ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

«Η εξέλιξη των προγραμμάτων σπουδών και διδακτικών βιβλίων Άλγεβρας στην Ελληνική μαθηματική εκπαίδευση τις τελευταίες δεκαετίες»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ: **Χαραλαμπίδης Αθανάσιος (Α.Μ. : 1079)**

Επόπτης καθηγητής

Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος (Θωμαΐδης Γιάννης)

Επιβλέποντες καθηγητές

Χρήστου Κωνσταντίνος

Τζανάκης Κωνσταντίνος

Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2024

Ονοματεπώνυμο: Χαραλαμπίδης Αθανάσιος

Α.Μ: 1079

Έτος Εισαγωγής: 2021

Τίτλος διπλωματικής εργασίας: «Η εξέλιξη των προγραμμάτων σπουδών και διδακτικών βιβλίων Άλγεβρας στην Ελληνική μαθηματική εκπαίδευση τις τελευταίες δεκαετίες». «The evolution of algebra curricula and textbooks in Greek mathematics education in the last decades».

Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα εργασία δεν αποτελεί προϊόν λογοκλοπής, είναι προϊόν αυστηρά προσωπικής εργασίας, η βιβλιογραφία και οι πηγές που έχω χρησιμοποιήσει, έχουν δηλωθεί κατάλληλα με παραπομπές και αναφορές. Τα σημεία όπου έχω χρησιμοποιήσει ιδέες, κείμενο ή/και πηγές άλλων συγγραφέων, αναφέρονται ευδιάκριτα στο κείμενο με την κατάλληλη παραπομπή και η σχετική αναφορά περιλαμβάνεται στο τμήμα των βιβλιογραφικών αναφορών με πλήρη περιγραφή. Επισημαίνεται πως η συγκεκριμένη επιλογή βοηθά στον περιορισμό της λογοκλοπής διασφαλίζοντας έτσι το/τη συγγραφέα.

Ημερομηνία: 05-03-2024 Ο δηλών

. Χαραλαμπίδης Αθανάσιος

Περίληψη

Το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών είναι ο οδηγός και ο βοηθός του εκπαιδευτικού που τον καθοδηγεί στο εκπαιδευτικό του έργο. Πρέπει να προσαρμοστεί στις σύγχρονες κοινωνικές απαιτήσεις και να συνδεθεί με τον σημερινό τρόπο ζωής. Το ιστορικό ερώτημα σχετικά με τις μεταρρυθμίσεις των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών στην Ελλάδα, ποιες ήταν οι ενέργειες που έγιναν, τι διακυβευόταν κάθε φορά, με ποιον τρόπο αποκτάται η νομιμοποίηση του περιεχομένου της σχολικής γνώσης και ποιο είναι το αποτέλεσμά τους παραμένει βασικό ερώτημα ανά τα χρόνια. Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη των ιστορικών εξελίξεων και μεταρρυθμίσεων των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών της Άλγεβρας της Α' και Β' τάξης του Λυκείου στην Ελλάδα από το 1950 έως σήμερα, με τα αντίστοιχα σχολικά εγχειρίδια. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να απαντήσουμε ποια είναι η σχέση τους, καθώς και ποια πρότυπα ακολουθούν την ανανέωση των Αναλυτικών Προγραμμάτων Άλγεβρας στην Ελλάδα.

Λέξεις κλειδιά: Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, Σχολικά εγχειρίδια, Εξέλιξη, Μεταρρυθμίσεις, Άλγεβρα, Ρίζα.

Abstract

The Analytical Curriculum is the teacher's guide and the assistant that guides him in his educational work. It must be adapted to modern social demands and be connected with today's lifestyle. The historical question regarding the reforms of the analytical curricula in Greece, by which action bodies were undertaken, what was at stake each time, in what way is the legitimization of the content of school knowledge obtained and what is their result remain a key question over the years. The aim of this paper is the study of the historical developments and reforms of the Analytical Curricula of Algebra of the 1st and 2nd grade in High School in Greece from 1950 until today, with the corresponding school textbooks. We will thus try to answer what is their relationship, as well as what standards follow the renewal of the Algebra Curriculums in Greece.

Keywords: Analytical Curriculum, School Textbooks, Evolution, Reforms, Algebra, Root.

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η σύγχρονη εκπαιδευτική εποχή χαρακτηρίζεται από πολυπλοκότητα και η ταχεία αποκωδικοποίηση και η μετάδοση της γνώσης αποτελεί ένα δύσκολο εγχείρημα, τόσο για την πρωτοβάθμια όσο και για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν τον βασικό αρωγό προς την βαθιά και ουσιαστική ανανέωση της μάθησης, της γνώσης, της παιδείας και εν γένει του πολιτισμού. Άγουν στον στοχασμό, στη δημιουργία και στη πνευματική σύνδεση του μαθητή με τη σύγχρονη εποχή, μια εποχή έντονων κοινωνικών αντιφάσεων και αξιών. Επιπροσθέτως, άγουν στη δημιουργία ανάγκης των μαθητών για αέναη μάθηση και μελέτη. Στην πορεία αυτή καταλυτικό ρόλο διαδραματίζει ο δάσκαλος, καθώς έχει τον ρόλο αυτού που εισάγει προβλήματα, διευκολύνει διαπραγματεύσεις και δεν μεταδίδει απλώς τις γνώσεις του στους μαθητές (Cobb, Wood, Yackel & McNeal, 1992 όπως αναφέρεται στον Βερύκιο, 2011).

Η λέξη άλγεβρα διαδόθηκε ευρέως στα μέσα του 16ου αιώνα και είναι ένα μάθημα απαιτητικό, αλλά και ενδιαφέρον που διδάσκεται στο σύνολο σχεδόν των μαθητών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η λέξη άλγεβρα στις μέρες μας υποδηλώνει διάφορους τομείς εντός των μαθηματικών όπως τη «στοιχειώδη» άλγεβρα, τη γραμμική και αφηρημένη άλγεβρα. Στην παρούσα βιβλιογραφική έρευνα θα αναφερθούμε στην άλγεβρα που διδάσκεται στο σχολείο και οι παρακάτω είναι μερικοί από τους ορισμούς που υπάγονται σε αυτή:

«Η Άλγεβρα είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με το συμβολισμό γενικών αριθμητικών σχέσεων» (Kieran, 1992, σελ. 391).

«Η άλγεβρα περιλαμβάνει… τη διερεύνηση συστημάτων αριθμών και των πράξεων τους…λειτουργεί με μεταβλητές, επίλυση εξισώσεων, επίλυση προβλήματος,, εργασία με συναρτήσεις ως προς τους τύπους, πίνακες και γραφήματα, εύρεση παραγώγων… (Drijvers, Goddijn & Kindt, 2011, σελ. 7).

«Τα βασικά συστατικά της σχολικής άλγεβρας είναι η γενίκευση των αριθμητικών και γεωμετρικών μοτίβων, αλλά και των νόμων που διέπουν τις αριθμητικές σχέσεις» (Kieran, 2004, σελ. 21)

Σύμφωνα με τους προαναφερθέντες ορισμούς, οι στόχοι της αφορούν στην έκφραση γενικεύσεων, στη δημιουργία σχέσεων, επίλυση προβλημάτων, απόδειξη θεωρημάτων και υπολογισμού. Η σχολική άλγεβρα έχει παραδοσιακά προσεγγιστεί ως ένα σύνολο διαδικασιών, συχνά ασύνδετων με την υπόλοιπη μαθηματική γνώση, αλλά και με τις ζωές των μαθητών. Έτσι, οι ευκαιρίες σχετικών εμπειριών στη σχολική τάξη περιορίζονται σε ασκήσεις που απαιτούν την απομνημόνευση διαδικασιών και την επίλυση τεχνητών προβλημάτων και δεν επενδύουν στην εννοιολογική κατανόηση και στον συλλογισμό, αλλά στην παραγωγή της σωστής σειράς συμβόλων, χωρίς την ανάγκη αναστοχασμού. Οι εμπειρίες αυτές απομακρύνουν την πλειοψηφία των μαθητών από τα μαθηματικά, πριν ακόμη δοκιμάσουν την ικανότητά τους να δομήσουν και να πειραματιστούν στη μαθηματική γνώση και, το πιο σημαντικό, τους εμποδίζουν να κατανοήσουν τη σημασία και τη χρησιμότητά της στη ζωή τους. Έτσι, παρά το σημαντικό ρόλο της άλγεβρας στην εισαγωγή των μαθητών στα ανώτερα μαθηματικά, οι σχετικές εμπειρίες τους, κυρίως στον ακατανόητο χειρισμό συμβόλων, είναι δυσάρεστες και αποξενώνουν από το αντικείμενο ακόμη και αυτούς που τελικά επιτυγχάνουν. Ωστόσο, ο αλγεβρικός συλλογισμός και η χρήση αλγεβρικών αναπαραστάσεων (όπως, για παράδειγμα, οι γραφικές παραστάσεις, οι πίνακες τιμών, τα λογιστικά φύλλα και οι αλγεβρικοί τύποι) ανήκουν στα πλέον ισχυρά νοητικά εργαλεία που ανέπτυξε ο πολιτισμός μας. Αποτελεί, λοιπόν, πρόκληση να καταστεί η ισχύς της άλγεβρας προσβάσιμη σε όλους τους μαθητές (Σακονίδης, 2011).

Σύμφωνα με τους Δακορώνια & Αναστασάκη (2021) στη σελίδα 26 έως την σελίδα 29, οι αντιλήψεις για τη διδασκαλία της Άλγεβρας στην Ελληνική εκπαίδευση αποτυπώνονται στα αντίστοιχα προγράμματα σπουδών και τα διδακτικά βιβλία. Τα σχολικά εγχειρίδια Άλγεβρας επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό τις πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με το τι είναι Άλγεβρα (Κολέζα, 2017), ενώ τα σχολικά εγχειρίδια γενικώς αποτελούν τη βασική πηγή μελέτης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Shield & Shelley, 2013) . Η διδασκαλία και η μάθηση βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στο σχολικό εγχειρίδιο, που αποσκοπεί στην καθοδήγηση, στην ενίσχυση και στη βελτίωση της διδασκαλίας και της μάθησης στα εκπαιδευτικά ιδρύματα (Remillard, 2018). Παράλληλα, ο εκπαιδευτικός λειτουργεί ως «συνδιαμορφωτής» του Προγράμματος Σπουδών κατά τη διδασκαλία στη σχολική τάξη (Στουραΐτης & Πόταρη, 2015), καθώς οργανώνει τη διδασκαλία σύμφωνα με αυτό. Τα σχολικά εγχειρίδια λειτουργούν ως ο συνδετικός κρίκος μεταξύ των στόχων του προγράμματος σπουδών και της παιδαγωγικής εφαρμογής του σε σχολικά περιβάλλοντα (Valverde et al, 2002). Παράλληλα, αποτελούν το κύριο μέσο στο οποίο θα στηριχτεί ο δάσκαλος για να προγραμματίσει το μάθημα και να σχεδιάσει τη δομή της διδασκαλίας. Έρευνα των Qi et al., 2018 αναφέρει ότι το 75%-90% της διδασκαλίας και των δραστηριοτήτων καθορίζεται από το περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων. Ο τρόπος που θα αξιοποιήσουν οι εκπαιδευτικοί το περιεχόμενο του σχολικού εγχειριδίου, θα επηρεάσει και το περιεχόμενο της μάθησης των μαθητών.

Ωστόσο, ρίχνοντας κανείς μία διερευνητική ματιά στα σχολικά εγχειρίδια της άλγεβρας και τα αντίστοιχα προγράμματα σπουδών διαπιστώνει ποικίλα εμπόδια. Πιο συγκεκριμένα, προβλήματα συγγραφής και διάχυσης σχολικών εγχειριδίων, αλλά και η αδυναμία κοινής πορείας προγραμμάτων σπουδών και σχολικών βιβλίων άγουν πολύ συχνά σε έναν φαύλο κύκλο. Είναι προφανές ότι μια οποιαδήποτε ανάλυση των εγχειριδίων πρέπει να γίνει σε σχέση με το αντίστοιχο Πρόγραμμα Σπουδών. Δηλαδή πώς έχει σχεδιαστεί το Πρόγραμμα Σπουδών; Καθορίζει μόνο τους γενικούς σκοπούς της εκπαίδευσης ή διευκρινίζει επίσης τους ιδιαίτερους στόχους του συγκεκριμένου γνωστικού κειμένου; Αιτιολογείται στο Πρόγραμμα Σπουδών πόσος χρόνος διατίθεται για το κάθε θέμα και σε ποιο ηλικιακό επίπεδο πρέπει να διδαχθεί; Τα εγχειρίδια είναι υποχρεωμένα να καλύπτουν εξ ολοκλήρου ένα θέμα που προσδιορίζεται στο Πρόγραμμα Σπουδών; (Κολέζα, 2017).

Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε στην παρούσα εργασία είναι αυτή της συγκριτικής μελέτης των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών, με τα αντίστοιχα σχολικά εγχειρίδια των τελευταίων δεκαετίων και η εξέλιξή τους, μέσα από μια μελέτη περίπτωσης (case study), για δύο έννοιες, αυτή της «ρίζας» και των «μεθόδων επίλυσης εξισώσεων με ριζικά» για την Α΄ και Β΄ Λυκείου αντίστοιχα. Η επιλογή αυτών των δύο εννοιών έγινε, διότι συνδέονται στενά αυτές οι δύο έννοιες καθώς απαιτείται η άριστη γνώση της έννοιας της ρίζας και των ιδιοτήτων της για την επίλυση εξισώσεων με ριζικά. Τέλος επιλέχτηκαν αυτές οι δύο έννοιες, διότι είναι αδύνατο να επιλεχθούν και άλλες έννοιες που θα απαιτούσε την ανάλυσή τους στα διάφορα σχολικά εγχειρίδια των τελευταίων δεκαετιών, στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής.

Στο πρώτο κεφάλαιο επιχειρείται να παρουσιαστούν οι εξελίξεις στην διδασκαλία των μαθηματικών στην διεθνή σκηνή και στην συνέχεια δίνεται έμφαση στις εξελίξεις της ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης από την δεκαετία του ’50 έως σήμερα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στα Προγράμματα Σπουδών, στο περιεχόμενό τους και στις μεταρρυθμίσεις που γίνανε καθώς και στα αντίστοιχα σχολικά εγχειρίδια.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται η σύγκριση Προγραμμάτων Σπουδών με τα αντίστοιχα σχολικά εγχειρίδια για την Α΄ και Β΄ Λυκείου αντίστοιχα, καθώς και την σύγκριση των ορισμών της έννοιας της «ρίζας» και των «μεθόδων επίλυσης εξισώσεων με ριζικά» στα διάφορα σχολικά εγχειρίδια.

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο αναλύονται τα συμπεράσματα της παρούσας διπλωματικής εργασίας, απαντώντας ουσιαστικά στα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στην αρχή της και γίνονται προτάσεις για μελλοντικές έρευνες.

Τα ερευνητικά ερωτήματα στα οποία στοχεύει να δώσει απαντήσεις η παρούσα έρευνα είναι τα εξής:

1. Ποια η σχέση προγραμμάτων σπουδών και διδακτικών βιβλίων άλγεβρας στην Ελλάδα;
2. Ποια πρότυπα ακολουθεί η ανανέωση των Προγραμμάτων Σπουδών της άλγεβρας στην Ελλάδα;

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΞΕΛΙΞΕΙΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται προσπάθεια να παρουσιαστούν οι εξελίξεις στην διδασκαλία των μαθηματικών στην διεθνή σκηνή ενώ στην συνέχεια θα δοθεί έμφαση στις εξελίξεις της ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης από την δεκαετία του ’50 έως σήμερα. Η ιστορική αυτή αναδρομή είναι απαραίτητη για τον σκοπό αυτής της διπλωματικής εργασίας αφού μέσα από αυτή θα μπορέσουν να παρουσιαστούν τα βασικά στοιχεία, μέσα από χρονιές-σταθμούς, που επηρέασαν την δημιουργία των Προγραμμάτων Σπουδών (Π.Σ.) και των αντίστοιχων σχολικών εγχειριδίων.

Το χάσμα που υπήρχε μεταξύ των μαθηματικών που διδάσκονταν στο σχολείο και στα μαθηματικά που διδάσκονταν στην τριτοβάθμια εκπαίδευση ήταν μεγάλο (Stanic & Kilpatrick, 1992, σελ. 408). Η αφετηρία για τη μεταρρύθμιση στις Η.Π.Α. όσον αφορά τα σχολικά μαθηματικά έγινε από τα πανεπιστήμια, καθώς υπήρχαν δυσκολίες στους πρωτοετείς φοιτητές να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις των προπτυχιακών προγραμμάτων σπουδών (Raimi, 2005). Πολλοί μαθηματικοί και φυσικοί παρατήρησαν ότι αρκετές από τις καινούριες ανακαλύψεις στην επιστήμη των μαθηματικών, δεν περιλαμβάνονταν στα Προγράμματα Σπουδών του Λυκείου (Μητρογιαννοπούλου, 2001, σελ. 96). Για τον λόγο αυτό, αρχικά στο πανεπιστήμιο του Σικάγο και στη συνέχεια και σε άλλα πανεπιστήμια των Η.Π.Α., δημιουργήθηκε μια επιτροπή από καθηγητές του πανεπιστημίου για την δημιουργία σχολικών Π.Σ. (Raimi, 2005). Στο πανεπιστήμιο του Illinois δημιούργησαν Προγράμματα Σπουδών που φορούσαν μαθητές που θα συνέχιζαν τις σπουδές τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση (Μητρογιαννοπούλου, 2001, σελ. 96). Το 1955 η επιτροπή που είναι υπεύθυνη για την εισαγωγή των μαθητών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, κάνει λόγο για τεράστιες διαφορές μεταξύ του επιπέδου των εισαγωγικών εξετάσεων και των Π.Σ. στις τελευταίες τάξεις του Λυκείου. Έτσι στις Η.Π.Α. και στην Ευρώπη δημιουργήθηκαν επιτροπές στα μέσα της δεκαετίας του ’50 και διεξήχθησαν συνέδρια για την δημιουργία Π.Σ. για την αντιμετώπιση αυτού του χάσματος (Hayden, 1981). Το μεταρρυθμιστικό κίνημα αυτό είχε την ονομασία «Νέα Μαθηματικά» ή «Μοντέρνα Μαθηματικά». Η εξέλιξη της μαθηματικής εκπαίδευσης σε σχέση με την εξέλιξη της οικονομίας οδήγησαν σε αυτό το μεταρρυθμιστικό κίνημα (Κολέζα, 2017, σελ. 412 έως 413). Το 1955 έγιναν οι πρώτες σημαντικές μεταρρυθμίσεις για την αναμόρφωση της μαθηματικής εκπαίδευσης στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Μέχρι τότε τα Π.Σ. και τα σχολικά βιβλία συγγράφονταν από εκπαιδευτικούς που είχαν διδαχθεί μαθηματικά στην τριτοβάθμια εκπαίδευση (Raimi, 2005). Τα μαθηματικά στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι ένα σύνθετο πολιτισμικό προϊόν. Τα σχολικά βιβλία καθορίζουν τους στόχους και τους σκοπούς της εκπαίδευσης στα σχολεία.

Οι προτάσεις των επιτροπών αφορούσαν τον κλάδο της άλγεβρας, της τριγωνομετρίας και της γεωμετρίας, καθώς επίσης και η εισαγωγή νέων πεδίων, όπως η «μαθηματική λογική», ο «προτασιακός λογισμός» και οι «πιθανότητες-στατιστική». Οι αλλαγές αυτές αφορούσαν κυρίως τις τελευταίες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και αφορούσε μαθητές που θα συνέχιζαν στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Έτσι συγκροτήθηκε μία εθνική επιτροπή μελέτης, η οποία ήταν η σημαντικότερη όσον αφορά τον εκσυγχρονισμό που επιχειρήθηκε να γίνει, την (SMSG: School Mathematics Study Group), από τον Yale Edward G. Begle δημιουργώντας σχολικά βιβλία για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και εκσυγχρονίζοντας τα Π.Σ. για τα σχολικά μαθηματικά. (Μητρογιαννοπούλου, 2001; Phillips, 2014). Παρόλα αυτά τα νέα Π.Σ. δεν εφαρμόστηκαν άμεσα σε όλες τις πολιτείες της Αμερικής (Kilpatrick, 2012; Phillips, 2014). Στην Ευρώπη τον Δεκέμβρη του 1959, διοργανώθηκε το πρώτο και σημαντικό συνέδριο στο Royaumont στην Asnière-sur-Oise της Γαλλίας, όπου έθεσε τις βάσεις για τη μεταρρύθμιση των μαθηματικών και αφορούσε την μαθηματική εκπαίδευση τη δεδομένη χρονική στιγμή και τις απαραίτητες αλλαγές που έπρεπε να γίνουν (OEEC, 1961). Στο συνέδριο αυτό αποφασίστηκε η ανάγκη αναμόρφωσης των Π.Σ. με αφαίρεση πολλών ενοτήτων, αλλά και προσθήκες νέων, όπως της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων (Μητρογιαννοπούλου, 2001, σελ.99). Έπειτα τον Μάιο του ’60 η Παγκόσμια Ένωση για τη Μαθηματική Εκπαίδευση (ICMI: International Commissionon Mathematical Instruction) διοργάνωσε ένα ακόμα συνέδριο στο Aarhus της Δανίας και αφορούσε συγκεκριμένες αλλαγές που έπρεπε να γίνουν με βάση τα ευρήματα του προηγούμενου συνεδρίου που έγινε στο Royaumont της Γαλλίας. Ακολούθησε το συνέδριο του ΟΟΣΑ στο Ζάγκρεμπ και το Ντουμπρόβνικ της Κροατίας τον Σεπτέμβρη του 1960 και αφορούσε τα αποτελέσματα του συνεδρίου του Royaumont, ενώ τον Νοέμβρη του 1963 διοργανώθηκε ένα ακόμα συνέδριο του ΟΟΣΑ στην Αθήνα, για το ποιές αλλαγές γίνανε από τις διάφορες χώρες προς αυτή την κατεύθυνση. Ο στόχος του συνεδρίου του Royaumont ήταν να εκσυγχρονίσει τα Π.Σ. των χωρών που συμμετείχαν. Τα αποτελέσματα του συνεδρίου δόθηκαν στην δημοσιότητα το ‘61 με τις ομιλίες του Marshall Stone και του Jean

Dieudonné να ξεχωρίζουν (De Bock & Vanpaemel, 2019), αφού ο Stone ήταν αυτός που έκανε λόγο για πρώτη φορά την αναντιστοιχία της μαθηματικής εκπαίδευσης μεταξύ Λυκείου και Πανεπιστημίου, ενώ ο Dieudonné έκανε λόγο για περιορισμό της Ευκλείδιας Γεωμετρίας και την εισαγωγή άλλων πεδίων των μαθηματικών πιο κοντά στην σύγχρονη μαθηματική πρακτική. Σε κάθε περίπτωση δεν αποφασίστηκε κάτι ως προς την εισαγωγή της θεωρητικής γεωμετρίας στις τάξεις του Λυκείου (OEEC, 1961). Αυτό που κρίθηκε απαραίτητο ήταν το περιεχόμενό των μαθηματικών στις τάξεις του Λυκείου να είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα της μαθηματικής έρευνας, ώστε να γίνει ευκολότερη και γρηγορότερη η μετάβαση των μαθητών στα ανώτερα μαθηματικά, αφήνοντας στην άκρη την αποσπασματικότητα που τα χαρακτήριζαν (Corry, 2007).

Σύμφωνα με την εργασία των Καλαβάση & Σκουμπουρδή (2005) στη σελ. 3, αναφέρει πως η διαφορά των «παραδοσιακών μαθηματικών» με των «Μοντέρνων Μαθηματικών» είναι:

> «*Η ειδοποιός διαφορά είναι ότι τα Νέα Μαθηματικά, προσεγγίζουν διδακτικά την παραπάνω ύλη με διαφορετικό τρόπο. Συγκεκριμένα, το πνεύμα τους ήταν να δοθεί έμφαση στους ακριβείς ορισμούς, την θεμελίωση της ύλης και την αναδιοργάνωση των μαθηματικών με βάση τα θεμελιώδη δομικά χαρακτηριστικά τους, δηλαδή:*
>
> *- τον εμπλουτισμό των σχολικών μαθηματικών με στοιχεία συνολοθεωρίας, με έννοιες μαθηματικής λογικής, με θέματα από τη μοντέρνα άλγεβρα, με στοιχεία μοντέρνας γεωμετρίας, καθώς και με στοιχεία θεωρίας πιθανοτήτων και στατιστικής*
>
> *- τον περιορισμό του παραδοσιακού περιεχομένου της Άλγεβρας, της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και της Τριγωνομετρίας.*»

Στόχος των «Μοντέρνων Μαθηματικών» ήταν να γίνουν τα μαθηματικά πιο ευχάριστα και να εντάξουν στο Π.Σ. τους, όλα αυτά που είναι απαραίτητα για τον σύγχρονο κόσμο, την οικονομία και τα προβλήματα της καθημερινής ζωής (Μητρογιαννοπούλου, 2001, σελ. 101). Οι αλλαγές αυτές της μεταρρύθμισης των «Νέων Μαθηματικών», απέτυχε στους αναμενόμενους στόχους. Κατέστη αδύνατη η σύνδεση των μαθηματικών με τα καθημερινά προβλήματα και έτσι το 1970, επικρίθηκε έντονα και χαρακτηρίστηκε ως αντιπαιδαγωγική και ξεπερασμένη (Τούμασης, 1989, σελ. 179). Σύμφωνα με τον Usiskin τα «Μοντέρνα Μαθηματικά» αφορούσαν τους ταλαντούχους, καλούς μαθητές και ήταν αυτοί που επωφελήθηκαν περισσότερο από αυτή τη μεταρρύθμιση (Τούμασης, 1989, σελ. 51). Δεν άργησε λοιπόν να δοθεί το σύνθημα «πίσω στα παραδοσιακά μαθηματικά» (back to basics), με κύριο χαρακτηριστικό αυτό της εγκατάλειψης των στοιχείων της συνολοθεωρίας, το οποίο δεν πραγματοποιήθηκε, αλλά έγινε προσπάθεια να γίνει μία μίξη παραδοσιακών και «Νέων Μαθηματικών» (Καλαβάσης & Σκουμπουρδή, 2005, σελ. 3).

Σύμφωνα με την Μητρογιαννοπούλου (2001) στη σελ. 114 έως τη σελ. 115, στο τέλος της δεκαετίας του '80, ασπάζονται όλοι τις προτάσεις του N.C.T.M., όπου κάθε μαθητής που τελειώνει την δευτεροβάθμια εκπαίδευση, θα πρέπει να έχει αποκτήσει:

«

- *κατανόηση των βασικών μαθηματικών εννοιών,*
- *ευχέρεια στη λογική σκέψη,*
- *δυνατότητα επικοινωνίας στη μαθηματική γλώσσα*
- *ευκολία στην αναγνώριση των εφαρμογών των μαθηματικών στο γύρω κόσμο,*
- *δυνατότητα προσέγγισης των μαθηματικών προβλημάτων χωρίς φόβο,*
- *ικανότητα εφαρμογής των μαθηματικών γνώσεων σε πραγματικά προβλήματα.*»

Στην επόμενη ενότητα θα παρουσιαστούν τα δρώμενα στην χώρα μας από το 1950 έως και τις νεότερες εξελίξεις που επηρέασαν την ελληνική μαθηματική παιδεία στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, την συγγραφή των σχολικών εγχειριδίων και των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών.

1.1. ΝΕΩΤΕΡΕΣ ΕΞΕΛΙΞΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Όσον αφορά την κατάσταση στην χώρα μας, η μεταρρύθμιση των «Νέων Μαθηματικών» εμφανίστηκε στις αρχές της δεκαετίας του '60, όπου αποφασίστηκε η εισαγωγή των πεδίων των «Συνόλων», των «Πιθανοτήτων» και της «Στατιστικής» και ο περιορισμός της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (Μητρογιαννοπούλου, 2001, σελ. 104). Μέχρι εκείνη την περίοδο ίσχυαν τα προπολεμικά αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών. Η εισαγωγή των μαθητών στα Πανεπιστήμια γινόταν από τα ίδια τα Πανεπιστημία, ενώ από τα μέσα της δεκαετίας του '60, οι μεταρρυθμίσεις μπόρεσαν να συνδέσουν την αστική παιδεία με την οικονομία. Δημιουργείται το Π.Ι., καθιερώνεται η δωρεάν παιδεία, γίνεται η χρήση της δημοτικής γλώσσας και η εισαγωγή των μαθητών στο Πανεπιστήμιο, γίνεται από μια ελεγχόμενη από το υπουργείο επιτροπή εκπαιδευτών η οποία έβγαζε τα θέματα. Αποτέλεσμα των μεταρρυθμίσεων ήταν η εδραίωση της άλγεβρας καθώς και η επίλυση γεωμετρικών ασκήσεων που είχαν απομείνει με αλγεβρικές μεθόδους. Συμπερασματικά επιχειρήθηκε μια συνολική αναθεώρηση των Π.Σ. όσον αφορά την δομή και τα στοιχεία τους (Θωμαίδης, 1995).

Κατά τη διάρκεια της χούντας, οι μεταρρυθμίσεις που έγιναν τα προηγούμενα χρόνια, δεν προχώρησαν. Με το πέρας της χούντας και ενώ στις υπόλοιπες χώρες της Ευρώπης και στις Η.Π.Α. κυριάρχησε το κίνημα «back to basics», δηλαδή «πίσω στα παραδοσιακά μαθηματικά», στην Ελλάδα αυτό το κίνημα δεν εφαρμόστηκε ποτέ, διότι οι μεταρρυθμίσεις που έγιναν το 1964, δεν εφαρμόστηκαν ποτέ από τη χούντα (Μητρογιαννοπούλου, 2001, σελ 110.) Οι πρώτες προσπάθειες εφαρμογής αυτών των μεταρρυθμίσεων, με τις οποίες επιχειρείται η εισαγωγή των «Νέων Μαθηματικών», ξεκίνησαν μετά τη χούντα τη περίοδο 1977 έως 1980 με τη δημοσίευση των νέων Π.Σ. (Θωμαίδης & Καστάνης, 2002).

Οι αλλαγές αυτές γίνονται μέχρι και το 1987 με τα νέα τότε σχολικά εγχειρίδια του Γυμνασίου και στη συνέχεια με τα νέα σχολικά εγχειρίδια της Α΄ και Β΄ Λυκείου το 1990 και 1991 αντίστοιχα, όπου το Π.Ι. προέβη τότε σε μια ολική αναμόρφωση των σχολικών εγχειριδίων και των Προγραμμάτων Σπουδών. Εκείνη η περίοδο σηματοδοτεί την οριστική ρήξη των «Μοντέρνων Μαθηματικών με την ελληνική μαθηματική εκπαίδευση.

Σύμφωνα με τους Κλιάπη & Κασσώτη (2017) από τη σελίδα 14 έως τη σελίδα 16, το Υπουργείο Παιδείας το 1997 συντάσσει το Ε.Π.Π.Σ. για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και έχει σαν βασικές αρχές ότι, η διαδικασία μάθησης των μαθηματικών είναι η κατασκευαστική ιδιότητα και ότι ο μαθητής πρέπει να αναπτύξει την ικανότητα χρήσης μαθηματικής γλώσσας, ενώ το 1999 το Πρόγραμμα Σπουδών (Π.Σ.) και τα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών παρουσιάζουν κατά τάξη την ύλη, η επιλογή και διάρθρωση της οποίας γίνεται λαμβάνοντας υπόψη τους γενικότερους στόχους της εκπαίδευσης και τους ειδικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης (Κολέζα, 2017). Τα Π.Σ. του 2003 και του 2011 προσπαθούν να συνδέσουν τις εμπειρίες των μαθητών με τη γνώση που παίρνουν από τα μαθηματικά μέσω της βοήθειας του εκπαιδευτικού (Κλιάπη & Κασσώτη, 2017). Η ανάπτυξη της τεχνολογίας ενίσχυσε περαιτέρω αυτή την ιδέα, παρέχοντας άλλη πνοή στη διδασκαλία και μάθηση της Άλγεβρας καθώς δίνει δυνατότητες τις οποίες αδυνατεί να δώσει το χαρτί και το μολύβι. Στο κεφάλαιο που ακολουθεί, επιχειρείται η αναλυτικότερη παρουσίαση των Προγραμμάτων Σπουδών και των διδακτικών βιβλίων στις δύο πρώτες τάξεις του Λυκείου από τη δεκαετία του ’50 έως και τις μέρες μας..

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα καταγράψουμε τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών για την Άλγεβρα της Α΄ και Β΄ Λυκείου από το 1961 έως και το τελευταίο, αυτό του 2021, τον σκοπό τους, πως επηρεάστηκαν από τις διεθνείς εξελίξεις, καθώς και τις μεταρρυθμίσεις στην ελληνική μαθηματική εκπαίδευση. Έπειτα θα καταγράψουμε τα σχολικά εγχειρίδια της Άλγεβρας που διδάσκονταν στις αντίστοιχες τάξεις του Λυκείου από το 1950 έως και σήμερα, τα περιεχόμενα τους και θα επιχειρήσουμε μία πρώτη σύγκριση τους.

2.1. ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

Το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών είναι ο οδηγός και ο βοηθός του εκπαιδευτικού που τον καθοδηγεί στο εκπαιδευτικό του έργο. Βασίζεται σε μια σειρά συμβιβασμών που επιβάλλονται από την κοινωνία και μέσω των οποίων εξυπηρετείται το εκπαιδευτικό της σύστημα (Jonnaert & Therriault, 2013, σ. 413).

Πιο συγκεκριμένα όσον αφορά τη διδασκαλία της Άλγεβρας πρέπει να ανταποκρίνεται στις σύγχρονες απαιτήσεις και να συμβαδίζει με τον σημερινό τρόπο ζωής. Η εξέλιξη της τεχνολογίας και οι καινούριες μέθοδοι διδασκαλίας πρέπει να ενσωματώνονται στα προγράμματα σπουδών της Άλγεβρας για να ανταποκρίνονται στο σήμερα. Κάποια από τα ερωτήματα που τίθενται κατά την συγγραφή ενός προγράμματος σπουδών είναι το τι θα έχουν μάθει και πόσο αυστηρά θα το έχουν μάθει. Τα Προγράμματα Σπουδών καθορίζουν το τι, το πώς και το γιατί της μαθησιακής διαδικασίας για κάθε μάθημα, κάθε τάξη, κάθε βαθμίδα, καθώς: περιλαμβάνουν το περιεχόμενο του μαθήματος, κατευθύνουν τον σχεδιασμό του μαθήματος με ενδεικτικές δραστηριότητες και προτάσεις αξιολόγησης και προσδιορίζουν τους στόχους τους μαθήματος και τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα (Κολέζα, 2017).

Εντούτοις, δυσκολία παρουσιάζεται στο σημείο όπου το μάθημα της Άλγεβρας προβάλλεται ως γενίκευση της Αριθμητικής. Υπάρχει δυσκολία κατανόησης των εννοιών της Άλγεβρας, εξαιτίας της ανάγκης μετάβασης από την αναπαράσταση της φυσικής γλώσσας στη αναπαράσταση της συμβολικής γραφής (Δαγδιλέλης, Παυλοπούλου, Τρίγγα, 1998; Duval, 2006). Τοιουτοτρόπως, ο μαθητής καλείται να εφαρμόσει αλγεβρικά σύμβολα, εκφράσεις και μετασχηματισμούς, ζητήματα που απαιτούν από αυτόν να έχει νοητικές και αφαιρετικές ικανότητες.

2.2. ΜΕΤΑΡΡΥΘΜΙΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

Το ιστορικής διάστασης ερώτημα σχετικά με τις μεταρρυθμίσεις των αναλυτικών προγραμμάτων στην Ελλάδα, από ποιους φορείς δράσης αναλήφθηκαν, ποιο ήταν το διακύβευμα κάθε φορά, με ποιο τρόπο προκύπτει η νομιμοποίηση του περιεχομένου της σχολικής γνώσης και ποιο το αποτέλεσμά τους (Νούτσος, 1988; Φωτεινός, 2013; Περσιάνης, 2002) παραμένει καίριο ανά τα χρόνια. Στόχος του υποκεφαλαίου αυτού είναι η μελέτη των ιστορικών εξελίξεων και μεταρρυθμίσεων των Αναλυτικών Προγραμμάτων στην Ελλάδα και η παρουσίαση παλαιότερων, αλλά και σύγχρονων προγραμμάτων σπουδών.

Αναφορικά με την ύλη στα σχολικά Μαθηματικά της περιόδου πριν το 1950 ήταν αναχρονιστική, έχοντας μείνει η ίδια για πολλές δεκαετίες. Τα σχολικά Μαθηματικά εκείνης της περιόδου ήταν εκείνα που θεωρούνταν τα απαραίτητα και παρουσιάζονταν με πολύ θεωρητικό τρόπο, μέσω αλγόριθμων, τύπων και αποδείξεων χωρίς να παρουσιάζεται η χρησιμότητά τους εφόσον ήταν αποκομμένα από τις εφαρμογές τους στην καθημερινότητα. Απόρροια αυτής της προσέγγισης ήταν να δημιουργηθεί η αίσθηση ότι τα Μαθηματικά δεν είναι χρήσιμα (Κολέζα, 2017). Η περίοδος αυτή χαρακτηρίζεται περισσότερο από αλλαγές που προγραμματίζονταν και δεν πραγματοποιούνταν. Εκείνη τη περίοδο δεν πραγματοποιήθηκε καμία ουσιαστική αλλαγή στα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών παρά την εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης, η οποία άλλαξε το περιεχόμενο της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση (Καραγεώργος, 1997, σ. 70).

Από τη μεταπολεμική περίοδο, η ανάγκη να αλλάξει η εικόνα που επικρατούσε για τα Μαθηματικά οδήγησε σε εκπαιδευτική μεταρρύθμιση. Έτσι έρχεται μία πολύ σημαντική περίοδος για τα Μαθηματικά, η οποία χαρακτηρίζεται από τη μεταρρύθμιση των «Μοντέρνων Μαθηματικών» και την εισαγωγή της Θεωρίας Συνόλων (Καλαβάσης, 1984; Καλαβάσης & Λιναρδάκης, 1992; Μητακίδης, 1983). Η προσέγγιση της ύλης των Μαθηματικών μέσω των συνόλων, θεωρείται ότι συμφωνεί με τη συνολική αντίληψη του παιδιού και τη συνειδητή προσπάθειά του να εντάξει το γύρω κόσμο του και τις ιδέες σε ευρύτερα σύνολα, για να μπορέσει να τα κατανοήσει και να τα ερμηνεύσει.

Από τότε μέχρι και τις μέρες μας, ο αρμόδιος φορέας που αναλαμβάνει την εκπαιδευτική πολιτική, όπως και το περιεχόμενο γνώσης που θα λάβει ο μαθητής στο σχολείο, είναι τα κυβερνητικά κόμματα (Μουζέλης, 2014). Έτσι, τα κυβερνητικά κόμματα μέσω του Π.Ι. και του Ι.Ε.Π., που διορίζουν τις επιτροπές που συγκροτούνται και τις ελέγχουν, διαμορφώνουν το θεσμικό πλαίσιο της εκπαίδευσης που είναι επηρεασμένο από τις επιλογές της πολιτικής εξουσίας. Αυτή η επικεντρωμένη στις πολιτικές επιταγές και συγκεντρωτική οργάνωση των δομών, ασφαλώς δεν είναι αλάνθαστη (Flouris, 1995; Flouris, 1997). Η συγκρότηση των αναλυτικών προγραμμάτων προϋποθέτει τη σύνδεση της κοινωνίας με την οικονομία. Γι' αυτό οι απαιτήσεις του «δυτικού» κόσμου όσον αφορά την εκπαίδευση, γίνονται έτσι ώστε να συμβαδίζουν με τις απαιτήσεις της 4ης Βιομηχανικής Επανάστασης, σε όλες τις βαθμίδες τις εκπαίδευσης. Στη χώρα μας κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει καθώς δεν γίνεται προσπάθεια διασύνδεσης μεταξύ εκπαίδευσης και οικονομίας. Έτσι, η εκπαίδευση στη χώρα μας δεν συμβαδίζει με τις εξελίξεις του δυτικού κόσμου, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να συμβαδίσει με την τρέχουσα πραγματικότητα (Κονδύλης 2011). Επιδιώκεται, έτσι, μια εκπαίδευση, με όλα εκείνα τα θετικά στοιχεία της «δυτικής» εκπαίδευσης, χωρίς, ωστόσο, να γίνονται δεκτές και οι προϋποθέσεις που οδηγούν σε αυτού του είδους εκπαίδευσης. Έτσι, η ελληνική εκπαίδευση δεν συνδέεται με την τρέχουσα πραγματικότητα, με αποτέλεσμα να είναι αδύνατη η σύνδεση εκπαίδευσης-παραγωγής και οικονομίας (Μουζέλης, 2014). Κατά τους επιστήμονες που έθεσαν αυτές τις θεωρίες για τη συγκρότηση των προγραμμάτων σπουδών, μία ακόμη σημαντική παράμετρος που καθορίζει το πως συγκροτείται, βρίσκεται στα αποτελέσματα της εκπαίδευσης που μετρούνται με ειδικούς δείκτες. Σε αυτούς τους δείκτες η χώρα μας παρουσιάζει χαμηλή απόδοση: μετρήσεις του PISA, ή μετρήσεις άλλων διεθνών οργανισμών όπως η Third International Mathematics and Science Study της IEA. που κατατάσσουν την Ελλάδα στις τελευταίες θέσεις, τόσο ως προς την κατανόηση και την παραγωγή των κειμένων, ως προς τις θετικές επιστήμες. Τοιουτοτρόπως, δεν υπάρχει συσχέτιση των αναλυτικών προγραμμάτων ως προς τα γνωστικά, κοινωνικά και οικονομικά ζητούμενα. Η συγκρότηση των προγραμμάτων σπουδών αφορά στον διαχειριστικό έλεγχο της σχολικής γνώσης (Μουζέλης, 2014). Τα προγράμματα σπουδών στην χώρα μας σε σχέση με τα περιεχόμενα στην τυπολογία εμπίπτουν στην Ακαδημαϊκή θεωρία, (Schiro, 1978). Οι μαθητές στη χώρα μας διδάσκονται μαθήματα που χρησιμεύουν μόνο για την εισαγωγή στο Πανεπιστήμιο. Έτσι τα προγράμματα σπουδών στην χώρα μας είναι αποκομμένα από τα προβλήματα που αντιμετωπίζει η κοινωνία, όπως η έλλειψη κατάρτισης και η αποσύνδεση της εκπαίδευσης από την αγορά εργασίας, η απουσία συστηματικής καλλιέργειας κοινωνικών δεξιοτήτων (π.χ., ασφαλής οδήγηση), η πρόληψη σοβαρών καταστάσεων σωματικής και ψυχικής υγείας των νέων (σεξουαλική διαπαιδαγώγηση, ανοχή και αποδοχή της διαφορετικότητας). Έτσι, κατασκευάζεται μια εκπαίδευση, μέσα από την οποία προκρίνεται η αναπαραγωγή του τρόπου κυριαρχίας, μια εκπαίδευση χωρίς σαφή στοχοθεσία των προγραμμάτων σπουδών της, που δεν πρέπει να εμπλακεί σε δημόσια διαπραγμάτευση. Όσον αφορά, επομένως, στην μεταρρύθμιση των ελληνικών αναλυτικών προγραμμάτων κατέστη σαφές ότι πρόκειται για μια μεταρρύθμιση που τελικά δεν πραγματοποιήθηκε (Φωτεινός, 2020).

Τοιουτοτρόπως, ποικίλες πολιτικές καταστάσεις επηρέασαν τη σύνταξη των αναλυτικών προγραμμάτων ανά περιόδους. Πιο συγκεκριμένα, το 1964 όταν στην εξουσία ήρθε ο Γεώργιος Παπανδρέου, έρχεται μια κομβική μεταρρύθμιση, η μεταρρύθμιση του Παπανούτσου, η οποία περιλάμβανε τρία βασικά νομοσχέδια όσον αφορά το εκπαιδευτικό σύστημα. Αυτά αφορούσαν:

1. Την οργάνωση της γενικής εκπαίδευσης
2. Τη ρύθμιση των θεμάτων τεχνικής και επαγγελματικής εκπαίδευσης
3. Θέματα ανώτατης εκπαίδευσης.

Οι σκοποί αυτής της μεταρρύθμισης Παπανούτσου ήταν η εκπαίδευση να γίνει σε όλες τις βαθμίδες της προσιτή, από όλους τους πολίτες και από όλες τις κοινωνικές τάξεις (Άχλη, 1990).

Οι ονομασίες όπως «Νέα Μαθηματικά», «Σύγχρονα Μαθηματικά» και «Μοντέρνα Μαθηματικά» χρησιμοποιήθηκαν για να τονίσουν την ποιοτική αλλαγή που έγινε σε σχέση με την παραδοσιακή προσέγγιση και όχι τόσο την ύλη καθ' αυτή του Προγράμματος Σπουδών. Αυτή η αλλαγή σχετιζόταν με τη μάθηση με νόημα (meaningful learning) (Κολέζα, 2017). Η αντίληψη αυτή λέει ότι η μάθηση είναι πραγματική, εφαρμόζεται καλύτερα όταν υπάρχει κατανόηση του αντικειμένου της σε βάθος και έχει διάρκεια. Τα «Μοντέρνα Μαθηματικά» είναι δίπλα στους μαθητές μικρότερων ηλικιών, ενώ επί της ουσίας δεν έχουν καμία διαφορά από τα παραδοσιακά Μαθηματικά όπως και η ύλη τους, όσον αφορά ακέραιους δεκαδικούς, κλάσματα, εξισώσεις κ.α.. Η διαφορά έγκειται στην προσέγγιση των μαθηματικών γνώσεων. Αυτή η προσέγγιση γίνεται από τη μεθοδολογία και το περιεχόμενο των

«Μοντέρνων Μαθηματικών». Στη χώρα μας η προσπάθεια αυτή ανανέωσης της ύλης έμεινε στο επίπεδο των προθέσεων και δεν υλοποιήθηκε. Σύμφωνα με το Θωμαΐδη (1991, σελ. 29) αποτέλεσμα του τρόπου με τον οποίο η ελληνική μαθηματική κοινότητα εξέλαβε το μήνυμα των εξελίξεων της εποχής και το συνέδεσε με το ζήτημα της μεταρρύθμισης της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η εισαγωγή των Νέων Μαθηματικών δίνει έμφαση στην ανανέωση της μαθηματικής ύλης και όχι στη μεθοδολογία της διδασκαλίας. Με αυτή τη μεταρρύθμιση οι μαθητές θα μπορούσαν να προετοιμαστούν καλύτερα για την εισαγωγή τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση εφόσον θα εξαιτίας των αλλαγών θα συλλογίζονται πιο οργανωμένα και συστηματικά. Δυστυχώς όμως η μεταρρύθμιση απέτυχε στους στόχους της, καθώς τα Μαθηματικά παρέμειναν αποκομμένα με εφαρμογές και προβλήματα της καθημερινότητας. Οι μαθητές σε πολλές περιπτώσεις δεν μπορούσαν να εκτελέσουν απλές πράξεις. Έτσι τη δεκαετία του ’70 αμφισβητήθηκε η μεταρρύθμιση των Νέων Μαθηματικών σε πολλές χώρες ξεκινώντας από τις ΗΠΑ (Kline, 1990). Δεν άργησε έτσι να δοθεί το σύνθημα «πίσω στα παραδοσιακά Μαθηματικά», όπου δεν εφαρμόστηκε, αλλά έγινε μια προσπάθεια μίξης παραδοσιακών με «Μοντέρνων Μαθηματικών».

Μετά το 1981 αλλάζουν σημαντικά τα πολιτικά πράγματα στη χώρα και αρχίζει μια μεγάλη μεταρρυθμιστική προσπάθεια, η οποία στηρίζεται σε δύο βασικές αρχές (Γέρου, 1985; Ξωχέλης, 1991, σ. 30). Οι αλλαγές που έγιναν αφορούσαν κυρίως αλλαγές ύλης και μαθημάτων και λιγότερο σε αλλαγές στις μεθόδους και στους σκοπούς. Η αλλαγή των Π.Σ. αφορούσαν περισσότερο στις εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις της κάθε κυβέρνησης αγνοώντας τους ίδιους τους μαθητές (Αθανασιάδης, 1996, σ. 84-85). Μέχρι σήμερα δίνεται ένα μοναδικό σχολικό εγχειρίδιο που πρέπει να διδαχθεί με ένα συγκεκριμένο τρόπο, όπως ορίζει το Π.Σ.. Εξαίρεση πήγε να αποτελέσει το πολλαπλό σχολικό εγχειρίδιο το 1999 το οποίο στην συνέχεια εγκαταλείφθηκε. Τα Π.Σ. όμως δεν πρέπει να έχουν στατικό χαρακτήρα (Γιαννακάκη, 1996).

Από τα παραπάνω καθίσταται σαφές ότι τα Α.Π. πρέπει συνεχώς να αναπροσαρμόζονται και να βελτιώνονται, ώστε να πληρούν και να ικανοποιούν τις ανάγκες κάθε εποχής. Σήμερα βιώνουμε την τελευταία εκπαιδευτική μεταρρύθμιση με τα ΔΕΠΠΣ και τα Αναλυτικά Προγράμματα Μαθηματικών με την αντίστοιχη δημιουργία καινούριων σχολικών εγχειριδίων για τα Μαθηματικά. Το καινούριο αυτό Πρόγραμμα Σπουδών δομείται με πολλαπλά επίκεντρα που αποτελούνται από

Μαθηματικά προβλήματα μέσα στο ιστορικό και κοινωνικό τους πλαίσιο, εξελικτικά διαταγμένα, με στόχους την κατάδειξη του χαρακτήρα των μαθηματικών σαν ιστορικά διαμορφωμένης και κοινωνικά καθορισμένης επιστημονικής δραστηριότητας και την ανάπτυξη νοητικών προϋποθέσεων για την κατανόηση και ερμηνεία της πραγματικότητας. Σχεδιάζονται με τη συνεργασία ερευνητών, εκπαιδευτικών, και ψυχολόγων σε μία προσπάθεια να ανταποκρίνονται στις σύγχρονες ανάγκες (Π.Δ. 583/1982 – ΦΕΚ 107Α΄). Η επιρροή των μαθηματικών έδωσε τη μαθηματική θεμελίωση, ενώ οι παιδαγωγοί και οι ψυχολόγοι βοήθησαν για την προσαρμογή της ύλης σύμφωνα με το επίπεδο ανάπτυξης του παιδιού (Σκουμπουρδή, 2009).

Παρακάτω παρουσιάζεται ο πίνακας με παλαιότερα, αλλά και σύγχρονα προγράμματα σπουδών, τα οποία μελετά η παρούσα έρευνα.

Πίνακας 1: Πίνακας Προγραμμάτων Σπουδών.

Πρόγραμμα Σπουδών	Αριθμός Φ.Ε.Κ.	Χρονολογία δημοσίευσης
Βασιλικό Διάταγμα 191: *Περί του αναλυτικού και ωρολογίου προγράμματος της Δ΄ τάξεως Γυμνασίων πρακτικής κατευθύνσεως.*	Φ.Ε.Κ. Α΄ 55	18 Μαρτίου 1961
Βασιλικό Διάταγμα 620: *Περί του αναλυτικού και ωρολογίου προγράμματος της Ε΄ τάξεως Γυμνασίων πρακτικής κατευθύνσεως.*	Φ.Ε.Κ. Α΄ 151	12 Σεπτεμβρίου 1961
Βασιλικό Διάταγμα 72: *Περί ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων τάξεων τινών σχολείων Δευτεροβαθμίου (Μέσης) Εκπαιδεύσεως.*	Φ.Ε.Κ. Α΄ 16	26 Ιανουαρίου 1966
Βασιλικό Διάταγμα 1074: *Περί ωρολογίου και αναλυτικού προγράμματος της Β΄ τάξεως Λυκείων.*	Φ.Ε.Κ. Α΄ 289	21 Δεκεμβρίου 1966
Βασιλικό Διάταγμα 723: *Περί των ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων των μαθημάτων των σχολείων Μέσης Εκπαιδεύσεως.*	Φ.Ε.Κ. Α΄ 225	10 Νοεμβρίου 1969
Προεδρικό Διάταγμα 827: *Περί του ωρολογίου και αναλυτικού προγράμματος της Α΄ τάξεως του Ημερησίου και του Εσπερινού Λυκείου Γενικής Κατευθύνσεως και του Προτύπου Ελληνικού Κλασσικού Λυκείου.*	Φ.Ε.Κ. Α΄ 240	23 Οκτωβρίου 1979
Προεδρικό Διάταγμα 922: *Περί του ωρολογίου και*	Φ.Ε.Κ. Α΄ 230	6 Οκτωβρίου

αναλυτικού προγράμματος της Β΄ τάξεως Ημερησίου Λυκείου Γενικής Κατευθύνσεως των Β΄ και Γ΄ τάξεων του Εσπερινού Λυκείου της αυτής κατευθύνσεως και της Β΄ τάξεως του Προτύπου Ελληνικού Κλασσικού Λυκείου.		1980
Προεδρικό Διάταγμα 479: *Ωρολόγιο και αναλυτικό πρόγραμμα Λυκείων Μέσης Γενικής Εκπαίδευσης.*	Φ.Ε.Κ. Α΄ 170	7 Οκτωβρίου 1985
Προεδρικό Διάταγμα 21: *Τροποποίηση και συμπλήρωση ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων σχολείων. δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.*	Φ.Ε.Κ. Α΄ 8	15 Ιανουαρίου 1988
Προεδρικό Διάταγμα 101: *Τροποποίηση και συμπλήρωση ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων σχολείων Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.*	Φ.Ε.Κ. Α΄ 44	8 Φεβρουαρίου 1989
Προεδρικό Διάταγμα 198: *Τροποποίηση και συμπλήρωση ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων σχολικών μονάδων Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και άλλες διατάξεις.*	Φ.Ε.Κ. Α΄ 73	20 Μαΐου 1993
Υπουργική Απόφαση Γ2/2861: *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Γυμνασίου κι Ενιαίου Λυκείου.*	Φ.Ε.Κ. Β΄ 1342	30 Ιουνίου 1999
Υπουργική Απόφαση 59614/Γ2: *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου.*	Φ.Ε.Κ. Β΄ 1168	8 Ιουνίου 2011
Υπουργική Απόφαση 61019/Γ2: *Πρόγραμμα Σπουδών Άλγεβρας και Γεωμετρίας γενικής παιδείας Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου.*	Φ.Ε.Κ. Β΄ 1173	15 Μαΐου 2013
Υπουργική Απόφαση 145377/Δ2: *Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων Γενικού Λυκείου.*	Φ.Ε.Κ. Β΄ 5390	19 Νοεμβρίου 2021

2.3. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΆΛΓΕΒΡΑ

Για την περίοδο από το 1961 έως σήμερα, οι σκοποί της διδασκαλίας και η διδακτέα ύλη του μαθήματος της Άλγεβρας ποικίλουν. Επί παραδείγματι θα λέγαμε ότι η διδακτέα ύλη που διδάσκεται σήμερα στην Α΄ και Β΄ τάξη του Λυκείου, παλαιότερα διδάσκονταν στην Γ΄, Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη του εξατάξιου Γυμνασίου.

Βασιλικό Διάταγμα 191: *Περί του αναλυτικού και ωρολογίου προγράμματος της Δ΄ τάξεως Γυμνασίων πρακτικής κατευθύνσεως* Φ.Ε.Κ. Α΄ 55 (18 Μαρτίου 1961). Αναφορικά με τη διδασκαλία της Άλγεβρας όριζε, σύμφωνα με το Άρθρο 7, ότι οι μαθητές της Δ' τάξεως Γυμνασίου θα διδάσκονταν Άλγεβρα στο Α΄ εξάμηνο 4 ώρες και στο Β΄ εξάμηνο 2 ώρες. Πιο συγκεκριμένα, το περιεχόμενο της διδασκαλίας αφορούσε σε:

- εξισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο. Διερεύνηση της $\alpha\chi+\beta=0$
- απλά προβλήματα που θα λύνονται με τη βοήθεια της $\alpha\chi+\beta=0$
- συναρτήσεις: έννοια της συναρτήσεως. απεικόνισης ζευγών (χ, ψ) συναρτήσεως, γραφική παράσταση της $\psi=\alpha\chi+\beta$, λύση της $\alpha\chi+\beta=0$ με τη βοήθεια της γραφικής παραστάσεως,
- ανισότητες πρώτου βαθμού με ένα άγνωστο,
- συστήματα δύο εξισώσεων πρώτου βαθμού με δύο αγνώστους: ιδιότητες, μέθοδος λύσεως. Γραφική λύση συστήματος δύο πρωτοβάθμιων εξισώσεων με δύο αγνώστους,
- απλά προβλήματα λυμένα με τη βοήθεια πρωτοβάθμιων συστημάτων,
- εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας θετικών αριθμών. Απλά ριζικά, έννοια ασύμμετρων αριθμών. Ορισμός των μιγαδικών αριθμών, σημεία οριζόμενα μέσω μιγαδικών αριθμών,
- εξισώσεις δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο. Σχέσεις συντελεστών και ριζών και ανάλυσης στο γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων του τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$. Διτετράγωνοι εξισώσεις. Εξισώσεις με απλά ριζικά,
- απλά συστήματα και προβλήματα λυμένα με τη βοήθεια δευτεροβαθμίων εξισώσεων,
- περί αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων. Περί λογαρίθμων. Εύρεση αριθμητικών εξαγόμενων με τη βοήθεια των λογάριθμων.

Βασιλικό Διάταγμα 620: *Περί του αναλυτικού και ωρολογίου προγράμματος της Ε΄ τάξεως Γυμνασίων πρακτικής κατευθύνσεως*, Φ.Ε.Κ. Α' 151 (12 Σεπτεμβρίου 1961). Αναφορικά με τη διδασκαλία της Άλγεβρας όριζε, σύμφωνα με το Άρθρο 7, ότι οι μαθητές της Ε' τάξεως Γυμνασίου θα διδάσκονταν Άλγεβρα (Μετά στοιχείων

Αναλυτικής Γεωμετρίας και θεωρίας των συνόλων) στο Α' και Β' εξάμηνο 2 ώρες. Πιο συγκεκριμένα, το περιεχόμενο της διδασκαλίας αφορούσε σε:

- συμπλήρωση και επανάληψη της διδαχθείσης ύλης από την Δ΄ τάξη, μέσω ασκήσεων και προβλημάτων.
- πρώτη έννοια του συνόλου (παραδείγματα Αριθμητικής, Άλγεβρας και Γεωμετρίας) -Καθορισμός συνόλου-Σύνολα πεπερασμένου πλήθους στοιχείων-Απειροσύνολα-Ίσα σύνολα-Υποσύνολο-Συμπληρωματικό σύνολο. Ένωση δύο ή περισσοτέρων συνόλων- Διατομή συνόλων-οι θεμελιώδεις νόμοι ως προς την ένωση και τη διατομή.
- ορισμός της θέσεως σημείου επί άξονα- ορισμός σημείου επί επιπέδου- Άξονες (Ορθογώνιοι-πλαγιογώνιοι) - Συντελεστής κατευθύνσεως διανυσμάτων - Αλλαγή των αξόνων (μεταφορά, στροφή ή εν συνεχεία εκτέλεση αμφοτέρων). Πολικές συντεταγμένες -Σχέσεις Καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων -Απλά προβλήματα.
- Εξίσωση της ευθείας πλήρης σπουδή του θέματος -Θέσεις δύο ευθειών κειμένων επί του αυτού επιπέδου προς αλλήλας. Παραλληλία, Σύμπτωση. Τομή. Προσδιορισμός του σημείου της τομής. Πρώτη έννοια της οριζούσης δευτέρου βαθμού -Ορίζουσα τρίτου βαθμού- Η λύση του γραμμικού μετά δύο αγνώστων συστήματος σύμφωνα με τον κανόνα του CRAMER- Εφαρμογή συστημάτων τριών αγνώστων Εμβαδόν τριγώνου εκ των συντεταγμένων των κορυφών του-Συνθήκη αλληλοτομίας τριών ευθειών. Σπουδή του δευτεροβάθμιου τριωνύμου (λεπτομερής μελέτη που έχει ως αποτέλεσμα τη γραφική του παράσταση). Απλά προβλήματα- Απροσδιόριστη ανάλυση πρώτου βαθμού. Απεικόνιση του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Απεικόνιση του συνόλου των φανταστικών αριθμών. Απεικόνιση των μιγάδων. Ισομορφία του συνόλου των μιγάδων και του συνόλου των διανυσμάτων του επιπέδου που έχουν κοινή αρχή, την αρχή των συντεταγμένων. Γινόμενο δυο μιγάδων. Τύπος του MOIVRE με εκθέτη φυσικό ή αρνητικό ακέραιο.

Παρατηρήσεις:

Οι παρεμβαλλόμενες έννοιες των σύγχρονων μαθηματικών ήταν δυνατόν να περιορισθούν μέχρι και την έννοια του συμπληρωματικού συνόλου.

Τα μαθήματα διατίθενται για τη διδασκαλία διαφόρων εφαρμογών και ασκήσεων κατά προτίμηση εφαρμογών φυσικής πειραματικής.

Βασιλικό Διάταγμα 72: *Περί ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων τάξεων τινών σχολείων Δευτεροβαθμίου (Μέσης) Εκπαιδεύσεως*. Φ.Ε.Κ. Α΄ 16 (26 Ιανουαρίου 1966). Αναφορικά με τη διδασκαλία της Άλγεβρας όριζε, σύμφωνα με το Άρθρο 25 (σελίδα 111), ότι οι μαθητές της Α' τάξεως ημερησίου Λυκείου θα διδάσκονταν στην Άλγεβρα:

- επίλυση συστημάτων πρωτοβαθμίων εξισώσεων με ισάριθμους άγνωστους. Προβλήματα. Ρίζες και ιδιότητες ριζών,
- παράσταση των ριζών ως δυνάμεων. Δυνάμεις με βάση θετικό αριθμό και έκθετη ρητό αριθμό. Όρια μεταβλητών ποσοτήτων και σχετικά θεωρήματα. Ασύμμετροι αριθμοί, δεκαδική παράστασή τους. Μιγαδικοί αριθμοί. Επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης με ένα άγνωστον. Προβλήματα.

Βασιλικό Διάταγμα 1074: *Περί ωρολογίου και αναλυτικού προγράμματος της Β΄ τάξεως Λυκείων*. Φ.Ε.Κ. Α΄ 289 (21 Δεκεμβρίου 1966). Αναφορικά με τη διδασκαλία της Άλγεβρας όριζε, σύμφωνα με το Άρθρο 10, ότι οι μαθητές της Β' τάξεως ημερησίου Λυκείου θα διδάσκονταν Άλγεβρα 3 ώρες στο Ά τετράμηνο και 2 ώρες στο Β' τετράμηνο. Πιο συγκεκριμένα:

- θα διερευνήσουν τις εξισώσεις 2ου βαθμού, όταν οι συντελεστές τους είναι πραγματικοί αριθμοί. Ανάλυση τριωνύμου 2ου βαθμού με γινόμενο παραγόντων (τη βοήθεια των ριζών του), όταν οι συντελεστές του είναι πραγματικοί αριθμοί.
- Θα μελετήσουν τη συνάρτηση $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, όπου το χ μεταβάλλεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί· γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης. Ανισώσεις (ανισότητες με άγνωστο) 2ου βαθμού.
- Θα μελετήσουν τη συνάρτηση $\begin{cases} \psi = \alpha\chi + \beta \\ \psi = \gamma\chi + \delta \end{cases}$ όπου το χ μεταβάλλεται στο σύνολο των πραγματικών άρρυθμών και $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Εξισώσεις διτετράγωνοι και αντίστροφοι μέχρι και 5ου βαθμού. Απλά συστήματα του 2ου και ανωτέρου του 2ου βαθμού. Αριθμητική πρόοδος, γεωμετρική πρόοδος, παρεμβολή αριθμητικών και γεωμετρικών μέσων. Η έννοια του λογάριθμου θετικού αριθμού. Δεκαδικοί λογαριθμικοί πίνακες και χρήση τους. Απλές

εκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις, ως και συστήματα αυτών των εξισώσεων. Ασκήσεις και προβλήματα εφ' όλης της ύλης.

Βασιλικό Διάταγμα 723: *Περί των ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων των μαθημάτων των σχολείων Μέσης Εκπαιδεύσεως*. Φ.Ε.Κ. Α΄ 225 (10 Νοεμβρίου 1969). Αναφορικά με τη διδασκαλία της Άλγεβρας (σελίδα 1674) όριζε ότι οι μαθητές της Δ' τάξεως θα διδάσκονταν Άλγεβρα στο Α' και Β' τετράμηνο 3 και 2 ώρες αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα και αναφορικά με τη διδασκαλία αφορούσε σε:

- Από το μαθηματικό λογισμό: πρόταση, προτασιακός τύπος. Άρνηση, διάζευξη, σύζευξη προτάσεων ή προτασιακών τύπων. Συνεπαγωγή και λογική ισοδυναμία, συσχετισμός με τις έννοιες «αναγκαία συνθήκη», «ικανή συνθήκη» και «αναγκαία και ικανή συνθήκη» πάντοτε στη βάση συγκεκριμένων παραδειγμάτων. Ταυτολογία. Εφαρμογές των ανώτερων για μία πρώτη μύηση στο Μαθηματικό λογισμό. Υπόθεση και συμπέρασμα σε μία μαθηματική πρόταση βάσει συγκεκριμένων παραδειγμάτων (6 μαθήματα)

- Από το διανυσματικό λογισμό: ισότητα εφαρμοστών διανυσμάτων. Το ελεύθερο διάνυσμα. Άθροισμα δύο ή περισσότερων διανυσμάτων. Διαφορά διανύσματος από άλλο διάνυσμα. Γινόμενο διανυσμάτων επί πραγματικού αριθμού. Λόγος δύο συγγραμμικών διανυσμάτων. Διεύθυνση διανύσματος στην ευθεία. Διανυσματική ισότητα του CHASLES. Ορθογώνιο σύστημα αναφοράς. Ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς. Συντεταγμένες σημείου και διανύσματος στο επίπεδο. Συνθήκη παραλληλίας στο επίπεδο. Διανυσματική εξίσωση ευθείας στο επίπεδο.

- Ανάλυση πολυωνύμου σε γινόμενο παραγόντων. Ταυτότητες. Ρητά κλάσματα. Λύση συστήματος α΄ βαθμού με δύο ή τρεις αγνώστους μέσω οριζουσών. Κανόνες του CRAMER και του SARRUS. Ομογενή γραμμικά συστήματα. Συμμετρικά. Εξισώσεις συμβιβαστές. Απροσδιόριστη ανάλυση α΄ βαθμού. Ασύμμετροι αριθμοί. Πραγματικοί αριθμοί. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού. Ιδιότητες.

- Περί ριζών: ιδιότητες. Πράξεις με άρρητους. Παραστάσεις. Μετατροπή κλάσματος με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή. Δυνάμεις με ρητό εκθέτη.

- Μιγαδικοί αριθμοί. Ορισμός του φανταστικού και μιγαδικού αριθμού. Τρόποι συμβολισμού. Ισότητα στο σύνολο των μιγαδικών. Οι τέσσερις πράξεις στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Γραφική παράσταση των μιγαδικών αριθμών (διάγραμμα του ARGAND, μιγαδικό επίπεδο GAUSS). Απόλυτη τιμή μιγαδικού αριθμού.

- Εξισώσεις β΄ βαθμού: επίλυση εξισώσεων β΄ βαθμού με έναν άγνωστο. Είδος των ριζών δευτεροβάθμιου τριωνύμου $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$.Συμμετρικές παραστάσεις των ριζών του δευτεροβάθμιου τριωνύμου συναρτήσει των συντελεστών αυτού. Πρόστιμο των ριζών του δευτεροβάθμιου τριωνύμου. Μετατροπή του τριωνύμου $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων ως προς χ παραγόντων. Εύρεση δευτεροβάθμιας εξίσωσης μέσω ριζών. Πρόσημο της αριθμητικής τιμής του τριωνύμου $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ για διάφορες πραγματικές τιμές του χ.

- Ανισώσεις β΄ βαθμού ως προς έναν άγνωστο. Επίλυση δευτεροβάθμιας ανίσωσης. Ανίσωση ανώτερου βαθμού. Σύστημα ανισώσεων β΄ βαθμού. Θέση πραγματικού αριθμού ως προς τις ρίζες του τριωνύμου $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$. Εφαρμογές για την διερεύνηση παραμετρικών εξισώσεων και ανισώσεων δεύτερου βαθμού. Σχέση συντελεστών δύο δευτεροβάθμιων εξισώσεων, εάν οι ρίζες πληρούν ορισμένες συνθήκες. Δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως συνεχής συνάρτηση του χ. Μέγιστο και ελάχιστο του δευτεροβάθμιου τριωνύμου. Γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ και της $\psi = \alpha\chi + \beta$.

- Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού. Τετραγωνική ρίζα μιγαδικού αριθμού. Διτετράγωνες εξισώσεις. Μετατροπή διπλών ριζικών σε απλά. Αντίστροφες εξισώσεις. Διωνυμικές και τριωνυμικές εξισώσεις. Εξισώσεις με ριζικά δεύτερης και ανώτερης τάξης. Απλά συστήματα β΄ βαθμού. Προβλήματα που λύνονται με εξισώσεις και συστήματα β΄ βαθμού.

- Από τη στατιστική, κεντρική τιμή, διασπορά, το διάγραμμα διασποράς και η έννοια της συσχετίσεως.

Αναφορικά με τη διδασκαλία της Άλγεβρας στην Ε' τάξη (σελίδα 1.675) όριζε ότι οι μαθητές θα διδάσκονται 2 ώρες στο Ά τετράμηνο και 3 ώρες στο Β' τετράμηνο. Πιο συγκεκριμένα, η διδασκαλία αφορά σε:

- Αξιώματα PEANO. Τέλεια επαγωγή. Απόλυτη τιμή πραγματικού και μιγαδικού αριθμού. Απόλυτη τιμή αθροίσματος, γινομένου, πηλίκο κ.τ.λ. πραγματικών και μιγαδικών αριθμών. Εξισώσεις με απόλυτες τιμές πραγματικών αριθμών. Ανισώσεις και συστήματα με απόλυτες τιμές των αγνώστων και εφαρμογές.
- Στοιχειώδης θεωρία των ακέραιων πολυωνύμων, πολυώνυμα ομογενή και συμμετρικά. Ανάλυση απλού ρητού κλάσματος σε άθροισμα ρητών κλασμάτων. Γενική μορφή εξίσωσης διωνύμου. Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού. Τύπος DE MOIVRE.
- Μονότονες ακολουθίες και όρια ακολουθιών. Παραδείγματα. Αριθμητικές και γεωμετρικές προόδους. Αρμονική πρόοδος. Απλές σειρές.
- Λογάριθμος αριθμού. Ιδιότητες. Δεκαδικοί λογάριθμοι. Αλλαγή βάσης λογαρίθμων. Χρήση λογαριθμικών πινάκων. Εκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις και συστήματα. Ανατοκισμός, ίσες καταθέσεις και χρεολύσια. Στοιχειώδης σπουδή απροσδιόριστης ανάλυσης β' βαθμού.
- Στοιχεία συνδυαστικής: μετάθεση, διάταξη. Συνδυασμοί. Τύπος του διωνύμου του Νεύτωνα. Στοιχεία από τη θεωρία πινάκων. Συσχέτιση αυτών με τις ορίζουσες.
- Από τη θεωρία των πιθανοτήτων: Περί δειγματικού χώρου. Τομή, ένωση δύο ή περισσότερων συμβάντων. Συμπλήρωμα ενός συμβάντος. Παραδείγματα. Στοιχειώδης ορισμός της πιθανότητας των συμβάντων σαν πηλίκο των ευνοϊκών προς τα δυνατά συμβάντα. Παραδείγματα. Ορισμός της πιθανότητας με τη βοήθεια των υποσυνόλων του δειγματικού χώρου. Πιθανότητες συμπληρωματικών συμβάντων. Εφαρμογές. Ανεξάρτητα συμβάντα. Πιθανότητα τομής αυτών. Εφαρμογές πιθανότητες υπό συνθήκη. Εφαρμογές.
- Ανάλυση διανύσματος σε δύο διευθύνσεις. Συντεταγμένες ελεύθερου διανύσματος. Συνθήκες ισότητας διανυσμάτων. Εφαρμογές. Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων. Ιδιότητες. Καρτεσιανό ανάπτυγμα εσωτερικού γινομένου.

Συνθήκη καθετότητας δύο διανυσμάτων. Εφαρμογές. Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων.

- Ειδικές περιπτώσεις: το σύστημα των πολικών συντεταγμένων. Σχέση καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων. Εξίσωση της ευθείας σε ορθογώνιο σύστημα αναφοράς. Διάφορες μορφές εξισώσεων της ευθείας. Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας. Ευθεία που ορίζεται από σημείο και διεύθυνση αυτής. Ευθεία που ορίζεται από δύο σημεία. Σχετικές θέσεις δύο ευθειών. Συνθήκη εάν τρία σημεία κινούνται στην ευθεία και συνθήκη εάν τρεις ευθείες διέρχονται από ένα σημείο. Γραφική λύση του συστήματος δύο εξισώσεων πρώτου βαθμού με δύο αγνώστους. Σημείο του τριωνύμου του πρώτου βαθμού $\alpha\chi + \beta\psi + \gamma$. Γραφική λύση της ανίσωσης $\alpha\chi + \beta\psi + \gamma \gtreqless 0$.
- Εφαρμογές. Κανονική μορφή της εξίσωσης ευθείας. Γωνία δύο ευθειών. Συνθήκη καθετότητας. Απόσταση σημείου από ευθεία. Εφαρμογές.

Προεδρικό Διάταγμα 827: *Περί του ωρολογίου και αναλυτικού προγράμματος της Α΄ τάξεως του Ημερησίου και του Εσπερινού Λυκείου Γενικής Κατευθύνσεως και του Προτύπου Ελληνικού Κλασσικού Λυκείου*. Φ.Ε.Κ. Α΄ 240 (23 Οκτωβρίου 1979). Αναφορικά με τον γενικό σκοπό της διδασκαλίας της Άλγεβρας στη Α' τάξη Λυκείου (σελίδα 2.407) αναφέρεται ότι είναι:

- Η μεθοδολογική άσκηση του μαθητή στην ορθολογική σκέψη, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική και στις λογικές διεργασίες, καθώς και η μύηση στη μαθηματική αποδεικτική διαδικασία.
- Η γενικότερη πνευματική καλλιέργεια και η συμβολή στην ολοκλήρωση της προσωπικότητας του μαθητή, καθόσον τα Μαθηματικά αναπτύσσουν την παρατηρητικότητα, την προσοχή, τη δύναμη αυτοσυγκέντρωσης, την επιμονή, την πρωτοβουλία, τη δημιουργική φαντασία, τη πειθαρχημένη σκέψη και συμπεριφορά, καλλιεργούν το αίσθημα του ωραίου και του ηθικού και διεγείρουν το κριτικό πνεύμα.
- Η ανάπτυξη ικανότητας για την ακριβή σύλληψη των εννοιών των μεγεθών, των ιδιοτήτων και των σχέσεων μεταξύ τους και ιδιαιτέρως εκείνων που είναι απαραίτητες για την κατανόηση και επίλυση πραγματικών προβλημάτων της σύγχρονης ζωής και για την επαφή με τη σύγχρονη τεχνική, οικονομική και κοινωνική πραγματικότητα.

- Ο εθισμός των μαθητών στη διατύπωση των διανοημάτων με τη χαρακτηριστική στη μαθηματική γλώσσα τάξη, σαφήνεια, ακρίβεια, αυστηρότητα, λιτότητα και κομψότητα.
- Η κατανόηση του ρόλου των Μαθηματικών στους διάφορους τομείς της γνώσεως και η επαρκής προπαρασκευή των μαθητών για τη συνέχιση των σπουδών τους.

Ειδικότεροι σκοποί της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Λύκειο είναι:

1. Να εμπεδώσουν και να διευρύνουν σε θεωρητικότερο επίπεδο γνώσεις που απέκτησαν οι μαθητές στο γυμνάσιο.
2. Να μυήσει και να εξοικειώσει τον μαθητή στη μέθοδο διδασκαλίας της μαθηματικής αποδείξεως και να του αναπτύξει «μαθηματική σκέψη».
3. Να ασκήσει τον μαθητή, ώστε να χρησιμοποιεί τα Μαθηματικά και όχι μόνο ως γνώση, αλλά και ως μέθοδο σκέψεως και πράξεως στην καθημερινή πρακτική.
4. Να φέρει τον μαθητή σε επαφή με ποικίλα θέματα εφαρμογών των μαθηματικών που συνδέονται με τις άλλες επιστήμες και τη σύγχρονη πραγματικότητα.

Αναφορικά με τη διδασκαλία της Άλγεβρας όριζε ότι οι μαθητές της Α’ τάξεως του ημερησίου Λυκείου Γενικής Κατεύθυνσης θα διδάσκονταν την Άλγεβρα 2 ώρες έως την 31η Ιανουαρίου και 3 ώρες από 1 Φεβρουαρίου έως το τέλος της σχολικής χρονιάς. Πιο συγκεκριμένα, θα διδάσκονταν:

- Έννοιες από τη Μαθηματική Λογική και εφαρμογές. Πρόταση και προτασιακός τύπος. Σύνολο αληθείας. Λογικές πράξεις. Προσοδεΐκτες. Ταυτολογία και αντίφαση. Μέθοδοι αποδείξεως. Επαγωγή. Εφαρμογές στη διατύπωση και απόδειξη μαθηματικών προτάσεων.
- Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ως αντιμεταθετικό σώμα. Οι βασικές πράξεις στο $\mathbb{R}$. ’Αξιώματα στο $(\mathbb{R},+,.)$. Θεωρήματα που προκύπτουν άμεσα. Διερεύνηση εξισώσεως α′ βαθμού. Εφαρμογές.
- Το $\mathbb{R}$ ως διατεταγμένο σώμα. Τα αξιώματα διατάξεως στο $\mathbb{R}$. Συμβιβαστότητα της διατάξεως με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Θεωρήματα που είναι άμεσες συνέπειες. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού. Ιδιότητες. Εφαρμογές. Δυνάμεις και διάταξη. Ανίσωση α΄ βαθμού με ένα άγνωστο.
- Πραγματικές συναρτήσεις. Ορισμός συναρτήσεως γενικά. Πραγματική συνάρτηση. Περιορισμός και επέκταση των πραγματικών συναρτήσεων. Ίσες συναρτήσεις. Πράξεις στο σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων. Ανάπτυγμα

και παραγοντοποίηση. Ασκήσεις λογισμού με πολυώνυμα και ρητές συναρτήσεις. Εφαρμογές στη λύση εξισώσεων και ανισώσεων.

- Κυκλικές συναρτήσεις. Τριγωνομετρικός κύκλος και βασικές κυκλικές συναρτήσεις. Τριγωνομετρικοί αριθμοί των τόξων: 0^o, 30^o, 45^o, 60^o, 90°, 180°, 270^o. Θεμελιώδεις σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών του ίδιου τόξου. Σχέση μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών τόξων που έχουν άθροισμα ή διαφορά: 90^o, 180°, 270°, 360°. Αναγωγή τόξου στο α' τεταρτημόριο. Ταυτότητες. Βασικές τριγωνομετρικές Εξισώσεις
- Ριζικά. Το αξίωμα κιβωτισμού στο $\mathbb{R}$. Η ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας για τους μη αρνητικούς. Βασικές ιδιότητες λογισμού των ριζικών. Δυνάμεις με ρητό εκθέτη.
- Μελέτη της μεταβολής πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής. Μονότονες συναρτήσεις και μονότονες κατά τμήματα. Λόγοι μεταβολής συναρτήσεως. Συναρτήσεις άρτιες – περιττές. Μελέτη συναρτήσεως για «μεγάλες» ή «μικρές» τιμές του |χ|. Εφαρμογή στη μελέτη των συναρτήσεων $\psi \rightarrow \alpha\chi+\beta, \frac{\alpha}{\chi},\ \alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ κ.λ.π. Χρήση της γραφικής παράστασης για τη λύση εξισώσεων.
- Εξισώσεις και ανισώσεις στο $\mathbb{R}$. Λύση της εξισώσεως β’ βαθμού στο $\mathbb{R}$. ‘Αθροισμα και γινόμενα των ριζών. Εφαρμογές. Τροπή τριωνύμου σε γινόμενο. Πρόσημο του τριωνύμου β βαθμού. Θέση πραγματικοί αριθμού ως προς τις ρίζες τριωνύμου. Ανισώσεις β’ βαθμού. Συστήματα γραμμικών εξισώσεων και απλές μορφές συστημάτων με εξισώσεις β βαθμού.

Προεδρικό Διάταγμα 922: *Περί του ωρολογίου και αναλυτικού προγράμματος της Β΄ τάξεως Ημερησίου Λυκείου Γενικής Κατευθύνσεως των Β΄ και Γ΄ τάξεων του Εσπερινού Λυκείου της αυτής κατευθύνσεως και της Β΄ τάξεως του Προτύπου Ελληνικού Κλασσικού Λυκείου*. Φ.Ε.Κ. Α΄ 230 (6 Οκτωβρίου 1980). Οι σκοποί προτάθηκαν στο αναλυτικό πρόγραμμα του μαθήματος της Α’ τάξεως του ημερησίου Λυκείου Θετικής Κατεύθυνσης (σελίδα 2.738). Όριζε για τους μαθητές της Β’ Λυκείου να διδαχθούν 3 ώρες την Άλγεβρα. Αναφορικά με το περιεχόμενο της διδασκαλίας είχε ως εξής:

- Στοιχεία θεωρίας αριθμών. Διαιρετότητα στο σύνολο $\mathbb{Z}$. Αλγοριθμική διαίρεση, Μ.Κ.Δ. και Ε.Κ.Π. ακεραίων. Βασικά θεωρήματα. Επίλυση της εξίσωσης $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$ στο $\mathbb{Z}$.
- Μιγαδικοί αριθμοί. Ανάγκη επεκτάσεως του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Το αντιμεταθετικό σώμα των μιγαδικών αριθμών. Επίλυσης μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης και γενικότερα μιας πολυγωνικής εξίσωσης στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Μέτρο μιγαδικού αριθμού. Γεωμετρική παράσταση μιγαδικού αριθμού. Τριγωνική μορφή μιγαδικού. Ρίζες μιγαδικού αριθμού.
- Βασικές αλγεβρικές δομές. Διμελής πράξη. Υποσύνολο κλειστό ως προς μια πράξη. Στοιχείο ουδέτερο, συμμετρικό απλοποιήσιμο. Ομάδα, δακτύλιος, σώμα, διανυσματικοί χώροι. Βασικές ιδιότητες.
- Στοιχεία θεωρίας πολυωνύμων. Ο αντιμεταθετικός δακτύλιος των πολυωνύμων. Αλγοριθμική διαίρεση. Μ.Κ.Δ. πολυωνύμων. Βασικές ιδιότητες. Ε.Κ.Π. πολυωνύμων. Ρίζα πολυωνύμου. Θεωρήματα για τις ρίζες ενός πολυωνύμου.

Προεδρικό Διάταγμα 479: *Ωρολόγιο και αναλυτικό πρόγραμμα Λυκείων Μέσης Γενικής Εκπαίδευσης*. Φ.Ε.Κ. Α΄ 170 (7 Οκτωβρίου 1985). Σύμφωνα με το άρθρο 1 (σελίδα 2.631) ο γενικός σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην Ά τάξη Ημερησίου Λυκείου είναι:

- Η μεθοδολογική άσκηση του μαθητή στην ορθολογική σκέψη, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική και στις λογικές διεργασίες, καθώς και η μύηση στη μαθηματική αποδεικτική διαδικασία.
- Η γενικότερη πνευματική καλλιέργεια και η συμβολή στην ολοκλήρωση της προσωπικότητας του μαθητή, καθόσον τα Μαθηματικά αναπτύσσουν την παρατηρητικότητα, την προσοχή, τη δύναμη αυτοσυγκέντρωσης, την επιμονή, την πρωτοβουλία, τη δημιουργική φαντασία, τη πειθαρχημένη σκέψη και συμπεριφορά, καλλιεργούν το αίσθημα του ωραίου και του ηθικού και διεγείρουν το κριτικό πνεύμα.
- Η ανάπτυξη ικανότητας για την ακριβή σύλληψη των εννοιών των μεγεθών, των ιδιοτήτων και των σχέσεων μεταξύ τους και ιδιαιτέρως εκείνων που είναι απαραίτητες για την κατανόηση και επίλυση πραγματικών προβλημάτων της σύγχρονης ζωής και για την επαφή με τη σύγχρονη τεχνική, οικονομική και κοινωνική πραγματικότητα.

- Ο εθισμός των μαθητών στη διατύπωση των διανοημάτων με τη χαρακτηριστική στη μαθηματική γλώσσα τάξη, σαφήνεια, ακρίβεια, αυστηρότητα, λιτότητα και κομψότητα.
- Η κατανόηση του ρόλου των Μαθηματικών στους διάφορους τομείς της γνώσεως και η επαρκής προπαρασκευή των μαθητών για τη συνέχιση των σπουδών τους.

Ειδικότεροι σκοποί της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Λύκειο είναι:

1. Να εμπεδώσουν και να διευρύνουν σε θεωρητικότερο επίπεδο γνώσεις που απέκτησαν οι μαθητές στο γυμνάσιο.
2. Να μυήσει και να εξοικειώσει τον μαθητή στη μέθοδο διδασκαλίας της μαθηματικής αποδείξεως και να του αναπτύξει «μαθηματική σκέψη».
3. Να ασκήσει τον μαθητή, ώστε να χρησιμοποιεί τα Μαθηματικά και όχι μόνο ως γνώση, αλλά και ως μέθοδο σκέψεως και πράξεως στην καθημερινή πρακτική.
4. Να φέρει τον μαθητή σε επαφή με ποικίλα θέματα εφαρμογών των μαθηματικών που συνδέονται με τις άλλες επιστήμες και τη σύγχρονη πραγματικότητα.

Για τον χρόνο διδασκαλίας της Άλγεβρας όριζε 3 ώρες την εβδομάδα από την αρχή της διδασκαλίας των μαθημάτων μέχρι 20 Ιανουαρίου και 2 ώρες από 21 Ιανουαρίου μέχρι το τέλος της διδασκαλίας των μαθημάτων. Πιο συγκεκριμένα, η διδασκαλία αφορούσε σε:

- Έννοιες από τη Μαθηματική Λογική και εφαρμογές. Πρόταση και προτασιακός τύπος. Σύνολο αληθείας, Λογικές πράξεις. Ποσοδείκτες. Ταυτολογία και αντίφαση. Μέθοδοι αποδείξεως. Επαγωγή. Εφαρμογές στη διατύπωση και απόδειξη μαθηματικών προτάσεων.
- Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ως αντιμεταθετικό σώμα. Οι βασικές πράξεις στο $\mathbb{R}$. Αξιώματα στο ($\mathbb{R}$, συν, ‘). Θεωρήματα που προκύπτουν άμεσα. Διερεύνηση εξισώσεως α' βαθμού. Εφαρμογές.
- Το $\mathbb{R}$ ως διατεταγμένο σώμα. Τα αξιώματα διατάξεως στο $\mathbb{R}$. Συμβιβαστότητα της διατάξεως με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Θεωρήματα που είναι άμεσες συνέπειες. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού. Ιδιότητες. Εφαρμογές. Δυνάμεις και διάταξη. Ανίσωση α βαθμού με ένα άγνωστο
- Πραγματικές συναρτήσεις. Ορισμός συνάρτησης γενικά. Πραγματική συνάρτηση. Περιορισμός και επέκταση πραγματικών συναρτήσεων. Ίσες συναρτήσεις. Πράξεις στο σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων. Ανάπτυγμα και

παραγοντοποίηση. Ασκήσεις λογισμού με πολυωνυμικές και ρητές συναρτήσεις. Εφαρμογές στη λύση εξισώσεων και ανισώσεων.

- Κυκλικές συναρτήσεις. Τριγωνομετρικός κύκλος και βασικές κυκλικές συναρτήσεις. Τριγωνομετρικοί αριθμοί των τόξων 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°. Θεμελιώδεις σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών του ίδιου τόξου. Σχέση μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών τόξων που έχουν άθροισμα ή διαφορά 90°, 180°, 270°, 360°. Αναγωγή τόξου α' τεταρτημόριο. Ταυτότητες, Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις.
- Ριζικά. Το αξίωμα κιβωτισμού στο $\mathbb{R}$. Η ύπαρξη τετραγωνικής ρίζα για τους μη αρνητικούς. Βασικές ιδιότητες λογισμού των ριζικών. Δυνάμεις με ρητό το εκθέτη.
- Εξισώσεις κι ανισώσεις στο $\mathbb{R}$. Λύση της εξίσωσης β' βαθμού στο $\mathbb{R}$. Άθροισμα και γινόμενο των ριζών. Εφαρμογές. Τροπή τριωνύμου σε γινόμενο. Πρόσημο του τριωνύμου β' βαθμού. Θέση πραγματικού αριθμού ως προς τις ρίζες τριωνύμου. Ανισώσεις β' βαθμού. Συστήματα γραμμικών εξισώσεων και απλές μορφές συστημάτων με εξισώσεις β' βαθμού.

Ο σκοπός που ορίζεται για τα μαθηματικά της Β' Λυκείου από την παράγραφο 3 του άρθρου 1 του Π.Δ/τος είναι ο σκοπός που επιδιώκεται για την Α' Λυκείου (σ. 2644).
Για την Άλγεβρα διατίθενται 3 ώρες εβδομαδιαίως από την αρχή μέχρι το τέλος της σχολικής χρονιάς.

- Πολυωνυμικές εξισώσεις.

Συναρτήσεις. Πραγματικές συναρτήσεις. Η πολυωνυμική συνάρτηση. Πράξεις με συναρτήσεις. Συναρτήσεις και εξισώσεις. Πολυωνυμική εξίσωση. Λύση πολυωνυμικής εξίσωσης με παραγοντοποίηση. Ρητές ρίζες πολυωνυμικής εξίσωσης. Σχήμα Horner, Πολυωνυμικές εξισώσεις ειδικής μορφής και εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές.

- Μελέτη βασικών πραγματικών συναρτήσεων.

Γραφική παράσταση συνάρτησης. Γραφική παράσταση της συνάρτησης F με $F(\chi) = \alpha\chi$. Συντελεστής διευθύνσεως ευθείας. Αλλαγή συστήματος αναφοράς. Μονοτονία συνάρτησης. Λόγος μεταβολής συνάρτησης. Μελέτη της συνάρτησης F με $F(\chi) = \alpha\chi + \beta$. Συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας ευθειών. Συνάρτηση μονότονη κατά διαστήματα. Μέγιστο και ελάχιστο συνάρτησης. Άρτια, περιττή, περιοδική συνάρτηση. Μελέτη των συναρτήσεων:

$F(\chi) = \chi - \frac{\alpha}{\chi},\ \alpha\chi^2, \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma.$

Μελέτη τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Γραφική λύση εξίσωσης και ανίσωσης.

- Τριγωνομετρία.

Συνημίτονο, ημίτονο και εφαπτομένη αθροίσματος και διαφοράς δύο τόξων. Σχέση των τριγωνομετρικών αριθμών ενός τόξου με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του διπλάσιου τόξου. Μετασχηματισμός αθροίσματος και διαφοράς τριγωνομετρικών αριθμών σε γινόμενο και αντιστρόφως. Εφαρμογές στην λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων. Νομός ημιτόνων. Νομός συνημιτόνων. Επίλυση τριγώνου. Εφαρμογές.

- Πρόοδοι

Η έννοια της ακολουθίας. Γραφική παράσταση ακολουθίας. Ακολουθίες που ορίζονται επαγωγικά. Μονότονες ακολουθίες. Αριθμητική πρόοδος. Μονοτονία αριθμητικής προόδου. Άθροισμα ν διαδοχικών ωρών αριθμητικής προόδου. Γεωμετρική πρόοδος. Μονοτονία γεωμετρικής προόδου. Άθροισμα πρώτων ωρών γεωμετρικής προόδου. Ακολουθίες με όριο το μηδέν. Ακολουθίες με όριο πραγματικό αριθμό. Άθροισμα των απείρων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο λ, όταν |λ| <1.

- Η εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση.

Η έννοια της δυνάμεως με εκθέτη ρητό η άρρητο αριθμό. Η εκθετική συνάρτηση. Ιδιότητες. Στοιχειώδης μελέτη της εκθετικής συνάρτησης. Εφαρμογές στην λύση εκθετικών εξισώσεων και συστημάτων. Η λογαριθμική συνάρτηση. Στοιχειώδης μελέτη της λογαριθμικής συνάρτησης. Ιδιότητες των λογαρίθμων. Εφαρμογές στην λύση λογαριθμικών εξισώσεις και συστημάτων.

- Τοπική μελέτη συνάρτησης.

Όριο συνάρτησης και ιδιότητες ορίου. Συνέχεια συνάρτησης. Η έννοια της παραγώγου. Κινηματική και γεωμετρική σημασία της παραγώγου. Παράγωγος βασικών συναρτήσεων. Εφαρμογές παραγώγων μονοτονία, ακρότατα συνάρτησης.

Προεδρικό Διάταγμα 21: *Τροποποίηση και συμπλήρωση ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων σχολείων δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης*. Φ.Ε.Κ. Α΄ 8 (15 Ιανουαρίου 1988). Ο σκοπός και η διδακτέα ύλη του μαθήματος των Μαθηματικών της Α’ τάξης ημερήσιου γενικού λυκείου, όπως ορίζονται από την παράγραφο 3 του άρθρου 1 του Π.Δ/τος 479/ 85 (ΦΕΚ 170/Α) (σελίδα 86), αντικαθίστανται ως εξής:

Α' Σκοπός:

Ο γενικός σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι:

- Η μεθοδολογική άσκηση του μαθητή στην ορθολογική σκέψη, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική και στις λογικές διεργασίες, καθώς και η μύηση στη μαθηματική αποδεικτική διαδικασία.
- Η γενικότερη πνευματική καλλιέργεια και η συμβολή στην ολοκλήρωση της προσωπικότητας του μαθητή, καθόσον τα Μαθηματικά αναπτύσσουν την παρατηρητικότητα, την προσοχή, τη δύναμη αυτοσυγκέντρωσης, την επιμονή, την πρωτοβουλία, τη δημιουργική φαντασία, τη πειθαρχημένη σκέψη και συμπεριφορά, καλλιεργούν το αίσθημα του ωραίου και του ηθικού και διεγείρουν το κριτικό πνεύμα.
- Η ανάπτυξη ικανότητας για την ακριβή σύλληψη των εννοιών των μεγεθών, των ιδιοτήτων και των σχέσεων μεταξύ τους και ιδιαιτέρως εκείνων που είναι απαραίτητες για την κατανόηση και επίλυση πραγματικών προβλημάτων της σύγχρονης ζωής και για την επαφή με τη σύγχρονη τεχνική, οικονομική και κοινωνική πραγματικότητα.
- Ο εθισμός των μαθητών στη διατύπωση των διανοημάτων με τη χαρακτηριστική στη μαθηματική γλώσσα τάξη, σαφήνεια, ακρίβεια, αυστηρότητα, λιτότητα και κομψότητα.
- Η κατανόηση του ρόλου των Μαθηματικών στους διάφορους τομείς της γνώσεως και η επαρκής προπαρασκευή των μαθητών για τη συνέχιση των σπουδών τους.

Ειδικότεροι σκοποί της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Λύκειο είναι:

1. Να εμπεδώσουν και να διευρύνουν σε θεωρητικότερο επίπεδο γνώσεις που απέκτησαν οι μαθητές στο γυμνάσιο.
2. Να μυήσει και να εξοικειώσει τον μαθητή στη μέθοδο διδασκαλίας της μαθηματικής αποδείξεως και να του αναπτύξει «μαθηματική σκέψη».
3. Να ασκήσει τον μαθητή, ώστε να χρησιμοποιεί τα Μαθηματικά και όχι μόνο ως γνώση, αλλά και ως μέθοδο σκέψεως και πράξεως στην καθημερινή πρακτική.
4. Να φέρει τον μαθητή σε επαφή με ποικίλα θέματα εφαρμογών των μαθηματικών που συνδέονται με τις άλλες επιστήμες και τη σύγχρονη πραγματικότητα.

Σύμφωνα με το άρθρο 2, παράγραφο 2 και σελίδα 86, όριζε για τον χρόνο διδασκαλία της Άλγεβρας στην Α' τάξη γενικού λυκείου 3 ώρες την εβδομάδα από την αρχή της διδασκαλίας των μαθημάτων μέχρι 20 Ιανουαρίου και 2 ώρες από 21 Ιανουαρίου μέχρι το τέλος της διδασκαλίας των μαθημάτων. Πιο συγκεκριμένα, η διδασκαλία αφορούσε σε:

- Έννοιες από την μαθηματική λογική και εφαρμογές. Πρόταση και προτασιακός τύπος. Σύνολο αλήθειας. Λογικές πράξεις. Ποσοδείκτες. Ταυτολογία και αντίφαση. Μέθοδοι αποδείξεως. Επαγωγή. Εφαρμογές στην διατύπωση και απόδειξη μαθηματικών προτάσεων.
- Το σύνολο ℝ των πραγματικών αριθμών ως σώμα. Οι βασικές πράξεις στο ℝ. Αξιώματα. Θεωρήματα που προκύπτουν άμεσα. Εφαρμογή στην λύση εξισώσεων και συστημάτων α' βαθμού.
- Το ℝ ως διατεταγμένο σώμα. Τα αξιώματα διατάξεων στο ℝ. Συμβιβαστότητα Της διατάξεως με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Θεωρήματα που είναι άμεσες συνέπειες. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού. Ιδιότητες. Εφαρμογές. Δυνάμεις και διάταξη. Ανίσωση α' βαθμού με έναν άγνωστο.
- Ριζικά. Το αξίωμα κιβωτισμού στο ℝ. Η ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας για τους μη αρνητικούς. Βασικές ιδιότητες λογισμού των ριζικών. Δυνάμεις με ρητό εκθέτη.
- Εξισώσεις και ανισώσεις στο ℝ. Λύση της εξίσωσης β' βαθμού στο ℝ. Άθροισμα και γινόμενο των ριζών. Εφαρμογές. Τροπή τριωνύμου σε γινόμενο. Πρόσημο του τριωνύμου. Ανισώσεις Β και ανώτερου βαθμού ως προς τις ρίζες τριωνύμου β' βαθμού. Θέση πραγματικού αριθμού ως προς τις ρίζες του τριωνύμου. Ανισώσεις β' και ανώτερου βαθμού. Απλές μορφές συστημάτων με εξισώσεις β' βαθμού.
- Πραγματικές συναρτήσεις. Ορισμός συνάρτησης γενικά. Πραγματική συνάρτηση. Περιορισμός και επέκταση των πραγματικών συναρτήσεων. Ίσες συναρτήσεις. Πράξεις στο σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων. Πολυωνυμικές και ρητές συναρτήσεις.
- Κυκλικές συναρτήσεις. Τριγωνομετρικός κύκλος και βασικές κυκλικές συναρτή σεις.
- Τριγωνομετρικοί αριθμοί των τόξων 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°. Θεμελιώδεις σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών του ίδιου τόξου. Σχέση μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών τόξων που έχουν άθροισμα ή διαφορά 90°, 180°, 270°, 360°. Αναγωγή τόξου στο α' τεταρτημόριο. Ταυτότητες. Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις και ανισώσεις.

Ο σκοπός και η διδακτέα ύλη του μαθήματος των Μαθηματικών της Β’ τάξεως ημερησίου Γενικού Λυκείου, όπως ορίζονται όπως ορίζονται από την παράγραφο 2 του άρθρου 2 του Π.Δ/τος 479/85 (ΦΕΚ 170/Α’) στη σελίδα 87, αντικαθίστανται ως εξής:

Διατίθενται 3 ώρες την εβδομάδα από την αρχή της διδασκαλίας των μαθημάτων μέχρι το τέλος της διδασκαλίας των μαθημάτων.

- Πολυωνυμικές εξισώσεις.

Συναρτήσεις. Πραγματικές συναρτήσεις. Η πολυωνυμική συνάρτηση. Πράξεις με συναρτήσεις. Συναρτήσεις και εξισώσεις. Πολυωνυμική εξίσωση. Λύση πολυωνυμικής εξίσωσης με παραγοντοποίηση. Ρητές ρίζες πολυωνυμικής εξίσωσης. Σχήμα Horner, Πολυωνυμικές εξισώσεις ειδικής μορφής και εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές.

- Μελέτη βασικών πραγματικών συναρτήσεων.

Γραφική παράσταση συνάρτησης. Γραφική παράσταση της συνάρτησης F με $F(\chi) = \alpha\chi$. Συντελεστής διευθύνσεως ευθείας. Αλλαγή συστήματος αναφοράς. Μονοτονία συνάρτησης. Λόγος μεταβολής συνάρτησης. Μελέτη της συνάρτησης F με $F(\chi) = \alpha\chi + \beta$. Συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας ευθειών. Συνάρτηση μονότονη κατά διαστήματα. Μέγιστο και ελάχιστο συνάρτησης. Άρτια, περιττή, περιοδική συνάρτηση. Μελέτη των συναρτήσεων:

$F(\chi) = \chi - \frac{\alpha}{\chi},\ \alpha\chi^2, \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma.$

Μελέτη τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Γραφική λύση εξίσωσης και ανίσωσης.

- Τριγωνομετρία.

Συνημίτονο, ημίτονο και εφαπτομένη αθροίσματος και διαφοράς δύο τόξων. Σχέση των τριγωνομετρικών αριθμών ενός τόξου με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του διπλάσιου τόξου. Μετασχηματισμός αθροίσματος και διαφοράς τριγωνομετρικών αριθμών σε γινόμενο και αντιστρόφως. Εφαρμογές στην λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων. Νομός ημιτόνων. Νομός συνημιτόνων. Επίλυση τριγώνου. Εφαρμογές.

- Πρόοδοι

Η έννοια της ακολουθίας. Γραφική παράσταση ακολουθίας. Ακολουθίες που ορίζονται επαγωγικά. Μονότονες ακολουθίες. Αριθμητική πρόοδος. Μονοτονία αριθμητικής προόδου. Άθροισμα ν διαδοχικών ωρών αριθμητικής προόδου. Γεωμετρική πρόοδος. Μονοτονία γεωμετρικής προόδου. Άθροισμα πρώτων ωρών γεωμετρικής προόδου. Ακολουθίες με όριο το μηδέν. Ακολουθίες με όριο πραγματικό αριθμό. Άθροισμα των απείρων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο λ, όταν |λ| <1.

- Η εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση.

Η έννοια της δυνάμεως με εκθέτη ρητό η άρρητο αριθμό. Η εκθετική συνάρτηση. Ιδιότητες. Στοιχειώδης μελέτη της εκθετικής συνάρτησης. Εφαρμογές στην λύση εκθετικών εξισώσεων και συστημάτων. Η λογαριθμική συνάρτηση. Στοιχειώδης μελέτη της λογαριθμικής συνάρτησης. Ιδιότητες των λογαρίθμων. Εφαρμογές στην λύση λογαριθμικών εξισώσεις και συστημάτων.

- Στατιστική. Πληθυσμός, μεταβλητής πληθυσμού. Συλλογή παρατηρήσεων: Απογραφή, δειγματοληψία. Κατανομή συχνοτήτων. Σχετική συχνότητα. Αθροιστική συχνότητα. Σχετική αθροιστική συχνότητα. Γραφική παράσταση κατανομής συχνοτήτων. Κυκλικό και ημικυκλικό διάγραμμα. Ομαδοποίηση παρατηρήσεων. Γραφική παράσταση κατανομής ομαδοποιημένων παρατηρήσεων. Μέση τιμή. Αλλαγή μεταβλητής. Μέση απόλυτη απόκλιση. Διακύμανση. Τυπική απόκλιση. Αλλαγή μεταβλητής.
- Τοπική μελέτη συνάρτησης. Όριο συνάρτησης και ιδιότητες ορίου. Η έννοια της παραγώγου. Κινηματική και γεωμετρική σημασία της παραγώγου. Παράγωγος βασικών συναρτήσεων. Εφαρμογές των παραγώγων, μονοτονία, ακρότατα συνάρτησης.

Προεδρικό Διάταγμα 101: *Τροποποίηση και συμπλήρωση ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων σχολείων Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης*. Φ.Ε.Κ. Α΄ 44 (8 Φεβρουαρίου 1989). Όριζε σύμφωνα με το Άρθρο 3, παράγραφο 3, για τον χρόνο διδασκαλία της Άλγεβρας στην Α' τάξη γενικού λυκείου 3 ώρες την εβδομάδα από την αρχή της διδασκαλίας των μαθημάτων μέχρι το τέλος της διδασκαλίας των μαθημάτων. Πιο συγκεκριμένα, η διδασκαλία αφορά σε:

- Πολυωνυμικές εξισώσεις. Συναρτήσεις. Πραγματικές συναρτήσεις. Η πολυωνυμική συνάρτηση. Πράξεις με συναρτήσεις. Συναρτήσεις και εξισώσεις. Πολυωνυμική εξίσωση. Λύση πολυωνυμικής εξίσωσης με παραγοντοποίηση. Ρητές ρίζες πολυωνυμικής εξίσωσης. Σχήμα HORNER. Πολυωνυμικές εξισώσεις ειδικής μορφής και εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές.
- Μελέτη βασικών πραγματικών συναρτήσεων.

- Συστήματα αναφοράς. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις (επαναλήψεις). Γραφική παράσταση συνάρτησης. Γραφική παράσταση της συνάρτησης F με $F(\chi) = \alpha\chi$. Συντελεστής διευθύνσεως ευθείας. Αλλαγή συστήματος αναφοράς. Μονοτονία συνάρτησης. Λόγος μεταβολής συνάρτησης. Μελέτη της συνάρτησης F με $F(\chi) = \alpha\chi + \beta$. Συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας ευθειών. Συνάρτηση μονότονη κατά διαστήματα. Μέγιστο και ελάχιστο συνάρτησης. Άρτια, περιττή, περιοδική συνάρτηση. Μελέτη των συναρτήσεων: $F(\chi) = \chi - \frac{\alpha}{\chi}$, $\alpha\chi^2$, $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$. Μελέτη τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Γραφική λύση εξίσωσης και ανίσωσης.
- Τριγωνομετρία. Συνημίτονο, ημίτονο και εφαπτόμενη αθροίσματος και διαφοράς δύο τόξων. Σχέση των τριγωνομετρικών αριθμών ενός τόξου με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του διπλάσιου τόξου. Μετασχηματισμός αθροίσματος και διαφοράς τριγωνομετρικών αριθμών σε γινόμενο και αντιστρόφως. Εφαρμογές στην λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων. Νομός ημίτονων. Νομός συνημιτόνων. Επίλυση τριγώνου. Εφαρμογές.
- Πρόοδοι. Η έννοια της ακολουθίας. Γραφική παράσταση ακολουθίας. Ακολουθίες που ορίζονται επαγωγικά. Μονότονες ακολουθίες. Αριθμητική πρόοδος. Μονοτονία αριθμητικής προόδου. Άθροισμα ν διαδοχικών ωρών αριθμητικής προόδου. Γεωμετρική πρόοδος. Μονοτονία γεωμετρικής προόδου. Άθροισμα πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου. Ακολουθίες με όριο το μηδέν. Ακολουθίες με όριο πραγματικό αριθμό. Άθροισμα των απείρων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο λ, όταν $|\lambda| < 1$.
- Η εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση. Η έννοια της δυνάμεως με εκθέτη ρητό η άρρητο αριθμό. Η εκθετική συνάρτηση. Ιδιότητες. Στοιχειώδης μελέτη της εκθετικής συνάρτησης. Εφαρμογές στη λύση εκθετικών εξισώσεων και συστημάτων. Η λογαριθμική συνάρτηση. Στοιχειώδεις μελέτη της λογαριθμικής συνάρτησης. Ιδιότητες των λογαρίθμων. Εφαρμογές στη λύση λογαριθμικών εξισώσεων και συστημάτων.
- Στατιστική, πληθυσμός, μεταβλητός πληθυσμού. Συλλογή παρατηρήσεων: Απογραφή, δειγματοληψία. Κατανομή συχνοτήτων. Σχετική συχνότητα. Αθροιστική συχνότητα. Σχετική αθροιστική συχνότητα. Γραφική παράσταση κατανομής συχνοτήτων. Κυκλικό και ημικυκλικό διάγραμμα. Ομαδοποίηση παρατηρήσεων. Γραφική παράσταση κατανομής ομαδοποιημένων

παρατηρήσεων. Μέση τιμή. Αλλαγή μεταβλητής. Μέση απόλυτη απόκλιση. Διακύμανση. Τυπική απόκλιση. Αλλαγή μεταβλητής.

- Τυπική μελέτη συνάρτησης. Όριο συνάρτησης και ιδιότητες ορίου. Η έννοια της παραγώγου. Κι νηματική και γεωμετρική σημασία της παραγώγου. Παράγωγος βασικών συναρτήσεων. των παραγώγων, μονοτονία, ακρότατα συνάρτησης.

Προεδρικό Διάταγμα 198: *Τροποποίηση και συμπλήρωση ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων σχολικών μονάδων Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και άλλες διατάξεις*. Φ.Ε.Κ. Α΄ 73 (20 Μαΐου 1993). Όριζε σύμφωνα με το Άρθρο 1, παράγραφο 1 και 2 του Π.Δ/τος 21/ 1988 (Φ.Ε.Κ. 8 τ.Α'.) (σελίδα 829) τους σκοπούς και τη διδακτέα ύλη του μαθήματος αντίστοιχα στην Α' τάξη Γενικού Λυκείου ως εξής:

Ο γενικός σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι:

- Η μεθοδολογική άσκηση του μαθητή στην ορθολογική σκέψη, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική και στις λογικές διεργασίες, καθώς και η μύηση στη μαθηματική αποδεικτική διαδικασία.
- Η γενικότερη πνευματική καλλιέργεια και η συμβολή στην ολοκλήρωση της προσωπικότητας του μαθητή, καθόσον τα Μαθηματικά αναπτύσσουν την παρατηρητικότητα, την προσοχή, τη δύναμη αυτοσυγκέντρωσης, την επιμονή, την πρωτοβουλία, τη δημιουργική φαντασία, τη πειθαρχημένη σκέψη και συμπεριφορά, καλλιεργούν το αίσθημα του ωραίου και του ηθικού και διεγείρουν το κριτικό πνεύμα.
- Η ανάπτυξη ικανότητας για την ακριβή σύλληψη των εννοιών των μεγεθών, των ιδιοτήτων και των σχέσεων μεταξύ τους και ιδιαιτέρως εκείνων που είναι απαραίτητες για την κατανόηση και επίλυση πραγματικών προβλημάτων της σύγχρονης ζωής και για την επαφή με τη σύγχρονη τεχνική, οικονομική και κοινωνική πραγματικότητα.
- Ο εθισμός των μαθητών στη διατύπωση των διανοημάτων με τη χαρακτηριστική στη μαθηματική γλώσσα τάξη, σαφήνεια, ακρίβεια, αυστηρότητα, λιτότητα και κομψότητα.
- Η κατανόηση του ρόλου των Μαθηματικών στους διάφορους τομείς της γνώσεως και η επαρκής προπαρασκευή των μαθητών για τη συνέχιση των σπουδών τους.

Οι σκοποί της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Λύκειο είναι:

1. Να εμπεδωθούν και να διερευνηθούν σε θεωρητικότερο επίπεδο γνώσεις που απέκτησαν οι μαθητές στο γυμνάσιο.
2. Να μυηθούν και να εξοικειωθούν οι μαθητές στη διαδικασία της μαθηματικής αποδείξεως και να καλλιεργηθεί η «μαθηματική σκέψη».
3. Να ασκηθούν οι μαθητές, ώστε να χρησιμοποιούν τα Μαθηματικά και όχι μόνο ως γνώση, αλλά και ως μέθοδο σκέψεως και πράξεως στην καθημερινή ζωή.
4. Να έρθουν οι μαθητές σε επαφή με τις ποικίλες εφαρμογές των Μαθηματικών στις άλλες επιστήμες και στη σύγχρονη πραγματικότητα.

Για τον χρόνο διδασκαλίας ορίστηκαν 3 ώρες την εβδομάδα από την αρχή της διδασκαλίας των μαθημάτων μέχρι 20 Ιανουαρίου και 2 ώρες από 21 Ιανουαρίου μέχρι το τέλος της διδασκαλίας των μαθημάτων. Πιο συγκεκριμένα, η διδασκαλία αφορούσε σε:

1. Πραγματικοί αριθμοί. Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους. Δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο. Βασικές ταυτότητες. Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων. Λύση της εξίσωσης $\alpha\chi + \beta = 0$. Παραμετρικές εξισώσεις. Λύση προβλημάτων με εξισώσεις. Διάταξη. Διάταξη και πράξεις. Λύση των ανισώσεων $\alpha\chi + \beta > 0$, $\alpha\chi + \beta < 0$. Απόλυτη τιμή (ορισμός, ιδιότητες). Η έννοια της απόστασης δύο αριθμών. Ρίζες πραγματικών αριθμών (ορισμός, ιδιότητες). Η εξίσωση $\chi^{\nu} = \alpha$. Δυνάμεις με ρητό εκθέτη.
2. Συναρτήσεις. Σύνολα (έννοια, παράσταση). Ίσα σύνολα. Υποσύνολο συνόλου. Κενό σύνολο. Διαγράμματα VENN. Πράξεις με σύνολα (ένωση, τομή, συμπλήρωμα συνόλου). Η έννοια της συνάρτησης (ορισμός, πεδίο ορισμού). Καρτεσιανές συντεταγμένες. Απόσταση σημείων. Γραφική παράσταση συνάρτησης. Η συνάρτηση $F(\chi) = \alpha\chi + \beta$. και η γραφική της παράσταση. Εξίσωση ευθείας. Συντελεστής διευθύνσεως. Συνθήκη παραλληλίας και καθετότητας ευθειών. Μελέτη των συναρτήσεων $F(\chi) = \alpha\chi^2$ και $F(\chi) = \frac{\alpha}{\chi}$. Μονοτονία. Ακρότατα. Οριακές τιμές. Ασύμπτωτες. Αντίθετες συναρτήσεις. Άρτια και περιττή συνάρτηση.
3. Συστήματα γραμμικών εξισώσεων και ανισώσεων. Γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους. Λύση συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων (επαναλήψεις). Ισοδύναμα συστήματα. Γενική λύση του συστήματος $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma, \alpha'\chi + \beta'\psi = \gamma$.

Χρήση οριζουσών. Συστήματα γραμμικών εξισώσεων με περισσότερους από δύο αγνώστους.

4. Στατιστική. Βασικές έννοιες. Κατανομή συχνοτήτων. Σχετική συχνότητα. Αθροιστική συχνότητα. Σχετική αθροιστική συχνότητα. Γραφική παράσταση κατανομής συχνοτήτων. Ραβδογράμματα. Ιστογράμματα. Κυκλικά διαγράμματα. Παράμετροι θέσης και διασποράς μιας κατανομής.
5. Εξισώσεις και ανισώσεις β΄ βαθμού. Λύση της εξίσωσης $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0, \alpha \neq 0$. Διακρίνουσα. Άθροισμα και γινόμενο ριζών. Εξισώσεις και απλά συστήματα που ανάγονται σε λύση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Τριώνυμο β΄ βαθμού. Μορφές τριωνύμου (παραγοντοποίηση). Πρόσημο τριωνύμου. Μελέτη της συνάρτησης $F(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, με βάση τη μελέτη της $\varphi(\chi) = \alpha\chi^2$. Επίλυση ανισώσεων β΄ βαθμού. Ανισώσεις της μορφής $A(\chi)B(\chi)\Gamma(\chi) \ldots \gtreqless 0$ και $\frac{A(\chi)}{B(\chi)} \gtreqless 0$. Συναληθεύουσες ανισώσεις
6. Τριγωνομετρία. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας. Τριγωνομετρικός κύκλος. Βασικές τριγωνομετρικές σχέσεις. Ταυτότητες. Αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο τέλεια σχέση μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών αντίθεοί των γωνιών και γωνιών που έχουν άθροισμα η διαφορά 90º, 180º, 270 º, 360º. Μελέτη τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις.

Στο ίδιο διάταγμα, όπως ορίζεται από την παράγραφο 2 του άρθρου 2 του Π.Δ/τος 101/89 (Φ.Ε.Κ. 44 τ. Α’) (σελίδα 830) για την Β’ τάξη ημερήσιου γενικού λυκείου, διατίθενται 3 ώρες την εβδομάδα από την έναρξη μέχρι το τέλος της διδασκαλίας των μαθημάτων. Η διδασκαλία αφορούσε σε:

- Τριγωνομετρία. Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών. Τριγωνομετρικοί αριθμοί του διπλάσιου γωνίας. Μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών παραστάσεων: γινομένου σε άθροισμα και αθροίσματος σε γινόμενο. Μελέτη της συνάρτησης $F(\chi) = \alpha\eta\mu\chi + \beta\sigma\upsilon\nu\chi$. Νόμος ημιτόνων. Νόμος συνημιτόνων. Επίλυση τριγώνου.
- Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές εξισώσεις. Η έννοια του πολυωνύμου. Αριθμητική τιμή πολυωνύμου. Πράξεις με πολυώνυμα. Ταυτότητα της διαίρεσης πολυωνύμων. Διαίρεση πολυωνύμου με $\chi - \rho$. Σχήμα HORNER. Εύρεση παραγόντων πολυωνύμου της μορφής $\chi - \rho$. Λύση πολυωνυμικών εξισώσεων.

Προσδιορισμός ρίζας εξίσωσης με προσέγγιση. Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές (κλασματικές, άρρητες).

- Πρόοδοι. Η έννοια της ακολουθίας. Ακολουθίες που ορίζονται αναδρομικά. Αριθμητική και γεωμετρική πρόοδος: ν- οστός όρος, αριθμητικός και γεωμετρικός μέσος, της άθροισμα ν διαδοχικών όρων. Ανατοκισμός. Ίσες καταθέσεις. Χρεωλυσία. Άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου.
- Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση. Δύναμη με άρρητο εκθέτη. Συνάρτηση 1-1. Εκθετική συνάρτηση. Λύση εκθετικών εξισώσεων και συστημάτων. Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής. Ο αριθμός e. Η έννοια του λογαρίθμου. Ιδιότητες των λογαρίθμων. Δεκαδικοί και φυσικοί λογάριθμοι. Αλλαγή βάσης λογαρίθμου. Αντίστροφη συνάρτηση. Λογαριθμική συνάρτηση. Λύση λογαριθμικό ναι εξισώσεων και συστημάτων.
- Συνδυαστική – πιθανότητες. Βασική αρχή απαρίθμησης. Μεταθέσεις. Διάταξης. Συνδυασμοί. Η έννοια της πιθανότητας. Προσθετικός νόμος των πιθανοτήτων. Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα.
- Παράγωγος. Ρυθμός μεταβολής. Η έννοια του ορίου. Παράγωγος της συνάρτησης σε ένα ορισμένο σημείο του πεδίου ορισμού της. Η παράγωγος Συνάρτηση. Παράγωγοι Βασικών συναρτήσεων. Εφαπτόμενοι σε ένα σημείο της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. Μελέτη της μονοτονίας και τον ακροτάτων μιας συνάρτησης με τη βοήθεια των παραγώγων.

Υπουργική Απόφαση Γ2/2861: *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Γυμνασίου κι Ενιαίου Λυκείου*. Φ.Ε.Κ. Β΄ 1342 (30 Ιουνίου 1999). Με την παρούσα απόφαση εκφράστηκε η αναγκαιότητα ορισμού νέου Προγράμματος Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών Γυμνασίου- Λυκείου με βάση τα οποία θα συγγραφούν τα βιβλία που προβλέπονται από τις διατάξεις της παραγράφου 3 του άρθρου 7 του Ν.2525/97.

Το Π.Σ. του Λυκείου περιέχει τις μαθηματικές ενότητες που διεθνώς θεωρούνται κατάλληλες για τις αντίστοιχες ηλικίες των μαθητών, με τη διδασκαλία των οποίων οι μαθητές θα αναπτύξουν τέτοιες δεξιότητες, ώστε να μπορούν:

- Να ερμηνεύουν και να χρησιμοποιούν τα δεδομένα, τα σύμβολα και την ορολογία των Μαθηματικών.
- Να οργανώνουν τα δεδομένα τους και να χρησιμοποιούν τις κατάλληλες προσεγγίσεις και εκτιμήσεις.

- Να κατανοούν τις αριθμητικές, αλγεβρικές και γεωμετρικές (στο επίπεδο και στο χώρο) έννοιες και σχέσεις.
- Να αναγνωρίζουν την κατάλληλη μαθηματική διαδικασία για τη διαπραγμάτευση μιας κατάστασης.
- Να μεταφράζουν τα προβλήματα στη μαθηματική γλώσσα και να επιλέγουν και να εφαρμόζουν τις κατάλληλες τεχνικές και αλγορίθμους.
- Να ανακαλούν από τη μνήμη τους και να κάνουν σωστή χρήση αλγοριθμικών διαδικασιών.
- Να αναπτύσσουν επιχειρήματα και να κάνουν λογικές συνεπαγωγές.
- Να εκφράζουν την επίλυση ενός προβλήματος με λογικό και σαφή τρόπο και να ερμηνεύουν τα συμπεράσματά τους.
- Να επιλύουν προβλήματα που απαιτούν εκτεταμένη εργασία μέσα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.
- Να διαβάζουν και να κατανοούν μαθηματικά κείμενα.
- Να κάνουν κριτική σε μαθηματικά επιχειρήματα.

Οι προηγούμενες δεξιότητες, μπορούν να υλοποιηθούν με κατάλληλες δραστηριότητες. Προκειμένου να επιλεγεί η κατάλληλη δραστηριότητα, επισημαίνεται ότι:
Μια δραστηριότητα πρέπει:

1. Να είναι κατανοητή από όλους τους μαθητές ώστε να μη δημιουργεί παρανοήσεις.
2. Να αφήνει περιθώρια για έρευνα και αυτενέργεια.
3. Να ενθαρρύνει την ομαδική εργασία, προτρέποντας τους μαθητές και τις ομάδες σε νοητικό ανταγωνισμό.
4. Να επιτρέπει προσέγγιση σε μια ή περισσότερες από μια λύσεις.

Όριζε για τον χρόνο διδασκαλίας της Άλγεβρας Α’ Λυκείου 2 ώρες εβδομαδιαίως. Πιο συγκεκριμένα, η διδασκαλία αφορά σε:

- **Λογισμός στο $\mathbb{R}$.**

Λογισμός στο $\mathbb{R}$. Οι μαθητές πρέπει να:

1. Γνωρίζουν τις ιδιότητες της ισότητας και των πράξεων πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού, αφαίρεσης και διαίρεσης.
2. Γνωρίζουν τις ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο. Να γνωρίζουν τις βασικές ταυτότητες.
3. Μπορούν να μετατρέπουν αλγεβρικές παραστάσεις σε γινόμενα.

Η έννοια της απόδειξης. Οι μαθητές πρέπει να:

1. Γνωρίσουν τη σημασία της απόδειξης στα Μαθηματικά.

Εξισώσεις και συστήματα α΄ βαθμού. Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να:

1. Επιλύουν και να διερευνούν εξισώσεις α΄ βαθμού καθώς και γραμμικά συστήματα δυο εξισώσεων με δύο αγνώστους με μία παράμετρο.
2. Επιλύουν συστήματα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

Διάταξη στο $\mathbb{R}$. Οι μαθητές πρέπει να:

1. Γνωρίζουν και αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες των ανισοτήτων στο $\mathbb{R}$.
2. Γνωρίζουν την έννοια της απόλυτης τιμής και να αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες.

Ρίζες πραγματικών αριθμών. Οι μαθητές πρέπει να:

1. Γνωρίζουν και να χρησιμοποιούν την έννοια της ν-στης Ρίζας μη αρνητικού πραγματικού αριθμού και να αποδεικνύουν τις βασικές της ιδιότητες.
2. Γνωρίζουν την έννοια της δύναμης με ρητό εκθέτη και να τις χρησιμοποιούν στην διαπραγμάτευση αλγεβρικών παραστάσεων με ριζικά.

   Οδηγίες: Η ν-στη ρίζα Θα παρουσιαστεί ως η μία αρνητική λύση της εξίσωσης $\chi^{\nu} = \alpha, \alpha \geq 0$.Θα τονιστεί ότι $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|\ \kappa\alpha\iota\ \alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} < \sqrt{\beta}$.[1]

Επίλυση προβλήματος. Οι μαθητές πρέπει:

1. Να αναπτύξουν εκείνες τις ικανότητες που θα τους επιτρέψουν να οργανώνουν και να χρησιμοποιούν τις γνώσεις τους στην επίλυση προβλημάτων.

- **Συναρτήσεις**

Η έννοια της συνάρτησης. Οι μαθητές πρέπει να:

1. Γνωρίζουν την έννοια του συνόλου, να συμβολίζουν και να κάνουν πράξεις με σύνολα.
2. Γνωρίζουν την έννοια της συνάρτησης και να μπορούν να τη συμβολίζουν.

Εξίσωση γραμμής. Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να:

1. Καθορίζουν τη θέση σημείου στο επίπεδο.
2. Εκφράζουν την ευθεία και τον κύκλο με τις αντίστοιχες εξισώσεις.
3. Αναγνωρίζουν πότε δύο ευ- θείες είναι παράλληλες ή κάθετες.

Μελέτη απλών συναρτήσεων. Οι μαθητές πρέπει να:

[1] Αυτή η ενότητα θα συγκριθεί αργότερα με αντίστοιχες σε άλλα προγράμματα, επειδή η διαχείριση της έννοιας της ρίζας θα χρησιμοποιηθεί ως μέσο σύγκρισης προγραμμάτων και βιβλίων.

1. Προσδιορίζουν τα διαστήματα μονοτονίας, και τα ακρότατα μιας συνάρτησης.
2. Κατανοήσουν την έννοια της άρτιας και περιττής συνάρτησης.

Έννοια του ρυθμού μεταβολής. Φυσική σημασία.

- **Εξισώσεις-Ανισώσεις Β΄ Βαθμού**

Η εξίσωση $\boldsymbol{\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0}$. Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να:

1. Επιλύουν την εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0, \alpha \neq 0$.
2. Επιλύουν εξισώσεις και συστήματα που η λύση τους ανάγεται στην επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού.

Ανισώσεις 2ου και ανωτέρου βαθμού. Οι μαθητές πρέπει να:

1. Μπορούν να προσδιορίζουν το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$.
2. Επιλύουν τις ανισώσεις $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma > 0$ και $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma < 0$.
3. Επιλύουν ανισώσεις της μορφής Α(χ) Β(χ)…Φ (x) ≥ 0.
4. Επιλύουν ανισώσεις της μορφής: $\frac{A(\chi)}{B(\chi)} > 0$ ή $\frac{A(\chi)}{B(\chi)} < 0$.

- **Τριγωνομετρικοί αριθμοί.** Οι μαθητές πρέπει να:

1. Μπορούν να ορίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου.
2. Αποδεικνύουν τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες.
3. Κατανοήσουν ότι κάθε αριθμός του διαστήματος [-1, 1], μπορεί να εκφραστεί ως τιμή του ημιτόνου ή συνημιτόνου μιας γωνίας.

Αναφορικά με τον χρόνο διδασκαλίας στη Β’ τάξη ορίζεται 2 ώρες εβδομαδιαίως. Το περιεχόμενο της διδασκαλίας αφορά σε:

- **Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις.**

ημχ, συνχ, εφχ. Οι μαθητές πρέπει να:

1. Γνωρίζουν τις βασικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και να κατασκευάζουν τις γραφικές τους παραστάσεις.

Περιοδικές συναρτήσεις. Οι μαθητές πρέπει να:

1. Γνωρίζουν την έννοια της περιοδικής συνάρτησης.
2. Μπορούν να συνδέουν τις περιοδικές συναρτήσεις με περιοδικά φαινόμενα.

3. Σχεδιάζουν τις γραφικές παραστάσεις περιοδικών συναρτήσεων.
4. Μπορούν να βρίσκουν από πίνακα τιμών ή γραφική παράσταση, την αντίστοιχη τριγωνομετρική συνάρτηση.

Τριγωνομετρικές εξισώσεις. Οι μαθητές πρέπει να:

1. Μπορούν να λύνουν απλές τριγωνομετρικές εξισώσεις.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος τόξων ή γωνιών και του διπλάσιου τόξου. Οι μαθητές πρέπει να:

1. Γνωρίζουν και να χρησιμοποιούν τους τύπους των τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος και διαφοράς τόξων ή γωνιών.

Οι νόμοι ημιτόνων και συνημιτόνων. Οι μαθητές πρέπει να:

1. Γνωρίζουν και να μπορούν να χρησιμοποιούν τους νόμους ημιτόνων και συνημιτόνων στην επίλυση προβλημάτων.

- **Πολυωνυμικές συναρτήσεις**.

Πολυωνυμικές συναρτήσεις. Στόχος είναι οι μαθητές να:

1. Αναγνωρίζουν την πολυωνυμική συνάρτηση και να κάνουν πράξεις με πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Επίλυση πολυωνυμικων εξισώσεων. Στόχος είναι οι μαθητές να:

1. Μπορούν να επιλύουν πολυωνυμικές εξισώσεις.
2. Επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια των πολυωνυμικών εξισώσεων.

Οδηγίες: Θα λυθούν οι εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές. Ως εφαρμογές θα λυθούν οι εξισώσεις με ριζικά δεύτερης τάξεως.

- **Αριθμητικές-Γεωμετρικές πρόοδοι.**

Ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Οι μαθητές πρέπει να:

1. Γνωρίζουν ότι η ακολουθία είναι πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{N}^*$.

Αριθμητική και Γεωμετρική Πρόοδος. Οι μαθητές πρέπει να:

1. Γνωρίζουν πότε μία ακολουθία είναι αριθμητική και πότε γεωμετρική πρόοδος.
2. Μπορούν να βρίσκουν το γενικό όρο αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.
3. Υπολογίζουν το άθροισμα των πρώτων ν όρων αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

Ανατοκισμός. Ίσες καταθέσεις Χρεωλυσία. Οι μαθητές πρέπει να:

1. Γνωρίζουν τις έννοιες του Ανατοκισμού, των Ίσων Καταθέσεων και της Χρεωλυσίας και να τις χρησιμοποιούν στην επίλυση σχετικών προβλημάτων.

- **Η εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση.**

  Η εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση. Οι μαθητές πρέπει να:

  1. Γνωρίζουν την έννοια της εκθετικής συνάρτησης και τις ιδιότητές της.
  2. Μπορούν να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης.
  3. Επιλύουν εκθετικές εξισώσεις και συστήματα καθώς και προβλήματα εκθετικής μεταβολής.

  Δεκαδικοί και φυσικοί λογάριθμοι. Οι μαθητές πρέπει να:

  1. Γνωρίζουν την έννοια του λογαρίθμου και να υπολογίζουν δεκαδικούς και φυσικούς λογαρίθμους.
  2. Γνωρίζουν τις ιδιότητες των λογαρίθμων και να τις χρησιμοποιούν στην επίλυση προ- βλημάτων.

  Η λογαριθμική συνάρτηση. Οι μαθητές πρέπει να:

  1. Γνωρίζουν την έννοια της λογαριθμικής συνάρτησης και τις ιδιότητές της.
  2. Μπορούν να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης.
  3. Επιλύουν λογαριθμικές εξισώσεις και συστήματα και σχετικά προβλήματα.

  Έννοια του ρυθμού μεταβολής. Γεωμετρική σημασία.

Υπουργική Απόφαση 59614/Γ2: *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου*. Φ.Ε.Κ. Β΄ 1168 (8 Ιουνίου 2011). Η παρούσα απόφαση καθόριζε Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου ως εξής:

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στην Α΄ Λυκείου έχει δύο κεντρικούς στόχους. Την ολοκλήρωση της μαθηματικής εκπαίδευσης που οι μαθητές απέκτησαν στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο και ταυτόχρονα το πέρασμα σε έναν πιο προωθημένο, θεωρητικό μαθηματικό τρόπο σκέψης. Βασικά στοιχεία αυτού του τρόπου σκέψης είναι η «αυστηρή» χρήση μαθηματικής ορολογίας και συμβολισμού, οι ορισμοί των εννοιών και η θεωρητική απόδειξη των ισχυρισμών. Στην προσέγγιση αυτών των στόχων συμβάλλουν:

- Η ένταξη των προϋπαρχουσών μαθηματικών γνώσεων των μαθητών σ’ ένα θεωρητικό πλαίσιο, η επέκταση και η εμβάθυνσή τους.

- Η ενεργητική εμπλοκή των μαθητών στη διερεύνηση προβλημάτων, στη δημιουργία και τον έλεγχο εικασιών, στην ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλήματος και πολλαπλών αποδεικτικών προσεγγίσεων, στην ανάπτυξη διάφορων τρόπων σκέψης (επαγωγική, παραγωγική).
- Η κατανόηση και χρήση της μαθηματικής γλώσσας, των συμβόλων και των αναπαραστάσεων των μαθηματικών αντικειμένων, η ανάπτυξη της ικανότητας μετάφρασης από τη φυσική στη μαθηματική γλώσσα και αντίστροφα καθώς και η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να επικοινωνούν μαθηματικά.
- Οι εννοιολογικές συνδέσεις εντός των Μαθηματικών αλλά και μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων γνωστικών περιοχών.
- Η ανάπτυξη ικανοτήτων χρήσης των Μαθηματικών ως εργαλείο κατανόησης και ερμηνείας του κόσμου.
- Η θεώρηση των Μαθηματικών ως πολιτισμικό, ιστορικό εξελισσόμενο ανθρώπινο δημιούργημα.

Η υποβάθμιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών σε απλή εκμάθηση διαδικασιών και τεχνικών επίλυσης ασκήσεων δεν είναι συμβατή με τους παραπάνω στόχους. Αντίθετα, αναγκαία προϋπόθεση για την προσέγγιση αυτών των στόχων είναι η προσπάθεια για εννοιολογική κατανόηση των Μαθηματικών. Για το σκοπό αυτό, χρειάζεται να αφιερωθεί περισσότερος χρόνος στην κατανόηση και εμπέδωση των εννοιών μέσα από την ανάπτυξη πολλαπλών αναπαραστάσεων τους, καθώς και τη χρήση τους στην επίλυση προβλημάτων.

Το αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών της Α΄ Λυκείου αποτελείται από τις ενότητες «Άλγεβρα Στοιχεία Πιθανοτήτων» και «Γεωμετρία».

Η ενότητα «Άλγεβρα Στοιχεία Πιθανοτήτων» διαπραγματεύεται έννοιες με τις περισσότερες από τις οποίες οι μαθητές έχουν έλθει σε επαφή σε προηγούμενες τάξεις. Στην Α’ Λυκείου οι μαθητές αντιμετωπίζουν αυτές τις έννοιες σε υψηλότερο επίπεδο, εμβαθύνουν και γενικεύουν. Ειδικότερα, αυτή η ενότητα περιλαμβάνει τα παρακάτω κεφάλαια:

- Εισαγωγή στη θεωρία συνόλου καθώς και στις σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων.
- Στοιχεία πιθανοτήτων. Οι μαθητές έχουν έλθει σε επαφή με την έννοια της πιθανότητας στις προηγούμενες τάξεις με εμπειρικό τρόπο. Στο κεφάλαιο αυτό εισάγονται στην έννοια της πιθανότητας με τον κλασικό ορισμό και εξασκούνται στο βασικό λογισμό πιθανοτήτων με χρήση της θεωρίας συνόλων.

- Πραγματικοί αριθμοί. Οι μαθητές στις προηγούμενες τάξεις έχουν αναπτύξει την έννοια του πραγματικού αριθμού σταδιακά, μέσα από την εισαγωγή των φυσικών, των ακεραίων, των ρητών και των άρρητων αριθμών. Στο κεφάλαιο αυτό επαναλαμβάνουν και εμβαθύνουν στις ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών με στόχο να βελτιώσουν την κατανόηση της δομής του.
- Εξισώσεις. Οι μαθητές στις προηγούμενες τάξεις έχουν αντιμετωπίσει εξισώσεις πρώτου βαθμού. Στο κεφάλαιο αυτό μελετούν συστηματικά και διερευνούν αυτές τις εξισώσεις καθώς και εξισώσεις δευτέρου βαθμού.
- Ανισώσεις. Οι μαθητές στις προηγούμενες τάξεις έχουν αντιμετωπίσει ανισώσεις πρώτου βαθμού. Στο κεφάλαιο αυτό μελετούν συστηματικά και διερευνούν αυτές τις ανισώσεις καθώς και ανισώσεις δευτέρου βαθμού.
- Πρόοδοι. Οι μαθητές στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο έχουν ασχοληθεί με κανονικότητες (patterns). Στο κεφάλαιο αυτό εισάγονται στην έννοια της ακολουθίας πραγματικών αριθμών και μελετούν ειδικές περιπτώσεις κανονικότητας ακολουθιών, την αριθμητική και τη γεωμετρική πρόοδο.
- Βασικές έννοιες των συναρτήσεων. Οι μαθητές έχουν αντιμετωπίσει την έννοια της συνάρτησης στο Γυμνάσιο κυρίως με εμπειρικό τρόπο. Στο κεφάλαιο αυτό εισάγονται, μέσω των αντίστοιχων ορισμών, στην έννοια, στα βασικά στοιχεία και στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.
- Μελέτη βασικών συναρτήσεων. Οι μαθητές σε προηγούμενες τάξεις έχουν μελετήσει γραμμικές συναρτήσεις και παραβολές της μορφής $\psi = \alpha\chi^2$. Στο κεφάλαια αυτό μελετούν και άλλες ιδιότητες γραμμικών συναρτήσεων και παραβολών της μορφής $\psi = \alpha\chi^2$. Επίσης, με αφετηρία την $\psi=\alpha x^2$ κατασκευάζουν και μελετούν τη γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης δευτέρου βαθμού $f(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$.

Όσον αφορά τις θεματικές ενότητες που θα πρέπει να διδαχθούν και τους στόχους που πρέπει να επιτευχθούν σε κάθε θεματική ενότητα, έχουμε:

- **Σύνολα (Σ) (2 ώρες)**

  Σύνολα. Οι στόχοι είναι:

  1. Αποφασίζουν αν ένα στοιχείο ανήκει ή όχι σε ένα σύνολο και εκφράζουν αυτή τη σχέση συμβολικά.
  2. Αναπαριστούν τα σύνολα με διάφορους τρόπους (αναγραφή, περιγραφή στοιχείων, διαγράμματα Venn).

3. Αναγνωρίζουν και εφαρμόζουν σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων με χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων (και λεκτικά με κατάλληλη χρήση των συνδέσμων «ή» και «και»).

- **Πιθανότητες (ΠΘ) (6 ώρες).**

  Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα. Οι στόχοι είναι:

  1. Αναγνωρίζουν αν ένα πείραμα είναι πείραμα τύχης.
  2. Προσδιορίζουν το δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης και ενδεχόμενα αυτού με διάφορους τρόπους (π.χ. δενδροδιαγράμματα, διαγράμματα Venn, πίνακες διπλής εισόδου).
  3. Μεταφράζουν διάφορες σχέσεις ενδεχομένων που είναι διατυπωμένες σε φυσική γλώσσα στη γλώσσα των συνόλων και αντίστροφα.

  Η έννοια της πιθανότητας. Οι στόχοι είναι:

  1. Με τη βοήθεια της σχετικής συχνότητας, συνδέουν ένα ενδεχόμενο με έναν αριθμό που αποτελεί μέτρο της «προσδοκίας» πραγματοποίησής του και καταλήγουν στον κλασικό ορισμό της πιθανότητας. Επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τον κλασικό ορισμό.
  2. Αναπαριστούν τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων με διαγράμματα Venn, τους αιτιολογούν και τους χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.

- **Πραγματικοί αριθμοί (Πρ) (14 ώρες).**

  Οι πράξεις και οι ιδιότητες των πραγματικών αριθμών (5 ώρες). Οι στόχοι είναι:

  1. Διακρίνουν τους ρητούς από τους άρρητους αριθμούς μέσα από τις διάφορες αναπαραστάσεις τους και ταξινομούν με ευχέρεια συγκεκριμένους αριθμούς στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$-$\mathbb{Q}$) που ανήκουν.
  2. Διερευνούν τις ιδιότητες των πράξεων των πραγματικών αριθμών. Αναγνωρίζουν την σημασία της ισοδυναμίας, της συνεπαγωγής, και των συνδέσμων «ή», «και» στις ιδιότητες. Αιτιολογούν με αντιπαραδείγματα γιατί δεν ισχύει ισοδυναμία σε ορισμένες ιδιότητες.
  3. Αποδεικνύουν και να εφαρμόζουν τις ιδιότητες αναλογιών στην επίλυση προβλημάτων.

4. Εφαρμόζουν διάφορες αποδεικτικές μεθόδους (Ευθεία, απόδειξη, απαγωγή σε άτοπο, αντιπαράδειγμα κ.λ.π.) Για να δείξουν την ισχύ απλών αλγεβρικών προτάσεων.

Διάταξη των πραγματικών αριθμών (4 ώρες). Οι στόχοι είναι:

1. Διερευνούν την έννοια της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Να αναπαριστούν στον άξονα των πραγματικών αριθμών σύνολα που προσδιορίζονται από ανισοτικές σχέσεις και τα συμβολίζουν χρησιμοποιώντας διαστήματα.
2. Διερευνούν και να προσδιορίζουν ομοιότητες και διαφορές των ιδιοτήτων της ισότητας και της ανισότητας.
3. Χρησιμοποιούν την έννοια της διάταξης των πραγματικών αριθμών και των ιδιοτήτων της για να επιλύσουν προβλήματα αναπτύσσοντας κατάλληλες στρατηγικές.

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού (3 ώρες). Οι στόχοι είναι:

1. Ορίζουν αλγεβρικά την απόλυτη τιμή συνδέοντας την με την γεωμετρική της ερμηνεία.
2. Διερευνούν και να αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής, της ερμηνεύουν η γεωμετρικά και τις χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.

Ρίζες πραγματικών αριθμών (2 ώρες). Οι στόχοι είναι:

1. Ορίζουν την ν-οστη Ρίζα μη αρνητικού αριθμού και μέσω αυτής τη δύναμη θετικού αριθμού με ρητό εκθέτη.
2. Αποδεικνύουν και να χρησιμοποιούν τις βασικές ιδιότητες των ριζών και δυνάμεων.

- **Εξισώσεις (Ε) (9 ώρες).**

Εξισώσεις 1ου βαθμού. Η εξίσωση $\chi^{\nu} = \alpha$ (4 ώρες). Οι στόχοι είναι:

1. Διερευνούν τη διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης $\alpha\chi + \beta = 0$.
2. Αναγνωρίζουν το ρόλο της παραμέτρου σε μία παραμετρική εξίσωση 1ου βαθμού.
3. Επιλύουν απλές παραμετρικές εξισώσεις (με μία παράμετρο) 1ου βαθμού.
4. Επιλύουν εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού (π.χ. ρητές, με απόλυτες τιμές) εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των πράξεων και της ισότητας

των πραγματικών αριθμών. Διερευνούν και επιλύουν εξισώσεις της μορφής $\chi^{\nu} = \alpha$.

Εξισώσεις 2ου βαθμού. (5 ώρες). Οι στόχοι είναι:

1. Διερευνούν τη διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ και καταλήγουν σε συμπεράσματα τα οποία χρησιμοποιούν στην επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων.
2. Προσδιορίζουν τους τύπους Vieta για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης και τους χρησιμοποιούν για να κατασκευάσουν εξισώσεις των οποίων οι ρίζες ικανοποιούν δεδομένες σχέσεις.
3. Επιλύουν εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με χρήση εξισώσεων 2ου βαθμού.

- **Ανισώσεις (Α) (6 ώρες)**

Ανισώσεις 1ου βαθμού. (2 ώρες). Οι στόχοι είναι:

1. Επιλύουν ανισώσεις 1ου βαθμού και προβλήματα που ανάγονται σε ανισώσεις 1ου βαθμού.

Ανισώσεις 2ου βαθμού. (4 ώρες). Οι στόχοι είναι:

2. Διερευνούν την παραγοντοποίηση τριωνύμου και καταλήγουν σε συμπεράσματα τα οποία χρησιμοποιούν για να προσδιορίσουν το πρόσημο των τιμών του.
3. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με χρήση ανισώσεων 2ου βαθμού.

- **Πρόοδοι (Π) (7 ώρες)**

Ακολουθίες. (1 ώρα). Οι στόχοι είναι:

1. Αναγνωρίζουν την ακολουθία ως αντιστοιχία των φυσικών στους πραγματικούς αριθμούς και χρησιμοποιούν τον κατάλληλο συμβολισμό.
2. Υπολογίζουν όρους ακολουθίας που εκφράζεται με γενικό ή αναδρομικό τύπο.

Αριθμητική πρόοδος, (4 ώρες). Οι στόχοι είναι:

1. Διερευνούν ακολουθίες με σταθερή διαφορά διαδοχικών όρων και ορίζουν την αριθμητική πρόοδο.

2. Εξετάζουν αν μια ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος τεκμηριώνοντας το συλλογισμό τους.
3. Υπολογίζουν το ν-οστό όρο και το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας αριθμητικής προόδου.
4. Διερευνούν, προσδιορίζουν και εφαρμόζουν τη σχέση τριών διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου.
5. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με χρήση του ν-οστού όρου και του αθροίσματος ν-πρώτων όρων αριθμητικής προόδου.

Γεωμετρική πρόοδος, (4 ώρες). Οι στόχοι είναι:

1. Διερευνούν ακολουθίες με σταθερό λόγο διαδοχικών όρων και ορίζουν τη γεωμετρική πρόοδο.
2. Εξετάζουν αν μια ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος τεκμηριώνοντας το συλλογισμό τους.
3. Υπολογίζουν το ν-οστό όρο και το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου.
4. Διερευνούν, προσδιορίζουν και εφαρμόζουν τη σχέση τριών διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου.
5. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με χρήση του ν-οστού όρου και του αθροίσματος ν-πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου.

- **Βασικές έννοιες των Συναρτήσεων (ΒΣ) (6 ώρες)**

Η έννοια της συνάρτησης. (3 ώρες). Οι στόχοι είναι:

1. Εισάγονται στην έννοια της συνάρτησης μέσα από πραγματικές καταστάσεις αντιστοίχησης διαφόρων ειδών ώστε να αποκτήσει νόημα ο τυπικός ορισμός της συνάρτησης.
2. Επιχειρηματολογούν αν μία αντιστοιχία είναι συνάρτηση ή όχι και εξοικειώνονται με το συμβολισμό και την ορολογία.
3. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια συναρτήσεων (και δίκλαδων).

Γραφική παράσταση συνάρτησης. (3 ώρες). Οι στόχοι είναι:

1. Διερευνούν αν μια γραμμή σε σύστημα συντεταγμένων είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.
2. Συνδέουν διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης (τύπος, πίνακας τιμών και γραφική παράσταση).

3. Ερμηνεύουν μία δεδομένη γραφική παράσταση συνάρτησης για να επιλύσουν ένα πρόβλημα.
4. Προσδιορίζουν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τους άξονες και τη σχετική της θέση με το π.χ. επιλύοντας εξισώσεις και ανισώσεις.

- **Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων (ΜΣ) (8 ώρες)**

Η συνάρτηση $\boldsymbol{f(\chi) = \alpha\chi + \beta}$. (2 ώρες). Οι στόχοι είναι:

1. Διερευνούν τη γραφική παράσταση της $f(\chi) = \alpha\chi + \beta$ για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων α και β.
2. Καταλήγουν σε γενικότερα συμπεράσματα που αφορούν στη μονοτονία και τα εκφράζουν συμβολικά.

Μελέτη της συνάρτησης $\boldsymbol{f(\mathrm{x}) = \alpha\chi^2}$. (2ώρες). Οι στόχοι είναι:

1. Χρησιμοποιούν την $f(\chi) = \alpha\chi + \beta$ στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.
2. Αναπαριστούν γραφικά και διερευνούν τις συναρτήσεις $g(\chi) = \chi^2$ και $h(\chi) = -\chi^2$ ως προς τη μονοτονία. Καταλήγουν σε γενικότερα συμπεράσματα που αφορούν στα ακρότατα και στις συμμετρίες και τα εκφράζουν συμβολικά.
3. Γενικεύουν τα συμπεράσματά τους για τη συνάρτηση $f(\mathrm{x}) = \alpha\chi^2$.

Μελέτη της συνάρτησης $\boldsymbol{f(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma}$. (4 ώρες). Οι στόχοι είναι:

1. Αναπαριστούν και διερευνούν τη γραφική παράσταση συγκεκριμένων πολυωνυμικών συναρτήσεων της μορφής $f(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$.
2. Χρησιμοποιούν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ στη διερεύνηση των ριζών και του προσήμου του τριωνύμου $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, α$\neq 0$.

Υπουργική Απόφαση 61019/Γ2: *Πρόγραμμα Σπουδών Άλγεβρας και Γεωμετρίας γενικής παιδείας Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου*. Φ.Ε.Κ. Β΄ 1173 (15 Μαΐου 2013). Η παρούσα απόφαση καθόριζε το Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου ως εξής:

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στην Β' Λυκείου έχει κεντρικό στόχο το πέρασμα τόσο σε έναν πιο προωθημένο, θεωρητικό μαθηματικό τρόπο σκέψης, όσο και στη διερεύνηση των δυνατοτήτων της χρήσης τους ως εργαλείου κατανόησης και ερμηνείας του κόσμου. Στην προσέγγιση αυτού του στόχου συμβάλλουν:

- Η ένταξη των προϋπαρχουσών μαθηματικών γνώσεων των μαθητών σ' ένα θεωρητικό πλαίσιο, η επέκταση και η εμβάθυνσή τους.
- Η ενεργητική εμπλοκή των μαθητών στη διερεύνηση προβλημάτων, στη δημιουργία και τον έλεγχο εικασιών, στην ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλήματος και πολλαπλών αποδεικτικών προσεγγίσεων, στην ανάπτυξη διάφορων τρόπων σκέψης (επαγωγική, παραγωγική).
- Η κατανόηση και χρήση της μαθηματικής γλώσσας, των συμβόλων και των αναπαραστάσεων των μαθηματικών αντικειμένων, η ανάπτυξη της ικανότητας μετάφρασης από τη φυσική στη μαθηματική γλώσσα και αντίστροφα καθώς και η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να επικοινωνούν μαθηματικά.
- Οι εννοιολογικές συνδέσεις εντός των Μαθηματικών αλλά και μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων γνωστικών περιοχών.
- Η ανάπτυξη ικανοτήτων χρήσης των Μαθηματικών ως εργαλείο κατανόησης και ερμηνείας του κόσμου.
- Η θεώρηση των Μαθηματικών ως πολιτισμικό, ιστορικό εξελισσόμενο ανθρώπινο δημιούργημα.

Η υποβάθμιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών σε απλή εκμάθηση διαδικασιών και τεχνικών επίλυσης ασκήσεων δεν είναι συμβατή με τους παραπάνω στόχους. Αντίθετα, αναγκαία προϋπόθεση για την προσέγγιση αυτών των στόχων είναι η προσπάθεια για εννοιολογική κατανόηση των Μαθηματικών. Για το σκοπό αυτό, χρειάζεται να αφιερωθεί περισσότερος χρόνος στην κατανόηση και εμπέδωση των εννοιών μέσα από την ανάπτυξη πολλαπλών αναπαραστάσεων τους, καθώς και τη χρήση τους στην επίλυση προβλημάτων. Το αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών της Β' Λυκείου αποτελείται από τις ενότητες «Άλγεβρα» και «Γεωμετρία».

Η ενότητα «Άλγεβρα» περιλαμβάνει τα εξής κεφάλαια:

- Γραμμικά Συστήματα. Γίνεται μια επανάληψη των γραμμικών συστημάτων δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τα οποία οι μαθητές έχουν μελετήσει στο Γυμνάσιο, και εισάγεται η χρήση της ορίζουσας για την επίλυση και διερεύνηση τέτοιων συστημάτων. Επίσης, επιλύονται και γραμμικά συστήματα με τρείς αγνώστους, καθώς και μη γραμμικά συστήματα.

- Ιδιότητες Συναρτήσεων. Εξετάζονται ιδιότητες των συναρτήσεων και των γραφικών παραστάσεών τους, όπως η μονοτονία, τα ακρότατα και οι συμμετρίες μιας συνάρτησης, καθώς και η κατακόρυφη και οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.
- Τριγωνομετρία. Επεκτείνονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί με την εισαγωγή του τριγωνομετρικού κύκλου και αποδεικνύονται στη γενικότητά τους οι τριγωνομετρικές ταυτότητες. Επίσης, ορίζονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, γίνεται η σύνδεση αυτών με φαινόμενα που εμφανίζουν περιοδικότητα και επιλύονται τριγωνομετρικές εξισώσεις. Τέλος χρησιμοποιούνται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών τριγώνου για τον υπολογισμό των στοιχείων του.
- Πολυώνυμα − Πολυωνυμικές εξισώσεις. Στο κεφάλαιο αυτό τίθενται οι βάσεις για μια πιο συστηματική μελέτη των πολυωνύμων και αναπτύσσονται διάφορες μέθοδοι επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων και ανισώσεων.
- Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση. Εισάγονται η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση, οι οποίες έχουν σημαντικές εφαρμογές σε διάφορα επιστημονικά πεδία.

Όσον αφορά τις θεματικές ενότητες που θα πρέπει να διδαχθούν και τους στόχους που πρέπει να επιτευχθούν σε κάθε θεματική ενότητα, έχουμε:

- **Συστήματα:** Γίνεται μια επανάληψη των γραμμικών συστημάτων δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τα οποία οι μαθητές έχουν μελετήσει στο Γυμνάσιο, και εισάγεται η χρήση της ορίζουσας για την επίλυση και διερεύνηση τέτοιων συστημάτων. Επίσης, επιλύονται και γραμμικά συστήματα με τρείς αγνώστους, καθώς και μη γραμμικά συστήματα.

  <u>Οι στόχοι είναι</u>:

  1. Επιλύουν και διερευνούν γραμμικά συστήματα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους.
  2. Επιλύουν συστήματα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.
  3. Επιλύουν μη γραμμικά συστήματα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους.

- **Ιδιότητες των συναρτήσεων:** Προσδιορίζουν τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα μιας συνάρτησης και τα είδη συμμετρίας αυτής.

  <u>Οι στόχοι είναι</u>:

  1. Εξετάζουν ιδιότητες των συναρτήσεων και των γραφικών παραστάσεών τους, όπως η μονοτονία, τα ακρότατα και οι συμμετρίες μιας συνάρτησης, καθώς

και η κατακόρυφη και οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

- **Τριγωνομετρία:** Ο ορισμός των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας ή τόξου θα γίνει με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου. Στη συνέχεια, θα υπολογισθούν οι σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών ενός τόξου, και η σχέση μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών αντιθέτων, συμπληρωματικών και παραπληρωματικών τόξων. Η διαδικασία επίλυσης των βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων μπορεί να προκύψει από την τομή της αντίστοιχης γραφικής παράστασης με την ευθεία $\psi = \alpha$. Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος τόξων και μετασχηματισμός του αθροίσματος σε γινόμενο. Οι νόμοι ημιτόνων και συνημιτόνων. Εφαρμογή στην επίλυση τριγώνων και στη σύνθεση δυνάμεων.

  Οι στόχοι είναι:

  1. Ορίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου.
  2. Αποδεικνύουν τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες.
  3. Χρησιμοποιούν τη έννοια της περιοδικής συνάρτησης και κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων.
  4. Συνδέουν την περιοδικότητα φυσικών φαινομένων ή καταστάσεων με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις.
  5. Επιλύουν βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις.
  6. Εφαρμόζουν τις έννοιες και τις μεθόδους της Τριγωνομετρίας στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων.

- **Πολυώνυμα – πολυωνυμικές εξισώσεις:** Για τη θεματική ενότητα «Πολυώνυμα – πολυωνυμικές εξισώσεις» θα οριστούν η πολυωνυμική συνάρτηση και οι πράξεις με πολυωνυμικές συναρτήσεις. Ευκλείδεια διαίρεση. Διαίρεση πολυωνύμου με $\chi - \rho$. Σχήμα Horner. Για την λύση πολυωνυμικών εξισώσεων θα χρησιμοποιηθούν μεθοδική κριτήρια εύρεσης πιθανών ριζών.

  Οι στόχοι είναι:

  1. Επιλύουν πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις και εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές.

Οδηγίες-δραστηριότητες: Μέσω της γραφικής λύσης μιας εξίσωσης να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι η ύψωση των μελών μιας εξίσωσης στο τετράγωνο δεν οδηγεί πάντα ισοδύναμη εξίσωση. Παράδειγμα: $\sqrt{\chi} = \chi - 2, \chi = (\chi - 2)^2$.

- **Εκθετική - Λογαριθμική συνάρτηση:** Ύστερα από τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης, να επιλυθούν προβλήματα εκθετικής μεταβολής (εκθετική αύξηση - απόσβεση). Αφού οριστεί η έννοια και αποδειχθούν οι σχετικές ιδιότητες, θα εισαχθεί η έννοια της λογαριθμικής συνάρτησης με τη βοήθεια της αντιστοιχίας $\chi \to \log_{\alpha} \chi$, $\chi > 0$. Σε όλη τη έκταση της ύλης θα επιδιώκεται η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων.

<u>Οι στόχοι είναι</u>:

1. Μπορούν να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης.
2. Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης στη μελέτη προβλημάτων.

Υπουργική Απόφαση 145377/Δ2: *Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων Γενικού Λυκείου*. Φ.Ε.Κ. Β΄ 5390 (19 Νοεμβρίου 2021). Η παρούσα απόφαση περιέχει το τελευταίο πρόγραμμα σπουδών που έχει δημοσιευτεί. Βρίσκεται σε φάση πιλοτικής εφαρμογής και με βάση αυτό θα γραφούν τα νέα διδακτικά βιβλία.

Σκοπός του νέου ΠΣ είναι η προσφορά σε όλους τους/τις μαθητές/-τριες της ευκαιρίας να είναι σε θέση, μέσα από τη συμμετοχή τους στα μαθήματα, να:

1. Εκτιμούν και να αποδίδουν αξία στα Μαθηματικά μέσα από τη συνειδητοποίηση της φύσης της μαθηματικής γνώσης και των κρίσιμων/μεγάλων ιδεών της, που συνδέουν και ενοποιούν τα επιμέρους πεδία της μαθηματικής επιστήμης με τρόπους που συμβάλλουν σε μια βαθύτερη και πιο ισχυρή κατανόησή της.
2. Αναπτύσσουν μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές, όπως ο συλλογισμός, η μοντελοποίηση, η επικοινωνία και ο αναστοχασμός, που ενδυναμώνουν τη μάθηση των Μαθηματικών και υποστηρίζουν σημαντικές ικανότητες και δεξιότητες για τον πολίτη του 21ου αιώνα.
3. Αξιοποιούν ποικιλία πόρων και εργαλείων, όπως η γλώσσα, τα σύμβολα, τα χειραπτικά και ψηφιακά εργαλεία, για να διαχειριστούν κατάλληλα μέσα από προσεγγίσεις διερεύνησης αλλά και μαθητείας, αλλαγές, κρίσεις και προκλήσεις στο ακαδημαϊκό, προσωπικό, επαγγελματικό και κοινωνικό περιβάλλον δράσης τους. Τα διάφορα «εργαλεία» ενέχουν πολλαπλές ερμηνείες και είναι απαραίτητα για έναν ενεργό διάλογο με το περιβάλλον.

4. Αναγνωρίζουν συνδέσεις μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων πεδίων της ανθρώπινης γνώσης και δράσης και να εκτιμούν τα Μαθηματικά ως προσπελάσιμο και ενδιαφέρον πεδίο μελέτης.
5. Χρησιμοποιούν με αυτοπεποίθηση και εμπιστοσύνη τα Μαθηματικά για να κατανοούν με κριτικό τρόπο τον κόσμο γύρω τους. Στην κατεύθυνση αυτή συλλέγουν, αναλύουν, οργανώνουν και αξιολογούν δεδομένα ελέγχοντας τις πηγές προέλευσής τους και υπερασπίζονται τις απόψεις τους. Έτσι, δρουν ως υπεύθυνοι πολίτες στους χώρους δράσης τους, συμβάλλοντας δυναμικά στη δημοκρατική και ισότιμη ανάπτυξη των κοινωνιών σε μικρο- και μακροεπίπεδο. - Κατανοούν και είναι σε θέση να αξιοποιήσουν τον μαθηματικό λόγο εντοπίζοντας κρίσιμες μαθηματικές ιδέες, αναλύοντας και ερμηνεύοντας διαφορετικά αναπαραστασιακά συστήματα. Μια τέτοια προσέγγιση τους/ τις βοηθά να αναπτύσσουν πολυτροπικές προσεγγίσεις στην επικοινωνία και να χρησιμοποιούν τη μαθηματική γλώσσα με ακρίβεια και ευελιξία. Ειδικότερα για το Λύκειο το νέο ΠΣ έχει δύο κεντρικούς στόχους. Ο πρώτος, που επιδιώκεται μέσα από τα μαθήματα γενικής παιδείας, αφορά την ολοκλήρωση τόσο των μαθηματικών γνώσεων όσο και την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού, που αμφότερα είναι αναγκαία σε έναν κοινωνικά ενεργό πολίτη. Ο δεύτερος, που επιδιώκεται μέσα από τα μαθήματα προσανατολισμού, αφορά την περαιτέρω ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού και των μαθηματικών γνώσεων εκείνων των μαθητών/-τριών που επιθυμούν να συνεχίσουν σπουδές θετικού και οικονομικού προσανατολισμού, ώστε να αποκτήσουν τα απαραίτητα εφόδια για τη συνέχεια των σπουδών τους στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση.

Τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα για τη <u>θεματική ενότητα «πραγματικοί αριθμοί»</u> ορίζονται ως εξής:

- Οι μαθητές να διακρίνουν του ρητούς από τους άρρητους αριθμούς μέσα από τις διάφορες αναπαράστασεις τους και να ταξινομούν συγκεκριμένους αριθμούς στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$-$\mathbb{Q}$).
- Να διερευνούν την έννοια της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών.
- Να συμβολίζουν με διαστήματα τα σύνολα των πραγματικών αριθμών που προσδιορίζονται από ανισοτικές σχέσεις.

- Να ορίζουν αλγεβρικά την απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού και να την συνδέουν με την απόσταση του αριθμού από το μηδέν.
- Να ερμηνεύουν γεωμετρικά την απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο πραγματικών αριθμών.
- Να αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής.
- Να ορίζουν την ν-οστη ρίζα μη αρνητικού αριθμού ως την μοναδική μη αρνητική λύση της εξίσωσης $\chi^{\nu} = \alpha$.
- Να ορίζουν δυνάμεις με ρητό εκθέτη και να διερευνούν τις ιδιότητές τους.
- Να χρησιμοποιούν τον ορισμό και τις ιδιότητες των ν-οστών ριζών και γενικότερα των δυνάμεων με ρητό εκθέτη στον υπολογισμό της τιμής αριθμητικών παραστάσεων.

Τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα για τη <u>θεματική ενότητα «Αλγεβρικές παραστάσεις»</u> ορίζονται ως εξής:

- Αποδεικνύουν τις ταυτότητες που σχετίζονται με τις παραστάσεις $(\alpha \pm \beta)^3$ και $\alpha^3 \pm \beta^3$.
- Χρησιμοποιούν τις ταυτότητες και τις ιδιότητες των ν-οστών ριζών και γενικότερα των δυνάμεων με ρητό εκθέτη στον μετασχηματισμό αλγεβρικών παραστάσεων.

Τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα για τη <u>θεματική ενότητα «Αλγεβρικές σχέσεις»</u> ορίζονται ως εξής:

- Επιλύουν απλές παραμετρικές εξισώσεις 1ου βαθμού και ρεαλιστικά προβλήματα που ανάγονται σε εξισώσεις αυτής της μορφής.
- Επιλύουν αλγεβρικά και γεωμετρικά απλές εξισώσεις, ανισώσεις και προβλήματα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής.
- Επιλύουν απλές εξισώσεις της μορφής $\chi^{\nu} = \alpha$.
- Επιλύουν αλγεβρικά εξισώσεις 2ου βαθμού.
- Επιλύουν απλές εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού.
- Χρησιμοποιούν εξισώσεις 2ου βαθμού στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.
- Επιλύουν ανισώσεις δευτέρου βαθμού αλγεβρικά ή/και γραφικά.
- Αξιοποιούν ανισώσεις 2ου βαθμού στη μοντελοποίηση και στην επίλυση προβλημάτων.

- Κατασκευάζουν δικά τους προβλήματα που επιλύονται με εξισώσεις ή/και ανισώσεις δευτέρου βαθμού.

Αναφορικά με τη θεματική ενότητα «Αλγεβρικές σχέσεις» τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα είναι τα εξής:

- Να επιλύουν αλγεβρικά και να ερμηνεύουν γραφικά πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις.
- Να μοντελοποιούν και να επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια πολυωνυμικών εξισώσεων και ανισώσεων.
- Να υπολογίζουν προσεγγιστικά ρίζα πολυωνυμικής συνάρτησης μέσω οπτικοποίησης του θεωρήματος Bolzano και χρήσης ψηφιακών εργαλείων.
- Να επιλύουν εξισώσεις με ριζικά.
- Να επιλύουν αλγεβρικά μη γραμμικά συστήματα με δυο αγνώστους και ερμηνεύουν γραφικά τις λύσεις.
- Να χρησιμοποιούν συστήματα για τη μοντελοποίηση κι επίλυση προβλημάτων.
- Να ερμηνεύουν τις λύσεις τους στο πλαίσιο του προβλήματος και αιτιολογούν την άποψη τους.
- Να κατασκευάζουν δικά τους προβλήματα που επιλύονται με σύστημα.

Μετά την παράθεση των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών από τη δεκαετία του ΄60 έως και σήμερα, γίνεται η παράθεση των σχολικών εγχειριδίων που διδάσκονταν την αντίστοιχη περίοδο, τα περιεχόμενα τους και τις αλλαγές που γίνανε.

2.4. ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ

Το σχολικό βιβλίο ή σχολικό εγχειρίδιο έχει ως σημείο αναφοράς το Πρόγραμμα Σπουδών όπου υπάρχει η διδακτέα ύλη ενός μαθήματος για μια συγκεκριμένη τάξη (Ξωχέλλης, 2009). Τα σχολικά εγχειρίδια είναι σημαντικά για τη διδασκαλία. Οι Robitaille και Travers (1992), στο άρθρο των Fan, Zhu και Miao (2013), ανέφεραν ότι η εξάρτηση από τα σχολικά εγχειρίδια είναι μεγαλύτερη στο μάθημα των Μαθηματικών από οποιοδήποτε άλλο μάθημα. Η αλληλεξάρτηση των σχολικών βιβλίων με το Πρόγραμμα Σπουδών είναι ιδιαίτερα σημαντική, καθώς το βιβλίο έχει το βάρος του ρόλου της σύνδεσης μεταξύ του προβλεπόμενου και του εφαρμοσμένου

Προγράμματος Σπουδών. Το προβλεπόμενο (intended) Πρόγραμμα Σπουδών ορίζεται από το εκπαιδευτικό σύστημα, που περιλαμβάνει πρότυπα περιεχομένου, οδηγούς προγραμμάτων σπουδών, πλαίσια ή άλλα παρόμοια έγγραφα (Valverde et al, 2002). Το εφαρμοσμένο (implemented) Πρόγραμμα Σπουδών ορίζεται από το συνδυασμό πρακτικής που εφαρμόζεται στην τάξη και του εκπαιδευτικού. Το TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) ορίζει έναν δυνατό σύνδεσμο του Προγράμματος Σπουδών και του σχολικού βιβλίου και το αναφέρουν ως «υποκατάστατο του Προγράμματος Σπουδών» (Okeeffe, 2013). Τα σχολικά βιβλία καθορίζουν και διαμορφώνουν τη διδασκαλία των εκπαιδευτικών σχετικά με την επιλογή του περιεχομένου. Έτσι τα βιβλία θεωρούνται ότι καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό τις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών. Σαν «ευκαιρία μάθησης» (Opportunity to Learn – OTL) ορίζεται το εάν οι μαθητές έχουν λάβει την εκπαίδευση που τους επιτρέπει να αποκτήσουν τις ικανότητες που εκφράζονται μέσω συγκεκριμένων στόχων (Wijaya, van den Heuvel – Panhuizen & Doorman, 2015). Το πώς επιλέγεται και το πώς χρησιμοποιείται ένα σχολικό βιβλίο διαφέρει από χώρα σε χώρα, ακόμη και από σχολείο σε σχολείο. Για παράδειγμα, σε χώρες όπου το εκπαιδευτικό σύστημα είναι διοικητικά αποκεντρωμένο, όπως αυτό των Η.Π.Α., παρατηρείται πληθώρα σχολικών βιβλίων που διδάσκονται στα σχολεία και οι εκπαιδευτικοί επιλέγουν το βιβλίο που θα διδάξουν. Το ίδιο ισχύει και στην Αυστραλία, όπου δεν υπάρχει ένα σχολικό βιβλίο και οι επιλογές ποικίλουν αναλόγως την πολιτεία. Στη Γερμανία αποφασίζουν μόνοι τους οι μαθητές ποιό σχολικό εγχειρίδιο θα ακολουθήσουν, αφού τους δοθεί από τα σχολεία και τους δασκάλους ένας κατάλογος διδακτικών εγχειριδίων τα οποία εγκρίνονται από το Υπουργείο. Στη Γαλλία οι μαθητές διαθέτουν ένα διδακτικό εγχειρίδιο, το οποίο δίνεται από τη σχολική μονάδα. Παραδοσιακά, κάθε χρόνο αγοράζονται και ανανεώνονται τα διδακτικά βιβλία μιας σχολικής τάξης (Pepin, 2008). Αντίθετα, σε συγκεντρωτικά εκπαιδευτικά συστήματα, όπως είναι αυτό στη χώρα μας, σε όλες τις σχολικές μονάδες της επικράτειας, γίνεται χρήση ενός δεσμευτικού σχολικού βιβλίου που ορίζεται από το Υπουργείο Παιδείας. Η βαρύτητα του σχολικού εγχειριδίου στην χώρα μας ήταν και εξακολουθεί να είναι και σήμερα υψίστης σημασίας, καθώς έως πρόσφατα συντάσσονταν πρώτα το σχολικό εγχειρίδιο και συνέχεια δημοσιεύονταν το αναλυτικό πρόγραμμα (Ξωχέλλης, 2009). Παρόλο που τα σχολικά βιβλία των μαθηματικών υπάρχουν από την αρχαιότητα, η μελέτη και η ανάλυση τους δεν έχει πολλά χρόνια που ξεκίνησε. Ο Cronbach στην έρευνα των Fan et al. (2013), αναφέρει ότι αν και τα σχολικά εγχειρίδια ήταν τα πιο διαδεδομένα στις αίθουσες διδασκαλίας, η έρευνα που επικεντρώθηκε σε αυτά ήταν «διάσπαρτη, ασαφής και συχνά ασήμαντη». Τη δεκαετία του ‘80 η έρευνα για τα σχολικά βιβλία αυξάνεται ραγδαία σε πολλές χώρες. Οι Fan et al. (2013) διεξήγαγαν μια βιβλιογραφική ανασκόπηση με σκοπό τη συστηματική εξέταση, μελέτη και ανάλυση των ερευνών που εστιάζουν στα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών

Ωστόσο, τίθεται το ερώτημα αν τα υπάρχοντα σχολικά εγχειρίδια του Λυκείου βοηθούν στην υλοποίηση των σκοπών και στόχων που αναγράφονται στο πρόγραμμα σπουδών. Τα σχολικά εγχειρίδια από μόνα τους, δεν βοηθούν στην επίτευξη των στόχων, αλλά δεν παύει να είναι ένα από τα βασικότερα διδακτικά μέσα. Παρόλα αυτά, οι βασικοί σκοποί του προγράμματος σπουδών και οι στόχοι του δεν υλοποιούνται. Επί παραδείγματι θα αναφέραμε την εξάσκηση των μαθητών, ώστε να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά σαν μέθοδο σκέψης και εργαλείο επίλυσης προβλημάτων στην καθημερινή ζωή.

2.4.1. ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ Α’ ΛΥΚΕΙΟΥ

Όσον αφορά τα σχολικά βιβλία της Α’ Λυκείου αυτά παρουσιάζουν κάποιες ιδιαιτερότητες. Το μεταβατικό στάδιο από το Γυμνάσιο στο Λύκειο είναι αρκετά σημαντικό για τους μαθητές μιας και αλλάζουν περιβάλλον. Η διδασκαλία των Μαθηματικών στην Α΄ Λυκείου έχει δύο στόχους. Την ολοκλήρωση της εκπαίδευσης που οι μαθητές έλαβαν στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο και συγχρόνως στο πέρασμα σε ένα πιο, θεωρητικό μαθηματικό τρόπο σκέψης. Βασικά στοιχεία αυτού του τρόπου σκέψης είναι η «αυστηρή» χρήση μαθηματικής ορολογίας και συμβολισμού, οι ορισμοί των εννοιών και η θεωρητική απόδειξη των ισχυρισμών (Υπουργική Απόφαση 59614/Γ2, 2011). Επιπλέον, το μάθημα των μαθηματικών της Α΄ Λυκείου διδάσκεται σε όλους τους μαθητές ανεξαρτήτως κατευθύνσεως και ενδιαφέροντως. Υπάρχουν μαθητές που θα συνεχίσουν τις σπουδές τους σε θεωρητικές ή θετικές επιστήμες, θα ειδικευτούν σε τεχνικά ιδρύματα ή θα προσπαθήσουν να βρουν κάποια δουλειά τελειώνοντας το σχολείο.

Παρακάτω παρουσιάζονται συνοπτικά τα σχολικά εγχειρίδια της Α’ Λυκείου και, εν συνεχεία, αναλύονται.

Πίνακας 2: Πίνακας διδακτικών βιβλίων Άλγεβρας Α' Λυκείου.

Ονοματεπώνυμο συγγραφέα	Τίτλος σχολικού εγχειριδίου	Χρονολογία πρώτης και τελευταίας έκδοσης
Ν. Σακελλαρίου	*Άλγεβρα δια τας ανωτέρας τάξεις των Γυμνασίων*. Οργανισμός Εκδόσεως Σχολικών Βιβλίων	1η Έκδοση 1950 9η Έκδοση 1966
Θ. Βαβαλέτσκος & Γ. Μπούσγος	*Μαθηματικά Δ΄ Γυμνασίου (Θετικής Κατευθύνσεως)* Τόμος 1ος (Άλγεβρα) Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων	1η Έκδοση 1968 4η Έκδοση 1972
Ν. Βαρουχάκης, Λ. Αδαμόπουλος, Ν. Αλεξανδρής, Δ.Α. Παπακωνσταντίνου & Α. Παπαμικρούλης	*Μαθηματικά – Άλγεβρα Α΄ Λυκείου*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων	1η Έκδοση 1979 4η Έκδοση 1982
Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος & Α. Σβέρκος	*Άλγεβρα Α΄ Λυκείου*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων	1η Έκδοση 1990 Αναμορφωμένη έκδοση του 2010

Παρακάτω θα αναπτυχθούν τα περιεχόμενα των σχολικών εγχειριδίων που παρατίθενται στον πίνακα προκειμένου να φανεί η συνεχής αναμόρφωση, αναδιάταξη, αφαίρεση κεφαλαίων, αλλά και εισαγωγή νέων.

1. Το σχολικό εγχειρίδιο του Ν. Σακελλαρίου *Άλγεβρα δια τας ανωτέρας τάξεις των Γυμνασίων* (1950), παρουσιάζει τις βασικές έννοιες της Άλγεβρας, εστιάζει στις ιδιότητες των αριθμών και περιέχει ασκήσεις εξισώσεων, λογαρίθμων και παραγώγων (1η έκδοση). Τα περιεχόμενά του είναι τα εξής:

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι: Θετικοί κα αρνητικοί αριθμοί
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ: Περί αλγεβρικών παραστάσεων, μονωνύμων και πολυωνύμων

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ: Εξισώσεις πρώτου βαθμού με ένα άγνωστο-Ορισμοί και

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙV: Συστήματα εξισώσεων πρώτου βαθμού

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V: Περί των ριζών σχετικών αριθμών

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI: Περί εξισώσεων δευτέρου βαθμού

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII: Εξισώσεις αναγόμενες εις εξισώσεις β΄ βαθμού

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII: Περί προόδων-Πρόοδοι, Περί λογαρίθμων

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX: Ιδιότητες των απολύτων τιμών πραγματικών αριθμών, Περί ακολουθίας αριθμών, Περί ορίου μεταβλητής ποσότητος

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X: Περί παραγώγων

2. Το σχολικό εγχειρίδιο του Θ. Βαβαλέτσκου & Γ. Μπούσγου *Μαθηματικά Δ΄ Γυμνασίου (Θετικής Κατευθύνσεως)* Τόμος 1ος (Άλγεβρα) είναι χωρισμένο σε ορισμούς, παραδείγματα και ασκήσεις (1η Έκδοση 1968). Περιέχει στοιχεία Περιγραφικής Στατιστικής και Τριγωνομετρίας. Φέρει το σύμβολο της δικτατορίας. Τα περιεχόμενά του είναι τα εξής:

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II Σύνολα. Επαναλήψεις και Συμπληρώσεις
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III Στοιχεία Διανυσματικού Λογισμού
ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV Ανάλυσις Πολυωνύμων εις Γινόμενον Παραγόντων
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V Ταυτότητες
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI Ρητά Αλγεβρικά Κλάσματα
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII Συστήματα Εξισώσεων Α' Βαθμού (Γραμμικά)
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII Ασύμμετροι Αριθμοί- Πραγματικοί Αριθμοί
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX Απροσδιόριστος Ανάλυσις Πρώτου Βαθμού
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X Περί Ριζών των Πραγματικών Αριθμών ή Παραστάσεων
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI Μιγαδικοί Αριθμοί
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII Εξισώσεις Βου Βαθμού
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIII Ανισώσεις Β' Βαθμού ως προς έναν Άγνωστον
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIV Εξισώσεις Αναγόμεναι εις Εξισώσεις Β' Βαθμού. Διτετραγωνικοί Εξισώσεις
ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XV Στοιχεία Περιγραφικής Στατιστικής
ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΝ
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVI Τριγωνομετρία

3. Το σχολικό εγχειρίδιο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου του Ν. Βαρουχάκη, Λ. Αδαμόπουλου, Ν. Αλεξανδρή, Δ.Α. Παπακωνσταντίνου & Α. Παπαμικρούλη *Μαθηματικά – Άλγεβρα Α΄ Λυκείου* (1η Έκδοση 1979), διδάχθηκε την περίοδο 1979-1989.

Τα περιεχόμενά του είναι τα εξής:

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Στοιχεία από τη Μαθηματική Λογική και Εφαρμογές

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Το σύνολο των πραγματικών αριθμών ως αντιμεταθετικό σώμα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Το σύνολο των πραγματικών αριθμών ως διατεταγμένο σώμα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Πραγματικές Συναρτήσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Ρίζες πραγματικών αριθμών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: Κυκλικές Συναρτήσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: Μελέτη Βασικών Πραγματικών Συναρτήσεων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: Εξισώσεις και Ανισώσεις στο $\mathbb{R}$

4. Το σχολικό εγχειρίδιο του Σ. Ανδρεαδάκη, Β. Κατσαργύρη, Σ. Παπασταυρίδη, Γ. Πολύζου & Α. Σβέρκου: *Άλγεβρα Α΄ Λυκείου*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων της 1ης έκδοσης, της αναθεωρημένης έκδοση του 2010 καθώς και το σημερινό, περιέχουν τα εξής:

Πίνακας 3: Πίνακας όπου αντιπαραβάλλεται η ύλη ανά κεφάλαιο στις τελευταίες εκδόσεις του βιβλίου της Άλγεβρας Α΄ Λυκείου στις οποίες υπάρχουν αλλαγές στην ύλη.

1η Έκδοση (1990)	Αναμορφωμένη έκδοση (2010)	Τελευταία έκδοση (2011- σήμερα)
	Εισαγωγικό κεφάλαιο Ε.1: Λεξιλόγιο Λογικής Ε.2: Σύνολα	**Εισαγωγικό κεφάλαιο** Ε.1: Λεξιλόγιο Λογικής Ε.2: Σύνολα
Κεφάλαιο1^0 "Πραγματικοί αριθμοί" 1.1Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους 1.2 Δυνάμεις 1.3 Η εξίσωση αχ+β=0 1.4 Διάταξη πραγματικών αριθμών 1.5 Η ανίσωση αχ+β>0, και αχ+β<0 1.6 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού 1.7 Ρίζες Πραγματικών αριθμών 1.8 Δυνάμεις με ρητό εκθέτη	**Κεφάλαιο1^0 "Πραγματικοί αριθμοί"** 1.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητές 1.2 Διάταξη Πραγματικών αριθμών 1.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού 1.4 Ρίζες Πραγματικών αριθμών	**Κεφάλαιο1^0 "Πιθανότητες"** 1.1 Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα 1.2 Η έννοια της πιθανότητας
Κεφάλαιο 2^0 "Συναρτήσεις" 2.1 Σύνολα 2.2 Η έννοια της συνάρτησης 2.3 Γραφική παράσταση συνάρτησης 2.4 Η συνάρτηση f(x) = αx+β 2.5 Μελέτη συνάρτησης	**Κεφάλαιο 2^0 "εξισώσεις"** 2.1 Εξισώσεις 1ου βαθμού 2.2 Επίλυση της $χ^ν$=α 2.3 Εξισώσεις 2ου βαθμού	**Κεφάλαιο2^0 "Πραγματικοί αριθμοί"** 2.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους -Μέθοδοι απόδειξης 2.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών - Διαστήματα 2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού - Απόσταση δύο αριθμών

		2.4 Ρίζες πραγματικών αριθμών - Δυνάμεις με ρητό εκθέτη
Κεφάλαιο 3^0 "Συστήματα γραμμικών εξισώσεων και ανισώσεων" 3.1 Συστήματα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους 3.2 Λύση – διερεύνηση συστήματος 3.3 Συστήματα γραμμικών εξισώσεων με περισσότερους από δύο αγνώστους 3.4 Συστήματα γραμμικών ανισώσεων	**Κεφάλαιο 3^0 "Ανισώσεις"** 3.1 Ανισώσεις 1ου βαθμού 3.2 Ανισώσεις 2ου βαθμού 3.3 Ανισώσεις γινομένου & ανισώσεις πηλίκου	**Κεφάλαιο 3^0 "εξισώσεις"** 3.1 Εξισώσεις 1ου βαθμού 3.2 Η εξίσωση $\chi^{\nu}=\alpha$ 3.3 Εξισώσεις 2ου βαθμού
Κεφάλαιο 4^0 " Συνδυαστική - Πιθανότητες" 4.1 Βασική αρχή απαρίθμησης 4.2 Μεταθέσεις 4.3 Διατάξεις 4.4 Διατάξεις με επανάληψη 4.5 Συνδυασμοί 4.6 Η έννοια της πιθανότητας 4.7 Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα 4.8 Ανεξάρτητα ενδεχόμενα	**Κεφάλαιο 4^0 "Συναρτήσεις"** 4.1 Η έννοια της συνάρτησης 4.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης 4.3 $f(x) = \alpha\,\chi+ \beta$ 4.4 Κατακόρυφη - Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης 4.5 Μονοτονία– Ακρότατα – Συμμετρίες Συνάρτησης	**Κεφάλαιο 4^0 "Ανισώσεις"** 4.1 Ανισώσεις 1ου βαθμού - Επίλυση της $\alpha\chi+\beta>0$ 4.2 Ανισώσεις $2^{ου}$ βαθμού 4.3 Ανισώσεις γινομένου και ανισώσεις πηλίκου
Κεφάλαιο 5^0 "Εξισώσεις – Ανισώσεις δευτέρου βαθμού" 5.1 Λύση της εξίσωσης $\alpha\chi^2+ \beta\chi+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$ 5.2 Άθροισμα και γινόμενο ριζών 5.3 Εξισώσεις και συστήματα που ανάγονται σε λύση εξισώσεων $2^{ου}$ βαθμού 5.4 Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta\chi+\gamma$, $\alpha\neq 0$ 5.5 Πρόσημο των τιμών της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta\chi+\gamma$	**Κεφάλαιο 5^0 "Μελέτη βασικών συναρτήσεων"** 5.1 Μελέτη της $f(x) =\alpha\chi^2$ 5.2 Μελέτη της $f(x) = \frac{\alpha}{\chi}$ 5.3 Μελέτη της $f(x)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$	**Κεφάλαιο 5^0 "Πρόοδοι"** 5.1 Ακολουθίες 5.2 Αριθμητική πρόοδος 5.3 Γεωμετρική πρόοδος 5.4 Ανατοκισμός - Ίσες καταθέσεις
Κεφάλαιο 6^0 "Τριγωνομετρία" 6.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί 6.2 Τριγωνομετρικές ταυτότητες 6.3 Αναγωγή στο 1^o τεταρτημόριο 6.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις 6.5 Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις	**Κεφάλαιο 6^0 "Συστήματα"** 6.1 Γραμμικά συστήματα 6.2 Μη γραμμικά συστήματα	**Κεφάλαιο 6^0 "Συναρτήσεις"** 6.1 Η έννοια της συνάρτησης 6.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης -Απόσταση σημείων 6.3 Η συνάρτηση $f(x)=\alpha\chi+\beta$ 6.4 Κατακόρυφη - Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης 6.5 Μονοτονία - Ακρότατα - Συμμετρίες

		Συνάρτησης
	Κεφάλαιο 7^0 "Τριγωνομετρία" 7.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας 7.2 Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες 7.3 Αναγωγή στο 1^o τεταρτημόριο	**Κεφάλαιο 7^0 "Μελέτη βασικών συναρτήσεων"** 7.1 Μελέτη της $f(x) = \alpha\chi^2$ 7.2 Μελέτη της $f(x) = \frac{\alpha}{\chi}$ με $\alpha \neq 0$ 7.3 Μελέτη της $f(x) = \alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ με $\alpha \neq 0$

Το παρόν βιβλίο είναι το μακροβιότερο διδακτικό εγχειρίδιο Μαθηματικών στην ελληνική εκπαίδευση. Είναι σε χρήση 32 έτη και με τον τίτλο «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων», ο οποίος μετονομάστηκε το 2011. Η κυκλοφορία του βιβλίου έγινε χωρίς να δημοσιευτεί το νέο πρόγραμμα σπουδών. Το αναλυτικό πρόγραμμα δημοσιεύτηκε 3 χρόνια μετά, ήτοι το 1993, μετά τις τροποποιήσεις και παρεμβάσεις των ετών 1991 έως 1992 και αποτέλεσε έναν κατάλογο τίτλων και ενοτήτων (Syllabus).

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι σε όλα τα προαναφερθέντα σχολικά εγχειρίδια υπάρχουν ορισμένα κοινά χαρακτηριστικά που δημιουργούν προβληματισμό για τη δυνατότητα των περισσότερων μαθητών της Α΄ Λυκείου να κατανοήσουν το περιεχόμενό τους. Αρχικά, η άλγεβρα και η γεωμετρία διαχωρίζονται ακόμη και σε περιπτώσεις που θα βοηθούσε τους μαθητές να καταλάβουν καλύτερα κάποιες μαθηματικές έννοιες ή θα κινούσε το ενδιαφέρον τους, όπως η γεωμετρική λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, από τους αρχαίους Έλληνες. Η μαθηματική γλώσσα είναι αρκετά αυστηρή για την πλειοψηφία των μαθητών και η πληθώρα των ορολογιών και των συμβολισμών τους δυσκολεύει να κατανοήσουν τις έννοιες αυτές. Αυτά απαιτούν την αυξημένη αφαιρετική ικανότητα από τους μαθητές, ενώ δίνεται μεγάλη σημασία στον ορθολογισμό αποκλείοντας άλλες πτυχές των μαθηματικών. Οι ασκήσεις στην πλειοψηφία τους έχουν σαν στόχο την απόκτηση δεξιοτήτων, παραμελώντας την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και πρωτοβουλίας των μαθητών, ενώ θα μπορούσε να δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να τις λύνουν με περισσότερους από έναν τρόπο και όχι μόνο με μία σωστή απάντηση. Θα μπορούσε επίσης να υπάρχει κάποια ταξινόμηση των ασκήσεων ανάλογα με το τι θα θέλαμε να αποκτήσουν οι μαθητές μας. Τέλος, ορισμένες ασκήσεις ανοικτής φύσεως θα έδιναν τη δυνατότητα για ομαδική δουλειά.

2.4.2. ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΆΛΓΕΒΡΑ

Πίνακας 4: Πίνακας διδακτικών βιβλίων Άλγεβρας Β΄ Λυκείου

Ονοματεπώνυμο συγγραφέα	Τίτλος σχολικού εγχειριδίου	Χρονολογία πρώτης και τελευταίας έκδοσης
Ν. Σακελλαρίου	*Άλγεβρα δια τας ανωτέρας τάξεις των Γυμνασίων*. Οργανισμός Εκδόσεως Σχολικών Βιβλίων	1η Έκδοση 1950 9η Έκδοση 1966
Η. Ντζιώρας	*Μαθηματικά Ε΄ Γυμνασίου (Θετικής Κατευθύνσεως)* Τόμος 1ος (Άλγεβρα). Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων	1η Έκδοση 1968 6η Έκδοση 1975
Κ. Ιορδανίδης, Δ. Λ. Καραγεώργος, Κ. Κωστάκης, Α. Μακρίδης & Β. Νασόπουλος.	*Μαθηματικά Β΄ Λυκείου – Ύλη Επιλογής*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων	1η Έκδοση 1978 5η Έκδοση 1982
Ν. Βαρουχάκης, Λ. Αδαμόπουλος, Χ. Γιαννίκος, Α. Μπέτσης, Δ. Νοταράς & Σ. Φωτόπουλος	*Μαθηματικά – Άλγεβρα Β΄ Λυκείου*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων	1η Έκδοση 1983 6η Έκδοση 1988
Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος & Α. Σβέρκος	*Άλγεβρα Β΄ Λυκείου*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων	1η Έκδοση 1991 Αναμορφωμένη έκδοση του 2012

Παρακάτω θα αναπτυχθούν τα περιεχόμενα ορισμένων σχολικών εγχειριδίων προκειμένου να φανεί η συνεχής αναμόρφωση, αναδιάταξη, εξαγωγή κεφαλαίων, αλλά και εισαγωγή νέων.

1. Τα περιεχόμενα του σχολικού εγχειριδίου *Άλγεβρα δια τας ανωτέρας τάξεις των Γυμνασίων* του Νείλου Σακελλαρίου (1950, 1η Έκδοση) αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 2.4.1.
2. Τα περιεχόμενα του βιβλίου του Ηλία Β. Ντζιώρα *Μαθηματικά Ε΄ Γυμνασίου (Θετικής Κατευθύνσεως)* Τόμος 1ος (Άλγεβρα). (1η Έκδοση, 1968). Ήταν ένα νέο βιβλίο αποκλειστικά για τα τμήματα πρακτικής κατευθύνσεως το οποίο

αργότερα (τέλη δεκαετίας 1970) προσαρμόστηκε με αφαίρεση κεφαλαίων σε βιβλίο γενικής παιδείας (Ντζιώρα-Πανάκη) αντικαθιστώντας το βιβλίο του Σακελλαρίου.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι: Στοιχεία εκ του προτασιακού λογισμού
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ: Στοιχεία εκ της θεωρίας των συνόλων

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ: Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV: Στοιχεία εκ της θεωρίας των ακέραιων πολυωνύμων
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V: Περί ακολουθιών πραγματικών αριθμών
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI: Περί προόδων
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII: Σειραί πραγματικών αριθμών
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII: Λογάριθμοι - Εκθετικαί και Λογαριθμικαί Εξισώσεις Συστήματα
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΧ: Ανατοκισμός- Ίσαι καταθέσεις- Χρεωλυσία
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Χ: Απροσδιόριστος ανάλυσις δευτέρου βαθμού
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΧΙ: Στοιχεία Συνδυαστικής Αναλύσεως

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΧΙΙ: Στοιχεία εκ της θεωρίας των Πιθανοτήτων

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι: Επαναλήψεις εκ των στοιχείων του διανυσματικού λογισμού
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ: Συντεταγμένες διανύσματος
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ: Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV: Η ευθεία εις το επίπεδο
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V: Σπουδή της ευθείας εις το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI: Πολικές συντεταγμένες

3. Το επόμενο σχολικό εγχειρίδιο είναι τα *Μαθηματικά Β΄ Λυκείου – Ύλη Επιλογής* του Κ. Ιορδανίδη, Δ. Λ. Καραγεώργου, Κ. Κωστάκη, Α. Μακρίδη & Β. Νασόπουλου (1η Έκδοση, 1978). Τα περιεχόμενα είναι τα εξής:

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι: Μιγαδικοί αριθμοί

1.Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών

2. Γεωμετρική παράσταση των μιγαδικών αριθμών

3. Γεωμετρικές εφαρμογές του μέτρου των μιγαδικών αριθμών

4. Πολικές συντεταγμένες μιγαδικού αριθμού

5. Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

6. Ρίζες των μιγαδικών αριθμών

7. Σύντομη ανακεφαλαίωση

8. Ασκήσεις για επανάληψη

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ: Αλγεβρικές δομές

1.Διμελείς πράξεις

2. Ημιομάδες-Ομάδες

3. Δακτύλιοι

4. Σώματα

5. Διανυσματικοί χώροι

6. Σύντομη ανακεφαλαίωση

7. Ασκήσεις για επανάληψη

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ: Στοιχεία Θεωρίας Αριθμών

1. Διαιρετότητα στο σύνολο $\mathbb{Z}$

2. Ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z})$

3. Σύντομη ανακεφαλαίωση

4. Ασκήσεις για επανάληψη

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV: Πολυώνυμα

1.Το σύνολο $\mathbb{C}_{[\chi]}$ των πολυωνύμων

2. Διαιρετότητα πολυωνύμων

3. Αριθμητική τιμή των πολυωνύμων

4. Θεωρήματα σχετικά με τις ρίζες των πολυωνύμων

5. Εξισώσεις 3ου και 4ου βαθμού

6. Διερεύνηση εξισώσεων και ανισώσεων

7. Σύντομη ανακεφαλαίωση

8. Ασκήσεις για επανάληψη

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V: Τριγωνομετρία

1. Τριγωνομετρικά συστήματα
2. Τριγωνομετρικές ανισώσεις
3. Σύντομη ανακεφαλαίωση
4. Ασκήσεις για επανάληψη

4. Κατά την περίοδο 1983-1990, το βιβλίο Μαθηματικών που διδάσκονταν στην Β' Λυκείου ήταν *Μαθηματικά Β΄ Λυκείου – Άλγεβρα* ($1^η$ έκδοση, 1983) των Ν. Βαρουχάκη, Λ. Αδαμόπουλου, Χ. Γιαννίκου, Α. Μπέτση, Δ. Νοταρά και Σ. Φωτόπουλου. Τα περιεχόμενα ήταν τα εξής:

1. Πολυωνυμικες εξισώσεις

Επαναλήψεις και συμπληρώσεις

Πολυωνυμικές εξισώσεις

Ασκήσεις

2. Μελέτη βασικών πραγματικών συναρτήσεων

Επαναλήψεις

Γραφική παράσταση συνάρτησης

Μονοτονία συνάρτησης

Μελέτη της συνάρτησης $\psi = \frac{\alpha}{\chi}$

Μελέτη της συνάρτησης ψ $= \alpha\chi^2$

Μελέτη τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Γραφική λύση εξίσωσης και ανίσωσης

Ασκήσεις

3. Τριγωνομετρία

Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος

Μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών παραστάσεων

Επίλυση τριγώνου

Ασκήσεις

4. Πρόοδοι

Βασικές έννοιες από τις ακολουθίες

Αριθμητική πρόοδος

Γεωμετρική πρόοδος

Ασκήσεις

5. Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση

Εκθετική συνάρτηση

Λογαριθμική συνάρτηση

Ασκήσεις

6. Τοπική μελέτη συνάρτησης

Όριο συναρτήσεως στο χ_0

Συνέχεια συνάρτησης

Παράγωγος συνάρτησης

Εφαρμογές των παραγόντων

Ασκήσεις

5. Όσον αφορά, την πρώτη έκδοση του σχολικού βιβλίου *Άλγεβρας Β' Λυκείου* των Σ. Ανδρεαδάκη, Β. Κατσαργύρη, Σ. Παπασταυρίδη, Γ. Πολύζο και Α. Σβέρκο που διδάσκεται σήμερα ήταν το 1991. Επανεκδόσεις με βελτιώσεις έγιναν το 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 2010, 2012.

Τα περιεχόμενα του σχολικού εγχειριδίου που προήλθαν από την 1η έκδοση του βιβλίου, αλλά και του σημερινού είναι τα εξής:

Πίνακας 5: Πίνακας όπου αντιπαραβάλλεται η ύλη ανά κεφάλαιο στις τελευταίες εκδόσεις του βιβλίου της Άλγεβρας Β΄ Λυκείου στις οποίες υπάρχουν αλλαγές στην ύλη.

1η Έκδοση (1991)	Τελευταία έκδοση (2011- σήμερα)
Κεφάλαιο 1^0 "Τριγωνομετρία" 1.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών 1.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α 1.3 Μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών παραστάσεων 1.4 Η συνάρτηση f(x)=αημx+βσυνx 1.5 Επίλυση τριγώνου	**Κεφάλαιο1^0 "Συστήματα"** 1.1 Γραμμικά Συστήματα 1.2 Μη Γραμμικά Συστήματα
Κεφάλαιο 2^0 "Πολυώνυμα-Πολυωνυμικές εξισώσεις" 2.1 Πολυώνυμα 2.2 Διαίρεση πολυωνύμων 2.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις 2.4 Εξισώσεις που ανάγονται σε	**Κεφάλαιο2^0 "Ιδιότητες Συναρτήσεων"** 2.1 Μονοτονία-Ακρότατα-Συμμετρίες Συνάρτησης 2.2 Κατακόρυφη-Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

πολυωνυμικές	
Κεφάλαιο 3^0 "Πρόοδοι " 3.1 Ακολουθίες 3.2 Αριθμητική πρόοδος 3.3 Γεωμετρική πρόοδος 3.4 Ανατοκισμός-Ίσες καταθέσεις-Χρεωλυσία 3.5 Άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου	**Κεφάλαιο 3^0 "Τριγωνομετρία"** 3.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας 3.2 Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες 3.3 Αναγωγή στο 1^o Τεταρτημόριο 3.4 Οι τριγωνομετρικές Συναρτήσεις 3.5 Βασικές Τριγωνομετρικές Εξισώσεις 3.6 Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών 3.7 Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α 3.8 Μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών παραστάσεων 3.9 Η συνάρτηση f(x)=αημx+βσυνx 3.10 Επίλυση τριγώνου
Κεφάλαιο 4^0 "Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση" 4.1 Εκθετική συνάρτηση 4.2 Λογάριθμοι 4.3 Λογαριθμική συνάρτηση	**Κεφάλαιο 4^0 "Πολυώνυμα-Πολυωνυμικές Εξισώσεις"** 4.1 Πολυώνυμα 4.2 Διαίρεση πολυωνύμων 4.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις 4.4 Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές
Κεφάλαιο 5^0 "Συνδυαστική-Πιθανότητες" 5.1 Βασική αρχή απαρίθμησης 5.2 Μεταθέσεις 5.3 Διατάξεις 5.4 Διατάξεις με επανάληψη 5.5 Συνδυασμοί 5.6 Η έννοια της πιθανότητας 5.7 Προσθετικός νόμος των πιθανοτήτων 5.8 Δεσμευμένη πιθανότητα 5.9 Ανεξάρτητα ενδεχόμενα	**Κεφάλαιο 5^0 "Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση"** 5.1 Εκθετική συνάρτηση 5.2 Λογάριθμοι 5.3 Λογαριθμική συνάρτηση
Κεφάλαιο 6^0 "Παράγωγος" 6.1 Ρυθμός μεταβολής-Η έννοια του ορίου 6.2 Παράγωγος της f στο χ=α 6.3 Η παράγωγος συνάρτηση 6.4 Εφαπτομένη σε ένα σημείο της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης 6.5 Μελέτη συνάρτησης	
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1. Η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής 2. Συμβολισμός Σ (σίγμα) 3. Το θεώρημα του διωνύμου	

Το βιβλίο αυτό προήλθε από αναμόρφωση της έκδοσης (2010) του βιβλίου Άλγεβρα Β’ Γενικού Λυκείου, τη συγγραφική ομάδα του οποίου αποτελούν οι Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος και Α. Σβέρκος. Συγκρίνοντας τις δύο τελευταίες εκδόσεις (2010, 2012) γίνεται έκδηλη η αφαίρεση του κεφαλαίου «Πρόοδοι» και η προσθήκη δύο κεφαλαίων: «Συστήματα» και

«Ιδιότητες Συναρτήσεων», τα οποία προέρχονται από το βιβλίο Άλγεβρα Α' Γενικού Λυκείου (2010). Επίσης το κεφάλαιο «Τριγωνομετρία» του βιβλίου Άλγεβρα Β' Γενικού Λυκείου (2010), εμπλουτίστηκε με το κεφάλαιο «Τριγωνομετρία» του βιβλίου Άλγεβρα Α Γενικού Λυκείου (2010). Οι σημαντικές αλλαγές που έγιναν αφορούσαν στο Κεφάλαιο 4 «Πολυώνυμα- Πολυωνυμικές εξισώσεις». Εκτός από την αρίθμηση των παραγράφων, η παράγραφος 4.3 μετονομάστηκε σε «Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις» και η παράγραφος 4.4 μετονομάστηκε σε «Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές.». Επίσης, στην παράγραφο 4.3, μεταξύ του 2ου και του 3ου Παραδείγματος προστέθηκαν τα υποκεφάλαια «Πρόσημο γινομένου» και «Ανισώσεις της μορφής» της παραγράφου 3.3 «Ανισώσεις γινόμενο και ανισώσεις πηλίκο» του βιβλίου της Α΄ Λυκείου. Ακολουθεί το 3ο Παράδειγμα με τον τίτλο «Παράδειγμα». Στις Ασκήσεις Α΄ ομάδας της παραγράφου 4.3 έχουν προστεθεί δύο ασκήσεις με αριθμούς 4 και 5 και έχει αλλάξει αντίστοιχα η αρίθμηση των ασκήσεων που ακολουθούν. Μετά το τέλος του 4ου Παραδείγματος της παραγράφου 4.4 έχει προστεθεί η υποπαράγραφος «Ανισώσεις της μορφής» της παραγράφου 3.3 («Ανισώσεις γινόμενο και ανισώσεις πηλίκο») του βιβλίου της Α΄ Λυκείου. Στις Ασκήσεις Α΄ Ομάδας της παραγράφου 4.4 έχουν γίνει οι ακόλουθες αλλαγές: Η Άσκηση 1 παρέμεινε ως έχει, η Άσκηση 2 έγινε Άσκηση 6, οι Ασκήσεις 3 και 4 έγιναν 2 και 3 αντίστοιχα, ενώ προστέθηκαν δύο ασκήσεις με αριθμούς 4 και 5. Οι ασκήσεις της Β΄ Ομάδας και οι Γενικές Ασκήσεις του κεφαλαίου παρέμειναν ίδιες.

2.4. ΑΞΙΟΛΟΓΙΚΗ ΚΡΙΣΗ

Από τις παραπάνω αναφορές στα περιεχόμενα των σχολικών εγχειριδίων των τελευταίων χρόνων καθίσταται σαφής η συνεχής αναμόρφωση, αναδιάταξη, εξαγωγή κεφαλαίων, αλλά και εισαγωγή νέων. Γίνεται εύκολα αντιληπτή πληθώρα δυσχερειών που αντιμετωπίζει η διδασκαλία του μαθήματος. Επί παραδείγματι θα λέγαμε η ασυμβατότητα ανάμεσα στη μεγάλη έκταση της διδακτέας ύλης και τον διαθέσιμο χρόνο διδασκαλίας, έχοντας μεγάλες απαιτήσεις σε σύγκριση με το πλήθος ασκήσεων, αλλά και τον ελλιπή διδακτικό χρόνο. Επιπλέον, ο ελλιπής χρόνος έχει ως απόρροια και τη μείωση ευκαιριών σύνδεσης των Μαθηματικών και με άλλες γνωστικές περιοχές. Τέλος η σύγκριση των περιεχομένων των σχολικών εγχειριδίων Άλγεβρας της Α΄ και Β΄ Λυκείου και των αντίστοιχων προγραμμάτων σπουδών ακολουθεί αναλυτικότερα στο επόμενο κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ ΤΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μια σύγκριση των περιεχομένων των σχολικών εγχειριδίων Άλγεβρας της Α΄ και Β΄ Λυκείου και των αντίστοιχων προγραμμάτων σπουδών. Επειδή είναι φυσικά αδύνατο να ασχοληθούμε με όλες τις περιεχόμενες έννοιες και μεθόδους, θα περιορίσουμε τη σύγκριση στην παρουσίαση της έννοιας «ρίζας» για την Α΄ Λυκείου στα διάφορα σχολικά εγχειρίδια και στις «μεθόδους επίλυσης εξισώσεων με ριζικά» για την Α΄ και Β΄ Λυκείου. Έγινε η επιλογή αυτών των δύο εννοιών για την σύγκριση των σχολικών εγχειριδίων και των αντίστοιχων προγραμμάτων σπουδών, γιατί οι έννοιες αυτές συνδέονται μεταξύ τους και για τις μεθόδους επίλυσης με ριζικά απαιτείται η άριστη γνώση των ριζών και των ιδιοτήτων τους. Η έννοια της ρίζας είναι σημαντική και η εκμάθησή της γίνεται από το Γυμνάσιο.

3.1. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΤΗΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕ ΤΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ

Στην ενότητα αυτή θα γίνει μία γενική σύγκριση Προγραμμάτων Σπουδών με των αντίστοιχων σχολικών εγχειριδίων για την Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου, ή της Δ΄ Γυμνάσιου μέχρι και το 1976 όπου και χωρίστηκε το εξατάξιο Γυμνάσιο σε τρείς τάξεις Γυμνασίου και σε τρείς τάξεις Λυκείου με τη μορφή που το γνωρίζουμε και σήμερα. Η σύγκριση των Προγραμμάτων Σπουδών με των αντίστοιχων σχολικών εγχειριδίων θα γίνει για τη χρονική περίοδο από τη δεκαετία του ΄60 έως και σήμερα με τελευταίο Πρόγραμμα Σπουδών, αυτό του 2021.

Περί του αναλυτικού και ωρολογίου προγράμματος της Δ΄ τάξεως Γυμνασίων πρακτικής κατευθύνσεως. **(Φ.Ε.Κ. Α΄ 55) 18 Μαρτίου 1961**

Το πρόγραμμα σπουδών του 1961 υποστηρίζεται από το υπάρχον βιβλίο του Σακελλαρίου της 4^{ης} έκδοσης του 1960[2]. Το σχολικό εγχειρίδιο του Σακελλαρίου από την 4^{η} έκδοση του 1960 έως και την 9^{η} έκδοση του 1966, όπου και διδάσκονταν μέχρι και το 1968 στα τμήματα πρακτικής, δεν είχε καμία αλλαγή ως προς τα περιεχόμενά

[2] Όπως θα δούμε παρακάτω (σελ. 119), αυτό δεν ίσχυε για το αντίστοιχο πρόγραμμα της Ε΄ Γυμνασίου, που δημοσιεύτηκε μερικούς μήνες αργότερα και στο οποίο είχαν ενσωματωθεί πολλές έννοιες από τα «Νέα Μαθηματικά».

του. Η διδακτέα ύλη του προγράμματος σπουδών συμβάδιζε με αυτή των περιεχομένων του υπάρχοντος σχολικού εγχειριδίου.

Περί ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων τάξεων τινών σχολείων Δευτεροβαθμίου (Μέσης) Εκπαιδεύσεως. **(Φ.Ε.Κ. Α΄ 16) 26 Ιανουαρίου 1966**

Την περίοδο που συντάχθηκε το πρόγραμμα σπουδών του 1966, διδάσκονταν ήδη το σχολικό εγχειρίδιο του Σακελλαρίου (9η Έκδοση, 1966), όπου η διδακτέα ύλη του προγράμματος σπουδών συμβάδιζε με τα περιεχόμενα του ήδη υπάρχοντος σχολικού εγχειριδίου, πλην της παραγράφου Β του προγράμματος σπουδών για τη στοιχειώδη γνώση περί συνόλων, όπου απουσίαζε από τα περιεχόμενα του σχολικού εγχειριδίου του Σακελλαρίου. Το πρόγραμμα σπουδών του 1966 υιοθετούσε τις αλλαγές των «Νέων Μαθηματικών» σε κάποιο βαθμό.

Στη συνέχεια το 1968 διδάσκεται το βιβλίου των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου. Η καινοτομία ήταν ότι οι συγγραφείς δεν είχαν σαν πρότυπο το πρόγραμμα σπουδών του 1966, αλλά ένα άλλο πρόγραμμα σπουδών για τα τμήματα θετικής κατεύθυνσης της Δ΄ Γυμνασίου, το οποίο δημοσιεύτηκε ένα χρόνο αργότερα, δηλαδή το 1969[3]. Παρατηρούμε ότι το πρόγραμμα σπουδών του 1966 στηρίχτηκε στα περιεχόμενα του υπάρχοντος σχολικού εγχειριδίου αυτό του Σακελλαρίου (9η Έκδοση, 1966).

Περί των ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων των μαθημάτων των σχολείων Μέσης Εκπαιδεύσεως. **(Φ.Ε.Κ. Α΄ 225) 10 Νοεμβρίου 1969**

Αυτό το πρόγραμμα σπουδών αφορούσε την κλασσική κατεύθυνση που υποστηρίζονταν από το βιβλίο του Σακελλαρίου και την πρακτική κατεύθυνση που υποστηρίζονταν από το βιβλίο των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου. Την περίοδο που δημοσιεύτηκε το πρόγραμμα σπουδών του 1969 διδάσκονταν ήδη στην πρακτική κατεύθυνση το αντίστοιχο σχολικό εγχειρίδιο των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου που είχε κυκλοφορήσει το προηγούμενο έτος πριν ακόμη δημοσιευτεί το πρόγραμμα σπουδών. Παρατηρείται λοιπόν ένα φαινόμενο χρονικής ανακολουθίας, αιτία του οποίου, ήταν το γεγονός ότι η συγγραφή των σχολικών εγχειριδίων γινόταν με ανάθεση και όχι με διαγωνισμό. Η διδακτέα ύλη του προγράμματος σπουδών υποστήριζε τα περιεχόμενα του υπάρχοντος σχολικού εγχειριδίου. Το ίδιο συνέβη και

[3] Όπως θα δούμε παρακάτω (σελ. 120), το ίδιο συνέβη και για το πρόγραμμα σπουδών του 1969 και βιβλίο πρακτικής κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου.

με τις επόμενες εκδόσεις του σχολικού εγχειριδίου των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου με τελευταία αυτή την 4η έκδοση του 1972.

***Περί του ωρολογίου και αναλυτικού προγράμματος της Α΄ τάξεως του Ημερησίου και του Εσπερινού Λυκείου Γενικής Κατευθύνσεως και του Προτύπου Ελληνικού Κλασσικού Λυκείου.* (Φ.Ε.Κ. Α΄ 240) 23 Οκτωβρίου 1979**

Μετά τον χωρισμό της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε Γυμνάσιο και Λύκειο, δημιουργείται η ανάγκη νέων προγραμμάτων σπουδών και διδακτικών βιβλίων για το Λύκειο. Τότε καθιερώθηκε στην Α΄ Λυκείου κοινό πρόγραμμα σπουδών, που υποστηρίζονταν από το σχολικό εγχειρίδιο των Βαρουχάκη κ.α.. Για πρώτη φορά δημιουργείται σχολικό εγχειρίδιο πού βασίζεται πάνω στις ανάγκες του προγράμματος σπουδών καθώς το σχολικό εγχειρίδιο συντάχθηκε μετά το πρόγραμμα σπουδών.

***Ωρολόγιο και αναλυτικό πρόγραμμα Λυκείων Μέσης Γενικής Εκπαίδευσης.* (Φ.Ε.Κ. Α΄ 170) 7 Οκτωβρίου 1985**

Την περίοδο που συντάχθηκε το πρόγραμμα σπουδών του 1985, διδάσκονταν ήδη το σχολικό εγχειρίδιο των Βαρουχάκη κ.α. (4η Έκδοση, 1982). Η διδακτέα ύλη του προγράμματος σπουδών του 1985 είναι ακριβώς η ίδια με αυτή του προηγούμενου προγράμματος σπουδών του 1979. Αφαιρείται μόνο το κεφάλαιο των συναρτήσεων. Το πρόγραμμα σπουδών που συντάχθηκε είχε ως πρότυπο το υπάρχον σχολικό εγχειρίδιο.

***Τροποποίηση και συμπλήρωση ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων σχολείων.* (Φ.Ε.Κ. Α΄ 8) 15 Ιανουαρίου 1988**

Την περίοδο που συντάχθηκε το πρόγραμμα σπουδών του 1988 διδάσκονταν το σχολικό εγχειρίδιο των Βαρουχάκη κ.α. (4η Έκδοση, 1982). Η διδακτέα ύλη του προγράμματος σπουδών του 1988 ήταν η ίδια με αυτή του προηγούμενου προγράμματος σπουδών του 1985, πλην της ενότητας «Ανάπτυγμα και παραγοντοποίηση» του κεφαλαίου πραγματικές συναρτήσεις, όπου πλέον έβγαινε εκτός.

Εκείνη την περίοδο, επικράτησαν οι αντιλήψεις κατά των «Νέων Μαθηματικών» που είχαν εκδηλωθεί σε διεθνή κλίμακα τα προηγούμενα χρόνια[4]. Έτσι το πρόγραμμα σπουδών και το αντίστοιχο σχολικό εγχειρίδιο των Βαρουχάκη κ.α. θεωρήθηκε ξεπερασμένο και αποφασίστηκε η αντικατάστασή τους με τη γνωστή μέθοδο της ανάθεσης, ενός νέου προγράμματος σπουδών και άρχισε η συγγραφή νέου σχολικού εγχειριδίου. Οι συγγραφείς του σχολικού εγχειριδίου δεν είχαν σαν οδηγό το πρόγραμμα σπουδών του 1988, αλλά ένα πρόχειρο προσχέδιο του προγράμματος το οποίο δημοσιεύτηκε τελικά το 1993 όπου θα δούμε και στη συνέχεια. Έτσι από το 1990 και μετά, διδάσκεται το σχολικό εγχειρίδιο των Ανδρεαδάκη κ.α. και χωρίζεται σε δύο τεύχη για το διδακτικό έτος 1990 έως 1991. Η έννοιες της Μαθηματικής λογικής, το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ως σώμα, το $\mathbb{R}$ ως διατεταγμένο σώμα, το αξίωμα του κιβωτισμού στο $\mathbb{R}$ που όριζε το πρόγραμμα σπουδών του 1988 δεν υπήρχε στο σχολικό εγχειρίδιο των Ανδρεαδάκη κ.α.. Συνοπτικά, το πρόγραμμα σπουδών του 1988 είχε ως πρότυπο το υπάρχον σχολικό εγχειρίδιο των Βαρουχάκη κ.α. (4η Έκδοση, 1982).

***Τροποποίηση και συμπλήρωση ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων σχολικών μονάδων Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και άλλες διατάξεις*. (Φ.Ε.Κ. Α΄ 73) 20 Μαΐου 1993**

Για την σύγκριση του συγκεκριμένου προγράμματος σπουδών με το αντίστοιχο σχολικό εγχειρίδιο, αυτό των Ανδρεαδάκη κ.α., αλλά και των προγραμμάτων σπουδών του 1999 και 2011, χρησιμοποιήσαμε στοιχεία από την εργασία του Γ. Θωμαΐδη που δημοσιεύτηκε το 2021.

Το κύριο πρόβλημα του βιβλίου που εξετάζουμε και διαχέεται σε όλη την διάρκεια της υπέρ-τριακονταετούς χρήσης του, είναι η μεγάλη αναντιστοιχία μεταξύ της έκτασης των περιεχομένων και του διαθεσίμου χρόνου για τη διδασκαλία του μαθήματος. Το πρόβλημα εμφανίστηκε αμέσως μόλις εκδόθηκαν από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο οι σχετικές οδηγίες που απαιτούσαν τη διάθεση τη διάθεση 84 διδακτικών ωρών για τη διδασκαλία της ύλης του νέου βιβλίου. Αυτό ήταν ένα πρόβλημα ζωτικής σημασίας που οδήγησε τα δύο επόμενα χρόνια (1991 και 1992) σε ορισμένες δραστικές παρεμβάσεις:

---

[4] Οι αντιλήψεις κατά των Νέων Μαθηματικών στην Ελλάδα είχαν επικρατήσει τα προηγούμενα χρόνια και εφαρμόστηκαν πρώτα στα βιβλία Μαθηματικών του Γυμνασίου που εκδόθηκαν την τριετία 1987-1989.

- αντικατάσταση του κεφαλαίου 4 «Συνδυαστική – Πιθανότητες» από το πιο «εύπεπτο» κεφάλαιο «Στατιστική» και τη μεταφορά του πρώτου στη Β΄ Λυκείου
- Σύμπτυξη της ύλης των κεφαλαίων 3 «Συστήματα γραμμικών εξισώσεων και ανισώσεων» και του κεφαλαίου 6 «Τριγωνομετρία» με τη μεταφορά ορισμένων ενοτήτων τους σε παράρτημα του βιβλίου
- Περικοπή 60 ασκήσεων
- Μείωση της έκτασης του βιβλίου από 220 σε 205 σελίδες
- Μείωση των προτεινόμενων διδακτικών ωρών από 84 σε 71

Στη μορφή αυτή το βιβλίο χρησιμοποιήθηκε χωρίς ουσιώδες παρεμβάσεις από το 1993 μέχρι το 1997. Το νέο αναλυτικό πρόγραμμα που δημοσιεύτηκε το 1993 ήταν ένας κατάλογος (Syllabus) με τους τίτλους του κεφαλαίου και ενοτήτων του σχολικού βιβλίου, όπως ακριβώς είχαν διαμορφωθεί μετά τις παρεμβάσεις των ετών 1991 και 1992.

Το επόμενο κύμα παρεμβάσεων που αφορούσαν όχι μόνο το περιεχόμενο αλλά και τη δομή του συγκεκριμένου βιβλίου εμφανίστηκε στη διάρκεια της μεγάλης εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης που επιχειρήθηκε την περίοδο 1997-1999. Αυτή η εξέλιξη προκάλεσε νέες περικοπές των περιεχομένων του βιβλίου που εξετάζουμε Στις οδηγίες διδασκαλίας του σχολικού έτους 1998-1999 το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο 1998 στη σελίδα 117 αναφέρεται λακωνικά ότι ενότητες του βιβλίου 5.4 «Τριγωνομετρικές συναρτήσεις» και 5.5 «Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις» του 5ου κεφαλαίου, μεταφέρονται στην ύλη της άλγεβρας της Β΄ Λυκείου. Επίσης αφαιρέθηκε σιωπηρά από το βιβλίο, ολόκληρο το 6ο κεφάλαιο «Στατιστική» που το 1992 είχε αντικαταστήσει το κεφάλαιο «Συνδυαστική- Πιθανότητες», καθώς και η ενότητα «Τριγωνομετρικές ανισώσεις» του Παραρτήματος. Αποφασίστηκε επίσης η πλήρης αναδιάταξη της δομής του βιβλίου με καταμερισμό της ύλης των 6 κεφαλαίων της αρχικής έκδοσης σε 6 ενότητες. Οι ενότητες αυτές, στις οποίες αναμειγνύονταν παράγραφοι διαφορετικών κεφαλαίων, ήταν οι εξής:

Α. Λογισμός στο R - Διάταξη στο R (12 διδακτικές ώρες)

Β. Απόλυτη τιμή - Ρίζος - Εξισώσεις β΄ βαθμού (10 διδακτικές ώρες)

Γ. Συναρτήσεις (7 διδακτικές ώρες)

Δ. Συστήματα εξισώσεων (7 διδακτικές ώρες)

Ε. Μελέτη συνάρτησης (12 διδακτικές ώρες)

ΣΤ. Τριγωνομετρία (6 διδακτικές ώρες)

Οι προηγούμενες περικοπές και αναδιατάξεις έκαναν δυνατή την ελάττωση των σελίδων του βιβλίου από 205 σε 177 και μια ακόμη δραστική μείωση των προτεινόμενων ωρών διδασκαλίας του μαθήματος, αρχικά από 71 σε 56 διδακτικές ώρες και στη συνέχεια από 56 σε 54.

***Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Γυμνασίου κι Ενιαίου Λυκείου.* (Φ.Ε.Κ. Β΄ 1342) 30 Ιουνίου 1999**

Με αυτή τη δομή που αναφέραμε πιο πάνω και χωρίς την ενότητα ΣΤ (η διδασκαλία της οποίας μεταφέρθηκε το 2002 στην αρχή της επόμενης τάξης), το βιβλίο χρησιμοποιήθηκε μέχρι και το σχολικό έτος 2009-2010. Το βιβλίο που εξετάζουμε συνδέεται με τη δημοσίευση του 1999 του Ενιαίου πλαισίου προγράμματος σπουδών Γυμνασίου και Λυκείου ΦΕΚ Β 1342, 30 Ιουνίου 1999, το οποίο περιέχει ορισμένες σημαντικές καινοτομίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Το πρόγραμμα του 1999 υπήρξε το πρώτο στην ιστορία της Νεοελληνικής Μαθηματικής εκπαίδευσης, που δεν ήταν απλώς κατάλογος περιεχομένων (Syllabus). Είχε τη μορφή του curriculum με τρεις στήλες, στις οποίες αναπτύσσονται τα περιεχόμενα οι στόχοι και οι οδηγίες διδασκαλίας (Θωμαΐδης, 2021, σελ. 8).

Ειδικά στην άλγεβρα της Α΄ Λυκείου η διδακτέα ύλη περιορίζονταν σε 4 κεφάλαια αλλά με την ένταξη σημαντικών νέων ενοτήτων για την έννοια της απόδειξης την επίλυση προβλήματος και την έννοια και φυσική σημασία του ρυθμού μεταβολής μιας συνάρτησης. Επιπλέον το Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών έδινε μεγάλη έμφαση στην διδασκαλία με δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος οι οποίες ήταν ανύπαρκτες στο συγκεκριμένο διδακτικό βιβλίο. Τέλος ένα άλλο σημείο τριβής αποτελούσε η απουσία από το βιβλίο υλικό αξιολόγησης των μαθητών συμβατού με τις νέες αρχές που προωθούσε η εκπαιδευτική μεταρρύθμιση μέσω των ειδικών εκδόσεων του Κέντρου Εκπαιδευτικής Έρευνας. Η συρρίκνωση της ύλης του βιβλίου και η ασυμβατότητα με τις καινοτομίες της εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης καθιστούν εύλογο το κριτικό ερώτημα, γιατί δεν προχώρησε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο του 1999 στην προκήρυξη διαγωνισμού συγγραφής διδακτικού βιβλίου άλγεβρας το οποίο θα ήταν συμβατό με το νέο πρόγραμμα σπουδών και θα προωθούσε τις καινοτομίες της μεταρρύθμισης (Θωμαΐδης, 2021, σελ. 8 έως 9).

***Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου*.** **(Φ.Ε.Κ. Β΄ 1168) 8 Ιουνίου 2011**

Οι οδηγίες του σχολικού έτους 2008-2009 επανέρχονται για ακόμη μία φορά στο ζήτημα των περικοπών με ένα μακροσκελή κατάλογο όλων των προηγούμενων καθώς και επιπρόσθετων που κρίθηκαν αναγκαίες ώστε να επιτευχθεί ο ανεκπλήρωτος στόχος ολοκλήρωσης της διδακτέας ύλης. Για πρώτη φορά μετά την έκδοση του βιβλίου του 1990 υπάρχουν στις οδηγίες εκτενείς αναφορές στο ζήτημα της αποδεικτικής διαδικασίας και σε απαγορευμένες μέχρι τότε έννοιες της Μαθηματικής λογικής όπως η επαγωγή και η πόσοδείκτες. Οι αναφορές στην αποδεικτική διαδικασία 20 χρόνια μετά την πρώτη έκδοση του βιβλίου, αντανακλούσαν ένα διάχυτο αντανακλούσαν ένα διάχυτο εκείνη την εποχή προβληματισμό για τις μεγάλες αδυναμίες των μαθητών του Λυκείου στο συγκεκριμένο ζήτημα (Θωμαΐδης, 2021, σελ. 9 έως 10). Όλα τα προηγούμενα σχετικά με την αδυναμία ολοκλήρωσης της ύλης, το συσσωρευμένο πλήθος των περικοπών και ανάγκη λήψης μέτρων ώστε να βελτιωθεί η αποδεικτική ικανότητα των μαθητών, καθιστούσαν επιτακτική είτε την αντικατάσταση η τη δραστική αναμόρφωση του ηλικίας 20 ετών σχολικού βιβλίου. Το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο επέλεξε τη δεύτερη λύση και ανέθεσε το έργο στην αρχική συγγραφική ομάδα. Έτσι το 2010 εμφανίστηκε μία «αναμορφωμένη έκδοση» του βιβλίου, που επανέφερε την κατανομή της ύλης σε κεφάλαια με την ακόλουθη δομή (Θωμαΐδης, 2021, σελ. 10):

- 0. Το λεξιλόγιο της λογικής – Σύνολα
- 1. Οι πραγματικοί αριθμοί
- 3. Εξισώσεις
- 4. Ανισώσεις
- 5. Βασικές έννοιες των συναρτήσεων
- 6. Μελέτη βασικών συναρτήσεων
- 7. Γραμμικά συστήματα
- Τριγωνομετρία
- Ασκήσεις για επανάληψη

Βασικά χαρακτηριστικά της νέας έκδοσης του βιβλίου ήταν η σημαντική μείωση του αριθμού των παραδοσιακών ασκήσεων από 472 σε 305 και ενσωμάτωση στο τέλος κάθε κεφαλαίου μιας ενότητας με τίτλο «Ερωτήσεις Κατανόησης». Σε αυτές εντάχθηκε ένας μεγάλος αριθμός, περίπου 130 ερωτήσεων αντικειμενικού τύπου στην κατεύθυνση των νέων μεθόδων αξιολόγησης που είχε εισάγει η μεταρρύθμιση της περιόδου 1997-1999. Επίσης διαχωρίστηκε η διδασκαλία των εξισώσεων και ανισώσεων από τη διδασκαλία των συναρτήσεων. Η αναθεωρημένη έκδοση προκάλεσε πολλές συζητήσεις που επικεντρώθηκαν σχεδόν αποκλειστικά στις επιλογές των συγγραφέων για τα στοιχεία της λογικής και της αποδεικτικής μεθοδολογίας που εντάχθηκαν στο αναμορφωθέν βιβλίο (Θωμαϊδης, 2021, σελ. 10). Οι οδηγίες διδασκαλίας του σχολικού έτους 2010 έως 2011, οι οποίες περιείχαν ορισμένες αναφορές δημιουργούν την υπόνοια ότι ο συντάκτης τους αγνοούσε ή δεν είχε σε μεγάλη υπόληψη το σκοπό της αναμόρφωσης του βιβλίου. Το πρώτο στοιχείο που εντυπωσιάζει είναι ότι δεν ξεκινούν με καμία αναφορά στο σημαντικό γεγονός της αναμόρφωσης αλλά εμμένουν στο ζήτημα της ολοκλήρωσης της ύλης και ανακοινώνουν νέες περικοπές. Μεταξύ αυτών ήταν η μεταφορά του νεοσυσταθέντος κεφαλαίου «Τριγωνομετρία» στη Β Λυκείου και η κατάργηση της διδασκαλίας διαφόρων ενοτήτων με κύριο επιχείρημα ότι «είναι γνωστές από το Γυμνάσιο». Μετά από όλες αυτές τις περικοπές, που αντιστοιχούν κατ εκτίμηση σε 46 από 202 σελίδες του αναμορφωθέντος βιβλίου, ο συντάκτης των οδηγιών πρότεινε νέα μείωση των ωρών διδασκαλίας του μαθήματος από 54 σε 48. Οδηγούμαστε έτσι στο πρόγραμμα σπουδών του 2011, που οδήγησε σε μία αναμόρφωση, μόλις πριν από ένα έτος αναμορφωθέντος βιβλίου της Αλγεβρας (Θωμαϊδης, 2021, σελ. 10 έως 11). Το νέο πρόγραμμα σπουδών είχε τη δομή curriculum με τρεις στήλες στις οποίες αναπτύσσονται οι στόχοι οι θεματικές ενότητες με το διατιθέμενο χρόνο και ενδεικτικές δραστηριότητες. Οι προηγούμενες αλλαγές ενσωματώθηκαν άμεσα στην νέα έκδοση του βιβλίου το 2011 (Θωμαϊδης, 2021, σελ. 11).

Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων Γενικού Λυκείου. **(Φ.Ε.Κ. Β΄ 5390) 19 Νοεμβρίου 2021**

Το παρόν πρόγραμμα σπουδών έχει τη δομή curriculum με τρεις στήλες στις οποίες αναπτύσσονται το θεματικό πεδίο, οι θεματικές ενότητες και τα προσδοκώμενα Μαθηματικά αποτελέσματα. Μία βασική καινοτομία που εισάγει το πρόγραμμα σπουδών είναι ότι παράλληλα με την «Άλγεβρα» δημιουργείται ιδιαίτερος κλάδος για τα «Στοχαστικά Μαθηματικά». Τα θεματικά πεδία των «Στοχαστικών Μαθηματικών» είναι η «Στατιστική» και οι «Πιθανότητες». Το σχολικό εγχειρίδιο θα συγγραφεί ύστερα από προκήρυξη διαγωνισμού. Το παρόν Πρόγραμμα Σπουδών, εφαρμόζεται πιλοτικά σε συνδυασμό με τα ισχύοντα Προγράμματα Σπουδών σε όλα τα Πρότυπα και Πειραματικά Γενικά Λύκεια της χώρας, κατά τα σχολικά έτη 2021-2022 και 2022-2023. Από το σχολικό έτος 2023-2024 θα εφαρμοσθεί στην Α' τάξη όλων των Γενικών Λυκείων της χώρας. Από το σχολικό έτος 2024-2025 θα εφαρμοσθεί στη Β' τάξη όλων των Γενικών Λυκείων της χώρας. Επειδή δεν έχουν εκδοθεί τα αντίστοιχα διδακτικά εγχειρίδια, δεν μπορούμε να επεκταθούμε περισσότερο στην ανάλυση του προγράμματος σπουδών.

3.2. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΤΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕ ΤΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ

Στην ενότητα αυτή θα γίνει μία γενική σύγκριση Προγραμμάτων Σπουδών με των αντίστοιχων σχολικών εγχειριδίων για την Άλγεβρα της Β΄ Λυκείου, ή της Ε΄ Γυμνασίου μέχρι και το 1976 όπου και χωρίστηκε το εξατάξιο Γυμνάσιο σε τρείς τάξεις Γυμνασίου και σε τρείς τάξεις Λυκείου. Η σύγκριση των Προγραμμάτων Σπουδών με των αντίστοιχων σχολικών εγχειριδίων θα γίνει για τη χρονική περίοδο από τη δεκαετία του ΄60 έως και σήμερα με τελευταίο Πρόγραμμα Σπουδών, αυτό του 2021.

Περί του αναλυτικού και ωρολογίου προγράμματος της Ε΄ τάξεως Γυμνασίων πρακτικής κατευθύνσεως. **(Φ.Ε.Κ. Α΄ 151) 12 Σεπτεμβρίου 1961**

Την περίοδο που συντάχθηκε το πρόγραμμα σπουδών του 1961 διδάσκονταν το σχολικό εγχειρίδιο του Σακελλαρίου (4η Έκδοση, 1960). Η ύλη που ορίζει το πρόγραμμα σπουδών δεν υποστηρίζεται από το συγκεκριμένο σχολικό εγχειρίδιο, αλλά ούτε και με τις επόμενες εκδόσεις του. Συγκεκριμένα στο άρθρο 7 στην παράγραφο Β του προγράμματος σπουδών, αναφέρεται ότι πρέπει να διδαχθεί η έννοια του συνόλου και στην παράγραφο Γ αναφέρεται ότι πρέπει να διδαχθεί ο ορισμός θέσεως σημείου επί άξονος και οι πολικές συντεταγμένες. Στα περιεχόμενα του βιβλίου του Σακελλαρίου δεν υπάρχουν αυτές οι έννοιες.

Περί ωρολογίου και αναλυτικού προγράμματος της Β΄ τάξεως Λυκείων. **(Φ.Ε.Κ. Α΄ 289) 21 Δεκεμβρίου 1966**

Την περίοδο που συντάχθηκε το πρόγραμμα σπουδών του 1966, διδάσκονταν το βιβλίο του Σακελλαρίου (9η Έκδοση, 1966). Η διδακτέα ύλη του προγράμματος σπουδών υποστηριζόταν από τα περιεχόμενα του σχολικού εγχειριδίου.

Στη συνέχεια το 1968 εκδίδεται το βιβλίου του Ντζιώρα. Ο συγγραφέας δεν είχε σαν πρότυπο το πρόγραμμα σπουδών του 1966, αλλά ένα άλλο πρόγραμμα σπουδών για τα τμήματα πρακτικής κατεύθυνσης της Ε΄ Γυμνασίου, το οποίο δημοσιεύτηκε ένα χρόνο αργότερα, δηλαδή το 1969[5]. Παρατηρούμε ότι το πρόγραμμα σπουδών του 1966 στηρίχτηκε στα περιεχόμενα του υπάρχοντος σχολικού εγχειριδίου αυτό του Σακελλαρίου (9η Έκδοση, 1966).

Περί των ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων των μαθημάτων των σχολείων Μέσης Εκπαιδεύσεως. **(Φ.Ε.Κ. Α΄ 225) 10 Νοεμβρίου 1969**

Αυτό το πρόγραμμα σπουδών αφορούσε την κλασσική κατεύθυνση που υποστηρίζονταν από το βιβλίο του Σακελλαρίου και την πρακτική κατεύθυνση που υποστηρίζονταν από το βιβλίο του Ντζιώρα.

Την περίοδο που δημοσιεύτηκε το πρόγραμμα σπουδών του 1969 διδάσκονταν ήδη στην πρακτική κατεύθυνση το αντίστοιχο σχολικό εγχειρίδιο του Ντζιώρα που είχε κυκλοφορήσει το προηγούμενο έτος πριν ακόμη δημοσιευτεί το πρόγραμμα σπουδών. Παρατηρείται λοιπόν ένα φαινόμενο χρονικής ανακολουθίας, αιτία του οποίου, ήταν το γεγονός ότι η συγγραφή των σχολικών εγχειριδίων γινόταν με ανάθεση και όχι με διαγωνισμό. Η διδακτέα ύλη του προγράμματος σπουδών υποστήριζε τα περιεχόμενα του υπάρχοντος σχολικού εγχειριδίου. Το ίδιο συνέβη και με τις επόμενες εκδόσεις του σχολικού εγχειριδίου του Ντζιώρα με τελευταία αυτή την 6η έκδοση του 1975.

Στη συνέχεια ακολούθησε το σχολικό εγχειρίδιο των Ντζιώρα & Πανάκη (Άλγεβρα-Τριγωνομετρία σε ενιαίο τεύχος) από το 1979 ως ύλη κορμού και των Ιορδανίδη κ.α. από το 1978 για τα τμήματα της πρακτικής κατεύθυνσης.

Περί του ωρολογίου και αναλυτικού προγράμματος της Β΄ τάξεως Ημερησίου Λυκείου Γενικής Κατευθύνσεως των Β΄ και Γ΄ τάξεων του Εσπερινού Λυκείου της αυτής κατευθύνσεως και της Β΄ τάξεως του Προτύπου Ελληνικού Κλασσικού Λυκείου. **(Φ.Ε.Κ. Α΄ 230) 6 Οκτωβρίου 1980**

Μετά τον χωρισμό της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε Γυμνάσιο και Λύκειο, δημιουργείται η ανάγκη νέων προγραμμάτων σπουδών και διδακτικών βιβλίων για το Λύκειο. Τότε καθιερώθηκε στην Β΄ Λυκείου κοινό πρόγραμμα σπουδών, που υποστηρίζονταν από το σχολικό εγχειρίδιο των Ντζιώρα & Πανάκη έως το 1982 και

[5] Όλα τα σχολικά εγχειρίδια Άλγεβρας δεν γράφονται με διαγωνισμό (ο οποίος θα απαιτούσε τη δημοσίευση νέου προγράμματος) αλλά με ανάθεση η οποία γίνεται με ένα ανεπίσημο προσχέδιο του νέου προγράμματος.

πρόγραμμα για την θετική κατεύθυνση που υποστηρίζονταν από το σχολικό εγχειρίδιο των Ιορδανίδη κ.α. και διδάσκονταν ήδη στη θετική κατεύθυνση από το 1978, πριν ακόμα δημοσιευθεί το πρόγραμμα σπουδών. Παρατηρείται λοιπόν ένα φαινόμενο χρονικής ανακολουθίας, αιτία του οποίου, ήταν το γεγονός ότι η συγγραφή των σχολικών εγχειριδίων έγινε πάλι με ανάθεση και όχι με διαγωνισμό. Η διδακτέα ύλη του προγράμματος σπουδών για την θετική κατεύθυνση του 1980, είχε ως πρότυπο τα περιεχόμενα του σχολικού εγχειριδίου των Ιορδανίδη κ.α.
Έπειτα η Άλγεβρα στη Β΄ Λυκείου διδάσκονταν από το σχολικό εγχειρίδιο των Βαρουχάκη κ.α. (1η Έκδοση, 1983). Τα περιεχόμενα του σχολικού εγχειριδίου των Βαρουχάκη κ.α. στηρίζονται σχετικά με την ύλη που θέτει το πρόγραμμα σπουδών του 1980, καθώς οι ανισώσεις 2ου βαθμού και η αρμονική πρόοδος δεν υπάρχουν στο σχολικό εγχειρίδιο. Συνοπτικά, παρατηρούμε ότι το πρόγραμμα σπουδών του 1980, είχε ως πρότυπο τα περιεχόμενα του υπάρχοντος σχολικού εγχειριδίου, και του σχολικού εγχειριδίου που ακολούθησε.

***Ωρολόγιο και αναλυτικό πρόγραμμα Λυκείων Μέσης Γενικής Εκπαίδευσης.* (Φ.Ε.Κ. Α΄ 170) 7 Οκτωβρίου 1985**

Την περίοδο που δημοσιεύτηκε το πρόγραμμα σπουδών του 1985 διδάσκονταν το σχολικό εγχειρίδιο των Βαρουχάκη κ.α., με 3η έκδοση αυτή του 1985 έως και την 6η έκδοση του 1988. Το πρόγραμμα σπουδών του 1985 είχε ως πρότυπο τα περιεχόμενα του υπάρχοντος σχολικού εγχειριδίου δηλαδή αυτό των Βαρουχάκη κ.α. όπου δεν υπήρχε καμία αναντιστοιχία μεταξύ προγράμματος σπουδών και σχολικού εγχειριδίου.

***Τροποποίηση και συμπλήρωση ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων σχολείων δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.* (Φ.Ε.Κ. Α΄ 8) 15 Ιανουαρίου 1988**

Το πρόγραμμα σπουδών του 1988 που συντάχθηκε είναι ίδιο με το πρόγραμμα σπουδών του 1985. Προστίθεται μία μόνο επιπλέον ενότητα που θα πρέπει να διδάσκεται αυτή της στατιστικής. Η άλγεβρα στην Β΄ Λυκείου διδάσκονταν από το υπάρχον σχολικό εγχειρίδιο των Βαρουχάκη κ.α. (6η Έκδοση, 1988) όπως και στο προηγούμενο πρόγραμμα σπουδών. Ως εκ των πραγμάτων, δεν υπήρχε καμία αναντιστοιχία μεταξύ περιεχομένων του σχολικού εγχειριδίου και της διδακτέας ύλης προγράμματος σπουδών, εκτός από την ενότητα της στατιστικής που δεν υπήρχε στο σχολικό εγχειρίδιο των Βαρουχάκη κ.α.

Τροποποίηση και συμπλήρωση ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων σχολείων Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. **(Φ.Ε.Κ. Α΄ 44) 8 Φεβρουαρίου 1989**

Το πρόγραμμα σπουδών του 1989 που συντάχθηκε είναι ίδιο ακριβώς με το πρόγραμμα σπουδών του 1988. Στην αρχή η Άλγεβρα στη Β΄ Λυκείου διδασκόταν από το σχολικό εγχειρίδιο των Βαρουχάκη κ.α. (6η Έκδοση, 1988) μέχρι και το 1991, όπου τα περιεχόμενα του σχολικού εγχειριδίου συμβάδιζαν με τη διδακτέα ύλη του προγράμματος σπουδών του 1989, εκτός από την ενότητα της στατιστικής, όπως και στο προηγούμενο πρόγραμμα σπουδών του 1988.

Εκείνη την περίοδο, επικράτησαν οι αντιλήψεις κατά των «Νέων Μαθηματικών» που είχαν εκδηλωθεί σε διεθνή κλίμακα τα προηγούμενα χρόνια. Έτσι το πρόγραμμα σπουδών και το αντίστοιχο σχολικό εγχειρίδιο των Βαρουχάκη κ.α. θεωρήθηκε ξεπερασμένο και αποφασίστηκε η αντικατάστασή τους με τη γνωστή μέθοδο της ανάθεσης, όπου και άρχισε η συγγραφή νέου σχολικού εγχειριδίου. Οι συγγραφείς του σχολικού εγχειριδίου δεν είχαν σαν οδηγό το πρόγραμμα σπουδών του 1989, αλλά ένα πρόχειρο προσχέδιο του προγράμματος το οποίο δημοσιεύτηκε τελικά το 1993 όπου θα δούμε και στη συνέχεια. Έτσι από το 1991 και μετά, διδάσκεται το σχολικό εγχειρίδιο των Ανδρεαδάκη κ.α. Συνοπτικά το πρόγραμμα σπουδών του 1989 είχε ως πρότυπο το υπάρχον σχολικό εγχειρίδιο των Βαρουχάκη κ.α..

Τροποποίηση και συμπλήρωση ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων σχολικών μονάδων Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και άλλες διατάξεις. **(Φ.Ε.Κ. Α΄ 73) 20 Μαΐου 1993**

Την περίοδο που συντάχθηκε το πρόγραμμα σπουδών του 1993 διδασκόταν το βιβλίο των Ανδρεαδάκη κ.α. ήδη από το 1991 και η διδακτέα ύλη του προγράμματος σπουδών συμβάδιζε απόλυτα με αυτή του υπάρχοντος σχολικού εγχειριδίου. Το νέο αναλυτικό πρόγραμμα που δημοσιεύτηκε το 1993 ήταν ένας κατάλογος syllabus, με τους τίτλους των κεφαλαίων και ενοτήτων του σχολικού βιβλίου όπως ακριβώς είχαν διαμορφωθεί μετά τις παρεμβάσεις των ετών 1991-1992 στο βιβλίο της Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, όπου αποφασίστηκε η μεταφορά του κεφαλαίου «συνδυαστική – πιθανότητες» στο σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Λυκείου.

Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Γυμνασίου κι Ενιαίου Λυκείου. **(Φ.Ε.Κ. Β΄ 1342) 30 Ιουνίου 1999**

Το πρόγραμμα σπουδών του 1999 υπήρξε το πρώτο στην ιστορία της Νεοελληνικής Μαθηματικής εκπαίδευσης που δεν ήταν απλός κατάλογος περιεχομένων syllabus, αλλά είχε τη μορφή curriculum με τρεις στήλες στις οποίες αναπτύσσονται τα περιεχόμενα, οι στόχοι και οι οδηγίες διδασκαλίας. Η διδακτέα ύλη του Προγράμματος Σπουδών της Β΄ Λυκείου περιορίζεται σημαντικά καθώς αφαιρούνται το κεφάλαιο «Συνδυαστική – Πιθανότητες» και «Παράγωγοι», αλλά δεν αφαιρούνται από το σχολικό εγχειρίδιο. Στο κεφάλαιο «Τριγωνομετρικές συναρτήσεις» το Πρόγραμμα Σπουδών τονίζει ότι οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τις περιοδικές συναρτήσεις και να μάθουν να λύνουν τις βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις. Κάτι τέτοιο δεν υποστηρίζεται από το υπάρχον σχολικό εγχειρίδιο του Ανδρεαδάκη κ.α.. Τέλος στο κεφάλαιο «Η εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση» του Προγράμματος Σπουδών, αναφέρεται ότι πρέπει να διδαχθεί η έννοια του ρυθμού μεταβολής. Η έννοια αυτή βρίσκεται στο κεφάλαιο 6 του σχολικού εγχειριδίου με ονομασία «Παράγωγοι», όπου έχει αφαιρεθεί από το Πρόγραμμα Σπουδών. Συνοπτικά μπορούμε να πούμε ότι το Πρόγραμμα Σπουδών του 1999 δεν υποστηρίζεται από το υπάρχον σχολικό εγχειρίδιο του Ανδρεαδάκη κ.α..

Πρόγραμμα Σπουδών Άλγεβρας και Γεωμετρίας γενικής παιδείας Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου. (Φ.Ε.Κ. Β΄ 1173) 15 Μαΐου 2013

Την περίοδο που συντάχθηκε το πρόγραμμα σπουδών του 2013, διδάσκονταν στην Άλγεβρα της Β΄ λυκείου το τροποποιημένο σχολικό εγχειρίδιο των Ανδρεαδάκη κ.α., όταν το 2011 δημοσιεύτηκε το νέο πρόγραμμα σπουδών της Α΄ Λυκείου και έγινε ανταλλαγή κεφαλαίων και ενοτήτων μεταξύ των σχολικών εγχειριδίων της Α΄ και Β΄ Λυκείου. Το πρόγραμμα σπουδών του 2013 είχε τη δομή curriculum με τρεις στήλες στις οποίες αναπτύσσονται οι στόχοι, τα περιεχόμενα και οι οδηγίες των δραστηριοτήτων για την επίτευξη των στόχων. Η διδακτέα ύλη του προγράμματος σπουδών είχε ως πρότυπο τα περιεχόμενα του τροποποιημένου σχολικού εγχειριδίου της Άλγεβρας Β΄ Λυκείου.

***Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων Γενικού Λυκείου.* (Φ.Ε.Κ. Β΄ 5390) 19 Νοεμβρίου 2021**

Το παρόν πρόγραμμα σπουδών έχει τη δομή curriculum με τρεις στήλες στις οποίες αναπτύσσονται το θεματικό πεδίο, οι θεματικές ενότητες και τα προσδοκώμενα Μαθηματικά αποτελέσματα. Η καινοτομία που εισάγει το πρόγραμμα σπουδών είναι ότι πλέον θα διδάσκεται το μάθημα «Μαθηματικά», όπου θα χωρίζεται σε δύο μέρη, την «Άλγεβρα» και τα «Στοχαστικά Μαθηματικά». Τα θεματικά πεδία των «Στοχαστικών Μαθηματικών» είναι η «Στατιστική» και οι «Πιθανότητες». Το σχολικό εγχειρίδιο θα διατεθεί ύστερα από προκήρυξη διαγωνισμού συγγραφής σχολικού εγχειριδίου. Το παρόν Πρόγραμμα Σπουδών, θα εφαρμοσθεί πιλοτικά σε συνδυασμό με τα ισχύοντα Προγράμματα Σπουδών σε όλα τα Πρότυπα και Πειραματικά Γενικά Λύκεια της χώρας, κατά τα σχολικά έτη 2021-2022 και 2022-2023. Από το σχολικό έτος 2023-2024 θα εφαρμοσθεί στην Α' τάξη όλων των Γενικών Λυκείων της χώρας. Από το σχολικό έτος 2024-2025 θα εφαρμοσθεί στη Β' τάξη όλων των Γενικών Λυκείων της χώρας

3.3. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΩΝ

Διαβάζοντας κανείς τα προαναφερθέντα καταλαβαίνει πως η μετάβαση από το ένα πρόγραμμα σπουδών στο άλλο δεν είναι ομαλή και υποδηλώνει την αδυναμία των εκάστοτε θεσμικών οργάνων που είχαν την ευθύνη για το σχεδιασμό της μαθηματικής εκπαίδευσης, να ελέγξουν αποτελεσματικά τις διαδικασίες παραγωγής συγκεκριμένου σχολικού εγχειριδίου κατά τη δημοσίευση του εκάστοτε Προγράμματος Σπουδών. Εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι η δημοσίευση των Προγραμμάτων Σπουδών έπεται της συγγραφής των αντίστοιχων σχολικών εγχειριδίων. Η συγγραφή αυτών των σχολικών βιβλίων είχε σαν οδηγό ένα ανεπίσημο προσχέδιο των Προγραμμάτων Σπουδών το οποίο δημοσιεύονταν μετά από μερικά χρόνια, όπως έγινε με τα σχολικά εγχειρίδια της Α΄ Λυκείου των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου το 1968 που είχαν σαν πρότυπο ένα προσχέδιο του Προγράμματος Σπουδών το οποίο δημοσιεύτηκε το 1969 και των Ανδρεαδάκη κ.α. το 1990 που είχαν σαν πρότυπο ένα προσχέδιο του Προγράμματος Σπουδών όπου δημοσιεύτηκε το 1993. Το ίδιο γεγονός συναντάμε και στα σχολικά εγχειρίδια της Β΄ Λυκείου, όπου το 1968 διδάσκεται το σχολικό εγχειρίδιο του Ντζιώρα για τα τμήματα της πρακτικής κατεύθυνσης και είχε σαν πρότυπο ένα προσχέδιο του Προγράμματος Σπουδών του 1969. Επίσης αναφορικά με την Β΄ Λυκείου το 1979 διδάσκεται το σχολικό εγχειρίδιο του Ντζιώρα & Πανάκη ως ύλη κορμού και του Ιορδανίδη από το 1978 για τα τμήματα κατεύθυνσης, τα οποία είχαν σαν πρότυπο ένα ανεπίσημο προσχέδιο του Προγράμματος Σπουδών του 1980. Άλλο ένα παράδειγμα αναφορικά με την χρονική ανακολουθία δημοσίευσης Προγράμματος Σπουδών και συγγραφής σχολικών εγχειριδίων για την Άλγεβρα της Β΄ Λυκείου, είναι το σχολικό εγχειρίδιο του Βαρουχάκη κ.α. το οποίο διδάσκεται από το 1983 και είχε σαν πρότυπο ένα ανεπίσημο προσχέδιο του Προγράμματος Σπουδών του 1985. Τέλος για την Άλγεβρα της Β΄ Λυκείου το 1991 διδάσκεται το σχολικό εγχειρίδιο του Ανδρεαδάκη κ.α. το οποίο είχε σαν πρότυπο ένα ανεπίσημο προσχέδιο του Προγράμματος Σπουδών του 1993. Όπως είδαμε σχεδόν όλα τα σχολικά εγχειρίδια Άλγεβρας δεν γράφονται με διαγωνισμό, ο οποίος θα απαιτούσε τη δημοσίευση νέου Προγράμματος Σπουδών, αλλά με ανάθεση η οποία γίνεται με ένα ανεπίσημο προσχέδιο του νέου προγράμματος.

Σε κάποιες περιπτώσεις υπήρχε αλλαγή του Προγράμματος Σπουδών χωρίς αυτό να συνοδεύεται από προκήρυξη συγγραφής νέου σχολικού εγχειριδίου ή τουλάχιστον αναμόρφωσης του υπάρχοντος. Μια τέτοια περίπτωση ήταν και αυτή του Προγράμματος Σπουδών του 1999, το οποίο απαιτούσε τη συγγραφή νέων βιβλίων Άλγεβρας για τις δύο πρώτες τάξεις του Λυκείου. Αντιθέτως διατηρήθηκαν τα βιβλία των Ανδρεαδάκη κ.α. που είχαν εκδοθεί το 1990 και 1991 για την Α΄ και Β΄ Λυκείου αντίστοιχα και τα οποία είχαν σαν οδηγό το Πρόγραμμα Σπουδών του 1993. Το ίδιο ισχύει και για το πρόγραμμα σπουδών της Α΄ Λυκείου του 2011.

Τα προαναφερθέντα προγράμματα σπουδών θεωρούνται πιεστικά ως προς τον καθορισμό του χρόνου διδασκαλίας των περιεχομένων, περιορίζοντας τον διδάσκοντα σε συγκεκριμένο πλαίσιο ύλης, χρόνου και δραστηριοτήτων χωρίς να παρέχει μεθοδολογικές υποδείξεις για τη διδασκαλία των συγκεκριμένων ενοτήτων. Η αναντιστοιχία μεταξύ της έκτασης των περιεχομένων και του διαθέσιμου χρόνου για την διδασκαλία της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου, οδήγησε σε ορισμένες παρεμβάσεις, με τις σημαντικότερες αυτής της μεταφοράς κεφαλαίων στην Β΄ Λυκείου, μείωση έκτασης σελίδων αρχικά από 220 σε 205 και μείωση διδακτικών ωρών από 84 σε 71 και στη συνέχεια από 205 σε 177 σελίδες και από 71 ώρες σε 56 και έπειτα από 56 σε 54. Για την άλγεβρα της Β΄ Λυκείου μέχρι και το 1999 διατίθενται 3 ώρες την εβδομάδα, ενώ από το 1999 και μετά μειώνονται σε 2 την εβδομάδα. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τη στοχοθεσία του Αναλυτικού Προγράμματος, σύμφωνα με το οποίο τα σχολικά εγχειρίδια της Άλγεβρας πρέπει να είναι προσαρμοσμένα στα ενδιαφέροντα και τις ανάγκες των μαθητών, καθώς και τη δυνατότητα χρήσης υλικών και μέσων διδασκαλίας που καλλιεργούν την αυτενέργεια και προωθούν τη συνεργατική διδασκαλία και μάθηση. Εντούτοις, τίποτα τέτοιο δεν φανερώνει η παρουσίασή τους. Επιπροσθέτως, ενώ κύριος στόχος ήταν η ανάπτυξη της διερευνητικής, μαθητοκεντρικής και συνεργατικής διδασκαλίας και μάθησης, οι προκαθορισμένοι στόχοι, τα περιεχόμενα και οι δραστηριότητες διδασκαλίας οριοθετούν αυστηρά τη διδασκαλία.

Μια σημαντική διαφορά για τα Προγράμματα Σπουδών και τα αντίστοιχα σχολικά εγχειρίδια είναι η ενσωμάτωση των βασικών αρχών της μεταρρύθμισης των «Νέων Μαθηματικών» στα Προγράμματα Σπουδών από το 1961 για την Ε΄ Γυμνασίου για πρώτη φορά όπου και συνεχίστηκε μέχρι και το 1993. Στο Πρόγραμμα Σπουδών του 1993, εγκαταλείπονται οι περισσότερες αρχές της μεταρρύθμισης των «Νέων Μαθηματικών» γεγονός που αποτυπώνεται στα αντίστοιχα σχολικά εγχειρίδια της Α΄ και Β΄ Λυκείου των Ανδρεαδάκη κ.α. που κυκλοφόρησαν από το 1990 και 1991 αντίστοιχα.

Η ανάλυση περιεχομένου και η συγκριτική μελέτη των Προγραμμάτων Σπουδών και σχολικών εγχειριδίων, δεν είναι φυσικά δυνατόν να συμπεριλάβει το σύνολο της διδακτέας ύλης. Για το λόγο αυτό θα καταφύγουμε σε μια μελέτη περίπτωσης (case study), επιλέγοντας ορισμένες βασικές ενότητες από την ύλη Άλγεβρας της Α΄ και Β΄ Λυκείου και εξετάζοντας αναλυτικά τον τρόπο διδασκαλίας τους στα Προγράμματα Σπουδών και τα αντίστοιχα σχολικά εγχειρίδια. Δύο τέτοιες ενότητες, που συνδέονται στενά μεταξύ τους και έχουν υποστεί σημαντικές παρεμβάσεις την περίοδο που εξετάζουμε, αποτελούν οι διάφοροι ορισμοί που χρησιμοποιήθηκαν για την έννοια της ρίζας στην Α΄ Λυκείου και οι μέθοδοι επίλυσης εξισώσεων με ριζικά στην Β΄ Λυκείου.

3.4. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΟΡΙΣΜΩΝ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΡΙΖΑΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ ΣΤΑ ΔΙΑΦΟΡΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ

3.4.1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΡΙΖΑΣ

Σε αυτήν την ενότητα θα επιχειρήσουμε να κάνουμε μια βαθύτερη συγκριτική ανάλυση Προγραμμάτων Σπουδών και σχολικών βιβλίων μέσα από μία μελέτη περίπτωσης (case study) όπως αναφέραμε στο τέλος της προηγούμενης ενότητας. Αυτή θα εστιάσει σε δύο βασικά αλγεβρικά ζητήματα, την έννοια της ρίζας και τις ιδιότητες των ριζών, όπου διδάσκεται στην Α΄ Λυκείου και την επίλυση εξισώσεων με ριζικά, όπου διδάσκεται κυρίως στη Β΄ Λυκείου. Η σύγκριση των διαφορετικών σχολικών εγχειριδίων στο κεφάλαιο των ριζών θα γίνει με βάση την πρώτη έκδοση του κάθε σχολικού εγχειριδίου μαθηματικών της Α΄ Λυκείου από το 1950 έως και σήμερα και από εδώ και πέρα δεν θα αναφέρεται η έκδοση, παρά μόνο αν χρειαστεί να γίνει σύγκριση με κάποια άλλη έκδοση. Πριν την σύγκριση των ορισμών των εννοιών «τετραγωνική ρίζα» και «ν-οστή ρίζα» θα παραθέσουμε τους ορισμούς αυτούς όπως αναφέρονται στα εξεταζόμενα σχολικά εγχειρίδια:

Σχολικό εγχειρίδιο Σακελλαρίου (1η Έκδοση, 1950, σελ. 162):

> «Καλούμεν δευτέραν, τρίτην,…, μιοστήν (ή μιοστής τάξεως) ρίζαν δοθέντος αριθμού τον αριθμόν, ο οποίος υψούμενος εις την δευτέραν, τρίτην,…, νιοστήν δύναμιν δίδει τον δοθέντα.»

Σχολικό εγχειρίδιο Βαβαλέτσκος & Μπούσγος (1η Έκδοση, 1968, σελ. 116):

> «Εάν $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}$ και μεγαλύτερος της μονάδος, τότε, εάν υπάρχει έτερος αριθμός $\chi \in \mathbb{R}$, όστις υψούμενος εις την νυοστήν δύναμιν γίνεται ίσος προς τον α, θα λέγωμεν ότι ο χ είναι μία νυοστή ρίζα (ή ρίζα νυοστής τάξεως) του α.»

Σχολικό εγχειρίδιο Βαρουχάκη κ.α. (1η Έκδοση, 1979, σελ. 14 & 16):

- <u>Για την τετραγωνική ρίζα</u>: «Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \geq 0$ υπάρχει ένας μοναδικός αριθμός $\chi \geq 0$ τέτοιος ώστε $\chi^2 = \alpha$.»
- <u>Για την ν-οστή ρίζα</u>: «Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \geq 0$ υπάρχει ένας μοναδικός αριθμός $\chi \geq 0$ τέτοιος ώστε $\chi^\nu = \alpha$.»

Σχολικό εγχειρίδιο Ανδρεαδάκη κ.α. (1η Έκδοση, 1990, σελ. 44 & 45):

- <u>Για την τετραγωνική ρίζα</u>: «Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $\chi^2 = \alpha$.»
- <u>Για την ν-οστή ρίζα</u>: «Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $\chi^\nu = \alpha$.».

Οι ορισμοί στα σχολικά εγχειρίδια του Σακελλαρίου και των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου, αναφέρονται σε υπόρριζη ποσότητα που ανήκει στο σύνολο του $\mathbb{R}$, διότι οι μιγαδικοί αριθμοί ήταν ενταγμένοι στα προγράμματα σπουδών, επιτρέποντας έτσι τη χρήση ριζών με αρνητικά υπόρριζα. Στα σχολικά εγχειρίδια των Βαρουχάκη κ.α. και των Ανδρεαδάκη κ.α., αναφέρονται σε υπόρριζη ποσότητα που ανήκει στο σύνολο του $\mathbb{R}^+$, διότι οι μιγαδικοί αριθμοί δεν ήταν ενταγμένοι στα προγράμματα σπουδών, μη επιτρέποντας έτσι τη χρήση ριζών με αρνητικά υπόρριζα.

Στο σχολικό βιβλίο του Σακελλαρίου και το σχολικό βιβλίο των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου δεν γίνεται κάποια επανάληψη στις τετραγωνικές ρίζες από τις προηγούμενες τάξεις, ενώ στο βιβλίο των Βαρουχάκη κ.α. και των Ανδρεαδάκη κ.α. ξεκινάει με μία εισαγωγή της τετραγωνικής ρίζας που είναι γνωστή από το Γυμνάσιο και στην συνέχεια δίνει τον ορισμό της. Στο σχολικό εγχειρίδιο των Βαρουχάκη κ.α., στη σελίδα 14, δίνεται ο εξής ορισμός για την τετραγωνική ρίζα:

> «Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \geq 0$ υπάρχει ένας μοναδικός αριθμός $\chi \geq 0$ τέτοιος ώστε $\chi^2 = \alpha$.».

Στο βιβλίο των Ανδρεαδάκη κ.α. στην σελ 44 αναφέρει:

> «Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $\chi^2 = \alpha$».

Ο ίδιος ορισμός είναι και στην αναμορφωμένη έκδοση του 2010 και στο σημερινό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Λυκείου. Δημιουργεί η παραπάνω αναφορά σύγχυση στους μαθητές μεταξύ της τετραγωνικής ρίζας (ν-οστής ρίζας) και των ριζών της εξίσωσης $\chi^2 = \alpha$ $(= \alpha)$. Έτσι παρατηρείται ακόμα και καλοί μαθητές να γράφουν $\sqrt{9} = \pm 3$, προφανώς συγχέοντας την τετραγωνική ρίζα του 9 με τις ρίζες της εξίσωσης $\chi^2 = 9$. Θα έπρεπε το βιβλίο με κατάλληλες και στοχευμένες δραστηριότητες να αναδεικνύει και να ξεκαθαρίζει τη ανωτέρω γνωστική σύγχυση. Ο ορισμός της τετραγωνικής ρίζας δημιουργεί πολλές δυσκολίες στους μαθητές και χρειάζεται να τονιστεί ότι η $\sqrt{\alpha}$ ορίζεται ως η θετική τετραγωνική ρίζα του α και όχι ως μια ποσότητα με δύο τιμές. Είναι σωστό για παράδειγμα να γράψουμε $\sqrt{9} = 3$ και $-\sqrt{9} = -3$, αλλά δεν είναι σωστό να γραφτεί ότι $\sqrt{9} = \pm 3$. Η σωστή σχέση είναι $\pm\sqrt{9} = \pm 3$. Η σύγχυση σχετικά με τις τετραγωνικές ρίζες, ίσως να δημιουργείται από τη γλώσσα που χρησιμοποιείται για το σύμβολο της έννοιας. Είναι ορθό να πούμε ότι το 9 έχει δύο ρίζες το -3 και το +3, επειδή το -3 και το +3 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\chi^2 = 9$. Όμως παρόλο που είναι λάθος η σχέση $\sqrt{9} = -3$ το σύμβολο $\sqrt{9}$ συχνά διαβάζεται ως η τετραγωνική ρίζα του 9, ή απλά η ρίζα του 9. Στην ίδια τάση είναι ενδεικτικό ότι πολλοί μαθητές γράφουν $\sqrt{9} = \pm 3$, αλλά θεωρούν ότι το $\sqrt{2}$ σαν ένα θετικό αριθμό και όχι σαν ένα ζευγάρι αριθμών (Movshovitz-Hadar & Webb, 2013).

Στο σχολικό εγχειρίδιο του Σακελλαρίου στο κεφάλαιο 5 στην σελίδα 162, εισάγεται ο ορισμός της ν-οστής ρίζας αριθμού με τον τίτλο «περί των ριζών αλγεβρικών αριθμών». Έπειτα εισάγει τις ιδιότητες της ν-οστής ρίζας, όπου για την απόδειξη τους ο Σακελλαρίου χρησιμοποιεί ένα ειδικό σύμβολο ρίζας που εκφράζει μόνο τη θετική τιμή, το οποίο μάλιστα δεν εισάγει εξ’ αρχής. Συγκεκριμένα στην παράγραφο §146 και στη σελίδα 164 αναφέρει:

> «Κατωτέρω εκ των δύο ριζών έκαστης άρτιας τάξεως αριθμού θετικού θα θεωρούμεν μόνον την θετικήν, προς διάκρισιν δε χρησιμοποιείται το σύμβολον $\sqrt{\;}$ με τον κατάλληλον δείκτην της ρίζης, την δε υπόρριζον ποσότητα α θα υποθέτωμεν θετικήν.»

Στην παράγραφο §145, στην σελίδα 163 αναφέρει:

> «Πας θετικός αριθμός έχει δύο μεν ρίζας άρτιας τάξεως αντίθετους, μιαν δε περιττής τάξεως (θετικήν)»

και στην συνέχεια δίνει το παράδειγμα $\sqrt{16} = \pm 4$. Αυτό είναι μια σημαντική διαφορά με το πώς διδάσκονται οι ρίζες σήμερα, αφού κάτι τέτοιο θα ήταν λάθος να ειπωθεί αφού σήμερα το $\sqrt{16}$ = 4. Συνεχίζουμε με την ιδιότητα:

> «Πας αρνητικός αριθμός έχει μιαν μόνο ρίζαν περιττής τάξεως, αρνητικήν, ουδεμίαν δ’ άρτιας τάξεως»

και στην συνέχεια δίνει το παραδείγματα $\sqrt[5]{-32} = -2$. Αυτό είναι άλλη μια σημαντική διαφορά, αφού σήμερα θα λέγαμε ότι δεν έχει νόημα. Αυτά τα παραδείγματα στην 4η ανατυπωμένη έκδοση του 1960 του βιβλίου του Σακελλαρίου μέχρι και την 9η και τελευταία ανατυπωμένη έκδοση[6] του 1966 αφαιρούνται αλλά οι ιδιότητες παραμένουν. Αξίζει όμως να τονιστεί πως δεν πρόκειται μόνο για παραδείγματα που αφαιρούνται, αλλά για μία βασική αλλαγή στον τρόπο ορισμού της έννοιας της ρίζας. Οι περιορισμοί αυτοί έχουν φτάσει σήμερα στο σημείο να απαγορεύεται ακόμη και η χρήση κυβικών με αρνητικό υπόρριζο. Στα επόμενα σχολικά εγχειρίδια παρουσιάζεται ότι ένας μη αρνητικός αριθμός έχει μία ρίζα. Συνεχίζουμε με την 1η έκδοση του βιβλίου του Σακελλαρίου όπου δίνει το παράδειγμα $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$ και ακολουθείται από την πρόταση:

> «Η ρίζα περιττής τάξεως αρνητικού αριθμού, ισούται με την αντίθετον ρίζαν της αυτής τάξεως του αντίθετου του αριθμού.»

όπου πάλι σήμερα θα λέγαμε ότι δεν έχει νόημα. Το παράδειγμα αυτό καθώς και η πρόταση αυτή παραμένουν μέχρι και την 9η και τελευταία ανατυπωμένη έκδοση του

[6] Το βιβλίο του Σακελλαρίου συνεχίζονταν να διδάσκονταν μέχρι το 1975 στα τμήματα της κλασσικής με επιπλέον εκδόσεις από την 9η ανατυπωμένη έκδοση που αναφέρουμε σαν τελευταία χωρίς να γίνει καμία αλλαγή από την 4η ανατυπωμένη έκδοση του 1960, ενώ από το 1968 στα τμήματα πρακτικής διδάσκονταν το βιβλίο των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου με 1η έκδοση αυτή του 1968.

1966. Το ίδιο αναφέρεται και στο βιβλίο των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου, στη σελίδα 118, στην πρώτη ιδιότητα:

«Εάν $\alpha > 0$ και $\nu = 2\kappa + 1$, ($\kappa \in \mathbb{N}$), τότε $\sqrt[\nu]{-\alpha} = -\sqrt[\nu]{\alpha}$.»

Συνεχίζουμε με την 1η έκδοση του Σακελλαρίου όπου στην συνέχεια εισάγει και τις υπόλοιπες ιδιότητες που υπάρχουν και στο σημερινό σχολικό εγχειρίδιο, χωρίς να υπάρχει κάτι άξιο σχολιασμού.

Έπειτα στην αρχή της σελίδας 167 στην παράγραφο §152α) εξηγεί πως βρίσκουμε γινόμενο ή πηλίκο ριζικών με διαφορετικούς δείκτες. Η μέθοδος που ακολουθείται είναι με την εύρεση του Ε.Κ.Π. των δεικτών για να δημιουργηθεί ο ίδιος δείκτης σε όλες τις ρίζες και να μπορέσει να γίνει η πράξη του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των ριζών. Η μέθοδος αυτή συνεχίζει και στα επόμενα βιβλία των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου και των Βαρουχάκη κ.α στη σελίδα 121 και σελίδα 19 αντίστοιχα, ενώ στο σχολικό εγχειρίδιο των Ανδρεαδάκη κ.α. ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση γίνεται με μετατροπή της ρίζας σε δυνάμεις με ρητό εκθέτη και στην συνέχεια η εφαρμογή των ιδιοτήτων των δυνάμεων που έχουν διδαχθεί από την προηγούμενη τάξη στη σελίδα 49, ενώ στο σημερινό σχολικό εγχειρίδιο στη σελίδα 72.

Στην συνέχεια το βιβλίο του Σακελλρίου στη σελίδα 167 παρουσιάζει συνοπτικά πως απαλείφουμε την ρίζα ή τις ρίζες β΄ τάξης από τον παρονομαστή ενός κλάσματος. Συνοπτικά παρουσιάζονται υπό μορφή παραδειγμάτων και στο βιβλίο των Βαρουχάκη κ.α στη σελίδα 20, καθώς και στο βιβλίο των Ανδρεαδάκη κ.α. στη σελίδα 50. Στο βιβλίο των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου παρουσιάζεται αναλυτικά με πολλές και διαφορετικές μορφές που μπορεί να εμφανιστεί η ρίζα ή ρίζα ν-οστής τάξης στον παρονομαστή και την μεθοδολογία επίλυσης αυτών, από τη σελίδα 121 έως τη σελίδα 124.

Έπειτα το βιβλίο του Σακελλαρίου στη σελίδα 168, παρουσιάζει τις δυνάμεις με εκθέτες κλασματικούς αριθμούς ενώ στο βιβλίο των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου στη σελίδα 124, το βιβλίο των Βαρουχάκη κ.α στη σελίδα 22 και το βιβλίο των Ανδρεαδάκη κ.α. στη σελίδα 49, τις παρουσιάζει σαν δυνάμεις με ρητό εκθέτη. Ο όρος «κλασματικός εκθέτης» που χρησιμοποιεί ο Σακελλαρίου ανήκει στα «Παραδοσιακά Μαθηματικά». Τα «Νέα Μαθηματικά» καθιέρωσαν την αυστηρή διάκριση και τον ειδικό συμβολισμό των συνόλων $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ και είναι χαρακτηριστικό ότι στο βιβλίο των Ανδρεαδάκη κ.α., ενώ οι βασικές αρχές των

«Νέων Μαθηματικών» εγκαταλείπονται, η μοντέρνα ορολογία για τα σύνολα των αριθμών και οι συμβολισμοί τους διατηρούνται. Έμφαση δίνει το βιβλίο του Σακελλαρίου και το βιβλίο των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου στους αρνητικούς ρητούς εκθέτες με παραδείγματα. Στο σχολικό εγχειρίδιο των Βαρουχάκη κ.α. δεν υπάρχει κανένα ανάλογο παράδειγμα, ενώ στο σχολικό εγχειρίδιο των Ανδρεαδάκη κ.α. γίνεται αναφορά, με τη μορφή ενός μόνο παραδείγματος:

$$27^{-\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{27^{-4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^4}} = \frac{1}{3^4}$$

Το βιβλίο των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου στη σελίδα 125, αναφέρεται αναλυτικά και στις ιδιότητες των δυνάμεων δείχνοντας ότι ισχύουν και στις δυνάμεις με ρητό εκθέτη. Στο σχολικό εγχειρίδιο των Βαρουχάκη κ.α. στη σελίδα 84 υπάρχει σχετική αναφορά και απόδειξη της ιδιότητας για το γινόμενο δυνάμεων με ρητό εκθέτη, ενώ στο σχολικό εγχειρίδιο των Ανδρεαδάκη κ.α. υπάρχει σχετική αναφορά στη σελίδα 72. Αυτό συνέβαινε διότι τα βιβλία της Άλγεβρας που υποστήριζαν τη μεταρρύθμιση των «Νέων Μαθηματικών», δηλ. των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου και των Βαρουχάκη κ.α., προσπαθούσαν να μιμηθούν την αυστηρότητα των πανεπιστημιακών βιβλίων στα οποία όλες οι θεωρητικές προτάσεις αποδεικνύονται με απόλυτη λογική σειρά και αυστηρότητα.

Έπειτα στο βιβλίο του Σακελλαρίου στη σελίδα 171, περιγράφονται οι ρίζες μονωνύμων. Οι ρίζες των μονωνύμων βρίσκονται και στο επόμενο βιβλίο των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου στη σελίδα 120, ενώ στα επόμενα βιβλία των Βαρουχάκη κ.α. και των Ανδρεαδάκη κ.α. δεν υπάρχουν.

Στη συνέχεια το βιβλίο του Σακελλαρίου στη σελίδα 174, αναφέρεται στους ασύμμετρους αριθμούς κάτι που δεν συμβαίνει στα υπόλοιπα σχολικά εγχειρίδια. Στο βιβλίο των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου στη σελίδα 121 και στο βιβλίο των Βαρουχάκη κ.α. στη σελίδα 19 υπό μορφή παραδείγματος, αναφέρεται η απλοποίηση ρίζας και ν-οστής ρίζας ενώ στο βιβλίο του Σακελλαρίου και των Ανδρεαδάκη κ.α. δεν αναφέρεται.

Μια άλλη διαφορά είναι ότι στο βιβλίο των Βαρουχάκη κ.α. το κεφάλαιο ρίζες πραγματικών αριθμών ξεκινάει με το αξίωμα του κιβωτισμού στη σελίδα 7 και συνεχίζει με το αξίωμα του Αρχιμήδη, διαστήματα με άκρα το $+\infty$, $-\infty$, δεκαδικές προσεγγίσεις αριθμού, μέτρηση ευθύγραμμων τμημάτων, γινόμενο τμήματος επί πραγματικό αριθμό, λόγος δύο τμημάτων και μέτρηση τόξων ή γωνιών. Κάτι τέτοιο δεν το συναντάμε σε κανένα άλλο σχολικό εγχειρίδιο.

Τέλος στο βιβλίο των Βαρουχάκη κ.α. και των Ανδρεαδάκη κ.α., στο κεφάλαιο με τις ρίζες υπάρχει και η εξίσωση $\chi^{\nu}=\alpha$. Στο βιβλίο του Σακελλαρίου διδάσκεται στο κεφάλαιο VII με τίτλο «Εξισώσεις διώνυμοι» ενώ στο βιβλίο των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου διδάσκεται στο κεφάλαιο XIV στη σελίδα 190 με τίτλο «Διώνυμοι εξισώσεις». Στο σημερινό σχολικό εγχειρίδιο των Ανδρεαδάκη, από την αναμορφωμένη έκδοση του 2010 και μετά διδάσκεται σε ξεχωριστό κεφάλαιο των εξισώσεων, στην ενότητα «Η εξίσωση $\chi^{\nu}=\alpha$».

Ολοκληρώνοντας τις συγκρίσεις ως προς το περιεχόμενο πρέπει να αναφέρουμε ότι τα δύο πρώτα βιβλία, δηλαδή του Σακελλαρίου και των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου, ασχολούνται με ρίζες που το υπόρριζο είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, αφού η διδασκαλία των μιγαδικών αριθμών περιλαμβάνεται στα αντίστοιχα προγράμματα σπουδών και επομένως έχει νόημα η χρήση ριζών άρτιας τάξης με αρνητικά υπόρριζα, ενώ τα δύο τελευταία βιβλία των Βαρουχάκη κ.α. και των Ανδρεαδάκη κ.α., ασχολούνται μόνο με ρίζες που το υπόριζο είναι μη-αρνητικός αριθμός. Αξίζει να σημειωθεί ότι στο βιβλίο των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου μετά τις ιδιότητες ν-οστής ρίζας, στη σελίδα 120, έχει την εξής παρατήρηση:

> «**Αξιοσημείωτος παρατήρηση**: Τας ανωτέρας ιδιότητας εξετάσαμεν, υποθέτοντας θετικά τα υπόρριζα. Εάν όμως τα υπόριζα είναι σχετικοί αριθμοί απαιτείται ιδιαίτερα προσοχή κατά την εφαρμογήν των ιδιοτήτων τούτων, ως φαίνεται εις τα κάτωθι παραδείγματα.»

και ακολουθούν παραδείγματα με το υπόρριζο να είναι αρνητικός αριθμός, ν-οστής ρίζας άρτιας και περιττής τάξης. Ο διδακτικός στόχος που εξυπηρετούν τα συγκεκριμένα παραδείγματα, είναι να δείξει στον μαθητή ότι οι ιδιότητες των ριζών ισχύουν για αρνητικούς αριθμούς μόνο όταν ο δείκτης είναι περιττής τάξης.

Πίνακας 6: Πίνακας σύγκρισης περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων για τις ρίζες στην Άλγεβρα Α΄ Λυκείου.

Περιεχόμενο βιβλίου για ρίζες	Σακελλαρίου	Βαβαλέτσκος κ.α.	Βαρουχάκης κ.α.	Ανδρεαδάκης κ.α.
Υπόρριζο	Το σύνολο αναφοράς της μεταβλητής,	Το σύνολο αναφοράς της μεταβλητής,	Το σύνολο αναφοράς της μεταβλητής,	Το σύνολο αναφοράς της μεταβλητής,

	άρτιας και περιττής τάξεως ριζικών είναι το $\mathbb{R}$.	άρτιας και περιττής τάξεως ριζικών είναι το $\mathbb{R}$.	άρτιας και περιττής τάξεως ριζικών είναι το $\mathbb{R}^+$.	άρτιας και περιττής τάξεως ριζικών είναι το $\mathbb{R}^+$.
Επανάληψη έννοιας ρίζας από προηγούμενη τάξη	Δεν γίνεται.	Δεν γίνεται.	Γίνεται μια επανάληψη της τετραγωνικής ρίζας πριν την εισαγωγή στην ν-οστή ρίζα	Γίνεται μια επανάληψη της τετραγωνικής ρίζας πριν την εισαγωγή στην ν-οστή ρίζα
Ιδιότητες ριζών	Παρουσιάζονται οι ιδιότητες. (Από την 1η έκδοση του 1950 μέχρι και την 3η ο Σακελλαρίου ανέφερε ότι: $\sqrt{16}$ =±4, $\sqrt[5]{-32}$ = -2 και $\sqrt[3]{-8}$ = - $\sqrt[3]{8}$).	Παρουσιάζονται οι ιδιότητες. Αναφέρεται και η εξής ιδιότητα: «Εάν $\alpha > 0$ και $\nu = 2\kappa + 1$, ($\kappa \in \mathbb{N}$), τότε $\sqrt[\nu]{-\alpha} = -\sqrt[\nu]{\alpha}$»	Παρουσιάζονται οι ιδιότητες με μη-αρνητικό υπόρριζο.	Παρουσιάζονται οι ιδιότητες με μη-αρνητικό υπόρριζο.
Εύρεση γινομένου ή πηλίκο ριζικών με διαφορετικούς δείκτες	Η εύρεση γίνεται με Ε.Κ.Π.	Η εύρεση γίνεται με Ε.Κ.Π.	Η εύρεση γίνεται με Ε.Κ.Π.	Η εύρεση γίνεται με μετατροπή της ρίζας σε δύναμη με ρητό εκθέτη και στη συνέχεια εφαρμόζονται οι ιδιότητες δυνάμεων.
Απαλοιφή ριζών ή ν-οστής ρίζας από παρονομαστή	Παρουσιάζεται συνοπτικά πως απαλείφουμε την ρίζα ή τις ρίζες από τον παρονομαστή ενός κλάσματος.	Παρουσιάζεται αναλυτικά με πολλές και διαφορετικές μορφές που μπορεί να εμφανιστεί η ρίζα ή ρίζα ν-οστής τάξης στον παρονομαστή και την μεθοδολογία επίλυσης αυτών.	Παρουσιάζεται συνοπτικά πως απαλείφουμε την ρίζα ή τις ρίζες από τον παρονομαστή ενός κλάσματος.	Παρουσιάζεται συνοπτικά πως απαλείφουμε την ρίζα ή τις ρίζες από τον παρονομαστή ενός κλάσματος.
Δυνάμεις με ρητό εκθέτη	Παρουσιάζεται σαν δυνάμεις με	Παρουσιάζεται σαν δυνάμεις με	Παρουσιάζεται σαν δυνάμεις με	Παρουσιάζεται σαν δυνάμεις με

	εκθέτες κλασματικούς αριθμούς. Γίνεται πλήρης αναφορά σε αρνητικό κλασματικό εκθέτη και μεθοδολογία επίλυσης.	ρητό εκθέτη. Γίνεται πλήρης αναφορά σε αρνητικό ρητό εκθέτη και μεθοδολογία επίλυσης.	ρητό εκθέτη. Δεν γίνεται αναφορά σε αρνητικό ρητό εκθέτη.	ρητό εκθέτη. Γίνεται αναφορά σε αρνητικό ρητό εκθέτη και μεθοδολογία επίλυσης μόνο από ένα παράδειγμα.
Ρίζες μονωνύμων	Παρουσιάζονται οι ρίζες μονωνύμων.	Παρουσιάζονται οι ρίζες μονωνύμων.	Δεν παρουσιάζονται οι ρίζες μονωνύμων.	Δεν παρουσιάζονται οι ρίζες μονωνύμων.
Ρίζες στους φανταστικούς και μιγαδικούς αριθμούς	Αναφέρεται στις ρίζες σε φανταστικούς και μιγαδικούς αριθμούς στο κεφάλαιο των ριζών.	Αναφέρεται στις ρίζες σε φανταστικούς και μιγαδικούς αριθμούς, όχι στο κεφάλαιο με τις ρίζες, αλλά στο κεφάλαιο XI με τίτλο «Μιγαδικοί αριθμοί».	Δεν αναφέρεται στους φανταστικούς ή μιγαδικούς αριθμούς.	Δεν αναφέρεται στους φανταστικούς ή μιγαδικούς αριθμούς.
Ασύμμετροι αριθμοί	Παρουσιάζεται η ασυμμετρία αριθμών.	Δεν παρουσιάζεται η ασυμμετρία αριθμών.	Δεν παρουσιάζεται η ασυμμετρία αριθμών.	Δεν παρουσιάζεται η ασυμμετρία αριθμών.
Απλοποίηση ρίζας και ν-οστής ρίζας	Δεν αναφέρεται στην απλοποίηση ρίζας.	Αναφέρεται στην απλοποίηση ρίζας.	Αναφέρεται στην απλοποίηση ρίζας.	Δεν αναφέρεται στην απλοποίηση ρίζας.
Αξίωμα κιβωτισμού, Αξίωμα Αρχιμήδη, διαστήματα με άκρα το +∞ και -∞, δεκαδικές προσεγγίσεις αριθμού, μέτρηση ευθύγραμμων τμημάτων, γινόμενο τμήματος επί	Δεν αναφέρονται.	Δεν αναφέρονται.	Αναφέρονται στο κεφάλαιο των ριζών πριν μπουν στον ορισμό της τετραγωνικής και ν-οστής ρίζας.	Δεν αναφέρονται.

πραγματικό αριθμό, λόγος δύο τμημάτων και μέτρηση τόξων ή γωνιών				
Εξίσωση $x^v = \alpha$	Παρουσιάζεται σε διαφορετικό κεφάλαιο από τις ρίζες, στο κεφάλαιο VII με τίτλο «Εξισώσεις διώνυμοι»	Παρουσιάζεται σε διαφορετικό κεφάλαιο από τις ρίζες, στο κεφάλαιο XIV με τίτλο «Διώνυμοι εξισώσεις».	Παρουσιάζεται στο κεφάλαιο ριζών.	Παρουσιάζεται στις ρίζες πραγματικών αριθμών. Από την αναμόρφωση του 2010 έως σήμερα παρουσιάζεται στο κεφάλαιο με τίτλο «Εξισώσεις».

3.4.2. ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ

Η σύγκριση των σχολικών εγχειριδίων στο κεφάλαιο των μεθόδων επίλυσης εξίσωσης με ριζικά θα γίνει με βάση την πρώτη έκδοση του κάθε σχολικού εγχειριδίου άλγεβρας της Α΄ Λυκείου και Β΄ Λυκείου από το 1950 έως και σήμερα και από εδώ και πέρα δεν θα αναφέρεται παρά μόνο αν χρειαστεί να γίνει σύγκριση με κάποια άλλη έκδοση. Θα γίνει στις δύο τάξεις του λυκείου γιατί ανά διαφορετικές χρονικές περιόδους το κεφάλαιο αυτό διδάσκεται άλλοτε στην Α΄ Λυκείου και άλλοτε στην Β΄ Λυκείου, όπως θα δούμε παρακάτω. Από το 1950 έως και το 1978 διδάσκονταν στο σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Λυκείου και από το 1979 έως και σήμερα διδάσκεται στην Β΄ Λυκείου.

Πιο συγκεκριμένα από το 1950 έως και το 1967 διδάσκονταν στην Δ΄ Γυμνασίου από το σχολικό εγχειρίδιο του Σακελλαρίου με 1η έκδοση αυτή του 1950 και με τελευταία την 9η έκδοση αυτή του 1966. Η ύλη του συγκεκριμένου κεφαλαίου ήταν ίδια σε όλες τις εκδόσεις. Διδάσκονταν στο κεφάλαιο VII στη σελίδα 224 με τίτλο «Εξισώσεις με ριζικά Β΄ και ανωτέρας της Β΄ τάξεως». Σε αυτό το σχολικό εγχειρίδιο περιγράφεται πώς λύνεται μια εξίσωση με ριζικά Β΄ τάξεως της μορφής:

$\sqrt{A(\chi)} = B(\chi)$, $\sqrt{A(\chi)} + \sqrt{B(\chi)} = \Gamma$ και $\sqrt{A(\chi)} + \sqrt{B(\chi)} + \sqrt{\Gamma(\chi)} = 0$.

Και στις τρείς μεθόδους ο τρόπος επίλυσής τους γίνεται υψώνοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο για να απαλειφθούν οι ρίζες. Αν συνεχίσει να υπάρχει ρίζα επαναλαμβάνει την διαδικασία. Έπειτα λύνει την εξίσωση που προκύπτει και αντικαθιστά τις λύσεις στην αρχική εξίσωση για να επαληθεύσει ποιες λύσεις ικανοποιούν την αρχική εξίσωση. Την λύση που δεν ικανοποιεί την αρχική εξίσωση την απορρίπτει. Ένα παράδειγμα από το βιβλίο είναι το ακόλουθο: $5-\chi=\sqrt{\chi-5}$. Υψώνει και τα δύο μέλη στο τετράγωνο: $(5-\chi)^2=\chi-5$ έπειτα μετά από πράξεις φτάνει στο $(\chi-5)(\chi-6)=0$ και βρίσκει σαν ρίζες τις εξίσωσης το $\chi=5$ και το $\chi=6$. Στην συνέχεια αντικαθιστά τις λύσεις που βρήκε στην αρχική όπου την επαληθεύει μόνο η $\chi=5$, ενώ για την $\chi=6$ αναφέρει ότι είναι ρίζα μιας εξίσωσης που έχει αντίθετο δεύτερο μέλος από τη δοθείσα. Η διδακτική σκοπιμότητα αυτής της αναφοράς, έχει να κάνει με το γεγονός ότι ο Σακελλαρίου, στον ορισμό του δίνει δύο ρίζες για κάθε θετικό αριθμό άρτιας τάξεως. Όπως είδαμε στις ιδιότητες των ριζών, ορίζει ότι κάθε θετικός αριθμός έχει δύο ρίζες άρτιας τάξεως και είναι αντίθετοι μεταξύ τους, οπότε η δεύτερη λύση θα ικανοποιεί μια άλλη εξίσωση όπου το δεύτερο μέλος της θα είναι το αντίθετο του δεύτερου μέλους της αρχικής. Για τις εξισώσεις με ριζικά ανωτέρας της Β΄ τάξεως παραθέτει κατευθείαν και το μοναδικό παράδειγμα που υπάρχει στο συγκεκριμένο σχολικό εγχειρίδιο, το $\sqrt[4]{\chi-3}+\chi+3=\chi+5$. Απομονώνει το ριζικό στο ένα μέλος και βρίσκει ότι $\sqrt[4]{\chi-3}=2$. Έπειτα υψώνει και τα δύο μέλη στην 4η δύναμη και βρίσκει ότι $\chi-3=16 \Rightarrow \chi=19$. Έπειτα αντικαθιστά τη λύση στην αρχική εξίσωση όπου την επαληθεύει.

Στην συνέχεια από το 1968 έως και το 1978, οι μέθοδοι επίλυσης εξίσωσης με ριζικά διδάσκονταν πάλι στην Δ΄ Γυμνασίου από το σχολικό εγχειρίδιο των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου, με 1η έκδοση αυτή του 1968 και με τελευταία την 4η έκδοση αυτή του 1972. Η ύλη του συγκεκριμένου κεφαλαίου είναι ίδια σε όλες τις εκδόσεις. Διδάσκεται στο κεφάλαιο XIV με τίτλο «Εξισώσεις αναγόμεναι με ριζικά δευτέρας και ανωτέρας τάξεως» στη σελίδα 192. Στο συγκεκριμένο σχολικό εγχειρίδιο τονίζεται ότι η μέθοδος επίλυσης εξισώσεων με ριζικά θα γίνεται στο σύνολο $\mathbb{R}$. Για κάθε μορφή που παραθέτει δίνει μια τυποποιημένη μεθοδολογία για το πώς θα πρέπει να λυθεί. Ξεκινάει με μια εξίσωση της μορφής $\sqrt{A(\chi)}=B(\chi)$. Η μεθοδολογία που χρησιμοποιείται στο βιβλίο του Βαβαλέτσκου κ.α. είναι διαφορετική από αυτή του προηγούμενου βιβλίου. Αρχικά παίρνει περιορισμούς. Πρέπει το $A(\chi)\geq 0$ και το $B(\chi)\geq 0$ και βρίσκει τις κοινές λύσεις των δύο περιορισμών. Έπειτα λύνει την εξίσωση υψώνοντας στο τετράγωνο, βρίσκει την λύση ή τις λύσεις και ελέγχει αν ικανοποιούν την κοινή λύση των δύο περιορισμών. Έτσι κρατάει ή απορρίπτει τις λύσεις της εξίσωσης που βρήκε. Ένα παράδειγμα για αυτή τη μορφή που δίνεται είναι το $2\chi - 3 = \sqrt{\chi^2 - 2\chi + 6}$. Παίρνει αρχικά τον περιορισμό από το υπόρριζο, δηλαδή $\chi^2 - 2\chi + 6 \geq 0$. Η διακρίνουσά του είναι αρνητική, άρα για όλο το $\mathbb{R}$ το $\chi^2 - 2\chi + 6 \geq 0$ αφού ο όρος χ^2 έχει θετικό συντελεστή. Έπειτα παίρνει περιορισμό για το $2\chi - 3 \geq 0 \Rightarrow \chi \geq \frac{3}{2}$. Η κοινή λύση των δύο περιορισμών είναι το $\chi \geq \frac{3}{2}$. Στη συνέχεια λύνει την εξίσωση υψώνοντας τα δύο μέλη στο τετράγωνο και βρίσκει $(2\chi - 3)^2 = \chi^2 - 2\chi + 6$. Μετά από πράξεις βρίσκει δύο ρίζες την $\chi_1 = 3$ και την $\chi_2 = \frac{1}{3}$. Τη χ_1 =3 την δέχεται σαν λύση, ενώ την $\chi_2 = \frac{1}{3}$ την απορρίπτει λόγω του περιορισμού $\chi \geq \frac{3}{2}$. Έπειτα παρουσιάζει την εξίσωση της μορφής $\sqrt{A(\chi)} + \sqrt{B(\chi)} = \Gamma(\chi)$, όπου βάση της μεθοδολογίας που παραθέτει για αυτή τη μορφή, πρέπει πρώτα να πάρει τους περιορισμούς $A(\chi) \geq 0$, $B(\chi) \geq 0$, $\Gamma(\chi) \geq 0$ και $\Gamma(\chi)^2 - A(\chi) - B(\chi) \geq 0$. Στη συνέχεια εξηγεί παράλληλα σε μορφή απόδειξης, τους λόγους που παίρνει αυτούς τους περιορισμούς και έπειτα λύνει την εξίσωση υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο, όσες φορές χρειαστεί. Τέλος δέχεται την λύση που ικανοποιεί τον περιορισμό και απορρίπτει αυτή που δεν τον ικανοποιεί. Αμέσως μετά από τη μεθοδολογία επίλυσης αυτής της μορφής παραθέτει ένα παράδειγμα. Η τελευταία μορφή που παρουσιάζεται και έχει ενδιαφέρον είναι η $\sqrt{A(\chi)} + \sqrt{B(\chi)} = \sqrt{\Gamma(\chi)}$. Κατά τον ίδιο τρόπο παίρνει πρώτα τους περιορισμούς $A(\chi) \geq 0$, $B(\chi) \geq 0$, $\Gamma(\chi) \geq 0$ και $\Gamma(\chi) - [A(\chi) + B(\chi)] \geq 0$ εξηγώντας παράλληλα τον λόγο που πήρε αυτούς τους περιορισμούς σε μορφή απόδειξης. Στην συνέχεια υψώνει στο τετράγωνο και τα δύο μέλη, όσες φορές χρειαστεί, για να βρει την λύση ή τις λύσεις και δέχεται αυτή που ικανοποιεί την κοινή λύση των περιορισμών, ενώ την άλλη την απορρίπτει. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι σε αυτού του τύπου ασκήσεων, παίρνει και μια δεύτερη περίπτωση που τα $A(\chi) \leq 0$, $B(\chi) \leq 0$, $\Gamma(\chi) \leq 0$ και $A(\chi) + B(\chi) - \Gamma(\chi) \geq 0$ και παραθέτει παρόμοια μεθοδολογία σε μορφή απόδειξης. Ακολουθεί στη συνέχεια ένα παράδειγμα αυτής της μορφής το οποίο είναι το $\sqrt{\chi - 8} + \sqrt{\chi - 5} = \sqrt{3\chi - 21}$. Ακολουθώντας την μεθοδολογία βρίσκει δύο ρίζες την $\chi_1 = 8$ και την $\chi_2 = 4$. Στην πρώτη περίπτωση που το $\chi - 8 \geq 0$, $\chi - 5 \geq 0$ και $3\chi - 21 \geq 0$ η $\chi_1 = 8$ ικανοποιεί τους περιορισμούς και στην δεύτερη περίπτωση που το $\chi - 8 \leq 0$, $\chi - 5 \leq 0$ και $3\chi - 21 \leq 0$ η $\chi_2 = 4$ πάλι ικανοποιεί τους περιορισμούς και είναι δεκτή. Άρα καταλήγει ότι και οι δύο λύσεις είναι δεκτές στο $\mathbb{R}$.

Αυτό γίνεται διότι εκείνη την περίοδο, όπως αναφέραμε και στις ρίζες, οι μιγαδικοί αριθμοί ήταν ενταγμένοι στα προγράμματα σπουδών της Δ΄ Γυμνασίου, επιτρέποντας έτσι τη χρήση ριζών με αρνητικά υπόρριζα. Οι Βαβαλέτσκος & Μπούσγος, αξιοποίησαν αυτό το γεγονός με τη δημιουργία δύσκολων εξισώσεων με ριζικά σε σχέση με τον Σακελλαρίου. Αν το τελευταίο παράδειγμα που είδαμε από το βιβλίο των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου, υπήρχε στα επόμενα σχολικά εγχειρίδια των Βαρουχάκη κ.α. και των Ανδρεαδάκη κ.α., θα δεχόντουσαν σαν λύση μόνο τη $\chi_1 = 8$, διότι από τη στιγμή που τα σχολικά εγχειρίδια προηγούμενων τάξεων περιέχουν μόνο ρίζες με μη-αρνητικό υπόριζο, η μέθοδος επίλυσης εξισώσεων με ριζικά δεν γίνεται στο σύνολό $\mathbb{R}$, αλλά στο $\mathbb{R}^+$. Αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα για το πώς συνδέονται στενά η έννοια «ρίζες» και η έννοια «μέθοδοι επίλυσης με ριζικά» και ο λόγος επιλογής τους.

Επιστρέφουμε στο σχολικό εγχειρίδιο των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου, όπου συνεχίζει στις εξισώσεις με ριζικά ανωτέρας της Β΄ τάξης, παραθέτοντας κατευθείαν τρία παραδείγματα, δύο με ριζικά τρίτης τάξης και ένα με ριζικά τέταρτης τάξης, όπου η μεθοδολογία που ακολουθεί είναι η ίδια με προηγουμένως. Παίρνει πρώτα τους περιορισμούς και στην συνέχεια αφού απομονώσει τα ριζικά στο πρώτο μέλος, υψώνει με κατάλληλη δύναμη και τα δύο μέλη της εξίσωσης για να διώξει τα ριζικά. Έπειτα επιλέγει μόνο τις λύσεις που ικανοποιούν τους περιορισμούς.

Στην συνέχεια από το 1983 έως και το 1990, οι μέθοδοι επίλυσης εξίσωσης με ριζικά διδάσκονταν στην Β΄ Λυκείου από το σχολικό εγχειρίδιο των Βαρουχάκη κ.α. με 1η έκδοση αυτή του 1983 και με τελευταία την 6η έκδοση αυτή του 1988. Διδάσκεται στο κεφάλαιο 1 με τίτλο «Πολυωνυμικές εξισώσεις» στη παράγραφο «Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές» στη σελίδα 22. Εξηγεί ότι υπάρχουν εξισώσεις που δεν είναι πολυωνυμικές, αλλά η επίλυσή τους ανάγεται στην επίλυση μιας πολυωνυμικής εξίσωσης. Στη συνέχεια χωρίς καμία μεθοδολογία παραθέτει δύο μόνο παραδείγματα για τις μεθόδους εξισώσεων με ριζικά, τα $\sqrt{2\chi^2 - 1} - \chi = \chi - 3$ και το $\sqrt{2\chi + 1} - \sqrt{\chi} = 1$, όπου τα λύνει με τον ίδιο τρόπο που είδαμε στο προηγούμενο σχολικό εγχειρίδιο των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου, παίρνοντας πρώτα τους περιορισμούς, υψώνοντας στη συνέχεια στο τετράγωνο τα δύο μέλη και απορρίπτει τη λύση που δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς. Αυτή είναι η ύλη των μεθόδων επίλυσης με ριζικά, χωρίς να γίνεται καμία αναφορά σε άλλες μεθόδους Β΄ τάξης ή μεγαλύτερης της Β΄ τάξης, όπως είδαμε στα προηγούμενα σχολικά εγχειρίδια, μειώνοντας έτσι την ύλη σημαντικά. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι στη σελίδα 25 όπου παρατίθενται οι ασκήσεις του βιβλίου, καλείται ο μαθητής να λύσει την άσκηση 23, όπου υπάρχει εξίσωση με ριζικά Β΄ τάξης, μορφής που δεν έχει αναφερθεί προηγουμένως, καθώς και εξίσωση με ριζικά τρίτης τάξης.

Στην συνέχεια από το 1991 έως και σήμερα, οι μέθοδοι επίλυσης εξίσωσης με ριζικά διδάσκονταν στην Β΄ Λυκείου από το σχολικό εγχειρίδιο των Ανδρεαδάκη κ.α. με 1η έκδοση αυτή του 1991 και στη συνέχεια από την αναμορφωμένη έκδοση αυτή του 2010. Στην πρώτη έκδοση διδάσκονταν στην ενότητα 2.2 «Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές» στη σελίδα 65 και στην αναμορφωμένη έκδοση διδάσκεται στη ενότητα 4.4 «Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές» στη σελίδα 150. Εξηγεί ότι υπάρχουν εξισώσεις που δεν είναι πολυωνυμικές, αλλά η επίλυσή τους ανάγεται στην επίλυση μιας πολυωνυμικής εξίσωσης. Στη συνέχεια χωρίς καμία μεθοδολογία παραθέτει τρία μόνο παραδείγματα για τις μεθόδους εξισώσεων με ριζικά Β΄ τάξης και κανένα παράδειγμα για εξισώσεις με ριζικά μεγαλύτερης της Β΄ τάξης. Τα παραδείγματα αυτά είναι τα $\sqrt{\chi} = \chi - 2$, το $\sqrt{2\chi + 7} - \chi = 2$, και το $\sqrt{2\chi + 6} - \sqrt{\chi + 4} = 1$. Στο πρώτο παράδειγμα αναφέρει ότι η εξίσωση ορίζεται για $\chi \geq 0$, παίρνοντας περιορισμό μόνο για την υπόριζη ποσότητα. Η μη επιλογή περιορισμού και για το δεύτερο μέρος της εξίσωσης, δηλαδή $\chi - 2 \geq 0$, είναι μια παράλειψη, καθώς μια μη-αρνητική ποσότητα δεν μπορεί να είναι ίση με μια αρνητική. Λέγοντας ότι πρέπει και το $\chi - 2 \geq 0$ θα κατέληγε στο $\chi \geq 2$. Άρα η εξίσωση θα οριζόταν για $\chi \geq 2$ και όχι για $\chi \geq 0$ όπως αναφέρει. Έπειτα λύνει την εξίσωση με τον κλασσικό τρόπο που είδαμε, υψώνοντας στο τετράγωνο και τα δύο μέλη και καταλήγει στις λύσεις $\chi_1 = 1$ και την $\chi_2 = 4$. Ο τρόπος που επιλέγει τη σωστή λύση είναι διαφορετικός από αυτόν που παρουσιάζεται στο σχολικό εγχειρίδιο των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου και των Βαρουχάκη κ.α. και είναι ίδιος με αυτόν του σχολικού εγχειριδίου του Σακελλαρίου, δηλαδή αντικαθιστά τις λύσεις στην αρχική εξίσωση και δέχεται αυτή που την ικανοποιεί, απορρίπτοντας την άλλη. Αυτό το κάνει διότι πριν φτάσει στην αντικατάσταση των λύσεων στην αρχική, σχολιάζει ότι παρότι και οι δύο λύσεις $\chi_1 = 1$ και $\chi_2 = 4$ ικανοποιούν τον περιορισμό $\chi \geq 0$, με αντικατάσταση των δύο λύσεων παρατηρούμε ότι μόνο η $\chi_2 = 4$ ικανοποιεί την αρχική εξίσωση, ενώ η $\chi_1 = 1$ όχι. Και εδώ φαίνεται το λάθος που ειπώθηκε αρχικά, ότι δηλαδή η εξίσωση ορίζεται για $\chi \geq 0$. Αν έπαιρνε περιορισμό και για το δεύτερο μέλος θα λέγαμε ότι η εξίσωση ορίζεται για $\chi \geq 2$, άρα η $\chi_1 = 1$

απορρίπτεται και η $\chi_2 = 4$ είναι δεκτή. Κατά τον ίδιο τρόπο λύνει και τα άλλα δύο παραδείγματα, παίρνοντας περιορισμούς μόνο για τις υπόριζες ποσότητες, υψώνει στην συνέχεια τετράγωνα και στα δύο μέλη της εξίσωσης και με αντικατάσταση των λύσεων στην αρχική, απορρίπτει αυτή που δεν ικανοποιεί την αρχική εξίσωση.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σχολιαστούν και να συγκριθούν οι δύο τρόποι επίλυσης των εξισώσεων με ριζικά. Ο πρώτος τρόπος, που εφαρμόζεται στα σχολικά εγχειρίδια του Σακελλαρίου και των Ανδρεαδάκη κ.α., αντικαθιστώντας τις λύσεις που βρήκαν στην αρχική εξίσωση για να τις δεχτούν ή να τις απορρίψουν. Και ο δεύτερος τρόπος που εφαρμόζεται στα σχολικά εγχειρίδια των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου και των Βαρουχάκη κ.α., που παίρνουν πρώτα περιορισμούς και στην συνέχεια δέχονται τις λύσεις που ικανοποιούν τους περιορισμούς και απορρίπτουν τις λύσεις που δεν τους ικανοποιούν. Σαφέστατα ο πρώτος τρόπος είναι ευκολότερος και γρηγορότερος από τον δεύτερο τρόπο, μιας και ο μαθητής θα κάνει λιγότερες πράξεις αφού δεν θα χρειαστεί να βρει τους περιορισμούς, αλλά αυτό συμβαίνει μόνο στην περίπτωση που οι λύσεις της εξίσωσης που θα βρουν οι μαθητές είναι «βολικοί» αριθμοί. Σε διαφορετική περίπτωση, οι μαθητές δεν θα μπορούν να καταλάβουν ποια λύση ικανοποιεί την αρχική και ποια όχι. Ένα παράδειγμα είναι το ακόλουθο: $\sqrt{\chi} = \chi - 3$. Αν δεν πάρουμε περιορισμούς και επιχειρήσουμε να την λύσουμε με τον πρώτο τρόπο θα έχουμε ότι $\chi = (\chi - 3)^2$ και λύνοντας αυτή την εξίσωση θα βρούμε δύο λύσεις την $\chi_1 = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$ και $\chi_2 = \frac{7-\sqrt{13}}{2}$. Πηγαίνοντας τώρα να αντικαταστήσουμε τις δύο λύσεις στην αρχική εξίσωση θα έχουμε για την πρώτη λύση: $\sqrt{\frac{7+\sqrt{13}}{2}} = \frac{7+\sqrt{13}}{2} - 3$ και για τη δεύτερη λύση: $\sqrt{\frac{7-\sqrt{13}}{2}} = \frac{7-\sqrt{13}}{2} - 3$. Όπως βλέπουμε είναι δύσκολο να μπορέσουμε με αντικατάσταση να βρούμε ποια λύση ικανοποιεί την αρχική εξίσωση και ποια όχι. Αν την λύναμε όμως με τον δεύτερο τρόπο, θα παίρναμε τους περιορισμούς $\chi \geq 0$ και $\chi \geq 3$, άρα η κοινή λύση των περιορισμών θα ήταν η $\chi \geq 3$. Πηγαίνοντας στις λύσεις που βρήκαμε μπορούμε να υπολογίσουμε ακόμα και νοερά ότι το $\sqrt{13}$ είναι μεταξύ του αριθμού 3 και 4 αφού $\sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16} \Leftrightarrow 3 < \sqrt{13} < 4$.

Άρα το $\chi_1 = \frac{7+\sqrt{13}}{2} \cong \frac{7+3}{2} = 5$ ή $\chi_1 = \frac{7+\sqrt{13}}{2} \cong \frac{7+4}{2} = \frac{11}{2}$. Σε κάθε περίπτωση και οι δύο λύσεις ικανοποιούν τον περιορισμό $\chi \geq 3$. Και το $\chi_2 = \frac{7-\sqrt{13}}{2} \cong \frac{7-3}{2} = 2$ ή $\chi_2 =$

$\frac{7-\sqrt{13}}{2} \cong \frac{7-4}{2} = \frac{3}{2}$ που σε κάθε περίπτωση δεν ικανοποιεί τον περιορισμό $\chi \geq 3$ άρα η $\chi_2 = \frac{7-\sqrt{13}}{2}$ απορρίπτεται. Βλέπουμε άρα ότι, όταν οι λύσεις δεν είναι «βολικοί» αριθμοί δεν μπορούμε να βρούμε ποια λύση θα δεχτούμε και ποια θα απορρίψουμε με τον πρώτο τρόπο. Άρα ο πιο αποτελεσματικός τρόπος για να επιλύνουμε εξισώσεις με ριζικά είναι ο δεύτερος τρόπος που εφαρμόζεται στα σχολικά εγχειρίδια των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου και των Βαρουχάκη κ.α. με τον οποίον παίρνουμε πρώτα περιορισμούς. Τα βιβλία των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου και των Βαρουχάκη κ.α. χρησιμοποιούν στην επίλυση των εξισώσεων με ριζικά τη μέθοδο των περιορισμών επειδή υποστηρίζουν τα προγράμματα των «Νέων Μαθηματικών», που έδιναν έμφαση στη χρήση της μαθηματικής λογικής. Το βιβλίο του Σακελλαρίου είχε γραφεί πριν τη μεταρρύθμιση των «Νέων Μαθηματικών», ενώ των Ανδρεαδάκη κ.α. υποστηρίζει ένα πρόγραμμα που ακύρωσε αυτή τη μεταρρύθμιση των «Νέων Μαθηματικών», οπότε υιοθετούν μια πιο απλή προσέγγιση στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Πίνακας 7: Πίνακας περιεχομένου των σχολικών βιβλίων της Α΄ και Β΄ Λυκείου για τις μεθόδους επίλυσης εξισώσεων με ριζικά.

Περιεχόμενο βιβλίων για τις μεθόδους επίλυσης με ριζικά.	**Σακελλαρίου (Α΄ Λυκείου)**	**Βαβαλέτσκος κ.α. (Α΄ Λυκείου)**	**Βαρουχάκης κ.α. (Β΄ Λυκείου)**	**Ανδρεαδάκης κ.α. (Β΄ Λυκείου)**
Σύνολο στο οποίο επιλύονται οι εξισώσεις με ριζικά.	Οι μιγαδικοί αριθμοί ήταν ενταγμένοι στα προγράμματα σπουδών, επιτρέποντας έτσι τη χρήση ριζών με αρνητικά υπόρριζα.	Οι μιγαδικοί αριθμοί ήταν ενταγμένοι στα προγράμματα σπουδών, επιτρέποντας έτσι τη χρήση ριζών με αρνητικά υπόρριζα.	Οι μιγαδικοί αριθμοί δεν ήταν ενταγμένοι στα προγράμματα σπουδών, μη επιτρέποντας έτσι τη χρήση ριζών με αρνητικά υπόρριζα.	Οι μιγαδικοί αριθμοί δεν ήταν ενταγμένοι στα προγράμματα σπουδών, μη επιτρέποντας έτσι τη χρήση ριζών με αρνητικά υπόρριζα.
Τάξη ριζικών	Εξισώσεις με ριζικά Β΄ τάξης και ανώτερης της Β΄ τάξης.	Εξισώσεις με ριζικά Β΄ τάξης και ανώτερης της Β΄ τάξης.	Εξισώσεις με ριζικά Β΄ τάξης.	Εξισώσεις με ριζικά Β΄ τάξης.
Μορφές των εξισώσεων που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία	$\sqrt{A(\chi)} = B(\chi)$ $\sqrt{A(\chi)}+\sqrt{B(\chi)}=\Gamma$ $\sqrt{A(\chi)} + \sqrt{B(\chi)} + \sqrt{\Gamma(\chi)}=0$	$\sqrt{A(\chi)} = B(\chi)$ $\sqrt{A(\chi)} + \sqrt{B(\chi)} = \Gamma(\chi)$ $\sqrt{A(\chi)}+\sqrt{B(\chi)}=\sqrt{\Gamma(\chi)}$ $\sqrt[3]{A(\chi)} = B(\chi)$	$\sqrt{A(\chi)} = B(\chi)$ $\sqrt{A(\chi)}+\sqrt{B(\chi)}=\Gamma$	$\sqrt{A(\chi)} = B(\chi)$ $\sqrt{A(\chi)}+\sqrt{B(\chi)}=\Gamma$

	$\sqrt[4]{A(\chi)} = B$	$\sqrt[4]{A(\chi)} = B(\chi)$ $\sqrt[3]{A(\chi)} + \sqrt[3]{B(\chi)} + \sqrt[3]{\Gamma(\chi)} = 0$		
Τρόπος που δεχόμαστε ή απορρίπτουμε τις λύσεις.	Με αντικατάσταση των λύσεων στην αρχική εξίσωση.	Παίρνοντας στην αρχή περιορισμούς και επαληθεύοντας τις λύσεις με τους περιορισμούς	Παίρνοντας στην αρχή περιορισμούς και επαληθεύοντας τις λύσεις με τους περιορισμούς	Με αντικατάσταση των λύσεων στην αρχική εξίσωση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα επιχειρήσουμε να ανακεφαλαιώσουμε τα αποτελέσματα της έρευνάς μας, που είχε αντικείμενο τη μελέτη και σύγκριση προγραμμάτων σπουδών και σχολικών εγχειριδίων Άλγεβρας στην Ελληνική εκπαίδευση τις τελευταίες δεκαετίες. Θα εκθέσουμε αυτά τα αποτελέσματα ως απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα που διατυπώσαμε στην εισαγωγή αλλά και ως προτάσεις για μελλοντική έρευνα. Τα συμπεράσματα των ερευνητικών ερωτημάτων που έχουν τεθεί στην παρούσα εργασία είναι τα ακόλουθα:

1) Ποια η σχέση προγραμμάτων σπουδών και διδακτικών βιβλίων άλγεβρας στην Ελλάδα;

- Υπάρχει χρονική ανακολουθία μεταξύ Προγραμμάτων Σπουδών και διδακτικών βιβλίων. Έτσι παρατηρείται ότι από το 1960, που δημοσιεύτηκε το πρώτο Πρόγραμμα Σπουδών που μελετάμε στην παρούσα εργασία, μέχρι και τα τελευταία Προγράμματα Σπουδών[7], να κυκλοφορούν με μορφή ανάθεσης, πρώτα τα σχολικά εγχειρίδια τα οποία έχουν σαν οδηγό ένα πρόχειρο προσχέδιο του Προγράμματος Σπουδών. Αυτά τα Προγράμματα Σπουδών, δημοσιεύονται μετά από μερικά χρόνια, ενώ θα έπρεπε πρώτα να δημοσιεύεται το Πρόγραμμα Σπουδών και στην συνέχεια με μορφή διαγωνισμού να γίνεται η συγγραφή διδακτικών εγχειριδίων. Τέτοια

[7] Πλην του Προγράμματος Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων Γενικού Λυκείου, Φ.Ε.Κ. Β΄ 5390 (19 Νοεμβρίου 2021) και Υπουργικής Απόφασης 145377/Δ2. Αυτό το Πρόγραμμα Σπουδών θα χρησιμοποιηθεί για την προκήρυξη του διαγωνισμού συγγραφής των νέων σχολικών βιβλίων.

παραδείγματα είναι για την Α΄ Λυκείου αυτά των σχολικών εγχειριδίων των Βαβαλέτσκου & Μπούσγου το 1968 που είχαν σαν πρότυπο ένα προσχέδιο του Προγράμματος Σπουδών το οποίο δημοσιεύτηκε το 1969 και των Ανδρεαδάκη κ.α. το 1990 που είχαν σαν πρότυπο ένα προσχέδιο του Προγράμματος Σπουδών όπου δημοσιεύτηκε το 1993. Για την Β΄ Λυκείου το 1968 διδάσκεται το σχολικό εγχειρίδιο του Ντζίωρα για τα τμήματα της πρακτικής κατεύθυνσης και είχε σαν πρότυπο ένα προσχέδιο του Προγράμματος Σπουδών του 1969. Επίσης το 1979 διδάσκεται το σχολικό εγχειρίδιο του Ντζίωρα & Πανάκη ως ύλη κορμού και του Ιορδανίδη από το 1978 για τα τμήματα κατεύθυνσης, τα οποία είχαν σαν πρότυπο ένα ανεπίσημο προσχέδιο του Προγράμματος Σπουδών του 1980. Το σχολικό εγχειρίδιο του Βαρουχάκη κ.α. το οποίο διδάσκεται από το 1983 και είχε σαν πρότυπο ένα ανεπίσημο προσχέδιο του Προγράμματος Σπουδών του 1985. Τέλος το 1991 διδάσκεται το σχολικό εγχειρίδιο του Ανδρεαδάκη κ.α. το οποίο είχε σαν πρότυπο ένα ανεπίσημο προσχέδιο του Προγράμματος Σπουδών του 1993.

- Ίδιο σχολικό εγχειρίδιο για διαφορετικά Προγράμματα Σπουδών. Αν εξαιρέσουμε την χρονιά του 1979, όπου για πρώτη φορά δημιουργείται σχολικό εγχειρίδιο πού βασίζεται πάνω στις ανάγκες του προγράμματος σπουδών, καθώς το σχολικό εγχειρίδιο συντάχθηκε μετά το πρόγραμμα σπουδών, όλες τις υπόλοιπες χρονιές, αλλάζανε τα Προγράμματα Σπουδών, αλλά τα σχολικά εγχειρίδια παρέμεναν ίδια. Μια τέτοια περίπτωση ήταν και αυτή του Προγράμματος Σπουδών του 1999, το οποίο απαιτούσε τη συγγραφή νέων βιβλίων Άλγεβρας για την Α΄ και Β΄ Λυκείου, καθώς υπήρχε ασυμβατότητα των περιεχομένων των σχολικών βιβλίων με τις καινοτομίες της εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης σύμφωνα με το πρόγραμμα Σπουδών του 1999. Αντιθέτως διατηρήθηκαν τα βιβλία των Ανδρεαδάκη κ.α. και στις δύο πρώτες τάξεις του Λυκείου, που είχαν εκδοθεί το 1990 και το 1991 για την Α΄ και την Β΄ τάξη του Λυκείου αντίστοιχα και τα οποία είχαν σαν οδηγό το Πρόγραμμα Σπουδών του 1993. Το ίδιο ισχύει και για το πρόγραμμα σπουδών της Α΄ Λυκείου του 2011. Έτσι το σχολικό εγχειρίδιο του Ανδρεαδάκη κ.α. διατηρείται επί 32 χρόνια είτε αναλλοίωτο, είτε με αναμορφώσεις παρά το γεγονός ότι αλλάζει ενδιάμεσα το αντίστοιχο Πρόγραμμα Σπουδών.

- Ενώ τα Προγράμματα Σπουδών έθεταν σαν στόχο από το 1979 να ασκηθεί ο μαθητής, ώστε να χρησιμοποιεί τα Μαθηματικά όχι μόνο ως γνώση, αλλά και ως μέθοδο σκέψεως και πράξεως στην καθημερινή πρακτική και να φέρει τον μαθητή σε επαφή με ποικίλα θέματα εφαρμογών των μαθηματικών που συνδέονται με τις άλλες επιστήμες και τη σύγχρονη πραγματικότητα, αυτό δεν παρατηρείται στις εφαρμογές και στις ασκήσεις των σχολικών εγχειριδίων, παρά μόνο στο τελευταίο σχολικό εγχειρίδιο των Ανδρεαδάκη κ.α..

- Τα Προγράμματα Σπουδών «ερχόντουσαν» για να συμβαδίζουν με τα περιεχόμενα των σχολικών εγχειριδίων. Παρατηρείται λοιπόν, ότι ενώ υπάρχει ένα Πρόγραμμα Σπουδών που είναι σε ισχύ, την δημιουργία ενός σχολικού εγχειριδίου με διαφορετικά περιεχόμενα από ότι ορίζει το ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών και μετά από κάποια χρόνια, άλλαζε το Πρόγραμμα Σπουδών, όπου και συμβάδιζε με τα περιεχόμενα του σχολικού εγχειριδίου. Στην συνέχεια μετά από λίγα χρόνια άλλαζαν και πάλι τα σχολικά εγχειρίδια και τα περιεχόμενα τους, με την κυκλοφορία των αντίστοιχων Προγραμμάτων Σπουδών να έπεται της αλλαγής των σχολικών εγχειριδίων, εξαιτίας της ανάθεσης συγγραφής του νέου σχολικού εγχειριδίου χωρίς να έχει δημοσιευτεί επίσημα το νέο Πρόγραμμα Σπουδών. Αποτέλεσμα αυτού είναι να έχει δημιουργηθεί ένας φαύλος κύκλος, όπου η δημοσίευση των νέων Προγραμμάτων Σπουδών έπονται της συγγραφής των αντίστοιχων σχολικών εγχειριδίων.

- Αναντιστοιχία διδακτέας ύλης και αντίστοιχών ωρών διδασκαλίας. Οι ώρες που ορίζονταν από τα Προγράμματα Σπουδών και τις Οδηγίες Διδασκαλίας ήταν πολύ λίγες σε σχέση με τη διδακτέα ύλη. Οι καθηγητές καλούνταν να καλύψουν σε λίγες ώρες πολλά διαφορετικά κομμάτια της ύλης. Το πρόβλημα αυτό διαφαίνεται εντονότερα στο σχολικό εγχειρίδιο του Ανδρεαδάκη κ.α. της Α΄ Λυκείου, όπως είδαμε στην παρούσα εργασία, όπου οδήγησε τελικά στη δραστική μείωση των σελίδων από τις 220 στις 177 και στην δραστική μείωση διδακτικών ωρών αρχικά από τις 84 στις 54.

- Όλα τα παραπάνω έρχονται να αλλάξουν με το Πρόγραμμα Σπουδών του 2021, όπου ήδη εφαρμόζεται πιλοτικά σε όλα τα Πρότυπα και Πειραματικά Γενικά Λύκεια της χώρας από τα σχολικά έτη 2021-2022 και 2022-2023 και θα αρχίσει να εφαρμόζεται για την Α΄ Λυκείου από το σχολικό έτος 2023-2024 και για την Β΄ Λυκείου από το σχολικό έτος 2024-2025. Για την εφαρμογή του Προγράμματος Σπουδών του 2021, αναμένεται η συγγραφή νέων σχολικών εγχειριδίων με προκήρυξη διαγωνισμού, που θα ικανοποιούν τους στόχους που θέτει το νέο Πρόγραμμα Σπουδών.

2) Ποια πρότυπα ακολουθεί η ανανέωση των Προγραμμάτων Σπουδών της άλγεβρας στην Ελλάδα;

Στις αρχές της δεκαετίας του ΄50 ξεκινάει η μεταρρύθμιση στα Μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, με το όνομα «Μοντέρνα Μαθηματικά». Είχε τις ρίζες της στις Η.Π.Α και διαδόθηκε, με τη βοήθεια του Ο.Ο.Σ.Α. σε διάφορες χώρες τις δεκαετίες του ΄60 και ΄70.

Στην Ελλάδα από το 1950 ισχύουν τα προπολεμικά αναλυτικά προγράμματα για τα εξατάξια κλασσικά Γυμνάσια και τα Πρακτικά Λύκεια. Δεν είχε γίνει καμιά ουσιαστική αλλαγή στα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Διδάσκονταν τα λεγόμενα παραδοσιακά μαθηματικά τα οποία ήταν πολύ θεωρητικά και δεν σχετίζονταν με τα προβλήματα της καθημερινής ζωής.

Η Ελλάδα δεν ακολουθεί τις διεθνείς εξελίξεις, αλλά τις παρατηρεί μιας και είναι μέλος του Ο.Ο.Σ.Α. από τη δεκαετία του ‘60. Στη χώρα μας, η μεταρρύθμιση των «Νέων Μαθηματικών» στις τελευταίες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, εφαρμόστηκε στις αρχές της δεκαετίας του ΄80, ενώ άρχισε ήδη να αμφισβητείται η αποτελεσματικότητά της στις άλλες χώρες. Με τη μεταρρύθμιση των «Μοντέρνων Μαθηματικών» οι μαθητές άρχισαν να αποκόβονται από τα μαθηματικά, καθώς τα σχολικά εγχειρίδια είχαν δύσκολο συμβολισμό και αυστηρή διατύπωση των εννοιών και ορισμών και το μαθηματικό περιβάλλον μέσα από τα βιβλία παρουσιάζονταν αποστειρωμένο.

Έτσι ξεκίνησε η σκέψη για επιστροφή στα παραδοσιακά Μαθηματικά, η οποία δεν υλοποιήθηκε, αλλά έγινε μια προσπάθεια για σύνθεση των παραδοσιακών και των «Μοντέρνων Μαθηματικών».

Ύστερα από συνέδρια στο τέλος της δεκαετίας του ΄80 επικρατούν οι προτάσεις του National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) για τα προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών, όπου κάθε μαθητής θα πρέπει να:

- Έχει κατανοήσει τις βασικές μαθηματικές έννοιες
- Σκέφτεται λογικά
- Αναγνωρίζει τα μαθηματικά σύμβολα
- Αναγνωρίζει τις εφαρμογές των μαθηματικών στην ζωή του
- Προσπαθεί να λύσει τα μαθηματικά προβλήματα με αυτοπεποίθηση
- Και να τα εφαρμόζει σε πραγματικά προβλήματα.

Στην Ελλάδα αυτές οι αλλαγές γίνονται μέχρι το 1990[8]. Το Π.Ι. προέβη τότε σε μια ολική αναμόρφωση των Π.Σ., των σχολικών βιβλίων και του συνοδευτικού διδακτικού υλικού. Η συγγραφή και έκδοση του νέου βιβλίου Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου το 1990 και της Β΄ Λυκείου το 1991, σηματοδοτούσε την οριστική ρήξη της Ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης με τη μεταρρύθμιση των «Μοντέρνων Μαθηματικών».

Στη χώρα μας τα Π.Σ. από τη Μεταπολίτευση ως το 1997, παρά τις συνεχόμενες μεταρρυθμίσεις, εξακολουθούσαν να είναι παραδοσιακά και κλειστά. Χαρακτηρίζονταν από δασκαλοκεντρικές μεθόδους διδασκαλίας και ήταν συγκεντρωτικά, ασαφή με αόριστους στόχους και ανελαστικό προγραμματισμό, χωρίς να δίνει τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να πάρει πρωτοβουλίες. Τα σχολικά εγχειρίδια γινόντουσαν με την μορφή αναθέσεως.

Η ύπαρξη ενός μοναδικού σχολικού εγχειριδίου, η συγγραφή του οποίου γίνεται πριν από τη δημοσίευση του προγράμματος σπουδών και με τη διαδικασία της ανάθεσης, πολλαπλασιάζει τις αρνητικές επιδράσεις των προβλημάτων που έχουμε περιγράψει. Αυτό γίνεται φανερό αν λάβουμε υπόψη τα ευρήματα που ανέδειξε η συγκριτική μελέτη για την έννοια της ρίζας και την επίλυση των εξισώσεων με ριζικά. Στην πρώτη περίπτωση παρατηρούμε ότι παρά την εγκατάλειψη της αυστηρότητας των «Νέων Μαθηματικών», καθιερώθηκαν αυστηροί περιορισμοί στη χρήση των ριζών (π.χ. η απαίτηση μη αρνητικών υπόρριζων ακόμη και στις ρίζες περιττής τάξης). Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε, αντίθετα, την καθιέρωση ενός απλοϊκού τρόπου επίλυσης

[8] Οι αλλαγές ξεκίνησαν το 1987 με τα νέα τότε σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και συνεχίστηκαν το 1990 στο Λύκειο.

των εξισώσεων με ριζικά που δεν λαμβάνει υπόψη την ανάγκη να αποκτήσουν οι μαθητές του Λυκείου κάποιες βασικές γνώσεις μαθηματικής λογικής μέσω της επίλυσης των εξισώσεων. Οι επιλογές αυτές αναδεικνύουν μια φοβική αντίληψη για τα λάθη των μαθητών και περιορίζουν δραστικά την ανάληψη πρωτοβουλιών για εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις. Η ύπαρξη πιο ανοικτών προγραμμάτων σπουδών και περισσότερων του ενός εγχειριδίων, που εγκρίνονται ύστερα από διαγωνισμό, θα αποτελούσε προφανώς ένα μέσο ανάσχεσης αυτών των αρνητικών επιδράσεων.

Από το 1997 έως και το 2003, έγινε προσπάθεια τα Προγράμματα Σπουδών να γίνουν πιο ευέλικτα, ώστε να αντιμετωπιστεί η μάθηση όχι ως συσσωρευμένη γνώση, αλλά να τη κατακτήσουν μέσα από συμμετοχικές και βιωματικές διαδικασίες.

Φτάνουμε έτσι στο Πρόγραμμα Σπουδών του 2021 το όποιο είναι ένα νέο Πρόγραμμα Σπουδών, δεν έχει εφαρμοστεί ακόμα παρά μόνο πιλοτικά τα σχολικά έτη 2021-2022 και 2022-2023.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΕΡΕΥΝΕΣ

Τέλος, χρήσιμη θα ήταν η περαιτέρω έρευνα του θέματος, επί παραδείγματι θα αναφέραμε μία ποιοτική έρευνα σε ένα δείγμα καθηγητών Α’ και Β’ Λυκείου για το ποια προβλήματα αντιμετωπίζουν στην εφαρμογή των προγραμμάτων σπουδών και τη διδασκαλία των σχολικών βιβλίων. Διδάσκουν με οδηγό το σχολικό βιβλίο ή το πρόγραμμα σπουδών; Περαιτέρω έρευνα θα βοηθούσε ιδιαίτερα στην καλύτερη κατανόηση του προβλήματος και στη προετοιμασία του εδάφους για ορισμένες θεσμικές παρεμβάσεις που θα καθιστούσαν πιο λειτουργική τη σχέση προγραμμάτων σπουδών και σχολικών εγχειριδίων στη διδακτική πράξη.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μία βιβλιογραφική έρευνα που στόχο έχει να συγκρίνει τα Προγράμματα Σπουδών των τελευταίων δεκαετιών με τα αντίστοιχα σχολικά εγχειρίδια για τις δύο πρώτες τάξεις του Λυκείου. Συγκρίνει επίσης τις έννοιες στα διάφορα σχολικά εγχειρίδια καθώς και τα ίδια τα περιεχόμενα. Ένας περιορισμός ήταν ότι στη παρούσα διπλωματική εργασία έγινε μια μελέτη περίπτωσης (case study), σε δύο έννοιες, αυτή της «ρίζας» και αυτή της «μέθοδοι επίλυσης εξισώσεων με ριζικά». Ο λόγος είναι η μεγάλη αναντιστοιχία χρόνου που υπήρχε με το πλήθος εννοιών. Ένας άλλος περιορισμός ήταν ότι η σύγκριση των σχολικών εγχειριδίων έγινε επιλέγοντας τα σχολικά εγχειρίδια της πρακτικής ή θετικής κατευθύνσεως για την Δ΄ και Ε΄ Γυμνασίου μέχρι και το 1978, όπου και χωρίστηκε το εξατάξιο Γυμνάσιο σε τρείς τάξεις για το Γυμνάσιο και σε τρείς τάξεις για το Λύκειο και όχι και για τη θεωρητική κατεύθυνση. Μετά τον διαχωρισμό, τα σχολικά εγχειρίδια που εξετάζονται είναι αυτά της Γενικής Παιδείας της Άλγεβρας για την Α΄ και Β΄ Λυκείου, καθώς σε αυτά τα σχολικά εγχειρίδια βρίσκονται οι έννοιες που εξετάζει η παρούσα διπλωματική εργασία. Τέλος το Πρόγραμμα Σπουδών του 2021, για την Α’ και Β΄ Λυκείου, δεν μπόρεσε να αναλυθεί και να συγκριθεί με τα αντίστοιχα σχολικά εγχειρίδια, καθώς είναι ακόμα σε πιλοτική φάση και δεν υπάρχουν τα αντίστοιχα σχολικά εγχειρίδια για να γίνει η έρευνα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αθανασιάδης, Χ. (1996). Ελλείψει Απαρτίας – Νομοθεσία για την Εκπαίδευση. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, Τεύχος 88: 84-85.

Althusser, L. (1994). *Θέσεις (1964-1975).* Αθήνα, Θεμέλιο

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., & Σβέρκος. Α. (1990). *Άλγεβρα Α΄ Λυκείου*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων (1η Έκδοση). Αθήνα. Ο.Ε.Δ.Β.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., & Σβέρκος. Α. (1991). *Άλγεβρα Β΄ Λυκείου*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων (1η Έκδοση).

Apple, M. (1992). The text and cultural politics. *Educational Researcher* (21), (pp. 4–11).

Arcavi, A., Drijvers, P., & Stacey, K. (2017). *The Learning and Teaching of Algebra Ideas, Insights, and Activities.* London. Routledge.

Arcavi, A. (2008). *Algebra: Purpose and empowerment.* In C. E. Greenes (Ed.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics* (37–49). Reston, VA: NCTM.

Άχλη, Κ. (1990). Τα Εκπαιδευτικά Νομοσχέδια του 1913, 1964, 1976: Ιστορική, κριτική και Συγκριτική Παρουσίαση. *Νέα Παιδεία*, Τεύχος 54: 61-69 & Τεύχος 56: 96-109.

Βαβαλέτσκος, Θ. & Μπούσγος, Γ. (1968). *Μαθηματικά Δ΄ Γυμνασίου (Θετικής Κατευθύνσεως)* Τόμος 1ος (Άλγεβρα) Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων (1η Έκδοση).

Βαρουχάκης, Ν., Αδαμόπουλος, Λ., Αλεξανδρής, Ν., Παπακωνσταντίνου, Δ.Α. & Παπαμικρούλης, Α (1979). *Μαθηματικά – Άλγεβρα Α΄ Λυκείου*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων (1η Έκδοση).

Βαρουχάκης, Ν., Αδαμόπουλος, Λ., Γιαννίκος, Χ., Μπέτσης, Α., Νοταράς, Δ., & Φωτόπουλος, Σ. (1983). *Μαθηματικά – Άλγεβρα Β΄ Λυκείου*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων (1η Έκδοση).

Dörfler, W. (1991). Forms and Means of Generalization in Mathematics. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. van Dormolen [Eds.] *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp.63-85). Kluwer, Dordrecht.

Cedillo, T. E. (2001). Toward an Algebra Acquisition Support System: A Study Based on Using Graphic Calculators in the Classroom. *Mathematical Thinking and Learning* 3(4):221-259. DOI:10.1207/S15327833MTL0304_01

Corry, L. (2007). Axiomatics between Hilbert and the New Math: Diverging views on mathematical research and their consequences on education. *International Journal for the History of Mathematics Education*, 2(2), 21-37.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Brizuela , B. M. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*. 2006, Vol. 37, No. 2, 87–115.

Γέρου, Θ. (1985). *Βαθιές Τομές στην Εκπαίδευση (1981 – 1985).* Gutenberg, Αθήνα.

Γιαννακάκη, Π. (1996). Μεταξύ Θεωρίας και Πράξης: Σχέση μμαγειρικής και αναλυτικών προγραμμάτων. *Σύγχρονη Εκπαίδευση* Τεύχος 86: 90-91.

Γκολιάρης, Χ. (1983). Τα Νέα Μαθηματικά στο Δημοτικό Σχολείο. Θεωρητική αντιμετώπιση του προβλήματος. *Σύγχρονη Εκπαίδευση* Τεύχος 13: 108-112.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis. *American Educational Research Journal*, *29*(3), 573–604. https://doi.org/10.2307/1163258

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A Constructivist Alternative to the Representational View of Mind in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23, 2-33. http://dx.doi.org/10.2307/749161

Crawford, L.M. (2001) *Teaching Contextually: Research, Rationale, and Techniques for Improving Student Motivation and Achievement.* CCI Publishing, Inc., Texas.

Δαγδιλέλης Β., Παυλοπούλου Κ., Τρίγκα Π. (1998), *Διδακτική μέθοδοι και εφαρμογές*, Εκδ. Ευγ. Μπένου.

Δακορώνια, Ε., & Αναστασάκης, Μ. (2021). Τι είδους γεωμετρική γνώση προωθούν οι εικόνες στα σχολικά βιβλία γεωμετρίας από το 1975 μέχρι σήμερα. Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, (15), 24-44.

De Bock, D., & Vanpaemel, G. (2019). Rods, Sets and Arrows: The Rise and Fall of Modern Mathematics in Belgium. Springer Nature

Drijvers, P., Goddijn, A., & Kindt, M. (2011). *Algebra education: Exploring topics and themes.* In P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education: Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (5-26). Rotterdam: Sense Publisher.

Duval R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* Springer

Βασιλικό Διάταγμα 191. (1961). Περί του αναλυτικού και ωρολογίου προγράμματος της Δ΄ τάξεως Γυμνασίων πρακτικής κατευθύνσεως. *Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας.* Φ.Ε.Κ. Α΄ 55

Βασιλικό Διάταγμα 620. (1961). Περί του αναλυτικού και ωρολογίου προγράμματος της Ε΄ τάξεως Γυμνασίων πρακτικής κατευθύνσεως. *Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας,*. Φ.Ε.Κ. Α΄ 151.

Βασιλικό Διάταγμα 671. (1962). Περί του αναλυτικού και ωρολογίου προγράμματος της ΣΤ΄ τάξεως των Γυμνασίων Πρακτικής κατευθύνσεως. *Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας,* Φ.Ε.Κ. Α΄ 173.

Βασιλικό Διάταγμα 72. (1966). Περί ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων τάξεων τινών σχολείων Δευτεροβαθμίου (Μέσης) Εκπαιδεύσεως. *Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας,* Φ.Ε.Κ. Α΄ 16.

Βασιλικό Διάταγμα 1074. (1966). *Περί ωρολογίου και αναλυτικού προγράμματος της Β΄ τάξεως Λυκείων*. *Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας,* Φ.Ε.Κ. Α΄ 289.

Βασιλικό Διάταγμα 723. (1969). Περί των ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων των μαθημάτων των σχολείων Μέσης Εκπαιδεύσεως. *Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας,* Φ.Ε.Κ. Α΄ 225.

Προεδρικό Διάταγμα 827. (1979). Περί του ωρολογίου και αναλυτικού προγράμματος της Α΄ τάξεως του Ημερησίου και του Εσπερινού Λυκείου Γενικής Κατευθύνσεως και του Προτύπου Ελληνικού Κλασσικού Λυκείου. *Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας,* Φ.Ε.Κ. Α΄ 240.

Προεδρικό Διάταγμα 922. (1980). Περί του ωρολογίου και αναλυτικού προγράμματος της Β΄ τάξεως Ημερησίου Λυκείου Γενικής Κατευθύνσεως των Β΄ και Γ΄ τάξεων του Εσπερινού Λυκείου της αυτής κατευθύνσεως και της Β΄ τάξεως του Προτύπου

Ελληνικού Κλασσικού Λυκείου. *Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας,*

Προεδρικό Διάταγμα 479. (1985). Ωρολόγιο και αναλυτικό πρόγραμμα Λυκείων Μέσης Γενικής Εκπαίδευσης. *Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας,* Φ.Ε.Κ. Α΄ 170.

Προεδρικό Διάταγμα 21. (1988). Τροποποίηση και συμπλήρωση ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων σχολείων δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. *Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας,* Φ.Ε.Κ. Α΄ 8.

Προεδρικό Διάταγμα 101. (1989). Τροποποίηση και συμπλήρωση ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων σχολείων Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. *Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας,* Φ.Ε.Κ. Α΄ 44.

Προεδρικό Διάταγμα 198. (1993). Τροποποίηση και συμπλήρωση ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων σχολικών μονάδων Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και άλλες διατάξεις. *Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας,* Φ.Ε.Κ. Α΄ 73.

Υπουργική Απόφαση Γ2/2861. (1999). Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Γυμνασίου κι Ενιαίου Λυκείου. *Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας,* Φ.Ε.Κ. Β΄ 1342.

Υπουργική Απόφαση 59614/Γ2. (2011). *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου. Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας,* Φ.Ε.Κ. Β΄ 1168.

Υπουργική Απόφαση 61019/Γ2. (2013). Πρόγραμμα Σπουδών Άλγεβρας και Γεωμετρίας γενικής παιδείας Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου. *Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας,* Φ.Ε.Κ. Β΄ 1173.

Υπουργική Απόφαση 145377/Δ2. (2021). Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων Γενικού Λυκείου. *Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας,* Φ.Ε.Κ. Β΄ 5390.

Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). *Textbook research in mathematics education: development status and directions.* ZDM, 45(5), 633-646.

Flouris G., (1995), The Image of Europe in the Curriculum of the Greek Elementary School, in Bell G. (ed.) *Educating European Citizens,* London, David Fulton Publ., 104-119.

Flouris G., (1997), Global Dimensions in the Educational Legislation, Social Studies Curriculum and Textbooks of the Greek Compulsory Education (Grades-1-9), in *Mediterranean Journal of Educational Studies,* 2(2), 17-39.

Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Fennema, E. (2001). Capturing teachers' generative change: A follow-up study of professional development in mathematics. *American Educational Research Journal,* 38(3), 653–689. doi:10.3102/00028312038003653

Fujii, T., & Stephens, M. (2001). *Fostering understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of the quasi-variables.* In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The proceedings of the 12th ICMI study conference: The future of the teaching and learning of algebra,* (Vol. 1, 258–264). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Fulton, B. & Lombard, B. (2001). *The Pattern and Function Connection.* Key Curriculum Press

Harel, G., & Tall, D. (1991) *The general, the abstract, and the generic For the Learning of Mathematics, 11,* 38 – 42

Hayden, R. W. (1981). A history of the "new math" movement in the United States. Doctoral dissertation, Iowa State University

Holmes, Br. and Mclean, M. (1992), *The Curriculum: A comparative perspective,* Routledge, London.

Θωμαΐδης, Γ. (1991). *Οι Συντεταγμένες της Σχολικής Γεωμετρίας στην Ελλάδα (1960 – 1990).* Σύγχρονη Εκπαίδευση Τεύχος 61: 27-38.

Θωμαϊδης, Γ. (1995). *Διδακτική μετατόπιση μαθηματικών εννοιών και εμπόδια μάθησης (Η περίπτωση της απόλυτης τιμής).* Διδακτορική διατριβή, Τμήμα Μαθηματικών, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

Θωμαΐδης, Γ. & Καστάνη, Ν. (2002), Σύγχρονη Εκπαίδευση. *Οι αναμορφώσεις της ελληνικής μαθηματικής παιδείας στο δεύτερο μισό του 20ου αιώνα. Ένα πλαίσιο προβληματισμού,* 130, 78-92 και 131, 127-137.

Θωμαΐδης, Γ. (2011). Ιστορικές και διδακτικές όψεις της γενίκευσης στην Άλγεβρα. Στο Π. Βερύκιος & Γ. Θωμαΐδης [Επιμ.] *Η Άλγεβρα και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση*, σσ.145-182. Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών & Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Θωμαΐδης, Γ. (2021). *Το μακροβιότερο διδακτικό βιβλίο Μαθηματικών στην Ελληνική εκπαίδευση*. Εισήγηση στο συνέδριο του Ι.Ε.Π. «Τα σχολικά εγχειρίδια στο ελληνικό κράτος». (17-19 Δεκεμβρίου 2021). Υπό δημοσίευση στα πρακτικά.

Jonnaert, P., & Therriault, G. (2013*). Curricula and curricular analysis: Some pointers for a debate.* Prospects, 43, 397–417. doi:DOI 10.1007/s11125- 013-9285-7

Ιορδανίδης, Κ., Καραγεώργος, Δ. Λ, Κωστάκης, Κ., Μακρίδης, Α. & Νασόπουλος, Β. (1978). *Μαθηματικά Β΄ Λυκείου – Ύλη Επιλογής*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων (1η Έκδοση).

Καλαβάσης, Φ. (1984). Νέα Μαθηματικά: *Αυτό το Σκοτεινό Αντικείμενο του Πόθου και της Καταστροφής.* Μαθηματική Επιθεώρηση Τεύχος 27, Αθήνα.

Καλαβάσης, Φ. & Λιναρδάκης, Π. (1992). *Η Αντίληψη που Διαμορφώνεται για τα Σύνολα μέσα απ' τη λειτουργία τους στα Σχολικά Μαθηματικά*. Ευκλείδης Γ΄, Τόμος 9, Τεύχη 33-34-35.

Καλαβάσης, Φ., & Σκουμπουρδή, Χ., (2005). *Είναι δυνατόν να παράγουμε μαθηματικά μέσα στην τάξη.* https://www.researchgate.net/profile/Chrysanthi-Skoumpourdi/publication/262560466_Einai_dynaton_na_paragoume_mathematika_mesa_sten_taxe/links/5641e73608aeacfd8937cf6f/Einai-dynaton-na-paragoume-mathematika-mesa-sten-taxe.pdf

Kaput, J. (1998). Representations, Inscriptions, Descriptions and Learning: A Kaleidoscope of Windows. *Journal of Mathematical Behavior,* 17, 265-261. https://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80062-7

Καραγεώργος, Δ. (1997). *Τα Μαθηματικά στη Γενική Εκπαίδευση την Τελευταία Εικοσαετία.* Νέα Παιδεία, Τεύχος 81: 69-80.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (390-419). New York: Macmillan Publishing Company.

Kieran, C. (2004). *Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It?* The Mathematics Educator, 8, 139-151.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Kilpatrick, J. (2012). The new math as an international phenomenon. ZDM (ZenrtrallBlattfür Didaktik der Mathemtik), 44(4), 563-571.

Kilpatrick, J. (2014). Mathematics Education in the United States and Canada. In Schubring, G., & Karp, A. (Eds.), Handbook on the history of mathematics education (323 – 334). Springer, New York, NY.

Κλιάπης, Π., & Κασσώτη, Ό. (2005). *Πειραματική εφαρμογή του νέου σχολικού εγχειριδίου των Μαθηματικών της Στ Δημοτικού: Αλλαγές στις στάσεις και τις συμπεριφορές των μαθητών.* Στο Χ. Κυνηγός (Επιμ.), Πρακτικά του 1ου Πανελλήνιου Συνέδριου ΕνΕΔιΜ: Η Διδακτική των Μαθηματικών ως Πεδίο Έρευνας στην Κοινωνία της Γνώσης (148-158). Αθήνα.

Κλιάπης, Π., & Κασσώτη, Ό. (2017). *Οι μαθηματικές γνώσεις των μαθητών της Στ΄ δημοτικού το 1998 και το 2015.* Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, (9), 11-26.

Kline, M. (1990). *Γιατί δεν μπορεί να κάνει πρόσθεση ο Γιάννης Η αποτυχία των μοντέρνων μαθηματικών, μετάφραση Βασίλης Τομανάς* (Τίτλος πρωτοτύπου: Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Mathematics). Εκδόσεις Βάνιας Θεσσαλονίκη.

Κολέζα, Ε., Γ. (2017). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών.* Gutenberg

Κονδύλης, Π. (2011), *Οι αιτίες της παρακμής της σύγχρονης Ελλάδας*, Αθήνα, Θεμέλιο

Λάμπρου, Μ., Πατεράκης, Α., Μαράκης, Γ., & Σταυρουλάκης, Γ. (1984). *Μαθηματικά Α΄ τάξη Ενιαίου Πολυκλαδικού Λυκείου. Άλγεβρα*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων (1η Έκδοση).

Malisani, E., & Spagnolo, F. (2009). From arithmetical thought to algebraic thought: The role of the "variable". *Educational Studies in Mathematics*, (2009) 71:19–41 DOI 10.1007/s10649-008-9157-x

Mason, J., & Pimm, D. (1984). *Generic examples: Seeing the general in the particular. Educational Studies in Mathematics*, 15, 227-289.

Ματσαγγούρας, Η. (2006): *Διδακτικά εγχειρίδια: Κριτική αξιολόγηση της Γνωσιακής, Διδακτικής και Μαθησιακής Λειτουργίας τους: Συγκριτικής και διεθνούς Εκπαιδευτικής Επιθεώρησης,* 7, 60-92.

Μητακίδης, Γ. (1983). *Τα Νέα Μαθηματικά. Μαθηματική Επιθεώρηση*, 25, 85-99.

Μητρογιαννοπούλου, Α. (2001). *Η θέση των Μαθηματικών στη Μέση Γενική Εκπαίδευση το β΄ μισό του 20ου αιώνα.* Διδακτορική διατριβή, Φιλοσοφική Σχολή. Τμήμα Φιλοσοφίας, Παιδαγωγικής και Ψυχολογίας, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Μουζέλης, Ν. (2014), *Νεωτερικότητα και θρησκευτικότητα: Εκκοσμίκευση Φονταμενταλισμός - Ηθική*, Αθήνα: Πόλις

Movshovitz-Hadar, N., & Webb, J. (1998). *One equals zero and other mathematical surprises: Paradoxes, fallacies, and mind bogglers*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Μπονίδης, Κ. (2005): *Διαδικασία και κριτήρια αξιολόγησης σχολικών βιβλίων. Πρακτικά Συνεδρίου : Διδακτικό βιβλίο και Εκπαιδευτικό υλικό στο σχολείο: Προβληματισμοί, Δυνατότητες*. Προοπτική : Θεσσαλονίκη

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* NCTM, Reston, VA.

Νούτσος Χ. (1988), *Προγράμματα Μέσης Εκπαίδευσης και κοινωνικός έλεγχος (1931- 1973),* Αθήνα, Θεμέλιο.

Noyes, A. (2010). Resetting school mathematics. In Pinto, M.M. F., & Kawasaki, T. F. (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, 131-134). Belo Horizonte, Brazil.

Ντζιώρας, Η (1968). *Μαθηματικά Ε΄ Γυμνασίου (Θετικής Κατευθύνσεως)* Τόμος 1ος (Άλγεβρα). Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων (1η Έκδοση).

Ξωχέλλης, Π.Δ. (1991). *Θεωρία: Μεταρρυθμίσεις στη Σύγχρονη Εκπαίδευση και Ελληνική Πραγματικότητα. Νέα Παιδεία.* Τεύχος 57: 26-33.

Ξωχέλλης, Π. (2009). Το σχολικό βιβλίο ως μέσο διδασκαλίας και αντικείμενο εκπαιδευτικής έρευνας. *Πρακτικά του 10ου Συνεδρίου του Εκπαιδευτικού Ομίλου Κύπρου*, 27-34. Λευκωσία.

OEEC (1961). New thinking in school mathematics. Paris: OEEC.

OECD (1964). Mathematics to-day. A guide for teachers. Paris: OECD.

Οικονόμου, Π. (2010). *Σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης.* Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Παναγάκος, Ι. (2004). Η διαθεματική προσέγγιση στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών. *Πρακτικά του 21ου Πανελλήνιου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας* - Το Αναλυτικό Πρόγραμμα και η Διδακτική Προσέγγιση των Μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια και την Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (pp. 192-201). Τρίκαλα.

Πασιάς, Γ. και Φωτεινός, Δ. (2020), Παγκόσμια εκπαιδευτική ατζέντα και πολιτικές της γνώσης: σύγχρονοι τόποι και λόγοι. *Συγκριτική και Διεθνής Εκπαιδευτική Επιθεώρηση*-υπό δημοσίευση

Pepin, B., & Haggarty, L. (2001). *Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: A way to understand teaching and learning cultures. Zentralblatt for the Didactics of Mathematics,* 33(5), (pp. 158–175).

Pepin, B. (2008). Μια διεθνής σύγκριση των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών και της χρήσης τους από τους εκπαιδευτικούς – ποια εικόνα των μαθηματικών παρουσιάζουν στους μαθητές τα σχολικά βιβλία στην Αγγλία, Γαλλία και Γερμανία. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.) Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών, 7ο διήμερο διαλόγου για διδασκαλία των μαθηματικών 15 & 16 Μαρτίου 2008 (21-54). Θεσσαλονίκη.

Περσιάνης, Π. (2002), *Η εκπαιδευτική γνώση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση της Ελλάδας* (1833-1929), Αθήνα, Ατραπός

Phillips, C. J. (2014). The new math: A political history. University of Chicago Press.

Qi, C., Zhang, X., & Huang, D. (2018). *Textbook Use by Teachers in Junior High School in Relation to Their Role.* In L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S. Rezat, & J. Visnovska (Eds.), *Research on Mathematics Textbooks and Teachers' Resources*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham

Radford, L. et al. (2011). *Child Abuse and Neglect in the United Kingdom Today*. London: National Society for the Prevention of Cruelty to Children.

Raimi, R. (2005). Proposed Introduction to a History of The New Math, Overview of the historical problem (Unpublished manuscript available at the site Work in Progress, Concerning the History of the so-called New Math, of the Period 1952-1975). http://www.math.rochester.edu/people/faculty/rarm/the_new_math.html.

Valk, P., Bertram- Troost, G., Friederici, M., Béraud. C. (2009). *Teenagers' Perspectives on the Role of Religions in their Lives, Schools and Societies: A European quantitative study*. Waxmann. Verlag.

Remillard, J. (2018). *Examining Teachers' Interactions with Curriculum* Resource to Uncover Pedagogical Design Capacity. University of Pennsylvania DOI:10.1007/978-3-319-73253-4_4

Σακελλαρίου, Ν. (1950). *Άλγεβρα δια τας ανωτέρας τάξεις των Γυμνασίων*. Οργανισμός Εκδόσεως Σχολικών Βιβλίων (1η Έκδοση).

Σακονίδης, Χ., (2011). Σχολική άλγεβρα: επιστημολογικές, γνωστικές και διδακτικές αναζητήσεις. *Η Άλγεβρα και η Διδακτική της στη σύγχρονη Εκπαίδευση* (σ. 281-299). Αθήνα: Ζητοι.

Schiro (1978), *Curriculum for better schools: The great ideological debate*, Englewood Cliffs, NJ, Educational Technology Publications

Shaffer, D.W. & Kaput, J.J. (1999). *Mathematics and Virtual Culture: An Evolutionary Perspective on Technology and Mathematics Education.* Educational Studies in Mathematics, 37(2), 97-119. Retrieved October 12, 2022 from https://www.learntechlib.org/p/88702/.

Shield, M. & Shelley, D. (2013) *Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning.* Educational Studies in Mathematics, 82(2).

Simon, H. A. (1997). *Models of Bounded Rationality*. Vol. 3: Empirically Grounded Economic Reason. Cambridge, MA: The MIT Press.

Σκουμπουρδή, Χ. (2009). *Οι μεταρρυθμίσεις του εκπαιδευτικού συστήματος στην Ελλάδα και τα Αναλυτικά Προγράμματα των Μαθηματικών*. Σύγχρονη Εκπαίδευση, 159, 95-118.

Σκουμπουρδή, Χ., & Βαϊτσίδη, Γ. (2019). *Η διερευνητική προσέγγιση στη μαθηματική εκπαίδευση: συνδέσεις, διαφοροποιήσεις, καινοτομίες.* Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, (12), 8 - 22. doi:https://doi.org/10.12681/enedim.21142

Slavitt, D. (1999). *The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought.* Educational Studies in Mathematics, 37, 251-274.

Stanic, G. M., & Kilpatrick, J. (1992). Mathematics curriculum reform in the United States: A historical perspective. *International Journal of Educational Research*, *17*(5), 407-417

Στουραΐτης, Κ. & Πόταρη, Δ. (2015). *Διαλεκτικές αντιθέσεις και μετατοπίσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών.* Πρακτικά 6ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ.: Επαγγελματική ανάπτυξη «δημιουργικών» εκπαιδευτικών (σσ. 248-257). Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ

Τζεκάκη, Μ. (2010). *Μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και την πρώτη σχολική ηλικία: Αλλάζοντας την τάξη των Μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

ΥΠΕΠΘ-ΠΙ. (1997). *Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών*. Αθήνα.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). According to the book: *Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Warren, E. (2003). *The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. Mathematics Education Research Journal* 15, p.p. 122–137 (2003)

Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Doorman, M. (2015). Opportunity-tolearn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational studies in Mathematics,* 89(1), 41-65.

Φερεντίνος, Σ. (2007). Νέα βιβλία Μαθηματικών του Γυμνασίου. *Πρακτικά του 24ου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας με Διεθνή Συμμέτοχη:* Η μαθηματική παιδεία σήμερα θεωρία και πράξη (σσ. 123-136). Κοζάνη.

Φωτεινός, Δ. (2020). Αναλυτικά προγράμματα και εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις στην Ελλάδα (1950-2020): Η φονταμενταλιστική, άστοχη και τοτεμική εκπαίδευση. *Συγκριτική Διεθνής και Εκπαιδευτική Επιθεώρηση*, *24*, 32-63.