωρώ ότι το βιβλίο είναι κακογραμμένο και ειδικότερα στο κεφάλαιο των ορίων, γραμμένο πολύ πυκνά, με αποτέλεσμα να κουράζει και τους μαθητές κι εμένα. Προτιμώ τις δικές μου σημειώσεις ή βοηθήματα άλλων συγγραφέων''.

Η παραπάνω κριτική του Χρήστου για το σχολικό βιβλίο δείχνει ένα κομμάτι της γνώσης του περιεχομένου του . Δεν υπάρχει καμία ένδειξη της γνώσης της διδακτικής ακολουθίας.

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Προφίλ του εκπαιδευτικού

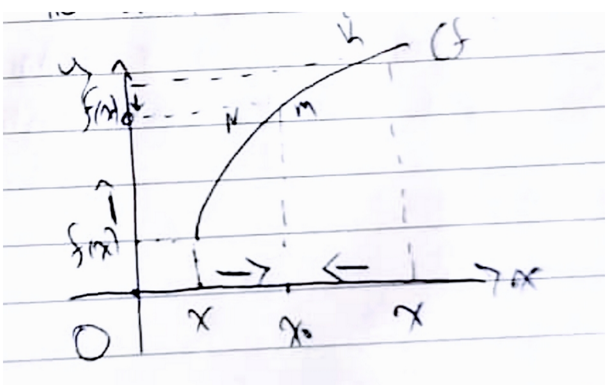
Ο Πέτρος ολοκλήρωσε τις σπουδές του στα Μαθηματικά το 2010. Απέκτησε μεταπτυχιακό δίπλωμα στην Εφαρμοσμένη Πληροφορική και εργάζεται ως μαθηματικός από το 2012 σε δικό του φροντιστήριο Μαθηματικών. Διδάσκει Μαθηματικά στη Β΄ και Γ΄ Λυκείου σε τμήματα Γενικής Εκπαίδευσης και ΕΠΑΛ και έχει αναθέσει τις υπόλοιπες τάξεις σε άλλους καθηγητές.

Αποφάσισε να λειτουργήσει το δικό του φροντιστήριο κυρίως γιατί ήθελε να είναι *"κύριος του εαυτού του"* και επιθυμούσε να πραγματοποιεί τις παραδόσεις των μαθημάτων με τον δικό του τρόπο χωρίς να έχει άγχος για το αν παρεκκλίνει από το Πρόγραμμα Σπουδών. "*Στην πορεία βέβαια αφού δεν είχα παρακολουθήσει κανένα μάθημα παιδαγωγικής ή διδακτικής, αντιλήφθηκα ότι είχα μεγάλη δυσκολία να αντιμετωπίσω προβλήματα που προέκυπταν κατά τη διάρκεια του μαθήματος….για το λόγο αυτό άρχισα να διαβάζω συγγράμματα σχετικά με τη διδακτική γενικότερα"*.

Απαντήσεις του Πέτρου στο τεστ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1

α) Έστω μια συνάρτηση f(x) η οποία ορίζεται "όσο πιο κοντά θέλουμε στο x_0" δηλαδή σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0), (x_0, β) ή (α, x_0)U (x_0,β). Όταν οι τιμές της f(x) προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό α, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο το x_0, γράφουμε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ *και διαβάζεται ως " το όριο της f(x) χ τείνει στο x_0 είναι ίσο με α".*



β)

1) Έστω συνάρτηση f(x)=lnx, x>0.

Προφανώς η συνάρτηση δεν δέχεται την τιμή 0 στο πεδίο ορισμού της, επομένως με την έννοια του ορίου μπορούμε να δούμε πως καθώς το x πλησιάζει από τα δεξιά το 0, το όριο της ισούται με -∞.

2) Έστω συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ *με πεδίο ορισμού [0,1)U(1,+∞).*

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2}-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Καθώς το x κινείται πάνω στον x'x προσεγγίζοντας τον αριθμό 1, οι τιμές της f(x) της συνάρτησης f

πλησιάζουν πολύ κοντά στο 1/2. Άρα λέμε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{1}{2}$

γ) Ορισμένες απορίες σχετικά με την έννοια του ορίου, αποτελεί το γεγονός ότι οι μαθητές (τουλάχιστον οι περισσότεροι) αδυνατούν να κατανοήσουν τι σημαίνει "κινείται δεξιά ή αριστερά" το x. Για παράδειγμα παίρνουμε την $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, *Θέλουμε να υπολογίσουμε το* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. .

Πρέπει να διακρίνουμε σε δύο περιπτώσεις : x>1 και x<1 με $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$

αντίστοιχα.

Ένα άλλο παράδειγμα-απορία είναι όταν ζητείται να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ *με f(x) =* x^2*,xεR . Ο μαθητής θα ρωτήσει γιατί απλά δεν υπολογίζουμε το f(1), εφόσον θα βγουν ίδια. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα φυσικά τίθεται το θέμα της συνέχειας σε σημείο* $x_0=1$ *αλλά θα υπάρξουν περιπτώσεις όπου* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$. *Εκεί απαντάμε πως το* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *δηλώνει τις τιμές του x όσο πιο κοντά γίνεται στο* x_0 *ενώ με το f* (x_0) *νοείται ακριβώς η τιμή στο* x_0.

<u>ΕΡΩΤΗΣΗ 2</u>

α)Σε τέτοιου είδους ασκήσεις θεωρούμε βοηθητική συνάρτηση

$g(x) = 4f(x) - 4x + 2$ με $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = -10$

Λύνουμε ως προς $f(x)$ έχοντας

$4f(x) = g(x) + 4x - 2 \Leftrightarrow$

$f(x) = \frac{1}{4}(g(x) + 4x - 2)$

"Βάζουμε όρια κατά μέλη"

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 1}(g(x) + 4x - 2) = \frac{1}{4}(-10 + 4 - 2) = -2$

Δεν γνωρίζουμε αν υπάρχει το όριο της f(x) επομένως δεν μπορώ να κάνω χρήση της ιδιότητας

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x) + g(x)\right] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

εφόσον αυτή εφαρμόζεται μόνο όταν γνωρίζουμε την ύπαρξη των ορίων.

β) Θα έβαζα 4/10 λίαν επιεικώς εφόσον το αποτέλεσμα που βρήκε ο μαθητής είναι σωστό, με λάθος όμως τρόπο.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3

α)

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2 - 4}{x - 2}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\right) = 4$$

Στόχος της άσκησης είναι η κατανόηση της απροσδιοριστίας 0/0 καθώς και η εξάλειψη αυτής προκειμένου να υπολογισθεί το όριο.

β) Προφανώς δεν μπόρεσε να χρησιμοποιήσει την $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$

επομένως μετά την εξάλειψη της απροσδιοριστίας χρησιμοποίησε την ιδιότητα

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x) + g(x)\right] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

γ,δ) Θα επισημαίναμε και θα τονίζαμε την απροσδιοριστία 0/0 εφόσον η αναγνώριση ουσιαστικά της οποιασδήποτε απροσδιοριστίας είναι η πεμπτουσία των ασκήσεων στα όρια.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Διδακτικά θα ορίζαμε νέα συνάρτηση

$h(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{3 - x}, x \in (-\infty, -3) \cup [3, +\infty)$ και $x \leq 3$

Θα βρούμε πεδίο ορισμού της $h(x), Ah = (-\infty, -3]$

Επομένως το $\lim_{x \to 3}(f(x) + g(x))$ δεν ορίζεται εφόσον $3 \exists Ah$

ΕΡΩΤΗΣΗ 5

α) Ο μαθητής κάνει λάθος στο σημείο που αθροίζει τα $\lim_{x \to \infty} \eta\mu x$ *εφόσον το όριο δεν γνωρίζει ότι δεν υπάρχει.*

β) Αρκετά συνηθισμένο, οφείλεται στη μη καλή γνώση της θεωρίας όσον αφορά την ύπαρξη των ορίων.

γ) Θα εξηγούσα πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα

$\lim_{x \to \infty}(f(x) + g(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) + \lim_{x \to \infty} g(x)$

μόνο όταν γνωρίζουμε την ύπαρξη των ορίων. Άλλωστε αν επρόκειτο για την επίλυση του ορίου

$\lim_{x \to \infty}(\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x)$ *πρόκειται για μια συνάρτηση με xeR που ως γνωστόν είναι σταθερή με*

$g(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x = 1$

δ) Το παραπάνω λάθος του μαθητή θα μπορούσε να αξιοποιηθεί σε ερωτήσεις Σ-Λ σε διαγώνισμα ή σε προτάσεις Αληθής-Ψευδής όπου χρήζει η ανάγκη αντιπαραδείγματος.

Η ΠΑΔΑΓΩΓΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ (ΠΓΠ) ΤΟΥ ΠΕΤΡΟΥ

Προκειμένου να καταταχτούν οι γνώσεις του Πέτρου αναπτύσσονται οι βασικές κατηγορίες των παιδαγωγικών και διδακτικών γνώσεων (ΠΓΠ), δηλαδή η ΓΠΜ, ΓΠΔ και ΓΠΑΠ.

Γνώση του περιεχομένου και των μαθητών (ΓΠΜ)

Γνώση των παρανοήσεων

Ο Πέτρος στις περισσότερες απαντήσεις που έδωσε φάνηκε να αναγνωρίζει τα λάθη που κάνουν οι μαθητές κατά την επίλυση ασκήσεων με όρια.

"Ο μαθητής κάνει λάθος στο σημείο που αθροίζει τα $\lim_{x\to\infty}\eta\mu x$ *εφόσον το όριο δεν γνωρίζει ότι δεν υπάρχει."*

Ακόμη και στην δεύτερη ερώτηση που δίνει απευθείας την απάντηση που θα έδινε στους μαθητές

Θεωρώ συνάρτηση

$g(x)=4f(x)-4x+2$ με $\lim_{x\to 1} g(x)=-10$

Λύνουμε ως προς $f(x)$ έχοντας

$4f(x)=g(x)+4x-2 \Leftrightarrow$

$f(x)=\frac{1}{4}(g(x)+4x-2)$

"Βάζουμε όρια κατά μέλη"

$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{1}{4}\lim_{x\to 1}(g(x)+4x-2)=\frac{1}{4}(-10+4-2)=-2$

παρατηρεί ότι από τη στιγμή που δεν γνωρίζουμε την ύπαρξη των ορίων, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα. Ωστόσο στο ερώτημα τρία από την απάντηση του για το στόχο της άσκησης, *"στόχος της άσκησης είναι η κατανόηση της απροσδιοριστίας καθώς και η εξάλειψη αυτής προκειμένου να υπολογισθεί το όριο"* καταλαβαίνουμε και την δική του παρανόηση σχετικά με τη λύση της κάτι που αναπόφευκτα οδηγεί στην μη άρση της συγκεκριμένης παρανόησης των μαθητών.

Για τον Πέτρο οι κύριες παρανοήσεις των μαθητών με τα όρια σχετίζονται άμεσα με τις απορίες που εκφράζουν μέσα στην αίθουσα. Η πρώτη παρανόηση αφορά την μη κατανόηση των μαθητών σχετικά με τη φράση « κινείται δεξιά ή αριστερά το x » ενώ η δεύτερη αφορά στην αντίληψη των μαθητών ότι η τιμή της συνάρτησης σε ένα σημείο είναι ίση με το όριο της σε αυτό.

Ικανότητα του δασκάλου να κατανοεί και να ερμηνεύει το σκεπτικό ενός μαθητή

Η κατανόηση του τρόπου σκέψης των μαθητών είναι στενά συνδεδεμένη με την αναγνώριση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν και τα αίτια που προκαλούν αυτές τις δυσκολίες.

''Αυτό που έχω καταλάβει είναι η αδυναμία τους να αντιμετωπίσουν το άπειρο. Πολύ σπάνια έχουν δει στη μαθηματική τους ζωή προβλήματα που σχετίζονται με το άπειρο. Έτσι θεωρώ ότι εξηγούνται ως ένα σημείο οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν με την έννοια του ορίου γενικότερα.''

''...« και που θα μου χρησιμεύσουν τα όρια; » νομίζω ότι αυτή η ερώτηση που μου θέτουν τόσο συχνά οι μαθητές κρύβει περισσότερο νόημα στο πως διαμορφώνεται η σκέψη τους από όσο νομίζουμε. Δεν είναι τυχαίο που πάντα γίνεται όταν βρισκόμαστε στη θεωρία του ορίου και όχι όταν λύνουμε ασκήσεις. Έρχονται αντιμέτωποι με σύμβολα όχι απλά άγνωστα αλλά που πίσω κρύβουν βαθιές έννοιες. Αυτός νομίζω είναι και ο λόγος που οι μαθητές έχουν μια αλγεβρική προσέγγιση για τα όρια, δηλαδή απλά λύνουν αλγεβρικές ασκήσεις χωρίς να θεωρούν απαραίτητη την πλήρη κατανόηση της έννοιας του ορίου.''

Από τα παραπάνω αποσπάσματα φαίνεται ότι ο Πέτρος αποδίδει τη συλλογιστική πορεία του μαθητή στην προηγούμενη εμπειρία του με τα μαθηματικά και την απουσία της έννοιας του άπειρου σε αυτά, στο ότι ο τυπικός ορισμός του ορίου περιλαμβάνει συνθήκες με πολλές μεταβλητές, αλλά τονίζει κυρίως μια σημαντική τοποθέτηση των μαθητών ότι τα μαθηματικά δεν έχουν νόημα άρα δεν έχει νόημα η θεωρία πίσω από τα μαθηματικά γεγονότα.

Γνώση των θεμάτων που μπορεί να βρίσκουν οι μαθητές ενδιαφέροντα

Σύμφωνα με τον Πέτρο οι μαθητές ενδιαφέρονται για οτιδήποτε μπορεί να συνδέει τα μαθηματικά με την πραγματική ζωή και τα καθημερινά προβλήματα. Έτσι ισχυρίζεται ότι προβλήματα από τη Φυσική προκαλούν το ενδιαφέρον των μαθητών περισσότερο από οτιδήποτε άλλο. *''Από τις μικρές τάξεις ακόμη, παρατηρώ ότι την ίδια στιγμή που βαριούνται, μόλις αναφέρω παραδείγματα μαθηματικών που έχουν άμεση σχέση με καταστάσεις της ζωής, κατευθείαν ζωντανεύουν και συμμετέχουν στο μάθημα. Έχω βρει ένα βίντεο που δείχνει καταστάσεις της καθημερινότητας οι οποίες κρύβουν μέσα συναρτήσεις,γραφικές παραστάσεις και όλα αυτά που αποφεύγουν. Με αυτό το βίντεο όλοι τρελαίνονται.''*

Ο Πέτρος ωστόσο στην ανάλυση που έκανε στο τεστ για τον τρόπο που εισάγει την έννοια του ορίου δεν έδειξε σε κανένα σημείο να χρησιμοποιεί τέτοιου είδους παραδείγματα (Φυσική). Στην ερώτηση που του τέθηκε η οποία ήταν άμεση με αυτό το συμπέρασμα, αποκάλυψε ότι *''με τα όρια δεν ξέρω τι παραδείγματα να δώσω. Εντάξει τους λέω για τη στιγμιαία ταχύτητα κάποιες φορές, αλλά νομίζω ότι δεν αρκεί για να τονίσει το ενδιαφέρον τους''*.

Γνώση προϋποθέσεων για να διευκολυνθεί η κατανόηση των μαθητών

Ο Πέτρος αναφέρθηκε μόνο σε μία προϋπόθεση η οποία αφορά στον ίδιο τον μαθητή. *"Το σωστό διάβασμα είναι απαραίτητο για να μην υπάρξει προβληματική κατανόηση. Ο μαθητής πρέπει να ξέρει πώς να διαβάσει, πρέπει να εξασκηθεί λύνοντας ασκήσεις, γιατί "στη θεωρία" όλοι γνωρίζουμε μια λύση αλλά όταν έρχεται η ώρα να τη γράψουμε, δεν μπορούμε. Το να διαβάζει παπαγαλία μια απόδειξη δεν βοηθάει ποτέ, πρέπει να την εμπεδώσει πρώτα, να την κάνει δική του για να μπορέσει να τη μάθει."*

Το απόσπασμα αυτό είναι το μόνο που χαρακτηρίζει τη συγκεκριμένο κριτήριο ωστόσο αποτελεί έναν ακόμη δείκτη για τον έλεγχο της ΠΓΠ του Πέτρου.

Γνώση του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας (ΓΠΔ)

Χρήση ανταγωνιστικών ισχυρισμών

Το μοναδικό σημείο στις απαντήσεις του Πέτρου που αναδεικνύει χρήση ανταγωνιστικών ισχυρισμών είναι η απάντηση του στην Ερώτηση 5.

"Το παραπάνω λάθος θα μπορούσε να αξιοποιηθεί σε ερωτήσεις Σ – Λ ή σε προτάσεις Αληθής-Ψευδής όπου χρήζει η ανάγκη αντιπαραδείγματος"

Σύμφωνα με τους Hadas και Hershkowitz (2002, όπως αναφέρεται στο Μεταξάς, 2011) οι αντιτιθέμενες λύσεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, δεν βοηθούν στον προβληματισμό και τη διερεύνηση από τους ίδιους αλλά σχηματίζουν ένα ζευγάρι σωστού – λάθους με στόχο την εύρεση των διαφορών, μέθοδος που δεν λειτουργεί βοηθητικά στη μάθηση. Από την άλλη πλευρά ο Πέτρος αναφέρει την εισαγωγή αντιπαραδειγμάτων που θα παρουσίαζε στην διδακτική αξιοποίηση του λάθους του μαθητή, καθώς σύμφωνα με έρευνες, σε μια εκπαιδευτική κατάσταση χρειάζεται η γνωστική σύγκρουση ώστε να γίνει άρση των παρανοήσεων των μαθητών.

Συζήτηση στη διδασκαλία

Ο Πέτρος σε καμία από τις απαντήσεις στο ερωτηματολόγιο που του δόθηκε δεν φαίνεται να υιοθετεί τη συζήτηση στη διδασκαλία του. Σε όλες τις ερωτήσεις δίνει την σωστή απάντηση την ίδια στιγμή, αφαιρώντας από τους μαθητές την ευκαιρία να ανακαλύψουν μόνοι τους τα λάθη.

"Συνήθως οι ερωτήσεις που κάνω είναι εστιασμένες στην προηγούμενη γνώση τους. Λύνοντας για παράδειγμα μια άσκηση στα όρια, θα ρωτήσω για πράγματα που έχουν ήδη διδαχτεί (πχ παραγοντοποίηση)"

Παρόλο που η χρήση της προηγούμενης γνώσης στην παρουσίαση των ορίων, βοηθάει τους μαθητές να επαναλάβουν και να ενισχύσουν την ήδη υπάρχουσα γνώση, ο Πέτρος δεν την συνδέει με τα όρια με αποτέλεσμα οι μαθητές να μην εμβαθύνουν στη νέα γνώση .

Σύνδεση με άλλα πεδία εντός κι εκτός των μαθηματικών

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο ο Πέτρος στην ανάλυση που έκανε στο τεστ για τον τρόπο που εισάγει την έννοια του ορίου καθώς και στις υπόλοιπες απαντήσεις του, δεν έδειξε σε κανένα σημείο τη σύνδεση με άλλα πεδία εντός κι εκτός των μαθηματικών. Στην ερώτηση που του τέθηκε η οποία ήταν άμεση με αυτό το συμπέρασμα, αποκάλυψε ότι *"με τα όρια δεν ξέρω τι παραδείγματα να δώσω. Εντάξει τους λέω για τη στιγμιαία ταχύτητα κάποιες φορές..."*

Η έλλειψη των συνδέσεων στη μεθοδολογία του Μιχάλη φαίνεται ότι οφείλεται στην άγνοια του για τη δημιουργία αυτών και στην πεποίθηση του ότι *"οι μαθητές πρέπει να έρχονται αντιμέτωποι με συγκεκριμένα παραδείγματα και μεθοδολογίες προκειμένου να κατανοήσουν πλήρως τα όρια"*.

Ιστορική ανακατασκευή εννοιών

Σε κανένα σημείο στις απαντήσεις του ερωτηματολογίου δεν προέκυψαν στοιχεία που να φανερώνουν τη χρήση της ιστορικής ανακατασκευής της έννοιας του ορίου στις διδακτικές μεθόδους του Πέτρου.

"Μου αρέσει η ιστορία των μαθηματικών. Από μαθητής. Θεωρώ ότι οι μαθητές έχουν αρνητική στάση απέναντι στα μαθηματικά και η ιστορία των εννοιών θα τους βοηθούσε να βρουν νόημα και να μαθαίνουν από ενδιαφέρον κι όχι επειδή πρέπει. Με τα όρια δεν το καταφέρνω, η Γ΄ Λυκείου είναι τόσο απαιτητική τάξη που ρίχνω όλο το βάρος αλλού. Στις μικρότερες τάξεις είναι αλλιώς. Δεν υπάρχει άγχος, συχνά προσπαθώ να κάνω ένα ταξίδι πίσω".

Στο παραπάνω απόσπασμα φαίνεται ότι ο Πέτρος υιοθετεί τη μέθοδο αυτή, ωστόσο την εφαρμόζει στις υπόλοιπες τάξεις της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και στις υπόλοιπες έννοιες κι όχι σε αυτήν που μελετάμε.

Διδασκαλία του φορμαλιστικού τρόπου διατύπωσης

Η διδασκαλία του φορμαλιστικού τρόπου διατύπωσης αποτελεί μέρος της διδασκαλίας του Πέτρου. Ωστόσο από τις απαντήσεις του φαίνεται ότι δεν ακολουθεί μια κλιμακωτή πορεία ώστε να καταφέρουν οι μαθητές να κατανοήσουν σταδιακά την έννοια του ορίου. Από το εισαγωγικό μάθημα που σχεδιάζει και πραγματοποιεί στην τάξη για την έννοια του ορίου συνάρτησης φαίνεται ότι δεν επιδιώκει τη διαισθητική κατανόηση των μαθητών.

"Έστω μια συνάρτηση f(x) η οποία ορίζεται "όσο πιο κοντά θέλουμε στο x_0" δηλαδή σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0), (x_0, β) ή (α, x_0)U (x_0,β). Όταν οι τιμές της f(x) προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό α, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο το x_0, γράφουμε και διαβάζεται ως " το όριο της f(x) χ τείνει στο x_0 είναι ίσο με α".

Ο Πέτρος από την πρώτη στιγμή εισάγει τους μαθητές στον ορισμό του ορίου, συνεχίζει με την απόκτηση μεθόδων εύρεσής του με την ελπίδα ότι η κατανόηση της έννοιας θα έρθει αργότερα.

Χρήση διδακτικών παραδειγμάτων

Κατά την εισαγωγή της έννοιας του ορίου ο Πέτρος κάνει χρήση των παρακάτω δύο παραδειγμάτων:

1) Έστω συνάρτηση f(x)=lnx, x>0.

Προφανώς η συνάρτηση δεν δέχεται την τιμή 0 στο πεδίο ορισμού της, επομένως με την έννοια του ορίου μπορούμε να δούμε πως καθώς το x πλησιάζει από τα δεξιά το 0, το όριο της ισούται με -∞.

2) Έστω συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ *με πεδίο ορισμού [0,1)U(1,+∞).*

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2}-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Καθώς το x κινείται πάνω στον x'x προσεγγίζοντας τον αριθμό 1, οι τιμές της f(x) της συνάρτησης f πλησιάζουν πολύ κοντά στο 1/2. Άρα λέμε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{1}{2}$

Το πρώτο παράδειγμα που χρησιμοποιεί αποσκοπεί στην παρανόηση των μαθητών ότι το σημείο x_0 πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και ότι σε διαφορετική περίπτωση το όριο δεν έχει κανένα νόημα. Το δεύτερο παράδειγμα είναι μια απλή εφαρμογή του ορίου όπου με κατάλληλες διαδικασίες άρει την απροσδιοριστία και αντικαθιστά στο x το x_0. Τα συγκεκριμένα παραδείγματα περιορίζονται σε στενά διδακτικά πλαίσια και δεν συμβάλλουν στην ανάπτυξη μιας σφαιρικής κατανόησης των ορίων.

Σε όλες τις υπόλοιπες απαντήσεις του ο Πέτρος υποδεικνύει στους μαθητές τις σωστές λύσεις χωρίς να δίνει παραδείγματα που προσφέρουν την καλύτερη κατανόηση. Συνολικά σε καμία περίπτωση δεν χρησιμοποιεί παραδείγματα προκειμένου να βοηθήσει τους μαθητές κι αυτό είναι ένα από τα πολύ σημαντικά χαρακτηριστικά της ΓΠΔ καθώς φανερώνει μια έλλειψη γνωστικής δομής διδακτικού περιεχομένου.

Γνώση του Περιεχομένου και του Αναλυτικού προγράμματος (ΓΠΑΠ)

Γνώση του περιεχομένου και της διδακτικής ακολουθίας του σχολικού βιβλίου

Το παρακάτω απόσπασμα από την συνέντευξη του Πέτρου δείχνει μια ανίσχυρη ποιοτικά γνώση του σχολικού βιβλίου της Γ΄ Λυκείου:

"Το βιβλίο προφανώς απευθύνεται σε μαθητές με ειδίκευση στα Μαθηματικά. Πέρα από μάθημα βαρύτητας, είναι κι ένα μάθημα που θα το έχουν στα Πανεπιστήμια που θα εισαχθούν. Ίσως γι αυτό είναι γραμμένο σε μια πιο αυστηρή γλώσσα σε σχέση με τα παλιότερα βιβλία. Επίσης βλέπεις ότι το κεφάλαιο τον ορίων είναι γεμάτο από αποδείξεις που δεν διδάσκονται ποτέ. Δεν μου ταιριάζει, δεν το χρησιμοποιώ. Λειτουργώ στο φροντιστήριο με βιβλία άλλων συναδέλφων."

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

Προφίλ του εκπαιδευτικού

Η Στέλλα ολοκλήρωσε τις σπουδές της στα μαθηματικά το 1998. Την περίοδο 2000 - 2005 εργαζόταν σε φροντιστήριο Μέσης Εκπαίδευσης διδάσκοντας στις τάξεις Α΄ και Β΄ Λυκείου. Από το 2006 διδάσκει σε σχολείο της δημόσιας εκπαίδευσης ύστερα από την επιτυχία της στις εξετάσεις του ΑΣΕΠ. Τα τελευταία πέντε χρόνια διδάσκει μαθηματικά στη Γ΄ Λυκείου. Σε όλη τη διδακτική της σταδιοδρομία παρέδιδε ιδιαίτερα μαθήματα στις δυο τελευταίες τάξεις του Λυκείου. Έχει λάβει επιμόρφωση και πιστοποίηση ΤΠΕ και έχει παρακολουθήσει αρκετά σεμινάρια διδακτικής των μαθηματικών για παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες.

Κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών της σπουδών έχει παρακολουθήσει δύο μαθήματα διδακτικής των μαθηματικών. Ωστόσο *"για μένα οι γνώσεις σχετικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών, προέρχονται από την εμπειρία μου τόσο στο φροντιστήριο όσο και στην τάξη"*. Παραδέχεται ότι χρειάστηκε αρκετό χρόνο για να εγκλιματιστεί στην πραγματικότητα του σχολείου και στο γεγονός ότι ερχόταν συνεχώς αντιμέτωπη με πλήθος ερωτήσεων και παρανοήσεων των μαθητών. Έτσι ο στόχος της ήταν να βρει μεθόδους που να έκαναν τη διδασκαλία της αποτελεσματικότερη.

Απαντήσεις της Στέλλας στο τεστ

<u>ΕΡΩΤΗΣΗ 1</u>

α) Μια από τις εισαγωγικές δραστηριότητες που χρησιμοποιώ για να προκαλώ το ενδιαφέρον των μαθητών για την έννοια του ορίου αποτελεί κομμάτι της ιστορικής εξέλιξης της έννοιας. Ξεκινάω με ένα πρόβλημα που δε λύνεται με τις γνώσεις που έχουν οι μαθητές μέχρι τη στιγμή που εισάγονται στην έννοια του ορίου. Ένα λοιπόν πρόβλημα είναι αυτό του παράδοξου του Αχιλλέα και της Χελώνας.

« Έχουμε δύο δρομείς, τον Αχιλλέα, που τρέχει γρήγορα, και τη χελώνα, που πάει πιο αργά από τον Αχιλλέα, οι οποίοι συμμετέχουν σε αγώνα δρόμου. Μιας και η χελώνα είναι πιο αργή της χαρίζεται ένα προβάδισμα από τον Αχιλλέα. Για να προσπεράσει ο Αχιλλέας τη χελώνα πρέπει πρώτα να φτάσει στο σημείο από το οποίο η χελώνα ξεκίνησε. Όμως αυτό δεν πρόκειται να γίνει ποτέ όσο η χελώνα συνεχίζει να προχωρά, όσο αργή κι αν είναι. Ώσπου να καλύψει ο Αχιλλέας την απόσταση αυτή, η χελώνα θα έχει προχωρήσει λίγο πιο πέρα. Έτσι ο Αχιλλέας υποχρεούται να διανύσει κι άλλο διάστημα, ως τη νέα θέση της χελώνας. Ώσπου να διατρέξει το νέο αυτό διάστημα, η χελώνα θα έχει

προχωρήσει κι άλλο, στον χρόνο που ο Αχιλλέας χρειάζεται για να φτάσει στο προηγούμενο σημείο.

Ας το δούμε λίγο πιο αναλυτικά και ας θεωρήσουμε ότι ο Αχιλλέας τρέχει με διπλάσια ταχύτητα από τη χελώνα και ότι η χελώνα ξεκινάει με προβάδισμα ενός μέτρου. Στον πρώτο γύρο του αγώνα, ο Αχιλλέας θα καλύψει την απόσταση που τον χώριζε από τη χελώνα, δηλαδή 1 μέτρο, ενώ η χελώνα, που τρέχει με τη μισή ταχύτητα, θα προχωρήσει κατά ½ μέτρο, κι έτσι θα προπορεύεται κατά ½ μέτρο στον επόμενο γύρο. Στο δεύτερο γύρο, ο Αχιλλέας θα καλύψει το μισό αυτό μέτρο, αλλά η χελώνα θα διανύσει ακόμα ¼ του μέτρου, κοκ. Συνοπτικά, για τη διαδρομή του Αχιλλέα σε κάθε γύρο θα έχουμε: (Αφήνουμε τους μαθητές να υπολογίσουν την απόσταση) »

Γύρος	**Κλασματική απόσταση**	**Δεκαδική απόσταση**
1	1	1
2	1/2	0.5
3	1/4	0.25
4	1/8	0.125
5	1/16	0.0625
6	1/32	0.03125
7	1/64	0.015625
8	1/128	0.0078125
9	1/256	0.00390625
10	1/512	0.001953125
11	1/1024	0.0009765625

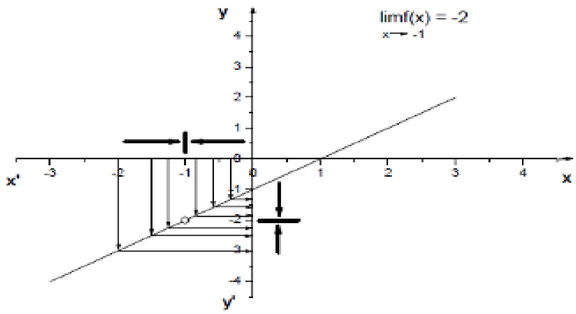
Οι μαθητές συνήθως αντιλαμβάνονται ότι μετά από μόνο 11 γύρους του αγώνα, ο Αχιλλέας θα προχωρά κατά μόνο 1 εκατοστό του εκατοστού. Μετά από άπειρους γύρους, η απόσταση που θα διανύει ο Αχιλλέας θα τείνει στο μηδέν.

Αυτή η θεώρηση μπορεί να δώσει τροφή σε μια σειρά από ενδιαφέρουσες συζητήσεις, όπως για παράδειγμα, αν πραγματικά ο Αχιλλέας θα φτάσει τη χελώνα: αν ακολουθήσουμε την κλασική θεωρία των Μαθηματικών, η απόσταση του Αχιλλέα από τη χελώνα θα μειώνεται συνέχεια, αλλά ποτέ δε θα φτάσει στο μηδέν, μια που όσο κι αν προχωράει, στον ίδιο γύρο η χελώνα έχει διανύσει ένα πρόσθετο, στοιχειώδες βηματάκι. Αυτή ακριβώς είναι και η φυσική σημασία του ορίου μιας συνάρτησης στα Μαθηματικά: η τιμή της συνάρτησης μπορεί να πλησιάζει την οριακή τιμή, δηλαδή το μηδέν, αν κοιτάξουμε την απόσταση που διανύει σε κάθε βήμα ο Αχιλλέας, αλλά δε θα γίνει ποτέ πραγματικά ίση *με αυτό.*

Μέσα από τη συζήτηση προκύπτει η ανάγκη εισαγωγής της έννοιας του ορίου και δίνω έναν διαισθητικά ορισμό του ορίου «Έστω f(x) μια συνάρτηση και x_0, l πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε το f(x) είναι οσοδήποτε κοντά στο l όταν το x είναι κατάλληλα κοντά στο x_0.»

Επιπλέον μέσω γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων βοηθώ στην εισαγωγή της έννοιας.

Παράδειγμα:



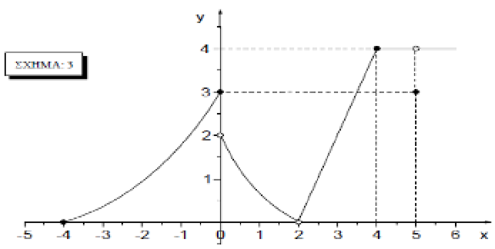
$$f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$$

x	-2	-1,1	-1,01	-1,001	…	-0,999	-0,99	-0.9	0
f(x)	-3	-2,1	-2,01	-2,001	…	-1,999	-1,99	-1,9	-1

β)

1) *Να βρείτε το* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *(αν υπάρχει) όπου η f έχει πεδίο ορισμού το [-4, +∞) και γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για*

   α) $x_0 = -4$, *β)* $x_0=0$, *γ)* $x_0=2$, *δ)* $x_0=4$, *ε)* $x_0=5$



Στόχος της άσκησης αυτής είναι να μπορέσουν οπτικά οι μαθητές να κατανοήσουν πότε μπορεί να έχει νόημα ένα όριο. Οι μαθητές κοιτάζουν τα πλευρικά όρια για να διαπιστώσουν εάν το όριο κάθε συνάρτησης υπάρχει. Στο ερώτημα δ μπορούν εύκολα να δουν ότι το όριο της συνάρτησης στο x_0 δεν *είναι η αριθμητική τιμή που παίρνει η συνάρτηση για $x=x_0$.*

2) Να χαραχθεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια της να βρεθεί αν υπάρχει

το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *όταν:* $\alpha) f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}, x_0=1$ $\quad \beta) f(x)=\begin{cases} x^2, x\geq 0 \\ -x, x<0 \end{cases}, x_0=0$

Οι μαθητές εδώ έχουν την ευκαιρία να σχεδιάσουν οι ίδιοι τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων. Μέσα από την οπτική αναπαράσταση μπορούν απευθείας να καταλάβουν τι συμβαίνει με τα πλευρικά όρια.

3) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x-3}+8$ και $g(x)=\sqrt{x^2-7x+12}+3$. *Τι συμπεραίνετε για το* $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ *;*

Στόχος της άσκησης είναι να παρακινηθούν οι μαθητές στην αναζήτηση ύπαρξης των ορίων πριν εφαρμόσουν κάποια ιδιότητα.

γ) Μερικές από τις παρανοήσεις που αναπτύσσουν οι μαθητές για την έννοια του ορίου είναι οι εξής:

- *το όριο της συνάρτησης στο x_0 είναι η αριθμητική τιμή που παίρνει η συνάρτηση για $x=x_0$.*
- *το σημείο x_0 πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης γιατί διαφορετικά το όριο δεν έχει νόημα.*
- *Παρανοήσεις σχετικά με τις λέξεις «τείνει προς» και «όριο»*

ΕΡΩΤΗΣΗ 2

α) Ο μαθητής ξεκάθαρα εφάρμοσε την ιδιότητα $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ *χωρίς να γνωρίζει αν το όριο της f(x) υπάρχει. Λάθος το οποίο είναι συχνό φαινόμενο στις τάξεις μου. Συνήθως δίνω παραδείγματα ορίων που δεν υπάρχουν όταν χωρίζονται σύμφωνα με την ιδιότητα. Εκεί οι μαθητές έρχονται σε σύγκρουση και εύκολα αντιλαμβάνονται ότι δεν μπορούν να εφαρμόσουν* *ιδιότητες μηχανικά και αυθαίρετα. Στο τέλος θα έδινα τη σωστή λύση η οποία προϋποθέτει να θέσουμε νέα συνάρτηση.*

β) Δυστυχώς θα έβαζα 0. μέσα από την ερώτηση αυτή, επιδιώκεται να δούμε αν οι μαθητές ελέγχουν πρώτα την ύπαρξη ξεχωριστών ορίων πριν καταφύγουν στις ιδιότητες. Συνεπώς η άσκηση είναι λάθος.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3

α) Ο στόχος της άσκησης θα μπορούσε να διαφέρει από καθηγητή σε καθηγητή. Στόχος της άσκησης θα μπορούσε να είναι ο προβληματισμός για το αν δύο διαφορετικές συναρτήσεις μπορούν να έχουν το ίδιο όριο. Στόχος για κάποιον άλλον όμως θα μπορούσε να είναι το αν οι μαθητές μπορούν να ξεπεράσουν μια απροσδιοριστία κάνοντας παραγοντοποίηση.

β) Οπτικά φαίνεται ότι ο μαθητής δεν έχει χρησιμοποιήσει κάποια ιδιότητα των ορίων και στηρίζεται την αλγεβρική μέθοδο επίλυσής του. Κάνει απλή αντικατάσταση του 2 στη θέση του x. Ίσως νοερά πριν τη παραγοντοποίηση να προσπάθησε να πάρει τα επιμέρους όρια του πηλίκου, να εντόπισε απροσδιοριστία στον παρονομαστή άρα αδυναμία εφαρμογής της ιδιότητας. Οπτικά στη λύση του μαθητή όμως κάτι τέτοιο δεν είναι φανερό.

γ) Η άσκηση αποτελεί ένα κλασσικό παράδειγμα όπου δύο συναρτήσεις διαφορετικές, που όμως η μια προάγει την άλλη, έχουν το ίδιο όριο σε ένα σημείο. Το συμπέρασμα αυτό θα μπορούσε να συζητηθεί στην τάξη.

δ) Θα μπορούσαν να σχεδιαστούν οι δύο συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ και $g(x)=x+2$ *στο ίδιο γράφημα για να δουν οι μαθητές την εικόνα των σημείων που βρίσκονται κοντά στο 2.*

ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Είναι φανερό ότι ο μαθητής δεν έλεγξε τις απαραίτητες προϋποθέσεις και την ύπαρξη ξεχωριστών ορίων πριν καταφύγει στην ιδιότητα. Μετά την απάντηση του μαθητή θα μπορούσε να γίνει διάλογος μέσα στην τάξη για το αν αυτή η απάντηση θεωρείται λάθος ή σωστή. Έτσι και οι υπόλοιποι μαθητές θα μπορέσουν να εκφέρουν την άποψή τους και να έχουμε μια ίσως πλησιέστερη εικόνα για τις παρανοήσεις των μαθητών.

Έπειτα στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα έδινα τις γραφικές παραστάσεις των 2 συναρτήσεων για να φανεί το πεδίο στο οποίο ορίζονται από εκεί. Οι μαθητές θα διαπιστώσουν από την εικονική *αναπαράσταση ότι δεν έχει νόημα η αναζήτηση ορίου σε σημείο όπου δεν μπορούν να υπολογιστούν τα εκατέρωθεν όρια. Θα εξηγούσα το νόημα της ύπαρξης των ορίων για να μπορεί να υπάρχει το όριο του αθροίσματος των συναρτήσεων.*

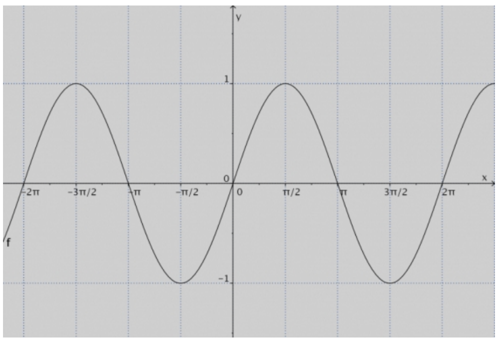
ΕΡΩΤΗΣΗ 5

α) Είναι γνωστό ότι το $\lim_{x\to\infty} \eta\mu(x)$ *δεν υπάρχει. Ο μαθητής ξεκινάει από λάθος υπόθεση, υπολογίζει ένα όριο που δεν υπάρχει κι έτσι βγάζει λανθασμένο συμπέρασμα. Εάν ξεκινούσε τη λογική του με το να υποθέσει ότι υπάρχει το* $\lim_{x\to\infty} \eta\mu(x)$ *θα έβλεπε καθαρά ότι καταλήγει σε άτοπο και θα έβγαζε τα κατάλληλα συμπεράσματα του. Σε όλο το συλλογισμό του έχει φανεί ότι δεν ελέγχει πουθενά την ύπαρξη του ορίου.*

β) Είναι φανερό ότι οι μαθητές σπάνια έρχονται αντιμέτωποι στον υπολογισμό ορίων που δεν υπάρχουν. Οι μαθητές συνηθίζουν την εύρεση κάθε ορίου χωρίς προηγούμενο έλεγχο ύπαρξης του. Έτσι το λάθος αυτό είναι συχνό φαινόμενο σε μια σχολική τάξη.

γ) Αρχικά θα έδινα το λόγο στους υπόλοιπους μαθητές για έναν εποικοδομητικό διάλογο. Αφού ακουστεί κάθε άποψη και συγκεντρωθούν οι απορίες των μαθητών θα μπορούσε να ειπωθεί ότι δεν ελέγχθηκε ποτέ η ύπαρξη του ορίου. Με την εις άτοπον απαγωγή και με την ίδια διαδικασία που ακολούθησε ο μαθητής, θα αποδειχθεί η μη ύπαρξη του ορίου.

δ) *Το παραπάνω λάθος του μαθητή θα μπορούσε να αξιοποιηθεί στη διδασκαλία. Μέσω της γραφικής παράστασης του ημx ο μαθητής θα οδηγηθεί στην εικασία ότι το όριο δεν υπάρχει. Θα δείξουμε λοιπόν στους μαθητές τη σημασία που έχει η εικονική αναπαράσταση μιας συνάρτησης.*



Η ΠΑΔΑΓΩΓΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ (ΠΓΠ) ΤΗΣ ΣΤΕΛΛΑΣ

Προκειμένου να καταταχτούν οι γνώσεις της Στέλλας αναπτύσσονται οι βασικές κατηγορίες των παιδαγωγικών και διδακτικών γνώσεων (ΠΓΠ), δηλαδή η ΓΠΜ, ΓΠΔ και ΓΠΑΠ.

Γνώση του περιεχομένου και των μαθητών (ΓΠΜ)

Γνώση των παρανοήσεων

Η Στέλλα σε όλες τις απαντήσεις της αναγνωρίζει σωστά τα λάθη των μαθητών.

- *"Ο μαθητής ξεκάθαρα εφάρμοσε την ιδιότητα* $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$ *χωρίς να γνωρίζει αν το όριο της f(x) υπάρχει..."*
- *"Είναι φανερό ότι ο μαθητής δεν έλεγξε τις απαραίτητες προϋποθέσεις και την ύπαρξη ξεχωριστών ορίων πριν καταφύγει στην ιδιότητα."*
- *"Ο μαθητής ξεκινάει από λάθος υπόθεση, υπολογίζει ένα όριο που δεν υπάρχει κι έτσι βγάζει λανθασμένο συμπέρασμα. Εάν ξεκινούσε τη λογική του με το να υποθέσει ότι υπάρχει το* $\lim_{x\to\infty} \eta\mu(x)$ *θα έβλεπε καθαρά ότι καταλήγει σε άτοπο και θα έβγαζε τα κατάλληλα συμπεράσματα του. Σε όλο το συλλογισμό του έχει φανεί ότι δεν ελέγχει πουθενά την ύπαρξη του ορίου."*

Πέρα από την αναγνώριση των λαθών αναγνωρίζει τρεις από τις συνηθέστερες παρανοήσεις των μαθητών και τονίζει ότι τις παρανοήσεις αυτές τις αντικρίζει όλα τα χρόνια της μαθηματικής της σταδιοδρομίας.

- *το όριο της συνάρτησης στο* x_0 *είναι η αριθμητική τιμή που παίρνει η συνάρτηση για* $x=x_0$.
- *το σημείο* x_0 *πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης γιατί διαφορετικά το όριο δεν έχει νόημα.*
- *Παρανοήσεις σχετικά με τις λέξεις «τείνει προς» και «όριο»*

"Θεωρώ ότι οι παρανοήσεις παρεμποδίζουν σε μεγάλο βαθμό την κατανόηση θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών. Πρέπει να καταπολεμούνται γιατί επηρεάζουν σημαντικά ακόμη και την μάθηση που επέρχεται. Η κατανόηση των ορίων είναι προαπαιτούμενη για όλη την Ανάλυση. Το να γνωρίζω που αδυνατούν οι μαθητές με βοηθάει στο σχεδιασμό του μαθήματος"

Ικανότητα του δασκάλου να κατανοεί και να ερμηνεύει το σκεπτικό ενός μαθητή

Στο παρακάτω απόσπασμα η Στέλλα αναφέρεται στην συνήθεια των μαθητών και ουσιαστικά στην προηγούμενη εμπειρία τους. Θεωρεί ότι οι μαθητές δεν θα σκεφτούν ότι μπορεί η άσκηση να είναι μια παγίδα για εκείνους, κάτι που δεν έχουν ξαναδεί.

"*Είναι φανερό ότι οι μαθητές σπάνια έρχονται αντιμέτωποι στον υπολογισμό ορίων που δεν υπάρχουν. Οι μαθητές συνηθίζουν την εύρεση κάθε ορίου χωρίς προηγούμενο έλεγχο ύπαρξής του. Έτσι το λάθος αυτό είναι συχνό φαινόμενο σε μια σχολική τάξη.''*

''Εργαζόμουν σε φροντιστήριο και ξέρω πόσο πιο διαδικαστική είναι η διδασκαλία εκεί. Οι μαθητές λύνουν ένα πλήθος ασκήσεων στα όρια, έχουν μάθει μηχανικά πια να τα λύνουν, έρχονται στο σχολείο και πέφτουν σε μια τέτοια άσκηση. Ποτέ δεν θα ελέγξουν.''

Κατά τη διάρκεια της συζήτησης με τη Στέλλα, αναφέρθηκε στις διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την έννοια του ορίου και του απείρου, έννοιες άμεσα συσχετιζόμενες.

''Οι μαθητές από μικρή ηλικία έχουν σχηματίσει μια εικόνα για το όριο. Έχουν μάθει ότι η λέξη όριο σχετίζεται με κάτι πεπερασμένο και αυτό τους οδηγεί στο να πιστεύουν ότι το όριο είναι ακριβώς το αντίθετο από το άπειρο. Αυτή η προϋπάρχουσα άποψη, δεν συμπεριλαμβάνεται πουθενά στο σχολικό βιβλίο. Οφείλω εγώ να κάνω ξεκάθαρη την διαφορά''.

Θα μπορούσε να ειπωθεί ότι η Στέλλα, αν και σε λίγα σημεία, προχωράει σε μια βαθύτερα ερμηνεία του σκεπτικού των μαθητών.

Γνώση των θεμάτων που μπορεί να βρίσκουν οι μαθητές ενδιαφέροντα

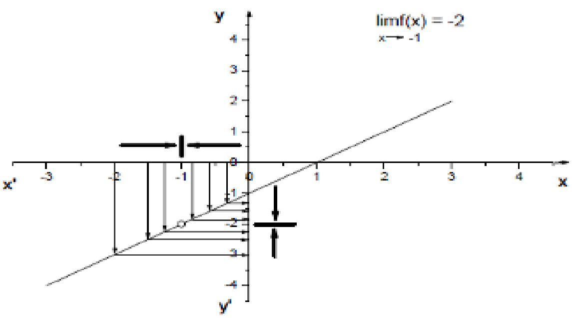
Σύμφωνα με τη Στέλλα όλη της η διδασκαλία στα όρια είναι βασισμένη στα θέματα που οι μαθητές βρίσκουν ενδιαφέροντα.

''Η έννοια του ορίου είναι δύσκολη, αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές πρέπει να αντιμετωπίσουν διαφορετικές κι ενδιαφέρουσες καταστάσεις και να ξεφύγουν από τις συνηθισμένες. Βρες τι είναι ενδιαφέρον και δώσε του πνοή! Οι μαθητές ενδιαφέρονται πολύ για οτιδήποτε μπορεί να θυμίζει πραγματικές καταστάσεις χωρίς τυπικούς συμβολισμούς. Όταν εισάγω την έννοια του ορίου, ένα από τα παραδείγματα που δίνω είναι αυτό με τον Αχιλλέα και τη χελώνα. Από την πρώτη φορά που το συζήτησα σε μια τάξη μέχρι και τώρα, διαπιστώνω το αμείωτο ενδιαφέρον των μαθητών. Αυτό το παράδοξο έρχεται σε αντίθεση με το σίγουρο, το δεδομένο.''

"Θεωρώ ότι πολύ σημαντικό ρόλο έχουν οι γραφικές παραστάσεις. Μέσω της εικόνας δημιουργούνται ευκολότερα εικόνες στο μυαλό των μαθητών. Δυστυχώς στο σχολείο δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω υπολογιστή και τα διαθέσιμα λογισμικά όπως το Geogebra, σε κάθε μου παράδειγμα όμως δίνω την εικόνα της συνάρτησης μέσα από τις γραφικές παραστάσεις. Οι μαθητές καταλαβαίνουν κι όταν καταλαβαίνουν όλα κατακτώνται πιο εύκολα."

Η σημασία που δίνει η Στέλλα στο ρόλο των αναπαραστάσεων φαίνεται και σε κάποιες από τις απαντήσεις της στο ερωτηματολόγιο που της δόθηκε.

➢ *Επιπλέον μέσω γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων βοηθώ στην εισαγωγή της έννοιας. Παράδειγμα:*



$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$$

➢ *Θα μπορούσαν να σχεδιαστούν οι δύο συναρτήσεις* $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ και $g(x) = x+2$ *στο ίδιο γράφημα για να δουν οι μαθητές την εικόνα των σημείων που βρίσκονται κοντά στο 2.*

➢ *Έπειτα στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα έδινα τις γραφικές παραστάσεις των 2 συναρτήσεων για να φανεί το πεδίο στο οποίο ορίζονται από εκεί. Οι μαθητές θα διαπιστώσουν από την εικονική αναπαράσταση ότι δεν έχει νόημα η αναζήτηση ορίου σε σημείο όπου δεν μπορούν να υπολογιστούν τα εκατέρωθεν όρια*

➢ *Το παραπάνω λάθος του μαθητή θα μπορούσε να αξιοποιηθεί στη διδασκαλία. Μέσω της γραφικής παράστασης του ημx ο μαθητής θα οδηγηθεί στην εικασία ότι το όριο δεν υπάρχει. Θα δείξουμε λοιπόν στους μαθητές τη σημασία που έχει η εικονική αναπαράσταση μιας συνάρτησης.*

Γνώση προϋποθέσεων για να διευκολυνθεί η κατανόηση των μαθητών

Για τη Στέλλα η βασική προϋπόθεση για να διευκολυνθεί η κατανόηση των μαθητών πηγάζει από τους ίδιους τους καθηγητές, την αποτελεσματική διδασκαλία τους και τις γνώσεις που διαθέτουν. *''Ναι εννοείται ότι οι μαθητές πρέπει να ξέρουν πώς να διαβάζουν σωστά, να αντιλαμβάνονται για αρχή διαισθητικά μια έννοια, αλλά ο δάσκαλος είναι εκείνος που κρατάει τα νήματα. Εάν ο ίδιος ο δάσκαλος δεν έχει την απαραίτητη μαθηματική και παιδαγωγική γνώση η κατανόηση των μαθητών δεν θα επέλθει ποτέ. Τα όρια είναι από μόνα τους δύσκολα, ακόμη και η μεταδοτικότητα που λέμε παίζει σπουδαίο ρόλο.''*

Γνώση του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας (ΓΠΔ)

Χρήση ανταγωνιστικών ισχυρισμών

Η Στέλλα στις απαντήσεις που έδωσε δείχνει ότι σε ελάχιστες περιπτώσεις καταφεύγει στη μέθοδο των ανταγωνιστικών ισχυρισμών.

''...δίνω παραδείγματα ορίων που δεν υπάρχουν όταν χωρίζονται σύμφωνα με την ιδιότητα. Εκεί οι μαθητές έρχονται σε σύγκρουση και εύκολα αντιλαμβάνονται ότι δεν μπορούν να εφαρμόσουν ιδιότητες μηχανικά και αυθαίρετα.''

''Με το να δώσω κάποιο αντιπαράδειγμα προσπαθήσω να δημιουργήσω τον προβληματισμό και την αμφιβολία στους μαθητές, ώστε να μπορούμε να συζητήσουμε κάτω από ποιες προϋποθέσεις μπορεί να ισχύει μια συγκεκριμένη κατάσταση. Γενικότερα δεν υπάρχουν στη διδασκαλία μου αρκετές περιπτώσεις που θα χρειαστεί να το εφαρμόσω όμως.''

Συζήτηση στη διδασκαλία

Για τη Στέλλα η συζήτηση στη διδασκαλία είναι ένας από τους αποτελεσματικότερους τρόπους για την προώθηση της σκέψης των μαθητών. *¨Θέτοντας ερωτήσεις που καλό είναι να περιλαμβάνουν ενδόμυχα τις παρανοήσεις τους, μπορούμε να οδηγήσουμε τους μαθητές στην αναγνώριση των λαθών τους και να προωθήσουμε την εννοιολογική κατανόηση σχετικά με κάθε έννοια. Πολλές φορές κάνω συγκεκριμένες ερωτήσεις για να αντιληφθώ τι κρύβεται πίσω από τη σκέψη των μαθητών.''*

Ο διάλογος είναι ένα διδακτικό μέσο που χρησιμοποιεί η Στέλλα και αυτό γίνεται αντιληπτό και σε κάποιες από τις απαντήσεις της στο ερωτηματολόγιο που της δόθηκε.

- *“...μπορεί να δώσει τροφή σε μια σειρά από ενδιαφέρουσες συζητήσεις, όπως για παράδειγμα, αν πραγματικά ο Αχιλλέας θα φτάσει τη χελώνα...”*
- *“Μέσα από τη συζήτηση προκύπτει η ανάγκη εισαγωγής της έννοιας του ορίου και δίνω έναν διαισθητικά ορισμό του ορίου...”*
- *“Το συμπέρασμα αυτό θα μπορούσε να συζητηθεί στην τάξη.”*
- *“Αρχικά θα έδινα το λόγο στους υπόλοιπους μαθητές για έναν εποικοδομητικό διάλογο. Αφού ακουστεί κάθε άποψη και συγκεντρωθούν οι απορίες των μαθητών θα μπορούσε να ειπωθεί ότι δεν ελέγχθηκε ποτέ η ύπαρξη του ορίου.”*

Σύνδεση με άλλα πεδία εντός κι εκτός των μαθηματικών

Από τις απαντήσεις της Στέλλας φάνηκε ότι σε συγκεκριμένες περιπτώσεις συνδέει την έννοια του ορίου που διδάσκει με θέματα που αντλεί μέσα κι έξω από τα μαθηματικά. Στη συνέντευξη της δήλωσε ότι κάθε φορά που οι μαθητές συναντούν στις ασκήσεις έννοιες που δεν θυμούνται ή δεν έχουν κατακτήσει, ανατρέχει στα αντίστοιχα κεφάλαια. *“Ακόμη και για μια παραγοντοποίηση που θα υπάρξει σε ένα όριο, ή μια άρση απροσδιοριστίας αντιλαμβάνομαι ότι κάποιοι μαθητές έχουν τα λεγόμενα κενά. Δεν μπορώ να προχωρήσω παρακάτω και να κάνω ότι δε συμβαίνει τίποτα.”*
Στην εισαγωγή της έννοιας του ορίου η Στέλλα χρησιμοποιεί το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας που αποτελεί κομμάτι της ιστορικής εξέλιξης της έννοιας. *“ Κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας μου πολλές φορές ανατρέχω στην ιστορική εξέλιξη του ορίου. Άλλες φορές γιατί ρωτάει κάποιος μαθητής κι άλλες γιατί θεωρώ ότι είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε πώς και γιατί δημιουργήθηκε η ανάγκη εισαγωγής μιας έννοιας.”*

Ιστορική ανακατασκευή εννοιών

Όπως αναφέρθηκε στην παραπάνω παράγραφο η ιστορική ανακατασκευή των εννοιών αποτελεί μια πλευρά της διδασκαλίας της Στέλλας. Η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να υποστηρίξει την πραγματική μάθηση των μαθηματικών αφού προσφέρει μια διαφορετική όψη για μια μαθηματική ενότητα αλλά κι ένα διαφορετικό τρόπο παρουσίασης της (Jahnke, 2001 όπως αναφέρεται στο Μπιζμπιάνος, 2011). Ο τρόπος λοιπόν που εντάσσει η Στέλλα την ιστορία των μαθηματικών στη διδασκαλία των ορίων προσθέτει ένα σημαντικό πλεονέκτημα στην ΠΓΠ που διαθέτει.

Διδασκαλία του φορμαλιστικού τρόπου διατύπωσης

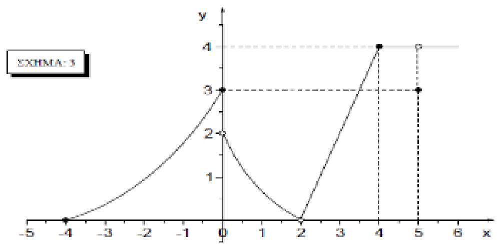
"Αν οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου δεν ήταν υποχρεωμένοι να δώσουν Πανελλήνιες Εξετάσεις πολλά από αυτά που μαθαίνω τυπικά στους μαθητές, θα τα απέφευγα. Με ενδιαφέρει να γνωρίζουν πως να εκφράζονται σωστά, δεν δίνω όμως τόση σημασία στην απόλυτη μεταφορά της επίσημης προσέγγισης της έννοιας." Η Στέλλα παραδέχεται ότι η άποψη της αυτή μάλλον είναι λανθασμένη γιατί μπορεί να αλλάξει όλο το νόημα μιας έννοιας, πρότασης ή θεωρήματος αν αυτό δεν εκφραστεί τυπικά και φορμαλιστικά. Ωστόσο αποφεύγει στα διαγωνίσματα που θέτει στους μαθητές να ζητάει αυστηρές γραπτές διατυπώσεις.

Η Στέλλα δίνει ιδιαίτερη σημασία στην εννοιολογική κατανόηση, "*..από εκεί και πέρα αν οι μαθητές πρώτα καταλάβουν και νιώσουν τι είναι ακριβώς το όριο, εγώ θα τους δώσω και τον τυπικό ορισμό που αν και ουσιώδης είναι δυσνόητος και απαιτητικός...*"

Χρήση διδακτικών παραδειγμάτων

Για τη Στέλλα οι καθηγητές οφείλουν να γνωρίζουν τις πιθανές λανθασμένες αντιλήψεις των μαθητών για τα όρια και να τις λαμβάνουν υπόψη όταν αναπτύσσουν τις διδακτικές τους στρατηγικές και μεθόδους. Κάποια από τα παραδείγματα που χρησιμοποιεί στην τάξη φαίνονται στις απαντήσεις της στο ερωτηματολόγιο.

1) Να βρείτε το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *(αν υπάρχει) όπου η* f *έχει πεδίο ορισμού το [-4, +∞) και γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για α)* $x_0 = -4$, *β)* $x_0=0$, *γ)* $x_0=2$, *δ)* $x_0=4$, *ε)* $x_0=5$



Στόχος της άσκησης αυτής είναι να μπορέσουν οπτικά οι μαθητές να κατανοήσουν πότε μπορεί να έχει νόημα ένα όριο. Οι μαθητές κοιτάζουν τα πλευρικά όρια για να διαπιστώσουν εάν το όριο κάθε συνάρτησης υπάρχει. Στο ερώτημα δ μπορούν εύκολα να δουν ότι το όριο της συνάρτησης στο x_0 *δεν είναι η αριθμητική τιμή που παίρνει η συνάρτηση για* $x=x_0$.

2) Να χαραχθεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια της να βρεθεί αν υπάρχει

το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *όταν:* $\alpha) f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}, x_0 = 1 \quad \beta) f(x) = \begin{cases} x^2, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}, x_0 = 0$

Οι μαθητές εδώ έχουν την ευκαιρία να σχεδιάσουν οι ίδιοι τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων. Μέσα από την οπτική αναπαράσταση μπορούν απευθείας να καταλάβουν τι συμβαίνει με τα πλευρικά όρια.

Το πρώτο παράδειγμα συμβαδίζει με την παραπάνω άποψη της Στέλλας και αφορά στην πρώτη παρανόηση που έγραψε στην Ερώτηση 1 σχετικά με την παρανόηση των μαθητών ότι το όριο της συνάρτησης στο x_0 είναι η αριθμητική τιμή που παίρνει η συνάρτηση για $x=x_0$.
Ωστόσο στις υπόλοιπες απαντήσεις της αξιοποιεί διδακτικά το ίδιο το λάθος χωρίς να χρησιμοποιεί κάποια άλλα παραδείγματα.

Γνώση του Περιεχομένου και του Αναλυτικού προγράμματος (ΓΠΑΠ)

Γνώση του περιεχομένου και της διδακτικής ακολουθίας του σχολικού βιβλίου

Η Στέλλα κάνει μια αποτίμηση των κεφαλαίων του βιβλίου της Γ΄ Λυκείου, γεγονός που αναδεικνύει μια ικανοποιητική γνώση του περιεχομένου και της διδακτικής ακολουθίας του βιβλίου.

"Αν παρατηρήσετε πριν διδαχτούν οι μαθητές τα όρια, προηγείται το κεφάλαιο των πραγματικών αριθμών. Εκεί γίνεται αναφορά στους άρρητους αριθμούς που η κατανόηση τους είναι προϋπόθεση για τη μετέπειτα γνώση τους, αλλά πέρα από την αναφορά αυτή, δεν μελετώνται καθόλου περαιτέρω. Το ίδιο συμβαίνει και με την έννοια του απείρου που παρουσιάζεται στο ίδιο κεφάλαιο. Έχω δει ότι οι μαθητές έχουν μια δυσκολία στην αντιμετώπιση του. Για μένα θα έπρεπε να υπάρχει ένα κεφάλαιο που να ασχολείται εξ ολοκλήρου με το άπειρο, πριν περάσουν στη διδασκαλία των ορίων…"

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Προφίλ του εκπαιδευτικού

Η Ελένη ολοκλήρωσε τις σπουδές της στα μαθηματικά το 2009 κι έχει αποκτήσει μεταπτυχιακή εξειδίκευση στα Θεωρητικά Μαθηματικά του Μαθηματικού τμήματος του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Έχει παρακολουθήσει σεμινάρια ΤΠΕ και αρκετά παιδαγωγικά σεμινάρια. Διδάσκει σε φροντιστήριο από το 2012 κι έχει εμπειρία στη διδασκαλία της Ανάλυσης τα τελευταία 7 χρόνια. Επιπλέον παραδίδει ιδιαίτερα μαθήματα σε μαθητές Γ΄ Λυκείου από το 2013.

Οι εμπειρίες της σαν μαθήτρια διαμόρφωσαν τη στάση της σχετικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών. *"Αν και τώρα πλέον γνωρίζω την ονομασία, ο φορμαλιστικός τρόπος διδασκαλίας των καθηγητών μου και η αδυναμία τους να εμβαθύνουν σε μαθηματικές έννοιες μου έδωσαν το έναυσμα να ακολουθώ άλλες μεθόδους στη διδασκαλία μου, φυσικά όσο μου επιτρέπεται…"*

Απαντήσεις της Ελένης στο τεστ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1

α) Συνήθως δίνω στους μαθητές σαν παράδειγμα τον τύπο μιας συνάρτησης και ζητώ την αριθμητική τιμή της σε ένα σημείο που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ να βρεθεί το $f(2)$

Σε αυτή την περίπτωση οι μαθητές θα αναγκαστούν να υπολογίσουν την αριθμητική τιμή της f για τιμές του x πολύ κοντά στο 2.

Χρησιμοποιώ προγράμματα όπως το Sketchpad ή το Geogebra και δημιουργώ γραφικές παραστάσεις ώστε να σχολιάσουν οι μαθητές την αλλαγή των τιμών μιας συνάρτησης καθώς το x τείνει στο x_0. Συγκεκριμένα οι μαθητές κυλώντας τον κέρσορα πάνω στη γραφική παράσταση μπορούν να δουν ότι όταν ο κέρσορας πλησιάζει κοντά στο x_0 τότε το f(x) τείνει να γίνει α. Με τον τρόπο αυτό τους εισάγω πιο εύκολα στο αυστηρό ορισμό του ορίου.

β)

1) Δίνεται η συνάρτηση f(x)=x+5. Να βρεθεί το όριο της f(x) όταν το x τείνει στο 1

Ένα απλό παράδειγμα για την εύκολη εισαγωγή του μαθητή στην έννοια του ορίου.

2) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & x>0 \\ 1, & x=0 \end{cases} \quad \mu\varepsilon\ f:[0,+\infty)$$

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει στο 0 από δεξιά.

Το παράδειγμα αυτό έχει στόχο να βοηθήσει τους μαθητές να αντιληφθούν ότι η τιμή της f(x) δεν ταυτίζεται πάντα με το όριο της συνάρτησης στο x_0.

3) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}$$

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και στη συνέχεια να υπολογιστεί το όριο της όταν το x τείνει στο 2.

Στόχος του παραδείγματος είναι να ξεπεράσουν οι μαθητές την παρανόηση ότι το όριο ανήκει αναγκαστικά στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

γ) Μερικές από τις παρανοήσεις των μαθητών είναι οι εξής:

- *Πιστεύουν ότι το* x_0 *πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.*
- *Πιστεύουν ότι εφόσον υπάρχει η αριθμητική τιμή στο* x_0 *θα υπάρχει και το όριο εκεί.*

ΕΡΩΤΗΣΗ 2

α) Θα ξεκινούσα με άλλα παραδείγματα στα οποία είναι ευδιάκριτα τα λάθος αποτελέσματα στην περίπτωση που αυθαίρετα χωριστούν τα όρια. Έπειτα θα έδινα τη σωστή λύση στην οποία χρειάζεται να θέσουμε h(x)=4f(x)-4x+2 η οποία ξέρουμε ότι έχει όριο -10. Εδώ μπορούμε να εφαρμόσουμε την *ιδιότητα των ορίων.*

β) Η βαθμολογία δεν μπορεί να είναι παραπάνω από 1 και αυτό χαριστικά καθώς ο στόχος της άσκησης είναι να φανεί αν ο μαθητής ελέγχει την ύπαρξη ορίων.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3

α) Μέσα από τη συγκεκριμένη άσκηση ελέγχουμε αν ο μαθητής

- Βρίσκει αρχικά το πεδίο ορισμού πριν ξεκινήσει τον υπολογισμό του ορίου.

-Κατανοεί ότι ακόμη κι αν η αριθμητική τιμή μιας συνάρτησης δεν ορίζεται σε ένα σημείο, το όριο μπορεί να υπάρχει.

-Εφαρμόζει τυφλά την ιδιότητα του ορίου πηλίκου.

β)Ο μαθητής χρησιμοποίησε τις εξής ιδιότητες των ορίων:

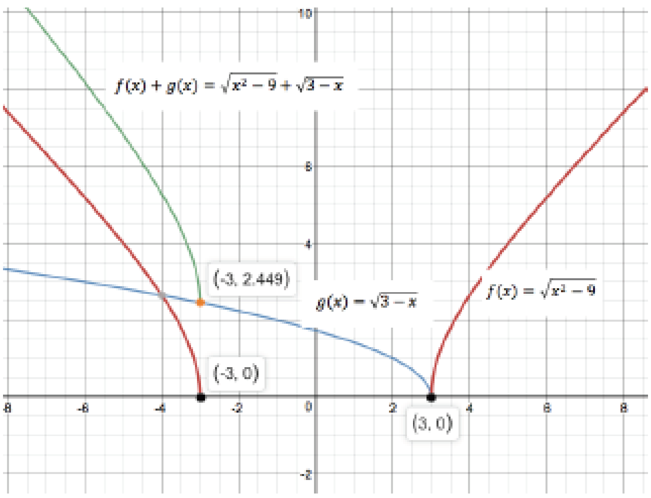
$$\lim_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} c = c$$

γ,δ) Θα συζητούσα σίγουρα για αυτή την άσκηση με τους μαθητές μου αρχικά για να τονίσω ότι παρόλο που το 2 εξαιρείται από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, το όριο υπάρχει και μπορεί να υπολογιστεί. Έπειτα θα τόνιζα τις προϋποθέσεις ισότητας των συναρτήσεων. Θα ζητούσα από τους μαθητές να βρουν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f(x) = \dfrac{\chi^2 - 4}{\chi - 2}$ και g(x)=$x+2$ *με στόχο να ανακαλύψουν οι μαθητές ότι οι συναρτήσεις είναι ίσες στο πεδίο ορισμού τους άρα και τα όρια τους.*

ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Θα προσπαθούσα με τη χρήση καθοδηγητικών ερωτήσεων να βάλω τους μαθητές να ανακαλύψουν μόνοι τους το σωστό. Θα τους ζητούσα να χαράξουν τη γραφική παράσταση καθεμιάς από τις εμπλεκόμενες συναρτήσεις με τη χρήση ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας. Μετά θα ζητούσα να προσδιορίσουν οπτικά τα πεδία ορισμού των f, g και f+g καθώς και την αλγεβρική επαλήθευση τους.



Εδώ φαίνεται ότι η νέα συνάρτηση που προκύπτει δεν έχει το ίδιο πεδίο ορισμού με τις αρχικές.

<u>ΕΡΩΤΗΣΗ 5</u>

α) Ο μαθητής δεν έλεγξε αν μπορεί να εφαρμόσει τις ιδιότητες των ορίων και αν υπάρχει το συγκεκριμένο όριο.

β) Το λάθος συναντάται συχνά και οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές εφαρμόζουν μηχανικά ιδιότητες χωρίς να ελέγχουν αν μπορούν να τις χρησιμοποιήσουν σε κάθε περίσταση. Το λάθος αυτό οφείλεται στην ίσως λανθασμένη διδασκαλία και ελλιπούς γνώσης του μαθητή. Ο μαθητής έχει μάθει να χρησιμοποιεί τεχνικές μεθόδους και δεν έχουν εστιάσει στην κατανόηση της θεωρίας.

γ) Θα επιμέριζα παρέα με τους μαθητές κάθε ένα από τα βήματα που ακολουθεί ο μαθητής στην άσκηση και με τη βοήθεια της θεωρίας θα ελέγχαμε την ορθότητα κάθε μέρους του μαθηματικού συλλογισμού.

δ) Ίσως θα μπορούσα να διδάξω μια μέθοδο αυτοελέγχου με τη βοήθεια γνώσεων που ήδη έχουν οι μαθητές. Θα ζητούσα από τους μαθητές να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση του ημίτονου και να δουν από μόνοι τους ότι το όριο στο άπειρο δεν ορίζεται.

Η ΠΑΔΑΓΩΓΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ (ΠΓΠ) ΤΗΣ ΕΛΕΝΗΣ

Προκειμένου να καταταχτούν οι γνώσεις της Ελένης αναπτύσσονται οι βασικές κατηγορίες των παιδαγωγικών και διδακτικών γνώσεων (ΠΓΠ), δηλαδή η ΓΠΜ, ΓΠΔ και ΓΠΑΠ.

Γνώση του περιεχομένου και των μαθητών (ΓΠΜ)

Γνώση των παρανοήσεων

Η Ελένη στις απαντήσεις της στο ερωτηματολόγιο αναγνωρίζει επιτυχώς όλα τα λάθη των μαθητών. Τονίζει αργότερα ότι τα λάθη αυτά τα συναντάει συχνά στην τάξη κάθε σχολική χρονιά. *"Οι μαθητές δείχνουν προσήλωση στον αλγεβρικό χειρισμό των ορίων και έτσι παραβλέπουν συχνά τις απαραίτητες προϋποθέσεις που χρειάζεται να ελέγξουν."*

Επισημαίνει δύο από τις πιο συχνές παρανοήσεις των μαθητών:

- *Πιστεύουν ότι το* x_0 *πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.*
- *Πιστεύουν ότι εφόσον υπάρχει η αριθμητική τιμή στο* x_0 *θα υπάρχει και το όριο εκεί.*

"Φυσικά και μπορεί η συνάρτηση να ισούται με το όριο της. Αυτό που δεν καταλαβαίνουν οι μαθητές είναι ότι εμάς μας ενδιαφέρει τι συμβαίνει με τη συνάρτηση κοντά στο σημείο x_0*. Δεν μας ενδιαφέρει αν μπορεί να φτάνει το όριο της ή όχι."*

"Η έννοια του ορίου από μόνη της παρουσιάζει δυσκολίες, το θέμα είναι να τις αναγνωρίζουμε εμείς οι εκπαιδευτικοί και να εστιάζουμε τη διδασκαλία μας εκεί , φέρνοντας τα κατάλληλα παραδείγματα."

Ενώ εξηγώντας το τρόπο που θεωρεί ότι σκέφτονται οι μαθητές αναγνωρίζει ακόμη μια από τις σημαντικότερες παρανοήσεις: "*Αποκτούν την λανθασμένη αντίληψη ότι το όριο πλησιάζει πάρα πολύ την τιμή του αλλά δεν πρέπει να την φτάσει"*.

Όπως μπορεί να παρατηρηθεί η Ελένη αναγνωρίζει τρεις από τις βασικές παρανοήσεις που αναλύθηκαν και στο θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας, με βάση τις οποίες διαμορφώνει τη διδασκαλία της.

Ικανότητα του δασκάλου να κατανοεί και να ερμηνεύει το σκεπτικό ενός μαθητή

Η Ελένη μέσα από τις απαντήσεις της εκφράζει αυτό που οι Tall και Vinner (1981) ονόμασαν εικόνα της έννοιας. *"Οι μαθητές την έννοια του ορίου την γνώρισαν πολύ πριν την δουν στα Μαθηματικά. Η λέξη όριο στην καθημερινή ζωή των μαθητών έχει διαφορετική χροιά από το* *μαθηματικό περιεχόμενο της. Για παράδειγμα, όλοι έχουν βρεθεί στο δρόμο με το αυτοκίνητο κι έχουν δει τις πινακίδες με το όριο ταχύτητας. Ξέρουν ότι το όριο αυτό δεν μπορεί να παραβιαστεί. Ξαφνικά έρχονται αντιμέτωποι με το μαθηματικό όριο και και αλλάζουν τα δεδομένα τους. Αποκτούν την λανθασμένη αντίληψη ότι το όριο πλησιάζει πάρα πολύ την τιμή του αλλά δεν πρέπει να την φτάσει.''*

Ακόμη ένα σημείο στις απαντήσεις της Ελένης που δείχνει τον τρόπο που ερμηνεύει το σκεπτικό των μαθητών συναντάται στην Ερώτηση 5.

''Το λάθος αυτό οφείλεται στην ίσως λανθασμένη διδασκαλία....''

Η Ελένη στο σημείο αυτό φαίνεται να θεωρεί, ότι το σκεπτικό των μαθητών επηρεάζεται άμεσα από την διδασκαλία των καθηγητών και ότι η λανθασμένη διδασκαλία οδηγεί στην παρεμπόδιση της εννοιολογικής κατανόησης.

Γνώση των θεμάτων που μπορεί να βρίσκουν οι μαθητές ενδιαφέροντα

''Παρατηρώ ότι οι μαθητές δυσανασχετούν με τη έννοια του ορίου όπως και άλλες γιατί πέρα από το ότι είναι δύσκολη, έρχεται παρέα με έναν μεγάλο αριθμό ασκήσεων που συνήθως είναι βασισμένες σε αλγεβρικούς χειρισμούς.'' Η Ελένη από την εμπειρία της έχει διαπιστώσει ότι όταν οι μαθητές συναντούν καταστάσεις όπου ο υπολογισμός του ορίου είναι ο μοναδικός τρόπος που θα δώσει λύση στον προβληματισμό τους, συνειδητοποιούν την χρησιμότητά του και απευθείας αποκτούν άλλη στάση απέναντι στην έννοια του ορίου. Τονίζει ότι οι μαθητές θέλουν να ξέρουν πού χρησιμοποιούνται τα Μαθηματικά για να τους δίνουν τη σημασία που χρειάζεται.

''Ο τρόπος που θα παρουσιάσουμε την έννοια και κάποιες από τις ασκήσεις επίσης παίζει σπουδαίο ρόλο για το πως θα δουν τα όρια οι μαθητές. Είναι όλοι πλέον εξοικειωμένοι με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή οπότε το να παρουσιάσεις μια έννοια σε ένα λογισμικό εκεί είναι σαν να μπαίνεις στα ρούχα τους, τους παρακινείς γιατί τους αρέσει οτιδήποτε σχετίζεται με την τεχνολογία.''

Όπως φαίνεται και από την απάντηση της στην Ερώτηση 1 του ερωτηματολογίου η Ελένη κάνει χρήση διάφορων λογισμικών κατά της εισαγωγή της έννοιας του ορίου.

''Χρησιμοποιώ προγράμματα όπως το Sketchpad ή το Geogebra και δημιουργώ γραφικές παραστάσεις ώστε να σχολιάσουν οι μαθητές την αλλαγή των τιμών μιας συνάρτησης καθώς το x τείνει στο x_0. Συγκεκριμένα οι μαθητές κυλώντας τον κέρσορα πάνω στη γραφική παράσταση μπορούν να δουν ότι όταν ο κέρσορας πλησιάζει κοντά στο x_0 τότε το $f(x)$ τείνει να γίνει α.''

Γνώση προϋποθέσεων για να διευκολυνθεί κατανόηση των μαθητών

Για τη Ελένη η απαραίτητη προϋπόθεση για να διευκολυνθεί η κατανόηση των μαθητών βασίζεται σε μια αλληλεξάρτηση μεταξύ των εκπαιδευτικών και των μαθητών. Σύμφωνα με τα λεγόμενά της οι μαθητές πρέπει να είναι ανοιχτοί ως προς τις παρανοήσεις τους και οι καθηγητές ικανοί να τις αντιλαμβάνονται και να τις αξιοποιούν διδακτικά.

"Πρέπει να δημιουργείται στην τάξη μια ατμόσφαιρα ανεκτική ως προς τις παρανοήσεις των μαθητών. Εάν και οι δυο πλευρές συμμετέχουν απόλυτα σε αυτή τη σύνδεση τότε η κατανόηση των μαθητών θα επέλθει."

Αναφορικά με τους καθηγητές προσθέτει την αναγκαιότητα της ατομική τους επαγγελματική ανάπτυξης, λέγοντας ότι :"...εμείς πρέπει συνεχώς να ψαχνόμαστε, να διαβάζουμε, να παρακολουθούμε σεμινάρια, να γινόμαστε καλύτεροι."

Γνώση του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας (ΓΠΔ)

Χρήση ανταγωνιστικών ισχυρισμών

Η Ελένη από την εισαγωγή της ακόμη στον ορισμό του ορίου, ξεκινάει με ένα παράδειγμα που ανατρέπει την προηγούμενη γνώση των μαθητών.

"Συνήθως δίνω στους μαθητές σαν παράδειγμα τον τύπο μιας συνάρτησης και ζητώ την αριθμητική τιμή της σε ένα σημείο που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ *να βρεθεί το f(2).*

Σε αυτή την περίπτωση οι μαθητές θα αναγκαστούν να υπολογίσουν την αριθμητική τιμή της f για τιμές του x πολύ κοντά στο 2."

"Οι μαθητές έχουν συνηθίσει να κάνουν αντικαταστάσεις στις συναρτήσεις, χωρίς να τους έχει δοθεί ποτέ ακατάλληλος αριθμός. Θυμούνται μόνο τους περιορισμούς που έπαιρναν όταν έλεγαν ότι ο παρονομαστής πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός. Το παράδειγμα αυτό τους φέρνει κατευθείαν μπροστά σε μια ανατροπή κι ένα πρόβλημα."

Η Ελένη, αν και αυτό δεν φαίνεται στις απαντήσεις της στο ερωτηματολόγιο, αναφέρει ότι συχνά χρησιμοποιεί αντιπαραδείγματα στην διδασκαλία της γιατί η σύγκρουση στην οποία φέρει τους μαθητές, βοηθάει στην αντιμετώπιση πολλών από των παρανοήσεων και δυσκολιών που έχουν για την έννοια.

Συζήτηση στη διδασκαλία

Τα παρακάτω αποσπάσματα ανήκουν στις απαντήσεις που έδωσε η Ελένη στο ερωτηματολόγιο που της δόθηκε.

"Θα συζητούσα σίγουρα για αυτή την άσκηση με τους μαθητές μου αρχικά για να τονίσω ότι παρόλο που το 2 εξαιρείται από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, το όριο υπάρχει και μπορεί να υπολογιστεί. Έπειτα θα τόνιζα τις προϋποθέσεις ισότητας των συναρτήσεων."

"Θα προσπαθούσα με τη χρήση καθοδηγητικών ερωτήσεων να βάλω τους μαθητές να ανακαλύψουν μόνοι τους το σωστό. Θα τους ζητούσα να χαράξουν τη γραφική παράσταση καθεμιάς από τις εμπλεκόμενες συναρτήσεις με τη χρήση ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας."

Πέρα από αυτές τις απαντήσεις, οι διδακτικές επιλογές που κάνει όπως το παράδειγμα που δίνει κατά την εισαγωγή της έννοιας του ορίου ή η χρήση των λογισμικών Sketchpad και Geogebra, δημιουργούν έδαφος για εποικοδομητική συζήτηση στην τάξη. Ωστόσο από τις παραπάνω απαντήσεις, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι αν και η Ελένη θεωρεί ότι *"η προσέγγιση στην έννοια του ορίου μέσα από το διάλογο είναι πολύ χρήσιμη διδακτικά"*, η διδασκαλία της είναι κυρίως δασκαλοκεντρική, δίνει τις σωστές απαντήσεις σχεδόν την ίδια στιγμή και αφήνει περιορισμένα περιθώρια στον προβληματισμό του μαθητή.

Σύνδεση με άλλα πεδία εντός κι εκτός των μαθηματικών

Η Ελένη δεν κάνει συχνά αναφορές σε άλλες περιοχές εντός κι εκτός των μαθηματικών. Όπως ανέφερε η μοναδική περίπτωση που συνδέει την έννοια του ορίου με πεδίο εκτός των μαθηματικών είναι κατά την εισαγωγή της έννοιας του ορίου. *"Κάποιες φορές φέρνω ένα οικείο παράδειγμα από τη Φυσική, όπως αυτό της στιγμιαίας ταχύτητας. Για παράδειγμα «Ένα αυτοκίνητο κινείται στο δρόμο με μεγάλη ταχύτητα και μια κάμερα της τροχαίας φωτογραφίζει το αυτοκίνητο μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή»."*

"Γενικά δεν μπορώ να κάνω συνδέσεις που να γίνουν κατανοητές στους μαθητές. Όταν διδάσκω τις συναρτήσεις μπορώ να κάνω πολλές περισσότερες συνδέσεις, ακόμη και με καταστάσεις της καθημερινότητας. Με την ανάλυση είναι πιο δύσκολο."

Συνολικά είναι φανερή η έλλειψη των συνδέσεων στις διδακτικέ;ς μεθόδους της Ελένης.

Ιστορική ανακατασκευή εννοιών

Σε κανένα σημείο του ερωτηματολογίου και της συνέντευξης δεν προκύπτουν στοιχεία που να υποδεικνύουν την ιστορική ανακατασκευή εννοιών στη διδασκαλία της Ελένης. Η ίδια ανέφερε απλά ότι *"...δεν είναι κάτι που έχω σκεφτεί να κάνω, τουλάχιστον στα όρια. Σε παλαιότερες τάξεις συζητούσα ενίοτε με τους μαθητές κάποιες ιστορικές αναδρομές που έχουν τα σχολικά βιβλία. Σίγουρα θα μπορούσε το μάθημα να γίνει πιο ενδιαφέρον, αλλά από την άλλη δεν θέλω να ξεφεύγω τόσο τώρα που είναι στην τρίτη Λυκείου και δίνουν εξετάσεις"*

Διδασκαλία του φορμαλιστικού τρόπου διατύπωσης

Η διδασκαλία της αυστηρής και τυπικής διατύπωσης αποτελεί μέρος της διδασκαλίας της Ελένης. Εισάγει κλιμακωτά τους μαθητές στον φορμαλιστικό τρόπο διατύπωσης, ξεκινώντας από την διαισθητική κατανόηση της έννοιας του ορίου για να οδηγηθεί στην αυστηρή τεχνική.

"...για να δώσω ένα παράδειγμα, ο ε-δ ορισμός του ορίου περιλαμβάνει συνθήκες με πολλές μεταβλητές και είναι δύσκολο να κατανοηθεί. Εάν θα έπρεπε να τον μάθουν αυστηρά, θα χρειαζόταν να κατανοήσουν πρώτα διαισθητικά κάθε συνθήκη που περικλείει. Μόνο με την διαισθητική προσέγγιση θα γίνει ο ορισμός κτήμα τους."

"...πέρα από αυτό, οι μαθητές έρχονται στο φροντιστήριο για να γράψουν στο τέλος καλά, αυτό επιτυγχάνεται με την ακριβή διατύπωση όλων των θεωρημάτων, πορισμάτων και ορισμών."

Χρήση διδακτικών παραδειγμάτων

Η Ελένη στην Ερώτηση 1 δίνει τρία από τα παραδείγματα που χρησιμοποιεί κατά την εισαγωγή της έννοιας του ορίου.

1) Δίνεται η συνάρτηση f(x)=x+5. Να βρεθεί το όριο της f(x) όταν το x τείνει στο 1

Ένα απλό παράδειγμα για την εύκολη εισαγωγή του μαθητή στην έννοια του ορίου.

2) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & x>0 \\ 1, & x=0 \end{cases} \quad \mu\varepsilon\ f:[0,+\infty)$$

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει στο 0 από δεξιά.

Το παράδειγμα αυτό έχει στόχο να βοηθήσει τους μαθητές να αντιληφθούν ότι η τιμή της f(x) δεν *ταυτίζεται πάντα με το όριο της συνάρτησης στο x_0.*

3) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και στη συνέχεια να υπολογιστεί το όριο της όταν το x τείνει στο 2.

Στόχος του παραδείγματος είναι να ξεπεράσουν οι μαθητές την παρανόηση ότι το όριο ανήκει αναγκαστικά στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Όπως φαίνεται τα παραδείγματα 2,3 συνάδουν με τις παρανοήσεις των μαθητών που αναφέρθηκαν από την ίδια. Η Ελένη μέσα από τα παραδείγματα αυτά προσπαθεί να προσεγγίσει τις παρανοήσεις των μαθητών με απώτερο στόχο την άρση τους. Επιπλέον δήλωσε ότι μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις δείχνει στους μαθητές ότι η συμπεριφορά μιας συνάρτησης στο σημείο x_0, δεν επηρεάζει το όριο της όταν το $x \to x_0$ και ότι η τιμή του ορίου της συνάρτησης καθορίζεται από τις τιμές που παίρνει κοντά στο x_0.
Γενικότερα η Ελένη κάνει αρκετές αναφορές στην δημιουργία γραφικών παραστάσεων στη διδασκαλία της. Τα παρακάτω παραδείγματα είναι ενδεικτικά:

"...δημιουργώ γραφικές παραστάσεις ώστε να σχολιάσουν οι μαθητές την αλλαγή των τιμών μιας συνάρτησης καθώς το x τείνει στο x_0. Συγκεκριμένα οι μαθητές κυλώντας τον κέρσορα πάνω στη γραφική παράσταση μπορούν να δουν ότι όταν ο κέρσορας πλησιάζει κοντά στο x_0 τότε το f(x) τείνει να γίνει α. Με τον τρόπο αυτό τους εισάγω πιο εύκολα στο αυστηρό ορισμό του ορίου."

"Θα τους ζητούσα να χαράξουν τη γραφική παράσταση καθεμιάς από τις εμπλεκόμενες συναρτήσεις με τη χρήση ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας. Μετά θα ζητούσα να προσδιορίσουν οπτικά τα πεδία ορισμού των f, g και f+g καθώς και την αλγεβρική επαλήθευση τους."

"Θα ζητούσα από τους μαθητές να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση του ημίτονου και να δουν από μόνοι τους ότι το όριο στο άπειρο δεν ορίζεται."

Γνώση του Περιεχομένου και του Αναλυτικού προγράμματος (ΓΠΑΠ)

Γνώση του περιεχομένου και της διδακτικής ακολουθίας του σχολικού βιβλίου

"Το κεφάλαιο των ορίων χαρακτηρίζεται νομίζω από την συνεχή οπτική αναπαράσταση. Για κάθε ορισμό, απόδειξη ή εφαρμογή που είναι γραμμένα, υπάρχει και από μια γραφική παράσταση για να μπορέσουν οι μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα αυτό που διαβάζουν. Βέβαια είναι τόσο συχνό αυτό το φαινόμενο που μπορεί τελικά οι μαθητές να μπερδευτούν περισσότερο. Δεν ξέρω, ίσως θα πρέπει εμείς να επιλέγουμε ποιες από τις παραστάσεις είναι πιο ευδόκιμες."

Η παραπάνω παρατήρηση της Ελένης φανερώνει μια επαρκή γνώση του περιεχομένου τηου σχολικού βιβλίου.

ΕΝΟΤΗΤΑ 6

Προφίλ του εκπαιδευτικού

Ο Ηλίας ολοκλήρωσε τις σπουδές του το 1988. Εργάζεται ως μαθηματικός σε δημόσιο σχολείο 18 χρόνια από τα οποία τα τελευταία 8 διδάσκει στην τάξη της Γ΄ Λυκείου. Ωστόσο σε όλη τη διάρκεια της διδακτικής του σταδιοδρομίας παρέδιδε ιδιαίτερα μαθήματα σε μαθητές της Γ΄ Λυκείου.

Κατά τη διάρκεια της σχολικής του εμπειρίας έχει προσπαθήσει να εισάγει νέες μεθόδους στη διδασκαλία του, αλλάζοντας για παράδειγμα τον τρόπο παρουσίασης κάποιον εννοιών, γεγονός που τον δυσκόλεψε αρκετά, καθώς δεν είχε παρακολουθήσει στο παρελθόν κανένα μάθημα διδακτικής των μαθηματικών. *"Θυμάμαι σαν μαθητής σε κάποιες τάξεις να καταλαβαίνω τα μαθηματικά και σε άλλες να μην καταλαβαίνω τίποτα. Πέρασαν πολλά χρόνια για να συνειδητοποιήσω ότι αυτό ήταν αποτέλεσμα της διδασκαλίας του εκάστοτε καθηγητή"*

Απαντήσεις του Ηλία στο τεστ

<u>ΕΡΩΤΗΣΗ 1</u>

α,β) Μία από τις εισαγωγικές δραστηριότητες που χρησιμοποιώ είναι η εξής:

Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών για την συνάρτηση $f(x)= x^2 +1$

x	*0*	*0,5*	*0,075*	*0,9000*	*0,9900*	*0,9990*	*0,9999*	*0,99999*
f(x)								

Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών για την συνάρτηση $f(x)= x^2 +1$

x	*2*	*1,5*	*1,1*	*1,01*	*1,001*	*1,0001*	*1,00001*	*1,000001*
f(x)								

- *Να συμπληρώσετε τα κενά*

  Προς ποιόν αριθμό τείνει το x ....

  Προς ποιόν αριθμό τείνει το f(x).........

- *Να γίνει η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης.*

Μία άλλη εισαγωγική δραστηριότητα σχετικά με την έννοια του ορίου μιας συνάρτησης f(x) σε ένα σημείο x_0 είναι αυτή της στιγμιαίας ταχύτητας, δηλαδή της ταχύτητα ενός σώματος σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Η έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας περιλαμβάνει την οριακή διαδικασία, καθώς ορίζεται ως το όριο της μέσης ταχύτητας του σώματος σε χρονικά διαστήματα ολοένα και πιο μικρά γύρω από μία δεδομένη χρονική στιγμή t. Καθώς το χρονικό διάστημα τείνει στο μηδέν, η ταχύτητα τείνει σε μια τιμή που ορίζεται ως η στιγμιαία ταχύτητα κατά τη χρονική στιγμή t.

γ) Μία πολύ συχνή παρανόηση των μαθητών για το όριο μιας συνάρτησης σε έναν αριθμό x_0 είναι ότι το x_0 πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Μάλιστα πολλοί μαθητές πιστεύουν πως εάν το $f(x_0)$ υπάρχει, τότε αυτό είναι και το όριο της f στο x_0.

Επίσης οι μαθητές συχνά πιστεύουν πως για να υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης πρέπει να υπάρχει και το δεξί και το αριστερό όριο και μάλιστα να είναι ίσα.

Τέλος συχνό λάθος των μαθητών, και των καθηγητών πολλές φορές είναι η πεποίθηση πως οι ιδιότητες των ορίων ισχύουν πάντα, χωρίς να χρειάζεται να ισχύει η προϋπόθεση πως τα όρια των f και g υπάρχουν.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2

α) Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε ο μαθητής χωρίζει τα όρια χωρίς να γνωρίζει αν υπάρχει το $\lim_{x\to 1} f(x)$. *Θα έδινα το λόγο στους μαθητές να κάνουν μόνοι τους τις εικασίες τους και θα συζητούσαμε έπειτα τη σημασία του να ελέγχουμε τις συνθήκες πριν την εφαρμογή οποιασδήποτε ιδιότητας των ορίων.*

β) Η άσκηση είναι 100% λάθος. Άρα δεν θα έβαζα βαθμό.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3

α) Ο καθηγητής έχοντας ίσως διδάξει στους μαθητές τις ιδιότητες των ορίων και συγκεκριμένα την ιδιότητα για το όριο μιας ρητής συνάρτησης, όπου :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, Q(x_0) \neq 0$$

φτάνει με την άσκηση αυτή στην περίπτωση της ρητής συνάρτησης όπου το $Q(x_0)=0$, στην οποία δεν εφαρμόζεται η παραπάνω ιδιότητα.

Ο καθηγητής περιμένει από τον μαθητή να παρατηρήσει πως για x=2 μηδενίζονται και οι δύο όροι του κλάσματος και έτσι να προχωρήσει με παραγοντοποίηση και διαγραφή των όρων που μηδενίζονται, όπως και έκανε. Σίγουρα όμως ο καθηγητής έχει ως στόχο στην άσκηση αυτή, την πλήρη κατανόηση της διαδικασίας από τους μαθητές: Γιατί δεν εφαρμόζεται η παραπάνω ιδιότητα; Γιατί μπορώ να κάνω παραγοντοποίηση και να διαγράψω όρους της ρητής συνάρτησης; Και τελικά οι μαθητές να κατανοήσουν πως στην περιοχή αυτή γύρω από το 2 που μας απασχολεί, οι δύο συναρτήσεις που έχουμε τελικά ταυτίζονται.

β) Ο μαθητής αφού δεν μπόρεσε, όπως είπαμε, να χρησιμοποιήσει την ιδιότητα:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, Q(x_0) \neq 0$$

έφερε την ρητή συνάρτηση σε μορφή ενός πολυωνύμου και χρησιμοποίησε την ιδιότητα:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

γ & δ) Πολλές φορές πολλοί μαθητές παραλείπουν την αιτιολόγηση μιας λύσης τους σε ένα μαθηματικό πρόβλημα. Αυτό μπορεί να γίνει είτε γιατί θεωρείται από αυτούς αυτονόητη και έτσι την αποφεύγουν για εξοικονόμηση χρόνου, είτε γιατί δεν έχουν κατανοήσει εννοιολογικά την αντίστοιχη μαθηματική έννοια, αλλά μόνο διαδικαστικά. Σε κάθε περίπτωση, όπως και σ' αυτή εδώ του μαθητή, μία σωστή διδακτική προσέγγιση είναι να συνεχιστεί μια συζήτηση στην τάξη, ώστε να γίνει αντιληπτή η συλλογιστική πορεία του κάθε μαθητή. Στην συγκεκριμένη περίπτωση οι ερωτήσεις που θα γινόταν στους μαθητές μετά την λύση του μαθητή θα ήταν της μορφής:

- *Γιατί δεν εφαρμόζεται εδώ η γνωστή ιδιότητα;*
- *Γιατί μπορώ να κάνω παραγοντοποίηση και να διαγράψω όρους της ρητής συνάρτησης;*
- *Για ποιο λόγο ισχύουν οι ισότητες που έγραψες;*
- *Για ποιο λόγο το όριο των δύο παραπάνω συναρτήσεων είναι ίσο παρότι είναι διαφορετικές;*

ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα τα επιμέρους όρια υπάρχουν και γι' αυτό το αποτέλεσμα είναι σωστό. Αυτό δε σημαίνει όμως πως δεν πρέπει να σταθούμε στην λύση του μαθητή και να προχωρήσουμε παρακάτω επειδή απλώς έχουμε ένα σωστό αποτέλεσμα. Είναι σημαντικό να τονίζουμε τέτοια λάθη, διαφορετικά τα ενισχύουμε. Ίσως μια καλή διδακτική προσέγγιση αυτού του λάθους θα ήταν να ζητήσουμε από τον ίδιο μαθητή να λύσει άλλη μία παρόμοια άσκηση, στην οποία όμως η τακτική του δεν θα λειτουργήσει. Για παράδειγμα δίνοντάς του μία άσκηση όπου το όριο της f ή της g δεν υπάρχει και αυτό του προκαλέσει πρόβλημα στην πορεία της άσκησης. Σημαντικό θα ήταν επίσης να δώσουμε την ίδια άσκηση σε όλους τους μαθητές της τάξης καθώς όπως είπαμε και παραπάνω το λάθος αυτό δεν αποτελεί ιδιοσυγκρασιακό λάθος του συγκεκριμένου μαθητή, αλλά είναι ένα πολύ συχνό λάθος των μαθητών.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5

α) Σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο ο μαθητής γνωρίζει ότι:

Όταν το όριο της f υπάρχει στο x_0 τότε

$$\lim_{x\to x_0}(kf(x)) = k\lim_{x\to x_0} f(x), \forall k \in \mathbb{R}$$

Ο μαθητής χρησιμοποιεί λανθασμένα την παραπάνω ιδιότητα στα εξής σημεία:

$$\lim_{y\to\infty}(-\eta\mu(y)) = -\lim_{y\to\infty}(\eta\mu(y))$$

$$\lim_{z\to\infty}\eta\mu(-z) = -\lim_{z\to\infty}\eta\mu(z)$$

Καθώς δεν ικανοποιείται η αναγκαία συνθήκη του θεωρήματος, αφού το όριο του ημ(x) όταν το x τείνει στο άπειρο δεν υπάρχει.

β) Και τα δύο λάθη είναι συχνά, όταν δίνεται στους μαθητές μία άσκηση όπου δεν ικανοποιείται η αναγκαία αυτή συνθήκη του θεωρήματος. Είναι ένα λάθος όχι μόνο των μαθητών αλλά και των καθηγητών, που πολλές φορές για εξοικονόμηση χρόνου δεν ελέγχουν την συνθήκη αυτή ή δεν διορθώνουν τους μαθητές όταν την προσπερνούν.

γ & δ) Το παράδειγμα αυτό θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί διδακτικά, έτσι ώστε να τονίσουμε στα παιδιά την απαραίτητη προϋπόθεση του θεωρήματος αυτού. Θα μπορούσαμε μάλιστα να το παρουσιάσουμε σαν παράδειγμα στους μαθητές και να ρωτήσουμε αυτούς που βρίσκεται το λάθος *ώστε να αναρωτηθούν, να το μελετήσουν και στη συνέχεια να το κατανοήσουν. Στη συνέχεια θα μπορούσαμε να θα καθοδηγήσουμε τους μαθητές να λύσουν το παράδειγμά με τον σωστό τρόπο, υπολογίζοντας το όριο της f και της g ξεχωριστά και στη συνέχεια, εφόσον αυτά υπάρχουν, να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του αθροίσματος των επιμέρους ορίων.*

Η ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ (ΠΓΠ) ΤΟΥ ΗΛΙΑ

Προκειμένου να καταταχτούν οι γνώσεις του Ηλία αναπτύσσονται οι βασικές κατηγορίες των παιδαγωγικών και διδακτικών γνώσεων (ΠΓΠ), δηλαδή η ΓΠΜ, ΓΠΔ και ΓΠΑΠ.

Γνώση του περιεχομένου και των μαθητών (ΓΠΜ)

Γνώση των παρανοήσεων

Αναλύοντας τις απαντήσεις του Ηλία στο ερωτηματολόγιο που του δόθηκε, παρατηρήθηκε ότι δεν αναγνωρίζει όλα τα λάθη των μαθητών. Στις ερωτήσεις 2 και 5 εύστοχα ανακαλύπτει τα λάθη τους,

"Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε ο μαθητής χωρίζει τα όρια χωρίς να γνωρίζει αν υπάρχει το $\lim_{x\to 1} f(x)$*."*

"Ο μαθητής χρησιμοποιεί λανθασμένα την παραπάνω ιδιότητα στα εξής σημεία:

$$\lim_{y\to\infty}(-\eta\mu(y)) = -\lim_{y\to\infty}(\eta\mu(y))$$
$$\lim_{z\to\infty}\eta\mu(-z) = -\lim_{z\to\infty}\eta\mu(z)$$

Καθώς δεν ικανοποιείται η αναγκαία συνθήκη του θεωρήματος, αφού το όριο του ημ(x) όταν το x τείνει στο άπειρο δεν υπάρχει."

ωστόσο στην τέταρτη ερώτηση δεν καταφέρνει να αποσαφηνίσει το λάθος του μαθητή και το νόημα ύπαρξης της άσκησης,

"Στο συγκεκριμένο παράδειγμα τα επιμέρους όρια υπάρχουν και γι' αυτό το αποτέλεσμα είναι σωστό."

αφού σαν στόχο έχει την ανάδειξη της σημαντικότητας εύρεσης του πεδίου ορισμού της συνάρτησης πριν τον υπολογισμό του ορίου της.

Ωστόσο ο Ηλίας επισημαίνει κάποιες από τις συχνές και βασικές παρανοήσεις των μαθητών.

- *Μία πολύ συχνή παρανόηση των μαθητών για το όριο μιας συνάρτησης σε έναν αριθμό x_0 είναι ότι το x_0 πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.*
- *Μάλιστα πολλοί μαθητές πιστεύουν πως εάν το $f(x_0)$ υπάρχει, τότε αυτό είναι και το όριο της f στο x_0.*
- *Επίσης οι μαθητές συχνά πιστεύουν πως για να υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης πρέπει να υπάρχει και το δεξί και το αριστερό όριο και μάλιστα να είναι ίσα.*
- *Τέλος συχνό λάθος των μαθητών, και των καθηγητών πολλές φορές είναι η πεποίθηση πως οι ιδιότητες των ορίων ισχύουν πάντα, χωρίς να χρειάζεται να ισχύει η προϋπόθεση πως τα όρια των f και g υπάρχουν.*

Οι επισημάνσεις αυτές αναδεικνύουν μια ικανοποιητική ικανότητα αναγνώρισης των παρανοήσεων των μαθητών.

Ικανότητα του δασκάλου να κατανοεί και να ερμηνεύει το σκεπτικό ενός μαθητή

Για τον Ηλία η προηγούμενη εμπειρία των μαθητών καθώς και η μη σαφής διαδικασία υπολογισμού του ορίου είναι δύο κύριες αιτίες που δημιουργούν το σκεπτικό των μαθητών.

“Οι μαθητές δεν καταλαβαίνουν πλήρως την έννοια του ορίου, αυτό καταλαβαίνω τουλάχιστον από όσους ενδιαφέρονται μέσα στην τάξη. Το θέμα είναι ότι αυτό το κουβαλάνε στη Συνέχεια και στις Παράγωγους. Όλα αλυσίδα. Πιστεύω ότι τα μαθηματικά της τρίτης Λυκείου έχουν δημιουργήσει χάος στο σκεπτικό των μαθητών. Μέχρι τότε έχουν μάθει σε πιο χειροπιαστές έννοιες. Έχουν συνηθίσει σε συγκεκριμένες μεθοδολογίες, ένα κι ένα κάνουν δύο. Το όριο είναι η ένταξη τους σε έναν αφηρημένο κόσμο που δεν είχαν ξαναδεί.”

Η προσπάθεια του να ερμηνεύσει το σκεπτικό των μαθητών φαίνεται και από το παρακάτω απόσπασμα της απάντησης του στην τρίτη ερώτηση:

“Πολλές φορές πολλοί μαθητές παραλείπουν την αιτιολόγηση μιας λύσης τους σε ένα μαθηματικό πρόβλημα. Αυτό μπορεί να γίνει είτε γιατί θεωρείται από αυτούς αυτονόητη και έτσι την αποφεύγουν για εξοικονόμηση χρόνου, είτε γιατί δεν έχουν κατανοήσει εννοιολογικά την αντίστοιχη μαθηματική έννοια, αλλά μόνο διαδικαστικά”.

Συμπληρώνει στην συνέντευξη ότι *“οι περισσότεροι από τους μαθητές μου λύνουν τις περισσότερες ασκήσεις που τους βάζω. Φοβάμαι ότι ένας - δύο έχουν κατανοήσει πλήρως την έννοια. Οι άλλοι* *μπορεί να τις λύνουν και στο φροντιστήριο..."*

Γνώση των θεμάτων που μπορεί να βρίσκουν οι μαθητές ενδιαφέροντα

Για τον Ηλία οποιαδήποτε μέθοδος διδασκαλίας που διαφέρει από την παραδοσιακή δασκαλοκεντρική, μπορεί να εξάψει το ενδιαφέρον των μαθητών. *"Δεν μπορώ απλά να είμαι όρθιος στον πίνακα, να γράφω και να μιλάω. Αυτό έκαναν οι δικοί μου δάσκαλοι. Δεν τα καταφέρνω με την τεχνολογία, προσπαθώ όμως να εφαρμόσω άλλες διδακτικές προσεγγίσεις."*

Ο Ηλίας πιστεύει ότι η προσέγγιση "μαθαίνω κάνοντας" ενθαρρύνει τους μαθητές, τους προκαλεί το ενδιαφέρον καθώς ανακαλύπτουν τη γνώση μέσα από δημιουργικές διαδικασίες.

"Τους βάζω προβλήματα και τους ενθαρρύνω να κάνουν εικασίες, εκεί βλέπω ότι συμμετέχουν σχεδόν όλοι. Για παράδειγμα χρησιμοποιώ το πρόβλημα της στιγμιαίας ταχύτητας. Αυτόματα τα αγόρια μόλις ακούσουν για αυτοκίνητο γίνονται πιο ενεργά."

Γνώση προϋποθέσεων για να διευκολυνθεί κατανόηση των μαθητών

Για τον Ηλία απαραίτητη προϋπόθεση για να διευκολυνθεί η κατανόηση των μαθητών στην έννοια του ορίου είναι η ύπαρξη μιας δομημένης μαθησιακής πορείας. Θεωρεί ότι όλα αρχίζουν από την Πρωτοβάθμια εκπαίδευση για να ολοκληρωθούν στην Γ' Λυκείου. Για εκείνον, οι μαθητές από την αρχή πρέπει να μάθουν να χτίζουν και να κατακτούν κάθε έννοια που μαθαίνουν. *"... είναι πολύ σημαντικό να μάθουν να σκέφτονται από νωρίς και ακόμη πιο σημαντικό να έχουν καλύψει οποιοδήποτε κενό υπάρχει στην κατανόηση οποιασδήποτε έννοιας."* Επισημαίνει ότι τα μαθηματικά είναι αλληλένδετα και ότι όλες οι έννοιες τους είναι μια αλυσίδα. *"Οι παρανοήσεις και οι δυσκολίες στα όρια σε ένα ποσοστό είναι συνέπεια των νοηματικών κενών τους σε άλλες περιοχές των μαθηματικών"*.

Στο σημείο αυτό ο Ηλίας δίνει το παράδειγμα των συναρτήσεων. *"Οι μαθητές ακόμη από το δημοτικό ξεκινούν την ανακάλυψη της συνάρτησης. Στο Γυμνάσιο μαθαίνουν ήδη τον ορισμό της και κάποιες από τις πιο απλές για να έρθουν στο Λύκειο να τις μελετήσουν σε ένα μεγάλο φάσμα τους… αυτό δείχνει ότι από την πρώτη στιγμή δεν πρέπει να μείνουν ασάφειες στο μυαλό τους. Πώς θα ασχοληθούν με τα όρια που είναι άμεσα συνδεδεμένα με τις συναρτήσεις όταν δεν τις κατέχουν;"*

Γνώση του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας (ΓΠΔ)

Χρήση ανταγωνιστικών ισχυρισμών

Η μέθοδος των ανταγωνιστικών ισχυρισμών προκειμένου να έρθουν οι μαθητές σε γνωστική σύγκρουση αποτελεί ένα μικρο μέρος της διδασκαλίας του Ηλία. Στις απαντήσεις που έδωσε στο ερωτηματολόγιο δείχνει ότι σε κάποιες περιπτώσεις χρησιμοποιεί αντιφάσεις έτσι ώστε οι μαθητές να μπουν στη διαδικασία αμφισβήτησης και να ελέγξουν τις υποθέσεις τους. Το παρακάτω απόσπασμα είναι μέρος της απάντησης του Ηλία στην ερώτηση 4:

‘‘Ίσως μια καλή διδακτική προσέγγιση αυτού του λάθους θα ήταν να ζητήσουμε από τον ίδιο μαθητή να λύσει άλλη μία παρόμοια άσκηση, στην οποία όμως η τακτική του δεν θα λειτουργήσει. Για παράδειγμα δίνοντάς του μία άσκηση όπου το όριο της f ή της g δεν υπάρχει και αυτό του προκαλέσει πρόβλημα στην πορεία της άσκησης.’’

Επιπλέον αναφορικά με την Ερώτηση 5, ο Ηλίας θεωρεί ότι το ίδιο το διδακτικό σενάριο για το οποίο καλείται να απαντήσει, αποτελεί ένα διδακτικό παράδειγμα με στόχο τη γνωστική σύγκρουση των μαθητών.

‘‘Το παράδειγμα αυτό θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί διδακτικά, έτσι ώστε να τονίσουμε στα παιδιά την απαραίτητη προϋπόθεση του θεωρήματος αυτού. Θα μπορούσαμε μάλιστα να το παρουσιάσουμε σαν παράδειγμα στους μαθητές και να ρωτήσουμε αυτούς που βρίσκεται το λάθος ώστε να αναρωτηθούν, να το μελετήσουν και στη συνέχεια να το κατανοήσουν.’’

Συζήτηση στη διδασκαλία

Ο Ηλίας δίνει μεγάλη βαρύτητα στη συζήτηση και τον διάλογο μέσα στην τάξη. Παρόλο που τα αποσπάσματα στις απαντήσεις του δεν είναι αρκετά και δεν αναλύει το περιεχόμενο των υποτιθέμενων συζητήσεων,

‘‘Θα έδινα το λόγο στους μαθητές να κάνουν μόνοι τους τις εικασίες τους και θα συζητούσαμε έπειτα τη σημασία του να ελέγχουμε τις συνθήκες πριν την εφαρμογή οποιασδήποτε ιδιότητας των ορίων.’’

‘‘...μία σωστή διδακτική προσέγγιση είναι να συνεχιστεί μια συζήτηση στην τάξη, ώστε να γίνει αντιληπτή η συλλογιστική πορεία του κάθε μαθητή.’’

στη συνέντευξη του ήταν πιο εμφανής η αξία που έχει η συζήτηση στο μυαλό του:

‘‘...ο διάλογος αποτελεί σημείο αναφοράς της ζωής μου γενικότερα. Θέλω να ξέρω τις απόψεις των

συνομιλητών μου και δεν μου αρέσει να μιλάω μόνο εγώ. Πόσο μάλλον μέσα στην τάξη όπου οι μαθητές καλούνται να μάθουν πράγματα δυσνόητα για εκείνους...''

''Αρχίζει η συζήτηση για τα όρια, τους φέρνω μπροστά σε θέματα που τους προβληματίζουν, ακούω τις απόψεις, τους αφήνω να κάνουν τις υποθέσεις του, να τις κουβεντιάσουν μεταξύ τους, εγώ είμαι κάτι σαν σύμβουλος. Μέχρι και καβγά έχουν κάνει μεταξύ τους προσπαθώντας να βρουν άκρη. Για μένα αυτό ήταν πολύτιμο.''

Από τα παραπάνω αποσπάσματα προκύπτει η θετική στάση του Ηλία στη χρησιμοποίηση του διαλόγου ως μέσου επίτευξης της μάθησης.

Σύνδεση με άλλα πεδία εντός κι εκτός των μαθηματικών

Σύμφωνα με τις απαντήσεις του Ηλία, μια από τις αναφορές του σε πεδίο εκτός των μαθηματικών λαμβάνει χώρα στον τομέα της Φυσικής.

''Μία άλλη εισαγωγική δραστηριότητα σχετικά με την έννοια του ορίου μιας συνάρτησης $f(x)$ σε ένα σημείο x_0 είναι αυτή της στιγμιαίας ταχύτητας, δηλαδή της ταχύτητα ενός σώματος σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Η έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας περιλαμβάνει την οριακή διαδικασία, καθώς ορίζεται ως το όριο της μέσης ταχύτητας του σώματος σε χρονικά διαστήματα ολοένα και πιο μικρά γύρω από μία δεδομένη χρονική στιγμή t. Καθώς το χρονικό διάστημα τείνει στο μηδέν, η ταχύτητα τείνει σε μια τιμή που ορίζεται ως η στιγμιαία ταχύτητα κατά τη χρονική στιγμή t.''

Υπάρχουν φορές όμως που σύμφωνα με τον ίδιο συνδέει την έννοια του ορίου με άλλες μέσα στο ίδιο πεδίο των μαθηματικών.

'' Δεν μπορώ να μιλήσω για όρια αν δεν μιλήσω για συναρτήσεις, αν δεν μιλήσω για το άπειρο. Κι επειδή το άπειρο δεν υπάρχει πουθενά στο σχολικό βιβλίο, κάνω αναφορές από άρθρα που έχω διαβάσει.''

Επιπλέον ο Ηλίας ανατρέχει σε κάθε θεματολογία των μαθηματικών που διακρίνει ότι οι μαθητές δεν θυμούνται ή δεν έχουν καταλάβει. *'' Ειδικά αν έχουμε απόλυτα στις ασκήσεις των ορίων, γίνεται ο κακός χαμός. Τώρα πια ανατρέχω στα απόλυτα πριν διδάξω την έννοια του ορίου.''*

Ακόμη ένα πεδίο εκτός των μαθηματικών που ο Ηλίας βασίζει τη διδασκαλία του είναι η ιστορία των μαθηματικών που θα αναλυθεί παρακάτω.

Ιστορική ανακατασκευή εννοιών

Ο Ηλίας δήλωσε ότι κάνει συχνά ιστορική αναδρομή των εννοιών. Διαβάζει πάντα στους μαθητές τα ιστορικά γεγονότα που περιγράφουν τα σχολικά βιβλία, έχει διαβάσει όμως αρκετά για την εξέλιξη της έννοιας του ορίου γιατί και για εκείνον ακόμη η έννοια ήταν πολύπλοκη και είχε την ανάγκη να κατανοήσει το λόγο που ύπαρξής της.

''Τα όρια δεν εμφανίστηκαν ξαφνικά στη ζωή μας, εισήλθαν για κάποιο λόγο, κάποια προβλήματα θα έμεναν αναπάντητα εάν δεν υπήρχαν τα όρια. Έχει απίστευτο ενδιαφέρον το πως το άπειρο δημιούργησε πονοκέφαλο σε τόσους μεγάλους μαθηματικούς. Αυτό το ενδιαφέρον θέλω να μεταβιβάσω στα παιδιά. Και νομίζω ότι το καταφέρνω. Δεν ξεκινώ ιστορικά το μάθημα μου, περιμένω όμως πάντα εκείνη την ερώτηση που αλήθεια μου γίνεται κάθε σχολική χρονιά: «και που χρησιμεύουν τα όρια;»...''

Διδασκαλία του φορμαλιστικού τρόπου διατύπωσης

''Θεωρώ ότι οι μαθητές πρέπει να ξέρουν να διατυπώνουν αυστηρά. Δεν είναι ιστορία να την πεις με δικά λόγια. Κάθε λέξη που αποτυπώνεται σε μια πρόταση,ή ένα θεώρημα κτλ έχει λόγο ύπαρξης. Ακόμη κι ένα ''ή'' ή ένα ''και'' μπορεί να κάνει τη διάφορα. Και δεν είναι οι εξετάσεις μόνο. Για μένα είναι ο σεβασμός σε αυτό που με τόσο κόπο δημιούργησαν οι μεγάλοι Μαθηματικοί.''

Από το παραπάνω απόσπασμα είναι η ευδιάκριτη η διδακτική επιλογή του Ηλία στην αυστηρή και τυπική διατύπωση των μαθητών. Αποδίδει την επιλογή του αυτή στις Πανελλήνιες εξετάσεις που είναι απαραίτητος ο φορμαλιστικός τρόπος διατύπωσης αλλά για εκείνον μεγαλύτερη σημασία έχει η ίδια ιστορική εξέλιξη της έννοιας.

Χρήση διδακτικών παραδειγμάτων

Στο ερωτηματολόγιο που δόθηκε στον Ηλία γίνονται ελάχιστες αναφορές στα διδακτικά παραδείγματα που χρησιμοποιεί. Ένα από αυτά το συναντάμε στην Ερώτηση 1 και αποτελεί το πρώτο παράδειγμα με το οποίο εισάγει τους μαθητές του στην έννοια του ορίου.

Μία από τις εισαγωγικές δραστηριότητες που χρησιμοποιώ είναι η εξής:

Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών για την συνάρτηση $f(x)= x^2 +1$

x	*0*	*0,5*	*0,075*	*0,9000*	*0,9900*	*0,9990*	*0,9999*	*0,99999*
f(x)								

Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών για την συνάρτηση $f(x)= x^2 +1$

x	*2*	*1,5*	*1,1*	*1,01*	*1,001*	*1,0001*	*1,00001*	*1,000001*
f(x)								

- *Να συμπληρώσετε τα κενά*

  Προς ποιόν αριθμό τείνει το x ....

  Προς ποιόν αριθμό τείνει το f(x).........

- *Να γίνει η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης.*

Με το παραπάνω παράδειγμα ο Ηλίας θέλει να ανακαλύψουν οι μαθητές τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης *f*(x) όταν το x πλησιάζει είτε από δεξιά είτε από αριστερά τον αριθμό 1.

Ακόμη μια αναφορά σε παράδειγμα γίνεται στην Ερώτηση 3 όπου εξηγεί τον τρόπο που θα διαχειριζόταν το ζήτημα που πραγματεύεται το συγκεκριμένο διδακτικό σενάριο.

"...για παράδειγμα δίνοντάς του μία άσκηση όπου το όριο της f ή της g δεν υπάρχει και αυτό του προκαλέσει πρόβλημα στην πορεία της άσκησης."

Με παράδειγμα αυτού του τύπου επιδιώκει να προβληματίσει τους μαθητές και να τους φέρει σε διαδικασία αμφισβήτησης.

Από την συνέντευξη του προέκυψαν δύο ακόμη είδη παραδειγμάτων που δίνει προκειμένου να στηρίξει τη διδασκαλία του.

"Τους βάζω προβλήματα και τους ενθαρρύνω να κάνουν εικασίες, εκεί βλέπω ότι συμμετέχουν σχεδόν όλοι. Για παράδειγμα χρησιμοποιώ το πρόβλημα της στιγμιαίας ταχύτητας.

Ενώ για το διδακτικό σενάριο της Ερώτησης 5 δήλωσε ότι:

"Το παράδειγμα αυτό θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί διδακτικά, έτσι ώστε να τονίσουμε στα παιδιά την απαραίτητη προϋπόθεση του θεωρήματος αυτού. Θα μπορούσαμε μάλιστα να το παρουσιάσουμε σαν παράδειγμα στους μαθητές και να ρωτήσουμε αυτούς που βρίσκεται το λάθος..."

Γνώση του Περιεχομένου και του Αναλυτικού προγράμματος (ΓΠΑΠ)

Γνώση του περιεχομένου και της διδακτικής ακολουθίας του σχολικού βιβλίου

Ο Ηλίας κατά τη διάρκεια της συνέντευξης του έκανε αρκετές αναφορές στο σχολικό βιβλίο.

"...θα έπρεπε στα προηγούμενα κεφάλαια, να έχουν αναλυθεί κάποιες έννοιες πριν το κεφάλαιο του

ορίου. Τι είναι οι άπειρες διαδικασίες;"

"Νομίζω ότι το κεφάλαιο των ορίων είναι λίγο στο περιθώριο σε σχέση με της παραγώγους. Δεν αξιοποιούνται θεωρώ πολλά από αυτό. Ακόμη και ο ορισμός του δεν διδάσκεται ενώ είναι πολύ σημαντικός."

"...πως οι μαθητές να μην έχουν έναν αλγεβρικό χειρισμό στις ασκήσεις; Είναι εκτός ύλης τα πάντα σχεδόν. Ορισμός, αποδείξεις.."

"στο βιβλίο οι μαθητές βλέπουν τις φράσεις «προσεγγίζει», «τείνει στο» που τις έμαθαν σε άλλες στιγμές της ζωής τους..."

Όλες οι περιπτώσεις στις οποίες αναφέρεται, προϋποθέτουν μια ικανοποιητική γνώση του περιεχομένου και της διδακτικής ακολουθίας του σχολικού βιβλίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

6.1 ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η εκτεταμένη έρευνα των τελευταίων χρόνων σχετικά με τις γνώσεις των εκπαιδευτικών, αναγνωρίζει την ύπαρξη μιας ιδιαίτερης γνώσης, διαφορετικής από την απλή γνώση του μαθηματικού αντικειμένου. Αν και τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει βήματα στην κατεύθυνση της διερεύνησης της γνώσης (μαθηματικής και παιδαγωγικής) ενός δασκάλου των μαθηματικών, εξακολουθούν να παραμένουν αναπάντητα πολλά ερωτήματα. Κι αυτό γιατί οι περισσότερες έρευνες είναι εστιασμένες στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

Με την παρούσα έρευνα γίνεται μια προσπάθεια διερεύνησης της παιδαγωγικής γνώσης έξι καθηγητών των Μαθηματικών όχι γενικά, αλλά σε ένα συγκεκριμένο αντικείμενο διδασκαλίας, αυτό των Ορίων. Στην έρευνα επιλέχτηκε η έννοια του ορίου, καθώς οι δυσκολίες σχετικά με αυτήν αφορούν τόσο τους μαθητές όσο και τους εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Mastorides & Zachariades, 2004).

Η έννοια του ορίου είναι μια ιδιαίτερα δύσκολη έννοια που κατέχει κεντρική θέση στη μαθηματική ανάλυση, και αποτελεί βάση της συνέχειας, του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού. Πολλές από τις έρευνες που έχουν διεξαχθεί παρουσιάζουν ότι η πλειοψηφία των μαθητών δεν κατανοεί πλήρως την έννοια του ορίου, ακόμη και σε ανώτερο στάδιο των σπουδών τους.

Οι παρανοήσεις σχετικά με τις έννοιες που περιλαμβάνει το κεφάλαιο των Ορίων είναι ιδιαίτερα σημαντικές για τους καθηγητές, οι οποίοι θα πρέπει να αναγνωρίζουν την σπουδαιότητά τους και να έχουν την επίγνωση τους. Ο σχεδιασμός διδακτικών στρατηγικών βασισμένων στα εμπόδια, τις παρανοήσεις, την εικόνα των μαθητών για τα όρια και στων αυθόρμητων αντιλήψεων τους, είναι μεγίστης σημασίας.

Παρακάτω περιγράφονται κάποιες από τις παρανοήσεις των μαθητών όπως αυτές παρουσιάστηκαν στο δεύτερο κεφάλαιο.

• Αντίληψη του ορίου ως απρόσιτο.

• Αντίληψη του ορίου ως προσέγγιση.

• Μπορούμε να βρούμε το όριο μίας συνάρτησης τοποθετώντας σε αυτή αριθμούς που βρίσκονται όλο και πιο κοντά σε ένα δοσμένο αριθμό.

• Μια συνάρτηση έχει πάντοτε όριο σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της.

• Για να έχει μία συνάρτηση όριο σε ένα σημείο, πρέπει να ορίζεται σε αυτό.

• Το όριο μίας συνάρτησης ισούται με την τιμή της συνάρτησης σε αυτό το σημείο, δηλαδή το όριο μπορεί πάντοτε να βρεθεί με μία μέθοδο απλής αντικατάστασης.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που καλείται να απαντήσει η έρευνα είναι τα εξής:

1. Μπορούν οι εκπαιδευτικοί να αναγνωρίσουν τις παρανοήσεις που αναπτύσσουν οι μαθητές στα όρια και τις αιτίες που τις δημιουργούν;
2. Με ποιον τρόπο οι εκπαιδευτικοί διαχειρίζονται διδακτικά τις παρανοήσεις και τα λάθη των μαθητών; Διαθέτουν την ικανότητα να προσφέρουν άλλες λύσεις και να δώσουν σαφή παραδείγματα για να ενισχύσουν την κατανόηση της έννοιας του ορίου;
3. Πώς εντάσσεται η διδακτική διάσταση της γνώσης των εκπαιδευτικών, στο θεωρητικό πλαίσιο της Ball και των συνεργατών της;

Για την ανάλυση της έρευνας υιοθετήθηκε το θεωρητικό πλαίσιο της Ball και των συνεργατών της, προκειμένου να ανιχνευτούν οι δείκτες της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου (ΠΓΠ). Παρόλο που το πλαίσιο της Ball στηρίζεται σε έρευνες και αποτελέσματα προερχόμενα από τη Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, τα τελευταία χρόνια γίνεται μια προσπάθεια να ενταχθεί στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.

6.2 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

1ο ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ

Μπορούν οι εκπαιδευτικοί να αναγνωρίσουν τις παρανοήσεις που αναπτύσσουν οι μαθητές στα όρια και τις αιτίες που τις δημιουργούν;

Κατά την ανάλυση των αποτελεσμάτων φάνηκε ότι οι τέσσερεις από τους έξι εκπαιδευτικούς αναγνώρισαν επιτυχώς όλα τα λάθη των μαθητών που αναφέρονται στα διδακτικά σενάρια του ερωτηματολογίου. Ο Πέτρος και ο Ηλίας είναι εκείνοι που στις Ερωτήσεις 3 και 4 αντίστοιχα δεν μπόρεσαν να αντιληφθούν τον στόχο της άσκησης αλλά και τα λάθη των μαθητών. Αυτό πιθανότητα σημαίνει ότι οι δικές τους παρανοήσεις θα οδηγήσουν στην έλλειψη κατανόησης των συγκεκριμένων λαθών των μαθητών.

Οι κύριες παρανοήσεις που εντοπίζονται είναι οι εξής :

- το όριο της συνάρτησης στο x_0 είναι η αριθμητική τιμή που παίρνει η συνάρτηση για $x=x_0$.
- το σημείο x_0 πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης γιατί διαφορετικά το όριο δεν έχει νόημα.

Διαπιστώθηκε ότι και οι έξι εκπαιδευτικοί εντοπίζουν ορθά την παρανόηση των μαθητών ότι η τιμή της συνάρτησης σε ένα σημείο είναι ίση με το όριο της σε αυτό, ενώ οι πέντε αναγνώρισαν και τη δεύτερη παρανόηση ότι το σημείο x_0 πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Το γεγονός ότι αυτές οι παρανοήσεις βρέθηκαν σε τόσο μεγάλο ποσοστό φανερώνει ότι αποτελούν τα κύρια εμπόδια των μαθητών. Επιπλέον η Στέλλα και ο Νίκος επισημαίνουν ακόμη μια παρανόηση, που συμβαδίζει πλήρως με τις προηγούμενες έρευνες, σχετικά με τις λέξεις «τείνει προς» και «όριο», ενώ η Ελένη είναι η μοναδική που αναγνωρίζει μια από τις μεγαλύτερες, σύμφωνα με τις έρευνες, παρανοήσεις των μαθητών ότι το όριο πλησιάζει πάρα πολύ την τιμή του αλλά δεν πρέπει να την φτάσει.

Μέσα από τις συνεντεύξεις τους αποκαλύφθηκε η άποψή τους για κάποιες από τις αιτίες που δημιουργούν αυτές τις παρανοήσεις και τον τρόπο που πιθανό σκέφτονται οι μαθητές.

Για τον Νίκο οι παρανοήσεις των μαθητών οφείλονται αρχικά στην αλγοριθμική προσέγγιση που έχουν για τα όρια λόγω της προηγούμενης εμπειρίας τους. Αυτή η εμπειρία έρχεται σε αντίθεση με τη μη σαφή διαδικασία υπολογισμού του ορίου και αποδίδει τις ευθύνες στους ίδιους τους εκπαιδευτικούς. Ακόμη μια αιτία που εντοπίζει ο Νίκος κι έχει αποδειχτεί από τις έρευνες, είναι η εικόνα που έχουν οι μαθητές για το όριο και τις φράσεις «προσεγγίζω» ή «τείνω προς» σε πλαίσιο διαφορετικό από εκείνο των Μαθηματικών.

Παρόμοια κατεύθυνση με τον Νίκο έχει και ο Χρήστος, που και για εκείνον η προηγούμενη εμπειρία και η αλγεβρικές διαδικασίες για τον υπολογισμό του ορίου οδηγούν στην έλλειψη κατανόησης των μαθητών. Επιπλέον επισημαίνει την αντίληψη του μαθητή για την στατικότητα του ορίου και αποδίδει τις ευθύνες στο σχολικό βιβλίο και τον τρόπο που είναι δομημένο.

Ο Πέτρος αποδίδει τις παρανοήσεις των μαθητών στην προηγούμενη εμπειρία τους με τα μαθηματικά και την αδυναμία τους να αντιμετωπίσουν το άπειρο, στο ότι ο τυπικός ορισμός του ορίου περιλαμβάνει συνθήκες με πολλές μεταβλητές, αλλά τονίζει κυρίως μια σημαντική τοποθέτηση των μαθητών ότι τα μαθηματικά δεν έχουν νόημα άρα δεν έχει νόημα η θεωρία πίσω από τα μαθηματικά γεγονότα.

Η Στέλλα αναφέρεται στις διαισθητικές αντιλήψεις και την εικόνα των μαθητών σχετικά με την έννοια του ορίου και του απείρου. Τονίζει τη θεώρηση των μαθητών για το όριο ως κάτι πεπερασμένο που έρχεται σε αντίθεση με τις μετέπειτα γνώσεις που αποκτούν. Για εκείνη η προηγούμενη εμπειρία των μαθητών συνάδει με το γεγονός ότι μαθητές σπάνια έρχονται αντιμέτωποι στον υπολογισμό ορίων που δεν υπάρχουν γεγονός που προκαλέι πολλά από τα λάθη τους.

Η Ελένη με τον ίδιο τρόπο που αναλύουν ο Νίκος και ο Χρήστος, αποδίδει τις παρανοήσεις των μαθητών στην προσήλωση τους στον αλγεβρικό χειρισμό των ορίων, θεωρεί όμως κι εκείνη, όπως η Στέλλα, τη μέγιστη αιτία των παρανοήσεων τους στην εικόνα που έχουν οι μαθητές για την έννοια του ορίου. Η λέξη όριο στην καθημερινή ζωή των μαθητών έχει διαφορετική χροιά από το μαθηματικό περιεχόμενο της και ξαφνικά έρχονται αντιμέτωποι με κάτι που αλλάζει τα δεδομένα τους. Θεωρεί επίσης ότι παρανοήσεις των μαθητών επηρεάζονται άμεσα από την διδασκαλία των καθηγητών και ότι η λανθασμένη διδασκαλία οδηγεί στην παρεμπόδιση της εννοιολογικής κατανόησης.

Για τον Ηλία η προηγούμενη εμπειρία των μαθητών και η μη σαφής διαδικασία για τον υπολογισμό του ορίου είναι οι κύριες αιτίες που δημιουργούν τις παρανοήσεις των μαθητών. Αποδίδει την ευθύνη στο γεγονός ότι οι μαθητές έχουν συνηθίσει σε συγκεκριμένες μεθοδολογίες με αποτέλεσμα η αφηρημένη έννοια του ορίου να τους δημιουργεί εννοιολογικά εμπόδια.

Συνοψίζοντας τις αιτίες των παρανοήσεων που οι έξι καθηγητές αναγνώρισαν ως εμπόδια της εννοιολογικής κατανόησης του ορίου, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Προηγούμενη εμπειρία των μαθητών
- Εικόνα των μαθητών για την έννοια του ορίου
- Αλγοριθμική προσέγγιση
- Αδυναμία αντιμετώπισης του απείρου
- Μη αποτελεσματική διδασκαλία των εκπαιδευτικών
- Μη σαφής διαδικασία υπολογισμού του ορίου
- Αφηρημένη έννοια του ορίου

2ο ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ

Με ποιον τρόπο οι εκπαιδευτικοί διαχειρίζονται διδακτικά τις παρανοήσεις και τα λάθη των μαθητών; Διαθέτουν την ικανότητα να προσφέρουν άλλες λύσεις και να δώσουν σαφή παραδείγματα για να ενισχύσουν την κατανόηση της έννοιας του ορίου;

Το ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους εκπαιδευτικούς και η συνέντευξη η οποία ακολούθησε αποκάλυψαν τον τρόπο που οι έξι εκπαιδευτικοί διαχειρίζονται διδακτικά τις παρανοήσεις και τα λάθη των μαθητών. Κι ενώ στο ερωτηματολόγιο οι απαντήσεις ήταν φειδωλές και δεν αποκάλυψαν πολλά στοιχεία για εκείνους, η συνέντευξη φώτισε κάθε πλευρά των διδακτικών μεθόδων τους, με τις αυθόρμητες απαντήσεις που έδωσαν. Παρακάτω συνοψίζονται οι απαντήσεις για τον κάθε καθηγητή ξεχωριστά.

<u>ΝΙΚΟΣ</u>

Ο Νίκος στο εισαγωγικό μάθημα που κάνει για την έννοια του ορίου δίνει κάποια συγκεκριμένα παραδείγματα τα οποία θεωρεί πως περικλείουν τις περιπτώσεις όπου οι μαθητές συνήθως παρανοούν. Ωστόσο κανένα από αυτά δεν περιλαμβάνει εκείνες τις περιπτώσεις που ο ίδιος ανέφερε σαν παρανοήσεις των μαθητών. Συνολικά ελάχιστες στιγμές χρησιμοποιεί παραδείγματα προκειμένου να αντιμετωπίσει τις παρανοήσεις των μαθητών κι αυτό φανερώνει μια έλλειψη γνωστικής δομής διδακτικού περιεχομένου.

Ένα μέρος της διδακτικής μεθόδου του προκειμένου να αντιμετωπίσει τις παρανοήσεις των μαθητών, αποτελεί η μέθοδος της δημιουργίας αβεβαιότητας και προβληματισμού με σκοπό να φέρει τους μαθητές σε γνωστική σύγκρουση. Προσπαθεί να φέρει παραδείγματα τα οποία οδηγούν τους μαθητές σε αβεβαιότητα και αμφιβολία. Μετά αφήνει τους μαθητές να υπερασπιστούν μόνοι τους τα επιχειρήματά τους, χωρίς να μεσολαβεί.

Ο Νίκος χρησιμοποιεί το διάλογο μέσα στην τάξη, αφήνοντας τους μαθητές να συζητούν έχοντας εκείνος το ρόλο του καθοδηγητή. Το να θέτει ερωτήματα και να αφήνει τη συζήτηση να συνεχιστεί ακόμη κι όταν οι μαθητές βρουν τη σωστή απάντηση αποτελεί τη διδακτική του επιλογή για να βοηθήσει τους μαθητές να αντιμετωπίσουν τα λάθη τους. Ωστόσο αυτό δεν εφαρμόζεται συχνά λόγο του περιορισμένου διδακτικού χρόνου, ένδειξη ότι ο διάλογος που περιγράφεται υπάρχει υπό προϋποθέσεις.

Τα τελευταία χρόνια προσπαθεί να εντάσσει στη διδασκαλία του τη χρήση οπτικοποιημένων μοντέλων γιατί πιστεύει ότι οι μαθητές λόγω του ενδιαφέροντος τους για τη τεχνολογία έχουν περισσότερες πιθανότητες να κατακτήσουν την έννοια του ορίου. Η διάθεση του να συνδέσει τη διδασκαλία του με πεδία εκτός των μαθηματικών, όπως πχ η ιστορία, είναι εμφανής, ωστόσο σε κανένα σημείο δε φαίνεται να εφαρμόζει εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία του.

ΧΡΗΣΤΟΣ

Ο Χρήστος κατά την εισαγωγή της έννοιας του ορίου, αρχικά χρησιμοποιεί κάποια παραδείγματα απλής αντικατάστασης, αλλά στη συνεχεία δίνει αντιπαραδείγματα που να ανατρέπουν τα προηγούμενα δεδομένα έτσι ώστε να δημιουργηθεί προβληματισμός στους μαθητές για το πότε ισχύει κάθε ισχυρισμός και πότε όχι. Από τα παραδείγματα που επιλέγει κανένα δεν περιλαμβάνει τις παρανοήσεις των μαθητών που επιτυχώς αναγνώρισε. Το ίδιο συμβαίνει και στις υπόλοιπες απαντήσεις του για την υποθετική διδασκαλία που θα έκανε σε παρόμοιες καταστάσεις όπου είναι ελλιπής η ύπαρξη άλλων παραδειγμάτων που να βοηθούν στις παρανοήσεις και τα λάθη των μαθητών.

Η μεθοδολογία των αντιπαραδειγμάτων που χρησιμοποιεί, περιλαμβάνει τη συζήτηση μέσα στην τάξη για την αντιμετώπιση των αντικρουόμενων ζητημάτων που προκύπτουν. Ωστόσο ο Χρήστος πέρα από αυτές τις περιπτώσεις φαίνεται να μην εντάσσει με άλλους τρόπους την συζήτηση κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας του. Σε αρκετά σημεία φαίνεται να δίνει τις απαντήσεις την ίδια στιγμή στους μαθητές χωρίς να ξεκινήσει ένας κύκλος συζήτησης στην τάξη. Η στάση του δείχνει μια δασκαλοκεντρική προσέγγιση με εμβάθυνση στην αλγοριθμική προσέγγιση της διδασκαλίας χωρίς να προηγηθεί η εννοιολογική κατανόηση μέσα από το διάλογο καθηγητή και μαθητών.

Ο Χρήστος δίνει σημασία στο ρόλο των αναπαραστάσεων μέσω της τεχνολογίας στην κατανόηση των μαθητών, κάτι που φαίνεται και από τις διδακτικές μεθόδους του στην παρουσίαση της έννοιας του ορίου. Θεωρεί ότι μέσα την εικόνα ενός δυναμικού προγράμματος όπως το Geogebra, ο μαθητής μπορεί να κατασκευάσει την έννοια του ορίου, να ανακαλύψει γεγονότα και μεθόδους και να αντιμετωπίσει τις παρανοήσεις του βλέποντας στην οθόνη τη συμπεριφορά της συνάρτησης.

Τέλος όποτε μπορεί χρησιμοποιεί συνδέσεις με παραδείγματα της καθημερινής ζωής. Θεωρεί ότι όταν μια ιδέα εισάγεται για πρώτη φορά με τρόπο ανεπίσημο, τότε η εκάστοτε έννοια που πραγματεύεται, χτίζεται πριν δοθεί επίσημα μαθηματικά.

ΠΕΤΡΟΣ

Ο Πέτρος από την πρώτη στιγμή εισάγει τους μαθητές στον ορισμό του ορίου, συνεχίζει με την απόκτηση μεθόδων εύρεσής του με την ελπίδα ότι η κατανόηση της έννοιας θα έρθει αργότερα. Το πρώτο παράδειγμα που χρησιμοποιεί αποσκοπεί στην παρανόηση των μαθητών ότι το σημείο x_0 πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και ότι σε διαφορετική περίπτωση το όριο δεν έχει κανένα νόημα. Το δεύτερο παράδειγμα είναι μια απλή εφαρμογή του ορίου όπου με κατάλληλες διαδικασίες άρει την απροσδιοριστία και αντικαθιστά στο x το x_0. Το συγκεκριμένο παράδειγμα περιορίζεται σε στενά διδακτικά πλαίσια και δεν συμβάλλει στη άρση κάποιας παρανόησης των μαθητών.

Σε μια από τις απαντήσεις του επισήμανε τη χρήση ερωτήσεων Σωστού-Λάθους που όμως σύμφωνα με τους Hadas και Hershkowitz (2002, όπως αναφέρεται στο Μεταξάς, 2011) οι αντιτιθέμενες λύσεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, δεν βοηθούν στον προβληματισμό και τη διερεύνηση από τους ίδιους αλλά σχηματίζουν ένα ζευγάρι σωστού – λάθους με στόχο την εύρεση των διαφορών, μέθοδος που δεν λειτουργεί βοηθητικά στη μάθηση. Σε όλες τις υπόλοιπες απαντήσεις του ο Πέτρος υποδεικνύει στους μαθητές τις σωστές λύσεις χωρίς να δίνει παραδείγματα που προσφέρουν την καλύτερη κατανόηση.

Παρότι αναγνωρίζει ότι οι μαθητές κατανοούν την έννοια του ορίου ευκολότερα όταν τους δίνονται παραδείγματα μαθηματικών που έχουν άμεση σχέση με καταστάσεις της ζωής, παραδέχεται ότι πέρα από το παράδειγμα της στιγμιαίας ταχύτητας, δεν γνωρίσει τι άλλα μπορεί να τους παρουσιάσει.

Ο Πέτρος σε καμία από τις απαντήσεις στο ερωτηματολόγιο που του δόθηκε δεν φαίνεται να υιοθετεί τη συζήτηση στη διδασκαλία του ώστε να βοηθήσει στην αντιμετώπιση των παρανοήσεων των μαθητών. Σε όλες τις ερωτήσεις δίνει την σωστή απάντηση την ίδια στιγμή, αφαιρώντας από τους μαθητές την ευκαιρία να ανακαλύψουν μόνοι τους τα λάθη. Για εκείνον το μεγαλύτερο πρόβλημα είναι το άγχος της Γ΄ Λυκείου και των εξετάσεων που τον ωθούν στο να ρίξει το βάρος σε πιο διαδικαστικούς συλλογισμούς.

ΣΤΕΛΛΑ

Η Στέλλα επισημαίνει ότι οι καθηγητές οφείλουν να γνωρίζουν τις πιθανές λανθασμένες αντιλήψεις των μαθητών για τα όρια και να τις λαμβάνουν υπόψη όταν αναπτύσσουν τις διδακτικές τους στρατηγικές και μεθόδους. Η δυσκολία που παρουσιάζει η έννοια του ορίου την οδηγεί στο σχεδιασμό μιας διδασκαλίας που να περιλαμβάνει διαφορετικές κι ενδιαφέρουσες καταστάσεις.

Στην εισαγωγή της έννοιας του ορίου χρησιμοποιεί το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας που αποτελεί κομμάτι της ιστορικής εξέλιξης της έννοιας. Το παράδοξο αυτό έρχεται σε αντίθεση με αυτό που οι μαθητές φέρουν ως εκείνη τη στιγμή.

Κάποια από τα παραδείγματα που χρησιμοποιεί στην τάξη φαίνονται στις απαντήσεις της στο ερωτηματολόγιο. Το πρώτο παράδειγμα συμβαδίζει με την αναγνώριση της Στέλλας σχετικά με την παρανόηση των μαθητών ότι το όριο της συνάρτησης στο x_0 είναι η αριθμητική τιμή που παίρνει η συνάρτηση για $x=x_0$, ωστόσο δεν δίνει κάποιο άλλο παράδειγμα που να ενισχύει τον στόχο της να βοηθήσει τους μαθητές να αντιμετωπίσουν τις παρανοήσεις τους. Σε ελάχιστες περιπτώσεις καταφεύγει στη μέθοδο των ανταγωνιστικών ισχυρισμών, δίνοντας κάποιο αντιπαράδειγμα ώστε να οδηγήσει τους μαθητές σε σύγκρουση και να δημιουργήσει τον προβληματισμό και την αμφιβολία στους μαθητές.

Για τη Στέλλα πολύ σημαντικό ρόλο έχουν οι γραφικές αναπαραστάσεις των ορίων με τις οποίες δημιουργούνται ευκολότερα εικόνες στο μυαλό των μαθητών. Μέσα από τις οπτικές αναπαραστάσεις οι μαθητές έχουν μια σαφέστερη εικόνα για τα όρια και σε πολλές περιπτώσεις βλέπουν τις παρανοήσεις τους να ξεδιαλύνονται.

Τέλος η συζήτηση και ο διάλογος στην διδασκαλία αποτελούν τον αποτελεσματικότερο τρόπο για να προωθήσει τη σκέψη των μαθητών. Με το να θέτει ερωτήσεις που περιλαμβάνουν τις παρανοήσεις τους, τους οδηγεί στην αυτο-αναγνώριση των λαθών τους και προωθεί την εννοιολογική κατανόηση.

<u>ΕΛΕΝΗ</u>

Η Ελένη από την εισαγωγή της ακόμη στον ορισμό του ορίου, ξεκινάει με ένα παράδειγμα που ανατρέπει την προηγούμενη γνώση των μαθητών. Τους δίνει τον τύπο μιας συνάρτησης και ζητάει την αριθμητική τιμή της σε ένα σημείο που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της. Τα περισσότερα παραδείγματα που δίνει συνάδουν με τις παρανοήσεις των μαθητών που αναφέρθηκαν από την ίδια και προσπαθεί να τις προσεγγίσει με απώτερο στόχο την αντιμετώπισή τους.

Επιπλέον επισημαίνει το πόσο σημαντικός είναι για εκείνη ο ρόλος της οπτικής αναπαράστασης του ορίου και ότι μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις δείχνει στους μαθητές ότι η συμπεριφορά μιας συνάρτησης στο σημείο x_0, δεν επηρεάζει το όριο της όταν το $x \to x_0$ και ότι η τιμή του ορίου της συνάρτησης καθορίζεται από τις τιμές που παίρνει κοντά στο x_0..

Όπως φαίνεται και από τις απαντήσεις της, κάνει χρήση διάφορων λογισμικών κατά της εισαγωγή της έννοιας του ορίου. Οι διδακτικές επιλογές που κάνει όπως το παράδειγμα που δίνει κατά την εισαγωγή της έννοιας του ορίου ή η χρήση των λογισμικών Sketchpad και Geogebra, δημιουργούν έδαφος για εποικοδομητική συζήτηση στην τάξη ωστόσο η διδασκαλία της είναι κυρίως δασκαλοκεντρική, δίνει τις σωστές απαντήσεις σχεδόν την ίδια στιγμή και αφήνει περιορισμένα περιθώρια στον προβληματισμό του μαθητή.

Σε ελάχιστες περιπτώσεις χρησιμοποιεί αντιπαραδείγματα στην διδασκαλία της γιατί θεωρεί ότι η σύγκρουση στην οποία φέρει τους μαθητές, βοηθάει στην αντιμετώπιση πολλών από των παρανοήσεων και δυσκολιών που έχουν για την έννοια.

<u>ΗΛΙΑΣ</u>

Στις απαντήσεις του Ηλία, παρότι αναγνωρίζει αρκετές από τις παρανοήσεις των μαθητών, γίνονται ελάχιστες αναφορές στα διδακτικά παραδείγματα που χρησιμοποιεί για να διευκολύνει την αντιμετώπισή τους. Με τα παραδείγματά του επιδιώκει να προβληματίσει τους μαθητές και να τους φέρει σε διαδικασία αμφισβήτησης. Άλλες φορές τους βάζει προβλήματα και τους ενθαρρύνει να κάνουν εικασίες. Ένα μικρο μέρος της διδασκαλίας του Ηλία αποτελείται από τη μέθοδο των ανταγωνιστικών ισχυρισμών προκειμένου να έρθουν οι μαθητές σε γνωστική σύγκρουση. Σε κάποιες περιπτώσεις χρησιμοποιεί αντιφάσεις έτσι ώστε οι μαθητές να μπουν στη διαδικασία αμφισβήτησης και να ελέγξουν τις υποθέσεις τους.

Για τον Ηλία οποιαδήποτε μέθοδος διδασκαλίας που διαφέρει από την παραδοσιακή δασκαλοκεντρική, μπορεί να ενισχύσει την κατανόηση της έννοιας του ορίου. Θεωρεί ότι η προσέγγιση “μαθαίνω κάνοντας” ενθαρρύνει τους μαθητές, τους προκαλεί το ενδιαφέρον καθώς ανακαλύπτουν τη γνώση μέσα από δημιουργικές διαδικασίες.

Δίνει μεγάλη βαρύτητα στη συζήτηση και τον διάλογο μέσα στην τάξη. Για εκείνον ο διάλογος αποτελεί σημείο αναφοράς στη ζωή του. Φέρνει τους μαθητές μπροστά στις παρανοήσεις που αντιμετωπίζουν, ακούει τις απόψεις τους, τους αφήνει να κάνουν τις υποθέσεις τους και να τις κουβεντιάσουν μεταξύ τους, ενώ εκείνος αρχικά έχει το ρόλο του καθοδηγητή. Επισημαίνει ότι ο μοναδικός τρόπος για να βοηθήσει ένας εκπαιδευτικός τους μαθητές του να κατανοήσουν την πολύπλοκη έννοια του ορίου, είναι η ακρόαση όλων των απόψεων και ο προβληματισμός που αυτές θα επιφέρουν στους μαθητές, καθώς προέρχονται από τις διαφορετικές εικόνες που έχει ο κάθε μαθητής για το όριο.

Επιπλέον υπάρχουν φορές που ο Ηλίας συνδέει την έννοια του ορίου με άλλες μέσα στο ίδιο πεδίο των μαθηματικών. Γνωρίζει ότι κάποιες από τις παρανοήσεις των μαθητών προκλήθηκαν από την αδυναμία τους να αντιληφθούν το άπειρο , κι έτσι αφιερώνει διδακτικό χρόνο προς την κατανόηση του από τους μαθητές.

Τέλος ο Ηλίας κάνει συχνά ιστορική αναδρομή των εννοιών. Διαβάζει πάντα στους μαθητές τα ιστορικά γεγονότα που περιγράφουν τα σχολικά βιβλία αλλά και άλλες πηγές και αυτό γιατί θεωρεί ότι η η έννοια του ορίου είναι αρκετά πολύπλοκη για να τη συλλάβει κάποιος άν δεν ξεκινήσει από την ιστορική εξέλιξή της.

3º ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ

Πώς εντάσσεται η διδακτική διάσταση της γνώσης των εκπαιδευτικών, που θα προκύψει από την έρευνα, στο θεωρητικό πλαίσιο της Ball και των συνεργατών της που περιγράφει αυτό το είδος γνώσης;

Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο της Ball και των συνεργατών της, η Παιδαγωγική γνώση του Περιεχομένου (ΠΓΠ) υποδιαιρείται στην

(α) **Γνώση του Περιεχομένου και των Μαθητών (ΓΠΜ)**

Συνδυάζει τη γνώση για τους μαθητές με τη γνώση για τα μαθηματικά. Ορίζεται κυρίως ως η γνώση των ιδεών και παρανοήσεων που έχουν οι μαθητές σε συγκεκριμένες έννοιες της ύλης. Η ΠΓΜ εμφανίζεται ως η γνώση του κατά πόσο είναι συνηθισμένη μια τέτοια παρανόηση και η αντίληψη των αιτιών που δημιουργούν τέτοιες παρανοήσεις στους μαθητές. Η Γνώση του περιεχομένου και των μαθητών περιλαμβάνει επίσης την ικανότητα των δασκάλων να προβλέπουν τι μπορεί να παραπλανήσει τους μαθητές και να κατανοούν και να ερμηνεύουν τις συχνά ελλειπτικές προτάσεις και σκέψεις που εκφέρουν οι μαθητές.

Οι δείκτες που προέκυψαν για την ΠΓΠ

- η γνώση των παρανοήσεων των μαθητών
- η ικανότητα του δασκάλου να κατανοεί και να ερμηνεύει το σκεπτικό ενός μαθητή
- η γνώση των θεμάτων που μπορεί να βρίσκουν οι μαθητές ενδιαφέροντα
- η γνώση προϋποθέσεων για να διευκολυνθεί κατανόηση των μαθητών

(β) Γνώση του Περιεχομένου και της διδασκαλίας (ΓΠΔ)

Συνδυάζει τη γνώση για τη διδασκαλία και τη γνώση για τα μαθηματικά. Λειτουργεί βοηθητικά στο σχεδιασμό και την επιλογή από τους δασκάλους της κατάλληλης διδασκαλίας και περιλαμβάνει τη γνώση διαφορετικών διδακτικών μοντέλων. Παραδείγματα της ΓΠΔ που έχει ένας δάσκαλος είναι η επιλογή του κατάλληλου παραδείγματος για την εισαγωγή μιας έννοιας, ο τρόπος που θα χειριστεί τις ερωτήσεις των μαθητών μέσα στην τάξη, η διαχείριση του χρόνου όπως το πότε θα αφήσει περισσότερο χρόνο στους μαθητές να σκεφτούν, πότε θα τους δώσει υποδείξεις ή ολοκληρωμένες απαντήσεις κλπ..

Οι δείκτες που προέκυψαν για την ΠΓΔ

- η χρήση ανταγωνιστικών ισχυρισμών
- η συζήτηση στη διδασκαλία
- η σύνδεση με άλλα πεδία εντός κι εκτός των μαθηματικών
- η ιστορική ανακατασκευή εννοιών
- η διδασκαλία του φορμαλιστικού τρόπου διατύπωσης
- η χρήση διδακτικών παραδειγμάτων

(γ) Γνώση του Περιεχομένου του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών (ΓΠΑΠ)

Αποτελεί δηλαδή τη γνώση του προγράμματος σπουδών του αντικειμένου που διδάσκεται στην τάξη, τη γνώση του διαθέσιμου διδακτικού υλικού και των ενδείξεων και αντενδείξεων χρήσης του σε διάφορες περιστάσεις.

Οι δείκτες που προέκυψαν για την ΓΠΑΠ

- η γνώση του περιεχομένου και της διδακτικής ακολουθίας του σχολικού βιβλίου

<u>ΝΙΚΟΣ</u>

Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών (ΓΠΜ): Ο Νίκος αναγνωρίζει ορθά κάποιες από τις σημαντικές παρανοήσεις των μαθητών ωστόσο αδυνατεί να εντοπίσει άλλες εξίσου σημαντικές που συναντήσαμε στη βιβλιογραφική ανασκόπηση. Η κατανόηση και η ερμηνεία του τρόπου σκέψης των μαθητών αναδείχτηκαν κυρίως από τη συνέντευξή του. Εντοπίζει δύο από τα σημαντικά εμπόδια που δημιουργούν παρανοήσεις και λάθη. Η προηγούμενη εμπειρία των μαθητών και η εικόνα που έχουν για το όριο έχουν χαρακτηριστεί ως τα βασικότερα εμπόδια που παρακωλύουν την κατανόηση. Η ικανότητα του να αναγνωρίζει τα θέματα που βρίσκουν οι μαθητές ενδιαφέροντα βρίσκεται σε μέτριο επίπεδο. Με αυτές τις παρατηρήσεις θα μπορούσε να ειπωθεί συνολικά ότι η

ΓΠΜ του Νίκου χαρακτηρίζεται ικανοποιητική.

Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας (ΓΠΔ): Η ΓΠΔ του Νίκου φαίνεται από τον τρόπο που σχεδιάζει κι επιλέγει τις μεθόδους διδασκαλίας του. Κατά την ανάλυση φάνηκε ότι Νίκος δεν επιλέγει τα κατάλληλα παραδείγματα προκειμένου να αντιμετωπίσει τις παρανοήσεις των μαθητών που εύστοχα έχει εντοπίσει. Η επιλογή του να εισάγει σταδιακά τους μαθητές στον μαθηματικό φορμαλισμό, ξεκινώντας πρώτα από μια διαισθητική παρουσίαση της έννοιας, σημειώνεται θετικά στη μελέτη της ΠΓΔ. Ο διάλογος δεν αποτελεί βασική διδακτική μέθοδο του Νίκου, παρόλο που για εκείνον είναι πολύ σημαντικός. Η σύνδεση με άλλα πεδία εντός κι εκτός των μαθηματικών είναι ένα σημαντικό εργαλείο κατανόησης που όμως ο Νίκος δεν εντάσσει στην διδασκαλία του. Απούσα είναι και η χρήση της ιστορικής ανακατασκευής των εννοιών. Παρότι εκφράζει τη θέληση του να υιοθετήσει εναλλακτικές μεθόδους στην διδασκαλία του, προς το παρόν η ΓΠΔ του βρίσκεται σε χαμηλό επίπεδο.

Γνώση Περιεχομένου Αναλυτικού Προγράμματος (ΓΠΑΠ): Η γνώση της διδακτικής ακολουθίας καταλαμβάνει μικρό χώρο στη συνέντευξη που πραγματοποιήθηκε. Ωστόσο οι παρατηρήσεις του Νίκου σχετικά με τον τρόπο που παρουσιάζεται διαισθητικά η έννοια του ορίου σε κεφάλαια από προηγούμενες τάξεις, αναδεικνύει μια ικανοποιητική γνώση της διδακτικής ακολουθίας.

<u>ΧΡΗΣΤΟΣ</u>

Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών (ΓΠΜ): Ο Χρήστος αναγνωρίζει δύο από τις σημαντικές παρανοήσεις των μαθητών, η αδυναμία του ωστόσο να τις αποσαφηνίσει και να βρει την αιτία τους ήταν εμφανής. Το γεγονός ότι θεωρεί πως μια άριστη επίδοση στους μαθητές καθιστά και την πλήρη κατανόηση για την έννοια του ορίου, φανερώνει την έλλειψη μιας βαθύτερης διείσδυσης στο σκεπτικό των μαθητών του. Για τον Χρήστο παράγοντες όπως το σχολικό βιβλίο και η προηγούμενη εμπειρία των μαθητών που κατακλύζεται από αλγεβρικούς υπολογισμούς είναι τα μοναδικά εμπόδια που συντελούν στην έλλειψη κατανόηση τους. Η σημασία που δίνει στο ρόλο των αναπαραστάσεων απορρέι από το γεγονός ότι οι μαθητές βρίσκουν ενδιαφέρον ότι σχετίζεται με τα τεχνολογικά μέσα με τα οποία είναι άρρητα συνδεδεμένοι. Με αυτές τις παρατηρήσεις μπορεί να διαπιστωθεί συνολικά ότι η ΠΓΜ του Χρήστου βρίσκεται σε μέτριο προς χαμηλό επίπεδο.

Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας (ΓΠΔ): Η ΠΓΔ φαίνεται από τον τρόπο που σχεδιάζει κι επιλέγει τις διδακτικές μεθόδους του. Τα παραδείγματα που χρησιμοποιεί ο Χρήστος δεν περιλαμβάνουν τις παρανοήσεις των μαθητών που αναγνώρισε επιτυχώς. Σε γενικές γραμμές η έλλειψη παραδειγμάτων που βοηθούν στην κατανόηση των μαθητών είναι ελλιπής. Η χρήση δυναμικών προγραμμάτων όπως το Geogebra για να μπορέσει ο μαθητής να κατασκευάσει την έννοια του ορίου και να ανακαλύψει γεγονότα και μεθόδους, είναι ένα θετικό χαρακτηριστικό ως προς την ΓΠΔ του. Η διδασκαλία του φορμαλιστικού τρόπου διατύπωσης είναι απαραίτητη για εκείνον, τη συνδέει ωστόσο με την αναγκαιότητα ύπαρξης της στις Πανελλήνιες εξετάσεις και λειτουργεί σε αυτή την περίπτωση αποτρεπτικά για την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών. Ο Χρήστος πέρα από τη συζήτηση που προκύπτει από τη μεθοδολογία των αντιπαραδειγμάτων που χρησιμοποιεί ορισμένες φορές, δεν εντάσσει με άλλους τρόπους τη συζήτηση στη διδασκαλία του. Κατά την ανάλυση των αποτελεσμάτων εμφανής είναι η απουσία της σύνδεσης με άλλα πεδία εντός κι εκτός των Μαθηματικών καθώς και η απουσία της ιστορικής ανακατασκευής εννοιών. Με τις παραπάνω παρατηρήσεις μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η ΠΓΔ του Χρήστου κινείται σε χαμηλό επίπεδο.

Γνώση Περιεχομένου Αναλυτικού Προγράμματος (ΓΠΑΠ): Ο Χρήστος επισημαίνει ότι δεν έχει καμία επαφή με το σχολικό βιβλίο και δεν δείχνει καμία ένδειξη γνώσης της διδακτικής ακολουθίας.

ΠΕΤΡΟΣ

Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών (ΓΠΜ): Για τον Πέτρο οι κύριες παρανοήσεις των μαθητών σχετίζονται άμεσα με τις απορίες που εκφράζουν μέσα στην αίθουσα. Εντοπίζει σωστά μια από αυτές, η αδυναμία του ωστόσο να αντιληφθεί τα λάθη των μαθητών σε μια από τις ερωτήσεις, δείχνει ότι δεν τα αναγνωρίζει σε όλες τις περιπτώσεις κάτι που πιθανόν να δημιουργήσει εμπόδιο στην αντιμετώπιση κάποιων από των παρανοήσεων τους. Αποδίδει τη συλλογιστική πορεία των μαθητών σε τρεις παράγοντες, την αδυναμία των μαθητών να αντιμετωπίσουν το άπειρο, τον πολύπλοκο τυπικό ορισμό του ορίου και την πεποίθηση των μαθητών ότι τα Μαθηματικά δεν έχουν νόημα όταν δεν συναντώνται στην πραγματική ζωή. Τα εμπόδια που καταδεικνύει φανερώνουν πως η κατανόηση του τρόπου σκέψης των μαθηματικών βρίσκεται σε ικανοποιητικό επίπεδο. Για τον Πέτρο οτιδήποτε συνδέει τα Μαθηματικά με την καθημερινή ζωή μπορεί να εξάρει το ενδιαφέρον των μαθητών, ωστόσο όσον αφορά τα όρια δεν έδειξε σε κανένα σημείο να χρησιμοποιεί τέτοιου είδους παραδείγματα. Συνοψίζοντας τα ευρήματα αυτά μπορούμε να συμπεράνουμε την μέτρια προς χαμηλή ΠΓΠ του Πέτρου.

Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας (ΓΠΔ): Ο Πέτρος πέρα από ένα παράδειγμα που αποσκοπεί στην άρση της παρανόησης των μαθητών, περιορίζεται σε στενά διδακτικά πλαίσια και δεν προσφέρει διδακτικά παραδείγματα για να συμβάλλει στην εννοιολογική κατανόηση. Η διδασκαλία του φορμαλιστικού τρόπου διατύπωσης αποτελεί μέρος της διδασκαλίας του, δεν χαρακτηρίζεται όμως θετικά αφού δεν ακολουθεί μια κλιμακωτή πορεία ώστε να να καταφέρουν οι μαθητές να κατανοήσουν σταδιακά την έννοια του ορίου. Καμία από τις απαντήσεις του δεν αναδεικνύει το διάλογο και τη συζήτηση ως διδακτικές μεθόδους του, απεναντίας καταγράφεται ο δασκαλοκεντρικός χαρακτήρας του με την άμεση διόρθωση των μαθητών, αφαιρώντας τους την ευκαιρία να αναγνωρίσουν μόνοι τα λάθη τους. Σε όλες τις απαντήσεις είναι εμφανής η απουσία των συνδέσεων με πεδία εντός κι εκτός των Μαθηματικών, γεγονός που αποδίδει ο Πέτρος στην άγνοιά του να κάνει συνδέσεις. Τέλος σε κανένα σημείο δεν προκύπτουν στοιχεία που να φανερώνουν τη χρήση της ιστορικής ανακατασκευής του ορίου παρόλο που ο Πέτρος τονίζει τη σημαντικότητα της ιστορίας των Μαθηματικών. Οι παραπάνω παρατηρήσεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ο Πέτρος παρουσιάζει συνολικά ΠΓΔ χαμηλού επιπέδου.

Γνώση Περιεχομένου Αναλυτικού Προγράμματος (ΓΠΑΠ): Ο Πέτρος θεωρεί ότι το σχολικό βιβλίο είναι γραμμένο σε μια τυπική γλώσσα σε σχέση με τα βιβλία παλαιότερων τάξεων και γεμάτα με αποδείξεις που δεν έχουν νόημα ύπαρξης. Συνολικά δείχνει μια ανίσχυρη ποιοτικά γνώση του σχολικού βιβλίου και της διδακτικής ακολουθίας.

<u>ΣΤΕΛΛΑ</u>

Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών (ΓΠΜ): Η Στέλλα αναγνωρίζει τρεις από τις συνηθέστερες παρανοήσεις των μαθητών και τονίζει ότι τις αντικρίζει όλα τα χρόνια της μαθηματικής της σταδιοδρομίας. Προχωράει σε μια βαθύτερη ερμηνεία της σκέψης των μαθητών, αν και σε λίγα σημεία, αναφερομένη στις διαισθητικές αντιλήψεις και την εικόνα τους σχετικά με την έννοια του ορίου και του απείρου. Συνδέει την προηγούμενη εμπειρία τους με την απειρία τους να αντιμετωπίζουν όρια που δεν υπάρχουν, γεγονός που προκαλεί αρκετά από τα λάθη τους. Σύμφωνα με τη Στέλλα όλη της η διδασκαλία είναι βασισμένοι σε θέματα που οι μαθητές βρίσκουν ενδιαφέροντα. Το γεγονός ότι αναγνωρίζει τι είναι αυτό που προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών είναι ακόμη ένας δείκτης που ενισχύει την ήδη ικανοποιητική ΠΓΜ που διαθέτει.

Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας (ΓΠΔ): Για τη Στέλλα οι παρανοήσεις των μαθητών πρέπει να εντάσσονται στις διδακτικές στρατηγικές των εκπαιδευτικών. Σχεδιάζει μια διδασκαλία περιλαμβάνοντας μεθόδους που οι μαθητές βρίσκουν ενδιαφέρουσες. Για εκείνη σημαντικό ρόλο έχει η γραφική αναπαράσταση της έννοιας του ορίου σε όσα παραδείγματα είναι εφικτό, καθώς έτσι οι μαθητές έχουν μια πιο σαφή εικόνα. Παρουσιάζει ελάχιστα παραδείγματα, με το ένα από αυτά να συμβαδίζει με μια από τις συνηθέστερες παρανοήσεις των μαθητών. Δεν δίνει ιδιαίτερη σημασία στον φορμαλιστικό τρόπο διατύπωσης και αποφεύγει να ζητάει από τους μαθητές αυστηρές γραπτές διατυπώσεις. Ενδιαφέρεται περισσότερο για την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας κι αυτός είναι και ο λόγος που η συζήτηση για εκείνην αποτελεί τον αποτελεσματικότερο τρόπο για να την προωθήσει, κάτι που έγινε αντιληπτό σε πολλές από τις απαντήσεις της. Τέλος σε συγκεκριμένες περιπτώσεις συνδέει την έννοια του ορίου με θέματα που αντλεί μέσα κι έξω από το μαθηματικό πλαίσιο, είτε αυτά προέρχονται από παλαιότερα κεφάλαια των Μαθηματικών, είτε ανήκουν σε κεφάλαια της Ιστορίας που η Στέλλα πολύ συχνά ανατρέχει, προκειμένου να παρουσιάσει διαφορετικά την έννοια του ορίου. Με αυτές τις παρατηρήσεις θα μπορούσε να ειπωθεί συνολικά ότι η Στέλλα φανερώνει μια ισχυρή ΠΓΔ.

Γνώση Περιεχομένου Αναλυτικού Προγράμματος (ΓΠΑΠ): Η Στέλλα στη συνέντευξή της κάνει μια αποτίμηση των κεφαλαίων του σχολικού βιβλίου, αναφερόμενη σε έννοιες που παρότι σημαντικές για την μετέπειτα μάθηση του ορίου, δεν αναλύονται πουθενά. Παρουσιάζει μια ικανοποιητική γνώση των περιεχομένων του σχολικού βιβλίου.

<u>ΕΛΕΝΗ</u>

Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών (ΓΠΜ): Η Ελένη αναγνωρίζει τρεις από τις βασικές παρανοήσεις που αναλύθηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας. Είναι η μοναδική που επισημαίνει την παρανόηση των μαθητών ότι το όριο πλησιάζει την τιμή του πάρα πολύ αλλά δεν την φτάνει. Μέσα από τις απαντήσεις της αναδεικνύει τη σημασία που έχει η εικόνα των μαθητών για την έννοια του ορίου και αποδίδει τις περισσότερες παρανοήσεις του εκεί. Τονίζει ότι η προσήλωση των μαθητών στον αλγεβρικό χειρισμό των ορίων εμποδίζει την κατανόηση της έννοιας και θεωρεί επίσης ότι παρανοήσεις των μαθητών επηρεάζονται άμεσα από την διδασκαλία των καθηγητών. Σύμφωνα με την Ελένη ο τρόπος που εξαρχής παρουσιάζεται μια έννοια παίζει σπουδαίο ρόλο στο πως θα νιώσουν οι μαθητές αρχικά. Έχει παρατηρήσει ότι η χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας της προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών σε σχέση με όποια άλλη μέθοδο έχει χρησιμοποιήσει. Τα παραπάνω χαρακτηριστικά συντάσσουν μια ικανοποιητική ΓΠΜ για την Ελένη.

Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας (ΓΠΔ): Η Ελένη στις απαντήσεις της δίνει παραδείγματα που συμβαδίζουν με τις παρανοήσεις των μαθητών, που εντοπίζει κατά τη διδασκαλία της.

Επισημαίνει τη σημαντικότητα των γραφικών παραστάσεων καθώς εξασφαλίζουν μια ικανοποιητική εικόνας της έννοιας του ορίου και τις χρησιμοποιεί κάθε φορά που ενδείκνυται σε μια άσκηση. Η διδασκαλία της αυστηρής και τυπικής διατύπωσης αποτελεί μέρος της διδασκαλίας της Ελένης. Εισάγει κλιμακωτά τους μαθητές στον φορμαλιστικό τρόπο, ξεκινώντας από την διαισθητική κατανόηση της έννοιας του ορίου για να οδηγηθεί στην αυστηρή τεχνική. Η χρήση των λογισμικών που χρησιμοποιεί δημιουργεί έδαφος για εποικοδομητική συζήτηση στην τάξη ωστόσο η διδασκαλία της είναι κυρίως δασκαλοκεντρική, δίνει τις σωστές απαντήσεις σχεδόν την ίδια στιγμή και αφήνει περιορισμένα περιθώρια στον προβληματισμό του μαθητή. Η Ελένη δεν κάνει συχνά αναφορές σε άλλες περιοχές εντός κι εκτός των μαθηματικών. Όπως ανέφερε η μοναδική περίπτωση που συνδέει την έννοια του ορίου με πεδίο εκτός των μαθηματικών είναι κατά την εισαγωγή της έννοιας του ορίου όπου ορισμένες φορές φέρνει παράδειγμα από τη Φυσική. Σε κανένα σημείο του ερωτηματολογίου και της συνέντευξης δεν προκύπτουν στοιχεία που να υποδεικνύουν την ιστορική ανακατασκευή εννοιών στη διδασκαλία της Ελένης. Συνολικά με τις παραπάνω παρατηρήσεις, παρουσιάζει μια μέτρια ΠΓΔ.

Γνώση Περιεχομένου Αναλυτικού Προγράμματος (ΓΠΑΠ): Η Ελένη παρουσιάζει μια ανίσχυρη γνώση του περιεχομένου του σχολικού βιβλίου. Αναγνωρίζει την ύπαρξη των πολλών γραφικών αναπαραστάσεων στο σχολικό βιβλίο, δεν κάνει ωστόσο καμία άλλη αναφορά.

<u>ΗΛΙΑΣ</u>

Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών (ΓΠΜ): Ο Ηλίας αναγνωρίζει επιτυχώς κάποιες από τις παρανοήσεις, η αδυναμία του ωστόσο να αντιληφθεί τα λάθη των μαθητών σε μια από τις ερωτήσεις, δείχνει ότι δεν τα αναγνωρίζει σε όλες τις περιπτώσεις κάτι που πιθανόν να δημιουργήσει εμπόδιο στην αντιμετώπιση κάποιων από των παρανοήσεων τους. Πιστεύει ότι η μη σαφής διαδικασία για τον υπολογισμό του ορίου είναι η κύρια αιτία που ευθύνεται για τα λάθη των μαθητών και αποδίδει την ευθύνη στο γεγονός ότι συνηθίσει σε συγκεκριμένες μεθοδολογίες με αποτέλεσμα η αφηρημένη έννοια του ορίου να τους δημιουργεί εννοιολογικά εμπόδια. Για τον Ηλία οποιαδήποτε μέθοδος διδασκαλίας που διαφέρει από την παραδοσιακή, μπορεί να εξάψει το ενδιαφέρον των μαθητών και ότι η προσέγγιση "μαθαίνω κάνοντας" τους ενθαρρύνει καθώς ανακαλύπτουν τη γνώση μέσα από δημιουργικές διαδικασίες. Με αυτές τις παρατηρήσεις θα μπορούσε να ειπωθεί ότι ο Ηλίας παρουσιάζει μια μέτρια προς ικανοποιητική ΓΠΜ.

Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας (ΓΠΔ): Στις απαντήσεις του Ηλία γίνονται ελάχιστες αναφορές στα διδακτικά παραδείγματα που χρησιμοποιεί για να διευκολύνει την αντιμετώπισή τους. Σύμφωνα όμως με τις δηλώσεις του, με τα παραδείγματά του επιδιώκει να προβληματίσει τους μαθητές και να τους φέρει σε διαδικασία αμφισβήτησης. Έτσι αφιερώνει ένα μέρος της διδασκαλίας του στη δημιουργία ανταγωνιστικών ισχυρισμών προκειμένου να έρθουν οι μαθητές σε γνωστική σύγκρουση. Ο φορμαλιστικός τρόπος διατύπωσης είναι μέρος των διδακτικών του επιλογών και αποδίδει την επιλογή του αυτή αφενός στις Πανελλήνιες εξετάσεις που είναι απαραίτητος ο φορμαλιστικός τρόπος διατύπωσης και αφετέρου στον σεβασμό που διαθέτει για την δυσκολία που υπήρξε κατά την ιστορική εξέλιξη της έννοιας του ορίου. Η συζήτηση και ο διάλογος μέσα στην τάξη παίζουν για εκείνον σπουδαίο ρόλο. Φέρνει τους μαθητές μπροστά στις παρανοήσεις που αντιμετωπίζουν, ακούει τις απόψεις τους, τους αφήνει να κάνουν τις υποθέσεις τους και να τις κουβεντιάσουν μεταξύ τους, ενώ εκείνος αρχικά έχει το ρόλο του καθοδηγητή. Επιπλέον υπάρχουν φορές που ο Ηλίας συνδέει την έννοια του ορίου με άλλες μέσα στο ίδιο πεδίο των μαθηματικών. Γνωρίζει ότι κάποιες από τις παρανοήσεις των μαθητών προκλήθηκαν από την αδυναμία τους να αντιληφθούν το άπειρο, κι έτσι αφιερώνει διδακτικό χρόνο προς την κατανόηση του από τους μαθητές. Τέλος ο Ηλίας κάνει συχνά ιστορική αναδρομή των εννοιών και αυτό γιατί θεωρεί ότι η η έννοια του ορίου είναι αρκετά πολύπλοκη για να τη συλλάβει κάποιος αν δεν ξεκινήσει από την ιστορική εξέλιξή της. Με αυτά τα χαρακτηριστικά θα μπορούσε να ειπωθεί πως ο Ηλίας παρουσιάζει μια ισχυρή ΠΓΔ.

Γνώση Περιεχομένου Αναλυτικού Προγράμματος (ΓΠΑΠ): Ο Ηλίας έκανε αρκετές αναφορές στο σχολικό βιβλίο. Αναφέρεται σε έννοιες παλαιότερων κεφαλαίων, συγκρίνει το κεφάλαιο των ορίων με αυτό των παραγώγων και κάνει σχολιασμούς στο ίδιο το κεφάλαιο των ορίων. Όλες οι περιπτώσεις στις οποίες αναφέρεται, προϋποθέτουν μια ικανοποιητική γνώση του περιεχομένου και της διδακτικής ακολουθίας του σχολικού βιβλίου.

Συνοπτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων της ΠΓΠ

	ΝΙΚΟΣ	ΧΡΗΣΤΟΣ	ΠΕΤΡΟΣ	ΣΤΕΛΛΑ	ΕΛΕΝΗ	ΗΛΙΑΣ
ΓΠΜ	ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΤΙΚΗ	ΜΕΤΡΙΑ-ΧΑΜΗΛΗ	ΜΕΤΡΙΑ-ΧΑΜΗΛΗ	ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΤΙΚΗ	ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΤΙΚΗ	ΜΕΤΡΙΑ-ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΤΙΚΗ
ΓΠΔ	ΧΑΜΗΛΗ	ΧΑΜΗΛΗ	ΧΑΜΗΛΗ	ΙΣΧΥΡΗ	ΜΕΤΡΙΑ	ΙΣΧΥΡΗ
ΓΠΑΠ	ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΤΙΚΗ	ΧΑΜΗΛΗ	ΧΑΜΗΛΗ	ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΤΙΚΗ	ΧΑΜΗΛΗ	ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΤΙΚΗ

Συνοψίζοντας, από τα συμπεράσματα που προέκυψαν για τους έξι εκπαιδευτικούς παρατηρείται ότι τα χαμηλότερα επίπεδα παρουσιάζονται στην Παιδαγωγική Γνώση και Διδασκαλία. Οι τρεις από τους έξι (Νίκος-Χρήστος-Πέτρος) παρουσιάζουν χαμηλό επίπεδο ΓΠΔ, ενώ μόνο δύο (Στέλλα-Ηλίας) εμφανίζονται να έχουν ανεβασμένο δείκτη. Οι δύο από τους έξι εκπαιδευτικούς (Χρήστος-Πέτρος) παρουσιάζουν χαμηλά όλους τους δείκτες της ΠΓΠ γεγονός που μας οδηγεί σε ένα ασφαλές συμπέρασμα για την έλλειψη της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου που διαθέτουν. Οι δύο από τους έξι (Στέλλα-Ηλίας) παρουσιάζουν ικανοποιητικές γνώσεις και στις τρεις συνιστώσες ΓΠΔ, ΓΠΜ, ΓΠΑΠ, με αποτέλεσμα να μιλήσουμε για μια ισχυρή ΠΓΠ που διαθέτουν. Για τον Νίκο θα μπορούσαμε να πούμε ότι παρουσιάζει μια μέτρια ΠΓΠ αφού εκτός από την ΓΠΔ, οι άλλοι δύο δείκτες βρίσκονται σε ικανοποιητικό επίπεδο, ενώ για την Ελένη τα αποτελέσματα κλείνουν προς μια μέτρια-χαμηλή ΠΓΠ.

Εντύπωση δημιουργεί το γεγονός ότι οι τρεις εκπαιδευτικοί που σημειώνουν τη χαμηλότερη ΠΓΠ είναι αυτοί που εργάζονται σε φροντιστήρια Μέσης Εκπαίδευσης, σε αντίθεση με τους τρεις που η διδακτική τους εμπειρία προέρχεται από δημόσια σχολεία. Το δείγμα δεν είναι αντιπροσωπευτικό για να εξάγουμε σίγουρα συμπεράσματα, αλλά έχει ήδη δημιουργήσει ερωτήματα.

6.3 ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Είναι γνωστό ότι η χρήση ποιοτικών μεθόδων στην εκπαιδευτική έρευνα περιλαμβάνει αρκετούς περιορισμούς. Ένας ακόμη περιορισμός αφορά στην μελέτη περιπτώσεων (case studies). Σύμφωνα και με τον Merriam (1998), μια μελέτη περίπτωσης αναπαριστά το μέρος αντί του όλου και έτσι δεν υπάρχει δυνατότητα γενίκευσης σε άλλες περιπτώσεις. Έτσι λοιπόν τα συμπεράσματα της παρούσας εργασίας, αν και προέρχονται από ένα δείγμα ιδιαίτερου ενδιαφέροντος, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι αντιπροσωπεύουν το σύνολο του πληθυσμού των καθηγητών των Μαθηματικών.

Σε περιορισμό οδηγούν και η χρήση ενός συγκεκριμένου θεωρητικού πλαισίου κατηγοριοποίησης των γνώσεων των δασκάλων,αυτό της Ball, η χρήση υποθετικών διδακτικών επεισοδίων ως βάση των ερωτηματολογίων και των συζητήσεων που ακολούθησαν, η μερική εστίαση πάνω σε άπειρους δασκάλους των μαθηματικών. Αυτές οι επιλογές περιορίζουν τα αποτελέσματα της έρευνας με κυριότερο μειονέκτημα την περιορισμένη δυνατότητα μεταφοράς των αποτελεσμάτων.

Ένας επιπλέον περιορισμός στη διαδικασία αυτή ήταν ο παράγοντας του χρόνου. Πιο συγκεκριμένα, ο χρόνος που δόθηκε στους εκπαιδευτικούς για να συμπληρώσουν το ερωτηματολόγιο ήταν 10 μέρες. Οι 4 από τους 6 παρέδωσαν τα αποτελέσματα ένα μήνα μετά.

Το γεγονός αυτό επηρεάζει την έρευνα, καθώς ελοχεύει κίνδυνος της μη αυθόρμητης απάντησης, αν υποθέσουμε ότι οι καθηγητές έλαβαν βοήθεια για τις απαντήσεις τους (σχολικά βιβλία, διαδίκτυο κλπ.). Μέσω της συνέντευξης ωστόσο των συμμετεχόντων έγινε μια προσπάθεια αναγνώρισης της ύπαρξης διαφορετικότητας στις απαντήσεις.

Ο στόχος της παραπάνω έρευνας ήταν να εξετάσει τη μαθηματική και παιδαγωγική γνώση έξι καθηγητών των Μαθηματικών στη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού, συγκεκριμένα στο κεφάλαιο του Ορίου. Όπως αναφέρθηκε ήδη στην εισαγωγή της παρούσας εργασίας, οι περισσότερες έρευνες είναι επικεντρωμένες στη μάθηση και στη γνώση των μαθητών κι όχι στη διδασκαλία των εκπαιδευτικών και στον τρόπο που αυτή επηρεάζει τη μάθηση (Potari et al., 2006). Αυτό σημαίνει ότι το θέμα αυτό χρήζει μιας ουσιώδης και συγκεντρωτικής έρευνας για να μπορέσουν να διερευνηθούν όλες οι πτυχές του.

Το όριο αποτελεί ένα κομμάτι του Απειροστικού Λογισμού που οι μαθητές διδάσκονται στη Γ΄ Λυκείου για το οποίο, όπως αναλύθηκε στο δεύτερο κεφάλαιο, οι μαθητές διαθέτουν σημαντικές παρανοήσεις και οι καθηγητές καλούνται να τις αναγνωρίσουν και να τις αξιοποιήσουν διδακτικά για να καταφέρουν να τις εξαλείψουν. Το κεφάλαιο των παραγώγων καθώς και των ολοκληρωμάτων είναι κεφάλαια ενδεδειγμένα για την πραγματοποίηση παρόμοιων ερευνών, με στόχο την ανάδειξη των γνώσεων των εκπαιδευτικών σχετικά με τη διδασκαλία τους.

Επιπλέον το δείγμα της παρούσας έρευνας αποτελείται από 3 εκπαιδευτικούς που διδάσκουν σε σχολεία της δημόσιας εκπαίδευσης και τρεις που διδάσκουν σε φροντιστήρια. Κατά τη διάρκεια της ανάλυσης των δεδομένων μέσα από το ερωτηματολόγιο αλλά κυρίως από τις συνεντεύξεις, άρχισε να διακρίνεται μια εμφανής διαφορά στις απαντήσεις των δυο κατηγοριών των υποκειμένων. Το δείγμα είναι μικρό κι όχι αντιπροσωπευτικό για να εξάγουμε ασφαλή συμπεράσματα. Θα είχε μέγιστο ενδιαφέρον να πραγματοποιηθεί μια παρόμοια έρευνα σε ένα μεγαλύτερο δείγμα για να διαπιστωθεί κατά πόσο ο χώρος διδασκαλίας και η εμπειρία που έχουν αποκτήσει οι καθηγητές σε αυτόν, έχουν επηρεάσει τις διδακτικές μεθόδους τους και τις διδακτικές απόψεις τους.

~ Για να καταφέρουμε να δημιουργήσουμε ένα ποιοτικά αναβαθμισμένο εκπαιδευτικό σύστημα, πρέπει να αρχίσουμε από την αναβάθμιση των διδακτικών γνώσεων των καθηγητών. Οι γνώσεις αυτές είναι θεμελιώδεις προκειμένου να δράσουν και με τον καθορισμό του περιεχομένου της διδασκαλίας τους να επηρεάσουν εν τέλει το εκπαιδευτικό σύστημα ~

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Amatangelo, M. L. (2013). *Student Understanding of Limit and Continuity at a Point: A Look into Four Potentially Problematic Conceptions*.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003b). *Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching.* In B. Davis, & E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB: MESC/GCEDM.

Ball, D. L., Thames, M. H., Phelps, G. (2008). *Content knowledge for teaching: What makes it special?* Journal of Teacher Education, 59; 389-407.

Ball, L. D., Thames, H. M., Bass, H., Sleep, L., Lewis, J., & Phelps, G. (2009a). *A practicebased theory of mathematical knowledge for teaching.* In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 95-98). Thessaloniki, Creece: PME.

Barnett, C. (1998). *Mathematics teaching cases as a catalyst for informed strategic inquiry.* Teaching and Teacher Education, 14(1), 81–93.

Bezuidenhout, J. (2001). *Limits and continuity: Some conceptions of first-year students.* International journal of mathematical education in science and technology, 32(4), 487-500.

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T.(2007). *Using Tasks to Explore Teacher Knowledge in Situation-Specific Contexts*. Journal of Mathematics Teacher Education, 10, 301- 309.

Boyer, C. B. (1939). *The History of the Calculus and its Conceptual Development* (page references as in reprint, Dover, New York, 1959).

Cooney, T.J. (1999). *Conceptualizing teachers' ways of knowing.* Educational Studies in Mathematics, 38, 163-187.

Cornu, B., (1981). *Quelques obstacles a l'apprentissage de la notion de limite*. Recherches en Didactique des Mathematiques, 4, 236-268.

Cornu, B., (1991). *Limits*. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Springer Netherlands.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). *Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme.* The Journal of Mathematical Behavior, 15(2), 167-192.

Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). *The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages.* Journal of Mathematical Behavior, 5(3), 281-303.

Denbel, D. G. (2014). *Students' Misconceptions of the Limit Concept in a First Calculus Course*. Journal of Education and Practice, 5(34), 24-40.

Dorier, J. (1995). *Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics.* Educational Studies in Mathematics, 29, 175–197.

Eisner, W. E. (1991). *The enlightened eye, qualitative inquiry and the enhancement of educational practice.* New York: Macmillan.

Ely, R. (2010). *Nonstandard student conceptions about infinitesimals.* Journal for Research in Mathematics Education, 117-146.

Fernández, E. (2004). *The students' take on the epsilon-delta definition of a limit. Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies,* 14(1), 43-54.

Fernández-Plaza, J. A., & Simpson, A. (2016). *Three concepts or one? Students' understanding of basic limit concepts.* Educational Studies in Mathematics, 93(3), 315-332.

Gordon, A. & Heller, J. (1995). *Traversing the web: Pedagogical reasoning among new and continuing case methods participants*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). *Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic.* Journal for research in Mathematics Education, 116-140.

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York: Teachers College Press.

Güçler, B. (2013). *Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom.* Educational Studies in Mathematics, 82(3), 439-453.

Harel, G. (2004). *A perspective on "concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity"*. In T. Carpenter, J. Dossey, & L. Koehler (Eds.), *Classics in mathematics education research* (p. 98).

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M., & Ball, D. L. (2007). *Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters and what evidence counts?* In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Charlotte: NCTM.

Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry.* London: The Falmer Press.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics come from: How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic books.

Mamona-Downs, J. (2001). *Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence.* Educational studies in mathematics, 48(2), 259-288.

Marks, R. (1990). *Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to a modified conception.* Journal of Teacher Education, 41(3), 3—11.

Mastorides, E., & Zachariades, T. (2004). *Secondary Mathematics Teachers' Knowledge Concerning the Concept of Limit and Continuity.* International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Merseth, K. (1996). *Cases and case methods in teacher education.* In J. Sikula (Ed.), *Handbook of research on teacher education* (pp.722-744). New York: Macmillan.

Monaghan, J. (1986). *Adolescents' understanding of limits and infinity* (Doctoral dissertation, University of Warwick).

Oehrtman, M. (2009). *Collapsing dimensions, physical limitation, and other student metaphors for limit concepts*. Journal for Research in Mathematics Education, 396-426.

Olivier, A. (1989). *Handling pupils' misconceptions*. Pythagoras, 21, 10-19.

Orton, A. (1983a). *Students' understanding of integration*. Educational Studies in Mathematics, 14, 1–18

Potari, D., Zachariades, T., Christou, C., Kyriazis, G., & Pitta-Pantazi, D. (2006, November). *Teachers' mathematical and pedagogical awareness in calculus teaching.* In *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 846-848).

Przenioslo, M. (2004). *Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university.* Educational Studies in Mathematics, 55(1), 103-132.

Robinson, A. (1996). *Princeton landmarks in mathematics and physics: Non-standard analysis* (Rev. ed.). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Robson, C. (2007). *Η έρευνα του πραγματικού κόσμου.* Αθήνα: Gutenberg.

Roh, K. H. (2008). *Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence.* Educational studies in Mathematics, 69(3), 217-233.

Rowland, T. (2005, January). *The Knowledge Quartet: A tool for developing mathematics teaching.* In

Conference of Finnish Mathematics and Science Education Research Association (p. 11).

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). *Elementary teachers' mathematical subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi.* Journal of Mathematics Teacher Education, 8, 255-281.

Rowland, T., Jared, L., & Thwaites, A. (2011). *Secondary mathematics teachers' content knowledge: The case of Heidi*. In Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 2827-2837).

Shulman, L. S. (1986a). *Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective*. In M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed., pp. 3-36). New York: Macmillan.

Shulman, L. S. (1986b). *Those who understand: Knowledge growth in teaching.* Educational Researcher, 15(2), 4-14.

Sierpińska, A. (1987). *Humanities students and epistemological obstacles related to limits*. Educational studies in Mathematics, 18(4), 371-397.

Steele, M. D. (2005). *Comparing knowledge bases and reasoning structures in discussions of mathematics and pedagogy*. Journal of Mathematics Teacher Education, 8(4), 291-328.

Swinyard, C., & Larsen, S. (2012). *Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention.* Journal for Research in Mathematics Education, 43(4), 465-493.

Sykes, G. & Bird, T. (1992). *Teacher education and the case idea*. In G. Grant (Ed.), *Review of research in education* (Vol. 18, pp. 457–521). Washington, DC: American Educational Research Association.

Szydlik, J. E. (2000). *Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function*. Journal for Research in Mathematics Education, 258-276.

Tall, D., & Schwarzenberger, R. L. (1978). *Conflicts in the learning of real numbers and limits*. Mathematics teaching, 82, 44-49.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity.* Educational studies in mathematics, 12(2), 151-169.

Tamir, P. (1988). *Subject matter and related pedagogical knowledge in teacher education.* Teaching and Teacher Education, 4, 99—110.

Thabane, JL. 1998. *Students' Understanding of the Limit Concept in a First- year Calculus Course*. MSc

Dissertation: Wits University.

Vinner, S.(1991). *The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics*, in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 65-81.

Williams, S. R. (1991). *Models of limit held by college calculus students.* Journal for research in Mathematics Education, 219-236.

Williams, S. R. (2001). *Predications of the limit concept: An application of repertory grids*. Journal for research in mathematics education, 341-367

Yin, R. K. (2006). *Case study methods*. In J. L. Green, G. Camilli, & P. B. Elmore (Eds.) *Handbook of complementary methods in education research* (pp. 111-122). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Yin, R. K. (2009). Case study research: Design and methods. Sage publications. *Thousand oaks*.

Ζωιτσάκος, Σ. (2017). *Μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία 'The knowledge Quartet'* [πανεπιστημιακές σημειώσεις], Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών, Ακαδημαϊκό έτος 2016-2017. Θεσσαλονίκη.

Ιωσηφίδης, Θ. (2003). *Ανάλυση ποιοτικών δεδομένων στις κοινωνικές επιστήμες. Αθήνα: Κριτική*.

Μεταξάς, Ν. (2011). *Η ανάλυση της επιχειρηματολογίας των καθηγητών μαθηματικών ως εργαλείο μελέτης της επαγγελματικής τους γνώσης* (Doctoral dissertation, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ). Σχολή Θετικών Επιστημών. Τμήμα Μαθηματικών).

Μπιζμπιάνος, Μ. (2011) Διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Η περίπτωση της Γεωμετρίας. Τμήμα Μαθηματικών Ε.Κ.Π.

Τσαγκαράκης, Γ. (2018). *Η κατανόηση της έννοιας του ορίου από φοιτητές Μαθηματικού Τμήματος.*

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΣΤΑ ΟΡΙΑ

1. Σχεδιάζετε να εισάγετε στην τάξη σας την έννοια του ορίου $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$, όπου x_0 και α είναι πραγματικοί αριθμοί.

α) Περιγράψτε αναλυτικά το εισαγωγικό μάθημα που σχεδιάζετε και πραγματοποιείτε στην τάξη για την έννοια του ορίου συνάρτησης και αιτιολογήστε τον στόχο των επιμέρους ενεργειών σας.

β) Ποια παραδείγματα χρησιμοποιείτε κατά την εισαγωγή της έννοιας του ορίου;Αναφέρατε το στόχο του κάθε παραδείγματος.

γ) Ποιες παρανοήσεις θεωρείτε ότι αναπτύσσουν οι μαθητές για την έννοια του ορίου;

2. Ζητήσατε από τους μαθητές σας στην τάξη να λύσουν την παρακάτω άσκηση του σχολικού βιβλίου:

Να βρείτε το $\lim_{x \to 1} f(x)$ **αν** $\lim_{x \to 1}(4f(x) - 4x + 2) = -10$

Ένας μαθητής σηκώθηκε στον πίνακα κι έδωσε την εξής απάντηση:

«Έχουμε: $\lim_{x \to 1}(4f(x) - 4x + 2) = -10 \Leftrightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{4}\lim_{x \to 1}(-10 + 4x - 2) = -2$

οπότε προκύπτει ότι το ζητούμενο όριο είναι ίσο με -2»

α) Πώς θα διαχειριζόσασταν διδακτικά στην τάξη την παραπάνω απάντηση;

β) Πώς θα βαθμολογούσατε την απάντηση του μαθητή με κλίμακα 0-10 αν είχατε βάλει αυτή την άσκηση σε διαγώνισμα; Αιτιολογείστε τη βαθμολογία σας.

3. Ένας καθηγητής ζήτησε από τους μαθητές του να υπολογίσουν το $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)$

Ένας μαθητής έγραψε στον πίνακα

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

α) Ποιος πιστεύετε ότι είναι ο στόχος της παραπάνω άσκησης;

β) Ποιες ιδιότητες των ορίων χρησιμοποίησε ο μαθητής στην παραπάνω απόδειξη;

γ) Μετά τη λύση που έγραψε ο μαθητής στον πίνακα θα συζητούσατε στην τάξη για αυτή την άσκηση; Αν ναι για ποιον λόγο;

δ) Αν η απάντηση σας στο γ) είναι θετική πως θα συνεχίζατε τη συζήτηση στην τάξη;

4. Ένας καθηγητής ρώτησε τους μαθητές του την παρακάτω ερώτηση:

«Να βρεθεί, αν υπάρχει το $\lim_{x\to 3}\left(f(x)+g(x)\right)$ όπου $f(x)=\sqrt{x^2-9}, g(x)=\sqrt{3-x}$

Ένας μαθητής απάντησε ως εξής:

$$\lim_{x\to 3}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to 3}f(x)+\lim_{x\to 3}g(x)=0+0=0$$

Πως θα διαχειριζόσασταν διδακτικά στην τάξη την απάντηση του μαθητή;

5. Ένας μαθητής σας ρωτάει την παρακάτω απορία:

Προσπάθησα να υπολογίσω το $\lim_{x\to\infty}\eta\mu(x)$. Έκανα την αλλαγή μεταβλητής x=y+π και επειδή ημ(y+π)=-ημ(y) πήρα: $\lim_{x\to\infty}\eta\mu(x)=\lim_{y+\pi\to\infty}\eta\mu(y+\pi)=\lim_{y\to\infty}(-\eta\mu(y))=-\lim_{y\to\infty}\eta\mu(y)=-\lim_{x\to\infty}\eta\mu(x)$

από όπου προκύπτει $\lim\limits_{x\to\infty}\eta\mu(x)$.

Στην συνέχεια, έκανα πάλι την αλλαγή x = π/2 – z και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα

ημ(π/2 – z) = συν(z), προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to\infty}\sigma\upsilon\nu(x) = \lim\limits_{\pi\to\infty}\eta\mu(\pi/2-x) = \lim\limits_{z\to\infty}(\eta\mu(-z)) = -\lim\limits_{z\to\infty}\eta\mu(z) = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to\infty}(\sigma\upsilon\nu^2(x)+\eta\mu^2(x)) = 0^2+0^2 = 0$

Από την άλλη όμως ισχύει

$\lim\limits_{x\to\infty}(\sigma\upsilon\nu^2(x)+\eta\mu^2(x)) = \lim\limits_{x\to\infty}(1) = 1$

Που έχω κάνει λάθος;

α) Που κάνει λάθος ο μαθητής;

β) Πόσο συνηθισμένο θεωρείτε ότι είναι το παραπάνω λάθος και σε τι οφείλεται;

γ) Πως θα αντιμετωπίζατε στην τάξη την απορία του μαθητή;

δ) Θα μπορούσατε να αξιοποιήσετε το παραπάνω λάθος διδακτικά και αν ναι με ποιο τρόπο;