



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β' ΗΛΙΚΙΑΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Διπλωματική εργασία

**«Διερεύνηση για την ύπαρξη μεταφοράς γνώσης μεταξύ των
μουσικών και των μαθηματικών κλασμάτων»**

Παναγιωτόπουλος Αθανάσιος

A.M. 981

Επιβλέπων Καθηγητής: Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής Πανεπιστήμιο Δυτικής
Μακεδονίας

Μέλη Τριμελούς Επιτροπής: Χρήστου Κωνσταντίνος, Επίκουρος Καθηγητής Α.Π.Θ.
Βαμβακούση Ξανθή, Καθηγήτρια Πανεπιστήμιο
Ιωαννίνων

Φλώρινα, 2024

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αρχικά, ευχαριστώ ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Χαράλαμπο Λεμονίδα για τη βοήθεια και την καθοδήγησή του στην εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές κ. Βαμβακούση Ξένια και τον κ. Χρήστου Κωνσταντίνο για τις χρήσιμες παρατηρήσεις τους και τη συμμετοχή τους στην τριμελή εξεταστική επιτροπή.

Ευχαριστώ πολύ τους φίλους και συνεργάτες μουσικούς και τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους δικούς μου ανθρώπους, που με την πίστη τους, την αγάπη τους και την επιμονή τους, ολοκληρώθηκε αυτή η εργασία. Τους γονείς μου και την αδερφή μου για την στήριξη τους. Τον Στέλιο, την Δήμητρα, και τη Μαριάνθη για την φροντίδα και τα όνειρα. Τον Μάκη για την παρέα.

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	5
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.....	11
Θεωρητικό Μέρος.....	11
1.1 Εισαγωγή.....	11
1.2 Σχέση μουσικής και μαθηματικών.....	11
1.3 Μεταφορά μεταξύ μαθηματικών και μουσικής.....	14
1.4 Τα κλάσματα στα Μαθηματικά.....	16
1.5 Οι νότες.....	19
1.6 Η σχέση μουσικής και μαθηματικής μάθησης.....	21
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.....	23
Στόχος - Ερωτήματα – Μεθοδολογία.....	23
2.1 Στόχος και Ερωτήματα της έρευνας.....	23
2.2 Μεθοδολογία έρευνας.....	24
2.3 Το δείγμα της έρευνας.....	24
2.4 Ερευνητικό εργαλείο.....	25
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.....	27
Αποτελέσματα.....	27
3.1 Ερμηνεία νότας.....	27
3.2 Πρόσθεση με Νότες ή μουσικά κλάσματα.....	33
3.3 Σύγκριση Με Νότες ή μουσικά κλάσματα.....	40
3.5 Σύγκριση Μαθηματικών Κλασμάτων.....	49
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.....	55
Σύνοψη αποτελεσμάτων.....	55
4.1 Άξονας Α) Πέρασμα από τα μουσικά στα μαθηματικά κλάσματα.....	55
4.2 Άξονας Β) Πέρασμα από τα μαθηματικά στα μουσικά κλάσματα.....	59
4.3 Άξονας Γ) Διαφορές μεταξύ των ομάδων.....	60
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.....	64
Συμπεράσματα.....	64
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6.....	66
Περιορισμοί έρευνας.....	66
Προτάσεις για περαιτέρω μελέτη.....	66

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7.....	68
Βιβλιογραφία	68
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8.....	72
Παράρτημα.....	72
Φύλλο εργασίας 1	72
Φύλλο εργασίας 2	73
Φύλλο εργασίας 3	74

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο βασικός σκοπός με την παρούσα έρευνα είναι να μελετηθεί η πιθανή σύνδεση και εναλλαγή της γνώσης μεταξύ μουσικών και μαθηματικών κλασμάτων σε Επαγγελματίες Μουσικούς και σε Μαθητές που ασχολούνται με τη μουσική. Εξετάζεται δηλαδή, το πέρασμα, που πιθανά συντελείται από την γνώση κλασμάτων από το μαθηματικό στο μουσικό πλαίσιο και αντίστροφα. Η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε είναι η μελέτη περίπτωσης, μέσω προσωπικής ημιδομημένης συνέντευξης. Στην έρευνα συμμετείχαν 6 Επαγγελματίες Ενήλικες Μουσικοί και 6 Μαθητές που φοιτούν στη Β' τάξη του Γυμνασίου, που διαθέτουν στοιχειώδη – τουλάχιστον 4ετούς σπουδή στη μουσική παιδεία. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν πως η μεταφορά γνώσης μεταξύ των μουσικών και των μαθηματικών κλασμάτων πραγματοποιείται σε χαμηλό βαθμό. Όσον αφορά το πέρασμα από τα μουσικά στα μαθηματικά κλάσματα, φαίνεται πως ενώ οι μισοί Μουσικοί και το ένα τρίτο των Μαθητών συνέδεσαν την νότα τετάρτου με το μαθηματικό κλάσμα, οι μαθηματικές ενέργειες που χρησιμοποίησαν κατά την ενασχόληση τους με νότες ήταν ελάχιστες. Από την άλλη το πέρασμα από το μαθηματικά στα μουσικά κλάσματα φάνηκε ακόμη πιο αμυδρό. Η μουσική γνώση που κατέχουν οι Μουσικοί χρησιμοποιήθηκε ελάχιστα στα μαθηματικά έργα, μόνο στους 2 από τους 6 Μουσικούς (33%), μεταφέροντας τα μαθηματικά σε μουσικά κλάσματα, δηλαδή σε νότες.

Λέξεις Κλειδιά: Κλάσματα στη μουσική, κλάσματα στα μαθηματικά, μεταφορά γνώσης κλασμάτων

Abstract

The main purpose of this research is to examine the possible connection and interchange of knowledge between music and mathematical fractions among professional musicians and students engaged in music. Specifically, it explores the transition that may occur from knowledge of fractions from the mathematical context to the musical context, and vice versa. The methodology employed was a case study using semi-structured personal interviews. The study involved 6 adult professional musicians and 6 students in the second year of secondary school, who have elementary - at least 4 years of study in music education. The results of the research indicated that the transfer of knowledge between music and mathematical fractions occurs to a low extent. Regarding the transition from music to mathematical fractions, it appears that while half of the musicians and one-third of the students connected the quarter note with the mathematical fraction, the mathematical actions they used in their engagement with notes were minimal. On the other hand, the transition from mathematics to musical fractions seemed even more vague. The musical knowledge possessed by the musicians was minimally used in mathematical tasks, only by 2 out of the 6 musicians (33%), transferring mathematics to musical fractions, that is, to musical notes.

Keywords: Fractions in music, fractions in mathematics, transfer of knowledge of fractions

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η σχέση μεταξύ μουσικής και μαθηματικών αποτελεί έναν αρχαιότερο δεσμό, που διασχίζει πολλούς αιώνες. Παρά τις διαφορές τους, οι δύο αυτοί κλάδοι έχουν κοινά σημεία, καθώς και χρήση αντιπροσωπευτικής γλώσσας και συμβολισμών. Στα μαθηματικά, οι έννοιες εκφράζονται μέσω συμβόλων και πράξεων, ενώ στη μουσική, μέσω της ύψους και της διάρκειας των ήχων, και απεικονίζονται στο πεντάγραμμο με συγκεκριμένους συμβολισμούς. Η σχέση αυτή έχει απασχολήσει ερευνητές από διάφορους κλάδους. Σύμφωνα με τον Papadopoulos (2002), ο Jean Philippe Rameau, ένας από τους μεγαλύτερους θεωρητικούς του δέκατου όγδοου αιώνα, ανέδειξε τη βαθιά συμβολή των μαθηματικών στη μουσική. Στο έργο του "Traité de l'Harmonie Réduite à ses Principes Naturels" (1722), τονίζει ότι οι μαθηματικοί κανόνες είναι ουσιώδεις για τη μουσική.

Εκτός από τη θεωρητική σύνδεση της μουσικής με τα μαθηματικά, υπάρχει επίσης η σχέση της μουσικής με διάφορες μορφές νοημοσύνης, σύμφωνα με τη θεωρία της Πολλαπλής Νοημοσύνης του Gardner (1993) (Hall, 2007). Ένα παράδειγμα που παρέχει η Boyd (2015) είναι ο βιολιστής, ο οποίος χρησιμοποιεί τη μουσική νοημοσύνη για να μάθει και να εκτελέσει τη μουσική, τη σωματική-κινητική νοημοσύνη για να προσαρμόσει το σώμα του και τα χέρια του με ταχύτητα και ακρίβεια, και τις διαπροσωπικές δεξιότητες για να μεταδώσει το μήνυμα της μουσικής.

Επιπλέον, η έρευνα στον τομέα των νευροεπιστημών έχει δείξει ότι η μουσική δραστηριότητα μπορεί να ενεργοποιεί περιοχές του εγκεφάλου που σχετίζονται με τα μαθηματικά, όπως ο κατώτερος βρεγματικός λοβός. Αυτή η γνώση μας δείχνει ότι η μουσική συμβάλλει στην ανάπτυξη της νοημοσύνης και των γνωστικών λειτουργιών που απαιτούνται για την κατανόηση των μαθηματικών (Hilton, 2015).

Η μεταφορά γνώσης, όπως ορίζεται από τον Byrnes (1996), αναφέρεται στην ικανότητα να επεκτείνει κανείς κάτι που έχει μάθει σε ένα πλαίσιο, σε ένα άλλο. Η μεταφορά αυτή, σύμφωνα με τους Singley και Anderson (1989), εξαρτάται από το βαθμό που τα έργα μοιράζονται γνωστικά στοιχεία. Καθορίζεται διάκριση μεταξύ κοντινής και μακρινής μεταφοράς, όπως υποστηρίζει ο Barnett (2002). Η κοντινή μεταφορά συμβαίνει μεταξύ συνδεδεμένων περιοχών, ενώ η μακρινή μεταφορά είναι όταν η σχέση μεταξύ πηγής και περιοχών στόχου είναι αδύναμη. Σύμφωνα με τον Sala (2016), η μουσική μπορεί να αποτελέσει παράδειγμα μακρινής μεταφοράς στα

μαθηματικά. Οι Jones & Pearson (2013) αναφέρουν τη σχέση των κλασμάτων των μαθηματικών με τον ρυθμό της μουσικής, όπου οι μουσικοί υποδιαιρούν νοητά τον ρυθμό για τη σωστή εκτέλεση της μουσικής. Οι Lovemore (2021) επισημαίνουν ότι η μουσική στα μαθηματικά προσφέρει νέες στρατηγικές αναπαράστασης των κλασμάτων, οδηγώντας σε βαθύτερη κατανόηση και καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα. Επομένως, η σχέση μεταξύ μουσικής και μαθηματικών αναδεικνύει τη συνύπαρξη των δύο γνωστικών στοιχείων μέσω της μεταφοράς, προσφέροντας νέες προσεγγίσεις στην αναπαράσταση και κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Το πέρασμα από τη μουσική στα μαθηματικά επομένως αναμένουμε να βρεθεί μεταξύ των δύο αυτών γνωστικών στοιχείων, μεταξύ δηλαδή των νοτών της μουσικής, και των κλασμάτων των Μαθηματικών.

Η μάθηση των κλασμάτων αποτελεί πρόκληση τόσο για παιδιά όσο και για ενήλικες, με πολλούς ερευνητές να αναζητούν τους λόγους πίσω από αυτήν τη δυσκολία (Courey, 2012; Λεμονίδης 2016; Γαγάτσης κ.ά., 2006). Σύμφωνα με μελέτες, οι δυσκολίες οφείλονται στην πολυπλοκότητα των κλασμάτων, τις προκαταλήψεις σχετικά με τους φυσικούς αριθμούς και τις δυσκολίες στην αναγνώριση ισοδύναμων κλασμάτων. Επιπλέον, η προσέγγιση που επικεντρώνεται στη μηχανική εφαρμογή των κανόνων μπορεί να οδηγήσει σε παρανοήσεις. Είναι σημαντικό οι μαθητές να εκπαιδεύονται μέσω διαφόρων μοντέλων και να δίνεται έμφαση στην κατανόηση των εννοιών πίσω από τα κλάσματα, προκειμένου να αντιμετωπίσουν αποτελεσματικά τις δυσκολίες αυτές.

Από την άλλη στον χώρο της μουσικής το κάθε μουσικό σημείο αναπαριστά μια χρονική ποσότητα και ονομάζεται φθογγόσημο. Μετά την εγγραφή τους σε ένα πεντάγραμμο, τα σημεία αυτά γίνονται φθόγγοι ή νότες, αποκτώντας και ύψος. Η διάρκεια κάθε νότας εξαρτάται από το σχήμα της και υπάρχουν επτά αξίες που καθορίζουν τη διάρκειά τους (Χαραλάμπους 1997). Κάθε αξία αντιπροσωπεύει μια χρονική ποσότητα, με τις διάφορες αξίες να εκφράζουν διαφορετικές χρονικές διαρκείες, όπως τα μισά, τα τέταρτα, τα όγδοα κλπ. Έτσι, ένα ολόκληρο μπορεί να είναι ισοδύναμο με δύο μισά, τέσσερα τέταρτα, οκτώ όγδοα κ.λπ. Ο συμβολισμός της μουσικής απεικονίζεται μέσω διαφόρων ειδών διαγραμμμάτων, όπως το πεντάγραμμο, το οποίο σύμφωνα με τον Papadopoulos (2002) είναι παρόμοιο με το σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων. Σε αυτό το πλαίσιο, οι μουσικοί μετατρέπουν τη ρυθμική σημειογραφία σε ήχο, προσδίδοντας μια νέα διάσταση στη μουσική πρακτική και

αποτυπώνοντας τις μουσικές ιδέες σε μια γραφική μορφή. Σύμφωνα με τους Bamberger & Disessa (2003), η μουσική θεωρία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εκπαιδευτικό εργαλείο για την εισαγωγή μαθηματικών εννοιών, παρέχοντας πολλαπλές προσεγγίσεις που βοηθούν τους μαθητές να αναπτύξουν την κατανόηση και τις γνώσεις τους.

Η μουσική αποτελεί σημαντικό παράγοντα στη ζωή των ανθρώπων, επηρεάζοντας την προσωπική τους ταυτότητα και συνδυάζοντας τις αισθητικές και κοινωνικές τους αξίες. Η σχέση μεταξύ μουσικής και μαθηματικών αναδεικνύει τη δυνατότητα της μουσικής εκπαίδευσης να ενισχύσει γνωστικούς μηχανισμούς και να βελτιώσει ακαδημαϊκές δεξιότητες (Campbell, 2007); Boyd, 2013). Η ενσωμάτωση της μουσικής στη διδασκαλία μπορεί να δημιουργήσει νέες αναπαραστάσεις για μαθηματικές έννοιες όπως τα κλάσματα, προσφέροντας ποικίλες προσεγγίσεις που ενισχύουν την κατανόηση. Η μελέτη αυτής της σχέσης έχει δείξει ότι η μουσική συμμετοχή σχετίζεται με αυξημένες ακαδημαϊκές επιδόσεις στα μαθηματικά, ενισχύοντας έτσι την εκπαιδευτική εμπειρία των μαθητών. Ωστόσο, ορισμένες έρευνες έχουν δείξει αντικρουόμενα αποτελέσματα. Παρά την υποστήριξη για τη θετική επίδραση της μουσικής συμμετοχής στην ακαδημαϊκή επίδοση, άλλες μελέτες δεν έχουν εντοπίσει στατιστικά σημαντικές διαφορές. Η αντίφαση αυτή υπογραμμίζει τη σημασία της συνεχούς έρευνας και εξέτασης της σχέσης μεταξύ μουσικής και ακαδημαϊκής επίδοσης, καθώς και της ποικιλίας των παραγόντων που επηρεάζουν αυτήν τη σχέση. Παρ' όλα αυτά, οι ερευνητές συμφωνούν ότι η μουσική μπορεί να αποτελέσει σημαντικό εργαλείο για τη βελτίωση των ακαδημαϊκών επιδόσεων και την ανάπτυξη γνωστικών δεξιοτήτων, παρέχοντας έτσι μια ανοικτή προοπτική για περαιτέρω έρευνα και ανάπτυξη στον τομέα αυτόν.

Ο κύριος στόχος της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση της πιθανούς ύπαρξης μεταφοράς γνώσης μεταξύ των μουσικών και των μαθηματικών κλασμάτων. Πιο συγκεκριμένα, μελετήθηκε το πέρασμα από τα μουσικά στα μαθηματικά κλάσματα (**Άξονας Α**) μέσα από τον βαθμό στον οποίο γίνονται αντιληπτά τα μουσικά, ως μαθηματικά κλάσματα (**Ερώτημα Α1**), και από την αναζήτηση των μαθηματικών ενεργειών που πραγματοποιούν οι επαγγελματίες Μουσικοί και οι Μαθητές που διδάσκονται μουσική κατά την ενασχόλησή τους με τις νότες (**Ερώτημα Α2**). Επίσης, μελετήθηκε το Πέρασμα από τα μαθηματικά στα μουσικά κλάσματα (**Άξονας Β**) μέσα από το πώς χρησιμοποιούν οι επαγγελματίες Μουσικοί και οι Μαθητές τη μουσική τους γνώση για να διαχειριστούν τα μαθηματικά κλάσματα. Ακόμα μελετήθηκαν οι

διαφορές μεταξύ των επαγγελματιών Μουσικών και των Μαθητών ως προς τη μεταφορά μεταξύ μουσικών και μαθηματικών κλασμάτων (Άξονας Γ).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Θεωρητικό Μέρος

1.1 Εισαγωγή

Ιστορικά, η σχέση μεταξύ της μουσικής και των μαθηματικών φαίνεται ότι διατηρεί μια σύνδεση που ανάγεται σε βάθος πολλών αιώνων (Vaughn, 2000). Η σύγκριση των δυο αυτών κόσμων, ωστόσο, σημαίνει ότι πρόκειται για δύο πολύ διακριτούς κλάδους. Τα μαθηματικά είναι μια επιστημονική μελέτη, γεμάτη τάξη, μετρητότητα και υπολογισιμότητα. Η μουσική, από την άλλη πλευρά, θεωρείται ότι είναι καλλιτεχνική και εκφραστική. Ωστόσο, οι δύο επιστημονικοί κλάδοι συνδέονται μεταξύ τους για πάνω από δύο χιλιάδες χρόνια. Οι θεωρητικοί της μουσικής, όπως και οι ειδικοί σε άλλους κλάδους, χρησιμοποιούν τα μαθηματικά για να αναπτύξουν, να εκφράσουν και να μεταδώσουν τις ιδέες τους (Shah, 2010). Ένα όμως από τα σημαντικότερα κοινά τους στοιχεία, είναι πως και οι δύο κλάδοι εκφράζονται ομοίως με τη χρήση της αντιπροσωπευτικής γλώσσας και των συμβολισμών (Papadopoulos, 2002). Στον κόσμο και στη γλώσσα των μαθηματικών, το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου, ενός μέρους συνόλου ή και μιας ένωσης συνόλων, εκφράζονται μέσα από τα σύμβολα των αριθμών και τις μαθηματικές πράξεις. Για τη μουσική, η γλώσσα αυτή εκφράζεται ως προς το ύψος και την διάρκεια του ήχου μέσα από τις νότες. Τα δύο αυτά χαρακτηριστικά περιγράφονται στη σύγχρονη μουσική σημειογραφία από τη θέση της νότας στο πεντάγραμμο και τον συμβολισμό της (κύκλος για ολόκληρο, κύκλος με κατακόρυφη γραμμή για μισό κ.λπ.).

1.2 Σχέση μουσικής και μαθηματικών

Ερευνητές από διάφορους κλάδους έχουν ασχοληθεί με την σχέση της μουσικής με τα μαθηματικά.

Ένας από τους μεγαλύτερους θεωρητικούς της μουσικής του δέκατου όγδοου αιώνα ήταν ο Jean Philippe Rameau. Ο Papadopoulos (2022), αναφέρει τη βαθιά συμβολή των Μαθηματικών στη μουσική, μέσα από το έργο του Rameu, *Traité de l'Harmonie Réduite à ses Principes Naturels* (1722) αυτήν:

«Η μουσική είναι μια επιστήμη που πρέπει να έχει καθορισμένους κανόνες. Αυτοί οι κανόνες πρέπει να αντλούνται από μια αρχή που

πρέπει να είναι προφανής, και αυτή η αρχή δεν μπορεί να γίνει γνωστή χωρίς τη βοήθεια των μαθηματικών. Πρέπει να ομολογήσω ότι παρ' όλη την εμπειρία που απέκτησα στη μουσική ασκώντας τη για αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα, είναι ωστόσο μόνο με τη βοήθεια των μαθηματικών που οι ιδέες μου ξεμπερδεύτηκαν, και ότι το φως κατάφερε να φτάσει σε ένα ορισμένο σκοτάδι, του οποίου δεν το γνώριζε πριν».

Σύμφωνα με τον Papadopoulos (2002), οι μαθηματικοί έλκονται από τη μελέτη της μουσικής θεωρίας από τους Αρχαίους Έλληνες, επειδή η θεωρία και η σύνθεση της μουσικής απαιτούν έναν αφηρημένο τρόπο σκέψης και στοχασμού. Αυτή η μέθοδος σκέψης είναι παρόμοια με αυτή που απαιτείται για την καθαρή μαθηματική σκέψη. Ο Papadopoulos (2002) ακόμα αναφέρει πως ο συνθέτης Milton Babbitt (καθηγητής μαθηματικών και θεωρίας της μουσικής στο Πανεπιστήμιο του Πρίνστον), έγραψε ότι «μια μουσική θεωρία πρέπει να είναι σταθερή ως συνδεδεμένο σύνολο αξόνων, ορισμών και θεωρημάτων, οι αποδείξεις των οποίων προέρχονται μέσω μιας κατάλληλης λογικής» (Babbitt, 1961, σελ. 399.).

Όσον αφορά όμως τα θετικά αποτελέσματα της μουσικής συμμετοχής ειδικά στους μαθητές, σύμφωνα με την Boyd (2013), πρέπει πρώτα να κατανοήσουμε πώς η μουσική συμμετοχή σχετίζεται με τη θεωρία μάθησης. Ένα τέτοιο εγχείρημα αποτελεί η θεωρία της Πολλαπλής Νοημοσύνης (Multiple Intelligence (MI)) του Gardner (1993). Σύμφωνα με αυτήν, η νοημοσύνη ορίζεται ως «η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων ή δημιουργίας προϊόντων, τα οποία εκτιμώνται σε ένα ή περισσότερα πολιτιστικά ή κοινοτικά περιβάλλοντα». Με τη χρήση αυτού του ορισμού, θα πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι οι άνθρωποι επιλύουν προβλήματα με διαφορετικούς τρόπους. Αυτή η ικανότητα να προσλαμβάνεις τις ίδιες πληροφορίες, αλλά με διαφορετικούς τρόπους, είναι το πλαίσιο για τη MI. Στη θεωρία αυτή, η νοημοσύνη δεν εκφράζεται από έναν μόνο δείκτη, αλλά αποτελείται από επτά βασικούς τύπους. Σύμφωνα με τον Gardner (1993), αυτοί οι τύποι νοημοσύνης είναι: (α) Γλωσσική, (β) Λογικο-Μαθηματική, (γ) Χωρική, (δ) Μουσική, (ε) Σωματικο-κινητική, (στ) Διαπροσωπική, και (ζ) Ενδοπροσωπική. Όπως προσθέτει η Boyd (2013), εφόσον η γνώση βασίζεται σε διαφορετικό τύπο νοημοσύνης για κάθε άτομο, ο ρόλος του εκπαιδευτή πρέπει να επικεντρώνεται στην ανάπτυξη της ιδιαίτερης νοημοσύνης κάθε μαθητή.

Βασισμένη σε αυτή τη θεωρία, ο Hanson (2004, στο Hall 2007) ορίζει την λογικό-μαθηματική νοημοσύνη ως τη ικανότητα ανίχνευσης μοτίβων, τον απαγωγικό συλλογισμό και τη λογική σκέψη, ενώ ο Heming (2008) εντάσσει την ικανότητα υπολογισμών με τον νου, τη δημιουργία υποθέσεων και την ολοκλήρωση μαθηματικών πράξεων. Ο ίδιος ακόμα, προσθέτει πως σύμφωνα με τον Shepard (2004) μαθητές με αυξημένο το συγκεκριμένο είδος νοημοσύνης δείχνουν συχνά ένα ενδιαφέρον για τη μουσική.

Η σύνδεση όμως της μουσικής νοημοσύνης με τη λογικο-μαθηματική, σύμφωνα με την Hall (2007) ξεκινάει από το γεγονός πως η μουσική νοημοσύνη μπορεί να συνδέεται με άλλες μορφές νοημοσύνης. Ένα τέτοιου είδους παράδειγμα σύμφωνα με την Boyd (2015) αποτελεί ο βιολιστής που: (α) χρησιμοποιεί τη μουσική νοημοσύνη για να μάθει και να εκτελέσει τη μουσική, (β) χρησιμοποιεί τη σωματική-κινητική νοημοσύνη για να κάνει όλες τις προσαρμογές του σώματος και των χεριών του με ταχύτητα και ακρίβεια και (γ) χρησιμοποιεί διαπροσωπικές δεξιότητες για να εκφράσει ένα έργο και να μεταδώσει το μήνυμα της μουσικής στο κοινό. Μέσα σε κάθε μια από τις μορφές νοημοσύνης υπάρχουν πολλά υπο-επίπεδα γνώσης. Αυτά τα υπο-επίπεδα βοηθούν το μυαλό να δημιουργήσει ένα σύστημα σημειογραφίας με το οποίο τα σύμβολα έχουν νόημα. Παραδείγματα αυτών των υπο-επιπέδων είναι τα μαθηματικά, η ανάγνωση και η μουσική σημειογραφία.

Από την πλευρά των νευροεπιστημών, η Hilton (2015) αναφέρει μια δημοσίευση των Münte κ.ά. (2002) στο περιοδικό Nature, στην οποία ο εγκέφαλος του μουσικού αποδεικνύεται ως ένα ιδανικό μοντέλο νευροπλαστικότητας, μιας ικανότητας του εγκεφάλου να αναδιαρθρώνεται με βάση τα ερεθίσματα που δίδονται. Σύμφωνα με την ίδια, η ενασχόληση με την μουσική φαίνεται να ενεργοποιεί περισσότερα μέρη του εγκεφάλου από οποιαδήποτε άλλη δραστηριότητα, μεταξύ των οποίων περιλαμβάνονται και εκείνες οι περιοχές του εγκεφάλου που ασχολούνται με τα μαθηματικά. Τέτοιου είδους περιοχή θεωρείται ο κατώτερος βρεγματικό λοβός. Η Hilton (2015) αναφέρει πως η περιοχή αυτή στον εγκεφαλικό φλοιό είναι επίσης γνωστή για την αντιμετώπιση της αριθμητικής επίλυσης προβλημάτων, όπως έχουν δείξει οι Rivera, κ.ά. (2005), ενώ σύμφωνα με τους De Schotten, κ.ά. (2005) δείχνει να σχετίζεται και με την χωρική αντίληψη (spatial cognition) και την οπτικοκινητική αντίληψη (visuomotor integration).

Υπό το φως αυτής της γνώσης, φαίνεται πιο ενδιαφέρον να εξεταστεί πώς μπορεί να πραγματοποιηθεί η γνωστική μεταφορά από τη μουσική στα μαθηματικά. Όπως αναφέρεται συχνά στην έρευνα σχετικά με τη μουσική και τα μαθηματικά, η μουσική σημειογραφία είναι χωρική. Επομένως, η συμμετοχή στην αναπαραγωγή μουσικής από τη σημειογραφία θα μπορούσε εύλογα να ενεργοποιήσει τον κατώτερο βρεγματικό λοβό, ο οποίος με επαρκή επανάληψη θα μπορούσε να βελτιώσει τη νευρική συνδεσιμότητα σε αυτήν την περιοχή, με παρόμοιο τρόπο με αυτόν της μαθηματικής πρακτικής (Hilton, 2015).

1.3 Μεταφορά μεταξύ μαθηματικών και μουσικής

Σύμφωνα με τον Byrnes (1996), ως μεταφορά ορίζεται ως η ικανότητα του ατόμου να επεκτείνει κάτι που έχει μάθει σε ένα πλαίσιο, σε ένα άλλο. Η μεταφορά αυτή σύμφωνα με τους Singley και Anderson (1989) είναι συνάρτηση του βαθμού στον οποίο τα έργα αυτά μοιράζονται γνωστικά στοιχεία. Είναι σύνηθες όμως, να γίνεται διάκριση μεταξύ κοντινής και μακρινής μεταφοράς. (Barnett, 2002). Όπως αναφέρει ο Sala (2016), ενώ η κοντινή μεταφορά πραγματοποιείται μεταξύ περιοχών που συνδέονται στενά (π.χ. οδήγηση δύο διαφορετικών μοντέλων αυτοκινήτων), η μακρινή μεταφορά λαμβάνει χώρα όπου η σχέση μεταξύ της πηγής και των περιοχών στόχου είναι αδύναμη (π.χ. μεταφορά από τη μουσική στα μαθηματικά). Μια τέτοια περίπτωση μεταφοράς αποτελεί σύμφωνα με τους Jones & Pearson (2013) η σχέση των κλασμάτων των μαθηματικών με τον ρυθμό της μουσικής. Όπως αναφέρουν, ένας εγγράμματος μουσικός απαιτείται να υποδιαιρεί νοητά τον ρυθμό συνεχώς για να καταλήξει στη σωστή ερμηνεία της ρυθμικής σημειογραφίας. Έτσι, η έννοια του μέρους-όλου, που είναι μια πολύ σημαντική κατασκευή για πολλά μαθηματικά προβλήματα, είναι ιδιαίτερα σημαντική και στην κατανόηση του ρυθμού της μουσικής. Στην συνέχεια, οι Jones & Pearson (2013) προσθέτουν πως οι λεπτομέρειες των δυο καταστάσεων είναι σίγουρα διαφορετικές, καθώς το πλαίσιο έχει αλλάξει, αλλά η δομή του προβλήματος της υποδιαίρεσης του χρόνου είναι ουσιαστικά η ίδια με οποιοδήποτε πρόβλημα μέρους-όλου που τίθεται μαθηματικά.

Παράλληλα, όπως αναφέρει η Lovemore (2021) η ενσωμάτωση της μουσικής στα μαθηματικά παρέχει ένα εργαλείο με τον οποίο τα κλάσματα μπορούν να αναπαρασταθούν διαφορετικά από την παραδοσιακή αναπαράσταση της πίτσας ή της

σοκολάτας. Η δυνατότητα αυτή μπορεί να προσφέρει στους εκπαιδευτικούς μια πρόσθετη στρατηγική για την αναπαράσταση των κλασμάτων και σύμφωνα με τους Azaryahu & Adi-Jarha (2020) οι πολλαπλές αναπαραστάσεις οδηγούν σε βαθύτερη κατανόηση και καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα.

Το πέρασμα από τη μουσική στα μαθηματικά επομένως αναμένουμε να βρεθεί μεταξύ των δύο αυτών γνωστικών στοιχείων, μεταξύ δηλαδή των νοτών της μουσικής, και των κλασμάτων των Μαθηματικών.

1.4 Τα κλάσματα στα Μαθηματικά

Τα κλάσματα ως μαθηματική έννοια είναι μια από τις πιο δύσκολες για να κατακτηθούν από παιδιά αλλά και ενήλικες (Courey, 2012). Οι επιστήμονες εδώ και πολλά χρόνια προσπαθούν να εντοπίσουν τους λόγους που οδηγούν στο γεγονός αυτό. Σύμφωνα με τον Kieren (1976, στο Λεμονίδης 2016), μια από τις βασικές πηγές των δυσκολιών που προκύπτουν κατά τη διαδικασία μάθησης των κλασμάτων, έγκειται στο ότι τα κλάσματα αποτελούν μια σύνθετη έννοια που περιλαμβάνει πέντε επιμέρους ερμηνείες-μοντέλα για τον προσδιορισμό της. Η εισαγωγή στην έννοια του κλάσματος στο δημοτικό πραγματοποιείται συχνά με τη χρήση της ερμηνείας μέρος-όλου. Το συγκεκριμένο μοντέλο περιλαμβάνει γεωμετρικά σχήματα τα οποία αποτελούν το «όλον», το οποίο χωρίζεται σε μέρη τα οποία έχουν μεταξύ τους το ίδιο μέγεθος (Κολέζα, 2009). Εκτός από τη συγκεκριμένη ερμηνεία, οι ερευνητές έχουν καταλήξει πως στα μοντέλα αυτά το κλάσμα εμφανίζεται ως λόγος ή μέρος μέρους, μέτρο, πηλίκο και ως τελεστής. (Γαγάτσης κ.ά., 2006, Λεμονίδης, 2016).

Υπάρχουν ορισμένες δυσκολίες που προκύπτουν κατά τη χρήση των διάφορων ερμηνειών στη διδασκαλία, οδηγώντας σε λάθη ή παρανοήσεις. Λαμβάνοντας υπόψη την κατηγοριοποίηση των δυσκολιών που πραγματοποίησαν οι Lortie-Forgues et. al., (2015), ο Λεμονίδης (2016) ομαδοποίησε τους παράγοντες που οδηγούν σε αυτές τις δυσκολίες σε τρεις βασικές ομάδες. Οι ομάδες αυτές αναφέρονται (1) σε παράγοντες σχετικούς με την διαφορά της μαθηματικής φύσης των φυσικών με τους ρητούς αριθμούς, (2) παράγοντες σχετικούς με το αφηρημένο των διαδικασιών των πράξεων των ρητών αριθμών και (3) σε πολιτισμικούς παράγοντες.

Μια από τις βασικότερες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν μαθητές και ενήλικες στην κατανόηση των κλασμάτων είναι η προκατάληψη των φυσικών αριθμών (nature number bias, whole number bias) (Ni & Zhou 2005, Vamvakoussi et al. 2012, Λεμονίδης 2016, Christou 2015). Η δυσκολία αυτή αναφέρεται στην ακατάλληλη χρήση των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών. Η προκατάληψη των φυσικών αριθμών φαίνεται να είναι το αποτέλεσμα μιας καλά εδραιωμένης γνώσης για τον αριθμό που έχει τις ρίζες της στην αρχική κατανόηση του αριθμού που οργανώνεται από πολύ πρώιμη ηλικία γύρω από τους φυσικούς αριθμούς και τη διαδικασία της απαρίθμησης (Gelman, 2000 στο Christou 2015).

Τέτοιου είδους παράδειγμα αποτελεί η αντίληψη πως όσο μικρότεροι αριθμοί είναι οι όροι, τόσο μεγαλύτερο το κλάσμα (Stafylidou & Vosniadou 2004), ή πως όσο μεγαλύτερος ο αριθμητής και ο παρονομαστής του κλάσματος, τόσο μεγαλύτερο κλάσμα (Moss, 2005 στο Christou 2015). Σε αυτές τις περιπτώσεις ο προσδιορισμός του μέγεθος στους ρητούς αριθμούς βασίζεται ασφαλισμένα σε μεμονωμένους αριθμούς ή ποσότητες, όπως συμβαίνει στους φυσικούς αριθμούς και όχι στην σχέση μεταξύ τους. Αναφορικά, σε μια έρευνα (Womersley, 2000 στο Yusof 2003) εξετάστηκε ποιος είναι ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος μεταξύ των κλασμάτων ($1/1000$, $1/3$, $1/4$, $1/2$) σε μαθητές ηλικίας 11 ετών. Αν και το 80% απάντησαν σωστά ότι το μικρότερο κλάσμα είναι το $1/1000$, ορισμένοι από τους μαθητές αυτούς δεν μπόρεσαν να απαντήσουν για το αν είναι μεγαλύτερο το $1/4$ ή το $1/3$ (Yusof, 2003).

Κάτι ακόμα που δημιουργεί δυσκολία στην κατανόηση των ρητών αριθμών σχετίζεται με τις διαφορές που υπάρχουν στον τρόπο αναπαράστασής τους σε σχέση με τους φυσικούς αριθμούς, καθώς και στους διαφορετικούς συμβολισμούς των ρητών (Λεμονίδης 2016). Ενώ κάθε φυσικός αριθμός έχει τον δικό του τρόπο μοναδικής αναπαράστασης, κάθε ρητός αποτελείται από ένα σύνολο ισοδύναμων κλασμάτων με το ίδιο μέτρο (π.χ. $1/2 = 2/4 = 3/6 = \dots$). Συγχρόνως, κάθε ρητός μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα, δεκαδικός, ή ποσοστό ($1/2 = 0,5 = 50\%$). Ένα επακόλουθο αυτής της πολυπλοκότητας είναι η δυσκολία αναγνώρισης και χειρισμού ισοδύναμων κλασμάτων (Λεμονίδης 2016). Στην έρευνα που πραγματοποίησαν οι Nunes και Bryant (2006), διαπιστώθηκε πως μόνο το 15% μαθητών Τετάρτης και 45% Πέμπτης Τάξης ήταν σε θέση να συγκρίνουν σωστά τα κλάσματα $2/4$ και $3/6$, με τους περισσότερους από αυτούς να θεωρούν μεγαλύτερο το $3/6$, γεγονός που αποδεικνύει την παρανόηση πως όσο μεγαλύτεροι είναι οι αριθμοί, τόσο μεγαλύτερο είναι το κλάσμα.

Μία άλλη δυσκολία εντοπίζεται στην αναγνώριση των κλασμάτων ως μέρος συνεχούς επιφάνειας ή ως μέρος συνόλου αντικειμένων. Αυτό που συχνά συμβαίνει είναι ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν ένα κλάσμα ως μέρος μιας επιφάνειας, κυρίως όταν αυτή δεν είναι χωρισμένη σε ομοιόμορφα μέρη, καθώς προσέχουν μόνο το μέρος που είναι χρωματισμένο ή αποκομμένο, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη το όλο (Φιλίππου & Χρήστου, 1995 στο Γαγάτσης κ.ά., 2006). Επίσης οι μαθητές πολλές φορές δυσκολεύονται να απαντήσουν σε ασκήσεις όπου το σύνολο των αντικειμένων είναι μεγαλύτερο από τον παρονομαστή του κλάσματος που τους ζητείται να επιλέξουν (Φιλίππου & Χρήστου, 1995 στο Γαγάτσης κ.ά., 2006).

Ιδιαίτερα συχνό φαινόμενο όμως, αποτελούν οι δυσκολίες διδακτικής φύσης. Σύμφωνα με αυτή την κατηγορία, η αλγοριθμική προσέγγιση και η έμφαση στην διαδικαστική γνώση και την παραδοσιακή διδασκαλία οδηγεί τους μαθητές αλλά και τους ενήλικες να αλληλεπιδρούν με μηχανικό τρόπο με τα μοντέλα χωρίς να αντιλαμβάνονται απαραίτητα τις μαθηματικές έννοιες τις οποίες περιλαμβάνουν, κάτι που έχει αρνητικές συνέπειες στην κατανόηση και εμπέδωση των εννοιών (Petit, Laird & Marsden, 2010, Γαγάτσης κ.ά., 2006). Ως αποτέλεσμα αυτής της δυσκολίας, οι μαθητές και οι ενήλικες τείνουν να μπερδεύουν τους κανόνες των πράξεων μεταξύ τους, καταλήγοντας για παράδειγμα στην πράξη της πρόσθεσης να προσθέτουν αριθμητές με αριθμητές και παρονομαστές με παρονομαστές, όπως γίνεται στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων (Λεμονίδης 2016).

Πολλά από αυτά τα λάθη των μαθητών οφείλονται στο γεγονός ότι τα παιδιά έχουν περιορίσει τον ορισμό που οι ίδιοι έχουν διαμορφώσει για τα κλάσματα σε ένα μόνο μοντέλο αναπαράστασης. Γι' αυτόν τον λόγο και είναι σημαντικό οι μαθητές να έρχονται σε επαφή και να αλληλεπιδρούν με όσο το δυνατόν περισσότερα διαφορετικά μοντέλα. Ακόμα, ο τρόπος παρουσίασης των αναπαραστάσεων για τα κλάσματα είναι συγκεκριμένος, στερεότυπος και συχνά πολύ καθοδηγούμενος (π.χ. ο μαθητής έχει να σκιάσει το $\frac{1}{4}$ ενός ορθογωνίου ή ενός κύκλου, τα οποία είναι εκ των προτέρων χωρισμένα σε 4 ίσα μέρη). Επειδή οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται αποτελούνται από σχήματα με στερεότυπη μορφή, ο διαχωρισμός αυτών των σχημάτων τείνει να εξελιχθεί σε στερεότυπο (Γαγάτσης κ.ά., 2006). Ως αποτέλεσμα, οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις αποκτούν τον ρόλο του αντικειμένου επεξεργασίας, απομακρύνοντας τον μαθητή από την έννοια του κλάσματος, δημιουργώντας έτσι ακόμα μεγαλύτερες παρανοήσεις. Μια αντιμετώπιση του φαινομένου αυτού, μπορεί να αποτελέσει η έκθεση των μαθητών σε διαφορετικές αναπαραστάσεις, ή ακόμα και η σύνδεση του μαθηματικού, με το μουσικό κλάσμα δηλαδή την νότα.

1.5 Οι νότες

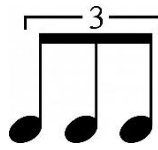
Στη γλώσσα της μουσικής, ο συμβολισμός της κάθε χρονικής ποσότητας πραγματοποιείται με σύμβολα τα οποία ονομάζονται φθογγόσημα. Το κάθε φθογγόσημο διαθέτει μια αξία η οποία αντιστοιχεί σε μια χρονική διάρκεια. Από τη στιγμή που τα φθογγόσημα γραφτούν σε ένα πεντάγραμμο παίρνουν εκτός από την αξία και ύψος και ονομάζονται πλέον φθόγγοι ή νότες. Η αξία που έχει κάθε φθόγγος εξαρτάται από το σχήμα του. Συνολικά στη μουσική υπάρχουν επτά αξίες (Χαραλάμπους, 1997). Οι αξίες αυτές φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 1.1: Ο Συμβολισμός των φθόγγων

Φθογγόσημο	Σύμβολο
Ολόκληρο	
Μισό	
Τέταρτο	
Όγδοο	
Δέκατο έκτο	
Τριακοστό Δεύτερο	
Εξηκοστό έκτο	

Όπως φαίνεται, η ονομασία κάθε χρονικής αξίας εξαρτάται άμεσα από τη σχέση της με το ολόκληρο. Συγκεκριμένα εξαρτάται από το πόσες φορές η εκάστοτε χρονική αξία πρέπει να επαναληφθεί ούτως ώστε να συμπληρωθεί ο χρόνος που διαρκεί ένα ολόκληρο. Έτσι προκύπτουν οι ισότητες των παρακάτω αξιών: Ένα ολόκληρο ισούται με 2 μισά, 4 τέταρτα, 8 όγδοα, 16 δέκατα έκτα.

Ο συνδυασμός τριών ίδιων φθόγγων με τον αριθμό 3 από πάνω, παριστάνει το τρίηχο του συγκεκριμένου φθόγγου (πχ εικόνα 1: τρίηχο ογδόων). Η διάρκεια που έχει ένα τρίηχο είναι ίση με τη διάρκεια των δύο από τις τρεις νότες. Έτσι, ένα τρίηχο μισών έχει διάρκεια ενός ολοκλήρου, ένα τρίηχο τετάρτων έχει διάρκεια ενός μισού, ένα τρίηχο ογδόων έχει διάρκεια ενός τετάρτου κ.λπ.



Εικόνα 1.1: Το τρίηχο ογδόω

Όλο αυτό το σύστημα σημειογραφίας, αποτυπώνεται στο χαρτί μέσα από διαφόρων ειδών διαγράμματα. Στην περίπτωση της ευρωπαϊκής μουσικής, από τον ενδέκατο αιώνα, τα διαγράμματα που χρησιμοποιούνται στη μουσική είναι το πεντάγραμμα, που σύμφωνα με τον Papadopoulos (2002) είναι παρόμοιο με τα μαθηματικά γραφήματα διακριτών συναρτήσεων σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Ο άξονας x αντιπροσωπεύει το χρόνο (time), ενώ ο άξονας y αντιπροσωπεύει το ύψος (pitch), όπως φαίνεται στην εικόνα 2.



Εικόνα 1.2: Το πεντάγραμμα ως σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων

Κατά τη συγγραφή ή εκτέλεση λοιπόν μιας μουσικής μελωδίας, οι μουσικοί πραγματοποιούν ακαριαία ημι-μαθηματικές διαδικασίες υποδιαιρώντας χρονικές διάρκειες, και μετατρέπουν τη ρυθμική σημειογραφία σε ήχο (Hallam, 2016). Για να φτάσει όμως αυτό να πραγματοποιείται σε πρώτο χρόνο, οι μουσικοί κατά τα πρώτα χρόνια της μαθητείας τους αποκτούν μια ξεκάθαρη εικόνα για τις σχέσεις ισοδυναμίας των νοτών, καθώς και για τη σχέση της νότας ως μέρος ολόκληρου.

Οι Bamberger & Disessa (2003) υποστηρίζουν πως η μουσική θεωρία μπορεί να αποτελέσει βάση για την προσέγγιση μαθηματικών εννοιών και μπορεί να αποτελέσει χρήσιμο εκπαιδευτικό υλικό στην προσπάθεια των εκπαιδευτικών να παρέχουν πολλαπλές αναπαραστάσεις, προκειμένου να οικοδομήσουν οι μαθητές τη γνώση.

1.6 Η σχέση μουσικής και μαθηματικής μάθησης

Η μουσική παίζει ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στη ζωή των ανθρώπων. Όπως αναφέρει ο Campell (2007), από τη στιγμή που οι μαθητές ξοδεύουν μεγάλο μέρος του προσωπικού τους χρόνου, ενέργειας και χρημάτων για την αγαπημένη τους μουσική, είναι πιθανό οι έφηβοι να χρησιμοποιούν τη μουσική για να αποδώσουν τις προσωπικές τους ταυτότητες. Παράλληλα η Boyd (2013) προσθέτει πως η μουσική που έχει τις δικές της αισθητικές και κοινωνικές αξίες, έχει τη δυνατότητα να γεφυρώσει το χάσμα μεταξύ του εκπαιδευτικού περιεχομένου και της καθημερινής ζωής των μαθητών. Ακόμα όμως και στην ίδια τη διδασκαλία, μέσω της μουσικής δίνεται η δυνατότητα να δημιουργηθούν νέες αναπαραστάσεις για μαθηματικές έννοιες όπως τα κλάσματα. Με αυτόν τον τρόπο, όπως αναφέρει η μάθηση ενισχύεται και επιτυγχάνεται καλύτερη κατανόηση (Lovemore, 2021; Azaryahu & Adi-Japha 2020).

Αν και η μεταφορά μεταξύ μουσικής και μαθηματικών αποτελεί μια περίπτωση μακρινής μεταφοράς με συγκεκριμένες δυσκολίες, ο Sala (2016) αναφέρει πως είναι πιθανό η μουσική εκπαίδευση να ενισχύει γνωστικούς μηχανισμούς ανεξάρτητα από το πλαίσιο στο οποίο αυτοί εφαρμόζονται. Οι μηχανισμοί αυτοί με τη σειρά τους μπορούν να βελτιώσουν άλλες μη μουσικές γνωστικές και ακαδημαϊκές δεξιότητες. Δεδομένου ότι έχει διαπιστωθεί ότι η παρουσία της μουσικής έχει θετική επίδραση στον εγκέφαλο, είναι πιθανό να έχει θετική επίδραση και στη σχολική επίδοση των μαθητών (Hall, 2007).

Διάφοροι ερευνητές που εξέτασαν τη σχέση μεταξύ των ακαδημαϊκών επιδόσεων των μαθητών και της μουσικής συμμετοχής, βρήκαν μια σχέση μεταξύ της μουσικής συμμετοχής και των αυξημένων μαθηματικών επιδόσεων (Cheek & Smith, 1999).

Οι Cheek & Smith (1999) διαπίστωσαν πως έφηβοι που λάμβαναν μαθήματα Μουσικής για πάνω από δύο χρόνια είχαν καλύτερη απόδοση στα Μαθηματικά από εκείνους που δεν ασχολήθηκαν ποτέ. Εντόπισαν επίσης καλύτερη απόδοση στους μαθητές που έλαβαν μαθήματα ηλεκτροφόρων οργάνων, σε σχέση με άλλα μουσικά όργανα.

Ακόμα, οι Courey κ.α. (2012) εντόπισαν σημαντικά στατιστικές διαφορές μετά την εφαρμογή του προγράμματος «Academic Music» σε μαθητές της τρίτης τάξης δημοτικού. Το πρόγραμμα είναι μία πρόταση στα πλαίσια του προγράμματος σπουδών,

όπου χρησιμοποιείται μουσική σημειογραφία, παλαμάκια, τύμπανα και ρυθμική ανάγνωση με τη φωνή, με στόχο την εισαγωγή της έννοιας των κλάσμάτων. Οι μαθητές που συμμετείχαν στο πρόγραμμα σημείωσαν 50% υψηλότερες επιδόσεις σε δοκιμαστικά τεστ με κλάσματα που ελήφθησαν στο τέλος της έρευνας (posttest), σε σύγκριση με τους μαθητές που παρακολουθούσαν την κανονική μαθηματική τάξη.

Την μελέτη αυτή των Courey κ.α. (2012) επανέλαβαν οι Azaryahu κ.ά. (2019), συγκρίνοντας μάλιστα το πρόγραμμα παρέμβασης «Academic Music», με μια ολιστικά ολοκληρωμένη παρέμβαση μουσικής-μαθηματικών, με την ονομασία «MusiMaths», και τις δύο ομάδες παρέμβασης με μια ομάδα ελέγχου όπου δεν είχε γίνει καμία μουσική ενσωμάτωση. Και οι δύο ομάδες παρέμβασης επέδειξαν μεγαλύτερη επίδοση στο τέλος της έρευνας (posttest) και υπερέβησαν την ομάδα ελέγχου.

Σε μία πιο πρόσφατη έρευνα, η Lovemore (2021) ενσωμάτωσε τις χρονικές αξίες της νότας για να εμπλουτίσει τη διδασκαλία της γύρω από τις σχέσεις των κλασματικών μονάδων στην 5η τάξη. Διαπίστωσε ότι η χρήση του δυτικού συστήματος ονοματοδοσίας νοτών (π.χ. «half note» «νότα μισού») επέτρεψε ευκαιρίες σύνδεσης των μουσικών νότων με τα κλάσματα και αύξησε την αυτοπεποίθηση των μαθητών να συμμετέχουν σε προβλήματα που απαιτούν κλασματική σκέψη.

Ωστόσο υπάρχουν και έρευνες στις οποίες φαίνεται η ενασχόληση με τη μουσική να μην έχει οδηγήσει σε ιδιαίτερα αυξημένες ακαδημαϊκές επιδόσεις στα μαθηματικά. Οι Cox & Stephens (2006) μελέτησαν τους βαθμούς 208 μαθητών και μαθητριών, διαχωρίζοντας αυτούς που έχουν ασχοληθεί με τη μουσική (Ομάδα Α) με αυτούς που δεν έχουν ασχοληθεί (Ομάδα Β). Αν και οι μαθητές της Ομάδας Α είχαν καλύτερες επιδόσεις από τους μαθητές της Ομάδας Β, οι διαφορές δεν ήταν στατιστικά σημαντικές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Στόχος - Ερωτήματα – Μεθοδολογία

2.1 Στόχος και Ερωτήματα της έρευνας

Στόχος της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση της πιθανούς ύπαρξης μεταφοράς γνώσης μεταξύ των μουσικών και των μαθηματικών κλασμάτων. Πιο συγκεκριμένα, μελετήθηκαν οι μαθηματικές και μουσικές ενέργειες που εμφάνισαν 6 επαγγελματίες μουσικοί και 6 διδασκόμενοι μαθητές μουσικής κατά την ενασχόληση τους με ορισμένα έργα που περιλάμβαναν μουσικά και μαθηματικά κλάσματα. Όσον αφορά την πρώτη ομάδα, οι επαγγελματίες μουσικοί ως άριστοι γνώστες της μουσικής σημειογραφίας και της χρήσης των νοτών που την αποτελούν, αλληλοεπιδρούν με τα μουσικά κλάσματα σε καθημερινή βάση. Όσον αφορά τη δεύτερη ομάδα, οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου έχουν ολοκληρώσει κατά την προηγούμενη τους τάξη τη διδασκαλία των μαθηματικών κλασμάτων. Συγχρόνως, για την δεύτερη ομάδα επιλέχθηκαν μαθητές που να διδάσκονται μουσική σε ωδείο ή μουσικό σχολείο για τουλάχιστον 4 χρόνια, ώστε να υπάρχει πλήρης εξοικείωση με τη μουσική σημειογραφία.

Επομένως, με την επιλογή των δυο ηλικιακών ομάδων, εκτός από την ανίχνευση της μεταφοράς μεταξύ μουσικών και μαθηματικών κλασμάτων, αναμένεται να εξεταστούν οι διαφορές που μπορεί να εμφανίζονται στους έμπειρους επαγγελματίες ενήλικες, και στους μαθητευόμενους εν δυνάμει μουσικούς. Οι διαφορές αυτές θα αναζητηθούν ως προς την ερμηνεία της Νότας, τις ενέργειες με τις οποίες οι δύο ομάδες απαντάνε σε έργα που περιλαμβάνουν Πρόσθεση με Νότες, Σύγκριση με Νότες και Σύγκριση με Κλάσματα, ενώ θα αναζητηθούν και τα διάφορα περάσματα που γίνονται από τη μουσική στα μαθηματικά, και αντίστροφα.

Συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στην παρούσα μελέτη ομαδοποιούνται και συνθέτουν τρεις άξονες. Οι άξονες αυτοί, και τα επιμέρους ερωτήματα από τα οποία αποτελούνται, είναι οι εξής:

Άξονας Α) Πέρασμα από τα μουσικά στα μαθηματικά κλάσματα.

Ερώτημα Α1) Σε ποιον βαθμό αντιλαμβάνονται οι επαγγελματίες Μουσικοί (Ομάδα Α) και οι Μαθητές που διδάσκονται μουσική (Ομάδα Β) τα μουσικά κλάσματα, ως μαθηματικά κλάσματα;

Ερώτημα Α2) Ποιες μαθηματικές διεργασίες πραγματοποιούν οι επαγγελματίες Μουσικοί (Ομάδα Α) και οι Μαθητές που διδάσκονται μουσική (Ομάδα Β) κατά την ενασχόλησή τους με τις νότες;

Άξονας Β) Πέρασμα από τα μαθηματικά στα μουσικά κλάσματα.

Ερώτημα Β1) Πώς μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι επαγγελματίες Μουσικοί (Ομάδα Α) και οι Μαθητές που διδάσκονται μουσική (Ομάδα Β) τη μουσική τους γνώση για να διαχειριστούν τα μαθηματικά κλάσματα;

Άξονας Γ) Εμφανίζονται διαφορές μεταξύ των επαγγελματιών Μουσικών (Ομάδα Α) και των Μαθητών που διδάσκονται μουσική (Ομάδα Β) ως προς τη μεταφορά μεταξύ μουσικών και μαθηματικών κλασμάτων;

2.2 Μεθοδολογία έρευνας

Η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα είναι η μελέτη περίπτωσης, μέσω προσωπικής ημιδομημένης συνέντευξης. Οι απαντήσεις των δύο ομάδων στα φύλλα εργασίας, αναλύθηκαν, καταμετρήθηκαν και ταξινομήθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να καταστεί δυνατός ο εντοπισμός του περάσματος από τα μουσικά στα μαθηματικά κλάσματα, και αντίστροφα.

Με σκοπό την ευκολότερη κατανόηση των δεδομένων που συλλέχθηκαν και την αντίστοιχη εξαγωγή συμπερασμάτων, κρίθηκε χρήσιμο αυτά να συνοψιστούν και να παρουσιαστούν με τη μορφή ποσοστών.

2.3 Το δείγμα της έρευνας

Στην παρούσα έρευνα συμμετείχαν επαγγελματίες Μουσικοί (Ομάδα Α) και Μαθητές της Β τάξης του Γυμνασίου που διδάσκονται μουσική (Ομάδα Β), στους οποίους χορηγήθηκαν φύλλα εργασίας αποτελούμενα από συγκεκριμένα έργα το καθένα. Τα φύλλα εργασίας ήταν κοινά για τις δύο ομάδες. Το δείγμα της έρευνας αποτελούν 6 Επαγγελματίες Ενήλικες Μουσικοί και 6 Μαθητές της Β΄ Γυμνασίου, που

κατέχουν τις μουσικές νότες. Όλοι οι μαθητές διδάσκονται μουσική για τουλάχιστον 4 έτη, ενώ και στις δύο ομάδες υπάρχει ποικιλία όσον αφορά το μουσικό όργανο που εξασκείται ο κάθε συνεντευξιζόμενος.

2.4 Ερευνητικό εργαλείο

Ως εργαλείο επιλέχθηκε η ημιδομημένη συνέντευξη, η οποία ηχογραφήθηκε και αποτελείται από 4 φάσεις. Στις δύο πρώτες φάσεις δόθηκε από ένα φύλλο εργασίας, ενώ η τρίτη και τέταρτη φάση βρίσκονταν στο ίδιο φύλλο. Κατά την διάρκεια που ο συνεντευξιζόμενος συμπλήρωνε κάθε φύλλο, εξηγούσε προφορικά τη σκέψη του. Η επεξήγηση αυτή καταγραφόταν από τον ερευνητή και μέσα από αυτήν διακρίνονταν ορισμένες ενέργειες, εκ των οποίων κάποιες βασίζονταν στη μουσική και κάποιες στα μαθηματικά. Οι ενέργειες αυτές κωδικοποιήθηκαν και παρουσιάζονται παρακάτω. Κάθε φύλλο αποτελείται από ορισμένα έργα, τα οποία τέθηκαν με συγκεκριμένο στόχο. Αυτά τα φύλλα παρουσιάζονται στο τέλος στο Παράρτημα στη σελίδα 72.

Στο πρώτο φύλλο εξετάζεται ο τρόπος με τον οποίο οι συνεντευξιζόμενοι αντιλαμβάνονται μια μουσική νότα. Πιο ειδικά, με βάση μια εικόνα νότας τετάρτου, ζητείται να απαντήσουν στις εξής ερωτήσεις:

Ερ1: Τι σκέφτεστε βλέποντας την εικόνα 1; Τι είναι στην πραγματικότητα; Ποια έννοια περιγράφει αυτός ο συμβολισμός;

Ερ2: Πώς αλλιώς θα μπορούσε να αποδοθεί αυτή η έννοια;

Στο δεύτερο φύλλο εξετάζεται η αντίληψη του μουσικού κλάσματος (νότα) ως μέρος όλου, σε συνδυασμό με την Πρόσθεση με Νότες. Τα έργα αποτελούνται από προσθέσεις νοτών, για τις οποίες ο συνεντευξιζόμενος καλείται να εκφράσει τη συνολική διάρκεια ως μέρος του ολόκληρου και ως μαθηματικό κλάσμα. Τα έργα σε πρώτη φάση δίνονται σε ίδιες νότες και στη συνέχεια σε διαφορετικές, εξετάζοντας έτσι την ικανότητα σε ομώνυμα και ετερόνυμα κλάσματα αντίστοιχα.

Τέλος, στο τρίτο φύλλο εξετάζεται η ικανότητα σύγκρισης μέσω 5 έργων Σύγκρισης με Νότες και αντίστοιχα 5 έργων Σύγκρισης με Κλάσματα. Σε κάθε έργο ο συνεντευξιζόμενος έπρεπε ανάμεσα σε δυο παραστάσεις, να συμπληρώσει ένα κουτάκι με το σύμβολο του μεγαλύτερου (>) ή του μικρότερου (<), ανάλογα με το ποιο μέλος της σύγκρισης είναι μεγαλύτερο. Με αυτόν τον τρόπο διερευνάται η αντίληψη του μεγέθους των μουσικών και των μαθηματικών κλασμάτων, το αν αποδίδει

καλύτερα η κάθε ομάδα σε μαθηματικές ή μουσικές αναπαραστάσεις, καθώς και οι διαφορές που εμφανίζουν οι δύο ομάδες.

Για τις ανάγκες της έρευνας πραγματοποιήθηκε δοκιμαστική συνέντευξη από δύο επαγγελματίες μουσικούς. Και οι δύο λάμβαναν μαθήματα μουσικής από την παιδική τους ηλικία, και συνέχισαν τις σπουδές τους στο Τμήμα Μουσικής Επιστήμης και Τέχνης του Πανεπιστημίου Μακεδονίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αποτελέσματα

3.1 Ερμηνεία νότας

Στην αρχή της συνέντευξης, δόθηκε το πρώτο φύλλο με τις ακόλουθες ερωτήσεις:



Εικόνα 1

Ερ1: Τι σκέφτεστε βλέποντας την εικόνα 1; Τι είναι στην πραγματικότητα; Ποια έννοια περιγράφει αυτός ο συμβολισμός;

Ερ2: Πώς αλλιώς θα μπορούσε να αποδοθεί αυτή η έννοια;

Οι απαντήσεις των συνεντευξιαζόμενων κωδικοποιήθηκαν ξεχωριστά σε απαντήσεις από τον χώρο της μουσικής και απαντήσεις από τον χώρο των μαθηματικών.

Πίνακας 3.2: Κωδικοποίηση απαντήσεων από τον χώρο της μουσικής για τις Ερωτήσεις 1 και 2

	Κωδικοποίηση απαντήσεων από τον χώρο της μουσικής	Παράδειγμα
11	Απάντηση στην οποία ο συνεντευξιαζόμενος ερμηνεύει τον συμβολισμό ως νότα	Σκέφτομαι πως αυτό είναι μια νότα.
12	Απάντηση στην οποία ο συνεντευξιαζόμενος ερμηνεύει τον συμβολισμό ως τέταρτο μουσικής	Ένα τέταρτο. Είναι ένα beat.
13	Απάντηση στην οποία αποκαλύπτεται πως ο συνεντευξιαζόμενος ερμηνεύει τον συμβολισμό ως διάρκεια ή ως χρονικό διάστημα	Είναι ένα σύμβολο που δείχνει την διάρκεια που θα κρατήσει μια νότα, ο ήχος που θα παίζει ένα όργανο.
14	Απάντηση στην οποία ο συνεντευξιαζόμενος ερμηνεύει τον συμβολισμό μέσα από τις σχέσεις μεταξύ των νοτών	Από το ολόκληρο, το μισό του μισού.

Πίνακας 3.3: Κωδικοποίηση απαντήσεων από τον χώρο των μαθηματικών για τις Ερωτήσεις 1 και 2

Κωδικοποίηση απαντήσεων από τον χώρο των μαθηματικών		Παράδειγμα
21	Απάντηση στην οποία ο συνεντευξιαζόμενος ερμηνεύει τον συμβολισμό ως μαθηματικό κλάσμα .	Με ένα μήλο που κόβουμε στα τέσσερα. Με ένα κλάσμα.
22	Απάντηση στην οποία ο συνεντευξιαζόμενος αντιλαμβάνεται τον συμβολισμό ως σχέση μέρους-όλου .	Σε σχέση με τον παλμό, κρατάει έναν χτύπο. Δηλαδή σε σχέση με το ολόκληρο κρατάει το ένα τέταρτο του ολόκληρου.

3.1.1 Απαντήσεις Επαγγελματιών Μουσικών

Στον πίνακα που ακολουθεί βλέπουμε τα είδη των απαντήσεων που έδωσαν οι Επαγγελματίες Μουσικοί στις Ερωτήσεις 1 και 2

Πίνακας 3.4: Είδη των απαντήσεων που έδωσαν οι επαγγελματίες Μουσικοί

Ερ1: Τι σκέφτεστε βλέποντας την εικόνα 1; Τι είναι στην πραγματικότητα; Ποια έννοια περιγράφει αυτός ο συμβολισμός;		Ερ2: Πώς αλλιώς θα μπορούσε να αποδοθεί αυτή η έννοια;	
Απαντήσεις Μουσικές	Απαντήσεις Μαθηματικές	Απαντήσεις Μουσικές	Απαντήσεις Μαθηματικές
Μουσικός 2	Μουσικός 1	Μουσικός 3	Μουσικός 1
Μουσικός 3	Μουσικός 4	Μουσικός 5	Μουσικός 2
Μουσικός 5		Μουσικός 6	Μουσικός 4
Μουσικός 6			

Στην ερώτηση 1, οι 4 από τους 6 επαγγελματίες Μουσικούς έδωσαν απαντήσεις καθαρά μουσικής φύσεως, ενώ οι 2 από τους 6 έδωσαν εξαρχής στην νότα τετάρτου ερμηνεία σχετικά με τη σχέση μέρους-όλου [κωδ. 22], από τον χώρο των μαθηματικών.

Μουσικός 1: *«Σε σχέση με τον παλμό, κρατάει έναν χτύπο. Δηλαδή σε σχέση με το ολόκληρο κρατάει το ένα τέταρτο του ολοκλήρου.»* [κωδ. 22]

Μουσικός 4: *«Ένας χτύπος πάνω στον ρυθμό. Διαιρεί τον χρόνο σε συγκεκριμένο τέμπο και η νότα είναι το ένα κομμάτι.»* [κωδ. 22]

Ενδιαφέρον ωστόσο έχει και η απάντηση του Μουσικού 3, στην οποία ο συγκεκριμένος μουσικός φαίνεται να αντιλαμβάνεται το τέταρτο ως μια μοναδιαία ποσότητα, με τις υπόλοιπες νότες να αποτελούν πολλαπλάσια (και υποδιαιρέσεις όπως φαίνεται στα επόμενα φύλλα της συνέντευξης) της νότας τετάρτου.

Μουσικός 3: *«Είναι το τέταρτο. Είναι ένας χτύπος πάνω στον ρυθμό... Στην πραγματικότητα είναι η μονάδα μέτρησης, η διάρκεια που σύμφωνα με αυτήν υπολογίζονται και οι υπόλοιπες νότες όταν έχουμε ένα συγκεκριμένο τέμπο. Δύο τέταρτα ένα μισό, τέσσερα τέταρτα ένα ολόκληρο, μισό τέταρτο ένα όγδοο, μισό του μισού τέταρτο ένα δέκατο έκτο κλπ.»* [κωδ. 14]

Στην συνέχεια, στην ερώτηση 2, οι περισσότεροι Μουσικοί παρέμειναν στον τρόπο με τον οποίο απάντησαν και στην ερώτηση 1. Οι 3 από τους 4 Μουσικούς που είχαν δώσει απαντήσεις μουσικού χαρακτήρα παρέμειναν στον χώρο της μουσικής, συνδέοντας την έννοια της νότας τετάρτου με τη χρονική διάρκεια [κωδ. 13] και τις σχέσεις μεταξύ νοτών [κωδ. 14], ενώ και οι δύο μουσικοί που είδαν την εικόνα 1 ως σχέση μέρους όλου [κωδ. 22], ως άλλο τρόπο να αποδοθεί η έννοια, πρότειναν το μαθηματικό κλάσμα [κωδ. 21]

Μουσικός 6: *«Με δύο όγδοα, τέσσερα δέκατα έκτα κλπ. Σαν χρόνος βέβαια, θα μπορούσε να δοθεί σαν μισό στο μισό τέμπο.»* [κωδ. 14]

Μουσικός 5: *«Ένα τέταρτο ισούται με δύο όγδοα.»* [κωδ. 14]

Και

Μουσικός 1: *«Με το ένα τέταρτο που είναι το κλάσμα στα μαθηματικά.»* [κωδ. 21]

Ωστόσο, υπήρξε και η περίπτωση του Μουσικού 2, που ενώ η αρχική του απάντηση ήταν καθαρά μουσική, στην ερώτηση 2 παρουσίασε πέρασμα από τη μουσική στα μαθηματικά, δίνοντας στην εικόνα 1 την δυνατότητα να αποδοθεί ως μαθηματικό κλάσμα [κωδ. 21].

Μουσικός 2: *«Πώς αλλιώς; Το τέταρτο δείχνει πως από το ολόκληρο παίζεται το ένα τέταρτο. Σαν το κλάσμα ένα τέταρτο.»* [κωδ. 21]

3.1.2 Απαντήσεις Μαθητών

Στον πίνακα που ακολουθεί βλέπουμε τα είδη των απαντήσεων που έδωσαν οι Μαθητές στις Ερωτήσεις 1 και 2

Πίνακας 3.5: Είδη των απαντήσεων που έδωσαν οι Μαθητές

Ερ1: Τι σκέφτεστε βλέποντας την εικόνα 1; Τι είναι στην πραγματικότητα; Ποια έννοια περιγράφει αυτός ο συμβολισμός;	
Απαντήσεις Μουσικές	Απαντήσεις Μαθηματικές
Μαθητής 1	Μαθητής 2
Μαθητής 3	
Μαθητής 4	
Μαθητής 5	
Μαθητής 6	

Ερ2: Πώς αλλιώς θα μπορούσε να αποδοθεί αυτή η έννοια;		
Απαντήσεις Μουσικές	Απαντήσεις Μαθηματικές	Διάφορα / Καμία απάντηση
Μαθητής 4	Μαθητής 1	Μαθητής 2
Μαθητής 5		Μαθητής 3
Μαθητής 6		

Όπως φαίνεται, οι περισσότεροι Μαθητές και στις δύο ερωτήσεις έδωσαν στην εικόνα 1 και στην έννοια που περιγράφει, μία καθαρά μουσική ερμηνεία, ενώ υπήρξαν και απαντήσεις οι οποίες δεν εντάχθηκαν σε κάποια από τις κατηγορίες, τις οποίες μελέτησε η συγκεκριμένη έρευνα.

Στην ερώτηση 1 η μοναδική απάντηση που έδειξε σύνδεση με τα μαθηματικά, συνέδεσε την εικόνα 1 με το μαθηματικό κλάσμα [κωδ. 21], ενώ συνέδεσε τη νότα ως σχέση μέρους όλου [κωδ. 22].

Μαθητής 2: «Αυτό είναι μια νότα. Σκέφτομαι πως είναι από κάποιο τραγούδι. Το λέμε τέταρτο γιατί σαν το κλάσμα, είναι το κομμάτι που παίρνεις αν κόψεις το ολόκληρο σε τέσσερα ίσα κομμάτια.»

Στην ερώτηση 2 υπήρξε πάλι μόνο 1 από τις 6 μαθητές, ο οποίος έδωσε στην έννοια της εικόνας 1 μαθηματική ερμηνεία [κωδ. 21]

Μαθητής 1: «Με ένα κλάσμα, ένα τέταρτο.» [κωδ. 21]

Οι περισσότερες απαντήσεις των μαθητών στην Ερώτηση 2 έμειναν στη μουσική διάσταση της έννοιας, ενώ 2 ήταν και οι περιπτώσεις μαθητών που είτε δεν απάντησαν,

είτε έδωσαν μια απάντηση που δεν εντάσσεται στο αντικείμενο μελέτης της παρούσας έρευνας. [ΔΙΑΦΟΡΑ]

Μαθητής 2: «Στη βυζαντινή μουσική γράφεται αλλιώς, αλλά δεν θυμάμαι πώς είναι.» [ΔΙΑΦΟΡΑ]

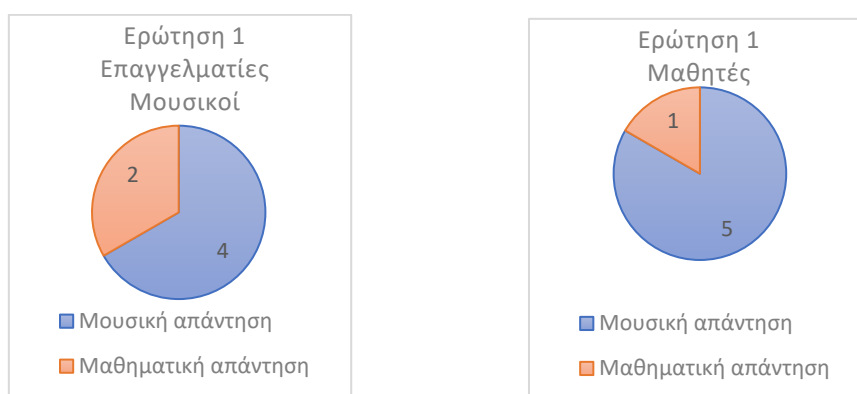
Ωστόσο, αίσθηση προκαλεί και η περίπτωση του Μαθητή 3 που δεν είχε συνειδητοποιήσει ποτέ την σχέση και την κοινή ονομασία της νότας «τετάρτου» στην μουσική με το ένα «τέταρτο» ως κλασματική μονάδα.

Μαθητής 3: «Τέταρτο έχουμε και στα μαθηματικά αλλά εκεί είναι άλλο. Δεν το σκέφτηκα ποτέ πως το τέταρτο που λέμε είναι σαν το κλάσμα ένα τέταρτο.» [ΔΙΑΦΟΡΑ]

Σύγκριση των δύο ομάδων και σύνοψη των Ερωτήσεων 1 και 2.

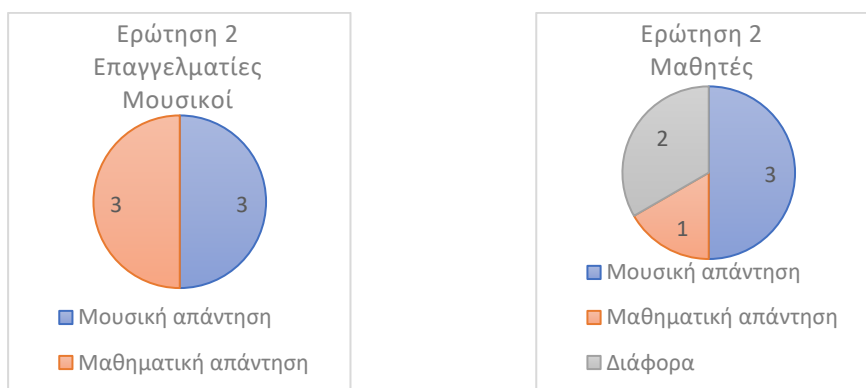
Στα διαγράμματα που ακολουθούν φαίνονται συνολικά τα είδη των απαντήσεων που έδωσαν οι συνεντευξιζόμενοι στις Ερωτήσεις 1 και 2.

Ερώτηση 1



Διάγραμμα 3.1: Είδος απάντησης Μουσικών και Μαθητών στην Ερώτηση 1

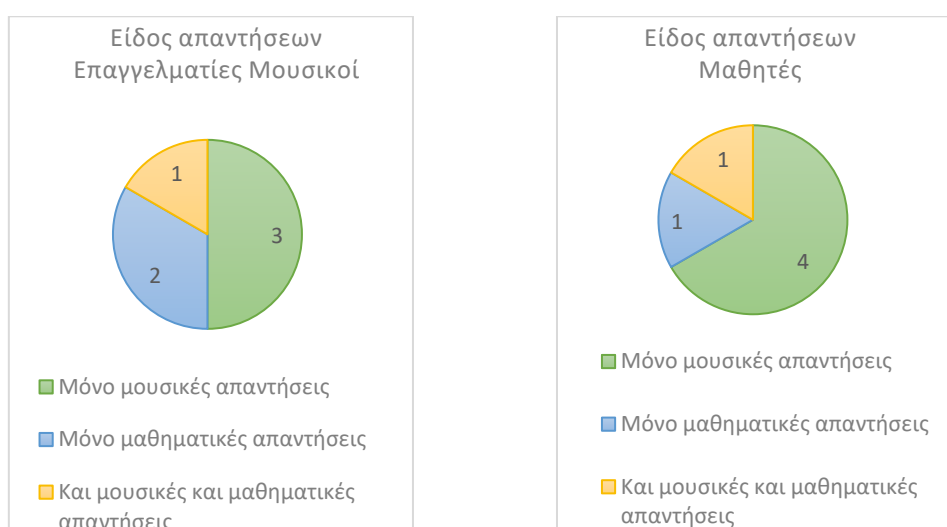
Ερώτηση 2



Διάγραμμα 3.2: Είδος απάντησης Μουσικών και Μαθητών στην Ερώτηση 2

Όπως φαίνεται, στα διαγράμματα, οι περισσότερες απαντήσεις στις δύο πρώτες ερωτήσεις και για τις δύο ομάδες είναι μουσικής φύσεως, ενώ οι μαθηματικές απαντήσεις εμφανίζονται περισσότερο στους επαγγελματίες Μουσικούς σε σχέση με τους Μαθητές.

Αξίζει επίσης να αναφερθεί πόσοι ήταν οι συνεντευξιαζόμενοι που απάντησαν στις δύο ερωτήσεις μόνο μουσικά ή μόνο μαθηματικά, αλλά κυρίως πόσοι ήταν αυτοί που εμφάνισαν πέρασμα από το ένα είδος στο άλλο.



Διάγραμμα 3.3: Είδος των απαντήσεων στις Ερωτήσεις 1 και 2

Όπως φαίνεται, από την ομάδα των Μουσικών, οι 3 Μουσικοί έδωσαν μόνο μουσικές απαντήσεις, οι 2 μουσικοί έδωσαν μόνο μαθηματικές απαντήσεις, ενώ 1 μουσικός (Μουσικός 2) απάντησε πρώτα μουσικά και στην συνέχεια μαθηματικά.

Αντίστοιχα, από την ομάδα των Μαθητών οι 4 Μαθητές έδωσαν μόνο μουσικές ερωτήσεις, ο Μαθητής 1 απάντησε αρχικά μουσικά και στην συνέχεια μαθηματικά, ενώ ο μαθητής 2 που έδωσε αρχικά μια μαθηματική απάντηση, στην συνέχεια η απάντηση του στην ερώτηση 2 δεν εντάχθηκε σε κάποιο από τα δύο είδη.

3.2 Πρόσθεση με Νότες ή μουσικά κλάσματα

Το δεύτερο φύλλο της συνέντευξης, αποτελούνταν από 8 έργα Πρόσθεσης με Νότες (ΠΝ1, ΠΝ2, κ.λπ.). Στην αρχή του φύλλου ήταν γραμμένη η εξής οδηγία:

«Στον πίνακα που ακολουθεί, δίνονται ορισμένα έργα.

Ποια η συνολική χρονική διάρκεια σε κάθε έργο; Γράψτε την με την μορφή κλάσματος.»


Για κάθε του απάντηση του συνεντευξιαζόμενου, ζητούνταν να εξηγήσει τον τρόπο με τον οποίο το σκέφτηκε. Η επεξήγηση αυτή καταγραφόταν από τον ερευνητή μαζί με το κλάσμα – απάντηση του εκάστοτε έργου, και αποτελεί το κύριο αντικείμενο μελέτης της παρούσας έρευνας.

Στις επεξηγήσεις των υποκειμένων διακρίνονται ορισμένες ενέργειες, εκ των οποίων κάποιες βασίζονται στην μουσική και κάποιες βασίζονται στα μαθηματικά. Με αυτόν τον τρόπο λοιπόν, οι ενέργειες αυτές ταξινομήθηκαν και κωδικοποιήθηκαν σε δύο κατηγορίες, όπως φαίνεται παρακάτω:

Πίνακας 3.6: Κωδικοποίηση ενεργειών για Πρόσθεση με Νότες

Κωδικοποίηση ενεργειών μουσικής.		Κωδικοποίηση μαθηματικών ενεργειών.	
100	Μεταφορά από νότες σε μαθηματικό κλάσμα	201	Πρόσθεση (ομώνυμων κλασμάτων)
101	Ισοδυναμία Νοτών	202	Πρόσθεση με Καπελάκια (ετερόνυμα κλάσματα)
		203	Ισοδυναμία κλασμάτων
		204	Αναγωγή στην κλασματική μονάδα
000	Χωρίς απάντηση	205	Μέθοδος των Τριών

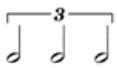
Παράδειγμα:

Έργο:[ΠΝ7]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
	Μουσικός 1	<i>Και εδώ για να καταλάβουμε πρέπει να τα αλλάξουμε, θα τα κάνουμε όγδοα. Το μισό είναι δύο τέταρτα, άρα τέσσερα όγδοα, με το τέταρτο άλλα δυο, και με το τελευταίο συνολικά επτά όγδοα.</i>	101, 100	$\frac{7}{8}$	Σ

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, βλέπουμε πως ο Μουσικός 1 αρχικά χρησιμοποίησε την **ισοδυναμία νοτών** [κωδ.101] για να μετατρέψει κάθε αξία σε όγδοα, και στην συνέχεια **μετέφερε το αποτέλεσμα από αξίες νοτών, σε μαθηματικό κλάσμα** [κωδ.100], βρίσκοντας τελικά το σωστό αποτέλεσμα.

Ωστόσο, υπήρξαν και έργα στα οποία ο συνεντευξιαζόμενος δεν μπόρεσε να δώσει κάποια απάντηση. Σε αυτές τις περιπτώσεις δόθηκε ο κωδικός 000.










Παράδειγμα

Έργο:[ΠΝ3]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
	Μαθητής 6	<i>Ξέρω πώς να το μετράω παίζοντας, αν είναι τρίγχο ογδόων, αλλά δεν ξέρω πώς γίνεται κλάσμα.</i>	000	-	-

Στους πίνακες που ακολουθούν, παρουσιάζεται η συχνότητα με την οποία εμφανίστηκε η κάθε ενέργεια ξεχωριστά για τις δύο ομάδες στα έργα της Πρόσθεσης με Νότες, καθώς και η επιτυχία του κάθε έργου.

3.2.1 Απαντήσεις Επαγγελματιών Μουσικών

Πίνακας 3.7: Συχνότητα εμφάνισης ενεργειών από τους επαγγελματίες Μουσικούς για την Πρόσθεση με Νότες


	ΠΝ1	ΠΝ2	ΠΝ3	ΠΝ4	ΠΝ5	ΠΝ6	ΠΝ7	ΠΝ8
								
000				1	1			
100	6	6	6	5	5	6	6	6
101	2	1	5			6	6	6
201		1			2			
203							2	
204				5	4			
205								
Επιτυχία	6/6	6/6	5/6	4/6	4/6	6/6	5/6	5/6

Όπως φαίνεται, στα περισσότερα έργα Πρόσθεσης με Νότες οι Μουσικοί απάντησαν κυρίως με μουσικές μεθόδους, χρησιμοποιώντας σχεδόν πάντα την **ισοδυναμία νοτών**


[κωδ.101] και στο τέλος κάθε έργου **μετέφεραν τη νότα σε μαθηματικό κλάσμα**, όπως τους ζητούνταν [κωδ.100].

Το πέρασμα από τη μουσική στα μαθηματικά εντοπίστηκε στις μαθηματικές διεργασίες που πραγματοποίησαν οι μουσικοί στις απαντήσεις του στα συγκεκριμένα έργα. Το πέραμα αυτό, εμφανίστηκε με 3 διαφορετικούς τρόπους.


- 1) Αρχικά με την μορφή **πρόσθεσης (ομώνυμων) κλασμάτων** [κωδ.201], όπου στα έργα [ΠΝ2] και [ΠΝ5] κάποιοι μουσικοί, αφού μετέτρεψαν τις νότες σε κλάσματα, πρόσθεσαν τα κλάσματα μεταξύ τους για να βρουν το τελικό αποτέλεσμα.

Έργο:[ΠΝ2]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
	Μουσικός 5	<i>Το ένα μισό είναι ένα δεύτερο. Τρία δεύτερα.</i>	100, 201	$\frac{3}{2}$	Σ

- 2) Με **αναγωγή στην κλασματική μονάδα** [κωδ. 204], όπου στα έργα [ΠΝ4] και [ΠΝ5] οι Μουσικοί προκειμένου να βρουν το κλάσμα στο οποίο αντιστοιχεί η μια ή οι δύο νότες από το τρίηχο μισών, επιλέγουν το ένα μέρος από το όλο και συγκροτούν έτσι το αντίστοιχο κλάσμα.

Έργο:[ΠΝ4]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
	Μουσικός 4	<i>Το ένα τρίτο του ολόκληρου. Ένα τρίτο.</i>	100, 204	$\frac{1}{3}$	Σ

- 3) Στο έργο [ΠΝ7], προκειμένου να μην αφήσουν ως απάντηση το κλάσμα «3,5/8», 2 μουσικοί χρησιμοποίησαν την **ισοδυναμία κλασμάτων** [κωδ. 203] για να μετατρέψουν κάθε όρο του κλάσματος σε ακέραιο.



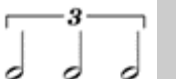
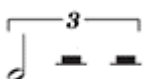
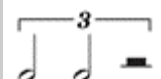



Έργο:[ΠΝ7]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
	Μουσικός 3	<i>Μισό και τέταρτο και όγδοο, μας κάνει τρισήμιση τέταρτα. Αλλιώς επτά όγδοα.</i>	101, 100, 203	$\frac{7}{8}$	Σ

Η επιτυχία της ομάδας των Μουσικών στην Πρόσθεση με Νότες ανέρχεται στα 41/48

(85,4%), με τις περισσότερες λάθος απαντήσεις να εντοπίζονται στα [ΠΝ4] και [ΠΝ5], για τα οποία ο Μουσικός 3, αν και κατάλαβε πως αναζητεί «το ένα από τα τρία του τέσσερα τέταρτα», δεν μπόρεσε να το εκφράσει με τη μορφή κλάσματος, ενώ ο Μουσικός 6 κράτησε την αξία της κάθε νότας μισού σαν να μη βρίσκονταν σε τρίηχο. Αξίζει να σημειωθεί πως οι απαντήσεις « $3,5/4$ » και « $4,5/4$ » που έδωσε ο Μουσικός 5 στα έργα [ΠΝ7] και [ΠΝ8] δεν έγιναν αποδεκτές.

3.2.2 Απαντήσεις μαθητών

Πίνακας 3.8: Συχνότητα εμφάνισης ενεργειών από τους Μαθητές για την Πρόσθεση με Νότες


	ΠΝ1	ΠΝ2	ΠΝ3	ΠΝ4	ΠΝ5	ΠΝ6	ΠΝ7	ΠΝ8
								
000			2	3	3			
100	6	6	4	3	3	6	6	6
101			4			4	5	5
201	1	4	2		2	1		
202						1	1	1
203	1					1		
204				2	2			
205				1	1			
Επιτυχία	6/6	6/6	4/6	3/6	3/6	5/6	5/6	6/6

Αντίστοιχα με τους Μουσικούς, οι Μαθητές απάντησαν στα περισσότερα έργα της Πρόσθεσης με Νότες με μουσικό τρόπο, χρησιμοποιώντας την **ισοδυναμία νοτών** [κωδ. 101] και τη **μεταφορά από νότες σε μαθηματικά κλάσματα** [κωδ. 100].


Το πέρασμα από τη μουσική στα μαθηματικά όμως, εμφανίστηκε με τους εξής διαφορετικούς τρόπους:

- 1) Αρχικά με την **πρόσθεση (ομώνυμων) κλασμάτων** [κωδ. 201] κατά την οποία, αφού μετέτρεπαν τις (ίδιες) νότες σε (ίσα) κλάσματα, πρόσθεταν τα κλάσματα βρίσκοντας το τελικό αποτέλεσμα.


- 2) Σε περιπτώσεις όπου οι νότες δεν ήταν ίδιες μεταξύ τους και κατ' επέκταση ούτε τα κλάσματα που έπρεπε να προστεθούν, ο Μαθητής 1 χρησιμοποίησε την **πρόσθεση με καπελάκια [κωδ. 202]**.

Έργο:[ΠΝ6]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
	Μαθητής 1	<i>Ένα τέταρτο και ένα μισό, με καπελάκια θα γίνει ένα τέταρτο και δύο τέταρτα, δηλαδή τρία τέταρτα.</i>	100, 202	$\frac{3}{4}$	Σ

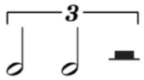
- 3) Στην περίπτωση Μαθητή 3 για το ίδιο έργο [ΠΝ7], χρησιμοποιήθηκε η **ισοδυναμία νοτών [κωδ.203]** για να γίνουν τα κλάσματα ομώνυμα, ενώ ο Μαθητής 1 χρησιμοποίησε την ίδια ενέργεια στο έργο [ΠΝ1] για να απλοποιήσει το τελικό του κλάσμα.

Έργο:[ΠΝ6]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
	Μαθητής 3	<i>Κάνω μέσα μου τις πράξεις για να γίνουν ίδιοι οι παρονομαστές. Ένα δεύτερο και δύο δεύτερα τρία δεύτερα.</i>	100, 203, 201	$\frac{3}{2}$	Λ

- 4) Όμοια με τους μουσικούς, ορισμένοι μαθητές εμφάνισαν την **αναγωγή στην κλασματική μονάδα [κωδ. 204]** προκειμένου να υπολογίσουν το ένα μέρος του τρίχου των μισών.

Έργο:[ΠΝ4]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
	Μαθητής 5	<i>Το προηγούμενο ήταν ένα... Άρα αν έχω τη μια από τις τρεις νότες, κάνει ένα τρίτο.</i>	100, 204	$\frac{1}{3}$	Σ

- 5) Ωστόσο, στα έργα [ΠΝ4] και [ΠΝ5] (όπως και σε οποιαδήποτε έργα που περιείχαν τρίχα, όπως θα φανεί και στη συνέχεια) ο Μαθητής 1 χρησιμοποίησε την **απλή μέθοδο των τριών [κωδ. 205]** με τον τρόπο που τη διδάχτηκε στο σχολείο σε παλαιότερη τάξη.

Έργο:[ΠΝ4]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
	Μαθητής 1	<i>Αν τώρα τα τρία έχουν ένα, τα δύο έχουν δύο τρίτα.</i>	100, 205	$\frac{2}{3}$	Σ

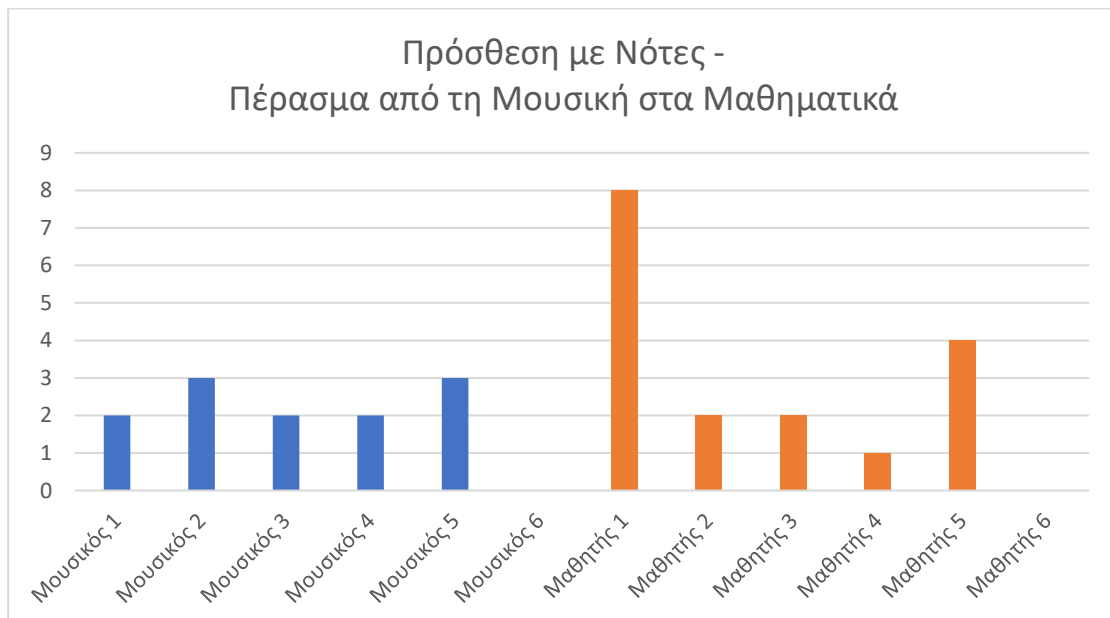
Η επιτυχία της ομάδας των Μαθητών στην Πρόσθεση με Νότες ανέρχεται στα 38/48 (79,2%), με τις περισσότερες λάθος απαντήσεις να εμφανίζονται όμοια με τους Μουσικούς στα έργα [ΠΝ4] και [ΠΝ5] που περιείχαν τρίηχα. Για τα έργα αυτά, ο Μαθητής 3 δήλωσε πως δεν θυμάται τι σημαίνει το τρίηχο, ο Μαθητής 4 θεώρησε πως «δεν μπορούμε να καταλάβουμε» και ο Μαθητής 6 ανέφερε πως «Ξέρω πώς να το μετράω παίζοντας αν είναι τρίηχο ογδών αλλά δεν ξέρω πώς γίνεται κλάσμα». Λάθη επίσης σημειώθηκαν στα έργα [ΠΝ6] και [ΠΝ7] από τους Μαθητές 3 και 4 αντίστοιχα κατά την ισοδυναμία των κλασμάτων και κατά την πρόσθεση ογδών, πιθανότατα από βιασύνη ή απροσεξία.

Πέρασμα από τα μουσικά στα μαθηματικά κλάσματα και σύγκριση των δύο ομάδων.

Τα έργα στην Πρόσθεση με Νότες είχαν ως αφετηρία τις νότες της μουσικής. Όπως φαίνεται στους πίνακες των συχνοτήτων κάθε ενέργειας για τις δύο ομάδες, στις περισσότερες απαντήσεις χρησιμοποιήθηκαν αποκλειστικά ενέργειες μουσικής, με πιο ουσιαστική την **ισοδυναμία νοτών [κωδ. 101]**, καθώς η **μεταφορά από νότες σε μαθηματικό κλάσμα [κωδ. 100]** ζητούνταν ούτως η άλλως για την ολοκλήρωση του κάθε έργου. Το πέρασμα από τα μουσικά στα μαθηματικά κλάσματα εμφανίστηκε στα έργα στα οποία οι συνεντευξιαζόμενοι, προκειμένου να βρουν τη συνολική διάρκεια των νοτών χρησιμοποίησαν κάποια μαθηματική ενέργεια. Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται το ποσοστό, στο οποίο οι συνεντευξιαζόμενοι εμφάνισαν πέρασμα από τη Μουσική στα Μαθηματικά για τα 8 έργα της Πρόσθεσης με Νότες.

Πίνακας 3.9: Ποσοστό στο οποίο εμφάνισε ο κάθε συνεντευξιζόμενος πέρασμα από τη μουσική στα μαθηματικά για την Πρόσθεση με Νότες

Επαγγελματίες Μουσικοί		Μαθητές	
Υποκείμενο	Πέρασμα	Υποκείμενο	Πέρασμα
Μουσικός 1	2/8 (25%)	Μαθητής 1	8/8 (100%)
Μουσικός 2	3/8 (37,5%)	Μαθητής 2	2/8 (25%)
Μουσικός 3	2/8 (25%)	Μαθητής 3	2/8 (25%)
Μουσικός 4	2/8 (25%)	Μαθητής 4	1/8 (12,5%)
Μουσικός 5	3/8 (37,5%)	Μαθητής 5	4/8 (50%)
Μουσικός 6	0/8 (0%)	Μαθητής 6	0/8 (0%)
Σύνολο	12/48 (25%)	Σύνολο	17/48 (35,4%)



Διάγραμμα 3.4: Συχνότητα με την οποία εμφάνισε ο κάθε συνεντευξιζόμενος πέρασμα από τη Μουσική στα Μαθηματικά στην Πρόσθεση με Νότες

Όπως είναι φανερό, οι περισσότεροι συνεντευξιζόμενοι εμφάνισαν μαθηματικές ενέργειες σε 2 με 3 έργα. Ωστόσο, ο Μαθητής 1 υπερέβη κατά πολύ τον αριθμό αυτό, μεταφέροντας εξ αρχής πάντα τις νότες σε μαθηματικό κλάσμα [κωδ. 100] και στη συνέχεια χρησιμοποίησε την πρόσθεση κλασμάτων [κωδ. 201] για τα ομώνυμα, την πρόσθεση με καπελάκια [κωδ. 202] για όλα τα ετερόνυμα κλάσματα, καθώς και την απλή μέθοδο των τριών [κωδ. 205] σε όσα έργα περιείχαν τρίγχο. Αντιθέτως, ο Μουσικός 6 και ο Μαθητής 6 ήταν οι μόνοι από τους συνεντευξιζόμενους όπου δεν εμφάνισαν καμία μαθηματική ενέργεια.

3.3 Σύγκριση Με Νότες ή μουσικά κλάσματα

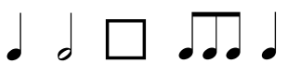
Το τρίτο φύλλο της συνέντευξης αποτελούνταν από 5 έργα Σύγκρισης με Νότες (ΣΝ1, ΣΝ2, κ.λπ.). Σε κάθε έργο ο συνεντευξιαζόμενος έπρεπε ανάμεσα σε δυο παραστάσεις με νότες, να συμπληρώσει ένα κουτάκι με το σύμβολο του μεγαλύτερου (>) ή του μικρότερου (<), ανάλογα με το ποια διάρκεια είναι μεγαλύτερη. Όμοια με τα προηγούμενα έργα, η επεξήγηση καταγράφονταν από τον ερευνητή και μέσα σε αυτήν διακρίνονταν οι μουσικές και μαθηματικές ενέργειες που χρησιμοποιήθηκαν σε κάθε έργο.

Οι ενέργειες που χρησιμοποιήθηκαν φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 3.9: Κωδικοποίηση ενεργειών για Σύγκριση με Νότες

Κωδικοποίηση ενεργειών μουσικής		Κωδικοποίηση μαθηματικών ενεργειών	
101	Ισοδυναμία Νοτών	202	Πρόσθεση με Καπελάκια (ετερόνυμα κλάσματα)
102	Διάρκεια Νοτών	203	Ισοδυναμία κλασμάτων
103	Ρυθμικά	205	Μέθοδος των Τριών
		206	Σύγκριση συμπληρωματικών ποσοτήτων
		207	Απαλοιφή ίδιων ποσοτήτων από τα δύο μέλη της σύγκρισης
		208	Αναλογία
		209	Μεταφορά σε δεκαδικούς αριθμούς
		210	Σύγκριση Παρονομαστών (ίδιοι αριθμητές)
000	Χωρίς απάντηση	211	Σύγκριση Αριθμητών (ίδιοι παρονομαστές)

Παράδειγμα:

Έργο:[ΣΝ2]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί – ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
	Μουσικός 2	<i>Έχουν από ένα τέταρτο το καθένα, άρα αν συγκρίνουμε τα υπόλοιπα το μισό είναι μεγαλύτερο από τα τρία όγδοα.</i>	105	>	Σ

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα βλέπουμε πως ο Μουσικός 2, αφού διαπίστωσε πως και τα δύο μέλη της σύγκρισης έχουν από μία νότα τετάρτου, σιωπηλά **αφαίρεσε τις ίδιες αυτές νότες από τη σύγκριση [κωδ. 207]**. Στην συνέχεια πραγματοποίησε τη σύγκριση για τις υπόλοιπες νότες.

Στους πίνακες που ακολουθούν, παρουσιάζεται η συχνότητα με την οποία εμφανίστηκε η κάθε ενέργεια από τους συνεντευξιαζόμενους των δύο ομάδων, στα έργα της Σύγκρισης με Νότες, καθώς και η επιτυχία του κάθε έργου.

3.4.1 Απαντήσεις Επαγγελματιών Μουσικών

Πίνακας 3.10: Συχνότητα εμφάνισης ενεργειών από τους επαγγελματίες Μουσικούς για την Σύγκριση με Νότες


	ΣΝ1	ΣΝ2	ΣΝ3	ΣΝ4	ΣΝ5
000					
101	1	3		2	
102	5		1	1	2
103			2	4	2
206			1		2
207		3			
208			1		
209		2	1		
Επιτυχία	6/6	6/6	5/6	6/6	6/6

Όπως φαίνεται, οι Μουσικοί απάντησαν στα έργα της Σύγκρισης με Νότες χρησιμοποιώντας σχεδόν πάντα μουσικές ενέργειες. Πολλές φορές, υπολόγιζαν **ρυθμικά** τη συνολική αξία των νοτών [κωδ. 103], μετρώντας διαδοχικά τις νότες που βρίσκονταν σε κάθε μέλος της σύγκρισης. Η «μέτρηση» αυτή πραγματοποιούνταν με κινήσεις ρυθμικής ανάγνωσης (σολφέζ) και οδηγούσε τους συνεντευξιαζόμενους στο αποτέλεσμα της σύγκρισης. Πολλές φορές ακόμα, οι συνεντευξιαζόμενοι χρησιμοποίησαν την **ισοδυναμία νοτών** [κωδ. 101].


Έργο:[ΣΝ4]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
	Μουσικός 3	<i>Ένας χρόνος αριστερά. Δεξιά μάλλον είναι ένα και κάτι. Ρυθμικά αυτό βγαίνει... (κινήσεις ρυθμικής ανάγνωσης)... ναι το δεύτερο είναι ένα και κάτι.</i>	101, 103	<	Σ

Ωστόσο, το πέρασμα μεταξύ Μουσικής και Μαθηματικών εμφανίστηκε στη Σύγκριση με Νότες με τους εξής τρόπους:


- 1) Στα έργα [ΣΝ3] και [ΣΝ5], οι Μουσικοί 1 και 2 αντί να συγκρίνουν τις χρονικές διάρκειες που τους δόθηκαν, προτίμησαν να συγκρίνουν τις **νότες με τις οποίες θα συμπληρώνονταν σε κάθε παράσταση ένα ολόκληρο [κωδ. 206]**.

Έργο:[ΣΝ5]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
	Μουσικός 1	<i>Αυτό μοιάζει κάπως με το πιο πάνω γιατί τους λείπει από κάτι. Α είναι το ίδιο αλλά αντί να είναι στο μισό, είναι στο ολόκληρο. Ε είναι μεγαλύτερο το δεύτερο.</i>	206	<	Σ


- 2) Στο έργο [ΣΝ2] ορισμένοι Μουσικοί, παρατήρησαν πως και στα δύο μέλη της σύγκρισης υπάρχει μια ίδια νότα, επομένως πραγματοποίησαν τη **σύγκριση για τις υπόλοιπες νότες του έργου. [κωδ. 207]**

Έργο:[ΣΝ2]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
	Μουσικός 2	<i>Έχουν από ένα τέταρτο το καθένα, άρα αν συγκρίνουμε τα υπόλοιπα το μισό είναι μεγαλύτερο από τα τρία όγδοα.</i>	207	>	Σ

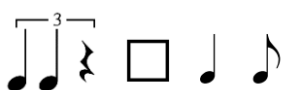
- 3) Μια ακόμα φορά που ο Μουσικός 2 χρησιμοποίησε μια μέθοδο εγγενή στα μαθηματικά, ήταν στο έργο [ΣΝ3] όπου βρήκε την **αναλογία [κωδ. 208]** των δύο μελών της σύγκρισης με το μισό. Στην προσπάθεια του αυτή, αν και βρήκε τις σωστές σχέσεις, κατέληξε σε λάθος απάντηση.

Έργο:[ΣΝ3]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
	Μουσικός 2	<i>Νομίζω το πρώτο είναι μεγαλύτερο. Το πήγα με βάση το μισό. Το πρώτο έχει τα δυο τρίτα του μισού, ενώ το δεύτερο έχει τα τρία τέταρτα του μισού.</i>	208	>	Λ

- 4) Στο έργο [ΣΝ3] επίσης, ο Μουσικός 3 προκειμένου να υπολογίσει πόσους χρόνους είχε κάθε μέλος της σύγκρισης, μετέτρεψε και τα δύο μέλη σε δεκαδικούς αριθμούς [κωδ. 209]. Στην περίπτωση του συγκεκριμένου μουσικού, η κάθε νότα είχε προσδιοριστεί από το πόσους «χρόνους» διαρκεί, δηλαδή από την αναλογία της με τη νότα του τετάρτου.

Έργο:[ΣΝ3]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
	Μουσικός 3	<i>Λοιπόν εδώ οι χρόνοι είναι... ένα κόμμα τρία τρία τρία. Στο άλλο είναι ενάμιση, ένα κόμμα πέντε σαν να λέμε. Ε το δεύτερο μεγαλύτερο.</i>	209	<	Σ

Η επιτυχία της ομάδας των Μουσικών στη Σύγκριση με Νότες ήταν ιδιαίτερα υψηλή, φτάνοντας τα 29/30 (97%). Αν και σε ορισμένες περιπτώσεις οι Μουσικοί ανέφεραν πως δεν απαντούσαν με σιγουριά, ειδικά στις περιπτώσεις που τα δύο μέλη της σύγκρισης είχαν ελάχιστη διαφορά, η ρυθμική μέτρηση τους οδήγησε όλες τις φορές στη σωστή απάντηση, κρατώντας έτσι την επιτυχία της ομάδας των Μουσικών ιδιαίτερα υψηλή. Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει η αναφορά που κάνουν ορισμένοι Μουσική στη «διαφορετική αίσθηση» μεταξύ νοτών. Στην αντίληψη του Μουσικού 4, νότες με πολύ κοντινή διάρκεια διαχωρίζονται σε «πιο βιαστικές» ή «πιο συγκρατημένες στον ρυθμό», δίνοντας έτσι μια διαφορετική ερμηνεία στα μουσικά κλάσματα.

Έργο:[ΣΝ3]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
	Μουσικός 4	<i>Τα τρίχα πάντα είναι πιο γρήγορα από τις κανονικές τους αξίες, γιατί πρέπει να χωρέσουν τρεις νότες. Στο παίξιμο είναι πιο βιαστική η αίσθηση τους, πιο γρήγορη, ενώ οι κανονικές αξίες είναι συγκρατημένες πάνω στον ρυθμό. (...) Δεν καταλαβαίνω απόλυτα, αλλά όπως το νιώθω στον ρυθμό το δεύτερο είναι για λίγο μεγαλύτερο.</i>	103	<	Σ

3.4.2 Απαντήσεις Μαθητών


Πίνακας 3.11: Συχνότητα εμφάνισης ενεργειών από τους Μαθητές για τη Σύγκριση με Νότες

	ΣΝ1	ΣΝ2	ΣΝ3	ΣΝ4	ΣΝ5
000	2		2	2	2
100	2	1	2	1	2
101		2	1	2	2
102	2	2	2	3	2
103		1			
202		1			
203		1	2	1	2
205			1	1	1
208			2		
210	1				
211	1	1	2	1	2
Επιτυχία	4/6	6/6	3/6	4/6	3/6
Επιτυχία όσων απάντησαν	4/4	6/6	3/4	4/4	3/4


Οι μαθητές απάντησαν στα έργα της Σύγκρισης με Νότες χρησιμοποιώντας ενέργειες και από τους δύο χώρους. Στην πραγματικότητα, από το σύνολο των 30 απαντήσεων για τους 6 μαθητές, υπήρξαν 13 απαντήσεις (43%) με καθαρά μουσικές ενέργειες, 9 απαντήσεις (30%) στις οποίες εμφανίζονται μαθηματικές ενέργειες και 8 μη απαντήσεις (26%), όπου μαθητές δεν ήξεραν πώς να ανταπεξέλθουν στα έργα που περιείχαν τρίχα.

Το πέρασμα από τη Μουσική στα Μαθηματικά στη Σύγκριση με Νότες εμφανίστηκε με τους εξής τρόπους:


- 1) Στο έργο [ΣΝ1] ο Μαθητής 1, αφού **μετέτρεψε τις νότες σε κλάσματα** [κωδ. **100**], παρατήρησε πως τα κλάσματα είχαν ίδιους αριθμητές, επομένως **σύγκρινε τους παρονομαστές** [κωδ. **210**].

Έργο:[ΣΝ1]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/Λάθος
	Μαθητής 1	<i>Από τη μία είναι το ένα δεύτερο, από την άλλη το ένα τρίτο. Έχουν ίδιους αριθμητές, άρα μεγαλύτερο είναι το κλάσμα με τον μικρότερο παρονομαστή. Άρα το πρώτο.</i>	100, 210	>	Σ


- 2) Σε όλα τα έργα της Σύγκρισης με Νότες, υπήρξαν μαθητές που χρησιμοποιώντας την **ισοδυναμία νοτών [κωδ. 101]** έβρισκαν τη συνολική διάρκεια κάθε μέλους της σύγκρισης και τη **μετέτρεπαν σε κλάσμα [κωδ. 100]**. Άλλοι μαθητές ξεκινούσαν μετατρέποντας τις νότες σε κλάσματα και μέσω της **πρόσθεσης με καπελάκια [κωδ. 202]** ή της **ισοδυναμίας κλασμάτων [κωδ. 203]** κατέληγαν πάλι στο να βρουν τη συνολική διάρκεια κάθε μέλους σε κλάσμα. Στο τέλος, έκαναν ομώνυμα τα κλάσματα των δύο μελών, και έχοντας έτσι ίδιους παρονομαστές, **σύγκριναν τους αριθμητές [κωδ. 211]**.


Έργο:[ΣΝ5]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/Λάθος
	Μαθητής 5	<i>Εδώ είναι τρίγχο μισών, θα έκανε ένα ολόκληρο αλλά λείπει πάλι το ένα τρίτο. Άρα κάνει δύο τρίτα, και από την άλλη είναι επτά όγδοα. Έ τώρα αυτά να τα κάνουμε ομώνυμα, δεκαέξι εικοστά τέταρτα και εικοσιένα εικοστά τέταρτα. Άρα το δεύτερο μεγαλύτερο.</i>	100, 203, 211	<	Σ

- 3) Σε έργα που περιείχαν τρίγχα, ο Μαθητής 1 χρησιμοποίησε την **απλή μέθοδο των τριών [κωδ. 205]** (όμοια με την Πρόσθεση με Νότες) για να μετατρέψει τις διάρκειες των νοτών σε μαθηματικά κλάσματα.

Έργο:[ΣΝ4]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
	Μαθητής 1	«Εδώ πάλι θέλει απλή μέθοδο των τριών. Τα τρία είναι δύο όγδοα, τα δύο είναι χ. Άρα χ ίσον δύο επί δύο όγδοα δια τρία, άρα χ ίσον τέσσερα όγδοα δια τρία, άρα χ ίσον τέσσερα όγδοα επί ένα τρίτο, άρα χ ίσον τέσσερα προς εικοσιτέσσερα. (...)	100, 205, 101, 203, 211	<	Σ

- 4) Στο έργο [ΣΝ3] ο Μαθητής 2 σκέφτηκε πώς θα μπορούσε να πραγματοποιήσει τη σύγκριση όχι με τις νότες που του δόθηκαν, αλλά με κάποιες **ανάλογές** τους (διπλάσιες) [κωδ. 208]. Η σκέψη αυτή θα τον οδηγούσε στο σωστό αποτέλεσμα, ωστόσο άλλαξε γνώμη και τελικά κατέληξε σε λάθος αποτέλεσμα. Αντίστοιχα, στο ίδιο έργο ο Μαθητής 5 σκέφτηκε να εκφράσει τις νότες του τρίγνου όχι ως κλάσματα - μέρη του ολόκληρου, αλλά ως μέρη ή **αναλογίες** του μισού [κωδ. 208].

Έργο:[ΣΝ3]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
	Μαθητής 2	Μήπως να το σκεφτώ με τις διπλάσιες νότες; Πάλι αυτό που είναι θα είναι μεγαλύτερο. Έτσι είναι αυτά από το τρίγνο μισών, και από την άλλη ένα μισό και ένα τέταρτο... Όχι δε με βοηθάει, αλλά νομίζω είναι το τρίγνο μεγαλύτερο.	208, 102	>	Λ

Έργο:[ΣΝ3]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
	Μαθητής 5	Σε αυτό που είναι πάλι τρίγνο θα είναι τα δύο τρίτα του... από τα δύο τέταρτα τα δύο τρίτα. (...) τα δύο τρίτα του δύο τέταρτα είναι τέσσερα προς δώδεκα. (...)	208, 100, 203, 211	<	Λ

Η επιτυχία της ομάδας των Μαθητών για τη Σύγκριση με Νότες, υπολογίστηκε με δύο διαφορετικούς τρόπους. Από το σύνολο των 30 απαντήσεων, οι 20/30 ήταν σωστές (67%). Ωστόσο, λόγω του ότι οι Μαθητές 3 και 4 δεν γνώριζαν τον τρόπο με τον οποίο

λειτουργούν τα τρίγχα και δεν μπόρεσαν να απαντήσουν τα έργα [ΣΝ1, ΣΝ3, ΣΝ4 και ΣΝ5], υπολογίστηκε η επιτυχία όσων έργων απαντήθηκαν στα 20/22 (91%).

Πέρασμα από τα Μαθηματικά στη Μουσική και σύγκριση των δύο ομάδων.

Η Σύγκριση με Νότες αποτελούνταν από έργα μουσικής φύσεως. Οι συγκρίσεις αυτές μέσα στον χώρο της μουσικής πραγματοποιήθηκαν με εργαλεία όπως η **ισοδυναμία** [κωδ. 101] και στη συνέχεια η **σύγκριση της διάρκειας** [κωδ. 102] **νοτών**. Παράλληλα, οι νότες ως στοιχεία της μουσικής σημειογραφίας αντιπροσωπεύουν χρονικές διάρκειες που μπορούν να μετρηθούν με κινήσεις ρυθμικής ανάγνωσης (σολφέζ) μετατρέποντας κάθε μέλος της σύγκρισης σε αυτό που οι μουσικοί αποκαλούν «ρυθμικό μοτίβο». Αυτός ο **ρυθμικός τρόπος μέτρησης** [κωδ. 103] χρησιμοποιήθηκε σε μεγάλο βαθμό από 5 επαγγελματίες Μουσικούς, σε ποσοστό 9/30 (30%), ειδικά στα έργα που η απάντηση δεν ήταν ιδιαίτερα εύκολη, ενώ στους μαθητές εμφανίστηκε μόνο 1 φορά, σε ποσοστό 1/30 (3%)

Από την άλλη, τα Μαθηματικά από τη φύση τους είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με τις ποσοτικές συγκρίσεις, επομένως ήταν αναμενόμενη η εμφάνιση των διαφόρων ενεργειών μαθηματικών στις εν λόγω μουσικές συγκρίσεις. Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται το ποσοστό στο οποίο κάθε συνεντευξιαζόμενος χρησιμοποίησε ενέργειες μαθηματικών, εμφανίζοντας έτσι πέρασμα από τη μουσική στα Μαθηματικά.

Πίνακας 3.12: Ποσοστό στο οποίο εμφάνισε ο κάθε συνεντευξιαζόμενος πέρασμα από τη Μουσική στα Μαθηματικά για τη Σύγκριση με Νότες

Επαγγελματίες Μουσικοί	
Υποκείμενο	Πέρασμα
Μουσικός 1	3/5 (60%)
Μουσικός 2	3/5 (60%)
Μουσικός 3	2/5 (40%)
Μουσικός 4	1/5 (20%)
Μουσικός 5	1/5 (20%)
Μουσικός 6	1/5 (20%)
Σύνολο	11/30 (36,7%)

Μαθητές	
Υποκείμενο	Πέρασμα
Μαθητής 1	5/5 (100%)
Μαθητής 2	1/5 (20%)
Μαθητής 3	0/5 (0%)
Μαθητής 4	0/5 (0%)
Μαθητής 5	3/5 (60%)
Μαθητής 6	0/5 (0%)
Σύνολο	9/30 (30%)



Διάγραμμα 3.5: Συχνότητα με την οποία εμφάνισε ο κάθε συνεντευξιζόμενος πέρασμα από τη Μουσική στα Μαθηματικά στη Σύγκριση με Νότες

3.5 Σύγκριση Μαθηματικών Κλασμάτων

Στο ίδιο φύλλο με τη Σύγκριση με Νότες, βρισκόταν και η Σύγκριση με Κλάσματα που αποτελούταν από 5 έργα σύγκρισης μαθηματικών κλασμάτων (ΣΚ1, ΣΚ2, κ.λπ.). Σε κάθε έργο ο συνεντευξιαζόμενος έπρεπε ανάμεσα σε δυο παραστάσεις με μαθηματικά κλάσματα, να συμπληρώσει ένα κουτάκι με το σύμβολο του μεγαλύτερου (>) ή του μικρότερου (<), ανάλογα με το ποιο μέλος της σύγκρισης είναι μεγαλύτερο. Όμοια με τα προηγούμενα έργα, η επεξήγηση καταγραφόταν από τον ερευνητή και μέσα σε αυτήν διακρίνονταν οι μουσικές και μαθηματικές ενέργειες που χρησιμοποιήθηκαν σε κάθε έργο.

Πίνακας 3.13: Κωδικοποίηση ενεργειών για Σύγκριση με Κλάσματα

Κωδικοποίηση ενεργειών μουσικής	
101	Ισοδυναμία Νοτών
102	Διάρκεια Νοτών
000	Χωρίς απάντηση
Δ	ΔΙΑΦΟΡΑ

Κωδικοποίηση μαθηματικών ενεργειών	
200	Μεταφορά από μαθηματικό κλάσμα σε νότες
201	Πρόσθεση (ομώνυμων κλασμάτων)
202	Πρόσθεση με Καπελάκια (ετερόνυμα κλάσματα)
203	Ισοδυναμία κλασμάτων
206	Σύγκριση συμπληρωματικών ποσοτήτων
208	Αναλογία
209	Μεταφορά σε δεκαδικούς αριθμούς
210	Σύγκριση Παρονομαστών (ίδιοι αριθμητές)
212	Μεταφορά σε γεωμετρική απεικόνιση
213	Μεταφορά σε ποσοστό
214	Εκτίμηση

Τα περισσότερα έργα απαντήθηκαν με ενέργειες μουσικής και μαθηματικών. Μέσα από αυτές τις ενέργειες διακρίνεται η μέθοδος της **εκτίμησης** [κωδ. 214], καθώς σε πολλές περιπτώσεις οι συνεντευξιαζόμενοι είτε εξ αρχής είτε μετά από λίγες ενέργειες ήταν σε θέση να εκτιμήσουν το αποτέλεσμα.

Έργο:[ΣΚ3]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
$\frac{1}{4} + \frac{2}{6} \square \frac{1}{2}$	Μουσικός 3	Απλοποίηση το δύο έκτα, ένα τρίτο και ένα τέταρτο... Εφτά δωδέκατα. Είναι κάτι παραπάνω από το μισό.	203, 202, 214	>	Σ

Υπήρξαν ωστόσο και περιπτώσεις όπου δόθηκαν απαντήσεις με καθόλου, ή μη ορθή αιτιολόγηση, εμφανίζοντας σε μεγάλο βαθμό παρανοήσεις για την έννοια του κλάσματος. Οι απαντήσεις αυτές κωδικοποιήθηκαν ως [κωδ. Δ].

Έργο:[ΣΚ2]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
$\frac{2}{3} \square \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	Μουσικός 6	<i>Ε σε αυτά πάλι εδώ δεν ξέρω πόσο κάνουν όλα αυτά μαζί. Φαντάζομαι επειδή είναι πολλά θα βγει μεγαλύτερο.</i>	Δ	<	Σ

3.5.1 Απαντήσεις Επαγγελματιών Μουσικών

Πίνακας 3.14: Συχνότητα εμφάνισης ενεργειών από τους επαγγελματίες Μουσικούς για την

	ΣΚ1	ΣΚ2	ΣΚ3	ΣΚ4	ΣΚ5
	$\frac{1}{3} \square \frac{1}{4}$	$\frac{2}{3} \square \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$\frac{1}{4} + \frac{2}{6} \square \frac{1}{2}$	$\frac{2}{6} \square \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} + \frac{2}{3} \square \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$
000				1	
Δ		1	1		1
101				1	
102				1	
200		2		1	
201					3
202		1	1		
203			2	3	3
206		1			
208	1				
209		1	1		1
210	2			1	
212	3				
213		1			
214		2	4	2	4
Επιτυχία	6/6	6/6	5/6	3/6	6/6

Όπως φαίνεται, οι Μουσικοί χρησιμοποίησαν πολλούς διαφορετικούς τρόπους για να απαντήσουν στα έργα της Σύγκρισης με Κλάσματα. Στους τρόπους αυτούς διακρίνονται διαφορετικά μαθηματικά εργαλεία, τα οποία οι Μουσικοί έχουν μάθει να χρησιμοποιούν μέσω της εμπειρίας τους.

Έργο:[ΣΚ2]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
$\frac{2}{3} \square \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	Μουσικός 5	(...) Σκέφτομαι ότι τα δύο τρίτα είναι 0,66 ενώ το ένα δεύτερο από μόνο του είναι 0,5. Και ένα τέταρτο που είναι 0,25 άρα είναι μεγαλύτερο το δεύτερο.	209	<	Σ

Στο συγκεκριμένο έργο ο Μουσικός 5 μετατρέπει τα κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς [κωδ. 209], προκειμένου να υπολογίσει το άθροισμα του δεύτερου μέλους και να πραγματοποιήσει τη σύγκριση.

Έργο:[ΣΚ1]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
$\frac{1}{3} \square \frac{1}{4}$	Μουσικός 4	Αυτό θα το σκεφτώ σχηματικά, ένα ορθογώνιο που μια το χωρίζω στα τρία, μία στα τέσσερα. Το πρώτο μεγαλύτερο.	212	>	Σ

Στο έργο [ΣΚ1] οι Μουσικοί 4, 5 και 6 πραγματοποίησαν τη σύγκριση των δυο μελών αξιοποιώντας τη γεωμετρική αναπαράσταση των κλασμάτων [κωδ. 212].

Έργο:[ΣΚ2]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
$\frac{2}{3} \square \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	Μουσικός 3	Κάνω την πρόσθεση. Είναι εφτά όγδοα. Το πρώτο είναι σαν να λέμε εξηνταέξι τοις εκατό περίπου. Ε, το δεύτερο είναι πιο πάνω.	202, 213	<	Σ

Ένας ακόμα μαθηματικός τρόπος που χρησιμοποιήθηκε από τον Μουσικό 3 στο έργο [ΣΚ2] ήταν η μεταφορά των κλασμάτων σε ποσοστά [κωδ. 213] που όπως φάνηκε μπόρεσαν να τον οδηγήσουν στη σωστή σύγκριση.

Το πέρασμα από τα Μαθηματικά στη Μουσική εμφανίστηκε σε πολύ περιορισμένο βαθμό με τους εξής τρόπους:

- 1) Στο έργο [ΣΚ2] ο Μουσικός 1, αφού υπολόγισε τα **κλάσματα που χρειάζεται** κάθε μέλος για να γίνει μονάδα [κωδ. 206], στη συνέχεια **μετέτρεψε τις ποσότητες που βρήκε σε νότες** [κωδ. 200], προκειμένου να συγκρίνει τις διάρκειές τους.

Έργο:[ΣΚ2]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
$\frac{2}{3} \square \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	Μουσικός 1	<i>Εδώ πάλι θα δούμε τι χρειάζεται για να γίνει ένα, στο πρώτο λείπει το ένα τρίτο, στο δεύτερο λείπει το ένα όγδοο, το ένα τρίτο είναι μεγαλύτερο, όπως στην μουσική που είχε μεγαλύτερη διάρκεια μέσα στο τρίγχο. Άρα το δεύτερο είναι μεγαλύτερο.</i>	206, 200	<	Σ

- 2) Σε μια άλλη περίπτωση [ΣΚ4] ο ίδιος μουσικός **μετέτρεψε** εξ αρχής τα **κλάσματα** σε νότες [κωδ. 200], υπολόγισε τις **ισοδύναμες νότες** [κωδ. 101] των δύο μελών και τέλος **πραγματοποίησε τη σύγκριση** [κωδ. 102]. Κάτι αντίστοιχο επιχείρησε να εφαρμόσει και ο Μουσικός 2 στο έργο [ΣΝ2] **μετατρέποντας τα κλάσματα σε νότες** [κωδ. 200], αλλά εν τέλει προτίμησε να υπολογίσει τη σύγκριση μέσω των Μαθηματικών.

Έργο:[ΣΚ4]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
$\frac{2}{6} \square \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	Μουσικός 1	<i>Εδώ το δύο έκτα που είναι ένα τρίτο, θα μπορούσε να είναι σαν το τέταρτο από τρίγχο, και το άλλο είναι ένα τέταρτο και ένα όγδοο, δηλαδή σαν παρεστιγμένο τέταρτο. Ε το παρεστιγμένο τέταρτο είναι μεγαλύτερο, άρα το δεύτερο είναι μεγαλύτερο.</i>	200, 101, 102	<	Σ

Η επιτυχία της ομάδας των Μουσικών στη Σύγκριση με Κλάσματα ανέρχεται στα 26/30 (86%), με τις 3 από τις λάθος απαντήσεις να οφείλονται σε λάθος εκτιμήσεις των Μουσικών 2 και 4, ενώ υπήρξε και 1 περίπτωση όπου ο Μουσικός 6 δεν μπόρεσε να δώσει απάντηση. Ο συγκεκριμένος μουσικός αιτιολόγησε ορθά την απάντησή του μόνο στο έργο [ΣΚ1], **μετατρέποντας τα κλάσματα σε γεωμετρική απεικόνιση** [κωδ. 213], ενώ σε όλα τα υπόλοιπα έργα απαντούσε κυρίως διαισθητικά, χρησιμοποιώντας ιδιότητες που δεν ήταν ορθές.

3.5.2 Απαντήσεις Μαθητών

Πίνακας 3.15: Συχνότητα εμφάνισης ενεργειών από τους Μαθητές για τη Σύγκριση με Κλάσματα

	ΣΚ1	ΣΚ2	ΣΚ3	ΣΚ4	ΣΚ5
	$\frac{1}{3} \square \frac{1}{4}$	$\frac{2}{3} \square \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$\frac{1}{4} + \frac{2}{6} \square \frac{1}{2}$	$\frac{2}{6} \square \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} + \frac{2}{3} \square \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$
000					
201					1
202		5	6	6	4
203	1	2	3	3	2
206		1			
210	5	2	2	1	2
211	1	1	3	3	1
214		2	1	2	1
Επιτυχία	6/6	4/6	4/6	3/6	3/6

Όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα, οι Μαθητές χρησιμοποίησαν αποκλειστικά μαθηματικές μεθόδους σε όλα τα παραπάνω έργα. Η **ισοδυναμία κλασμάτων** [κωδ. **203**] και η **πρόσθεση με καπελάκια** [κωδ. **202**] εμφανίζονται σχεδόν σε κάθε απάντηση. Στη συνέχεια, οι μαθητές στις περισσότερες περιπτώσεις κατέληξαν σε **σύγκριση παρονομαστών** [κωδ. **210**], ή **αριθμητών** [κωδ. **211**]. Υπήρξαν ωστόσο και απαντήσεις στις οποίες οι Μαθητές **εκτίμησαν** [κωδ. **214**] το αποτέλεσμα, και μια περίπτωση όπου ο Μαθητής 2 πραγματοποίησε τη σύγκριση βάσει του πόσο **χρειάζεται κάθε μέλος για να γίνει μονάδα** [κωδ. **206**].

Η επιτυχία της ομάδας των μαθητών στη Σύγκριση με Κλάσματα ανέρχεται στα 20/30 (66%). Μέσα από τα λάθη των μαθητών διακρίνεται η περίπτωση των Μαθητών 3 και 6 που πραγματοποίησαν όλα τα έργα **συγκρίνοντας τους παρονομαστές** [κωδ. **210**], ακόμα και στις περιπτώσεις όπου οι αριθμητές ήταν διαφορετικοί, βρίσκοντας έτσι λάθος αποτελέσματα. Οι υπόλοιπες λάθος απαντήσεις προέκυψαν από λάθη στον αλγόριθμο της **πρόσθεσης με καπελάκια** [κωδ. **202**].

Έργο:[ΣΚ2]	Υποκείμενο	Ανάπτυξη απάντησης	Κωδικοί - ενέργειες	Απάντηση	Σωστό/ Λάθος
$\frac{1}{8} + \frac{2}{3} \square \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$	Μαθητής 6	<i>Αυτό βγαίνει... Ε στο αριστερό ο παρονομαστής θα είναι σίγουρα πιο μεγάλος, άρα το δεξιά είναι μεγαλύτερο.</i>	202, 210	<	Λ

Πέρασμα από τα Μαθηματικά στη Μουσική και σύγκριση των δύο ομάδων.

Η Σύγκριση με Κλάσματα αποτελούνταν από έργα μαθηματικής φύσεως, κάτι που οδήγησε τους μαθητές στο να χρησιμοποιήσουν εξ ολοκλήρου μαθηματικές μεθόδους, χωρίς μάλιστα να είναι πάντα σωστές. Η συχνότερη ενέργεια που εμφανίστηκε από τους Μαθητές, όπως ήταν αναμενόμενο, ήταν η **πρόσθεση με καπελάκια** [κωδ. 202], καθώς με αυτόν τον τρόπο συνηθίζουν να ανταπεξέρχονται σε προσθέσεις κλασμάτων στο σχολείο. Οι Μουσικοί απ' την άλλη, αν και εμφάνισαν επίσης μικρό πέρασμα από τα Μαθηματικά στη Μουσική, εμφάνισαν στη Σύγκριση με Κλάσματα πολλές περισσότερες μαθηματικές ενέργειες. Το γεγονός αυτό πιθανότατα οφείλεται στο ότι εφόσον οι μουσικοί καλούνταν να απαντήσουν σε ένα περιβάλλον με μαθηματικά σύμβολα, ανταποκρίθηκαν και προσαρμόστηκαν σε αυτόν τον συμβολισμό, χρησιμοποιώντας και οι ίδιοι μαθηματικές ενέργειες.

Το πέρασμα από τα Μαθηματικά στη Μουσική που εμφανίστηκε μόνο από την ομάδα των Επαγγελματιών Μουσικών, αφορούσε τα βολικά κλάσματα (κλάσματα με παρονομαστή μια δύναμη του δύο) και τα κλάσματα με παρονομαστή το τρία. Τα μαθηματικά κλάσματα αυτά, αφού **μεταφέρθηκαν σε νότες** [κωδ. 200] έδωσαν τη δυνατότητα στους μουσικούς να τα συγκρίνουν ως μουσικές διάρκειες.

Πίνακας 3.16: Ποσοστό στο οποίο εμφάνισε ο κάθε συνεντευζιαζόμενος πέρασμα από τα Μαθηματικά στη Μουσική για την Σύγκριση με Κλάσματα

Επαγγελματίες Μουσικοί	
Υποκείμενο	Πέρασμα
Μουσικός 1	2/5 (40%)
Μουσικός 2	1/5 (20%)
Μουσικός 3	0/5 (0%)
Μουσικός 4	0/5 (0%)
Μουσικός 5	0/5 (0%)
Μουσικός 6	0/5 (0%)
Σύνολο	3/30 (10%)

Μαθητές	
Υποκείμενο	Πέρασμα
Μαθητής 1	0/5 (0%)
Μαθητής 2	0/5 (0%)
Μαθητής 3	0/5 (0%)
Μαθητής 4	0/5 (0%)
Μαθητής 5	0/5 (0%)
Μαθητής 6	0/5 (0%)
Σύνολο	0/30 (0%)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Σύνοψη αποτελεσμάτων

Κύριος στόχος της παρούσας εργασίας ήταν να διερευνηθεί αν υπάρχει σύνδεση μεταξύ μουσικών και μαθηματικών κλασμάτων σε επαγγελματίες Μουσικούς και Μαθητές που ασχολούνται με τη μουσική. Ειδικότερα, η εργασία αυτή στοχεύει στο να αναλύσει το κατά πόσο η χρόνια και συστηματική ενασχόληση με τις νότες και τη μουσική σημειογραφία τόσο των επαγγελματιών της μουσικής, όσο και των διδασκομένων αυτής, δημιουργεί πέρασμα μεταξύ των πεδίων της Μουσικής και των Μαθηματικών. Ακόμα, γίνεται προσπάθεια να υπογραμμιστεί πως αλληλοεπηρεάζονται και τελικώς κατανοούνται οι έννοιες που συνδέουν τα δύο αυτά πεδία.

Το πέρασμα αυτό αναζητείται μέσω της κατανόησης και ερμηνείας των μουσικών κλασμάτων, δηλαδή των νοτών, και των μαθηματικών κλασμάτων, μέσα από έργα πρόσθεσης και σύγκρισης. Επίσης, διερευνώνται οι διαφορές μεταξύ των Μουσικών και των Μαθητών ως προς την επίδοσή τους στα έργα και το πέρασμα που εμφανίζουν μεταξύ των δύο πεδίων.

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων οδήγησε στο συμπέρασμα πως η σύνδεση αυτή πραγματοποιείται σε μικρό βαθμό και διαφέρει για τους επαγγελματίες Μουσικούς και για τους Μαθητές. Ακόμα, οι δύο ομάδες παρουσίασαν διαφορετική ικανότητα ως προς την επιτυχία στα έργα που αφορούσαν Πρόσθεση και Σύγκριση Νοτών, δηλαδή μουσικών κλασμάτων, και Σύγκρισης μαθηματικών κλασμάτων.

4.1 Άξονας Α) Πέρασμα από τα μουσικά στα μαθηματικά κλάσματα.

Το πέρασμα από τη μουσική στα μαθηματικά, αναζητήθηκε στις περιπτώσεις όπου ο συνεντευξιζόμενος χρησιμοποίησε κάποια μαθηματική ενέργεια για να δώσει απάντηση σε έργα που αφορούσαν μουσικές νότες. Τα ερωτήματα που τέθηκαν σε αυτόν τον άξονα αφορούν την αντίληψη των Μουσικών και των Μαθητών για τα μουσικά κλάσματα ως μαθηματικά κλάσματα (Ερώτημα Α1) και τις μαθηματικές

ενέργειες που χρησιμοποιούν σιωπηλά ή φανερά οι Μουσικοί και οι Μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με τα μουσικά κλάσματα, δηλαδή τις νότες (Ερώτημα Α2).

4.1.1 Ερώτημα Α1)

Σε ποιον βαθμό αντιλαμβάνονται οι επαγγελματίες Μουσικοί (Ομάδα Α) και οι Μαθητές που διδάσκονται μουσική (Ομάδα Β) τα μουσικά κλάσματα, ως μαθηματικά κλάσματα;

Το ερώτημα αυτό μελετήθηκε κυρίως στο πρώτο φύλο της συνέντευξης με τους 3 από τους 6 Μουσικούς (50%) και τον 2 από τους 6 Μαθητές (33%) να αποκαλύπτουν τη σύνδεση της Μουσική με τα Μαθηματικά, δίνοντας στη νότα τετάρτου τη μαθηματική έκφραση. Στην πρώτη ερώτηση που οι συνεντευξιαζόμενοι ερωτήθηκαν «ποια έννοια περιγράφει ο συμβολισμός (της νότας τετάρτου)», οι 2 από τους 6 Μουσικούς (33%) έδωσαν ερμηνεία σχέσης μέρους όλου, ενώ ο 1 από τους 6 Μαθητές (16%) ανέφερε μαζί με την σχέση μέρους όλου το μαθηματικό κλάσμα. Στην δεύτερη ερώτηση του πρώτου φύλλου που ερωτήθηκαν «με ποιόν άλλο τρόπο μπορεί να αποδοθεί η έννοια αυτή (της νότας του τετάρτου)», οι 3 από τους 6 Μουσικούς (50%) (οι 2 εκ των οποίων αναφέρθηκαν παραπάνω) και 1 από τους 6 Μαθητές (17%) (διαφορετικός από παραπάνω), συνέδεσαν τη νότα τετάρτου με το μαθηματικό κλάσμα.

Εκτός όμως από τις ερωτήσεις του πρώτου φύλλου, η σύνδεση του μουσικού κλάσματος με το μαθηματικό κλάσμα εμφανίστηκε και στην συνέχεια της έρευνας. Στα έργα της Πρόσθεσης με Νότες [ΠΝ4] και [ΠΝ5] οι συνεντευξιαζόμενοι έπρεπε να εκφράσουν με ένα κλάσμα τη διάρκεια της μίας και των δύο νοτών μισού μέσα σε ένα τρίγχο μισών. Για να το κάνουν αυτό, οι 5/6 Μουσικούς (83%) στο [ΠΝ4], οι 4/6 Μουσικούς (66%) στο [ΠΝ5] και οι 2/6 Μαθητές (33%) και στα δύο έργα χρησιμοποίησαν την αναγωγή στην κλασματική μονάδα, ενώ 1/6 Μαθητές (17%) την απλή μέθοδο των τριών. Οι ενέργειες αυτές φανερώνουν πως ακόμα και αν κάποιος συνεντευξιαζόμενος δεν χρησιμοποίησαν εξ αρχής τη μαθηματική έκφραση στην ερμηνεία της νότας, είναι σε θέση να τη χρησιμοποιήσουν με τέτοιο τρόπο προκειμένου να βρουν μια συγκεκριμένη διάρκεια.

4.1.2 Ερώτημα Α2)

Ποιες μαθηματικές διεργασίες πραγματοποιούν οι επαγγελματίες Μουσικοί (Ομάδα Α) και οι Μαθητές που διδάσκονται μουσική (Ομάδα Β) κατά την ενασχόλησή τους με τις νότες;

Οι διεργασίες αυτές αναζητήθηκαν στους τρόπους με τους οποίους οι συνεντευξιαζόμενοι απάντησαν στα έργα της Πρόσθεσης με Νότες και στα έργα της Σύγκρισης με Νότες. Μέσα σε αυτά εντοπίστηκαν οι 11 ενέργειες που παρουσιάζονται παρακάτω. Οι 5 πρώτες αφορούν ενέργειες που εμφανίστηκαν μετά τη μεταφορά των νοτών σε μαθηματικά κλάσματα, επομένως δεν εμφανίζουν ξεκάθαρο πέρασμα. Οι υπόλοιπες 6 ενέργειες παρουσιάζουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον, καθώς αποτελούν μαθηματικές ενέργειες, εφαρμοσμένες απευθείας σε μουσικές νότες:

Ενέργειες που προκύπτουν από τη μεταφορά των νοτών σε κλάσματα:

1. Πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων

Οι συνεντευξιαζόμενοι, αφού μετέτρεψαν τις νότες σε κλάσματα, πρόσθεσαν τα κλάσματα μεταξύ τους για να βρουν το τελικό αποτέλεσμα.

2. Πρόσθεση με Καπελάκια (ετερόνυμα κλάσματα)

Σε περιπτώσεις όπου η μετατροπή των νοτών σε κλάσματα οδήγησε σε κλάσματα με διαφορετικό παρονομαστή, τα κλάσματα προστέθηκαν με τον αλγόριθμο της πρόσθεσης με Καπελάκια.

3. Ισοδυναμία κλασμάτων

Σε άλλες περιπτώσεις, μετά τη μεταφορά των νοτών σε κλάσματα, χρησιμοποιήθηκε η ισοδυναμία κλασμάτων προκειμένου α) να δημιουργηθούν ομώνυμα κλάσματα, β) να απλοποιηθούν κλάσματα, ή γ) να αποφύγει ο συνεντευξιαζόμενος το να δώσει ως απάντηση κλάσματα με δεκαδικό αριθμό στον αριθμητή.

4. Σύγκριση Παρονομαστών (ίδιοι αριθμητές)

Αφού μετέτρεπαν τις νότες των δύο μελών σε κλάσματα, αρκετοί Μαθητές σύγκριναν τα δύο μέλη της σύγκρισης συγκρίνοντας τους παρονομαστές στην περίπτωση που οι αριθμητές ήταν ίδιοι.

5. Σύγκριση Αριθμητών (ίδιοι παρονομαστές)

Σε περιπτώσεις που τα δύο μέλη της σύγκρισης κατέληγαν σε κλάσματα ομώνυμα, η σύγκριση γινόταν μέσω της σύγκρισης των αριθμητών.

Υπόλοιπες ενέργειες:

6. Αναγωγή στην κλασματική μονάδα

Ορισμένοι Μουσικοί (5 στους 6 με ποσοστό 83,3%) και Μαθητές (2 στους 6 με ποσοστό 33,3%), προκειμένου να βρουν το κλάσμα στο οποίο αντιστοιχεί η μια νότα μισού από το τρίγχο μισών, χρησιμοποιούν την αναγωγή στην κλασματική μονάδα.

7. Μέθοδος των Τριών

Σε όλα τα έργα της Πρόσθεσης με Νότες και Σύγκρισης με Νότες που περιείχαν τρίγχα, υπήρξε 1 μαθητής (16,7%) που χρησιμοποιούσε την απλή μέθοδο των τριών με τον τρόπο που τη διδάχτηκε στο σχολείο, για να βρίσκει τη διάρκεια που χρειάζοταν από τη συνολική διάρκεια του τριγχου.

8. Σύγκριση συμπληρωματικών ποσοτήτων

Σε κάποια έργα της Σύγκρισης με Νότες όπου τα μέλη της σύγκρισης ήταν κοντά στη μονάδα, 2 από τους 6 Μουσικούς (33,3%), αντί να συγκρίνουν τις χρονικές διάρκειες που τους δόθηκαν, προτίμησαν να συγκρίνουν τις νότες με τις οποίες θα συμπληρώνονταν σε κάθε παράσταση ένα ολόκληρο.

9. Απαλοιφή ίδιων ποσοτήτων από τα δύο μέλη της σύγκρισης

Σε κάποιες άλλες περιπτώσεις της Σύγκρισης με Νότες, 3 από τους 6 Μουσικούς (50%) παρατήρησαν πως και στα δύο μέλη της σύγκρισης υπάρχει μια ίδια νότα, επομένως πραγματοποίησαν τη σύγκριση για τις υπόλοιπες νότες του έργου.

10. Αναλογία

Μια ακόμα μαθηματική ενέργεια που παρατηρήθηκε από τους συνεντευξιζόμενους (1/6 Μουσικούς με ποσοστό 16,7% και 2/6 Μαθητές με

ποσοστό 33,3%) κατά την ενασχόλησή τους με τις νότες, ήταν αυτή της αναλογίας. Σε ένα έργο Σύγκρισης με Κλάσματα, ένας Μουσικός βρήκε τη σχέση-αναλογία των δύο μελών της σύγκρισης με το μισό. Η ίδια μέθοδος χρησιμοποιήθηκε και από κάποιον Μαθητή, ενώ κάποιος άλλος Μαθητής σκέφτηκε πώς θα μπορούσε να πραγματοποιήσει τη σύγκριση όχι με τις νότες που του δόθηκαν, αλλά με κάποιες ανάλογές τους (διπλάσιες).

11. Μεταφορά σε δεκαδικούς αριθμούς

Ένας από τους τρόπους με τους οποίους πολλοί μουσικοί αναλαμβάνονται την διάρκεια των νοτών, είναι μετρώντας τους «χρόνους», «χτύπους» ή αλλιώς «παλμούς» που αυτές οι νότες αντιπροσωπεύουν. Καθένας από αυτούς τους «χρόνους» ισούται με τη διάρκεια του ενός τετάρτου. Στα έργα της Σύγκρισης με Νότες που η διάρκεια κάθε μέλους της σύγκρισης δεν ήταν ίση με κάποιο ακέραιο πολλαπλάσιο του ενός τετάρτου, οι Μουσικοί (2/6 με ποσοστό 33,3%) μετρούσαν τη συνολική διάρκεια κάθε μέλους σε χρόνους και κατέληγαν σε δεκαδικούς αριθμούς τους οποίους πλέον μπορούσαν να συγκρίνουν.

4.2 Άξονας Β) Πέρασμα από τα μαθηματικά στα μουσικά κλάσματα.

Το πέρασμα από τα μαθηματικά στη μουσική, αναζητήθηκε στις περιπτώσεις όπου ο συνεντευξιαζόμενος χρησιμοποίησε τη μουσική του αντίληψη για να απαντήσει σε έργα που αφορούσαν μαθηματικά κλάσματα.

4.2.1 Ερώτημα Β1)

Πώς μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι επαγγελματίες Μουσικοί (Ομάδα Α) και οι Μαθητές που διδάσκονται μουσική (Ομάδα Β) τη μουσική τους γνώση για να διαχειριστούν τα μαθηματικά κλάσματα;

Αντίστοιχα με το Ερώτημα 2 του Άξονα Α, το πέρασμα αυτό αναζητήθηκε στους τρόπους με τους οποίους οι συνεντευξιαζόμενοι απάντησαν στα έργα της Σύγκρισης μαθηματικών κλασμάτων. Στα έργα αυτά μουσικές ενέργειες ήταν σε πολύ περιορισμένο βαθμό και αποτελούν:

1. Μεταφορά από μαθηματικό κλάσμα σε νότες

Σε κάποια από τα έργα που περιείχαν βολικά κλάσματα (κλάσματα με παρονομαστή δυνάμεις του 2) $2/6$ (33.33%) Μουσικοί μετέτρεψαν τα κλάσματα σε νότες.

2. Ισοδυναμία Νοτών

Έχοντας μετατρέψει τα κλάσματα σε νότες, μέσω της ισοδυναμίας νοτών μπόρεσαν να υπολογίσουν τη συνολική διάρκεια των νοτών και κατ' επέκταση των κλασμάτων.

3. Διάρκεια Νοτών

Έχοντας χρησιμοποιήσει την μεταφορά των κλασμάτων σε νότες και την ισοδυναμία νοτών, όπως αναλύθηκε παραπάνω, ολοκλήρωσαν τη σύγκριση εξετάζοντας τη διάρκεια των νοτών που υπολογίστηκε σε κάθε μέλος της σύγκρισης.

4.3 Άξονας Γ) Διαφορές μεταξύ των ομάδων.

Εμφανίζονται διαφορές μεταξύ των επαγγελματιών Μουσικών (Ομάδα Α) και των Μαθητών που διδάσκονται μουσική (Ομάδα Β) ως προς τη μεταφορά μεταξύ μουσικών και μαθηματικών κλασμάτων;

Συνολικά, στην παρούσα μελέτη φαίνεται πως η μεταφορά γνώσης μεταξύ των μουσικών και των μαθηματικών κλασμάτων διαφέρει για τους επαγγελματίες Μουσικούς και τους Μαθητές, όχι μόνο στον τρόπο, αλλά και στο αν αυτή πραγματοποιείται. Οι διαφορές αυτές που εμφανίστηκαν στις απαντήσεις των δύο ομάδων, πιθανότατα οφείλονται στα διαφορετικά ερεθίσματα που λαμβάνουν οι δύο ομάδες στην καθημερινότητα τους. Από τη μία οι επαγγελματίες Μουσικοί ασχολούνται καθημερινά με τα μουσικά κλάσματα με τρόπο «πρακτικό» (παίζοντας) αλλά και «θεωρητικό» (διδάσκοντας), ενώ έχουν πολλά χρόνια να ασχοληθούν με τα μαθηματικά. Από την άλλη, οι Μαθητές είναι σε καθημερινή επαφή με τα μαθηματικά κλάσματα, τις πράξεις και τους αλγορίθμους των πράξεων που μαθαίνουν και χρησιμοποιούν στο σχολείο, ενώ με τα μουσικά κλάσματα, αν και έχουν μια χρόνια επαφή, βρίσκονται ακόμα σε ένα στάδιο ανακάλυψης και μελέτης, πολύ πιο πρώιμο από αυτό της ομάδας των Μουσικών.

4.3.1 Διαφορές ως προς την ερμηνεία νότας

Αρχικά οι δύο ομάδες διέφεραν ως προς την αντίληψη που έχουν για την έννοια της μουσικής νότας. Οι 2 από τους 6 Μουσικούς (33,3%) φάνηκε πως αντιλαμβάνονται τη νότα ως σχέση μέρους – όλου, και στη συνέχεια οι 3 από τους 6 Μουσικούς (50%) εμφάνισαν τη σύνδεση του μουσικού κλάσματος, με το μαθηματικά κλάσμα. Αντίστοιχα, μόνο 1 από τους 6 Μαθητές (16,7%) εμφάνισε την σχέση μέρους – όλου για τη νότα της μουσικής, και επίσης μόνο 1 από 6 Μαθητές (16,7%) πρότεινε το μαθηματικό κλάσμα ως άλλον τρόπο να αποδοθεί η έννοια της μουσικού κλάσματος.

4.3.2 Διαφορές ως προς το πέρασμα από τα μουσικά στα μαθηματικά κλάσματα

Συνολικά, οι μαθητές σημείωσαν συχνότερα το πέρασμα από τα μουσικά στα μαθηματικά κλάσματα, εμφανίζοντας μαθηματικές ενέργειες στα 17/48 (35,4%) των έργων της Πρόσθεσης με Νότες και στα 9/30 (30%) των έργων της Σύγκρισης με Νότες. Τα αντίστοιχα ποσοστά των Μουσικών ανέρχονται στα 12/48 (25%) για την Πρόσθεση με Νότες και 11/30 (36,7%) για τη Σύγκριση με Νότες.

Ωστόσο, όσο αφορά το είδος των ενεργειών, παρατηρούνται κάποιες σημαντικές διαφορές στις απαντήσεις των δύο ομάδων. Στην Πρόσθεση με Νότες Μαθητές και Μουσικοί χρησιμοποίησαν πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων, ισοδυναμία κλασμάτων και αναγωγή στην κλασματική μονάδα. Υπήρξαν όμως και δύο ακόμα ενέργειες που εμφάνισαν μόνο Μαθητές. Αυτές αφορούν την πρόσθεση με καπελάκια και τη μέθοδο των τριών, που αποτελούν μεθόδους που χρησιμοποιούν συχνά οι Μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με τα κλάσματα στο σχολείο.

Οι ενέργειες που εμφανίστηκαν στη Σύγκριση με Νότες διέφεραν επίσης. Οι μεν Μαθητές χρησιμοποίησαν κατά κύριο λόγο ενέργειες που προϋποθέτουν τη μεταφορά από νότες σε μαθηματικά κλάσματα (Πρόσθεση με Καπελάκια, ισοδυναμία κλασμάτων, μέθοδος των Τριών, σύγκριση παρονομαστών και σύγκριση αριθμητών), ενώ υπήρξαν μόνο δύο περιπτώσεις που 2 από τους 6 Μαθητές (33,3%) χρησιμοποίησαν αναλογίες μεταξύ των ίδιων των νοτών. Από την άλλη, οι Μουσικοί δεν χρησιμοποίησαν καμία ενέργεια που να προϋποθέτει την μεταφορά από νότα σε μαθηματικό κλάσμα εμφανίζοντας έτσι, εκτός από τις αναμενόμενες μουσικές

ενέργειες, και κάποιες μαθηματικές ενέργειες, σημειώνοντας πιο εμφανές το πέρασμα μεταξύ των μουσικών και των μαθηματικών κλασμάτων. Στις απαντήσεις τους συναντάμε την Σύγκριση συμπληρωματικών ποσοτήτων, την Απαλοιφή ίδιων ποσοτήτων από τα δύο μέλη της σύγκρισης, την Αναλογία και την Μεταφορά σε δεκαδικούς αριθμούς.

4.3.3 Διαφορές ως προς το πέρασμα από τα μαθηματικά στα μουσικά κλάσματα

Σε αντίθεση με το πέρασμα από τα μουσικά στα μαθηματικά κλάσματα, το πέρασμα από τα μαθηματικά στα μουσικά κλάσματα στα εμφανίστηκε μόνο από την ομάδα των Μουσικών με το ποσοστό των έργων να φτάνει μόνο τα 3 στα 30 (10%) των έργων της Σύγκριση με Νότες. Οι ενέργειες που εμφανίστηκαν στα έργα αυτά, όπως αναλύθηκαν στο Ερώτημα Β1 αφορούν την Μεταφορά από μαθηματικό σε μουσικό κλάσμα, δηλαδή σε νότα, και στην συνέχεια την Ισοδυναμία Νοτών, την Σύγκριση μέσω της διάρκειας Νοτών.

4.3.4 Διαφορές ως προς την επιτυχία

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται η επιτυχία των δύο ομάδων ως προς τις διαφορετικές φάσεις της συνέντευξης.

Πίνακας 4.17: Η επιτυχία των δύο ομάδων

	Πρόσθεση με Νότες	Σύγκριση με Νότες	Σύγκριση με Κλάσματα	Σύνολο
Μουσικοί	41/48 (85,4%)	29/30 (96,7%)	26/30 (86,7%)	96/108 (88,9%)
Μαθητές	38/48 (79,2%)	20/30 (66,7%)	20/30 (66,7%)	78/108 (72,2%)

Όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα οι μουσικοί σημείωσαν υψηλότερη επιτυχία σχεδόν σε όλες τις κατηγορίες έργων.

Αφενός στην ομάδα των μαθητών, το μεγαλύτερο μέρος ανεπιτυχόντων έργων που αφορούσαν μαθηματικά κλάσματα προκλήθηκε από υπολογιστικά λάθη στον αλγόριθμο της πρόσθεσης με Καπελάκια. Από την άλλη, στην ομάδα των Μουσικών πολλά από τα λάθη οφείλονται σε λάθος εκτιμήσεις του μεγέθους των κλασμάτων. Και οι δύο ομάδες όμως εμφάνισαν διάφορες από τις παρανοήσεις των κλασμάτων. Τέτοιου

είδους παράδειγμα αποτελεί η αντίληψη πως όσο μεγαλύτερος είναι ο παρονομαστής, τόσο μεγαλύτερο είναι το κλάσμα, χωρίς να λαμβάνεται υπόψιν ο αριθμητής του κλάσματος (Moss, 2005 στο Christou 2015).

Όσον αφορά τα λάθη στα έργα μουσικής φύσεως, και οι δύο ομάδες παρουσίασαν μεγάλη δυσκολία στις περιπτώσεις που περιείχαν τρίηχα. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι ενώ τα τρίηχα ογδόων και τετάρτων εμφανίζονται πολύ συχνά στα μουσικά έργα, τα τρίηχα μισών είναι ιδιαίτερα σπάνια. Μάλιστα, υπήρξαν μαθητές που δεν μπόρεσαν να απαντήσουν στα εν λόγω έργα. Ωστόσο, αν και πολλοί από τους Μουσικούς δεν μπορούσαν να υπολογίσουν με ακρίβεια την διάρκεια των νοτών μέσα σε τρίηχα, ήταν σε θέση να μετρήσουν ρυθμικά τις αξίες και εν τέλει να οδηγηθούν σε σωστές συγκρίσεις. Αξίζει να σημειωθεί πως ενώ η μέθοδος αυτή χρησιμοποίησε σε μεγάλο βαθμό από τους μουσικούς, υπήρξε μια μοναδική περίπτωση έργου στο οποίο μαθητής υπολόγισε ρυθμικά την συνολική διάρκεια του κάθε μέλους της ανίσωσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Συμπεράσματα

Κύριος σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να μελετήσει την πιθανή ύπαρξη μεταφοράς γνώσης μεταξύ των μουσικών και των μαθηματικών κλασμάτων ανάμεσα σε Επαγγελματίες Μουσικούς και σε Μαθητές που ασχολούνται με τη μουσική. Η μεταφορά αυτή διερευνήθηκε και αναζητήθηκε μέσα από ημιδομημένες συνεντεύξεις σε επαγγελματίες μουσικούς και μαθητές Β' τάξης Γυμνασίου που διδάσκονται μουσική, σχετικά με την Ερμηνεία της Νότας, έργα πρόσθεση Νοτών ή μουσικών κλασμάτων, Σύγκρισης Νοτών, και Σύγκρισης μαθηματικών Κλασμάτων.

Τα αποτελέσματα από την παρούσα έρευνα έδειξαν πως το πέρασμα από τα μουσικά στα μαθηματικά κλάσματα είναι σχετικά μικρό. Αρχικά, αποκαλύφθηκε πως οι επαγγελματίες μουσικοί και οι μαθητές που διδάσκονται μουσική, δεν αντιλαμβάνονται σε αρκετά μεγάλο βαθμό το μουσικό κλάσμα, δηλαδή την νότα, ως μαθηματικό κλάσμα (50% για του Μουσικούς, 33% για τους Μαθητές). Ωστόσο, αν και κατά την ανάλυση του τρόπου απάντησης των συνεντευξιαζόμενων στα έργα που αφορούσαν τα μουσικά κλάσματα εμφανίστηκαν ορισμένες μαθηματικές ενέργειες, οι περισσότερες από αυτές αφορούσαν πράξεις με κλάσματα μετά την μεταφορά των νοτών σε μαθηματικά κλάσματα. Υπήρξαν ωστόσο και κάποιες μαθηματικές ενέργειες που εμφανίστηκαν στα ίδια τα μουσικά κλάσματα, οι οποίες όμως εμφανίστηκαν μεμονωμένα σε πολύ μικρό βαθμό, και μεταξύ άλλων αφορούν την Σύγκριση συμπληρωματικών ποσοτήτων, την Απαλοιφή ίδιων ποσοτήτων από τα δύο μέλη της σύγκρισης την Αναλογία.

Αντίστοιχα, το πέρασμα από τα μαθηματικά στα μουσικά κλάσματα φάνηκε ακόμα πιο αμυδρό έως ανύπαρκτο. Η μουσική γνώση που κατέχουν οι Μουσικοί χρησιμοποιήθηκε ελάχιστα στα μαθηματικά έργα, μόνο στους 2 από τους 6 Μουσικούς (33%), μέσω της μεταφοράς από μαθηματικό σε μουσικό κλάσμα. Απ' την άλλη, οι μαθητές, εφάρμοσαν σε όλα τα έργα που περιείχαν μαθηματικά κλάσματα, τις μεθόδους της Πρόσθεσης με καπελάκια και της Σύγκρισης ετερόνυμων κλασμάτων όπως τις έμαθαν στον σχολείο.

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε πως η μεταφορά γνώσης μεταξύ των μουσικών και των μαθηματικών κλασμάτων πραγματοποιείται σε πολύ χαμηλό βαθμό.

Το γεγονός αυτό ενδεχομένως οφείλεται στον τρόπο με τον οποίο γίνεται η διδασκαλία των δύο αυτών γνωστικών αντικειμένων. Από την μια τα μαθηματικά κλάσματα διδάσκονται μέσα από συγκεκριμένες αναπαραστάσεις, και χρησιμοποιούνται με συγκεκριμένες μεθόδους και αλγορίθμους. Από την άλλη, τα μουσικά κλάσματα, ή αλλιώς οι νότες, διδάσκονται με τρόπο που εξυπηρετεί στην τοποθέτηση τους στο πεντάγραμμο και την εκτέλεση κάποιου μουσικού κομματιού, χωρίς να απαιτείται έμφαση στην έννοια που περιγράφουν. Είναι επομένως ακόλουθο, τόσο οι Μαθητές όσο και οι επαγγελματίες Μουσικοί, να μην αντιλαμβάνονται σε μεγάλο βαθμό τη σύνδεση μεταξύ των μουσικών και των μαθηματικών κλασμάτων, καθώς και τις δυνατότητες που θα έδινε το πέρασμα μεταξύ τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Περιορισμοί έρευνας

Κατά τη διεξαγωγή της παρούσας έρευνας υπήρξαν κάποιοι περιορισμοί οι οποίοι, σε αυτό το σημείο, είναι σημαντικό να αναφερθούν. Αρχικά, πρόκειται για μια ποιοτική μελέτη στην οποία συμμετείχαν μόλις 6 Μαθητές της Β' Γυμνασίου και 6 Επαγγελματίες Μουσικοί, οι οποίοι ανήκαν όλοι στην ηλικιακή ομάδα των 25-30 ετών. Ο αριθμός των συμμετεχόντων ήταν μικρός, ενώ η επιλογή του δεν πραγματοποιήθηκε με τυχαία δειγματοληψία. Το δείγμα, δηλαδή, της έρευνας ήταν βολικό καθώς οι συνεντευξιαζόμενοι που επιλέχθηκαν αποτελούσαν οικεία πρόσωπα του ερευνητή. Επομένως, τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματά της δεν είναι ασφαλές να γενικευτούν για όλους τους μαθητές της Β' Γυμνασίου και για όλους τους επαγγελματίες μουσικούς, αντίστοιχα.

Ακόμη, το εργαλείο της έρευνας αποτελούνταν από φύλλα εργασίας και έργα τα οποία συνέταξε και μορφοποίησε ο ίδιος ο ερευνητής και τα οποία απαιτούσαν ενέργειες οι οποίες σχετίζονταν αποκλειστικά με την πρόσθεση και τη σύγκριση κλασμάτων. Επομένως, η συσχέτιση μαθηματικών και μουσικών κλασμάτων περιορίστηκε μόνο στις δύο αυτές πράξεις.

Προτάσεις για περαιτέρω μελέτη

Αρχικά, ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα θα ήταν μία αντίστοιχη έρευνα με μεγαλύτερο και αντιπροσωπευτικότερο δείγμα, της οποίας τα αποτελέσματα θα ήταν πιο εύκολο να γενικευθούν, ενώ παράλληλα θα παρουσίαζαν και μία πιο ολοκληρωμένη πρόταση σχετικά με τη σύνδεση των μαθηματικών και της μουσικής. Στο πλαίσιο αυτό, προτείνεται να ενταχθούν στα φύλλα εργασίας, τα οποία αποτελούν το εργαλείο της έρευνας, περαιτέρω έργα που θα σχετίζονται και με άλλες πράξεις πέραν της πρόσθεσης και της σύγκρισης κλασμάτων.

Παράλληλα, θα είχε ιδιαίτερο νόημα να μελετηθεί η σύνδεση μεταξύ των μουσικών και των μαθηματικών κλασμάτων, μετά από μια διδακτική παρέμβαση που θα συνέδεε τα μαθηματικά με τα μουσικά κλάσματα. Θα είχε μάλιστα ακόμα μεγαλύτερο ενδιαφέρον η μελέτη της επιτυχίας των μαθητών σε έργα μουσικού και μαθηματικού πλαισίου πριν, και μετά την παρέμβαση.

Ακόμα, θα μπορούσε να εξεταστεί και η επίδραση της ηλικίας των συνεντευξιζόμενων τόσο των επαγγελματιών Μουσικών όσο και των Μαθητών, με την προϋπόθεση πως και οι δύο ομάδες βρίσκονται σε ηλικία που έχουν διδαχθεί τα μαθηματικά κλάσματα στο σχολείο, δηλαδή έχουν ολοκληρώσει την Α' Γυμνασίου. Σε αυτή την περίπτωση, η απόσταση των συμμετεχόντων από την πρώτη τάξη του γυμνασίου που ολοκληρώνεται η εκμάθηση των κλασμάτων, ίσως έχει ως αποτέλεσμα την αυξημένη χρήση των μουσικών κλασμάτων για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων που στηρίζονται στα κλάσματα. Ταυτόχρονα, αντικείμενο έρευνας θα μπορούσε να αποτελέσει και η επιρροή του οργάνου στο οποίο ειδικεύεται ο εκάστοτε μουσικός, όσον αφορά τη μουσική και μαθηματική του αντίληψη.

Τέλος, παραλλαγές της παρούσας έρευνας θα μπορούσαν να σχετίζονται με τη μελέτη της επίδρασης που μπορεί να έχει η μουσική διδασκαλία στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών σε παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες ή/και σε ειδικά σχολεία. Ταυτόχρονα, είναι πιθανό να παρουσιάσει ενδιαφέρον και η διερεύνηση της σύνδεσης μαθηματικών-μουσικής σε εσπερινά σχολεία ή/και σχολεία δεύτερης ευκαιρίας, όπου οι μαθητές θα είναι ενήλικες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Βιβλιογραφία

Ελληνική Βιβλιογραφία

Γαγάτσης, Α., Ιωάννου, Κ., Σιμητρά-Κωνσταντίνου, Α., & Χριστοδουλίδου, Ο. (2006). Γιατί οι μαθητές δυσκολεύονται στα κλάσματα, *9^ο Παγκύπριο Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρίας Κύπρου, συνδιοργάνωση: Παιδαγωγική Εταιρία Κύπρου, ΚΟΕΕ, Τμήμα Επιστημών Αγωγής Πανεπιστημίου Κύπρου*, σελ 99-110, Λευκωσία: 2-3/6/2006

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών*. Αθήνα, εκδ Τόπος

Λεμονίδης, Χ. (2016). *Στην τροχιά των ρητών*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Κυριακίδη

Χαραλάμπους, Α. (1997). *Η θεωρία της Μουσικής*, Gutenberg, Αθήνα.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

Azaryahu L. & Adi-Japha E. (2020): “MusMath” - a music-based intervention program for learning patterns and symmetry, *The Journal of Experimental Education*, DOI: 10.1080/00220973.2020.1799316

Babbitt, M. (1961). Past and present concepts of the nature and limits of music. *International Musical Society Congress Reports* 8, no. 1, 399

Bamberger, J., & Disessa. A. A., (2003). Music as embodied mathematics: A study of a mutually informing affinity. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 8(2), 123-160.

Barnett, S. M., & Ceci, S. J. (2002). When and where do we apply what we learn? A taxonomy for far transfer. *Psychological Bulletin*, 128, 612-637.
doi:10.1037/0033-2909.128.4.612

Boyd, J, (2013). The Relationship between Music Participation and Mathematics Achievement in Middle School Students. *Doctoral Dissertations and Projects*, 674,

Byrnes, J. P. (1996). *Cognitive development and learning in instructional contexts*. Boston: Allyn & Bacon

Cheek, J. M., & Smith, L. R. (1999). Music training and mathematics achievement. *Adolescence*, 34(136), 759-61.

Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM*, 47(5), 747-758.

Courey, S.J., Balogh, E., Siker, J.R. et al. (2012). Academic music: music instruction to engage third-grade students in learning basic fraction concepts. *Educ Stud Math* 81, 251–278

Cox, H. A., & Stephens, L. J. (2006). The effect of music participation on mathematical achievement and overall academic achievement of high school students. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, 37 (7), 757-763. doi:10.1080/002077390500137811

De Schotten, M. T., Urbanski, M., Duffau, H., Volle, E., Lévy, R., Dubois, B. and Bartolomeo, P. (2005). Direct evidence for a parietal-frontal pathway subserving spatial awareness in humans. *Science*, 309(5744), 2226-2228;

Hall, A. R. (2007). Mini Literature Review Based on Brain Research and its Effect on Educational Practice. *Online Submission..*

Hallam, S. (2016). Η επίδραση της ενεργητικής ενασχόλησης με τη μουσική στις διανοητικές δεξιότητες των παιδιών και τις σχολικές τους επιδόσεις. Στο Μ. Κοκκίδου & Ζ. Διονυσίου (Επιμ.), Μουσικός Γραμματισμός: Τυπικές και Άτυπες Μορφές Μουσικής Διδασκαλίας-Μάθησης (Πρακτικά 7ου Συνεδρίου της Ελληνικής Ένωσης για τη Μουσική Εκπαίδευση) (σσ. 37-62). Θεσσαλονίκη: Ε.Ε.Μ.Ε.

Heming, A. L. (2008). Multiple Intelligences in the Classroom. *Mahurin Honors College Capstone Experience/Thesis Projects*.

Hilton, Caroline & Saunders, Jo & Henley, Jennie & Henriksson-Macaulay, Liisa & Welch, Graham. (2015). *EMP Maths Review of Literature 1 European Music Portfolio (EMP) – Maths: Sounding Ways Into Mathematics A Review of Literature*. 10.13140/RG.2.1.2739.1843.

Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult?. *Developmental Review*, 38, 201-221.

Lovemore, T.S., Robertson, S-A. & Graven, M., 2021, Enriching the teaching of fractions through integrating mathematics and music. *South African Journal of Childhood Education*, 11(1). a899. <https://doi.org/10.4102/sajce.v11i1.899>

Münste, T. F., Altenmüller, E. and Jäncke, L. (2002). The musician's brain as a model of neuroplasticity. *Nature Reviews Neuroscience*, 3(6), 473-478

Ni, Y., & Zhou, Y-D.(2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27–52. doi:10.1207/s15326985ep4001_3

Nunes, T., & Bryant, P. (2008). Rational numbers and intensive quantities: Challenges and insights to pupils' implicit knowledge. *Anales de psicología*, 24(2), 262-270.

Papadopoulos, A. (2002). Mathematics and music theory: From pythagoras to rameau. *The Mathematical Intelligencer* 24, 65–73
<https://doi.org/10.1007/BF03025314>

Petit, M. M., Laird, R. E., Ebby, C. B., & Marsden, E. L. (2015). *A focus on fractions: Bringing research to the classroom*. Routledge.

Rivera, S. M., Reiss, A. L., Eckert, M. A. & Menon, V. (2005). Developmental changes in mental arithmetic: evidence for increased functional specialization in the left inferior parietal cortex. *Cerebral cortex*, 15(11), 1779- 1790.

Sala, G. & Gobet, F. (2016). When the music's over. Does music skill transfer to children's and young adolescents' cognitive and academic skills? A meta-analysis. *Educational Research Review*, Volume 20

Shah, S. (2010). An exploration of the relationship between mathematics and music (Doctoral dissertation, Manchester Institute for Mathematical Sciences, The University of Manchester).

Shepard, J. S. (2004). Multiple ways of knowing: fostering resiliency through providing opportunities for participating in learning. *Reclaiming children and youth*, 12, 210- 216. Retrieved March 6, 2008, from EBSCO Host Database.

Singley, M. K., & Anderson, J. R. (1989). *The transfer of cognitive skill*. Harvard University Press.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*(5), 503–518.

Jones, S. M. & Pearson, D. Jr. (2013). Music: Highly Engaged Students Connect Music to Math. *General Music Today, 27*. 18-23.
10.1177/1048371313486478.

Vaughn, K. (2000). Music and Mathematics: Modest Support for the Oft-Claimed Relationship. *The Journal of Aesthetic Education, 34*, 149.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior, 31* (3), 344-355.

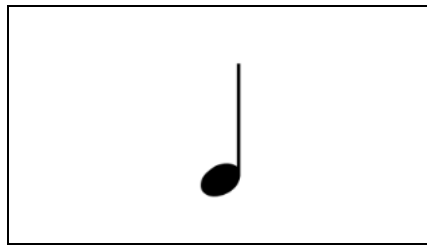
Yusof, J. (2003). *Mathematics errors in fractions work: A longitudinal study of primary level pupils in Brunei* (Doctoral dissertation, Curtin University).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Παράρτημα

Το εργαλείο της συνέντευξης

Φύλλο εργασίας 1



Εικόνα 3

Ερ1: Τι σκέφτεστε βλέποντας την εικόνα 1; Τι είναι στην πραγματικότητα; Ποια έννοια περιγράφει αυτός ο συμβολισμός;



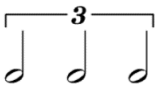
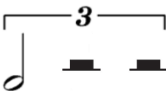
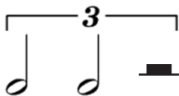



Ερ2: Πώς αλλιώς θα μπορούσε να αποδοθεί αυτή η έννοια;

Φύλλο εργασίας 2

Πρόσθεση με νότες και σχέση μέρους όλου

Στον πίνακα που ακολουθεί, δίνονται ορισμένα έργα.









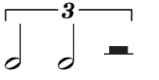

Ποια η συνολική χρονική διάρκεια σε κάθε έργο; Γράψτε την με την μορφή κλάσματος.

ΠΝ1	
ΠΝ2	
ΠΝ3	
ΠΝ4	
ΠΝ5	
ΠΝ6	
ΠΝ7	
ΠΝ8	

Φύλλο εργασίας 3

Εκτίμηση μεγέθους και σύγκριση με νότες και κλάσματα

Στα έργα που ακολουθούν συμπληρώστε σε κάθε κουτάκι αν οι νότες της αριστερής στήλης έχουν μεγαλύτερη (>) ή μικρότερη (<) χρονική διάρκεια από τις νότες της δεξιάς στήλης.

Σύγκριση Νοτών			
ΣΝ1		<input type="checkbox"/>	
ΣΝ2		<input type="checkbox"/>	
ΣΝ3		<input type="checkbox"/>	
ΣΝ4		<input type="checkbox"/>	
ΣΝ5		<input type="checkbox"/>	

Μαθηματικά Κλάσματα			
ΣΚ1	$\frac{1}{3}$	<input type="checkbox"/>	$\frac{1}{4}$
ΣΚ2	$\frac{2}{3}$	<input type="checkbox"/>	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
ΣΚ3	$\frac{1}{4} + \frac{2}{6}$	<input type="checkbox"/>	$\frac{1}{2}$
ΣΚ4	$\frac{2}{6}$	<input type="checkbox"/>	$\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
ΣΚ5	$\frac{1}{8} + \frac{2}{3}$	<input type="checkbox"/>	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$