ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Α’ ΗΛΙΚΙΑΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Διπλωματική εργασία

«Κατανόηση και αναπαράσταση αρνητικών αριθμών στη Δ’ και Ε΄ Δημοτικού»

της

Σταυροπούλου Άννας

Α.Ε.Μ. 1030

Επιβλέπων Καθηγητής: Παπαδόπουλος Ιωάννης, Αναπληρωτής Καθηγητής, ΠΤΔΕ, Α.Π.Θ.

Εξεταστές: Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής, ΠΤΔΕ, ΠΔΜ

Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής, ΠΤΔΕ, ΠΔΜ

Θεσσαλονίκη, Νοέμβριος 2023

Περιεχόμενα

Περίληψη

Σύμφωνα με το νέο Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης, που εκδόθηκε το 2021, η διδασκαλία των αρνητικών αριθμών εισάγεται στην Ε’ Δημοτικού. Κύρια επιδίωξη είναι η συγκρότηση ισχυρής και σταθερής εννοιολογικής βάσης που θα αποτελέσει θεμέλιο για την Άλγεβρα, που διδάσκεται συστηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Στόχος της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση του τρόπου που νοηματοδοτούν και συμβολίζουν τους αρνητικούς αριθμούς οι μαθητές/τριες των τελευταίων τάξεων του Δημοτικού. Παράλληλα, διερευνάται η ηλικιακή καταλληλότητα και τα αποτελέσματα της εισαγωγής των αρνητικών αριθμών μέσω του διδακτικού περιβάλλοντος «Βήματα» (Steps). Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 71 μαθητές/τριες της Δ’ και της Ε’ τάξης Δημοτικού σχολείου. Η μέθοδος που επιλέχθηκε ως καταλληλότερη για την κατανόηση και την ερμηνεία των αντιλήψεων των μαθητών/τριών είναι η ποιοτική προσέγγιση. Χορηγήθηκαν τέσσερα φύλλα εργασίας, τα οποία αναλύθηκαν σε δύο επίπεδα. Στο πρώτο επίπεδο η ανάλυση αφορούσε τους υπολογισμούς και στο δεύτερο την ερμηνεία των αναπαραστάσεων και των χαρακτηριστικών λαθών των υπολογισμών. Γενικά, τα αποτελέσματα της έρευνας συμβαδίζουν με τα ευρήματα των ερευνών της βιβλιογραφίας που μελετήθηκαν και ενισχύουν την άποψη για τη δυνατότητα και την ανάγκη εισαγωγής των αρνητικών αριθμών στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση. Από τα ευρήματα προκύπτει ότι οι μαθητές/τριες είναι ικανοί να χειριστούν τους αρνητικούς αριθμούς και το κατάλληλο διδακτικό περιβάλλον λειτουργεί ευνοϊκά στην ομαλή εισαγωγή τους και στην εννοιολογική τους κατανόηση.

Λέξεις – κλειδιά: αρνητικοί αριθμοί, ακέραιοι αριθμοί, εννοιολογική κατανόηση συμβολισμός, Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, αναλυτικό πρόγραμμα

Abstract

According to the new Mathematics Curriculum for Primary Education issued in 2021, the teaching of negative numbers is introduced in the 5th grade. The main objective is to establish a strong and stable conceptual foundation that will serve as the basis for the Algebra systematically taught in Secondary Education. The aim of this research is to investigate how students in the last grades of Primary Education conceptualize and symbolize negative numbers. Simultaneously, the age appropriateness and the results of introducing negative numbers through the teaching environment "Steps" are explored. A total of 71 students from the 4th and 5th grades of Primary School participated in the research. The method chosen as the most suitable for understanding and interpreting students' perceptions is a qualitative approach. Four worksheets were administered and analyzed at two levels. At the first level, the analysis focused on calculations, and at the second level, the interpretation of representations and the characteristics of calculation errors. Overall, the research results are consistent with the findings of the literature studies that were examined and support the view of the possibility and necessity of introducing negative numbers in Primary Education. The findings indicate that students are capable of handling negative numbers, and the appropriate teaching environment contributes favorably to their smooth introduction and conceptual understanding.

Keywords: negative numbers, integers, conceptual understanding, symbolism, Primary Education, analytical program.

Εισαγωγή

Οι αριθμοί είναι αφηρημένα αντικείμενα που αντιλαμβανόμαστε και νοηματοδοτούμε μέσα από τις μεταφορές. Ειδικότερα, η έννοια των αρνητικών αριθμών είναι δυσνόητη, καθώς δεν ταυτίζονται ούτε αντιπροσωπεύουν ποσότητες. Η εισαγωγή των αρνητικών αριθμών προκαλεί έντονη αντίφαση και κατάρρευση όλων των οικείων έως τότε μεταφορών και απαιτεί την ανατροπή βαθιά ριζωμένων αντιλήψεων που σχετίζονται με τους φυσικούς αριθμούς. Η ανακάλυψη της ύπαρξης αριθμών μικρότερων του μηδενός προξενεί σύγχυση σχετικά με τους διαφορετικούς τύπους αριθμών και πολλοί/ες μαθητές/τριες δεν κατανοούν ότι όλοι οι διαφορετικοί τύποι αριθμών αποτελούν μέρος του συστήματος των πραγματικών αριθμών (Bruno & Martinon, 1999).

Κατά τη μετάβαση από τα διαισθητικά στα τυπικά μαθηματικά, η αντιφατική και αφηρημένη φύση των αρνητικών αριθμών δυσχεραίνει τη βαθύτερη κατανόησή τους και δημιουργεί παρανοήσεις στις αλγεβρικές έννοιες και δυσκολίες που είναι εμφανείς ιδιαιτέρως στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (Bofferding, 2010; Vlassis, 2004). Σύμφωνα με τις βιβλιογραφικές αναφορές, η πλειοψηφία των εμποδίων συνδέεται με την πολλαπλή σημασία του μείον, τις ελλιπείς αναπαραστάσεις, τα παραδοσιακά, ανοίκεια διδακτικά περιβάλλοντα και κατά κύριο λόγο την προϋπάρχουσα γνώση για τους φυσικούς αριθμούς.

Προκειμένου να ενισχυθεί η εννοιολογική κατανόηση και να μπουν ισχυρά θεμέλια για την Άλγεβρα, το 2021 το Υπουργείο Παιδείας της Ελλάδας αποφάσισε, ακολουθώντας το παράδειγμα άλλων χώρων, να εισαχθούν οι αρνητικοί αριθμοί στο Πρόγραμμα Σπουδών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης. Η έγκαιρη εισαγωγή τους παράλληλα φιλοδοξεί να συμβάλει στη διαμόρφωση θετικού κλίματος και κατάλληλων προϋποθέσεων για την κατάκτηση της νέας ομάδας αριθμών. Ταυτόχρονα, θα λειτουργήσει προληπτικά ενάντια στη δημιουργία αρνητικής στάσης που γεννιέται από την ταύτιση των αρνητικών αριθμών με την απομνημόνευση πολλών και δυσνόητων κανόνων και διαδικασιών στην περίπτωση πρώτης επαφής τους σε όψιμη ηλικία (Bofferding & Richardson, 2013).

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω δεδομένα σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε η παρούσα έρευνα με σκοπό να διερευνήσει τον τρόπο αντίληψης και χειρισμού μαθητών/τριών της Δ’ και της Ε’ τάξης σχετικά με τους αρνητικούς αριθμούς. Μελετήθηκε πόσο ικανοί/ές είναι να κατανοήσουν, να υπολογίσουν και να αναπαραστήσουν συμβολικά χωρίς να έχουν δεχτεί επίσημη διδασκαλία.

Το πρώτο κεφάλαιο περιλαμβάνει τη βιβλιογραφική επισκόπηση. Εκεί παρουσιάζεται διεξοδικά το θεωρητικό πλαίσιο, στο οποίο βασίστηκε η έρευνα. Αρχικά, γίνεται αναφορά στην ιστορική εξέλιξη των αρνητικών αριθμών από την πρώτη τους εμφάνισης έως την επίσημη αποδοχή τους. Στη συνέχεια ορίζονται και αναλύονται οι έννοιες μαθηματικός γραμματισμός και μαθηματική κατανόηση. Έπειτα, επιχειρείται μια προσέγγιση από διδακτική άποψη ξεκινώντας με λεπτομερή αναφορά στη θέση των αρνητικών αριθμών στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών σε διεθνές και ελληνικό επίπεδο. Το πρώτο μέρος ολοκληρώνεται με την παρουσίαση σημαντικών θεμάτων διδακτικής φύσης, όπως η διδασκαλία των αρνητικών στο Δημοτικό, οι διδακτικές προσεγγίσεις, οι νοερές αναπαραστάσεις, τα αναπαραστατικά μοντέλα, η λειτουργία του μείον και οι σημαντικότερες δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές/τριες.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε για τη διεξαγωγή της έρευνας. Αναφέρεται η ερευνητική μέθοδος, το δείγμα, η παρουσίαση του εργαλείου συλλογής δεδομένων, η περιγραφή της ερευνητικής διαδικασίας, ο τρόπος ανάλυσης των δεδομένων και τέλος, ο τρόπος διασφάλισης της εγκυρότητας και της αξιοπιστίας.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται αναλυτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων της έρευνας, μετά τη λεπτομερή ανάλυσή τους ανά φύλλο εργασίας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται μία συζήτηση πάνω στα αποτελέσματα με απώτερο σκοπό να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας, συνοψίζονται τα συμπεράσματα, αναφέρονται ορισμένοι περιορισμοί και γίνονται προτάσεις για μελλοντικές έρευνες.

Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η βιβλιογραφία πάνω στην οποία βασίστηκε η παρούσα έρευνα.

Η εργασία ολοκληρώνεται με το παράρτημα που περιλαμβάνει εικόνες από τα απαντημένα φύλλα εργασίας των μαθητών/τριών που χρησιμοποιήθηκαν κατά την ανάλυση των αποτελεσμάτων, διαγράμματα ανάλυσης δεδομένων των φύλλων εργασίας κάθε φάσης της έρευνας και απαντημένα φύλλα εργασίας.

1 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

1.1 Ιστορική αναδρομή

Η επέκταση των θετικών αριθμών σε μια νέα κλάση που περιελάμβανε αρνητικούς αριθμούς συνάντησε αντίσταση, πέρασε από πολλά στάδια απόρριψης και επίπεδα αποδοχής από τους μαθηματικούς έως το 1600 μ.Χ. (Vyawahare & Agrawal, 2008). Οι αρνητικοί αριθμοί αποτέλεσαν αντικείμενο έρευνας και μελέτης και πληθώρα άρθρων αναφέρονται στην εξέλιξη των ακέραιων, στη σημασία αριθμού μικρότερου από το 0 και στην επινόηση οδηγιών για έννοιες και λειτουργίες τους (Stephan & Akyuz, 2012).

Τα πρώτα ίχνη τους εμφανίζονται το 250 π.Χ. στην Κίνα (Gallardo, 2002). Το μακροβιότερο και επιδραστικό χειρόγραφο «*Jiuzhang suanshu*» («*Chui-chang suan-shu*») ή «*Εννέα Κεφάλαια για τη Μαθηματική Τέχνη*» περιλάμβανε 246 καθημερινά προβλήματα που σχετίζονταν με τοπογραφία, μηχανική, γεωργία, εμπόριο και φόρους (Boyer & Merzbach, 2011). Στο 8ο κεφάλαιο του χειρόγραφου γίνεται αναφορά στους αρνητικούς αριθμούς για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Στο συγκεκριμένο έργο οι αρνητικοί αριθμοί παρουσιάζονται με κόκκινες κουκκίδες, παρόλο που από τους Κινέζους χρησιμοποιούνταν κόκκινες ράβδοι για την αναπαράσταση των θετικών αριθμών και μαύρες για τους αρνητικούς (Vyawahare & Agrawal, 2008).

Τον 3ο αιώνα π.Χ. ο Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς, Έλληνας μαθηματικός, αναφέρθηκε στο έργο του «*Αριθμητική*» σε αρνητικές ποσότητες στο πλαίσιο πράξεων (Gagatsis & Alexandrou, 2022), ωστόσο σύμφωνα με τις ενδείξεις δεν αντιλαμβανόταν την αφηρημένη έννοια του αρνητικού αριθμού, δεν αποδεχόταν τις αρνητικές λύσεις και έθετε περιορισμούς προκειμένου να οδηγούν σε λογική θετική λύση.

Τον 7ο αιώνα στην Ινδία οι αρνητικοί αριθμοί χρησιμοποιούνταν για την αναπαράσταση των χρεών, ενώ οι θετικοί αντιπροσώπευαν τα περιουσιακά στοιχεία. Ο Ινδός μαθηματικός Brahmagupta (628 μ.Χ.) στο έργο του αναφέρθηκε σε θετικές και αρνητικές ποσότητες και διατύπωσε κανόνες για τις τέσσερις βασικές πράξεις με αρνητικούς αριθμούς. Για την αναπαράσταση του αρνητικού αριθμού χρησιμοποίησε μια τελεία (.3) (Vyawahare & Agrawal, 2008).

Τον 9ο αιώνα οι Άραβες απέρριψαν τους αρνητικούς αριθμούς παρά την εξοικείωση που είχε αποκτηθεί πια μέσα από το έργο των Ινδών μαθηματικών. Ο πατέρας της Άλγεβρας Al-

Khwarizmi στο έργο του «*Al-jabr wa'l- muqabala*» μελετά έξι διαφορετικούς τύπους εξισώσεων και αναφέρεται σε τετραγωνικές και κυβικές ρίζες, σε κλάσματα, στη μέθοδο των τριών, δεν ασχολείται ωστόσο με αρνητικούς αριθμούς. Αξιοσημείωτο είναι ότι στη δευτεροβάθμια εξίσωση οι αρνητικές ρίζες αγνοούνται.

Τον 12^{ο} αιώνα ο Bhaskara στο έργο του, παρόλο που βρίσκει αρνητικές ρίζες για τις δευτερεύουσες εξισώσεις, τις απορρίπτει αναφέροντας ότι η αρνητική τιμή στην περίπτωση αυτή είναι ανεπαρκής, καθώς οι άνθρωποι δεν εγκρίνουν τις αρνητικές ρίζες (Smith, 2001).

Τον 13^{ο} αιώνα επανεμφανίζονται στην Κίνα οι αρνητικοί αριθμοί. Μάλιστα, για να τους διακρίνουν σχεδιάζουν μια διαγώνια γραμμή στο δεξιό ψηφίο του αριθμού που δεν είναι μηδενικό. Την ίδια περίοδο στην Ιταλία ο Fibonacci στο βιβλίο του «*Liber Abaci*», αν και δεν αναφέρεται καθόλου στους αρνητικούς αριθμούς, περιλαμβάνει αρνητικές λύσεις σε προβλήματα ερμηνεύοντάς τες ως χρεώσεις. Όπως προκύπτει άλλωστε από τις έρευνες, η πρώτη συστηματική εφαρμογή αρνητικών αριθμών υπήρξε στην τήρηση λογιστικών βιβλίων. Ουσιαστικά τα χρέη και τα περιουσιακά στοιχεία αποτέλεσαν κίνητρο για την ανάπτυξη των αρνητικών αριθμών (Mukhopadhyay, 1990).

Τον 15^{ο} αιώνα για πρώτη φορά εμφανίζονται σε ευρωπαϊκό έργο οι αρνητικοί αριθμοί από τον Γάλλο μαθηματικό Chuquet. Τους χρησιμοποιεί ως εκθέτες, ενώ ταυτόχρονα τους χαρακτηρίζει ως «παράλογους αριθμούς» (“absurd numbers”) (Vyawahare & Agrawal, 2008).

Έως την περίοδο αυτή η πλειοψηφία των μαθηματικών είτε δεν αναγνώριζε τους αρνητικούς αριθμούς είτε δεν τους αποδέχονταν ως ρίζες εξίσωσης. Γύρω στον 16^{ο} αιώνα στην Ευρώπη και κυρίως στην Ιταλία, μεταφράζονται αραβικά και βυζαντινά κείμενα και έτσι έρχονται πάλι στο προσκήνιο. Σταδιακά αρχίζουν να αποτελούν εργαλείο για τον χειρισμό και την επίλυση εξισώσεων. Ο Stifel, παρά την εξοικείωσή του με τους αρνητικούς αριθμούς, τους αποκαλεί «κρυμμένους κάτω από το άπειρο» και στο έργο του «*Triparty en la Science des Nombres»* χρησιμοποιεί το $x + 5 = 0$, για να αναπαραστήσει το -5 (Vyawahare & Agrawal, 2008). Ο Cardano αναγνωρίζει την ύπαρξη των αρνητικών αριθμών και τους ονομάζει "debitum" (χρέος), ενώ στις εξισώσεις οι θετικοί αριθμοί αναφέρονται ως «αληθινές λύσεις» και οι αρνητικοί ως «πλασματικές λύσεις» (Schwarz, Kohn & Resnick, 1994). Αν και επιχείρησε να αναγνωριστούν ως αποδεικτικά στοιχεία, δεν το κατόρθωσε λόγω της θρησκευτικής πίεσης και του ισχυρισμού ότι η έννοια της αρνητικότητας ήταν «αντί θρησκεία» (Vyawahare & Agrawal, 2008).

Τον 17ο αιώνα χρησιμοποιήθηκαν ακόμη από τον Γάλλο Descartes, γνωστό ως Καρτέσιο, για την πλήρη αναπαράσταση γεωμετρικών καμπύλων και την επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων (Schwarz et al., 1994). Αντίθετα, ο Πασκάλ θεώρησε την αφαίρεση του 4 από το μηδέν ως απόλυτη ανοησία. Ο Wallis στο βιβλίο του «*Arithmetica Infinitorum*» αποδεχόταν τους αρνητικούς αριθμούς, ωστόσο υποστήριζε ότι είναι «μεγαλύτεροι από το άπειρο, αλλά όχι μικρότεροι από το μηδέν» (Smith, 2001). Σημαντική μερίδα μαθηματικών θεωρεί ότι οι αρνητικές ποσότητες δεν έχουν θέση αριθμών. Χαρακτηριστικά ο μαθηματικός Arnuld, απορρίπτοντας την αναλογία -1:1=1:-1 και επιχειρηματολογώντας κατά των αρνητικών αριθμών, αναρωτιέται: «Πώς μπορεί «μικρότερο σε μεγαλύτερο» να είναι ίσο με «μεγαλύτερο προς μικρότερο;» (Vyawahare & Agrawal, 2008).

Έως τα τέλη 18ου αιώνα οι αρνητικοί αριθμοί σταδιακά εδραιώνονται, ακόμη όμως δεν είναι απολύτως αποδεκτοί και υπάρχει μια σύγχυση στη χρήση τους. Ενδεικτικό είναι το παράδειγμα της κλίμακας Φαρενάιτ που αποδεικνύει την προσπάθειά τους να απαλλαγούν (Vlassis, 2008). Επίσης, ο Βρετανός μαθηματικός Maseres στη διατριβή «*The Use of the Negative Sign in Algebra*» ανέφερε τρόπους αποφυγής των αρνητικών αριθμών και κυρίως των αρνητικών ριζών και ισχυριζόταν ότι «οι αρνητικοί αριθμοί σκοτεινιάζουν ολόκληρες θεωρίες εξισώσεων και καταστρέφουν πράγματα που από τη φύση τους είναι υπερβολικά προφανή και απλά.» (Kline, 1990). Ο Γάλλος γεωμέτρης, Carnot θεωρούσε ότι η χρήση αρνητικών αριθμών θα οδηγούσε στην εξαγωγή λανθασμένων συμπερασμάτων και ο Morgan στο έργο του «*On the Study and Difficulties of Mathematics*» ισχυριζόταν ότι είναι παράλογο να υποστηρίζουμε ότι υπάρχουν αριθμοί μικρότεροι του μηδενός. Από την άλλη, ο Euler, αν και θεωρούσε τους αρνητικούς αριθμούς μεγαλύτερους από το άπειρο, στο έργο του «*Vollstandige Anleitung zur Algebra»* αναφέρθηκε στις πράξεις με θετικές και αρνητικές ποσότητες και προσπάθησε μέσω παραδειγμάτων με χρέη να αποδείξει ότι (-1) • (-1)= + 1 βασιζόμενος στο ήδη αποδεδειγμένο 1• (-1) = - 1. Το σημαντικότερο είναι ότι ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε το σύμβολο – για τους αρνητικούς και το + για τους θετικούς (Vyawahare & Agrawal, 2008).

Η σύγχυση που επικρατούσε κατά τον προηγούμενο αιώνα οδήγησε στη διερεύνηση των νόμων της αριθμητικής. Τον 19ο αιώνα χρησιμοποιούνται ευρέως και αποτελεσματικά, εμφανίζονται ως κατευθυνόμενα μεγέθη σε διάφορους τομείς, όπως του ηλεκτρισμού και ορίζονται ως συμμετρική επέκταση των θετικών αριθμών χωρίς ακόμη να έχουν θεμελιωθεί (Schwarz et al., 1994). Ο Cauchy το 1821 καθιέρωσε τα σύμβολα + για τους θετικούς και – για τους αρνητικούς αριθμούς, ενώ το 1867 ο Hankel στο βιβλίο του «*Theorie der komplexen Zahlensysteme*» παρουσίασε την επίσημη οπτική των αρνητικών αριθμών (Vlassis, 2008).

Παρά την ιστορική αντίδραση, αντίσταση και απόρριψη, η χρησιμότητα και αποτελεσματικότητα των αρνητικών αριθμών σε καθημερινές καταστάσεις, όπως χρέη και κατεύθυνση, οδήγησε στην αποδοχή, την ανάπτυξή και τη θεμελίωσή τους. Ο Hefendehl-Hebeker (1991, όπ.αναφ. στο Asghari, 2019) αναφέρει ότι «χρησιμοποιώντας αρνητικούς αριθμούς μπορεί κανείς να λύσει γρήγορα και αποτελεσματικά προβλήματα που έχουν νόημα μόνο για θετικούς αριθμούς και έχουν μόνο θετικές λύσεις».

1.2 Μαθηματικός Γραμματισμός

Στο πεδίο των μαθηματικών στη διεθνή βιβλιογραφία χρησιμοποιούνται διάφοροι όροι όπως «αριθμητισμός» (numeracy), μαθηματικός γραμματισμός (mathematical literacy), ποσοτικός γραμματισμός (quantitative literacy). Ο όρος «αριθμητισμός» χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Crowther (1959, όπ.αναφ. στο Λεμονίδης, 2003) αποδίδοντάς του την εξής σημασία «ελάχιστη γνώση από μαθηματικά και επιστημονικά αντικείμενα, την οποία διαθέτει κάποιο άτομο με σκοπό να θεωρηθεί μορφωμένο».

Συνήθως, ο μαθηματικός γραμματισμός ταυτίζεται λανθασμένα μόνο με τη γνώση μαθηματικών όρων, διαδικασιών και μεθόδων που είναι ενσωματωμένη στο διδακτικό αντικείμενο των Μαθηματικών. Κατά κανόνα στο σχολείο τα μαθηματικά διδάσκονται φορμαλιστικά και αποπλαισιωμένα από την πραγματικότητα με αποτέλεσμα να δημιουργείται χάσμα μεταξύ θεωρητικών γνώσεων και εφαρμογής σε καθημερινές καταστάσεις. Παράλληλα συχνά σε έρευνες γίνονται αναφορές για τη δυσκολία των μαθητών/τριών να κατακτήσουν τη γλώσσα των μαθηματικών (Rubenstein & Thompson, 2002). Τα μαθηματικά έχουν δικό τους σύνθετο, συμβολικό σύστημα νοηματοδότησης, λεξιλόγιο, συντακτικό, δομή και λόγο (Barton & Neville-Barton, 2003) που οι μαθητές/τριες καλούνται να μάθουν, χωρίς ωστόσο να το κατανοούν.

Οι αντικρουόμενες απόψεις και προσεγγίσεις των μαθηματικών σχετικά με τους όρους και τις ερμηνείες τους καθιστούν πολύπλοκο να δοθεί ένας σαφής και ακριβής ορισμός για τον μαθηματικό γραμματισμό. Εξίσου δύσκολη είναι και η απόδοση των όρων σε διάφορες γλώσσες. Σύμφωνα με τον Λεμονίδη (2003) μαθηματικά εγγράμματο θεωρείται ένα άτομο που κατέχει κάποιες μαθηματικές ικανότητες, ώστε να ανταποκρίνεται στις πρακτικές μαθηματικές απαιτήσεις της καθημερινής του ζωής και ταυτόχρονα κατανοεί και εκτιμά τις πληροφορίες που δίνονται με μαθηματικούς όρους, όπως πίνακες, γραφικές αναπαραστάσεις, ποσοστά.

Συγκεκριμένα στο πλαίσιο του Διεθνούς Προγράμματος Μαθητικής Αξιολόγησης PISA, ο εγγραμματισμός στα Μαθηματικά ορίζεται ως «η ικανότητα του ατόμου να προσδιορίζει και να κατανοεί τον ρόλο που διαδραματίζουν τα Μαθηματικά στον κόσμο, να διατυπώνει καλά θεμελιωμένες κρίσεις, να χρησιμοποιεί και να ασχολείται με τα Μαθηματικά με τους τρόπους που ικανοποιούν τις ανάγκες της ζωής αυτού του ατόμου ως δημιουργικού, ενδιαφερόμενου και αναστοχαστικού πολίτη» (OECD, 2022).

Συνεπώς, ο μαθηματικός γραμματισμός πρέπει να αποτελεί κεντρική επιδίωξη των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών και η διδασκαλία να μην μένει προσκολλημένη στον λειτουργικό γραμματισμό που προσφέρει μόνο γνώσεις και εργαλεία που οδηγούν σε σχολικές επιτυχίες. Ο μετασχηματισμός των εκπαιδευτικών πρακτικών κρίνεται απαραίτητος προκειμένου οι μαθητές/τριες να είναι σε θέση να οργανώνουν, να συλλογίζονται, να κατανοούν, να ερμηνεύουν και να εφαρμόζουν κριτικά και αποτελεσματικά τις γνώσεις που αποκτούν στο σχολείο. Να αποκτήσουν δηλαδή δεξιότητες και ικανότητες, ώστε να ανταποκρίνονται στις ανάγκες της πραγματικής ζωής.

1.3 Μαθηματική Κατανόηση

Είναι γνωστό και τεκμηριωμένο ερευνητικά (Behrend & Mohs, 2006; Bofferding, 2014; Chrysostomou & Mousoulides, 2010; Harel, 2019; Periasamy & Sivasubramaniam, 2018; Prather & Alibali 2008; Stanford, 2003; Van Dooren, Lehtinen & Verschaffel, 2015) ότι οι μαθητές/τριες αντιμετωπίζουν δυσκολία σε ένα μεγάλο εύρος μαθηματικών έργων που αφορούν τους αρνητικούς αριθμούς. Ως βασική αιτία των συστηματικών λαθών που εντοπίζονται αναφέρεται η ελλιπής μαθηματική κατανόηση.

Η κατανόηση, σύμφωνα με τον Van de Walle (2007), χαρακτηρίζεται ως μέτρο της ποιότητας και της ποσότητας των συνδέσεων μιας ιδέας με τις υπάρχουσες ιδέες και εξαρτάται από την ύπαρξη κατάλληλων ιδεών και τη δημιουργία νέων συνδέσεων. Η μαθηματική κατανόηση είναι μια σύνθετη δεξιότητα που απαιτεί την ικανότητα ερμηνείας και χρήσης μαθηματικών συμβολισμών, εφαρμογής μαθηματικών αρχών και επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Ερευνητές που ασχολούνται με τη διδακτική των Μαθηματικών αναφέρουν ότι η μαθηματική κατανόηση εξαρτάται τόσο από την εννοιολογική (conceptual knowledge) όσο και τη διαδικαστική γνώση (procedural knowledge) (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001).

Η διαδικαστική γνώση περιλαμβάνει τη γνώση των κανόνων και των διαδικασιών, ενώ η εννοιολογική γνώση στηρίζεται σε πλούσιες σχέσεις ή δίκτυα ιδεών και δεν αποτελεί μια μεμονωμένη ιδέα. Όπως αναφέρουν οι Hiebert και Carpenter, εννοιολογική είναι «η γνώση που έχει κατακτηθεί» (Van de Walle, 2007). Η εννοιολογική και η διαδικαστική κατανόηση αποτελούν δύο διαφορετικές πτυχές της κατανόησης ενός θέματος και είναι εξίσου απαραίτητες και σημαντικές δεξιότητες για την αποτελεσματική μάθηση και την επιτυχία στην εκπαίδευση, την εργασία και τη ζωή.

Στη μαθηματική εκπαίδευση, η διαδικαστική κατανόηση αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών/τριών να ακολουθήσουν οδηγίες και να εκτελέσουν βήματα για την ολοκλήρωση μιας εργασίας. Αυτό περιλαμβάνει την κατανόηση των βημάτων ενός αλγορίθμου, την εφαρμογή των βημάτων σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα και την επίλυση προβλημάτων που προκύπτουν κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης ενός αλγορίθμου. Η εννοιολογική κατανόηση αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών/τριών να κατανοήσουν και να χρησιμοποιήσουν τις βασικές έννοιες ενός θέματος. Αυτό περιλαμβάνει την κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των εννοιών, τη χρήση των εννοιών, για να εξηγήσουν νέα γεγονότα και τη χρήση των εννοιών για την επίλυση προβλημάτων. Ακόμη, η αναπτυγμένη εννοιολογική γνώση βοηθά στην αναπαράσταση προβλημάτων με μεγαλύτερη ακρίβεια (Chi, Feltovich & Glaser, 1981; Rittle-Johnson et al., 2001, όπ.αναφ. στο Prather & Alibali, 2008).

Η διαδικαστική κατανόηση παίζει σημαντικό ρόλο στην εκμάθηση και είναι αναγκαία για την επιτυχία στην εκπαίδευση, αλλά η εννοιολογική κατανόηση είναι σημαντικότερη για τη μακροπρόθεσμη μάθηση και επιτυχία. Αυτό συμβαίνει, επειδή η εννοιολογική κατανόηση επιτρέπει στους/στις μαθητές/τριες να κατανοούν τις έννοιες και τις αρχές που βρίσκονται πίσω από τα πράγματα. Δίνει ένα ευρύτερο υπόβαθρο γνώσεων και επιτρέπει να εφαρμόζουν τις γνώσεις τους σε νέες καταστάσεις. Στο σχολείο δίνεται βαρύτητα στη διαδικαστική κατανόηση που μπορεί να διδαχθεί σχετικά πιο εύκολα, ενώ η εννοιολογική κατανόηση είναι δυσκολότερη για τους/τις μαθητές/τριες. Σύμφωνα με τις θεωρίες για τη διδασκαλία των μαθηματικών, η εννοιολογική και η διαδικαστική κατανόηση είναι σημαντικές και αλληλένδετες (Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Για να αναπτύξουν οι μαθητές/τριες εννοιολογική κατανόηση είναι προαπαιτούμενη η διαδικαστική ευχέρεια. Το μόνο σημείο στο οποίο υπάρχουν διαφοροποιήσεις μεταξύ των ερευνητών είναι η σειρά της ανάπτυξης των δύο αυτών γνώσεων. Ωστόσο, σύμφωνα με το επαναληπτικό μοντέλο η ανάπτυξή τους συντελείται παράλληλα με έντονη επίδραση και θετική συσχέτιση του ενός στο άλλο. Συχνά μάλιστα παρατηρούνται και ατομικές διαφορές στον τρόπο ανάπτυξής τους (Μπεμπένη, 2021).

Ειδικότερα για τους αρνητικούς αριθμούς ένα ακόμη κρίσιμο θέμα είναι η εννοιολογική ανακατασκευή των αριθμητικών σχημάτων. Η Bofferding (2010) επισημαίνει τον ρόλο των προηγούμενων γνώσεων και την πολυπλοκότητα της εννοιολογικής αλλαγής, καθώς οι μαθητές/τριες, κατά την πορεία επέκτασης του συνόλου των φυσικών αριθμών σε αυτό των ακεραίων, πρέπει να ενσωματώσουν τους αρνητικούς αριθμούς στους φυσικούς αριθμούς. Η εμφάνιση των αρνητικών σηματοδοτεί ταυτόχρονα την κατάρρευση πρώιμων σχημάτων αριθμών και ποσοτήτων, διαισθήσεων για τους αριθμούς και προκαλεί εννοιολογική ασυνέχεια (Harel, 2019).

Οι Prather και Alibali (2008) εντοπίζουν μια σημαντική εννοιολογική διαφορά μεταξύ θετικών και αρνητικών αριθμών. Οι φυσικοί αριθμοί ταιριάζουν με τη διαισθητική και την επίκτητη αντίληψη του αριθμού. Οι αρνητικοί αριθμοί δεν μπορούν να αναπαρασταθούν με φυσικά αντικείμενα και να χρησιμοποιηθούν για ποσοτικοποίηση στον πραγματικό κόσμο. Ακόμη και το μηδέν αρχικά υποδείκνυε την απουσία και λειτουργούσε ως σύμβολο κράτησης θέσης και όχι ως αριθμός (Kilhamn, 2009).

Στο παρελθόν πολλές μελέτες έχουν δείξει ότι είναι δυνατόν να υπάρχει διαδικαστική γνώση χωρίς την αντίστοιχη εννοιολογική γνώση (Hiebert & Wearne, 1996; Rittle-Johnson & Alibali, 1999, όπ.αναφ. στο Prather & Alibali, 2008). Παρατηρήθηκε ότι πολλοί μαθητές/τριες, φοιτητές/τριες ακόμη και εκπαιδευτικοί, παρόλο που γνώριζαν και εκτελούσαν τους αλγόριθμους στις πράξεις, παρουσίασαν σημαντικές δυσκολίες στην πλήρη εννοιολογική κατανόηση των αρνητικών αριθμών και των πράξεων μεταξύ τους (Chrysostomou & Mousoulides, 2010; Lemonidis & Pilianidis, 2020; Lemonidis, Tsakiridou & Meliopoulou, 2018). Το έλλειμα στην εννοιολογική κατανόηση ήταν εμφανές, καθώς δεν ήταν σε θέση να δικαιολογήσουν τις απαντήσεις και τις επιλογές τους, η γνώση τους ήταν απόλυτα εξαρτημένη από την απομνημόνευση και οι εξηγήσεις τους δεσμευμένες με κανόνες.

Ειδικότερα, στην έρευνα των Bofferding και Richardson (2013) αναδείχθηκαν σημαντικές ελλείψεις εννοιολογικής κατανόησης των ακεραίων σε υποψήφιους εκπαιδευτικούς

Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Οι συμμετέχοντες/ουσες φοιτητές/τριες βασίστηκαν στις διαδικαστικές τους γνώσεις κατά την επίλυση των προβλημάτων, αναφέρθηκαν σε κανόνες και όχι σε εννοιολογικές εξηγήσεις, χρησιμοποίησαν αναποτελεσματικές μεθόδους και αδύναμες στρατηγικές και σε ορισμένες περιπτώσεις οδηγήθηκαν σε λανθασμένη χρήση του πρόσημου και αλλαγή προβλημάτων (π.χ. το -9 + 2 σε 9 - 2).

Οι Behrend και Mohs (2006) στην έρευνά τους, περιγράφοντας τις εμπειρίες μαθητών/τριών Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης από τη διερεύνηση αρνητικών αριθμών, πριν τους διδαχθούν επίσημα, δείχνουν τον ρόλο της έκθεσης σε μια προβληματική κατάσταση στην ανάπτυξη εννοιολογικής κατανόησης. Η φυσική περιέργεια, η ενθάρρυνση για συζήτηση, ο χρόνος για επεξεργασία και εξερεύνηση, οι ανακαλύψεις και οι συσχετίσεις μεταξύ αριθμών και λειτουργιών συμβάλλουν στη δημιουργία ισχυρών εννοιολογικών θεμελίων και στην κατανόηση.

Συμπερασματικά, πρωταρχικό στόχο της εκπαίδευσης θα πρέπει να αποτελεί η μάθηση με κατανόηση, η ανάπτυξη μιας ολοκληρωμένης σχέσης και η ενσωμάτωση των εννοιών και των διαδικασιών. Δεδομένου ότι δεν είναι δυνατόν να προβλεφθούν και να διδαχθούν όλα τα είδη προβλημάτων, μόνο με αυτόν τον τρόπο θα είναι σε θέση οι μαθητές/τριες να αντιμετωπίσουν οποιοδήποτε πρόβλημα. Άλλωστε, στις εννοιολογικά αναπτυγμένες διαδικασίες δεν είναι πάντα δυνατή η διάκριση ανάμεσα στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση (Van de Walle, 2007).

1.4 Οι Αρνητικοί Αριθμοί στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών

Τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών είναι πολύ σημαντικά, καθώς περιέχουν τις κατευθυντήριες γραμμές και καθορίζουν λεπτομερώς τι πρέπει να διδάσκεται σε κάθε τάξη ανά βαθμίδα εκπαίδευσης. Υπάρχουν ορισμένες βασικές αρχές που είναι κοινές σε όλες τις χώρες, η δομή όμως και το περιεχόμενο της εκπαίδευσης ποικίλλουν και εξαρτώνται από τις ανάγκες της χώρας και των πολιτών της. Ακολουθεί μια ενδεικτική αναφορά σε Αναλυτικά Προγράμματα Μαθηματικών βασικής Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης, ώστε να σχηματιστεί μια πιο σφαιρική εικόνα σχετικά με τον χρόνο εισαγωγής και τον τρόπο ανάπτυξης των αρνητικών αριθμών σε διεθνές και εθνικό επίπεδο.

1.4.1 Διεθνή Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών

Αγγλία

Η επίσημη, υποχρεωτική εκπαίδευση στην Αγγλία περιλαμβάνει την Πρωτοβάθμια και Δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Το Αναλυτικό Πρόγραμμα οργανώνεται σε τέσσερις κύκλους σπουδών, που ονομάζονται «key stages». Ο πρώτος κύκλος διαρκεί 2 χρόνια, ο δεύτερος τέσσερα, ο τρίτος τρία και ο τέταρτος δύο Στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση αντιστοιχούν οι δύο πρώτοι κύκλοι σπουδών, δηλαδή τα «key stages» 1 και 2, που καλύπτουν ηλικίες από 5 έως 10 και στη Δευτεροβάθμια αντιστοιχούν τα «key stages» 3 και 4 και καλύπτουν έως την ηλικία των 16.

Η εισαγωγή των αρνητικών αριθμών γίνεται στο «key stages» 2, δηλαδή σε ηλικίες 8-9, ώστε να αρχίσουν να επεκτείνουν τις γνώσεις τους για το σύστημα αριθμών. Σύμφωνα με τις οδηγίες του προγράμματος αναμένεται οι μαθητές/τριες να μετρούν προς τα πίσω περνώντας από το μηδέν, ώστε να συμπεριλάβουν τους αρνητικούς αριθμούς. Στην επόμενη τάξη διδάσκονται την ερμηνεία των αρνητικών αριθμών σε πλαίσιο και τη μέτρηση (κανονική και αντίστροφη) με θετικούς και αρνητικούς αριθμούς συμπεριλαμβάνοντας και το μηδέν. Στην τελευταία χρονιά του δεύτερου κύκλου επιδιώκεται: α) να χρησιμοποιούν πλέον τους αρνητικούς αριθμούς σε πλαίσιο και να υπολογίζουν αποστάσεις πέρα από το μηδέν, β) να χρησιμοποιούν την αριθμητική γραμμή, για να προσθέτουν και αφαιρούν τους αρνητικούς ακέραιους αριθμούς σε περιπτώσεις μέτρησης, όπως η θερμοκρασία και γ) στον τομέα της γεωμετρίας να επεκτείνουν τις γνώσεις τους στα τέσσερα τεταρτημόρια των αξόνων, όπου συμπεριλαμβάνονται και οι αρνητικοί αριθμοί (Department for Education, 2013).

Σκωτία

Το εκπαιδευτικό σύστημα στη Σκωτία διαφέρει εντελώς από το υπόλοιπο Ηνωμένο Βασίλειο. Δεν υπάρχει ένα Εθνικό Πρόγραμμα Σπουδών, όπως στην Αγγλία, την Ουαλία και τη Βόρεια Ιρλανδία, αλλά ένα Πρόγραμμα Σπουδών για την Αριστεία (Curriculum for Excellence) που καλύπτει την εκπαίδευση από 3-18 ετών. Το πρόγραμμα ακολουθείται από όλα τα κρατικά σχολεία και χωρίζεται σε δύο στάδια: α) «The Broad General Education» που καλύπτει ηλικίες από 3 έως 13/14, περιλαμβάνει την Πρωτοβάθμια και ένα μέρος της

Δευτεροβάθμιας και χωρίζεται σε πέντε επίπεδα και β) «Senior Phase» που καλύπτει ηλικίες από 16 έως 18.

Η πρώτη επαφή με τους αρνητικούς αριθμούς γίνεται στο δεύτερο επίπεδο που περιλαμβάνει ηλικίες από 8 έως 11. Συγκεκριμένα στον τομέα «Αριθμός και Αριθμητικές διαδικασίες» αναμένεται να μάθουν την επέκταση της αριθμητικής γραμμής, για να περιλαμβάνει αριθμούς μικρότερους από το μηδέν και να διερευνούν πώς εμφανίζονται και πώς χρησιμοποιούνται (Smarter Scotland Scottish Government, 2002).

Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής

Το εκπαιδευτικό σύστημα των Ηνωμένων Πολιτειών είναι ένα από τα μεγαλύτερα και πιο περίπλοκα στον κόσμο. Είναι μεν ένα ομοσπονδιακό σύστημα, που σημαίνει ότι ελέγχεται από την ομοσπονδιακή κυβέρνηση, αλλά κάθε πολιτεία έχει το δικό της σύστημα εκπαίδευσης. Αυτό οδηγεί σε μεγάλη ποικιλομορφία στο εκπαιδευτικό σύστημα, καθώς η κυβέρνηση έχει την ευθύνη να καθορίσει τα πρότυπα για την εκπαίδευση, ενώ οι πολιτείες και οι τοπικές κυβερνήσεις έχουν την ευθύνη να παρέχουν χρηματοδότηση και να διαχειρίζονται τα σχολεία. Το 2010 αναπτύχθηκε το πρόγραμμα «Common Core State Standards» με τη συμμετοχή 48 πολιτειών για την οργάνωση και εφαρμογή ακαδημαϊκών προτύπων με σκοπό να εξασφαλίζονται ίσες ευκαιρίες μάθησης στον ακαδημαϊκό κι επαγγελματικό τομέα.

Το αμερικανικό εκπαιδευτικό σύστημα χωρίζεται σε τρεις βαθμίδες: Η Πρωτοβάθμια και Δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι δωρεάν και υποχρεωτική για όλους τους Αμερικανούς πολίτες ηλικίας 6-18 ετών. Το Νηπιαγωγείο είναι προαιρετικό, αλλά η πλειοψηφία των παιδιών στις Ηνωμένες Πολιτείες το παρακολουθεί. Η Πρωτοβάθμια εκπαίδευση ξεκινά στην ηλικία των 5 ή 6, διαρκεί 5 χρόνια και χωρίζεται σε δύο περιόδους: το Νηπιαγωγείο και τα πρώτα τέσσερα χρόνια. Η Δευτεροβάθμια εκπαίδευση διαρκεί 7 χρόνια και χωρίζεται σε δύο περιόδους: το Γυμνάσιο, που διαρκεί 4 χρόνια και το Λύκειο, που διαρκεί 3 χρόνια.

Σύμφωνα με το επίσημο πρόγραμμα του «Common Core State Standards», οι αρνητικοί αριθμοί εισάγονται στην 6η τάξη, δηλαδή στην πρώτη τάξη του Γυμνασίου, που όμως αντιστοιχεί σε ηλικία 11 ετών. Στην 6η και 7η τάξη, που αντιστοιχούν στις δύο τελευταίες τάξεις του Δημοτικού στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, διδάσκονται αναλυτικά τους αρνητικούς αριθμούς. Συγκεκριμένα:

Α) Στην Ενότητα «Αριθμητικό σύστημα» επιδιώκεται:

<u>Στην $6^{η}$ τάξη</u>:

- να επεκτείνουν τις προηγούμενες αντιλήψεις τους για τον αριθμό και τη σειρά των αριθμών στο πλήρες αριθμητικό σύστημα, το οποίο περιλαμβάνει και τους αρνητικούς ακέραιους,
- να κατανοήσουν ότι θετικοί και αρνητικοί χρησιμοποιούνται για την περιγραφή ποσοτήτων με αντίθετες κατευθύνσεις ή τιμές (π.χ. θερμοκρασία, υψόμετρο, χρεώσεις),
- να χρησιμοποιήσουν θετικούς και αρνητικούς για την αναπαράσταση ποσοτήτων σε ρεαλιστικό πλαίσιο, αναγνωρίζοντας τη σημασία του 0 σε κάθε περίπτωση,
- να κατανοήσουν έναν ρητό αριθμό ως σημείο στην αριθμητική γραμμή και να επεκτείνουν διαγράμματα αριθμογραμμών και άξονες γνωστών από προηγούμενες τάξεις συντεταγμένων, ώστε να αναπαραστήσουν σημεία στην ευθεία και στο επίπεδο με συντεταγμένες αρνητικών αριθμών,
- να ερμηνεύσουν την απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού ως την απόστασή από το 0 στην αριθμητική γραμμή και ως μέγεθος για μια θετική ή αρνητική ποσότητα σε μια ρεαλιστική κατάσταση.

<u>Στην $7^{η}$ τάξη:</u>

- να κατανοήσουν το $p + q$ ως τον αριθμό που απέχει μια απόσταση $|q|$ από το p, στη θετική ή αρνητική κατεύθυνση ανάλογα με το αν το q είναι θετικό ή αρνητικό,
- να αντιληφθούν ότι το άθροισμα ενός αριθμού με τον αντίθετό του είναι 0,
- να ερμηνεύουν τα αθροίσματα ρητών αριθμών περιγράφοντας ρεαλιστικά πλαίσια.

Β) Στην Ενότητα «Εκφράσεις και Εξισώσεις» διδάσκονται:

<u>Στην $6^{η}$ τάξη:</u>

- να επιλύουν ρεαλιστικά και μαθηματικά προβλήματα με εξισώσεις της μορφής $x + p = q$ και $px = q$ για περιπτώσεις όπου τα p, q και x είναι όλα μη αρνητικοί ρητοί αριθμοί.

<u>Στην $7^{η}$ τάξη:</u>

- να επιλύουν ρεαλιστικά και μαθηματικά προβλήματα πολλαπλών βημάτων που τίθενται με θετικούς και αρνητικούς αριθμοί σε οποιαδήποτε μορφή (ακέραιοι αριθμοί, κλάσματα, δεκαδικοί), χρησιμοποιώντας στρατηγικά εργαλεία και νοητικές στρατηγικές υπολογισμού και εκτίμησης (Common Core State Standard Initiative, 2014).

Καναδάς

Το εκπαιδευτικό σύστημα του Καναδά είναι πολύ καινοτόμο στις μεθόδους διδασκαλίας και οι μαθητές/τριες κατατάσσονται πολύ υψηλά στις διεθνείς αξιολογήσεις. «To Common Curriculum Framework for K–9 Mathematics» αναπτύχθηκε από τα επτά υπουργεία Παιδείας σε συνεργασία με εκπαιδευτικούς, διοικητικούς υπαλλήλους, γονείς, επιχειρηματίες και φοιτητές/τριες εκπαιδευτικούς. Το πλαίσιο προσδιορίζει τις πεποιθήσεις σχετικά με τα μαθηματικά, τα γενικά και συγκεκριμένα αποτελέσματα των μαθητών/τριών και τους δείκτες επίδοσης που συμφωνήθηκαν. Καθεμία από τις επαρχίες και τις περιοχές καθορίζει ανεξάρτητα πότε και με ποιον ακριβώς τρόπο θα εφαρμοστεί το πλαίσιο εντός της δικής της δικαιοδοσίας. Το εκπαιδευτικό σύστημα του Καναδά είναι δωρεάν και υποχρεωτικό για παιδιά ηλικίας 6 έως 16 ετών. Χωρίζεται σε δύο επίπεδα: Πρωτοβάθμια εκπαίδευση, που περιλαμβάνει δύο κύκλους, α) 6-8 ετών β) 9-12 ετών και Δευτεροβάθμια, που περιλαμβάνει επίσης δύο κύκλους: α) 13-14 ετών β) 15-16 ετών.

Οι αρνητικοί αριθμοί εμφανίζονται στο Πρόγραμμα Σπουδών στην $6^{η}$ τάξη, την τελευταία της Πρωτοβάθμιας. Ως γενικός στόχος αναφέρεται η κατανόηση των ακεραίων σε συγκεκριμένο, εικονικό και συμβολικό πλαίσιο. Ειδικότερα, αναμένεται οι μαθητές/τριες:

- να επεκτείνουν την αριθμητική γραμμή με αριθμούς μικρότερους από το μηδέν και να εξηγούν το μοτίβο σε κάθε πλευρά του μηδενός,
- να τοποθετούν τους ακέραιους αριθμούς στην αριθμητική γραμμή και να εξηγούν την ταξινόμηση,
- να περιγράφουν πλαίσια, όπου χρησιμοποιούνται ακέραιοι αριθμοί, για παράδειγμα σε ένα θερμόμετρο,
- να συγκρίνουν δύο ακέραιους αριθμούς, αναπαριστώντας τη σχέση τους με τα σύμβολα <, > και = και επαληθεύοντάς την με τη χρήση αριθμητικής γραμμής,

- να ταξινομούν ακέραιους σε αύξουσα ή φθίνουσα σειρά (Alberta Education, Alberta, Canada, 2006).

Κύπρος

Το εκπαιδευτικό σύστημα της Κύπρου χωρίζεται σε τρία επίπεδα: α) το Νηπιαγωγείο, που είναι προαιρετικό και διαρκεί δύο χρόνια, β) το Δημοτικό σχολείο, το οποίο είναι υποχρεωτικό, ξεκινά στην ηλικία των 6 ετών και διαρκεί πέντε χρόνια και γ) το Γυμνάσιο, που είναι υποχρεωτικό και διαρκεί τρία χρόνια. Το 2010 εκδόθηκε το Αναλυτικό Πρόγραμμα των Μαθηματικών, στο οποίο επιχειρήθηκε εκσυγχρονισμός του περιεχομένου, ώστε να συνάδει με τις σύγχρονες κοινωνικές ανάγκες και τα Αναλυτικά Προγράμματα των χωρών της Ευρώπης. Στην οργάνωσή του δόθηκε έμφαση στα Επιδιωκόμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (Δείκτες Επιτυχίας) και στα αντίστοιχα Διδακτέα (Δείκτες Επάρκειας). Αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό του αποτελεί η ανάπτυξη των μαθηματικών ενοτήτων σε οκτώ κλίμακες, που παρουσιάζουν συνοπτικά τις ικανότητες που αναμένεται να αναπτυχθούν. Οι κλίμακες είναι ιεραρχικές και προοδευτικές, ωστόσο δεν είναι απόλυτα διακριτές και έτσι επιτρέπουν στους/στις μαθητές/τριες την επανάληψη και την κάλυψη κενών στην κατανόηση.

Η πρώτη αναφορά των αρνητικών αριθμών γίνεται στην «Κλίματα 3» της Ενότητας «Αριθμοί» και συνεχίζεται στην «Κλίμακα 4». Προτείνονται επομένως έμμεσες ίσως αναφορές στην Γ’ τάξη, αλλά η ουσιαστική εισαγωγή γίνεται στην Ε’ και Στ’ τάξη. Η «Κλίμακα 4» αφορά τις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου, ωστόσο η προεργασία αρχίζει στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού. Σύμφωνα με τους δείκτες επιτυχίας κάθε Κλίμακας, σκοπός είναι οι μαθητές/τριες:

Κλίμακα 3

- να χρησιμοποιούν τους αρνητικούς αριθμούς στην καθημερινή ζωή,
- να αναλύουν τους ακεραίους σε γινόμενο παραγόντων,
- να επιλύουν απλά προβλήματα σε ρεαλιστικό πλαίσιο, π.χ. όροφοι πολυκατοικίας.

Κλίμακα 4

- να συγκρίνουν και να ταξινομούν ρητούς αριθμούς (θετικούς και αρνητικούς), ορίζοντας τη θέση τους στην αριθμητική γραμμή,

- να εκτιμούν και να υπολογίζουν το αποτέλεσμα πρόσθεσης και αφαίρεσης που περιλαμβάνει αρνητικούς αριθμούς (ακέραιους, δεκαδικούς και κλάσματα) (Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων, 2010).

1.4.2 Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών της Ελλάδας

Το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά του 2011 είχε ως βασικό κίνητρο να αποτελέσει την αφετηρία για την αναβάθμιση της ποιότητας της μαθηματικής εκπαίδευσης στην υποχρεωτική εκπαίδευση στην Ελλάδα. Το πρόγραμμα αναπτύχθηκε σε τρεις ηλικιακούς κύκλους βασιζόμενο στην ιδέα της μαθησιακής – διδακτικής τροχιάς. Ο πρώτος ηλικιακός κύκλος αφορά μαθητές/τριες Νηπιαγωγείου (5-6 χρονών), Α΄ Δημοτικού (6-7 χρονών) και Β΄ Δημοτικού (7-8 χρονών). Ο δεύτερος ηλικιακός κύκλος περιλαμβάνει τις τάξεις Γ΄, Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού (8 έως 12 χρονών). Τέλος, ο τρίτος κύκλος αφορά στην περίοδο φοίτησης στο Γυμνάσιο (12 – 15 χρονών). Η έννοια της τροχιάς μάθησης και διδασκαλίας, που εισήχθη, είναι εξαιρετικά σημαντική, γιατί αποτυπώνει μια συνολική θέαση της μαθησιακής εμπειρίας των μαθητών/τριών σε μια συγκεκριμένη θεματική του Προγράμματος Σπουδών. Η τροχιά μάθησης δεν αποτελεί γραμμική περιγραφή πορείας ούτε μονόδρομο και η μαθησιακή διαδικασία εξελίσσεται σε επίπεδα και ό,τι μαθαίνεται σε μια φάση επιτελείται σε ανώτερο επίπεδο στην αμέσως επόμενη. Ακόμη, κεντρική θέση στο Πρόγραμμα Σπουδών κατέχει η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού και για αυτόν τον λόγο για κάθε σύνολο αριθμών οι τροχιές και οι υπό-τροχιές εξειδικεύονται ανά κύκλο και τάξη (Ινστιτούτο, Π, 2011).

Σε σχέση με τους ακέραιους αριθμούς αναγνωρίζεται ότι η κατανόησή τους είναι πολύ σημαντική για τη μελέτη των αλγεβρικών ιδεών. Η εισαγωγή τους τοποθετείται στον Β’ Κύκλο που ξεκινά στην Δ’ τάξη του Δημοτικού, ενώ η πλήρης ανάπτυξής τους προβλέπεται στον επόμενο κύκλο, δηλαδή στο Γυμνάσιο. Οι διδακτικές ώρες που προβλέπονται είναι 3 στη Δ’ τάξη, 6 στην Ε’ τάξη και 6 στη Στ’ τάξη.

Στον κύκλο αυτό επιχειρείται μια πρώτη αισθητοποίηση της έννοιας των ακεραίων αριθμών, και σταδιακά η διαισθητική αντίληψη της σχετικής έννοιας, μέσω καθημερινών καταστάσεων, η συνειδητοποίηση της ανάγκης επέκτασης της αριθμογραμμής, η διάταξη των ακέραιων αριθμών με πλαίσιο αναφοράς την αριθμογραμμή και η διαισθητική διερεύνηση απλών προσθέσεων και αφαιρέσεων με ακέραιους αριθμούς.

Το 2021 εκδόθηκε το νέο Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης, που σχεδιάστηκε στοχεύοντας στη συγκρότηση σταθερής εννοιολογικής βάσης στα Μαθηματικά, που θα επιτρέπει την αξιοποίηση των γνώσεων και τη μαθησιακή εξέλιξη και αναγνωρίζοντας ότι η ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης αποτελεί προοδευτική διεργασία. Το Πρόγραμμα αυτό εφαρμόστηκε πιλοτικά το σχολικό έτος 2022 – 2023 σε πειραματικά σχολεία σε συνδυασμό με το ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών (ΙΕΠ, 2021).

Η εισαγωγή των αρνητικών αριθμών, βάσει του νέου Προγράμματος Σπουδών, γίνεται στην Ε’ τάξη στην Ενότητα «Αριθμοί» και συνεχίζεται στη Στ’ τάξη. Στα προσδοκώμενα αποτελέσματα αναφέρονται:

<u>Ε’ Τάξη</u>

- η αναγνώριση και η διερεύνηση της χρήσης των αρνητικών ακεραίων αριθμών σε καταστάσεις καθημερινής ζωής,
- η αντίληψη της ανάγκης επέκτασης της αριθμογραμμής, ώστε να συμπεριλαμβάνονται αριθμοί μικρότεροι από το μηδέν,
- η σύγκριση και η διάταξη των αρνητικών ακέραιων αριθμών και ο ορισμός της θέσης τους στην αριθμογραμμή.

<u>Στ’ τάξη</u>

- η χρήση ακέραιων αριθμών για περιγραφή ποικίλων καταστάσεων καθημερινής ζωής,
- η σύγκριση και διάταξη ακέραιων (θετικών και αρνητικών) και ο ορισμός της θέσης τους στην αριθμογραμμή,
- η διερεύνηση, η ανάπτυξη και η εφαρμογή στρατηγικών πρόσθεσης με ακέραιους με χρήση ποικίλων στρατηγικών, μέσων και αναπαραστάσεων,
- η μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με ακέραιους αριθμούς σε ρεαλιστικά και μαθηματικά πλαίσια.

Κρίνεται αναγκαίο να τονιστεί ότι η συνολική παρουσία των αρνητικών αριθμών περιορίζεται στο Κεφάλαιο 33 της Ενότητας 6 του σχολικού εγχειριδίου της Ε’ τάξης, ουσιαστικά δηλαδή σε 4 σελίδες, 2 στο Βιβλίο του Μαθητή και άλλες 2 στο Τετράδιο

Εργασιών. Συγκεκριμένα στο κεφάλαιο 33 στο Βιβλίο του Μαθητή αρχικά δηλώνεται ο τίτλος και έπειτα μέσω διερεύνησης και γνωστών μοντέλων, όπως το ασανσέρ και το θερμόμετρο, επιχειρείται η ενεργοποίηση της διαισθητικής αντίληψης και η ενσωμάτωση των εννοιών και των διαδικασιών. Έπειτα, δίνεται ο ακριβής, σαφής ορισμός των εννοιών, ακολουθούν παραδείγματα, εφαρμογές, βασισμένες πάλι σε δημοφιλή μοντέλα (μάρκες) και αναστοχασμοί, ώστε ο μαθητής/τρια να κατανοήσει, να ανακαλύψει τις στρατηγικές επίλυσης και να γίνει πραγματικός κάτοχος της γνώσης. Από την άλλη στο Τετράδιο Εργασιών βαρύτητα δίνεται στην εμπέδωση και την εφαρμογή των νέων εννοιών, ενώ επιχειρείται η επέκταση της γνώσης με στόχο τη βαθύτερη κατανόησή της. Στις πρώτες τέσσερις ασκήσεις χρησιμοποιείται η αριθμογραμμή ως εργαλείο για ταξινόμηση αριθμών και για απλούς υπολογισμούς. Στην επόμενη άσκηση χρησιμοποιείται το πλαίσιο των μέτρων πάνω και κάτω από τη θάλασσα. Το Κεφάλαιο 33 ολοκληρώνεται με ένα πρόβλημα, με ελάχιστες και μέγιστες θερμοκρασίες και μια διερεύνηση - επέκταση, που απαιτούν υπολογισμούς με αρνητικούς και θετικούς αριθμούς.

Όσο και αν θεωρητικά παρουσιάζεται ολοκληρωμένος ο σχεδιασμός, πρακτικά δεν φαίνεται να είναι επαρκής, ώστε να οδηγήσει στην εκπλήρωση του διδακτικού στόχου. Το Κεφάλαιο 33 είναι πυκνογραμμένο και το φάσμα των τύπων εργασιών δεν είναι πλήρες ούτε επαρκές. Παρέχονται μεν ποικίλες δραστηριότητες, η παρουσίαση τους είναι όμως σύντομη και επιφανειακή και δεν υπάρχει ο απαιτούμενος αριθμός δραστηριοτήτων και χρόνος για ουσιαστική αφομοίωση, εμβάθυνση και επέκταση της μαθηματικής γνώσης.

Πιθανόν για τον λόγο αυτό τονίζεται εξ αρχής από τους συγγραφείς του εγχειριδίου, η σημασία του ρόλου του εκπαιδευτικού και του δίνεται η ευχέρεια να επιλέγει, να αντικαθιστά και να προσθέτει δραστηριότητες κατάλληλες και προσαρμοσμένες ανάλογα στις ανάγκες της τάξης. Αξιοσημείωτο ωστόσο είναι ότι δεν περιλαμβάνονται προτεινόμενες δραστηριότητες ούτε στο Βιβλίο του Εκπαιδευτικού.

Επομένως, είναι έντονος ο προβληματισμός κατά πόσο αρκεί το ένα και μοναδικό Κεφάλαιο στο Βιβλίο του Μαθητή και στο Τετράδιο Εργασιών της Ε΄ Δημοτικού, αν αποτελέσουν τα μοναδικά εγχειρίδια, να καλύψουν τις ανάγκες των εκπαιδευτικών και των μαθητών/τριών και σε ποιο βαθμό.

Κοινή συνισταμένη των διεθνών και του ελληνικού Προγράμματος Σπουδών αποτελεί η αναγνώριση ότι η κατανόηση των εννοιολογικών πτυχών των ακεραίων αριθμών και η επίδειξη της ικανότητας επιτυχούς εργασίας με πράξεις αρνητικών αριθμών αποτελεί θεμέλιο για την Άλγεβρα. Ακόμη, σε όλα προβλέπεται η εισαγωγή στην έννοια των αρνητικών αριθμών στις τελευταίες τάξεις της Πρωτοβάθμιας βασικής εκπαίδευσης. Διαφοροποίηση εντοπίζεται ως προς τις μεθόδους διδασκαλίας, τις δραστηριότητες και κατά κύριο λόγο στον χρόνο που διατίθεται για εξάσκηση και αφομοίωση.

1.5 Διδασκαλία αρνητικών στο δημοτικό

«Η αποτελεσματική διδασκαλία των μαθηματικών απαιτεί κατανόηση του τι γνωρίζουν οι μαθητές και οι μαθήτριες, τι χρειάζεται να μάθουν και στη συνέχεια εξασφάλιση της πρόκλησης και της υποστήριξης, για να το μάθουν.» (NCTM, 2000 όπ.αναφ. στο Van de Walle, 2007).

Η δομή της διδασκαλίας και ο ρόλος των εκπαιδευτικών στη μάθηση και στη σχέση που θα αναπτυχθεί με τα μαθηματικά είναι καθοριστικά. Μια ποιοτική διδασκαλία προϋποθέτει απόλυτη και σε βάθος κατανόηση του αντικειμένου της διδασκαλίας, γνώση του τρόπου με τον οποίο μαθαίνουν και αντιλαμβάνονται οι μαθητές/τριες και προσεκτική επιλογή των θεμάτων, των στρατηγικών και των εμπειριών που θα οδηγήσουν στη διεύρυνση των γνώσεων (Van de Walle, 2007).

Όσον αφορά τη διδασκαλία των αρνητικών αριθμών οι εκπαιδευτικοί τη θεωρούν δύσκολη και απαιτητική. Συχνά αναγκάζονται να υπαναχωρούν σε ανούσιους κανόνες και κόλπα δυσχεραίνοντας την εννοιολογική κατανόηση. Ακόμη, παρόλο που κατά τη διάρκεια των σπουδών τους αποκτούν εξειδίκευση σχετικά με το περιεχόμενο και τη διδασκαλία του θέματος, είναι πιθανό να επηρεάζονται από τις εμπειρίες τους ως μαθητές/τριες και να διδάσκουν μιμούμενοι και ακολουθώντας τον τρόπο που είχαν διδαχθεί στα μαθητικά τους χρόνια.

Οι Chrysostomou και Mousoulides (2010) διερεύνησαν και ανέλυσαν το βάθος της γνώσης παιδαγωγικού περιεχομένου φοιτητών/τριών εκπαιδευτικών στον τομέα των αρνητικών αριθμών. Η γνώση του παιδαγωγικού περιεχομένου περιλαμβάνει τη γνώση αναπαραστάσεων και διδακτικών στρατηγικών, ώστε να γίνει κατανοητό ένα θέμα και τη μετα-κατανόηση του τι διευκολύνει ή δυσχεραίνει τη μάθησή του. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας οι φοιτητές/τριες είχαν σημαντικές δυσκολίες τόσο στο περιεχόμενο όσο και στη διδασκαλία των αρνητικών αριθμών. Η γνώση του περιεχομένου τους περιοριζόταν στις διαδικασίες και δεν μπορούσαν να αναφέρουν κατάλληλα μοντέλα διδασκαλίας ή αναπαραστάσεις. Επίσης, οι εξηγήσεις τους έδειχναν απουσία εννοιολογικής κατανόησης και εξάρτηση από κανόνες και απομνημόνευση. Βάση των παραπάνω γίνεται αντιληπτό ένα από τα βασικότερα προβλήματα της διδασκαλίας. Η περιορισμένη γνώση περιεχομένου δυσχεραίνει και αποτελεί εμπόδιο για τη συνειδητοποίηση όσων απαιτούνται για την επιτυχή διδασκαλία των αρνητικών αριθμών.

Σημαντικό ακόμη θέμα που αφορά τη διδασκαλία των αρνητικών αριθμών αποτελεί η κατάλληλη ηλικία για την εισαγωγή των αρνητικών αριθμών. Τα παιδιά από πολύ μικρή ηλικία έχουν γνωρίσει νοητικά μοντέλα και σημαντικά τμήματα των μαθηματικών που προέρχονται από την καθημερινή τους εμπειρία και ενασχόληση με ποσότητες φυσικών υλικών. Δεδομένου ότι οι αρνητικοί αριθμοί δεν εμφανίζονται στον φυσικό κόσμο, για την ενσωμάτωση είναι αναγκαία η αλλαγή των αρχικών νοητικών μοντέλων. Τα παιδιά έχουν κάποιες άτυπες εμπειρίες με τους αρνητικούς αριθμούς, δεν τους συναντούν όμως σε καταστάσεις και προβλήματα της καθημερινής τους ζωής. Για αυτόν το λόγο η επίσημη εκπαίδευση θα πρέπει να συμβάλει στην ανάπτυξη μορφών συλλογισμού και μαθηματικών εννοιών και να δώσει βαρύτητα σε όσα δεν μπορούν να διδαχθούν ανεπίσημα. Η Bofferding (2010) υποστηρίζει ότι τα μικρά παιδιά επωφελούνται από παιχνίδια με αρνητικούς αριθμούς και μπορούν να αξιοποιηθούν στη διδασκαλία. Η εισαγωγή σε μικρότερη ηλικία θα βοηθήσει να ξεπεραστούν γνωσιολογικά εμπόδια και να δημιουργηθεί ένα συνεκτικό μοντέλο για τους αρνητικούς αριθμούς, αν και ο Wessman-Enzinger υποστηρίζει ότι είναι μάταιη η αναζήτηση ενός ιδανικού εκπαιδευτικού μοντέλου που θα βοηθήσει να ξεπεραστεί η εννοιολογική ασυνέχεια (Harel, 2019). Επιπρόσθετα, θα διευκολύνει την πραγματοποίηση συνδέσεων και συσχετίσεων των νέων γνώσεων με όσες έχουν ήδη αναπτυχθεί, την απόκτηση εκτεταμένων εμπειριών με την έννοια των αρνητικών, την προετοιμασία για τις πράξεις και την έγκαιρη αντιμετώπιση αντικρουόμενων αντιλήψεων.

Συμπερασματικά, η αποτελεσματική διδασκαλία εξαρτάται και επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες, όπως η γνώση περιεχομένου, η ηλικία εισαγωγής αλλά και η επιλογή μεθόδων, μοντέλων και στρατηγικών. Αναγνωρίζοντας την πολυπλοκότητα της γνώσης των αρνητικών αριθμών, τα κενά στην κατανόηση και την αναπτυξιακή αλληλεξάρτηση, τα Προγράμματα Σπουδών πρέπει να ενθαρρύνουν και να κατευθύνουν, προκειμένου να βελτιωθεί η εκμάθηση και η διδασκαλία τους.

1.6 Διδακτικές προσεγγίσεις στους αρνητικούς αριθμούς

Οι αρνητικοί αριθμοί είναι ένα σημαντικό θέμα στα μαθηματικά που είναι δύσκολο να κατανοήσουν οι μαθητές/τριες. Κατά τη διδασκαλία είναι σημαντικό να χρησιμοποιείται μια ποικιλία δραστηριοτήτων και πλαισίων, για να γίνεται πιο ενδιαφέρουσα, ελκυστική και αποτελεσματική. Η κατάλληλη διδακτική προσέγγιση στους αρνητικούς αριθμούς έχει απασχολήσει την κοινότητα της Διδακτικής των Μαθηματικών. Γενικά, οι διδακτικές προσεγγίσεις που ακολουθούνται ταξινομούνται σε δύο κατηγορίες: σε αυτές που χειρίζονται τους ακεραίους ως αφηρημένες οντότητες και σε αυτές που με συγκεκριμένα μοντέλα επιχειρούν να προσδώσουν νόημα στους ακεραίους και στις πράξεις με αυτούς. Σήμερα επικρατούσα είναι η άποψη της αξιοποίησης πολλαπλών μοντέλων για τη διδασκαλία των πράξεων με ακέραιους αριθμούς που παρουσιάζονται ως συγκεκριμένα αντικείμενα ή οντότητες.

Η Bofferding (2014) έκανε μια μελέτη σε μαθητές/τριες της πρώτης τάξης (6-7 χρόνων) με στόχο να ελεγχθεί αν επιτυγχάνεται βαθύτερη κατανόηση των αρνητικών αριθμών με τη χρήση αριθμητικών επιτραπέζιων παιχνιδιών. Συμπέρανε ότι οι μαθητές/τριες ωφελήθηκαν στην αναγνώριση και την ταξινόμηση των ακεραίων, στην αναγνώριση του αρνητικού πρόσημου ως σημαντικό χαρακτηριστικό για τον ορισμό ενός νέου αριθμού και στην επιτυχή αντίστροφη μέτρηση έως το -10.

Οι Linchevski και Williams (1999) αναφέρθηκαν σε μια εκπαιδευτική μέθοδο που βασίζεται στη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση, στοχεύει στην υπέρβαση του γνωστικού κενού κατά την επέκταση στους αρνητικούς αριθμούς και αποφεύγει την εισαγωγή των ακεραίων εξ αρχής με αλγεβρικό τρόπο. Για τον εντοπισμό των διαισθητικών κενών, την υπερπήδησή τους και τη διευκόλυνση της μαθηματικοποίησης πρότειναν τα εξής παιχνίδια:

- Παιχνίδι ντίσκο: Στο παιχνίδι αυτό προσομοίωσης οι μαθητές/τριες παρακολουθούσαν, κατέγραφαν τον αριθμό των χορευτών που έφταναν ή έφευγαν από τις πύλες χρησιμοποιώντας διπλό άβακα, που είχε δύο σύρματα με κίτρινες χάντρες για έξοδο και μπλε χάντρες για είσοδο και έλεγχαν αν είχε ξεπεραστεί ο επιτρεπόμενος αριθμών ατόμων στον χώρο. Ως θετικά αποτελέσματα του παιχνιδιού αναφέρθηκαν η ανάπτυξη διαισθητικών στρατηγικών για τον χειρισμό του άβακα και έπειτα των ακέραιων σημείων, η ομαλή εισαγωγή ακέραιων σημείων, η επιτυχής εκτέλεση προσθέσεων και αφαιρέσεων μέσω άβακα, η χρήση της στρατηγικής ακύρωσης, όταν περνούσαν το μηδέν και ο προϊδεασμός για τις ακέραιες πράξεις.

- Παιχνίδι με ζάρι: Οι ομάδες των μαθητών/τριών έριχναν τρία ζάρια, ένα κίτρινο και ένα μπλε ζάρι με αριθμούς και ένα τρίτο με «+» και «-», κατέγραφαν τους πόντους σε άβακα, έκαναν γραπτούς υπολογισμούς και τέλος αιτιολογούσαν τη στρατηγική που χρησιμοποίησαν για την καταγραφή. Μέσω του αυθεντικού και ανταγωνιστικού παιχνιδιού οι μαθητές/τριες κατάφεραν να κατασκευάσουν στρατηγικές που ανταποκρίνονταν στην κατάσταση, όπως η στρατηγική της ακύρωσης, να διαπραγματευτούν τις δύο έννοιες του μείον, να χειριστούν τους ακέραιους αριθμούς ως αντικείμενα στην πρόσθεση και την αφαίρεση, να συγκεκριμενοποιήσουν τις μαθηματικές έννοιες και να ενσωματώσουν τους νέους αριθμούς στα μαθηματικά εισάγοντας τη μαθηματική φωνή και τα σύμβολα.

Η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση αποτέλεσε τη βάση και της διδακτικής προσέγγισης των Stephan και Akyuz (2012). Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της εργασίας τους ο συνδυασμός χρηματοοικονομικού πλαισίου και κάθετης κενής αριθμογραμμής βοήθησε τους/τις συμμετέχοντες/ουσες μαθητές/τριες ηλικίας 6-13 χρόνων να οικοδομήσουν την εννοιολογική κατανόηση των ακέραιων και των πράξεών τους. Συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε ότι οι εμπειρίες τους με περιουσιακά στοιχεία, χρέη και καθαρά ποσά συνέβαλαν στην άμεση αιτιολόγηση για αριθμό κάτω από το μηδέν, στην κατανόηση ότι ο ακέραιος είναι αφηρημένο αντικείμενο, στη χρήση του μηδενός ως σημείο αναφοράς στους υπολογισμούς, στη βελτίωση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης και κυρίως στην κατανόησή τους τόσο διαδικαστικά όσο και εννοιολογικά.

Στη μελέτη των Slezáková, Hejný και Kloboučková (2013) παρουσιάζονται τα διδακτικά περιβάλλοντα του σκαλοπατιού και της σκάλας και η μέθοδος βηματισμού ως εργαλείο για την κατανόηση των αρνητικών αριθμών και την επίλυση λεκτικών προβλημάτων. Η φυσική ρυθμική κίνηση του βηματισμού δημιουργεί ένα σχήμα που αποτελείται από διακριτές μαθηματικές ιδέες και συμβάλλει στην κατάκτηση του αλγορίθμου, στην εξοικείωση με το σημασιολογικό μοντέλο ενός αριθμού, στην κατάκτηση του σημασιολογικού μοντέλου του αρνητικού αριθμού, στη χρήση ενός συμβολισμού (βέλος) για καταγραφή και στην κατάκτηση του μοντέλου της απόλυτης τιμής ως ο αριθμός των βημάτων ανεξαρτήτως προσανατολισμού.

Οι Bruno και Martinon (1999) σχεδίασαν ειδικό διδακτικό υλικό για μαθητές/τριες 12-13 χρόνων με δραστηριότητες σε αριθμητικές καταστάσεις που εντοπίζονται στα εξής έξι περιβάλλοντα: οφειλή, επίπεδο - όροφος, θερμοκρασία, χρονολογία, στάθμη της θάλασσας και δρόμος. Από την ανάλυση των συνεντεύξεων φαίνεται ότι το περιβάλλον σχετίζεται ως έναν βαθμό με τη στρατηγική επίλυσης, καθοριστική όμως είναι η σημασία των προηγούμενων γνώσεων για τους θετικούς και η επίδρασή τους στους αρνητικούς στην κατανόηση, στην αναπαράσταση και την επίλυση προβλημάτων.

Οι Behrend και Mohs (2006) υποστηρίζουν ότι ο συλλογισμός και όχι η εστίαση σε συγκεκριμένες έννοιες και διαδικασίες των μαθηματικών, επιτρέπει την ανάπτυξη της κατανόησης. Για αυτό προτείνουν την «έκθεση» σε προβληματική κατάσταση και την επίλυση προβλημάτων ακόμα και σε θεματικές που δεν συμπεριλαμβάνονται στο Πρόγραμμα Σπουδών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης. Βασικό ρόλο για την επιτυχία της προσέγγισης παίζει η δημιουργία κατάλληλου κλίματος και η επιλογή προβλημάτων που προκαλούν την περιέργεια, ενθαρρύνουν τη συζήτηση και δίνουν χρόνο για επεξεργασία, αμφισβήτηση και εξερεύνηση των ιδεών.

Η Mukhopadhyay (1990) στην έρευνά της αξιοποίησε τη μέθοδο της αφήγησης ιστορίας. Διερεύνησε την ικανότητα παιδιών Δημοτικού σχολείου να ερμηνεύουν μια φυσική κοινωνική κατάσταση και να χρησιμοποιούν την κατανόησή τους τόσο για τη δημιουργία και την εφαρμογή νοητικού μοντέλου χρεών και περιουσιακών στοιχείων όσο και την επίλυση προβλημάτων που περιείχαν αρνητικούς αριθμούς. Η αφήγηση ιστορίας αξιολογήθηκε ως μια αποτελεσματική μέθοδος για την απόσπαση άτυπης γνώσης, καθώς, σύμφωνα με τα αποτελέσματα, τα προβλήματα που τέθηκαν στο πλαίσιο της ιστορίας επιλύθηκαν με μεγαλύτερη ευκολία και επιτυχία συγκριτικά με εκείνα που δόθηκαν ως τυπικές εξισώσεις.

Η έρευνα, που έκαναν οι Periasamy και Sivasubramaniam (2018), έδειξε ότι η έννοια μοτίβου αναγνώρισης, δηλαδή μια υπολογιστική έννοια σκέψης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί, για να βοηθήσει άτομα που δεν έχουν διδαχθεί επίσημα τους αρνητικούς αριθμούς ή αδύναμα να επινοούν διαδικασίες σκέψης για επίλυση πράξεων αφαίρεσης με αρνητικούς αριθμούς. Οι μαθητές/τριες που συμμετείχαν στην έρευνα μέσα από τις δραστηριότητές για τη δημιουργία των μοτίβων με τη χρήση τριών συμβόλων: μια κουκίδα, ένα τρίγωνο και ένα σύμβολο του ίσον, κατάφεραν να προσεγγίσουν δημιουργικά και να κατανοήσουν την έννοια της αφαίρεσης.

Πέρα όλων των παραπάνω οι ερευνητές αξιοποίησαν πλαίσια με: μπαλόνια με ήλιο και σακούλες με άμμο (Janvier, 1985), ταχυδρόμο που παρέδιδε λογαριασμούς και επιταγές (Davis, 1967), αρνητικά και θετικά σωματίδια (Battista, 1983), επιβάτες σε λεωφορείο (Streefland, 1996), μήκη/θετικά και αρνητικά τρένα (Schwarz et al., 1994), χελώνες LOGO κίνηση σε οριζόντια αριθμογραμμή (Thompson & Dreyfus, 1988) και σενάριο με δίχρωμες μάρκες (Lytle, 1994; Smith, 1995) κ.ά. (όπ.αναφ. στο Stephan & Akyuz, 2012).

Σχετικά με τη χρήση πλαισίων οι απόψεις μεταξύ των ερευνητών είναι αντικρουόμενες. Εκτός από εκείνους που θεωρούν ότι ένα ρεαλιστικό περιβάλλον επιδρά θετικά (De Lange, 1987; Gravemeijer, 1994; Stephan, Bowers, Cobb & Gravemeijer, 2003), υπάρχουν και ερευνητές που υποστηρίζουν ότι η μεταφορά σε αφηρημένους τομείς είναι πιο αποτελεσματική, όταν γίνεται με αφηρημένους τρόπους παρά όταν δεσμεύεται νοηματικά σε συγκεκριμένο πλαίσιο (De Bock, Deprez, Van Dooren, Roelens & Verschaffel, 2011; Kaminski, Sloutsky & Heckler, 2008, όπ.αναφ. στο Stephan & Akyuz, 2012).

Συνοψίζοντας είναι σημαντικό και αποδεδειγμένα βοηθητικό να χρησιμοποιούνται ποικίλες διδακτικές προσεγγίσεις, για να κατανοήσουν με σαφήνεια οι μαθητές/τριες τους αρνητικούς αριθμούς. Ωστόσο χρειάζεται προσοχή, ώστε οι ρεαλιστικές καταστάσεις, οι φυσικές εικόνες και τα προβλήματα λέξεων που επιλέγονται να μην είναι υπερβολικά τεχνητά και να βρίσκουν εφαρμογή στον πραγματικό κόσμο.

1.7 Αναπαράσταση στους αρνητικούς αριθμούς

Η διδασκαλία των Μαθηματικών συνδέεται στενά με τη χρήση και την κατανόηση των αναπαραστάσεων. Η κατάλληλη αξιοποίησή τους στη διδασκαλία επιδρά καθοριστικά και οι εκπαιδευτικοί, όπως υποστηρίζουν οι Goldin και Shteingold (2001, όπ.αναφ. στο Mainali, 2021), θα πρέπει να έχουν επίγνωση των επιπτώσεών τους, προκειμένου να διδάσκουν πιο αποτελεσματικά.

Η έννοια της αναπαράστασης δεν έχει οριστεί με σαφήνεια και στη βιβλιογραφία εντοπίζονται διάφορες ερμηνείες ανάλογα με το μαθηματικό πλαίσιο. Κατά τον Vergnaud (1998) είναι πολύπλοκη, γιατί δεν αφορά κάτι στατικό, αλλά αντίθετα μια δυναμική διαδικασία που συνδέεται απόλυτα με τη διαδικασία μαθηματικής σκέψης ενός ατόμου (Mainali, 2021). Ο Janvier (1987) υποστηρίζει ότι στην πραγματικότητα η αναπαράσταση συνδυάζει αυτό που εκφράζεται σε χαρτί και υπάρχει με τη μορφή φυσικών αντικειμένων παράλληλα με την κατασκευασμένη διάταξη ιδεών στο μυαλό κάποιου (Mainali, 2021).

Οι αναπαραστάσεις αποτελούν ισχυρά εργαλεία επικοινωνίας και εννοιολογικής κατανόησης μαθηματικών ιδεών και αφηρημένων εννοιών. Περιγράφουν υλικά αντικείμενα, φυσικές ιδιότητες, ενέργειες, σχέσεις και περιλαμβάνουν κατά κύριο λόγο ποικίλες εξωτερικές μορφές επικοινωνίας, όπως διαγράμματα, σημεία, σχήματα, σύμβολα κ.ά.. Ταυτόχρονα, όμως δηλώνουν αντικείμενα αφηρημένα και εσωτερικές δομές που σχηματίζονται μέσα στο μυαλό ενός ατόμου (Mainali, 2021).

Ο Janvier (1987, όπ.αναφ. στο Mainali, 2021) προχωρά στην κατηγοριοποίηση των αναπαραστάσεων σε εσωτερικές (internal ή mental) και εξωτερικές (external). Κριτήριο για τη διάκρισή τους είναι αν η αναπαράσταση αποτελεί σχηματισμό μέσα στο μυαλό ως νοητική απεικόνιση ή εξωτερική έκφραση μέσω συμβόλων, σχημάτων ή γραφημάτων. Στην πραγματικότητα υπάρχει στενή σύνδεση μεταξύ εξωτερικών και εσωτερικών αναπαραστάσεων, καθώς η εξωτερική αποτελεί ενσάρκωση της εσωτερικής αντίληψης ή κατασκευής ενός μαθητή (Lesh, Post & Behr, 1987 όπ.αναφ. στο Mainali, 2021).

Είναι σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να φροντίσουν για την έγκαιρη έκθεση σε ποικίλες αναπαραστάσεις και την εξάσκηση σε αυτές, ώστε οι μαθητές/τριες να αποκτήσουν δεξιότητες και ευελιξία στην επιλογή της κατάλληλης ανά περίσταση αναπαράστασης.

1.7.1 Νοερές αναπαραστάσεις αρνητικών αριθμών

Η εσωτερική αναπαράσταση, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, δεν είναι φυσικό αντικείμενο, αλλά νοητική εικόνα που δημιουργείται για μαθηματικά αντικείμενα και διαδικασίες και γίνεται αντιληπτή ως νοερή απεικόνιση μέσα στο μυαλό ενός ατόμου. Λόγω της ιδιαίτερης φύσης της είναι δύσκολο επομένως κάποιος να την περιγράψει, να την παρατηρήσει και να τη διερευνήσει. Η ανίχνευση μπορεί να γίνει μόνο με παρατήρηση της εξωτερικής συμπεριφοράς του ατόμου. Ακόμη όμως και η ερμηνεία της είναι περίπλοκη, καθώς ακόμα και αν εξωτερικεύεται, δεν είναι απαραίτητα ταυτόσημη. Για αυτούς τους λόγους μάλιστα ορισμένοι ερευνητές αμφισβητούν την ύπαρξή της ή τη δυνατότητα εξερεύνησής της.

Στη βιβλιογραφία σχετικά με τη διδασκαλία των ακέραιων αριθμών υπάρχουν λιγοστά στοιχεία σχετικά με τον τρόπο ανάπτυξης νοητικών μοντέλων ακέραιης τάξης, τιμών, κατευθυνόμενου μεγέθους ή σημειογραφία. Για μια επιτυχή διδασκαλία είναι πολύ σημαντική η γνώση του τρόπου αντιπροσώπευσης εσωτερικά των εννοιών από τους/τις μαθητές/τριες, ανάπτυξης των δομικών σχέσεων και σύνδεσης των αναπαραστάσεων. Σύμφωνα με σύγχρονες έρευνες, η ικανότητα απόδοσης νοημάτων, χρήσης αρνητικών αριθμών και ανάπτυξης διαφορετικών δομικά εσωτερικών αναπαραστάσεων είναι εμφανής σε παιδιά πολύ μικρής ηλικίας. Επομένως, μια αναπροσαρμογή και μια στόχευση στην ανάπτυξη ισχυρών, ευέλικτων εσωτερικών συστημάτων αναπαράστασης να λειτουργούσε προληπτικά στα εμπόδια και τα γνωστικά αδιέξοδα που παρατηρούνται (Goldin & Shteingold, 2001).

Κατά τον Bruner (1966) η νοητική αναπαράστασης της γνώσης μπορεί να διακριθεί σε ενεργητική, οπτική και συμβολική. Στην ενεργητική η μάθηση επιτυγχάνεται μέσω δράσης, στην οπτική υποδηλώνεται με οπτικοποίηση και σύνοψη εικόνων και στη συμβολική με σύμβολα και αφηρημένη μαθηματική γλώσσα. Η ανάπτυξη αυτών των νοητικών αναπαραστάσεων συντελείται διαδοχικά και είναι αναγκαίο να προηγηθεί η ενεργητική και η ενασχόληση με αντικείμενα πριν την οπτική και συμβολική (Mainali, 2021).

Οι Varma, Blair και Schwarz (2019), αναζητώντας τρόπους για την ενίσχυση της κατανόησης των αρνητικών, αναφέρθηκαν σε τρία μοντέλα που βασίζονται στους φυσικούς αριθμούς. Το πρώτο είναι το αναλογικό+ μοντέλο, το οποίο είναι οργανωμένο και προσανατολισμένο όπως οι φυσικές αριθμητικές γραμμές. Το μηδέν βρίσκεται στη μέση, οι θετικοί δεξιά και οι αρνητικοί αριστερά. Το δεύτερο είναι το σύμβολο+, στο οποίο οι κρίσεις σχετικά με τις σχέσεις διάταξης των αρνητικών βασίζονται στις γνώσεις των φυσικών αναφορικά με τη διάταξη και τους συμβολικούς κανόνες χειρισμού των θετικών και αρνητικών συμβόλων. Το τρίτο μοντέλο, το analog−x, αποτελεί συνεισφορά των Varma et al. (2019). Σε αυτό η νοητική αριθμητική γραμμή δεν επεκτείνεται, αλλά αντανακλάται συμμετρικά και δημιουργεί την έννοια του αντίστροφου πρόσθετου, όπου για κάθε x υπάρχει το –x. Το τρίτο αυτό μοντέλο αποτελεί συνδυασμό της αναπαράστασης μεγέθους, του συστήματος των ακέραιων συμβόλων και της επεξεργασίας της συμμετρίας. Οι Varma et al. (2019, όπ.αναφ. στο Harel, 2019) συμπεραίνουν ότι εμπλουτίζοντας τη νοητική αναπαράσταση ήδη γνωστών εννοιών, αντανακλώνται οι ιδιότητες της νέας και αποκτάται διαίσθηση χωρίς αντιληπτική κινητική εμπειρία.

Οι Vosniadou και Brewer (1992) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές/τριες αναπτύσσουν ένα αρχικό νοητικό μοντέλο για τις έννοιες βασισμένο στις άμεσες εμπειρίες τους με τον κόσμο και έπειτα στηριζόμενοι/ες σε αυτές συνθέτουν ένα σύνολο κανόνων, που ονομάζεται θεωρία πλαισίου.

Αναφορικά με τις έννοιες των αριθμών η ανάπτυξη της θεωρίας του πλαισίου βασίζεται στα εξής:

- Οι αριθμοί μετρούν αριθμούς
- Οι αριθμοί είναι διακριτοί και δεν υπάρχει κανένας μεταξύ τους
- Υπάρχει ένας μικρότερος αριθμός (0 ή 1)
- Οι αριθμοί ταξινομούνται με βάση τη θέση τους στη λίστα μέτρησης και μεγαλύτεροι είναι όσοι βρίσκονται μακριά από το μηδέν
- Οι αριθμοί με τα περισσότερα ψηφία είναι οι μεγαλύτεροι
- Πρόσθεση οδηγεί σε μεγαλύτερο
- Αφαίρεση οδηγεί σε μικρότερο
- Κάθε αριθμός έχει μόνο μία συμβολική παράσταση (Βοσνιάδου, Βαμβακούση & Σκοπελίτη, 2008, όπ.αναφ. στο Bofferding, 2014).

Από πολύ νωρίς οι μαθητές/τριες έρχονται σε επαφή με αυτό το πλαίσιο και αναπτύσσουν μια νοητική αριθμογραμμή. Με την εισαγωγή όμως των αρνητικών αριθμών καλούνται να τροποποιήσουν τα νοητικά τους μοντέλα και τη νοητική αριθμητική γραμμή, ώστε να συμπεριλαμβάνονται οι νέοι αριθμοί. Συγκεκριμένα πρέπει να επεκτείνουν την αριθμητική ακολουθία αριστερά του μηδενός με αριθμούς συμμετρικούς των θετικών και να αντιληφθούν ότι οι αριθμοί που βρίσκονται πιο αριστερά αντιστοιχούν σε μικρότερες τιμές. (Bofferding, 2014)

Σύμφωνα με τους Goldin και Kaput (2013) τα νέα εσωτερικά συστήματα αναπαράστασης δημιουργούνται στηριζόμενα στα προϋπάρχοντα και αναπτύσσονται κατά τα εξής τρία στάδια:

- Πρώτο εφευρετικό – σημειωτικό στάδιο: εισαγωγή νέων χαρακτήρων και συμβόλων για τον συμβολισμό όψεων ενός αναπαραστατικού συστήματος που είχε αναπτυχθεί προηγουμένως.
- Δεύτερο στάδιο: δημιουργία νέου συστήματος κατά το πρότυπο του προηγούμενου και διαμόρφωση κανόνων για τα νέα σύμβολα.

- Τρίτο στάδιο: Αυτονόμηση νέου συστήματος, διαχωρισμός από το πρότυπο και απόκτηση διαφορετικών και γενικότερων εννοιών και ερμηνειών (Goldin & Shteingold, 2001).

Υπογραμμίζεται ότι το πρώτο είναι ψυχολογικά το πιο κρίσιμο στάδιο, λόγω της δύναμης της αρχικής εικόνας. Σε πραγματικό νόημα μια νέας αναπαράστασης μετατρέπεται εκείνο που είχε αποδοθεί αρχικά όχι μόνο από τα παιδιά, αλλά και από τους ενήλικες.

Οι Prather και Alibali (2004; 2008, όπ.αναφ. στο Periasamy & Sivasubramaniam, 2018) διαπίστωσαν στην έρευνά τους ότι ακόμη και οι αναπαραστάσεις των ενηλίκων για τους αρνητικούς αριθμούς δεν ήταν τόσο καλά εδραιωμένες όσο εκείνες με θετικούς.

Στοχεύοντας στην αποτελεσματικότερη κατανόηση των μαθηματικών, τα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών περιέχουν πλούσιες και ποικίλες εικονικές αναπαραστάσεις. Όσον αφορά τους αρνητικούς αριθμούς, η αριθμογραμμή αναγνωρίζεται διεθνώς ως το καταλληλότερο εργαλείο αναπαράστασης στη διδασκαλία της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (Κολέζα & Φακούδης, 2009).

Πολλοί ερευνητές αναφέρουν ότι η νοητική αριθμητική γραμμή είναι προσανατολισμένη χωρικά. Έτσι, τα ψηφία που αντιπροσωπεύουν μικρά μεγέθη διευκολύνουν τις απαντήσεις στην αριστερή πλευρά, ενώ τα ψηφία των μεγαλύτερων μεγεθών στη δεξιά πλευρά (Dehaene, Bossini & Giraux, 1993; Fias, 2001; Fias, Brysbaert, Geypens & d`Ydewalle, 1996; Fischer, 2001; 2003a; Fischer, Castel, Dodd & Pratt, 2003; Fischer, Warlop, Hill & Fias, 2004, όπ.αναφ. στο Fischer & Rottmann, 2005).

Αξιοποιώντας το φαινόμενο της χωρικής συνάφειας, ο Fischer (2003) διερεύνησε τις αναπαραστάσεις για τους θετικούς και τους αρνητικούς αριθμούς και κατέληξε ότι πράγματι υπάρχει συσχέτιση των αρνητικών με το αριστερό διάστημα. Αντίθετα, οι Nuerk, Iversen και Willmes (2004) στη δική τους έρευνα δεν εξακρίβωσαν αξιόπιστη χωρική συσχέτιση, παρόλο που ήταν εμφανής μια τάση. Βασιζόμενοι στην προσέγγιση των Nuerk et al. (2004), οι Fischer και Rottmann (2005) προχώρησαν σε μια επανεξέταση και οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι υπάρχει συνάφεια με τους θετικούς, όχι όμως με τους αρνητικούς. Αυτό υποδηλώνει ότι υπάρχει μεταξύ τους γνωστική αντίθεση και διαφοροποίηση στην επεξεργασία, ότι οι χωρικές συσχετίσεις δεν προκαλούνται αυτόματα στους αρνητικούς αριθμούς και ότι επικρατεί η ιδέα μια καθαρά θετικής νοητικής αριθμητικής γραμμής με αρχή το μηδέν και επέκταση στα δεξιά.

Η Bofferding (2014) σε έρευνά της σε μαθητές/τριες πρώτης τάξης διερεύνησε πόσο οι άτυπες εμπειρίες με τους αρνητικούς μέσω των επιτραπέζιων παιχνιδιών θα συνέβαλαν στην επέκταση της νοητικής θετικής αριθμογραμμής και σε αρνητική. Διαπίστωσε ότι οι μαθητές/τριες είχαν ήδη προλάβει να αναπτύξουν ισχυρότατες αντιλήψεις για το μηδέν. Για να ξεπεραστεί αυτό το νοητικό εμπόδιο, προτείνει οι αριθμητικές γραμμές που χρησιμοποιούνται κατά τη διδασκαλία να μην έχουν ως αρχή πάντα το μηδέν.

Οι Resnick (1983) και Peled, Mukhopadhyay & Resnick (1989) στις έρευνες τους συμπέραναν ότι οι μαθητές/τριες, για τη νοητική υποστήριξη των αρνητικών αριθμών βασίστηκαν στο νοητικό μοντέλο της αριθμογραμμής. Πιο αναλυτικά χρησιμοποιήθηκαν το μοντέλο της διηρημένης αριθμητικής γραμμής, για τον υπολογισμό από και προς το μηδέν και το μοντέλο συνεχούς αριθμητικής γραμμής, για την εύκολη μετακίνηση ανάμεσα στους θετικούς και τους αρνητικούς αριθμούς, που εμφανίζονταν συνεκτικά διατεταγμένοι (Ural, 2016).

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας των Peled et al. (1989), που αναφέρονταν στη χρήση του μοντέλου διηρημένης αριθμητικής γραμμής, είναι τα συμπεράσματα της μελέτης της Mukhopadhyay (1990) Μάλιστα στην επιλογή του ίσως έπαιξε ρόλο και το κοινωνικό πλαίσιο που υπήρχε στις αφηγηματικές ιστορίες που αξιοποιήθηκαν, προκειμένου να ελεγχθεί η ικανότητα των παιδιών να ερμηνεύουν μια φυσική κοινωνική κατάσταση και να εφαρμόζουν το νοητικό μοντέλο χρεών και περιουσιακών στοιχείων στην επίλυση προβλημάτων με αρνητικούς αριθμούς.

Ο Peled (1991, όπ.αναφ. στο Ural, 2016) διευκρίνισε ότι οι περιγραφές των μαθητών/τριών για τους ακέραιους αριθμούς είναι συμβατές με δύο νοητικά μοντέλα: την αριθμητική γραμμή, στην οποία οι αρνητικοί τοποθετούνται στα αριστερά του μηδενός και έχουν μεγαλύτερη τιμή προς τα δεξιά και ένα σχετικό με ποσότητες, στο οποίο οι αρνητικοί υπολογίζονται ως δυσμενή ποσά, όπως τα χρέη, όπου όσο μεγαλύτερο το δυσμενές ποσό, τόσο μικρότερος ο αριθμός. Επιπρόσθετα, για τα παραπάνω νοητικά μοντέλα περιέγραψε τέσσερα επίπεδα κατανόησης:

- στο πρώτο επίπεδο αναγνωρίζεται η σειρά όλων των ακεραίων με αριθμούς μεγαλύτερους πιο δεξιά στην αριθμητική γραμμή και αριθμούς διατεταγμένους συμμετρικά γύρω από το μηδέν,
- στο δεύτερο επίπεδο είναι δυνατή η πρόσθεση θετικών αριθμών σε οποιοδήποτε ακέραιο,

- στο τρίτο επίπεδο, είναι δυνατή η πρόσθεση ή η αφαίρεση δύο θετικών ή δύο αρνητικών αριθμών και
- στο τέταρτο επίπεδο, είναι δυνατή η πρόσθεση ή η αφαίρεση οποιωνδήποτε δύο ακέραιων αριθμών.

Να σημειωθεί βέβαια ότι πέρα από τη διατύπωση της θεωρίας σχετικά με το τι αναμένεται να κάνουν οι μαθητές/τριες και την αναγνώριση της συμβολής της σημειογραφίας στη δυσκολία των μαθητών/τριών, δεν υπάρχει καμία διευκρίνιση σχετικά με ποιον τρόπο θα μπορούσαν να αναπτυχθούν νοητικά μοντέλα (Ural, 2016).

Η Bofferding (2014) επιχείρησε να εντοπίσει τα νοητικά μοντέλα των μαθητών/τριών πρώτης τάξης για τους αρνητικούς αριθμούς και να διερευνήσει αν η σκέψη τους ενισχύεται ή περιορίζεται με διδασκαλία για την έννοια του πρόσημου. Κατέληξε στο συμπέρασμα ότι για την ανάπτυξη επίσημων νοητικών μοντέλων κρίνεται απαραίτητο να προηγηθεί εννοιολογική αλλαγή και να δοθεί χρόνος και ευκαιρίες.

Συμπερασματικά, όπως επισημαίνει ο Duval (2006), οι πνευματικές διεργασίες και η εννοιολογική κατανόηση ενισχύονται με τη χρήση πλούσιων και ποικίλλων αναπαραστάσεων και μετατροπών. Οι Goldin και Shteingold (2001) τονίζουν ότι η ανάπτυξη επαρκών εσωτερικών αναπαραστάσεων συμβάλλει στην ενίσχυση της αλληλεπίδρασης με τις εξωτερικές αναπαραστάσεις, στην επιλογή κατάλληλων νοητικών διεργασιών και στην επίλυση οποιωνδήποτε ασαφειών προκύψουν.

1.7.2 Αναπαραστατικά μοντέλα αρνητικών αριθμών

Η εξωτερική αναπαράσταση θεωρείται πολύτιμο εργαλείο μάθησης και πραγματικό φυσικό προϊόν. Οι εκπαιδευτικοί καθημερινά χρησιμοποιούν πολλά εποπτικά και χειραπτικά υλικά ως μοντέλα αναπαράστασης κατά τη διδασκαλία τους στην τάξη με σκοπό να αποσαφηνίσουν ιδέες και έννοιες των μαθηματικών. Εκτός βέβαια από τον/την εκπαιδευτικό μπορεί να δημιουργηθούν και από τους/τις μαθητές/τριες. Οι εξωτερικές με τις εσωτερικές δεν είναι πανομοιότυπες, αλλά έχουν αμφίδρομη σχέση. Όπως αναφέρει ο Zhang (1997, όπ.αναφ. στο Mainmali, 2021), η εξωτερική μετατρέπεται σε εσωτερική μέσω της απομνημόνευσης, ενώ το αντίστροφο συμβαίνει μέσω εξωτερίκευσης των εσωτερικών αντιλήψεων του ατόμου. Ο Cuoco

(2001) υποστηρίζει ότι οι εξωτερικές είναι εύκολο να επικοινωνηθούν, αφού πρόκειται για σχέδια, γεωμετρικά σχήματα και εξισώσεις, ωστόσο οι Goldin και Kaput (1996) τονίζουν ότι η ερμηνεία τους είναι υποκειμενική.

Όσον αφορά τον όρο «μοντέλο» συχνά υποδηλώνει ένα χειριστικό βοήθημα, για παράδειγμα διάγραμμα, πίνακα ή διπλό άβακα, ενώ μπορεί να αφορά μια κατάσταση που συνδέεται με διαισθητική γνώση. Σκοπός κάθε μοντέλου είναι η διευκόλυνση κατανόησης και μάθησης των μαθηματικών εννοιών και η αντιμετώπιση γνωστικών εμποδίων. Για να επιτύχει τον σκοπό του, θα πρέπει να είναι περιεκτικό, να περιγράφει πραγματικές καταστάσεις που έχουν νόημα για τους/τις μαθητές/τριες και να μη βασίζεται σε τεχνητές συμβάσεις ή κανόνες χειρισμού έτοιμους και αδικαιολόγητους (Linchevski & Williams, 1999). Επομένως, δεν αποτελούν πανάκεια και απαιτούν προσεκτική κριτική επιλογή. Όπως ισχυρίζεται και ο Fischbein (1977, όπ.αναφ. στο Linchevski & Williams, 1999), κανένα μεμονωμένο μοντέλο δεν είναι δυνατόν να είναι τόσο διαισθητικό όσο και περιεκτικό.

Κατά τους Bruno και Martinón (1999) τα είδη αναπαράστασης που συμβάλλουν σημαντικά στη διδασκαλία των αρνητικών αριθμών μέσω και της αλληλεπίδρασής τους είναι τα εξής τέσσερα: α) η αναπαράσταση στην αριθμητική γραμμή των ακεραίων, β) η ποσοτική αναπαράσταση που είναι ήδη γνωστή από τους φυσικούς αριθμούς, γ) η αναπαράσταση σε ρεαλιστικό πλαίσιο, όπως οι θερμοκρασίες και τα χρέη και τέλος δ) η συμβολική αναπαράσταση.

Η συμβολή της χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων στη μαθηματική διδασκαλία είναι σχεδόν αναμφισβήτητη, ωστόσο δεν αποτέλεσε αποκλειστικό αντικείμενο πολλών ερευνών (Ganor-Stern & Tzelgov, 2008). Είναι κοινά αποδεκτό ότι τα μοντέλα και τα παραδείγματα είναι χρήσιμα για την εννοιολογική κατανόηση ιδιαιτέρως, όταν προηγούνται των κανόνων και των υπολογισμών. Ειδικότερα για τη λειτουργία των πράξεων δημοφιλή και βοηθητικά είναι το μοντέλο με τις μάρκες και η ευθεία των αριθμών. Στο πρώτο με τη χρήση μαρκών δύο διαφορετικών χρωμάτων, ένα για τα θετικά και ένα για τα αρνητικά, γίνεται κατανοητή η ομοιότητα της πρόσθεσης και της αφαίρεσης στους αρνητικούς με τις αντίστοιχες των φυσικών αριθμών και ενισχύεται διαισθητικά η αντίληψη περί ίσων ποσοτήτων. Το δεύτερο τονίζει ότι οι τιμές είναι προσανατολισμένες αποστάσεις και όχι απλά σημεία πάνω σε μια ευθεία. Για να αποφευχθεί η αναφορά σε αριθμούς, γίνεται αναπαράσταση με βέλη, που αντιστοιχούν σε ποσότητες και χαρακτηρίζονται από το μήκος (μέγεθος ή απόλυτη τιμή) και την κατεύθυνση (πρόσημο). Το θετικό βέλος δείχνει δεξιά και το αριστερό αριστερά. Και τα δύο μοντέλα παρά τις επιφανειακές διαφορές τους περικλείουν τις έννοιες «ποσότητα» και «αντίθετος» (Van de Walle, 2007).

Το μοντέλο της αριθμητικής γραμμής αναγνωρίζεται ως εξαιρετικά χρήσιμο από πολλούς ερευνητές μεταξύ των οποίων ο Fischbein (1977) και ο Freudenthal (2012). Το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών (2000) συνιστά τη χρήση του για εξερεύνηση αριθμών μικρότερων από το μηδέν και οι Hativa και Cohen (1995) επιβεβαίωσαν την αποτελεσματικότητά του στη σύγκριση, τους υπολογισμούς και την οπτική ανατροφοδότηση. Επίσης, θεωρείται ότι προωθεί τον αριθμητικό συλλογισμό και υπογραμμίζει τη σημασία του μηδενός (Bofferding & Richardson, 2013). Από τους Stephan και Akyuz (2012) προτείνεται η κενή κάθετη αριθμογραμμή ως μοντέλο οργάνωσης των στρατηγικών πρόσθεσης και αφαίρεσης. Ο Kilhamn (2009) την αναγνωρίζει ως εργαλείο για έκφραση και ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού, αλλά όχι ως ξεχωριστό συστατικό της. Οι Carr και Katterns (1984, όπ.αναφ. στο Bruno & Martinon, 1999) αμφέβαλλαν για την καταλληλόλητά της ως μοντέλο διδασκαλία, ενώ υπάρχουν και επιφυλάξεις για κάποιες στρατηγικές της που ενδέχεται να οδηγήσουν σε αντικρουόμενα μηνύματα αναφορικά με τις έννοιες του συμβόλου μείον και να επηρεάσουν αρνητικά την εννοιολογική κατανόηση (Bofferding, 2014).

Βασικό μοντέλο διδασκαλίας των αρνητικών αριθμών, εκτός από αυτό της αριθμητικής γραμμής, είναι και το μοντέλο της ακύρωσης. Η μεγαλύτερη συνεισφορά του είναι η ανάπτυξη της κατανόησης των κατευθυνόμενων μεγεθών και της δυαδικής σημασίας του συμβόλου που πετυχαίνει μέσω της συνειδητοποίησης από τους/τις μαθητές/τριες ότι η προσθήκη ενός αρνητικού είναι ισοδύναμη με την αφαίρεση ενός θετικού (Liebeck, 1990; Williams, Linchevski & Kutscher, 2008 όπ.αναφ. στο Bofferding, 2014). Το μοντέλο ακύρωσης συναντάται σε διάφορα περιβάλλοντα, όπως κοπή και ένωση τρένων εισόδου και εξόδου (Schwarz et al., 1994), προσθήκη και αφαίρεση μπαλονιών και βαριδίων σε αερόστατο (Janvier, 1987) διατηρώντας όμως τους ίδιους κανόνες (Bofferding & Richardson, 2013).

Για την αντιμετώπιση του γνωστικού κενού στα μαθηματικά, οι Linchevski και Williams (1999) χρησιμοποίησαν μια εκπαιδευτική μέθοδο που βασίζεται στα Ρεαλιστικά Μαθηματικά και περιλαμβάνει τη σύνδεση αντιλήψεων, διαδικασιών και αντικειμένων μέσω του μοντέλου του διπλού άβακα. Το συγκεκριμένο μοντέλο επιτρέπει την αναγνώριση του ακέραιου αρχικά ως διαδικασία και την αναπαράσταση των δύο διαφορετικών ειδών αριθμών ως αντικείμενα πριν τον μαθηματικό συμβολισμό τους. Από τις πράξεις μόνο η πρόσθεση και η αφαίρεση, αλλά όχι ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση, προκύπτουν ως ενέργειες στον άβακα και αιτιολογούνται από τον χειρισμό του.

Η χρήση των αναπαραστάσεων παρουσιάζει επιπτώσεις τόσο εσωτερικές που σχετίζονται με τις ατομικές προτιμήσεις, την πρότερη γνώση, τα βιώματα και τις αντιλήψεις για τα μαθηματικά, όσο και εξωτερικές που αφορούν την παρουσίαση των προβλημάτων και το Πρόγραμμα Σπουδών. Ιδιαίτερα σημαντικό είναι οι εκπαιδευτικοί να τις εντάξουν προσεκτικά και μεθοδικά στη διδασκαλία τους και να φέρνουν τους/τις μαθητές/τριες σε επαφή με ποικίλες αναπαραστάσεις, καθώς η εστίαση μόνο σε μια οδηγεί σε περιορισμένη κατανόηση και εμποδίζει τις ευκαιρίες μάθησης (Mainali, 2021). Αδιαμφισβήτητα, οι αναπαραστάσεις επιδρούν καθοριστικά στην εις βάθος κατανόηση των γνωστικών αντικειμένων, στην επικοινωνία, στη δημιουργία της νέας γνώσης, στην κατανόηση και την τεκμηρίωση της (Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009).

1.8 Λειτουργίες συμβόλου μείον

Σε πολλές έρευνες που διεξήχθησαν σχετικά με τους αρνητικούς αριθμούς εντοπίστηκε ότι οι δυσκολίες στην κατανόησή τους δεν οφείλονται μόνο στην αφηρημένη τους έννοια, αλλά σχετίζονται στενά και με τη χρήση του συμβόλου μείον. Σύμφωνα μάλιστα με τις αρχές του Vygotsky, η γλώσσα και τα σύμβολα δεν αποτελούν απλώς εργαλεία επικοινωνίας. Αντίθετα, έχουν ισχυρή σχέση με την κατανόηση, τη γνωστική ανάπτυξη και τον μετασχηματισμό των ατομικών διαδικασιών σκέψης (Gilly,1995 όπ.αναφ. στο Vlassis, 2008).) Ο συμβολισμός ειδικά στην περίπτωση των αρνητικών αριθμών έχει ιδιαίτερη αξία και ο ρόλος του είναι καθοριστικός για την κατανόηση αφηρημένων, άυλων αντικειμένων.

Είναι γνωστό ότι οι μαθητές/τριες ήδη από το Νηπιαγωγείο και την πρώτη τάξη έχουν εμπειρίες με τους αρνητικούς αριθμούς, έστω και άτυπα, έχουν εφεύρει σημειολογία και έχουν αναπτύξει δικές τους ερμηνείες. Ενδεικτικά ονόματα και σημειογραφία που χρησιμοποιήθηκαν είναι τα εξής:

- «μηδέν ξάδερφος μείον ένα» ή «1-» (Wilcox, 2008, σ. 204),
- «παύλα ένα» (Aze, 1989, σ. 17),
- «μηδέν ένα» ή «01» (Bishop et al., 2011, σελ. 352),

- «Κάτι ένα» ή «S1» (Bishop et al.al., 2011, σελ. 353),
- «μείον ένα» (Aze, 1989, σ. 17; Liebeck, 1990, σελ. 226)
- «m1» (Liebeck, 1990, σελ. 226),
- «αρνητικό ένα» (Bishop et al., 2011, σελ. 354) (όπ.αναφ. στο Bofferding, 2014).

Οι εμπειρίες που έχουν αποκτηθεί παίζουν καθοριστικότερο ρόλο στην κατανόηση των ακεραίων ακόμα και από την ηλικία ή το αναπτυξιακό επίπεδο του κάθε μαθητή. Σε πολλές περιπτώσεις τα παιδιά βασίζονται στις προϋπάρχουσες αντιλήψεις και γνώσεις τους, κατά τη μετάβασή τους όμως από τους φυσικούς αριθμούς στους ακέραιους έρχονται αντιμέτωπα με μια γνωστική ασυμφωνία. Για να καταφέρουν να την ξεπεράσουν, θα πρέπει να δώσουν νέα ερμηνεία στην έννοια του πρόσημου μείον (Bofferding, 2010; Vlassis, 2004) και στις έννοιες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (Bofferding, 2010; Bruno & Martinon, 1999 όπ.αναφ. στο Bofferding, 2013).

Η παραδοσιακή διδασκαλία δεν στόχευε στην εννοιολογική αλλαγή αναφορικά με το σύμβολο μείον, αντίθετα εισήγαγε έτοιμες χρήσης του συμβόλου χωρίς βιωματική σύνδεση. Αποτέλεσμα ήταν να δημιουργούνται κάποια είδη «μετακανόνων», όπως αναφέρει η Sfard (2000) ή «υποκείμενοι πολιτισμικοί κανόνες» (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000) που εσωτερικεύονταν και δυσκόλευαν τους/τις μαθητές/τριες στη χρήση του μαθηματικού συμβολισμού (όπ.αναφ. στο Vlassis, 2004).

Στο πλαίσιο της ανάλυσης της εννοιολογικής αλλαγής με επίκεντρο το σύμβολο μείον η Vlassis (2008) επινόησε τον όρο «αρνητικότητα» για τη χαρτογράφηση και απόδειξη των πολλών διαστάσεων και διαφορετικών χρήσεων του συμβόλου μείον στο πλαίσιο της άλγεβρας (Vlassis, 2004). Η «αρνητικότητα» αναφέρεται στις διάφορες έννοιες του συμβόλου μείον που ταξινομούνται σύμφωνα με δύο κριτήρια. Το ένα κριτήριο αφορά την ταξινόμηση των συμβόλων από τη Sfard (2000, όπ.αναφ. στο Vlassis, 2008) ως δομικά σημαίνοντα, αντιπροσωπευτικά μαθηματικών αντικείμενων, όπως αριθμού, συνάρτησης, σύνολου και λειτουργικά σημαίνοντα που συνδέονται με τις πράξεις. Το άλλο κριτήριο συνδέεται με τις λειτουργίες του συμβόλου, που έχουν κατηγοριοποιηθεί από τους Gallardo και Rojano (1994, όπ.αναφ. στο Bofferding, 2014) στις εξής τρεις: unary, binary και symmetric. Αναλυτικά:

Unary - Λειτουργία ως μονάδα: Θεωρείται δομικό σημαίνον, χρησιμοποιείται ως πρόσημο του αριθμού για σχηματισμό αρνητικού αριθμού και εμφανίζεται σε προτάσεις που αφορούν αντικείμενα. Υπάρχει σύνδεση με την παραδοσιακή έννοια του αριθμών που βρίσκονται αριστερά του μηδενός στην οριζόντια αριθμητική γραμμή (Bofferding, 2010). Η κατηγορία αυτή διακρίνεται σε δύο υποκατηγορίες, αριθμός ως λύση, για παράδειγμα σε μια εξίσωση ή ως αποτέλεσμα σε μια πράξη.

Binary - Δυαδική λειτουργία: Θεωρείται λειτουργικό σημαίνον και έχει δύο κύριες λειτουργίες: α) αριθμητική αφαίρεση, δηλαδή ως αφαίρεση, συμπλήρωση ή διαφορά μεταξύ δύο αριθμών β) αλγεβρική αφαίρεση ως αφαίρεση ακέραιου που είναι ισοδύναμη με πρόσθεση του αντίθετου αυτού του αριθμού.

Symmetric – Συμμετρική λειτουργία: Θεωρείται λειτουργικό σημαίνον, ερμηνεύεται ως λήψη αντίθετου αριθμού ή «ένδειξη αντιστροφής» (Nunes, 1993, όπ. αναφ. στο Vlassis, 2008) και διαφοροποιείται από τη χρήση του στον σχετικό αριθμό, όπου είναι δομικό σημαίνον.

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζεται ένας χάρτης των διαφορετικών χρήσεων του σημείου μείον στη στοιχειώδη άλγεβρα (Vlassis, 2008).

Πίνακας 1. Αρνητικότητα (Vlassis, 2008)

Τριπλή φύση του πρόσημου μείον		
Unary	**Binary**	**Symmetric**
Λειτουργία ως μονάδα	Δυαδική Λειτουργία	Συμμετρική Λειτουργία
Δομικό σημαίνον	Λειτουργικό σημαίνον	Λειτουργικό σημαίνον
- Σχετικός αριθμός - Λύση – αριθμός - Αποτέλεσμα – αριθμός - Επίσημος αρνητικός αριθμός	- Αφαίρεση στην αριθμητική Αφαίρεση Συμπλήρωση Καθιέρωση διαφοράς ανάμεσα σε δύο αριθμούς - Αφαίρεση στην άλγεβρα Η αφαίρεση ενός ακέραιου είναι ισοδύναμη με την πρόσθεση του αντίθετου αυτού του αριθμού	- Παίρνοντας το αντίθετο ενός αριθμού

Πολλοί ερευνητές (Bofferding, 2010, 2013, 2014; Stephan & Akyuz, 2012; Vlassis, 2004, 2008) συντάσσονται με την παραπάνω διάκριση και πιστεύουν ότι για την πλήρη κατανόηση των αρνητικών αριθμών είναι σημαντική η ικανότητα ερμηνείας των πολλαπλών ρόλων του συμβόλου και ευελιξίας στην «αρνητικότητα» ανάλογα με το πλαίσιο.

Πριν τη διδασκαλία των αρνητικών, οι μαθητές/τριες γνωρίζουν τη δυαδική σημασία, ονομάζουν το πρόσημο «μείον» ή «παύλα» και το ερμηνεύουν ως σημάδι αφαίρεσης (Bofferding, 2010). Η πλειοψηφία των μαθητών/τριών γνωρίζει και εφαρμόζει ορισμένους διαδικαστικούς κανόνες, όπως «μείον με μείον κάνουν συν» και όταν βρίσκεται στην αρχή, το ερμηνεύει πάντοτε ως σύμβολο αρνητικού αριθμού (Vlassis, 2004). Η Vlassis (2008) μέσα από τις αναλύσεις της διαπίστωσε ότι οι μαθητές/τριες αδυνατούν να αντιληφθούν τους διαφορετικούς ρόλους του συμβόλου, ότι τα συχνότερα λάθη συνδέονται με την εσφαλμένη και άκαμπτη χρήση του συμβόλου και εμφανίζονται σε καταστάσεις που περιλαμβάνονται δύο διαδοχικά σύμβολα.

Αν συνεχίσουν οι μαθητές/τριες να έχουν ελλιπή και συγκεχυμένη γνώση για τις λειτουργίες του πρόσημου, θα αντιλαμβάνονται το πρόσημο ως εντολή αφαίρεσης, θα ερμηνεύουν τους αρνητικούς αριθμούς ως ατελή προβλήματα αφαίρεσης και θα συναντήσουν εμπόδια στην απλοποίηση και επίλυση αλγεβρικών παραστάσεων (Lamb et al., 2012; Vlassis, 2004, 2008, όπ.αναφ. στο Bofferding 2014). Συνεπώς, θα πρέπει να δοθεί η δέουσα προσοχή κατά τη διδασκαλία, ώστε να διασαφηνιστούν οι λειτουργίες, να ξεπεραστούν τα εμπόδια και να αποφευχθούν μέθοδοι και κανόνες διδασκαλίας που έχει αποδειχθεί ότι οδηγούν σε παρανοήσεις.

1.9 Δυσκολίες μαθητών/τριών με ακέραιους

Σε πολλές μελέτες καταγράφονται οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές/τριες στην την κατανόηση της έννοιας των αρνητικών αριθμών (Armstrong, 2010; Borba & Nunes, 2001; Brumbaugh & Rock, 2006; Carnellor, 2004; Chen & Hung, 2003; Elango & Halimah, 2009; Havita & Cohen, 1995; Prather & Alibali, 2004; Stanford, 2003; Terao et al., 2005 όπ.αναφ. στο Periasamy & Sivasubramaniam, 2018). Το πλήθος των αναφορών αναδεικνύει την αναγκαιότητα να μελετηθούν αναλυτικά όλες οι δυσκολίες και να ληφθούν σοβαρά υπόψη κατά τον σχεδιασμό και την οργάνωση της διδασκαλίας.

Παρά τις παιδαγωγικές προσεγγίσεις που έχουν εισαχθεί, η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών/τριών εξακολουθεί να συναντά δυσκολίες κατά τη διδασκαλία των αρνητικών αριθμών. Οι δυσκολίες μπορούν να ταξινομηθούν συνοπτικά σε τρεις κατηγορίες. Η πρώτη αφορά την έννοια του αριθμητικού συστήματος την κατεύθυνση και το πλήθος του αριθμού, η δεύτερη την έννοια της αριθμητικής πράξης και η τρίτη την έννοια του συμβόλου μείον (BaI~ 1993 όπ.αναφ. στο Chrysostomou & Mousoulides, 2010).

Όσον αφορά την πρώτη κατηγορία, στην πειραματική διδασκαλία των Stephan και Akyuz (2012) εντοπίστηκαν δυσκολίες στη σύλληψη της έννοιας αριθμών μικρότερων του μηδενός, στη δημιουργία τους ως μαθηματικά αντικείμενα και στη διαμόρφωση επίσημων κανόνων. Αναμφίβολα, οι παράλογοι κανόνες λειτουργούν αρνητικά στην προσαρμογή στη νέα έννοια (Stanford, 2003). Εκτός από την αποδοχή τιμών κάτω από το μηδέν, πολλές μελέτες αναφέρονται στη δυσκολία σύγκρισης και διάταξης των αρνητικών αριθμών (Hativa & Cohen, 1995; Mukhopadhyay, 1997; Peled et al., 1989, όπ.αναφ. στο Bofferding, 2014). Κατά τη σύγκριση μεταξύ αρνητικών αριθμών, υπάρχει η τάση να αντιμετωπίζονται ως θετικοί, να αγνοείται το πρόσημο και να θεωρείται μεγαλύτερος αυτός με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή (π.χ. -7> -2) (Bofferding, 2014). Ως προς το θέμα της διάταξης, οι Peled et al. (1989) εξακρίβωσαν ότι διατάσσονταν δίπλα στους θετικούς αριθμούς (π.χ. 1, -1, 3, 4, -4) ή αντιμετωπίζονταν ως μηδέν, ενώ συχνά τοποθετούνταν αριστερά και δεξιά από το μηδέν (π.χ. 0, -1, -2, -3, 1, 2, 3 ή -2, 0, -1, -3, 1, 2, 3). Σημειώθηκαν και περιπτώσεις όπου ταξινομούνται αντίστροφα, αν και βρίσκονταν αριστερά από το μηδέν (π.χ. -1, -2, -3, -4, 0, 1, 2, 3, 4) (Bofferding, 2014). Ακόμη, διαπιστώθηκε ότι οι αρνητικοί αριθμοί ερμηνεύονται κυρίως ως κατευθυνόμενα μεγέθη. Τη διαπίστωση αυτή στηρίζει και η μελέτη των Thompson και Dreyfus (1988, όπ.αναφ. στο Bofferding, 2014), όπου βρέθηκε ότι η αρχική σκέψη των μαθητών/τριών για το μέγεθος της κίνησης κατά μήκος της αριθμητικής γραμμής διαχωρίζονταν από την κατεύθυνση της κίνησης.

Ερευνητές και εκπαιδευτικοί συμφωνούν ότι πολλές εννοιολογικές δυσκολίες και παρανοήσεις συνδέονται με την εκτέλεση πράξεων με ακέραιους αριθμούς (Altınok, Keşan & Yılmaz, 2005; Ardahan & Ersoy, 1997; 1998; Bishop, Lamb, Philipp, Whitacre, Schappelle & Lewis, 2014; Kinach, 2002; Vlassis, 2001, όπ.αναφ. στο Ural, 2016). Οι εκπαιδευτικοί κατά τη διδασκαλία των φυσικών αριθμών συχνά καταφεύγουν σε κανόνες και στρατηγικές, όπως «αφαιρώ πάντα από τον μεγαλύτερο αριθμό», που όμως παραμένουν και μετά την εισαγωγή των αρνητικών αριθμών και οδηγούν σε γνωστικές συγκρούσεις (Ball et aI., 2008; Peled, 1991 όπ.αναφ. στο Chrysostomou & Mousoulides, 2010). Έτσι, παρατηρείται συχνά οι μαθητές/τριες λανθασμένα να αλλάζουν τη σειρά των αριθμών π.χ. 3-5 σε 5-3. Ακόμη, επηρεασμένοι από την πρόσθεση των φυσικών αριθμών, όπου το άθροισμα είναι πάντα μεγαλύτερο, όταν προσθέτουν αρνητικούς, είτε αμφιβάλλουν αν πρέπει να επικεντρωθούν στη κίνηση προς τα δεξιά ή να φτάσουν στη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή είτε ξεχνούν το πρόσημο (Bofferding, 2010).

Στο επίκεντρο των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν τα παιδιά με τους αρνητικούς αριθμούς βρίσκεται η έννοια του συμβόλου μείον. Οι χρήσεις του αρνητικού προσήμου είναι αντιφατικές, όπως έχει ήδη αναφερθεί εκτενώς σε προηγούμενη ενότητα. Στη διδασκαλία δεν δίνεται η αναγκαία φροντίδα για τη διάκριση των λειτουργιών του και την ευέλικτη χρήση του, αλλά αντιμετωπίζεται σιωπηρά. Δικαιολογημένα επομένως σύνηθες λάθος των μαθητών/τριών είναι να συγχέουν το πρόσημο μείον με το σύμβολο της αφαίρεσης ή να αδιαφορούν για τον συμβολισμό, θεωρώντας ότι δεν έχει νόημα.

Από τη Vlassis (2008) μελετήθηκαν ακόμη τα εμπόδια που επιφέρει η χρήση του συμβόλου στην επίλυση των εξισώσεων και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές/τριες αποφεύγουν τις αρνητικές λύσεις, δεν καταφέρνουν να βρουν την αρνητική τιμή του x και αμφιβάλλουν αν το σύμβολο αποτελεί μέρος ενός αρνητικού αριθμού ή αντιστοιχεί σε σημάδι αφαίρεσης. Στα παραπάνω θα μπορούσε να προστεθεί και η τάση να ερμηνεύουν μόνο ως φυσικούς αριθμούς τα γράμματα – σύμβολα στις μεταβλητές, όπως προέκυψε από την έρευνα των Χρήστου και Βοσνιάδου (2005, όπ. αναφ. στο Asghari, 2019).

Στην έρευνα των Chrysostomou & Mousoulides, (2010) καταγράφηκαν δυσκολίες των εκπαιδευτικών στην έννοια και τις πράξεις των αρνητικών αριθμών. Αρχικά, αδυνατούσαν να δώσουν ορισμό και να απαντήσουν σε ποιο σύνολο αριθμών ανήκουν οι αρνητικοί. Το σημαντικότερο ωστόσο είναι ότι δεν κατάφερναν να δικαιολογήσουν τις απαντήσεις τους και να επιλέξουν μοντέλα διδασκαλίας. Επιπλέον, σύμφωνα με τους Prather και Alibali (2004; 2008), οι αναπαραστάσεις των ενηλίκων σχετικά με τους αρνητικούς αριθμούς δεν ήταν τόσο καλά εδραιωμένες όσο εκείνες των θετικών (Periasamy & Sivasubramaniam, 2018).Τα ευρήματα αυτά δικαιολογούν την απροθυμία τους στη διδασκαλία των αρνητικών αριθμών και αποδεικνύουν πόσο περίπλοκο, αλλά και αναγκαίο ταυτόχρονα είναι να αναπτύσσεται η εννοιολογική κατανόηση και να μην επιδιώκεται μόνο η διαδικαστική ευχέρεια.

Εύλογα αναζητήθηκαν οι αιτίες που προκαλούν όλα αυτά τα εμπόδια στην πλειοψηφία των εμπλεκομένων διεθνώς. Οι κύριες πηγές των δυσκολιών με ακέραιους και ακέραιες πράξεις, κατά τους Hativa και Cohen (1995), είναι οι ακόλουθες τρεις: Πρώτον, η σύγκρουση μεταξύ όσων έχουν γνωρίζουν οι μαθητές/τριες για το μέγεθος και την ποσότητα με την έννοια των αρνητικών αριθμών (Fischbein, 1977; Hefendehl-Hebeker, 1991). Η εξήγηση αυτής της δυσκολίας συνδέεται στενά με τη μεροληψία του φυσικού αριθμού, η οποία είναι υπεύθυνη για συστηματικά λάθη που γίνονται στο μέγεθος, τις πράξεις, τις αναπαραστάσεις, την πυκνότητα των αριθμών και τον μαθηματικό συλλογισμό (Van Dooren, Lehtinen & Verschaffel, 2015). Έπειτα, η σύγκρουση των δύο εννοιών του συμβόλου μείον, το οποίο χρησιμοποιείται είτε για τη δήλωση της κατεύθυνσης είτε για τη λειτουργία της αφαίρεσης (Janvier, 1987), που έχει αναλυθεί παραπάνω. Τέλος, η απουσία ρεαλιστικού και διαισθητικού μοντέλου στη μοντελοποίηση των πράξεων με ακέραιους αριθμούς. Η επιλογή τεχνητού πλαισίου και η εισαγωγή έτοιμων χρήσεων των αρνητικών και του συμβόλου χωρίς βιωματική σύνδεση στην καθημερινότητά τους, συνεπάγεται την υποχρέωση αποστήθισης κανόνων. Παρόλο λοιπόν που αναγνωρίζουν τους αριθμούς ως σύμβολα, αδυνατούν να αντιληφθούν την αφηρημένη λύση και να ενσωματώσουν την έννοια του αριθμού σε αφηρημένο επίπεδο (Vlassis, 2004).

Όπως προκύπτει, ο εντοπισμός των εμποδίων έχει μεγάλη αξία. Ωστόσο, η ανακάλυψη των αιτιών δεν αρκεί. Χρειάζεται γενναία αναθεώρηση στο Πρόγραμμα Σπουδών και στις μεθόδους διδασκαλίας, ώστε να λειτουργούν προληπτικά και όχι θεραπευτικά.

2 Μεθοδολογία της έρευνας

Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώνεται στους αρνητικούς αριθμούς και επιχειρεί να διερευνήσει τον τρόπο προσέγγισης και σκέψης μαθητών/τριών Δ’ και Ε’ τάξης, πριν την επίσημη διδασκαλία. Η ακριβέστερη και βαθύτερη κατανόηση του τρόπου σκέψης και αντίληψης σχετικά με την έννοια του αρνητικού αριθμού μπορεί να συμβάλει θετικά στην επιλογή του χρόνου εισαγωγής της έννοιας, στον σχεδιασμό της διδασκαλίας και την επιλογή πλαισίου, ώστε να εισαχθεί ομαλά και να αποφευχθούν παρανοήσεις και δυσκολίες.

Τα **ερευνητικά ερωτήματα** που απασχολούν τη μελέτη είναι τα εξής:

1. Με ποιους τρόπους νοηματοδοτούν οι μαθητές/τριες Δημοτικού τους αρνητικούς αριθμούς και πώς τους εκφράζουν συμβολικά;
2. Πώς το διδακτικό περιβάλλον «Βήματα» (Steps) ενεργοποιεί τη διαδικασία μάθησης και συμβάλλει στην ανακάλυψη και τον χειρισμό των αρνητικών αριθμών από μαθητές/τριες του Δημοτικού Σχολείου;

3. Ποια είναι τα παιδαγωγικά οφέλη από την εισαγωγή των αρνητικών αριθμών στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού;

2.1 Ερευνητική μέθοδος

Στην παρούσα έρευνα επιλέχθηκε ως καταλληλότερη η ποιοτική προσέγγιση, για τη συγκέντρωση στοιχείων και την κατανόηση του τρόπου αντίληψης και αναπαράστασης των αρνητικών αριθμών από τους/τις μαθητές/τριες.

Η ποιοτική μέθοδος ενδείκνυται για τη μελέτη φαινομένων που απαιτούν εις βάθος διερεύνηση και όχι επιφανειακή ερμηνεία. Η έρευνα εστιάζει στη λεπτομερή κατανόηση, εξερεύνηση και ερμηνεία των προσωπικών αντιλήψεων και εμπειριών των συμμετεχόντων/ουσών για τους αρνητικούς αριθμούς, αλλά και στο άδηλο περιεχόμενο του υπό έρευνα υλικού, θεωρώντας ότι ακόμη και οι αποσιωπήσεις μπορεί να έχουν καθοριστική σημασία. Επιπρόσθετα, επιτρέπει την παρατήρηση και τη συζήτηση με τους/τις μαθητές/τριες, παρέχοντας τους τη δυνατότητα να εκφράσουν τις ιδέες, τις σκέψεις τους και να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους. Τέλος, δίνει μεγαλύτερη έμφαση στη διαδικασία, επιτρέποντας έτσι με τη βοήθεια παρατηρήσεων και σημειώσεων να αναλυθεί και να ερμηνευθεί ο τρόπος συλλογισμού που οδηγεί στις απαντήσεις και την αναπαράσταση των αρνητικών αριθμών.

2.2 Δείγμα έρευνας

Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 71 μαθητές και μαθήτριες της Δ’ και Ε’ τάξης που φοιτούν σε Ιδιωτικό Δημοτικό σχολείο της Θεσσαλονίκης. Ως μέθοδος συλλογής δεδομένων χρησιμοποιήθηκε η δειγματοληψία ευκολίας, καθώς υπήρχε άμεση πρόσβαση στη συγκεκριμένη σχολική μονάδα (Cohen, Manion & Morrison, 2008). Επιπλέον, εξασφαλίστηκε η επιτυχία απόκρισης. Όσον αφορά τον καταμερισμό του δείγματος, περιελάμβανε αναλυτικά 18 μαθητές/τριες της Δ’ Δημοτικού από το ίδιο τμήμα και 53 της Ε΄ Δημοτικού από δύο τμήματα, συγκεκριμένα 25 από το πρώτο και 28 από το δεύτερο τμήμα. Σκοπίμως επιλέχθηκαν συμμετέχοντες/ουσες από τα ίδια τμήματα, καθώς στόχος ήταν να συμπεριληφθούν μαθητές/τριες διαφόρων επιδόσεων, για να διασφαλιστεί η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων σε υψηλότερο βαθμό. Όλοι/ες οι μαθητές/τριες είχαν φυσιολογική ανάπτυξη και νοημοσύνη και κάλυπταν ένα εύρος κοινωνικό-οικονομικών στρωμάτων.

Επιλέχθηκε δείγμα μαθητών/τριών από τη Δ’ και Ε΄ τάξη του Δημοτικού, διότι σύμφωνα με το ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών δεν είχαν διδαχθεί ακόμη επίσημα τους αρνητικούς αριθμούς. Η εισαγωγή τους τοποθετείται χρονικά στο τέλος της Ε’ Δημοτικού, Ενότητα 6 – Κεφάλαιο 33, όπου χρησιμοποιούνται τα γνωστά πλαίσια, δηλαδή της θερμοκρασίας και του ασανσέρ. Συνεπώς, σε αυτή τη φάση της έρευνας, αν γνωρίζουν να χειρίζονται τους αρνητικούς αριθμούς, είναι μόνο διαισθητικά βασιζόμενοι/ες σε άτυπες εμπειρίες. Έτσι, μπορούν να προκύψουν χρήσιμα συμπεράσματα σχετικά με την εναλλακτική προσέγγιση και το περιβάλλον «Βήματα» (Steps) για τη νοηματοδότηση και τον συμβολισμό των αρνητικών αριθμών.

2.3 Παρουσίαση εργαλείου συλλογής δεδομένων

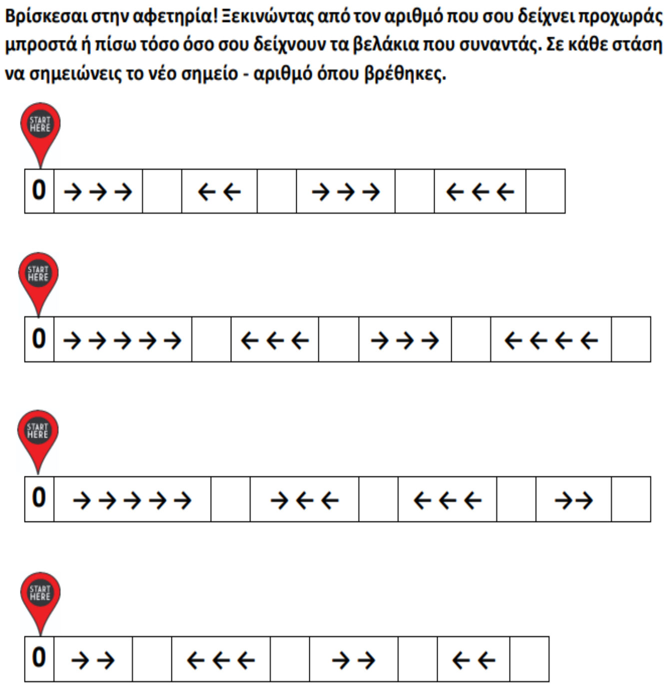
Τα ερευνητικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία για τη συλλογή των δεδομένων ήταν φωτογραφίες θερμομέτρου και πίνακα ανελκυστήρα, επιδαπέδια αριθμογραμμή με κενές θέσεις κάτω του μηδενός, τυπωμένη αριθμογραμμή με κενές θέσεις αριστερά του μηδενός, συλλογή φύλλων εργασίας με τέσσερις ομάδες δραστηριοτήτων προς συμπλήρωση από τους/τις μαθητές/τριες, παρατήρηση διδασκαλιών και σημειώσεις πεδίου. Η επιλογή όλων των εργαλείων στηρίχθηκε σε τεκμηριωμένες έρευνες που διεξήχθησαν αναφορικά με την αντίληψη των αρνητικών αριθμών και διδακτικές προσεγγίσεις (Bofferding, 2010, 2014; Schindler & Hußmann, 2013; Schindler et al. 2017; Slezáková et al, 2013; Whitacre et al. 2012; Παπαδόπουλος, Βλάχου, & Κιορίδου, 2020).

Η εισαγωγή των μαθητών/τριών στην ερευνητική διαδικασία επιδιώχθηκε να γίνει ομαλά και ευχάριστα με μια κινητική δραστηριότητα, ώστε να εξασφαλιστεί ενεργή εμπλοκή. Για αυτόν τον λόγο, αξιοποιώντας τα πλακάκια του δαπέδου της αίθουσας, σχεδιάστηκε μια κάθετη αριθμογραμμή, με την οποία είναι εξοικειωμένα τα παιδιά, με σημειωμένες με μαρκαδόρο τις τιμές από το 0 έως το 7 χωρίς να υπάρξει καμία σημείωση, τιμή ή συμβολισμός για τους αρνητικούς αριθμούς.

Στη Γ’ φάση της έρευνας έγιναν αναφορές σε οικείες εικόνες από την καθημερινότητά τους, προκειμένου να δημιουργηθεί θετική διάθεση. Συγκεκριμένα επιλέχθηκε η προβολή φωτογραφιών θερμομέτρου και πίνακα ανελκυστήρα στον διαδραστικό πίνακα της αίθουσας.

Για κάθε μια από τις τέσσερις ομάδες γραπτών δραστηριοτήτων δημιουργήθηκαν αντίστοιχα τέσσερα διαφοροποιημένα, αυξανόμενων απαιτήσεων φύλλα εργασίας. Στο πρώτο φύλλο εργασίας, που χρησιμοποιήθηκε στη Β’ φάση δραστηριοτήτων, ζητήθηκε από τους/τις μαθητές/τριες, ξεκινώντας από έναν δοσμένο αριθμό, να ακολουθήσουν τα βελάκια και να καταγράφουν σταδιακά τους υπολογισμούς τους. Το δεύτερο φύλλο εργασίας, που συμπληρώθηκε στη Δ’ φάση, είναι παρόμοιο με το πρώτο με μοναδική διαφοροποίηση ότι απουσιάζουν οι ενδιάμεσοι σταθμοί και ο υπολογισμός καταγράφεται μόνο στο τέλος. Για τη διευκόλυνση των μαθητών/τριών στους υπολογισμούς μοιράστηκε μια πλαστικοποιημένη οριζόντια αριθμογραμμή. Το τρίτο φύλλο εργασίας δόθηκε στους/στις μαθητές/τριες στην Ε’ φάση και τους ζητείται να προχωρήσουν σε δύο ενέργειες. Η πρώτη είναι ακριβώς ίδια με εκείνη του δεύτερου φύλλου, δηλαδή να υπολογίσουν νοερά και να καταγράψουν μόνο το τελικό αποτέλεσμα. Η νέα οδηγία τούς ζητά να καταγράφουν με πράξεις τον βηματισμό τους. Τέλος, το τέταρτο φύλλο εργασίας, που μοιράστηκε στη Στ’ Φάση, είναι το μικρότερο σε έκταση, αλλά το πιο σύνθετο και απαιτητικό. Σε αυτό υπήρχε ένα κενό κουτάκι σε κάθε παράσταση και ζητούνταν να το εντοπίσουν και να το συμπληρώσουν, χωρίς να διευκρινίζεται ο τρόπος συμπλήρωσης.

Εικόνα 2.3.1 Επιδαπέδια Αριθμογραμμή



Βρίσκεσαι στην αφετηρία! Ξεκινώντας από τον αριθμό που σου δείχνει προχωράς μπροστά ή πίσω τόσο όσο σου δείχνουν τα βελάκια που συναντάς. Σε κάθε στάση να σημειώνεις το νέο σημείο - αριθμό όπου βρέθηκες.

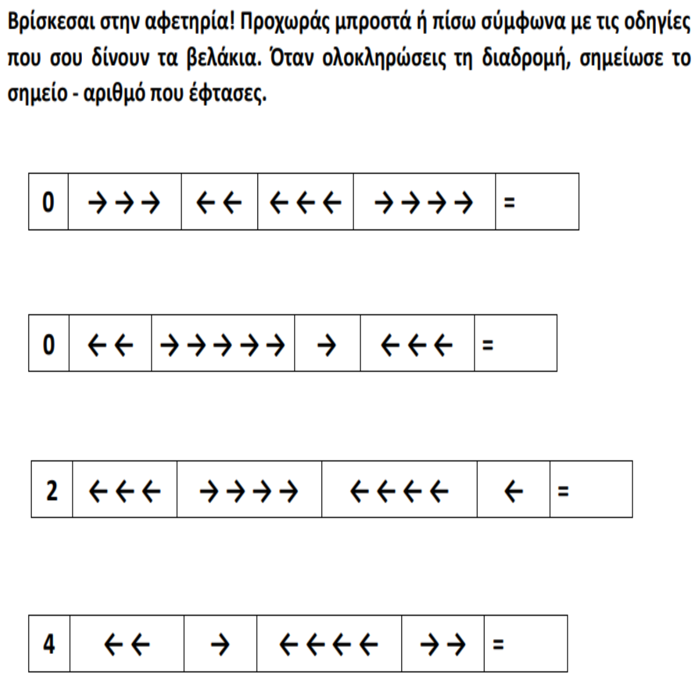
0	→→→		←←		→→→		←←←	

0	→→→→→		←←←		→→→		←←←←	

0	→→→→→		→←←		←←←		→→	

0	→→		←←←		→→		←←	

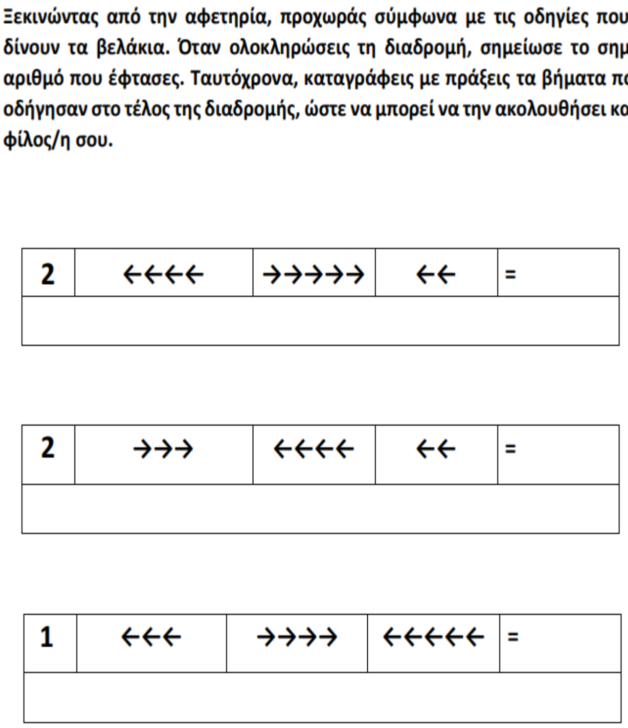
Εικόνα 2.3.2 Πρώτο Φύλλο Εργασίας – Β' Φάση



Βρίσκεσαι στην αφετηρία! Προχωράς μπροστά ή πίσω σύμφωνα με τις οδηγίες που σου δίνουν τα βελάκια. Όταν ολοκληρώσεις τη διαδρομή, σημείωσε το σημείο - αριθμό που έφτασες.

0	→→→	←←	←←←	→→→→	=
0	←←	→→→→→	→	←←←	=
2	←←←	→→→→	←←←←	←	=
4	←←	→	←←←←	→→	=

Εικόνα 2.3.3 Δεύτερο Φύλλο Εργασίας - Δ' Φάση



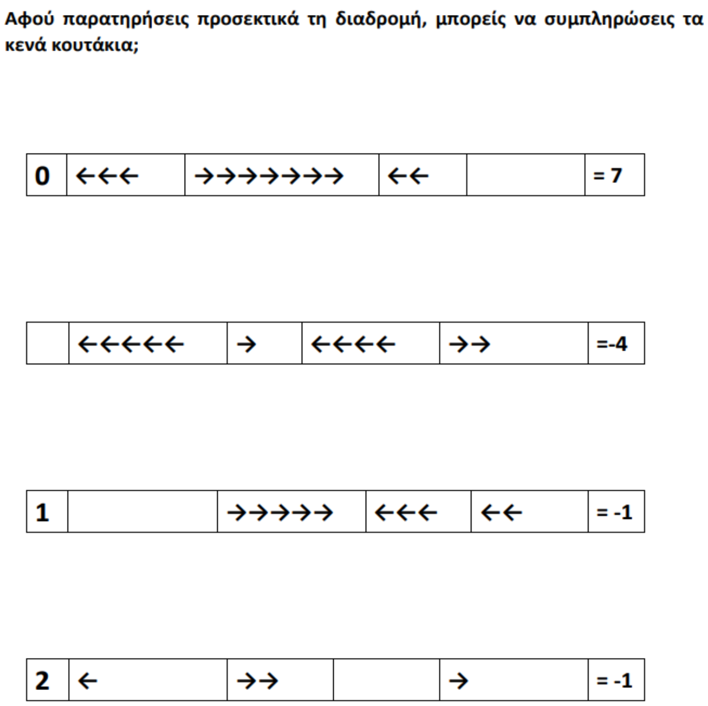
Ξεκινώντας από την αφετηρία, προχωράς σύμφωνα με τις οδηγίες που σου δίνουν τα βελάκια. Όταν ολοκληρώσεις τη διαδρομή, σημείωσε το σημείο - αριθμό που έφτασες. Ταυτόχρονα, καταγράφεις με πράξεις τα βήματα που σε οδήγησαν στο τέλος της διαδρομής, ώστε να μπορεί να την ακολουθήσει και ο/η φίλος/η σου.

2	←←←←	→→→→→	←←	=

2	→→→	←←←←	←←	=

1	←←←	→→→→	←←←←←	=

Εικόνα 2.3.4 Τρίτο Φύλλο Εργασίας - Ε' Φάση



Αφού παρατηρήσεις προσεκτικά τη διαδρομή, μπορείς να συμπληρώσεις τα κενά κουτάκια;

0	←←←	→→→→→→→	←←		= 7
	←←←←←	→	←←←←	→→	=-4
1		→→→→→	←←←	←←	= -1
2	←	→→		→	= -1

Εικόνα 2.3.5 Τέταρτο Φύλλο Εργασίας - Στ' Φάση

2.4 Περιγραφή ερευνητικής διαδικασίας

Η έρευνα διεξήχθη, αφού προηγουμένως εξασφαλίστηκε η αναγκαία άδεια από τη διεύθυνση του σχολείου. Οι μαθητές/τριες ενημερώθηκαν εξαρχής ότι η έρευνα θα διασφαλίζει την ανωνυμία τους μέσω κωδικοποίησης, καθώς και ότι έχουν δικαίωμα να αρνηθούν είτε να διακόψουν τη συμμετοχή τους σε οποιοδήποτε στάδιό της.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στις αίθουσες διδασκαλίας των τμημάτων των μαθητών/τριών, χωρίς την παρουσία των υπεύθυνων εκπαιδευτικών και σε ώρες που δεν παρεμπόδισαν την ομαλή λειτουργία των τμημάτων. Η διαδικασία συνολικά ολοκληρώθηκε σε διάστημα δύο εβδομάδων και περιλάμβανε έξι φάσεις. Η κάθε φάση υλοποιούνταν σε ξεχωριστή μέρα και η διάρκεια της ήταν μία διδακτική ώρα.

Η ερευνητική προσέγγιση στηρίχθηκε σε προηγούμενη έρευνα των Slezáková et al. (2013), όπου παρουσιάστηκε το διδακτικό περιβάλλον «Βήματα» (Steps). Παράλληλα, καθοριστική σημασία για την παρούσα έρευνα στο σύνολό της είχε προγενέστερη έρευνα των Παπαδόπουλος κ.συν. (2020). Αποτέλεσε πηγή έμπνευσης και οδηγό για τη διαμόρφωση των φύλλων εργασίας των δραστηριοτήτων, εκτός από εκείνο της Στ’ Φάσης, τη γενικότερη μεθοδολογία που ακολουθήθηκε και τη δόμηση της ανάλυσης των αποτελεσμάτων.

Στην Α’ Φάση βασικός στόχος ήταν η δημιουργία ενός ευχάριστου κλίματος που θα εξασφάλιζε την πρόθυμη συμμετοχή των μαθητών/τριών. Έτσι, επιλέχθηκε μια κινητική δραστηριότητα που αξιοποιεί τη φυσική ρυθμική κίνηση του βηματισμού. Αρχικά, την προσοχή των μαθητών/τριών κέρδισε ο σχεδιασμός δύο κάθετων αριθμογραμμών στο δάπεδο. Αμέσως μετά η ερευνήτρια έδειξε ορισμένα παραδείγματα μέτρησης πάνω στην αριθμογραμή. Αφού όλοι οι μαθητές/τριες αντιλήφθηκαν τη διαδικασία, επιλέχθηκαν τυχαία δύο παιδιά και πήρε το καθένα θέση μπροστά στην αντίστοιχη αριθμογραμμή. Η ερευνήτρια έδινε τις αριθμητικές οδηγίες και τα δύο παιδιά ακολουθούσαν ταυτόχρονα. Οι αριθμητικές οδηγίες περιλάμβαναν βήματα μπροστά και πίσω. Η διαδικασία αυτή επαναλήφθηκε με ακόμη δύο ζευγάρια μαθητών/τριών. Στα επόμενα τρία ζευγάρια υπήρξαν μικρές διαφοροποιήσεις μεταξύ των παιδιών στις αριθμητικές οδηγίες και στα επόμενα ζευγάρια οι διαφοροποιήσεις σταδιακά αυξήθηκαν. Σε όλες τις περιπτώσεις, μόλις ολοκληρωνόταν ο βηματισμός τους, ζητούνταν εκτίμηση και αιτιολόγηση του υπολογισμού των βημάτων. Μέσα από αυτή τη δραστηριότητα εξοικειώνονται με το σημασιολογικό μοντέλο ενός αριθμού, καθώς κάθε βήμα αντιπροσωπεύει έναν αριθμό και κάθε κίνηση την αλλαγή αποτελέσματος, ενώ ταυτόχρονα εισάγονται στο σημασιολογικό μοντέλο του αρνητικού αριθμού, αφού το βήμα πίσω είναι αναπαράσταση του -1.

Στη Β’ Φάση η διαδικασία βηματισμού προσεγγίζεται με την έννοια της καταγραφής. Τα βήματα αντικαταστάθηκαν από βέλη. Η χρήση αυτού του συμβολισμού στοχεύει στην ανίχνευση των ιδεών των παιδιών για τον συμβολισμό των αρνητικών αριθμών. Η διαφοροποίηση από την κινητική δραστηριότητα στη γραπτή, προξένησε μια ανησυχία στους/στις μαθητές/τριες και για να αποβληθεί το άγχος της αξιολόγησης, διευκρινίστηκε ότι δεν πρόκειται για εργασία που θα βαθμολογηθεί. Στη συνέχεια μοιράστηκαν τα φύλλα εργασίας και ζητήθηκε να συμπληρωθούν τα κενά σε κάθε στάση. Επιλέχθηκε να μη δοθούν οδηγίες ή διευκρινήσεις παρά την αμηχανία που εκδηλώθηκε λόγω της μη εξοικείωσης με τέτοιας μορφής φύλλα εργασίας, προκειμένου τα παιδιά να λειτουργήσουν αυθόρμητα και να καταγράψουν ανεπηρέαστα. Αφού ξεπεράστηκε η αρχική αμηχανία, η συμπλήρωση έγινε ομαλά και διήρκησε περίπου 20 λεπτά με εξαίρεση δύο – τρία παιδιά που χρειάστηκαν περισσότερο χρόνο.

Στη Γ’ Φάση έγινε η εισαγωγή στον συμβολισμό μέσω προβολής εικόνων θερμομέτρου και πίνακα ασανσέρ στον διαδραστικό πίνακα. Με αφορμή τις εικόνες έγιναν στοχευμένες ερωτήσεις, για να διαπιστωθεί ο βαθμός γνώσης τους σχετικά με τους αρνητικούς αριθμούς. Οι μαθητές/τριες κατάφεραν να εντοπίσουν και να αναφέρουν πολλά παραδείγματα από την καθημερινότητά τους.

Στη Δ’ Φάση ο στόχος ήταν να γίνει εισαγωγή στους υπολογισμούς. Για αυτόν το λόγο μοιράστηκαν φύλλα εργασίας παρόμοια με εκείνα της Β’ Φάσης με τη διαφορά ότι έλειπαν οι ενδιάμεσες στάσεις και οι μαθητές/τριες καλούνταν να υπολογίσουν κατευθείαν το τελικό αποτέλεσμα. Ως βοηθητικό εργαλείο είχαν μπροστά τους μια πλαστικοποιημένη οριζόντια αριθμογραμμή. Κάποιοι/ες τη χρησιμοποίησαν, κάποιοι/ες κρατούσαν σημειώσεις πάνω στο χαρτί, προκειμένου να κάνουν τον τελικό υπολογισμό, ενώ ορισμένοι/ες προτίμησαν να υπολογίσουν νοερά. Γενικά οι μαθητές/τριες ήταν πια εξοικειωμένοι/ες με τη διαδικασία και ολοκληρώθηκε σε σύντομο χρονικό διάστημα, περίπου 15 λεπτά. Τα ίδια φύλλα εργασίας δόθηκαν και στους/στις μαθητές/τριες της Δ’ Δημοτικού, χρειάστηκαν όμως περισσότερες εξηγήσεις για τη χρήση της αριθμογραμμής, γιατί αρκετά παιδιά δεν ήταν τόσο εξοικειωμένα.

Στην Ε’ Φάση επιχειρείται η εισαγωγή στην αναπαράσταση των αριθμητικών παραστάσεων. Τα φύλλα εργασίας σε αυτή τη φάση ήταν πιο σύνθετα, παρόλα αυτά δεν υπήρξαν απορίες από τη μεριά των μαθητών/τριών, καθώς ήταν πια απόλυτα εξοικειωμένοι/ες. Οι μαθητές/τριες έπρεπε να προχωρήσουν σε δύο ενέργειες. Η πρώτη απαιτούσε και πάλι τον συνολικό υπολογισμό της, ενώ η δεύτερη ζητούσε να αποδώσουν ό,τι εκφράζεται με βέλη σε αριθμούς. Παρατηρήθηκε ότι κάποιοι/ες απλά έγραφαν τον αριθμό που αντιστοιχούσε στα βελάκια και το τελικό αποτέλεσμα, αλλά ορισμένοι/ες έκαναν σταδιακά τους υπολογισμούς. Η δυσκολία και το ενδιαφέρον σε αυτή την ενέργεια βρίσκεται στο σύμβολο και κυρίως στον τρόπο που επιλέγεται, για να «μεταφραστούν» τα βέλη.

Στη Στ’ Φάση ο βαθμός δυσκολίας αυξήθηκε. Στο φύλλο εργασίας δεν ζητούνταν πλέον ο υπολογισμός των παραστάσεων, αλλά ο εντοπισμός του κενού κελιού και η συμπλήρωση με ό,τι έλειπε. Το συγκεκριμένο φύλλο εργασίας, παρόλο που ήταν μικρότερο σε έκταση, δυσκόλεψε αρκετά τα παιδιά. Αφιερώθηκε περισσότερος χρόνος και παρατηρήθηκε ότι είχαν αρκετές απορίες και μεγαλύτερη ανασφάλεια. Οι περισσότεροι/ες συμπλήρωσαν τα κενά με βελάκια, λίγοι/ες με αριθμούς, ενώ υπήρχαν και κάποιοι/ες που το κατέγραψαν και με τους δύο τρόπους. Οι μαθητές/τριες της Δ’ Δημοτικού δυσκολεύτηκαν περισσότερο στο συγκεκριμένο φύλλο, μια μαθήτρια μάλιστα δεν κατάφερε να συμπληρώσει ούτε ένα κενό. Χρησιμοποιήθηκε και σε αυτό η πλαστικοποιημένη αριθμογραμμή μετά όμως από παρότρυνση, γιατί αρχικά δεν σκέφτηκαν πώς μπορεί να τους διευκολύνει.

Γενικά, η προσέγγιση των φύλλων εργασίας γινόταν είτε με συζήτηση με όλη την τάξη είτε ατομικά. Κατά την ατομική εργασία των μαθητών/τριών, η ερευνήτρια λειτουργούσε υποστηρικτικά, παρακολουθούσε την πορεία εργασίας τους και τις τυχόν δυσκολίες καταγράφοντας παράλληλα τις παρατηρήσεις της. Σε όλες τις Φάσεις κύρια επιδίωξη ήταν να αναδειχθούν οι σκέψεις, οι προβληματισμοί και οι παρανοήσεις των μαθητών/τριών.

2.5 Ανάλυση δεδομένων

Η ανάλυση των δεδομένων έγινε με συνδυασμό ποιοτικών και ποσοτικών μεθόδων. Αρχικά, συγκεντρώθηκαν τα συμπληρωμένα φύλλα εργασίας, ομαδοποιήθηκαν και κατηγοριοποιήθηκαν ανά τάξη και ανά Φάση.

Αναφορικά με το ποσοτικό επίπεδο ανάλυσης των δεδομένων αρχικά όλα τα φύλλα εργασίας της κάθε φάσης διαχωρίστηκαν με κριτήριο την ορθότητα ή όχι των απαντήσεων. Επιπρόσθετα, κρίθηκε αναγκαίο να οριστούν τα κριτήρια σύμφωνα με τα οποία η κάθε απάντηση θα θεωρούνται σωστή ή λανθασμένη. Έτσι, αποφασίστηκε να υπολογίζονται ως σωστά και όσα είχαν ένα λάθος. Αντίθετα, λαμβάνονταν ως λανθασμένη όποια απάντηση προέκυπτε από εσφαλμένη ερμηνεία ή κατεύθυνση, ακόμα και αν ο υπολογισμός ήταν σωστός.

Σύμφωνα με τους Τζάνη και Κεχαγιάς (2005), στόχος της ποιοτικής ανάλυσης είναι ο εντοπισμός αναγνωρίσιμων χαρακτηριστικών και καταστάσεων για την εξαγωγή ειδικών και έγκυρων συμπερασμάτων. Για αυτόν τον λόγο η ανάλυση προχώρησε σε ένα ακόμη επίπεδο που σχετίζονταν με την ερμηνεία των απαντήσεων που δόθηκαν. Συγκεκριμένα, στο πρώτο φύλλο εργασίας (Β' Φάση) οι απαντήσεις κατηγοριοποιήθηκαν ανάλογα με τη σημειογραφία των αρνητικών αριθμών από τους/τις μαθητές/τριες. Στο δεύτερο φύλλο εργασίας (Δ' Φάση), όπου ζητούνταν μόνο ο τελικός υπολογισμός, η κατηγοριοποίηση έγινε αναφορικά με τα χαρακτηριστικά λάθη που προέκυψαν στους υπολογισμούς. Στο τρίτο φύλλο εργασίας (Ε' Φάση), όπου οι μαθητές/τριες προχωρούσαν στην καταγραφή της αριθμητικής παράστασης, η κατηγοριοποίηση έγινε στα λάθη υπολογισμών και στα λάθη αναπαράστασης των παραστάσεων. Τέλος, στο τέταρτο φύλλο εργασίας (Στ' Φάση) επιχειρήθηκε κατηγοριοποίηση σε σχέση με την υπαιτιότητα των λαθών.

2.6 Διασφάλιση Εγκυρότητας και Αξιοπιστίας

Σε ποιοτικές έρευνες, η εγκυρότητα είναι συχνά μια πιο υποκειμενική έννοια από ό,τι σε ποσοτικές μελέτες, καθώς οι ερευνητές/τριες πρέπει να κατανοήσουν και να ερμηνεύσουν με ακρίβεια τις εμπειρίες και τις απόψεις των συμμετεχόντων/ουσών. Στην παρούσα έρευνα, για την εξασφάλιση της εγκυρότητας, τα φύλλα εργασίας της έρευνας στηρίχθηκαν σε παρόμοια εργαλεία προηγούμενων ερευνών (Slezáková et al, 2013; Παπαδόπουλος κ.συν., 2020). Επιπλέον, οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν με τέτοιο τρόπο, ώστε να ανταποκρίνονται στα ερευνητικά ερωτήματα και σε αντίστοιχες θεματικές κατηγορίες. Ακόμη, προκειμένου να ενισχυθεί η εγκυρότητα, χρησιμοποιήθηκαν πολλαπλές πηγές δεδομένων, όπως διαφοροποιημένα φύλλα εργασίας και παρατήρηση, που συνέβαλαν στον σχηματισμό μιας πιο ολοκληρωμένης εικόνας.

Για να διασφαλιστεί η αξιοπιστία της έρευνας σχεδιάστηκαν προσεκτικά τα φύλλα εργασίας και έγινε εκτενής περιγραφή της ερευνητικής διαδικασίας συμπεριλαμβανομένων των μεθόδων συλλογής, των εργαλείων ανάλυσης και των διαδικασιών ερμηνείας δεδομένων. Η συλλογή και η ανάλυση των δεδομένων χαρακτηρίζονται από συστηματικότητα, ακρίβεια, αμεροληψία, διαφάνεια και πραγματοποιήθηκαν σύμφωνα με επιστημονικά αποδεκτές μεθόδους. Τέλος, ο μεγάλος αριθμός συμμετεχόντων/ουσών, όπως και η φυσιολογική ανάπτυξη και νοημοσύνη των μαθητών/τριών αποτελούν παράγοντες που ενισχύουν την αξιοπιστία της έρευνας, παρόλο που επιλέχθηκε η δειγματοληψία ευκολίας, καθώς η ερευνήτρια είχε πρόσβαση στη σχολική μονάδα ως εργαζόμενη σε αυτή και λόγω του περιορισμένου χρονικού ορίου διεξαγωγής της έρευνας.

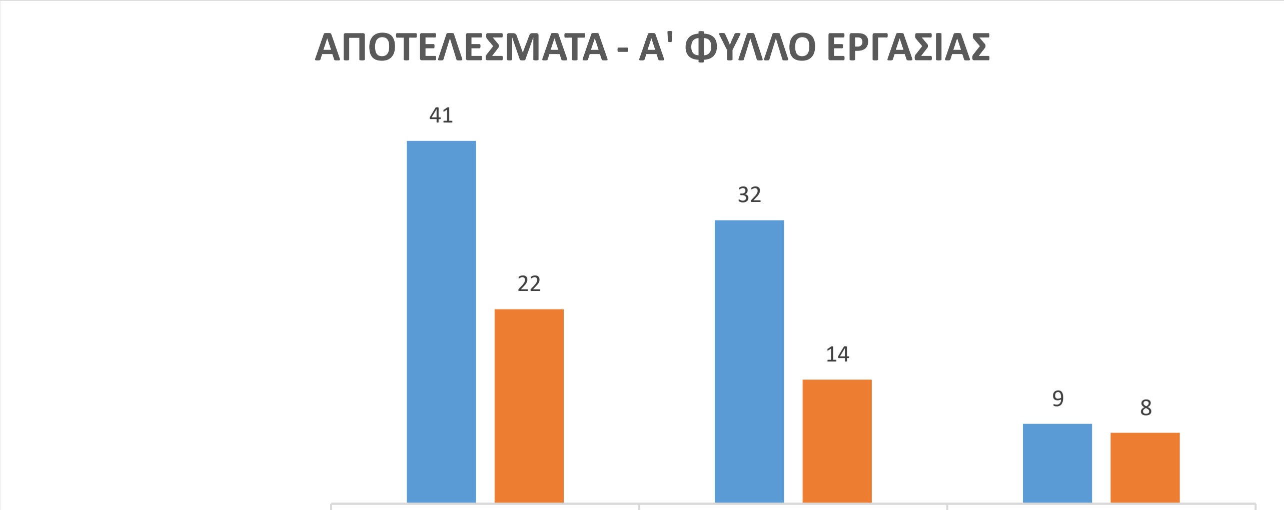
3 Αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύονται διεξοδικά τα δεδομένα που προέκυψαν από την ερευνητική διαδικασία, που αναφέρθηκε λεπτομερώς σε προηγούμενη ενότητα. Διαμορφώθηκαν τέσσερις ενότητες, μια για κάθε φύλλο εργασίας των αντίστοιχων τεσσάρων φάσεων. Σε κάθε ενότητα η προσέγγιση διαφοροποιείται και προσαρμόζεται στα χαρακτηριστικά του εκάστοτε φύλλου εργασίας.

3.1 Πρώτη Ενότητα: 1ο φύλλο εργασίας – Β’ Φάση

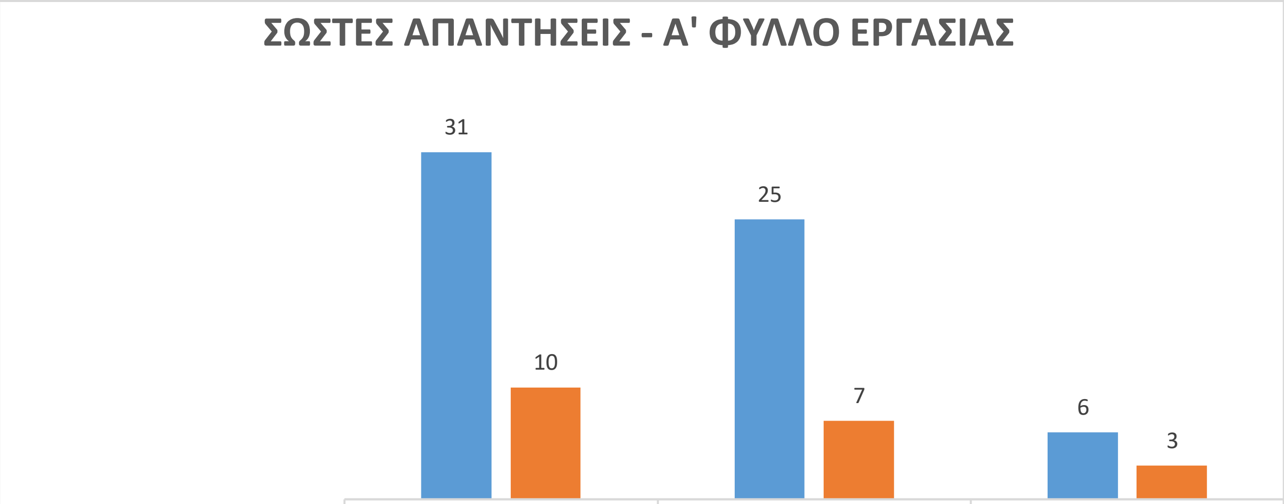
Η εισαγωγή και η εμπλοκή των μαθητών/τριών στην ερευνητική διαδικασία έγινε μέσω της κινητικής δραστηριότητας της Α’ Φάσης, προκειμένου να υπάρξει εξοικείωση με τον βηματισμό. Στην αμέσως επόμενη φάση (Β’) μοιράστηκε το πρώτο φύλλο εργασίας όπου οι μαθητές/τριες καλούνταν, παρατηρώντας την αφετηρία και ακολουθώντας τα βελάκια, να υπολογίσουν και να καταγράψουν σε κάθε στάση τον αριθμό στον οποίο βρέθηκαν. Προκειμένου να αποτυπωθούν οι αυθόρμητες απαντήσεις των μαθητών/τριών, δεν δόθηκαν οδηγίες ή διευκρινίσεις για τη συμπλήρωσή του.

Θετική εντύπωση προκάλεσε η διαπίστωση ότι η πλειοψηφία των μαθητών/τριών χρησιμοποίησε τη σημειογραφία των αρνητικών αριθμών και υπολόγισε σωστά τις παραστάσεις, που δόθηκαν με τη μορφή βελών. Όπως διακρίνεται από τις αναλύσεις των φύλλων εργασίας, το 65% των συνολικά 63 μαθητών/τριών και των δύο τάξεων κατάφερε να δώσει ορθή απάντηση. Στην Ε’ τάξη το ποσοστό ήταν πιο υψηλό, 70%, συγκριτικά με τη Δ’ που ήταν στο 53%. Μάλιστα, διαπιστώθηκε ότι στην Ε’ το 54% απάντησε χωρίς κανένα λάθος, το 15% έκανε μόνο ένα στο σύνολο των 10 αριθμητικών παρατάσεων και το 80% χρησιμοποίησε σωστό συμβολισμό για την καταγραφή. Αντίστοιχα, στη Δ’ το 35% απάντησε ολόσωστα, το 18% είχε έναν λανθασμένο υπολογισμό και το 76% ήταν σωστό και στον συμβολισμό



	Σύνολο	Ε' Δημοτικό	Δ' Δημοτικού
Σωστές απαντήσεις	41	32	9
Λανθασμένες απαντήσεις	22	14	8

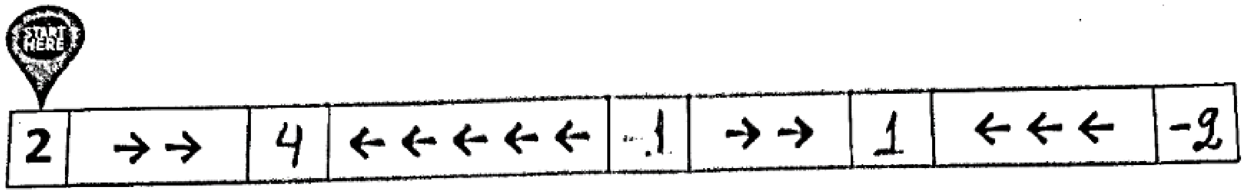
Διάγραμμα 3.1.1 Αποτελέσματα - Α' Φύλλο Εργασίας



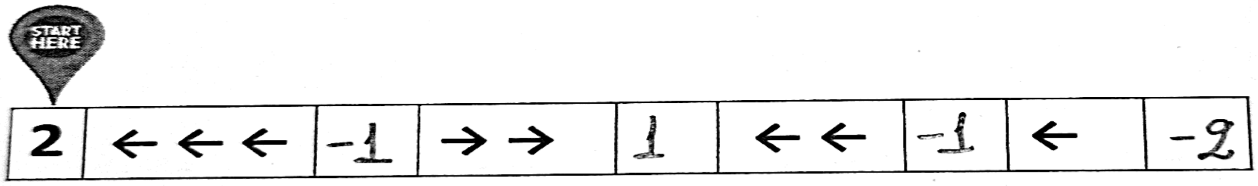
	Σύνολο	Ε' Δημοτικό	Δ' Δημοτικού
Σωστοί υπολογισμοί	31	25	6
Υπολογισμοί με 1 λάθος	10	7	3

Διάγραμμα 3.1.2 Σωστές Απαντήσεις - Α' Φύλλο Εργασίας

Στην Εικόνα 3.1.1 και Εικόνα 3.1.2 βλέπουμε δύο περιπτώσεις με σωστή σημειογραφία και ορθούς υπολογισμούς.



Εικόνα 3.1.1 Σωστή σημειογραφία - Σωστός υπολογισμός (6Δ)



Εικόνα 3.1.2 Σωστή σημειογραφία - Σωστός υπολογισμός (16Ε)

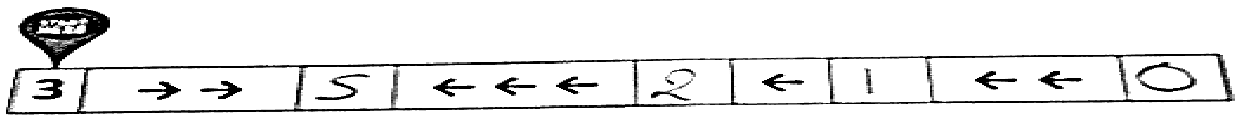
Για τις λανθασμένες απαντήσεις, που αποτελούν το 35%, επιχειρήθηκε να αποκωδικοποιηθεί ο τρόπος σκέψης που οδήγησε στην εκάστοτε σημειογραφία και στο αριθμητικό αποτέλεσμα. Από την ερμηνεία των απαντήσεων προέκυψαν οι εξής κατηγορίες:

1. Μηδέν ως αρνητικός αριθμός
2. Καταγραφή βηματισμού με πρόσημο χωρίς υπολογισμό
3. Εσωτερικός υπολογισμός - Αγνόηση αρνητικού
4. Αντιστροφή βελών
5. Επιλεκτική αντιστροφή βελών
6. Μη σταθερή τήρηση βελών
7. Καμία διαφοροποίηση βελών
8. Αρνητικός αριθμός ως δεκαδικός
9. Σε αφετηρία με 0 προσθήκη ενός βήματος
10. Απουσία πρόσημου – Σωστός υπολογισμός
11. Σωστή σημειογραφία – Λανθασμένος υπολογισμός

Ακολουθεί λεπτομερέστερη ανάλυση των παραπάνω κατηγοριών.

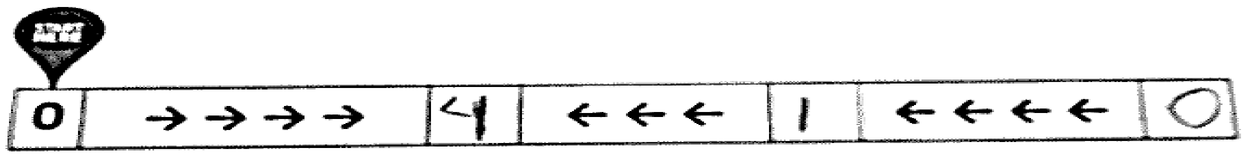
1. Μηδέν ως αρνητικός αριθμός

Στην κατηγορία αυτή συμπεριλαμβάνονται οι περιπτώσεις όπου οι μαθητές/τριες επιλέγουν να τοποθετήσουν το μηδέν στη θέση αρνητικού αριθμού χωρίς να λαμβάνουν υπόψη την πραγματική του αξία. Το μηδέν χρησιμοποιείται, για να αντικαταστήσει οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό, πιο συχνά όμως εντοπίζεται στη θέση του -1. Για παράδειγμα στην αριθμητική παράσταση 3 + 2 – 3 + 1 - 2 στο τελικό αποτέλεσμα βλέπουμε το 0 αντί για το -1 (Εικόνα 3.1.3).



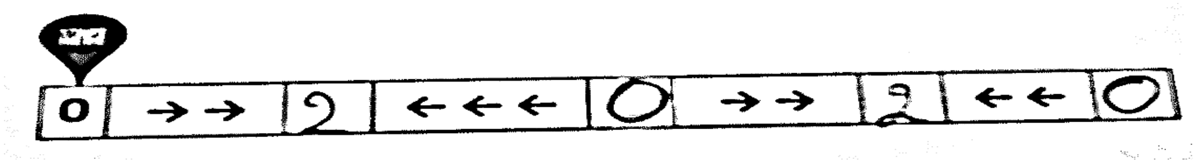
Εικόνα 3.1.3 Μηδέν ως αρνητικός αριθμός (1Ε)

Αλλά και στην αριθμητική παράσταση 0 + 4 – 3 - 4, όπου το αποτέλεσματα είναι -3 πάλι απλά τοποθετείται το 0 στη θέση του αρνητικού αριθμού. (Εικόνα 3.1.4)

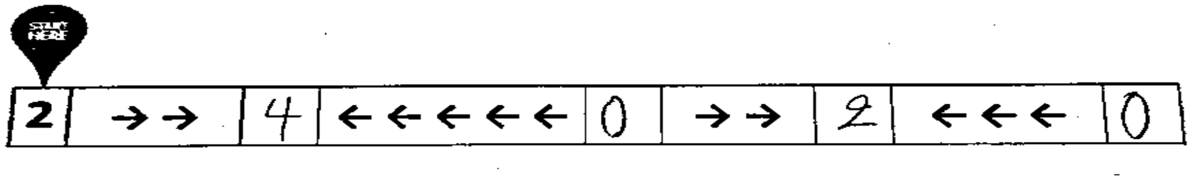


Εικόνα 3.1.4 Μηδέν ως αρνητικός αριθμός (34Ε)

Διαπιστώθηκε ακόμη ότι το μηδέν τοποθετείται, για να αντικαταστήσει οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό προκύψει και σε οποιοδήποτε σημείο είτε εσωτερικά της αριθμητικής παράστασης είτε στο αποτέλεσμα. Στην αριθμητική παράσταση 0 + 2 – 3 + 2 - 2, ο μαθητής υπολογίζοντας 2 - 3 γράφει 0 αντί για -1 και συνεχίζει τον βηματικό υπολογισμό με βάση τον αριθμό που έχει γράψει, χωρίς να προβληματίζεται από την ασυνέπεια βελών και αριθμών (Εικόνα 3.1.5). Στην αριθμητική παράσταση 2 + 2 – 5 + 2 – 3 παρατηρούμε ότι τα αρνητικά αποτελέσματα αγνοούνται όσες φορές κι αν προκύψουν. Έτσι, αρχικά υπολογίζοντας 4 - 5 γράφει 0 αντί για -1. Στη συνέχεια δεν λαμβάνει υπόψη τον αριθμό των βελών, αλλά τον αριθμό που κατέγραψε και φτάνοντας στο τέλος της αριθμητικής παράστασης υπολογίζει 2 - 3 και γράφει πάλι 0, παραβλέποντας για δεύτερη φορά τον λανθασμένο υπολογισμό (Εικόνα 3.1.6).



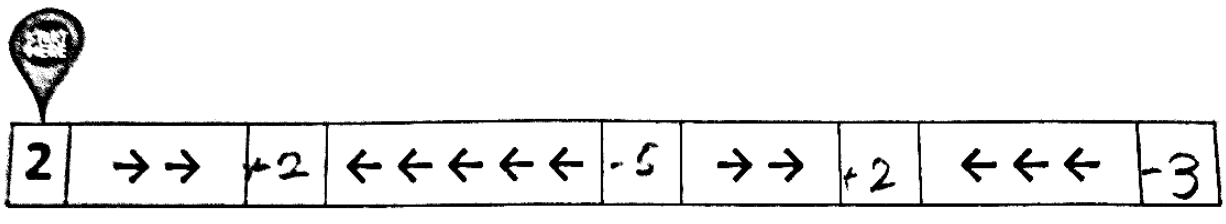
Εικόνα 3.1.5 Μηδέν ως αρνητικός αριθμός (22Ε)



Εικόνα 3.1.6 Μηδέν ως αρνητικός αριθμός (20Ε)

2. Καταγραφή βηματισμού με πρόσημο χωρίς υπολογισμό

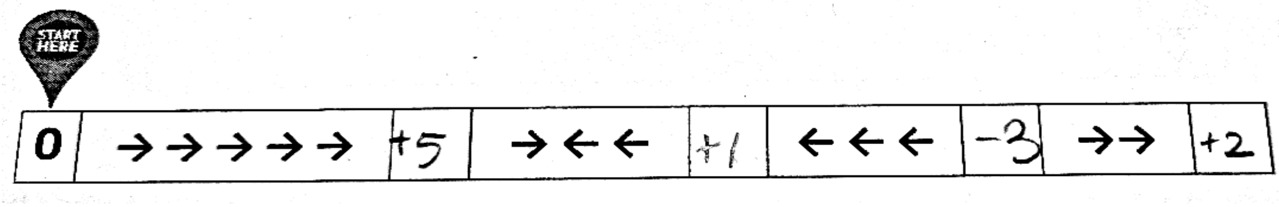
Παρατηρήθηκε ότι ορισμένοι/ες μαθητές/τριες αντιλήφθηκαν τη διαφοροποίηση των βελών ανάλογα με την κατεύθυνσή τους και την αποτύπωσαν με τη χρήση πρόσημου σε όλους τους αριθμούς. Η σημειογραφία που επέλεξαν ήταν σωστή, για τους θετικούς αριθμούς χρησιμοποιούσαν το σύμβολο + και το - για τους αρνητικούς. Ωστόσο, δεν προχώρησαν σε κανέναν απολύτως υπολογισμό στην αριθμητική παράσταση και αρκέστηκαν μόνο στην απλή καταγραφή των βημάτων (Εικόνα 3.1.7).



Εικόνα 3.1.7 Καταγραφή βηματισμού με πρόσημο χωρίς υπολογισμό (14Ε)

3. Εσωτερικός υπολογισμός – Αγνόηση αρνητικού

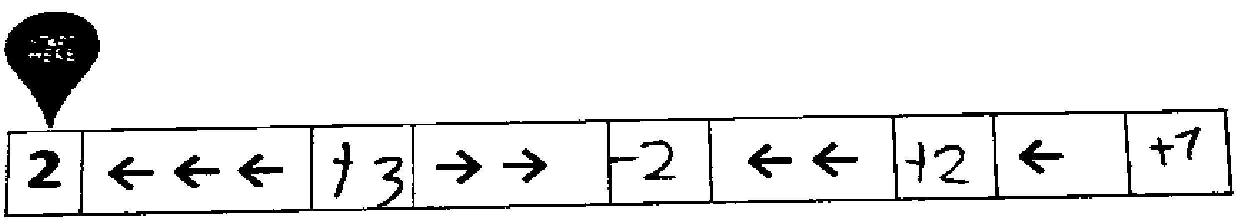
Συναντήσαμε ακόμη την περίπτωση στην οποία δεν καταγράφουν απλά σε κάθε κουτάκι τον αριθμό των βελών τοποθετώντας μπροστά το κατάλληλο πρόσημο ανάλογα με την κατεύθυνση, όπως είδαμε στην προηγούμενη κατηγορία της «Καταγραφής βηματισμού με πρόσημο χωρίς υπολογισμό». Εδώ υπάρχει μια ιδιαιτερότητα. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.1.8, κατά την καταγραφή ο/η μαθητής/τρια φτάνει στο δεύτερο κουτάκι όπου υπάρχουν συνολικά τρία βέλη, ένα με κατεύθυνση δεξιά και δύο αριστερά. Προκειμένου να βρεθεί μια λύση για την καταγραφή των διαφορετικών βελών, επιλέγεται να καταγραφεί μόνο το ένα θετικό βέλος και να αγνοηθούν εντελώς τα δύο αρνητικά.



Εικόνα 3.1.8 Εσωτερικός υπολογισμός - Αγνόηση αρνητικού (3Ε)

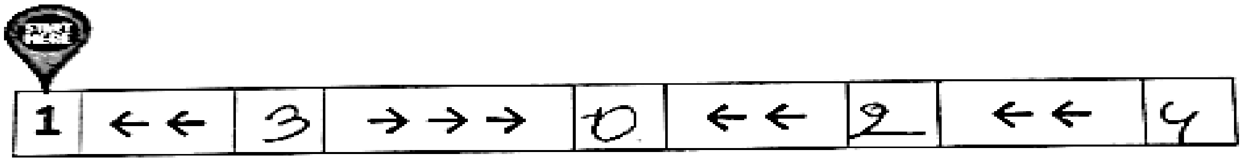
4. Αντιστροφή βελών

Στην κατηγορία αυτή συμπεριλαμβάνονται οι περιπτώσεις όπου οι μαθητές/τριες κατά τον βηματικό υπολογισμό τους ακολουθούσαν αντίθετη πορεία. Εδώ εντοπίστηκαν δύο διαφορετικές περιπτώσεις. Στην πρώτη, δεν έγινε κανένας υπολογισμός, αλλά απλή καταγραφή του βηματισμού αποτυπώνοντας όμως την αντίθετη κάθε φορά κατεύθυνση. Για παράδειγμα, όπως αποτυπώνεται στην Εικόνα 3.1.9, η αριθμητική παράσταση 2 – 3 + 2 – 2 - 1 αποδόθηκε έως 2 + 3 – 2 + 2 + 1.



Εικόνα 3.1.9 Αντιστροφή βελών (4Ε)

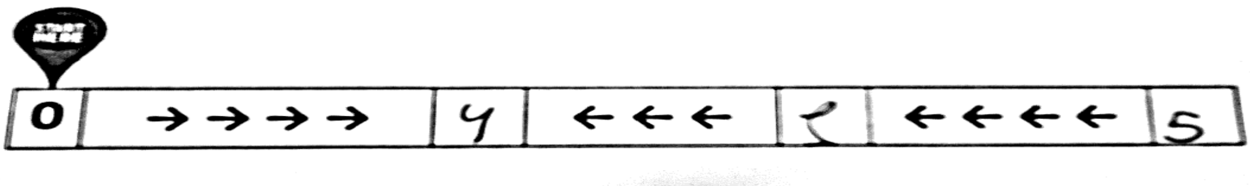
Στη δεύτερη περίπτωση, όπου το βέλος έδειχνε προς τα αριστερά, πρόσθεταν, ενώ έκαναν αφαίρεση, όταν η κατεύθυνση του βέλους ήταν προς τα αριστερά. Έτσι για παράδειγμα, η αριθμητική παράσταση 1 – 2 + 3 – 2 - 2 υπολογίστηκε με τους ακριβώς αντίθετους αριθμούς ως 1 + 2 – 3 + 2 + 2 (Εικόνα 3.1.10).



Εικόνα 3.1.10 Αντιστροφή βελών (26Ε)

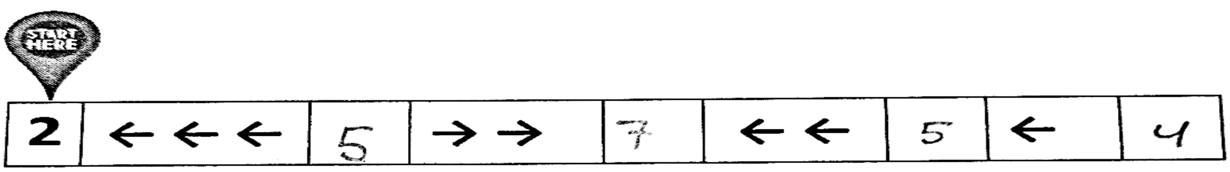
5. Επιλεκτική αντιστροφή βελών

Στην κατηγορία αυτή έχουμε και πάλι αντιστροφή της κατεύθυνσης των βελών. Η διαφοροποίηση από την προηγούμενη κατηγορία έγκειται στο ότι η αλλαγή δεν είναι καθολική, αλλά γίνεται μόνο επιλεκτικά σε ορισμένα μέρη της αριθμητικής παράστασης. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.1.11, ενώ ο υπολογισμός και η χρήση των βελών είναι σωστή, όταν φτάνει στο σημείο να υπολογίσει 1 - 4, επιλέγει να κάνει την αντιστροφή και να προσθέσει. Υποθέτουμε ότι η επιλογή αυτή στο συγκεκριμένο σημείο οφείλεται στο γνωστικό αδιέξοδο στο οποίο βρέθηκε, να αφαιρέσει δηλαδή έναν μεγαλύτερο αριθμό από έναν μικρότερο. Τέτοιου είδους αντιστροφές είναι συχνές και έχουν εντοπιστεί σε πολλές μελέτες μεταξύ των οποίων και Bofferding (2010).



Εικόνα 3.1.11 Επιλεκτική αντιστροφή βελών (11Δ)

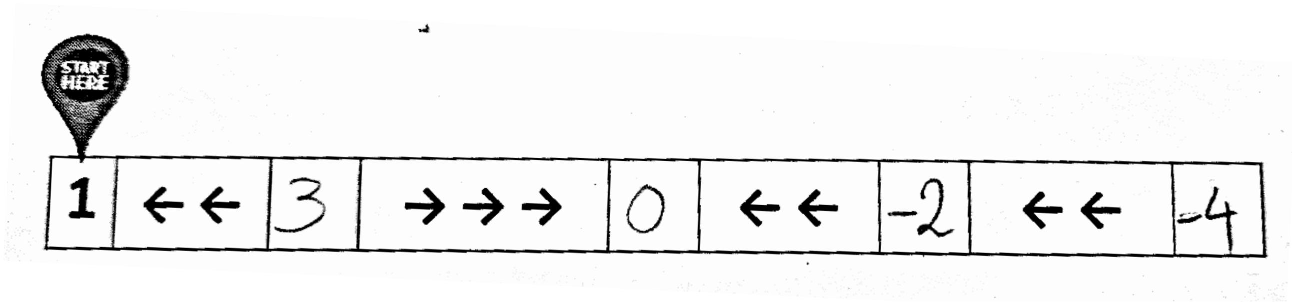
Όπως είναι εμφανές και στην παρακάτω Εικόνα 3.1.12, η αντιστροφή μπορεί να γίνει όσες φορές είναι απαραίτητο προκειμένου να αποφευχθεί ο αρνητικός αριθμός.



Εικόνα 3.1.12 Επιλεκτική αντιστροφή βελών (23Ε)

6. Μη σταθερή τήρηση βελών

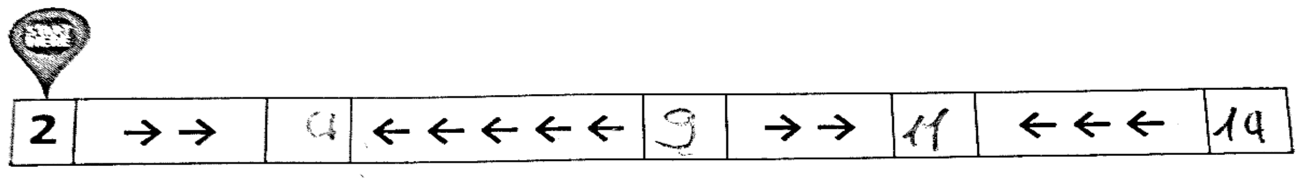
Παρότι μοιάζει όμοια με την παραπάνω κατηγορία που αφορά την αντιστροφή των βελών, εδώ υπάρχει μια ουσιαστική διαφορά. Παρατηρώντας προσεκτικά τον βηματικό υπολογισμό στην Εικόνα 3.1.13, βλέπουμε ότι ξεκινά με μια αντιστροφή και υπολογίζει 1 + 2 = 3, ενώ θα έπρεπε να αφαιρέσει και στη συνέχεια, με συνέπεια στην αντιστροφή, αφαιρεί αντί να προσθέσει 3. Στο μέσο όμως της αριθμητικής παράστασης επανέρχεται στην ορθή, σύμφωνα με την κατεύθυνση των βελών, πράξη και κάνει τις αφαιρέσεις (0 – 2 = -2 και -2 – 2 = -4). Δεδομένου ότι οι δύο τελευταίοι υπολογισμοί είναι ορθοί, παρόλο που αφορούν αρνητικούς αριθμούς, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η αρχική αντιστροφή δεν επιλέχθηκε για την αποφυγή του αρνητικού, αλλά πιθανώς από απροσεξία.



Εικόνα 3.1.13 Μη σταθερή τήρηση βελων (42Ε)

7. Καμία διαφοροποίηση βελών

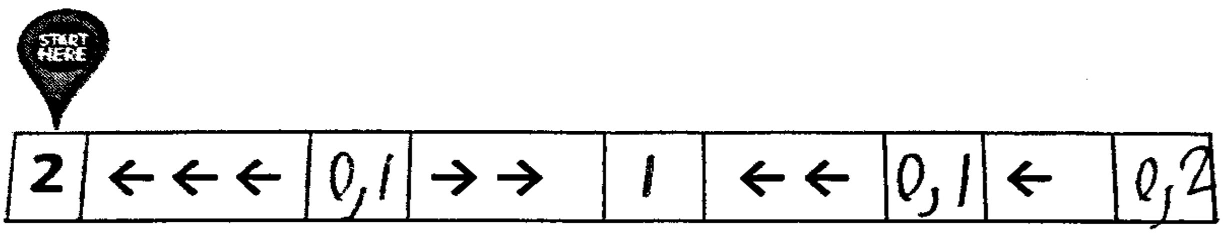
Εντοπίστηκε περίπτωση όπου ο μαθητής προχωρούσε στον βηματικό του υπολογισμό χωρίς να λαμβάνει υπόψη τις διαφορετικές κατευθύνσεις των βελών (Εικόνα 3.1.14). Αντιθέτως, εκλαμβάνονταν όλα ως θετικά με αποτέλεσμα ο υπολογισμός να περιλαμβάνει μόνο προσθέσεις.



Εικόνα 3.1.14 Καμιά διαφοροποίηση βελών (9Ε)

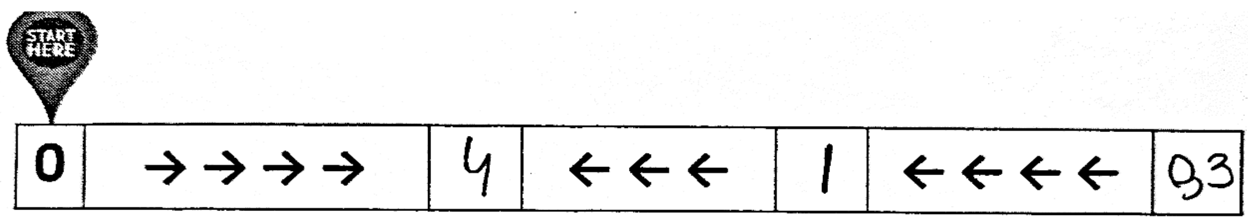
8. Αρνητικός αριθμός ως δεκαδικός

Υπήρξαν περιπτώσεις όπου οι μαθητές/τριες, μη γνωρίζοντας πώς να αποδώσουν τον αρνητικό αριθμό, επέλεξαν να τον καταγράψουν ως δεκαδικό. Παρουσιάστηκαν μάλιστα και ορισμένες διαφοροποιήσεις στον συγκεκριμένο συμβολισμό. Στο πρώτο παράδειγμα (Εικόνα 3.1.15) παρατηρούμε ότι στον υπολογισμό της αριθμητικής παράστασης 2 – 3 + 2 – 2 - 1 ο/η μαθητής/τρια επέλεξε να χρησιμοποιήσει τον συμβολισμό των δεκαδικών αριθμών που είναι ήδη γνωστοί. Έτσι, στην πράξη 2 - 3 επινοεί τον συμβολισμό 0,1 αντί για το -1. Συνεχίζει κανονικά τον υπολογισμό και πρέπει τώρα να υπολογίσει το 1 - 2, όπου και πάλι επιλέγει να το αποδώσει με το 0,1. Στο τέλος καλείται να κάνει την πράξη - 1 - 1, η οποία έχει καταγραφεί από τον/την μαθητή/τρια ως 0,1 – 1. Το αποτέλεσμα της πράξης που είναι - 2 ο/η μαθητής/τρια ακολουθώντας τη στρατηγική του/της το γράφει ως - 2.



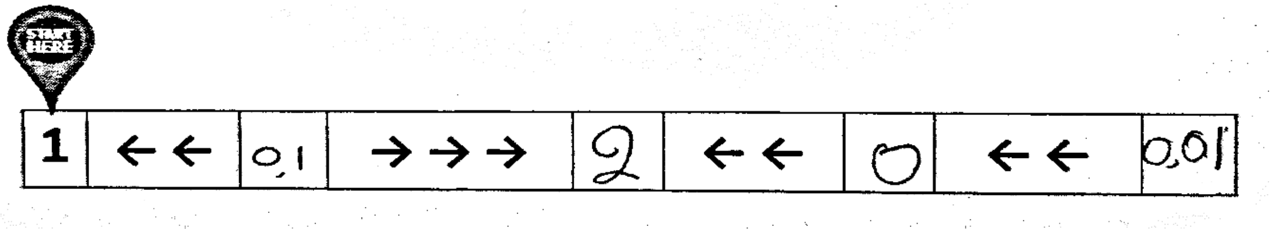
Εικόνα 3.1.15 Αρνητικός αριθμός ως δεκαδικός (24Ε)

Ο/Η ίδιος/α μαθητής/τρια σε άλλο παράδειγμα (Εικόνα 3.1.16) παρουσιάζει απόλυτη συνέπεια στη στρατηγική που έχει υιοθετήσει και έτσι στην αριθμητική παράσταση 0 + 4 – 3 - 4 που το αποτέλεσμα είναι -3 βλέπουμε πάλι δεκαδικό αριθμό και τον αριθμό που αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα στη θέση του πρώτου δεκαδικού ψηφίου.

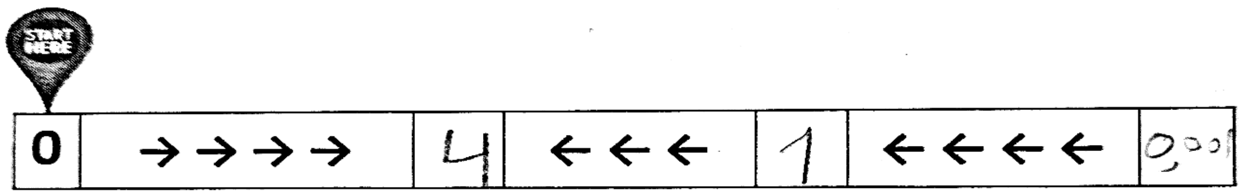


Εικόνα 3.1.16 Αρνητικός αριθμός ως δεκαδικός (24Ε)

Στο επόμενο παράδειγμα διαπιστώνουμε πώς, όταν απαιτούνταν στην επίλυση της αριθμητικής παράστασης να γραφεί αρνητικός αριθμός, επιλεγόταν και πάλι, όπως προηγουμένως, ο συμβολισμός με δεκαδικό αριθμό. Η διαφοροποίηση εδώ βρίσκεται στο ότι χρησιμοποιούνται δεκαδικός αποκλειστικά με τον αριθμό 1 στο δεκαδικό μέρος και κανέναν άλλο και η απόδοση του 2 ή του 3 γινόταν με την αύξηση των μηδενικών στο δεκαδικό μέρος. Επομένως, όπως φαίνεται και Εικόνα 3.1.17 και Εικόνα 3.1.18, στη θέση του -1 εμφανίζεται το 0,1, στη θέση του -2, το 0,01 και στη θέση του -3, το 0,001



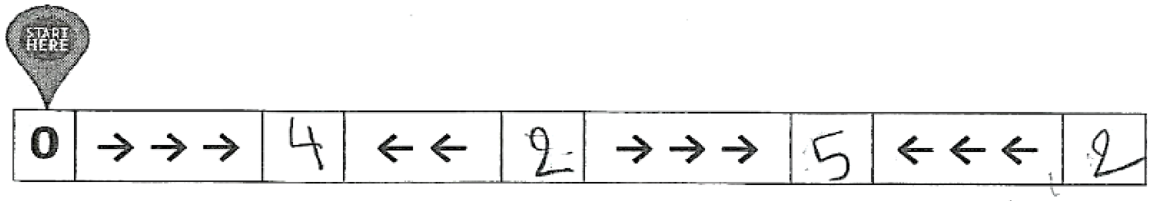
Εικόνα 3.1.17 Αρνητικός αριθμός ως δεκαδικός (4Δ)



Εικόνα 3.1.18 Αρνητικός αριθμός ως δεκαδικός (4Δ)

9. Αφετηρία με 0 - Προσθήκη ενός βήματος

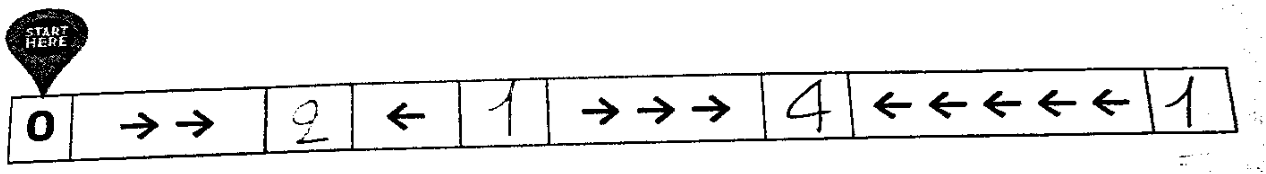
Παρατηρήθηκε ακόμη ότι, όταν στην αφετηρία υπήρχε ο αριθμός μηδέν, μαθητής/τρια προσέθετε πάντα έναν παραπάνω αριθμό σε σχέση με τα βέλη που εμφανίζονταν. Για παράδειγμα, στην αριθμητική παράσταση 0 + 3 - 2 + 3 - 3, ξεκινά και υπολογίζοντας 0 + 3 γράφει 4 και συνεχίζει σωστά τους υπόλοιπους υπολογισμούς (Εικόνα 3.1.19). Αυτό εντοπίστηκε αποκλειστικά στις περιπτώσεις που υπάρχει στην αφετηρία μηδέν, ενώ αντίθετα, όταν στην αφετηρία είχε αριθμούς, όπως το 1, το 2 ή το 3, ο υπολογισμός γινόταν σωστά.



Εικόνα 3.1.19 Αφετηρία με 0 - Προσθήκη βήματος (3Ε)

10. Απουσία πρόσημου –Σωστός υπολογισμός

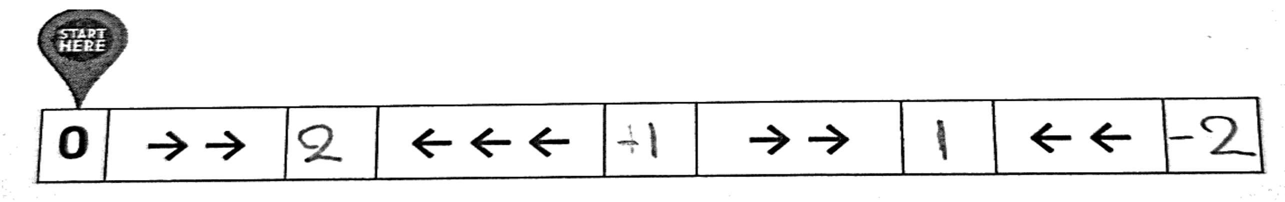
Εντοπίστηκε ακόμη περίπτωση όπου ακολουθήθηκε μεν σωστά ο βηματικός υπολογισμός, ωστόσο απουσίαζε το πρόσημο στον αρνητικό αριθμό. Είναι πράγματι αξιοσημείωτο πως ο μαθητής/τρια κατάφερε να προσεγγίσει αριθμητικά το αποτέλεσμα, αλλά δεν κατόρθωσε να το αποδώσει σωστά σημειογραφικά, καθώς δεν είχε τις απαιτούμενες γνώσεις για τους αρνητικούς αριθμούς (Εικόνα 3.1.20).



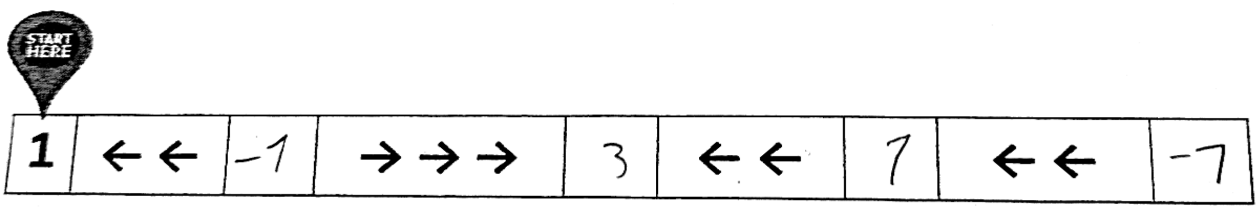
Εικόνα 3.1.20 Απουσία πρόσημου - Σωστός υπολογισμός (11Δ)

11. Σωστή σημειογραφία – Λανθασμένος υπολογισμός

Σε αρκετές περιπτώσεις παρατηρήθηκε ότι χρησιμοποιούνταν το αρνητικό πρόσημο, αλλά υπήρχαν λάθη υπολογισμού (Εικόνα 3.1.21 και Εικόνα 3.1.22). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι υπάρχει μια εξοικείωση με το αρνητικό πρόσημο παρά το γεγονός ότι δεν έχουν διδαχθεί επίσημα τους αρνητικούς αριθμούς. Ωστόσο, δεν είναι σε θέση να προχωρήσουν σε σωστούς υπολογισμούς, γιατί δεν υπάρχουν οι γνωστικές βάσεις, που θα επέτρεπαν να ξεπεραστούν τα εμπόδια και οι δυσκολίες που προκύπτουν κατά τον υπολογισμό.



Εικόνα 3.1.21 Σωστή σημειογραφία - Λανθασμένος υπολογισμός (46Ε)



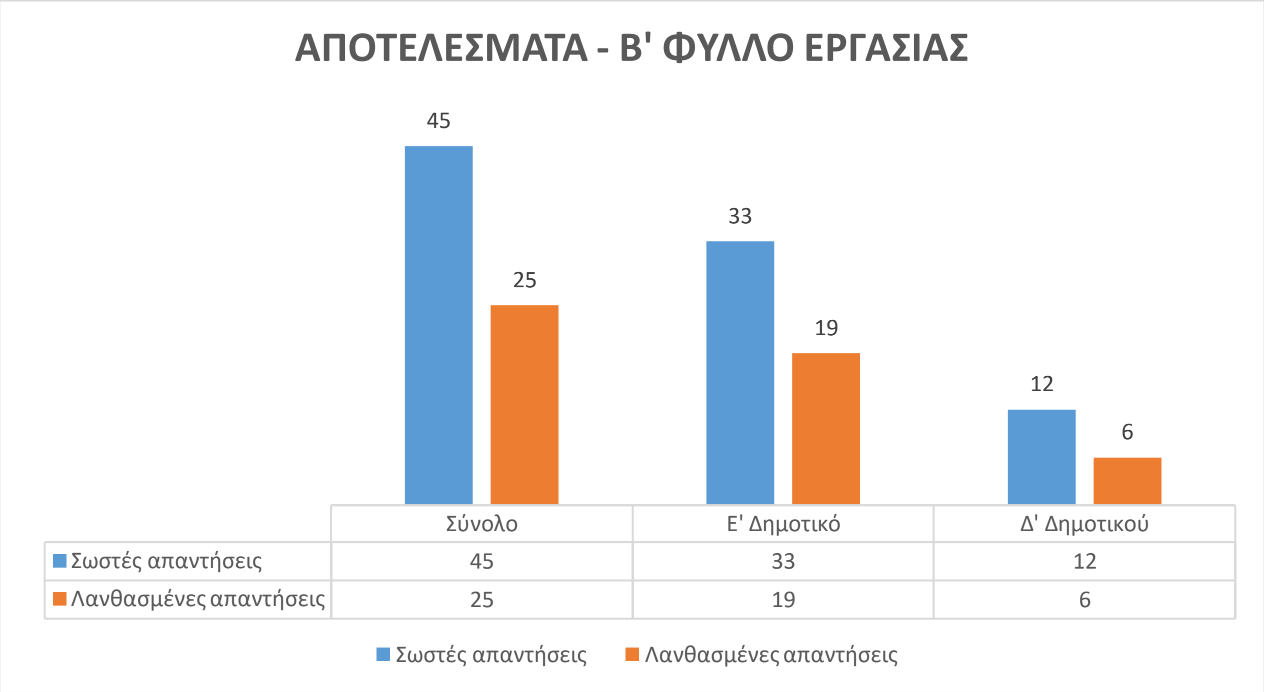
Εικόνα 3.1.22 Σωστή σημειογραφία - Λανθασμένος υπολογισμός (5Δ)

3.2 Δεύτερη Ενότητα: 2ο φύλλο εργασίας – Δ’ Φάση

Μετά την ολοκλήρωση της Β’ Φάσης και έχοντας μια πρώτη ουσιαστική επαφή με τους αρνητικούς αριθμούς και τους υπολογισμούς, κρίθηκε αναγκαίο στη συνέχεια στη Γ’ Φάση να γίνει η εισαγωγή στον επίσημο συμβολισμό. Η εισαγωγή έγινε επιλέγοντας καθημερινές οικείες εικόνες που συμπεριλαμβάνουν αρνητικούς αριθμούς, όπως το θερμόμετρο και το ασανσέρ. Πράγματι, οι μαθητές/τριες κατάφεραν να εντοπίσουν και να αναφέρουν πολλά παραδείγματα με αριθμούς που έως τώρα θεωρητικά τους ήταν άγνωστοι.

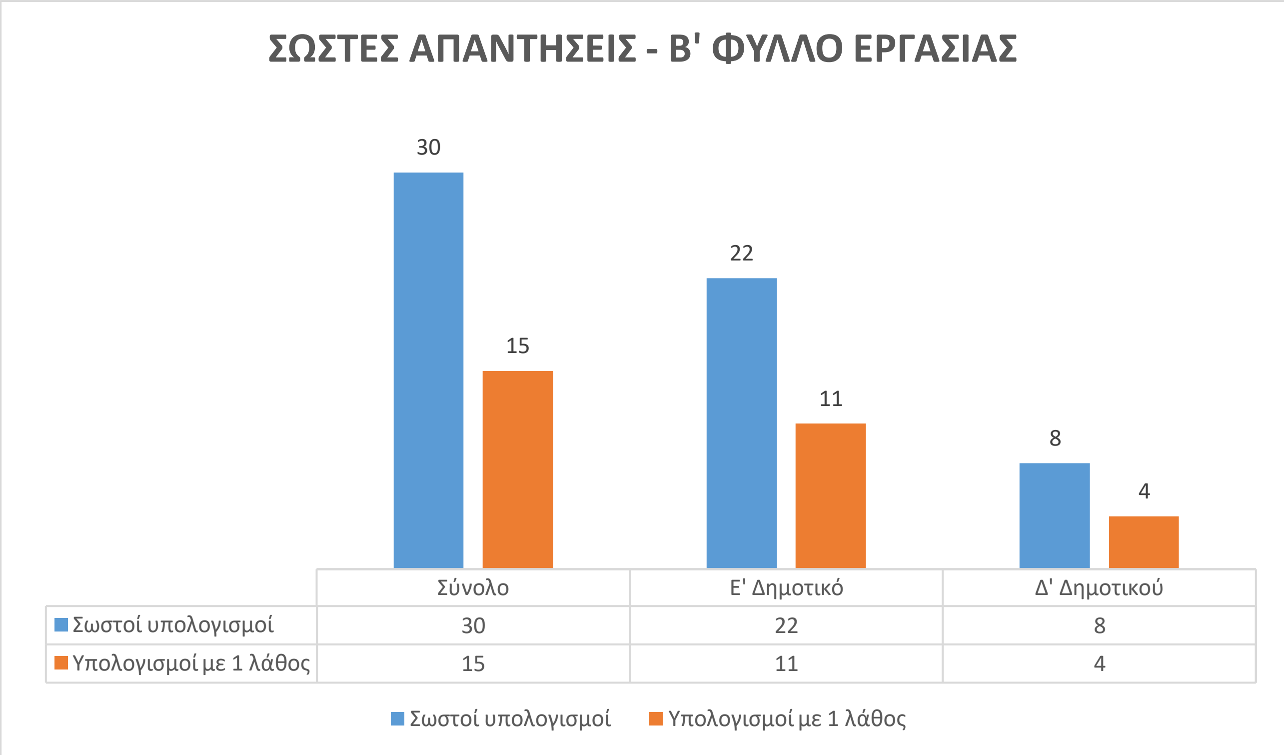
Η παρουσίαση και η συζήτηση για τους αρνητικούς αριθμούς στη Γ’ Φάση συνέβαλε σημαντικά στην εξοικείωση και τη θετική ανταπόκριση των μαθητών/τριών στην επόμενη Φάση. Στη Δ’ Φάση οι μαθητές/τριες κλήθηκαν να συμπληρώσουν ένα φύλλο εργασίας με δεκατρείς αριθμητικές παραστάσεις. Η εικόνα και η δομή του φύλλου εργασίας ήταν παρόμοια με εκείνο της Β’ Φάσης. Μοναδική, ωστόσο ουσιαστική διαφοροποίηση υπήρχε στην απουσία των ενδιάμεσων κενών κελιών όπου συμπληρώνονταν σταδιακά το αποτέλεσμα. Στο συγκεκριμένο φύλλο υπήρχε μόνο ένα κενό κελί στο τέλος της αριθμητικής παράστασης για τη συμπλήρωση του τελικού αποτελέσματος. Επομένως, οι μαθητές/τριες θα έπρεπε να κάνουν τους ενδιάμεσους υπολογισμούς νοερά. Ως βοηθητικό εργαλείο για τους υπολογισμούς μοιράστηκε σε όλα τα παιδιά μια πλαστικοποιημένη αριθμογραμμή, όπου είχαν σημειωθεί μόνο οι αριθμοί από το μηδέν και πάνω. Η εξοικείωση με τη διαδικασία είχε ως αποτέλεσμα να ολοκληρωθεί η συμπλήρωση του φύλλου εργασίας σε σύντονο χρονικό διάστημα, περίπου 15 - 20 λεπτά. Να σημειωθεί ότι οι μαθητές/τριες της Δ’ Δημοτικού χρειάστηκαν λίγο περισσότερο χρόνο και εξηγήσεις συγκριτικά με τους/τις μαθητές/τριες της Ε’ Δημοτικού.

Από την ανάλυση των 70 φύλλων εργασίας των μαθητών/τριών της Ε’ και Δ’ Δημοτικού εντύπωση προκάλεσε το σημαντικό ποσοστό ορθού νοερού υπολογισμού της αριθμητικής παράστασης, που αγγίζει περίπου το 65%. Αναλυτικά από τους 70 μαθητές/τριες οι 45 κατάφεραν να συγκρατήσουν τους υπολογισμούς στο μυαλό τους και να απαντήσουν σωστά. Μάλιστα το 43% (30 μαθητές/τριες) συμπλήρωσαν ολόσωστα το τελικό αποτέλεσμα και στις 13 αριθμητικές παραστάσεις. Συγκεκριμένα, οι 22 από τους 52 μαθητές/τριες της Ε’ και οι 8 από τους 18 της Δ’ τάξης. Σημαντικό ακόμη είναι το 22% των μαθητών/τριών, συγκεκριμένα 11 της Ε’ και 4 της Δ’ τάξης, υπολόγισαν λανθασμένα μόνο 1 από τις 13 αριθμητικές παραστάσεις



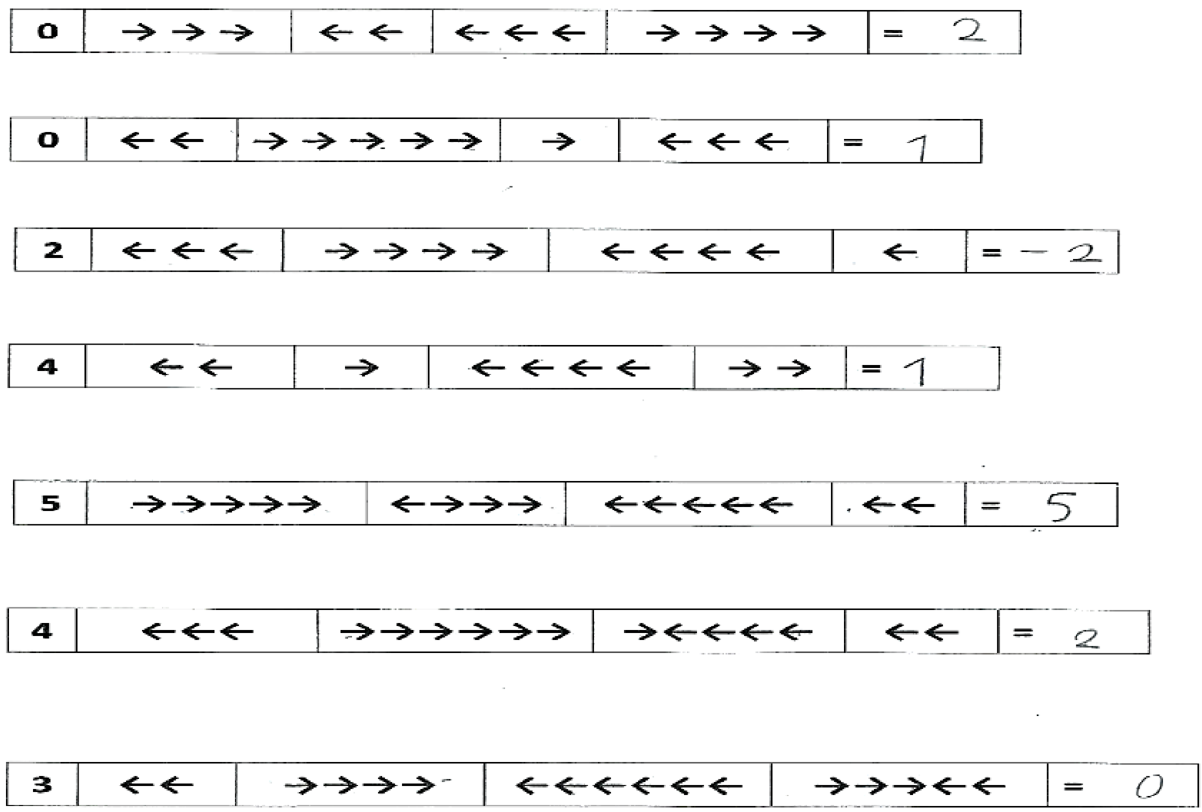
	Σύνολο	Ε' Δημοτικό	Δ' Δημοτικού
Σωστές απαντήσεις	45	33	12
Λανθασμένες απαντήσεις	25	19	6

Διάγραμμα 3.2.1 Αποτελέσματα - Β' Φύλλο Εργασίας

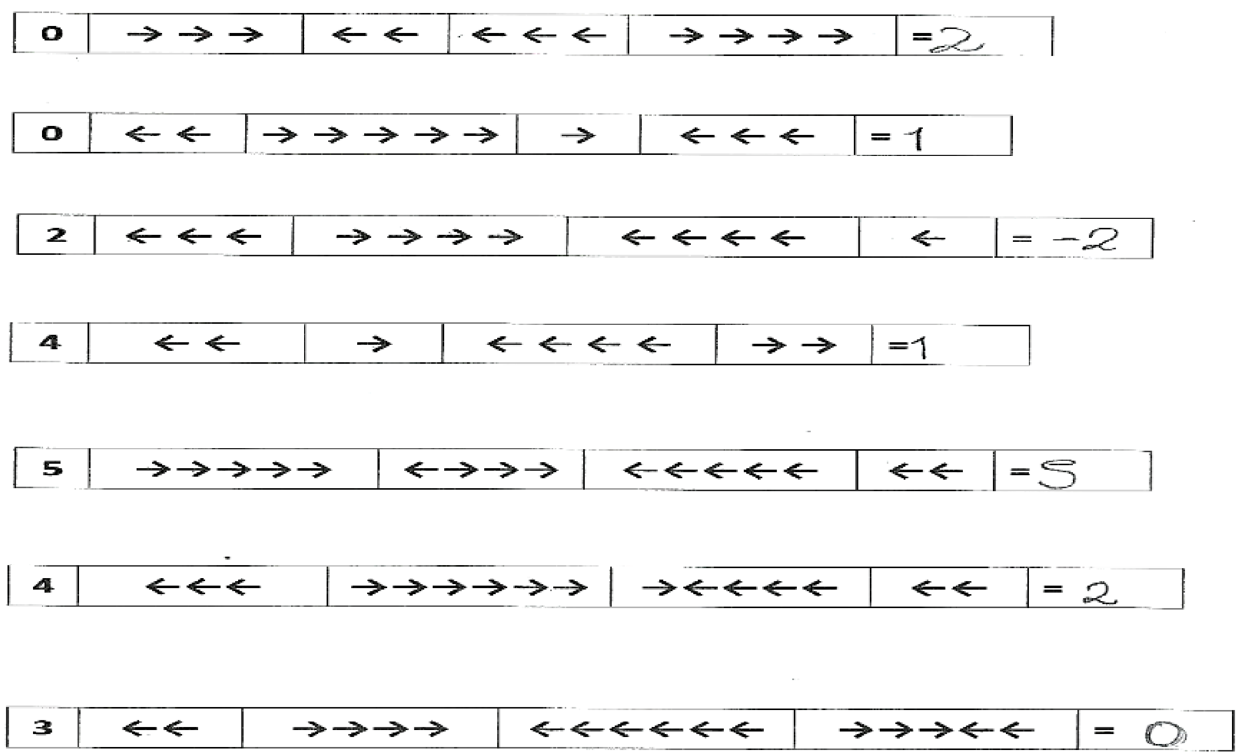


	Σύνολο	Ε' Δημοτικό	Δ' Δημοτικού
Σωστοί υπολογισμοί	30	22	8
Υπολογισμοί με 1 λάθος	15	11	4

Διάγραμμα 3.2.2 Σωστές Απαντήσεις – Β’ Φύλλο Εργασίας

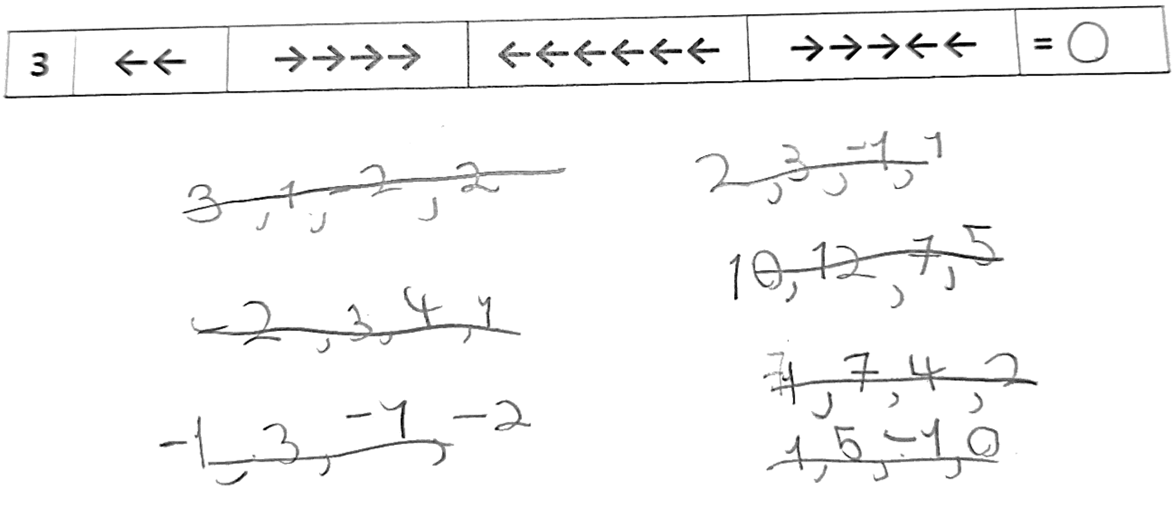


Εικόνα 3.2.1 Σωστοί Υπολογισμοί (12Δ)

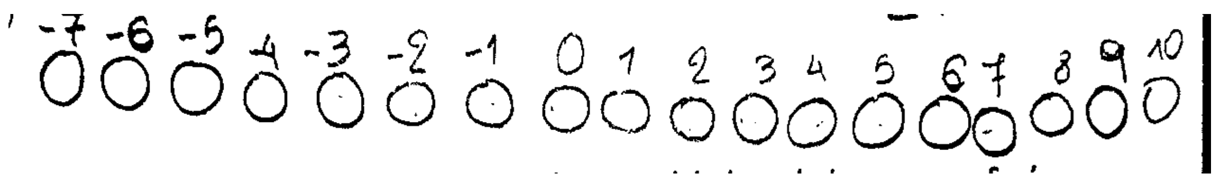


Εικόνα 3.2.2 Σωστοί Υπολογισμοί (37Ε)

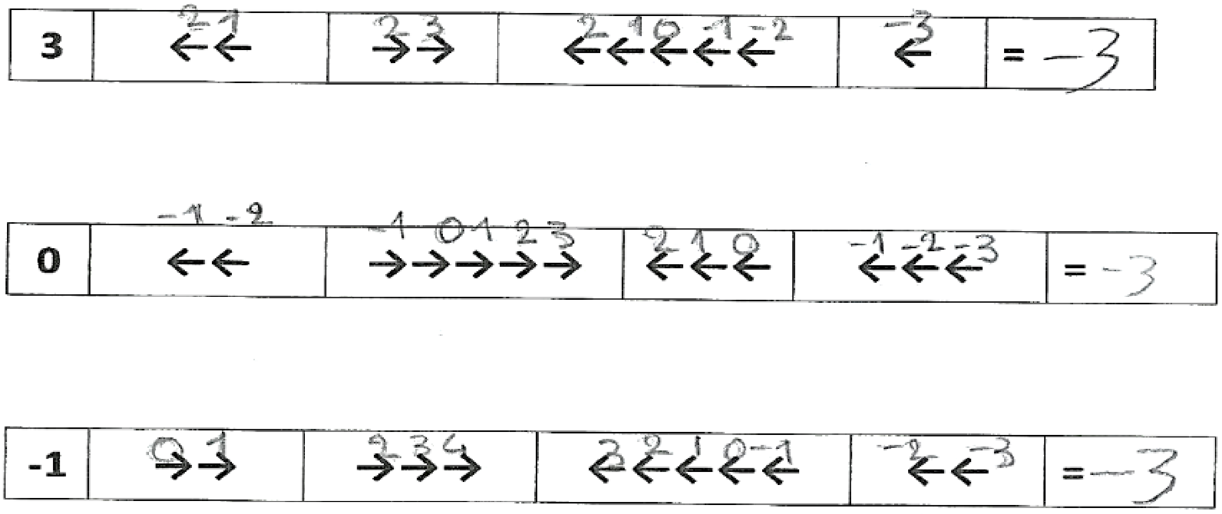
Κατά τη μελέτη των φύλλων εργασίας, εντοπίστηκαν ορισμένες στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν από μαθητές/τριες προκειμένου να υπολογίσουν τις αριθμητικές παραστάσεις. Ένας μαθητής της Ε’ Δημοτικού χρησιμοποίησε τον κενό χώρο στο κάτω μέρος του φύλλου εργασίας, για να καταγράψει τα ενδιάμεσα αποτελέσματα της αριθμητικής παράστασης. Όπως φαίνεται και στην Εικόνα 3.2.3, ο μαθητής χρησιμοποιεί το αρνητικό πρόσημο και χωρίζει τους αριθμούς με κόμμα. Μια μαθήτρια της Ε’ τάξης, παρόλο που έχει στη διάθεσή της πλαστικοποιημένη αριθμογραμμή, έχει σχεδιάσει την αριθμογραμμή στο πάνω μέρος του φύλλου εργασίας σημειώνοντας και το αριστερό τμήμα της με τους αρνητικούς αριθμούς (Εικόνα 3.2.4). Στην Εικόνα 3.2.5, φαίνεται ο βηματικός υπολογισμός και η καταγραφή που επέλεξε να εφαρμόσει μια μαθήτριας της Ε’ τάξης. Τέλος, υπήρχαν ορισμένοι μαθητές που κατέγραφαν σε κάθε ενδιάμεση στάση το αποτέλεσμα, όπως ζητούνταν στο προηγούμενο φύλλο εργασίας, παρόλο που πια δεν υπήρχε κενό κελί (Εικόνα 3.2.6).



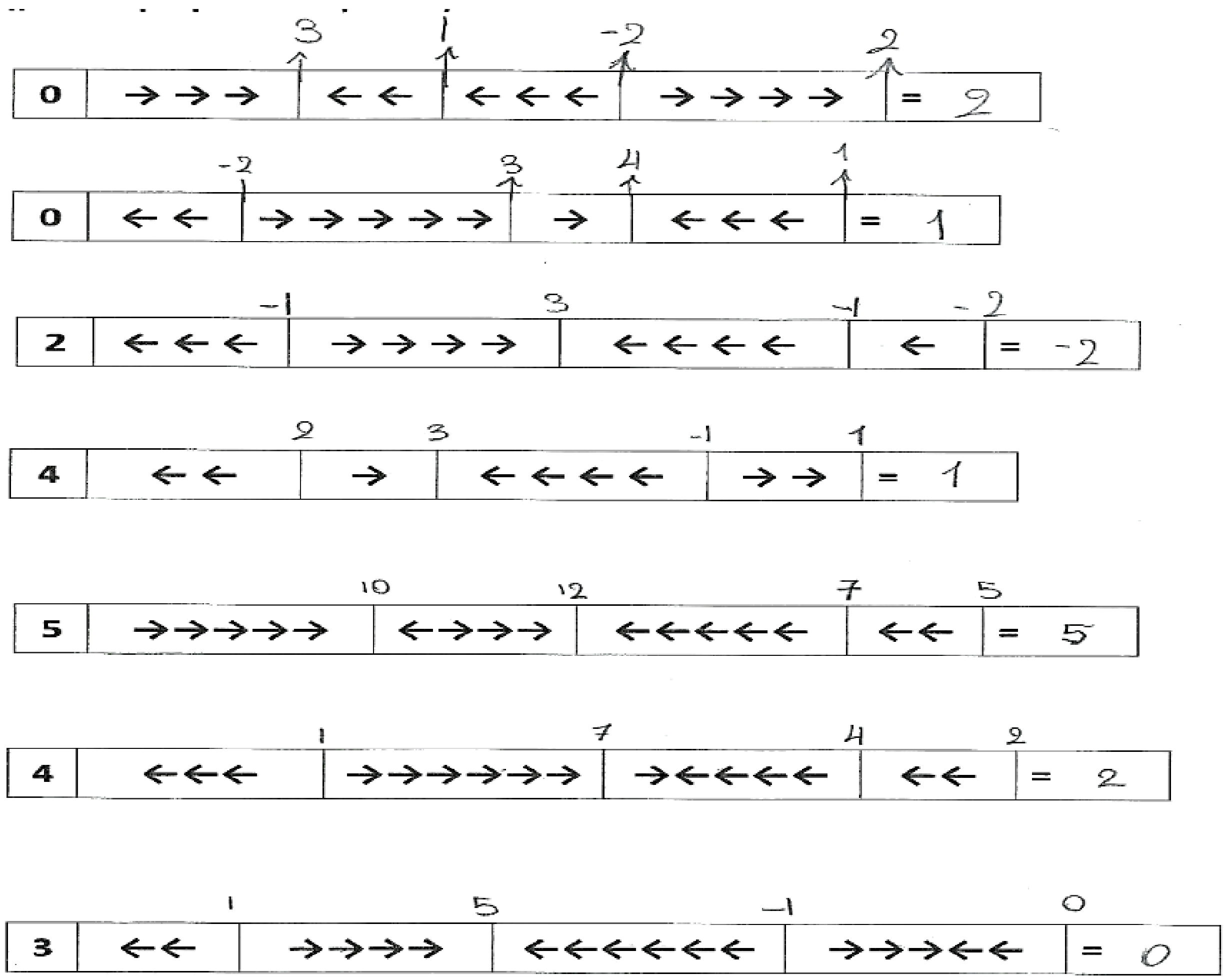
Εικόνα 3.2.3 Καταγραφή Υπολογισμών (8Δ)



Εικόνα 3.2.4 Σχεδιασμός Αριθμογραμμής (8Ε)



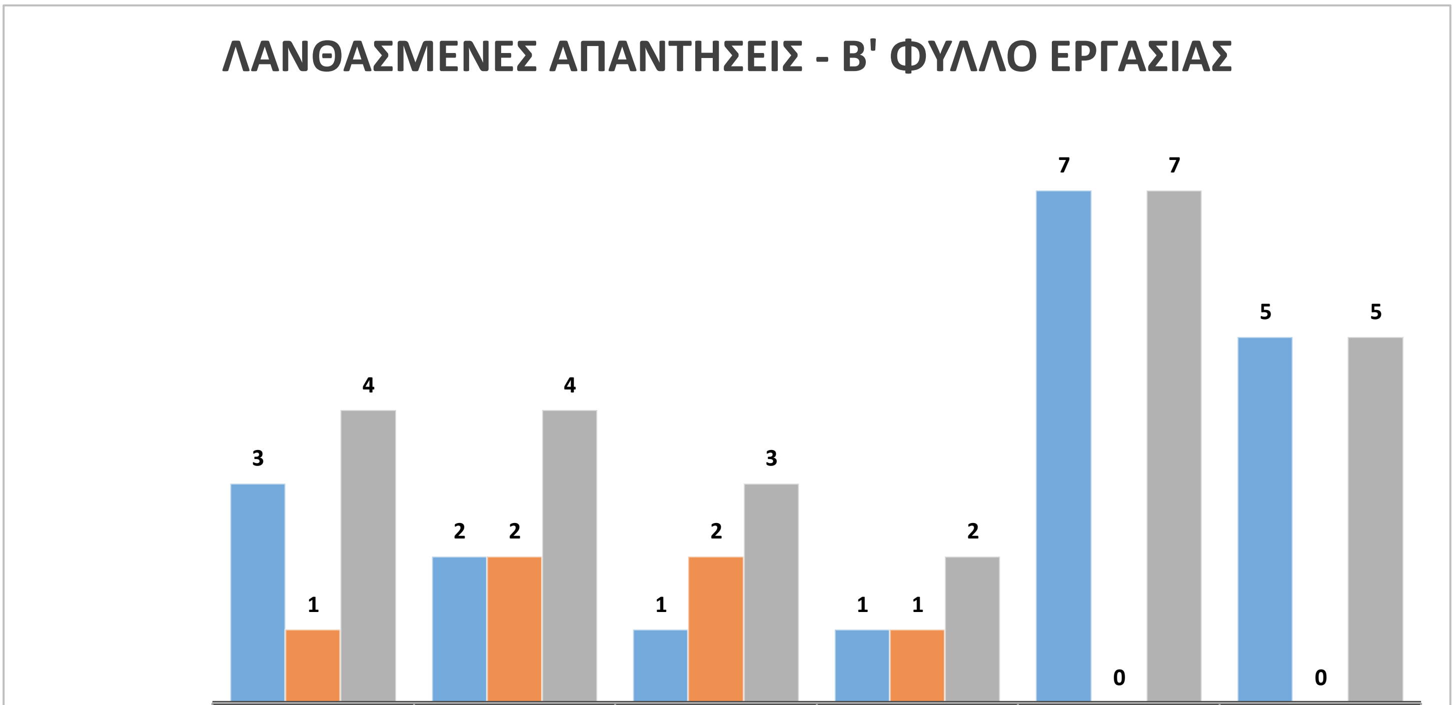
Εικόνα 3.2.5 Καταγραφή βηματικού υπολογισμού (21Ε)



Εικόνα 3.2.6 Καταγραφή ενδιάμεσων αποτελεσμάτων (45Ε)

Κατά την ανάλυση των 25 φύλλων εργασίας, όπου σημειώθηκαν οι λανθασμένοι υπολογισμοί, εντοπίστηκαν κοινά στοιχεία στα λάθη που θα μπορούσαν να ομαδοποιηθούν και ταξινομηθούν σε 5 κατηγορίες. Να σημειωθεί ωστόσο ότι υπήρξαν και 4 φύλλα εργασίας στα οποία τα αποτελέσματα δεν ήταν εφικτό να ερμηνευτούν ή να ενταχθούν σε κάποια κατηγορία. Οι κατηγορίες που προέκυψαν είναι οι εξής:

1. Αντιστροφή ή παράβλεψη φοράς των βελών
2. Χρήση του μηδενός στη θέση αρνητικού αποτελέσματος
3. Απουσία αρνητικού πρόσημου
4. Δεκαδικός αριθμός στη θέση αρνητικού
5. Επίδραση αριθμού εκκίνησης
6. Απροσδιόριστο λάθος



	Αντιστροφή βέλους	0 ως αρνητικός αριθμός	Απουσία αρνητικού πρόσημου	Δεκαδικός στη θέση αρνητικού	Επίδραση αριθμού εκκίνησης	Απροσδιόριστο λάθος
Ε' Δημοτικό	3	2	1	1	7	5
Δ' Δημοτικού	1	2	2	1	0	0
Σύνολο	4	4	3	2	7	5

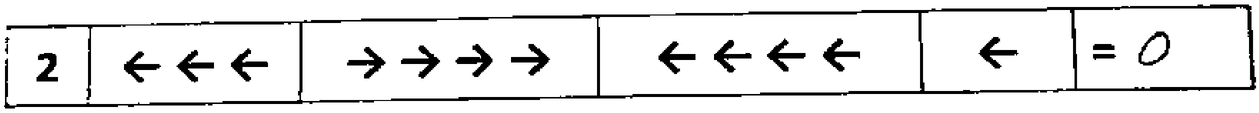
Διάγραμμα 3.2.3 Λανθασμένες Απαντήσεις - Β' Φύλλο Εργασίας

Ακολουθεί αναλυτική παρουσίαση των παραπάνω κατηγοριών.

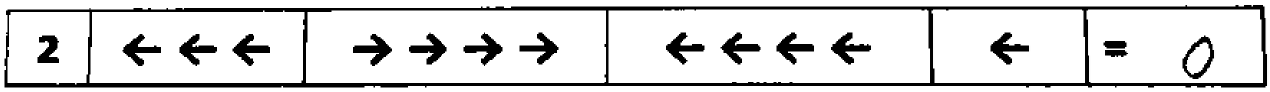
1. Αντιστροφή ή παράβλεψη φοράς των βελών

Παρατηρήθηκε σε μαθητές/τριες τόσο της Δ’ τάξης όσο και της Ε’ τάξης να προχωρούν σε περιστασιακή αντιστροφή βελών κατά τον υπολογισμό τους. Στην αριθμητική παράσταση 2 - 3 + 4 - 4 - 1 επιχειρήθηκε να ερμηνευτεί το αποτέλεσμα 0 που καταγράφηκε αντί του σωστού -2. Μια πιθανή ερμηνεία είναι να έχει γίνει σωστά ο υπολογισμός έως και πριν το τελευταίο κελί, αλλά το βέλος που υπήρχε στο τελευταίο κελί να υπολογίστηκε αντίστροφα. Έτσι αντί να υπολογιστεί – 1 – 1 = -2, αλλάζοντας τη φορά του βέλους προκύπτει το -1 + 1= 0. (Εικόνα 3.2.7 και Εικόνα 3.2.8)

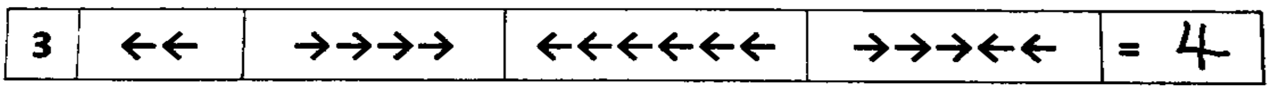
Ένας ακόμη λανθασμένος υπολογισμός λόγω αλλαγής φοράς βελών εντοπίστηκε σε τρεις μαθητές/τριες. Η ιδιαιτερότητα στην περίπτωση αυτή είναι ότι φαίνεται να παραβλέπεται η φορά βελών σε κελί όπου εμφανίζονται μαζί βέλη και των δύο κατευθύνσεων. Πιθανόν λοιπόν λόγω απροσεξίας ή βιασύνης θεωρήθηκαν όλα τα βέλη θετικά, όπως είναι τα 3 πρώτα. Στην αριθμητική παράσταση 3 – 2 + 4 – 6 + 3 - 2 = 0 δεν παρατήρησαν στο τελευταίο μεικτό κελί το +3 -2 και υπολογίστηκε ως +5, που δικαιολογεί και το τελικό αποτέλεσμα 4 που καταγράφηκε. (Εικόνα 3.2.9)



Εικόνα 3.2.7 Αντιστροφή βέλους (3Δ)



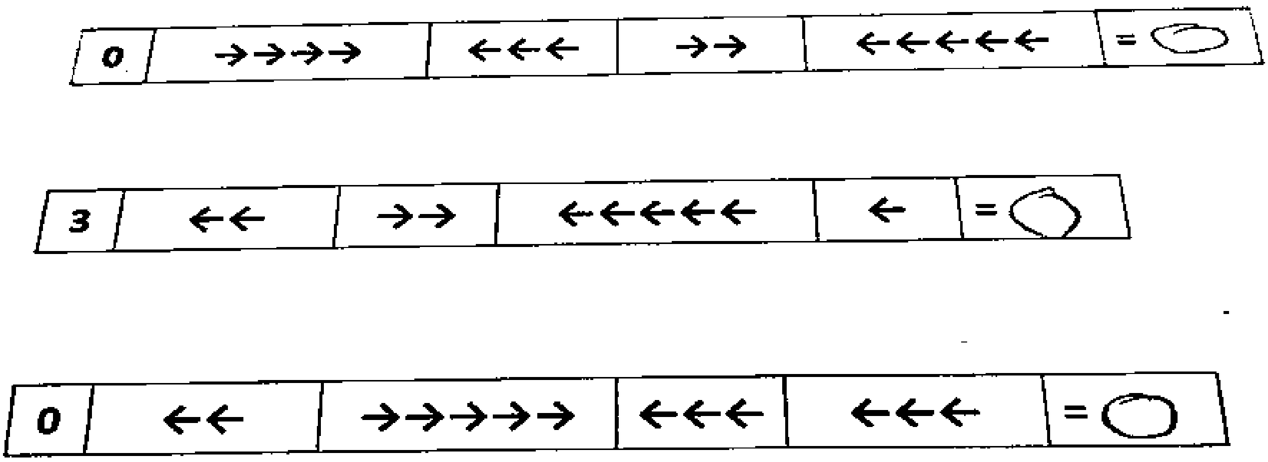
Εικόνα 3.2.8 Αντιστροφή βέλους (34Ε)



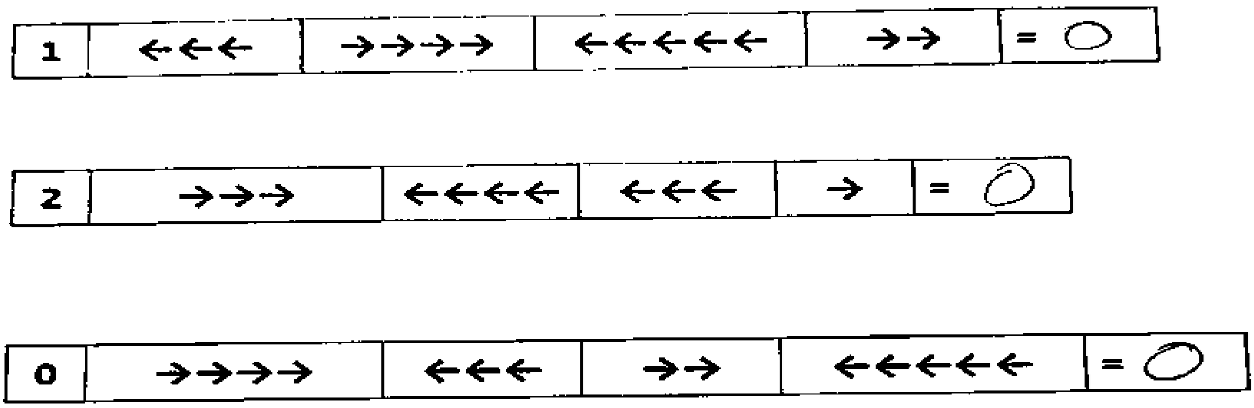
Εικόνα 3.2.9 Αντιστροφή βέλους (49Ε)

2. Χρήση του μηδενός στη θέση αρνητικού αποτελέσματος

Σε αυτή την κατηγορία λαθών, οι μαθητές/τριες, σε κάθε αριθμητική παράσταση που το αποτέλεσμα ήταν αρνητικός αριθμός, επέλεξαν να χρησιμοποιήσουν στη θέση του το μηδέν, όπως φαίνεται και στις δύο παρακάτω εικόνες (Εικόνα 3.2.10.και Εικόνα 3.2.11). Λαμβάνοντας υπόψη τον σωστό υπολογισμό των ίδιων μαθητών/τριών σε περιπτώσεις με θετικό αποτέλεσμα, η χρήση του μηδενός ενδεχομένως να υποδηλώνει ότι αν και αντιλαμβάνονται πως οδηγούνται σε αρνητικό αποτέλεσμα, δεν είναι σε θέση να το προσδιορίσουν ακριβώς και έτσι καταφεύγουν στον μικρότερο αριθμό που γνωρίζουν να χειρίζονται με ευχέρεια.



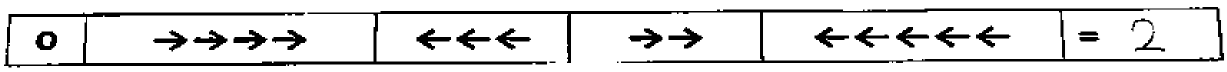
Εικόνα 3.2.10 Μηδέν στη θέση αρνητικού αριθμού (2Δ)



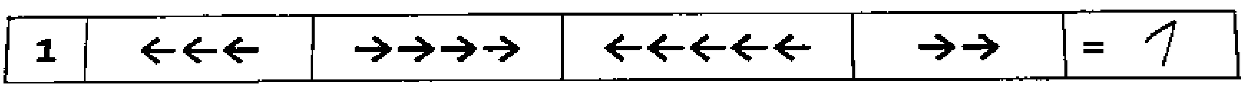
Εικόνα 3.2.11 Μηδέν στη θέση αρνητικού αριθμού (9Ε)

3. Απουσία αρνητικού πρόσημου

Σε δύο μαθήτριες της Δ’ τάξης και έναν μαθητή της Ε’ τάξης παρατηρήθηκε ότι ενώ κατάφερναν να ακολουθήσουν τον βηματικό υπολογισμό και να φτάσουν στο αποτέλεσμα, ωστόσο σε κανένα δεν σημείωναν το αρνητικό πρόσημο μπροστά από το ψηφίο. Για παράδειγμα στην αριθμητική παράσταση 0 + 4 – 3 + 2 - 5 που έχει αποτέλεσμα -2, γράφουν μόνο 2 (Εικόνα 3.2.12). Αντίστοιχα στην αριθμητική παράσταση 1 – 3 + 4 – 5 + 2 συμπληρώνουν το κελί του αποτελέσματος με το 1, αντί για -1 (Εικόνα 3.2.13). Δεδομένου ότι η απουσία του πρόσημου εντοπίζεται σε όλους τους υπολογισμούς των συγκεκριμένων μαθητών/τριών, εικάζεται ότι αντιλαμβάνονται μεν την αλλαγή στην κίνηση και είναι σε θέση να κάνουν τους αναγκαίους υπολογισμούς, ώστε να οδηγούνται στο αντίστοιχο αριθμητικό ψηφίο, αλλά παραλείπουν το πρόσημο είτε λόγω απροσεξίας είτε έλλειψης εξοικείωσης.



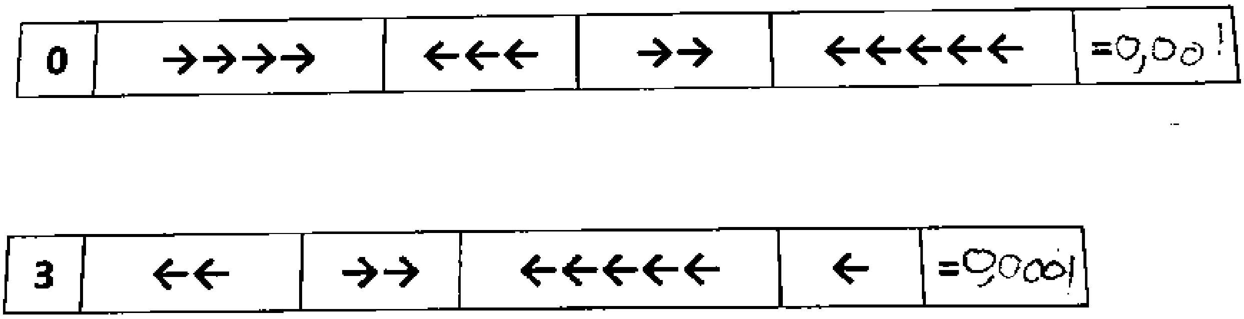
Εικόνα 3.2.12 Απουσία αρνητικού πρόσημου (11Δ)



Εικόνα 3.2.13 Απουσία αρνητικού πρόσημου (26Ε)

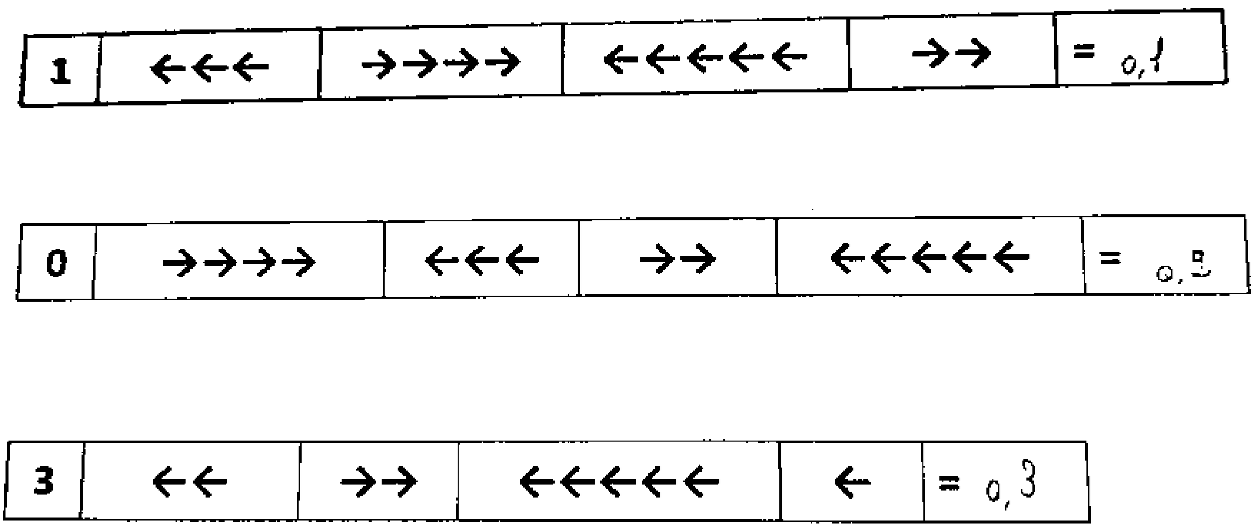
4. Δεκαδικός αριθμός στη θέση αρνητικού

Στην κατηγορία αυτή έχουν ενταχθεί τα φύλλα εργασίας δύο μαθητριών, μία της Δ’ και μία της Ε’ τάξης, που έχουν χρησιμοποιήσει δεκαδικούς αριθμούς, για να δηλώσουν το αρνητικό αποτέλεσμα των αριθμητικών παραστάσεων. Πέρα όμως από αυτό το κοινό στοιχείο, υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ τους στον συμβολισμό που επιλέγεται. Στην πρώτη περίπτωση, η μαθήτρια της Δ’ τάξης σημειώνει 0,001 αντί του -2 και 0,0001 αντί του -3., όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.2.14. Υποθέτουμε επομένως ότι ο αριθμός των μηδενικών που τοποθετεί, πριν τον αριθμό 1, δεν είναι τυχαίος, αλλά σχετίζεται απόλυτα με τον αρνητικό, καθώς τα 2 μηδενικά αντιστοιχούν στο -2, ενώ τα 3 μηδενικά στο -3.



Εικόνα 3.2.14 Δεκαδικός αριθμός στη θέση αρνητικού (4Δ)

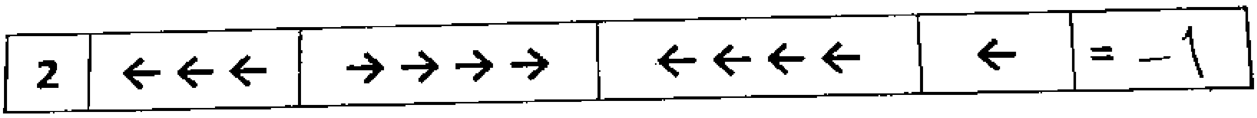
Στην άλλη περίπτωση της μαθήτριας της Ε’ τάξης ο δεκαδικός αριθμός χρησιμοποιείται με εντελώς διαφορετικό τρόπο από τον παραπάνω. Εδώ, ο αριθμός που γράφεται στο δεκαδικό μέρος αντιστοιχεί απόλυτα σε ψηφίο του αρνητικού αριθμού. Συγκεκριμένα, στις θέσεις του -1, του -2 και του -3, σημειώνεται το 0,1, το 0,2 και το 0,3 αντίστοιχα (Εικόνα 3.2.15). Αντιλαμβανόμαστε ότι η αριθμητική παράσταση υπολογίστηκε σωστά και για αυτόν τον λόγο επιλέγεται το αντίστοιχο ψηφίο που καταγράφεται, αλλά μάλλον δεν έχει αφομοιωθεί ακόμη ο συμβολισμός των αρνητικών αριθμών, παρόλο που έχουν ήδη προηγηθεί δραστηριότητες που εμπεριείχαν αρνητικούς αριθμούς.



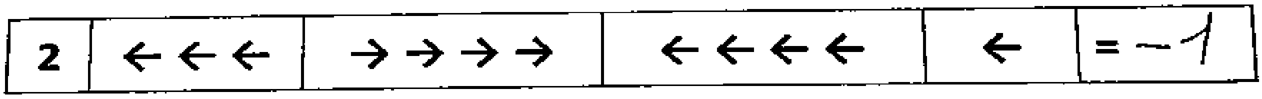
Εικόνα 3.2.15 Δεκαδικός αριθμός στη θέση αρνητικού (32Ε)

5. Επίδραση αριθμού εκκίνησης

Κατά την ανάλυση των φύλλων εργασίας προκάλεσε ιδιαίτερη εντύπωση ότι 7 από τους 19 μαθητές/τριες της Ε’ τάξης, που έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις, είχαν κάνει λάθος κατά τον υπολογισμό της αριθμητικής παράστασης 2 - 3 + 4 - 4 - 1 και μάλιστα όλοι/ες τους σημείωσαν -1 αντί για το σωστό -2. Αρχικά υπήρξε η σκέψη ότι επειδή η συγκεκριμένη αριθμητική παράσταση αποτελεί την πρώτη που συναντούν στο φύλλο εργασίας με αριθμό εκκίνησης διαφορετικό του μηδενός, οι μαθητές/τριες πιθανόν να μην έδωσαν τη δέουσα προσοχή και να οδηγήθηκαν σε λάθος. Το αποτέλεσμα -1 όμως δεν αιτιολογείται ακόμη και αν θεωρηθεί ότι ξεκίνησαν με αφετηρία το μηδέν επηρεασμένοι/ες από τις προηγούμενες αριθμητικές παραστάσεις. Καταλήγουμε λοιπόν στην υπόθεση ότι το συγκεκριμένο λάθος ενδεχομένως να συνδέεται με λάθος στη διαδικασία απαρίθμησης, που συναντάται κατά την εκμάθηση υπολογισμών στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού και για το οποίο υπάρχουν βιβλιογραφικές αναφορές (Liebeck, 1990). Κατά την απαρίθμηση οι μαθητές/τριες ίσως να μπερδεύτηκαν και να υπολόγισαν ταυτίζοντας τη θέση με τον αριθμό. Έτσι, αρχίζοντας από το 2 αντί να μετρήσουν 1, 0, -1 υπολογίζοντας τρία βήματα προς τα πίσω, σκέφτηκαν 2, 1, 0. Βασιζόμενοι σε αυτή την υπόθεση, διαπιστώνουμε ότι συνεχίζοντας τον υπολογισμό από το 0, δηλαδή 0 + 4 – 4 – 1, οδηγούμαστε στο -1 (Εικόνα 3.2.16 και Εικόνα 3.2.17).



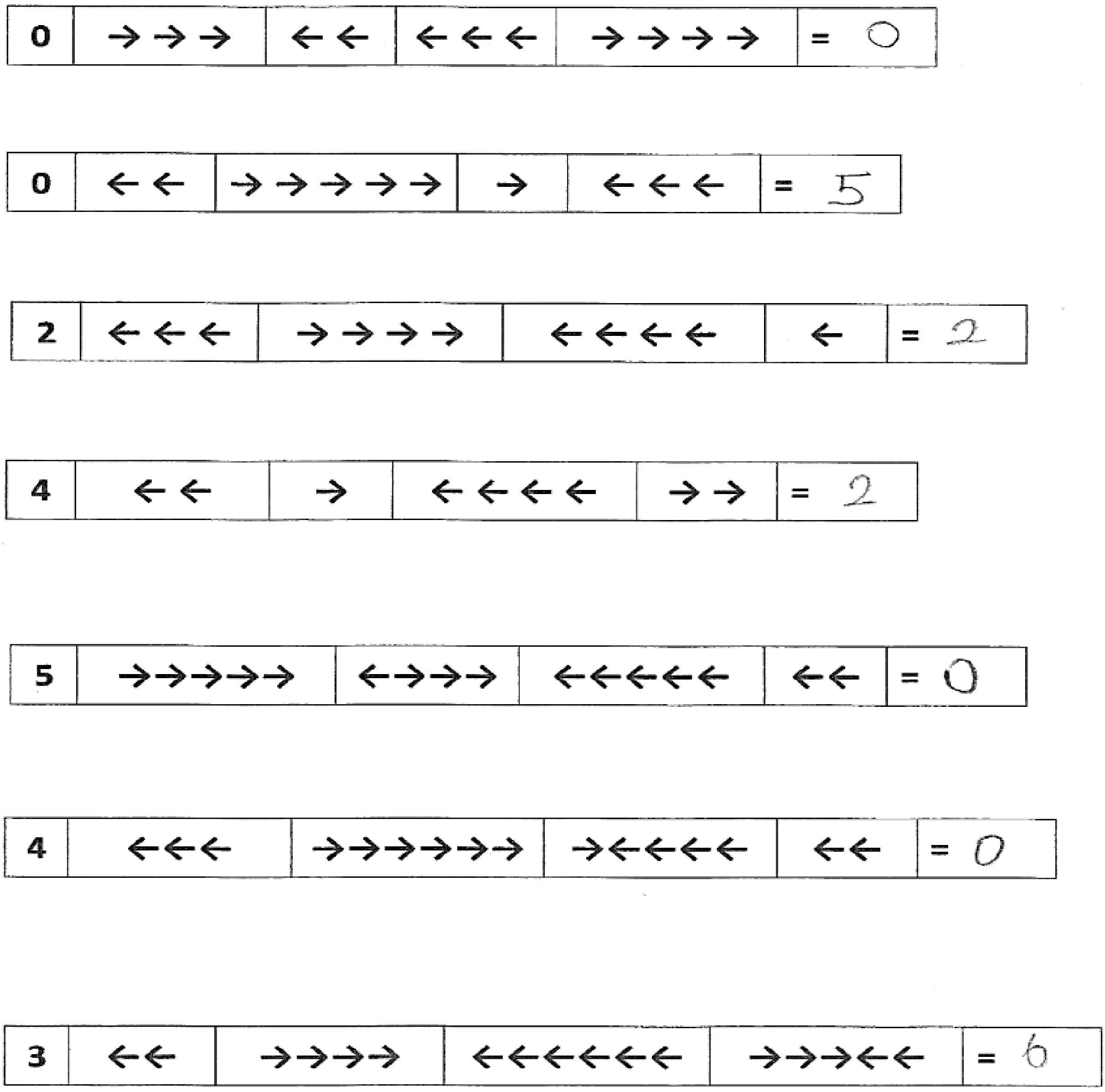
Εικόνα 3.2.16 Επίδραση αριθμού εκκίνησης (16Ε)



Εικόνα 3.2.17 Επίδραση αριθμού εκκίνησης (1Ε)

6. Απροσδιόριστο λάθος

Στα φύλλα εργασίας με τις λανθασμένες απαντήσεις, υπήρξαν και 5 στα οποία ήταν λάθος όλοι οι υπολογισμοί, δεν παρουσίαζαν κανένα κοινό στοιχείο μεταξύ τους ούτε μπορούσαν να ενταχθούν σε κάποια κατηγορία (Εικόνα 3.2.18). Φαίνεται πώς οι συγκεκριμένοι/ες μαθητές/τριες δεν ακολούθησαν κάποια συγκεκριμένη στρατηγική ή λογική, αλλά αντιμετώπισαν δυσκολία γενικότερα στους μαθηματικούς υπολογισμούς. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι συγκεκριμένοι/ες μαθητές/τριες συνάντησαν δυσκολίες και στο προηγούμενο φύλλο εργασίας. Επομένως, τα λάθη τους ίσως οφείλονται σε γενικότερες μαθηματικές δυσκολίες.



Εικόνα 3.2.18 Απροσδιόριστο λάθος (4Ε)

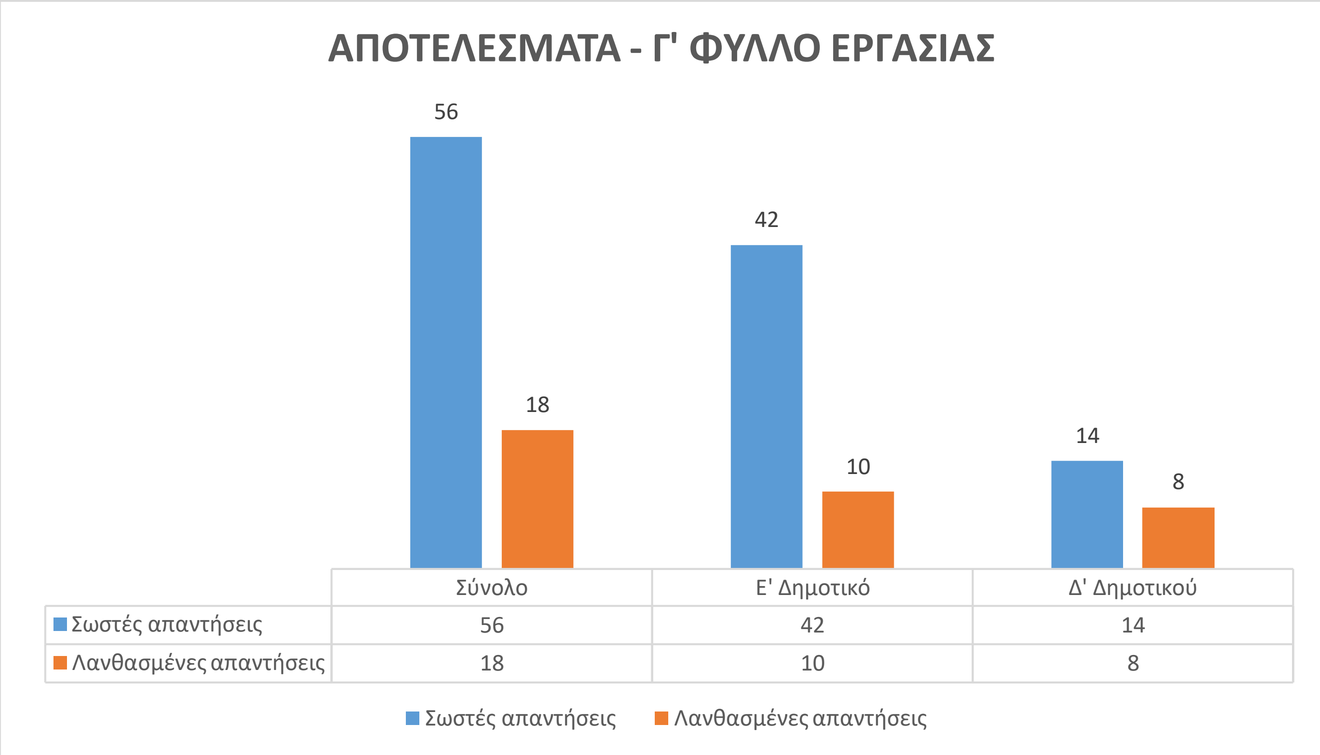
3.3 Τρίτη Ενότητα: 3ο φύλλο εργασίας – Ε’ Φάση

Στην Ε’ Φάση, έπειτα από την εισαγωγή στον επίσημο συμβολισμό και στους υπολογισμούς που ολοκληρώθηκε στην προηγούμενη φάση, επιχειρείται η εισαγωγή στις αριθμητικές παραστάσεις. Το φύλλα εργασίας σε αυτή τη φάση ήταν πιο σύνθετο και αποτελείται από δύο διαφορετικά μέρη. Στο πρώτο μέρος οι μαθητές/τριες καλούνται να υπολογίσουν νοερά μια αριθμητική παράσταση, όπως ακριβώς και στο προηγούμενο φύλλο εργασίας. Η εξοικείωση που έχει ήδη αποκτηθεί σε αυτόν τον τύπο της δραστηριότητας είναι εμφανής στον τρόπο ανταπόκρισης των μαθητών/τριών. Στο δεύτερο μέρος οι μαθητές/τριες έπρεπε να προχωρήσουν και στη γραπτή απόδοση με αριθμούς όσων εκφράζονταν με βέλη. Το ενδιαφέρον εδώ εστιάζεται στον τρόπο που επέλεξε κάθε μαθητή/τρια, για να αναπαραστήσει τους αριθμούς και συνολικά την αριθμητική παράσταση.

Η ανάλυση του φύλλου εργασίας χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος αναλύονται οι υπολογισμοί και επιχειρείται η κατηγοριοποίηση των λαθών που εμφανίστηκαν, ενώ στο δεύτερο μέρος παρουσιάζονται οι διάφορες κατηγορίες αναπαραστάσεων που επιλέχθηκαν από τους/τις μαθητές/τριες.

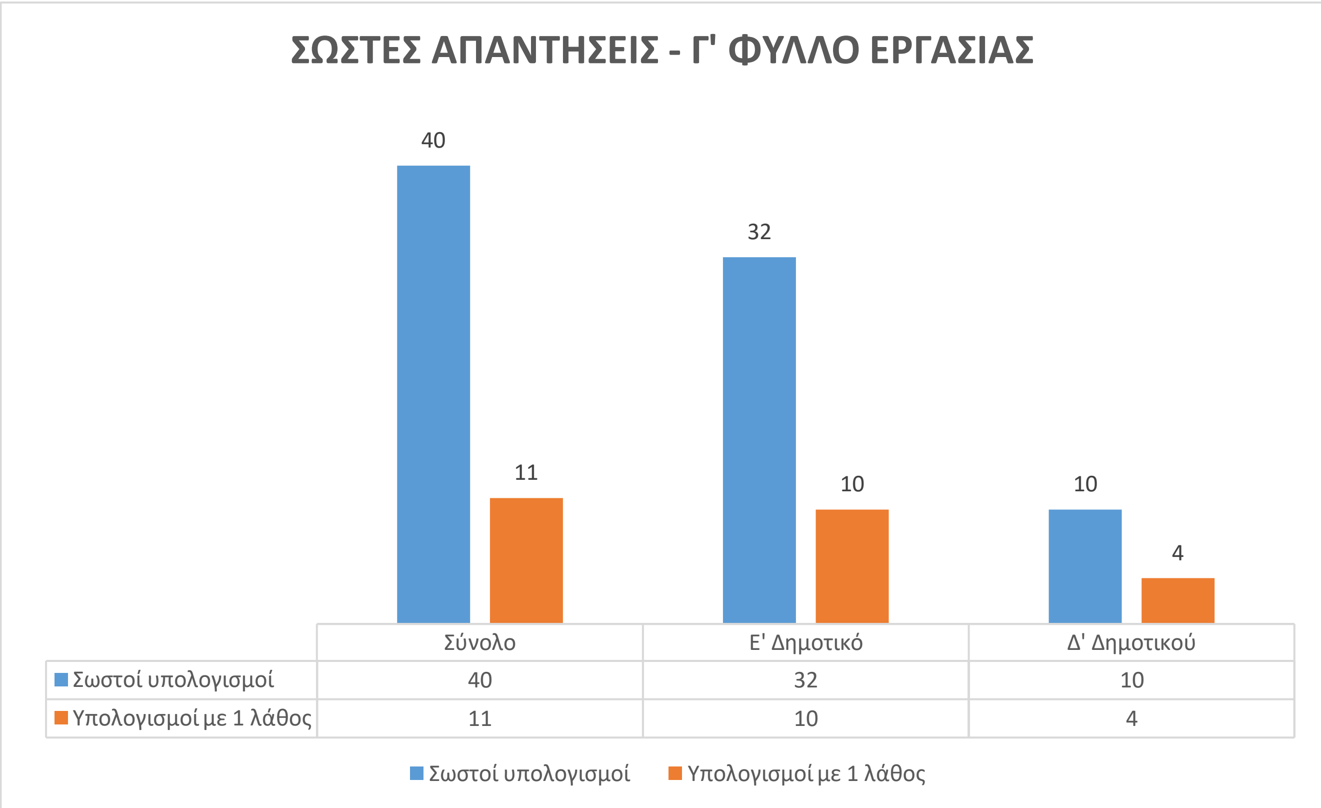
Α’ Ανάλυση υπολογισμών

Αξίζει αρχικά να αναφερθεί ότι το ποσοστό των σωστών απαντήσεων αυξήθηκε σε σχέση με το προηγούμενο φύλλο εργασίας και έφτασε στο 81% από το 65%. Από τους 69 μαθητές/τριες που συμπλήρωσαν το φύλλο εργασίας, σωστά απάντησαν οι 56. Η αύξηση αυτή εικάζεται ότι συνδέεται με την ενασχόληση κατά τις προηγούμενες φάσεις. Αναλυτικά, από 51 μαθητές/τριες της Ε’ Δημοτικού, ολόσωστα απάντησαν και στις 10 αριθμητικές παραστάσεις οι 32 (63%) και οι 10 (20%) έκαναν μόνο ένα λάθος υπολογισμού. Αντίστοιχα, στη Δ’ τάξη, από τους/τις 18 μαθητές/τριες οι 10 (56%) έδωσαν ολόσωστες απαντήσεις, ενώ οι 4 (22%) είχαν μόλις ένα λάθος. Από την άλλη, οι λανθασμένες απαντήσεις αποτελούν το 19% των συνολικών απαντήσεων. Συγκεκριμένα, από τους/τις 13 που έκαναν λάθη οι 9 (69%) ήταν μαθητές/τριες της Ε’ τάξης και οι 4 (31%) της Δ’ τάξης.



	Σύνολο	Ε' Δημοτικό	Δ' Δημοτικού
Σωστές απαντήσεις	56	42	14
Λανθασμένες απαντήσεις	18	10	8

Διάγραμμα 3.3.1 Αποτελέσματα - Γ' Φύλλο Εργασίας

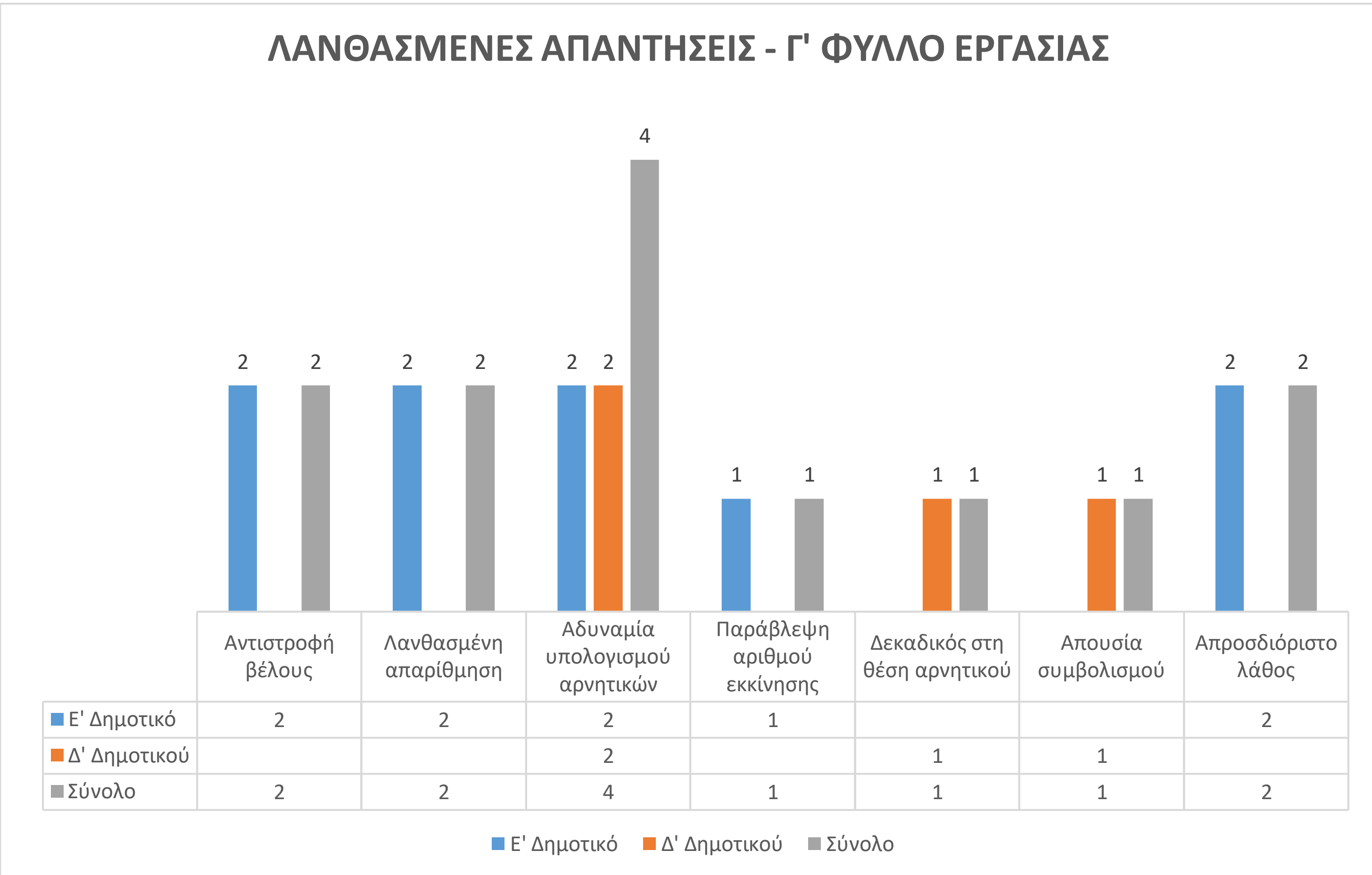


	Σύνολο	Ε' Δημοτικό	Δ' Δημοτικού
Σωστοί υπολογισμοί	40	32	10
Υπολογισμοί με 1 λάθος	11	10	4

Διάγραμμα 3.3.2 Σωστές Απαντήσεις - Γ' Φύλλο Εργασίας

Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω, κατά την ανάλυση των απαντήσεων εντοπίστηκαν ορισμένα στοιχεία που οδήγησαν και αιτιολογούν τον λανθασμένο υπολογισμό στα 13 από τα 69 φύλλα εργασίας (19%). Οι κατηγορίες που προέκυψαν είναι οι εξής:

1. Αντιστροφή βελών
2. Λανθασμένη απαρίθμηση
3. Αδυναμία υπολογισμού αρνητικών αριθμών
4. Παράβλεψη αριθμού εκκίνησης
5. Δεκαδικός στη θέση αρνητικού
6. Απουσία συμβολισμού
7. Απροσδιόριστο λάθος

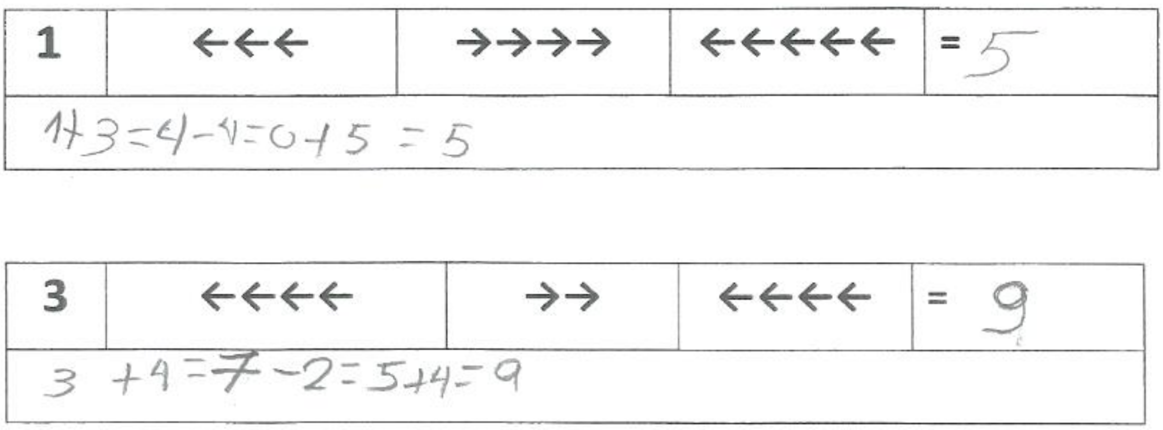


Διάγραμμα 3.3.3 Λανθασμένες Απαντήσεις - Γ' Φύλλο Εργασίας

Ακολουθεί λεπτομερέστερη παρουσίαση των παραπάνω κατηγοριών.

1. Αντιστροφή βελών

Παρατηρώντας την αριθμητική καταγραφή, εντοπίστηκαν δύο μαθήτριες της Ε’ τάξης οι οποίες σημείωναν τους αντίθετους αριθμούς από αυτούς που έδειχνε η φορά των βελών. Το ίδιο λάθος είχε γίνει και στο προηγούμενο φύλλο εργασίας, ωστόσο περιορίστηκε ο αριθμός των μαθητών/τριών από 4 σε 2 σε αυτή τη Φάση. Η μία μαθήτρια, όπως φαίνεται ξεκάθαρα και στην Εικόνα 3.3.1, στη θέση της αριθμητικής παράστασης 1 - 3 + 4 - 5 έχει υπολογιστεί ως 1 + 3 – 4 + 5. Δεδομένου ότι αποκωδικοποίησε τη φορά των βελών με τον ίδιο τρόπο και στις 10 παραστάσεις του φυλλαδίου και ότι ο υπολογισμός με τους αριθμούς που η ίδια κατέγραψε ήταν ορθός, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει κάποια δυσκολία στους υπολογισμούς με αρνητικούς αριθμούς, αλλά παρανόηση στην αντιστοίχιση φοράς βέλους και αριθμού.



Εικόνα 3.3.1 Αντιστροφή βελών (4Ε)

Στην περίπτωση όμως της άλλης μαθήτριας φαίνεται ότι πέρα από την αντιστροφή των βελών, υπάρχει και γενικότερη δυσκολία (Εικόνα 3.3.2). Η αριθμητική παράσταση που σημειώνει η ίδια -3 + 2 - 6 -3, αν υπολόγιζε σωστά, θα έπρεπε να έχει αποτέλεσμα -10 και όχι -4. Οι υπόλοιποι λανθασμένοι υπολογισμοί επιβεβαιώνουν την υπόθεση ότι δεν ήταν απλώς λάθος απροσεξίας, αλλά υπάρχει δυσκολία στους υπολογισμούς με τους αρνητικούς αριθμούς.

-3	←←	→→→→→→	←←←	= -4
-3	+2	-6	-3	

-1	←←←	→→→→	←←←←	= -2
-1	+3	-4	+4	

Εικόνα 3.3.2 Αντιστροφή βελών (26Ε)

2. **Λανθασμένη απαρίθμηση**

Ένα ακόμη λάθος, που είχε διαπιστωθεί στο προηγούμενο φύλλο εργασίας, επανεμφανίστηκε και στην Ε' Φάση. Ο αριθμός βέβαια και πάλι περιορίστηκε σημαντικά από τις 7 περιπτώσεις σε μόλις 2. Ενώ πριν υπήρχε υποψία ότι οφείλονταν σε λάθος απαρίθμησης, εδώ η αναλυτική καταγραφή των υπολογισμών το καθιστά σαφές. Στην Εικόνα 3.3.3 βλέπουμε ότι η μαθήτρια υπολογίζει -1 + 2 = -1, αντί για 1 και στην Εικόνα 3.3.4 -1 - 3= - 2 αντί για - 4. Αν και από τη γενικότερη εικόνα της μαθήτριας φαίνεται ότι μπορεί να υπολογίσει σωστά, ωστόσο αναδεικνύεται μια δυσκολία στην απαρίθμηση με αρνητικούς αριθμούς.

3	←←←←	→→	←←←←	= -5
3-4=-1+2=-1-4=-5				

Εικόνα 3.3.3 Λανθασμένη απαρίθμηση (1Ε)

-1	←←←	→→→→	←←←←	= -2
-1-3=-2+4=2-4=-2				

Εικόνα 3.3.4 Λανθασμένη απαρίθμηση (1Ε)

Η ίδια λανθασμένη απαρίθμηση βρέθηκε και στη δεύτερη περίπτωση, που μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι η δυσκολία είναι μεγαλύτερη, όταν εμπλέκονται δύο αρνητικοί αριθμοί (Εικόνα 3.3.5). Επιπρόσθετα, φάνηκε να δυσκολεύει και η απαρίθμηση αρνητικού με το μηδέν. Έτσι, στον υπολογισμό 0 - 2 μοιάζει να μην λαμβάνεται υπόψη το αρνητικό πρόσημο του 2 και για αυτό γράφει το αποτέλεσμα 2, ενώ αν ακολουθούσε τη σωστή πορεία απαρίθμησης, θα έφτανε στο -2 (Εικόνα 3.3.6).

-1	←←←	→→→→	←←←←	= -2
-1-3=2 -2+4=2 2-4=-2				

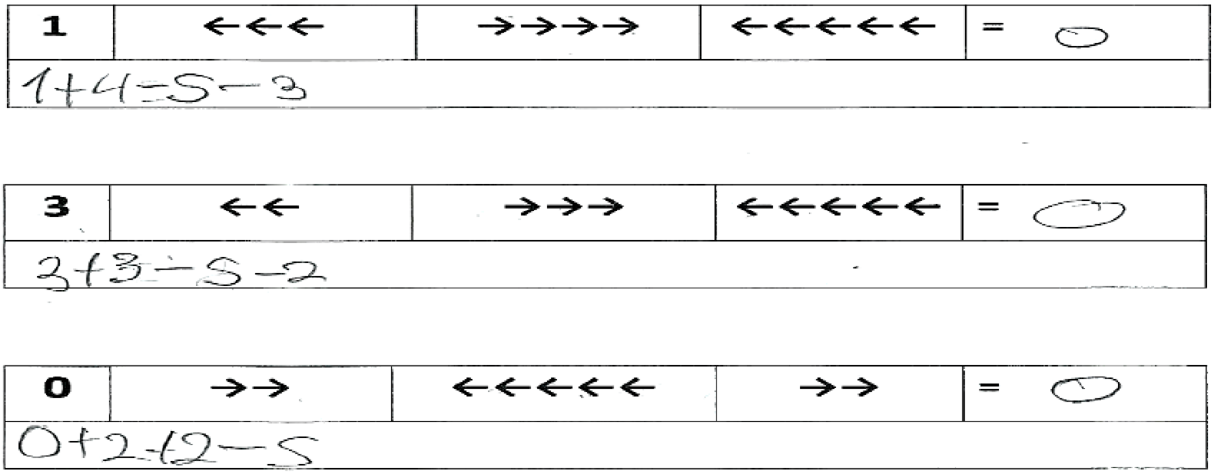
Εικόνα 3.3.5 Λανθασμένη απαρίθμηση (2Ε)

-2	→→→→→	←←←	←←	= 2
-2+5=3 3-3=0 0-2=2				

Εικόνα 3.3.6 Λανθασμένη απαρίθμηση (2Ε)

3. Αδυναμία υπολογισμού αρνητικών αριθμών

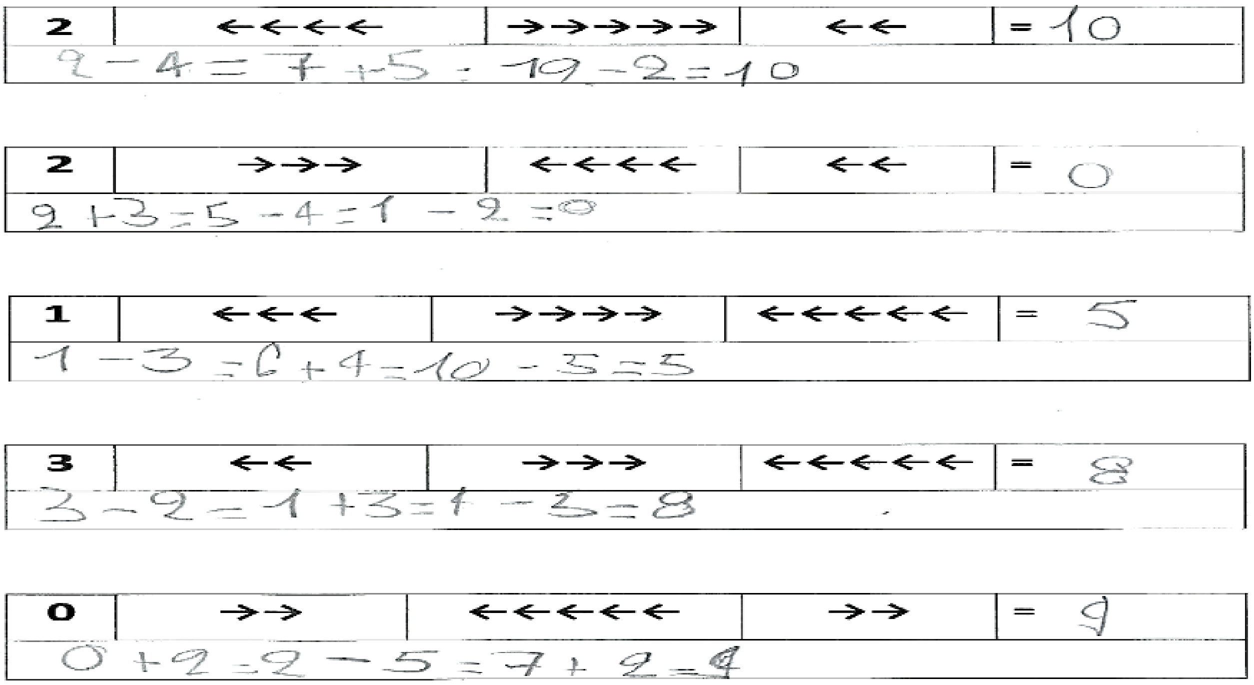
Παρά την ενασχόληση με παρόμοιες δραστηριότητες στις προηγούμενες Φάσεις, τέσσερις μαθήτριες, δύο της Ε' και δύο της Δ' τάξης, δεν κατάφεραν να ξεπεράσουν τη σημαντική δυσκολία τους στους υπολογισμούς, που ήταν έντονη και προηγουμένως. Μια μαθήτρια μάλιστα επιλέγει την αλλαγή στη σειρά εμφάνισης των αριθμών, προκειμένου να διευκολυνθεί στον υπολογισμό της. Παρατηρούμε, για παράδειγμα στην Εικόνα 3.3.7, ότι, ενώ η σειρά στην αριθμητική παράσταση είναι 1 – 3 + 4 -5, σημειώνει 1 + 4 - 5 – 3. Ομαδοποιεί κατά κάποιον τρόπο τους θετικούς και τους αρνητικούς αριθμούς, αλλά και πάλι αδυνατεί να υπολογίσει και επιλέγει το μηδέν, όταν αντιλαμβάνεται ότι το αποτέλεσμα είναι αρνητικός αριθμός.



1	←←←	→→→→	←←←←←←	= 0
1+4=5−3				
3	←←	→→→	←←←←←←	= 0
3+3=5−2				
0	→→	←←←←←←	→→	= 0
0+2=2−5				

Εικόνα 3.3.7 Αδυναμία υπολογισμού αρνητικών αριθμών (9Ε)

Σε μια άλλη περίπτωση διαπιστώνουμε ότι υπάρχει αδυναμία οποιουδήποτε υπολογισμού με αρνητικό αριθμό. Μάλιστα, η αδυναμία αυτή αποσυντονίζει και οδηγεί σε απόλυτα αδικαιολόγητη επιλογή αποτελέσματος. Χαρακτηριστικά βλέπουμε στην Εικόνα 3.3.8 να υπολογίζει 2 - 4 = 7, 1 – 2 = 0, 1 – 3 = 6 και 4 – 3 = 8. Η μόνη περίπτωση που μπορεί να ερμηνευτεί είναι η αγνόηση του αρνητικού πρόσημου στο 2-5=7.

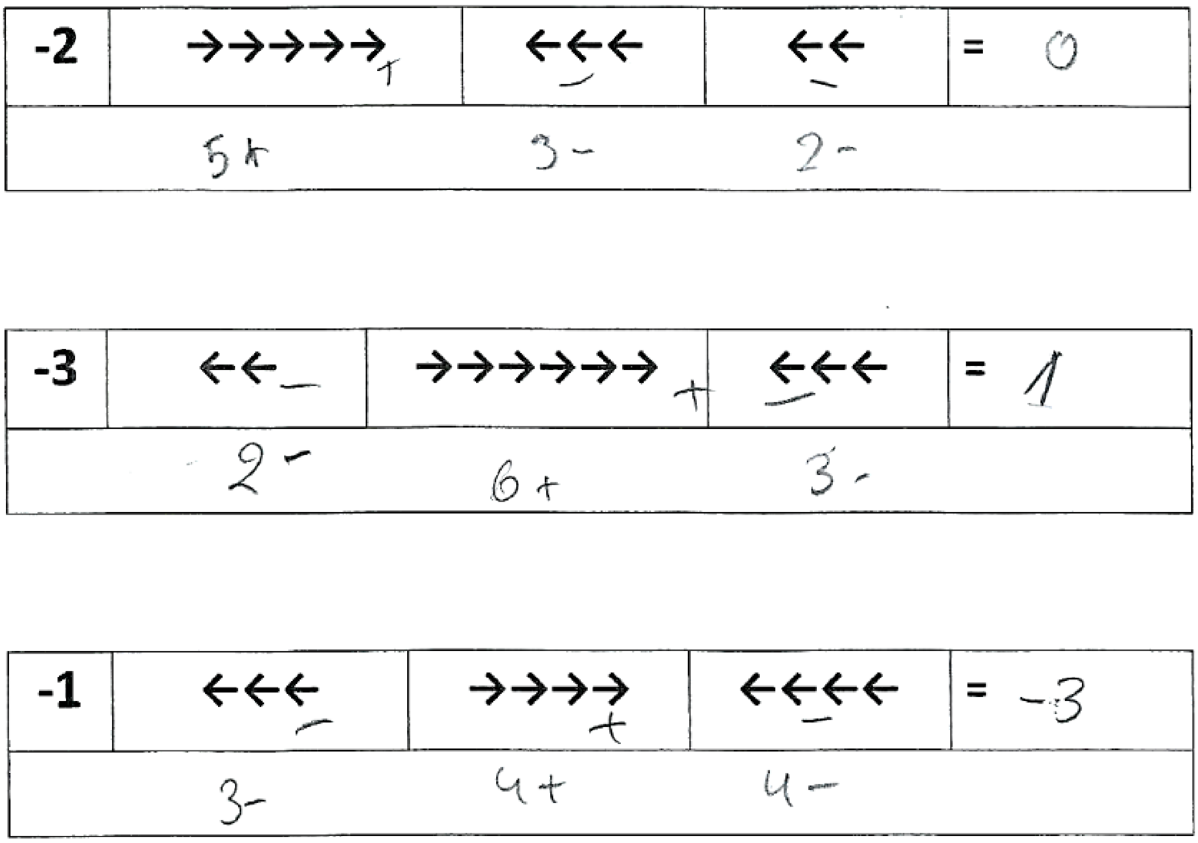


2	←←←←	→→→→→→	←←	= 10
2−4=7+5=12−2=10				
2	→→→	←←←←	←←	= 0
2+3=5−4=1−2=0				
1	←←←	→→→→	←←←←←←	= 5
1−3=6+4=10−5=5				
3	←←	→→→	←←←←←←	= 8
3−2=1+3=4−3=8				
0	→→	←←←←←←	→→	= 9
0+2=2−5=7+2=9				

Εικόνα 3.3.8 Αδυναμία υπολογισμού αρνητικών αριθμών (11Δ)

4. Παράβλεψη αριθμού εκκίνησης

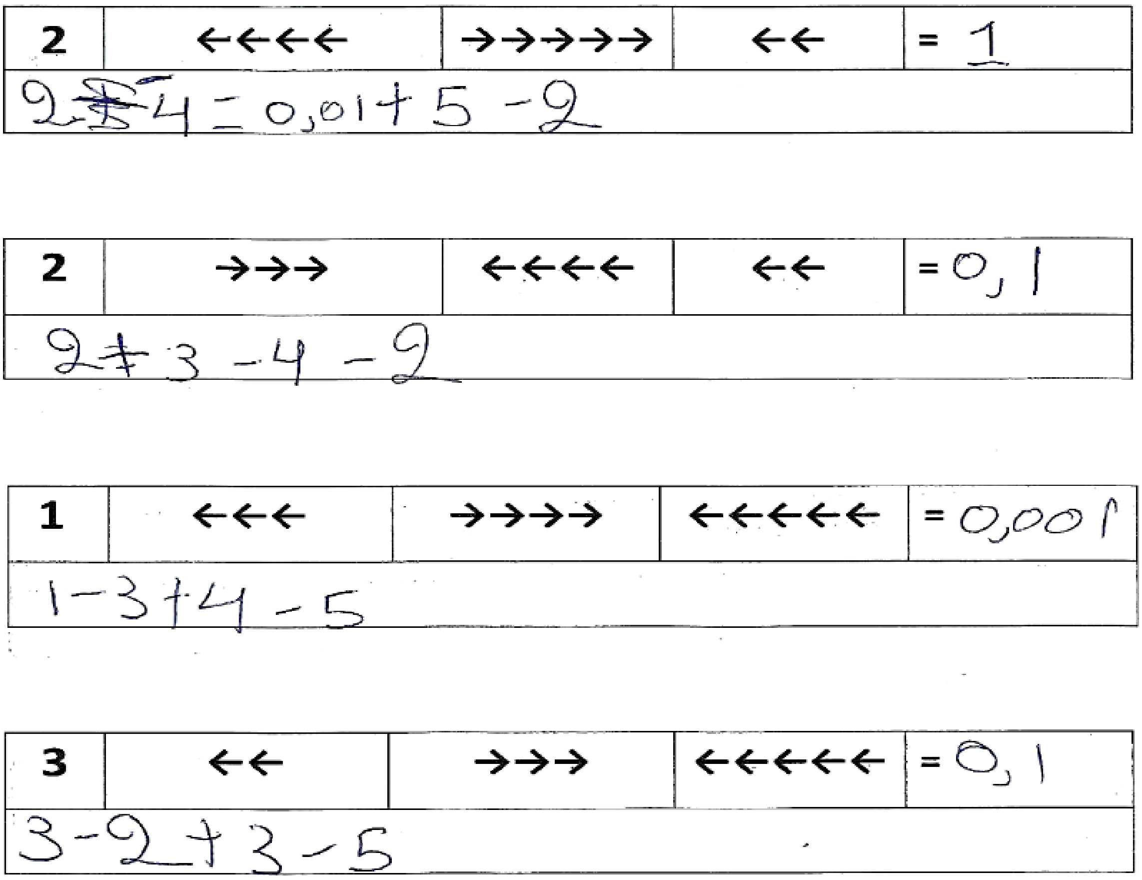
Κατά την ανάλυση εντοπίστηκε ακόμη ένα λάθος που οφείλονταν στην παράλειψη υπολογισμού στην αριθμητική παράσταση του αριθμού που αναφέρονταν αριθμητικά στην εκκίνηση. Ο μαθητής σημειώνει και υπολογίζει σωστά μόνο όσα αντιστοιχούν στα βέλη. Για αυτό μετρώντας +5 – 3 -2 βρίσκει το αποτέλεσμα 0, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 3.3.9. Με τον ίδιο τρόπο λειτούργησε και στις 10 παραστάσεις του φύλλου εργασίας. Εντύπωση προξένησε στο συγκεκριμένο φύλλο και το σημείο που σημειώνει το θετικό και αρνητικό πρόσημο. Παρατηρούμε ότι το γράφει στα πλαίσια με τα βέλη σαν υπενθύμιση για τη σημασία της φοράς τους. Εκείνο όμως που είναι ιδιαίτερο είναι ότι το πρόσημο δεν προηγείται, αλλά έπεται του αριθμού.



Εικόνα 3.3.9 Παράβλεψη αριθμού εκκίνησης (54E)

5. Δεκαδικός στη θέση αρνητικού

Μια ακόμη ιδιαίτερη περίπτωση αποτελεί η χρήση δεκαδικών αριθμών στη θέση κάθε αρνητικού αριθμού. Το λάθος είχε γίνει από την ίδια μαθήτρια και στο προηγούμενο φύλλο εργασίας. Και εκεί ο αριθμός των μηδενικών έπαιζε ρόλο στη δήλωση του αντίστοιχου αρνητικού αριθμού, δηλαδή το 0,1 για το -1, το 0,01 για το -2 και το 0,001 για το -3. Εκείνο που προκαλεί εντύπωση στο συγκεκριμένο φύλλο είναι ότι οι δεκαδικοί αριθμοί χρησιμοποιούνται, για να δηλωθεί το αποτέλεσμα πράξης, αλλά για την απόδοση των βέλων που αντιστοιχούν σε αρνητικούς αριθμούς, σημειώνεται κανονικά το αρνητικό πρόσημο μπροστά από τον αριθμό, εκτός από την πρώτη αριθμητική παράσταση.



2	←←←←	→→→→→	←←	= 1
2 ~~-3~~ 4 = 0,01+5 -2				

2	→→→	←←←←	←←	= 0,1
2+3 -4 -2				

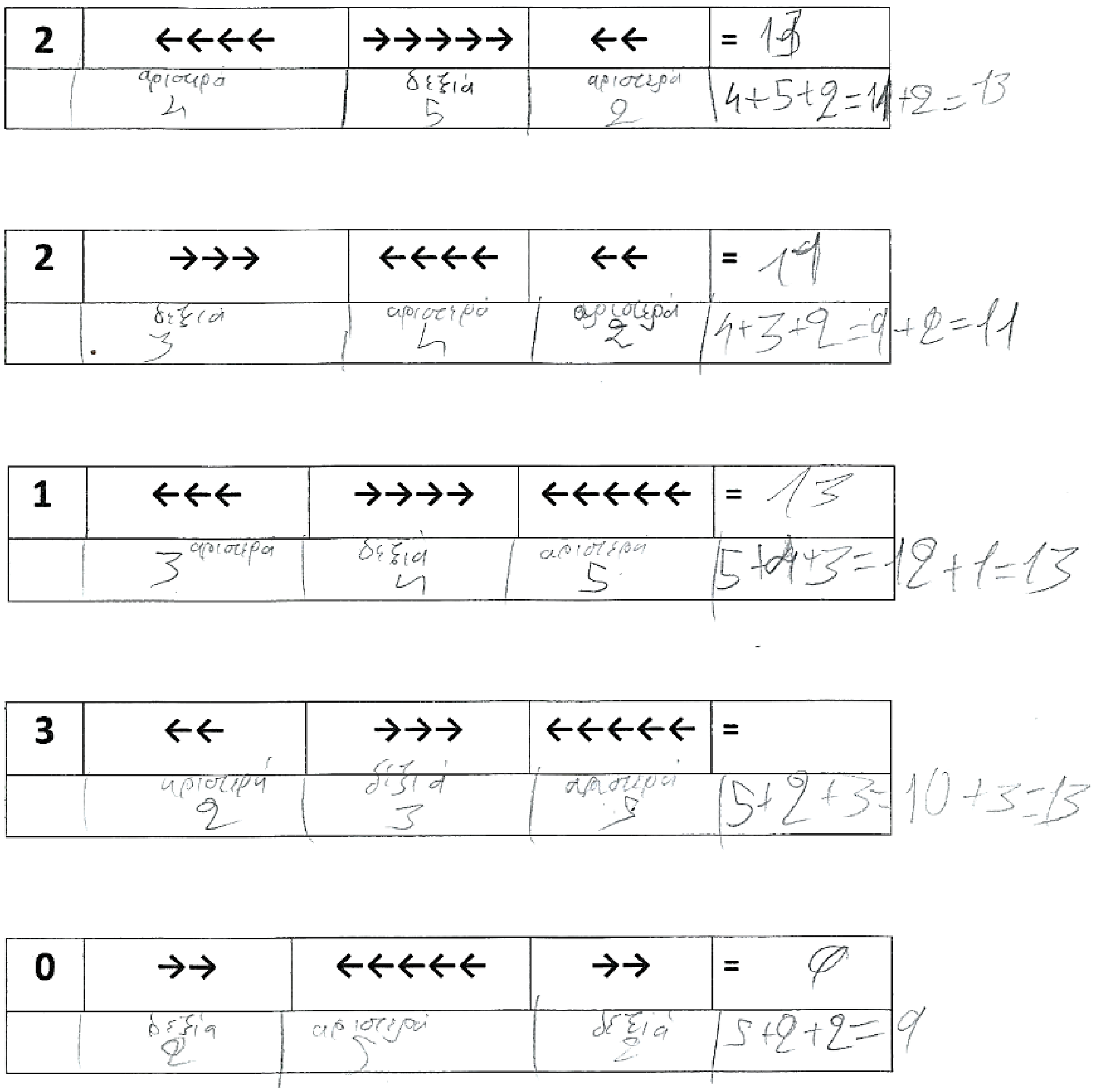
1	←←←	→→→→	←←←←←	= 0,001
1-3+4 -5				

3	←←	→→→	←←←←←	= 0,1
3-2+3-5				

Εικόνα 3.3.10 Δεκαδικός αριθμός στη θέση αρνητικού (4Δ)

6. Απουσία συμβολισμού

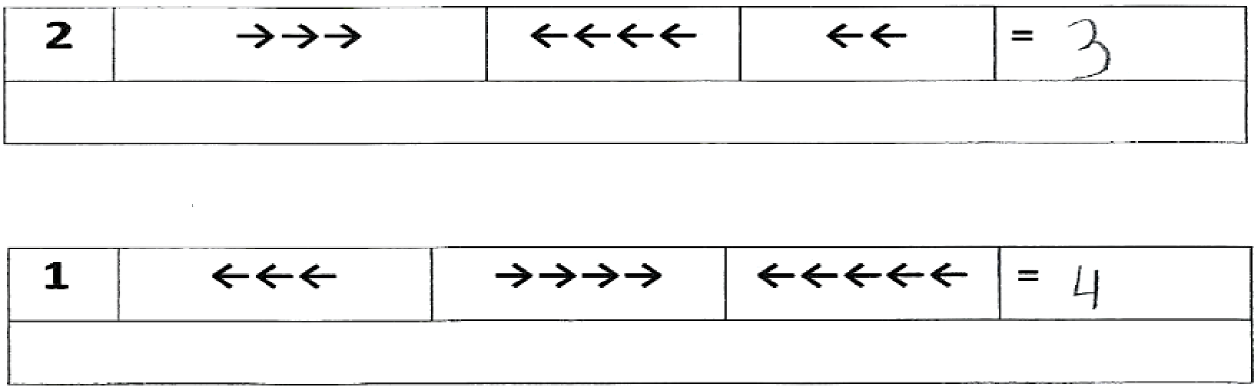
Η επόμενη περίπτωση είναι μοναδική στο σύνολο των φύλλων εργασίας. Παρατηρούμε στην Εικόνα 3.3.11 ότι δεν εμφανίζεται πουθενά το αρνητικό πρόσημο και όλοι οι υπολογισμοί γίνονται θεωρώντας όλους τους αριθμούς θετικούς. Η φορά των βελών σημειώνεται λεκτικά, αλλά δεν επηρεάζει σε κανένα σημείο ούτε την καταγραφή ούτε τον υπολογισμό.



Εικόνα 3.3.11 Απουσία συμβολισμού (18Δ)

7. Απροσδιόριστο λάθος

Στο φύλλο εργασίας της Ε’ Φάσης έχουν περιοριστεί σημαντικά τα φύλλα εργασίας που εντάσσονται σε αυτή την κατηγορία. Σε αυτό συνέβαλε η καταγραφή της αριθμητικής παράστασης από τους/τις μαθητές/τριες, καθώς μέσω των σημειώσεών τους αναδεικνύονταν ο τρόπος σκέψης που οδήγησε στο εκάστοτε λάθος. Δύο μόνο φύλλα εργασίας συμπεριλαμβάνονται σε αυτή την κατηγορία, γιατί υπάρχει μόνο η καταγραφή του αποτελέσματος και καμία άλλη σημείωση ή αναπαράσταση. Είναι σημαντικό να προστεθεί ότι όλοι οι υπολογισμοί είναι λανθασμένοι και επομένως γίνεται ακόμη πιο δύσκολο να ερμηνευτεί (Εικόνα 3.3.12).



Εικόνα 3.3.12 Απροσδιόριστο λάθος (33Ε)

Β’ Ανάλυση αναπαραστάσεων

Κατά τη μελέτη των φύλλων εργασίας ανακαλύφθηκαν διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους οι μαθητές/τριες αποφάσισαν να αναπαραστήσουν την αριθμητική παράσταση που τους δόθηκε. Το μεγαλύτερο ποσοστό (32%) επέλεξε την ενιαία αναπαράσταση, ενώ υπήρξαν και πιο σπάνιοι τρόποι αναπαράστασης, που ο καθένας από αυτούς χρησιμοποιήθηκε σε ποσοστό 3%. Οι αναπαραστάσεις ομαδοποιήθηκαν και οι κατηγορίες που προέκυψαν είναι οι ακόλουθες:

1. Ενδιάμεσοι υπολογισμοί
2. Βηματική σωστή
3. Ενιαίοι υπολογισμοί
4. Απλή καταγραφή
5. Παρενθέσεις
6. Αναλυτική καταγραφή
7. Αλλαγή σειράς αριθμών
8. Διαχωρισμός θετικών και αρνητικών αριθμών
9. Απουσία αναπαράστασης

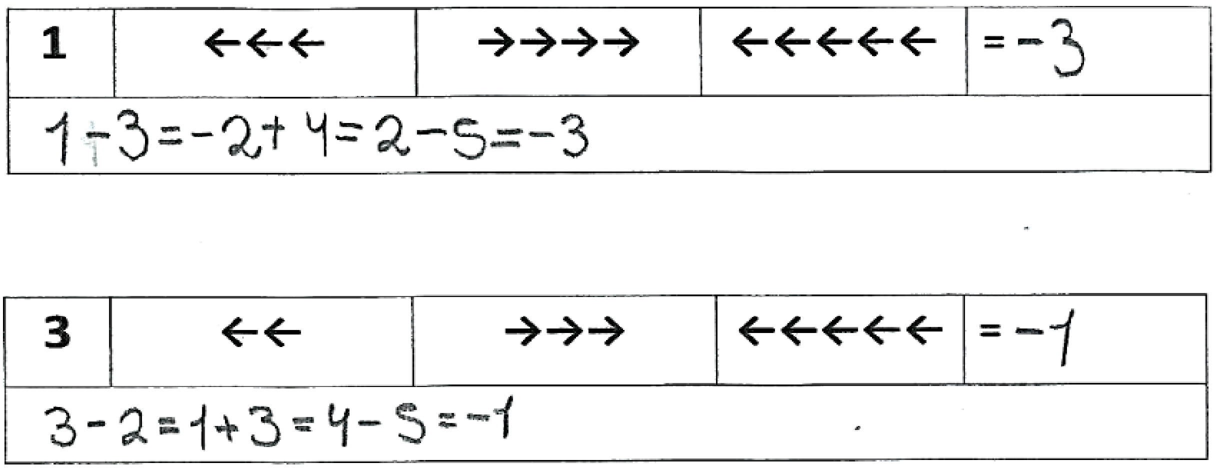
	ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ	ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΣΩΣΤΗ	ΕΝΙΑΙΟΙ	ΚΑΤΑΓΡΑΦΗ	ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΙΣ	ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ	ΑΛΛΑΓΗ ΣΕΙΡΑΣ ΑΡΙΘΜΩΝ	ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ ΘΕΤΙΚΩΝ - ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ	ΑΠΟΥΣΙΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ
Ε' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ	9	8	18	10	1	2	1	1	1
Δ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ	5	4	4	2	1		1	1	
ΣΥΝΟΛΟ	14	12	22	12	2	2	2	2	1

Διάγραμμα 3.3.4 Αναπαράσταση - Γ' Φύλλο Εργασίας

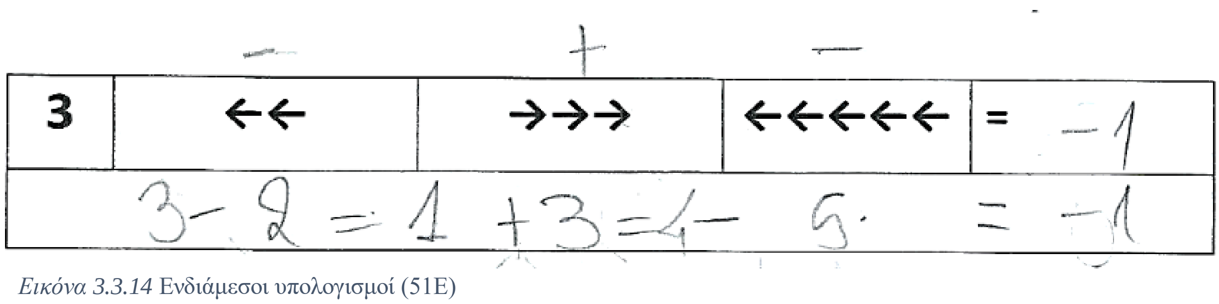
Ακολουθεί λεπτομερής παρουσίαση των κατηγοριών στις οποίες τοποθετήθηκαν οι αναπαραστάσεις.

1. Ενδιάμεσοι υπολογισμοί

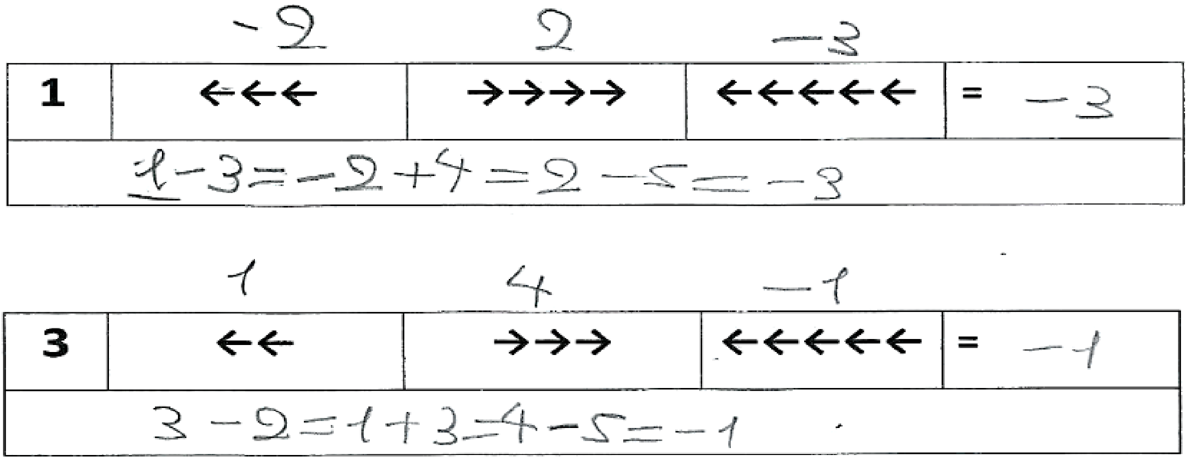
Το 20% των μαθητών/τριών, συγκεκριμένα 9 της Ε’ και 4 της Δ’ τάξης, επέλεξαν αυτού του είδους την αναπαράσταση. Όπως φαίνεται και στην Εικόνα 3.3.13, οι μαθητές/τριες υπολογίζουν σταδιακά, σε κάθε ενδιάμεση στάση καταγράφουν το αποτέλεσμά της και συνεχίζουν έως το τελικό αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας καταχρηστικά το σύμβολο της ισότητας. Σε μια περίπτωση (Εικόνα 3.3.14) βλέπουμε να σημειώνεται το αρνητικό και το θετικό πρόσημο πάνω από τα βέλη, πιθανόν για υπενθύμιση και διευκόλυνση κατά τον υπολογισμό. Ενώ σε ένα άλλο φύλλο εργασίας είναι γραμμένο το αποτέλεσμα της κάθε ενδιάμεσης στάσης, όπως ζητούνταν σε προηγούμενη δραστηριότητα (Εικόνα 3.3.15).



Εικόνα 3.3.13 Ενδιάμεσοι υπολογισμοί (37Ε)



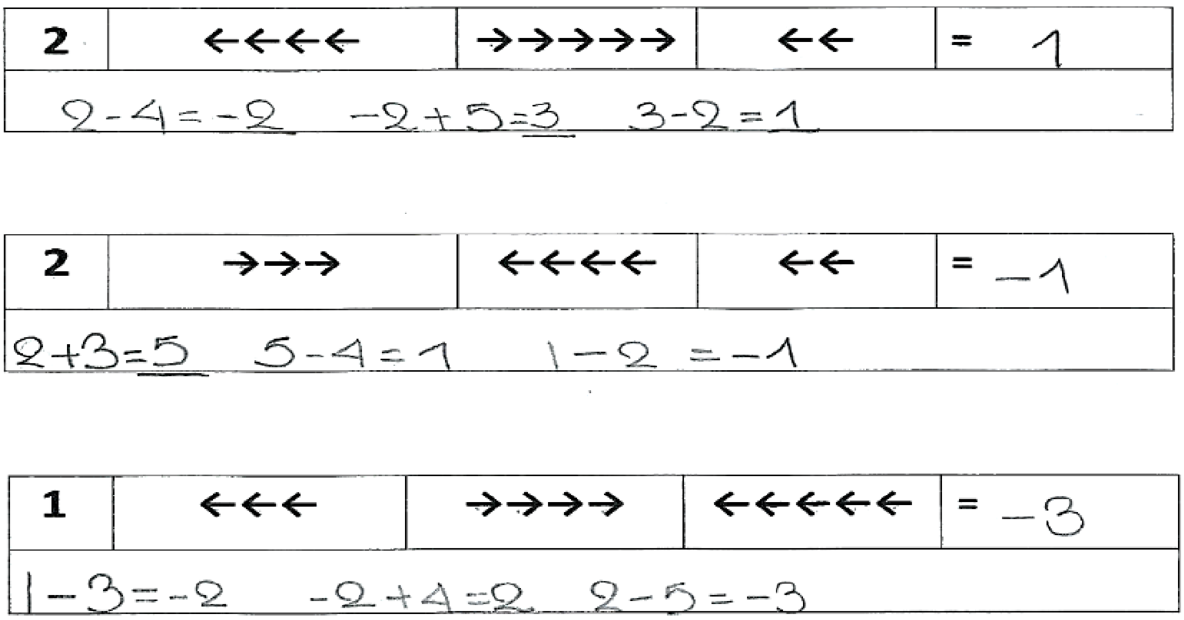
Εικόνα 3.3.14 Ενδιάμεσοι υπολογισμοί (51Ε)



Εικόνα 3.3.15 Ενδιάμεσοι υπολογισμοί (10Δ)

2. Βηματική σωστή

Αρκετά μεγάλο είναι το ποσοστό (17%) των μαθητών/τριών που διάλεξαν να αναπαραστήσουν με αυτόν τον τρόπο, 8 από την Ε' και 4 από την Δ' τάξη. Η αναπαράσταση, αν και έχει πολλές ομοιότητες με την προηγούμενη, διαφέρει ουσιαστικά, καθώς εδώ η χρήση του συμβόλου ισότητας είναι σωστή. Όπως διακρίνεται και στην Εικόνα 3.3.16 και την Εικόνα 3.3.17, οι υπολογισμοί και πάλι γίνονται σταδιακά, αλλά για το πέρασμα στον επόμενο επιλέγεται η επανάληψη του αποτελέσματος και η δημιουργία μιας νέας πράξης, αντί για έναν συνεχή, συμβολικά λανθασμένο υπολογισμό.



Εικόνα 3.3.16 Βηματική σωστή (5Ε)

3	←←	→→→	←←←←←	= −1
3 − 2 = 1	1 + 3 = 4	4 − 5 = −1		

0	→→	←←←←←	→→	= −1
0 + 2 = 2	2 − 5 = −3	−3 + 2 = −1		

Εικόνα 3.3.17 Βηματική σωστή (12Δ)

3. Ενιαίοι υπολογισμοί

Η κατηγορία αυτή των αναπαραστάσεων, όπως προαναφέρθηκε, κατέχει την πρώτη θέση, καθώς από τους/τις 69 την προτίμησαν 22 μαθητές/τριες, κυρίως μάλιστα της Ε’ τάξης (18). Στη συγκεκριμένη αναπαράσταση (Εικόνα 3.3.18) γράφεται ο αριθμός της εκκίνησης, ακολουθεί ο αριθμός που αντιστοιχεί στα βέλη έχοντας μπροστά το κατάλληλο πρόσημο και στο τέλος καταγράφεται το αποτέλεσμα. Επομένως, η αριθμητική παράσταση αποδίδεται με ενιαίο τρόπο χωρίς να σημειώνονται οι ενδιάμεσοι υπολογισμοί.

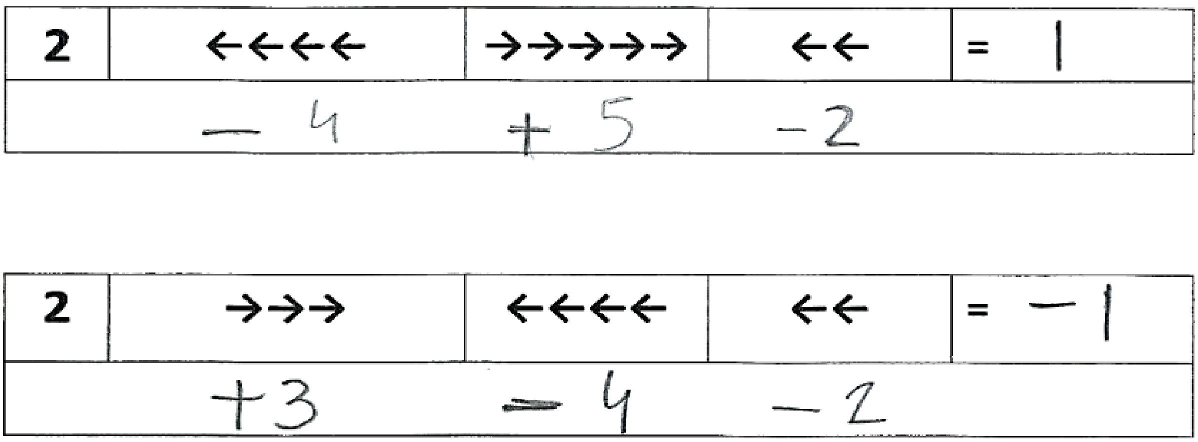
1	←←←	→→→→	←←←←←	= −3
1 − 3 + 4 − 5 = −3				

3	←←	→→→	←←←←←	= −1
3 − 2 + 3 − 5 = −1				

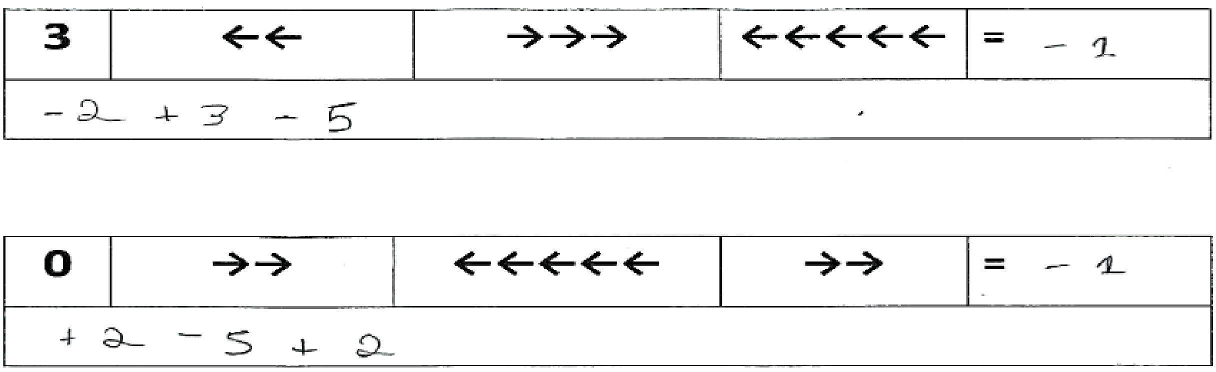
Εικόνα 3.3.18 Ενιαίοι υπολογισμοί (35Ε)

4. Απλή καταγραφή

Αρκετά είναι τα παιδιά που επέλεξαν απλώς να καταγράψουν τον αριθμό που δείχνουν τα βέλη με το αντίστοιχο της φοράς τους πρόσημο. Η κατηγορία αυτή μοιάζει με εκείνη των ενιαίων υπολογισμών. Το στοιχείο όμως που θεωρήθηκε σημαντικό, ώστε να διαχωριστούν σε ξεχωριστές κατηγορίες, είναι η απουσία από την αναπαράσταση του αριθμού της εκκίνησης. Όπως φαίνεται και στις εικόνες, οι μαθητές/τριες προχωρούν σε αποκωδικοποίηση των βελών είτε ακριβώς κάτω από το αντίστοιχο κελί (Εικόνα 3.3.19) είτε στην αρχή (Εικόνα 3.3.20) και όχι στην καταγραφή ολοκληρωμένης αριθμητικής παράστασης. Μεταξύ των φύλλων εργασίας που τοποθετούνται σε αυτή την κατηγορία εντοπίστηκε και ένα όπου το πρόσημο σημειώνεται πίσω από τον αριθμό και όχι μπροστά (Εικόνα 3.3.21).



Εικόνα 3.3.19 Απλή καταγραφή (24Ε)



Εικόνα 3.3.20 Απλή καταγραφή (2Δ)

2	←←←←	→→→→→	←←	= 1
	4 -	5+	2-	

2	→→→	←←←←	←←	= −1
	3+	−4	−2	

Εικόνα 3.3.21 Απλή καταγραφή (44Ε)

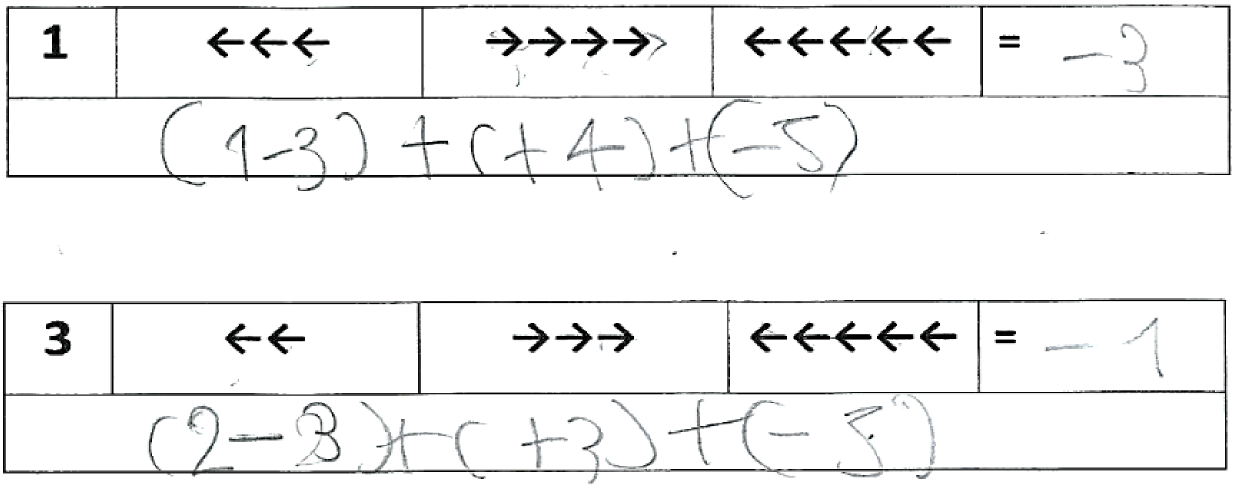
5. Παρενθέσεις

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η αναπαράσταση που εντοπίστηκε σε μόλις 2 φύλλα εργασίας, ένα της Ε’ και ένα της Δ’ τάξης, Στην πρώτη περίπτωση (Εικόνα 3.3.22) ο αριθμός εκκίνησης με τον αριθμό που αντιστοιχεί στα βέλη του πρώτου κελιού τοποθετούνται σε παρένθεση, ακολουθεί εκτός παρένθεσης η πρόσθεση του αριθμού του δεύτερου κελιού και υπολογίζεται το αποτέλεσμα. Αμέσως μετά χρησιμοποιείται το αποτέλεσμα μαζί με τον αριθμό του τρίτου κελιού για τον συνολικό υπολογισμό. Στη δεύτερη περίπτωση (Εικόνα 3.3.23) πάλι ο αριθμός εκκίνησης με εκείνον του πρώτου κελιού τοποθετείται σε παρένθεση, αλλά εδώ λείπει ο ενδιάμεσος υπολογισμός. Ο υπολογισμός συνεχίζεται προσθέτοντας τους αριθμούς των επόμενων κελιών, οι οποίοι γράφονται με το πρόσημό τους μέσα σε ξεχωριστές παρενθέσεις.

1	←←←	→→→→	←←←←←	= −3
(1−3)+4=2	2-5=-3			

3	←←	→→→	←←←←←	= −1
(3-2)+3=4	4 − 5 = −1			

Εικόνα 3.3.22 Παρενθέσεις (30Ε)

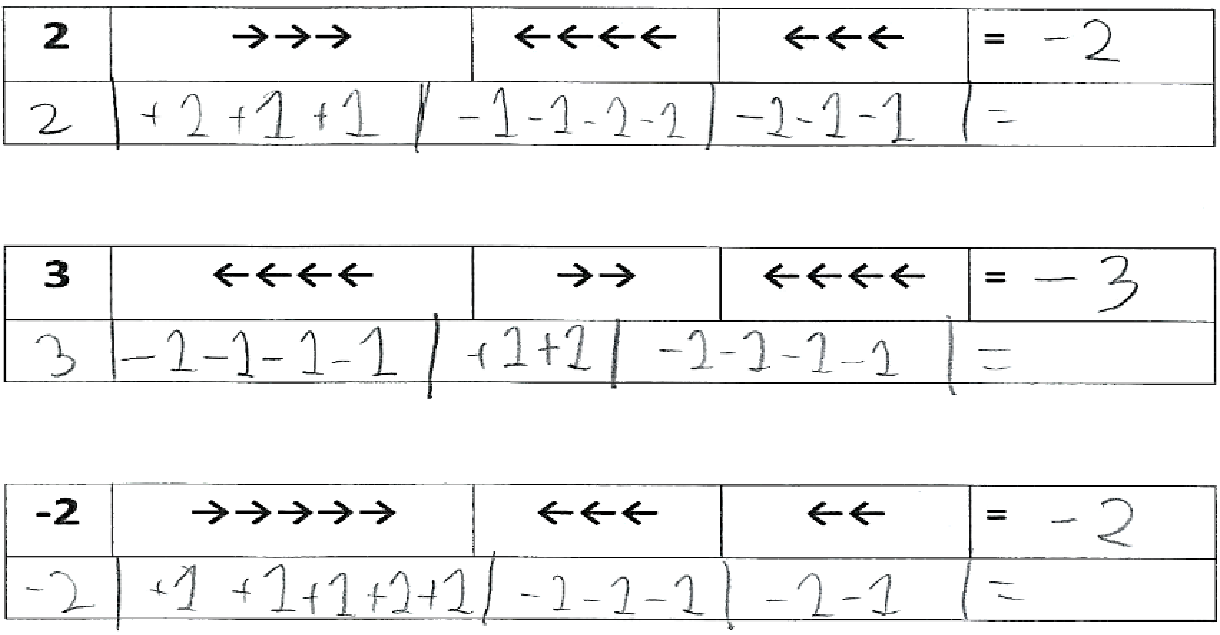


1	←←←	→→→→	←←←←←	= −3
(1−3)+(+4)+(−5)				
3	←←	→→→	←←←←←	= −1
(2−3)+(+3)+(−3)				

Εικόνα 3.3.23 Παρενθέσεις (1Δ)

6. Αναλυτική καταγραφή

Η αναπαράσταση αυτής της κατηγορίας εμφανίστηκε μόνο σε δύο μαθητές/τριες της Ε’ τάξης. Προκειμένου να αποδώσουν με αριθμούς, προχώρησαν στην αναλυτική καταγραφή κάθε βέλους χωριστά χρησιμοποιώντας τον αριθμό 1 μαζί με το κατάλληλο κάθε φορά πρόσημο (Εικόνα 3.3.24). Η αναπαράσταση ίσως είχε επίδραση και στον υπολογισμό δεδομένου ότι και τα δύο φύλλα εργασίας ήταν ολόσωστα συμπληρωμένα.

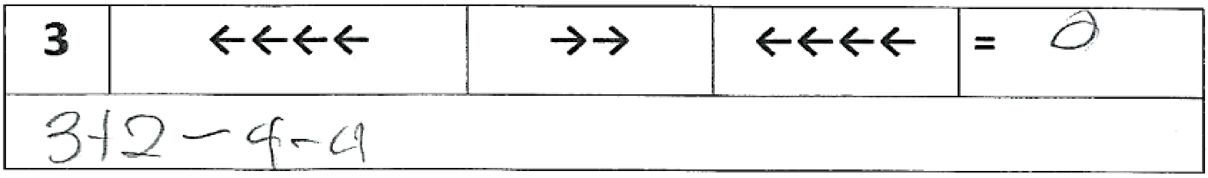


2	→→→	←←←←	←←←	= −2
2	+1+1+1	−1−1−1−1	−1−1−1	=
3	←←←←	→→	←←←←	= −3
3	−1−1−1−1	+1+1	−1−1−1−1	=
-2	→→→→→	←←←	←←	= −2
−2	+1+1+1+1+1	−1−1−1	−1−1	=

Εικόνα 3.3.24 Αναλυτική καταγραφή (53Ε)

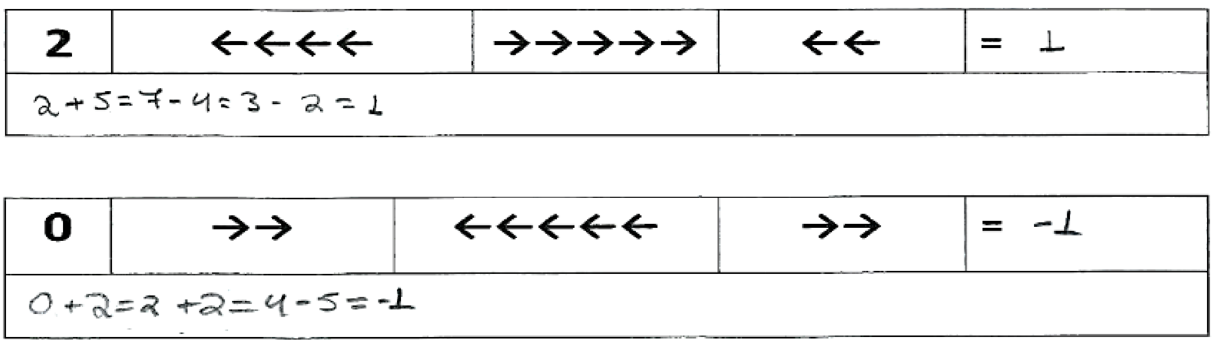
7. Αλλαγή σειράς αριθμών

Κατά την ανάλυση των αναπαραστάσεων βρέθηκαν και δύο περιπτώσεις, μία από κάθε τάξη, όπου οι μαθητές/τριες αποφάσισαν να μην ακολουθήσουν τη σειρά εμφάνισης των αριθμών, αλλά να την αλλάξουν με στόχο να διευκολυνθούν στον υπολογισμό. Στην Εικόνα 3.3.25, βλέπουμε ότι αντί για 3 - 4 + 2 – 4, επιλέγεται να μετακινηθεί το +2 πιο μπροστά και να ακολουθήσουν μαζί οι δύο αρνητικοί αριθμοί. Αν και η σκέψη θεωρείται βοηθητική και αποτελεσματική ως προς τον υπολογισμό, ωστόσο στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν οδηγούσε σε ολοκληρωμένο, σωστό υπολογισμό, αλλά κάθε φορά σημειωνόταν το μηδέν, όταν το αποτέλεσμα ήταν αρνητικό.



Εικόνα 3.3.25 Αλλαγή σειράς (9Ε)

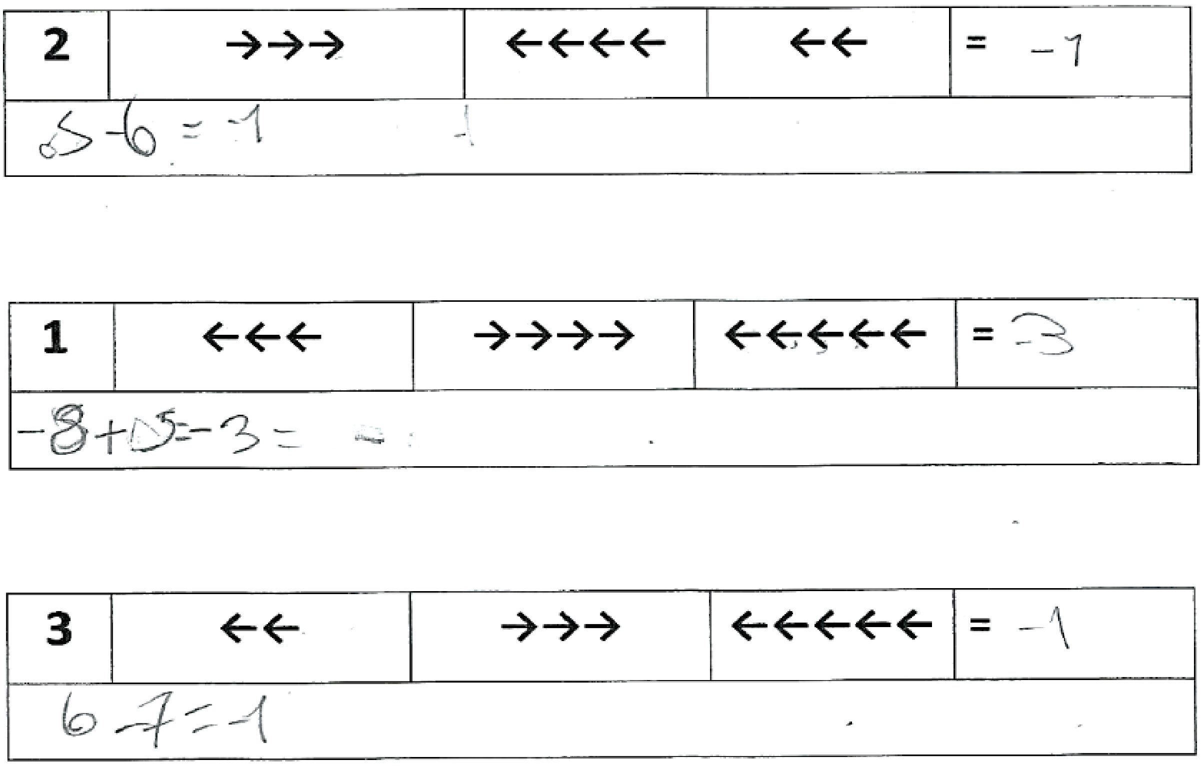
Στην περίπτωση της Δ’ τάξης διαπιστώνουμε ότι υπολογίζει την αριθμητική παράσταση με ενδιάμεσους υπολογισμούς, αλλά κυρίως κάνοντας αλλαγές στη σειρά των αριθμών. Έτσι, τοποθετεί στην αρχή τα θετικά και αντί 2 – 4 + 5 – 2 υπολογίζει 2 + 5 = 7 – 4 = 3 – 2 = 1 και αντίστοιχα για το 0 + 2 – 5 + 2 υπολογίζει 0 + 2 = 2 + 2 = 4 - 5= -1 (Εικόνα 3.3.26) .Αντίθετα με την προηγούμενη περίπτωση, εδώ φαίνεται να συνέβαλε στους σωστούς υπολογισμούς.



Εικόνα 3.3.26 Αλλαγή σειράς (7Δ)

8. Διαχωρισμός θετικών και αρνητικών αριθμών

Στα φύλλα εργασίας επισημάνθηκαν δύο ακόμη ξεχωριστές περιπτώσεις αναπαράστασης. Διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές/τριες επέλεξαν αρχικά νοερά να διαχωρίσουν τους θετικούς και τους αρνητικούς αριθμούς και να υπολογίσουν. Στη συνέχεια κατέγραψαν το αποτέλεσμα των θετικών και των αρνητικών και προχώρησαν στον τελικό υπολογισμό τους. Για παράδειγμα στο 1 -3 + 4 -5, υπολογίζονται τα θετικά 1 + 4 και τα αρνητικά -3 - 5 και προκύπτει το -8 + 5 (Εικόνα 3.3.27).



Εικόνα 3.3.27 Διαχωρισμός θετικών και αρνητικών αριθμών (15Δ)

9. Απουσία αναπαράστασης

Μεταξύ των 69 συνολικά φύλλων εργασίας υπήρξε και μία περίπτωση (Εικόνα 3.3.28), όπου δεν καταγράφηκε καμία απολύτως αναπαράσταση, πράξη ή σημείωση. Όπως έχει ήδη αναφερθεί και στην ενότητα με την ανάλυση των λανθασμένων υπολογισμών του τρίτου φύλλου εργασίας, όλα τα αποτελέσματα που συμπληρώθηκαν είναι λανθασμένα. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη συνδυαστικά την αδυναμία υπολογισμού και αναπαράστασης, υποθέτουμε ότι υπάρχει γενικότερη δυσκολία του/ της μαθητή/τριας.

2	→→→	←←←←	←←	= 3

1	←←←	→→→→	←←←←←	= 4

3	←←	→→→	←←←←←	= 6

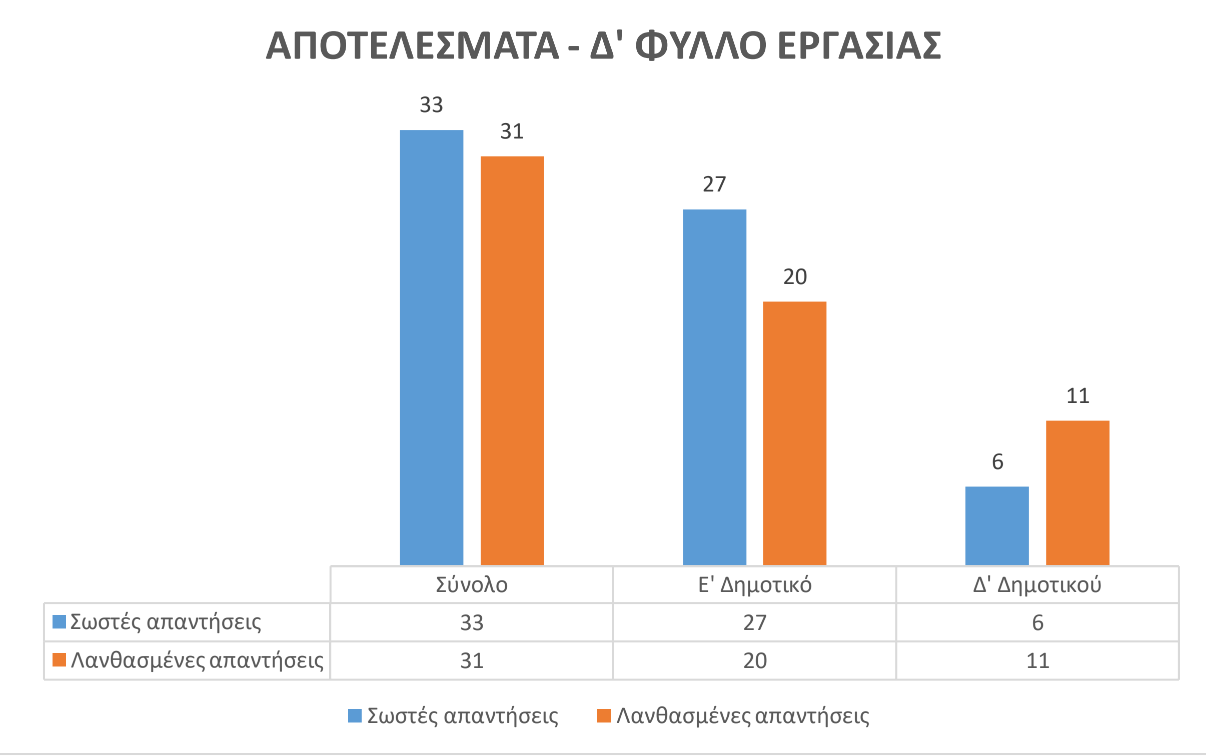
0	→→	←←←←←	→→	= 5

Εικόνα 3.3.28 Απουσία αναπαράστασης (33Ε)

3.4 Τέταρτη Ενότητα: 4ο φύλλο εργασίας – Στ’ Φάση

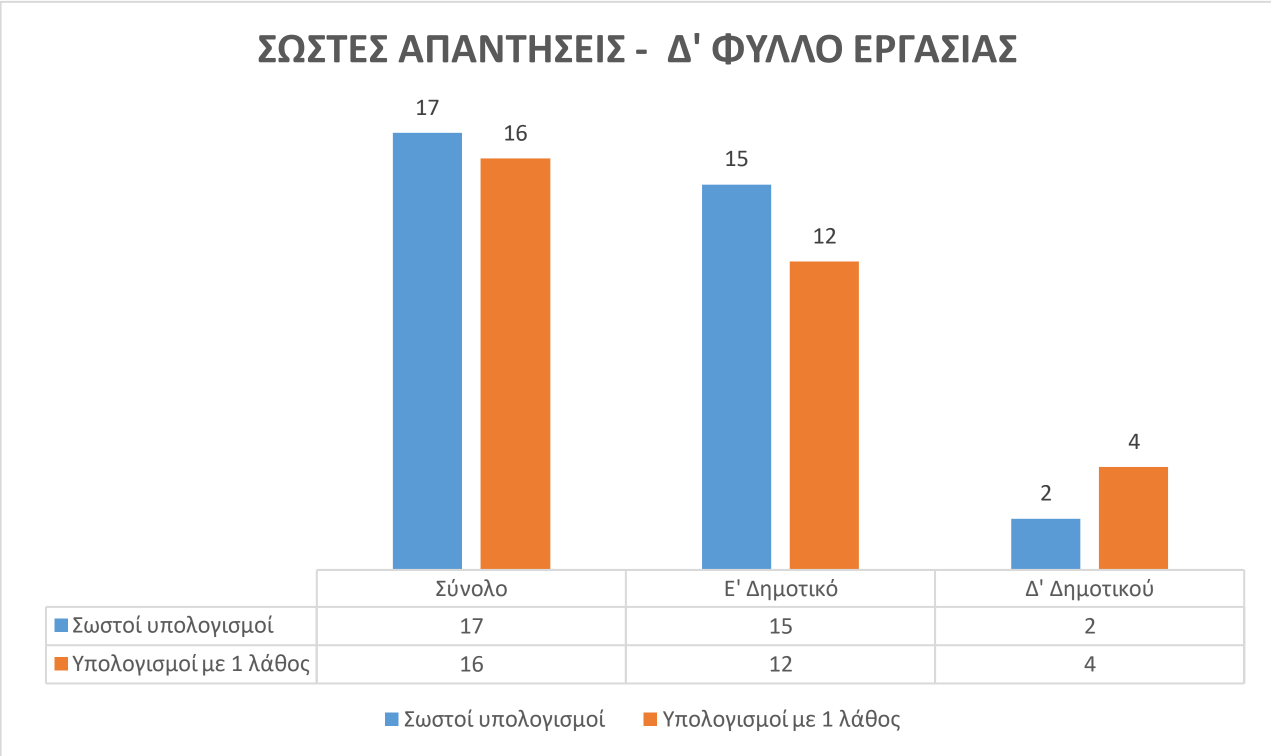
Στη Στ’ Φάση της έρευνας επιχειρείται να διερευνηθεί όχι μόνο η ικανότητα υπολογισμού των δεδομένων, αλλά κατά κύριο λόγο η ικανότητα των μαθητών/τριών να σκεφτούν και να συμπληρώσουν το δεδομένο που απουσιάζει, ώστε να ολοκληρωθεί η αριθμητική παράσταση. Ο βαθμός δυσκολίας είναι αυξημένος, για αυτό αποφασίστηκε ο αριθμός των αριθμητικών παραστάσεων να περιοριστεί στις 5. Παρά τον μικρότερο αριθμό, οι μαθητές/τριες δυσκολεύτηκαν και χρειάστηκαν περισσότερο χρόνο για τη συμπλήρωση του φύλλου εργασίας.

Από την ανάλυση των συνολικά 64 φύλλων εργασίας διαπιστώθηκε ότι οι σωστές απαντήσεις αποτελούν το 52% και οριακά ξεπερνούσαν τις λανθασμένες που φτάνουν στο 48%. Να σημειωθεί βέβαια ότι υπήρξε σημαντική διαφορά ανάμεσα στα αποτελέσματα των δύο τάξεων. Συγκεκριμένα, από τους/τις μαθητές/τριες της Ε’ τάξης απάντησε σωστά περίπου το 57%, ενώ αντίστοιχα στην Δ’ τάξη το 35%. Επομένως, εμφανώς τη μεγαλύτερη δυσκολία συνάντησαν οι μικρότεροι/ες μαθητές/τριες.



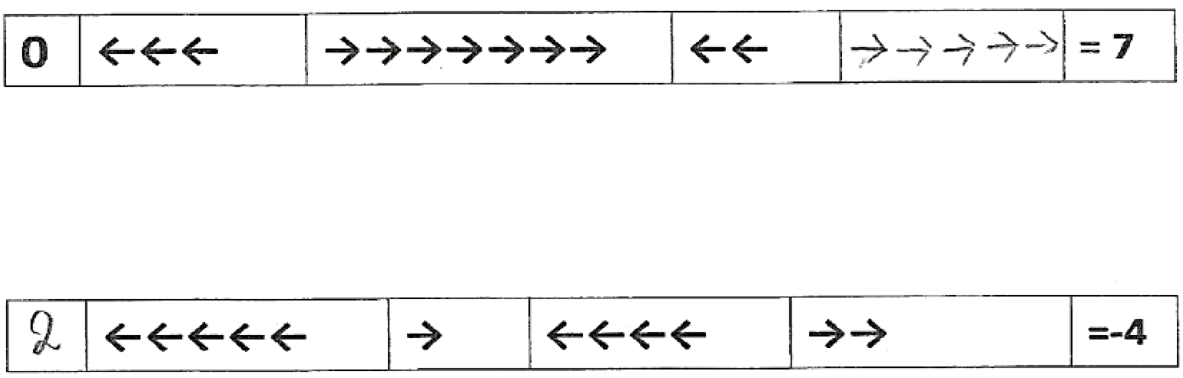
	Σύνολο	Ε' Δημοτικό	Δ' Δημοτικού
Σωστές απαντήσεις	33	27	6
Λανθασμένες απαντήσεις	31	20	11

Διάγραμμα 3.4.1 Αποτελέσματα - Δ' Φύλλο Εργασίας

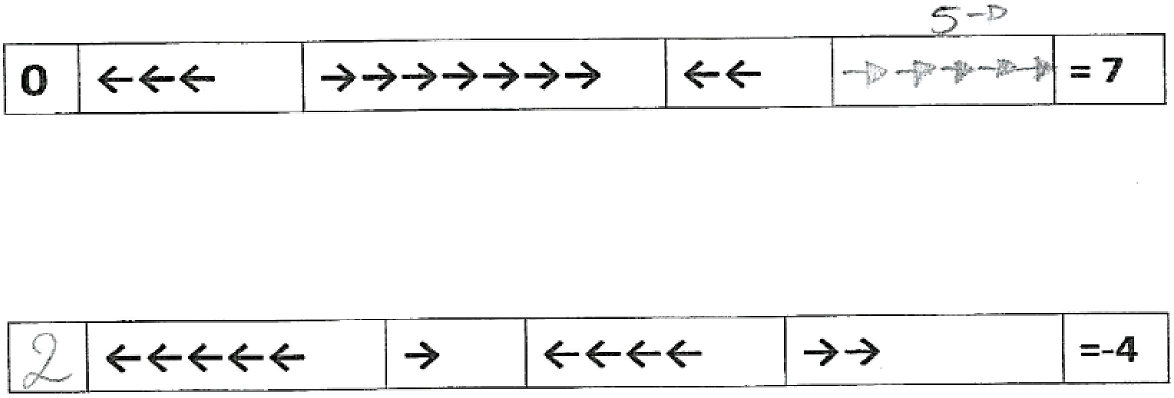


Διάγραμμα 3.4.2 Σωστές Απαντήσεις - Δ' Φύλλο Εργασίας

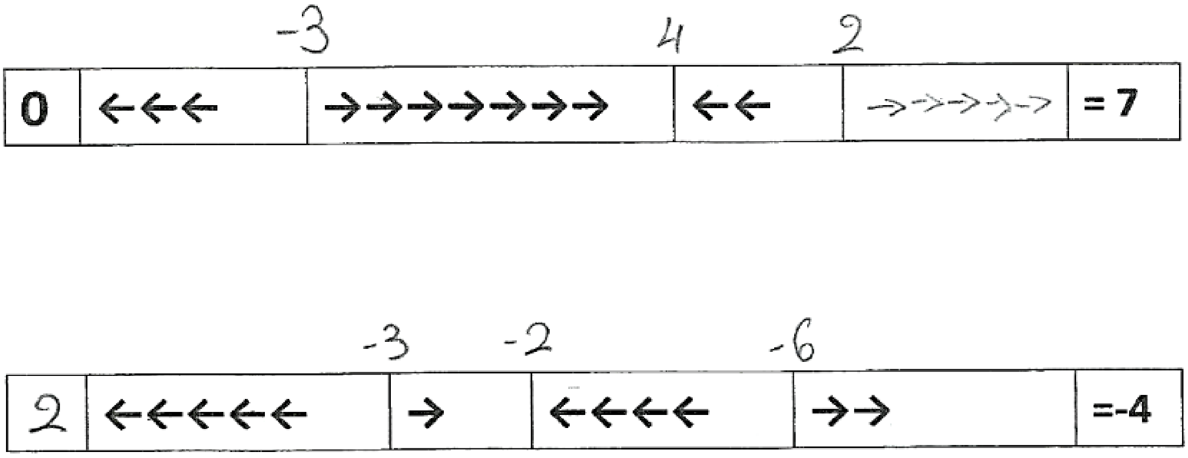
Μεταξύ των σωστά συμπληρωμένων φύλλων εργασίας (Εικόνα 3.4.1) ξεχώρισαν ορισμένες σημειώσεις μαθητών/τριών. Στην Εικόνα 3.4.2 βλέπουμε πως μέσα στο κελί σχεδιάζονται τα βέλη και από πάνω σημειώνεται ο αριθμός με ένα μόνο βέλος ενδεικτικό της κατεύθυνσης. Σε μια άλλη περίπτωση, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.4.3 καταγράφεται το αποτέλεσμα όλων των ενδιάμεσων στάσεων. Μάλιστα στην αριθμητική παράσταση με το κενό στον αρχικό αριθμό διακρίνεται ξεκάθαρα η αντίστροφη πορεία που ακολουθήθηκε προκειμένου να βρεθεί και να συμπληρωθεί ο αριθμός που έλειπε.



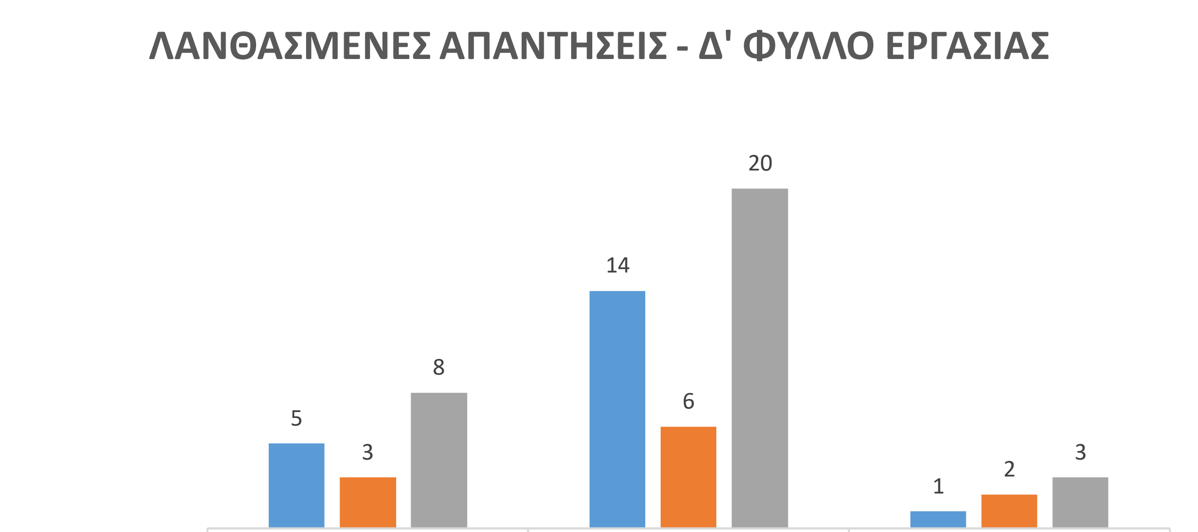
Εικόνα 3.4.1 Σωστές απαντήσεις (29Ε)



Εικόνα 3.4.2 Σωστές απαντήσεις (30Ε)



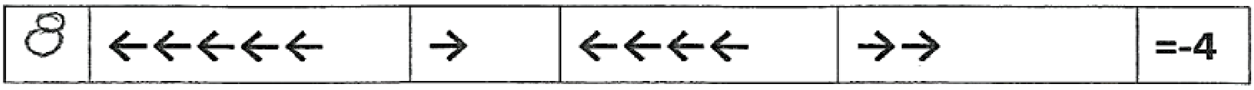
Εικόνα 3.4.3 Σωστές απαντήσεις (45Ε)



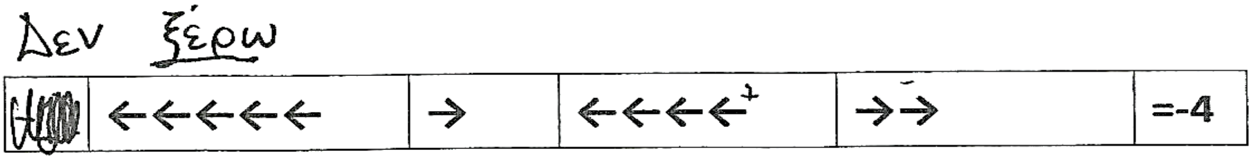
	Λανθασμένη φορά	Λανθασμένος αριθμός	Λανθασμένος υπολογισμός
Ε' Δημοτικό	5	14	1
Δ' Δημοτικού	3	6	2
Σύνολο	8	20	3

Διάγραμμα 3.4.3 Λανθασμένες απαντήσεις - Δ' Φύλλο Εργασίας

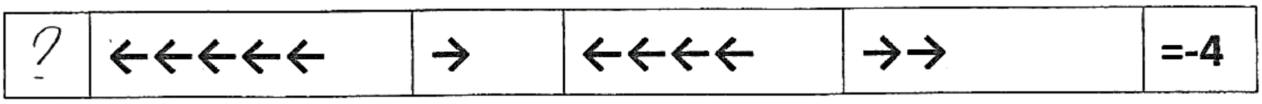
Σημαντικά στοιχεία προέκυψαν και από την ανάλυση των λανθασμένων απαντήσεων. Αρχικά, ιδιαίτερη εντύπωση προξένησε ο μεγάλος αριθμός λαθών σε συγκεκριμένη αριθμητική παράσταση, όπου δίνονταν τα ενδιάμεσα κελιά με τα βέλη, το αποτέλεσμα, αλλά έλειπε ο αριθμός της αφετηρίας. Το ποσοστό των λαθών έφτασε στο 70% στο σύνολο των φύλλων εργασίας. Αναλυτικά από τα συνολικά 43 φύλλα εργασίας με 1 ή περισσότερα λάθη το λάθος εμφανίστηκε στα 30, σε 19 (44%) στην Ε’ τάξη και 11 (26%) στη Δ’ τάξη. Μάλιστα, παρατηρήθηκε ότι αυτό αποτελούσε και το μοναδικό λάθος σε ποσοστό 50% και στις δύο τάξεις, συγκεκριμένα σε 6 από τα 12 της Ε’ τάξης και 2 από τα 4 της Δ’ τάξης. Ορισμένοι μαθητές/τριες δυσκολεύτηκαν τόσο που το άφησαν κενό είτε τοποθέτησαν άσχετο αριθμό (Εικόνα 3.4.4) είτε αποφάσισαν να καταγράψουν την αδυναμία τους με λέξεις, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.4.5 ή με τη χρήση ερωτηματικού (Εικόνα 3.4.6). Να υπογραμμιστεί ότι δεν δημιουργήθηκε ξεχωριστή κατηγορία για το συγκεκριμένο λάθος, διότι εντοπίστηκε και σε φύλλα εργασίας που περιείχαν μόνο ένα λάθος και συμπεριλήφθηκαν στην αντίστοιχη κατηγορία των σωστών απαντήσεων, ενώ σε άλλες περιπτώσεις συνυπήρχε με άλλα που ανήκαν σε κάποια από τις κατηγορίες στις οποίες διακρίθηκαν οι λανθασμένες απαντήσεις.



*Εικόνα 3.4.4*Λανθασμένη αφετηρία (34Ε)



Εικόνα 3.4.5 Λανθασμένη αφετηρία (9Ε)



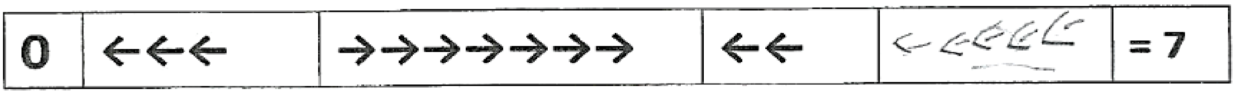
Εικόνα 3.4.6 Λανθασμένη αφετηρία (3Δ)

Μέσα από την ανάλυση των υπόλοιπων λαθών, πέρα από εκείνο της αφετηρίας, προέκυψαν οι ακόλουθες κατηγορίες που θα αναλυθούν λεπτομερώς παρακάτω :

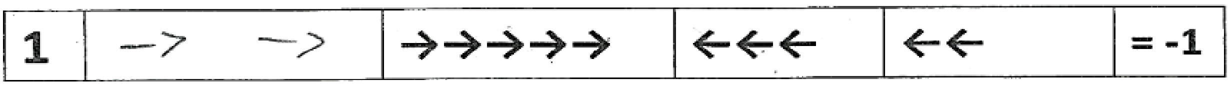
1. Λανθασμένη φορά βελών – Σωστός αριθμός
2. Λανθασμένος αριθμός – Σωστή φορά βελών
3. Λανθασμένοι υπολογισμοί

1. Λανθασμένη φορά βελών – Σωστός αριθμός

Στην κατηγορία αυτή συμπεριλήφθηκαν οι περιπτώσεις όπου στο κενό κελί τοποθετούνταν μεν ο σωστός αριθμό βελών, αλλά η φορά τους ήταν λανθασμένη. Το λάθος αυτό εντοπίστηκε σε 8 συνολικά περιπτώσεις, 5 της Ε' και 3 της Δ' τάξης και παρατηρήθηκε ότι η αντίστροφη σύνδεση της φοράς των βελών ήταν σταθερή και στις 5 αριθμητικές παραστάσεις. Πιθανόν επομένως να υπήρχε μια γενικότερη παρανόηση ή απροσεξία όσον αφορά στην κατεύθυνση, όχι όμως αδυναμία υπολογισμού (Εικόνα 3.4.7 και Εικόνα 3.4.8).



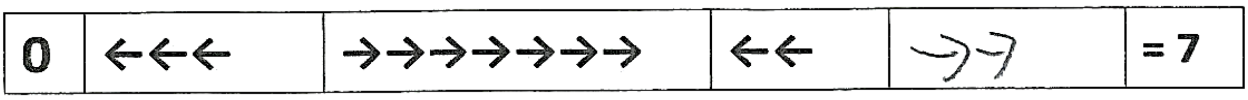
Εικόνα 3.4.7 Λανθασμένη φορά βελων (18Ε)



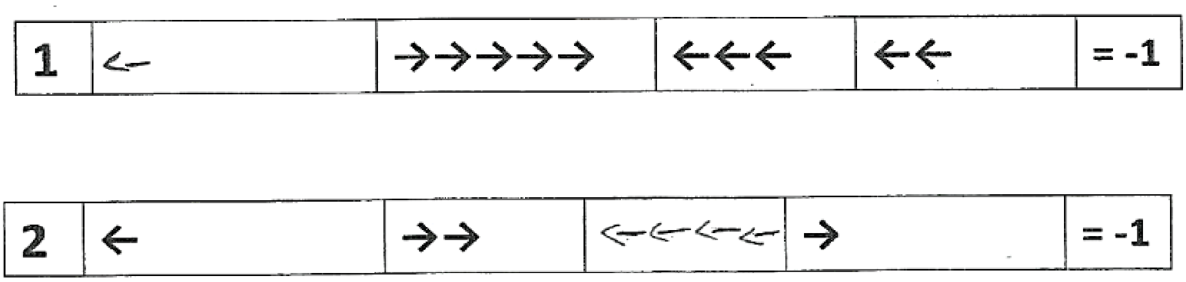
Εικόνα 3.4.8 Λανθασμένη φορά βελών (12Δ)

2. Λανθασμένος αριθμός – Σωστή φορά βελών

Η κατηγορία αυτή είναι η ακριβώς αντίθετη από την προηγούμενη περίπτωση. Εδώ παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές/τριες, παρόλο που κατάφερναν να αντιληφθούν αν ο ζητούμενος αριθμός είναι αρνητικός ή θετικός και να επιλέξουν την κατάλληλη κατεύθυνση των βελών, ωστόσο είχαν μια αδυναμία στον υπολογισμό. Για παράδειγμα (Εικόνα 3.4.9), στην αριθμητική παράσταση 0 - 3 + 7 – 2 το κενό πρέπει να συμπληρωθεί με θετικό αριθμό, όχι όμως το 2, αλλά το 5, για να έχει αποτέλεσμα 7. Στην εικόνα 3.4.10 βλέπουμε μάλιστα ότι εκτός της σωστής φοράς, πλησιάζει στον σωστό υπολογισμό. Συγκεκριμένα, στην πρώτη σχεδιάζει ένα αντί για δύο βελάκια προς τα αριστερά, ενώ στη δεύτερη τέσσερα αντί για πέντε. Επομένως, το λάθος ίσως να οφείλεται και σε λάθος απαρίθμησης.



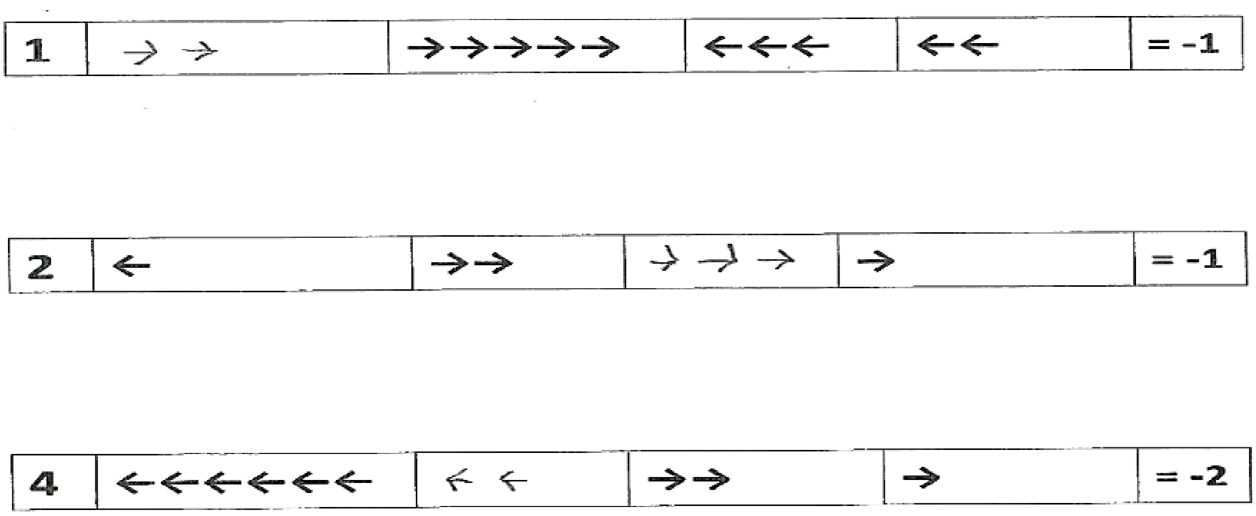
Εικόνα 3.4.9 Λανθασμένος αριθμός (43Ε)



Εικόνα 3.4.10 Λανθασμένος αριθμός (2Δ)

3. Λανθασμένοι υπολογισμοί

Στην κατηγορία αυτή τοποθετήθηκαν τα φύλλα εργασίας στα οποία εντοπίστηκαν λάθη που οφείλονταν τόσο σε λανθασμένη φορά όσο και σε λανθασμένο αριθμό. Στην Εικόνα 3.4.11 παρατηρούμε ότι στην πρώτη αριθμητική παράσταση το λάθος είναι στη φορά των βελών (-2 αντί για +2), στη δεύτερη στη φορά και στον αριθμό (-5 αντί για +3), ενώ στην τρίτη μόνο στον αριθμό (-2 αντί για -3). Συνεπώς, δεν υπάρχει ένα μοτίβο στο λάθος είτε μια συγκεκριμένη παρανόηση, αλλά διακρίνεται μια γενικότερη αστάθεια.



Εικόνα 3.4.11 Λανθασμένοι υπολογισμοί (41Ε)

4 Συζήτηση – Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία διερευνήθηκε ο τρόπος προσέγγισης των αρνητικών αριθμών από μαθητές/τριες των δύο τελευταίων τάξεων του Δημοτικού σχολείου, πριν την επίσημη διδασκαλία. Σε αυτό το κεφάλαιο αρχικά παρουσιάζονται τα κυριότερα ευρήματα της έρευνας ανά ερευνητικό ερώτημα. Στη συνέχεια αναγνωρίζοντας ότι αφορά ένα πολύπλοκο και πολυδιάστατο φαινόμενο λόγω της επίδρασης κοινωνικοπολιτικών παραγόντων και εκπαιδευτικών αποφάσεων και πρακτικών, επιχειρείται η διατύπωση συμπερασμάτων εστιάζοντας κατά κύριο λόγο στις διαδικασίες αντίληψης και κατανόησης του ερευνητικού θέματος.

Συζήτηση

Η ανάλυση των φύλλων εργασίας, που προηγήθηκε, μας οδηγεί στην εξαγωγή κάποιων διαπιστώσεων σε σχέση με τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν.

1ο ερευνητικό ερώτημα: Με ποιους τρόπους νοηματοδοτούν οι μαθητές/τριες Δημοτικού τους αρνητικούς αριθμούς και πώς τους εκφράζουν συμβολικά;

Οι μαθητές/τριες, όπως έχει αναφερθεί στο θεωρητικό μέρος, παρόλο που εξοικειώνονται από πολύ μικρή ηλικία με τους θετικούς αριθμούς, τους οποίους καλούνται να επεξεργαστούν καθημερινά και παρά την απουσία επίσημης διδασκαλίας στις τάξεις του Δημοτικού, έχουν προδιδακτικές διαισθήσεις και είναι σε θέση να νοηματοδοτούν τους αρνητικούς με βάση την καθημερινή τους εμπειρία (Bofferding, 2014; Ural, 2016). Σαφώς, η νοηματοδότηση ποικίλει ανάλογα με την ηλικία και την κατανόησή τους. Οι μαθητές/τριες των δύο τελευταίων τάξεων του Δημοτικού στις Φάσεις Α’ και Γ’, όπου έγινε η εισαγωγή στους αρνητικούς αριθμούς και τον συμβολισμό τους μέσω συζήτησης, εξέπληξαν θετικά με τις πλούσιες ιδέες και τα παραδείγματα στα οποία αναφέρθηκαν και το επίπεδο κατανόησης που αναδείχθηκε μέσω αυτών. Τα παραδείγματά τους σχετίζονταν κυρίως με τη θερμοκρασία, το ασανσέρ και τα χρέη, που συναντώνται συχνά σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Ural, 2016; Schindler et al., 2017). Μέσα από τη βηματική δραστηριότητα κατάφεραν να αντιληφθούν και να συνδέσουν την κίνηση μπροστά και πίσω με τους θετικούς και τους αρνητικούς αριθμούς (Slezáková et al., 2013; Παπαδόπουλος κ.συν., 2020). Ακόμη, σύμφωνα με την ανάλυση των φύλλων εργασίας, ανταποκρίθηκαν επαρκέστατα τόσο στη νοηματοδότηση όσο και στη συμβολική έκφραση των αρνητικών αριθμών. Συγκεκριμένα, διαπιστώθηκε ήδη από το πρώτο φύλλο εργασίας ότι ένα πολύ μεγάλο ποσοστό μαθητών/τριών που αγγίζει το 80% κατάφερε να χρησιμοποιήσει τον επίσημο συμβολισμό, χωρίς να έχει προηγηθεί η παρουσίασή του. Στο υπόλοιπο 20% περιλαμβάνονται περιπτώσεις όπου δεν σημειώθηκε κανένας απολύτως συμβολισμός, αλλά και περιπτώσεις όπου επινοήθηκαν συμβολισμοί από τους/τις μαθητές/τριες, για να ανταπεξέλθουν στο γνωστικό τους αδιέξοδο. Έτσι λοιπόν στα φύλλα εργασίας συναντήσαμε το μηδέν στη θέση οποιουδήποτε αρνητικού αριθμού, αλλά και δεκαδικούς αριθμούς, όπως το 0,1, το 0,01 και το 0,2. Η επιλογή του μηδενός σχετίζεται ενδεχομένως με τις αντιλήψεις των μαθητών/τριών που διαμορφώνονται σε μικρότερες ηλικίες και τάξεις για τους φυσικούς αριθμούς και την ύπαρξη μικρότερων αριθμών κάτω από το μηδέν και αναφέρονται στη βιβλιογραφία (Vosniadou, Vamvakoussi, & Skopeliti, 2008; Schindler & Hußmann, 2013; Bofferding, 2014).

Εντυπωσιακό είναι ότι οι μαθητές/τριες δεν περιορίστηκαν μόνο στη σωστή συμβολική καταγραφή των αρνητικών, αλλά κατόρθωσαν σε ένα πολύ μεγάλο ποσοστό που κυμάνθηκε από 65% έως 81% σε διαφορετικές Φάσεις της έρευνας, να προχωρήσουν σε σωστούς αριθμητικούς υπολογισμούς, γεγονός που αποδεικνύει μια βαθύτερη κατανόηση και συνέπεια στη χρήση της νέας ομάδας αριθμών με την οποία ήρθαν σε επαφή.

2ο ερευνητικό ερώτημα: Πώς το διδακτικό περιβάλλον «Βήματα» (Steps) ενεργοποιεί τη διαδικασία μάθησης και συμβάλλει στην ανακάλυψη και τον χειρισμό των αρνητικών αριθμών από μαθητές/τριες του Δημοτικού Σχολείου;

Το διδακτικό περιβάλλον «Βήματα» (Steps) στοχεύει στη δημιουργία διακριτών μαθηματικών ιδεών και στη διασύνδεσή τους, προκειμένου να κατασκευαστεί μαθηματική γνώση (Slezáková et al, 2013). Διαπιστώθηκε ότι κέντρισε το ενδιαφέρον και οι μαθητές/τριες, ακόμα και οι γνωστικά αδύναμοι/ες, ανταποκρίθηκαν πρόθυμα και ευχάριστα και συμμετείχαν ενεργά σε όλες τις Φάσεις της έρευνας. Το διδακτικό περιβάλλον έδωσε νόημα στη δραστηριότητα και στους αριθμούς, καθώς ήταν παιγνιώδες, οικείο και καθημερινό, σε αντίθεση με πολλές μαθηματικές δραστηριότητες που συναντούν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Άλλωστε, η εμπλοκή του/της μαθητή/τριας στη διαδικασία της μάθησης είναι απαραίτητο στοιχείο, για να επιτευχθεί ουσιαστική κατανόηση (Van de Walle, 2007).

Αρχικά, με την κινητική δραστηριότητα και τα βήματα μπρος και πίσω, οι μαθητές/τριες αντιλήφθηκαν το σημασιολογικό μοντέλο του αρνητικού αριθμού και το μοντέλο της απόλυτης τιμής ενός αριθμού ανεξάρτητα από την κατεύθυνσή του. Στη συνέχεια χωρίς δυσκολία προσέγγισαν την καταγραφή συνδέοντας την κίνηση με την κατεύθυνση των βελών και χωρίς αναφορά σε διαδικαστικούς κανόνες, σταδιακά ανακάλυψαν τρόπους χειρισμού, συμβολισμού και υπολογισμού θετικών και αρνητικών αριθμών. Επομένως, κατάφεραν να κατακτήσουν την έννοια του αρνητικού αριθμού και κυρίως οι σκέψεις, οι κινήσεις και οι πράξεις τους να έχουν νόημα (Behrend & Mohs, 2006).

Από την ανάλυση των φύλλων εργασίας προέκυψε ότι, κατά τη διάρκεια της ενασχόλησής τους, βελτιώθηκε σημαντικά το ποσοστό σωστών υπολογισμών, από 65% που ήταν αρχικά, έφτασε στο 81% στο τρίτο φύλλο εργασίας. Ενδιαφέρον παρουσιάζει ακόμη η διαπίστωση ότι ορισμένοι/ες μαθητές/τριες, προκειμένου να υπολογίσουν αριθμητικές παραστάσεις με αρνητικούς αριθμούς, προχώρησαν στην ανακάλυψη ή στην προσαρμογή κανόνων και διαδικασιών που γνώριζαν από τους φυσικούς αριθμούς, όπως η αλλαγή σειράς των αριθμών, η χρήση παρενθέσεων και η ομαδοποίηση των αριθμών, στην προκειμένη περίπτωση των θετικών και των αρνητικών.

<u>3ο ερευνητικό ερώτημα:</u> Ποια είναι τα παιδαγωγικά οφέλη από την εισαγωγή των αρνητικών αριθμών στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού;

Σύμφωνα με έρευνες οι μαθητές/τριες αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση των πολλαπλών σημασιών του μείον και στον χειρισμό των αρνητικών αριθμών (Bofferding, 2010; Vlassis, 2004, 2008). Η εισαγωγή τους στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση συχνά συνδέεται με απογοήτευση και άρνηση από την πλευρά των μαθητών/τριών, επειδή καλούνται να αναθεωρήσουν γνώσεις και κανόνες που έχουν εδραιωθεί και συνοδεύεται από απομνημόνευση ακατανόητων κανόνων σε περιορισμένο χρόνο (Bofferding & Richardson, 2013).

Οι υψηλές επιδόσεις των μαθητών/τριών των τελευταίων τάξεων του Δημοτικού μάς επιτρέπει να τους/τις θεωρούμε ικανούς/ες να ανταπεξέλθουν στη νέα ομάδα αριθμών. Χαρακτηριστικά είδαμε ότι κατάφεραν να αναγνωρίσουν, να αποδώσουν συμβολικά ή να επινοήσουν σύμβολα, αλλά ακόμη και να υπολογίσουν, ξεπερνώντας γνωστικά εμπόδια και ανακαλύπτοντας στρατηγικές. Εντύπωση ακόμη προκάλεσε η ενεργή και αποτελεσματική εμπλοκή μαθητών/τριών με δυσκολίες στα μαθηματικά. Ίσως να μην κατόρθωσαν να ανταποκριθούν όσο το σύνολο των μαθητών/τριών, ωστόσο ασχολήθηκαν και έκαναν σημαντικά βήματα στην κατανόηση και τον συμβολισμό. Η αδυναμία τους ήταν πιο εμφανής στους υπολογισμούς, όπου όμως υπάρχει σύνδεση με δυσκολίες που προϋπήρχαν στους φυσικούς αριθμούς.

Το σημαντικότερο είναι ότι η εισαγωγή τους, όχι απλά δεν θα οδηγούσε σε σύγχυση ή σε εννοιολογικά προβλήματα, αλλά θα συνέβαλε σημαντικά στη βαθύτερη κατανόηση και συνοχή σε μαθηματικές ιδέες, όπως η έννοια της πρόσθεσης, ο ρόλος του μηδενός, η μετακίνηση αριστερά στην αριθμογραμμή, ο ρόλος και η σημασία των προσήμων (Bofferding, 2010; Schechter, 2006).

Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι οι μαθητές/τριες των τελευταίων τάξεων του Δημοτικού είναι σε θέση να νοηματοδοτούν και να εκφράζουν συμβολικά τους αρνητικούς αριθμούς. Τα ευρήματα έρχονται να επιβεβαιώσουν εκείνα παλαιότερων ερευνών ότι οι μαθητές/τριες αλληλεπιδρούν καθημερινά με τους αρνητικούς αριθμούς από μικρή ηλικία, έχουν προδιδακτικές διαισθήσεις, πλούσιες παραστάσεις και ιδέες, που είναι ικανοί/ες να τις υποστηρίξουν, να τις μεταφέρουν και να τις αναπτύξουν. Η αποκλειστική όμως ενασχόληση με τους φυσικούς αριθμούς τούς εγκλωβίζει σε διαδικαστικούς κανόνες, δυσχεραίνει την εννοιολογική κατανόηση και συχνά οδηγεί σε παρανοήσεις που οφείλονται στην προκατάληψη του φυσικού αριθμού (Bofferding, 2010; Vlassis, 2004).

Επιπρόσθετα, διαπιστώθηκε ότι η εισαγωγή μιας μαθηματικής έννοιας, ακόμα και απαιτητικής όπως αυτής των αρνητικών αριθμών, μπορεί να επιτευχθεί μέσω κατάλληλου διδακτικού περιβάλλοντος (Behrend & Mohs, 2006; Παπαδόπουλος κ.συν., 2020). Η επιλογή εναλλακτικών μεθόδων, πέρα από των παραδοσιακών, μπορεί να βοηθήσει τη διδασκαλία νέων εννοιών, εξασφαλίζοντας την ενεργή συμμετοχή και παρέχοντας ιδέες, γνώσεις, στρατηγικές και κυρίως κίνητρα στους/στις μαθητές/τριες.

Οι αρνητικοί αριθμοί, σύμφωνα με το νέο Πρόγραμμα Σπουδών έχουν εισαχθεί στην Ε’ Δημοτικού. Ωστόσο, όπως έχει ήδη προαναφερθεί στο θεωρητικό μέρος, πρόκειται για μια εξαιρετικά σύντομη αναφορά που συχνά μάλιστα παραλείπεται από τους εκπαιδευτικούς, για να δοθεί προτεραιότητα σε άλλες ενότητες που έχει επικρατήσει να θεωρούνται σημαντικότερες. Γενικότερα, εκφράζονται επιφυλάξεις για την εισαγωγή των αρνητικών αριθμών στο Δημοτικό, που βασίζονται στο επιχείρημα ότι η ηλικία των μαθητών/τριών δεν ενδείκνυται για τη διαχείριση αφηρημένων εννοιών. Τα ευρήματα ωστόσο της παρούσας έρευνας διαψεύδουν τις παραπάνω επιφυλάξεις και υποστηρίζουν ότι είναι ικανά να αντιληφθούν, να χειριστούν τους αρνητικούς αριθμούς και να ανταπεξέλθουν αποτελεσματικά. Μάλιστα, υποστηρίζεται ότι η έγκαιρη εισαγωγή τους θα συμβάλει θετικά, καθώς θα αφιερωθεί επαρκής χρόνος για ομαλή μετάβαση από τους φυσικούς, διεξοδική ενασχόληση και κατάκτηση της νέας έννοιας (Chrysostomou & Mousoulides, 2010; Lemonidis & Pilianidis, 2020; Lemonidis et al., 2018). Στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση, λόγω έλλειψης χρόνου, η διδασκαλία περιορίζεται στην εκμάθηση διαδικαστικών κανόνων που εξασφαλίζουν την επιτυχή επίλυση πράξεων και προβλημάτων, αλλά η εννοιολογική κατανόηση παραμελείται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μεταξύ άλλων την ανάπτυξη αποστροφής, άρνησης και τον σχηματισμό της εντύπωσης ότι είναι δυσνόητα. Επομένως, μια ουσιαστική ενασχόληση στο Δημοτικό θα έχτιζε γερά θεμέλια για όσα θα διδαχθούν στο Γυμνάσιο, αλλά το σημαντικότερο θα διαμόρφωνε μια θετική διάθεση απέναντι στους αρνητικούς αριθμούς.

Συμπερασματικά, σύμφωνα με τα ευρήματα της έρευνας, που συμφωνούν κατά μεγάλο βαθμό με τα ευρήματα της βιβλιογραφίας και τη συζήτηση που προηγήθηκε, είναι εξαιρετικά σημαντικό να δοθεί προτεραιότητα και βαρύτητα στην εννοιολογική κατανόηση και να εξεταστεί προσεκτικά και διεξοδικά η ουσιαστική εισαγωγή των αρνητικών αριθμών στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού σχολείου.

4.1 Περιορισμοί της έρευνας

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας παρουσίασαν ενδιαφέρον και είναι σύμφωνα με τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών της βιβλιογραφίας. Στο σημείο αυτό κρίνεται αναγκαίο να γίνει αναφορά στους περιορισμούς που αφορούν τη μεθοδολογία και την διεξαγωγή της έρευνας. Αρχικά, είναι σκόπιμο, προκειμένου να ισχυροποιηθούν και γενικευτούν τα αποτελέσματα, να ερευνηθεί περαιτέρω με μεγαλύτερο δείγμα. Ακόμη ένας περιορισμός σχετίζεται με την επιλογή τους δείγματος, δεδομένου ότι η διεξαγωγή της έρευνας δεν πραγματοποιήθηκε με τυχαία επιλογή σχολείου και συμμετεχόντων/ουσών, αλλά με σκόπιμη δειγματοληψία σε σχολικό χώρο που είχε πρόσβαση η ερευνήτρια. Τέλος, η ανάλυση των φύλλων εργασίας στηρίχθηκε, πέρα από τις βιβλιογραφικές αναφορές, στις υποκειμενικές ερμηνείες της ερευνήτριας.

4.2 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Προτείνεται η διεξαγωγή της έρευνας να εμπλουτιστεί με μεγαλύτερο και διευρυμένο δείγμα συμμετεχόντων/ουσών και κυρίως με περισσότερους/ες μαθητές/τριες Δ' τάξης. Το συγκεκριμένο δείγμα αποτελούνταν από μαθητές/τριες ιδιωτικού σχολείου μεγάλης πόλης. Θα είχε ενδιαφέρον το δείγμα να περιελάμβανε παιδιά μη αστικού κέντρου, για να μελετηθεί αν και ποιοι παράγοντες επηρεάζουν και καθορίζουν τα αποτελέσματα. Ακόμη, θα μπορούσε να γίνει έρευνα σχετικά με τον χειρισμό των αρνητικών αριθμών από μαθητές/τριες μικρότερων τάξεων του Δημοτικού σχολείου, ώστε να αναδειχθούν πιο ολοκληρωμένα οι ιδέες και η ανταπόκριση των μαθητών/τριών.

5 Βιβλιογραφία

Alberta Education, Alberta, Canada. (2006). The Common Curriculum Framework for K-9 Mathematics.

ASGHARI, A. (2019). Signed numbers and signed letters in algebra. *For the Learning of Mathematics*, *39*(3), 13-15.

Barton, B., & Neville-Barton, P. (2003, February). Investigating the relationship between English language and mathematical learning. In *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, 28 February-3 March* (pp. 1-10).

Behrend, J. L., & Mohs, L. C. (2006). From simple questions to powerful connections: A two-year conversation about negative numbers. *Teaching Children Mathematics*, *12*(5), 260-264.

Bofferding, L. (2010, October). Addition and subtraction with negatives: Acknowledging the multiple meanings of the minus sign. In *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 6, pp. 703-710).

Bofferding, L. (2014). Negative integer understanding: Characterizing first graders' mental models. *Journal for research in mathematics education*, *45*(2), 194-245.

Bofferding, L., & Richardson, S. E. (2013). Investigating Integer Addition and Subtraction: A Task Analysis. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). *A history of mathematics*. John Wiley & Sons.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Harvard University Press.

Bruno, A., & Martinon, A. (1999). The teaching of numerical extensions: The case of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *30*(6), 789-809.

Chrysostomou, M., & Mousoulides, N. (2010). Pre-service teachers’ knowledge of negative numbers. In *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 265-272). PME.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2008). Methodology of educational research. Athens: Metaihmio.[in Greek].

Common Core State Standard Initiative (2014). Grade 6 - The Number System. Mathematics Standards.

Corte, E. D. (2004). Mainstreams and perspectives in research on learning (mathematics) from instruction. *Applied psychology*, *53*(2), 279-310

Cuoco, A. (2001). *Mathematics for teaching*. American Mathematical Society.

De Lange, J. (1987). Mathematics, insight and meaning. University.

Department for Education (2013) The national curriculum in England: key stages 1 and 2 framework document. Available at: https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-primary-curriculum

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Fischbein, E. (1977). Image and concept in learning mathematics. *Educational studies in mathematics*, 153-165.

Fischer, M. H. (2003). Cognitive representation of negative numbers. *Psychological Science*, *14*(3), 278-282.

Fischer, M. H., & Rottmann, J. (2005). Do negative numbers have a place on the mental number line. *Psychology Science*, *47*(1), 22-32.

Freudenthal, H. (2012). Mathematics as an educational task. Springer Science & Business Media.

Gagatsis, A., & Alexandrou, M. (2022). Una revisione della ricerca sull'insegnamento e l'apprendimento dei numeri negativi: una "ricerca-azione" sull'applicazione del modello geometrico della linea dei numeri A review of the research in teaching and learning the negative numbers: an "action research" concerning the application of the geometrical.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(2), 171-192.

Ganor-Stern, D., & Tzelgov, J. (2008). Negative numbers are generated in the mind. *Experimental Psychology*, *55*(3), 157-163.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (2013). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In *Theories of mathematical learning* (pp. 409-442). Routledge.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. *The roles of representation in school mathematics, 2001*, 1-23.

Gravemeijer, K. P. E. (1994). Developing realistic mathematics education.

Gravemeijer, K., Bowers, J., & Stephan, M. (2003). Chapter 4: A hypothetical learning trajectory on measurement and flexible arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 12, 51-66.

Harel, G. (2019). Commentary on Negative Numbers: Aspects of Epistemology, Cognition, and Instruction. *Constructing Number: Merging Perspectives from Psychology and Mathematics Education*, 329-339.

Hativa, N., & Cohen, D. (1995). Self learning of negative number concepts by lower division elementary students through solving computer-provided numerical problems. *Educational Studies in Mathematics*, *28*(4), 401-431.

Hefendehl-Hebeker, L. (1991). Negative numbers: Obstacles in their evolution from intuitive to intellectual constructs. For the learning of mathematics, 11(1), 26-32.

Janvier, C. E. (1987). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. In This book stems from a symposium organized by CIRADE (Centre Interdisciplinaire de Recherche sur l'' Apprentissage et le Développement en Education) of Université du Que1bec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec à Montréal.. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Kilhamn, C. (2009). The notion of number sense in relation to negative numbers. In *Proceedings of the 33rd conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 329-336).

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press.

Kline, M. (1990). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times: Volume 2* (Vol. 2). Oxford university press.

Lemonidis, C., & Pilianidis, N. (2020). The 8th grade students' competencies in alternating different symbolic representations of rational numbers. International Electronic Journal of Mathematics Education, 15(3), em0587.

Lemonidis, C., Tsakiridou, H., & Meliopoulou, I. (2018). In-service teachers' content and pedagogical content knowledge in mental calculations with rational numbers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *16*, 1127-1145.

Liebeck, P. (1990). Scores and foreits—An intuitive model for integer arithmetic. *Educational Studies in Mathematics*, *21*(3), 221-239.

Linchevski, L., & Williams, J. (1999). Using intuition from everyday life in'filling'the gap in children's extension of their number concept to include the negative numbers. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1-3), 131-147.

Mainali, B. (2021). Representation in Teaching and Learning Mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *9*(1), 1-21.

Mukhopadhyay, S. (1990). Social Sense-making in Mathematics: Children's Ideas of Negative Numbers.

Nuerk, H. C., Iversen, W., & Willmes, K. (2004). Notational modulation of the SNARC and the MARC (linguistic markedness of response codes) effect. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology Section A*, *57*(5), 835-863.

Peled, I., Mukhopadhyay, S., & Resnick, L. B. (1989, July). Formal and informal sources of mental models for negative numbers. In *Proceedings of the 13th international conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 106-110). Paris, France: Conference Committee.

Periasamy, A., & Sivasubramaniam, P. (2018). Pattern Recognition Concept in Learning Negative Numbers Subtraction Operation. *International Research Journal of Education and Sciences*, *2*, 24.

PISA.(2000). Mathematical literacy in PISA Retrieved from: http://www.oecd.org/edu/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/33690591.pdf.

Prather, R. W., & Alibali, M. W. (2008). Understanding and using principles of arithmetic: Operations involving negative numbers. *Cognitive Science*, *32*(2), 445-457.

Resnick, L. B. (1983). Mathematics and science learning: A new conception. *Science*, *220*(4596), 477-478.

Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015). Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review*, *27*, 587-597.

Rubenstein, R. N., & Thompson, D. R. (2002). Understanding and supporting children's mathematical vocabulary development. *Teaching Children Mathematics*, *9*(2), 107-112.

Schechter, E. (2006). The most common errors in undergraduate mathematics. Accessed via http://www. Math. vanderbilt. edu/~ schectex/commerrs/(2 September 2010).

Schindler, M., & Hußmann, S. (2013, February). About students' individual concepts of negative integer—in terms of the order relation. In *Proceedings of the eighth congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 373-382).

Schindler, M., Hußmann, S., Nilsson, P., & Bakker, A. (2017). Sixth-grade students' reasoning on the order relation of integers as influenced by prior experience: an inferentialist analysis. Mathematics Education Research Journal, 29, 471-492.

Schwarz, B. B., Kohn, A. S., & Resnick, L. B. (1994). Positives about negatives: A case study of an intermediate model for signed numbers. *The Journal of the Learning Sciences*, *3*(1), 37-92.

Slezáková, J., Hejný, M., & Kloboučková, J. (2013). Entrance to negative number via two didactical environments. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *93*, 990-994.

Smarter Scotland Scottish Government, HMIe, SQA & LTS (2002). Numeracy and Mathematics - Experiences and Outcomes. Curriculum for Excellence.

Smith, M. K. (2001). History of Negative Numbers. Ανάκτηση από https://web.ma.utexas.edu/users/mks/326K/Negnos.html.

Stanford, P. (2003). Multiple intelligence for every classroom. *Intervention in school and clinic*, *39*(2), 80-85.

Stephan, M., & Akyuz, D. (2012). A proposed instructional theory for integer addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education*, *43*(4), 428-464.

Tzelgov, J., Ganor-Stern, D., & Maymon-Schreiber, K. (2009). The representation of negative numbers: Exploring the effects of mode of processing and notation. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *62*(3), 605-624.

Ural, A. (2016). 7th Grade Students' Understandings of Negative Integer. *Journal of Studies in Education*, *6*(2), 170-179.

Van de Walle, J. A. (2007). *Διδάσκοντας μαθηματικά: για δημοτικό και γυμνάσιο: μια αναπτυξιακή διαδικασία*.

Van Dooren, W., Lehtinen, E., & Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction*, *37*, 1-4.

Varma, S., Blair, K. P., & Schwartz, D. L. (2019). Cognitive science foundations of integer understanding and instruction. *Constructing number: Merging perspectives from psychology and mathematics education*, 307-327.

Vergnaud, G. (1998). Towards a cognitive theory of practice. In Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity: An ICMI Study Book 1 (pp. 227-240). Dordrecht: Springer Netherlands.

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. *Learning and instruction*, *14*(5), 469-484.

Vlassis, J. (2008). The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign. *Philosophical Psychology*, *21*(4), 555-570.

Vosniadou, S., & Brewer, W. F. (1992). Mental models of the earth: A study of conceptual change in childhood. Cognitive psychology, 24(4), 535-585.

Vyawahare, A. W., & Agrawal, R. K. (2008). A history of negative numbers. *Scientia Bruneiana*, 75.

Whitacre, I., Bishop, J. P., Lamb, L. L., Philipp, R. A., Schappelle, B. P., & Lewis, M. L. (2012). Happy and sad thoughts: An exploration of children's integer reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 356-365.

ΙΕΠ. (2021). Νέα Προγράμματα Σπουδών Μαθηματικών. Ανάκτηση 12/10/2023 από: http://iep.edu.gr/el/nea-ps-provoli

Ινστιτούτο, Π. (2011). Μαθηματικά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση: Οδηγός για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων». *Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο*.

Κολέζα, Ε., & Φακούδης, Ε. (2009). Το Πρόβλημα της Επιλογής Πλαισίου για την Εισαγωγή Μαθηματικών Εννοιών. Η Περίπτωση της Πρόσθεσης και Αφαίρεσης Ρητών Αριθμών στα Νέα Σχολικά Εγχειρίδια. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. ΧιονίδουΜοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή, & Γ. Φεσάκης (Επιμ.), Πρακτικά 3ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.): Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές (σσ. 373-382). Ρόδος: ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ.

Λεμονίδης, Χ. (2003). Αριθμητισμός ή Μαθηματικός Γραμματισμός. *Στο Προδιαγραφές Σπουδών για τα Σχολεία Δεύτερης Ευκαιρίας, επιμ. Λ. Βεκρής & Ελ. Χοντολίδου-Αθήνα: ΓΓΕΕ-ΙΔΕΚΕ, σ*, 119-138.

Μπεμπένη, Μ. (2021). Εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τα κλάσματα.

Παπαδόπουλος Ι., Βλάχου Σ., & Κιορίδου Ε. (2020). Αρνητικοί αριθμοί - Συμβολισμός και πράξεις στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, Πρακτικά 8ου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ, Λευκωσία, σ. 93-102.

Πατσιομίτου, Σ., & Εμβαλωτής, Α. (2009). Οι αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων ως μέσο οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης: Τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία. *Θέματα επιστημών και τεχνολογίας στην εκπαίδευση*, *2*(3), 247-272

Τζάνη, Μ., & Κεχαγιάς, Χ. (2005). Μεθοδολογία έρευνας κοινωνικών επιστημών. *Αθήνα: Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών*.

Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, Κύπρος (2010). Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών στα Μαθηματικά. Αναλυτικά Προγράμματα / Δείκτες Επιτυχίας - Επάρκειας. Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (χ.χ.). Curriculum F-10. The Australian Curriculum - Mathematics.

Παράρτημα

Παράρτημα Εικόνων

Παράρτημα Πινάκων

Πίνακας Διαγραμμάτων

Παράρτημα Απαντημένων Φύλλων Εργασίας

Πρώτο Φύλλο Εργασίας – Β’ Φάση

Βρίσκεσαι στην αφετηρία! Ξεκινώντας από τον αριθμό που σου δείχνει προχωράς μπροστά ή πίσω τόσο όσο σου δείχνουν τα βελάκια που συναντάς. Σε κάθε στάση να σημειώνεις το νέο σημείο - αριθμό όπου βρέθηκες.

0	→→→	3	←←	1	→→→	4	←←←	1

0	→→→→→	5	←←←	2	→→→	5	←←←←	1

0	→→→→→	5	→←←	4	←←←	1	→→	3

0	→→	2	←←←	-1	→→	1	←←	-1

0	→→→→	4	←←←	1	←←←←	-3

1	←←	-1	→→→	2	←←	0	←←	-2

2	→→	4	←←←←←	-1	→→	1	←←←	-2

3	→→	5	←←←	2	←	1	←←	-1

0	→→	2	←	1	→→→	4	←←←←←	-1

2	←←←	-1	→→	1	←←	-1	←	-2

Δεύτερο Φύλλο Εργασίας – Δ' Φάση

Βρίσκεσαι στην αφετηρία! Προχωράς μπροστά ή πίσω σύμφωνα με τις οδηγίες που σου δίνουν τα βελάκια. Όταν ολοκληρώσεις τη διαδρομή, σημείωσε το σημείο - αριθμό που έφτασες.

0	→ → →	← ←	← ← ←	→ → → →	= 2

0	← ←	→ → → → →	→	← ← ←	= 1

2	← ← ←	→ → → →	← ← ← ←	←	= −2

4	← ←	→	← ← ← ←	→ →	= 1

5	→→→→→	←→→→	←←←←←	←←	= 5

4	←←←	→→→→→→	→←←←←	←←	= 2

3	←←	→→→→	←←←←←←	→→→←←	= 0

1	←←←	→→→→	←←←←←	→→	= −1

2	→→→	←←←←	←←←	→	= −1

0	→→→→	←←←	→→	←←←←←	= −2

3	←←	→→	←←←←←	←	= −3

0	←←	→→→→→	←←←	←←←	= −3

-1	→→	→→→	←←←←←	←←	= −3

Τρίτο Φύλλο Εργασίας – Ε’ Φάση (Α)

Ξεκινώντας από την αφετηρία, προχωράς σύμφωνα με τις οδηγίες που σου δίνουν τα βελάκια. Όταν ολοκληρώσεις τη διαδρομή, σημείωσε το σημείο - αριθμό που έφτασες. Ταυτόχρονα, καταγράφεις <u>με πράξεις τα βήματα</u> που σε οδήγησαν στο τέλος της διαδρομής, ώστε να μπορεί να την ακολουθήσει και ο/η φίλος/η σου.

2	←←←←	→→→→→	←←	= 1
2−4=−2 // −2+5=3 // 3−2=1				

2	→→→	←←←←	←←	= −1
2+3=5 // 5−4=1 // 1−2=−1				

1	←←←	→→→→	←←←←←	= −3
1−3=−2 / −2+4=2 // 2−5=−3				

3	←←	→→→	←←←←←	= −1
3−2=1 // 1+3=4 // 4−5=−1				

0	→→	←←←←←	→→	= −1
0+2=2 // 2−5=−3 // −3+2=−1				

2	→→→	←←←←	←←←	= −2
2+3=5 / 5−4=1 // 1−3=−2				

3	←←←←	→→	←←←←	= −3
3−4=−1 // −1+2=1 / 1−4=−3				

-2	→→→→→	←←←	←←	= −2
−2+5=3 // 3−3=0 // 0−2=−2				

-3	←←	→→→→→→	←←←	= −2
−3+2=−5 // −5+6=1 / 1−3=−2				

-1	←←←	→→→→	←←←←	= −4
−1−3=−4 / −4+4=0 // 0−4=−4				

Τρίτο Φύλλο Εργασίας – Ε’ Φάση (Β)

Ξεκινώντας από την αφετηρία, προχωράς σύμφωνα με τις οδηγίες που σου δίνουν τα βελάκια. Όταν ολοκληρώσεις τη διαδρομή, σημείωσε το σημείο - αριθμό που έφτασες. Ταυτόχρονα, καταγράφεις με πράξεις τα βήματα που σε οδήγησαν στο τέλος της διαδρομής, ώστε να μπορεί να την ακολουθήσει και ο/η φίλος/η σου.

2	←←←←	→→→→→	←←	= 1
2 − 4 + 5 − 2 = 1				

2	→→→	←←←←	←←	= −1
2 + 3 − 4 − 2 = −1				

1	←←←	→→→→	←←←←←	= −3
1 − 3 + 4 − 5 = −3				

3	←←	→→→	←←←←←	= −1
3 − 2 + 3 − 5 = −1				

0	→→	←←←←←	→→	= −1
0 + 2 − 5 + 2 = −1				

2	→→→	←←←←	←←←	= −2
2 + 3 − 4 − 3 = −2				

3	←←←←	→→	←←←←	= −3
3 − 4 + 2 − 4 = −3				

-2	→→→→→	←←←	←←	= −2
−2 + 5 − 3 − 2 = −2				

-3	←←	→→→→→→	←←←	= −2
−3 − 2 + 6 − 3 = −2				

-1	←←←	→→→→	←←←←	= −4
−1 − 3 + 4 − 4 = −4				

Τέταρτο Φύλλο Εργασίας – Στ’ Φάση

Αφού παρατηρήσεις προσεκτικά τη διαδρομή, μπορείς να συμπληρώσεις τα κενά κουτάκια;

5 →

0	←←←	→→→→→→→	←←	→→→→→	= 7

2	←←←←←	→	←←←←	→→	=-4

1	←←	→→→→→	←←←	←←	= -1

← 5

2	←	→→	←←←←←	→	= -1

← 3

4	←←←←←←	←←←	→→	→	= -2