ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ- ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ - ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ – ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»
Κατεύθυνση: «Α΄ Ηλικιακός κύκλος (5-12 χρονών)»

Διπλωματική εργασία

«Εκτιμήσεις πάνω σε αριθμογραμμή και η σχέση τους με τις χωρικές ικανότητες στο δημοτικό σχολείο»

«Numberline estimations and spatial skills at primary school»

Στέλλα Σπανού (Α.Ε.Μ.: 1107)

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Δέσποινα Δεσλή, Καθηγήτρια, Α.Π.Θ.

Εξεταστές: Χαράλαμπος Λεμονίδης, Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Ξένια Βαμβακούση, Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Φλώρινα, Ιούλιος 2024

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Εικόνων

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες στην επιβλέπουσα καθηγήτριά μου, κ. Δέσποινα Δεσλή, για την αμέριστη υποστήριξη, καθοδήγηση και τις πολύτιμες συμβουλές της, καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Η συμβολή της και η συνεχής βοήθεια ήταν καθοριστική για την ολοκλήρωση της έρευνάς μου και τη συγγραφή της παρούσας εργασίας.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, κ. Χαράλαμπο Λεμονίδη και κ. Ξένια Βαμβακούση, για τις σημαντικές παρατηρήσεις τους. Θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου προς όλους τους καθηγητές του Μεταπτυχιακού Προγράμματος για τις γνώσεις που μας προσέφεραν, καθώς και τις συμφοιτήτριές μου για τη συνεχή υποστήριξη.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, για την υπομονή και τη συνεχή ενθάρρυνση καθ’ όλη τη διάρκεια της έρευνάς μου.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία είχε σκοπό να εξετάσει αφενός την ικανότητα των παιδιών για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων με φυσικούς αριθμούς πάνω σε αριθμογραμμή και αφετέρου τη σχέση αυτής με τις χωρικές τους ικανότητες. Για τον σκοπό αυτόν, πραγματοποιήθηκε έρευνα στο πλαίσιο της οποίας σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν δύο έργα σε 40 μαθητές Γ΄ τάξης και 39 μαθητές Ε΄ τάξης. Στο πρώτο έργο (Έργο 1: Εκτίμηση σε αριθμογραμμή), ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να εκτιμήσουν α) τη θέση φυσικών αριθμών πάνω σε οριοθετημένη αριθμογραμμή εύρους από 0 έως 1.000 (δοκιμασίες NP) και β) το αριθμητικό μέγεθος φυσικών αριθμών σε συγκεκριμένη θέση πάνω σε αριθμογραμμή (δοκιμασίες PN). Στο δεύτερο έργο (Έργο 2: Χωρικές ικανότητες), οι συμμετέχοντες κλήθηκαν α) να διπλώσουν νοερά ένα τετράγωνο χαρτί, να το «τρυπήσουν» νοερά και στη συνέχεια να φανταστούν πού θα βρίσκονται οι οπές όταν το ξεδιπλώσουν (δοκιμασίες δίπλωσης χαρτιού) και β) να αναγνωρίσουν μέσα από μια σύνθεση σχημάτων ένα ζητούμενο γεωμετρικό σχήμα (δοκιμασίες αναγνώρισης σχήματος). Αν και οι συμμετέχοντες στο σύνολό τους παρουσίασαν ιδιαίτερα υψηλή ικανότητα εκτίμησης πάνω σε αριθμογραμμή (74,83% και 90,42% για τα παιδιά της Γ΄ και της Ε΄ τάξης, αντίστοιχα), εμφάνισαν περισσότερο επιτυχείς εκτιμήσεις όταν είχαν πρόσθετα ενδιάμεσα σημεία αναφοράς, πέραν των δύο άκρων της αριθμογραμμής (0 και 1.000). Επίσης, το είδος των δοκιμασιών (δοκιμασίες NP και PN) επηρέασε τις εκτιμήσεις των συμμετεχόντων, οι οποίοι εμφάνισαν μεγαλύτερη επιτυχία στις δοκιμασίες PN. Η γενική επίδοση των συμμετεχόντων στο έργο των χωρικών ικανοτήτων ήταν πολύ υψηλή, με τα παιδιά της Ε΄ τάξης (90,42%) να υπερτερούν σε σχέση με τα παιδιά της Γ΄ τάξης (72,92%), ενώ το είδος των δοκιμασιών (δίπλωση χαρτιού - αναγνώριση σχήματος) δεν βρέθηκε να επηρεάζει τις επιδόσεις τους. Τέλος, υψηλή θετική συσχέτιση βρέθηκε ανάμεσα στην ικανότητα για πραγματοποίηση εκτιμήσεων πάνω σε αριθμογραμμή και τις χωρικές ικανότητες για τα παιδιά της Γ΄ τάξης: όσα παιδιά εμφάνισαν υψηλή επίδοση στις δοκιμασίες εκτίμησης έτειναν να εμφανίζουν υψηλή επιτυχία στις δοκιμασίες χωρικών ικανοτήτων. Αντίθετα, δεν βρέθηκε τέτοια συσχέτιση για τα παιδιά της Ε΄ τάξης. Τα αποτελέσματα αυτά συζητώνται ως προς τις εκπαιδευτικές τους προεκτάσεις και την προοπτική ενίσχυσης της ικανότητας των παιδιών για εκτιμήσεις στο δημοτικό σχολείο.

Λέξεις κλειδιά: Εκτίμηση σε αριθμογραμμή, χωρικές ικανότητες, παιδιά δημοτικού σχολείου

Abstract

The present study aimed to examine both children's estimations with natural numbers on a number line and the relationship of these estimations with their spatial skills. For this purpose, a study was conducted in which two tasks were designed and presented to 40 third-grade students and 39 fifth-grade students. In the first task (Task 1: Numberline estimations), participants were asked to estimate (a) the position of natural numbers on a bounded number line ranging from 0 to 1.000 (Number to Position, NP trials) and (b) the numerical value of natural numbers at a given position on a number line (Position to Number, PN trials). In the second task (Task 2: Spatial skills), participants were asked to (a) mentally fold a square piece of paper, mentally "punch" holes on it, and then imagine where the holes would be when the paper is unfolded (paper folding trials), and (b) recognize a target geometric shape whithin a composite of shapes (shape recognition trials). Although the participants as a whole demonstrated particularly high estimation abilities on the number line (74,83% and 90,42% for third and fifth graders, respectively), they showed more successful estimations when additional intermediate reference points, beyond the two end points of the number line (0 and 1.000), were provided. Additionally, the type of trials (NP and PN trials) affected the participants' estimations, with greater success observed in the PN trials. In the spatial skills task, the overall performance of the participants was very high, with fifth graders (90.42%) outperforming third graders (72.92%). The type of trials (paper folding vs. shape recognition) did not appear to affect their performance. Finally, a strong positive correlation was found between numberline estimations ability and spatial skills among third-grade children: those who performed well in the estimation task tended to also excel in the spatial skills task. However, such a correlation was not found among fifth-grade children. These findings are discussed in terms of their educational implications and the potential for enhancing children's ability for estimations in primary school.
Keywords: Numberline estimation, spatial skills, primary school children

Εισαγωγή

Η εκτίμηση αναφέρεται στην ικανότητα ενός ατόμου να αναγνωρίζει αριθμητικές ποσότητες προσεγγιστικά χωρίς τη χρήση ακριβών υπολογισμών. Αυτή η ικανότητα αποτελεί κρίσιμο βήμα στην ανάπτυξη της αριθμητικής κατανόησης και της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων (Dehaene, 1997· Siegler & Booth, 2004· Hogan & Brezinski, 2003· van de Walle et al., 2017· Δεσλή, 2021). Στο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ, 2003) της Ελλάδας, επισημαίνεται η σημασία της πραγματοποίησης εκτιμήσεων κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Επιπρόσθετα, η Δεσλή (2021) αναφέρει ότι η πραγματοποίηση εκτιμήσεων αποτελεί σημαντική μαθησιακή επιδίωξη και έχει ενσωματωθεί στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών από το 2006.

Βάσει των ερευνητικών δεδομένων, οι εκτιμήσεις διακρίνονται σε υπολογιστικές εκτιμήσεις (computational estimations), εκτιμήσεις μέτρησης (measurement estimations) και εκτιμήσεις πλήθους (numerosity estimations) (Hogan & Brezinski, 2003· van de Walle et al., 2017). Επίσης, η εκτίμηση στην αριθμογραμμή, μέχρι πρόσφατα, θεωρούνταν ότι ανήκει στις εκτιμήσεις πλήθους (Δεσλή, 2021). Σύμφωνα με τους Siegler, Thompson και Opfer (2009), η ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή αφορά στην ικανότητα εκτίμησης ενός αριθμού σε μία θέση πάνω σε αριθμογραμμή (Number to Position, NP) ή την ερμηνεία μίας θέσης του χώρου της αριθμογραμμής σε έναν αριθμό (Position to Number, PN).

Για τη μαθηματική εκπαίδευση, η σημασία της ικανότητας εκτίμησης στην αριθμογραμμή είναι αδιαμφισβήτητη, δεδομένου ότι η αριθμογραμμή αποτελεί οπτική αναπαράσταση που απεικονίζει τη σειρά (διάταξη) και το μέγεθος των αριθμών. Συγκεκριμένα, η ικανότητα αυτή φαίνεται να συνδέεται στενά τόσο με την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού (Dehaene, 1997· Siegler & Booth, 2004) όσο και με την ικανότητα πραγματοποίησης υπολογισμών με ακρίβεια αλλά και την ικανότητα επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων (Gunderson & Hildebrand, 2021· Laski & Siegler, 2007), καθώς μαθητές που έχουν επιτυχείς εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή τείνουν να είναι καλοί λύτες αριθμητικών προβλημάτων, όπου χρειάζονται οι υπολογισμοί με ακρίβεια.

Η κατανόηση της έννοιας του αριθμού συνδέεται με την αντίληψη ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί έχουν μεγέθη που μπορούν να διαταχθούν και να εντοπιστεί η θέση τους πάνω σε αριθμογραμμή (Siegler, Thompson & Schneider, 2011, στο Δεσλή & Τριανταφύλλου, 2022). Όπως επισημαίνουν οι van de Walle et al. (2017), οι ερμηνείες των μαθητών[1] σχετικά με τις θέσεις των αριθμών πάνω στην αριθμογραμμή δίνουν σημαντικές πληροφορίες για τις αναπαραστάσεις που έχουν σχηματίσει οι ίδιοι για τα αριθμητικά μεγέθη. Η ανάπτυξη της ικανότητας εκτίμησης συνιστά σημαντικό παράγοντα που ενισχύει την αριθμητική κατανόηση, καθώς τα παιδιά μπορούν να αναγνωρίζουν τη θέση ενός αριθμού σε ένα χωρικό συνεχές και να κατανοούν τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών, μπορεί λοιπόν να χρησιμοποιηθεί και ως εργαλείο αξιολόγησης (van de Walle et al., 2017).

Εν γένει, η εκτίμηση σε αριθμογραμμή αποτελεί σημαντικό εργαλείο αξιολόγησης της μαθηματικής σκέψης των παιδιών και συμβάλλει στη μαθηματική κατανόηση, αφού μπορεί να θεωρηθεί ως γέφυρα από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο (van de Walle et al., 2017). Με την οπτική της φύση, μπορεί να γίνει ένα χρήσιμο μεταβατικό εργαλείο που επιτρέπει την αναπαράσταση αφηρημένων αριθμών οπτικά και χωρικά, οδηγώντας τους μαθητές σε βαθύτερη μαθηματική κατανόηση. Εκτιμήσεις που αφορούν τον υπολογισμό θέσεων πάνω σε μια αριθμογραμμή συνδέονται με την ικανότητα για χωρικό συλλογισμό, καθώς συχνά απαιτείται η μετατροπή των αριθμητικών πληροφοριών σε ένα χωρικό συνεχές (Linderman & Tira, 2011), υποδηλώνοντας την ύπαρξη σχέσης ανάμεσα στην ικανότητα εκτίμησης στην αριθμογραμμή και τις χωρικές ικανότητες των ατόμων.

Οι χωρικές ικανότητες είναι απαραίτητες για να είναι σε θέση το άτομο να κατανοεί και να χειρίζεται χωρικές πληροφορίες που αφορούν τη θέση, τον χώρο και τις σχέσεις μεταξύ αντικειμένων σε έναν χώρο (Hawes & Ansari, 2020). Περιλαμβάνουν την ικανότητα του ατόμου να αντιλαμβάνεται και να αξιολογεί χωρικές πληροφορίες, όπως οι χωρικές σχέσεις μεταξύ αντικειμένων, η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο τα αντικείμενα βρίσκονται στον χώρο και η ικανότητα να πραγματοποιούν χωρικές μετατροπές (Newcombe & Frick, 2010· Hawes & Ansari, 2020).

Οι χωρικές ικανότητες είναι σημαντικές για την κατανόηση του χώρου και σχετίζονται με την επίδοση των παιδιών σε διάφορες μαθηματικές εργασίες, όπως στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων και στην επιτυχή εκτέλεση αριθμητικών υπολογισμών (Cheng & Mix, 2014· Mix & Cheng, 2012), καθώς έχει βρεθεί πως μαθητές με υψηλές χωρικές ικανότητες έχουν υψηλή επίδοση σε μαθηματικές εργασίες. Έννοιες όπως το σχήμα, το μέγεθος, η θέση, η απόσταση, η περιστροφή, η κίνηση στον χώρο είναι χωρικής φύσης, και είναι απαραίτητες σε πολλές πτυχές των μαθηματικών, όπως τις αλγεβρικές συναρτήσεις που συχνά απεικονίζονται

[1] Στην παρούσα εργασία ο όρος «μαθητής/μαθητές» αναφέρεται και στα δύο φύλα

σε επίπεδα συντεταγμένων, απαιτώντας από τους μαθητές να χρησιμοποιούν χωρική σκέψη (Mix & Cheng, 2012). Οι Boonen, van Wesel, Jolles και van der Schoot (2014) έδειξαν ότι άτομα με υψηλές χωρικές ικανότητες συχνά χρησιμοποιούν οπτικοχωρικές αναπαραστάσεις για την επίλυση προβλημάτων και οδηγούνται σε πιο αποδοτικές και αποτελεσματικές λύσεις. Οι Georges, Cornu και Schiltz (2019), εξέτασαν τις αριθμητικές ικανότητες μαθητών Γ΄ και Δ΄ δημοτικού και διαπίστωσαν, ότι εκτός από την ηλικία, η ικανότητα νοερής περιστροφής ήταν σημαντική για τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης σε καθορισμένο χρόνο. Μια τέτοια σύνδεση υποδηλώνει ότι οι χωρικές ικανότητες δεν είναι μόνο βοηθητικές, αλλά μπορεί να συμβάλλουν στην επίλυση δυσκολότερων μαθηματικών έργων.

Στα συμπεράσματα της μελέτης των Uttal και Cohen (2012), επισημαίνεται η σημασία των χωρικών ικανοτήτων για όποιον σκοπεύει να σπουδάσει στις επιστήμες που περιλαμβάνει το STEM (science, technology, engineering and maths), και αυτό σημαίνει ότι όσοι έχουν υψηλές χωρικές ικανότητες θα τα καταφέρουν σε αυτά τα εξαιρετικά απαιτητικά γνωστικά αντικείμενα.

Παρά τη σημασία της εκτίμησης σε αριθμογραμμή και των χωρικών ικανοτήτων για την ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων των παιδιών, υπάρχει ένα ανοιχτό πεδίο έρευνας στην εξέταση της μεταξύ τους σχέσης. Υπάρχουν έρευνες που έχουν εξετάσει τη σχέση ανάμεσα στην ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή και τις χωρικές ικανότητες των παιδιών δημοτικού σχολείου. Μία από αυτές των Gunderson και Hildebrand (2021) κατέληξε ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ της ικανότητας εκτίμησης σε αριθμογραμμή και των χωρικών ικανοτήτων, που αξίζει να ερευνηθεί περισσότερο, γιατί τα αποτελέσματα θα ωφελήσουν στον σχεδιασμό προγραμμάτων διδασκαλίας στα μαθηματικά με απώτερο σκοπό τη βαθύτερη μαθηματική κατανόηση. Με δεδομένο ότι αφενός η ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή αποτελεί σημαντικό προβλεπτικό παράγοντα των μαθηματικών ικανοτήτων (Gunderson & Hildebrand, 2021· Laski & Siegler, 2007· van de Walle et al., 2017) και αφετέρου ότι οι χωρικές ικανότητες θεωρούνται απαραίτητες για την κατανόηση του πραγματικού κόσμου αλλά και την ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων (Boonen et al., 2014· Cheng & Mix, 2014· Hawes & Ansari, 2020· Mix & Cheng, 2012· Newcombe & Frick, 2010), έχει ενδιαφέρον να μελετηθεί περαιτέρω η σύνδεσή τους. Σε αυτό το πλαίσιο, σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ της ικανότητας εκτίμησης φυσικών αριθμών πάνω σε αριθμογραμμή και των χωρικών ικανοτήτων των παιδιών δημοτικού σχολείου. Το κύριο ερευνητικό ερώτημα αφορά στη σχέση ανάμεσα στις δύο παραπάνω ικανότητες και, προκειμένου να δοθεί απάντηση σε αυτό, πραγματοποιήθηκε έρευνα σε παιδιά Γ΄ και Ε΄τάξης του δημοτικού σχολείου.

Τα επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα που η παρούσα εργασία θα επιχειρήσει να εξετάσει είναι:

α) Ποια είναι η ικανότητα των παιδιών Γ' και Ε' τάξης για πραγματοποίηση εκτίμησεων στην αριθμογραμμή;

Με δεδομένο ότι η ικανότητα των παιδιών να πραγματοποιούν εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή αυξάνεται με την ηλικία και την εκπαίδευση, με τα μεγαλύτερα παιδιά να έχουν συνήθως υψηλότερο ποσοστό επιτυχίας εκτιμήσεων από τα μικρότερα (Δεσλή & Τριανταφύλλου, 2019· Siegler & Booth, 2004· Siegler & Opfer, 2003· Laski & Siegler, 2007), αναμένεται στην παρούσα εργασία να βρεθούν ανάλογα αποτελέσματα. Αναμένεται να αναδειχθεί ότι η ακρίβεια στις εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή μεγαλώνει, καθώς οι μαθητές εξοικειώνονται περισσότερο και η εκπαιδευτική τους εμπειρία αυξάνεται, με τους μαθητές της Ε΄ τάξης, να πραγματοποιούν πιο ακριβείς εκτιμήσεις από τους μαθητές της Γ΄ τάξης.

β) Ποιες είναι οι χωρικές ικανότητες των παιδιών Γ' και Ε' τάξης;

Καθώς η χωρική σκέψη των ατόμων εξελίσσεται κατά τη διάρκεια της παιδικής ηλικίας (Piaget & Inhelder, 1967· Newcombe & Frick, 2010· Hawes & Ansari, 2020), οι μελετητές επισημαίνουν ότι η παρεχόμενη εκπαίδευση μπορεί να επηρεάσει θετικά στην ανάπτυξη των χωρικών ικανοτήτων (Newcombe & Frick, 2010· Hawes & Ansari, 2020· Uttal, Meadow, Newcombe, Tipton, Hand, Alden & Warren, 2013). Συνεπώς, και στο πλαίσιο της παρούσα εργασίας αναμένεται να βρεθεί ότι οι χωρικές ικανότητες των μαθητών της Ε΄ είναι πιο ανεπτυγμένες από αυτές των παιδιών της Γ΄ Δημοτικού.

γ) Υπάρχει σχέση μεταξύ των δύο παραπάνω ικανοτήτων στα παιδιά Γ΄ και Ε΄τάξης;

Έρευνες έχουν εξετάσει τη σχέση ανάμεσα στην ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή και τις χωρικές ικανότητες των παιδιών δημοτικού σχολείου. Σύμφωνα με τους Gunderson και Hildebrand (2021), οι χωρικές ικανότητες παιδιών Γ΄ τάξης συσχετίζονταν θετικά με τις επιτυχείς εκτιμήσεις τους σε αριθμογραμμή. Παρόμοια ευρήματα αναμένονται και στην παρούσα εργασία, με τα παιδιά που θα εμφανίσουν ανεπτυγμένες χωρικές ικανότητες να εμφανίσουν επιτυχία στις εκτιμήσεις τους στην αριθμογραμμή.

δ) Η σχέση αυτή διαφοροποιείται με την ηλικία;

Το συγκεκριμένο ερευνητικό ερώτημα αποτελεί διερευνητικό ερώτημα και επιχειρεί να εξετάσει αν, στην περίπτωση που βρεθεί σχέση ανάμεσα στην ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή και τις χωρικές ικανότητες των παιδιών, αυτή η σχέση είναι σταθερή και στις δύο ηλικιακές ομάδες ή εμφανίζεται μόνο σε μια ηλικιακή ομάδα. Δεδομένης της βιβλιογραφίας (Cornu et al., 2017· Gunderson & Hildebrand, 2021), είναι πιθανόν η σχέση αυτή να βρεθεί και στις δύο ηλικιακές ομάδες.
Συμπερασματικά, εστιάζοντας στην ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή και στις χωρικές ικανότητες, καθώς και στη διασύνδεσή τους, η παρούσα μελέτη ελπίζει να προσφέρει χρήσιμες πληροφορίες για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Η κατανόηση της σχέσης ανάμεσα στις δύο αυτές ικανότητες ενδέχεται να συμβάλει στη βελτίωση της διδασκαλίας των μαθηματικών και να υποστηρίξει την ανάπτυξη εκπαιδευτικών προγραμμάτων που θα αποσκοπούν στη βελτίωση των μαθηματικών ικανοτήτων των μαθητών.

Η παρούσα εργασία δομείται σε πέντε κεφάλαια, καθένα από τα οποία εστιάζει σε ένα διακριτό στάδιο της έρευνας. Ξεκινώντας, το πρώτο κεφάλαιο πραγματοποιεί μία σε βάθος βιβλιογραφική ανασκόπηση υφιστάμενων ερευνών που εστιάζουν στην ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή και στην πιθανή σχέση της με τις χωρικές ικανότητες των μαθητών. Στο δεύτερο κεφάλαιο, η εργασία παρουσιάζει με λεπτομέρειες τη μεθοδολογία που υιοθετήθηκε για τη διεξαγωγή της έρευνας. Αυτό περιλαμβάνει την περιγραφή του δείγματος, των εργαλείων που χρησιμοποιήθηκαν για τη συλλογή δεδομένων, καθώς και της στατιστικής ανάλυσης που εφαρμόστηκε. Στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την έρευνα, τα οποία έχουν υποστεί λεπτομερή στατιστική ανάλυση. Η ανάλυση αυτή επιτρέπει την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την σχέση μεταξύ της ικανότητας εκτίμησης φυσικών αριθμών σε αριθμογραμμή και των χωρικών ικανοτήτων. Στο τέταρτο κεφάλαιο, η εργασία καταγράφει τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα ευρήματα της έρευνας. Ακολουθεί μια εις βάθος συζήτηση των συμπερασμάτων αυτών, λαμβάνοντας υπόψη τυχόν περιορισμούς της μελέτης και εστιάζοντας στις επιπτώσεις τους στην εκπαιδευτική πράξη. Τέλος, το πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο περιλαμβάνει πλήρη λίστα με τις βιβλιογραφικές αναφορές που χρησιμοποιήθηκαν για τη συγγραφή της εργασίας.

Κεφάλαιο 1ο : Βιβλιογραφική επισκόπηση

Μέρος Α΄

1.Α.1. Η έννοια της εκτίμησης

Η εκτίμηση, ως έννοια, διαδραματίζει θεμελιώδη ρόλο σε διάφορες πτυχές της ζωής και έχει συγκεντρώσει μεγάλο ενδιαφέρον στην ακαδημαϊκή βιβλιογραφία. Οι περισσότεροι άνθρωποι κάνουν καθημερινά πολλές εκτιμήσεις. Για παράδειγμα, εκτιμούν τι ώρα πρέπει να φύγουν από το σπίτι τους για να προλάβουν το λεωφορείο, αν έχουν αρκετά μετρητά για να πληρώσουν τα ψώνια τους, την ποσότητα του αλατιού που θα προσθέσουν στο γεύμα τους για να είναι νόστιμο και όχι πολύ αλμυρό. Σε πολλές καθημερινές καταστάσεις, χρησιμοποιούνται κατά προσέγγιση εκτιμήσεις, καθώς εξυπηρετούν πολλούς σκοπούς. Αυτό συμβαίνει, διότι οι άνθρωποι συχνά δεν έχουν τη σχετική γνώση, τον χρόνο, τα μέσα ή τα κίνητρα που απαιτούνται για τον υπολογισμό των τιμών με ακρίβεια (Siegler & Booth, 2005). Επιπλέον, η αναγκαιότητα για εκτιμήσεις προέρχεται από την ανάγκη για γρήγορη λήψη αποφάσεων, ειδικά σε μια κατάσταση όπου η ακρίβεια είναι αδύνατη ή περιττή. Ωστόσο, η εκτίμηση στην καθημερινή ζωή είναι μια πολύ σύνθετη διαδικασία, διότι, για να έχει πρακτική χρησιμότητα, μπορεί να απαιτεί γνώση του πλαισίου ενός προβλήματος, καθώς και των μονάδων μέτρησης, όπως για παράδειγμα, του χρόνου, της απόστασης ή της ποσότητας (Siegler & Booth, 2004).

Για την αποσαφήνιση της έννοιας της εκτίμησης, έχουν προταθεί διάφοροι ορισμοί. Κατά βάση, αναφέρεται ως η ικανότητα με την οποία κάποιος μπορεί να είναι σε θέση να προσεγγίσει την τιμή ενός μεγέθους, μιας ποσότητας ή το αποτέλεσμα ενός μαθηματικού προβλήματος χωρίς τη χρήση αριθμητικών υπολογισμών με ακρίβεια (Reys, 1984). Αυτή η ικανότητα συνδέει τον αφηρημένο κόσμο των αριθμών με την πραγματικότητα με την οποία αλληλοεπιδρά το άτομο σε καθημερινή βάση (Reys, 1984). Οι Segovia και Castro (2009), ορίζουν την εκτίμηση σε σχέση με το πλαίσιο και τα ατομικά χαρακτηριστικά του εκτιμητή. Για παράδειγμα η εκτίμηση του αριθμού των μήλων σε ένα καλάθι διαφέρει από τη μέτρηση του χρόνου που απαιτείται για να διασχίσει κάποιος απόσταση ενός μιλίου, παρόλο που και οι δύο είναι πράξεις εκτίμησης.

Η έννοια της εκτίμησης περιλαμβάνει ένα εύρος χαρακτηριστικών που περιέγραψε ο Reys (1984) και επέκτειναν οι Segovia, Castro, Rico και Castro (2009). Σύμφωνα με αυτά:

- Η εκτίμηση συνίσταται στον κατά προσέγγιση υπολογισμό της τιμής μιας ποσότητας ή του αποτελέσματος μιας αριθμητικής πράξης.

- Το υποκείμενο που προβαίνει στην εκτίμηση έχει κάποιες πληροφορίες, αναφορές ή εμπειρίες με την κατάσταση που πρόκειται να εκτιμηθεί. Ένα παράδειγμα στο οποίο συνδυάζονται η υποκειμενικότητα και το πλαίσιο, προέρχεται από την καλαθοσφαίριση. Οι καλαθοσφαιριστές έχουν μάθει να εκτιμούν διάφορα εύρη χρόνων επίθεσης σε δευτερόλεπτα, λόγω των κανόνων του παιχνιδιού και της συνεχούς εξάσκησης. Οι θεατές ενθουσιάζονται όταν σκοράρει ένας καλαθοσφαιριστής λίγα εκατοστά του δευτερολέπτου, προτού μηδενιστεί το χρονόμετρο, όμως, αν κανείς εστιάσει στο γεγονός ότι σε υψηλό επίπεδο οι παίκτες εκπαιδεύονται να εκτιμούν τον χρόνο σε δευτερόλεπτα, τότε θα κατανοήσει ότι οι πιθανότητες να επιτευχθεί το καλάθι στο τελευταίο δευτερόλεπτο είναι ιδιαίτερα αυξημένες.
- Η εκτίμηση γίνεται κατά κανόνα νοερά, χωρίς μολύβι και χαρτί.
- Γίνεται γρήγορα χρησιμοποιώντας τους απλούστερους δυνατούς αριθμούς.
- Η τιμή που εκτιμάται δεν είναι ακριβής, αλλά προσεγγίζει το επιθυμητό για τη λήψη αποφάσεων. Υπό την στενή της έννοια, οι υπολογισμοί κατά τη διαδικασία της εκτίμησης, τείνουν να προσεγγίζουν το ακριβές αποτέλεσμα, π.χ. μιας αριθμητικής πράξης, με κάποια αποδεκτά ποσοστά απόκλισης, συνήθως της τάξης του ± 20%.
- Το αποτέλεσμα της επιτυχούς ή ανεπιτυχούς εκτίμησης, διαφέρει από άτομο σε άτομο γιατί συσχετίζεται με τις εμπειρίες, τις πληροφορίες κι άλλα δεδομένα που σχετίζονται με το πλαίσιο, εντός του οποίου ενεργείται ο κατ' εκτίμηση υπολογισμός.

Σύμφωνα με το National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), η εκτίμηση είναι η διαδικασία προσέγγισης του μεγέθους, της ποσότητας ή του αποτελέσματος ενός μαθηματικού προβλήματος χωρίς τη χρήση ακριβών αριθμητικών υπολογισμών ή άλλων μεθόδων, χρησιμοποιώντας προσεγγιστικές μεθόδους, όπως απλοποιήσεις, στρογγυλοποιήσεις. (NCTM, 2006, στο Δεσλή, 2021). Επιπλέον, όπως επισημαίνει η Δεσλή (2021) παραπέμποντας στο NCTM, η εκτίμηση έχει διττή έννοια και σημαίνει μια διαδικασία υπολογισμών και το αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτών των υπολογισμών.

Ο Reys (1984) αναφέρει πέντε ευρέως αποδεκτούς λόγους για τη διδασκαλία της εκτίμησης στο σχολείο. Αρχικά, αποτελεί προϋπόθεση για την επιτυχή ανάπτυξη όλων των γραπτών αριθμητικών αλγορίθμων. Δεύτερον, προάγει την κατανόηση της δομής των αριθμών και των ιδιοτήτων τους. Τρίτον, βελτιώνει τη δημιουργική και ανεξάρτητη σκέψη, ενώ παράλληλα ενθαρρύνει τους μαθητές να δημιουργούν έξυπνους τρόπους χειρισμού των αριθμών. Τέλος, συμβάλλει στην ανάπτυξη καλύτερων δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων και αποτελεί τη βάση για την ανάπτυξη δεξιοτήτων υπολογιστικής εκτίμησης.

Συμπερασματικά, η εκτίμηση είναι μια τόσο απλή έννοια, αλλά συνάμα πολύπλοκη. Η αξία της εκτίμησης είναι ιδιαίτερα σημαντική, γιατί βοηθά το άτομο να διαχειριστεί τεράστιο όγκο δεδομένων και πληροφοριών που αφορούν καταστάσεις της καθημερινότητας, αλλά και αποφάσεις που συνδέονται με τις επιστήμες. Καθώς ο κόσμος βασίζεται όλο και περισσότερο στα δεδομένα, η ικανότητα του ατόμου να αναλύει πληροφορίες, ώστε να λαμβάνει γρήγορες και σωστές αποφάσεις, αποδεικνύεται αναγκαία.

1.Α.2. Εκτίμηση και Μαθηματικά

Όπως σημειώθηκε πιο πάνω, ο Reys (1984) υπογράμμισε την αναγκαιότητα διδασκαλίας της εκτίμησης με απώτερο σκοπό τη βελτίωση των μαθηματικών ικανοτήτων. Παράλληλα, οι Siegler και Booth (2005) αναφέρουν ότι η ικανότητα εκτίμησης αποτελεί τη βάση πολλών γνωστικών λειτουργιών και δείκτη ευρύτερων μαθηματικών ικανοτήτων. Για παράδειγμα, τόσο η εκτίμηση μιας απόστασης, όσο και η εκτίμηση μιας ποσότητας προϋποθέτουν την καλή αίσθηση του αριθμού και την πρώιμη αριθμητική ικανότητα.

Η Rubenstein (1985) επισημαίνει ότι η εκτίμηση δεν είναι απλώς προσέγγιση των αριθμών, αλλά είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την αντίληψη και την εκτίμηση των αριθμητικών τιμών. Η εκτίμηση λειτουργεί ως ένδειξη της εννοιολογικής κατανόησης των αριθμών. Παραδείγματος χάρη, η συνειδητοποίηση ότι το 498 είναι κοντά στο 500 δεν είναι απλώς στρογγυλοποίηση του 498, αλλά αντικατοπτρίζει την κατανόηση του συστήματος των αριθμών και την αξία θέσης ψηφίου.

Σύμφωνα με την Κολέζα (2009), η αίσθηση του αριθμού περιλαμβάνει ένα σύνολο εννοιών, όπως η αξία θέσης των ψηφίων ενός αριθμού, οι τρόποι αναπαράστασης του αριθμού, οι σχέσεις μεταξύ των αριθμών, το σχετικό μέγεθός τους, η ικανότητα χρήσης των αριθμών για την επίλυση προβλημάτων και οι δεξιότητες που αναπτύσσει το άτομο, όπως η ευελιξία στους νοερούς υπολογισμούς, οι αριθμητικές εκτιμήσεις και οι ποσοτικές κρίσεις.

Σε μια μελέτη ανασκόπησης, οι Segovia και Castro (2009) διερεύνησαν την έννοια της εκτίμησης και τη σχέσης της με την αίσθηση του αριθμού, αναφέροντας ότι, παρόλο που υπάρχουν διαφορετικές απόψεις σχετικά με το τι ορίζεται ως αίσθηση του αριθμού, η εκτίμηση λαμβάνεται ως αναπόσπαστο μέρος αυτής. Ταυτόχρονα, θεωρούν ότι είναι στενά συνδεδεμένη με αυτή, επισημαίνοντας ότι ένας καλός εκτιμητής έχει καλά ανεπτυγμένη την αίσθηση του αριθμού. Η έννοια του αριθμού ορίζεται από τους ερευνητές ως ένας όρος που περιγράφει την ικανότητα ενός ατόμου να εργάζεται με αριθμούς, να κατανοεί τις ποσότητες τους και να τους χρησιμοποιεί με ουσιαστικούς τρόπους. Περιλαμβάνει διάφορες μαθηματικές δεξιότητες, όπως η καταμέτρηση, η σύγκριση, η εκτίμηση και η εκτέλεση πράξεων.

Οι Segovia και Castro (2009) αναφέρονται στο άρθρο τους:

- σε τύπους εκτίμησης, που θα αναλυθούν παρακάτω
- σε στρατηγικές εκτίμησης, όπως η στρογγυλοποίηση, τα σημεία αναφοράς, η χρήση οπτικών αναπαραστάσεων - βοηθημάτων και βέβαια στην υποκειμενικότητα του εκτιμητή.
- στο σφάλμα και το ποσοστό αβεβαιότητας της εκτίμησης καθώς είναι άλλο η εγγύτητα προς το αποτέλεσμα κι άλλο η προσέγγιση του αποτελέσματος, που προϋποθέτει αριθμητικές πράξεις.
- στο πλαίσιο της εκτίμησης που επιδρά στο αποτέλεσμα. Θεωρούν πως είναι άλλο να εκτιμά κάποιος το πόσο θα κοστίσει ένα ταξίδι, κι άλλο να εκτιμά σε πόση ώρα θα φτάσει στο κέντρο της πόλης με το αυτοκίνητο.

Για τους παραπάνω λόγους θεωρούν την εκτίμηση περίπλοκη έννοια η οποία χρειάζεται να διερευνηθεί περισσότερο. Επιπρόσθετα, τονίζουν ότι οι παιδαγωγικές πρακτικές και ένα πρόγραμμα σπουδών στα μαθηματικά εμπλουτισμένο με εκτιμήσεις επιφέρουν τεράστια επίδραση στην κατανόηση των μαθητών για τα μαθηματικά, αλλά και την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού. Όταν παρουσιάζεται ένα πρόγραμμα σπουδών εμπλουτισμένο με εκτιμήσεις και κατά προσέγγιση υπολογισμούς, η αίσθηση του αριθμού στους μαθητές σταδιακά βελτιώνεται.

Η Rubenstein (1985) σημειώνει, επίσης, ότι η δυνατότητα εκτίμησης καθιστά τους μαθητές ικανούς να κρίνουν τη λογικότητα των απαντήσεων, συσχετίζοντάς τη με την κριτική σκέψη και τις αναλυτικές ικανότητες. Κάτι παρόμοιο επισημαίνουν και οι Σοφοκλέους και Λεμονίδης (2007), τονίζοντας ότι η διαδικασία της εκτίμησης δίνει τη δυνατότητα για άμεσο ή έμμεσο έλεγχο, επιτρέποντας έτσι να εξακριβωθεί εάν ένας υπολογισμός είναι σωστός, και παρέχοντας την ευκαιρία για την ανάκληση της απάντησης, εφόσον ολοκληρωθεί ο κατά προσέγγιση υπολογισμός. Αυτό συμβαίνει, διότι η διαδικασία της εκτίμησης συνοδεύεται συχνά από τη δυνατότητα αξιολόγησης του αποτελέσματος ως προς το πόσο είναι λογικό και αποδεκτό, προωθεί τη μαθηματική σκέψη και την ανάπτυξη της ικανότητας του μαθητή να αναγνωρίζει και να διορθώνει λάθη στους υπολογισμούς του (Σοφοκλέους & Λεμονίδης, 2007· Rubenstein, 1985· Van de Walle et al., 2017· Δεσλή, 2021), συνεπώς, προϋποθέτει τη μεταγνώση ή τη μεταγνωστική ενημερότητα (Yang, 2012). Γι' αυτό και ο O' Daffer (1993) προτείνει τα παιδιά να ενθαρρύνονται και να ελέγχουν τη λογικότητα μιας απάντησης σε ένα λεκτικό πρόβλημα, κάνοντας αρχικά μια εκτίμηση του αποτελέσματος, κερδίζοντας με αυτόν τον τρόπο, μια σημαντική τεχνική ελέγχου της απάντησής τους. Για παράδειγμα, κατά τη διαδικασία αξιολόγησης των μαθητών ο εκπαιδευτικός ρωτά πόσο κάνει 20 x 18. Όσες φορές δίνουν αποτέλεσμα μεγαλύτερο από 400, σημαίνει ότι δεν ελέγχουν την εκτίμησή τους, γιατί αν 2 x 2 = 4, τότε 20 x 20 = 400, συνεπώς 18 x 20 θα είναι μικρότερο από το 400.

Παράλληλα, η Δεσλή (2021) τόνισε την αναγκαιότητα των εκτιμήσεων στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών για τα μαθηματικά, επισημαίνοντας την ενσωμάτωση στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών από το 2006 και δίνοντας έτσι έναν κυρίαρχο χαρακτήρα στην εκτίμηση και τη σύνδεσή της με τα μαθηματικά στο ελληνικό εκπαιδευτικό πρόγραμμα.

Συνεπώς, η διδασκαλία στρατηγικών εκτίμησης συνιστά μια διαδικασία, η οποία, εάν σχεδιαστεί προσεκτικά, θα συμβάλλει καταλυτικά στην ανάπτυξη βαθύτερης μαθηματικής σκέψης (Σοφοκλέους & Λεμονίδης, 2007· Lemonidis & Kaimakani, 2013).

1.Α.3. Διάφοροι τύποι εκτίμησης στα μαθηματικά

Οι Hogan και Brezinski (2003) και οι Van de Walle et al. (2017) αναφέρουν πως οι εκτιμήσεις περιλαμβάνουν τέσσερα είδη· υπολογιστικές εκτιμήσεις (computational estimations), εκτιμήσεις μέτρησης (measurement estimations), εκτιμήσεις πλήθους (numerosity estimations) και εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή (numberline estimations). Για την τελευταία κατηγορία, οι ερευνητές μέχρι πρόσφατα την κατέτασσαν στις εκτιμήσεις πλήθους (Δεσλή, 2021).

Υπολογιστική Εκτίμηση. Αποτελεί τη διαδικασία εύρεσης μιας κατά προσέγγιση λύσης σε ένα αριθμητικό πρόβλημα (Δεσλή, 2021· Siegler & Booth, 2004). Η υπολογιστική εκτίμηση είναι η διαδικασία προσέγγισης μιας αριθμητικής τιμής χωρίς τη χρήση υπολογισμών με ακρίβεια. Απαιτεί την ικανότητα να προβλέπονται, να εκτιμώνται και να υπολογίζονται προσεγγιστικά αριθμητικά αποτελέσματα βάσει συχνών καταστάσεων που απαιτούν γρήγορη απάντηση ή προσέγγιση (Van de Walle et al. 2017· Siegler & Booth, 2004). Επιπλέον, επιτρέπει στους ανθρώπους να προσεγγίζουν τα αποτελέσματα γρήγορα και απλά, παρέχοντας μια εκτιμώμενη κατάλληλη απάντηση για την εν λόγω κατάσταση. Σύμφωνα με τον Λεμονίδη (2020) η υπολογιστική εκτίμηση συγχέεται εσφαλμένα με την ικανότητα του ατόμου για νοερούς υπολογισμούς. Οι Siegler και Booth (2005) σε έρευνά τους σχετικά με την αναπτυξιακή πορεία των υπολογιστικών εκτιμήσεων στα παιδιά, διευκρινίζουν ότι, καθώς αυτά μεγαλώνουν, βελτιώνουν τις στρατηγικές τους, μεταβαίνοντας από απλές μεθόδους, όπως η στρογγυλοποίηση, σε πιο εξελιγμένες προσεγγιστικές μεθόδους χρησιμοποιώντας στις στρατηγικές τους τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών. Αυτό συμβαίνει λόγω της συνεχούς εκπαίδευσης και της καθημερινής ενασχόλησης με τους αριθμούς. Οι δε Desli και Lioliou (2020) διερεύνησαν τη σχέση της υπολογιστικής εκτίμησης με την επίλυση προβλήματος σε παιδιά της Στ΄ τάξης ελληνικού σχολείου. Διαπίστωσαν ότι οι μαθητές που είναι καλοί στην υπολογιστική εκτίμηση, έχουν ανεπτυγμένη ικανότητα επίλυσης προβλήματος. Στην ίδια μελέτη, τα αποτελέσματά τους επιβεβαιώθηκαν και σε ενήλικες.

Εκτίμηση μέτρησης. Αφορά την προσέγγιση φυσικών μεγεθών όπως το μήκος, ο όγκος, το βάρος ή ο χρόνος. Αυτό το είδος εκτίμησης είναι ιδιαίτερα σημαντικό σε εφαρμογές στην καθημερινή ζωή, όπου οι ακριβείς μετρήσεις δεν είναι απαραίτητες (Δεσλή, 2021). Για παράδειγμα, ένας οικοδόμος μπορεί να χρειαστεί να εκτιμήσει το εμβαδόν μιας περιοχής χωρίς εργαλεία μέτρησης σε πολύ λίγο χρόνο ή ένας μάγειρας μπορεί να χρειαστεί να εκτιμήσει πόσα γραμμάρια από κάθε συστατικό θα χρησιμοποιήσει στη μαγειρική του, χωρίς να προβεί σε σχολαστικές μετρήσεις. Ωστόσο, η ποικιλομορφία των εκτιμήσεων μέτρησης και η πολυπλοκότητα των φυσικών μεγεθών κάνουν τις εκτιμήσεις μέτρησης ένα ιδιαίτερα σύνθετο αντικείμενο μελέτης. Για τους παραπάνω λόγους, οι εκτιμήσεις μέτρησης δεν έχουν μελετηθεί επαρκώς, κατά τους Δεσλή και Μυρόβαλη (2018).

Εκτίμηση πλήθους. Περιλαμβάνει την προσέγγιση του πλήθους των αντικειμένων ή των ατόμων σε μια ομάδα βάσει μιας γρήγορης παρατήρησης. Αφορά στην ικανότητα να εκτιμά κάποιος την ποσότητα ή τον αριθμό αντικειμένων, χωρίς καταμέτρηση, χωρίς τη χρήση ακριβών μετρήσεων ή μαθηματικών υπολογισμών (Siegler & Booth, 2005). Αυτή η δεξιότητα που επιτρέπει στα άτομα να προσεγγίζουν την ποσότητα ή τον αριθμό αντικειμένων βασιζόμενα στην αίσθησή τους, την εμπειρία τους και την εκτίμησή τους για τη συνολική ποσότητα, αποτελεί ένα πολύ σημαντικό προσόν που αποκτάται και βελτιώνεται μέσα από την εμπειρία, την εξοικείωση και το κατάλληλο μαθηματικό πλαίσιο (Booth & Siegler, 2006). Δύναται να εφαρμοστεί σε μικρά ή μεγάλα πλήθη, όπως ο αριθμός αντικειμένων σε μια συλλογή ή τα αντικείμενα σε έναν συγκεκριμένο χώρο, χωρίς την ακριβή μέτρησή τους. Οι Hogan και Brezinski (2003) ασχολήθηκαν με την πολυπλοκότητα της εκτίμησης πλήθους, εμβαθύνοντας στο ερώτημα αν πρόκειται για μοναδική ή πολύπλευρη ικανότητα. Το πλήθος που είχαν οι Hogan και Brezinski στην έρευνά τους ήταν 20 (νομίσματα, καραμέλες) και κατέληξαν πως σε ανάλογα έργα εκτίμησης πλήθους, επιδρά η προσοχή, η εργαζόμενη μνήμη, η χωρική επεξεργασία και άλλες επιτελικές ικανότητες που ενεργοποιούν διαφορετικά νευρωνικά δίκτυα. Συνεπώς, συσχετίζεται με την αναπτυξιακή ηλικία, και κατ' επέκταση με την υπολογιστική εκτίμηση και την εκτίμηση μέτρησης. Η έρευνά τους υπογράμμισε ότι η εκτίμηση πλήθους, αλληλεπικαλύπτεται με τους άλλους τύπους εκτίμησης, αυτή η επικάλυψη συνδέεται με τις γνωστικές διαδικασίες και τους άλλους τύπους εκτίμησης που αντιστοιχούν στην αναπτυξιακή ηλικία των μαθητών.

Οι Siegler και Booth (2004) αναφέρουν πως κάποια είδη εκτίμησης όπως, η εκτίμηση απόστασης, χρόνου ή χρημάτων, απαιτούν γνώση μονάδων μέτρησης, λόγου χάρη μίλια, λεπτά ή δολάρια. Από την άλλη, άλλα είδη, όπως η εκτίμηση του αριθμού των ανθρώπων σε ένα δωμάτιο ή το πλήθος των κουκίδων σε μια σελίδα, δεν το απαιτούν. Το μεγάλο εύρος, η ποικιλία των εργασιών στα διαφορετικά είδη εκτίμησης, καθώς και η ανάγκη για προαπαιτούμενες γνώσεις καθιστούν δύσκολο τον προσδιορισμό των διαδικασιών, που είναι κοινές τόσο για όλους τους τύπους εκτίμησης, όσο και την διατύπωση πειραματικών παραδειγμάτων (experimental paradigms) χρήσιμων για τη μελέτη της εξέλιξής τους (Siegler & Booth, 2004). Οι Van de Walle et al. (2017) συμφωνούν και τονίζουν ότι μια ισχυρή εκπαίδευση στα μαθηματικά είναι αναγκαίο να προχωρήσει πέρα από την επίλυση προβλημάτων, έτσι ώστε να επιτρέψει στους μαθητές να αναπτύξουν μια σειρά διαφορετικών ικανοτήτων εκτίμησης, η οποία είναι σημαντική όχι μόνο σε καθημερινά πλαίσια, αλλά και στην καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης.

Σε κάθε περίπτωση, επισημαίνεται ότι οι εκτιμήσεις στα μαθηματικά, είτε υπολογιστικές, μέτρησης ή πλήθους, χρησιμεύουν ως γέφυρα από αφηρημένες μαθηματικές έννοιες σε πρακτική εφαρμογή στην πραγματική ζωή.

Εκτίμηση σε αριθμογραμμή. Η αριθμογραμμή είναι μια οπτική αναπαράσταση που απεικονίζει τη σειρά και το μέγεθος των αριθμών (Booth & Siegler, 2006). Οι Woods, Ketterlin, Geller, και Basaraba (2017) αναφέρουν πως η ισχυρή θεμελίωση των πρώτων αριθμητικών εννοιών είναι κρίσιμη για τη μελλοντική επιτυχία των μαθητών στα μαθηματικά. Οι οπτικές αναπαραστάσεις, όπως η αριθμογραμμή, υποστηρίζουν την ανάπτυξη της αντίληψης της έννοιας του αριθμού από τους μαθητές βοηθώντας τους να δημιουργήσουν μια νοητική αναπαράσταση της τάξης και του μεγέθους των αριθμών. Επιπλέον, η διδασκαλία με σαφείς οδηγίες και βήματα, οδηγεί στη σωστή απάντηση μέσω της μετάβασης από τις συγκεκριμένες στις οπτικές και εν τέλει στις αφηρημένες αναπαραστάσεις των μαθηματικών εννοιών και υποστηρίζει την εννοιολογική κατανόηση από τους μαθητές. Η έρευνα των Woods et al. (2017) τονίζει τη χρήση της αριθμογραμμής στη διδασκαλία με στόχο αυτήν την εννοιολογική κατανόηση. Η αριθμογραμμή ως αναπαραστατικό εργαλείο βοηθά τους μαθητές στην κατανόηση των εννοιών της αρίθμησης, του μεγέθους των αριθμών, των σχέσεων μέρους-όλου και των μαθηματικών πράξεων όπως η πρόσθεση, η αφαίρεση, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση.

Βάσει των Siegler, Thompson, και Opfer (2009), η εκτίμηση σε αριθμογραμμή απαιτεί τη μετάφραση ενός αριθμού σε μία χωρική θέση πάνω στην αριθμογραμμή (Number to Position) ή τη μετάφραση μίας χωρικής θέσης της αριθμογραμμής σε έναν αριθμό (Position to Number). Τα έργα που μετρούν την ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή και αφορούν πραγματικούς αριθμούς, είναι για τους ερευνητές συνήθως έργα σε κενή οριζόντια αριθμογραμμή με αρχή και τέλος (π.χ. από το 0 έως το 100). Οι συμμετέχοντες καλούνται να εκτιμήσουν ποιος αριθμός βρίσκεται σε μια θέση πάνω στη γραμμή (π.χ. «Ποιος είναι εδώ;») ή σε ποια θέση εκτιμούν ότι πρέπει να τοποθετηθεί ο ζητούμενος αριθμός (π.χ. «Πού βρίσκεται ο αριθμός 84 πάνω στην αριθμογραμμή;») (Δεσλή, 2021, σελ 186).

Αν και η ανάγκη για εκτίμηση σε αριθμογραμμή σπάνια θα παρουσιαστεί στην καθημερινή ζωή ενός ατόμου (Δεσλή, 2021), η σημασία αυτής της ικανότητας είναι μεγάλη, σύμφωνα με τον Dehaene στο έργο του «The Number Sense: How the Mind Makes Mathematics» (1997). Ο Dehaene (1997) υποστηρίζει ότι η ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή συμβάλλει στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού στα παιδιά και θεωρεί ότι αυτή η έμφυτη μαθηματική ικανότητα βελτιώνεται μέσω της εκπαίδευσης και της εμπειρίας.

Οι Schneider, Paetsch και Grabner (2009) σε μελέτη τους με 429 παιδιά Ε΄ και Στ΄ δημοτικού εξέτασαν μέσω δεκαδικών κλασμάτων κατά πόσο η ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή διαμεσολαβεί στην επίδραση της εννοιολογικής κατανόησης των δεκαδικών αριθμών. Έπειτα, μέτρησαν το φαινόμενο της απόστασης (distance effect), την εννοιολογική γνώση, την ακρίβεια εκτίμησης σε αριθμογραμμή, την ταχύτητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή και τη μαθηματική επίδοση. Συνολικά, μετά από ατομική συνεδρία με κάθε μαθητή και ανάλυση των αποτελεσμάτων, συμπέραναν ότι η εννοιολογική γνώση, η «αριθμητική νοημοσύνη» (numerical intelligence) και η ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή τόσο ξεχωριστά, όσο και σε συνδυασμό, ήταν καλοί προβλεπτικοί παράγοντες της μαθηματικής επίδοσης. Τα αποτελέσματα αυτά αναδεικνύουν τη σχέση της εννοιολογικής κατανόησης και της ικανότητας εκτίμησης σε αριθμογραμμή. Οι δε ερευνητές συμπέραναν ότι η ικανότητα των μαθητών εκτίμησης σε αριθμογραμμής, εκτός από προβλεπτικός παράγοντας για την καλή συνολική επίδοση στα μαθηματικά, συνδέεται στενά και με την εννοιολογική γνώση τους για τους ρητούς αριθμούς, φύσει δύσκολους για τους μαθητές.

Οι Zhu, Cai, και Leung (2017) διατείνονται ότι η καλή ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή προβλέπει την επιτυχία στα μαθηματικά. Εξέτασαν 148 μαθητές της Β΄ και της Δ΄ Δημοτικού στη Σαγκάη. Τα αποτελέσματά τους έδειξαν ότι στη Β΄ Δημοτικού η ακρίβεια στην εκτίμηση σε αριθμογραμμή συνδέεται σημαντικά με την υπολογιστική ικανότητα, ενώ στους μαθητές της Δ΄ Δημοτικού με την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων. Μια ακόμη διαπίστωσή τους είναι ότι η εκτίμηση σε αριθμογραμμή είναι ένα εν δυνάμει χρήσιμο εργαλείο για τους εκπαιδευτικούς όχι μόνο ανάδειξης, αλλά και βελτίωσης των μαθηματικών ικανοτήτων των μαθητών.

Ο δε Träff (2013) διερεύνησε τις σχέσεις των γενικών γνωστικών και αριθμητικών ικανοτήτων με διάφορες πτυχές των μαθηματικών σε παιδιά. Η ανάλυση των ευρημάτων έδειξε ότι η καλή ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή ήταν καθοριστική για την ενίσχυση των παιδιών σε πολύπλοκες μαθηματικές εργασίες. Ομοίως, οι Schneider, Thompson και Rittle-Johnson (2017), σε μια συγκριτική ανασκόπηση, υπογράμμισαν πως η σύγκριση αριθμητικών ποσοτήτων και η ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή συνδέονται και ενισχύουν τη μαθηματική ικανότητα.

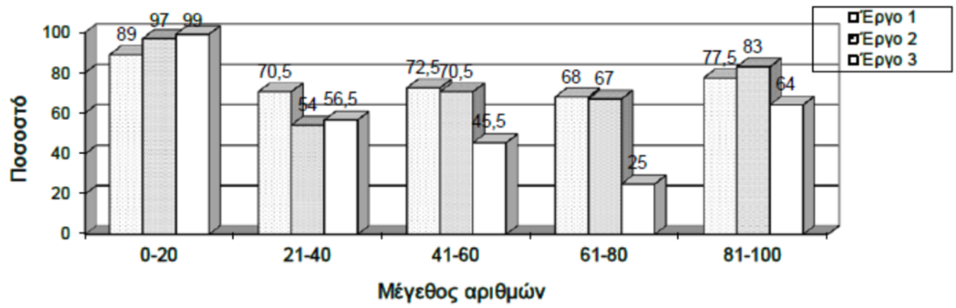
Παράλληλα, οι Simms, Clayton, Cragg, Gilmore και Johnson (2016) μελέτησαν τη σχέση της ικανότητας εκτίμησης σε αριθμογραμμή με την οπτικοκινητική ανάπτυξη και τις οπτικοχωρικές ικανότητες παιδιών στο Λονδίνο ηλικίας από 8 έως 10 ετών. Συγκεκριμένα, τους δόθηκαν έργα εκτίμησης με αριθμογραμμές, αλλά και έργα οπτικοχωρικών ικανοτήτων. Τα αποτελέσματά τους δείχνουν σημαντική σχέση μεταξύ της μαθηματικής επίδοσης και της σωστής εκτίμησης σε αριθμογραμμή των μαθητών, καταλήγοντας ότι τα παιδιά που έχουν πιο γραμμική και ακριβή εκτίμηση, επιδεικνύουν καλύτερη μαθηματική επίδοση. Με την ενσωμάτωση της χωρικής ικανότητας και των οπτικών και κινητικών λειτουργιών να είναι βασικό στοιχείο της μελέτης τους, κατέληξαν ότι τα παιδιά με ανεπτυγμένες αυτές τις ικανότητες συνήθως έχουν καλές εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή και μαθηματικές επιδόσεις γενικότερα. Αυτό το επιχείρημα υποστηρίζεται από μια παρόμοια άποψη, εκείνη των Cohen και Sarnecka (2014), οι οποίοι αναφέρουν ότι η ικανότητα των παιδιών για εκτίμηση σε αριθμογραμμή αντικατοπτρίζει την ανεπτυγμένη ικανότητα εκτίμησης μέτρησης, καθώς οι μαθητές χωρίζουν μια γραμμή σε κομμάτια και τοποθετούν τους αριθμούς αναλόγως. Οι ερευνητές θεωρούν πως η εκτίμηση της θέσης των αριθμών δεν υποδηλώνει απλώς καλή αναπαράσταση των αριθμών, αλλά και καλή χωρική ικανότητα. Όπως επισημαίνουν οι Δεσλή και Τριανταφύλλου (2022), η χρήση της αριθμογραμμής είναι αρκετά απαιτητική, καθώς περιλαμβάνει επιπρόσθετα την αντιστοίχιση μεταξύ αριθμού και φυσικού χώρου. Ως εκ τούτου, οι εκτιμήσεις σε αυτήν είναι πιθανόν να επηρεάζονται από τη χωρική ικανότητα των ατόμων.

Οι Fuchs, Geary, Compton, Fuchs, Hamlett, και Bryant (2010) μελέτησαν μαθητές ηλικίας 5 - 7 ετών και βρήκαν ότι όσοι ήταν σε θέση να επιδείξουν καλή ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή διέθεταν γενικότερα καλή ετοιμότητα για το σχολείο. Από αυτή την άποψη, η ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή συνδέεται όχι μόνο με καλές επιδόσεις στα μαθηματικά, αλλά και με ευρύτερη καλή ακαδημαϊκή επίδοση. Αυτή η σύνδεση τονίζεται περαιτέρω και στη μετα-ανάλυση των Schneider, Merz, Stricker, de Smedt, Torbeyns, Verschaffel και Luwel (2018), όπου εκεί επισημαίνεται η σύνδεση ανάμεσα στις εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή και τη μαθηματική ικανότητα, αλλά και τη γενικότερη επίδοση των μαθητών στο σχολείο. Ωστόσο, οι ερευνητές τονίζουν πως πρέπει να εξεταστούν περαιτέρω ποιες ατομικές ικανότητες οδηγούν σε παρόμοιους συσχετισμούς.

Συμπερασματικά, η ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή δεν είναι μια μεμονωμένη μαθηματική ικανότητα, αλλά εμπεριέχει καλή αίσθηση του αριθμού και γνωστική ανάπτυξη των μαθητών. Επιπλέον, η σημασία της στη μαθηματική εκπαίδευση είναι ουσιώδης καθώς χρησιμεύει ως προγνωστικός δείκτης της μαθηματικής επίδοσης, βοηθά στην ανάπτυξη μιας ισχυρής αίσθησης του αριθμού και ενισχύει τον μαθηματικό συλλογισμό στα παιδιά.

1.Α.4. Επιδόσεις μαθητών στην εκτίμηση σε αριθμογραμμή και είδος αριθμών

Η εκτίμηση σε αριθμογραμμή αποτελεί βασικό συστατικό της μαθηματικής κατάκτησης και συμβάλλει σημαντικά στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού στους μαθητές, ειδικά στις πρώτες βαθμίδες εκπαίδευσης (Van de Walle et al., 2017). Η έρευνα για την εκτίμηση σε αριθμογραμμή από μελετητές δείχνει ενδιαφέρον για την επίδοση των μαθητών και τις διαφορές που υπάρχουν στις επιδόσεις, καθώς οι μαθητές εκτιμούν διαφορετικά, τα διαφορετικά είδη αριθμών, όπως για παράδειγμα φυσικούς αριθμούς, κλάσματα ή δεκαδικούς. Οι Δεσλή και Τριανταφύλλου (2019) εξέτασαν μαθητές πρώτης και δευτέρας τάξης σε εκτιμήσεις φυσικών αριθμών σε αριθμογραμμή. Κατέληξαν ότι όσον αφορά τις εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή, οι μαθητές έκαναν καλύτερες εκτιμήσεις στους μικρούς αριθμούς σε σχέσεις με τους μεγάλους αριθμούς (Εικόνα 1), ενώ οι περισσότερο αποτυχημένες εκτιμήσεις των μαθητών έγιναν στους μεσαίους αριθμούς.

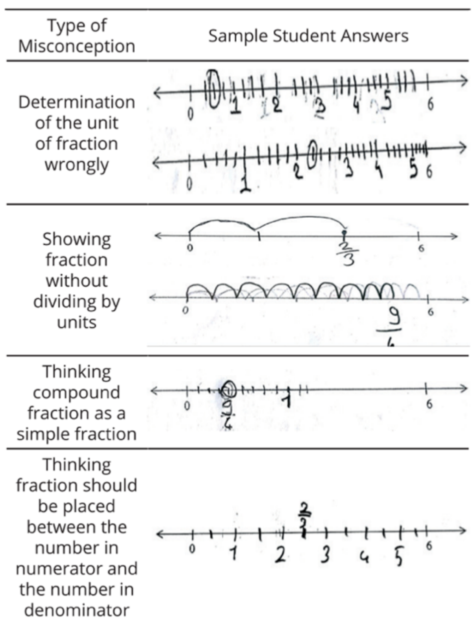


Εικόνα 1. Ποσοστά εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή σύμφωνα με το μέγεθος των αριθμών (Πηγή: Δεσλή & Τριανταφύλλου, 2019 σελ.32)

Οι Δεσλή και Τριανταφύλλου (2022) εξέτασαν την ικανότητα των μαθητών Στ΄ δημοτικού και ενηλίκων στην εκτίμηση της θέσης κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών σε αριθμογραμμή (Δεσλή και Τριανταφύλλου, 2022) και διαπίστωσαν ότι οι μαθητές έχουν πολύ μεγάλη δυσκολία σχετικά με την εκτίμηση της θέσης των κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών, σε σύγκριση με τους φυσικούς αριθμούς. Όσον αφορά την τοποθέτηση δεκαδικών και κλασμάτων σε αριθμογραμμή καταγράφονται μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας στην τοποθέτηση των δεκαδικών αριθμών, με αποτέλεσμα να φαίνεται ότι το είδος των ρητών επηρεάζει τη σωστή εκτίμηση πάνω σε αριθμογραμμή. Τονίζουν επίσης πως οι συμμετέχοντες είχαν χαμηλότερες επιδόσεις σε εκτιμήσεις με ρητούς αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας, αποτέλεσμα που παρατηρήθηκε και στους ενήλικες του δείγματος. Ένας από τους λόγους για αυτές τις δυσκολίες, όπως επισημαίνουν, είναι η εγγενής πολυπλοκότητα της έννοιας των ρητών αριθμών.

Κατά τον ίδιο τρόπο, οι Siegler, Thompson και Schneider (2011) επισημαίνουν ότι, ενώ στην αρχή τα παιδιά ενδέχεται να αναπτύξουν μια καλή εννοιολογική κατανόηση των φυσικών αριθμών, δεν συμβαίνει το ίδιο στην κατανόηση των ρητών αριθμών. Αυτή η ασυμφωνία έγκειται όχι μόνο στην αναπαράσταση των ρητών αριθμών (δεκαδικοί, κλάσματα), αλλά και στην ίδια τη φύση των ρητών, ως αριθμών που βρίσκονται μεταξύ ακέραιων αριθμών με μεγάλη πυκνότητα. Οι μαθητές συχνά συγχέουν τις ιδιότητες των ρητών και των φυσικών αριθμών και οδηγούνται στο φαινόμενο της προκατάληψης του φυσικού αριθμού, προσπαθώντας να εφαρμόσουν τις ιδιότητες των φυσικών στους ρητούς αριθμούς (Christou, 2015). Το φαινόμενο αυτό δίνει εξήγηση και στη χαμηλή επίδοση των παιδιών στην εκτίμηση ρητών αριθμών στην αριθμογραμμή. Ειδικότερα, όταν οι μαθητές προσπαθούν να τοποθετήσουν ρητούς αριθμούς σε μια αριθμογραμμή, αντιμετωπίζουν δυσκολίες εξαιτίας της μεγαλύτερης πυκνότητας των ρητών αριθμών. Σε αντίθεση με τους φυσικούς αριθμούς, που είναι διακριτοί και εύκολα αναγνωρίσιμοι στη σειρά τους, οι ρητοί αριθμοί μπορούν να τοποθετηθούν μεταξύ οποιωνδήποτε δύο φυσικών αριθμών, κάνοντας την εκτίμηση και την τοποθέτησή τους πιο περίπλοκη και λιγότερο διαισθητική για τα παιδιά.

Οι Aliustaoğlu, Tuna και Biber (2018) μελέτησαν ρητούς αριθμούς και την εκτίμηση σε αριθμογραμμή και παρουσίασαν μερικές κοινές παρανοήσεις που είχαν μαθητές της Στ΄ τάξης από την Τουρκία στην εκτίμηση κλασμάτων σε αριθμογραμμή οριοθετημένη από 0 έως 6. Οι παρανοήσεις χωρίστηκαν σε τέσσερις κατηγορίες (εικόνα 2): τη λανθασμένη αντίληψη των μαθητών στην κατανόηση της κλασματικής μονάδας και της επαναληπτικότητάς της για τη δημιουργία της μονάδας, την ελλιπή γνώση στη δυνατότητα χωρισμού της αριθμογραμμής σε ίσα μέρη, τη δυσκολία εκτίμησης των καταχρηστικών κλασμάτων και τη λανθασμένη εκτίμησή τους στην αριθμογραμμή ως κλάσματα μικρότερα της μονάδας. Για να γίνει αυτό πιο κατανοητό, αρκετοί μαθητές του δείγματος τοποθέτησαν, για παράδειγμα, το κλάσμα $\frac{9}{4}$ ανάμεσα στο 0 και το 1. Μια άλλη παρανόηση, των μαθητών του δείγματος, ήταν η αντίληψη ότι ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι ξεχωριστοί αριθμοί και το κλάσμα που αποτελείται από αυτούς εκτιμάται ότι είναι ένας φυσικός αριθμός που υπάρχει ανάμεσά τους, για παράδειγμα το κλάσμα $\frac{2}{3}$ τοποθετείται ανάμεσα στους αριθμούς 2 και 3. Τέλος, ένας σημαντικός αριθμός μαθητών υποστήριξε ότι, όσο μεγαλύτερος είναι ο παρονομαστής, τόσο μεγαλύτερο είναι το κλάσμα, ή το αντίστροφο. Τέτοιες παρανοήσεις τείνουν να περιορίζουν τη σωστή εκτίμηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή, ενισχύοντας έτσι την υπερεκτίμηση ή την υποεκτίμηση.



Εικόνα 2. Είδη παρανοήσεων μαθητών (Πηγή: Aliustaoğlu, Tuna & Biber, 2018, σελ. 3)

Σε ανάλογα αποτελέσματα κατέληξαν και οι Widodo, Suprih Ikhwanudin και Trisno (2018). Μέσω ποιοτικής μελέτης διερεύνησαν τις δυσκολίες που είχαν μαθητές Στ΄ δημοτικού στην Ινδονησία να εκτιμήσουν τη θέση κλασματικών αριθμών στην αριθμογραμμή. Έτσι, εντόπισαν τέσσερα είδη μαθηματικών λαθών, όταν εκτιμούν κλάσματα στην αριθμογραμμή. Το πρώτο, ήταν η αδυναμία στην κατανόηση της μονάδας. Το δεύτερο ήταν η μη αναγνώριση σημείων αναφοράς, ενώ το τρίτο αφορούσε το είδος της αριθμογραμμής, αν είναι χωρισμένη σε ίσα κομμάτια σύμφωνα με τον παρονομαστή ή μη και η τέταρτη κατηγορία λάθους ήταν η λανθασμένη εκτίμηση.

Οι Steinle και Stacey (2003) μελέτησαν τις τάσεις που σχετίζονται με τις παρανοήσεις στην κατανόηση των δεκαδικών. Παρατήρησαν ότι ανάλογα με τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων των αριθμών, οι μαθητές συχνά μπερδεύουν την αξία θέσης των δεκαδικών ψηφίων, και καταλήγουν σε λάθος συμπεράσματα. Για παράδειγμα, υποθέτουν ότι το 0,5 είναι μικρότερο από το 0,05, καθώς έχει λιγότερα δεκαδικά ψηφία. Αυτές οι παρανοήσεις οδηγούν σε λάθος εκτιμήσεις στην αριθμογραμμή.

Συμπληρωματικά, οι Van de Walle et al. (2017) υπογραμμίζουν τη σημασία της επάρκειας στην εκτίμηση σε αριθμογραμμή και τη συσχέτισή της με την εννοιολογική κατανόηση για τους ρητούς αριθμούς. Τονίζουν ότι η ισχυρή ικανότητα στην εκτίμηση της θέσης των ρητών αριθμών στην αριθμογραμμή συνδέεται στενά με τη βαθύτερη κατανόηση της πολύσημης έννοιας των ρητών. Ειδικότερα, επισημαίνουν ότι η καλή εκτίμηση είναι ενδεικτική της εννοιολογικής κατανόησης της σειράς και των σχέσεων μεταξύ των ρητών αριθμών, καθώς και της πυκνότητας αυτών, ενώ είναι στενά συνδεδεμένη με μια βαθύτερη εννοιολογική γνώση των παιδιών για τους ρητούς αριθμούς.

Συμπερασματικά, η εκτίμηση σε αριθμογραμμή μπορεί να είναι μια αναπαραγωγή των παρανοήσεων των μαθητών σχετικά με τους αριθμούς. Η εννοιολογική κατανόηση των φυσικών αριθμών από τους μαθητές είναι αρκετά καλή, καθώς έχουν αφομοιωθεί, ενώ οι ρητοί αριθμοί, όπως τα κλάσματα και οι δεκαδικοί είναι μια μεγάλη πρόκληση γι' αυτούς. Για την αντιμετώπιση τέτοιων δυσκολιών, φαίνεται ότι απαιτείται προσεκτικότερη εξέταση της εννοιολογικής βάσης των ρητών αριθμών, καθώς και μια καλά στοχευμένη εκπαιδευτική παρέμβαση η οποία θα βοηθήσει τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις μεταξύ φυσικών και ρητών αριθμών.

1.Α.5. Αναπαραστάσεις αριθμητικών μεγεθών

Όσο αφορά τα αριθμητικά μεγέθη, υπήρξε εκτεταμένη έρευνα σχετικά με το πώς τα παιδιά αναπαριστούν νοερά τα αριθμητικά και τα μη αριθμητικά μεγέθη. Τα αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι κατασκευάζεται μια νοερή αναπαράσταση αριθμητικών μεγεθών σε ένα γραμμικό συνεχές, μια νοερή αριθμογραμμή (mental numberline) και η σχέση δύο αριθμητικών μεγεθών είναι συνάρτηση της θέσης τους σε αυτή τη νοερή αναπαράσταση (Dehaene, 1997).

Έχουν προταθεί δύο μοντέλα αναπαράστασης που έχουν λάβει υπόψη τα αποτελέσματα ερευνών. Το ένα μοντέλο προτείνει ότι τα μεγέθη αναπαρίστανται εσωτερικά με σταθερή μεταβλητότητα κατά μήκος ενός λογαριθμικά δομημένου γραμμικού μοντέλου, σαν χάρακα (Dehaene, 1997). Σύμφωνα με αυτό το λογαριθμικό μοντέλο, η απόσταση μεταξύ δύο μεγάλων αριθμητικών μεγεθών είναι μικρότερη από ό,τι μεταξύ δύο εξίσου απομακρυσμένων αλλά μικρότερων αριθμητικών μεγεθών, δηλαδή οι αριθμοί στην αρχή αυτής της εσωτερικής αναπαράστασης παρουσιάζονται πιο απομακρυσμένοι σε σχέση με τους μεγαλύτερους αριθμούς, οι οποίοι παρουσιάζονται λιγότερο απομακρυσμένοι. Τα πιο απομακρυσμένα μεγέθη διακρίνονται ευκολότερα («distance effect») και τα μεγαλύτερα μεγέθη πρέπει να είναι πιο απομακρυσμένα από τα μικρότερα μεγέθη, ώστε να διακρίνονται αντίστοιχα («size effect») (Dehaene, Bossini & Giraux, 1993). Το δεύτερο μοντέλο, όπως αναφέρουν οι Ebersbach, Luwel, Frick, Onghema και Verschaffel (2008), είναι το μοντέλο του συσσωρευτή – «accumulator model». Το μοντέλο αυτό υποθέτει ότι τα μεγέθη αναπαριστώνται νοερά γραμμικά, ωστόσο η ακρίβεια των αναπαραστάσεων μειώνεται για τα μεγαλύτερα μεγέθη. Εξού και το ότι οι Ebersbach et al. (2008), επανεξετάζοντας τις παραδοχές των δύο μοντέλων, θεωρούν ότι μια κύρια διαφορά τους αφορά τις αναπαραστατικές συναρτήσεις, δηλαδή λογαριθμικής έναντι γραμμικής, κάτι για το οποίο θα γίνει ενδελεχέστερη ανάλυση σε επόμενα κεφάλαια.

1.Α.6. Ευρήματα σχετικά με τις αναπαραστάσεις εκτίμησης σε αριθμογραμμή

Οι έρευνες για τις αναπαραστάσεις των αριθμητικών μεγεθών στην αριθμογραμμή είναι εκτενείς, καθώς αναδεικνύουν τη διαδικασία μετάβασης των παιδιών από αρχικές, πιο απλές αναπαραστάσεις των αριθμών σε πιο περίπλοκες αναπαραστάσεις. Πολλές ακόμη έρευνες έχουν εστιάσει στην ανάλυση και την ερμηνεία των αναπαραστάσεων των παιδιών στην αριθμογραμμή, με τις κυρίαρχες τάσεις στην έρευνα μπορούν να χωριστούν σε τρεις βασικές κατηγορίες (Siegler & Booth, 2004· Laski & Siegler, 2007· Siegler & Opfer, 2009· Barth & Paladino, 2011· Ebersbach, 2015· Δεσλή & Τριανταφύλλου, 2019).

Αυτές οι κατηγορίες μοντέλων παρέχουν πλούσιο υπόβαθρο για την κατανόηση των σταδίων ανάπτυξης της αριθμητικής κατανόησης στα παιδιά και τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσονται οι αναπαραστάσεις των αριθμητικών μεγεθών στην αριθμογραμμή. Μέσω αυτών των μοντέλων, οι ερευνητές αναδεικνύουν ποιες αναπαραστάσεις είναι ευκολότερα κατανοητές για τα παιδιά διαφόρων ηλικιών, καθώς και πώς αυτές συνδέονται με την αριθμητική τους ανάπτυξη (Siegler & Booth, 2004· Laski & Siegler, 2007· Siegler at al., 2009· Barth & Paladino, 2011· Ebersbach, 2015· Δεσλή & Τριανταφύλλου, 2019). Τέλος, αυτά τα μοντέλα ενισχύουν την κατανόηση σχετικά με τους παράγοντες που επηρεάζουν τη μάθηση και την κατανόηση των αριθμών στα πρώτα στάδια της ανάπτυξής τους.

1.A.7. Γνωστικές (εσωτερικές) λογαριθμικές-γραμμικές αναπαραστάσεις στην εκτίμηση σε αριθμογραμμή

Στο πεδίο των λογαριθμικών-γραμμικών αναπαραστάσεων, οι μελετητές διατείνονται ότι, παρά το γεγονός ότι τα παιδιά επινοούν έναν λογαριθμικό τρόπο σκέψης, οι περισσότεροι ενήλικες αντιλαμβάνονται τη συνέχεια των αριθμών γραμμικά. Η μετάβαση από μια λογαριθμική αναπαράσταση σε μια πιο γραμμική γίνεται με την πάροδο της ηλικίας και την εξοικείωση των μαθητών με τους αριθμούς.

Εν συνεχεία, είναι θεμελιώδους σημασίας να οριστούν οι λογαριθμικές και οι γραμμικές αναπαραστάσεις. Στη λογαριθμική αναπαράσταση, τα παιδιά τοποθετούν τους μικρότερους αριθμούς σε θέσεις που απέχουν περισσότερο μεταξύ τους, σε σχέση με τους μεγαλύτερους αριθμούς που τους τοποθετούν πιο πυκνά. Αντίθετα, στη γραμμική αναπαράσταση, οι αριθμοί είναι καλά διαχωρισμένοι μεταξύ τους και είναι ο τρόπος με τον οποίο ένας ενήλικας θα τους τοποθετούσε (Siegler & Booth, 2004· Laski & Siegler, 2007· Siegler & Opfer, 2009).

Οι Laski και Siegler (2007) έδειξαν σημαντική σχέση μεταξύ του τρόπου με τον οποίο τα παιδιά κατηγοριοποιούν τους αριθμούς (για παράδειγμα, στον προσδιορισμό του εάν το 27 είναι ένας «μεγάλος» αριθμός) και της τάσης τους για λογαριθμική εκτίμηση των αριθμών. Οι ερευνητές ζήτησαν από παιδιά νηπιαγωγείου να εκτιμήσουν αριθμούς μεταξύ 0 και 20, 0 και 50 ή 0 και 100. Οι μαθητές εκτίμησαν τον αριθμό 18 ως μεγάλο αριθμό και στα τρία πλαίσια. Εντούτοις, τα παιδιά της Β΄ τάξης κατέταξαν το 18 ως μεγάλο αριθμό στο πλαίσιο 0-20, αλλά ως μικρό στο πλαίσιο 0-100. Οι μελετητές κατέληξαν ότι τα παιδιά ομαδοποιούν τους αριθμούς σε κατηγορίες, όπως «μικροί αριθμοί» και «μεγάλοι αριθμοί». Τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης έδειξαν ότι η αναπτυξιακή μετάβαση από τις λογαριθμικές στις γραμμικές αναπαραστάσεις εκτείνεται πέρα από τα έργα εκτίμησης σε αριθμογραμμή. Παράλληλα, οι ίδιοι ερευνητές τονίζουν ότι υπάρχουν σταθερές ατομικές διαφορές που πρέπει να ληφθούν υπόψη, όπως οι στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων των παιδιών, ή γνωστικές ατομικές διαφορές όπως η λειτουργία στη μνήμη εργασίας. Σε ανάλογα αποτελέσματα κατέληξαν οι Siegler και Opfer (2003) και οι Siegler και Booth (2004). Τονίζουν ότι οι λογαριθμικές αναπαραστάσεις αντιστοιχούν στην αντίληψη των αριθμών ως ξεχωριστές μονάδες, ενώ οι γραμμικές αναπαραστάσεις αφορούν την αντίληψη των αριθμών ως μέρη ενός συνεχούς συνόλου ή στην τοποθέτησή τους σε αριθμογραμμή.

Οι Siegler, Thompson και Opfer (2009) καταλήγουν ότι στα παιδιά διαφόρων ηλικιών παρατηρείται μετάβαση από λογαριθμικές αναπαραστάσεις αριθμητικών μεγεθών σε γραμμικές αναπαραστάσεις σε έργα με αριθμογραμμές, καθώς η ηλικία των παιδιών μεγαλώνει Πιο συγκεκριμένα, τα μεν μικρότερα παιδιά, όταν εκτελούν μια εργασία εκτίμησης αριθμών σε μια κενή αριθμογραμμή συχνά επιδεικνύουν λογαριθμική σκέψη, αυτό σημαίνει ότι εμφανίζουν τους αριθμούς πιο αραιωμένους στην αρχή της αριθμογραμμής, ενώ εμφανίζουν πιο πυκνά τους αριθμούς στα τελικά άκρα της αριθμογραμμής. Ωστόσο, όσο μεγαλώνουν, κινούνται σε μια πιο γραμμική αναπαράσταση των αριθμών, όπου οι αριθμοί κατανέμονται ομοιόμορφα. Για παράδειγμα, σε μια αριθμογραμμή από το 0 έως το 1.000, ένα παιδί με λογαριθμική προοπτική δύναται να αντιληφθεί τον αριθμό 150 ως μια μεγάλη, αβέβαιη αριθμητική τιμή, χωρίς συγκεκριμένη σχέση μεταξύ του 150 και του 0. Με άλλα λόγια, το παιδί μπορεί να αντιληφθεί τον αριθμό 150 ως έναν μεγάλο αριθμό, αλλά χωρίς μια συγκεκριμένη, συνεχή σχέση ή συγκριτική σύνδεση με τον αριθμό 0, ή το 75 που βρίσκεται στη μισή απόσταση στο πλαίσιο μιας αριθμογραμμής. Σε αυτήν την περίπτωση, ο αριθμός 150 αντιλαμβάνεται απομονωμένα, χωρίς σύνδεση με μικρότερους αριθμούς στην αριθμογραμμή. Ταυτόχρονα, οι ερευνητές αναφέρουν πως με κατάλληλη εκπαιδευτική παρέμβαση και διορθωτική ανατροφοδότηση ακόμα και μικρότερα παιδιά, όπως παιδιά της Β΄ τάξης, περνούν από λογαριθμική σε γραμμική αναπαράσταση γρήγορα. Τονίζουν δε ότι τα παιδιά που χαρακτηρίζονται από γραμμικότητα στις εκτιμήσεις τους, συνήθως αναπαραγάγουν λογαριθμικά μοτίβα εκτιμήσεων, ενώ παράλληλα έχουν πολύ καλύτερες μαθηματικές επιδόσεις. Από την άλλη, οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες συνήθως αναπαράγουν λογαριθμικά μοτίβα εκτιμήσεων και παρουσιάζουν έλλειψη γραμμικών αναπαραστάσεων των αριθμητικών μεγεθών για αρκετά χρόνια αργότερα από τη στιγμή που οι υπόλοιποι μαθητές ακολουθούν γραμμικές αναπαραστάσεις.

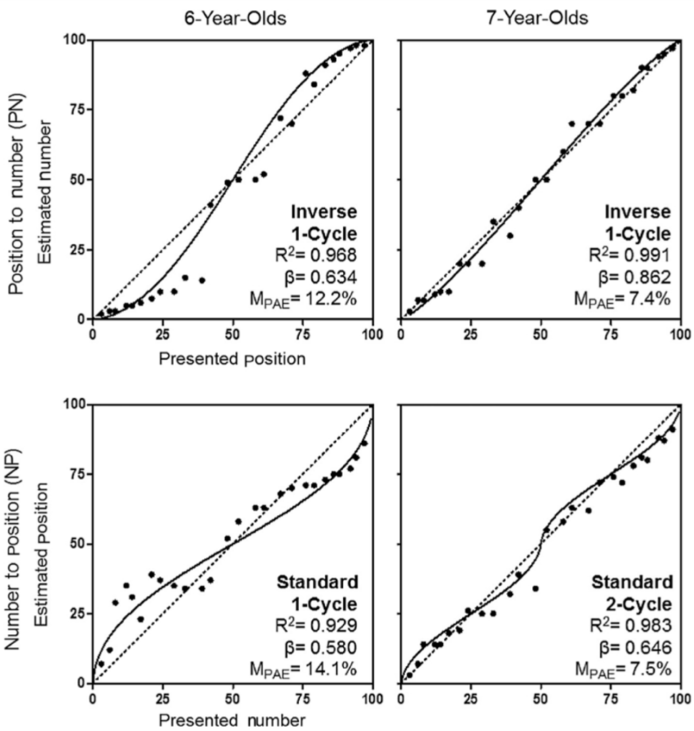
Σύμφωνα με τις παραπάνω έρευνες, αναδεικνύεται πως καθώς τα παιδιά μεγαλώνουν, λαμβάνουν την κατάλληλη εκπαίδευση και εξοικειώνονται με τους αριθμούς, οι αναπαραστάσεις τους γίνονται γραμμικές, αντικατοπτρίζοντας μία πιο συνεχή κατανόηση των αριθμών, της σειράς και του μεγέθους τους στο πλαίσιο της αριθμογραμμής. Αυτά τα ευρήματα έχουν μεγάλες επιπτώσεις στην μεθοδολογία της διδασκαλίας, διότι η κατάλληλη εκπαιδευτική παρέμβαση στα παιδιά φαίνεται να έχει θετικές επιδράσεις στη μαθηματική επίδοση. Δηλώνουν, τέλος, τη σημασία των ατομικών διαφορών στα παιδιά.

1.A.8. Μοντέλο στρατηγικών αναλογίας (μοτίβο κύκλου)

Μία δεύτερη επικρατέστερη προσέγγιση για την κατανόηση των αναπαραστάσεων των αριθμητικών μεγεθών από τα παιδιά είναι αυτή που βασίζεται σε στρατηγικές αναλογίας, στην οποία οι εκτιμήσεις γίνονται ανάλογα με την αρχή και το τέλος μιας αριθμογραμμής ή χρησιμοποιώντας έναν αριθμό ως σημείο αναφοράς. Η ικανότητα αντίληψης των σχέσεων και χρήσης σημείων αναφοράς βοηθά στην πραγματοποίηση ακριβέστερων εκτιμήσεων κάνοντας παραλληλισμούς με γνωστές τιμές.

Οι Barth και Paladino (2011) εστίασαν στη σχέση μεταξύ των αναπαραστάσεων των αριθμών και της εκτίμησης σε αριθμογραμμή. Στην έρευνά τους, εξέτασαν πώς οι αναπαραστάσεις των παιδιών για τους αριθμούς, σχετίζονται με την ικανότητα εκτίμησης αριθμού σε αριθμογραμμή. Σε αντίθεση με τις θεωρίες που εξακολουθούν να υπάρχουν και θέτουν μια μετατόπιση στην αναπαράσταση από λογαριθμική σε γραμμική σκέψη κατά τη διαδικασία ωρίμανσης του παιδιού, τα αποτελέσματά τους έδειξαν ότι η εκτίμηση σε αριθμογραμμή γίνεται λαμβάνοντας υπόψη γνωστά σημεία αναφοράς ως στηρίγματα. Στη μελέτη τους, οι ερευνητές ζήτησαν από τους συμμετέχοντες με τη μορφή παιχνιδιού να τοποθετήσουν τον αριθμό 50 στην αριθμογραμμή από 0 έως 100. Σύμφωνα με τα συμπεράσματά τους, για παράδειγμα, ένας μαθητής που γνωρίζει πού βρίσκεται το 10 σε μια αριθμητική γραμμή 0-100, μπόρεσε να το χρησιμοποιήσει ως σημείο αναφοράς για την εκτίμηση της τοποθέτησης του αριθμού 20, διπλασιάζοντας την απόσταση από το 0.

Οι Slusser και Barth (2017) ανέπτυξαν περαιτέρω αυτή την έννοια της διαισθητικής κρίσης αναλογίας στην εκτίμηση σε αριθμογραμμή. Υπογράμμισαν ότι είναι πολύ σημαντικό να έχουμε ποικίλα έργα για να το μετρήσουμε αυτό, επειδή η στρατηγική της αναλογίας είναι κάτι διαισθητικό και το οποίο οι άνθρωποι απλά την εφαρμόζουν, χωρίς να γνωρίζουν το γιατί. Παρατηρούν ακόμη τις σχέσεις και τις αναλογίες, χωρίς ποτέ να χρειάζεται να διδαχθούν πώς να το κάνουν. Τα άτομα ανέδειξαν την έμφυτη ικανότητα να κάνουν εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή, χρησιμοποιώντας αναλογική συλλογιστική για να δείξουν πού βρίσκονται άλλοι αριθμοί. Μελέτησαν παιδιά και ενήλικες σε έργα PN (εκτίμηση του αριθμητικού μεγέθους σε συγκεκριμένη θέση στην αριθμογραμμή) και NP (εκτίμηση της θέσης ενός αριθμού στην αριθμογραμμή). Για παράδειγμα, όταν το 0, το 50 και το 100 ήταν δοσμένα σημεία μεταφοράς, οι συμμετέχοντες μπορούσαν να αιτιολογήσουν ότι το 25 ή το 75 βρίσκονται στο μέσον του αντίστοιχου διαστήματος μεταξύ τους. Βάσει των αποτελεσμάτων της έρευνας, τόσο σε ομαδικό, όσο και σε ατομικό επίπεδο, οι εκτιμήσεις της NP στα μικρότερα παιδιά χαρακτηρίστηκαν από ένα μοντέλο αναλογικής ισχύος (ενός μοτίβου κύκλου για τα μικρότερα παιδιά και ενός μοτίβου δύο κύκλων για τα μεγαλύτερα), ενώ στα έργα PN τα αποτελέσματα στα παιδιά χαρακτηρίστηκαν από το αντίστροφο μοτίβο (Εικόνα 3). Σύμφωνα με τους μελετητές, αυτό δείχνει ότι τα παιδιά δεν εφάρμοσαν τις ίδιες στρατηγικές αναλογίας με σημεία αναφοράς στα έργα NP και PN, καθώς το δείγμα των μαθητών φάνηκε να κάνει τις εκτιμήσεις ανάλογα με τα ατομικά τους χαρακτηριστικά, αντί να χρησιμοποιεί μια ενιαία προσέγγιση ή στρατηγική. Ειδικότερα, οι εκτιμήσεις των μαθητών φάνηκαν να διαφέρουν ανάλογα με τις γνωστικές τους δεξιότητες και τις μαθησιακές τους στρατηγικές, ενώ άλλοι μαθητές πραγματοποίησαν τις εκτιμήσεις τους στηριζόμενοι σε σχέσεις αναλογίας. Αυτό υποδηλώνει ότι οι μαθητές βασίστηκαν σε ατομικές στρατηγικές που ποικίλλουν από άτομο σε άτομο.



Εικόνα 3. Μοτίβο κύκλου για παιδιά 6 ετών και μοτίβο δύο κύκλων για παιδιά 7 ετών (Πηγή: Slusser & Barth, 2017, σελ.189)

Οι Δεσλή και Τριανταφύλλου (2019) διερεύνησαν τις εκτιμήσεις μεταξύ μαθητών της Α΄ και Β΄ τάξης δημοτικού, μέσα από τρία έργα εκτίμησης αριθμητικών ποσοτήτων. Η έρευνά τους ανέδειξε τα υψηλά ποσοστά επιτυχίας της ικανότητας εκτίμησης των παιδιών και των δύο ηλικιακών ομάδων. Αναλυτικότερα, λαμβάνοντας υπόψιν τα αποτελέσματα της έρευνάς τους, η επίδοση των παιδιών στους μικρούς αριθμούς (0-20) ήταν καλύτερη από αυτήν στους μεγάλους αριθμούς (81-100), αλλά πολύ καλύτερη από εκείνη που είχαν στους μεσαίους αριθμούς (21-80), όπου τα ποσοστά τους ήταν χαμηλότερα. Τα συμπεράσματα της έρευνας συμφωνούν με την άποψη των Barth και Paladino (2011) που θεωρούν ότι οι αναπαραστάσεις των παιδιών για τα αριθμητικά μεγέθη σε αριθμογραμμή στηρίζονται σε αναλογική σκέψη. Συγκεκριμένα, η αριθμογραμμή παρέχει ένα οπτικό και χωρικό πλαίσιο που διευκολύνει την αντίληψη της αναλογίας. Όταν οι μαθητές καλούνται να εκτιμήσουν τη θέση ενός αριθμού σε μια αριθμογραμμή, χρησιμοποιούν την αναλογική σκέψη για να καθορίσουν τη θέση του αριθμού σε σχέση με τα γνωστά σημεία αναφοράς στα άκρα της αριθμογραμμής. Για παράδειγμα, για να εκτιμήσει κάποιος τη θέση του αριθμού 20 σε μια αριθμογραμμή που εκτείνεται από το 0 έως το 100, πρέπει να κατανοήσει τη σχέση του μέρους (20) με το όλο (100). Αυτή η διαδικασία ενεργοποιεί τη γνωστική λειτουργία της αναλογικής σκέψης, που είναι απαραίτητη για την ακριβή εκτίμηση.

Ως εκ τούτου, τέτοιες παρατηρήσεις υποδηλώνουν ότι, ενώ υπάρχει η τυπική αναπτυξιακή τάση στη διαδικασία μετάβασης, οι ατομικές διαφορές μπορεί επίσης να διαδραματίσουν ρόλο που προκύπτει από μεταβλητές όπως εκπαιδευτικές εμπειρίες, έμφυτη ικανότητα, αλλά και στρατηγικές αναλογίας.

1.Α.9. Γραμμικό Μοντέλο δύο μερών και Εξοικείωση με Αριθμούς

Τα τελευταία χρόνια, μια άλλη εναλλακτική προσέγγιση εμφανίζεται από τους σύγχρονους μελετητές. Συγκεκριμένα, η θεώρηση αυτή είναι ένας συνδυασμός των άνωθι απόψεων. Η πραγμάτευση αυτή υποστηρίζει ότι τα άτομα αντιλαμβάνονται και αναπαριστούν τις αριθμητικές πληροφορίες ανάλογα με τις ατομικές τους διαφορές και την εξοικείωσή τους με τους αριθμούς (Ebersbach, 2015· Ebersbach et al., 2008). Τα παιδιά εκτιμούν κάθε φορά το πλήθος των αντικειμένων ή τον αριθμό που πρέπει να τοποθετηθεί σε μια αριθμογραμμή, βάσει της εξοικείωσής τους με τους αριθμούς και λαμβάνοντας υπόψη τις προηγούμενες γνώσεις τους.

Η θεωρία του γραμμικού μοντέλου, στο κέντρο των υποθέσεων της, υποστηρίζει ότι όλα τα άτομα έχουν κατασκευάσει μια νοερή αριθμογραμμή κατά μήκος της οποίας χαρτογραφούν τα αριθμητικά μεγέθη. Ωστόσο, δεν είναι απλώς μια ομοιόμορφη, μονολιθική αναπαράσταση· το σχήμα, καθώς και τα λειτουργικά χαρακτηριστικά της νοερής αριθμογραμμής, μπορούν να επηρεαστούν σύμφωνα με την εκπαίδευση που έχουν λάβει οι μαθητές και τις προηγούμενες γνώσεις τους.

Κατά την υπόθεση που έκαναν οι Ebersbach, Luwel, Frick, Onghena και Verschaffel (2008), οι εκτιμήσεις στην αριθμογραμμή και η νοερή αναπαράσταση των αριθμών θα μπορούσε εναλλακτικά να περιγραφεί ως ένας συνδυασμός δύο γραμμικών μοτίβων με διαφορετικές κλίσεις, δηλαδή, ένα γραμμικό μοντέλο δύο φάσεων. Οι Ebersbach et al. (2008) μελέτησαν μαθητές νηπιαγωγείου έως Γ΄ δημοτικού χρησιμοποιώντας έργα παρόμοια με των Siegler και των συνεργατών τους (Booth & Siegler, 2006· Siegler & Booth, 2004· Siegler & Opfer, 2003). Πιο αναλυτικά, οι αριθμογραμμές κάλυπταν ένα εύρος 1-100 για τα νήπια, την πρώτη και τη δευτέρα τάξη και ένα εύρος 1-1000 για τα παιδιά της τρίτης τάξης. Για κάθε αριθμογραμμή, δημιουργήθηκαν δύο παράλληλες σειρές, καθεμία από τις οποίες αποτελούνταν από 15 αριθμούς που ήταν ισομερώς κατανεμημένοι στο εύρος των ακέραιων αριθμών. Η απόσταση μεταξύ των μεμονωμένων αριθμών μιας σειράς κυμαινόταν μεταξύ 6 και 8 για το εύρος 1-100 και μεταξύ 61 και 73 για το εύρος 1- 1000. Η παράλληλη σειρά χρησίμευσε για να καλύψει μια ποικιλία αριθμών χωρίς να αυξηθεί ο αριθμός των έργων για κάθε παιδί. Ο όρος που επέλεξαν οι Ebersbach et al. (2008) είναι περισσότερο στατιστικός και αφορά την πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση σε τμήματα.

Τα αποτελέσματα της μελέτης αυτής έδειξαν ότι η εξοικείωση των παιδιών με τους αριθμούς σχετίζεται με την ικανότητά τους να κάνουν γραμμικές εκτιμήσεις στην αριθμογραμμή. Επιπλέον, ένα γραμμικό μοντέλο δύο φάσεων ταίριαζε σημαντικά καλύτερα στις εκτιμήσεις από ένα λογαριθμικό ή απλό γραμμικό μοντέλο. Αυτό σημαίνει ότι τα παιδιά εκτιμούσαν όχι μόνο τη θέση των οικείων αριθμών με γραμμικό τρόπο, αλλά και τη θέση των αριθμών πέρα από αυτό το εύρος.

Μία ακόμη διαπίστωση των αποτελεσμάτων της μελέτης αυτής είναι ότι παιδιά ηλικίας 5-9 ετών επιλέγουν τη γραμμική αναπαράσταση αριθμών, εφόσον είναι εξοικειωμένα με τους αριθμούς αυτούς. Ισχυρίστηκαν δε (Ebersbach et al., 2008) ότι η εξοικείωση των παιδιών με ορισμένους αριθμούς, που προκύπτει συνήθως από την εκπαίδευση που δέχονται και την καθημερινή ζωή, χρησιμεύει για να κάνουν καλές εκτιμήσεις σε έργα με αριθμογραμμή.

Επιπλέον, είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε, όπως αναφέρεται από τον Ebersbach (2015), ότι η αριθμογραμμή είναι από τη φύση της διαιρεμένη σε πολλά κομμάτια. Το αποτέλεσμα των εργασιών που εκτελούνται από τα παιδιά αποκαλύπτει την ατομική νοερή αναπαράσταση των αριθμών, υποδεικνύοντας πώς γνωστά σημεία αναφοράς όπως το 10, το 50 ή το 100 μπορούν να ληφθούν υπόψη για να επηρεάσουν τις εκτιμήσεις τους. Στη συνέχεια, τέτοια σημεία αναφοράς, βαθιά εδραιωμένα μέσω της εκπαίδευσης, αλλά και των καθημερινών εμπειριών, γίνονται κομβικά σημεία γύρω από τα οποία περιστρέφονται άλλες εκτιμήσεις.

Συμπερασματικά, λαμβάνοντας υπόψη και τις τρεις θεωρήσεις, οι ερευνητές προσφέρουν ανεκτίμητες πληροφορίες σχετικά με την εξελισσόμενη φύση της αριθμητικής γνώσης, τις αναπαραστάσεις των παιδιών για τους αριθμούς και την εκτίμησή των παιδιών σε αριθμογραμμή. Οι παραπάνω θεωρίες δίνουν μεγάλη σημασία στην παρεχόμενη εκπαίδευση και στην εξοικείωση με τους αριθμούς, οι οποίες φαίνεται ότι μπορούν να βελτιώσουν τις εκτιμήσεις των παιδιών στην αριθμογραμμή.

Μέρος Β΄

1.Β.1. Χωρικές Ικανότητες

Η αντίληψη του χώρου, η ικανότητα δηλαδή να οργανώνουμε και να ερμηνεύουμε τον κόσμο γύρω μας, αποτελεί μια σύνθετη ικανότητα που εξελίσσεται σταδιακά κατά την παιδική ηλικία. Σύμφωνα με την Τζεκάκη (1996, 2007), η ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης ακολουθεί μια ιεραρχική πορεία. Αρχικά, το παιδί αναπτύσσει την ικανότητα να αντιλαμβάνεται τις σχέσεις των αντικειμένων σε σχέση με το δικό του σώμα. Στη συνέχεια, εστιάζει στις σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων, αντιλαμβανόμενο πώς αυτά αλληλεπιδρούν και τοποθετούνται στον χώρο. Τέλος, κατανοεί τις σχέσεις του εαυτού του με τα αντικείμενα, συνειδητοποιώντας πώς μπορεί να τα χειριστεί και να τα αξιοποιήσει. Σε αυτό το πλαίσιο, το ανθρώπινο σώμα λειτουργεί ως το πρώτο σύστημα αναφοράς για τον προσανατολισμό στον χώρο. Τα αντικείμενα τοποθετούνται και ερμηνεύονται σε σχέση με αυτό, δημιουργώντας ένα "ανθρωποκεντρικό" σύστημα αναφοράς.

Η Κολέζα (2009, σελ. 273) ορίζει την αντίληψη του χώρου ως την ικανότητα "να διαχειρίζεται, να οργανώνει, να ερμηνεύει και να αναπαριστά αντικείμενα και σχέσεις στον χώρο". Η ικανότητα αυτή εκδηλώνεται σε διάφορες μορφές, από απλές καθημερινές δραστηριότητες, όπως το δίπλωμα ή το κόψιμο ενός χαρτιού, έως πιο σύνθετες, όπως ο προσανατολισμός σε έναν χώρο ή η σχεδίαση μιας διαδρομής. Συμμετέχει επίσης σε καθημερινές εργασίες όπως το παρκάρισμα ενός αυτοκινήτου ή τη συναρμολόγηση επίπλων (Eliot & Czarnolewski, 2007).

Η ανάπτυξη της αντίληψης του χώρου και του προσανατολισμού αποτελεί μια μακρόχρονη διαδικασία που ξεκινά από τη βρεφική ηλικία. Μέσα από την εξερεύνηση του περιβάλλοντος, την αλληλεπίδραση με τα αντικείμενα και την κίνηση στο χώρο, τα παιδιά σταδιακά χτίζουν τις απαραίτητες γνωστικές και σωματικές δεξιότητες για να κατανοήσουν πού βρίσκονται, πώς κινούνται και πώς αλληλεπιδρούν με τον κόσμο γύρω τους (Piaget & Inhelder, 1967).

Καθώς το ενδιαφέρον των ερευνητών για τον χώρο είναι πολύ μεγάλο, υπάρχουν πολλές έννοιες για τη σχέση του ατόμου με αυτόν που δεν θα αναλυθούν όλες στην παρούσα εργασία, όπως η χωρική σκέψη (spatial thinking), η χωρική νοημοσύνη (spatial intelligence), ο χωρικός συλλογισμός (spatial reasoning), ο χωρικός γραμματισμός (spatial literacy), οι χωρικές ικανότητες (spatial skills). Στο NRC (National Research Council of the National Academies, 2006) η χωρική σκέψη περιγράφεται ως ένα σύνολο στοιχείων που περιλαμβάνει τις έννοιες του χώρου (concepts of space) τα εργαλεία αναπαράστασης (tools of representation) και τις διαδικασίες συλλογισμού (processes of reasoning). Ο χωρικός συλλογισμός (spatial reasoning) συνιστά μια διαδικασία μάθησης που κατά τη διάρκειά της αναπτύσσονται οι χωρικές ικανότητες, κατανοείται η χρήση των εργαλείων, οργανώνονται οι χωρικές αναπαραστάσεις και εν τέλει καταλήγει στον χωρικό γραμματισμό (spatial literacy).

Σύμφωνα με το NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 2000), η χωρική σκέψη και οι χωρικές ικανότητες συνδέονται στενά. Η χωρική ικανότητα σχετίζεται με την ικανότητα ενός ατόμου να «σκέφτεται χωρικά», δηλαδή να αντιλαμβάνεται, να αναπαριστά και να κατανοεί τον κόσμο γύρω του μέσω χωρικών σχέσεων. Οι χωρικές ικανότητες είναι στενά συνδεδεμένες με όλους τους επιστημονικούς και τεχνικούς τομείς και αποτελούν ένα ανοικτό πεδίο έρευνας τόσο στον τομέα της ψυχολογίας, όσο και της μηχανικής, παρά τον μεγάλο αριθμό ερευνών που έχουν διεξαχθεί και τις επιστημονικές αναφορές που υπάρχουν (Gutierrez, Trujillo, & Acosta, 2013). Αναφέρονται σε μια σειρά ικανοτήτων κατανόησης, λογικής και απομνημόνευσης των σχέσεων μεταξύ αντικειμένων ή του χώρου. Σε αυτές συμπεριλαμβάνεται και η ικανότητα του ατόμου να αναπαριστά χωρικά δεδομένα, να διαχειρίζεται χωρικές πληροφορίες, να ερμηνεύει χάρτες και γραφικές αναπαραστάσεις και, γενικότερα, να λύνει προβλήματα που σχετίζονται με τον χώρο και τη θέση των αντικειμένων. Στο NRC (2006) τονίζεται η ανάγκη για την ανάπτυξη των χωρικών ικανοτήτων μέσω της ενσωμάτωσής τους στα αναλυτικά προγράμματα. Κάποια άτομα έχουν έμφυτη τη χωρική αντίληψη και συνεχώς την αναπτύσσουν, όμως τα περισσότερα δεν έχουν αυτές τις χωρικές αντιληπτικές ικανότητες και θα πρέπει να εκπαιδευτούν γιατί, πλέον, είναι το STEM, που στηρίζει κάθε τεχνολογική, οικονομική και κοινωνική αλλαγή. Επειδή η ανάπτυξη του STEM επιφέρει σημαντικές αλλαγές στον χώρο (π.χ. τα τερματικά των αεροδρομίων, τα έργα στους δρόμους, τα δίκτυα μέσων μαζικής μεταφοράς, τα τεράστια κτίρια που φιλοξενούν υπηρεσίες, όπως νοσοκομεία, εμπορικά κέντρα, κ.λπ.), αναγκαστικά η προσαρμογή του ατόμου σε αυτό το μεταβαλλόμενο χωρικό περιβάλλον, συνδέεται και με τις χωρικές ικανότητες στην καθημερινή ζωή. Θεμελιώδεις για την ανθρώπινη νόηση, οι χωρικές ικανότητες έχουν κεντρίσει το ενδιαφέρον των ψυχολόγων, των εκπαιδευτικών και των γνωστικών επιστημόνων και είναι πλέον απαραίτητες για την κατανόηση, τον χειρισμό και την πλοήγηση τόσο σε φυσικά όσο και σε αφηρημένα χωρικά περιβάλλοντα (NRC, 2006)

Αναλύοντας την εμφάνιση της έννοιας των χωρικών ικανοτήτων, αυτές εντοπίζονται στην ψυχολογία στις αρχές του 20ου αιώνα. Οι χωρικές - αντιληπτικές ικανότητες είναι πολύ παλιός όρος, προέρχεται σύμφωνα με τον Bishop (1980), από μελέτες του Thurstone το 1938 για τις κύριες - πρωταρχικές νοητικές ικανότητες. O Thurstone , σύμφωνα με τον Bishop (1980), αναφερόταν σε έναν γενικό όρο τον οποίο ονόμαζε ως General Visualization ή Visualization, όρος που περιέγραφε με γενικό τρόπο την χωρική και αντιληπτική ικανότητα, και κατά τον ερευνητή, ήταν διακριτός, συνιστούσε, δηλαδή, ξεχωριστό μέρος της δομής της νοημοσύνης.

Αργότερα, ο David F. Lohman (1979) εισήγαγε το κυρίαρχο μοντέλο για τις χωρικές ικανότητες ύστερα από σχετική έρευνα για λογαριασμό του αμερικανικού στρατού. O Lohman (1979), διακρίνει τρία είδη ή διαστάσεις χωρικών ικανοτήτων:

Την ικανότητα οπτικοποίησης, όπως για παράδειγμα οι νοερές αναδιπλώσεις αντικειμένων (spatial visualization), η οποία κατά κύριο λόγο περιλαμβάνει την έννοια της νοερής αναπαράστασης ή εικόνας (imagery).

Τον χωρικό προσανατολισμό (spatial orientation), την ικανότητα του ατόμου να φαντάζεται τρισδιάστατα αντικείμενα υπό διαφορετικές γωνίες.

Τις χωρικές σχέσεις (spatial relations), την ικανότητα νοητικής περιστροφής δισδιάστατων και τρισδιάστατων αντικειμένων.

Στη σύγχρονη εποχή, οι Linn και Petersen (1985) αναπαράγοντας το ίδιο μοντέλο του Lohman κατηγοριοποίησαν τρία διαφορετικά είδη χωρικών ικανοτήτων. Αυτά είναι:

Η **χωρική αντίληψη** (spatial perception): επιτρέπει στο άτομο να κατανοεί τις θέσεις και τις σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων χρησιμοποιώντας το σώμα του και τις αισθήσεις του και επιτυγχάνεται αποτελεσματικά χρησιμοποιώντας κιναισθητικές διαδικασίες.

Η **νοητική περιστροφή** (mental rotation): αναφέρεται στην ικανότητα να πραγματοποιείται μια «εικονική» περιστροφή ενός αντικειμένου στον χώρο, με μια διαδικασία παρόμοια με την πραγματική περιστροφή του αντικειμένου. Αυτό επιτρέπει στο άτομο να φαντάζεται και να κατανοεί τις πιθανές θέσεις ή αλλαγές στην τοποθέτηση των αντικειμένων στον χώρο.

Η **χωρική οπτικοποίηση** (spatial visualization): αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να αναπαριστά μια εικόνα στο μυαλό του, που να αντιπροσωπεύει τις μετακινήσεις ή τις αλλαγές σε χωρικές διατάξεις με μια λογική και αναλυτική διαδικασία.

Σύμφωνα με τη μελέτη τους οι Newcombe και Frick (2010), αναγνωρίζουν δύο βασικά είδη χωρικών μετασχηματισμών-χωρικών ικανοτήτων: α) την αναγνώριση και κατανόηση αντικειμένων όταν αυτά περιστρέφονται ή αλλάζουν κλίμακα, κόβονται, διπλώνονται, κ.λπ. και β) το άτομο ως παρατηρητής αντιλαμβάνεται την προοπτική και μπορεί με ευχέρεια να μετακινείται στον χώρο, σε σχέση με τα αντικείμενά του ή ομάδες αντικειμένων.

Σε μια μετα-ανάλυση ερευνών για τη χωρική εκπαίδευση, οι Uttal, Meadow, Tipton, Hand, Alden, Warren, και Newcombe (2013) αναφέρουν ότι οι χωρικές ικανότητες μπορεί να είναι δυναμικές ή στατικές. Οι δυναμικές περιλαμβάνουν μετασχηματισμό ή κίνηση, ενώ οι στατικές όχι (Εικόνα 4). Παραδείγματα δυναμικών χωρικών ικανοτήτων είναι η νοητική περιστροφή, η ικανότητα δηλαδή νοητικής περιστροφής δισδιάστατων ή τρισδιάστατων αντικειμένων (Linn & Peterson, 1985), η χωρική οπτικοποίηση ή αλλιώς η ικανότητα νοητικού χειρισμού απλών σχημάτων για τη δημιουργία σύνθετων. Άλλα παραδείγματα είναι η οπτικοποίηση τρισδιάστατων αντικειμένων από δισδιάστατες αναπαραστάσεις και αντίστροφα (Linn & Peterson, 1985) και η αλλαγή προοπτικής, με άλλα λόγια η ικανότητα να οπτικοποιεί κανείς νοερά υπό οπτική γωνία διαφορετική, βασισμένος στη δική του προοπτική (Möhring, Frick & Newcombe, 2018· Mix & Cheng, 2012). Παραδείγματα στατικών χωρικών ικανοτήτων είναι η αντίληψη αντικειμένων ή διαδρομών που περιβάλλονται από άλλες αποσπασματικές πληροφορίες (Uttal et al., 2013), καθώς και η ικανότητα κατανόησης αφηρημένων χωρικών εννοιών, όπως η καθετότητα (Mix & Cheng, 2012· Uttal et al, 2013). Σύμφωνα με τους Tam, Wong και Winnie (2018), οι περισσότερες μελέτες σχετικά με τις σχέσεις μεταξύ χωρικών και μαθηματικών ικανοτήτων αφορούν τις δυναμικές ικανότητες.

Χωρική Ικανότητα	Ορισμός	Παράδειγμα
Ενδογενής-στατική	Κατανόηση αντικειμένων, διαδρομών ή χωρικών τοποθετήσεων σε σχέση με πληροφορίες που αποσπούν την προσοχή.	
Ενδογενής-δυναμική	Μεταφορά αντικειμένων σε πιο σύνθετες τοποθετήσεις, νοητική περιστροφή αντικειμένων ή μετατροπή από 2D σε 3D.	
Εξωγενής-στατική	Αναγνώριση και κατανόηση χωρικών αρχών, όπως η καθετότητα.	
Εξωγενής-δυναμική	Νοητική αναπαράσταση ενός περιβάλλοντος στην πλήρη μορφή του από διαφορετικές απτικές γωνίες	

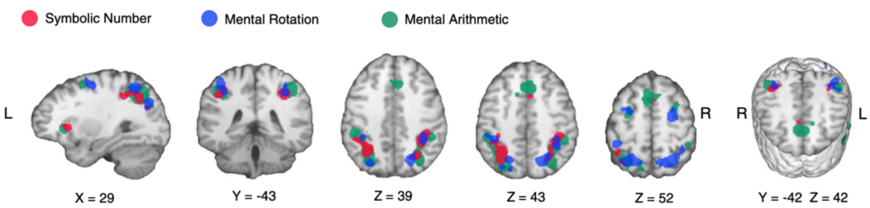
Εικόνα 4 Ταξινόμηση χωρικών ικανοτήτων και παραδείγματα (Πηγή: Uttal, at al.. 2013, σελ. 3)

Γίνεται, συνεπώς, αντιληπτό ότι η χωρική ικανότητα είναι το κλειδί για τις καθημερινές μας δραστηριότητες, για τα περισσότερα επαγγέλματα, για τους κλάδους του STEM, για τον προσανατολισμό μας σε ένα περιβάλλον, καθώς και για την ερμηνεία χαρτών ή κατευθύνσεων στην πλοήγηση (Hegarty, Richardson, Montello, Lovelace, & Subiah, 2002). Οι αρχιτέκτονες υποχρεούνται να είναι σε θέση να χειρίζονται νοητά τρισδιάστατες δομές κατά τον σχεδιασμό τους (Sorby, 2009). Οι καλλιτέχνες δημιουργούν έργα που απαιτούν γνώση της προοπτικής και του χώρου (Kozhevnikov, Hegarty, & Mayer, 2002). Σε εκπαιδευτικά περιβάλλοντα, συνδέονται στενά με την επιτυχία στους τομείς της επιστήμης, της τεχνολογίας, της μηχανικής και των μαθηματικών (STEM). Ειδικότερα, οι μαθητές με εξαιρετικά ανεπτυγμένες τις χωρικές ικανότητες υπερτερούν σε σύγκριση με τους άλλους σε θέματα STEM (Wai, Lubinski, & Benbow, 2009).

1.Β.2. Χωρικές ικανότητες και μαθηματικά

Υπάρχουν διάφορες θεωρίες που επιδιώκουν να εξηγήσουν αυτή τη σχέση, πολλές εκ των οποίων τονίζουν πώς η χωρική συλλογιστική αποτελεί θεμέλιο για πολλές μαθηματικές έννοιες (Hawes, Moss, Caswell, & Poliszczuk, 2015 ·Tam et al., 2018· Howes & Ansari, 2020· Casey et al., 2014). Οι περισσότερες περιοχές των μαθηματικών είναι εγγενώς χωρικές, λόγου χάρη η γεωμετρία, η μέτρηση μήκους, η μέτρηση εμβαδού βασίζονται σε χωρικές σχέσεις και αναπαραστάσεις. Επιπλέον, για κάποια μαθηματική εργασία, ένας συνδυασμός χωρικών εννοιών μπορεί να ονομάζεται ή να ζητηθεί. Για να γίνει πιο κατανοητό αυτό, για τη σύγκριση, λόγου χάρη, του εμβαδού δύο διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων, μπορεί κανείς να αξιοποιήσει στρατηγικές που περιλαμβάνουν, σύνθεση, νοητική περιστροφή, νοητική επικάλυψη και μέτρηση - υπολογισμό. Πιο συγκεκριμένα, όσον αφορά τη σχέση μεταξύ των χωρικών ικανοτήτων των μαθητών και της κατανόησης γεωμετρικών σχημάτων, οι Kalogirou και Gagatsis (2011) τονίζουν πόσο σημαντικές είναι αυτές οι ικανότητες στην εκπαίδευση, ειδικά στα μαθηματικά. Υπογραμμίζουν ότι η χωρική ικανότητα είναι κάτι περισσότερο από το να βλέπει κανείς απλώς πράγματα στον χώρο. Περιλαμβάνει επίσης τη σκέψη για το πώς τα σχήματα μπορούν να περιστραφούν ή να τα μετασχηματιστούν. Αυτή η κατανόηση γίνεται πολύ σημαντική, όταν κάποιος εξετάζει το ζήτημα της διδασκαλίας πολύπλοκων μαθηματικών εννοιών, όπως η γεωμετρία, στα παιδιά. Ένα άτομο με αναπτυγμένες χωρικές ικανότητες μπορεί να αναγνωρίζει διαφορετικά σχήματα, να διαχειρίζεται χωρικές πληροφορίες, να κατανοεί γεωμετρικές σχέσεις (Γαγάτσης & Καλογήρου, 2013).

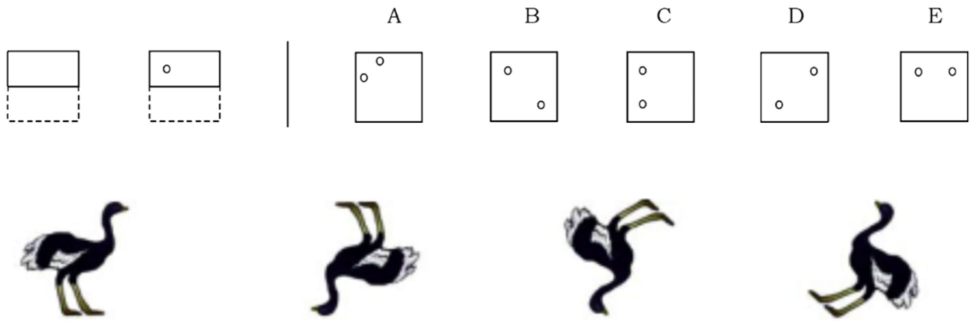
Άλλες μελέτες αποκαλύπτουν την τάση του ατόμου να αναπαριστά χωρικά τους αριθμούς σε μία αριθμογραμμή (Dehaene at al., 1993). Τα άτομα συνδέουν αυτόματα τους μικρότερους αριθμούς (π.χ., 1,2,3) με την αριστερή πλευρά του χώρου της αριθμογραμμής και τους μεγαλύτερους αριθμούς (π.χ., 7,8,9) με τη δεξιά πλευρά του χώρου της αριθμογραμμής, γεγονός που έχει ονομαστεί ως φαινόμενο SNARC (Spatial Numerical Association of Response Codes) (Dehaene at al., 1993). Το φαινόμενο SNARC υποδηλώνει ότι αντιλαμβανόμαστε τους αριθμούς όχι μόνο λεκτικά αλλά και ως χωρικές αναπαραστάσεις.
Άλλα ευρήματα από μελέτες απεικόνισης του εγκεφάλου συμβαδίζουν με τα ευρήματα από τη γνωστική ψυχολογία και δείχνουν ότι βασικές αριθμητικές-μαθηματικές εργασίες, αλλά και κάποιες οπτικοχωρικές εργασίες ενεργοποιούν γειτονικές ή και επικαλυπτόμενες περιοχές του εγκεφάλου (Tam et al., 2018· Hawes & Ansari, 2020) (Εικόνα 5). Η χωρική ικανότητα και η επίδοση στα μαθηματικά φαίνεται ότι βασίζονται σε μεγάλο βαθμό στην οπτικοχωρική μνήμη εργασίας. Η οπτικοχωρική μνήμη εργασίας παρέχει έναν «νοερό πίνακα» στον οποίο τα μαθηματικά προβλήματα μπορούν να οργανωθούν και να επεξεργαστούν σύμφωνα με τις οπτικοχωρικές σχέσεις που εμπλέκονται (Dehaene, Spelke, Pinel, Stanescu, & Tsivkin, 1999· Hawes et al., 2015). Η σχέση μεταξύ χωρικής ικανότητας και μαθηματικών, σύμφωνα με αυτή τη θεωρία, τοποθετεί τη χωρική σκέψη και ικανότητα ως πρόδρομο και αναπόσπαστο μέρος της μαθηματικής συλλογιστικής.



Εικόνα 5. Απεικόνιση μαγνητικής περιοχών εγκεφάλου (fMRI) που σχετίζονται με τη νοερή αριθμητική (πράσινο), νοητική περιστροφή (μπλε) και βασικές συμβολικές διεργασίες (κόκκινο) (Πηγή: Hawes & Ansari, 2020, σελ. 9)

Αυτό το εύρημα υποστηρίζεται περαιτέρω από έρευνα που δείχνει ότι οι πρώιμες χωρικές ικανότητες είναι ένας ισχυρός προγνωστικός παράγοντας της μεταγενέστερης επιτυχίας στα μαθηματικά (Mix & Cheng, 2012). Φαίνεται πως η χωρική ικανότητα και τα μαθηματικά χρησιμοποιούν γνωστικές διαδικασίες που ξεκινούν νωρίς στην ανάπτυξη του ατόμου (Mix & Cheng, 2012). Σύμφωνα με τις Mix και Cheng (2012), αυτό συμβαίνει, γιατί οι μαθητές που έχουν καλές επιδόσεις στα μαθηματικά έχουν κατακτήσει τις μαθηματικές έννοιες και πολλές φορές τις συσχετίζουν με προσωπικές εμπειρίες, όπως η κίνηση στον χώρο, που αφορά χωρικές ικανότητες. Η μετα-ανάλυσή τους καταλήγει ότι η σχέση μεταξύ της χωρικής ικανότητας και

των μαθηματικών είναι τόσο καλά τεκμηριωμένη, που δεν έχει πλέον νόημα να αναρωτιέται κανείς αν σχετίζονται, αλλά χρειάζεται να εξεταστούν οι αιτιώδεις μηχανισμοί και οι κοινές διαδικασίες, προκειμένου να αξιοποιηθεί πλήρως αυτή η σχέση από τους εκπαιδευτικούς. Χωρικές ικανότητες, όπως η νοητική περιστροφή, η οπτικοχωρική μνήμη εργασίας και η λήψη προοπτικής, σχετίζονται με τις καλές επιδόσεις στα μαθηματικά, την αναγνώριση και την επεξεργασία γραφικών παραστάσεων, την επίλυση προβλήματος και την καλή αναπαράσταση της νοερής αριθμογραμμής (mental numberline). Μια από τις πιο αξιοσημείωτες πτυχές της σύνδεσης των χωρικών ικανοτήτων με τα μαθηματικά είναι σε αντίθεση με πολλά αναπτυξιακά φαινόμενα που επιλύονται ή και εξαφανίζονται μέχρι την ενηλικίωση, η σχέση μεταξύ της χωρικής ικανότητας και των μαθηματικών είναι μια σχέση που εμφανίζεται νωρίς και συνεχίζει να υπάρχει ακόμα και στην ενηλικίωση. Σύμφωνα με τις Mix και Cheng (2012), ακόμα και ενήλικες που παρουσιάζουν καλές χωρικές ικανότητες έχουν καλές μαθηματικές επιδόσεις.
Η χωρική ικανότητα παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων σε μαθητές δημοτικού σχολείου, όπως βρήκαν οι Boonen, van Wessel, Jolles και van der Schoot (2014). Η μελέτη τους εξέτασε τον ρόλο των χωρικών ικανοτήτων στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων σε 128 Ολλανδούς μαθητές της έκτης τάξης. Οι ερευνητές χρησιμοποίησαν έργα αξιολόγησης χωρικών ικανοτήτων, όπως δίπλωση χαρτιού ή περιστροφή εικόνας (Εικόνα 6), αλλά και έργα επίλυσης προβλήματος. Κατέληξαν ότι, σε σύγκριση με μαθητές που δεν είχαν καλές χωρικές ικανότητες και δεν χρησιμοποιούσαν οπτικές αναπαραστάσεις, (π.χ. σχηματοποίηση του προβλήματος) εκείνοι που χρησιμοποιούσαν ακριβείς οπτικές αναπαραστάσεις αύξησαν την πιθανότητα να λύσουν σωστά ένα μαθηματικό λεκτικό πρόβλημα κατά έξι φορές. Αντίθετα, η έλλειψη καλής χωρικής ικανότητας και οπτικοποίησης του μαθηματικού προβλήματος μείωσε την πιθανότητα επιτυχούς επίλυσής του από τους μαθητές. Οι ερευνητές καταλήγουν ότι οι μαθητές που έχουν καλές χωρικές ικανότητες είναι καλοί στην επίλυση προβλημάτων. Σε ανάλογα ευρήματα κατέληξαν και οι Casey, Pezaris, Fineman, Pollock, Demers και Dearing (2014) οι οποίοι σε μια διαχρονική μελέτη τεσσάρων ετών ερεύνησαν κορίτσια πρώτης έως πέμπτης δημοτικού σε έργα χωρικών ικανοτήτων. Τα ευρήματά τους έδειξαν ότι από την πρώτη δημοτικού, η ικανότητα των νεαρών κοριτσιών να επιλύουν έργα χωρικών ικανοτήτων είναι προγνωστική της ικανότητάς τους στην επίλυση προβλημάτων αργότερα.



Εικόνα 6. Παράδειγμα έργου αξιολόγησης χωρικών ικανοτήτων Πηγή: Boonen et al. (2014), σελ. 20

Οι Hawes και Ansari (2020) τόνισαν τη σχέση των καλών χωρικών ικανοτήτων με την καλή επίδοση στα μαθηματικά γενικότερα. Οι ερευνητές βάσει μελετών σχετικά με τη σχέση μεταξύ χωρικών ικανοτήτων και μαθηματικών ικανοτήτων, κατέληξαν ότι η χωρική σκέψη αναπτύσσεται με αριθμητικές εργασίες και το αντίστροφο, κάτι που καταδεικνύει περαιτέρω πόσο σημαντικές είναι οι χωρικές ικανότητες στη διδασκαλία των μαθηματικών. Το γεγονός αυτό υποστηρίχθηκε και από τους Hawes, Moss, Caswell, Seo και Ansari (2015) σε έρευνα που διεξήχθη σε 316 μαθητές ηλικίας νηπιαγωγείου έως τετάρτης τάξης στον Καναδά. Τα παιδιά εξετάστηκαν σε έργα χωρικών ικανοτήτων και μαθηματικών επιδόσεων με τα αποτελέσματα να δείχνουν ισχυρούς συσχετισμούς μεταξύ χωρικών ικανοτήτων και μαθηματικών επιδόσεων. Συνολικά, τα ευρήματα της έρευνας υποδηλώνουν ότι οι χωρικές ικανότητες παίζουν σημαντικό ρόλο τόσο στις βασικές αριθμητικές δεξιότητες όσο και στην αριθμητική και μαθηματική σκέψη.

1.Β.3. Χωρικές ικανότητες και εκπαίδευση

Η κατανόηση των χωρικών ικανοτήτων έχει αλλάξει με την πάροδο του χρόνου λόγω αλλαγών στα επιστημονικά και πολιτιστικά πλαίσια. Οι αρχικές απόψεις ήταν ότι αυτές είναι σταθερές και έβλεπαν τις ικανότητες αυτές ως έμφυτες και αμετάβλητες. Όσον αφορά την ανάπτυξη των χωρικών ικανοτήτων και τη χρήση οπτικοποιήσεων, οι Piaget και Inhelder (1967) υπέθεσαν ότι τα παιδιά μικρότερα από ορισμένη ηλικία δεν είναι σε θέση να επιτύχουν σε ορισμένα είδη χωρικών έργων. Για παράδειγμα, η νοητική περιστροφή θεωρήθηκε ότι δεν ήταν δυνατή, μέχρι τα παιδιά να γίνουν τουλάχιστον 6 ετών. Επίσης, προτείνεται πως τα παιδιά καλό είναι να φτάσουν στην ηλικία 6-8 ετών, ώστε είναι σε θέση να χρησιμοποιούν όργανα μέτρησης και η έννοια της αλλαγής λήψης προοπτικής (η ικανότητα, δηλαδή, να οπτικοποιεί κανείς νοερά μια οπτική γωνία διαφορετική από τη δική του προοπτική) θεωρήθηκε ότι δεν είναι δυνατή μέχρι την ηλικία των 9 ή 10 ετών (Piaget & Inhelder, 1967). Ωστόσο, η σύγχρονη έρευνα καταδεικνύει ότι οι χωρικές ικανότητες μπορούν να βελτιωθούν και να αναπτυχθούν νωρίτερα μέσα από την πρακτική εξάσκηση και την κατάλληλη εκπαίδευση που θεωρείται μεγάλης σημασίας (Newcombe & Frick, 2010· Uttal et al., 2013· Cheng & Mix, 2013· Newcomb & Stieff, 2012). Συγκεκριμένα, οι Newcomb και Stieff (2012) επισημαίνουν ότι η χωρική ικανότητα δεν αποτελεί έμφυτη, παγιωμένη ικανότητα αλλά μπορεί να αναπτυχθεί μέσω της εκπαίδευσης και της εξάσκησης. Από αυτή την άποψη, οι Καλογήρου και Γαγάτσης (2013) εξετάζουν την ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας και της γεωμετρικής αντίληψης του σχήματος. Επισημαίνουν ότι αυτές οι ικανότητες αναπτύσσονται σταδιακά με την πάροδο του χρόνου, κάτι που σημαίνει ότι μπορούν να βελτιωθούν μέσω ειδικής εκπαίδευσης.

Η μελέτη των Cheng and Mix (2013) ήταν μεταξύ πολλών που έδειξαν μεγάλη βελτίωση στις επιδόσεις των μαθηματικών σε παιδιά προσχολικής ηλικίας μετά από εκπαίδευση σε χωρικές ικανότητες. Έναν χρόνο νωρίτερα, οι ίδιες ερευνήτριες μελέτησαν 58 παιδιά 6-8 ετών στην Αμερική σε έργα νοητικής περιστροφής και έργα μαθηματικής επίδοσης (Mix & Cheng, 2012). Για κάποια πειραματική ομάδα η έρευνα περιελάμβανε εκπαίδευση στη νοητική περιστροφή. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, οι μαθητές με υψηλές επιδόσεις στα έργα χωρικών ικανοτήτων έδειξαν υψηλές επιδόσεις σε έργα μαθηματικής ικανότητας καθ' όλη τη διάρκεια της ανάπτυξης, συμπεριλαμβανομένων και των πρώτων τάξεων του δημοτικού. Οι ερευνήτριες καταλήγουν ότι, για τα παιδιά που εκπαιδεύτηκαν στη νοητική περιστροφή, ακόμη και με μία μόνο συνεδρία εξάσκησης στη χωρική εκπαίδευση, οδήγησε σε σημαντική βελτίωση σε ορισμένα μαθηματικά προβλήματα. Αυτό το εύρημα προσθέτει περαιτέρω υποστήριξη στους ισχυρισμούς ότι η χωρική γνώση και η μαθηματική σκέψη συνδέονται. Συμπληρωματικά, η Τζεκάκη (1996, 2007) τονίζει τη σημασία της ενσωμάτωσης μαθηματικών δραστηριοτήτων για παιδιά προσχολικής ηλικίας που αναπτύσσουν χωρική συλλογιστική, καθώς έχει μακροπρόθεσμα οφέλη στην πρώιμη ανάπτυξη χωρικών ικανοτήτων

Η αποτελεσματικότητα της χωρικής εκπαίδευσης έχει επίσης παρατηρηθεί μεταξύ των μεγαλύτερων μαθητών επηρεάζοντας θετικά τις μαθηματικές τους ικανότητες. Οι Sorby και Baartmans (2000) πραγματοποίησαν έρευνα σε φοιτητές μηχανικής για να δείξουν πως η χωρική εκπαίδευση βελτίωσε την επίδοσή τους σε μαθηματικές δοκιμασίες, συμπεριλαμβανομένων εκείνων που απαιτούν δεξιότητες οπτικοποίησης όπως το σχέδιο. Επομένως, μπορεί να συναχθεί ότι η χωρική εκπαίδευση είναι επωφελής σε διαφορετικές ηλικίες και βαθμίδες.

Εμβαθύνοντας περισσότερο, η μετά-ανάλυση ερευνών των Uttal et al. (2013) αναφέρεται στο πόσο εύπλαστες είναι οι χωρικές ικανότητες (the malleability of spatial skills). Ανέλυσαν τα αποτελέσματα διάφορων μελετών και κατέληξαν πως οι χωρικές ικανότητες αναπτύσσονται μέσω της συνεχούς εκπαίδευσης και της εξάσκησης που οδηγεί σε ανώτερες επιδόσεις στα μαθηματικά. Αρχικά, εξέτασαν αν υπάρχουν διαφορές στο φύλο στο σύνολο των επιδόσεων και κατέληξαν ότι οι άνδρες και οι γυναίκες βελτιώθηκαν περίπου σε ίδιο ποσοστό με την εκπαίδευση, αν και τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι οι άνδρες τείνουν να έχουν πλεονέκτημα σε κάποια είδη χωρικών ικανοτήτων. Στη συνέχεια, εξέτασαν την ηλικία των συμμετεχόντων. Αν και θα περίμενε κανείς ότι η χωρική εκπαίδευση θα ήταν πιο αποτελεσματική για τα μικρότερα παιδιά παρά για τους εφήβους και τους ενήλικες, δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές, γεγονός που αποδόθηκε στην ετερογένεια των παραμέτρων επίδρασης. Εξέτασαν ακόμα και μελέτες με άτομα που είχαν χαμηλές επιδόσεις σε έργα χωρικών ικανοτήτων, όπου και εκεί βρήκαν βελτίωση μετά από κατάλληλη εκπαίδευση. Τα συμπεράσματα της μελέτης όχι μόνο ρίχνουν φως στις χωρικές ικανότητες και την ανάπτυξή τους, αλλά μπορούν επίσης να βοηθήσουν στην λήψη αποφάσεων σχετικά με το ποια προγράμματα χωρικής κατάρτισης μπορούν να εφαρμοστούν με οικονομικά και εκπαιδευτικά εφικτούς τρόπους, με ιδιαίτερη έμφαση στις συνδέσεις με τους κλάδους STEM.

Οι παραπάνω έρευνες δείχνουν τη σημασία της ενσωμάτωσης της χωρικής εκπαίδευσης στη μαθηματική εκπαίδευση. Το NCTM (2000) τονίζει ότι η χωρική συλλογιστική είναι απαραίτητη για την κατανόηση και την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Μέσω της συμπερίληψης της κατάρτισης χωρικών ικανοτήτων στο πρόγραμμα σπουδών, μπορεί να επιτευχθεί μια πιο ουσιαστική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Κατά συνέπεια, αυτά τα συμπεράσματα δύνανται να χρησιμοποιηθούν εκτενώς σε εκπαιδευτικά προγράμματα που στοχεύουν στην αύξηση των χωρικών ικανοτήτων αλλά και της μαθηματικής ικανότητας.

Επιπλέον, η χωρική ικανότητα τονίζεται ως σημαντική από την έκθεση του Εθνικού Συμβουλίου Έρευνας των ΗΠΑ (NRC, 2006), ιδιαίτερα στο πλαίσιο της εκπαίδευσης K-12 (εκπαίδευση μέχρι το $12^{ο}$ σχολικό έτος) και είναι χρήσιμη για τους κλάδους του STEM. Η έκθεση υποστηρίζει την ενσωμάτωση εκπαιδευτικών προγραμμάτων που ενισχύουν τη χωρική σκέψη και τη χωρική ικανότητα των μαθητών σε συνδυασμό με άλλες μορφές γνώσης, έτσι ώστε η εκπαίδευση να μπορεί να γίνει μια ολιστική διαδικασία. Ομοίως αναγνωρίζεται από το National Council of Teachers of Mathematics των ΗΠΑ (NCTM, 2000) ως θεμελιώδη ικανότητα για τους μαθητές, ώστε να είναι σε θέση να κατανοήσουν καλύτερα τα μαθηματικά. Στο Common Core State Standards (CCSS) έχουν εισαχθεί από το νηπιαγωγείο εκπαιδευτικά προγράμματα στα οποία τα παιδιά έρχονται σε επαφή με την ανάλυση, σύγκριση, σύνθεση και δημιουργία γεωμετρικών σχημάτων. Στην Ελλάδα, στο Νέο Πρόγραμμα Σπουδών για τα μαθηματικά (2021) δίνεται μεγάλη βαρύτητα στην ανάπτυξη της χωρικής σκέψης. Οι μαθητές από την Α΄ Δημοτικού εξασκούνται να «*εντοπίζουν, περιγράφουν και αναπαριστούν θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές στον χώρο ως προς διαφορετικά συστήματα αναφοράς, με τη χρήση απλών χωρικών εννοιών όπως πάνω/κάτω μέσα/έξω, δίπλα/μεταξύ, δεξιά/αριστερά. Αναγνωρίζουν τρισδιάστατες συνθέσεις από διάφορες οπτικές γωνίες, κατασκευάζουν τρισδιάστατες συνθέσεις από εικόνες, σχέδια ή άλλες αναπαραστάσεις με χρήση χειραπτικού υλικού*» (Νέο Πρόγραμμα Σπουδών για τα μαθηματικά, 2021, σελ. 15). Επίσης, δίνεται μεγάλη βαρύτητα στους μετασχηματισμούς, με τους μαθητές να εξασκούνται στην περιστροφή ως προς άξονα, στη συμμετρία, αλλά και στην κατασκευή συμμετρικών σχημάτων μέσω χειραπτικών υλικών και τεχνολογίας.

Συνοψίζοντας, υπάρχει μια γνωστή σχέση μεταξύ χωρικών ικανοτήτων και μαθηματικών, όπως αναδεικνύεται από διάφορα θεωρητικά πλαίσια και εμπειρικά ευρήματα. Αυτή η σχέση μπορεί να γίνει ισχυρότερη, αν εφαρμοστούν εκπαιδευτικές προσεγγίσεις με έμφαση στη χωρική σκέψη κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Η σύνδεση αυτή αλλάζει συνεχώς με την ηλικία, όπου οι χωρικές ικανότητες διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο στη μαθηματική κατανόηση στην πρώιμη παιδική ηλικία μέχρι και την ενήλικη ζωή (Newcombe & Frick, 2010· Uttal et al., 2013· Cheng & Mix, 2013· Newcomb & Stieff, 2012). Τέλος μελέτες παρέμβασης έχουν δείξει πώς αυτή η σύνδεση μπορεί να γίνει ισχυρότερη, οδηγώντας έτσι σε εκπαιδευτικές προσεγγίσεις που ενσωματώνουν τη χωρική σκέψη στη διδασκαλία των μαθηματικών (Cheng & Mix, 2013· Newcomb & Stieff, 2012· Baartmans & Sorby, 2000).

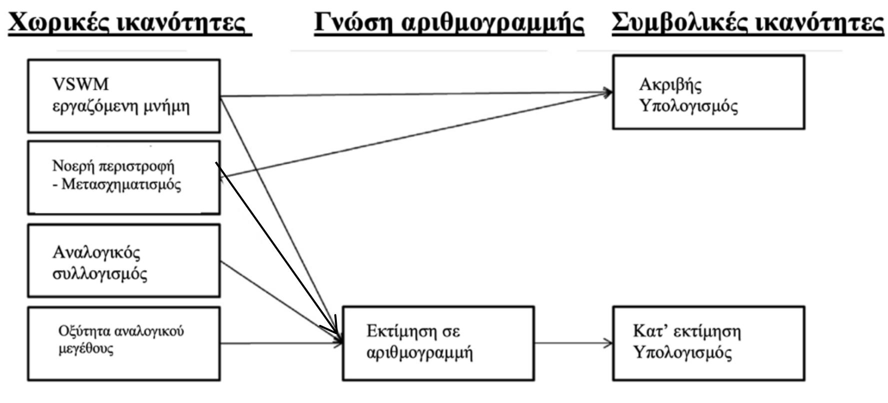
Μέρος Γ΄

1.Γ.1. Χωρικές ικανότητες και εκτίμηση στην αριθμογραμμή

Η σχέση μεταξύ των χωρικών ικανοτήτων και της ικανότητας για πραγματοποίηση εκτίμησης σε αριθμογραμμή έχει προσελκύει το ενδιαφέρον της εκπαιδευτικής έρευνας. Η σημασία αυτού του ενδιαφέροντος βασίζεται στο γεγονός ότι η κατανόηση των χωρικών σχέσεων μπορεί να βοηθήσει τα παιδιά να κατανοήσουν καλύτερα τους αριθμούς και το μέγεθός τους.

Οι Gunderson και Hildebrand (2021) ήταν από τους ερευνητές που μελέτησαν αυτή τη σχέση. Στη διετή διαχρονική μελέτη τους εξέτασαν παιδιά σχολικής ηλικίας από 4 μέχρι 9 ετών επιχειρώντας να προσδιορίσουν, ανάμεσα στα άλλα, πώς σχετίζονται οι χωρικές ικανότητες με την ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή. Η μελέτη εξέτασε τις χωρικές ικανότητες ευρύτερα και περιλάμβανε έργα νοητικής περιστροφής, έργα μετασχηματισμών και έργα που αξιολογούσαν την οπτικοχωρική μνήμη εργασίας (VSWM). Οι ερευνήτριες επέλεξαν τις συγκεκριμένες χωρικές ικανότητες λόγω των θεωρητικών και εμπειρικών συσχετίσεων που αυτές έχουν με τις μαθηματικές επιδόσεις. Υπέθεσαν ότι κάθε χωρική ικανότητα θα σχετίζεται μοναδικά με την ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή, ενώ θεώρησαν ότι η καλή οπτικοχωρική μνήμη εργασίας (VSWM), η ικανότητα για μετασχηματισμούς ή/και η ικανότητα για νοητική περιστροφή θα σχετίζονται άμεσα με τον ακριβή υπολογισμό. Το δείγμα των μαθητών μελετήθηκε για δύο χρόνια και τα ευρήματα της διαχρονικής μελέτης έδειξαν πως οι χωρικές ικανότητες που μελετήθηκαν έδειξαν συσχετίσεις με την εκτίμηση σε αριθμογραμμή. Συμπερασματικά, οι καλές χωρικές ικανότητες, είχαν σημαντική επίδραση στην καλή εκτίμηση σε αριθμογραμμή, η οποία με τη σειρά της επηρέασε τις υπολογιστικές ικανότητες (Εικόνα 7). Αυτά τα αποτελέσματα υποδεικνύουν την ιδιαιτερότητα στις σχέσεις μεταξύ συγκεκριμένων αριθμητικών και χωρικών ικανοτήτων και προτείνουν ότι οι ερευνητές και οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να αντιμετωπίζουν τις χωρικές ικανότητες ως σημαντική παράμετρο στον σχεδιασμό εκπαιδευτικών προγραμμάτων για τα μαθηματικά.

Οι Cornu, Hornung, Schitz και Martin (2017) διερεύνησαν πώς διαφορετικές πτυχές των χωρικών ικανοτήτων σχετίζονται με την πρώιμη αριθμητική και την εκτίμηση σε αριθμογραμμή σε παιδιά νηπιαγωγείου. Με σκοπό να ελέγξουν τον προγνωστικό ρόλο των χωρικών ικανοτήτων για την ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή σχεδίασαν έργα χωρικών ικανοτήτων και έργα εκτίμησης σε αριθμογραμμή σε tablet. Για την αξιολόγηση των χωρικών ικανοτήτων σχεδίασαν ανάλογα ψηφιακά έργα. Για την αξιολόγηση της ικανότητας πραγματοποίησης εκτίμησης σε αριθμογραμμής, έδωσαν στα παιδιά, τέσσερις μήνες αργότερα, έργα υπολογισμού και εκτίμησης σε αριθμογραμμή. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι η επίδοση των παιδιών στον χωρικό προσανατολισμό και την οπτικοκινητική ολοκλήρωση προέβλεψε την επίδοση των παιδιών στην αριθμητική. Επίσης, οι καλές χωρικές ικανότητες ήταν προβλεπτικός παράγοντας για την καλή επίδοση στα έργα εκτίμησης σε αριθμογραμμή.



Εικόνα 7. Θεωρητικό μοντέλο σχέσεων χωρικών και αριθμητικών ικανοτήτων (Πηγή: Gunderson et al., 2021, σελ. 7)

Οι Simms, Clayton, Cragg, Gilmore και Johnson (2016) διερεύνησαν τις σχέσεις μεταξύ χωρικών ικανοτήτων, εκτίμησης σε αριθμογραμμής και μαθηματικών επιδόσεων. Συνολικά, 77 παιδιά, 8 έως 10 ετών, αξιολογήθηκαν χρησιμοποιώντας έργα εκτίμησης σε αριθμογραμμή, ένα τυποποιημένο τεστ μαθηματικών επιτευγμάτων και ένα τεστ οπτικοχωρικών ικανοτήτων. Σύμφωνα με τα ευρήματα της έρευνας, η σχέση μεταξύ μιας εργασίας εκτίμησης σε αριθμογραμμή και της μαθηματικής επίδοσης συσχετίστηκε ισχυρά με την καλή οπτικοχωρική ικανότητα. Τα αποτελέσματα αυτά υποδηλώνουν ότι η καλή ενσωμάτωση των χωρικών ικανοτήτων είναι απαραίτητη για ακριβείς εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή, αλλά και στα μαθηματικά επιτεύγματα.

Παράλληλα, οι Möhring, Frick και Newcombe (2018) διερεύνησαν παιδιά ηλικίας 5 έως 7 ετών για να διαπιστώσουν εάν υπάρχει σχέση μεταξύ της χρήσης αναλογικής κλίμακας (spatial scaling), της αναλογικής σκέψης, καθώς και της αριθμητικής κατανόησης. Για τους ερευνητές η έννοια της χωρικής κλιμάκωσης (spatial scaling) είναι η ικανότητα του ατόμου να χρησιμοποιεί κλίμακα και να σχετίζει αποστάσεις. Αυτή η ικανότητα, σύμφωνα με τους ερευνητές, είναι ένα σημαντικό στοιχείο για την ανάγνωση χαρτών. Τόσο παιδιά όσο ενήλικες φαίνεται να χρησιμοποιούν αναλογικές νοητικές στρατηγικές μετατροπής για τη ανάγνωση χαρτών σε κλίμακα, παρόμοιες με τη νοητική περιστροφή. Οι ερευνητές διαπίστωσαν σημαντική σχέση στην ικανότητα των παιδιών στη χρήση κλίμακας, στην ικανότητά τους για αναλογικό συλλογισμό και στην ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή. Τα συμπεράσματα της μελέτης διαπίστωσαν σημαντική συσχέτιση μεταξύ της καλής χρήσης κλίμακας από τα παιδιά και των καλών εκτιμήσεών τους στην αριθμογραμμή. Συγκεκριμένα, τα παιδιά που είχαν καλύτερες επιδόσεις σε έργα κλίμακας εκτίμησαν με μεγαλύτερη ακρίβεια τα μεγέθη των αριθμών στην αριθμογραμμή. Επομένως, στην έρευνα των Möhring, et al. (2018) αναδεικνύεται μια ισχυρή σχέση καλής χωρικής ικανότητας και ικανότητας εκτίμησης σε αριθμογραμμή.

Συνοψίζοντας, αυτές οι έρευνες καταδεικνύουν συλλογικά μια σημαντική σχέση μεταξύ της ικανότητας εκτίμησης σε αριθμογραμμή και των χωρικών ικανοτήτων.

Κεφάλαιο 2ο : Μεθοδολογία

Στο παρόν κεφάλαιο της εργασίας περιγράφεται λεπτομερώς η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα. Παρουσιάζονται τα ερευνητικά ερωτήματα καθώς και αναλυτικές πληροφορίες σχετικά με τους συμμετέχοντες στην έρευνα, τον ερευνητικό σχεδιασμό και τα εργαλεία μέτρησης που χρησιμοποιήθηκαν. Τέλος, περιγράφεται η διαδικασία συλλογής των δεδομένων, οι διαδικασίες κωδικοποίησης και ανάλυσής τους.

2.1. Σκοπός της έρευνας και επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ της ικανότητας εκτίμησης πάνω σε αριθμογραμμή και των χωρικών ικανοτήτων των παιδιών δημοτικού σχολείου. Το κύριο ερευνητικό ερώτημα αφορά στη σχέση ανάμεσα στις δύο παραπάνω ικανότητες και, προκειμένου να δοθεί απάντηση σε αυτό, πραγματοποιήθηκε έρευνα σε παιδιά Γ΄ και Ε΄ τάξης του δημοτικού σχολείου.

Τα επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα που η παρούσα εργασία επιχείρησε να εξετάσει είναι:

α) Ποια είναι η ικανότητα των παιδιών Γ' και Ε' τάξης για πραγματοποίηση εκτιμήσεων στην αριθμογραμμή;

β) Ποιες είναι οι χωρικές ικανότητες των παιδιών Γ' και Ε' τάξης;

γ) Υπάρχει σχέση μεταξύ των δύο παραπάνω ικανοτήτων στα παιδιά Γ΄ και Ε΄ τάξης;

δ) Η σχέση αυτή διαφοροποιείται με την ηλικία;

2.2. Συμμετέχοντες

Για την έρευνα αξιοποιήθηκαν τέσσερα διαφορετικά τμήματα μαθητών από διαφορετικά σχολεία της περιοχής της Θεσσαλονίκης, αποτελούμενα από δύο τμήματα της Γ΄ και δύο τμήματα της Ε΄ Δημοτικού. Η επιλογή των τμημάτων και των τάξεων είχε ως στόχο την αντιπροσώπευση διαφορετικών εκπαιδευτικών περιβαλλόντων, διαφορετικών επιπέδων εκπαιδευτικής προόδου και διαφορετικών ηλικιών.

Συγκεκριμένα, συμμετείχαν συνολικά 79 μαθητές από δημόσια Δημοτικά Σχολεία της Θεσσαλονίκης. Από αυτούς, οι 40 (51.20%) φοιτούσαν στην Γ΄ τάξη (ηλικίας από 8 ετών και 3 μηνών έως 9 ετών και 2 μηνών, με μέσο όρο ηλικίας τα 8 έτη και 7 μήνες), ενώ οι υπόλοιποι 39 (48.80%) ήταν μαθητές της Ε΄ τάξης (ηλικίας από 10 ετών και 3 μηνών έως 11 ετών και 2 μηνών, με μέσο όρο ηλικίας τα 10 έτη και 8 μήνες). Στους συμμετέχοντες υπήρχαν συνολικά 46 αγόρια (58.2%) και 33 κορίτσια (41.8%). Στην Γ΄ τάξη συμμετείχαν 19 αγόρια (47,50%)

και 21 κορίτσια (52,50%), στην Ε΄ τάξη συμμετείχαν 27 αγόρια (69,23%) και 12 κορίτσια (30,77%). Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει τα στοιχεία των συμμετεχόντων.

Πίνακας 1 Στοιχεία συμμετεχόντων

Συμμετέχοντες (Ν=79)			
Γ΄ τάξη (Ν=40)		Ε΄ τάξη (Ν=39)	
8 ετών και 3 μηνών - 9 ετών και 2 μηνών		10 ετών και 3 μηνών - έως 11 ετών και 2 μηνών	
Μ.Ο. 8 έτη και 7 μήνες		**Μ.Ο. 10 έτη και 8 μήνες**	
19 αγόρια	21 κορίτσια	27 αγόρια	12 κορίτσια

Η επιλογή των μαθητών ήταν σχεδιασμένη με γνώμονα την ευκολία, καθώς οι μαθητές των συγκεκριμένων τμημάτων μπορούσαν να προσεγγιστούν και να συμμετάσχουν στη μελέτη. Η προσέγγιση αυτή είναι γνωστή ως βολική δειγματοληψία και επιτρέπει στους ερευνητές να συλλέξουν δεδομένα ευκολότερα και πιο γρήγορα, χωρίς την ανάγκη για πολύπλοκες διαδικασίες επιλογής δείγματος, με αντίστοιχα ζητήματα σχετικά με την αντιπροσώπευση του συνολικού πληθυσμού (Etikan, Musa & Alkassim, 2016). Αντίστοιχες έρευνες μπορούν να αποτελέσουν έναυσμα για μελλοντικές ερευνητικές προσπάθειες.

2.3. Σχεδιασμός της έρευνας - Εργαλείο μέτρησης

Προκειμένου να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας, πραγματοποιήθηκε ποσοτική έρευνα με συγχρονικό ερευνητικό σχέδιο. Συγκεκριμένα, σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν σε όλους τους συμμετέχοντες δύο έργα, τα οποία εξέτασαν αφενός τις ικανότητές τους για πραγματοποίηση εκτίμησης πάνω σε αριθμογραμμή (Έργο 1) και αφετέρου τις χωρικές ικανότητές τους (Έργο 2).

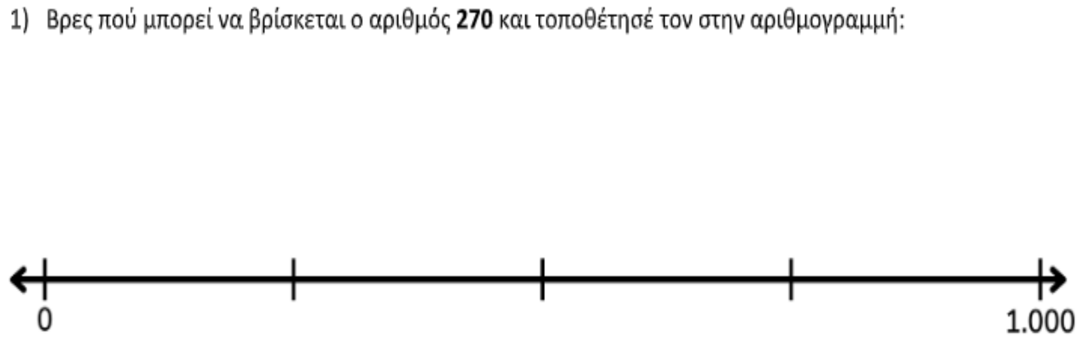
Πιο αναλυτικά, το Έργο 1 (Εκτίμηση σε αριθμογραμμή) αποτελούνταν από συνολικά 12 δοκιμασίες και εξέταζε την ικανότητα των μαθητών να πραγματοποιούν εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή ($1^{ο}$ ερευνητικό ερώτημα). Οι έξι από τις δοκιμασίες ζητούσαν από τους συμμετέχοντες να εκτιμήσουν τη θέση συγκεκριμένων αριθμών πάνω στην αριθμογραμμή (Number to Position - NP), σημειώνοντας μια κάθετη γραμμή στο σημείο που θεωρούσαν σωστό *(«Βρες πού μπορεί να βρίσκεται ο αριθμός 270 και τοποθέτησέ τον στην αριθμογραμμή»)*. Στις υπόλοιπες έξι δοκιμασίες (Position to Number - PN), δινόταν σε αριθμογραμμή μία συγκεκριμένη θέση, η οποία σημειωνόταν με μία κάθετη γραμμή και ένα βέλος πάνω από τη γραμμή, και ζητούνταν από τους συμμετέχοντες να εκτιμήσουν την αριθμητική αξία αυτής της θέσης *(«Βρες ποιος μπορεί να είναι ο αριθμός στη θέση του βέλους και σημείωσέ τον στην αριθμογραμμή»)*.

Σε όλες τις δοκιμασίες η αριθμογραμμή είχε σταθερό μήκος 20 εκ. και ήταν οριοθετημένη με άκρα το 0 (αριστερό άκρο) και το 1.000 (δεξιό άκρο). Οι αριθμοί που χρησιμοποιήθηκαν στις δοκιμασίες ήταν τριψήφιοι φυσικοί αριθμοί, καθώς οι μαθητές της Γ΄ τάξης τούς έχουν διδαχθεί και τυπικά θεωρούνται εξοικειωμένοι με αυτούς. Όλοι οι αριθμοί τελείωναν στη δεκάδα και στις μονάδες υπήρχε 0. Οι μισές δοκιμασίες αφορούσαν αριθμούς μεγαλύτερους του 500 και οι μισές αριθμούς μικρότερους του 500, ώστε να υπάρχουν «μικροί» και «μεγάλοι» αριθμοί συγκριτικά με το αριθμητικό εύρος το οποίο παρουσιαζόταν για εκτίμηση στην αριθμογραμμή. Για την επιλογή των αριθμών χρησιμοποιήθηκαν τα συμπληρώματα των αριθμών (για το 1.000) μεταξύ των δοκιμασιών NP και των δοκιμασιών PN. Πιο συγκεκριμένα, όταν στη δοκιμασία NP ζητούνταν να εκτιμηθεί η θέση του 830 πάνω στην αριθμογραμμή, στη δοκιμασία PN ζητούνταν να εκτιμηθεί η αριθμητική αξία του 170. Οι συγκεκριμένοι αριθμοί δόθηκαν με τυχαία σειρά, η οποία όμως ήταν ίδια για όλους τους συμμετέχοντες. Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται οι αριθμοί των δοκιμασιών στο Έργο 1.

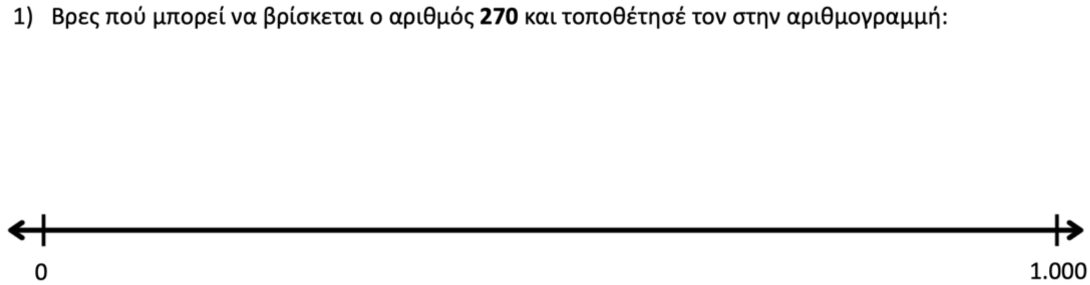
Πίνακας 2 Οι αριθμοί που αξιοποιήθηκαν στο Έργο 1

Αριθμοί προς εκτίμηση			
Εκτίμηση θέσης αριθμού σε αριθμογραμμή – NP, Number to Position		**Εκτίμηση αριθμού σε συγκεκριμένη θέση σε αριθμογραμμή – PN, Position to Number**	
830	>500	170	<500
710		290	
520		480	
350	<500	650	>500
270		730	
140		860	

Οι συμμετέχοντες και από τις δύο ηλικιακές ομάδες χωρίστηκαν τυχαία σε δύο ομάδες: στην πρώτη ομάδα παρουσιάστηκαν οι δοκιμασίες του Έργου 1 με σημεία στήριξης πάνω στην αριθμογραμμή, ενώ στη δεύτερη ομάδα παρουσιάστηκε το Έργο 1 χωρίς σημεία στήριξης πάνω στην αριθμογραμμή. Τα σημεία στήριξης ήταν ενδιάμεσα σημεία αναφοράς τα οποία σημειώνονταν με κάθετες γραμμές πάνω στην αριθμογραμμή που χώριζαν την αριθμογραμμή σε τέσσερα μέρη και υποδείκνυαν τη θέση των αριθμών 250, 500 και 750, χωρίς να αναφέρονται ωστόσο οι αριθμοί πάνω σε αυτή. Αναμενόταν οι μαθητές που είχαν στη διάθεσή τους σημεία στήριξης να διευκολύνονται περισσότερο, λόγω ακριβώς αυτών των σημείων στήριξης. Ενδεικτικά, στις Εικόνες 8 και 9 παρουσιάζεται η ίδια δοκιμασία του Έργου 1, με σημεία στήριξης και χωρίς σημεία στήριξης, αντίστοιχα. Όλες οι δοκιμασίες παρουσιάζονται στο Παράρτημα Α της παρούσας εργασίας.



Εικόνα 8. Αριθμογραμμή με σημεία στήριξης

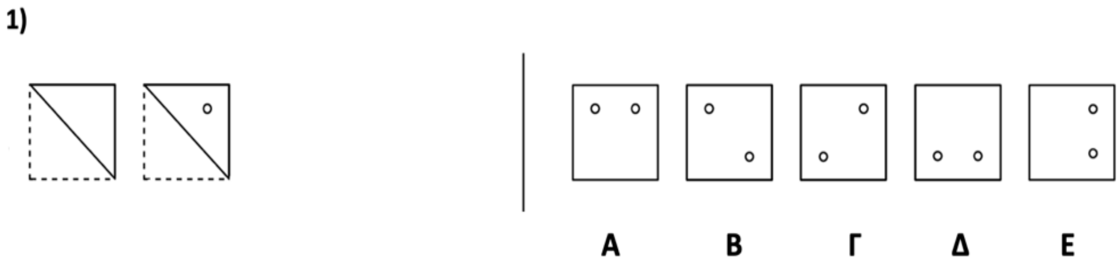


Εικόνα 9. Αριθμογραμμή χωρίς σημεία στήριξης

Με σκοπό να μελετηθεί η σχέση της ικανότητας εκτίμησης σε αριθμογραμμή με τις χωρικές ικανότητες των μαθητών ($2^{ο}$ ερευνητικό ερώτημα) σχεδιάστηκε και παρουσιάστηκε το Έργο 2, που εξέταζε τις χωρικές ικανότητες. Το Έργο 2 (Χωρικές ικανότητες) αποτελούνταν από συνολικά 12 δοκιμασίες, οι μισές από τις οποίες ήταν δοκιμασίες δίπλωσης χαρτιού και οι άλλες μισές ήταν δοκιμασίες αναγνώρισης σχήματος. Συγκεκριμένα, στις δοκιμασίες δίπλωσης χαρτιού οι συμμετέχοντες καλούνταν να διπλώσουν νοερά ένα τετράγωνο χαρτί, όπως ακριβώς εμφανιζόταν στην αριστερή πλευρά της δοκιμασίας. Στη συνέχεια, έπρεπε να το «τρυπήσουν» νοερά στο σημείο που υποδεικνυόταν, όπου κάθε οπή θα ήταν διάτρητη μέσα από όλα τα πάχη χαρτιού στο συγκεκριμένο σημείο. Τέλος, έπρεπε να το ξεδιπλώσουν, και πάλι νοερά, και να επιλέξουν ανάμεσα σε πέντε εικόνες εκείνη που παρουσίαζε σωστά το τετράγωνο χαρτί, όταν αυτό θα ξεδιπλωνόταν εντελώς (Εικόνα 10). Οι δοκιμασίες δίπλωσης χαρτιού αντλήθηκαν από τους Boonen et al. (2014), σύμφωνα με το τεστ χωρικών ικανοτήτων των Ekstrom, French και Harman του 1976.

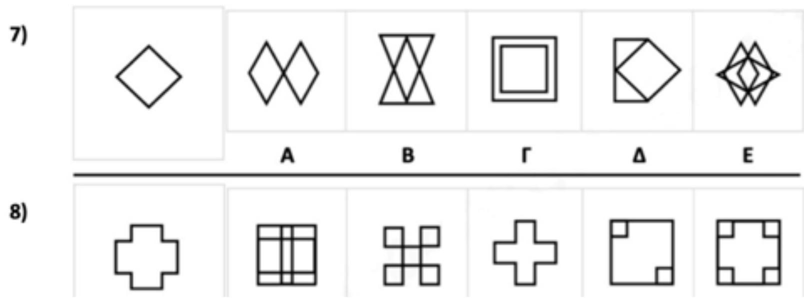
Στις δοκιμασίες αναγνώρισης σχήματος μέσα από σύνθεση σχημάτων, οι συμμετέχοντες καλούνταν να αναγνωρίσουν, ανάμεσα σε πέντε επιλογές απαντήσεων, το σχήμα που τους δινόταν στην αριστερή πλευρά κάθε δοκιμασίας (Εικόνα 11). Οι δοκιμασίες αυτές είναι εμπνευσμένες από το CEM (Durham University) test. Πρόκειται για δοκιμασίες που έχουν σχεδιαστεί για την εισαγωγή μαθητών σε ιδιωτικά και κρατικά σχολεία του Ηνωμένου Βασιλείου και αντλήθηκαν από την ιστοσελίδα http://www.11plusforparents.co.uk/NVR/spatial4b.html (ημερομηνία ανάκτησης: 12/1/2024).

Φαντάσου ένα τετράγωνο κομμάτι χαρτί. Το διπλώνεις νοερά έτσι όπως παρουσιάζεται αριστερά και στη συνέχεια το τρυπάς στο σημείο που υποδεικνύεται. Μία από τις επιλογές δεξιά (Α, Β, Γ, Δ ή Ε) δείχνει πού θα βρίσκεται η τρύπα (ή οι τρύπες) όταν το χαρτί ξεδιπλωθεί εντελώς. Θα πρέπει να αποφασίσεις ποια επιλογή είναι η σωστή και να την κυκλώσεις.



Εικόνα 10. Παράδειγμα δοκιμασίας δίπλωσης χαρτιού

Βλέπεις το αρχικό σχήμα αριστερά και κυκλώνεις μία από τις επιλογές δεξιά (Α, Β, Γ, Δ ή Ε) όπου το αρχικό σχήμα εμπεριέχεται ολόκληρο, χωρίς να περιστραφεί:



Εικόνα 11. Παράδειγμα δοκιμασίας αναγνώρισης σχήματος

Τα συγκεκριμένα δύο έργα σχεδιάστηκαν, επιπρόσθετα, με σκοπό να μελετηθεί η σχέση μεταξύ της ικανότητας πραγματοποίησης εκτίμησης σε αριθμογραμμή και των χωρικών ικανοτήτων σε παιδιά Γ΄ τάξης και Ε΄ τάξης ($3^{ο}$ ερευνητικό ερώτημα). Τέλος, μέσα από την εξέταση αυτής της σχέσης είναι δυνατή η μελέτη ηλικιακών διαφορών ($4^{ο}$ ερευνητικό ερώτημα). Όλες οι δοκιμασίες παρουσιάζονται στο Παράρτημα της παρούσας εργασίας.

2.4. Διαδικασία

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τον μήνα Μάρτιο του σχολικού έτους 2023 – 2024. Οι συμμετέχοντες εξετάστηκαν στην αίθουσα της σχολικής τάξης τους όπου επικρατούσε ησυχία, ώστε να είναι δυνατή η διατήρηση της συγκέντρωσής τους. Κάθονταν ένας σε κάθε θρανίο και απάντησαν ατομικά. Η συμμετοχή τους στην έρευνα ήταν εθελοντική και πραγματοποιήθηκε μετά από ενυπόγραφη συγκατάθεση των γονέων-κηδεμόνων τους, ενώ κατά τη διαδικασία της έρευνας διασφαλίστηκε η ανωνυμία τους.

Αρχικά, η ερευνήτρια ενημέρωσε τους συμμετέχοντες για τον σκοπό της έρευνας και τους διαβεβαίωσε πως οι απαντήσεις τους δεν θα χρησιμοποιηθούν για την αξιολόγηση της επίδοσής τους στα Μαθηματικά. Στη συνέχεια, δόθηκαν οι απαραίτητες οδηγίες και έγινε ένα δοκιμαστικό παράδειγμα για κάθε έργο. Δεν δινόταν καμία ανατροφοδότηση μετά το παράδειγμα.

Προκειμένου να γίνει η συλλογή δεδομένων για το Έργο 1, δόθηκε σε όλους τους συμμετέχοντες ένα μπλοκ με 12 σελίδες (μία σελίδα για κάθε δοκιμασία). Για το Έργο 2, δόθηκε ένα μπλοκ με τρεις σελίδες. Στις δύο πρώτες σελίδες υπήρχαν οι έξι δοκιμασίες δίπλωσης χαρτιού και στην τελευταία οι δοκιμασίες αναγνώρισης σχήματος.

Πριν από την πραγματοποίηση της κύριας έρευνας, πραγματοποιήθηκε πιλοτική έρευνα, στο πλαίσιο της οποίας τα δύο έργα δοκιμάστηκαν σε 10 μαθητές, 5 της Γ΄ τάξης και 5 της Ε΄ τάξης. Σκοπός ήταν να ανιχνευτούν τυχόν ασάφειες στις δοκιμασίες και να γίνει βελτίωσή τους ή αντικατάστασή τους με άλλες. Πραγματοποιήθηκαν μικρές τροποποιήσεις στη γλωσσική διατύπωση των οδηγιών και στα δύο έργα.

Η συλλογή των δεδομένων της κύριας έρευνας πραγματοποιήθηκε σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές, μία για κάθε έργο, προκειμένου να αποφευχθούν λάθη κόπωσης από τη συμμετοχή στην έρευνα. Επίσης, στους μισούς συμμετέχοντες δόθηκε πρώτα το Έργο 1, ενώ στους υπόλοιπους δόθηκε πρώτα το Έργο 2. Η διαδικασία διήρκησε περίπου 20 λεπτά για το Έργο 1 και 20 λεπτά για το Έργο 2.

2.5. Ανάλυση δεδομένων

Αφού συλλέχθηκαν τα δεδομένα, κωδικοποιήθηκαν δίνοντας 1 βαθμό για κάθε σωστή απάντηση και 0 βαθμούς για κάθε λανθασμένη. Όλες οι στατιστικές αναλύσεις που εφαρμόσθηκαν στην παρούσα εργασία έγιναν με χρήση του στατιστικού προγράμματος SPSS 27.

Η αξιολόγηση της επίδοσης των συμμετεχόντων διαφοροποιήθηκε ανάλογα με το έργο. Για το Έργο 1, χρησιμοποιήθηκε ένα ελαστικό κριτήριο, όπως σε παρόμοιες έρευνες άλλων μελετητών (Booth & Siegler, 2006· Δεσλή & Τρανταφύλλου, 2019). Μια εκτίμηση θεωρήθηκε σωστή εάν η απόκλιση από το αποτέλεσμα της ακριβούς μέτρησης στην αριθμογραμμή δεν ξεπερνούσε το 20% του συνολικού μήκους του δεδομένου τμήματος της αριθμογραμμής. Λαμβάνοντας υπόψη ότι το μήκος της αριθμογραμμής στην παρούσα έρευνα ήταν 20 εκ., η μέγιστη επιτρεπόμενη απόκλιση ήταν 4 εκ. (20% x 20 εκ.= 4 εκ.). Επομένως, θεωρήθηκαν σωστές οι απαντήσεις που τοποθετούσαν τον ζητούμενο αριθμό 2 εκατοστά πριν και 2 εκατοστά μετά την ακριβή του θέση πάνω στην αριθμογραμμή. Για παράδειγμα, για τον αριθμό 520 η ακριβής θέση στην αριθμογραμμή ήταν τα 10,40 εκ. και το εύρος των σωστών απαντήσεων ήταν 8,40 εκ. - 12,40 εκ. Αντίστοιχα, στις δοκιμασίες PN, θεωρήθηκαν επιτυχείς οι εκτιμήσεις που είχαν απόκλιση 20% του αριθμητικού μεγέθους που αντιστοιχούσε στη συγκεκριμένη θέση πάνω στην αριθμογραμμή. Στην παρούσα έρευνα, η αριθμογραμμή έχει εύρος 0-1.000, άρα 20% x 1.000 = 200, δηλαδή επιτυχείς εκτιμήσεις θεωρήθηκαν οι αριθμοί που βρίσκονταν 100 πάνω και 100 κάτω από τον αριθμό που αντιστοιχούσε στην συγκεκριμένη θέση πάνω στην αριθμογραμμή. Για παράδειγμα, η δοκιμασία για την εκτίμηση της θέσης του αριθμού 170 πάνω στην αριθμογραμμή είχε εύρος σωστών απαντήσεων 70 - 270. Τα εύρη των σωστών απαντήσεων για τις δοκιμασίες του Έργου 1 παρουσιάζονται στο Παράρτημα.

Για το Έργο 2, ως σωστό θεωρήθηκε η επιλογή της σωστής απάντησης ανάμεσα στις πέντε επιλογές απαντήσεων που παρουσιάζονταν κάθε φορά.

Κεφάλαιο 3ο : Αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας, που διεξήχθη, όπως αυτά προέκυψαν από τη στατιστική ανάλυση με τη χρήση του προγράμματος SPSS 27. Το κεφάλαιο δομείται σε τρεις ενότητες. Η πρώτη ενότητα παρουσιάζει την επίδοση των παιδιών Γ΄ και Ε΄ δημοτικού στις δοκιμασίες εκτίμησης σε αριθμογραμμή (Ἔργο1) σε σχέση με το φύλο αλλά και το μέγεθος του αριθμού (αριθμοί μικρότεροι και μεγαλύτεροι του 500, αντίστοιχα). Στη δεύτερη ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τις επιδόσεις των μαθητών στις δοκιμασίες των χωρικών ικανοτήτων (Ἑργο 2) ως προς το είδος έργου (δίπλωση χαρτιού και αναγνώριση σχήματος), ως προς το φύλο και ως προς την ηλικία. Τέλος, στην τρίτη ενότητα εξετάζονται οι σχέσεις μεταξύ των δύο έργων (εκτιμήσεων στην αριθμογραμμή και χωρικών ικανοτήτων), τόσο για το σύνολο των παιδιών όσο για κάθε ηλικιακή ομάδα παιδιών ξεχωριστά.

Μέρος Α΄

3.Α.1. Επίδοση στις δοκιμασίες εκτιμήσεων πάνω σε αριθμογραμμή (Ἑργο 1)

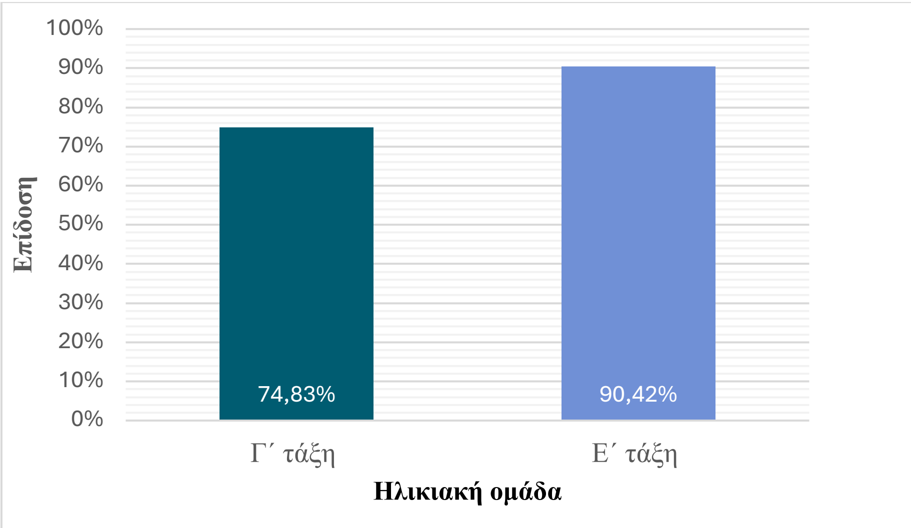
Αρχικά, εξετάστηκαν οι επιδόσεις των παιδιών στις δοκιμασίες εκτίμησης στην αριθμογραμμή. Στο σύνολο των συμμετεχόντων η γενική επίδοση των παιδιών ήταν καλή με το ποσοστό επιτυχίας τους να ξεπερνά το 80% (82,62%).
Στον Πίνακα 1 που ακολουθεί παρουσιάζονται συνολικά τα αποτελέσματα από τις επιδόσεις των παιδιών στις δοκιμασίες του Έργου 1. Η μέγιστη δυνατή επίδοση στο σύνολο των δοκιμασιών ήταν 12, ενώ ο μικρότερος αριθμός σωστών απαντήσεων που δόθηκαν ήταν 6. Αρκετά ήταν τα παιδιά που έφτασαν στη μέγιστη επίδοση, ενώ ο μέσος όρος σωστών απαντήσεων ήταν 9.90 (τ.α.:1,86).

Πίνακας 3 Επιδόσεις στις δοκιμασίες εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή (Ἑργο 1)

	Δοκιμασίες	**μ.ο.**	**Τυπική απόκλιση**	**Min**	**Max**
Έργο 1 (Εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή)	NP	4.84	1.11	2	6
	PN	5.06	1.03	3	6
	Μικροί αριθμοί (<500)	4.99	1.14	2	6
	Μεγάλοι αριθμοί (>500)	4.91	1.08	2	6
	Σύνολο	9.90	1.86	6	12

3.Α.2. Επιδόσεις ως προς την ηλικία

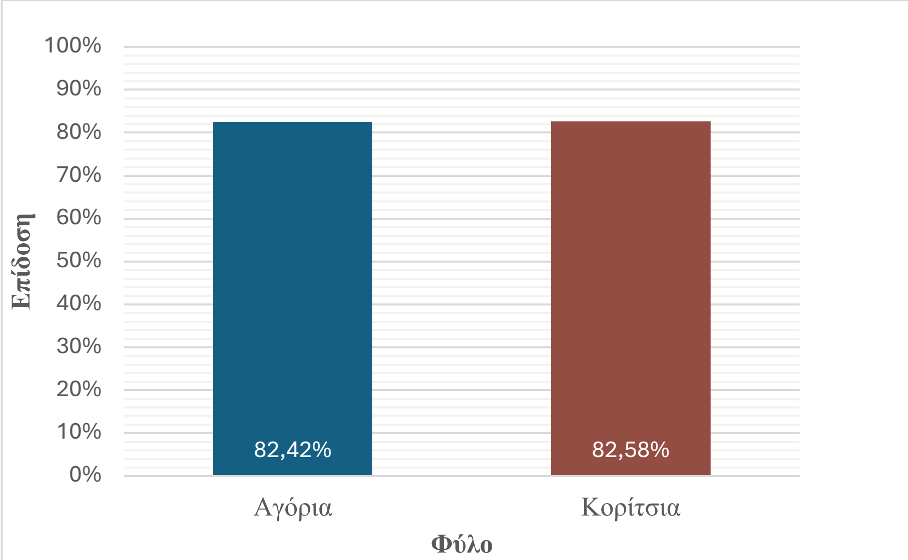
Προκειμένου να εξεταστεί αν η συνολική επίδοση των παιδιών στο Έργο 1 διαφοροποιήθηκε ως προς την ηλικιακή ομάδα, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε πως υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στο σύνολο των σωστών απαντήσεων των παιδιών ως προς την τάξη ($t(77)$=-5,159, p<.001). Πιο συγκεκριμένα, τα παιδιά της Ε' τάξης εμφάνισαν στατιστικά σημαντικά καλύτερες επιδόσεις στο σύνολο των δοκιμασιών του Έργου 1 (90.42%) σε σχέση με τα παιδιά της Γ' τάξης (74.83%). Το Σχήμα 1 που ακολουθεί παρουσιάζει αυτές τις διαφορές.



Σχήμα 1 Ποσοστό σωστών απαντήσεων στο σύνολο των δοκιμασιών του Έργου 1 ανά ηλικιακή ομάδα

3.Α.3. Επιδόσεις ως προς το φύλο

Αντίστοιχα, πραγματοποιήθηκε t-τεστ για ανεξάρτητα δείγματα, προκειμένου να εξεταστεί αν υπάρχει διαφοροποίηση των επιδόσεων σε σχέση με το φύλο των μαθητών. Από την ανάλυση προέκυψε ότι δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των επιδόσεων των αγοριών και των κοριτσιών ($t(77)$=-,042, p=.483). Με άλλα λόγια, αγόρια και κορίτσια εμφάνισαν παρόμοιες επιδόσεις στο σύνολο των δοκιμασιών του Έργου 1 (82,42% και 82,58%, αντίστοιχα) Το Σχήμα 2 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



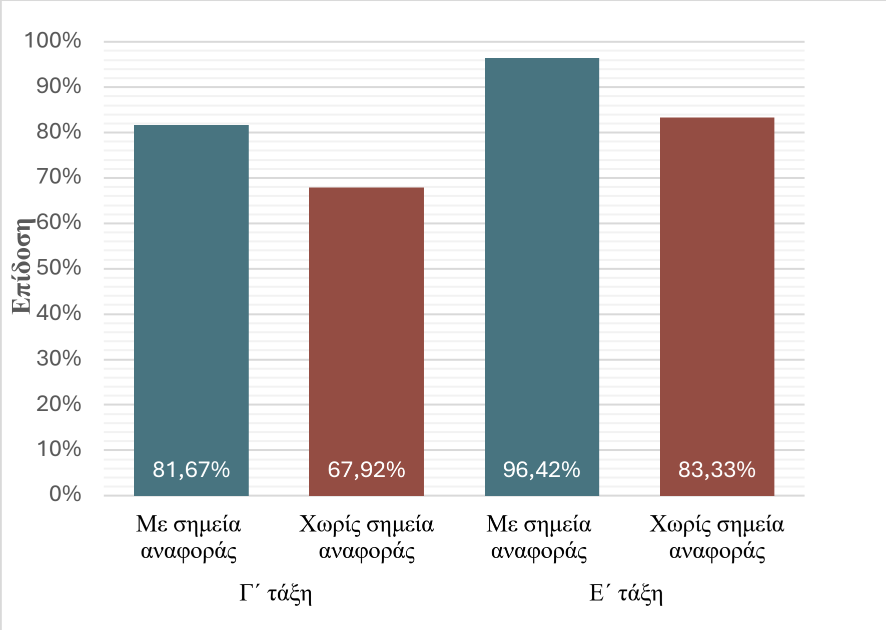
Σχήμα 2 Ποσοστό σωστών απαντήσεων στο σύνολο των δοκιμασιών του Έργου 1 ανά φύλο

3.Α.4. Επιδόσεις ως προς την ύπαρξη σημείων αναφοράς

Προκειμένου να εξεταστεί αν η παρουσία ή η απουσία των σημείων αναφοράς[2] πάνω στην αριθμογραμμή επηρεάζει τις επιδόσεις των συμμετεχόντων, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε ότι οι επιδόσεις του συνόλου των παιδιών ήταν στατιστικά σημαντικά καλύτερες όταν υπήρχαν τα σημεία αναφοράς (t(77)=4,484, p<.001) παρά όταν δεν υπήρχαν.

Όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε για κάθε ηλικιακή ομάδα ξεχωριστά, τα αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν. Συγκεκριμένα, όταν οι συμμετέχοντες είχαν αριθμογραμμές με σημεία αναφοράς, οι επιδόσεις τους ήταν στατιστικά σημαντικά καλύτερες σε σχέση με αυτούς που δεν είχαν σημεία αναφοράς. Αυτό ίσχυε τόσο για τα παιδιά της Γ΄ τάξης (t(38)=3,099, p <.01) (81,67% και 67,92%, για όσους είδαν αριθμογραμμές με και χωρίς σημεία αναφοράς, αντίστοιχα) όσο και για τα παιδιά της Ε΄ τάξης (t(37)=4,639, p<.001) (96,42% και 83,33%, για όσους είδαν αριθμογραμμές με και χωρίς σημεία αναφοράς, αντίστοιχα). Το Σχήμα 3 παρουσιάζει τις διαφορές αυτές.

[2] Οι συμμετέχοντες από κάθε ηλικιακή ομάδα χωρίστηκαν τυχαία σε δύο ομάδες.
Ομάδα Α: Υπήρχαν σημεία αναφοράς στις αριθμογραμμές.
Ομάδα Β: Δεν υπήρχαν σημεία αναφοράς στις αριθμογραμμές.

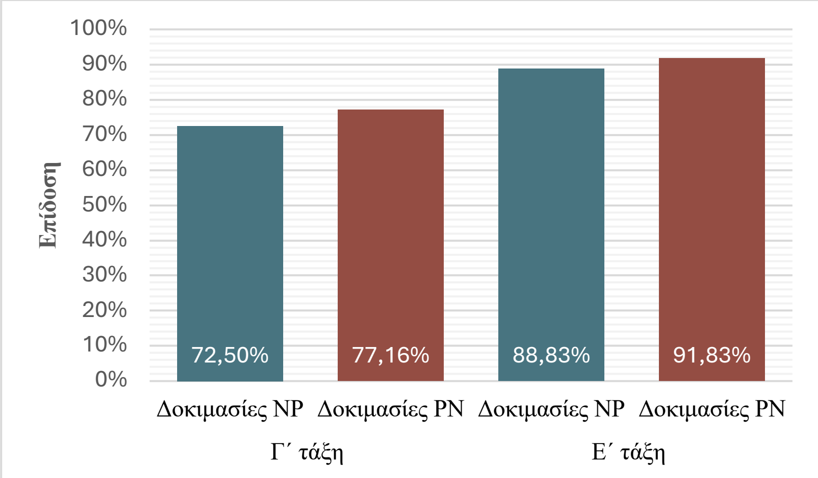


Σχήμα 3 Ποσοστό σωστών απαντήσεων στο σύνολο των δοκιμασιών του Έργου 1 ανά ηλικιακή ομάδα και παρουσία σημείων αναφοράς

3.Α.5. Επιδόσεις ως προς το είδος δοκιμασιών εκτίμησης (NP-PN)

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες που αφορούσαν την εκτίμηση της θέσης αριθμού σε αριθμογραμμή (δοκιμασίες NP) με αυτά για την εκτίμηση του αριθμού σε μια συγκεκριμένη θέση σε αριθμογραμμή (δοκιμασίες PN), χρησιμοποιήθηκε t–test συσχετισμένων δειγμάτων. Από την ανάλυση αυτή διαπιστώθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις επιδόσεις του συνόλου των παιδιών στις δοκιμασίες NP και τις δοκιμασίες PN ($t(78)$=-1,886, p<.05). Πιο συγκεκριμένα, οι συμμετέχοντες εμφάνισαν στατιστικά σημαντικά καλύτερες επιδόσεις στις δοκιμασίες PN (84,33%) σε σχέση με τις δοκιμασίες NP (80,66%).

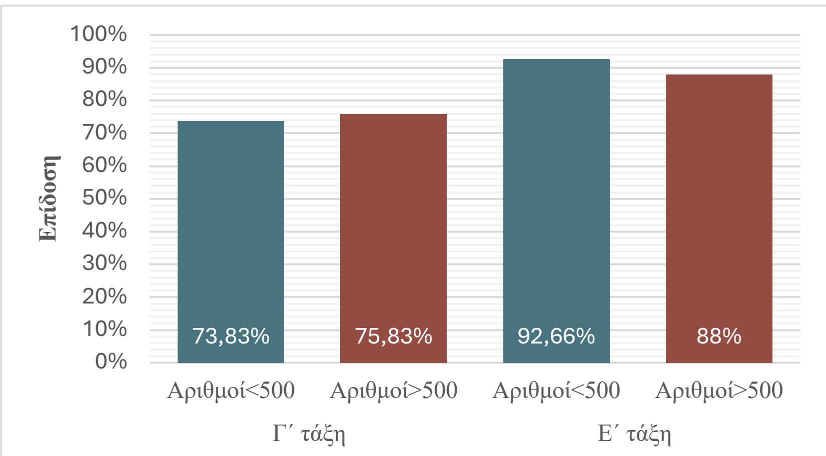
Όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα, οι διαφορές αυτές δεν εντοπίστηκαν. Πιο συγκεκριμένα, τόσο τα παιδιά της Γ΄ τάξης όσο και τα παιδιά της Ε΄ τάξης εμφάνισαν παρόμοιες επιδόσεις στις δοκιμασίες NP και τις δοκιμασίες PN ($t(39)$=-1,427, p=.081 και $t(38)$=-1,226, p=.114, αντίστοιχα για τα παιδιά Γ΄ και Ε΄ τάξης). Στο Σχήμα 4 παρουσιάζονται τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων στις δοκιμασίες NP και PN ανά ηλικιακή ομάδα.



Σχήμα 4 Ποσοστό σωστών απαντήσεων στο σύνολο των δοκιμασιών του Έργου 1 ανά ηλικιακή ομάδα και είδος δοκιμασιών εκτίμησης

3.Α.6. Επιδόσεις ως προς το μέγεθος των αριθμών

Στη συνέχεια, εξετάστηκε αν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις εκτιμήσεις των συμμετεχόντων ως προς το μέγεθος των αριθμών που χρησιμοποιήθηκαν (αριθμοί μικρότεροι και μεγαλύτεροι του 500). Στο σύνολο των συμμετεχόντων το μέγεθος των αριθμών δεν επηρέασε στατιστικά σημαντικά τις επιδόσεις ($t(78)$=,560, p=.289), οι οποίες ήταν παρόμοιες τόσο για τις δοκιμασίες με μικρούς αριθμούς όσο και για τις δοκιμασίες με μεγάλους αριθμούς (83,17% και 81,83%, αντίστοιχα). Τα παιδιά της Γ΄ τάξης δεν επηρεάστηκαν στατιστικά σημαντικά από το μέγεθος των αριθμών ($t(39)$ = -0,615, p =.271). Ωστόσο, για τα παιδιά της Ε΄ τάξης ($t(38)$ = 1,603, p =.059), οριακά δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές, δείχνοντας ότι οι δοκιμασίες με μικρούς ή μεγάλους αριθμούς ήταν παρόμοιας δυσκολίας. Το Σχήμα 5 δείχνει αυτές τις διαφορές.



Σχήμα 5 Ποσοστό σωστών απαντήσεων στο σύνολο των δοκιμασιών του Έργου 1 ανά ηλικιακή ομάδα και μέγεθος αριθμών

3.Α.7. Ποσοστό σωστών απαντήσεων στο Έργο 1

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων του Έργου 1 ανά τάξη δείχνει τις επιδόσεις για τους μαθητές της Γ΄ τάξης και της Ε΄ τάξης. Στην Γ΄ τάξη, το ποσοστό των σωστών απαντήσεων κυμαίνεται μεταξύ 57,5% και 90%. Η υψηλότερη επίδοση παρατηρείται στη δοκιμασία 10 (δοκιμασία PN για τον αριθμό 480), με 90% των μαθητών να απαντούν σωστά, καθώς για τη συγκεκριμένη δοκιμασία επιλέχθηκε αριθμός πολύ κοντά στο 500, μέσον του συγκεκριμένου τμήματος της αριθμογραμμής, και απαντήθηκε σωστά από την πλειονότητα των μαθητών της Γ΄ τάξης. Αντίθετα, η χαμηλότερη επίδοση παρατηρείται στη δοκιμασία 2 (δοκιμασία NP για τον αριθμό 140), όπου μόνο το 57,5% των μαθητών απάντησε σωστά, υποδεικνύοντας μια δυσκολία για τους μαθητές της Γ΄ τάξης. Συνολικά, οι μαθητές της Γ΄ τάξης επέδειξαν μέτριο προς υψηλό επίπεδο κατανόησης, με μέσο ποσοστό ορθών απαντήσεων 74,83%.

Στην Ε΄ τάξη, τα αποτελέσματα είναι αισθητά υψηλότερα, με το ποσοστό των σωστών απαντήσεων να κυμαίνεται από 82,05% έως 97,44% και τη μέση τιμή να φτάνει στο 90,38%. Οι υψηλότερες επιδόσεις παρατηρούνται σε τρεις δοκιμασίες, στη δοκιμασία 2 (δοκιμασία NP για τον αριθμό 140), στη δοκιμασία 10 (δοκιμασία PN για τον αριθμό 480) και στη δοκιμασία 12 (δοκιμασία PN για τον αριθμό 170), με ποσοστό σωστών απαντήσεων άνω του 97%. Ακόμη και η χαμηλότερη επίδοση, κοντά στο 82% για τις δοκιμασίες 1 (δοκιμασία NP για τον αριθμό 270) και 6 (δοκιμασία NP για τον αριθμό 830), υποδηλώνει σχετικά υψηλό επίπεδο επάρκειας. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν μια σαφή πορεία ακαδημαϊκής ανάπτυξης από την Γ΄ έως την Ε΄ τάξη, υπογραμμίζοντας τη θετική επίδραση της εκπαίδευσης και της ηλικίας των μαθητών καθώς προχωρούν στις τάξεις. Στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται αναλυτικά τα ποσοστά σωστών απαντήσεων στο Έργο 1.

Πίνακας 4 Ποσοστό σωστών απαντήσεων στο Έργο 1 ως προς την ηλικιακή ομάδα

	Δοκιμασίες	**Αριθμός**	**Γ' τάξη**	**Ε' τάξη**
NP	Δοκιμασία 1	270	72,5%	82,05%
	Δοκιμασία 2	140	57,5%	97,44%
	Δοκιμασία 3	350	75%	94,87%
	Δοκιμασία 4	520	85%	92,31%
	Δοκιμασία 5	710	70%	84,62%
	Δοκιμασία 6	830	75%	82,05%
PN	Δοκιμασία 7	730	67,5%	92,31%
	Δοκιμασία 8	860	80%	87,18%
	Δοκιμασία 9	650	77,5%	89,74%
	Δοκιμασία 10	480	90%	97,44%
	Δοκιμασία 11	290	75%	87,18%
	Δοκιμασία 12	170	72,5%	97,44%

Μέρος Β΄

3.Β.1. Επίδοση στις δοκιμασίες χωρικών ικανοτήτων (Έργο 2)

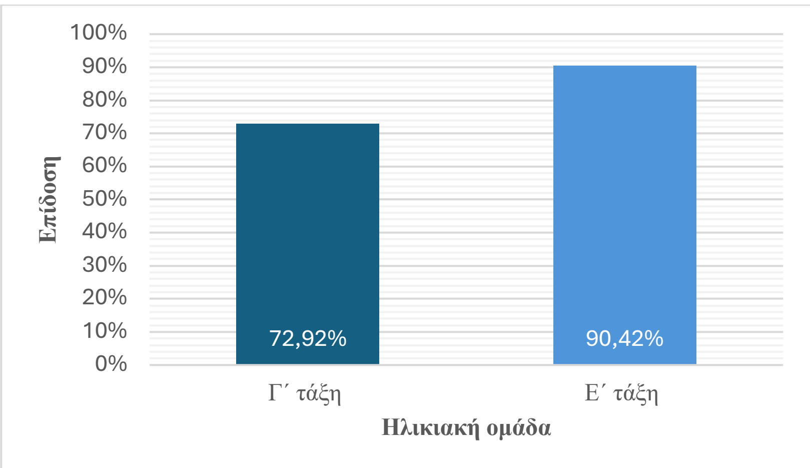
Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι επιδόσεις των παιδιών στο Έργο 2, που αφορούσε τις δοκιμασίες χωρικών ικανοτήτων. Στον παρακάτω Πίνακα 5 παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα για τις επιδόσεις των συμμετεχόντων στο Έργο αυτό. Οι επιδόσεις των συμμετεχόντων στο Έργο 2 μπορούν να χαρακτηριστούν υψηλές, με συνολικό ποσοστό επιτυχίας 81,50%.

Πίνακας 5 Επιδόσεις στις δοκιμασίες χωρικών ικανοτήτων (Έργο 2)

	Δοκιμασίες	μ.ο.	Τυπική απόκλιση	Min	Max
Έργο 2 (χωρικές ικανότητες)	Δίπλωση Χαρτιού	5.01	1.235	2	6
	Αναγνώριση Σχήματος	4.77	1.097	1	6
	Σύνολο	9.78	1.83	5	12

3.Β.2. Επιδόσεις ως προς την ηλικιακή ομάδα

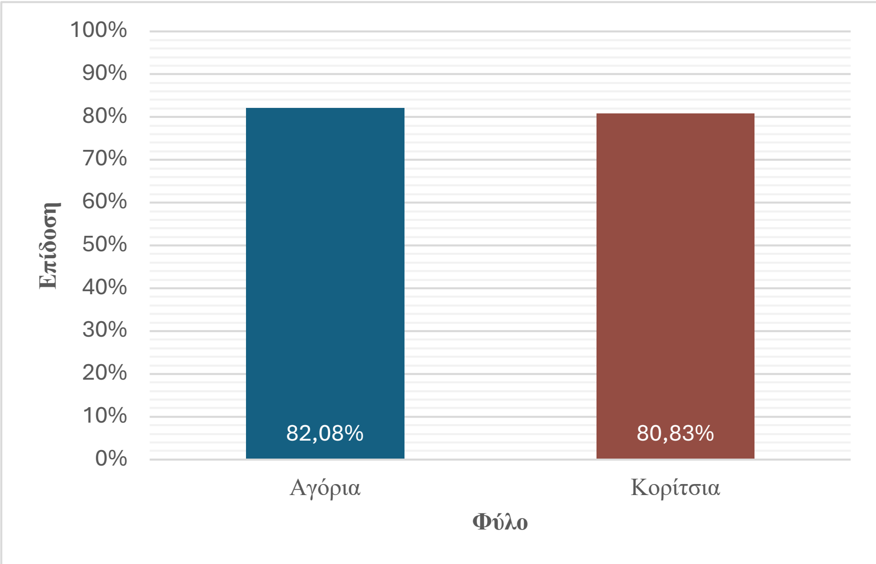
Προκειμένου να εξεταστεί αν η επίδοση των παιδιών στο Έργο 2 διαφοροποιήθηκε ως προς την ηλικιακή ομάδα, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε πως υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στο σύνολο των ορθών απαντήσεων των συμμετεχόντων ως προς την τάξη ($t(77)=-6{,}186$, $p<.001$). Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές της Ε΄ τάξης εμφάνισαν καλύτερες επιδόσεις (90,42%) στο σύνολο των δοκιμασιών του Έργου 2 σε σχέση με αυτούς της Γ΄ τάξης (72,92%). Το Σχήμα 6 που ακολουθεί παρουσιάζει αυτές τις διαφορές των μέσων επιδόσεων των παιδιών ανά τάξη.



Σχήμα 6 Ποσοστό σωστών απαντήσεων στο σύνολο των δοκιμασιών του Έργου 2 ανά ηλικιακή ομάδα

3.Β.3. Επιδόσεις ως προς το φύλο

Στη συνέχεια, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα για να εξεταστούν πιθανές διαφοροποιήσεις στις επιδόσεις ως προς το φύλο. Από την ανάλυση προέκυψε ότι δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις μεταξύ των αγοριών και των κοριτσιών ($t(77)$=,359, p=.360). Δηλαδή, παρόμοιες ήταν οι επιδόσεις των αγοριών και των κοριτσιών στις δοκιμασίες του έργου χωρικών ικανοτήτων (82,08% και 80,83%, αντίστοιχα). Το Σχήμα 7 παρουσιάζει τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων στο σύνολο των δοκιμασιών του Έργου 2 ως προς το φύλο.

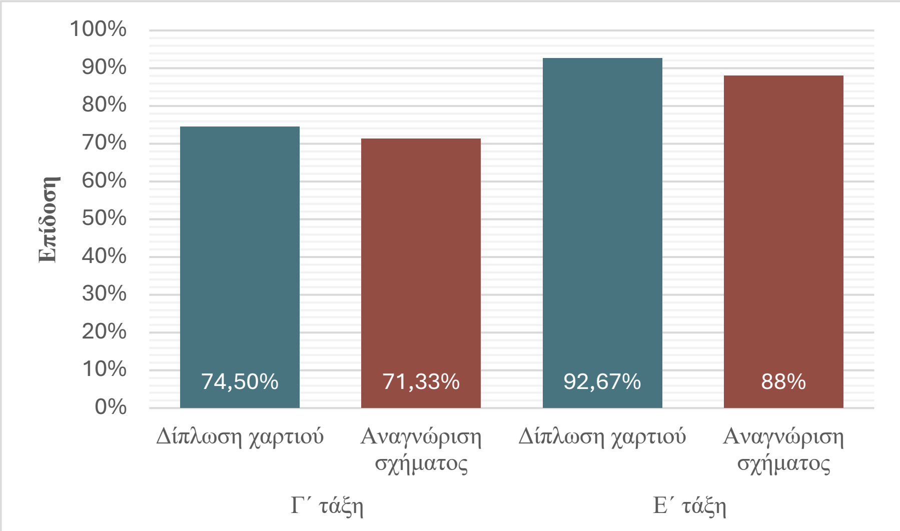


Σχήμα 7 Ποσοστό σωστών απαντήσεων στο σύνολο των δοκιμασιών του Έργου 2 ως προς το φύλο

3.Β.4. Επιδόσεις ως προς το είδος δοκιμασιών χωρικών ικανοτήτων

Στη συνέχεια, εξετάστηκε κατά πόσο υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των επιδόσεων των συμμετεχόντων στα δύο είδη δοκιμασιών του Έργου 2 (δοκιμασίες δίπλωσης χαρτιού και δοκιμασίες αναγνώρισης σχήματος). Από τον έλεγχο t-test συσχετισμένων δειγμάτων για το σύνολο του δείγματος διαπιστώθηκε ότι οριακά δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ($t(78)$=1,472, p=.072), με τα παιδιά να εμφανίζουν παρόμοια ποσοστά επιτυχίας στα δύο είδη δοκιμασιών (83,5% και 79,5%, για τις δοκιμασίες δίπλωσης χαρτιού και τις δοκιμασίες αναγνώρισης σχήματος, αντίστοιχα).

Όταν η ίδια ανάλυση επαναλήφθηκε για κάθε ηλικιακή ομάδα ξεχωριστά, βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις μόνο των παιδιών της Ε΄ τάξης ($t(38)$=1,812, $p<.05$). Συγκεκριμένα, για τα παιδιά της Ε΄ τάξης οι δοκιμασίες δίπλωσης χαρτιού ήταν στατιστικά σημαντικά ευκολότερες (ποσοστό επιτυχίας: 92,67%) σε σχέση με τις δοκιμασίες αναγνώρισης σχήματος (ποσοστό επιτυχίας: 88%). Αντίθετα για τα παιδιά της Γ΄ τάξης δεν εντοπίστηκαν τέτοιες διαφορές ($t(39)$=,697, p=.245). Το Σχήμα 8 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά ως προς το είδος έργου των χωρικών ικανοτήτων.



Σχήμα 8 Ποσοστό σωστών απαντήσεων στο σύνολο των δοκιμασιών του Έργου 2 ανά ηλικιακή ομάδα και είδος δοκιμασιών χωρικών ικανοτήτων

3.Β.5. Ποσοστό σωστών απαντήσεων στο Έργο 2 ως προς την ηλικιακή ομάδα

Βλέποντας τα αποτελέσματα για κάθε δοκιμασία στο έργο των χωρικών ικανοτήτων διαπιστώνεται ότι οι επιδόσεις των μαθητών της Ε΄ τάξης είναι αισθητά υψηλότερες σε όλες σχεδόν τις δοκιμασίες, γεγονός που υποδηλώνει σημαντική βελτίωση των ικανοτήτων τους καθώς προχωρούν στις τάξεις. Οι μέσες τιμές των ορθών απαντήσεων έφτασαν από 72,92% για την Γ΄ τάξη στο 90,38% για την Ε΄ τάξη. Για παράδειγμα, στις δοκιμασίες 1 και 4, οι μαθητές της Ε΄ τάξης πέτυχαν άριστη βαθμολογία (ποσοστό επιτυχίας: 100%). Ομοίως, στη δοκιμασία 5, η επίδοση των μαθητών της Ε΄ τάξης φτάνει το 94,87% ενώ οι μαθητές της Γ΄ τάξης εμφανίζουν ποσοστό επιτυχίας 72,5%. Η διαφοροποίηση των ποσοστών, από την Γ΄ στην Ε΄ τάξη, είναι ιδιαίτερα εντυπωσιακή στις δοκιμασίες 3 και 6, όπου η διαφορά είναι από 57,50% σε 76,92% και 65% σε 92,31%, αντίστοιχα. Ωστόσο, στη δοκιμασία 11, παρουσιάζεται λιγότερο έντονη βελτίωση (από 42,5% σε 64,1%). Στον Πίνακα 6 παρουσιάζονται τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών της Ε΄ τάξης.

Πίνακας 6 Ποσοστό σωστών απαντήσεων στο Έργο 2 ως προς την ηλικιακή ομάδα

	Δοκιμασίες	**Γ' τάξη**	**Ε' τάξη**
Δίπλωση Χαρτιού	Δοκιμασία 1	80%	100%
	Δοκιμασία 2	92,5%	92,31%
	Δοκιμασία 3	57,5%	76,92%
	Δοκιμασία 4	80%	100%
	Δοκιμασία 5	72,5%	94,87%
	Δοκιμασία 6	65%	92,31%
Αναγνώριση Σχήματος	Δοκιμασία 7	77,5%	97,44%
	Δοκιμασία 8	82,5%	94,87%
	Δοκιμασία 9	72,5%	94,87%
	Δοκιμασία 10	67,5%	87,18%
	Δοκιμασία 11	42,5%	64,1%
	Δοκιμασία 12	85%	89,74%

Μέρος Γ΄

3.Γ.1. Σχέση ανάμεσα στην ικανότητα πραγματοποίησης εκτίμησης (Έργο 1) και τις χωρικές ικανότητες (Έργο 2)

Τέλος, προκειμένου να εξεταστεί αν υπάρχει σχέση ανάμεσα στην επιτυχία των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες εκτίμησης σε αριθμογραμμή με την επιτυχία τους στις δοκιμασίες χωρικών ικανοτήτων, πραγματοποιήθηκαν συσχετίσεις (Pearson’s Correlations), ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα. Πιο αναλυτικά, για τα παιδιά της Γ΄ τάξης σχεδόν όλες οι συσχετίσεις βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές. Η επίδοση στο Έργο 1 παρουσιάζει ισχυρές θετικές συσχετίσεις με τις επιδόσεις στο Έργο 2 (Pearson’s r=.654, p<.01) αλλά και με τη συνολική επίδοση (Pearson’s r =.912, p<.01). Η θετική συσχέτιση μεταξύ των συνολικών επιδόσεων των δύο έργων υποδεικνύει ότι όσο αυξάνονται οι επιδόσεις των παιδιών στο Έργο 1 τόσο αυξάνονται και οι επιδόσεις στο Έργο 2, υποδηλώνοντας θετική συνάφεια μεταξύ αυτών των έργων. Με άλλα λόγια, τα παιδιά που είχαν καλές επιδόσεις στο έργο της εκτίμησης σε αριθμογραμμή έτειναν να έχουν καλές επιδόσεις και στο έργο των χωρικών ικανοτήτων και αντίστροφα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι επιδόσεις στο Έργο 2 εμφανίζουν θετικές συσχετίσεις με τις επιδόσεις στις δοκιμασίες NP (Pearson’s r=.471, p<.01) και τις δοκιμασίες PN (Pearson’s r=.637, p<.01), επιβεβαιώνοντας μια σχετικά ισχυρή συσχέτιση μεταξύ της επίδοσης στο Έργο 2 και αυτών των μεταβλητών. Επιπλέον, οι επιδόσεις στις δοκιμασίες NP και τις δοκιμασίες PN έχουν θετική συσχέτιση μεταξύ τους (Pearson’s r=.403, p<.01). Τέλος, έχει ενδιαφέρον να επισημανθεί ότι δεν βρέθηκε στατιστικά σημαντική συσχέτιση ανάμεσα στις επιδόσεις των παιδιών στα δύο είδη δοκιμασιών του Έργου 2, δηλαδή ανάμεσα στις δοκιμασίες δίπλωσης χαρτιού και τις δοκιμασίες αναγνώρισης σχήματος (Pearson's r=-.004, p=.983), εύρημα που δείχνει ότι όσα παιδιά απαντούσαν λανθασμένα στο ένα είδος δοκιμασιών μπορεί εξίσου να απαντούσαν σωστά ή λανθασμένα στο άλλο είδος δοκιμασιών. Τα παραπάνω αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 7.

Πίνακας 7 Συσχετίσεις ανάμεσα στις επιδόσεις των συμμετεχόντων της Γ΄ τάξης

	Έργο 1 (εκτίμηση σε αριθμογραμμή)	**Έργο 2 (χωρικές ικανότητες)**	**Γενική επίδοση**	**NP**	**PN**	**Δίπλωση Χαρτιού**	**Αναγνώριση Σχήματος**
Έργο 1 (εκτίμηση σε αριθμογραμμή)		.654**	.912**	.862**	.811**	.555**	.355**
Έργο 2 (χωρικές ικανότητες)			.907**	.471**	.637**	.759**	.648**
Γενική Επίδοση				.736**	.798**	.721**	.549**
NP					.403**	.381*	.278
PN						.563**	.320*
Δίπλωση Χαρτιού							-.004

*Στατιστική σημαντικότητα: *p<.05, **p<.01*

Τα αποτελέσματα για την Ε΄ τάξη διαφοροποιούνται αρκετά από τα αντίστοιχα των παιδιών της Γ΄ τάξης. Πιο συγκεκριμένα, η επίδοση στο Έργο 1 δεν παρουσιάζει συσχέτιση με το Έργο 2 (Pearson's r=.146, p=.375), τη Δίπλωση Χαρτιού (Pearson's r=.010, p=.951) και με την Αναγνώριση Σχήματος (Pearson's r=.214, p=.191), γεγονός που υποδεικνύει ότι οι επιδόσεις στη αριθμογραμμή δεν συσχετίζονται στατιστικά σημαντικά με τις χωρικές ικανότητες. Ωστόσο, είναι πιθανόν αυτό να συμβαίνει επειδή οι συνολικές επιδόσεις των παιδιών της Ε΄ τάξης ήταν ιδιαίτερα υψηλές και στα δύο έργα, με ποσοστό επιτυχίας ακριβώς 90.38% και στα δύο έργα. Ομοίως, η συνολική επίδοση στο Έργο 2 δεν παρουσιάζει στατιστικά σημαντική συσχέτιση με τις επιδόσεις στις δοκιμασίες NP (Pearson's r=.245, p=.133) και τις δοκιμασίες PN (Pearson's r=.002, p=.989), υποδηλώνοντας επίσης ότι οι χωρικές ικανότητες δεν συσχετίζονται με τις επιμέρους επιδόσεις των συμμετεχόντων αυτής της ηλικιακής ομάδας στις δοκιμασίες εκτίμησης σε αριθμογραμμή.

Ωστόσο, υψηλές θετικές συσχετίσεις βρέθηκαν ανάμεσα στη συνολική επίδοση και την επίδοση στο Έργο 1 (Pearson's *r*=.801, *p*<.01) και την επίδοση στο Έργο 2 (Pearson's *r*=.710, *p*<.01). Επίσης, υψηλές θετικές συσχετίσεις βρέθηκαν ανάμεσα στη συνολική επίδοση στο Έργο 1 και στην επίδοση στις δοκιμασίες NP (Pearson's *r*=.807, *p*<.01) και PN (Pearson's *r*=.833, *p*<.01), καθώς και στη συνολική επίδοση στο Έργο 2 και την επίδοση στις δοκιμασίες δίπλωσης χαρτιού (Pearson's *r*=.765, *p*<.01) και αναγνώρισης σχήματος (Pearson's *r*=.741, *p*<.01).

Οι μεταβλητές NP και PN έχουν θετική συσχέτιση μεταξύ τους (Pearson's *r*=.345, *p*<.05). Επιπλέον, οι δοκιμασίες Δίπλωσης Χαρτιού δεν παρουσιάζουν συσχέτιση με τις δοκιμασίες NP (Pearson's *r*=.211, *p*=.197) και PN (Pearson's *r*=-.182, *p*=.268) καθώς και με τις δοκιμασίες Αναγνώρισης Σχήματος (Pearson's *r*=.135, *p*=.413). Αντίστοιχα, οι δοκιμασίες Αναγνώρισης Σχήματος δεν παρουσιάζουν συσχέτιση με τις δοκιμασίες NP (Pearson's *r*=.157, *p*=.340) και PN (Pearson's *r*=.193, *p*=.240). Συνολικά, δεν παρατηρείται συνάφεια μεταξύ των επιδόσεων στις επιμέρους δοκιμασίες χωρικών ικανοτήτων και τις επιμέρους ικανότητες εκτίμησης στην αριθμογραμμή, πιθανότατα επειδή οι επιδόσεις των μαθητών της Ε΄ τάξης ήταν ιδιαίτερα υψηλές και στα δύο έργα. Ο Πίνακας 8 παρουσιάζει τα αποτελέσματα για τις συσχετίσεις στις επιδόσεις των παιδιών της Ε΄ τάξης.

Πίνακας 8 Συσχετίσεις ανάμεσα στις επιδόσεις των συμμετεχόντων της Ε΄ τάξης

	Έργο 1 (εκτίμηση σε αριθμογραμμή)	**Έργο 2 (χωρικές ικανότητες)**	**Γενική επίδοση**	**NP**	**PN**	**Δίπλωση Χαρτιού**	**Αναγνώριση Σχήματος**
Έργο 1 (εκτίμηση σε αριθμογραμμή)		.146	.801**	.807**	.833**	.010	.214
Έργο 2 (χωρικές ικανότητες)			.710**	.245	.002	.765**	.741**
Γενική Επίδοση				.723**	.594**	.471**	.601**
NP					.345*	.211	.157
PN						-.182	.193
Δίπλωση Χαρτιού							.135

*Στατιστική σημαντικότητα: *p<.05, **p<.01*

Συνολικά, τα αποτελέσματα των συσχετίσεων, όπως αποτυπώνονται στον Πίνακα 9, δείχνουν ότι υπάρχει ισχυρή θετική συσχέτιση μεταξύ της επίδοσης στις δοκιμασίες του Έργου 1 και

της γενικής επίδοσης των συμμετεχόντων τόσο για την Γ΄ (Pearson's r=.912, p<.01) όσο και για την Ε΄ (Pearson's r=.801, p<.01) τάξη. Παρόμοια, ισχυρή θετική συσχέτιση βρέθηκε μεταξύ της γενικής επίδοσης και της επίδοσης στο έργο των χωρικών ικανοτήτων, τόσο για την Γ΄ (Pearson's r=.907, p<.01) όσο και για την Ε΄ τάξη (Pearson's r=.710, p<.01).
Ωστόσο, θετική συσχέτιση βρέθηκε ανάμεσα στην επίδοση στο Έργο 1 και την επίδοση στο Έργο 2 μόνο για την Γ΄ τάξη (Pearson's r=. 654, p<.01) και όχι για την Ε΄ τάξη (Pearson's r=.146, p=.375).

Πίνακας 9 Συνοπτικός πίνακας των συσχετίσεων ανά ηλικιακή ομάδα

	Ηλικιακή Ομάδα	**Γενική επίδοση**	**Έργο 1**	**Έργο 2**
Έργο 1 (Εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή)	Γ΄ τάξη	.912**	-	.654**
	Ε΄ τάξη	.801**	-	.146
	Σύνολο	.909**	-	.646**
Έργο 2 (Χωρικές ικανότητες)	Γ΄ τάξη	.907**	.654**	-
	Ε΄ τάξη	.710**	.146	-
	Σύνολο	.906**	.646**	-

*Στατιστική σημαντικότητα: *p<.05, **p<.01*

Κεφάλαιο 4ο : Συζήτηση - Συμπεράσματα

Η παρούσα έρευνα προσπάθησε να εξετάσει την ύπαρξη σχέσης ανάμεσα στην ικανότητα των παιδιών Γ΄ και Ε΄ τάξης για πραγματοποίηση εκτιμήσεων με φυσικούς αριθμούς πάνω σε οριοθετημένη αριθμογραμμή και τις χωρικές ικανότητές τους. Με στόχο να δοθούν απαντήσεις στα αρχικά ερευνητικά ερωτήματα, τρία είναι τα κύρια ευρήματα.

Πρώτον, η ικανότητα των παιδιών για πραγματοποίηση εκτιμήσεων πάνω σε αριθμογραμμή βρέθηκε πολύ καλή, με το ποσοστό των επιτυχών εκτιμήσεων να ξεπερνά το 80% (82,62%). Υπήρχαν δε στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών της Γ΄ και της Ε΄ τάξης, με τους μεγαλύτερους μαθητές να έχουν καλύτερες επιδόσεις (90,42% έναντι 74,83%). Το εύρημα αυτό συμφωνεί με έρευνες που δείχνουν ότι όσο μεγαλώνουν τα παιδιά τόσο καλύτερες είναι οι επιδόσεις τους στις εκτιμήσεις με φυσικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή (Laski & Siegler, 2007· Siegler & Booth, 2004· Siegler & Opfer, 2003· Barth & Paladino, 2011), καθώς έχει διαπιστωθεί ότι η χρήση στρατηγικών από τα παιδιά για την εκτίμηση σε αριθμογραμμή συνήθως βελτιώνεται με την ηλικία και την εκπαιδευτική εμπειρία (Siegler & Booth, 2004· Δεσλή & Τριανταφύλλου, 2019).

Η ύπαρξη σημείων αναφοράς στην αριθμογραμμή ευνόησε τις επιδόσεις των παιδιών και στις δύο ηλικιακές ομάδες. Οι μαθητές στους οποίους δόθηκαν αριθμογραμμές με επιπλέον ενδιάμεσα σημεία αναφοράς (στις θέσεις για τους αριθμούς 250, 500, 750) πραγματοποίησαν μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχών εκτιμήσεων (81,67% για τη Γ΄ τάξη και 96,42% για την Ε΄ τάξη) συγκριτικά με εκείνους που χρησιμοποίησαν αριθμογραμμές μόνο με το αρχικό και το τελικό άκρο (67,92% για τη Γ΄ τάξη και 83,33% για την Ε΄ τάξη). Αυτό επιβεβαιώνει ότι η χρήση πρόσθετων ενδιάμεσων σημείων αναφοράς, πέραν των δύο άκρων της αριθμογραμμής (0 και 1.000), λειτουργεί θετικά για την επιτυχία των εκτιμήσεων με φυσικούς αριθμούς σε αριθμογραμμή (Ebersbach, 2015). Η θετική επίδραση των επιπλέον σημείων αναφοράς ενδεχομένως εξηγείται από την άποψη των ερευνητών (Barth & Paladino, 2011· Slusser & Barth, 2017· Peeters, Verschaffel & Luwel, 2017) που υποστηρίζουν ότι η εκτίμηση πάνω στην αριθμογραμμή προϋποθέτει τη γνώση σχέσεων αναλογίας μεταξύ των αριθμών. Σε παρόμοια ευρήματα κατέληξαν και οι Δεσλή και Τριανταφύλλου (2022) στην έρευνά τους με ενήλικες οι οποίοι βασίστηκαν σε αναλογικές σχέσεις, με την παρουσία των σημείων αναφοράς να συμβάλλει θετικά στην ακρίβεια των εκτιμήσεων που πραγματοποιούσαν για τα κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς. Φαίνεται, δηλαδή, πως, όταν υπήρχε η δυνατότητα στήριξης σε κάποιο ενδιάμεσο σημείο πάνω στην αριθμογραμμή, αυτό μπορούσε να λειτουργήσει ως βασικό σημείο αναφοράς. Αν και δεν μελετήθηκαν οι στρατηγικές των συμμετεχόντων, τα σημεία αναφοράς συνέβαλαν θετικά στην επιτυχία των εκτιμήσεων που πραγματοποίησαν στην αριθμογραμμή. Αυτό το εύρημα αξίζει να μελετηθεί περαιτέρω.

Ένας παράγοντας που επηρέασε την ικανότητα των παιδιών να πραγματοποιούν εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή ήταν το είδος των δοκιμασιών. Πιο συγκεκριμένα, οι επιδόσεις των παιδιών ήταν καλύτερες στις δοκιμασίες όπου μία συγκεκριμένη θέση σημειωνόταν με μια κάθετη γραμμή πάνω σε αριθμογραμμή και ζητούνταν από τους συμμετέχοντες να εκτιμήσουν την αριθμητική αξία αυτής της θέσης (δοκιμασίες Position to number – PN) και για τις δύο ηλικιακές ομάδες. Το εύρημα αυτό δεν επιβεβαιώνει τα ευρήματα των Nogues και Dorneles (2019), οι οποίοι βρήκαν παρόμοια ποσοστά επιτυχίας των παιδιών ανάμεσα σε δοκιμασίες NP και PN. Ενδεχομένως, οι ατομικές διαφορές των παιδιών της παρούσας έρευνας εξηγεί αυτή τη διαφοροποίηση στα αποτελέσματα, όπως αναφέρουν ο Ebersbach (2015), οι Ebersbach et al. (2008) και οι Laski και Siegler (2007).

Ωστόσο, ενδιαφέρον προκαλεί το γεγονός ότι το μέγεθος των αριθμών δεν διαφοροποίησε την επιτυχία στην πραγματοποίηση εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή. Πιο συγκεκριμένα, τόσο τα παιδιά της Γ΄ τάξης όσο και αυτά της Ε΄ τάξης εμφάνισαν παρόμοια επίδοση στις δοκιμασίες με αριθμούς μικρότερους του 500 και στις δοκιμασίες με αριθμούς μεγαλύτερους του 500. Το εύρημα αυτό ενδεχομένως συνδέεται με την άποψη των Ebersbach at al. (2008) και του Ebersbach (2015), που υποστήριξαν ότι οι επιδόσεις των ατόμων που πραγματοποιούν εκτιμήσεις πάνω σε αριθμογραμμή συνδέονται με την εξοικείωση που έχουν με τους αριθμούς που καλούνται να διαχειριστούν. Η άποψη αυτή ενισχύεται λαμβάνοντας υπόψη το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών της Γ΄ και της Ε΄ τάξης, καθώς σε αυτές τις τάξεις οι μαθητές αναπτύσσουν μεγάλη εξοικείωση με φυσικούς αριθμούς μεγαλύτερους του 500.

Δεύτερον, οι χωρικές ικανότητες των συμμετεχόντων ήταν ιδιαίτερα ανεπτυγμένες με το ποσοστό επιτυχίας τους να είναι 81,5%. Ιδιαίτερα τα παιδιά της Ε΄ τάξης είχαν την υψηλότερη επίδοση (90,42%) σε σύγκριση με εκείνη των παιδιών της Γ΄ τάξης (72,92%). Το γεγονός αυτό υποδηλώνει την αναπτυξιακή τροχιά των χωρικών ικανοτήτων, όπως υποστηρίζουν οι Newcombe και Frick (2010), οι Newcomb και Stieff (2012), οι Mix και Cheng (2012), οι Cheng και Mix (2013), οι Uttal et al. (2013) και οι Hawes και Ansari (2020), σύμφωνα με τους οποίους οι χωρικές ικανότητες δεν αποτελούν έμφυτες, παγιωμένες ικανότητες, αλλά μπορούν να αναπτυχθούν καθώς τα παιδιά μεγαλώνουν, μέσω της εκπαίδευσης και της διδασκαλίας που τους παρέχεται στο πλαίσιο της τυπικής και της άτυπης εκπαίδευσης. Οι χωρικές ικανότητες των παιδιών, μάλιστα, δεν διαφοροποιήθηκαν από το είδος των δοκιμασιών (δοκιμασίες δίπλωσης χαρτιού και δοκιμασίες αναγνώρισης σχήματος), εύρημα που δείχνει ότι όσα παιδιά είχαν καλή επίδοση στις δοκιμασίες δίπλωσης χαρτιού είχαν παρόμοια καλή επίδοση στις δοκιμασίες αναγνώρισης σχήματος, το οποίο συμφωνεί με τους Cheng και Mix (2013) οι οποίοι αναφέρουν ότι τα είδη των χωρικών ικανοτήτων αναπτύσσονται παράλληλα.

Τρίτον, ένα σημαντικό εύρημα για την παρούσα εργασία ήταν η παρουσία θετικής συσχέτισης ανάμεσα στην ικανότητα για πραγματοποίηση εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή και τις χωρικές ικανότητες, εύρημα που εντοπίστηκε μόνο για τα παιδιά της Γ΄ τάξης. Συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε πως όσοι συμμετέχοντες της Γ΄ τάξης παρουσίασαν υψηλά ποσοστά επιτυχίας στο σύνολο των δοκιμασιών εκτίμησης σε αριθμογραμμή έτειναν να παρουσιάζουν υψηλά ποσοστά και στις δοκιμασίες χωρικών ικανοτήτων. Το παραπάνω εύρημα συμφωνεί με αποτελέσματα άλλων ερευνών (Cornu et al., 2017· Gunderson et al., 2021· Möhring et al., 2018· Simms et al., 2016), στις οποίες βρέθηκε ισχυρή σχέση ανάμεσα στην ικανότητα για εκτιμήσεις πάνω στην αριθμογραμμή και τις χωρικές ικανότητες.

Αντίθετα, για τα παιδιά της Ε΄ τάξης δεν βρέθηκε συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας εκτίμησης σε αριθμογραμμή και των χωρικών ικανοτήτων τους. Αυτό σημαίνει ότι τα παιδιά που είχαν καλές επιδόσεις στις δοκιμασίες εκτίμησης έτειναν εξίσου να έχουν ή να μην έχουν καλές χωρικές ικανότητες. Αυτό το εύρημα, αν και διαφοροποιείται από προηγούμενες μελέτες (Cornu et al., 2017· Gunderson et al., 2021· Möhring et al., 2018· Simms et al., 2016), οι οποίες έδειξαν ότι οι χωρικές ικανότητες σχετίζονται ισχυρά με την εκτίμηση σε αριθμογραμμή σε όλες τις ηλικιακές ομάδες, συμφωνεί εν μέρει με τους Xie, et al. (2020), σύμφωνα με τους οποίους η σχέση μεταξύ χωρικής και μαθηματικής ικανότητας είναι αμφιλεγόμενη. Οι συγκεκριμένοι ερευνητές κατέληξαν ότι ο λογικός συλλογισμός είναι που σχετίζεται ισχυρά με τις χωρικές ικανότητες, ενώ αυτές δεν συνδέονται με τις επιδόσεις στα μαθηματικά. Αναφορικά με τα είδη χωρικών ικανοτήτων, οι Evans και Stanovich (2013) διαπίστωσαν ότι η συσχέτιση μεταξύ της αριθμητικής ικανότητας και της οπτικοχωρικής μνήμης εργασίας ήταν ισχυρότερη στα μικρά από αυτή στα μεγαλύτερα παιδιά, διαπίστωση που μπορεί να εξηγεί και το εύρημα στην παρούσα εργασία, καθώς οι ηλικιακές ομάδες συμμετεχόντων είχαν δύο έτη διαφορά. Μία άλλη ερμηνεία για αυτή τη διαφοροποίηση είναι ο διαφορετικός συλλογισμός των παιδιών της Γ΄ και της Ε΄ τάξης. Συγκεκριμένα, τα παιδιά της Γ΄ τάξης ενδέχεται να στηρίζονται σε αναλογικές σχέσεις στις δοκιμασίες εκτίμησης σε αριθμογραμμή οι οποίες αφορούν χωρικές έννοιες, ενώ τα παιδιά της Ε΄ τάξης ίσως έχουν και άλλους τρόπους στήριξης για να πραγματοποιούν εκτιμήσεις (π.χ., εξοικείωση με την αριθμογραμμή, εξοικείωση με αριθμούς). Τέλος, ενδεχομένως οι δοκιμασίες χωρικών ικανοτήτων που αξιοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία να ήταν πολύ εύκολες για τα παιδιά της Ε΄ τάξης, με αποτέλεσμα να έχουν πολύ υψηλές επιδόσεις, παρόμοια υψηλές με αυτές στις δοκιμασίες εκτίμησης σε αριθμογραμμή, αποτέλεσμα που δεν οδηγεί σε συσχέτιση. Ωστόσο, αυτό το ζήτημα αξίζει να μελετηθεί περαιτέρω.

Μελλοντικές έρευνες θα μπορούσαν να εξετάσουν την ύπαρξη συσχέτισης μεταξύ ενός άλλου είδους εκτίμησης, όπως η εκτίμηση πλήθους, με τις χωρικές ικανότητες. Επίσης, ενδιαφέρον θα παρουσίαζε μια έρευνα που θα αναζητούσε ποια επιμέρους είδη χωρικών ικανοτήτων (π.χ., νοητική περιστροφή, μετασχηματισμοί, οπτικοχωρική μνήμη εργασίας) συσχετίζονται με τα είδη των εκτιμήσεων, ώστε να διαμορφωθεί μία πιο ολοκληρωμένη εικόνα για τον τρόπο σκέψης των μαθητών αυτών των ηλικιακών ομάδων.

Περιορισμοί της μελέτης

Ένας από τους κύριους περιορισμούς αυτής της μελέτης είναι αφενός το μικρό μέγεθος του δείγματος και αφετέρου η σχετικά μικρή ποικιλομορφία του, καθώς η έρευνα διεξήχθη σε μία σχετικά μικρή, ομοιογενή ομάδα συμμετεχόντων. Συνεπώς, τα δύο αυτά στοιχεία δεν επιτρέπουν απαραίτητα τη γενίκευση των αποτελεσμάτων της παρούσας έρευνας. Μια έρευνα με μεγαλύτερο αριθμό συμμετεχόντων θα ευνοούσε την αύξηση της αξιοπιστίας της και θα επέτρεπε την εξαγωγή περισσότερο γενικευμένων στον πληθυσμό συμπερασμάτων. Παρά τους παραπάνω περιορισμούς, τα συμπεράσματα της μελέτης είναι χρήσιμα ως προς τον γενικό προβληματισμό και η συζήτηση αυτών των περιορισμών ενδέχεται να αποτελέσει σημείο εκκίνησης για μελλοντικά σχέδια έρευνας.

Συνοψίζοντας, τόσο από την υπάρχουσα βιβλιογραφία όσο και από την παρούσα έρευνα έγινε φανερή η σημαντικότητα της ικανότητας εκτίμησης σε αριθμογραμμή και της χωρικής ικανότητας των μαθητών. Η διαπίστωση μιας ισχυρής συσχέτισης μεταξύ των δύο αυτών ικανοτήτων στη μικρότερη ηλικιακή ομάδα παιδιών υπογραμμίζει την αναγκαιότητα περαιτέρω ερευνητικής διερεύνησης. Η κατανόηση της σχέσης ανάμεσα στις δύο αυτές ικανότητες, μπορεί να βελτιώσει τη διδασκαλία των μαθηματικών και να προωθήσει την ανάπτυξη εκπαιδευτικών προγραμμάτων που θα απευθύνονται στη βελτίωση των μαθηματικών ικανοτήτων των μαθητών και θα βοηθήσει στους εκπαιδευτικούς σχεδιασμούς και τη διδασκαλία.

Κεφάλαιο 5ο : Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

Γαγάτσης, Α., & Καλογήρου, Π. (2013). *Ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας και της αντίληψης γεωμετρικού σχήματος.* Ερευνητικό Πρόγραμμα Πανεπιστημίου Κύπρου. Κύπρος: Λευκωσία.

Δεσλή, Δ., (2021). *Οι εκτιμήσεις στη μαθηματική εκπαίδευση: Είδη και εφαρμογές τους*. Αθήνα: Gutenberg.

Δεσλή, Δ., & Μυρόβαλη, Β. (2018). Επίδοση και στρατηγικές των παιδιών σε καταστάσεις που αφορούν εκτίμηση μέτρησης εμβαδού. Στο Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, & Γ. Ψυχάρης, (Επιμ.), *Πρακτικά του 7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ.* (σελ 773-783). Αθήνα: ΕΚΠΑ και Εν.Ε.Δι.Μ.

Δεσλή, Δ., & Τριανταφύλλου, Ε. (2019). Εκτιμήσεις αριθμητικών ποσοτήτων από παιδιά Α' και Β' Δημοτικού. *International Journal of Educational Innovation, 1*, 28-36.

Δεσλή Δ., & Τριανταφύλλου Ε. (2022). Εκτιμήσεις πάνω σε αριθμογραμμή: Η περίπτωση των κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, 16*, 5–25.

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Τόπος.

Λεμονίδης, Χ. (2020). *Νοεροί υπολογισμοί και εκτιμήσεις. Από την έρευνα στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών.* Θεσσαλονίκη: Κυριακίδη.

Σοφοκλέους, Π., & Λεμονίδης, Χ. (2007). Νοεροί – κατ' εκτίμηση υπολογισμοί: Μαθηματικές διαδικασίες μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια των πρώτων τάξεων του Δημοτικού της Ελλάδας και της Κύπρου. *Πρακτικά 9ου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης* (σελ 277-290). Πάφος.

Τζεκάκη, Μ. (1996). *Μαθηματικές δραστηριότητες για την προσχολική ηλικία.* Αθήνα: Gutenberg.

Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά παιδιά μεγάλα μαθηματικά νοήματα: Προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία*. Αθήνα: Gutenberg.

Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων – Υ.ΠΑΙ.Θ. (2021). *Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο,* ΦΕΚ 5814/10-12-2021.

Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων – ΥΠ.ΕΠ.Θ. (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.),* ΦΕΚ 303Β/13-03-2003. http://www.pi-schools.gr/programs/depps/

Van de Walle, J.A., Lovin, L.H., Karp, K.S., & Bay-Williams, J.M. (2017). *Μαθηματικά από το Νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο: Διδασκαλία με επίκεντρο το παιδί και την ανάπτυξή του.* (Επιστημονική Επιμέλεια: Τριανταφυλλίδης, Τ.) Αθήνα: Gutenberg.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

Aliustaoğlu, F., Tuna, A., & Biber, A.Ç. (2018). The misconceptions of sixth grade secondary school students on fractions. *International Electronic Journal of Elementary Education, 10*(5), 591-599.

Barth, H.C., & Paladino, A.M. (2011). The development of numerical estimation: Evidence against a representational shift. *Developmental Science, 14*, 125–135.

Bishop, A. (1980). Spatial abilities and mathematics education –A review. *Educational Studies in Mathematics, 11,* 257-269.

Boonen, A.J.H., van Wesel, F., Jolles, J., & van der Schoot, M. (2014). The role of visual representation type, spatial ability, and reading comprehension in word problem solving: An item-level analysis in elementary school children. *International Journal of Educational Research*, *68*, 15-26. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2014.08.001

Booth, J.L., & Siegler, R.S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology, 42*(1), 189–201. https://doi.org/10.1037/0012-1649.41.6.189

Casey, B.M., Pezaris, E., Fineman, B., Pollock, A., Demers, L., & Dearing, E. (2015). A longitudinal analysis of early spatial skills compared to arithmetic and verbal skills as predictors of fifth-grade girls' math reasoning. *Learning and Individual Differences, 40,* 90-100. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2015.03.028

Cheng, Y.L., & Mix, K.S. (2013). Spatial training improves children's mathematics ability. *Journal of Cognition and Development*, *15*(1), 2–11. https://doi.org/10.1080/15248372.2012.725186.

Christou, K.P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM*, *47*, 747-758. doi: 10.1007/s11858-015-0675-6.

Cohen, D.J., & Sarnecka, B.W. (2014). Children's number line estimation shows development of measurement skills (not number representations). *Developmental Psychology, 50*(6), 1640–1652.

Cornu, V., Hornung, C., Schiltz, C., & Martin, R. (2017). How do different aspects of spatial skills relate to early arithmetic and number line estimation? *Journal of Numerical Cognition*, *3*. https://doi.org/10.5964/jnc.v3i2.36.

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics.* New York: Oxford University Press.

Dehaene, S., Bossini, S., & Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and number magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General, 122*(3), 371–396. https://doi.org/10.1037/0096-3445.122.3.371

Dehaene, S., Spelke, E., Pinel, P., Stanescu, R., & Tsivkin S. (1999). Sources of mathematical thinking: behavioral and brain-imaging evidence. *Science, 284*(5416), 970–974. https://doi.org/10.1126/science.284.5416.970

Desli, D., & Lioliou, A. (2020). Relationship between computational estimation and problem solving. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 15*(3), https://doi.org/10.29333/iejme/8435

Ebersbach, M. (2015). Evidence for a spatial–numerical association in kindergartners using a number line task. *Journal of Cognition and Development, 16*(1), 118–128. https://doi.org/10.1080/15248372.2013.805134

Ebersbach, M., Luwel, K., Frick, A., Onghena, P., & Verschaffel, L. (2008). The relationship between the shape of the mental number line and familiarity with numbers in 5- to 9-year-old children: Evidence for a segmented linear model. *Journal of Experimental Child Psychology, 99*(1)*,* 1-17.

Eliot, J., & Czarnolewski, M.Y. (2007). Development of an everyday behavioral questionnaire. *The Journal of General Psychology*, *134*(3), 361-381.

Etikan, I., Musa, S.A., & Alkassim, R.S. (2016). Comparison of convenience sampling and purposive sampling. *American Journal of Theoretical and Applied Statistics*, *5*(1), 1-4.

Evans, J.S.B., & Stanovich, K.E. (2013). Dual-process theories of higher cognition: advancing the debate. *Perspectives on Psychological Science, 8*(3), 223–241. https://doi.org/10.1177/1745691612460685.

Fuchs, L.S, Geary, D.C, Compton, D.L, Fuchs, D., Hamlett, C.L, & Bryant, J.D. (2010). The contributions of numerosity and domain-general abilities to school readiness. *Child Development, 81*(5), 1520-1533.

George, C., Cornu, V., & Schiltz, C. (2019). Spatial Skills First: The importance of mental rotation for arithmetic acquisition skill. *Journal of Numerical Cognition*, 5(1), 5-23.

Gunderson, E.A., & Hildebrand, L. (2021). Relations among spatial skills, number line estimation, and exact and approximate calculation in young children. *Journal of Experimental Child Psychology*, *212,* Article 105251. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2021.105251.

Gutierrez, M.J., & Trujillo, R., & Acosta, M. (2013). Augmented reality application assistant for spatial ability training. HMD vs computer screen use study. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 93,* 49-53. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2013.09.150.

Hawes, Z., & Ansari, D. (2020). What explains the relationship between spatial and mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. *Psychonomic Bulletin & Review*, *27*(1). Διαθέσιμο σε: https://doi.org/10.3758/s13423-019-01694-7.

Hawes, Z., Moss, J., Caswell, B., & Poliszczuk, D. (2015). Effects of mental rotation training on children's spatial and mathematics performance: A randomized controlled study. *Trends in Neuroscience and Education, 4*(3), 60–68. https://doi.org/10.1016/j.tine.2015.05.001

Hegarty, M., Richardson, A., Montello, D., Lovelace, K., & Subiah, I. (2002). Development of a self-report measure of environmental spatial ability. *Intelligence*, *30*, pp.425-447.

Hogan, T.P., & Brezinski, K.L. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning, 5*(4), 259-280.

Kalogirou, P., & Gagatsis, A. (2011). A first insight of the relationship between students' spatial ability and geometrical figure apprehension. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics, 11*, pp. 27-39.

Kozhevnikov, M., Hegarty, M., & Mayer, R.E. (2002). Revising the visualizer/verbalizer dimension: Evidence for two types of visualizers. *Cognition and Instruction, 20*, 47-77.

Laski, E.V., & Siegler, R.S. (2007). Is 27 a big number? Correlational and causal connections among numerical categorization, number line estimation, and numerical magnitude comparison. *Child Development, 78*(6), 1723–1743.

Lemonidis, C., & Kaimakani, A. (2013). Prospective elementary teachers' knowledge in computational estimation. *MENON: Journal of Educational Research, 2b. 1st Thematic*

Issue on 'Behavior of students, teachers and future teachers in mental calculation and estimation', 144-158.

Lindemann, O., & Tira, M.D. (2011). Operational momentum in numerosity production judgments of multi-digit number problems. *Journal of Psychology, 219*(1), 50–57. https://doi.org/10.1027/2151-2604/a000046

Lohman, D.F. (1979). Spatial ability: A review and reanalysis of the correlational literature (Tech. Rep. No. 8), Stanford, CA: Stanford University, Aptitude Research project, School of Education. (NTIS NO. AD-A075 972).

Mix, K.S., & Cheng, Y.L. (2012). The relation between space and math: Developmental and educational implications. In J.B. Benson (Ed.), *Advances in child development and behavior* (pp. 197–243) Elsevier Academic Press.

Möhring, W., Frick, A., & Newcombe, N. (2018). Spatial scaling, proportional thinking, and numerical understanding in 5- to 7-year-old children. *Cognitive Development*, *45*, 57-67. https://doi.org/10.1016/J.COGDEV.2017.12.001.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va: NCTM.

National Research Council of the National Academies (2006). *Learning to think Spatially: GIS as a support system in K – 12 Curriculum*. The National Academies Press. Washington, D.C. Ανακτήθηκε 12/10/2023 από: https://www.doe.k12.de.us/cms/lib09/DE01922744/Centricity/Domain/141/Learning%20to%20Think%20Spatially.pdf

Newcombe, N.S., & Frick, A. (2010). Early education for spatial intelligence: Why, what, and how. *Mind, Brain, and Education, 4*(3), 102–111. https://doi.org/10.1111/j.1751-228X.2010.01089.x

Newcombe, N.S., & Stieff, M. (2012). Six myths about spatial thinking. *International Journal of Science Education, 34*(6), 955-971. http://dx.doi.org/10.1080/09500693.2011.588728.

Nogues, C.P., & Dorneles, B.V. (2019). Number line estimation and quantitative reasoning: two important skills for mathematical achievement. In *11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (17).* Utrecht University, Utrecht, Netherlands. https://hal.science/hal-02401031

O'Daffer, P.G., & Thomquist, B. (1993). Critical thinking, mathematical reasoning, and proof. In PS Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: high school mathematics* (pp. 31–40). MacMillan/National Council of Teachers of Mathematics.

Peeters, D., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2017). Benchmark-based strategies in whole number line estimation. *British Journal of Psychology, 108*(4), 668–686. https://doi.org/10.1111/bjop.12233

Piaget, J., & Inhelder, B. (1967). *A child's conception of space* (F. J. Langdon & J. L. Lunzer, Trans.). New York: Norton.

Reys, R.E. (1984). Mental computation and estimation: Past, present and future. *The Elementary School Journal, 84*(5), 546–557.

Rubenstein, R.N. (1985). Computational estimation and related mathematical skills. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(2), 106-119.

Schneider, M., Grabner, R.H., & Paetsch, J. (2009). Mental number line, number line estimation, and mathematical achievement: Their interrelations in grades 5 and 6. *Journal of Educational Psychology, 101*(2), 359–372. https://doi.org/10.1037/a0013840

Schneider, M., Merz, S., Stricker, J., De Smedt, B., Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2018). Associations of number line estimation with mathematical competence: A meta-analysis. *Child Development, 89*(5), 1467-1484.

Schneider, M., Thompson, C.A., & Rittle-Johnson, B. (2018). Associations of magnitude comparison and number line estimation with mathematical competence: A comparative review. In P. Lemaire (Ed.), *Cognitive development from a strategy perspective: A festschrift for Robert S. Siegler* (pp. 100–119). Routledge/Taylor & Francis Group. https://doi.org/10.4324/9781315200446-7.

Segovia, I., & Castro, E. (2009). Computational and measurement estimation: curriculum foundations and research carried out at the University of Granada, Mathematics Didactics Department. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17*(1), 499-536.

Siegler, R.S., & Booth, J.L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development, 75*(2), 428-444.

Siegler, R.S., & Booth, J.L. (2005). Development of numerical estimation: A review. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 197–212). New York: Psychology Press.

Siegler, R.S., & Opfer, J.E. (2003). The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science, 14*(3), 237-243.

Siegler, R.S., Thompson, C.A., & Opfer, J.E. (2009). The logarithmic-to-linear shift: one learning sequence, many tasks, many time scales. *Mind, Brain, and Education, 3*(3), 143-150.

Siegler, R.S., Thompson, C.A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62*(4), 273-296.

Simms, V., Clayton, S., Cragg, L., Gilmore, C., & Johnson, S. (2016). Explaining the relationship between number line estimation and mathematical achievement: The role of visuomotor integration and visuospatial skills. *Journal of Experimental Child Psychology, 145*, 22-33. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2015.12.004.

Slusser, E., & Barth, H. (2017). Intuitive proportion judgment in number-line estimation: Converging evidence from multiple tasks. *Journal of Experimental Child Psychology, 162*, 181-198.

Sorby, S.A., & Baartmans, B.J. (2000). The development and assessment of a course for enhancing the 3-D spatial visualization skills of first year engineering students. *Journal of Engineering Education, 89*(3), 301-307. https://doi.org/10.1002/j.2168-9830.2000.tb00529.x.

Steinle, V., & Stacey, K. (2003). Grade-related trends in the prevalence and persistence of decimal misconceptions. In N.A. Paterman, B.J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.4, pp. 259-266). Honolulu: PME.

Tam, Y.P., Wong, T.-Y., & Winnie, W. (2018). The relation between spatial skills and mathematical abilities: The mediating role of mental number line representation. *Contemporary Educational Psychology*, *56*. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2018.10.007.

Träff, U. (2013). The contribution of general cognitive abilities and number abilities to different aspects of mathematics in children. *Journal of Experimental Child Psychology, 116*(2), 139–156.

Uttal, D. H., & Cohen, C. A. (2012). *Spatial Thinking and STEM Education. Psychology of Learning and Motivation, 37,* 147–181.

Uttal, D.H., Meadow, N.G., Tipton, E., Hand, L.L., Alden, A.R., Warren, C., & Newcombe, N.S., (2013). The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, *139*(2), 352-402. https://doi.org/10.1037/a0028446.

Wai, J., Lubinski, D., & Benbow, C.P. (2009). Spatial ability for STEM domains: Aligning over 50 years of cumulative psychological knowledge solidifies its importance. *Journal* *of Educational Psychology, 101*(4), 817-835. https://psycnet.apa.org/doi/10.1037/a0016127.

Widodo, S., & Ikhwanudin, T. (2018). Analyzing students' errors on fractions in the number line. *Journal of Physics: Conference Series,* https://doi.org/1013.10.1088/1742-6596/1013/1/012129

Woods, D.M., Ketterlin Geller, L., & Basaraba, D. (2017). Number sense on the number Line. *Intervention in School and Clinic, 53*(4), 229–236. https://doi.org/10.1177/1053451217712971

Xie, F., Zhang, L., Chen, X., & Xin, Z. (2020). Is spatial ability related to mathematical ability: A meta-analysis. *Educational Psychology Review, 32*, 113-155.

Yang, D.C. (2012). Examining the differences of the 8th-Graders' estimation performance between contextual and numerical problems. *US-China Education Review A, 2*, 1061-1067.

Zhu, M., Cai, D., & Leung, A.W. (2017). Number line estimation predicts mathematical skills: difference in Grades 2 and 4. *Frontiers in Psychology, 8*, 1576.

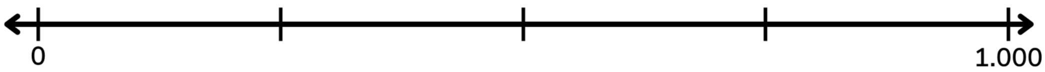
Ηλεκτρονικές Πηγές

http://www.11plusforparents.co.uk/NVR/spatial4b.html (Ανακτήθηκε: 12/1/2024)

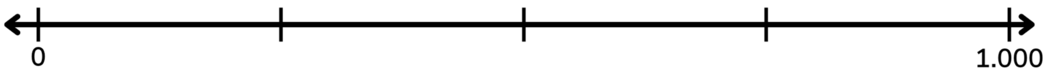
Παράρτημα

Έργο Α: Εκτίμηση σε αριθμογραμμή

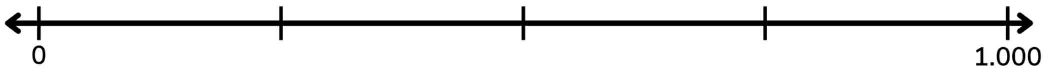
1) Βρες πού μπορεί να βρίσκεται ο αριθμός **270** και τοποθέτησέ τον στην αριθμογραμμή:



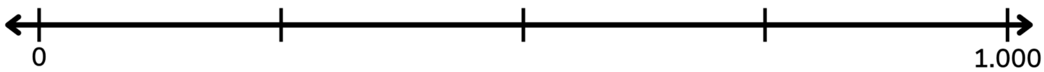
2) Βρες πού μπορεί να βρίσκεται ο αριθμός **140** και τοποθέτησέ τον στην αριθμογραμμή:



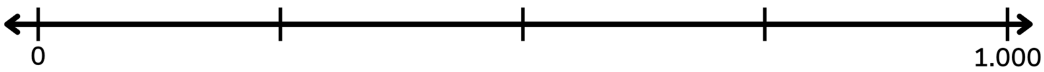
3) Βρες πού μπορεί να βρίσκεται ο αριθμός **350** και τοποθέτησέ τον στην αριθμογραμμή:



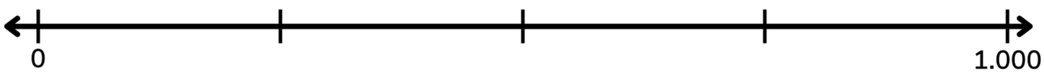
4) Βρες πού μπορεί να βρίσκεται ο αριθμός **520** και τοποθέτησέ τον στην αριθμογραμμή:



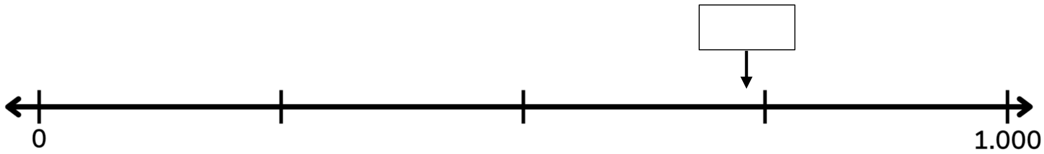
5) Βρες πού μπορεί να βρίσκεται ο αριθμός **710** και τοποθέτησέ τον στην αριθμογραμμή:



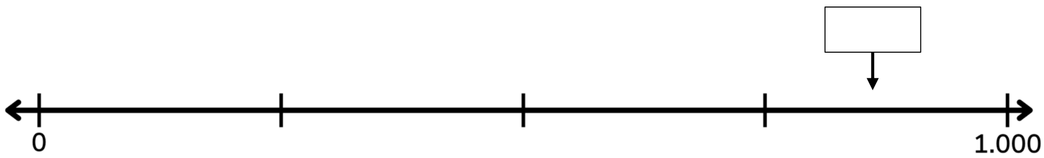
6) Βρες πού μπορεί να βρίσκεται ο αριθμός **830** και τοποθέτησέ τον στην αριθμογραμμή:



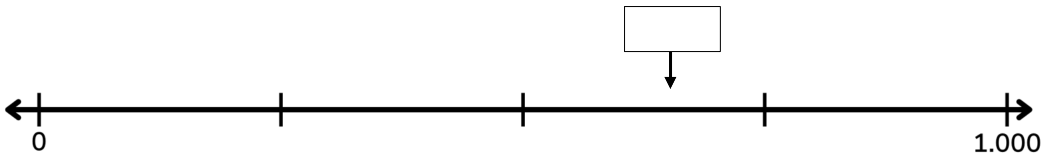
7) Βρες ποιος μπορεί να είναι ο αριθμός στη θέση του βέλους και σημείωσέ τον στην αριθμογραμμή:



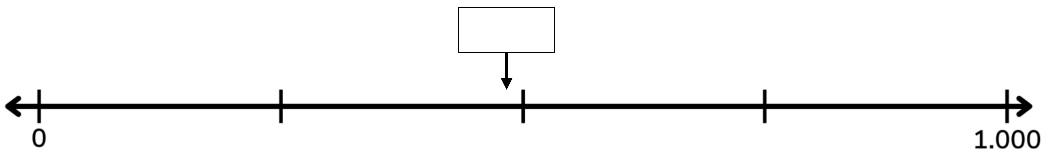
8) Βρες ποιος μπορεί να είναι ο αριθμός στη θέση του βέλους και σημείωσέ τον στην αριθμογραμμή:



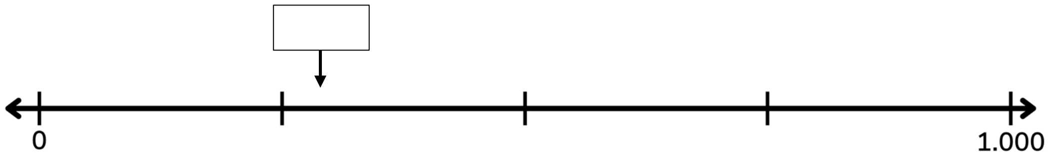
9) Βρες ποιος μπορεί να είναι ο αριθμός στη θέση του βέλους και σημείωσέ τον στην αριθμογραμμή:



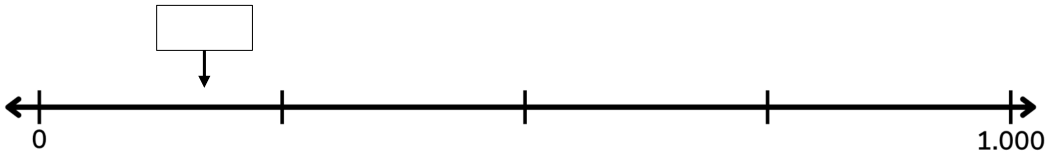
10) Βρες ποιος μπορεί να είναι ο αριθμός στη θέση του βέλους και σημείωσέ τον στην αριθμογραμμή:



11) Βρες ποιος μπορεί να είναι ο αριθμός στη θέση του βέλους και σημείωσέ τον στην αριθμογραμμή:

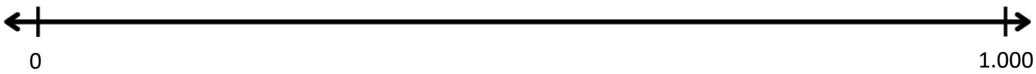


12) Βρες ποιος μπορεί να είναι ο αριθμός στη θέση του βέλους και σημείωσέ τον στην αριθμογραμμή:

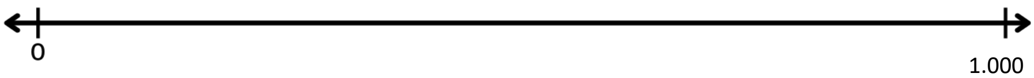


Έργο Α: Εκτίμηση σε αριθμογραμμή

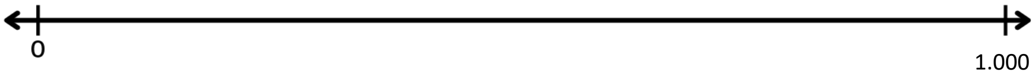
1) Βρες πού μπορεί να βρίσκεται ο αριθμός **270** και τοποθέτησέ τον στην αριθμογραμμή:



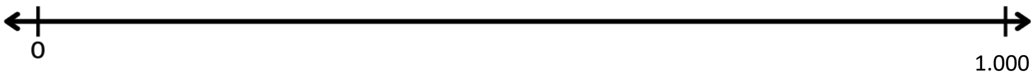
2) Βρες πού μπορεί να βρίσκεται ο αριθμός **140** και τοποθέτησέ τον στην αριθμογραμμή:



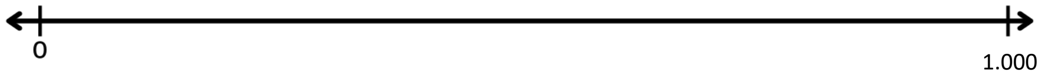
3) Βρες πού μπορεί να βρίσκεται ο αριθμός **350** και τοποθέτησέ τον στην αριθμογραμμή:



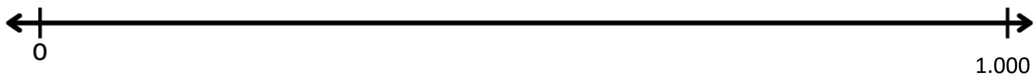
4) Βρες πού μπορεί να βρίσκεται ο αριθμός **520** και τοποθέτησέ τον στην αριθμογραμμή:



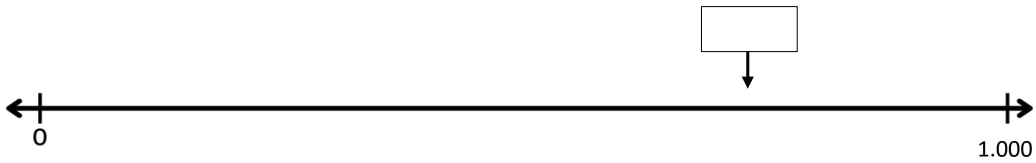
5) Βρες πού μπορεί να βρίσκεται ο αριθμός **710** και τοποθέτησέ τον στην αριθμογραμμή:



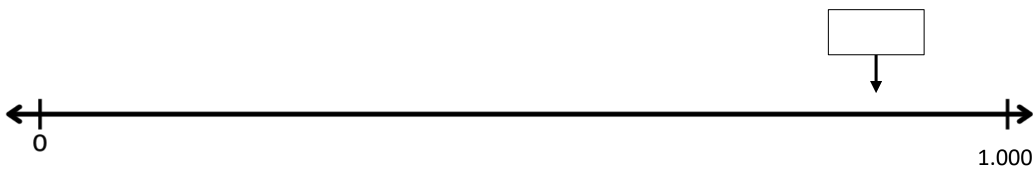
6) Βρες πού μπορεί να βρίσκεται ο αριθμός **830** και τοποθέτησέ τον στην αριθμογραμμή:



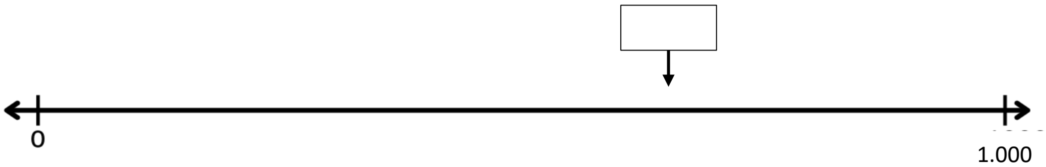
7) Βρες ποιος μπορεί να είναι ο αριθμός στη θέση του βέλους και σημείωσέ τον στην αριθμογραμμή:



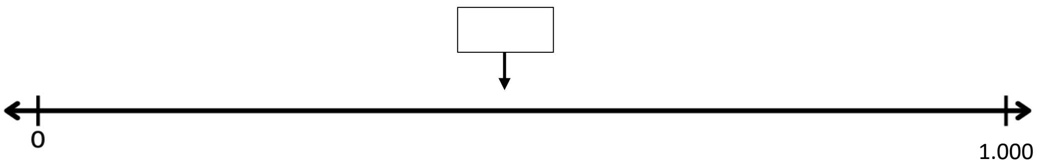
8) Βρες ποιος μπορεί να είναι ο αριθμός στη θέση του βέλους και σημείωσέ τον στην αριθμογραμμή:



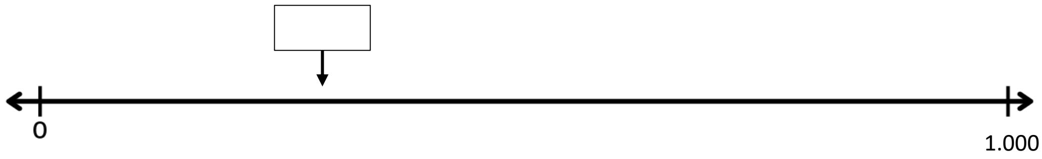
9) Βρες ποιος μπορεί να είναι ο αριθμός στη θέση του βέλους και σημείωσέ τον στην αριθμογραμμή:



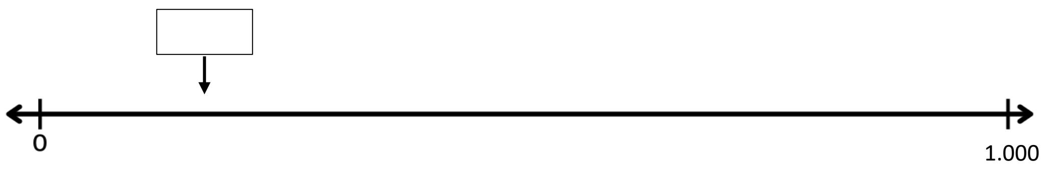
10) Βρες ποιος μπορεί να είναι ο αριθμός στη θέση του βέλους και σημείωσέ τον στην αριθμογραμμή:



11) Βρες ποιος μπορεί να είναι ο αριθμός στη θέση του βέλους και σημείωσέ τον στην αριθμογραμμή:



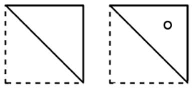
12) Βρες ποιος μπορεί να είναι ο αριθμός στη θέση του βέλους και σημείωσέ τον στην αριθμογραμμή:

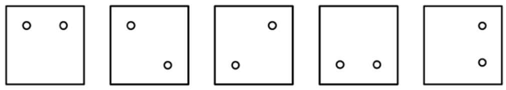


Έργο Β: Χωρικές ικανότητες
Δίπλωση χαρτιού

Φανταστείτε το τετράγωνο κομμάτι χαρτί. Το διπλώνουμε έτσι όπως παρουσιάζεται στο σχήμα και στη συνέχεια το τρυπάμε στο σημείο που υποδεικνύεται. Μία από τις πέντε επιλογές δείχνει πού θα βρίσκεται η τρύπα (ή οι τρύπες) όταν το χαρτί ξεδιπλωθεί εντελώς. Θα πρέπει να αποφασίσετε ποιο από αυτά τα σχήματα είναι το σωστό και να το κυκλώσετε.

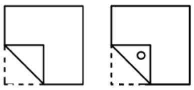
1)

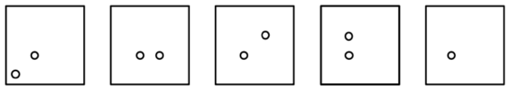




Α Β Γ Δ Ε

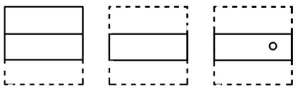
2)

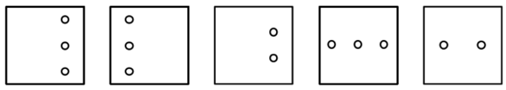




Α Β Γ Δ Ε

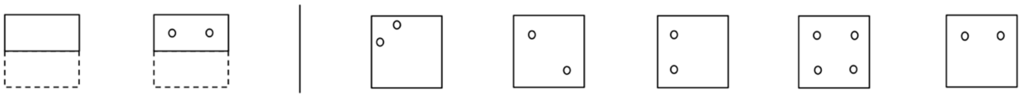
3)





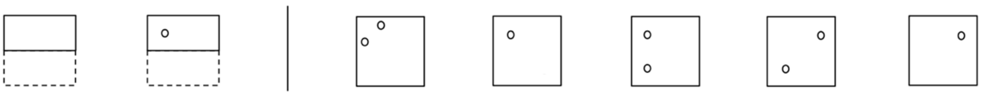
Α Β Γ Δ Ε

4)



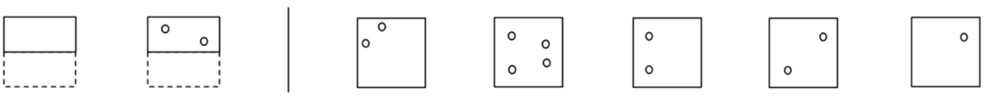
Α **Β** **Γ** **Δ** **Ε**

5)



Α **Β** **Γ** **Δ** **Ε**

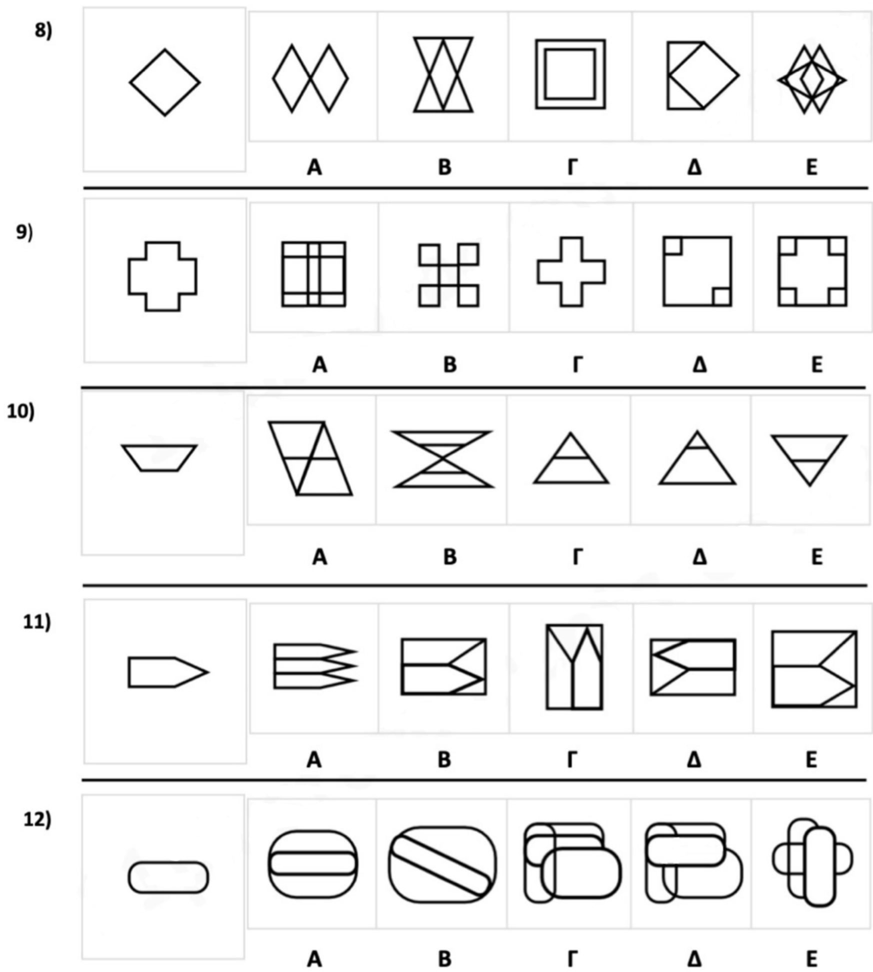
6)



Α **Β** **Γ** **Δ** **Ε**

Αναγνώριση σχήματος

Βλέπω το αρχικό σχήμα και κυκλώνω την επιλογή όπου το αρχικό σχήμα εμπεριέχεται ολόκληρο, χωρίς να περιστραφεί:



Εύρος σωστών απαντήσεων

Πίνακας 10 Εύρη σωστών απαντήσεων στο είδος έργου NP

Αριθμοί για έργο NP	Εύρος σωστών απαντήσεων
830	14,60 – 18,60 εκατοστά
710	12,20 – 16,20 εκατοστά
520	8,40 – 12,40 εκατοστά
350	5,00 – 9,00 εκατοστά
270	3,40 – 7,40 εκατοστά
140	0,80 – 4,80 εκατοστά

Πίνακας 11 Εύρη σωστών απαντήσεων στο είδος έργου PN

Αριθμοί για έργο PN	Εύρος σωστών απαντήσεων
170	70 - 270
290	190 - 390
480	380 - 580
650	550 - 750
730	630 - 830
860	760 - 960