

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

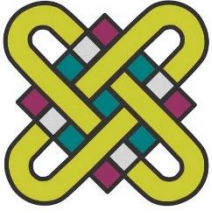
ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ
ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ
ΦΙΛΤΡΟΥ KALMAN (UKF)

ΤΣΟΤΑΛΟΥ ΜΑΡΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:
ΓΙΑΓΚΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

ΚΟΖΑΝΗ (ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ, 2016)



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ
ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ
ΦΙΛΤΡΟΥ KALMAN (UKF)

ΤΣΟΤΑΛΟΥ ΜΑΡΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:
ΓΙΑΓΚΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

ΚΟΖΑΝΗ (ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ, 2016)

Περίληψη

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται την εκτίμηση της δυναμικής συμπεριφοράς κατασκευών που περιέχουν μη γραμμικά στοιχεία, μέσω του Unscented Φίλτρου Kalman (Unscented Kalman Filter - UKF). Το Φίλτρο αυτό σε συνδυασμό με τις κλασικές μεθοδολογίες της αριθμητικής ανάλυσης μας παρέχει ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο, μέσω του οποίου μπορούμε να προβλέψουμε τη συμπεριφορά ολόκληρου του συστήματός μας, έχοντας ως στοιχεία τις μετρήσεις από ορισμένα μόνο σημεία.

Κατ' αρχήν αναφέρουμε το θεωρητικό υπόβαθρο της μεθοδολογίας του Unscented Φίλτρου Kalman (UKF) και στη συνέχεια εφαρμόζουμε το Φίλτρο σε αριθμητικές αναλύσεις κατασκευών. Η πρώτη “κατασκευή”, στην οποία εφαρμόζεται η προς εξέταση μεθοδολογία, είναι ένα μη γραμμικό σύστημα μαζών-ελατηρίων σε σειρά. Γίνεται εκτίμηση τόσο για τις καταστάσεις του συστήματος (state estimation) όσο και για ορισμένες παραμέτρους του (parameter estimation). Επίσης, εξετάζεται με στατιστικό τρόπο η επίδραση που έχει η επιλογή των σημείων μέτρησης, ο θόρυβος των μετρήσεων καθώς και το πιθανό σφάλμα μοντελοποίησης στην ορθότητα των εκτιμήσεών. Στη συνέχεια μελετάται κατά παρόμοιο τρόπο το πλαίσιο ενός οχήματος, προκειμένου να εξεταστεί η συμπεριφορά της μεθοδολογίας σε μία πιο ρεαλιστική κατασκευή.

Τέλος αναλύεται το ενδεχόμενο “σύνδεσης” του συγκεκριμένου Φίλτρου με έναν επιτυχή πεπερασμένων στοιχείων (solver). Μία τέτοια “σύνδεση” είναι επιθυμητή επειδή μας δίνει τη δυνατότητα να εφαρμόσουμε το Unscented Φίλτρο Kalman (UKF) σε μεγάλα, ρεαλιστικά προβλήματα.

Abstract

This thesis project discusses the dynamic behavior estimation of nonlinear structures using the Unscented Kalman Filter (UKF). The Filter combined with typical methodologies of numerical analysis provides a very useful tool, through which we can predict the behavior of the entire system, having as input data measurements from just few points.

Initially, the theoretical background of Unscented Kalman Filter (UKF) is presented. Afterwards the Filter is applied to numerical analysis of constructions. The first "construction", wherein the methodology is applied, is a nonlinear mass-spring chain-like model. Both state and parameters estimation are performed. Moreover a statistical analysis is performed, in order to determine the way that the choice of measurement points, measurement noise and modeling error affect the accuracy of estimations. Similarly a vehicle-like frame is analyzed. The aim of studying this structure is to determine the behavior of the methodology in a more realistic case.

Finally, the possibility of a "connection" between the Filter and a finite element solver is examined. Such a "connection" is desirable because it enables us to apply the Unscented Kalman Filter (UKF) to large-scale, realistic problems.

Πίνακας Περιεχομένων

Περίληψη	1
Abstract	3
Πίνακας Περιεχομένων	5
Συντομογραφίες που χρησιμοποιούνται	7
Εισαγωγή	9
Κεφάλαιο 1: Βασικές αρχές του γραμμικού Φίλτρου Kalman (Kalman Filter) και του μη γραμμικού Extended Φίλτρου Kalman (Extended Kalman Filter)	11
1.1 Το Φίλτρο Kalman (Kalman Filter)	11
1.1.1 Παρουσίαση της μεθοδολογίας	11
1.1.2 Ο Αλγόριθμος	14
1.1.3 Παράμετροι του φίλτρου	15
1.2 Το Extended Φίλτρο Kalman (Extended Kalman Filter - EKF)	16
1.2.1 Η διεργασία που μελετάται	16
1.2.2 Η Υπολογιστική διαδικασία	17
1.2.3 Οι αδυναμίες του EKF	20
Κεφάλαιο 2: Το Unscented Φίλτρο Kalman (Unscented Kalman Filter – UKF)	23
2.1 Ο Unscented Μετασχηματισμός (Unscented Transform – UT)	23
2.2 Η διαδικασία του UKF	26
Κεφάλαιο 3: Απλό μοντέλο σημειακών μαζών σε σειρά	29
3.1 Το μοντέλο	29
3.1.1 Περιγραφή του μοντέλου	29
3.1.2 Περιγραφή της μεθοδολογίας που ακολουθήθηκε	30
3.2 Επίδραση του αριθμού των σημείων μέτρησης	32
3.2.1 Αρμονική Φόρτιση	32
3.2.2 Ψευδοτυχαία Διέγερση	41
3.3 Στατιστική μελέτη της επίδρασης του θορύβου της μέτρησης	48
3.3.1 Βασικός Σχεδιασμός	48
3.3.2 Παρουσίαση αποτελεσμάτων	50
3.3.3 Επανάληψη της ανάλυσης χωρίς τις ακραίες τιμές	52
3.4 Στατιστική μελέτη της επίδρασης του θορύβου της μοντελοποίησης	52
3.4.1 Σχεδιασμός μελέτης	53
3.4.2 Παρουσίαση Αποτελεσμάτων	53
Κεφάλαιο 4: Πειραματικό Μοντέλο Οχήματος	57
4.1 Περιγραφή του μοντέλου	57
4.2 Εφαρμογή του UKF	58

4.2.1	Μετρήσεις στα Συνοριακά σημεία Εκτίμηση παραμέτρων	59
4.2.2	Μετρήσεις και σε εσωτερικά σημεία	65
4.3	Στατιστικές αναλύσεις.....	67
4.3.1	Στατιστική μελέτη της επίδρασης του θορύβου της μέτρησης.....	67
4.3.2	Στατιστική μελέτη της επίδρασης του θορύβου της μοντελοποίησης.....	71
Κεφάλαιο 5: Χρήση του UKF σε συνδυασμό με λύτη (solver) πεπερασμένων στοιχείων – Διατύπωση του προβλήματος		75
5.1	Διατύπωση του προβλήματος και της προτεινόμενης ιδέας	75
5.1.1	Προβλήματα που έπρεπε να αντιμετωπιστούν	75
5.1.2	Προτεινόμενη λύση.....	76
5.2	Δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν	76
Συμπεράσματα - Προτάσεις.....		81
Βιβλιογραφία		83
Παραρτήματα.....		85

Συντομογραφίες που χρησιμοποιούνται

Σύμβολο	Έννοια
β.ε	βαθμός ελευθερίας
Κ.Ο.Θ	Κεντρικό Οριακό Θεώρημα
ΣΑΕ	Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου
ANOVA	Ανάλυση Μεταβλητότητας (Analysis of Variance)
EKF	Extended Kalman Filter
KF	Kalman Filter
UKF	Unscented Kalman Filter

Εισαγωγή

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αλλά και των τεχνικών αυτομάτου ελέγχου είναι αναπόσπαστο κομμάτι της μελέτης και της εφαρμογής σε πολλούς τεχνολογικούς κλάδους.

Τα πεπερασμένα στοιχεία εφαρμόζονται κατά κόρον στη μελέτη των κατασκευών όπως είναι διάφορα οχήματα, αεροσκάφη αλλά και σε οποιαδήποτε κατασκευή χρειάζεται να μελετηθεί η στατική και δυναμική συμπεριφορά της. Ενώ τα συστήματα αυτομάτου ελέγχου (ΣΑΕ) έχουν ένα εξαιρετικά ποικιλόμορφο και ευρύ πεδίο δράσης. Τα συστήματα εντοπισμού, η πλοήγηση πλοίων, αεροσκαφών και δορυφόρων αλλά ακόμα και καθημερινές απλές κατασκευές όπως ένας ανελκυστήρας χρησιμοποιούν τεχνολογίες Σ.Α.Ε..

Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιήσουμε μία μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στον χώρο των ΣΑΕ, το Unscented Φίλτρο Kalman (Unscented Kalman Filter-UKF), και θα την εφαρμόσουμε στη μελέτη της απόκρισης μη γραμμικών κατασκευών. Τέλος θα προτείνουμε έναν τρόπο “σύνδεσης” του Φίλτρου αυτού με έναν επιλυτή πεπερασμένων στοιχείων (solver).

Στόχος αυτής της διαδικασίας είναι να προβλέψουμε τη συμπεριφορά μίας κατασκευής η οποία υπόκεινται σε άγνωστη διέγερση, καθώς και η εκτίμηση αγνώστων παραμέτρων της (π.χ. μεμονωμένη ελαστικότητα, ιδιότητες υλικών), μέσω μετρήσεων της απόκρισης της κατασκευής σε περιορισμένο αριθμό σημείων. Το πρόβλημα γίνεται ακόμη πιο σύνθετο λαμβάνοντας υπόψη η μεθοδολογία εφαρμόζεται σε συστήματα με έντονη μη γραμμική συμπεριφορά.

Η UKF μεθοδολογία έχει προκύψει από την εξέλιξη/ επέκταση του γραμμικού Φίλτρου Kalman (Kalman Filter - KF). Εφαρμόζεται σε συστήματα στα εμφανίζονται μη-γραμμικότητες και παρουσιάζει σημαντικά πλεονεκτήματα σε σύγκριση με άλλες μεθοδολογίες όπως για παράδειγμα το προγενέστερο του Extended Φίλτρο Kalman (Extended Kalman Filter - EKF). [12,5].

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται εν συντομία το γραμμικό Φίλτρο Kalman (KF) αλλά και το Extended Φίλτρο Kalman, μία εξέλιξη του KF για μη γραμμικά προβλήματα. Στο δεύτερο κεφάλαιο εξετάζεται η θεωρητική βάση του UKF και ο αλγόριθμος εφαρμογής του.

Στη συνέχεια προκειμένου να γίνει σαφές το πώς λειτουργεί αυτός ο αλγόριθμος μελετούμε μέσω αριθμητικής προσομοίωσης ένα απλό σύστημα έντεκα σημειακών μαζών στις οποίες εφαρμόζουμε αρχικά μία αρμονική διέγερση και μετά μία ψευδοτυχαία διέγερση. Επίσης εξετάζουμε μέσω στατιστικής ανάλυσης πώς επιδρούν στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων τα σημεία στα οποία λαμβάνουμε τις μετρήσεις, ο θόρυβος της μέτρησης καθώς και ένα πιθανό

σφάλμα στη μοντελοποίηση. Αυτές τις αναλύσεις τις πραγματοποιούμε και στο επόμενο κεφάλαιο όπου μελετούμε μία πιο ρεαλιστική κατασκευή, το μειωμένο μοντέλο του πλαισίου ενός πειραματικού οχήματος.

Τέλος διατυπώνουμε ορισμένες δυσκολίες που προκύπτουν κατά την προσπάθεια σύνδεσης του UKF με έναν επιλυτή και προτείνουμε έναν πιθανό τρόπο σύνδεσης, ο οποίος τις αντιπαρέρχεται.

Κεφάλαιο 1: Βασικές αρχές του γραμμικού Φίλτρου Kalman (Kalman Filter) και του μη γραμμικού Extended Φίλτρου Kalman (Extended Kalman Filter)

Αρχικά κρίθηκε σκόπιμο να γίνει μία σύντομη παρουσίαση τόσο του γραμμικού Φίλτρου Kalman (Kalman Filter) όσο και του Extended Kalman Filter (EKF) το οποίο έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως σε προβλήματα που εμπειρεύχον μη γραμμικούς μετασχηματισμούς. Στόχος της παρουσίασης τους είναι να γίνουν κατανοητές κάποιες βασικές αρχές της γενικής μεθοδολογίας καθώς και να αναδειχθούν ορισμένα πλεονεκτήματα του Unscented Kalman Filter (UKF) το οποίο θα μας απασχολήσει εξ ολοκλήρου στη συνέχεια.

1.1 Το Φίλτρο Kalman (Kalman Filter)

Το Φίλτρο Kalman (Kalman Filter – KF) που παρουσιάστηκε το 1960 από τον Kalman είναι ένα σύνολο μαθηματικών εξισώσεων. Στόχος του είναι να παρέχει έναν αποτελεσματικό επαναληπτικό τρόπο για τον υπολογισμό της κατάστασης μιας διεργασίας, με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

Έχει χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε ποικίλους τομείς όπως η επεξεργασία σήματος στην αεροδιαστημική και στα υποβρύχια σόναρ καθώς και στον στατιστικό έλεγχο ποιότητας. Ένα πολύ χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο εντοπισμός της τροχιάς ενός δορυφόρου γύρω από τη γη [8,15].

1.1.1 Παρουσίαση της μεθοδολογίας

Το Φίλτρο Kalman ασχολείται με το γενικό πρόβλημα του υπολογισμού μίας κατάστασης x που ανήκει στο σύνολο R^n μίας ελεγχόμενης διεργασίας διακριτού χρόνου η οποία κυριαρχείται από γραμμικές στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις της μορφής:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} \quad (1.1)$$

με μέτρηση $z \in R^m$

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (1.2)$$

όπου w_k : ο θόρυβος της διεργασίας

v_k : ο θόρυβος της μέτρησης

A: πίνακας $n \times n$ ο οποίος συσχετίζει το προηγούμενο χρονικό βήμα ($k-1$) με την κατάσταση του τρέχοντος βήματος (k), απούσας είτε μίας καθοδηγητικής συνάρτησης ή θορύβου στη διεργασία. Μπορεί να μεταβάλλεται σε κάθε χρονικό βήμα.

B: πίνακας $n \times l$ ο οποίος συσχετίζει το ιδανικό δεδομένο εισόδου έλεγχου $u \in R^l$ με την κατάσταση x .

H: πίνακας $m \times n$ που συσχετίζει την κατάσταση με τη μέτρηση z_k . Μπορεί να μεταβάλλεται σε κάθε χρονικό βήμα

Θεωρείται ότι οι μεταβλητές που αντιπροσωπεύουν το θόρυβο είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, αντιστοιχούν σε λευκό θόρυβο και ακολουθούν κανονική κατανομή.

$$p(w) \sim N(0, Q) \quad (1.3)$$

$$p(v) \sim N(0, R) \quad (1.4)$$

Ο όρος Q είναι ο πίνακας συμμεταβλητότητας του θορύβου της διεργασίας (process noise covariance matrix) ενώ ο R είναι ο πίνακας συμμεταβλητότητας του θορύβου της μέτρησης (measurement noise covariance matrix)

Ορίζουμε τη μεταβλητή $\widehat{x}_k^- \in R^n$ ως την a priori εκτίμηση της κατάστασής μας στο βήμα k δεδομένου ότι γνωρίζουμε τη διεργασία πριν από το βήμα k. Καθώς και τη $\widehat{x}_k \in R^n$ ως την a posteriori εκτίμηση της κατάστασης στο βήμα k δεδομένης της μέτρησης z_k .

Επίσης μπορούμε να ορίσουμε ένα a priori και ένα a posteriori σφάλμα πρόβλεψης, e_k^- και e_k αντίστοιχα. Τα οποία είναι ίσα με $e_k^- \equiv x_k - \widehat{x}_k^-$ και $e_k \equiv x_k - \widehat{x}_k$.

Η a priori συμμεταβλητότητα του λάθους πρόβλεψης είναι

$$P_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}] \quad (1.5)$$

ενώ η a posteriori συμμεταβλητότητα είναι

$$P_k = E[e_k e_k^T] \quad (1.6)$$

Η διαδικασία εύρεσης των εξισώσεων του φίλτρου Kalman ξεκινάει με στόχο να βρεθεί μία εξίσωση η οποία θα υπολογίζει μία a posteriori πρόβλεψη της κατάστασης \widehat{x}_k ως γραμμικό συνδυασμό μίας a priori πρόβλεψη της κατάστασης \widehat{x}_k^- και μίας σταθμισμένης διαφοράς μεταξύ της ακριβούς μέτρησης z_k και μίας πρόβλεψης της μέτρησης $H\widehat{x}_k^-$ όπως φαίνεται στην εξίσωση (1.7)

$$\widehat{x}_k = \widehat{x}_k^- + K(z_k - H\widehat{x}_k^-) \quad (1.7)$$

Η διαφορά ($z_k - H\widehat{x}_k^-$) καλείται το υπόλοιπο της μέτρησης (measurement innovation ή residual) ή ως το υπόλοιπο. Το υπόλοιπο αντανακλά την απόκλιση μεταξύ της προβλεπόμενης μέτρησης $H\widehat{x}_k^-$ και της πραγματικής μέτρησης z_k .

Ο $n \times m$ πίνακας K επιλέγεται να είναι ο συντελεστής ενίσχυσης ή ανάμιξης (gain ή blending factor) ο οποίος ελαχιστοποιεί την a posteriori συμμεταβλητότητα του λάθους (η οποία υπολογίζεται στην εξίσωση 1.6). Αυτή η ελαχιστοποίηση μπορεί να επιτευχθεί μέσω των ακόλουθων βημάτων:

- αντικατάσταση της (1.7) στον ορισμό $e_k \equiv x_k - \widehat{x}_k$
- αντικατάσταση του e_k στην (1.6)
- παίρνουμε το αποτέλεσμα ως προς K
- το θέτουμε ίσο με μηδέν και τελικά λύνουμε ως προς K

$$K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} \quad (1.8)$$

Σημειώνεται ότι η εξίσωση (1.8) μας δίνει μία μορφή του K από τις πολλές μορφές στις οποίες μπορούν να καταλήξουν οι εξισώσεις, η οποία ελαχιστοποιεί την (1.6).

Παρατηρώντας την (1.8) είναι εμφανές ότι καθώς η συμμεταβλητότητα του λάθους της μέτρησης R πλησιάζει στο μηδέν, ο συντελεστής ενίσχυσης K συμβάλλει στο υπόλοιπο πιο έντονα. Για την ακρίβεια $\lim_{R_k \rightarrow 0} K_k = H^{-1}$.

Αντιθέτως όταν η a priori συμμεταβλητότητα του λάθους εκτίμησης P_k^- πλησιάζει στο μηδέν, ο συντελεστής K συμβάλλει όλο και λιγότερο στο υπόλοιπο. Πιο συγκεκριμένα, $\lim_{P_k^- \rightarrow 0} K_k = 0$

Ουσιαστικά καθώς η συμμεταβλητότητα του λάθους της μέτρησης R πλησιάζει στο μηδέν, εμπιστευόμαστε την πραγματική μέτρηση z_k όλο και περισσότερο ενώ την προβλεπόμενη μέτρηση $H(\widehat{x}_k^-)$ όλο και λιγότερο. Όταν η a priori συμμεταβλητότητα της πρόβλεψης του λάθους P_k^- τείνει στο μηδέν συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο.

Η αιτιολόγηση της (1.7) βρίσκεται στην πιθανότητα της a priori εκτίμησης \widehat{x}_k^- δεδομένων όλων των προηγούμενων μετρήσεων z_k (κανόνας του Bayes). Εδώ θα αρκεστούμε στο να αναφέρουμε ότι το Φίλτρο Kalman διατηρεί τις δύο πρώτες ροπές (moments) από την κατανομή των καταστάσεων (states).

$$E [x_k] = \widehat{x}_k$$

$$E [(x_k - \widehat{x}_k) (x_k - \widehat{x}_k)^T] = P_k$$

Η a posteriori εκτίμηση της κατάστασης (1.7) αντανακλά το μέσο (τη ροπή πρώτης τάξης)

της κατανομής των καταστάσεων. Η a posteriori συμμεταβλητότητα του λάθους αντανακλά τη μεταβλητότητα της κατανομής των καταστάσεων (την δευτέρας τάξης μη κεντρική ροπή). Με άλλα λόγια, $p(x_k|z_k) \sim N(E[x_k], E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T]) = N(\hat{x}_k, P_k)$.

1.1.2 Ο Αλγόριθμος

Το Φίλτρο Kalman προβλέπει μία διεργασία χρησιμοποιώντας μία μορφή ελέγχου ανάδρασης (feedback control), το φίλτρο υπολογίζει την κατάσταση της διεργασίας σε κάποια στιγμή και μετά ανατροφοδοτείται μέσω μέτρησης (η οποία περιέχει θόρυβο).

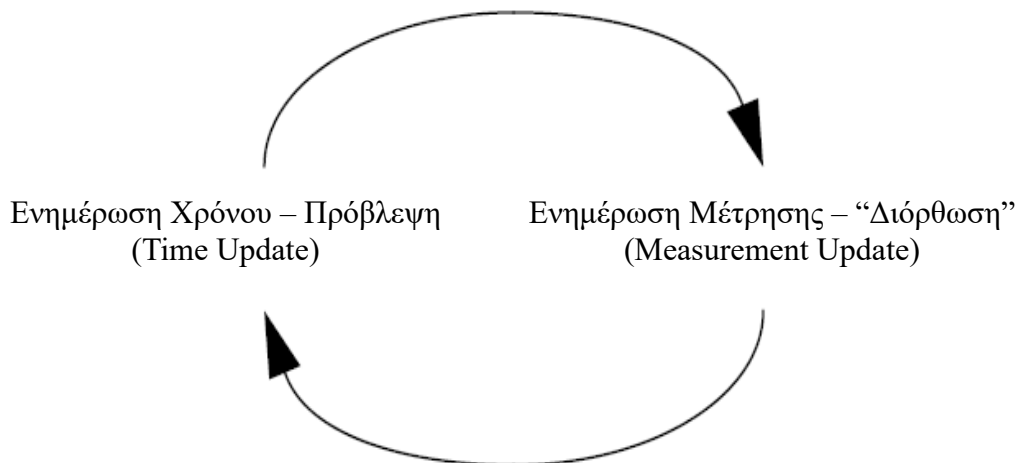
Οι εξισώσεις της μεθόδου του Φίλτρου Kalman υπάγονται σε 2 ομάδες:

I. εξισώσεις ενημέρωσης χρόνου (time update equations) και

II. εξισώσεις ενημέρωσης μέτρησης (measurement update equations)

Οι εξισώσεις ενημέρωσης χρόνου είναι υπεύθυνες για την προβολή της δεδομένης κατάστασης και της εκτίμησης για τη συμμεταβλητότητα του σφάλματος ώστε να ληφθεί η a priori εκτίμηση για το επόμενο βήμα

Οι εξισώσεις ενημέρωσης μέτρησης είναι υπεύθυνες για την ανατροφοδότηση, για παράδειγμα η ενσωμάτωση μίας νέα μέτρησης στην a priori εκτίμηση ώστε να ληφθεί μία βελτιωμένη a posteriori εκδοχή.



Σχήμα 1.1. Η επαναλαμβανομένη διαδικασία στο διακριτό Kalman Filter. Η ενημέρωση χρόνου (time update) προβάλλει την τρέχουσα πρόβλεψη για την κατάσταση σε μελλοντικό χρόνο. Η ενημέρωση μέτρησης (measurement update) προσαρμόζει αυτή την εκτίμηση με βάση μία πραγματική μέτρηση σε εκείνο το χρονικό βήμα [15]

Επιπλέον οι εξισώσεις ενημέρωσης χρόνου μπορούν να θεωρηθούν ως οι εξισώσεις πρόβλεψης (predictor equations), ενώ οι εξισώσεις ενημέρωσης μέτρησης μπορούν να θεωρηθούν

ως οι εξισώσεις διόρθωσης (*corrector equations*). Ο τελικός αλγόριθμος του υπολογισμού αντιπροσωπεύει αυτή τη διαδικασία πρόβλεψης-διόρθωσης όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1.

Όπως αναφέρθηκε ήδη οι εξισώσεις ενημέρωσης χρόνου προβάλλουν εμπρόσθια τις εκτιμήσεις για την κατάσταση και τη συμμεταβλητότητα από τη χρονική στιγμή $k-1$ στη στιγμή k . Οι όροι A και B προέρχονται από την εξίσωση (1.1), ενώ ο όρος Q από την (1.3).

Πίνακας 1.1: Εξισώσεις ενημέρωσης χρόνου του διακριτού Φίλτρου Kalman [15]

$$\widehat{x}_k^- = A\widehat{x}_{k-1} + B u_k \quad (1.9)$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \quad (1.10)$$

Πίνακας 1.2: Εξισώσεις ενημέρωσης μέτρησης του διακριτού Φίλτρου Kalman [15]

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} \quad (1.11) \equiv (1.8)$$

$$\widehat{x}_k = \widehat{x}_k^- + K_k(z_k - H\widehat{x}_k^-) \quad (1.12) \equiv (1.7)$$

$$P_k = (I - K_k H)P_k^- \quad (1.13)$$

Το πρώτο βήμα κατά την ενημέρωση μέτρησης είναι ο υπολογισμός του συντελεστή ενίσχυσης Kalman, K_k . Στη συνέχεια πρέπει να γίνει η μέτρηση προκειμένου να αποκτήσουμε το z_k , ώστε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την a posteriori εκτίμηση της κατάστασης με το να ενσωματώσουμε τη μέτρηση σύμφωνα με την (1.12). Το τελικό βήμα είναι η απόκτηση των a posteriori εκτιμήσεων τη συμμεταβλητότητας του σφάλματος.

Μετά από κάθε συνδυασμό ενημέρωσης χρόνου και μέτρησης η διαδικασία επαναλαμβάνεται με τη χρήση της προηγούμενης a posteriori εκτίμησης για να παραχθεί η νέα a priori εκτίμηση. Είναι εμφανές λοιπόν ο επαναληπτικός χαρακτήρας του Φίλτρου Kalman, το οποίο συνδέει την εκάστοτε εκτίμηση με όλες τις παρελθοντικές μετρήσεις.

1.1.3 Παράμετροι του φίλτρου

Κατά την εφαρμογή του φίλτρου, η συμμεταβλητότητα του θορύβου της μέτρησης R συνήθως μετράται εκ των προτέρων. Η μέτρηση της συμμεταβλητότητας γενικά είναι εφικτή επειδή χρειάζεται να μπορούμε να μετρήσουμε τη διεργασία ούτως ή άλλως ώστε να καθορίσουμε τη διασπορά του θορύβου της μέτρησης.

Ο προσδιορισμός της συμμεταβλητότητας Q του θορύβου της διεργασίας είναι γενικά πιο δύσκολος καθώς συνήθως δεν έχουμε την ικανότητα να παρατηρούμε άμεσα τη διεργασία για την οποία κάνουμε τις εκτιμήσεις. Κάποιες φορές ένα σχετικά απλό μοντέλο της διεργασίας μπορεί να παράγει αποδεκτά αποτελέσματα αν εισάγουμε αρκετή αβεβαιότητα μέσω της

επιλογής του Q . Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορούμε να ελπίζουμε ότι οι μετρήσεις της διεργασίας είναι αξιόπιστες.

Είτε όμως υπάρχει μία λογική βάση για την επιλογή των παραμέτρων είτε όχι, πολύ συχνά μία καλύτερη λειτουργία του φίλτρου (από στατιστικής σκοπιάς) μπορεί να επιτευχθεί με τη ρύθμιση των παραμέτρων Q και R .

Η βέλτιστη λειτουργία του γραμμικού KF εξαρτάται από τα παρακάτω [9]:

(i) με πόση ακρίβεια το μοντέλο της διεργασίας μπορεί να προβλέψει το πραγματικό σύστημα,

(ii) την υπόθεση του πρόσθετου (additive), ανεξάρτητου λευκού θορύβου που ακολουθεί κανονική κατανομή και

(iii) την ακρίβεια με την οποία είναι γνωστοί οι πίνακες της συμμεταβλητότητας του θορύβου της διεργασίας και της μέτρησης.

Με βάση τα παραπάνω, γίνεται φανερό ότι για σοβαρές αβεβαιότητες στη μοντελοποίηση, και συνεπώς σημαντικά σφάλματα μοντελοποίησης, η χρήση του Φίλτρου Kalman θα παρουσιάσει δυσκολίες, ή δε θα είναι εφικτό να δώσει μια ακριβή πλήρη εκτίμηση της κατάστασης με βάση θορυβώδεις και ελλιπείς μετρήσεις.

1.2 Το Extended Φίλτρο Kalman (Extended Kalman Filter - EKF)

1.2.1 Η διεργασία που μελετάται

Το EKF εφαρμόζεται σε προβλήματα όπου η διεργασία που πρόκειται να προσεγγιστεί ή/και η διαδικασία της μέτρησης εμπεριέχει μη γραμμικότητες. Η λειτουργία του περιλαμβάνει τη γραμμικοποίηση της εκάστοτε μέσης τιμής και της συμμεταβλητότητας [15].

Με μία έκφραση που θυμίζει σειρές Taylor, μπορούμε να γραμμικοποιήσουμε την εκτίμηση γύρω από την τρέχουσα εκτίμηση. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται τα μερικά διαφορικά των συναρτήσεων της διεργασίας και της μέτρησης προκειμένου να μπορέσουμε να κάνουμε προβλέψεις ακόμα και στην επιφάνεια (face) μη γραμμικών σχέσεων. Η μέθοδος είναι ουσιαστικά μία τροποποίηση του απλού Kalman Filter.

Ας υποθέσουμε ότι η διαδικασία μας έχει και πάλι ένα διάνυσμα κατάστασης $x \in R^n$ αλλά η διαδικασία διέπεται πλέον από τη μη γραμμική στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}) \quad (1.14)$$

με μία μέτρηση $z \in R^n$ η οποία είναι

$$z_k = h(x_k, v_k) \quad (1.15)$$

όπου οι τυχαίες μεταβλητές w_k και v_k αντιπροσωπεύουν το θόρυβο της διεργασίας και της

μέτρησης αντίστοιχα όπως συμβολίζεται από τις εξισώσεις (1.3) και (1.4). Στην περίπτωση αυτή η μη-γραμμική συνάρτηση f στη διαφορική εξίσωση (1.14) συσχετίζει την κατάσταση στο προηγούμενο χρονικό βήμα $k-1$ με την κατάσταση στο τρέχον χρονικό βήμα k . Περιλαμβάνει ως παραμέτρους κάθε οδηγούσα (driving) συνάρτηση u_{k-1} , και τον μηδενικής μέσης τιμής θόρυβο της διεργασίας w_k . Η μη γραμμική συνάρτηση h στην εξίσωση μέτρησης (1.15) συσχετίζει την κατάσταση x_k με τη μέτρηση z_k .

Βέβαια στην πράξη δεν γνωρίζουμε τις τιμές του θορύβου w_k και v_k σε κάθε χρονικό βήμα. Παρ' όλα αυτά η κατάσταση και η μέτρηση μπορούν να προσεγγιστούν χωρίς αυτές μέσω των επόμενων εξισώσεων

$$\bar{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) \quad (1.16)$$

$$\bar{z}_k = h(\bar{x}_k, v_k) \quad (1.17)$$

\hat{x}_k : μια a posteriori εκτίμηση της κατάστασης (από ένα προηγούμενο χρονικό βήμα k).

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι ένα θεμελιώδες μειονέκτημα του EKF είναι ότι οι κατανομές (ή η πυκνότητα στη συνεχή περίπτωση) των διαφόρων τυχαίων μεταβλητών δεν είναι πλέον κανονική αφότου λάβει χώρα ο εκάστοτε μη γραμμικός μετασχηματισμός. Το EKF είναι απλά ένας ad hoc εκτιμητής της κατάστασης ο οποίος προσεγγίζει το βέλτιστο σύμφωνα με τον κανόνα του Bayes μέσω γραμμικοποίησης.

Σημειώνεται όμως ότι έχει γίνει προσπάθεια με ενδιαφέροντα αποτελέσματα στην ανάπτυξη EKF μέσω μεθόδων που διατηρούν την κανονική κατανομή ακόμα και μετά τους μη- γραμμικούς μετασχηματισμούς.

1.2.2 Η Υπολογιστική διαδικασία

Για να εκτιμηθεί μία διεργασία με μη γραμμικές διαφορικές σχέσεις και σχέσεις μέτρησης, πρέπει πρώτα να γραφούν νέες κυρίαρχες εξισώσεις που γραμμικοποιούν μια εκτίμηση σύμφωνα με τις (1.16) και (1.17)

$$x_k = \bar{x}_k + A(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + Ww_{k-1} \quad (1.18)$$

$$z_k = \bar{z}_k + H(x_k - \bar{x}_k) + Vv_{k-1} \quad (1.19)$$

x_k και z_k : το διάνυσμα της πραγματικής κατάστασης και μέτρησης αντίστοιχα

\bar{x}_k και \bar{z}_k : τα κατά προσέγγιση διανύσματα της κατάστασης και της μέτρησης όπως προκύπτουν από τις (1.16) και (1.17)

\hat{x}_k : μια a posteriori εκτίμηση της κατάστασης στο βήμα k , οι τυχαίες μεταβλητές w_k και v_k αντιπροσωπεύουν το θόρυβο της διεργασίας και της μέτρησης όπως προκύπτει από τις (1.3) και (1.4).

A : ένας Ιακωβιανός πίνακας των μερικών παραγώγων της f ως προς x

$$A_{[i,j]} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial x_{[j]}}(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0)$$

W : ένας Ιακωβιανός πίνακας των μερικών παραγώγων της f ως προς w

$$W_{[i,j]} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial w_{[j]}}(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0)$$

H : ένας Ιακωβιανός πίνακας των μερικών παραγώγων της h ως προς x,

$$H_{[i,j]} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial x_{[j]}}(\bar{x}_k, 0)$$

V : ένας Ιακωβιανός πίνακας των μερικών παραγώγων της h ως προς v,

$$V_{[i,j]} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial v_{[j]}}(\bar{x}_k, 0)$$

Σημειώνεται πως σε κάθε χρονικό βήμα αυτοί οι πίνακες διαφέρουν.

Τώρα ορίζεται μια νέα έκφραση για το σφάλμα πρόβλεψης,

$$\bar{e}_{x_k} \equiv x_k - \bar{x}_k \quad (1.20)$$

και για το υπόλοιπο (residual) της μέτρησης,

$$\bar{e}_{z_k} \equiv z_k - \bar{z}_k \quad (1.21)$$

Στην πράξη δεν είναι γνωστή η τιμή x_k της (1.20), η οποία είναι το πραγματικό διάνυσμα κατάστασης, δηλαδή η ποσότητα που προσπαθούμε να εκτιμήσουμε. Από την άλλη πλευρά, είναι γνωστή η τιμή z_k στην (1.21), η οποία είναι η πραγματική μέτρηση η οποία χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της x_k . Χρησιμοποιώντας τις (1.20) και (1.21) μπορούν να γραφούν κυρίαρχες εξισώσεις για μια διεργασία σφάλματος (error process).

$$\bar{e}_{x_k} = A(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + \varepsilon_k \quad (1.22)$$

$$\bar{e}_{z_k} = H\bar{e}_{x_k} + \eta_k \quad (1.23)$$

όπου ε_k και η_k αντιπροσωπεύουν νέες ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που έχουν μηδενικούς πίνακες μέσης τιμής και συμμεταβλητότητα WQW^T και VRV^T , με Q και R όπως στην (1.3) και (1.4) αντίστοιχα.

Παρατηρήστε ότι οι εξισώσεις (1.22) και (1.23) είναι γραμμικές, και ότι μοιάζουν πολύ με τη διαφορική εξίσωση και την εξίσωση μέτρησης (1.1) και (1.2) του διακριτού Kalman filter. Το γεγονός αυτό οδήγησε στη χρήση του πραγματικού υπολοίπου της μέτρησης \bar{e}_{z_k} (1.21) και ενός δεύτερου (υποθετικού) Kalman filter ώστε να εκτιμηθεί το σφάλμα της πρόβλεψης \bar{e}_{x_k} σύμφωνα με την (1.22). Η εκτίμηση αυτή, που συμβολίζεται με \hat{e}_k , θα μπορούσε στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί μαζί με τη (1.20) για την απόκτηση των a posteriori

εκτιμήσεων της κατάστασης για την αρχική μη γραμμική διεργασία,

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + \hat{e}_k \quad (1.24)$$

Οι τυχαίες μεταβλητές των (1.22) και (1.23) έχουν κατά προσέγγιση την ακόλουθη κατανομή πιθανότητας.

$$p(\bar{e}_{x_k}) \sim N(0, E[\bar{e}_{x_k} \bar{e}_{x_k}^T])$$

$$p(\varepsilon_k) \sim N(0, WQ_k - W^T)$$

$$p(\eta_k) \sim N(0, VR_k V^T)$$

Λαμβάνοντας υπόψη αυτές τις προσεγγίσεις και θεωρώντας την προβλεπόμενη τιμή του \hat{e}_k μηδενική, η εξίσωση του Kalman filter που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του \hat{e}_k είναι

$$\hat{e}_k = K_k \bar{e}_{z_k} \quad (1.25)$$

Με αντικατάσταση της (1.25) στην (1.24) και κάνοντας χρήση της (1.21) βλέπουμε ότι στην πραγματικότητα το δεύτερο (υποθετικό) Φίλτρο Kalman δεν είναι απαραίτητο:

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k \bar{e}_{z_k} = \bar{x}_k + K_k(z_k - \bar{z}_k) \quad (1.26)$$

Η εξίσωση (1.26) μπορεί τώρα να χρησιμοποιηθεί για την ενημέρωση μέτρησης του EKF, με τα \bar{x}_k και \bar{z}_k να προέρχονται από τις (1.16) και (1.17), και το συντελεστή ενίσχυσης Kalman K_k να προέρχεται από την (1.11) με την κατάλληλη αντικατάσταση της συμμεταβλητότητας του σφάλματος μέτρησης.

Το πλήρες σύνολο των εξισώσεων του EKF παρουσιάζεται στον Πίνακα 2-1 και στον Πίνακα 2-2. Σημειώνεται ότι το \bar{x}_k έχει αντικατασταθεί από το \hat{x}_k^- για να είναι εμφανής ο συμβολισμός για τις a priori τιμές.

Πίνακας 1.3: Εξισώσεις ενημέρωσης χρόνου για το EKF [15]

$$\hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) \quad (1.27)$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A_k^T + W_k Q_{k-1} W_k^T \quad (1.28)$$

Όπως και με το βασικό διακριτό Φίλτρο Kalman, οι εξισώσεις ενημέρωσης χρόνου στον Πίνακα 1.3 προβάλλουν τις εκτιμήσεις της κατάστασης και της συμμεταβλητότητας από το προηγούμενο χρονικό βήμα k-1 στο τρέχον χρονικό βήμα k. Η f στην (1.27) και πάλι προέρχεται από την (1.16), A_k και W_k είναι οι Ιακωβιανοί πίνακες στο βήμα k, και το Q_k είναι η συμμεταβλητότητα του θορύβου της διεργασίας (1.3) στο βήμα k.

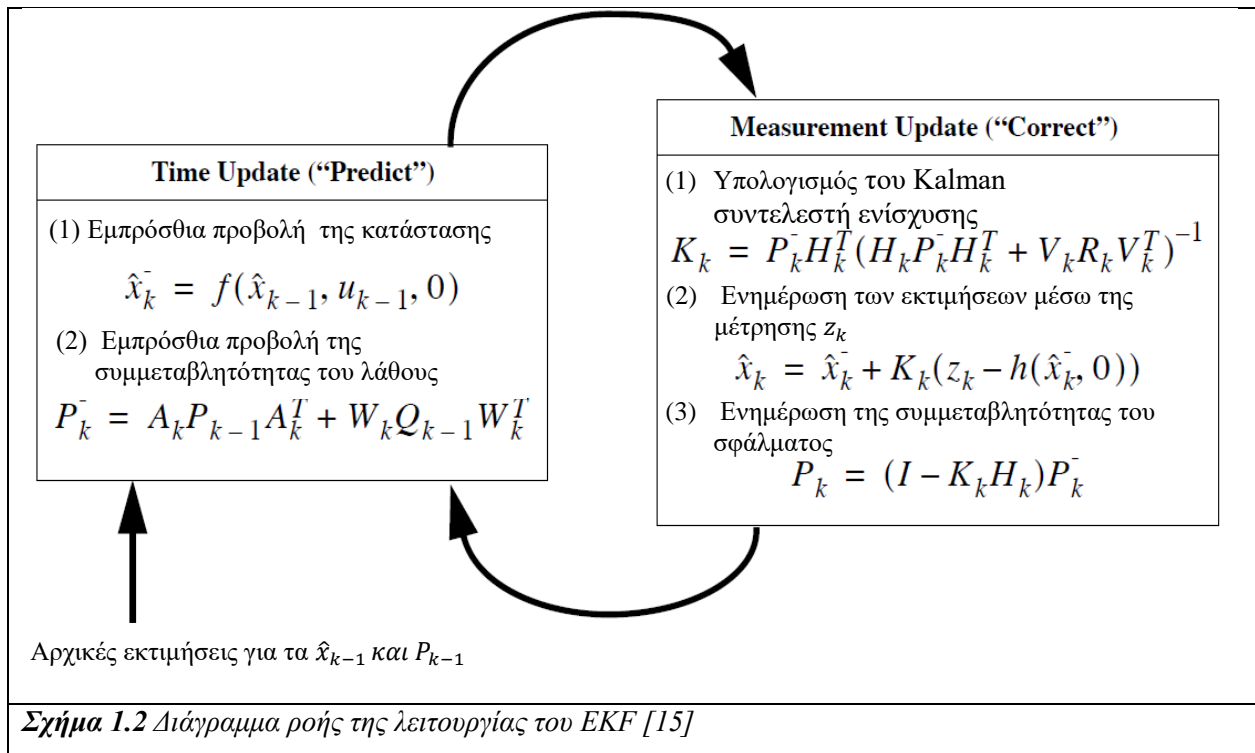
Πίνακας 1.4: : Εξισώσεις ενημέρωσης μέτρησης για το EKF. [15]

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + V_k R_k V_k^T)^{-1} \quad (1.29)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - h(\hat{x}_k^-, 0)) \quad (1.30)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^- \quad (1.31)$$

Επίσης, οι εξισώσεις ενημέρωσης μέτρησης στον πίνακα 1.4 διορθώνουν τις εκτιμήσεις της κατάστασης και της συµµεταβλητότητας µέσω της µέτρησης z_k . Η σχέση h στην (1.30) προέρχεται από την (1.17), οι H_k και V είναι οι Ιακωβιανοί πίνακες της µέτρησης στο βήµα k , και το R_k είναι η συµµεταβλητότητα του θορύβου µέτρησης (1.4) στο βήµα k . Η βασική λειτουργία του EKF είναι η ίδια µε εκείνη του γραµµικού διακριτού Φίλτρου Kalman όπως φαίνεται στο Σχήµα 1.1. Το Σχήµα 1.2 προσφέρει µια πλήρη εικόνα της λειτουργίας του EKF, συνδυάζοντας το διάγραµµα του Σχήµατος 1.1 µε τις εξισώσεις από τους Πίνακες 1.3 και 1.4.



1.2.3 Οι αδυναµίες του EKF

Ένα σηµαντικό χαρακτηριστικό του EKF είναι ότι ο Ιακωβιανός H_k στην εξίσωση για το συντελεστή ενίσχυσης Kalman (Kalman gain) χρησιµεύει ώστε να πολλαπλασιάσει σωστά ή να «µεγεθύνει» µόνο το σχετικό στοιχείο από τις πληροφορίες της µέτρησης. Για παράδειγµα, αν δεν υπάρχει µία ένα-προς-ένα αντιστοίχιση (one-to-one mapping) µεταξύ της µέτρησης z_k

και της κατάστασης, μέσω της h , ο Ιακωβιανός πίνακας H_k επηρεάζει τον Kalman συντελεστή ενίσχυσης, έτσι ώστε να μεγεθύνει μόνο το τμήμα του υπολοίπου $z_k - h(\hat{x}_k^-, 0)$ που επηρεάζει την κατάσταση. Φυσικά, αν σε όλες τις μετρήσεις δεν υπάρχει μία ένα-προς-ένα αντιστοίχιση μεταξύ της μέτρησης z_k και της κατάστασης μέσω της h , το φίλτρο θα αποκλίνει γρήγορα. Στην περίπτωση αυτή η διαδικασία είναι μη παρατηρήσιμη (*unobservable*) [9].

Το EKF έχει δύο ευρέως γνωστά μειονεκτήματα:

1. Η γραμμικοποίηση ίσως παράγει πολύ ασταθή φίλτρα εάν παραβιασθούν οι υποθέσεις τοπικής γραμμικότητας

2. Η παραγωγή των Ιακωβιανών πινάκων δεν είναι εύκολη στις περισσότερες εφαρμογές και συχνά μπορεί να οδηγήσει σε σοβαρές δυσκολίες στο να εφαρμοστεί η μεθοδολογία.

Το Unscented Φίλτρο Kalman (Unscented Kalman Filter – UKF) ξεπερνά αυτές τις δυσκολίες καθώς σε αυτό δε λαμβάνουν χώρα τα βήματα γραμμικοποίησης του EKF. Η βάση αυτής της μεθοδολογίας είναι ο unscented μετασχηματισμός (Unscented Transformation) [3,14].

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τη θεωρητική βάση και την εφαρμογή αυτής της μεθοδολογίας.

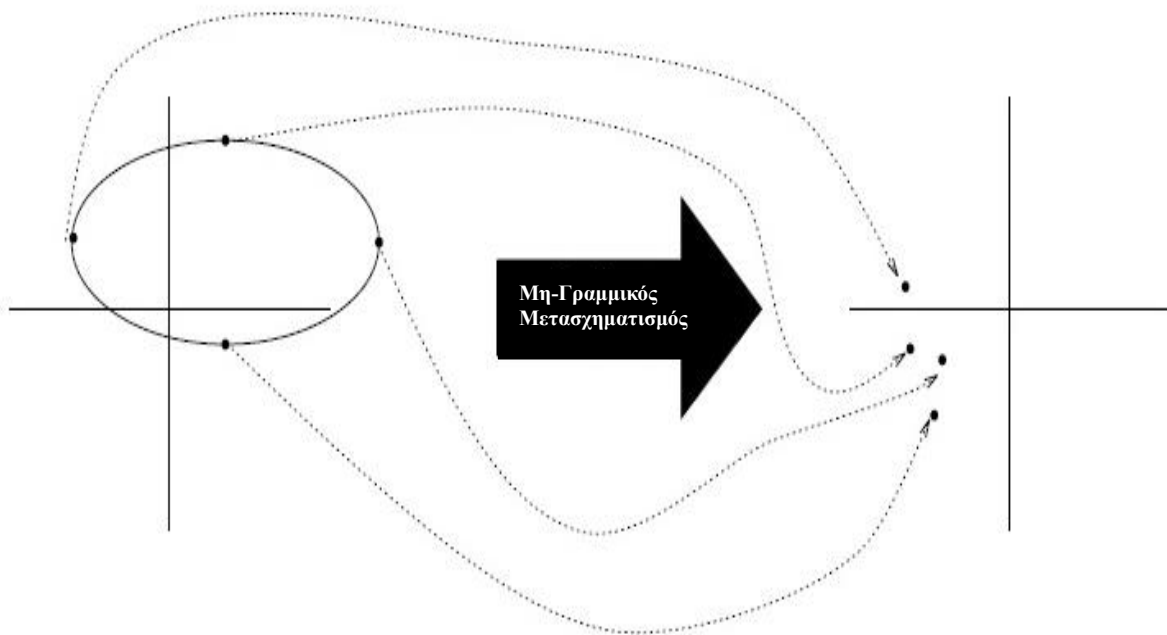
Κεφάλαιο 2: Το Unscented Φίλτρο Kalman (Unscented Kalman Filter – UKF)

2.1 Ο Unscented Μετασχηματισμός (Unscented Transform – UT)

Ο unscented μετασχηματισμός είναι μία μέθοδος για να υπολογιστεί η στατιστική συμπεριφορά μίας τυχαίας μεταβλητής που υφίσταται ένα μη γραμμικό μετασχηματισμό. Και όπως πολύ συχνά αναφέρεται «η δημιουργία του βασίστηκε στη διαίσθηση πως είναι πιο εύκολο να προσεγγιστεί μία κατανομή Gauss παρά μία τυχαία μη γραμμική συνάρτηση ή μετασχηματισμός» [4].

Η προσέγγιση αυτή απεικονίζεται στο Σχήμα 2.1 Ένα σετ σημείων σίγμα (sigma points) επιλέγονται έτσι ώστε η μέση τιμή και η συμμεταβλητότητα τους να είναι \bar{x} και P_{xx} .

Η μη γραμμική συνάρτηση εφαρμόζεται σε κάθε σημείο ώστε να σχηματιστεί ένα σύνολο μετασχηματισμένων σημείων τα στατιστικά μεγέθη των οποίων είναι \bar{y} και P_{yy} .



Σχήμα 2.1 Η αρχή του unscented μετασχηματισμού (UT) [3]

Η n-διαστάσεων τυχαία μεταβλητή x με μέση τιμή \bar{x} και συμμεταβλητότητα P_{xx} προσεγγίζεται από $2L + 1$ σταθμισμένα σημεία τα οποία δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} X_0 &= \bar{x} & W_0^{(m)} &= \frac{\lambda}{L+\lambda}, & W_0^{(c)} &= \frac{\lambda}{L+\lambda} + (1 - a^2 + \beta) \\ X_i &= \bar{x} + \left(\sqrt{(L+\lambda)P_x}\right)_i & & & & \\ X_i &= \bar{x} - \left(\sqrt{(L+\lambda)P_x}\right)_i & W_i^{(m)} &= W_i^{(c)} = 1/2(L+\lambda) & & \end{aligned} \quad (2.1)$$

Όπου $\lambda = \alpha^2(L + \kappa) - L$ είναι ένας συντελεστής μεγέθους,

το α καθορίζει τη διασπορά των σημείων σίγμα γύρω από το \bar{x}

το κ είναι μία δευτερεύουσα παράμετρος

το β χρησιμοποιείται για να ενσωματώσει προηγούμενη γνώση της κατανομής του x

(για κατανομή Gauss, το βέλτιστο είναι $\beta = 2$)

το $\left(\sqrt{(L+\lambda)P_x}\right)_i$ είναι η i σειρά του αντίστοιχου πίνακα

W_i είναι ο συντελεστής βαρύτητας που σχετίζεται με το σημείο i

Ακολουθεί η διαδικασία μετασχηματισμού:

1. Απεικόνιση κάθε σημείου μέσω της μη γραμμικής συνάρτησης για να σχηματιστεί το σύνολο των μετασχηματισμένων σημείων σίγμα

$$Y_i = f[X_i], \quad \text{για } i=0, \dots, 2L$$

2. Η μέση τιμή δίνεται από το σταθμισμένο μέσο όρο των μετασχηματισμένων σημείων,

$$\bar{y} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} Y_i \quad (2.2)$$

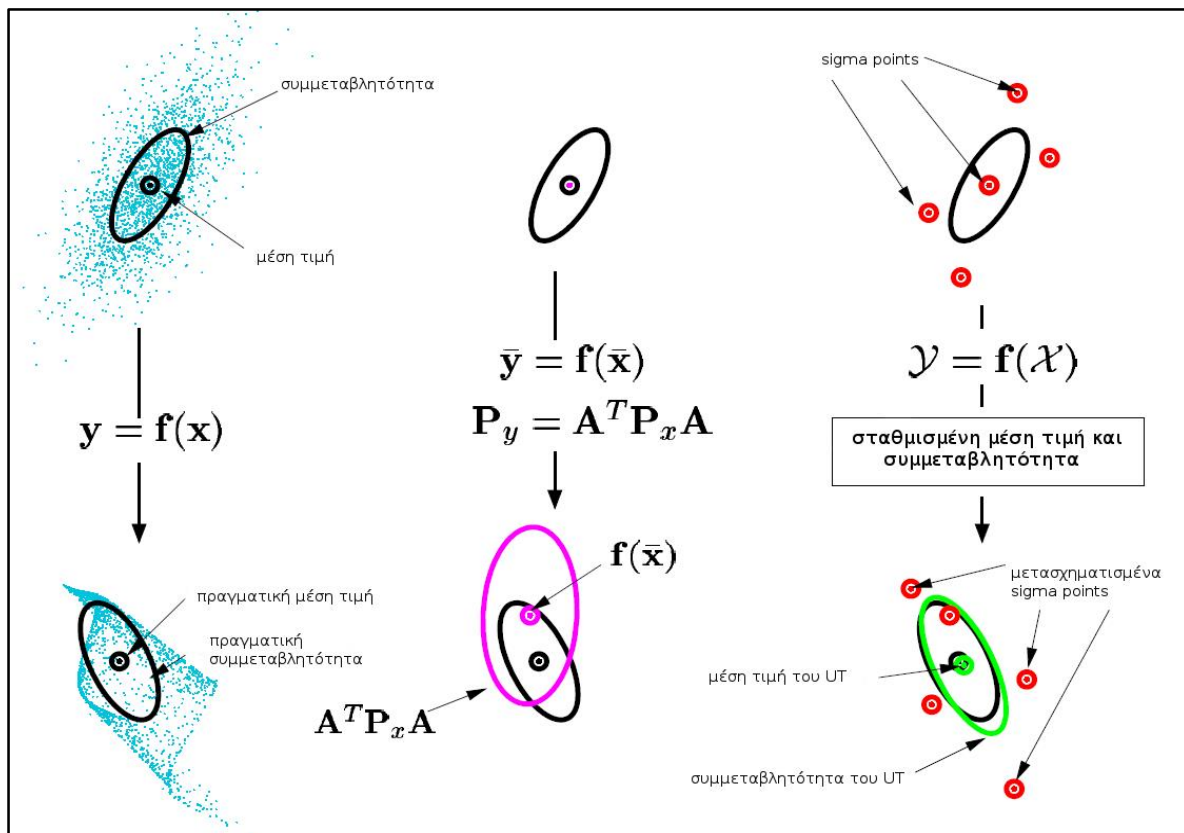
3. Η συμμεταβλητότητα είναι το σταθμισμένο εξωτερικό γινόμενο των μετασχηματισμένων σημείων,

$$P_{yy} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^c \{Y_i - \bar{y}\} \{Y_i - \bar{y}\}^T \quad (2.3)$$

Οι προσεγγίσεις μέσω του UT είναι ακριβείς σε βαθμό 3^{ης} τάξης για δεδομένα εισόδου που ακολουθούν κατανομή Gauss, για όλες τις μη-γραμμικότητες. Για διαφορετικές κατανομές δεδομένων εισόδου, οι προσεγγίσεις είναι ακριβείς τουλάχιστον σε επίπεδο 2^{ης} τάξης, η ακρίβεια μεγαλύτερης τάξης καθορίζεται από την επιλογή των α και β .

Στο Σχήμα 2.2 ακολουθεί ένα απλό παράδειγμα για ένα 2-d σύστημα. Στις απεικονίσεις αριστερά φαίνεται η πραγματική μέση τιμή και συμμεταβλητότητα όπως προκύπτει με

εφαρμογή της μεθοδολογίας Monte-Carlo. Στο κέντρο απεικονίζονται τα αποτελέσματα μέσω γραμμικοποίησης όπως θα συνέβαινε στο EKF. Τέλος στο δεξί τμήμα του Σχήματος απεικονίζεται ο UT και είναι εμφανής η καλύτερη συμπεριφορά που παρουσιάζει.



Σχήμα 2.2: Παράδειγμα του UT για την προσέγγιση της μέσης τιμής και της συμμεταβλητότητας. a) πραγματικές τιμές b) πρώτης τάξης γραμμικοποίηση (EKF), c) UT [14]

Το Unscented Φίλτρο Kalman (UKF) είναι μία επέκταση του UT σε έναν επαναληπτικό υπολογισμό, όπου η κατάσταση RV επαναπροσδιορίζεται μέσω του συνδυασμού της αρχικής κατάστασης και των μεταβλητών θορύβου $\mathbf{x}_k^a = [\mathbf{x}_k^T \mathbf{v}_k^T \mathbf{n}_k^T]^T$. Η επιλογή των σημείων σίγμα γίνεται λαμβάνοντας υπ' όψη αυτή την επαυξημένη RV κατάσταση με σκοπό να υπολογιστεί ο αντίστοιχος πίνακας σίγμα, \mathbf{X}_k^a . Σημειώνεται ότι δεν είναι απαραίτητος κανένας υπολογισμός Ιακωβιανών ή Hessians. Επιπλέον ο συνολικός αριθμός των υπολογισμών είναι της ίδιας τάξης με το EKF.

2.2 Η διαδικασία του UKF

Οι διαδικασίες μετασχηματισμού σε ένα Kalman filter αποτελούνται από τα ακόλουθα βήματα:

- Πρόβλεψη της νέας κατάστασης του συστήματος $\hat{x}(k+1|k)$ και της αντίστοιχης συμμεταβλητότητας $P(k+1|k)$. Σε αυτή την πρόβλεψη πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και ο θόρυβος της διεργασίας.

- Πρόβλεψη της αναμενόμενης παρατήρησης $\hat{z}(k+1|k)$ και του υπολοίπου της συμμεταβλητότητας $P_{vv}(k+1|k)$. Σε αυτή την πρόβλεψη πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και ο θόρυβος της παρατήρησης.

- Τέλος, πρόβλεψη του πίνακα αλληλοσυσχέτισης (cross-correlation matrix) $P_{xz}(k+1|k)$.

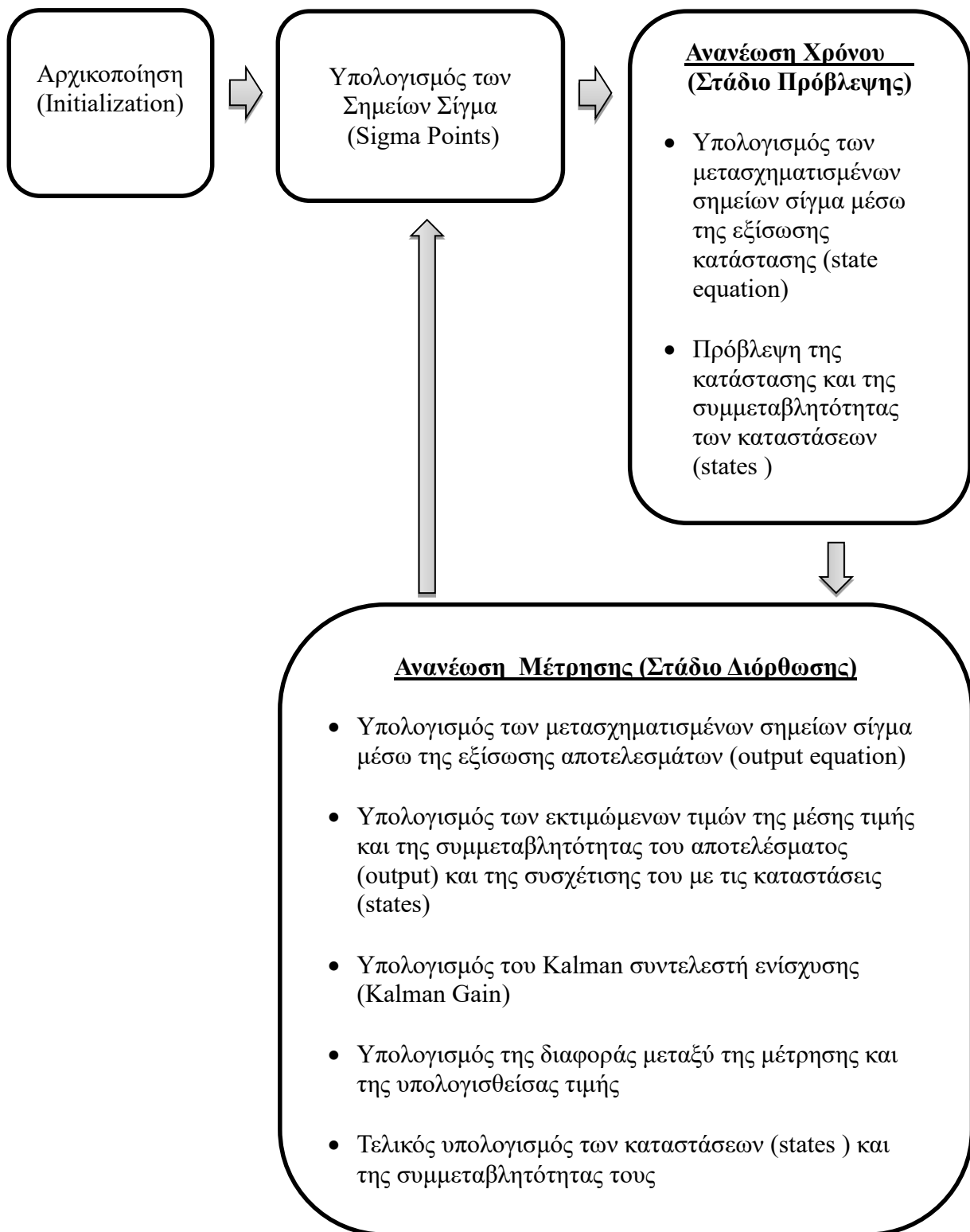
Αυτή η διαδικασία μπορεί εύκολα να επιτευχθεί με μία αναδιάρθρωση των διανυσμάτων της κατάστασης και των μοντέλων της διεργασίας και της παρατήρησης/μέτρησης. Κατ' αρχήν, το διάνυσμα κατάστασης επαυξάνεται με τους όρους του θορύβου και της διεργασίας για να δώσει ένα διάνυσμα $n^a = n + q$ διαστάσεων $x^a(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$.

Το μοντέλο της διεργασίας επαναδιατυπώνεται ως συνάρτηση του $x^a(k)$, $x(k+1) = f[x^a(k), u(k), k]$ και ο unscented μετασχηματισμός χρησιμοποιεί $2n^a + 1$ σημεία σίγμα τα οποία αντλούνται από

$$\hat{x}^a(k|k) = \begin{pmatrix} \hat{x}(k|k) \\ 0_{q \times 1} \end{pmatrix}, \quad P^a(k|k) = \begin{bmatrix} P(k|k) & P_{xv}(k|k) \\ P_{xv}(k|k) & Q(k) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Οι πίνακες της κύριας διαγωνίου είναι οι συμμεταβλητότητες και τα μη διαγώνια υπό-στοιχεία (sub-block) είναι οι συσχετίσεις μεταξύ των σφαλμάτων κατάστασης και του θορύβου της διεργασίας. Αν και αυτή η μέθοδος απαιτεί τη χρήση πρόσθετων σημείων σίγμα, αυτό σημαίνει ότι η επίδραση του θορύβου διεργασίας (όσον αφορά τις επιπτώσεις στη μέση τιμή και στη συμμεταβλητότητα) εισάγεται με ακρίβεια ίδιας τάξης, όπως η αβεβαιότητα στην κατάσταση. Η αλληλουχία των βημάτων του UKF δίνεται στο Σχήμα 2.3, ενώ στο Πλαίσιο 2.1 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι μαθηματικές εκφράσεις που περιλαμβάνονται.

Διάφορες επεκτάσεις και τροποποιήσεις μπορούν να γίνουν σε αυτή τη βασική μέθοδο για να ληφθούν υπόψη συγκεκριμένες λεπτομέρειες μίας δεδομένης εφαρμογής. Για παράδειγμα, αν ο θόρυβος παρατήρησης εισάγεται με ένα μη γραμμικό τρόπο, ή συσχετίζεται με το θόρυβο διεργασίας ή/ και παρατήρησης, τότε το επαυξημένο διάνυσμα επεκτείνεται για να συμπεριλάβει τους όρους παρατήρησης/μέτρησης [9].



Σχήμα 2.3: Σχηματικό Διάγραμμα των Σταδίων του UKF

<p><u>Αρχικοποίηση</u></p> $\hat{x}_0 = E[x_0]$ $P_0 = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T]$ <p>1. Δημιουργία του επαυξημένου συστήματος για να συμπεριληφθούν οι παράμετροι του θορύβου</p> $\hat{x}_{k-1}^a = [\hat{x}_{k-1}^T, w_{k-1}^T, v_{k-1}^T]^T$ $\hat{x}_0^a = E[x^a] = [\hat{x}_0^T \ 0 \ 0]^T$ $P_0^a = E[(x_0^a - \hat{x}_0^a)(x_0^a - \hat{x}_0^a)^T]$ <p><u>Βρόγος Ανάδρασης</u></p> <p>2. Υπολογισμός των σημείων σίγμα</p> $X_{k-1}^a = [X_0, X_L]$ <p>όπου $X_0 = \hat{x}_{k-1}^a$</p> $X_i = \hat{x}_{k-1}^a + \left(\sqrt{(L + \lambda)P_k^a} \right), i = 1, \dots, L$ $X_i = \hat{x}_{k-1}^a - \left(\sqrt{(L + \lambda)P_k^a} \right), i = L + 1, \dots, 2L$ <p>• <u>Ενημέρωση Χρόνου</u> (Time Update)</p> <p>3. Μετασχηματισμός των σημείων σίγμα μέσω του μοντέλου του συστήματος</p> $X_{k k-1}^{x,i} = f(X_{k k-1}^{x,i}, X_{k k-1}^{v,i}), i = 0, \dots, 2L$ <p>4. Υπολογισμός της προβλεπόμενης μέσης τιμής και συμμεταβλητότητας</p> $\hat{x}_k^- = \sum_{i=0}^{2L^a} W_i^{(m)} X_{i,k k-1}^x$ $P_k^- = \sum_{i=0}^{2L^a} W_i^{(c)} [X_{i,k k-1}^x - \hat{x}_k^-][X_{i,k k-1}^x - \hat{x}_k^-]^T$ $Y_{k k-1} = H [X_{k k-1}^x, X_{k k-1}^n]$ $\hat{y}_k^- = \sum_{i=0}^{2L^a} W_i^{(m)} Y_{i,k k-1}$	<p>• <u>Ενημέρωση Μέτρησης</u> (Measurement Update)</p> <p>5. Υπολογισμός του συντελεστή ενίσχυσης Kalman (Kalman Gain)</p> $K_k = P_{x_k y_k} P_{\hat{y}_k \hat{y}_k}^{-1}$ <p>όπου</p> $P_{x_k y_k} = \sum_{i=0}^{2L^a} W_i^{(c)} [X_{i,k k-1}^x - \hat{x}_k^-][Y_{i,k k-1} - \hat{y}_k^-]^T$ $P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} = \sum_{i=0}^{2L^a} W_i^{(c)} [Y_{i,k k-1} - \hat{y}_k^-][Y_{i,k k-1} - \hat{y}_k^-]^T$ <p>6. Βελτίωση των προβλέψεων της κατάστασης (εκ των υστέρων εκτιμήσεις) χρησιμοποιώντας τις τελευταίες παρατηρήσεις.</p> $\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - \hat{y}_k)$ $P_k = P_k^- - K_k P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} K_k^T$
--	--

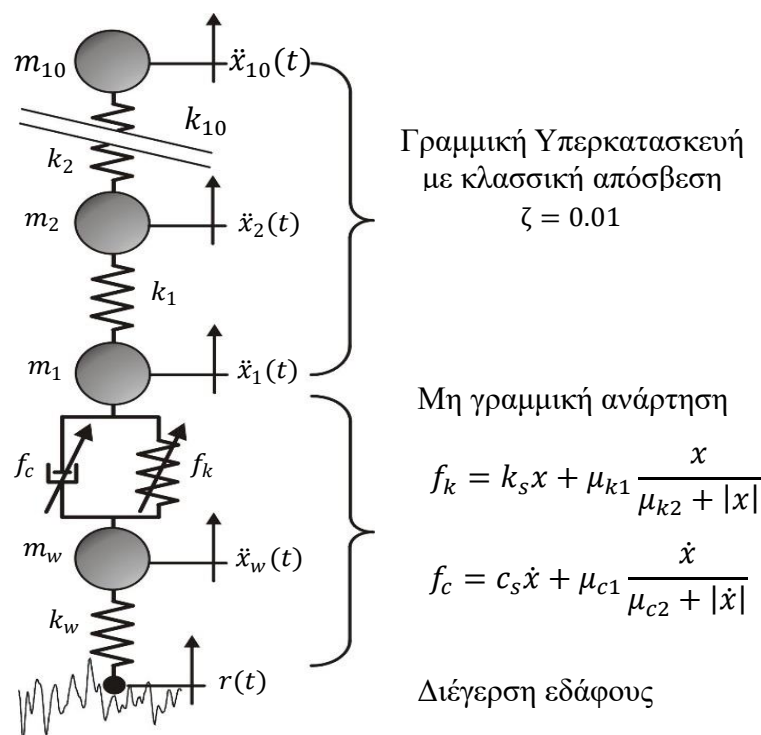
Πλαίσιο 2.1: Ο αλγόριθμος λειτουργίας του Unscented Kalman Filter (UKF)

Κεφάλαιο 3: Απλό μοντέλο σημειακών μαζών σε σειρά

3.1 Το μοντέλο

Βασικό σκοπό των όσων περιγράφονται στο παρόν κεφάλαιο αποτέλεσε η επιβεβαίωση της ορθότητας του υπολογιστικού μοντέλου του UKF καθώς και η μελέτη της συμπεριφοράς του υπό διαφορετικές τιμές παραμέτρων.

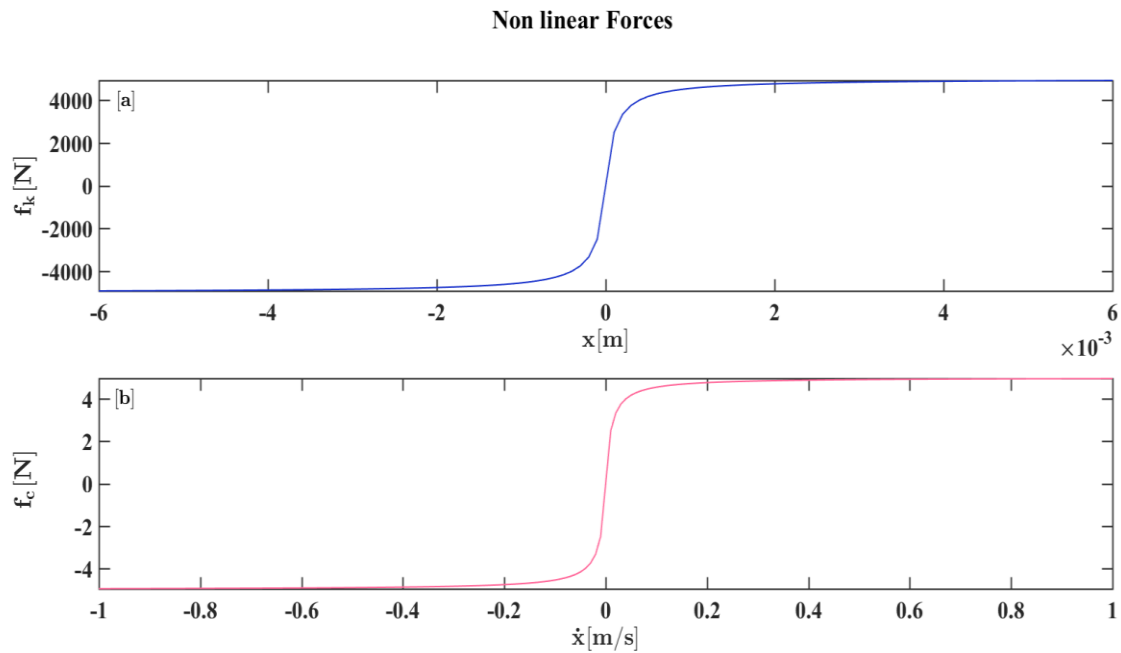
3.1.1 Περιγραφή του μοντέλου



Σχήμα 3.1: Το μοντέλο των έντεκα σημειακών μαζών

Το αρχικό μοντέλο στο οποίο θα εφαρμόσουμε τη μεθοδολογία είναι ένα απλό σύστημα σημειακών μοναδιαίων μαζών m οι οποίες συνδέονται σε σειρά με ελατήρια και αποσβεστήρες με τιμές $k_i = 100000 \text{ N/m}$ και $c_i = 0.1$. Σε αυτές τις μάζες συνδέουμε μία επιπλέον σημειακή μάζα $m_w = 10 \text{ kg}$, η οποία συνδέεται με την υπόλοιπη κατασκευή μέσω μη γραμμικού ελατηρίου και αποσβεστήρα, η συγκεκριμένη συνδεσμολογία χρησιμοποιείται ενίοτε χάριν απλότητας για να προσομοιώσει τις μη γραμμικές αναρτήσεις ενός οχήματος κατά τη μελέτη του σκελετού του. Η ανωτέρα κατασκευή απεικονίζεται στο Σχήμα 3.1 ενώ οι μη γραμμικές δυνάμεις, οι οποίες θυμίζουν μία πιο ομαλή μορφή της τριβής Coulomb, αποτυπώνονται στο

Σχήμα 3.2. Το πόσο έντονα επηρεάζει αυτή η μη γραμμικότητα την της κατασκευής είναι εμφανές στο Σχήμα 2.viii του παραρτήματος 2.



Σχήμα 3.2: α) Μη γραμμική φόρτιση λόγω ελατηρίου β) μη γραμμική φόρτιση λόγω αποσβεστήρα

3.1.2 Περιγραφή της μεθοδολογίας που ακολουθήθηκε

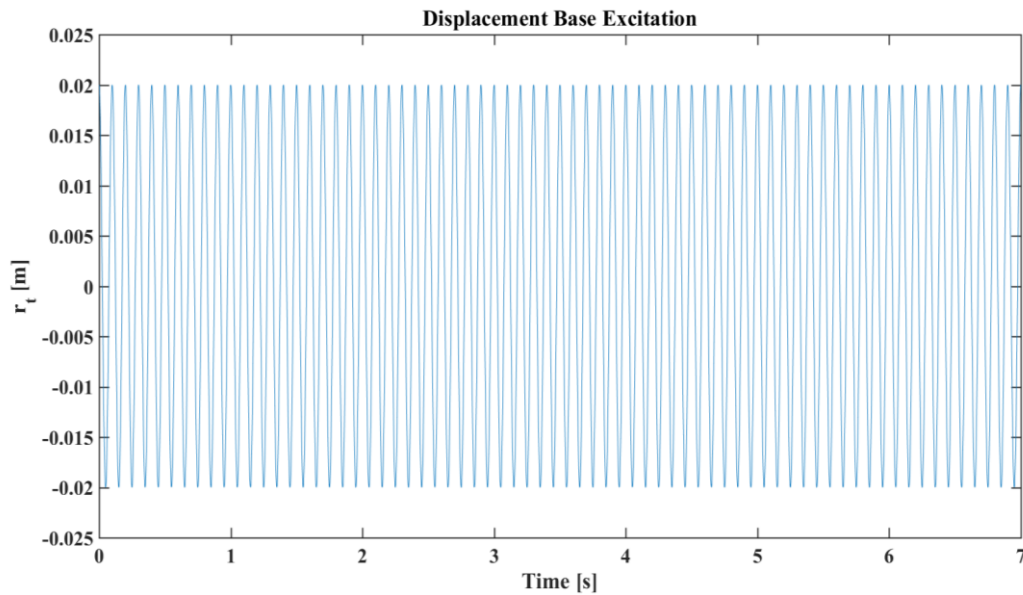
Το μοντέλο εξετάστηκε για 2 διαφορετικά είδη διέγερσης εδάφους. Η διέγερση f εφαρμόζεται στη μάζα m_w . Στην πρώτη περίπτωση είναι αρμονικής μορφής (Σχήμα 3.3) και στη δεύτερη ψευδοτυχαίας μορφής (Σχήμα 3.4).

Ως σημείο αναφοράς και σύγκρισης χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα που προέκυψαν από αριθμητική προσομοίωση. Όπως εξηγήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο χρειάζεται να λαμβάνουμε μετρήσεις της απόκρισης της κατασκευής σε ορισμένα σημεία κάθε χρονική στιγμή. Στην προκειμένη περίπτωση ως μετρούμενο μέγεθος θα θεωρήσουμε την επιτάχυνση, καθώς είναι πολύ σύνθητες να χρησιμοποιούνται επιταχυνσιόμετρα ως αισθητήρες μέτρησης σε πραγματικές κατασκευές λόγω της φύσης και της ευχρηστίας αυτών των αισθητήρων.

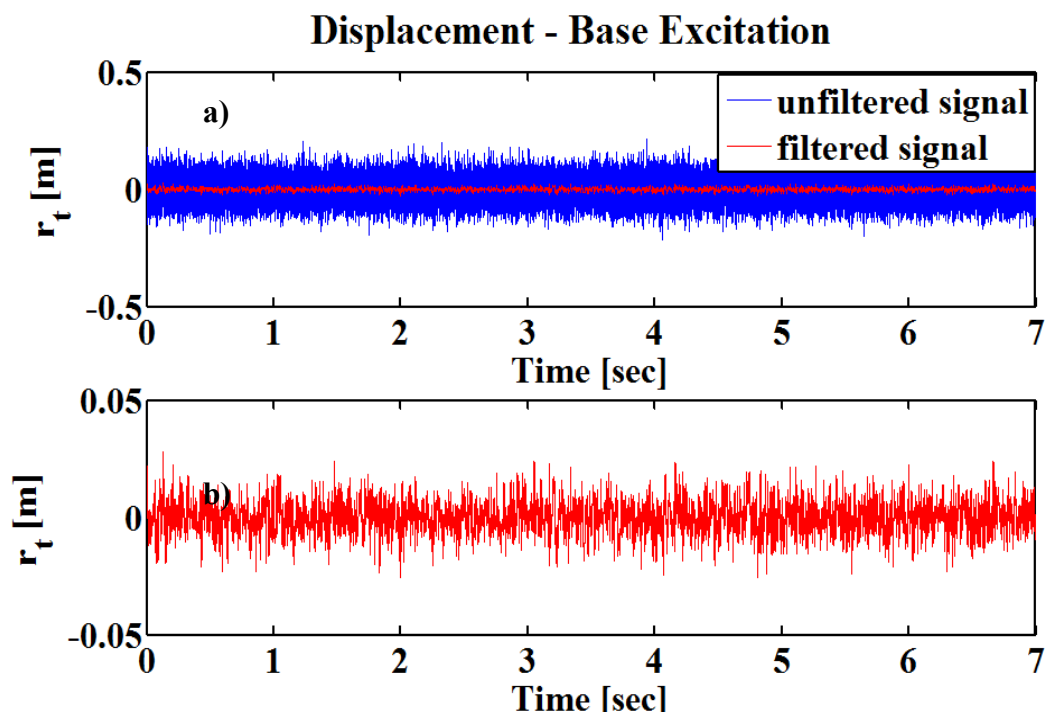
Σε όλες τις αναλύσεις που ακολούθησαν, ως κριτήριο σύγκρισης ορίστηκε η μέση τιμή της διαφοράς μεταξύ των τιμών που προέκυψαν από την εκτίμηση μέσω του UKF και των αντίστοιχων τιμών της θεωρητικής λύσης. Κάθε φορά γίνονται δύο αναλύσεις η μία αφορά στις τιμές της μετατόπισης και η άλλη στις ταχύτητας.

Αρχικά μέσω δοκιμών καταλήξαμε στην επιλογή ορισμένων αρχικών τιμών των παραμέτρων που επηρεάζουν το φίλτρο, για τις οποίες υπήρχαν μικρές αποκλίσεις των εκτιμήσεων από τις θεωρητικές τιμές, καθώς και μικρή τιμή της απόκλισης αυτών των

διαφορών για τρεις (3) μόνο μετρήσεις. Κατόπιν ακολούθησε η πιο πλήρης στατιστική ανάλυση που θα παρουσιαστεί στην επόμενη ενότητα.



Σχήμα 3.3: Η αρμονική διέγερση που εφαρμόστηκε στο μοντέλο μας



Σχήμα 3.4: Η ψευδοτυχαία διέγερση που εφαρμόστηκε στο μοντέλο μας a) Σύγκριση του σήματος της διέγερσης πριν και μετά την εφαρμογή φίλτρου b) Η φιλτραρισμένη διέγερση που εφαρμόστηκε

Πιο αναλυτικά, εξετάστηκε το πώς επηρεάζουν τα αποτελέσματα ο αριθμός των σημείων στα οποία μετράμε καθώς και αν έχει σημασία το ποια είναι αυτά τα σημεία.

Επιπλέον για την ψευδοτυχαία διέγερση μελετήθηκε η επίδραση των τιμών του θορύβου της μέτρησης αλλά και του σφάλματος της μοντελοποίησης.

3.2 Επίδραση του αριθμού των σημείων μέτρησης

Προκειμένου να μελετήσουμε πως επιδρά ο αριθμός των σημείων, των οποίων την επιτάχυνση εισάγουμε στον υπολογισμό του UKF, θα πραγματοποιήσουμε ανάλυση μεταβλητότητας (ANOVA) με έναν παράγοντα σε πολλά επίπεδα [7,10]. Ο παράγοντας θα είναι ο αριθμός των σημείων στα οποία τοποθετούνται επιταχυνσιόμετρα. Είναι λογικό βέβαια να αναμένουμε ότι ένα μη γραμμικό σύστημα θα χρειάζεται μετρήσεις σε τουλάχιστον τρία σημεία προκειμένου η μεθοδολογία να μας δώσει ακριβή αποτελέσματα.

Ως εξαρτημένη μεταβλητή θα θεωρήσουμε τη μέση τιμή της διαφοράς μεταξύ της απόκρισης του UKF και της απόκρισης που θεωρούμε πρότυπη λύση.

Θα εξετάσουμε τη μέση τιμή της διαφοράς μεταξύ θεωρητικής και υπολογισθείσας τιμής για τη μετατόπιση, την ταχύτητα καθώς και τις δύο παραμέτρους τις οποίες εκτιμούμε. Σημειώνεται ότι αυτή η μελέτη θα γίνει στο σύστημα αφού θα έχει φτάσει σε ένα τέτοιο χρονικό σημείο ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχει ξεπεράσει το αρχικό διάστημα που απαιτείται για να προσαρμοστεί το UKF στα δεδομένα μας.

Θα παρουσιάσουμε τα συμπεράσματα που εξαγάγαμε, για την περίπτωση της αρμονικής φόρτισης αρχικά και στη συνέχεια για την ψευδοτυχαία διέγερση. Σημειώνεται πως οι πλήρεις πίνακες με τις τιμές που προκύπτουν από την ANOVA βρίσκονται στο παράρτημα 1, ενώ στο κυρίως σώμα του παρόντος κειμένου θα παρατίθενται μόνο τα παρατηρούμενα ελάχιστα επίπεδα σημαντικότητας (p-value).

3.2.1 Αρμονική Φόρτιση

3.2.1.1 Αρχική εκτίμηση

Στην πρώτη «δειγματοληψία » που πραγματοποιούμε τα επίπεδα του παράγοντα είναι έντεκα, όσοι και οι βαθμοί ελευθέριας του συστήματος

Λόγω της συμπεριφοράς που παρατηρείται θεωρούμε ότι ο χρόνος που πρέπει να παρέλθει ώστε το UKF να προσαρμόζεται με ικανοποιητικό τρόπο στα δεδομένα είναι 1.5 δευτερόλεπτα (1.5 sec). Κατά συνέπεια στον υπολογισμό των διαφορών χρησιμοποιήθηκαν μετρήσεις από εκείνη τη χρονική στιγμή και μετά.

Για κάθε επίπεδο του παράγοντα θα πραγματοποιήσουμε πενήντα μετρήσεις, ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι, λόγω κεντρικού οριακού θεωρήματος, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μεθοδολογία που ακολουθείται σε κανονικούς πληθυσμούς.

Επειδή είναι πολύ πιθανό να παίζει ρόλο το σε ποιο συνδυασμό σημείων λαμβάνουν χώρα οι μετρήσεις, για τον εκάστοτε συγκεκριμένο αριθμό σημείων θα λαμβάνουμε το συνδυασμό κατά ψευδοτυχαίο τρόπο σε κάθε επανάληψη.

Ως εξαρτημένη μεταβλητή θα θεωρήσουμε τη μέση τιμή ως προς το χρόνο, της μέσης τιμής ως προς τους βαθμούς ελευθερίας. Δηλαδή x η υπό εξέταση τιμή της απόκρισης (μετατόπιση ή ταχύτητα), η τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής y θα είναι

$$y = \frac{\sum_{t=t_1}^{length(t)} \frac{\sum_{dof=1}^{11} (x_{UKF} - x_{ODE})}{11}}{length(t) - t_1}.$$

Η προσομοίωση έλαβε χώρα για ένα συγκεκριμένο συνδυασμό παραμέτρων του UKF ο οποίος έδωσε αρκετά καλή προσέγγιση ακόμα και για τρία (3) σημεία μέτρησης, για εξωτερική διέγερση αρμονικής μορφής.

Μετά το πέρας της δειγματοληψίας (μέσω προσομοίωσης στην προκειμένη περίπτωση), πραγματοποιούμε έλεγχο στις τιμές ανά επίπεδο του παράγοντα, ώστε να διαπιστώσουμε αν όντως επαρκεί το μέγεθος του δείγματος ώστε να ισχύει το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ). Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήσαμε τον έλεγχο Kolmogorov-Smirnov. Τελικά η υπόθεση ότι το δείγμα μας θα μπορούσε να προέρχεται από κανονική κατανομή απορρίφθηκε με παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας (p-value) της τάξης του 10^{-10}

Κατά συνέπεια θα εφαρμόσουμε μη παραμετρική ανάλυση (Kruskal-Wallis). Τα αποτελέσματα φαίνονται στα Σχήματα 3.5, 3.6 και στους Πίνακες 3.1, 3.2.

Πίνακας 3.1: Ανάλυση Kruskal-Wallis για τη Μετατόπιση

Πηγή	Chi-sq	Prob>Chi-Sq
Παράγοντας	299.92	1.6201e-58

Πίνακας 3.2: Ανάλυση Kruskal-Wallis για την Ταχύτητα

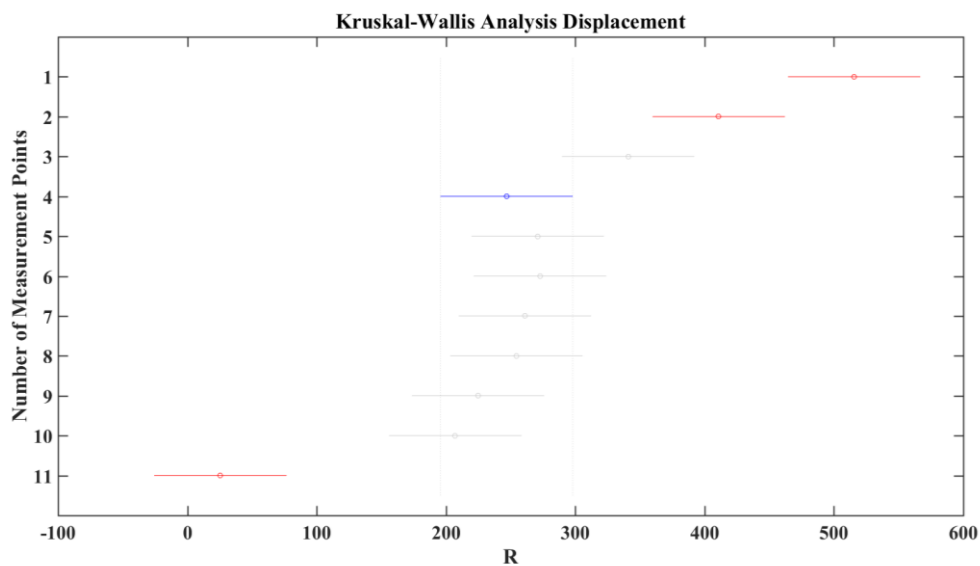
Πηγή	Chi-sq	Prob>Chi-Sq
Παράγοντας	234.08	1.1969e-44

Όπως είναι εμφανές τόσο από τους πίνακες όσο και από τα διαγράμματα υπάρχει ισχυρή επίδραση του αριθμού των σημείων στα οποία πραγματοποιούμε μετρήσεις, για μετρήσεις από ένα (1) μέχρι τέσσερα (4) σημεία. Άρα χρησιμοποιώντας αυτή την ανάλυση ως μία αρχική

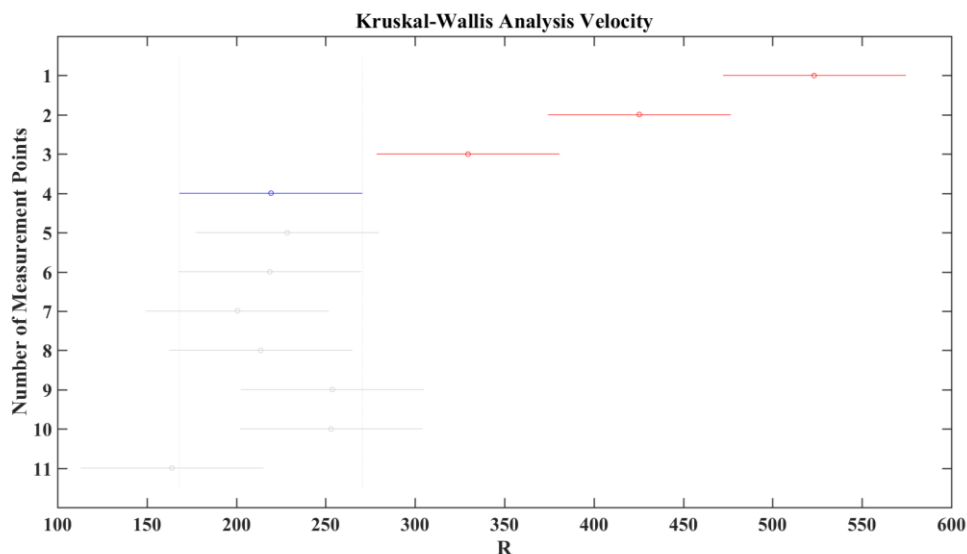
εκτίμηση και χωρίς βέβαια να αξιώνουμε ότι τα αποτελέσματά μας δίνουν την απολύτως ακριβή εικόνα, θα μπορούσε να θεωρηθεί η μέτρηση σε τέσσερα (4) σημεία ως πολύ καλή επιλογή. Εφόσον δε μας δίνει πολύ χειρότερα αποτελέσματα σε σχέση με τη μέτρηση σε περισσότερα σημεία, αλλά ταυτόχρονα είναι και επαρκώς λίγα τα σημεία στα οποία μετράμε. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι ακόμα και η μέτρηση σε τρία (3) σημεία μας δίνει ένα αρκεύτως μικρό σφάλμα.

Επιπλέον στην ανάλυση που προηγήθηκε λάβαμε υπ' όψη μας τη διαφορά και όχι το σφάλμα, επειδή σε κάποια σημεία οι τιμές που προκύπτουν από την αριθμητική ολοκλήρωση (οι πρότυπες τιμές) είναι πλησίον του μηδενός και θα οδηγούσαν σε τιμές σφάλματος εξαιρετικά μεγάλες, οι οποίες θα επηρέαζαν ίσως λανθασμένα το μέσο όρο του σφάλματος.

Στη συνέχεια θα επαναλάβουμε αυτή την ανάλυση σε στενότερο εύρος επιπέδων των σημείων μέτρησης και εφόσον θα έχουν βελτιωθεί οι τιμές των παραμέτρων του UKF. Επιπλέον θα μελετήσουμε ποιος συνδυασμός σημείων είναι πιθανότερο ότι θα μας δώσει πιο ακριβή αποτελέσματα.



Σχήμα 3.5: Διάγραμμα σύγκρισης για τη μετατόπιση



Σχήμα 3.6: Διάγραμμα σύγκρισης για την ταχύτητα

3.2.1.2 Περαιτέρω εξέταση της συμπεριφοράς

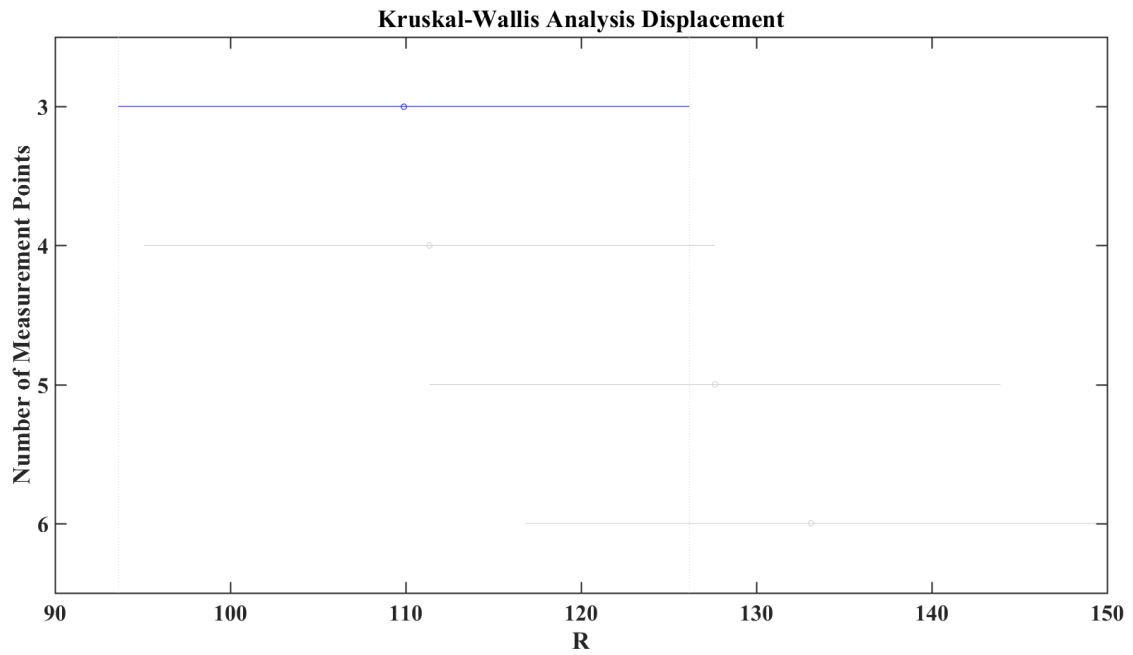
Σε συνέχεια της αδρής ανάλυσης που προηγήθηκε θα λάβει χώρα περαιτέρω διερεύνηση των τιμών των παραμέτρων του Φίλτρου ώστε να μειωθεί η διαφορά μεταξύ των υπολογισθέντων και των πρότυπων τιμών.

Ο ολοκληρωμένος και πλήρης τρόπος για να γίνει αυτό θα ήταν μέσω μεθόδων βελτιστοποίησης, όμως δεδομένου ότι το μοντέλο μας είναι σχετικά απλό και χάριν εξοικονόμησης χρόνου πραγματοποιήσαμε δοκιμές και καταλήξαμε σε κάποιες τιμές που δίνουν πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα.

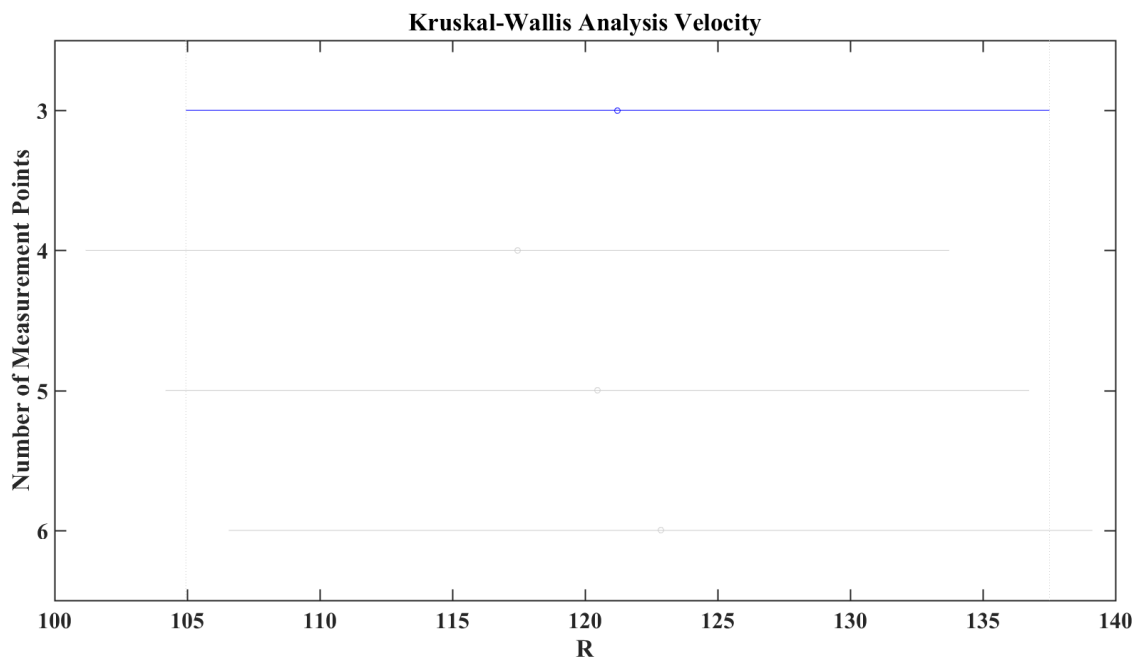
Οι παράμετροι που εξεταστήκαν ήταν οι αρχικές τιμές για την κατάσταση και τη συμμεταβλητότητα. Η διαφορά για τις τιμές των παραμέτρων (κατά την εκτίμηση παραμέτρων – parameter estimation) δε λήφθηκε υπ' όψιν ως κριτήριο επειδή διαπιστώθηκε ότι είναι εφικτό με κατάλληλη προσαρμογή του συντελεστή k (kfactor) στο UKF, να επιτευχθεί επιθυμητή προσέγγιση αφού πρώτα έχουμε εξασφαλίσει τη σύγκλιση των καταστάσεων.

Σε αυτό το πλαίσιο λοιπόν, εφόσον βρήκαμε τιμές των παραμέτρων του UKF τέτοιες ώστε να μας δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα για περιπτώσεις μετρήσεων σε τρία (3) σημεία, πραγματοποιήσαμε μία στατιστική ανάλυση όπως εκείνη της παραγράφου 3.2.1.1 αλλά μόνο για περιπτώσεις μετρήσεων σε τρία (3) έως και έξι (6) σημεία και με εξήντα (60) δειγματοληψίες για κάθε ένα από τα τέσσερα (4) επίπεδα του παράγοντα. Επίσης σε αυτήν την περίπτωση πήραμε μετρήσεις για χρονικό διάστημα από τα δύο δευτερόλεπτα (2 sec) και μετά, προκειμένου να εξασφαλίσουμε με ακόμα μεγαλύτερη βεβαιότητα ότι δε λαμβάνουμε υπόψη

μας τον αρχικό χρόνο προσαρμογής. Τα αποτελέσματα αποτυπώνονται στα Σχήματα 3.7 και 3.8.



Σχήμα 3.7: Διάγραμμα σύγκρισης για μετατόπιση



Σχήμα 3.8: Διάγραμμα σύγκρισης για την ταχύτητα

Όπως συνάγεται από τα ανωτέρω είναι πιθανό να μην υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά είτε επιλέξουμε τρία (3) είτε επιλέξουμε έως και έξι (6) σημεία δειγματοληψίας. Βέβαια αυτό είναι μόνο μία πτυχή της αλήθειας. Στην πραγματικότητα θα έπρεπε να μελετήσουμε κάθε συνδυασμό για τρία (3) έως και έξι (6) σημεία δειγματοληψίας (ή αντίστοιχα για όλους τους αριθμούς σημείων στην προηγούμενη ανάλυση) και τότε μόνο θα μπορούσαμε να πούμε αν πραγματικά είναι ή όχι είναι στατιστικά σημαντική η διαφορά. Παρά ταύτα εφόσον τα τρία (3) σημεία μας δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα θα αρκεστούμε στην ανάλυση που προηγήθηκε και στην επόμενη παράγραφο θα εξετάσουμε ποιοι συνδυασμοί τριών σημείων είναι δυνατό να μας δώσουν μικρότερες διαφορές σε σχέση με την πρότυπη λύση.

3.2.1.3 Μελέτη της επίδρασης του συνδυασμού των σημείων για συγκεκριμένο αριθμό σημείων μέτρησης

Προκειμένου να κάνουμε την τελική επιλογή του σημείου που θα πραγματοποιούνται οι μετρήσεις, επαναλάβουμε την προηγούμενη προσομοίωση αλλά αυτή τη φορά πραγματοποιήσαμε 10 επαναλήψεις για κάθε έναν από τους εκατόν εξήντα πέντε (165) συνδυασμούς σημείων που μπορούν να υπάρξουν για τρία (3) σημεία μέτρησης. Το μέγεθος των δειγμάτων ήταν μικρό για λόγους υπολογιστικού χρόνου. Και η ανάλυση που πραγματοποιήσαμε ήταν για ακόμα μία φορά ανάλυση Kruskal-Wallis.

Εντοπίσαμε το συνδυασμό των δειγμάτων του οποίου η μέση τιμή είναι η μικρότερη όλων, πρόκειται για τη μέτρηση στους β.ε. τρία (“3”), επτά (“7”) και δέκα (“10”) (κοινός και για την ταχύτητα και για την επιτάχυνση). Όσοι συνδυασμοί παρουσίασαν στατιστικά σημαντική διαφορά σε σχέση με εκείνον απορρίφθηκαν. Θα μπορούσαμε λοιπόν αν θέλαμε να επαναλάβουμε την ανάλυση μας μεταξύ μόνο των συνδυασμών οι οποίοι δεν παρουσίασαν στατιστικά σημαντική διαφορά (εκατόν οχτώ (108) συνδυασμοί για την περίπτωση της ταχύτητας και εκατόν είκοσι (120) για την περίπτωση της μετατόπισης), αλλά με μεγαλύτερο δείγμα. Στην παρούσα εργασία κάτι τέτοιο δεν κρίθηκε σκόπιμο όμως, καθώς αυτό το μοντέλο έχει ως στόχο να εξοικειωθούμε με τη γενικότερη συμπεριφορά του κώδικα μας και να τον ελέγξουμε σε μικρή κλίμακα και όχι να μελετήσουμε λεπτομερώς αυτό καθ’ αυτό το μοντέλο.

Τα γενικά συμπεράσματα που μπορούμε να εξάγουμε είναι ότι τα σημεία που θα επιλέξουμε είναι σημαντικά και δεν είναι εμφανές εκ πρώτης όψεως ποιος συνδυασμός είναι ο καλύτερος. Το μόνο ασφαλές συμπέρασμα είναι ότι είναι καλό να αποφεύγεται η χρήση σημείων συγκεντρωμένα στα άκρα.

3.2.1.4 Παρουσίαση αποτελεσμάτων

Προκειμένου να παρουσιαστεί μία εικόνα των μεγεθών της διαφοράς αλλά και του σφάλματος, παραθέτουμε στους πίνακες 3.3 και 3.4 τη μέση τιμή αλλά και τη μέση τιμή της τυπικής απόκλισης της διαφοράς καθώς και του σχετικού σφάλματος, τόσο για τη μετατόπιση όσο και για την ταχύτητα, όπως προκύπτουν από ένα σύνολο δέκα (10) επαναλήψεων.

Ακολουθεί στα σχήματα 3.9 έως και 3.11 μία ενδεικτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων για μία προσομοίωση (μία επανάληψη), σε τρία διαγράμματα όπου συγκρίνονται οι τιμές των καταστάσεων αλλά και των παραμέτρων σε έναν βαθμό ελευθερίας. Οι παράμετροι που εκτιμήθηκαν ήταν οι τιμές μ_{k1} και μ_{c1} του μη γραμμικού τμήματος της κατασκευής. Επίσης σημειώνεται ότι στον υπολογισμό της μέσης τιμής και της συμμεταβλητότητας λήφθηκαν υπ' όψιν οι μετρήσεις από 2s έως 7s.

Στους πίνακες 3.5 και 3.6 αναγράφονται οι μέσες τιμές της διαφοράς και του σφάλματος για όλους τους βαθμούς ελευθερίας συνολικά, για μία προσομοίωση. Οι τιμές της τυπικής απόκλισης του σφάλματος είναι καταφανώς πολύ υψηλές. Αυτό συμβαίνει λόγω του ότι σε ορισμένες χρονικές στιγμές το σφάλμα αυξάνεται έως και τρεις τάξεις μεγέθους πάνω από το σύνηθες. Αυτή η συμπεριφορά δεν μας προβληματίζει ιδιαίτερα επειδή οφείλεται στις πολύ μικρές τιμές που έχει η πρότυπη λύση σε εκείνα τα σημεία και πιθανόν να μην έχει περάσει επαρκής αριθμός επαναλήψεων ώστε το UKF να προσεγγίζει με αρκετή ακρίβεια την απόκριση.

Πίνακας 3.3: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της διαφοράς και του σφάλματος της μετατόπισης για τον συνδυασμό «3-7-10» για σύνολο 10 επαναλήψεων

Μέση τιμή της απόλυτης διαφοράς	Τυπική απόκλιση της απόλυτης διαφοράς	Μέση τιμή του σφάλματος	Μέση τιμή της τυπικής απόκλιση του σφάλματος
1.1848e-4	1.0733e-4	1.4537e-1	7.4627

Πίνακας 3.4: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της διαφοράς και του σφάλματος της ταχύτητας για τον συνδυασμό «3-7-10» για σύνολο 10 επαναλήψεων.

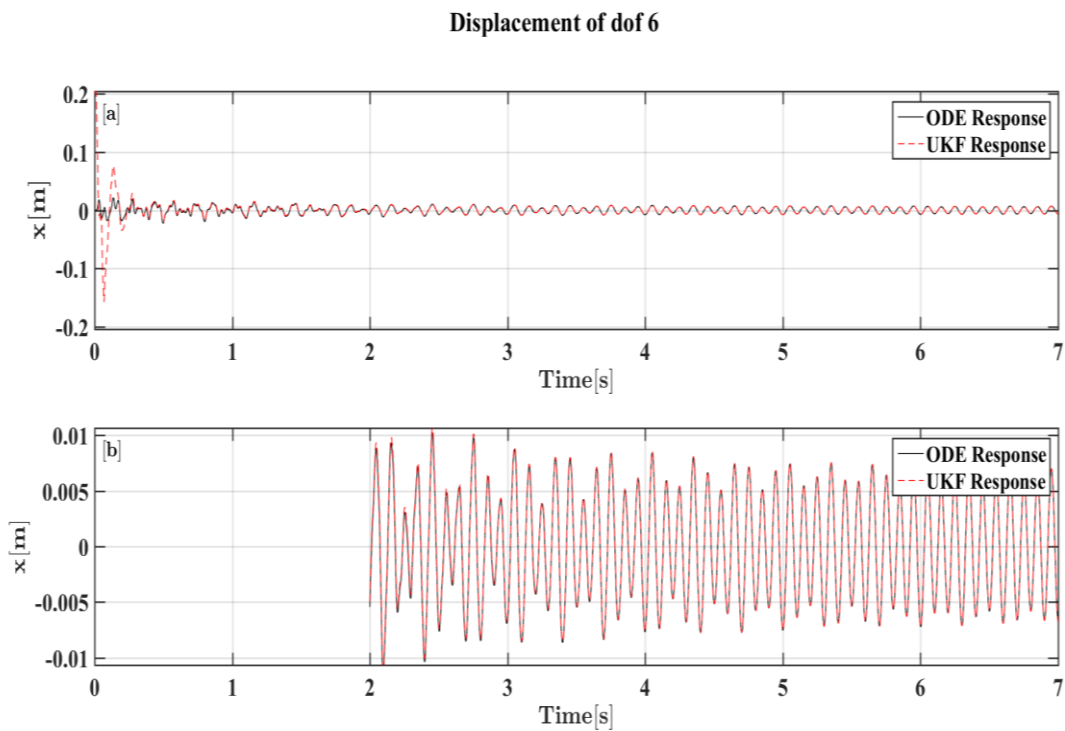
Μέση τιμή της απόλυτης διαφοράς	Τυπική απόκλιση της απόλυτης διαφοράς	Μέση τιμή του σφάλματος	Μέση τιμή της τυπικής απόκλιση του σφάλματος
7.0223e-3	6.5289e-3	1.4704e-3	5.8300e-2

Πίνακας 3.5: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της διαφοράς και του σφάλματος της μετατόπισης για το σύνολο των συνδυασμών

Μέση τιμή της απόλυτης διαφοράς	Τυπική απόκλιση της απόλυτης διαφοράς	Μέση τιμή του σφάλματος	Τυπική απόκλιση του σφάλματος
1.1873e-4	1.2869e-4	0.14531	1.4379e+1

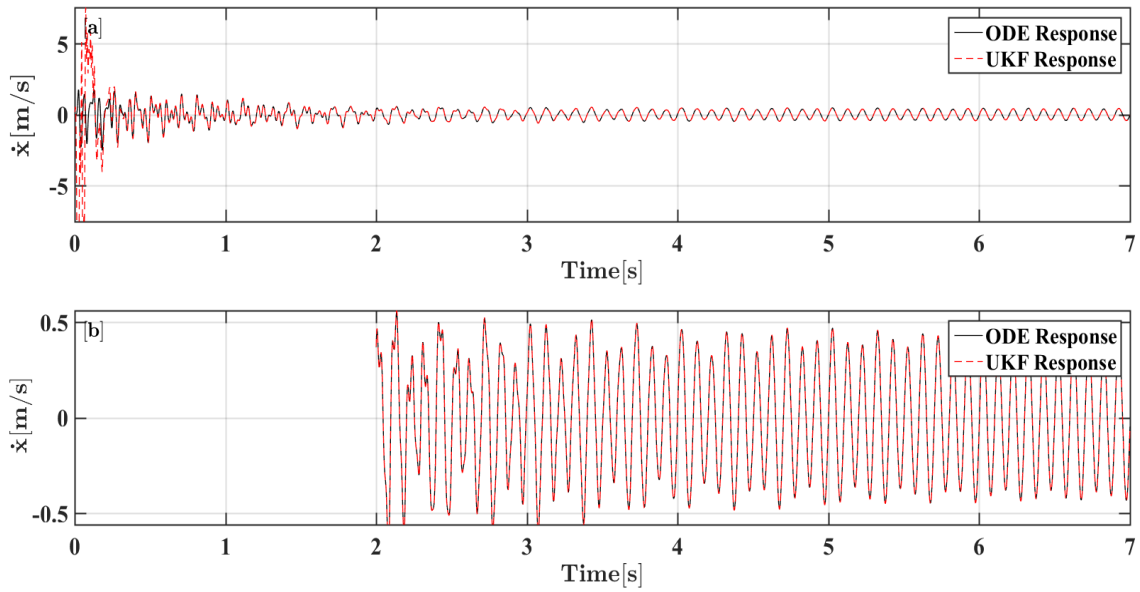
Πίνακας 3.6: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της διαφοράς και του σφάλματος της ταχύτητας για το σύνολο των συνδυασμών

Μέση τιμή της απόλυτης διαφοράς	Τυπική απόκλιση της απόλυτης διαφοράς	Μέση τιμή του σφάλματος	Τυπική απόκλιση του σφάλματος
7.0598e-3	8.0565e-3	0.1211	6.1353



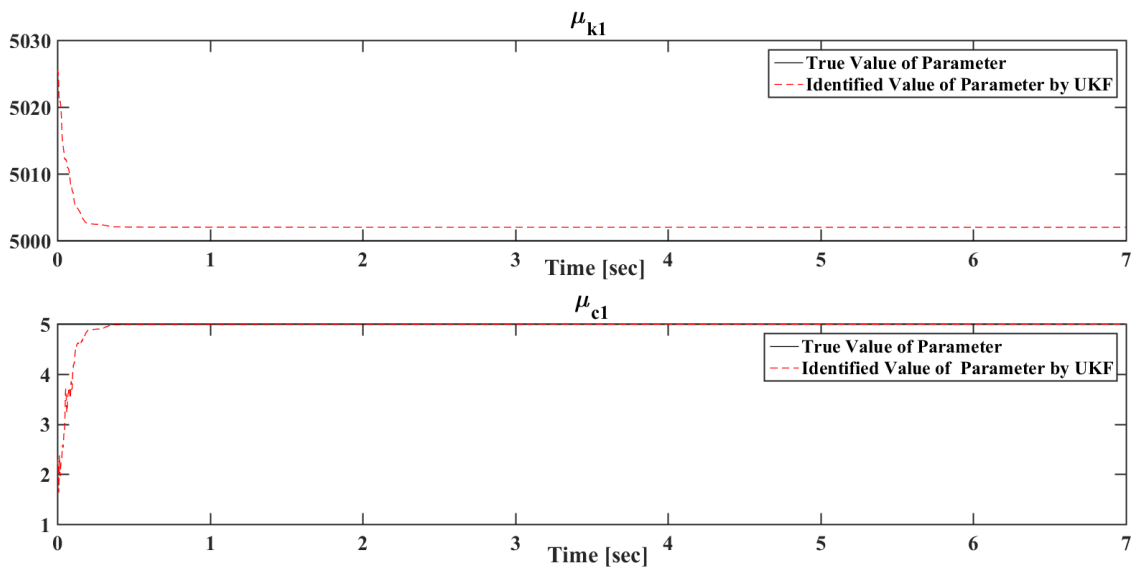
Σχήμα 3.9: Διάγραμμα για τη μετατόπιση στον 6^ο β.ε. α) για όλο το χρονικό διάστημα β) από 2s και έπειτα

Velocity of dof 6



Σχήμα 3.10: Διάγραμμα για τη μετατόπιση στον 6^ο β.ε. a) για όλο το χρονικό διάστημα b) από 2s και έπειτα

Parameters Estimation



Σχήμα 3.11: Διάγραμμα για την εκτίμηση των παραμέτρων

3.2.2 Ψευδοτυχαία Διέγερση

3.2.2.1 Μελέτη της επίδρασης του αριθμού των σημείων που λαμβάνουν χώρα οι μετρήσεις

Για τη μελέτη των σημείων μέτρησης πραγματοποιήσαμε τις ίδιες αναλύσεις με εκείνες για την περίπτωση της αρμονικής διέγερσης, απλώς στην προκειμένη περίπτωση εξετάσαμε κατευθείαν τις περιπτώσεις τριών (3) έως και έξι (6) σημείων.

Διαπιστώνεται μέσω του ελέγχου Kolmogorov-Smirnoff ότι ούτε σε αυτό το δείγμα μπορεί να αιτιολογηθεί η υπόθεση της κανονικής κατανομής οπότε πραγματοποιούμε ανάλυση Kruskal-Wallis, τα αποτελέσματα παρατίθενται στα Σχήματα 3.12 και 3.13 και στους πίνακες 3.7 και 3.8.

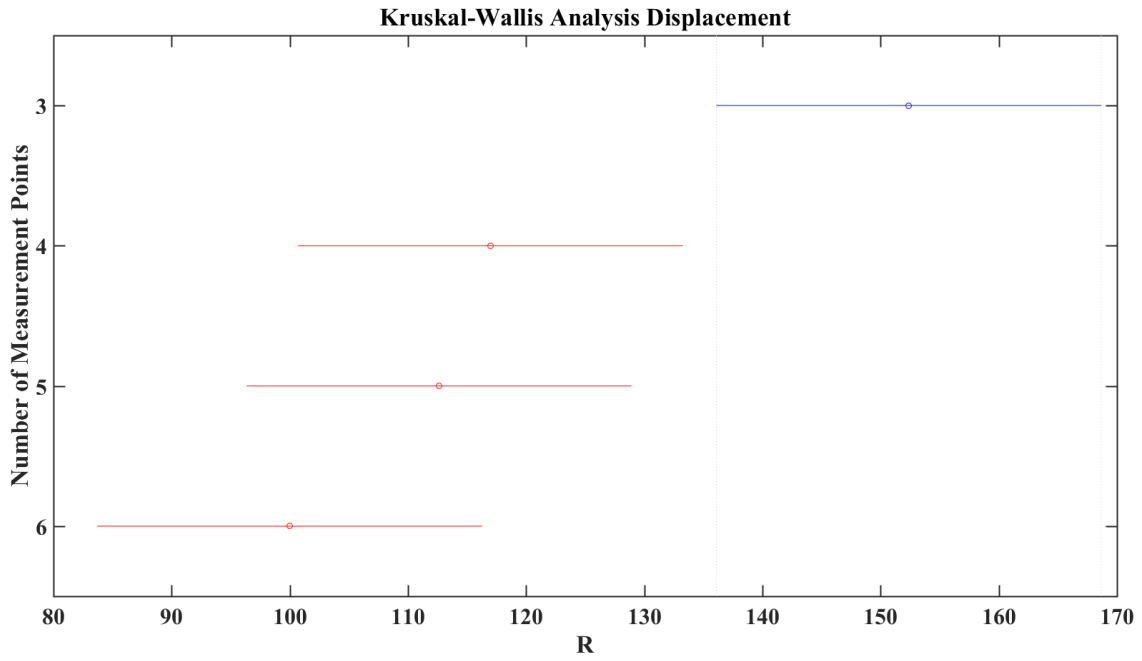
Πίνακας 3.7: Ανάλυση Kruskal-Wallis για τη μετατόπιση

Πηγή	Chi-sq	Prob>Chi-Sq
Παράγοντας	18.81	0.0003

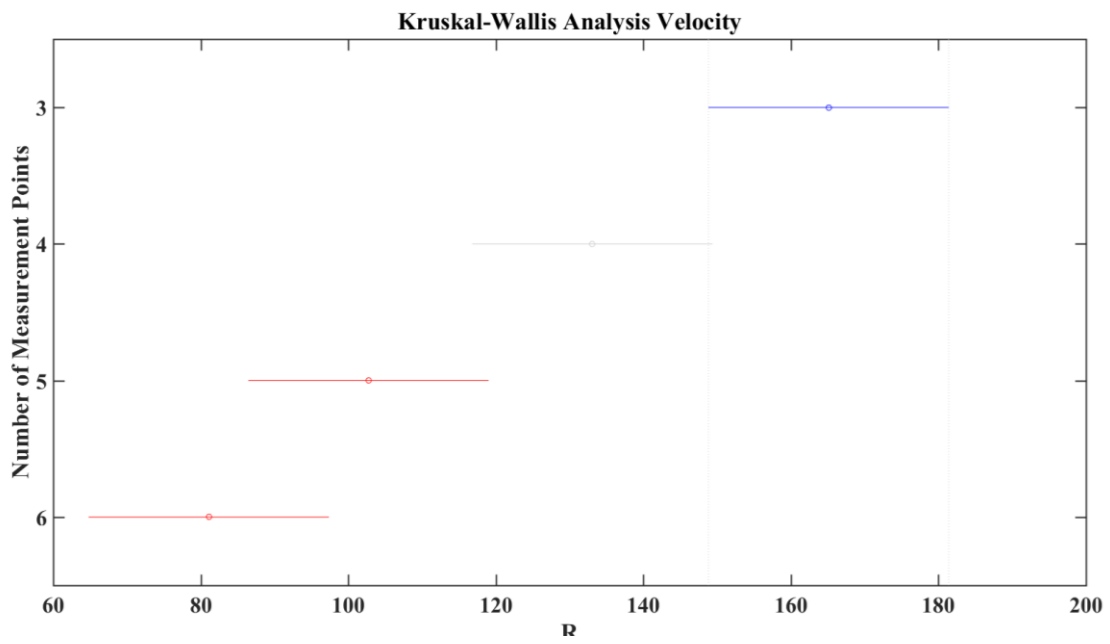
Πίνακας 3.8: Ανάλυση Kruskal-Wallis για την Ταχύτητα

Πηγή	Chi-sq	Prob>Chi-Sq
Παράγοντας	50	7.9813e-11

Από τα σχήματα συνάγεται ότι στην περίπτωση της «τυχαίας» διέγερσης παρατηρείται στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των τριών σημείων και των υπόλοιπων περιπτώσεων. Οι μέσες τιμές του σφάλματος και η τυπική τους απόκλιση παρατίθενται στους πίνακες 3.9 και 3.10. Όπως ήδη αναφέραμε στην περίπτωση της αρμονικής διέγερσης δεν μπορούμε να οδηγηθούμε σε ασφαλή συμπεράσματα δεδομένου ότι δεν έχουμε εξετάσει κάθε συνδυασμό για τις παραπάνω μετρήσεις. Κοινώς, ίσως ένας συνδυασμός τριών (3) σημείων να είναι επαρκώς ικανοποιητικός. Όμως με βάση αυτά τα δεδομένα είναι λογικό να επιλέξουμε τη δειγματοληψία σε τέσσερα (4) σημεία και να εξετάσουμε κάθε έναν από τους τριακόσιους τριάντα (330) συνδυασμούς για τα τέσσερα (4) σημεία, διότι μας παρέχει μία σχετική ακρίβεια και αποτελεί και μία οικονομική λύση από πλευράς αισθητήρων μέτρησης.



Σχήμα 3.12: Διάγραμμα για τη μετατόπιση



Σχήμα 3.13: Διάγραμμα για την ταχύτητα

Πίνακας 3.9: Διαφορά στη μετατόπιση

Αριθμός σημείων δειγματοληψίας	Μέση τιμή σφάλματος	Τυπική απόκλιση
3	0.0043950	0.0029425
4	0.00317799	0.0019549
5	0.0031445	0.0017244
6	0.0029861	0.0014495

Πίνακας 3.10: Διαφορά στην ταχύτητα

Αριθμός σημείων δειγματοληψίας	Μέση τιμή σφάλματος	Τυπική απόκλιση
3	1.0263	1.1003
4	0.70289	0.49289
5	0.51905	0.25144
6	0.43343	0.19013

3.2.2.2 Μελέτη της επίδρασης του συνδυασμού των σημείων για συγκεκριμένο αριθμό σημείων μέτρησης

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως και στην περίπτωση της αρμονικής διέγερσης επαναλάβαμε την προσομοίωση για δέκα (10) επαναλήψεις σε κάθε έναν από τους τριακόσιους τριάντα (330) συνδυασμούς σημείων που μπορούν να υπάρξουν όταν λαμβάνουμε μετρήσεις σε τέσσερα (4) σημεία. Το δείγμα για ακόμα μία φορά σύμφωνα με τον έλεγχο Kolmogorov-Smirnov και σε επίπεδο σημαντικότητας πέντε τοις εκατό (5%) δεν προέρχεται από κανονικό πληθυσμό, άρα η ανάλυση που πραγματοποιούμε είναι Kruskal-Wallis.

Ο συνδυασμός, οι μέσες τιμές των δειγμάτων του οποίου έχουν τη μικρότερη μέση τιμή για τη μετατόπιση είναι ο «3-5-7-11» και για την ταχύτητα είναι ο «3-5-6-11». Όσοι συνδυασμοί παρουσιάζουν στατιστικά σημαντική διαφορά σε σχέση με αυτούς τους δύο, στην εκάστοτε περίπτωση, απορρίπτονται. Όπως αναφέραμε ήδη στην παράγραφο 3.2.2 θα μπορούσαμε να επαναλάβουμε την ανάλυση μας μεταξύ μόνο των συνδυασμών οι οποίοι δεν παρουσίασαν στατιστικά σημαντική διαφορά με το συνδυασμό αναφοράς με μεγαλύτερο δείγμα (διακόσιοι οχτώ (208) συνδυασμοί για την περίπτωση της μετατόπισης και διακόσιοι τρεις (203) για την περίπτωση της ταχύτητας) όμως κάτι τέτοιο δεν θα συντελούσε στο στόχο

του παρόντος πονήματος. Αυτοί οι δύο συνδυασμοί δεν παρουσίασαν στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ τους.

3.2.2.3 Παρουσίαση αποτελεσμάτων

Στους πίνακες 3.10 έως και 3.13 παραθέτουμε τα στατιστικά μεγέθη (μέση τιμή και τυπική απόκλιση) που προέκυψαν από το δείγμα των δέκα (10) επαναλήψεων, αρχικά για τον συνδυασμό «3-5-7-11» και ακολούθως για τον «3-5-6-11». Σε κάθε πίνακα παρουσιάζονται οι τιμές τόσο για την απόλυτη διαφορά όσο και για το σχετικό σφάλμα.

Πίνακας 3.10: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της διαφοράς και του σφάλματος της μετατόπισης για τον συνδυασμό «3_5_7_11»

Μέση τιμή της απόλυτης διαφοράς	Τυπική απόκλιση της απόλυτης διαφοράς	Μέση τιμή του σφάλματος	Μέση τιμή της τυπικής απόκλιση του σφάλματος
0.00037864	0.00029469	0.280399	30.6428

Πίνακας 3.11: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της διαφοράς και του σφάλματος της ταχύτητας για τον συνδυασμό «3_5_7_11»

Μέση τιμή της απόλυτης διαφοράς	Τυπική απόκλιση της απόλυτης διαφοράς	Μέση τιμή του σφάλματος	Μέση τιμή της τυπικής απόκλιση του σφάλματος
0.073611	0.066929	0.42579	41.9496

Πίνακας 3.12: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της διαφοράς και του σφάλματος της μετατόπισης για τον συνδυασμό «3_5_6_11»

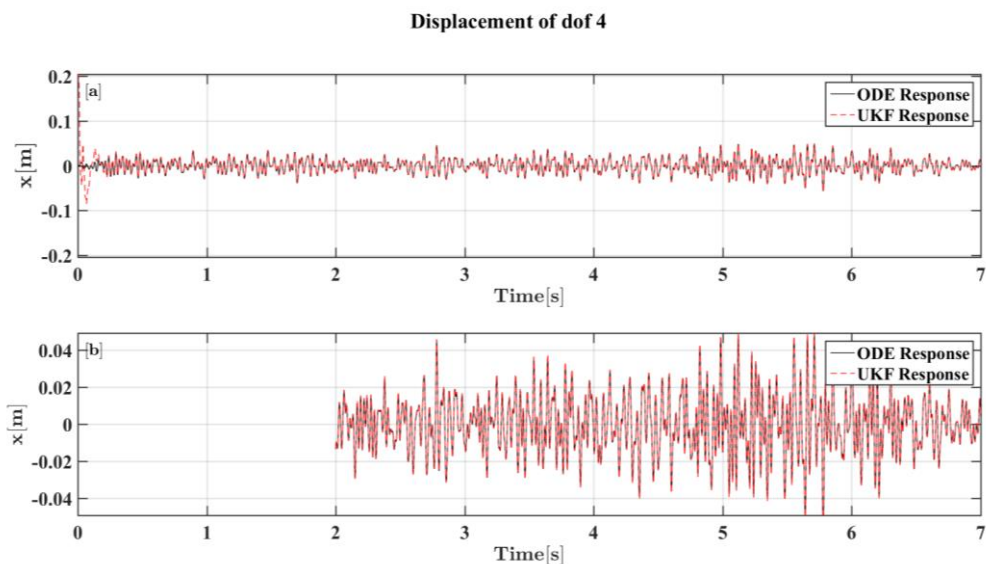
Μέση τιμή της απόλυτης διαφοράς	Τυπική απόκλιση της απόλυτης διαφοράς	Μέση τιμή του σφάλματος	Μέση τιμή της τυπικής απόκλιση του σφάλματος
0.00038440	0.00029804	0.29666	34.3222

Πίνακας 3.13: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της διαφοράς και του σφάλματος της ταχύτητας για τον συνδυασμό «3_5_6_11»

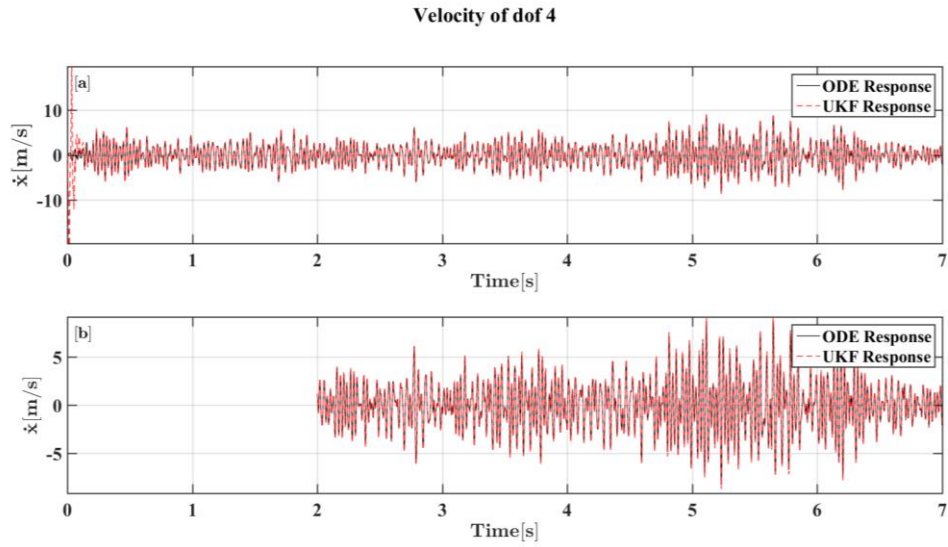
Μέση τιμή της απόλυτης διαφοράς	Τυπική απόκλιση της απόλυτης διαφοράς	Μέση τιμή του σφάλματος	Μέση τιμή της τυπικής απόκλιση του σφάλματος
0.0720999	0.065156	0.32975	21.92144

Όπως συνέβη και στην περίπτωση της αρμονικής διέγερσης, παρατηρούμε μεγάλες μέσες τιμές και τυπικές αποκλίσεις για το σχετικό σφάλμα, όμως όπως ήδη αναφέραμε στην παράγραφο 3.2.1.4 δε μας προβληματίζει το γεγονός αυτό. Τέλος παρουσιάζονται στα σχήματα 3.14 έως και 3.19 (τρία για κάθε συνδυασμό) η σύγκριση των αποτελεσμάτων στον τέταρτο (4^ο) β.ε. Στο κάθε σχήμα υπάρχει στο “a)” διάγραμμα η απόκριση από μηδέν έως επτά δευτερόλεπτα (0-7 sec) και στο “b)” το τμήμα εκείνο που έχουμε θεωρήσει ότι αντιστοιχεί στη μόνιμη κατάσταση.

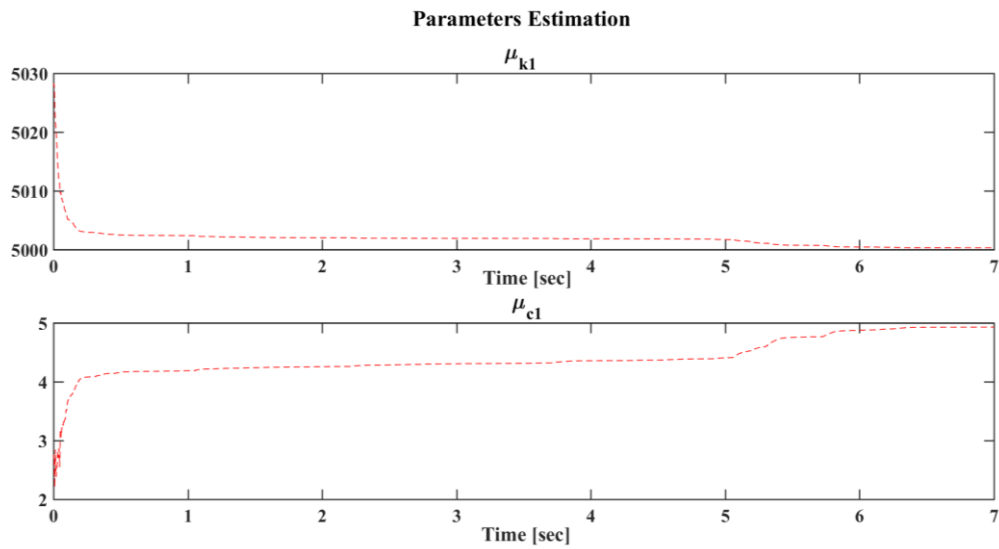
Κατόπιν της ανάλυσης για την ψευδοτυχαία διέγερση ενισχύεται η άποψη στην οποία καταλήξαμε, ότι τα σημεία μέτρησης είναι καλό να βρίσκονται όχι συγκεντρωμένα γύρω από ένα σημείο της κατασκευής μας αλλά σε διάφορα σημεία στο εσωτερικό της. Επίσης μπορούμε να είμαστε αισιόδοξοι ότι ο αριθμός των σημείων για την επαρκή πρόβλεψη της απόκρισης της κατασκευής μας θα είναι επαρκώς μικρός, αυτή την υπόθεση θα την εξετάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο σε ένα μεγαλύτερο και πιο ρεαλιστικό μοντέλο.



Σχήμα 3.14: Διάγραμμα της μετατόπισης για τον συνδυασμό «3-5-7-11» α) για όλο το χρονικό διάστημα β) από 2s και έπειτα

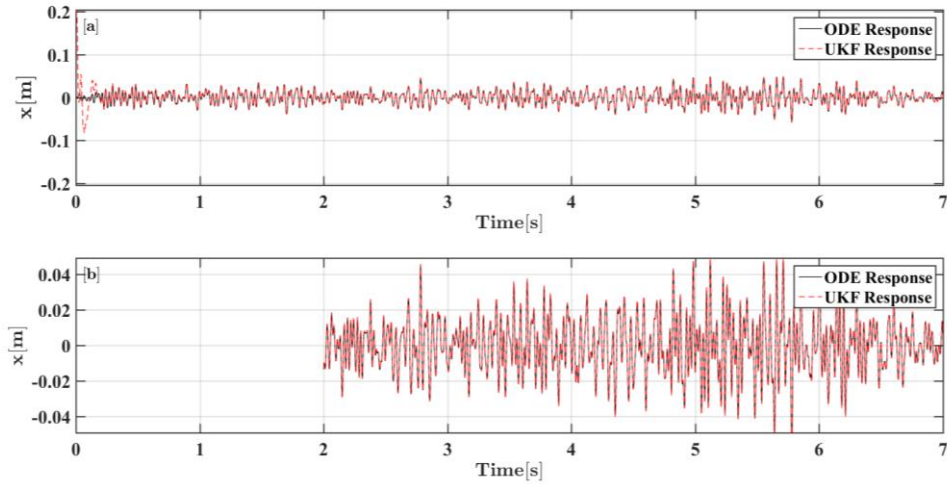


Σχήμα 3.15: Διάγραμμα της ταχύτητας για τον συνδυασμό «3-5-7-11». α) για όλο το χρονικό διάστημα β) από 2s και έπειτα



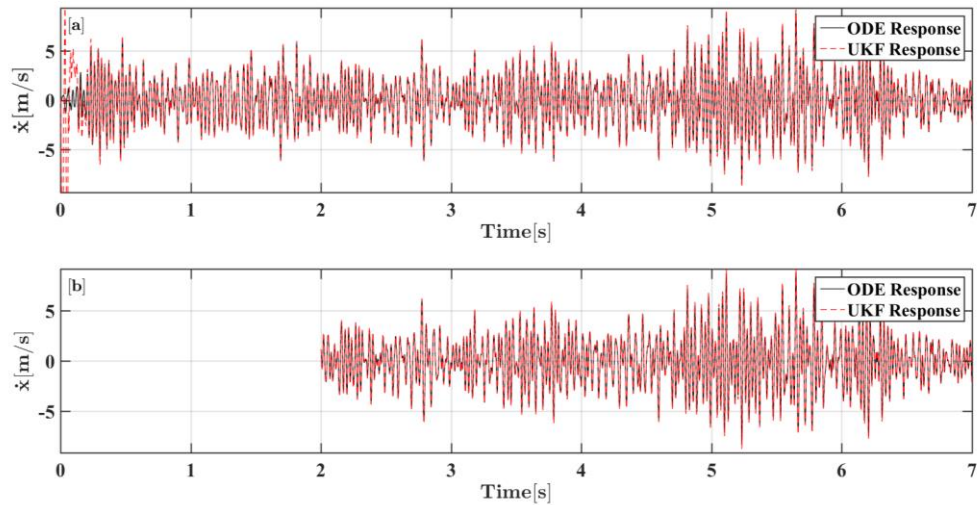
Σχήμα 3.16: Διάγραμμα της εκτίμησης των παραμέτρων για τον συνδυασμό «3-5-7-11»

Displacement of dof 4

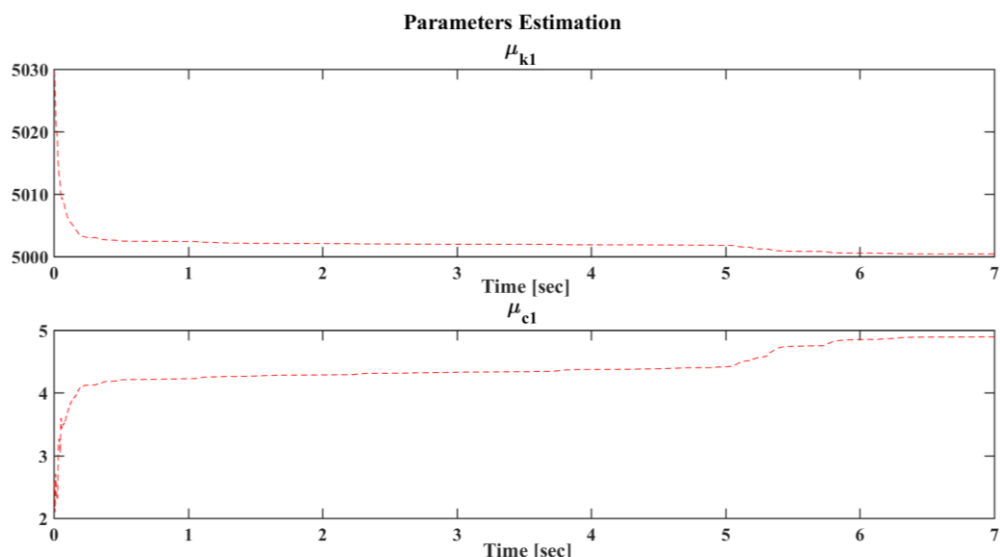


Σχήμα 3.17: Διάγραμμα της μετατόπισης για τον συνδυασμό «3-5-6-11». α) για όλο το χρονικό διάστημα β) από 2s και έπειτα

Velocity of dof 4



Σχήμα 3.18: Διάγραμμα της ταχύτητας για τον συνδυασμό «3-5-6-11». α) για όλο το χρονικό διάστημα β) από 2s και έπειτα



Σχήμα 3.19: Διάγραμμα της εκτίμησης των παραμέτρων για τον συνδυασμό «3-5-6-11»

3.3 Στατιστική μελέτη της επίδρασης του θορύβου της μέτρησης

Σε πραγματικές συνθήκες είναι εξαιρετικά δύσκολο να γνωρίζουμε τον ακριβή θόρυβο που υπεισέρχεται στη διαδικασία μας τόσο από άποψη λάθους στη μοντελοποίηση αλλά και στις μετρήσεις. Σε αυτή και στην επόμενη υποενότητα θα εξετάσουμε ορισμένες περιπτώσεις θορύβου όσον αφορά στις μετρήσεις και στη μοντελοποίηση αντίστοιχα, ώστε να αναλύσουμε τις επιπτώσεις τους στη διαδικασία της πρόβλεψης. Η εξέταση αυτή θα περιλάβει μόνο την περίπτωση της ψευδοτυχαίας φόρτισης, λόγω του ότι αποτελεί δυσμενέστερη περίπτωση και συνεπώς έχει μεγαλύτερο ενδιαφέρον.

3.3.1 Βασικός Σχεδιασμός

Ο παράγοντας που θα μελετήσουμε θα είναι ο θόρυβος στη μέτρηση, και για την ακρίβεια όχι μόνο αυτό καθ' αυτό το λάθος, αλλά και ο συνδυασμός του πραγματικού λάθους με αυτό που θεωρούμε εμείς στην ανάλυση μας. Συνεπώς θέλουμε να μελετήσουμε την επίδραση δύο (2) παραγόντων καθένας από τους οποίους τοποθετείται σε επτά (7) επίπεδα. Τα επίπεδα του σφάλματος μέτρησης απεικονίζονται στον πίνακα 3.14.

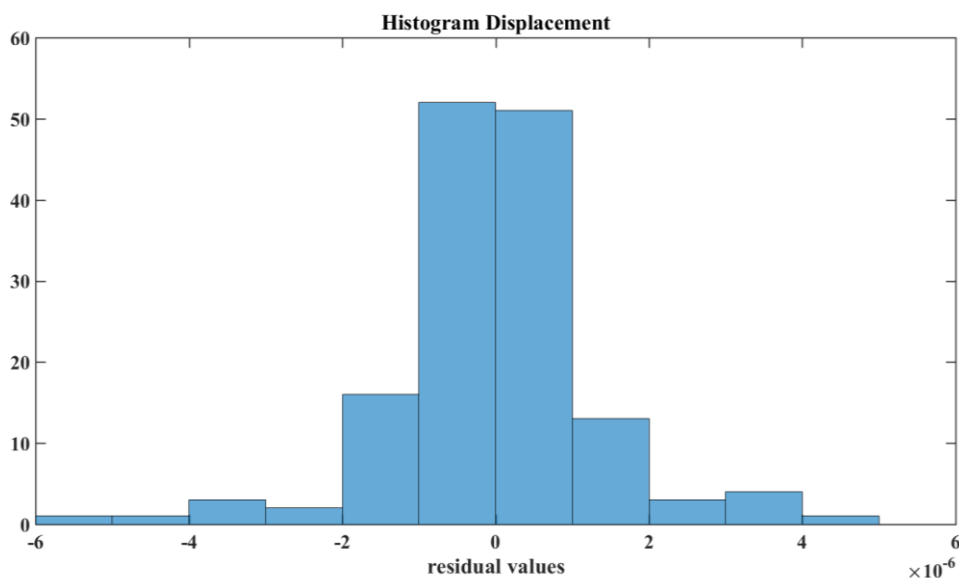
Πίνακας 3.14: Τα επίπεδα του σφάλματος της μέτρησης

Επίπεδο	Τιμή σφάλματος λόγω θορύβου	Επίπεδο	Τιμή σφάλματος λόγω θορύβου
1	1e-6 (1e-5%)	5	0.2 (20%)
2	0.001 (0.1%)	6	0.3 (30 %)
3	0.01 (1%)	7	1.0 (100 %)
4	0.1 (10%)		

Από τους πιθανούς συνδυασμούς αυτών των τιμών ανά δύο προκύπτουν σαράντα εννιά (49) περιπτώσεις. Πήραμε τρεις (3) επαναλήψεις για κάθε συνδυασμό. Αρχικά εφαρμόσαμε τη μεθοδολογία που περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα, πήραμε τις μέσες τιμές της απόλυτης διαφοράς για το χρονικό διάστημα από δύο (2) έως έξι (6) δευτερόλεπτα (2 – 6 sec) έτσι ώστε να αποφύγουμε όσο γίνεται την επίδραση μεταβατικών φαινομένων.

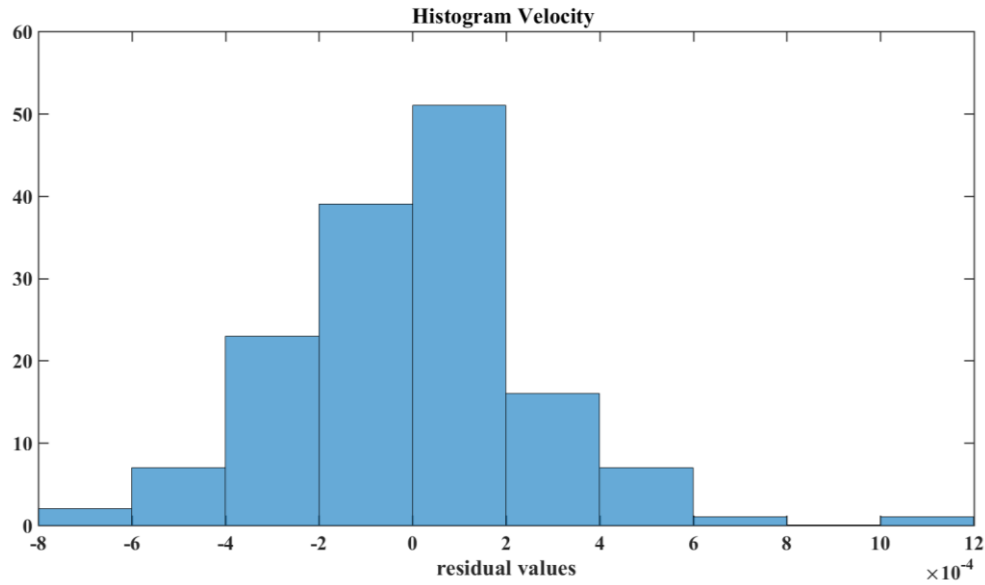
Το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήγουμε είναι ένας πίνακας (7x7) του οποίου κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο τιμών του πραγματικού θορύβου της μέτρησης ενώ η κάθε στήλη σε ένα επίπεδο τιμών του θορύβου που θεωρούμε εμείς. Σημειώνεται πως κάθε κελί αποτελείται από τις τρεις μέσες τιμές, μία για κάθε επανάληψη.

Προκειμένου να μελετήσουμε τις διάφορες επιδράσεις θα πραγματοποιήσουμε ανάλυση μεταβλητότητας (ANOVA) με δύο παράγοντες. Τα ιστογράμματα τόσο για τη μετατόπιση όσο και για την επιτάχυνση όπως προέκυψαν από τον υπολογισμό των υπολοίπων και τον έλεγχο της κανονικότητάς τους απεικονίζονται στο Σχήμα 3.20 και 3.21.



Σχήμα 3.20: Ιστογράμματα των υπολοίπων των μέσων τιμών της μετατόπισης

Τα δεδομένα για τη μετατόπιση παρουσιάζουν μία πολύ ικανοποιητική συμπεριφορά ενώ της ταχύτητα λιγότερο. Παρ' όλα αυτά θα πραγματοποιήσουμε ANOVA και θα αξιολογήσουμε τα αποτελέσματα λαμβάνοντας υπόψη μας το ότι ίσως τα δεδομένα μας να μην ακολουθούν κανονική κατανομή.



Σχήμα 3.21: Ιστόγραμμα των υπολοίπων των μέσων τιμών της ταχύτητας

3.3.2 Παρουσίαση αποτελεσμάτων

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ANOVA αποτυπώνονται στους πίνακες 3.15 και 3.16. Όπως είναι εμφανές οι τιμές των παρατηρούμενων επιπέδων σημαντικότητας (p-values) είναι εξαιρετικά μικρές, ακραία μικρές για να είμαστε ακριβείς, συνεπώς μπορούμε να συμπεράνουμε με μεγάλη βεβαιότητα ότι οι τιμές του θορύβου της μέτρησης επηρεάζει με στατιστικά σημαντικό τρόπο την εκτίμηση μας.

Πίνακας 3.15: ANOVA για τη μετατόπιση

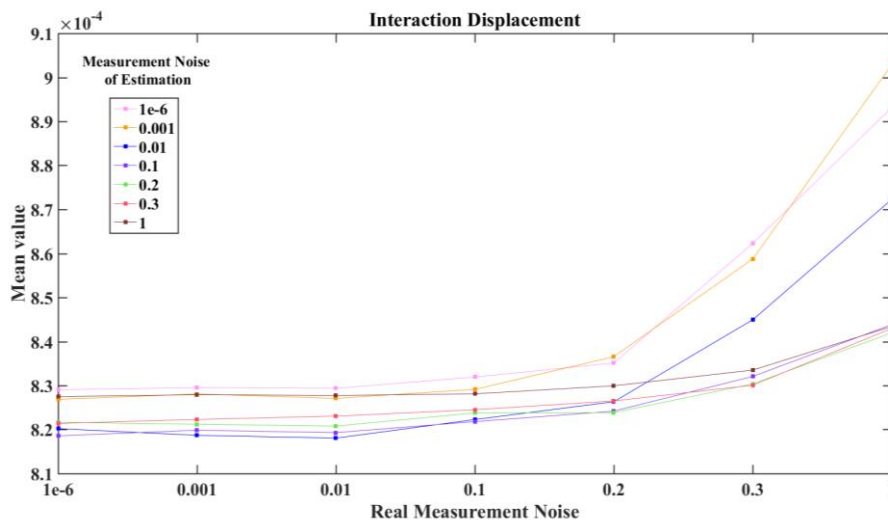
Πηγή	F	Prob>F
Θεωρούμενο Σφάλμα	515.6830	8.8986e-72
Πραγματικό Σφάλμα	1707.1893	8.9875e-97
Αλληλεπίδραση	99.4884	1.1257e-62

Πίνακας 3.16: ANOVA για την ταχύτητα

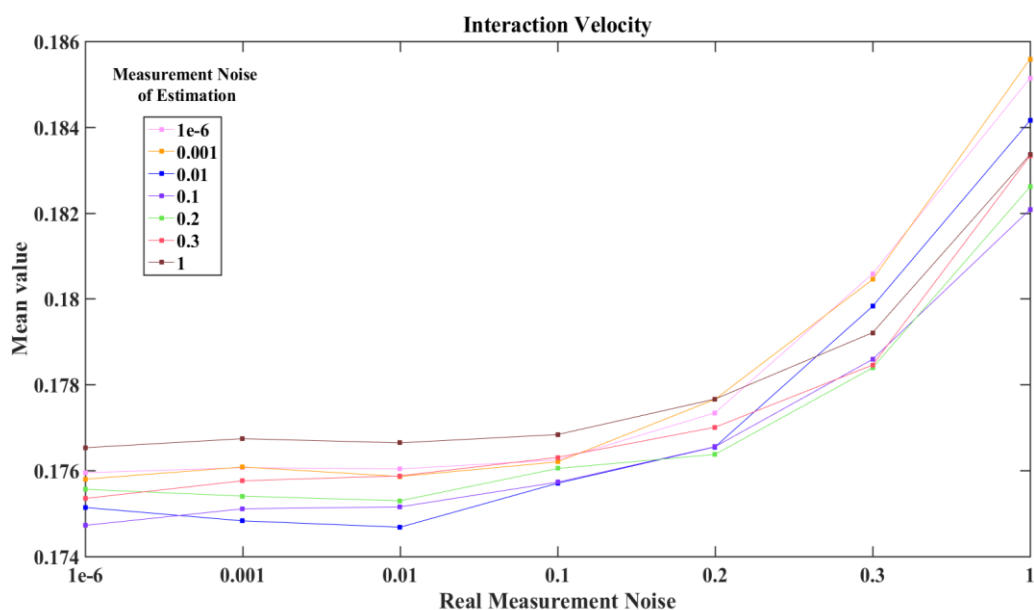
Πηγή	F	Prob>F
Θεωρούμενο Σφάλμα	64.2460	8.8894e-32
Πραγματικό Σφάλμα	1758.6424	2.1275e-97
Αλληλεπίδραση	8.4181	2.4855e-17

Προκειμένου να αποκτήσουμε μία αίσθηση της αλληλεπίδρασης των παραγόντων δημιουργήσαμε δύο (2) διαγράμματα αλληλεπίδρασης, τα οποία αποτυπώνονται στα Σχήματα 3.22 και 3.23. Μπορούμε να παρατηρήσουμε λοιπόν ότι υπάρχει μεγάλη ομοιότητα στη συμπεριφορά μεταξύ της ταχύτητας και της επιτάχυνσης. Χαρακτηριστικά θα αναφέρουμε ότι για μικρές έως μεσαίες τιμές πραγματικού θορύβου, η θεώρηση ενός μέσου θορύβου αποτελεί καλύτερη επιλογή από εκείνη ενός πολύ υψηλού ή πολύ χαμηλού. Επιπλέον η αύξηση της μέσης τιμής της διαφοράς για την περίπτωση της ταχύτητας είναι πιο απότομη και παρατηρείται έντονη αύξηση ακόμα και για τη θεώρηση μεγάλης τιμής του θορύβου. Αντίθετα για την περίπτωση της μετατόπισης αν λάβουμε υπ' όψιν μας το θόρυβο, ακόμα και για μεγάλες τιμές δεν αυξάνεται τόσο έντονα η μέση τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής.

Θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε λοιπόν ότι εάν γνωρίζουμε πως ο θόρυβος της μέτρησης είναι μικρής έως μεσαίας τάξης είναι προτιμότερο να υπερεκτιμήσουμε ελαφρώς το θόρυβο στο μοντέλο μας. Βέβαια ας μην ξεχνάμε ότι για να καταλήξουμε σε περισσότερο βέβαια συμπεράσματα συνιστάται να επαναλάβουμε την ανάλυσή μας με μεγαλύτερο δείγμα παρατηρήσεων



Σχήμα 3.22: Διάγραμμα αλληλεπίδρασης μεταξύ του πραγματικού θορύβου και του θορύβου που λαμβάνουμε υπ' όψιν μας κατά την εκτίμηση της μετατόπισης μέσω του UKF



Σχήμα 3.23: Διάγραμμα αλληλεπίδρασης μεταξύ του πραγματικού θορύβου και του θορύβου που λαμβάνουμε υπ' όψιν μας κατά την εκτίμηση της ταχύτητας μέσω του UKF.

3.3.3 Επανάληψη της ανάλυσης χωρίς τις ακραίες τιμές

Στην προηγούμενη ανάλυση το τελευταίο επίπεδο των παραγόντων, η περίπτωση για εκατό τοις εκατό (100 %) σφάλμα επί των μετρήσεων, εύλογα μπορεί να θεωρηθεί ακραία. Προκειμένου να επιβεβαιώσουμε το κατά πόσον υπάρχει στατιστικά σημαντική αλληλεπίδραση ακόμα και για τις μικρότερες τιμές του θορύβου επαναλάβαμε την προηγούμενη ανάλυση για τα έξι (6) επίπεδα των δύο (2) παραγόντων. Τα ιστογράμματα εξακολουθούν να παρουσιάζουν μία ικανοποιητική συμπεριφορά. Από την ANOVA προκύπτουν p-values της τάξης του δέκα εις την μείον σαράντα οχτώ (10^{-48}) και δέκα εις την μείον δεκάτη ενάτη (10^{-19}) για τη μετατόπιση και την ταχύτητα αντίστοιχα. Συνεπώς παρατηρούμε ότι η επίδραση του θορύβου εξακολουθεί να είναι σημαντική.

Σημειώνεται ότι και για ανάλυση χωρίς την ακραία μικρή τιμή του θορύβου ($1e-4\%$) εξακολουθεί να επηρεάζει σημαντικά ο θόρυβος της μέτρησης.

Τα διάγραμμα αλλά και οι πίνακες της ANOVA για αυτές τις δύο αναλύσεις βρίσκονται στο παράρτημα 2 της παρούσας εργασίας.

3.4 Στατιστική μελέτη της επίδρασης του θορύβου της μοντελοποίησης

Τέλος θα ασχοληθούμε με την επίδραση του λάθους στην ίδια τη μοντελοποίηση του συστήματός μας. Ο ένας παράγοντας θα είναι το σφάλμα το οποίο λαμβάνουμε υπ' όψιν μας κατά

την εκτίμηση μέσω του UKF, ενώ ο άλλος παράγοντας θα είναι το σφάλμα που εισάγουμε επί πραγματικού στο μοντέλο μας.

3.4.1 Σχεδιασμός μελέτης

Προκειμένου να εισάγουμε λάθη στη μοντελοποίηση μας ακολουθήσαμε το εξής. Επιλέξαμε τρία (3) βασικά μεγέθη της κατασκευής μας (το μητρώο μάζας, το μητρώο στιβαρότητας και το μητρώο της απόσβεσης) και αντί να τα εισάγουμε αυτούσια στη διαδικασία εκτίμησης μέσω του UKF τα εισάγουμε προσαυξημένα με ένα συντελεστή. Οι δυνατές τιμές αυτού του συντελεστή είναι ίδιες με τα επίπεδα του σφάλματος της μοντελοποίησης που λαμβάνουμε υπ' όψιν μας. Από τον συνδυασμό αυτών των τριών μεγεθών για τις τρεις τιμές του συντελεστή προσαύξησης προκύπτουν είκοσι επτά (27) επίπεδα για τον δεύτερο παράγοντα.

Οι τιμές των επιπέδων για το θεωρούμενο σφάλμα αποτυπώνονται στον πίνακα 3.17, ενώ για το πραγματικό στον πίνακα 2.ν στο παράρτημα 2. Σημειώνεται ότι δεν υπάρχει ακριβής αντιστοιχία, δηλαδή παράγοντας προσαύξησης ίσος με 0.001 δε συνεπάγεται πραγματικό λάθος μοντελοποίησης 0.001, αποτελεί απλώς μία δική μας επιλογή για να ποσοτικοποιήσουμε με κάποιον τρόπο το σφάλμα.

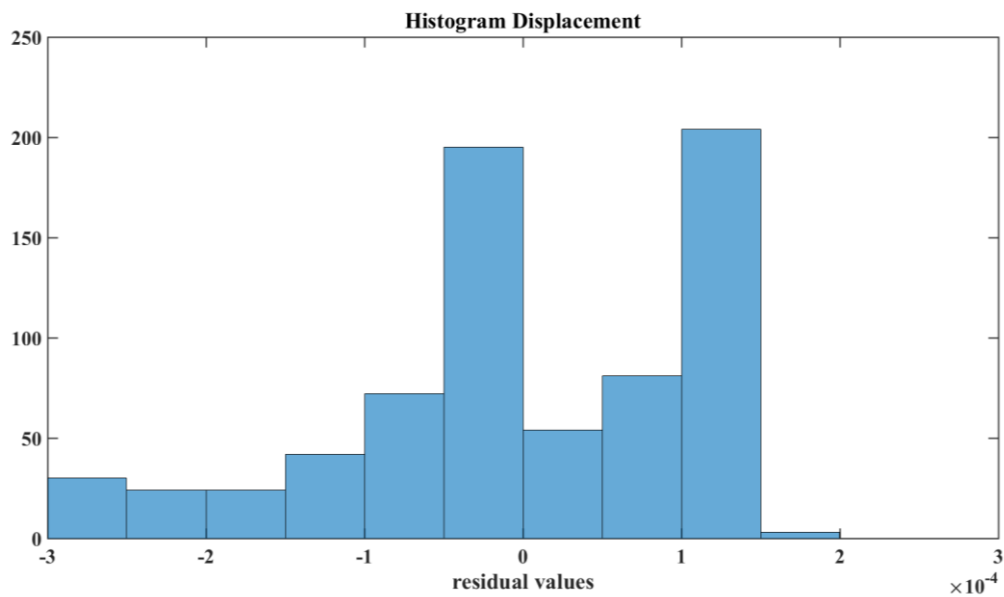
3.4.2 Παρουσίαση Αποτελεσμάτων

Πίνακας 3.17: Τα επίπεδα του θεωρούμενου σφάλματος της μοντελοποίησης

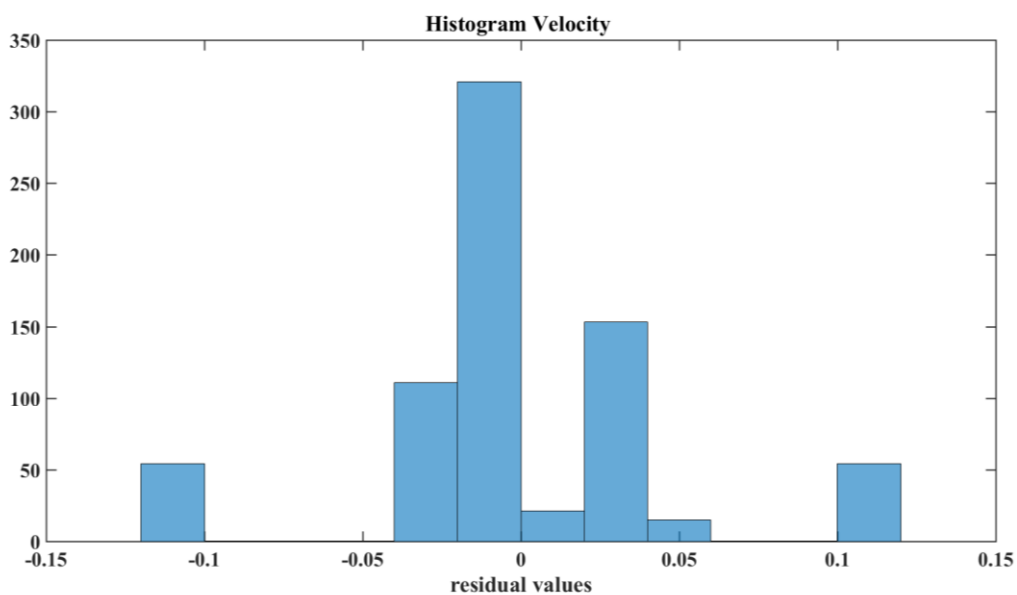
<i>Επίπεδο</i>	<i>Τιμή σφάλματος λόγω θορύβου</i>
1	0.001
2	0.01
3	0.1

Όπως και στις αναλύσεις που προηγήθηκαν αρχικά κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα των υπολοίπων των δεδομένων ώστε να παρατηρήσουμε τη μορφή τους. Όπως είναι εμφανές στα Σχήματα 3.24 και 3.25, ενώ η μορφή των υπολοίπων για την ταχύτητα είναι σχετικά ικανοποιητική, οι τιμές των υπολοίπων των μετρήσεων για τη μετατόπιση δεν ακολουθούν την αναμενόμενη μορφή για κανονική κατανομή. Συνεπώς οφείλουμε να είμαστε εξαιρετικά προσεκτικοί όσον αφορά στα συμπεράσματα στα οποία θα καταλήξουμε βασιζόμενοι στη μετατόπιση. Συμπληρωματικά με αυτή την οπτική δοκιμή κατασκευάστηκαν και δύο διαγράμματα, για τη μετατόπιση και την ταχύτητα αντίστοιχα, στα οποία συγκρίνονται οι τιμές των υπολοίπων με τις

τιμές που θα αναμέναμε για την περίπτωση της κανονικής κατανομής. τα διάγραμμα αυτά είναι διαθέσιμα στο παράρτημα 2 ως Σχήματα 2.ix και 2.x



Σχήμα 3.24: Ιστόγραμμα των υπολοίπων των μέσων τιμών της μετατόπισης



Σχήμα 3.25: Ιστόγραμμα των υπολοίπων των μέσων τιμών της ταχύτητας

Τα αποτελέσματα από την ANOVA απεικονίζονται στους πίνακες 3.18 και 3.19. Τα παρατηρούμενα επίπεδα σημαντικότητας είναι αρκετά υψηλά. Οπότε δεν μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση, η οποία είναι πως ο θεωρούμενος θόρυβος του μοντέλου δεν επηρεάζει με στατιστικά σημαντικό τρόπο την εκτίμηση μας για τις καταστάσεις του μοντέλου.

Αντίθετα ο πραγματικός θόρυβος που εισάγουμε φαίνεται να παίζει καθοριστικό ρόλο. Σε αυτό το σημείο πρέπει όμως να θυμηθούμε ότι είναι πολύ πιθανό τα δείγματα μας να μην ακολουθούν κανονική κατανομή συνεπώς τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε ίσως να μην αποτυπώνουν τα πραγματικά γεγονότα.

Πίνακας 3.18: ANOVA για τη μετατόπιση

Πηγή	F	Prob>F
Θεωρούμενο Σφάλμα	0.017723	0.98243
Πραγματικό Σφάλμα	5385.1902	0
Αλληλεπίδραση	0.022396	1

Πίνακας 3.19: ANOVA για την ταχύτητα

Πηγή	F	Prob>F
Θεωρούμενο Σφάλμα	0.0014766	0.99852
Πραγματικό Σφάλμα	873.8007	0
Αλληλεπίδραση	0.0056134	1

Ανεξάρτητα όμως με αυτό το γεγονός, δημιουργούμε δύο διαγράμματα αλληλεπίδρασης ώστε να δούμε το πώς συμπεριφέρεται η εξαρτημένη μεταβλητή για τα διάφορα επίπεδα των παραγόντων. Τα διαγράμματα αυτά βρίσκονται στα Σχήματα 3.27 και 3.28.

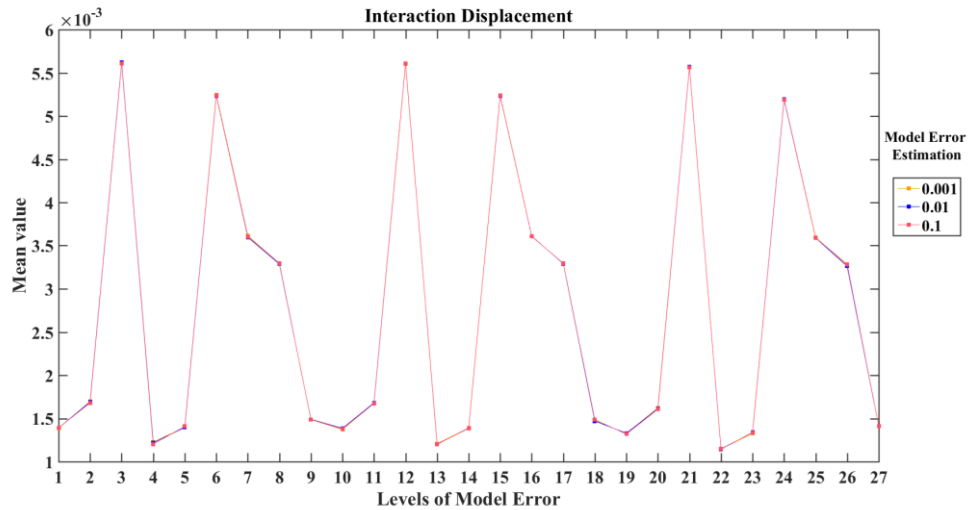
Από τα σχήματα αυτά αντιλαμβανόμαστε για ποιο λόγο η ανάλυση μεταβλητότητας μάς οδήγησε στο παράδοξο συμπέρασμα ότι η επιλογή του θεωρούμενου θορύβου δεν επηρεάζει με στατιστικά σημαντικό τρόπο την εξαρτημένη μεταβλητή μας. Παρατηρούμε επίσης, ότι η συμπεριφορά είναι πανομοιότυπη τόσο για τη μετατόπιση όσο και για την ταχύτητα.

Προκειμένου να δούμε ποιοι συνδυασμοί είναι αυτοί που δημιουργούν τις τόσο έντονες κορυφές στο διάγραμμα μας ανατρέχουμε στον πίνακα 2.v του παραρτήματος 2 και συμπεραίνουμε ότι οι περιπτώσεις για τις οποίες παρουσιάζονται οι ακραία υψηλές τιμές αντιστοιχούν σε μεγαλύτερη τιμή του μητρώου μάζας κατά δέκα τοις εκατό (10 %) χωρίς να υπάρχει αντίστοιχη αύξηση στον πίνακα στιβαρότητας. Επιπρόσθετα η μεσαίου μεγέθους τιμές αντιστοιχούν σε συντελεστές προσαύξησης του μητρώου στιβαρότητας ίσο με δέκα τοις εκατό (10 %) οι οποίες όμως δεν συνοδεύονται από αντίστοιχη προσαύξηση στο μητρώο μάζας.

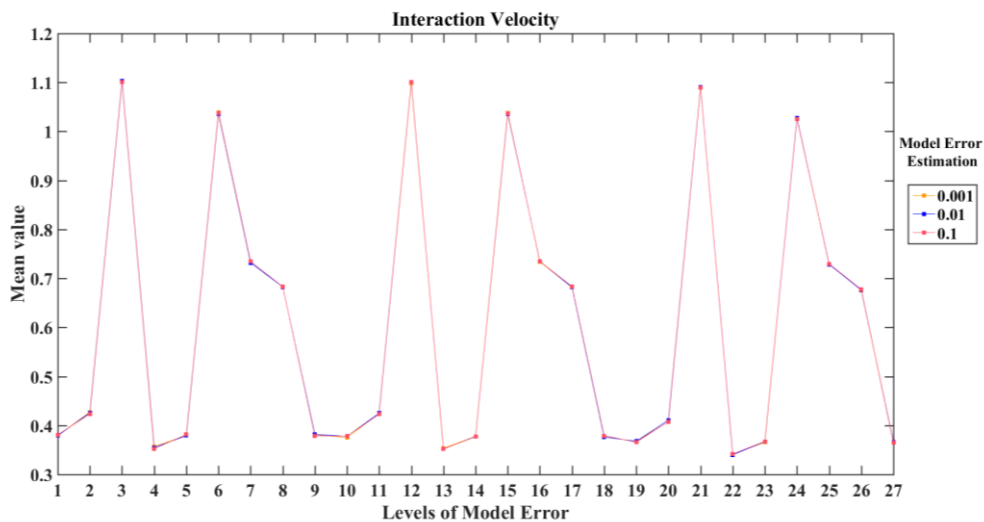
Βέβαια στην υπό εξέταση περίπτωση το πραγματικό σφάλμα το οποίο θεωρήσαμε για τη μοντελοποίηση μας είναι εξαιρετικά υψηλό, καθώς θεωρούμε εσφαλμένες τιμές για ολόκληρο

τα μητρώα της κατασκευής, δεν αποκλείεται όμως να έχουμε ακόμα και ένα τέτοιο λάθος στο μοντέλο μας.

Συνεπώς τα συμπεράσματα στα οποία μπορούμε να καταλήξουμε είναι ότι το λάθος της μοντελοποίησης έχει βαρύνουσα σημασία για τα αποτελέσματα μας. Ιδίως όταν αυτό το λάθος δεν είναι παρόμοιας τάξης για τη μάζα και τη στιβαρότητα.



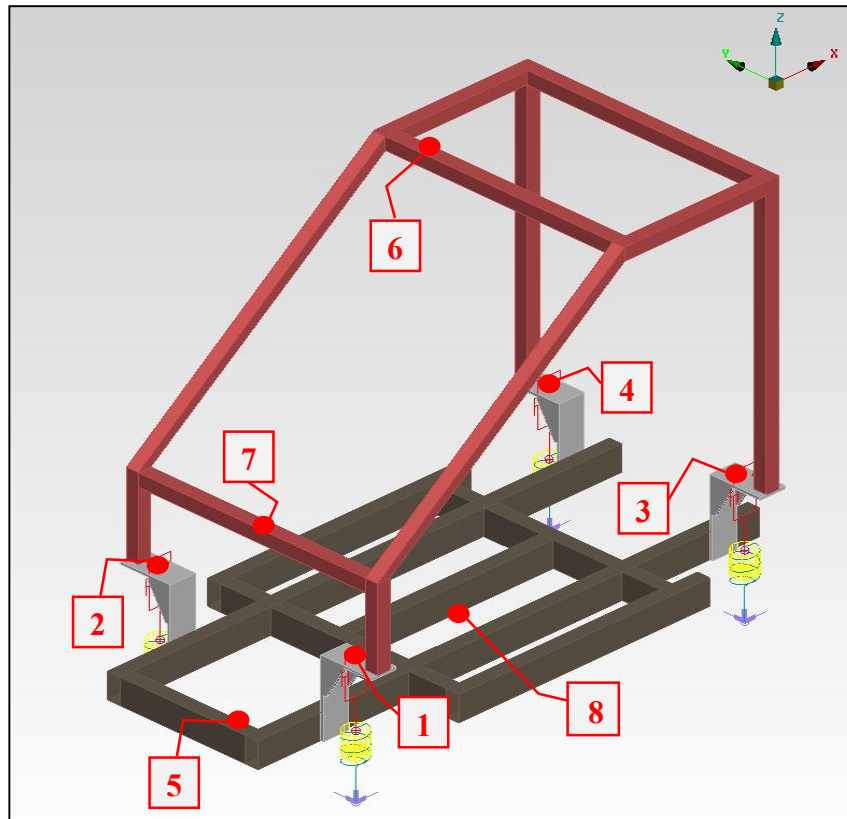
Σχήμα 3.27: Διάγραμμα αλληλεπίδρασης μεταξύ του πραγματικού θορύβου και του θορύβου που λαμβάνουμε υπ' όψιν μας κατά την εκτίμηση της μετατόπισης μέσω του UKF.



Σχήμα 3.28: Διάγραμμα αλληλεπίδρασης μεταξύ του πραγματικού θορύβου και του θορύβου που λαμβάνουμε υπ' όψιν μας κατά την εκτίμηση της ταχύτητας μέσω του UKF.

Κεφάλαιο 4: Πειραματικό Μοντέλο Οχήματος

4.1 Περιγραφή του μοντέλου



Σχήμα 4.1: Πειραματικό Μοντέλο Οχήματος

Επόμενο στάδιο στην πορεία της μελέτης μας αποτελεί η εφαρμογή της μεθόδου του UKF σε ένα ρεαλιστικό μοντέλο με περιορισμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας. Σκοπός μας είναι να μπορέσουμε να αποκτήσουμε μία καλύτερη εικόνα για τη συμπεριφορά του φίλτρου σε πραγματικές κατασκευές και αφετέρου οι υπολογιστικοί χρόνοι να είναι ικανοποιητικά μικροί.

Με αυτές τις δύο προϋποθέσεις λοιπόν επιλέχθηκε προς μελέτη η κατασκευή που παρίσταται στο Σχήμα 4.1. Στόχος της κατασκευής αυτής ήταν η προσομοίωση του πλαισίου ενός οχήματος. Στα τέσσερα (4) άκρα του (σημεία “1”, “2”, “3” και “4” στο σχήμα) συνδέεται μέσω συστήματος μη-γραμμικού ελατηρίου – αποσβεστήρα με την εκάστοτε υποκείμενη διάταξη η οποία προσομοιώνει το υποσύστημα κάθε τροχού. Σε κάθε τέτοιο υποσύστημα εφαρμόζεται μία διαφορετική διέγερση εδάφους, το σύνολο των οποίων αποτελεί τη διέγερση της κατασκευής.

Στο αρχικό μοντέλο των σαράντα πέντε χιλιάδων πεντακοσίων εξήντα τεσσάρων (45,564) β.ε είχε πραγματοποιηθεί μείωση έτσι ώστε να προκύψει τελικό μοντέλο εβδομήντα (70) β.ε., το οποίο χρησιμοποιήσαμε και εμείς στην παρούσα εργασία.

Η μη γραμμικότητα ήταν της μορφής της τριβής coulomb όπως και στη μελέτη που έλαβε χώρα στο τρίτο (3^ο) κεφάλαιο, όμως στην προκειμένη περίπτωση έχουμε τέσσερα (4) μη γραμμικά ελατήρια αντί για ένα (1).

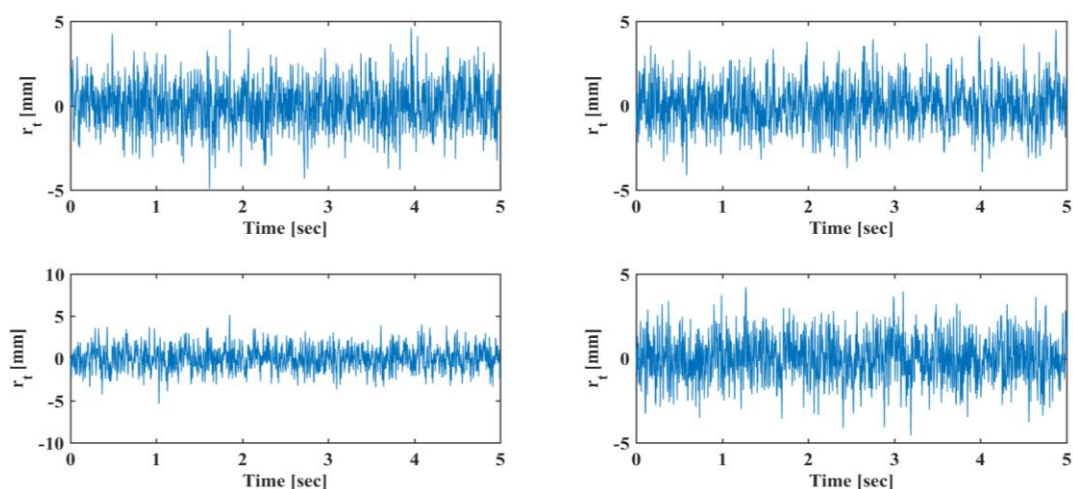
4.2 Εφαρμογή του UKF

Οι προσομοιώσεις έλαβαν χώρα με διαφορετικές «τυχαίες» διεγέρσεις εδάφους, οι οποίες αποτυπώνονται στο σχήμα 4.2 και αντιστοιχούν σε δυνάμεις στα σημεία των τροχών οι οποίες απεικονίζονται στο σχήμα 4.3

Στο συγκεκριμένο μοντέλο απαιτούνταν αρκετά μεγαλύτερος υπολογιστικός χρόνος, όμως το UKF προσεγγίζει τις πρότυπες λύσεις σε σημαντικά μικρότερο χρονικό διάστημα απ' ότι πριν, γεγονός που μας επιτρέπει να πραγματοποιήσουμε προσομοιώσεις μικρότερου χρονικού εύρους. Η αριθμητική ολοκλήρωση που χρησιμοποιήθηκε ανήκει στις μεθόδους Newmark. Αξίζει να σημειωθεί το πόσο ζωτική είναι η χρήση της σωστής εξίσωσης κατάστασης (state equation) κατά την εφαρμογή του UKF, δηλαδή να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος που αντιστοιχεί στην μέθοδο ολοκλήρωσης που είναι κατάλληλη για το εκάστοτε πρόβλημα. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι αν χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση κατάστασης που εφαρμόσαμε για την αριθμητική ολοκλήρωση του μοντέλου του συστήματος μαζών – ελατηρίων σε σειρά, θα οδηγηθούμε σε αριθμητική αστάθεια ή σε λάθος αποτελέσματα.

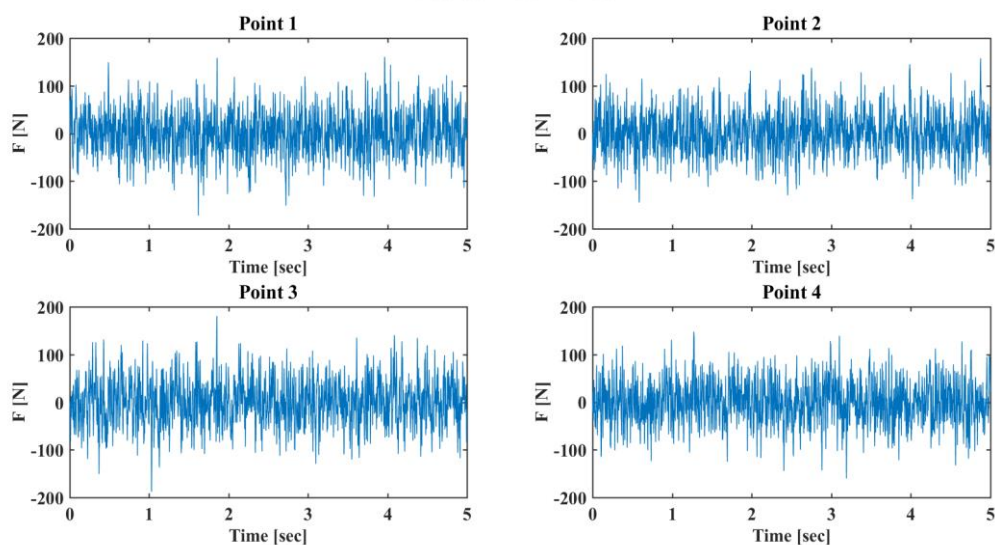
Οι μετρήσεις όλων των μεγεθών (μετατόπιση, ταχύτητα και επιτάχυνση) λαβαίνουν χώρα στα οχτώ (8) σημεία που απεικονίζονται στο Σχήμα 4.1 στις διευθύνσεις XYZ. Χάριν ευκολίας λοιπόν στο παρόν κεφάλαιο θα αναφερόμαστε σε σημεία και όχι σε βαθμούς ελευθερίας. Επίσης δεν πραγματοποιήθηκε πλήρης στατιστική ανάλυση για τον αριθμό σημείων στα οποία θα λαμβάνουμε μετρήσεις της επιτάχυνσης, καθώς όπως προέκυψε και από την αντίστοιχη ανάλυση στην παράγραφο 3.2.2.1 το πιθανότερο είναι ότι θα απαιτούνται τουλάχιστον τέσσερα (4) σημεία αν όχι περισσότερα λόγω της αύξησης της πολυπλοκότητας του μοντέλου μας.

Displacement Base Excitation



Σχήμα 4.2: Η διέγερση εδάφους που εφαρμόζεται σε κάθε ανάρτηση.

Force at Wheel Points



Σχήμα 4.3: Η δύναμη που ασκείται στα σημεία που αντιστοιχούν στους τροχούς.

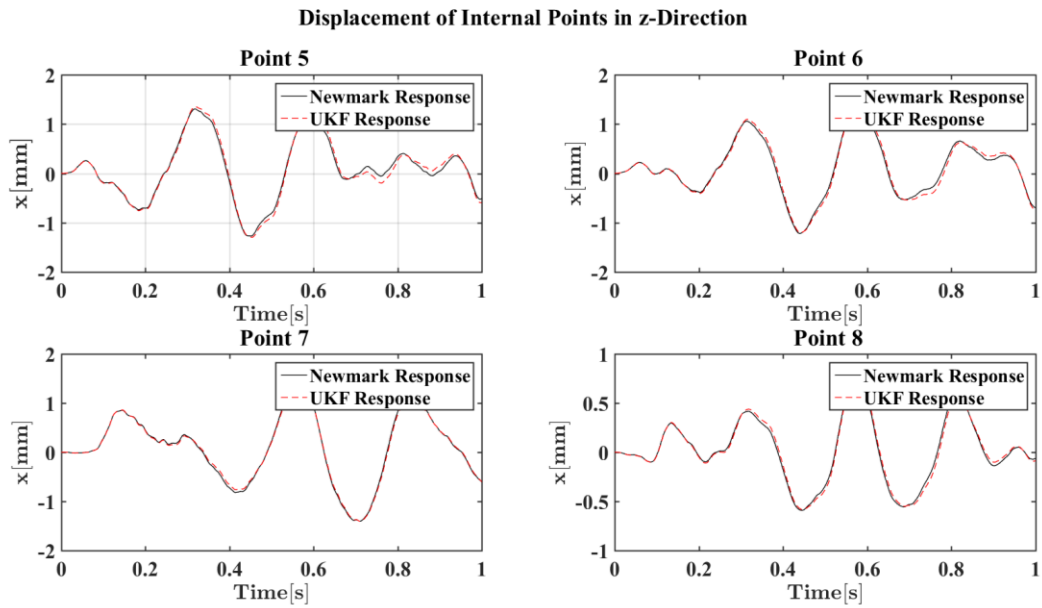
4.2.1 Μετρήσεις στα Συνοριακά σημεία Εκτίμηση παραμέτρων

Αρχικά πραγματοποιήσαμε προσομοιώσεις λαμβάνοντας μετρήσεις της επιτάχυνσης στα συνοριακά σημεία. Μόνο για εκτιμήσεις της κατάστασης σε πρώτη φάση και στη συνέχεια και για εκτιμήσεις παραμέτρων. Για την κάθε περίπτωση παρουσιάζουμε διάγραμματα αλλά και πίνακες με τα στατιστικά μεγέθη ώστε να είναι πιο σαφές το κατά πόσο είναι «καλή» η προσέγγιση μας ή όχι.

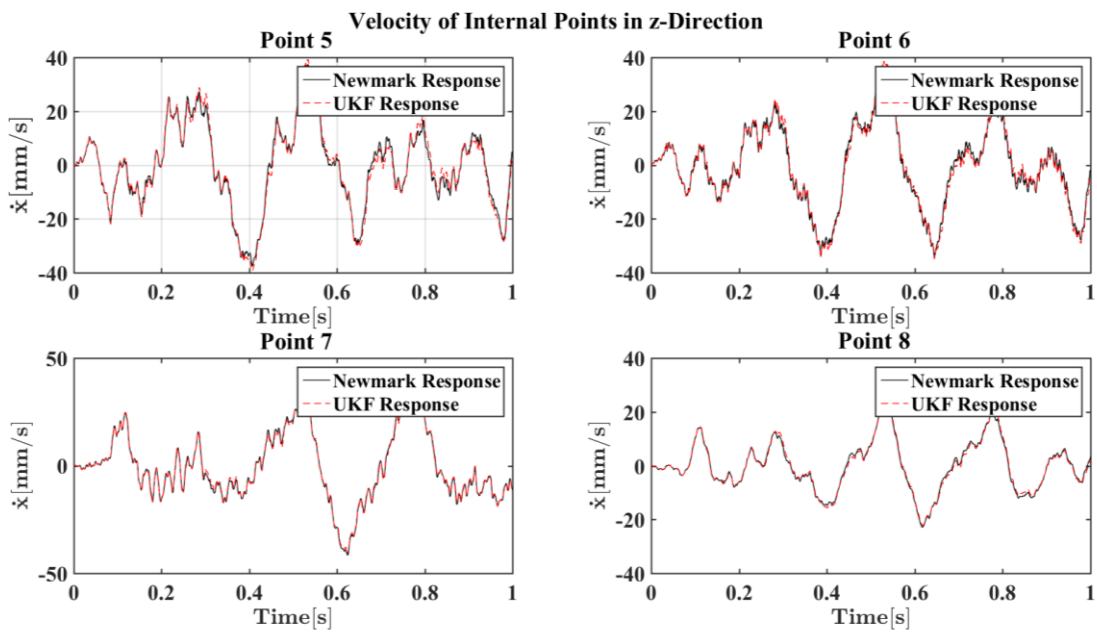
4.2.1.1 Εκτίμηση καταστάσεων (state estimation)

Ως πρώτη περίπτωση παίρνουμε μετρήσεις για χρονικό διάστημα από μηδέν έως ένα δευτερόλεπτο (0-1 sec). Αυτό ίσως φαίνεται παράδοξο εκ πρώτης όψεως δεδομένου ότι στο μοντέλο των σημειακών μαζών του τρίτου (3^{ου}) κεφαλαίου αποκλείσαμε εντελώς τις μετρήσεις αυτού του χρονικού διαστήματος. Αν και ασφαλώς είναι επιθυμητό να έχουμε μετρήσεις για όσο το δυνατόν μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, όπως ήδη αναφέρθηκε, στο συγκεκριμένο μοντέλο υπάρχει πολύ καλή προσαρμογή του UKF στα δεδομένα εξαιρετικά άμεσα, συνεπώς το αρχικό χρονικό τμήμα που αγνοούμε μπορεί να είναι πολύ μικρότερο. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με τον πολλαπλάσιο υπολογιστικό χρόνο που απαιτείται για το μοντέλο του οχήματος, μας οδήγησε στην επιλογή του συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος. Για τις επόμενες προσομοιώσεις θα αυξήσουμε το χρονικό ορίζοντα στα δύο δευτερόλεπτα (2 sec).

Για μία επανάληψη των μετρήσεων δημιουργήσαμε διαγράμματα σύγκρισης μεταξύ της πρότυπης και της θεωρητικής λύσης για τα τέσσερα εσωτερικά σημεία στη διεύθυνση Z τα οποία αποτυπώνονται στα Σχήματα. 4.4 και 4.5. Από τα διαγράμματα γίνεται αντιληπτό, ότι όντως η προσαρμογή του UKF είναι αρκετά άμεση και για την προκειμένη περίπτωση αρκετά καλή. Προκειμένου να έχουμε και μία ποσοτική αίσθηση του κατά πόσον το φίλτρο προσέγγισε με ακρίβεια τα αποτελέσματά μας παραθέτουμε δύο πίνακες - έναν για τη μετατόπιση (Πίνακας 4.1) και έναν για την ταχύτητα (Πίνακας 4.2) - στους οποίους αναγράφονται τα στατιστικά μεγέθη που προέκυψαν για το σύνολο των σημείων. Στον υπολογισμό των μεγεθών λάβαμε υπόψη μας αποτελέσματα από το χρονικό σημείο 0.2 sec και έπειτα, πέρα από τα οχτώ (8) σημεία του Σχήματος 4.1 στο σύνολο των σημείων περιλαμβάνονται και τα σημεία που αντιστοιχούν στους «τροχούς». Παρατηρούμε μεγάλες τιμές μέσης τιμής σφάλματος αλλά και τυπικής απόκλισης. Παρ' όλα αυτά το Φίλτρο ακολουθεί τη συμπεριφορά και τις τάσεις της πρότυπης λύσης. Δεδομένου λοιπόν ότι και το χρονικό διάστημα του ενός δευτερολέπτου (1 sec) είναι σχετικά μικρό μπορούμε να θεωρήσουμε ικανοποιητικά τα αποτελέσματά μας.



Σχήμα 4.4: Σύγκριση της μετατόπισης στα εσωτερικά σημεία του πλαισίου για $t = 0 - 1$ sec



Σχήμα 4.5: Σύγκριση της ταχύτητας στα εσωτερικά σημεία του πλαισίου για $t = 0 - 1$ sec

Πίνακας 4.1 : Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της διαφοράς και του σφάλματος της μετατόπισης κατά την εκτίμηση καταστάσεων για $t = 0.2-1 \text{ sec}$

Μέση τιμή της απόλυτης διαφοράς	Τυπική απόκλιση της απόλυτης διαφοράς	Μέση τιμή του σφάλματος	Μέση τιμή της τυπικής απόκλιση του σφάλματος
0.014466	0.0092019	0.46065	17.3731

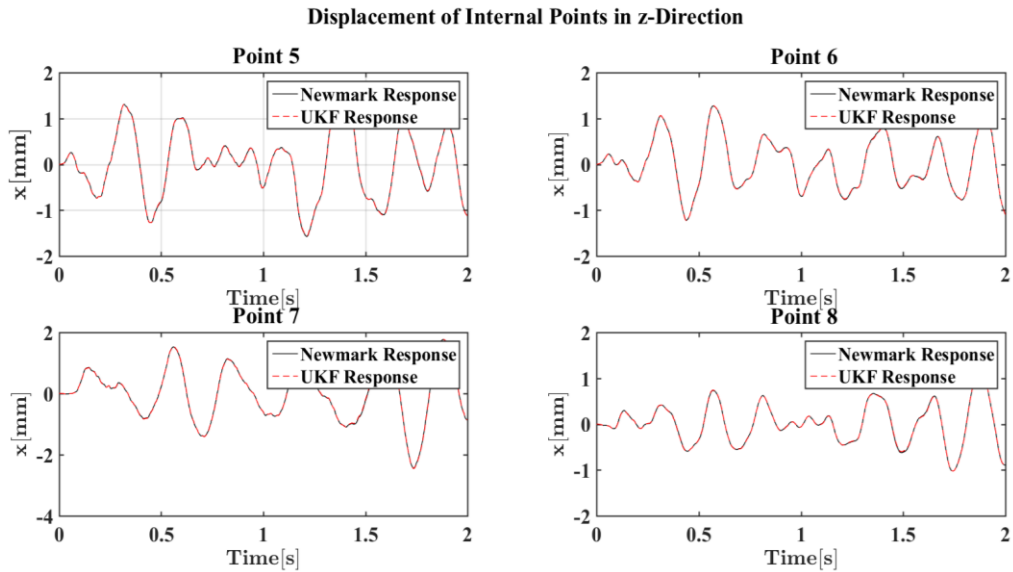
Πίνακας 4.2: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της διαφοράς και του σφάλματος της ταχύτητας κατά την εκτίμηση καταστάσεων για $t = 0.2-1 \text{ sec}$

Μέση τιμή της απόλυτης διαφοράς	Τυπική απόκλιση της απόλυτης διαφοράς	Μέση τιμή του σφάλματος	Μέση τιμή της τυπικής απόκλιση του σφάλματος
0.46158	0.44592	0.66083	20.0382

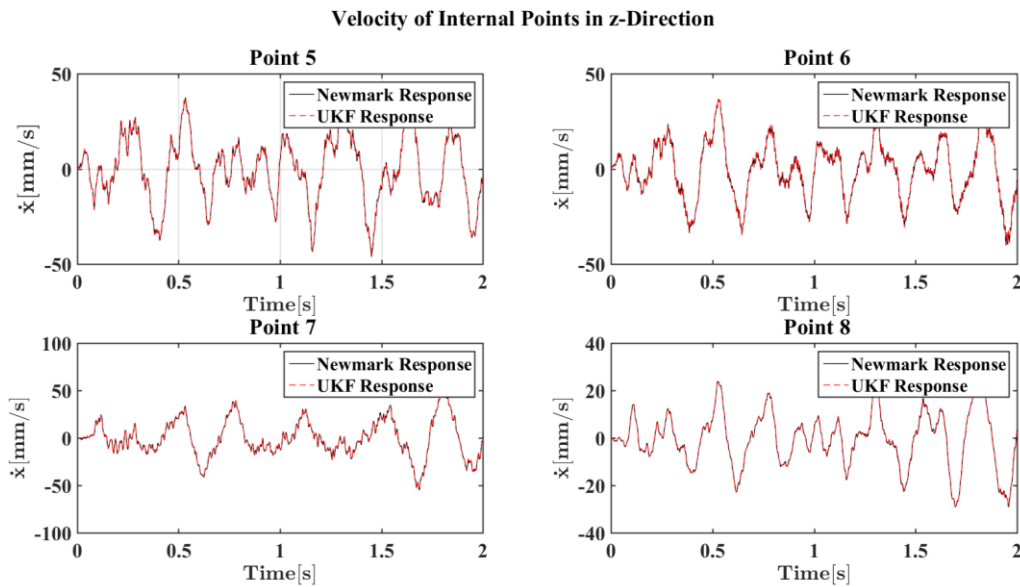
4.2.1.2 Εκτίμηση καταστάσεων και παραμέτρων (state and parameter estimation)

Ως επόμενο βήμα θα προσπαθήσουμε να πραγματοποιήσουμε και εκτίμηση παραμέτρων (parameter estimation) εκτός από εκτίμηση καταστάσεων (state estimation). Και πάλι ως σημεία μέτρησης έχουμε τα συνοριακά σημεία αλλά το χρονικό διάστημα είναι από μηδέν έως δύο δευτερόλεπτα (0-2 sec). Οι δύο παράμετροι που θέλουμε να προσεγγίσουμε θα είναι ο συντελεστής μ_{k1} για την ανάρτηση που αντιστοιχεί στο πρώτο συνοριακό σημείο καθώς και ο συντελεστής μ_{c2} για την ανάρτηση που αντιστοιχεί στο δεύτερο συνοριακό σημείο.

Όπως παρατηρούμε (Σχήμα 4.6 και 4.7) η εκτίμηση για τις καταστάσεις εξακολουθεί να παρουσιάζει πολύ καλή συμπεριφορά, ενώ οι μέσες τιμές έχουν βελτιωθεί σημαντικά σε σχέση με πριν (Πίνακας 4.3 και 4.4). Η βελτίωση αυτή οφείλεται στο ότι το δείγμα μας περιλαμβάνει μεγαλύτερο χρονικό διάστημα και δεν επηρεάζεται το τελικό αποτέλεσμα τόσο σημαντικά από μεμονωμένες εκτιμήσεις οι οποίες έχουν μεγάλη απόκλιση από την πρότυπη τιμή. Αναφέρουμε ότι για τον υπολογισμό των στατιστικών μεγεθών τόσο για τις καταστάσεις όσο και για τις παραμέτρους λάβαμε υπόψη μας μετρήσεις από χρόνο 0.2 δευτερόλεπτα (0.2 sec) και έπειτα.



Σχήμα 4.6: Σύγκριση της μετατόπισης στα εσωτερικά σημεία του πλαισίου για $t = 0 - 2 \text{ sec}$



Σχήμα 4.7: Σύγκριση της ταχύτητας στα εσωτερικά σημεία του πλαισίου για $t = 0 - 2 \text{ sec}$

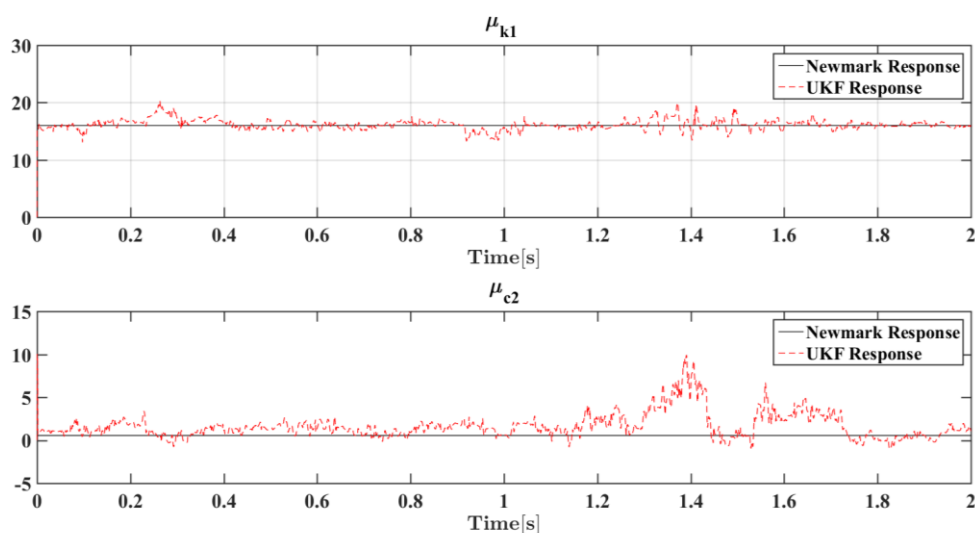
Πίνακας 4.3: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της διαφοράς και του σφάλματος της μετατόπισης για $t = 0.2-2 \text{ sec}$

Μέση τιμή της απόλυτης διαφοράς	Τυπική απόκλιση της απόλυτης διαφοράς	Μέση τιμή του σφάλματος	Μέση τιμή της τυπικής απόκλιση του σφάλματος
0.0036462	0.0025768	0.11102	6.1568

Πίνακας 4.4: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της διαφοράς και του σφάλματος της μετατόπισης για $t = 0.2-2 \text{ sec}$

Μέση τιμή της απόλυτης διαφοράς	Τυπική απόκλιση της απόλυτης διαφοράς	Μέση τιμή του σφάλματος	Μέση τιμή της τυπικής απόκλιση του σφάλματος
0.14188	0.12301	0.19738	5.2069

Ποια είναι όμως η εικόνα για την εκτίμηση των παραμέτρων; Αντιλαμβανόμαστε (από το Σχήμα 4.8) ότι ενώ το αποτέλεσμα προσεγγίζει την πραγματική τιμή της μεταβλητής αρκετά σύντομα δεν μας οδηγεί σε μία σταθερή τιμή μέχρι το χρονικό σημείο των δύο δευτερολέπτων (2 sec). Επιπλέον η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της διαφορά αλλά και του σχετικού σφάλματος είναι αρκετά μικρότερες για την περίπτωση της παραμέτρου μ_{k1} . Ενώ στην περίπτωση της παραμέτρου μ_{c2} οι εκτιμήσεις κυμαίνονται σε μεγαλύτερο εύρος γύρω από την πραγματική τιμή. Από την παρούσα προσομοίωση, αλλά και από περιπτώσεις στις οποίες είχαμε διαφορετικό συνδυασμό παραγόντων με παρεμφερή αποτελέσματα, συμπεραίνουμε πως η συνδυασμένη εκτίμηση καταστάσεων και παραμέτρων περιπλέκεται σημαντικά σε σχέση με το απλό μοντέλο του συστήματος μαζών – ελατηρίων σε σειρά.



Σχήμα 4.8: Σύγκριση των τιμών των παραμέτρων στα εσωτερικά σημεία του πλαισίου για $t = 0 - 2 \text{ sec}$

Πίνακας 4.5: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της διαφοράς και του σφάλματος της παραμέτρου μ_{k1}

Μέση τιμή της απόλυτης διαφοράς	Τυπική απόκλιση της απόλυτης διαφοράς	Μέση τιμή του σφάλματος	Μέση τιμή της τυπικής απόκλιση του σφάλματος
0.63410	0.63790	0.039631	0.039869

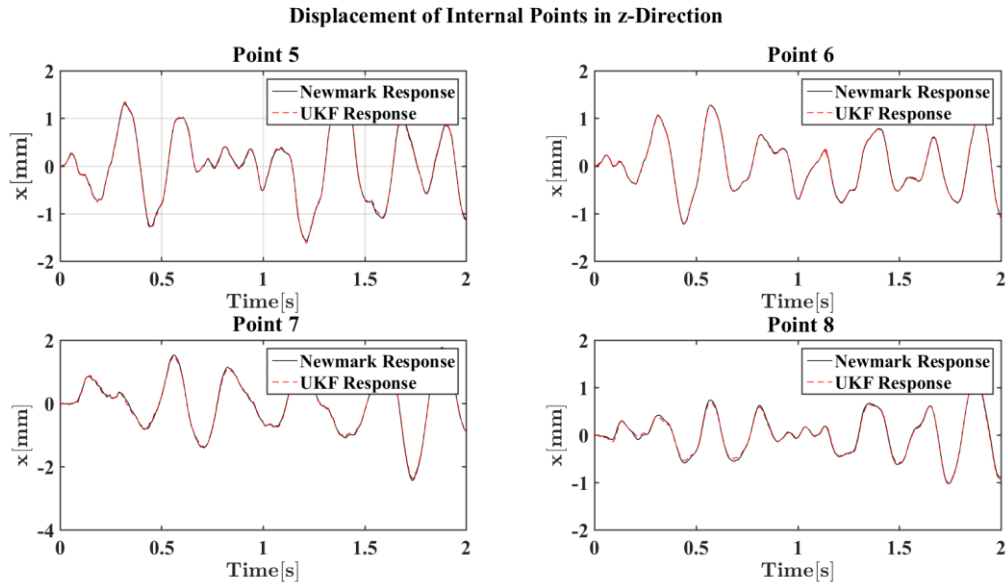
Πίνακας 4.6 : Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της διαφοράς και του σφάλματος της παραμέτρου μ_{k1}

Μέση τιμή της απόλυτης διαφοράς	Τυπική απόκλιση της απόλυτης διαφοράς	Μέση τιμή του σφάλματος	Μέση τιμή της τυπικής απόκλιση του σφάλματος
1.3069	1.3069	2.3762	2.5538

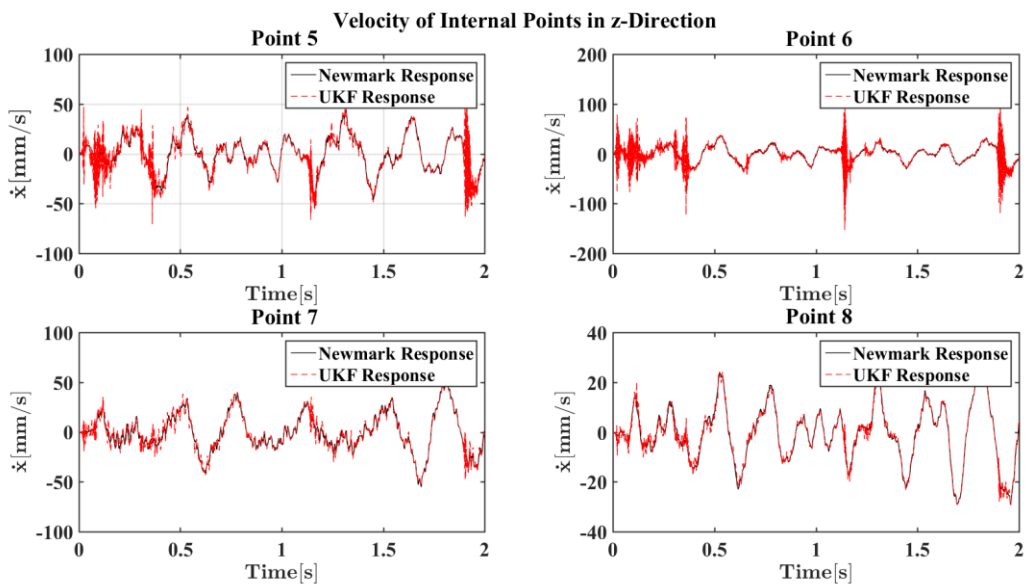
4.2.2 Μετρήσεις και σε εσωτερικά σημεία

Είναι εύλογο να αναρωτηθούμε τι θα συμβεί αν αλλάξουμε το συνδυασμό των σημείων μέτρησης. Προκειμένου να δώσουμε απάντηση σε αυτό το ερώτημα παρουσιάζουμε στη συνέχεια τα αποτελέσματα μίας προσομοίωσης με σημεία μέτρησης τα συνοριακά σημεία ένα, δύο και τρία (“1-2-3”) και το εσωτερικό σημείο πέντε (“5”).

Τα αποτελέσματα για τη μετατόπιση είναι πολύ ικανοποιητικά (Σχήμα 4.9) ενώ για την ταχύτητα παρ’ ότι το Φίλτρο προσεγγίζει αρκετά καλά την πρότυπη συμπεριφορά, υπάρχουν ορισμένα σημεία με πολύ μεγάλο εύρος τιμών των εκτιμήσεων. Σε σχέση με τις μετρήσεις στα συνοριακά σημεία σημαντικές διαφορές εντοπίζονται στην περίπτωση της ταχύτητας και όχι τόσο της μετατόπισης. Το γεγονός αυτό φαίνεται και από τα αποτελέσματα για τη διαφορά αλλά και το σχετικό σφάλμα. Τα αποτελέσματα για τη μετατόπιση (Πίνακας 4.7) ναί μεν είναι χειρότερα από την αντίστοιχη περίπτωση για τις μετρήσεις στα τέσσερα συνοριακά σημεία όμως μπορούν να θεωρηθούν αποδεκτές τιμές σφάλματος. Αντιθέτως για την ταχύτητα οι τιμές αυτών των μεγεθών δεν είναι καλές, ιδίως το σφάλμα. Φυσικά οι χρονικές στιγμές κατά τις οποίες παρατηρείται πολύ μεγάλο εύρος των τιμών της εκτίμησης συντελούν στις τόσο μεγάλες τιμές του σφάλματος. Παρόμοια συμπεριφορά παρατηρείται και αν πάρουμε μέτρηση σε κάποιο άλλο εσωτερικό σημείο αντί για το σημείο πέντε, όμως παίζει ρόλο και το ποιος συνδυασμός σημείων θα χρησιμοποιηθεί.



Σχήμα 4.9: Σύγκριση της μετατόπισης στα εσωτερικά σημεία του πλαισίου για $t = 0 - 2 \text{ sec}$



Σχήμα 4.10: Σύγκριση της μετατόπισης στα εσωτερικά σημεία του πλαισίου για $t = 0 - 2 \text{ sec}$

Πίνακας 4.7: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της διαφοράς και του σφάλματος της μετατόπισης για μετρήσεις σε 3 συνοριακά σημεία και ένα εσωτερικό για χρόνο $t = 0.2 - 2 \text{ sec}$

Μέση τιμή της απόλυτης διαφοράς	Τυπική απόκλιση της απόλυτης διαφοράς	Μέση τιμή του σφάλματος	Μέση τιμή της τυπικής απόκλιση του σφάλματος
0.014190	0.010174	0.51029	28.6650

Πίνακας 4.8: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της διαφοράς και του σφάλματος της ταχύτητας για μετρήσεις σε 3 συνοριακά σημεία και ένα εσωτερικό για χρόνο $t = 0.2 - 2 \text{ sec}$

Μέση τιμή της απόλυτης διαφοράς	Τυπική απόκλιση της απόλυτης διαφοράς	Μέση τιμή του σφάλματος	Μέση τιμή της τυπικής απόκλιση του σφάλματος
1.3573	2.0012	2.7343	88.4398

4.3 Στατιστικές αναλύσεις

Ως συνδυασμός σημείων μέτρησης της επιτάχυνσης επιλέχθηκαν τα τέσσερα (4) σημεία σύνδεσης της κατασκευής μας με τις μη γραμμικές αναρτήσεις, δεδομένου ότι δίνουν πολύ καλά αποτελέσματα ακόμα και για εξαιρετικά μικρή χρονική περίοδο (μικρότερη από ένα δευτερόλεπτο (1 sec)).

Επίσης όλες οι προσομοιώσεις έλαβαν χώρα στο χρονικό διάστημα από μηδέν έως δύο δευτερόλεπτα (0-2 sec). Η δομή της παρουσίασης των αποτελεσμάτων είναι αντίστοιχη με εκείνη του προηγούμενου κεφαλαίου και γίνεται η υπενθύμιση ότι οι πλήρεις πίνακες της ANOVA βρίσκονται στο παράρτημα 1.

4.3.1 Στατιστική μελέτη της επίδρασης του θορύβου της μέτρησης

Οι παράγοντες της ανάλυσης μας θα είναι ο πραγματικός θόρυβος της μέτρησης και ο θεωρούμενος θόρυβος της μέτρησης. Λάβαμε υπ' όψιν μας τρία (3) επίπεδα του παράγοντα, όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.9.

Οι πιθανοί συνδυασμοί που προκύπτουν είναι εννιά (9) και πραγματοποιήσαμε μία προσομοίωση για κάθε περίπτωση.

Πίνακας 4.9: Τα επίπεδα σφάλματος της μέτρησης

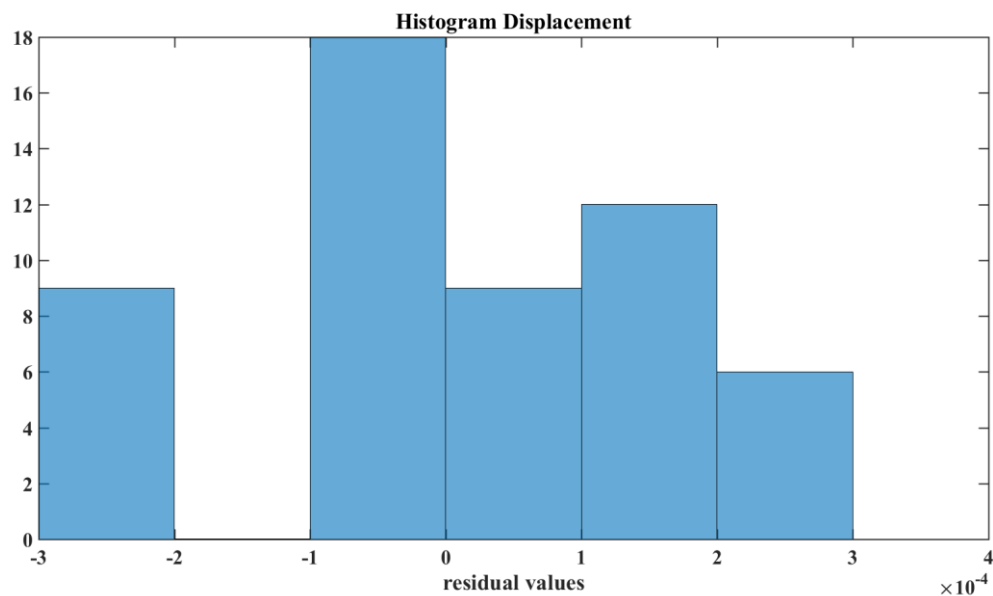
Επίπεδο	Τιμή σφάλματος λόγω θορύβου
1	0.001 (0.1%)
2	0.01 (1%)
3	0.1 (10%)

Ως απαιτούμενο χρόνο προσαρμογής όπως προκύπτει από την παρατήρηση των αρχικών προσομοιώσεων αυτού του συνδυασμού, λαμβάνουμε τα πρώτα 0.2 sec. Συνεπώς χρονικό διάστημα δειγματοληψίας αποτελεί το διάστημα 0.2 έως 2 sec.

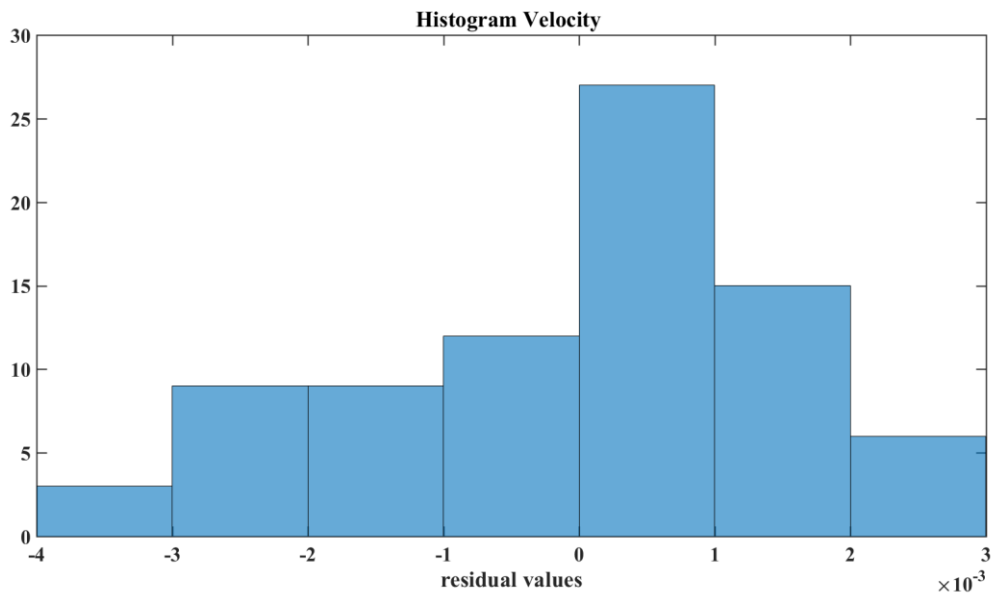
Στη συνέχεια για την κάθε περίπτωση στη συνέχεια πήραμε υποτιμήματα των 0.2 sec, με

αποτέλεσμα να προκύψουν εννέα (9) υποομάδες τιμών για κάθε συνδυασμό των τιμών των παραγόντων. Κάθε τέτοια υποομάδα θα τη θεωρούμε ως διαφορετική επανάληψη στη συνέχεια της ανάλυσης μας.

Τα ιστογράμματα των υπολοίπων για τις μέσες τιμές της απόλυτης διαφοράς της ταχύτητας και της μετατόπισης απεικονίζονται στα Σχήματα 4.11 και 4.12



Σχήμα 4.11: Ιστόγραμμα των υπολοίπων για τη μετατόπιση



Σχήμα 4.12: Ιστόγραμμα των υπολοίπων για την ταχύτητα

Η παρατηρούμενη συμπεριφορά είναι κάπως ανησυχητική, γι' αυτό το λόγο δημιουργούμε δύο διαγράμματα για σύγκριση των υπολοίπων με τις αντίστοιχες τιμές για κανονική κατανομή (τα οποία βρίσκονται στο παράρτημα 3 ως σχήμα 3.ii και 3.iii) και παρ' ότι τα αποτελέσματα δεν είναι ιδιαίτερα καλά θα συνεχίσουμε στην ανάλυση μεταβλητότητας για δύο (2) παράγοντες.

Η ανάλυση μεταβλητότητας ιδίως για τη μετατόπιση, αλλά και για την ταχύτητα, μας δίνει υψηλές τιμές για το παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας (p-value). Συνεπώς δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση και δεν έχουμε ισχυρές ενδείξεις ότι το θεωρούμενο σφάλμα της μέτρησης επηρεάζει την εκτίμηση μας.

Η εικόνα από τα διαγράμματα αλληλεπίδρασης (Σχήματα 4.13 και 4.14) συνάδει με αυτό το συμπέρασμα καθώς οι μέσες τιμές επηρεάζονται πολύ λίγο από τις δύο αυτές παραμέτρους

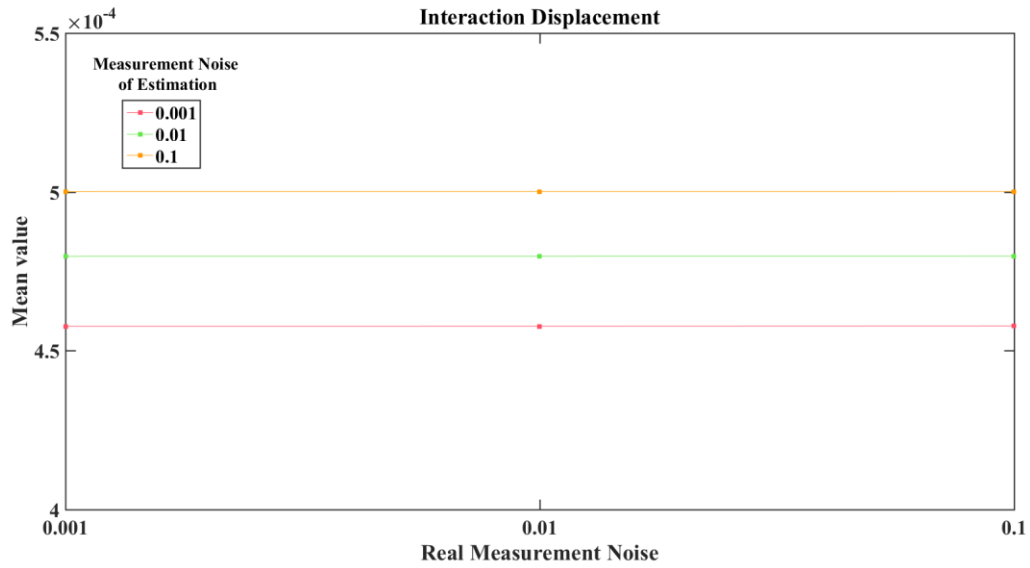
Δεν μπορούμε να γνωρίζουμε με βεβαιότητα αν τα αποτελέσματα αυτά είναι ορθά για το συγκεκριμένο εύρος του λάθους της μέτρησης ή εάν οφείλεται στο ότι τα αποτελέσματα μας πιθανώς να μην προέρχονται από κανονική κατανομή. Ο μόνος τρόπος να οδηγηθούμε σε πιο ακριβή συμπεράσματα είναι το να πραγματοποιήσουμε την προσομοίωση για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα.

Πίνακας 4.10 : ANOVA για τη μετατόπιση

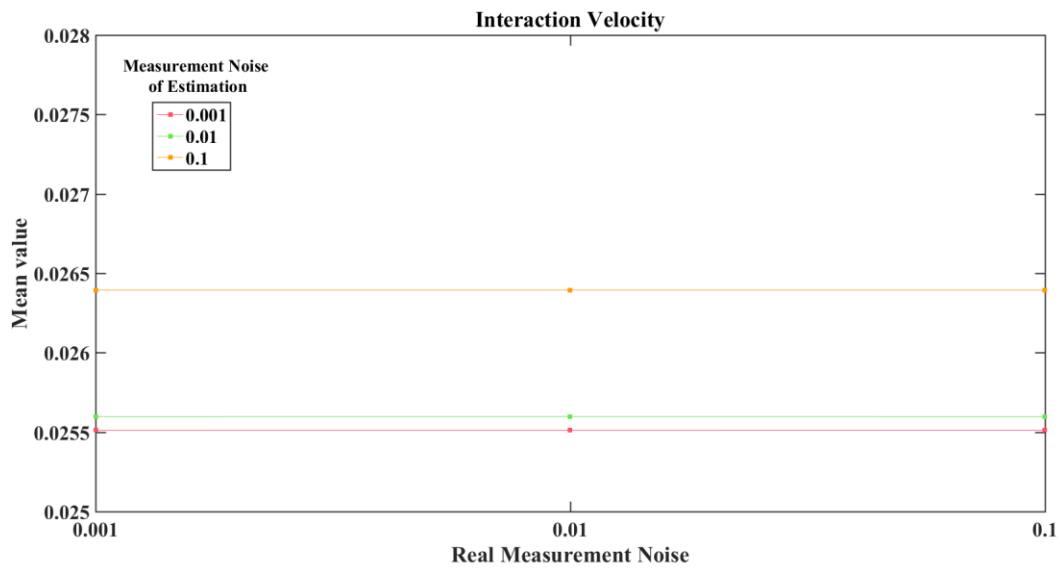
Πηγή	F	Prob>F
Θεωρούμενο Σφάλμα	0.50684	0.60452
Πραγματικό Σφάλμα	1.5195e-06	0.9999
Αλληλεπίδραση	2.8937e-07	0.9999

Πίνακας 4. 11: ANOVA για την ταχύτητα

Πηγή	F	Prob>F
Θεωρούμενο Σφάλμα	2.4644	0.092207
Πραγματικό Σφάλμα	1.5851e-07	0.9999
Αλληλεπίδραση	3.0372e-07	0.9999



Σχήμα 4.13 Διάγραμμα αλληλεπίδρασης μεταξύ του πραγματικού θορύβου και του θορύβου που λαμβάνουμε υπ' όψιν μας κατά την εκτίμηση της μετατόπισης μέσω του UKF.



Σχήμα 4.14 Διάγραμμα αλληλεπίδρασης μεταξύ του πραγματικού θορύβου και του θορύβου που λαμβάνουμε υπ' όψιν μας κατά την εκτίμηση της ταχύτητας μέσω του UKF.

4.3.2 Στατιστική μελέτη της επίδρασης του θορύβου της μοντελοποίησης

Στην περίπτωση του θορύβου του μοντέλου θεωρούμε δύο παράγοντες, όπως και για την περίπτωση του μοντέλου με ελατήρια-μάζες σε σειρά. Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε είναι η ίδια με εκείνη της παραγράφου 3.4.1 και εδώ θα την αναφέρουμε εν συντομία. Προκειμένου να εισάγουμε θόρυβο στη μοντελοποίηση χρησιμοποιούμε έναν συντελεστή προσαύξησης στα μητρώα μάζας, στιβαρότητας και απόσβεσης και ως επίπεδα του πραγματικού σφάλματος θεωρούμε τους πιθανούς τους συνδυασμούς. Τα επίπεδα του θεωρούμενου σφάλματος μοντελοποίησης και του πραγματικού σφάλματος αναγράφονται στον πίνακα 4.11 και 4.12.

Πίνακας 4.11: Τα επίπεδα του θεωρούμενου σφάλματος της μοντελοποίησης

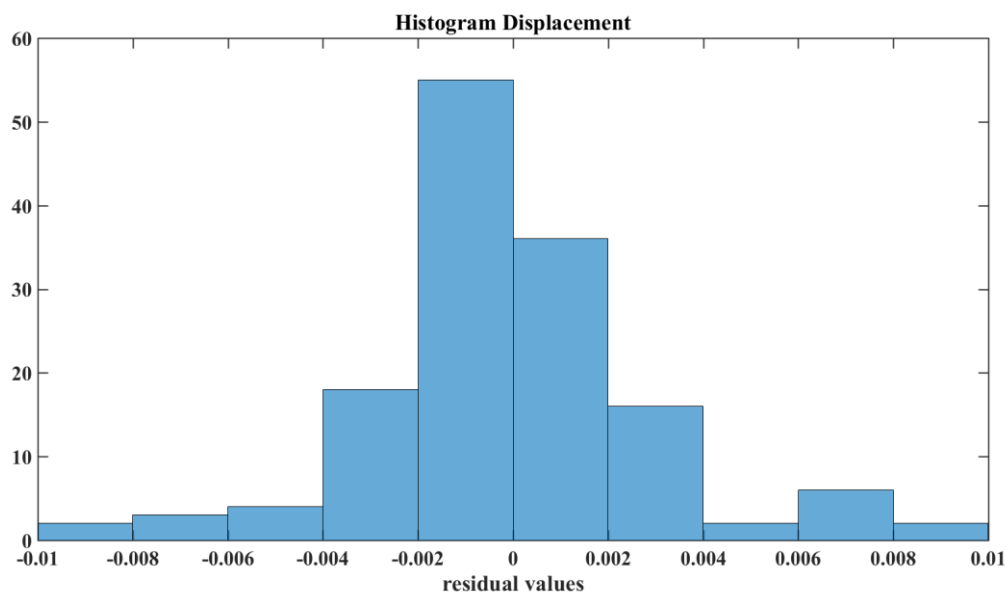
Επίπεδο	Τιμή σφάλματος λόγω θορύβου
1	0.001
2	0.01

Πίνακας 4.12 : Τα επίπεδα του σφάλματος της μοντελοποίησης

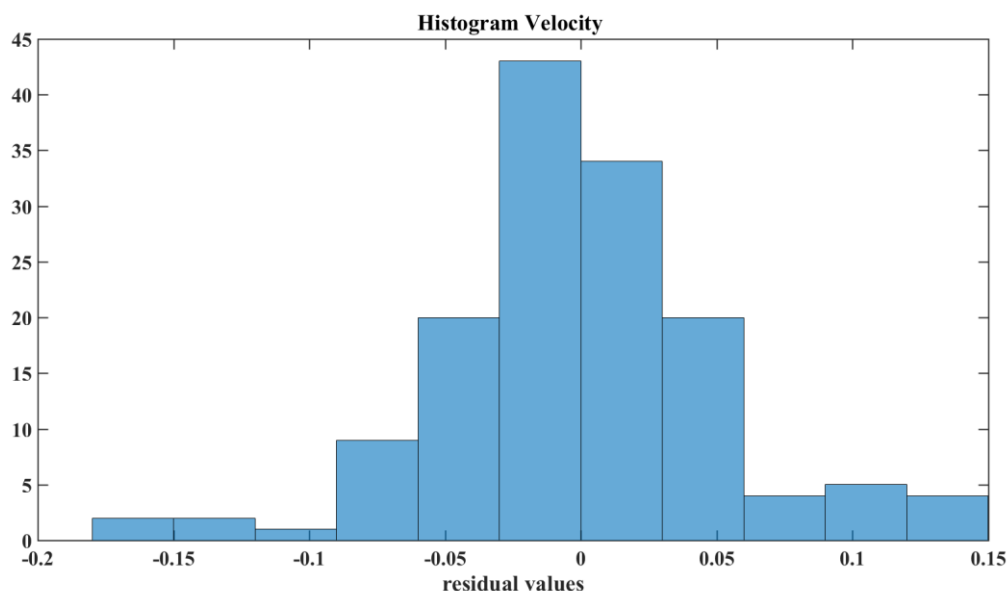
Επίπεδα του παράγοντα	MN	KN	CN
1	0.001	0.001	0.001
2	0.01	0.001	0.001
3	0.001	0.01	0.001
4	0.01	0.01	0.001
5	0.001	0.001	0.01
6	0.01	0.001	0.01
7	0.001	0.01	0.01
8	0.01	0.01	0.01

Πραγματοποιήσαμε μία προσομοίωση για κάθε επίπεδο για το χρονικό διάστημα από μηδέν έως δύο δευτερόλεπτα (0-2 sec), ως διάστημα το οποίο χρειάζεται το UKF για να προσαρμοστεί στα δεδομένα θεωρούμε και πάλι τα 0.2 sec . Στη συνέχεια επιλέξαμε, όπως και στην περίπτωση του θορύβου της μέτρησης, υποομάδες ανά 0.2 sec. Συνεπώς θα έχουμε εννέα (9) επαναλήψεις.

Ο έλεγχος της κανονικότητας των υπολοίπων παρουσιάζει αρκετά καλή εικόνα οπότε μπορούμε να θεωρούμε πως έχουμε αρκετά στέρεα βάση για την ANOVA που θα πραγματοποιήσουμε.



Σχήμα 4.15 : Ιστόγραμμα των υπολοίπων για τη μετατόπιση



Σχήμα 4.16 : Ιστόγραμμα των υπολοίπων για την ταχύτητα

Όπως βλέπουμε στους πίνακες (Πίνακας 4.15 και 4.16), δεν έχουμε ισχυρές ενδείξεις ότι το θεωρούμενο σφάλμα και η αλληλεπίδρασή του με το πραγματικό σφάλμα είναι στατιστικά σημαντικά. Αντιθέτως όμως, το παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας για το πραγματικό σφάλμα της μοντελοποίησης είναι εξαιρετικά μικρό.

Αυτή η συμπεριφορά είναι παρεμφερής με τη συμπεριφορά που παρατηρήσαμε και για τα μοντέλο μαζών-ελατηρίων σε σειρά, με ορισμένες σημαντικές διαφορές όμως.

Χαρακτηριστική διαφορά αποτελεί το γεγονός ότι την υψηλότερη μέση τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής τη δίνει ο συνδυασμός επτά (“7”) ο οποίος αντιστοιχεί στην υψηλή τιμή του

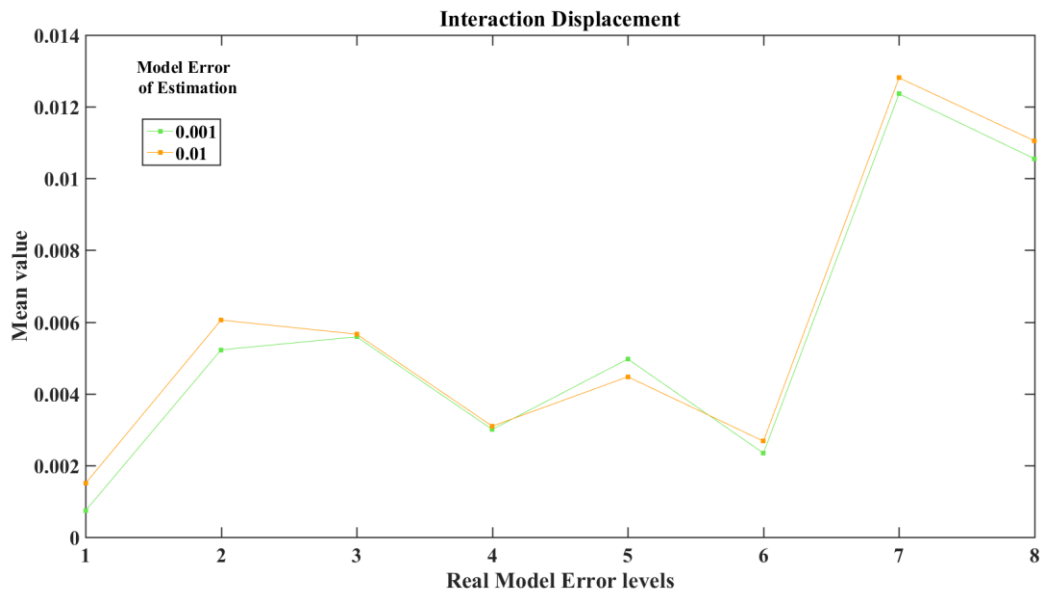
συντελεστή προσαύξησης για τα μητρώα στιβαρότητας και απόσβεσης ενώ η υψηλή τιμή του συντελεστή για τη μάζα οδηγεί σε μεσαίας τάξης αύξηση της μέσης τιμής (επίπεδο δύο (“2”)).

Πίνακας 4.13 : ANOVA για τη μετατόπιση

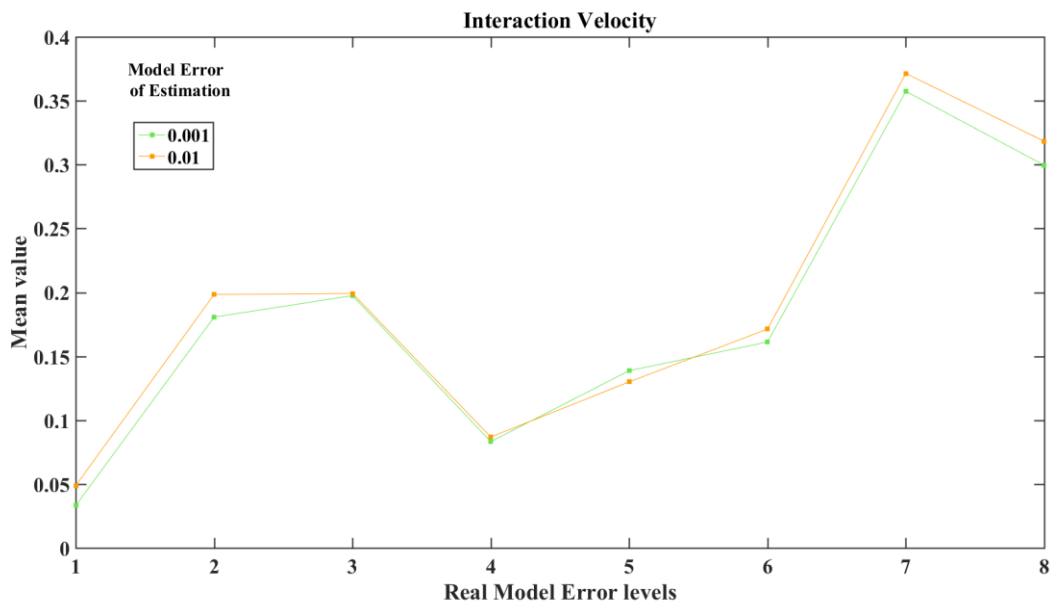
Πηγή	F	Prob>F
Θεωρούμενο Σφάλμα	0.372042	0.54298
Πραγματικό Σφάλμα	29.62480	5.4839e-24
Αλληλεπίδραση	0.084277	0.99899

Πίνακας 4. 14: ANOVA για την ταχύτητα

Πηγή	F	Prob>F
Θεωρούμενο Σφάλμα	0.99569	0.32024
Πραγματικό Σφάλμα	70.0385	1.0038e-40
Αλληλεπίδραση	0.13744	0.99519



Σχήμα 4.17: Διάγραμμα αλληλεπίδρασης μεταξύ του πραγματικού θορύβου και του θορύβου που λαμβάνουμε υπ' όψιν μας κατά την εκτίμηση της μετατόπισης μέσω του UKF.



Σχήμα 4.18: Διάγραμμα αλληλεπίδρασης μεταξύ του πραγματικού θορύβου και του θορύβου που λαμβάνουμε υπ' όψιν μας κατά την εκτίμηση της ταχύτητας μέσω του UKF.

Κεφάλαιο 5: Χρήση του UKF σε συνδυασμό με λύτη (solver) πεπερασμένων στοιχείων – Διατύπωση του προβλήματος

Οι αναλύσεις που βασίζονται στη θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων αποτελούν αναπόσπαστο τμήμα της διαδικασίας μελέτης και ανάπτυξης των κατασκευών. Βάσει αυτού του γεγονότος, η ενσωμάτωση του UKF στην επίλυση πεπερασμένων στοιχείων θα πρόσφερε τη δυνατότητα να προσεγγίσουμε παραμέτρους μίας κατασκευής καθώς και να επιβεβαιώσουμε τη συνολική της απόκριση με βάση τις μετρήσεις της επιτάχυνσης σε ορισμένα σημεία.

Προφανώς το παραπάνω αποτελεί ένα εξαιρετικά γενικό και εύρη αντικείμενο. Δικός μας στόχος είναι να δημιουργήσουμε έναν τρόπο να συνδέεται ο κώδικας το UKF με έναν επιλυτή πεπερασμένων στοιχείων (solver) και να αξιολογήσουμε τα αποτελέσματα.

Στα πλαίσια αυτής της προσπάθειας θα εξετάσουμε το πολύ απλό μοντέλο που μελετήσαμε στο κεφάλαιο 3 ώστε να γίνει σαφής η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε.

5.1 Διατύπωση του προβλήματος και της προτεινόμενης ιδέας

Το μοντέλο το οποίο θα μελετήσουμε έχει ήδη περιγραφεί στην ενότητα 3.1 οπότε απλώς θα υπενθυμίζουμε ότι αφορά σε ένα σύνολο έντεκα (11) μαζών συνδεδεμένες σε σειρά με ελατήρια και αποσβεστήρες από τις οποίες η πρώτη μάζα υφίσταται μία εξωτερική διέγερση. Όλα τα ελατήρια είναι γραμμικά πλην του πρώτου το οποίο είναι μη γραμμικό και μάλιστα προσπαθούμε να προβλέψουμε τις ιδιότητες του.

5.1.1 Προβλήματα που έπρεπε να αντιμετωπιστούν

Όπως είναι εύκολο να φανταστεί κανείς το βασικό πρόβλημα είναι το πώς θα επικοινωνήσει ο αλγόριθμος του UKF που έχουμε με τον επιλυτή, δηλαδή ποιες πληροφορίες θα πρέπει να μεταφερθούν και πώς. Το πώς θα γίνει η ανταλλαγή των πληροφοριών είναι το εύκολο κομμάτι αλλά το ποιες πρέπει να είναι αυτές οι πληροφορίες απαιτεί περισσότερη σκέψη.

Η πιο απλή σκέψη που θα μπορούσαμε να κάνουμε είναι η εξής, να τρέχουμε σε κάθε χρονικό βήμα τον επιλυτή και με βάση τα αποτελέσματα των μετρήσεων να υπολογίζουμε τα σημεία σίγμα και να τα εισάγουμε στο επόμενο βήμα όπως και την τιμή των παραμέτρων. Αυτή η προσέγγιση όμως έχει δύο σημαντικά μειονεκτήματα:

- Πρώτον, θα απαιτεί σε κάθε χρονικό βήμα να καλείται ο επιλυτής, να διαβάζονται τα αποτελέσματα και να γράφονται τα αντίστοιχα αρχεία που θα εισάγουν τα νέα δεδομένα

- Δεύτερον, αν ως καταστάσεις (states) έχουμε όλους τους β.ε. του μοντέλου, έστω n , αυτό σημαίνει ότι θα έχουμε $2n+1$ σημεία σίγμα σύμφωνα με τη θεωρία του UKF συνεπώς διπλασιάζουμε το μέγεθος του μοντέλου με όποια επακόλουθα θα έχει αυτό στην επίλυση.

Αυτή η προσέγγιση, λοιπόν είναι απαγορευτικά χρονοβόρα. Άρα θα έπρεπε να καταλήξουμε σε έναν τρόπο σύνδεσης ο οποίος να μην έχει τα παραπάνω μειονεκτήματα.

5.1.2 Προτεινόμενη λύση

Η λύση η οποία προτάθηκε κατόπιν σκέψης είναι η εξής, να χωρίσουμε την κατασκευή μας σε δύο τμήματα από τα οποία το πρώτο να είναι σχετικά μικρό και να περιλαμβάνει τη μη γραμμικότητα, ενώ το δεύτερο να είναι αμιγώς γραμμικό με γνωστές παραμέτρους. Αυτή η ιδέα βασίζεται σε μεθοδολογίες ανάλυσης του μοντέλου σε υποκατασκευές (substructuring) και προτάθηκε στο [2].

Τα δύο τμήματα στα οποία χωρίσαμε την κατασκευή είναι τα εξής:

- 1) Η μη γραμμική ανάρτηση και
- 2) Το υπερκείμενο γραμμικό σύστημα μαζών-ελατηρίων σε σειρά

Αρχικά λαμβάνουμε μετρήσεις στο πλήρες μοντέλο. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το UKF μόνο στο πρώτο τμήμα και κρατάμε τη χρονοϊστορία της επιτάχυνσης. Τέλος εισάγουμε την επιτάχυνση στο σημείο σύνδεσης ως διέγερση εδάφους στη δεύτερη υποκατασκευή και βλέπουμε πώς συμπεριφέρεται σε σχέση με τις μετρήσεις του πλήρους μοντέλου ώστε να επιβεβαιώσουμε την ορθότητα των αποτελεσμάτων.

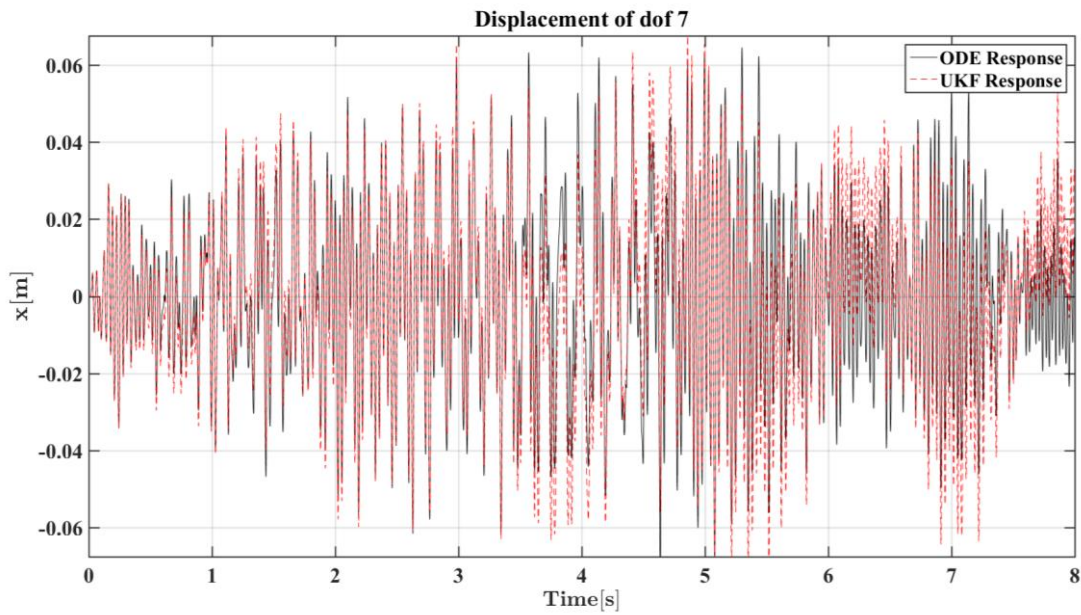
5.2 Δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν

Προκειμένου να ελέγξουμε την ορθότητα της προτεινόμενης λύσης αποφασίστηκε να εφαρμόσουμε τη σύνδεση μεταξύ των δύο υποσυστημάτων τα οποία θα λυθούν αρχικά αριθμητικά, έτσι ώστε να αποκτήσουμε μία αίσθηση για το αν θα μπορούσε να εφαρμοστεί η λύση που προτείνεται.

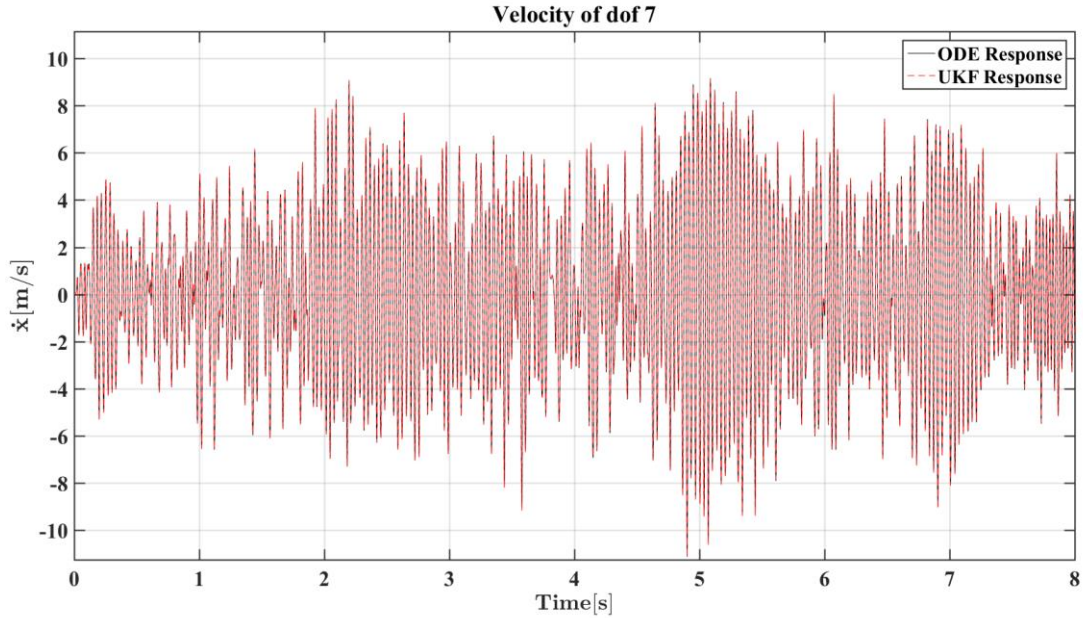
Δημιουργήσαμε ένα υποσύστημα τριών (3) μαζών στο οποίο περιλαμβάνεται η μη γραμμικότητα. Με βάση τις μετρήσεις της επιτάχυνσης στο όριο, εφαρμόζουμε το UKF και ως αποτέλεσμα έχει δημιουργηθεί μία χρονοϊστορία για την επιτάχυνση του συνοριακού β.ε.. Στη συνέχεια αυτή τη χρονοϊστορία την εισάγουμε ως διέγερση εδάφους στο δεύτερο σύστημα, το οποίο περιλαμβάνει τις υπόλοιπες οχτώ (8) μάζες. Τέλος συγκρίνουμε τις μετατοπίσεις και την ταχύτητα στους διάφορους β.ε. σε σχέση με τους αντίστοιχους βαθμούς στο πλήρες μοντέλο.

Παρατίθενται ενδεικτικά τα διαγράμματα μετατόπισης, ταχύτητας και επιτάχυνσής για τον

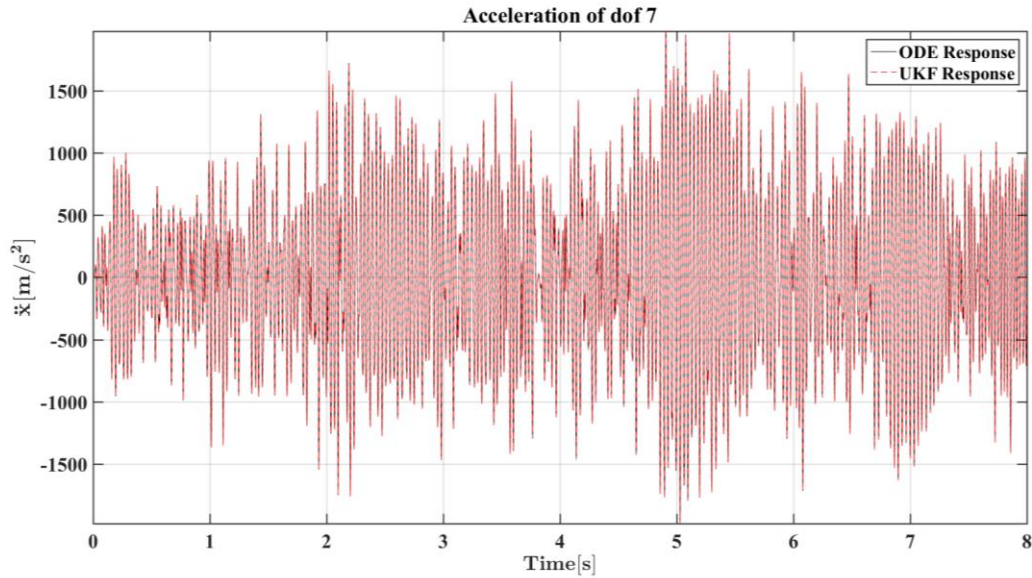
έβδομο (7^ο) β.ε. Παρατηρούμε εξαιρετική προσαρμογή για την ταχύτητα και την επιτάχυνση, ενώ για τη μετατόπιση υπάρχει μία απόκλιση (Σχήμα 5.1 – 5.3). Η εικόνα αυτή συνάδει και με τα στατιστικά μεγέθη για τις αντίστοιχες μεταβλητές (Πίνακας 5.1-5.3).



Σχήμα 5.1: Διάγραμμα της μετατόπισης για τον 7^ο β.ε.



Σχήμα 5.2: Διάγραμμα της ταχύτητας για τον 7^ο β.ε.



Σχήμα 5.3: Διάγραμμα της επιτάχυνσης για τον 7^ο β.ε.

Πίνακας 5.1 : Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της διαφοράς και του σφάλματος της μετατόπισης

Μέση τιμή της απόλυτης διαφοράς	Τυπική απόκλιση της απόλυτης διαφοράς	Μέση τιμή του σφάλματος	Μέση τιμή της τυπικής απόκλιση του σφάλματος
0.0078044	0.0058170	6.1939	773.0051

Πίνακας 5.2 : Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της διαφοράς και του σφάλματος της ταχύτητας

Μέση τιμή της απόλυτης διαφοράς	Τυπική απόκλιση της απόλυτης διαφοράς	Μέση τιμή του σφάλματος	Μέση τιμή της τυπικής απόκλιση του σφάλματος
0.056144	0.0062846	0.20942	8.5497

Πίνακας 5.3 : Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της διαφοράς και του σφάλματος της επιτάχυνσης

Μέση τιμή της απόλυτης διαφοράς	Τυπική απόκλιση της απόλυτης διαφοράς	Μέση τιμή του σφάλματος	Μέση τιμή της τυπικής απόκλιση του σφάλματος
9.8454	1.2629	0.20239	12.5026

Όπως παρατηρούμε τα αποτελέσματα είναι πάρα πολύ καλά. Συνεπώς έχουμε λόγους να πιστεύουμε ότι θα μπορούσε να λειτουργήσει αποτελεσματικά η ιδέα της σύνδεσης του UKF με έναν επιλυτή. Αποτελεί, λοιπόν, αντικείμενο προς έρευνα τα αποτελέσματα αυτής της εφαρμογής σε συνδυασμό με έναν επιλυτή. Σημειώνεται πως κατά τη σύνταξη της παρούσας εργασίας είχαν ήδη γίνει ενέργειες προς αυτή την κατεύθυνση.

Συμπεράσματα - Προτάσεις

Στην παρούσα εργασία εφαρμόσαμε τη θεωρία του Unscented Φίλτρου Kalman (UKF) στην πρόβλεψη της συμπεριφοράς δύο κατασκευών, στις οποίες περιλαμβάνονται μη γραμμικά στοιχεία.

Αρχικά εξετάσαμε ένα σύστημα μαζών-ελατηρίων σε σειρά, έντεκα (11) β.ε για αρμονική αλλά και «τυχαία» διέγερση. Το Φίλτρο εκτίμησε πολύ ικανοποιητικά την απόκριση του συστήματος αλλά και τις τιμές των παραμέτρων, ακόμα και χρησιμοποιώντας μετρήσεις της επιτάχυνσης μόνο σε τρία (3) ή τέσσερα (4) σημεία.

Στη συνέχεια, για την περίπτωση της «τυχαίας» διέγερσης μελετήθηκε η επίδραση των τιμών του θορύβου της μέτρησης αλλά και του σφάλματος μοντελοποίησης, στην ορθότητα της εκτίμησης. Οι τιμές του θορύβου της μέτρησης επηρεάζουν με σημαντικό τρόπο τη συμπεριφορά του UKF, όπως άλλωστε ήταν αναμενόμενο. Μάλιστα καταλήξαμε πως είναι θεμιτή μία ελαφρά υπερεκτίμηση του σφάλματος ιδίως για μικρές τιμές του πραγματικού σφάλματος μέτρησης. Αντίθετα οι τιμές που θεωρούμε εμείς για το σφάλμα τη μοντελοποίησης κατά την εφαρμογή του Φίλτρου δεν είχαν σημαντική επίδραση στα αποτελέσματά μας. Οι τιμές του πραγματικού λάθους ήταν εκείνες που έπαιξαν καθοριστικό ρόλο. Αυτό το συμπέρασμα όμως μπορεί να οφείλεται στο ότι εισαγάγαμε μεγάλες τιμές λάθους στο μοντέλο μας σε σχέση με το αρχικό, οπότε επηρέασαν πολύ έντονα τα αποτελέσματά μας.

Στη συνέχεια προσπαθήσαμε να εκτιμήσουμε την απόκριση μίας ρεαλιστικής κατασκευής, την προσέγγιση του πλαισίου ενός οχήματος. Οι προσομοιώσεις έγιναν για το μειωμένο μοντέλο του οχήματος εβδομήντα (70) β.ε, καθώς το αρχικό μοντέλο περιλάμβανε σαράντα πέντε χιλιάδες εξακόσιους πενήντα τέσσερις (45,564) β.ε. Οι μετρήσεις μας έγιναν σε 8 σημεία της κατασκευής, τέσσερα (4) συνοριακά (σημεία σύνδεσης με τις μη γραμμικές αναρτήσεις) και τέσσερα (4) εσωτερικά. Για την περίπτωση της μέτρησης στα τέσσερα (4) συνοριακά σημεία τα αποτελέσματα είναι πολύ ικανοποιητικά. Καλά αποτελέσματα μπορούμε να πάρουμε και για μετρήσεις σε συνδυασμό τριών συνοριακών και ενός εσωτερικού σημείου. Όμως υπάρχει διαφορά ανάλογα με το ποιον συγκεκριμένο συνδυασμό θα χρησιμοποιήσουμε. Επίσης η ρύθμιση των αρχικών τιμών και παραγόντων που επηρεάζουν τη συμπεριφορά του UKF για την περίπτωση της εκτίμησης παραμέτρων, αποδείχθηκε πιο δύσκολη απ' ότι για το απλό μοντέλο. Παρ' όλα αυτά υπήρξαν θετικά αποτελέσματα.

Ακολούθησε η μελέτη της επίδρασης του θορύβου της μέτρησης και της μοντελοποίησης. Τα αποτελέσματα για το θόρυβο ήταν μη αναμενόμενα, καθώς δεν υπήρξαν σημαντικές

ενδείξεις ότι ο θόρυβος της μέτρησης για τιμές 0.1% έως και 10% επηρεάζει την εξαρτημένη μεταβλητή μας. Η παρατήρηση αυτή ίσως να οφείλεται στο μικρότερο χρόνο δειγματοληψίας, δεν αποκλείεται βέβαια η εκτίμηση για αυτό το μοντέλο να είναι όντως λιγότερο ευαίσθητη στο λάθος της μέτρησης. Επίσης, το θεωρούμενο σφάλμα της μοντελοποίησης δεν φάνηκε να επηρεάζει τα αποτελέσματα της προσομοίωσης, καθώς και σε αυτήν την περίπτωση αποδείχθηκε καθοριστικής σημασίας το πραγματικό σφάλμα μοντελοποίησης.

Τέλος προτάθηκε μία πιθανή λύση για το πώς θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί το UKF σε συνδυασμό με έναν επιλυτή (solver) πεπερασμένων στοιχείων και η ιδέα εφαρμόστηκε σε αριθμητική προσομοίωση με ενθαρρυντικά αποτελέσματα.

Ως μελλοντική πιθανή έρευνα προτείνεται η μελέτη της ακρίβειας της εκτίμησης για διαφορετικά ήδη μη γραμμικότητας. Επίσης η διενέργεια πειραμάτων θα συνέβαλλε στην επιβεβαίωση της ορθής λειτουργίας του κώδικά μας. Τέλος η σύνδεση του UKF με τον επιλυτή περασμένων στοιχείων θα αποτελούσε ένα ενδιαφέρον ζήτημα προς διερεύνηση. Αξίζει όμως να σημειωθεί πως ο πλέον αποτελεσματικός τρόπος σύνδεσης θα ήταν το να περιληφθεί εντός του κώδικα του επιλυτή η λειτουργία του UKF. Με αυτόν τον τρόπο θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν οι ήδη υπάρχουσες συναρτήσεις του επιλυτή στην εξίσωση κατάστασης και μέτρησης, γεγονός το οποίο θα συμβάλλει στην ακρίβεια των εκτιμήσεων. Επίσης είναι πιθανό ότι θα υπήρχε μεγάλο όφελος στον υπολογιστικό χρόνο, καθώς τα προγράμματα επίλυσης πεπερασμένων στοιχείων είναι σχεδιασμένα να διαχειρίζονται με όσο το δυνατόν καλύτερο τρόπο συστήματα πολλών βαθμών ελευθερίας, το οποίο θα είναι απαραίτητο σε πολύπλοκα προβλήματα.

Βιβλιογραφία

- [1] Bojanczyk, A. W., Brent, R. P., Van Dooren, P., & De Hoog, F. R. (1987). A note on downdating the Cholesky factorization. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 8(3), 210-221.
- [2] Giagopoulos, D., & Natsiavas, S. (2015). Dynamic Response and Identification of Critical Points in the Superstructure of a Vehicle Using a Combination of Numerical and Experimental Methods. *Experimental Mechanics*, 55(3), 529-542.
- [3] Julier, S. J., & Uhlmann, J. K. (1997, July). New extension of the Kalman filter to nonlinear systems. In *AeroSense'97* (pp. 182-193). International Society for Optics and Photonics.
- [4] Julier, S. J., & Uhlmann, J. K. (2004). Unscented Filtering and Nonlinear Estimation. *PROCEEDINGS OF THE IEEE*, 92(3), 401.
- [5] Laviola, J. J. (2003, June). A comparison of unscented and extended Kalman filtering for estimating quaternion motion. In *American Control Conference, 2003. Proceedings of the 2003* (Vol. 3, pp. 2435-2440). IEEE.
- [6] Mariani, S., & Ghisi, A. (2007). Unscented Kalman filtering for nonlinear structural dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 49(1-2), 131-150.
- [7] Marques de Sá, J. (2007). Estimating Data Parameters. *Applied Statistics Using SPSS, STATISTICA, MATLAB and R*, 81-109.
- [8] Meinhold, R. J., & Singpurwalla, N. D. (1983). Understanding the Kalman Filter. *The American Statistician*, 37(2), 123.
- [9] Miah, M. S., Chatzi, E. N., & Weber, F. (2015). Semi-active control for vibration mitigation of structural systems incorporating uncertainties. *Smart Materials and Structures*, 24(5), 055016.
- [10] Montgomery, D. C. (2008). *Design and analysis of experiments*. John Wiley & Sons
- [11] Sarkka, S. (2007). On unscented Kalman filtering for state estimation of continuous-time nonlinear systems. *IEEE Transactions on automatic control*, 52(9), 1631-1641.
- [12] Sitz, A., Schwarz, U., Kurths, J., & Voss, H. U. (2002). Estimation of parameters and unobserved components for nonlinear systems from noisy time series. *Physical review E*, 66(1), 016210
- [13] Van Der Merwe, R., Wan, E. A., & Julier, S. (2004, August). Sigma-point Kalman filters for nonlinear estimation and sensor-fusion: Applications to integrated navigation. In *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation & Control Conference* (pp. 16-19).
- [14] Wan, E. A., & Van Der Merwe, R. (2000). The unscented Kalman filter for nonlinear estimation. In *Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium 2000. AS-SPCC. The IEEE 2000* (pp. 153-158). Ieee.
- [15] Welch, G., & Bishop, G. (2006). An introduction to the kalman filter. Department of Computer Science, University of North Carolina.
- [16] Wu, M., & Smyth, A. W. (2007). Application of the unscented Kalman filter for real-time nonlinear structural system identification. *Structural Control and Health Monitoring*, 14(7), 971-990.

Παραρτήματα

Παράρτημα 1: Πλήρεις πίνακες των αποτελεσμάτων για τις περιπτώσεις ανάλυσης μεταβλητότητας που περιγράφονται στο 3 ^ο και 4 ^ο κεφάλαιο του κυρίως κειμένου	86
Παράρτημα 2: Συμπληρωματικό υλικό για το 3 ^ο κεφάλαιο	91
Παράρτημα 3: Συμπληρωματικό υλικό για το 4 ^ο κεφάλαιο	101

Παράρτημα 1: Πλήρεις πίνακες των αποτελεσμάτων για τις περιπτώσεις ανάλυσης μεταβλητότητας που περιγράφονται στο 3^ο και 4^ο κεφάλαιο του κυρίως κειμένου

Σημειώνεται ότι οι πίνακες που παρατίθενται στο συγκεκριμένο παράρτημα διατηρούν την αρίθμηση του κυρίως κειμένου ώστε να είναι πιο διευκολύνεται η εύρεση του επιθυμητού πίνακα.

1.1 Αναλύσεις που περιλαμβάνονται στο 3^ο κεφάλαιο

1.1.1 Επίδραση του αριθμού των σημείων μέτρησης

1.1.1.1 Αρμονική Φόρτιση

Πίνακας 3.1 Ανάλυση Kruskal-Wallis για τη Μετατόπιση

Πηγή	SS	dF	MS	Chi-sq	Prob>Chi-Sq
Παράγοντας	7.57411e+06	10	757411.2	299.92	1.62007e-58
Σφάλμα	6.29043e+06	539	11670.5		
Σύνολο	1.38645+07	549			

Πίνακας 3.2 Ανάλυση Kruskal-Wallis για την Ταχύτητα

Πηγή	SS	dF	MS	Chi-sq	Prob>Chi-Sq
Παράγοντας	5.91152e+06	10	591152.2	234.08	1.19687e-44
Σφάλμα	7.95302e+06	539	14755.1		
Σύνολο	1.38645e+06	549			

1.1.1.2 Ψευδοτυχαία Διέγερση

Πίνακας 3.7 Ανάλυση Kruskal-Wallis για τη Μετατόπιση

Πηγή	SS	dF	MS	Chi-sq	Prob>Chi-Sq
Παράγοντας	90662.9	3	30220.97	18.81	0.0003
Σφάλμα	1061317.1	236	4497.11		
Σύνολο	1151980	239			

Πίνακας 3.8 Ανάλυση Kruskal-Wallis για την Ταχύτητα

Πηγή	SS	dF	MS	Chi-sq	Prob>Chi-Sq
Παράγοντας	241009.9	3	80336.6	50	7.9813e-11
Σφάλμα	910970.3	236	3860		
Σύνολο	1151980	239			

1.1.2 Στατιστική μελέτη της επίδρασης του θορύβου της μέτρησης

Πίνακας 3.15 ANOVA για τη μετατόπιση

Πηγή	SS	dF	MS	F	Prob>F
Θεωρούμενο Σφάλμα	8.2148e-09	6	1.36913e-09	515.68295	8.8986e-72
Πραγματικό Σφάλμα	2.7195e-08	6	4.5326e-09	1707.1893	8.9875e-97
Αλληλεπίδραση	9.5091e-09	36	2.6414e-10	99.4884	1.1257e-62
Σφάλμα	2.6019e-10	98	2.65499e-12		
Σύνολο	4.51795e-08	146			

Πίνακας 3.16 : ANOVA για την ταχύτητα

Πηγή	SS	dF	MS	F	Prob>F
Θεωρούμενο Σφάλμα	4.204176e-05	6	7.00696e-06	64.2460	8.8894e-32
Πραγματικό Σφάλμα	0.0011508	6	0.000191805	1758.642393	2.1275e-97
Αλληλεπίδραση	3.305221e-05	36	9.181169e-07	8.4181	2.4855e-17
Σφάλμα	1.068832e-05	98	1.09064e-07		
Σύνολο	0.0012366	146			

1.1.3 Στατιστική μελέτη της επίδρασης του θορύβου της μοντελοποίησης

Πίνακας 3.18 : ANOVA για τη μετατόπιση

Πηγή	SS	dF	MS	F	Prob>F
Θεωρούμενο Σφάλμα	4.9886e-10	2	2.49431e-10	0.017723	0.98243
Πραγματικό Σφάλμα	0.0019705	26	7.5789e-05	5385.1902	0
Αλληλεπίδραση	1.6390e-08	52	3.15197e-10	0.022396	1
Σφάλμα	9.1197e-06	648	1.4074e-08		
Σύνολο	0.0019797	728			

Πίνακας 3.19 : ANOVA για την ταχύτητα

Πηγή	SS	dF	MS	F	Prob>F
Θεωρούμενο Σφάλμα	7.4438e-06	2	3.7219e-06	0.0014766	0.99852
Πραγματικό Σφάλμα	57.2643	26	2.2028	873.8007	0
Αλληλεπίδραση	0.00073575	52	1.4149e-05	0.0056134	1
Σφάλμα	1.6333	648	0.00252057		
Σύνολο	58.8984	728			

1.2 Αναλύσεις που περιλαμβάνονται στο 4^ο κεφάλαιο

1.2.1 Στατιστική μελέτη της επίδρασης του θορύβου της μέτρησης

Πίνακας 4.10 : ANOVA για τη μετατόπιση

Πηγή	SS	dF	MS	F	Prob>F
Θεωρούμενο Σφάλμα	2.4233e-08	2	1.2117e-08	0.50684	0.60452
Πραγματικό Σφάλμα	7.2652e-14	2	3.6328e-14	1.5195e-06	0.99999
Αλληλεπίδραση	2.7670e-14	4	6.9177e-15	2.8937e-07	0.99999
Σφάλμα	1.7212e-06	72	2.3906e-08		
Σύνολο	1.7455e-06	80			

Πίνακας 4.11 : ANOVA για την ταχύτητα

Πηγή	SS	dF	MS	F	Prob>F
Θεωρούμενο Σφάλμα	1.2770e-05	2	6.3851e-06	2.4644	0.092207
Πραγματικό Σφάλμα	8.2136e-13	2	4.1068e-13	1.5851e-07	0.9999
Αλληλεπίδραση	3.14768e-12	4	7.8692e-13	3.0372e-07	0.9999
Σφάλμα	0.00018654	72	2.5909e-06		
Σύνολο	0.00019931	80			

1.2.2 Στατιστική μελέτη της επίδρασης του θορύβου της μοντελοποίησης

Πίνακας 4. 13: ANOVA για τη μετατόπιση

Πηγή	SS	dF	MS	F	Prob>F
Θεωρούμενο Σφάλμα	3.6337e-06	1	3.6337e-06	0.372042	0.542975
Πραγματικό Σφάλμα	0.00202542	7	0.000289345	29.62480	5.48392e-24
Αλληλεπίδραση	5.7619e-06	7	8.23135e-07	0.084277	0.99900
Σφάλμα	0.0012501	128	9.766999e-06		
Σύνολο	0.0032849	143			

Πίνακας 4. 13: ANOVA για τη μετατόπιση

Πηγή	SS	dF	MS	F	Prob>F
Θεωρούμενο Σφάλμα	0.0029739	1	0.0029739	0.99569	0.32024
Πραγματικό Σφάλμα	1.4643	7	0.209192	70.0385	1.0038e-40
Αλληλεπίδραση	0.0028736	7	0.00041051	0.13744	0.99519
Σφάλμα	0.38231	128	0.0029868		
Σύνολο	1.8525	143			

Παράρτημα 2: Συμπληρωματικό υλικό για το 3^ο κεφάλαιο

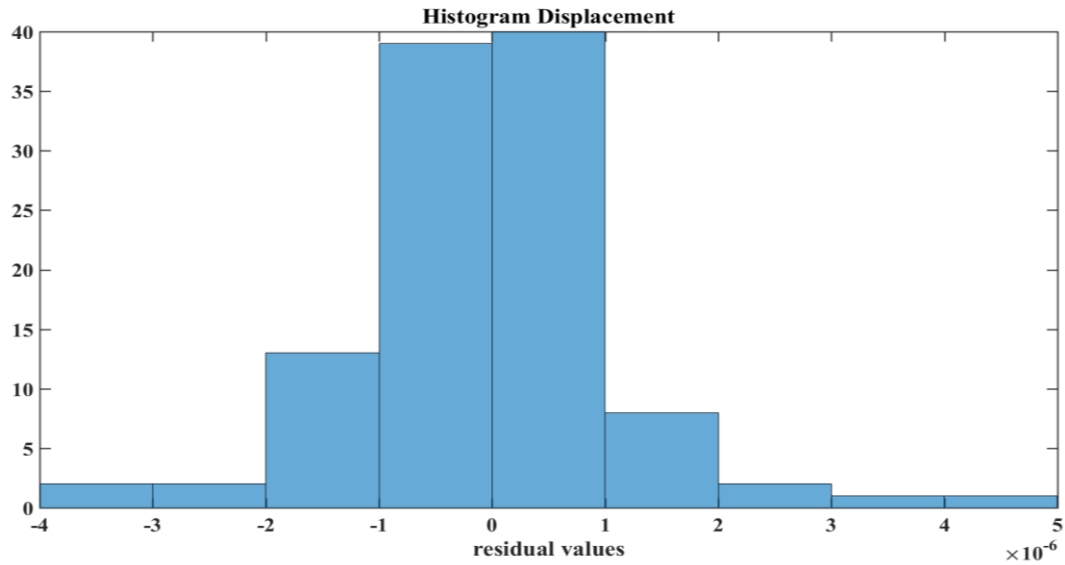
2.1 Για έξι επίπεδα του παράγοντα του θορύβου μέτρησης

Πίνακας 2.i: ANOVA για τη μετατόπιση για 6 επίπεδα του κάθε παράγοντα.

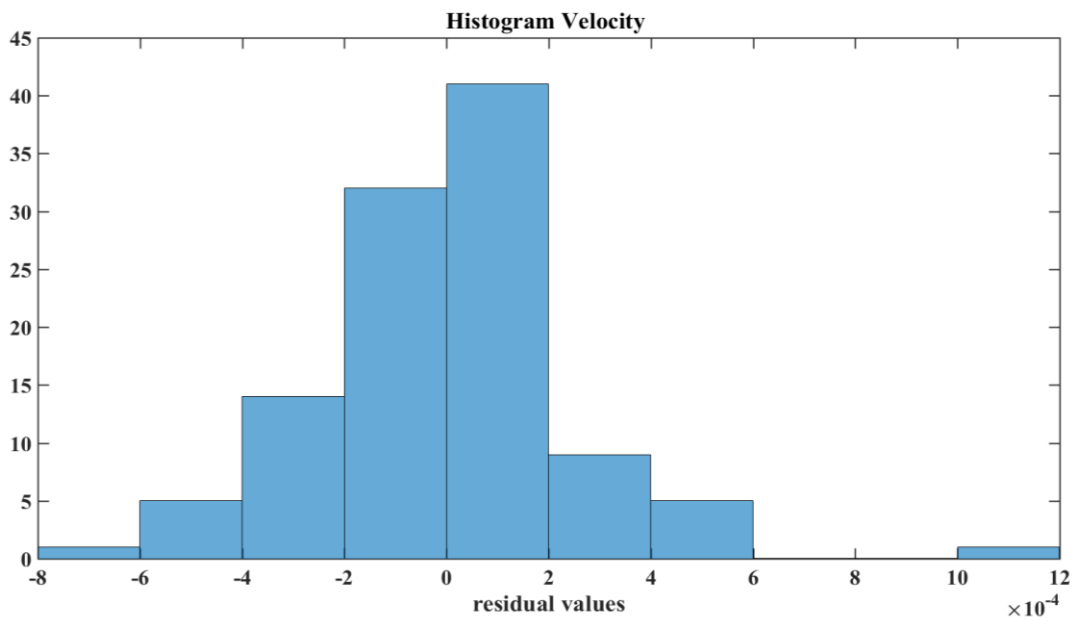
Πηγή	SS	dF	MS	F	Prob>F
Θεωρούμενο Σφάλμα	3.17092e-09	5	6.3418e-10	333.2016	2.6812e-48
Πραγματικό Σφάλμα	5.5212e-09	5	1.1042e-09	580.1719	1.1148e-56
Αλληλεπίδραση	1.6073e-09	25	6.4291e-11	33.7784	2.3782e-30
Σφάλμα	1.3704e-10	72	1.9033e-12		
Σύνολο	1.0436e-08	107			

Πίνακας 2.ii: ANOVA για την ταχύτητα για 6 επίπεδα του κάθε παράγοντα.

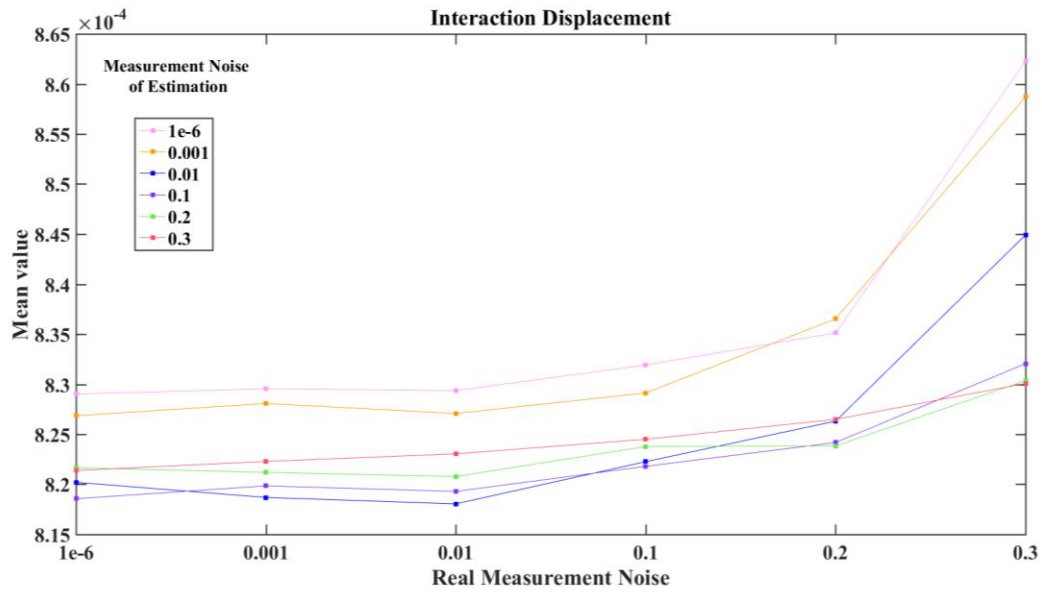
Πηγή	SS	dF	MS	F	Prob>F
Θεωρούμενο Σφάλμα	1.9119e-05	5	3.82371e-06	39.2506	2.9664e-19
Πραγματικό Σφάλμα	0.00021244	5	4.2489e-05	436.1486	2.3922e-52
Αλληλεπίδραση	1.2777e-05	25	5.1108e-07	5.2463	1.6647e-08
Σφάλμα	7.0141e-06	72	9.7418e-08		
Σύνολο	0.00025135	107			



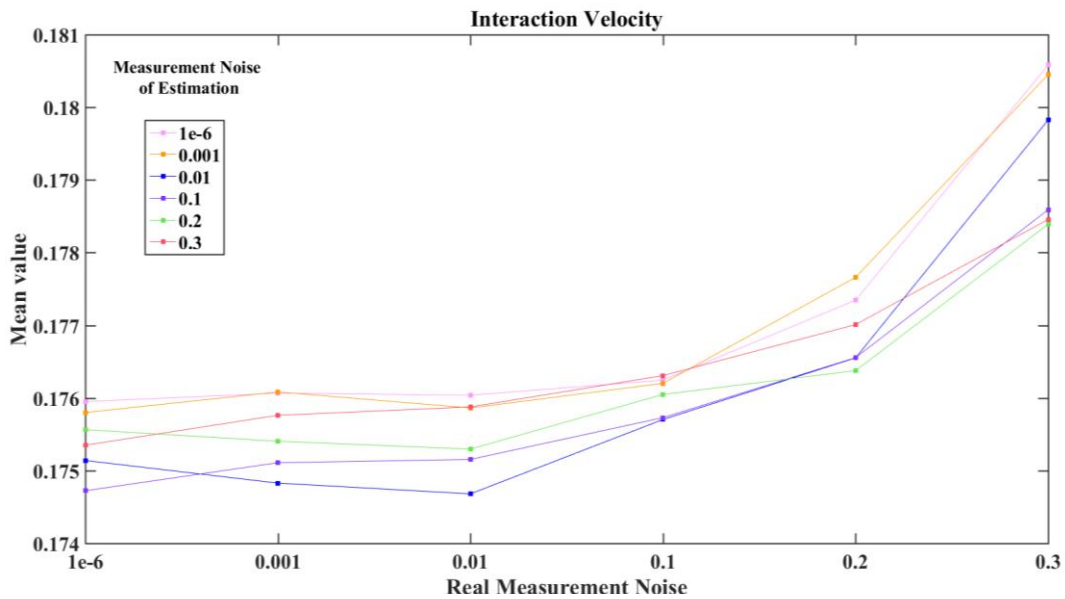
Σχήμα 2.ι: Ιστόγραμμα των υπολοίπων των μέσων τιμών της μετατόπισης για 6 επίπεδα του κάθε παράγοντα.



Σχήμα 2.ιι Ιστόγραμμα των υπολοίπων των μέσων τιμών της ταχύτητας για 6 επίπεδα του κάθε παράγοντα.

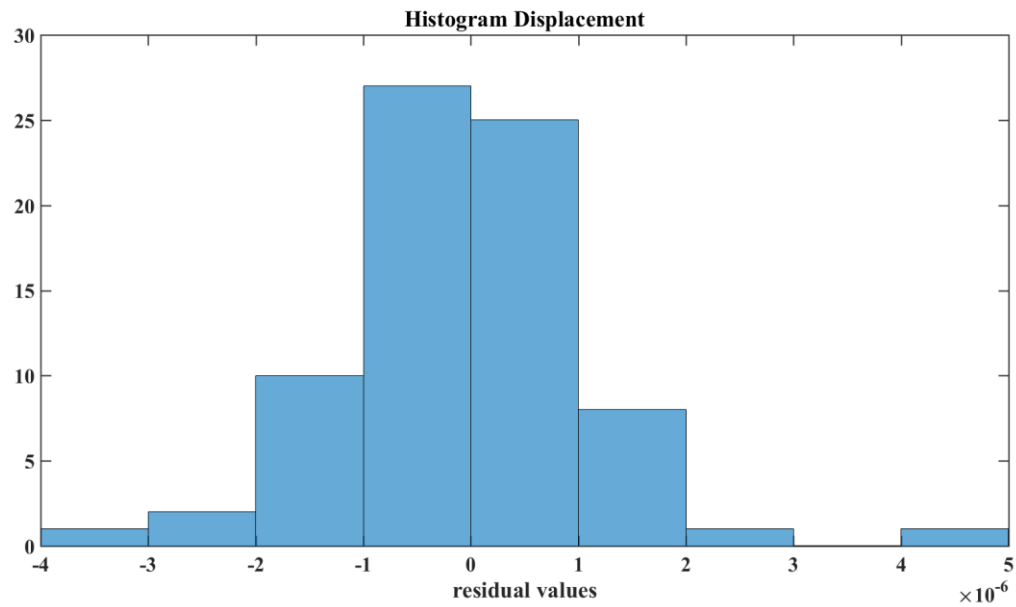


Σχήμα 2.iii: Διάγραμμα αλληλεπίδρασης μεταξύ του πραγματικού θορύβου και του θορύβου που λαμβάνουμε υπ' όψιν μας κατά την εκτίμηση της ταχύτητας μέσω του UKF, για 6 επίπεδα τιμών του κάθε παράγοντα.

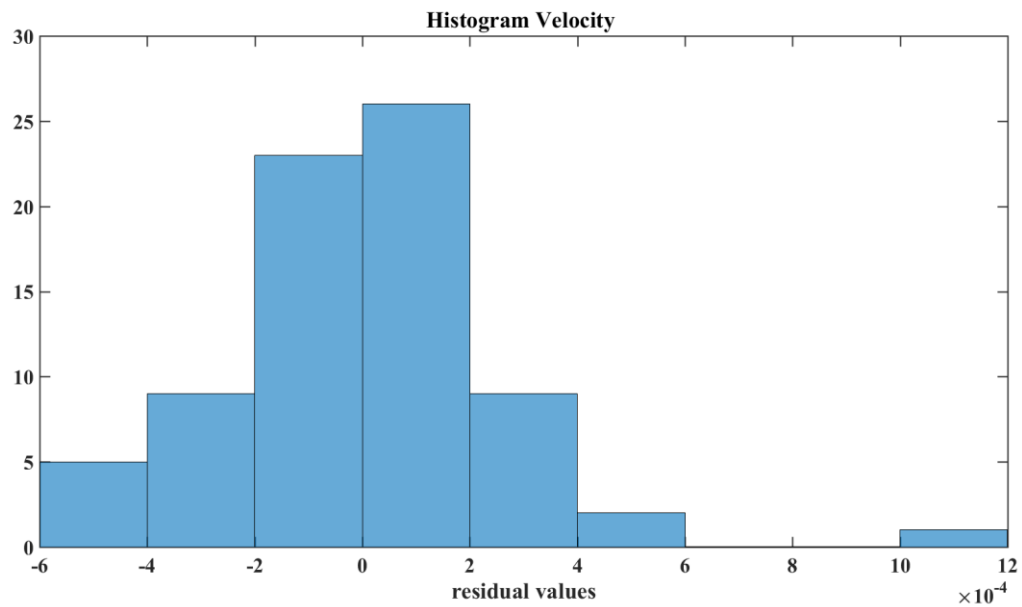


Σχήμα 2.iv: Διάγραμμα αλληλεπίδρασης μεταξύ του πραγματικού θορύβου και του θορύβου που λαμβάνουμε υπ' όψιν μας κατά την εκτίμηση της ταχύτητας μέσω του UKF, για 6 επίπεδα τιμών του κάθε παράγοντα.

2.2 Για 5 επίπεδα του θορύβου μέτρησης



Σχήμα 2.v: Ιστόγραμμα των υπολοίπων των μέσων τιμών της μετατόπισης για 5 επίπεδα του κάθε παράγοντα.



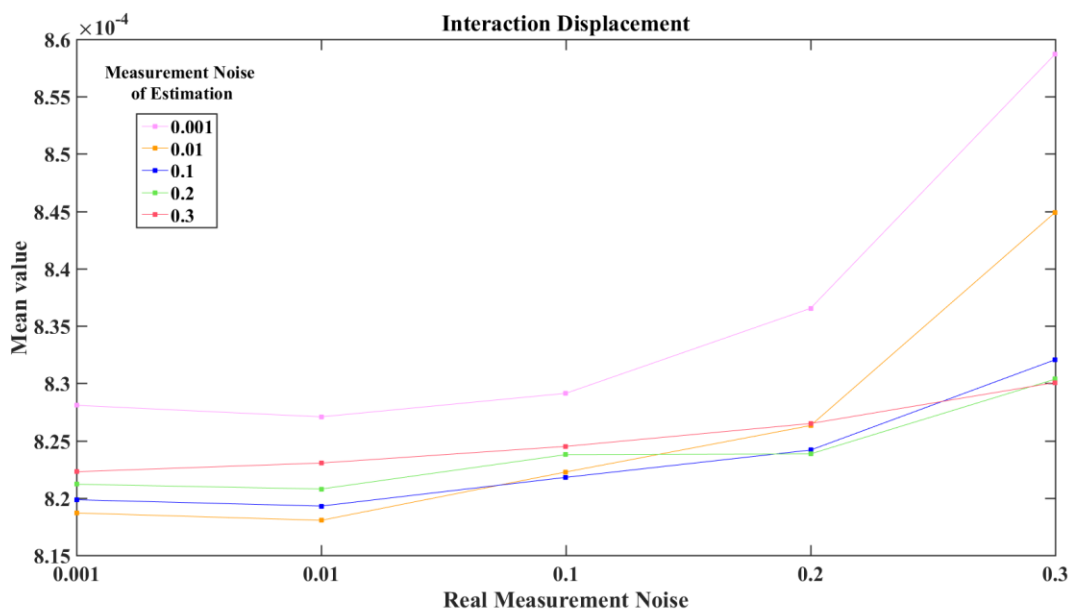
Σχήμα 2.vi: Ιστόγραμμα των υπολοίπων των μέσων τιμών της ταχύτητας για 5 επίπεδα του κάθε παράγοντα.

Πίνακας 2.iii: ANOVA για την ταχύτητα για 5 επίπεδα του κάθε παράγοντα.

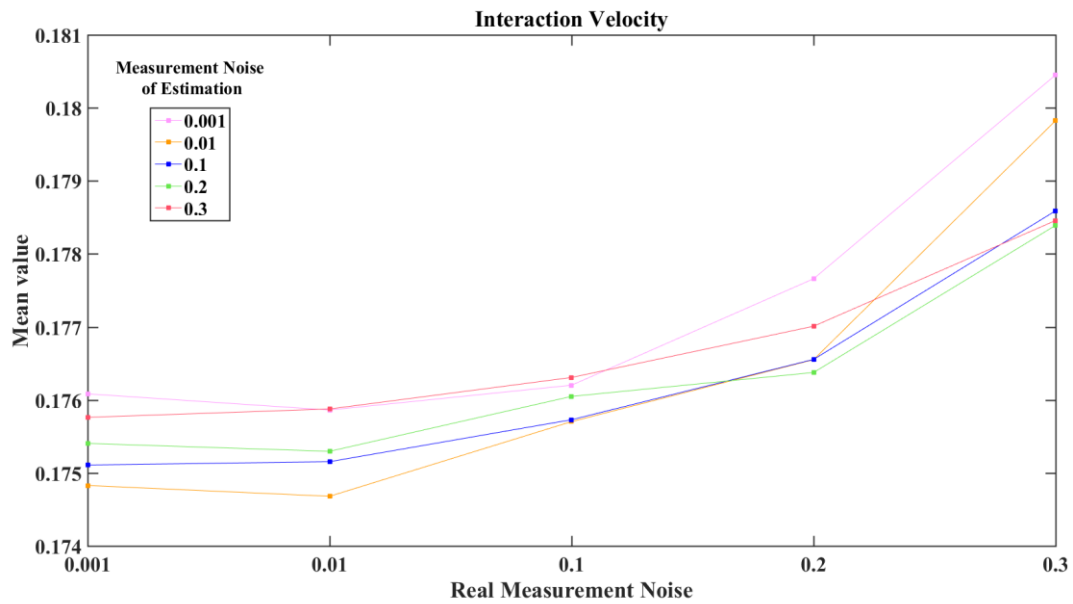
Πηγή	SS	dF	MS	F	Prob>F
Θεωρούμενο Σφάλμα	1.0921e-05	4	2.7303e-06	27.7308	3.7121e-12
Πραγματικό Σφάλμα	0.00014593	4	3.6481e-05	370.5252	1.7506e-36
Αλληλεπίδραση	9.8455e-06	16	6.1534e-07	6.2498	2.6776e-07
Σφάλμα	4.9229e-06	50	9.8458e-08		
Σύνολο	0.00017161	74			

Πίνακας 2.iv: ANOVA για τη μετατόπιση για 5 επίπεδα του κάθε παράγοντα.

Πηγή	SS	dF	MS	F	Prob>F
Θεωρούμενο Σφάλμα	1.5745e-09	4	3.9363e-10	215.1805	7.6036e-31
Πραγματικό Σφάλμα	3.1562e-09	4	7.8904e-10	431.3393	4.4173e-38
Αλληλεπίδραση	1.0434e-09	16	6.5215e-11	35.6503	8.6966e-22
Σφάλμα	9.1464e-11	50	1.8293e-12		
Σύνολο	5.8656e-09	74			



Σχήμα 2.vi: Διάγραμμα αλληλεπίδρασης μεταξύ του πραγματικού θορύβου και του θορύβου που λαμβάνουμε υπ' όψιν μας κατά την εκτίμηση της μετατόπισης μέσω του UKF, για 5 επίπεδα τιμών του κάθε παράγοντα.

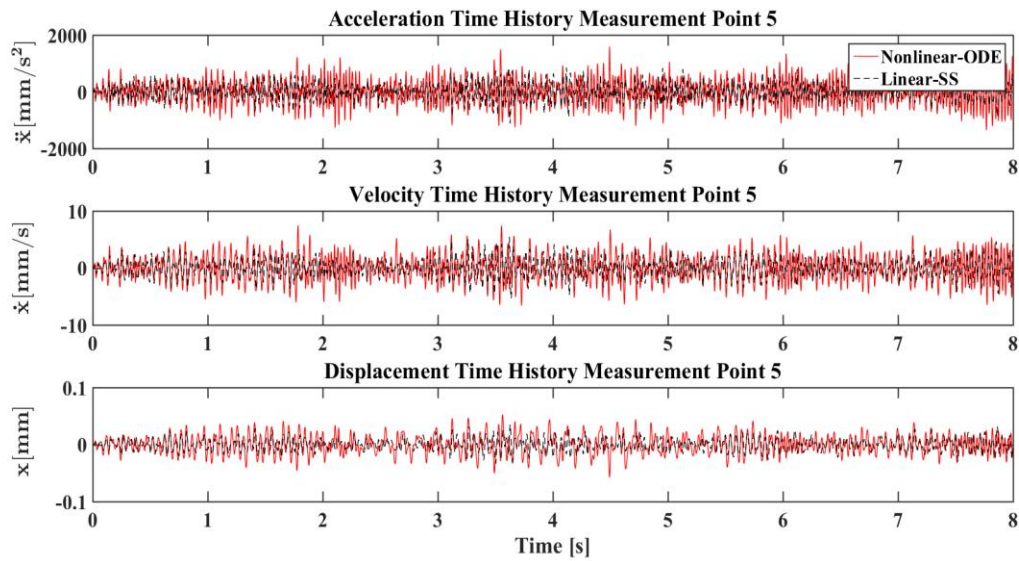


Σχήμα 2.vii: Διάγραμμα αλληλεπίδρασης μεταξύ του πραγματικού θορύβου και του θορύβου που λαμβάνουμε υπ' όψιν μας κατά την εκτίμηση της ταχύτητας μέσω του UKF, για 5 επίπεδα τιμών του κάθε παράγοντα.

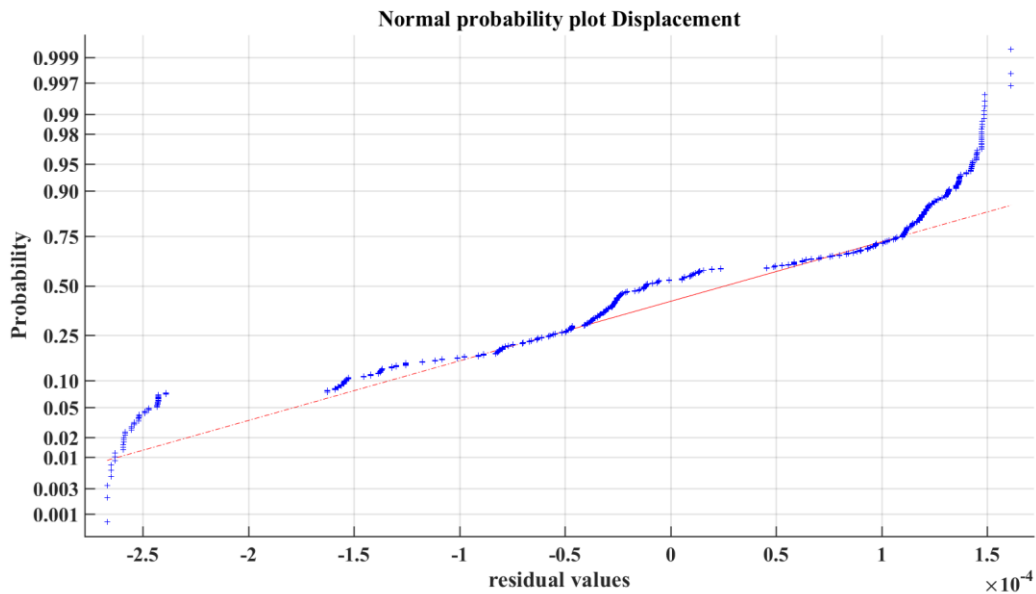
2.3 Συμπληρωματικά στοιχεία

Πίνακας 2.ν: Επίπεδα του σφάλματος της μοντελοποίησης της κατασκευής

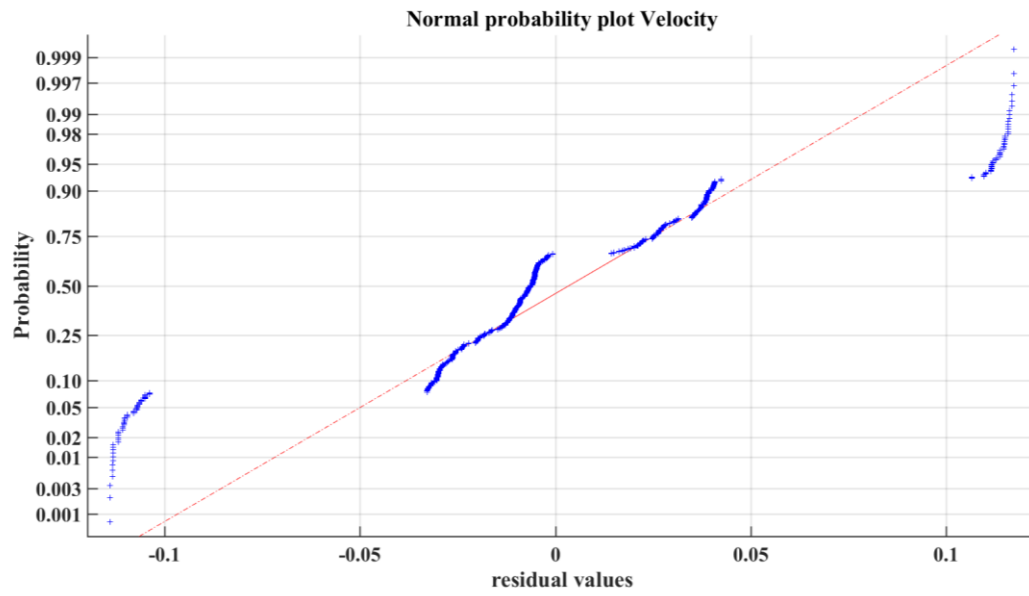
Επίπεδο Παράγοντα	Τιμή του αντίστοιχου συντελεστή προσαύξησης			Επίπεδο Παράγοντα	Τιμή του αντίστοιχου συντελεστή προσαύξησης		
	MN	KN	CN		MN	KN	CN
1	0.001	0.001	0.001	15	0.1	0.01	0.01
2	0.01	0.001	0.001	16	0.001	0.1	0.01
3	0.1	0.001	0.001	17	0.01	0.1	0.01
4	0.001	0.01	0.001	18	0.1	0.1	0.01
5	0.01	0.01	0.001	19	0.001	0.001	0.1
6	0.1	0.01	0.001	20	0.01	0.001	0.1
7	0.001	0.1	0.001	21	0.1	0.001	0.1
8	0.01	0.1	0.01	22	0.001	0.01	0.1
9	0.1	0.1	0.01	23	0.01	0.01	0.1
10	0.001	0.001	0.01	24	0.1	0.01	0.1
11	0.01	0.001	0.01	25	0.001	0.1	0.1
12	0.1	0.001	0.01	26	0.01	0.1	0.1
13	0.001	0.01	0.01	27	0.1	0.1	0.1
14	0.01	0.01	0.01				



Σχήμα 2.viii: Σύγκριση της χρονιοστορίας της απόκρισης ενός β.ε. του συστήματος με γραμμική φόρτιση και με τη μη γραμμικότητα.



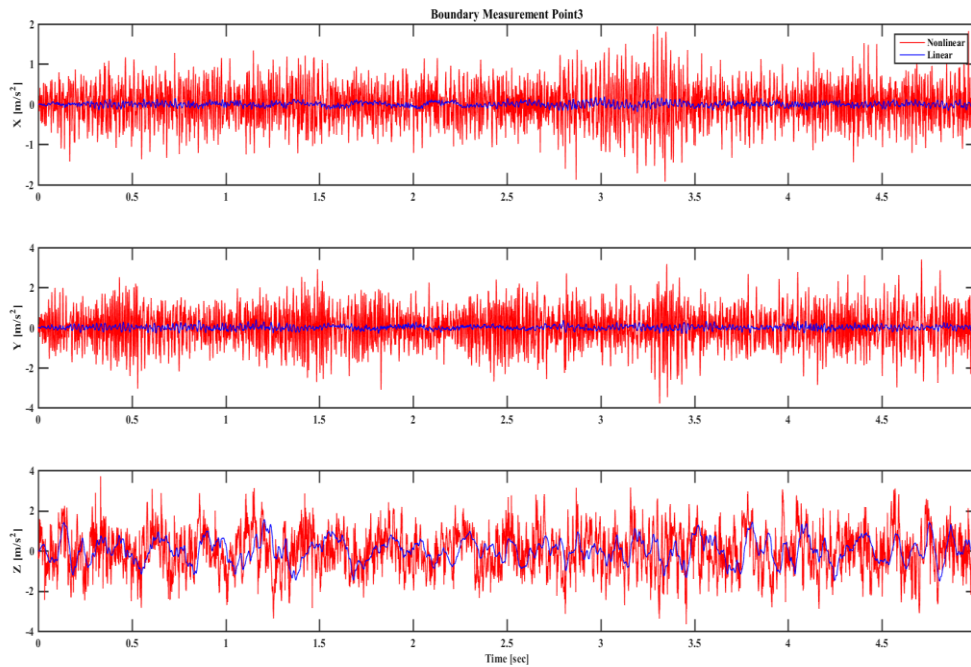
Σχήμα 2.ix: Σύγκριση των υπολοίπων των μέσων τιμών της μετατόπισης με δεδομένα από κανονική κατανομή



Σχήμα 2.χ: Σύγκριση των υπολοίπων των μέσων τιμών της ταχύτητας με δεδομένα από κανονική κατανομή

Παράρτημα 3: Συμπληρωματικό υλικό για το 4^ο κεφάλαιο

3.1 Διαγράμματα σύγκρισης της γραμμικής και της μη γραμμικής απόκρισης

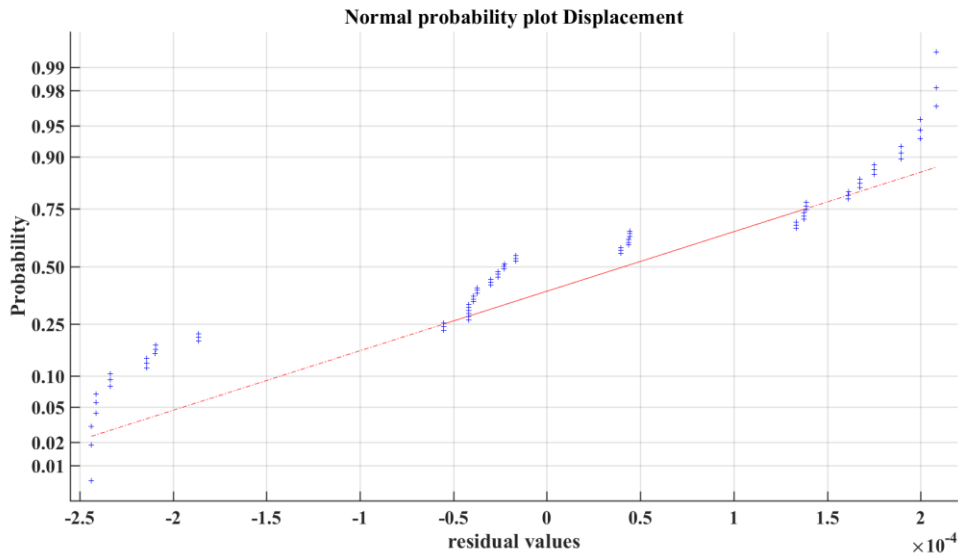


Σχήμα 3i: Σύγκριση της χρονιοϊστορίας της απόκρισης ενός του 3^{ου} συνοριακού σημείου του συστήματος, με γραμμική φόρτιση και με τη μη γραμμικότητα.

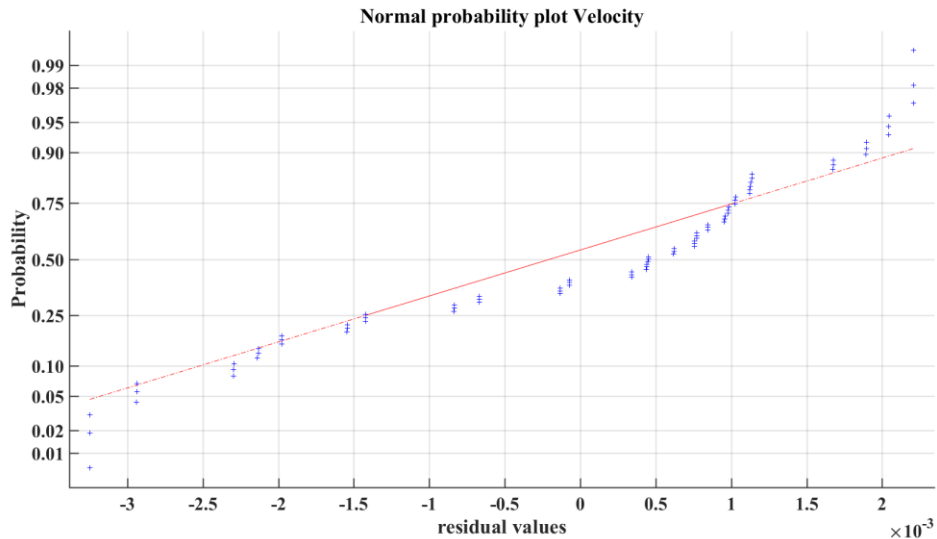
Σημειώνεται ότι παρόμοιας μορφής με το Σχήμα 3i είναι η απόκριση και για τα υπόλοιπα σημεία

3.2 Διαγράμματα σύγκρισης των υπολοίπων της ANOVA με τις αντίστοιχες τιμές για κανονική κατανομή

3.2.1 Στατιστική μελέτη της επίδρασης του θορύβου της μέτρησης



Σχήμα 3.ii: Σύγκριση των υπολοίπων των μέσων τιμών της μετατόπισης με δεδομένα από κανονική κατανομή θόρυβος μέτρησης



Σχήμα 3.iii: Σύγκριση των υπολοίπων των μέσων τιμών της ταχύτητας με δεδομένα από κανονική κατανομή θόρυβος μέτρησης