ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ- ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»
ΚΑΤΕΥΝΘΥΝΣΗ: Α' ΗΛΙΚΙΑΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Διπλωματική εργασία

«Προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές σχέσεις; Διερεύνηση των επιλογών μαθητών του Δημοτικού»

της Στεφανάκου Αικατερίνης (ΑΜ 1031)

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Βαμβακούση Ξανθή, καθηγήτρια – Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Εξεταστές: Δεσλή Δέσποινα, καθηγήτρια – Α.Π.Θ.

Χρήστου Κωνσταντίνος, επίκουρος καθηγητής- Α.Π.Θ.

Φλώρινα, 2023

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου, Ξένια Βαμβακούση για την καθοδήγηση, τον χρόνο της και τις πολύτιμες συμβουλές της. Επίσης, τα μέλη της επιτροπής, κυρία Δέσποινα Δεσλή και κύριο Κωνσταντίνο Χρήστου, για τις πολύ χρήσιμες παρατηρήσεις τους.

Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου που ανέχτηκαν την απουσία μου και με στήριξαν κατά τη διάρκεια συγγραφής αυτής της εργασίας.

Τέλος, να ευχαριστήσω τους μαθητές και τους συναδέλφους μου, με την καλή θέληση των οποίων έγινε ευκολότερη η συλλογή των δεδομένων για την παρούσα έρευνα.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αφορά την προτίμηση των μαθητών ανάμεσα σε πολλαπλασιαστικές και προσθετικές σχέσεις. Έρευνες αναδεικνύουν ότι η προτίμηση μπορεί να συνδέεται με σφάλματα που κάνουν οι μαθητές κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων. Η εργασία αυτή προσφέρει νέα δεδομένα από το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, ενισχύοντας έτσι τη διεθνή έρευνα σε αυτό το πεδίο. Στόχος της είναι να μελετήσει σε ποιο βαθμό μαθητές της Στ' τάξης Δημοτικού προτιμούν προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές σχέσεις όταν έρχονται αντιμέτωποι με ανοιχτού τύπου έργα. Επίσης, στοχεύει να διαπιστώσει αν η προτίμηση αυτή σχετίζεται με σφάλματα στην επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής (προσθετικής ή πολλαπλασιαστικής) που τυχόν κάνουν οι μαθητές όταν λύνουν λεκτικά προβλήματα αναλογίας ή ψευδοαναλογίας (προσθετικά). Το δείγμα της έρευνας αποτελείται από 60 μαθητές της ΣΤ' τάξης δημοτικών σχολείων. Η ερευνητική προσέγγιση είναι ποσοτική, χρησιμοποιώντας ερωτηματολόγια πολλαπλής επιλογής. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι συμμετέχοντες έχουν προτίμηση, η οποία είναι κυρίως προσθετική. Το είδος των λόγων που σχηματίζουν οι αριθμοί (ακέραιοι, μη ακέραιοι λόγοι) επηρεάζει τις επιλογές τους, αλλά αυτό εξαρτάται και από τα χαρακτηριστικά του κάθε έργου. Τέλος, η προτίμηση φαίνεται να επηρεάζει την επίλυση των λεκτικών προβλημάτων. Συγκεκριμένα η προσθετική προτίμηση σχετίζεται με προσθετικά σφάλματα στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα και το αντίθετο, αν και για το δεύτερο δεν υπάρχουν αρκετά στοιχεία.

Λέξεις κλειδιά:

Προσθετική/Πολλαπλασιαστική Προτίμηση, Προσθετικό/Πολλαπλασιαστικό Σφάλμα, Ακέραιοι/μη Ακέραιοι Λόγοι, Ανοιχτά Έργα, Προβλήματα Αναλογίας/Ψευδοαναλογίας

Abstract

This study investigates students' preference between multiplicative and additive relations and its connection to errors made by students when solving word problems. The research provides new insights from the Greek educational system, contributing to the international body of research in this field. Its primary objective is to examine the extent to which sixth-grade students prefer additive or multiplicative relations when faced with open-ended problems. Furthermore, it aims to determine whether this preference correlates with errors in choosing the appropriate strategy (additive or multiplicative) when solving proportional and pseudo-proportional (additive) word problems. The study sample consists of 60 sixth-grade students from primary schools. The research approach is quantitative, and data were collected via multiple-choice questionnaires. The results reveal that the majority of the participants have an additive preference. The type of numbers involved (integer or non-integer ratios) influences their choices, but this also depends on the characteristics of each task. Finally, the preference seems to impact the solving of word problems, specifically, additive preference is associated with additive errors in multiplicative problems and vice versa, although there is insufficient data for the latter.

Keywords:

Additive/Multiplicative Preference, Additive/Multiplicative Error, Integer/Non-Integer Ratios, Open-Ended Problems, Proportional/Pseudo-proportional Word Problems

Περιεχόμενα

Εισαγωγή 7

1.Θεωρητικό πλαίσιο 9

1.1. Ποσοτική σκέψη 9

1.1.1. Προσθετική σκέψη 11

1.1.2. Πολλαπλασιαστική σκέψη 14

1.2. Προσθετικές στρατηγικές σε πολλαπλασιαστικές καταστάσεις και αντίστροφα – Το «προσθετικό» και το «πολλαπλασιαστικό» σφάλμα 17

1.3. Παράγοντες που σχετίζονται με τα προσθετικά ή πολλαπλασιαστικά σφάλματα .. 22

1.3.1. Ηλικία 22

1.3.2. Συνεχείς ή διακριτές ποσότητες 24

1.3.3. Ύπαρξη ακέραιων ή μη ακέραιων λόγων 24

1.3.4. Ικανότητα 25

1.3.5. Το πλαίσιο του προβλήματος 27

1.3.6. Επιφανειακά χαρακτηριστικά 27

1.3.7. Διδακτικοί παράγοντες 28

1.3.8. Κοινωνικοπολιτισμικοί παράγοντες 28

1.3.9. Προτίμηση 29

1.3.10. Λοιποί παράγοντες 30

1.4. Έρευνες για τη προτίμηση ανάμεσα σε προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές σχέσεις 30

1.4.1. Στόχοι των ερευνών για την προτίμηση 31

1.4.2. Έργα για μέτρηση της προτίμησης 32

1.4.3. Ευρήματα ερευνών 36

2. Στόχος της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα 42

3. Μεθοδολογία 42

3.1. Συμμετέχοντες 42

3.2. Μέθοδος 43

3.3. Εργαλείο 43

3.3.1. Τεστ προτίμησης 43

3.3.2. Τεστ λεκτικών προβλημάτων 47

3.4. Διαδικασία 51

3.5. Ανάλυση δεδομένων 52

4. Αποτελέσματα 53

4.1. Τεστ προτίμησης 53

4.1.1. Συνολικές τάσεις στην επιλογή απαντήσεων 53

4.1.2. Κατηγοριοποίηση των μαθητών 56

4.1.3. Εξηγήσεις: Συμβατότητα με την επιλογή απάντησης 57
4.2. Τεστ λεκτικών προβλημάτων 61
4.2.1. Συνολική εικόνα της επίδοσης στο τεστ λεκτικών προβλημάτων.................. 61
4.2.2. Ακέραιοι και μη ακέραιοι λόγοι 62
4.2.3. Κατηγοριοποίηση των μαθητών στο τεστ λεκτικών προβλημάτων 64
4.3. Συσχέτιση τεστ προτίμησης με τεστ λεκτικών προβλημάτων................................ 66
5. Συμπεράσματα – Συζήτηση 73
Βιβλιογραφία 81
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 87

Εισαγωγή

Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός αποτελούν δύο θεμελιώδεις έννοιες για τη μαθηματική εκπαίδευση. Παρά τις εννοιολογικές τους διαφορές, παρουσιάζουν ομοιότητες στο διαδικαστικό επίπεδο, με τον πολλαπλασιασμό να αντιμετωπίζεται συχνά ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και τη διαίρεση ως επαναλαμβανόμενη αφαίρεση (Vergnaud, 1982a; Nunes & Bryant, 2009; Park & Nunes, 2001). Η διάκριση μεταξύ προσθετικών ή πολλαπλασιαστικών καταστάσεων εξαρτάται από το είδος των ποσοτήτων και των μεταξύ τους σχέσεων. Το υποκείμενο που μοντελοποιεί την κατάσταση καλείται να αποφασίσει αν πρόκειται για τη διαφορά ή τον λόγο μεταξύ των ποσοτήτων (Nunes & Bryant, 2009).

Ένα θέμα που έχει αναδειχτεί τα τελευταία χρόνια είναι η προτίμηση που δείχνουν οι μαθητές ανάμεσα σε προσθετικές και πολλαπλασιαστικές σχέσεις, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο αυτή η προτίμηση συνδέεται με την επίδοσή τους στα μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα η προτίμησή έχει προταθεί ως ένας συμπληρωματικός παράγοντας για τα προσθετικά σφάλματα που κάνουν οι μαθητές σε πολλαπλασιαστικά λεκτικά προβλήματα ή αντίστροφα, για πολλαπλασιαστικά σφάλματα σε προσθετικά προβλήματα (Degrande, 2019). Μελετώντας τις προτιμήσεις των μαθητών και τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζουν την επιλογή στρατηγικής κατά την επίλυση προβλημάτων, μπορούμε να αναπτύξουμε αποτελεσματικότερες μεθόδους διδασκαλίας των μαθηματικών. Καθώς η διεθνής έρευνα πάνω στο θέμα είναι περιορισμένη, η εργασία αυτή επιδιώκει να ενισχύσει την έρευνα αυτή με δεδομένα από το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα.

Στόχος της έρευνας είναι να μελετήσει σε ποιο βαθμό μαθητές της Στ’ τάξης Δημοτικού επιλέγουν/προτιμούν προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές σχέσεις όταν έρχονται αντιμέτωποι με ανοιχτού τύπου προβλήματα, στα οποία η εφαρμογή και των δύο τύπων σχέσεων είναι εξίσου σωστή. Ερευνά, ακόμα, την επίδραση του είδους των λόγων που σχηματίζουν οι αριθμοί στην προτίμηση των μαθητών. Επίσης, στοχεύει να διαπιστώσει αν η προτίμηση αυτή σχετίζεται με σφάλματα στην επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής (προσθετικής ή πολλαπλασιαστικής) που τυχόν κάνουν οι μαθητές όταν λύνουν λεκτικά προβλήματα αναλογίας ή μη (ψευδοαναλογικά προσθετικά προβλήματα) που έχουν τη μορφή προσδιορισμού μιας άγνωστης τιμής. Δηλαδή επιδιώκεται να διαπιστωθεί αν οι μαθητές με προτίμηση σε προσθετικές σχέσεις επιλέγουν λανθασμένα προσθετική στρατηγική σε πολλαπλασιαστικά προβλήματα και το αντίθετο.

Στο πρώτο μέρος της εργασίας αυτής γίνεται η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικά με την προσθετική και την πολλαπλασιαστική σκέψη. Επίσης, παρουσιάζονται στοιχεία ερευνών που αναδεικνύουν την συχνότητα εμφάνισης –λανθασμένης- προσθετικής ή πολλαπλασιαστικής στρατηγικής σε καταστάσεις που το κάθε είδος σκέψης δεν είναι κατάλληλο, καθώς και τους παράγοντες που οδηγούν σε αυτά τα «προσθετικά» ή «πολλαπλασιαστικά» σφάλματα. Τέλος, παρουσιάζονται εκτενώς οι έρευνες σχετικά με την προτίμηση που δείχνουν οι μαθητές ανάμεσα σε προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές σχέσεις.

Το δεύτερο μέρος της εργασίας αποτελεί το εμπειρικό κόμματι, όπου παρουσιάζεται η έρευνα που σχεδιάστηκε βάση της βιβλιογραφίας. Αρχικά περιγράφεται η μεθοδολογία και η ανάλυση των αποτελεσμάτων. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα σχετικά με την προτίμηση των μαθητών της Στ’ τάξης Δημοτικού και τον τρόπο που αυτή επηρεάζει την επίλυση προσθετικών και πολλαπλασιαστικών λεκτικών προβλημάτων.

1.Θεωρητικό πλαίσιο

1.1. Ποσοτική σκέψη

Σύμφωνα με τον Thompson (1993) ποσοτική σκέψη (quantitative reasoning) είναι η ανάλυση μιας κατάστασης σε μια ποσοτική δομή, δηλαδή ένα δίκτυο από ποσότητες και ποσοτικές σχέσεις. Ενώ υπάρχουν διάφορα είδη ποσοτικών σχέσεων, στο πλαίσιο της εργασίας αυτής θα γίνει εστίαση σε δύο: στις προσθετικές και στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις.

Ο Vergnaud (1982a, 1982b) μίλησε για εννοιολογικά πεδία (conceptual fields) τα οποία είναι σύνθετα δίκτυα αλληλοσυνδεόμενων εννοιών, σχέσεων, διαδικασιών, αναπαραστάσεων, αλλά και καταστάσεων. Το πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο περιλαμβάνει, για παράδειγμα, τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, τα κλάσματα, τον λόγο, την αναλογία και τη μέτρηση, ενώ το προσθετικό εννοιολογικό πεδίο περιλαμβάνει την πρόσθεση, την αφαίρεση, τους φυσικούς αριθμούς ως πληθικούς αριθμούς και την καταμέτρηση. Υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία καταστάσεων που εντάσσονται σε καθένα από τα δύο αυτά εννοιολογικά πεδία (που αντανακλώνται στα προβλήματα προσθετικής και πολλαπλασιαστικής δομής, αντίστοιχα). Κοινό στοιχείο των καταστάσεων εντός κάθε εννοιολογικού πεδίου είναι ότι διέπονται από πολλαπλασιαστικές και προσθετικές σχέσεις, αντίστοιχα. Τα δύο εννοιολογικά πεδία είναι διακριτά, αλλά όχι ξένα μεταξύ τους. Πράγματι, ο πολλαπλασιασμός και η πρόσθεση μπορεί να διαχωρίζονται εννοιολογικά, αλλά υπάρχουν και συνδέσεις μεταξύ τους σε διαδικαστικό επίπεδο: η πράξη του πολλαπλασιασμού μπορεί να γίνει κατανοητή ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και η πράξη της διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενη αφαίρεση (Vergnaud, 1982a; Nunes & Bryant, 2009; Park & Nunes, 2001). Η ανάπτυξη γνώσεων, διεργασιών σκέψης και δεξιοτήτων σε κάθε πεδίο είναι μια μακροχρόνια διαδικασία και εξαρτάται από τις άτυπες και τυπικές εμπειρίες του υποκειμένου της μάθησης

Ένα χαρακτηριστικό της ποσοτικής σκέψης είναι ότι διακρίνεται σε δύο είδη λογισμού: ο πρώτος αφορά τις σχέσεις και ο δεύτερος αφορά τους αριθμούς. Ο πρώτος περιέχει τις διαδικασίες σκέψης που είναι απαραίτητες για να διαχειριστεί κανείς τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων που εμπλέκονται σε μια κατάσταση, ενώ ο δεύτερος αφορά την έκφρασή τους σε αριθμητικό πλαίσιο που απαιτεί τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης (Vergnaud, 1982a). Σύμφωνα με τον Thompson (1993), η ανίχνευση των ποσοτήτων και των μεταξύ τους σχέσεων είναι πρωτεύουσας σημασίας για την ανάλυση μιας κατάστασης, ενώ οι αριθμοί και οι μεταξύ τους σχέσεις (θα έπρεπε) να έπονται. Οι Nunes και Bryant (2009) συμφωνούν ότι οι σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων μπορούν να τύχουν επεξεργασίας χωρίς απαραίτητα να εκφραστούν αριθμητικά, αλλά τονίζουν ότι και το αντίστροφο είναι πολύ σημαντικό, δηλαδή να μπορεί κανείς να χειριστεί αριθμούς που εκφράζουν σχέσεις χωρίς να αναφέρεται απευθείας στις ποσότητες.

Η ποσοτικοποίηση μιας κατάστασης εξαρτάται από το είδος των ποσοτήτων και των μεταξύ τους σχέσεων που διακρίνει το υποκείμενο που αποπειράται να μοντελοποιήσει την κατάσταση. Μια διάκριση που έχει μελετηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία είναι αυτή μεταξύ των προσθετικών καταστάσεων (όπου οι κατάλληλες σχέσεις είναι προσθετικές) και των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων (όπου οι κατάλληλες σχέσεις είναι πολλαπλασιαστικές). Ας πάρουμε ως παράδειγμα μια κατάσταση στην οποία υπάρχουν 5 μαθητές και 10 βιβλία. Αν το ερώτημα είναι «πόσα περισσότερα βιβλία από μαθητές;», δηλαδή αφορά τη διαφορά ανάμεσα στις ποσότητες, τότε η κατάλληλη σχέση είναι προσθετική. Αν, όμως, το ερώτημα είναι «πόσα βιβλία ανά μαθητή;», δηλαδή αφορά τον λόγο μεταξύ των ποσοτήτων, τότε η κατάλληλη σχέση είναι πολλαπλασιαστική. Τα προβλήματα που προκύπτουν με τα δύο διαφορετικά ερωτήματα απαιτούν από τον λύτη να επεξεργαστεί διαφορετικού τύπου σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων – με άλλα λόγια, να σκεφτεί προσθετικά ή πολλαπλασιαστικά (Nunes & Bryant, 2009). Η προσθετική και η πολλαπλασιαστική σκέψη έχουν πολλές διαφορές όσον αφορά τις καταστάσεις στις οποίες είναι πρόσφορη η ενεργοποίηση της κάθε μιας, ωστόσο έχουν και κοινούς τόπους, γεγονός που συχνά φαίνεται να δημιουργεί προκλήσεις για τη μάθηση και τη διδασκαλία. Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν διαφορετικού τύπου πολλαπλασιαστικές και προσθετικές καταστάσεις που αναδεικνύουν τις διαφορές μεταξύ των εννοιολογικών πεδίων και θα συζητηθούν τα χαρακτηριστικά του κάθε είδους σκέψης ξεχωριστά.

1.1.1. Προσθετική σκέψη

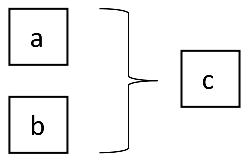
Η προσθετική σκέψη χαρακτηρίζεται από την ικανότητα των μαθητών να κάνουν υποθέσεις σχετικά με ποσότητες χρησιμοποιώντας τη διαισθητική τους γνώση για σχέσεις μέρους-όλου (Nunes et al., 2015). Οι προσθετικές καταστάσεις χαρακτηρίζονται από μια σταθερή σχέση μέρους-όλου όπου το σύνολο ισούται με το άθροισμα των μερών.

Πολλοί ερευνητές (Carpenter & Moser, 1982; Fuson, 1992; Riley, Greeno, & Heller, 1983; Vergnaud, 1982a; Verschaffel & De Corte, 1993) έχουν ταξινομήσει τις προσθετικές καταστάσεις σε διάφορες κατηγορίες σχέσεων και αντίστοιχα σε διαφορετικά είδη προσθετικών λεκτικών προβλημάτων, τα οποία εμφανίζουν μεταξύ τους σημασιολογικές διαφορές (semantic differences) (Riley, Greeno, & Heller, 1983), όμως όλοι συμφωνούν στην ύπαρξη τριών βασικών καταστάσεων: α) ένωση ή σύνθεση, β) σύγκριση, γ) αλλαγή ή μεταβολή.

Ο Vergnaud (1982a, pp. 43-45) δίνει τα παρακάτω παραδείγματα προσθετικών σχέσεων.

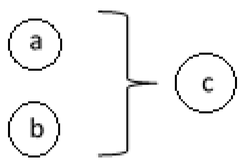
- Ένωση συνόλων και σύνθεση σχέσεων

  Ο Πίτερ έχει 6 βόλους στην δεξιά του τσέπη και 8 στην αριστερή. Συνολικά έχει 14 βόλους. (ένωση συνόλων)



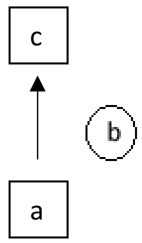
Σχήμα 1: Ένωση συνόλων

Ο Πίτερ χρωστάει 8 βόλους στον Χένρυ, αλλά ο Χένρυ χρωστάει 6 στον Πίτερ. Άρα, ο Πίτερ χρωστάει 2 στον Χένρυ. (σύνθεση σχέσεων)



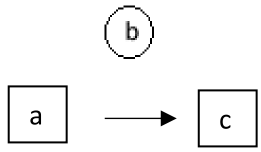
Σχήμα 2: Σύνθεση σχέσεων

- Σύγκριση συνόλων
  Ο Πίτερ έχει 8 βόλους. Έχει 5 περισσότερους από τον Τζον. Άρα, ο Τζον έχει 3.



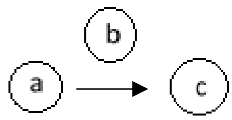
Σχήμα 3: Σύγκριση συνόλων

- Μετασχηματισμός συνόλων, μετασχηματισμός σχέσης
  Ο Πίτερ είχε 17 βόλους πριν παίξει. Έχασε 4. Τώρα έχει 13. (μετασχηματισμός συνόλου)



Σχήμα 4: Μετασχηματισμός συνόλων

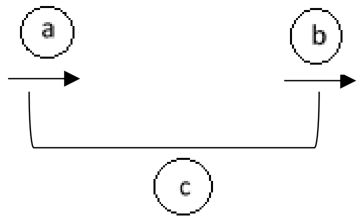
Ο Πίτερ χρωστάει 6 βόλους στον Χένρυ. Του δίνει 4. Του χρωστάει ακόμα 2. (μετασχηματισμός σχέσης)



Σχήμα 5: Μετασχηματισμός σχέσης

Μία ακόμα σύνθετη περίπτωση που διακρίνει ο Vergnaud (1982a, p. 44) είναι η σύνθεση μετασχηματισμών:

Ο Πίτερ κέρδισε 6 βόλους το πρωί. Έχασε 9 το απόγευμα. Συνολικά έχασε 3.



Σχήμα 6: Σύνθεση μετασχηματισμών

Είναι φανερό ότι οι προσθετικές καταστάσεις μπορεί να είναι στατικές, δηλαδή οι ποσότητες να μην μεταβάλλονται, ή δυναμικές, όταν υπάρχει κάποιου είδους μεταβολή στις ποσότητες (Fuson, 1992; Carpenter & Moser, 1982; Riley, Greeno, & Heller, 1983; Vergnaud, 1982a). Στατικές καταστάσεις είναι η ένωση και η σύγκριση. Δυναμικές καταστάσεις είναι οι μετασχηματισμοί.

Καθώς σε κάθε απλό λεκτικό προσθετικό πρόβλημα, όπως φαίνεται από τα σχεδιαγράμματα του Vergnaud (1982a) που παρουσιάστηκαν παραπάνω, εμπλέκονται τρεις ποσότητες, καθεμιά από τις οποίες μπορεί να είναι η άγνωστη, αλλά και επειδή η κατεύθυνση της μεταβολής (δηλαδή αν πρόκειται για πρόσθεση ή αφαίρεση) μπορεί να διαφέρει, δημιουργούνται υπότυποι προβλημάτων για κάθε κατηγορία (Riley, Greeno, & Heller, 1983; Verschaffel & De Corte, 1993). Μάλιστα οι Verschaffel & De Corte (1993) διαπιστώνουν την ύπαρξη 14 υποκατηγοριών προσθετικών λεκτικών προβλημάτων.

Οι μελέτες έχουν δείξει ποιες κατηγορίες προβλημάτων είναι ευκολότερες ή δυσκολότερες για τους μαθητές (Thompson, 1993; Nunes et al., 2015; Nunes & Bryant, 2009; Vergnaud, 1982a). Συμφωνούν στο ότι, στα απλά λεκτικά προβλήματα, που λύνονται με μια πράξη, μεγαλύτερη δυσκολία παρουσιάζουν οι μαθητές στα προβλήματα σύγκρισης, μικρότερη δυσκολία στα προβλήματα ένωσης ενώ πιο εύκολα είναι τα προβλήματα -μεταβολής. Γενικά, όμως, τα προβλήματα στα οποία οι μαθητές έχουν να χειριστούν ποσότητες είναι πιο εύκολα από αυτά στα οποία πρέπει να χειριστούν σχέσεις χωρίς να γνωρίζουν τις ποσότητες (Thompson, 1993; Vergnaud, 1982a; Nunes & Bryant, 2009; Nunes et al., 2015).

Εκτός από τα λεκτικά προβλήματα τα οποία λύνονται με μια πράξη (one-step additive), υπάρχουν και προβλήματα που προκύπτουν από συνδυασμούς των κατηγοριών που αναφέρθηκαν νωρίτερα (multi-step additive). Τα προβλήματα αυτά όταν περιέχουν πολλές σχέσεις, και όχι απλώς πολλούς υπολογισμούς, παρουσιάζουν ιδιαίτερη δυσκολία (Thompson, 1993; Nunes & Bryant, 2009) . Δηλαδή, αν χρειαστεί κανείς να υπολογίσει συνολικά τα χρήματα που έχουν δέκα παιδιά, οι πράξεις που πρέπει να κάνει είναι 9 αλλά η κατάσταση δεν είναι πολύπλοκη. Αντίθετα, πολύπλοκη κατάσταση μπορεί να είναι η εξής: «Τρία παιδιά, ο Τζιμ, ο Μπομπ και η Σίρι συγκρίνουν τις οικονομίες τους. Ο Τζιμ έχει $15 περισσότερα από τον Μπομπ και η

Σίρι τρεις φορές αυτά που είχε ο Τζιμ. Πόσα περισσότερα χρήματα από τον Τζιμ είχε η Σίρι;» (Thompson, 1993, p. 169). Η δυσκολία του παραπάνω προβλήματος αυξάνεται και από το γεγονός ότι δεν αναφέρεται πάντα στην ίδια ποσότητα, για παράδειγμα στα χρήματα του Μπομπ, αλλά περιέχει σχέσεις μεταξύ διαφορετικών ποσοτήτων (Nunes & Bryant, 2015).

1.1.2. Πολλαπλασιαστική σκέψη

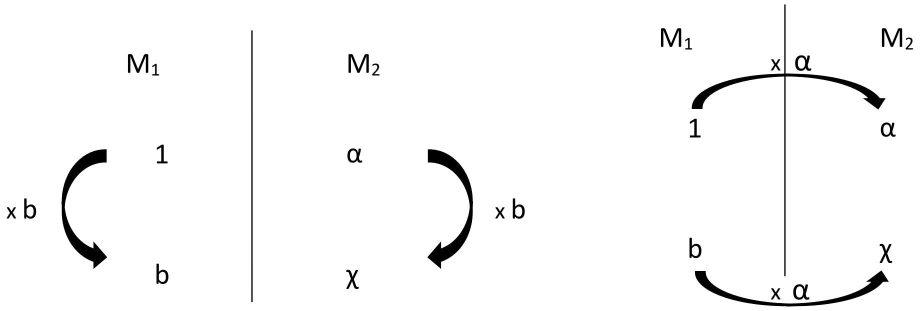
Για τις βάσεις της πολλαπλασιαστικής σκέψης έχουν διαμορφωθεί διαφορετικές τάσεις. Σύμφωνα με τους Fischbein et al. (1985) το διαισθητικό μοντέλο για τον πολλαπλασιασμό είναι η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Αργότερα ο Steffe (1994) διαφοροποιείται μερικώς από αυτή την άποψη εισάγοντας τον όρο της *σύνθετης μονάδας (composite unit)*, την οποία οι μαθητές επαναλαμβάνουν προσθετικά.
Άλλοι ερευνητές (Piaget, 1952; Vergnaud, 1983; Park & Nunes, 2001; Nunes & Bryant, 2015) διαφοροποιούνται από τον Fischbein ως προς το ότι η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση δεν ανήκει στην πραγματικότητα στην «αυθεντική» πολλαπλασιαστική σκέψη, της οποίας βάση είναι η ένα προς πολλά αντιστοιχία και η αναγνώριση της ύπαρξης μιας σταθερής σχέσης μεταξύ δύο ποσοτήτων. Η σταθερή αυτή σχέση, ο λόγος, είναι το κεντρικό νόημα της έννοιας του πολλαπλασιασμού και συμβολίζεται μαθηματικά ως x=f(y). Υπάρχει δηλαδή ένα *σχήμα αντιστοιχίας (schema of correspondance)* (Park & Nunes, 2001). Ο Piaget (1952) και οι Nunes και Bryant (2010) υποστηρίζουν ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν την ένα προς πολλά αντιστοιχία πριν διδαχτούν τον πολλαπλασιασμό, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι κατανοούν πλήρως την έννοια του λόγου. Οι Clark & Kamii (1996) συμφωνούν, καθώς βρίσκουν ότι η πολλαπλασιαστική σκέψη εμφανίζεται νωρίς (στο 45% των μαθητών της Β' τάξης) αλλά εξελίσσεται πολύ αργά.

Οι Siemon et al. (2005) αναφέρουν ότι η πολλαπλασιαστική σκέψη χαρακτηρίζεται από την ικανότητα να εργάζεται κανείς ευέλικτα και αποτελεσματικά με ένα εύρος αριθμών (μεγάλους ακέραιους, δεκαδικούς, κλάσματα, λόγους, ποσοστά), την ικανότητα αναγνώρισης και επίλυσης μιας σειράς προβλημάτων που περιλαμβάνουν πολλαπλασιασμό ή διαίρεση (συμπεριλαμβανομένων των ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών) τα μέσα για την αποτελεσματική επικοινωνία των παραπάνω με διάφορους τρόπους (λέξεις, διαγράμματα, συμβολικές εκφράσεις και γραπτούς αλγόριθμους). Συνεχίζουν λέγοντας ότι η πολλαπλασιαστική σκέψη είναι η ικανότητα να μπορεί κανείς να εργαστεί ευέλικτα με έννοιες, στρατηγικές και αναπαραστάσεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης σε ένα πλήθος από πλαίσια.

Η χρήση πολλαπλασιαστικής σκέψης ή αναλογικής σκέψης (όπου υπάρχει η ισότητα δύο λόγων α/β=γ/δ), και η εφαρμογή των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, απαιτείται σε πλήθος καταστάσεων της καθημερινής ζωής, στις επιστήμες και στο σχολείο και μπορεί να δυσκολέψει τους μαθητές (Tourniaire & Pulos,1985). Σύμφωνα με τον Greer (1992) μοντέλα τέτοιων καταστάσεων είναι η ύπαρξη ισοπληθών ομάδων ή ίσων μέτρων (π.χ. 3 παιδιά έχουν από 4 πορτοκάλια ή τρία παιδιά έχουν από 4,2 λίτρα χυμό), καταστάσεις που εμπλέκουν λόγους ετεροειδών ποσοτήτων (rate, π.χ. χμ/ώρα), η πολλαπλασιαστική σύγκριση (π.χ. x φορές πιο βαρύ), η πολλαπλασιαστική μεταβολή (π.χ. τριπλάσιο), η μετατροπή μονάδων μέτρησης, σχέσεις μέρους-όλου (π.χ. τα 3/5 ενός συνόλου μαθητών), το εμβαδό ορθογωνίου, το γινόμενο μεγεθών (π.χ. 3,3 kW σε 4,2 ώρες, άρα πόσα kW/ώρα;). Η Hart (1981) αναφέρεται πιο συνοπτικά στις παραπάνω περιπτώσεις αλλά χαρακτηρίζει ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση την περίπτωση των ισοπληθών ομάδων.

Ο Vergnaud (1983, pp. 129-140) μιλά για το εννοιολογικό πεδίο του πολλαπλασιασμού και διακρίνει τις εξής περιπτώσεις καταστάσεων:

- Ισομορφισμός των μέτρων (isomorphism of measures) με τις τέσσερις υποκατηγορίες του:
    α. Πολλαπλασιασμός: Πρόκειται για μια σχέση τεσσάρων μερών (η μία τιμή είναι το 1) από την οποία οι μαθητές εξάγουν μια σχέση τριών μερών. Οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις σχέσεις μεταξύ των ομοειδών ποσοτήτων (εντός του ίδιου μετρικού χώρου ή, αλλιώς, βαθμωτές [scalar]) ή τις σχέσεις μεταξύ των ετεροειδών ποσοτήτων (μεταξύ των μετρικών χώρων, αλλιώς, συναρτησιακές [functional]).



Σχήμα 7: Σχέσεις εντός και εκτός (Vergnaud, 1983, p. 130)

β. Πρώτος τύπος διαίρεσης: Αναφέρεται στη διαίρεση μερισμού, π.χ. «Η Κ. μοιράζεται τις καραμέλες της με τη Τ. και τη Σ. Η μητέρα τους έδωσε 12 καραμέλες. Πόσες θα πάρει η καθεμιά;»

γ. Δεύτερος τύπος διαίρεσης: Αναφέρεται στη διαίρεση μέτρησης, π.χ. «Ο Π. έχει 15 € και θέλει να αγοράσει αυτοκινητάκια που το καθένα κοστίζει 3 €. Πόσα μπορεί να αγοράσει;»

δ. Κανόνας των τριών: Σε αντίθεση με την πρώτη περίπτωση του πολλαπλασιασμού, εδώ καμία τιμή δεν είναι η μονάδα, π.χ. «Η κατανάλωση του αυτοκινήτου είναι 7,5 λίτρα ανά 100 χμ. Πόσα λίτρα χρειάζονται για να καλυφθούν 6580 χμ.;»

- Γινόμενο μέτρων (product of measures):

  Πρόκειται για το καρτεσιανό γινόμενο δύο μετρικών χώρων, που έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός τρίτου μετρικού χώρου (για παράδειγμα πλάτος x μήκος, που δημιουργεί την επιφάνεια ή αγόρια και κορίτσια σχηματίζουν ζεύγη).

- Πολλαπλή αναλογία (multiple proportion)

  Πολλαπλή αναλογία υπάρχει όταν οι ποσότητες από έναν μετρικό χώρο συσχετίζονται με τις ποσότητές από παραπάνω από έναν διαφορετικούς μετρικούς χώρους π.χ. κατανάλωση δημητριακών/πλήθος κατασκηνωτών/πλήθος ημερών.

Τα πολλαπλασιαστικά λεκτικά προβλήματα διακρίνονται σε αυτά που λύνονται με μια πράξη (one-step multiplicative word problems) και σε αυτά που αφορούν σχέσεις μεταξύ λόγων, και απαιτούν δύο πράξεις (two-step multiplicative word problems), δηλαδή τα προβλήματα αναλογίας (Verschaffel et al, 2007; Degrande, 2019; Tourniaire & Pulos,1985). Τα προβλήματα που λύνονται με μια πράξη είναι οι απλές περιπτώσεις ισομορφισμού των μέτρων, στις οποίες η μια από τις τέσσερις ποσότητες που εμπλέκονται είναι η μονάδα (βλ. παραπάνω Vergnaud, 1983). Τα προβλήματα αναλογίας, στα οποία καμία ποσότητα δεν είναι η μονάδα (η περίπτωση όπου έχει ουσιαστική εφαρμογή η «απλή μέθοδος των τριών»), είναι δυσκολότερα καθώς αφορούν σχέσεις μεταξύ δύο σχέσεων (Piaget & Inhelder, 1975).

Οι συχνότερες περιπτώσεις προβλημάτων αναλογίας σύμφωνα με τους Tourniaire και Pulos (1985) είναι τα προβλήματα προσδιορισμού μιας άγνωστης τιμής (missing value problems) και τα προβλήματα σύγκρισης (comparison problems). Στα πρώτα παρουσιάζονται τρεις αριθμοί α,β,γ και πρέπει να βρεθεί ο άγνωστος χ έτσι ώστε α/β=γ/χ. Δηλαδή, όπως περιγράφουν οι Kaput και West (1994), δίνεται ένας λόγος, είτε έμμεσα είτε ξεκάθαρα, και η τιμή ενός όρου του δεύτερου ισοδύναμου λόγου με στόχο να βρεθεί η τιμή του όρου που λείπει. Στα προβλήματα σύγκρισης δίνονται τέσσερις αριθμοί α,β,γ,δ και πρέπει να διαπιστωθεί αν σχηματίζουν ή όχι αναλογία και ποιος λόγος είναι μεγαλύτερος, για παράδειγμα να βρεθεί αν δύο μείγματα χυμού (μέρη χυμού προς μέρη νερού) θα έχουν την ίδια γεύση. Ακόμα μια περίπτωση που αναφέρεται από τους Lesh, Post και Behr (1988) είναι τα προβλήματα σύγκρισης και ποιοτικής πρόβλεψης, τα οποία δε στηρίζονται σε συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές, για παράδειγμα «Αν η Σ. σήμερα αναμείξει λιγότερη σοκολάτα και περισσότερο γάλα απ'ότι έκανε χθες, το γάλα θα έχει περισσότερο σοκολατένια γεύση, λιγότερο ή το ίδιο;» (Fernandez, Llinares & Valls, 2008, p. 3).

1.2. Προσθετικές στρατηγικές σε πολλαπλασιαστικές καταστάσεις και αντίστροφα – Το «προσθετικό» και το «πολλαπλασιαστικό» σφάλμα

Πολυάριθμες έρευνες έχουν γίνει σχετικά με την πολλαπλασιαστική σκέψη των μαθητών, τις στρατηγικές που επιλέγουν και τα λάθη που κάνουν κατά την επίλυση προβλημάτων (Lamon, 1993, Karplus et al., 1983; Hart, 1981; Kaput & West, 1994; Lesh et al., 1988; Noelting, 1980). Ως σωστές στρατηγικές κατά την επίλυση προβλημάτων αναλογίας έχουν αναδειχτεί η χρήση των σχέσεων εντός και μεταξύ των μετρικών χώρων (βαθμωτές ή συναρτησιακές, αντίστοιχα), η αναγωγή στη μονάδα, η απλή μέθοδος των τριών, η χρήση ισοδύναμων κλασμάτων και τα χιαστί γινόμενα

(Vergnaud, 1983; Tourniaire & Pulos, 1985; Christou & Philippou, 2002). Στα αναλογικά προβλήματα προσδιορισμού μιας άγνωστης τιμής, η πιο συνηθισμένη προσέγγιση είναι η χρήση σχέσεων εντός του ίδιου μετρικού χώρου (δηλαδή, μεταξύ των ομοειδών ποσοτήτων) , ενώ λιγότερο συχνή είναι η χρήση των σχέσεων μεταξύ των μετρικών χώρων (δηλαδή, μεταξύ των ετεροειδών ποσοτήτων) (Van Dooren et al., 2008). Η πιο στοιχειώδης μέθοδος (και αυτή που χρησιμοποιούν πρώτα τα παιδιά, ακόμα και χωρίς διδασκαλία) είναι αυτή που αποκαλεί ο Vergnaud (1983) «βαθμωτή ανάλυση» (scalar decomposition) ή όπως πιο ευρέως αναφέρεται ως «build-up» προσέγγιση (Kaput & West, 1994), κατά την οποία ο μαθητής συνθέτει το γινόμενο προσθετικά. Ένα παράδειγμα από τους Tourniaire & Pulos (1985, p. 184) είναι το εξής: «2 καραμέλες κοστίζουν 8 λεπτά. Πόσο κοστίζουν οι 6 καραμέλες;». Ο μαθητής σκέφτεται ότι αφού οι 2 κοστίζουν 8 λεπτά, οι 4 κοστίζουν ακόμα 8, δηλαδή 8+8=16 και οι 6 κοστίζουν άλλα 8 δηλαδή 16+8=24. Παρόλο που η στρατηγική αυτή γίνεται από πολλούς αποδεκτή ως πολλαπλασιαστική (ενδεικτικά Vergnaud, 1983; Tourniaire & Pulos, 1985, Degrande, 2019) η Lamon (2008) αναφέρει ότι δεν είναι επαρκής για την αναλογική σκέψη. Επίσης, η Hart (1981) λέει πως οι περισσότεροι μαθητές, χρησιμοποιώντας την στρατηγική αυτή, δεν προχωρούν συνήθως περισσότερο από το διπλάσιο ή το μισό καθώς και ότι, αν τυχόν κατά την εφαρμογή της περισσέψει στους μαθητές κάποιο υπόλοιπο, το οποίο δεν ξέρουν πώς να το διαχειριστούν, καταφεύγουν σε λανθασμένες στρατηγικές.

Λανθασμένες στρατηγικές που έχουν παρατηρηθεί κατά τη βιβλιογραφία (Vergnaud, 1983; Tourniaire & Pulos, 1985) είναι είτε η χρήση στρατηγικής που δεν ταιριάζει στην κατάσταση, είτε η χρήση σωστής στρατηγικής αλλά με λανθασμένο τρόπο. Στην πρώτη περίπτωση ανήκει η χρήση της προσθετικής στρατηγικής, δηλαδή η εφαρμογή της σταθερής διαφοράς μεταξύ δύο ποσοτήτων αντί για τη χρήση του σταθερού λόγου (αφορά τις σχέσεις εντός, εκτός ή συνδυασμό και των δύο), ή η χρήση πρόσθεσης για να διαχειριστεί κανείς το υπόλοιπο ενός μη ακέραιου λόγου, αφού έχει εφαρμόσει αρχικά πολλαπλασιαστική στρατηγική. Στην δεύτερη περίπτωση, δηλαδή τη χρήση σωστής στρατηγικής αλλά με λανθασμένο τρόπο, ανήκουν λάθη που γίνονται κατά την αναγωγή στην μονάδα, όπως όταν οι μαθητές αποδίδουν τυχαία αξία στη μονάδα ή όταν χρησιμοποιούν την τιμή με την οποία ξεκινά το πρόβλημα ως αξία της μονάδας (Tourniaire & Pulos, 1985). Επίσης, λάθη γίνονται λόγω της αντιστροφής του λόγου ή της χρήσης λανθασμένων γινομένων και πηλίκων, τα οποία δεν βγάζουν νόημα (Vergnaud, 1983).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον, για την παρούσα εργασία, παρουσιάζει η πολύ συχνή εμφάνιση της λανθασμένης χρήσης προσθετικής στρατηγικής σε πολλαπλασιαστικά/αναλογικά προβλήματα. Το προσθετικό σφάλμα, το οποίο αφορά τη χρήση της διαφοράς α-β μεταξύ δύο ποσοτήτων αντί του λόγου α/β (Nunes & Bryant, 2009; Vergnaud, 1983; Tourniaire & Pulos, 1985) εμφανίζεται σε σημαντικό ποσοστό των μαθητών που συμμετείχαν σε έρευνες με πολλαπλασιαστικά προβλήματα (Lamon, 1993, Karplus et al., 1983; Hart, 1981; Kaput & West, 1994; Lesh et al., 1988; Noelting, 1980; Misailidou and Williams, 2003; Van Dooren et al., 2010; Fernandez et al., 2012). Σε προβλήματα αναλογίας, αντί να υπολογιστεί ο λόγος μεταξύ δύο ποσοτήτων, υπολογίζεται η διαφορά μεταξύ των ομοειδών ποσοτήτων και έπειτα η διαφορά αυτή μεταφέρεται στις άλλες ποσότητες. Αυτού του είδους το λάθος είναι πιο συχνό στις μικρότερες τάξεις και ελαττώνεται προς το τέλος του δημοτικού και καθώς περνάνε οι μαθητές στη δευτεροβάθμια (Van Dooren et al., 2010; Fernandez et al., 2012). Για παράδειγμα, στο πρόβλημα των Kaput & West (1994), το οποίο έλεγε ότι 7 τεμάχια μαχαιροπίρουνα αντιστοιχούν σε 4 πιάτα και ζητούσε να βρεθεί σε πόσα πιάτα αντιστοιχούν τα 35 μαχαιροπίρουνα, φαίνεται ξεκάθαρα το προσθετικό σφάλμα: οι μαθητές που σκέφτηκαν ότι 35-7=28 επιπλέον μαχαιροπίρουνα άρα 4+28=32 πιάτα, υπολογίζουν τη σταθερή διαφορά μεταξύ των δύο ποσοτήτων και την εφαρμόζουν στην τρίτη, αντί να σκεφτούν ότι αφού πενταπλασιάζονται τα μαχαιροπίρουνα, θα πενταπλασιαστούν και τα πιάτα.

Άλλα προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν σε έρευνες, ενδεικτικά, είναι τα προβλήματα με μείγματα των Noelting (1980) και των Karplus et al. (1983) στα οποία οι μαθητές καλούνταν να διαπιστώσουν αν ένα μείγμα χυμού (κουταλιές ζάχαρης/κουταλιές λεμονιού ή μέρη χυμού πορτοκαλιού/μέρη νερού) θα είχε την ίδια γεύση με ένα άλλο ή έπρεπε οι ίδιοι να κατασκευάσουν ένα όμοιο μείγμα με το πρώτο. Ακόμα ένας τύπος προβλήματος που αναφέρει η Hart (1981) και αρχικά χρησιμοποιήθηκε από τον Karplus και Peterson (1970) είναι η περίπτωση του «κυρίου Κοντού» και του «κυρίου Ψηλού» των οποίων το ύψος μετριέται με διάφορα αντικείμενα. Συγκεκριμένα δίνει το ύψος και των δύο μετρημένων με σπίρτα, δίνει το ύψος του ενός μετρημένο με συνδετήρες και ρωτά ποιο θα είναι το ύψος του δεύτερου μετρημένο επίσης με συνδετήρες. Οι Lesh et al. (1988) αναφέρουν ως παράδειγμα την περίπτωση μεγέθυνσης ενός ορθογωνίου 2x3 στην οποία, ενώ ένας μαθητής ξεκίνησε να διπλασιάζει τις πλευρές κάνοντάς τις 4x6, όταν του ζητήθηκε να κάνει τη μία πλευρά 9 εκατοστά, αυτός πρόσθεσε 3 σε κάθε πλευρά ζωγραφίζοντας ένα ορθογώνιο 7x9.

Ενώ παλαιότερες έρευνες είχαν επικεντρωθεί στη λανθασμένη προσθετική στρατηγική που προκύπτει όταν λύνουν οι μαθητές πολλαπλασιαστικά προβλήματα, νεότερες έρευνες δείχνουν και το αντίθετο, το πολλαπλασιαστικό σφάλμα, δηλαδή τη λανθασμένη χρήση πολλαπλασιαστικών/αναλογικών στρατηγικών σε καταστάσεις που δεν είναι κατάλληλες (Van Dooren et al. 2003, 2005, 2008, 2009; Van Dooren, De Bock, Verschaffel et al., 2010; Van Dooren, De Bock, Vleugels et al., 2010; Fernandez et al., 2008, 2011, 2012; Atabas & Oner, 2017; Modestou & Gagatsis, 2007; De Bock et al., 2002). Οι Van Dooren et al. (2005, 2008, 2009, 2010a, 2010b) έκαναν σειρά ερευνών στο Βέλγιο κατά τις οποίες έδωσαν σε μαθητές δημοτικού να λύσουν προβλήματα προσδιορισμού μιας άγνωστης τιμής (missing value), κάποια από τα οποία ήταν προβλήματα αναλογίας (π.χ. 4 πακέτα μολύβια κοστίζουν 8€, πόσο κοστίζουν τα 24 πακέτα) και κάποια μη αναλογικά. Οι τύποι μη αναλογικών προβλημάτων που δόθηκαν ήταν τρεις:

α) τα προσθετικά προβλήματα, όπου έπρεπε να υπολογιστεί η σταθερή διαφορά μεταξύ δύο ποσών. Για παράδειγμα «Η Ε. και ο Κ. τρέχουν σε έναν στίβο. Τρέχουν το ίδιο γρήγορα αλλά η Ε. ξεκίνησε αργότερα. Όταν η Ε. έχει τρέξει 5 γύρους, ο Κ. έχει τρέξει 15 γύρους. Όταν η Ε. έχει τρέξει 30 γύρους, πόσους γύρους έχει τρέξει ο Κ.;» (Cramer, Post & Currier, 1993 p. 159; Van Dooren et al., 2005, p. 11)

β) τα σταθερά προβλήματα (constant) στα οποία δεν χρειάζεται κάποιος υπολογισμός (Fernandez, Llinares & Valls, 2008), για παράδειγμα «3 πετσέτες στέγνωσαν σε 20 λεπτά. 6 ίδιες πετσέτες πόσο χρόνο χρειάζονται για να στεγνώσουν;» (Van Dooren et al., 2005)

γ) τα προβλήματα της μορφής $f(x)= αx+β$ (linear ή affine), τα οποία διαχωρίζονται από την μορφή $f(x)=αx$, που είναι τα αναλογικά προβλήματα. Ένα παράδειγμα τέτοιας μορφής είναι το εξής: «Δύο τραπέζια ενωμένα στη σειρά χωράνε 10 καρέκλες γύρω τους (1 σε κάθε άκρη και από 4 στο πλάι). Έξι τραπέζια στη σειρά, πόσες καρέκλες θα χωράνε;» (Van Dooren et al., 2005, p. 65).

Οι παραπάνω κατηγορίες προβλημάτων χαρακτηρίζονται ως «ψευδοαναλογικά», δηλαδή προβλήματα που έχουν την ίδια γλωσσική δομή με ένα πρόβλημα αναλογίας αλλά δεν περιλαμβάνουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών τους (Modestou & Gagatsis, 2007). Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι οι Van Dooren et al. (2008) αποκαλούν «ψευδοαναλογικά» τα προβλήματα τα οποία δεν μπορούν να λυθούν με τα στοιχεία που δίνονται, π.χ. «Ο καλύτερος χρόνος που έκανε ένας δρομέας στα 100 μέτρα ήταν 17 δευτερόλεπτα. Πόσο χρόνο θα του πάρει για να τρέξει ένα χιλιόμετρο;» (Van Dooren et al., 2005, p. 59). Τα προβλήματα των παραπάνω κατηγοριών τα αποκαλούν «μη αναλογικά λεκτικά προβλήματα».

Παρατηρήθηκε ότι σημαντικό ποσοστό μαθητών χρησιμοποιεί πολλαπλασιαστικές/αναλογικές μεθόδους στα μη αναλογικά προβλήματα από πολύ μικρή ηλικία, μόλις από τη Β΄τάξη δημοτικού, ενώ το ποσοστό αυτό ανέβαινε σταθερά μέχρι την Ε' τάξη. Από εκεί και πέρα το πολλαπλασιαστικό σφάλμα μειωνόταν αλλά συνέχιζε να γίνεται (Van Dooren et al., 2005, 2009). Οι Atabas & Oner (2017) κάνοντας παρεμφερή έρευνα στην Τουρκία βρήκαν παρόμοια αποτελέσματα με τη διαφορά ότι το πολλαπλασιαστικό σφάλμα ήταν πιο έντονο στη ΣΤ' τάξη. Έρευνες στην Ισπανία που περιλαμβάνουν και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Fernandez, Llinares & Valls, 2008; Fernandez et al., 2011, 2012) δείχνουν ότι το φαινόμενο είναι ιδιαίτερα έντονο και μετά το δημοτικό.

Άλλες έρευνες χρησιμοποίησαν προβλήματα μήκους, εμβαδού και όγκου στην πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Modestou & Gagatsis,2007; De Bock, Verschaffel & Janssens, 2002; Van Dooren, De Bock, Veschaffel et al., 2003) δείχνοντας ότι και σε αυτές τις περιπτώσεις οι μαθητές υπεργενικεύουν τη χρήση αναλογικών στρατηγικών σε περιπτώσεις που δεν είναι κατάλληλες. Για παράδειγμα, όταν ζητούνταν η μεγέθυνση μιας φιγούρας ώστε το ύψος της να είναι τριπλάσιο του αρχικού και οι μαθητές ρωτούνταν για την ποσότητα της μπογιάς που θα χρειαστεί για να ζωγραφιστεί η μεγάλη φιγούρα, οι περισσότεροι, ακόμα και στην ηλικία των 16 χρόνων, απαντούσαν ότι θα χρειαστεί η τριπλάσια ποσότητα, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη και την ταυτόχρονη αύξηση του πλάτους της φιγούρας (Van Dooren et al., 2003). Επίσης, άλλες περιοχές στις οποίες υπεργενικεύεται η χρήση την αναλογικής στρατηγικής είναι οι πιθανότητες (Van Dooren, De Bock, Depaepe et al., 2003) και η άλγεβρα (Van Dooren et al., 2008). Το λάθος αυτό είναι ιδιαίτερα επίμονο και είναι δύσκολο να ξεπεραστεί (Modestou & Gagatsis, 2007) ακόμα και όταν γίνονται στους μαθητές νύξεις και δίνονται βοηθήματα για να το διορθώσουν (De Bock, Verschaffel & Jannsens, 2002; Van Dooren, De Bock, Verschaffel et al., 2003). Οι Van Dooren et al. (2008) συνδέουν αυτή την επίμονη λανθασμένη πρακτική με την θεωρία του Fischbein (1987) για τη διαισθητική γνώση, η οποία θεωρείται αυτονόητη, εσωτερικά δομημένη και έτοιμη να καθοδηγήσει τη δράση, οδηγώντας σε υπεργενικεύσεις, αφού βασίζεται σε επιφανειακά χαρακτηριστικά, και αντιστέκεται στην επίσημη γνώση.

1.3. Παράγοντες που σχετίζονται με τα προσθετικά ή πολλαπλασιαστικά σφάλματα

Οι έρευνες που αναφέρθηκαν παραπάνω έχουν μελετήσει διάφορους παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν την επιλογή στρατηγικής των μαθητών και μπορεί να παίζουν καθοριστικό ρόλο για το αν κάνουν προσθετικά ή πολλαπλασιαστικά σφάλματα. Αυτοί αναλύονται στη συνέχεια.

1.3.1. Ηλικία

Σε γενικές γραμμές φαίνεται οι μαθητές μικρότερων τάξεων να χρησιμοποιούν περισσότερο την προσθετική στρατηγική, επομένως κάνουν περισσότερα προσθετικά σφάλματα σε πολλαπλασιαστικά προβλήματα (Van Dooren, De Bock & Verschaffel, 2010; Van Dooren et al., 2005; Fernandez et al., 2012; Degrande et al., 2019a). Οι ίδιες έρευνες δείχνουν και το αντίθετο φαινόμενο, δηλαδή ότι, καθώς περνούν σε μεγαλύτερες τάξεις, οι μαθητές τείνουν να κάνουν περισσότερα πολλαπλασιαστικά / αναλογικά σφάλματα σε μη αναλογικά προβλήματα, όπως είναι τα προσθετικά προβλήματα. Το φαινόμενο υπεργενίκευσης της χρήσης αναλογικών στρατηγικών συνεχίζεται και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, με έρευνες να δείχνουν ότι είναι ακόμα πιο έντονο από ότι στο δημοτικό (Fernandez, Llinares & Valls, 2008; Fernandez et al., 2011, 2012).

Από τα αποτελέσματα των παραπάνω ερευνών θα μπορούσε κανείς να συμπεράνει ότι οι μαθητές περνούν από ένα προσθετικό, σε ένα πολλαπλασιαστικό στάδιο. Οι Inhelder και Piaget (1958) υποστήριζαν ότι τα παιδιά μπορούν αρχικά να αντιλαμβάνονται μόνο τις προσθετικές σχέσεις και ότι αργότερα αρχίζουν και κατανοούν τις πολλαπλασιαστικές. Ο Noelting (1980) βρίσκει ότι αναλογικές στρατηγικές χρησιμοποιούνται μόνο από μεγαλύτερους μαθητές. Ακόμα, η προσθετική σκέψη θεωρείται ως προαπαιτούμενη για την εξέλιξη της πολλαπλασιαστικής (Lamon & Lesh, 1992; Clark & Kamii, 1996). Οι Siemon et al. (2005) μάλιστα υποστηρίζουν ότι το πέρασμα από την προσθετική στην πολλαπλασιαστική σκέψη δεν είναι ασήμαντο και το χαρακτηρίζουν ως τη μεγάλη πρόκληση της μέσης εκπαίδευσης.

Δεδομένα σύγχρονων ερευνών θέτουν σε αμφισβήτηση τα παραπάνω καθώς δείχνουν ότι τα παιδιά μπορούν να σκέφτονται με πολλαπλασιαστικό τρόπο από πολύ μικρή ηλικία, ακόμα και από το νηπιαγωγείο και πριν από τη διδασκαλία (Nunes & Bryant, 2015). Ενδεικτικά, οι Boyer, Levine και Huttenlocher (2008) παρουσίασαν σε μαθητές νηπιαγωγείου έως τετάρτης τάξης δημοτικού ένα έργο στο οποίο εμφανιζόταν στην οθόνη ένα αρκουδάκι που είχε φτιάξει ένα μείγμα χυμού και τα παιδιά έπρεπε να επιλέξουν ποιο από τα άλλα μείγματα που παρουσιάζονταν θα είχε την ίδια γεύση. Παρατηρούν ότι ακόμα από το νηπιαγωγείο οι μαθητές ήταν σε θέση να δίνουν σωστές απαντήσεις. Οι Jeong, Levine και Huttenlocher (2007) κατασκεύασαν ένα έργο στο οποίο οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν ανάμεσα από διαφορετικά μεγέθη περιστρεφόμενων δίσκων (ντόνατς) ποιο έχει βαμμένη τη μεγαλύτερη (σε σχέση με το μέγεθός του) περιοχή ώστε αν πέσει το βελάκι πάνω σε αυτή να κερδίσουν ένα αυτοκόλλητο. Και εδώ παρατηρήθηκε ότι μικρής ηλικίας μαθητές (πρώτη τάξη δημοτικού) μπορούσαν να απαντούν σωστά. Οι έρευνες των Vanluydt, Verschaffel & Van Dooren (2018) και των Vanluydt et al. (2020) σε μαθητές 4-5 χρονών και 5-9 χρονών αντίστοιχα, χρησιμοποίησαν έργα μοιρασιάς σε διακριτές (σταφύλια) και συνεχείς (μπάρες σοκολάτας) ποσότητες με χειραπτικό υλικό. Εντόπισαν ότι μεγάλο ποσοστό μαθητών μέχρι 5 ετών, που έφτανε το 75%, μπορούσε να χρησιμοποιήσει σωστά την ένα προς πολλά αντιστοιχία στα εύκολα έργα (Vanluydt, Verschaffel & Van Dooren , 2018), αλλά τόνισαν ότι η κατανόηση αυτή είναι ακόμα εύθραυστη (Vanluydt et al., 2020). Άλλες έρευνες με μαθητές μικρής ηλικίας που μελετούν την *αυθόρμητη τάση εστίασης σε ποσοτικές σχέσεις*, δηλαδή τη χωρίς εξωτερική καθοδήγηση εστίαση, σε περιβάλλοντα που δεν είναι καθαρά μαθηματικά (McMullen et al., 2013; Βαμβακούση και συν., 2015) δείχνουν ότι παιδιά νηπιαγωγείου και πρώτης τάξης δημοτικού είναι σε θέση να εστιάζουν συστηματικά σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις.

1.3.2. Συνεχείς ή διακριτές ποσότητες

Η έρευνα γύρω από τις συνεχείς και τις διακριτές ποσότητες, το πώς αυτές επηρεάζουν τη δυσκολία των έργων και οδηγούν σε λανθασμένες στρατηγικές, δεν έχει καταλήξει σε συγκεκριμένα συμπεράσματα, καθώς υπάρχουν αντικρουόμενα αποτελέσματα. Γενικά, φαίνεται ότι μέχρι την ηλικία των 10 ετών οι μαθητές ανιχνεύουν συχνότερα αναλογικές σχέσεις σε έργα που περιέχουν συνεχείς ποσότητες παρά διακριτές (Jeong et al, 2007; Boyer et al., 2008; Spinillo & Bryant, 1999).

Σε αντίθετα όμως αποτελέσματα φτάνει η έρευνα των Valnluydt et al. (2020), στην οποία μαθητές 5-9 ετών έδειξαν μεγαλύτερη δυσκολία στις συνεχείς ποσότητες παρά στις διακριτές. Επίσης, οι Tourniaire & Pulos (1985) πιστεύουν ότι οι διακριτές είναι ευκολότερες από τις συνεχείς, επειδή οι πρώτες είναι πιο εύκολο να οπτικοποιηθούν. Το ίδιο, ότι οι συνεχείς είναι δυσκολότερες, αναφέρεται και από την Hart (1981).

Σε μεγαλύτερες ηλικίες, από τετάρτη τάξη δημοτικού έως και την πρώτη τάξη λυκείου, οι Fernandez et al. (2012) βρίσκουν ότι η ύπαρξη διακριτών ποσοτήτων (π.χ. πλήθος κουτιών) στα λεκτικά προβλήματα έχει ως αποτέλεσμα να δίνονται ελαφρώς περισσότερες πολλαπλασιαστικές απαντήσεις, ενώ η ύπαρξη συνεχών ποσοτήτων (π.χ. μήκος) συνδέεται περισσότερο με προσθετικές απαντήσεις, οδηγώντας έτσι σε προσθετικά ή πολλαπλασιαστικά σφάλματα. Η φύση των ποσοτήτων δεν φαίνεται πάντως να παίζει σημαντικό ρόλο στις ηλικίες αυτές καθώς σε άλλη έρευνα των Fernandez et al. (2011) οι συνεχείς ή οι διακριτές ποσότητες δεν βρέθηκε να επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών.

1.3.3. Ύπαρξη ακέραιων ή μη ακέραιων λόγων

Η επίδραση που έχει το είδος των λόγων στα προβλήματα αναλογίας είναι γνωστή εδώ και πολλά χρόνια. Η ύπαρξη μη ακέραιων λόγων δυσκολεύει την επίλυση. Σύμφωνα με τη Hart (1981) δυσκολότερα έργα είναι αυτά που οι μαθητές δεν μπορούν να χρησιμοποιήσουν το διπλάσιο, το τριπλάσιο ή το μισό. Έτσι, οδηγούνται πολλές φορές σε προσθετική στρατηγική. Οι Karplus et al. (1983), χρησιμοποιώντας τα έργα σύγκρισης με τα μείγματα χυμού και ζάχαρης, δείχνουν ότι η ύπαρξη μη ακέραιων λόγων αυξάνει το ποσοστό των μαθητών που χρησιμοποιούν προσθετική στρατηγική.

Το φαινόμενο είναι ακόμα πιο έντονο όταν οι λόγοι μεταξύ των ομοειδών ποσοτήτων δεν είναι ακέραιοι και πολύ περισσότερο, όταν μη ακέραιοι είναι και οι λόγοι μεταξύ των ετεροειδών ποσοτήτων. Οι Kaput & West (1994) συμφωνούν με τα παραπάνω καθώς αναφέρουν ότι, αν για δύο ποσότητες που δίνονται, η μία δεν διαιρεί ακριβώς την άλλη, τότε σε σημαντικό βαθμό οι μαθητές οδηγούνται σε προσθετικό σφάλμα.

Τα παραπάνω ευρήματα ενισχύονται από πιο σύγχρονες έρευνες οι οποίες δείχνουν και το αντίστροφο φαινόμενο, ότι δηλαδή η ύπαρξη ακεραίων λόγων στα προβλήματα οδηγεί στη χρήση πολλαπλασιαστικών στρατηγικών, ακόμα και σε περιπτώσεις που δεν είναι κατάλληλες, όπως στα προσθετικά προβλήματα. Έρευνες που έγιναν σε μαθητές δημοτικού, δείχνουν ακριβώς αυτό, ότι οι ακέραιοι λόγοι κατευθύνουν τους μαθητές προς πολλαπλασιαστικές στρατηγικές, ενώ οι μη ακέραιοι προς προσθετικές (Van Dooren et al., 2010; Atabas & Oner, 2017; Degrande et al., 2019a). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, ναι μεν οι ακέραιοι λόγοι να ενισχύουν την επίδοση στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα, αλλά να οδηγούν και σε περισσότερα πολλαπλασιαστικά σφάλματα σε προσθετικά προβλήματα. Από την άλλη, οι μη ακέραιοι λόγοι οδηγούν σε προσθετικές στρατηγικές ανεξάρτητα από το αν το πρόβλημα είναι προσθετικής ή πολλαπλασιαστικής φύσης (Fernandez et al., 2012). Ομοίως, οι Van Dooren et al (2009) επαληθεύουν την πρόβλεψή τους, ότι όταν οι λόγοι δεν είναι ακέραιοι, οι μαθητές τείνουν να μην υπεργενικεύουν τις αναλογικές στρατηγικές. Σε μεγαλύτερες ηλικίες το φαινόμενο ελαττώνεται αλλά δεν εξαφανίζεται (Fernandez et al., 2011).

1.3.4. Ικανότητα

Σύμφωνα με τους Nunes et al. (2012) για να λύσει κάποιος ένα πρόβλημα, προσθετικό ή πολλαπλασιαστικό, χρειάζεται να κατέχει δύο ξεχωριστές ικανότητες: πρώτα την ικανότητα ανάλυσης των ποσοτικών σχέσεων που περιέχονται στο πρόβλημα, ώστε να καταλάβει πώς να χειριστεί τους αριθμούς, και έπειτα την ικανότητα σωστής εκτέλεσης των πράξεων. Τονίζουν ότι, ενώ και οι δύο ικανότητες είναι απαραίτητες, η πρώτη είναι πιο σημαντική. Οι μαθητές καλούνται να μοντελοποιήσουν την κατάσταση που περιγράφεται στο πρόβλημα ανάλογα με το ποιο είναι το κατάλληλο είδος ερώτησης που γίνεται αναφορικά με τις ποσότητες: ποια η διαφορά ανάμεσα στις ποσότητες ή ποιος ο λόγος μεταξύ των ποσοτήτων (Nunes & Bryant, 2009). Ομοίως, σύμφωνα με τους Verschaffel et al. (2000) οι μαθητές για να μοντελοποιήσουν ένα πρόβλημα πρέπει να περάσουν από τα εξής στάδια: 1) κατανόηση του προβλήματος, 2) επιλογή σχέσεων και μετάφρασή τους σε μαθηματικές προτάσεις, 3) υπολογισμοί και 4) ερμηνεία και αξιολόγηση του αποτελέσματος. Πολλές φορές οι μαθητές περνούν απευθείας στο τρίτο βήμα, στους υπολογισμούς, χωρίς να έχουν κατανοήσει την κατάσταση (De Bock, 2002; Verschaffel et al., 2007). Ενώ σε μικρότερες ηλικίες οι στρατηγικές των μαθητών αντικατοπτρίζουν τη δράση ή τις σχέσεις που περιγράφει ένα πρόβλημα, για παράδειγμα με τη χρήση χειραπτικών μέσων, μεγαλώνοντας χρησιμοποιούν στρατηγικές που είναι πιο αποτελεσματικές από υπολογιστική σκοπιά, αλλά μπορεί να μην ταιριάζουν στη σημασιολογική δομή του προβλήματος (Verschaffel et al., 2007). Επιπρόσθετα, οι Riley et al. (1983) αναφέρουν τους τρεις τύπους γνώσης που είναι απαραίτητοι για την επίλυση ενός προβλήματος: α) τα «σχήματα προβλημάτων» για την κατανόηση των διαφόρων σημασιολογικών διαφορών και τη διάκριση μεταξύ των καταστάσεων, β) τα «σχήματα δράσης» που αποτελεί ενδιάμεσο στάδιο μεταξύ της αναπαράστασης και της επίλυσης, γ) τη «στρατηγική γνώση» για τον σχεδιασμό της επίλυσης των προβλημάτων.

Έρευνες δείχνουν ότι η ενίσχυση της ικανότητας διάκρισης μεταξύ πολλαπλασιαστικών/αναλογικών ή μη καταστάσεων (π.χ. προσθετικών) έχει σημαντικά οφέλη στην επιλογή κατάλληλης στρατηγικής κατά τη διαδικασία επίλυσης λεκτικών προβλημάτων. Όταν οι De Bock et al. (2002) έδωσαν ένα μεταγνωστικό βοήθημα στους μαθητές, δηλαδή τους παρουσίασαν δύο πιθανές λύσεις, μια αναλογική και μια όχι, αυτοί έκαναν λιγότερα πολλαπλασιαστικά σφάλματα σε μη αναλογικά προβλήματα. Στην έρευνα των Van Dooren et al. (2010) οι μαθητές έπρεπε αφενός να κατατάξουν τα προβλήματα σε κατηγορίες, ανάλογα με τα κοινά στοιχεία που θεωρούσαν ότι είχαν, και αφετέρου να λύσουν παρόμοια προβλήματα. Βρέθηκε ότι ήταν πιο προσεκτικοί στο έργο που έπρεπε να κατατάξουν παρά στο έργο που έπρεπε να λύσουν τα προβλήματα. Μάλιστα, οι μαθητές που ξεκίνησαν με το έργο κατάταξης τα πήγαν καλύτερα στην επίλυση, σε αντίθεση με τους μαθητές που ξεκίνησαν απευθείας με την επίλυση προβλημάτων.

1.3.5. Το πλαίσιο του προβλήματος

Οι Heller et al. (1989) αναφέρουν ότι το πλαίσιο του προβλήματος (context) παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση. Συγκεκριμένα, το αντικείμενα που περιέχονται στο πρόβλημα, οι μεταβλητές (π.χ. μήκος, επιφάνεια, βάρος, χρόνος κτλ.), οι μονάδες μέτρησης (π.χ. χιλιόμετρα, ίντσες, κιλά) καθορίζουν τη δυσκολία του. Έννοιες όπως ο όγκος και οι πιθανότητες συνήθως δυσκολεύουν τους μαθητές (Van Dooren et al., 2008). Όσο πιο γνώριμα είναι αυτά τα στοιχεία, τόσο περισσότερο διευκολύνουν την επιλογή κατάλληλης στρατηγικής (Tourniaire & Pulos, 1985; Heller et al., 1989; Kaput & West, 1994). Σύμφωνα με τους Nunes & Bryant (2015) το πλαίσιο ενεργοποιεί τα υπάρχοντα «σχήματα εν δράσει» και την αναγνώριση οικείων σχέσεων μεταξύ των ποσοτήτων.

1.3.6. Επιφανειακά χαρακτηριστικά

Πολλοί ερευνητές (Verschaffel et al., 2007; Riley et al. 1983; Bell et al., 1985; Tourniaire & Pulos, 1985, Verschafel & De Corte, 1993) αναφέρουν την επιρροή επιφανειακών ή γλωσσικών χαρακτηριστικών του προβλήματος στην επιλογή μη κατάλληλης στρατηγικής. Αυτά μπορεί να είναι η γραμματική πολυπλοκότητα, το μέγεθος του κειμένου, η σειρά εμφάνισης των δεδομένων, η ύπαρξη λέξεων-κλειδιών (π.χ. η λέξη λιγότερο μπορεί να παραπέμπει σε αφαίρεση).

Επίσης, η μορφή προσδιορισμού μιας άγνωστης τιμής (missing-value) σε ένα πρόβλημα αποτελεί ικανό παράγοντα για να εξηγήσει την επιλογή λανθασμένης αναλογικής στρατηγικής, ειδικά σε άπειρους λύτες (De Bock et al., 2002; Van Dooren et al., 2009). Οι Fernandez et al. (2008) βρίσκουν ότι μαθητές που χρησιμοποιούν τη μέθοδο των τριών στα (missing-value) αναλογικά προβλήματα κάνουν το ίδιο και σε μη αναλογικά. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι στα σχολικά εγχειρίδια χρησιμοποιούνται σχεδόν αποκλειστικά προβλήματα αυτού του τύπου για τη διδασκαλία της αναλογίας (Cramer et al., 1993) ενώ λείπουν μη αναλογικά προβλήματα της ίδιας μορφής (Van Dooren 2010). Ο μετασχηματισμός ενός προβλήματος προσδιορισμού μιας άγνωστης τιμής σε ένα πρόβλημα σύγκρισης βοηθά στην ικανότητα διάκρισης των καταστάσεων και βελτιώνει τις επιδόσεις σε μη αναλογικά προβλήματα (De Bock et al., 2002).

1.3.7. Διδακτικοί παράγοντες

Οι παράγοντες που αναφέρθηκαν προηγουμένως θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη και να διαμορφώνουν τη διδασκαλία ώστε αυτή να μην δημιουργεί, ακούσια, αιτίες παρανοήσεων κατά την επίλυση προβλημάτων. Οι Kaput & West (1994) υποστηρίζουν ότι το προσθετικό σφάλμα στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα είναι συχνό, γιατί δεν παρουσιάζονται στους μαθητές ταυτόχρονα προσθετικές και πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, ώστε να εξασκηθούν διακρίνοντάς τες. Επίσης, τα περισσότερα εγχειρίδια έχουν ξεχωριστό κεφάλαιο για τις αναλογίες, οπότε αυτό για έναν μαθητή είναι αρκετό για να επιλέξει πολλαπλασιαστική στρατηγική (Van Dooren et al., 2009; Kaput & West, 1994). Επιπρόσθετα, όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, η καλλιέργεια της αναλογικής σκέψης σχεδόν εξολοκλήρου μέσω προβλημάτων προσδιορισμού μιας άγνωστης τιμής, οδηγεί σε ταύτιση της διατύπωσης αυτής με πολλαπλασιαστικές στρατηγικές (Fernandez et al., 2008).

1.3.8. Κοινωνικοπολιτισμικοί παράγοντες

Οι Veschaffel et al. (2007) τονίζουν ότι η επίλυση ενός προβλήματος δεν γίνεται σε ένα αποστειρωμένο πλαίσιο αλλά στο κοινωνικοπολιτισμικό περιβάλλον της τάξης, το οποίο διαμορφώνει τάσεις κατά την επίλυση προβλημάτων που μπορεί να οδηγήσουν στη χρήση επιφανειακών στρατηγικών. Επίσης, υποστηρίζουν ότι τα προβλήματα που συνήθως υπάρχουν στα εγχειρίδια των μαθηματικών είναι στερεοτυπικά και τεχνητά, με συνέπεια να δημιουργούν αρνητικές επιπτώσεις στη διάθεση των μαθητών να ασχοληθούν με αυτά. Οι μαθητές συνήθως απαντούν χωρίς να κάνουν ρεαλιστικές εκτιμήσεις για τις καταστάσεις που περιγράφονται και δεν δίνουν σημασία στο αν η ερώτηση και η απάντηση σε αυτή βγάζουν νόημα.

1.3.9. Προτίμηση

Η Degrande (2019), θέλοντας να εξηγήσει τον λόγο για τον οποίο μαθητές της ίδιας τάξης και της ίδιας ικανότητας παρουσιάζουν σημαντικές διατομικές διαφορές στην επιλογή κατάλληλης στρατηγικής, προσθετικής ή πολλαπλασιαστικής, όταν καλούνται να λύσουν προβλήματα, εισάγει την προτίμηση των μαθητών ανάμεσα στους δύο διαφορετικούς τύπους σχέσεων ως μια συμπληρωματική αιτία προσθετικών ή πολλαπλασιαστικών σφαλμάτων. Υποστηρίζει δηλαδή ότι η προτίμηση σε προσθετικές σχέσεις οδηγεί σε προσθετικά σφάλματα στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα και το αντίθετο, ότι η προτίμηση σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις έχει ως αποτέλεσμα περισσότερα πολλαπλασιαστικά σφάλματα σε προσθετικά προβλήματα.
Ως προτίμηση, η ίδια, ορίζει την κατάσταση όπου ένας τύπος σχέσης προτιμάται έναντι του άλλου, είτε εσκεμμένα είτε όχι, και τη συστηματική χρήση μιας συγκεκριμένης στρατηγικής παρόλο που η κατάσταση επιτρέπει τη χρήση και άλλων στρατηγικών.

Έρευνες που μελέτησαν την παραπάνω υπόθεση, επιβεβαιώνουν την επιρροή της προτίμησης στα προσθετικά και πολλαπλασιαστικά σφάλματα που κάνουν οι μαθητές όταν λύνουν προβλήματα. Οι Degrande et al. (2019a) βρίσκουν ότι η προτίμηση είναι *μοναδικός και ισχυρός* δείκτης πρόβλεψης που εξηγεί τα σφάλματα των μαθητών, αφού έχουν συνεξετάσει και άλλους παράγοντες όπως η ηλικία, η γενικότερη μαθηματική επίδοση και το φύλο. Οι Vanluydt et al. (2022b) μελετώντας την προτίμηση σε παιδιά προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας βρίσκουν ότι οι μαθητές με προσθετική προτίμηση έχουν καλύτερη επίδοση στα προσθετικά προβλήματα αλλά και περισσότερα προσθετικά σφάλματα σε αναλογικά προβλήματα. Οι μαθητές με πολλαπλασιαστική προτίμηση έχουν καλύτερη επίδοση στα αναλογικά προβλήματα αλλά όχι και περισσότερα πολλαπλασιαστικά σφάλματα στα προσθετικά προβλήματα, γεγονός που αποδίδουν στα λίγα σφάλματα που έγιναν γενικότερα στα προσθετικά προβλήματα στην έρευνά τους. Πάντως, οι μαθητές που δεν έδειξαν προτίμηση ανάμεσα σε προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές σχέσεις είχαν τη μεγαλύτερη επίδοση στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων, γεγονός που αποδεικνύει ότι η προτίμηση οδηγεί σε σφάλματα.

Καθώς η έννοια της προτίμησης παίζει κεντρικό ρόλο στην παρούσα εργασία, στη συνέχεια θα παρουσιαστεί αναλυτικά.

1.3.10. Λοιποί παράγοντες

Άλλοι παράγοντες που αναφέρει η βιβλιογραφία, αλλά δεν θα αναλυθούν στο πλαίσιο αυτής της εργασίας, είναι κάποια χαρακτηριστικά των μαθητών (το φύλο, η νοημοσύνη, η αναγνωστική ικανότητα) και η χρήση ή μη χειραπτικών μέσων κατά την επίλυση ενός προβλήματος (Tourniaire & Pulos, 1985; Riley et al., 1983).

1.4. Έρευνες για τη προτίμηση ανάμεσα σε προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές σχέσεις

Έρευνες έχουν δείξει ότι πολλές φορές χρησιμοποιείται επαναλαμβανόμενα μία στρατηγική, παρόλο που υπάρχει επιλογή και για τη χρήση άλλων (Bailey et al., 2012; Mulligan, 1992; Torbeyns et al., 2013). Επίσης, άλλες έρευνες έδειξαν ότι οι μαθητές αξιολογούν διαφορετικά διάφορες πιθανές λύσεις σε ένα πρόβλημα (π.χ. Van Dooren et al., 2002) δείχνοντας έτσι την προτίμησή τους. Οι Modestou & Gagatsis (2010) χρησιμοποίησαν τον όρο «κλίση» προς προσθετικές σχέσεις, ενώ οι Resnick & Singer (1993) τον όρο «προτίμηση» για προσθετικές σχέσεις για να περιγράψουν τα προσθετικά σφάλματα που κάνουν μαθητές σε προβλήματα που απαιτούν πολλαπλασιαστική λογική. Επίσης, οι Van Dooren et al. (2003) χρησιμοποιούν τον όρο «τάσεις» για να εξηγήσουν τα προσθετικά αλλά και τα πολλαπλασιαστικά σφάλματα των μαθητών. Νεότερες έρευνες (Degrande et al., 2014, 2017, 2018a, 2018b, 2019a, 2019b; Vanluydt et al., 2022a, 2022b) μελετούν στοχευμένα την προτίμηση των μαθητών ανάμεσα σε προσθετικές και πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Όπως προαναφέρθηκε, στις έρευνες αυτές ως προτίμηση ορίζεται η κατάσταση όπου ένας τύπος σχέσης προτιμάται έναντι του άλλου, είτε εσκεμμένα είτε όχι, και η χρήση μιας συγκεκριμένης στρατηγικής παρόλο που η κατάσταση επιτρέπει τη χρήση και άλλων στρατηγικών, καθώς και σε περιπτώσεις όπου τα έργα που καλούνται οι μαθητές να λύσουν είναι ανοιχτά ως προς τους δύο τύπους σχέσης (Degrande, 2019).

1.4.1. Στόχοι των ερευνών για την προτίμηση

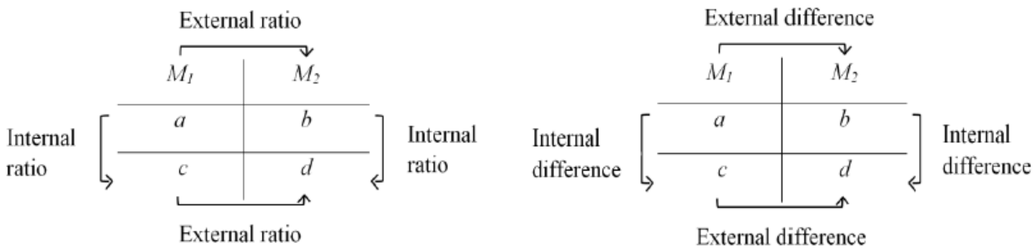
Οι Degrande et al. (2014, 2017, 2018a, 2018b, 2019a, 2019b) μελέτησαν την προτίμηση των μαθητών ανάμεσα σε προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές σχέσεις σε μια σειρά ερευνών που αφορούσαν μαθητές ηλικίας κυρίως 8 έως 12 χρονών (τρίτη έως έκτη τάξη του δημοτικού σχολείου στο Βέλγιο). Σε νεότερες διαχρονικές έρευνες, οι Vanluydt et al. (2022a, 2022b) μελέτησαν την προτίμηση αυτή σε μαθητές μικρότερης ηλικίας, 5-8 ετών (νηπιαγωγείο έως τρίτη τάξη δημοτικού, επίσης στο Βέλγιο).
Οι έρευνες αυτές είχαν στόχο να μελετήσουν:

- το είδος της σχέσης (προσθετική ή πολλαπλασιαστική) στην οποία αυθόρμητα εστιάζουν οι μαθητές, καθώς και πώς μεταβάλλεται η εστίαση αυτή με την ηλικία των μαθητών (Degrande et al., 2017)
- πώς οι μαθητές απαντούν σε ένα ανοιχτό πρόβλημα, δηλαδή ποιο είδος σχέσης προτιμούν να αξιοποιήσουν για να λύσουν το πρόβλημα αυτό, καθώς και πώς εξηγούν με λόγια τη σκέψη τους (Degrande et al., 2014, 2018a, 2018b; Vanluydt et al., 2022a, 2022b)
- πώς μεταβάλλεται η προτίμηση ανάλογα με την ηλικία των μαθητών (Degrande et al., 2014, 2018b; Vanluydt et al., 2022)
- αν το είδος των ποσοτήτων (διακριτές ή συνεχείς ποσότητες) επηρεάζουν την προτίμηση των μαθητών ή την ικανότητά τους να εκφράσουν με λόγια τη σκέψη τους σχετικά με την στρατηγική που επέλεξαν (Degrande et al., 2018a).
- πώς τα χαρακτηριστικά των αριθμών που εμπλέκονται σε ένα πρόβλημα (συγκεκριμένα αν οι λόγοι που σχηματίζουν οι αριθμοί είναι ακέραιοι ή μη ακέραιοι) επηρεάζουν την προτίμηση των μαθητών (Degrande et al., 2014, 2018b, 2019a)
- σε ποιο βαθμό η προτίμηση προβλέπει και εξηγεί τα προσθετικά ή πολλαπλασιαστικά σφάλματα που κάνουν οι μαθητές σε προβλήματα προσδιορισμού μιας άγνωστης τιμής (Degrande et al., 2019a; Vanluydt et al., 2022b)
- αν η προτίμηση έχει κάποια σχέση με την ικανότητα των μαθητών να διακρίνουν προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές καταστάσεις που περιγράφονται στα προβλήματα (discrimination skill) και με την ικανότητα να εκτελούν υπολογισμούς (computation skill) (Degrande et al., 2018b, 2019a)

- αν η προτίμηση είναι ισχυρή, επίμονη και εκούσια (σκόπιμη) ενέργεια (Degrande et al., 2018b, 2019b)
- αν η προτίμηση έχει κάποια σχέση με την πρώιμη ανάπτυξη της αναλογικής σκέψης (Vanluydt et al., 2022)

1.4.2. Έργα για μέτρηση της προτίμησης

Για τη μέτρηση της προτίμησης χρησιμοποιούνται έργα τα οποία είναι ανοιχτά ως προς την χρήση προσθετικής ή πολλαπλασιαστικής στρατηγικής, δηλαδή δεν υπάρχει κάποια ένδειξη για το αν πρέπει να χρησιμοποιηθεί η μία στρατηγική ή η άλλη. Η χρήση οποιουδήποτε είδους σχέσης είναι το ίδιο σωστή και χρήσιμη (Degrande, 2019). Στα έργα αυτά οι μαθητές καλούνται να προσδιορίσουν τη σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων και να εφαρμόσουν τη σχέση αυτή σε μία τρίτη ποσότητα, ώστε να υπολογιστεί η άγνωστη, ή να κάνουν ποσοτική σύγκριση μεταξύ δύο σχέσεων. Οι σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων μπορεί να είναι προσθετικές, δηλαδή να υπολογίζεται η διαφορά α-β, ή πολλαπλασιαστικές, δηλαδή να υπολογίζεται ο λόγος α/β. Η διαδικασία αυτή, ακόμα και όταν εφαρμόζεται με προσθετικές σχέσεις, θεωρείται ότι είναι ένα σημαντικό βήμα προς την αναλογική σκέψη.



Σχήμα 8: Κατάσταση αναλογίας και ψευδοαναλογίας (προσθετική)
(Degrande et al., 2014)

Τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν στις έρευνες για τη μέτρηση της προτίμησης είχαν τη μορφή σύγκρισης (Degrande et al., 2017, 2018a), προσδιορισμού μιας άγνωστης τιμής (Degrande et al., 2014, 2018b, 2019a, 2019b; Vanluydt et al., 2022) και αυξανόμενου αριθμητικού μοτίβου (Vanluydt et al., 2022).

Ανάλογα με τους στόχους που είχε θέσει κάθε έρευνα, οι μαθητές μπορούσαν να απαντήσουν είτε συμπληρώνοντας οι ίδιοι τον αριθμό που θεωρούσαν σωστό, είτε επιλέγοντας όλες τις σωστές απαντήσεις μέσω της μορφής πολλαπλής επιλογής. Στη δεύτερη περίπτωση οι πιθανές επιλογές αποτελούνταν από μια προσθετική απάντηση, μία πολλαπλασιαστική απάντηση και μια απάντηση που δεν προέκυπτε από την εφαρμογή ούτε προσθετικής ούτε πολλαπλασιαστικής στρατηγικής. Στις μικρότερες ηλικίες, 5 έως 8 ετών (Vanluydt et al., 2022) οι μαθητές απαντούσαν χρησιμοποιώντας χειραπτικό υλικό.

Επισκόπηση των έργων

Οι Degrande et al. (2017) για να μετρήσουν την αυθόρμητη εστίαση σε σχέσεις, είτε προσθετικές είτε πολλαπλασιαστικές δημιούργησαν τρεις εκδοχές ενός έργου «τηλεμεταφοράς» στο οποίο παρουσιάζονταν σε ένα πρώτο κουτί κάποια αντικείμενα τα οποία «τηλεμεταφέρονταν» σε ένα δεύτερο κουτί. Μετά τη «τηλεμεταφορά» τα αντικείμενα εμφανίζονταν ελαφρώς διαφοροποιημένα (ως προς το χρώμα, μέγεθος, σχήμα) αλλά διέφερε και το πλήθος τους. Οι μαθητές έπρεπε να εντοπίσουν τι συνέβη με τα αντικείμενα κατά τη «τηλεμεταφορά». Χρησιμοποιούνταν τρεις διαφορετικές κατηγορίες αντικειμένων σε κάθε εκδοχή του έργου. Στην πρώτη εκδοχή η μεταβολή του πλήθους ήταν πολλαπλασιαστική και στη δεύτερη προσθετική. Η τρίτη εκδοχή ήταν ένα ανοιχτό έργο, στο οποίο η χρήση και προσθετικών και πολλαπλασιαστικών σχέσεων ήταν εξίσου κατάλληλη.

Στην έρευνα των Degrande et al. (2018a), προκειμένου να διερευνηθεί η προτίμηση των μαθητών ανάμεσα σε προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές σχέσεις, αλλά και το πώς οι μαθητές αιτιολογούν την επιλογή τους, χρησιμοποιήθηκε μια παραλλαγή του έργου των Lamon & Lesh (1992) που αφορούσε τη μεταβολή του μήκους δύο αντικειμένων. Συγκεκριμένα δόθηκε η εικόνα δύο φιδιών με διαφορετικό μήκος σε μια δεδομένη στιγμή στο παρελθόν. Έπειτα, υπήρχε άλλη μία εικόνα που εμφάνιζε τα ίδια φίδια στο παρόν, έχοντας μεγαλώσει. Οι μαθητές έπρεπε να διαπιστώσουν ποιο φίδι μεγάλωσε περισσότερο και να απαντήσουν γραπτώς δικαιολογώντας την απάντησή τους. Το έργο ήταν μη συμβολικό, καθώς δε δίνονταν αριθμοί. Κατασκευάστηκαν δύο παραλλαγές του, η μία με ισαπέχουσες κουκκίδες στο εσωτερικό το φιδιού (διακριτές ποσότητες) και η άλλη χωρίς κουκκίδες (συνεχείς ποσότητες). Ακόμα, το έργο ήταν ανοιχτό ως προς το είδος της σχέσης που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί κατά την επίλυση. Η προσθετική στρατηγική αφορά την «απόλυτη αύξηση», δηλαδή πόσο μήκος προστέθηκε σε κάθε φίδι, ενώ η πολλαπλασιαστική στρατηγική την «σχετική αύξηση», δηλαδή τη σύγκριση του λόγου μεταξύ του μήκος κάθε φιδιού στις δύο χρονικές στιγμές. Σύμφωνα με τους ερευνητές αποτελούν διαφορετικές αλλά εξίσου σωστές και πιθανές στρατηγικές.

Οι Degrande et al. (2014) θέλοντας να μελετήσουν το είδος της σχέσης (προσθετική ή πολλαπλασιαστική) που αναγνωρίζουν οι μαθητές, κατασκεύασαν ουδέτερα μαθηματικά προβλήματα σε γλώσσα την οποία δεν μπορούσαν να κατανοήσουν οι μαθητές. Τα ονόμασαν «ελληνικά προβλήματα», καθώς χρησιμοποίησαν χαρακτήρες του ελληνικού αλφαβήτου. Είχαν τη μορφή προβλήματος προσδιορισμού μιας άγνωστης τιμής, δηλαδή δίνονταν τρεις αριθμοί (ακέραιοι) και στο τέλος υπήρχε μία ερώτηση. Αφού οι μαθητές δεν μπορούσαν να κατανοήσουν τι έλεγε το πρόβλημα, καλούνταν να «μαντέψουν» πώς λύνεται, δείχνοντας έτσι την προτίμηση τους προς κάποια στρατηγική. Για να ερευνηθεί και η επιρροή του είδους των λόγων χρησιμοποιήθηκαν δύο τέτοια λεκτικά προβλήματα, το ένα με ακέραιους και το άλλο με μη ακέραιους λόγους.

Ένας ακόμα τύπος έργου, που χρησιμοποιήθηκε σε διάφορες παραλλαγές, ήταν ένα σχηματικό πρόβλημα στο οποίο εμφανίζονταν τρεις αριθμοί και έλειπε ένας τέταρτος. Ένα βέλος ξεκινούσε από τον πρώτο αριθμό και κατέληγε στον δεύτερο υποδεικνύοντας κάποια μεταβολή ή κάποια σχέση. Ένα δεύτερο βέλος ξεκινούσε από τον τρίτο αριθμό και κατέληγε σε ένα κενό κουτάκι. Οι μαθητές καλούνταν είτε να συμπληρώσουν τον αριθμό είτε να επιλέξουν ανάμεσα από πιθανές απαντήσεις ποιες ήταν οι σωστές (Degrande et al., 2018b, 2019a, 2019b). Το έργο ήταν ανοιχτό καθώς δεν υπήρχε κάποια ένδειξη για αν πρέπει να χρησιμοποιηθεί προσθετική ή πολλαπλασιαστική σχέση. Επίσης, και εδώ χρησιμοποιήθηκαν παραλλαγές με ακέραιους και μη ακέραιους λόγους (Degrande et al., 2018b, 2019a). Επιπρόσθετα, τέτοια σχηματικά προβλήματα χρησιμοποιήθηκαν για να μετρήσουν το πόσο ισχυρή και επίμονη είναι η προτίμηση καθώς και για το αν πρόκειται για σκόπιμη ενέργεια (Degrande et al., 2019b). Μετρήθηκε ο χρόνος αντίδρασης των μαθητών, με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή, στο να αποδεχτούν ή να απορρίψουν μία δοσμένη απάντηση στο σχηματικό αυτό έργο. Μεγαλύτερος χρόνος αντίδρασης σήμαινε ότι επρόκειτο για περισσότερο σκόπιμη ενέργεια. Στο πλαίσιο της ίδιας έρευνας τα έργα αυτά χρησιμοποιήθηκαν σε ημιδομημένες συνεντεύξεις, ώστε να παρατηρηθεί το πόσο σίγουροι ήταν οι μαθητές για την προτίμησή τους, το αν άλλαζαν την σχέση που προτιμούσαν αρχικά ή αποδέχονταν και άλλη πιθανή λύση, όταν αυτή τους παρουσιαζόταν, και πώς εξηγούσαν με λόγια τις επιλογές τους. Οι Degrande et al. (2019a) για να μετρήσουν την υπολογιστική ικανότητα των μαθητών, χρησιμοποίησαν τη σχηματική αυτή αναπαράσταση σε μη ανοιχτά έργα, υποδεικνύοντας ποια πράξη πρέπει να γίνει τοποθετώντας δίπλα σε κάθε βελάκι το σύμβολο της πρόσθεσης ή του πολλαπλασιασμού. Στην ίδια έρευνα δόθηκαν κάτω από λεκτικά προβλήματα δύο πιθανές λύσεις, μια προσθετική και μία πολλαπλασιαστική, με τη χρήση αυτής της σχηματικής αναπαράστασης, ώστε οι μαθητές να επιλέξουν αυτή που περιγράφει καλύτερα την κατάσταση (ικανότητα διάκρισης).

Οι Vanluydt et al. (2022b) επίσης την χρησιμοποιούν μαζί με λεκτικά προβλήματα προσδιορισμού μιας άγνωστης τιμής ως βοήθημα, καθώς η έρευνά τους αφορά μαθητές μικρότερης ηλικίας (6-7 ετών).

Στην διαχρονική έρευνα των Vanluydt et al. (2022a, 2022b), σε μαθητές νηπιαγωγείου έως τρίτης τάξης δημοτικού, χρησιμοποιήθηκαν έξι μη συμβολικά ανοιχτά έργα αξιοποιώντας χειραπτικό υλικό. Τα δύο αφορούσαν αυξανόμενα μοτίβα και τα άλλα τέσσερα ήταν προβλήματα προσδιορισμού μιας άγνωστης τιμής, με συνεχείς ή διακριτές ποσότητες.

Έργα με μοτίβα

- Διακριτές ποσότητες: Παρουσιάζονταν τρία μανιτάρια στη σειρά, το πρώτο έχοντας έναν συγκεκριμένο πλήθος λευκών κουκκίδων και το δεύτερο με κάποιες περισσότερες κουκκίδες. Οι μαθητές καλούνταν να προσδιορίσουν πόσες κουκκίδες θα έπρεπε να έχει το τρίτο μανιτάρι.
- Συνεχείς ποσότητες: Το έργο αφορούσε έναν κάκτο ο οποίος ψήλωνε σταδιακά. Συμβολιζόταν με ξυλάκια συγκεκριμένου μήκους. Παρουσιάζονταν τα μήκη τις δύο πρώτες χρονικές στιγμές και ο μαθητής έπρεπε να επιλέξει το ξυλάκι που θα αντιστοιχούσε στο ύψος του κάκτου τη τρίτη χρονική στιγμή.

Έργα προσδιορισμού άγνωστης τιμής («μαγικό» πλαίσιο)

- Διακριτές ποσότητες: Παρουσιαζόταν ένα μαγικό καπέλο στο οποίο, όταν έμπαιναν κάποια αντικείμενα, έβγαιναν περισσότερα, για παράδειγμα όταν έβαζαν μέσα 1 χαπάκι, αυτά μετά γίνονταν 3. Στη συνέχεια οι μαθητές καλούνταν να απαντήσουν τι θα γινόταν αν έβαζαν στο καπέλο έναν άλλο αριθμό αντικειμένων.

- Συνεχείς ποσότητες: Σε αντιστοιχία με το πρώτο, παρουσιαζόταν ένα μαγικό καζάνι, στο οποίο όταν έριχνες ένα ξύλο συγκεκριμένου μήκους, αυτό μεταμορφωνόταν σε ένα μαγικό ραβδί άλλου μήκους.

Έργα προσδιορισμού άγνωστης τιμής (αύξηση μήκους)

Τα έργα αυτά είναι αντίστοιχα με το έργο σύγκρισης με τα φίδια (Degrande et al., 2018a) που περιγράφεται νωρίτερα, μόνο που οι μαθητές αντί να συγκρίνουν τις μεταβολές, καλούνται να βρουν την τιμή που λείπει.

- Διακριτές ποσότητες: Αφορά δύο κάμπιες διαφορετικού μήκους, που αποτελούνται από χάντρες, σε δυο διαφορετικές χρονικές στιγμές. Οι μαθητές βλέποντας πόσο μεγάλωσε η μία κάμπια καλούνται να εφαρμόσουν τη σχέση αυτή για να κατασκευάσουν τη δεύτερη.
- Συνεχείς ποσότητες: Είναι το ίδιο έργο με το παραπάνω μόνο χρησιμοποιούνται ξυλάκια συγκεκριμένου μήκους.

1.4.3. Ευρήματα ερευνών

Τα ευρήματα των ερευνών δείχνουν ότι πράγματι, υπάρχουν ομάδες μαθητών που δείχνουν προτίμηση ανάμεσα σε προσθετικές και πολλαπλασιαστικές σχέσεις όταν έρχονται αντιμέτωποι με ανοιχτού τύπου έργα (Degrande et al., 2017, 2014, 2018a, 2018b, 2019a, 2019b). Μάλιστα, προτίμηση διαμορφώνουν οι μαθητές από μικρή ηλικία, πριν ακόμα την επίσημη εκπαίδευση (Vanluydt et al., 2022a, 2022b). Από την ανάλυση των δεδομένων των ερευνών μπόρεσαν να δημιουργηθούν προφίλ μαθητών, προσθετικά ή πολλαπλασιαστικά, βάσει των απαντήσεών τους, στις οποίες υπήρχε συνέπεια (Degrande et al., 2018b, 2019a; Vanluydt et al., 2022a, 2022b). Για παράδειγμα στην έρευνα των Degrande et al. (2018b) το 62,7% απαντά σε τουλάχιστον τρία από τα τέσσερα έργα με τον ίδιο τρόπο. Λίγοι ήταν οι μαθητές που επέλεγαν ταυτόχρονα και τη προσθετική και την πολλαπλασιαστική απάντηση ως πιθανή ή έδιναν άλλες απαντήσεις (Degrande et al., 2018b; Vanluydt et al., 2022a, 2022b) γεγονός που δείχνει ότι οι περισσότεροι μαθητές έδειχναν όντως κάποια προτίμηση ανάμεσα σε προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές σχέσεις.

Τα δεδομένα σχετικά με το πόσο ισχυρή είναι η προτίμηση δείχνουν ότι είναι ιδιαίτερα επίμονη και δύσκολα αλλάζει (Degrande et al., 2019b). Στην έρευνα αυτή, παρόλο που παρουσιάστηκαν στους μαθητές εναλλακτικές λύσεις κατά τη διάρκεια συνεντεύξεων, αυτοί δύσκολα τις αποδέχονταν ως εξίσου σωστές με την λύση της προτίμησής τους. Σε άλλο κομμάτι της ίδιας έρευνας παρουσιάστηκαν στους μαθητές λυμένα έργα και κλήθηκαν να αποδεχτούν ή να απορρίψουν τη λύση που εμφανιζόταν. Μαθητές που ανήκαν στην ομάδα που προτιμούσε προσθετικές σχέσεις, αποδέχονταν περισσότερο τις προσθετικές απαντήσεις ενώ μαθητές που ανήκαν στο πολλαπλασιαστικό προφίλ αποδέχονταν περισσότερο τις πολλαπλασιαστικές. Πάντως, η πολλαπλασιαστική προτίμηση βρέθηκε να είναι πιο επίμονη από την προσθετική. Η έρευνα των Degrande et al. (2019b) δίνει, επίσης, στοιχεία για το αν η προτίμηση είναι σκόπιμη, εκούσια ενέργεια ή ακούσια. Μέτρησαν τον χρόνο αντίδρασης των μαθητών όταν αποδέχονταν ή απέρριπταν μία λύση. Ένας μικρότερος χρόνος αντίδρασης σήμαινε ότι η ενέργεια γινόταν χωρίς σκέψη, άρα δεν ήταν σκόπιμη επιλογή. Τα δεδομένα αυτά μαζί με τις εξηγήσεις που έδιναν οι μαθητές για την επιλογή τους, κατά τη διάρκεια συνεντεύξεων, οδήγησαν στο συμπέρασμα ότι η προτίμηση δεν είναι σκόπιμη και γίνεται μάλλον ακούσια. Αυτό ισχύει σε μεγαλύτερο βαθμό για την πολλαπλασιαστική προτίμηση. Από τα παραπάνω φαίνεται να υπάρχει συσχέτιση με τη θεωρία του Fischbein (1985) για τη διαισθητική γνώση. Η προτίμηση φαίνεται να αποτελεί μία διαίσθηση καθώς είναι επίμονη, ακούσια και δύσκολη να αποδομηθεί (Degrande et al., 2019b). Το γεγονός ότι οι μαθητές δυσκολεύονταν να εξηγήσουν με λόγια την επιλογή στρατηγικής που έκαναν (Degrande et al., 2018a), επιβεβαιώνει τη διαισθητική φύση της προτίμησης.

Τέλος, ευρήματα από την έρευνα των Vanluydt et al. (2022a) δείχνουν ότι όσο νωρίτερα αποκτούν οι μαθητές προτίμηση πάνω στις σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων, τόσο καλύτερη είναι η επίδοσή τους σε έργα αναλογικής σκέψης στη τρίτη τάξη του δημοτικού. Μάλιστα, η προτίμηση δε χρειάζεται να είναι πολλαπλασιαστική. Βρέθηκε ότι η ανάπτυξη προσθετικής προτίμησης σε προσχολική ηλικία, όχι μόνο δεν εμποδίζει την ανάπτυξη της αναλογικής σκέψης κάποια χρόνια αργότερα, αλλά αντίθετα την ενισχύει. Βέβαια, όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, η ύπαρξη προτίμησης οδηγεί σε σφάλματα κατά την επίλυση προσθετικών ή πολλαπλασιαστικών λεκτικών προβλημάτων. Μαθητές με προσθετική προτίμηση κάνουν περισσότερα προσθετικά σφάλματα σε αναλογικά προβλήματα, ενώ μαθητές με πολλαπλασιαστική προτίμηση κάνουν περισσότερα πολλαπλασιαστικά σφάλματα σε προσθετικά προβλήματα (Degrande et al., 2019a; Vanluydt et al., 2022b).

Από τη σύνοψη των αποτελεσμάτων των ερευνών μπορούν να προκύψουν παράγοντες που σχετίζονται με την προτίμηση και είτε την επηρεάζουν είτε επηρεάζονται από αυτή. Στη συνέχεια αναλύονται οι παράγοντες αυτοί.

Ηλικία

Από τις έρευνες προκύπτει ότι οι μαθητές μικρότερων τάξεων τείνουν να προτιμούν προσθετικές σχέσεις ενώ οι μαθητές μεγαλύτερων τάξεων πολλαπλασιαστικές. Ενδεικτικά, στην έρευνα των Degrande et al. (2018b) οι προσθετικές επιλογές σε ανοιχτά έργα μειώθηκαν από 36% στην τρίτη τάξη του δημοτικού σε 1,3% στην έκτη τάξη. Αντίστροφα, οι πολλαπλασιαστικές επιλογές αυξήθηκαν από 1,1% στην τρίτη τάξη σε 42,3% στην έκτη. Παρόμοια αποτελέσματα έδειξε και επόμενη έρευνα τους (Degrande et al., 2019a). Όσον αφορά την αυθόρμητη εστίαση των μαθητών σε ποσοτικές σχέσεις, οι Degrande et al. (2017) υποστηρίζουν ότι αυτή μπορεί να εξελίσσεται από την εστίαση σε προσθετικές προς την εστίαση σε πολλαπλασιαστικές. Οι έρευνες των Vanluydt et al. (2022a, 2022b) επιβεβαιώνουν ότι σε μικρότερες ηλικίες, παρόλο που υπάρχουν και μαθητές που δίνουν πολλαπλασιαστικές απαντήσεις, η πλειοψηφία των παιδιών δείχνει προσθετική προτίμηση.

Διαφορετικά αποτελέσματα έδωσε η έρευνα στην οποία οι μαθητές έπρεπε να λύσουν λεκτικά προβλήματα γραμμένα σε γλώσσα που δεν καταλάβαιναν, τα λεγόμενα «ελληνικά» προβλήματα (Degrande et al., 2014). Συγκεκριμένα, ενώ οι λύσεις που αξιοποιούσαν προσθετικό συλλογισμό, μειώνονταν σταθερά από την τρίτη έως την πέμπτη τάξη δημοτικού, στην έκτη τάξη παρουσίασαν αύξηση. Αντίθετα, οι πολλαπλασιαστικές λύσεις αυξάνονταν μέχρι την πέμπτη τάξη αλλά στην έκτη ελαφρώς μειώθηκαν. Ακόμα μία έρευνα που έδειξε μεγαλύτερα ποσοστά προσθετικής προτίμησης, παρά πολλαπλασιαστικής, στις δύο τελευταίες τάξεις του δημοτικού ήταν των Degrande et al. (2018a), η οποία χρησιμοποίησε έργα στα οποία οι μαθητές έπρεπε να συγκρίνουν την αύξηση του μήκους δύο φιδιών ανάμεσα σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές. Στα έργα αυτά το 67,9% των απαντήσεων ήταν προσθετικές και το 29,9% πολλαπλασιαστικές, εύρημα που έρχεται σε αντίθεση με τις προαναφερθείσες έρευνες. Την αντίθεση αυτή την απέδωσαν στη φύση του έργου, το πλαίσιο και τα επιφανειακά χαρακτηριστικά του οποίου μπορεί να παρέπεμψαν τους μαθητές σε επιλογή προσθετικής στρατηγικής.

Το είδος των λόγων - Ακέραιοι ή μη ακέραιοι

Όταν οι αριθμοί σε ένα έργο σχηματίζουν ακέραιους λόγους (εντός και εκτός) οι μαθητές προτιμούν περισσότερο πολλαπλασιαστικές σχέσεις, ενώ όταν οι λόγοι δεν είναι ακέραιοι προτιμούν προσθετικές (Degrande et al., 2014, 2018b, 2019a). Για παράδειγμα, στην έρευνα των Degrande et al. (2019a) το 11,8% των μαθητών της τρίτης τάξης απάντησε σε όλα τα ανοιχτά έργα με ακέραιους λόγους με προσθετικό τρόπο. Για τα ίδια έργα, αλλά με μη ακέραιους λόγους, το ποσοστό των προσθετικών απαντήσεων ήταν 42,6%. Το αντίθετο παρατηρήθηκε για τις πολλαπλασιαστικές απαντήσεις, δηλαδή, όταν οι λόγοι ήταν ακέραιοι, το 1,4% της τρίτης τάξης απάντησε σε όλα τα έργα πολλαπλασιαστικά, ενώ όταν οι λόγοι δεν ήταν ακέραιοι, το ποσοστό αυτό μηδενίστηκε. Κάποιοι μαθητές μάλιστα απαντούν συστηματικά στις έρευνες με τον τρόπο αυτό, δηλαδή πολλαπλασιαστικά στους ακέραιους λόγους και προσθετικά στους μη ακέραιους λόγους, και χαρακτηρίζονται ως «number sensitive» (Degrande et al., 2014, 2018b, 2019a). Η επιρροή του είδους των λόγων (ακέραιοι / μη ακέραιοι) είναι πιο εμφανής στην πέμπτη τάξη (Degrande et al., 2014, 2018b). Αυτό, σύμφωνα με τους ερευνητές, συμβαίνει γιατί μέχρι τότε οι μαθητές έχουν συναντήσει ήδη πολλά προβλήματα αναλογίας, τα οποία όμως περιέχουν μόνο ακέραιους λόγους. Στην έκτη τάξη η επιρροή των λόγων μειώνεται καθώς οι μαθητές φαίνεται να έχουν διαμορφώσει ισχυρή πολλαπλασιαστική προτίμηση ανεξάρτητα από το είδος των λόγων (Degrande et al., 2018b).

Ικανότητα

Σύμφωνα με τους Bailey et al. (2012) που μελέτησαν ένα άλλο είδος προτίμησης, την προτίμηση σε στρατηγικές ανάκλησης κατά την επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης, η ικανότητα των μαθητών επηρεάζεται θετικά από την προτίμησή τους αυτή, αλλά και η προτίμηση επηρεάζεται από την ικανότητα, μέσω ενός κύκλου ανατροφοδότησης.

Οι Vanluydt et al. (2022a) βρίσκουν πως οι μαθητές προσχολικής ηλικίας που αναγνωρίζουν κάποιο είδος σχέσης μεταξύ των ποσοτήτων έχουν καλύτερη εξέλιξη ως προς την αναλογική τους σκέψη κάποια χρόνια αργότερα. Μάλιστα βρήκαν ότι η προσθετική προτίμηση σε νεαρή ηλικία όχι μόνο δεν εμποδίζει την ανάπτυξη της αναλογικής σκέψης, αλλά όσο νωρίτερα εμφανίστηκε, τόσο καλύτερη ήταν η επίδοση των μαθητών στη Γ΄ τάξη του δημοτικού, σε σχέση με τους μαθητές που δεν είχαν διαμορφώσει κάποια προτίμηση.

Οι Degrande et al. (2018b) θέλοντας να εξηγήσουν τις διατομικές διαφορές που υπάρχουν ως προς την προτίμηση, μελέτησαν αν οι μαθητές με διαφορετική προτίμηση στην ίδια τάξη διαφέρουν και ως προς την υπολογιστική ικανότητα (computation skill). Χρησιμοποίησαν το «Tempo Test Arithmetic» και υπολόγισαν δύο βαθμολογίες για κάθε μαθητή, μία προσθετική, για τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, και μία πολλαπλασιαστική, για τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Συγκρίνοντας τις βαθμολογίες αυτές με τα προφίλ των μαθητών που δημιουργήθηκαν βάσει της προτίμησής τους σε έργα ανοιχτού τύπου, βρήκαν ότι οι μαθητές με προσθετική προτίμηση ανήκαν σε ομάδες διαφορετικών επιδόσεων και ως προς την πρόσθεση και ως προς τον πολλαπλασιασμό. Το ίδιο παρατηρήθηκε για τους μαθητές με πολλαπλασιαστική προτίμηση. Αυτό δείχνει ότι η υπολογιστική ικανότητα και η προτίμηση είναι δύο διαφορετικά χαρακτηριστικά κάθε παιδιού και δεν συμπίπτουν (Degrande et al., 2018b). Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώθηκαν με επόμενη έρευνα (Degrande et al., 2019a). Σε αυτή, εκτός από την υπολογιστική ικανότητα, εξετάστηκε και η ικανότητα διάκρισης μεταξύ προσθετικών και πολλαπλασιαστικών καταστάσεων (discrimination skill). Βρέθηκε ότι μαθητές που είχαν κατακτήσει και τις δύο αυτές ικανότητες, συνέχιζαν να δείχνουν προτίμηση προς ένα είδος σχέσης. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το εύρημα ότι οι μαθητές των οποίων η προτίμηση επηρεάζεται από το είδος των λόγων (number sensitive) ανήκε στην κατηγορία των χαμηλών επιδόσεων στην υπολογιστική ικανότητα και επομένως στους μαθητές αυτούς επηρεάζεται η προτίμηση από την ικανότητα αυτή (Degrande et al., 2018b).

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι ενώ η προτίμηση έχει κάποια σχέση με την ικανότητα, δηλαδή την επηρεάζει και επηρεάζεται από αυτή, τα δύο αυτά χαρακτηριστικά δεν πηγαίνουν παράλληλα (Degrande et al., 2019a).

Συνεχείς ή διακριτές ποσότητες

Έρευνες για την προτίμηση που συμπεριελάμβαναν έργα με διακριτές και με συνεχείς ποσότητες ήταν των Vanluydt et al. (2022a, 2022b) και των Degrande et al. (2018a), αλλά μόνο η τελευταία ασχολήθηκε με την επιρροή που έχει το είδος των ποσοτήτων στην προτίμηση που δείχνουν οι μαθητές ανάμεσα σε προσθετικές και πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Χρησιμοποιήθηκαν δύο μη συμβολικές παραλλαγές του έργου με τα φίδια, η μία με κουκκίδες (διακριτές ποσότητες) και η άλλη χωρίς (συνεχείς ποσότητες) και απαντήθηκαν από μαθητές των δύο τελευταίων τάξεων του δημοτικού. Δεν βρέθηκε διαφορά ως προς την προτίμηση όταν οι ποσότητες ήταν συνεχείς ή διακριτές, σε καμία από τις δύο τάξεις. Η διαφορά που παρατηρήθηκε ήταν ως προς την ευκολία που οι μαθητές μπορούσαν να αιτιολογήσουν την λύση που έδωσαν. Συγκεκριμένα, βρέθηκε ότι οι διακριτές ποσότητες βοήθησαν τους μαθητές να μπορέσουν να εξηγήσουν ευκολότερα τη στρατηγική που επέλεξαν. Εδώ αξίζει να αναφερθεί ότι οι μαθητές που έκαναν προσθετικές επιλογές δυσκολεύτηκαν περισσότερο να τις εξηγήσουν σε σχέση με τους μαθητές που έκαναν πολλαπλασιαστικές. Το φαινόμενο ήταν πιο έντονο στην πέμπτη τάξη.

2. Στόχος της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα

Στόχος της έρευνας είναι να μελετήσει σε ποιο βαθμό μαθητές της ΣΤ’ τάξης Δημοτικού επιλέγουν/προτιμούν προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές σχέσεις όταν έρχονται αντιμέτωποι με ανοιχτού τύπου προβλήματα, στα οποία η εφαρμογή και των δύο τύπων σχέσεων είναι εξίσου σωστή. Επίσης, στοχεύει να διαπιστώσει αν η προτίμηση αυτή σχετίζεται με λάθη στην επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής (προσθετικής ή πολλαπλασιαστικής) που τυχόν κάνουν οι μαθητές όταν λύνουν λεκτικά προβλήματα αναλογίας ή μη (ψευδοαναλογικά προσθετικά προβλήματα) στα οποία λείπει η μία τιμή, δηλαδή αν οι μαθητές με προτίμηση σε προσθετικές σχέσεις επιλέγουν λανθασμένα προσθετική στρατηγική σε πολλαπλασιαστικά προβλήματα και το αντίθετο.

Ερευνητικά ερωτήματα:

1. Υπάρχει προτίμηση των μαθητών ανάμεσα σε προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές σχέσεις, όταν έρχονται αντιμέτωποι με ανοιχτού τύπου προβλήματα; Επηρεάζεται η προτίμηση από το αν οι αριθμοί σχηματίζουν ακέραιους ή μη ακέραιους λόγους;
2. Σε ποιο βαθμό σχετίζεται η προτίμηση αυτή με την επιλογή στρατηγικής (πολλαπλασιαστικής ή προσθετικής) όταν λύνουν λεκτικά προβλήματα αναλογίας ή ψευδοαναλογίας με μια άγνωστη τιμή (missing value);

3. Μεθοδολογία

3.1. Συμμετέχοντες

Το δείγμα αποτέλεσαν 60 μαθητές της ΣΤ’ τάξης από έξι Δημοτικά Σχολεία του νομού Καστοριάς. Οι 53 από αυτούς φοιτούν σε πολυθέσια σχολεία τα οποία βρίσκονται σε αστικές και ημιαστικές περιοχές. Οι υπόλοιποι 7 μαθητές φοιτούν σε ολιγοθέσια σχολεία αγροτικών περιοχών του νομού. Επιλέχτηκαν μαθητές της ΣΤ’ τάξης

Δημοτικού ώστε να έχουν διδαχθεί στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων και να μπορούν να χειρίζονται με σχετική ευκολία απλές πράξεις με φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς. Έτσι μειώνεται η πιθανότητα να επιλέγουν τον ένα τύπο σχέσης έναντι του άλλου λόγω μη ανεπτυγμένων αριθμητικών δεξιοτήτων. Η δειγματοληψία ήταν βολική.

3.2. Μέθοδος

Η μέθοδος της έρευνας είναι ποσοτική αφού η συλλογή δεδομένων γίνεται με ερωτηματολόγια (τεστ) πολλαπλής επιλογής, αλλά έχει και ποιοτικά χαρακτηριστικά, καθώς ζητείται σε κάποια σημεία από τους μαθητές να αιτιολογήσουν ή να δώσουν κάποια άλλη λύση.

3.3. Εργαλείο

Το εργαλείο αποτελείται από δύο τεστ: ένα τεστ προτίμησης και ένα τεστ που περιέχει λεκτικά προβλήματα αναλογίας (θα αναφέρονται ως «πολλαπλασιαστικά») αλλά και ψευδοαναλογίας (συγκεκριμένα, προβλήματα στα οποία πρέπει να εφαρμοστεί προσθετική στρατηγική και θα αναφέρονται ως «προσθετικά») στα οποία δίνονται τρεις τιμές και λείπει η μία. Στο εξής τα προβλήματα αυτά θα αναφέρονται ως «λεκτικά προβλήματα». Οι μαθητές απαντούν πρώτα στο τεστ προτίμησης και στη συνέχεια στο τεστ με τα λεκτικά προβλήματα.

3.3.1. Τεστ προτίμησης

Το τεστ προτίμησης αποτελείται από τρία έργα, καθένα από τα οποία έχει δύο δοκιμές: η μία έχει ποσότητες που σχηματίζουν ακέραιους λόγους, ενώ η άλλη ποσότητες που σχηματίζουν μη ακέραιους λόγους. Οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν επιλέγοντας ανάμεσα σε τέσσερις πιθανές επιλογές, εκ των οποίων η μια είναι η προσθετική απάντηση, η άλλη η πολλαπλασιαστική και μία τρίτη είναι «λανθασμένη», δηλαδή δεν προκύπτει ούτε αν εφαρμόσει κανείς προσθετικές σχέσεις, ούτε πολλαπλασιαστικές αλλά ούτε και αν αθροίσει όλους τους αριθμούς που εμπλέκονται . Επίσης, δίνεται η δυνατότητα να συμπληρώσουν οι μαθητές τη δική τους απάντηση, αν δε συμφωνούν με καμία επιλογή («Άλλο»).

Στόχος του είναι να απαντήσει στο 1ο ερευνητικό ερώτημα: ανάλογα με το αν κάθε μαθητής επιλέξει περισσότερες προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές σχέσεις χαρακτηρίζεται ως «προσθετικός», «πολλαπλασιαστικός» ή τύπος που «επηρεάζεται από τους λόγους» (αν επιλέγει προσθετικές σχέσεις σε μη ακέραιους λόγους και πολλαπλασιαστικές στους ακέραιους λόγους). Οι μαθητές που εμπίπτουν σε αυτές τις κατηγορίες επιλέγονται για να δοθεί απάντηση στο 2ο ερευνητικό ερώτημα, όπως θα εξηγηθεί στη συνέχεια.

Το τεστ περιέχει ανοιχτού τύπου έργα, όπου η χρήση προσθετικής ή πολλαπλασιαστικής στρατηγικής είναι εξίσου σωστή. Συγκεκριμένα αποτελείται από:

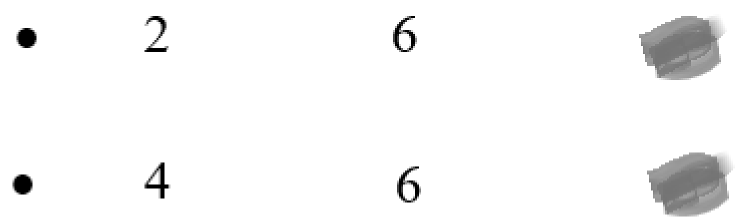
α. Ένα έργο, που αναπαριστά σχηματικά ένα πρόβλημα, στο οποίο δίνονται δύο αριθμοί, των οποίων τη σχέση θα πρέπει να αναγνωρίσουν οι μαθητές (προσθετική ή πολλαπλασιαστική), και να την εφαρμόσουν σε ένα τρίτο αριθμό ώστε να συμπληρώσουν τον αριθμό που λείπει.

Σχήμα 9: Πρώτο έργο προτίμησης (ακέραιος και μη ακέραιος λόγος)

Το έργο αποτελεί μια παραλλαγή αυτού που χρησιμοποιήθηκε από τους Degrande et al. (2019a, 2019b) σε μία διπλή έρευνα που πραγματοποίησαν για να εξετάσουν την ύπαρξη προτίμησης ανάμεσα σε προσθετικές και πολλαπλασιαστικές σχέσεις, καθώς και το πόσο ισχυρή είναι η προτίμηση αυτή, σε μαθητές τρίτης έως έκτης τάξης του δημοτικού σχολείου. Η διαφορά ανάμεσα στο έργο της Degrande και της παρούσας έρευνας έχει να κάνει μόνο με την κατεύθυνση των βελών στη σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος. Συγκεκριμένα, στο αρχικό έργο τα βέλη είχαν κατεύθυνση από πάνω προς τα κάτω, ενώ στην παρούσα έρευνα από αριστερά προς τα δεξιά. Αυτό επιλέχτηκε σκόπιμα, ώστε να μην παραπέμπει στους πίνακες ανάλογων ποσών, όπως συνήθως διδάσκονται στην Ελλάδα, και τυχόν επηρεάσει την προτίμηση των μαθητών.

Αντίστοιχα έργα χρησιμοποιήθηκαν και σε πιο πρόσφατη έρευνα (Vanluydt et al., 2022a) αλλά με μη συμβολική μορφή (πλήθος χαντρών, μήκος ράβδων), καθώς αφορούσαν μαθητές νηπιαγωγείου έως τρίτης τάξης δημοτικού.

β. Ένα έργο στο οποίο οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν ένα μοτίβο.

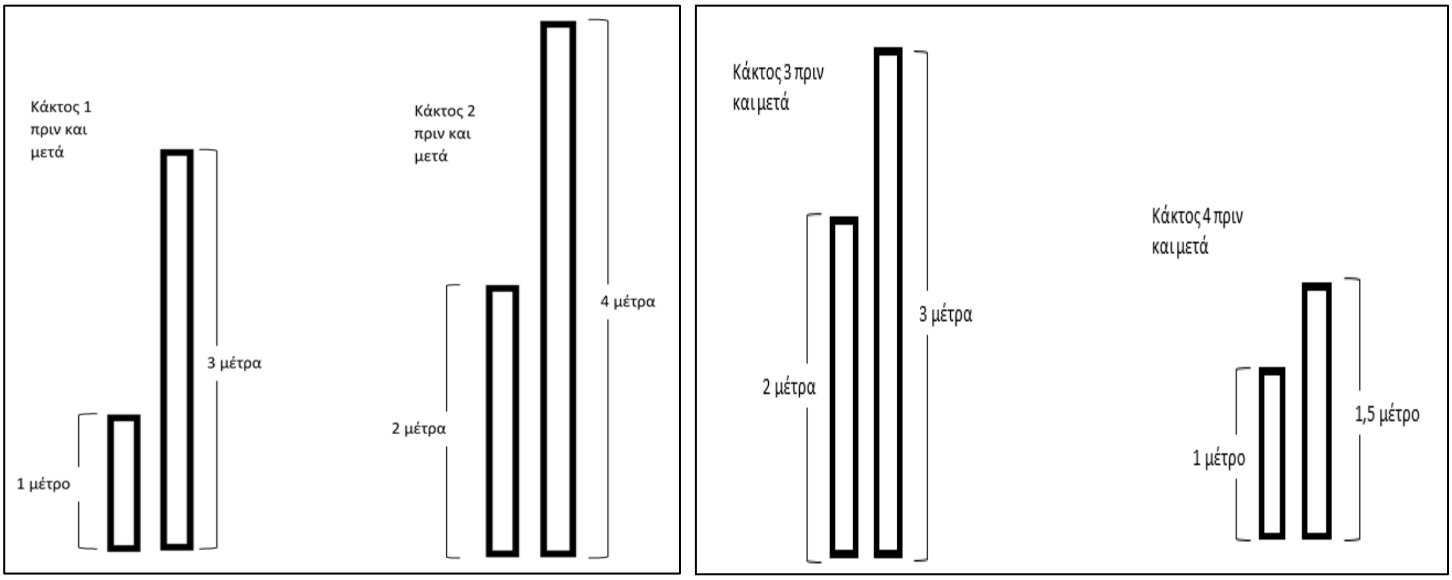


Σχήμα 10: Δεύτερο έργο προτίμησης (ακέραιος και μη ακέραιος λόγος)

Στην πρώτη δοκιμή του σχήματος 10, μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι προστίθενται κάθε φορά 4, επομένως ο αριθμός που λείπει είναι το 10. Διαφορετικά μπορεί κανείς να σκεφτεί ότι κάθε φορά πολλαπλασιάζουμε με το 3, άρα ο επόμενος αριθμός είναι το 18.

Το συγκεκριμένο έργο αντλήθηκε από την έρευνα των Vanluydt et al. (2022a) αλλά αντί για κουκίδες που χρησιμοποίησαν οι συγκεκριμένοι ερευνητές, καθώς απευθύνονταν σε παιδιά μικρότερης ηλικίας, χρησιμοποιήθηκε η συμβολική μορφή των αριθμών. Η επιλογή αυτή έγινε αφενός γιατί η παρούσα έρευνα απευθύνεται σε μεγαλύτερους μαθητές και αφετέρου γιατί η χρήση κουκίδων για μεγαλύτερους αριθμούς θα δυσκόλευε την καταμέτρηση τους και θα οδηγούσε ευκολότερα σε λάθη.

γ. Ένα έργο σύγκρισης ποσοτήτων, όπου οι μαθητές καλούνται να συγκρίνουν τη μεταβολή του μήκους δύο αντικειμένων (κάκτων), να επιλέξουν ποια μεταβολή ήταν μεγαλύτερη και να δικαιολογήσουν την απάντησή τους.



Σχήμα 11: Τρίτο έργο προτίμησης (ακέραιος και μη ακέραιος λόγος)

Βλέποντας, για παράδειγμα, την πρώτη δοκιμή από προσθετική σκοπιά, και οι δύο κάκτοι έχουν μεγαλώσει το ίδιο, καθώς η διαφορά ανάμεσα στην αρχική και την τελική κατάσταση είναι ίδια, αφού 3-1=2 και 4-2=2. Από πολλαπλασιαστική σκοπιά όμως, ο πρώτος κάκτος μεγάλωσε περισσότερο, αφού τριπλασιάστηκε, ενώ ο δεύτερος διπλασιάστηκε.
Στο συγκεκριμένο έργο ζητείται από τους μαθητές να εξηγήσουν την απάντησή τους για να γίνει σαφές αν εντόπισαν κάποιου είδους σχέση ανάμεσα στις αρχικές και τις τελικές τιμές και δεν απαντούν απλώς συγκρίνοντας το τελικό μήκος κάθε κάκτου. Εξάλλου, όπως αναφέρουν οι Turniaire & Pulos (1985) στα προβλήματα σύγκρισης, αν ζητηθεί από τους μαθητές να απαντήσουν χωρίς να εξηγήσουν, αυτό μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα, καθώς στη σωστή απάντηση μπορεί κανείς να οδηγηθεί με αναλογικές και μη αναλογικές στρατηγικές.

Το έργο αποτελεί παραλλαγή αυτού που χρησιμοποιήθηκε από τους Lamon και Lesh (1992) και την Lamon (στο Council & Education, 1993), οι οποίοι ζητούσαν από τους μαθητές να συγκρίνουν τη μεταβολή του μήκους δύο φιδιών και δύο δέντρων αντίστοιχα. Παρόμοιο έργο χρησιμοποίησαν και οι Degrande et al. (2018a) για να διαπιστώσουν αν η ύπαρξη συνεχών ή διακριτών ποσοτήτων στο πρόβλημα επηρεάζει την επιλογή των μαθητών. Κατασκεύασαν δύο παραλλαγές του έργου με τα φίδια των Lamon και Lesh. Παρουσίασαν δύο φίδια σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές και οι μαθητές καλούνταν να εντοπίσουν ποιο φίδι μεγάλωσε περισσότερο. Στην πρώτη παραλλαγή δεν δινόταν κάποια πληροφορία για το μήκος (συνεχείς ποσότητες), ενώ στη δεύτερη περίπτωση το μήκος μπορούσε να εκτιμηθεί, καθώς τοποθετήθηκαν κατάλληλα κουκίδες στο σώμα των φιδιών, μετατρέποντας έτσι τις ποσότητες σε διακριτές. Παρατήρησαν ότι οι μαθητές δυσκολεύονταν περισσότερο να αιτιολογήσουν την επιλογή τους όταν οι ποσότητες ήταν συνεχείς. Για το λόγο αυτό, και επειδή η συλλογή δεδομένων έγινε με ερωτηματολόγια και όχι με συνεντεύξεις, κρίθηκε σκόπιμο στην παρούσα έρευνα, δίπλα σε κάθε κάκτο να αναγράφεται και η τιμή του μήκους με συμβολική μορφή, ώστε να διευκολυνθούν οι μαθητές στο να εξηγήσουν την επιλογή τους.

Οι τρεις αυτοί διαφορετικοί τύποι ανοιχτών προβλημάτων, μια σχηματική αναπαράσταση ενός προβλήματος τριών γνωστών τιμών και μιας άγνωστης, ένα μοτίβο και ένα πρόβλημα σύγκρισης, επιλέχτηκαν ώστε να υπάρχει μια ποικιλία έργων που να ερευνά την προτίμηση των μαθητών ανάμεσα σε προσθετικές και πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιήθηκαν μόνο δύο δοκιμές σε κάθε έργο ήταν πρώτον για να μην κουράσει τους μαθητές και δεύτερον για να μη αποκτήσουν μια τάση να απαντούν με τον ίδιο τρόπο στα ερωτήματα λόγω της επανάληψης.

3.3.2. Τεστ λεκτικών προβλημάτων

Στόχος του τεστ είναι να απαντήσει στο 2ο ερευνητικό ερώτημα, αφού συσχετιστεί με το τεστ προτίμησης, δηλαδή να διερευνηθεί αν η προσθετική προτίμηση σχετίζεται με σωστές απαντήσεις στα προσθετικά προβλήματα, αλλά και προσθετικά σφάλματα στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα ή αντίστοιχα αν η πολλαπλασιαστική προτίμηση οδηγεί σε σωστή επίλυση πολλαπλασιαστικών προβλημάτων, αλλά και σε πολλαπλασιαστικά σφάλματα στα προσθετικά προβλήματα. Επιδιώκεται, επίσης, να διαπιστωθεί αν οι μαθητές που ανήκουν σε έναν από τους τύπους προτίμησης («πολλαπλασιαστικοί», «προσθετικοί», «επιρροή από λόγους») συνεχίζουν να ανήκουν στον αντίστοιχο τύπο βάσει των απαντήσεών τους στο τεστ λεκτικών προβλημάτων.

Για το τεστ αυτό χρησιμοποιούνται τα λεκτικά προβλήματα που φαίνονται στους Πίνακες 1 και 2. Σε κάθε τεστ υπάρχουν τέσσερα προσθετικά (ψευδοαναλογικά) και τέσσερα πολλαπλασιαστικά προβλήματα.

Πίνακας 1: *Προσθετικά προβλήματα*

Ακέραιος λόγος:
1. Δύο εκτυπωτές εκτυπώνουν σελίδες το ίδιο γρήγορα, ο ένας όμως ξεκινάει πρώτος. Όταν ο δεύτερος εκτυπωτής έχει εκτυπώσει 2 σελίδες, ο πρώτος έχει εκτυπώσει 8 σελίδες. Όταν ο δεύτερος εκτυπωτής θα έχει εκτυπώσει 4 σελίδες, πόσες σελίδες θα έχει εκτυπώσει ο πρώτος;
2. Η μαμά της Άννας είναι πιο νέα από τον μπαμπά της. Όταν η μαμά της ήταν 3 χρονών, ο μπαμπάς της ήταν 6. Τώρα που η μαμά της είναι 30 χρονών, πόσο χρονών είναι ο μπαμπάς της;
Μη ακέραιος λόγος:
1. Δύο αυτοκινητάκια, ένα κόκκινο και ένα μπλε, κάνουν γύρους σε μια πίστα. Είναι το ίδιο γρήγορα και τρέχουν με σταθερή ταχύτητα, αλλά το κόκκινο ξεκίνησε πρώτο. Όταν το μπλε έκανε 4 γύρους, το κόκκινο είχε κάνει 6 γύρους. Όταν το μπλε ολοκληρώσει 10 γύρους, πόσους γύρους θα έχει κάνει το κόκκινο;
2. Ο Δημήτρης και η Αλίκη είναι αδέρφια. Όταν ο Δημήτρης ήταν 8 χρονών η Αλίκη ήταν 20. Όταν ο Δημήτρης θα είναι 12 χρονών πόσο χρονών θα είναι η Αλίκη;

Πίνακας 2: *Πολλαπλασιαστικά προβλήματα*

Ακέραιος λόγος:
1. Στο εργαστήριο ρομποτικής κατασκευάστηκαν δύο ρομποτάκια, ο Μπιπ και ο Μπαμ, που μπορούσαν να κινούνται με σταθερή ταχύτητα να κάνουν τον γύρο της τάξης. Ξεκίνησαν μαζί αλλά ο Μπαμ ήταν γρηγορότερος από τον Μπιπ. Όταν ο Μπιπ έκανε 2 γύρους, ο Μπαμ είχε κάνει 8 γύρους. Όταν ο Μπιπ κάνει 4 γύρους, πόσους γύρους θα έχει ο Μπαμ;
2. Δύο αυτοκίνητα, ένα πιο αργό και ένα πιο γρήγορο, ξεκινούν μαζί και τρέχουν με σταθερή ταχύτητα. Όταν το πρώτο διένυσε 3 χιλιόμετρα, το δεύτερο έχει διανύσει 6 χιλιόμετρα. Όταν το πρώτο διανύσει 30 χιλιόμετρα, πόσα χιλιόμετρα θα έχει διανύσει το δεύτερο;
Μη ακέραιος λόγος:
1. Στο γραφείο υπάρχουν δύο φωτοτυπικά μηχανήματα. Ξεκινούν να κάνουν αντίγραφα την ίδια στιγμή αλλά το ένα είναι πιο γρήγορο από το άλλο. Όταν το πρώτο έκανε 4 αντίγραφα, το δεύτερο είχε κάνει 6 αντίγραφα. Όταν το πρώτο μηχάνημα θα έχει κάνει 10 αντίγραφα, πόσα θα έχει κάνει το δεύτερο;
2. Δύο αεροπλάνα απογειώνονται την ίδια στιγμή και πετούν με σταθερή ταχύτητα, αλλά το ένα κινείται γρηγορότερα. Όταν το πρώτο διένυσε 8 χιλιόμετρα, το δεύτερο έχει διανύσει 20 χιλιόμετρα. Όταν το πρώτο διανύσει 12 χιλιόμετρα, πόσα χιλιόμετρα θα έχει διανύσει το δεύτερο;

Δύο προβλήματα από κάθε κατηγορία έχουν αριθμούς που σχηματίζουν ακέραιους λόγους (integer internal and external ratio), ενώ τα δύο άλλα έχουν αριθμούς που σχηματίζουν μη ακέραιους λόγους (non integer internal and external ratio).

Οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν ανάμεσα σε τρεις διαφορετικές λύσεις που δίνονται, ποια είναι η σωστή. Η μια απάντηση προκύπτει αν εφαρμοστεί προσθετική στρατηγική, η άλλη αν εφαρμοστεί πολλαπλασιαστική στρατηγική και μία τρίτη που δεν προκύπτει με κανέναν από αυτούς τους τρόπους. Επίσης, δίνεται η δυνατότητα να γράψουν οι μαθητές τη δική τους λύση, αν δεν συμφωνούν με καμία επιλογή («Άλλο»).

Χρησιμοποιούνται οι ίδιοι αριθμοί στα προσθετικά και στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα. Αυτό γίνεται για να μειωθεί η πιθανότητα να επηρεάσουν οι αριθμοί την επιλογή των μαθητών. Επίσης, έχουν την ίδια σύνταξη, δομή και παρόμοια έκταση, ώστε να μην επηρεάζεται η δυσκολία τους από γλωσσικά χαρακτηριστικά (Riley, Greeno & Heller, 1983).

Τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται στην παρούσα έρευνα είναι παραλλαγές, όσον αφορά το γενικό πλαίσιο (context), λεκτικών ψευδοαναλογικών προβλημάτων που διατυπώθηκαν από τους Van Dooren et al. Συγκεκριμένα τα προβλήματα με τους εκτυπωτές και τα φωτοτυπικά μηχανήματα αποτελούν παραλλαγή του προβλήματος

> Η Λιέν και ο Πίτερ διαβάζουν το ίδιο βιβλίο. Διαβάζουν με την ίδια ταχύτητα, αλλά ο Πίτερ ξεκίνησε νωρίτερα. Όταν η Λιέν έχει διαβάσει 4 σελίδες, ο Πίτερ έχει διαβάσει 10 σελίδες. Όταν η Λιέν έχει διαβάσει 6 σελίδες, πόσες σελίδες έχει διαβάσει ο Πίτερ; (Van Dooren et al., 2010b, p. 24).

Τα προβλήματα με τα αυτοκινητάκια και τα ρομποτάκια αποτελούν παραλλαγή του προβλήματος

> Η Έλεν και ο Κιμ τρέχουν σε έναν στίβο. Τρέχουν το ίδιο γρήγορα αλλά η Έλεν ξεκίνησε αργότερα. Όταν η Έλεν έχει τρέξει 5 γύρους, ο Κιμ έχει τρέξει 15 γύρους. Όταν η Έλεν έχει τρέξει 30 γύρους, πόσους γύρους έχει τρέξει ο Κιμ; (Cramer et al., 1993 p. 159; Van Dooren et al., 2005)

Στην ίδια λογική με το παραπάνω, αλλά με συνεχή μεγέθη, εμπίπτουν τα προβλήματα με τα δύο αυτοκίνητα και τα αεροπλάνα σε αντιστοιχία με το πρόβλημα που χρησιμοποίησαν οι Fernandez et al. (2012, p.426): «Η Ανν και η Ρέιτσελ κάνουν σκέιτ. Ξεκίνησαν μαζί αλλά η Ρέιτσελ είναι πιο γρήγορη. Όταν η Ανν διέσχισε 80μ., η Ρέιτσελ είχε διασχίσει 120μ. Αν η Ανν έχει διασχίσει 200μ., πόσα μέτρα θα έχει διασχίσει η Ρέιτσελ;».

Τα προβλήματα με την ηλικία αποτελούν παραλλαγή του προβλήματος «Σήμερα ο Μπερτ γίνεται 2 χρονών και η Λις γίνεται 6 χρονών. Όταν ο Μπερτ είναι 12 χρονών, πόσο χρονών θα είναι η Λις;» (Van Dooren et al., 2005, p. 65)

Επιλέχτηκαν τα προβλήματα αυτά γιατί με μικρές αλλαγές στην διατύπωση μπορούν να μετατραπούν από προβλήματα αναλογίας σε προβλήματα ψευδοαναλογίας προσθετικού συλλογισμού και το αντίστροφο, εκτός από τα προβλήματα με την ηλικία που είναι καθαρά προσθετικά. Συγκεκριμένα φράσεις όπως «ξεκίνησαν μαζί» και «το ένα είναι πιο γρήγορο από το άλλο» βρίσκονται στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα, ενώ φράσεις όπως «τρέχουν το ίδιο γρήγορα» και «το ένα ξεκίνησε πρώτο» υπάρχουν στα προσθετικά προβλήματα.

3.4. Διαδικασία

Ο διαμοιρασμός των ερωτηματολογίων έγινε την ίδια χρονική περίοδο σε όλα τα σχολεία, αρχές Δεκεμβρίου, πριν διδαχτούν οι μαθητές το κεφάλαιο «Λόγοι και Αναλογίες» των μαθηματικών στην ΣΤ’ τάξης από τους εκπαιδευτικούς των τάξεων. Οι εκπαιδευτικοί είχαν την οδηγία να ανακοινώσουν στους μαθητές ότι πρόκειται να απαντήσουν σε κάποια κουίζ, επιλέγοντας ανάμεσα σε απαντήσεις που έδωσαν άλλοι συνομήλικοί τους όταν απάντησαν στα ίδια προβλήματα, για να διαπιστωθεί κατά πόσο συμφωνούν. Δεν διατυπώθηκε ρητά αν οι μαθητές μπορούσαν να επιλέξουν μόνο μία ή περισσότερες σωστές απαντήσεις, παρά μόνο να επιλέξουν όσα θεωρούν ότι είναι σωστά και συμφωνούν με αυτά. Οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους όσο χρόνο χρειάζονταν.

Πρώτα δόθηκε το τεστ προτίμησης (ερωτηματολόγιο 1). Υπήρχαν δύο παραλλαγές της έντυπης μορφής του ερωτηματολογίου, με τις ίδιες ακριβώς ερωτήσεις, απλώς σε διαφορετική σειρά για να αποφευχθεί η αντιγραφή. Όταν όλοι οι μαθητές τελείωναν το τεστ προτίμησης, τότε μοιραζόταν το τεστ με τα λεκτικά προβλήματα (ερωτηματολόγιο 2). Αν ο εκπαιδευτικός έκρινε ότι δεν υπήρχε διαθέσιμος χρόνος, δινόταν η δυνατότητα να απαντηθεί το τεστ λεκτικών προβλημάτων την επόμενη μέρα, ώστε να μην μεσολαβήσει πολύς χρόνος ανάμεσα στα δύο ερωτηματολόγια. Για το ερωτηματολόγιο 2 υπήρχαν επίσης δύο παραλλαγές, όσον αφορά μόνο τη σειρά των ερωτήσεων, για τον λόγο που προαναφέρθηκε.

Για να διατηρηθεί η ανωνυμία στην διαδικασία αλλά και για να ταυτοποιηθεί ότι ο ίδιος μαθητής απάντησε τα δύο ερωτηματολόγια, είχε δοθεί σε κάθε μαθητή ένας κωδικός τον οποίο έπρεπε να αναγράψει σε κάθε ερωτηματολόγιο. Επίσης, συγκεντρώθηκαν έντυπα συγκατάθεσης από τους γονείς ή κηδεμόνες των μαθητών για τη συμμετοχή τους στην έρευνα.

3.5. Ανάλυση δεδομένων

Ανάλογα με την επιλογή που κύκλωναν οι μαθητές στα ερωτηματολόγια, οι απαντήσεις τους καταγράφηκαν ως «προσθετικές», «πολλαπλασιαστικές», ή «άλλες» απαντήσεις. Στις «άλλες» απαντήσεις περιλαμβάνονται οι περιπτώσεις στις οποίες οι μαθητές επέλεγαν είτε την τρίτη «λανθασμένη» επιλογή (που δεν προκύπτει ούτε αν εφαρμόσει κανείς προσθετικές σχέσεις, ούτε πολλαπλασιαστικές αλλά ούτε και αν αθροίσει όλους τους αριθμούς που εμπλέκονται) είτε την επιλογή «άλλο», όπου οι μαθητές συμπλήρωναν μία άλλη λύση στην περίπτωση που δεν συμφωνούσαν με καμία από τις επιλογές που δίνονταν. Επίσης, στις «άλλες» απαντήσεις συμπεριλήφθηκε και η περίπτωση στην οποία ο μαθητής κύκλωνε ταυτόχρονα και την προσθετική και την πολλαπλασιαστική απάντηση.

Από τους μαθητές που επέλεξαν την απάντηση «άλλο», κάποιοι δεν έδωσαν εξήγηση για την επιλογή τους. Από όσους αιτιολόγησαν την επιλογή τους φάνηκε ότι στο πρώτο έργο του τεστ προτίμησης (έργο με βελάκια) απλά πολλαπλασίασαν τους δύο πρώτους αριθμούς και στο δεύτερο έργο του ίδιου τεστ (μοτίβο) απλά πρόσθεσαν ή πολλαπλασίασαν τους δύο αριθμούς που δίνονταν. Ένας από τους μαθητές συστηματικά έκανε το παραπάνω χρησιμοποιώντας πολλαπλασιασμό για κάθε δοκιμή των δύο πρώτων έργων.

Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν τύποι μαθητών, ανάλογα με τον τρόπο που απάντησαν στις δοκιμές των δύο ερωτηματολογίων. Για κάθε μαθητή δόθηκαν δύο ξεχωριστοί χαρακτηρισμοί, ένας για το τεστ προτίμησης και ένας για το τεστ λεκτικών προβλημάτων. Αυτοί αναλύονται παρακάτω, στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων.

Η στατιστική επεξεργασία των δεδομένων έγινε στο IBM SPSS Statistics 28.0.0.0.

4. Αποτελέσματα

4.1. Τεστ προτίμησης

4.1.1. Συνολικές τάσεις στην επιλογή απαντήσεων

Καθώς στο τεστ προτίμησης περιέχονταν συνολικά 6 δοκιμές, κάθε μαθητής θα μπορούσε να επιλέξει από καμία έως και 6 απαντήσεις κάθε κατηγορίας (π.χ. ένας μαθητής θα μπορούσε στο σύνολο των 6 ερωτημάτων να κάνει 4 προσθετικές, 1 πολλαπλασιαστική και 1 «άλλη» επιλογή). Αντίστοιχα, κάθε κατηγορία απάντησης θα μπορούσε να εμφανιστεί από 0 έως 6 φορές στην εξάδα των απαντήσεων του κάθε μαθητή. Στον Πίνακα 3 παρουσιάζεται το πλήθος των μαθητών που έδωσαν ν απαντήσεις ίδιας κατηγορίας (ν=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) στο σύνολο των 6 δοκιμών του τεστ προτίμησης, ανά κατηγορία απάντησης.

Από τα στοιχεία του Πίνακα 3 φαίνεται ότι η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών (Ν= 43, 71,7%) επέλεξαν προσθετική απάντηση σε τουλάχιστον 4 από τις 6 δοκιμές, με 9 μαθητές να απαντούν και στα 6 ερωτήματα προσθετικά. Το αντίστοιχο πλήθος των μαθητών στην κατηγορία Πολλαπλασιαστική Απάντηση ήταν 2 (3,3%), ενώ κανένας μαθητής δεν απάντησε σε όλα τα ερωτήματα πολλαπλασιαστικά. Η διάμεσος του πλήθους των προσθετικών επιλογών των μαθητών ήταν 4 (Ενδ. Εύρος 2) και των πολλαπλασιαστικών επιλογών 1 (Ενδ. Εύρος 2) στο σύνολο των 6.

Οι περισσότεροι μαθητές δεν επέλεξαν την απάντηση που δεν προέκυπτε από προσθετικό ή πολλαπλασιαστικό συλλογισμό, ούτε την επιλογή «άλλο». Μόνο ένας μαθητής επέλεξε σε μία δοκιμή και την προσθετική και τη πολλαπλασιαστική απάντηση.

Στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται οι συχνότητες και τα ποσοστά των κατηγοριών απάντησης ανά έργο, ξεχωριστά για τις δοκιμές των ακέραιων και μη ακέραιων λόγων.

Πίνακας 3: *Πλήθος μαθητών που έδωσαν ν απαντήσεις ίδιας κατηγορίας* (ν=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) *στο σύνολο των 6 δοκιμών του τεστ προτίμησης, ανά κατηγορία*

Κατηγορία απάντησης	Πλήθος εμφανίσεων της κάθε κατηγορίας απάντησης στην εξάδα των απαντήσεων							
	0	1	2	3	4	5	6	Σύνολο
Προσθετικές	0	1	8	8	15	19	9	60
Πολλαπλασιαστικές	19	20	14	5	1	1	0	60
Άλλες	39	11	6	1	3	0	0	60

Πίνακας 4: *Συχνότητες απαντήσεων στο τεστ προτίμησης για τον ακέραιο και μη ακέραιο λόγο*

Είδος λόγου	Έργο	Κατηγορία απάντησης							
		Προσθετική		Πολλαπλασιαστική		Άλλη		Σύνολο	
		n	%	*n*	%	*n*	%	*n*	%
Ακέραιος	1	23	38.3%	33	55.0%	4	6.7%	60	100.0%
	2	41	68.3%	8	13.3%	11	18.3%	60	100.0%
	3	44	73.3%	10	16.7%	6	10.0%	60	100.0%
	Σύνολο	108	60.0%	51	28.3%	21	11.7%	180	100.0%
Μη ακέραιος	1	43	71.7%	9	15.0%	8	13.3%	60	100.0%
	2	51	85.00%	1	1.7%	8	13.3%	60	100.0%
	3	48	80.00%	11	18.3%	1	1.7%	60	100.0%
	Σύνολο	142	78.9%	21	11.7%	17	9.4%	180	100.0%
Σύνολο του τεστ		250	69.4%	72	20.0%	38	10.6%	360	100.0%

Από τα στοιχεία του Πίνακα 4 γίνεται φανερό, όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, ότι οι μαθητές έκαναν κυρίως είτε προσθετικές επιλογές (69,4%), είτε πολλαπλασιαστικές (20%). Οι προσθετικές απαντήσεις ήταν πολύ περισσότερες από τις πολλαπλασιαστικές τόσο στον ακέραιο, όσο στον μη ακέραιο λόγο. Στον μη ακέραιο λόγο η διαφορά αυτή γίνεται πιο έντονη. Όσον αφορά την κατηγορία «άλλες απαντήσεις», μικρό ποσοστό (5,8%) των απαντήσεων που επέλεξαν οι μαθητές δεν προκύπτει ούτε από προσθετικό ούτε από πολλαπλασιαστικό συλλογισμό, ενώ ακόμα μικρότερο ποσοστό (4,4%) διάλεξαν την επιλογή «άλλο». Στο σύνολο του δείγματος μόνο μία φορά έγινε η επιλογή και της προσθετικής και της πολλαπλασιαστικής απάντησης.

Εξετάζοντας τα στοιχεία του Πίνακα 4 για κάθε έργο ξεχωριστά παρατηρούμε τα εξής: για το πρώτο έργο φαίνεται ότι η δοκιμή με τον ακέραιο λόγο αποσπά περισσότερες πολλαπλασιαστικές απαντήσεις (55%), ενώ αντίθετα στον μη ακέραιο λόγο οι πολλαπλασιαστικές απαντήσεις μειώνονται πολύ (15%) με ταυτόχρονη αύξηση των προσθετικών απαντήσεων. Στα άλλα δύο έργα η επιρροή των λόγων είναι λιγότερο εμφανής. Στο 2ο έργο, ακόμα και στον ακέραιο λόγο οι προσθετικές απαντήσεις (68,3%) είναι πολύ περισσότερες από τις πολλαπλασιαστικές (13,3%) και η διαφορά αυτή αυξάνεται στον μη ακέραιο λόγο. Μόνο ένας μαθητής επιλέγει και την προσθετική και την πολλαπλασιαστική απάντηση στον ακέραιο λόγο, δείχνοντας ότι κατανοεί την ανοιχτότητα του έργου, αλλά δεν κάνει το ίδιο και στον μη ακέραιο λόγο, όπου επιλέγει την προσθετική απάντηση. Στο 3ο έργο φαίνεται ότι οι προσθετικές απαντήσεις υπερτερούν σημαντικά των πολλαπλασιαστικών και ότι το είδος του λόγου διαφοροποιεί σε πολύ μικρό βαθμό τις επιλογές των μαθητών. Πάντως, και στα τρία έργα ο μη ακέραιος λόγος οδηγεί σε περισσότερες προσθετικές απαντήσεις, αλλά στο 1ο έργο η διαφορά αυτή είναι μεγαλύτερη και φαίνεται ότι υπάρχει μετατόπιση από την επιλογή πολλαπλασιαστικών απαντήσεων στον ακέραιο λόγο σε επιλογή προσθετικών απαντήσεων στον μη ακέραιο λόγο.

Για να διερευνηθεί αν η σχέση μεταξύ του είδους του λόγου και του είδους των απαντήσεων που επιλέγουν οι μαθητές (προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές) είναι σημαντική, πραγματοποιήθηκε τεστ χ^2 για το σύνολο των προσθετικών και πολλαπλασιαστικών απαντήσεων στο τεστ προτίμησης. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών, $\chi^2(1,N=322)=17.0769$, $p<.001$.

4.1.2. Κατηγοριοποίηση των μαθητών

Για να διερευνηθεί περαιτέρω η συστηματικότητα με την οποία απαντούν οι μαθητές στο τεστ προτίμησης κατηγοριοποιήθηκαν σε ομάδες ανάλογα με τις απαντήσεις που επέλεξαν και στις 6 δοκιμές . Τα κριτήρια της κατηγοριοποίησης τέθηκαν εκ των προτέρων και ήταν σύμφωνα με αυτά που είχαν χρησιμοποιηθεί σε προηγούμενες έρευνες (Degrande et al., 2018b; Vanluydt et al., 2022b). Πιο συγκεκριμένα, εξετάστηκε αν οι μαθητές επιλέγουν συστηματικά προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές απαντήσεις (Προσθετικός τύπος και Πολλαπλασιαστικός τύπος, αντίστοιχα), ή αν επηρεάζονται από την ακεραιότητα ή μη των λόγων (Επιρροή από λόγους), ως εξής,

- **Προσθετικός τύπος**: Επιλέγει σε τουλάχιστον 4 δοκιμές την προσθετική λύση (αλλά δεν ανήκει στην κατηγορία «επιρροή από λόγους» η οποία περιγράφεται παρακάτω)
- **Πολλαπλασιαστικός τύπος**: Επιλέγει σε τουλάχιστον 4 δοκιμές την πολλαπλασιαστική λύση
- **«Επιρροή του είδους του λόγου»**: Έχει επιλέξει πολλαπλασιαστική λύση σε τουλάχιστον 2 από τις 3 δοκιμές με ακέραιους λόγους και προσθετική λύση σε τουλάχιστον 2 από τις 3 δοκιμές με μη ακέραιους λόγους.
- Οι υπόλοιποι μαθητές χαρακτηρίστηκαν ως **«Άλλος τύπος»**

Επίσης, για να διερευνηθεί αν κάθε έργο επηρεάζει διαφορετικά την προτίμηση και πώς η προτίμηση στα επιμέρους έργα σχετίζεται με τον τρόπο απάντησης στα λεκτικά προβλήματα (αναλύονται παρακάτω), δημιουργήθηκαν τύποι και για τα επιμέρους έργα με τα εξής κριτήρια:

- **Προσθετικός τύπος**: Απαντά και στις δύο δοκιμές κάθε έργου προσθετικά
- **Πολλαπλασιαστικός τύπος**: Απαντά και στις δύο δοκιμές κάθε έργου πολλαπλασιαστικά
- **«Επιρροή του είδους του λόγου»**: Απαντά πολλαπλασιαστικά στην δοκιμή με τον ακέραιο λόγο αλλά προσθετικά στην δοκιμή με τον μη ακέραιο λόγο.
- **«Άλλος τύπος»:** Δεν κατατάσσεται στις παραπάνω κατηγορίες

Στον Πίνακα 5 παρουσιάζονται οι τύποι μαθητών όπως προέκυψαν από κάθε έργο ξεχωριστά, αλλά και από το σύνολο του τεστ προτίμησης. Παρατηρούμε ότι οι περισσότεροι μαθητές ανήκουν στον «προσθετικό» τύπο, άρα επιλέγουν συστηματικά την προσθετική απάντηση, τόσο στο σύνολο, όσο και στα επιμέρους έργα. Μικρό ποσοστό των μαθητών ανήκει στον «πολλαπλασιαστικό» τύπο και μάλιστα στο σύνολο των έργων μόνο ένας μαθητής κάνει συστηματικά πολλαπλασιαστικές επιλογές. Ένα σημαντικό ποσοστό (35%) επηρεάζεται από το είδος των λόγων στο πρώτο έργο, ενώ στα άλλα δύο έργα το ποσοστό αυτό είναι αρκετά μικρότερο. Στο σύνολο των έργων μόλις το 8,3% επηρεάζεται συστηματικά από το είδος των λόγων. Το 25% των μαθητών δεν μπορούσε να καταταχθεί βάσει των κριτηρίων που τέθηκαν στις παραπάνω κατηγορίες και αποτελούν τον «άλλο» τύπο.

Πίνακας 5: *Συχνότητες τύπων μαθητών βάσει των απαντήσεων στο τεστ προτίμησης*

	1ο έργο		2ο έργο		3ο έργο		Γενικός χαρακτηρισμός από τεστ προτίμησης	
Τύπος	*n*	%	*n*	%	*n*	%	*n*	%
Προσθετικός	21	35.0%	37	61.7%	40	66.7%	39	65.0%
Πολλαπλ/κος	7	11.7%	2	3.3%	8	13.3%	1	1.7%
Επιρροή είδους λόγου	21	35.0%	8	13.3%	2	3.3%	5	8.3%
Άλλος	11	18.3%	13	21.7%	10	16.7%	15	25.0%
Σύνολο	60	100%	60	100%	60	100%	60	100%

4.1.3. Εξηγήσεις: Συμβατότητα με την επιλογή απάντησης

Στο 3ο έργο ζητήθηκε από τους μαθητές να εξηγήσουν γραπτώς την απάντηση που επέλεξαν. Από την ανάλυση των εξηγήσεων προέκυψαν οι παρακάτω κατηγορίες:

- **Προσθετική εξήγηση**: Όταν ο μαθητής ξεκάθαρα περιγράφει μια προσθετική στρατηγική, βλέποντας την απόλυτη διαφορά (absolute growth) στο μήκος των κάκτων.

π.χ. «Ο κάκτος 3 ψήλωσε 1μ. ενώ ο κάκτος 4 ψήλωσε 0,5μ. 3-2=1 και 1,5-1=0,5».

« Γιατί από το 1 μέχρι το 3 είναι 2 και από το 2 μέχρι το 4 είναι άλλα 2».

- **Πολλαπλασιαστική εξήγηση**: Όταν περιγράφει μια αναλογική στρατηγική, όπως συγκρίνοντας λόγους χιαστί, ισοδύναμα κλάσματα, διαίρεση (στους λόγους εντός).

  π.χ. «Το 1 μέτρο στον πρώτο κάκτο είναι το 1/3. Στον δεύτερο κάκτο 0,5 μέτρα είναι και σε αυτόν 1/3, άρα είναι ίσο».

  «Διότι το μισό του 2 είναι το 1 και το μισό του 3 είναι το 1,5 άρα ψήλωσαν το ίδιο».

  «$\frac{10}{30}$ $\frac{20}{40}$ $\frac{10}{30}$ $\frac{20}{40}$ 10x40=400, 30x20=600».

- **Πολλαπλασιαστική-ελλιπής εξήγηση:** περιγράφει μια πολλαπλασιαστική στρατηγική αλλά δεν μπορεί να την εξηγήσει ξεκάθαρα.

  π.χ. «Οι αριθμοί 2 και 3 είναι ισοδύναμοι με τους αριθμούς 1 και 1,5 που είναι τα μισά τους».

  «Πιστεύω πως ο κάκτος 1 ψήλωσε πιο πολύ διότι από το 1 μέτρο πήγε στα 3μ. ενώ ο άλλος από τα 2 μέτρα πήγε στα 4. Ο 2 ήταν πιο κοντά στο 4 ενώ ο 1 ήταν πιο μακριά από το 3».

  «Ψήλωσε περισσότερο ο κάκτος 3 γιατί και οι δύο ψήλωσαν 2 μέτρα αλλά ο κάκτος 3 ήταν πιο κοντός στην αρχή».

- **Ελλιπής εξήγηση**: Όταν κάνει μια ποιοτική σύγκριση ή συγκρίνει μόνο το τελικό ύψος

  π.χ. «Ο κάκτος 3 ψήλωσε περισσότερο γιατί είναι 3 μέτρα ενώ ο κάκτος 4 είναι 1,5 μέτρο».

  «Γιατί αν περάσει ένας χρόνος, ο κάκτος 3 θα έχει ψηλώσει περισσότερο από τον κάκτο 4».

- **Καμία εξήγηση**: Δεν έχει δώσει καμία εξήγηση, δεν έγραψε τίποτα.

Παρόμοια κατηγοριοποίηση χρησιμοποιήθηκε από τους Degrande et al. (2018a) μόνο που στην έρευνά τους υπήρχε και η κατηγορία «προσθετική και πολλαπλασιαστική» εξήγηση, όταν χρησιμοποιούσαν οι μαθητές ταυτόχρονα και τα δύο είδη συλλογισμού. Η περίπτωση αυτή δεν παρατηρήθηκε στην παρούσα έρευνα.

Στον Πίνακα 6 παρουσιάζονται οι συχνότητες των διαφόρων κατηγοριών εξήγησης που έδωσαν οι μαθητές στο 3ο έργο, για τον ακέραιο και τον μη ακέραιο λόγο. Παρατηρούμε ότι οι περισσότεροι μαθητές έδωσαν κάποιο είδος εξήγησης και στις δύο δοκιμές. Οι ελλιπείς εξηγήσεις, που δεν παραπέμπουν σε κάποιο είδος προσθετικού η πολλαπλασιαστικού συλλογισμού, ήταν λίγες (10% για τον ακέραιο και 5% για τον μη ακέραιο λόγο). Το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών δίνει προσθετική εξήγηση τόσο στον ακέραιο (60%), όσο και στον μη ακέραιο λόγο (65%). Από τους 8 μαθητές που δίνουν πολλαπλασιαστική εξήγηση στον ακέραιο λόγο, οι 4 χαρακτηρίζονται ως «πολλαπλασιαστικές-ελλιπείς». Στον μη ακέραιο λόγο δεν παρατηρούνται ελλιπείς πολλαπλασιαστικές εξηγήσεις.

Πίνακας 6: *Συχνότητες είδους εξήγησης στο 3ο έργο προτίμησης*

	Ακέραιος λόγος		Μη ακέραιος λόγος	
Είδος εξήγησης	*n*	%	*n*	%
Προσθετική	36	60.0%	39	65.0%
Πολλαπλασιαστική	4	6.7%	7	11.7%
Πολλαπλασιαστική-ελλιπής	4	6.7%	0	0%
Καμία	10	16.7%	11	18.3%
Ελλιπής	6	10.0%	3	5.0%
Σύνολο	60	100.0%	60	100.0%

Προκειμένου να διαπιστωθεί αν το είδος της απάντησης που επέλεξαν οι μαθητές είναι συμβατό με την εξήγηση που έδωσαν, διασταυρώθηκαν οι απαντήσεις του 3ου έργου με τις κατηγορίες εξηγήσεων, χωριστά για τον ακέραιο και τον μη ακέραιο λόγο (Πίνακες 7 και 8). Από τα στοιχεία των Πινάκων φαίνεται ότι οι μαθητές δίνουν σχετικά συμβατές εξηγήσεις με τις επιλογές τους. Στον ακέραιο λόγο (Πίνακας 7), το 81,8% των μαθητών που δίνουν προσθετική απάντηση δίνουν και προσθετική εξήγηση και μόλις ένας πολλαπλασιαστική-ελλιπή. Από τους μαθητές που επέλεξαν την πολλαπλασιαστική απάντηση, το 70% έδωσε και πολλαπλασιαστική ή πολλαπλασιαστική-ελλιπή εξήγηση ενώ κανένας δεν έδωσε προσθετική.

Στον μη ακέραιο λόγο (Πίνακας 8) υπάρχουν παρόμοια ευρήματα. Από τους μαθητές που έδωσαν προσθετική απάντηση, το 77,1% εξήγησε προσθετικά και κανένας πολλαπλασιαστικά. Από τους μαθητές που έδωσαν πολλαπλασιαστική απάντηση, το 63,6% έδωσε πολλαπλασιαστική εξήγηση και μόνο ένας προσθετική.

Πίνακας 7: *Διασταύρωση των απαντήσεων του 3ου έργου προτίμησης με το είδος της εξήγησης για τον ακέραιο λόγο*

Απαντήσεις (ακέραιος λόγος)	Εξήγηση (ακέραιος λόγος)					
	Προσθετική	Πολλ/κή	Πολλ/κη.-ελλιπής	Καμία	Ελλιπής	Σύνολο
Προσθετική	36	0	1	5	2	44
	(81.8%)	(0%)	(2.3%)	(11.4%)	(4.5%)	(100%)
Πολλαπλασιαστική	0	4	3	3	0	10
	(0%)	(40%)	(30%)	(30%)	(0%)	(100%)
	0	0	0	2	4	6
Άλλη	(0%)	(0%)	(0%)	(33.3%)	(66.7%)	(100%)
Σύνολο	36	4	4	10	6	60
	(60%)	(6.7%)	(6.7%)	(16.7%)	(10%)	(100%)

Πίνακας 8: *Διασταύρωση των απαντήσεων του 3ου έργου προτίμησης με το είδος της εξήγησης για τον μη ακέραιο λόγο*

Απαντήσεις (μη ακέραιος λόγος)	Εξήγηση (μη ακέραιος λόγος)					
	Προσθετική	Πολλ/κή	Πολλ/κη.-ελλιπής	Καμία	Ελλιπής	Σύνολο
Προσθετική	37	0	0	8	3	48
	(77.1%)	(0%)	(0%)	(16.7%)	(6.3%)	(100%)
Πολλαπλασιαστική	1	7	0	3	0	11
	(9.1%)	(63.6%)	(0%)	(27.3%)	(0%)	(100%)
Άλλη	1	0	0	0	0	1
	(100%)	(0%)	(0%)	(0%)	(0%)	(100%)
Σύνολο	39	7	0	11	3	60
	(65%)	(11.7%)	(0%)	(18.3%)	(5%)	(100%)

4.2. Τεστ λεκτικών προβλημάτων

4.2.1. Συνολική εικόνα της επίδοσης στο τεστ λεκτικών προβλημάτων

Στο τεστ λεκτικών προβλημάτων υπήρχαν 4 προσθετικά και 4 πολλαπλασιαστικά προβλήματα, επομένως κάθε μαθητής θα μπορούσε να δώσει από καμία έως και τέσσερις σωστές απαντήσεις για κάθε κατηγορία προβλήματος ή να κάνει από κανένα έως και τέσσερα λάθη. Τα λάθη χαρακτηρίζονται ως προσθετικά σφάλματα , όταν στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα επιλέγεται η προσθετική απάντηση. Αντίστοιχα, ως πολλαπλασιαστικά χαρακτηρίζονται τα σφάλματα όταν στα προσθετικά προβλήματα επιλέγεται η πολλαπλασιαστική απάντηση Τα «άλλα» λάθη είναι οι περιπτώσεις στις οποίες επιλέγεται η απάντηση που δεν προκύπτει ούτε από πολλαπλασιαστικό ούτε από προσθετικό συλλογισμό, όταν επιλέγεται η «άλλη» απάντηση και δεν αιτιολογείται ή όταν δεν δίνεται καμία απάντηση. Οι περιπτώσεις στις οποίες οι μαθητές άφησαν αναπάντητο ένα πρόβλημα ήταν ελάχιστες (τρεις μαθητές δεν απάντησαν σε δύο προβλήματα και ένας μαθητής άφησε αναπάντητο ένα πρόβλημα) και συμπεριλήφθηκαν στις «άλλες απαντήσεις».

Εξετάστηκε η συνολική απόκριση του κάθε μαθητή στα προβλήματα ως εξής: Για κάθε τετράδα απαντήσεων στα προσθετικά (αντ. πολλαπλασιαστικά) προβλήματα υπολογίστηκε το πλήθος των σωστών απαντήσεων (Σωστά προσθετικά και Σωστά πολλαπλασιαστικά, αντίστοιχα) και των λανθασμένων πολλαπλασιαστικών (αντ. προσθετικών) απαντήσεων (Πολλαπλασιαστικό σφάλμα και Προσθετικό σφάλμα, αντίστοιχα), καθώς και των άλλων λανθασμένων απαντήσεων (Άλλα λάθη). Στον Πίνακα 9 παρουσιάζεται το πλήθος των μαθητών που έδωσαν ν απαντήσεις ίδιας κατηγορίας (ν=0,1,2,3,4) στο σύνολο 4 προβλημάτων (προσθετικών και πολλαπλασιαστικών), ανά κατηγορία. Παρατηρούμε ότι σχεδόν όλοι οι μαθητές (*n*=58) έλυσαν τουλάχιστον ένα προσθετικό πρόβλημα σωστά και ότι περισσότεροι από τους μισούς (*n*=33) έλυσαν σωστά όλα τα προσθετικά προβλήματα. Στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα η εικόνα δεν είναι ίδια, καθώς σχεδόν οι μισοί μαθητές (*n*=28) δεν έλυσαν κανένα πρόβλημα σωστά και μόνο 6 έλυσαν σωστά όλα τα προβλήματα. Αντίστοιχα με τα παραπάνω, τα προσθετικά σφάλματα στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα ήταν περισσότερα απ' ότι τα πολλαπλασιαστικά σφάλματα στα προσθετικά προβλήματα.

Πάνω από το 1/3 των μαθητών (n=22) κάνει προσθετικά σφάλματα σε όλα τα πολλαπλασιαστικά προβλήματα και 51 μαθητές κάνουν τουλάχιστον 1 προσθετικό σφάλμα. Αντίθετα, περισσότεροι από τους μισούς μαθητές (n=38) δεν κάνουν κανένα πολλαπλασιαστικό σφάλμα και μόλις ένας μαθητής απαντά πολλαπλασιαστικά σε όλα τα προσθετικά προβλήματα. Τα άλλα λάθη, όπως φαίνεται στον Πίνακα 9, ήταν λίγα.

Για να φανεί πιο ξεκάθαρα η διαφορά ανάμεσα στο πλήθος των προσθετικών και πολλαπλασιαστικών λύσεων στα λεκτικά προβλήματα, υπολογίστηκε η διάμεσος των σωστών προσθετικών και πολλαπλασιαστικών απαντήσεων για τα 4 προβλήματα κάθε κατηγορίας. Βρέθηκε ότι η διάμεσος των σωστών προσθετικών απαντήσεων ήταν 4 (Ενδ. Εύρος 2), ενώ των σωστών πολλαπλασιαστικών απαντήσεων ήταν 1 (Ενδ. Εύρος 2). Η ίδια διαδικασία ακολουθήθηκε για τα προσθετικά και τα πολλαπλασιαστικά σφάλματα. Βρέθηκε ότι η διάμεσος των προσθετικών σφαλμάτων είναι 3 (Ενδ. Εύρος 2) και των πολλαπλασιαστικών σφαλμάτων 0 (Ενδ. Εύρος 1).

Πίνακας 9: *Πλήθος των μαθητών που έδωσαν ν απαντήσεις ίδιας κατηγορίας (ν=0,1,2,3,4) στο σύνολο 4 προβλημάτων (προσθετικών και πολλαπλασιαστικών), ανά κατηγορία.*

	Πλήθος εμφανίσεων της κάθε κατηγορίας στην εξάδα των απαντήσεων					
Κατηγορία απάντησης	0	1	2	3	4	Σύνολο
Σωστή προσθετική	2	3	10	12	33	60
Σωστή πολλαπλασιαστική	28	13	11	2	6	60
Προσθετικά σφάλματα	9	5	10	14	22	60
Πολλαπλασιαστικά σφάλματα	38	9	10	2	1	60
Άλλα λάθη	44	11	4	1	0	60

4.2.2. Ακέραιοι και μη ακέραιοι λόγοι

Στους Πίνακες 10 και 11 παρουσιάζονται οι συχνότητες των απαντήσεων που έδωσαν οι μαθητές σε καθένα από τα λεκτικά προβλήματα. Από τα στοιχεία του Πίνακα 10, που αφορά τα πολλαπλασιαστικά προβλήματα, φαίνεται ότι η προσθετική απάντηση εμφανίζεται σε μεγαλύτερο ποσοστό, τόσο στα προβλήματα με ακέραιο λόγο, όσο και σε αυτά με μη ακέραιο λόγο. Εξαίρεση αποτελεί το 2ο πρόβλημα με ακέραιο λόγο, στο οποίο οι προσθετικές και πολλαπλασιαστικές απαντήσεις ήταν ίδιες στον αριθμό (*n*=28). Φαίνεται επίσης, ότι στους μη ακέραιους λόγους οι μαθητές έδωσαν περισσότερες προσθετικές απαντήσεις σε σύγκριση με τα προβλήματα που είχαν ακέραιους λόγους. Τα στοιχεία του πίνακα δείχνουν να υπάρχει μία μετατόπιση από τη σωστή πολλαπλασιαστική απάντηση, στην λανθασμένη προσθετική απάντηση, όταν οι λόγοι δεν είναι ακέραιοι. Όσον αφορά την κατηγορία «άλλες απαντήσεις» αυτές που δεν είναι ούτε προσθετικές ούτε πολλαπλασιαστικές είναι λίγες και εμφανίζονται περισσότερο στους μη ακέραιους λόγους σε σύγκριση με τους ακέραιους. Ένας μόνο μαθητής επέλεξε ταυτόχρονα την προσθετική και την πολλαπλασιαστική απάντηση σε τρία από τα τέσσερα πολλαπλασιαστικά προβλήματα. Επίσης, μόνο ένας μαθητής επέλεξε την «άλλη» απάντηση σε ένα πρόβλημα, αλλά δεν εξήγησε πώς έφτασε στο αποτέλεσμα που έγραψε.

Πίνακας 10: *Συχνότητες απαντήσεων στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα του τεστ λεκτικών προβλημάτων*

	Πολλαπλασιαστικό 1 Ακέραιος		Πολλαπλασιαστικό 2 Ακέραιος		Πολλαπλασιαστικό 1 Μη ακέραιος		Πολλαπλασιαστικό 2 Μη ακέραιος	
Απάντηση	*n*	%	*n*	%	*n*	%	*n*	%
Προσθετική	38	63.3%	28	46.7%	42	70.0%	45	75.0%
Πολλαπλασιαστική	18	30.0%	28	46.7%	9	15.0%	10	16.7%
Άλλη	4	6.7%	4	6.6%	9	15.0%	5	8.3%
Σύνολο	60	100.0%	60	100.0%	60	100.0%	60	100.0%

Στον Πίνακα 11 παρουσιάζονται οι συχνότητες των απαντήσεων των μαθητών στα προσθετικά (ψευδοαναλογικά) προβλήματα. Από τα στοιχεία του πίνακα βλέπουμε ότι οι περισσότεροι μαθητές έχουν επιλέξει σωστά την προσθετική απάντηση, τόσο στα προβλήματα που οι αριθμοί τους σχηματίζουν ακέραιους λόγους, όσο και στα προβλήματα που σχηματίζουν μη ακέραιους λόγους. Εμφανίζεται πάντως και ένα σημαντικό ποσοστό (25% στο 1ο πρόβλημα με ακέραιο λόγο και 20% στο 1ο πρόβλημα με μη ακέραιο λόγο) που επιλέγει την πολλαπλασιαστική απάντηση. Εδώ η επιρροή των λόγων δεν είναι τόσο εμφανής και φαίνεται ότι η διαφοροποίηση ως προς το ποσοστό επιτυχίας ανάμεσα στα προβλήματα οφείλεται σε άλλους παράγοντες. Στις «άλλες απαντήσεις, ελάχιστοι μαθητές επιλέγουν την απάντηση που είναι ούτε προσθετική ούτε πολλαπλασιαστική. Ο ίδιος μαθητής που επέλεξε ταυτόχρονα την προσθετική και την πολλαπλασιαστική απάντηση σε τρία από τα τέσσερα πολλαπλασιαστικά προβλήματα, κάνει το ίδιο και στα προσθετικά. Επίσης, ένας μαθητής επέλεξε την απάντηση «άλλο» σε ένα προσθετικό πρόβλημα, χωρίς να εξηγήσει πώς έφτασε στο αποτέλεσμα που έγραψε.

Πίνακας 11: *Συχνότητες απαντήσεων στα προσθετικά προβλήματα του τεστ λεκτικών προβλημάτων*

	Προσθετικό 1 Ακέραιος		Προσθετικό 2 Ακέραιος		Προσθετικό 1 Μη ακέραιος		Προσθετικό 2 Μη ακέραιος	
Απάντηση	*n*	%	*n*	%	*n*	%	*n*	%
Προσθετική	41	68,3%	51	85%	45	75,0%	54	90,0%
Πολλαπλασιαστική	15	25,0%	5	8,3%	12	20,0%	3	5,0%
Άλλη	4	6,7%	4	6,7%	3	5,0%	3	5,0%
Σύνολο	60	100.0%	60	100.0%	60	100.0%	60	100.0%

4.2.3. Κατηγοριοποίηση των μαθητών στο τεστ λεκτικών προβλημάτων

Για να διερευνηθεί περαιτέρω η συστηματικότητα με την οποία απαντούν οι μαθητές στο τεστ λεκτικών προβλημάτων, κατηγοριοποιήθηκαν σε ομάδες ανάλογα με τις απαντήσεις που επέλεξαν και στα 8 προβλήματα. Τα κριτήρια της κατηγοριοποίησης τέθηκαν εκ των προτέρων και ήταν σύμφωνα με αυτά που είχαν χρησιμοποιηθεί σε προηγούμενες έρευνες (Degrande et al., 2018b; Vanluydt et al., 2022b). Πιο συγκεκριμένα, εξετάστηκε αν οι μαθητές επιλέγουν συστηματικά προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές απαντήσεις (Προσθετικός τύπος και Πολλαπλασιαστικός τύπος, αντίστοιχα), αν επηρεάζονται από την ακεραιότητα ή μη των λόγων (Επιρροή του είδους του λόγου), ή αν λύνουν σωστά τα προβλήματα (Λύνει σωστά) ως εξής:

- **Προσθετικός λύτης**: Έχει λύσει τουλάχιστον 6 από τα 8 προβλήματα προσθετικά

- **Πολλαπλασιαστικός λύτης**: Έχει λύσει τουλάχιστον 6 από τα 8 προβλήματα πολλαπλασιαστικά

- **«Επιρροή του είδους του λόγου»**: Λύνει τα προβλήματα με ακέραιο λόγο πολλαπλασιαστικά και τα προβλήματα με μη ακέραιο λόγο προσθετικά σε τουλάχιστον 3 από τις 4 περιπτώσεις

- **«Λύνει σωστά»**: Έχει λύσει τουλάχιστον 6 από τα 8 προβλήματα σωστά

- **Άλλοι τύποι**: Δεν μπορούν να καταταχθούν στις παραπάνω κατηγορίες. Ένας τύπος που εμφανίζεται συχνά είναι μία κατηγορία μαθητών που επηρεάζεται από τους λόγους μόνο στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα ενώ τα προσθετικά τα λύνει σωστά. Ενδιαφέρουσα και η περίπτωση μαθητή που έχει επιλέξει και την προσθετική και την πολλαπλασιαστική απάντηση σε 6 από τα 8 προβλήματα.

Πίνακας 12: *Συχνότητες τύπων μαθητών βάσει των απαντήσεων στο τεστ λεκτικών προβλημάτων (τύποι επίλυσης)*

Τύπος λύτη	*n*	%
Προσθετικός	36	60.0%
Πολλαπλασιαστικός	4	6.7%
Επιρροή του είδους του λόγου	5	8.3%
Λύνει σωστά	4	6.7%
Άλλος	11	18.4%

Στον Πίνακα 12 παρουσιάζονται οι συχνότητες με τις οποίες εμφανίζεται κάθε τύπος λύτη. Παρατηρούμε ότι πολύ μεγάλο ποσοστό μαθητών (60%) ανήκει στον προσθετικό τύπο λύτη, άρα συστηματικά επιλέγει την προσθετική λύση στα λεκτικά προβλήματα, ακόμα και σε περιπτώσεις που αυτή δεν είναι κατάλληλη. Στον πολλαπλασιαστικό τύπο ανήκουν μόνο 4 μαθητές. Από το είδος των λόγων φαίνεται ότι επηρεάζονται συστηματικά μόλις 5 μαθητές, οι οποίοι επιλέγουν την πολλαπλασιαστική λύση στους ακέραιους λόγους και την προσθετική λύση στους μη ακέραιους λόγους στις περισσότερες των περιπτώσεων. Επίσης, λίγοι μαθητές (n= 4) λύνουν τα περισσότερα από τα προβλήματα σωστά.

4.3. Συσχέτιση τεστ προτίμησης με τεστ λεκτικών προβλημάτων

Για να δοθεί απάντηση στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, δηλαδή σε ποιο βαθμό σχετίζεται η προτίμηση ανάμεσα σε προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές σχέσεις στα ανοιχτά έργα με την στρατηγική που επιλέγουν οι μαθητές όταν επιλύουν λεκτικά προβλήματα, άρα και με τα σφάλματα που τυχόν κάνουν, εφαρμόστηκε ανάλυση συσχέτισης μεταξύ του πλήθους των προσθετικών και των πολλαπλασιαστικών απαντήσεων που έδωσε κάθε μαθητής στο τεστ προτίμησης και του πλήθους των σωστών απαντήσεων (Πίνακας 13) αλλά και του πλήθους των σφαλμάτων (προσθετικών ή πολλαπλασιαστικών) στο τεστ λεκτικών προβλημάτων (Πίνακας 14).

Από τα στοιχεία του Πίνακα 13 φαίνεται ότι υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των προσθετικών απαντήσεων στο τεστ προτίμησης και των σωστών απαντήσεων στα προσθετικά προβλήματα (r=.436, p <.01). Επίσης υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των πολλαπλασιαστικών απαντήσεων στο τεστ προτίμησης με τις σωστές απαντήσεις στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα (r=.355, p <.01). Αντίθετα, υπάρχει αρνητική συσχέτιση μεταξύ των προσθετικών απαντήσεων στο τεστ προτίμησης και των σωστών απαντήσεων στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα (r=-.304, p <.05). Επίσης, αρνητική συσχέτιση υπάρχει μεταξύ των πολλαπλασιαστικών απαντήσεων στο τεστ προτίμησης με τις σωστές απαντήσεις στα προσθετικά προβλήματα, η οποία όμως δεν είναι στατιστικά σημαντική (r=-.207, p =.112). Επομένως, βλέπουμε ότι οι περισσότερες προσθετικές απαντήσεις στο τεστ προτίμησης σχετίζονται με μεγαλύτερη επιτυχία στα προσθετικά προβλήματα αλλά και μεγαλύτερη αποτυχία στα πολλαπλασιαστικά. Αντίστοιχα, περισσότερες πολλαπλασιαστικές απαντήσεις σχετίζονται με μεγαλύτερη επιτυχία στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα και μικρότερη επιτυχία στα προσθετικά, αλλά το δεύτερο όχι σε τόσο μεγάλο βαθμό.

Πίνακας 13: *Ανάλυση συσχέτισης μεταξύ πλήθους προσθετικών ή πολλαπλασιαστικών απαντήσεων στο τεστ προτίμησης και πλήθους των σωστών απαντήσεων στο τεστ λεκτικών προβλημάτων*

Παράγοντες	1	2	3	4
1. Πλήθος προσθετικών απαντήσεων (προτίμηση)	-	-.625**	.436**	-.304*
2. Πλήθος πολλαπλασιαστικών απαντήσεων (προτίμηση)		-	-.207	.355**
3. Πλήθος σωστών απαντήσεων (προσθετικά λεκτικά προβλήματα)			-	-.342**
4. Πλήθος σωστών απαντήσεων (πολλ/κά λεκτικά προβλήματα)				-

*= p < .05, **= p <.01

Όσον αφορά τη συσχέτιση της προτίμησης με τα σφάλματα στα λεκτικά προβλήματα (Πίνακας 14) φαίνεται ότι οι προσθετικές απαντήσεις στο τεστ προτίμησης συσχετίζονται θετικά με τα προσθετικά σφάλματα στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα (r=.403, p <.01) και αρνητικά με τα πολλαπλασιαστικά σφάλματα στα προσθετικά προβλήματα (r=-.488, p <.01). Επομένως, οι μαθητές που έχουν προσθετική προτίμηση τείνουν να κάνουν προσθετικά σφάλματα αλλά όχι πολλαπλασιαστικά. Αντίθετα, οι πολλαπλασιαστικές απαντήσεις στο τεστ προτίμησης συσχετίζονται θετικά με τα πολλαπλασιαστικά σφάλματα (r=.261, p <.05) και αρνητικά με τα προσθετικά σφάλματα (r=-.364, p <.01). Άρα, η πολλαπλασιαστική προτίμηση δείχνει να οδηγεί σε πολλαπλασιαστικά σφάλματα και όχι σε προσθετικά.

Πίνακας 14: *Ανάλυση συσχέτισης μεταξύ πλήθους προσθετικών ή πολλαπλασιαστικών απαντήσεων στο τεστ προτίμησης και πλήθους σφαλμάτων στο τεστ λεκτικών προβλημάτων*

Παράγοντες	1	2	3	4
1. Πλήθος προσθετικών απαντήσεων (προτίμηση)	-	-.625**	.403**	-.488**
2. Πλήθος πολλαπλασιαστικών απαντήσεων (προτίμηση)		-	-.364**	.261*
3. Πλήθος προσθετικών σφάλματων (επίλυση)			-	-.544**
4. Πλήθος πολλαπλασιαστικών σφάλματων (επίλυση)				-

*= p < .05, **= p <.01

Για να διαπιστωθεί αν οι τύποι μαθητών που προέκυψαν βάσει του τεστ προτίμησης συμπίπτουν με τους τύπους επίλυσης βάσει του τεστ λεκτικών προβλημάτων πραγματοποιήθηκε διασταύρωση των τύπων αυτών (Πίνακας 15) και χρησιμοποιήθηκε το ακριβές τεστ των Fisher-Freeman-Halton. Τα αποτελέσματα του τεστ (p=.031) δείχνουν μία σημαντική συσχέτιση μεταξύ των τύπων προτίμησης και των τύπων επίλυσης. Από τα στοιχεία του Πίνακα 15 φαίνεται ότι το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών (66,7%) που ανήκουν στο προσθετικό τύπο προτίμησης, ανήκουν και στον προσθετικό τύπο επίλυσης. Ο μοναδικός μαθητής που χαρακτηρίζεται ως πολλαπλασιαστικός τύπος προτίμησης, χαρακτηρίζεται επίσης ως πολλαπλασιαστικός τύπος επίλυσης. Είναι ενδιαφέρον, πως οι μαθητές που ανήκουν στο προφίλ που επηρεάζεται από το είδος των λόγων στο τεστ προτίμησης, μετατοπίζονται όλοι στο προσθετικό προφίλ επίλυσης.

Πίνακας 15: *Διασταύρωση τύπων μαθητών από το σύνολο του τεστ προτίμησης με τους τύπους επίλυσης από τεστ λεκτικών προβλημάτων*

	Τύπος επίλυσης					
Τύπος προτίμησης	Προσθετικός	Πολλαπλασιαστικός	Επιρροή από λόγους	Άλλος	Λύνει σωστά	Σύνολο
Προσθετικός	26	0	3	7	3	39
	(66.7%)	(0%)	(7.7%)	(17.9%)	(7.7%)	(100%)
Πολλαπλασιαστικός	0	1	0	0	0	1
	(0%)	(100%)	(0%)	(0%)	(0%)	(100%)
Επιρροή από λόγους	5	0	0	0	0	5
	(100%)	(0%)	(0%)	(0%)	(0%)	(100%)
Άλλος	5	3	2	4	1	15
	(33.3%)	(20%)	(13.3%)	(26.7%)	(6.7%)	(100%)
Σύνολο	36	4	5	11	4	60
	(60%)	(6.7%)	(8.3%)	(18.3%)	(6.7%)	(100%)

p= .031

Προκειμένου να φανεί πιο ξεκάθαρα ο τρόπος που απαντούν οι διάφοροι τύποι προτίμησης στο τεστ λεκτικών προβλημάτων, καταγράφηκε για κάθε τύπο προτίμησης το πλήθος των σωστών απαντήσεων στα λεκτικά προβλήματα, αλλά και των σφαλμάτων (προσθετικών ή πολλαπλασιαστικών). Αυτό έγινε για τους τύπους που προέκυψαν από το σύνολο του τεστ προτίμησης (Πίνακας 16) αλλά και από κάθε έργο προτίμησης χωριστά (Πίνακες 17, 18, 19).

Πίνακας 16: *Πλήθος μαθητών που έδωσαν ν απαντήσεις ίδιας κατηγορίας* (ν=0, 1, 2, 3, 4) *στο σύνολο των 4 προβλημάτων (προσθετικών ή πολλαπλασιαστικών), ανά τύπο προτίμησης (από το σύνολο του τεστ προτίμησης)*

		Πλήθος εμφανίσεων σωστών απαντήσεων ή σφαλμάτων				
Τύπος από τεστ προτίμησης		0	1	2	3	4
Προσθετικός (*n*=39)	Σωστές προσθετικές	0	1	5	10	23
	Σωστές πολλ/κές	20	8	8	1	2
	Προσθετικά σφάλματα	4	4	5	8	18
	Πολλ/κά σφάλματα	28	6	5	0	0
Πολλαπλασιαστικός (*n*=1)	Σωστές προσθετικές	0	0	1	0	0
	Σωστές πολλ/κές	0	0	0	0	1
	Προσθετικά σφάλματα	1	0	0	0	0
	Πολλ/κά σφάλματα	0	0	1	0	0
Επιρροή από λόγους (*n*=5)	Σωστές προσθετικές	0	0	0	0	5
	Σωστές πολλ/κές	4	1	0	0	0
	Προσθετικά σφάλματα	0	0	0	2	3
	Πολλ/κά σφάλματα	5	0	0	0	0
Άλλος (*n*=15)	Σωστές προσθετικές	2	2	4	2	5
	Σωστές πολλ/κές	4	4	3	1	3
	Προσθετικά σφάλματα	4	1	5	4	1
	Πολλ/κά σφάλματα	5	3	4	2	1
Σύνολο (*n*=60)	Σωστές προσθετικές	2	3	10	12	33
	Σωστές πολλ/κές	28	13	11	2	6
	Προσθετικά σφάλματα	9	5	10	14	22
	Πολλ/κά σφάλματα	38	9	10	2	1

Από τα στοιχεία του Πίνακα 16 βλέπουμε ότι ο τύπος μαθητή που προτιμά προσθετικές σχέσεις, λύνει σωστά σχεδόν όλα τα προσθετικά προβλήματα αλλά κάνει και αρκετά προσθετικά σφάλματα στα πολλαπλασιαστικά. Ο πολλαπλασιαστικός τύπος προτίμησης λύνει σωστά όχι μόνο τα πολλαπλασιαστικά προβλήματα, αλλά και τα μισά προσθετικά. Ο τύπος μαθητή του οποίου η προτίμηση επηρεάζεται από λόγους συμπεριφέρεται ως προσθετικός κατά την επίλυση των λεκτικών προβλημάτων, κάνοντας μάλιστα περισσότερα προσθετικά σφάλματα από τον προσθετικό τύπο. Οι μαθητές που χαρακτηρίστηκαν ως «άλλος» τύπος προτίμησης δίνουν περισσότερες σωστές απαντήσεις στα προσθετικά προβλήματα απ' ότι στα πολλαπλασιαστικά και κάνουν και τα δύο είδη λαθών, αλλά ελαφρώς περισσότερα προσθετικά σφάλματα.

Πίνακας 17: *Πλήθος μαθητών που έδωσαν ν απαντήσεις ίδιας κατηγορίας* (ν=0, 1, 2, 3, 4) *στο σύνολο των 4 προβλημάτων (προσθετικών ή πολλαπλασιαστικών), ανά τύπο προτίμησης (από το 1ο έργο του τεστ προτίμησης)*

Τύπος από το 1ο έργο του τεστ προτίμησης		Πλήθος εμφανίσεων σωστών απαντήσεων ή σφαλμάτων				
		0	1	2	3	4
Προσθετικός (*n*=21)	Σωστές προσθετικές	0	0	2	7	12
	Σωστές πολλ/κές	9	6	5	0	1
	Προσθετικά σφάλματα	1	2	5	5	8
	Πολλ/κά σφάλματα	15	4	2	0	0
Πολλαπλασιαστικός (*n*=7)	Σωστές προσθετικές	0	2	3	0	2
	Σωστές πολλ/κές	1	4	0	0	2
	Προσθετικά σφάλματα	2	0	1	4	0
	Πολλ/κά σφάλματα	2	0	4	1	0
Επιρροή από λόγους (*n*=21)	Σωστές προσθετικές	0	1	3	3	14
	Σωστές πολλ/κές	13	1	3	2	2
	Προσθετικά σφάλματα	3	2	2	2	12
	Πολλ/κά σφάλματα	16	3	2	0	0
Άλλος (*n*=11)	Σωστές προσθετικές	2	0	2	2	5
	Σωστές πολλ/κές	5	2	3	0	1
	Προσθετικά σφάλματα	3	1	2	3	2
	Πολλ/κά σφάλματα	5	2	2	1	1
Σύνολο (*n*=60)	Σωστές προσθετικές	2	3	10	12	33
	Σωστές πολλ/κές	28	13	11	2	6
	Προσθετικά σφάλματα	9	5	10	14	22
	Πολλ/κά σφάλματα	38	9	10	2	1

Από τους τύπους που προκύπτουν από τα επιμέρους έργα προτίμησης (Πίνακες 17, 18, 19), οι προσθετικοί, από το καθένα εκ των τριών έργων, λύνουν σωστά τα προσθετικά προβλήματα και κάνουν αρκετά προσθετικά σφάλματα ενώ πολύ λιγότερα πολλαπλασιαστικά, στοιχεία που συνάδουν με τον τρόπο που επιλύει ο προσθετικός τύπος από το σύνολο του τεστ προτίμησης (Πίνακας 16).

Πίνακας 18: *Πλήθος μαθητών που έδωσαν ν απαντήσεις ίδιας κατηγορίας* (ν=0, 1, 2, 3, 4) *στο σύνολο των 4 προβλημάτων (προσθετικών ή πολλαπλασιαστικών), ανά τύπο προτίμησης (από το 2ο έργο του τεστ προτίμησης)*

Τύπος από το 2ο έργο του τεστ προτίμησης		Πλήθος εμφανίσεων σωστών απαντήσεων ή σφαλμάτων				
		0	1	2	3	4
Προσθετικός (*n*=37)	Σωστές προσθετικές	0	1	5	8	23
	Σωστές πολλ/κές	16	8	8	2	3
	Προσθετικά σφάλματα	5	5	5	7	15
	Πολλ/κά σφάλματα	26	5	6	0	0
Πολλαπλασιαστικός (*n*=2)	Σωστές προσθετικές	0	0	0	0	2
	Σωστές πολλ/κές	2	0	0	0	0
	Προσθετικά σφάλματα	0	0	0	0	2
	Πολλ/κά σφάλματα	2	0	0	0	0
Επιρροή από λόγους (*n*=8)	Σωστές προσθετικές	0	2	1	0	5
	Σωστές πολλ/κές	5	1	0	0	2
	Προσθετικά σφάλματα	2	0	0	3	3
	Πολλ/κά σφάλματα	5	0	2	1	0
Άλλος (*n*=13)	Σωστές προσθετικές	2	0	4	4	3
	Σωστές πολλ/κές	5	4	3	0	1
	Προσθετικά σφάλματα	2	0	5	4	2
	Πολλ/κά σφάλματα	5	4	2	1	1
Σύνολο (*n*=60)	Σωστές προσθετικές	2	3	10	12	33
	Σωστές πολλ/κές	28	13	11	2	6
	Προσθετικά σφάλματα	9	5	10	14	22
	Πολλ/κά σφάλματα	38	9	10	2	1

Για τους πολλαπλασιαστικούς τύπους τα στοιχεία δείχνουν την αντίθετη εικόνα από την αναμενόμενη. Οι μαθητές που χαρακτηρίστηκαν ως πολλαπλασιαστικοί σε καθένα από τα τρία έργα χωριστά, λύνουν σωστά περισσότερα προσθετικά προβλήματα απ' ότι πολλαπλασιαστικά και κάνουν περισσότερα προσθετικά σφάλματα, γεγονός που ισχύει εντονότερα για τους δύο μαθητές που χαρακτηρίστηκαν ως πολλαπλασιαστικοί τύποι στο 2ο έργο προτίμησης (Πίνακας 18). Αυτό δείχνει ότι τα επιμέρους έργα δεν επαρκούν για να συσχετιστεί ο πολλαπλασιαστικός τύπος προτίμησης με τον πολλαπλασιαστικό τύπο επίλυσης στα λεκτικά προβλήματα, πιθανόν λόγω του μικρού αριθμού μαθητών που υπάρχουν σε αυτή την κατηγορία. Οι μαθητές που επηρεάζονται από τους λόγους στα επιμέρους έργα προτίμησης δε δείχνουν να κάνουν το ίδιο κατά την επίλυση των λεκτικών προβλημάτων.

Πίνακας 19: *Πλήθος μαθητών που έδωσαν ν απαντήσεις ίδιας κατηγορίας* (ν=0, 1, 2, 3, 4) *στο σύνολο των 4 προβλημάτων (προσθετικών ή πολλαπλασιαστικών), ανά τύπο προτίμησης (από το 3ο έργο του τεστ προτίμησης)*

Τύπος από το 3ο έργο του τεστ προτίμησης		Πλήθος εμφανίσεων σωστών απαντήσεων ή σφαλμάτων				
		0	1	2	3	4
Προσθετικός (*n*=40)	Σωστές προσθετικές	1	3	6	7	23
	Σωστές πολλ/κές	23	6	8	0	3
	Προσθετικά σφάλματα	4	2	7	9	18
	Πολλ/κά σφάλματα	27	5	6	1	1
Πολλαπλασιαστικός (*n*=8)	Σωστές προσθετικές	0	0	2	3	3
	Σωστές πολλ/κές	0	2	2	1	3
	Προσθετικά σφάλματα	3	3	1	1	0
	Πολλ/κά σφάλματα	3	2	3	0	0
Επιρροή από λόγους (*n*=2)	Σωστές προσθετικές	1	0	0	0	1
	Σωστές πολλ/κές	0	2	0	0	0
	Προσθετικά σφάλματα	1	0	0	1	0
	Πολλ/κά σφάλματα	1	0	0	1	0
Άλλος (*n*=10)	Σωστές προσθετικές	0	0	2	2	6
	Σωστές πολλ/κές	5	3	1	1	0
	Προσθετικά σφάλματα	1	0	2	3	4
	Πολλ/κά σφάλματα	7	2	1	0	0
Σύνολο (*n*=60)	Σωστές προσθετικές	2	3	10	12	33
	Σωστές πολλ/κές	28	13	11	2	6
	Προσθετικά σφάλματα	9	5	10	14	22
	Πολλ/κά σφάλματα	38	9	10	2	1

5. Συμπεράσματα – Συζήτηση

Η παρούσα εργασία είχε ως στόχο να διερευνήσει την ύπαρξη προτίμησης ανάμεσα σε προσθετικές και πολλαπλασιαστικές σχέσεις σε μαθητές ΣΤ' τάξης Δημοτικού, όταν αυτοί καλούνται να λύσουν ανοιχτά έργα, όπως αυτά που χρησιμοποιήθηκαν στο πρώτο ερωτηματολόγιο (τεστ προτίμησης). Επίσης, επιδιώκει να απαντήσει στο αν η ύπαρξη ακέραιων ή μη ακέραιων λόγων στα έργα αυτά επηρεάζει την προτίμηση των μαθητών και με ποιον τρόπο (Ερευνητικό Ερώτημα 1). Επιπρόσθετα, ερευνάται αν η ύπαρξη προτίμησης, προσθετικής ή πολλαπλασιαστικής, επηρεάζει τον τρόπο που οι μαθητές επιλύουν λεκτικά προβλήματα αναλογίας (πολλαπλασιαστικά) και ψευδοαναλογίας (προσθετικά), στα οποία δίνονται τρεις τιμές και λείπει η μία. Συγκεκριμένα, επιδιώκεται να βρεθεί αν η προσθετική προτίμηση οδηγεί σε επιλογή προσθετικής στρατηγικής επίλυσης, επομένως και σε προσθετικά σφάλματα στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα, και αντίστοιχα αν η πολλαπλασιαστική προτίμηση οδηγεί σε επιλογή πολλαπλασιαστικής στρατηγικής επίλυσης και σε πολλαπλασιαστικά σφάλματα στα προσθετικά προβλήματα (Ερευνητικό Ερώτημα 2).

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων φαίνεται ότι οι μαθητές επέλεγαν κατά προτίμηση είτε τις προσθετικές είτε τις πολλαπλασιαστικές απαντήσεις. Μικρό ποσοστό των μαθητών επέλεξε την «ούτε προσθετική ούτε πολλαπλασιαστική» ή την «άλλη» απάντηση. Επίσης, μόνο ένας μαθητής έδωσε και προσθετική και πολλαπλασιαστική απάντηση σε ένα από τα έργα. Τα παραπάνω ευρήματα συμφωνούν με τις έρευνες των Degrande et al. (2018b) και Vanluydt et al. (2022a, 2022b), οι οποίες συμπεραίνουν ότι η επιλογή είτε προσθετικής είτε πολλαπλασιαστικής απάντησης δείχνει ότι οι περισσότεροι μαθητές έχουν όντως κάποια προτίμηση ανάμεσα σε προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Πάντως, οι προσθετικές επιλογές τόσο στο τεστ προτίμησης όσο και στο τεστ λεκτικών προβλημάτων είναι πολύ περισσότερες από τις πολλαπλασιαστικές.

Όσον αφορά το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, από την κατηγοριοποίηση των μαθητών σε τύπους προτίμησης, φαίνεται ότι υπάρχουν κάποιοι που επιλέγουν συστηματικά προσθετικές απαντήσεις και άλλοι που συστηματικά επιλέγουν πολλαπλασιαστικές απαντήσεις, δείχνοντας έτσι την προτίμηση τους ως προς το ένα είδος σχέσης. Από το σύνολο των έργων του πρώτου ερωτηματολογίου, οι μαθητές με προσθετική προτίμηση (προσθετικοί τύποι) βρέθηκε να υπάρχουν σε μεγάλο ποσοστό και να δείχνουν μεγάλη συνέπεια στις επιλογές τους, ενώ πολλαπλασιαστική προτίμηση (πολλαπλασιαστικός τύπος) βρέθηκε να έχει μόνο ένας μαθητής, που φαίνεται να αποτελεί την εξαίρεση στο δείγμα. Ακόμα, βρέθηκαν μαθητές που συστηματικά προτιμούν προσθετικές σχέσεις στους μη ακέραιους λόγους και προσθετικές σχέσεις στους ακέραιους, οι οποίοι όμως είναι λίγοι. Συμπεραίνουμε ότι οι μαθητές της ΣΤ' τάξης, τη χρονική στιγμή που πραγματοποιήθηκε η έρευνα, προτιμούν κυρίως προσθετικές σχέσεις. Το συμπέρασμα αυτό έρχεται σε αντίθεση με τα ευρήματα άλλων ερευνών (Degrande et al., 2018b, 2019a) στις οποίες βρέθηκε ότι προσθετική προτίμηση έδειχναν οι μικρότερες ηλικίες, ενώ προς το τέλος του δημοτικού σχολείου η προτίμηση των μαθητών ήταν κυρίως πολλαπλασιαστική.

Από τα επιμέρους έργα του τεστ προτίμησης παίρνουμε διαφορετική εικόνα ως προς τις επιλογές των μαθητών. Ενώ σε όλα τα έργα οι περισσότεροι μαθητές δείχνουν προσθετική προτίμηση παρά πολλαπλασιαστική, στο πρώτο έργο (με τα βελάκια) η επιρροή των λόγων είναι ιδιαίτερα εμφανής. Συγκεκριμένα, οι ακέραιοι λόγοι οδήγησαν σε μεγαλύτερο ποσοστό πολλαπλασιαστικών επιλογών ενώ οι μη ακέραιοι λόγοι σε μεγαλύτερο ποσοστό προσθετικών επιλογών, εύρημα που είναι σε συμφωνία με αυτά των Degrande et al. (2014, 2018b, 2019a). Η μεγάλη επιρροή από τους λόγους στο πρώτο έργο θα μπορούσε να εξηγηθεί από το γεγονός ότι η διάταξη των αριθμών θυμίζει τον τρόπο υπολογισμού ισοδύναμων κλασμάτων, μια διαδικασία στην οποία έχουν εξασκηθεί οι μαθητές ήδη από προηγούμενες τάξεις και στην οποία χρησιμοποιούνται κατά τη διδασκαλία σχεδόν αποκλειστικά ακέραιοι λόγοι. Στα άλλα δύο έργα η επιρροή των λόγων δεν είναι τόσο έντονη, καθώς υπερτερούν οι προσθετικές επιλογές και στα δύο είδη λόγων, αλλά συνεχίζει να υπάρχει. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το είδος των λόγων επηρεάζει την προτίμηση των μαθητών, αλλά ο βαθμός στον οποίο αυτό συμβαίνει έχει σχέση και με τα χαρακτηριστικά του κάθε έργου. Η επιρροή των εξωτερικών χαρακτηριστικών των έργων φαίνεται και σε άλλες έρευνες για την προτίμηση. Συγκεκριμένα, τα έργα με τα «ελληνικά προβλήματα» (Degrande et al., 2014) και το έργο με τη μεταβολή του μήκους των δύο φιδιών (Degrande et al., 2018a), που είναι παρόμοιο με το τρίτο έργο της παρούσας εργασίας (κάκτοι), έφεραν μεγαλύτερα ποσοστά προσθετικών επιλογών στις δύο τελευταίες τάξεις του δημοτικού, ενώ τα σχηματικά έργα με τα βελάκια (Degrande et al., 2018b, 2019a) έφεραν περισσότερες πολλαπλασιαστικές επιλογές.

Στο τρίτο έργο προτίμησης, όπου ζητείται αιτιολόγηση, οι περισσότεροι μαθητές δίνουν κάποιου είδους εξήγηση για την επιλογή τους. Οι εξηγήσεις είναι σχετικά συμβατές με την επιλογή που κάνουν, δηλαδή μεγάλο ποσοστό όσων επιλέγουν την προσθετική απάντηση περιγράφουν προσθετικές σχέσεις για να την αιτιολογήσουν, και επίσης μεγάλο ποσοστό όσων επιλέγουν πολλαπλασιαστική απάντηση εξηγούν περιγράφοντας πολλαπλασιαστικό συλλογισμό. Οι δεύτεροι, αρκετές φορές, φαίνεται ότι σκέφτονται πολλαπλασιαστικά αλλά δεν διαθέτουν τις κατάλληλες εκφράσεις ή συμβολικό τρόπο για να εξηγήσουν τη σκέψη τους, γεγονός που δεν παρατηρείται στους μαθητές που εξηγούν προσθετικά. Αυτό δείχνει ότι οι μαθητές της ΣΤ' τάξης μπορούν να εκφράζουν με μεγαλύτερη ευχέρεια τον προσθετικό συλλογισμό παρά τον πολλαπλασιαστικό, το οποίο που έρχεται σε αντίθεση με τα ευρήματα της έρευνας των Degrande et al. (2018a) όπου βρέθηκε ότι η προσθετική σκέψη ήταν δυσκολότερη να εξηγηθεί από τους μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων.

Στο τεστ λεκτικών προβλημάτων, στα προσθετικά προβλήματα σημειώθηκε μεγαλύτερη επιτυχία από τα πολλαπλασιαστικά. Στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα εμφανίστηκε σε μεγάλο βαθμό το προσθετικό σφάλμα, κάτι που παρατηρείται σε πολυάριθμες έρευνες του παρελθόντος (ενδεικτικά Lamon, 1993; Karplus et al., 1983; Kaput & West, 1994; Noelting, 1980; Misailidou and Williams, 2003). Στα προσθετικά, παρόλο που λύθηκαν σωστά από τους περισσότερους μαθητές, βρέθηκε να υπάρχει και ένα σημαντικό ποσοστό πολλαπλασιαστικών σφαλμάτων, εύρημα που εμφανίζεται και σε άλλες έρευνες (ενδεικτικά Van Dooren et al. 2003, 2005, 2008, 2009; Fernandez et al., 2008, 2011, 2012; Atabas & Oner, 2017; Modestou & Gagatsis, 2007; De Bock et al., 2002). Πάντως, τα ευρήματα της παρούσας εργασίας έρχονται σε αντίθεση με την διαπίστωση των Atabas και Oner (2017), οι οποίοι βρήκαν ότι στην ΣΤ΄ τάξη το πολλαπλασιαστικό σφάλμα είναι πιο έντονο από το προσθετικό.

Το είδος των λόγων επηρεάζει την επιλογή προσθετικής ή πολλαπλασιαστικής στρατηγικής επίλυσης. Συγκεκριμένα, οι μη ακέραιοι λόγοι οδήγησαν σε μεγαλύτερο αριθμό προσθετικών απαντήσεων σε σχέση με τους ακέραιους λόγους, όπως δείχνουν και άλλες έρευνες (Van Dooren et al., 2010; Atabas & Oner, 2017; Degrande et al., 2019a), αλλά αυτό φαίνεται ξεκάθαρα μόνο για τα πολλαπλασιαστικά προβλήματα. Στα προσθετικά, τα δύο προβλήματα που αφορούσαν ηλικία συγκέντρωσαν τα μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας και στους ακέραιους και στους μη ακέραιους λόγους.

Φαίνεται, λοιπόν, ότι και το πλαίσιο (context) του προβλήματος και το πόσο γνώριμο είναι στους μαθητές αποτελεί παράγοντα που επηρεάζει την επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής, όπως εξάλλου επισημαίνεται και από πολλούς ερευνητές (Tourniaire & Pulos, 1985; Heller et al., 1989; Kaput & West, 1994).

Η κατηγοριοποίηση των μαθητών σε τύπους επίλυσης, βάσει των επιλογών στο τεστ λεκτικών προβλημάτων, δείχνει ότι περισσότεροι από τους μισούς επιλέγουν συστηματικά προσθετική στρατηγική, ανεξάρτητα από το αν αυτή είναι η κατάλληλη. Ένα μικρό ποσοστό επιλέγει συστηματικά πολλαπλασιαστική στρατηγική στο σύνολο των προβλημάτων, ενώ ένα επίσης μικρό ποσοστό δείχνει να επηρεάζεται από τους λόγους που σχηματίζουν οι αριθμοί. Λίγοι είναι οι μαθητές που φαίνεται να μπορούν να διαχωρίσουν τις προσθετικές από τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις και να εφαρμόσουν την κατάλληλη στρατηγική. Τα παραπάνω έρχονται σε αντίθεση με την έρευνα των Van Dooren et al. (2010a), στην οποία βρέθηκε ότι οι μαθητές της έκτης τάξης ανήκουν κυρίως στο πολλαπλασιαστικό προφίλ επίλυσης, στη συνέχεια στο προφίλ που επηρεάζεται από τους λόγους και σε πολύ μικρότερο βαθμό στο προσθετικό.

Όσον αφορά το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, παρατηρούμε ότι το είδος της προτίμησης σχετίζεται με το αντίστοιχο είδος επίλυσης που επιλέγουν οι μαθητές. Οι προσθετικές απαντήσεις στο τεστ προτίμησης έχουν θετική συσχέτιση με τις σωστές απαντήσεις στα προσθετικά προβλήματα, αλλά και με τα προσθετικά σφάλματα στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα. Επίσης, έχουν αρνητική συσχέτιση με τις σωστές απαντήσεις στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα, αλλά και με τα πολλαπλασιαστικά σφάλματα στα προσθετικά προβλήματα. Το αντίστοιχο, όμως αντίστροφα, ισχύει για τις πολλαπλασιαστικές επιλογές στο τεστ προτίμησης. Στα ίδια συμπεράσματα καταλήγουν και οι έρευνες των Degrande et al. (2019a) και Vanluydt et al. (2022b). Ο προσθετικός τύπος προτίμησης συμπίπτει σε μεγάλο βαθμό με τον προσθετικό τύπο επίλυσης. Ο πολλαπλασιαστικός τύπος προτίμησης επίσης συμπίπτει με τον πολλαπλασιαστικό τύπο επίλυσης, αλλά αφορά μόνο έναν μαθητή, γεγονός που δεν επιτρέπει να οδηγηθούμε σε ασφαλή συμπεράσματα. Όσων η προτίμηση επηρεάζεται από τους λόγους, δεν δείχνουν την ίδια συμπεριφορά κατά την επίλυση των λεκτικών προβλημάτων, αλλά μετατοπίζονται στον προσθετικό τύπο επίλυσης.

Από τον τρόπο με τον οποίο επιλύει τα λεκτικά προβλήματα κάθε τύπος προτίμησης, παρατηρούμε ότι η προσθετική προτίμηση οδηγεί σε περισσότερα προσθετικά σφάλματα, απ' ότι η πολλαπλασιαστική προτίμηση οδηγεί σε πολλαπλασιαστικά σφάλματα. Καθώς, όμως, πολλαπλασιαστικός τύπος είναι μόνο ένας μαθητής, δεν υπάρχουν αρκετά στοιχεία για να καταλήξουμε με ασφάλεια σε αυτό το συμπέρασμα.

Επίσης, γίνεται φανερό ότι από τα επιμέρους έργα που εξετάζουν την προτίμηση, δεν μπορεί το καθένα ανεξάρτητα να δώσει σαφή εικόνα για το πώς η προτίμηση σχετίζεται με την επιλογή στρατηγικής επίλυσης. Οι μαθητές που χαρακτηρίστηκαν ως πολλαπλασιαστικοί στα επιμέρους έργα τα πηγαίνουν καλύτερα στα προσθετικά προβλήματα παρά στα πολλαπλασιαστικά και κάνουν περισσότερα προσθετικά σφάλματα. Αυτό συμβαίνει, γιατί οι μαθητές αυτοί δεν κάνουν συνεπείς πολλαπλασιαστικές επιλογές στο σύνολο του τεστ προτίμησης, παρά μόνο σε ένα έργο. Φαίνεται ότι για τη μέτρηση της προτίμησης είναι χρήσιμο να αντλούνται στοιχεία από έργα διαφόρων ειδών.

Συνοψίζοντας, από τα στοιχεία της παρούσας εργασίας, φαίνεται ότι οι μαθητές της ΣΤ' τάξης έχουν προτίμηση, η οποία είναι στο μεγαλύτερο βαθμό προσθετική. Το είδος των λόγων επηρεάζει την προτίμηση, με τους μη ακέραιους λόγους να οδηγούν σε περισσότερες προσθετικές επιλογές. Η προτίμηση επηρεάζει την επιλογή στρατηγικής κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων. Έτσι η προσθετική προτίμηση οδηγεί σε σωστή επίλυση προσθετικών προβλημάτων αλλά και σε προσθετικά σφάλματα στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα. Αντίθετα, η πολλαπλασιαστική προτίμηση σχετίζεται με καλύτερη επίδοση στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα αλλά και σε πολλαπλασιαστικά σφάλματα στα προσθετικά προβλήματα.

Τη χρονική στιγμή που έγινε η συλλογή των δεδομένων οι μαθητές, παρόλο που γνώριζαν ήδη πολλαπλασιασμό, διαίρεση και κλάσματα, δεν είχαν διδαχτεί τυπικά τους λόγους και τις αναλογίες, ούτε είχαν εξασκηθεί σε λεκτικά προβλήματα στα οποία δίνονται τρεις τιμές και λείπει η μία, για τα οποία έχει αναφερθεί ότι παραπέμπουν σε πολλαπλασιαστικό τρόπο επίλυσης (De Bock et al., 2002; Van Dooren et al., 2009). Αυτό μπορεί να εξηγήσει γιατί η προσθετική προτίμηση υπερτερεί τόσο έναντι της πολλαπλασιαστικής. Αν η συλλογή δεδομένων γινόταν μετά τη διδασκαλία των λόγων και των αναλογιών, πιθανόν τα αποτελέσματα να ήταν διαφορετικά.

Η έρευνα που έγινε στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας έχει περιορισμούς και τα αποτελέσματά της δεν μπορούν να γενικευτούν. Αρχικά, η δειγματοληψία ήταν βολική και αφορούσε δημοτικά σχολεία μόνο του νομού Καστοριάς. Επίσης, το ότι μόνο ένας μαθητής του δείγματος έκανε με συνέπεια πολλαπλασιαστικές επιλογές, δείχνοντας έτσι πολλαπλασιαστική προτίμηση, δεν επιτρέπει να εξαχθούν ασφαλή συμπεράσματα για τον πολλαπλασιαστικό τύπο. Η έρευνα θα μπορούσε να επαναληφθεί κάποια χρονική στιγμή μετά τη διδασκαλία των λόγων και των αναλογιών, ώστε να δώσει επιπλέον στοιχεία που θα μπορούν να συνεκτιμηθούν.

Η μελέτη της προτίμησης των μαθητών ανάμεσα σε προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές σχέσεις αναδεικνύει θετικά στοιχεία αλλά και κινδύνους από την καθιέρωσή της. Έτσι μπορούν να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα για τη διδασκαλία.

Η ανάπτυξη προτίμησης από μαθητές προσχολικής ηλικίας φαίνεται να είναι δείκτης πρόγνωσης για την ανάπτυξη της αναλογικής σκέψης κάποια χρόνια αργότερα (Vanluydt et al., 2022a) και αυτό γιατί η ύπαρξη προτίμησης σημαίνει ότι οι μαθητές ήδη εστιάζουν σε ποσοτικές σχέσεις. Η μελέτη και η κατανόηση των διατομικών διαφορών στην αυθόρμητη εστίαση στις σχέσεις αυτές μπορεί να προβλέψει δυσκολίες στην κατανόηση των ρητών αριθμών σε μετέπειτα ηλικία (Degrande et al. , 2017)

Όμως, η καθιέρωση προτίμησης εγκυμονεί και κινδύνους. Η προτίμηση των μαθητών προς ένα είδος σχέσης, προσθετικής ή πολλαπλασιαστικής, είναι ανεπιθύμητη όταν οδηγεί σε λάθη κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων (Degrande et al, 2018b; Vanluydt et al., 2022b) και θα πρέπει να γίνουν ενέργειες στην τάξη για την πρόληψη ή την θεραπεία της (Degrande et al., 2019a). Καθώς όμως η προτίμηση είναι επίμονη και ακούσια, δεν είναι εύκολο να αποδομηθεί και αυτό μπορεί να επιτευχθεί αργά και σταδιακά (Degrande et al., 2019b).

Προτείνεται η χρήση ανοιχτών προβλημάτων στη διδασκαλία, στα οποία και τα δύο είδη σχέσεων είναι σωστά, ήδη από μικρή ηλικία (Degrande et al., 2019b; Vanluydt et al., 2022a). Οι μαθητές θα πρέπει να προτρέπονται να συζητούν πάνω στα προβλήματα αυτά και να εξηγούν τους λόγους που τους οδηγούν να επιλέξουν μία στρατηγική

(Degrande et al., 2018b, 2019b; Vanluydt et al., 2022a, 2022b). Ιδανικά προτείνεται η χρήση καταστάσεων της πραγματικής ζωής (Degrande et al., 2019b) όπως το παρακάτω παράδειγμα από τους Nunes & Bryant, 2009):

> 12 κορίτσια και 18 αγόρια συμμετέχουν σε δύο τμήματα στα γαλλικά χωρισμένοι ανάλογα με το φύλο τους. Αν δεν υπάρχουν αρκετά βιβλία για όλους και ο διευθυντής αποφασίσει να δώσει 4 βιβλία στα κορίτσια και 6 βιβλία στα αγόρια, αυτό θα είναι δίκαιο; (p. 4).

Εκτός από την επαφή με ανοιχτά προβλήματα θα πρέπει να γίνεται ταυτόχρονη παρουσίαση προβλημάτων που περιγράφουν προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές καταστάσεις ώστε να αναπτύσσουν οι μαθητές την ικανότητα διάκρισης μεταξύ των καταστάσεων αυτών (Degrande et al., 2014, 2017, 2019a, 2019b). Ο εντοπισμός ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ των προβλημάτων μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές να μην βασίζονται σε επιφανειακά χαρακτηριστικά (Degrande et al., 2018a). Ως δραστηριότητες προτείνονται η ταξινόμηση προβλημάτων σε κατηγορίες πριν την επίλυση τους (όπως στην έρευνα των Van Dooren et al., 2010), η κατασκευή προβλημάτων από τους μαθητές και η εργασία σε ομάδες όπου οι μαθητές θα βρίσκουν, θα συγκρίνουν και θα συζητούν διαφορετικές λύσεις (Degrande et al., 2019a, 2019b).

Γενικά, οι εκπαιδευτικές δραστηριότητες θα πρέπει να οδηγούν σε σύγκρουση μεταξύ μαθητών με διαφορετική προτίμηση ή σε εσωτερική σύγκρουση του ίδιου μαθητή όταν η σχέση που προτιμά δεν ταιριάζει με την κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα (Degrande et al., 2019a, 2019b). Στόχος είναι η καλλιέργεια μιας κουλτούρας της τάξης όπου θα αμφισβητούνται οι προτιμήσεις των μαθητών, ώστε να μπορούν να εδραιωθούν σταδιακά και άλλες (Degrande et al., 2019a, 2019b).

Είναι σημαντικό, όταν ξεκινά η διδασκαλία της αναλογικής σκέψης να αποφεύγεται η χρήση στερεοτυπικών προβλημάτων, δηλαδή μόνο αναλογικών προβλημάτων προσδιορισμού μιας άγνωστης τιμής, και να δίνεται στους μαθητές η ευκαιρία να συναντήσουν και προσθετικά προβλήματα αυτής της μορφής (Degrande et al., 2019a, 2019b; Van Dooren et al., 2010). Επίσης, οι αριθμοί που συναντούν οι μαθητές στα αναλογικά προβλήματα είναι συνήθως ακέραιοι. Η παρουσία μη ακέραιων λόγων σε προβλήματα αναλογίας, όχι μόνο θα βοηθήσει να μην συσχετιστούν οι ακέραιοι λόγοι με πολλαπλασιαστικές σχέσεις, αλλά και να εξασκηθούν οι μαθητές στους υπολογισμούς (Degrande et al., 2019a).

Τέλος, οι Degrnade et al. (2019b) αναφέρουν πως είναι σημαντικό να είναι ενήμεροι οι δάσκαλοι για την ύπαρξη της προτίμησης και των επιπτώσεων που αυτή μπορεί να έχει στην επίλυση προβλημάτων, καθώς όχι μόνο οι μαθητές αλλά και οι ίδιοι, σε μικρότερο βαθμό, μπορεί να έχουν προτίμηση προς ένα είδος σχέσης, χωρίς να το συνειδητοποιούν.

Βιβλιογραφία

Atabaş, Ş., & Öner, D. (2016). An examination of Turkish middle school students' proportional reasoning. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, 33(1), 63-85.

Bailey, D. H., Littlefield, A., & Geary, D. C. (2012). The codevelopment of skill at and preference for use of retrieval-based processes for solving addition problems: Individual and sex differences from first to sixth graders. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113, 78-92. doi:10.1016/j.jecp.2012.04.014

Boyer, T. W., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2008). Development of proportional reasoning: Where young children go wrong. *Developmental Psychology*, 44(5), 1478–1490. doi:10.1037/a0013110

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem solving. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 10–24). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Christou, C., & Philippou, G. (2002). Mapping and development of intuitive proportional thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 321-336.

Clark, F. B., & Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 41-51. doi:10.2307/749196

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 159-178). New York, NY: Macmillan Publishers.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (2002). The effects of different problem presentations and formulations on the illusion of linearity in secondary school students. *Mathematical Thinking and Learning*, 4, 65–89. doi:10.1207/S15327833MTL0401_3

Degrande, T. (2019). To add or to multiply? An investigation of children's preference for additive or multiplicative relations. [Doctoral dissertation, KU Leuven]. Belgium. [Link to the dissertation: https://lirias.kuleuven.be/2789650?limo=0]

Degrande, T., Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2018). Open word problems: Taking the additive or the multiplicative road? *ZDM Mathematics Education*, 50, 91-102. doi:10.1007/s11858-017-0900-6

Degrande, T., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2014). How do Flemish children solve 'Greek' word problems? On children's quantitative analogical reasoning in mathematically neutral word problems. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 13(1-2), 57-74.

Degrande, T., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2017). Spontaneous Focusing On quantitative Relations: Towards a characterisation. *Mathematical Thinking and Learning*, 19, 260-275. doi:10.1080/10986065.2017.1365223

Degrande, T., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2018). Beyond additive and multiplicative reasoning abilities: How preference enters the picture. *European Journal of Psychology of Education*, 33, 559-576. doi:10.1007/s10212-017-0352-y

Degrande, T., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2019). To add or to multiply? An investigation of the role of preference in children's solutions of word problems. *Learning and Instruction*, 61, 60-71. doi:10.1016/j.learninstruc.2019.01.002

Degrande, T., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2019). Unraveling the nature of children's preference for additive or multiplicative relations: A mixed-methods approach. *Manuscript submitted for publication.*

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2008). Implicative analysis of strategies in solving proportional and non-proportional problems. In *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 1-8). Morelia: PME.

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2011). Effect of number structure and nature of quantities on secondary school students' proportional reasoning. *Studia Psychologica*, 53(1), 69.

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2012). The development of students' use of additive and proportional methods along primary and secondary school. *European Journal of Psychology of Education*, 27, 421-438. doi:10.1007/s10212-011-0087-0

Fischbein, R., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 3-17. doi:10.2307/748969

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243–275). New York, NY: MacMillan Publishers.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276–295). New York, NY: Macmillan Publishers.

Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11–16*. London, United Kingdom: Murray.

Heller, P., Ahlgren, A., Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1989). Proportional Reasoning: The Effect of Two Context Variables, Rate Type and Problem Setting. *Journal for Research in Science Teaching*, 26, 205-220. doi:10.1002/tea.3660260303

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. London, United Kingdom: Routledge.

Jeong, Y., Levine, S., & Huttenlocher, J. (2007). The development of proportional reasoning: Effect of continuous vs. discrete quantities. *Journal of Cognition and Development*, 8, 237–256. doi:10.1080/15248370701202471

Kaput, J. J., & West, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 235-287). New York, NY: State University of New York Press.

Karplus, R., & Peterson, R. W. (1970). *Intellectual development beyond elementary school II: Ratio, a survey*.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 45–89). New York, NY: Academic Press.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 41-61. doi:10.2307/749385

Lamon, S. J. (2008). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). New York, NY: Taylor & Francis Group.

Lamon, S. J., & Lesh, R. (1992). Interpreting responses to problems with several levels and types of correct answers. In R. Lesh & S. J. Lamon (Eds.), *Assessment of authentic performance in school mathematics* (pp. 319-342). Washington, DC: American Association for the Advancement of Science Press.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.

McMullen, J., Hannula-Sormunen, M. M., & Lehtinen, E. (2013). Young children's recognition of quantitative relations in mathematically unspecified settings. *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 450–460. doi:10.1016/j.jmathb.2013.06.001

Misailidou, C., & Williams, J. (2003). Children's proportional reasoning and tendency for an additive strategy: The role of models. *Research in Mathematics Education*, 5, 215-247. doi:10.1080/14794800008520123

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology*, 27(1), 75-92.

Mulligan, J. (1992). Children's solutions to multiplication and division word problems: A longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal, 4*, 24-41. doi:10.1007/BF03217230

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part 1. Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 217-253. doi:10.1007/BF00304357

Nunes, T., & Bryant, P. (2009). Key understandings in mathematics learning. Paper 4: Understanding relations and their graphical representation (pp. 108–145). [Online resource]. Retrieved from https://www.nuffieldfoundation.org/wp-content/uploads/2019/11/Key-understandings-in-mathematics-learning-1-8.pdf

Nunes, T., & Bryant, P. (2015). The development of quantitative reasoning. In L. S. Liben & U. Müller (Eds.), *Handbook of child psychology and developmental science, theory and method* (pp. 715-764). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., & Barros, R. (2015). Assessing Quantitative Reasoning in Young Children. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(2–3), 178–196. https://doi.org/10.1080/10986065.2015.1016815

Park, J. H., & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development*, 16(3), 763–773. https://doi.org/10.1016/S0885-2014(01)00058-2

Piaget, J. (1952). *The child's conception of number*. London, UK: Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origins of the idea of chance in children*. New York, NY: Norton.

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). New York, NY: Academic Press.

Siemon, D., Breed, M., & Virgona, J. (2005). From additive to multiplicative thinking: The big challenge of the middle years. In *Proceedings of the 42nd conference of the Mathematical Association of Victoria*. Bundoora: The Mathematical Association of Victoria.

Spinillo, A. G., & Bryant, P. E. (1999). Proportional reasoning in young children: Part-part comparisons about continuous and discontinuous quantity. *Mathematical Cognition*, 5(2), 181-197.

Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying schemes. In G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 3–40). Albany: State University of New York Press.

Thompson, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, 3, 165–208. doi:10.1007/BF01273861

Torbeyns, J., & Verschaffel, L. (2013). Efficient and flexible strategy use on multi-digit sums: a choice/no-choice study. *Research in Mathematics Education, 15*, 129-140. doi:10.1080/14794802.2013.797745

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 181–204. doi:10.1007/BF02400937

Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication… and back. The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, 28, 360-381. doi:10.1080/07370008.2010.488306

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 113–138. doi:10.1023/A:1025516816886

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M., & Verschaffel, L. (2009). Students' overuse of proportionality on missing-value problems: How numbers may change solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(2), 187-211.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23, 57-86. doi:10.1207/s1532690xci2301_3

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 311-342. doi:10.2307/30034972

Van Dooren, W., De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (2003). Improper applications of proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 9(4), 204-209.

Vanluydt, E., Degrande, T., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2020). Early stages of proportional reasoning: A cross-sectional study with 5-to 9-year-olds. *European Journal of Psychology of Education*, 35, 529-547.

Vanluydt, E., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2018). Emergent proportional reasoning: Searching for early traces in four-to five-year olds. In *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4)* (pp. 347-354). PME; Umeå, Sweden.

Vanluydt, E., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2022). The role of relational preference in early proportional reasoning. *Learning and Individual Differences*, 93, 102108.

Vanluydt, E., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2022). The role of relational preference in word-problem solving in 6-to 7-year-olds. *Educational Studies in Mathematics*, 110(3), 393-411.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Ramberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 60–67). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and Developmental Psychology and Research in Mathematics Education: Some Theoretical and Methodological Issues. *For the Learning of Mathematics*, 3(2), 31–41. http://www.jstor.org/stable/40248130

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York, NY: Academic Press.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1993). A decade of research on word problem solving in Leuven: Theoretical, methodological, and practical outcomes. *Educational Psychology Review*, 5(3), 239–256. https://doi.org/10.1007/BF01323046

Verschaffel, L., Greer B., De Corte E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands, 224, 224.

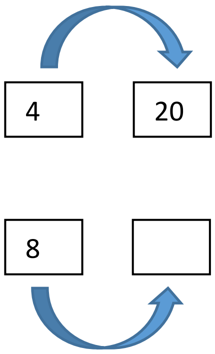
Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Βαμβακούση, Ξ., Βράκα, Λ., Λιολιούση, Α. & McMullen, J. (2015, Δεκέμβριος 4-6). Ατομικές διαφορές στην αυθόρμητη τάση εστίασης σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις στις μικρές ηλικίες [πρακτικά συνεδρίου]. *Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις*, Θεσσαλονίκη.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

<u>Ερωτηματολόγιο 1</u>

1. Παρατήρησε το πρώτο βελάκι και σκέψου πώς από τον πρώτο αριθμό φτάσαμε στον δεύτερο. Κάνε το ίδιο για το κάτω βελάκι και επίλεξε τον αριθμό που λείπει κυκλώνοντας την επιλογή α, β ή γ. Αν πιστεύεις ότι καμία επιλογή δεν ταιριάζει, γράψε την απάντησή σου στο δ (άλλο) και εξήγησε την σκέψη σου.



α) 40

β) 30,5

γ) 24

δ) Άλλο : ………..

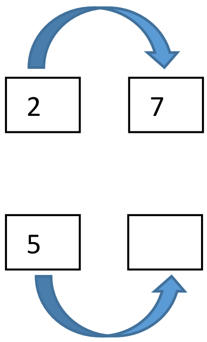
Αν επέλεξες το δ (άλλο) εξήγησε:

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………



α) 17,5

β) 10

γ) 21

δ) Άλλο : ………..

Αν επέλεξες το δ (άλλο) εξήγησε:

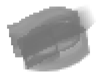
…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

2. Ο Γιάννης έλυσε στο βιβλίο του την παρακάτω άσκηση, η οποία είναι ένα μοτίβο, αλλά έπεσε νερό και σβήστηκε ο τελευταίος αριθμός. Μπορείς να βρεις ποιος αριθμός σβήστηκε; Παρατήρησε και συνέχισε με τον ίδιο τρόπο. Επίλεξε την απάντηση που θεωρείς σωστή κυκλώνοντας το α, β ή γ. Αν δε συμφωνείς με καμία επιλογή, συμπλήρωσε την απάντησή σου στο δ (άλλο) και εξήγησε την σκέψη σου.

- 2 6 

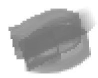
α) 18

β) 10

γ) 14

δ) Άλλο : …………..

Αν επέλεξες το δ (άλλο) εξήγησε:
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

- 4 6 

α) 12

β) 9

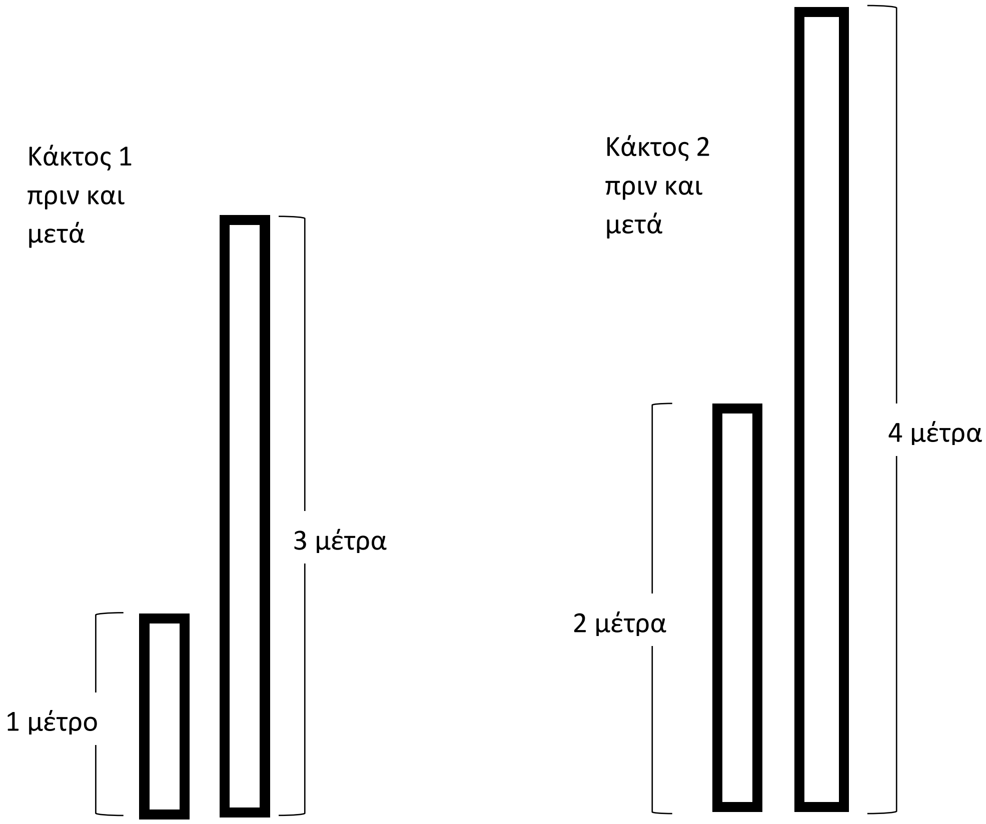
γ) 8

δ) Άλλο : …………..

Αν επέλεξες το δ (άλλο) εξήγησε:
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

3. Στην αυλή υπάρχουν δύο κάκτοι. Μετρήσαμε το ύψος τους όταν τους φυτέψαμε και ένα χρόνο μετά. Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται πόσο ψήλωσαν μέσα σε ένα χρόνο.

α) Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται πόσο ψήλωσαν οι κάκτοι 1 και 2 μέσα σε ένα χρόνο.



Ποιος κάκτος πιστευεις οτι ψήλωσε περισσότερο μέσα σε ένα χρόνο; Να επιλέξεις την απάντηση που πιστεύεις ότι είναι σωστή και να εξηγήσεις γιατί την επέλεξες.

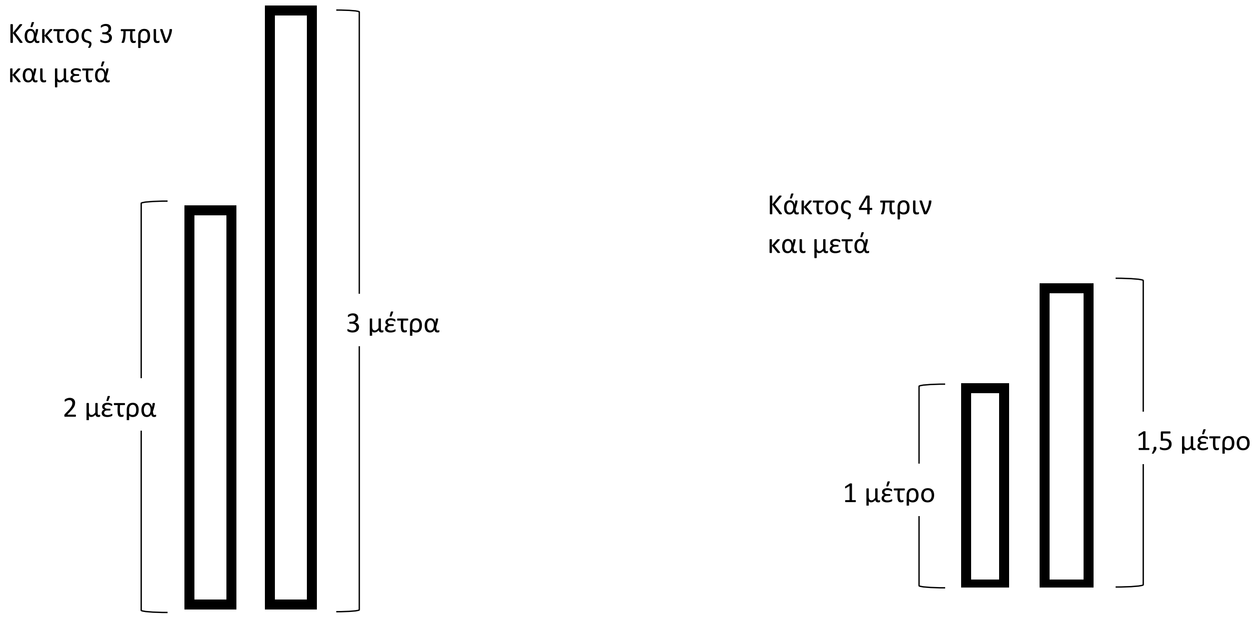
α) Ο κάκτος 1 ψήλωσε περισσότερο

β) Ο κάκτος 2 ψήλωσε περισσότερο

γ) Ψήλωσαν το ίδιο και οι δύο κάκτοι

Εξήγησε τη σκέψη σου:
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

β) Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται πόσο ψήλωσαν οι κάκτοι 3 και 4 μέσα σε ένα χρόνο.



Ποιος κάκτος πιστεύεις ότι ψήλωσε περισσότερο μέσα σε ένα χρόνο; Να επιλέξεις την απάντηση που πιστεύεις ότι είναι σωστή και να εξηγήσεις γιατί την επέλεξες.

α) Ο κάκτος 3 ψήλωσε περισσότερο

β) Ο κάκτος 4 ψήλωσε περισσότερο

γ) Ψήλωσαν το ίδιο και οι δύο κάκτοι

Εξήγησε τη σκέψη σου:
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

Ερωτηματολόγιο 2

Τα παρακάτω προβλήματα τα έλυσαν μαθητές της ηλικίας σου και έδωσαν τις λύσεις που βλέπεις κάτω από κάθε πρόβλημα. Να επιλέξεις τη λύση με την οποία συμφωνείς κυκλώνοντας το γράμμα α, β ή γ. Μπορείς να σημειώνεις τη σκέψη σου πάνω στο χαρτί. Αν δε συμφωνείς με καμία λύση, συμπλήρωσε στο δ (άλλο) τη δική σου και εξήγησε πώς σκέφτηκες.

1. Δύο αυτοκινητάκια, ένα κόκκινο και ένα μπλε, κάνουν γύρους σε μια πίστα. Είναι το ίδιο γρήγορα και τρέχουν με σταθερή ταχύτητα, αλλά το κόκκινο ξεκίνησε πρώτο. Όταν το μπλε έκανε 4 γύρους, το κόκκινο είχε κάνει 6 γύρους. Όταν το μπλε ολοκληρώσει 10 γύρους, πόσους γύρους θα έχει κάνει το κόκκινο;

α) Το κόκκινο αυτοκινητάκι θα έχει κάνει 12 γύρους.

β) Το κόκκινο αυτοκινητάκι θα έχει κάνει 15 γύρους.

γ) Το κόκκινο αυτοκινητάκι θα έχει κάνει 20 γύρους.

δ)
Άλλο:…………………………………………………………………………………………
……………………………….……………………………………………………………….
…………………………………………………………………………..……………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

2. Δύο αυτοκίνητα, ένα πιο αργό και ένα πιο γρήγορο, ξεκινούν μαζί και τρέχουν με σταθερή ταχύτητα. Όταν το πρώτο διένυσε 3 χιλιόμετρα, το δεύτερο έχει διανύσει 6 χιλιόμετρα. Όταν το πρώτο διανύσει 30 χιλιόμετρα, πόσα χιλιόμετρα θα έχει διανύσει το δεύτερο;

α)Το δεύτερο αυτοκίνητο θα έχει διανύσει 39 χιλιόμετρα.

β) Το δεύτερο θα έχει διανύσει 60 χιλιόμετρα.

γ) Το δεύτερο θα έχει διανύσει 33 χιλιόμετρα

δ)
Άλλο:…………………………………………………………………………………………
……………………………….……………………………………………………………….
…………………………………………………………………………..……………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………….

3. **Η μαμά της Άννας είναι πιο νέα από τον μπαμπά της. Όταν η μαμά της ήταν 3 χρονών, ο μπαμπάς της ήταν 6. Τώρα που η μαμά της είναι 30 χρονών, πόσο χρονών είναι ο μπαμπάς της;**

   α) Ο μπαμπάς της είναι 36 χρονών.

   β) Ο μπαμπάς της είναι 33 χρονών.

   γ) Ο μπαμπάς της είναι 60 χρονών.

   δ)
   Άλλο:……………………………………………………………………………………………
   ……………………………..…………………………………………………………………
   …………………………………………………………………………….….………………
   ……………………………………………………………………………………………...
   ……………………………………………………………………………………………..
   ……………………………………………………………………………………………...

4. **Στο γραφείο υπάρχουν δύο φωτοτυπικά μηχανήματα. Ξεκινούν να κάνουν αντίγραφα την ίδια στιγμή αλλά το ένα είναι πιο γρήγορο από το άλλο. Όταν το πρώτο έκανε 4 αντίγραφα, το δεύτερο είχε κάνει 6 αντίγραφα. Όταν το πρώτο μηχάνημα θα έχει κάνει 10 αντίγραφα, πόσα θα έχει κάνει το δεύτερο;**

   α) Το δεύτερο μηχάνημα θα έχει κάνει 15 αντίγραφα.

   β) Το δεύτερο μηχάνημα θα έχει κάνει 16 αντίγραφα.

   γ) Το δεύτερο μηχάνημα θα έχει κάνει 12 αντίγραφα.

   δ)
   Άλλο:……………………………………………………………………………………………
   ……………………………..…………………………………………………………………
   …………………………………………………………………………….….………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   …………………………………………………………………………………………….

5. Στο εργαστήριο ρομποτικής κατασκευάστηκαν δύο ρομποτάκια, ο Μπιπ και ο Μπαμ, που μπορούσαν να κινούνται με σταθερή ταχύτητα να κάνουν τον γύρο της τάξης. Ξεκίνησαν μαζί αλλά ο Μπαμ ήταν γρηγορότερος από τον Μπιπ. Όταν ο Μπιπ έκανε 2 γύρους, ο Μπαμ είχε κάνει 8 γύρους. Όταν ο Μπιπ κάνει 4 γύρους, πόσους γύρους θα έχει ο Μπαμ;

α) Ο Μπαμ θα έχει κάνει 10 γύρους.

β) Ο Μπαμ θα έχει κάνει 20 γύρους.

γ) Ο Μπαμ θα έχει κάνει 16 γύρους.

δ)
Άλλο:………………………………………………………………………………………
…………………………..………………………………………………………………
……………………………………………………………………….…..……………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

6. Δύο αεροπλάνα απογειώνονται την ίδια στιγμή και πετούν με σταθερή ταχύτητα, αλλά το ένα κινείται γρηγορότερα. Όταν το πρώτο διένυσε 8 χιλιόμετρα, το δεύτερο έχει διανύσει 20 χιλιόμετρα. Όταν το πρώτο διανύσει 12 χιλιόμετρα, πόσα χιλιόμετρα θα έχει διανύσει το δεύτερο;

α) Το δεύτερο θα έχει διανύσει 24 χιλιόμετρα.

β) Το δεύτερο θα έχει διανύσει 30 χιλιόμετρα.

γ) Το δεύτερο θα έχει διανύσει 40 χιλιόμετρα.

δ)
Άλλο:………………………………………………………………………………………
…………………………..………………………………………………………………
……………………………………………………………………….…..……………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………….

7. Ο Δημήτρης και η Αλίκη είναι αδέρφια. Όταν ο Δημήτρης ήταν 8 χρονών η Αλίκη ήταν 20. Όταν ο Δημήτρης θα είναι 12 χρονών πόσο χρονών θα είναι η Αλίκη;

α) Η Αλίκη θα είναι 30 χρονών.

β) Η Αλίκη θα είναι 28 χρονών.

γ) Η Αλίκη θα είναι 24 χρονών.

δ)
Άλλο:…………………………………………………………………………………………
……………………………………..……………………………………………………………
…………………………………………………………………………..….………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………….

8. Δύο εκτυπωτές εκτυπώνουν σελίδες το ίδιο γρήγορα, ο ένας όμως ξεκινάει πρώτος. Όταν ο δεύτερος εκτυπωτής έχει εκτυπώσει 2 σελίδες, ο πρώτος έχει εκτυπώσει 8 σελίδες. Όταν ο δεύτερος εκτυπωτής θα έχει εκτυπώσει 4 σελίδες, πόσες σελίδες θα έχει εκτυπώσει ο πρώτος;

α) Ο πρώτος εκτυπωτής θα έχει εκτυπώσει 16 σελίδες.

β) Ο πρώτος εκτυπωτής θα έχει εκτυπώσει 10 σελίδες.

γ) Ο πρώτος εκτυπωτής θα έχει εκτυπώσει 20 σελίδες.

δ)
Άλλο:…………………………………………………………………………………………
……………………………………..……………………………………………………………
…………………………………………………………………………..….………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………..