ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Παρανοήσεις και επίπεδα βεβαιότητας μαθητών Δημοτικού στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών: Μια διδακτική παρέμβαση με ανατρεπτικό κείμενο»

Τίγκα Σοφία

Εξεταστική επιτροπή

Χρήστου Π. Κωνσταντίνος, Επίκουρος Καθηγητής (Επόπτης)

Βαμβακούση Ξένια, Καθηγήτρια

Δεσλή Δέσποινα, Καθηγήτρια

2024

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους στάθηκαν αρωγοί σε αυτήν την προσπάθεια. Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κύριο Χρήστου Π. Κωνσταντίνο για την άριστη συνεργασία, την σωστή καθοδήγηση και την άμεση υποστήριξη σε όλα τα στάδια συγγραφής της εργασίας. Η βοήθειά του ήταν ουσιαστική και πολύτιμη. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τις κυρίες Βαμβακούση Ξένια και Δεσλή Δέσποινα, μέλη της εξεταστικής επιτροπής, για τις χρήσιμες συμβουλές.

Επιπλέον, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στους Διευθυντές και Εκπαιδευτικούς των σχολείων στα οποία πραγματοποιήθηκε η έρευνα.

Τέλος, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς και στους μαθητές που δέχτηκαν πρόθυμα να συμμετέχουν στην έρευνα. Η συμβολή τους ήταν πολύ σημαντική για την ολοκλήρωση της εργασίας.

Περιεχόμενα

Περίληψη 1

Abstract 2

1. Εισαγωγή 3

2. Ανασκόπηση της βιβλιογραφίας 6

 2.1. Δεκαδικοί αριθμοί 6

  2.1.1. Η διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών στο Δημοτικό 6

  2.1.2. Συνήθη λάθη και παρανοήσεις στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών 7

 2.2. Μεταγνωστικοί παράγοντες στην μάθηση των μαθηματικών 13

  2.2.1. Η έννοια της μεταγνώσης 13

  2.2.2. Η μεταγνώση στην μαθηματική εκπαίδευση 14

 2.3. Διδακτικές παρεμβάσεις με ανατρεπτικό κείμενο 17

  2.3.1. Το ανατρεπτικό κείμενο 17

  2.3.2. Το ανατρεπτικό κείμενο στην μαθηματική εκπαίδευση 20

3. Ερευνητικό μέρος 23

 3.1. Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα 23

 3.2. Μεθοδολογία 23

  3.2.1. Ερευνητική στρατηγική 23

  3.2.2. Συμμετέχοντες 23

  3.2.3. Υλικά 24

  3.2.4. Ερευνητική διαδικασία 29

  3.2.5. Ανάλυση αποτελεσμάτων 30

4. Αποτελέσματα 32

5. Συμπεράσματα 52

 5.1. Συζήτηση 52

 5.2. Γενικά Συμπεράσματα 54

5.3. Περιορισμοί της έρευνας.. 56

5.4. Προτάσεις.. 57

5.4.1. Προτάσεις για πρακτική εφαρμογή των συμπερασμάτων.................................... 57

5.4.2. Προτάσεις για μελλοντική έρευνα 58

Βιβλιογραφικές αναφορές 59

Παράρτημα Α 64

Παράρτημα Β... 88

Περιεχόμενα εικόνων

Εικόνα 1. Ενδεικτικό παράδειγμα ερώτησης στο τεστ του προ-ελέγχου 25
Εικόνα 2. Ενδεικτικό παράδειγμα ερώτησης με διάταξη αριθμών στο τεστ του προ-ελέγχου 26
Εικόνα 3. Ενδεικτικό παράδειγμα ερώτησης με αναφορά σε ποσότητα στο τεστ του προ-ελέγχου 26
Εικόνα 4. Ενδεικτικό παράδειγμα ανατρεπτικού κειμένου 28
Εικόνα 5. Κείμενο υπενθύμισης του κανόνα σύγκρισης δεκαδικών αριθμών από το σχολικό βιβλίο 29

Περιεχόμενα πινάκων

Πίνακας 1. Τρόπος αξιολόγησης ενός τεστ τριών επιπέδων 31

Πίνακας 2. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των σωστών απαντήσεων στον προ-έλεγχο ανά ομάδα 32

Πίνακας 3. Κατανομή λανθασμένων συλλογιστικών στην παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων στον προ-έλεγχο ανά ομάδα 33

Πίνακας 4. Κατανομή λανθασμένων συλλογιστικών στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός στον προ-έλεγχο ανά ομάδα 34

Πίνακας 5. Μέσοι όροι των επιπέδων βεβαιότητας των απαντήσεων στον προ-έλεγχο ανά ομάδα 35

Πίνακας 6. Κατανομή της επίδοσης στην παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων στον προ-έλεγχο ανά ομάδα 36

Πίνακας 7. Κατανομή της επίδοσης στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός στον προ-έλεγχο ανά ομάδα 37

Πίνακας 8. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των σωστών απαντήσεων στον μετα-έλεγχο ανά ομάδα 38

Πίνακας 9. Κατανομή λανθασμένων συλλογιστικών στην παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων στον μετα-έλεγχο ανά ομάδα 39

Πίνακας 10. Κατανομή λανθασμένων συλλογιστικών στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός στον μετα-έλεγχο ανά ομάδα 39

Πίνακας 11. Μέσοι όροι των επιπέδων βεβαιότητας των απαντήσεων στον μετα-έλεγχο ανά ομάδα 40

Πίνακας 12. Κατανομή της επίδοσης στην παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών στον μετα-έλεγχο ανά ομάδα 41

Πίνακας 13. Κατανομή της επίδοσης στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός στον μετα-έλεγχο ανά ομάδα 42

Πίνακας 14. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των σωστών απαντήσεων στον μεταγενέστερο-έλεγχο ανά ομάδα 43

Πίνακας 15. Κατανομή λανθασμένων συλλογιστικών στην παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων στον μεταγενέστερο-έλεγχο ανά ομάδα.. 44

Πίνακας 16. Κατανομή λανθασμένων συλλογιστικών στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός στον μεταγενέστερο-έλεγχο ανά ομάδα 44

Πίνακας 17. Μέσοι όροι των επιπέδων βεβαιότητας των απαντήσεων στον μεταγενέστερο-έλεγχο ανά ομάδα.. 45

Πίνακας 18. Κατανομή της επίδοσης στην παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων στον μεταγενέστερο-έλεγχο ανά ομάδα.. 46

Πίνακας 19. Κατανομή της επίδοσης στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός στον μεταγενέστερο-έλεγχο ανά ομάδα 47

Πίνακας 20. Συχνότητες λαθών υψηλής βεβαιότητας στην παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων ανά ομάδα και ανά φάση έρευνας 48

Πίνακας 21. Μέσοι όροι βεβαιοτήτων των λαθών στην παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων ανά ομάδα και ανά φάση έρευνας 48

Πίνακας 22. Συχνότητες λαθών υψηλής βεβαιότητας στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός ανά ομάδα και ανά φάση έρευνας.. 49

Πίνακας 23. Μέσοι όροι βεβαιοτήτων των λαθών στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός ανά ομάδα και ανά φάση έρευνας.. 49

Πίνακας 24. Μέσες επιδόσεις ανά ομάδα και ανά φάση της έρευνας 50

Περίληψη

Η παρούσα ερευνητική εργασία έχει ως σκοπό τη μελέτη των παρανοήσεων στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών, εξετάζοντας τα λάθη και τα επίπεδα βεβαιότητας των απαντήσεων των μαθητών. Προηγούμενες μελέτες έχουν δείξει ότι η εκτίμηση της βεβαιότητας αποτελεί σημαντικό δείκτη της φύσης των λαθών, δείχνοντας όχι μόνο εάν οφείλονται σε παρανοήσεις αλλά και πόσο ισχυρές προϋπάρχουσες πεποιθήσεις αντικατοπτρίζουν. Επιπλέον, σκοπός της είναι να διερευνήσει αν μια διδακτική παρέμβαση με ανατρεπτικό κείμενο μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να μειώσουν τα λάθη τους, συγκρίνοντας την αποτελεσματικότητά της με μια παρέμβαση με ένα απλό κείμενο υπενθύμισης του κανόνα σύγκρισης των δεκαδικών αριθμών. Στην έρευνα συμμετείχαν 87 μαθητές της Δ' και Ε' Δημοτικού. Οι 42 από αυτούς αποτέλεσαν την ομάδα παρέμβασης, η οποία έλαβε το ανατρεπτικό κείμενο ενώ οι υπόλοιποι 45 αποτέλεσαν την ομάδα ελέγχου, που έλαβε το κείμενο υπενθύμισης. Το εργαλείο της έρευνας, το οποίο εξέτασε τα λάθη και τα επίπεδα βεβαιότητας, ήταν ένα τεστ τριών επιπέδων (three-tier test). Σχεδιάστηκαν τρία παρόμοια τεστ που λειτούργησαν ως προ-έλεγχος, μετα-έλεγχος και μεταγενέστερος-έλεγχος. Οι μαθητές και των δύο ομάδων συμπλήρωσαν τα τεστ πριν, αμέσως μετά, και έναν μήνα μετά την διδακτική παρέμβαση. Τα αποτελέσματα στον προ-έλεγχο έδειξαν λάθη που πραγματοποιήθηκαν με υψηλή βεβαιότητα και επιβεβαιώνουν την ύπαρξη παρανοήσεων στη σύγκριση των δεκαδικών που αφορούν το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων και τον ρόλο του μηδενός στο δεκαδικό μέρος. Η διδακτική παρέμβαση με το ανατρεπτικό κείμενο συνέβαλε σημαντικά στην αντιμετώπιση μέρους αυτών των παρανοήσεων. Επίσης το αυξημένο μέγεθος της επίδρασης που είχε στην επίδοση των μαθητών όσο και η διατήρηση της επίδοσης για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, ενισχύει την αποτελεσματικότητα του ανατρεπτικού κειμένου σε σχέση με ένα απλό κείμενο υπενθύμισης.

Λέξεις κλειδιά: παρανοήσεις, δεκαδικοί αριθμοί, εκτίμηση βεβαιότητας, διδακτική παρέμβαση, ανατρεπτικό κείμενο

Abstract

The aim of the current study is to investigate the misconceptions that appear when students compare decimal numbers, while examining their mistakes and their confidence ratings. Previous studies have shown that the evaluation of certainty is an important indicator of the nature of errors, showing not only whether they appear due to misconceptions but also how strong preexisting beliefs they reflect. In addition, its purpose is to investigate whether a teaching intervention with a refutation text can help students reduce their errors by comparing its effectiveness with an intervention with a conventional expository text. 87 4th and 5th grade students participated in the study. 42 of them constitute the experimental group, which received the refutation text while the rest 45 constitute the control group, which received the expository text. The research tool, which examined errors and confidence ratings, was a three-tier test. Three similar tests were designed that served as pre-test, post-test, and retention-test. Students in both groups completed tests before, immediately after, and one month after the teaching intervention. The results in the pre-test showed mistakes made with high confidence and confirm the existence of misconceptions in the comparison of decimals, concerning the number of decimal places and the role of zero in the decimal part. The teaching intervention with the refutation text contributed significantly to overcome some of these misconceptions. Also, the increased size effect it had on student's performance, as well as the maintenance of performance over a longer period, reinforces the effectiveness of the refutation text in relation to a conventional expository text.

Keywords: misconceptions, decimal numbers, confidence ratings, teaching intervention, refutation text

1. Εισαγωγή

Ένα από τα πιο σημαντικά θέματα στα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών του δημοτικού αποτελούν οι δεκαδικοί αριθμοί. Παρά το γεγονός ότι ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό χρόνου αφιερώνεται στην ανάπτυξη δεξιοτήτων για τους δεκαδικούς αριθμούς, οι μαθητές εμφανίζουν αδυναμίες όταν διαχειρίζονται δεκαδικούς. Συχνά εφαρμόζουν τις γνώσεις τους για τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών και στους δεκαδικούς, όπου δεν ισχύουν οι ίδιες ιδιότητες (Hiebert, 1989). Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση συστηματικών λαθών και παρανοήσεων, όπου η προϋπάρχουσα σωστή γνώση για μια έννοια δεν βρίσκει εφαρμογή στη νέα γνώση (Van Dooren, Lehtinen, & Verschaffel, 2015).

Η διεθνής έρευνα έχει δείξει ότι τόσο μαθητές όσο και ενήλικες αντιμετωπίζουν δυσκολίες όταν πρόκειται να συγκρίνουν δεκαδικούς αριθμούς. Τα βασικότερα λάθη σχετίζονται με το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων, καθώς συχνά θεωρείται εσφαλμένα ότι μεγαλύτερος είναι ο δεκαδικός αριθμός με τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία. (Steinle & Stacey, 1998). Με αυτόν τον τρόπο, φαίνεται πως οι μαθητές επηρεάζονται από την προϋπάρχουσα γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς και τείνουν να ερμηνεύουν τους δεκαδικούς αριθμούς σαν δύο μέρη ακέραιων αριθμών, που απλώς χωρίζονται από την υποδιαστολή. Από την άλλη μεριά, κάποιοι μαθητές έχουν την τάση να θεωρούν ότι μεγαλύτερος είναι ο δεκαδικός αριθμός, που έχει τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία. Αυτό το λάθος έχει ερμηνευτεί ότι συμβαίνει, επειδή γνωρίζοντας ότι το ένα δέκατο είναι μεγαλύτερο από το ένα εκατοστό, οι μαθητές έχουν την τάση να γενικεύουν εσφαλμένα ότι οποιοσδήποτε αριθμός στα δέκατα είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό στα εκατοστά. Επίσης, λάθη παρατηρούνται και στην κατανόηση της αξίας της θέσης του μηδενός στους δεκαδικούς αριθμούς, αφού οι μαθητές εμφανίζουν την τάση να πιστεύουν ότι το μηδέν όταν βρίσκεται αριστερά από έναν αριθμό δεν αλλάζει την αξία του αριθμού, ενώ όταν βρίσκεται δεξιά, αυξάνει την αξία του (Durkin & Johnson, 2015).

Για τη μελέτη παρανοήσεων όπως οι παραπάνω, πολλοί ερευνητές έχουν τοποθετηθεί ως προς την αναγκαιότητα μέτρησης μετα-γνωστικών παραγόντων κι όχι μόνο αξιολόγηση της γνώσης μέσω απαντήσεων σε μαθηματικά έργα. Ο πιο κοινός τρόπος για να γίνει μια δήλωση βεβαιότητας είναι μέσα από τη μέτρηση της βεβαιότητας, που προκύπτει από μια κλίμακα με διακύμανση από χαμηλή έως υψηλή βεβαιότητα (Schraw, 2009). Με βάση τα επίπεδα βεβαιότητας, ως παρανόηση ορίζεται μια λανθασμένη απάντηση που δίνεται με υψηλή βεβαιότητα. Αντίθετα, σωστή ή λανθασμένη απάντηση που δίνεται με χαμηλή βεβαιότητα ερμηνεύεται ως έλλειψη γνώσης (Gurel, Eryilmaz & McDermott, 2015). Η αξιολόγηση των παρανοήσεων των μαθητών με έλεγχο της βεβαιότητας των απαντήσεών τους έχει χρησιμοποιηθεί για να διερευνηθούν παρανοήσεις στις αριθμητικές πράξεις (Yang & Sianturi, 2019) αλλά και παρανοήσεις σε δεκαδικούς αριθμούς (Durkin & Johnson, 2015). Οι ίδιες έρευνες που έχουν αξιολογήσει τα επίπεδα βεβαιότητας των μαθητών κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η μέτρηση της βεβαιότητας θεωρείται πολύ σημαντική τόσο στον εντοπισμό και στην επίδραση των παρανοήσεων, όσο και στην γενικότερη μαθησιακή διαδικασία (Durkin & Johnson, 2015).

Ένας λόγος που οι μαθητές εμφανίζουν δυσκολία στο να αντιμετωπίσουν παρανοήσεις όπως αυτές που εμφανίζονται με τη σύγκριση δεκαδικών αριθμών, είναι ότι δεν έχουν επίγνωση των παρανοήσεών τους (Christou & Prokopou, 2020). Το ενδιαφέρον των ερευνητών έχει στραφεί σε ένα είδος κειμένου που φαίνεται ότι μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν επίγνωση των παρανοήσεών τους, ως ένα βήμα να αντιμετωπίσουν παρανοήσεις σαν αυτές που αναφέρθηκαν παραπάνω. Πρόκειται για το ανατρεπτικό κείμενο, η χρήση του οποίου φαίνεται σε γενικές γραμμές να συμβάλλει στη μείωση των λαθών και στη βελτίωση της επίδοσης των μαθητών (Christou & Prokopou, 2020; Fadillah & Susiaty, 2019; Lem et al., 2017). Στις προηγούμενες όμως μελέτες δεν είχε ζητηθεί από τους μαθητές να αυτοαξιολογήσουν την αποτελεσματικότητά τους ως έναν τρόπο να αποκτήσουν μεγαλύτερη επίγνωση των λανθασμένων τους πεποιθήσεων.

Η παρούσα έρευνα διακρίνεται σε δύο μέρη: το θεωρητικό και το ερευνητικό. Στο θεωρητικό μέρος περιλαμβάνεται η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας γύρω από το θέμα, ενώ στο ερευνητικό εμπεριέχονται όλα τα στοιχεία που αφορούν την έρευνα που διενεργήθηκε. Όσον αφορά το θεωρητικό μέρος, το πρώτο κεφάλαιο σχετίζεται με την έννοια των δεκαδικών αριθμών και τη διδασκαλία τους στο δημοτικό. Επιπλέον, παρουσιάζεται μια ανάλυση των βασικών παρανοήσεων που εμφανίζουν οι μαθητές στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών μέσα από εμπειρικές μελέτες που εξέτασαν τα λάθη των μαθητών. Το πρώτο κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την προσπάθεια ερμηνείας των λόγων που εμφανίζονται οι συγκεκριμένες παρανοήσεις αλλά και κάποιων προτάσεων για περιορισμό των λαθών. Περνώντας στο δεύτερο κεφάλαιο, γίνεται σε πρώτη φάση μια προσπάθεια προσέγγισης της έννοιας της μεταγνώσης. Στη συνέχεια, αναλύονται οι μεταγνωστικοί παράγοντες που εμπλέκονται στην μάθηση των μαθηματικών και συγκεκριμένα γίνεται αναφορά σε έρευνες που χρησιμοποίησαν δηλώσεις βεβαιότητας σε μαθηματικά έργα για τον εντοπισμό και την επίδραση παρανοήσεων.

Το τρίτο κεφάλαιο της θεωρητικής ανασκόπησης σχετίζεται με τη διδακτική παρέμβαση με τη μέθοδο του ανατρεπτικού κειμένου. Πρωτίστως, γίνεται λόγος για το τι είναι ένα ανατρεπτικό κείμενο, τα μέρη από τα οποία αποτελείται και σε τι διαφέρει από ένα συμβατικό κείμενο υπενθύμισης του κανόνα σύγκρισης των δεκαδικών αριθμών. Ακόμη, παρουσιάζονται τα πλεονεκτήματα της χρήσης ανατρεπτικού κειμένου στην εκπαιδευτική διαδικασία. Τέλος εξετάζεται η συμβολή του στην μαθηματική εκπαίδευση και πιο συγκεκριμένα στην προσπάθεια αντιμετώπισης των παρανοήσεων και στην εννοιολογική κατανόηση.

Μεταβαίνοντας στο ερευνητικό τμήμα της εργασίας εμφανίζονται αρχικά ο σκοπός και τα ερωτήματα της έρευνας και έπειτα το κεφάλαιο της μεθοδολογίας. Σε αυτό περιέχονται η ερευνητική στρατηγική που ακολουθήθηκε, τα στοιχεία των συμμετεχόντων, η ανάλυση των υλικών που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα, η καταγραφή της διαδικασίας που ακολουθήθηκε και η ανάλυση που εφαρμόστηκε στα δεδομένα. Έπεται το τμήμα των αποτελεσμάτων της έρευνας και στο πέμπτο κατά σειρά κεφάλαιο περιλαμβάνονται οι εξής υποενότητες: η συζήτηση, τα συμπεράσματα, οι περιορισμοί της έρευνας και προτάσεις. Στη συζήτηση γίνεται μία προσπάθεια ερμηνείας των αποτελεσμάτων και σύνδεσής τους με προηγούμενες έρευνες, ενώ τα συμπεράσματα αφορούν σε πιο γενικά ευρήματα που αναδύθηκαν από την έρευνα. Τα συμπεράσματα ακολουθούνται από τους περιορισμούς που προέκυψαν, ενώ στο τελευταίο υποκεφάλαιο γίνονται προτάσεις για πρακτική εφαρμογή των αποτελεσμάτων αλλά και προτάσεις για μελλοντικές έρευνες.

2. Ανασκόπηση της βιβλιογραφίας

2.1. Δεκαδικοί αριθμοί

2.1.1. Η διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών στο Δημοτικό

Μία από τις βασικότερες έννοιες στα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών του δημοτικού είναι οι δεκαδικοί αριθμοί. Η διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών χτίζεται πάνω στη γνώση που έχουν οι μαθητές για τους ακέραιους (Hiebert, 1983). Σύμφωνα με τον Hiebert (1983), οι δεκαδικές αναπαραστάσεις αντιμετωπίζονται ως σύμβολα που είναι παρόμοια με τους ακέραιους, η αξία των οποίων μειώνεται κατά δέκα φορές καθώς κινούμαστε προς τα δεξιά (όπως ισχύει και στους ακέραιους). Η υποδιαστολή χωρίζει το ακέραιο από το δεκαδικό μέρος και βρίσκεται ανάμεσα στις θέσεις η αξία των οποίων είναι μεγαλύτερη από μία μονάδα (μονάδες) και μικρότερη από μία μονάδα (δέκατα).

Στα σχολικά μαθηματικά, ο όρος *δεκαδικός αριθμός* αναφέρεται ως «ένα είδος αριθμού που χρησιμοποιείται για να εκφράσουμε κάποιες μετρήσεις με ακρίβεια, αφού σε πολλές περιπτώσεις μετρήσεων (χρήματα, μήκος, ύψος κλπ.) οι φυσικοί αριθμοί δεν αρκούν» (Μαθηματικά Στ' Δημοτικού Βιβλίο Μαθητή, σ. 12). Εξηγείται επίσης, ότι οι δεκαδικοί αριθμοί αποτελούνται από ένα ακέραιο κι ένα δεκαδικό μέρος και ότι τα δύο μέρη χωρίζονται μεταξύ τους με την υποδιαστολή (,). Το ακέραιο μέρος δείχνει τις ακέραιες μονάδες ενώ το δεκαδικό μέρος δείχνει μέρη της ακέραιης μονάδας, η οποία χωρίζεται σε δέκατα, εκατοστά και χιλιοστά. Τόσο στο ακέραιο όσο και στο δεκαδικό μέρος κάθε θέση είναι δέκα φορές μεγαλύτερη από την αμέσως επόμενή της προς τα δεξιά (Κασσώτη, Κλιάπης & Οικονόμου, 2006; Βρυώνης, Δουκάκης, Καρακώστα, Μπαραλής & Σταύρου, 2018).

Σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στο Δημοτικό, η διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών ξεκινάει από τη Γ' δημοτικού πιο διαισθητικά μέσα από καταστάσεις της καθημερινότητας, ενώ στις επόμενες τάξεις μέχρι και την Στ', οι μαθητές ασχολούνται και με πιο σύνθετες διαστάσεις της έννοιας. Στην Γ' δημοτικού οι μαθητές εισάγονται στην έννοια των δεκαδικών αριθμών μέσω των δεκαδικών κλασμάτων. Αρχικά, μαθαίνουν να συνδέουν δεκαδικά κλάσματα με δεκαδικούς αριθμούς, κατανοώντας ότι οι δεκαδικοί αριθμοί αποτελούν μία άλλη αναπαράσταση των κλασμάτων. Στη συνέχεια ασκούνται στη χρήση δεκαδικών αριθμών μέσα από καταστάσεις της καθημερινής ζωής, όπως τα νομίσματα, στους κανόνες γραφής των δεκαδικών αριθμών με δύο δεκαδικά ψηφία και τέλος εξασκούνται στην πρόσθεση και στην αφαίρεση δεκαδικών αριθμών.

Στην Δ’ δημοτικού στόχος είναι οι μαθητές να εδραιώσουν όσα ήδη γνωρίζουν σχετικά με τους δεκαδικούς αριθμούς αλλά και να διευρύνουν τις γνώσεις τους. Πιο συγκεκριμένα ασκούνται στην χρήση αριθμών με τρία δεκαδικά ψηφία, στην αξία θέσης των δεκαδικών ψηφίων, στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών και στην τοποθέτησή τους στην αριθμογραμμή. Επίσης, μαθαίνουν να διαχειρίζονται δεκαδικούς αριθμούς, να αναλύουν και να συνθέτουν αριθμούς με βάση το δεκαδικό τους ανάπτυγμα, να κάνουν εκτιμήσεις και νοερούς υπολογισμούς αλλά και να διαχειρίζονται προβλήματα με μετατροπές μονάδων. Σχετικά με τις πράξεις εξασκούνται στην κάθετη πρόσθεση και αφαίρεση δεκαδικών αριθμών, ενώ μαθαίνουν να διαιρούν δεκαδικούς αριθμούς με το 10, το 100, και το 1000.

Η Ε’ και η Στ’ δημοτικού έχουν περισσότερο επαναληπτικό χαρακτήρα των όσων ήδη γνωρίζουν οι μαθητές για τους δεκαδικούς. Περαιτέρω, διδάσκονται την αξία θέσης των δεκαδικών ψηφίων και τις ιδιότητες των δεκαδικών αριθμών. Επίσης, στόχος είναι να κατανοήσουν την ανάγκη μετατροπής των αριθμών από δεκαδικούς σε κλάσματα και το αντίστροφο. Ακόμα, εξασκούνται στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών με ίδιο ακέραιο μέρος και διαφορετικό πλήθος δεκαδικών ψηφίων, αλλά και στη διάταξη αριθμών κατά αύξουσα ή φθίνουσα σειρά. Τέλος, αναφορικά με τις πράξεις, εκτός της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, ασκούνται στον κάθετο πολλαπλασιασμό και στην κάθετη διαίρεση δεκαδικών αριθμών καθώς και σε περιπτώσεις νοερού πολλαπλασιασμού και διαίρεσης με το 10, 100, 1000 αλλά και το 0,1, 0,01 και 0,001.

2.1.2. Συνήθη λάθη και παρανοήσεις στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, γίνεται αντιληπτό ότι οι μαθητές διδάσκονται τους δεκαδικούς αριθμούς και τις ιδιότητές τους στο μεγαλύτερο μέρος της φοίτησής τους στο δημοτικό. Η εκμάθηση και η κατανόηση των δεκαδικών αριθμών θεωρείται κρίσιμη για την προ-αλγεβρική ετοιμότητα των μαθητών στις επόμενες βαθμίδες εκπαίδευσης. Διεθνή αναλυτικά προγράμματα για τα μαθηματικά, τονίζουν τη σημαντικότητα των δεκαδικών αριθμών για τη μετέπειτα κατανόηση πιο σύνθετων μαθηματικών εννοιών. Ωστόσο έχουν παρατηρηθεί ζητήματα που αφορούν στη δυσκολία εννοιολογικής κατανόησης των δεκαδικών αριθμών. Οι δυσκολίες αυτές πηγάζουν από κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των δεκαδικών με τα οποία οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι, γιατί διαφέρουν από τις ιδιότητες που γνωρίζουν για τους φυσικούς αριθμούς (Liu, Ding, Zong & Zhang, 2014). Οι διαφορές αυτές οδηγούν σε λάθη σε ότι έχει να κάνει με την θεσιακή αξία των δεκαδικών ψηφίων, με την διάταξη και την πυκνότητα των δεκαδικών αριθμών αλλά και με τις πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς (Irwin,1999).

Ένας από τους τομείς στον οποίο οι μαθητές εμφανίζουν αδυναμίες είναι η *σύγκριση του δεκαδικού μεγέθους*. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η προϋπάρχουσα γνώση των φυσικών αριθμών αποτελεί τροχοπέδη στην κατάκτηση της νέας γνώσης των δεκαδικών. Οι μαθητές τείνουν να εφαρμόζουν τους κανόνες που γνωρίζουν για τους φυσικούς αριθμούς και στους δεκαδικούς, με αποτέλεσμα να εμφανίζονται συστηματικά λάθη και παρανοήσεις. Οι λανθασμένες στρατηγικές που εφαρμόζουν οι μαθητές, όταν πρέπει να αποφασίσουν ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς, έχουν καταγραφεί και κατηγοριοποιηθεί (Steinle & Stacey, 1998). Μία από τις βασικότερες δυσκολίες αποτελεί η σύγκριση δεκαδικών αριθμών που έχουν το ίδιο ακέραιο μέρος και διαφορετικό πλήθος δεκαδικών ψηφίων, αφού συχνά εμφανίζονται λάθη από την πλευρά των μαθητών. Η αδυναμία αυτή προκύπτει καθώς οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες τόσο στην κατανόηση της θεσιακής αξίας των ψηφίων όσο και της έννοιας του κλάσματος (Baturo & Cooper, 1995).

Όπως προαναφέρθηκε, στη βιβλιογραφία έχουν καταγραφεί κατηγορίες των λανθασμένων στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές όταν συγκρίνουν δεκαδικούς αριθμούς. Σε μια πρώιμη μελέτη, οι Resnick et al. (1989) διαπίστωσαν ότι κατά τη σύγκριση δεκαδικών αριθμών με διαφορετικό πλήθος δεκαδικών ψηφίων, οι μαθητές είχαν την τάση να θεωρούν μεγαλύτερο τον δεκαδικό αριθμό με τα περισσότερα ψηφία μετά την υποδιαστολή. Για παράδειγμα, επιλέγουν το 4,63 ως μεγαλύτερο από το 4,8 αφού το το 63 είναι μεγαλύτερο από 8 ή επειδή έχει περισσότερα δεκαδικά ψηφία. Αυτό το λάθος έχει ταξινομηθεί ως *ο κανόνας των ακέραιων αριθμών*, όπου οι μαθητές αγνοούν το γεγονός ότι το δεκαδικό τμήμα αποτελεί μέρος του ακέραιου αριθμού και είναι συνέχειά του. Όμοια, σε μια μεταγενέστερη μελέτη, οι Steinle και Stacey (1998) ταξινομώντας τις στρατηγικές των μαθητών στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών διαπίστωσαν ότι μια βασική κατηγορία αφορά παρανοήσεις που σχετίζονται με το *μήκος του αριθμού*. Οι μαθητές σε αυτήν την κατηγορία παρανόησης πιστεύουν εσφαλμένα ότι μεγαλύτερος είναι ο «μακρύτερος» δεκαδικός αριθμός, δηλαδή αυτός που έχει τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία, κρίνοντας μόνο ως προς το μήκος του αριθμού. Με αυτόν τον τρόπο, φαίνεται πως οι μαθητές επηρεάζονται από την προϋπάρχουσα γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς και τείνουν να ερμηνεύουν τους δεκαδικούς αριθμούς σαν δύο μέρη ακέραιων αριθμών, που απλώς χωρίζονται από την υποδιαστολή. Επομένως, γίνεται αντιληπτό ότι όσον αφορά την παρανόηση αυτή, οι μαθητές όταν έχουν να συγκρίνουν δύο δεκαδικούς, θεωρούν μεγαλύτερο αυτόν που έχει τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία, επηρεασμένοι από το μήκος του. Ή αλλιώς συγκρίνουν τα δεκαδικά μέρη των δύο αριθμών σαν δύο ακέραιους, αγνοώντας την υποδιαστολή.

Από την άλλη μεριά, κάποιοι μαθητές έχουν την τάση να θεωρούν ότι μεγαλύτερος είναι ο «κοντύτερος» δεκαδικός αριθμός, δηλαδή αυτός που έχει τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία. Αυτή η κατηγορία παρανόησης αναφέρεται ως *σκέψη εστιασμένη στον παρονομαστή* (Steinle & Stacey, 1998) ή *κανόνας του κλάσματος* (Resnick et al., 1989). Για παράδειγμα θεωρούν ότι το 4,3 είναι μεγαλύτερο από το 4,65 επειδή γνωρίζοντας ότι το ένα δέκατο είναι μεγαλύτερο από το ένα εκατοστό, οι μαθητές έχουν την τάση να γενικεύουν εσφαλμένα ότι οποιοσδήποτε αριθμός στα δέκατα είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό στα εκατοστά. Με άλλα λόγια χρησιμοποιούν τα ονόματα των στηλών της θεσιακής αξίας των ψηφίων για να αποφασίσουν για το μέγεθος των δεκαδικών (Steinle & Stacey, 1998). Επίσης η συγκεκριμένη παρανόηση θα μπορούσε πιθανότατα να πηγάζει και από μια υπεργενίκευση της αρχής για τη σύγκριση κλασμάτων, όπου ισχύει ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο παρονομαστής, τόσο μικρότερο είναι το κλάσμα. Για παράδειγμα, θεωρούν ότι αφού το 1/4 είναι μικρότερο από το 1/3, τότε και το 0,4 είναι μικρότερο από το 0,3. (Resnick et al., 1989).

Επιπρόσθετα, συχνά λάθη παρατηρούνται και στην κατανόηση της αξίας της θέσης του μηδενός στους δεκαδικούς αριθμούς, αφού οι μαθητές εμφανίζουν την τάση να πιστεύουν ότι το μηδέν όταν βρίσκεται αριστερά από έναν αριθμό δεν αλλάζει την αξία του αριθμού, ενώ όταν βρίσκεται δεξιά, αυξάνει την αξία του. Παραδείγματος χάρη το 0,07 είναι ίσο με το 0,7 και το 0,320 είναι μεγαλύτερο από το 0,32 (Irwin, 1999; Durkin & Johnson, 2015). Αυτή η κατηγορία παρανόησης στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών αναφέρεται ως *σκέψη εστιασμένη στον αριθμητή* και σχετίζεται με τη θέση του μηδενός στους δεκαδικούς αριθμούς, όπου συχνά τα μηδενικά αγνοούνται, επειδή όπως ο ακέραιος αριθμός 38 δεν αλλάζει με την προσθήκη ενός μηδενικού από μπροστά (038), έτσι και τα μηδενικά μετά την υποδιαστολή επίσης αγνοούνται (Steinle & Stacey, 1998).

Εμπειρικές μελέτες που εξέτασαν τις παρανοήσεις στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών, έρχονται να επιβεβαιώσουν όσα παρουσιάστηκαν παραπάνω. Κατ' αρχήν οι ίδιοι οι Steinle και Stacey (2004) διεξάγοντας μια διαχρονική μελέτη, διερεύνησαν τις λανθασμένες αντιλήψεις των μαθητών για τους δεκαδικούς αριθμούς και πως αυτές άλλαξαν με την πάροδο του χρόνου. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι περισσότερες παρανοήσεις συνδέθηκαν με την ερμηνεία του δεκαδικού μέρους ως ακέραιου αριθμού, γεγονός που δείχνει ότι οι μαθητές βασίστηκαν στις γνώσεις τους για τους ακέραιους αριθμούς στη σύγκριση των δεκαδικών. Βέβαια καθώς προχωρούσαν σε τάξεις, ένας μεγάλος αριθμός μαθητών κατάφερε να λύσει προβλήματα σύγκρισης δεκαδικών αριθμών σωστά, αν και το ποσοστό επιτυχίας στη $10^{η}$ τάξη ήταν μόλις 70%.

Όμοια, οι Baturo και Cooper (1995) επιχειρώντας να ταξινομήσουν τις παρανοήσεις των μαθητών στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι τα περισσότερα λάθη ανήκαν στην κατηγορία παρανόησης του *κανόνα του ακέραιου αριθμού*. Οι παρανοήσεις που εμφάνισαν οι μαθητές σχετίζονταν με το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων, θεωρώντας ότι ο αριθμός με τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος. Λιγότερες παρανοήσεις προέκυψαν εξαιτίας της κατηγορίας παρανόησης του *κανόνα του κλάσματος*, όπου ο δεκαδικός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος. Επίσης, λίγες ήταν και οι παρανοήσεις που προέκυψαν σε ότι αφορά τη θέση του μηδενός στους δεκαδικούς.

Επιπλέον, οι Durkin και Johnson (2015) σε μια μελέτη στην οποία εξέτασαν παρανοήσεις στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών διαπίστωσαν ότι οι πιο κοινές παρανοήσεις οφείλονταν στον *κανόνα του ακέραιου αριθμού* και στο *ρόλο του μηδενός* στους δεκαδικούς. Οι μαθητές επηρεασμένοι από τις γνώσεις τους για τους φυσικούς αριθμούς έκριναν ότι ένας δεκαδικός αριθμός με περισσότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος, ενώ στην περίπτωση του μηδενός εμφάνισαν λάθη στην αξία της θέσης του στους δεκαδικούς. Με την πάροδο του χρόνου, ορισμένοι μαθητές άρχισαν να αναγνωρίζουν ότι η αντίληψή τους, πως οι δεκαδικοί αριθμοί είναι ακριβώς όπως οι φυσικοί είναι λανθασμένη. Ενώ άρχισαν να αναθεωρούν τις αντιλήψεις τους για τους δεκαδικούς αριθμούς, οι μετρήσεις που έγιναν σε μεταγενέστερο χρόνο για τον έλεγχο των παρανοήσεων, υπέδειξαν ότι ορισμένοι μαθητές διαμόρφωσαν μια άλλη εσφαλμένη αντίληψη, ότι ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος (*ο κανόνας του κλάσματος*). Το εύρημα αυτό τονίζει ότι ακόμη και όταν οι μαθητές καταφέρουν να αναγνωρίσουν ότι η προηγούμενη γνώση τους είναι λανθασμένη, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι αντιλαμβάνονται τις σωστές έννοιες και αυτό μπορεί να τους οδηγήσει στη χρήση διαφορετικών λανθασμένων αντιλήψεων.

Σε ανάλογα συμπεράσματα κατέληξαν οι Ren και Gunderson (2021) και οι Roell et al. (2017, 2019) στις έρευνες που πραγματοποίησαν για το μέγεθος των δεκαδικών αριθμών. Τα λάθη των μαθητών σχετίζονταν με το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων, επειδή η σύγκριση στο δεκαδικό μέρος, γινόταν όπως στο ακέραιο. Αυτό έκανε τους μαθητές να πιστεύουν ότι σε κάποιες περιπτώσεις ο αριθμός με τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος ενώ σε άλλες ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.

Όλες οι παρανοήσεις που συζητήθηκαν παραπάνω στη διάταξη των δεκαδικών αριθμών, πηγάζουν από την τάση των μαθητών να βασίζονται στις γνώσεις τους για τους φυσικούς αριθμούς. Η τάση αυτή αναφέρεται στη βιβλιογραφία *ως προκατάληψη του φυσικού αριθμού*. Πιο συγκεκριμένα, η προκατάληψη του φυσικού αριθμού περιγράφει την τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν τις αρχές, τις ιδιότητες και τους κανόνες που ισχύουν στους φυσικούς αριθμούς σε καταστάσεις όπου αυτές δεν ισχύουν, όπως στα κλάσματα και στους δεκαδικούς αριθμούς. Η πρακτική αυτή έχει σαν αποτέλεσμα συγκεκριμένα είδη λαθών από την πλευρά των μαθητών (Christou, 2015; Durkin & Johnson, 2015; Ni & Zhou, 2005).

Ένας άλλος λόγος ο οποίος μπορεί δώσει εξήγηση στην εμφάνιση των συγκεκριμένων παρανοήσεων σχετίζεται με την πρωταρχική διαίσθηση των μαθητών. Η διαίσθηση αποτελεί μια πρωτόγονη, αυταπόδεικτη έννοια, που δεν επιδέχεται ερμηνεία και δεν χρησιμοποιεί λογικές διεργασίες. Αποτελεί φαινόμενο του νου και περιγράφεται ως ικανότητα για την απόκτηση γνώσης, χωρίς λογική και συμπέρασμα. Οι διαισθητικές μορφές γνώσης ξεκίνησαν να ερευνώνται κυρίως στη μαθηματική εκπαίδευση, καθώς πολλά από τα μαθηματικά νοήματα συχνά ερμηνεύονται διαισθητικά. Άρα, η διαίσθηση αποτελεί μορφή γνώσης, που μπορεί να συμβάλλει στην ερμηνεία μαθηματικών εννοιών αλλά δεν μπορεί να ακολουθήσει καμία αναλυτική ή συλλογιστική πορεία. Επιπλέον η διαίσθηση έχει τις ρίζες της σε προϋπάρχουσες νοητικές ή πρακτικές εμπειρίες (Fischbein, 1980). Τα παιδιά από πολύ μικρή ηλικία, πριν ακόμα πάνε σχολείο αναπτύσσουν αριθμητικές ικανότητες, απαριθμούν αντικείμενα και αυτό που αντιλαμβάνονται μέσω της διαίσθησής τους, αφού ακόμα δεν έχουν διδαχτεί μαθηματικές έννοιες, είναι ότι οι αριθμοί μεγαλώνουν όσο αυξάνεται η πληθικότητα των αντικειμένων που μετρούν. Αντίστοιχα κατά τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού, αφού έχουν κατακτήσει την έννοια του αριθμού, επιβεβαιώνεται το ίδιο ακριβώς μοντέλο, ότι όσα περισσότερα ψηφία έχει ένας αριθμός τόσο μεγαλύτερος είναι. Αυτή η διαίσθηση που έχουν αναπτύξει οι μαθητές για τους φυσικούς αριθμούς, ακολουθείται και στους δεκαδικούς, με αποτέλεσμα να δημιουργείται η παρανόηση σχετικά με το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων. Η διαίσθηση σε συνδυασμό με τις προϋπάρχουσες γνώσεις έρχονται σε σύγκρουση με τη νέα γνώση, όπου αυτό που γνώριζαν μέχρι τώρα δεν βρίσκει εφαρμογή και έχει σαν αποτέλεσμα συστηματικά λάθη και παρανοήσεις στους δεκαδικούς αριθμούς.

Στρατηγικές που έχουν προταθεί και μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να συγκρίνουν σωστά τους δεκαδικούς αριθμούς σε όλες τις περιπτώσεις είναι οι εξής: Πρώτον, να συγκρίνουν ένα ένα τα ψηφία αναλόγως με την αξία της θέσης τους από τα αριστερά προς τα δεξιά. Δεύτερον, να συμπληρώνουν μηδενικά στο τέλος του δεκαδικού αριθμού με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία, ώστε να δημιουργούν αριθμούς με ίδιο πλήθος δεκαδικών ψηφίων (π.χ. 4,63>4,2 επειδή 4,63>4,20). Τρίτον, μπορούν να στρογγυλοποιούν ή να μετατρέπουν τους δεκαδικούς αριθμών σε πιο απλά κοινά κλάσματα ή ακέραιους αριθμούς (π.χ. 0,5>0,36 επειδή το 0,5 είναι το μισό και το 0,36 είναι λιγότερο από μισό) (Baturo & Cooper, 1995).

Οι παραπάνω στρατηγικές που πιθανώς να βοηθήσουν τους μαθητές να συγκρίνουν σωστά δεκαδικούς αριθμούς, δεν είναι άλλο από απλά βήματα-διαδικασίες για να επιτύχουν σε συγκεκριμένα μαθηματικά έργα. Το σημαντικότερο για να αποφευχθούν τα λάθη στη σύγκριση είναι να επιτευχθεί μια βαθύτερη κατανόηση του συστήματος των δεκαδικών αριθμών. Και σε αυτό μπορεί να συμβάλλει σημαντικά η ενασχόληση με τους δεκαδικούς μέσα από καταστάσεις της καθημερινής ζωής που είναι οικείες στους μαθητές. Η Irwin (1999) παίρνοντας συνέντευξη από παιδιά ηλικίας 8 ετών, τα οποία δεν είχαν διδαχτεί τους δεκαδικούς αριθμούς στο σχολείο, διαπίστωσε ότι ήταν σε θέση να περιγράψουν έναν δεκαδικό αριθμό, λέγοντας ότι έχουν δει «αριθμούς με κουκκίδα» σε αθλητικές στατιστικές, σε πίνακες νοσοκομείων, σε καταστήματα, σε επιταγές, στην τράπεζα, σε μια αριθμομηχανή, σε βιβλία, σε ένα μπουκάλι αναψυκτικού 1,5 λίτρου κλπ. Το ενδιαφέρον είναι ότι όταν ρωτήθηκαν παιδιά ηλικίας 10 ή 12 ετών, σκέφτηκαν ένα πολύ μικρότερο εύρος μερών όπου συναντούν δεκαδικούς αριθμούς στην καθημερινότητά τους. Ανέφεραν το σχολείο ή τα χρήματα, παραδείγματα τα οποία χρησιμοποιούν συχνά οι δάσκαλοι για να βοηθήσουν τα παιδιά να κατανοήσουν τους δεκαδικούς αριθμούς, αλλά δεν είναι αρκετά. Τα αποτελέσματα της έρευνας που πραγματοποίησε έδειξαν ότι οι μαθητές που έλυσαν προβλήματα με δεκαδικούς αριθμούς, τα οποία εντάσσονταν σε πλαίσια της καθημερινότητας, σημείωσαν καλύτερη επίδοση σε σχέση με αυτούς που έλυσαν παρόμοια προβλήματα εκτός πλαισίου. Συνεπώς, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι τα προβλήματα αυτά βοήθησαν τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τους δεκαδικούς αριθμούς, επειδή έφεραν σε γνωστική σύγκρουση τις υπάρχουσες παρανοήσεις τους με την καθημερινότητά τους. Επίσης φάνηκε να βοηθούν τους μαθητές να ξεπεράσουν τις παρανοήσεις, γιατί τα πλαίσια που χρησιμοποιήθηκαν ήταν αρκετά οικεία και οι μαθητές κατάφεραν να συνειδητοποιήσουν πότε μια απάντηση ήταν λάθος.

Ενώ η Irwin (1999) μελέτησε τη χρησιμότητα προβλημάτων μέσα από την καθημερινότητα των παιδιών για την αντιμετώπιση των παρανοήσεων στους δεκαδικούς αριθμούς, δεν παρέλειψε να τονίσει ότι θα ήταν αναγκαίο οι μαθητές να συζητήσουν και να επιχειρηματολογήσουν για την ακρίβεια των απαντήσεών τους. Για τη μελέτη παρανοήσεων όπως αυτές που συζητήθηκαν παραπάνω, πολλοί ερευνητές έχουν τοποθετηθεί ως προς την αναγκαιότητα μέτρησης μετα-γνωστικών παραγόντων κι όχι μόνο αξιολόγηση της γνώσης μέσω απαντήσεων σε μαθηματικά έργα (Durkin & Johnson, 2015). Το ζήτημα αυτό και η συμβολή του στην επίδραση των παρανοήσεων αναλύεται στην αμέσως επόμενη ενότητα.

2.2. Μεταγνωστικοί παράγοντες στην μάθηση των μαθηματικών

2.2.1. Η έννοια της μεταγνώσης

Ο όρος «μεταγνώση» αποτελεί μια έννοια που συναντάται στην εκπαιδευτική ψυχολογία και είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη γνώση και τη μάθηση. Πρόκειται για μια ανώτερη νοητική λειτουργία που περιλαμβάνει ενεργό έλεγχο των γνωστικών διεργασιών που εμπλέκονται στην μάθηση. Οι άνθρωποι ασχολούνται καθημερινά με μεταγνωστικές δραστηριότητες, όπως είναι ο σχεδιασμός του τρόπου προσέγγισης ενός έργου, η παρακολούθηση της κατανόησης και η αξιολόγηση της διαδικασίας ολοκλήρωσης ενός έργου (Livingston, 2003).

Η μεταγνώση συχνά ορίζεται απλώς ως «σκέφτομαι για τη σκέψη». Ο ορισμός της όμως δεν είναι τόσο απλός και έχει αποτελέσει ζήτημα αντιπαράθεσης μεταξύ των ψυχολόγων της εκπαίδευσης (Livingston, 2003). Ένας λόγος είναι ότι η μεταγνώση συχνά σχετίζεται και με άλλους όρους που αναφέρονται στη βιβλιογραφία, όπως μεταγνωστικές πεποιθήσεις, μεταγνωστική επίγνωση, μεταγνωστικές εμπειρίες, μεταγνωστική γνώση, αίσθημα γνώσης, κρίση της μάθησης, θεωρία του νου, μεταμνήμη, μεταγνωστικές δεξιότητες, εκτελεστικές δεξιότητες, παρακολούθηση της κατανόησης, στρατηγικές μάθησης, ευρετικές στρατηγικές και αυτορρύθμιση. Αν και υπάρχουν διαφορές μεταξύ των όρων αυτών, καθώς κάποιοι σχετίζονται αποκλειστικά με τη μεταγνώση, ενώ άλλοι εμπλέκουν τόσο γνωστικούς όσο και μεταγνωστικούς παράγοντες, όλοι τονίζουν τον ρόλο των εκτελεστικών διαδικασιών στην επίβλεψη και τη ρύθμιση των γνωστικών διεργασιών του ατόμου (Veenman, Van Hout-Wolters & Afflerbach, 2006).

Αν και ο ορισμός της μεταγνώσης δεν έχει αποσαφηνιστεί ξεκάθαρα, στη βιβλιογραφία έχει επικρατήσει ο ορισμός του Flavell (1979), σύμφωνα με τον οποίο η μεταγνώση ορίζεται ως η επίκτητη γνώση του ατόμου για τις γνωστικές του διαδικασίες και για τον έλεγχο αυτών των διαδικασιών. Επιπλέον, διαχωρίζεται σε τρεις επιμέρους κατηγορίες: γνώση της αλληλεπίδρασης κάποιου με τα ατομικά του χαρακτηριστικά, γνώση του έργου που έχει αναλάβει αλλά και των στρατηγικών που χρησιμοποιεί σε μια μαθησιακή διαδικασία.

Η μελέτη της μεταγνώσης κρίνεται πολύ σημαντική, καθώς παίζει κρίσιμο ρόλο στην μάθηση. Η ανάπτυξη μεταγνωστικών στρατηγικών μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να χρησιμοποιούν και να ελέγχουν καλύτερα τους γνωστικούς τους πόρους αλλά και να διασφαλίζουν ότι ένας γνωστικός στόχος έχει επιτευχθεί. (Livingston, 2003). Ωστόσο, όπως προκύπτει από όσα προαναφέρθηκαν, τόσο η θεωρητική όσο και η εμπειρική μελέτη της μεταγνώσης αποτελεί μια σύνθετη διαδικασία, διότι στο φάσμα της μεταγνώσης εντάσσεται μια πληθώρα εννοιών, πολλά έργα σε διαφορετικούς γνωστικούς τομείς αλλά και μια ποικιλία μεθοδολογικών σχεδίων (Veenman, Van Hout-Wolters & Afflerbach, 2006).

2.2.2. Η μεταγνώση στην μαθηματική εκπαίδευση

Όπως προκύπτει από τη βιβλιογραφία, η ανάπτυξη των μεταγνωστικών ικανότητων αποτελεί μια διαδικασία που εμφανίζεται από την προσχολική ηλικία, ενώ στην ηλικία των 8 με 10 ετών φαίνεται πως τα παιδιά έχουν αναπτύξει βασικές μεταγνωστικές ικανότητες, οι οποίες σταδιακά αναπτύσσονται σε πιο εξελιγμένες δεξιότητες (Veenman, Van Hout-Wolters & Afflerbach, 2006). Ωστόσο, η εξέλιξη αυτή είναι δύσκολο να επιτευχθεί, καθώς η εμπλοκή της μεταγνώσης στη μαθησιακή διαδικασία είναι απούσα από το σχολικό περιβάλλον. Οι εκπαιδευτικοί στην πλειοψηφία τους δίνουν έμφαση σε γνωστικούς παράγοντες, παραλείποντας την ανάπτυξη μεταγνωστικών στρατηγικών, κυρίως λόγω έλλειψης γνώσης πάνω στο συγκεκριμένο πεδίο. Κάτι ανάλογο έχει παρατηρηθεί και σε ότι αφορά τη μεταγνώση στην μαθηματική εκπαίδευση. Η εμπλοκή τόσο των δασκάλων όσο και των μαθητών με την έννοια αυτή δεν είναι αρκετή για να συμβάλλει στην ανάπτυξη μεταγνωστικών δεξιοτήτων (Desoete, & De Craene, 2019).

Το ενδιαφέρον των ερευνητών αναφορικά με τον ρόλο της μεταγνώσης στην μαθηματική εκπαίδευση επικεντρώνεται κυρίως στη σημασία χρήσης μεταγνωστικών στρατηγικών στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Πολλές μελέτες μέσα από διάφορες μεθοδολογικές προσεγγίσεις εξετάζουν πως οι μαθητές χρησιμοποιούν μεταγνωστικές ικανότητες όπως παρακολούθηση της κατανόησης, προγραμματισμό, διαχείριση πληροφοριών, εντοπισμό σφαλμάτων και αυτοέλεγχο όταν επιλύουν ένα μαθηματικό πρόβλημα (Desoete & De Craene, 2019; Schneider & Artelt, 2010).

Η επισκόπηση της βιβλιογραφίας ανέδειξε και έναν άλλο όρο που εντάσσεται στον τομέα της μεταγνώσης και έχει χρησιμοποιηθεί στην έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ο όρος αυτός αναφέρεται ως *μεταγνωστική κρίση* και αφορά στην κρίση του ατόμου για την επίδοσή του πριν, κατά τη διάρκεια και μετά από την εκτέλεση ενός έργου. Συνήθως τέτοιες μεταγνωστικές κρίσεις έπονται ενός έργου, καθώς είναι πιο εύκολο για ένα άτομο να αξιολογήσει την αποτελεσματικότητά του, αφού ολοκληρώσει το έργο. Ο πιο κοινός τρόπος για να γίνει μια μεταγνωστική κρίση είναι μέσα από την εκτίμηση της βεβαιότητας κάποιου για τη γνώση του (Schraw, 2009). Η εκτίμηση της βεβαιότητας μπορεί να θεωρηθεί ως η εσωτερική πεποίθηση ενός ατόμου για την ακρίβεια της γνώσης του (Renner & Renner, 2001). Οι έρευνες που έχουν αξιολογήσει την εκτίμηση της βεβαιότητας στην μαθηματική εκπαίδευση είναι σχετικά λίγες (Durkin & Johnson, 2015), παρά το γεγονός ότι η χρήση της μπορεί να δώσει σημαντικές πληροφορίες για την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών αλλά και για την πιθανή ύπαρξη παρανοήσεων (Caleon & Subramaniam, 2010). Πράγματι, η εκτίμηση της βεβαιότητας έχει συνδεθεί με τις παρανοήσεις καθώς έχει διαπιστωθεί ότι μαθητές που είναι πολύ σίγουροι για τις λανθασμένες αντιλήψεις τους ή παρουσιάζουν υψηλή βεβαιότητα σε προηγούμενες γνώσεις, κατέχουν καλά εδραιωμένες παρανοήσεις (Dole & Sinatra, 1998).

Όσον αφορά τη μέτρηση της βεβαιότητας και τη μελέτη των παρανοήσεων, τα τεστ τριών επιπέδων (3 tier tests), προτείνονται ως καταλληλότερα, καθώς ελέγχουν την ύπαρξη ή όχι μιας παρανόησης, σε συνδυασμό με έλεγχο των επιπέδων βεβαιότητας. Τα συγκεκριμένα εργαλεία έχουν χρησιμοποιηθεί κυρίως στις φυσικές επιστήμες, με ενθαρρυντικά αποτελέσματα στην προσπάθεια εντοπισμού, κατηγοριοποίησης και επικράτησης των παρανοήσεων (Caleon & Subramaniam, 2010). Πιο αναλυτικά, όσον αφορά τη δομή του ένα τεστ τριών επιπέδων αποτελείται από τρία μέρη. Το πρώτο μέρος περιλαμβάνει ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, όπου οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν τη σωστή απάντηση ανάμεσα σε δοσμένες εναλλακτικές. Το δεύτερο μέρος αφορά τη συλλογιστική και ζητά από τους μαθητές να επιλέξουν μια δήλωση, όπου περιγράφεται ο λόγος για τον οποίο επέλεξαν την απάντηση στο πρώτο μέρος. Στο τρίτο μέρος περιλαμβάνονται οι δηλώσεις βεβαιότητας, όπου οι μαθητές πρέπει να επιλέξουν πόσο σίγουροι είναι για τις απαντήσεις τους στα δύο πρώτα μέρη, μέσα από μία συνήθως πεντάβαθμη κλίμακα Likert, (από το 1 καθόλου βέβαιος-α έως το 5 απόλυτα βέβαιος-α) (Gurel, Eryilmaz & McDermott, 2015). Με βάση τον παραπάνω σχεδιασμό, ως παρανόηση ορίζεται μια λανθασμένη απάντηση που δίνεται με υψηλή βεβαιότητα. Αντίθετα, σωστή ή λανθασμένη απάντηση που δίνεται με χαμηλή βεβαιότητα ερμηνεύεται ως έλλειψη γνώσης (Caleon & Subramaniam, 2010).

Οι Yang και Sianturi, (2019, 2021) χρησιμοποίησαν τεστ τριών επιπέδων για να διερευνήσουν παρανοήσεις στις αριθμητικές πράξεις. Τα αποτελέσματα και των δύο ερευνών έδειξαν χαμηλή επίδοση στο τεστ, ανεπαρκή συλλογιστική, μιας και οι απαντήσεις των μαθητών τόνισαν την απουσία εννοιολογικής κατανόησης και σχετικά υψηλά επίπεδα βεβαιότητας, γεγονός που επιβεβαιώνει την ύπαρξη παρανοήσεων. Οι Durkin και Johnson, (2015) με τη σειρά τους, θέλοντας να εξετάσουν παρανοήσεις σε δεκαδικούς αριθμούς, χρησιμοποίησαν ένα εργαλείο το οποίο περιλάμβανε γραπτές δοκιμασίες με δήλωση βεβαιότητας. Τα αποτελέσματα της έρευνας επιβεβαίωσαν την ύπαρξη παρανοήσεων καθώς πολλά από τα λάθη των μαθητών έγιναν με υψηλή βεβαιότητα. Όσον αφορά τη διόρθωση των λαθών, σε έναν μετα-έλεγχο φάνηκε ότι η επίδοση των μαθητών βελτιώθηκε, λόγω της μείωσης των λαθών χαμηλής βεβαιότητας. Τα λάθη υψηλής βεβαιότητας που αντικατοπτρίζουν ισχυρές πεποιθήσεις και παρανοήσεις, δεν ήταν εύκολο να αλλάξουν. Εξίσου, τα αποτελέσματα της έρευνας των Nelson και Fyfe (2019) οι οποίοι διερεύνησαν τη βεβαιότητα των μαθητών σε μαθηματικά έργα ισοδυναμίας, διαπίστωσαν ότι όταν έλυναν ένα πρόβλημα λανθασμένα ήταν σε μεγάλο ποσοστό σίγουροι ότι το έλυναν σωστά. Οι ερευνητές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να αξιολογήσουν σωστά την επίδοσή τους και ότι έχουν την τάση να υπερεκτιμούν τις ικανότητές τους εξαιτίας συγκεκριμένων παρανοήσεων στην έννοια της ισοδυναμίας.

Από τις παραπάνω έρευνες προκύπτει ότι η μέτρηση της βεβαιότητας αποτελεί σημαντικό δείκτη στον έλεγχο και στην επίδραση των παρανοήσεων σε μαθηματικές έννοιες. Γίνεται αντιληπτό ότι η υψηλή βεβαιότητα για τα λάθη καθιστά δύσκολη την αντιμετώπισή τους, αφού τα συγκεκριμένα λάθη στηρίζονται σε προϋπάρχουσες διαισθητικές αντιλήψεις που είναι ανθεκτικές στην αλλαγή (Durkin & Johnson, 2015).

Από την άλλη πλευρά, υπάρχουν στοιχεία στη βιβλιογραφία που υποστηρίζουν ότι μπορεί στην πραγματικότητα να είναι ευκολότερο να αλλάξει η λανθασμένη γνώση όταν κάποιος έχει υψηλή βεβαιότητα για αυτή, παρά η γνώση για την οποία έχει χαμηλή βεβαιότητα. Η περίπτωση αυτή προτάθηκε από τους Butterfield και Metcalfe (2001) και αναφέρεται ως «υπερδιόρθωση». Τα αποτελέσματα της δικής τους έρευνας έδειξαν ότι με την κατάλληλη ανατροφοδότηση, είναι πιο πιθανό να διορθωθούν τα λάθη που γίνονται με υψηλή βεβαιότητα παρά αυτά που γίνονται με χαμηλότερη. Υποστηρίζουν ότι αυτό το αποτέλεσμα, που έρχεται σε αντίθεση με τις περισσότερες έρευνες, είναι πιθανό να οφείλεται σε παράγοντες προσοχής, όπου για παράδειγμα ένας μαθητής μπορεί να βιώσει έκπληξη όταν έρθει αντιμέτωπος με πληροφορίες που έρχονται σε αντίθεση με τις ισχυρές πεποιθήσεις του, αυξάνοντας έτσι την προσοχή του στην ανατροφοδότηση που του παρέχεται. Κατά συνέπεια μπορεί να οδηγηθεί ευκολότερα στη διόρθωση των λαθών υψηλής βεβαιότητας.

Συμπερασματικά, όπως προκύπτει από την επισκόπηση της βιβλιογραφίας τις περισσότερες φορές είναι πιθανό η υψηλή βεβαιότητα στις παρανοήσεις που βασίζονται στην προϋπάρχουσα γνώση να καθιστά δυσκολότερη την αντιμετώπισή τους και την επίτευξη της εννοιολογικής αλλαγής. Αν και συχνά οι παρανοήσεις αυτές μπορεί να είναι πολύ ανθεκτικές στις αλλαγές, υπάρχουν ορισμένες περιπτώσεις όπου η εμπιστοσύνη σε προηγούμενες γνώσεις όχι μόνο δεν αποτελεί εμπόδιο στην εννοιολογική αλλαγή αλλά μπορεί να είναι ακόμα και ευεργετική. Ωστόσο, αυτό έχει να κάνει σε μεγάλο βαθμό με τις ατομικές διαφορές, όπως το συγκεκριμένο προφίλ χαρακτηριστικών κάθε μαθητή. Παραδείγματος χάρη, το να έχει κάποιος υψηλή αυτο-αποτελεσματικότητα σε συνδυασμό με το ενδιαφέρον για μάθηση νέων εννοιών με διαφορετικές ιδιότητες από αυτές που γνωρίζει. Από την άλλη, σημαντικό ρόλο στην αντιμετώπιση των παρανοήσεων και στην εννοιολογική κατανόηση διαδραματίζουν και οι κατάλληλες στρατηγικές παρέμβασης, οι οποίες είναι ικανές να θέσουν τους μαθητές σε ετοιμότητα να διαψεύσουν τις παρανοήσεις και να δεχτούν την επιστημονικά αποδεκτή θεωρία (Cordova, Sinatra, Jones, Taasoobshirazi & Lombardi, 2014). Αυτό βέβαια δεν είναι εύκολο να επιτευχθεί μέσω της παραδοσιακής διδασκαλίας, η οποία συχνά εμποδίζει την εκμάθηση και την κατανόηση νέων, αντικρουόμενων γνώσεων. Χρειάζονται συγκεκριμένες διδακτικές παρεμβάσεις που υποστηρίζουν την εννοιολογική αλλαγή, όπως το ανατρεπτικό κείμενο (Guzzetti, 2000) για το οποίο γίνεται εκτενής αναφορά στην επόμενη ενότητα.

2.3. Διδακτικές παρεμβάσεις με ανατρεπτικό κείμενο

2.3.1. Το ανατρεπτικό κείμενο

Κυριότερος στόχος όλων των διδακτικών παρεμβάσεων στη μαθησιακή διαδικασία είναι η επίτευξη της εννοιολογικής αλλαγής, με την οποία οι μαθητές κατορθώνουν έναν μείζονα μετασχηματισμό της γνώσης τους. Δηλαδή, η προϋπάρχουσα γνώση ή πεποίθηση αλλάζει, μετασχηματίζεται, ώστε να βρίσκει εφαρμογή στην καινούρια γνώση. Από έρευνες έχει βρεθεί ότι η ανάγνωση κατάλληλων κειμένων μπορεί να συμβάλλει θετικά στην παραπάνω διαδικασία (Dole, 2000).

Έρευνες έχουν δείξει ότι ένα είδος κειμένου που φαίνεται αποτελεσματικό για την επίτευξη της εννοιολογικής αλλαγής είναι το ανατρεπτικό κείμενο. Στην πιο κοινή μορφή του, ένα ανατρεπτικό κείμενο περιγράφει μία παρανόηση και ευθύς αμέσως την διαψεύδει, παρουσιάζοντας ταυτόχρονα τον λόγο, για τον οποίο δεν είναι σωστή. Η αντίφαση αυτή, κάνει τον αναγνώστη να αμφισβητήσει την εγκυρότητα της λανθασμένης πεποίθησης που είχε αρχικά (Guzzetti, Snyder & Glass, 1992). Για να θεωρηθεί ένα κείμενο ανατρεπτικό, πρέπει υποχρεωτικά να περιλαμβάνει δύο μέρη: Πρώτον τη δήλωση με μια συνηθισμένη παρανόηση και δεύτερον την πρόταση που διαψεύδει την παρανόηση μαζί με την επιστημονικά αποδεκτή θεωρία (Guzzetti, 2000).

Η Tippett (2010) επιχειρώντας να αναδείξει την εννοιολογική αλλαγή που μπορεί να επιτευχθεί μέσω του ανατρεπτικού κειμένου, πραγματοποίησε μια ανασκόπηση ερευνών που χρησιμοποίησαν ανατρεπτικό κείμενο, τα τελευταία είκοσι χρόνια. Ταυτόχρονα αναδείχθηκαν και άλλα οφέλη από τη χρήση του. Για παράδειγμα, η μορφή και η δομή ενός ανατρεπτικού κειμένου, το έκαναν να ξεχωρίζει από τα παραδοσιακά κείμενα των σχολικών βιβλίων, με αποτέλεσμα οι μαθητές να το προτιμούν περισσότερο. Μάλιστα, οι έρευνες έδειξαν ότι διαβάζοντας ένα ανατρεπτικό κείμενο αυξάνεται και το επίπεδο κατανόησης των μαθητών. Σε αυτό, συμβάλλει κυρίως το γεγονός ότι η λανθασμένη και η σωστή γνώση παρουσιάζονται ταυτόχρονα. Με αυτόν τον τρόπο, το κείμενο γίνεται πιο κατανοητό, αξιόπιστο και χρήσιμο, καθώς οι πληροφορίες εμφανίζονται με συνεκτικότητα και σαφήνεια. Συνεπώς, είναι πιθανότερο οι μαθητές όχι μόνο να αμφισβητήσουν την αρχική τους γνώση αλλά και να αποδεχτούν ευκολότερα την νέα επιστημονική θεωρία, πετυχαίνοντας την εννοιολογική αλλαγή. Επιπρόσθετα, έχει αναφερθεί ότι η γνωστική σύγκρουση που προκαλείται στους μαθητές από αυτήν την εγγύτητα της σωστής και λανθασμένης εννοιολόγησης, ενισχύει τη μεταγνωστική τους επίγνωση. Αυτό συμβαίνει σε ένα ανατρεπτικό κείμενο, όπου μέσω της διάψευσης, αυτός που το διαβάζει, αντιλαμβάνεται ότι η προηγούμενη γνώση του είναι λανθασμένη ή ανακριβής. Αντίθετα, ένα απλό κείμενο υπενθύμισης κανόνων δεν περιλαμβάνει καμία πρόταση που να δηλώνει ότι μία πεποίθηση είναι ανακριβής. Επομένως, αν αυτός που το διαβάζει δεν γνωρίζει ότι έχει λανθασμένη αντίληψη, τότε είναι πολύ λίγες οι πιθανότητες να την αλλάξει.

Ένα επιπλέον όφελος από την ανάγνωση ανατρεπτικού κειμένου, αφορά τη διατήρηση της κατανόησης για μεγάλο χρονικό διάστημα. Ανεξάρτητα από την ηλικία των μαθητών, φάνηκε ότι το συγκεκριμένο είδος κειμένου αποτελεί μέθοδο με την οποία διατηρείται αποτελεσματικά και μακροχρόνια η εννοιολογική αλλαγή. Εξίσου, ένας άλλος παράγοντας που μπορεί να ενισχύσει την αποτελεσματικότητα του ανατρεπτικού κειμένου, είναι η επίδραση της ενεργοποίησης της προϋπάρχουσας γνώσης. Πιο αναλυτικά, η ενεργοποίηση της προϋπάρχουσας γνώσης μπορεί να γίνει μέσω ερωτηματολογίων ή παρουσιάσεων που αναδεικνύουν την ανακρίβεια αυτής της γνώσης. Σε συνδυασμό με την ανάγνωση ενός ανατρεπτικού κειμένου μπορεί να οδηγήσει σε καλύτερη και πιο αποτελεσματική εννοιολογική κατανόηση σε έναν μετα-έλεγχο, ακριβώς επειδή προηγείται η ενεργοποίηση της προηγούμενης λανθασμένης γνώσης και προκαλείται γνωστική σύγκρουση (Tippett, 2010).

Από όλα τα παραπάνω γίνεται σαφής και ξεκάθαρη η αποτελεσματικότητα του ανατρεπτικού κειμένου στην εννοιολογική αλλαγή. Ωστόσο, υπάρχουν παράγοντες που μπορεί να επηρεάσουν αυτήν την αποτελεσματικότητα και έχουν να κάνουν τόσο με τις πεποιθήσεις των μαθητών όσο και με τα ατομικά τους χαρακτηριστικά. Παραδείγματος χάρη, μια παρανόηση μπορεί να οφείλεται σε πολύ βαθιά ριζωμένες αντιλήψεις και για αυτόν τον λόγο να είναι δύσκολο για κάποιον να την ανατρέψει. Επομένως, η φύση της παρανόησης διαδραματίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην προσπάθεια του ατόμου να την αναγνωρίσει και να την αλλάξει. Αντίθετα, κάποιος που έχει ισχυρή επιστημονική πεποίθηση είναι ευκολότερο να βοηθηθεί από το ανατρεπτικό κείμενο και να πετύχει την εννοιολογική αλλαγή. Όσον αφορά τα ατομικά χαρακτηριστικά των μαθητών, είναι γνωστό ότι δεν έχουν όλοι την ίδια χωρική και αναγνωστική ικανότητα, γεγονός που μπορεί να επηρεάσει τον τρόπο που επιδρά ένα ανατρεπτικό κείμενο. Μαθητές με αναγνωστικές και χωρικές δυσκολίες είναι πιθανό να μην ωφεληθούν το ίδιο σε σχέση με άλλους που δεν αντιμετωπίζουν τέτοιου είδους δυσκολίες. Τέλος, οι ίδιες οι πληροφορίες που περιέχονται σε ένα ανατρεπτικό κείμενο μπορεί να επηρεάσουν την πιθανότητα εννοιολογικής αλλαγής (Tippett, 2010).

Συμπερασματικά, από την ανασκόπηση που πραγματοποίησε η Tippet (2010), οι περισσότερες έρευνες συνηγορούν στη χρήση ανατρεπτικού κειμένου για την ενίσχυση της εννοιολογικής αλλαγής, ανεξάρτητα από την ηλικία και την τάξη των μαθητών. Όλες οι έρευνες ανέδειξαν την υπεροχή του ανατρεπτικού κειμένου σε σύγκριση με τα συμβατικά κείμενα των σχολικών βιβλίων, για αυτό και γίνεται ισχυρή σύσταση από τους ερευνητές για χρήση ανατρεπτικών κειμένων στη μαθησιακή διαδικασία. Ωστόσο, η χρήση τους είναι σπάνια, για αυτό και θα πρέπει η επίδραση του ανατρεπτικού κειμένου στην εννοιολογική αλλαγή να αναγνωριστεί από συγγραφείς και εκδότες, προκειμένου να συμπεριλαμβάνονται τόσο στα σχολικά εγχειρίδια όσο και στα βιβλία του εμπορίου.

2.3.2. Το ανατρεπτικό κείμενο στην μαθηματική εκπαίδευση

Μέχρι στιγμής τα ανατρεπτικά κείμενα χρησιμοποιούνται κυρίως στην έρευνα των φυσικών επιστημών, με πολύ θετικά αποτελέσματα στην εννοιολογική αλλαγή. Έρευνες στα πεδία της Φυσικής και της Βιολογίας έδειξαν βελτίωση στην εννοιολογική κατανόηση μετά την ανάγνωση ανατρεπτικών κειμένων (Hynd & Alvermann, 1986; Skopeliti & Vosniadou, 2015), αλλά και διατήρηση της γνώσης σε μεταγενέστερο έλεγχο (Asterhan & Resnick, 2020). Ακόμα μία έρευνα που πραγματοποιήθηκε στις φυσικές επιστήμες εξετάζοντας και τα επίπεδα βεβαιότητας των λανθασμένων απαντήσεων πριν και μετά την ανάγνωση κειμένων, έδειξε ότι η ανάγνωση ανατρεπτικού κειμένου οδήγησε σε διόρθωση των λαθών που έγιναν με υψηλή βεβαιότητα. Αντίθετα, η ανάγνωση συμβατικού κειμένου δεν βελτίωσε τα λάθη, όπως επίσης δεν βελτιώθηκαν τα λάθη χαμηλής βεβαιότητας με κανένα από τα δύο είδη κειμένων. Το γεγονός ότι διορθώθηκαν τα λάθη υψηλής βεβαιότητας είναι κάτι που έρχεται σε αντίθεση με τις περισσότερες έρευνες, για αυτό και στη συγκεκριμένη έρευνα τονίζεται η συμβολή του ανατρεπτικού κειμένου στην εννοιολογική αλλαγή (Van Loon, Dunlosky, Van Gog, Van Merriënboer & De Bruin, 2015).

Όσον αφορά τη μαθηματική εκπαίδευση, είναι λίγες οι έρευνες στις οποίες εξετάζεται η συμβολή του ανατρεπτικού κειμένου στη μείωση της εμφάνισης παρανοήσεων και στην επίτευξη της εννοιολογικής αλλαγής (Lem, Onghena, Verschaffel & Van Dooren, 2017). Οι Lem et al. (2017), εξέτασαν τα λάθη που εμφανίζονται σε έργα με θηκόγραμμα, όπου υπάρχει η παρανόηση ότι όσο μεγαλύτερη είναι η περιοχή που καλύπτει το θηκόγραμμα, τόσο περισσότερα δεδομένα περιλαμβάνει, συγκριτικά με μια μικρότερη περιοχή. Από την έρευνα διαπιστώθηκε ότι το ανατρεπτικό κείμενο βοήθησε τους μαθητές να ξεπεράσουν τη λανθασμένη διαίσθηση που είχαν αναφορικά με το θηκόγραμμα κατά τη συλλογιστική τους διαδικασία. Δεν κατάφεραν όμως να αντικαταστήσουν τη λανθασμένη διαίσθηση με μία σωστή. Επιπλέον δεν εμφανίστηκε βελτίωση σε όλο το δείγμα της έρευνας.

Σε άλλη έρευνα των Christou και Prokopou (2020) εξετάστηκε η παρανόηση που έχουν ορισμένοι μαθητές όταν συνδέουν τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με ένα συγκεκριμένο αριθμητικό αποτέλεσμα, θεωρώντας πως ένας πολλαπλασιασμός δίνει πάντα μεγαλύτερο αποτέλεσμα από τους παράγοντες, ενώ μία διαίρεση μικρότερο. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι συμμετέχοντες που διάβασαν το ανατρεπτικό κείμενο είχαν καλύτερη επίδοση από την ομάδα ελέγχου και μάλιστα η επίδοση αυτή διατηρήθηκε και έναν μήνα αργότερα. Επιπλέον από τη διδακτική παρέμβαση επωφελήθηκαν και οι μαθητές με χαμηλή προϋπάρχουσα γνώση και μάλιστα περισσότερο από τους μαθητές με υψηλή. Το γεγονός αυτό ενισχύει την αξία και τα οφέλη του ανατρεπτικού κειμένου στη μαθησιακή διαδικασία. Ωστόσο και σε αυτή την έρευνα γίνεται λόγος για βελτίωση των λαθών και όχι για πλήρη αντιμετώπιση των παρανοήσεων, καθώς σε έργα μη συμβατά, εμφανίστηκαν λάθη ακόμα και μετά τη χρήση του ανατρεπτικού κειμένου.

Η βελτίωση στην επίδοση μετά την ανάγνωση ανατρεπτικού κειμένου επιβεβαιώνεται και από την έρευνα των Fadillah και Susiaty (2019) οι οποίες ερεύνησαν λάθη στην πρόσθεση και την αφαίρεση ακέραιων αριθμών.

Σε αντίθεση με τα παραπάνω έρχεται η έρευνα των Van Hoof, Engelen και Van Dooren (2021) η οποία μελέτησε τα λάθη στη σύγκριση κλασματικών αριθμών, όπου συχνά δημιουργείται η παρανόηση ότι το μέγεθος ενός κλάσματος μεγαλώνει όσο αυξάνεται ο αριθμητής ή ο παρονομαστής ή και οι δύο όροι. Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης έρευνας έδειξαν ότι τα λάθη μειώθηκαν τόσο μετά την ανάγνωση ενός ανατρεπτικού όσο και ενός συμβατικού κειμένου. Παραδόξως η βελτίωση ήταν ελαφρώς υψηλότερη με το συμβατικό κείμενο και μάλιστα διατηρήθηκε σε μεταγενέστερο έλεγχο.

Εν κατακλείδι, γίνεται αντιληπτό ότι πολλές έρευνες έχουν παρουσιάσει θετικά αποτελέσματα σχετικά με τη συμβολή του ανατρεπτικού κειμένου στην εννοιολογική αλλαγή και την αντιμετώπιση των παρανοήσεων (Asterhan & Resnick, 2020; Guzzetti et al., 1992; Hynd & Alvermann, 1986; Skopeliti & Vosniadou, 2015; Tippett, 2010; Van Loon et al., 2015). Στις έρευνες όμως που αφορούν τη μαθηματική εκπαίδευση, οι ερευνητές εμφανίζονται αρκετά συγκρατημένοι ως προς την αποτελεσματικότητά του στην επίτευξη της εννοιολογικής αλλαγής. Από τις παραπάνω έρευνες φαίνεται πως σε όλες, (Christou & Prokopou, 2020; Fadillah & Susiaty, 2019; Lem et al., 2017) πλην μίας, (Van Hoof et al., 2021) η χρήση του ανατρεπτικού κειμένου συνέβαλε μεν στην μείωση των λαθών και στη βελτίωση της επίδοσης των μαθητών, αλλά δεν κατάφερε να αντιμετωπίσει πλήρως τις παρανοήσεις και να τις αντικαταστήσει με την ορθή γνώση. Διάφοροι παράγοντες μπορούν να επηρεάσουν την αποτελεσματικότητα ενός ανατρεπτικού κειμένου, όπως το είδος των παρανοήσεων, δηλαδή αν μια παρανόηση είναι ισχυρή στη διαίσθηση του ατόμου, τότε είναι δυσκολότερο να την αντιμετωπίσει. Επίσης, είναι πιθανό το ανατρεπτικό κείμενο να μην γίνει κατανοητό απ’ όλα τα υποκείμενα της έρευνας ή κάποιοι να δυσκολεύονται να αποδεχτούν την καινούρια γνώση ή ακόμα υπάρχει και η περίπτωση να συγκρατήσουν μόνο την πρόταση με την παρανόηση, αγνοώντας την αποδεκτή θεωρία (Lem et al., 2017). Αυτό που προτείνεται από τους ερευνητές είναι να διερευνηθεί περαιτέρω η χρήση του ανατρεπτικού κειμένου στη μαθηματική εκπαίδευση αλλά και να ενισχυθεί η αποτελεσματικότητά του μέσω άλλων ανατρεπτικών στρατηγικών όπως η συζήτηση και η επιχειρηματολογία.

3. Ερευνητικό μέρος

3.1. Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Η παρούσα έρευνα έχει σκοπό να μελετήσει τις παρανοήσεις που εμφανίζουν οι μαθητές Δημοτικού στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών, διερευνώντας τα επίπεδα βεβαιότητας των απαντήσεων των μαθητών. Επιπροσθέτως, επιδιώκει να εξετάσει πώς επηρεάζονται τα επίπεδα βεβαιότητας των απαντήσεων αλλά και η προσπάθεια των μαθητών να αντιμετωπίσουν τις παρανοήσεις τους, αφού δεχτούν μια διδακτική παρέμβαση με τη μέθοδο του ανατρεπτικού κειμένου.

Τα ερευνητικά ερωτήματα διαμορφώνονται ως εξής:

1) Ποιες παρανοήσεις εμφανίζουν οι μαθητές στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών;
2) Τι επίδραση έχει μια διδακτική παρέμβαση με ανατρεπτικό κείμενο στην αντιμετώπιση των παρανοήσεων;
3) Υπάρχουν διαφορές στις παρανοήσεις, όταν οι ερωτήσεις εμφανίζονται μέσα και έξω από πλαίσια;

3.2. Μεθοδολογία

3.2.1. Ερευνητική στρατηγική

Η ερευνητική στρατηγική που επιλέχθηκε για την εξέταση του θέματος της παρούσας εργασίας, που αφορά παρανοήσεις στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών με έλεγχο των επιπέδων βεβαιότητας των απαντήσεων, είναι η ποσοτική μέθοδος. Πιο αναλυτικά, για τη συλλογή των δεδομένων της έρευνας σχεδιάστηκαν τρία τεστ τριών επιπέδων, τα οποία λειτούργησαν ως προ-, μετά- και μεταγενέστερος έλεγχος των παρανοήσεων και των επιπέδων βεβαιότητας.

3.2.2. Συμμετέχοντες

Στην έρευνα έλαβαν μέρος 87 μαθητές (45 αγόρια και 42 κορίτσια) τυπικής ανάπτυξης, της Δ' και Ε' τάξης του Δημοτικού, ηλικίας 10 και 11 ετών αντίστοιχα. Το δείγμα επιλέχθηκε με βολική δειγματοληψία από δύο δημόσια σχολεία της βόρειας Ελλάδας. Η Ομάδα Παρέμβασης (ΟΠ), η οποία έλαβε κατά τη διδακτική παρέμβαση το ανατρεπτικό κείμενο, αποτελείται από 42 μαθητές (22 αγόρια και 20 κορίτσια). Η Ομάδα Ελέγχου (ΟΕ), η οποία έλαβε το κείμενο υπενθύμισης αποτελείται από 45 μαθητές (23 αγόρια και 22 κορίτσια).

Σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά, οι μαθητές εισάγονται στους δεκαδικούς αριθμούς στην Γ’ τάξη, με στόχο την εξοικείωσή τους με τους κανόνες γραφής των δεκαδικών αριθμών αλλά και τη σημασία καθενός από τα ψηφία ενός δεκαδικού αριθμού. Στην Δ’ και Ε’ τάξη διευρύνουν τις γνώσεις τους για τους δεκαδικούς αριθμούς. Συγκεκριμένα, εκτός των παραπάνω, προχωρούν στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών με σωστή χρήση των συμβόλων σύγκρισης «<», «>», στη διάταξη δεκαδικών αριθμών από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και αντιστρόφως, ενώ εξασκούνται και σε περιπτώσεις στις οποίες δύο δεκαδικοί έχουν το ίδιο ακέραιο μέρος, αλλά διαφορετικό πλήθος δεκαδικών ψηφίων. Κατά συνέπεια, οι μαθητές Δ’ και Ε’ τάξης επιλέχθηκαν ως το καταλληλότερο δείγμα για την έρευνα.

3.2.3. Υλικά

Τεστ τριών επιπέδων (3-tier test)

Για τη συλλογή των δεδομένων της έρευνας, σχεδιάστηκαν τρία παρόμοια τεστ τριών επιπέδων που λειτούργησαν ως προ- μετά- και μεταγενέστερος έλεγχος των παρανοήσεων των μαθητών. Κάθε τεστ περιλαμβάνει 8 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, οι οποίες διερευνούν τις πιο κοινές παρανοήσεις που εμφανίζονται στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών, όπως αυτές έχουν αναδειχθεί από τη σχετική βιβλιογραφία, αλλά και τα επίπεδα βεβαιότητας των απαντήσεων.

Πιο αναλυτικά, όσον αφορά τη δομή του, ένα εργαλείο όπως το τεστ τριών επιπέδων αποτελείται από τρία μέρη. Το πρώτο μέρος, περιλαμβάνει τις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, όπου οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν τη σωστή απάντηση ανάμεσα σε τρεις δοσμένες εναλλακτικές απαντήσεις. Στο δεύτερο μέρος, δίνονται στους μαθητές τρεις διαφορετικοί λόγοι, για καθεμιά από τις παραπάνω πιθανές απαντήσεις, οι οποίοι εξηγούν γιατί επιλέχθηκε μία συγκεκριμένη απάντηση στο πρώτο μέρος. Εν ολίγοις ζητείται από τους μαθητές να δικαιολογήσουν τη συλλογιστική τους. Στο τρίτο μέρος, περιλαμβάνονται τα επίπεδα βεβαιότητας των απαντήσεων, όπου εκεί πρέπει να επιλέξουν πόσο βέβαιοι είναι για την απάντηση που έδωσαν σε κάθε ερώτηση, μέσα από μία πεντάβαθμη κλίμακα Likert, όπου αντιστοιχούν τα εξής: *[1] Καθόλου βέβαιος-α, [2] Λίγο βέβαιος-α, [3] Μέτρια βέβαιος-α, [4] Πολύ βέβαιος-α, [5] Απόλυτα βέβαιος-α.*

Όλες οι ερωτήσεις έχουν τη δομή που παρουσιάζεται στην παρακάτω Εικόνα 1.

1) Κύκλωσε τον μεγαλύτερο αριθμό

α) 0,134 β) 0,4 γ) 0,34

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή το 134 είναι μεγαλύτερο από το 4 και το 34.	1. Επειδή ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.	1. Επειδή έχει δέκατα και εκατοστά που έχουν την μεγαλύτερη αξία.
2. Επειδή ο αριθμός με τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.	2. Επειδή ο αριθμός 4 στα δέκατα, που έχουν την μεγαλύτερη αξία, είναι μεγαλύτερος από το 1 και το 3.	2. Επειδή το 34 με ένα μηδενικό στο τέλος γίνεται 340 και είναι μεγαλύτερο από το 134 και το 4.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.

➢ **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 1; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α 2. Λίγο βέβαιος-α 3. Μέτρια βέβαιος-α 4. Πολύ βέβαιος-α 5. Απόλυτα βέβαιος-α

Εικόνα 1. Ενδεικτικό παράδειγμα ερώτησης στο τεστ του προ-ελέγχου

Όσον αφορά το περιεχόμενο των ερωτήσεων, αυτό βασίζεται στις πιο κοινές παρανοήσεις που εμφανίζονται στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών. Αυτές αφορούν: το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων, όπου συχνά θεωρείται ότι ο αριθμός με τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος ή ότι ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος και στην αξία της θέσης του μηδενός στους δεκαδικούς αριθμούς.

Όπως προαναφέρθηκε τα τεστ αποτελούνται από 8 παρόμοιες ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, εκ των οποίων οι τέσσερις αφορούν στην παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων ενώ οι άλλες τέσσερις στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός. Επιπλέον χωρίζονται σε ερωτήσεις με αναφορά σε ποσότητες (ευρώ, μέτρα, κιλά, λίτρα) και ερωτήσεις χωρίς ποσότητες. Ακόμα, οι μισές από αυτές περιλαμβάνουν αριθμούς σε διάταξη. Οι τέσσερις ερωτήσεις χωρίς ποσότητες είναι οι ίδιες σε όλα τα τεστ, ενώ οι ερωτήσεις με αναφορά σε ποσότητες διαφέρουν λίγο ως προς το περιεχόμενο. Οι πιθανές απαντήσεις περιλαμβάνουν διαφορετικούς αριθμούς και στα τρία τεστ.

Από τις οχτώ ερωτήσεις των τεστ, οι τέσσερις εστιάζουν στην παρανόηση ότι ο αριθμός με τα περισσότερα/λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος (Ερ. 1, Ερ. 3, Ερ. 5 και Ερ 8), εκ των οποίων οι δύο περιλαμβάνουν αριθμούς σε διάταξη (Ερ. 3 και Ερ. 5), (βλ. Εικόνα 2). Οι άλλες τέσσερις ερωτήσεις εστιάζουν στην παρανόηση που αφορά την αξία θέσης του μηδενός (Ερ. 2, Ερ.4, Ερ. 6 και Ερ. 7) και οι δύο από αυτές περιλαμβάνουν αριθμούς σε διάταξη (Ερ. 4 και Ερ. 6). Η παραπάνω κατηγοριοποίηση των ερωτήσεων ακολουθείται με τον ίδιο τρόπο και στα τρία τεστ.

3) Κύκλωσε το σωστό

α) 4,8 > 4,75 > 4,60 β) 4,75 > 4,60 > 4,8 γ) 4,60 = 4,75 = 4,8

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή τα δέκατα έχουν μεγαλύτερη αξία και το 8 είναι μεγαλύτερο από το 7 και το 6.	1. Επειδή το 75 είναι μεγαλύτερο από το 60 και το 8.	1. Επειδή έχουν τον ίδιο αριθμό στο ακέραιο μέρος.
2. Επειδή ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.	2. Επειδή στους πρώτους δύο αριθμούς υπάρχουν δύο δεκαδικά ψηφία, ενώ στον τρίτο μόνο ένα.	2. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	

➢ **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 3; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α 2. Λίγο βέβαιος-α 3. Μέτρια βέβαιος-α 4. Πολύ βέβαιος-α 5. Απόλυτα βέβαιος-α

Εικόνα 2. Ενδεικτικό παράδειγμα ερώτησης με διάταξη αριθμών στο τεστ του προ-ελέγχου

Μια επιπλέον κατηγοριοποίηση των ερωτήσεων που αφορά το περιεχόμενό τους είναι ότι στις τέσσερις από αυτές οι αριθμοί εμφανίζονται με ποσότητες, όπως παραδείγματος χάρη ευρώ, μέτρα, κιλά και λίτρα (βλ. Εικόνα 3). Οι ερωτήσεις αυτές εντάσσονται σε πλαίσια, γνωστά στους μαθητές από την καθημερινότητά τους, και χρησιμοποιήθηκαν με σκοπό να διερευνηθεί εάν υπάρχουν διαφορές στις παρανοήσεις όταν εμφανίζονται έργα διάταξης μέσα και έξω από πλαίσια. Οι υπόλοιπες τέσσερις ερωτήσεις δεν περιλαμβάνουν αναφορά σε ποσότητες.

8) Ένας χυμός πωλείται στα παρακάτω μεγέθη. Κύκλωσε ποιος χυμός έχει την μεγαλύτερη ποσότητα

α) 0,500 λίτρα β) 1,5 λίτρα γ) 1,25 λίτρα

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή ο αριθμός με τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.	1. Επειδή τα δέκατα έχουν μεγαλύτερη αξία και το 5 είναι μεγαλύτερο από το 2.	1. Επειδή έχει δέκατα και εκατοστά που έχουν την μεγαλύτερη αξία.
2. Επειδή το 500 είναι μεγαλύτερο από το 5 και το 25.	2. Επειδή ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.	2. Επειδή το 25 είναι μεγαλύτερο από το 5.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.

➢ **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 8; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α 2. Λίγο βέβαιος-α 3. Μέτρια βέβαιος-α 4. Πολύ βέβαιος-α 5. Απόλυτα βέβαιος-α

Εικόνα 3. Ενδεικτικό παράδειγμα ερώτησης με αναφορά σε ποσότητα στο τεστ του προ-ελέγχου

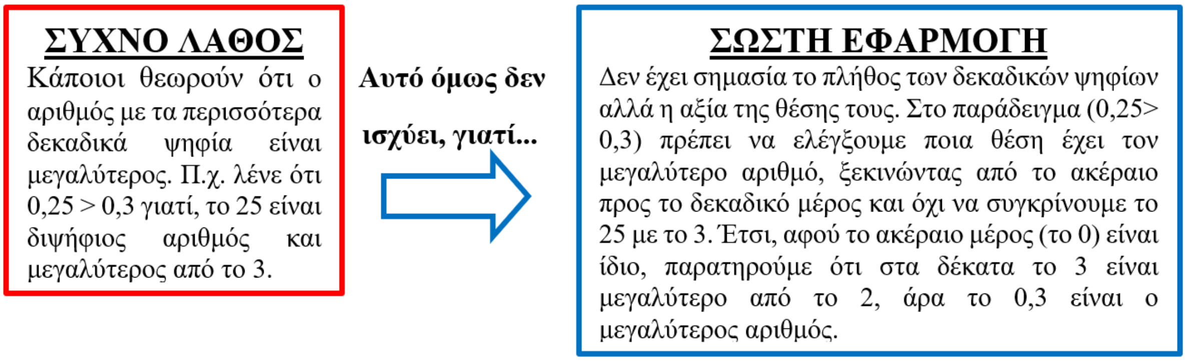
Αναφορικά με το δεύτερο μέρος του τεστ, αυτό σχετίζεται με τη συλλογιστική των απαντήσεων των μαθητών. Περιλαμβάνει προτάσεις οι οποίες αιτιολογούν την επιλογή κάθε απάντησης. Συγκεκριμένα για κάθε πιθανή απάντηση δίνονται τρεις διαφορετικοί λόγοι, οι οποίοι στις λανθασμένες επιλογές είναι κι αυτοί λάθος, ενώ στη σωστή επιλογή, υπάρχει και μία δοσμένη σωστή συλλογιστική. Από τους μαθητές ζητείται να κυκλώσουν την πρόταση που πιστεύουν ότι αιτιολογεί την απάντηση που επέλεξαν στο πρώτο μέρος.

Τέλος, στο τρίτο μέρος περιέχονται τα επίπεδα βεβαιότητας στα οποία οι μαθητές πρέπει να κυκλώσουν το βαθμό στον οποίο είναι σίγουροι για κάθε τους απάντηση. Παρά το γεγονός ότι οι ίδιοι δεν είναι εξοικειωμένοι με το να αξιολογούν τη βεβαιότητά τους, βρίσκονται σε ηλικία που έχουν σε έναν βαθμό την ωριμότητα να χρησιμοποιήσουν τις μεταγνωστικές τους ικανότητες.

Σύμφωνα με τα παραπάνω με την ίδια ακριβώς δομή σχεδιάστηκαν και τα τεστ του μετα-ελέγχου και του μεταγενέστερου ελέγχου. Οι μόνες αλλαγές που πραγματοποιήθηκαν αφορούν τους αριθμούς, οι οποίοι είναι λίγο διαφορετικοί και τις διατυπώσεις στις ερωτήσεις με ποσότητες. Στο Παράρτημα παρατίθενται και τα τρία τεστ ολόκληρα (βλ. Παράρτημα Α).

Κείμενα Διδακτικής παρέμβασης

Για την Ομάδα Παρέμβασης αξιοποιήθηκε η μέθοδος του ανατρεπτικού κειμένου κατά τη διδακτική παρέμβαση. Το ανατρεπτικό κείμενο περιλαμβάνει τέσσερα επιμέρους μικρά κείμενα σχεδιασμένα με τέτοια μορφή, ώστε να γίνεται αντιληπτή από τους μαθητές η ταυτόχρονη αντιπαράθεση της παρανόησης, της πρότασης διάψευσης και της αποδεκτής θεωρίας. Για λόγους κατανόησης από την πλευρά των μαθητών, η παρανόηση αναφέρεται ως «*Συχνό Λάθος*», η πρόταση διάψευσης ως «*Αυτό όμως δεν ισχύει, γιατί..*» και η αποδεκτή θεωρία ως «*Σωστή εφαρμογή*» (βλ. Εικόνα 4). Οι προτάσεις διατυπώνονται με τέτοιον τρόπο, ώστε να είναι κατανοητές από μαθητές Δημοτικού. Επίσης χρησιμοποιούνται παραδείγματα για καλύτερη αιτιολόγηση.



Εικόνα 4. Ενδεικτικό παράδειγμα ανατρεπτικού κειμένου

Σχετικά με το περιεχόμενο των κειμένων, στο πρώτο μέρος του κειμένου κρίνεται σκόπιμο να γίνει αναφορά σε μια θεμελιώδη έννοια των αριθμών, αυτή της θεσιακής αξίας. Έτσι τονίζεται το γεγονός ότι το ακέραιο και το δεκαδικό μέρος δεν αποτελούν δύο ανεξάρτητα μέρη αλλά αντίθετα το ένα είναι συνέχεια του άλλου. Επιπλέον αναφέρεται ότι κάθε αριθμός και των δύο μερών έχει μια συγκεκριμένη αξία και ότι η αξία των αριθμών μειώνεται όσο προχωράμε από το ακέραιο στο δεκαδικό μέρος. Παρακάτω, εκτός του κειμένου, παρουσιάζεται στο έντυπο και ένας πίνακας με την αξία θέσης των ακέραιων και δεκαδικών ψηφίων για πληρέστερη κατανόηση (βλ. Παράρτημα Β).

Στα επόμενα τρία μέρη του κειμένου γίνεται σαφής αναφορά στις παρανοήσεις. Πιο αναλυτικά, το δεύτερο κείμενο αναφέρεται στην παρανόηση ότι ο αριθμός με τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος και το τρίτο κείμενο στην παρανόηση ότι ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις παρανοήσεων, τονίζεται στη σωστή εφαρμογή ότι δεν έχει σημασία το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων, αλλά η αξία της θέσης τους. Επιπρόσθετα, για να συγκρίνουμε δεκαδικούς αριθμούς πρέπει να ελέγχουμε ποια θέση έχει τον μεγαλύτερο αριθμό, ξεκινώντας από το ακέραιο προς το δεκαδικό μέρος.

Τέλος, το τέταρτο μέρος του κειμένου αφορά στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός στους δεκαδικούς αριθμούς, ότι δηλαδή το μηδέν αριστερά από ένα αριθμό δεν παίζει ρόλο, διότι δεν αλλάζει την αξία του, όπως συμβαίνει στους φυσικούς αριθμούς. Μέσα από το ανατρεπτικό κείμενο γίνεται προσπάθεια να ανατραπεί στους μαθητές η παρανόηση ότι στο δεκαδικό μέρος το μηδέν αριστερά από έναν αριθμό εξακολουθεί μεν να μην έχει αξία, αλλά χρησιμοποιείται, για να δείξει ότι δεν υπάρχει αριθμός σε μια συγκεκριμένη θέση και ότι βρίσκεται εκεί για να διαφοροποιεί τους αριθμούς.

Για την Ομάδα Ελέγχου χρησιμοποιήθηκε ένα απλό κείμενο υπενθύμισης του κανόνα σύγκρισης των δεκαδικών αριθμών, όπως αυτά που περιέχονται στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών. Το συγκεκριμένο κείμενο πάρθηκε από το βιβλίο της Ε’ Δημοτικού και περιγράφει τον τρόπο που συγκρίνουμε δεκαδικούς αριθμούς. Πολύ συνοπτικά αναφέρει ότι στην περίπτωση δύο δεκαδικών αριθμών μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μεγαλύτερο ακέραιο μέρος. Όταν όμως δύο δεκαδικοί αριθμοί έχουν το ίδιο ακέραιο μέρος, τότε συγκρίνουμε το δεκαδικό, πρώτα τα δέκατα, μετά τα εκατοστά και τα χιλιοστά. Δίνονται και δύο παραδείγματα, ένα για κάθε περίπτωση. Στο συγκεκριμένο κείμενο δεν γίνεται καμία αναφορά σε λάθη και παρανοήσεις που αφορούν το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων και την αξία θέσης του μηδενός.

Διδακτική παρέμβαση με κείμενο υπενθύμισης

Για να συγκρίνουμε σωστά δεκαδικούς αριθμούς, θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας την αξία που έχει κάθε ψηφίο, ανάλογα με τη θέση στην οποία βρίσκεται. Ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς αριθμούς, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μεγαλύτερο ακέραιο μέρος.

Π.χ 26,5 > 24, 998, γιατί 26 > 24.

Όταν δύο δεκαδικοί αριθμοί έχουν το ίδιο ακέραιο μέρος, συγκρίνουμε το δεκαδικό τους μέρος, πρώτα τα δέκατα, μετά τα εκατοστά και τα χιλιοστά. Π.χ. 15, 27 > 15, 25 γιατί εφόσον το ακέραιο μέρος έχει τον ίδιο αριθμό, συγκρίνουμε το δεκαδικό μέρος. Τα δέκατα έχουν τον ίδιο αριθμό επομένως συγκρίνουμε τα εκατοστά όπου 7 > 5.

Εικόνα 5. Κείμενο υπενθύμισης του κανόνα σύγκρισης δεκαδικών αριθμών από το σχολικό βιβλίο

Τα κείμενα που χρησιμοποιήθηκαν στη διδακτική παρέμβαση, για την Ομάδα Παρέμβασης και για την Ομάδα Ελέγχου παρατίθενται στο Παράρτημα (βλ. Παράρτημα Β).

3.2.4. Ερευνητική διαδικασία

Τα τεστ τριών επιπέδων της έρευνας χορηγήθηκαν σε τρεις φάσεις. Το πρώτο τεστ δόθηκε στην πρώτη φάση στους μαθητές και των δύο ομάδων ως προ-έλεγχος για την διερεύνηση των παρανοήσεων στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών και των επιπέδων βεβαιότητας των απαντήσεων. Το δεύτερο τεστ δόθηκε στη δεύτερη φάση ως μετά-έλεγχος αμέσως μετά τη διδακτική παρέμβαση με ανατρεπτικό κείμενο στην Ομάδα Παρέμβασης και με ένα απλό κείμενο υπενθύμισης στην Ομάδα Ελέγχου. Στόχος της δεύτερης φάσης ήταν να διερευνηθεί ποια είναι η επίδραση της διδακτικής παρέμβασης στη μείωση των λάθων και ποια στα επίπεδα βεβαιότητας. Στην τρίτη φάση, δόθηκε το τεστ διατήρησης ως μεταγενέστερος έλεγχος στους μαθητές και των δύο ομάδων, προκειμένου να εξεταστεί εάν τα αποτελέσματα διατηρούνται και μετά από ένα μεγαλύτερο χρονικό διάστημα.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε μέσα στη σχολική αίθουσα, με παρουσία του εκπαιδευτικού της τάξης και η διάρκειά της ήταν περίπου μία διδακτική ώρα (45-50 λεπτά). Στην πρώτη φάση της έρευνας μοιράστηκε στους μαθητές το πρώτο τεστ του προ-ελέγχου. Αφού έλαβαν προφορικές οδηγίες για το τι έπρεπε να κάνουν, είχαν στη διάθεσή τους περίπου 15 λεπτά για να συμπληρώσουν το τεστ. Ο χρόνος ήταν αρκετός μιας και όλοι οι μαθητές ολοκλήρωσαν το τεστ μέσα στον χρόνο που είχαν. Μόλις τελείωσαν, τα τεστ μαζεύτηκαν, για να ξεκινήσει η διαδικασία της διδακτικής παρέμβασης, η οποία διήρκησε περίπου 20 λεπτά για την Ομάδα Παρέμβασης και 15 λεπτά για την Ομάδα Ελέγχου. Τόσο το ανατρεπτικό όσο και το κείμενο υπενθύμισης, δόθηκαν στους μαθητές σε έντυπη μορφή. Τους ζητήθηκε να το διαβάσουν σιωπηλά ο καθένας μόνος του. Όσον αφορά την Ομάδα Ελέγχου με το κείμενο υπενθύμισης, οι μαθητές το διάβασαν χωρίς να έχουν ιδιαίτερες απορίες. Στην Ομάδα Παρέμβασης με το ανατρεπτικό κείμενο οι μαθητές εξέφρασαν την απορία για τον τρόπο που ήταν γραμμένο, καθώς περιλάμβανε κείμενα μέσα σε πλαίσια με χρώμα. Χρειάστηκε λοιπόν να γίνουν κάποιες διευκρινίσεις ως προς τη δομή του και τον τρόπο που διαβάζεται. Ότι δηλαδή διαβάζουμε πρώτα το κείμενο στο κόκκινο πλαίσιο, και προχωρώντας δεξιά, όπως δείχνει το βέλος, διαβάζουμε το κείμενο στο μπλε πλαίσιο κ.ο.κ. Αφού ολοκλήρωσαν οι μαθητές την ανάγνωση, τα κείμενα μαζεύτηκαν. Κατόπιν, μοιράστηκε στους μαθητές και των δύο ομάδων το δεύτερο τεστ του μετα-ελέγχου, όπου και πάλι είχαν στη διάθεσή τους 15 λεπτά για να το συμπληρώσουν. Η έρευνα ολοκληρώθηκε περίπου έναν μήνα αργότερα, όταν οι μαθητές και των δύο ομάδων έλαβαν το τρίτο τεστ του μεταγενέστερου-ελέγχου για το οποίο ακολουθήθηκε η ίδια ακριβώς διαδικασία που περιγράφεται παραπάνω.

3.2.5. Ανάλυση αποτελεσμάτων

Σε αυτό το σημείο αξίζει να γίνει αναφορά στον τρόπο με τον οποίο αξιολογείται ένα τεστ τριών επιπέδων. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία οι απαντήσεις στα πρώτα δύο μέρη του χαρακτηρίζονται ως *σωστές* ή *λάθος* (Gurel, Eryilmaz & McDermott, 2015), ενώ στο τρίτο μέρος οι βεβαιότητες σε κάθε απάντηση βαθμολογούνται με βάση μια πεντάβαθμη κλίμακα, με τη βεβαιότητα από 3 και πάνω να θεωρείται *υψηλή* ενώ από 2 και κάτω *χαμηλή* (Durkin & Johnson, 2015).

Ανάλογα με τις απαντήσεις των μαθητών προκύπτει ένα τελικό αποτέλεσμα για την επίδοσή τους. Οι απαντήσεις κατηγοριοποιούνται ως *Μαθηματικώς ορθές* όταν είναι σωστά τα δύο πρώτα μέρη και υπάρχει υψηλή βεβαιότητα. Εάν τα δύο πρώτα μέρη είναι σωστά αλλά υπάρχει χαμηλή βεβαιότητα, τότε κατηγοριοποιείται ως *Ελλιπής γνώση*. Οι απαντήσεις κατηγοριοποιούνται ως *Παρανοήσεις* όταν τα δύο πρώτα μέρη είναι λανθασμένα και υπάρχει υψηλή βεβαιότητα για τις απαντήσεις ή όταν η απάντηση στο πρώτο μέρος είναι σωστή αλλά στο δεύτερο είναι λάθος (λάθος συλλογιστική) κι αυτό γιατί ερμηνεύεται ότι η αρχική σωστή απάντηση έγινε τυχαία. Αν τα πρώτα δύο μέρη έχουν απαντηθεί λανθασμένα αλλά η βεβαιότητα είναι χαμηλή, τότε η συνολική απάντηση κατηγοριοποιείται ως *Ελλιπής γνώση* (βλ. Πίνακα 1).

Πίνακας 1. Τρόπος αξιολόγησης ενός τεστ τριών επιπέδων

1ο μέρος	**2ο μέρος**	**3ο μέρος**	**Αποτέλεσμα**
Σωστή απάντηση	Σωστή απάντηση	Υψηλή βεβαιότητα	Μαθηματικώς ορθή γνώση
Σωστή απάντηση	Σωστή απάντηση	Χαμηλή βεβαιότητα	Ελλιπής γνώση
Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση	Υψηλή βεβαιότητα	Παρανόηση
Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση	Χαμηλή βεβαιότητα	Ελλιπής γνώση
Λάθος απάντηση	Λάθος απάντηση	Υψηλή βεβαιότητα	Παρανόηση
Λάθος απάντηση	Λάθος απάντηση	Χαμηλή βεβαιότητα	Ελλιπής γνώση

Σύμφωνα με τα παραπάνω, πραγματοποιήθηκε η ταξινόμηση των απαντήσεων των μαθητών και ακολούθησε η στατιστική τους ανάλυση, η οποία παρουσιάζεται παρακάτω.

4. Αποτελέσματα

Αρχικά, ελέγχθηκε η αξιοπιστία των τεστ, η οποία κρίνεται καλή (Cronbach's a>0,719) αφού η τιμή είναι μεγαλύτερη από 0,7. Επομένως ο δείκτης εσωτερικής συνοχής των κλιμάκων είναι αξιόπιστος και δεν χρειάστηκε να γίνει απαλοιφή στοιχείων.

Προ-έλεγχος

Στον Πίνακα 2 εμφανίζονται τα αποτελέσματα του πρώτου μέρους στο τεστ του προ-ελέγχου για την Ομάδα Παρέμβασης και την Ομάδα Ελέγχου. Σε αυτό το μέρος οι απαντήσεις των μαθητών χαρακτηρίστηκαν ως σωστές ή λανθασμένες, οπότε παρουσιάζονται οι συχνότητες και τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων και για τις δύο ομάδες. Πιο συγκεκριμένα, στον προ-έλεγχο στην Ομάδα Παρέμβασης το ποσοστό των σωστών απαντήσεων είναι 60,1%, ενώ στην Ομάδα Ελέγχου οι σωστές απαντήσεις εμφανίζονται σε ποσοστό 65,8%.

Πίνακας 2. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των σωστών απαντήσεων στον προ-έλεγχο ανά ομάδα

Ερωτήσεις	Σωστές απαντήσεις	
	ΟΠ(Ν=42)	ΟΕ (Ν=45)
Ερ.1 Πλήθος δεκ. ψηφίων	28 (66,7%)	29 (64,4%)
Ερ.2 Αξία θέσης μηδενός	25 (59,5%)	31 (68,9%)
Ερ.3 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη	21 (50%)	30 (66,7%)
Ερ.4 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη	20 (47,6%)	22 (48,9%)
Ερ.5 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη και ποσότητα (ευρώ)	28 (66,7%)	37 (82,2%)
Ερ.6 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη και ποσότητα (μέτρα)	21 (50%)	25 (55,6%)
Ερ.7 Αξία θέσης μηδενός με ποσότητα (κιλά)	29 (69%)	30 (66,7%)
Ερ.8 Πλήθος δεκ. ψηφίων με ποσότητα (λίτρα)	30 (71,4%)	33 (73,3%)
Σύνολο	202 (60,1%)	237 (65,8%)

Στο δεύτερο μέρος του τεστ του προ-ελέγχου, που αφορά τη συλλογιστική των απαντήσεων των μαθητών, εμφανίζονται περισσότερα λάθη σε σχέση με το πρώτο μέρος και αυτό γιατί μπορεί μια σωστή απάντηση στο πρώτο μέρος να επιλέχθηκε τυχαία. Στον Πίνακα 3 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι συχνότητες και τα ποσοστά των λανθασμένων συλλογιστικών για την Ομάδα Παρέμβασης και την Ομάδα Ελέγχου. Όσον αφορά την παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων, διαπιστώνεται πως οι περισσότεροι μαθητές θεωρούν μεγαλύτερο τον αριθμό που έχει περισσότερα δεκαδικά ψηφία με ποσοστό 38,1% για την Ομάδα Παρέμβασης και 28,3% για την Ομάδα Ελέγχου. Η παρανόηση ότι ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος συγκεντρώνει τα χαμηλότερα ποσοστά 8,9% για την Ομάδα Παρέμβασης και 13,3% για την Ομάδα Ελέγχου.

Πίνακας 3. Κατανομή λανθασμένων συλλογιστικών στην παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων στον προ-έλεγχο ανά ομάδα

Ερωτήσεις	ΟΠ (N=42)		ΟΕ (N=45)	
	Περισσότερα δεκ. ψηφία	Λιγότερα δεκ. ψηφία	Περισσότερα δεκ. ψηφία	Λιγότερα δεκ. ψηφία
Ερ.1 Πλήθος δεκ. ψηφίων	16 (38,1%)	4 (9,5%)	16 (35,6%)	6 (13,3%)
Ερ.3 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη	21 (50%)	3 (7,1%)	15 (33,3%)	10 (22,2%)
Ερ.5 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη και ποσότητα (ευρώ)	15 (35,7%)	5 (11,9%)	8 (17,8%)	3 (6,7%)
Ερ.8 Πλήθος δεκ. ψηφίων με ποσότητα (λίτρα)	12 (28,6%)	3 (7,1%)	12 (26,7%)	5 (11,1%)
Σύνολο	64 (38,1%)	15 (8,9%)	51 (28,3%)	24 (13,3%)

Αντίστοιχα, στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται τα ποσοστά λανθασμένων συλλογιστικών στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός στους δεκαδικούς αριθμούς στο τεστ του προ-ελέγχου και για τις δύο ομάδες. Τα περισσότερα λάθη οφείλονται στη συγκεκριμένη παρανόηση, με την Ομάδα Παρέμβασης να συγκεντρώνει 63,1% ποσοστό λαθών και την Ομάδα Ελέγχου 60,5%.

Πίνακας 4. Κατανομή λανθασμένων συλλογιστικών στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός στον προ-έλεγχο ανά ομάδα

Ερωτήσεις	ΟΠ (N=42)	ΟΕ (N=45)
Ερ.2 Αξία θέσης μηδενός	28 (66,7%)	29 (64,4%)
Ερ.4 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη	27 (64,3%)	30 (66,7%)
Ερ.6 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη και ποσότητα (μέτρα)	26 (61,9%)	26 (57,8%)
Ερ.7 Αξία θέσης μηδενός με ποσότητα (κιλά)	25 (59,5%)	24 (53,3%)
Σύνολο	106 (63,1%)	109 (60,5%)

Στο τρίτο μέρος του τεστ του προ-ελέγχου εξετάστηκε η βεβαιότητα των απαντήσεων των μαθητών μέσα από μια πεντάβαθμη κλίμακα όπου αντιστοιχούν τα εξής *[1] Καθόλου βέβαιος-α, [2] Λίγο βέβαιος-α, [3] Μέτρια βέβαιος-α, [4] Πολύ βέβαιος-α, [5] Απόλυτα βέβαιος-α*. Στον Πίνακα 5 παρουσιάζονται οι μέσοι όροι των επιπέδων βεβαιότητας των απαντήσεων των μαθητών, όπου και για τις δύο ομάδες οι βεβαιότητες θεωρούνται υψηλές σε όλες τις ερωτήσεις. Για την Ομάδα Παρέμβασης (ΜΟ=3,9 ΤΑ=0,9) και για την Ομάδα Ελέγχου (ΜΟ=3,7 ΤΑ=0,9).

Πίνακας 5. Μέσοι όροι των επιπέδων βεβαιότητας των απαντήσεων στον προ-έλεγχο ανά ομάδα

Ερωτήσεις	ΟΠ (Ν=42)		ΟΕ (Ν=45)	
	ΜΟ	ΤΑ	ΜΟ	ΤΑ
Ερ.1 Πλήθος δεκ. ψηφίων	4	0,9	3,7	0,9
Ερ.2 Αξία θέσης μηδενός	3,7	1	3,6	0,8
Ερ.3 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη	3,9	0,8	3,5	1,1
Ερ.4 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη	3,9	0,9	3,6	1
Ερ.5 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη και ποσότητα (ευρώ)	4	0,9	3,9	0,9
Ερ.6 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη και ποσότητα (μέτρα)	3,5	1	3,9	0,9
Ερ.7 Αξία θέσης μηδενός με ποσότητα (κιλά)	4	0,8	3,8	0,9
Ερ.8 Πλήθος δεκ. ψηφίων με ποσότητα (λίτρα)	4	0,9	3,9	0,9
Σύνολο	3,9	0,9	3,7	0,9

Όπως προαναφέρθηκε στην ανάλυση των αποτελεσμάτων (βλ. Πίνακα 1), αναλόγως με την επίδοση των μαθητών στα έργα του πρώτου και δεύτερου μέρους αλλά και της βεβαιότητας στο τρίτο μέρος, η γνώση τους κατατάσσεται στις εξής κατηγορίες: *Μαθηματικώς ορθή γνώση, Ελλιπής γνώση* και *Παρανόηση*. Ο Πίνακας 6 παρουσιάζει τις συχνότητες και τα ποσοστά κατηγοριοποίησης της γνώσης στον έλεγχο της παρανόησης του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων στο τεστ του προ-ελέγχου για τις δύο ομάδες. Η Ομάδα Παρέμβασης πετυχαίνει την *μαθηματικώς ορθή γνώση*, δηλαδή σωστές απαντήσεις στα έργα και στη συλλογιστική με υψηλή βεβαιότητα σε ποσοστό 53%, ενώ η Ομάδα Ελέγχου σε ποσοστό 55,4%. *Ελλιπή γνώση*, δηλαδή λανθασμένες απαντήσεις στα έργα και στη συλλογιστική με χαμηλή βεβαιότητα συγκεντρώνει το 4,2% για την Ομάδα Παρέμβασης και το 8,9% για την Ομάδα Ελέγχου. Σε αυτό το σημείο, αξίζει να τονιστεί ότι υπήρξαν μόλις πέντε μαθητές, δύο από την Ομάδα Παρέμβασης και τρεις από την Ομάδα Ελέγχου, οι οποίοι κατατάσσονται στην ελλιπή γνώση, επειδή είχαν σωστές απαντήσεις στα δύο πρώτα επίπεδα με χαμηλή όμως βεβαιότητα. Αυτό εμφανίστηκε μόνο στο στάδιο του προ-ελέγχου σε λίγες μόνο ερωτήσεις. Τέλος *παρανόηση*, δηλαδή λανθασμένες απαντήσεις στα έργα και στη συλλογιστική με υψηλή βεβαιότητα εμφανίζει η Ομάδα Παρέμβασης με ποσοστό 42,8% και η Ομάδα Ελέγχου με ποσοστό 35,5%.

Πίνακας 6. Κατανομή της επίδοσης στην παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων στον προ-έλεγχο ανά ομάδα

Ερωτήσεις	ΟΠ (N=42)			ΟΕ (N=45)		
	Μαθηματικώς ορθή γνώση	Ελλιπής γνώση	Παρανόηση	Μαθηματικώς ορθή γνώση	Ελλιπής γνώση	Παρανόηση
Ερ.1 Πλήθος δεκ. ψηφίων	23 (54,8%)	2 (4,8%)	17 (40,5%)	21 (46,7%)	3 (6,7%)	21 (46,7%)
Ερ.3 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη	18 (42,9%)	1 (2,4%)	23 (54,8%)	20 (44%)	7(15,6%)	18 (40%)
Ερ.5 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη και ποσότητα (ευρώ)	22 (52,4%)	2 (4,8%)	18 (42,9%)	32 (71,1%)	3 (6,7%)	10 (22,2%)
Ερ.8 Πλήθος δεκ. ψηφίων με ποσότητα (λίτρα)	26 (61,9%)	2 (4,8%)	14 (33,3%)	27 (60%)	3 (6,7%)	15 (33,3%)
Σύνολο	89 (53%)	7 (4,2%)	72 (42,8%)	100 (55,4%)	16(8,9%)	64 (35,5%)

Αντίστοιχα, ο Πίνακας 7 παρουσιάζει τις συχνότητες και τα ποσοστά κατηγοριοποίησης της γνώσης στον έλεγχο της παρανόησης της αξίας θέσης του μηδενός στο τεστ του προ-ελέγχου για τις δύο ομάδες. Η Ομάδα Παρέμβασης πετυχαίνει την *μαθηματικώς ορθή γνώση*, δηλαδή σωστές απαντήσεις στα έργα και στη συλλογιστική με υψηλή βεβαιότητα σε ποσοστό 36,3%, ενώ η Ομάδα Ελέγχου σε ποσοστό 38,8%. *Ελλιπή γνώση*, δηλαδή λανθασμένες απαντήσεις στα έργα και στη συλλογιστική με χαμηλή βεβαιότητα συγκεντρώνει το 9,5% για την Ομάδα Παρέμβασης και το 7,2% για την Ομάδα Ελέγχου. Τέλος, *παρανόηση* δηλαδή λανθασμένες απαντήσεις στα έργα και στη συλλογιστική με υψηλή βεβαιότητα εμφανίζει η Ομάδα Παρέμβασης με ποσοστό 54,1% και η Ομάδα Ελέγχου με ποσοστό 53,9%.

Πίνακας 7. Κατανομή της επίδοσης στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός στον προ-έλεγχο ανά ομάδα

Ερωτήσεις	ΟΠ (N=42)			ΟΕ (N=45)		
	Μαθηματικώς ορθή γνώση	Ελλιπής γνώση	Παρανόηση	Μαθηματικώς ορθή γνώση	Ελλιπής γνώση	Παρανόηση
Ερ.2 Αξία θέσης μηδενός	14 (33,3%)	5(11,9%)	23 (54,8%)	16 (35,6%)	2 (4,4%)	27 (60%)
Ερ.4 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη	15 (35,7%)	2 (4,8%)	25 (59,5%)	15 (33,3%)	4(8,9%)	26 (57,8%)
Ερ.6 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη και ποσότητα (μέτρα)	15 (35,7%)	7(16,7%)	20 (47,6%)	19 (42,2%)	4(8,9%)	22 (48,9%)
Ερ.7 Αξία θέσης μηδενός με ποσότητα (κιλά)	17 (40,5%)	2 (4,8%)	23 (54,8%)	20 (44,4%)	3 (6,7%)	22 (48,9%)
Σύνολο	61 (36,3%)	16(9,5%)	91 (54,1%)	70 (38,8%)	13(7,2%)	97 (53,9%)

Μετά-έλεγχος

Στον Πίνακα 8 εμφανίζονται τα αποτελέσματα του πρώτου μέρους του τεστ του μετα-ελέγχου για την Ομάδα Παρέμβασης και την Ομάδα Ελέγχου. Στο στάδιο του μετα-ελέγχου που πραγματοποιήθηκε αμέσως μετά τη διδακτική παρέμβαση, φαίνεται πως τα λάθη μειώθηκαν και στις δύο ομάδες. Πιο αναλυτικά, για την Ομάδα Παρέμβασης το ποσοστό των σωστών απαντήσεων είναι 78,8% ενώ στην Ομάδα Ελέγχου οι σωστές απαντήσεις εμφανίζονται σε ποσοστό 72,7%.

Πίνακας 8. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των σωστών απαντήσεων στον μετα-έλεγχο ανά ομάδα

Ερωτήσεις	Σωστές απαντήσεις	
	ΟΠ(N=42)	ΟΕ(N=45)
Ερ.1 Πλήθος δεκ. ψηφίων	36 (85,7%)	34 (75,6%)
Ερ.2 Αξία θέσης μηδενός	33 (78,6%)	29 (64,4%)
Ερ.3 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη	33 (78,6%)	37 (82,2%)
Ερ.4 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη	26 (61,9%)	25 (55,6%)
Ερ.5 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη και ποσότητα (ευρώ)	36 (85,7%)	39 (86,7%)
Ερ.6 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη και ποσότητα (μέτρα)	31 (73,8%)	26 (57,8%)
Ερ.7 Αξία θέσης μηδενός με ποσότητα (κιλά)	33 (78,6%)	34 (75,6%)
Ερ.8 Πλήθος δεκ. ψηφίων με ποσότητα (λίτρα)	37 (88,1%)	38 (84,4%)
Σύνολο	265 (78,8%)	262 (72,7%)

Στο δεύτερο μέρος του τεστ του μετα-ελέγχου που αφορά τη συλλογιστική των απαντήσεων των μαθητών, παρουσιάζονται στον Πίνακα 9 οι συχνότητες και τα ποσοστά των λανθασμένων συλλογιστικών για την Ομάδα Παρέμβασης και την Ομάδα Ελέγχου. Είναι εμφανές, ότι τα λάθη των μαθητών έχουν μειωθεί σημαντικά σε σχέση με το στάδιο του προ-ελέγχου και για τις δύο ομάδες. Όσον αφορά την παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων, διαπιστώνεται πως οι περισσότεροι μαθητές θεωρούν μεγαλύτερο τον αριθμό που έχει περισσότερα δεκαδικά ψηφία με ποσοστό 16,6% για την Ομάδα Παρέμβασης και 17,7% για την Ομάδα Ελέγχου. Η παρανόηση ότι ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος συγκεντρώνει και σε αυτό το στάδιο τα χαμηλότερα ποσοστά 3,6% για την Ομάδα Παρέμβασης και 10,5% για την Ομάδα Ελέγχου.

Πίνακας 9. Κατανομή λανθασμένων συλλογιστικών στην παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων στον μετα-έλεγχο ανά ομάδα

Ερωτήσεις	ΟΠ (N=42)		ΟΕ (N=45)	
	Περισσότερα δεκ. ψηφία	Λιγότερα δεκ. ψηφία	Περισσότερα δεκ. ψηφία	Λιγότερα δεκ. ψηφία
Ερ.1 Πλήθος δεκ. ψηφίων	7 (16,6%)	1 (2,4%)	11 (24,4%)	2 (4,4%)
Ερ.3 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη	9 (21,4%)	-	8 (17,8%)	7 (15,6%)
Ερ.5 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη και ποσότητα (ευρώ)	7 (16,7%)	-	6 (13,3%)	4 (8,9%)
Ερ.8 Πλήθος δεκ. ψηφίων με ποσότητα (λίτρα)	5 (11,9%)	2 (4,8%)	7 (15,6%)	6 (13,3%)
Σύνολο	28 (16,6%)	3 (3,6%)	32 (17,7%)	19 (10,%)

Όμοια, στον Πίνακα 10 παρουσιάζονται οι συχνότητες και τα ποσοστά λανθασμένων συλλογιστικών στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός στο τεστ του μετα-ελέγχου και για τις δύο ομάδες. Φαίνεται πως τα περισσότερα λάθη και στο στάδιο του μετα-ελέγχου εντοπίζονται στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός στους δεκαδικούς αριθμούς, με την Ομάδα Παρέμβασης να συγκεντρώνει 37,5% ποσοστό λαθών και την Ομάδα Ελέγχου 48,87%.

Πίνακας 10. Κατανομή λανθασμένων συλλογιστικών στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός στον μετα-έλεγχο ανά ομάδα

Ερωτήσεις	ΟΠ (N=42)	ΟΕ (N=45)
Ερ.2 Αξία θέσης μηδενός	16 (38,1%)	22 (48,9%)
Ερ.4 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη	18 (42,9%)	24 (53,3%)
Ερ.6 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη και ποσότητα (μέτρα)	14 (33,3%)	23 (51,1%)
Ερ.7 Αξία θέσης μηδενός με ποσότητα (κιλά)	15 (35,7%)	19 (42,2%)
Σύνολο	63 (37,5%)	88 (48,87%)

Στο τρίτο μέρος του τεστ του μετα-ελέγχου τα επίπεδα βεβαιότητας των απαντήσεων είναι ακόμα υψηλότερα μετά τη διδακτική παρέμβαση και για τις δύο ομάδες. Στον Πίνακα 11 παρουσιάζονται οι μέσοι όροι των επιπέδων βεβαιότητας των απαντήσεων των μαθητών, για την Ομάδα Παρέμβασης (ΜΟ=4,3 ΤΑ=0,7) και για την Ομάδα Ελέγχου (ΜΟ=4,1 ΤΑ= 0,7).

Πίνακας 11. Μέσοι όροι των επιπέδων βεβαιότητας των απαντήσεων στον μετα-έλεγχο ανά ομάδα

Ερωτήσεις	ΟΠ (Ν=42)		ΟΕ (Ν=45)	
	ΜΟ	ΤΑ	ΜΟ	ΤΑ
Ερ.1 Πλήθος δεκ. ψηφίων	4,4	0,8	4,3	0,6
Ερ.2 Αξία θέσης μηδενός	4,3	0,7	4,1	0,7
Ερ.3 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη	4,1	0,9	4,1	0,7
Ερ.4 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη	4,2	0,8	4,1	0,7
Ερ.5 Πλήθος δεκ. Ψηφίων με διάταξη και ποσότητα (ευρώ)	4,4	0,7	4,2	0,7
Ερ.6 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη και ποσότητα (μέτρα)	4,3	0,7	4,1	0,8
Ερ.7 Αξία θέσης μηδενός με ποσότητα (κιλά)	4,4	0,6	4,2	0,7
Ερ.8 Πλήθος δεκ. ψηφίων με ποσότητα (λίτρα)	4,4	0,6	4,2	0,7
Σύνολο	4,3	0,7	4,1	0,7

Σχετικά με την κατηγοριοποίηση της γνώσης ο Πίνακας 12 παρουσιάζει τις συχνότητες και τα ποσοστά στον έλεγχο της παρανόησης του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων για τις δύο ομάδες στο τεστ του μετα-ελέγχου. Η Ομάδα Παρέμβασης πετυχαίνει την *μαθηματικώς ορθή γνώση,* δηλαδή σωστές απαντήσεις στα έργα και στη συλλογιστική με υψηλή βεβαιότητα σε ποσοστό 80,4%, ενώ η Ομάδα Ελέγχου σε ποσοστό 71,1%. *Ελλιπή γνώση*, δηλαδή λανθασμένες απαντήσεις στα έργα και στη συλλογιστική με χαμηλή βεβαιότητα συγκεντρώνει το 4,7% για την Ομάδα Παρέμβασης ενώ στην Ομάδα Ελέγχου κανένας μαθητής δεν εμφάνισε *ελλιπή γνώση*, δηλαδή λάθη χαμηλής βεβαιότητας στη φάση του μετα-ελέγχου. Τέλος *παρανόηση,* δηλαδή λανθασμένες απαντήσεις στα έργα και στη συλλογιστική με υψηλή βεβαιότητα εμφανίζει η Ομάδα Παρέμβασης με ποσοστό 17,2% και η Ομάδα Ελέγχου με ποσοστό 28,8%.

Πίνακας 12. Κατανομή της επίδοσης στην παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών στον μετα-έλεγχο ανά ομάδα

Ερωτήσεις	ΟΠ (N=42)			ΟΕ (N=45)		
	Μαθηματικώς ορθή γνώση	Ελλιπής γνώση	Παρανόηση	Μαθηματικώς ορθή γνώση	Ελλιπής γνώση	Παρανόηση
Ερ.1 Πλήθος δεκ. ψηφίων	34 (81%)	1 (2,4%)	7 (16,7%)	32 (71,1%)	-	13 (28,9%)
Ερ.3 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη	33 (78,6%)	3 (7,1%)	6 (14,3%)	30 (66,7%)	-	15 (33,3%)
Ερ.5 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη και ποσότητα (ευρώ)	34 (81%)	-	8 (19%)	34 (75,6%)	-	11 (24,4%)
Ερ.8 Πλήθος δεκ. ψηφίων με ποσότητα (λίτρα)	34 (81%)	-	8 (19%)	32 (71,1%)	-	13 (28,9%)
Σύνολο	135 (80,4%)	4 (4,7%)	29 (17,2%)	128 (71,1%)	-	52 (28,8%)

Αντίστοιχα, ο Πίνακας 13 παρουσιάζει τις συχνότητες και τα ποσοστά κατηγοριοποίησης της γνώσης στον έλεγχο της παρανόησης της αξίας θέσης του μηδενός για τις δύο ομάδες στο τεστ του μετα-ελέγχου. Η Ομάδα Παρέμβασης πετυχαίνει την *μαθηματικώς ορθή γνώση,* δηλαδή σωστές απαντήσεις στα έργα και στη συλλογιστική με υψηλή βεβαιότητα σε ποσοστό 62,5%, ενώ η Ομάδα Ελέγχου σε ποσοστό 50,5%. *Ελλιπή γνώση*, δηλαδή λανθασμένες απαντήσεις στα έργα και στη συλλογιστική με χαμηλή βεβαιότητα για την Ομάδα Παρέμβασης δεν εμφανίζεται στη φάση του μετα-ελέγχου ενώ για την Ομάδα Ελέγχου το ποσοστό είναι 2,9%. Τέλος *παρανόηση*, δηλαδή λανθασμένες απαντήσεις στα έργα και στη συλλογιστική με υψηλή βεβαιότητα εμφανίζει η Ομάδα Παρέμβασης με ποσοστό 37,5% και η Ομάδα Ελέγχου με ποσοστό 47,2%.

Πίνακας 13. Κατανομή της επίδοσης στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός στον μετα-έλεγχο ανά ομάδα

Ερωτήσεις	ΟΠ (N=42)			ΟΕ (N=45)		
	Μαθηματικώς ορθή γνώση	Ελλιπής γνώση	Παρανόηση	Μαθηματικώς ορθή γνώση	Ελλιπής γνώση	Παρανόηση
Ερ.2 Αξία θέσης	26 (61,9%)	-	16 (38,1%)	23 (51,1%)	-	22 (48,9%)
Ερ.4 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη	24 (57,1%)	-	18 (42,9%)	20 (44,4%)	1(2,2%)	24 (53,3%)
Ερ.6 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη και ποσότητα (μέτρα)	28 (66,7%)	-	14 (33,3%)	22 (48,9%)	2 (4,4%)	21 (46,7%)
Ερ.7 Αξία θέσης μηδενός με ποσότητα (κιλά)	27 (64,3%)	-	15 (35,7%)	26 (57,8%)	1(2,2%)	18 (40%)
Σύνολο	105 (62,5%)	-	63 (37,5%)	91 (50,5%)	4(2,9%)	85 (47,2%)

Μεταγενέστερος-έλεγχος

Ο έλεγχος διατήρησης πραγματοποιήθηκε περίπου έναν μήνα μετά τη διδακτική παρέμβαση και τα αποτελέσματα του πρώτου μέρους του τεστ του μεταγενέστερου-ελέγχου, όπως παρουσιάζονται στον Πίνακα 14, δείχνουν για την Ομάδα Παρέμβασης ποσοστό σωστών απαντήσεων 75,6% και η Ομάδα Ελέγχου εμφανίζει ποσοστό σωστών απαντήσεων 65,5%.

Πίνακας 14. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των σωστών απαντήσεων στον μεταγενέστερο-έλεγχο ανά ομάδα

Ερωτήσεις	Σωστές απαντήσεις	
	ΟΠ(Ν=42)	ΟΕ(Ν=45)
Ερ.1 Πλήθος δεκ. ψηφίων	34 (81%)	35 (77,8%)
Ερ.2 Αξία θέσης μηδενός	31 (73,8%)	25 (55,6%)
Ερ.3 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη	33 (78,6%)	32 (71,1%)
Ερ.4 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη	22 (52,4%)	17 (37,8%)
Ερ.5 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη και ποσότητα (ευρώ)	37 (88,1%)	39 (86,7%)
Ερ.6 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη και ποσότητα (μέτρα)	26 (61,9%)	19 (42,2%)
Ερ.7 Αξία θέσης μηδενός με ποσότητα (κιλά)	33 (78,6%)	30 (66,7%)
Ερ.8 Πλήθος δεκ. ψηφίων με ποσότητα (λίτρα)	38 (90,5%)	39 (86,7%)
Σύνολο	254 (75,6%)	236 (65,5%)

Όσον αφορά τη συλλογιστική στο δεύτερο μέρος του τεστ του μεταγενέστερου-ελέγχου παρουσιάζονται στον Πίνακα 15 οι συχνότητες και τα ποσοστά των λανθασμένων συλλογιστικών. Όσον αφορά την παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων, διαπιστώνεται πως οι περισσότεροι μαθητές θεωρούν μεγαλύτερο τον αριθμό που έχει περισσότερα δεκαδικά ψηφία με ποσοστό 17,2% για την Ομάδα Παρέμβασης και 19,2% για την Ομάδα Ελέγχου. Η παρανόηση ότι ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος συγκεντρώνει και σε αυτή την περίπτωση τα χαμηλότερα ποσοστά 4,8% για την Ομάδα Παρέμβασης και 12,2% για την Ομάδα Ελέγχου.

Πίνακας 15. Κατανομή λανθασμένων συλλογιστικών στην παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων στον μεταγενέστερο-έλεγχο ανά ομάδα

Ερωτήσεις	ΟΠ (N=42)		ΟΕ (N=45)	
	Περισσότερα δεκ. ψηφία	Λιγότερα δεκ. ψηφία	Περισσότερα δεκ. ψηφία	Λιγότερα δεκ. ψηφία
Ερ.1 Πλήθος δεκ. ψηφίων	9 (21,4%)	2 (4,8%)	10 (22,%)	4 (8,9%)
Ερ.3 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη	9 (21,4%)	-	13 (28,9%)	6 (13,3%)
Ερ.5 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη και ποσότητα (ευρώ)	5 (11,9%)	2 (4,8%)	6 (13,3%)	5 (11,1%)
Ερ.8 Πλήθος δεκ. ψηφίων με ποσότητα (λίτρα)	6 (14,3%)	2 (4,8%)	6 (13,3%)	7 (15,6%)
Σύνολο	29 (17,2%)	6 (4,8%)	35 (19,4%)	22 (12,2%)

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 16 στο τεστ του μεταγενέστερου-ελέγχου τα περισσότερα λάθη εντοπίζονται στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός στους δεκαδικούς αριθμούς με την Ομάδα Παρέμβασης να συγκεντρώνει 42,8% ποσοστό λαθών και την Ομάδα Ελέγχου 62,2%.

Πίνακας 16. Κατανομή λανθασμένων συλλογιστικών στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός στον μεταγενέστερο-έλεγχο ανά ομάδα

Ερωτήσεις	ΟΠ (N=42)	ΟΕ (N=45)
Ερ.2 Αξία θέσης μηδενός	16 (38,1%)	25 (55,6%)
Ερ.4 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη	22 (52,4%)	33 (73,3%)
Ερ.6 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη και ποσότητα (μέτρα)	20 (47,6%)	31 (68,9%)
Ερ.7 Αξία θέσης μηδενός με ποσότητα (κιλά)	14 (33,3%)	23 (51,1%)
Σύνολο	72 (42,8%)	112 (62,2%)

Στο τρίτο μέρος του τεστ του μεταγενέστερο-ελέγχου τα επίπεδα βεβαιότητας των απαντήσεων διατηρούνται σε υψηλά επίπεδα και για τις δύο ομάδες. Στον Πίνακα 17 παρουσιάζονται οι μέσοι όροι των επιπέδων βεβαιότητας των απαντήσεων των μαθητών για την Ομάδα Παρέμβασης (ΜΟ=4,6 ΤΑ=0,5) και για την Ομάδα Ελέγχου (ΜΟ=4,3 ΤΑ= 0,7).

Πίνακας 17. Μέσοι όροι των επιπέδων βεβαιότητας των απαντήσεων στον μεταγενέστερο-έλεγχο ανά ομάδα

Ερωτήσεις	ΟΠ (Ν=42)		ΟΕ (Ν=45)	
	ΜΟ	ΤΑ	ΜΟ	ΤΑ
Ερ.1 Πλήθος δεκ. ψηφίων	4,6	0,5	4,3	0,7
Ερ.2 Αξία θέσης μηδενός	4,6	0,5	4,2	0,8
Ερ.3 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη	4,5	0,5	4,2	0,8
Ερ.4 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη	4,5	0,5	4,2	0,8
Ερ.5 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη και ποσότητα (ευρώ)	4,6	0,5	4,4	0,7
Ερ.6 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη και ποσότητα (μέτρα)	4,5	0,5	4,3	0,7
Ερ.7 Αξία θέσης μηδενός με ποσότητα (κιλά)	4,7	0,4	4,4	0,6
Ερ.8 Πλήθος δεκ. Ψηφίων με ποσότητα (λίτρα)	4,8	0,3	4,4	0,6
Σύνολο	4,6	0,5	4,3	0,7

Σχετικά με την κατηγοριοποίηση της γνώσης ο Πίνακας 18 παρουσιάζει τις συχνότητες και τα ποσοστά στον έλεγχο της παρανόησης του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων για τις δύο ομάδες στο τεστ του μεταγενέστερου ελέγχου. Η Ομάδα Παρέμβασης πετυχαίνει την *μαθηματικώς ορθή γνώση*, δηλαδή σωστές απαντήσεις στα έργα και στη συλλογιστική με υψηλή βεβαιότητα σε ποσοστό 80,6%, ενώ η Ομάδα Ελέγχου σε ποσοστό 66,6%. *Ελλιπή γνώση,* δηλαδή λανθασμένες απαντήσεις στα έργα και στη συλλογιστική με χαμηλή βεβαιότητα δεν εμφανίζεται στη φάση του μεταγενέστερου-ελέγχου σε καμία από τις δύο ομάδες. Τέλος *παρανόηση*, δηλαδή λανθασμένες απαντήσεις στα έργα και στη συλλογιστική με υψηλή βεβαιότητα εμφανίζει η Ομάδα Παρέμβασης με ποσοστό 20,8% και η Ομάδα Ελέγχου με ποσοστό 33,3%.

Πίνακας 18. Κατανομή της επίδοσης στην παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων στον μεταγενέστερο-έλεγχο ανά ομάδα

Ερωτήσεις	ΟΠ (N=42)			ΟΕ (N=45)		
	Μαθηματικώς ορθή γνώση	Ελλιπής γνώση	Παρανόηση	Μαθηματικώς ορθή γνώση	Ελλιπής γνώση	Παρανόηση
Ερ.1 Πλήθος δεκ. ψηφίων	31 (79,8%)	-	11 (26,2%)	30 (66,7%)	-	15 (33,3%)
Ερ.3 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη	33 (78,6%)	-	9 (21,4%)	26 (57,8%)	-	19 (42,2%)
Ερ.5 Πλήθος δεκ. ψηφίων με διάταξη και ποσότητα (ευρώ)	35 (83,3%)	-	7 (16,7%)	33 (73,3%)	-	12 (26,7%)
Ερ.8 Πλήθος δεκ. ψηφίων με ποσότητα (λίτρα)	34 (81%)	-	8 (19%)	31 (68,9%)	-	14 (31,1%)
Σύνολο	133 (80,6%)	-	35 (20,8%)	120 (66,6%)	-	60 (33,3%)

Αντίστοιχα, ο Πίνακας 19 παρουσιάζει τις συχνότητες και τα ποσοστά κατηγοριοποίησης της γνώσης στον έλεγχο της παρανόησης της αξίας θέσης του μηδενός για τις δύο ομάδες στο τεστ του μεταγενέστερου-ελέγχου. Η Ομάδα Παρέμβασης πετυχαίνει την *μαθηματικώς ορθή γνώση*, δηλαδή σωστές απαντήσεις στα έργα και στη συλλογιστική με υψηλή βεβαιότητα σε ποσοστό 56,5%, ενώ η Ομάδα Ελέγχου σε ποσοστό 37,2%. *Ελλιπή γνώση,* δηλαδή λανθασμένες απαντήσεις στα έργα και στη συλλογιστική με χαμηλή βεβαιότητα δεν εμφανίζεται στη φάση του μεταγενέστερου-ελέγχου σε καμία από τις δύο ομάδες. Τέλος *παρανόηση*, δηλαδή λανθασμένες απαντήσεις στα έργα και στη συλλογιστική με υψηλή βεβαιότητα εμφανίζει η Ομάδα Παρέμβασης με ποσοστό 43,4% και η Ομάδα Ελέγχου με ποσοστό 62,7%.

Πίνακας 19. Κατανομή της επίδοσης στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός στον μεταγενέστερο-έλεγχο ανά ομάδα

Ερωτήσεις	ΟΠ (N=42)			ΟΕ (N=45)		
	Μαθηματικώς ορθή γνώση	Ελλιπής γνώση	Παρανόηση	Μαθηματικώς ορθή γνώση	Ελλιπής γνώση	Παρανόηση
Ερ.2 Αξία θέσης μηδενός	25 (59,5%)	-	17 (40,5%)	19 (42,2%)	-	26 (57,8%)
Ερ.4 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη	20 (47,6%)	-	22 (52,4%)	12 (26,7%)	-	33 (73,3%)
Ερ.6 Αξία θέσης μηδενός με διάταξη και ποσότητα (μέτρα)	22 (52,4%)	-	20 (47,6%)	14 (31,1%)	-	31 (68,9%)
Ερ.7 Αξία θέσης μηδενός με ποσότητα (κιλά)	28 (66,7%)	-	14 (33,3%)	22 (48,9%)	-	23 (51,1%)
Σύνολο	95 (56,5%)	-	73 (43,4%)	67 (37,2%)	-	113(62,7%)

Λάθη υψηλής βεβαιότητας

Όπως προαναφέρθηκε τα λάθη υψηλής βεβαιότητας κατηγοριοποιήθηκαν ως *Παρανοήσεις*. Για μια πληρέστερη εικόνα του πώς διαμορφώθηκαν τα συγκεκριμένα λάθη για τις δύο ομάδες και στις τρεις φάσεις της μελέτης, παρουσιάζονται παρακάτω συγκεντρωτικοί πίνακες των συχνοτήτων των παρανοήσεων και των μέσων όρων των βεβαιοτήτων τους.

Όσον αφορά την παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων, ο Πίνακας 20 παρουσιάζει τις συνολικές συχνότητες των λαθών υψηλής βεβαιότητας στις τρεις φάσεις της έρευνας και για τις δύο ομάδες. Εφαρμόστηκε ο έλεγχος χ^2 για να ελεγχθεί αν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στις συχνότητες εμφάνισης των λαθών υψηλής βεβαιότητας ανά φάση έρευνας. Η Ομάδα Παρέμβασης, πέτυχε στατιστικώς σημαντική μείωση των λαθών στον μετά-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο $\chi^2(42)=0{,}001$ $p<0{,}05$, ενώ η αύξηση των λαθών στον μεταγενέστερο-έλεγχο σε σχέση με τον μετα-έλεγχο φάνηκε να μην είναι στατιστικώς σημαντική $\chi^2(42)=0{,}31$ $p>0{,}05$. Εξίσου στατιστικά σημαντική διαφορά βρέθηκε στη μείωση των λαθών στον μεταγενέστερο-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο $\chi^2(42)=0{,}001$ $p<0{,}05$. Όσον αφορά την Ομάδα Ελέγχου, εμφανίστηκε στατιστικά σημαντική μείωση των λαθών υψηλής βεβαιότητας στον μετά-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο $\chi^2(45)=0{,}005$ $p<0{,}05$. Όμως στατιστικώς σημαντική ήταν και η αύξηση των λαθών στον μεταγενέστερο-έλεγχο σε σχέση με τον μετα-έλεγχο $\chi^2(45)=0{,}011$ $p<0{,}05$, ενώ δεν υπήρξε στατιστικά σημαντική διαφορά στη μείωση των λαθών υψηλής βεβαιότητας στον μεταγενέστερο-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο $\chi^2(45)=0{,}161$ *p>0,05*.

Πίνακας 20. Συχνότητες λαθών υψηλής βεβαιότητας στην παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων ανά ομάδα και ανά φάση έρευνας

	Προ-έλεγχος	Μετα-έλεγχος	Μεταγενέστερος έλεγχος
ΟΠ	72 (42,8%)	29 (17,2%)	35 (20,8%)
ΟΕ	64 (35,5%)	52 (28,8%)	60 (33,3%)

Αναφορικά με τους μέσους όρους των βεβαιοτήτων των λαθών στην παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων, οι οποίοι παρουσιάζονται στον Πίνακα 21, παρουσιάστηκε στατιστικά σημαντική διαφορά στους μέσους όρους σε όλες τις φάσεις της έρευνας για την Ομάδα Παρέμβασης. Συγκεκριμένα, φάνηκε στατιστικά σημαντική αύξηση των επιπέδων βεβαιότητας στον μετα-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο t(42)=9,09 *p=0,012* στον μεταγενέστερο-έλεγχο σε σχέση με τον μετά-έλεγχο t(42)=19,675 *p=0,003* και στον μεταγενέστερο-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο t(42)=13,618 *p=0,005*. Τα αποτελέσματα ήταν παρόμοια και για την Ομάδα Ελέγχου, δείχνοντας στατιστικά σημαντική αύξηση των επιπέδων βεβαιότητας στον μετα-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο t(45)=7,191 *p=0,019,* στον μεταγενέστερο-έλεγχο σε σχέση με τον μετα-έλεγχο t(45)=9,572 *p=0,011* αλλά και στον μεταγενέστερο-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο t(45)=9,431 *p=0,011*.

Πίνακας 21. Μέσοι όροι βεβαιοτήτων των λαθών στην παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων ανά ομάδα και ανά φάση έρευνας

	Προ-έλεγχος		Μετα-έλεγχος		Μεταγενέστερος έλεγχος	
	ΜΟ	ΤΑ	ΜΟ	ΤΑ	ΜΟ	ΤΑ
ΟΠ	3,7	0,8	3,9	0,7	4,3	0,5
ΟΕ	3,5	0,7	3,9	0,7	4,2	0,7

Αντίστοιχα, ο Πίνακας 22 παρουσιάζει συγκεντρωτικά τις συνολικές συχνότητες παρανοήσεων, δηλαδή των λαθών υψηλής βεβαιότητας των δύο ομάδων στις τρεις φάσεις της έρευνας για την παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός. Ο έλεγχος χ^2 που εφαρμόστηκε για να ελεγχθεί αν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στις συχνότητες εμφάνισης των λαθών υψηλής βεβαιότητας ανά φάση έρευνας, έδειξε για την Ομάδα Παρέμβασης, στατιστικά σημαντική μείωση των λαθών στον μετά-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο $\chi^2(42)=0{,}017$

p<0,05. Η αύξηση των λαθών που εμφανίστηκε στη φάση του μεταγενέστερου-ελέγχου σε σχέση με τον μετα-έλεγχο βρέθηκε να μην είναι στατιστικώς σημαντική $\chi^2(42)=0{,}07$ *p>0,05,* ενώ η μείωση των λαθών στον μεταγενέστερο-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο ήταν στατιστικώς σημαντική $\chi^2(42)=0{,}004$ *p<0,05*. Η Ομάδα Ελέγχου πέτυχε στατιστικά σημαντική μείωση στα λάθη στον μετά-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο $\chi^2(45)=0{,}041$ *p<0,05* αλλά και στατιστικώς σημαντική αύξηση των λαθών στον μεταγενέστερο-έλεγχο σε σχέση με τον μετα-έλεγχο $\chi^2(45)=0{,}048$ *p<0,05*, ενώ δεν υπήρξε στατιστικά σημαντική διαφορά στη μείωση των λαθών υψηλής βεβαιότητας στον μεταγενέστερο-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο $\chi^2(45)=0{,}127$ *p>0,05*.

Πίνακας 22. Συχνότητες λαθών υψηλής βεβαιότητας στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός ανά ομάδα και ανά φάση έρευνας

	Προ-έλεγχος	Μετα-έλεγχος	Μεταγενέστερος έλεγχος
ΟΠ	91 (54,1%)	63 (37,5%)	73 (43,4%)
ΟΕ	97 (53,9%)	85 (47,2%)	113 (62,7%)

Αναφορικά με τους μέσους όρους βεβαιοτήτων των λαθών στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός, οι οποίοι παρουσιάζονται στον Πίνακα 23, παρουσιάστηκε στατιστικά σημαντική διαφορά στους μέσους όρους σε όλες τις φάσεις της έρευνας για την Ομάδα Παρέμβασης. Συγκεκριμένα, φάνηκε στατιστικά σημαντική αύξηση των επιπέδων βεβαιότητας στον μετά-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο $t(42)=13{,}29$ *p=0,006,* στον μεταγενέστερο-έλεγχο σε σχέση με τον μετα-έλεγχο $t(42)=22{,}69$ *p=0,002* και στον μεταγενέστερο-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο $t(42)=25{,}61$ *p=0,001*. Τα αποτελέσματα ήταν παρόμοια και για την Ομάδα Ελέγχου, δείχνοντας στατιστικά σημαντική αύξηση των επιπέδων βεβαιότητας στον μετά-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο $t(45)=11{,}54$ *p=0,004* στον μεταγενέστερο-έλεγχο σε σχέση με τον μετα-έλεγχο $t(45)=15{,}819$ *p=0,004* και στον μεταγενέστερο-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο $t(45)=15{,}001$ *p=0,001*.

Πίνακας 23. Μέσοι όροι βεβαιοτήτων των λαθών στην παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός ανά ομάδα και ανά φάση έρευνας

	Προ-έλεγχος		Μετα-έλεγχος		Μεταγενέστερος έλεγχος	
	ΜΟ	ΤΑ	ΜΟ	ΤΑ	ΜΟ	ΤΑ
ΟΠ	3,8	0,7	3,9	0,7	4,2	0,5
ΟΕ	3,8	0,7	4,1	0,7	4,1	0,7

Μέσες επιδόσεις

Οι μαθητές βαθμολογήθηκαν ανάλογα με το τελικό αποτέλεσμα που προέκυπτε και από τα τρία επίπεδα. Συγκεκριμένα, οι *Μαθηματικώς ορθές* απαντήσεις βαθμολογήθηκαν με 2, η *Ελλιπής γνώση* που οφειλόταν σε σωστές απαντήσεις με χαμηλή βεβαιότητα με 1, ενώ η *Ελλιπής γνώση* με λανθασμένες απαντήσεις και οι *Παρανοήσεις,* δηλαδή, λανθασμένες απαντήσεις με υψηλή βεβαιότητα με 0. Κατά συνέπεια, η ελάχιστη τιμής μέσης επίδοσης είναι οι 0 βαθμοί και η μέγιστη οι 2 βαθμοί. Η υψηλότερη μέση βαθμολογία υποδεικνύει καλύτερη μέση επίδοση.

Στον Πίνακα 24 που ακολουθεί, παρουσιάζεται η επίδοση των μαθητών της Ομάδας Παρέμβασης και της Ομάδας Ελέγχου συνολικά ανά φάση. Όπως φαίνεται από τους συνολικούς μέσους όρους, η επίδοση της Ομάδας Παρέμβασης βελτιώνεται από το στάδιο του προ-ελέγχου (ΜΟ=0,8 ΤΑ=0,9) στο στάδιο του μετα-ελέγχου (ΜΟ=1,4 ΤΑ=0,8), ενώ εμφανίζεται μια μικρή πτώση στον μεταγενέστερο έλεγχο (ΜΟ=1,3 ΤΑ=0,9) χωρίς να φτάνει στα επίπεδα του προ-ελέγχου. Όσον αφορά την Ομάδα Ελέγχου παρατηρείται βελτίωση στους συνολικούς μέσους όρους από το στάδιο του προ-ελέγχου (ΜΟ=0,9 ΤΑ=0,9) στο στάδιο του μετα-ελέγχου (ΜΟ=1,2 ΤΑ=0,9), όμως στο στάδιο του μεταγενέστερου ελέγχου η Ομάδα Ελέγχου παρουσίασε μεγαλύτερη πτώση (ΜΟ=1 ΤΑ=0,9).

Πίνακας 24. Μέσες επιδόσεις ανά ομάδα και ανά φάση της έρευνας

	Προ-έλεγχος		Μετά-έλεγχος		Μεταγενέστερος-έλεγχος	
	ΜΟ	ΤΑ	ΜΟ	ΤΑ	ΜΟ	ΤΑ
ΟΠ	0,8	0,9	1,4	0,8	1,3	0,9
ΟΕ	0,9	0,9	1,2	0,9	1	0,9

Για να εξεταστεί η επίδραση της διδακτικής παρέμβασης αρχικά πραγματοποιήθηκε Levene's test, για να ελεγχθεί η μη διαφοροποίηση των διακυμάνσεων των συμμετεχόντων μεταξύ των δύο ομάδων στη φάση του προελέγχου. Οι διακυμάνσεις μεταξύ των απαντήσεων έδειξαν ότι οι δύο ομάδες δεν είχαν στατιστικά σημαντική διαφορά στις αρχικές τους επιδόσεις ($p>0.05$).

Έπειτα διερευνήθηκε αν οι συμμετέχοντες παρουσιάζουν διαφορές στους μέσους όρους της επίδοσής τους στις τρεις φάσεις της έρευνας. Εφαρμόστηκε Paired samples T-test, η ανάλυση του οποίου έδειξε στατιστικά σημαντικές διαφορές και για τις δύο ομάδες ανά φάση της έρευνας. Συγκεκριμένα, η Ομάδα Παρέμβασης εμφάνισε στατιστικώς σημαντικά καλύτερες επιδόσεις στον μετα-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο $t(42)=3{,}78$ *p=0,007*, d=0,7. Επίσης στατιστικώς σημαντικά καλύτερες επιδόσεις εμφανίστηκαν και στον μεταγενέστερο σε σχέση με τον προ-έλεγχο $t(42)=4{,}725$ *p=0,012*, d=0,55, έστω κι αν στον μεταγενέστερο έλεγχο οι επιδόσεις μειώθηκαν σε σχέση με τον μετα-έλεγχο $t(42)=4{,}647$ *p=0,012*, d=0,11. Η Ομάδα Ελέγχου επίσης εμφάνισε στατιστικώς σημαντικά καλύτερες επιδόσεις στον μετα-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο $t(45)=5{,}871$ *p=0,001*, d=0,33. Επίσης, στατιστικώς καλύτερες επιδόσεις εμφανίστηκαν και στον μεταγενέστερο έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο $t(45)=10{,}908$ *p=0.001*, d=0,11, αλλά οι επιδόσεις στον μεταγενέστερο ήταν μειωμένες σε σχέση με τον μετα-έλεγχο $t(45)=22{,}416$ *p=0,001*, d=0,22. Από τη σύγκριση των μεγεθών επίδρασης που παρουσιάζονται παραπάνω (Cohen's d) φαίνεται πως η επίδραση της παρέμβασης στην Ομάδα Παρέμβασης είναι από *μέτρια* (d>0,5) ως *υψηλή* (d>0,7), σε αντίθεση με την επίδρασή της στην Ομάδα Ελέγχου που είναι *χαμηλή*.

Περαιτέρω υλοποιήθηκαν μετρήσεις με σκοπό να ελεγχθεί, αν εμφανίζεται στατιστικώς σημαντική διαφορά στους μέσους όρους της επίδοσης των δύο ομάδων στα έργα εντός και εκτός πλαισίου. Χρησιμοποιήθηκε Paired sample T-test, η ανάλυση του οποίου έδειξε ότι δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην ομάδα παρέμβασης στον μετα-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο $t(42)=0{,}591$ *p=0,997*, στον μεταγενέστερο έλεγχο σε σχέση με τον μετα-έλεγχο $t(42)=-0{,}350$ *p=0,75* και στον μεταγενέστερο έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο $t(42)=0{,}492$ *p=0,656*. Όμοια και η ομάδα ελέγχου δεν εμφάνισε στατιστικά σημαντικές διαφορές στον μετα-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο $t(45)=-2{,}216$ *p=0,114*, στον μεταγενέστερο-έλεγχο σε σχέση με τον μετα-έλεγχο $t(45)=-0{,}674$ *p=0,549* και στον μεταγενέστερο-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο $t(45)=-0{,}596$ *p=0,593*. Φάνηκε λοιπόν, ότι καμία ομάδα σε καμία φάση της έρευνας δεν διαφοροποιήθηκε στην επίδοσή της ως προς το είδος των ερωτήσεων, αν δηλαδή αυτές εμφανίζονται εντός ή εκτός πλαισίου.

5. Συμπεράσματα

5.1. Συζήτηση

Η παρούσα εργασία μελέτησε τις παρανοήσεις που εμφανίζουν οι μαθητές Δ’ και Ε’ Δημοτικού όταν συγκρίνουν δεκαδικούς αριθμούς, εξετάζοντας τόσο τις απαντήσεις τους σε έργα διάταξης δεκαδικών αριθμών όσο και τα επίπεδα βεβαιότητας των απαντήσεών τους. Με αυτήν τη μεθοδολογία, ήταν δυνατόν να διερευνηθεί αν λάθη των μαθητών στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών οφείλονται σε συγκεκριμένες παρανοήσεις για τους δεκαδικούς ή σε έλλειψη γνώσης. Περαιτέρω επιδίωξε να εξετάσει κατά πόσο μια διδακτική παρέμβαση με τη μέθοδο του ανατρεπτικού κειμένου μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να μειώσουν τα λάθη και να αντιμετωπίσουν τις παρανοήσεις τους στη διάταξη δεκαδικών αριθμών, συγκρίνοντας την αποτελεσματικότητά της με μια παρέμβαση με ένα συμβατικό κείμενο υπενθύμισης του κανόνα σύγκρισης των δεκαδικών αριθμών. Σε αυτήν την κατεύθυνση, στην ομάδα παρέμβασης δόθηκε ανατρεπτικό κείμενο, στο οποίο οι παρανοήσεις δηλώνονταν αρχικά ρητά και με χρήση παραδείγματος, αλλά στη συνέχεια ανατρέπονταν. Αντίθετα, στην ομάδα ελέγχου δόθηκε ένα κείμενο υπενθύμισης του κανόνα σύγκρισης των δεκαδικών αριθμών, όπως αυτά που περιέχονται στα σχολικά βιβλία.

Όσον αφορά το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, τα αποτελέσματα της μελέτης επιβεβαίωσαν την ύπαρξη παρανοήσεων σχετικών με το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων και της αξίας θέσης του μηδενός στους δεκαδικούς αριθμούς, που διαπιστώθηκε από το μεγάλο ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων με υψηλή βεβαιότητα που έδωσαν οι μαθητές της ομάδας παρέμβασης και της ομάδας ελέγχου. Πιο αναλυτικά, κατά την πρώτη φάση της έρευνας (προ-έλεγχος), τα περισσότερα λάθη εμφανίστηκαν λόγω της παρανόησης ότι ο αριθμός με τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος, ενώ λίγο μικρότερο ποσοστό λαθών εμφανίστηκε και λόγω της παρανόησης ότι ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος, ενισχύοντας προηγούμενες μελέτες του πεδίου (Baturo & Cooper, 1995; Durkin & Johnson, 2015; Irwin, 1999; Ren & Gunderson, 2021; Roell et al., 2017; Steinle & Stacey, 2004). Επίσης, πολλά από τα λάθη προέκυψαν λόγω της τάσης των μαθητών να πιστεύουν ότι τα μηδενικά δεν έχουν αξία όταν εμφανίζονται στο δεκαδικό μέρος των δεκαδικών αριθμών και άρα μπορούν να αγνοηθούν, όπως έχει αναδειχθεί και σε προηγούμενες μελέτες (Baturo & Cooper, 1995; Irwin, 1999; Durkin & Johnson, 2015; Steinle & Stacey, 2004).

Σχετικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, που αφορά την επίδραση της διδακτικής παρέμβασης στις παρανοήσεις, διαπιστώθηκε βελτίωση των επιδόσεων και για τις δύο ομάδες. Πιο συγκεκριμένα στη δεύτερη φάση της έρευνας (μετα-έλεγχος) που ακολούθησε αμέσως μετά τη διδακτική παρέμβαση με ανατρεπτικό κείμενο για την ομάδα παρέμβασης και κείμενο υπενθύμισης για την ομάδα ελέγχου, τα λάθη στα έργα μειώθηκαν ενώ τα επίπεδα βεβαιότητας παρουσίασαν αύξηση. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα τα λάθη χαμηλής βεβαιότητας που υποδηλώνουν ελλιπή γνώση σχεδόν να εξαλειφθούν. Όσον αφορά τις παρανοήσεις, δηλαδή τα λάθη υψηλής βεβαιότητας μειώθηκαν και για τις δύο ομάδες σε σχέση με τη φάση του προ-ελέγχου. Πιο αναλυτικά, όσον αφορά την παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων εμφανίστηκε σημαντική μείωση στα λάθη των μαθητών. Σχετικά με την παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός στους δεκαδικούς αριθμούς, ναι μεν σημειώθηκε μείωση στα λάθη μετά τη διδακτική παρέμβαση αλλά οι μαθητές εξακολούθησαν να έχουν υψηλό ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων με υψηλή βεβαιότητα. Τα παραπάνω ευρήματα έρχονται να επιβεβαιώσουν αντίστοιχες μελέτες που αφορούν τις παρανοήσεις και υποστηρίζουν ότι με την κατάλληλη διδακτική μέθοδο, καθίσταται δυνατόν να υπάρξει βελτίωση στα λάθη, δεν πετυχαίνεται όμως η πλήρης αντιμετώπισή τους, αφού οι παρανοήσεις στηρίζονται σε προϋπάρχουσες διαισθητικές αντιλήψεις που δύσκολα ανατρέπονται (Durkin & Johnson, 2015; Yang & Sianturi, 2019). Ωστόσο κρίνοντας τις μέσες επιδόσεις, τόσο η βελτίωση της επίδοσης όσο και το αυξημένο μέγεθος της επίδρασης του ανατρεπτικού κειμένου στην ομάδα παρέμβασης επιβεβαιώνει ότι αυτό το είδος κειμένου αποτελεί ένα αποτελεσματικό εργαλείο για την υπέρβαση κάποιων λαθών σε μαθηματικά έργα καθώς φέρνει τους μαθητές αντιμέτωπους με την ταυτόχρονη αντιπαράθεση της λανθασμένης και της σωστής γνώσης.

Περίπου έναν μήνα μετά τη διδακτική παρέμβαση ακολούθησε η φάση του μεταγενέστερου-ελέγχου, όπου εξετάστηκε η διατήρηση της γνώσης των δύο ομάδων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η επίδοση και των δύο ομάδων μειώθηκε σε σχέση με τα επίπεδα που είχαν επιτευχθεί κατά τη φάση του μετα-ελέγχου. Ωστόσο η συνολική επίδοση της ομάδας παρέμβασης φάνηκε να διατηρείται στον μεταγενέστερο έλεγχο σε υψηλότερα επίπεδα σε σχέση με την ομάδα ελέγχου δείχνοντας ότι τα αποτελέσματα του ανατρεπτικού κειμένου διατηρούνται περισσότερο στο χρόνο συγκριτικά με του κειμένου υπενθύμισης. Αυτό επιβεβαιώνεται και από ακόμα ένα εύρημα της παρούσας μελέτης που αφορά στην αύξηση των λαθών υψηλής βεβαιότητας, δηλαδή των παρανοήσεων που προέκυψαν στον μεταγενέστερο-έλεγχο. Φάνηκε ότι η αύξηση των λαθών υψηλής βεβαιότητας δεν ήταν στατιστικώς σημαντική για την ομάδα παρέμβασης που δέχτηκε το ανατρεπτικό κείμενο, ενώ αντίθετα στην ομάδα ελέγχου με το κείμενο υπενθύμισης υπήρξε στατιστικώς σημαντική αύξηση στα λάθη στον μεταγενέστερο-έλεγχο. Επιπρόσθετα τα οφέλη από τη χρήση του ανατρεπτικού κειμένου ενισχύονται και από τα αυξημένα μεγέθη επίδρασης που εμφάνισε στις τρεις φάσεις της έρευνας σε σχέση με το κείμενο υπενθύμισης, η επίδραση του οποίου ήταν χαμηλή σε όλες τις φάσεις της. Όσον αφορά τη βεβαιότητα στη φάση του μεταγενέστερου-ελέγχου, παρά την πτώση που σημειώθηκε στην επίδοση των μαθητών, παρατηρήθηκε αύξηση των επιπέδων βεβαιότητας και για τις δύο ομάδες. Το γεγονός αυτό πιθανόν να οφείλεται στην επίδραση της διδακτικής παρέμβασης, η οποία είχε ως αποτέλεσμα την ενίσχυση της βεβαιότητας των απαντήσεων στον μεταγενέστερο-έλεγχο, όπως συνέβη και στον μετα-έλεγχο. Επίσης, η αύξηση της βεβαιότητας θα μπορούσε να οφείλεται και στην εξοικείωση που απέκτησαν οι μαθητές με το συγκεκριμένο τεστ και με τις δηλώσεις βεβαιότητας, για αυτό και στον μεταγενέστερο έλεγχο όπου έλαβαν το τεστ για τρίτη φορά, φάνηκαν πιο βέβαιοι για τις απαντήσεις τους.

Τέλος, το τρίτο ερευνητικό ερώτημα εξέτασε την επίδοση των μαθητών στα έργα που περιλαμβάνονται σε πλαίσια γνωστά από την καθημερινότητά τους, όπως τα χρήματα, τα μέτρα, τα κιλά και τα λίτρα καθώς σύμφωνα με έρευνες όταν τα μαθηματικά έργα εμφανίζονται μέσα σε πλαίσια συμβάλλουν στην καλύτερη επίδοση των μαθητών και στην εμφάνιση λιγότερων λαθών (Irwin, 1999). Στην παρούσα έρευνα δεν επιβεβαιώθηκε ότι στα έργα εντός πλαισίου εμφανίζονται λιγότερα λάθη ή ότι τα λάθη αυτά δεν οφείλονται σε παρανοήσεις. Πράγματι δεν εμφανίστηκε στατιστικώς σημαντική διαφορά ανάμεσα στα έργα εντός και εκτός πλαισίου. Αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι τα πλαίσια σε αυτήν τη μελέτη δεν χρησιμοποιήθηκαν με τρόπο που να φέρνει τους μαθητές αντιμέτωπους με μια προβληματική κατάσταση, μέσα από την οποία η γνώση τους θα έρθει σε σύγκρουση με την καθημερινότητα και θα τους κάνει να διαψεύσουν την προηγούμενη γνώση και να αντιμετωπίσουν τις παρανοήσεις τους.

5.2. Γενικά Συμπεράσματα

Οι μαθητές εισάγονται στη θεμελιώδη έννοια της θεσιακής αξίας των ψηφίων από την πρώτη τάξη του Δημοτικού. Η θεσιακή αξία αποτελεί τη βάση πάνω στην οποία χτίζονται και άλλες μαθηματικές έννοιες, όπως αυτή που εστίασε το ενδιαφέρον της η παρούσα μελέτη και αφορά τη σύγκριση δεκαδικών αριθμών. Η ενασχόληση με τους δεκαδικούς αριθμούς ξεκινάει συστηματικά από την τρίτη τάξη του Δημοτικού και ακολουθεί τους μαθητές σε όλη την εκπαιδευτική τους πορεία αλλά σε και σε πολλές εκφάνσεις της καθημερινής τους ζωής ως ενήλικες. Ωστόσο, η διεθνής έρευνα έχει δείξει ότι τόσο παιδιά όσο και ενήλικες αντιμετωπίζουν δυσκολίες όταν πρόκειται να συγκρίνουν δεκαδικούς αριθμούς (Durkin & Johnson, 2015; Steinle & Stacey, 1998).

Ένας από τους βασικούς σκοπούς της συγκεκριμένης έρευνας ήταν η ανάδειξη λαθών και παρανοήσεων των μαθητών όταν συγκρίνουν δεκαδικούς αριθμούς. Πράγματι όπως επιβεβαιώνεται και από τη σχετική βιβλιογραφία, διαπιστώθηκαν λάθη στη διάταξη δεκαδικών αριθμών, που κατά βάση σχετίζονται με τις προϋπάρχουσες γνώσεις για τους φυσικούς αριθμούς. Φάνηκε λοιπόν ότι οι μαθητές είχαν την τάση οτιδήποτε ισχύει στους φυσικούς αριθμούς, εσφαλμένα να το γενικεύουν και να το εφαρμόζουν και στους δεκαδικούς αριθμούς. Το αποτέλεσμα ήταν να προκύψουν παρανοήσεις οι οποίες παρεμποδίζουν την εννοιολογική κατανόηση των δεκαδικών αριθμών, καθώς αντικατοπτρίζουν ισχυρές προϋπάρχουσες αντιλήψεις.

Ένα άλλο πολύ σημαντικό εύρημα που αναδείχθηκε από την παρούσα μελέτη, αφορά τη διερεύνηση μεταγνωστικών παραγόντων και συγκεκριμένα τον τρόπο που οι μαθητές αυτο-αξιολογούνται. Αυτό επιτεύχθηκε μέσα από τη μέτρηση της βεβαιότητας, όπου οι μαθητές κλήθηκαν να αξιολογήσουν το επίπεδο βεβαιότητας των απαντήσεών τους. Το συμπέρασμα που προέκυψε είναι ότι η βεβαιότητα τόσο των σωστών όσο και των λανθασμένων απαντήσεων κυμάνθηκε σε υψηλά επίπεδα. Το γεγονός αυτό δηλώνει ότι οι μαθητές τείνουν να υπερεκτιμούν τις ικανότητές τους, αφού σε πολλές περιπτώσεις είχαν υψηλή βεβαιότητα με λανθασμένες απαντήσεις. Όπως προκύπτει και από τη βιβλιογραφία, στην περίπτωση αυτή, όπου δηλαδή υπήρχαν λάθη που έγιναν με υψηλή βεβαιότητα, πρόκειται για παρουσία παρανοήσεων, ενώ τα λάθη που έγιναν με χαμηλή βεβαιότητα, υποδηλώνουν έλλειψη γνώσης. Συνεπώς, φαίνεται πως τα οφέλη από τη χρήση των δηλώσεων βεβαιότητας είναι διπλά. Από τη μία δίνουν μία γενική εικόνα για το πως αξιολογούν οι μαθητές τη γνώση τους και αν έχουν επίγνωση των δυνατοτήτων τους και από την άλλη είναι σε θέση να κατηγοριοποιήσουν τα λάθη ανάλογα με το αν γίνονται με υψηλή ή χαμηλή βεβαιότητα. Η διαπίστωση από την πλευρά των εκπαιδευτικών για το αν οι μαθητές έχουν παρανόηση ή ελλιπή γνώση πάνω σε μία μαθηματική έννοια, αποτελεί σημαντικό βήμα στην επιλογή της κατάλληλης διδακτικής παρέμβασης, με απώτερο σκοπό την μείωση των λαθών και την επίτευξη εννοιολογικής κατανόησης.

Η προσπάθεια μείωσης των λαθών και επίτευξης εννοιολογικής κατανόησης αποτέλεσε άλλον έναν στόχο αυτής της μελέτης. Αφού προηγήθηκε μια ανασκόπηση σε εμπειρικές έρευνες, επιλέχθηκε η χρήση του ανατρεπτικού κειμένου στη διδακτική παρέμβαση, η αποτελεσματικότητα του οποίου συγκρίθηκε με ένα συμβατικό κείμενο υπενθύμισης του κανόνα σύγκρισης των δεκαδικών αριθμών, όπως αυτά που περιέχονται στα σχολικά βιβλία. Το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξε η μελέτη είναι ότι και τα δύο είδη κειμένων οδήγησαν σε βελτίωση των επιδόσεων αμέσως μετά την παρέμβαση. Παρ’ όλα αυτά, περίπου έναν μήνα μετά τη διδακτική παρέμβαση η επίδοση της ομάδας παρέμβασης φάνηκε να διατηρείται στον μεταγενέστερο έλεγχο σε υψηλότερα επίπεδα σε σχέση με την ομάδα ελέγχου δείχνοντας ότι τα αποτελέσματα του ανατρεπτικού κειμένου διατηρούνται περισσότερο στον χρόνο συγκριτικά με του κειμένου υπενθύμισης. Τα αποτελέσματα αυτά ενισχύουν την υπόθεση ότι το ανατρεπτικό κείμενο μπορεί να αποτελέσει ένα αποτελεσματικό εργαλείο στα χέρια του εκπαιδευτικού για την αντιμετώπιση παρανοήσεων που προκαλούν συγκεκριμένα λάθη στη σύγκριση των δεκαδικών αριθμών. Παρ’ όλα αυτά, η μικρή πτώση των επιδόσεων των μαθητών στον μεταγενέστερο-έλεγχο σε σχέση με τον μετα-έλεγχο δείχνει ότι από μόνο του και σε μία σύντομης διάρκειας διδακτική παρέμβαση, όπως η συγκεκριμένη, δεν είναι αρκετό για την επίτευξη βαθιάς αλλαγής στις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών, που υποστηρίζουν τις λανθασμένες αντιλήψεις τους για τους δεκαδικούς αριθμούς (Christou & Prokopou, 2020; Fadillah & Susiaty, 2019; Lem et al., 2017). Ωστόσο, τα αυξημένα μεγέθη επίδρασης που εμφάνισε η διδακτική παρέμβαση με ανατρεπτικό κείμενο σε σχέση με αυτά του κειμένου υπενθύμισης, ενισχύει την πεποίθησή μας ότι συστηματική χρήση του και πιθανή παρουσία του στα σχολικά βιβλία θα μπορούσε να έχει ακόμα καλύτερα και πιο μακροπρόθεσμα αποτελέσματα στην αντιμετώπιση τέτοιων παρανοήσεων.

5.3. Περιορισμοί της έρευνας

Στην παρούσα έρευνα η μέθοδος δειγματοληψίας καθώς και ο αριθμός των συμμετεχόντων δεν μπορεί να οδηγήσει σε άμεση γενίκευση των συμπερασμάτων. Οι μαθητές προέρχονταν από το ίδιο γεωγραφικό διαμέρισμα και φοιτούσαν σε δύο Δημόσια Δημοτικά Σχολεία της βόρειας Ελλάδας. Συνεπώς, αποτελούν ένα μικρό δείγμα του πληθυσμού, για αυτόν τον λόγο δεν είναι εφικτό να γενικευθούν τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη μελέτη στο σύνολο των μαθητών που φοιτούν στις Δ’ και Ε’ τάξεις.

Ένας επιπλέον περιορισμός της συγκεκριμένης έρευνας οφείλεται στην χρήση αποκλειστικά μίας ερευνητικής μεθόδου για τη συλλογή των δεδομένων, της ποσοτικής. Οι απαντήσεις των μαθητών στα δύο πρώτα μέρη του τεστ βαθμολογήθηκαν ως σωστές ή λάθος και αναλόγως του επιπέδου βεβαιότητας κάθε απάντησης (πεντάβαθμη κλίμακα από καθόλου έως απόλυτη βεβαιότητα) η γνώση κατηγοριοποιήθηκε ως *Παρανόηση, Ελλιπής γνώση* και *Μαθηματικώς ορθή γνώση*. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τον παραπάνω τρόπο αξιολόγησης του εργαλείου, θα μπορούσαν να ενισχυθούν και από τη χρήση ποιοτικών μεθόδων ανάλυσης. Αν παραδείγματος χάρη, με την ολοκλήρωση της διαδικασίας των τεστ, ακολουθούσε μία συνέντευξη με κάθε μαθητή, θα δινόταν στον καθένα η ευκαιρία να αναλύσει τον τρόπο σκέψης του πάνω στα έργα και επιπλέον να αιτιολογήσει το επίπεδο βεβαιότητας που επέλεξε. Ωστόσο, επειδή οι συνεντεύξεις αποτελούν μια χρονοβόρα διαδικασία, δεν υπήρχε ο χρόνος στα πλαίσια αυτής της μελέτης για χρήση τους.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθεί ότι οι παραπάνω περιορισμοί σε καμία περίπτωση δεν υπονομεύουν τη σημαντικότητα της έρευνας. Αντιθέτως επισημαίνουν τα σημεία εκείνα που θα μπορούσαν να βελτιωθούν σε μια μελλοντική μελέτη πάνω σε αυτό το πεδίο.

5.4. Προτάσεις

5.4.1. Προτάσεις για πρακτική εφαρμογή των συμπερασμάτων

Τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την παρούσα μελέτη φαίνονται πολύ ενθαρρυντικά για τον περιορισμό των λαθών στη μαθησιακή διαδικασία. Το ανατρεπτικό κείμενο που χρησιμοποιήθηκε κατά τη διαδικασία της διδακτικής παρέμβασης ωφέλησε τους μαθητές περισσότερο από το συμβατικό κείμενο υπενθύμισης και μάλιστα τα οφέλη αυτά διατηρήθηκαν για ένα χρονικό διάστημα. Το γεγονός αυτό θα πρέπει να ληφθεί υπόψη τόσο από εκπαιδευτικούς όσο και από συγγραφείς σχολικών εγχειριδίων για εισαγωγή των ανατρεπτικών κειμένων στα σχολικά βιβλία, αλλά και χρήση τους κατά τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών. Μάλιστα θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον να χρησιμοποιηθούν κατά την εισαγωγή των μαθητών σε μια καινούρια μαθηματική έννοια, προκειμένου οι ίδιοι να έρθουν από την αρχή αντιμέτωποι με τα συνήθη λάθη που γίνονται και την ταυτόχρονη ανατροπή τους από την ορθή γνώση. Αυτό θα μπορούσε ίσως να προλάβει την επιρροή της προϋπάρχουσας γνώσης αλλά και την εμφάνιση παρανοήσεων, εφόσον οι μαθητές θα είναι ήδη γνώστες των παρανοήσεων που συμβαίνουν. Η πρόταση αυτή βέβαια χρήζει επιστημονικής διερεύνησης, προκειμένου να εξαχθούν ασφαλή συμπεράσματα για τη χρήση του ανατρεπτικού κειμένου κατά την εισαγωγή σε μια νέα μαθηματική έννοια.

5.4.2. Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Ένα άλλο ζήτημα που χρήζει μελέτης τόσο στη διεθνή επιστημονική κοινότητα όσο και στον ελλαδικό χώρο, αποτελεί η διερεύνηση της αυτο-αξιολόγησης των μαθητών στην μαθηματική εκπαίδευση. Ειδικότερα για τη μελέτη των παρανοήσεων είναι σημαντικό να αναδειχθεί η αναγκαιότητα μέτρησης μεταγνωστικών παραγόντων και όχι μόνο η αξιολόγηση της γνώσης. Το εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα μελέτη κατάφερε μέσω των επιπέδων βεβαιότητας των απαντήσεων που έδωσαν τα παιδιά στα έργα, να αναδείξει αν τα λάθη τους οφείλονται στην ύπαρξη παρανοήσεων ή σε έλλειψη γνώσης. Ο διαχωρισμός αυτός είναι σημαντικός για τη δόμηση της διδασκαλίας από την πλευρά των εκπαιδευτικών αλλά και στην προσπάθεια επίτευξης της εννοιολογικής γνώσης. Συνεπώς, προτείνεται η διεξαγωγή ερευνών που θα περιλαμβάνουν μεταγνωστικούς παράγοντες, όπως οι δηλώσεις βεβαιότητας σε μαθηματικά έργα και σε άλλες μαθηματικές έννοιες.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Asterhan, C. S., & Resnick, M. S. (2020). Refutation texts and argumentation for conceptual change: A winning or a redundant combination?. *Learning and Instruction*, *65*, 101265.

Baturo, A. R., & Cooper, T. J. (1995). Strategies for comparing decimal numbers with the same whole-number part. In *Galtha 18th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia* (pp. 73-79).

Βρυώνης, Κ., Δουκάκης, Σ., Καρακώστα, Β., Μπαραλής, Γ., & Σταύρου Ι. (2018). *Μαθηματικά Ε' Δημοτικού. Βιβλίο μαθητή.* Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Butterfield, B., & Metcalfe, J. (2006). The correction of errors committed with high confidence. *Metacognition and Learning*, *1*(1), 69-84.

Caleon, I., & Subramaniam, R. (2010). Development and application of a three-tier diagnostic test to assess secondary students' understanding of waves. *International Journal of Science Education, 32*(7), 939–961.

Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM*, *47*(5), 747-758.

Christou, K. P., & Prokopou, A. (2020). Using refutational text to address the multiplication makes bigger misconception. *Educational Journal of the University of Patras UNESCO Chair*, *7*(1), 125-140.

Cordova, J. R., Sinatra, G. M., Jones, S. H., Taasoobshirazi, G., & Lombardi, D. (2014). Confidence in prior knowledge, self-efficacy, interest and prior knowledge: Influences on conceptual change. *Contemporary Educational Psychology*, *39*(2), 164-174.

Desoete, A., & De Craene, B. (2019). Metacognition and mathematics education: An overview. *ZDM*, *51*, 565-575.

Dole, J. A. (2000). Readers, texts and conceptual change learning. *Reading & Writing Quarterly*, *16*(2), 99-118.

Dole, J. A., & Sinatra, G. M. (1998). Reconceptalizing change in the cognitive construction of knowledge. *Educational psychologist*, *33*(2-3), 109-128.

Durkin, K., & Rittle-Johnson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. *Learning and Instruction*, *37*, 21-29.

Fadillah, S., & Susiaty, U. D. (2019). Developing refutation text to resolve students' misconceptions in addition and subtraction of integers. *Beta: Jurnal Tadris Matematika*, *12*(1), 14-25.

Fischbein, E. (1980, August). *Intuition and Proof.* Paper at the 4th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Berkeley.

Gurel, D. K., Eryilmaz, A., & McDermott, L. C. (2015). A review and comparison of diagnostic instruments to identify students' misconceptions in science. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *11*(5), 989-1008.

Guzzetti, B. J. (2000). Learning counter-intuitive science concepts: What have we learned from over a decade of research?. *Reading & Writing Quarterly*, *16*(2), 89-98.

Guzzetti, B. J., Snyder, T. E., & Glass, G. V. (1992). Promoting conceptual change in science: Can texts be used effectively?. *Journal of Reading*, *35*(8), 642-649.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1983). Students' Conceptions of Decimal Numbers. Presented at the *Annual Meeting of the American Educational Research Association.* Canada: Montreal.

Hynd, C., & Alvermann, D. E. (1986). The role of refutation text in overcoming difficulty with science concepts. *Journal of Reading*, *29*(5), 440-446.

Irwin, K. C. (1999). Difficulties with decimals and using everyday knowledge to overcome them. *SET: Research Information for Teachers*, (2).

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2006). *Μαθηματικά Στ' Δημοτικού. Βιβλίο μαθητή.* Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Lem, S., Onghena, P., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2017). Using refutational text in mathematics education. *ZDM*, *49*(4), 509-518.

Liu, R. D., Ding, Y., Zong, M., & Zhang, D. (2014). Concept Development of Decimals in Chinese Elementary Students: A Conceptual Change Approach. *School Science and Mathematics*, *114*(7), 326-338.

Livingston, J. A. (2003). Metacognition: An Overview.

Nelson, L. J., & Fyfe, E. R. (2019). Metacognitive monitoring and help-seeking decisions on mathematical equivalence problems. *Metacognition and Learning*, *14*, 167-187.

Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27-52.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (2021). *Πρόγραμμα Σπουδών για το Μάθημα των Μαθηματικών στο Δημοτικό.*

Ren, K., & Gunderson, E. A. (2021). The dynamic nature of children's strategy use after receiving accuracy feedback in decimal comparisons. *Journal of Experimental Child Psychology*, *202*, 105015.

Renner, C. H., & Renner, M. J. (2001). But I thought I knew that: Using confidence estimation as a debiasing technique to improve classroom performance. *Applied Cognitive Psychology: The Official Journal of the Society for Applied Research in Memory and Cognition*, *15*(1), 23-32.

Resnick, L.B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case for decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 8-27.

Roell, M., Viarouge, A., Houde, O., & Borst, G. (2019). Inhibition of the whole number bias in decimal number comparison: A developmental negative priming study. *Journal of Experimental Child Psychology*, *177*, 240-247.

Roell, M., Viarouge, A., Houdé, O., & Borst, G. (2017). Inhibitory control and decimal number comparison in school-aged children. *Plos One*, *12*(11), e0188276.

Schneider, W., & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. *ZDM*, *42*, 149-161.

Schraw, G. (2009). A conceptual analysis of five measures of metacognitive monitoring. *Metacognition and Learning*, *4*(1), 33-45.

Skopeliti, I., & Vosniadou, S. (2015). Categorical Information Improves the Effectiveness of Refutation Texts. In *EAPCogSci*.

Steinle, V., & Stacey, K. (1998). The incidence of misconceptions of decimal notation amongst students in grades 5 to 10. *Teaching Mathematics in New Times*, 548-555.

Steinle, V., & Stacey, K. (2004). A longitudinal study of students' understanding of decimal notation: An overview and refined results. In *Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 541-548).

Tippett, C. D. (2010). Refutation text in science education: A review of two decades of research. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *8*(6), 951-970.

Van Dooren, W., Lehtinen, E., & Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction*, *37*, 1-4.

Van Hoof, J., Engelen, A. S., & Van Dooren, W. (2021). How robust are learners' misconceptions of fraction magnitude? An intervention study comparing the use of refutation and expository text. *Educational Psychology*, *41*(5), 524-543.

Van Loon, M. H., Dunlosky, J., Van Gog, T., Van Merriënboer, J. J., & De Bruin, A. B. (2015). Refutations in science texts lead to hypercorrection of misconceptions held with high confidence. *Contemporary Educational Psychology*, *42*, 39-48.

Veenman, M. V., Van Hout-Wolters, B. H., & Afflerbach, P. (2006). Metacognition and learning: Conceptual and methodological considerations. *Metacognition and Learning*, *1*, 3-14.

Yang, D. C., & Sianturi, I. A. J. (2019). Sixth grade students' performance, misconceptions, and confidence when judging the reasonableness of computational results. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(8), 1519-1540.

Yang, D. C., & Sianturi, I. A. J. (2021). Sixth grade students' performance, misconception, and confidence on a three-tier number sense test. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *19*(2), 355-375.

Παράρτημα Α

Τεστ τριών επιπέδων

Τεστ προ-ελέγχου

Φύλο: Αγόρι / Κορίτσι Τάξη:........ Σχολείο:... Ημερομηνία γέννησης: ....

1) **Κύκλωσε τον μεγαλύτερο αριθμό**

α) 0,134 β) 0,4 γ) 0,34

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή το 134 είναι μεγαλύτερο από το 4 και το 34.	1. Επειδή ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.	1. Επειδή έχει δέκατα και εκατοστά που έχουν την μεγαλύτερη αξία.
2. Επειδή ο αριθμός με τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.	2. Επειδή ο αριθμός 4 στα δέκατα, που έχουν την μεγαλύτερη αξία, είναι μεγαλύτερος από το 1 και το 3.	2. Επειδή το 34 με ένα μηδενικό στο τέλος γίνεται 340 και είναι μεγαλύτερο από το 134 και το 4.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.

➢ **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 1; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α 2. Λίγο βέβαιος-α 3. Μέτρια βέβαιος-α 4. Πολύ βέβαιος-α 5. Απόλυτα βέβαιος-α

2) **Κύκλωσε τον μικρότερο αριθμό**

α) 1,020 β) 1,200 γ) 1,102

⇩ ⇩ ⇩

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή τα μηδενικά στο δεκαδικό μέρος δεν έχουν αξία, άρα το 2 είναι μικρότερο από το 200 και το 102.	1. Επειδή τα μηδενικά στο τέλος δεν έχουν αξία, το 2 είναι μικρότερο από το 20 και το 102.	1. Επειδή χωρίς το 0 ο αριθμός έχει μόνο δύο ψηφία στο δεκαδικό μέρος.
2. Επειδή έχει τον μικρότερο αριθμό στα δέκατα.	2. Επειδή χωρίς τα μηδενικά στο τέλος ο αριθμός έχει μόνο ένα ψηφίο στο δεκαδικό μέρος.	2. Επειδή τα μηδενικά στο δεκαδικό μέρος δεν έχουν αξία, άρα το 12 είναι μικρότερο από το 20 και το 200.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.

- **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 2; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α 2. Λίγο βέβαιος-α 3. Μέτρια βέβαιος-α 4. Πολύ βέβαιος-α 5. Απόλυτα βέβαιος-α

3) **Κύκλωσε το σωστό**

α) 4,8 > 4,75 > 4,60 β) 4,75 > 4,60 > 4,8 γ) 4,60 = 4,75 = 4,8

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή τα δέκατα έχουν μεγαλύτερη αξία και το 8 είναι μεγαλύτερο από το 7 και το 6.	1. Επειδή το 75 είναι μεγαλύτερο από το 60 και το 8.	1. Επειδή έχουν τον ίδιο αριθμό στο ακέραιο μέρος.
2. Επειδή ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.	2. Επειδή στους πρώτους δύο αριθμούς υπάρχουν δύο δεκαδικά ψηφία, ενώ στον τρίτο μόνο ένα.	2. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	

- **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 3; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α 2. Λίγο βέβαιος-α 3. Μέτρια βέβαιος-α 4. Πολύ βέβαιος-α 5. Απόλυτα βέβαιος-α

4) Κύκλωσε το σωστό

α) 5,505 = 5,050 = 5,500 β) 5,500 < 5,050 < 5, 505 γ) 5,050 < 5,500 < 5,505

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή τα μηδενικά δεν έχουν αξία, είναι ίσοι γιατί έχουν τον ίδιο αριθμό στο ακέραιο και στο δεκαδικό μέρος.	1. Επειδή τα μηδενικά στο τέλος δεν έχουν αξία, το 5 είναι μικρότερο από το 50 και το 505.	1. Επειδή τα μηδενικά στο δεκαδικό μέρος δεν έχουν αξία, άρα το 5 είναι μικρότερο από το 500 και το 505.
2. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	2. Επειδή χωρίς τα μηδενικά στο τέλος ο πρώτος αριθμός έχει μόνο ένα ψηφίο στο δεκαδικό μέρος.	2. Επειδή ο πρώτος αριθμός έχει το μικρότερο ψηφίο στα δέκατα και ο δεύτερος αριθμός μικρότερο ψηφίο στα χιλιοστά από τον τρίτο.
	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.

- **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 4; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α 2. Λίγο βέβαιος-α 3. Μέτρια βέβαιος-α 4. Πολύ βέβαιος-α 5. Απόλυτα βέβαιος-α

5) Σε ένα ράφι του σουπερμάρκετ βλέπεις τις παρακάτω τιμές σε τρεις διαφορετικές σοκολάτες. Κύκλωσε το σωστό

α) 1,8 € > 1,65 € > 1,49 € β) 1,65 € > 1,49 € > 1,8 € γ) 1,49 € = 1,65 € = 1,8 €

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.	1. Επειδή στους πρώτους δύο αριθμούς υπάρχουν δύο δεκαδικά ψηφία, ενώ στον τρίτο μόνο ένα.	1. Επειδή έχουν τον ίδιο αριθμό στο ακέραιο μέρος.
2. Επειδή τα δέκατα έχουν μεγαλύτερη αξία και το 8 είναι μεγαλύτερο από το 6 και το 4.	2. Επειδή το 65 είναι μεγαλύτερο από το 49 και το 8.	2. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	

➢ **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 5; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α 2. Λίγο βέβαιος-α 3. Μέτρια βέβαιος-α 4. Πολύ βέβαιος-α 5. Απόλυτα βέβαιος-α

6) Τρία παιδιά μέτρησαν το ύψος τους και το κατέγραψαν. Κύκλωσε το σωστό

α) 1,100 μ. < 1,010 μ. < 1,101 μ. β) 1,010 μ. < 1,100 μ. < 1,101 μ. γ) 1,101 μ. = 1,100 μ. = 1,010 μ.

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή τα μηδενικά στο τέλος δεν έχουν αξία, το 1 είναι μικρότερο από το 10 και το 101.	1. Επειδή τα μηδενικά στο δεκαδικό μέρος δεν έχουν αξία, άρα το 1 είναι μικρότερο από το 100 και το 101.	1. Επειδή τα μηδενικά δεν έχουν αξία, είναι ίσοι γιατί έχουν τον ίδιο αριθμό στο ακέραιο και στο δεκαδικό μέρος.
2. Επειδή χωρίς τα μηδενικά στο τέλος ο πρώτος αριθμός έχει μόνο ένα ψηφίο στο δεκαδικό μέρος.	2. Επειδή ο πρώτος αριθμός έχει το μικρότερο ψηφίο στα δέκατα και ο δεύτερος αριθμός μικρότερο ψηφίο στα χιλιοστά από τον τρίτο.	2. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	

- **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 6; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α 2. Λίγο βέβαιος-α 3. Μέτρια βέβαιος-α 4. Πολύ βέβαιος-α 5. Απόλυτα βέβαιος-α

7) Τρία παιδιά ζύγισαν τις σχολικές τους τσάντες και κατέγραψαν το βάρος τους. Κύκλωσε ποια τσάντα είναι ελαφρύτερη

α) 3,300 κιλά β) 3,103 κιλά γ) 3,030 κιλά

⇩ ⇩ ⇩

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή τα μηδενικά στο τέλος δεν έχουν αξία, το 3 είναι μικρότερο από το 103 και το 30.	1. Επειδή χωρίς το 0 ο αριθμός έχει μόνο δύο ψηφία στο δεκαδικό μέρος.	1. Επειδή έχει τον μικρότερο αριθμό στα δέκατα.
2. Επειδή χωρίς τα μηδενικά στο τέλος ο αριθμός έχει μόνο ένα ψηφίο στο δεκαδικό μέρος.	2. Επειδή τα μηδενικά στο δεκαδικό μέρος δεν έχουν αξία, άρα το 13 είναι μικρότερο από το 300 και το 30.	2. Επειδή τα μηδενικά στο δεκαδικό μέρος δεν έχουν αξία, άρα το 3 είναι μικρότερο από το 300 και το 103.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.

➢ **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 7; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α 2. Λίγο βέβαιος-α 3. Μέτρια βέβαιος-α 4. Πολύ βέβαιος-α 5. Απόλυτα βέβαιος-α

8) Ένας χυμός πωλείται στα παρακάτω μεγέθη. Κύκλωσε ποιος χυμός έχει την μεγαλύτερη ποσότητα

α) 0,500 λίτρα   β) 1,5 λίτρα   γ) 1,25 λίτρα

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή ο αριθμός με τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.	1. Επειδή τα δέκατα έχουν μεγαλύτερη αξία και το 5 είναι μεγαλύτερο από το 2.	1. Επειδή έχει δέκατα και εκατοστά που έχουν την μεγαλύτερη αξία.
2. Επειδή το 500 είναι μεγαλύτερο από το 5 και το 25.	2. Επειδή ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.	2. Επειδή το 25 είναι μεγαλύτερο από το 5.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.

- **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 8; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α   2. Λίγο βέβαιος-α   3. Μέτρια βέβαιος-α   4. Πολύ βέβαιος-α   5. Απόλυτα βέβαιος-α

Τεστ μετα-ελέγχου

Φύλο: Αγόρι / Κορίτσι   Τάξη:…….   Σχολείο:..   Ημερομηνία γέννησης:..................

1) **Κύκλωσε τον μεγαλύτερο αριθμό**

α) 1,16   β) 1,116   γ) 1,6

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή έχει δέκατα και εκατοστά που έχουν την μεγαλύτερη αξία.	1. Επειδή το 116 είναι μεγαλύτερο από το 16 και το 6.	1. Επειδή ο αριθμός 6 στα δέκατα, που έχουν την μεγαλύτερη αξία, είναι μεγαλύτερος από το 1.
2. Επειδή το 16 με ένα μηδενικό στο τέλος γίνεται 160 και είναι μεγαλύτερο από το 116 και το 6.	2. Επειδή ο αριθμός με τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.	2. Επειδή ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.

- **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 1; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1.Καθόλου βέβαιος-α   2. Λίγο βέβαιος-α   3. Μέτρια βέβαιος-α   4. Πολύ βέβαιος-α   5. Απόλυτα βέβαιος-α

2) Κύκλωσε τον μικρότερο αριθμό

α) 0,800 ⇩

β) 0,080 ⇩

γ) 0,108 ⇩

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή τα μηδενικά στο τέλος δεν έχουν αξία, το 8 είναι μικρότερο από το 80 και το 108.	1. Επειδή έχει τον μικρότερο αριθμό στα δέκατα.	1. Επειδή χωρίς το 0 ο αριθμός έχει μόνο δύο ψηφία στο δεκαδικό μέρος.
2. Επειδή χωρίς τα μηδενικά στο τέλος ο αριθμός έχει μόνο ένα ψηφίο στο δεκαδικό μέρος.	2. Επειδή τα μηδενικά στο δεκαδικό μέρος δεν έχουν αξία, άρα το 8 είναι μικρότερο από το 800 και το 108.	2. Επειδή τα μηδενικά στο δεκαδικό μέρος δεν έχουν αξία, άρα το 18 είναι μικρότερο από το 80 και το 800.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.

➢ **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 2; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α   2. Λίγο βέβαιος-α   3. Μέτρια βέβαιος-α   4. Πολύ βέβαιος-α   5. Απόλυτα βέβαιος-α

3) Κύκλωσε το σωστό

α) 2,67 = 2,59 = 2,7 β) 2,67 > 2,59 > 2,7 γ) 2,7 > 2,67 > 2,59

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή έχουν τον ίδιο αριθμό στο ακέραιο μέρος.	1. Επειδή το 67 είναι μεγαλύτερο από το 59 και το 7.	1. Επειδή ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.
2. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	2. Επειδή στους πρώτους δύο αριθμούς υπάρχουν δύο δεκαδικά ψηφία, ενώ στον τρίτο μόνο ένα.	2. Επειδή τα δέκατα έχουν μεγαλύτερη αξία και το 7 είναι μεγαλύτερο από το 6 και το 5.
	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.

- **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 3; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α 2. Λίγο βέβαιος-α 3. Μέτρια βέβαιος-α 4. Πολύ βέβαιος-α 5. Απόλυτα βέβαιος-α

4) Κύκλωσε το σωστό

α) 9,090 < 9,900 < 9,909　　　　β) 9,909 = 9,090 = 9,900　　　　γ) 9,900 < 9,090 < 9,909

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή τα μηδενικά στο δεκαδικό μέρος δεν έχουν αξία, άρα το 9 είναι μικρότερο από το 900 και το 909.	Επειδή τα μηδενικά δεν έχουν αξία, είναι ίσοι γιατί έχουν τον ίδιο αριθμό στο ακέραιο και στο δεκαδικό μέρος.	Επειδή τα μηδενικά στο τέλος δεν έχουν αξία, το 9 είναι μικρότερο από το 90 και το 909.
2. Επειδή ο πρώτος αριθμός έχει το μικρότερο ψηφίο στα δέκατα και ο δεύτερος αριθμός μικρότερο ψηφίο στα χιλιοστά από τον τρίτο.	2. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	Επειδή χωρίς τα μηδενικά στο τέλος ο πρώτος αριθμός έχει μόνο ένα ψηφίο στο δεκαδικό μέρος.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.		3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.

- **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 4; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α　　2. Λίγο βέβαιος-α　　3. Μέτρια βέβαιος-α　　4. Πολύ βέβαιος-α　　5. Απόλυτα βέβαιος-α

5) Σε ένα ψυγείο του σουπερμάρκετ βλέπεις τις παρακάτω τιμές σε τρία διαφορετικά παγωτά. Κύκλωσε το σωστό

α) 1,55 € > 1,35 € > 1,6 €   β) 1,6 € > 1,55 € > 1,35 €   γ) 1,55 € = 1,35 € = 1,6 €

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή το 55 είναι μεγαλύτερο από το 35 και το 6.	1. Επειδή τα δέκατα έχουν μεγαλύτερη αξία και το 6 είναι μεγαλύτερο από το 5 και το 3.	1. Επειδή έχουν τον ίδιο αριθμό στο ακέραιο μέρος.
2. Επειδή στους πρώτους δύο αριθμούς υπάρχουν δύο δεκαδικά ψηφία, ενώ στον τρίτο μόνο ένα.	2. Επειδή ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.	2. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	

- **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 5; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α   2. Λίγο βέβαιος-α   3. Μέτρια βέβαιος-α   4. Πολύ βέβαιος-α   5. Απόλυτα βέβαιος-α

6) Τρεις μαθητές περπάτησαν από το σπίτι τους μέχρι το σχολείο και κατέγραψαν την απόσταση. Κύκλωσε το σωστό

α) 70,707 μ. = 70,700 μ. = 70,070 μ. β) 70,700 μ.< 70,070 μ.< 70,707 μ. γ) 70,070 μ. < 70,700 μ. < 70,707 μ.

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή τα μηδενικά δεν έχουν αξία, είναι ίσοι γιατί έχουν τον ίδιο αριθμό στο ακέραιο και στο δεκαδικό μέρος.	1. Επειδή τα μηδενικά στο τέλος δεν έχουν αξία, το 7 είναι μικρότερο από το 70 και το 707.	1. Επειδή τα μηδενικά στο δεκαδικό μέρος δεν έχουν αξία, άρα το 7 είναι μικρότερο από το 700 και το 707.
2. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	2. Επειδή χωρίς τα μηδενικά στο τέλος ο πρώτος αριθμός έχει μόνο ένα ψηφίο στο δεκαδικό μέρος.	2. Επειδή ο πρώτος αριθμός έχει το μικρότερο ψηφίο στα δέκατα και ο δεύτερος αριθμός μικρότερο ψηφίο στα χιλιοστά από τον τρίτο.
	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.

- **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 6; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α 2. Λίγο βέβαιος-α 3. Μέτρια βέβαιος-α 4. Πολύ βέβαιος-α 5. Απόλυτα βέβαιος-α

7) Τρία παιδιά ζυγίστηκαν και κατέγραψαν το βάρος τους. Κύκλωσε ποιος ζυγίζει λιγότερο

α) 40,040 κιλά β) 40,400 κιλά γ) 40,204 κιλά

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή έχει τον μικρότερο αριθμό στα δέκατα.	1. Επειδή τα μηδενικά στο τέλος δεν έχουν αξία, το 4 είναι μικρότερο από το 40 και το 204.	1. Επειδή χωρίς το 0 ο αριθμός έχει μόνο δύο ψηφία στο δεκαδικό μέρος.
2. Επειδή τα μηδενικά στο δεκαδικό μέρος δεν έχουν αξία, άρα το 4 είναι μικρότερο από το 400 και το 204.	2. Επειδή χωρίς τα μηδενικά στο τέλος ο αριθμός έχει μόνο ένα ψηφίο στο δεκαδικό μέρος.	2. Επειδή τα μηδενικά στο δεκαδικό μέρος δεν έχουν αξία, άρα το 24 είναι μικρότερο από το 400 και το 40.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.

- **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 7; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α 2. Λίγο βέβαιος-α 3. Μέτρια βέβαιος-α 4. Πολύ βέβαιος-α 5. Απόλυτα βέβαιος-α

8) Ένα αναψυκτικό πωλείται στα παρακάτω μεγέθη. Κύκλωσε ποιο έχει την μεγαλύτερη ποσότητα

α) 1,3 λίτρα β) 0,330 λίτρα γ) 1,23 λίτρα

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.	1. Επειδή ο αριθμός με τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.	1. Επειδή έχει δέκατα και εκατοστά που έχουν την μεγαλύτερη αξία.
2. Επειδή τα δέκατα έχουν μεγαλύτερη αξία και το 3 είναι μεγαλύτερο από το 2.	2. Επειδή το 330 είναι μεγαλύτερο από το 3 και το 23.	2. Επειδή το 23 είναι μεγαλύτερο από το 3.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.

- **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 8; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α 2. Λίγο βέβαιος-α 3. Μέτρια βέβαιος-α 4. Πολύ βέβαιος-α 5. Απόλυτα βέβαιος-α

Τεστ μεταγενέστερου-ελέγχου

Φύλο: Αγόρι / Κορίτσι   Τάξη:…….   Σχολείο:...   Ημερομηνία γέννησης:.....................

1) **Κύκλωσε τον μεγαλύτερο αριθμό**

α) 1,28   β) 1,8   γ) 1,228

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή έχει δέκατα και εκατοστά που έχουν την μεγαλύτερη αξία.	1. Επειδή ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.	1. Επειδή το 228 είναι μεγαλύτερο από το 28 και το 8.
2. Επειδή το 28 με ένα μηδενικό στο τέλος γίνεται 280 και είναι μεγαλύτερο από το 228 και το 8.	2. Επειδή ο αριθμός 8 στα δέκατα, που έχουν την μεγαλύτερη αξία, είναι μεγαλύτερος από το 2.	2. Επειδή ο αριθμός με τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.

- **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 1; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α   2. Λίγο βέβαιος-α   3. Μέτρια βέβαιος-α   4. Πολύ βέβαιος-α   5. Απόλυτα βέβαιος-α

2) Κύκλωσε τον μικρότερο αριθμό

α) 0,104 β) 0,400 γ) 0,040

⇩ ⇩ ⇩

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή χωρίς το 0 ο αριθμός έχει μόνο δύο ψηφία στο δεκαδικό μέρος.	1. Επειδή τα μηδενικά στο τέλος δεν έχουν αξία, το 4 είναι μικρότερο από το 40 και το 104.	1. Επειδή τα μηδενικά στο δεκαδικό μέρος δεν έχουν αξία, άρα το 4 είναι μικρότερο από το 400 και το 104.
2. Επειδή τα μηδενικά στο δεκαδικό μέρος δεν έχουν αξία, άρα το 14 είναι μικρότερο από το 40 και το 400.	2. Επειδή χωρίς τα μηδενικά στο τέλος ο αριθμός έχει μόνο ένα ψηφίο στο δεκαδικό μέρος.	2. Επειδή έχει τον μικρότερο αριθμό στα δέκατα.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.

➢ **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 2; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α 2. Λίγο βέβαιος-α 3. Μέτρια βέβαιος-α 4. Πολύ βέβαιος-α 5. Απόλυτα βέβαιος-α

3) Κύκλωσε το σωστό

α) $5{,}9 > 5{,}84 > 5{,}67$ β) $5{,}84 > 5{,}67 > 5{,}9$ γ) $5{,}843 = 5{,}9 = 5{,}67$

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή τα δέκατα έχουν μεγαλύτερη αξία και το 9 είναι μεγαλύτερο από το 8 και το 6.	1. Επειδή το 84 είναι μεγαλύτερο από το 67 και το 9.	1. Επειδή έχουν τον ίδιο αριθμό στο ακέραιο μέρος.
2. Επειδή ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.	2.Επειδή στους πρώτους δύο αριθμούς υπάρχουν δύο δεκαδικά ψηφία, ενώ στον τρίτο μόνο ένα.	2. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	

- **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 3; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α 2. Λίγο βέβαιος-α 3. Μέτρια βέβαιος-α 4. Πολύ βέβαιος-α 5. Απόλυτα βέβαιος-α

4) Κύκλωσε το σωστό

α) 3,300 = 3,303 = 3,030 β) 3,300 < 3,030 < 3,303 γ) 3,030 < 3,300 < 3,303

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή τα μηδενικά δεν έχουν αξία, είναι ίσοι γιατί έχουν τον ίδιο αριθμό στο ακέραιο και στο δεκαδικό μέρος.	1. Επειδή τα μηδενικά στο τέλος δεν έχουν αξία, το 3 είναι μικρότερο από το 30 και το 303.	1. Επειδή τα μηδενικά στο δεκαδικό μέρος δεν έχουν αξία, άρα το 3 είναι μικρότερο από το 300 και το 303.
2. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	2. Επειδή χωρίς τα μηδενικά στο τέλος ο πρώτος αριθμός έχει μόνο ένα ψηφίο στο δεκαδικό μέρος.	2. Επειδή ο πρώτος αριθμός έχει το μικρότερο ψηφίο στα δέκατα και ο δεύτερος αριθμός μικρότερο ψηφίο στα χιλιοστά από τον τρίτο.
	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.

- **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 4; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α 2. Λίγο βέβαιος-α 3. Μέτρια βέβαιος-α 4. Πολύ βέβαιος-α 5. Απόλυτα βέβαιος-α

5) **Σε ένα ράφι του σουπερμάρκετ βλέπεις τις παρακάτω τιμές σε διαφορετικά μπισκότα. Κύκλωσε το σωστό**

α) 2,48 € > 2,39 € > 2,5 € β) 2,5 € > 2,48 € > 2,39 € γ) 2,48 € = 2,39 € = 2,5 €

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή το 48 είναι μεγαλύτερο από το 39 και το 5.	1. Επειδή τα δέκατα έχουν μεγαλύτερη αξία και το 5 είναι μεγαλύτερο από το 4 και το 3.	1. Επειδή έχουν τον ίδιο αριθμό στο ακέραιο μέρος.
2.Επειδή στους πρώτους δύο αριθμούς υπάρχουν δύο δεκαδικά ψηφία, ενώ στον τρίτο μόνο ένα.	2. Επειδή ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.	2. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	

- **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 5; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α 2. Λίγο βέβαιος-α 3. Μέτρια βέβαιος-α 4. Πολύ βέβαιος-α 5. Απόλυτα βέβαιος-α

6) Τρία αυτοκίνητα διένυσαν τα παρακάτω χιλιόμετρα και κατέγραψαν την απόσταση. Κύκλωσε το σωστό

α) 40,400 χλμ. < 40,040 χλμ. < 40,404 χλμ. β) 40,040 χλμ. < 40,400 χλμ. < 40,404 χλμ. γ) 40,404 χλμ. = 40,400 χλμ. = 40,040 χλμ.

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή τα μηδενικά στο τέλος δεν έχουν αξία, το 4 είναι μικρότερο από το 40 και το 404.	1. Επειδή τα μηδενικά στο δεκαδικό μέρος δεν έχουν αξία, άρα το 4 είναι μικρότερο από το 400 και το 404.	1. Επειδή έχουν τον ίδιο αριθμό στο ακέραιο μέρος.
2. Επειδή χωρίς τα μηδενικά στο τέλος ο πρώτος αριθμός έχει μόνο ένα ψηφίο στο δεκαδικό μέρος.	2. Επειδή ο πρώτος αριθμός έχει το μικρότερο ψηφίο στα δέκατα και ο δεύτερος αριθμός μικρότερο ψηφίο στα χιλιοστά από τον τρίτο.	2. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	

- **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 6; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α 2. Λίγο βέβαιος-α 3. Μέτρια βέβαιος-α 4. Πολύ βέβαιος-α 5. Απόλυτα βέβαιος-α

7) Τρία γλυκά περιέχουν τις παρακάτω ποσότητες ζάχαρης. Κύκλωσε ποιο γλυκό περιέχει τη λιγότερη

α) 1,020 κιλά β) 1,101 κιλά γ) 1,100 κιλά

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή έχει τον μικρότερο αριθμό στα δέκατα.	1. Επειδή χωρίς το 0 ο αριθμός έχει μόνο δύο ψηφία στο δεκαδικό μέρος.	1. Επειδή τα μηδενικά στο τέλος δεν έχουν αξία, το 1 είναι μικρότερο από το 20 και το 101.
2. Επειδή τα μηδενικά στο δεκαδικό μέρος δεν έχουν αξία, άρα το 2 είναι μικρότερο από το 101 και το 100.	2. Επειδή τα μηδενικά στο δεκαδικό μέρος δεν έχουν αξία, άρα το 11 είναι μικρότερο από το 100 και το 20.	2. Επειδή χωρίς τα μηδενικά στο τέλος ο αριθμός έχει μόνο ένα ψηφίο στο δεκαδικό μέρος.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.

- **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 7; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α 2. Λίγο βέβαιος-α 3. Μέτρια βέβαιος-α 4. Πολύ βέβαιος-α 5. Απόλυτα βέβαιος-α

8) Ένα εμφιαλωμένο νερό πωλείται στα παρακάτω μεγέθη. Κύκλωσε ποιο έχει την μεγαλύτερη ποσότητα

α) 0,500 λίτρα β) 1,55 λίτρα γ) 1,7 λίτρα

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή ο αριθμός με τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.	1. Επειδή έχει δέκατα και εκατοστά που έχουν την μεγαλύτερη αξία.	1. Επειδή τα δέκατα έχουν μεγαλύτερη αξία και το 7 είναι μεγαλύτερο από το 5.
2. Επειδή το 500 είναι μεγαλύτερο από το 55 και το 7.	2. Επειδή το 55 είναι μεγαλύτερο από το 7.	2. Επειδή ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.

➢ **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 8; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α 2. Λίγο βέβαιος-α 3. Μέτρια βέβαιος-α 4. Πολύ βέβαιος-α 5. Απόλυτα βέβαιος-α

Παράρτημα Β

Κείμενα Διδακτικής Παρέμβασης

Διδακτική παρέμβαση με ανατρεπτικό κείμενο (Ομάδα Παρέμβασης)

Για να συγκρίνουμε σωστά δεκαδικούς αριθμούς, θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας την αξία που έχει κάθε ψηφίο, ανάλογα με τη θέση στην οποία βρίσκεται. Ας δούμε με τη βοήθεια των παρακάτω κειμένων τι κάνουμε συνήθως λάθος και τι είναι σωστό να εφαρμόζουμε.

ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

Κάποιοι θεωρούν ότι το ακέραιο και το δεκαδικό μέρος αποτελούν δύο ανεξάρτητα μέρη ενός αριθμού. Στο ακέραιο, η αξία των ψηφίων μειώνεται από τα αριστερά προς τα δεξιά, ενώ στο δεκαδικό μέρος αυξάνεται από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Αυτό όμως δεν ισχύει, γιατί...

ΣΩΣΤΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Το δεκαδικό μέρος αποτελεί συνέχεια του ακέραιου. Επομένως η αξία των αριθμών συνεχίζει να μειώνεται από τα αριστερά προς τα δεξιά. Η αξία των δεκαδικών ψηφίων είναι το 1/10, το 1/100 και το 1/1000 αντίστοιχα του ακέραιου αριθμού.

Πίνακας με την αξία της θέσης των ψηφίων στο δεκαδικό ανάπτυγμα.

ΑΚΕΡΑΙΟ ΜΕΡΟΣ			ΥΠΟΔΙΑΣΤΟΛΗ	ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΜΕΡΟΣ		
Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες		δέκατα	εκατοστά	χιλιοστά
100	10	1		$\frac{1}{10}$ ή 0,1	$\frac{1}{100}$ ή 0,01	$\frac{1}{1000}$ ή 0,001
	3	4	,	7	8	1

ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

Κάποιοι θεωρούν ότι ο αριθμός με τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος. Π.χ. λένε ότι 0,25 > 0,3 γιατί, το 25 είναι διψήφιος αριθμός και μεγαλύτερος από το 3.

Αυτό όμως δεν ισχύει, γιατί...

ΣΩΣΤΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δεν έχει σημασία το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων αλλά η αξία της θέσης τους. Στο παράδειγμα (0,25> 0,3) πρέπει να ελέγξουμε ποια θέση έχει τον μεγαλύτερο αριθμό, ξεκινώντας από το ακέραιο προς το δεκαδικό μέρος και όχι να συγκρίνουμε το 25 με το 3. Έτσι, αφού το ακέραιο μέρος (το 0) είναι ίδιο, παρατηρούμε ότι στα δέκατα το 3 είναι μεγαλύτερο από το 2, άρα το 0,3 είναι ο μεγαλύτερος αριθμός.

ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

Κάποιοι θεωρούν ότι ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος. Π.χ. λένε ότι 1,5 > 1,75 γιατί, ο πρώτος αριθμός έχει μόνο δέκατα που έχουν μεγαλύτερη αξία.

Αυτό όμως δεν ισχύει, γιατί...

ΣΩΣΤΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Είναι λάθος να συγκρίνουμε τους αριθμούς με βάση το πλήθος των ψηφίων τους. Πρέπει να ελέγχουμε ποια θέση στο δεκαδικό μέρος έχει τον μεγαλύτερο αριθμό. Και αν μας μπερδεύει το ότι οι αριθμοί δεν έχουν το ίδιο πλήθος ψηφίων, μπορούμε να βάλουμε το 0 στη θέση των ψηφίων που λείπουν και έπειτα να τους συγκρίνουμε. Άρα επειδή το 50 είναι μικρότερο του 75, το 1,75 είναι μικρότερο από το 1,5.

ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

Στο ακέραιο μέρος, το 0 αριστερά ενός αριθμού δεν αλλάζει την αξία του, άρα και στο δεκαδικό ισχύει το ίδιο. Π.χ. επειδή 014 = 14 κάποιοι θεωρούν ότι 0,14 = 0,014 =14.

Αυτό όμως δεν ισχύει, γιατί...

ΣΩΣΤΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο δεκαδικό μέρος το 0 αριστερά από έναν αριθμό εξακολουθεί να μην έχει αξία. Χρησιμοποιείται όμως, για να δείξει ότι δεν υπάρχει αριθμός σε μια συγκεκριμένη θέση. Π.χ. το 0 στο 3,507 δείχνει ότι δεν υπάρχουν εκατοστά. Το 0 αν και δεν έχει αξία, βρίσκεται σε μία θεση για να διαφοροποιεί τους αριθμούς, τόσο στους δεκαδικούς (π.χ. 1,5 και 1,05) όσο και στους φυσικούς (11 και 101).

Διδακτική παρέμβαση με κείμενο υπενθύμισης του κανόνα σύγκρισης των δεκαδικών αριθμών (Ομάδα Ελέγχου)

Για να συγκρίνουμε σωστά δεκαδικούς αριθμούς, θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας την αξία που έχει κάθε ψηφίο, ανάλογα με τη θέση στην οποία βρίσκεται. Ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς αριθμούς, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μεγαλύτερο ακέραιο μέρος. Π.χ 26,5 >24, 998, γιατί 26 > 24.

Όταν δύο δεκαδικοί αριθμοί έχουν το ίδιο ακέραιο μέρος, συγκρίνουμε το δεκαδικό τους μέρος, πρώτα τα δέκατα, μετά τα εκατοστά και τα χιλιοστά. Π.χ. 15, 27 > 15, 25 γιατί εφόσον το ακέραιο μέρος έχει τον ίδιο αριθμό, συγκρίνουμε το δεκαδικό μέρος. Τα δέκατα έχουν τον ίδιο αριθμό επομένως συγκρίνουμε τα εκατοστά όπου 7 > 5.