ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ - ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ - ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Διδασκαλία και μάθηση εξίσωσης δευτέρου βαθμού με ιστορική προοπτική

ΜΗΤΡΟΣΟΥΔΗΣ ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ: Α.Ε.Μ. 945

Επιβλέπων καθηγητής: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, καθηγητής

Εξεταστές: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, καθηγητής

Παπαδόπουλος Ιωάννης, επίκουρος καθηγητής

Σταθοπούλου Χαρούλα, καθηγήτρια

ΦΛΩΡΙΝΑ 2020

Στην οικογένεια μου που με στήριξε όλο
αυτό το διάστημα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η ενσωμάτωση της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση αποτέλεσε τις τελευταίες δεκαετίες αντικείμενο πολλών ερευνών, με επιχειρήματα υπέρ και κατά. Στην παρούσα εργασία επιχειρείται η διδασκαλία και η μάθηση των εξισώσεων 2ου βαθμού, μέσα από ιστορικές προσεγγίσεις. Οι 46 μαθητές που συμμετέχουν σε μια εξ' αποστάσεως διδακτική παρέμβαση (λόγω καραντίνας), έρχονται σε επαφή με ένα σύνολο πολλαπλών αναπαραστάσεων (λεκτικών, αριθμητικών, αλγεβρικών, γεωμετρικών και αναλυτικών) αυτών των εξισώσεων και των λύσεων τους, τα οποία έχουν αντληθεί από την Ιστορία των Μαθηματικών. Καλούνται να απαντήσουν σε ένα σύνολο 8 φύλλων εργασίας που σχεδιάστηκαν με τρόπο που να καλύπτει τις ανάγκες της έρευνας. Στο τέλος της παρέμβασης δόθηκε και ένα ερωτηματολόγιο τύπου Likert με 4 άξονες, ώστε να καταγραφούν οι αντιδράσεις τους για το όλο εγχείρημα. Ποια η γνώμη τους για την εξ' αποστάσεως διδασκαλία, για τη συμμετοχή τους σε ομάδες, για τον τρόπο παρουσίασης των εξισώσεων μέσω της ιστορίας των μαθηματικών καθώς και για τις πολλαπλές αναπαραστάσεις. Γίνεται απόπειρα να διερευνηθεί ο ρόλος της ιστορίας στην προσπάθεια κατανόησης των αλγεβρικών εννοιών που σχετίζονται με τις εξισώσεις και με τον τρόπο επίλυσης τους. Παράλληλα καταγράφονται οι δυσκολίες και τα λάθη που αντιμετώπισαν οι μαθητές στη προσπάθεια τους να επιλύσουν τέτοιες εξισώσεις, άλλα και όταν βρέθηκαν αντιμέτωποι με προβλήματα που σχετίζονται με αυτές. Εξαιτίας του γεγονότος ότι οι απαντήσεις τους δεν δόθηκαν μέσα στην τάξη, αλλά σε ένα μη ελεγχόμενο περιβάλλον, γίνεται αναφορά σε "αποτελέσματα" τα οποία βέβαια κρίνονται θετικά στο συγκεκριμένο πλαίσιο.

Λέξεις κλειδιά: Ιστορία των Μαθηματικών, ενσωμάτωση ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση, πολλαπλές αναπαραστάσεις των εξισώσεων, δυσκολίες και λάθη μαθητών στην επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων.

ABSTRACT

The integration of history into mathematics education has been the subject of much research in recent decades, with pros and cons. In the present work, the teaching and learning of quadratic equations is attempted, through historical approaches. The 46 students participating in a distance learning intervention (due to quarantine) come into contact with a set of multiple representations (verbal, arithmetic, algebraic, geometric and analytical) of these equations and their solutions, which have been drawn from the History of Mathematics. They are asked to respond to a set of 8 worksheets

designed to meet the needs of the research. At the end of the intervention, a Likert questionnaire with 4 axes was given, in order to record their reactions for the whole project. What is their opinion about distance learning, about their participation in groups, about the way equations are presented through the history of mathematics as well as about multiple representations. An attempt is made to explore the role of history in trying to understand algebraic concepts related to equations and how to solve them. At the same time, the difficulties and mistakes faced by the students in their attempt to solve such equations are recorded, but also when they were faced with problems related to them. Due to the fact that their answers were not given in the classroom, but in an uncontrolled environment, reference is made to "results" which of course are considered positive in this context.
Key-words: History of Mathematics, integration of history in mathematics education, multiple representations of equations, difficulties and mistakes of students in solving quadratic equations.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι εξισώσεις γενικά αποτελούν ένα βασικό κομμάτι των Μαθηματικών και ιδιαίτερα της άλγεβρας. Το εκπαιδευτικό μας σύστημα, ξεκινώντας από τις μικρές τάξεις του δημοτικού και φτάνοντας μέχρι και την τριτοβάθμια εκπαίδευση, αφιερώνει μεγάλο μέρος στην διδασκαλία και τη μάθηση των εννοιών που σχετίζονται με τη μελέτη των μεθόδων για την επίλυση τους. Ειδικά οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις (που είναι αντικείμενο της παρούσας εργασίας) σε συνδυασμό με τις πρωτοβάθμιες, αναλύονται συστηματικά στην Γ΄ γυμνασίου και την Α΄ λυκείου, προσφέροντας τη βάση για την επέκταση σε άλλου είδους εξισώσεις, αλλά και σε διαφορετικούς τομείς των μαθηματικών, καθώς και στην εφαρμογή τους στις φυσικές επιστήμες.

Οι δυσκολίες όμως που συναντούν οι μαθητές και τα λάθη στα οποία υποπίπτουν, στη προσπάθεια τους να κατανοήσουν τις αλγεβρικές έννοιες γενικά (Küchemann 1978; Kieran 1992 & 1997; Λεμονίδης 1996; Δράμαλης & Σακονίδης 2006) και ειδικά τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις (Clements & Vaiyavutjamai., 2006; Maconye & Nhlanhla 2014),οδηγεί πολλές φορές τους ερευνητές αλλά και τους εκπαιδευτικούς στην αναζήτηση των τρόπων εκείνων που θα συνδράμουν στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Στο Ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα τα ΑΠΣ και τα ΔΕΠΠΣ του 2003, καθώς και το ΝΠΣ του 2011 έρχονται να βοηθήσουν σ’ αυτή τη προσπάθεια εξειδικεύοντας τους διδακτικούς στόχους, παρέχοντας τις κατάλληλες οδηγίες καθώς και προτείνοντας κάποιες ενδεικτικές δραστηριότητες. Εντούτοις οι δυσκολίες στις αλγεβρικές έννοιες από μέρους των μαθητών συνεχίζουν να υφίστανται έως και σήμερα (Τσικοπούλου & Φερεντίνος 2018).

Η απάντηση στις παραπάνω διαπιστώσεις μπορεί ίσως να είναι η ενσωμάτωση της ιστορίας στην μαθηματική εκπαίδευση, όπως πίστευαν μεγάλοι μαθηματικοί και παιδαγωγοί του παρελθόντος, όπως οι F. Klein, και H. Freudenthal, αλλά και εν ζωή όπως ο G. Brousseau (Θωμαΐδης 2014).

Η ιστορία των Μαθηματικών είναι γεμάτη γεγονότα που καταδεικνύουν την προσπάθεια των ανθρώπων, από το να λύσουν ένα απλό πρόβλημα της καθημερινότητάς τους, έως την ερμηνεία πιο σύνθετων φαινομένων της φύσης. Αρωγός σ' αυτή τους την προσπάθεια αποτέλεσε η κατανόηση και η λειτουργία των εξισώσεων και των μεθόδων που οδηγούσαν στη λύση τους. Ξεκινώντας από τους αρχαίους Βαβυλώνιους και φτάνοντας μέχρι τις μέρες μας, με ενδιάμεσους σταθμούς τους Άραβες και τους Ινδούς, συναντά κανείς τις διαφορετικές αναπαραστάσεις που προσέδιδαν οι μαθηματικοί του παρελθόντος στην αναζήτηση τρόπων και μεθόδων για την επίλυση των εξισώσεων. Λεκτικές, αριθμητικές, αλλά και γεωμετρικές λύσεις καθώς και αλγεβρικές και αναλυτικές – γραφικές, ξεδιπλώνονται μέσα από την ιστορική αναζήτηση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων.

Η εργασία δομείται σε επτά κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται προσπάθεια να ανιχνευτεί ο ρόλος της ιστορίας των μαθηματικών στην μαθηματική εκπαίδευση, μέσα από την έρευνα, αλλά και να γίνει καταγραφή των πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων κατά τη διαδικασία της εφαρμογής της. Επίσης παρουσιάζονται και διάφοροι τρόποι αξιοποίησης της στη διδασκαλία.

Στο δεύτερο κεφάλαιο εμφανίζεται η ιστορία της δευτεροβάθμιας εξίσωσης στο πέρασμα των αιώνων, αρχής γενομένης από τους μεσοποτάμιους λαούς, 4000 χρόνια πριν. Μια ιστορική αναδρομή, όπου διατρέχοντας τις λύσεις που δόθηκαν σε διαφορετικές ιστορικές περιόδους από διάφορους λαούς, μας οδηγεί στον γενικό τύπο επίλυσης όλων ανεξαιρέτως των δευτεροβάθμιών εξισώσεων.

Ο τρόπος που παρουσιάζονται οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις στο Ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα με τα ΑΠΣ – ΔΕΠΠΣ του 2003 και το ΝΠΣ του 2011, καθώς και οι οδηγίες που δίνονται από το ΙΕΠ διαπραγματεύεται το τρίτο κεφάλαιο.

Τα λάθη και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, κατά την ενασχόληση τους με την άλγεβρα γενικά, αλλά και τις εξισώσεις ειδικά, αποτελεί αντικείμενο του τέταρτου κεφαλαίου.

Τα υπόλοιπα τρία κεφάλαια, αποτελούν το μέρος της εμπειρικής έρευνας. Συγκεκριμένα στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται ο τρόπος διεξαγωγής της διδακτικής παρέμβασης με την εξ' αποστάσεως διδασκαλίας μέσα σε ένα σύγχρονο και ασύγχρονο περιβάλλον. Εξηγείται ο σχεδιασμός και οι στοχεύσεις της που εμπεριέχονται σε κάθε φύλλο εργασίας, καθώς και η μεθοδολογία της έρευνας, με τη διαδικασία πραγματοποίησης της διδασκαλίας και την ανάλυση των φύλλων εργασίας και του ερωτηματολογίου, που δόθηκε στο τέλος της παρέμβασης.

Τα "αποτελέσματα" παρουσιάζονται στο έκτο κεφάλαιο και ακολουθούν τα συμπεράσματα και η συζήτηση στο έβδομο κεφάλαιο. Η εργασία ολοκληρώνεται με τη βιβλιογραφία και το παράρτημα.

ΚΕΦ. 1ο: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1.1 Ερευνητική Διάσταση της Ιστορίας των Μαθηματικών

Ο ρόλος της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση, άρχισε να συζητείται σοβαρά από τις αρχές του 20ου αιώνα, με σκοπό, να συμβάλει στη βελτίωση της διδασκαλίας των μαθηματικών. Η βάση στην οποία στηρίχτηκε, ήταν ο λεγόμενος όρος του *«παραλληλισμού»,* δηλαδή της μεταφοράς στο χώρο της εκπαίδευσης του «βιογενετικού νόμου» του E. Haeckel (1834 – 1919). Σύμφωνα μ' αυτόν, η οντογένεση, η ανάπτυξη δηλαδή των ιδεών κατά τη διάρκεια της ζωής ενός ατόμου, είναι βραχεία επανάληψη ή ανακεφαλαίωση της φυλογένεσης, δηλαδή της ιστορικής εξέλιξης των εννοιών. Έτσι υποστηρίχτηκε από εξέχοντες μαθηματικούς και ερευνητές, όπως ο H. Poincare (1854 – 1912) αρχικά και στη συνέχεια ο G. Polya (1887 – 1985) και ο H. Freudenthal (1905 – 1990), ότι η διδασκαλία κάποιας έννοια θα πρέπει κατά κάποιο τρόπο να ακολουθεί την ιστορική της πορεία και να ενσωματώνει στοιχεία της τελευταίας. Συγκεκριμένα: Κατά τον Polya οι μαθητές πρέπει να επανα-ανακαλύψουν όλα τα *«μεγάλα βήματα»* που ακολούθησαν οι μαθηματικοί καθ' όλη τη διάρκεια της ιστορίας. Σύμφωνα με τον Branford, ο δάσκαλος πρέπει να πραγματοποιεί *«πειράματα»* που σημάδεψαν τη μαθηματική εμπειρία. Ο Freudenthal μιλάει για *«καθοδηγούμενη επανα- ανακάλυψη»* (Θωμαΐδης 2014; Κολέζα 2006).

Βέβαια και κατά τον 19ο αιώνα εμφανίστηκαν τα πρώτα δείγματα αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική διαδικασία. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το βιβλίο «*The Philosophy of Arithmetic exhibiting a* *progressive view of the Theory and Practice of Galculation»* του J. Leslie (1766 – 1832) που εκδόθηκε το 1817 και ίσως να αποτελεί και το πρώτο στο είδος του. Η ιστορία των μαθηματικών έχει εξέχουσα θέση σε όλο το βιβλίο με ρόλο μεθοδολογικό όπου αναλύεται και μορφοποιείται η αριθμητική γνώση και γίνεται σύγκριση των διαφόρων τρόπων χειρισμού των αριθμητικών ζητημάτων. Το *«Die Element der Mathematic»* του R. Baltzer (1818 – 1887) που εκδόθηκε το 1853 αποτελεί μια άλλη απόπειρα σ' αυτή τη κατεύθυνση, το οποίο ήταν εφοδιασμένο με ιστορικές σημειώσεις (Θωμαΐδης & Καστάνης ,1987, σελ. 63).

Η πρώτη όμως αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών από τη σκοπιά της διδακτικής των μαθηματικών παρατηρείται με ιδιαίτερη έμφαση στη Γερμανία, όπου στην αρχή απευθυνόταν μόνο στο δάσκαλο και αργότερα στην αλλαγή του αιώνα άρχισε να γίνεται χρησιμοποίηση της ιστορίας και στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Το 1865 ο πρόεδρος της μαθηματικής εταιρείας του Λονδίνου A. de Morgan, στην εναρκτήρια ομιλία του έκανε λόγο για τη σημασία της ιστορίας των μαθηματικών, τόσο για την κατανόηση της όσο και για την επίγνωση των δυσκολιών τους. Το 1877 ο καθηγητής του πανεπιστημίου του Chent, P. Mansion (1844 – 1918) θίγει το ζήτημα της διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών και έξι χρόνια αργότερα ένας μαθηματικός της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, Ο S. Gunther (1844 – 1923) παρουσίασε τη πρώτη εμπεριστατωμένη εργασία για το ρόλο της ιστορίας στο μάθημα των μαθηματικών (Θωμαΐδης & Καστάνης, 1987, σελ. 65).

Τα επόμενα χρόνια ο προβληματισμός αυτός εξαπλώθηκε και σε άλλα μέρη, όπως στη Ρωσία και στις Η.Π.Α., με κύριο εκφραστή τον D. E. Smith (1860 – 1944). Όμως την σημαντική ώθηση την έδωσε ο Γερμανός μαθηματικός F. Klein (1849 – 1925), όπου στα πλαίσια διαλέξεων για επιμόρφωση μαθηματικών δασκάλων έκανε χρήση σε μεγάλο βαθμό την ιστορία των μαθηματικών. Έγραφε συγκεκριμένα:

«Ένα ουσιαστικό εμπόδιο στην ανάδυση μιας τόσο φυσικής κι αληθινά επιστημονικής μεθόδου διδασκαλίας είναι η έλλειψη ιστορικής γνώσης που τόσο συχνά γίνεται αισθητή. Για να το καταπολεμήσω αυτό αποφάσισα να εισάγω ιστορικές παρατηρήσεις στην παρουσίαση μου και κάνοντας το, πιστεύω ότι σας έχω ξεκαθαρίσει πόσο αργά γεννήθηκαν όλες οι μαθηματικές ιδέες, πως σχεδόν πάντα εμφανίζονται πρώτα σε προφητικές μάλλον μορφές και μόνο μετά από μακριά ανάπτυξη αποκρυσταλλώθηκαν σε αυστηρές μορφές τόσο οικίες στη συστηματική παρουσίαση. Είναι κρυφή μου ελπίδα ότι αυτή η γνώση θα αποκτήσει μια διαρκή και τελεσφόρα επίδραση πάνω στο χαρακτήρα της δικής σας διδασκαλίας» (Θωμαΐδης & Καστάνης, 2007, σελ. 67).

Βέβαια υπήρξαν αντιρρήσεις και στις απόψεις του Klein, αλλά και του Smith, από άλλους ερευνητές, όπως ο E. Thorndike (1874 – 1949), οπαδός του μπιχεβιορισμού που έδωσε μεγαλύτερη βαρύτητα στη μαθησιακή συμπεριφορά των μαθητών και λιγότερο στη φύση των μαθηματικών και κατ' επέκταση στην αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών (Θωμαΐδης, Καστάνης, 1987, σελ. 70).

Παρόλα αυτά το ενδιαφέρον των μαθηματικών για την ιστορία συνεχίστηκε, ιδιαίτερα μετά το 1950, με αρκετές μελέτες γύρω από αυτό το θέμα. Το δίλημμα που αντιμετώπισαν αρχικά οι ερευνητές αφορούσε στις επιλογές που έχει ο εκπαιδευτικός που θέλει να ενσωματώσει την ιστορία των μαθηματικών.

α) να παραμείνει δηλαδή πιστός στα σύγχρονα μαθηματικά και στις σύγχρονες τεχνικές με τον κίνδυνο όμως να καταστεί ανιστόρητος ή,

β) να υιοθετήσει μια πραγματική ιστορική μέθοδο, διακινδυνεύοντας όμως να διδάξει πράγματα άσχετα με τα μαθηματικά που πρέπει να διδάξει. (Κολέζα 2006, σελ. 33)

Αν κάποιος επιλέξει την πρώτη επιλογή, ο μόνος ίσως λόγος που θα το κάνει είναι για να προσδώσει ένα πιο ανθρώπινο πρόσωπο στα μαθηματικά συνδέοντας μια μαθηματική έννοια με συγκεκριμένα ιστορικά πρόσωπα, σε βάρος βέβαια της ιστορικής αλήθειας και του τρόπου αντιμετώπισης της έννοιας αυτής κατά το παρελθόν.

Η δεύτερη προσέγγιση υπονοεί ότι τα μαθηματικά δεν είναι με κανένα τρόπο απόλυτα, έχουν μια ιστορία και οι στόχοι και το νόημα τους είναι υπό συνεχή διαπραγμάτευση, επαναφέροντας τη διαμάχη η οποία αναλύεται εκτενέστερα στο 2ο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας, αναφορικά με την υιοθέτηση του όρου της *«γεωμετρικής άλγεβρας»* των αρχαίων Ελλήνων. Διαμάχη μεταξύ του φιλοσοφικού ρεαλισμού και του ιστορικού σχετικισμού, όπου ο ρεαλιστής μιλάει για αντικειμενικές μαθηματικές αλήθειες, ενώ ο σχετικιστής για το πλαίσιο ερμηνείας και την πολιτισμική εξάρτηση των εννοιών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα η διάκριση της άλγεβρας σε ρητορική – συγκοπτόμενη – συμβολική, σύμφωνα με τη σύγχρονη αντίληψη, η οποία όμως αν διερευνηθεί από μία κοινωνικο – πολιτιστική προοπτική θα μπορούσε το ενδιάμεσο στάδιο της συγκοπτόμενης άλγεβρας να ερμηνευτεί ως ένα τεχνικό θέμα που έχει να κάνει με τους περιορισμούς του γραψίματος ή της δυσκολίας της εκτύπωσης (Κολέζα 2006, σελ. 34).

Το ίδιο δίλημμα φαίνεται ότι αντιμετώπισε και ο I. Lakatos (1922 – 1974) όπου αναφέρθηκε σε *«εσωτερική και εξωτερική ιστορία».* Στη μεν εξωτερική γίνεται μια πιστή παρουσίαση της ιστορίας των μαθηματικών, που όμως δεν εξηγεί τη δημιουργία της αντικειμενικής μαθηματικής γνώσης, σε αντίθεση με την εσωτερική ιστορία, όπου αφαιρείται οποιαδήποτε κοινωνική ή πολιτισμική μεταβλητή για να αναδείξει τα αντικειμενικά προϊόντα της μαθηματικής ορθολογικής σκέψης. (Κολέζα 2006, σελ. 35 - 36)

Ο *«παραλληλισμός»* βέβαια έχει εκφραστεί και από άλλους ερευνητές και παιδαγωγούς, με κυριότερους τους J. Piaget (1896 – 1980) και R. Garcia, όπου παρατήρησαν ότι οι αντιδράσεις των μαθητών είναι μερικές φορές παρόμοιες με τις αντίστοιχες αντιδράσεις που παρατηρούνται στην ιστορία.

Είναι γνωστό ότι η βιολογική θεωρία του Piaget, η οποία βασίστηκε σε εκτεταμένα πειράματα σε παιδιά, θεωρεί ότι υπάρχει μια αλληλεπίδραση μεταξύ της απόκτησης της γνώσης και της ανάπτυξης της σκέψης, με το περιβάλλον, η οποία εξελίσσεται σε τέσσερα «στάδια», από τη βρεφική έως την εφηβική ηλικία. Συγκεκριμένα υποστήριξε ότι η προσαρμογή στο περιβάλλον επιτυγχάνεται μέσω του μηχανισμού της *«αφομοίωσης»,* δηλαδή της ενσωμάτωσης της νέας γνώσης σ’ ένα υπάρχον νοητικό σχήμα και της *«συμμόρφωσης»,* δηλαδή στις αλλαγές στη νοητική δομή που είναι απαραίτητες για το συνταίριασμα της νέας γνώσης με τις παλιές Η μετάβαση από ένα στάδιο στο άλλο πραγματοποιείται με το μηχανισμό της *«αναστοχαστικής αφαίρεσης»,* όπου οι ενέργειες και οι διαδικασίες ενός σταδίου μετασχηματίζονται σε αντικείμενα σκέψης στο επόμενο στάδιο ανάπτυξης. Κεντρικά σημεία αυτής της θεωρίας των *«σταδίων»* μπορούν να εντοπιστούν και στην ιστορία της επιστήμης (Θωμαΐδης 2014, σελ. 18).

Οι Piaget και Garcia δηλαδή, υποστήριξαν ότι υπάρχει μία σχέση μεταξύ των ψυχολογικών και ιστορικών εξελίξεων και ότι αυτή πρέπει να εξεταστεί όχι από την άποψη του περιεχομένου, αλλά από την άποψη των μηχανισμών που μεσολαβούν κατά τις μεταβιβάσεις από το ένα ψυχογενετικό στάδιο στο άλλο, σε αναλογία με τις μεταβιβάσεις των ιστορικών περιόδων (Κολέζα 2006; Θωμαΐδης 2014).

Μια άλλη θεωρία που εντάσσει την ιστορία στη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών είναι η *«γενετική μέθοδος»* του Freudenthal με την «αρχή της εκ νέου ανακάλυψης» στα πλαίσια της *«Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης».*

Μέσα από τη Σωκρατική μέθοδο της *«μαιευτικής»* ο Freudenthal θεωρεί ότι η διδασκαλία συνίσταται στο να καθοδηγήσει το μαθητή στην επανα - ανακάλυψη της γνώσης.

Θεωρεί ότι η χρήση της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών αποτελεί μια δεξαμενή από την οποία αντλούνται ιδέες και υλικό. Η *«αρχή της εκ νέου* *ανακάλυψης»* παρέχει την κατευθυντήρια γραμμή: *"Σκέψου πως θα μπορούσες να το είχες ανακαλύψει εσύ ο ίδιος"* παρέχοντας στο μαθητή τη πρωτότυπη διαδικασία της επινόησης μιας έννοιας ώστε να χρησιμοποιηθεί ως μοντέλο με την ενεργό φυσικά συμμετοχή του.

Τη χρήση αυτή της ιστορίας ο Freudenthal την αντιπαραβάλει σε σχέση με το μοντέλο διδασκαλίας *«ορισμός – θεώρημα – απόδειξη»* το οποίο παρακάμπτει όλες τις προσπάθειες που προηγήθηκαν ενός μαθηματικού αποτελέσματος και δεν αναγνωρίζει καμία αναγκαιότητα αναφοράς σ' αυτές (Θωμαΐδης 2014, σελ. 20).

Μια τρίτη θεωρία μάθησης που θέτει έναν συγκεκριμένο τρόπο χρήσης της ιστορίας των μαθηματικών είναι η *«θεωρία των διδακτικών καταστάσεων»* του G. Brousseau (1933 –) στο κομμάτι που αφορά την έννοια των *«επιστημολογικών εμποδίων»*. Μια έννοια που εισήγαγε πρώτος ο G. Bachelard (1884 – 1962) και τη μετέφερε ο Brousseau στη μαθηματική εκπαίδευση.

Συνδύασε τη θεωρία του Bachelard για την εξέλιξη της επιστημονικής σκέψης με τη θεωρία του Piaget για τη νοητική ανάπτυξη, τονίζοντας ότι η μάθηση με προσαρμογή στο περιβάλλον προκαλείται από γνωστικές ρήξεις. Λάθη που επαναλαμβάνονται με συστηματικό τρόπο δεν οφείλονται σε έλλειψη γνώσης, αλλά στην ύπαρξη μιας γνώσης που δυσλειτουργεί και συνιστά επομένως ένα γνωστικό εμπόδιο.

Ανάλογα με την προέλευσή τους ο Brousseau ταξινομεί τα γνωστικά εμπόδια σε:

α) οντογενετικά: που σχετίζονται με την προσωπική νοητική ανάπτυξη και γνωστική ικανότητα των μαθητών,

β) διδακτικά: που σχετίζονται με τις επιλογές του εκπαιδευτικού συστήματος, όπως καθορισμός ύλης, σειρά διδασκαλίας εννοιών, στόχοι, μέθοδοι διδασκαλίας κ.λ.π.

γ) επιστημολογικά: που σχετίζονται με την ίδια τη γνώση. Συγκεκριμένα η προϋπάρχουσα γνώση αδυνατεί να προσαρμοστεί στις νέες καταστάσεις. Χαρακτηριστικό παράδειγμα η προκατάληψη του φυσικού αριθμού, όπου οι μαθητές τείνουν να δίνουν χαρακτηριστικά και ιδιότητες των φυσικών αριθμών όταν διαχειρίζονται ρητούς. Επίσης, η χρήση των αρνητικών αριθμών υπό το πρίσμα των θετικών,

δ) πολιτιστικά: που σχετίζονται με κοινωνικούς και πολιτιστικούς παράγοντες.

Θα σταθούμε στα επιστημολογικά εμπόδια, όπου εμφανίζονται, κατά τον Brousseau, τόσο στο ιστορικό όσο και στο σχολικό περιβάλλον. Μεταφέρουμε τα λόγια του Brousseau, όπως καταγράφονται στο άρθρο του Θωμαΐδη στο *Επιστήμες Αγωγής*, (Θωμαΐδης 2014, σελ. 23):

«Εμπόδια πράγματι επιστημολογικής προέλευσης είναι εκείνα από τα οποία ούτε μπορούμε ούτε πρέπει να ξεφύγουμε, εξ αιτίας του εποικοδομητικού ρόλου τους στην επιζητούμενη γνώση. Αυτά μπορούν να βρεθούν στην ιστορία των ίδιων των γνώσεων. Αυτό δεν σημαίνει ότι πρέπει να ενισχύσουμε την επίδρασή τους ή να αναπαράγουμε στο σχολικό περιβάλλον τις ιστορικές συνθήκες κάτω από τις οποίες έγινε η υπέρβασή τους.» (Brousseau 1983/1997: 87)

Από τα παραπάνω φαίνεται πολύ καθαρά ο ρόλος της ιστορίας των μαθηματικών και τη σημασία που προσδίδει ο Brousseau, όπως και για το έργο των ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών που οφείλουν:

α) να εντοπίζουν επαναλαμβανόμενα λάθη και να δείχνουν ότι αυτά ομαδοποιούνται γύρω από αντιλήψεις,

β) να βρίσκουν εμπόδια στην ιστορία των μαθηματικών,

γ) να συγκρίνουν τα ιστορικά εμπόδια με εμπόδια στη μάθηση και να αιτιολογούν τον επιστημολογικό χαρακτήρα τους. (Brousseau 1989/1997: 99).

Βέβαια τις απόψεις αυτές του Brousseau αρκετοί ερευνητές δεν τις ενστερνίστηκαν εκφράζοντας παράλληλα τις επιφυλάξεις τους, ιδιαίτερα με τη φύση των εμποδίων που εμφανίζονται στη διδασκαλία των μαθηματικών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα οι έρευνες των Θωμαΐδη (1995) και Gagatsis & Thomaidis (1995) στη περίπτωση των αρνητικών αριθμών και της απόλυτης τιμής όπου διδακτικά εμπόδια αλληλεπιδρούν με επιστημολογικά εμπόδια που εμφανίστηκαν στην πορεία της ιστορικής εξέλιξης αυτών των εννοιών.

Πάντα βέβαια θα μπαίνει επιτακτικά το ερώτημα κατά πόσο μπορεί να συνδεθεί ένας δημιουργικός μαθηματικός του παρελθόντος με ένα μαθητή του σήμερα που προσπαθεί να μάθει μαθηματικά *(παραλληλισμός)*.

Τις τελευταίες δεκαετίες η ιστορία των μαθηματικών χρησιμοποιείται όλο και περισσότερο στη διδασκαλία με δύο κυρίως τρόπους:

α) μέσω στρατηγικών προσθήκης και

β) μέσω στρατηγικών προσαρμογής (Fried 2001) από Κολέζα 2006, σελ.29

Ο πρώτος τρόπος της προσθήκης εμφανίζεται με δύο μορφές:

1) Με κάποια ιστορικά σημειώματα που εμφανίζονται στο τέλος των κεφαλαίων και συνδέονται με το περιεχόμενο αυτών των κεφαλαίων.

2) Με τη προσθήκη κάποιων ιστορικών προβλημάτων τα οποία δίνονται προς επίλυση τους.

Αυτός βέβαια ο τρόπος δεν επιφέρει αλλαγές στο πρόγραμμα σπουδών, απλά το διευρύνει, με στόχο να αναδείξει ένα πιο ανθρώπινο πρόσωπο των μαθηματικών, αλλά και να κάνει τα μαθηματικά πιο ενδιαφέροντα, πιο προσιτά και πιο κατανοητά στους μαθητές (Κολέζα, 2006, σελ. 30).

Ο δεύτερος τρόπος, της προσαρμογής, χρησιμοποιεί την ιστορική εξέλιξη μιας μαθηματικής έννοιας ως οδηγό για το σχεδιασμό της διδασκαλίας αυτής της έννοιας. Στόχος αυτού του τρόπου είναι να αναδείξει τους προβληματισμούς που τη δημιούργησαν και την σταδιακή και συνήθως μη γραμμική εξέλιξη της, σε σχέση με τα σύγχρονα κοινωνικο - πολιτισμικά προβλήματα.

Η μελέτη δηλαδή της ιστορίας των μαθηματικών λειτουργεί ως ένα είδος επιστημολογικού εργαστηρίου, στο οποίο ερευνάται ο τρόπος ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης και διατυπώνονται υποθέσεις σχετικά με τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών, όπου βέβαια δίνεται έμφαση στην κατανόηση των εννοιών όπως παρουσιάζονται με τη σύγχρονη τους μορφή (Κολέζα, 2006, σελ. 31).

Κάτω από αυτό το πρίσμα η Sierpinska (1996) προσδιορίζει τέσσερις διαφορετικούς τρόπους μελέτης και χρήσης της ιστορίας:

α) ο ιστορικός τρόπος που ενδιαφέρεται για το πότε και το γιατί των μαθηματικών εξελίξεων και άρα μας παραπέμπει στη στρατηγική της προσθήκης,

β) ο επιστημολογικός τρόπος, όπου εστιάζει στο πώς οι μαθητές μαθαίνουν. Ενδιαφέρεται δηλαδή για τη ψυχολογική γένεση των μαθηματικών ιδεών,

γ) ο εκπαιδευτικός Ι, όπου η ιστορία των μαθηματικών χρησιμοποιείται ως «εργαλείο» για τη διδασκαλία τους και οι έννοιες εισάγονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που εμφανίστηκαν αρχικά. Μας παραπέμπει δηλαδή στη μέθοδο του Freudenthal,

δ) ο εκπαιδευτικός ΙΙ όπου επιλέγονται οι πλέον κατάλληλες ιστορικές δραστηριότητες για την πλήρη κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας, εισχωρώντας στη φύση των δυσκολιών (επιστημολογικά εμπόδια) που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Μας παραπέμπει στη θεωρία των Bachelard - Brousseau (Κολέζα 2006, σελ. 32)

1.2 Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα στην Ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στην Εκπαιδευτική Διαδικασία

Από τη προηγούμενη ενότητα φάνηκε ο προβληματισμός που δημιουργήθηκε στους ερευνητές αλλά και στους εκπαιδευτικούς, αναφορικά με τη χρήση ή ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία και σε ποιο βαθμό αυτή μπορεί να επηρεάσει την αποτελεσματικότερη διδασκαλία εννοιών, που δημιουργούν αρκετά προβλήματα στην κατανόηση τους από τους μαθητές.

Τα παρακάτω που ακολουθούν βασίζονται στο άρθρο του Κ. Τζανάκη το 2009 «*Η αξιοποίηση των σχέσεων μεταξύ Ιστορίας των Μαθηματικών και Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Συζήτηση σχετικά με τα υπέρ και τα κατά, βάσει διεθνούς εμπειρίας*» και στο «*Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey*» των Tzanakis and Arcavi 2000

1.2.1 Επιχειρήματα υπέρ της Ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών

Όλοι η επιχειρηματολογία στηρίζεται στην επιστημολογική θέση ότι τα μαθηματικά δεν είναι μόνο το τελικό αποτέλεσμα μιας ανάπτυξης θεωριών δοσμένη μέσω μιας συμβολικής γλώσσας, αλλά και οι διαδικασίες που οδηγούν σ’ αυτό το αποτέλεσμα. Αυτό επιτυγχάνεται μέσα από ενέργειες που προσδίδουν νόημα στα μαθηματικά αντικείμενα, συνδέοντας και εμβαθύνοντας τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις με τις νέες. Μ’ αυτόν τον τρόπο δίνεται η ευκαιρία στο μαθητή να αποκτήσει εμπειρίες, κάνοντας μαθηματικά. Η ιστορία των μαθηματικών παρέχει αυτή τη δυνατότητα ώστε οι μαθηματικές ιδέες να δοθούν στην αρχική τους μορφή και να εργαλειοποιηθούν κατάλληλα στη απόδοση νοήματος στην παροχή κινήτρων και στη σφαιρική αντίληψη των μαθηματικών.

Ακολουθεί μια σειρά κατηγοριοποιημένων επιχειρημάτων υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας στην εκπαιδευτική διαδικασία, ώστε η διδασκαλία των μαθηματικών να εμπλουτιστεί και να βελτιωθεί από πολλές πλευρές.

<u>Α. Η Εκμάθηση των Μαθηματικών</u>

1) Η ιστορική ανάπτυξη των μαθηματικών σε αντιπαραβολή με το «λουστραρισμένο» τελικό μαθηματικό προϊόν:

Τα μαθηματικά σε όλο το κόσμο, συνήθως διδάσκονται οργανωμένα, με έναν επαγωγικό και πολλές φορές αξιωματικό τρόπο, απαλλαγμένο από στρεβλώσεις και μακροχρόνιες διενέξεις που εμφανίστηκαν κατά τη διάρκεια της εξέλιξης τους μέχρι να φτάσουν σε ένα τελικό στάδιο. Εντούτοις, τα αρχικά ερωτήματα και προβλήματα που αποτέλεσαν τα βασικά κίνητρα για την ανάπτυξη μιας ιδέας ή μιας έννοιας, παραμένουν καλά κρυμμένα πίσω από το τρόπο παρουσίασης τους.

Σ΄ αυτό λοιπόν το πλαίσιο, η κατάλληλη ενσωμάτωση της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στο να αποκαλυφθεί ο τρόπος που οι μαθηματικές έννοιες λειτουργούν ως εργαλεία για την οργάνωση του φυσικού και πνευματικού κόσμου αλλά και να βοηθήσει, ώστε να μπορέσουν οι μαθητές να εξοικειωθούν περισσότερο με τα μαθηματικά αντικείμενα, ερχόμενοι σε επαφή με τα κίνητρα για τα οποία δημιουργήθηκαν οι μαθηματικές ιδέες.

Αυτό δυστυχώς αγνοείται σε όλες τις βαθμίδες τις εκπαίδευσης με αποτέλεσμα ο μαθητής να μην έχει τη δυνατότητα να αντιληφθεί την ανθρώπινη διάσταση της μαθηματικής δημιουργίας.

2) Η ιστορία ως πηγή άντλησης πληροφοριών:

Η ιστορία των μαθηματικών αποτελεί πηγή ερωτημάτων, παραδειγμάτων, προβλημάτων και καταστάσεων πολύτιμων τόσο ως προς το περιεχόμενο τους, όσο και ως προς τη δυνατότητα κινητοποιήσεων των ενδιαφερόντων των μαθητών, αλλά και των καθηγητών, με απώτερο σκοπό την αναβάθμιση των προγραμμάτων σπουδών.

3) Η ιστορία ως γέφυρα μεταξύ των μαθηματικών και άλλων επιστημονικών πεδίων:

Η ιστορία διδάσκει ότι υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ διαφορετικών πεδίων των μαθηματικών, ή μεταξύ μαθηματικών με άλλους κλάδους. Πολλές φορές και με τομείς που με τη πρώτη ματιά φαίνονται άσχετοι μεταξύ τους.

4) Η γενικότερη εκπαιδευτική αξία της ιστορίας:

Οι μαθητές που εμπλέκονται σε μαθηματικά έργα με ιστορικό όμως προσανατολισμό αναπτύσσουν εκτός από μαθηματικές και άλλου είδους δεξιότητες, όπως, συστηματική διερεύνηση πηγών, γραπτή απεικόνιση των αποτελεσμάτων της διερεύνησης, ανάπτυξη επιχειρηματολογίας, ικανότητα συζήτησης και διαλόγου, απόδοση στη σημερινή γλώσσα κειμένων γραμμένων σε παλαιότερη γραφή, ή άλλης γλώσσας.

Β. Η Φύση των Μαθηματικών και της Μαθηματικής Δραστηριότητας

1) Το περιεχόμενο:

Ο μαθητής μέσα από την ιστορία των μαθηματικών και με συγκεκριμένα παραδείγματα, μπορεί να αντιληφθεί ότι, οι ευρετικές διαδικασίες, οι εικασίες, οι αμφιβολίες, τα λάθη, τα αδιέξοδα, όχι μόνο επιτρέπονται αλλά αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της μαθηματικής δημιουργίας και γενικότερα των μαθηματικών. Πρόκειται για μία μεταγνωστική λειτουργία της ιστορίας ικανή να ωθήσει το μαθητή να διατυπώσει τις δικές του εικασίες, να δει τα λάθη του με επιείκεια και να αναπτύξει ικανότητες αυτοδιόρθωσης.

2) Η μορφή:

Τα μαθηματικά εξελίσσονται όχι μόνο στο περιεχόμενο αλλά και στη μορφή, το συμβολισμό, την ορολογία, τις υπολογιστικές μεθόδους, τους τρόπους έκφρασης και τις αναπαραστάσεις, κάτι που ο μαθητής μπορεί να το αντιληφθεί σε ικανοποιητικό βαθμό μέσα από την ιστορία των μαθηματικών. Αυτό θα τον βοηθήσει να κατανοήσει βαθύτερα τις έννοιες και τις μεθόδους που περιγράφονται με διαφορετικούς συμβολικούς τρόπους στη διάρκεια της ιστορίας.

Γ. Το Διδακτικό Υπόβαθρο των Εκπαιδευτικών

Μελετώντας την ιστορία των μαθηματικών και προσπαθώντας να αναδημιουργήσουν πτυχές της ιστορικής εξέλιξης κάποιων μαθηματικών θεμάτων με διδακτικό τρόπο, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να πετύχουν τα εξής:

1) Προσδιορισμός κινήτρων:

Με τη μελέτη ιστορικών παραδειγμάτων που χρησίμευσαν ως πρότυπα, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να κατανοήσουν τα κίνητρα που οδήγησαν στο να εξελιχθεί μια έννοια, μια μέθοδος, ή μια θεωρία ώστε να βοηθήσουν τους μαθητές να τη καταλάβουν Κίνητρο επίσης αποτελούν και τα προβλήματα που οδήγησαν σ' αυτή τη γνώση, καθώς και οι λιγότερο ή περισσότερο επιτυχείς προσπάθειες των μαθηματικών του παρελθόντος για την αντιμετώπιση τους.

2) Δυσκολίες και εμπόδια:

Γίνεται γνωστό ότι:

α) ο εκπαιδευτικός αντλώντας εμπειρίες από την ιστορία των μαθηματικών, είναι σε θέση να αντιληφθεί τις δυσκολίες και τα εμπόδια που ενυπάρχουν σε μια μαθηματική έννοια ή μέθοδο, ώστε να ευαισθητοποιηθεί απέναντι στο γεγονός ότι ανάλογες δυσκολίες και εμπόδια μπορεί να εμφανιστούν και στους σημερινούς μαθητές,

β) ακόμη και εάν ένα θέμα που στη σημερινή του μορφή φαίνεται απλό, μπορεί να είναι το αποτέλεσμα μιας εξελικτικής διαδικασίας βασισμένης σε ερωτήματα και προβλήματα που δεν είναι εμφανή όταν το θέμα παρουσιαστεί με τη σημερινή σύγχρονη μορφή του. Τα ερωτήματα και τα προβλήματα αυτά μπορεί να μην είναι εύκολο να αντιμετωπιστούν από τους μαθητές εξαιτίας μιας πιθανής ανωριμότητας, εντούτοις δίνουν την ευκαιρία στους εκπαιδευτικούς να συνειδητοποιήσουν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της παρουσίασης ενός θέματος σε μια συγκεκριμένη βαθμίδα εκπαίδευσης.

3) Εμπλοκή και συνειδητοποίηση της δημιουργικής διαδικασίας «κάνω μαθηματικά»:

Η επαφή τόσο των εκπαιδευτικών όσο και των μαθητών με πρωτότυπες ή με δευτερογενής πηγές, η ενασχόληση με εργασίες που έχουν έναν ιστορικό προσανατολισμό, καθώς και η προσπάθεια ανακατασκευής της γνώσης μέσω αυτών των πηγών, προσομοιώνει τη διαδικασία δημιουργίας στο χώρο των μαθηματικών, εμπλουτίζοντας το μαθηματικό τους αλφάβητο και εκτιμώντας καλύτερα τη φύση της μαθηματικής δραστηριότητας.

4) Εμπλουτισμός διδακτικού ρεπερτορίου:

Μέσω των ιστορικών πηγών δίνεται η δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να εμπλουτίσει τη διδασκαλία του με μια σειρά προβλημάτων, ερωτημάτων, καταστάσεων, μεθόδων και γενικά εναλλακτικών προσεγγίσεων, ώστε να κινητοποιήσει τους μαθητές του.

5) Αποκωδικοποίηση και κατανόηση μη συμβατικά διατυπωμένων, αλλά εντέλει «σωστών μαθηματικών:

Η προσπάθεια αποκωδικοποίησης μέσω της ιστορίας, των «σωστών» με τα σημερινά δεδομένα μαθηματικών, εκφρασμένων όμως σε μια ιδιαίτερη γλώσσα από πλευράς συμβολισμού, διατύπωσης και ανάπτυξης, ενισχύει την ευαισθησία, την ανοχή και το σεβασμό των εκπαιδευτικών απέναντι σε μη συμβατικούς ή μη τυπικούς τρόπους έκφρασης των μαθητών που είναι εντέλει σωστοί, αλλά δεν είναι προσαρμοσμένοι με αυτά που η μαθηματική κοινότητα θεωρεί αποδεκτά σήμερα.

Δ. Συναισθηματική Προδιάθεση προς τα Μαθηματικά

Η ιστορία μπορεί να προσφέρει πρότυπα για την ανθρώπινη δραστηριότητα, από τα οποία μπορούν να αντληθούν πολλά πράγματα, μεταξύ των οποίων τα εξής:

1) Θεώρηση των μαθηματικών ως ανθρώπινη προσπάθεια:

Μέσω της ιστορικής διάστασης στην εκμάθηση των μαθηματικών γίνεται φανερό ότι τα μαθηματικά είναι ένα εξελισσόμενο και ανθρώπινο θέμα και όχι ένα σύστημα άκαμπτων αληθειών. Είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα που απαιτεί πνευματική προσπάθεια και καθορίζεται από διάφορους παράγοντες, τόσο εγγενείς στα ίδια τα μαθηματικά όσο και εξωτερικά. Ειδικότερα, δεν είναι ένα ουρανόσταλτο τελικό προϊόν που έχει σχεδιαστεί για αποστήθιση.

2) Επιμονή σε ιδέες, διατύπωση ερωτημάτων, προώθηση ερευνητικής δραστηριότητας

Η ιστορική εξέλιξη όχι μόνο των μαθηματικών αλλά και κάθε επιστημονικού πεδίου είναι γεμάτη από παραδείγματα ιδεών, ερωτημάτων, αλλά και δραστηριοτήτων, τα οποία δεν οδήγησαν σε κάποια αποτελέσματα, ήταν όμως ικανά να εξελίξουν την οποιαδήποτε επιστήμη. Σε αντιστοιχία και ο σημερινός μαθητής, μέσα από αυτή τη συνειδητοποίηση, ενθαρρύνεται να διατυπώσει τις δικές του ιδέες, τα δικά του ερωτήματα, αλλά και να τολμήσει να εμπλακεί σε δραστηριότητες, έστω και αν το κάνει με τον δικό του ιδιαίτερο τρόπο.

3) Αποφυγή απογοητεύσεων λόγω αποτυχιών, λαθών, αβεβαιοτήτων ή παρανοήσεων:
Μέσα από την ιστορία των μαθηματικών γίνεται περισσότερο κατανοητός ο εκπαιδευτικός και δημιουργικός ρόλος του λάθους ή της παρανόησης μιας έννοιας καθώς και της «αποτυχημένης» προσπάθειας, μια και εξέχοντες μαθηματικοί δεν μπόρεσαν να τα αποφύγουν, αλλά αντίθετα τα εντάξανε ως δομικά στοιχεία στο έργο τους. Έτσι λοιπόν ο μαθητής ενθαρρύνεται να ερευνήσει τον κόσμο των μαθηματικών χωρίς τον φόβο του λάθους ή της αποτυχίας φτάνοντας στη μαθηματική του ωρίμανση.

<u>Ε. Εκτίμηση των Μαθηματικών ως μια Πολιτιστική – Ανθρώπινη Προσπάθεια</u>

Όπως ειπώθηκε παραπάνω τα μαθηματικά δεν είναι ένα σύστημα άκαμπτων κανόνων και αληθειών αλλά μια διαρκώς εξελισσόμενη ανθρώπινη πνευματική διαδικασία η οποία έρχεται σε αλληλεπίδραση με άλλες επιστήμες, με τον πολιτισμό, αλλά και την ίδια την κοινωνία.

1) Τα μαθηματικά εξελισσόμενα για εσωτερικούς λόγους:
Παρά την επικρατούσα και απλοϊκή άποψη ότι τα μαθηματικά αναπτύσσονται μόνο για πρακτικούς και χρηστικούς λόγους, προς χάρη της κοινωνίας, εντούτοις μέσα από την ιστορία των μαθηματικών ανακαλύπτει κανείς ότι τα μαθηματικά εξελίσσονται και για εσωτερικούς λόγους, όπως η αισθητική αναζήτηση μέσω συμμετρίας, ταξινόμησης, λογικής πληρότητας, κομψής και σαφούς έκφρασης κ.λ.π., η διανοητική περιέργεια και πρόκληση, καθώς και η καθαρή ευχαρίστηση.

2) Τα μαθηματικά εξελισσόμενα υπό την επίδραση κοινωνικών και πολιτισμικών παραγόντων:
Η ιστορία δείχνει ότι τα μαθηματικά είτε αναπτύχθηκαν για ωφελιμιστικούς λόγους είτε για καθαρά εσωτερικούς λόγους επηρέασαν και επηρεάστηκαν σε μεγάλο βαθμό από άλλα επιστημονικά πεδία, από συγκεκριμένες πρακτικές ανάγκες της κοινωνίας, αλλά και από περιορισμούς που έθετε το πολιτισμικό πλαίσιο κάθε εποχής και κοινωνίας.

3) Τα μαθηματικά ως μέρος της τοπικής πολιτιστικής παράδοσης:
Τα μαθηματικά στη σύγχρονη μορφή τους παρά το διεθνιστικό τους χαρακτήρα θεωρούνται ως ένα προϊόν του δυτικού πολιτισμού. Μέσα από τη μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών, οι δάσκαλοι και οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να γνωρίσουν άλλες, λιγότερο γνωστές, προσεγγίσεις στα μαθηματικά που εμφανίστηκαν μέσα σε άλλους πολιτισμούς και το ρόλο που έπαιξε σε αυτά. Σε ορισμένες περιπτώσεις, αυτές οι πολιτισμικές πτυχές μπορούν να βοηθήσουν τους

καθηγητές στην καθημερινή τους εργασία με πολυπολιτισμικές τάξεις, προκειμένου να αποτιμηθεί εκ νέου η τοπική πολιτιστική κληρονομιά ως μέσο ανάπτυξης ανοχής και σεβασμού μεταξύ των μαθητών.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η ενσωμάτωση της ιστορίας στην διδασκαλία διαδραματίζει έναν πολυποίκιλο ρόλο ανάλογα με τους επιδιωκόμενους σκοπούς βοηθώντας τόσο τους μαθητές, όσο και τους εκπαιδευτικούς με πολλαπλούς τρόπους.

1.2.2 Επιχειρήματα κατά της Ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών

Αν και τα επιχειρήματα που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, για το ρόλο της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία είναι πολύ αξιόλογα και σοβαρά, εντούτοις έχουν διατυπωθεί κατά καιρούς, από μάχιμους εκπαιδευτικούς, ιστορικούς των μαθηματικών, αλλά και ερευνητές στο χώρο της διδακτικής, σημαντικές αντιρρήσεις για την αποτελεσματικότητα και τη σκοπιμότητα της εισαγωγής μιας ιστορικής διάστασης στη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών.

Οι ενστάσεις τους χωρίζονται σε δύο κυρίως κατηγορίες: Αφενός σε επιστημολογικές και φιλοσοφικές, αφετέρου σε πρακτικές και διδακτικές.

<u>Α. Ενστάσεις Επιστημολογικού – Φιλοσοφικού Χαρακτήρα</u>

I) Σχετικά με τη φύση των μαθηματικών

1) Πρώτα η διδασκαλία του θέματος και μετά η ιστορία του:

Η ιστορία δεν είναι μαθηματικά. Επομένως αν πρέπει να διδάξει κάποιος ιστορία, θα πρέπει πρώτα να διδάξει την ίδια την μαθηματική έννοια και μετά την ιστορία της. Η ένσταση αυτή θεωρεί πιο σημαντικό το αποτέλεσμα μιας μαθηματικής διεργασίας, παρά τη διαδικασία που οδήγησε σ’ αυτό το αποτέλεσμα. Ενστερνίζεται δηλαδή την επιστημολογική θέση, ότι τα μαθηματικά ταυτίζονται με τα αποτελέσματα και όχι με τις διαδικασίες που οδήγησαν σ’ αυτά.

2) Η ιστορία προκαλεί σύγχυση:

Αυτά που συνέβησαν στο παρελθόν μπορεί να είναι πιο περίπλοκα από ότι είναι σήμερα. Επομένως η ενσωμάτωση της ιστορίας στη διδασκαλία μπορεί να προκαλέσει σύγχυση παρά αποσαφήνιση.

3) Τα δύσκολα προβλήματα του παρελθόντος, υπόθεση ρουτίνας στο σήμερα:

Η πρόοδος και η ανάπτυξη των μαθηματικών συνίσταται στο να γίνονται τα δύσκολα προβλήματα του παρελθόντος, υπόθεση ρουτίνας και άρα δεν υπάρχει λόγος να ασχοληθεί κάποιος με το τρόπο που τα αντιμετώπιζαν οι μαθηματικοί του παρελθόντος.

Τα τελευταία δύο επιχειρήματα θεωρούν την ενσωμάτωση της ιστορίας με κάθε λεπτομέρεια και περιπλοκότητα, χωρίς την απαραίτητη επιλογή των θεμάτων που θα πρέπει να γίνει, αλλά και τη κατάλληλη προσαρμογή στα σημερινά δεδομένα, πριν τη διδασκαλία της.

ΙΙ) Σχετικά με τις ενδογενείς δυσκολίες του εγχειρήματος

1) Δυσκολία στην ανάγνωση πρωτότυπων κειμένων:

Η διδακτική αξιοποίηση των πρωτότυπων πηγών έχει όντως αρκετές δυσκολίες που απαιτούν προσεχτικό σχεδιασμό και λεπτομερή έλεγχο. Απάντηση σ' αυτό δίνει η πλούσια βιβλιογραφία γύρω από αυτό το θέμα που βοηθάει στη κατάλληλη προετοιμασία από τη πλευρά του εκπαιδευτικού.

2) Καλλιέργεια σωβινισμού και εθνικισμού:

Πιθανώς θα μπορούσε η ιστορία των μαθηματικών να καλλιεργήσει πολιτικό σωβινισμό και στενόμυαλο εθνικισμό. Δεν είναι λόγος όμως αυτός, να απορρίψει κανείς την αξιοποίηση της ιστορίας στη διδακτική πράξη.

3) Αποσπασματική αίσθηση του ιστορικού χρόνου από τους μαθητές:

Η αλήθεια είναι ότι μέχρι το γυμνάσιο οι μαθητές, δεν έχουν μια ευρεία γνώση της ιστορίας γενικά, με αποτέλεσμα να έχουν ασταθή αίσθηση του παρελθόντος που δυσκολεύει την ιστορική πλαισίωση των μαθηματικών.

Για να αντιμετωπιστεί αυτό θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη το επίπεδο της γνωστικής ωριμότητας των μαθητών καθώς και το υπόβαθρο τους στην ιστορία γενικά.

<u>Β. Ενστάσεις Πρακτικού και Διδακτικού Χαρακτήρα</u>

Ι) Το υπόβαθρο και η στάση των διδασκόντων

1) Έλλειψη χρόνου:

Δεν υπάρχει αρκετός χρόνος για τα ίδια τα μαθηματικά, πόσο μάλλον για την ιστορία των μαθηματικών.

Μια πρόταση είναι ο σωστός σχεδιασμός σε ένα μικρό κομμάτι της ύλης που ενδείκνυται να διδαχτεί βάσει μιας ιστορικής προσέγγισης και μπορεί να επιτευχθεί εντός του διαθέσιμου διδακτικού χρόνου, ώστε να ενεργοποιήσει το ενδιαφέρον των μαθητών. Η αναπροσαρμογή των αναλυτικών προγραμμάτων προς αυτή τη κατεύθυνση είναι μια άλλη πρόταση.

2) Έλλειψη εξειδίκευσης σε θέματα ιστορίας:

Η έλλειψη ιστορικής εξειδίκευσης από τον εκπαιδευτικό είναι συνέπεια της έλλειψης κατάλληλων προγραμμάτων εκπαίδευσης εκπαιδευτικών. Πράγματι, απαιτείται όχι μόνο ιστορική αλλά και διεπιστημονική γνώση, η οποία είναι πολύ πιο πέρα από αυτό που οι δάσκαλοι των μαθηματικών είναι εξοπλισμένοι. Η έλλειψη εξειδίκευσης είναι αυτή που οδηγεί σε ακόμη πιο εξασθενημένη έλλειψη εμπιστοσύνης.

Για να αλλάξει αυτό, χρειάζεται σχετική επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, είτε κατά τη διάρκεια των πανεπιστημιακών τους σπουδών, είτε εντός της υπηρεσίας τους σε μεταγενέστερο χρόνο.

3) Έλλειψη πόρων:

Δεν υπάρχουν αρκετά κατάλληλα υλικά για να βοηθήσουν ακόμη και εκείνους τους εκπαιδευτικούς που μπορεί να θέλουν να ενσωματώσουν ιστορικές πληροφορίες.

Η απάντηση είναι ότι υπάρχει εκτενής βιβλιογραφία με πρωτότυπες πηγές, συλλογικοί τόμοι με παραδείγματα εφαρμογής της ιστορίας των μαθηματικών, καθώς και σχετικό υλικό για συγκεκριμένα μαθηματικά θέματα που μπορούν να προσαρμοστούν κατάλληλα στη διδακτική πράξη.

II) Διαδικασίες Αξιολόγησης

1) Έλλειψη αξιολόγησης της ιστορίας των μαθηματικών:

Δεν υπάρχει σαφής ή συνεπής τρόπος ενσωμάτωσης οποιουδήποτε ιστορικού στοιχείου στην αξιολόγηση των μαθητών και εάν δεν αξιολογηθεί τότε οι μαθητές δεν θα το εκτιμήσουν ούτε θα τον δώσουν προσοχή.

Πράγματι η εισαγωγή μιας ιστορικής προσέγγισης στη διδασκαλία των μαθηματικών έχει ένα ποιοτικό χαρακτήρα είναι δύσκολο να αξιολογηθεί μέσω εξετάσεων ή τέστ.

2) Εμπειρική τεκμηρίωση:

Υπάρχει αμφισβήτηση κατά πόσο έχει μελετηθεί και τεκμηριωθεί η άποψη ότι η ιστορική διάσταση στη μαθηματική εκπαίδευση βελτιώνει την εκμάθηση των μαθηματικών.

Τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει σοβαρές προσπάθειες προς αυτή τη κατεύθυνση με την υλοποίηση σχετικών ερευνών και διδασκαλιών, χωρίς βέβαια να έχει τεκμηριωθεί επαρκώς η αποτελεσματικότητα της εισαγωγής της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία.

III) Το Υπόβαθρο και η Στάση των Διδασκομένων

1) Δεν αρέσει στους μαθητές.

2) Το θεωρούν μάθημα ιστορίας και δεν αγαπούν την ιστορία.

3) Το βρίσκουν εξίσου βαρετό με τα μαθηματικά.

4) Δεν έχουν ευρύτερη παιδεία για να το εκτιμήσουν.

Τα παραπάνω δεν περιορίζονται μόνο στη μαθηματική εκπαίδευση, αλλά απηχούν ευρύτερες δυσλειτουργίες και προβλήματα της εκπαίδευσης.

Ίσως μια διαθεματική προσέγγιση του θέματος να έδινε μια ικανοποιητική απάντηση στις συγκεκριμένες ενστάσεις.

1.2.3 Τρόποι Αξιοποίησης της Ιστορίας στη Διδακτική Πράξη

Τα παραπάνω επιχειρήματα υπέρ της διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών αφήνουν ανοιχτό το ζήτημα του τρόπου με τον οποίο θα πραγματοποιηθεί αυτό στη διδακτική πράξη. Γίνεται μια προσπάθεια να καταγραφούν αυτοί οι τρόποι για την αξιοποίηση της ιστορίας στη διδακτική διαδικασία.

Μπορούμε να ταξινομήσουμε τους τρόπους αξιοποίησης της ιστορίας στην εκπαιδευτική διαδικασία σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

α) ως προς τον σκοπό για τον οποίο αξιοποιείται η ιστορία και

β) ως προς τη μορφή που παίρνει αυτή η αξιοποίηση.

Α) Ο σκοπός για τον οποίο αξιοποιείται η ιστορία

- Η Ιστορία ως «εργαλείο»

Η ιστορία υπεισέρχεται εδώ σε σχέση με το εσωτερικό των μαθηματικών, δηλαδή σε ρόλο βοηθητικό ως προς το περιεχόμενο των μαθηματικών, μέσα από τη δημιουργία κινήτρων, την αλλαγή στάσης των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά, καθώς και τη διευκόλυνση στη κατανόηση και μάθηση συγκεκριμένων μαθηματικών αντικειμένων, όπως έννοιες, μέθοδοι, θεωρίες κ.λ.π.

- Η Ιστορία ως «στόχος»

Η ιστορία εδώ βοηθάει στη διατύπωση και συζήτηση ερωτημάτων που αφορούν την εξέλιξη των μαθηματικών, καθώς και τη σχέση τους με τις άλλες επιστήμες. Τις αλληλεπιδράσεις της με άλλες πολιτιστικές δραστηριότητες και διεργασίες, καθώς και την έρευνα σχετικά με τη φύση, το ρόλο και τη σημασία των μαθηματικών.

Β) Η μορφή με την οποία αξιοποιείται η ιστορία

Μπορεί κανείς να διακρίνει τρεις γενικές μορφές όπου μπορεί να αξιοποιηθεί η ιστορία των μαθηματικών στη διδακτική πράξη με τρόπο τέτοιο, ώστε η μία να συμπληρώνει την άλλη στα πλαίσια ακόμη και της ίδιας δραστηριότητας.

1) Εκμάθηση της ιστορίας με την παροχή άμεσων ιστορικών πληροφοριών:

Ως άμεσες ιστορικές πληροφορίες θεωρούνται:

α) μεμονωμένες πληροφορίες σχετικά με την πραγματικότητα, όπως ονόματα, ημερομηνίες, διάσημα έργα και εκδηλώσεις, χρονοδιαγράμματα, βιογραφίες, διάσημα προβλήματα και ερωτήσεις,
β) αυτοτελή μαθήματα ή βιβλία ιστορίας των μαθηματικών σε συγκεκριμένα θέματα της ιστορικής εξέλιξης.
Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, έμφαση δίνεται στην άντληση πληροφοριών από την ιστορία για τη βαθύτερη κατανόηση της φύσης των μαθηματικών.
Η υλοποίηση και η εφαρμογή αυτής της μορφής αξιοποίησης της ιστορίας μπορεί να γίνει με:

- ιστορικά σημειώματα και ιστορικές εισαγωγές σε βιβλία,
- επισκέψεις σε μουσεία, αρχαιολογικούς και ιστορικούς χώρους,
- προβολή films, video και γενικά με χρήση οπτικών μέσων, όπου παρουσιάζονται διάφορα θέματα της ιστορίας,
- ερευνητικά projects των μαθητών βασισμένα σε ιστορικά κείμενα,
- δραματοποίηση ή θεατροποίηση γεγονότων βασισμένων στην ιστορία των μαθηματικών,
- πλήρη πακέτα ιστορίας των μαθηματικών, δηλαδή ένα σύνολο διδακτικών μέσων εστιασμένων σε συγκεκριμένα θέματα,
- γνωριμία με γνωστά προβλήματα που διαδραμάτισαν σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη των μαθηματικών,
- φύλλα εργασίας, συνοδευμένα με πρωτότυπα κείμενα,
- χρήση του διαδικτύου.

Η ιστορία εμφανίζεται εδώ κυρίως ως «στόχος» και δευτερεύοντος ως «εργαλείο»
2) Εκμάθηση των μαθηματικών, μέσω προσέγγισης βασισμένη στην ιστορία:
Ο τρόπος προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών εμπνεόμενων από την ιστορία δίνει έμφαση λιγότερο στον τρόπο χρήσης των θεωριών, των μεθόδων και των εννοιών, και περισσότερο στο γιατί παρέχουν απάντηση σε συγκεκριμένα μαθηματικά προβλήματα και ερωτήσεις, χωρίς ωστόσο να αγνοείται ο «τεχνικός» ρόλος της μαθηματικής γνώσης,
Η έμφαση δίνεται κυρίως στον σχεδιασμό και την υλοποίηση μιας διδασκαλίας ή δραστηριότητας, στη συγγραφή ενός βιβλίου, καθώς και στην παραγωγή διδακτικού υλικού, αξιοποιώντας τις επιλογές που παρέχει η ιστορία των μαθηματικών.

Γίνεται φανερό από τα παραπάνω, ότι η ιστορία εμφανίζεται εδώ κυρίως ως «εργαλείο», είτε άμεσα με την επιχείρηση εμφάνισης των σταδίων εξέλιξης ενός μαθηματικού θέματος, θεωρίας, έννοιας ή μεθόδου με σκοπό την εκμάθηση τους μέσω αυτής της διαδικασίας, είτε έμμεσα στη περίπτωση που η εμφάνιση μιας διδακτικής ακολουθίας βασίζεται σε μεθόδους, συμβολισμούς ή ορολογία, μεταγενέστερη της ιστορικής περιόδου που αναφέρεται, δίνοντας έμφαση στην κατανόηση και μάθηση των μαθηματικών στη σύγχρονή τους μορφή.

3) Ανάπτυξη βαθύτερης συνειδητοποίησης τόσο για τα μαθηματικά όσο και για το κοινωνικό και πολιτιστικό πλαίσιο τους:

Εδώ η ιστορία εμφανίζεται κυρίως ως «στόχος» προσδοκώντας:

- Τη συνειδητοποίηση των ενδογενών χαρακτηριστικών της μαθηματικής δραστηριότητας, όπως ο ρόλος που διαδραματίζουν τα διάφορα εννοιολογικά πλαίσια, οι αμφιβολίες, τα παράδοξα, οι αντιφάσεις, οι ευρετικές μέθοδοι, καθώς και οι εξελίξεις στο συμβολισμό, την ορολογία, τους τρόπους αναπαράστασης των εννοιών, άλλα και μετα-μαθηματικά ερωτήματα, σχετικά με τις έννοιες της απόδειξης, τεκμηρίωσης ή αυστηρότητας σε σύγκριση με το σήμερα.
- Τη συνειδητοποίηση των εξωγενών χαρακτηριστικών της μαθηματικής δραστηριότητας, όπως τη σχέση των μαθηματικών με τη φιλοσοφία, τη τέχνη, τον πολιτισμό, τις αλληλεπιδράσεις των μαθηματικών με άλλους τομείς των επιστημών, καθώς και την επίδραση που ασκούν και δέχονται τα μαθηματικά από το πολιτισμικό και κοινωνικό πλαίσιο όπου λειτουργούν.

ΚΕΦ. 2ο: Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

2.1 Επίλυση Εξίσωσης Δευτέρου Βαθμού από Αιγύπτιους και Βαβυλώνιους

Αρχίζοντας την αναζήτηση της έννοιας της δευτεροβάθμιας εξίσωσης στους αρχαίους πολιτισμούς θα πρέπει να ξεκινήσει κανείς από τους Μεσοποτάμιους λαούς, όπου συχνά ο πολιτισμός τους αναφέρεται ως Βαβυλωνιακός, παρόλο που η πόλη της Βαβυλώνας ήταν το επίκεντρο για ένα σχετικά μικρό χρονικό διάστημα, κυρίως την περίοδο που στην εξουσία βρισκόταν ο Χαμουραμπί, περί το 1700 π.Χ. Ο Βαβυλωνιακός πολιτισμός αναφέρεται σε όλους τους λαούς που αναπτύχθηκαν στην περιοχή ανάμεσα στους ποταμούς Τίγρη και Ευφράτη κυρίως το διάστημα από το 2000 έως το 600 π.Χ. και περιλαμβάνει τους Σουμέριους, τους Ακκάδες, τους

Ασσύριους τους Χαλδαίους κ.λ.π. Η σφηνοειδής γραφή η οποία χρησιμοποιούνταν από πολύ παλιά δημιούργησε ένα ισχυρό δεσμό μεταξύ αυτών των λαών με αποτέλεσμα τη γένεση ενός πολύ σημαντικού πολιτισμού που κυριάρχησε για πάνω από τρεις χιλιετίες. Οτιδήποτε αφορούσε τη δημόσια και ιδιωτική ζωή των πολιτών, νόμοι, φόροι, ιστορίες, προσωπικά γράμματα, χαράσσονταν σε πλάκες πηλού με γραφίδα, οι οποίες στη συνέχεια ψήνονταν, για να αντέχουν στο χρόνο. Αυτός είναι και ο λόγος που έχει διασωθεί μέχρι σήμερα μεγάλος αριθμός τέτοιων πλακών, (μόνο στην αρχαία πόλη Νιπούρ, βρέθηκαν 50.000 τέτοιες πλάκες), εκ των οποίων αρκετές με μαθηματικό περιεχόμενο. (Boyer, 1997, σελ.30) Έτσι έχουμε στα χέρια μας αρκετά στοιχεία των μαθηματικών που χρησιμοποιούσαν εκείνη τη περίοδο, σε αντίθεση με τους αιγυπτιακούς πάπυρους, που έχουν διασωθεί σε πολύ μικρό αριθμό με κυριότερους τον πάπυρος Rhid που είναι ο βασικότερος, της Μόσχας, του Βερολίνου και του Kahun, καθώς και ο δερμάτινος κύλινδρος.

Σύμφωνα λοιπόν με αυτές τις πηγές, οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις συναντώνται για πρώτη φορά στους Βαβυλώνιους, σε αντίθεση με τους Αιγύπτιους που ασχολήθηκαν κυρίως με γραμμικές εξισώσεις, αν και το πρόβλημα 6 από τον πάπυρο της Μόσχας, καθώς και το πρόβλημα 1 από τον πάπυρο του Βερολίνου θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως προβλήματα δευτεροβάθμιας εξίσωσης με ελλιπή μορφή αλλά θα ήταν παρακινδυνευμένο να θεωρηθεί ότι γνώριζαν οι αρχαίοι Αιγύπτιοι να λύνουν τέτοιες εξισώσεις. Συγκεκριμένα:

Πρόβλημα 6 από τον πάπυρο της Μόσχας «*Ποιο το μήκος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου αν το εμβαδόν του είναι 12 και το πλάτος του τα 3/4 του μήκους*»

Για την οποία αντιστοιχεί η εξίσωση: $x \cdot \frac{3}{4}x = 12$

Αιγυπτιακή Επίλυση	**Σύγχρονη Συμβολική Επίλυση**
Βρες τον αντίστροφο του $\frac{3}{4}$	$x \cdot \frac{3}{4}x = 12$
Το αποτέλεσμα είναι $\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4} \cdot x^2 = 12$
Πολλαπλασίασε το $\frac{4}{3}$ με το 12	$x^2 = 12 \cdot \frac{4}{3}$
Το αποτέλεσμα είναι 16	$x^2 = 16$

Βρες έναν αριθμό του τετράγωνο του οποίου είναι 16	$x=\sqrt{16}$
Το αποτέλεσμα είναι 4 για το μήκος και τα $\frac{3}{4}$ αυτού, δηλαδή 3 για το πλάτος	$x=4$ μήκος $y=\frac{3}{4}\cdot 4=3$ πλάτος

Πρόβλημα 1 από τον πάπυρου του Βερολίνου «*Το άθροισμα των εμβαδών δύο τετραγώνων είναι 100. Το τριπλάσιο της πλευράς του ενός είναι ίσο με το τετραπλάσιο της πλευρά του άλλου, ποιες είναι οι πλευρές των δύο τετραγώνων*». Τεχνική της **ψευδούς παραδοχής**

Όπου με σύγχρονους τρόπους γραφής ανάγεται στο δευτεροβάθμιο σύστημα:

$$x^2+y^2=100$$
$$3x=4y$$

Αιγυπτιακή Επίλυση	**Σύγχρονη Συμβολική Επίλυση**
Πάρε τη μία πλευρά 4, τότε η άλλη θα είναι 3	$\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=z$ $x=4z$ και $y=3z$
Είναι $4^2+3^2=25\neq 100$	$(4z)^2+(3z)^2=100$ $25z^2=100$
Βρες τους αριθμούς που έχουν τετράγωνα το 25 και το 100. Είναι το 5 και το 10	$\sqrt{25z^2}=\sqrt{100}$ $5z=10$
Διαίρεσε το 5 με το 10. Είναι το 2	$z=\frac{10}{5}=2$
Άρα οι πλευρές είναι $2\cdot 4=8$ και $2\cdot 3=6$	$x=4\cdot 2=8$ $y=3\cdot 2=6$

Παρατηρούμε ότι οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούν μια μέθοδο αποκαλούμενη ως *«τεχνική της ψευδούς παραδοχής»*, κατά την οποία ξεκινούν θεωρώντας κάποιες κατάλληλες αρχικές τιμές για τους αριθμούς που αναζητούν, (στο παράδειγμά μας το 4 και το 3) οι οποίες βέβαια καταλήγουν σε λάθος αποτέλεσμα. Κατόπιν με κατάλληλους χειρισμούς οδηγούνται στις σωστές τιμές (στο παράδειγμα μας πολλαπλασιάζουν με το 2 και καταλήγουν στα σωστά αποτελέσματα, δηλαδή το 8 και το 6).

Για τους Βαβυλώνιους, η συνήθης μορφή των προβλημάτων που τους απασχόλησε ήταν:

$x+y=\beta \qquad xy=\gamma$

κάτι που σύμφωνα με τον Katz οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι αρχικά οι Βαβυλώνιοι θέλησαν να ασχοληθούν με τη σχέση περιμέτρου $2(x+y)=2\beta$ και εμβαδού $xy=\gamma$ ενός ορθογωνίου. Είναι πολύ πιθανόν να κατασκεύαζαν πίνακες με συγκεκριμένη περίμετρο $2\beta=2(x+y)$ χρησιμοποιώντας διαφορετικές τιμές για το μήκος x και το πλάτος y, για να δείξουν ότι υπάρχουν ορθογώνια με την ίδια περίμετρο που έχουν όμως διαφορετικά εμβαδά. (Katz, 2013, σελ. 42)

Εξάλλου η μεθοδολογία των λύσεων των δευτεροβάθμιων προβλημάτων που επινοούσαν σύμφωνα με τον Katz βασιζόταν σε γεωμετρικές ιδέες, δηλαδή με τετράγωνα και ορθογώνια και όχι με αριθμητικά τετράγωνα (δυνάμεις του 2) και γινόμενα όπως θα δειχθεί παρακάτω. (Katz, 2013, σελ. 41)

Επιπλέον θα πρέπει να τονισθεί, ότι όλοι οι αρχαίοι λαοί δεν χρησιμοποιούσαν κανένα συμβολισμό ούτε για τις πράξεις, αλλά ούτε και για τους αγνώστους, όπως χρησιμοποιείται σήμερα, παρά μόνο επιλύαν τα προβλήματα με λεκτικό τρόπο.

Από τη μελέτη των πινακίδων όπου συσχέτιζαν τα διάφορα μήκη: $x=\frac{\beta}{2}+z$ και πλάτη: $y=\frac{\beta}{2}-z$ με τα εμβαδά $\gamma=\left(\frac{\beta}{2}+z\right)\left(\frac{\beta}{2}-z\right)=\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-z^2$ πιθανώς να οδηγήθηκαν στο ότι: $z=\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$ και φυσικά στη λύση του δευτεροβάθμιου συστήματος: $x=\frac{\beta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$ και $y=\frac{\beta}{2}-\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$.

Υπάρχει πρόβλημα όπου δίνεται το εμβαδόν 7:30 στο εξηνταδικό σύστημα των Βαβυλωνίων που αντιστοιχεί στο αριθμό $7+\frac{30}{60}$=7+0,5=7,5 και η ημιπερίμετρος του 6:30 δηλαδή ο αριθμός 6,5 που οδηγεί σε σύστημα δευτέρου βαθμού από την πινακίδα YBC 4663:

Βαβυλωνιακή Διατύπωση	**Σύγχρονη Διατύπωση**	

(εξηνταδικό Σύστημα - Δεκαδικό Σύστημα)		
Ένα ορθογώνιο έχει επιφάνεια 7:30=7,5. Πρόσθεσα το μήκος και το πλάτος του και βρήκα 6:30=6,5. Να υπολογιστούν το μήκος και το πλάτος του ορθογωνίου	Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν 7,5. Το άθροισμα του μήκους του x και του πλάτους του y είναι 6,5. Να βρεθεί το x και το y. Δηλαδή $x+y=6,5$ και $xy=7,5$	
Βαβυλωνιακή Επίλυση	**Συμβολική Επίλυση**	**Με Δευτεροβάθμια Εξίσωση**
Χώρισε το 6:30=6,5 σε δύο μέρη, αποτέλεσμα 3:15=3,25.	$\frac{x+y}{2}=3,25$	y=6,5 – x x(6,5 – x)=7,5 $x^2 - 6,5x = -7,5$
Πολλαπλασίασε το 3:15=3,25 με τον εαυτό του, αποτέλεσμα 10:33,45= $10+\frac{33}{60}+\frac{45}{3600}$ =10,5625.	$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=10,5625$	$x^2 - 2 \cdot 3,25x = -7,5$ $x^2 - 2 \cdot 3,25x + (3,25)^2 =$ $-7,5 + (3,25)^2$
Αφαίρεσε από τον 10:33,45=10,5625 το 7:30=7,5	$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy=10,5625-7,5$	$(x - 3.25)^2 = 3,0625$

αποτέλεσμα 3:3,45= $3+\frac{3}{60}+\frac{45}{3600}$ =3,0625.	$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy=3,0625$ $\frac{(x+y)^2}{4}-xy=3,0625$ $\frac{x^2+2xy+y^2-4xy}{4}=3,0625$ $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=3,0625$	
Βρες τον αριθμό, του οποίου το τετράγωνο είναι 3:3,45=3,0625. Αυτός είναι 1:45=1,75.	$\frac{x-y}{2}=\sqrt{3,0625}$ $\frac{x-y}{2}=1,75$	$(x-3.25)^2=(1,75)^2$
Πρόσθεσε το 1:45=1,75 στο 3:15=3,25 αποτέλεσμα 5, αυτό είναι το μήκος.	$\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=x=3,25+1,75=5$	x–3,25=1,75 x=1,75+3,25 x=5
Αφαίρεσε το 1:45=1,75 από το 3:15=3,25 αποτέλεσμα 1:30=1,5 που είναι το πλάτος	$\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=y=3,25-1,75=1,5$	y=3,25-1,75 y=1,5

Ο γραφέας αυτής της λύσης σύμφωνα με το Katz είχε υπόψη του μια γεωμετρική διαδικασία η οποία περιγράφεται στο παράρτημα (Ενότητα Δ) στη γενική της μορφή: $x+y=\beta$ και $xy=\gamma$

Σε ένα άλλο πρόβλημα που είναι ισοδύναμο με εξίσωση δευτέρου βαθμού, της μορφής: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, ζητάει το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου αν το εμβαδόν του μείον την πλευρά του ισούται με 14,30 στο εξηνταδικό σύστημα, που αντιστοιχεί στον αριθμό $14\cdot 60+\frac{30}{60}\cdot 60=870$.

Βαβυλωνιακή Διατύπωση (Εξηνταδικό Σύστημα - Δεκαδικό Σύστημα)	**Σύγχρονη Διατύπωση**
Από την επιφάνεια του τετραγώνου μου αφαίρεσα την πλευρά του και βρήκα 14,30=870. Ποια είναι η πλευρά του	Αν από την επιφάνεια τετραγώνου αφαιρέσω την πλευρά του, θα βρω 870. Να βρεθεί η πλευρά x του τετραγώνου. Δηλαδή: $x^2-x=870$ ή $x^2-x-870=0$ ($\alpha=1,\beta=-1,\gamma=-870$)
Βαβυλωνιακή Επίλυση	**Συμβολική Επίλυση**
Πάρε το μισό του ένα το οποίο είναι 0:30= $\frac{1}{2}$ =0,5	$\frac{-\beta}{2}=\frac{1}{2}$
Πολλαπλασίασε το με τον εαυτό του το οποίο μας κάνει 0:15= $\frac{1}{4}$	$\left(\frac{-\beta}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}=0,25$
Πρόσθεσε σε αυτό το 14,30=870 και θα έχεις 14,30:15=870,25	$\left(\frac{-\beta}{2}\right)^2+(-\gamma)=0,25+870$ $\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4}=870,25$
Βρες τον αριθμό του οποίου το τετράγωνο είναι 14,30:15=870,25 Αυτός είναι 29:30=29,5	$\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2}=29,5$
Τώρα πρόσθεσε το 0:30=0,5 στο 29:30=29,5 και το αποτέλεσμα είναι 30, Η πλευρά του τετραγώνου	$\frac{-\beta}{2}+\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2}=0,5+29,5$ $\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2}=30$

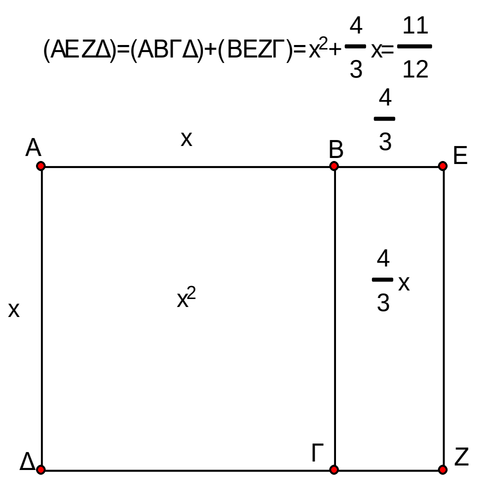
Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα καταλήγει στον γνωστό τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης, όπως χρησιμοποιείται σήμερα.

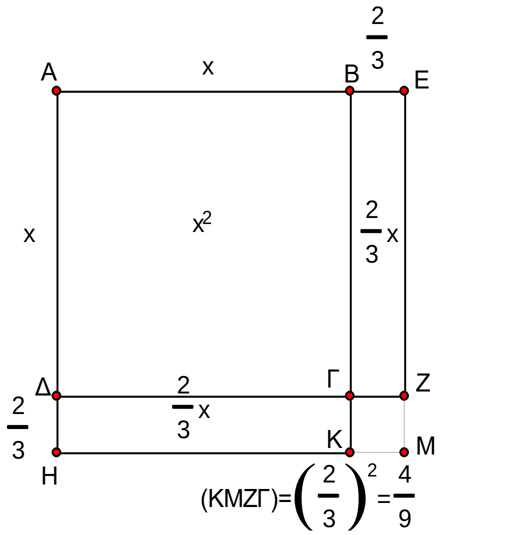
Θα πρέπει να σημειωθεί ότι σύμφωνα με τους Boyer – Merzbach, κανείς, από την αρχαιότητα έως και στις αρχές της σύγχρονης εποχής δεν ασχολήθηκε με εξισώσεις της μορφής: $x^2+\beta x+\gamma=0$ με β και γ θετικούς αριθμούς, για τον λόγο ότι έχουν αρνητικές ρίζες. Έτσι η ταξινόμηση που γινόταν στα τριώνυμα και την συναντάμε από το 2000 π.Χ. σε Βαβυλωνιακές πλάκες είναι η εξής:

$x^2+\beta x=\gamma$, $x^2=\beta x+\gamma$ και $x^2+\gamma=\beta x$ (Boyer,1997, σελ. 37)

Παρακάτω δίνεται η λεκτική λύση όπως την εκφράζαν οι Βαβυλώνιοι στο σημερινό όμως δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, μία γεωμετρική λύση, που πιθανώς να είχαν στο νου τους σύμφωνα με τον Katz,(σελ. 43 και 45) καθώς και η συμβολική σημερινή λύση στο εξής πρόβλημα:

«Το άθροισμα του εμβαδού ενός τετραγώνου και των $\frac{4}{3}$ της πλευράς του είναι $\frac{11}{12}$, να βρεθεί η πλευρά του». Βρέθηκε στη πινακίδα BM 13901

Λεκτική Λύση των Βαβυλωνίων	**Πιθανή Γεωμετρική Λύση των Βαβυλωνίων παρόμοια με των Αράβων**	**Σημερινή Συμβολική Λύση**
Παίρνουμε το μισό του $\frac{4}{3}$ που είναι το $\frac{2}{3}$ το τετραγωνίζουμε και μας δίνει $\frac{4}{9}$ Κατόπιν το προσθέτουμε στο $\frac{11}{12}$	 (Σχ. 1) Χωρίζουμε το μισό ορθογώνιο ΒΕΖΓ	$x^2+2\cdot\frac{2}{3}x=\frac{11}{12}$ $x^2+2\cdot\frac{2}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{11}{12}+\left(\frac{2}{3}\right)^2$ $x^2+2\cdot\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}=\frac{11}{12}+\frac{4}{9}$

Η τιμή που βρίσκουμε είναι $1\frac{13}{36}$	του σχ 2 και το τοποθετούμε στο κάτω μέρος του τετραγώνου ΑΒΓΔ όπως φαίνεται στο σχ 2	$x^2+2\cdot\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}=1\frac{13}{36}$
Η τιμή αυτή είναι το τετράγωνο του $\frac{7}{6}$		$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{7}{6}\right)^2$ $x+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$
Αφαιρώντας το $\frac{2}{3}$ από το $\frac{7}{6}$ βρίσκουμε ότι η πλευρά είναι $\frac{1}{2}$	(Σχ. 2)	$x=\frac{7}{6}-\frac{2}{3}$ $x=\frac{1}{2}$

Το παραπάνω πρόβλημα αντιστοιχεί στην εξίσωση: $x^2+\frac{4}{3}x=\frac{11}{12}$, όπου φαίνεται να γίνεται χρήση της μεθόδου συμπλήρωσης τετραγώνου.

Με βάση τα παραπάνω προβλήματα και του τρόπου επίλυσης τους, τίθεται το ερώτημα, εάν γνώριζαν οι Βαβυλώνιοι κάποια γενική μέθοδο, την οποία μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν στη λύση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Φαίνεται όμως ότι σε κανένα Βαβυλωνιακό κείμενο, δεν υπάρχει ούτε ένας γενικός τύπος ή κανόνας που να αναφέρεται όχι μόνο σε δευτεροβάθμιες εξισώσεις άλλα σε οποιαδήποτε μαθηματική ενότητα (Εξαρχάκος, 1997, σελ. 216). Επίσης φαίνεται ότι τις πινακίδες οι Βαβυλώνιοι τις χρησιμοποιούσαν για την εκμάθηση τεχνικών επίλυσης, με τις οποίες περίπλοκα προβλήματα, ανάγονταν σε απλούστερα, με απώτερο σκοπό να μπορούν να χρησιμεύσουν στην αντιμετώπιση προβλημάτων της καθημερινότητας που έπρεπε να λύνουν εκείνοι που προοριζόταν να διοικήσουν τη χώρα. (Katz, 2013, σελ. 46)

2.2 Η Γεωμετρική Άλγεβρα των Αρχαίων Ελλήνων Αρωγός στην Επίλυση Δευτεροβάθμιων Εξισώσεων. Ευκλείδης και ο Διόφαντος.

Οι ιδέες για τη γεωμετρική επίλυση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων που πιθανώς να υπήρχαν στους Βαβυλώνιους, όπως αναλύθηκε παραπάνω, ολοκληρώθηκαν με τη λεγόμενη γεωμετρική άλγεβρα των αρχαίων Ελλήνων. Βέβαια υπήρξαν διαμάχες μεταξύ των μελετητών των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, για το κατά πόσο οι Έλληνες ενδιαφέρονταν για την άλγεβρα ή είχαν μια καθαρά γεωμετρική θεώρηση για αυτού του είδους τα προβλήματα. Η διαμάχη επίσης αφορούσε και τις επιρροές που άσκησαν ή όχι τα Βαβυλωνιακά μαθηματικά στην Ελληνική μαθηματική σκέψη αναφορικά με την γεωμετρική άλγεβρα. (Γ. Χρηστιανίδης, & Δ. Διαλέτης, 2006, *Διαμάχες για την ιστορία των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών*). Από τη μια πλευρά βέβαια τα συμπεράσματα αυτών των μαθηματικών προτάσεων θα μπορούσαν να αποτελέσουν μια αυτόνομη γεωμετρική γνώση. Από την άλλη όμως, είναι πολύ εύκολο να εφαρμοστούν και σε απλούς αλγεβρικούς κανόνες, όπως οι ταυτότητες και οι εξισώσεις (Katz 2013 σελ. 81).

Σύμφωνα πάντως με τον Unguru η λεγόμενη «γεωμετρική άλγεβρα», - ορολογία που δόθηκε από τους Zeuthen και Tannery- είναι αποκύημα της μαθηματικής φαντασίας των δημιουργών τους, παρά κάτι πραγματικό. Είναι επινόηση του σύγχρονου μαθηματικού, ο οποίος διαβάζει τα αρχαία μαθηματικά κείμενα με σύγχρονα γυαλιά (Χριστιανίδης & Διαλέτης, 2006, σελ.30). Οι διαφορές μεταξύ της γεωμετρικής σκέψης που έχει τις ρίζες της στα χαρακτηριστικά του αισθητού χώρου και της αλγεβρικής σκέψης που σηματοδοτεί τη καθολική εφαρμογή ενός άκρως αφηρημένου διαχειρίσιμου συμβόλου συνεπάγεται και τους διαφορετικούς τρόπους έκφρασης όπως πιστεύει ο Unguru. (Χριστιανίδης & Διαλέτης, 2006, σελ. 31)

Αντίθετα οι υποστηριχτές της γεωμετρικής άλγεβρας που σημειωτέων αποτελούν και τη συντριπτική πλειοψηφία των μελετητών, βασίζουν την άποψη τους σε μια σειρά παραδοχών όπως:

1. Ένα μέρος των *Στοιχείων* και των *Δεδομένων* του Ευκλείδη φαίνεται να μην έχει ουσιαστικό γεωμετρικό περιεχόμενο και να μην εντάσσεται αρμονικά με το υπόλοιπο έργο του και άρα πιστεύεται ότι πιθανώς να προέρχεται από τη προγενέστερη Βαβυλωνιακή μαθηματική παράδοση η οποία ήταν ουσιαστικά αλγεβρική.
2. Οι Έλληνες μαθηματικοί και κυρίως οι Πυθαγόρειοι άντλησαν αυτή τη Βαβυλωνιακή αλγεβρική παράδοση, η οποία ήταν διατυπωμένη στη γλώσσα της αριθμητικής και ανέπτυξαν μια δική τους άλγεβρα διατυπωμένη στη γλώσσα της γεωμετρίας.
3. Η αιτία αυτής της αλλαγής πιστεύεται ότι προέρχεται από την ανακάλυψη της ασυμμετρίας, κατά τη διάρκεια του 5ου π.Χ. αιώνα, που έκανε τους Έλληνες μαθηματικούς να συνειδητοποιήσουν τη διαφορά μεταξύ διακριτών αριθμών και συνεχών γεωμετρικών μεγεθών. Αποτέλεσμα αυτής της επανεξέτασης ήταν η

επαναδιατύπωση των τεχνικών των Βαβυλωνίων σε γεωμετρική γλώσσα μια και οι αριθμητικές μέθοδοι δεν μπορούσαν να θεωρηθούν επαρκείς. (Χριστιανίδης & Διαλέτης, 2006, σελ. 4).

Μια άλλη ενδιαφέρουσα προσέγγιση υπέρ της γεωμετρικής άλγεβρας, βρίσκεται στην άποψη της Basmakova, όπου η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη στη γεωμετρία του Ευκλείδη είναι ισοδύναμη με τη λύση κάποιας αλυσίδας γραμμικών και δευτεροβάθμιων εξισώσεων.

Συγκεκριμένα ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

Διατύπωση Ευκλείδη	**Αναλυτική Έκφραση**
1.Να αχθεί ευθεία που να διέρχεται από δύο σημεία	Εύρεση της γραμμικής εξίσωσης $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)$
2. Να βρεθεί το σημείο τομής δύο ευθειών	Λύση του γραμμικού συστήματος $\alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1$ $\alpha_2 x+\beta_2 y=\gamma_2$
3. Να βρεθούν τα σημεία τομής ευθείας και περιφέρειας	Λύση του δευτεροβάθμιου συστήματος $\alpha x+\beta y=\gamma$ $\left(x-\alpha\right)^2+\left(y-\beta\right)^2=\rho^2$
4. Να βρεθούν τα σημεία τομής δύο περιφερειών	Λύση του δευτεροβάθμιου συστήματος $\left(x-\alpha_1\right)^2+\left(y-\beta_1\right)^2=\rho_1^2$ $\left(x-\alpha_2\right)^2+\left(y-\beta_2\right)^2=\rho_2^2$

(Basmakova, 2014, σελ. 74)

Πριν γίνει όμως ανάλυση των επιτευγμάτων των αρχαίων Ελλήνων σχετικά με τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις θα πρέπει να δούμε το κοινωνικό – πολιτικό πλαίσιο της εποχής που αναφερόμαστε, το οποίο επηρέασε και μετέβαλε τον χαρακτήρα των μέχρι τότε μαθηματικών επιτευγμάτων. Δεν αρκούσε πλέον η επίλυση αριθμητικών και γεωμετρικών προβλημάτων, όπως συνέβαινε στους πολιτισμούς της Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας άλλα έπρεπε να συνοδεύεται και από μια αποδεικτική διαδικασία με χρήση λογικών επιχειρημάτων που να μην αμφισβητείται η ορθότητα των λύσεων.

Βρισκόμαστε στον 6ο αιώνα π.Χ. όπου αναδύεται ο αρχαιοελληνικός πολιτισμός με τις μεγάλες διαφορές του συγκριτικά με τους προγενέστερους σημαντικούς πολιτισμούς του παρελθόντος. Λόγω του γεωφυσικού ανάγλυφου της Ελλάδας με τα πολλά βουνά και τα νησιά δεν αναπτύχθηκε κεντρική εξουσία, αλλά αντίθετα δημιουργούνται οι πόλεις – κράτη, με μικρό σχετικά πληθυσμό και με καθεστώτα που είτε ήταν δημοκρατικά, είτε ολιγαρχικά και μοναρχικά, δεν ήταν όμως αυθαίρετα, ελέω βασιλέα και ιερατείου, όπως συνέβαινε στα καθεστώτα των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων. Αυτό έδινε τη δυνατότητα στον καθένα να εκφραστεί ελεύθερα και είχε ως αποτέλεσμα την δημιουργία πολιτών ικανών στην επιχειρηματολογία και τη συζήτηση. Έτσι αναπτύχθηκε η ανάγκη για τη μαθηματική απόδειξη.

Από την άλλη βέβαια λόγω της ανάπτυξης της ναυσιπλοΐας και της εμπορικής δραστηριότητας των Ελλήνων δημιουργήθηκαν οι προϋποθέσεις ώστε να έρθουν σε επαφή με τα επιστημονικά επιτεύγματα της εποχής, αρκετοί Έλληνες φιλόσοφοι και μαθηματικοί όπως ο Θαλής (6ος – 7ος αιώνας π.Χ.), ο Πυθαγόρας (6ος αιώνας π.Χ.) κ.λ.π.. Να εισάγουν στην Ελλάδα γνώσεις από τους μεγάλους πολιτισμούς που έδρασαν στο παρελθόν και να τους δίνουν νέα πνοή μέσα και από την αμφισβήτηση των. Άρχισαν να ενδιαφέρονται για επιστήμες όπως η ιατρική, η φυσική, η βιολογία, η πολιτική και η ρητορική. Πίστευαν ωστόσο ότι τα μαθηματικά ήταν η βάση για κάθε μελέτη του φυσικού κόσμου.

Αυτό όμως που πραγματικά οφείλει ο σύγχρονος δυτικός πολιτισμός δεν είναι άλλο από την έννοια της μαθηματικής απόδειξης.

Έτσι λοιπόν η ελληνική μαθηματική παράδοση ξεκινά με τον Θαλή τον 6ο αιώνα π.Χ., περνά μετά στο Πυθαγόρα, στον Αρχιμήδη και στον Ευκλείδη τον 3ο αιώνα π.Χ και καταλήγει στον Διόφαντο (3ο αιώνας μ.Χ) με ενδιάμεσους πολλούς άλλους μεγάλους μαθηματικούς.

Σύμφωνα με τους Boyer και Merzbach οι αριθμητικοί αλγόριθμοι των Βαβυλώνιων ήταν ξεπερασμένοι, γι' αυτό έπρεπε να αντικατασταθούν από τη γεωμετρική άλγεβρα των Ελλήνων, όπου δεν επιτρεπόταν η πρόσθεση ευθειών και εμβαδών ή εμβαδών και όγκων. Έπρεπε δηλαδή να υπάρχει μια αυστηρή ομοιογένεια στις εξισώσεις και οι τύποι των Μεσοποτάμιων $x \pm y = \beta$ και $xy = \gamma$ έπρεπε να ερμηνεύονται γεωμετρικά.(Boyer, 1997, σελ. 88)

2.2.1 Τα Στοιχεία του Ευκλείδη και οι Δευτεροβάθμιες Εξισώσεις

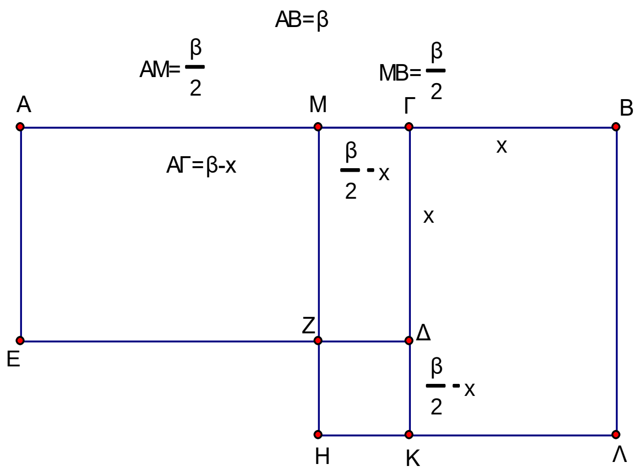
Το σπουδαιότερο ίσως μαθηματικό κείμενο όλων των εποχών που γράφτηκε πριν 2300 χρόνια και έχει κάνει τις περισσότερες εκδόσεις από κάθε άλλο έργο πλην της βίβλου αποτελούν τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Έχει μεταφραστεί σε πάρα πολλές γλώσσες και έχει μελετηθεί όσο κανένα άλλο έργο από αναρίθμητους μαθηματικούς. Ήταν το βιβλίο που ενέπνευσε διάσημους μαθηματικούς να ασχοληθούν μ' αυτά.

Αποτελείται από 13 βιβλία. Τα πρώτα 6 αναφέρονται στην επιπεδομετρία, προτάσεις των οποίων θα αναλύσουμε παρακάτω και που θα μπορούσαν να διαβαστούν και με το εργαλείο της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Από το 7ο έως το 9ο βιβλίο συμπεριλαμβάνει μελέτες για τη θεωρία αριθμών. Στο 10ο βιβλίο συνδέει τις έννοιες του αριθμού και του μεγέθους, μια εισαγωγή δηλαδή στους άρρητους. Το 11ο και 12ο έχει σχέση με τη στερεομετρία, και το 13ο με τη κατασκευή των πέντε κανονικών πολυέδρων. Για τη ζωή του Ευκλείδη λίγα στοιχεία είναι γνωστά. Έζησε την εποχή του Πτολεμαίου του Α΄ τον 3ο αιώνα π.Χ. και είναι πιθανό να δίδαξε στη βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας.

Υπάρχουν αρκετές προτάσεις στα βιβλία των *Στοιχείων* του Ευκλείδη που με κατάλληλη μεταφορά μπορούν να αναχθούν σε επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού. Ακολουθεί μία από αυτές. Οι υπόλοιπες βρίσκονται στο παράρτημα (Ενότητα Δ)

Η πρόταση ΙΙ-5 από το δεύτερο βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη μπορεί να χαρακτηριστεί ως γεωμετρική λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης:

$(\beta - x)x = \gamma$ ή $\beta x - x^2 = \gamma$



(Σχ. 3)

Πρόταση ΙΙ-5 *« Αν μια ευθεία (εννοεί ευθύγραμμο τμήμα) κοπεί σε ίσα και άνισα τμήματα, το ορθογώνιο που σχηματίζουν τα άνισα τμήματα του όλου, μαζί με το τετράγωνο της ευθείας ανάμεσα στα τομής, ισούται με το τετράγωνο του μισού».*

Σύμφωνα με τη πρόταση, το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{AB} = \beta$ χωρίζεται σε δύο ίσα τμήματα $\mathrm{AM} = \mathrm{MB} = \frac{\beta}{2}$ και σε δύο άνισα $\mathrm{A\Gamma} = \beta - x$ και $\mathrm{\Gamma B} = x$. Τότε θα ισχύει:

$$(\mathrm{A\Gamma\Delta E}) + (\mathrm{Z\Delta KH}) = (\mathrm{MB\Lambda H}) \qquad (\beta - x)x + \left(\frac{\beta}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \quad (2)$$

Πράγματι:

$$(\mathrm{A\Gamma\Delta E}) + (\mathrm{Z\Delta KH}) = (\mathrm{AMZE}) + (\mathrm{M\Gamma\Delta Z}) + (\mathrm{Z\Delta KH}) = (\mathrm{\Gamma B\Lambda K}) + (\mathrm{M\Gamma\Delta Z}) + (\mathrm{Z\Delta KH}) = (\mathrm{MB\Lambda H})$$

Ισχύει: $(\mathrm{AMZE})=(\Gamma\mathrm{B}\Lambda\mathrm{K})$ (έχουν ίσες διαστάσεις: $\mathrm{AM}=\mathrm{B}\Lambda=\dfrac{\beta}{2}$ και $\mathrm{AE}=\Gamma\mathrm{B}=x$)

Επομένως αν: $(\beta-x)x=\gamma$ τότε από την (2) θα έχουμε $\gamma+\left(\dfrac{\beta}{2}-x\right)^2=\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^2$ και άρα

$\dfrac{\beta}{2}-x=\sqrt{\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^2-\gamma} \Leftrightarrow x=\dfrac{\beta}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$ ο γνωστός τύπος που προέκυψε και από τους Βαβυλώνιους.

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και εάν αναλύσουμε την πρόταση VI-28 από το 6ο βιβλίο του Ευκλείδη:

Πρόταση VI-28 *«Με βάση μέρος ευθυγράμμου τμήματος να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο ίσο με δοθέν ευθύγραμμο σχήμα και τέτοιο ώστε το ελλείπων παραλληλόγραμμο να είναι όμοιο με δοθέν παραλληλόγραμμο, το ευθύγραμμο σχήμα δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το παραλληλόγραμμο που έχει βάση το μισό του δοθέντος τμήματος και είναι όμοιο με το δοθέν παραλληλόγραμμο».*

Παρατήρηση: Προϋπόθεση ότι το δοθέν παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο και το ζητούμενο είναι ορθογώνιο

Στο παραπάνω σχήμα 3 θα μπορούσε να αντικατασταθεί το $\mathrm{A}\Gamma=y$ και το $\Gamma\mathrm{B}=x$ και να μετατραπεί στο σύνηθες Βαβυλωνιακό σύστημα $x+y=\beta$ και $xy=\gamma$

Σε παρόμοια αποτελέσματα μ' αυτά μας οδηγεί και η πρόταση VI-29 του 6ου βιβλίου του Ευκλείδη.

Πρόταση VI-29 *«Με βάση ευθύγραμμο τμήμα που είναι μεγαλύτερο από δοθέν ευθύγραμμο τμήμα να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο ίσο με δοθέν ευθύγραμμο σχήμα και τέτοιο ώστε το υπερβάλλον παραλληλόγραμμο να είναι όμοιο με το δοθέν παραλληλόγραμμο».*

Όπου επίσης ισχύει η ίδια παρατήρηση με την πρόταση VI-28.

Ομοίως θα μπορούσε να αντικατασταθεί το $\mathrm{A}\Gamma=y$ και το $\Gamma\mathrm{B}=x$ και να μετατραπεί

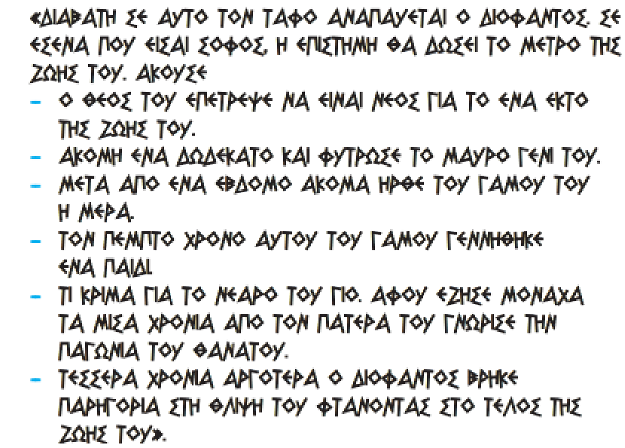
Ολοκληρώνοντας την αναφορά στο έργο του Ευκλείδη που μπορεί να συνδεθεί κατά κάποιον τρόπο με τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις, παραθέτουμε μία τελευταία πρόταση που σύμφωνα με τον Katz μπορεί να θεωρηθεί ως συμπλήρωμα των βιβλίων I-VI των *Στοιχείων*. Ανήκει στα *Δεδομένα* και έχει την εξής διατύπωση:

Πρόταση 84 *«Εάν δύο ευθύγραμμα τμήματα περιέχουν μια δοθείσα περιοχή σε μία δοθείσα γωνία και εάν το ένα είναι μεγαλύτερο από το άλλο κατά δοθέν ευθύγραμμο τμήμα, τότε έκαστο ευθύγραμμο τμήμα είναι δοθέν».*

Αν η δοθείσα γωνία είναι ορθή, τότε η πρόταση μπορεί να συγκριθεί με το Βαβυλωνιακό πρόβλημα που ζητάει να υπολογιστούν τα x και y, εάν δίνεται ότι: $xy=\gamma$ και $x-y=\beta$ που βέβαια καταλήγει σε δευτεροβάθμια εξίσωση.

2.2.2 Ο Διόφαντος και η Δευτεροβάθμια Εξίσωση

Λίγα γνωρίζουμε για τη ζωή του Διόφαντου, με εξαίρεση το επίγραμμα που εικάζεται ότι βρέθηκε στον τάφο του και μας πληροφορεί μέσω επίλυσης εξίσωσης πρώτου βαθμού, ότι έζησε μέχρι τα 84 του χρόνια.


«ΔΙΑΒΑΤΗ ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟΝ ΤΑΦΟ ΑΝΑΠΑΥΕΤΑΙ Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ. ΣΕ ΕΣΕΝΑ ΠΟΥ ΕΙΣΑΙ ΣΟΦΟΣ, Η ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΘΑ ΔΩΣΕΙ ΤΟ ΜΕΤΡΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ. ΑΚΟΥΣΕ

- Ο ΘΕΟΣ ΤΟΥ ΕΠΕΤΡΕΨΕ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΝΕΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΕΝΑ ΕΚΤΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ.
- ΑΚΟΜΗ ΕΝΑ ΔΩΔΕΚΑΤΟ ΚΑΙ ΦΥΤΡΩΣΕ ΤΟ ΜΑΥΡΟ ΓΕΝΙ ΤΟΥ.
- ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΕΝΑ ΕΒΔΟΜΟ ΑΚΟΜΑ ΗΡΘΕ ΤΟΥ ΓΑΜΟΥ ΤΟΥ Η ΜΕΡΑ.
- ΤΟΝ ΠΕΜΠΤΟ ΧΡΟΝΟ ΑΥΤΟΥ ΤΟΥ ΓΑΜΟΥ ΓΕΝΝΗΘΗΚΕ ΕΝΑ ΠΑΙΔΙ.
- ΤΙ ΚΡΙΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΝΕΑΡΟ ΤΟΥ ΓΙΟ. ΑΦΟΥ ΕΖΗΣΕ ΜΟΝΑΧΑ ΤΑ ΜΙΣΑ ΧΡΟΝΙΑ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΑΤΕΡΑ ΤΟΥ ΓΝΩΡΙΣΕ ΤΗΝ ΠΑΓΩΝΙΑ ΤΟΥ ΘΑΝΑΤΟΥ.
- ΤΕΣΣΕΡΑ ΧΡΟΝΙΑ ΑΡΓΟΤΕΡΑ Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ ΒΡΗΚΕ ΠΑΡΗΓΟΡΙΑ ΣΤΗ ΘΛΙΨΗ ΤΟΥ ΦΤΑΝΟΝΤΑΣ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ».

Εικόνα 1: Επίγραμμα από τον τάφο του Διόφαντου

Γνωρίζουμε επίσης ότι έζησε στην Αλεξάνδρεια το 210 – 290 μ.Χ. Κυριότερο του έργο θεωρούνται τα *Αριθμητικά* που αποτελούνται από 13 βιβλία, έξι διασώζονται στα ελληνικά και τέσσερα στα αραβικά. Η μεγαλύτερη συνεισφορά του Διόφαντου στην επίλυση εξισώσεων θεωρείται η εισαγωγή συμβολισμού, σε αντίθεση με τους Αιγύπτιους και Βαβυλώνιους που έλυναν τις εξισώσεις με ρητορικό τρόπο. Αυτός ίσως είναι και ο λόγος που θεωρείται από πολλούς, πατέρας της άλγεβρας (Boyer, 1997, σελ. 204)

Όλα τα σύμβολα του Διόφαντου είναι συντομογραφίες (Katz, 2013, σελ. 198) το ς από το τελικό γράμμα της λέξης «αριθμός», συμβολίζει τον άγνωστο αριθμό, τα γράμματα της αλφαβήτου αναπαριστάνουν τους αριθμούς, π.χ. το 3 είναι το *γ*, το 12 το ιβ, το $\overset{\circ}{\mathrm{M}}$ συμβολίζει τη μονάδα. Οι δυνάμεις ακολουθούν τον εξής συμβολισμό: Για τη δύναμη του τετραγώνου το Δ^{Υ}, για του κύβου K^{Υ}, για τη δύναμη του 4 το $\Delta^{\Upsilon}\Delta$, του 5 το $\Delta^{\Upsilon}\mathrm{K}$ και του 6 το $\mathrm{K}^{\Upsilon}\mathrm{K}$. Είναι ο πρώτος Έλληνας μαθηματικός που ασχολείται με δυνάμεις μεγαλύτερες της τρίτης. Για παράδειγμα ο συμβολισμός: Δ^{Υ} γς ιβ$\overset{\circ}{\mathrm{M}}\theta$ παριστάνει την αλγεβρική παράσταση: $3x^2+12x+9$. Παρόλο που ο Διόφαντος δεν ασχολείται με τους αρνητικούς αριθμούς γνωρίζει τους κανόνες των προσήμων.

Θα παρουσιάσουμε ένα από τα προβλήματα που ασχολήθηκε ο Διόφαντος και σχετίζονται με τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις στο έργο των *Αριθμητικών*. (Στην Ενότητα Δ του παραρτήματος υπάρχουν και άλλα προβλήματα)

Πρόβλημα Ι-27 *«Να βρεθούν δύο αριθμοί, τέτοιοι ώστε το άθροισμα και το γινόμενο τους είναι δοθέντες αριθμοί».*
(Περιορισμός: Πρέπει το τετράγωνο του ημιαθροίσματος των δύο αριθμών να υπερέχει του γινομένου αυτών κατά τετράγωνο)
(Ο Διόφαντος το λύνει με άθροισμα β =20 και γινόμενο γ =96)
Σ' αυτό το πρόβλημα ο Διόφαντος αποφεύγει να εκφράσει τους αριθμούς που ψάχνει ως x και $20-x$,ώστε να γίνει αναγωγή του προβλήματος στην επίλυση $x^2+96=20x$ μάλλον για να αποφύγει εξισώσεις αυτού του είδους στην αρχή των αριθμητικών, όπως αναφέρει ο Θωμαΐδης. (*Ιστορία και μαθηματική εκπαίδευση* 2006, σελ. 25).
Ο Διόφαντος επιλέγει χωρίς εξήγηση ότι οι αριθμοί είναι οι $x=10-z$ και $y=10+z$ όπου z η ημιδιαφορά των ζητούμενων αριθμών. Οπότε παίρνει:
$(10-z)(10+z)=96 \Leftrightarrow 100-z^2=96 \Leftrightarrow z^2=4 \Leftrightarrow z=2$. Άρα οι αριθμοί που ψάχνει είναι οι $x=8$ και $y=12$.
Στη γενική μορφή που είναι $x+y=\beta$ και $xy=\gamma$, παρόμοια των Βαβυλωνίων έχουμε $x=\frac{\beta}{2}-z$ και $y=\frac{\beta}{2}+z$, οπότε:
$\left(\frac{\beta}{2}-z\right)\left(\frac{\beta}{2}+z\right)=\gamma \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{2}\right)^2-z^2=\gamma \Leftrightarrow z^2=\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma \geq 0$ (ο περιορισμός που λειτουργεί ως διερεύνηση)
$z=\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$. Άρα $x=\frac{\beta}{2}-\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$ και $y=\frac{\beta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$ οι γνωστοί σημερινοί τύποι.
Εκτός από το παραπάνω πρόβλημα και τα υπόλοιπα που βρίσκονται στο παράρτημα φημισμένες είναι και οι αόριστες εξισώσεις της μορφής $x^2=1+\alpha y^2$, γνωστές και ως ***«εξισώσεις Pell»,***στις οποίες βέβαια ο Διόφαντος θεωρεί ότι μία λύση είναι αρκετή. Όπως αναφέρει και ο Boyer, από μία άποψη, δεν είναι δίκαιο να επικρίνουμε το

Διόφαντο για το ότι ικανοποιείται με την εύρεση μιας λύσης, εφόσον έλυνε προβλήματα και όχι εξισώσεις.(Boyer, 1997, σελ. 206)

Όπως παρατηρούμε από τα προηγούμενα προβλήματα που αναπτύσσει ο Διόφαντος, ένα πολύ χαρακτηριστικό στοιχείο των έργων του είναι ότι τα αριθμητικά προβλήματα που περιέχει διατυπώνονται με τελείως γενικό τρόπο, αλλά αμέσως μετά επιλέγονται συγκεκριμένα αριθμητικά δεδομένα πάνω στα οποία διεξάγεται η διαδικασία επίλυσης. (Θωμαΐδης, 2006, σελ. 15)

Το έργο του Διόφαντου αποτελεί μοναδικό παράδειγμα καθαρής άλγεβρας χωρίς στοιχεία γεωμετρίας που διασώζεται από την αρχαία Ελλάδα και άσκησε μεγάλη επιρροή στους μεταγενέστερους μαθηματικούς (Katz, 2014, σελ. 208). Τα χαρακτηριστικά του είναι αλγεβρικά και σύμφωνα με τους ιστορικούς συγκαταλέγονται στη λεγόμενη *«συγκεκομμένη»* Άλγεβρα, μια μίξη μεταξύ λεκτικού και συμβολικού τρόπου έκφρασης των λύσεων των προβλημάτων.(Boyer,1997, Basmakova, 2014, Heath, 1921, σε μετάφραση 2001). Χαρακτηρισμός που δόθηκε από τον Nesselman (Heath,1921, σελ. 520)

Κλείνοντας την αναφορά στα έργα των αρχαίων μαθηματικών που σχετίζονται με τη δευτεροβάθμια εξίσωση, θα θέλαμε να συγκρίνουμε τη μεθοδολογία στην επίλυση αυτών των εξισώσεων. Όπως φαίνεται από τα παραδείγματα που παραθέσαμε, η αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων από τους Βαβυλώνιους, τον Ευκλείδη και τον Διόφαντο, διέφερε σημαντικά. Οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν τις μεθόδους τους για να υπολογίζουν διαστάσεις χωραφιών και εμβαδών, με καθαρά ρητορικό τρόπο, σε αντίθεση με τον Διόφαντο που αναφέρεται σε αφηρημένους αριθμούς, κάνοντας χρήση και συμβολισμών, χωρίς όμως χρήση γεωμετρίας. Ο Ευκλείδης από τη μεριά του, αντιμετωπίζει τα προβλήματα όχι στη βάση υπολογισμών για το συγκεκριμένο θέμα που επεξεργάζεται, άλλα σε μια γενική πρόταση που να έχει εφαρμογή σε περισσότερες καταστάσεις και βέβαια πάντα στα πλαίσια της γεωμετρίας. Για τον Ευκλείδη κάθε μαθηματική πρόταση απαιτεί μια απόδειξη στη βάση των πέντε αξιωμάτων και των πέντε ορισμών, που δημιούργησαν όλο το αξιωματικό σύστημα στη γεωμετρία του.

2.3 Περιπτώσεις Δευτεροβάθμιων Εξισώσεων στη Μεσαιωνική Κίνα και Ινδία

2.3.1 Η Μεσαιωνική Κίνα

Αναφέροντας κανείς για μεσαιωνική Κίνα και μεσαιωνικά μαθηματικά κάνει λόγο για μια χιλιετία που ξεκίνα τον 3ο μ.Χ. αιώνα και φτάνει μέχρι το 13ο με τη κατάλυση της κινέζικης δυναστείας των Σόνγκ από τον Τζένγις Χαν και τους Μογγόλους του. Η διοικητική οργάνωση των κινέζων πριν ακόμη από τον 3ο αιώνα βασιζόταν σε **εξετάσεις** και όχι σε ευνοιοκρατία ή σε οικογενειοκρατία, κάτι που συνεχίστηκε έως τον 20ο αιώνα. Οι εξετάσεις αφορούσαν κυρίως τη κλασική κινέζικη λογοτεχνία, όμως οι ανάγκες της αυτοκρατορικής διοίκησης για χωρομέτρηση, φορολόγηση και δημιουργία ημερολογίων απαιτούσε από πολλούς κυβερνητικούς υπαλλήλους να είναι ικανοί σε τμήματα κυρίως των πρακτικών μαθηματικών.(Katz,2013, σελ. 220). Παρόλα αυτά υπήρξαν μαθηματικοί που βελτίωσαν και επέκτειναν παλαιότερες μεθόδους και σε άλλους τομείς πέρα των πρακτικών εφαρμογών. Εξάλλου ο κινέζικος πολιτισμός έχει να παρουσιάσει πολλές εντυπωσιακές καινοτομίες. Η τυπογραφία και το μπαρούτι (8ος αιώνας μ.Χ.),το χαρτί και η ναυτική πυξίδα (11ος αιώνας μ.Χ.), εμφανίστηκαν στην Κίνα νωρίτερα από οπουδήποτε αλλού. (Boyer, 1997, σελ. 229).

Για τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις υπάρχει ένα μικρό δείγμα, όπου δεν γίνεται λόγος για τη μέθοδο που ακολουθήθηκε. Το ακόλουθο πρόβλημα είναι από το έργο του Zhang Quijian *Μαθηματικό εγχειρίδιο*

«Δίνεται κυκλικό τμήμα που η χορδή του είναι $68\frac{3}{5}$ *και το εμβαδόν του* $514\frac{32}{45}$, *να βρεθεί το ύψος του»*

Η απάντηση που δίνεται είναι $12\frac{2}{3}$, αλλά η μέθοδος με την οποία βρέθηκε δεν υπάρχει στο χειρόγραφο. Κατά πάσα πιθανότητα, ο συγγραφέας εφάρμοσε τον τύπο: $\mathrm{A} = \frac{h(h+c)}{2}$ και τον μετέτρεψε σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς h. Στην εξίσωση: $45h^2 + 3087h = 46324$ (Katz, 2013, σελ. 231).

Ένας άλλος μεγάλος κινέζος μαθηματικός είναι ο Zhu Shijie, όπου το 1303 μ.Χ. έγραψε το έργο *«Πολύτιμος Καθρέφτης των Τεσσάρων Στοιχείων»* αναφερόμενος στον ουρανό, τη γη, τον άνθρωπό και την ύλη, ως τέσσερεις άγνωστες ποσότητες στην ίδια εξίσωση. (Boyer, 1997, σελ. 229). Στο βιβλίο αυτό αναπτύσσονται εξισώσεις και συστήματα έως δέκατου τέταρτου βαθμού. Ο συγγραφέας με μία μέθοδος παρόμοια με του Horner την οποία ονομάζει *«φαν φα»* μετασχηματίζει την εξίσωση. Έτσι για παράδειγμα για να λύσει την εξίσωση: $x^2 + 252x - 5292 = 0$, βρίσκει πρώτα τη προσεγγιστική τιμή $x = 19$ στη συνέχεια χρησιμοποιεί το μετασχηματισμό $y = x - 19$ και καταλήγει στην εξίσωση $y^2 + 290y - 143 = 0$.

Κατόπιν δίνει την προσεγγιστική τιμή $y = \frac{143}{291}$ και άρα η τιμή για το χ είναι $x = 19\frac{143}{291}$. (Boyer, 1997, σελ. 230)

2.3.2 Η Μεσαιωνική Ινδία

Οι φορείς της γνώσης και της παράδοσης στην Ινδία, από την αρχαιότητα ακόμη, ήταν οι βραχμάνοι, οι ιερείς που γέννησαν τον Ινδουισμό. Η μετάδοση γινόταν προφορικά και γι' αυτό το λόγο δεν υπάρχουν αρκετές πηγές αυτής της περιόδου. Για να είναι εύκολη η απομνημόνευση σημαντικών ιδεών, πολλά από τα έργα ήταν έμμετρα. Έτσι όταν άρχισαν να τα καταγράφουν, η μορφή τους ήταν πολύ συνοπτική, με αποτέλεσμα τα μαθηματικά να γίνονται δυσνόητα. Στη μεσαιωνική περίοδο οι Ινδοί μαθηματικοί ήταν κυρίως αλγεβριστές. Τα έργα τους είναι γεμάτα κανόνες και υπολογισμούς με θετικούς και αρνητικούς αριθμούς, με κλάσματα και αλγεβρικές παραστάσεις. Διδάσκουν και λύνουν γραμμικές και δευτεροβάθμιες εξισώσεις με έναν ή περισσότερους αγνώστους. (Boyer, 1997, σελ. 258). Ξεχωρίζουμε τρεις σημαντικούς μαθηματικούς, τον Brahmagupta, (7ο αιώνας μ. Χ.), τον Sridhara, (11ο αιώνας μ. Χ.) και τον Bhaskara II, (12ο αιώνας μ. Χ.).

Ο πρώτος ασχολήθηκε πιο διεξοδικά με τις γνωστές αόριστες «εξισώσεις Pell» δίνοντας βέβαια περισσότερα αποτελέσματα από ότι ο Διόφαντος, ο οποίος αρκούνταν μόνο σε μία λύση. Αναφορικά με τις δευτεροβάθμιες ο Brahmagupta περιγράφει τον τύπο σχεδόν με τη μορφή που τον γνωρίζουμε σήμερα. Συγκεκριμένα λέει:

«Πάρε τον απόλυτο αριθμό που βρίσκεται στην άλλη πλευρά από εκείνη στην οποία βρίσκονται το τετράγωνο και ο απλός άγνωστος. Στον απόλυτο αριθμό ο οποίος έχει πολλαπλασιαστεί με το 4 και επί του τετραγώνου (εννοεί το συντελεστή), πρόσθεσε το τετράγωνο (του συντελεστή) του αγνώστου.. Η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος μείον (τον συντελεστή) του αγνώστου, διαιρούμενη δια του διπλάσιου (του συντελεστή) του τετραγώνου είναι ο άγνωστος».

Παρακάτω δίνεται η λύση της εξίσωσης $x^2 - 10x = -9$ όπως την περιγράφει λεκτικά ο Brahmagupta παράλληλα με τη σημερινή συμβολική λύση

Λεκτική Brahmagupta	**Σημερινή Συμβολική**
Εξίσωση: $x^2 - 10x = -9$	Εξίσωση: $x^2 - 10x + 9 = 0$
Ό απόλυτος αριθμός (-9) να	$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 64$

πολλαπλασιαστεί επί τέσσερεις φορές του τετραγώνου και να προστεθεί στο τετράγωνο του αγνώστου	
Να εξαχθεί η τετραγωνική ρίζα του αποτελέσματος	$\sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$
Κατόπιν να μειωθεί αυτή κατά του αγνώστου	$\sqrt{\Delta} - \beta + = 8 - (-10) = 18$
Η διαφορά να διαιρεθεί με το διπλάσιο του τετραγώνου, ώστε να δώσει τη τιμή του αγνώστου	$x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{18}{2} = 9$

Παρόλο που η εξίσωση αυτή έχει και δεύτερη λύση θετική, ο Brahmagupta δεν την αναφέρει.

Ο Bhaskara II χρησιμοποιεί τη συμπλήρωση τετραγώνου για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Παρακάτω αναφέρονται δύο προβλήματα:

1ο Πρόβλημα *«Το ένα όγδοο μιας ομάδας πιθήκων, υψωμένο στο τετράγωνο, πηδούσαν από κλαδί σε κλαδί σ' ένα δάσος πολύ ευχαριστημένοι με την ασχολία τους. Δώδεκα άλλοι πίθηκοι, ήταν πάνω στο λόφο και αλληλοψειρίζονταν. Πόσοι ήταν όλοι;»*

Λεκτική Bhaskara	**Σημερινή Συμβολική**
Γράφει την εξίσωση $\left(\frac{1}{8}x\right)^2 + 12 = x$	$\left(\frac{1}{8}x\right)^2 + 12 = x$
Πολλαπλασιάζει επί 64 και αφαιρεί	$\frac{x^2}{64} + 12 = x \Leftrightarrow x^2 + 12 \cdot 64 = 64x \Leftrightarrow$ $x^2 - 64x = -768$
Προσθέτει 32^2 σε κάθε πλευρά	$x^2 - 64x + 32^2 = -768 + 32^2$
Παίρνει τις τετραγωνικές ρίζες κάθε πλευράς	$(x-32)^2 = 256 \Leftrightarrow \sqrt{(x-32)^2} = \sqrt{256}$ $\Leftrightarrow \lvert x-32 \rvert = 16$
Παρατηρεί ότι, η τιμή της ρίζας στην απόλυτη πλευρά (το 16) είναι μικρότερη από τον αριθμό που έχει	$x - 32 = 16$ ή $x - 32 = -16$

αρνητικό πρόσημο (το 32). Επομένως ο 16 μπορεί να γίνει και θετικός και αρνητικός	
Άρα παίρνει δύο τιμές για τον άγνωστο, 48 και 16	$x = 48$ ή $x = 16$

2ο Πρόβλημα *«Το ένα πέμπτο μιας ομάδας πιθήκων μείον τρεις, υψωμένο στο τετράγωνο μπήκε σε μια σπηλιά. Ένας πίθηκος από την ομάδα έμεινε έξω και σκαρφάλωσε σε ένα κλαδί. Πόσο ήταν όλοι οι πίθηκοι».*

Το λύνει με παρόμοιο τρόπο με το παραπάνω και βρίσκει τις δύο ρίζες 50 και 5, όμως απορρίπτει τη δεύτερη γιατί θεωρεί ότι δεν είναι δυνατόν να αφαιρέσει τρεις πίθηκους από το ένα πέμπτο του πέντε που είναι το ένα (δηλαδή θεωρεί αδύνατο το 1-3=-2 στο συγκεκριμένο πρόβλημα). Σε προβλήματα με θετική και αρνητική ρίζα δέχεται μόνο τη θετική. Ποτέ δεν δίνει παραδείγματα με δύο αρνητικές ή άρρητες ρίζες.(Katz, 2013, σελ. 261)

Τέλος σύμφωνα με τη μέθοδο που επινοήθηκε από τον Sridhara (1025 μ.Χ) και η οποία θα χρησιμοποιηθεί στη διδακτική παρέμβαση έχουμε την τελική αλγεβρική λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης με τον τελικό τύπο (Ενότητα Δ παράρτημα).

2.4 Οι Δευτεροβάθμιες Εξισώσεις των Αράβων

Η δημιουργία της μουσουλμανικής αυτοκρατορίας κατά το 7ο και 8ο αιώνα μ.Χ. όπου εκτεινόταν από τις όχθες του Ινδού ποταμού μέχρι και τα Πυρηναία όρη ευτυχώς συνοδεύτηκε και με πολιτιστική ανάπτυξη. Την περίοδο 750 με 850 μ.Χ. ήρθαν στην Βαγδάτη πολλοί σοφοί από διάφορα μέρη του κόσμου. Η πόλη έγινε η νέα Αλεξάνδρεια χάρη στους Χαλίφηδες που βασίλεψαν εκείνη την εποχή και κυρίως του Αλ–Μαμούν όπου ίδρυσε τον «Οίκο της Σοφίας», ανάλογο με το αρχαίο Μουσείο της Αλεξάνδρειας. Η δημιουργία της βιβλιοθήκης, όπου οποιοδήποτε βιβλίο έφτανε στην Βαγδάτη μεταφραζόταν στα αραβικά έδωσε μεγάλη ώθηση στα γράμματα και τις τέχνες και βέβαια και στα μαθηματικά.

Η σπουδαιότερη όμως συνεισφορά των Αράβων στα μαθηματικά ήταν στον τομέα της άλγεβρας. Οι μαθηματικοί του Ισλάμ χρησιμοποίησαν τις γνώσεις των Βαβυλωνίων για επίλυση εξισώσεων, τις συνδύασαν με τη γεωμετρία των αρχαίων Ελλήνων και έτσι παρήγαγαν μια νέα άλγεβρα που στην πορεία ανέπτυξαν περισσότερο (Katz, 2013, σελ.279). Βασικό χαρακτηριστικό όμως όλων των Αράβων μαθηματικών είναι, η μη χρήση συμβόλων για την επίλυση των προβλημάτων.

Ο σημαντικότερος εκπρόσωπος αυτής της περιόδου είναι ο al–Khwarizmi,(780 – 850) ο άνθρωπος που σύνδεσε το όνομα του με τους όρους «άλγεβρα» και «αλγόριθμος». Το βιβλίο του, *Al-kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala(Συνοπτικό βιβλίο του λογισμού της αποκατάστασης και εξισορρόπησης)* και συγκεκριμένα ο όρος *al-jabr* - που στα αραβικά σημαίνει «αποκατάσταση – συγκόλληση» και αναφέρεται στη μεταφορά μιας ποσότητας που αφαιρείται σε ένα μέλος μιας εξίσωσης στο άλλο όπου προστίθεται-έδωσε τη δική μας λέξη άλγεβρα. Όσο για την σημερινή λέξη αλγόριθμος (algorithm στα Αγγλικά) είναι μια παραφθορά του ονόματος του al-Khwarizmi όπως μεταφέρθηκε στην Ευρώπη κατά τον μεσαίωνα και αρχικά δήλωνε το νέο σύστημα αρίθμησης που έκανε χρήση των ινδικών συμβόλων. Σήμερα βέβαια, σημαίνει κάποιον κανόνα ή διαδικασία πράξεων – όπως για παράδειγμα την ευκλείδεια διαίρεση ή τη διαδικασία εύρεσης του Μ.Κ.Δ. Η λέξη δε *muqabala* στον τίτλο του βιβλίου του σημαίνει «ελάττωση – εξισορρόπηση» και αναφέρεται στην απαλειφή των ίδιων όρων στα δύο μέρη της εξίσωσης μέσω αφαίρεσης (Boyer, 1997, σελ. 256). Π.χ. στην εξίσωση: $3x+2=4-2x$, η μετατροπή της σε: $5x+2=4$ γίνεται μέσω al-jabr, ενώ της τελευταίας σε $5x=2$ γίνεται μέσω muqabala (Katz 2013, σελ. 280)

Στο συγκεκριμένο βιβλίο του ο al–Khwarizmi αναφέρεται στον τρόπο επίλυσης εξισώσεων. Δεν χρησιμοποιεί αλγεβρικό συμβολισμό αλλά ασχολείται με ποσότητες τις οποίες χωρίζει σε τρία είδη: Το τετράγωνο (mal) του αγνώστου για το x^2, το πράγμα (shay) ή ρίζα (jidhr) για τον άγνωστο x και τον αριθμό (dirham) για τον σταθερό όρο της εξίσωσης. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ποσότητες χωρίζει τις εξισώσεις σε έξι διαφορετικούς τύπους (τρεις διωνυμικές και τρεις τριωνυμικές)

1. Τετράγωνα ίσα με ρίζες ($\alpha x^2=\beta x$)
2. Τετράγωνα ίσα με αριθμούς ($\alpha x^2=\gamma$)
3. Ρίζες ίσες με αριθμούς ($\beta x=\gamma$)
4. Τετράγωνα και ρίζες ίσα με αριθμούς ($\alpha x^2+\beta x=\gamma$)
5. Τετράγωνα και αριθμοί ίσα με ρίζες ($\alpha x^2+\gamma=\beta x$)
6. Ρίζες και αριθμοί ίσα με τετράγωνα ($\beta x+\gamma=\alpha x^2$)

Όπου όλοι οι συντελεστές α,β και γ, καθώς και οι ρίζες είναι θετικοί αριθμοί (Katz, 2013, σελ. 281)

Ο al–Khwarizmi δεν δεχόταν τις αρνητικές ρίζες, σε αντιδιαστολή με τους Ινδούς, ούτε βέβαια και το μηδέν, έτσι τα παραπάνω είδη καλύπτουν όλες τις περιπτώσεις γραμμικών και δευτεροβάθμιων εξισώσεων με θετική ρίζα.

Παρακάτω αναφέρονται η λεκτική και γεωμετρική λύση ενός προβλήματος 4ου τύπου, καθώς και η γεωμετρική απόδειξη του 5ου γενικού τύπου $x^2+\gamma=\beta x$

Πρόβλημα 1 (4ου τύπου) *« Ποιο είναι το τετράγωνο το οποίο αν αυξηθεί κατά δέκα ρίζες του γίνεται τριάντα εννέα»* ($x^2+10x=39$). (Αποτελεί μέρος της διδακτικής παρέμβασης).

<u>Η λύση</u> που δίνει ο al- Khwarizmi λεκτικά είναι η εξής:

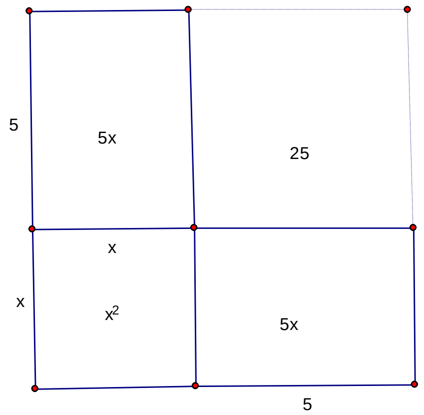
«Υποδιπλασιάζεις το πλήθος των ριζών (πραγμάτων) που στο παράδειγμα αυτό μας δίνει πέντε. Μετά πολλαπλασιάζεις τον αριθμό αυτόν επί τον εαυτό του που δίνει είκοσι πέντε. Προσθέτεις αυτό στο τριάντα εννέα και το άθροισμα είναι εξήντα τέσσερα. Παίρνεις την τετραγωνική ρίζα αυτού που είναι οκτώ και αφαιρείς το μισό του πλήθους των πραγμάτων που είναι πέντε. Η διαφορά είναι τρία. Αυτή είναι και η λύση του προβλήματος» (Katz 2013, σελ. 281).

Με σύγχρονο συμβολισμό, η λύση της εξίσωσης: $x^2+\beta x=\gamma$ είναι: $x=\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\gamma}-\frac{\beta}{2}$ η οποία δίνει

$$x=\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\gamma}-\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\beta^2+4\gamma}{4}}-\frac{\beta}{2}=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\cdot1(-\gamma)}}{2}=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\cdot1}$$

τον γνωστό δηλαδή τύπο για την εξίσωση $x^2+\beta x-\gamma=0$, μόνο για την θετική όμως ρίζα της.

Κατόπιν ο al–Khwarizmi δίνει και μια <u>γεωμετρική απόδειξη</u> η οποία περισσότερο παραπέμπει σε Βαβυλωνιακή επιρροή παρά σε Ελληνική. Αρχικά σχεδιάζει ένα τετράγωνο (σχ. 4) για να παραστήσει το x^2, κατόπιν προσθέτει δυο ορθογώνια με πλάτος πέντε (το μισό του πλήθους των ριζών) στις δύο πλευρές του τετραγώνου. Το άθροισμα του τετραγώνου και των δύο ορθογωνίων είναι $x^2+10x=39$. Στη συνέχεια προσθέτει στο σχήμα ένα τετράγωνο εμβαδού 25 (σημειώνεται με διακεκομμένη γραμμή), οπότε παίρνει τετράγωνη περιοχή συνολικού εμβαδού 64. Από τη ρίζα αυτού δηλαδή το 8 αφαιρεί το 5 και προκύπτει η λύση $x=3$.



$$x^2+2\cdot 5x=39$$
$$x^2+2\cdot 5x+25=39+25$$
$$(x+5)^2=64$$
$$x+5=\sqrt{64}$$
$$x+5=8$$
$$x=3$$

(Σχ.4)

Σε παρόμοια προβλήματα 4ου τύπου ($\alpha x^2+\beta x=\gamma$) όπου ο συντελεστής του x^2 δεν είναι μονάδα, πολλαπλασιάζει ή διαιρεί με κατάλληλο αριθμό, ώστε να γίνει μονάδα και κατόπιν εφαρμόζει τα παραπάνω.

Σε προβλήματα 5ου τύπου ($\alpha x^2+\gamma=\beta x$), πρώτα τα μετατρέπει στη μορφή: $x^2+\gamma=\beta x$ (ή $x^2-\beta x+\gamma=0$ σήμερα) και κατόπιν περιγράφοντας τα λεκτικά καταλήγει όπως και παραπάνω στον δικό μας τύπο:

$$x=\frac{\beta}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}=\frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2}, \text{ για } \alpha=1. \quad (5)$$

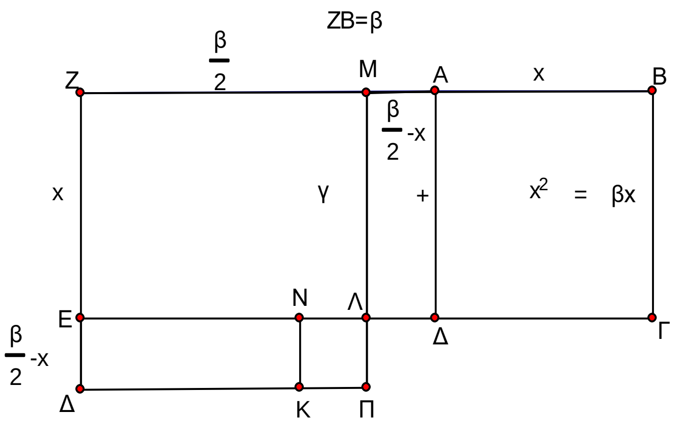
Μάλιστα δηλώνει ότι μπορείς να πάρεις 2 θετικές λύσεις είτε προσθέτοντας είτε αφαιρώντας. Αξίζει εδώ να αναφερθεί, ότι σημειώνει και τις συνθήκες για την επίλυση της εξίσωσης. Συγκεκριμένα λέει:

1. *«Εάν το γινόμενο του μισού πλήθους των ριζών επί τον εαυτό του είναι μικρότερο από τον αριθμό που συνδέεται με το τετράγωνο, τότε η εξίσωση δεν λύνεται».*

Με σημερινό συμβολισμό έχουμε το γνωστό: $\left(\frac{\beta}{2}\right)^2<\gamma \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma<0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2-4\gamma}{4}<0 \Leftrightarrow \beta^2-4\gamma<0 \Leftrightarrow \Delta<0$ όπου η εξίσωση είναι αδύνατη.

2. *«Εάν το γινόμενο είναι ίσο με τον αριθμό, τότε η ρίζα του τετραγώνου ισούται ακριβώς με το μισό του πλήθους των ριζών και τίποτα δεν προστίθεται ούτε αφαιρείται».* (Katz, 2013, σελ. 283). Πράγματι με σημερινό συμβολισμό έχουμε $\Delta=0$ και η λύση είναι $x=\frac{\beta}{2}$.

Στο παρακάτω σχήμα ο al–Khwarizmi δίνει μια γεωμετρική απόδειξη της εξίσωσης: $x^2+\gamma=\beta x$



Στο σχήμα έχουμε: $\left(\text{ΑΒΓΔ}\right)=x^2$ και $\left(\text{ΑΔΕΖ}\right)=\gamma$. Ισχύει:

$\left(\text{ΑΒΓΔ}\right)+\left(\text{ΑΔΕΖ}\right)=\left(\text{ΒΓΕΖ}\right)$

$x^2+\gamma=\beta x$

Επομένως $\text{ΖΒ}=\beta$ και $\text{ΖΕ}=x$

Βρίσκουμε το μέσο Μ του ΖΒ και

(Σχ. 5)

κατασκευάζουμε τετράγωνο ΜΠΔΖ πλευράς $\dfrac{\beta}{2}$.

Σχηματίζουμε ορθογώνιο ΕΔΚΝ που να έχει ίσες διαστάσεις με το ΑΔΛΜ. Με το τρόπο αυτό κατασκευάζεται τετράγωνο ΚΝΛΠ πλευράς $\dfrac{\beta}{2}-x$ και εμβαδού

$$\left(\text{ΚΝΛΠ}\right)=(\text{ΜΠΔΖ})-\left[\left(\text{ΜΛΕΖ}\right)+\left(\text{ΕΔΚΝ}\right)\right]=(\text{ΜΠΔΖ})-\left[\left(\text{ΜΛΕΖ}\right)+\left(\text{ΑΔΛΜ}\right)\right]=$$

$$(\text{ΜΠΔΖ})-\left(\text{ΑΔΕΖ}\right)=\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma.$$

Δηλαδή $\left(\dfrac{\beta}{2}-x\right)^2=\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^2-\gamma \Leftrightarrow x=\dfrac{\beta}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$. Ο γνωστός τύπος.

Αξίζει να υπογραμμιστεί ότι το σχήμα και η μέθοδος του θυμίζει τη Βαβυλωνιακή περιγραφή για το σύστημα $x+y=\beta$ και $xy=\gamma$.

Τελειώνοντας με τον al–Khwarizmi θα πρέπει να γίνει αναφορά και στο γεγονός ότι γνώριζε ότι το γινόμενο $(\alpha\pm\beta)(\gamma\pm\delta)$ επιμεριζόταν σε τέσσερεις πολλαπλασιασμούς, καθώς και τους κανόνες των προσήμων που διέπουν τον πολλαπλασιασμό και ας χρησιμοποιούσε μόνο θετικούς αριθμούς. Επίσης ασχολήθηκε και με περιπτώσεις όπου το αποτέλεσμα των εξισώσεων κατέληγε σε άρρητη ποσότητα (π.χ. η εξίσωση $10x=(10-x)^2$, με λύση την $x=15-\sqrt{125}$).

Σύγχρονος του al–Khwarizmi είναι και ο ibn Turk, ο οποίος στο κεφάλαιο του βιβλίου του *Kitab al-jabr wa'l muqabala* που σώζεται και αφορά τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις, περιγράφει με πολλές λεπτομέρειες τις γεωμετρικές λύσεις. Συγκεκριμένα στο πρώτο παράδειγμα λύνει την εξίσωση: $x^2+21=10x$ με τον ίδιο τρόπο που τη λύνει ο al- Khwarizmi, αλλά αρχίζει τη γεωμετρική απόδειξη παρατηρώντας ότι το Μ στο παραπάνω σχήμα (Σχ.8) θα μπορούσε να βρίσκεται είτε επί της ΑΖ όπως βρίσκεται ήδη, είτε επί της ΑΒ. Οπότε το αποτέλεσμα θα βρισκόταν με βάση τον τύπο (5) είτε με πλην, είτε με συν. Επίσης αποδεικνύει γεωμετρικά την περίπτωση που Δ=0 χρησιμοποιώντας την εξίσωση $x^2+25=10x$,όπου το σχήμα αποτελείται από ένα ορθογώνιο χωρισμένο σε δύο ίσα τετράγωνα, καθώς και για την αδύνατη εξίσωση όπου Δ<0, χρησιμοποιώντας την εξίσωση: $x^2+30=10x$ (Katz,2013, σελ. 284)

Κατά τη διάρκεια των επόμενων πενήντα χρόνων από τα έργα των al- Khwarizmi και ibn Turk, δηλαδή το δεύτερο μισό του 9ου αιώνα οι μαθηματικοί του Ισλάμ αποφάσισαν να στραφούν στο έργο του Ευκλείδη για τη γεωμετρική απόδειξη των λύσεων των εξισώσεων (Katz 2013, σελ. 286). Σημαντική ήταν η συμβολή του Thabit ibn Qurra (830 – 890), ο οποίος ίδρυσε μια σχολή μεταφραστών, οπού μετάφρασε στα Αραβικά έργα του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη, του Απολλώνιου, του Πτολεμαίου και του Ευτόκιου (Boyer, 1997, σελ. 262). Επίσης στο έργο του *Qawl fi tashih masa'il al-jabr bi l-barahin al-handasiya (Περί της επαλήθευσης των προβλημάτων της άλγεβρας μέσω γεωμετρικών αποδείξεων*), ένα από τα πολλά μαθηματικά γραπτά που άφησε, χρησιμοποιεί προτάσεις των *Στοιχείων* του Ευκλείδη και καταλήγει σε γενικούς κανόνες για την απόδειξη των λύσεων των αλγεβρικών εξισώσεων.

Συγκεκριμένα για την εξίσωση $x^2+\beta x=\gamma$ χρησιμοποιεί την πρόταση ΙΙ-6 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, που αναλύθηκε παραπάνω και σύμφωνα μ' αυτήν ισχύει η σχέση (3) σελ. 11. Δηλαδή: $\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{AM}^2=\mathrm{M\Gamma}^2$ (8)

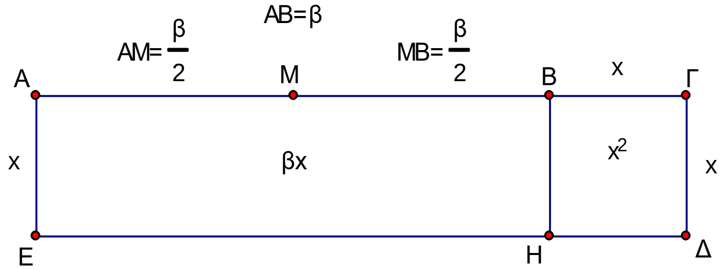
Με βάση λοιπόν την παραπάνω πρόταση και το (σχ. 9), όπου το ΒΓ παριστάνει το x, το τετράγωνο ΒΓΔΗ παριστάνει το x^2 και το ΑΒ παριστάνει το β ο Thabit ibn Qurra προχωράει στα εξής:

Λύση της γενικής εξίσωσης $x^2+\beta x=\gamma$

$$(\mathrm{A\Gamma\Delta E})=(\mathrm{B\Gamma\Delta H})+(\mathrm{ABHE})=x^2+\beta x=\gamma$$
$$(\mathrm{A\Gamma\Delta E})=\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{AB}$$

Άρα $\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{AB}=\gamma$.

Έχουμε και $\mathrm{AM}^2=\left(\frac{\beta}{2}\right)^2$, επομένως από τη σχέση (8) και τα παραπάνω, επειδή $\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{B\Gamma}$ και AM^2 γνωστά, έπεται ότι το $\mathrm{M\Gamma}^2$ και άρα το $\mathrm{M\Gamma}$ είναι γνωστό. Συνεπώς μπορεί να υπολογιστεί το $x=\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{M\Gamma}-\mathrm{MB}$



(σχ. 6)

Με παρόμοιο τρόπο και χρησιμοποιώντας την πρόταση ΙΙ-5 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη (που με σημερινό αλγεβρικό συμβολισμό γίνεται η ταυτότητα: $(\beta-x)x+\left(\frac{\beta}{2}-x\right)^2=\left(\frac{\beta}{2}\right)^2$ λύνεται η $x^2+\gamma=\beta x$.

Άλλη μία σημαντική προσφορά του Thabit ibn Qurra ήταν και η γενίκευση του πυθαγορείου θεωρήματος.

Παρόμοιες αιτιολογήσεις έδωσε και ο Αιγύπτιος Abu Kamil ibn Aslan (850-930), ο οποίος ωστόσο προχώρησε και απέδειξε εκ νέου τα θεωρήματα του Ευκλείδη συμπεριλαμβάνοντας και αριθμητικά παραδείγματα. Αντιμετώπισε πιο περίπλοκες ταυτότητες και προβλήματα και χειρίστηκε άρρητους αριθμούς περισσότερο από ότι ο al–Khwarizmi. Ασχολήθηκε και με εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερο του 2, οπού με κατάλληλες αντικαταστάσεις τις απλοποιούσε. Για τον Abu Kamil η λύση μιας εξίσωσης δεν ήταν ένα ευθύγραμμο τμήμα άλλα απλά ένας αριθμός. Τέλος έκανε χρήση και δεκαδικών προσεγγίσεων των κλασμάτων, κάτι που τον βοήθησε να κατανοήσει περισσότερο την έννοια του αριθμού. (Katz, 2013, σελ. 287)

Στο έργο του, Kitab fi al-jabr wal-muqabala και συγκεκριμένα στο πρόβλημα 37 αναφέρει: *«Κάποιος λέει ότι, όταν διαιρεί το 10 σε δύο μέρη, και το ένα μέρος το πολλαπλασιάζει επί τον εαυτό του και το άλλο επί τη ρίζα του 8 και αφαιρεί το γινόμενο του μέρους επί τη ρίζα του 8 από το γινόμενο του μέρους επί τον εαυτό του, παίρνει 40»*

Η εξίσωση είναι: $(10-x)(10+x)-x\sqrt{8}=40$

Η οποία ξαναγράφει: $x^2+60=20x+\sqrt{8}x$

Εφαρμόζει τον αλγόριθμο του al- Khwarizmi (5ου τύπου) και καταλήγει στο

$x = 10 + \sqrt{2} - \sqrt{42 + \sqrt{800}}$ και $10 - x = \sqrt{42 + \sqrt{800}} - \sqrt{2}$

Ολοκληρώνοντας με τους Άραβες μαθηματικούς πρέπει να αναφερθεί κανείς και στον Ghiyath al-Din al-Kashi (πέθανε γύρω στα 1436), ο οποίος θεωρούσε τον εαυτό του εφευρέτη των δεκαδικών κλασμάτων (Boyer 1997). Αξιοσημείωτη ήταν η επίλυση εξισώσεων με τη μέθοδο Horner που εφάρμοζε, όπως και το διωνυμικό θεώρημα με τη μορφή του «τριγώνου του Pascal», ένα αιώνα πριν την εμφάνιση του στην Ευρώπη. Ο θάνατος του σηματοδοτεί και το τέλος των Αραβικών μαθηματικών.

Έγινε μια ιστορική αναδρομή των Αράβων αλγεβριστών, οι οποίοι παρόλο που κληρονόμησαν πολλές από τις γνώσεις των Βαβυλώνιων και των Ελλήνων, η συμβολή τους στα μαθηματικά και ιδιαίτερα στην άλγεβρα ήταν καθοριστική για την περεταίρω πορεία τους από τους Ευρωπαίους μαθηματικούς κατά τον μεσαίωνα και την αναγέννηση.

2.5 Οι Δευτεροβάθμιες Εξισώσεις στο Δυτικό Πολιτισμό

2.5.1 Μεσαιωνική Άλγεβρα και Δευτεροβάθμια Εξίσωση

Παράλληλα με τη την Αραβική πολιτιστική άνθηση, που διήρκησε έως το 15ο αιώνα αρχίζει να κάνει τα πρώτα της βήματα και η χριστιανική δύση. Αρχικά κατά τον πρώιμο μεσαίωνα,(5ο – 10ο αιώνας) τα μαθηματικά είναι ανύπαρκτα, παρόλο που οι μορφωμένοι άνθρωποι της εποχής εκείνης είχαν κληρονομήσει από την αρχαιότητα την άποψη ότι η μελέτη του quadrivium, δηλαδή της αριθμητικής, της γεωμετρίας, της μουσικής και της αστρονομίας, ήταν απαραίτητη για τη πνευματική τους καλλιέργεια.(Katz, 2013, σελ. 330). Αργότερα όμως και στις αρχές του 12ου αιώνα οι ευρωπαίοι λόγιοι ανακάλυψαν τη σπουδαιότητα των ελληνικών έργων, πολλά από τα οποία ήταν στη αραβική γλώσσα και άρχισαν τις μεταφράσεις στα λατινικά. Το μεγαλύτερο μέρος αυτού του έργου συντελέστηκε στο Τολέδο της Ισπανίας από ισπανοεβραίους μεταφραστές, από τα αραβικά στα ισπανικά και κατόπιν χριστιανοί λόγιοι τα μετέφραζαν από τα ισπανικά στα λατινικά.. Έτσι δόθηκε η ευκαιρία στους ευρωπαίους τους επόμενους αιώνες να γνωρίσουν αυτά τα έργα και να τα εξελίξουν περισσότερο.

Θα παρουσιάσουμε τους σημαντικότερους εκπροσώπους αυτής της περιόδου αρχής γενομένης από τον Λεονάρδος της Πίζας (1180 – 1250) γνωστό και ως Fibonacci ή γιο του Bonaccio ενός Ιταλού εμπόρου, φημισμένου για το αριστούργημά του*, Liber abbaci (Το βιβλίο του υπολογισμού*). Σ' αυτό, εκτός από υπολογιστικούς κανόνες υπάρχουν πρακτικά προβλήματα, υπολογισμός κέρδους, συναλλαγματικές ισοδυναμίες, προβλήματα που λύνονται με τη βοήθεια δευτεροβάθμιων εξισώσεων, μεθόδους για την άθροιση σειρών καθώς και γεωμετρικές αιτιολογήσεις των τύπων επίλυσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων (Katz 2013). Ένα βιβλίο πολύ σημαντικό για την Ευρώπη εκείνης της εποχής. Μιας Ευρώπης που αρχίζει να έρχεται σε επαφή για πρώτη φορά με τα μαθηματικά των Αράβων και με το καινούριο σύστημα αρίθμησης.

Ο Fibonacci χρησιμοποιεί εξειδικευμένους τρόπους για συγκεκριμένα προβλήματα και όχι γενικές μεθόδους.

Κάνει χρήση της «ψευδούς παραδοχής», μιας αιγυπτιακής μεθόδου, όπου στην αρχή δίνει μια κατάλληλη αλλά λανθασμένη απάντηση, την οποία προσαρμόζει στη συνέχεια για να οδηγηθεί στη σωστή απάντηση.

Εισάγει τα ινδοαραβικά ψηφία και επινοεί δικά του προβλήματα

Το πιο περίφημο όμως πρόβλημα του βιβλίου του Λεονάρδου είναι το πρόβλημα με τα κουνέλια, όπου προκύπτει και η γνωστή ακολουθία Fibonacci: 1,1,2,3,5,8,13,21,34………, (κάθε όρος προκύπτει από το άθροισμα των δύο προηγούμενων).

Στην ουσία ο Λεονάρδος μας παρουσιάζει τα Αραβικά μαθηματικά του 10ου αιώνα. Στο Έργο του *Liber quadratorum (το βιβλίο των τετραγώνων*) πραγματεύεται την εύρεση ρητών λύσεων διαφόρων εξισώσεων όπου εμπλέκονται τετράγωνα. Επιλύονται οι έξι διαφορετικοί τύποι εξισώσεων, αντίστοιχων με αυτές του al-Khwarizmi, όπου η άγνωστη ποσότητα λέγεται radix , το τετράγωνό της quadratus ή census και ο σταθερός όρος numerous. Εισάγει τους ισότιμους αριθμούς n, αριθμούς της μορφής $\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ για $\alpha+\beta$: άρτιο και $4\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ για $\alpha+\beta$: περιττό, όπου δείχνει ότι είναι πολλαπλάσια του 24. Αυτό τον βοηθάει να καταλήξει στο συμπέρασμα, ότι οι εξισώσεις $x^2+n=y^2$ και $x^2-n=z^2$ έχουν ακέραιες λύσεις μόνο αν ο n είναι ισότιμος αριθμός. Γενικά το έργο του Λεονάρδου εκτός από τη μεγάλη πρακτική αξία που είχε για τα διάφορα επαγγέλματα της εποχής, βοήθησε και στη δημιουργία νέων μαθηματικών στην Ιταλία.

Ένας άλλος σπουδαίος μαθηματικός εκείνης της περιόδου είναι ο Jordanus de Nemore (13ος αιώνας). Ελάχιστα είναι γνωστά για τη ζωή του. Εικάζεται ότι το όνομα αυτό είναι ψευδώνυμο. Ίσως να ήταν γυναίκα. Γνωστό του έργο *η Αριθμητική*, όπου ακολουθεί το πρότυπο του Ευκλείδη με ορισμούς, αξιώματα, προτάσεις και αποδείξεις. Με τον ίδιο τρόπο αναλύει και τις αλγεβρικές σχέσεις στο βιβλίο του *De numeris datis (Περί δεδομένων αριθμών)*, όπου από δοθείσες ποσότητες υπολογίζει άλλες ποσότητες. Βασίζει τη νέα του άλγεβρα στην αριθμητική και όχι στη γεωμετρία σε αντίθεση με τους Άραβες.

Η μεγαλύτερη όμως καινοτομία του είναι η χρήση γραμμάτων για να παραστήσει τυχαίους αριθμούς. Για τις πράξεις δεν χρησιμοποιεί σύμβολα, αλλά τις περιγράφει λεκτικά.

Ο Jordanus παρόλο που χρησιμοποιεί κλάσματα, η επιλογή των αριθμών που κάνει οδηγεί πάντα σε ακέραιες λύσεις, επηρεασμένος προφανώς από τους Έλληνες παρά από τους Άραβες.

Ας δούμε ένα γνωστό Βαβυλωνιακό πρόβλημα και τη λύση του από τον Jordanus, η οποία σημειωτέων, διαφέρει από τη βαβυλωνιακή λύση, καθώς και τη σημερινή συμβολική του λύση.

<u>Πρόταση Ι-1</u> *«Εάν δοθείς αριθμός (10) διαιρεθεί σε δύο μέρη, και το γινόμενο του ενός επί το άλλο είναι δοθέν,(21) τότε κατ' ανάγκη το κάθε μέρος είναι προσδιορισμένο.»*

Λύση από Jordanus	**Σημερινή Συμβολική λύση**
Το τετραπλάσιο του 21 είναι το 84 και το 100 είναι το τετράγωνο του 10. Η διαφορά τους είναι 16, που έχει τετραγωνική ρίζα το 4, το οποίο είναι η διαφορά των δύο μερών Αν αφαιρέσουμε το 4 από το 10 το αποτέλεσμα είναι το 6. Άρα το 3 είναι το μικρότερο μέρος και το 7 το μεγαλύτερο.	$x+y=10 \quad xy=21$ $4xy=84 \quad (x+y)^2=100$ $(x+y)^2-4xy=100-84=16$ $(x-y)^2=16 \Leftrightarrow x-y=4$ $(x+y)-(x-y)=10-4$ $2y=6 \Leftrightarrow y=3 \quad x=7$

Μια άλλη πρόταση του Jordanus μας παραπέμπει στην εξίσωση: $x^2+\gamma=\beta x$, όπου δηλώνει ότι υπάρχουν δύο λύσεις.

<u>Πρόταση IV-9</u> *«Εάν το τετράγωνο ενός αριθμού προστεθεί σε δοθέντα αριθμό και το άθροισμα τους ισούται με το γινόμενο της ρίζας επί έναν άλλον δοθέντα αριθμό, τότε δύο τιμές είναι δυνατές.»*

Διαδικασία επίλυσης από Jordanus	**Σημερινή μορφή επίλυσης**
Πάρε το μισό του β, τετραγώνισε	Η εξίσωση μετατρέπεται στην:

το για να βρεις φ, και έστω θ η διαφορά του x και του $\frac{1}{2}$β, δηλαδή $\theta=\pm\left(x-\frac{1}{2}\beta\right)$. Τότε $x^2+\phi=x^2+\gamma+\theta^2$ και $\phi=\gamma+\theta^2$ Για να υπολογίσεις το x αρκεί να προσθέσεις ή να αφαιρέσεις το θ στο $\frac{\beta}{2}$.	$x^2-\beta x+\gamma=0$ με $\alpha=1$ $\left(\frac{\beta}{2}\right)^2=\phi$ $\theta=\pm\left(x-\frac{\beta}{2}\right)$ $x^2+\phi=x^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2$ $x^2+\gamma+\theta^2=\beta x+x^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\beta x=x^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2$ Άρα $x^2+\phi=x^2+\gamma+\theta^2 \Leftrightarrow \phi=\gamma+\theta^2$ Επομένως $\theta^2=\phi-\gamma \Leftrightarrow \left(x-\frac{\beta}{2}\right)^2=\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma$ $x-\frac{\beta}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma} \Leftrightarrow x=\frac{\beta}{2}\pm\frac{\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2}$ $x=\frac{-(-\beta)\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot 1}$

Όλα τα παραδείγματα που δίνει ο Jordanus καταλήγουν σε θετικές και ακέραιες λύσεις, ακόμα και όταν χρησιμοποιεί κλάσματα, παρόλο που ήδη οι Άραβες είχαν αρχίσει να χρησιμοποιούν και άρρητους αριθμούς. Παρόλα αυτά ο τρόπος που τα επιλύει, η χρήση γραμμάτων καθώς και η τάση για γενίκευση αποτελούν σημαντική πρόοδο σε σχέση με τα ισλαμικά έργα (Katz,2013, σελ. 360)

2.5.2 Η άλγεβρα στην Αναγέννηση και η Δευτεροβάθμια Εξίσωση

Τον 14ο αιώνα, η οικονομία της Ευρώπης άρχισε να αλλάζει με ποικίλους τρόπους, γεγονός που επηρέασε και τον τομέα των μαθηματικών. Ιδιαίτερα στην Ιταλία οι μαθηματικές γνώσεις των εμπόρων μέχρι τότε περιορίζονταν μόνο στον υπολογισμό των εσόδων και εξόδων από τα εμπορικά τους ταξίδια. Με τον ερχομό όμως της εμπορικής επανάστασης, η μεσαιωνική οικονομία, που βασιζόταν στην ανταλλαγή αντικαταστάθηκε από την μονεταριστική οικονομία που επικρατεί και σήμερα. Η ανάγκη για νέα μαθηματικά εργαλεία δημιούργησε την σχολή των αβακιστών παρ' όλες τις αντιδράσεις της εποχής για την αλλαγή.

Οι αβακιστές δίδασκαν στους μαθητές τους αλγόριθμους του Ινδοαραβικού αριθμητικού συστήματος και μεθόδους επίλυσης προβλημάτων με τη χρήση αριθμητικής και ισλαμικής άλγεβρας. Τα εγχειρίδια που κρατούσαν αποτέλεσαν εργαλείο διδασκαλίας αλλά και βοήθεια για τους ίδιους τους εμπόρους. Κατά την διάρκεια του 14ου και 15ου αιώνα οι αβακιστές πραγματοποίησαν επέκταση των ισλαμικών μαθηματικών γνώσεων, οδηγώντας στην επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων και εξισώσεων μεγαλύτερου βαθμού από δύο, κάνοντας εισαγωγή συμβολισμών και συντομογραφιών. Στις αρχές του 15ου αιώνα άρχισαν να καθιερώνουν τους αγνώστους με συντομογραφίες. «π.χ. στην θέση συνηθισμένων λέξεων όπως cosa(πράγμα –ο άγνωστος χ), censo(τετράγωνο), cubo(κύβος) και radice(ρίζα) χρησιμοποιούσαν τις συντομογραφίες c, ce, cu και R, αντίστοιχα» (Katz 2013, σελ. 397). Οι ασυμφωνίες ήταν πολλές γύρω από αυτό τον νεοτερισμό, ωστόσο τα σύγχρονα σύμβολα της άλγεβρας διαμορφώθηκαν και καθιερώθηκαν στο δεύτερο μισό του 17ου αιώνα.

Τον 15ο αιώνα τα ισλαμικά αλγεβρικά εγχειρίδια ήταν ευρέως διαδεδομένα σε όλη την Ευρώπη και αποτελούσαν τον οδηγό για την συγγραφή των νέων μαθηματικών έργων.

Όπως, ο Γάλλος γιατρός N. Chuquet (1445 – 1488), έγραψε ένα έργο αριθμητικής και άλγεβρας το 1484 με τίτλο *Triparty*. Το περιεχόμενο του περιέχει παρόμοια προβλήματα με των Ιταλών αβακιστών, με τη διαφορά ότι είναι υψηλότερου μαθηματικού επιπέδου. Το συγκεκριμένο έργο αποτελείται από τρία μέρη.

- Το *πρώτο,* αφορά τις βασικές αριθμητικές πράξεις στους ακέραιους και τα κλάσματα. Με βασική ιδέα τον υπολογισμό ενός κλάσματος ανάμεσα σε δύο ετερώνυμα κλάσματα. (αρκεί να προσθέσουμε αριθμητές και παρονομαστές) Χωρίς να διευκρινίζει την ορθότητα τ *η ς* σκέψης του.
- Το *δεύτερο μέρος*, αναφέρεται στον αλγόριθμο του υπολογισμού των άρρητων αριθμών, προσεγγιστικά καθώς και τον υπολογισμό της τετραγωνικής και κυβικής ρίζας.
- Τέλος, το *τρίτο μέρος*, περιέχει πολυώνυμα και τον τρόπο επίλυσης των εξισώσεων, κυρίως εκθετικών, όπου εισάγει και έναν εκθετικό συμβολισμό. Το $12x^2$, λόγου χάρη το γράφει 12^2. (Katz 2013, σελ. 402)

Βασικό χαρακτηριστικό του Chuquet όσον αφορά τις μαθηματικές του γνώσεις και αναφορές είναι οι αρνητικοί αριθμοί.

Λίγα χρόνια αργότερα, αναπτύχθηκε η άλγεβρα στην Γερμανία δημιουργώντας την «Τέχνη του Coss» . Ο C. Rudolff (1499 – 1543) ως ένας από τους πιο αξιόλογους κοσσιστές του 16ου αιώνα, έγραψε το πρώτο ολοκληρωμένο έργο άλγεβρας, περίπου το 1520, κάνοντας σημαντικές παρατηρήσεις, όπως:

- όταν πολλαπλασιάζουμε δυνάμεις πρέπει να προσθέτουμε τους εκθέτες τους
- εισάγει τα σύγχρονα σύμβολα +,–,√ για την πρόσθεση, αφαίρεση και τετραγωνική ρίζα, αντίστοιχα, και
- τροποποιεί την επίλυση των αλγεβρικών εξισώσεων που είχε υποβάλλει ο al-Khwarizmi, από έξι σε οκτώ είδη. (Katz 2013, σελ. 405)

Αργότερα, το 1544 ο Γερμανός ιερέας Stifel (1487 – 1567), αναδιατυπώνει το έργο του Rudolff με περισσότερες ακρίβειες στις αλγεβρικές εφαρμογές. Καθώς, είναι ο πρώτος «που συνοψίζει τις τρεις συνήθεις ως τότε μορφές της δευτεροβάθμιας εξίσωσης στη μορφή $x^2=bx+c$» και τον τύπο της Διακρίνουσας, η οποία επικρατεί και σήμερα.

Στην Αγγλία, ο R. Recorde (1510 – 1558) εμπνέεται το σύγχρονο σύμβολο της ισότητας =, μεταβάλλει και επεκτείνει το γερμανικό συμβολισμό των δυνάμεων και επινοεί έναν διασκεδαστικό τρόπο διδασκαλίας για τους κανόνες των πράξεων μέσω ποίησης.

Στη Πορτογαλία ο P. Nunes (1502 – 1578) επηρεασμένος και από τους Ιταλούς συγγραφείς έγραψε το «*Libro de Algebra*» το οποίο αναφέρεται σε εξισώσεις έως τρίτου βαθμού. Ας δούμε πως επιλύει το κλασικό πρόβλημα της εύρεσης δύο αριθμών, αν το γινόμενο τους είναι 10 και το άθροισμα των τετραγώνων 30.

<u>1ος τρόπος</u>: Θεωρεί x τον μικρότερο και $\frac{10}{x}$ τον μεγαλύτερο, τους υψώνει στο τετράγωνο και καταλήγει στην εξίσωση: $x^2+\frac{100}{x^2}=30$

Πολλαπλασιάζει και τα δύο μέλη με x^2 οπότε παίρνει: $x^4+100=30x^2$

Την αναγάγει σε δευτεροβάθμια ως προς x^2 και βρίσκει: $x^2=15\pm\sqrt{125}$

Οπότε οι δύο λύσεις είναι: $x=\sqrt{15+\sqrt{125}}$ και $x=\sqrt{15-\sqrt{125}}$.

<u>2ος τρόπος</u>: Θεωρεί τα τετράγωνα των δύο αριθμών ως: $15-x$ το ένα και $15+x$

Οπότε οι αριθμοί είναι οι ρίζες αυτών με: $\sqrt{15-x}\cdot\sqrt{15+x}=10$

Επομένως: $225-x^2=100 \Leftrightarrow x^2=125 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{125}$

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι: $x=\sqrt{15+\sqrt{125}}$ και $x=\sqrt{15-\sqrt{125}}$.

<u>3ος τρόπος</u>: Αυτή η λύση βασίζεται στη ταυτότητα: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

Επομένως: $(\alpha+\beta)^2=30+2\cdot 10=50 \Leftrightarrow \alpha+\beta=\sqrt{50}$.

Γράφει τους δύο αριθμούς στη μορφή: $\alpha = \frac{\sqrt{50}}{2} - x$ και $\beta = \frac{\sqrt{50}}{2} + x$.

Τους πολλαπλασιάζει και καταλήγει στο: $\left(\frac{\sqrt{50}}{2} - x\right)\left(\frac{\sqrt{50}}{2} + x\right) = 10 \Leftrightarrow \frac{50}{4} - x^2 = 10$

Οπότε: $x^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι: $x = \frac{\sqrt{50}}{2} - \sqrt{\frac{5}{2}}$ και $x = \frac{\sqrt{50}}{2} + \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Σ' αυτό το σημείο χρησιμοποιώντας τα τετράγωνα αυτών των αριθμών και των προηγούμενων που βρήκε με του άλλους τρόπους δείχνει ότι είναι ίσοι, αν και αντιλαμβάνεται ότι η ισότητα τετραγώνων δεν εξασφαλίζει και ισότητα ριζών, παρόλα αυτά τις δέχεται ως σωστές.

Ο F. Viete (1540 – 1603), στο τέλος του 16ου αιώνα, στην προσπάθεια του να εξισώσει την ελληνική ανάλυση με την άλγεβρα, δημιούργησε την *Αναλυτική Τέχνη*. Εκεί αναπτύσσει την θεωρία του για την επεξεργασίας των εξισώσεων σε τρία στάδια:

- ζητητική ανάλυση: η διαδικασία μετατροπής του προβλήματος σε εξίσωση
- ποριστική ανάλυση: η διαδικασία εξερεύνησης της ορθότητας του θεωρήματος
- εξηγητική ανάλυση: «ο μετασχηματισμός της εξίσωσης που βρέθηκε μέσω της ζητητικής ανάλυσης ώστε να υπολογιστεί ο άγνωστος».

«Στην *Εισαγωγή* του, εκθέτει μια από τις σημαντικότερες συνεισφορές του, έναν νέο τρόπο συμβολισμού. Η αριθμητική λογιστική χρησιμοποιεί αριθμούς. Η συμβολική λογιστική χρησιμοποιεί σύμβολα.» (Katz 2013, σελ. 425), γι' αυτό στις πράξεις του διαχειρίζεται τόσο αριθμούς όσο και γράμματα της αλφαβήτου. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιεί φωνήεντα για να δηλώσει τα άγνωστα μεγέθη και σύμφωνα για τα γνωστά. Για τις πράξεις του ο Viete χρησιμοποιεί τα σύμβολα + και –, ενώ στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης χρησιμοποιεί την λέξη in και την κλασματική γραμμή, αντίστοιχα.

Π.χ. κατά Viete έχουμε $\frac{A\ in\ B}{C\ quadratum}$, ενώ σε σύγχρονο συμβολισμό έχουμε AB/C^2.

Η συμβολή του στον μαθηματικό κόσμο ήταν μεγάλη, αφού χάρη σε αυτόν οι αλγεβρικές ταυτότητες γράφτηκαν για πρώτη φορά συμβολικά, εφαρμόστηκε η άλγεβρα στην τριγωνομετρία, και η διαχείριση των δευτεροβάθμιων, καθώς και των κυβικών εξισώσεων απλοποιήθηκε με βάση την ιδέα του, ότι αν γίνουν κατάλληλες αντικαταστάσεις, μπορεί να απαλειφθεί, ο πρωτοβάθμιος όρος από τις εξισώσεις δευτέρου βαθμού και ο δευτεροβάθμιος, από τις εξισώσεις τρίτου βαθμού. Θα πρέπει να διευκρινιστεί πάντως ότι ο Viete ασχολήθηκε μόνο με θετικές ρίζες και κυρίως με τη σχέση των ριζών προς τους συντελεστές.

Για την εξίσωση δευτέρου βαθμού σύμφωνα με το ιστορικό σημείωμα του σχολικού βιβλίου της Άλγεβρας Α΄ λυκείου (Σελ. 75 – 76) σύμφωνα με τη μέθοδο του Viete σημειώνονται τα εξής:

Με την αντικατάσταση: $x = y - \frac{\beta}{2\alpha}$, (1) η αρχική εξίσωση: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ μετατρέπεται στην: $\alpha\left(y - \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \beta\left(y - \frac{\beta}{2\alpha}\right) + \gamma = 0$, η οποία μετά από πράξεις απλοποιείται στην: $\alpha y^2 + \frac{-\beta + 4\alpha\gamma}{4\alpha} = 0$, που δίνει τη λύση: $y = \frac{\pm\sqrt{-\beta + 4\alpha\gamma}}{2a}$.

Με τη σειρά της αν αντικατασταθεί στην (1), θα δώσει τον γνωστό τύπο: $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2a}$.

Στο ίδιο σημείο του σχολικού βιβλίου αναφέρεται και η μέθοδος του **T.** Harriot (1560 – 1621), στο μεγάλο έργο του *Artis Analytical Praxis*, όπου σύμφωνα με αυτήν: Θεωρεί τις λύσεις x_1 και x_2 της εξίσωσης: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$, (1) οι οποίες είναι και λύσεις της εξίσωσης: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ που μετασχηματίζεται στην εξίσωση: $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$ (2). Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $a \neq 0$ βρίσκουμε: $x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$ (3). Οι εξισώσεις (2) και (3) είναι ισοδύναμες.

Άρα: $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ (4).

Με τη βοήθεια της ταυτότητας: $\left(x_1-x_2\right)^2=\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2$ και των σχέσεων (4) έχουμε: $x_1-x_2=\dfrac{\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{a}$, εφόσον βέβαια $\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0$ (5). Λύνοντας το σύστημα των (4) και (5) καταλήγουμε στο γνωστό τύπο: $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2a}$.

Ο R. Descartes (1596 – 1650) Γάλλος μαθηματικός, βαθύτατος γνώστης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και με σημαντικό έργο στην επίλυση εξισώσεων. Θεωρείται ο θεμελιωτής της αναλυτικής γεωμετρίας αν και ο στόχος του είναι οι γεωμετρικές κατασκευές και όχι η μετατροπή ενός γεωμετρικού προβλήματος σε αλγεβρικό, όπως το αναφέρει στη πρώτη φράση του βιβλίου του *«La geometrie»* :

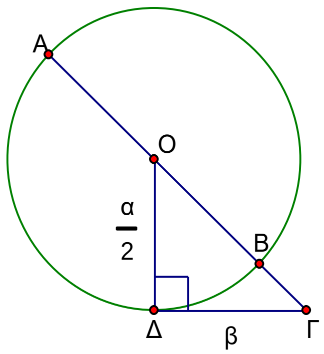
«Κάθε πρόβλημα της γεωμετρίας μπορεί εύκολα να μετατραπεί έτσι ώστε η γνώση των μηκών ορισμένων ευθύγραμμων τμημάτων να αρκεί για την κατασκευή του». (Boyer, 1997, σελ. 377)

Χρησιμοποιεί τα αρχικά γράμματα της αλφαβήτου (α, β ,γ ,δ) για παραμέτρους και τα τελικά (x, y, z) για άγνωστα μεγέθη, ενώ όλος ο υπόλοιπος συμβολισμός του είναι παρόμοιος με τον σημερινό. Θεωρεί τις παραμέτρους και τους άγνωστους, ευθύγραμμα τμήματα και όχι αριθμούς. Σ' αυτόν οφείλουμε και τον τρόπο γραφής των δυνάμεων.

Στο βιβλίο Ι του *«La geometrie»* επιλύει τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις με ευθείες και κύκλους συμφωνώντας περισσότερο με τους αρχαίους Έλληνες, παρά με τους Βαβυλώνιους. Ας δούμε κάποιο παράδειγμα:

Να λυθούν οι εξισώσεις α) $x^2=\alpha x+\beta^2$ και β) $x^2=-\alpha x+\beta^2$

Λύση – Κατασκευή



Οι λύσεις των δύο εξισώσεων δίνονται με τη βοήθεια του ορθογωνίου ΟΔΓ, με $\text{ΟΔ}=\dfrac{\alpha}{2}$ και $\text{ΓΔ}=\beta$.

Κατασκευάζουμε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα $\dfrac{\alpha}{2}$ που τέμνει την ευθεία ΟΓ στα σημεία Α και Β.

Το ΑΓ είναι η λύση της 1ης εξίσωσης γιατί:

(Σχ. 7)

$\text{ΓΒ}\cdot\text{ΓΑ}=\text{ΓΔ}^2\Leftrightarrow\left(x-\alpha\right)x=\beta^2\Leftrightarrow x^2=\alpha x+\beta^2$

Όπου με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΟΔΓ έχουμε: $x = \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{AO} + \mathrm{O\Gamma} = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta^2}$. Το ΒΓ είναι η λύση της 2ης εξίσωσης γιατί:

$\mathrm{\Gamma B} \cdot \mathrm{\Gamma A} = \mathrm{\Gamma\Delta}^2 \Leftrightarrow x(x+\alpha) = \beta^2 \Leftrightarrow x^2 = -\alpha x + \beta^2$.

Οπότε: $x = \mathrm{\Gamma B} = \mathrm{\Gamma O} - \mathrm{OB} = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta^2} - \frac{\alpha}{2}$. (Περισσότερα στην Ενότητα Δ του παραρτήματος)

Την ίδια περίοδο με τον Descartes αναπτύσσει τις ιδέες του και ο A. Girard (1595 – 1632). Στο βιβλίο του «Invention nouvelle en l'algebre » (Νέα ανακάλυψη στην άλγεβρα) περιγράφει μία σειρά προτάσεων, με σημαντικότερο, το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας, σύμφωνα με το οποίο: «Κάθε αλγεβρική εξίσωση επιδέχεται τόσες λύσεις όσες δηλώνει η ονομασία της υψηλότερης ποσότητας» . Έχει βέβαια προηγηθεί και η χρήση των μιγαδικών αριθμών ήδη από τον 16ο αιώνα στα πλαίσια της επίλυσης εξισώσεων τρίτου βαθμού από τους N. Fontana (1500 – 1557) γνωστό και με το ψευδώνυμο Tardallia δηλαδή τραυλός, τον G. Cardano (1501 – 1576), τον R. Bombeli (1526 – 1572) και άλλους. Συνεπώς δεν υπάρχουν αδύνατες δευτεροβάθμιες εξισώσεις στο σύνολο των μιγαδικών.

Για να τις λύσει χρησιμοποιεί ταυτότητες. Έτσι για την εξίσωση $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ακολουθεί τα εξής βήματα: Αν x_1, x_2 οι λύσεις της εξίσωσης, τότε $x_1 + x_2 = -\beta$ και $x_1 \cdot x_2 = \gamma$. Από τη ταυτότητα $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2$ έχουμε $(x_1 - x_2)^2 = \beta^2 - 4\gamma \Leftrightarrow x_1 - x_2 = \pm\sqrt{\beta^2 - 4\gamma}$ (9)

Από τη σχέση $x_1 + x_2 = -\beta$ και την (9) προκύπτει τελικά: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}$.

Ολοκληρώνοντας αυτή την ιστορική διαδρομή της δευτεροβάθμιας εξίσωσης θα πρέπει να συμπληρώσουμε ότι μετά τους Descartes και Girard οι μεταγενέστεροι μαθηματικοί ασχολήθηκαν κυρίως με εξισώσεις μεγαλύτερων βαθμών. Κατάφεραν να βρουν τύπους επίλυσης εξισώσεων έως και τετάρτου βαθμού. Η εξίσωση πέμπτου δυσκόλεψε αρκετά τους μαθηματικούς του 17ου και 18ου αιώνα, μέχρι που ο N. H. Abel (1802 – 1829) απέδειξε τη μη επιλυσιμότητα της με ριζικά και ο É. Galois (1811 – 1832) ολοκλήρωσε το έργο του Abel απαντώντας στο ερώτημα για το ποιες εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν με ριζικά και ποιες όχι.

Αυτό που κρατάμε από αυτό το κεφάλαιο και θα το χρησιμοποιήσουμε στο εμπειρικό μέρος της έρευνας μας, εστιάζεται στους τρόπους επίλυσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων από τους Βαβυλώνιους, τους Άραβες και τους Ινδούς, με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις και λύσεις τους (λεκτικές, γεωμετρικές και αλγεβρικές), με βάση τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου. Μια ιστορική αναδρομή που έχοντας ως συνδετικό κρίκο τη παραπάνω μέθοδο και διατρέχοντας τις διάφορες λύσεις, θα μας οδηγήσει στον γενικό τύπο επίλυσης όλων των δευτεροβάθμιων εξισώσεων, τονίζοντας παράλληλα και τον βασικό ρόλο που διαδραματίζει η παραγοντοποίηση στην επίλυση τέτοιων εξισώσεων.

ΚΕΦ. 3ο: ΤΡΟΠΟΣ ΔΙΑΠΡΑΓΜΑΤΕΥΣΗ ΤΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ

Οι βασικές θεωρητικές αρχές σύμφωνα με την Κολέζα (2009, σ.75) για τον σχεδιασμό ενός αναλυτικού προγράμματος σπουδών, τη συγγραφή ενός εγχειριδίου ή κάποιας διδασκαλίας των μαθηματικών σχετίζεται:

α) με την αντίληψη για την φύση τους,

β) με το πώς μαθαίνει κάποιος μαθηματικά και

γ) με τους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης, γνωστικούς και κοινωνικούς.

Για τη πρώτη αρχή και στο ερώτημα *«τι είναι τα μαθηματικά»,* τρεις είναι οι επικρατέστερες σχολές, οι λογικιστές, οι φορμαλιστές και οι ιντουιτιονιστές.

Για τους λογικιστές, τα μαθηματικά είναι *«αλήθειες»* που ισχύουν μόνο σε ένα πλαίσιο εσωτερικών λογικών σχέσεων, για τους φορμαλιστές, είναι ο χειρισμός συμβόλων σε ένα τυπικό (formal) πλαίσιο κανόνων, ενώ για τους ιντουιτιονιστές τα μαθηματικά είναι *«νοητικές κατασκευές»* εξαρτώμενες από τα άτομα που τις κατασκευάζουν.

Οι ερευνητές στράφηκαν κυρίως σε δύο κατευθύνσεις:

α) Στη περιγραφή των μαθηματικών ως μια αυστηρά δομημένη επιστήμη με την ομάδα των Bourbaki (1949) και το μεταρρυθμιστικό κίνημα των *«νέων μαθηματικών»* που επηρεάστηκε από αυτή, στη δεκαετία του ΄60. Δόθηκε έμφαση στη διδασκαλία των αφηρημένων εννοιών και στη σωστή χρήση της μαθηματικής γλώσσας, όπου οι μαθητές έπρεπε μέσω παρατηρήσεων να βρουν κανονικότητες, αλλά επικρίθηκε πολύ έντονα και

β) στη περιγραφή του τρόπου κατασκευής των μαθηματικών από τους μαθηματικούς με τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος από τους Polya (1945) και Lakatos (1976) θεωρώντας τα μαθηματικά ως μια *πειραματική «ημι – εμπειρική» επιστήμη* τα οποία εμφανίζονται με δύο πρόσωπα:

- Ως πειραματική – επαγωγική επιστήμη, ακριβώς όπως προχώρησαν οι μεγάλοι μαθηματικοί του παρελθόντος, με υποθέσεις, πειράματα και διαψεύσεις και
- ως συστηματική – παραγωγική επιστήμη μέσω του ευκλείδειου τρόπου εμφάνισης των μαθηματικών εννοιών.

Για τη δεύτερη αρχή, δηλαδή του τρόπου που μαθαίνουν οι μαθητές μαθηματικά, η αναζήτηση πρέπει να γίνει στα κείμενα των I. Kant (1724 – 1804), των Piaget και L. Vygotsky (1896 – 1934) και στις διάφορες τάσεις του κονστρουκτιβισμού και του μηχανισμού που βρίσκεται πίσω από τη διαδικασία κατασκευής της γνώσης. Από τη μία έχουμε τους βιολογικούς – υποκειμενικούς μηχανισμούς σύμφωνα με τον Piaget και από την άλλη τους κοινωνικούς παράγοντές σύμφωνα με τον Vygotsky που επηρεάζουν τη μάθηση.

Τέλος για τη τρίτη αρχή, των γνωστικών και κοινωνικών στόχων της εκπαίδευσης, θα πρέπει να επισημανθεί ότι βασική επιδίωξη τους σήμερα είναι να μπορούν οι μαθητές να περιγράψουν και να ερμηνεύσουν σε ικανοποιητικό βαθμό τον πραγματικό κόσμο, καθώς και τον κόσμο των μαθηματικών με μαθηματικούς όρους. Επίσης να μπορούν να *«επινοήσουν»* και να *«επανα- ανακαλύψουν»* τα μαθηματικά, μέσα από διαδικασίες *«μαθηματικοποίησης»* της πραγματικότητας με την αρωγή της ιστορίας των μαθηματικών. Δηλαδή να κατανοήσουν οι μαθητές ότι τα μαθηματικά είναι μια *«ανθρώπινη δημιουργία, υπό συνεχή διαπραγμάτευση»* (Κολέζα, 2009, σελ. 87).

3.1 Η Δευτεροβάθμια Εξίσωση σε Δ.Ε.Π.Π.Σ - Α.Π.Σ. 2003 Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (Ν.Π.Σ.) 2011

1. Το ισχύον πρόγραμμα σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ - Α.Π.Σ. 2003)

Το σημερινό Π.Σ. (Δ.Ε.Π.Π.Σ 2003) που αμφισβητεί το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας το οποίο έδινε έμφαση στο τελικό προϊόν της μαθηματικής δημιουργίας και στον τρόπο παρουσίασης του, προάγει τη δραστηριότητα μέσω της οποίας παράγεται το τελικό αποτέλεσμα. Επομένως για το σημερινό Π.Σ. τα μαθηματικά αποτελούν όχι μόνο ένα σύστημα γνώσεων αλλά και μια διαδικασία σύλληψης, οργάνωσης και τεκμηρίωσης αυτών των γνώσεων. Με βάση λοιπόν αυτή τη θεωρία μάθησης οπού εντάσσεται σε ένα κονστρουκτιβιστικό μοντέλο η επιλογή των δραστηριοτήτων γίνεται έτσι ώστε να είναι κατανοητή από όλους τους μαθητές, να αφήνει περιθώρια για έρευνα και αυτενέργεια και να ενθαρρύνει τη συνεργατικότητα και την ομαδική εργασία. Σημαντικό για το παρόν πρόγραμμα αποτελεί η πολλαπλή προσέγγιση μιας έννοιας μέσω διάφορων τύπων αναπαραστάσεων όπως γραφικών παραστάσεων, συμβολισμών, πινάκων και γεωμετρικών σχημάτων, η διαθεματική προσέγγιση της, μέσω διαθεματικών σχεδίων εργασίας καθώς και η αναφορά στην ιστορία των μαθηματικών. Η διδακτική διαδικασία μόνο μέσα από τις δραστηριότητες που προτείνονται στο σχολικό βιβλίο καθώς και στο βιβλίο του καθηγητή και όχι συνολικά, φαίνεται να επηρεάζεται από τις αρχές της Ρεαλιστική Μαθηματικής Εκπαίδευσης των Ολλανδών μιας και αρκετές απ' αυτές τις δραστηριότητες συνδέονται με την πραγματικότητα.

Συγκεκριμένα για τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις προτείνει τα εξής:

Στόχοι	**Θεματικές Ενότητες (διατιθέμενος χρόνος)**	**Ενδεικτικές Δραστηριότητες**
Να λύνουν εξισώσεις δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων. Να βρίσκουν το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού και να υπολογίζουν τις λύσεις της με τη βοήθεια του τύπου. Να μετατρέπουν ένα τριώνυμο σε γινόμενο παραγόντων. Να λύνουν προβλήματα που οδηγούν σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού.	Εξισώσεις δεύτερου βαθμού. Προβλήματα εξισώσεων δεύτερου βαθμού (7 ώρες)	Η εισαγωγή της εξίσωσης δευτέρου βαθμού θα γίνει με κατάλληλες δραστηριότητες από την καθημερινή ζωή, τη Φυσική (ελεύθερη πτώση, βολή προς τα άνω, κτλ.), την Οικονομία (ανατοκισμός για δυο έτη, κτλ.).
Να λύνουν κλασματικές εξισώσεις που μετασχηματίζονται σε εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού	Κλασματικές εξισώσεις (3 ώρες)	Η εισαγωγή της κλασματικής εξίσωσης να γίνει με δραστηριότητες από άλλα γνωστικά αντικείμενα, π.χ. Φυσική ,Χημεία κτλ.

2. Το νέο πρόγραμμα σπουδών (Ν.Π.Σ. 2011)(Γυμνάσιο)

Το Ν.Π.Σ θεωρεί τη φύση των μαθηματικών αφαιρετική με μία αυστηρότητα και πολυπλοκότητα των εμπλεκομένων ιδεών και της οργάνωσης τους. Η ενεργή και εντατική εμπλοκή στην προσπάθεια επίλυσης ενός προβλήματος, καθώς και ο ιδιαίτερος γλωσσικός και συμβολικός κώδικας έκφρασης των νοημάτων χαρακτηρίζουν την αυθεντική μαθηματική δραστηριότητα. Η μαθηματική σκέψη προϋποθέτει ικανότητα διαχείρισης βασικών δομικών στοιχείων των μαθηματικών, όπως είναι οι έννοιες, οι ιδιότητες και οι τρόποι απόδειξης του μαθηματικού συλλογισμού, με τρόπο που να καθιστά φανερές τις σχέσεις μεταξύ εννοιών και διαδικασιών γύρω από μια *«θεμελιώδη ιδέα»*. Γι' αυτό και η μαθηματική επιστήμη θεωρείται επιστήμη δομών. Το συγκεκριμένο πρόγραμμα αναπτύχθηκε σε τρεις ηλικιακούς κύκλους με βάση τη διδακτική τροχιά. Ο πρώτος ηλικιακός κύκλος αφορά μαθητές του νηπιαγωγείου, της Α΄ τάξης και της Β΄ τάξης (5-8 ετών), ο δεύτερος κύκλος περιλαμβάνει μαθητές των Γ', Δ', Ε' και Στ΄ τάξεων (8 -12 ετών) και ο τελευταίος ηλικιακός κύκλος συμπεριλαμβάνει τους μαθητές των τάξεων του Γυμνασίου (12-15 ετών). Κάθε διδακτική τροχιά απαρτίζεται από τρία μέρη: ένα μαθητικό στόχο (πρόκειται για έννοιες, δεξιότητες και ικανότητες), μια διαδρομή (πρόκειται για επάλληλα επίπεδα σκέψης που οδηγούν στην επίτευξη του στόχου) και ένα σύνολο από διδακτικές δραστηριότητες, αντίστοιχες των επιπέδων σκέψης. Οι βασικές θεματικές περιοχές γύρω από τις οποίες αναπτύσσονται τα περιεχόμενα και τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα είναι: Αριθμοί – Άλγεβρα, Χώρος και Γεωμετρία – Μετρήσεις και Στοχαστικά Μαθηματικά. Τέλος στο παρόν πρόγραμμα επειδή ακριβώς δεν υπάρχουν σχολικά βιβλία παρατίθενται ανά τάξη και θεματική ενότητα, βασικά θέματα διδασκαλίας, δραστηριότητες, εκπαιδευτικό υλικό καθώς και τα προσδοκώμενα μαθηματικά αποτελέσματα.

Η θεματική «Άλγεβρα» περιλαμβάνει τρεις τροχιές:

1) ισότητες και ανισότητες,

2) αλγεβρικές παραστάσεις και

3) μοτίβα/ κανονικότητες και συναρτήσεις.

Ιδιαίτερη βαρύτητα δίνεται στη λεγόμενη «αλγεβρική σκέψη» δηλαδή τον μετασχηματισμό αρχικά των απλών αριθμητικών παραστάσεων και αργότερα των αλγεβρικών με αξιοποίηση των ιδιοτήτων των πράξεων. Τη γενίκευση αυτών των ιδιοτήτων και τη λεκτική διατύπωση τους. Την ανακάλυψη της δομής των αριθμητικών και αργότερα των αλγεβρικών παραστάσεων. Τη διερεύνηση των διαφορετικών χρήσεων των γραμμάτων και των συμβόλων, καθώς και την εξοικείωση των μαθητών με διαδικασίες μοντελοποίησης ενός προβλήματος με μια αλγεβρική παράσταση, ώστε να δίνουν νόημα στην άλγεβρα

Από τη τροχιά «Ισότητα – Ανισότητα» (Οδηγός για τον εκπαιδευτικό σελ. 75 - 77). Θα αναφερθούμε μόνο για ισότητα – εξίσωση.

Σημασία της ενότητας

Οι εξισώσεις αποτελούν ισχυρά εργαλεία μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων που προέρχονται είτε από τον χώρο των μαθηματικών (σύνδεση μεταξύ εξισώσεων και συναρτήσεων), είτε από άλλες επιστήμες (π.χ. φυσική), είτε τέλος από την ίδια την καθημερινότητα.

Ήδη από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού, οι μαθητές συναντούν εξισώσεις χωρίς τη χρήση γραμμάτων (π.χ. *3+....=5* ή *.....:2=8*), ενώ στην ΣΤ΄ τάξη αντιμετωπίζουν τις ίδιες εξισώσεις αλλά με τη χρήση γραμμάτων. Στην Α΄ γυμνασίου θα ασχοληθούν με εξισώσεις όπου μόνο στο ένα μέλος έχει άγνωστο, ενώ στη Β΄ τάξη θα μπορούν να λύνουν οποιαδήποτε εξίσωση 1ου βαθμού. Τέλος στην Γ΄ γυμνασίου θα μπορούν να διαπραγματευθούν πολυωνυμικές εξισώσεις που ανάγονται μετά από παραγοντοποίηση σε εξισώσεις πρώτου βαθμού. Στην ίδια τάξη θα συναντήσουν και την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων με τύπο, καθώς και κλασματικές εξισώσεις που ανάγονται σε πρωτοβάθμιες ή δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Αργότερα στο λύκειο θα ασχοληθούν με παραμετρικές εξισώσεις, όπως και με εκθετικές, λογαριθμικές ή τριγωνομετρικές εξισώσεις που απαιτούν κατανόηση των εξισώσεων πρώτου και δευτέρου βαθμού.

Δυσκολίες των μαθητών

- *Παρανόηση του «=».* Οι μαθητές περισσότερο το βλέπουν ως προτροπή να κάνουν πράξεις και να καταλήξουν σε ένα αποτέλεσμα, παρά ως σύμβολο ισοδυναμίας μεταξύ των δύο μελών.
- *Παρανόηση της έννοιας του αγνώστου.* Για κάποιους μαθητές οι εξισώσεις $2α+5=11$ και $2β+5=11$ έχουν διαφορετικές λύσεις, ενώ για κάποιους άλλους δεν είναι καν εξισώσεις, γιατί δεν περιέχουν τον άγνωστο x.
- *Σύγχυση στις διαδικασίες επίλυσης:* Για παράδειγμα το «αλλάζω μέλος αλλάζοντας πρόσημο» είναι κάτι που μπερδεύει τους μαθητές ή στην καλύτερη περίπτωση, το αποστηθίζουν χωρίς όμως να αντιλαμβάνονται τη σημασία του.

- *Δυσκολία στις πολυωνυμικές εξισώσεις μέσω παραγοντοποίησης*: Η δυσκολία βρίσκεται στο συλλογισμό « αν $\alpha \cdot \beta=0$ τότε $\alpha=0$ ή $\beta=0$» καθώς και με το πλήθος των λύσεων (π.χ. η ύπαρξη δύο λύσεων σε μία δευτεροβάθμια εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί ως ένα είδος αοριστίας).
- *Επίλυση προβλημάτων*: Η επίλυση προβλημάτων με εξίσωση αποτελεί μια από τις δυσκολότερες δραστηριότητες της άλγεβρας σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης και σχετίζεται με τις λίγες ευκαιρίες που έχουν οι μαθητές για να μοντελοποιήσουν μια κατάσταση και να την εκφράσουν αλγεβρικά με πρόβλημα.

Προτάσεις για διδακτική διαχείριση

- Μέθοδος δοκιμής – λάθους – βελτίωσης όπου βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια της μεταβλητής – αγνώστου της εξίσωσης και της επίλυσής της, καθώς και των αντίστροφων πράξεων.
- Χρήση μοντέλων όπως η ζυγαριά βοηθάει στην καλύτερη κατανόηση της έννοιας της εξίσωσης
- Εξοικείωση των μαθητών στη χρήση ιδιοτήτων της ισότητας για την αλγεβρική επίλυση των εξισώσεων (δηλαδή με την ίδια πράξη και στα δύο μέλη).
- Χρήση εξισώσεων για τη μοντελοποίηση και επίλυση απλών προβλημάτων που έχουν αντιμετωπιστεί στο παρελθόν με απλούστερες μεθόδους (ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά, προβλήματα εκπτώσεων και αυξήσεων, προβλήματα τόκων, κ.λ.π.).
- Γραφική επίλυση εξισώσεων μέσω συναρτήσεων βοηθάει στην διαμόρφωση αναπαραστάσεων για τις έννοιες: εξίσωση και λύση εξίσωσης.
- Για τις πολυωνυμικές και ιδιαίτερα τις δευτεροβάθμιες θα πρέπει να τονιστεί ο σημαντικός ρόλος της παραγοντοποίησης.

Ακολουθούν δύο ενότητες για την παρουσίαση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης στα σχολικά βιβλία, καθώς και οδηγίες διδασκαλίας από το βιβλίο του καθηγητή, αλλά και από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.), όπου έχουν ως οδηγό το Δ.Ε.Π.Π.Σ - Α.Π.Σ. 2003 εμπλουτισμένο με κάποιες δραστηριότητες από το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (Ν.Π.Σ.) 2011.

3.2 Τρόπος Παρουσίασης - Ιστορικές Αναφορές για την Εξίσωση 2ου Βαθμού στα Σχολικά Βιβλία

Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις διδάσκονται για πρώτη φορά στη Γ΄ γυμνασίου και κατόπιν στην Α΄ λυκείου. Όμως από τη Β΄ γυμνασίου και κατά τη διδασκαλία της τετραγωνικής ρίζας (2ο κεφ. άλγεβρας, παράγραφος 2.1 σελ. 44 και παράγραφος 2.2 σελ. 48) υπάρχουν οι τρεις παρακάτω ασκήσεις, όπου ζητείται να επιλυθούν δευτεροβάθμιες εξισώσεις στη πιο απλή τους μορφή, συνδυαζόμενες βέβαια με το Πυθαγόρειο θεώρημα και τη τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού.

2. Η εξίσωση $x^2 = 16$ έχει λύσεις:
Α: μόνο το 4 Β: μόνο το -4 Γ: το 4 και το -4.

6 Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς x που ικανοποιούν τις εξισώσεις:
α) $x^2 = 9$ β) $x^2 = 25$
γ) $x^2 = 64$ δ) $x^2 = \frac{100}{81}$.

4 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $x^2 = 0$, β) $x^2 = 5$, γ) $x^2 = -3$, δ) $x^2 = 17$.

Στη **Γ΄ γυμνασίου** η δευτεροβάθμια εξίσωση διδάσκεται στο 2ο κεφάλαιο της άλγεβρας στη παράγραφο 2.2 (σελ. 89 – 95). Η εισαγωγή της γίνεται μέσω μιας δραστηριότητα (Ενότητα Ε παράρτημα) και με τη διαδικασία εύρεσης πλευρών, ορθογωνίου ή τετραγώνου, όταν δίνεται το εμβαδόν τους.

Ο στόχος των ερωτημάτων της δραστηριότητας είναι η δημιουργία εξισώσεων δευτέρου βαθμού, κλιμακούμενης δυσκολίας και η προσπάθεια επίλυσης τους από τους μαθητές, μέσω καθοδηγούμενης διδασκαλίας, στηριζόμενοι σε προηγούμενες γνώσεις, όπως η παραγοντοποίηση. Δίνεται έτσι η ευκαιρία στους μαθητές να ασχοληθούν μ' ένα πρόβλημα με το οποίο καταλήγουν και στις τρεις μορφές της εξίσωσης: $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$.

Συγκεκριμένα στις εξισώσεις:

α) $x^2 = 9$ ή $x^2 - 9 = 0$

β) $(x + 3)^2 = 9(x + 1)$ ή $x^2 = 3x$ ή $x^2 - 3x = 0$

γ) $(x + 3)^2 + 9(x + 1) = 34$ ή $x^2 + 15x - 16 = 0$

Κατόπιν ζητείται από τους μαθητές να συσχετίσουν τις παραπάνω εξισώσεις με τη γενική της μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, ώστε να αναγνωρίσουν τους συντελεστές α, β, γ της κάθε μιας. Στη συνέχεια γίνεται εφαρμογή της παραγοντοποίησης για τις δύο πρώτες από αυτές, έχοντας υπόψη οι μαθητές ότι αν $\alpha \cdot \beta=0$ τότε $\alpha=0$ ή $\beta=0$, με σκοπό να βρεθούν οι λύσεις τους. Μάλιστα για την πρώτη από τις παραπάνω εξισώσεις εφαρμόζεται και 2ος τρόπος με εύρεση τετραγωνικής ρίζας που τους παραπέμπει στη Β΄ γυμνασίου. Οι παραπάνω δύο εξισώσεις έχουν ένα όρο λιγότερο από τη τρίτη, κάτι που διευκολύνει την επίλυση τους. Τι γίνεται όμως για μια εξίσωση με όλους τους όρους της. Πριν την επίλυση της τελευταίας από τις παραπάνω εξισώσεις, γίνεται αναφορά στην: $9x^2–6x+1=0$. Ο λόγος, το πρώτο μέρος της είναι ανάπτυγμα τετραγώνου, δηλαδή $(3x)^2–2\cdot 3x+1^2=0$ ή $(3x–1)^2=0$ και άρα $x=1/3$ διπλή λύση κάτι που μπορεί να υπολογισθεί εύκολα. Με τη $x^2+15x–16=0$ θα πρέπει να εφαρμοστεί η γνωστή μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου όπως την εφάρμοσε ο Ινδός Sridhara και περιγράφεται στο παράρτημα αλλά και στα φύλλα εργασίας που δόθηκαν στους μαθητές κατά τη διδακτική παρέμβαση. Τέλος μέσω της ίδιας μεθόδου, αλλά στη γενική μορφή εξίσωσης 2ου βαθμού, οδηγείται στο γνωστό τύπο με τη διακρίνουσα. (Στο παράρτημα και στην ενότητα Ε, υπάρχουν όλες οι σελίδες του σχολικού βιβλίου).

Για την ολοκλήρωση της έννοιας αυτής δίνεται και ένα ιστορικό σημείωμα της επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης από τους Βαβυλώνιους στο τέλος της παραγράφου

ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σε μια βαβυλωνική πλάκα (περίπου 1650 π.Χ.) βρίσκουμε χαραγμένο και λυμένο το παρακάτω πρόβλημα(*):

«Αν από την επιφάνεια ενός τετραγώνου αφαιρέσω την πλευρά του, θα βρω 870. Να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου».

Τον γραφέα της πλάκας δεν τον απασχολούσε η γεωμετρική έννοια της ποσότητας, αλλά η ίδια η ποσότητα, όπως αυτή εκφράζεται με τους συγκεκριμένους αριθμούς (Γι' αυτό προσθέτει μήκος με επιφάνεια).

Αν χρησιμοποιήσουμε σημερινό συμβολισμό και υποθέσουμε ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι x, τότε η λύση του προβλήματος οδηγεί στη λύση της εξίσωσης $x^2 – x = 870$.

Ο Βαβυλώνιος γραφέας της πλάκας μας προτείνει να λύσουμε το πρόβλημα αυτό ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- Πάρε το μισό του 1 που είναι το $\frac{1}{2}$.
- Πολλαπλασίασε το $\frac{1}{2}$ με το $\frac{1}{2}$, αποτέλεσμα $\frac{1}{4}$.
- Πρόσθεσε το $\frac{1}{4}$ στο 870 και θα βρεις $870\frac{1}{4}$.
- Το $870\frac{1}{4}$, είναι το τετράγωνο του $29\frac{1}{2}$.
- Πρόσθεσε στο $29\frac{1}{2}$ το $\frac{1}{2}$ (που βρήκες αρχικά) και θα βρεις 30.
- Αυτή είναι η πλευρά του τετραγώνου.

• Το 1 είναι ο συντελεστής του x. (Οι Βαβυλώνιοι δε χρησιμοποιούσαν αρνητικούς αριθμούς).

• Οι Βαβυλώνιοι για να βρίσκουν την τετραγωνική ρίζα αριθμών είχαν κατασκευάσει πίνακες με τα τετράγωνα των αριθμών.

• Έκαναν πρόσθεση, όταν στην εξίσωση υπήρχε αφαίρεση (π.χ. $x^2 - x$) και αφαίρεση, όταν στην εξίσωση υπήρχει πρόσθεση (π.χ. $x^2 + x$)

- Να λύσετε την εξίσωση με τη μέθοδο που μάθατε στην ενότητα αυτή και να τη συγκρίνετε με την πρακτική μέθοδο με την οποία έλυναν οι Βαβυλώνιοι τις εξισώσεις 2ου βαθμού. Τι παρατηρείτε;

- Ακολουθώντας τα βήματα των Βαβυλωνίων να λύσετε και το παρακάτω πρόβλημα που είναι χαραγμένο στην ίδια πλάκα. «Αν στην επιφάνεια ενός τετραγώνου προσθέσω την πλευρά του, θα βρω $\frac{3}{4}$. Ποια είναι η πλευρά του τετραγώνου;»

(*) Από το βιβλίο του Θ. Εξαρχάκου: *Ιστορία των Μαθηματικών, Τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αρχαίων Αιγυπτίων*, τόμος Α′, Αθήνα 1997.

Οι παράγραφοι 2.3 και 2.4 αναφέρονται σε προβλήματα και σε κλασματικές εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

Στο τέλος του 2ου κεφαλαίου παρατίθεται και το παράδειγμα της χρυσής τομής, του οποίου η λύση ανάγεται σε μια κλασματική και κατόπιν σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση:

ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η χρυσή τομή

Πώς μπορούμε να χωρίσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δύο άνισα μέρη, έτσι ώστε το αποτέλεσμα που θα προκύψει από αυτόν τον χωρισμό να δημιουργεί μια αίσθηση αρμονίας;

Η κατασκευή των δύο διαζωμάτων στο θέατρο της Επιδαύρου (τέλος του 4ου αιώνα π.Χ.) δείχνει πώς έλυσαν το πρόβλημα αυτό οι αρχαίοι Έλληνες. Τα σκαλιά του θεάτρου έχουν χωριστεί σε δύο άνισα μέρη με τέτοιο τρόπο, που το αισθητικό αποτέλεσμα είναι ευχάριστο στο μάτι. Για να καταλάβετε με ποιον τρόπο το πέτυχαν:

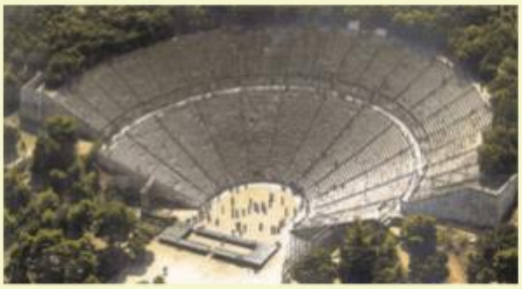
α) Υπολογίστε τους λόγους των σκαλιών $\frac{34+21}{34}$ και $\frac{34}{21}$.

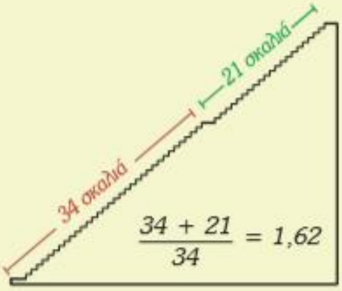
Τι παρατηρείτε;

Ο χωρισμός έχει γίνει με τυχαίο τρόπο;

Το πρόβλημα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

«Να χωριστεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = λ σε δύο άνισα μέρη ΑΓ και ΓΒ, ώστε ο λόγος ολόκληρου προς το μεγαλύτερο μέρος να είναι ίσος με το λόγο του μεγαλύτερου προς το υπόλοιπο τμήμα».





β) Να δείξετε ότι η λύση του προβλήματος αυτού ανάγεται στην επίλυση της κλασματικής εξίσωσης $\frac{\lambda}{x} = \frac{x}{\lambda - x}$ (1).

γ) Να λύσετε την κλασματική εξίσωση (1) και να υπολογίσετε το x ως συνάρτηση του λ.

δ) Να αποδείξετε ότι ο λόγος $\varphi = \frac{\lambda}{x}$ είναι ίσος με $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618...$

Ο αριθμός 1,618... ονομάζεται **λόγος της χρυσής τομής** και συμβολίζεται διεθνώς με το γράμμα φ προς τιμή του γλύπτη Φειδία. Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν διαπιστώσει ότι, όπου εμφανίζεται ο λόγος της χρυσής τομής, δημιουργείται μια αίσθηση αρμονίας.

Το ορθογώνιο του οποίου οι διαστάσεις έχουν λόγο φ, λέγεται **«χρυσό ορθογώνιο»** και το συναντάμε συχνά στην αρχιτεκτονική και τη ζωγραφική.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο Παρθενώνας, οι διαστάσεις του οποίου έχουν λόγο $\frac{\alpha}{\beta} = \varphi$

Όσο για το βιβλίο του καθηγητή, εξηγείται ο Βαβυλωνιακός τρόπο επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης με τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» με την απαραίτητη χρήση του σύγχρονου συμβολισμού. Συγκεκριμένα λύνονται οι εξισώσεις: $x^2 - \beta x = \gamma$, $x^2 + \beta x = \gamma$, $x^2 + x = \frac{3}{4}$ και $7x^2 + 6x = 1$ (Παράρτημα)

Γίνεται τέλος αναφορά για τον μεγάλο Άραβα μαθηματικό al–Khwarizmi και στη δημιουργία της λέξης «αλγόριθμος» από τη παράφραση του ονόματός του, καθώς και στη δημιουργία της λέξης «άλγεβρα» από την αλλοίωσης του τίτλου ενός σπουδαίου μαθηματικού έργου του. Το ιστορικό σημείωμα κλείνει με τη μέθοδο επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης από τον σπουδαίο Ινδό μαθηματικό του 11ου αιώνα μ.Χ. Sridhara, για την οποία αναφέρθηκε παραπάνω.

Στην Α΄ λυκείου και στο 3ο κεφ. παράγραφος 3.3 (σελ. 88 – 96) επαναλαμβάνεται η μέθοδος *«συμπλήρωσης τετραγώνου»* στη γενική της μορφή, με την προσθήκη των γνωστών τύπων του Vieta:

Στην περίπτωση που η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2, έχουμε:

$$x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$, τότε έχουμε τους τύπους:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Καθώς και τον μετασχηματισμό της δευτεροβάθμιας εξίσωσης με βάση το S και P:

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2)\cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0 \end{aligned}$$

Η τελευταία μορφή της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ μας δίνει τη δυνατότητα να την κατασκευάσουμε, όταν γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της.

Στο τέλος της παραγράφου αναφέρονται λυμένα παραδείγματα εξισώσεων με απόλυτα, καθώς και κλασματικές και διτετράγωνες εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού. Στις ασκήσεις για λύση περιέχονται και δευτεροβάθμιες παραμετρικές εξισώσεις.

Τέλος ολοκληρώνεται το κεφάλαιο με την παράθεση ενός ιστορικού σημειώματος των τριών μεθόδων επίλυσης εξίσωσης, από τους Sridhara (1025 μ.Χ. περίπου), Vieta (1540-1603) και Harriot (1560-1621) όπως αναφέρθηκε και στο 2ο κεφ. της παρούσας εργασίας.

3.3 Οδηγίες Διδασκαλίας

Στις αρχές κάθε σχολικού έτους, το ινστιτούτο εκπαιδευτικής πολιτικής **(Ι.Ε.Π.)** αποστέλλει σε όλα τα σχολεία οδηγίες διδασκαλίας για κάθε μάθημα. Για τα μαθηματικά τα τελευταία χρόνια οι οδηγίες είναι παρόμοιες, με πολύ μικρές διαφοροποιήσεις ανά έτος, που αφορούν κυρίως στην επιλογή των ασκήσεων, στις ώρες διδασκαλίας ανά παράγραφο και ίσως στη προσθήκη ή απάλειψη κάποιων μερών της ύλης. Αναφορικά με τη δευτεροβάθμια εξίσωση κινούνται στα ίδια πλαίσια κάθε χρόνο, χωρίς διαφοροποιήσεις, με εξαίρεση την μετάθεση της διδασκαλίας των κλασματικών εξισώσεων στο λύκειο, που προτάθηκε πριν τρία χρόνια (περίοδος 2016-17).

Θα καταγράψουμε τις τελευταίες οδηγίες που δόθηκαν, τη τρέχων σχολική περίοδο 2019 – 20 για το 2ο κεφ. άλγεβρας, αναφορικά με τις εξισώσεις, στη Γ΄ γυμνασίου, παράλληλα με τις οδηγίες που δίνονται στο βιβλίο του καθηγητή.

Κεφάλαιο 2ο: Εξισώσεις- Ανισώσεις

Οι μαθητές έχουν διδαχτεί στις προηγούμενες τάξεις τις εξισώσεις 1ου βαθμού και τις έχουν χρησιμοποιήσει στη λύση προβλημάτων. Επίσης έχουν αντιμετωπίσει εξισώσεις της μορφής $x^2 = \alpha$ στη Β΄ γυμνασίου. Το υπόλοιπο περιεχόμενο του κεφαλαίου που αφορά τις εξισώσεις είναι νέο και συνδέεται με το προηγούμενο κεφάλαιο.

- *Η εξίσωση αx + β = 0*

Προτείνεται 1 διδακτική ώρα.

Η υπενθύμιση των εξισώσεων 1ου βαθμού προτείνεται να γίνει μέσω παραδειγμάτων.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

- ✓ Να θυμηθούν πώς λύνεται μια εξίσωση πρώτου βαθμού καθώς και να αναγνωρίζουν πότε μια εξίσωση της μορφής *αx + β = 0* έχει μια λύση, είναι αδύνατη ή είναι ταυτότητα.

Διδακτικές οδηγίες

- ✓ Στο βιβλίο του καθηγητή προτείνεται η άσκηση 5 σελ. 88 η οποία προσφέρεται για να καταλάβουν οι μαθητές καλύτερα πότε μια εξίσωση είναι ταυτότητα. Σ' αυτήν ζητείται από τους μαθητές να σκεφτούν έναν αριθμό, να κάνουν διάφορες πράξεις και να πουν το αποτέλεσμα. Κάθε μαθητής θα πρέπει να έχει βρει αποτέλεσμα τον αριθμό 5, ανεξάρτητα ποιον αριθμό σκέφτηκε αρχικά. Έτσι δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να συζητήσουν γιατί συνέβη αυτό και να οδηγηθούν στις εξισώσεις που είναι αόριστες ή ταυτότητες. Στην συνέχεια, θα μπορούσε να ζητηθεί από τους μαθητές να φτιάξουν και εκείνοι ανάλογα προβλήματα.
- ✓ Στις οδηγίες του Ι.Ε.Π. (2019 – 20) προτείνονται 2 λυμένα παραδείγματα εξισώσεων 1ου βαθμού, καθώς και οι τύποι, όλα στη σελ. 86, που

αναφέρονται στις περιπτώσεις που μια εξίσωση έχει μοναδική λύση, είναι αδύνατη ή ταυτότητα. Δεν χρειάζεται να γίνουν ασκήσεις στην επίλυση πρωτοβαθμίων εξισώσεων και η παράγραφος δεν αποτελεί μεμονωμένα αντικείμενο εξέτασης.

- *Εξισώσεις δευτέρου βαθμού*

Προτείνονται 5 διδακτικές ώρες με βάση το βιβλίο του καθηγητή και 7 διδακτικές ώρες σύμφωνα με τις οδηγίες του Ι.Ε.Π. του σχολικού έτους 2019 – 2020.

Στο βιβλίο του καθηγητή αναφέρονται τα παρακάτω:

Α) Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων (2 διδακτικές ώρες)

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

- ✓ Να μάθουν τη γενική μορφή μιας εξίσωσης 2ου βαθμού με έναν άγνωστο x και να διακρίνουν τους συντελεστές της.
- ✓ Να μπορούν να επιλύουν εξισώσεις 2ου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων (ελλιπείς μορφές $\alpha x^2 + \beta x = 0$, $\alpha x^2 + \gamma = 0$ και πλήρη μορφή με συμπλήρωση τετραγώνου).

Διδακτικές οδηγίες

- ✓ Ασκήσεις επίλυσης εξισώσεων με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων οι μαθητές έχουν αντιμετωπίσει και στη παράγραφο 1.6 «παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων». Θα πρέπει να τους τονιστεί ιδιαίτερα, ότι η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται μόνο στην περίπτωση που το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι γινόμενο και το δεύτερο μέλος είναι μηδέν. Έχει παρατηρηθεί ότι τη χρησιμοποιούν και σε άλλες περιπτώσεις, όπως:

  Για την εξίσωση $(x+1)+(x-3)=0$, γράφουν $x+1=0$ και $x-3=0$ ή

  για την εξίσωση $x(x+2)=5$, γράφουν $x=5$ και $x+2=1$.
- ✓ Να γίνει αναφορά ότι την ίδια μέθοδο χρησιμοποιούμε και σε εξισώσεις μεγαλύτερες του 2ου βαθμού όπως το παράδειγμα 2 σελ. 92: $x^2(2x-1)-6x(2x-1)+9(2x-1)=0$
- ✓ Η συμπλήρωση τετραγώνου είναι πολύ σημαντική και μας οδηγεί στον τύπο που θα διδαχτούν στην επόμενη ενότητα.
- ✓ Από τη λύση των ασκήσεων θα πρέπει να γίνει κατανοητό ότι μια εξίσωση 2ου βαθμού, μπορεί να έχει μια (διπλή), καμιά ή δύο λύσεις.

- ✓ Με βάση την παρακάτω ερώτηση κατανόησης 3, να συζητηθεί στη τάξη το συχνό λάθος που κάνουν οι μαθητές όταν απλοποιούν παραστάσεις:

3 Ένας μαθητής λύνοντας την εξίσωση $x^2 = 6x$ απλοποίησε με το x και βρήκε ότι έχει μοναδική λύση τη $x = 6$. Παρατηρώντας όμως την εξίσωση διαπίστωσε ότι επαληθεύεται και για $x = 0$. Πού έγινε το λάθος και χάθηκε η λύση $x = 0$;

Β) Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού με τη βοήθεια τύπου (3 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

- ✓ Να μάθουν να επιλύουν εξισώσεις δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια του τύπου και να κατανοήσουν τη σημασία της διακρίνουσας για τον προσδιορισμό του πλήθους των λύσεων της εξίσωσης.
- ✓ Με απλά παραδείγματα να μάθουν να μετατρέπουν ένα τριώνυμο σε γινόμενο παραγόντων.

Διδακτικές οδηγίες

- ✓ Η παρακάτω άσκηση 3 σελ. 97 δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να αντιληφθούν ότι σε ορισμένες περιπτώσεις η παραγοντοποίηση είναι συντομότερος τρόπος για την επίλυση των εξισώσεων δευτέρου βαθμού.

  3 Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $x^2 - 7x = 0$ β) $x^2 - 16 = 0$
  i) με τη βοήθεια του τύπου ii) με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

  Ειδικά στις περιπτώσεις που οι εξισώσεις είναι των ελλιπών μορφών $\alpha x^2 + \beta x = 0$ και $\alpha x^2 + \gamma = 0$

- ✓ Δεν πρέπει να διατεθεί χρόνος για:

  α) τη διερεύνηση πολύπλοκων εξισώσεων δευτέρου βαθμού

  β) την επίλυση προβλημάτων που θα διδαχτούν στην επόμενη ενότητα και τα οποία παρουσιάζουν ιδιαίτερη δυσκολία.

Στις οδηγίες του Ι.Ε.Π. (2019 -20) προτείνονται τα εξής:

- ✓ Δεδομένου ότι έχει διδαχθεί επαρκώς η παραγοντοποίηση, στο 1ο κεφάλαιο, η διδασκαλία της επίλυσης εξίσωσης 2ου βαθμού μπορεί να ξεκινήσει από την παράγραφο 2.2 Β σελ.94 με την εφαρμογή του τύπου της επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Η απόδειξη του, μπορεί να γίνει κατά την κρίση του διδάσκοντα χωρίς φυσικά να αποτελεί αντικείμενο εξέτασης.
- ✓ Θα γίνουν τα παρακάτω παραδείγματα 1 ,2 σελ. 95.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2x^2 + 5x + 3 = 0$ β) $6x^2 - 5x + 2 = 0$ γ) $-16x^2 + 8x - 1 = 0$

Λύση

α) Στην εξίσωση $2x^2 + 5x + 3 = 0$ είναι $α = 2$, $β = 5$, $γ = 3$, οπότε η διακρίνουσα είναι $Δ = β^2 - 4αγ = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = \frac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 1}{4}$,

δηλαδή είναι $x = \frac{-5 + 1}{4} = -1$ ή $x = \frac{-5 - 1}{4} = -\frac{3}{2}$

β) Στην εξίσωση $6x^2 - 5x + 2 = 0$ είναι $α = 6$, $β = -5$, $γ = 2$, οπότε η διακρίνουσα είναι $Δ = β^2 - 4αγ = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 25 - 48 = -23 < 0$.

Άρα η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη).

γ) Στην εξίσωση $-16x^2 + 8x - 1 = 0$ είναι $α = -16$, $β = 8$, $γ = -1$, οπότε η διακρίνουσα είναι $Δ = β^2 - 4αγ = 8^2 - 4 \cdot (-16) \cdot (-1) = 64 - 64 = 0$.

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, την $x = -\frac{β}{2α} = -\frac{8}{2 \cdot (-16)} = \frac{1}{4}$

2 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $9x^2 - (5x - 1)^2 = 2x$ β) $\frac{x(x + 3)}{3} - \frac{x - 6}{6} = \frac{1}{2}$

Λύση

α) $9x^2 - (5x - 1)^2 = 2x$

$9x^2 - (25x^2 - 10x + 1) = 2x$

$9x^2 - 25x^2 + 10x - 1 - 2x = 0$

$-16x^2 + 8x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{4}$ (διπλή λύση)

(Παράδειγμα 1γ)

β) $\frac{x(x + 3)}{3} - \frac{x - 6}{6} = \frac{1}{2}$

$6 \cdot \frac{x(x + 3)}{3} - 6 \cdot \frac{x - 6}{6} = 6 \cdot \frac{1}{2}$

$2x(x + 3) - (x - 6) = 3$

$2x^2 + 6x - x + 6 - 3 = 0$

$2x^2 + 5x + 3 = 0$

$x = -1$ ή $x = -\frac{3}{2}$ *(Παράδειγμα 1α)*

3 α) Να λυθεί η εξίσωση $2x^2 - 8x + 6 = 0$.

β) Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο $2x^2 - 8x + 6$.

Λύση

α) Στην εξίσωση $2x^2 - 8x + 6 = 0$ είναι $α = 2$, $β = -8$, $γ = 6$, οπότε η διακρίνουσα είναι $Δ = β^2 - 4αγ = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 64 - 48 = 16 > 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = \frac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$ ή $x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm 4}{4}$,

δηλαδή είναι $x = 3$ ή $x = 1$.

β) $2x^2 - 8x + 6 = 2(x^2 - 4x + 3) = 2(x^2 - 3x - x + 3) = 2\left[x(x - 3) - (x - 3)\right] =$
$= 2(x - 3)(x - 1)$

Ειδικά για τα ερωτήματα α) β) του παραδείγματος 1 προτείνεται να συζητηθεί και η δυνατότητα επίλυσης με παραγοντοποίηση και να συγκριθούν οι μέθοδοι. Στο παράδειγμα 2 α) να επισημανθεί ότι η χρήση της ταυτότητας διαφοράς τετραγώνων δεν μπορεί να δώσει απάντηση. Τέλος, στο παράδειγμα 3 να προστεθεί η ερώτηση: Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{2x^2 - 8x + 6}{x - 3} = 0$. Μέσω αυτής επιδιώκεται να αναδειχθεί η λειτουργικότητα της παραγοντοποίησης πολυωνύμων.

Επίσης με βάση το Ν.Π.Σ. 2011 προτείνονται και οι παρακάτω δραστηριότητες

Ενδεικτική δραστηριότητα 1η:

- ✓ Μέσω της διαπίστωσης ότι $1^3=1$, προτείνεται να βρεθούν όλοι οι αριθμοί που έχουν την ιδιότητα, ο κύβος του αριθμού να ισούται με τον ίδιο τον αριθμό. Είναι ένα μαθηματικό πρόβλημα που οδηγεί στη διατύπωση μιας εξίσωσης τρίτου βαθμού και την επίλυσή της με παραγοντοποίηση. Μια διερεύνηση των μαθητών με δοκιμές είναι πιθανόν να οδηγήσει σε κάποιες λύσεις (πχ. στο 0 και το 1) αλλά όχι σε όλες. Αυτή η δυσκολία μπορεί να λειτουργήσει ως αφορμή ώστε να αναδειχτεί η σημασία της επίλυσης μιας εξίσωσης μέσω αλγεβρικού μετασχηματισμού για την εύρεση όλων των λύσεων της.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2η:

- ✓ Η επίλυση της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x=0$ μπορεί να υποστηριχτεί και με το μικροπείραμα «Επίλυση εξισώσεων της μορφής $\alpha x^2+\beta x=0$, με $\alpha\neq 0$» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία.

Ενδεικτική δραστηριότητα 3η:

- ✓ Μέσω του λογισμικού Geogebra οι μαθητές σχεδιάζουν τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=x^3+2x^2$ και $y=2x^2+x$. Σημειώνουν στη γραφική παράσταση το ή τα κοινά σημεία τους. Αν υποθέσουμε ότι ένα κοινό σημείο είναι το Α, θα πρέπει να ερμηνεύσουν τις συντεταγμένες του σε σχέση με τους τύπους των δύο συναρτήσεων. Να Προσδιορίζουν τις συντεταγμένες του κοινού ή των κοινών τους σημείων (α) από τις γραφικές παραστάσεις και (β) αλγεβρικά με χρήση των τύπων των δύο συναρτήσεων.

  [Σχόλιο: Οι στόχοι της δραστηριότητας είναι α) η σύνδεση των πολυωνυμικών εξισώσεων και των αλγεβρικών μεθόδων επίλυσής τους με την γραφική αναπαράστασή τους και β) η αναγνώριση της λύσης της εξίσωσης ως τετμημένης του κοινού σημείου (ή των κοινών σημείων).]

- *Προβλήματα εξισώσεων 2ου βαθμού*

Προτείνονται 2 διδακτικές ώρες.

Σύμφωνα με το βιβλίο του καθηγητή

Διδακτικοί στόχοι

- ✓ Στόχος στην ενότητα αυτή είναι να ασχοληθούν οι μαθητές με τη λύση προβλημάτων τα οποία ανάγονται σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού, αξιοποιώντας τις γνώσεις προηγούμενων ενοτήτων.

Διδακτικές οδηγίες

- ✓ Για να εξοικειωθούν οι μαθητές με την μαθηματικοποίηση των προβλημάτων (την επιλογή των άγνωστων και την κατάστρωση της εξίσωσης του προβλήματος), μπορούν να δοθούν διάφορες εκφράσεις και να τους ζητηθεί να τις παραστήσουν συμβολικά, όπως:

  Το τετράγωνο ενός αριθμού μειωμένο κατά 3.

  Το γινόμενο δυο διαδοχικών ακεραίων αριθμών κ.λ.π. (ασκήσεις 5, 6).
- ✓ Οι μαθητές, αφού λύσουν ένα πρόβλημα, πρέπει να ελέγχουν τα αποτελέσματα και να τα αξιολογούν με βάση τους περιορισμούς.
- ✓ Στο παρακάτω λυμένο πρόβλημα 2 να εξηγηθεί στους μαθητές ότι ο τύπος $\frac{1}{10}x^2 + 20x + 500$ δεν είναι αυθαίρετος, αφού εξηγείται ως εξής: 500 ευρώ είναι το σταθερό κόστος (μισθοί, ενοίκια, ΙΚΑ, κ.τ.λ. που είναι ίδιο για κάθε παραγωγή), 20 ευρώ είναι το κόστος των υλικών για την κατασκευή ενός πουκαμίσου, οπότε 20x είναι το κόστος υλικών για την κατασκευή x πουκαμίσων, $\frac{1}{10}x^2$ προκύπτει εμπειρικά και καλύπτει άλλα έξοδα που επηρεάζονται από την παραγωγή.

Πρόβλημα 2ο

Ένας οικονομολόγος υπολόγισε ότι μια βιοτεχνία ρούχων για να κατασκευάσει x πουκάμισα ξοδεύει $\frac{1}{10}x^2 + 20x + 500$ ευρώ. Αν η βιοτεχνία πουλάει κάθε πουκάμισο 60 €, πόσα πουκάμισα πρέπει να πουλήσει, ώστε να κερδίσει 3500 €;

Οι οδηγίες (σχ. έτους 2019 – 20) για τις εξισώσεις 2ου βαθμού στην **Α΄ λυκείου** και στη παράγραφο 3.3, που στηρίζονται στο Α.Π.Σ. του 2011 και στο Ν.Π.Σ. για την Α΄ λυκείου αναφέρουν τα εξής:

- *Εξισώσεις 2ου Βαθμού*

Προτείνονται να διατεθούν 7 ώρες.

Η επίλυση της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$ στη γενική της μορφή με τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» είναι μια διαδικασία που δυσκολεύει τους μαθητές. Προτείνεται να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές τη μέθοδο της «συμπλήρωσης τετραγώνου» πρώτα σε εξισώσεις 2ου βαθμού με συντελεστές συγκεκριμένους αριθμούς και στη συνέχεια με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού να γενικεύσουν τη διαδικασία. Επίσης, προτείνεται η επίλυση απλών εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού και να δοθεί έμφαση στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων 2ου βαθμού.

Οι τύποι του Vieta επιτρέπουν στους μαθητές είτε να κατασκευάσουν μια εξίσωση 2ου βαθμού με δεδομένο το άθροισμα και το γινόμενο ριζών της είτε να προσδιορίσουν απευθείας τις ρίζες της (βρίσκοντας δυο αριθμούς που να έχουν άθροισμα S και γινόμενο P). Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές, υπό μορφή άσκησης, να προσδιορίσουν αυτούς τους τύπους και να τους χρησιμοποιήσουν στην επίλυση σχετικών προβλημάτων.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y = 60t – 5t2$.

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y = 175\ m$;

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από $100\ m$.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Το μικροπείραμα «Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού με τη βοήθεια τύπου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατανόηση της αλγεβρικής και γραφικής προσέγγισης των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού και επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων με τη βοήθεια του τύπου.

ΚΕΦ. 4ο: ΟΙ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΛΑΘΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΟΤΕΡΑ ΣΤΗ ΧΡΗΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Για να εντοπίσει κανείς τις δυσκολίες, τα λάθη, αλλά και τις παρανοήσεις που αντιμετωπίζει ένας μαθητής, όταν έρχεται πρώτη φορά σε επαφή με την άλγεβρα, αλλά και κατά τη διάρκεια της μαθητικής του ζωής όπου η άλγεβρα αποτελεί ένα από τα βασικότερα μαθηματικά αντικείμενα, θα πρέπει να εστιάσει την προσοχή του στη μετάβαση των μαθητών από την αριθμητική στην άλγεβρα, οπού εκεί δημιουργούνται αρκετά προβλήματα, που έχουν να κάνουν με τον διαφορετικό τρόπο σκέψεις που εμπεριέχεται σ' αυτούς τους δύο κλάδους των μαθηματικών. Ως γνωστόν η αριθμητική είναι ο κατεξοχήν τομέας των υπολογισμών, με απώτερο σκοπό την εύρεση μιας αριθμητικής απάντησης, σε αντίθεση με την άλγεβρα που δίνει ιδιαίτερη βαρύτητα στις διαδικασίες και τις σχέσεις που διέπουν τις αλγεβρικές έννοιες, όπου εκφράζονται με απλούς γενικούς τύπους (Λεμονίδης 1996).

Οι μαθητές στο Δημοτικό διδάσκονται κυρίως αριθμητική και μόνο κατά τις τελευταίες τάξεις έρχονται σε επαφή με κάποιες έννοιες της άλγεβρας, όπως οι μεταβλητές και οι εξισώσεις. Η βάση, στη διδασκαλία της άλγεβρας μπαίνει στην Α΄ γυμνασίου, όπου γίνεται εκτεταμένη χρήση των γραμμάτων, παράλληλα βέβαια με τα αριθμητικά παραδείγματα που εξακολουθούν να αποτελούν και την πλειονότητα των ασκήσεων. Στη Β΄ και Γ΄ γυμνασίου η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης είναι ένας από τους βασικότερους στόχους των αναλυτικών προγραμμάτων, όπως έχουν περιγραφεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, γι' αυτό και ο αριθμός των διδακτικών ωρών καλύπτει το σύνολο των ωρών στα μαθηματικά, κυρίως στην Γ΄ γυμνασίου, συγκριτικά με τη γεωμετρία (Οδηγίες Διδασκαλίας Μαθηματικών, 2019-2020).

Θα περίμενε λοιπόν κανείς, στο τέλος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, οι μαθητές να είναι σε θέση να χειρίζονται με άνεση τις αλγεβρικές ιδέες και τα σύμβολα, εντούτοις όπως έχουν καταδείξει αρκετές έρευνες που έχουν γίνει τις τελευταίες δεκαετίες, εδώ αλλά και στο εξωτερικό (Küchemann 1978; 1981; Kieran 1981; Λεμονίδης 1996; Βερύκιος 2003; Δράμαλης & Σακονίδης 2006; Lucariello et al., 2014), ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών αδυνατεί να κατανοήσει βασικές έννοιες της άλγεβρας. Οι περισσότερες από τις παραπάνω έρευνες κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το υψηλό επίπεδο αφαιρετικής σκέψης, παράλληλα με την ιδιομορφία που χαρακτηρίζει τις αλγεβρικές έννοιες είναι οι βασικές αιτίες των περισσοτέρων δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη άλγεβρα (Δράμαλης & Σακονίδης 2006).

Όπως εξάλλου αναφέρει και ο Thwaites (1982) η άλγεβρα δεν είναι μια απλή υπόθεση εφαρμογής κάποιων κανόνων όπως ίσως νομίζουν πολλοί, αλλά εμπεριέχει στοιχεία που καθιστούν τη διδασκαλία της αρκετά δύσκολη. Συγκεκριμένα αναφέρει τέσσερις παράγοντες:

- Την αδυναμία οπτικοποίησης των αλγεβρικών ιδεών,
- την προφανώς αυθαίρετη φύση της,
- την σύνθετη φύση της και
- τη σχέση μεταξύ αλγεβρικού συμβολισμού και πλαισίου αναφοράς.

Ένα από τα βασικά γνωρίσματα της άλγεβρας είναι η εκτεταμένη χρήση συμβόλων. Έτσι τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα τους, όπως:

- Το επίπεδο αφαίρεσης των ιδεών που εκφράζουν,
- τη πυκνότητα του νοήματος που μεταφέρουν.
- την εξάρτηση της σημασίας τους από γειτονικά σύμβολα και
- την έμφαση που δίνεται στο χειρισμό περισσότερο και λιγότερο στη σημασία τους,

αποτελούν παράγοντες που επίσης συνδέονται με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην άλγεβρα (Δράμαλης & Σακονίδης 2006).

Πολλά από τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται και στην αριθμητική και στην άλγεβρα είναι κοινά, εντούτοις η σημασία τους πολλές φορές είναι διαφορετική. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν τα σύμβολα της ισότητας ΄΄=΄΄ και της πρόσθεσης ΄΄+΄΄. Αρχικά φαίνεται να υπάρχει μία κοινή ερμηνεία μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας γι' αυτά τα δύο σύμβολα, ωστόσο παρατηρείται μια αρκετά διαφορετική θεώρηση που κάνουν οι δύο αυτοί κλάδοι των μαθηματικών.

Όπως αναφέρει ο Λεμονίδης (1996), το σύμβολο ΄΄=΄΄ σύμφωνα με τους Cortes A., Vergnaud G. και Kavafian N. (1990), μπορεί να πάρει τις παρακάτω διαφορετικές σημασίες ανάλογα του πλαισίου που βρίσκεται:

- Δίνει αποτέλεσμα: Αυτή η αντίληψη είναι διαδεδομένη στο δημοτικό στα πλαίσια της αριθμητικής, την οποία οι μαθητές κουβαλούν και σε μεγαλύτερες τάξεις. Για αυτούς το σύμβολο ΄΄=΄΄ έχει μόνο την ερμηνεία του να δίνει ένα αποτέλεσμα, π.χ. $7+3=10$. Αυτό πολλές φορές ενισχύεται από τη χρήση υπολογιστών τσέπης, όπου το πλήκτρο ΄΄=΄΄ εμφανίζει το αποτέλεσμα, αλλά και από συνήθεις τύπους όπως $E=\beta\cdot\upsilon$, όπου το ΄΄=΄΄ χρησιμοποιείται για να δείξει τον τρόπο υπολογισμού του αριστερού μέλους, του Ε δηλαδή.
- Ισοδυναμία: Στις εξισώσεις για παράδειγμα το σύμβολο ΄΄=΄΄ έχει τη σημασία της ισοδυναμίας μεταξύ του αριστερού και δεξιού μέλους της για κάποια τιμή του αγνώστου ή των αγνώστων.
- Ταυτότητα: Σε εγγράμματες σχέσεις [π.χ. ιδιότητες όπως $\alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}=(\alpha\cdot\beta)^{\nu}$] ή στις γνωστές ταυτότητες (π.χ. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$) το σύμβολο ΄΄=΄΄ δηλώνει ότι τα δύο μέλη της ισότητας αληθεύουν για όλες τις τιμές των μεταβλητών.
- Προσδιορισμός: Στον τύπο της συνάρτησης $f(x)=3x^2+3x+1$ για παράδειγμα, το δεξί μέλος προσδιορίζει την αναλυτική έκφραση της συνάρτησης $f(x)$.

Η ερμηνεία του «δίνει αποτέλεσμα» για το σύμβολο της ισότητας είναι τόσο ισχυρή στους μαθητές, ώστε μπορεί να υπερκεράσει όλες τις άλλες σημασίες, με αποτέλεσμα πολλοί μαθητές να μην μπορούν να διαχειριστούν εύκολα σχέσεις όπως: $8+5=10+3$

ή *2x+3=3x–7*, αλλά και να υποπέσουν εύκολα σε λάθη όπως: *60+20=80–30=50 ή 3x–5=9+x=2x=14=x=7*, όπου παραβιάζονται η συμμετρική και η μεταβατική ιδιότητα της ισότητας. Σ' αυτούς τους μαθητές η αντίληψη αυτή για το ΄΄=΄΄ αποτελεί σοβαρό εμπόδιο στην κατάστρωση και επίλυση των εξισώσεων (Έρευνα Λεμονίδη 1996).

Για το σύμβολο της πρόσθεσης ΄΄+΄΄ ο Λεμονίδης (1996) αναφέρει ότι ενώ στην αριθμητική χρησιμοποιείται μόνο διαδικαστικά, δηλαδή ότι εκτελείται η πράξη, στη άλγεβρα εκτός αυτού όπου δείχνει το αποτέλεσμα της πρόσθεσης, επιπλέον δείχνει και τη λειτουργία της πράξης αυτής.

Επίσης λάθη της μορφής *2α+3β=5αβ* πιθανώς να οφείλονται:

- Επειδή στην αριθμητική η έννοια της πρόσθεσης εισάγεται ως συνένωση δύο συνόλων,
- στους μεικτούς αριθμούς όπου $5\frac{2}{3}=5+\frac{2}{3}$ και
- στο αριθμητικό σύστημα (π.χ. *25=2 δεκάδες +5 μονάδες*)

Ένα άλλο σημαντικό κομμάτι της άλγεβρας που τη διαφοροποιεί από την αριθμητική και αποτελεί σημαντικό εμπόδιο για τους μαθητές είναι η χρήση των γραμμάτων – μεταβλητών και ο διαφορετικός τους ρόλος από το ένα πεδίο στο άλλο. Σημαντική συμβολή στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο αντιλαμβάνονται τα γράμματα οι μαθητές αποτελεί η έρευνα του Kuchemann (1981) στη Βρετανία. Χώρισε τις απαντήσεις των μαθητών στις έξι παρακάτω κατηγορίες που περιγράφουν τις χρήσεις των γραμμάτων σε μια αλγεβρική έκφραση:

- Γράμμα με συγκεκριμένη αποδιδόμενη τιμή. Οι μαθητές το αντικαθιστούν με συγκεκριμένο αριθμό με σκοπό να βρουν αποτέλεσμα. Για παράδειγμα στην παράσταση *2x+1* θέτουν *x=3*, δηλαδή *2x+1=7.*
- Γράμματα που δεν χρησιμοποιούνται ή αγνοούνται. Για παράδειγμα η αλγεβρική παράσταση *4x+3y* γίνεται *7xy* ή σκέτο *7.*
- Γράμμα ως αντικείμενο ή συντομογραφία. Για παράδειγμα το *2μ* μπορεί να σημαίνει δύο μαθητές ή δύο μέτρα.
- Γράμματα ως συγκεκριμένοι άγνωστοι ή σταθερές. Για παράδειγμα στην ισότητα *x+y+z = x+u+z*, το *u* και το *y* δεν μπορεί να είναι ίσα γιατί θεωρούνται ως δύο συγκεκριμένοι αλλά διαφορετικοί άγνωστοι.

- Γράμματα ως γενικευμένοι αριθμοί, όπου μπορούν να λάβουν πάνω από μία τιμή, όπως στην παράσταση $x+y= 5$, οι μαθητές θα γράψουν πάνω από ένα συνδυασμό τιμών x, y $(1+4, 2+3)$.
- Γράμματα ως μεταβαλλόμενες ποσότητες, δηλαδή μεταβλητές. Στο τελευταίο αυτό στάδιο, οι μαθητές αναγνωρίζουν τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών, όπως στην έκφραση $y=3x+5$, και γνωρίζουν ότι μπορούν να πάρουν απροσδιόριστες τιμές, ρητές και άρρητες.

Τα αποτελέσματα της έρευνας του Kuchemann έδειξαν ότι πολλοί λίγοι μαθητές ηλικίας 13 με 15 χρονών καταφέρνουν να φτάσουν στο στάδιο εκείνο που να θεωρούν το γράμμα ως γενικευμένο αριθμό και ακόμη λιγότεροι εκείνοι που μπόρεσαν να το ερμηνεύσουν ως μεταβλητή.

Κάτι αντίστοιχο έδειξε και η έρευνα των Δραμαλίδη – Σακονίδη (2006) που έγινε σε παιδιά και των τριών τάξεων του γυμνασίου, με παρόμοιο ερωτηματολόγιο σαν αυτό του Kuchemann. Η αλγεβρική τους σκέψη έδειξε να εξελίσσετε με πολύ αργούς ρυθμούς καθώς πλησίαζαν στο τέλος της γυμνασιακής τους εκπαίδευσης. Ζητήματα που αφορούσαν τη διαδικαστικού χαρακτήρα αλγεβρική γνώση φάνηκε να τα είχαν κατακτήσει. Δεν συνέβαινε όμως το ίδιο και για θέματα που συνδέονταν με εννοιολογικά και δομικά στοιχεία της άλγεβρας.

Όταν οι Wagner et al. (1984) ζήτησαν από τους μαθητές της Γ΄ γυμνασίου να λύσουν την εξίσωση $\frac{\kappa}{8}-3=14$ και στη συνέχεια την εξίσωση $\frac{\lambda}{8}-3=14$, οι περισσότεροι από τους μαθητές αντιλήφθηκαν ότι οι δύο εξισώσεις δεν διέφεραν. Όταν όμως οι ερευνητές αντικατέστησαν στην πρώτη εξίσωση το κ με το $\kappa+1$ και τους ζήτησαν να υπολογίσουν το $\kappa+1$ δεν αντιλήφθηκαν ότι η εξίσωση δεν άλλαξε, αλλά υπολόγισαν πρώτα το κ και μετά το $\kappa+1$. Αυτό δείχνει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν ομοιότητες στη δομή των εξισώσεων, (Δραμαλίδη – Σακονίδη 2006)

Τις ίδιες δυσκολίες αντιμετωπίζουν οι μαθητές και στην επίλυση προβλημάτων με εξισώσεις, όπου δίνουν έμφαση στις πράξεις που θα πρέπει να εκτελέσουν και όχι στην αναπαράσταση αυτών των πράξεων και κατ’ επέκταση στη δημιουργία της εξίσωσης, που ουσιαστικά εκφράζει τη δομή του προβλήματος. Δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών του προβλήματος. Η ελάχιστη διαφοροποίηση στα δεδομένα ενός προβλήματος είναι ικανή να αποτρέψει τη δημιουργία της κατάλληλης εξίσωσης (Kieran, 1992).

Γενικά όπως τονίζει η Kieran (1997) «Η παραδοσιακή διδασκαλία έχει αμελήσει και δεν έχει δείξει την απαιτούμενη προσοχή στην παροχή εννοιολογικής κατανόησης των αλγεβρικών συμβόλων. Πολύ συχνά η μόνη έμφαση που δίνεται είναι στις εξισώσεις και στη λύση εξισώσεων. Η χρήση των γραμμάτων για την παράσταση γενικότητας προκειμένου να δικαιολογήσουμε, να εικάσουμε ή να προβλέψουμε και να αποδείξουμε έχει παραμεληθεί σφοδρά. Εκείνοι που θα επιχειρούσαν να δώσουν περισσότερο νόημα στα σύμβολα της άλγεβρας χρησιμοποιώντας την έννοια της συνάρτησης ως ένα ενοποιητικό νήμα έχουν τη δυνατότητα στη διδασκαλία τους να παρέχουν αυτά τα σύμβολα με μια λογική, η οποία προηγουμένως απουσίαζε» (Βερύκιος, 2003, σελ. 4).

Για παράδειγμα, τι είναι ένα τριώνυμο, ένα πολυώνυμο, μια παράσταση προς απλοποίηση, τι μπορούν να νοηματοδοτήσουν αυτές οι αλγεβρικές εκφράσεις ώστε να γίνουν ελκυστικές στους μαθητές; Απάντηση ίσως σ' αυτά τα ερωτήματα θα μπορούσε να δώσει η ιστορία των μαθηματικών με τη χρήση γεωμετρικών μοντέλων, όπως είναι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ή ενός τετραγώνου, όπως επίσης και ο όγκος ενός παραλληλεπιπέδου ή ενός κύβου.

Σε έρευνα (Makgakga 2016) που έγινε, σε μαθητές λυκείου, στην επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων με τη μέθοδο της «συμπλήρωσης τετραγώνου», διαπιστώθηκαν τόσο διαδικαστικά όσο και εννοιολογικά λάθη. Τα διαδικαστικά εντοπίζονταν κυρίως σε έλλειψη γνώσεων των κανόνων της παραγοντοποίησης καθώς και των βημάτων που οδηγούν το πρώτο μέλος της εξίσωσης σε μορφή αναπτύγματος τετραγώνου. Τα εννοιολογικά αναφερόταν στη κατανόηση της δομής της μεθόδου, αλλά και της ίδιας της εξίσωσης, ως ισοδυναμίας. Για παράδειγμα αρκετοί μαθητές πρόσθεταν το τετράγωνο του μισού του συντελεστή του x μόνο στο αριστερό μέλος της εξίσωσης, αγνοώντας το δεξί μέλος.

Ακόμη και για μαθητές όμως που εφαρμόζουν σωστά τις μεθόδους επίλυσης μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, όπως εφαρμογή του τύπου ή μετατροπή της εξίσωσης σε παραγοντοποιημένη μορφή ή τέλος με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου, η έρευνα αποκάλυψε μετά από τις συνεντεύξεις αυτών των μαθητών που παραχώρησαν στους ερευνητές, ότι είχαν σοβαρές παρανοήσεις για το τί τελικά είναι οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις (Clements & Vaiyavutjamai., 2006). Οι ερευνητές πιστεύουν ότι οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις θα πρέπει να διδαχτούν σε συνδυασμό με τις τετραγωνικές συναρτήσεις, επικουρούμενες όμως με τη χρήση κατάλληλων λογισμικών σε ένα δυναμικό περιβάλλον.

Οι Maconye & Nhlanhla 2014 στην έρευνα τους σε μαθητές λυκείου διαπίστωσαν τους ίδιους τύπους λαθών που επαναλαμβάνουν συχνά οι μαθητές και τα οποία τα χώρισαν σε:

- Σφάλματα εφαρμογής: Αναφέρεται στην κακή χρήση των κανόνων τις άλγεβρας, όπως για παράδειγμα στην εσφαλμένη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας σε ένα πρόβλημα που δεν απαιτείται καν τη εφαρμογή της.
- Διαδικαστικά σφάλματα: Ένα παράδειγμα αυτών είναι ένα σφάλμα μεταφοράς στο οποίο οι μαθητές αποτυγχάνουν να μεταφέρουν σωστά, αλλάζοντας το πρόσημο του όρου όταν μεταφέρεται από τη μια πλευρά στην άλλη.
- Εννοιολογικά σφάλματα: Πρόκειται για σφάλματα στα οποία οι μαθητές δεν κατανοούν τις ιδέες που περιλαμβάνονται στα προβλήματα, όπως το χειρισμό μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης σαν να ήταν μια απλή γραμμική εξίσωση.

Σε παρόμοια έρευνα οι Maconye & Matuku το 2016, σε μαθητές γυμνασίου αυτή τη φορά, κατέληξαν στα παρακάτω είδη αναφορικά με τα λάθη και τις παρανοήσεις:

- Εσφαλμένη αντίληψη για την ισότητα.
- Εσφαλμένη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας. Για παράδειγμα το $(2x - 3)(3 - x)=4$, το γράφανε ως $2x - 3 +3 - x +4$, αντικαθιστώντας τον πολλαπλασιασμό με πρόσθεση και την εξίσωση με αλγεβρική παράσταση.
- Παρανόηση στην έννοια των όμοιων όρων. Γράφανε το $2x^2+3x$ ως $5x^2$.
- Εσφαλμένη χρήση των κανόνων των προσήμων στην πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό.
- Παρανόηση στους κανόνες της παραγοντοποίησης και λανθασμένη ανάκληση του τύπου επίλυσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων.
- Λανθασμένη αντικατάσταση των συντελεστών α,β,γ στη δευτεροβάθμια εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.
- Λάθη κατά τη μεταφορά όρων από το ένα στο άλλο μέλος.

Άλλη μια έρευνα σε μαθητές γυμνασίου είναι των Zakaria & Maat (2010) που πραγματοποιήθηκε σε σχολείο της Ινδονησίας όπου οι μαθητές έπρεπε να απαντήσουν σε ερωτήματα επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων με χρήση παραγοντοποίησης, συμπλήρωσης τετραγώνου και με εφαρμογή του γνωστού τύπου. Τα λάθη που εντοπίστηκαν για την παραγοντοποίηση αφορούσαν μετασχηματισμούς καθώς και διαδικαστικά λάθη. Στην εφαρμογή της μεθόδου «συμπλήρωσης τετραγώνου» αλλά και όταν οι μαθητές εφάρμοσαν τον τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων υπέπεσαν σε λάθη κατανόησης μετασχηματισμού, ικανότητας στις διαδικασίες, κωδικοποίησης και απροσεξίας.

Όλες οι παραπάνω έρευνες καταλήγουν στις ίδιες δυσκολίες, λάθη και παρανοήσεις των μαθητών της Γ΄ γυμνασίου, αλλά και της Α΄ λυκείου για τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις και για τις βασικές έννοιες της άλγεβρας. Έρευνες που έγιναν σε διάφορες χώρες, με διαφορετικά εκπαιδευτικά συστήματα και σε διαφορετικές χρονικές περιόδους κατά το παρελθόν έδειξαν την επαναληψημότητα των ίδιων λαθών.

Ποιοι είναι οι λόγοι για την επανεμφάνιση των ίδιων λαθών, είναι ένα δύσκολο ερώτημα. Αρκετοί ερευνητές πιστεύουν ότι τα αναλυτικά προγράμματα ευθύνονται για αυτό (Zakaria & Maat 2010). Άλλοι η γλωσσική ανεπάρκεια, οι λανθασμένες γενικεύσεις και στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές, η έλλειψη ουσιαστικής γνώσης των κανόνων της άλγεβρας, (Maconye 2014, 2016), η έλλειψη διαφορετικών αναπαραστάσεων, η κατάλληλη προετοιμασία των εκπαιδευτικών για την αντιμετώπιση αυτών των λαθών (Didis & Erbas 2015) κ.λ.π. 1

ΚΕΦ. 5ο: ΠΙΛΟΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΕ ΣΥΓΧΡΟΝΟ ΚΑΙ ΑΣΥΓΧΡΟΝΟ ΤΡΟΠΟ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ

5.1 Σχεδιασμός Διδασκαλίας

Ο σχεδιασμός της διδασκαλίας έγινε έχοντας κατά νου τις στρατηγικές της προσαρμογής, (Fried, 2001), όπου η ιστορική εξέλιξη της έννοιας της δευτεροβάθμιας εξίσωσης χρησιμοποιείται ως οδηγός για την αποτελεσματικότερη διδασκαλία, αλλά και τη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας αυτής, υπό το πρίσμα όμως της σημερινής σύγχρονης μορφής των μαθηματικών (Κολέζα 2006). Επίσης οι οδηγίες του ΙΕΠ, καθώς και το βιβλίο του καθηγητή αποτέλεσαν πηγές άντλησης δραστηριοτήτων και διδακτικών στόχων.

Δόθηκε μεγαλύτερη έμφαση στην ποικιλία των τρόπων αναπαράστασης των λύσεων μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, αλλά και στον τρόπο εφαρμογής των εξισώσεων στην επίλυση προβλημάτων (Kieran 1997). Όλα αυτά σε ένα περιβάλλον όπου οι μαθητές με εφόδια τις προηγούμενες γνώσεις τους, θα μπορούσαν να ξανά – ανακαλύψουν αυτό που οι μαθηματικοί του παρελθόντος στο πέρασμα των αιώνων είχαν κάνει κτήμα τους, μέσα από επίμονες προσπάθειες.

Βασικό μέλημα ήταν η παρουσίαση όλων των σταδίων της εξέλιξης της έννοιας της δευτεροβάθμιας εξίσωσης να γίνεται εκτός της αρχικής και με σύγχρονη μορφή, εξασφαλίζοντας τη συνέχεια της διδακτικής πράξης.

Υπήρξε πρόνοια για τη σύνδεση με προηγούμενες έννοιες και συγκεκριμένα με την εξίσωση πρώτου βαθμού και τις αντίστοιχες λύσεις της, με την παραγοντοποίηση, με τις ταυτότητες και με τις συναρτήσεις.

Στα περισσότερα εκπαιδευτικά συστήματα τα μαθηματικά και ειδικά η άλγεβρα διδάσκονται οργανωμένα και με κάποιον αφαιρετικό και αξιωματικό τρόπο, δίνοντας ιδιαίτερη βαρύτητα στο τελικό μαθηματικό προϊόν και όχι στη διαδικασία και στα αρχικά ερωτήματα που αποτέλεσαν το βασικό κίνητρο για την ανάπτυξη των εννοιών (Tzanakis and Arcavi 2000).

Έτσι η συγκεκριμένη διδακτική πρόταση θέλησε, αντίθετα με την επικρατούσα διδακτική πρακτική, να δώσει ιδιαίτερη σημασία στην ιστορική εξέλιξη της έννοιας της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, ξεκινώντας από τους Βαβυλώνιους πριν 4000 χρόνια και φτάνοντας μέχρι και πρόσφατα. Δίνοντας στους μαθητές τη δυνατότητα να δουν την εξίσωση ως ένα κατασκεύασμα του ανθρώπινου πολιτισμού που διαδραμάτισε σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη των μαθηματικών και της επιστήμης γενικότερα. Θέλησε να εμπλέξει τους μαθητές σε μια διερεύνηση των πηγών, σε μια γραπτή απεικόνιση των αποτελεσμάτων αυτής της διερεύνησης, σε μία συζήτηση και διάλογο και κυρίως σε μια απόδοση με σημερινή μορφή των αρχαίων κειμένων.

Οι μέθοδοι των Βαβυλωνίων όπου περιγράφουν τη λύση του προβλήματος σε ένα καθαρά λεκτικό περιβάλλον κάνοντας χρήση του εξηνταδικού συστήματος αρίθμησης, εξελίχτηκαν σε μία αριθμητική και γεωμετρική λύση από τους Άραβες, επικουρούμενοι από το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης με τα πλεονεκτήματα που έχει συγκριτικά με παλαιότερα αριθμητικά συστήματα. Παράλληλα οι Ινδοί στο ίδιο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης μ’ αυτό των Αράβων, εφάρμοσαν τη γενικευμένη αλγεβρική μέθοδο, όπου δίνει και την οριστική απάντηση στην επίλυση κάθε είδους δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Στη συνέχεια έχουμε την αναλυτική έκφραση επίλυσης μιας εξίσωσης, με εργαλεία, στην αρχή τις κωνικές τομές και στη συνέχεια τις συναρτήσεις, κάτι που ολοκληρώνει το σύνολο των διαφορετικών αναπαραστάσεων των δευτεροβάθμιων εξισώσεων και των λύσεων τους.

Ο πλουραλισμός αυτός λοιπόν, δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να εμβαθύνουν και να κατανοήσουν με όσο το δυνατό καλύτερο τρόπο τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις και τις μεθόδους επίλυσης των. Έτσι το τελικό προϊόν των λύσεων μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης που είναι ο γνωστός τύπος με τη διακρίνουσα θα νοηματοδοτεί το κάθε επιμέρους στοιχείο του και δεν θα αποτελεί άλλο ένα «ουρανοκατέβατο» μαθηματικό κατασκεύασμα που θα πρέπει να μάθουν να αποστηθίζουν και απλά να τον χρησιμοποιούν για τη λύση κάθε δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Αντλώντας εμπειρίες μέσα από τις δυσκολίες και τα εμπόδια που αντιμετώπισαν οι μαθηματικοί του παρελθόντος για την επίλυση των εξισώσεων μπορούμε ως εκπαιδευτικοί να αντιληφθούμε και ανάλογες δυσκολίες που πιθανώς να ενυπάρχουν και στους μαθητές μας.

Βέβαια οι δυσκολίες και τα λάθη που εντοπίζονται στους μαθητές, όταν χειρίζονται αλγεβρικές έννοιες και σύμβολα είναι διαχρονική όπως έχουν δείξει αρκετές έρευνες, που περιγράφονται στο 4ο κεφάλαιο της εργασίας. Ο ολιστικός όμως τρόπος παρουσίασης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης στη παρούσα διδακτική πρόταση προσπαθεί να περιορίσει αυτές τις δυσκολίες, νοηματοδοτώντας τις αλγεβρικές εκφράσεις, μέσω γεωμετρικών και γραφικών (αναλυτικών) μοντέλων, ώστε να προσελκύσει το ενδιαφέρον των μαθητών παρέχοντας εννοιολογική κατανόηση των αλγεβρικών συμβόλων, σύμφωνα με αυτά που τονίζει η Kieran (1997).

Εκτός από τα ιστορικά προβλήματα των Βαβυλωνίων των Αράβων και των Ινδών, οι οδηγίες του ΙΕΠ, το σχολικό βιβλίο, καθώς και το βιβλίο του καθηγητή αποτέλεσαν εξίσου σημαντικοί παράγοντες που επηρέασαν τον τρόπο σχεδιασμού της διδακτικής πρότασης. Σύμφωνα μ’ αυτά θα έπρεπε να δοθεί η δυνατότητα στους μαθητές μέσα από δραστηριότητες και προβλήματα να κατανοήσουν τον τρόπο επίλυσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων, είτε με παραγοντοποίηση και συμπλήρωση τετραγώνου, είτε με χρήση του γενικού τύπου, καθώς και τη διαφορά από τον τρόπο αντιμετώπισης των εξισώσεων 1ου βαθμού. Να μπορούν να αναγνωρίζουν τους συντελεστές α, β, γ στην εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ και να μπορούν να κατανοούν το ρόλο της διακρίνουσας στο πλήθος των λύσεων των δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Οι μαθηματικοποίηση των προβλημάτων και η μεταφορά εκφράσεων στη γλώσσα της άλγεβρας μέσα από επιλεγμένες δραστηριότητες, όπως και ο έλεγχος στα αποτελέσματα των προβλημάτων με βάση τους αρχικούς περιορισμούς αποτελούν έναν άλλο στόχο. Τέλος η χρήση κατάλληλων λογισμικών για την οπτικοποίηση των αλγεβρικών εκφράσεων μέσω αναλυτικών μεθόδων που χρησιμοποιούν τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων κάποιων συναρτήσεων για να παραστήσουν τις λύσεις των εξισώσεων, ολοκληρώνει τις διδακτικές οδηγίες που δίνονται από το ΙΕΠ.

5.2 Στοχεύσεις Διδακτικής Πρότασης

Ο σκοπός (γενικός στόχος) αυτής της διδακτικής πρότασης είναι η πολλαπλή αναπαράσταση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων και των λύσεων τους (Λεκτική–

Αλγεβρική – Γεωμετρική – Αναλυτική) μέσω ιστορικών προβλημάτων και η Επίλυση Προβλημάτων με χρήση Εξισώσεων.

Οι επιμέρους στόχοι της είναι να μπορούν οι μαθητές :

α) Να βρίσκουν αριθμό λύσεων 1ου και 2ου βαθμού εξισώσεων αρχικά με εμπειρικό τρόπο και στη συνέχεια βάση προϋποθέσεων.

β) Να μεταβαίνουν από τη μία μορφή, λεκτική, αριθμητική, αλγεβρική (συμβολική), γεωμετρική και αναλυτική στην άλλη, στα πλαίσια των δευτεροβάθμιων εξισώσεων και των λύσεων τους.

γ) Να μπορούν να χρησιμοποιούν τη παραγοντοποίηση, τη συμπλήρωση τετραγώνου και τον γενικό τύπο, για την επίλυση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

δ) Να μπορούν να παραγοντοποιούν ένα τριώνυμο δευτέρου βαθμού απευθείας ή χρησιμοποιώντας τις λύσεις που το μηδενίζουν.

ε) Να επιλύουν προβλήματα με χρήση εξισώσεων χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε μορφή ή τρόπο και να ελέγχουν τους περιορισμούς μέσα στο περιβάλλον του κάθε προβλήματος.

Παράλληλα, οι παραπάνω επιμέρους στόχοι της διδακτικής παρέμβασης, αποτέλεσαν και τα ερευνητικά ερωτήματα στο εμπειρικό μέρος της παρούσας εργασίας μέσα από τις απαντήσεις των μαθητών στα φύλλα εργασίας. Συγκεκριμένα:

α) Μπορούν οι μαθητές να βρίσκουν αριθμό λύσεων 1ου και 2ου βαθμού εξισώσεων βάση προϋποθέσεων;

β) Σε ποιο βαθμό μπορούν να μεταβαίνουν από τη μία μορφή αναπαράστασης μιας εξίσωσης σε μια άλλη;

γ) Πως χρησιμοποιούν τη παραγοντοποίηση, τη συμπλήρωση τετραγώνου ή τον γενικό τύπο, για την επίλυση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης;

δ) Μπορούν να παραγοντοποιούν ένα τριώνυμο δευτέρου βαθμού και με ποιον τρόπο;

ε) Έχουν την ευχέρεια να επιλύουν προβλήματα με χρήση εξισώσεων και να ελέγχουν τους περιορισμούς του κάθε προβλήματος;

Όλες οι έρευνες που έχουν γίνει στο παρελθόν (Küchemann 1978; 1981; Kieran 1981; Λεμονίδης 1996; Βερύκιος 2003; Δράμαλης & Σακονίδης 2006), για τις δυσκολίες των μαθητών όταν έρχονται αντιμέτωποι με αλγεβρικές έννοιες και φυσικά με τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις, έδειξαν ότι το υψηλό επίπεδο αφαιρετικής σκέψης, παράλληλα με την έλλειψη νοήματος, αποτελούσαν τα βασικά εμπόδια κατανόησης των εννοιών της άλγεβρας από τους μαθητές. Η ισότητα ως ισοδυναμία είναι επίσης ένα άλλο εμπόδιο στην κατανόηση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων (Maconye &

Matuku, 2016), αλλά και ο χειρισμός αυτών των εξισώσεων ως γραμμικές εξισώσεις 1ου βαθμού (Maconye & Nhlanhla 2014) και μάλιστα σε μαθητές λυκείου δείχνουν το μέγεθος αυτών των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Οι παρανοήσεις των μαθητών στους κανόνες παραγοντοποίησης, η κακή χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας, αλλά και η εσφαλμένη χρήση των κανόνων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, καθώς επίσης και η λάθος αναγνώριση των συντελεστών α, β, γ στην εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (Maconye & Matuku 2016, Zakaria & Maat 2010) αποτελούν άλλη μια κατηγορία δυσκολιών και παρανοήσεων που εντοπίζονται σε μαθητές Γ΄ γυμνασίου, αλλά και Α΄ λυκείου.

Θέλοντας να εξειδικεύσουμε τους επιμέρους στόχους που θέσαμε, με τις δυσκολίες που αναφέρθηκαν παραπάνω, έγινε προσπάθεια ώστε στα φύλλα εργασίας που δόθηκαν, παράλληλα με τις οδηγίες συμπλήρωσής τους, αλλά και κατά τη διάρκεια της ανάπτυξης του μαθήματος, να καλύπτουν με όσο το δυνατόν καλύτερο τρόπο τα παραπάνω.

Στο 1ο φύλλο εργασίας (φ.ε.) γίνεται προσπάθεια να επιτευχθεί ο 1ος επιμέρους στόχος, που είναι η διαφοροποίηση ως προς τον αριθμό των λύσεων μιας πρωτοβάθμιας με μία δευτεροβάθμια εξίσωση, αλλά και μέρος του 3ου στόχου που αφορά την παραγοντοποίηση. Μέσα από απλά παραδείγματα τα οποία ζητήθηκε η λύση τους από τους μαθητές, αναλύονται οι περιπτώσεις όπου εξισώσεις 1ου βαθμού έχουν μία λύση, εξισώσεις όπου έχουν για λύση όλους τους αριθμούς, δηλαδή είναι ταυτότητες ή αόριστες, ή τέλος εξισώσεις που δεν έχουν καμία λύση, είναι δηλαδή αδύνατες. Παράλληλα μέσα από τις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας αναδύθηκε και ο ρόλος των συντελεστών α και β στην εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ και οι προϋποθέσεις που απαιτούνται ώστε μια πρωτοβάθμια εξίσωση να έχει μοναδική λύση, να είναι ταυτότητα, ή να είναι αδύνατη. Ζητήθηκε από τους μαθητές να ανακαλέσουν στη μνήμη τους, από τη Β΄ γυμνασίου τις περιπτώσεις: $0x=0$ *(ταυτότητα)* ή $0x=\alpha$ με $\alpha\neq 0$ *(αδύνατη)*. Τα επόμενα ερωτήματα αφορούν εξισώσεις 2ου βαθμού. Δόθηκαν στους μαθητές διάφορες απλές περιπτώσεις δευτεροβάθμιων εξισώσεων γνωστών από τη προηγούμενη τάξη, αλλά και κάποιων πιο σύνθετων, όπου τους ζητήθηκε να τις λύσουν, είτε με παραγοντοποίηση, είτε με τη μέθοδο «δοκιμή – λάθος». Μέσα από αυτή τη διαδικασία, οι μαθητές ήρθαν αντιμέτωποι με το ερώτημα του αριθμού των λύσεων μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, για να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι εξισώσεις τέτοιου είδους θα έχουν δύο διαφορετικές πραγματικές λύσεις, μία διπλή πραγματική λύση, ή δεν θα έχουν καμία λύση, θα είναι δηλαδή αδύνατες. Η επαλήθευση των παραπάνω έγινε βέβαια με εμπειρικό τρόπο χωρίς ακόμη να υπεισέρθουν στον ρόλο των συντελεστών $α, β, γ$ της εξίσωσης $αx^2+βx+γ=0$, με $α\neq0$ κάτι που θα πραγματοποιηθεί παρακάτω.

Στο 2ο φ.ε. γίνεται μια εισαγωγή στην οπτικοποίηση των αλγεβρικών παραστάσεων και εξισώσεων μέσω γεωμετρικών μοντέλων (επίτευξη μέρος του 2ου στόχου). Συγκεκριμένα το εμβαδόν τετραγώνου και ορθογωνίου, καθώς και ο όγκος κύβου, αποτελούν τα δομικά στοιχεία κατασκευής μονωνύμων, πολυωνύμων, δευτεροβάθμιων και τριτοβάθμιων εξισώσεων. Παράλληλα μέσω της παραγοντοποίησης, (μέρος 3ου στόχου) αλλά και της μεθόδου «δοκιμής – λάθους» δόθηκε η δυνατότητα στους μαθητές να αναζητήσουν και μη γεωμετρικές λύσεις, που μπορεί να είναι το «0» ή κάποιος αρνητικός αριθμός.

Τα πρώτα δύο φύλλα εργασίας (φ.ε.) ήταν εισαγωγικά και στην ουσία προετοίμασαν το έδαφος για την είσοδο της ιστορίας της δευτεροβάθμιας εξίσωσης μέσα στο πλαίσιο της διδασκαλίας, η οποία υπεισέρχεται ως «εργαλείο», δηλαδή σε ρόλο βοηθητικό, για την έννοια της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, δίνοντας τα κατάλληλα κίνητρα στους μαθητές ώστε να δείξουν ενδιαφέρον για την εκμάθηση και εμβάθυνσης της. Έτσι λοιπόν ξεκινώντας με μια παρουσίαση της ιστορικής εξέλιξης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης από τους Βαβυλώνιους έως και σήμερα, με ενδιάμεσες στάσεις, στην άλγεβρα των αρχαίων Ελλήνων, στα επιτεύγματα των Αράβων και Ινδών και τέλος στις μεθόδους των δυτικοευρωπαίων μαθηματικών στο Μεσαίωνα και την Αναγέννηση, περάσαμε στο 3ο φ.ε. όπου δόθηκε στους μαθητές το Βαβυλωνιακό πρόβλημα της πινακίδας *BM 13901*, με τη λεκτική λύση του και ζητήθηκε να την μετατρέψουν σε αριθμητική και αλγεβρική λύση. Με τον τρόπο αυτό και μέσα από παρόμοια προβλήματα έγινε προσπάθεια επίτευξης μέρους του 2ου στόχου, όπου οι μαθητές θα είναι σε θέση να μπορούν να μετατρέπουν μια λεκτική απάντηση σε αριθμητική και αλγεβρική, αλλά και αντίστροφα, καθώς και μέρους του 3ου στόχου, μια και η μέθοδος αυτή των Βαβυλωνίων είναι η «συμπλήρωση τετραγώνου»

Στο 4ο φ.ε. ακολουθούν οι Άραβες, όπου εκτός από την λεκτική – αριθμητική μέθοδο των Βαβυλωνίων πρόσθεσαν και τη γεωμετρική απόδειξη επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων, επηρεασμένη από την Ελληνική σκέψη, όπου τοποθέτησε την έννοια της απόδειξης στο ψηλότερο βάθρο της μαθηματικής σκέψης. Μέσα από τα προβλήματα και τις λύσεις, λεκτικές και γεωμετρικές του al- Khwarizmi (780-850), του σπουδαίου αυτού μαθηματικού αυτής της περιόδου, καλείται ο μαθητής να μετατρέψει τη λεκτική λύση, αρχικά σε αριθμητική και αλγεβρική και κατόπιν έχοντας τις οδηγίες του μεγάλου Άραβα μαθηματικού να μπορέσει να κατασκευάσει και να κατανοήσει και τη γεωμετρική απόδειξη η οποία δεν είναι τίποτα άλλο παρά η μέθοδος «συμπλήρωσης τετραγώνου» με σχήματα, παρόμοια με αυτή των Βαβυλωνίων (2ος – 3ος στόχος). Υπάρχει λοιπόν εξέλιξη των μεθόδων επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων από λεκτική σε αριθμητική, σε αλγεβρική και τέλος σε γεωμετρική και έτσι ο μαθητής μέσα από αυτήν την ιστορική πορεία μπορεί να κατανοήσει και να εμβαθύνει καλύτερα αυτήν την έννοια.

Στο 5ο φ.ε. αναφέρθηκε η μέθοδος των Ινδών με κύριο εκπρόσωπο τον Sridhara (1025 περίπου), όπου ξανά με τη «μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου» δίνεται μια ολοκληρωμένη αλγεβρική μέθοδος των δευτεροβάθμιων εξισώσεων στη σημερινή πλέον μορφή, καλύπτει όλες τις περιπτώσεις (με δύο διαφορετικές λύσεις, μία διπλή λύση, καμία λύση) και εμφανίζεται πρώτη φορά η διακρίνουσα και ο ρόλος που αυτή παίζει στον αριθμό των λύσεων. Οι μαθητές μπορούν έτσι να αναγνωρίσουν την ανωτερότητα αυτής της μεθόδου έναντι των προηγούμενων μεθόδων, αλλά και τον φορμαλιστικό χαρακτήρα της, όπου με έναν τύπο είναι σε θέση να επιλύουν οποιαδήποτε εξίσωση 2ου βαθμού αρκεί να την μετατρέψουν στη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ και φυσικά να αναγνωρίσουν τους συντελεστές α, β, γ (3ος στόχος)

Στο 6ο φ.ε. ακολουθεί η αναλυτική μέθοδος επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων, (μέρος 2ου στόχου) όπου οι μαθητές μέσω οπτικοποιημένων παραστάσεων στο δυναμικό περιβάλλον του Geogebra, είχαν τη δυνατότητα να συνδέσουν τις γραφικές παραστάσεις γνωστών συναρτήσεων όπως είναι η παραβολή και η ευθεία με την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Συγκεκριμένα, με αφορμή τη μέθοδο του Άραβα μαθηματικού Umar al- Khayyami (1048 – 1131) που έλυνε τριτοβάθμιες εξισώσεις χρησιμοποιώντας τα σημεία τομής κάποιων γραμμών (κωνικές τομές) και του γεγονότος ότι είχε προηγηθεί η διδασκαλία της επίλυσης γραμμικών συστημάτων με γραφικό τρόπο, δόθηκε στους μαθητές ένα συγκεκριμένο παράδειγμα δευτεροβάθμιας εξίσωσης η οποία αναλύθηκε σε δύο συναρτήσεις, μιας παραβολής με κορυφή την αρχή των αξόνων και μιας ευθείας. Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο αυτών γραμμών δίνουν τη λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Με αυτόν τον τρόπο δόθηκε η δυνατότητα στους μαθητές να ελέγξουν και να κατανοήσουν επίσης το ρόλο της διακρίνουσας και να την συνδέσουν όχι μόνο με τον αριθμό των λύσεων, αλλά και με τα σημεία τομής της παραβολής και της ευθείας, δίνοντας νόημα και στον τύπο επίλυσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Παράλληλα στο ίδιο φύλλο δόθηκε ένας αριθμός εξισώσεων κλιμακούμενης δυσκολίας και ζητήθηκε να λυθούν με όποιον τρόπο επιθυμούσαν οι μαθητές για την επίτευξη του 3ου στόχου.

Στο 7ο φ.ε. μέσω της συμπλήρωσης τετραγώνου όπως έγινε με τον Βαβυλωνιακό και τον Αραβικό τρόπο σε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού, εξηγήθηκε στους μαθητές η παραγοντοποίηση τριωνύμου μέσω των λύσεων που τη μηδενίζουν, για την επίτευξη του 4ου επιμέρους στόχου, αλλά και μέρος των 1ου και 3ου στόχων.

Έτσι δόθηκε η δυνατότητα στους μαθητές όταν δεν ήταν εφικτή η παραγοντοποίηση τριωνύμου μέσω άλλων διαδικασιών, όπως η διάσπαση όρων και κατόπιν η ομαδοποίηση, ή η χρήση της ταυτότητας «ανάπτυγμα τετραγώνου», να μπορούν επιλύοντας την εξίσωση και βρίσκοντας τις λύσεις που μηδενίζουν το τριώνυμο μέσω της χρήσης του γενικού τύπου, να μπορούν κατόπιν να φτάνουν στη παραγοντοποίηση.

Ολοκληρώνοντας τη διδακτική πρόταση με το 8ο φ.ε. οι μαθητές ήρθαν αντιμέτωποι με προβλήματα τα οποία για να επιλυθούν θα έπρεπε να μετασχηματιστούν σε δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Η διαδικασία αυτή τους ήταν γνωστή και από προηγούμενες τάξεις και συγκεκριμένα από τη Β΄ γυμνασίου, στις εξισώσεις 1ου βαθμού. Παρόλα αυτά η μεταφορά ενός λεκτικού προβλήματος στη γλώσσα της άλγεβρας πάντοτε περιέχει δυσκολίες. Έχοντας όμως οι μαθητές εντρυφήσει σε τέτοιες καταστάσεις μέσα από τα ιστορικά προβλήματα που προηγήθηκαν και αναπτύχθηκαν παραπάνω, τους έδινε τη δυνατότητα να χειριστούν αυτού του είδους τα προβλήματα με μεγαλύτερη ευχέρεια. Εξάλλου το μεγαλύτερο μέρος της διδακτικής πρότασης επένδυσε στο να εξοικειώσει τους μαθητές να μεταφέρονται από το ένα πεδίο στο άλλο. Να μπορούν με μια σχετική άνεση ένα λεκτικό πρόβλημα να το μετατρέπουν σε αλγεβρικό και γεωμετρικό, αλλά και αντίστροφα, ένα πρόβλημα με εμβαδά επίπεδων σχημάτων να μπορούν να το μεταφέρουν στο αλγεβρικό πεδίο με την κατασκευή της αντίστοιχης εξίσωσης και με τους αναγκαίους βέβαια περιορισμούς, για την επίτευξη και του 5ου και τελευταίου επιμέρους στόχου, παράλληλα με τον 3ο.

5.3 Μεθοδολογία

5.3.1 Διαδικασία Πραγματοποίησης της Διδασκαλίας

Ο αρχικός σχεδιασμός έγινε με την προϋπόθεση να πραγματοποιηθεί μέσα στην τάξη, σε ένα τμήμα 24 ατόμων, ή σε δυο τμήματα 49 ατόμων της Γ΄ γυμνασίου, σε ένα γυμνάσιο του Ευόσμου, σε 10 μονόωρα μαθήματα με την εξής διαδικασία:

1) Η διδακτική ώρα θα χωριζόταν σε τρία μέρη.

α) Στο 1ο (περίπου 10 λεπτά) θα ελέγχονταν οι εργασίες που είχαν για το σπίτι.

β) Στο 2ο (περίπου 20 λεπτά) θα εργάζονταν ανά ομάδες χρησιμοποιώντας τα φύλλα εργασίας.

γ) Στο 3ο μέρος (περίπου 15 λεπτά) και εφόσον θα είχαν παραδοθεί τα φύλλα εργασίας, θα αναζητούνταν οι σωστές απαντήσεις από τους μαθητές με την καθοδήγηση του διδάσκοντα.

2) Κατά τη διάρκεια των εργασιών των ομάδων θα γινόταν προσπάθεια να μαγνητοφωνηθούν οι διάλογοι μεταξύ των μελών κάποιων ομάδων καθώς και οι απορίες που πιθανώς θα διατύπωναν. Σε όσες ομάδες δεν υπήρχε η δυνατότητα μαγνητοφώνησης, θα είχε ζητηθεί από έναν μαθητή ανά ομάδα, εκτελώντας χρέη «γραμματέα» να καταγράφει (εν συντομία) τους διαλόγους μεταξύ των μελών της ομάδας.

3) Στο τέλος της παρέμβασης θα τους δινόταν ένα ερωτηματολόγιο – κριτήριο αξιολόγησης (ατομικό) με παρεμφερή θέματα αυτών που ασχολήθηκαν κατά τη διάρκεια της παρέμβασης.

4) Είχαν προγραμματιστεί να πραγματοποιηθούν συνεντεύξεις (9-10 μαθητών) διαφορετικών επιδόσεων για τον τρόπο σκέψης και ανάλυσης των απαντήσεων που δώσανε.

5) Τέλος θα τους δινόταν κάποιο ερωτηματολόγιο για τον τρόπο διδασκαλίας. Δηλαδή για τις ομάδες, τα ιστορικά προβλήματα, τις πολλαπλές αναπαραστάσεις των δευτεροβάθμιων εξισώσεων κ.λ.π.

Στην πορεία όμως και λόγω της υποχρεωτικής καραντίνας, η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε και στα τέσσερα τμήματα της Γ΄ τάξης του ίδιου σχολείου, με σύγχρονο και ασύγχρονο εξ' αποστάσεως τρόπο. Για τη σύγχρονη εξ' αποστάσεως διδασκαλία χρησιμοποιήθηκε η πλατφόρμα της Webex, ενώ για την ασύγχρονη μορφή της εξ αποστάσεως εκπαίδευσης, η πλατφόρμα της e-class. Το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών χωρίστηκε σε ομάδες και μόνο ένας μικρός αριθμός μαθητών εργάστηκε μεμονωμένα με τα φύλλα εργασίας που τους δόθηκαν και φυσικά η εργασία έγινε από το σπίτι.

Τα μαθήματα πραγματοποιήθηκαν σε 14 εξ' αποστάσεως διδακτικές ώρες (40 λεπτά η κάθε μία) σε 4 εβδομάδες, (από τις 11/5/20 έως 5/6/20) και τα παρακολούθησαν περίπου το 60% των μαθητών της Γ΄ γυμνασίου, (58/98 άτομα). Από αυτά, το 80% περίπου, (46/58 άτομα) ασχολήθηκαν με τα φύλλα εργασίας. Οι 58 μαθητές ήταν χωρισμένοι σε δύο τμήματα των 30 και 28 μαθητών αντίστοιχα και τα μαθήματα πραγματοποιήθηκαν σε 2 μονόωρες διδασκαλίες την 1η εβδομάδα και 6 δίωρες τις υπόλοιπες 3 εβδομάδες για κάθε τμήμα.

Στα μαθήματα δόθηκε ιδιαίτερη βαρύτητα στην όσο το δυνατόν μεγαλύτερη συμμετοχή των μαθητών, κάτι που εν μέρει επιτεύχθηκε, αν αναλογιστούμε ότι συμμετείχε στις ερωτήσεις του διδάσκοντα το 43–48% των μαθητών (περίπου 25 – 28 / 58 άτομα), εντούτοις στις απαντήσεις των φύλλων εργασίας όπως θα δούμε παρακάτω τα αποτελέσματα ήταν πολύ καλύτερα.

Σε κάθε μάθημα δινόταν εξηγήσεις από τον διδάσκοντα για το φύλλο εργασίας. Γινόταν συζήτηση με βάση τυχών απορίες μαθητών και λυνόταν μέσω ερωταπαντήσεων με τη συμμετοχή των ίδιων των μαθητών το κάθε βήμα επίλυσης, σε παρόμοια παραδείγματα με αυτά που περιείχε το φύλλο. Άλλες φορές ο διδάσκων, δίνοντας ένα εύλογο χρονικό διάστημα, ζητούσε από τους μαθητές να ασχοληθούν μόνοι τους με τα αντίστοιχα συναφή ερωτήματα που έθετε και είχαν σχέση μ' αυτά που υπήρχαν στο φύλλο εργασίας. Στο τέλος του μαθήματος το «ανέβαζε» στην πλατφόρμα της e-class, θέτοντας ένα χρονικό όριο για την αποστολή των απαντήσεων από τους μαθητές, οι οποίοι εργαζόταν είτε ομαδικά, αν ανήκαν σε κάποια ομάδα, είτε ατομικά. Με την παρέλευση του χρονικού ορίου, οι σωστές απαντήσεις του φύλλου εργασίας «ανέβαιναν» στην e-class για να μπορέσουν οι μαθητές να τις μελετήσουν και παράλληλα γινόταν συζήτηση κατά τη διάρκεια του επόμενου τηλεμαθήματος, πάνω στα λάθη και τις παρανοήσεις που προκύπταν από τις απαντήσεις των μαθητών.

Στο περιεχόμενο αυτών των φύλλων εργασίας υπήρξαν και κάποιες αναπροσαρμογές, εφόσον δεν πραγματοποιήθηκαν στη σχολική τάξη με περιορισμένο χρόνο, όπως αρχικά είχε σχεδιαστεί. Έτσι προστέθηκαν και νέες δραστηριότητες, καθώς και κάποιες επεξηγήσεις.

5.3.2 Δείγμα Μαθητών Εμπειρικής Έρευνας

Στην έρευνα συμμετείχαν 46 μαθητές. Οι 42 ήταν χωρισμένοι σε 14 ομάδες των 3 ατόμων όπου εργάζονταν στα φύλλα εργασίας και οι υπόλοιποι 4 όπου δούλεψαν μεμονωμένα.

Η απάντηση του ερωτηματολογίου τύπου Likert για τον τρόπο που πραγματοποιήθηκε η διδασκαλία δόθηκε από 32 μαθητές, μεταξύ των 46 παραπάνω.

5.3.3 Ανάλυση των Φύλλων Εργασίας (Φ.Ε.) και των Μαθημάτων

Στο 1ο φ.ε. γίνεται διερεύνηση των λύσεων σε εξισώσεις 1ου και 2ου βαθμού μέσα από απλά παραδείγματα.

Για τις εξισώσεις 1ου βαθμού οι μαθητές πρέπει να ανακαλέσουν στη μνήμη τους από τη Β΄ γυμνασίου:

α) Για μία και μοναδική λύση (να δώσουν ένα παράδειγμα τέτοιας εξίσωσης).

β) Άπειρες λύσεις (αόριστη ή ταυτότητα) δίνοντας το παράδειγμα $0x=0$ ή κάποιο παρόμοιο και

γ) Καμία λύση (αδύνατη) δίνοντας το παράδειγμα $0x=\alpha,\ \alpha \neq 0$ ή κάποιο παρόμοιο.

Στη 2ο ερώτηση δόθηκαν απλές παραμετρικές εξισώσεις 1ου βαθμού και ζητήθηκε ο υπολογισμός αυτών των παραμέτρων, ώστε η εξίσωση να είναι ταυτότητα (με άπειρες λύσεις) ή αδύνατη (με καμία λύση), όπως οι παρακάτω:

Για ποια τιμή του α η εξίσωση: $\alpha x+2=3x+5$ είναι αδύνατη; ή

Για ποιες τιμές των α και β η εξίσωση: $\alpha x-1=\frac{1}{2}x+\beta$ είναι ταυτότητα;

Στη 3ο ερώτηση και για εξισώσεις 2ου βαθμού θα πρέπει οι μαθητές να ανακαλύψουν τον αριθμό των λύσεων, μέσα από απλά παραδείγματα της μορφής:

α) $x^2=9$ *ή* $5x^2=20$ (δύο λύσεις)

β) $x^2=-16$ (καμία λύση) (γνωστές εξισώσεις από τη Β΄ γυμνασίου)

ή πιο σύνθετα, όπως:

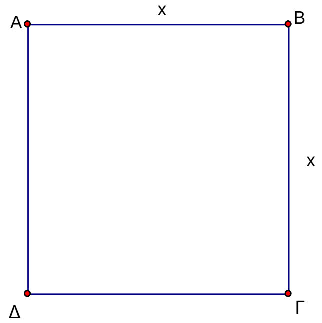
γ) $x^2-6x+9=0$, όπου με χρήση της ταυτότητας «ανάπτυγμα τετραγώνου» να οδηγηθούν στη διπλή λύση $x=3$.

δ) $x^2+x-2=0$, όπου με διάσπαση του όρου $+x$ *σε* $-x+2x$ και ομαδοποίηση και φυσικά με χρήση της γνωστής στους μαθητές σχέσης: *Αν* $\alpha\cdot\beta=0$ *τότε* $\alpha=0$ *ή* $\beta=0$, οδηγούνται σε δύο λύσεις.

Τους ζητήθηκε επίσης να απαντήσουν στο ερώτημα, αν μια εξίσωση 2ου βαθμού της μορφής: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ *με* $\alpha \neq 0$ μπορεί να είναι ταυτότητα.

Στο 2ο φ.ε. οι μαθητές έπρεπε να αντιστοιχίσουν ένα μονώνυμο, ή πολυώνυμο καθώς και μια εξίσωση 2ου βαθμού με κάποιο γεωμετρικό μέγεθος. Δηλαδή να μπορέσουν να μετασχηματίσουν αλγεβρικές παραστάσεις σε γεωμετρικές, όπως το εμβαδόν ενός τετραγώνου και ενός ορθογωνίου, ή ο όγκος ενός κύβου, για να μπορέσουν να κατανοήσουν τον τρόπο σκέψης των Αράβων που θα ακολουθήσει σε επόμενο φύλλο εργασίας. Συγκεκριμένα ζητήθηκε από τους μαθητές να αντιστοιχίσουν το x^2 με κάποιο μέγεθος ενός γεωμετρικού σχήματος.

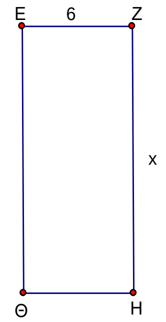
x^2



Δηλαδή με το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Να αντιστοιχίσουν το $6x$ με κάποιο μέγεθος ενός άλλου γεωμετρικού σχήματος.

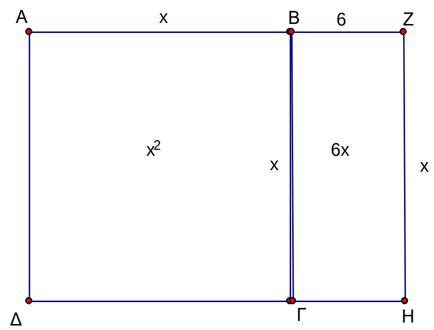
$6x$



Δηλαδή με το εμβαδόν του ορθογωνίου ΕΖΗΘ.

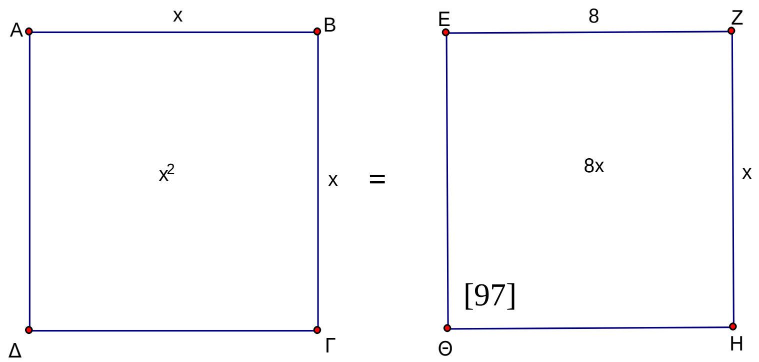
Να παραστήσουν γεωμετρικά την εξίσωση: $x^2+6x=16$

$x^2+6x=16$



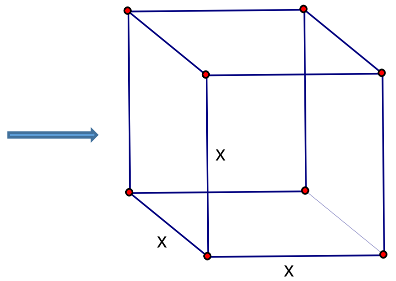
Δηλαδή (ΑΖΗΔ)=16

Να παραστήσουν γεωμετρικά και να λύσουν την εξίσωση $x^2=8x$.



Αλλά και να βρουν –χρησιμοποιώντας τη παραγοντοποίηση – και τη μη γεωμετρική της λύση. Τέλος τους δόθηκε η εξής ερώτηση: *«Υπάρχει αριθμός όπου ο κύβος του να ισούται με το ίδιο αριθμό;»* (δραστηριότητα που προτείνεται από το ΙΕΠ) και τους ζητήθηκε να το λύσουν γεωμετρικά. Δηλαδή.

x^3



$= x$

Να βρουν μια προφανή λύση, η οποία είναι η $x=1$, και να ελέγξουν αν υπάρχουν και άλλες λύσεις, χρησιμοποιώντας τη παραγοντοποίηση. Παράλληλα με αυτό το φύλλο εργασίας, τους ζητήθηκε να προετοιμάσουν για την επόμενη εξ' αποστάσεως διδασκαλία και τη δραστηριότητα του σχολικού βιβλίου στη σελ. 89 (στη παρούσα εργασία, σελ. 74), η οποία μετασχηματίζει ένα γεωμετρικό πρόβλημα με εμβαδά σε αλγεβρικό, με στόχο να καταλήξουν στις εξισώσεις: $x^2=9$, $x^2 - 3x=0$ και $x^2+15x - 16=0$

Στο 3ο φ.ε. τους δόθηκε το πρόβλημα των Βαβυλωνίων της πινακίδας ΒΜ 13901 στο σημερινό σύστημα αρίθμησης: *«Το άθροισμα του εμβαδού ενός τετραγώνου και των* $\frac{4}{3}$ *της πλευράς του είναι* $\frac{11}{12}$*, να βρεθεί η πλευρά του»* και τους ζητήθηκε να το εκφράσουν με εξίσωση. Δηλαδή την $x^2+\frac{4}{3}x=\frac{11}{12}$.Τους δόθηκε επίσης η λεκτική λύση των Βαβυλωνίων χωρίς όμως τους αριθμούς :

«Παίρνουμε το μισό του $\frac{4}{3}$ *, το τετραγωνίζουμε και αυτό που μας δίνει το προσθέτουμε στο* $\frac{11}{12}$*. Η τετραγωνική ρίζα αυτού που βρίσκουμε αν αφαιρεθεί κατά το μισό του* $\frac{4}{3}$ *μας δίνει την πλευρά του τετραγώνου. (Αποτέλεσμα* $\frac{1}{2}$ *)»* και ζητήθηκε από τους μαθητές να εκφράσουν τη λεκτική αυτή λύση με αριθμητικό τρόπο, δηλαδή να πραγματοποιήσουν τις πράξεις που αναφέρουν οι Βαβυλώνιοι για να καταλήξουν στο αποτέλεσμα, αλλά και με τη βοήθεια της εξίσωσης που βρήκαν παραπάνω να εκφράσουν με αλγεβρικό τρόπο, εκτελώντας και στα δύο μέρη της, τις αντίστοιχες

πράξεις και βέβαια να κατανοήσουν τη λογική που ακολουθούν τα βήματα επίλυσης που δόθηκαν από τους Βαβυλώνιους μέσα από τις ιδιότητες των εξισώσεων και των βασικών ταυτοτήτων. Τους εξηγείται ότι πρόκειται για μία μέθοδο που ονομάζεται «συμπλήρωση τετραγώνου». Τέλος τους δόθηκαν τρεις εξισώσεις που θα έπρεπε να τις λύσουν χρησιμοποιώντας την παραπάνω τεχνική των Βαβυλωνίων.

Στο 4ο φ.ε. τους δόθηκε το πρόβλημα του al–Khwarizmi *«Ποιο είναι το τετράγωνο το οποίο αν αυξηθεί κατά δέκα ρίζες του, γίνεται τριάντα εννέα»* όπου τους εξηγήθηκε ότι με τη λέξη ρίζα οι Άραβες εννοούν τον άγνωστο, ζητήθηκε από τους μαθητές να γράψουν την εξίσωση**,** δηλαδή την $x^2+10x=39$.

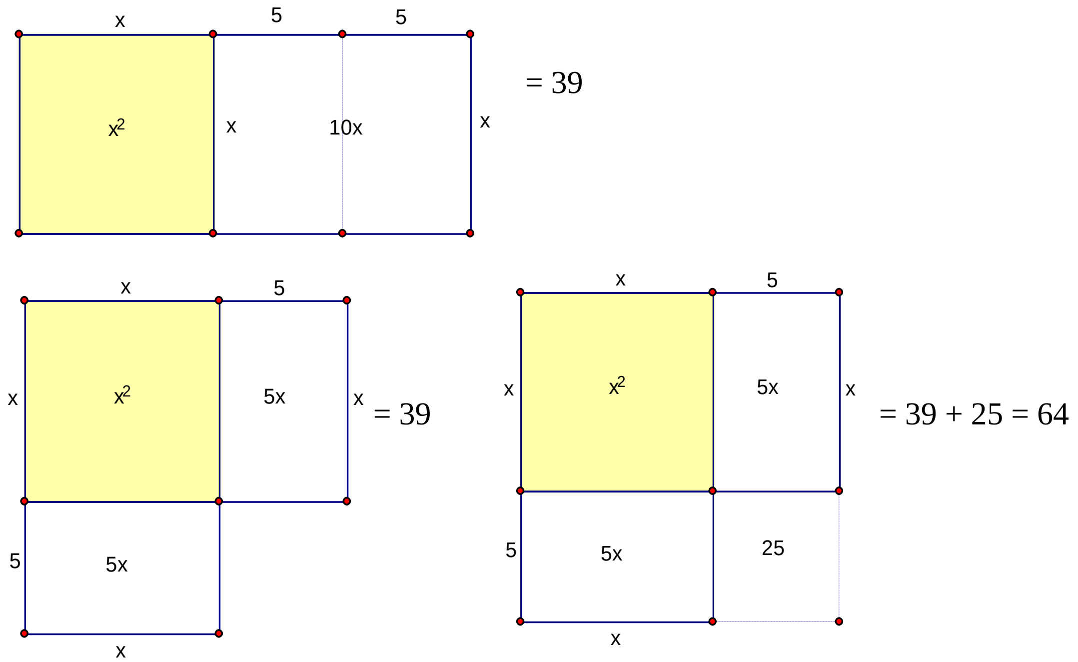
Στη συνέχεια τους δόθηκε και η λεκτική απάντηση του al–Khwarizmi όπως καταγράφεται στον Katz (σ. 281, 282). *«Υποδιπλασιάζεις το πλήθος των ριζών (πραγμάτων) που στο παράδειγμα αυτό μας δίνει πέντε. Μετά πολλαπλασιάζεις τον αριθμό αυτόν επί τον εαυτό του που δίνει είκοσι πέντε. Προσθέτεις αυτό στο τριάντα εννέα και το άθροισμα είναι εξήντα τέσσερα. Παίρνεις την τετραγωνική ρίζα αυτού που είναι οκτώ και αφαιρείς το μισό του πλήθους των πραγμάτων που είναι πέντε. Η διαφορά είναι τρία. Αυτή είναι και η λύση του προβλήματος»* και ζητήθηκε από τους μαθητές να την αναπαραστήσουν με σημερινό συμβολισμό και με αριθμητικό και με αλγεβρικό τρόπο. Δηλαδή:

Αριθμητικός Τρόπος	**Αλγεβρικός Τρόπος**
$10:2=5$ $5\cdot5=25$ $25+39=64$ $\sqrt{64}=8$ $8-5=3$ *Άρα ο αριθμός 3* *είναι η λύση του προβλήματος*	$x^2+10x+5^2=39+5^2$ $x^2+10x+25=39+25$ $\left(x+5\right)^2=64$ $x+5=\sqrt{64}=8$ $x=8-5=3$

Στο σημείο αυτό ζητήθηκε από τους μαθητές να υπολογίσουν και την άλλη λύση της εξίσωσης που είναι το x= –13

Επιπλέον δόθηκε και η γεωμετρική λύση του al- Khwarizmi όπως καταγράφεται στον Katz (σ. 282). *«O al- Khwarizmi αρχίζει με το τετράγωνο x^2, προσθέτει δυο ορθογώνια καθένα από τα οποία έχει πλάτος πέντε (το μισό του πλήθους των ριζών)* (στις δύο κάθετες πλευρές του τετραγώνου). *Τότε το άθροισμα του τετραγώνου και των δύο ορθογωνίων είναι $x^2+10x=39$. Κατόπιν συμπληρώνει το τετράγωνο με ένα τετραγωνάκι εμβαδού 25 οπότε παίρνει τετράγωνη περιοχή συνολικού εμβαδού 64. Η λύση $x=3$ συνάγεται εύκολα».*

Από τους μαθητές ζητήθηκε να φτιάξουν το σχήμα και κατόπιν να συνδέσουν την παραπάνω αλγεβρική λύση με την αντίστοιχη γεωμετρική. Δηλαδή:



Ζητήθηκε από τους μαθητές να συγκρίνουν τις δύο μεθόδους, των Βαβυλωνίων και των Αράβων και φυσικά να οδηγηθούν στο συμπέρασμα ότι λεκτικά δεν υπάρχει καμία διαφορά μεταξύ τους. Οι Άραβες απλά προχώρησαν ένα βήμα παραπάνω, επηρεασμένοι από τους Αρχαίους Έλληνες και αποδείξαν τη λεκτική λύση με γεωμετρικό τρόπο, κάνοντας τη διαδικασία επίλυσης τέτοιων εξισώσεων πιο κατανοητή. Τέλος τους δόθηκαν τρεις εξισώσεις που θα έπρεπε να τις λύσουν χρησιμοποιώντας την παραπάνω τεχνική των Αράβων με χρήση της γεωμετρίας, αλλά και να κάνουν χρήση του σημερινού αλγεβρικού τρόπου, ώστε να γίνει πιο κατανοητή η μέθοδος «συμπλήρωσης τετραγώνου». Στις δύο από τις τρεις αυτές εξισώσεις, θα έπρεπε να διαιρέσουν με τον συντελεστή του x^2 για να μπορέσουν να εφαρμόσουν την παραπάνω μέθοδο, είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά.

Στο 5ο φ.ε. αφού πρώτα τους έγινε παρουσίαση της Ινδικής μεθόδου «συμπλήρωσης τετραγώνων» όπως επινοήθηκε από τον Sridhara (1025 μ.Χ.) στη γενική της έκφραση, όπως ακριβώς δίνεται στο σχολικό βιβλίο της Γ΄ γυμνασίου (σελ. 94), αλλά και στο ιστορικό σημείωμα της Α΄ λυκείου (σελ. 98, 99), τους ζητήθηκε να τη συγκρίνουν με τις προηγούμενες μεθόδους συμπλήρωσης τετραγώνου από τους Βαβυλώνιους και τους Άραβες. Στόχος αυτής της ερώτησης ήταν να κατανοήσουν οι μαθητές την ανωτερότητα αυτής της μεθόδου όπου:

- Αποφεύγονται τα κλάσματα από την αρχή, όποιοι και αν είναι οι συντελεστές των όρων της εξίσωσης.
- Μπορούν να χρησιμοποιηθούν και αρνητικοί αριθμοί, χωρίς προϋποθέσεις και βέβαια,
- καταλήγει σε έναν γενικό τύπο όπου καλύπτει όλες τις περιπτώσεις.

Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο που εμφανίζεται πρώτη φορά είναι η διακρίνουσα *(Δ)* και ο ρόλος που επιτελεί στις λύσεις των δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Γίνεται κατανοητό από τους μαθητές ότι: Ο αριθμός *Δ* είναι το αποτέλεσμα της συμπλήρωσης τετραγώνου, σύμφωνα με τη μέθοδο των Ινδών και άρα είναι ίσος με μία παράσταση υψωμένη στο τετράγωνο. Επομένως: Ανάλογα με το πρόσημο του *Δ* μπορούμε να συμπεράνουμε τον αριθμό των λύσεων μιας εξίσωσης 2ου βαθμού. Συγκεκριμένα αν:

- $Δ > 0$, τότε η εξίσωση έχει 2 διαφορετικές λύσεις.
- $Δ = 0$, τότε η εξίσωση έχει 1 διπλή (λόγω του τετραγώνου) λύση.
- $Δ < 0$, τότε η εξίσωση δεν έχει καμία λύση (είναι αδύνατη)

Στη συνέχεια δόθηκαν τρεις εξισώσεις και ζητήθηκε από τους μαθητές να τις λύσουν, αφενός κάνοντας χρήση όλων των βημάτων της μεθόδου του Ινδού μαθηματικού, αφετέρου, μόνο με χρήση του τελικού γενικού τύπου. Στη δεύτερη περίπτωση έπρεπε να φέρουν την εξίσωση αν δεν ήταν, στη μορφή $αx^2+ βx+γ=0$ *με* $α\neq0$, να γράψουν τους αριθμούς *α, β και γ* και να υπολογίσουν σωστά τη διακρίνουσα *(Δ)*.

Στο 6ο φ.ε. αναλύεται στους μαθητές η διαδικασία κατά την οποία μετατρέπουμε την εξίσωση $αx^2+βx+γ=0$ με $α\neq0$ αρχικά στην $αx^2= –βx–γ$ και κατόπιν στις συναρτήσεις $y=αx^2$ που γραφικά παριστάνει μια παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων και την $y = – βx –γ$ τη γνωστή συνάρτηση της ευθείας. Οι τετμημένες των σημείων τομής αυτών των γραμμών αν υπάρχουν, δίνουν τη λύση της αρχικής εξίσωσης. Τους έγινε και μία επίδειξη του λογισμικού Geogebra μέσα από έτοιμες εφαρμογές για τη συγκεκριμένη περίπτωση και τους δόθηκε ο σύνδεσμος από το φωτόδεντρο που υπάρχει στο εμπλουτισμένο σχολικό βιβλίο, ώστε να ασχοληθούν μόνοι τους με περισσότερα παραδείγματα. Είχαν τη δυνατότητα να ελέγξουν τις περιπτώσεις που οι δύο γραφικές παραστάσεις είχαν δύο σημεία, ένα σημείο, ή κανένα σημείο τομής και να το συνδέσουν με το πρόσημο της διακρίνουσας. Να επαληθεύσουν, ότι πράγματι οι τετμημένες των σημείων τομής των δύο γραφικών παραστάσεων, αποτελούν τη λύση της εξίσωσης, επιλύοντας οι ίδιοι την εξίσωση με οποιονδήποτε αλγεβρικό ή γεωμετρικό τρόπο επέλεγαν. Τους δόθηκε το ερώτημα να λύσουν γραφικά την εξίσωση: $x^2 – 3x + 2 = 0$ σε τετραγωνισμένο χαρτί, αφού πρώτα κάνουν ένα πίνακα τιμών με τουλάχιστον εφτά ζεύγη αριθμών που επαληθεύουν τη συνάρτηση $y=x^2$, ένα πίνακα τιμών με δύο ζεύγη αριθμών που επαληθεύουν την $y=3x – 2$ και στη συνέχεια να κατασκευάσουν τις δύο γραφικές παραστάσεις και να εντοπίσουν τα σημεία τομής τους, όπου οι τετμημένες τους θα δώσουν τις λύσεις της εξίσωσης. Τους προτάθηκε προφορικά να ελέγξουν τις λύσεις που βρήκαν, είτε επιλύοντας την εξίσωση αλγεβρικά, είτε κάνοντας χρήση του λογισμικού Geogebra από το φωτόδεντρο. Στο επόμενο ερώτημα ζητήθηκε από τους μαθητές να καταγράψουν τα αποτελέσματα της σχέσης μεταξύ πρόσημου της διακρίνουσας και σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων της παραβολής και της ευθείας. Στο σημείο αυτό και κατά τη διάρκεια του μαθήματος αφιερώθηκε λίγος χρόνος να εξηγηθεί ο διαφορετικός τρόπος προσέγγισης της γραφικής επίλυσης μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης από το σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας Α΄ λυκείου, όπου κατασκευάζεται η γραφική παράσταση της παραβολής: $y=αx^2+βx+γ$ (μια μετατοπισμένη παραβολή, που δεν έχει κορυφή την αρχή των αξόνων) και ως λύσεις θεωρούνται οι τετμημένες των σημείων τομής της με το άξονα $x΄x$ μιας και η εξίσωση του άξονα είναι η $y=0$, κάτι που τους είναι γνωστό από το κεφάλαιο με τα γραμμικά συστήματα.

Στο ίδιο φύλλο εργασίας για οικονομία χρόνου και στη δεύτερη διδακτική ώρα από το συνεχόμενο δίωρο, αφού πρώτα έγινε μια μικρή επανάληψη για τους τρόπους επίλυσης μιας εξίσωσης 2ου βαθμού και συγκεκριμένα για τους:

α) Άμεση εφαρμογή της τετραγωνικής ρίζας.

β) Κοινός παράγοντας.

γ) Ανάπτυγμα τετραγώνου.

δ) Διάσπαση όρου και μετά ομαδοποίηση.

ε) Συμπλήρωση τετραγώνου με τη μέθοδο των Βαβυλώνιων και των Αράβων.

στ) Συμπλήρωση τετραγώνου με τη γεωμετρική μέθοδο των Αράβων.

ζ) Συμπλήρωση τετραγώνου με τη μέθοδο των Ινδών.

η) Άμεση εφαρμογή του τύπου που προκύπτει από τη μέθοδο των Ινδών.

θ) Γραφικός τρόπος.

Ζητήθηκε από τους μαθητές να επιλύσουν 9 εξισώσεις διαβαθμισμένης δυσκολίας, χρησιμοποιώντας κάθε φορά τον συντομότερο τρόπο που θα τους έδινε τη λύση. Αυτό έγινε σε αντικατάσταση του κριτηρίου αξιολόγησης που θα γινόταν σε κανονικές συνθήκες δια ζώσης στην τάξη. Τα θέματα επιλέχτηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί να γίνει χρήση όλων των τρόπων που είχαν διδαχτεί. Παράλληλα στην e-class δόθηκε και ένα προαιρετικό φύλλο εργασίας με πιο σύνθετες εξισώσεις, κάποιες από τις οποίες επιλύθηκαν με τη συμμετοχή των μαθητών, κατά τη διάρκεια του μαθήματος.

Στο 7ο φ.ε. γίνεται μια προσπάθεια μέσω της Αραβικής μεθόδου συμπλήρωσης τετραγώνου να εξηγηθεί η παραγοντοποίηση τριωνύμου 2ου βαθμού, κάτι που δεν υπήρχε στις αρχικές προβλέψεις της διδακτικής πρότασης. Ξεκινώντας με το παράδειγμα επίλυσης της εξίσωσης: $2x^2+16x–18=0$ με την Αραβική μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου και ακολουθώντας τα αντίστοιχα βήματα για το τριώνυμο $2x^2+16x–18$, βγάζουμε κοινό παράγοντα τον αριθμό *2* και κατόπιν προσθαφαιρούμε το 4, δηλαδή το μισό του *8* σύμφωνα με την Αραβική μέθοδο. Έτσι καταλήγουμε σε μία αλγεβρική παράσταση «διαφοράς τετραγώνων» που μας οδηγεί στην παραγοντοποίηση του τριωνύμου και στην εμφάνιση του γινομένου δύο παρενθέσεων και του συντελεστή του x^2 δηλαδή του $2(x+9)(x–1)$ όπου παρατηρώντας αναγνωρίζουμε τους αντίθετους αριθμούς των λύσεων της εξίσωσης, δηλαδή το $+9$ και το $–1$. Ακολουθούμε δηλαδή τα βήματα της μεθόδου όπως ακριβώς δίνεται στο βιβλίο της Α΄ λυκείου με τη διαφορά ότι εκεί πραγματοποιείται στη γενικής της μορφή και στο τριώνυμο $αx^2+βx+γ$ *με* $α\neq 0$ σε αντίθεση με το παράδειγμα που χρησιμοποιήθηκε εδώ. Το επόμενο στάδιο είναι να ζητήσουμε από τους μαθητές να γενικεύσουν τα συμπεράσματα. Δηλαδή να καταλήξουν στα εξής:

- Αν $Δ > 0$ και <u>x_1 και x_2 οι λύσεις</u> της τότε:
  $αx^2 + βx + γ = α(x – x_1)(x – x_2)$
- Αν $Δ = 0$ και <u>x_0 η διπλή της λύση</u> τότε:
  $αx^2 + βx + γ = α(x – x_0)^2$
- Αν $Δ < 0$ καμία λύση και το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται.

Κατόπιν δόθηκαν στους μαθητές 6 τριώνυμα 2ου βαθμού να παρογοντοπιηθούν και μία ρητή αλγεβρική παράσταση να απλοποιηθεί, χρησιμοποιώντας οποιονδήποτε τρόπο, είτε με διάσπαση του όρου *βx* σε δύο όρους και μετά με ομαδοποίηση, κάτι που δεν ήταν πάντοτε εφικτό να πραγματοποιηθεί, ειδικά σε περιπτώσεις που δεν φαινόταν κάποια σχέση μεταξύ των συντελεστών *α, β και γ* των όρων του τριωνύμου, είτε με ανάπτυγμα τετραγώνου, αν ήταν εφικτό. Η συντομία αυτών των μεθόδων αποτέλεσαν και το κίνητρο για να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές. Η έσχατη λύση βέβαια ήταν με τις λύσεις που μηδενίζουν το τριώνυμο και μπορούν να βρεθούν με χρήση του γενικού τύπου και φυσικά η εφαρμογή των παραπάνω. Τα τριώνυμα που επιλέχτηκαν έδιναν τη δυνατότητα στους μαθητές να εφαρμόσουν όλες τις προαναφερθείσες μεθόδους.

Ολοκληρώνοντας με το 8ο φ.ε. και με τα προβλήματα που επιλύονται, αφού πρώτα μετασχηματίσουμε το λεκτικό μέρος (δηλαδή τη διατύπωση του προβλήματος) σε εξίσωση, ακολουθώντας κάποια βήματα τα οποία ήταν γνωστά στους μαθητές από την προηγούμενη τάξη. Συγκεκριμένα σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Β΄ γυμνασίου για τη λύση ενός προβλήματος με τη βοήθεια εξισώσεων ακολουθούνται τα παρακάτω γενικά βήματα:

- Διαβάζουμε καλά το πρόβλημα και διακρίνουμε τα δεδομένα από τα ζητούμενα.
- Χρησιμοποιούμε ένα γράμμα (συνήθως το x) για να εκφράσουμε τον άγνωστο αριθμό που πρέπει να προσδιορίσουμε.
- Εκφράζουμε όλα τα υπόλοιπα μεγέθη του προβλήματος που τυχόν υπάρχουν, με τη βοήθεια του x.
- Γράφουμε την εξίσωση χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της εκφώνησης του προβλήματος.
- Λύνουμε την εξίσωση, χρησιμοποιώντας κατάλληλες μεθόδους επίλυσης.
- Ελέγχουμε αν η λύση που βρήκαμε ανταποκρίνεται στις συνθήκες του προβλήματος.

Έχοντας αυτά υπόψη οι μαθητές, τα οποία ειπώθηκαν κατά τη διάρκεια του μαθήματος, και βέβαια τα ιστορικά προβλήματα που είχαν αναδειχθεί στις προηγούμενες τηλεδιδασκαλίες, έπρεπε να απαντήσουν σε *8* προβλήματα του σχολικού τους βιβλίου, τα οποία επιλέχτηκαν με γνώμονα να εξυπηρετήσουν τον βασικό σκοπό της διδακτικής παρέμβασης που είναι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις (Λεκτική – Αριθμητική – Αλγεβρική – Γεωμετρική) των δευτεροβάθμιων εξισώσεων και των λύσεων τους. Έτσι λοιπόν, έγινε χωρισμός σε δύο κατηγορίες.

Στην 1η κατηγορία δόθηκαν *3* προβλήματα με καθαρό γεωμετρικό προσανατολισμό, που συνδέονταν με εμβαδά τετραγώνων και ορθογωνίων για να υπάρχει συνάφεια και με τα ιστορικά προβλήματα που αναπτύχθηκαν σε προηγούμενα μαθήματα, αλλά και *2* προβλήματα που έπρεπε να κάνουν χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Στη 2η κατηγορία τα προβλήματα που δόθηκα ήταν *3* και είχαν καθαρά λεκτικό – αριθμητικό προσανατολισμό. Ζητήθηκε από τους μαθητές να βρουν θετικό ακέραιο αριθμό που να ικανοποιεί κάποιες συνθήκες.

5.3.4 Ανάλυση Ερωτηματολογίου

Στο τέλος της διδακτικής παρέμβασης δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο τύπου Likert στους μαθητές με διαβαθμισμένες απαντήσεις: 1. Διαφωνώ Απόλυτα (ΔΑ) 2. Διαφωνώ (Δ) 3. Ούτε Διαφωνώ ούτε Συμφωνώ (ΟΔΣ) 4. Συμφωνώ (Σ) 5. Συμφωνώ Απόλυτα (ΣΑ), χωρισμένο σε 4 κατηγορίες:

Η 1η κατηγορία αφορούσε την σύγχρονη και ασύγχρονη εξ' αποστάσεως εκπαίδευση. Σε σύγκριση με τη δια ζώσης διδασκαλία. Πόσο κατανοητά γινόταν τα μαθήματα. Αν συμμετείχαν ενεργά σ' αυτή τη διαδικασία. Αν είχαν προβλήματα με τη σύνδεση και πόσο επηρέασε την παρακολούθηση των μαθημάτων. Αν μπορούσαν να θέτουν με ευκολία ερωτήσεις και αν η έλλειψη επαφής με τους συμμαθητές και τους καθηγητές ήταν σημαντική γι' αυτούς.

Η 2η κατηγορία απευθυνόταν σε όσους συμμετείχαν σε ομάδες. Αν είχαν συμμετοχή στην επίλυση των φύλλων εργασίας. Αν αυτό τους βοήθησε να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες με τις οποίες ασχολήθηκαν. Αν αντιμετώπισαν κάποια προβλήματα με τους υπόλοιπους της ομάδας και πόσο τους επηρέασαν στη διδακτική διαδικασία και γενικά αν το αντιμετώπισαν με θετικό τρόπο ή θα προτιμούσαν να δουλεύαν μόνοι τους.

Η 3η κατηγορία είχε να κάνει με την Ιστορική διάσταση που δόθηκε στην εκμάθηση της εξίσωσης 2ου βαθμού. Πόσο τους βοήθησε να κατανοήσουν τον τρόπο επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Αν τους έδωσε κάποιο κίνητρο να ασχοληθούν πιο ενεργά ή αν τους κούρασε. Πόσο τους βοήθησε να κατανοήσουν τον σημαντικό ρόλο των εξισώσεων σε όλους τους λαούς. Αν μ' αυτόν τον τρόπο ο ρόλος της διακρίνουσας και ο γενικός τύπος τους έγινε πιο κατανοητός και τέλος αν με τον τρόπο που έγιναν τα μαθήματα μπόρεσαν να βρίσκουν ευκολότερα το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης 1ου ή 2ου βαθμού.

Η 4η και τελευταία κατηγορία αφορούσε το ρόλο των πολλαπλών αναπαραστάσεων στην επίλυση των εξισώσεων 2ου βαθμού. Κατά πόσο αυτές οι αναπαραστάσεις δώσαν μια πληρέστερη εικόνα των εξισώσεων. Αν προτιμούσαν να μάθαιναν μόνο τον γενικό τύπο ή μόνο έναν τρόπο επίλυσης και να μην κουράζονται με περισσότερους. Πόσο κατανοητό έγινε το μάθημα με την πολλαπλότητα των μεθόδων και αν τους βοήθησε να κατανοήσουν βαθύτερα τον σημαντικό ρόλο της παραγοντοποίησης.

Το ερωτηματολόγιο απαντήθηκε από το 70% αυτών που παρακολουθούσαν τα μαθήματα και συμμετείχαν ενεργά (32/46), δόθηκε στις 8/6/20 και επιστράφηκε έως τις 12/6/20.

ΚΕΦ. 6ο: "ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ" ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια προσπάθεια καταγραφής των "αποτελεσμάτων" της έρευνας χωρισμένων σε δύο ενότητες. Στη 1η, παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών στα 8 φύλλα εργασίας συνδεόμενοι με τους επιμέρους στόχους (ερευνητικά ερωτήματα). Στη 2η, γίνεται μια αποτίμηση του τρόπου διδασκαλίας, με βάση το ερωτηματολόγιο που αναλύθηκε παραπάνω. Λόγω της καραντίνας οι απαντήσεις των μαθητών στα φύλλα εργασίας δεν δόθηκαν στην τάξη με την παρουσία εκπαιδευτικού, αλλά πραγματοποιήθηκαν από το σπίτι, σε άγνωστες συνθήκες ως προς τον τρόπο διεξαγωγής (σε πόσο χρόνο απαντήθηκαν τα ερωτήματα, αν υπήρξε εξωτερική βοήθεια, αν έγινε χρήση βοηθημάτων ή του διαδικτύου κλπ) γι' αυτό η αναφορά έγινε σε "αποτελέσματα" και όχι σε αποτελέσματα.

6.1 "Αποτελέσματα" των Φύλλων Εργασίας (Φ.Ε.)

Τα φύλλα εργασίας δομήθηκαν με τέτοιο τρόπο, ώστε να απαντούν στους επιμέρους στόχους (ερευνητικά ερωτήματα) της έρευνας. Έτσι το 1ο φ.ε. και εν μέρει το 7ο με την παραγοντοποίηση τριωνύμου, αντιστοιχούν στον 1ο επιμέρους στόχο και μέρους του 3ου, δηλαδή τον αριθμό των λύσεων 1ου και 2ου βαθμού εξισώσεων, αλλά και τη χρήση της παραγοντοποίησης.

Συγκεκριμένα για τις εξισώσεις 1ου βαθμού όταν ζητήθηκε από ένα παράδειγμα για κάθε περίπτωση εξίσωσης με μία και μοναδική λύση, άπειρες λύσεις και καμία λύση, η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών, είτε δούλεψαν ομαδικά, είτε ατομικά, απάντησε σωστά. Δύο ομάδες (7η, 12η) διαφοροποιήθηκαν θεωρώντας λανθασμένα την εξίσωση $0 \cdot x=0$ ως αδύνατη και την $0 \cdot x=5$ ως αόριστη. Ενδιαφέρον είχε το γεγονός ότι μία ομάδα (5η) και ένας μεμονωμένος μαθητής (1ος) θεώρησε την εξίσωση $2 \cdot x=0$ αδύνατη, προφανώς συγχέοντας την με την $0 \cdot x=2$, όπου η θέση του "0" δεν έπαιξε κάποιον ρόλο γι' αυτούς. Επίσης τρεις ομάδες (3η, 4η, 6η) δεν αρκέστηκαν στις τελικές απλοποιημένες εξισώσεις, αλλά δημιούργησαν πιο σύνθετες εξισώσεις, τις οποίες στη συνέχεια τις απλοποίησαν για να καταλήξουν στις τελικές μορφές.

Στην ερώτηση 2 όπου ζητήθηκε από τους μαθητές να βρουν τους αριθμούς *α* και *β*, ώστε οι εξισώσεις να είναι αόριστες ή αδύνατες, οι σωστές απαντήσεις ήταν λιγότερες από ότι στο προηγούμενο ερώτημα. Οι μαθητές έπρεπε να απαντήσουν σε τέσσερις παραμετρικές εξισώσεις (δεν τους δόθηκε εξήγηση της έννοιας αυτής, γιατί δεν αποτελούσε επιμέρους στόχος αυτής της έρευνας). Οι εξισώσεις ήταν απλές, στην τελική τους μορφή, όπου οι μαθητές θα έπρεπε να συνδέσουν τις απαντήσεις που δώσανε στο ερώτημα 1 για το ποιες θεωρούσαν αόριστες και ποιες αδύνατες με τον αριθμό που έπρεπε να πάρουν τα *α* και *β*. Οι απαντήσεις τους χωρίστηκαν σε πέντε κατηγορίες:

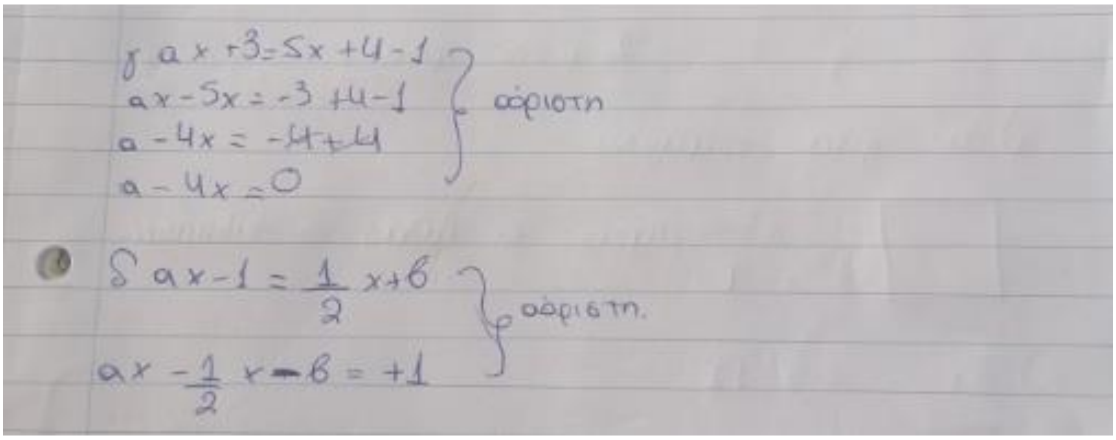
Στη 1η όπου απάντησαν σωστά, μάλλον με διαισθητικό τρόπο, χωρίς να εξηγήσουν πως το βρήκαν. ανήκουν τέσσερις ομάδες (1η, 4η, 11η, 13η) και ένας μαθητής (ο 2ος) που δούλεψε ατομικά.

Στη 2η κατηγορία οι μαθητές βρήκαν διαισθητικά τα σωστά αποτελέσματα όπως έγινε και με τη 1η κατηγορία, στη συνέχεια όμως έκαναν επαλήθευση, ώστε να καταλήξουν στις μορφές των αδύνατων και αόριστων εξισώσεων που είχαν απαντήσει στο 1ο ερώτημα. Ανήκουν οι μαθητές δύο ομάδων (8η, 14η) και ένας που ασχολήθηκε ατομικά (ο 1ος).

Στη 3η κατηγορία όπου εφάρμοσαν αναλυτικά τα βήματα επίλυσης παραμετρικής εξίσωσης, κατανοώντας τη διαφορά μεταξύ παραμέτρου και αγνώστου και υπολόγισαν σωστά τα *α* και *β*, κατεγράφησαν τέσσερις ομάδες (2η, 3η, 6η, 9η) και δύο μεμονωμένοι μαθητές (3ος, 4ος).

Στη 4η κατηγορία ανήκουν αυτοί που δεν απάντησαν καθόλου (12η ομάδα) ή απάντησαν λάθος (10η ομάδα) δίνοντας στα *α* και *β* εντελώς τυχαίες τιμές, παρόλο που στο 1ο ερώτημα είχαν απαντήσει σωστά

Αξιοσημείωτη είναι η 5η και τελευταία κατηγορία (δύο ομάδες καταγράφηκαν, η 5η και η 7η), όπου οι μαθητές θεώρησαν τα *α* και *β* αγνώστους, όπως και το x, τα μετέφεραν στο πρώτο μέλος της εξίσωσης και δεν μπόρεσαν να συνεχίσουν, αφήνοντας αναπάντητα τα ερωτήματα. Παρατηρήθηκαν έτσι λάθη εννοιολογικού χαρακτήρα, όπου το γράμμα σημαίνει πάντα άγνωστος με συγκεκριμένη τιμή, όπου θα πρέπει να υπολογιστεί, Kuchemann (1981).



Εικόνα 1: Θεώρηση όλων των μεταβλητών ως άγνωστοι (5η ομάδα)

Αποτίμηση των δύο πρώτων ερωτήσεων του 1ου φ.ε.

Συγκρίνοντας τα παραπάνω "αποτελέσματα" των δύο ερωτήσεων για τις εξισώσεις 1ου βαθμού διαπιστώνουμε ότι:

Στην 1η ερώτηση, το σύνολο σχεδόν των μαθητών απαντάει σωστά, γνωρίζει πως πρέπει να είναι η τελική μορφή μιας εξίσωσης, ώστε να είναι αόριστη, αδύνατη, ή να έχει μοναδική λύση. Αντίθετα στη 2η ερώτηση ένα μέρος αυτών των μαθητών δυσκολεύετε να βρει τους αριθμούς που πρέπει να πάρουν οι παράμετροι α και β, ώστε να καταλήξουν σε τέτοιες εξισώσεις. Δείχνει μια δυσκολία να αναγνωρίσει ομοιότητες στη δομή των εξισώσεων (Wagner et al. 1984, Δράμαλης – Σακονίδης, 2006). Επίσης έχει δημιουργηθεί και η αίσθηση σε αρκετούς μαθητές, ότι όλα τα γράμματα θα πρέπει να θεωρούνται άγνωστοι Kuchemann (1981).

Η ερώτηση 3 περιείχε τρεις απλές εξισώσεις 2ου βαθμού παρόμοιες μ’ αυτές που είχαν διδαχτεί στη Β΄ γυμνασίου και δύο πιο σύνθετες. Για τις απλές τους δινόταν η παρότρυνση να τις λύσουν με τη μέθοδο της «δοκιμής – λάθος» ενώ τις δύο πιο σύνθετες με τη βοήθεια της παραγοντοποίησης. Υπήρχε ένα υποερώτημα για το συμπέρασμα που καταλήγαν ως προς τον αριθμό των λύσεων μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης και τέλος αν μπορούσαν να βρουν εξίσωση της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ που να είναι αόριστη ή ταυτότητα, ώστε να γίνει η σύγκριση με τις πρωτοβάθμιες εξισώσεις.

Τρεις από τις ομάδες (3η, 4η, 6η) και τρεις σε ατομικό επίπεδο (1ος, 3ος, 4ος) απαντήσαν σε όλα τα υποερωτήματα σωστά, βρήκαν τις λύσεις είτε με δοκιμή, είτε με παραγοντοποίηση, κατέληξαν σε σωστά συμπεράσματα για τις λύσεις μιας εξίσωσης 2ου βαθμού και βέβαια απάντησαν ότι δεν υπάρχουν τέτοιες εξισώσεις που να είναι ταυτότητες, χωρίς ωστόσο κανένας μαθητής να αιτιολογήσει γιατί συμβαίνει αυτό. Το ίδιο συνέβη και κατά την διάρκεια των on – line μαθημάτων, κανείς δεν πήρε τον λόγο να απαντήσει σ' αυτό το ερώτημα. Οι υπόλοιπες έντεκα ομάδες και ο ένας ανεξάρτητος μαθητής υπέπεσαν στα παρακάτω λάθη:

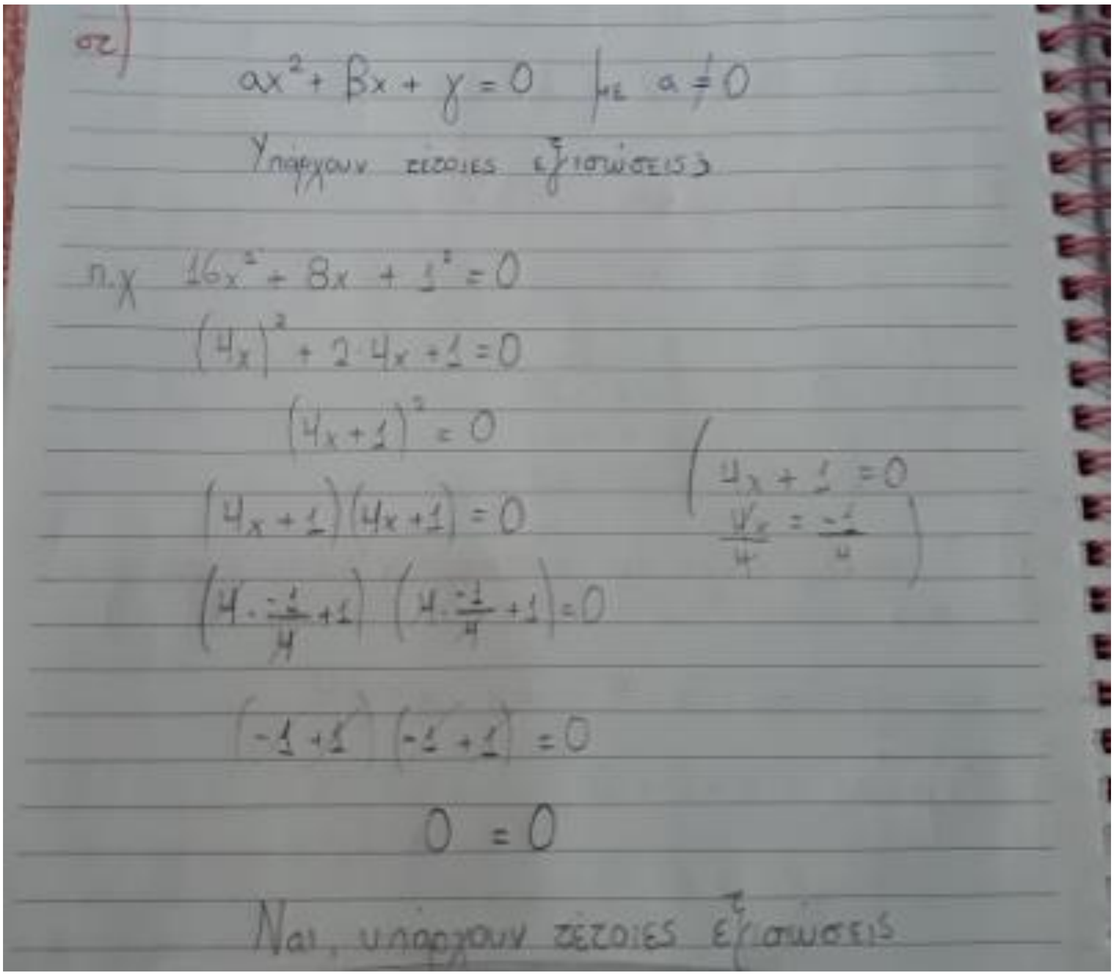
Δύο ομάδες (1η, 2η) όταν εφάρμοσαν τη διαδικασία «δοκιμή – λάθος» στις δύο πρώτες απλές εξισώσεις βρήκαν μόνο τη μία λύση και σταμάτησαν εκεί, δίχως να αναζητήσουν αν υπάρχει και άλλη λύση, θεωρώντας ότι είναι καλυμμένοι με την απάντηση τους, όπως δηλώσαν αργότερα. Το εκπληκτικό είναι ότι έξι ομάδες(2η, 7η, 8η, 11η, 13η, 14η) και ένας μεμονωμένος μαθητής (2ος) παρόλα τα επιμέρους λάθη, όπως να απορρίπτουν χωρίς λόγο την αρνητική λύση ή να βρίσκουν μόνο τη μία από τις δύο λύσεις, βρήκαν εξισώσεις με μία, με δύο και με καμία λύση, αλλά όταν χρειάστηκε να απαντήσουν στο ερώτημα, πόσες λύσεις έχει τελικά μια δευτεροβάθμια εξίσωση, οι περισσότεροι απάντησαν ότι έχει δύο λύσεις ή περισσότερες από μία. Ρωτήθηκαν γι' αυτό και οι εξηγήσεις που δόθηκαν ήταν:

«Θεωρούσαμε ότι έπρεπε να δώσουμε μόνο μία απάντηση» (7η ομάδα)

«Αγνοήσαμε την περίπτωση της αδύνατης και τη διπλή λύση τη θεωρήσαμε ως δύο λύσεις», (8η ομάδα)

«Εφόσον είναι 2ου βαθμού θα έχει δύο λύσεις». (14η ομάδα)

Δύο ομάδες (10η, 12η) αν και δεν υπέπεσαν σε σοβαρά λάθη, δεν απάντησαν στις δύο τελευταίες ερωτήσεις. Μία ομάδα (5η) έλυσε όλες τις εξισώσεις με τον γενικό τύπο, παρόλο που δεν είχε γίνει αναφορά σ' αυτόν. Το πιθανότερο είναι να υπήρξε εξωτερική βοήθεια. Τέλος δύο ομάδες (8η, 9η) θεώρησε εσφαλμένα στο τελευταίο ερώτημα, ότι μια δευτεροβάθμια εξίσωση μπορεί να είναι ταυτότητα, μιας και μπορούμε να επιλύσουμε τέτοιες εξισώσεις χρησιμοποιώντας την ταυτότητα, «ανάπτυγμα τετραγώνου». Δηλαδή η χρήση μιας ταυτότητας για την εύρεση της διπλής λύσης της εξίσωσης, κατέστησε την εξίσωση ταυτότητα, με άπειρες λύσεις. Φαίνεται να υπάρχει μια σύγχυση μεταξύ του τι είναι ταυτότητα και του πως χρησιμοποιείται μια ταυτότητα στην εύρεση των λύσεων μιας εξίσωσης. Ένα καθαρά εννοιολογικό λάθος.



Εικόνα: 2 Λανθασμένη εξήγηση για το αν μια δευτεροβάθμια εξίσωση μπορεί να είναι ταυτότητα (9η ομάδα)

Αναφορικά με το 7ο φ.ε. και τη παραγοντοποίηση τριωνύμου, στο σύνολο τους οι μαθητές που χρησιμοποίησαν τον γενικό τύπο, για την εύρεση των λύσεων της αντίστοιχης εξίσωσης, ώστε να ολοκληρώσουν την παραγοντοποίηση, γνώριζαν ότι το πρόσημο της διακρίνουσας δίνει το πλήθος των λύσεων της.

Αποτίμηση της 3ης ερώτησης του 1ου φ.ε.

Στην ερώτηση 3 διαπιστώνουμε ένα αρκετά μεγάλο σύνολο λαθών και παρανοήσεων, το οποίο ως ένα βαθμό είναι κατανοητό, εφόσον είναι η πρώτη φορά που οι μαθητές έρχονται σε επαφή με εξισώσεις 2ου βαθμού, με εξαίρεση τις δύο αρχικές απλές περιπτώσεις όπου στο σύνολό τους απαντούν σωστά. Παρατηρούμε λάθη διαδικαστικά και εφαρμογής των κανόνων της παραγοντοποίησης, (Maconye & Matuku, 2016). Λάθη που σχετίζονται με τον αριθμό των λύσεων μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης (1ο ερευνητικό ερώτημα), όπου διαπιστώνουμε σε πολλές ομάδες μια δυσκολία στο να συνδέσουν τα αποτελέσματα που βρήκαν από τη επίλυση των εξισώσεων με τον αριθμό των λύσεων τους. Λάθη εννοιολογικά, όπως το να απορρίπτουν αρνητικές λύσεις ΄ή να βρίσκουν μόνο τις θετικές, καθώς και να παρανοούν τη χρήση μιας ταυτότητας για την επίλυση μιας εξίσωσης με το εάν είναι η ίδια η εξίσωση ταυτότητα (Λεμονίδης, 1996).

Το 2ο φ.ε., συνδέεται με μέρος του 2ο στόχου, δηλαδή τη μετάβαση από τη συμβολική στην γεωμετρική αναπαράσταση. Θεωρήθηκε σκόπιμο να δοθεί αυτό το φύλλο εργασίας πριν την Αραβική γεωμετρική μέθοδο, όπου η λεκτική επίλυση μιας εξίσωσης συνοδεύεται με τη γεωμετρική της αναπαράσταση, ώστε οι μαθητές να εξοικειωθούν σε τέτοιου είδους μεταβάσεις από ένα πλαίσιο αναφοράς σε ένα άλλο. Επίσης παροτρύνθηκαν να βρουν και μη γεωμετρικές λύσεις, χρησιμοποιώντας την παραγοντοποίηση (μέρος 3ου στόχου). Παρόλο που τέτοιου είδους αναπαραστάσεις, τους ήταν οικείες από προηγούμενες τάξεις, εντούτοις αντιμετώπισαν κάποιες δυσκολίες όταν οι αλγεβρικές εκφράσεις γινόταν λίγο πιο σύνθετες. Σε μαθηματικά βιβλία του δημοτικού, αλλά και της Α΄ γυμνασίου υπήρχαν εικόνες που συνδέαν το α^2 με το εμβαδόν ενός τετραγώνου ή το α^3 με τον όγκο ενός κύβου, γι' αυτό και οι εκφράσεις, *α εις το τετράγωνο και α εις τον κύβο,* ήταν γνωστές στους μαθητές. Επίσης στο κεφάλαιο με τις ταυτότητες είχαν γίνει και οι αντίστοιχες γεωμετρικές αποδείξεις.

Οι περισσότερες βέβαια απαντήσεις που δόθηκαν και αφορούσαν το μονώνυμο x^2, ως εμβαδόν τετραγώνου και το μονώνυμο $6x$ ως εμβαδόν ορθογωνίου ήταν σωστές (13 ομάδες, 4 άτομα). Μάλιστα δύο ομάδες (8η, 3η) το $6x$ το αναπαραστήσαν εκτός του ορθογωνίου, επιπλέον και ως περίμετρο, η μία κανονικού εξαγώνου πλευράς x και η άλλη ισόπλευρου τριγώνου πλευράς $2x$ αντίστοιχα. Υπήρξαν και δύο ομάδες (2η, 10η) οι οποίες το περιέγραψαν μόνο ως περίμετρο εξαγώνου. Όταν όμως έπρεπε να τα συνδέσουν αυτά σε εξίσωση προέκυψαν κάποιες δυσκολίες. Συγκεκριμένα όταν ζητήθηκε να περιγράψουν γεωμετρικά την εξίσωση: $x^2+6x=16$, έξι ομάδες (1η, 2η, 7η, 8η, 10η, 12η) και δύο άτομα (2ο, 4ο) δεν απάντησαν, ή δώσαν λάθος απαντήσεις. Μάλιστα οι παραπάνω δύο ομάδες που αναπαραστήσαν το $6x$ μόνο ως περίμετρο κανονικού εξαγώνου πλευράς x δεν απάντησαν καθόλου γιατί όπως εξηγήσαν:

«Δεν μπορέσαμε να συνδέσουμε εμβαδόν και περίμετρο, δύο διαφορετικά μεγέθη, σε μία εξίσωση». (2η ομάδα)

Τέσσερεις ομάδες (3η, 4η, 5η, 10η) και δύο άτομα (3ο, 4ο) δεν μπόρεσαν να αντιστοιχίσουν το x^3 με κύβο, παρόλο που απαντήσαν στις υπόλοιπες ερωτήσεις σωστά, με εξαίρεση τη 10η ομάδα που είχε αρκετά προβλήματα με όλες τις ερωτήσεις και τέλος μία ομάδα (12η) έκανε μόνο δύο σχήματα που ήταν λάθος. Οι υπόλοιπες ομάδες (6η, 9η, 13η, 14η) απάντησαν σωστά σε όλα. Η 11η ομάδα για να λύσει την εξίσωση $x^3=x$ διαίρεσε με x και τα δύο μέλη, κατέληξε στην $x^2=1$, βρήκε τις λύσεις 1 και –1, αλλά όχι το 0, τις υπόλοιπες ερωτήσεις τις απάντησε σωστά.

Αποτίμηση του 2ου φ.ε.

Οι διαπιστώσεις που μπορούν να γίνουν σ' αυτό το φύλλο εργασίας, εστιάζονται κυρίως, στη δυσκολία που συνάντησαν οι μαθητές, κατά τη μεταφορά μιας αλγεβρικής παράστασης (μονώνυμο, πολυώνυμο ή εξίσωση) σε ένα γεωμετρικό πλαίσιο. Κυρίως να δώσουν γεωμετρική υπόσταση σε μια εξίσωση 2ου ή 3ου βαθμού. Οι μαθητές δεν ήταν εξοικειωμένοι σε τέτοιου είδους μεταβάσεις. Συνήθως αντιμετώπιζαν καταστάσεις σε αντίθετη κατεύθυνση, δηλαδή ένα γεωμετρικό πρόβλημα εμβαδού να το μεταφέρουν στο πλαίσιο της άλγεβρας, για να μπορούν να το επεξεργαστούν με τα εργαλεία της, με μεγαλύτερη ευκολία. κάτι που θα φανεί παρακάτω στο 8ο φ.ε. με την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων στο πλαίσιο της άλγεβρας.

Το 3ο φ.ε. αφορούσε την Βαβυλωνιακή μέθοδο επίλυση εξίσωσης και εξυπηρετούσε μέρους του 2ου στόχου, τη μετάβαση από τη λεκτική στην αριθμητική και στην αλγεβρική (συμβολική) λύση, αλλά και μέρος του 3ου στόχου, επίλυση εξίσωσης με συμπλήρωση τετραγώνου.

Οι περισσότερες απαντήσεις των μαθητών ήταν σωστές και στο αριθμητικό και στο αλγεβρικό μέρος με τη συμπλήρωση τετραγώνου. Επτά ομάδες (4η, 5η, 6η, 8η, 9η, 11η, 13η) και δύο άτομα (2ος, 4ος) απαντήσαν σε όλα σωστά. Από αυτούς οι μισοί επιλέξαν να εφαρμόσουν πρώτα το αριθμητικό μέρος και μετά το αλγεβρικό (4η, 5η, 6η, 11η, ομάδα και ο 2ος μαθητής) και οι άλλοι μισοί πρώτα εφάρμοσαν το αλγεβρικό μέρος και μετά το αριθμητικό (8η, 9η, 13η ομάδα και 4ος μαθητής). Το σημαντικό όμως είναι ότι οι υπόλοιπες ομάδες και τα άτομα, παρόλο που απάντησαν σωστά στο αλγεβρικό μέρος της εξίσωσης, με εξαίρεση μία ομάδα (12η), που και στα δύο μέρη αντιμετώπισε προβλήματα, οι υπόλοιπες είτε δεν ασχολήθηκαν καθόλου με το αριθμητικό μέρος, τέσσερις ομάδες (1η, 3η, 7η, 10η) και δύο άτομα (1ος, 3ος), είτε κάναν λάθος στην εφαρμογή του αριθμητικού τρόπου (2η, ομάδα), είτε κάναν επαλήθευση των τιμών της εξίσωσης που βρήκαν, αντί να εφαρμόσουν τα βήματα όπως καταγράφονταν στη Βαβυλωνιακή μέθοδο (14η ομάδα). Στη συζήτηση που ακολούθησε κατά τη διάρκεια της εξ' αποστάσεως διδασκαλίας, όταν ρωτήθηκαν τι ήταν αυτό που τους δυσκόλεψε και δεν μπόρεσαν να μεταβούν από τον αλγεβρικό στον αριθμητικό τρόπο, οι απαντήσεις τους ήταν οι εξής:

«Είμαστε περισσότερο εξοικειωμένοι με την άλγεβρα τα τελευταία χρόνια από ότι με την αριθμητική και μας φάνηκε πιο εύκολο» (2η ομάδα)

«Δεν καταλάβαμε τι έπρεπε να κάνουμε» (1η ομάδα)

«Μπερδευτήκαμε με την Βαβυλωνιακή μέθοδο και δεν ξέραμε ποιον αριθμό έπρεπε να διαιρέσουμε με το 2 και μετά να ακολουθήσουμε τα υπόλοιπα βήματα» (14η ομάδα)

«Νομίσαμε ότι έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε έναν από τους δύο τρόπους» (3η ομάδα)

Φάνηκε κάτι που δεν το περιμέναμε, ότι η τυποποίηση του αλγεβρικού τρόπου θα τους ήταν πιο οικεία από ότι ένα καθαρά αριθμητικό μοντέλο χωρίς μεταβλητές. Ίσως η ενασχόληση στο γυμνάσιο με αλγεβρικές παραστάσεις, παρόλο που δημιουργεί πάντοτε προβλήματα να τους κατεύθυνε σε ένα αλγεβρικό μοντέλο, πιο σύνηθες από ότι το αριθμητικό τα τελευταία χρόνια της μαθητικής τους ζωής.

<u>Αποτίμηση του 3ου φ.ε.</u>

Στο συγκεκριμένο φ.ε. που συνδεόταν με τον 2ο και 3ο επιμέρους στόχο, διαπιστώθηκε ότι η μετάβαση από το αλγεβρικό στο αριθμητικό πλαίσιο, προβλημάτισε αρκετά τους μαθητές. Οι μισές ομάδες αντιμετώπισαν δυσκολίες στην αριθμητική αποτύπωση ενός λεκτικού προβλήματος, καθώς και στη μεταφορά από το αλγεβρικό στο αριθμητικό πλαίσιο. Προτίμησαν την εξίσωση να τη λύσουν αλγεβρικά – στο σύνολο τους οι ομάδες – από το να μεταφράσουν τον Βαβυλωνιακό λεκτικό τρόπο σε αριθμητικό και κατόπιν σε αλγεβρικό. Υπήρξε μια διαφοροποίηση σε σχέση με τα συμπεράσματα προηγούμενων ερευνών (Küchemann 1978; 1981; Kieran 1981; Λεμονίδης 1996; Βερύκιος 2003; Δράμαλης & Σακονίδης 2006; Lucariello et al., 2014), σύμφωνα με τα οποία, ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών αδυνατεί να κατανοήσει βασικές έννοιες της άλγεβρας, τουλάχιστον στο μέρος που αφορά την επίλυση εξισώσεων μέσω αλγεβρικών μεθόδων.

Στο 4ο φ.ε. ως συνέχεια του 2ου και 3ου στόχου, οι μαθητές ασχολήθηκαν με τον Αραβικό τρόπο επίλυσης εξισώσεων 2ου βαθμού (λεκτικό και γεωμετρικό). Ζητήθηκε από τους μαθητές, τη λεκτική λύση από ένα ιστορικό πρόβλημα του al-Khwarizmi να τη μετατρέψουν αρχικά σε αριθμητική και κατόπιν σε αλγεβρική, όπου θα έπρεπε να βρουν και την αρνητική λύση. Επίσης δόθηκε και η γεωμετρική λύση του al- Khwarizmi στο ίδιο πρόβλημα, με λεκτικό φυσικά τρόπο και ζητήθηκε από τους μαθητές να την περιγράψουν κάνοντας τα σχετικά σχήματα. Οι απαντήσεις των μαθητών ήταν πολύ πιο βελτιωμένες σε σχέση με το προηγούμενο φύλλο εργασίας, μιας και διαπιστώσαν ότι οι λεκτικοί μέθοδοι των Βαβυλωνίων και των Αράβων ήταν ίδιοι και έτσι μόνο δύο ομάδες (1η, 7η) δεν μπόρεσαν να περιγράψουν αριθμητικά τη λεκτική λύση του al–Khwarizmi. Τρεις ομάδες (3η, 7η, 12η) δυσκολεύτηκαν να σχεδιάσουν τη γεωμετρική επίλυση και τέλος δυο ομάδες (1η, 5η) δεν βρήκαν τις αρνητικές λύσεις των εξισώσεων που ακολουθούσαν, εξηγώντας ότι δεν είχαν καταλάβει ότι θα έπρεπε να βρουν και τις μη γεωμετρικές λύσεις.

Αποτίμηση του 4ου φ.ε.

Γίνεται φανερό ότι σ’ αυτό το φ.ε. οι μαθητές, έχοντας κατά νου και το προηγούμενο φύλλο, μπόρεσαν να ανταποκριθούν θετικά στην διαδικασία εφαρμογής ενός αριθμητικού πλαισίου, σε αντίστοιχο με τους Βαβυλώνιους ιστορικό πρόβλημα των Αράβων, αλλά εκπλήσσει κυρίως το γεγονός ότι μπορέσαν κατά ένα μεγάλο ποσοστό (11 στις 14 ομάδες και 4 στα 4 άτομα) να εκτελέσουν σωστά τη μεταφορά της εξίσωσης σε ένα γεωμετρικό πλαίσιο εμβαδών, τετραγώνων και ορθογωνίων. Έτσι η συμπλήρωση τετραγώνου εκτός από αλγεβρικά, δόθηκε και γεωμετρικά, οπτικοποιώντας τις αλγεβρικές έννοιες Thwaites (1982) και δίνοντας την απαιτούμενη προσοχή στην παροχή εννοιολογικής κατανόησης των αλγεβρικών συμβόλων (Kieran, 1997).

Στο 5ο φ.ε. οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν τον Ινδικό τρόπο συμπλήρωσης τετραγώνου, όπου ουσιαστικά ολοκληρώνεται ο 3ος στόχος της διδακτικής παρέμβασης με την εμφάνιση για πρώτη φορά του γενικού τύπου και με το ρόλο της διακρίνουσας να αποτελεί το κομβικό σημείο της παρέμβασης για τον αριθμό των λύσεων (1ος στόχος). Οι μαθητές είχαν κληθεί να απαντήσουν σε ερωτήσεις για το πως αντιλαμβάνονται τον ρόλο της διακρίνουσας, να συγκρίνουν τη μέθοδο των Ινδών με τις προηγούμενες των Αράβων και των Βαβυλωνίων, καθώς και να επιλύσουν κάποιες εξισώσεις, αφενός ακολουθώντας τα βήματα του Ινδού μαθηματικού Sridhara, αφετέρου κάνοντας χρήση του γενικού τύπου. Από τις απαντήσεις φάνηκε ένα μεγάλο μέρος των μαθητών δεν κατανόησαν το ρόλο της διακρίνουσας. Πέντε ομάδες (3η, 5η, 7η, 8η, 10η) και ένα άτομο (1ο), δεν απάντησαν σ’ αυτή την ερώτηση. Η μία μάλιστα από αυτές (7η) δεν εφάρμοσε τον γενικό τύπο στην επίλυση των εξισώσεων, αλλά και με τη συμπλήρωση τετραγώνου αντιμετώπισε κάποια προβλήματα. Η 3η εκτέλεσε σωστά τη συμπλήρωση τετραγώνου και σε μία περίπτωση το γενικό τύπο και φάνηκε να κατανοεί το ρόλο της διακρίνουσας, όπως και η 10η ομάδα, η οποία έλυσε όλες τις εξισώσεις κάνοντας σωστή χρήση του γενικού τύπου. Όταν ρωτήθηκαν απάντησαν ως εξής:

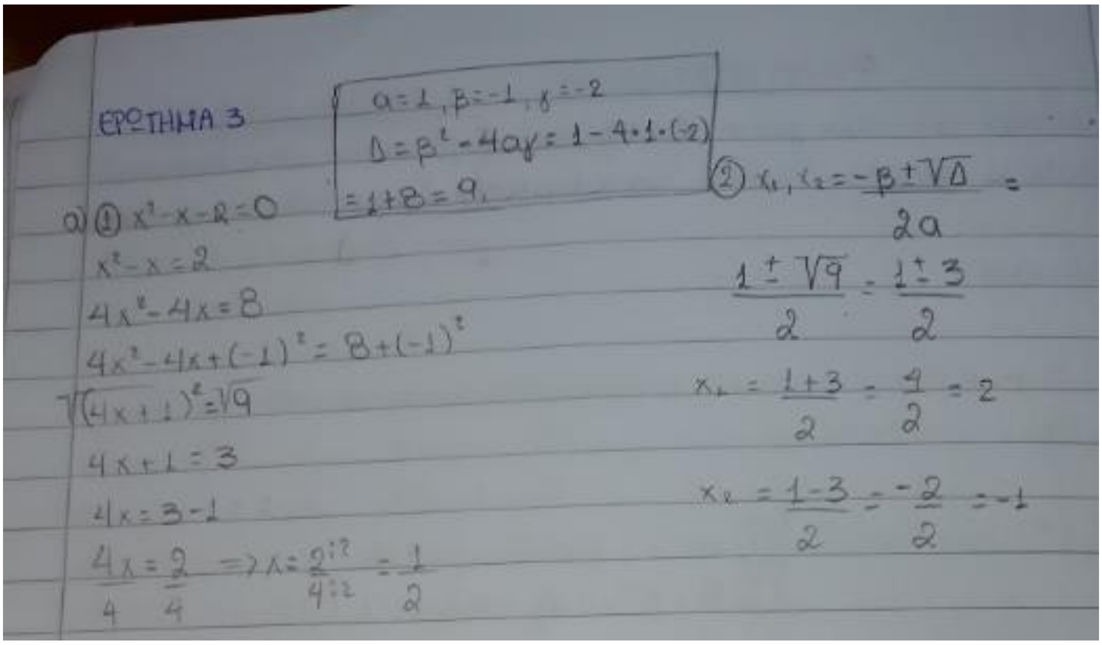
«Δεν καταλάβαμε πως λειτουργεί η διακρίνουσα και ο γενικός τύπος» (7η ομάδα)

«Δεν ξέραμε ότι έπρεπε να γράψουμε για το πρόσημο και τις λύσεις της εξίσωσης» (3η, 10η)

Υπήρξαν δύο ομάδες (1η, 12η) όπου εφάρμοσαν σωστά τον γενικό τύπο, βρήκαν τους συντελεστές *α, β* και *γ*, τη διακρίνουσα και τις λύσεις, αλλά όταν κλήθηκαν να εφαρμόσουν τη συμπλήρωση τετραγώνου των Ινδών η οποία καταλήγει στον γενικό τύπο, βρήκαν διαφορετικά αποτελέσματα, εξαιτίας κάποιων λαθών στη χρήση της ταυτότητας $α^2+2αβ+β^2=(α+β)^2$ που έπρεπε να εφαρμόσουν, αλλά και σε ένα λάθος σε πρόσημο. Ρωτήθηκαν αν αυτό τους έβαλε σε σκέψεις και η απάντηση τους:

«Γνωρίζαμε ότι έπρεπε να βρούμε και με τις δύο διαδικασίες το ίδιο αποτέλεσμα, αλλά δεν μπορούσαμε να εντοπίσουμε το λάθος»

Σε ερώτηση του διδάσκοντα ποια από τα δύο πιστεύουν ότι είναι τα σωστά αποτελέσματα δεν μπόρεσαν να απαντήσουν. Αντίθετα, η απάντηση δόθηκε από άλλον μαθητή, ότι θα έπρεπε να κάνουν επαλήθευση για να ελέγξουν την ορθότητα των τιμών που βρήκαν.



Εικόνα 3: Με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου προκύπτει λάθος αποτέλεσμα από ότι με τον τύπο (1η ομάδα)

Δύο άλλες ομάδες (3η, 8η) πράξανε το αντίθετο με τις παραπάνω, εφάρμοσαν σωστά τη συμπλήρωση τετραγώνου, αλλά όχι τον γενικό τύπο. Οι λόγοι ήταν δύο. Ο πρώτος είχε να κάνει με λάθος αναγνώριση των συντελεστών *α, β* και *γ*, που είχε ως αποτέλεσμα να βρουν λάθος διακρίνουσα και λάθος λύσεις (8η ομάδα). Ο δεύτερος με τη λάθος εφαρμογή του τύπου, στις δύο από τις τρεις περιπτώσεις του 3ου ερωτήματος (3η ομάδα). Ρωτήθηκαν αν έψαξαν να βρουν τα αίτια και η απάντηση που δώσαν ήταν παρόμοια με την παραπάνω.

Άλλες δύο ομάδες (5η, 6η) δεν εφάρμοσαν καθόλου τα βήματα του Ινδού μαθηματικού, γιατί τους δυσκόλευε αυτό, σε αντίθεση με τον γενικό τύπο, που τους ήταν πολύ πιο εύκολο να τον εφαρμόσουν, όπως εξηγήσαν αργότερα. Η 5η μάλιστα ομάδα και στο γενικό τύπο συνάντησε δυσκολίες και συγκεκριμένα υπέπεσε σε λάθη εφαρμογής του. Οι λόγοι που επικαλέστηκαν.

«Δεν μπορέσαμε να παρακολουθήσουμε την εξ' αποστάσεως διδασκαλία, όπου είχαν δοθεί εξηγήσεις για τη συμπλήρωση του φύλλου εργασίας».

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι καμία ομάδα ή άτομα δεν απάντησε ολοκληρωμένα στην ερώτηση που αφορούσε τη σύγκριση μεταξύ των διάφορων μεθόδων επίλυσης (Βαβυλωνιακή, Αραβική και Ινδική). Συγκεκριμένα όσοι απαντήσαν (12 ομάδες και 3 άτομα) αναφερθήκαν μόνο στο γεγονός ότι αποφεύγονται τα κλάσματα από την αρχή και εμφανίζονται μόνο στο τελικό βήμα. Δεν έγινε αναφορά στο ότι είναι η πρώτη φορά που εμφανίζονται και αρνητικοί αριθμοί, αλλά και ότι η μέθοδος των Ινδών καταλήγει σε έναν γενικό τύπο που δίνει σε κάθε περίπτωση απάντηση για τις λύσεις μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

<u>Αποτίμηση του 5ου φ.ε.</u>

Διαπιστώνουμε ότι υπήρξαν λάθη εφαρμογής κατά τη διαδικασία συμπλήρωσης τετραγώνου, (5 στις 14 ομάδες) αλλά και όταν γινόταν χρήση του γενικού τύπου (3 στις 14 ομάδες). Οι μισές ομάδες αρκέστηκαν μόνο στη μία από τις δύο διαδικασίες, θεωρώντας ότι αυτό αρκεί. Βέβαια υπήρξε προσπάθεια από όλες τις ομάδες και τα μεμονωμένα άτομα να κάνουν χρήση τουλάχιστον μία φορά την κάθε διαδικασία, άλλοτε επιτυχημένα, άλλοτε όχι, σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα. Τα λάθη που παρατηρήθηκαν τα έχουν αναδείξει και παλαιότερες έρευνες όπως έχουν αναλυθεί στο 4ο κεφάλαιο. Δυσκολία υπήρξε και κατά τη σύγκριση των μεθόδων (Βαβυλωνιακού – Αραβικού και Ινδικού), όπου δεν έγινε λεπτομερής ανάλυση των δεδομένων που είχαν παρουσιαστεί στις προηγούμενες διδασκαλίες. Δυσκολία επίσης παρατηρήθηκε και στη γενίκευση των συμπερασμάτων για το ρόλο της διακρίνουσας (5 στις 14 ομάδες και 1 στα 4 άτομα), παρόλο που δύο από αυτές τις ομάδες, κατά την εφαρμογή του τύπου ενήργησαν σωστά.

Το 6ο φ.ε. ήταν χωρισμένο σε δύο μέρη. Στο πρώτο παρουσιάζεται ο αναλυτικός τρόπος επίλυσης εξισώσεων 2ου βαθμού, ολοκληρώνοντας ουσιαστικά τον 2ο επιμέρους στόχο, με τη μετατροπή της εξίσωσης σε δύο συναρτήσεις, μίας παραβολής και μίας ευθείας. Οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν σε δύο ερωτήσεις, ένα με εφαρμογή αυτής της μεθόδου και ένα με τη σύνδεση της τιμής της διακρίνουσας με τα σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων. Στο δεύτερο μέρος του φυλλαδίου που είχε επαναληπτικό χαρακτήρα, δινόταν 9 εξισώσεις διαβαθμισμένης δυσκολίας, όπου θα έπρεπε οι μαθητές να τις λύσουν με μία από τις μεθόδους που είχαν μάθει. Την καταλληλότερη και πιο σύντομη, κατά τη γνώμη τους. Για το πρώτο μέρος οι απαντήσεις των μαθητών περιγράφονται στον παρακάτω πίνακα, όπου η ερώτηση 1 χωρίστηκε σε δύο μέρη. Το ένα αφορά στο σχήμα και το άλλο στις λύσεις που προκύπτουν από το σχήμα. Με «√» καταγράφονται οι σωστές απαντήσεις και με «–» οι λάθος, για κάθε ομάδα χωριστά .

		ΟΜΑΔΕΣ													
		1η	2η	3η	4η	5η	6η	7η	8η	9η	10η	11η	12η	13η	14η
1η ΕΡΩΤΗΣΗ	ΣΧΗΜΑ	√	√	√	–	όχι	√	–	√	√	√	√	–	√	–
	ΛΥΣΕΙΣ	√	–	√	–	όχι	√	–	–	√	–	√	–	√	–
2η ΕΡΩΤΗΣΗ (ΣΧΕΣΗ ΤΙΜΗΣ Δ ΜΕ Σ.Τ.)		√	–	√	√	όχι	–	√	–	–	–	√	√	√	√

Πίνακας 1: Απαντήσεις μαθητών των δύο ερωτήσεων του αναλυτικού τρόπου επίλυσης εξισώσεων 2ου βαθμού (Δ: Διακρίνουσα, Σ.Τ. Σημεία Τομής)

Παρατηρούμε ότι μόνο τέσσερις ομάδες (1η, 3η, 11η, 13η) απαντήσαν σωστά και στις δύο ερωτήσεις. Τέσσερις ομάδες (4η, 7η, 12η, 14η) απάντησαν μόνο στη δεύτερη ερώτηση σωστά, που σημαίνει ότι ενώ γνώριζαν τον κανόνα δεν μπόρεσαν να τον εφαρμόσουν κάνοντας σωστά σχήματα και φυσικά δεν μπόρεσαν να βρουν και τις λύσεις. Κυρίως τα λάθη τους εντοπίζονται σε πράξεις για τη συμπλήρωση του πίνακα τιμών. Η 2η, ομάδα έκανε σωστό σχήμα, αλλά σαν λύση δέχτηκαν τα σημεία τομής και όχι τις τετμημένες αυτών των σημείων, επίσης δεν μπόρεσε να καταλήξει στον κανόνα για τη σχέση διακρίνουσας και σημείων τομής των δύο γραφικών παραστάσεων. Δύο ομάδες (6η, 9η) έκαναν σωστό σχήμα, βρήκαν από τα σημεία τομής τις δύο λύσεις, αλλά δεν ολοκλήρωσαν το δεύτερο ερώτημα σωστά. Η 6η ομάδα, αναφέρθηκε στις λύσεις μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας χωρίς να τα συνδέσει με τα σημεία τομής, ενώ η άλλη αναφέρθηκε μόνο στο συγκεκριμένο πρόβλημα χωρίς να γενικεύσει. Δύο ομάδες (8η, 10η) παρόλο που είχαν κάνει σωστό σχήμα δεν ασχολήθηκαν με τα σημεία τομής, ούτε με το 2ο ερώτημα και η εξήγηση που δόθηκε ήταν ότι:

«Εφόσον φαίνεται στο σχήμα δεν χρειάζεται να γράψουμε κάτι» (8η ομάδα)

Μία ομάδα (5η) δεν ασχολήθηκε καθόλου μ' αυτές τις ερωτήσεις γιατί όπως είπε:

«Δεν θα χρησιμοποιήσουμε ποτέ αυτόν τον τρόπο για να λύσουμε μια εξίσωση, επομένως δεν χρειάζεται να τον μάθουμε»

Από τα άτομα που ασχολήθηκαν μεμονωμένα οι τρεις (2ος, 3ος, 4ος) απάντησαν σωστά και στα δύο ερωτήματα και ο ένας (1ος) δεν ασχολήθηκε καθόλου διότι δεν είχε παρακολουθήσει το τελευταίο μάθημα και δεν μπόρεσε να καταλάβει τις διευκρινήσεις που δινόταν.

<u>Αποτίμηση του αναλυτικού τρόπου επίλυσης του 6ου φ.ε.</u>

Αξιοσημείωτο αυτού του μέρους του φυλλαδίου είναι το γεγονός ότι 4 στις 14 ομάδες και 1 στα 4 άτομα παρόλο που συνδέσαν σωστά το πρόσημο της διακρίνουσας με τον αριθμό των λύσεων της εξίσωσης και κατ' επέκταση με τον αριθμό των σημείων τομής της παραβολής και της ευθείας (2η ερώτηση), εντούτοις αντιμετώπισαν προβλήματα στη γραφική απεικόνιση των δύο γραμμών (1η ερώτηση) όπου παρατηρήθηκαν λάθη εφαρμογής και διαδικαστικά, (Maconye & Nhlanhla 2014) κατά τη συμπλήρωση του πίνακα τιμών των δύο συναρτήσεων. Ένα άλλο σημαντικό εύρημα είναι η αδυναμία απάντησης της 2ης ερώτησης από 5 ομάδες και 1 άτομο, παρόλο που είχαν απαντήσει σε ένα τουλάχιστον υποερώτημα της 1ης ερώτησης σωστά. Υπήρξε αδυναμία γενίκευσης των αποτελεσμάτων της 1ης ερώτησης, κάτι που το είχαμε συναντήσει και στο 1ο φ.ε. με τον αριθμό των λύσεων μιας εξίσωσης 2ου βαθμού

Το δεύτερο μέρος του φ.ε. έχει ενδιαφέρον από τη σκοπιά της μεθόδου που προτίμησαν να επιλέξουν οι μαθητές και αν το έπραξαν σωστά. Ο παρακάτω πίνακας δίνει την εικόνα αυτή.

Άμεση Εφαρμογή της Τετραγωνικής Ρίζας (ΕΤΡ)

Παραγοντοποίηση (Π)

Ανάπτυγμα Τετραγώνου (ΑΤ)

Διάσπαση Όρου και μετά Ομαδοποίηση (ΔΟΟ)

Συμπλήρωση Τετραγώνου με τη μέθοδο των Βαβυλώνιων και των Αράβων (ΣΤΒΑ)

Συμπλήρωση Τετραγώνου με τη Γεωμετρική μέθοδο των Αράβων (ΣΤΓΑ)

Συμπλήρωση Τετραγώνου με τη μέθοδο των Ινδών (ΣΤΙ)

Άμεση εφαρμογή του Γενικού Τύπου που προκύπτει από τη μέθοδο των Ινδών (ΓΤΙ)
Ο γραφικός (αναλυτικός) τρόπος δεν περιλαμβάνεται στον πίνακα γιατί δεν επιλέχτηκε από κανένα μαθητή.

Με μαύρο χρώμα είναι οι απαντήσεις των ομάδων, με κόκκινο οι ατομικές.

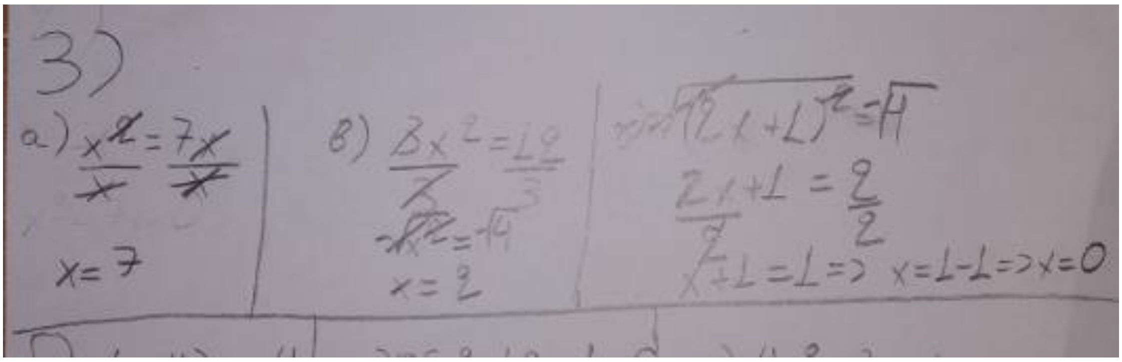
	ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗ								
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	(ΕΤΡ)	(Π)	(ΑΤ)	(ΔΟΟ)	(ΣΤΒΑ)	(ΣΤΓΑ)	(ΣΤΙ)	(ΓΤΙ)	ΣΥΝΟΛΟ
$x^2 = 7x$		13+3					1		17
$3x^2 = 12$	8+4	5					1		18
$(2x+1)^2 = 4$	10+3	1		1				2	17
$x(x + 4) = -4$			13+1	1			1	1	17
$25x^2 - 10x + 1 = 0$			8+2				1	5+2	18
$4y^2 + 3y - 1 = 0$				5	1		3+2	5+2	18
$3x^2 + 12x - 15 = 0$				4		1	4+1	5+3	18
$3\kappa^2-2(\kappa-1)=2\kappa+1$				5	2		2	5+3	17
$\frac{\omega^2-1}{3}-\frac{\omega+3}{5}=\omega-2$				2	1		2	6+3	14
ΣΥΝΟΛΟ	25	21	24	18	4	1	18	42	153

Πίνακας 2: Επιλογή μεθόδου από τους μαθητές για την επίλυση των εξισώσεων

Στη μεγάλη πλειονότητα τους οι παραπάνω μέθοδοι που χρησιμοποίησαν οι μαθητές για την επίλυση των εξισώσεων ήταν σωστοί, παρατηρήθηκαν τα εξής λάθη:

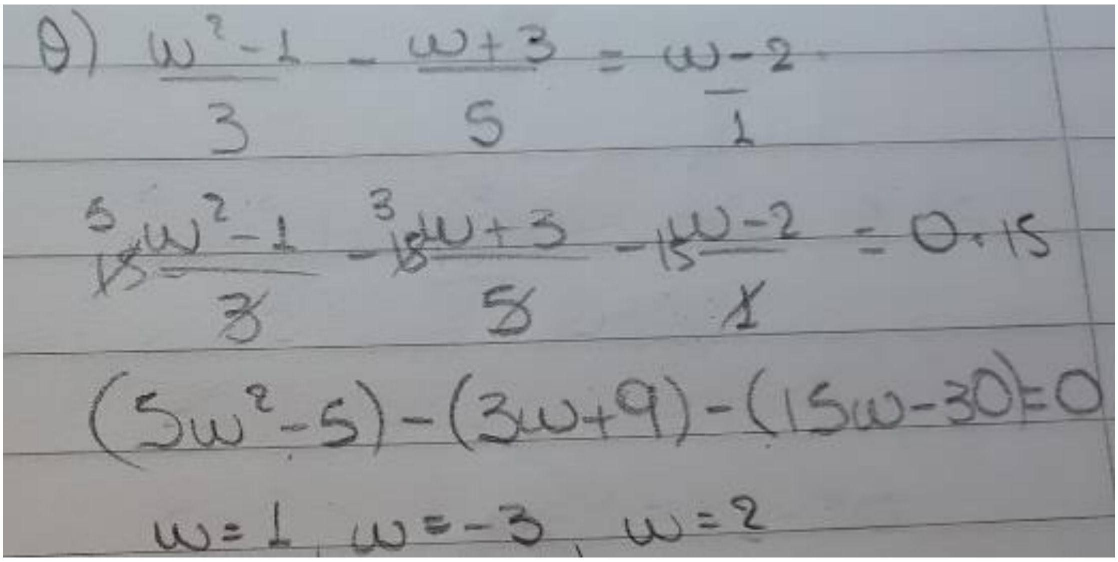
Δύο ομάδες (7η, 12η) που χρησιμοποίησαν την εφαρμογή της τετραγωνικής ρίζας, δηλαδή αν $x^2 = \alpha$ με $\alpha > 0$ τότε $x = \sqrt{\alpha}$ ή $x = -\sqrt{\alpha}$ παρέλειψαν την αρνητική λύση.

Η μία από τις προηγούμενες ομάδες (7η) διαίρεσε και τα δύο μέλη της πρώτης εξίσωσης με το x για να απλοποιηθεί, με αποτέλεσμα να βρει μόνο τη μία λύση και όχι την άλλη που είναι το «*0*» και έκανε λάθος στην απλοποίηση κλάσματος.



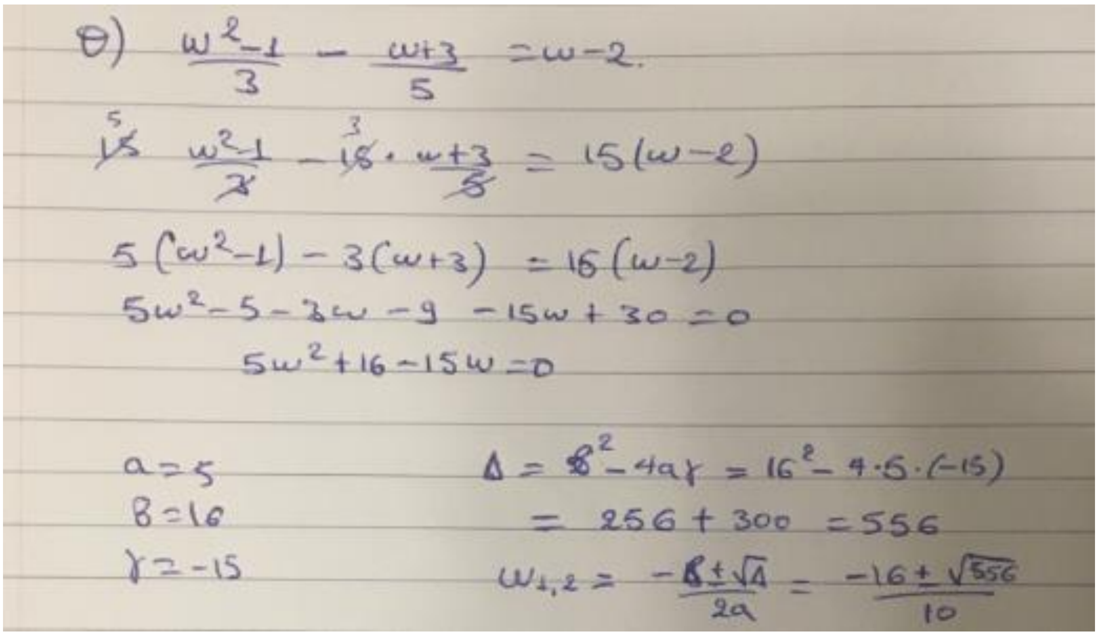
Εικόνα 4: Λάθη στην απλοποίηση και παράλειψη αρνητικής λύσης (7η ομάδα)

Δύο ομάδες (1η, 8η) στη τελευταία εξίσωση, ενώ κάναν πολύ σωστά, απαλοιφή των παρονομαστών, στην εξίσωση που προέκυψε και αποτελούνταν από τρεις παρενθέσεις προχώρησαν στην εφαρμογή του κανόνα, αν $\alpha{\cdot}\beta{\cdot}\gamma=0$ τότε $\alpha=0$, $\beta=0$, ή $\gamma=0$ παρόλο που δεν υπήρχε γινόμενο και οι οποίες δεν καταγράφονται στον παραπάνω πίνακα



Εικόνα 5: Λάθος εφαρμογή του κανόνα που ισχύει σε γινόμενο (1η ομάδα)

Μία ομάδα (5η) στην τελευταία εξίσωση, αφού πρώτα την απλοποίησε σωστά, θεώρησε ως α τον πρώτο συντελεστή, ως β τον δεύτερο και ως γ τον τρίτο κατά σειρά που εμφανιζόταν στην απλοποιημένη εξίσωση, χωρίς να ελέγξουν αν το α αντιπροσώπευε τον συντελεστή του x^2, το β τον συντελεστή του x και το γ τον σταθερό όρο.



Εικόνα 6: Λανθασμένη αναγνώριση των συντελεστών α,β, και γ (5η ομάδα)

Τέλος μία ομάδα (6η) και ένα άτομο (1ο) δεν μπόρεσαν να λύσουν την τελευταία εξίσωση επικαλούμενοι το γεγονός ότι υπήρχαν κλάσματα και τους δυσκόλευαν. Βέβαια το συγκεκριμένο άτομο (1ο) αν και εμφανίζεται σε κάποιες περιπτώσεις στον παραπάνω πίνακα, δεν ολοκλήρωσε την επίλυση καμίας εξίσωσης και δεν εφάρμοσε σε καμία από αυτές τον γενικό τύπο, παρά το (ΑΤ) και τη (ΣΤΙ).

<u>Αποτίμηση του επαναληπτικού μέρους του 6ου φ.ε.</u>

Από τον παραπάνω πίνακα 2 φαίνεται να υπάρχει μια διασπορά των μεθόδων με εξαίρεση τον γεωμετρικό τρόπο των Αράβων που εμφανίζεται μόνο σε μία εξίσωση από μία ομάδα και βέβαια τον γραφικό τρόπο που δεν επιλέχτηκε από κανένα μαθητή για καμία εξίσωση. Στη πρώτη εξίσωση που είναι μια ελλιπής μορφή εξίσωσης 2ου βαθμού, προτιμάται κατά συντριπτική πλειοψηφία η παραγοντοποίηση (15 στις 16 περιπτώσεις), ενώ στη δεύτερη που επίσης αποτελεί ελλιπή μορφή, προτιμάται η εξαγωγή της λύσης μέσω της τετραγωνικής ρίζας (12 στα 18) και κατόπιν η παραγοντοποίηση (5 στα 18). Αντίθετα στις τελευταίες εξισώσεις που είναι και πιο περίπλοκες οι μαθητές δείξαν να προτιμούν τη χρήση του γενικού τύπου (σε 42 από το σύνολο των 85 περιπτώσεων, των πέντε τελευταίων εξισώσεων). Η τέταρτη εξίσωση τους θύμιζε γνωστή ταυτότητα και έτσι επιλέξαν το ανάπτυγμα τετραγώνου (14 από τις 17 περιπτώσεις). Η μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνων των Ινδών εμφανίζεται σε όλες σχεδόν τις εξισώσεις και είναι 18 περιπτώσεις στις 153, όπως και η μέθοδος της διάσπασης όρου και μετά ομαδοποίηση με τον ίδιο αριθμό περιπτώσεων.

Στο 7ο φ.ε. δόθηκε η δυνατότητα στους μαθητές να ασχοληθούν με την παραγοντοποίηση τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (4ος επιμέρους στόχος) μέσω των τιμών που μηδενίζουν το τριώνυμο (1ος – 3ος επιμέρους στόχοι), δηλαδή της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ και απαντήθηκε από δύο ομάδες λιγότερο (7η, 8η). Έως εκείνη τη στιγμή οι μαθητές χρησιμοποιούσαν τη παραγοντοποίηση ως εργαλείο για τη εύρεση των λύσεων μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, από εκεί και πέρα θα μπορούσαν να υπολογίσουν πρώτα τις λύσεις μέσω ενός άλλου τρόπου πέραν της παραγοντοποίησης, (συνήθως μέσω του γενικού τύπου) και κατόπιν να παραγοντοποιήσουν το τριώνυμο. Δόθηκε επίσης η δυνατότητα στους μαθητές να συνδέσουν τη τιμή της διακρίνουσας, με το εάν παραγοντοποιείται και πως, ή δεν παραγοντοποιείται ένα τριώνυμο . Βέβαια η επιλογή αυτού του τρόπου από τους μαθητές θα πρέπει να γίνεται εφόσον έχουν εξαντληθεί οι προηγούμενοι τρόποι, που είναι σαφώς πιο σύντομοι. Δόθηκαν στους μαθητές δύο ερωτήσεις. Η πρώτη περιείχε 6 τριώνυμα, που θα έπρεπε να παραγοντοποιηθούν και η δεύτερη, μία ρητή αλγεβρική παράσταση που θα έπρεπε να απλοποιηθεί. Στον πίνακα 3 που ακολουθεί εμφανίζονται οι μέθοδοι που επέλεξαν οι μαθητές για την παραγοντοποίηση ενός τριωνύμου 2ου βαθμού.

Ανάπτυγμα Τετραγώνου (ΑΤ)

Διάσπαση Όρου και μετά Ομαδοποίηση (ΔΟΟ)

Συμπλήρωση Τετραγώνου (ΣΤ)

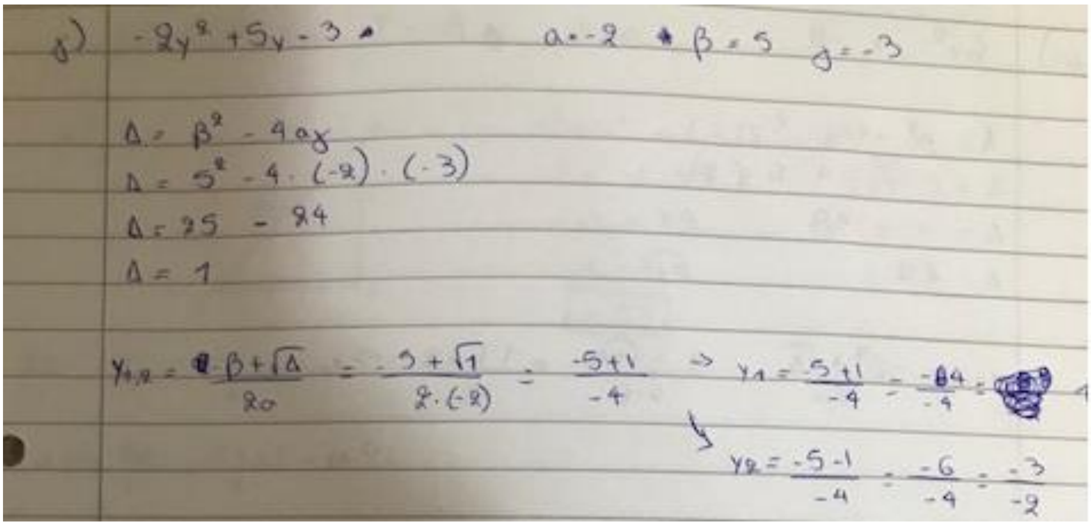
Εφαρμογή Γενικού Τύπου (ΕΓΤ)

Με μαύρο χρώμα είναι οι απαντήσεις των ομάδων, με κόκκινο οι ατομικές.

	ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ				
ΤΡΙΩΝΥΜΑ	(ΑΤ)	(ΔΟΟ)	(ΣΤ)	(ΕΓΤ)	ΣΥΝΟΛΟ
$\omega^2+4\omega-12$		3+1	1	7+3	15
$3x^2-8x+5$		5+1		6+2	14
$-2y^2+5y-3$		7+2		4+2	15
$2\varphi^2-4\varphi+2$	6	2+1		3+2	14
$3\kappa^2-4\kappa+2$				10+3	13
$6x^2-x-2$		1		10+3	14
$\frac{4x^2-12x+9}{2x^2-5x+3}$	10+2			2+1	15
		10		2+3	15
ΣΥΝΟΛΟ	18	31	1	63	113

Πίνακας 3: Επιλογή μεθόδου παραγοντοποίησης των τριωνύμων 2ου βαθμού

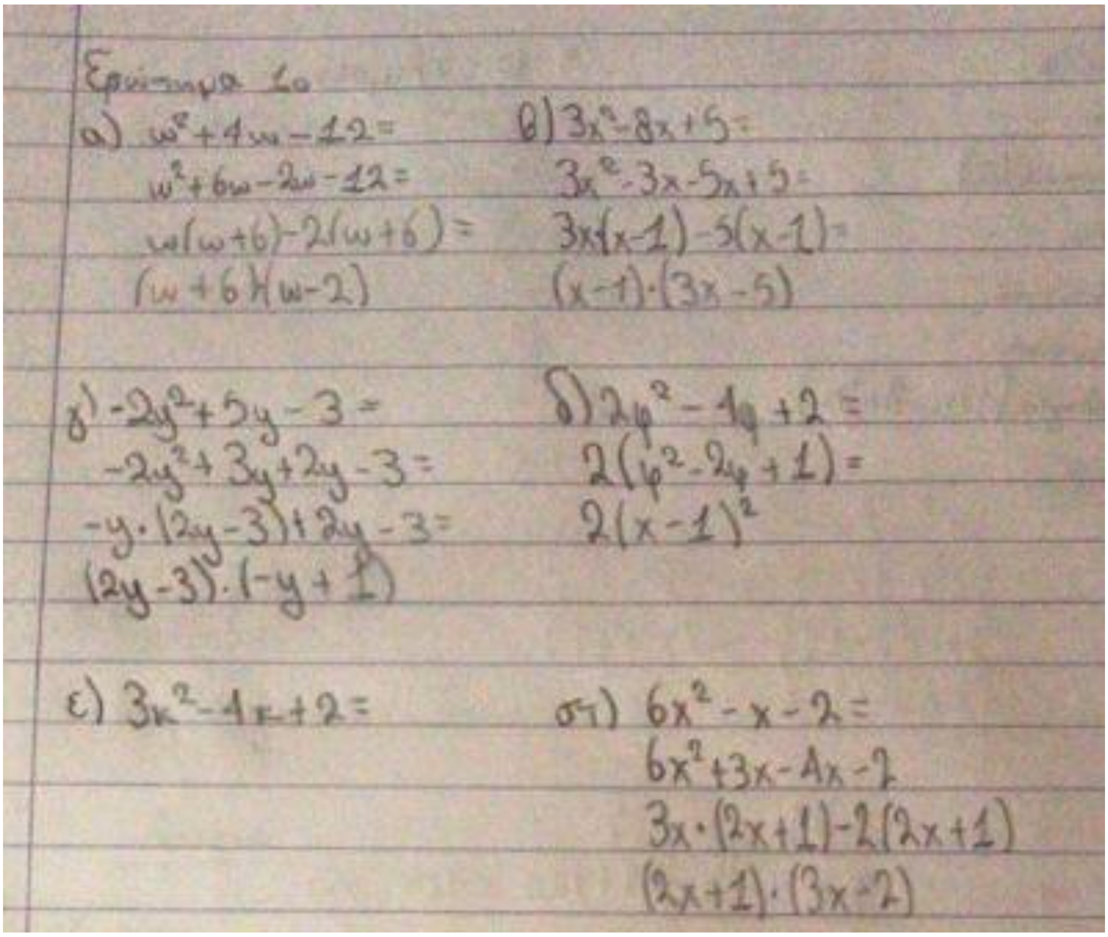
Μία ομάδα (2η) που δεν συμπεριλαμβάνεται στον πίνακα για τα έξι πρώτα τριώνυμα, βρήκε τις λύσεις της εξίσωσης, αλλά δεν προχώρησε στη παραγοντοποίηση. Για τη ρητή αλγεβρική παράσταση εφάρμοσε, στον αριθμητή (ΑΤ) και στο παρονομαστή (ΔΟΟ). Η απάντηση που δώσανε: *«Δεν είμασταν σίγουροι τι έπρεπε να κάνουμε»*



Εικόνα 7: Μη ολοκλήρωση της παραγοντοποίησης (2η ομάδα)

Μία ομάδα (5η), η οποία καταγράφεται στον πίνακα, εφάρμοσε μόνο (ΔΟΟ) και (ΑΤ), με αποτέλεσμα να μη μπορεί να απαντήσει στο 6ο τριώνυμο, το οποίο βέβαια δεν παραγοντοποιείται. Ρωτήθηκε γιατί δεν εφάρμοσε τον γενικό τύπο και απάντησε: *«Δεν τον έχουμε καταλάβει αυτό τον τρόπο. Μπορείτε να μας τον εξηγήσετε ξανά;»*

Οι εξηγήσεις δόθηκαν από τους συμμαθητές τους και όταν ρωτήθηκαν σε κάποιο άλλο παράδειγμα, φάνηκε να το είχαν καταλάβει.



Εικόνα 8: Μη εφαρμογή του Γενικού Τύπου για τη παραγοντοποίηση τριωνύμου (5η ομάδα)

Ένα άτομο (1ο), εκτός από τα τριώνυμα 6α) και γ) όπου εφάρμοσε σωστά ΔΟΟ, στα υπόλοιπα προσπάθησε να βρει τις λύσεις με συμπλήρωση τετραγώνου και αυτό με λάθη και δεν κατέληξε σε γινόμενο (δεν καταγράφεται στον πίνακα για τα υπόλοιπα τριώνυμα)

<u>Αποτίμηση του 7ου φ.ε.</u>

Παρατηρούμε από τον πίνακα 3, ότι οι περισσότεροι μαθητές επιλέξαν την εφαρμογή του γενικού τύπου σε 63 στις 113 περιπτώσεις και σε όλα τα τριώνυμα. Η μέθοδος της διάσπασης και μετά ομαδοποίηση συγκέντρωσε 31 προτιμήσεις των μαθητών, σε αρκετά τριώνυμα, με εξαίρεση δύο από αυτά, εκ των οποίων στο ένα δε υπήρχε τρόπος να εφαρμοστεί. Το ανάπτυγμα τετραγώνου που εφαρμοζόταν μόνο σε δύο τριώνυμα, εμφανίστηκε 18 φορές, σε αντίθεση με τις 8 του γενικού τύπου, σε σύνολο 29 περιπτώσεων για τα ίδια τριώνυμα. Τέλος η συμπλήρωση τετραγώνου επιλέχτηκε μόνο μία φορά.

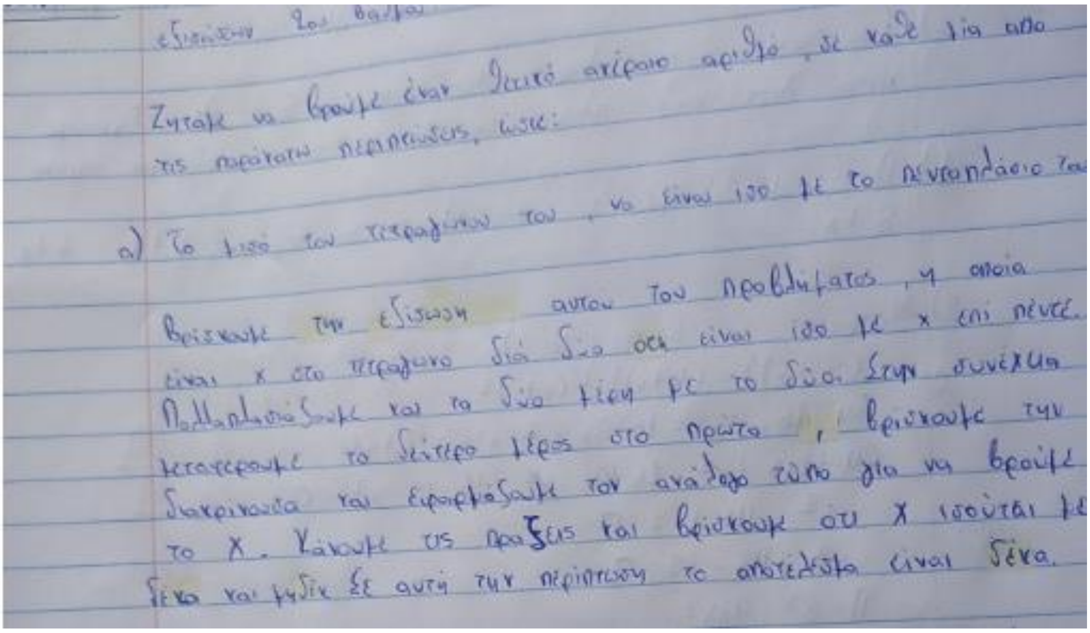
Τα "αποτελέσματα" δείχνουν μία τάση των μαθητών να προτιμούν τη χρήση του γενικού τύπου σε αρκετές περιπτώσεις και μάλιστα με σωστό τρόπο. Δεν παρατηρήθηκαν τα λάθη των προηγούμενων φύλλων εργασίας, ούτε στο επίπεδο της απευθείας παραγοντοποίησης, ούτε κατά την εφαρμογή του γενικού τύπου. Είχε γίνει ξεκάθαρο πλέον, από τη μεγάλη πλειονότητα των μαθητών η σύνδεση του προσήμου της διακρίνουσας με τον αριθμό των λύσεων (1ο ερευνητικό ερώτημα), κάτι που δεν είχε φανεί στο 5ο φύλλο εργασίας.

Το 8ο φ.ε. με την επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων, κάλυπτε τον 5ο και τελευταίο επιμέρους στόχο, παράλληλα με τον 3ο. Οι δύο κατηγορίες προβλημάτων – μία με γεωμετρικό προσανατολισμό και μία με αριθμητικό – ως απόρροια των ιστορικών προβλημάτων, αποτέλεσε και το τελευταίο κριτήριο ελέγχου της ικανότητας των μαθητών να μπορούν να κατασκευάζουν οι ίδιοι την εξίσωση και φυσικά να την επιλύουν, χρησιμοποιώντας οποιονδήποτε τρόπο επιλέξουν για την επίτευξη τους.

Απαντήθηκε από 11 ομάδες (εκτός, 5η, 7η, 8η) και 3 άτομα (εκτός 3ος). Λιγότεροι από ότι στα προηγούμενα φ.ε. και καταγράφηκαν τα εξής:

Πέντε ομάδες (1η, 3η, 6η, 9η, 13η) και 2 άτομα (2ος, 4ος) απάντησαν σωστά σε όλα. Στην κατασκευή της εξίσωσης, στην επίλυση της και στην απόρριψη των τιμών που δεν ικανοποιούσαν τους περιορισμούς του προβλήματος. Ο τρόπος επίλυσης των εξισώσεων ήταν ο γενικός τύπος, με εξαίρεση δύο εξισώσεων ελλιπών μορφών, που στη μία εφαρμόστηκε παραγοντοποίηση και στην άλλη χρήση της τετραγωνικής ρίζας.

Μια ομάδα (4η) απάντησε σωστά σε όλα, αλλά επέλεξε να παρουσιάσει τα αποτελέσματα με λεκτικό τρόπο, θεωρώντας ότι έτσι έπρεπε να γίνει, παρόλο που το έλυσε στο πρόχειρο αλγεβρικά, όπως αναφέρθηκε αργότερα από τους ίδιους, μπερδεύοντας τη διατύπωση «λεκτικό πρόβλημα», που υπήρχε στο φύλλο εργασίας με τη λεκτική λύση των Βαβυλωνίων και των Αράβων (παρακάτω εικόνα 9)



εξισώσεων του βαθμού

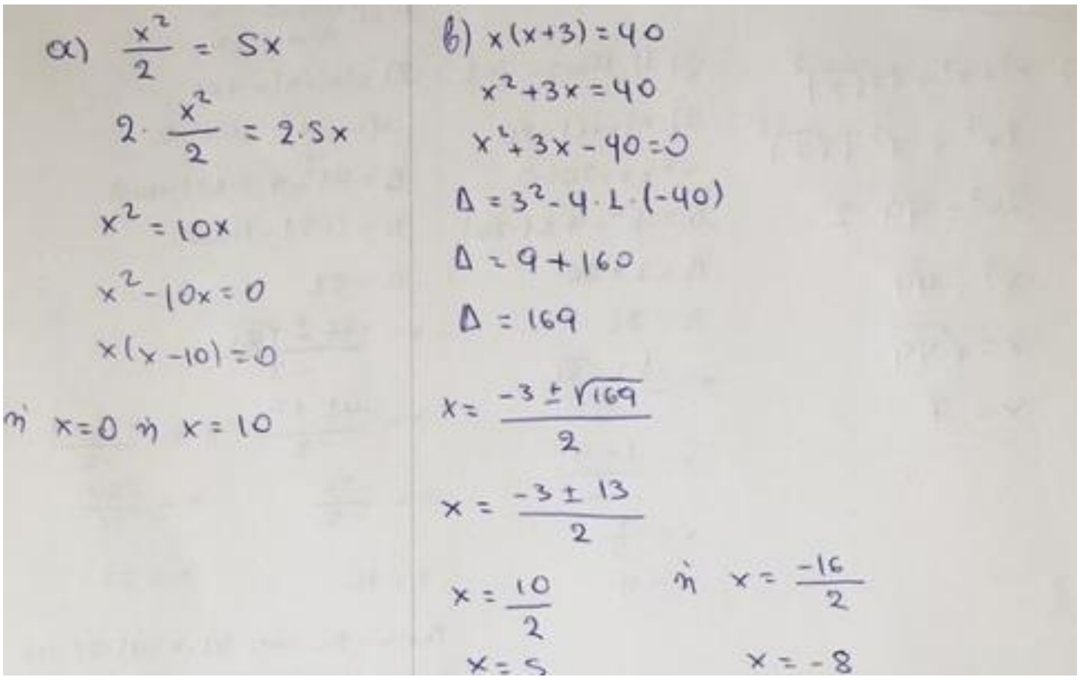
Ζητάμε να βρούμε έναν θετικό ακέραιο αριθμό, σε καθε μία απο τις παρακάτω περιπτώσεις, ώστε:

α) Το μισό του τετραγώνου του, να είναι ίσο με το πενταπλάσιο του

Βρίσκουμε την εξίσωση αυτού του προβλήματος, η οποία είναι x στο τετράγωνο διά δύο οτι είναι ίσο με x επι πεντε. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέρη με το δύο. Στην συνέχεια μεταφέρουμε το δεύτερο μέρος στο πρώτο, βρίσκουμε την διακρίνουσα και εφαρμόζουμε τον ανάλογο τύπο για να βρούμε το x. Κάνουμε τις πράξεις και βρίσκουμε οτι x ισούται με δέκα και μηδέν σε αυτή την περίπτωση το αποτέλεσμα είναι δέκα.

Εικόνα 9: Λεκτική λύση (4η ομάδα)

Τέσσερις ομάδες (10η, 11η, 12η, 14η)   και ένα άτομο (1ος) ακολούθησαν σωστά όλη τη διαδικασία, αλλά έκαναν δεκτές όλες τις λύσεις που βρήκαν επιλύοντας την εξίσωση (εικόνα 10). Όπως είπαν στη συνέχεια *«Δεν δώσαμε ιδιαίτερη προσοχή στους περιορισμούς)*



α) $\frac{x^2}{2} = 5x$

$2 \cdot \frac{x^2}{2} = 2 \cdot 5x$

$x^2 = 10x$

$x^2 - 10x = 0$

$x(x-10) = 0$

ή $x=0$ ή $x=10$

β) $x(x+3) = 40$

$x^2 + 3x = 40$

$x^2 + 3x - 40 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40)$

$\Delta = 9 + 160$

$\Delta = 169$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2}$

$x = \frac{-3 \pm 13}{2}$

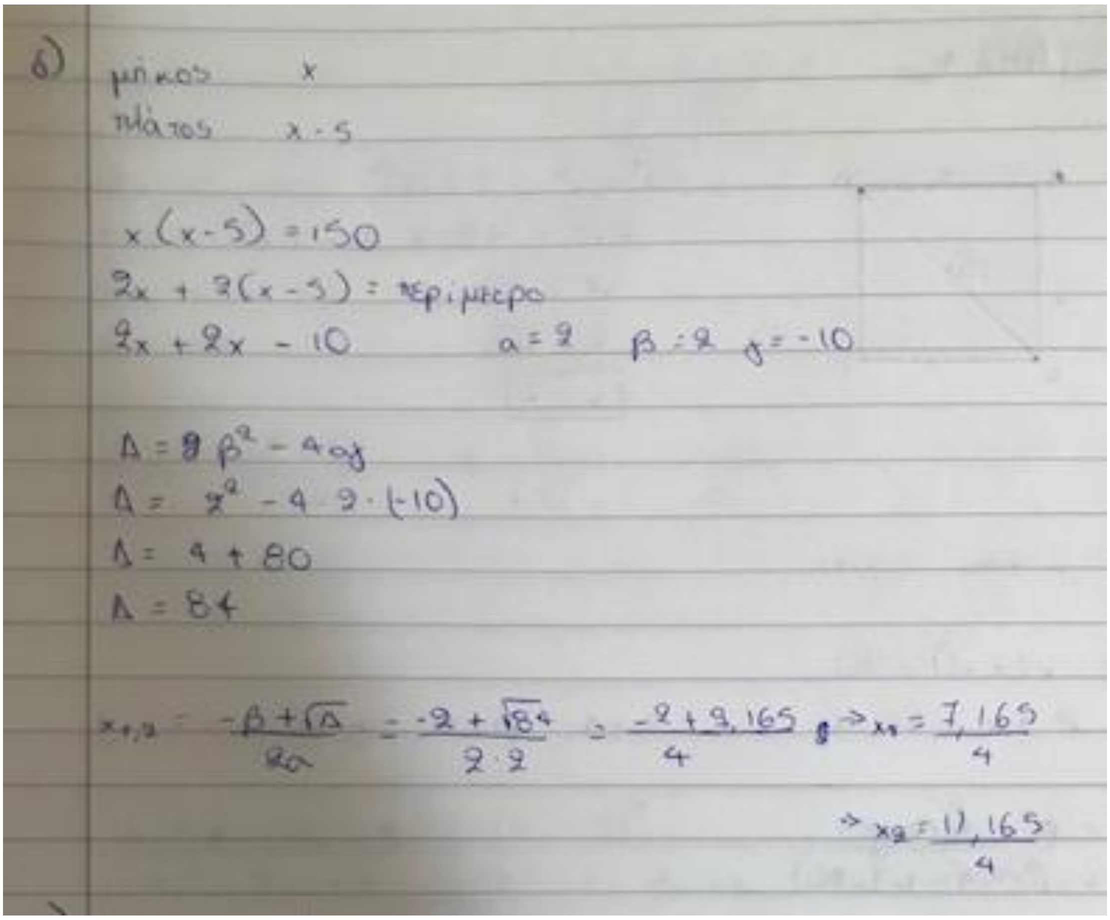
$x = \frac{10}{2}$ ή $x = \frac{-16}{2}$

$x = 5$ $x = -8$

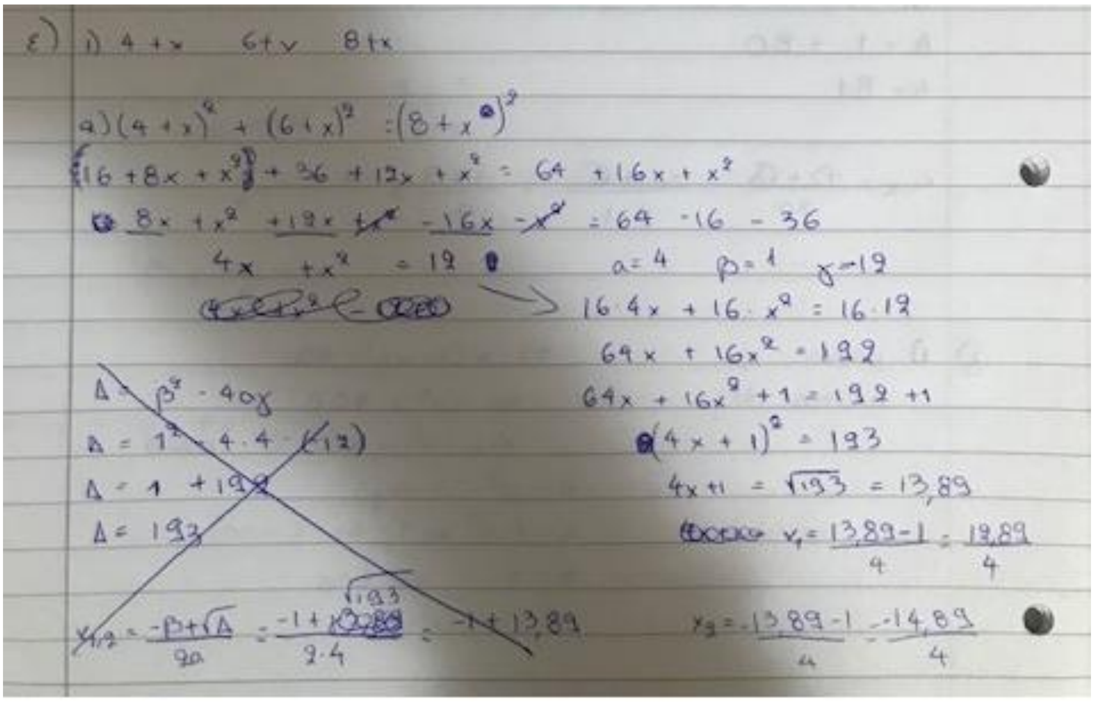
Εικόνα 10: Αποδοχή μη δεκτών λύσεων (14η ομάδα)

Και αυτές οι ομάδες χρησιμοποίησαν στις περισσότερες εξισώσεις το γενικό τύπο. Στις ελλιπείς μορφές, παραγοντοποίηση και εύρεση τετραγωνικής ρίζας και μόνο σε δύο περιπτώσεις έγινε χρήση της συμπλήρωσης τετραγώνου. Στη μία με τον Ινδικό τρόπο, στην άλλη με τον τρόπο των Βαβυλωνίων και των Αράβων.

Τέλος μία ομάδα (2η) υπέπεσε σε αρκετά λάθη. Στη μετατροπή αλγεβρικής παράστασης σε εξίσωση (εννοιολογικό λάθος) και κατόπιν στην επίλυση της με μεθόδους δευτεροβάθμιας εξίσωσης, ενώ είναι πρωτοβάθμια (εννοιολογικό λάθος), στη λάθος αναγνώριση των συντελεστών α, β και γ (λειτουργικό λάθος), στη μη απόρριψη των τιμών που δεν ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος (εννοιολογικό λάθος). (Εκόνες 11 και 12).



Εικόνα 11: Μετατροπή αλγεβρικής παράστασης 1ου βαθμού σε εξίσωση 2ου βαθμού (2η ομάδα)



Εικόνα 12: Λάθος αναγραφή των συντελεστών α, β και γ σε εξίσωση 2ου βαθμού (2η ομάδα)

<u>Αποτίμηση του 8ου φ.ε.</u>

Η επίλυση προβλήματος απαιτεί πιο σύνθετη σκέψη από τους μαθητές και μια διαδικασία όπως έχει πολύ σωστά περιγράφεται από τον Polya, με τα παρακάτω βήματα:

- Κατανόηση του προβλήματος.
- Μελέτη σύνδεσης δεδομένων – ζητουμένων και διαμόρφωση ενός σχεδίου.
- Εκτέλεση του σχεδίου επίλυσης.
- Ανασκόπηση και διερεύνηση της λύσης,

που εμπλέκει τους μαθητές και απαιτεί από αυτούς μεγαλύτερη συγκέντρωση και αναστοχασμό όλων όσων έχουν διδαχτεί στα προηγούμενα μαθήματα. Τα "αποτελέσματα" όπως φάνηκε παραπάνω ήταν πολύ ενθαρρυντικά. Οι περισσότεροι μαθητές (10 στις 11 ομάδες και 3 στα 3 άτομα) ανταπεξήλθαν στις απαιτήσεις των προβλημάτων, κατανόησαν σε μεγάλο βαθμό τα προβλήματα, συνδέσαν με σωστό τρόπο τα δεδομένα με τα ζητούμενα, διαμόρφωσαν σωστά την εξίσωση, την επιλύσαν χρησιμοποιώντας σωστά τον γενικό τύπο και μόνο στη διερεύνηση της λύσης αρκετοί μαθητές (4 στις 11 ομάδες και 1 στα 3άτομα) δεν ελέγξαν τους περιορισμούς του κάθε προβλήματος.

<u>Γενική αποτίμηση όλων των φ.ε.</u>

Η γενική εικόνα των φύλλων εργασίας έδειξε μια σταδιακή εξέλιξη της κατανόησης του ρόλου των δευτεροβάθμιων εξισώσεων από τους μαθητές, όπου σε μεγάλο βαθμό περιορίστηκαν τα λάθη, σε ένα μικρό αριθμό ομάδων. Λειτουργικά λάθη και λάθη εφαρμογών μειώθηκαν, όσο προχωρούσε η διδακτική παρέμβαση και τα εννοιολογικά λάθη περιορίστηκαν σημαντικά. Η επίτευξη των επιμέρους στόχων της διδακτικής παρέμβασης μέσω των ερευνητικών ερωτημάτων που αναδεικνυόταν σε κάθε φύλλο εργασίας, καταγράφεται στο παρακάτω διάγραμμα για το σύνολο των μαθητών από το 1ο έως το 8ο φύλλο εργασίας.

Με μαύρο είναι οι ομάδες, με κόκκινο τα άτομα.

Στα 6 πρώτα φύλλα εργασίας απάντησαν: 14 ομάδες και 4 άτομα, στο 7ο: 12 ομάδες και 3 άτομα και στο 8ο: 11 ομάδες και 3 άτομα.

Φύλλα Εργασίας	**Ερευνητικά Ερωτήματα**	**Σύνολο Ομάδων - Ατόμων με Σωστές Απαντήσεις (Άξονες)**
1	(1ο) Αριθμός λύσεων 1ου – 2ου βαθμού	Εύρεση εξισώσεων 1ου βαθμού όλων των μορφών: 11+3 Εύρεση παραμέτρων αδύνατων – αόριστων εξισ.: 10+4 Αριθμός λύσεων 2ου βαθμού εξισώσεων: 4+3
	(3ο) Χρήση παραγοντ/σης	Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού με "Δοκιμή – Λάθος" (3) ή παραγοντοποίηση (8+4): 11+4
2	(2ο) Γεωμετρική αναπαράσταση αλγεβρικών και λεκτικών εκφρ.	Γεωμετρική αναπαράσταση μονωνύμων: 13+4 Γεωμετρική αναπαράσταση εξίσωσης (α): 8+2 Γεωμετρική αναπαράσταση εξίσωσης (β): 8+4 Κατασκευή εξίσωσης: 11+4 Μετατροπή αλγεβρικής σε γεωμετρική αναπαράσταση: 8+4
	(3ο) Χρήση παραγοντ/σης	(α) Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού με «Δοκιμή – λάθος» (κανένας) ή παραγοντοποίηση 8+4 (β) Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού με «Δοκιμή – Λάθος» (4) ή παραγοντοποίηση (7): 11+4
3	(2ο) – (3ο) Μετατροπή λεκτικής λύσης σε αριθμητική και αλγεβρική	Κατασκευή εξίσωσης: 14+4 Μετατροπή λεκτικής λύσης σε αριθμητική (Βαβυλωνιακή μέθοδος): 7+2 Μετατροπή λεκτικής λύσης σε αλγεβρική μέσω συμπλήρωσης τετραγώνου: 13+4

	μέσω συμπλήρωσης τετραγώνου	
4	(2ο) – (3ο) Μετατροπή λεκτικής λύσης σε αριθμητική αλγεβρική και γεωμετρική μέσω συμπλήρωσης τετραγώνου	Μετατροπή λεκτικής λύσης σε αριθμητική: 12+4 Μετατροπή λεκτικής λύσης σε αλγεβρική μέσω συμπλήρωσης τετραγώνου: 14+4 Επίλυση εξισώσεων με γεωμετρικό τρόπο μέσω συμπλήρωσης τετραγώνου (Αραβική μέθοδος): 11+4
5	(1ο) Αριθμός λύσεων εξίσωσης 2ου βαθμού με βάση τη διακρίνουσα	Ο ρόλος της διακρίνουσας στον αριθμό των λύσεων: 9+3
	(3ο) Συμπλήρωση τετραγώνου	Επίλυση εξισώσεων μέσω συμπλήρωσης τετραγώνου (Ινδική μέθοδος): 9+4
	(3ο) Εφαρμογή γενικού τύπου	Επίλυση εξισώσεων μέσω γενικού τύπου (Ινδική μέθοδος): 11+4
6	(2ο) Χρήση αναλυτικής – γραφικής έκφρ.	Επίλυση εξίσωσης μέσω γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων (σχήμα): 9+3
		Εύρεση λύσεων εξίσωσης μέσω σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων: 6+3
		Σχέση τιμής διακρίνουσας με σημεία τομής: 8+3
	(3ο) Επαναληπτικό	Εφαρμογή διαφόρων τρόπων επίλυσης εξισώσεων 2ου βαθμού: 14+4
7	(1ο) Διακρίνουσα και λύσεις	Ο ρόλος της διακρίνουσας στον αριθμό των λύσεων: 14+4

	(3ο) – (4ο) Παραγοντ/ση τριωνύμου απευθείας ή μέσω εύρεσης λύσεων	Παραγοντοποίση τριωνύμων και απλοποίηση ρητής αλγεβρικής παράστασης: 12+4
8	(3ο) – (5ο) Επιλογή μεθόδου επίλυσης εξίσωσης και επίλυση προβλήματος	Κατασκευή εξίσωσης: 11+3 Επίλυση εξίσωσης: 10+3 Διερεύνηση λύσεων: 7+2

Πίνακας 4: Συνολικός απολογισμός ομάδων και ατόμων των φ.ε. βάσει των ερευνητικών ερωτημάτων

Παρατηρούμε από τον παραπάνω πίνακα μια θετική εξέλιξη ως προς:

α) Τον αριθμό των λύσεων μιας εξίσωσης 2ου βαθμού. Από 4 ομάδες στις 14 (1ο φ.ε.), φτάσαμε να έχουμε όλες τις ομάδες (14/14, 7ο φ.ε.).

β) Επίλυση εξίσωσης 2ου βαθμού. Από 7 ομάδες στις 14 (2ο φ.ε.), στο 6ο φ.ε. είχαμε όλες τις ομάδες (14/14).

γ) Μετατροπή μιας λεκτικής λύσης σε αριθμητική. Από 7 στις 14 ομάδες και 2 στα 4 άτομα, στο 3ο φ.ε., καταλήξαμε σε 12 ομάδες και 4 άτομα στο 4ο φ.ε.

δ) Μετατροπή μιας λεκτικής λύσης σε αλγεβρική. Από 13/14 στο 3ο φ.ε. σε 14/14 στο 4ο φ.ε.

Εντυπωσιακή ήταν βέβαια και η γεωμετρική απεικόνιση κατά τη Αραβική μέθοδο (11/14 ομάδες και 4/4 άτομα).

Υπήρξε κάποια κάμψη όσον αφορά τη συμπλήρωση τετραγώνου κατά την Ινδική μέθοδο (9/14) άλλα οφείλεται στην παρουσία του γενικού τύπου που προτιμήθηκε από τους μαθητές (11/14) στο 5ο φ.ε.

Αναφορικά με τα 4 άτομα, με εξαίρεση το 1ο που άλλοτε είχε ενεργό συμμετοχή και άλλοτε όχι, τα υπόλοιπα 3 είχαν σταθερή απόδοση από την αρχή μέχρι το τέλος της διαδικασίας. Το 3ο άτομο μόνο, δεν παρέδωσε το 8ο φύλλο εργασίας.

Οι ομάδες (1η, 2η, 3η, 5η, 10η) παρουσίασαν μια ανοδική πορεία κατά τη διάρκεια της διαδικασίας. Κάποιες άλλες, από την αρχή μέχρι το τέλος είχαν πολύ υψηλές επιδόσεις (4η, 6η, 9η, 11η, 13η, 14η). Τέλος οι ομάδες (7η, 8η, 12η) με αρκετές αυξομειώσεις στην απόδοση τους και με τις δύο πρώτες να σταματάνε στο 6ο φύλλο εργασίας, αλλά την τρίτη να συνεχίζει και να ανεβάζει την απόδοσή της μέχρι το τέλος.

6.2 Αποτελέσματα Ερωτηματολογίου

Θέλοντας να καταγράψουμε τις αντιδράσεις των μαθητών για όλο αυτό το διδακτικό εγχείρημα, την αναγκαστική εξ αποστάσεως διδασκαλία, το χωρισμό σε ομάδες, καθώς και τη προσέγγιση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης μέσα από ένα ιστορικό πλαίσιο με τα διαφορετικά είδη αναπαραστάσεων, δώσαμε στους μαθητές ένα ερωτηματολόγιο τύπου Likert για όλη αυτή τη διαδικασία. Το ερωτηματολόγιο βέβαια απαντήθηκε από 32 μαθητές σε σύνολο 58 που παρακολούθησαν τα μαθήματα (55%) και σε σχέση με τους 46 που συμμετείχαν ενεργά (70%). Σύμφωνα λοιπόν με τα αποτελέσματα που προέκυψαν έχουμε τα εξής:

Για τη κατηγορία Α που αφορά τη σύγχρονη και ασύγχρονη εξ' αποστάσεως εκπαίδευση παρόλο που 17 στα 18 κορίτσια και 12 στα 14 αγόρια συμμετείχαν ενεργά σ' αυτή τη διαδικασία και μόνο 3 στα 18 κορίτσια και 4 στα 14 αγόρια είχαν σοβαρά προβλήματα με τη σύνδεση στο διαδίκτυο, με αποτέλεσμα να μην έχουν παρακολουθήσει όλα τα μαθήματα, ή να έχουν χάσει μέρος από αυτά, εντούτοις θα τους ήταν πιο εύκολο να πηγαίνουν στο σχολείο από το να παρακολουθούν τα μαθήματα από το σπίτι (19 στους 32 επιλέγουν το σχολείο, με 8 μαθητές να θεωρούν ότι είναι το ίδιο). Όπως και στο ερώτημα, αν ο τρόπος που έγιναν τα εξ' αποστάσεως μαθήματα ήταν παρόμοιος με τη δια ζώσης διδασκαλία, μόνο ένας μαθητής συμφώνησε, αντίθετα οι περισσότεροι θα προτιμούσαν να βρίσκονται στο σχολείο, (24 στους 32), γιατί τους έχει λείψει η επαφή με τους συμμαθητές και τους καθηγητές τους. Στο ερώτημα, αν το μάθημα γινόταν πιο κατανοητό γιατί δεν υπήρχε η σχετική φασαρία που γίνεται στην τάξη, υπήρξε μια διαφοροποίηση μεταξύ αγοριών και κοριτσιών. Μόνο 4 στα 14 αγόρια είχαν μεγαλύτερη δυσκολία στα εξ' αποστάσεως μαθήματα, σε σχέση με τα 11 στα 18 κορίτσια που είχαν δυσκολίες κατανόησης του μαθήματος, έτσι όπως γινόταν, σε αντίθεση με την τάξη. Τέλος στο ερώτημα, αν μπορούσαν με την ίδια ευκολία που είχαν στη τάξη να θέτουν ερωτήματα στον διδάσκοντα οι απαντήσεις ήταν επίσης διαφοροποιημένες μεταξύ κοριτσιών και αγοριών. Συγκεκριμένα μόνο 4 στα 14 αγόρια είχαν δυσκολίες στο να θέτουν ερωτήματα εξ’ αποστάσεως σε αντίθεση με 8 που δεν είχαν κανένα απολύτως πρόβλημα. Αντίθετα τα κορίτσια ήταν μοιρασμένα, 7 στα 18 έθεταν ερωτήματα με την ίδια ευκολία που γινόταν και στη τάξη, αλλά 8 στα 18 δυσκολεύονταν αρκετά.

Φαίνεται λοιπόν να υπάρχει επιφυλακτικότητα και δυσκολία των μαθητών ως προς την εξ’ αποστάσεως διδασκαλία. Προτιμούν τα μαθήματα να γίνονται στη σχολική τάξη από το περιβάλλον του υπολογιστή. Συναντούν αρκετές δυσκολίες και στην κατανόηση των εννοιών και στο να θέτουν ερωτήσεις. Αν λάβουμε υπόψη και το γεγονός ότι οι 32 μαθητές που απάντησαν στο ερωτηματολόγιο, αποτελούν μόνο το 1/3 των μαθητών της Γ΄ γυμνασίου, όπως και το ότι λιγότερο από τα 2/3 παρακολούθησαν αυτά τα μαθήματα, γίνεται φανερό ότι η μέθοδος αυτή της εξ’ αποστάσεως εκπαίδευση ναι μεν είναι ένα αναγκαίο κακό, κάτω από τις συνθήκες που διαμορφώθηκαν, σε καμία όμως περίπτωση δεν μπορεί να αντικαταστήσει τη δια ζώσης διδασκαλία και την επαφή που έχουν ανάγκη οι μαθητές και μεταξύ τους και με τους καθηγητές τους.

Για τη κατηγορία Β που αφορά τη συμμετοχή τους σε ομάδα, στην ενότητα των εξισώσεων 2ου βαθμού το σύνολο των μαθητών, κοριτσιών και αγοριών, απάντησε θετικά σε όλες τις ερωτήσεις, (οι 4 μαθητές που δούλεψαν μεμονωμένα δεν απάντησαν αυτή τη κατηγορία ερωτημάτων). Δεν υπήρξε κάποια διαφοροποίηση μεταξύ των δύο φύλων. Συγκεκριμένα οι 23 στους 28 μαθητές είχαν ενεργό συμμετοχή στη διαδικασία επίλυσης των φύλλων εργασίας μέσα στα πλαίσια της ομάδας, με τους υπόλοιπους 5 να δηλώνουν ότι άλλες φορές είχαν συμμετοχή και άλλες όχι. Οι 20 στους 28 μαθητές δηλώσαν ότι τους βοήθησε να κατανοήσουν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες που διαπραγματεύτηκαν με την ομάδα τους στα φύλλα εργασίας και μόνο 2 διαφώνησαν μ’ αυτό. Οι 12 θεώρησαν ότι η συνεργασία τους με άλλους συμμαθητές τόνωσε την αυτοπεποίθηση τους για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, με 13 να δηλώνουν ουδέτεροι ως προς αυτό. Για τον εάν αντιμετώπισαν τα μαθηματικά με πιο θετικό τρόπο από ότι πριν, σε σχέση με την ομαδική δουλειά, οι απόψεις ήταν μοιρασμένες. Οι 10 το είδαν θετικά, 7 αρνητικά και 11 ούτε θετικά ούτε αρνητικά, παρόλο που η συντριπτική πλειοψηφία (27 στους 28) δεν αντιμετώπισαν κανένα πρόβλημα με τους υπόλοιπους της ομάδας τους. Γι’ αυτό εξάλλου και στο ερώτημα, αν θα προτιμούσαν να δουλεύουν μόνοι τους ή ομαδικά τα φύλλα εργασίας, προτίμησαν σε μεγάλο ποσοστό 22 στους 28 να συνεργάζονται με άλλους.

Βλέπουμε λοιπόν από τα παραπάνω αποτελέσματα, μια θετική στάση των μαθητών απέναντι σε ομαδοσυνεργατικές μεθόδους διδασκαλίας. Προτιμούν να δουλεύουν με άλλους συμμαθητές τα φύλλα εργασίας πάρα μόνοι τους και γενικά η συμμετοχή στις ομάδες, τους βοήθησε να κατανοήσουν περισσότερο τις μαθηματικές έννοιες που έπρεπε να αντιμετωπίσουν.

Οι υπόλοιπες δύο κατηγορίες του ερωτηματολογίου αφορούν το διδακτικό εγχείρημα της εμπλοκής της ιστορίας των μαθηματικών σε συνδυασμό με τις πολλαπλές αναπαραστάσεις των εξισώσεων 2ου βαθμού και των λύσεων τους. Έτσι:

Στη κατηγορία Γ, που σχετίζεται με την ιστορική αναδρομή στη διαδικασία εκμάθησης των εξισώσεων 2ου βαθμού οι μαθητές απάντησαν ως εξής:

Στη Γ1 δήλωση που αφορά το κίνητρο που τυχόν τους έδωσε ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιήθηκε η ιστορία των μαθηματικών, ώστε να ασχοληθούν περισσότερο με τις εξισώσεις 2ου βαθμού, τα 8 στα 18 κορίτσια απάντησαν ότι συμφωνούν ή συμφωνούν απόλυτα, όπως και τα 7 στα 14 αγόρια επίσης (και τα δύο φύλα γύρω στο 50% περίπου). Αντίθετα 5 στα 18 κορίτσια και 3 στα 14 αγόρια, θεώρησαν ότι δεν υπήρξε κανένα κίνητρο με το να ασχοληθούν ή όχι περισσότερο. Υπήρξε και ένα σημαντικό ποσοστό, 5 στα 18 κορίτσια και 4 στα 14 αγόρια που δεν επηρεάστηκαν ούτε θετικά ούτε αρνητικά από αυτόν τον τρόπο διδασκαλίας που ενσωμάτωνε την ιστορία στη μαθηματική πρακτική.

Στη Γ2 δήλωση που αφορά το βαθμό κατανόησης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων και πως η ιστορία τους βοήθησε σ’ αυτό, και τα δύο φύλα απάντησαν με παρόμοιο θετικό τρόπο. Συγκεκριμένα: Οι 21 στους 32 μαθητές απάντησαν ότι συμφωνούν ή συμφωνούν απόλυτα, ότι η ιστορία των μαθηματικών τους βοήθησε να κατανοήσουν καλύτερα τον τρόπο επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων και μόνο ένα μικρό μέρος μαθητών, 4 στους 32 να έχουν αρνητική άποψη γι’ αυτό.

Στη Γ3 δήλωση που αφορά τη διαχρονικότητα αλλά και τον σημαντικό ρόλο των εξισώσεων σε πολλούς πολιτισμούς του παρελθόντος, υπήρξε μόνο μία αρνητική απάντηση, με τη πλειοψηφία αγοριών και κοριτσιών (19 στους 32) να κατανοούν απόλυτα τη σημαντικότητα αυτών των εξισώσεων στο διάβα της ιστορίας και τη σημασία που δίναν αρκετοί λαοί στην προσπάθεια τους να τις επιλύσουν. Το γεγονός ότι έγινε αναζήτηση σε τέσσερις μεγάλους πολιτισμούς του παρελθόντος (Βαβυλωνιακός, Ελληνικός, Αραβικός και Ινδικός) παράλληλα με κάποιες αναφορές στο δυτικό πολιτισμό για τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις, έδωσε στους μαθητές τη δυνατότητα να κατανοήσουν τη προσπάθεια πολλών λαών για την επίλυση τέτοιων εξισώσεων όπου θα έδινε απαντήσεις σε ερωτήματα που είχαν σχέση με τη καθημερινότητα τους, όπου και παίζανε σημαντικό ρόλο.

Η Γ4 δήλωση που είχε σχέση με τον αριθμό των λύσεων μιας πρωτοβάθμιας και μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, εκτός από 2 αρνητικές απαντήσεις, οι υπόλοιπες ή ήταν θετικές (17 στους 32) ή ήταν ουδέτερες (13 στους 32). Αυτό έδειξε ότι οι περισσότεροι μαθητές μέσα από τη διαδικασία που ακολουθήθηκε μπόρεσαν να κατανοήσουν τις διαφορές μεταξύ εξισώσεων 1ου και 2ου βαθμού, ως προς τη γραφή αυτών των εξισώσεων, αλλά και ως προς το πλήθος των λύσεων τους, κάτι που ανέδειξαν και οι απαντήσεις των αντίστοιχων φύλλων εργασίας.

Στη Γ5 δήλωση αυτής της κατηγορίας κλήθηκαν οι μαθητές να αξιολογήσουν τις διάφορες μεθόδους συμπλήρωσης τετραγώνου σε όλες τις μορφές, που αναδείχτηκαν μέσα από την ιστορική αναδρομή (λεκτικές, αριθμητικές, αλγεβρικές αναλυτικές και γεωμετρικές) και πόσο αυτό τους βοήθησε να κατανοήσουν το ρόλο που διαδραματίζει η διακρίνουσα μέσα στον γενικό τύπο, αλλά και το ίδιο τον τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων από τους Ινδούς. Η πλειονότητα των μαθητών, αγοριών και κοριτσιών (20 στους 32), απάντησε ότι μπόρεσαν να κατανοήσουν καλύτερα το ρόλο της διακρίνουσας, αλλά και τα αποτελέσματα που δίνει, ανάλογα με το πρόσημο της, ως προς τις λύσεις μιας εξίσωσης 2ου βαθμού. Διαπίστωσαν ότι η διακρίνουσα ισούται με μια παράσταση υψωμένη στο τετράγωνο και άρα με θετική τη τιμή της η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές λύσεις, με τιμή ίση με μηδέν, μία διπλή λύση και με αρνητική τιμή, καμία λύση. Έτσι ο γενικός τύπος απέκτησε κάποιο νόημα γι’ αυτούς. Βέβαια υπήρξαν και 7 στους 32 μαθητές, που ούτε συμφώνησαν ούτε διαφώνησαν με αυτή τη δήλωση και 5 στους 32 που διαφώνησαν.

Η Γ6 δήλωση αφορούσε την επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων. Οι απαντήσεις κοριτσιών και αγοριών ήταν σχεδόν ταυτόσημες. Θεωρούν οι περισσότεροι (17 στους 32 μαθητές), ότι η ανάδειξη των ιστορικών προβλημάτων και των αντίστοιχων λύσεων από τους διάφορους λαούς, τους βοήθησε να επιλύσουν τα διάφορα λεκτικά και γεωμετρικά προβλήματα με πιο εύκολο τρόπο. Η ιστορική αυτή διαδρομή, με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις και η αντιμετώπιση παρόμοιων προβλημάτων από διαφορετικούς λαούς, έδωσε το ερέθισμα στους μαθητές να ασχοληθούν καθ’ όλη τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης με τέτοιου είδους προβλήματα, ώστε η επίλυση αντίστοιχων προβλημάτων να θεωρείτε από τους ίδιους πιο εύκολη. Αντίθετα 10 μαθητές απάντησαν ότι ούτε συμφωνούν, ούτε διαφωνούν και 5 μαθητές δεν συμφωνούν με αυτή τη διαπίστωση.

Στη Γ7 και τελευταία δήλωση που σχετίζεται με τη κατανόηση του ρόλου των εξισώσεων στην επίλυση καθημερινών προβλημάτων μέσω της ιστορικής αναδρομής υπήρξε διαφοροποίηση μεταξύ αγοριών και κοριτσιών. Συγκεκριμένα, τα κορίτσια ήταν μοιρασμένα ως προς αυτή τη διαπίστωση. Τα 7 στα 18 κορίτσια θεώρησαν ότι κατανόησαν τον ρόλο των εξισώσεων στην επίλυση των καθημερινών προβλημάτων, ενώ 6 στα 18 όχι. Αντίθετα τα αγόρια ήταν θετικά στην παραπάνω διαπίστωση (9 στα 14 αγόρια) , με μόνο 2 στα 14 να έχουν αρνητική άποψη. Η διαφοροποίηση αυτή αποδίδεται στο γεγονός ότι δεν τονίστηκε στους μαθητές τι σημαίνει καθημερινό πρόβλημα. Ένα καθημερινό πρόβλημα ενός Βαβυλώνιου πριν 4000 χρόνια, πιθανώς να μην θεωρείται το ίδιος σε ένα νέο του 21ου αιώνα.

Στη κατηγορία Δ που αφορά τη πολλαπλή αναπαράσταση των εξισώσεων 2ου βαθμού και των λύσεων τους, οι μαθητές απάντησαν ως εξής:

Στη Δ1 δήλωση σχετικά με το ρόλο των αναπαραστάσεων (λεκτικών, αριθμητικών, αλγεβρικών, γεωμετρικών και αναλυτικών) για την πληρέστερη εικόνα των εξισώσεων 2ου βαθμού, το σύνολο σχεδόν των μαθητών (23 στους 32) απάντησε ότι συμφωνεί (11 άτομα), ή συμφωνεί απόλυτα (12 άτομα), με μόνο ένα άτομο να διαφωνεί. Αυτό δείχνει ότι η μετάβαση από το ένα πεδίο στο άλλο διαδραμάτισε σημαντικό ρόλο στην ολιστική αντιμετώπιση των εξισώσεων, αλλά και στη νοηματοδότηση που προσέφερε στους μαθητές, ώστε η επίλυση μιας εξίσωσης να μην αποτελεί μια μηχανιστική διαδικασία με σύμβολα χωρίς νόημα.

Η Δ3 δήλωση, όπως και η Δ5 ζητούσε από τους μαθητές να αξιολογήσουν το βαθμό κατανόησης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων σε συνδυασμό με το ρόλο της παραγοντοποίησης, μέσα από τους διαφορετικούς τρόπους επίλυσης τέτοιων εξισώσεων. Και στις δύο δηλώσεις οι μαθητές απάντησαν θετικά. Για την κατανόηση του μαθήματος με τον τρόπο που διεξήχθη οι θετικές γνώμες ήταν 20. Για τη κατανόηση του σημαντικού ρόλου της παραγοντοποίησης 23. Η ενσωμάτωση της ιστορίας σε συνδυασμό με τις πολλαπλές αναπαραστάσεις, καθώς και η συνεχής αναφορά στην παραγοντοποίηση δώσανε στους μαθητές τη δυνατότητα να διευρύνουν την οπτική, μέσα από την οποία είδαν τις εξισώσεις και να εμβαθύνουν στις έννοιες αυτές.

Η Δ2 δήλωση σε συνδυασμό με τη Δ4 αποτελούσαν δηλώσεις "παγίδα", θέλοντας να ελέγξουν αν οι προηγούμενες απαντήσεις ήταν συνειδητοποιημένες ή τυχαίες. Στη Δ2 δήλωση οι μαθητές έπρεπε απαντήσουν εάν θα προτιμούσαν να μάθαιναν μόνο έναν τρόπο επίλυσης εξισώσεων 2ου βαθμού και ας μην τον κατανοούσαν πλήρως, από το να μπλέξουν με τόσους πολλούς τρόπους. Οι 20 στους 32 διαφώνησαν απόλυτα ή διαφώνησαν θεωρώντας ότι οι πολλαπλές επιλογές που είχαν στη διάθεση τους για την επίλυση μιας εξίσωσης, όχι μόνο δεν τους μπερδέψαν, αλλά τους βοήθησαν να δουν με μεγαλύτερη διαύγεια αυτές τις μαθηματικές έννοιες. Στη Δ4 δήλωση γινόταν αναφορά στην κούραση που πιθανώς να τους προκάλεσε η πολλαπλότητα αυτών των μεθόδων και αναπαραστάσεων με προτροπή στη μάθηση μόνο ενός τρόπου (συνήθως του γενικού τύπου). Και εδώ οι απαντήσεις ήταν αρνητικές (21 στις 32).

Από τις προηγούμενες δύο κατηγορίες (Γ και Δ) φάνηκε πόσο πολύ θετικά αντιμετωπίστηκε η διδακτική παρέμβαση από τους μαθητές, όπου ιστορικά προβλήματα σε συνδυασμό με τις πολλαπλές αναπαραστάσεις καθώς και τη διαδικασία διερεύνησης των ιστορικών πηγών στο κομμάτι που αφορά τις εξισώσεις 2ου βαθμού, έγιναν αντικείμενο μελέτης μέσα από τα φύλλα εργασίας, αλλά και τις εξ' αποστάσεως διδασκαλίες. Βέβαια ο αριθμός των μαθητών που απάντησε το ερωτηματολόγιο ήταν μικρός και πιθανώς όχι αντιπροσωπευτικός του συνόλου των μαθητών της Γ΄ γυμνασίου του σχολείου μας, όπως και ο αριθμός που συμμετείχε ενεργά σ' αυτή τη διαδικασία. Εντούτοις στη θέση που βρεθήκαμε ήταν το μοναδικό που θα μπορούσε να έχει γίνει.

ΚΕΦ. 7ο: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Έχοντας υπόψη το περιβάλλον στο οποίο εξελίχθηκε η διδακτική παρέμβαση με την εξ' αποστάσεως διδασκαλία και όλων των δυσκολίων που αυτή επέφερε, λόγω των εικονικών μόνο επαφών μεταξύ του διδάσκοντα και των μαθητών, οι οποίες και αναδείχτηκαν παραπάνω στην ανάλυση του ερωτηματολογίου, καθώς και με την απάντηση των φύλλων εργασίας εκτός τάξης, όπου οι μαθητές βρέθηκαν με μεγαλύτερους βαθμούς ελευθερίας, με άνεση χρόνου και αναζήτηση οποιασδήποτε εξωτερικής βοήθειας, σαφώς τα συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν δύσκολα μπορούν να συγκριθούν με προηγούμενες έρευνες. Ο τρόπος που εφαρμόστηκε ήταν πρωτότυπος και απλά εξυπηρέτησε τη συγκεκριμένη έκτακτη κατάσταση που διαμορφώθηκε (καραντίνα).Στηρίχτηκε σε τρεις άξονες:

α) Στην Εννοιολογική κατανόηση των αλγεβρικών συμβόλων από τους μαθητές (Kieran 1997), όπου έγινε μέσω των διαφορετικών αναπαραστάσεων, με τη χρήση αριθμητικών, γεωμετρικών και γραφικών – αναλυτικών μεθόδων, τα οποία βέβαια αντλήθηκαν από την ιστορία των μαθηματικών (Katz, 2013; Boyer, 1997;

Εξαρχάκος, 1997) καθώς και από την ιστορική έρευνα (Θωμαΐδης, 1987, 2006; Τζανάκης, 2006)

β) Στη χρήση της ιστορίας μέσω της στρατηγικής της προσαρμογής (Fried 2001), όπου η ιστορική εξέλιξη των εξισώσεων 2ου βαθμού χρησιμοποιήθηκε ως οδηγός για το σχεδιασμό της διδασκαλίας, με σκοπό βέβαια τη μεγαλύτερη κατανόηση από μέρους των μαθητών αυτής της έννοιας, υπό το πρίσμα όμως της σημερινής σύγχρονης μορφής των μαθηματικών (Κολέζα 2009).

γ) Στη χρήση συμπερασμάτων προηγούμενων ερευνών για τις δυσκολίες και τα λάθη των μαθητών σε αλγεβρικές έννοιες και ιδιαίτερα στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις (Küchemann, 1981; Λεμονίδης, 1996; Σακονίδης, 2006; Maconye, (2014); Mangakga, 2016).

Υπό το πρίσμα των προαναφερθέντων, η ερμηνεία των "αποτελεσμάτων" της διδακτικής παρέμβασης, όπως αυτά παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, σε συνδυασμό με τις απαντήσεις των μαθητών στο ερωτηματολόγιο, κρίνεται σκόπιμο να γίνει σε δύο επίπεδα:

- Στον τρόπο με τον οποίο η ιστορία εισήλθε στη διδακτική πράξη και πόσο αυτή επηρέασε την επίτευξη των επιμέρους στόχων (ερευνητικών ερωτημάτων) αυτής της διαδικασίας, όπως περιγράφονται παραπάνω.
- Στις δυσκολίες και τα λάθη που συνάντησαν οι μαθητές, όπως καταγράφηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, παρόλο που βρέθηκαν σε ένα περιβάλλον τελείως διαφορετικό, από αυτό της τάξης.

7.1 Επίτευξη Επιμέρους Στόχων (Ερευνητικών Ερωτημάτων) μέσω της Ιστορίας

Ερμηνεύοντας τα "αποτελέσματα" που προέκυψαν από τα φύλλα εργασίας και συγκεκριμένα τον πίνακα 4, σε συνδυασμό με τις απαντήσεις στη κατηγορία Γ και Δ του ερωτηματολογίου, παρατηρούμε ότι η ιστορία των μαθηματικών συντέλεσε σε μεγάλο βαθμό, να δώσει κίνητρο στους μαθητές να ασχοληθούν με τις εξισώσεις 2ου βαθμού (δήλωση Γ1 ερωτηματολογίου), να αντιληφθούν τον ρόλο τους μέσα στην εξέλιξη των πολιτισμών και να κατανοήσουν ότι τα μαθηματικά είναι ένα εξελισσόμενο και ανθρώπινο θέμα και όχι ένα σύστημα άκαμπτων αληθειών (δήλωση Γ3) (Τζανάκης 2006). Οι διάφοροι μέθοδοι επίλυσης τέτοιων εξισώσεων από τους Βαβυλώνιους και τους Άραβες, έως τους Ινδούς και τις σύγχρονες μεθόδους, μέσω της ανάλυσης και των γραφικών παραστάσεων, διαμόρφωσαν ένα κατάλληλο περιβάλλον πολλαπλών αναπαραστάσεων, που όπως φάνηκε από τα "αποτελέσματα" των φύλλων εργασίας (πίνακας 4), αλλά και τις απαντήσεις των ίδιων των μαθητών στο ερωτηματολόγιο (δήλωση Γ5 και Δ1), βοήθησε στην κατανόηση αυτών των εννοιών. Όλα αυτά συντέλεσαν σε μεγάλο βαθμό, ώστε να επιτευχθούν οι επιμέρους στόχοι που εξαρχής αποτέλεσαν και ερωτήματα της εμπειρικής έρευνας. Συγκεκριμένα:

Στο 1ο ερευνητικό ερώτημα, σχετικό με τον αριθμό των λύσεων, 1ου και 2ου βαθμού εξισώσεων, όπου δεν έχουμε ακόμη την εμπλοκή της ιστορίας, αλλά μια σύνδεση με τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών, οι απαντήσεις που δόθηκαν για τις 1ου βαθμού εξισώσεις ήταν ικανοποιητικές. Περισσότερες από τις μισές ομάδες απάντησαν σωστά. Γι' αυτές όμως του 2ου βαθμού, αρχικά οι απαντήσεις ήταν απογοητευτικές στο 1ο φ.ε., με τη μεγαλύτερη πλειονότητα των μαθητών να απαντάει λανθασμένα. Στη συνέχεια και με την είσοδο της ιστορίας, οι ομάδες που απάντησαν σωστά ξεπέρασαν τις μισές στο 5ο φύλλο εργασίας, ενώ στο τέλος, στο 7ο φ.ε. υπήρξε καθολική επιτυχία. Κάτι που αναδείχτηκε και από τους ίδιους τους μαθητές, με τη δήλωση Γ4 του ερωτηματολογίου.

Στο 2ο ερευνητικό ερώτημα, που αφορά τη μετάβαση από το ένα πεδίο στο άλλο, μεταξύ του λεκτικού, αριθμητικού, αλγεβρικού, γεωμετρικού και αναλυτικού τρόπου αποτύπωσης των εξισώσεων και των λύσεων τους, παρατηρούμε ότι αυτό που περισσότερο δυσκόλεψε τους μαθητές ήταν η μετάβαση από τη λεκτική λύση στην αριθμητική, με τις μισές μόνο ομάδες να απαντάνε σωστά στο 3ο φ.ε. Κατόπιν η γεωμετρική αναπαράσταση μιας εξίσωσης, δηλαδή η μετάβαση από το αλγεβρικό στο γεωμετρικό πεδίο με τον ίδιο αριθμό ομάδων, στο 2ο φ.ε. Κάτι που βελτιώθηκε βέβαια στην πορεία με την επίλυση εξισώσεων με γεωμετρικό τρόπο, βάσει της Αραβικής μεθόδου, στο 4ο φ.ε..

Αντίθετα η μετατροπή της λεκτικής λύσης των δύο ιστορικών προβλημάτων σε αλγεβρική, με τα σύμβολα της εξίσωσης, μέσω της μεθόδου της συμπλήρωσης τετραγώνου, είχε εντυπωσιακά αποτελέσματα, με το σύνολο των ομάδων και των μεμονωμένων ατόμων να απαντάει σωστά, στο 3ο και 4ο φ.ε.. Το ίδιο εντυπωσιακά ήταν και τα αποτελέσματα της κατασκευής μιας εξίσωσης, όπου το λεκτικό μέρος μεταφράζεται σε αλγεβρικό στο 2ο, 3ο και 8ο φ.ε.. Όσο αφορά την χρήση των συναρτήσεων ως μέσο για την επίλυση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, παρόλο που συγκέντρωσε τις περισσότερες από τις μισές ομάδες, δεν είχε την απαιτούμενη ανταπόκριση, κάτι που φάνηκε στο 6ο φ.ε. όπου κανένας μαθητής δεν την επέλεξε για την επίλυση κάποιας εξίσωσης (πίνακας 2)

Η ερμηνεία που μπορεί κάνεις να δώσει στα παραπάνω "αποτελέσματα" – τα οποία βέβαια αν ελάμβαναν χώρα στο πλαίσιο της τάξης θα ήταν πολύ ενθαρρυντικά – έγκειται κυρίως στο γεγονός, ότι στο σημερινό σχολικό περιβάλλον, η χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων για την ανάλυση και διδασκαλίας μιας μαθηματικής έννοιας δεν είναι κάτι που συνηθίζεται (ΝΠΣ 2011), όπως επίσης και η χρήση ιστορικών πηγών είναι περιορισμένη, πέραν ίσως των ιστορικών αναφορών στο τέλος κάποιων κεφαλαίων, όπως αναδείχτηκε στο 3ο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας . Έτσι λοιπόν οι μαθητές δεν είχαν συνηθίσει να εργάζονται σε διαφορετικά πλαίσια συγχρόνως, για την κατανόηση μιας έννοιας. Σταδιακά όμως και αυτό φάνηκε από τα "αποτελέσματα" (πίνακας 4), μπόρεσαν όσο προχωρούσε η διδακτική παρέμβαση, να τα χειριστούν με καλύτερο τρόπο.

Το 3ο ερευνητικό ερώτημα αφορούσε τις τρεις μεθόδους επίλυσης εξισώσεων 2ου βαθμού. Την παραγοντοποίηση, τη συμπλήρωση τετραγώνου και τον γενικό τύπο. Ο πίνακας 4 και οι δηλώσεις Γ5, Δ2, Δ3, Δ4 και Δ5 του ερωτηματολογίου έδειξαν μια θερμή αποδοχή των μαθητών, στη διαφορετική προσέγγιση και επίλυση των εξισώσεων, αλλά και μια ιδιαίτερη ικανοποίηση, ότι αυτό έγινε μέσω της ιστορίας (δήλωση Γ2).

Από τον πίνακα 4 επίσης παρατηρούμε ότι το 3ο ερευνητικό ερώτημα με τις μεθόδους επίλυσης, διαπερνά όλα τα φ.ε. και συνδέεται άμεσα με το 2ο και τις διαφορετικές αναπαραστάσεις. Εστιάζοντας όμως στο 6ο φ.ε. και συγκεκριμένα στο επαναληπτικό του μέρος, από τον πίνακα 2, παρατηρούμε ότι υπάρχει μία διάχυση των διαφορετικών τρόπων, αλλά και διαφορετικών αναπαραστάσεων, με εξαίρεση κάποιων (γεωμετρική λύση Αράβων και αναλυτική επίλυση εξισώσεων), που τους δυσκολεύει μεν αλλά ταυτόχρονα τους διευρύνει τον ορίζοντα της κατανόησης, μέσω των διαφορετικών προσεγγίσεων με οπτικοποιημένες παραστάσεις.

Φάνηκε να γίνεται κατανοητό στους μαθητές, ότι στις ελλιπείς μορφές εξισώσεων είναι προτιμότερη η παραγοντοποίηση, ή η άμεση εφαρμογή της τετραγωνικής ρίζας, από οποιονδήποτε άλλο τρόπο. Επίσης αναγνωρίζεται η ταυτότητα "ανάπτυγμα τετραγώνου", ώστε να χρησιμοποιηθεί καταλλήλως, αλλά και η παραγοντοποίηση μέσω διάσπασης όρων, σε μη ελλιπείς μορφές κατέχει ένα αξιοσέβαστο ποσοστό προτίμησης των μαθητών, παρόμοιο με τη συμπλήρωση τετραγώνου, με οποιονδήποτε από τους ιστορικούς τρόπους.

Αυτό όμως που κυριαρχεί στις περισσότερες περιπτώσεις είναι η χρήση του γενικού τύπου, μιας και θεωρείται από τους μαθητές πιο εύκολα διαχειρίσημη, λόγω της απομνημόνευσης μόνο ενός τύπου για όλες τις περιπτώσεις. Η προτίμηση αυτή των μαθητών εξηγεί ως ένα βαθμό και τον τρόπο που εξελίχθηκαν ιστορικά οι μέθοδοι επίλυσης εξισώσεων οι οποίοι είχαν την τάση να γίνονται όλο και πιο απλοί.

Άρα θα μπορούσε να ειπωθεί ότι η επίτευξη του 3ο επιμέρους στόχου από τους μαθητές, έδωσε πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Στο 4ο ερευνητικό ερώτημα, έχουμε μια αντιστροφή στο ρόλο της παραγοντοποίησης. Από εργαλείο για την επίλυση μιας εξίσωσης, γίνεται το αποτέλεσμα, το οποίο θα προκύψει, εφόσον επιλυθεί η εξίσωση, με κάποιον από τους άλλους τρόπους που αναφέρθηκαν παραπάνω. Οι μαθητές κλήθηκαν να παραγοντοποιήσουν κάποια τριώνυμα και να απλοποιήσουν μια ρητή αλγεβρική παράσταση. Χωρίς βέβαια να απεμπολήσουν το δικαίωμα εφαρμογής προγενέστερων μεθόδων παραγοντοποίησης, τα "αποτελέσματα" του πίνακα 3, δείχνουν μία σαφή προτίμηση στην εφαρμογή του γενικού τύπου (ΕΓΤ) ως μέσου για την παραγοντοποίηση ενός τριωνύμου. Στις περισσότερες από τις μισές περιπτώσεις, οι μαθητές επέλεξαν να εφαρμόσουν τον γενικό τύπο για την εύρεση των λύσεων που μηδενίζουν το τριώνυμο και κατόπιν, πάλι με εφαρμογή τύπου, να οδηγηθούν στη παραγοντοποίηση. Βέβαια και οι υπόλοιποι τρόποι παραγοντοποίησης, όπως ανάπτυγμα τετραγώνου (ΑΤ), όπου ήταν εφικτό και παραγοντοποίηση μέσω διάσπασης (ΔΟΟ) είχαν αρκετές προτιμήσεις, σε αντίθεση με τη συμπλήρωση τετραγώνου (ΣΤ) που εμφανίστηκε μόνο μία φορά.

Βλέπουμε δηλαδή το ίδιο φαινόμενο που παρατηρήθηκε παραπάνω να εμφανίζεται ξανά. Δηλαδή μια προτίμηση στη χρήση τύπων. Από τη στιγμή που οι μαθητές ήρθαν σε επαφή με τον γενικό τύπο επίλυσης εξισώσεων 2ου βαθμού, σταδιακά άφηναν τους υπόλοιπους τρόπους και προτίμησαν αυτόν, λόγω ίσως της απλής και τυποποιημένης μορφής, που εφαρμόζεται καθολικά.

Για το 5ο και τελευταίο ερευνητικό ερώτημα που σχετίζεται με την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων, που είχαν γεωμετρικό και αριθμητικό προσανατολισμό, ώστε να συνδέονται και με τα ιστορικά προβλήματα, αλλά και με τις δραστηριότητες που εντάσσονταν στα προηγούμενα φ.ε. με χρήση φυσικά των εξισώσεων καθώς και των μεθόδων επίλυσης των από τους μαθητές, παρατηρήθηκαν "αποτελέσματα" που σαφώς μπορούν να θεωρηθούν πολύ ικανοποιητικά.

Η κατανόηση του προβλήματος, η σύνδεση των δεδομένων με τα ζητούμενα στην αποτύπωση της εξίσωσης και η επίλυση της, απαντήθηκε σωστά από το σύνολο σχεδόν των μαθητών. Έγινε χρήση των προηγούμενων γεωμετρικών μοντέλων και εφαρμόστηκαν σωστά οι μέθοδοι επίλυσης εξισώσεων, με κυρίαρχο βέβαια τρόπο, τη χρήση του γενικού τύπου. Στο μόνο που υστέρησαν ήταν ο έλεγχος των περιορισμών που έθεταν τα προβλήματα.

Την ερμηνεία για τα πολύ θετικά "αποτελέσματα" στην επίλυση των προβλημάτων την έδωσαν οι ίδιοι οι μαθητές με τις δηλώσεις Γ6 και Γ7 του ερωτηματολογίου, όπου ένα πολύ μεγάλο ποσοστό θεώρησε, ότι η ανάδειξη των ιστορικών προβλημάτων και η προσθήκη της μέσα στη διδασκαλία ήταν αυτό που τους βοήθησε σε μεγάλο βαθμό να κατανοήσουν τα προβλήματα και να οδηγηθούν στη λύση τους.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω θεωρούμε ότι η ιστορία διαδραμάτισε καταλυτικό ρόλο στην επίτευξη των επιμέρους στόχων που θέσαμε από την αρχή, βοήθησε στην ανάδειξη των πολλαπλών αναπαραστάσεων και μεθόδων, έδωσε νόημα σε αλγεβρικά σύμβολα και συντέλεσε στην καλύτερη αντιμετώπιση των προβλημάτων και στην επίλυση τους.

7.2 Δυσκολίες και Λάθη κατά την Επίλυση Εξισώσεων 2ου Βαθμού

Θα πρέπει να τονιστεί ότι οι δυσκολίες και τα λάθη που παρατηρήθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο σαφώς και δεν ανταποκρίνονται στην πραγματική εικόνα του επιπέδου των μαθητών, λόγω του τρόπου που διεξήχθη όλη η διαδικασία. Εντούτοις, ο μικρός έστω αριθμός σφαλμάτων που αναδείχθηκαν, είναι ικανός για την εξαγωγή κάποιων συμπερασμάτων.

Για την καλύτερη ερμηνεία των λαθών και δυσκολιών που αντιμετώπισαν οι μαθητές θα πρέπει να γίνει μία κατάταξη σε:

- Δυσκολίες και λάθη διαδικαστικού χαρακτήρα,
- λάθη εφαρμογής και
- Εννοιολογικά λάθη.

Στη πρώτη κατηγορία εντάσσονται λάθη που έχουν να κάνουν με την εσφαλμένη χρήση κάποιων αλγεβρικών κανόνων, όπως η μη αλλαγή προσήμου κατά τη μεταφορά όρων από το ένα μέλος της εξίσωσης στο άλλο, όπου και εδώ παρατηρήθηκαν τέτοια λάθη σε πολύ μικρή κλίμακα στο 3ο και 6ο φ.ε. Λάθη στους κανόνες της παραγοντοποίησης στο 1ο φ.ε. Επίσης κατά την εφαρμογή του αναλυτικού τρόπου επίλυσης εξισώσεων εμφανίστηκαν λάθη διαδικαστικού χαρακτήρα στη συμπλήρωση του πίνακα τιμών μιας συνάρτησης, με εσφαλμένη χρήση των κανόνων των προσήμων στην πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό.

Στη δεύτερη κατηγορία εντάσσονται λάθη κατά την εφαρμογή ενός τύπου, μιας ιδιότητας ή μιας ταυτότητας κλπ. Εμφανίστηκαν τέτοιες περιπτώσεις, όπως η λανθασμένη χρήση του γενικού τύπου των δευτεροβάθμιων εξισώσεων (5ο και 6ο φ.ε.). Η λανθασμένη αντικατάσταση των συντελεστών *α, β, γ* στην εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (6ο και 8ο φ.ε.). Υπήρξαν λάθη και κατά την εφαρμογή της μεθόδου της συμπλήρωσης τετραγώνων (5ο φ.ε.), όπου δεν εφαρμόστηκε σωστά η ταυτότητα του αναπτύγματος τετραγώνου.

Τέλος στην τρίτη κατηγορία με τα εννοιολογικά λάθη, που είναι και τα πιο σημαντικά, εμφανίστηκαν αρκετές περιπτώσεις.

Η βασικότερη είχε να κάνει με την αδυναμία γενίκευσης μιας διαδικασίας. Εμφανίστηκε στο 1ο φ.ε., όπου οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να καταλήξουν σε συμπεράσματα για τον αριθμό των λύσεων μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Παρατηρήθηκε και στο 5ο & 6ο φ.ε. με τη δυσκολία εξαγωγής συμπερασμάτων για το ρόλο της διακρίνουσας, σε σχέση με τον αριθμό των λύσεων μιας εξίσωσης 2ου βαθμού, αλλά και με τον αριθμό των σημείων τομής μιας παραβολής και μιας ευθείας.

Δυσκολία υπήρξε και κατά τη σύγκριση μεταξύ των διαφόρων μεθόδων επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων από τους διάφορους λαούς (Βαβυλώνιους, Άραβες και Ινδούς) (5ο φ.ε.).

Τα υπόλοιπα λάθη εννοιολογικού χαρακτήρα, ήταν:

Η απόρριψη αρνητικών λύσεων χωρίς λόγο (1ο φ.ε.) ή η αποδοχή μη αποδεκτών λύσεων (8ο φ.ε.).

Η χρήση μιας ταυτότητας για την επίλυση μιας εξίσωσης με τον χαρακτηρισμό ότι είναι η ίδια η εξίσωση ταυτότητα (1ο φ.ε.).

Η δυσκολία στην αναγνώριση ομοιοτήτων στη δομή των εξισώσεων όταν έπρεπε να υπολογίσουν παραμέτρους, ώστε μια εξίσωση να χαρακτηριστεί αόριστη ή αδύνατη (1ο φ.ε.).

Η θεώρηση όλων των γραμμάτων σε μια εξίσωση ως άγνωστοι (1ο φ.ε.).

Παρατηρούμε ότι τα περισσότερα λάθη παρουσιάστηκαν στο 1ο φ.ε., σταδιακά όμως υπήρξε βελτίωση. Όσο προχωρούσε η διαδικασία τα λάθη και οι δυσκολίες περιοριζόταν, με αποτέλεσμα στα τελευταία φ.ε. να σημειώνονται πολύ καλές επιδόσεις.

7.3 Περιορισμοί έρευνας

Εκτός από το πλαίσιο της εξ' αποστάσεως διδασκαλίας που παρουσιάστηκε παρά πάνω, με όλες τις δυσκολίες και τα εμπόδια που καταγράφηκαν, αλλά και χωρίς τον απαραίτητο έλεγχο από τη μεριά του διδάσκοντα, ως προς την απάντηση των φύλλων εργασίας.

Επιπλέον το δείγμα των 46 μαθητών χωρισμένων σε 14 ομάδες των 3 μαθητών και οι 4 μεμονωμένοι μαθητές που ασχολήθηκαν με τα φύλλα εργασίας δεν μπορεί να καταστεί αντιπροσωπευτικό, ούτε και στο επίπεδο της Γ' τάξης των 98 μαθητών του σχολείου μας, πόσο μάλλον σε ευρύτερη κλίμακα.

Βλέποντας το προφίλ των 46 μαθητών, ως προς τις επιδόσεις τους στα μαθηματικά μέχρι εκείνη τη στιγμή που ξεκινούσε η παρούσα διδακτική παρέμβαση – εμπειρική έρευνα, θα διαπίστωνε ότι στις 11 από τις 14 ομάδα υπήρχε τουλάχιστον ένας μαθητής με πολύ υψηλή επίδοση, (από 18 και πάνω, στην εικοσαβάθμια κλίμακα του σχολείου). Της ίδιας επίδοσης ήταν και οι 3 από τους 4 μαθητές που εργάστηκαν ανεξάρτητα. Επομένως δεν υπήρχε μια συνηθισμένη διαστρωμάτωση όλων των επιδόσεων, που παρατηρείται σε ένα τυχαίο δείγμα, ή σε μία κανονική τάξη, ενός δημόσιου σχολείου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βερύκιος, Π. (2003). *Κατανόηση Εννοιών της Άλγεβρας από Μαθητές Γυμνασίου.* http://me.math.uoa.gr/conf2/papers/berikios.pdf.

Εξαρχάκος Θ.Γ. (1997) *Ιστορία των μαθηματικών. Τόμος Α΄ Τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αρχαίων Αιγυπτίων.*

Θωμαΐδης Γ. Καστάνης Ν. Τζανάκης Κ. (2006). *Ιστορία και μαθηματική εκπαίδευση,* εκδόσεις ΖΗΤΗ.

Θωμαΐδης Γ. Καστάνης Ν. (1987). *Μια διαχρονική εξέταση της σχέσης της ιστορίας με τη διδακτική των μαθηματικών.*

Θωμαΐδης Γ. (2014). *ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΕΝΟΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΘΕΜΑ: «ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΟΥΣ.* Επιστήμες Αγωγής. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Κολέζα Ε. (2006). *ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.* Ιστορία των μαθηματικών και μαθηματική εκπαίδευση, 5ο διήμερο διαλόγου για τη διδασκαλία.

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα: εκδ. τόπος.

Κούρκουλος Μ. Τζανάκη Κ. (2014). *πρόλογος της έκδοσης «Επιστήμες Αγωγής».* Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Λεμονίδης, Χ. (1996). *Δυσκολίες και αντιλήψεις των μαθητών κατά το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα.* Ευκλείδης Γ΄, Τόμος 13, Τεύχος 45, σσ. 61 – 70.

Λεμονίδης, Χ. (1996). *Εμπειρική έρευνα στην ικανότητα επίλυσης εξισώσεων Α΄ βαθμού από μαθητές Γυμνασίου.* Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών, Τεύχος 1. Περιοδική έκδοση του Παραρτήματος Κεντρικής Μακεδονίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, σσ. 14-35.

Τζανάκης Κ. (2006). *Η Διεθνής Ομάδα Μελέτης των Σχέσεων Μεταξύ Ιστορίας των Μαθηματικών και Μαθηματικής Εκπαίδευσης.* Ιστορία και Μαθηματική Εκπαίδευση.ς Εκδόσεις ΖΗΤΗ.

Τζανάκης Κ. (2009). *Η αξιοποίηση των σχέσεων μεταξύ Ιστορίας των Μαθηματικών και Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Συζήτηση σχετικά με τα υπέρ και τα κατά, βάσει διεθνούς εμπειρίας.* Επιστημονική Ένωση για τη διδακτική των Μαθηματικών. Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική των Μαθηματικών. Εκδόσεις ΖΗΤΗ.

Tzanakis C. Arcavi A. (2000). *Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey.*

Τσικοπούλου Σ., Φερεντίνος Σ. (2018). *Υπάρχουν λάθη στα Μαθηματικά που είναι σχεδόν αδύνατο να τα αποφύγουν οι μαθητές;* Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών – Επιστημονικών θεμάτων, τεύχος 14ο 32–47, 2018.

Χριστιανίδης Γ., Διαλέτης Δ. (2006) *Διαμάχες για την ιστορία των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών Κείμενα των S. Unguru, B.L. van der Waerden, H. Freudenthal, A Weil* Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Α.Π.Σ. (2011) *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου*. ΥΑ 59614/Γ2, ΦΕΚ 1168/8– 6–2011.
Δ.Ε.Π.Π.Σ (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών,* Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, ΦΕΚ 303Β/13-3-2003.

Δραμαλίδης, Α., & Σακονίδης, Χ. (2006). *Η επίδοση μαθητών ηλικίας 13 – 15 χρόνων σε θέματα σχολικής άλγεβρας.* Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων, σσ. 100 – 114.

Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (2011). *Μαθηματικά στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (Γυμνάσιο).* ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα), Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ΕΣΠΑ 2007-2013.

Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (2011). *Μαθηματικά στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (Γυμνάσιο). Οδηγός για τον εκπαιδευτικό, «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων».*
Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (2011). *Επιμορφωτικό Υλικό για τους Καθηγητές Μαθηματικών Γυμνασίου.*

Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στις Α΄ και Β΄ τάξεις Γενικού Λυκείου για το σχολικό έτος 2019 – 2020 Σχετ.: Το με αρ. πρωτ. εισ. Υ.ΠΑΙ.Θ. 130254/22-08-2019 έγγραφο.

Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο για το σχολικό έτος 2019-2020. Σχετ.: Το με αρ. πρωτ. εισ. Υ.ΠΑΙ.Θ. 130254/22-08-2019 έγγραφο.

Ο.Ε.Δ.Β. (2007) *Μαθηματικά Β΄ γυμνασίου.*

Ο.Ε.Δ.Β. (2007) *Μαθηματικά Γ΄ γυμνασίου.*

Ο.Ε.Δ.Β. (2011) *Άλγεβρα Α΄ λυκείου.*

Basmakova I.G.(2014) *Η Ιστορία των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών,* εκδόσεις Παπασωτηρίου.

Boyer C.B. – Merzbach U.C. (1997) *Η Ιστορία των μαθηματικών,* εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικού.

Clements, M.A. (Ken), & Vaiyavutjamai, P. (2006). *Effects of Classroom Instruction on Students' Understanding of Quadratic Equations.* Mathematics Education Research Journal. Vol. 18, No. 1, 47–77.

Didis, M., Erbas, A. (2015). *Performance and Difficulties of Students in Formulating and Solving Quadratic Equations with One Unknown.* Educational Sciences: Theory & Practice • 2015 August • 15(4) • 1137-1150.

Heath T.L. (1921) *Ιστορία των ελληνικών μαθηματικών- Τόμος ΙΙ Από τον Αρίσταρχο στον Διόφαντο* Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. Αθήνα 2001.

Fried, M. (2001) *Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist?*. Science & Education 10, 391 – 408.

Katz V. J. (2013) *Ιστορία των μαθηματικών – Μια εισαγωγή* Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Kieran, C. (1992). *The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grows (Ed.),* Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (390-419). New York: MacMillan Publishing.

Kieran, C. (1997). *Mathematical Concepts at the Secondary School Level: The Learning of Algebra and Functions*, in Nunes, T. & Bryant, P. (eds) *Learning and Teaching Mathematics: An Intenational Perspective*, Psychology Press

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school, 7 pp. 23 – 26.*

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics, 11 – 16, pp. 102 – 119.* London John Murray.

Lucariello, J., Tine, M. T., & Ganley, C. M. (2014). A formative assessment of students' algebraic variable misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior*, 33: 30-41. https://doi.org/10.1016/j.jmathb. 2013.09.001.

Maconye, J., & Matuku, O. (2016). *Exploring Learner Errors in Solving Quadratic Equations.* http://krepublishers.com/02-Journals/IJES/IJES-12-0-000-16-Web/IJES-12-1-000-16-Abst-PDF/IJES-12-1-007-16-757-Makonye-J-P/IJES-12-1-007-16-757-Makonye-J-P-Tx[2].pdf.

Maconye, J., & Nhlanhla, S. (2014). *Exploring 'Non-Science' Grade 11 Learners' Errors in Solving Quadratic Equations.* Mediterranean Journal of Social Sciences MCSER Publishing, Rome-Italy. Vol 5 No 27, 634 – 644.

Makgakga, S. (2016). E*rrors and Misconceptions in Solving Quadratic Equations by Completing a Square.* http://www.amesa.org.za/AMESA2014/Proceedings/papers/Short%20Paper/4.%20Sello%20Makgakga%20-AMESAPAPER2014final.pdf.

Thwaites, G. N. (1982). *Why do children find algebra difficult*? pp. 16 – 17. https://www.m-a.org.uk/resources/Vol-11-No4_Sep_1982_Why_do_children_find_algebra_difficult.pdf.

Zakaria, E., Maat, S. (2010). *Analysis of Students' Error in Learning of Quadratic Equations.* International Education Studies. Published by Canadian Center of Science and Education. Vol. 3, No. 3, 105 – 110.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ενότητα Α: Φύλλα Εργασίας (Φ.Ε.)

Φ. Ε. 1

Διερεύνηση Λύσεων 1ου & 2ου Βαθμού Εξισώσεων

Ερώτηση 1 (εξισώσεις 1ου βαθμού)

Όπως γνωρίζετε από προηγούμενες τάξεις μια **εξίσωση 1ου βαθμού** μπορεί να έχει:

α) **Μία** και μοναδική λύση.

β) Λύση **όλους** τους αριθμούς, (είναι δηλαδή αόριστη ή ταυτότητα).

γ) **Καμία** λύση, (είναι δηλαδή αδύνατη).

Μπορείτε να δώσετε παραδείγματα τέτοιων εξισώσεων για κάθε περίπτωση;

Ερώτηση 2 (εξισώσεις 1ου βαθμού)

Δίνονται οι παρακάτω **εξισώσεις 1ου βαθμού ως προς x**:

α) Για ποια τιμή του α η εξίσωση: αx+2=3x+5 είναι αδύνατη;

β) Για ποιες τιμές των α και β η εξίσωση: αx+1=4x+β είναι αδύνατη;

γ) Για ποια τιμή του α η εξίσωση: αx +3=5x+4–1 είναι ταυτότητα;

δ) Για ποιες τιμές των α και β η εξίσωση: $αx–1= \frac{1}{2}x+β$ είναι ταυτότητα;

Ερώτηση 3 (εξισώσεις 2ου βαθμού)

α) Μπορείτε να λύσετε την εξίσωση: $x^2 = 9$ με δοκιμές;
Πόσες λύσεις έχει;

β) Ομοίως την εξίσωση: $5x^2 = 20$.

γ) Τι παρατηρείτε για την εξίσωση: $x^2= –16$; Πόσες λύσεις έχει;

δ) Γνωρίζετε από προηγούμενα μαθήματα ότι, όταν το γινόμενο δύο ή περισσοτέρων αριθμών (παραγόντων) είναι μηδέν, τότε κάθε παράγοντας του μπορεί να είναι μηδέν, (δηλαδή, αν $α \cdot β=0$ τότε $α=0$ ή $β=0$).
Με βάση τα παραπάνω μπορείτε να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις αφού πρώτα παραγοντοποιήσετε το πρώτο μέλος της:
1) $x^2 + x – 2 = 0$. Πόσες λύσεις βρήκατε;
2) $x^2 – 6x +9 = 0$. Πόσες λύσεις βρήκατε;

ε) Από τα παραπάνω παραδείγματα, τί συμπεράσματα βγάζετε για τον αριθμό των λύσεων μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

στ) Μπορείτε να βρείτε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού της μορφής:
$αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$ που να είναι ταυτότητα;
Υπάρχουν τέτοιες εξισώσεις;

<u>Φ.Ε. 2</u>

Γεωμετρική Αναπαράσταση Εξισώσεων – «Δοκιμή – Λάθος» -Παραγοντοποίηση

Ερώτηση 1

α) Μπορείτε να αντιστοιχίσετε το μονώνυμο x^2, με το μέγεθος ενός γεωμετρικού σχήματος; (Να γίνει σχήμα).

β) Μπορείτε να κάνετε το ίδιο και για το μονώνυμο $6x$;
(Να γίνει σχήμα).

Ερώτηση 2

Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, πως μπορούμε να παραστήσουμε γεωμετρικά την εξίσωση: $x^2 + 6x = 16$; Ποιο γεωμετρικό μέγεθος παριστάνει ο αριθμός 16; (Να γίνουν σχήματα).

Ερώτηση 3

Θέλουμε να παραστήσουμε γεωμετρικά την εξίσωση: $x^2 = 8x$, αλλά και να τη λύσουμε στηριζόμενοι στο σχήμα.

α) Ποια λύση μπορούμε να βρούμε με βάση το σχήμα;

β) Υπάρχει άλλη λύση; Μπορείτε να τη βρείτε; Η μέθοδος «δοκιμή – λάθος» καθώς επίσης και η παραγοντοποίηση μπορεί να σας βοηθήσει.

Ερώτηση 4

Υπάρχει αριθμός όπου ο κύβος του να ισούται με τον ίδιο τον αριθμό;

(δραστηρ. ΙΕΠ)

α) Μπορείτε να βρείτε κάποια προφανή λύση;

β) Μπορείτε να μετατρέψετε το παραπάνω πρόβλημα σε εξίσωση;

γ) Γεωμετρικά πως θα μπορούσε να παρασταθεί;

δ) Χρησιμοποιώντας την παραγοντοποίηση ή τη μέθοδο «δοκιμή – λάθος» ποιες άλλες λύσεις θα μπορούσατε να βρείτε;

<u>**Φ. Ε. 3**</u>

Βαβυλωνιακός Τρόπος Επίλυσης Δευτεροβάθμιας Εξίσωσης

Ερώτηση 1

Στη **Βαβυλωνιακή πινακίδα BM 13901** στο σημερινό σύστημα αρίθμησης υπάρχει το εξής πρόβλημα:

«Το άθροισμα του εμβαδού ενός τετραγώνου και των $\frac{4}{3}$ *της πλευράς του είναι* $\frac{11}{12}$ *να βρεθεί η πλευρά του».*

Μπορείτε να το μετατρέψετε σε εξίσωση;

Ερώτηση 2

Στο παραπάνω πρόβλημα οι Βαβυλώνιοι δώσανε την εξής λύση:

«Παίρνουμε το μισό του $\frac{4}{3}$*, το τετραγωνίζουμε και αυτό που μας δίνει το προσθέτουμε στο* $\frac{11}{12}$*. Η τετραγωνική ρίζα αυτού που βρίσκουμε αν αφαιρεθεί κατά το μισό του* $\frac{4}{3}$ *μας δίνει την πλευρά του τετραγώνου. (Αποτέλεσμα* $\frac{1}{2}$*)»*

Αυτή η μέθοδος ονομάζεται **«μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου»**

α) Μπορείτε να μετατρέψετε την παραπάνω <u>λεκτική λύση</u> των Βαβυλωνίων σε <u>αριθμητική λύση</u>, ώστε να οδηγηθείτε στο αποτέλεσμα που κατέληξαν και οι Βαβυλώνιοι;

β) Με βάση την εξίσωση που βρήκατε στο πρώτο ερώτημα και χρησιμοποιώντας <u>αλγεβρικό τρόπο</u>, (δηλαδή ιδιότητες των εξισώσεων, αλλά και ταυτότητες) μπορείτε να τη λύσετε ακολουθώντας τα βήματα των Βαβυλωνίων;

Υπάρχει άλλη λύση εκτός από την παραπάνω;

Ερώτηση 3

Με τους ίδιους τρόπους (αριθμητικό και αλγεβρικό) να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 + 2x = 8$ β) $x^2 + 4x = 21$ γ) $x^2 + 6x = 27$

<u>Φ. Ε. 4</u>

Αραβικός Τρόπος (Λεκτικός & Γεωμετρικός) Επίλυσης Δευτεροβάθμιας Εξίσωσης

Ερώτηση 1

Ο Άραβας Μαθηματικός al- Khwarizmi έδωσε το εξής πρόβλημα:

«Ποιο είναι το τετράγωνο το οποίο αν αυξηθεί κατά δέκα ρίζες του, γίνεται τριάντα εννέα;».

Υπόψη: Με τη λέξη ρίζα οι Άραβες εννοούν τον άγνωστο.

Μπορείτε να εκφράσετε το παραπάνω πρόβλημα με εξίσωση;

Ερώτηση 2

η λεκτική απάντηση του al- Khwarizmi όπως καταγράφεται στον Katz (σ. 281, 282) είναι:

«Υποδιπλασιάζεις το πλήθος των ριζών (πραγμάτων) που στο παράδειγμα αυτό μας δίνει πέντε. Μετά πολλαπλασιάζεις τον αριθμό αυτόν επί τον εαυτό του που δίνει είκοσι πέντε. Προσθέτεις αυτό στο τριάντα εννέα και το άθροισμα είναι εξήντα τέσσερα. Παίρνεις την τετραγωνική ρίζα αυτού που είναι οκτώ και αφαιρείς το μισό του πλήθους των πραγμάτων που είναι πέντε. Η διαφορά είναι τρία. Αυτή είναι και η λύση του προβλήματος»

Μπορείτε να μετατρέψετε την παραπάνω λεκτική λύση του al- Khwarizmi σε <u>αριθμητική</u> άλλα και <u>αλγεβρική</u> λύση;

Υπάρχει άλλη λύση εκτός της $x=3$; Μπορείτε να τη βρείτε;

Ερώτηση 3

Συγκρίνετε τις δύο μεθόδους (των Βαβυλωνίων και των Αράβων). Τι παρατηρείτε;

Ερώτηση 4

Ο al- Khwarizmi όμως θεώρησε απαραίτητο να δώσει και μία **γεωμετρική λύση** στο παραπάνω πρόβλημα επηρεασμένος από τη σκέψη των Αρχαίων Ελλήνων για τη γεωμετρία. (Boyer, σελ. 258)

Η λύση που δίνει όπως την περιγράφει ο Katz (σ. 282). είναι η εξής:

«Ο al- Khwarizmi αρχίζει με το τετράγωνο x^2, προσθέτει δυο ορθογώνια καθένα από τα οποία έχει πλάτος πέντε (το μισό του πλήθους των ριζών) **(στις δύο κάθετες πλευρές του τετραγώνου).** *Τότε το άθροισμα του τετραγώνου και των δύο ορθογωνίων είναι $x^2+10x=39$. Κατόπιν συμπληρώνει το τετράγωνο με ένα τετραγωνάκι εμβαδού 25 οπότε παίρνει τετράγωνη περιοχή συνολικού εμβαδού 64. Η λύση $x=3$ συνάγεται εύκολα».*

Ξανά **«η μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου»**

Μπορείτε να κάνετε το σχήμα και να συνδέσετε τη γεωμετρική αυτή λύση με την παραπάνω αλγεβρική;

Ερώτηση 5

Χρησιμοποιώντας και τους δύο παραπάνω τρόπους (γεωμετρικό και αλγεβρικό), να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2+12x=13$ β) $2x^2+16x-18=0$ γ) $2x^2 + 10x = 48$

Φ. Ε. 5

Μέθοδος των Ινδών για τη Συμπλήρωση Τετραγώνου στις Δευτεροβάθμιες Εξισώσεις – Γενικός Τύπος Επίλυσης Δευτεροβάθμιων Εξισώσεων

Σύμφωνα με τη μέθοδο των Ινδών που επινοήθηκε από τον Sridhara (1025 μ.Χ) έχουμε:

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \qquad \alpha \neq 0$

$\alpha x^2 + \beta x = -\gamma$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με 4α και ύστερα προσθέτουμε το β^2 και στα δύο μέλη, για να προκύψει ένα «τέλειο τετράγωνο» στο αριστερό μέλος. Δηλαδή:

$4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x = -4\alpha\gamma$

$4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+ \beta^2 = -4\alpha\gamma +\beta^2$

$(2\alpha x+\beta)^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$2\alpha x+\beta = \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$ **εφόσον** $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Ερώτηση 1

Η μέθοδος αυτή είναι η γνωστή πλέον **«μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου»** λίγο διαφορετική σε σχέση με τη Βαβυλωνιακή και Αραβική μέθοδο.

α) Αν συμβολίσουμε την παράσταση $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ με το γράμμα Δ, ποιος είναι ο ρόλος της;

β) Με βάση την παραπάνω μέθοδο, για την εξίσωση: $x^2+15x-16=0$, μπορείτε:

1) Να βρείτε ποιοι αριθμοί είναι οι α, β, και γ;

2) Ποιος αριθμός είναι ο Δ;

3) Να εφαρμόσετε τα παραπάνω βήματα του Sridhara και να λύστε την εξίσωση;

Ερώτηση 2

Μπορείτε να συγκρίνετε τη μέθοδο αυτή με τις άλλες μεθόδους; Τι παρατηρείτε;

Ερώτηση 3

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

α) $x^2 - x - 2 = 0$ β) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ γ) $3x^2 - 2x + 1 = 0$

1) Με τον ίδιο τρόπο του Sridhara. Εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία «συμπλήρωσης τετραγώνου».

2) Χρησιμοποιώντας μόνο τον τελικό τύπο.

Φ. Ε. 6

Γραφικός Τρόπος Επίλυσης Εξισώσεων 2ου Βαθμού. Χρήση όλων των μεθόδων

Για να λύσουμε την εξίσωση: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ $\alpha \neq 0$, με βάση τον Αναλυτικό – Γραφικό Τρόπο Επίλυση Εξισώσεων, κάνουμε τα εξής:

- **Γράφουμε την εξίσωση ως εξής: $\alpha x^2 = -\beta x - \gamma$**
- **Θεωρούμε τις συναρτήσεις:**
  $y = \alpha x^2$ (η γραφική της παράσταση είναι μια παραβολή) και
  $y = -\beta x - \gamma$ (η γραφική της παράσταση είναι μια ευθεία)
- **Κατασκευάζουμε τις γραφικές τους παραστάσεις και βρίσκουμε τα σημεία τομής τους (αν υπάρχουν)**
- **Οι τετμημένες των σημείων τομής είναι οι λύσεις της εξίσωσης.**

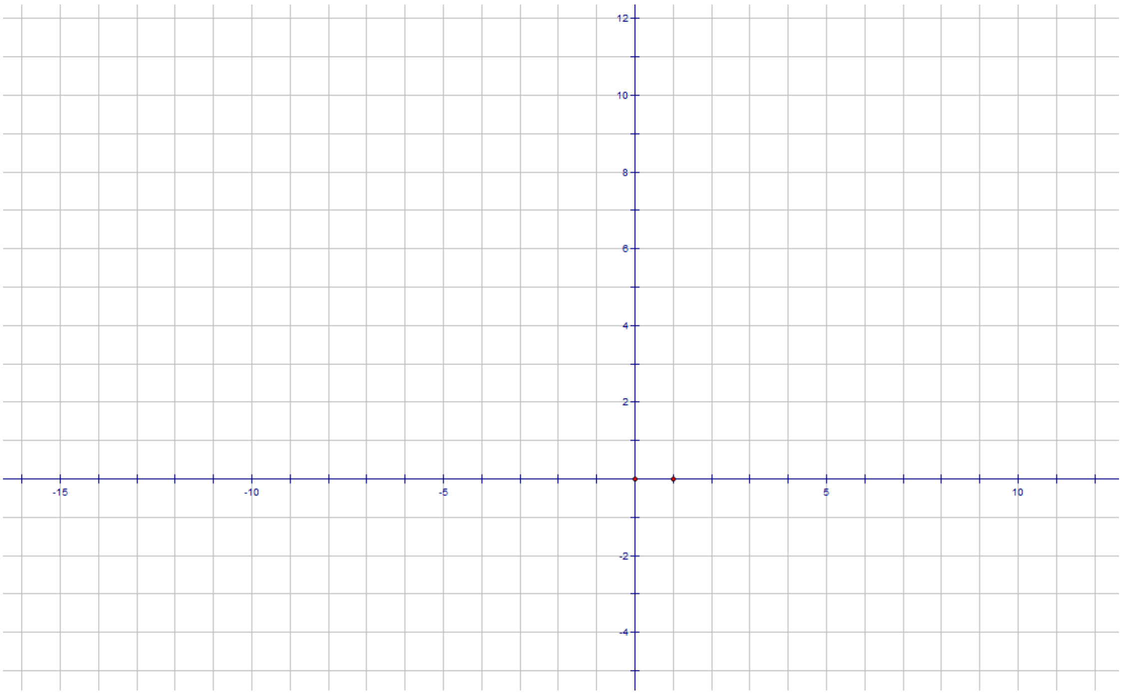
Ερώτηση 1

Με βάση τα παραπάνω να λύσετε γραφικά την εξίσωση: $x^2 – 3x + 2 = 0$

(Υπόψη: Για να κατασκευάσετε την παραβολή, αρκεί να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα χρησιμοποιώντας την συνάρτηση: $y = x^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

Για την ευθεία είναι γνωστό πως την κατασκευάζουμε. Η κατασκευή θα γίνει στο παρακάτω τετραγωνισμένο χαρτί)



Ερώτηση 2

Μπορείτε να διαπιστώσετε πόσα είναι τα σημεία τομής της παραβολής $y = αx^2$ με την ευθεία $y = –βx – γ$ ανάλογα με τις τιμές που παίρνει η διακρίνουσα $Δ = β^2 – 4αγ$ της εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0$ $α \neq 0$;

Έχουμε μάθει στα προηγούμενα μαθήματα να Επιλύουμε μία Εξίσωση 2ου Βαθμού με τους εξής τρόπους:

α) Άμεση Εφαρμογή της Τετραγωνικής Ρίζας, δηλαδή αν $x^2 = \alpha$ με $\alpha > 0$ τότε $x = \sqrt{\alpha}$ ή $x = -\sqrt{\alpha}$

β) Κοινός παράγοντας.

γ) Ανάπτυγμα Τετραγώνου.

δ) Διάσπαση όρου και μετά Ομαδοποίηση.

ε) Συμπλήρωση Τετραγώνου με τη μέθοδο των Βαβυλώνιων και των Αράβων.

στ) Συμπλήρωση Τετραγώνου με τη Γεωμετρική μέθοδο των Αράβων.

ζ) Συμπλήρωση Τετραγώνου με τη μέθοδο των Ινδών.

η) Άμεση εφαρμογή του Τύπου που προκύπτει από τη μέθοδο των Ινδών.

θ) Γραφικός Τρόπος.

Ερώτηση 3

Χρησιμοποιώντας έναν οποιονδήποτε από τους παραπάνω τρόπους, να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 = 7x$ β) $3x^2 = 12$ γ) $(2x+1)^2 = 4$ δ) $x(x + 4) = –4$

ε) $25x^2 – 10x + 1 = 0$ στ) $4y^2 + 3y – 1 = 0$ ζ) $3x^2 + 12x – 15 = 0$

η) $3κ^2 – 2(κ – 1) = 2κ + 1$ θ) $\frac{ω^2-1}{3}-\frac{ω+3}{5}=ω-2$

<u>Φ. Ε. 7</u>

Παραγοντοποίηση Τριωνύμου 2ου Βαθμού

Όταν εφαρμόζαμε τον Βαβυλωνιακό – Αραβικό τρόπο επίλυσης εξισώσεων 2ου βαθμού με τη μέθοδο της «συμπλήρωσης τετραγώνου» στην εξίσωση: $2x^2+16x-18=0$,

κάναμε τα εξής:

$2x^2+16x-18=0$ (:2) (Διαιρέσαμε όλου τους όρους της εξίσωσης με το 2)

$x^2 + 8x – 9 = 0$

$x^2 + 8x = 9$ (Μεταφέραμε το –9 στο άλλο μέρος και έγινε 9)

$x^2 + 8x + 4^2 = 4^2 +9$ (Κάναμε 8:2 = 4, το υψώσαμε στο τετράγωνο και το προσθέσαμε και στα δύο μέλη της εξίσωσης)

$(x + 4)^2 = 25$ (Εφαρμόσαμε την ταυτότητα «ανάπτυγμα τετραγώνου»)

(Υπολογίσαμε γεωμετρική και μη γεωμετρική λύση)

$x + 4 = \sqrt{25} = 5 \Leftrightarrow x = 5 – 4 = 1$

$x + 4 =–\sqrt{25} = –5 \Leftrightarrow x = –5 – 4 = –9$

Αν εφαρμόσουμε τα παραπάνω βήματα <u>όχι σε εξίσωση 2ου βαθμού</u> αλλά σε <u>τριώνυμο 2ου βαθμού</u> θα έχουμε τα εξής:

$2x^2+16x-18 =$

$2(x^2 + 8x – 9) =$ (Αντί για διαίρεση με το 2 – που δεν γίνεται εφόσον δεν έχουμε εξίσωση με δύο μέλη – κοινός

παράγοντας το 2)

$2(x^2 + 8x + 4^2 - 4^2 - 9) =$ (Κάνουμε προσθαφαίρεση του όρου 4^2 για τη συμπλήρωση τετραγώνου)

$2[(x + 4)^2 - 25] =$

$2[(x + 4)^2 - 5^2] =$ (Εφαρμόζουμε διαφορά τετραγώνων)

$2(x + 4 + 5)(x + 4 - 5) =$ $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$

$2(x + 9)(x - 1)$ (Παρατηρούμε ότι εμφανίστηκαν οι αντίθετες λύσεις, 9 και –1 της παραπάνω εξίσωσης)

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Αν δεν μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο 2ου βαθμού: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ κάνοντας διάσπαση και ομαδοποίηση, ή ανάπτυγμα τετραγώνου, όπως έχουμε μάθει, τότε με βάση τα παραπάνω μπορούμε να κάνουμε τα εξής:

Λύνουμε την εξίσωση: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ συνήθως με το γενικό τύπο και:

- **Αν $\Delta > 0$ και x_1 και x_2 οι λύσεις της τότε:**

  $\boxed{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)}$

- **Αν $\Delta = 0$ και x_0 η διπλή της λύση τότε:**

  $\boxed{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_0)^2}$

- **Αν $\Delta < 0$ καμία λύση και το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται**

Ερώτηση 1

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω συμπεράσματα, μπορείτε να παραγοντοποιήσετε τα εξής τριώνυμα 2ου βαθμού;

α) $\omega^2 + 4\omega - 12$ β) $3x^2 - 8x + 5$

γ) $-2y^2 + 5y - 3$ δ) $2\varphi^2 - 4\varphi + 2$

ε) $3\kappa^2 - 4\kappa + 2$ στ) $6x^2 - x - 2$

Ερώτηση 2

Μπορείτε να απλοποιήσετε την παράσταση: $\dfrac{4x^2 - 12x + 9}{2x^2 - 5x + 3}$;

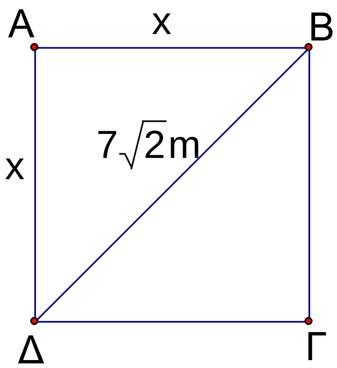
Φ. Ε. 8

Επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων 2ου βαθμού

Ερώτηση 1

Να λύσετε τα παρακάτω προβλήματα γεωμετρίας, με τη βοήθεια των εξισώσεων 2ου βαθμού:

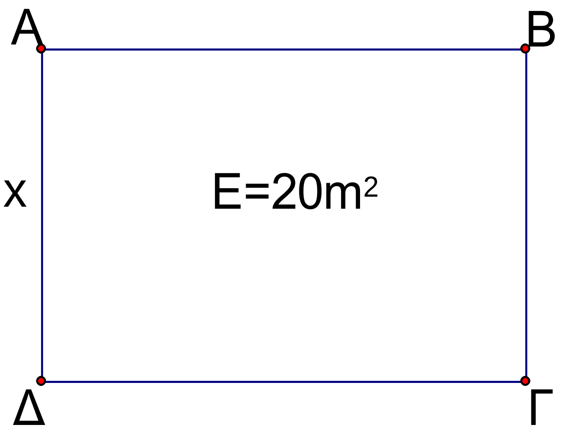
α) Στο παρακάτω τετράγωνο ΑΒΓΔ, δίνεται η διαγώνιος του $ΒΔ = 7\sqrt{2}$ m, να υπολογίσετε την πλευρά του Χ.



β) Το μήκος του παρακάτω ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι κατά 1m μεγαλύτερο από το πλάτος του και το εμβαδόν του $Ε = 20m^2$.

1) Αν συμβολίσουμε με Χ το πλάτος του, πως μπορούμε να συμβολίσουμε το μήκος του;

2) Μπορείτε να υπολογίσετε τις διαστάσεις του;



γ) Το εμβαδόν μιας πισίνας σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι $400m^2$ και οι διαστάσεις της (μήκος–πλάτος) έχουν άθροισμα 41m.

1) Αν συμβολίσουμε με Χ το μήκος της , πως μπορούμε να συμβολίσουμε σε σχέση με το Χ και το πλάτος της;

2) Μπορείτε να βρείτε τις διαστάσεις της;

δ) Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου έχει εμβαδόν $E = 150m^2$. Αν το πλάτος του είναι κατά 5m μικρότερο από το μήκος του, μπορείτε να βρείτε πόσα μέτρα συρματόπλεγμα θα χρειαστούμε για να το περιφράξουμε;

ε) Ένα τρίγωνο έχει πλευρές 4cm, 6cm και 8cm. Αν αυξήσουμε κατά X cm κάθε πλευρά του μετατρέπεται σε ορθογώνιο τρίγωνο.

1) Πως συμβολίζουμε τις νέες πλευρές του τριγώνου;

2) Μπορείτε να βρείτε το X;

Ερώτηση 2

Να λύσετε τα παρακάτω λεκτικά προβλήματα, με τη βοήθεια των εξισώσεων 2ου βαθμού:

Ζητάμε να βρούμε έναν θετικό ακέραιο αριθμό, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, ώστε:

α) Το μισό του τετραγώνου του, να είναι ίσο με το πενταπλάσιο του.

β) Το γινόμενο του με έναν αριθμό, που είναι κατά 3 μεγαλύτερος του, είναι 40.

γ) Το τριπλάσιο του τετραγώνου του, να είναι κατά 2 μικρότερο από το εφταπλάσιο του.

Ενότητα Β: Ερωτηματολόγιο Αξιολόγησης Διδακτικής Παρέμβασης

Κορίτσι ☐

Αγόρι ☐

Θα σας παρακαλούσα να σκεφτείτε τις παρακάτω δηλώσεις που ακολουθούν και να σημειώσετε αντίστοιχα τον βαθμό στον οποίο συμφωνείτε ή διαφωνείτε, χρησιμοποιώντας την κλίμακα που σας δίνεται. Δεν υπάρχουν σωστές ή λανθασμένες απαντήσεις. Το μόνο που χρειάζεται είναι να είστε ειλικρινείς.

Τις απαντήσεις σας θα τις στείλετε ατομικά. Μπορείτε αν θέλετε να χρησιμοποιήσετε κάποιον άλλον λογαριασμό ηλεκτρονικού ταχυδρομείου από αυτόν που ήδη χρησιμοποιείτε, για να εξασφαλίσετε την ανωνυμία σας.

1. **Διαφωνώ Απόλυτα (ΔΑ)**
2. **Διαφωνώ (Δ)**
3. **Ούτε Διαφωνώ ούτε Συμφωνώ (ΟΔΣ)**
4. **Συμφωνώ (Σ)**
5. **Συμφωνώ Απόλυτα (ΣΑ)**

Α. Σύγχρονη και Ασύγχρονη εξ' αποστάσεως εκπαίδευση	**ΔΑ 1**	**Δ 2**	**ΟΔΣ 3**	**Σ 4**	**ΣΑ 5**
Α.1 Ο τρόπος που έγιναν τα μαθήματα με την εξ' αποστάσεως διδασκαλία ήταν παρόμοιος με τη δια ζώσης διδασκαλία στην τάξη.					
Α.2 Συμμετείχα ενεργά σ' αυτή τη διαδικασία.					
Α.3 Το μάθημα γινόταν πιο κατανοητό γιατί δεν υπήρχε η σχετική φασαρία που γίνεται στην τάξη.					
Α.4 Μου ήταν πιο εύκολο να παρακολουθώ τα μαθήματα από το σπίτι, παρά να πηγαίνω στο σχολείο.					
Α.5 Είχα πρόβλημα με τη σύνδεση στο διαδίκτυο, με αποτέλεσμα να μην παρακολουθώ τα μαθήματα ή να χάνω μέρος των μαθημάτων.					
Α.6 Μπορούσα με την ίδια ευκολία που είχα στην τάξη, να θέτω ερωτήματα στον διδάσκοντα.					
Α.7 Μου έλλειψε η επαφή με τους συμμαθητές μου και με τους καθηγητές.					

Β. Συμμετοχή σε ομάδα (εξ' αποστάσεων) στην ενότητα των εξισώσεων 2ου βαθμού στο μάθημα των μαθηματικών (συμπληρώνεται μόνο από τους συμμετέχοντες σ' αυτές τις ομάδες)	**ΔΑ 1**	**Δ 2**	**ΟΔΣ 3**	**Σ 4**	**ΣΑ 5**
Β.1 Είχα ενεργό συμμετοχή στις διαδικασίες επίλυσης των φύλλων εργασίας μέσα στα πλαίσια της ομάδας.					
Β.2 Με βοήθησε να κατανοήσω καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες που διαπραγματευτήκαμε με την ομάδα μου μέσα από τα φύλλα εργασίας.					
Β.3 Η συνεργασία μου με τους συμμαθητές μου τόνωσαν την αυτοπεποίθηση μου για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.					

Β.4 Αντιμετωπίζω τα μαθηματικά με πιο θετικό τρόπο από ότι πριν.					
Β.5 Αντιμετώπισα προβλήματα με τους υπόλοιπους συμμαθητές της ομάδας μου, με αποτέλεσμα να έχω δυσκολίες στην κατανόηση των εννοιών που σχετίζονται με τις εξισώσεις 2ου βαθμού.					
Β.6 Θα προτιμούσα να δουλεύω μόνος μου τα φύλλα εργασίας πάρα να συνεργάζομαι με άλλους στα πλαίσια της ομάδας.					

Γ. Η Ιστορική αναδρομή στη διαδικασία εκμάθησης της εξίσωσης 2ου βαθμού	**ΔΑ 1**	**Δ 2**	**ΟΔΣ 3**	**Σ 4**	**ΣΑ 5**
Γ.1 Ο τρόπος που έγινε η παρουσίαση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, μέσω της ιστορίας των μαθηματικών και των ιστορικών προβλημάτων, μου έδωσε ένα κίνητρο για να ασχοληθώ περισσότερο.					
Γ.2 Η ιστορία της εξίσωσης 2ου βαθμού με βοήθησε να κατανοήσω καλύτερα τον τρόπο επίλυσης τέτοιων εξισώσεων.					
Γ.3 Μέσα από την ιστορική αναδρομή μπόρεσα να καταλάβω καλύτερα τον σημαντικό ρόλο που διαδραματίζουν οι εξισώσεις 2ου βαθμού σε πολλούς πολιτισμούς.					
Γ.4 Ο τρόπος που έγινε το μάθημα με βοήθησε να μπορώ να βρίσκω εύκολα το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης, είτε 1ου, είτε 2ου βαθμού.					
Γ.5 Η μέθοδος «Συμπλήρωση Τετραγώνου» σε όλες τις μορφές που είδαμε ιστορικά με βοήθησε να κατανοήσω τη διακρίνουσα Δ και τον γενικό τύπο επίλυσης εξισώσεων 2ου βαθμού.					
Γ.6 Η επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων έγινε πιο εύκολη μέσω της ανάδειξης των ιστορικών προβλημάτων και των αντίστοιχων λύσεων τους από τους διάφορους λαούς του παρελθόντος.					
Γ.7 Η ιστορική αναδρομή με βοήθησε να κατανοήσω το ρόλο των εξισώσεων στην επίλυση καθημερινών προβλημάτων.					

Δ. Η πολλαπλή Αναπαράσταση των εξισώσεων 2ου βαθμού και των λύσεων τους	**ΔΑ 1**	**Δ 2**	**ΟΔΣ 3**	**Σ 4**	**ΣΑ 5**
Δ.1 Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις (λεκτική, αριθμητική, αλγεβρική, γεωμετρική, γραφική) με βοήθησε να έχω μια πληρέστερη εικόνα των εξισώσεων 2ου βαθμού.					
Δ.2 Θα προτιμούσα να μάθαινα μόνο τον τύπο επίλυσης εξισώσεων 2ου βαθμού χωρίς να τον κατανοώ, παρά να μπλέξω με τους διάφορους τρόπους επίλυσης αυτών των εξισώσεων.					
Δ.3 Το μάθημα έγινε πιο κατανοητό γιατί μπορούσα να χρησιμοποιήσω πολλές μεθόδους για να επιλύσω τέτοιες εξισώσεις.					
Δ.4 Όλη αυτή η διαδικασία με κούρασε. Θα προτιμούσα να γνωρίζω μόνο έναν τρόπο και ας μην τον πολυκαταλαβαίνω.					
Δ.5 Μπόρεσα να κατανοήσω βαθύτερα τον σημαντικό ρόλο της παραγοντοποίησης στην επίλυση εξισώσεων.					

Ενότητα Γ: Η Διεθνής Ομάδα History & Pedagogy of Mathematics (HPM group)

Η ιδέα για το ρόλο που μπορεί να διαδραματίσει η ιστορία των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση, καθώς και αξιοποίηση της εμφανίζεται ήδη από το δεύτερο μισό του 19ου αιώνα όταν σπουδαίοι μαθηματικοί, όπως οι A. De Morgan, F. Klein, και H. Poincaré αναφέρονται σχετικά στο έργο τους. Όμως μια πιο συστηματική ανάπτυξη της ιδέας αυτής εμφανίζεται από τα τέλη της δεκαετίας του 1960 και εξής, όταν εφαρμογές της ιστορίας των μαθηματικών κάνουν την εμφάνιση τους με διάφορους τρόπους, έτσι ώστε τα τελευταία 50 χρόνια περίπου να διαμορφωθεί σταδιακά ένας ενεργός ερευνητικός κλάδος της μαθηματικής εκπαίδευσης που πήρε συγκεκριμένη μορφή με την ίδρυση και ανάπτυξη της International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics**,** της γνωστής ως ομάδας **HPM**, με δημοσιεύσεις ερευνητικών άρθρων, διοργάνωση σχετικών συνεδρίων, έκδοση συλλογικών τόμων, έκδοση έντυπων και ηλεκτρονικών περιοδικών, παραγωγή διδακτικού υλικού, κλπ. (Κούρκουλος & Τζανάκης, σελ. 7)

Η ομάδα HPM είναι διεθνής ομάδα μελέτης των σχέσεων μεταξύ ιστορίας των μαθηματικών και μαθηματικής εκπαίδευσης. Τελεί υπό την αιγίδα της International Commission on Mathematical Instruction **(ICMI)**, της διεθνής επιτροπής που ιδρύθηκε το 1908 με πρώτο πρόεδρο τον **F. Klein** και είναι μία από τις δύο βασικότερες ομάδες μελέτης για τη μαθηματική εκπαίδευση. Αφετηρία υπήρξε μια ομάδα εργασίας στο 2ο διεθνές συνέδριο για τη μαθηματική εκπαίδευση **(ICME)**, που έλαβε χώρα στο Exeter της Μ. Βρετανίας το 1972. Περιλαμβάνει ερευνητές των μαθηματικών, καθαρούς μαθηματικούς, ιστορικούς των μαθηματικών και σχεδιαστές αναλυτικών προγραμμάτων. Βασικοί της στόχοι είναι:

- Ανάπτυξη διεθνών επαφών και ανταλλαγή πληροφοριών σχετικά με:
  - μαθήματα ιστορίας των μαθηματικών σε πανεπιστήμια και σχολεία,
  - διεύρυνση της σημασίας της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση,
  - απόψεις για τις σχέσης ιστορίας και μαθηματικής εκπαίδευσης σε όλες τις βαθμίδες,

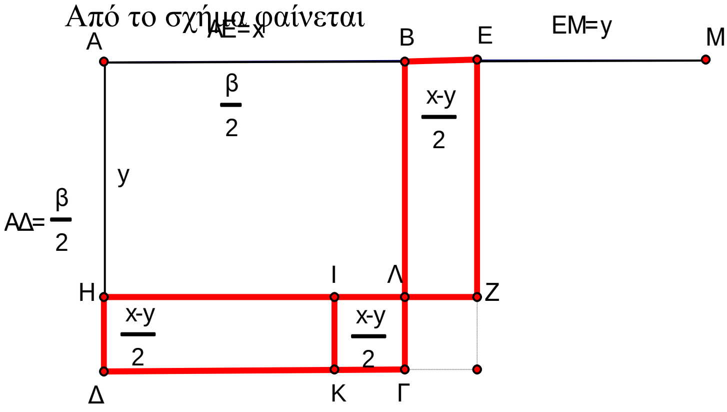
μέσω συνεργασιών με άλλες ομάδες, ινστιτούτα και οργανισμούς από διάφορα μέρη του κόσμου με τις ίδιες ανησυχίες και προβληματισμούς, που αφορούν το μέλλον της μαθηματικής εκπαίδευσης.

- Προώθηση διεπιστημονικών επαφών μεταξύ μαθηματικών, ιστορικών των μαθηματικών, κοινωνικών επιστημών κ.λ.π.
- Βαθύτερη κατανόηση της εξέλιξης των μαθηματικών.
- Σύνδεση της διδασκαλίας με την ιστορία των μαθηματικών, για τη βελτίωση της και για την ανάπτυξη κατάλληλων αναλυτικών προγραμμάτων.
- Παραγωγή κατάλληλου διδακτικού υλικού ώστε να χρησιμοποιηθεί από τους εκπαιδευτικούς, με σκοπό την ανάπτυξη κριτικού διαλόγου για τη διδασκαλία των μαθηματικών.
- Ελεύθερη πρόσβαση των εκπαιδευτικών στο σχετικό υλικό.
- Υποστήριξη των εκπαιδευτικών στο να συνειδητοποιήσουν τη σπουδαιότητα της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία.
- Συνειδητοποίηση ότι η ιστορία των μαθηματικών αποτελεί μέρος της εξέλιξης των διάφορων πολιτισμικών παραδόσεων (Τζανάκης 2006).

Ενότητα Δ: Ιστορικά Στοιχεία Σχετικά με τη Δευτεροβάθμια Εξίσωση

Πιθανή γεωμετρική λύση των Βαβυλωνίων του συστήματος: $x+y=\beta$ και $xy=\gamma$

Από το σχήμα φαίνεται



ότι (ΑΒΓΔ)=(ΑΕΖΗ)+(ΙΚΓΛ)

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = \gamma + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

$$\frac{x-y}{2} = \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma} \quad (1)$$

Όμως με βάση το σχήμα: $\dfrac{\beta}{2} = x - \dfrac{x-y}{2} = y + \dfrac{x-y}{2}$

$$\text{Δηλαδή: } x = \frac{\beta}{2} + \frac{x-y}{2} \overset{(1)}{=} \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma}$$

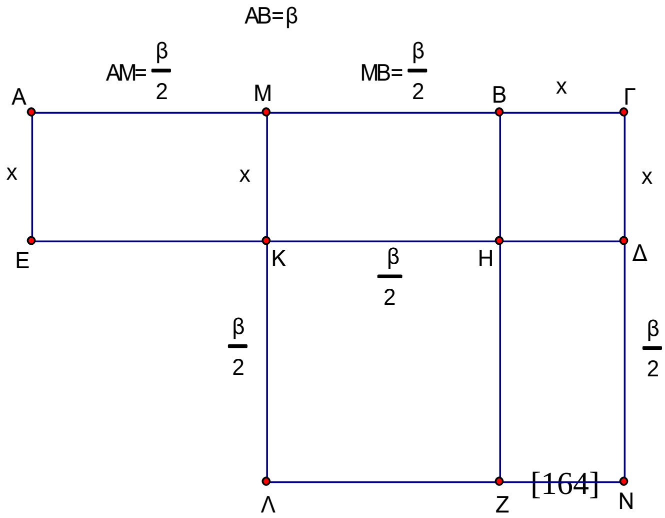
$$\text{και: } y = \frac{\beta}{2} - \frac{x-y}{2} \overset{(1)}{=} \frac{\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma}$$

Παρόμοιες γεωμετρικές ερμηνείες μπορούν να δοθούν και για άλλες κατηγορίες δευτεροβάθμιων προβλημάτων όπως το σύστημα: $x-y=\beta$ και $x^2+y^2=\gamma$.

Από τα *στοιχεία* του Ευκλείδη

Η παρακάτω πρόταση αποτελεί λύση της εξίσωσης: $(\beta+x)x=\gamma$ ή $x^2+\beta x=\gamma$

<u>Πρόταση ΙΙ-6</u> *«Εάν διχοτομήσουμε ευθεία και προσθέσουμε σ' αυτήν ευθεία, το ορθογώνιο που ορίζεται από όλο (μαζί με την ευθεία που προσθέσαμε) και την ευθεία που προσθέσαμε, μαζί με το τετράγωνο του μισού, ισούται με το τετράγωνο της ευθείας που αποτελείται από το μισό και την ευθεία που προσθέσαμε».*



Σύμφωνα με την πρόταση το ευθύγραμμο τμήμα $AB=\beta$, χωρίζεται σε δύο ίσα τμήμα $AM=MB=\dfrac{\beta}{2}$. Προεκτείνουμε το ΑΒ κατά τμήμα $B\Gamma = x$ Τότε ισχύει

$(\text{ΑΓΔΕ})+(\text{ΚΗΖΛ})=(\text{ΜΓΝΛ})$

(Σχ. 5) $\quad \text{ΑΓ}\cdot\text{ΒΓ}+\text{ΑΜ}^2=\text{ΜΓ}^2 \quad (3)$

$$(\beta+x)x+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2=\left(\frac{\beta}{2}+x\right)^2 \quad (4)$$

Πράγματι:

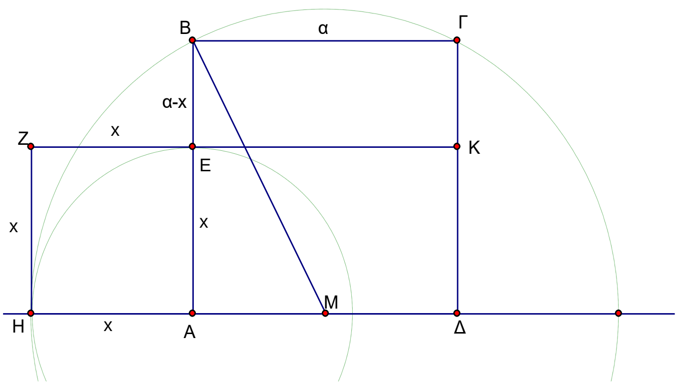
$(\text{ΑΓΔΕ})+(\text{ΚΗΖΛ})=(\text{ΑΜΚΕ})+(\text{ΜΓΔΚ})+(\text{ΚΗΖΛ})=(\text{ΗΔΝΖ})+(\text{ΜΓΔΚ})+(\text{ΚΗΖΛ})=(\text{ΜΓΝΛ})$

Εφόσον $(\text{ΑΜΚΕ})=(\text{ΗΔΝΖ})$(έχουν ίσες διαστάσεις $\text{ΑΜ}=\text{ΔΝ}=\frac{\beta}{2}$ και $\text{ΑΕ}=\text{ΖΝ}=x$.

Επομένως αν $(\beta+x)x=\gamma$ τότε από την (4) θα έχουμε $\gamma+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2=\left(\frac{\beta}{2}+x\right)^2$ και άρα $\frac{\beta}{2}+x=\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\gamma}\Leftrightarrow x=-\frac{\beta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\gamma}$. Ο τύπος που χρησιμοποιείται και σήμερα.

στο Βαβυλωνιακό σύστημα $y-x=\beta$ και $xy=\gamma$.

Πρόταση ΙΙ-11 *«Να χωρισθεί ευθεία σε δύο μέρη, ώστε το ορθογώνιο που ορίζεται από την ευθεία και το ένα μέρος να ισούται με το τετράγωνο με πλευρά το άλλο μέρος».*



Σύμφωνα με τη πρόταση το ευθύγραμμο τμήμα $\text{ΑΒ}=\alpha$ πρέπει να χωριστεί σε δύο τμήματα, το $\text{ΑΕ}=x$ και το $\text{ΒΕ}=\alpha-x$, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου που ορίζουν τα τμήματα α και $\alpha-x$ να είναι

(Σχ. 6)

ίσο με το τετράγωνο πλευράς x Δηλαδή $(\text{ΒΓΚΕ})=(\text{ΖΕΑΗ})$

$$\alpha(\alpha-x)=x^2 \text{ ή } x(x+\alpha)=\alpha^2 \quad (5)$$

Ο Ευκλείδης κατασκευάζει το τμήμα $\text{ΑΕ}=x$, ως εξής:

Κατασκευάζει τετράγωνο $ΑΒΓΔ$. Θεωρεί το μέσο $Μ$ της $ΑΔ$ και κατασκευάζει το ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΜ$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $\mathrm{BM}^2 = \alpha^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \mathrm{BM} = \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} \Leftrightarrow \mathrm{BM} = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$.

Με κέντρο $Μ$ και ακτίνα $ΜΒ$ κατασκευάζει κύκλο, ώστε να «μεταφέρει» το τμήμα αυτό στην $ΑΔ$. Συγχρόνως δημιουργείται το τμήμα $x = \mathrm{AH} = \mathrm{MH} - \mathrm{AM} = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2} - \frac{\alpha}{2}$ που είναι και το ζητούμενο. Με τη κατασκευή του κύκλου με κέντρο το $Α$ και ακτίνα την $ΑΗ$ «μεταφέρει» το τμήμα αυτό στο $ΑΒ$ ώστε να ολοκληρωθεί η κατασκευή.

Κατόπιν ο Ευκλείδης για να αιτιολογήσει την ορθότητα της επιλογής του σημείου Ε χρησιμοποιεί την προηγούμενη πρόταση ΙΙ-6, που είναι όπως βλέπουμε ειδική περίπτωση της, για $\beta = \gamma = \alpha$

Στο ίδιο αποτέλεσμα βέβαια καταλήγουμε αν μετασχηματίσουμε την (5) σε $x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0$ και εφαρμόσουμε το σημερινό τύπο.

Πράγματι: $x = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2} - \frac{\alpha}{2}$, αποτέλεσμα που κατέληγαν και οι Βαβυλώνιοι.

Από τα προβλήματα του Διόφαντου

Πρόβλημα Ι-28 *«Να βρεθούν δύο αριθμοί τέτοιοι ώστε το άθροισμα τους και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι δοθέντες αριθμοί».*

(Περιορισμός: Πρέπει το διπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων των δύο αριθμών να υπερέχει του τετραγώνου του αθροίσματος αυτών κατά τετράγωνο)

(Ο Διόφαντος το λύνει με άθροισμα β =20 και άθροισμα τετραγώνων γ =208)

Με το ίδιο σκεπτικό, θεωρεί ότι οι αριθμοί είναι οι $x = 10 - z$ και $y = 10 + z$ οπότε:

$$(10 - z)^2 + (10 + z)^2 = 208 \Leftrightarrow 100 - 20z + z^2 + 100 + 20z + z^2 = 208$$

$2z^2 = 8 \Leftrightarrow z^2 = 4 \Leftrightarrow z = 2$. Άρα οι αριθμοί που ψάχνει είναι οι $x = 8$ και $y = 12$.

Στη γενική μορφή που είναι $x + y = \beta$ και $x^2 + y^2 = \gamma$,

έχουμε $x = \frac{\beta}{2} - z$ και $y = \frac{\beta}{2} + z$, οπότε:

$$\left(\frac{\beta}{2} - z\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2} + z\right)^2 = \gamma \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - 2\frac{\beta}{2}z + z^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + 2\frac{\beta}{2}z + z^2 = \gamma$$

$$2z^2 = \gamma - \frac{\beta^2}{2} \Leftrightarrow 4z^2 = 2\gamma - \beta^2$$ (ο περιορισμός που λειτουργεί ως διερεύνηση)

$z = \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2}$. Άρα $x = \frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2}$ και $y = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2}$

<u>Πρόβλημα ΙΙ-8</u> *«Δοθείς τετράγωνος αριθμός να διασπαστεί σε δύο τετράγωνα».*

Έστω ότι ο δοθείς τετράγωνος αριθμός είναι ο 16 ο οποίος ζητείται να διασπαστεί σε δύο τετράγωνους αριθμούς.

Αν ο πρώτος είναι ο x^2, τότε ο άλλος θα είναι ο $16 - x^2$, ο οποίος θα πρέπει να είναι και αυτός τετράγωνος.

Παίρνω ένα τετράγωνο της μορφής: $(\alpha x - 4)^2$. Το α είναι ένας ακέραιος, για παράδειγμα $\alpha = 2$ και ο 4 είναι η ρίζα του 16. Οπότε $(2x-4)^2 = 4x^2 - 16x + 16$.

Τότε $4x^2 - 16x + 16 = 16 - x^2$.

Προσθέτουμε και στις δυο πλευρές τους αρνητικούς όρους και αφαιρούμε τα όμοια από τα όμοια.

Τότε $5x^2 = 16x$ και $x = \frac{16}{5}$. Επομένως ο ένας είναι ο $\frac{256}{25}$ και ο άλλος ο $\frac{144}{25}$.

Πράγματι έχουν άθροισμα $\frac{400}{25} = 16$ και είναι τετράγωνοι αριθμοί και οι δύο.

Παρατηρούμε ότι αυτό είναι ένα πρόβλημα με άπειρες λύσεις της μορφής: $x^2 + y^2 = 16$. Για να είναι σίγουρος ότι η λύση θα είναι ρητή επιλέγει το τετράγωνο του να είναι της μορφής $(\alpha x \pm \beta)^2$ με τα α και β τέτοια ώστε ο δευτεροβάθμιος ή ο σταθερός όρος να απαλείφεται από την εξίσωση.

Στη γενική μορφή έχουμε: $x^2 + y^2 = \beta^2$ (6)

Θέτουμε $y = \alpha x - \beta$ (7). Οπότε από τις (6) και (7) παίρνουμε:

$$\beta^2 - x^2 = (\alpha x - \beta)^2 \Leftrightarrow \beta^2 - x^2 = \alpha^2 x^2 - 2\alpha\beta x + \beta^2 \Leftrightarrow 2\alpha\beta x = x^2\left(\alpha^2 + 1\right).$$

Επομένως $x = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + 1}$

Μέθοδος επίλυσης από τον Ινδό Sridhara (1025 μ.Χ)

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \qquad \alpha \neq 0$

$\alpha x^2 + \beta x = -\gamma$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με 4α και ύστερα προσθέτουμε το β^2 και στα δύο μέλη, για να προκύψει ένα «τέλειο τετράγωνο» στο αριστερό μέλος. Δηλαδή:

$4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x = -4\alpha\gamma$

$4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2 = -4\alpha\gamma+\beta^2$

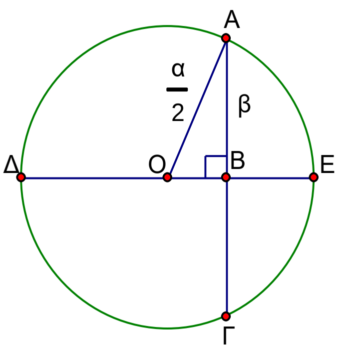
$(2\alpha x+\beta)^2 = \beta^2-4\alpha\gamma$

$2\alpha x+\beta = \pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$ εφόσον $\beta^2-4\alpha\gamma \geq 0$

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Μέθοδος επίλυσης από τον R. Descartes (1596 – 1650)

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση: $x^2=\alpha x-\beta^2$



Λύση – Κατασκευή

Κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ με $\mathrm{OA}=\frac{\alpha}{2}$ και $\mathrm{AB}=\beta$. Κατόπιν με κέντρο Ο και ακτίνα $\frac{\alpha}{2}$ κατασκευάζουμε κύκλο. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ και ΟΒ του τριγώνου, που τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Γ και Δ, Ε αντίστοιχα.

Τα τμήματα ΒΕ και ΒΔ είναι οι λύσεις της εξίσωσης γιατί:

$\mathrm{BE}\cdot\mathrm{B}\Delta=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{B}\Gamma \Leftrightarrow \mathrm{BE}\cdot\mathrm{B}\Delta=\mathrm{AB}^2$ (1) (ΑΒ=ΒΓ γιατί στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΓ, ΟΒ ύψος, άρα και διάμεσος).

Οπότε το ΒΕ είναι λύση διότι από την (1) έχουμε $x(\alpha-x)=\beta^2 \Leftrightarrow x^2=\alpha x-\beta^2$,

είναι όμως και το ΒΔ διότι ξανά από την (1) έχουμε $(\alpha-x)x=\beta^2 \Leftrightarrow x^2=\alpha x-\beta^2$

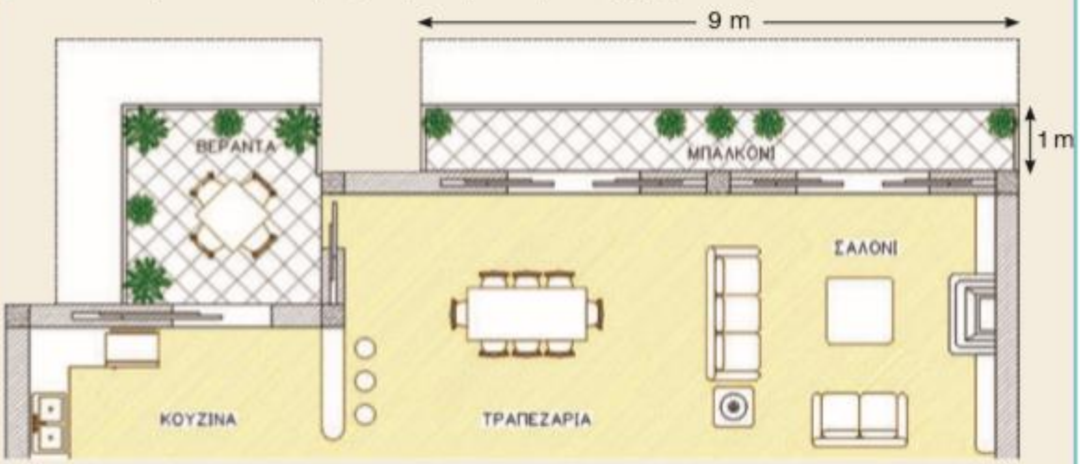
Άρα $x=\mathrm{BE}=\mathrm{OE}-\mathrm{OB}=\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2-\beta^2}$ ή $x=\mathrm{B}\Delta=\mathrm{O}\Delta+\mathrm{OB}=\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2-\beta^2}$.

Δραστηριότητα σχολικού βιβλίου σελ. 89

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας μηχανικός σχεδίασε μια οικοδομή και στην πρόσοψή της προέβλεψε την κατασκευή μιας τετραγωνικής βεράντας και ενός ορθογωνίου μπαλκονιού με διαστάσεις 9 m και 1 m. Στο σχέδιο που παρουσίασε στον ιδιοκτήτη της οικοδομής η βεράντα και το μπαλκόνι είχαν το ίδιο εμβαδόν.

α) Να υπολογίσετε πόσα μέτρα ήταν η πλευρά της βεράντας.



Ο ιδιοκτήτης όμως, θεώρησε στενό το μπαλκόνι και ζήτησε από το μηχανικό να αυξήσει το πλάτος του μπαλκονιού και κάθε πλευρά της βεράντας κατά τα ίδια μέτρα, ώστε να έχουν και πάλι το ίδιο εμβαδόν.

β) Να υπολογίσετε πόσα μέτρα έπρεπε να αυξηθεί το πλάτος του μπαλκονιού και κάθε πλευρά της βεράντας.

Με το αίτημα όμως του ιδιοκτήτη, το συνολικό εμβαδόν της βεράντας και του μπαλκονιού ξεπερνούσε το όριο που καθορίζεται από τον πολεοδομικό κανονισμό. Τελικά, αποφασίστηκε να μεγαλώσει η βεράντα και το μπαλκόνι, όπως το ζήτησε ο ιδιοκτήτης, με την προϋπόθεση όμως να μην έχουν πια το ίδιο εμβαδόν, αλλά να καλύπτουν συνολικά 34 m^2.

γ) Να υπολογίσετε πόσα μέτρα αυξήθηκε τελικά το πλάτος του μπαλκονιού και κάθε πλευρά της βεράντας.

Τρόπος επίλυσης εξισώσεων 2ου βαθμού διαφόρων μορφών (σχολικό βιβλίο σελ. 90, 91, 94)

Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυσή τους οδηγεί σε εξίσωση μ' έναν άγνωστο και στην οποία ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι ο αριθμός 2.

$x^2 = 9$,
$x^2 - 3x = 0$,
$x^2 + 15x - 16 = 0$

Σε καθεμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις λέμε ότι έχουμε **εξίσωση 2ου βαθμού με έναν άγνωστο (δευτεροβάθμια εξίσωση)**.

Σύμφωνα και με τα προηγούμενα παραδείγματα δεχόμαστε ότι η γενική μορφή μιας εξίσωσης 2ου βαθμού με άγνωστο x είναι

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad \text{με} \quad \alpha \neq 0$$

Οι αριθμοί α, β, γ λέγονται **συντελεστές** της εξίσωσης. Ο συντελεστής γ λέγεται και **σταθερός όρος**. Οι συντελεστές σε καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις είναι:

$x^2 - 9 = 0$:	$\alpha = 1$	$\beta = 0$	$\gamma = -9$
$x^2 - 3x = 0$:	$\alpha = 1$	$\beta = -3$	$\gamma = 0$
$x^2 + 15x - 16 = 0$:	$\alpha = 1$	$\beta = 15$	$\gamma = -16$

Κάθε αριθμός που επαληθεύει μια εξίσωση δευτέρου βαθμού λέγεται λύση ή ρίζα της εξίσωσης.

A Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

Θυμόμαστε ότι: **Αν $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$**

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $\alpha x^2 + \beta x = 0$ με $\alpha \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 = 3x$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α′ μέλος.
- Αναλύουμε το α′ μέλος σε γινόμενο παραγόντων.
- Το γινόμενο $x(x-3)$ είναι ίσο με το μηδέν, μόνο όταν $x = 0$ ή $x - 3 = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 &= 3x \\ x^2 - 3x &= 0 \\ x(x-3) &= 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ ή $x - 3 = 0$

$x = 0$ ή $x = 3$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 0$ και $x = 3$

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $\alpha x^2 + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 - 9 = 0$, εργαζόμαστε ως εξής:

1ος τρόπος:
- Το α′ μέλος της εξίσωσης είναι διαφορά τετραγώνων και το β′ μέλος είναι μηδέν.
- Αναλύουμε το α′ μέλος σε γινόμενο παραγόντων.
- Το γινόμενο $(x-3)(x+3)$ είναι ίσο με το μηδέν, μόνο όταν $x - 3 = 0$ ή $x + 3 = 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= 0 \\ x^2 - 3^2 &= 0 \\ (x-3)(x+3) &= 0 \end{aligned}$$

$x - 3 = 0$ ή $x + 3 = 0$

$x = 3$ ή $x = -3$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 3$ και $x = -3$

2ος τρόπος:

- Όταν α είναι θετικός αριθμός, η εξίσωση $x^2 = α$ έχει δύο λύσεις, τις $x = \sqrt{α}$ και $x = -\sqrt{α}$

$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \sqrt{9} \text{ ή } x = -\sqrt{9}$$
$$x = 3 \text{ ή } x = -3$$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 16 = 0$, αν εργαστούμε όπως προηγουμένως, παρατηρούμε ότι αυτή γράφεται $x^2 = -16$. Η εξίσωση αυτή δεν έχει λύση (αδύνατη), γιατί το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός ή μηδέν και δεν είναι δυνατόν να είναι ίσο με –16.

Αν α είναι αρνητικός αριθμός, τότε η εξίσωση $x^2 = α$ δεν έχει λύση (αδύνατη)

Η εξίσωση $x^2 = 0$ έχει λύση την $x = 0$. Η λύση αυτή λέγεται **διπλή**, γιατί η εξίσωση $x^2=0$ γράφεται $x \cdot x = 0$, οπότε $x = 0$ ή $x = 0$ (δηλαδή έχει δύο φορές την ίδια λύση).

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $9x^2 - 6x + 1 = 0$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι ανάπτυγμα τετραγώνου σύμφωνα με την ταυτότητα $α^2 - 2αβ + β^2 = (α - β)^2$
- Το $(3x - 1)^2$ είναι ίσο με το μηδέν, μόνο όταν $3x - 1 = 0$

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$
$$(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 = 0$$
$$(3x - 1)^2 = 0$$
$$3x - 1 = 0 \text{ ή } x = \frac{1}{3}$$

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, την $x = \frac{1}{3}$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$ σχηματίζουμε στο α′ μέλος ανάπτυγμα τετραγώνου εργαζόμενοι ως εξής:

- Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με 4α, όπου α ο συντελεστής του x^2.
- Μεταφέρουμε στο β′ μέλος τον σταθερό όρο και στο α′ μέλος δημιουργούμε παράσταση της μορφής $α^2 + 2αβ$ ή $α^2 - 2αβ$.
- Για να συμπληρωθεί το ανάπτυγμα τετραγώνου προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $β^2$.
- Χρησιμοποιούμε μία από τις ταυτότητες
  $α^2 + 2αβ + β^2 = (α + β)^2$
  $α^2 - 2αβ + β^2 = (α - β)^2$

$$x^2 + 15x - 16 = 0$$
$$4x^2 + 60x - 64 = 0$$
$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 15 = 64$$
$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 15 + 15^2 = 64 + 15^2$$
$$(2x + 15)^2 = 289$$
$$2x + 15 = \sqrt{289} \text{ ή } 2x + 15 = -\sqrt{289}$$
$$2x + 15 = 17 \text{ ή } 2x + 15 = -17$$
$$2x = 2 \text{ ή } 2x = -32$$
$$x = 1 \text{ ή } x = -16$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 1$ και $x = -16$

Η μέθοδος με την οποία λύσαμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$ είναι γνωστή ως **μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου**.

B Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου

Στην προηγούμενη ενότητα εφαρμόσαμε τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$. Τη μέθοδο αυτή μπορούμε να την εφαρμόσουμε και για να λύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού στη γενική της μορφή, $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$. Έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

- Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με 4α.

$$4\alpha \cdot \alpha x^2 + 4\alpha \cdot \beta x + 4\alpha \cdot \gamma = 0$$

- Μεταφέρουμε το σταθερό όρο στο β′ μέλος.

$$4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x = -4\alpha\gamma$$

- Στο α′ μέλος έχουμε δύο όρους του αναπτύγματος $(2\alpha x + \beta)^2$. Για να συμπληρώσουμε το τετράγωνο του $2\alpha x + \beta$ προσθέτουμε και στα δύο μέλη το β^2.

$$(2\alpha x)^2 + 2 \cdot 2\alpha x \cdot \beta = -4\alpha\gamma$$
$$(2\alpha x)^2 + 2 \cdot 2\alpha x \cdot \beta + \beta^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$
$$(2\alpha x + \beta)^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

Αν συμβολίσουμε την παράσταση $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ με το γράμμα Δ, τότε η εξίσωση γράφεται $(2\alpha x + \beta)^2 = \Delta$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\Delta > 0$, τότε έχουμε:

$$2\alpha x + \beta = \pm\sqrt{\Delta}$$
$$2\alpha x = -\beta \pm \sqrt{\Delta}$$
$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Άρα η εξίσωση έχει **δύο άνισες λύσεις**, τις $x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

- Αν $\Delta = 0$, τότε έχουμε:

$$(2\alpha x + \beta)^2 = 0$$
$$2\alpha x + \beta = 0$$
$$2\alpha x = -\beta$$
$$x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

Άρα η εξίσωση έχει **μία διπλή λύση**, τη $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

- Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση **δεν έχει λύση** (αδύνατη).

Η παράσταση $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, όπως είδαμε, παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, γιατί μας επιτρέπει να διακρίνουμε το πλήθος των λύσεών της. Γι' αυτό λέγεται **διακρίνουσα** και συμβολίζεται με το γράμμα Δ, δηλαδή

$$\boxed{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$.

- Αν $\Delta > 0$, έχει **δύο άνισες λύσεις** τις $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν $\Delta = 0$, έχει **μία διπλή λύση** την $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
- Αν $\Delta < 0$, **δεν έχει λύση** (αδύνατη).

Οι Βαβυλώνιοι και η επίλυση της εξίσωσης 2ου βαθμού (βιβλίο καθηγητή σελ. 45)

Εξισώσεις – Ανισώσεις 45

Με σύγχρονο συμβολισμό, αν εφαρμόσουμε τα βήματα των Βαβυλωνίων για την επίλυση της εξίσωσης $x^2 - βx = γ$, θα οδηγηθούμε στον τύπο $\frac{β + \sqrt{β^2+4γ}}{2}$ (στα βαβυλωνιακά κείμενα δεν υπάρχει πουθενά καταγεγραμμένος ένας τέτοιος τύπος).

1° βήμα: Πάρε το $\frac{β}{2}$

2° βήμα: Πολλαπλασίασέ το με τον εαυτό του $\frac{β}{2} \cdot \frac{β}{2} = \frac{β^2}{4}$

3° βήμα: Πρόσθεσε στο αποτέλεσμα το σταθερό αριθμό γ $\left(\frac{β^2}{4} + γ\right)$ και υπολόγισε την τετραγωνική του ρίζα (Οι Βαβυλώνιοι έβρισκαν τις τετραγωνικές ρίζες είτε από πίνακες τετραγώνων αριθμών είτε προσεγγιστικά).

4° βήμα: Για να βρεις το ζητούμενο πρόσθεσε στο αποτέλεσμα το $\frac{β}{2}$

$$\frac{β}{2} + \sqrt{\frac{β^2}{4} + γ} = \frac{β + \sqrt{β^2+4γ}}{2}$$

Π.χ. για τη λύση της εξίσωσης $x^2 + x = \frac{3}{4}$ οι αριθμοί που προέκυπταν σύμφωνα με τα προηγούμενα βήματα ήταν $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$, $= 1$, $\sqrt{1} = 1$ και επομένως η τιμή του x είναι $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Για την εξίσωση $x^2 + βx = γ$ ακολουθούσαν τα ίδια βήματα με τη διαφορά ότι στο 4ο βήμα αφαιρούσαν το $\frac{β}{2}$. Έτσι κατέληγαν στον τύπο $\sqrt{\frac{β^2}{4} + γ} - \frac{β}{2} = \frac{-β + \sqrt{β^2+4γ}}{2}$

(Οι Βαβυλώνιοι καθώς και όλοι οι αρχαίοι λαοί δε χρησιμοποιούσαν αρνητικούς αριθμούς).

Οι Βαβυλώνιοι μπορούσαν να επιλύουν δευτεροβάθμιες εξισώσεις στις οποίες ο συντελεστής του x^2 δεν ήταν 1. Για παράδειγμα, για να λύσουν την εξίσωση $7x^2 + 6x = 1$, η οποία αναγράφεται σε μια άλλη πλάκα, πολλαπλασίαζαν και τα δύο μέλη της με το 7, οπότε η εξίσωση έπαιρνε την μορφή $(7x)^2 + 6 \cdot (7x) = 7$. Τότε θεωρούσαν νέο άγνωστο τον $y = 7x$ και λύνοντας την εξίσωση $y^2 + 6y = 7$ έβρισκαν $y = 1$, οπότε η λύση της αρχικής εξίσωσης είναι $x = \frac{1}{7}$.

Δεν την έλυναν διαιρώντας και τα δυο μέλη της με το 7, γιατί τότε θα είχαν τα κλάσματα $\frac{6}{7}$, $\frac{1}{7}$ των οποίων η εξηνταδική τους παράσταση είναι αριθμός μη τερματιζόμενος. (Οι Βαβυλώνιοι ως γνωστόν χρησιμοποιούσαν εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης).

Σημείωση: *Είναι γνωστό ότι οι αρχαίοι Έλληνες έλυναν τις εξισώσεις 2ου και 3ου βαθμού γεωμετρικά όχι μόνο βρίσκοντας τις ρίζες τους αλλά και κατασκευάζοντάς τες.*