



*Department of
Mechanical
Engineering*

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

Διπλωματική εργασία

**Θέμα : «Βελτιστοποίηση προβλημάτων
δρομολόγησης με χρήση εξειδικευμένων
αλγορίθμων»**

Επιμέλεια: Φίλιππος Ξαγοράρης

Επιβλέπων καθηγητής: Γιώργος Νενές

Κοζάνη, Μάρτιος 2024



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική εργασία

**Θέμα : «Βελτιστοποίηση προβλημάτων
δρομολόγησης με χρήση εξειδικευμένων
αλγορίθμων»**

Επιμέλεια: Φίλιππος Ξαγοράρης

Επιβλέπων καθηγητής: Γιώργος Νενές

Κοζάνη, Μάρτιος 2024

Περίληψη

Η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία πραγματεύεται την επίλυση ενός πραγματικού προβλήματος δρομολόγησης καυσίμων σε σταθμούς ανεφοδιασμού βενζίνης και άλλων πετρελαϊκών προϊόντων με τη χρήση ενός εξειδικευμένου αλγορίθμου που στην βιβλιογραφία ονομάζεται «προσομοίωση ανόπτωσης». Ειδικότερα, λαμβάνονται αληθινά δεδομένα από μια εταιρεία που εδρεύει στην Ελλάδα για τις ζητήσεις αυτών, καθώς και για τη δυναμικότητα του στόλου των βυτιοφόρων, τις αποστάσεις μεταξύ των πρατηρίων και για τα γενικότερα κόστη που σχετίζονται με τη μεταφορά του κάθε καυσίμου. Το κάθε βυτιοφόρο διαχωρίζεται σε επιμέρους διαμερίσματα, των οποίων ο όγκος και το πλήθος διαφέρει, ενώ παράλληλα λαμβάνονται υπόψη ο κανονισμός του ADR για την πληρότητα των διαμερισμάτων και λοιποί περιορισμοί που σχετίζονται με την διάρκεια εργασίας του κάθε οδηγού, ώστε να μην υπερβεί το οκτάωρο.

Στο πραγματευόμενο πρόβλημα μικτού ακέραιου/ γραμμικού προγραμματισμού έχουν ήδη προταθεί μερικές λύσεις που περιλαμβάνουν δυάδες φορτηγών με συμβατικά λογισμικά επίλυσης τέτοιου είδους μοντέλων. Παρόλα αυτά, το μέγεθος αυτού το καθιστά αδύνατο να επιλυθεί ολόκληρο σε εύλογο χρονικό διάστημα και για αυτόν τον λόγο αξιοποιείται η προσομοίωση ανόπτωσης. Κατόπιν περιγραφής του αλγορίθμου και του τρόπου λειτουργίας του, παρατίθενται οι αρχικές προτεινόμενες λύσεις των υποπροβλημάτων με συμβατικά λογισμικά και συγκρίνονται με αυτές του αλγορίθμου. Τέλος, παρουσιάζονται ορισμένες λύσεις ολόκληρου του προβλήματος, σημειώνοντας ταυτόχρονα την ανάγκη εφαρμογής αυτών για κάθε κόμβο όλων των εφοδιαστικών αλυσίδων μιας που η εγκυρότητα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν ταυτίζεται ή διαφέρει ελάχιστα από αυτά των συμβατικών εργαλείων.

Λέξεις κλειδιά: Βελτιστοποίηση, Πρόβλημα δρομολόγησης, Ετερογενής στόλος, Ποικιλία διαμερισμάτων, Προσομοίωση ανόπτωσης

Abstract

This thesis deals with the solution of a real problem of fuel routing in gasoline and other petroleum products refueling stations using a specialized algorithm called "simulated annealing". In particular, real data are obtained from a company based in Greece on their demands, as well as on the capacity of the fleet, the distances between service stations and the general costs associated with the transport of each fuel. Each truck is divided into individual compartments (the volume and number of which varies), while the ADR regulation on compartment occupancy and other restrictions related to the working time of each driver are also taken into account, so as not to exceed eight hours.

In the discussed mixed integer/ linear programming problem, some solutions involving two sets of trucks have already been proposed with the use of conventional algorithms. However, the problem's size makes it impossible to solve to its full extent in a reasonable time and for this reason simulated annealing is exploited. After describing the algorithm and how it works, the initial proposed solutions of the sub-problems with conventional algorithms are listed and compared with those of the advanced algorithm. Finally, some solutions of the whole problem are presented, noting the importance of the usage of these algorithms throughout all the nodes of the supply chain, since the validity of the results obtained by them is identical or slightly different from those of other conventional tools.

Key words: Optimization, Vehicle Routing Problem, Heterogeneous fleet, Multi-Compartment, Simulated annealing

Πνευματικά δικαιώματα

Δηλώνω ρητά ότι η παρούσα Διπλωματική Εργασία με τίτλο: «Βελτιστοποίηση προβλημάτων δρομολόγησης με χρήση εξειδικευμένων αλγορίθμων», καθώς και τα ηλεκτρονικά αρχεία και πηγαίοι κώδικες που αναπτύχθηκαν ή τροποποιήθηκαν στο πλαίσιο αυτής της εργασίας και αναφέρονται ρητώς μέσα στο κείμενο που συνοδεύουν και η οποία έχει εκπονηθεί στο Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας, υπό την επίβλεψη του κ. Γιώργου Νενέ, αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής εργασίας και δεν προσβάλλει κάθε μορφής πνευματικά δικαιώματα τρίτων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον. Τα σημεία όπου έχω χρησιμοποιήσει ιδέες, κείμενο, αρχεία ή / και πηγές άλλων συγγραφέων, αναφέρονται ευδιάκριτα στο κείμενο με την κατάλληλη παραπομπή και η σχετική αναφορά περιλαμβάνεται στο τμήμα των βιβλιογραφικών αναφορών με πλήρη περιγραφή.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και μόνο.

Ευχαριστίες

Αρχικά, ευχαριστώ τους γονείς μου οι οποίοι αυτά τα πέντε χρόνια της φοίτησής μου στην Κοζάνη κατάφεραν μετά από αμέτρητους κόπους και θυσίες να με στηρίξουν στην προσπάθειά μου να γίνω μηχανολόγος μηχανικός. Η υπερμεγέθης προσπάθεια που κατέβαλλαν αδιάκοπα αυτήν την πενταετία αποτελεί την βασικότερη πηγή κινήτρου μου να επιτύχω και να συνεχίσω να προσπαθώ. Θα είμαι για πάντα ευγνώμων για όλα όσα έχουν προσφέρει και ελπίζω ότι μπορώ να αποδείξω πως όλα αυτά δεν πήγαν χαμένα.

Τέλος, ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Γιώργο Νενέ ο οποίος κατά τη διάρκεια της συνεργασίας μας πίστεψε σε εμένα και επέμεινε σε στιγμές που πίστευα πως οι δυσκολίες ορισμένων μαθημάτων και της διπλωματικής εργασίας θα με καταβάλλουν. Είμαι τυχερός που γνώρισα έναν τόσο σπουδαίο άνθρωπο και καθηγητή και θα του είμαι για πάντα ευγνώμων.

Περιεχόμενα

| | |
|---|----|
| 1. Εισαγωγή..... | 1 |
| 2. Βιβλιογραφική επισκόπηση..... | 4 |
| 3. Περιγραφή του προβλήματος..... | 9 |
| 3.1 Η εταιρεία..... | 9 |
| 3.2 Περιορισμοί..... | 9 |
| 3.3 Στοιχεία κόστους..... | 10 |
| 3.4 Στοιχεία ζήτησης..... | 12 |
| 3.5 Στοιχεία δυναμικότητας του στόλου βυτιοφόρων..... | 13 |
| 4. Κατασκευή του μοντέλου..... | 14 |
| 5. Προσομοίωση ανόπτησης (simulated annealing)..... | 19 |
| 5.1 Θεωρία του αλγορίθμου..... | 19 |
| 5.2 Γενική μορφή του αλγορίθμου..... | 23 |
| 5.3 Δημιουργία τυχαίων λύσεων..... | 24 |
| 5.4 Δημιουργία τυχαίων γειτονικών λύσεων..... | 26 |
| 5.5 Έλεγχος εφικτότητας διαδρομών..... | 28 |
| 5.6 Ενέργεια συστήματος- Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης..... | 31 |
| 5.7 Συνάρτηση αποδοχής λύσεων..... | 34 |
| 5.8 Ανανέωση θερμοκρασίας- Ψύξη συστήματος..... | 35 |
| 6. Αριθμητικά αποτελέσματα..... | 37 |
| 6.1 Εμπειρικές αναθέσεις της εταιρείας..... | 37 |
| 6.2 Ακριβείς λύσεις από το προτεινόμενο μοντέλο των Efthymiadis et al.(2023)..... | 38 |
| 6.3 Εφαρμογή της προσομοίωσης ανόπτησης στους προτεινόμενους συνδυασμούς..... | 41 |
| 6.4 Εφαρμογή της προσομοίωσης ανόπτησης σε ολόκληρο το πρόβλημα..... | 47 |
| 7. Συμπεράσματα..... | 54 |
| 8. Παραρτήματα- Κώδικας MATLAB..... | 57 |
| 8.1 Βασικοί αλγόριθμοι..... | 57 |
| 8.2 Κώδικες υποσυναρτήσεων προσομοίωσης ανόπτησης..... | 70 |
| 9. Βιβλιογραφικές αναφορές..... | 82 |

Κατάλογος πλαισίων

| | |
|---|----|
| Πλαίσιο 1: Ψευδοκώδικας αλγορίθμου προσομοίωσης απόπτωσης | 23 |
| Πλαίσιο 2: Ψευδοκώδικας συνάρτησης δημιουργίας τυχαίας αρχικής λύσης..... | 25 |
| Πλαίσιο 3: Ψευδοκώδικας συνάρτησης δημιουργίας τυχαίων γειτονικών λύσεων | 26 |
| Πλαίσιο 4: Ψευδοκώδικας συνάρτησης ελέγχου εφικτότητας | 30 |
| Πλαίσιο 5: Ψευδοκώδικας συνάρτησης υπολογισμού ενέργειας συστήματος- αντικειμενικής συνάρτησης..... | 32 |
| Πλαίσιο 6: Ψευδοκώδικας συνάρτησης αποδοχής γειτονικών λύσεων | 34 |
| Πλαίσιο 7: Ψευδοκώδικας συνάρτησης ανανέωσης θερμοκρασίας | 35 |

Κατάλογος διαγραμμάτων

| | |
|--|----|
| Διάγραμμα 1: Διάγραμμα εκθετικής ψύξης του συστήματος των τεσσάρων υποπροβλημάτων | 41 |
| Διάγραμμα 2: Διάγραμμα συνολικής ενέργειας συστήματος ανά επανάληψη για τον πρώτο σχηματισμό. | 42 |
| Διάγραμμα 3: Συνολική απόσταση που καλύπτεται ανά επανάληψη..... | 42 |
| Διάγραμμα 4: Ενέργεια συστήματος δεύτερου σχηματισμού ανά επανάληψη | 43 |
| Διάγραμμα 5: Συνολική απόσταση που καλύπτεται από τον δεύτερο σχηματισμό ανά επανάληψη..... | 44 |
| Διάγραμμα 6: Ενέργεια συστήματος τρίτου σχηματισμού ανά επανάληψη..... | 45 |
| Διάγραμμα 7: Συνολική απόσταση που καλύπτεται από τον τρίτο σχηματισμό..... | 46 |
| Διάγραμμα 8: Διάγραμμα εκθετικής ψύξης του συστήματος ολόκληρου του προβλήματος | 47 |
| Διάγραμμα 9: Συνολική ενέργεια του συστήματος ολόκληρου του προβλήματος ανά επανάληψη..... | 51 |
| Διάγραμμα 10 : Συνολική απόσταση που καλύπτεται σε ολόκληρο το πρόβλημα ανά επανάληψη..... | 52 |

Κατάλογος πινάκων

| | |
|--|----|
| Πίνακας 1: Μητρώο αποστάσεων μεταξύ σταθμών (σε χιλιόμετρα)..... | 11 |
| Πίνακας 2: Μητρώο κόστους διοδίων μεταξύ σταθμών (σε ευρώ) | 12 |
| Πίνακας 3: Δεδομένα ζήτησης ανά σταθμό και ανά προϊόν (σε κυβικά μέτρα) | 12 |
| Πίνακας 4: Στοιχεία δυναμικότητας του ετερογενή στόλου βυτιοφόρων της εταιρείας | 13 |
| Πίνακας 5: Αριθμητικά αποτελέσματα πρώτου εμπειρικού σχηματισμού..... | 37 |
| Πίνακας 6: Αριθμητικά αποτελέσματα δεύτερου εμπειρικού σχηματισμού..... | 37 |
| Πίνακας 7: Αριθμητικά αποτελέσματα τρίτου εμπειρικού σχηματισμού..... | 38 |
| Πίνακας 8: Αριθμητικά αποτελέσματα πρώτης προτεινόμενης λύσης..... | 38 |
| Πίνακας 9: Αριθμητικά αποτελέσματα δεύτερης προτεινόμενης λύσης..... | 39 |
| Πίνακας 10: Αριθμητικά αποτελέσματα τρίτης προτεινόμενης λύσης | 39 |
| Πίνακας 11: Αριθμητικά αποτελέσματα τέταρτης προτεινόμενης λύσης..... | 40 |
| Πίνακας 12: Αριθμητικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης πρώτου συνδυασμού φορτηγών | 42 |
| Πίνακας 13: Αριθμητικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης δεύτερου συνδυασμού φορτηγών | 43 |
| Πίνακας 14: Αριθμητικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης πρώτης δρομολόγησης τρίτου σχηματισμού..... | 44 |
| Πίνακας 15: Αριθμητικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης δεύτερης δρομολόγησης τρίτου σχηματισμού..... | 45 |
| Πίνακας 16: Συνολικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης τέταρτου συνδυασμού φορτηγών | 46 |
| Πίνακας 17: Συνολικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης σχηματισμού (a)..... | 48 |
| Πίνακας 18: Συνολικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης σχηματισμού (b) | 49 |
| Πίνακας 19: Συνολικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης σχηματισμών (c), (d), (e), (f) . | 49 |
| Πίνακας 20: Συνολικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης σχηματισμών (g), (h)..... | 50 |
| Πίνακας 21: Συνολικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης σχηματισμού (i)..... | 51 |

1.Εισαγωγή

Στη σύγχρονη εποχή διαπιστώνεται η αναγκαιότητα εκσυγχρονισμού όλων των εταιρειών και των βιομηχανιών που αποτελούν μέλη της εφοδιαστικής αλυσίδας και σε συνδυασμό με το ανταγωνιστικό περιβάλλον, τις δυσκολίες που εμφανίζονται σε αυτό και τις αυξανόμενες απαιτήσεις των πελατών επενδύονται σημαντικοί πόροι στην ανάπτυξη των logistics. Με την έννοια αυτή περιγράφονται όλες οι διοικητικές κινήσεις αναφορικά με την παραλαβή, διανομή και αποθήκευση πόρων μιας επιχείρησης με τον πιο αποτελεσματικό τρόπο, αν και ο ορισμός αυτός χρησιμοποιούταν παλιότερα κυρίως από τον στρατό (Kenton,2023). Αξίζει να σημειωθεί πως για αδυναμίες που προκύπτουν εντός των εφοδιαστικών αλυσίδων δεν ευθύνονται μόνο παράγοντες του ευρύτερου οικονομικού περιβάλλοντος της κάθε επιχείρησης, αλλά και η μη επαρκής χρήση των logistics που σχετίζονται με τις μεταφορές των προϊόντων και των διαδικασιών προγραμματισμού διανομής αυτών (McKinsey & Company, 2022). Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται από μεγάλες πετρελαϊκές εταιρείες μια στροφή στην εξέλιξη των προαναφερθέντων συστημάτων σε μια προσπάθεια να μειώσουν σημαντικά τα μεταφορικά κόστη. Την τάση αυτή ακολουθούν και μικρότερες εταιρείες αυτού του κλάδου ώστε να καταστεί βιώσιμη και κερδοφόρα η παρουσία τους στην αγορά σε ένα περιβάλλον στο οποίο οι τιμές των καυσίμων αυξάνονται ραγδαία και συνεπώς, οι πελάτες καθίστανται πιο απαιτητικοί.

Τα προβλήματα δρομολόγησης των καυσίμων βασίζονται πάνω σε μοντέλα μικτού ακέραιου/ γραμμικού προγραμματισμού, τα οποία είναι μη πολυωνυμικά (NP) , κάτι που σημαίνει πως το πλήθος των βημάτων που απαιτούνται για την επίλυσή τους αυξάνεται εκθετικά (Hosch,2023). Συνεπώς, ο εκσυγχρονισμός των logistics των εταιρειών αυτών καθίσταται εξαιρετικά δύσκολος, μιας που η χρήση άλλων εξειδικευμένων αλγορίθμων που ελαχιστοποιούν τον χρόνο επίλυσης εμφανίστηκε πρόσφατα και απαιτούν προσαρμογή στις ανάγκες και στα δεδομένα κάθε επιχείρησης.

Ένα μοντέλο βελτιστοποίησης της δρομολόγησης των πετρελαϊκών προϊόντων της εταιρείας που εξετάζεται στην παρούσα εργασία έχει προταθεί το 2023 από τους Efthymiadis et al. Με πραγματικά δεδομένα που σχετίζονται με τις αποστάσεις των πρατηρίων μεταξύ τους και από το κεντρικό αμαξοστάσιο, τις τιμές των διοδίων, άλλων μεταφορικών στοιχείων κόστους που εξαρτώνται από τον όγκο του εκάστοτε καυσίμου που πρόκειται να διανεμηθεί και της ζήτησης κάθε σταθμού προτάθηκε από αυτούς ένα πρόβλημα μικτού ακέραιου/ γραμμικού προγραμματισμού. Αξίζει να σημειωθεί ότι πριν την ανάπτυξη αυτού του μοντέλου η συγκεκριμένη εταιρεία ανέθετε χειροκίνητα τις

δρομολογήσεις της (λαμβάνοντας πάντα υπόψη τους κανονισμούς ADR και του εργασιακού οκταώρου), κάτι το οποίο απεδείχθη σημαντικά πιο κοστοβόρο από τις προτεινόμενες λύσεις (Efthymiadis et al., 2023). Παρόλα αυτά, η επίλυση αυτού του προβλήματος κρίνεται ακατάλληλη με τη χρήση συμβατικών λογισμικών (όπως το Lingo), αφού με τα συγκεκριμένα δεδομένα που πρόκειται να παρουσιαστούν δεν αρκούν ούτε τρεις μέρες για να προκύψει κάποια βέλτιστη τιμή, οπότε διαμοιράστηκε το πρόβλημα σε ορισμένα ζευγάρια φορτηγών με σκοπό την μείωση του χρόνου επίλυσης.

Το προαναφερθέν ζήτημα που αναδύεται κατά την βελτιστοποίηση της δρομολόγησης αυτής είναι η πρακτική αδυναμία προγραμματισμού διανομών καυσίμου σε μεγαλύτερο αριθμό σταθμών, η έγκαιρη ικανοποίηση ζήτησης αυτών, ενώ περιορίζεται ο αριθμός των αμαξοστάσιων σε έναν. Όλα τα παραπάνω αποτελούν πρόσκομμα στην προσπάθεια εξέλιξης της εταιρείας αυτής, διότι στην προσπάθειά της να επιβιώσει στο δύσκολο ανταγωνιστικό περιβάλλον της σύγχρονης εποχής λαμβάνονται λανθασμένες αποφάσεις που αυξάνουν το κόστος λειτουργίας και δρομολόγησης, ενώ παράλληλα καθίσταται ανέφικτη η επέκταση της σε ευρύτερες περιοχές της Ελλάδας. Την ευελιξία και την ταχύτητα που απαιτείται για την αντιμετώπιση των εμποδίων αυτών την προσφέρει σε απόλυτο βαθμό η προσομοίωση ανόπτησης (simulated annealing), που θα αναλυθεί σε επόμενες ενότητες. Τα υποπροβλήματα που επιλύθηκαν με το Lingo στο άρθρο των Efthymiadis et al. (2023) σε μια προσπάθεια σμίκρυνσης του προβλήματος χρειάστηκαν αρκετές ώρες για να εμφανιστεί το τελικό αποτέλεσμα, ωστόσο με την εφαρμογή της προσομοίωσης ανόπτησης για κάθε ένα από αυτά χρειάστηκαν μονάχα λίγα δευτερόλεπτα.

Η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία αποσκοπεί στην ευρύτερη εξέλιξη των logistics των εφοδιαστικών αλυσίδων που ασχολούνται με τη διανομή καυσίμων. Η προσομοίωση ανόπτησης αποτελεί ισχυρή λύση στα προβλήματα δρομολόγησης με ετερογενή στόλο βυτιοφόρων και με μεγάλο αριθμό σταθμών που επιθυμούν ποικιλία ζήτησης πετρελαϊκών προϊόντων. Παράλληλα, προσφέρεται σε κάθε εταιρεία η ευελιξία για επέκταση μιας που σε εύλογο χρονικό διάστημα δίνεται η δυνατότητα υπολογισμού της βέλτιστης διαδρομής ακόμα και αν οι σταθμοί ζήτησης αυξηθούν ή αν ακόμα αποφασιστεί η εγκαθίδρυση περισσότερων αμαξοστάσιων. Στο συγκεκριμένο σενάριο που θα αναλυθεί δεν λαμβάνονται υπόψη μόνο οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων όπως σε πολλά άλλα άρθρα που αξιοποιούν εξειδικευμένους αλγορίθμους σε προβλήματα δρομολόγησης, αλλά και οι ζητήσεις των καυσίμων που επιβάλλεται να ικανοποιηθούν πλήρως, καθώς και ο εφικτός διαμοιρασμός τους στα διαμερίσματα των φορτηγών, καθιστώντας την εργασία αυτή πιο επίκαιρη και πιο αντιπροσωπευτική για τα δεδομένα των εφοδιαστικών αλυσίδων. Μόνο έτσι δίνεται η δυνατότητα σε κάθε εταιρεία να μειώσει τα μεταφορικά κόστη, να δημιουργήσει ένα πιο αποδοτικό σχέδιο διανομής καυσίμου και να ικανοποιήσει σε

μεγαλύτερο βαθμό τους πελάτες της (Efthymiadis et al.,2023) και συνεπώς να δημιουργήσει το ανταγωνιστικό της πλεονέκτημα και να το διατηρήσει για μεγάλο χρονικό διάστημα.

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται αρχικά το πρόβλημα δρομολόγησης της ελληνικής εταιρείας πετρελαιοειδών και παρατίθενται τα δεδομένα που δόθηκαν σχετικά με τη ζήτηση κάθε σταθμού και της δυναμικότητας του στόλου βυτιοφόρων. Κατόπιν, αναλύεται το προτεινόμενο μοντέλο των Efthymiadis et al. (2022) και αφού εξηγηθεί ο αλγόριθμος της προσομοίωσης ανόπτωσης (ο τρόπος λειτουργίας, και το μαθηματικό-στατιστικό υπόβαθρο) παρουσιάζονται και συγκρίνονται οι λύσεις που πηγάζουν από το Lingo και από τον αλγόριθμο. Τέλος, εμφανίζεται και η συνολική λύση ολόκληρου του προβλήματος, ενώ ακολουθούν τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την αξιοποίηση του συγκεκριμένου αλγορίθμου.

2.Βιβλιογραφική επισκόπηση

Την αρχή πάνω στην έρευνα για τα προβλήματα δρομολόγησης έθεσαν το 1959 οι Dantzig και Ramser, οι οποίοι με το άρθρο τους «The truck dispatching problem» εισήγαγαν τη βασική μορφή του προβλήματος δρομολόγησης. Στο συγκεκριμένο άρθρο γενικεύεται το πρόβλημα του κινούμενου πωλητή (Travelling Salesman Problem), όπου αξιοποιείται μόνο ένα όχημα για την ελαχιστοποίηση των αποστάσεων, και αναπτύσσεται ένα θεωρητικό μοντέλο που περιλαμβάνει ένα κεντρικό αμαξοστάσιο, ένα στόλο φορτηγών με ποικιλία όγκων με στόχο την παροχή βενζίνης σε μεγάλο αριθμό πελατών. Μετά από αυτήν τη δημοσίευση το συγκεκριμένο πρόβλημα έλαβε την απαραίτητη προσοχή λόγω της πρακτικότητάς του στα αληθινά δεδομένα και στις υπολογιστικές του προκλήσεις.

Εμπνευσμένοι από την δουλειά των Dantzig και Ramser αποφάσισαν οι Clarke και Wright το 1964 να εξελίξουν το προϋπάρχον μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού. Με τα ίδια δεδομένα επιχείρησαν να βρουν έναν πιο πρακτικό τρόπο επίλυσης του ίδιου προβλήματος και τελικά ανακαλύφθηκε η «μέθοδος της οικονομίας» (savings method), ενός ευρετικού αλγορίθμου όπου αποτέλεσε βάση για την δημιουργία νεότερων και πιο εξειδικευμένων.

Εξέλιξη του απλού προβλήματος δρομολόγησης που αντιπροσωπεύει περισσότερο την πραγματικότητα συνιστά το πρόβλημα δρομολόγησης με χρονικά παράθυρα (Vehicle Routing Problem with Time Windows). Ειδικότερα, οι πελάτες είναι διαθέσιμοι μόνο για συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα και οι διανομές των προϊόντων οφείλουν να γίνονται μόνο εντός αυτών, οπότε εκτός από το γενικότερο κόστος μεταφοράς των αγαθών λαμβάνεται υπόψη και το κόστος άφιξης στον σταθμό εκτός των χρονικών ορίων που είναι διαθέσιμος ο πελάτης (Solomon,1987). Ο Solomon το 1987 στο άρθρο του «Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints» παρουσιάζει ορισμένους ευρετικούς αλγορίθμους τους οποίους εξετάζει ως προς την απόδοση του για μεγάλη ποικιλία δεδομένων. Οι Kumar και Panneerselvam το 2012 αναγνωρίζοντας πως η επίλυση αυτού του προβλήματος σε λογικό χρονικό διάστημα είναι δύσκολη λόγω του γεγονότος πως το πρόβλημα αυτό χαρακτηρίζεται ως NP-Hard χρησιμοποιούν εξειδικευμένους εξελικτικούς αλγορίθμους όπως ο γενετικός και η βελτιστοποίηση αποικίας μυρμηγκιών (Ant- Colony optimization). Στην έρευνα των Hu et al. (2018) εφαρμόζοντας πιο αυστηρούς περιορισμούς αξιοποιούν μια μέθοδο γειτονικής εύρεσης προσαρμοσμένων μεταβλητών (Adaptive Variable Neighborhood Search), η οποία όμως λειτουργεί ικανοποιητικά μόνο για μικρότερα προβλήματα.

Ως απόρροια της ανάγκης προσαρμογής του προβλήματος δρομολόγησης σε πραγματικά δεδομένα προστέθηκαν περιορισμοί στη χωρητικότητα των φορτηγών και στην απόσταση που αυτά μπορούν να καλύψουν, δημιουργώντας με αυτόν τον τρόπο έναν νέο κλάδο σε αυτόν τον τομέα που στην βιβλιογραφία χαρακτηρίζεται ως «πρόβλημα δρομολόγησης περιορισμένης χωρητικότητας (Capacitated Vehicle Routing Problem)». Οι Laporte et al.(1985) κατασκευάζουν έναν αλγόριθμο γραμμικού προγραμματισμού που λαμβάνει υπόψη τους προαναφερθέντες περιορισμούς, στο οποίο χαλαρώνονται ορισμένοι περιορισμοί για να αποκτηθούν γρηγορότερα ακέραιες λύσεις και στη συνέχεια αποκλείονται οι ανέφικτες διαδρομές. Οι Baldacci et al.(2010) παρουσίασαν τις πιο σημαντικές πτυχές των αλγορίθμων διακλάδωσης και κοπής (branch-and-cut algorithms) που συνιστούν βάση για την επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων. Οι Ibrahim et al. (2019) κατάφεραν μέσω δημιουργίας στηλών (column generation) και με τη συνδρομή του εργαλείου OR της Google να επιλύσουν αυτό το πρόβλημα για έναν μεγάλο αριθμό κόμβων πολύ κοντά στη βέλτιστη λύση.

Σε περιπτώσεις όπου η ζήτηση ενός πελάτη ξεπεράσει τις δυνατότητες φόρτωσης ενός φορτηγού κρίνεται απαραίτητος διαχωρισμός αυτής σε περισσότερα φορτηγά, συνεπώς ένας κόμβος δύναται να δεχθεί περισσότερες από μια επισκέψεις σε αντίθεση με τις προηγούμενες παραλλαγές. Βιβλιογραφικά συναντάται το πρόβλημα αυτό ως «πρόβλημα δρομολόγησης φορτηγών με διαχωρισμένη παράδοση (Split-Delivery Capacitated Vehicle Routing Problem)» και αποτελεί χαλαρότερη μορφή του προβλήματος δρομολόγησης περιορισμένης χωρητικότητας (CVRP)(Dror and Trudeau,1989). Οι Dror και Trudeau (1989) αναγνωρίζουν πως αν και είναι χαλαρότερη η μορφή αυτού του προβλήματος παραμένει στην ουσία αρκετά δύσκολο υπολογιστικά και για αυτό μέσω ευρετικών κανόνων υπολογίζονται μειώσεις κόστους σε σύγκριση με προβλήματα που δεν επιτρέπουν τον διαμοιρασμό της ζήτησης. Οι Wilck IV και Cavalier (2012) λαμβάνουν δεδομένα από προηγούμενες έρευνες και εφαρμόζουν μια ευρετική μέθοδο κατασκευής η οποία επισημαίνεται πως είναι ταχύτερη και πιο αποτελεσματική από άλλες μεθόδους, όπως αυτή της δημιουργίας στηλών (column generation) ή της δημιουργίας δύο φάσεων (two-phased method) και δύναται να συμβάλλει στην καλύτερη δημιουργία αρχικών λύσεων σε πιο εξειδικευμένους αλγορίθμους.

Επέκταση του προβλήματος δρομολόγησης θεωρείται και το πρόβλημα δρομολόγησης φορτηγών με πολλά διαμερίσματα (Multi Compartment Vehicle Routing Problem), το οποίο γενικεύει περιπτώσεις στις οποίες ορισμένα προϊόντα δεν μπορούν να αποθηκευθούν στον ίδιο χώρο προς αποφυγή αλλοίωσης τους (κυρίως για υγρά) ή επειδή απαιτούνται διαφορετικές συνθήκες αποθήκευσης (κυρίως τρόφιμα). Τα περισσότερα από αυτά τα προβλήματα αφορούν πετρελαιοειδή καύσιμα τα οποία ποικίλουν σε κάθε

πρατήριο και κρίνεται αναγκαία η παράδοσή τους σε αυτά με τρόπο ώστε να μην υπάρχει ανάμιξη αυτών.

Οι Cornillier et al. (2008a) εκπόνησαν μια έρευνα γύρω από το πρόβλημα αναπλήρωσης καυσίμων στα πρατήρια βενζίνης (Petrol Station Replenishment Problem) διαχωρίζοντάς το σε δύο υποπροβλήματα βέλτιστης δρομολόγησης των βυτιοφόρων και αποτελεσματικότερου διαμοιρασμού των καυσίμων στα διαμερίσματά τους. Στη συνέχεια αναπτύσσεται ένας ακριβής αλγόριθμος και γίνεται προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος με πραγματικά δεδομένα από τον Καναδά. Λίγο αργότερα οι Cornillier et al. (2008b) εφήρμοσαν έναν νέο ευρετικό αλγόριθμο για το πρόβλημα αναπλήρωσης καυσίμων πολλαπλών περιόδων (Multi-Period Petrol Station Replenishment Problem) με τα ίδια δεδομένα με προηγούμενη δημοσίευσή τους. Οι Yahyaoui et al. (2020) προσεγγίζουν το πρόβλημα δρομολόγησης με τους εξειδικευμένους αλγορίθμους «προσαρμοσμένης αναζήτησης γειτονικών μεταβλητών (adaptive variable neighborhood search)» και μιας παραλλαγής του γενετικού αλγορίθμου.

Με το ομοιογενές πρόβλημα δρομολόγησης παρόλα αυτά δεν εξετάζεται μια πιο ευέλικτη προσέγγιση στις ανάγκες των πελατών (Nenes et al., 2023) μιας που οι ζητήσεις αυτών διαφέρουν. Για παράδειγμα, στην βιομηχανία καυσίμων συναντώνται διαφορετικές τιμές ζήτησης για κάθε είδος καυσίμου, οπότε η ομοιογένεια των διαμερισμάτων αποτελεί τροχοπέδη στην διανομή πετρελαιοειδών αγαθών, διότι προκύπτουν ζητήματα που απορρέουν από τον βαθμό πληρότητας των διαμερισμάτων. Για να αποφευχθούν αυτά έγιναν έρευνες επάνω στο πρόβλημα δρομολόγησης πολλαπλών φορτηγών με ετερογενή στόλο (Heterogeneous Fleet Multi Compartment Vehicle Routing Problem), το οποίο ωστόσο είναι δυσκολότερο να λυθεί λόγω της υψηλής πολυπλοκότητάς του.

Οι Wang et al. (2020) ανέπτυξαν ένα μοντέλο μικτού ακέραιου/ γραμμικού προγραμματισμού για το πρόβλημα ανεφοδιασμού καυσίμων (Fuel Replenishment Problem) με ετερογενή στόλο και με πολλαπλές επισκέψεις ανά σταθμό εάν η ζήτηση αυτού είναι αρκετά υψηλή. Στη συνέχεια αναπτύσσεται ένας αλγόριθμος προσαρμοσμένης αναζήτησης γειτονικών μεταβλητών (ALNS) και μετά από εφαρμογή αυτού με πραγματικά δεδομένα από κινέζικη πετρελαϊκή εταιρεία συγκρίνονται οι ακριβείς λύσεις που προκύπτουν από τη μέθοδο δημιουργίας στηλών (Column Generation). Οι Asawarungsaengkul et al. (2013) διαχωρίζουν τη ζήτηση των πελατών σε προκαθορισμένα μοτίβα για να μοιραστούν τα παραδοτέα καύσιμα των πρατηρίων με πιο αποτελεσματικό τρόπο, ενώ η ζήτηση οφείλεται να καλυφθεί από ένα μόνο φορτηγό τη φορά και το κάθε μοτίβο από ένα διαμέρισμα (περιορισμοί που ταυτίζονται με το μοντέλο που θα αναλυθεί στη συγκεκριμένη εργασία). Ακολουθώς, εφαρμόζεται ο αλγόριθμος 2-opt, όπου λαμβάνονται δύο τόξα μιας αρχικής λύσης και αφού συνδεθούν μεταξύ τους ελέγχεται εάν

η νέα διαδρομή είναι καλύτερη , ώστε να αναβαθμιστεί η νέα λύση συμπεριλαμβάνοντας τη νέα διαδρομή. Τέλος, δημιουργούνται συστάδες κόμβων με τη μέθοδο «Savings» των Clarke και Wright (1964) επιλύοντας τους κόμβους αυτούς στο CPLEX.

Εξαιτίας της πολυπλοκότητας του προβλήματος δρομολόγησης με ετερογενή στόλο φορτηγών και της μεγάλης υπολογιστικής ισχύος που απαιτείται για την επίλυσή του, κρίνεται αναγκαία η εφαρμογή πιο εξειδικευμένων αλγορίθμων. Οι Khorasgani et al.(2015) εφαρμόζουν γενετικό αλγόριθμο για την επίλυση του προβλήματος και συγκρίνουν τα αποτελέσματα αυτού με τα πραγματικά που προκύπτουν από το Lingo, ενώ οι Chowmalī και Sukto (2021) αξιοποιούν ένα υβρίδιο της προσαρμοσμένης αναζήτησης γειτονικών μεταβλητών (Fisher And Jaikumar Algorithm with Adaptive Large Neighborhood Search), του οποίου οι λύσεις συγκρίνονται και πάλι με τις ακριβείς του Lingo.

Έρευνες για την δρομολόγηση μη ετερογενή στόλου εκπονήθηκαν και για τη διανομή τροφίμων, τα οποία δεν ενδείκνυται να τοποθετούνται σε ίδια διαμερίσματα λόγω των διαφορετικών αποθηκευτικών συνθηκών που απαιτούνται για την ορθή διατήρησή τους. Οι Kurhnia et al.(2018) χρησιμοποιούν γενετικούς αλγορίθμους για τη βελτιστοποίηση του προβλήματος διανομής λαχανικών στην Ινδονησία.

Στο πρόβλημα δρομολόγησης πολλαπλών φορτηγών με ετερογενή στόλο προστίθενται επιπλέον περιορισμοί χρονικών παραθύρων που δύναται να το κάνουν πιο ρεαλιστικό και στη βιβλιογραφία συναντάται με την έννοια «πλούσιο πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων (Rich Vehicle Routing Problem)». Οι Rabbouch et al.(2019) εφαρμόζουν γενετικό αλγόριθμο πάνω σε πραγματικά δεδομένα και οι Yusuf et al.(2014) προτείνουν μια παραλλαγή μιας υποσυνάρτησης του γενετικού αλγορίθμου (της επιλογής), την μέθοδο «κατάταξης και επιλογής (rank and select)» και τη συγκρίνουν με την προϋπάρχουσα, διαπιστώνοντας πως με τις νέες διαδρομές εξοικονομείται σημαντικό ποσό καυσίμου.

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται έντονο ενδιαφέρον από πολλές εταιρείες για μια οικολογική μετάβαση, μιας που αναγνωρίζεται πως ο κλάδος των logistics που αφορά τις μεταφορές προϊόντων προκαλούν σημαντικές επιπτώσεις για το περιβάλλον (Yu et al.,2019). Για αυτόν τον λόγο αναπτύχθηκε το οικολογικό πρόβλημα δρομολόγησης (Green Vehicle Routing Problem), το οποίο αναπτύχθηκε αρχικά από τους Erdogan& Miller-Hooks (2012), αποτελεί επέκταση του προβλήματος δρομολόγησης με χρονικά παράθυρα (Vehicle Routing Problem with Time Windows) και όπου βασικός του στόχος συνιστά η μείωση του κόστους μεταφοράς σε συνδυασμό με άλλους οικολογικούς παράγοντες (όπως την κατανάλωση καυσίμου και τις εκπομπές διοξειδίου του άνθρακα). Οι Yu et al. (2016) ανέπτυξαν ένα μοντέλο ελαχιστοποίησης κόστους μεταφοράς με την αξιοποίηση υβριδικών

οχημάτων, λαμβάνοντας υπόψη τη διαθεσιμότητα ηλεκτρικών σταθμών φόρτισης ή των πρατηρίων καυσίμων, το οποίο επιλύεται με χρήση της προσομοίωσης ανόπτωσης. Οι Yu et al. (2019) αξιοποιεί και πάλι την προσομοίωση ανόπτωσης, εφαρμόζοντας εντός αυτής και άλλες εξειδικευμένες ευρετικές τεχνικές για την επίλυση του προβλήματος δρομολόγησης ρύπανσης με ετερογενή στόλο (Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem). Στόχο αυτού του προβλήματος συνιστά η βέλτιστη ανάθεση φορτηγών, των διαδρομών που αυτά καλύπτουν και των ταχυτήτων με τα οποία αυτά κινούνται για την ελαχιστοποίηση του κόστους ρύπανσης.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία εφαρμόζεται ο αλγόριθμος της προσομοίωσης ανόπτωσης, προσαρμοσμένος στις ανάγκες του μοντέλου ακέραιου/ γραμμικού προγραμματισμού των Efthymiadis et al. (2023). Από αυτό περιγράφεται ένα πρόβλημα δρομολόγησης πολλαπλών βυτιοφόρων ετερογενούς στόλου βασισμένο σε πραγματικά δεδομένα ζήτησης και στοιχείων κόστους, ενώ συγχρόνως λαμβάνεται υπόψη και ο κανονισμός ADR για την πληρότητα των διαμερισμάτων πέρα από τον περιορισμό μη υπέρβασης της χωρητικότητας του κάθε διαμερίσματος. Τέλος, συγκρίνονται τα ακριβή αποτελέσματα του Lingo με αυτά που προκύπτουν με την αξιοποίηση της προσομοίωσης ανόπτωσης.

3. Περιγραφή του προβλήματος

3.1 Η εταιρεία

Η ανάλυση που πραγματοποιείται αφορά μια ελληνική εταιρεία που εδρεύει στον Βόλο και διανέμει πετρελαιοειδή καύσιμα σε δεκαεπτά πρατήρια βενζίνης στην κεντρική Ελλάδα. Στην κατοχή της έχει έναν ετερογενή στόλο βυτιοφόρων με ποικιλία πλήθους και χωρητικότητας αυτών με στόχο την καλύτερη προσαρμογή στις απαιτήσεις των πελατών της, τα οποία φορτώνονται με καύσιμα υπό τον περιορισμό των κανονισμών ADR περί πληρότητας διαμερισμάτων. Πιο συγκεκριμένα, σε περίπτωση που κάποιο διαμέρισμα επιλεχθεί προς ανάθεση οφείλεται να πληρωθεί για τουλάχιστον 80% του συνολικού του όγκου με σκοπό την αποφυγή ατυχημάτων που προκύπτουν από τις δυνάμεις που ασκούνται από την κίνηση των καυσίμων εντός των διαμερισμάτων κατά τη μεταφορά. Τα βυτιοφόρα ξεκινούν από ένα κεντρικό αμαξοστάσιο εντός του Βόλου και καλούνται να καλύψουν πλήρως την ζήτηση σε καύσιμα και των δεκαεπτά πρατηρίων βενζίνης που εξυπηρετούνται.

Η εταιρεία διανέμει πέντε είδη καυσίμου και ειδικότερα τρία βασικά προϊόντα (απλή αμόλυβδη, πετρέλαιο και πετρέλαιο θέρμανσης) και δύο πιο ενισχυμένα (Premium αμόλυβδη και Premium auto diesel). Με την προσφορά ενισχυμένων καυσίμων καλύπτονται και πελάτες που γνωρίζουν πως τα χημικά συστατικά που τοποθετούνται εντός αυτών συμβάλλουν στην μακροζωία του κινητήρα κάθε οχήματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ζήτηση αυτών ποικίλει ανάλογα με την εποχή, οπότε η τιμολόγηση τους προσαρμόζεται αντίστοιχα. Οι αναθέσεις των διαδρομών γίνονται εμπειρικά στο τέλος κάθε βάρδιας το απόγευμα και συνήθως διαρκεί αρκετές ώρες.

3.2 Περιορισμοί

Το πρόβλημα δρομολόγησης του κατεχόμενου στόλου βυτιοφόρων υπόκειται σε ορισμένους περιορισμούς που λαμβάνονται υπόψη κατά τη δημιουργία του μοντέλου μικτού ακέραιου/ γραμμικού προγραμματισμού. Αρχικά, επισημαίνεται πως η ζήτηση των πελατών οφείλεται να καλύπτεται πλήρως (δεν επιτρέπονται ελλείψεις), ενώ κάθε φορτηγό επιβάλλεται να ξεκινάει και να τερματίζει τη διαδρομή του στο κεντρικό αμαξοστάσιο. Για την τήρηση του εργασιακού οκταώρου, για την πρόληψη εξωγενών προβλημάτων που σχετίζονται με το οδικό δίκτυο, λοιπές καθυστερήσεις και συνυπολογίζοντας τον χρόνο φόρτωσης και εκφόρτωσης των καυσίμων ορίζεται μέγιστος επιτρεπόμενος αριθμός επισκέψεων ανά βυτιοφόρο, ο οποίος ισούται με πέντε. Τη ζήτηση όλων των προϊόντων την καλύπτει μόνο ένα φορτηγό (δεν εφαρμόζεται διαχωρισμός της ζήτησης όπως

προσεγγίστηκε από άλλα άρθρα της βιβλιογραφίας) και κάθε σταθμός δέχεται επίσκεψη μόνο μια φορά. Επιπλέον, η παραδοτέα ποσότητα καυσίμου δεν υπερβαίνει τη χωρητικότητα κάθε φορτηγού και το περιεχόμενο κάθε διαμερίσματος αδειάζει ολόκληρο στο κάθε πρατήριο που επισκέπτεται.

3.3 Στοιχεία κόστους

Το κόστος μεταφοράς των καυσίμων βασίζεται πάνω σε πολιτικές τιμολόγησης και εξαρτάται από την απόσταση του αμαξοστασίου από τον σταθμό που δύναται να εξυπηρετηθεί. Οι τιμολογήσεις που σχετίζονται με τις αποστάσεις ονομάζονται «τιμολογήσεις ζώνης» (Zone Pricing) και συναντώνται ευρέως σε εταιρείες πετρελαίου και αερίου. Για μικρές αποστάσεις εκτιμάται πως το μεταφορικό κόστος ακολουθεί την εξής συνάρτηση:

$$Weightcost = Volume\ Delivered(m^3) * a_i \left(\frac{\text{€}}{m^3} \right)$$

Οι τιμές του δείκτη a_i αποτελούν συνάρτηση της χιλιομετρικής απόστασης d (km) του αμαξοστασίου εντός της εμβέλειας των μικρών αποστάσεων και διαμορφώνονται με τον παρακάτω τρόπο:

$$a_i = \begin{cases} i = 1, & 0 \leq d < 10 \\ i = 2, & 10 \leq d < 25 \\ i = 3, & d \geq 25 \end{cases}$$

Σε περιπτώσεις όπου τα βυτιοφόρα καλύπτουν σταθμούς σε μεγαλύτερες αποστάσεις η εταιρεία κοστολογεί το βάρος του φορτίου διαφορετικά, η οποία διαφέρει από την προηγούμενη πολιτική υπολογισμού στο γεγονός πως λαμβάνεται υπόψη ένα επιπλέον κόστος:

$$Weightcost = \left[Volume\ delivered(m^3) * Distance(km) * b_i \left(\frac{\text{€}}{m^3 * km} \right) \right] + [Volume\ delivered(m^3) * f \left(\frac{\text{€}}{m^3} \right)]$$

Ο δείκτης f παραμένει σταθερός για όλες τις αποστάσεις σε αντίθεση με τον b_i , ο οποίος προκύπτει ως εξής:

$$b_i = \begin{cases} i = 1, & 0 \leq d < 100 \\ i = 2, & d \geq 100 \end{cases}$$

Οι πραγματικές τιμές των a_i , b_i , και f δεν δημοσιοποιούνται από την εταιρεία για λόγους εμπιστευτικότητας, αν και όπως θα εξηγηθεί παρακάτω δεν επηρεάζουν σε κάτι την τελική διαμόρφωση των διαδρομών διότι η ζήτηση όπως προαναφέρθηκε καλύπτεται πάντα πλήρως, ωστόσο διατηρούνται για να αποτυπωθεί το τελικό κόστος με μεγαλύτερη

ακρίβεια. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα οι δεκαοκτώ από τους δεκαεννιά σταθμούς κατατάσσονται στην κατηγορία των μικρών διαδρομών, ενώ ο τελευταίος κατηγοριοποιείται ως σταθμός μεγάλης απόστασης.

Στην τελική κοστολόγηση μεταφοράς των καυσίμων συμπεριλαμβάνονται και άλλα μεταφορικά κόστη που εξαρτώνται από τη χιλιομετρική απόσταση που επιβάλλεται να καλύψουν τα βυτιοφόρα. Το μεταφορικό κόστος που συνδέεται με τις χιλιομετρικές αποστάσεις που διανύει το κάθε φορτηγό για τη μεταφορά του από έναν σταθμό στον επόμενο εκφράζεται με τη συγκεκριμένη εξίσωση:

$$Travel\ cost = Distance * costperkm$$

Η τιμή της σταθεράς *costperkm* ανέρχεται περίπου στα 0,55€ ανά χιλιόμετρο που διανύεται.

Πίνακας 1: Μητρώο αποστάσεων μεταξύ σταθμών (σε χιλιόμετρα)

| Σταθμοί | Αρχή | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Αρχή | 0 | 2.9 | 3 | 5.6 | 6.3 | 6.5 | 6.8 | 6.9 | 12.4 | 12.8 | 12.9 | 13.3 | 22.7 | 23.1 | 31.6 | 39.1 | 45.4 | 49 | 54.1 | 75.4 |
| 1 | 2.9 | 0 | 0.5 | 3 | 3.7 | 4 | 4.6 | 4.4 | 15.2 | 5.6 | 5.2 | 5.7 | 17.8 | 20.6 | 26.7 | 41.9 | 44 | 33.7 | 41.6 | 70.5 |
| 2 | 3 | 0.5 | 0 | 2.8 | 3.5 | 3.7 | 4.4 | 4.1 | 15.5 | 5.4 | 5 | 5.5 | 17.5 | 20.3 | 26.5 | 42.3 | 44 | 33.4 | 49 | 70.2 |
| 3 | 5.6 | 3 | 2.8 | 0 | 1.4 | 1 | 1.6 | 1.4 | 17.9 | 2.6 | 2.2 | 2.7 | 14.8 | 17.6 | 23.7 | 44.7 | 45.2 | 30.7 | 46.2 | 67.5 |
| 4 | 6.3 | 3.7 | 3.5 | 1.4 | 0 | 2.6 | 1.4 | 3 | 18.3 | 4.2 | 3.8 | 4.3 | 16.4 | 19.2 | 25.3 | 45.1 | 45.8 | 32.3 | 47.8 | 69.1 |
| 5 | 6.5 | 4 | 3.7 | 1 | 2.6 | 0 | 0.85 | 1.3 | 18.9 | 1.8 | 1.5 | 1.9 | 14 | 17.3 | 23 | 45.6 | 46.1 | 30.4 | 45.5 | 66.7 |
| 6 | 6.8 | 4.6 | 4.4 | 1.6 | 1.4 | 0.85 | 0 | 2.3 | 19.6 | 1.9 | 1.5 | 2 | 14 | 18.5 | 23 | 47.3 | 46.3 | 40.4 | 45.5 | 66.7 |
| 7 | 6.9 | 4.4 | 4.1 | 1.4 | 3 | 1.3 | 2.3 | 0 | 18.6 | 3.1 | 2.7 | 3.2 | 15.2 | 18 | 24.2 | 45.4 | 45.9 | 31.2 | 46.7 | 60.3 |
| 8 | 12.4 | 15.2 | 15.5 | 17.9 | 18.3 | 18.9 | 19.6 | 18.6 | 0 | 24.8 | 24.9 | 20.6 | 34.7 | 35.5 | 43.6 | 26.8 | 46.8 | 48.6 | 66.1 | 87.4 |
| 9 | 12.8 | 5.6 | 5.4 | 2.6 | 4.2 | 1.8 | 1.9 | 3.1 | 24.8 | 0 | 1.1 | 1.8 | 14 | 18.3 | 23 | 46.3 | 50.8 | 31.5 | 45.5 | 66.7 |
| 10 | 12.9 | 5.2 | 5 | 2.2 | 3.8 | 1.5 | 1.5 | 2.7 | 24.9 | 1.1 | 0 | 1.2 | 13.3 | 19 | 22.3 | 51.1 | 50.1 | 39.6 | 44.8 | 66 |
| 11 | 13.3 | 5.7 | 5.5 | 2.7 | 4.3 | 1.9 | 2 | 3.2 | 20.6 | 1.8 | 1.2 | 0 | 13.7 | 19 | 22.7 | 47.3 | 50.5 | 32.1 | 45.2 | 66.4 |
| 12 | 22.7 | 17.8 | 17.5 | 14.8 | 16.4 | 14 | 14 | 15.2 | 34.7 | 14 | 13.3 | 13.7 | 0 | 29 | 26.8 | 59.2 | 58.2 | 44.1 | 49.3 | 70.5 |
| 13 | 23.1 | 20.6 | 20.3 | 17.6 | 19.2 | 17.3 | 18.5 | 18 | 35.5 | 18.3 | 19 | 19 | 29 | 0 | 34.2 | 62 | 62.5 | 13.2 | 21.1 | 42.3 |
| 14 | 31.6 | 26.7 | 26.5 | 23.7 | 25.3 | 23 | 23 | 24.2 | 43.6 | 23 | 22.3 | 22.7 | 26.8 | 34.2 | 0 | 70.7 | 69.7 | 33.1 | 38.2 | 59.5 |
| 15 | 39.1 | 41.9 | 42.3 | 44.7 | 45.1 | 45.6 | 47.3 | 45.4 | 26.8 | 46.3 | 51.1 | 47.3 | 59.2 | 62 | 70.7 | 0 | 30.4 | 87.8 | 92.9 | 114 |
| 16 | 45.4 | 44 | 44 | 45.2 | 45.8 | 46.1 | 46.3 | 45.9 | 46.8 | 50.8 | 50.1 | 50.5 | 58.2 | 62.5 | 69.7 | 30.4 | 0 | 86.8 | 91.9 | 113 |
| 17 | 49 | 33.7 | 33.4 | 30.7 | 32.3 | 30.4 | 40.4 | 31.2 | 48.6 | 31.5 | 39.6 | 32.1 | 44.1 | 13.2 | 33.1 | 87.8 | 86.8 | 0 | 6.3 | 25.7 |
| 18 | 54.1 | 41.6 | 49 | 46.2 | 47.8 | 45.5 | 45.5 | 46.7 | 66.1 | 45.5 | 44.8 | 45.2 | 49.3 | 21.1 | 38.2 | 92.9 | 91.9 | 6.3 | 0 | 19.4 |
| 19 | 75.4 | 70.5 | 70.2 | 67.5 | 69.1 | 66.7 | 66.7 | 60.3 | 87.4 | 66.7 | 66 | 66.4 | 70.5 | 42.3 | 59.5 | 114 | 113 | 25.7 | 19.4 | 0 |

Για την επίσκεψη ορισμένων σταθμών σε σχετικά μεγάλη απόσταση από την αφετηρία συνυπολογίζονται επίσης τα κόστη των διοδίων, μιας που καλούνται ορισμένα βυτιοφόρα να χρησιμοποιήσουν αυτοκινητοδρόμους. Στους Πίνακες 1 και 2 παρατίθενται τα μητρώα των αποστάσεων μεταξύ των σταθμών και του κόστους των διοδίων, όπως ακριβώς παρουσιάζονται από την εταιρεία :

Πίνακας 2: Μητρώο κόστους διοδίων μεταξύ σταθμών (σε ευρώ)

| Σταθμοί | Αρχή | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | |
|---------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Αρχή | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4,2 | 4,2 | 4,2 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4,2 | 4,2 | 4,2 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4,2 | 4,2 | 4,2 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4,2 | 4,2 | 4,2 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4,2 | 4,2 | 4,2 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4,2 | 4,2 | 4,2 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4,2 | 4,2 | 4,2 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4,2 | 4,2 | 4,2 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4,2 | 4,2 | 4,2 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4,2 | 4,2 | 4,2 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4,2 | 4,2 | 4,2 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4,2 | 4,2 | 4,2 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4,2 | 4,2 | 4,2 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4,2 | 4,2 | 4,2 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4,2 | 4,2 | 4,2 |
| 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4,2 | 4,2 | 4,2 |
| 17 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 0 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 0 | 0 | 0 |
| 18 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 0 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 0 | 0 | 0 |
| 19 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 0 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 0 | 0 | 0 |

3.4 Στοιχεία ζήτησης

Πίνακας 3: Δεδομένα ζήτησης ανά σταθμό και ανά προϊόν (σε κυβικά μέτρα)

| Σταθμοί | Diesel premium | auto | Πετρέλαιο θέρμανσης | Premium αμόλυβδη | Απλή αμόλυβδη | Diesel auto |
|---------|----------------|------|---------------------|------------------|---------------|-------------|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | 2.5 | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | 2.5 | |
| 5 | | 2.5 | | 2.5 | | |
| 6 | | | | | | |
| 7 | | | | | | |
| 8 | | | | | | |
| 9 | | 10.0 | | 3.0 | 8.0 | 3.0 |
| 10 | | | | | | |
| 11 | | 2.5 | | 2.5 | | |
| 12 | | | | | | |
| 13 | | | | | | 2.5 |
| 14 | | | | | | |
| 15 | | | 4.0 | | 2.5 | |
| 16 | | | | | | |
| 17 | | | | | | |
| 18 | | 3.5 | | | | |
| 19 | | | | | | |

Η εταιρεία προσφέρει πέντε είδη καυσίμων (απλή αμόλυβδη, diesel auto, πετρέλαιο θέρμανσης, premium αμόλυβδη και diesel auto premium) με τα οποία καλείται να

προμηθεύει τους σταθμούς που εξυπηρετεί. Τα δεδομένα που συλλέχτηκαν από το τμήμα προγραμματισμού πόρων αναφορικά με τις παραγγελίες που ελήφθησαν μια τυχαία ημέρα για τα πέντε προϊόντα γνωστοποιήθηκαν και παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.

3.5 Στοιχεία δυναμικότητας του στόλου βυτιοφόρων

Στο δυναμικό της εταιρείας υπάρχουν συνολικά δεκατέσσερα φορτηγά που διαφέρουν ως προς τη συνολική τους χωρητικότητα και ως προς το πλήθος των διαμερισμάτων. Ο συνολικός αριθμός των βυτιοφόρων ισούται με 14, οι τιμές της συνολικής χωρητικότητας εντάσσονται σε ένα εύρος από 26,3 έως 38 κυβικών μέτρων, ενώ συναντά κανείς 7 έως 11 διαμερίσματα ανά φορτηγό. Τέλος, ο όγκος των επιμέρους διαμερισμάτων κυμαίνεται από 2 έως 7 κυβικά μέτρα. Αναλυτικότερα δεδομένα του διαθέσιμου ετερογενή στόλου παρατίθενται στον Πίνακα 4:

Πίνακας 4: Στοιχεία δυναμικότητας του ετερογενή στόλου βυτιοφόρων της εταιρείας

| Φορτηγά | Αριθμοί και όγκοι διαμερισμάτων | | | | | | | | | | | Συνολική χωρητικότητα (σε κυβικά μέτρα) |
|---------|---------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | |
| 1 | 4.3 | 4.6 | 4.3 | 2.9 | 2.9 | 2.9 | 2.9 | 2.9 | 2.9 | 2.9 | 4.2 | 37.7 |
| 2 | 4.3 | 3.5 | 3.1 | 2.6 | 4.3 | 4.2 | 4.4 | - | - | - | - | 26.3 |
| 3 | 6.0 | 4.0 | 3.0 | 2.0 | 2.0 | 3.0 | 5.0 | 6.0 | 7.0 | - | - | 38.0 |
| 4 | 3.5 | 3.7 | 2.6 | 5.0 | 3.5 | 3.3 | 3.3 | 4.1 | 3.4 | 3.6 | - | 36.0 |
| 5 | 6.0 | 4.2 | 2.8 | 3.9 | 2.3 | 4.7 | 6.0 | 6.1 | - | - | - | 36.0 |
| 6 | 4.9 | 4.5 | 3.5 | 4.3 | 2.9 | 4.1 | 3.4 | 2.9 | 3.0 | 4.2 | - | 37.7 |
| 7 | 6.0 | 4.0 | 3.0 | 3.5 | 2.6 | 3.9 | 2.7 | 2.6 | 3.1 | 5.3 | - | 36.7 |
| 8 | 5.9 | 4.1 | 2.6 | 2.8 | 2.9 | 3.1 | 3.3 | 3.4 | 3.6 | 4.5 | - | 36.2 |
| 9 | 3.9 | 4.3 | 3.9 | 3.9 | 4.1 | 3.6 | 3.4 | 3.4 | 3.0 | 3.5 | - | 37.0 |
| 10 | 3.6 | 4.3 | 4.0 | 3.9 | 4.4 | 3.7 | 3.4 | 3.3 | 3.7 | 2.7 | - | 37.0 |
| 11 | 4.7 | 4.7 | 3.2 | 3.1 | 3.1 | 3.1 | 4.8 | 4.2 | 3.1 | 2.7 | - | 36.7 |
| 12 | 5.9 | 3.8 | 3.2 | 3.1 | 3.1 | 3.1 | 3.1 | 3.1 | 3.1 | 3.7 | - | 35.2 |
| 13 | 7.0 | 2.0 | 6.0 | 2.0 | 3.0 | 4.0 | 6.0 | 3.0 | 5.0 | - | - | 38.0 |
| 14 | 7.0 | 2.0 | 6.0 | 2.0 | 3.0 | 4.0 | 6.0 | 3.0 | 5.0 | - | - | 38.0 |

Λαμβάνοντας υπόψη τους προαναφερθέντες περιορισμούς, την διαδικασία δρομολόγησης και τα δεδομένα κόστους, ζήτησης και δυναμικότητας του στόλου κατασκευάστηκε από τους Efthymiadis et al. (2023) ένα μοντέλο μικτού ακέραιου/ γραμμικού προγραμματισμού. Το συγκεκριμένο μοντέλο καλύπτει όλες τις προδιαγραφές της περιγραφής του συγκεκριμένου προβλήματος, λαμβάνοντας υπόψη όλους τους προαναφερθέντες περιορισμούς και αποτελεί αντικείμενο ανάλυσης στην επόμενη ενότητα.

4. Κατασκευή του μοντέλου

Για την ανάπτυξη του προβλήματος κρίνεται αναγκαίος ο καθορισμός των μεταβλητών (σταθερών και απόφασης), της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε να καλύπτονται όλες οι ανάγκες του. Το μοντέλο μικτού γραμμικού προγραμματισμού για το πρόβλημα δρομολόγησης του ετερογενούς στόλου (Heterogeneous Fleet Multi-Compartment Vehicle Routing Problem) που παρουσιάζεται από τους Efthymiadis et al. (2023) αποτελείται αρχικά από τις παρακάτω παραμέτρους:

Δείκτες:

- k : Προσδιορίζει το σύνολο των φορτηγών (δεδομένα αυτού στον Πίνακα 4).
- p : Αναφέρεται στο σύνολο καυσίμων που πρόκειται να διανεμηθούν (δεδομένα αυτού στον Πίνακα 3).
- l : Καθορίζει το σύνολο διαθέσιμων διαμερισμάτων για κάθε φορτηγό (στοιχεία αυτών στον Πίνακα 4).
- i, j : Συμβολίζουν τα σύνολα αρχικών- τελικών κόμβων ενός βρόχου αντίστοιχα. Ειδικότερα, όταν ένα φορτηγό ξεκινήσει από έναν σταθμό και καταλήξει στον επόμενο, οι τιμές των i, j θα αντιστοιχούν στην ανάλογη αρίθμηση των πρατηρίων αυτής της διαδρομής (αριθμούνται όπως φαίνονται στους Πίνακες 1 και 2). Το αμαξοστάσιο (αφετηρία) συμβολίζεται με 0.

Σταθερές:

- $maxst$: Περιορίζει τον αριθμό των σταθμών που επιτρέπεται να επισκεφθεί ένα βυτιοφόρο. Όπως περιγράφηκε στην ενότητα 3, για την τήρηση του εργασιακού οκταώρου και για την έγκαιρη διανομή καυσίμων στα πρατήρια εντός της βάρδιας του οδηγού, η διοίκηση της εταιρείας όρισε ως μέγιστο επιτρεπόμενο αριθμό επισκέψεων ανά φορτηγό στους πέντε (εξαιρώντας την αφετηρία).
- $compcap(k, l)$: Αναφέρεται στη μέγιστη δυνατή χωρητικότητα του διαμερίσματος l στο φορτηγό k (σε κυβικά μέτρα)
- $truckcap(k)$: Περιγράφει τη μέγιστη συνολική χωρητικότητα του φορτηγού k
- $w(j, p)$: Καθορίζει τη ζήτηση του σταθμού j για το καύσιμο p (Πίνακας 3)
- $alldev$: Οριοθετεί τη μέγιστη δυνατή απόκλιση από το απόλυτο γέμισμα κάθε διαμερίσματος. Σύμφωνα με τους κανονισμούς ADR ισούται με 20%.

- $weightcost(j)$: Περιγράφει το κόστος μεταφοράς καυσίμου στον σταθμό j , ενώ λεπτομέρειες αυτού προβάλλονται στην ενότητα 3 σχετικά με την εκτιμώμενη κοστολόγηση.
- $tolls(i, j)$: Αντιστοιχεί στο κόστος των διοδίων για τη μετάβαση από έναν σταθμό i στον σταθμό j (όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 2).
- $dist(i, j)$: Αναφέρεται στη χιλιομετρική απόσταση μεταξύ του κόμβου i και του κόμβου j .
- $costperkm$: Καθορίζει το κόστος σχετικά με την κατανάλωση καυσίμου του κάθε φορτηγού σε ευρώ ανά χιλιόμετρο (με εκτίμηση της εταιρείας να ισούται με 0, 55€/km).
- $γdem(j)$: Δυαδική μεταβλητή που ισούται με 1 σε περίπτωση που ο σταθμός j έχει ζήτηση οποιουδήποτε προϊόντος και με 0 σε αντίθετη περίπτωση.

Μεταβλητές απόφασης:

- $x(i, j, k)$: Δυαδική μεταβλητή που λαμβάνει την τιμή 1 όταν κάποιο φορτηγό k μεταβεί από τον σταθμό i στον j , ειδάλως λαμβάνει την τιμή 0.
- $z(i, j, k)$: Περιγράφει την αθροιστική ζήτηση που έχει καλυφθεί από το φορτηγό k μεταβαίνοντας από τον σταθμό i στον j .
- $compload(j, k, p, l)$: Αντιστοιχεί στην ποσότητα (σε κυβικά μέτρα) του καυσίμου p που φορτώνεται στο διαμέρισμα l του φορτηγού k για να ικανοποιηθεί η ζήτηση του σταθμού j για το συγκεκριμένο καύσιμο.
- $γ(j, k, p, l)$: Είναι μια δυαδική μεταβλητή που ισούται με 1 εάν η ζήτηση του σταθμού j για καύσιμο p θα καλυφθεί από το διαμέρισμα l του φορτηγού k και με 0 σε αντίθετη περίπτωση.

Μετά τον καθορισμό των παραπάνω δεδομένων καθίσταται δυνατή η δημιουργία του μοντέλου μικτού ακέραιου/ γραμμικού προγραμματισμού που περιγράφει το πραγματευόμενο πρόβλημα δρομολόγησης του ετερογενούς στόλου. Η αντικειμενική συνάρτηση που καλείται να ελαχιστοποιηθεί είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j,k,p,l} weightcost(j) \cdot compload(j, k, p, l) + \\ & \sum_{i,j,k} tolls(i, j) \cdot x(i, j, k) + \\ & \sum_{i,j,k} dist(i, j) \cdot costperkm \cdot x(i, j, k) \end{aligned} \quad (1)$$

Ο πρώτος όρος της εξίσωσης αντιστοιχεί στο κόστος μεταφοράς καυσίμων στον κόμβο j , ωστόσο δεν επιδέχεται βελτιστοποίησης, αφού η ζήτηση πρόκειται να καλυφθεί πλήρως και συνεπώς ο όρος αυτός παραμένει πάντοτε σταθερός. Πιο συγκεκριμένα, για οποιαδήποτε διαδρομή ακολουθήσουν τα βυτιοφόρα, όλοι οι σταθμοί που δηλώνουν

ενδιαφέρον για οποιοδήποτε είδος καυσίμου θα εξυπηρετηθούν, οπότε για κάθε σύνολο δεδομένων ζήτησης αντιστοιχεί μια σταθερή τιμή μεταφορικού κόστους. Παρόλα αυτά, διατηρείται στην αντικειμενική συνάρτηση για να προκύπτει το πραγματικό συνολικό κόστος για τις ημερήσιες δαπάνες διανομής. Ο δεύτερος και ο τρίτος όρος της εξίσωσης υποδηλώνουν το κόστος κάθε φορτηγού για την πληρωμή διοδίων και για την κατανάλωση καυσίμου κατά την κάλυψη των χιλιομετρικών αποστάσεων μεταξύ σταθμών αντίστοιχα.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι περιορισμοί του συγκεκριμένου μοντέλου γύρω από τους οποίους δύναται να ελαχιστοποιηθεί η αντικειμενική συνάρτηση:

$$\sum_i (x(i, j, k) - x(j, i, k)) = 0, \forall k, j \quad (2)$$

$$x(i, i, k) = 0, \forall i, k \quad (3)$$

$$\sum_p w(j, p) \leq M \cdot ydem(j), \forall j \geq 1 \quad (4)$$

$$\sum_{i,k} x(i, j, k) = ydem(j), \forall j \geq 1 \quad (5)$$

$$x(i, j, k) \leq \sum_p w(j, p), \forall i, j \geq 1, k \quad (6)$$

$$\sum_{j,k} (z(i, j, k) - z(j, i, k)) = \sum_p w(i, p), \forall i \geq 1 \quad (7)$$

$$z(0, j, k) = 0, \forall j, k \quad (8)$$

$$truckcap(k) = \sum_l compcap(k, l), \forall k \quad (9)$$

$$z(i, j, k) \leq truckcap(k) \cdot x(i, j, k), \forall i \geq 1, j, k \quad (10)$$

$$\sum_{k,l} compload(j, k, p, l) = w(j, p), \forall j \geq 1, p \quad (11)$$

$$\sum_{j,p} y(j, k, p, l) \leq 1, \forall k, l \quad (12)$$

$$y(j, k, p, l) \leq \sum_i x(i, j, k), \forall j, k, p, l \quad (13)$$

$$alldev = 0.20 \quad (14)$$

$$compload(j, k, p, l) \leq compcap(k, l) \cdot y(j, k, p, l), \forall j \geq 1, k, p, l \quad (15)$$

$$compload(j, k, p, l) \geq compcap(k, l) \cdot (1 - alldev) \cdot y(j, k, p, l), \forall j \geq 1, k, p, l \quad (16)$$

$$compload(0, k, p, l) = 0, \forall k, p, l \quad (17)$$

$$maxst = 5 \quad (18)$$

$$\sum_{i \geq 1, j} x(i, j, k) \leq maxst, \forall k \quad (19)$$

Αρχικά, ο περιορισμός (2) τοποθετείται για να μπορέσει κάποιο φορτηγό να φύγει από τον κόμβο j σε περίπτωση που τον επισκεφτεί, ενώ ο (3) απαγορεύει σε κάποιο φορτηγό να μεταβεί αμέσως στον ίδιο σταθμό από τον οποίον ξεκίνησε. Ο (4) ελέγχει ποιος σταθμός έχει ζήτηση καθορίζοντας την τιμή του y_{dem} , ενώ με τον (5) διασφαλίζεται πως ένα μόνο φορτηγό θα καλύψει τη ζήτηση αυτή, εφόσον αυτή υπάρχει και ο (6) μηδενίζει την μεταβλητή $x(i, j, k)$ για τα σύνολα (i, j) στα οποία δεν υπάρχει ζήτηση, μειώνοντας έτσι σημαντικά το μέγεθος του προβλήματος. Με τον (7) βεβαιώνεται πως όσα φορτηγά χρησιμοποιήθηκαν κλείνουν τη διαδρομή τους (εκκινούν και τερματίζουν στο αμαξοστάσιο) και καθορίζεται πως η συνολική αθροιστική ζήτηση που ικανοποιείται από το συγκεκριμένο φορτηγό k ισούται με αυτή του σταθμού i συν των προηγούμενων σταθμών που επισκέφτηκε και με τον (8) βεβαιώνεται πως το αμαξοστάσιο δεν έχει ζήτηση ($i=0$). Στη συνέχεια με τον περιορισμό (9) προκύπτει ο συνολικός όγκος κάθε βυτιοφόρου ως άθροισμα του όγκου των επιμέρους διαμερισμάτων και με τον (10) διασφαλίζεται πως η συνολική ζήτηση που θα καλυφθεί από το φορτηγό k σε μια διαδρομή δεν υπερβαίνει τη συνολική του χωρητικότητα, ενώ με τον (11) ορίζεται πως κάθε κόμβος θα εξυπηρετηθεί από συγκεκριμένα διαμερίσματα. Ο (12) υποδηλώνει πως κάθε διαμέρισμα χρησιμοποιείται μόνο μια φορά σε κάθε διαδρομή και ο (13) μηδενίζει την μεταβλητή $\gamma(j, k, p, l)$ σε περίπτωση που κάποιος κόμβος δεν έχει ζήτηση. Με τον περιορισμό (14) ορίζεται η ελάχιστη απόκλιση από τη μέγιστη πληρότητα κάθε διαμερίσματος σε περίπτωση που αυτό επιλεγεί. Αρκετά σημαντικός για το πρόβλημα είναι ο περιορισμός (15), με τον οποίο διασφαλίζεται πως θα ανατεθεί ένα διαμέρισμα για πλήρωση μόνο εάν η $\gamma(j, k, p, l)$ ισούται με 1, δηλαδή αν υπάρχει ζήτηση που μπορεί να καλυφθεί με το διαμέρισμα l του φορτηγού k , και πως η συγκεκριμένη ανάθεση δεν ξεπερνά τον όγκο του επιλεγμένου διαμερίσματος. Ταυτόχρονα, με τον (16) καθορίζεται πως σε περίπτωση που επιλεγεί ένα διαμέρισμα πρέπει να πληρωθεί τουλάχιστον το 80% της συνολικής του χωρητικότητας και με τον (17) ορίζεται πως στην αφετηρία δεν υπάρχει ζήτηση. Τέλος, με τους περιορισμούς (18) και (19) τοποθετείται το ανώτατο όριο δυνατών επισκέψεων και απαγορεύεται στα ανατιθέμενα φορτηγά να το υπερβούν.

Για να καλυφθούν όλες οι προδιαγραφές του προβλήματος και να ενσωματωθούν σε αυτό το μοντέλο απαιτείται μεγάλος αριθμός μεταβλητών και περιορισμών και σε συνάρτηση με το πλήθος των δεδομένων που διατίθενται προκύπτει τελικά ένα υπερμέγεθες πρόβλημα το οποίο είναι αδύνατο να λυθεί σε λογικό υπολογιστικό χρόνο. Για αυτόν τον λόγο αξιοποιείται στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία ένας εξειδικευμένος αλγόριθμος, η προσομοίωση απόπτωσης (simulated annealing), του οποίου λεπτομέρειες αναλύονται στην επόμενη ενότητα. Αξίζει να σημειωθεί πως για την μοντελοποίηση αυτού

του προβλήματος στα δεδομένα της προσομοίωσης απόκτησης εξαιρούνται οι μεταβλητές y_{dem} , $compload(j, k, p, l)$, $\gamma(j, k, p, l)$, $z(i, j, k)$, ενώ οι παραπάνω περιορισμοί ενσωματώνονται στη δομή του αλγορίθμου που πρόκειται να αναλυθεί.

5. Προσομοίωση ανόπτωσης (simulated annealing)

5.1 Θεωρία του αλγορίθμου

Η προσομοίωση ανόπτωσης (simulated annealing) χαρακτηρίζεται ως ένας μεταερευτικός αλγόριθμος, ο οποίος προσομοιώνει τη διαδικασία της ανόπτωσης των μετάλλων. Πιο συγκεκριμένα, θερμαίνονται σε μια θερμοκρασία στην οποία ανακουφίζονται οι εσωτερικές τάσεις του, στη συνέχεια ακολουθεί η ανακρυστάλλωση ώστε να δημιουργηθούν νέοι κόκκοι χωρίς προϋπάρχουσες τάσεις και τέλος οι κόκκοι αναπτύσσονται πλήρως αφού τα μέταλλα ψυχθούν με καθορισμένο ρυθμό. Συνέπεια της διαδικασίας αυτής είναι η αναδιαμόρφωση του μετάλλου με τέτοιον τρόπο, ώστε αυτό να γίνει πιο όλκιμο και λιγότερο σκληρό. Για να επιτευχθεί η ελάχιστη ενεργειακή κατάσταση με ελάχιστες ατέλειες, ο ρυθμός ψύξης κρίνεται απαραίτητο να είναι αργός, διότι σε αντίθετη περίπτωση παρατηρούνται παραμένουσες τάσεις, μιας που δεν επιτυγχάνεται η επιθυμητή διάταξη των κρυστάλλων. Αυτός ο αλγόριθμος αποσκοπεί αντίστοιχα στην μείωση της εσωτερικής ενέργειας του συστήματος- προβλήματος, είναι εύκολος να εφαρμοστεί και σε σύγκριση με άλλους εξελικτικούς αλγορίθμους κατέχει την ιδιότητα να μην παγιδεύεται σε τοπικά ελάχιστα (Nikolaev and Jacobson, 2010). Αξίζει να σημειωθεί πως πολλοί αλγόριθμοι που λειτουργούν ντετερμινιστικά, αν και βρίσκουν συνεχώς καλύτερες λύσεις υστερούν στο ότι η αρχική λύση επηρεάζει την τελική, οπότε τελικά παγιδεύονται σε τοπικά ελάχιστα (Anily and Federgruen, 1987). Αυτό το ζήτημα αντιμετωπίζεται από την προσομοίωση ανόπτωσης σε ικανοποιητικό βαθμό, μιας που η δημιουργία των επόμενων λύσεων γίνεται τυχαία, οπότε υπάρχει η δυνατότητα μεγάλων μεταβολών του τελικού αποτελέσματος ως συνέπεια των τυχαίων μεταβάσεων στις επόμενες λύσεις (hill climbing), κάτι που ως συνέπεια τον καθιστά κατάλληλο για την επίλυση διακριτών και συνεχών προβλημάτων ακόμα και σε μοντέλα μη γραμμικού προγραμματισμού.

Βάση για την κατασκευή της προσομοίωσης ανόπτωσης συνιστά η μελέτη των Metropolis et al. (1953), κατά την οποία δημιουργήθηκε ένας αλγόριθμος που προσομοιώνει τη φυσική διαδικασία της ανόπτωσης και τη φυσική εξέλιξη ενός υλικού που υφίσταται ανόπτωση. Κατά τη μέθοδο αυτή εφαρμόζονται τεχνικές προσομοίωσης για τη δημιουργία ενδεχόμενων καταστάσεων του μετάλλου μεταβάλλοντας τις θέσεις των κόκκων και στη συνέχεια συγκρίνοντας τις αντίστοιχες ενέργειες του συστήματος. Σε περίπτωση που μειωθεί η ενέργεια του συστήματος στην επόμενη κατάσταση, αυτή ορίζεται ως υπάρχουσα κατάσταση, ενώ σε αντίθετη περίπτωση γίνεται μετάβαση σε αυτή

με πιθανότητα $P = e^{\frac{E_i - E_j}{T * kb}}$, όπου i, j η αρχική και τελική κατάσταση, T η θερμοκρασία του συστήματος και kb η σταθερά Boltzmann ($kb = 1,38 * 10^{-24} J/K$). Αυτό το κριτήριο αποδοχής ονομάζεται «Κριτήριο Metropolis (Metropolis criterion)» και συνιστά βασικό παράγοντα κατά την εφαρμογή της προσομοίωσης ανόπτησης. Η πιθανότητα να βρεθεί το τελικό στερεό στην κατάσταση i της τελικής ισορροπίας ακολουθεί κατανομή Boltzmann (Delahaye et al., 2019), δηλαδή:

$P_i = \frac{1}{Z(T)} * e^{\frac{-E_i}{kb * T}}$, με συντελεστή κανονικοποίησης $Z(T) = \sum_{j \in S} e^{\frac{-E_j}{kb * T}}$, όπου j όλες οι υπόλοιπες πιθανές βέλτιστες καταστάσεις στον χώρο S του συνόλου που απαρτίζεται από αυτές.

Ορμώμενοι από το τις μελέτες και από το έργο των Metropolis et al. (1953) μορφοποιήθηκαν οι προαναφερθέντες όροι από τους Kirkpatrick et al. (1983) για την τελική κατασκευή του αλγορίθμου προσομοίωσης ανόπτησης. Παρόλα αυτά αναγνωρίζεται από αυτούς πως για προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης (combinatorial optimization problems), όπως το πρόβλημα δρομολόγησης που πραγματεύεται η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία, σε πρακτικό επίπεδο τα αποτελέσματα της τελικής κατάστασης του συστήματος διαφέρουν, αφού ευνοούνται ταυτόχρονα διαφορετικές και ανέφικτες διαδρομές. Η αρνητική αυτή αλληλεπίδραση των στοιχείων αυτών εντός του συστήματος χαρακτηρίζεται ως απογοήτευση (frustration) (KAWASHIMA GROUP, 2023) και περιγράφεται σε μεγαλύτερο βαθμό από τα περιστρεφόμενα γυαλιά (spin glasses), τα οποία είναι μαγνητικά κράματα στα οποία παρατηρείται αντίθεση στην περιστροφή φερομαγνητικών και αντιφερομαγνητικών ατόμων, δημιουργώντας έτσι φαινομενικά τυχαία μαγνητικά μοτίβα (Kamber et al., 2020). Μετά την εφαρμογή του αλγορίθμου προβλέπεται τελικά η δημιουργία αρκετών λύσεων που προσεγγίζουν την ακριβή βέλτιστη (near-optimal), ωστόσο δεν διαφέρουν σε σημαντικό βαθμό μεταξύ τους όσον αφορά την ποιότητά τους και συνεπώς οποιαδήποτε προσπάθεια εύρεσης του απόλυτου βέλτιστου κρίνεται μη συμφέρουσα (Kirkpatrick et al., 1983).

Κατά τη διαδικασία του αλγορίθμου συγκρίνονται δύο λύσεις (η ήδη υπάρχουσα και η επόμενη), οι οποίες πάντοτε δημιουργούνται τυχαία. Σε περίπτωση που η επόμενη λύση είναι καλύτερη ο αλγόριθμος την αποδέχεται με απόλυτη βεβαιότητα, ενώ σε αντίθετη περίπτωση γίνεται αποδεκτή με μια πιθανότητα που εξαρτάται από την θερμοκρασία του συστήματος (Nikolaev and Jacobson, 2010). Αξίζει να σημειωθεί πως όσο πιο θερμό είναι το σύστημα παρατηρείται μια πιο άπληστη συμπεριφορά του αλγορίθμου εξαιτίας της αυξημένης εσωτερικής ενέργειας, ωστόσο κατά τη μείωση της θερμοκρασίας εκτελούνται

πιο περιορισμένες κινήσεις. Η συμπεριφορά αυτή αιτιολογεί την ιδιότητα της προσομοίωσης ανόπτωσης να αποφεύγει τα τοπικά ελάχιστα (hill climbing), ενώ παράλληλα ελέγχεται ένα μεγάλο εύρος του χώρου των λύσεων.

Κάθε λύση j που προκύπτει σε κάθε επανάληψη k ανήκει πάντα στο σύνολο των γειτονικών λύσεων της προηγούμενης λύσης i και μεταβαίνει σε αυτήν με πιθανότητα $g_k(i, j)$, αφού η δημιουργία γειτονικών λύσεων γίνεται τυχαία, ενώ η μετάβαση από την i στην j συμβαίνει με πιθανότητα αποδοχής $a_{ij} = e^{\frac{f(i)-f(j)}{T_k}}$ (Κριτήριο Metropolis -Metropolis criterion) σε περίπτωση που η γειτονική λύση αυξάνει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ($f(i) - f(j) > 0$), αλλιώς $a_{ij} = 1$. Αξίζει να σημειωθεί πως σε περίπτωση που σε κάποιο πρόβλημα η αντικειμενική συνάρτηση καλείται προς μεγιστοποίηση, αυτή μετασχηματίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να προσαρμοστεί σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης (αλλάζοντας της για παράδειγμα πρόσημο), αφού για την ορθή λειτουργία της προσομοίωσης ανόπτωσης η ενέργεια του συστήματος οφείλει να μειώνεται. Μιας που είναι βέβαιο πως θα υπάρξει μετάβαση σε οποιαδήποτε γειτονική κατάσταση j του συνόλου n των πιθανών γειτόνων, σημειώνεται πως το άθροισμα των πιθανοτήτων επιλογής για όλη τη γειτονιά λύσεων ισούται με τη μονάδα ($\sum_{j \in n} g_k(i, j) = 1 \forall i \in n, k \in N^*$). Λαμβάνοντας υπόψη αυτές τις έννοιες κατασκευάζεται τελικά ο μη αρνητικός τετραγωνικός πίνακας μεταβάσεων P^k (Anily and Federgruen, 1987):

$$P_k = \begin{cases} [g_k(i, j)](k) * a_{ij}(k) & , j \in n, j \neq i \\ 0 & , j \notin n, j \neq i \\ 1 - \sum_{l \in n, l \neq i} [g_k(i, l)](k) * a_{il}(k) & , j = i \end{cases}$$

Ο τελευταίος όρος της αγκύλης τοποθετείται διότι υπάρχει μη μηδενική πιθανότητα να μην εκτελεστεί κάποια μετάβαση εξαιτίας του γεγονότος πως κάποια μετάβαση j δεν πρόκειται να γίνει αποδεκτή από το κριτήριο Metropolis. Λαμβάνοντας υπόψη τη στοχαστικότητα πίσω από τη δημιουργία των νέων καταστάσεων και τη μετάβαση σε αυτές και υποθέτοντας ότι ο χώρος των καταστάσεων είναι μετρήσιμος, διαπιστώνεται πως η αλληλουχία των μεταβάσεων αυτών συνιστά μια Μαρκοβιανή Αλυσίδα (Romeo and Sangionanni-Vincentelli, 1991). Επισημαίνεται ακόμα πως για τη σύγκλιση των αποτελεσμάτων του αλγορίθμου λαμβάνονται υπόψη δύο προσεγγίσεις της Μαρκοβιανής Αλυσίδας, είτε ως ομογενής αλυσίδα είτε ως μη ομογενής.

Για να μοντελοποιηθεί η ομογενής Μαρκοβιανή Αλυσίδα αρχικά κρίνεται απαραίτητο να διατηρηθεί σταθερή η θερμοκρασία T για ικανοποιητικά μεγάλο αριθμό επαναλήψεων m , ώστε να προλάβει πίνακας P^k να καταλήξει στις πιθανότητες μόνιμης

κατάστασης π_j (Nikolaev and Jacobson, 2010). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να εκτελούνται m εσωτερικές επαναλήψεις για κάθε επανάληψη k που σχετίζεται με την θερμοκρασιακή κατάσταση του συστήματος. Για την ύπαρξη εργοδικότητας και συνεπώς για τη σύγκλιση των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης π_j η αλυσίδα αυτή οφείλει να έχει μια μόνο κλάση, δηλαδή να επικοινωνούν μεταξύ τους όλες οι καταστάσεις (irreducibility), και συνεπώς να υπάρχει μη μηδενική πιθανότητα σε k μεταβάσεις για τη δημιουργία διαδρομών μεταξύ δύο οποιονδήποτε λύσεων (recurrence). Τέλος, ξεκινώντας από την κάθε κατάσταση j του συνόλου των γειτονικών λύσεων n πρέπει να καθίσταται εφικτή η επιστροφή στην αρχική κατάσταση i με περίοδο 1 ($P_{ii}^{(1)} > 0$), χαρακτηριστικό που καθιστά την αλυσίδα απεριοδική (aperiodicity). Ωστόσο, για να επιτευχθεί ολική σύγκλιση των πιθανοτήτων του μητρώου P^k στις τελικές πιθανότητες μόνιμης κατάστασης π_j απαιτείται άπειρος αριθμός επαναλήψεων υπό σταθερή θερμοκρασία, γεγονός που καθιστά την προσέγγιση του μοντέλου ομογενούς Μαρκοβιανής Αλυσίδας μη πρακτική (Romeo and Sangiovanni-Vincentelli, 1991), οπότε εξετάζεται και μια δεύτερη προσέγγιση στην αντιμετώπιση του συγκεκριμένου μητρώου μεταβάσεων.

Για την σύγκλιση του αλγορίθμου σε εφικτό υπολογιστικό χρόνο θεωρείται πως το μητρώο πιθανοτήτων μετάβασης μοντελοποιείται ως μια χρονικά μη ομογενής Μαρκοβιανή αλυσίδα (time- non homogenous Markov Chain). Πιο συγκεκριμένα, παρατηρούνται μεταβολές στο σύστημα εξαιτίας του γεγονότος πως με τη μεταβολή της θερμοκρασίας του εξέρχονται οι προηγούμενες καταστάσεις και εισέρχονται καινούργιες (Vassiliou, 2021), μετατρέποντάς το σε ένα δυναμικό σύστημα που εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Από τα παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα πως με αυτήν την προσέγγιση δεν κρίνεται αναγκαία η σύγκλιση της αλυσίδας στις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης για κάθε τιμή της θερμοκρασίας του συστήματος (Nikolaev and Jacobson, 2010), ωστόσο για τη σύγκλιση του συνολικού αλγορίθμου της προσομοίωσης απόπτησης στο σύνολο των ολικών βέλτιστων λύσεων οφείλεται να πληρούνται τέσσερα κριτήρια. Αρχικά, σύμφωνα με τους Mitra et al., (1986) και Gidas(1985) η μη ομογενής Μαρκοβιανή Αλυσίδα πρέπει να είναι ελαφρώς εργοδική, δηλαδή όσο αυξάνονται οι επαναλήψεις να μειώνεται η επίδραση της αρχικής λύσης, και στη συνέχεια να υπάρχει ιδιοδιάνυσμα πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης π_k με ιδιοτιμή 1, ώστε για κάθε επανάληψη k να ισχύουν οι εξισώσεις $\pi_k = \sum_{i \in n} \pi_k(i) * P_k(i, j) \forall j \in n$ και $\sum_{i \in n} \pi_k(i) = 1$, οι οποίες ισχύουν πάντα στο μοντέλο των ομογενών Μαρκοβιανών Αλυσίδων. Στη συνέχεια, η Μαρκοβιανή Αλυσίδα οφείλει να είναι ισχυρά εργοδική, που σημαίνει πως ισχύει η ελαφρά εργοδικότητα σε συνδυασμό με τη σύγκλιση της ακολουθίας των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης για κάθε επανάληψη k ($\sum_{k=0}^{\infty} \|\pi_k - \pi_{k-1}\| < +\infty$), ενώ η σύγκλιση αυτή πρέπει να συμβαίνει με τέτοιο τρόπο, ώστε αυτές να

συγκεντρώνονται στο σύνολο των βέλτιστων λύσεων $j^* (\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k = \pi^*)$. Τα κριτήρια αυτά για τα δεδομένα του αλγορίθμου πληρούνται σχεδόν πάντα για προβλήματα συνδυαστικής βελτίωσης και αποδεικνύεται από τους Mitra et al., (1986) και Gidas(1985). Οι Anily and Federgruen, (1987) αποδεικνύουν πως επιτυγχάνεται σύγκλιση του αλγορίθμου στο πλαίσιο των μη ομογενών Μαρκοβιανών Αλυσίδων υπό άλλους τέσσερις όρους, οι οποίοι καλύπτουν και συμπληρώνουν τους προηγούμενους τέσσερις που προαναφέρθηκαν. Πρώτον, η πιθανότητα μετάβασης για κάθε επανάληψη k οφείλει να επιτρέπει την άνοδο της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης με θετική πιθανότητα, ενώ κρίνεται σημαντικό η πιθανότητα αποδοχής της νέας κατάστασης j να είναι φραγμένη, γνησίως φθίνουσα και να προσεγγίζει ασυμπτωτικά το μηδέν για κάθε μετάβαση σε λύσεις που κάνουν άλμα, δηλαδή αυξάνουν αρκετά την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Επιπρόσθετα, η πιθανότητα μόνιμης κατάστασης για λύσεις που δεν αντιστοιχούν σε ολικά ελάχιστα πρέπει να ισούται με μηδέν, ενώ ταυτόχρονα η πιθανότητα απεγκλωβισμού από τοπικά ελάχιστα δεν πρέπει να προσεγγίζει γρήγορα το μηδέν.

Συνοψίζοντας αυτές τις πληροφορίες συμπεραίνει κανείς την αναγκαιότητα προσαρμογής των παραμέτρων του αλγορίθμου προσομοίωσης ανόπτωσης με τέτοιο τρόπο, ώστε να ικανοποιούνται οι παραπάνω προϋποθέσεις και συνεπώς να προκύπτει η τελική σύγκλιση στα ολικά βέλτιστα ή για μεγαλύτερα προβλήματα στα μερικώς ολικά βέλτιστα (λόγω του φαινομένου του ανταγωνισμού), τα οποία θα απέχουν ελάχιστα από τα ακριβή ακρότατα.

5.2 Γενική μορφή του αλγορίθμου

Αλγόριθμος προσομοίωσης ανόπτωσης (simulated annealing algorithm)

```

X=randomgeneratedsolution; (δημιουργία τυχαίας λύσης)
T=To; (καθορισμός αρχικής θερμοκρασίας)
while T>=Tlimit (μέχρι να πέσει η θερμοκρασία στο επιθυμητό επίπεδο)
  m=1;
  while m<=mlimit (σταθερός αριθμός επαναλήψεων υπό σταθερή θερμοκρασία)
    Y=neighborhood(X); (δημιουργία γειτονικής λύσης)
    C0=objectivefunction(X);(τιμές αντικειμενικής συνάρτησης)
    C1=objectivefunction(Y);
    if accept(C0,C1,T)=1
      X=Y;(αποδοχή νέας λύσης)
    else
      X=X;(απόρριψη νέας λύσης)
    end
    m=m+1;
  end
  T=update(T);(ανανέωση θερμοκρασίας)
end

```

Πλαίσιο 1: Ψευδοκώδικας αλγορίθμου προσομοίωσης ανόπτωσης

Η γενικότερη μορφή του αλγορίθμου προσομοίωσης ανόπτησης παρουσιάζεται στη μορφή που περιγράφεται από το Πλαίσιο 1. Καταρχάς, ορίζεται μαζί με την τυχαία αρχική λύση και η αρχική θερμοκρασία. Στη συνέχεια δημιουργείται μια νέα λύση προερχόμενη από το σύνολο των γειτονικών λύσεων της αρχικής και υπολογίζεται η ενέργεια του συστήματος για τις δύο αυτές καταστάσεις (η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης). Η καινούργια λύση αντικαθιστά την προηγούμενη μόνο στην περίπτωση που γίνει αποδεκτή από το κριτήριο Metropolis. Για την καλύτερη σύγκλιση του αλγορίθμου κοντά στο ολικό βέλτιστο προτιμάται η επανάληψη αυτής της διαδικασίας για έναν ικανοποιητικό αριθμό επαναλήψεων υπό σταθερή θερμοκρασία. Τέλος, μειώνεται η θερμοκρασία και επαναλαμβάνεται όλος ο αλγόριθμος μέχρι αυτή να φτάσει ένα συγκεκριμένο προκαθορισμένο όριο.

Κύριος στόχος της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας αποτελεί η προσαρμογή του μοντέλου δρομολόγησης του ετερογενούς στόλου βυτιοφόρων στα δεδομένα της προσομοίωσης ανόπτησης, όπως περιγράφεται στην ενότητα 4. Πιο συγκεκριμένα, αφού εισαχθούν τα δεδομένα κόστους και αποστάσεων όπως εμφανίζονται στους πίνακες της τρίτης ενότητας, κατασκευάζονται οι χαρακτηριστικές υποσυναρτήσεις της προσομοίωσης ανόπτησης με τέτοιον τρόπο, ώστε η δημιουργία λύσεων να αρμόζει στα δεδομένα του προβλήματος και να καλύπτονται οι περιορισμοί που περιγράφονται από τις εξισώσεις (2)-(18) της τέταρτης ενότητας. Αναγνωρίζεται πως πολλές διαδρομές που προκύπτουν κατά τη διάρκεια που τρέχει ο αλγόριθμος είναι ανέφικτες, οπότε κρίνεται απαραίτητη η κατασκευή μιας επιπλέον υποσυνάρτησης που λειτουργεί συμπληρωματικά με τον υπολογισμό της ενέργειας του συστήματος, ώστε να δίνεται ποινή σε διαδρομές που κρίνονται ανέφικτες ή σε αναθέσεις πετρελαιοειδών στα διαμερίσματα που παραβιάζουν τους περιορισμούς πληρότητας. Στις επόμενες υποενότητες αναλύεται η δομή και η λειτουργία των υποσυναρτήσεων που απαρτίζουν τον συνολικό αλγόριθμο προσομοίωσης ανόπτησης.

5.3 Δημιουργία τυχαίων λύσεων

Η συνάρτηση που δημιουργεί τυχαίες αρχικές λύσεις διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην προσαρμογή του μοντέλου του πραγματευόμενου προβλήματος στο πλαίσιο του αλγορίθμου, διότι μέσω αυτής καθορίζεται η μορφή των λύσεων και η αποτύπωση των διαδρομών κάθε φορτηγού. Αρχικά, ζητούνται δεδομένα για τη δυναμικότητα του στόλου και για τις ζητήσεις σε καύσιμο κάθε πρατηρίου (Πίνακες 3, 4) και το μέγιστο επιτρεπόμενο όριο επισκέψεων κάθε βυτιοφόρου ($maxst$), το οποίο για τα δεδομένα του προβλήματος ορίζεται ως πέντε, αλλά δύναται να προσαρμοστεί εφόσον ζητηθεί σε κάποιο διαφορετικό

περιβάλλον. Οι περιορισμοί (18) και (19) καλύπτονται πάντα, διότι η κάθε λύση απεικονίζεται ως ένας πίνακας διαστάσεων $k \times maxst$ (με k να ισούται με τον αριθμό διαθέσιμων βυτιοφόρων). Οφείλεται να επισημανθεί πως για τις προγραμματιστικές ανάγκες του προβλήματος η αρίθμηση των σταθμών ξεκινάει από το 1 (το οποίο αντιστοιχεί στο αμαξοστάσιο), οπότε τοποθετείται άλλη μια σειρά στον πίνακα ζήτησης με μηδενική ζήτηση σε καύσιμα που αντιπροσωπεύει την αφετηρία και συνεπώς οι σταθμοί προς εξυπηρέτηση αριθμούνται από το 2 μέχρι το 20.

```

Συνάρτηση τυχαίας δημιουργίας λύσεων (random generation) (trucks, demands, maxst)= [X]
[k,l]=size(trucks); (μέγεθος πίνακα φορτηγών)
[j,p]=size(demands); (μέγεθος πίνακα ζήτησης)
X=ones(k,maxst); (πίνακας διαστάσεων 14X5 με όλα του τα στοιχεία να ισούνται με 1)
stationpool=randperm(j,j); (διάταξη υποψήφιων σταθμών με τυχαία σειρά)
for i=1:j
    if ydem(j)=0
        stationpool(j)=1;
    end
end
delete(stationpool=1); (διαγραφή των σταθμών που δεν εκφράζουν ζήτηση)
for t=1:k
    for s=1:maxst
        if stationpool is not empty
            X(t,s)=stationpool(1); (ανάθεση σταθμών στα φορτηγά)
            delete(stationpool(1)); (διαγραφή ανατιθέμενων σταθμών)
        end
    end
end
end

```

Πλαίσιο 2: Ψευδοκώδικας συνάρτησης δημιουργίας τυχαίας αρχικής λύσης

Καταρχάς κατασκευάζεται ένας πίνακας διαστάσεων $k \times maxst$ (στο συγκεκριμένο πρόβλημα διαστασιολογείται 14×5) όπου όλα τα στοιχεία του ισούνται με 1 (αντιπροσωπεύοντας το αμαξοστάσιο) και αμέσως μετά δημιουργείται ένα διάνυσμα με αριθμούς από 1 έως j (συνολικός αριθμός σταθμών), οι οποίοι κατανέμονται με τυχαία σειρά εντός αυτού. Ακολούθως, ελέγχεται ποιοι σταθμοί εκφράζουν ζήτηση για οποιοδήποτε είδος καυσίμου, δηλαδή οι σταθμοί j για τους οποίους η δυαδική μεταβλητή $ydem(j)$ λαμβάνει την τιμή 1, και σε περίπτωση που υπάρχουν σταθμοί εντός αυτού του διανύσματος για τους οποίους η μεταβλητή αυτή λαμβάνει την τιμή 0 αφαιρούνται από αυτό, ώστε να μην τους επισκεφτεί κανένα βυτιοφόρο. Τέλος, ανατίθενται οι σταθμοί με την τυχαία σειρά που κατανέμονται στο διάνυσμα στον πίνακα που κατασκευάστηκε στην αρχή ξεκινώντας από την πρώτη σειρά μέχρι να εξαντληθεί η λίστα των ενδιαφερόμενων

πελατών. Αξίζει να σημειωθεί πως κάθε σταθμός τοποθετείται μόνο μια φορά, οπότε ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι περιορισμοί (4), (5) και (6), μιας που η ζήτηση ενός σταθμού καλύπτεται από ένα μόνο φορτηγό (5), ελέγχονται ποιοι σταθμοί έχουν ζήτηση (4) και αποκλείονται οι επισκέψεις σε σταθμούς που δεν εκφράζουν ζήτηση (6). Ο ψευδοκώδικας της συγκεκριμένης συνάρτησης παρουσιάζεται στο Πλαίσιο 2.

5.4 Δημιουργία τυχαίων γειτονικών λύσεων

Η συνάρτηση δημιουργίας τυχαίων γειτονικών λύσεων κατέχει σημαντικό ρόλο στην απόδοση του αλγορίθμου, καθώς αυτές καθορίζουν το μητρώο μεταβάσεων P^k (όπως αυτό παρουσιάστηκε στην ενότητα 5.1), το οποίο κατασκευάζεται με τέτοιο τρόπο, ώστε να πληρούνται οι προϋποθέσεις σύγκλισης που αναλύθηκαν στην ίδια ενότητα. Ιδιαίτερα σημαντικό κρίνεται το πλήθος των γειτονικών λύσεων να μην είναι αρκετά μεγάλο, αλλά να καλύπτει συγκεκριμένο αριθμό καταστάσεων, μιας που κατά τη μοντελοποίηση της μη ομογενούς Μαρκοβιανής Αλυσίδας οι καταστάσεις αυτές ανανεώνονται ανάλογα με τη θερμοκρασία του συστήματος.

```

Συνάρτηση δημιουργίας τυχαίων γειτονικών λύσεων (neighborhood)(X)=[Y]
[k,s]=size(X); (οι διαστάσεις του πίνακα λύσης)
u=rand; (τυχαίος αριθμός ομοιόμορφης κατανομής στο διάστημα [0,1])
case 1 (u<(1/3)) (αλλαγή φορτηγών)
    r1=randominteger(1,k);
    if r1<k
        swap rows r1 and r1+1 of X;
    else
        swap rows r1 and 1 of X;
    end
case 2 ((1/3)<= u<(2/3)) (αλλαγές εντός διαδρομής)
    r2=randominteger(1,k);
    s1=randominteger(1,s);
    if s1<s
        swap elements s1 and s1+1 of row r2;
    else
        swap elements s1 and 1 of row r2;
    end
case 3 ((2/3)<= u<1) (αναθέσεις διαδρομών)
    r3,r4= randominteger(1,k);
    s2,s3= randominteger(1,s);
    swap X(r3,s2) and X(r4,s3);
end

```

Πλαίσιο 3: Ψευδοκώδικας συνάρτησης δημιουργίας τυχαίων γειτονικών λύσεων

Ο τρόπος λειτουργίας της συνάρτησης δημιουργίας τυχαίων γειτονικών λύσεων περιγράφεται από τον ψευδοκώδικα του Πλαισίου 3. Αρχικά, λαμβάνεται η αρχική κατάσταση X του συστήματος και αφού αποκτηθούν οι διαστάσεις του ($k \times maxst$), ανατίθεται μια τυχαία μεταβλητή u που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,1]$. Η τιμή αυτής κάθε φορά καθορίζει το είδος της γειτονικής λύσης και το πώς αυτή θα διαμορφωθεί, ορίζοντας ισοπίθανες μεταβολές του αρχικού πίνακα λύσεων που αφορούν αλλαγές των αναθέσεων των διαδρομών στα φορτηγά, αλλαγές στη σειρά επίσκεψης των σταθμών κάθε ανατιθέμενης διαδρομής και τυχαίες αναθέσεις σταθμών σε τυχαία φορτηγά, ώστε να μην ευνοείται κάποια από αυτές τις τεχνικές. Η προσαρμογή της γειτονικής συνάρτησης με αυτόν τον τρόπο συνεισφέρει παράλληλα και στην προσπάθεια μείωσης του κόστους μεταφοράς και στην κατασκευή εφικτών λύσεων, ενώ με τη συνδρομή της τυχαίας μεταβλητής u εξετάζονται λύσεις του χώρου καταστάσεων που ίσως να μην εντοπιζόνταν σε περίπτωση που όλων των ειδών οι μεταβολές συνέβαιναν ταυτόχρονα.

Σε περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή u ανήκει στο διάστημα $[0, \frac{1}{3})$, η γειτονική λύση που πρόκειται να δημιουργηθεί αφορά την ανάθεση μιας προϋπάρχουσας διαδρομής σε ένα διαφορετικό φορτηγό. Για την ομαλοποίηση της διαδικασίας επιλέγεται το ανατιθέμενο βυτιοφόρο να αναλάβει την διαδρομή του επόμενου, όπως αυτά απεικονίζονται στη λύση X , ενώ σε περίπτωση που επιλεγθεί τυχαία το φορτηγό της τελευταίας γραμμής του πίνακα, αλλάζει θέση με το φορτηγό της πρώτης γραμμής του πίνακα. Αυτή η διαδικασία συμβάλλει στον απεγκλωβισμό των καταστάσεων από το σύνολο των ανέφικτων λύσεων, καθώς κάθε φορτηγό διαθέτει ποικιλία διαμερισμάτων τα οποία αξιοποιούνται διαφορετικά ανάλογα τους σταθμούς που ζητείται να καλύψουν, οπότε για δεδομένες διαδρομές ελέγχονται οι δυνατότητες διαφορετικών βυτιοφόρων.

Όταν η u βρίσκεται στο διάστημα $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, στην γειτονική λύση που πηγάζει από την αρχική λύση X εφαρμόζονται εσωτερικές αλλαγές εντός διαδρομής. Πιο συγκεκριμένα, επιλέγεται τυχαία μια γραμμή του πίνακα X , μέσα στην οποία για λόγους πρακτικότητας το τυχαία επιλεγμένο στοιχείο της αλλάζει θέση με το επόμενο στοιχείο, εκτός και αν επιλεγθεί τυχαία το τελευταίο στοιχείο της γραμμής αυτής, οπότε αυτό αλλάζει θέση με το πρώτο. Η διαδικασία αυτή αποσκοπεί κυρίως στη μείωση του μεταφορικού κόστους, διότι η φαινομενική ανάθεση καυσίμου στα διαμερίσματα του κάθε φορτηγού δεν διαφοροποιείται με τις αλλαγές αυτές, αλλά εξετάζονται πιθανές παραλλαγές σχετικά με τη διαδρομή που θα καλύψει τους ανατιθέμενους σταθμούς.

Τέλος, σε περίπτωση που η μεταβλητή u ανήκει στο σύνολο $[\frac{2}{3}, 1]$ ανατίθενται τυχαίοι σταθμοί σε τυχαίως επιλεγμένα φορτηγά. Παρόλα αυτά, υπό τον περιορισμό (5) από τον οποίον υποδηλώνεται πως έναν σταθμό εξυπηρετείται από μόνο ένα βυτιοφόρο,

κρίνεται αναγκαίο να αφαιρεθεί ο νέος προορισμός από το φορτηγό στο οποίο προϋπήρχε και να αντικατασταθεί από τον σταθμό που προηγουμένως άνηκε στη διαδρομή του αρχικά επιλεγμένου βυτιοφόρου. Σε αυτήν την περίπτωση ευνοούνται με ελεγχόμενο τρόπο ενδεχομένως η αύξηση της αντικειμενικής συνάρτησης και η δημιουργία ανέφικτων λύσεων, διευκολύνοντας με αυτόν τον τρόπο την ευρύτερη εξερεύνηση του χώρου των πιθανών καταστάσεων. Ταυτόχρονα, εξασφαλίζεται η κάλυψη των κριτηρίων για σύγκλιση της μη ομογενούς Μαρκοβιανής Αλυσίδας, όπως αυτά περιγράφονται από τους Anily and Federgruen, (1987) στην ενότητα 5.1 και σχετίζονται με την πιθανότητα δημιουργίας λύσεων που προκαλούν άλμα στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

5.5 Έλεγχος εφικτότητας διαδρομών

Η συγκεκριμένη υποσυνάρτηση του αλγορίθμου της προσομοίωσης απόπτωσης κατέχει καθοριστικό ρόλο στην επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος, διότι μέσω αυτής καθορίζεται η εφικτότητα κάθε διαδρομής όσον αφορά την ανάθεση καυσίμων στα διαμερίσματα των φορτηγών. Ειδικότερα, ποινικοποιούνται οι ανέφικτες λύσεις με το να χρεώνονται με πολύ υψηλά επίπεδα κόστους, ώστε στη συνέχεια ο αλγόριθμος να καταφέρει να τις αποφύγει. Αγνοώντας πλήρως τις μεταβλητές απόφασης $\gamma(j,k,r,l)$, $compload(j,k,r,l)$ του μοντέλου μικτού ακέραιου/ γραμμικού προγραμματισμού και ενσωματώνοντας μέσα στη συνάρτηση με διαφορετικό τρόπο την μεταβλητή αθροιστικής ζήτησης που θα καλυφθεί από το φορτηγό k ($z(i, j, k)$) ελέγχονται για όλα τα φορτηγά της λύσης X οι σταθμοί που αυτά θα επισκεφτούν και οι ζητήσεις που καλούνται να καλύψουν. Στη διαδικασία αυτή συμβάλλει και το γεγονός πως κάθε διαμέρισμα οφείλει να αδειάσει όλο του το περιεχόμενο στον σταθμό που πρόκειται να εξυπηρετηθεί (περιορισμός (12)), ενώ σε περίπτωση που ανατεθεί οποιοδήποτε καύσιμο σε ένα διαμέρισμα ελέγχεται αυτόματα εάν έχει πληρωθεί τουλάχιστον το 80% της συνολικής του χωρητικότητας (περιορισμός (16)).

Καταρχάς, η συγκεκριμένη συνάρτηση δέχεται ως ορίσματα τη λύση X , τους πίνακες ζήτησης και δυναμικότητας του ετερογενούς στόλου (Πίνακες 3 και 4), τον μέγιστο επιτρεπόμενο αριθμό επισκέψεων ($maxst$) και τη μέγιστη επιτρεπτή απόκλιση από τη συνολική πληρότητα των διαμερισμάτων ($alldev$) και τελικά επιστρέφει το κόστος μη εφικτότητας. Για κάθε φορτηγό το οποίο ελέγχεται, δημιουργείται ένα μοναδικό αντίστοιχο διάνυσμα στο οποίο περιλαμβάνονται οι τιμές ζήτησης που καλύπτονται από την διαδρομή που τους ανατίθεται και άλλα δύο που περιγράφουν τη χωρητικότητα του κάθε διαμερίσματος και την ελάχιστη επιτρεπτή πληρότητα αντίστοιχα. Εφόσον το κάθε διαμέρισμα που αξιοποιείται αδειάζει πλήρως σε κάθε επίσκεψη, και επειδή δεν

επιτρέπονται αναμίξεις καυσίμων, τοποθετούνται στο διάλυμα της ζήτησης ξεχωριστά όλες οι ποσότητες των καυσίμων, οι οποίες στη συνέχεια αναδιατάσσονται σε αύξουσα σειρά, ενώ τα στοιχεία των διανυσμάτων αναφορικά με τα δεδομένα των διαμερισμάτων κατατάσσονται σε φθίνουσα σειρά, για να βρεθεί η συνάρτηση σε θέση να εντοπίσει τους καλύτερους συνδυασμούς διαμερισμάτων. Αξίζει να σημειωθεί πως σε περίπτωση που δεν συμβεί η ανακατανομή των αριθμητικών στοιχείων της ζήτησης, δύναται να επιλεγθούν συνδυασμοί διαμερισμάτων που ίσως να μην καλύπτουν μεγαλύτερες όγκους προϊόντων και συνεπώς να χαρακτηριστούν πολλές εφικτές λύσεις λανθασμένα ως ανέφικτες.

Βασικό κριτήριο για να θεωρηθεί μια λύση εφικτή αποτελεί το γεγονός πως το άθροισμα του όγκου της ζήτησης που πρόκειται να ικανοποιηθεί απαγορεύεται να ξεπεράσει τη συνολική χωρητικότητα του ανατιθέμενου βυτιοφόρου (περιορισμός (10)). Σε περίπτωση που αυτό συμβεί, χρεώνεται το κάθε φορτηγό που υποπίπτει σε αυτό το σφάλμα με επιπλέον ποινή 3000€ μαζί με το κόστος της αντικειμενικής συνάρτησης (μια αυθαίρετη τιμή πολύ μεγαλύτερη από τις τιμές κόστους που προκύπτουν από πιθανούς σχεδιασμούς εφικτών διαδρομών και οποιαδήποτε τροποποίηση αυτής δεν βλάπτει την βελτιστοποίηση), ενώ σε αντίθετη περίπτωση εξετάζεται αν παρόλο που αυτός ο περιορισμός καλύπτεται, η επιμέρους ανάθεση των καυσίμων στα διαμερίσματα καθίσταται δυνατή. Κατόπιν, επιλέγεται η γραμμή του πίνακα των φορτηγών που αντιστοιχεί σε αυτό που έχει τεθεί προς εξέταση, η οποία περιγράφει το πλήθος και τον όγκο των διαμερισμάτων του και στη συνέχεια κατασκευάζεται ένα νέο διάλυμα που αντιστοιχεί στην ελάχιστη δυνατή ανάθεση που δύναται να συμβεί σε κάθε διαμέρισμα και ισοδυναμεί με το 80% της συνολικής χωρητικότητας (περιορισμοί (14),(16)), ενώ διαγράφονται τα μηδενικά στοιχεία αυτών των διανυσμάτων. Σε περίπτωση που το μήκος του διανύσματος της ζήτησης είναι μεγαλύτερο από αυτό των διαμερισμάτων, προκύπτει πως η λύση δεν είναι εφικτή, δεδομένου πως περισσεύει αρκετός όγκος καυσίμου ο οποίος στην πραγματικότητα υπό τους περιορισμούς του προβλήματος δεν δύναται να πληρωθεί, και συνεπώς χρεώνεται στο φορτηγό ποινή 3000€.

Ακολούθως, ελέγχονται με τη σειρά τα στοιχεία του διανύσματος ζήτησης και εξετάζονται ως προς τη χωρητικότητα τους στα διαμερίσματα των βυτιοφόρων. Για ποσότητες οι οποίες δύναται να καλυφθούν από ένα μόνο διαμέρισμα γίνεται έλεγχος όλων των διαμερισμάτων και διαπιστώνεται εάν καθίσταται δυνατή η τοποθέτησή τους σε αυτά, υπό το πρίσμα των κανονισμών ADR, και σε περίπτωση που αυτό είναι εφικτό, μηδενίζεται το στοιχείο του διανύσματος ζήτησης μαζί με αυτά των διανυσμάτων που αφορούν τη συνολική τους χωρητικότητα και του ελαχίστου ορίου πληρότητάς τους. Σημειώνεται πως για πολλά στοιχεία ζήτησης οφείλεται να χρησιμοποιηθούν περισσότερα από ένα διαμερίσματα, οπότε, σε αυτήν την περίπτωση ελέγχονται ταυτόχρονα επιμέρους

συνδυασμοί διαμερισμάτων και συνδυασμοί ελάχιστης δυνατής πληρότητας. Τελικά, εάν η ποσότητα του προϊόντος που πρόκειται να ανατεθεί στο βυτιοφόρο βρίσκεται εντός νόμιμων πλαισίων μηδενίζεται στο διάνυσμα ζήτησης και μαζί με αυτό απαλείφονται τα στοιχεία των διανυσμάτων της μέγιστης και της ελάχιστης χωρητικότητας διαμερισμάτων που απαρτίζουν τον συνδυασμό μιας ενδεχόμενης εφικτής ανάθεσης.

```

Συνάρτηση ελέγχου εφικτότητας (feasibility test)(X,trucks,demands,maxst,alldev)=[feasibility cost]

[k,l]=size(trucks); (εισαγωγή διαστάσεων πινάκων ζήτησης και φορτηγών)
[j,p]=size(demands);
truckcap=lines' sum of truck matrix; (συνολική χωρητικότητα κάθε βυτιοφόρου)
feasibilitycost=0;
for t=1:k
    assigneddemand=empty matrix;
    for s=1:maxst
        assigneddemand(s,:)=demands(X(t,s,:)); (αναγνώριση τιμών ζήτησης ανά διαδρομή)
    end
    reshape assigneddemand in a row vector; (κατάταξη στοιχείων ζήτησης σε φθίνουσα σειρά)
    sort assigneddemand in ascending order;
    delete elements of assigneddemand that equal 0;
    if sum(assigneddemand)>truckcap(t)
        feasibilitycost=3000; ) (ποινή εάν η συνολική ζήτηση υπερβαίνει τη χωρητικότητα
    else
        comps=row t of trucks matrix;
        compsdev=(1-alldev)*comps;
        sort comps and compsdev in descending order
        delete elements of comps and compsdev that equal 0;
        d=length(assigneddemand);
        if d>length(comps) (ποινή εάν απαιτούνται περισσότερα διαμερίσματα)
            feasibilitycost=3000;
        end
        for i=1:d (έλεγχος συνδυασμών διαμερισμάτων για κάθε τιμή ζήτησης)
            if assigneddemand(i)<=max(comps)
                if assigneddemand fits in any compartment under ADR regulations
                    assigneddemand(i)=0;
                    elements of compartments vector that have been used=0;
                    continue;
                end
            end
            if more than one compartment needs to be used
                repeat same process by checking simultaneously more compartments;
            end
        end
        if all the elements of assigned demands are equal to 0
            solution is feasible:
            feasibilitycost=feasibilitycost+0;
        else
            solution not feasible:
            feasibilitycost=feasibilitycost+3000;
        end
    end
end
end
end

```

Πλαίσιο 4: Ψευδοκώδικας συνάρτησης ελέγχου εφικτότητας

Για να θεωρηθεί μια λύση ως εφικτή οφείλουν να καλύπτονται όλες οι τιμές ζήτησης της διαδρομής από το ανατιθέμενο βυτιοφόρο, ενώ συγχρόνως δεν πρέπει να παραβιάζονται οι περιορισμοί σχετικά με την πληρότητα των διαμερισμάτων. Από αυτή την συνάρτηση αναγνωρίζεται πως οι αναθέσεις των προϊόντων καθίστανται εφικτές αν και μόνο αν μετά το πέρας ολόκληρης της διαδικασίας το διάλυμα των στοιχείων ζήτησης απαρτίζεται μόνο από μηδενικά, γεγονός που ερμηνεύεται από την πλήρη και επιτυχημένη ανάθεσή τους, οπότε εάν ισχύει η συγκεκριμένη περίπτωση, δεν χρεώνεται καμία ποινή. Αντίθετα, εάν παραμείνουν μη μηδενικά στοιχεία στο διάλυμα, περισσεύει ακόμα ένας όγκος προϊόντων που δεν μπορεί να τοποθετηθεί στα ανατιθέμενα βυτιοφόρα, οπότε η λύση χαρακτηρίζεται ως ανέφικτη και συνεπώς ποινικοποιείται από τον έλεγχο εφικτότητας με επιπλέον 3000€. Συνοπτικά, ο τρόπος λειτουργίας της συνάρτησης περιγράφεται από τον ψευδοκώδικα του Πλαισίου 4.

Αξίζει να τονιστεί πως η συγκεκριμένη διαδικασία λειτουργεί συμπληρωματικά με τον υπολογισμό της αντικειμενικής συνάρτησης, οπότε η συνολική ενέργεια του συστήματος (το συνολικό κόστος) απαρτίζεται από το κόστος μεταφοράς των προϊόντων στους σταθμούς και τις ενδεχόμενες ποινές, εφόσον κάποιες καταστάσεις που προκύπτουν τυχαία κατά τη λειτουργία της προσομοίωσης ανόπτησης κρίνονται ανέφικτες. Κατά την εξέλιξη του αλγορίθμου με τη συγκεκριμένη επιλογή ποινών δύναται να φιλτραριστούν καλύτερα οι παράνομες λύσεις και αποφεύγονται αποτελεσματικά με την πάροδο των επαναλήψεων.

5.6 Ενέργεια συστήματος- Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης

Για τον υπολογισμό της αντικειμενικής συνάρτησης που ερμηνεύεται από την εξίσωση (1) της τέταρτης ενότητας κρίνεται απαραίτητη η κατασκευή μια υποσυνάρτησης που θα λαμβάνει υπόψη και τους τρεις όρους που την απαρτίζουν και θα τους αθροίζει ξεχωριστά. Επαναλαμβάνεται πως ο πρώτος όρος της (1) που αντιστοιχεί στο μεταφορικό κόστος που σχετίζεται με το βάρος καυσίμου ρ που παραδίδεται στον σταθμό j παραμένει σταθερός για κάθε σύνολο δεδομένων αναφορικά με την απόσταση των σταθμών από το αμαξοστάσιο και τις τιμές ζήτησης, μιας που η ζήτηση οφείλεται να καλυφθεί πλήρως και συνεπώς το ποσό αυτό χρεώνεται πάντα, ανεξαρτήτως διαδρομής που επιλεγεί. Παρόλα αυτά, τα δεδομένα αυτού του κόστους τοποθετούνται εντός αυτής της συνάρτησης, ώστε να προκύψει το ακριβές συνολικό κόστος. Σημειώνεται πως για λόγους ενδιαφέροντος επιστρέφονται από τη συνάρτηση που θα αναλυθεί όλες οι τιμές των τριών όρων της (1)

ξεχωριστά, καθώς και η συνολική απόσταση που καλύπτεται από τις διαδρομές των φορτηγών που επιλέγονται να αξιοποιηθούν.

```
objective function
(X,tolls,dist,trucks,maxst,costperkm,feasibilitycost,weightcost,demands)=[cost,distancetravelled,tollc
ost,
distancecost, productcost] (εισάγονται οι πίνακες αποστάσεων και διοδίων, το όριο των μέγιστων
επιτρεπόμενων επισκέψεων, η ποινή του ελέγχου εφικτότητας και το κόστος κατανάλωσης
καυσίμου των φορτηγών ανά χιλιόμετρο και επιστρέφονται δεδομένα κόστους διοδίων, της
απόστασης που καλύπτεται και του κόστους αυτής και το συνολικό κόστος της διαδρομής
συμπεριλαμβανομένης και της ποινής)

[k,l]=size(trucks) (διαβάζει τις διαστάσεις του πίνακα δυναμικότητας του στόλου)
tollcost=0;
for t=1:k (υπολογίζεται το κόστος των διοδίων για την επίσκεψη των σταθμών από κάθε φορτηγό)
    a=1; (εκκίνηση από το αμαξοστάσιο)
    for s=1:maxst
        b=X(t,s);
        tollcost=tollcost+tolls(a,b);
        a=b;
    end
    tollcost=tollcost+tolls(a,1); (εξασφαλίζεται η επιστροφή στο αμαξοστάσιο)
end
distancecost=0;
distancetravelled=0;
for t=1:k (υπολογίζεται η απόσταση που διανύεται από το κάθε φορτηγό και το κόστος αυτής)
    a=1; (εκκίνηση από αμαξοστάσιο)
    for s=1:maxst
        b=X(t,s);
        distancecost=distancecost+dist(a,b)*costperkm;
        distancetravelled=distancetravelled+dist(a,b);
        a=b;
    end
    distancecost=distancecost+dist(a,1)*costperkm; (επιστροφή στο αμαξοστάσιο)
    distancetravelled=distancetravelled+dist(a,1);
end
productcost=sum of weightcost relating to every truck, the stations they visit and the products they
offer;
cost=feasibilitycost+distancecost+tollcost+productcost; (άθροισμα επιμέρους στοιχείων κόστους )
```

Πλαίσιο 5: Ψευδοκώδικας συνάρτησης υπολογισμού ενέργειας συστήματος- αντικειμενικής συνάρτησης

Η διαδικασία υπολογισμού της ενέργειας του συστήματος περιγράφεται με ψευδοκώδικα στο Πλαίσιο 5. Καταρχάς, εισάγονται σε αυτήν η κατάσταση του συστήματος X , οι πίνακες διοδίων και χιλιομετρικών αποστάσεων μεταξύ των σταθμών (πίνακες 1 και 2), η ποινή που προκύπτει από τον έλεγχο εφικτότητας, τα δεδομένα κόστους προϊόντος καθώς και οι σταθερές που καθορίζουν το όριο των μέγιστων δυνατών επισκέψεων ($maxst$) και του σταθερού κόστους που αφορά την κατανάλωση καυσίμου από τα βυτιοφόρα για την κάλυψη των χιλιομετρικών αποστάσεων που απαιτούνται ($costperkm$). Στο τέλος, επιστρέφονται μαζί με τη συνολική ενέργεια του συστήματος ξεχωριστά τα επιμέρους κόστη διοδίων, χιλιομετρικών αποστάσεων, σταθερού κόστους προϊόντος και η συνολική απόσταση που καλύπτεται από όλα τα φορτηγά. Σημαντικό για τη λειτουργία της προσομοίωσης ανόπτησης κρίνεται μόνο το συνολικό κόστος της αντικειμενικής συνάρτησης, ενώ οι άλλες τιμές που επιστρέφονται αποθηκεύονται για λόγους ενδιαφέροντος.

Κάθε στοιχείο κάθε γραμμής του πίνακα της κατάστασης X που προκύπτει τυχαία μέσω του αλγορίθμου αντικατοπτρίζει τους σταθμούς που πρόκειται να επισκεφτεί ένα φορτηγό, ενώ η σειρά με την οποία κατανέμονται οι αριθμοί (που αντιστοιχούν στα πρατήρια) στην κάθε γραμμή αντιπροσωπεύει και τη σειρά επίσκεψης αυτών. Για να βεβαιωθεί πως το κάθε βυτιοφόρο θα ξεκινήσει και θα τερματίσει τη διαδρομή του στο αμαξοστάσιο ορίζεται ως αρχή της διαδρομής ο αριθμός 1, ο οποίος απεικονίζει το αμαξοστάσιο και διατηρείται σε μια βοηθητική μεταβλητή a . Στη συνέχεια δημιουργείται μια νέα μεταβλητή b που αντιστοιχεί σε εσωτερική επανάληψη (μέχρι την εξάντληση όλων των στοιχείων της κάθε γραμμής) στον σταθμό που έπεται και εντοπίζονται τα στοιχεία κόστους διοδίων και χιλιομετρικών αποστάσεων, τα οποία για τα τόξα κάθε διαδρομής αντιστοιχούν στις συντεταγμένες (a , b) των σχετικών πινάκων. Τέλος, η μεταβλητή a λαμβάνει την τιμή της b , η οποία με τη σειρά της μετασχηματίζεται στον αριθμό που περιγράφει το επόμενο πρατήριο της διαδρομής. Για να εξασφαλιστεί η επιστροφή κάθε βυτιοφόρου στο αμαξοστάσιο, η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται για τελευταία φορά, μόνο που ως αρχή του τελευταίου τόξου της κλειστής διαδρομής κάθε φορτηγού ορίζεται το τελευταίο στοιχείο της ανάλογης γραμμής του πίνακα της κατάστασης X του συστήματος με τερματισμό στον κόμβο 1 (που αντιπροσωπεύει το αμαξοστάσιο). Για την εύρεση του σταθερού κόστους προϊόντος εισάγονται τα δεδομένα που σχετίζονται με τις τιμολογήσεις ζώνης (ενότητα 3.3) ως ένα διάνυσμα και ελέγχονται όλοι οι σταθμοί που καλύπτονται από όλο τον στόλο. Η συνάρτηση κατόπιν ανατρέχει στις αντίστοιχες τιμές της ζήτησης και τις πολλαπλασιάζει με τα δεδομένα του διανύσματος για να προκύψει το τελικό σταθερό κόστος ως άθροισμα των επιμέρους όρων.

Κατά την εξέλιξη του αλγορίθμου παρατηρούνται πολλές καταστάσεις X που απεικονίζουν διαδρομές βυτιοφόρων που επιστρέφουν αρκετές φορές στο αμαξοστάσιο στην προσπάθειά τους να ικανοποιήσουν τη ζήτηση σε όλους τους σταθμούς που τους έχουν ανατεθεί, κάτι το οποίο προφανώς προκαλεί αύξηση του συνολικού κόστους. Παρόλα αυτά, η προσομοίωση ανόπτησης δύναται μέσω της λειτουργίας της συνάρτησης δημιουργίας γειτονικών λύσεων να προσαρμόσει τη σειρά επίσκεψης, οπότε, σε περίπτωση που εντός κάποιας γραμμής υπάρχουν στοιχεία που ισούνται με 1, αυτά τοποθετούνται αυτόματα στις άκρες κάθε σειράς, ενώ κεντρικά εμφανίζονται οι σταθμοί που επισκέπτεται το κάθε φορτηγό. Σημειώνεται παράλληλα πως σε πολλές γραμμές του πίνακα της λύσης X συναντάται μόνο ο σταθμός 1, ωστόσο αυτό συμβολίζει πως για τα βυτιοφόρα για τα οποία ισχύει αυτό δεν υπάρχει καμία ανάθεση και παραμένουν ανενεργά.

5.7 Συνάρτηση αποδοχής λύσεων

Θεμελιώδες χαρακτηριστικό της προσομοίωσης ανόπτησης αποτελεί το γεγονός ότι δύναται να αποδεχθεί πολλές λύσεις που αυξάνουν την ενέργεια του συστήματος, ώστε να γίνει πιο εφικτή η εξερεύνηση μεγαλύτερου εύρους του χώρου των πιθανών καταστάσεων και για να αποφευχθεί ο εγκλωβισμός σε οποιοδήποτε τοπικό ελάχιστο. Όπως αναλύθηκε στην ενότητα 5.1, η πιθανότητα αποδοχής της κατάστασης X_1 δεδομένου πως αυτή είναι χειρότερη από την αρχική λύση X_0 πληροί το κριτήριο Metropolis και ισούται με:

$$a = e^{-\frac{f(X_0) - f(X_1)}{T_k}},$$

όπου $f(X_0), f(X_1)$ η ενέργεια του συστήματος στις καταστάσεις X_0 και X_1 αντίστοιχα και T_k η θερμοκρασία του.

```

acceptance function (cost1,cost2,T)=[AC(binary)]
costdifference=cost2-cost1; (διαφορά κόστους μεταξύ δύο λύσεων)
gamma=minimum(1,exp(-costdifference/T)); (αποδοχή εάν υπάρχει βελτίωση)
r=rand;
if r < gamma (πιθανότητα αποδοχής)
    AC=1;
else (πιθανότητα απόρριψης)
    AC=0;
end
    
```

Πλαίσιο 6: Ψευδοκώδικας συνάρτησης αποδοχής γειτονικών λύσεων

Αρχικά, η συνάρτηση δέχεται ως ορίσματα τα συνολικά κόστη που προκύπτουν από την εφαρμογή της υποσυνάρτησης υπολογισμού τους και την παρούσα θερμοκρασία του

συστήματος με σκοπό την επιστροφή μιας δυαδικής μεταβλητής AC, η οποία λαμβάνει την τιμή 1 σε περίπτωση που γίνει αποδεκτή η νέα γειτονική λύση και την τιμή 0 εφόσον διατηρηθεί η αρχική κατάσταση. Ακολούθως, υπολογίζεται η διαφορά κόστους μεταξύ των καταστάσεων X_0 και X_1 και το αποτέλεσμα που προκύπτει διέρχεται το κριτήριο Metropolis. Σε περίπτωση που στην κατάσταση j παρατηρείται βελτίωση του συστήματος, η διαφορά $f(X_0) - f(X_1)$ αποκτά θετική τιμή (αφού ισχύει ότι $f(X_0) > f(X_1)$), συνεπώς ο όρος $e^{-\frac{f(X_0)-f(X_1)}{T_k}}$ λαμβάνει τιμή μεγαλύτερη του 1 και εφόσον δεν δύναται να υπάρξει πιθανότητα μεγαλύτερη της μονάδας, σε αυτήν την περίπτωση η τιμή της πιθανότητας αποδοχής a ισούται με 1. Αντίθετα, εάν με την γειτονική λύση X_1 αυξηθεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, η διαφορά $f(X_0) - f(X_1)$ λαμβάνει αρνητική τιμή, οπότε ο όρος a που σχετίζεται με την πιθανότητα αποδοχής της νέας λύσης αποκτά τιμές που ανήκουν στο διάστημα $(0,1)$. Στη συγκεκριμένη συνάρτηση συμπυκνώνονται οι δύο αυτές περιπτώσεις με τον ορισμό μιας μεταβλητής γ που λαμβάνει κάθε φορά το ελάχιστο μεταξύ των τιμών 1 και a και απεικονίζει την πιθανότητα αποδοχής της νέας γειτονικής κατάστασης X_1 του συστήματος. Στη συνέχεια τοποθετείται ακόμα μια τυχαία μεταβλητή r που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,1]$ και αυτή καλείται να συγκριθεί με την γ . Σε περίπτωση που η r είναι μικρότερη της γ , η καινούργια λύση γίνεται αποδεκτή και η δυαδική μεταβλητή AC λαμβάνει την τιμή 1, ενώ αντίθετα απορρίπτεται η κατάσταση X_1 και η AC μηδενίζεται.

5.8 Ανανέωση θερμοκρασίας- Ψύξη συστήματος

Ο ρυθμός ψύξης του συστήματος κρίνεται επίσης ως ένας πολύ σημαντικός παράγοντας του αλγορίθμου, καθώς ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται η θερμοκρασία καθορίζει σε πολύ υψηλό βαθμό τη σύγκλιση του. Δεδομένου πως το μητρώο μετάβασης στις γειτονικές καταστάσεις μοντελοποιείται ως μια μη ομογενής Μαρκοβιανή Αλυσίδα, οι καταστάσεις εντός αυτού ανανεώνονται με τις αλλαγές θερμοκρασίας, οπότε θεωρείται σημαντικό να βρεθεί ένας αποτελεσματικός τρόπος να ψυχθεί το σύστημα με αργό και ελεγχόμενο τρόπο, ώστε να επιτευχθεί ολική σύγκλιση των πιθανών καταστάσεων στον χώρο των ιδανικών λύσεων.

update temperature function $(T,a)=[T_n]$ (υποδοχή παρούσας θερμοκρασίας και ρυθμού ψύξης)

$T_n=T*a$ (ανανέωση θερμοκρασιακής κατάστασης)

Πλαίσιο 7: Ψευδοκώδικας συνάρτησης ανανέωσης θερμοκρασίας

Κατά τον ορισμό της συνάρτησης ψύξης οφείλεται να ληφθεί υπόψη πως για να υπάρξει ολική σύγκλιση, το όριο της ακολουθίας των T_k πρέπει να συγκλίνει στο μηδέν όσο ο αριθμός επαναλήψεων k τείνει στο άπειρο ($\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = 0$), ωστόσο αυτή σύγκλιση υποχρεούται να συμβεί με τέτοιον τρόπο, ώστε να μην παραβιάζονται οι προϋποθέσεις σύγκλισης της μη ομογενούς Μαρκοβιανής Αλυσίδας, όπως περιγράφονται στην ενότητα 5.1. Για αυτούς τους λόγους επιλέχθηκε εκθετική μείωση της θερμοκρασίας με ρυθμό ψύξης α που κυμαίνεται μεταξύ των τιμών του διαστήματος $(0,9,1)$ (ανάλογα με τις ανάγκες κάθε προβλήματος), και με τις οποίες δίνεται αρκετός χρόνος στο σύστημα να εξερευνήσει μεγαλύτερο χώρο λύσεων, αφού με αυτές μειώνεται με αργό ρυθμό η θερμοκρασία. Τελικά, η ακολουθία των θερμοκρασιών T_k αποτυπώνεται με τον μαθηματικό τύπο $T_k = \alpha^k * T_0$, όπου T_0 αντιστοιχεί στην αρχική θερμοκρασία του συστήματος και η συγκεκριμένη διαδικασία ανανέωσης της θερμοκρασιακής κατάστασης μετατρέπεται σε συνάρτηση του αλγορίθμου, της οποίας η λειτουργία περιγράφεται από το Πλαίσιο 7.

Ενσωματώνοντας τις παραπάνω συναρτήσεις στον αλγόριθμο της προσομοίωσης ανόπτησης με κατάλληλο τρόπο, ώστε να καλύπτονται όλες οι προϋποθέσεις του μοντέλου μικτού αέριου/ γραμμικού προγραμματισμού που προτείνεται από τους Efthymiadis et al. (2023) και όλα τα αριθμητικά δεδομένα που δίνονται από την εταιρεία διανομής πετρελαιοειδών προϊόντων, πρόκειται στην επόμενη ενότητα να παρουσιαστούν τα αριθμητικά αποτελέσματα που προέρχονται από την εφαρμογή του. Οι παράμετροι της προσομοίωσης ανόπτησης που αφορούν τον αριθμό των εσωτερικών επαναλήψεων υπό σταθερή θερμοκρασία, την αρχική θερμοκρασία του συστήματος και τον ρυθμό ψύξης του διαφέρουν για τις ανάγκες των αντίστοιχων υποπροβλημάτων (όπου συγκρίνονται τα αποτελέσματα του αλγορίθμου με τις ακριβείς λύσεις του προβλήματος που προέρχονται από το λογισμικό Lingo) και για αυτές που αφορούν την επίλυση ολόκληρου του προβλήματος.

6.Αριθμητικά αποτελέσματα

6.1 Εμπειρικές αναθέσεις της εταιρείας

Για να διαπιστωθεί η λειτουργικότητα του μοντέλου μικτού αέριου/ γραμμικού προγραμματισμού που προτάθηκε από τους Efthymiadis et al. (2023), παρατίθενται αρχικά οι διαδρομές που κατασκευάζονταν εμπειρικά από την διοικητική ομάδα της εταιρείας. Αξίζει να σημειωθεί πως επιλέγονται πολλές φορές διαφορετικά βυτιοφόρα για να καλύψουν τη ζήτηση των σταθμών κάθε φορά, ώστε να υπάρχει ισορροπία στο διαμοιρασμό αυτών (ικανοποιώντας έτσι τους αντίστοιχους οδηγούς), ενώ προγραμματίζονται σε τακτά χρονικά διαστήματα συντηρήσεις αυτών, οπότε τα φορτηγά αυτά τίθενται αυτόματα εκτός διαθεσιμότητας.

Από την εταιρεία κοινοποιήθηκαν τρεις εμπειρικοί εφικτοί σχηματισμοί διαδρομών, των οποίων το κόστος βάσει του προτεινόμενου μοντέλου αέριου/ γραμμικού προγραμματισμού παρουσιάζεται στους παρακάτω πίνακες. Όλοι οι σχηματισμοί των βυτιοφόρων που παραδόθηκαν αποτελούνται μόνο από τα φορτηγά 1 και 4, ενώ αυτά επισκέπτονται με τρία διαφορετικά μοτίβα τα πρατήρια που απαιτείται να εξυπηρετηθούν.

| Συνολικά αποτελέσματα πρώτου χειροκίνητου σχηματισμού | |
|---|--------|
| Παραδιδόμενη ποσότητα καυσίμου (m^3) | 51,5 |
| Χιλιμετρική απόσταση (km) | 238,1 |
| Κόστος προϊόντος (€) | 255,2 |
| Κόστος διοδίων (€) | 8,4 |
| Κόστος χιλιμετρικής απόστασης (€) | 130,96 |
| Συνολικό κόστος (€) | 394,56 |

Πίνακας 5: Αριθμητικά αποτελέσματα πρώτου εμπειρικού σχηματισμού

| Συνολικά αποτελέσματα δεύτερου χειροκίνητου σχηματισμού | |
|---|--------|
| Παραδιδόμενη ποσότητα καυσίμου (m^3) | 51,5 |
| Χιλιμετρική απόσταση (km) | 205,2 |
| Κόστος προϊόντος (€) | 255,2 |
| Κόστος διοδίων (€) | 4,2 |
| Κόστος χιλιμετρικής απόστασης (€) | 112,86 |
| Συνολικό κόστος (€) | 372,26 |

Πίνακας 6: Αριθμητικά αποτελέσματα δεύτερου εμπειρικού σχηματισμού

| Συνολικά αποτελέσματα τρίτου χειροκίνητου σχηματισμού | |
|---|--------|
| Παραδιδόμενη ποσότητα καυσίμου (m^3) | 51,5 |
| Χιλιομετρική απόσταση (km) | 202,5 |
| Κόστος προϊόντος (€) | 255,2 |
| Κόστος διοδίων (€) | 4,2 |
| Κόστος χιλιομετρικής απόστασης (€) | 111,38 |
| Συνολικό κόστος (€) | 370,78 |

Πίνακας 7: Αριθμητικά αποτελέσματα τρίτου εμπειρικού σχηματισμού

Οι εμπειρικές αναθέσεις της εταιρείας δομούνται ως εξής:

- Πρώτη : Φορτηγό 1 → 0-13-5-11-4-2-0
Φορτηγό 4 → 0-18-9-15-0
- Δεύτερη: Φορτηγό 1 → 0-11-5-4-2-15-0
Φορτηγό 4 → 0-13-18-9-0
- Τρίτη: Φορτηγό 1 → 0-2-5-4-11-15-0
Φορτηγό 4 → 0-9-18-13-0

Παρατηρείται σταδιακή πρόοδος όσον αφορά τη μείωση του κόστους κατά την εξέλιξη των εμπειρικών σχηματισμών, ωστόσο τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις λύσεις αυτές απέχουν σημαντικά από την βέλτιστη, οπότε οι Efthymiadis et al.(2023) εξετάζουν άλλους πιθανούς συνδυασμούς φορτηγών για την εύρεση μιας σχεδόν ιδανικής λύσης του προβλήματος, των οποίων τα αποτελέσματα παρατίθενται στην επόμενη υποενότητα.

6.2 Ακριβείς λύσεις από το προτεινόμενο μοντέλο των Efthymiadis et al.

Στο άρθρο των Efthymiadis et al.(2023) προτείνονται τέσσερις λύσεις που συμπεριλαμβάνουν τέσσερις διαφορετικούς σχηματισμούς και αποτελούνται από συνδυασμούς μεταξύ των φορτηγών 1, 4, 11 και 12. Η δρομολόγηση αυτών βελτιστοποιήθηκε με το λογισμικό Lingo και τα αποτελέσματα που προκύπτουν παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες.

| Συνολικά αποτελέσματα πρώτης προτεινόμενης λύσης | |
|--|--------|
| Παραδιδόμενη ποσότητα καυσίμου (m^3) | 51,5 |
| Χιλιομετρική απόσταση (km) | 193,9 |
| Κόστος προϊόντος (€) | 255,2 |
| Κόστος διοδίων (€) | 4,2 |
| Κόστος χιλιομετρικής απόστασης (€) | 106,65 |
| Συνολικό κόστος (€) | 366,05 |

Πίνακας 8: Αριθμητικά αποτελέσματα πρώτης προτεινόμενης λύσης

Ο πρώτος συνδυασμός αποτελείται από τα φορτηγά 11 και 12 και η λύση που προκύπτει από αυτά δομείται με αυτόν τον τρόπο:

- Φορτηγό 11 → 0-15-9-4-0
- Φορτηγό 12 → 0-2-5-11-18-13-0

| Συνολικά αποτελέσματα δεύτερης προτεινόμενης λύσης | |
|--|--------|
| Παραδιδόμενη ποσότητα καυσίμου (m^3) | 51,5 |
| Χιλιομετρική απόσταση (km) | 194,6 |
| Κόστος προϊόντος (€) | 255,2 |
| Κόστος διοδίων (€) | 4,2 |
| Κόστος χιλιομετρικής απόστασης (€) | 107,03 |
| Συνολικό κόστος (€) | 366,43 |

Πίνακας 9: Αριθμητικά αποτελέσματα δεύτερης προτεινόμενης λύσης

Η δεύτερη λύση απαρτίζεται από τα φορτηγά 1 και 12 τα οποία ακολουθούν τις παρακάτω διαδρομές:

- Φορτηγό 1 → 0-15-4-11-18-13-0
- Φορτηγό 12 → 0-2-9-5-0

| Συνολικά αποτελέσματα τρίτης προτεινόμενης λύσης | |
|--|--------|
| Παραδιδόμενη ποσότητα καυσίμου (m^3) | 51,5 |
| Χιλιομετρική απόσταση (km) | 193,9 |
| Κόστος προϊόντος (€) | 255,2 |
| Κόστος διοδίων (€) | 4,2 |
| Κόστος χιλιομετρικής απόστασης (€) | 106,65 |
| Συνολικό κόστος (€) | 366,05 |

Πίνακας 10: Αριθμητικά αποτελέσματα τρίτης προτεινόμενης λύσης

Η τρίτη λύση που προκύπτει από το λογισμικό Lingo περιλαμβάνει τα φορτηγά 1 και 11 και περιγράφεται από τις παρακάτω διαδρομές:

- Φορτηγό 1 → 0-2-5-11-18-13-0
- Φορτηγό 11 → 0-4-9-15-0

Διαπιστώνεται ότι η πρώτη και η τρίτη λύση ταυτίζονται ως προς την αλληλουχία των σταθμών που επισκέπτονται τα φορτηγά. Πιο συγκεκριμένα, το δωδέκατο φορτηγό της πρώτης λύσης διανύει ακριβώς το ίδιο τόξο με αυτό του πρώτου φορτηγού της τρίτης λύσης, ενώ το φορτηγό 11 καλύπτει ακριβώς την ίδια διαδρομή με αντίθετη σειρά. Ωστόσο, επειδή το πρόβλημα είναι συμμετρικό, δεν προκύπτει καμία διαφορά στο τελικό κόστος, συνεπώς παρατηρείται πως η πρώτη και η τρίτη λύση είναι ισοδύναμες και άρα έχουν ταυτόσημο συνολικό κόστος.

Τέλος, αναφορικά με την τέταρτη προτεινόμενη λύση επιλέχθηκε ο συνδυασμός των φορτηγών 1 και 4, από τα οποία η εταιρεία εκτελούσε εμπειρικές αναθέσεις και υπολογίζεται η ακριβής λύση που δομείται από τις συγκεκριμένες επιλογές.

| Συνολικά αποτελέσματα τέταρτης προτεινόμενης λύσης | |
|--|--------|
| Παραδιδόμενη ποσότητα καυσίμου (m^3) | 51,5 |
| Χιλιομετρική απόσταση (km) | 199,6 |
| Κόστος προϊόντος (€) | 255,2 |
| Κόστος διοδίων (€) | 4,2 |
| Κόστος χιλιομετρικής απόστασης (€) | 109,78 |
| Συνολικό κόστος (€) | 369,18 |

Πίνακας 11: Αριθμητικά αποτελέσματα τέταρτης προτεινόμενης λύσης

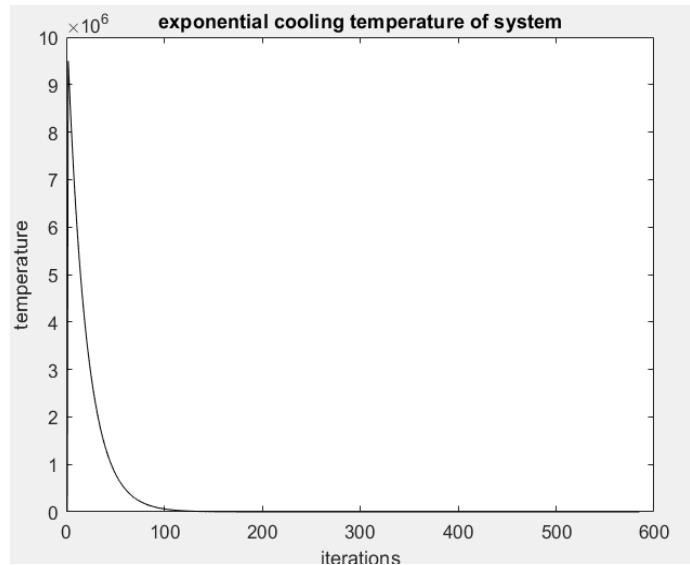
Η τέταρτη λύση που εμπλέκει τα φορτηγά που επιλέχθηκαν εμπειρικά από την εταιρεία απαρτίζεται από τα παρακάτω τόξα:

- Φορτηγό 1 → 0-2-5-11-4-15-0
- Φορτηγό 4 → 0-9-18-13-0

Παρατηρείται πως το συνολικό κόστος που προκύπτει από τη βελτιστοποίηση της δρομολόγησης των δύο αυτών φορτηγών στο πλαίσιο του μοντέλου μικτού ακέραιου/ γραμμικού προγραμματισμού των Efthymiadis et al. (2023) είναι χαμηλότερο από αυτό που προκύπτει από τις εμπειρικές αναθέσεις τις εταιρείας, αποδεικνύοντας έτσι την ποιότητά του.

6.3 Εφαρμογή της προσομοίωσης ανόπτωσης στους προτεινόμενους συνδυασμούς

Για την επίλυση μεγάλων συνδυαστικών προβλημάτων βελτιστοποίησης όπως αυτό που πραγματεύεται η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία, κρίνεται απαραίτητη η εφαρμογή εξειδικευμένων αλγορίθμων που έχουν την δυνατότητα να τα επιλύουν σε εύλογο υπολογιστικό χρονικό διάστημα. Αρχικά, επιλέγεται να επιλυθούν οι τέσσερις συνδυασμοί που προτείνονται από τους Efthymiadis et al.(2023) με την αξιοποίηση της προσομοίωσης ανόπτωσης, ώστε να επιβεβαιωθεί η ποιότητα του αλγορίθμου στην παραγωγή ιδανικών λύσεων. Οι υπολογισμοί εκτελέστηκαν σε υπολογιστή με επεξεργαστή Intel® Core™ i3-500 5U CPU @ 2.00GHz και με μνήμη RAM 8 GB, ενώ για την εφαρμογή της προσομοίωσης ανόπτωσης αξιοποιήθηκε το προγραμματιστικό περιβάλλον του



Διάγραμμα 1: Διάγραμμα εκθετικής ψύξης του συστήματος των τεσσάρων υποπροβλημάτων

MATLAB. Σε όλες τις τέσσερις υποπεριπτώσεις που πρόκειται να διερευνηθούν ορίστηκε αρχική θερμοκρασία $T_0 = 99999999$, τελική οριακή θερμοκρασία $T_{limit} = 0,00000001$, ρυθμός ψύξης συστήματος $\alpha = 0,97$ και αριθμός εσωτερικών επαναλήψεων υπό σταθερή θερμοκρασία $m = 35$. Συνυπολογίζοντας το φαινόμενο του ανταγωνισμού, ο αλγόριθμος επαναλαμβάνεται πέντε φορές για να διαπιστωθεί εάν υπάρχουν αποκλίσεις στα τελικά αποτελέσματα.

Εφαρμόζοντας την προσομοίωση ανόπτωσης για τον πρώτο συνδυασμό που αποτελείται από τα φορτηγά 11 και 12 προκύπτουν και για τις πέντε φορές που επαναλήφθηκε ο αλγόριθμος οι παρακάτω διαδρομές:

- Φορτηγό 11 → 0-15-9-4-0
- Φορτηγό 12 → 0-5-11-18-13-2-0

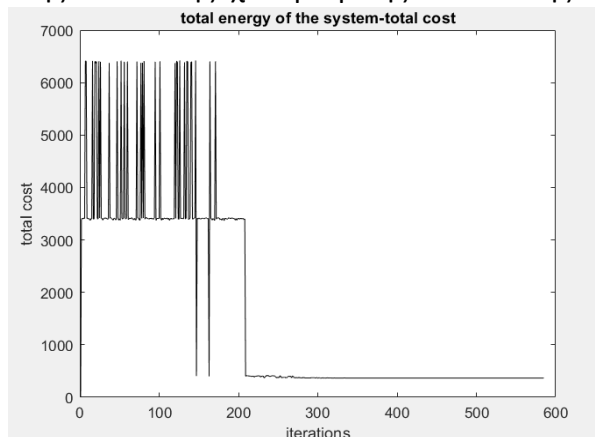
Παρατηρείται πως η σειρά επίσκεψης των σταθμών του φορτηγού 12 διαφέρει από αυτήν της πρώτης προτεινόμενης λύσης του Lingo, παρόλα αυτά τα αριθμητικά δεδομένα (όπως παρουσιάζονται στον πίνακα 12) δηλώνουν πως αυτός ο σχηματισμός είναι εναλλακτικός

βέλτιστος. Σημειώνεται επίσης πως δεν πραγματοποιείται στρογγυλοποίηση στο δεύτερο δεκαδικό ψηφίο, όπως στα ακριβή αποτελέσματα που προβάλλονται από τους Efthymiadis et al.(2023).

| Συνολικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης πρώτου συνδυασμού φορτηγών | |
|---|---------|
| Παραδιδόμενη ποσότητα καυσίμου (m^3) | 51,5 |
| Χιλιομετρική απόσταση (km) | 193,9 |
| Κόστος προϊόντος (€) | 255,2 |
| Κόστος διοδίων (€) | 4,2 |
| Κόστος χιλιομετρικής απόστασης (€) | 106,645 |
| Συνολικό κόστος (€) | 366,045 |

Πίνακας 12: Αριθμητικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης πρώτου συνδυασμού φορτηγών

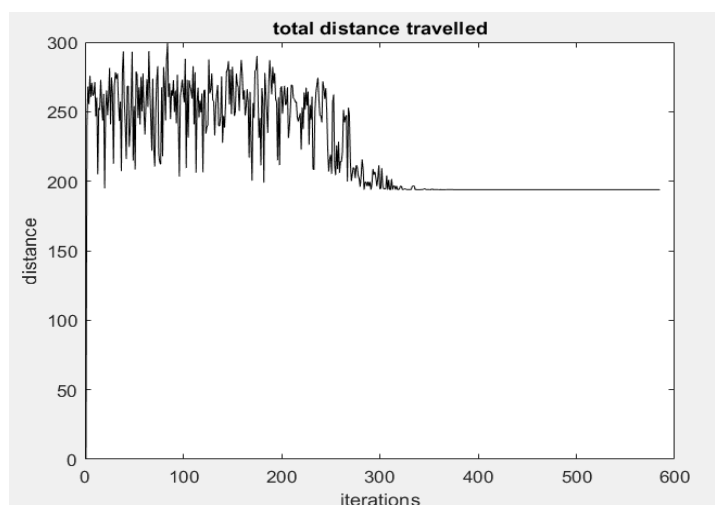
Για το συγκεκριμένο υποπρόβλημα παρατίθενται τα διαγράμματα που περιγράφουν τη συμπεριφορά του συνολικού κόστους- ενέργειας συστήματος, καθώς και της συνολικής χιλιομετρικής απόστασης που διανύεται. Σε αρχική φάση ο αλγόριθμος



προσπαθεί να αποφύγει τον χώρο των ανέφικτων καταστάσεων, ενώ στο τέλος διαπιστώνονται ελάχιστες αλλαγές που αποσκοπούν στην ολική βελτιστοποίηση του προβλήματος (Διάγραμμα 2). Οι προσπάθειες αυτές επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό την συνολική απόσταση που διανύεται και περιγράφονται από το Διάγραμμα 3.

Διάγραμμα 2: Διάγραμμα συνολικής ενέργειας συστήματος ανά επανάληψη για τον πρώτο σχηματισμό.

Διαπιστώνεται παράλληλα πως η λύση αυτή είναι ισοδύναμη με την πρώτη προτεινόμενη λύση του Lingo, μιας που το κόστος χιλιομετρικής απόστασης στρογγυλοποιείται στο δεύτερο δεκαδικό ψηφίο.



Η δεύτερη προτεινόμενη λύση **Διάγραμμα 3: Συνολική απόσταση που καλύπτεται ανά επανάληψη** απαρτίζεται από τα φορτηγά 1 και 12, η οποία δομείται με βάση την προσομοίωσης ανόπτησης στις πέντε επαναλήψεις με δύο

διαφορετικούς τρόπους. Η πρώτη από τις δύο λύσεις αποκλίνει από την ολική βέλτιστη κατά 6 λεπτά του ευρώ, ενώ η δεύτερη ταυτίζεται με την βέλτιστη που προκύπτει από τον συνδυασμό των φορτηγών 1 και 4.

Η διαδρομή που περιγράφεται από την πρώτη λύση δομείται ως:

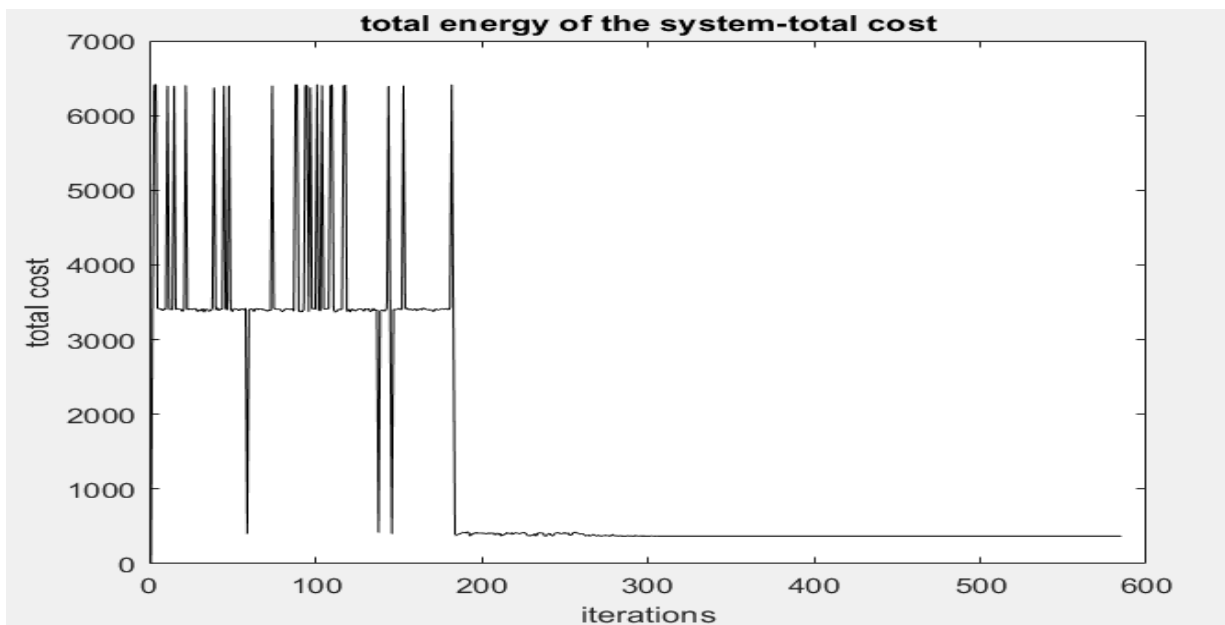
- Φορτηγό 1 → 0-5-11-18-13-15-0
- Φορτηγό 12 → 0-4-9-2-0

Για τη δεύτερη λύση δεν παρατίθενται αριθμητικά στοιχεία κόστους και λεπτομέρειες τις διαδρομής, μιας που και οι δύο αυτές πληροφορίες ισοδυναμούν με αυτές του συνδυασμού φορτηγών 1 και 4 στην υποενότητα 6.2 (Πίνακας 11).

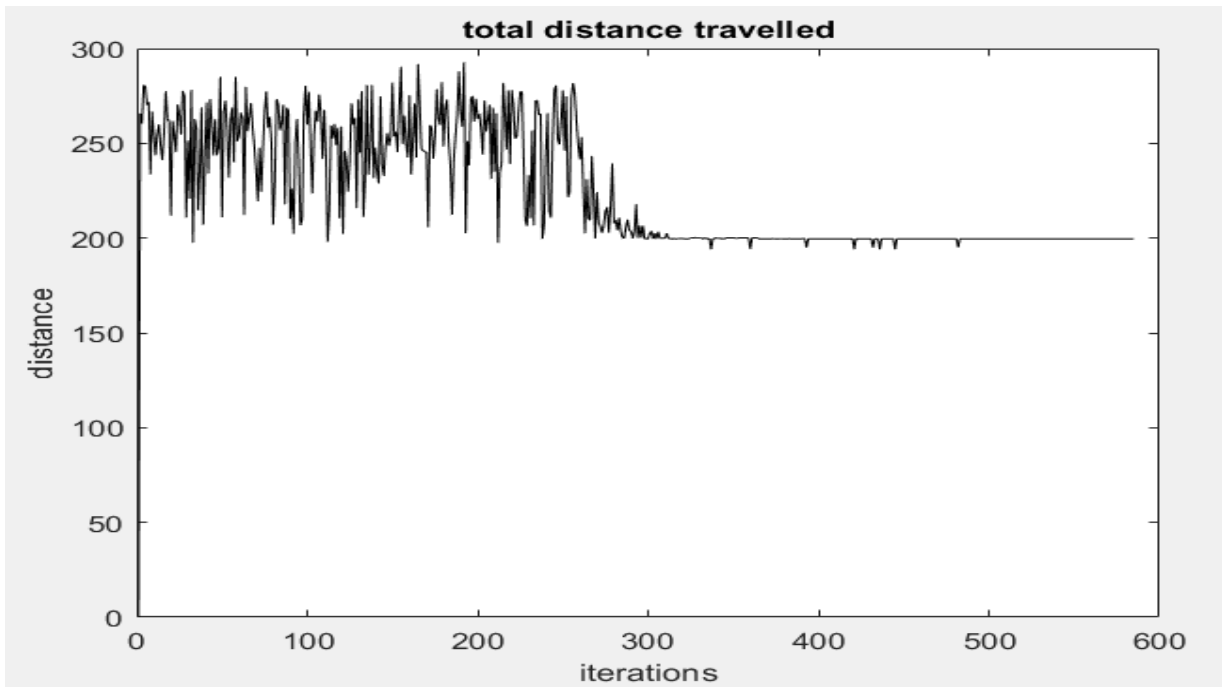
| Συνολικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης δεύτερου συνδυασμού φορτηγών | |
|---|---------|
| Παραδιδόμενη ποσότητα καυσίμου (m^3) | 51,5 |
| Χιλιομετρική απόσταση (km) | 194,7 |
| Κόστος προϊόντος (€) | 255,2 |
| Κόστος διοδίων (€) | 4,2 |
| Κόστος χιλιομετρικής απόστασης (€) | 107,085 |
| Συνολικό κόστος (€) | 366,485 |

Πίνακας 13: Αριθμητικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης δεύτερου συνδυασμού φορτηγών

Στα Διαγράμματα 4 και 5 παρουσιάζεται η συμπεριφορά της ενέργειας του συγκεκριμένου συστήματος και της συνολικής απόστασης που διανύεται.



Διάγραμμα 4: Ενέργεια συστήματος δεύτερου σχηματισμού ανά επανάληψη



Διάγραμμα 5: Συνολική απόσταση που καλύπτεται από τον δεύτερο σχηματισμό ανά επανάληψη

Το τρίτο υποπρόβλημα δομείται από τα φορτηγά 1 και 11, ωστόσο η προσομοίωση ανόπτησης στις πέντε φορές που επαναλήφθηκε, συνέκλινε σε δύο διαφορετικές τιμές κόστους, εκ των οποίων η μια ταυτίζεται με την ακριβή τιμή που προκύπτει από το λογισμικό Lingo, ενώ η δεύτερη διαφέρει από αυτήν κατά μόλις 60 λεπτά του ευρώ. Οι διαδρομές που περιγράφουν τη βέλτιστη λύση είναι οι εξής:

- Φορτηγό 1 → 0-5-11-18-13-2-0
- Φορτηγό 11 → 0-4-9-15-0

Η δεύτερη δρομολόγηση για αυτόν τον συνδυασμό φορτηγών περιγράφεται από την παρακάτω αλληλουχία επισκέψεων:

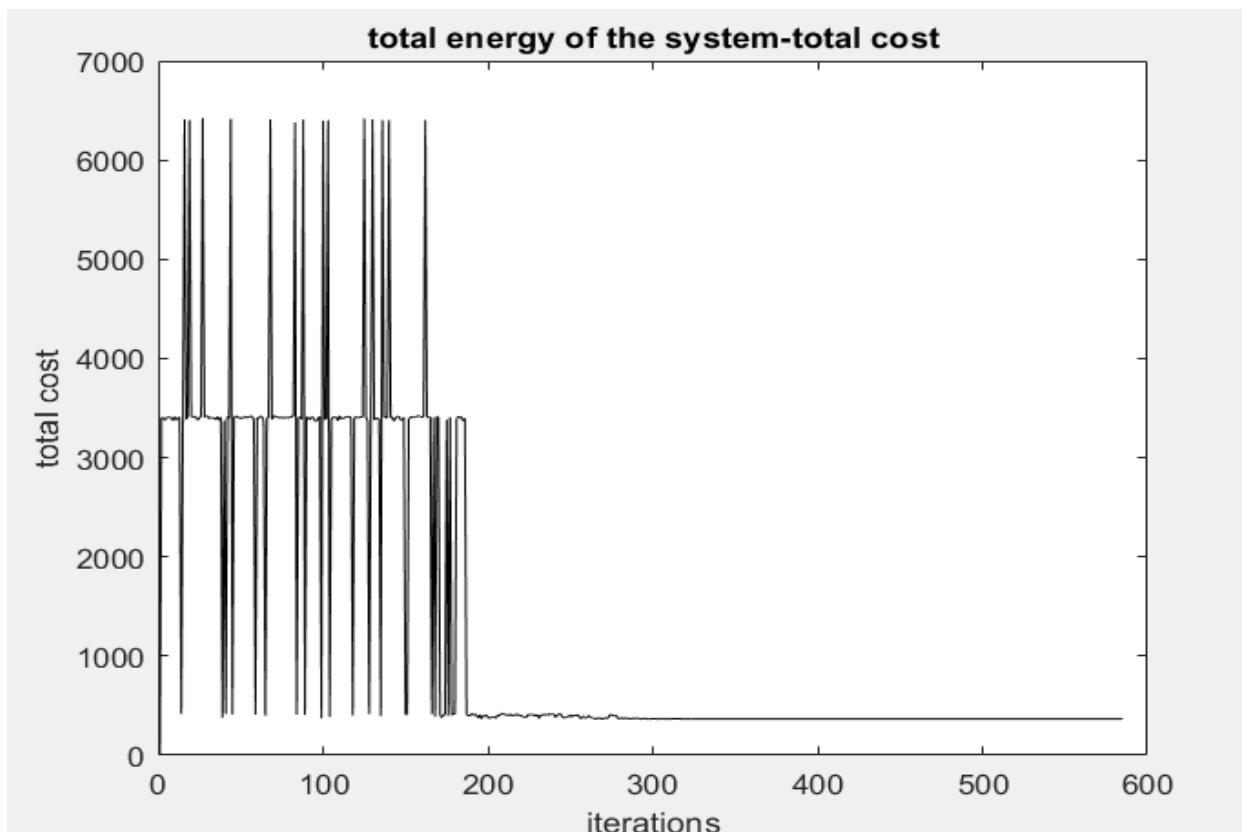
- Φορτηγό 1 → 0-15-4-11-5-0
- Φορτηγό 11 → 0-13-18-9-2-0

Πίνακας 14: Αριθμητικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης πρώτης δρομολόγησης τρίτου σχηματισμού

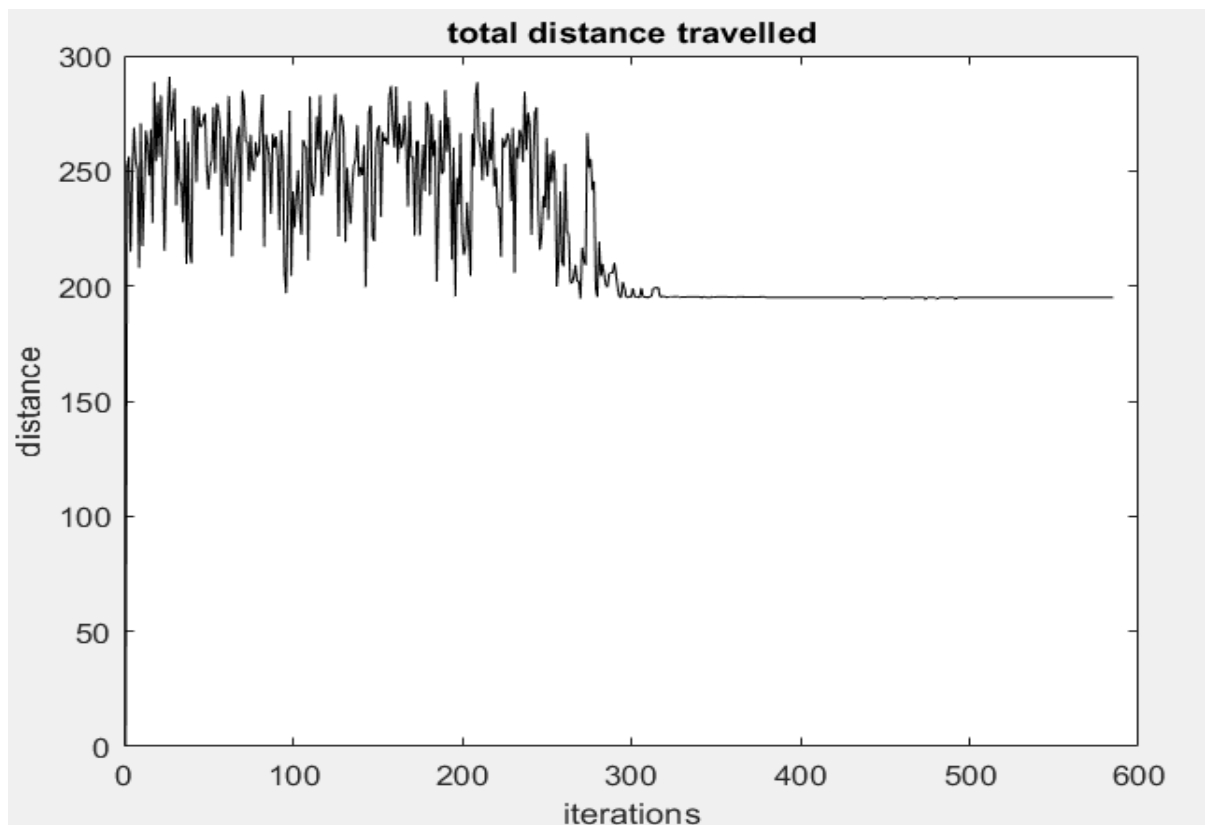
| Συνολικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης πρώτης λύσης για τον τρίτο συνδυασμό φορτηγών | |
|--|---------|
| Παραδιδόμενη ποσότητα καυσίμου (m^3) | 51,5 |
| Χιλιομετρική απόσταση (km) | 193,9 |
| Κόστος προϊόντος (€) | 255,2 |
| Κόστος διοδίων (€) | 4,2 |
| Κόστος χιλιομετρικής απόστασης (€) | 106,645 |
| Συνολικό κόστος (€) | 366,045 |

| Συνολικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης δεύτερης λύσης για τον τρίτο συνδυασμό φορτηγών | |
|--|--------|
| Παραδιδόμενη ποσότητα καυσίμου (m^3) | 51,5 |
| Χιλιομετρική απόσταση (km) | 195 |
| Κόστος προϊόντος (€) | 255,2 |
| Κόστος διοδίων (€) | 4,2 |
| Κόστος χιλιομετρικής απόστασης (€) | 107,25 |
| Συνολικό κόστος (€) | 366,65 |

Η συμπεριφορά της προσομοίωσης ανόπτησης σχετικά με την ενέργεια του συστήματος που περιλαμβάνει τα φορτηγά 1 και 11 ταυτίζεται ποιοτικά και με τις δύο περιπτώσεις συνολικού κόστους και περιγράφεται από τα Διαγράμματα 6 και 7.



Διάγραμμα 6: Ενέργεια συστήματος τρίτου σχηματισμού ανά επανάληψη



Διάγραμμα 7: Συνολική απόσταση που καλύπτεται από τον τρίτο σχηματισμό

Τέλος, σχετικά με την τέταρτη δυάδα φορτηγών (1 και 4), η προσομοίωση ανόπτησης παράγει και τις πέντε φορές που επαναλήφθηκε ταυτόσημες λύσεις με αυτές που προκύπτουν με ακρίβεια από το Lingo και οι διαδρομές που κατασκευάζονται απεικονίζονται με τον παρακάτω τρόπο:

- Φορτηγό 1 → 0-2-5-11-4-15-0
- Φορτηγό 4 → 0-9-18-13-0

Αναλυτικότερα οικονομικά στοιχεία για τον συγκεκριμένο σχηματισμό προβάλλονται στον πίνακα 15.

Πίνακας 16: Συνολικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης τέταρτου συνδυασμού φορτηγών

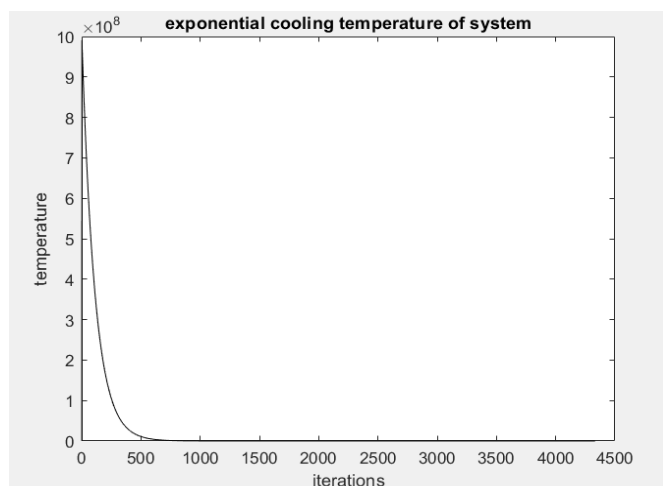
| Συνολικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης τέταρτου συνδυασμού φορτηγών | |
|---|--------|
| Παραδιδόμενη ποσότητα καυσίμου (m^3) | 51,5 |
| Χιλιομετρική απόσταση (km) | 199,6 |
| Κόστος προϊόντος (€) | 255,2 |
| Κόστος διοδίων (€) | 4,2 |
| Κόστος χιλιομετρικής απόστασης (€) | 109,78 |
| Συνολικό κόστος (€) | 369,18 |

Από τα παραπάνω αριθμητικά δεδομένα αποδεικνύονται οι δυνατότητες του συγκεκριμένου εξειδικευμένου αλγορίθμου. Ειδικότερα, μέσω αυτού παράγονται εφικτές λύσεις που ταυτίζονται με τις ολικές βέλτιστες ή αποκλίνουν ελάχιστα από αυτές, ενώ αξίζει να σημειωθεί πως για κάθε συνδυασμό φορτηγών οι πέντε επαναλήψεις που εκτελέστηκαν χρειάστηκαν περίπου 20 δευτερόλεπτα, σε αντίθεση με το Lingo που για να τις δημιουργήσει απαιτούνται μερικά δευτερόλεπτα έως 2 λεπτά (Efthymiadis et al.,2023) . Η φύση των εξειδικευμένων αλγορίθμων είναι τέτοια, ώστε πολλές φορές να μην συγκλίνουν στο ολικό βέλτιστο, αλλά να αποκλίνουν ελάχιστα από αυτό, κατέχοντας βέβαια το προνόμιο να οδηγούνται σε αυτά τα αποτελέσματα σε πολύ μικρότερο χρονικό διάστημα. Τονίζεται παράλληλα πως τα παραπάνω αριθμητικά αποτελέσματα ίσως να βελτιωνόντουσαν σε περίπτωση που αυξάνονταν οι παράμετροι της αρχικής θερμοκρασίας και του ρυθμού ψύξης, ωστόσο λόγω της στοχαστικότητας της προσομοίωσης ανόπτησης δύναται να παραχθούν ελάχιστα καλύτερες λύσεις σε πολύ μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, καθιστώντας έτσι μη συμφέρουσα τη μεταβολή αυτών των παραμέτρων.

Δεδομένου πως η προσομοίωση ανόπτησης δημιουργεί σε εύλογο υπολογιστικό χρόνο συμφέρουσες εφικτές λύσεις (γεγονός που αποδείχθηκε στην συγκεκριμένη υποενοότητα), κρίνεται εφικτή η επίλυση ολόκληρου του προβλήματος περιλαμβάνοντας ολόκληρο τον στόλο φορτηγών (κάτι που με συμβατικά λογισμικά καθίσταται πρακτικά αδύνατο), προσφέροντας με αυτόν τον τρόπο στην εταιρεία μια πιο γενική εικόνα σχετικά με την πολιτική σχεδιασμού των διαδρομών.

6.4 Εφαρμογή της προσομοίωσης ανόπτησης σε ολόκληρο το πρόβλημα

Κατά την εφαρμογή της προσομοίωσης ανόπτησης σε ολόκληρο το πρόβλημα ο αλγόριθμος καλείται να διαχειριστεί ολόκληρο τον στόλο που διαθέτει η εταιρεία, γεγονός που αυξάνει κατά πολύ το μέγεθος του προβλήματος. Για να βρεθεί σε θέση να εξετάσει ένα ικανοποιητικό εύρος του χώρου των λύσεων, επιλέχθηκαν διαφορετικές παράμετροι αρχικής θερμοκρασίας, ρυθμού ψύξης και αριθμός εσωτερικών επαναλήψεων



Διάγραμμα 8: Διάγραμμα εκθετικής ψύξης του συστήματος ολόκληρου του προβλήματος

υπό σταθερή θερμοκρασία, οι οποίες είναι $T_0 = 999999999$, $\alpha = 0,991$ και $m = 50$ αντίστοιχα, ενώ η τελική θερμοκρασία παρέμεινε ίδια ($T_{limit} = 0,00000001$). Σημειώνεται παράλληλα πως οι υπολογισμοί εκτελέστηκαν στον ίδιο υπολογιστή με αυτόν που χρησιμοποιήθηκε και στους υπολογισμούς της υποενότητας 6.3 και συνυπολογίζοντας την στοχαστικότητα της προσομοίωσης ανόπτησης και το φαινόμενο ανταγωνισμού των λύσεων, επαναλήφθηκε ο αλγόριθμος δέκα φορές. Τέλος, οι λύσεις που δημιουργήθηκαν παρατίθενται κατά αύξουσα σειρά, ενώ τονίζεται παράλληλα πως εξαιτίας της στοχαστικότητας του αλγορίθμου τα αποτελέσματα αυτά δύναται να διαφέρουν κάθε φορά που τρέχει ο αλγόριθμος.

Η καλύτερη λύση που σχηματίστηκε από την προσομοίωση ανόπτησης δομείται από τα φορτηγά 1 και 11, και κοστίζει στην εταιρεία 366,045€. Οι διαδρομές που καλύπτονται από αυτά τα βυτιοφόρα αναλύονται στον σχηματισμό (a) και οικονομικά στοιχεία αυτού παρατίθενται στον Πίνακα 17:

- (a) Φορτηγό 1: 0-2-5-11-18-13-0
 Φορτηγό 11: 0-4-9-15-0

Πίνακας 17: Συνολικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης σχηματισμού (a)

| Συνολικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης σχηματισμού (a) | |
|--|---------|
| Παραδιδόμενη ποσότητα καυσίμου (m^3) | 51,5 |
| Χιλιμετρική απόσταση (km) | 193,9 |
| Κόστος προϊόντος (€) | 255,2 |
| Κόστος διοδίων (€) | 4,2 |
| Κόστος χιλιμετρικής απόστασης (€) | 106,645 |
| Συνολικό κόστος (€) | 366,045 |

Διαπιστώνεται πως ο σχηματισμός (a) απαρτίζεται από τα ίδια φορτηγά της τρίτης προτεινόμενης λύσης της υποενότητας 6.2, ενώ παράλληλα ταυτίζονται τα στοιχεία κόστους του (a) με αυτά της ακριβής λύσης του Lingo για αυτόν τον συνδυασμό βυτιοφόρων.

Η δεύτερη καλύτερη λύση που παράγεται από τον αλγόριθμο στοιχίζει στην εταιρεία μόνο 44 λεπτά του ευρώ παραπάνω από αυτά της προηγούμενης λύσης (366,485€), εμφανίστηκε επίσης μόνο μια φορά και εντός αυτής εμπεριέχονται τα φορτηγά 1 και 8. Οι επισκέψεις των σταθμών από αυτά τα βυτιοφόρα περιγράφονται από τον σχηματισμό (b), ενώ τα αριθμητικά του στοιχεία προβάλλονται στον Πίνακα 18:

- (b) Φορτηγό 1: 0-4-11-18-13-15-0
 Φορτηγό 8: 0-2-9-5-0

Πίνακας 18: Συνολικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης σχηματισμού (b)

| Συνολικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης σχηματισμού (b) | |
|--|---------|
| Παραδιδόμενη ποσότητα καυσίμου (m^3) | 51,5 |
| Χιλιομετρική απόσταση (km) | 194,7 |
| Κόστος προϊόντος (€) | 255,2 |
| Κόστος διοδίων (€) | 4,2 |
| Κόστος χιλιομετρικής απόστασης (€) | 107,085 |
| Συνολικό κόστος (€) | 366,485 |

Στον σχηματισμό (b) περιλαμβάνεται ένα βυτιοφόρο, το οποίο παρέμενε ανενεργό στις προηγούμενες υποπεριπτώσεις, ενώ με την ενεργοποίησή του καλύπτεται μια διαδρομή η οποία κοστίζει ελάχιστα παραπάνω από την φαινομενικά βέλτιστη διαδρομή.

Το τρίτο βέλτιστο κατά σειρά κόστος που προέκυψε από την εφαρμογή του αλγορίθμου ανέρχεται σε ύψος 366,595€ και εκφράζει τα τέσσερα από τα δέκα συνολικά αποτελέσματα που ελήφθησαν συνολικά. Οι σχηματισμοί (c), (d), (e), (f) που περιγράφουν το συγκεκριμένο αριθμητικό ποσό δομούνται από διαφορετικούς συνδυασμούς φορτηγών και επισκέψεων στους σταθμούς και τα οικονομικά στοιχεία των τεσσάρων αυτών δρομολογήσεων περιγράφονται στον Πίνακα 19:

(c) Φορτηγό 4: 0-15-0

Φορτηγό 7: 0-5-11-18-13-0

Φορτηγό 8: 0-2-9-4-0

(d) Φορτηγό 2: 0-15-0

Φορτηγό 11: 0-13-18-11-5-0

Φορτηγό 12: 0-4-9-2-0

(e) Φορτηγό 8: 0-15-0

Φορτηγό 11: 0-2-9-5-0

Φορτηγό 12: 0-4-11-18-13-0

(f) Φορτηγό 7: 0-13-18-11-5-0

Φορτηγό 10: 0-15-0

Φορτηγό 11: 0-4-9-2-0

Πίνακας 19: Συνολικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης σχηματισμών (c), (d), (e), (f)

| Συνολικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης σχηματισμών (c), (d), (e), (f) | |
|---|---------|
| Παραδιδόμενη ποσότητα καυσίμου (m^3) | 51,5 |
| Χιλιομετρική απόσταση (km) | 194,9 |
| Κόστος προϊόντος (€) | 255,2 |
| Κόστος διοδίων (€) | 4,2 |
| Κόστος χιλιομετρικής απόστασης (€) | 107,915 |
| Συνολικό κόστος (€) | 366,595 |

Από τα παραπάνω δεδομένα παρατηρείται πως τις για τις ίδιες τιμές κόστους υπάρχουν εναλλακτικές επιλογές βυτιοφόρων και συνεπώς διαφορετικό σχήμα επίσκεψης των σταθμών που εκφράζουν ζήτηση για οποιοδήποτε προϊόν, συνεπώς δίνεται η ευκαιρία στην εταιρεία να είναι πιο ευέλικτη σχετικά με τις αναθέσεις των φορτηγών και τις στρατηγικές πίσω από τις δρομολογήσεις.

Το αμέσως επόμενο κατά σειρά κόστος που δημιουργήθηκε από την προσομοίωση ανόπτησης ισούται με 366,65€ και εμφανίστηκε σε τρία από τα δέκα αποτελέσματα που ελήφθησαν. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, το συγκεκριμένο κόστος δύναται να χρεωθεί στην εταιρεία με δύο εναλλακτικές διαδρομές (οι δύο από τις τρεις λύσεις έχουν ισοδύναμη δρομολόγηση των ίδιων φορτηγών), που περιγράφονται από τους σχηματισμούς (g), (h), ενώ τα κοινά οικονομικά τους στοιχεία παρατίθενται στον Πίνακα 20:

(g) Φορτηγό 1: 0-5-11-4-15-0

Φορτηγό 6: 0-13-18-9-2-0

(h) Φορτηγό 1: 0-5-11-4-15-0

Φορτηγό 11: 0-2-9-18-13-0

Πίνακας 20: Συνολικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης σχηματισμών (g), (h)

| Συνολικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης σχηματισμών (g) , (h) | |
|--|--------|
| Παραδιδόμενη ποσότητα καυσίμου (m^3) | 51,5 |
| Χιλιομετρική απόσταση (km) | 195 |
| Κόστος προϊόντος (€) | 255,2 |
| Κόστος διοδίων (€) | 4,2 |
| Κόστος χιλιομετρικής απόστασης (€) | 107,25 |
| Συνολικό κόστος (€) | 366,65 |

Στην συγκεκριμένη περίπτωση διαπιστώνεται πως δύο διαφορετικά φορτηγά (6 και 11), σε συνδυασμό με το πρώτο δημιουργούν δύο ισοδύναμους σχηματισμούς, ενισχύοντας επιπλέον το επιχείρημα περί αύξησης της ευελιξίας του στόλου της εταιρείας. Παράλληλα, παρατηρείται πως το φορτηγό 11 στον σχηματισμό (h) διανύει ακριβώς την αντίθετη διαδρομή από το φορτηγό 6 στον (g), ωστόσο λόγω συμμετρικότητας του προβλήματος αυτό το γεγονός δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα.

Η τελευταία κατά σειρά προτεινόμενη λύση από την εφαρμογή του αλγορίθμου σε ολόκληρο το πρόβλημα εμφανίζεται μόνο μια φορά και κοστίζει στην εταιρεία 366,815€ και συνδυάζει τα φορτηγά 6, 9 και 11. Η δρομολόγηση αυτών των βυτιοφόρων αναλύεται από τον σχηματισμό (i) και η διάρθρωση του κόστους αυτής συνοψίζεται στον Πίνακα 21:

(i) Φορτηγό 6: 0-2-9-18-13-0

Φορτηγό 9: 0-15-0

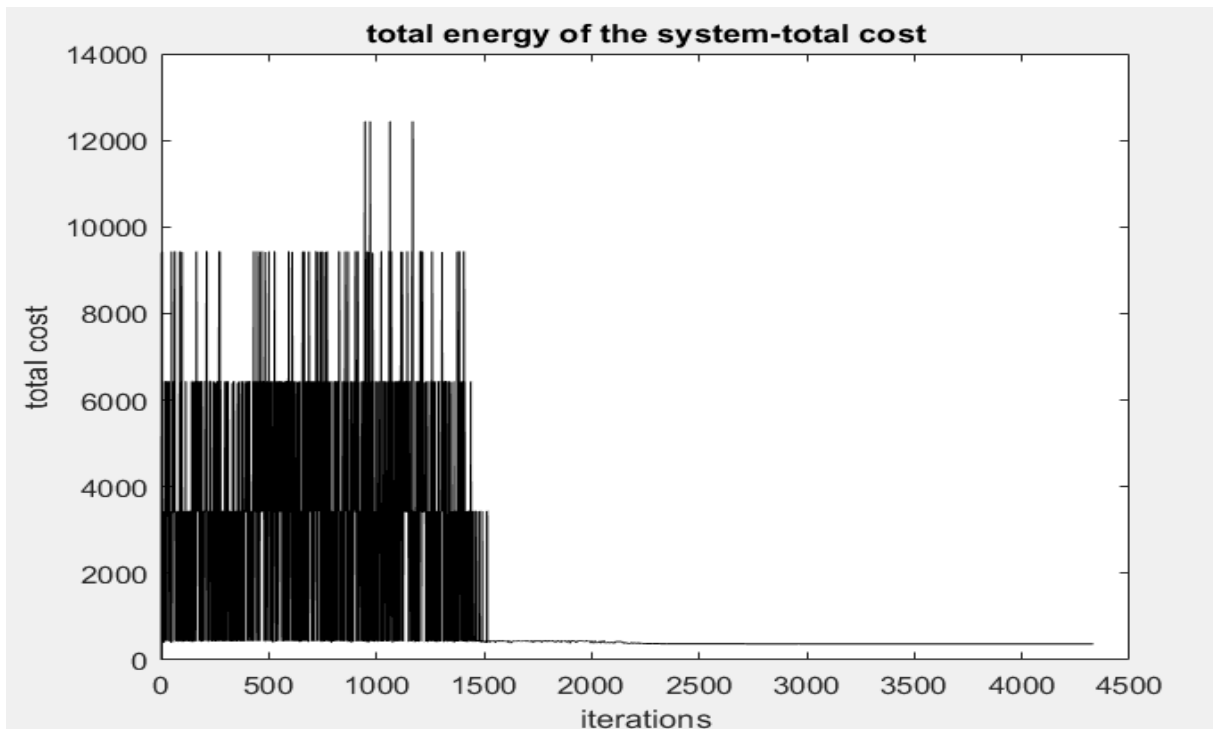
Φορτηγό 11: 0-5-11-4-0

Πίνακας 21: Συνολικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης σχηματισμού (i)

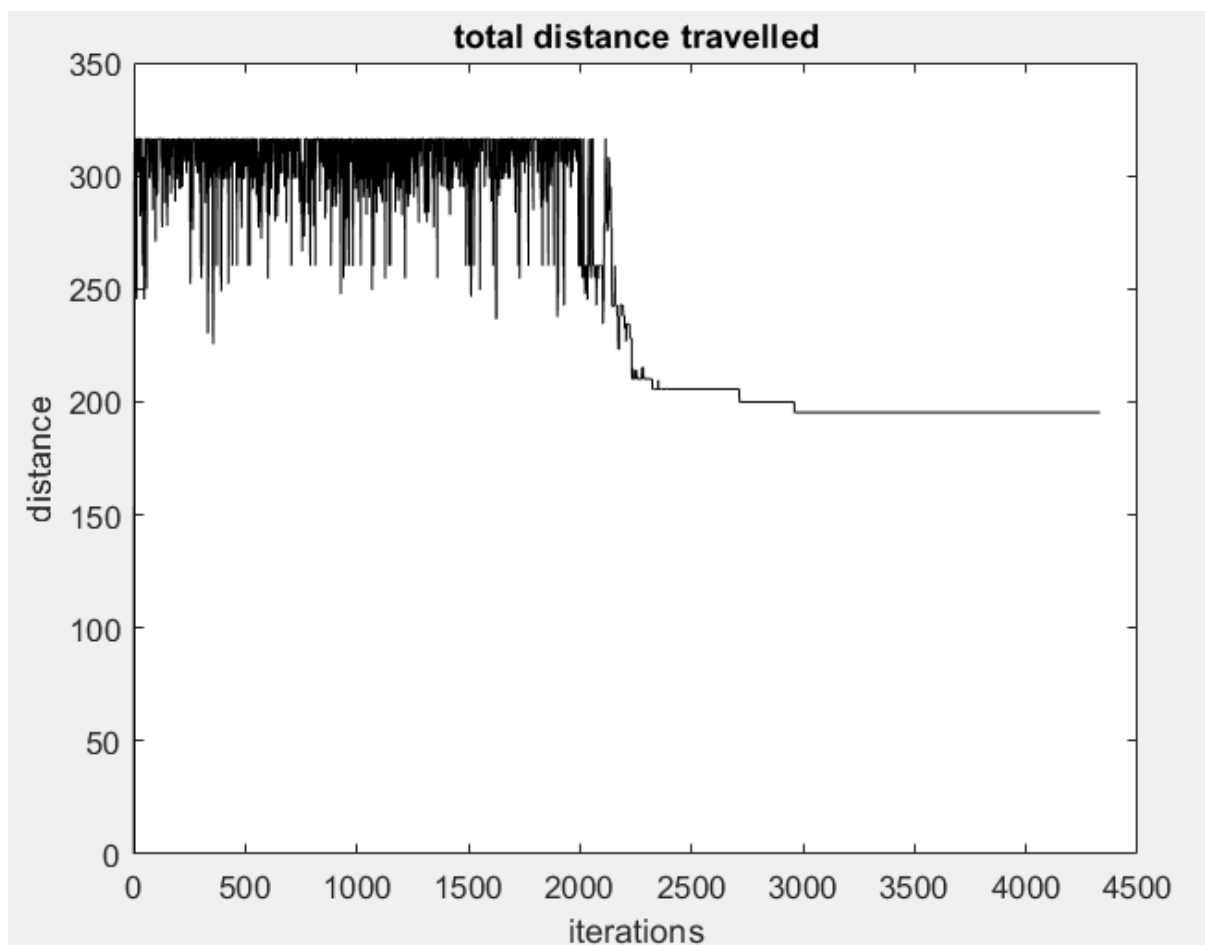
| Συνολικά αποτελέσματα προσομοίωσης ανόπτησης σχηματισμού (i) | |
|--|---------|
| Παραδιδόμενη ποσότητα καυσίμου (m^3) | 51,5 |
| Χιλιομετρική απόσταση (km) | 195,3 |
| Κόστος προϊόντος (€) | 255,2 |
| Κόστος διοδίων (€) | 4,2 |
| Κόστος χιλιομετρικής απόστασης (€) | 107,415 |
| Συνολικό κόστος (€) | 366,815 |

Από την εφαρμογή της προσομοίωσης ανόπτησης σε ολόκληρο το πρόβλημα παρατηρείται σύγκλιση των λύσεων σε μια πληθώρα τιμών που δεν ξεπερνά τα 367€. Αξίζει να σημειωθεί πως ακόμα και με αξιοποίηση τρίτου φορτηγού το οποίο ικανοποιεί έναν μόνο σταθμό (σχηματισμοί (c), (d), (e), (f)) και με την επιλογή να μην εξαντληθεί το μέγιστο όριο επισκέψεων ανά βυτιοφόρο σε περίπτωση που επιλεχθούν μόνο 2 από αυτά (σχηματισμοί (g), (h)), παράγονται αποτελέσματα τα οποία κρίνονται πιο συμφέροντα από αυτά του τέταρτου συνδυασμού της υποενότητας 6.2 (φορτηγά 1 και 4), του οποίου το ακριβές βέλτιστο που δημιουργείται από το Lingo ανέρχεται στα 369,18€.

Η συμπεριφορά του συστήματος κατά την διάρκεια του αλγορίθμου και για τις δέκα εξεταζόμενες περιπτώσεις είναι παρόμοια και περιγράφεται από τα Διαγράμματα 9 και 10.



Διάγραμμα 9: Συνολική ενέργεια του συστήματος ολόκληρου του προβλήματος ανά επανάληψη



Διάγραμμα 10 : Συνολική απόσταση που καλύπτεται σε ολόκληρο το πρόβλημα ανά επανάληψη

Από αυτά τα διαγράμματα συμπεραίνεται πως ο αλγόριθμος λειτουργεί σε δύο φάσεις. Πιο συγκεκριμένα, σε αρχική κατάσταση, όταν η τιμή της θερμοκρασίας είναι ακόμα υψηλή προσαρμόζονται οι καταστάσεις των λύσεων με τέτοιον τρόπο ώστε να εξαλειφθούν οι μη εφικτές διαδρομές, ενώ στο τέλος διαδραματίζονται ελάχιστες προσαρμογές των διαδρομών με σκοπό την περαιτέρω βελτίωση των λύσεων. Δεδομένου ότι το πρόβλημα που πραγματεύεται η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία αποτελεί συνάρτηση βελτιστοποίησης αποστάσεων σε συνδυασμό με την εφικτότητα των διαδρομών αναφορικά με τις αναθέσεις καυσίμων στα διαμερίσματα των βυτιοφόρων, διαπιστώνεται από το Διάγραμμα 10 πως η συνολική απόσταση που καλύπτεται παρουσιάζει αυξομειώσεις στην προσπάθεια του αλγορίθμου να αποφύγει τον χώρο των ανέφικτων δρομολογήσεων.

Κλείνοντας, τονίζεται πως για την απόκτηση και των δέκα αποτελεσμάτων με τη συμβολή της προσομοίωσης ανόπτηθηκαν περίπου 17 λεπτά, σε αντίθεση με το Lingo το οποίο είναι αδύνατο να λύσει το πρόβλημα σε εύλογο χρονικό διάστημα. Χάρη στην κατασκευή αυτού του αλγορίθμου η εταιρεία δύναται πλέον να σχεδιάζει ευκολότερα και σε μικρότερο χρονικό διάστημα σε καθημερινή βάση με ανανεωμένα δεδομένα ζήτησης

κάθε φορά τις στρατηγικές ανάθεσης φορτηγών και των σταθμών που αυτά επισκέπτονται. Παράλληλα, δίνεται η δυνατότητα σε αυτήν να επιλέγει μεταξύ συμφέρουσων εναλλακτικών διαδρομών ανάλογα με την πολιτική της σχετικά με τη συντήρηση των βυτιοφόρων και την ικανοποίηση όλων των οδηγών.

7. Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναλύθηκε ένα πρόβλημα το οποίο τα τελευταία χρόνια με την εξέλιξη των logistics αποκτά εξαιρετικό ενδιαφέρον, μιας που η δρομολόγηση οχημάτων αποτελεί ένα μεγάλο μέρος των εξόδων κάθε εφοδιαστικής αλυσίδας. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα δρομολόγησης φορτηγών πολλών διαμερισμάτων και με ετερογενή στόλο (Heterogeneous Fleet Multi Compartment Vehicle Routing Problem-HFMCVRP) εταιρεία πετρελαϊκών προϊόντων αποσκοπεί στην μείωση του ημερήσιου κόστους διανομής των προϊόντων της στα πρατήρια βενζίνης. Προσαρμόζοντας τις ανάγκες της εταιρείας όσον αφορά τις εργασιακές ώρες των οδηγών σε συνδυασμό με τη ζήτηση των πρατηρίων και άλλων διαφορετικών διοικητικών κριτηρίων όσον αφορά την ικανοποίηση όλων των οδηγών και τη συντήρηση των βυτιοφόρων, αναπτύχθηκε ένα μοντέλο μικτού ακέрайου/ γραμμικού προγραμματισμού από τους Efthymiadis et al.(2023), το οποίο ελαχιστοποιεί το κόστος μεταφοράς.

Πριν την ανάληψη αυτής της εργασίας το πρόβλημα αυτό με τα ισχύοντα εταιρικά δεδομένα, επιλύοταν αποκλειστικά με συμβατικά λογισμικά επίλυσης, όπως το Lingo, και με κλασικές μεθόδους μικτού ακέрайου/ γραμμικού προγραμματισμού. Αν και γίνονται προσπάθειες μείωσης του μεγέθους του πλήρους προβλήματος μέσω ορισμένων περιορισμών της αντικειμενικής συνάρτησης, στην πραγματικότητα λόγω της φύσης του συγκεκριμένου προβλήματος συνδυαστικής βελτιστοποίησης (NP-Hard) η επίλυση αυτού κρίνεται αδύνατη εντός λογικού υπολογιστικού χρόνου. Για την αντιμετώπιση αυτού του ζητήματος προτιμήθηκε αρχικά η μείωση ολόκληρου του προβλήματος σε $\binom{K}{n}$ υποπροβλήματα, όπου K τα διαθέσιμα φορτηγά και n το ελάχιστο δυνατό πλήθος φορτηγών για το οποίο εκτιμάται πως η ζήτηση των σταθμών καλύπτεται πλήρως, μειώνοντας τον χρόνο επίλυσης χωρίς να βλάπτεται η βελτιστοποίηση (Efthymiadis et al., 2023). Ακολούθως, επιλέγονται από την εταιρεία συγκεκριμένοι βέλτιστοι συνδυασμοί, συνυπολογίζοντας παράλληλα και άλλα κριτήρια όσον αφορά την προτίμηση στη χρήση ορισμένων φορτηγών. Παρόλα αυτά, για μεγαλύτερα δεδομένα ζήτησης από αυτά που αναλύθηκαν στη συγκεκριμένη εργασία η επίλυση αυτού του προβλήματος κρίνεται πρακτικώς αδύνατη εξαιτίας του μεγάλου υπολογιστικού χρόνου για τον οποίον εξετάζονται όλες οι πιθανές εφικτές λύσεις.

Με την εφαρμογή ενός εξειδικευμένου αλγορίθμου (και ειδικότερα της προσομοίωσης ανόπτησης) σε τέτοιου είδους προβλήματα απλοποιείται η διαδικασία βελτιστοποίησης, μιας που κύρια ιδιότητα τους συνιστά η ελαχιστοποίηση του χρόνου

υπολογισμού. Βασική παραδοχή αυτών των αλγορίθμων αποτελεί πως δεν επιτυγχάνεται πάντα η βέλτιστη λύση, ωστόσο για να θεωρηθεί επιτυχημένη η εφαρμογή αυτών οφείλει η απόκλιση από αυτήν να είναι σχετικά αμελητέα (<7%). Για τα συγκεκριμένα πραγματικά δεδομένα που παρουσιάστηκαν αποφεύγονται παραδοχές και τροποποιήσεις που αποσκοπούν στη μείωση του υπολογιστικού χρόνου από το Lingo και οι οποίες κρίνονται απαραίτητες ώστε να διατηρηθεί η χρησιμότητα του μοντέλου μικτού ακέραιου/ γραμμικού προγραμματισμού.

Μέσω της συγκεκριμένης εργασίας αποδεικνύεται πως με την κατάλληλη προσαρμογή των παραμέτρων της προσομοίωσης ανόπτησης εντός του πλαισίου του προβλήματος δύνανται να παραχθούν βέλτιστες (ή σχεδόν βέλτιστες) λύσεις για ορισμένα υποπροβλήματα, καθώς και για ολόκληρο το μέγεθος αυτού. Ταυτόχρονα, διαπιστώνεται πως η αρχική υπόθεση ότι ελαχιστοποιείται το κόστος με την ελάχιστη δυνατή επιλογή φορτηγών καταρρίπτεται, αφού εντοπίστηκαν σχηματισμοί οι οποίοι περιλαμβάνουν αξιοποίηση τριών φορτηγών (σχηματισμοί (c), (d), (e), (f),(i)), για τους οποίους το συνολικό κόστος είναι σημαντικά μικρότερο από την βέλτιστη δυνατή δρομολόγηση δύο φορτηγών, (366,6€ και 366,65€ έναντι του βέλτιστου 369,81€ που αντιστοιχεί στα φορτηγά 1 και 4). Με την αξιοποίηση της προσομοίωσης ανόπτησης σε ολόκληρο το πρόβλημα δεν αποκτάται μόνο το προνόμιο της μείωσης του χρόνου υπολογισμού, συγχρόνως παρέχεται ευελιξία όσον αφορά τις αναθέσεις που επιλέγει να κάνει η εταιρεία για διαδρομές, οι οποίες κρίνονται παράλληλα και οικονομικά συμφέρουσες. Επιπλέον, σε περιπτώσεις όπου η ημερήσια ζήτηση των πρατηρίων αυξηθεί, ο αλγόριθμος βρίσκεται σε θέση να επεξεργαστεί τα δεδομένα αυτά σε ένα εύλογο χρονικό διάστημα και σε ικανοποιητικό βαθμό, απαλλάσσοντας την εταιρεία από ενέργειες και αποφάσεις που ίσως αποβούν μη συμφέρουσες.

Τα τελευταία χρόνια γίνονται έρευνες σχετικά με τις τροποποιήσεις των θεμελιωδών συναρτήσεων του αλγορίθμου (δημιουργία τυχαίας αρχικής λύσης και των γειτονικών της, ψύξη συστήματος και αποδοχής λύσεων) και για τις αναθέσεις των βασικών παραμέτρων του. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζονται τεχνικές έρευνας tabu (tabu search), με τις οποίες «λογοκρίνονται» κάποιες λύσεις για ορισμένο αριθμό επαναλήψεων, και ευρετικές τεχνικές εύρεσης γειτονικών λύσεων, ενώ διερευνώνται ταυτόχρονα άλλου είδους συναρτήσεις αποδοχής λύσεων (σε αντίθεση με το κριτήριο Metropolis) και ανανέωσης θερμοκρασίας (διαφορετικές από την εκθετική ψύξη). Παρόλα αυτά, οι συγκεκριμένες αναβαθμίσεις περιπλέκουν την εφαρμογή της προσομοίωσης ανόπτησης και δεν εγγυώνται σημαντικές βελτιώσεις στα αριθμητικά αποτελέσματα που προκύπτουν.

Με τη συνδρομή της προσομοίωσης ανόπτησης προσφέρονται στην εταιρεία περισσότερες δυνατότητες από αυτές που ήδη έχει, δίνοντάς της τη δυνατότητα να

εξελιχθεί. Ειδικότερα, με τη συνδρομή του αλγορίθμου δύνανται να εφαρμοστούν αντίστοιχα μαθηματικά μοντέλα που λαμβάνουν υπόψη περισσότερα από ένα αμαξοστάσιο (Multi Depot), προσφέροντας με αυτόν τον τρόπο στην εταιρεία την ικανότητα να διαχειριστεί ταυτόχρονα όλους τους σταθμούς που συμπεριλαμβάνει στο δυναμικό της σε όλη την Ελλάδα χωρίς να απαιτούνται χρονοβόρες και γεμάτες ρίσκο ενέργειες. Αναγνωρίζοντας πως οι περιορισμοί ενός τέτοιου προβλήματος διαφέρουν από αυτού της παρούσας διπλωματικής εργασίας, με την κατάλληλη προσαρμογή αυτών στην προσομοίωση ανόπτησης κρίνεται βέβαιη η αξιόπιστη δημιουργία εφικτών και οικονομικά συμφέρουσων λύσεων σε εύλογο χρονικό διάστημα. Τέλος, μέσα από αυτήν την έρευνα δίνεται κίνητρο και σε άλλες αντίστοιχες εταιρείες παρόμοιων εφοδιαστικών αλυσίδων να επενδύσουν στα logistics που σχετίζονται με τη διανομή προϊόντων και τη δρομολόγηση των οχημάτων τους για αυτόν τον σκοπό.

8. Παραρτήματα- Κώδικας MATLAB

8.1 Βασικοί αλγόριθμοι

```
close all;

clear;

clc;

tic

total={};

TC=[];

n=1;

while n<=5

maxst=5;

alldev=0.2;

costperkm=0.55;

a=0.97;

%product cost

weightcost=zeros(1,20);

for i=1:length(weightcost)

    if i==1

        weightcost(i)=0;

    elseif i<=8

        weightcost(i)=4.2;

    elseif i<=14

        weightcost(i)=4.8;
```

```

elseif i<=19

    weightcost(i)=6.2;

else

    weightcost(i)=6.86;

end

end

%zhthsh stathmwn w(j,p) (m^3)

w=zeros(20,5);

w(3,2)=2.5; w(5,4)=2.5; w(6,1)=2.5; w(6,2)=2.5; w(12,1)=2.5;
w(12,3)=2.5; w(14,5)=2.5; w(16,4)=2.5;

w(10,3)=3; w(10,5)=3;

w(19,1)=3.5;

w(16,2)=4;

w(10,4)=8;

w(10,1)=10;

%fortiga kai diamerismata

%energopoitai mia diada fortigwn kathe fora me afairesi tou % mprosta
apo

%ton antistoixo pinaka

%compcap (k,l)= synolikos stolos

%routes 1-2 (trucks 11,12)-> energopoihsh otan prepei

%trucks=[4.7 4.7 3.2 3.1 3.1 3.1 4.8 4.2 3.1 2.7 0;
5.9 3.8 3.2 3.1 3.1 3.1 3.1 3.1 3.7 0];

%routes 3-4 (trucks 1,12)-> energopoihsh otan prepei

trucks=[4.3 4.6 4.3 2.9 2.9 2.9 2.9 2.9 2.9 2.9 4.2;
5.9 3.8 3.2 3.1 3.1 3.1 3.1 3.1 3.1 3.7 0];

%routes 5-6 (trucks 1,11) -> energopoihsh otan prepei

```

```

%trucks=[4.3 4.6 4.3 2.9 2.9 2.9 2.9 2.9 2.9 2.9 4.2;
4.7 4.7 3.2 3.1 3.1 3.1 4.8 4.2 3.1 2.7 0];

%routes 7-8 (trucks 1,4)-> energopoihsh otan prepei

%trucks=[4.3 4.6 4.3 2.9 2.9 2.9 2.9 2.9 2.9 2.9 4.2;
3.5 3.7 2.6 5.0 3.5 3.3 3.3 4.1 3.4 3.6 0];

%distance matrix

dist=[0 2.9 3 5.6 6.3 6.5 6.8 6.9 12.4 12.8 12.9 13.3 22.7 23.1 31.6
39.1 45.4 49 54.1 75.4;

2.9 0 0.5 3 3.7 4 4.6 4.4 15.2 5.6 5.2 5.7 17.8 20.6 26.7 41.9 44 33.7
41.6 70.5;

3 0.5 0 2.8 3.5 3.7 4.4 4.1 15.5 5.4 5 5.5 17.5 20.3 26.5 42.3 44 33.4 49
70.2;

5.6 3 2.8 0 1.4 1 1.6 1.4 17.9 2.6 2.2 2.7 14.8 17.6 23.7 44.7 45.2 30.7
46.2 67.5;

6.3 3.7 3.5 1.4 0 2.6 1.4 3 18.3 4.2 3.8 4.3 16.4 19.2 25.3 45.1 45.8
32.3 47.8 69.1;

6.5 4 3.7 1 2.6 0 0.85 1.3 18.9 1.8 1.5 1.9 14 17.3 23 45.6 46.1 30.4
45.5 66.7;

6.8 4.6 4.4 1.6 1.4 0 0.85 0 2.3 19.6 1.9 1.5 2 14 18.5 23 47.3 46.3 40.4
45.5 66.7;

6.9 4.4 4.1 1.4 3 1.3 2.3 0 18.6 3.1 2.7 3.2 15.2 18 24.2 45.4 45.9 31.2
46.7 60.3;

12.4 15.2 15.5 17.9 18.3 18.9 19.6 18.6 0 24.8 24.9 20.6 34.7 35.5 43.6
26.8 46.8 48.6 66.1 87.4;

12.8 5.6 5.4 2.6 4.2 1.8 1.9 3.1 24.8 0 1.1 1.8 14 18.3 23 46.3 50.8
31.5 45.5 66.7;

12.9 5.2 5 2.2 3.8 1.5 1.5 2.7 24.9 1.1 0 1.2 13.3 19 22.3 51.1 50.1 39.6
44.8 66;

13.3 5.7 5.5 2.7 4.3 1.9 2 3.2 20.6 1.8 1.2 0 13.7 19 22.7 47.3 50.5
32.1 45.2 66.4;

22.7 17.8 17.5 14.8 16.4 14 14 15.2 34.7 14 13.3 13.7 0 29 26.8 59.2
58.2 44.1 49.3 70.5;

23.1 20.6 20.3 17.6 19.2 17.3 18.5 18 35.5 18.3 19 19 29 0 34.2 62 62.5
13.2 21.1 42.3;

```



```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4.2 4.2 4.2;

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4.2 4.2 4.2;

4.2 4.24.2 4.24.2 4.24.2 4.24.2 4.24.2 4.24.2 4.24.2 0 4.2 4.2 4.2 0 0 0;

4.2 4.24.2 4.24.2 4.24.2 4.24.2 4.24.2 4.24.2 4.24.2 0 4.2 4.2 4.2 0 0 0;

4.2 4.24.2 4.24.2 4.24.2 4.24.2 4.24.2 4.2 4.2 4.2 4.2 0 4.2 4.2 4.2 0 0 0];

%arxikh lysh

X=randgen(trucks,w,maxst);

%arxikh thermokrasia

T=99999999;

%epanalipsi mexri na ftasei h T sto orio pou theloume

m=1;

Temps=[];

Costs=[];

Distancetravelled=[];

while T>=0.00000001

    iterations=1;

    while iterations<=35

        %kostos 1hs lyshs

        fcost1=feasibility(X,trucks,w,maxst,alldev);

        [cost1,dtravelled1,tollcost1,distcost1,prcost1]=objf(X,tolls,dist,trucks,maxst,costperkm,fcost1,weightcost,w);

        %geitonikh lysh

        Y=neighborhood(X);

        %kostos 2hs lyshs

```

```

fcost2=feasibility(Y,trucks,w,maxst,alldev);

[ cost2,dtravelled2,tollcost2,distcost2,prcost2]=objf(Y,tolls,dist,trucks,maxst,costperkm,fcost2,weightcost,w);

AC=accept(cost2,cost1,T);

if AC==1

    X=Y;

end

iterations=iterations+1;

end

Tn=updateTemp(T,a);

T=Tn;

m=m+1;

Temps(m)=T;

Costs(m)=min(cost1,cost2);

Distancetravelled(m)=min(dtravelled1,dtravelled2);

end

total{n}=X;

TC(n)=min(cost1,cost2);

n=n+1;

end

data=zeros(5,1);

data(1,1)=min(cost1,cost2);

data(2,1)=min(dtravelled1,dtravelled2);

data(3,1)=min(tollcost1,tollcost2);

```

```

data(4,1)=min(distcost1,distcost2);

data(5,1)=min(prcost1,prcost2);

figure(1)

plot(Costs,'k');

xlabel('iterations')

ylabel('total cost')

title('total energy of the system-total cost')

figure(2)

plot(Temps,'k');

xlabel('iterations')

ylabel('temperature')

title('exponential cooling temperature of system')

figure(3)

plot(Distancetravelled,'k');

xlabel('iterations')

ylabel('distance')

title('total distance travelled')

toc

```

Παράρτημα 1: Κώδικας MATLAB προσομοίωσης απόπτωσης για συνδυασμούς 2 φορτηγών

```

close all;

clear;

clc;

tic

Routes={};

```



```

Data={};

TC=[];

n=1;

while n<=10

maxst=5;

alldev=0.2;

costperkm=0.55;

a=0.991;

%product cost

weightcost=zeros(1,20);

for i=1:length(weightcost)

    if i==1

        weightcost(i)=0;

    elseif i<=8

        weightcost(i)=4.2;

    elseif i<=14

        weightcost(i)=4.8;

    elseif i<=19

        weightcost(i)=6.2;

    else

        weightcost(i)=6.86;

    end

end

%zhthsh stathmwn w(j,p) (m^3)

```

```

w=zeros(20,5);

w(3,2)=2.5; w(5,4)=2.5; w(6,1)=2.5; w(6,2)=2.5; w(12,1)=2.5;
w(12,3)=2.5; w(14,5)=2.5; w(16,4)=2.5;

w(10,3)=3; w(10,5)=3;

w(19,1)=3.5;

w(16,2)=4;

w(10,4)=8;

w(10,1)=10;

%fortiga kai diamerismata

%compcap (k,l)= synolikos stolos (xwrhtikothta diamerismatwn se m^3)

trucks=[4.3 4.6 4.3 2.9 2.9 2.9 2.9 2.9 2.9 2.9 4.2;

4.3 3.5 3.1 2.6 4.3 4.2 4.4 0 0 0 0;

6.0 4.0 3.0 2.0 2.0 3.0 5.0 6.0 7.0 0 0;

3.5 3.7 2.6 5.0 3.5 3.3 3.3 4.1 3.4 3.6 0;

6.0 4.2 2.8 3.9 2.3 4.7 6.0 6.1 0 0 0;

4.9 4.5 3.5 4.3 2.9 4.1 3.4 2.9 3.0 4.2 0;

6.0 4.0 3.0 3.5 2.6 3.9 2.7 2.6 3.1 5.3 0;

5.9 4.1 2.6 2.8 2.9 3.1 3.3 3.4 3.6 4.5 0;

3.9 4.3 3.9 3.9 4.1 3.6 3.4 3.4 3.0 3.5 0;

3.6 4.3 4.0 3.9 4.4 3.7 3.4 3.3 3.7 2.7 0;

4.7 4.7 3.2 3.1 3.1 3.1 4.8 4.2 3.1 2.7 0;

5.9 3.8 3.2 3.1 3.1 3.1 3.1 3.1 3.1 3.7 0;

7.0 2.0 6.0 2.0 3.0 4.0 6.0 3.0 5.0 0 0;

7.0 2.0 6.0 2.0 3.0 4.0 6.0 3.0 5.0 0 0];

%distance matrix (km)

```

```

dist=[02.9 3 5.6 6.3 6.5 6.86.9 12.4 12.8 12.9 13.3 22.7 23.1 31.6
39.1 45.4 49 54.1 75.4;

2.9 0 0.5 3 3.7 4 4.6 4.4 15.2 5.6 5.2 5.7 17.8 20.6 26.7 41.9 44 33.7
41.6 70.5;

3 0.5 02.8 3.53.7 4.44.1 15.5 5.4 5 5.5 17.5 20.3 26.5 42.3 44 33.4 49
70.2;

5.6 3 2.8 0 1.4 1 1.6 1.4 17.9 2.6 2.2 2.7 14.8 17.6 23.7 44.7 45.2 30.7
46.2 67.5;

6.3 3.73.5 1.40 2.6 1.4 3 18.3 4.2 3.8 4.316.4 19.2 25.3 45.1 45.8
32.3 47.8 69.1;

6.5 4 3.7 1 2.6 0 0.85 1.3 18.9 1.8 1.5 1.914 17.323 45.646.1 30.4
45.5 66.7;

6.8 4.64.4 1.61.4 0.85 0 2.3 19.6 1.9 1.5 2 14 18.523 47.346.3 40.4
45.5 66.7;

6.9 4.44.1 1.43 1.3 2.3 0 18.6 3.1 2.7 3.2 15.2 1824.2 45.4 45.9 31.2
46.7 60.3;

12.4 15.2 15.5 17.9 18.3 18.9 19.6 18.6 0 24.8 24.9 20.6 34.7 35.5 43.6
26.8 46.8 48.6 66.1 87.4;

12.8 5.6 5.4 2.6 4.2 1.8 1.9 3.1 24.8 0 1.1 1.8 14 18.3 2346.3 50.8
31.5 45.5 66.7;

12.9 5.2 5 2.2 3.8 1.51.5 2.724.9 1.1 0 1.2 13.3 1922.3 51.1 50.1 39.6
44.8 66;

13.3 5.7 5.5 2.7 4.3 1.9 2 3.2 20.6 1.8 1.2 0 13.7 19 22.747.3 50.5
32.1 45.2 66.4;

22.7 17.8 17.5 14.8 16.4 14 14 15.2 34.7 14 13.3 13.7 0 29 26.8 59.2
58.2 44.1 49.3 70.5;

23.1 20.6 20.3 17.6 19.2 17.3 18.5 1835.5 18.3 19 19 29 0 34.2 62 62.5
13.2 21.1 42.3;

31.6 26.7 26.5 23.7 25.3 23 23 24.2 43.6 23 22.3 22.7 26.8 34.2 0 70.7
69.7 33.1 38.2 59.5;

39.1 41.9 42.3 44.7 45.1 45.6 47.3 45.4 26.8 46.3 51.1 47.3 59.2 62 70.7 0
30.4 87.8 92.9 114;

45.4 44 44 45.2 45.8 46.1 46.3 45.9 46.8 50.8 50.1 50.5 58.2 62.5 69.7
30.4 0 86.8 91.9 113;

```

```
49 33.7 33.4 30.7 32.3 30.4 40.4 31.2 48.6 31.5 39.6 32.1 44.1 13.2 33.1
87.8 86.8 0 6.3 25.7;
```

```
54.1 41.6 49 46.2 47.8 45.5 45.5 46.7 66.1 45.5 44.8 45.2 49.3 21.1
38.2 92.9 91.9 6.3 0 19.4;
```

```
75.4 70.5 70.2 67.5 69.1 66.7 66.7 60.3 87.4 66.7 66 66.4 70.5 42.3 59.5
114 113 25.7 19.4 0];
```

```
%diodia
```

```
tolls=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4.2 4.2 4.2;
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4.2 4.2 4.2;
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4.2 4.2 4.2;
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4.2 4.2 4.2;
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4.2 4.2 4.2;
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4.2 4.2 4.2;
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4.2 4.2 4.2;
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4.2 4.2 4.2;
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4.2 4.2 4.2;
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4.2 4.2 4.2;
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4.2 4.2 4.2;
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4.2 4.2 4.2;
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4.2 4.2 4.2;
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4.2 4.2 4.2;
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4.2 4.2 4.2;
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4.2 4.2 4.2;
```

```
4.2 4.2 4.2 4.2 4.2 4.2 4.2 4.2 4.2 4.2 4.2 4.2 4.2 4.2 0 4.2 4.2 4.2 0 0 0;
```

```
4.2 4.2 4.2 4.2 4.2 4.2 4.2 4.2 4.2 4.2 4.2 4.2 4.2 4.2 0 4.2 4.2 4.2 0 0 0;
```

```

4.2 4.24.2 4.24.2 4.24.2 4.24.2 4.24.2 4.2 4.2 4.2 4.2 0 4.2 4.2 4.2 0 0 0];

%arxikh tyxaia lysh

X=randgen(trucks,w,maxst);

%arxikh thermokrasia

T=999999999;

%epanalipsi mexri na ftasei h T sto orio pou theloume

m=1;

Temps=[];

Costs=[];

Distancetravelled=[];

while T>=0.00000001

    iterations=1;

    while iterations<=50

        %kostos 1hs lyshs

        fcost1=feasibility(X,trucks,w,maxst,alldev);

        [cost1,dtravelled1,tollcost1,distcost1,prcost1]=objf(X,tolls,dist,trucks,maxst,costperkm,fcost1,weightcost,w);

        %geitonikh lysh

        Y=neighborhood(X);

        %kostos 2hs lyshs

        fcost2=feasibility(Y,trucks,w,maxst,alldev);

        [cost2,dtravelled2,tollcost2,distcost2]=objf(Y,tolls,dist,trucks,maxst,costperkm,fcost2,weightcost,w);

        AC=accept(cost2,cost1,T);

        if AC==1

```

```

        X=Y;

    end

    iterations=iterations+1;

    end

    Tn=updateTemp(T,a);

    T=Tn;

    m=m+1;

    Temps(m)=T;

    Costs(m)=min(cost1,cost2);

    Distancetravelled(m)=min(dtravelled1,dtravelled2);

end

Routes{n}=X;

data=zeros(4,1);

data(1,1)=min(cost1,cost2);

data(2,1)=min(dtravelled1,dtravelled2);

data(3,1)=min(tollcost1,tollcost2);

data(4,1)=min(distcost1,distcost2);

data(5,1)=min(prcost1,prcost2);

Data{n}=data;

TC(n)=min(cost1,cost2);

n=n+1;

end

figure(1)

plot(Costs,'k');

```

```

xlabel('iterations')

ylabel('total cost')

title('total energy of the system-total cost')

figure(2)

plot(Temps, 'k');

xlabel('iterations')

ylabel('temperature')

title('exponential cooling temperature of system')

figure(3)

plot(Distancetravelled, 'k');

xlabel('iterations')

ylabel('distance')

title('total distance travelled')

toc

```

Παράρτημα 2: Κώδικας MATLAB προσομοίωσης ανόπτησης σε ολόκληρο το πρόβλημα

8.2 Κώδικες υποσυναρτήσεων προσομοίωσης ανόπτησης

```

function [X] = randgen(trucks,w,maxst)

[k,~]=size(trucks);

[j,~]=size(w);

Y=ones(k,maxst);

%ολοι οι pithanoi stathmoi

stationpool=1:j;

for i=1:j

```

```

    if ~any(w(i,:))

        stationpool(i)=1;

    end

end

%tyxaio anakatema stathmwn

stationpool=stationpool(randperm(length(stationpool)));

%agnohsh stathmwn pou den exoun zhthsh

h=find(stationpool==1);

stationpool(h)=[];

%tyxaia anathesi stathmwn sta forthga

for t=1:k

    for s=1:maxst

        if ~isempty(stationpool)

            Y(t,s)=stationpool(1);

            stationpool(1)=[];

        else

            break;

        end

    end

end

end

X=Y;

end

```



```

function [Y] = neighborhood(X)

%dhmiourgia geitonikwn lysewn

%tyxaia allagh forthgwn h swap metaxy stathmwv

[k,s]=size(X);

%allagh forthgwn

r1=randi([1,k]);

u=rand;

if u<(1/3)

    if r1<k

        row=X(r1,:);

        X(r1,:)=X((r1+1),:);

        X((r1+1),:)=row;

    else

        row=X(r1,:);

        X(r1,:)=X(1,:);

        X(1,:)=row;

    end

end

%swap entos diadromhs

r2=randi([1,k]);

```

```

s1=randi([1,s]);

if u>(1/3) && u<=(2/3)

    if s1<s

        column=X(r2,s1);

        X(r2,s1)=X(r2,(s1+1));

        X(r2,(s1+1))=column;

    else

        column=X(r2,s1);

        X(r2,s1)=X(r2,1);

        X(r2,1)=column;

    end

end

%tyxaia anathesi diadromwn

r3=randi([1,k]);

r4=randi([1,k]);

s2=randi([1,s]);

s3=randi([1,s]);

if u>(2/3)

    node=X(r3,s2);

    X(r3,s2)=X(r4,s3);

    X(r4,s3)=node;

end

Y=X;

end

```

Παράρτημα 4: Κώδικας MATLAB συνάρτησης τυχαίων γειτονικών λύσεων

```
function [feasibilitycost] = feasibility(X,trucks,w,maxst,alldev)

[k,~]=size(trucks);

[~,p]=size(w);

%synolikh xwrhtikothta fortigwn

truckcap=sum(trucks');

v=0;

%feasibility check

for t=1:k

    demands=zeros(maxst,p);

    %athroizoume thn zhthsh pou tha kalyfthei

    for s=1:maxst

        z=X(t,s);

        demands(s,:)=w(z,:);

    end

    %xehwristi apothikeysi kathe kaysimou

    %tha elegxthei ean kalyptetai apo ta diamerismata olh h zhthsh

    %adeiazeti olo to diamerisma se kathe stathmo

    %poinh ean h athroistikh zhthsh ypervei th xwrhtikothta

    D=reshape(demands,1,[]);

    D(~any(D,1))=[];

    D=sort(D);

    if truckcap(t)<sum(D)
```

```

v=3000;

else

comps=trucks(t,:);

comps=sort(comps,'descend');

comps(~any(comps,1))=[];

compsdev=(1-alldev)*comps;

%elegxos ean oi zhthseis mporoun na moirastoun sta diamerismata

d=length(D);

l=length(comps);

if d > 1

    v=3000;

end

for i = 1:d

    % elegxei ean xwraei mia zhthsh oloklhrh se ena diamerisma

    if D(i)<=max(comps)

        for j=1:length(comps)

            if D(i)<=comps(j) && D(i)>=compsdev(j)

                D(i) = 0;

                comps(j) = 0;

                compsdev(j)=0;

                break;

            end

        end

    end

end

```

```

        continue;

    end

    % elegxei ean xwraei se 2 diamerismata

    for j = 1:l

        for k = (j+1):l

            totaldem = comps(j) + comps(k);

            minimumdev = compsdev(j) + compsdev(k);

            if D(i) <= totaldem && D(i) >= minimumdev

                D(i) = 0;

                comps([j, k]) = 0;

                compsdev([j, k])=0;

                break;

            end

        end

    end

    %spaei ean vrei kapoion syndyasmο

    if D(i) == 0

        break;

    end

end

%ean vrei paei sthn epomenh zhthsh

if D(i) == 0

    continue;

end

% elegxei ean xwraei se 3 diamerismata

```

```

for j = 1:l
    for k = (j+1):l
        for m = (k+1):l
            totaldem = comps(j) + comps(k) + comps(m);
            minimumdev = compsdev(j)+compsdev(k)+
compsdev(m);
            if D(i) <= totaldem && D(i) >= minimumdev
                D(i) = 0;
                comps([j, k, m]) = 0;
                compsdev([j, k, m])=0;
                break;
            end
        end
    end
    %spaei ean vrei syndyasm0
    if D(i) == 0
        break;
    end
end
    %paei sthn epomenh zhthsh ean vrei syndyasm0
    if D(i) == 0
        break;
    end
end
    %syndyasm0s 4 diamerismatwn
for j=1:l

```

```

        for k=(j+1):1
            for m=(k+1):1
                for u=(m+1):1

totaldem=comps(j)+comps(k)+comps(m)+comps(u);

minimumdev=compsdev(j)+compsdev(k)+compsdev(m)+compsdev(u);

                if D(i)<=totaldem && D(i)>=minimumdev
                    D(i)=0;
                    comps([j k m u])=0;
                    compsdev([j k m u])=0;
                    break;
                end
            end
        end

        if D(i)==0
            break;
        end
    end

    if D(i)==0
        break;
    end
end

if D(i)==0
    break;
end
end

```

```

        end

    end

end

%telikos elegxos ean ikanopoieitai olh h zhthsh
if any(D>0.001)
    v=v+3000;
else
    v=v+0;
end

end

feasibilitycost=v;

end

```

Παράρτημα 5: Κώδικας MATLAB συνάρτησης ελέγχου εφικτότητας

```

function [cost,dtravelled,tollcost,distcost,prcost] =
objf(X,tolls,dist,trucks,maxst,costperkm,feasibilitycost,weightcost,w)

%ypologismos antikeimenikhhs synarthshs

[k,~]=size(trucks);

cost=0;

%diodia

tollcost=0;

for t=1:k

    %afethria amaxostasio

    a=1;

```



```

for s=1:maxst

    b=X(t,s);

    tollcost=tollcost+tolls(a,b);

    a=b;

end

%epistrofi amaxostasio

tollcost=tollcost+tolls(a,1);

end

%apostasi

distcost=0;

dtravelled=0;

for t=1:k

    %afethria amaxostasio

    a=1;

    for s=1:maxst

        b=X(t,s);

        distcost=distcost+costperkm*dist(a,b);

        dtravelled=dtravelled+dist(a,b);

        a=b;

    end

    %epistrofi amaxostasio

    distcost=distcost+costperkm*dist(a,1);

    dtravelled=dtravelled+dist(a,1);

end

```

```

prcost=0;

for t=1:k

    for s=1:maxst

        g=X(t,s);

        prcost=prcost+sum(w(g,:))*weightcost(g);

    end

end

cost=cost+distcost+tollcost+feasibilitycost+prcost;

end

```

Παράρτημα 6: Κώδικας MATLAB συνάρτησης υπολογισμού αντικειμενικής συνάρτησης

```

function [AC] = accept(cost2,cost1,T)

dc=cost2-cost1;

y=min(1,exp(T\(-dc)));

r=rand;

if r<y

    AC=1;

else

    AC=0;

end

end

```

Παράρτημα 7: Κώδικας MATLAB συνάρτησης αποδοχής λύσεων

```

function [Tn] = updateTemp(T,a)

Tn=T*a;

end

```

Παράρτημα 8: Κώδικας MATLAB ανανέωσης θερμοκρασίας

9.Βιβλιογραφικές αναφορές

- ANILY S., Federgruen A. 1987. Simulated Annealing Methods with General Acceptance Probabilities. *Journal of Applied Probability* 24, (3), pp.657-667.
- ASAWARUNGSANGKUL KRISADA, Rattanamanee Tarit, Wuttipornpun Teeradej. 2013. A multi-size compartment vehicle routing problem for multi-product distribution: Models and solution procedures. *International Journal of Artificial Intelligence* 11(13), pp.237-256.
- BALDACCI ROBERTO, Toth Paolo, Vigo Daniele. 2009. Exact algorithms for routing problems under vehicle capacity constraints. *Ann Oper Res*, pp.213-245.
- CHOWMALI WASANA, Sukto Seekharin. 2021. A hybrid FJA-ALNS algorithm for solving the multi-compartment vehicle routing problem with a heterogeneous fleet of vehicles for the fuel delivery problem. *Decision Science Letters* 10, pp.497-510.
- CLARKE G., Wright J.W. 1964. Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. *Operations Research* 12(4), pp.568-581.
- CORNILLIER FABIEN, Boctor Fayez F. , Laporte Gilbert , Renaud Jacques. 2008. A heuristic for the multi-period petrol station replenishment problem. *European Journal of Operational Research* 191,(2), pp.295-305.
- CORNILLIER FABIEN, Boctor Fayez F. , Laporte Gilbert, Renaud Jacques. 2008. An Exact Algorithm for the Petrol Station Replenishment Problem. *Journal of the operational research society* 59,(5), pp.607-615.
- DANTZIG G.B., Ramser J. H. 1959. The truck dispatching problem. *Management Science*, pp.80-91.
- DELAHAYE DANIEL, Chaimatanan Supatcha, Mongeau Marcel. 2019. Simulated Annealing: From Basics to Applications. In: *Handbook of Metaheuristics*, Springer, pp.1-35.
- DROR MOSHE, Trudeau Pierre. 1989. Savings by Split Delivery Routing. *Transportation Science* 23(2), pp.141-145.
- EFTHYMIADIS SIMOS, Liapis Nikolaos, Nenes George. 2023. Solving a heterogeneous fleet multi-compartment vehicle routing problem:a case study. *International Journal of Systems Science: Operations & Logistics*, 10(1), 2190474.
- ERDOGAN SEVGI, Miller-Hooks Elise. 2012. A Green Vehicle Routing Problem. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review* 48,(1), pp.100-114.
- GIDAS, Basilis. 1985. Nonstationary Markov Chains and Convergence of the Annealing Algorithm. *Journal of Statistical Physics*, 39(1-2), pp.73-131.
- HIBA YAHYAOU, Islem Kaabachi, Saoussen Krichen, Abdulkader Dekdouk. 2020. Two metaheuristic approaches for solving the multi-compartment vehicle routing problem. *Operational Research* 20, pp.2085-2108.

- HOSCH, William L. 2023. *P versus NP problem*. [online]. [Accessed 23 Οκτώβριος 2023]. Available from World Wide Web: <<https://www.britannica.com/science/P-versus-NP-problem#ref1119248>>
- HU C., Lu J. , Liu X. ,Zhang G. 2018. Robust vehicle routing problem with hard time windows under demand and travel time uncertainty. *Computers and Operations Research*.
- IBRAHIM ABDULLAHI, Ishaya Jeremiah, Lo Nassirou, Abdulaziz Rabiati. 2019. Capacitated vehicle routing problem with column generation and reinforcement learning techniques. *Granthaalayah 7,(3)*.
- KAMBER UMUT, Bergman Anders, Eich Andreas, Ius,an Diana , Steinbrecher Manuel, Hauptmann Nadine, Nordström Lars, Katsnelson Mikhail I., Wegner Daniel, Eriksson Olle, Khajetoorians Alexander A. 2020. Self-induced spin glass state in elemental and crystalline neodymium. *Science 368,(6494)*.
- KAWASHIMA GROUP. 2023. *Frustrated Systems*. [online]. [Accessed 28 Οκτώβριος 2023]. Available from World Wide Web: <<https://kawashima.issp.u-tokyo.ac.jp/research/frustrated-systems/>>
- KENTON, Will. 2023. *Logistics: What It Means and How Businesses Use It*. [online]. [Accessed 25 Οκτώβριος 2023]. Available from World Wide Web: <<https://www.investopedia.com/terms/l/logistics.asp>>
- KHORASGANI SAYYED MAHDI SADAT, Ataii Farsad, Ghaffari Mahdi , Abbasi Behrooz. 2015. Heterogeneous Vehicle Routing Problem with Fixed Cost using Vehicles with Genetic Algorithms. *Cumhuriyet Science Journal 36,(4)*, Special Issue.
- KIRKPATRICK S., Gelatt, Jr. C. D., Vecchi M. P. 1983. Optimization by Simulated Annealing. *Science 220,(4598)*, pp.671-680.
- KUMAR SURESH NANDA, Panneerselvam Ramasamy. 2012. A survey on the Vehicle Routing Problem and Its variants. *Intelligent Information Management*.
- KURNIA HARI, Wahyuni Elyza Gustri, Pembrani Elang Cergas , Gardini Syifa Tri, Aditya Silfa Kurnia. 2018. Vehicle Routing Problem Using Genetic Algorithm with Multi Compartment on Vegetable Distribution. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 325*.
- LAPORTE GILBERT, Nobert Yves, Desrochers Martin. 1985. Optimal Routing under Capacity and Distance Restrictions. *Operations Research 33(5)*, pp.1050-1073.
- MCKINSEY & COMPANY. 2022. *What is supply chain?* [online]. [Accessed 5 Οκτώβριος 2023]. Available from World Wide Web: <<https://www.mckinsey.com/featured-insights/mckinsey-explainers/what-is-supply-chain>>
- METROPOLIS NICHOLAS, Rosenbluth Arianna W., Rosenbluth Marshall N., Teller Augusta H., Teller Edward. 1953. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *The journal of Chemical Physics 21,(6)*, pp.1087-1092.

- MITRA DEBASIS, Romeo Fabio, Sangiovanni-Vincentelli Alberto. 1986. Convergence and Finite-Time Behavior of Simulated Annealing. *Advances in Applied Probability*, 18(3), pp.747-771.
- NIKOLAEV A.G., Jacobson Sheldon H. 2010. Simulated annealing. *In: Handbook of Metaheuristics*, Montreal: Springer, pp.1-39.
- RABBOUCH BOCHRA, Foued Saâdaoui Rfaaa Mraih. 2019. Efficient implementation of the genetic algorithm to solve rich vehicle routing problems. *Operational Research* 21, pp.1763-1791.
- ROMEO FABIO, Sangiovanni-Vincentelli Alberto. 1991. A Theoretical Framework for Simulated Annealing. *Algorithmica*, 6(1-6), pp.302-345.
- SOLOMON, Marius M. 1987. Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints. *Operation reasearch*.
- VASSILIOU, P.-C.G. 2021. Non-Homogeneous Markov Set Systems. *Mathematics*, 9(5), p.471.
- WANG L., Kinable J., van Woensel T. 2020. The fuel replenishment problem: A split-delivery multi-compartment vehicle routing problem with multiple trips. *Computers & Operations Research* 118.
- WILCK IV JOSEPH HUBERT, Cavalier Tom M. 2012. A Construction Heuristic for the Split Delivery Vehicle Routing Problem. *American Journal of Operations Research* 2,(2), pp.153-162.
- YU VINCENT F., Redi A.A.N. Perwira, Hidayat Yosi Agustina, Wibowo Oktaviyanto Jimat. 2017. A simulated annealing heuristic for the hybrid vehicle routing problem. *Applied Soft Computing* ,53, pp.119-132.
- YU VINCENT F., Redi A. A. N. Perwira, Jewpanya Parida, Lathifah Artya , Maghfiroh Meilinda F. N., Masruroh Nur Aini. 2019. A Simulated Annealing Heuristic for the Heterogeneous Fleet Pollution Routing Problem. *Environmental Sustainability in Asian Logistics and Supply Chains*, pp.171-204.
- YUSUF ISMAIL, Baba Mohd. Sapiyan, Iksan Nur. 2014. Applied Genetic Algorithm for Solving Rich VRP. *Applied Artificial Intelligence* 28,(10), pp.957-991.