ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

Κατεύθυνση: Μαθηματική Εκπαίδευση Α' Ηλικιακού Κύκλου (5-12 ετών)

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σύγκριση μαθητών με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες και τυπικών συνομηλίκων τους ως προς την κατασκευή μαθηματικού προβλήματος.

Comparison of students with Specific Learning Disabilities with their typical peers regarding mathematical problem posing.

Ατματζίδου Μαρίνα

Α.Μ. 1044

Επιβλέπων Καθηγητής: Αγαλιώτης Ιωάννης

Μέλη Επιτροπής: Δεσλή Δέσποινα

Λεμονίδης Χαράλαμπος

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Περίληψη

Οι μαθητές με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες (ΕΜΔ) αποτελούν τη μεγαλύτερη ομάδα μαθητών με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες. Μια πολλά υποσχόμενη προσέγγιση που δύναται να ενσωματωθεί στη διδασκαλία τους είναι η Κατασκευή Μαθηματικού Προβλήματος (ΚΜΠ). Είναι μια αποτελεσματική διδακτική στρατηγική που μπορεί να οδηγήσει στη βελτίωση της μαθηματικής επίδοσης, σε βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών, καθώς και σε αυξημένη κινητοποίηση, θετικότερη στάση και μείωση του άγχους. Η παρούσα έρευνα έχει στόχο να μελετήσει την ικανότητα ΚΜΠ μαθητών με ΕΜΔ συγκριτικά με αυτή των μαθητών χωρίς ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες (ΕΕΑ), σε δομημένες, ημι-δομημένες και ελεύθερες καταστάσεις ΚΜΠ, αξιοποιώντας ποσοτικές και ποιοτικές μεθόδους. Οι συμμετέχοντες ήταν 70 μαθητές Ε’ και ΣΤ’ τάξης, οι μισοί εκ των οποίων ήταν μαθητές με ΕΜΔ. Πραγματοποιήθηκε σύγκριση των επιδόσεων των μαθητών σε κάθε ομάδα και μεταξύ των ομάδων για όλες τις καταστάσεις. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι για τους μαθητές με ΕΜΔ υπήρχε στατιστικά σημαντική διαφορά στην επίδοσή τους μεταξύ των δομημένων και ημι-δομημένων καταστάσεων και μεταξύ των ελεύθερων και ημι-δομημένων καταστάσεων, ενώ για τους μαθητές χωρίς ΕΕΑ δεν υπήρχε στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των καταστάσεων. Η έρευνα καταλήγει ότι μεταξύ των δυο ομάδων υπήρχε στατιστικά σημαντική διαφορά στις δομημένες και ελεύθερες καταστάσεις, καθώς οι μαθητές χωρίς ΕΕΑ δημιούργησαν πιο πολύπλοκα προβλήματα και είχαν περισσότερες σωστές απαντήσεις. Ωστόσο, οι μαθητές με ΕΜΔ, παρόλο που είχαν χαμηλότερη επίδοση σε όλες τις καταστάσεις ΚΜΠ, ήταν ικανοί να κατασκευάσουν λογικά και επιλύσιμα μαθηματικά προβλήματα.

Λέξεις Κλειδιά: Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες, Μαθηματικό πρόβλημα, Δημιουργία προβλήματος, Κατασκευή μαθηματικού προβλήματος, Ικανότητα κατασκευής προβλήματος

Abstract

Students with Specific Learning Disabilities (SLD) are the largest group of students with special educational needs. A promising approach that could be incorporated in their instruction is Mathematical Problem Posing (MPP). It is an effective teaching strategy that can lead to increased mathematical achievement, deeper conceptual understanding of mathematics, as well as to increased motivation, more positive attitudes and stress reduction. The present study aims at examining the problem posing ability of students with SLD in comparison with their typically achieving peers in structured, semi-structured and free MPP situations, using quantitative and qualitative methods. The participants were 70 students studying in the 5th and 6th grade of elementary school. Half of them were students with SLD. A comparison of the students' achievement among the students in each group and between the two groups for all the MPP situations was performed. The results revealed that for the students with SLD there was a statistically significant difference in their achievement between structured and semi-structured MPP situations and between free and semi-structured MPP situations, while for the typically achieving students there was no significant difference between the MPP situations. The study concludes that there was a statistically significant difference between the groups in structured and free MPP situations, as typically achieving students posed more complex problems and had more correct answers. However, although students with SLD had lower achievement scores in all MPP situations, they were able to pose viable and solvable mathematical problems.

Key Words: Specific Learning Disabilities, Mathematical problem, Problem formulation, Mathematical problem posing, Problem posing ability

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Διατμηματικού – Διαπανεπιστημιακού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτική των Μαθηματικών» του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης της Παιδαγωγικής Σχολής του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας. Αποτελεί μια ερευνητική προσπάθεια που μελετά την ικανότητα Κατασκευής Μαθηματικού Προβλήματος μαθητών με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες συγκριτικά με αυτή μαθητών χωρίς ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες. Η επιλογή του θέματος βασίστηκε σε μεγάλο βαθμό στο γεγονός ότι αποτελεί ένα θέμα που άπτεται των προσωπικών ενδιαφερόντων μου. Ταυτόχρονα, πρόκειται για έναν τομέα ο οποίος δεν έχει μελετηθεί αρκετά στην Ελλάδα, ειδικά όσον αφορά τους μαθητές που ανήκουν στην ομάδα των Ειδικών Μαθησιακών Δυσκολιών.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή και επόπτη μου, κ. Ιωάννη Αγαλιώτη, Καθηγητή του τμήματος Εκπαιδευτικής και Κοινωνικής Πολιτικής του Πανεπιστημίου Μακεδονίας, για την πολύτιμη βοήθεια και την καθοδήγησή του καθ' όλη τη διάρκεια της διεξαγωγής της έρευνας και της συγγραφής της εργασίας, αλλά και για την άμεση ανταπόκρισή του σε οποιαδήποτε απορία μου. Ευχαριστώ, επίσης, την Καθηγήτρια του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, κα. Δέσποινα Δεσλή και τον Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας, κ. Χαράλαμπο Λεμονίδη, για την άμεση και ουσιαστική ανατροφοδότηση που παρείχαν και που δέχτηκαν να αποτελέσουν μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής. Επιπρόσθετα, οφείλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τους εκπαιδευτικούς των σχολείων που δέχθηκαν να με διευκολύνουν και ήταν πρόθυμοι να παρέχουν τη βοήθειά τους. Η ολοκλήρωση της εργασίας θα ήταν αδύνατη χωρίς τους συναδέλφους αυτούς, καθώς συνέβαλαν καθοριστικά στη συγκέντρωση του απαιτούμενου δείγματος. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους μαθητές που με προθυμία και υπομονή συμμετείχαν στην έρευνα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κατασκευή προβλημάτων αποτελεί μια σημαντική διαδικασία δόμησης μαθηματικής γνώσης (Moses et al., 2013). Η σημασία της είχε ήδη αναγνωριστεί από τους Einstein και Infeld (1938, σ. 95), οι οποίοι υποστήριξαν ότι «Η δημιουργία ενός προβλήματος είναι συχνά ουσιαστικότερη από την επίλυσή του. Η δημιουργία νέων ερωτήσεων, νέων πιθανοτήτων, η θεώρηση παλιών προβλημάτων από νέα οπτική γωνία απαιτεί δημιουργική φαντασία και σηματοδοτεί την αληθινή πρόοδο στην επιστήμη». Πλέον, υποστηρίζεται ευρέως ότι η ενσωμάτωση της κατασκευής προβλήματος στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι θεμελιώδους σημασίας για μια υψηλής ποιότητας διδασκαλία, αποτελεί πολύτιμο εργαλείο μαθησιακής προόδου και βελτιώνει τη συνολική μαθησιακή εμπειρία των μαθητών (Bevan & Capraro, 2021· Cai & Hwang, 2020· English, 2020).

Παρά τη σημασία της και τα οφέλη που έχει για μαθητές και εκπαιδευτικούς, η αξιοποίηση της κατασκευής μαθηματικού προβλήματος (ΚΜΠ) είναι αναμφίβολα περιορισμένη και δεν τυγχάνει της ίδιας προσοχής με την επίλυση μαθηματικού προβλήματος (ΕΜΠ), η οποία βρίσκεται στο επίκεντρο των προγραμμάτων σπουδών και της διδασκαλίας (Dillon, 1982· Ellerton, 2013· English, 1997β, 1998· Silver & Cai, 2005· Singer et al., 2013, 2015). Κατά κύριο λόγο στη διδασκαλία οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με προβλήματα που δημιουργούνται ή επιλέγονται από τους εκπαιδευτικούς ή από τους συγγραφείς των σχολικών εγχειριδίων (Brown & Walter, 2005· Dillon, 1982· English, 1997α· Kwon & Capraro, 2021· Silver, 1994· Singer, Ellerton, et al., 2011· Stoyanova, 1998). Πρόκειται για προβλήματα που άλλοι θεωρούν ενδιαφέροντα, όμως για τους ίδιους τους μαθητές αποδεικνύονται χωρίς νόημα και ανιαρά (English, 1997α· Silverman et al., 1992). Συνήθως οι μαθητές καταλήγουν να τα αποδέχονται και εστιάζουν απλώς στην επίλυσή τους και σπάνια έχουν την ευκαιρία να επεξεργαστούν προβλήματα τα οποία έχουν δημιουργήσει οι ίδιοι (Ellerton 2013· Lavy & Bershadsky, 2003· Silver, 1994). Ωστόσο, όπως έχει υποστηρίξει ο Polya (1957, σ. 68) «Η μαθηματική εμπειρία ενός μαθητή δεν είναι ολοκληρωμένη αν δεν είχε ποτέ του την ευκαιρία να επιλύσει ένα πρόβλημα που επινόησε ο ίδιος».

Ομολογουμένως, η ΚΜΠ είναι ένα πεδίο που έχει ερευνηθεί πολύ λιγότερο σε σύγκριση με την ΕΜΠ (Singer et al., 2013). Στο πλαίσιο των ερευνών στην ΚΜΠ οι μαθητές με χαμηλή επίδοση συνήθως παραγκωνίζονται, παρά το ότι αποτελούν ένα μεγάλο μέρος του μαθητικού πληθυσμού (Irvine, 2017). Μεταξύ των μαθητών που παρουσιάζουν χαμηλές επιδόσεις και αποτυγχάνουν στην προσπάθειά τους να ανταποκριθούν στις σχολικές απαιτήσεις, συγκαταλέγονται και οι μαθητές με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες, οι οποίοι συναντώνται σε κάθε σχολική τάξη (Αγαλιώτης, 2023). Εντούτοις, τόσο σε εθνικό όσο και σε διεθνές επίπεδο, η ικανότητα τους να δημιουργούν μαθηματικά προβλήματα δεν έχει ερευνηθεί επαρκώς και οι έρευνες που επικεντρώνονται σε αυτόν τον πληθυσμό είναι περιορισμένες.

Το πρώτο κεφάλαιο της εργασίας αφορά την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας και τη διαμόρφωση του θεωρητικού πλαισίου στο οποίο βασίστηκε η έρευνα. Αρχικά, παρουσιάζεται η ΚΜΠ, τονίζεται η σημασία της και τα οφέλη με τα οποία συνδέεται και δίνεται έμφαση στη σχέση της με την ΕΜΠ, αλλά και στη θέση της στο πρόγραμμα σπουδών. Έπειτα, περιγράφονται οι τρόποι αξιολόγησης των προβλημάτων, τα στάδια που ακολουθούνται και οι στρατηγικές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Ακολουθεί μια εκτενέστερη αναφορά στην ικανότητα των μαθητών να δημιουργούν προβλήματα και αναλύονται οι παράγοντες που την επηρεάζουν. Στη συνέχεια, γίνεται μια προσπάθεια οριοθέτησης του πεδίου των Ειδικών Μαθησιακών Δυσκολιών, ενώ αναλύονται περισσότερο οι Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά και επιχειρείται η περιγραφή των βασικών χαρακτηριστικών των μαθητών που ανήκουν στην ομάδα αυτή. Τέλος, παρουσιάζεται ο σκοπός της έρευνας και τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν. Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφεται η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για τη διεξαγωγή της έρευνας. Πιο συγκεκριμένα, περιγράφεται η ερευνητική στρατηγική που επιλέχθηκε, τα χαρακτηριστικά των συμμετεχόντων, το εργαλείο που κατασκευάστηκε για την αξιολόγηση των μαθητών, η διαδικασία που ακολουθήθηκε, αλλά και ο τρόπος ανάλυσης των δεδομένων. Επιπλέον, γίνεται αναφορά στη διασφάλιση της εγκυρότητας και της αξιοπιστίας της έρευνας. Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύονται ποσοτικά και ποιοτικά τα αποτελέσματα, ενώ, τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο, τα σημαντικότερα ευρήματα συζητούνται ως προς την εφαρμογή τους, παρατίθενται τα συμπεράσματα και οι περιορισμοί της έρευνας, καθώς και προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

1.1. Μαθηματικό Πρόβλημα

Ο όρος «πρόβλημα» αναφέρεται σε ένα έργο ή μια κατάσταση που είναι δύσκολο να αντιμετωπιστεί ή να ελεγχθεί, λόγω περιπλοκότητας. Περιλαμβάνει κάθε ερώτηση προς απάντηση και κάθε θέμα προς εξέταση ή απόδειξη που εμπεριέχει ένα βαθμό αμφιβολίας και αβεβαιότητας (Seel, 2012). Με τον όρο αυτό περιγράφονται διαφορετικά είδη προβληματικών καταστάσεων που προέρχονται από διάφορους τομείς. Τα προβλήματα διαφέρουν ανάλογα με το είδος γνώσης που απαιτείται για την επίλυσή τους και τις διαδικασίες που ακολουθούνται προς αυτήν, καθώς και τη μορφή που παρουσιάζονται (Jonassen, 2004). Διαφέρουν, δηλαδή, ως προς τον τρόπο που είναι δομημένα, ως προς το πόσο αφηρημένα είναι και ως προς την περιπλοκότητά τους (Jonassen, 2000). Έτσι, με τον ίδιο όρο μπορεί να γίνεται αναφορά σε απλά αλγοριθμικά προβλήματα στο δημοτικό σχολείο έως και σε περίπλοκα κοινωνικο-πολιτικά προβλήματα (Jonassen, 2004). Τα στοιχεία που χαρακτηρίζουν ένα πρόβλημα είναι μια αρχική δεδομένη κατάσταση, μια τελική επιθυμητή κατάσταση και ένα εμπόδιο το οποίο δεν επιτρέπει τη μετάβαση από την αρχική στην τελική κατάσταση, δηλαδή την επίλυση του προβλήματος (Seel, 2012). Όταν το άτομο δεν γνωρίζει πώς να πραγματοποιήσει αυτήν τη μετάβαση, τότε προκύπτει ένα πρόβλημα.

Η Gonzales (1998) επισημαίνει ότι ένα έργο αποτελεί πρόβλημα για ένα άτομο όταν, ενώ αντιλαμβάνεται το έργο, δεν βρίσκει μια άμεση στρατηγική για να το επιλύσει, αλλά παρ’ όλα αυτά κινητοποιείται για την αναζήτηση της λύσης. Πράγματι, η εμπλοκή και η κινητοποίηση του ατόμου είναι ουσιαστικής σημασίας (Schoenfeld, 1989). Η αναζήτηση και η εύρεση της άγνωστης λύσης πρέπει να έχει κάποια κοινωνική πολιτισμική ή διανοητική αξία, δηλαδή, κάποιος να πιστεύει ότι το πρόβλημα αξίζει να επιλυθεί και ότι υπάρχει ανάγκη να καθοριστεί ένα άγνωστο στοιχείο, διαφορετικά δεν υφίσταται πρόβλημα (Jonassen, 2000, 2004).

Όσον αφορά τα μαθηματικά, ο Αγαλιώτης (2023) θεωρεί ως «μαθηματικό πρόβλημα» την προφορική, γραπτή, εικονιστική, κιναισθητική ή μεικτή παρουσίαση καταστάσεων με ποσοτικά χαρακτηριστικά, στις οποίες συμβαίνουν αλλαγές ως αποτέλεσμα επίδρασης διάφορων ενεργειών ή αναγκών. Αυτές οδηγούν στη διαμόρφωση νέων συνθηκών που αποτελούν τα ζητούμενα των προβλημάτων (Αγαλιώτης, 2023). Ένα μαθηματικό πρόβλημα αποτελείται από μια δήλωση (γραπτή, προφορική, συμβολική ή γραφική), από γνωστές και άγνωστες μεταβλητές, από ένα σύνολο συνθηκών που διευκρινίζουν τις σχέσεις μεταξύ των ζητουμένων και των δεδομένων και από μια εργασία που πρέπει να εκτελεστεί (Gonzales, 1998). Ο λύτης πρέπει να συσχετίσει μέσω αριθμητικών πράξεων τα αριθμητικά δεδομένα που εμπλέκονται για να οδηγηθεί στο αποτέλεσμα (Cázares Solórzano et al., 1998). Ένα μαθηματικό πρόβλημα, όμως, δεν είναι απλώς η εύρεση μιας μαθηματικής απάντησης σε ένα λεκτικά διατυπωμένο ερώτημα. Περιλαμβάνει και τη διαδικασία συνδυασμού πληροφοριών, την επιλογή και αξιοποίηση γνώσεων και δεξιοτήτων που ήδη κατέχει ο λύτης, τη λήψη αποφάσεων για το σχεδιασμό και την υλοποίηση δράσεων και την έκφραση της συλλογιστικής πορείας με μαθηματικό τρόπο (Αγαλιώτης, 2011).

Στην πραγματικότητα, δεν είναι τόσο εύκολο να διασαφηνιστεί τι αποτελεί «μαθηματικό πρόβλημα», καθώς αυτό εξαρτάται από διάφορους παράγοντες. Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1985), ένα έργο δεν αποτελεί μαθηματικό πρόβλημα από μόνο του, αλλά ορίζεται σε συνάρτηση με τον λύτη. Ουσιαστικά εξαρτάται από την εξοικείωσή του με το πρόβλημα, τα διαθέσιμα εργαλεία (Verschaffel et al., 2020) και τις γνώσεις και ικανότητές του τη στιγμή που το επιλύει (Αγαλιώτης, 2023· Milinković, 2015). Αν θεωρηθεί ως μαθηματικό πρόβλημα ένα έργο στο οποίο ο μαθητής εμπλέκεται και επιθυμεί να βρει λύση, αλλά δεν έχει έναν εύκολα προσβάσιμο μαθηματικό τρόπο για να φτάσει σε αυτήν (Schoenfeld, 1989), τότε γίνεται αντιληπτό ότι αν υπάρχει άμεση πρόσβαση στη λύση, πρόκειται για άσκηση και όχι πρόβλημα (Schoenfeld, 1985). Επομένως, ένα πρόβλημα που για κάποιον είναι απαιτητικό και δύσκολο, μπορεί για κάποιον άλλον να αποτελεί άσκηση ρουτίνας και να μπορεί να απαντηθεί με απλή ανάκληση πληροφοριών (Schoenfeld, 1985, 1989). Παρομοίως, ένα έργο που αποτελεί πρόβλημα για μαθητές μιας τάξης ή βαθμίδας, πιθανώς στην επόμενη τάξη ή βαθμίδα να μετατραπεί σε άσκηση ρουτίνας (Milinković, 2015). Έτσι, ανάλογα με τις γνωστικές απαιτήσεις που έχει ένα έργο για ένα άτομο μια δεδομένη στιγμή, χαρακτηρίζεται ως πρόβλημα ή απλή άσκηση.

Υπάρχουν πολλές κατηγορίες μαθηματικών προβλημάτων, όμως η πιο ευρέως μελετημένη είναι τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα, τα οποία καταλαμβάνουν μεγάλο μέρος των σχολικών μαθηματικών. Τα λεκτικά προβλήματα διαφέρουν από απλές μαθηματικές πράξεις (π.χ. 4+5 ή Πόσο κάνει αν διαιρέσω το 40 με το 5) και από ποσοτικά προβλήματα της πραγματικής ζωής (Verschaffel et al., 2020). Αποτελούν ένα είδος κειμένου με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά (Αγαλιώτης, 2011). Στην ουσία είναι σύντομες ιστορίες που περιλαμβάνουν μαθηματικά στοιχεία (Jonassen, 2000). Πρόκειται για μια ειδική κατάσταση προβληματισμού που διαμορφώνεται από την ανάγκη εύρεσης λύσης, η οποία δε δίνεται έτοιμη ή δεν παρουσιάζεται με άμεσο και προφανή τρόπο (Αγαλιώτης, 2011). Για την εύρεσή της, οι λύτες πρέπει να αναγνωρίσουν την κατάσταση που περιγράφεται, να επιλέξουν τον σωστό αλγόριθμο και να εφαρμόσουν τα αλγοριθμικά βήματα με τη σωστή σειρά (Jonassen, 2000). Με άλλα λόγια, απαιτείται η εφαρμογή λειτουργικών κανόνων και πράξεων που περιλαμβάνουν σύνδεση μεταξύ της προβληματικής κατάστασης και μιας συμβολικής μαθηματικής έκφρασης (Bonotto & Dal Santo, 2015).

1.2. Κατασκευή Μαθηματικού Προβλήματος

Η δημιουργία προβλημάτων είναι μια φυσική ικανότητα του ανθρώπινου νου, η οποία είναι απολύτως αναγκαία για την επιβίωση των ανθρώπων (Singer, Ellerton, et al., 2011). Από το παρελθόν, οι άνθρωποι έπρεπε πρώτα να αντιληφθούν την ανάγκη που προέκυπτε από μια προβληματική κατάσταση και έπειτα να επιχειρήσουν να την αντιμετωπίσουν. Όπως σχολιάζει η Ellerton (2013), είναι προφανές ότι δεν μπορεί κανείς να επιλύσει ένα πρόβλημα, αν πρώτα αυτό δεν έχει δημιουργηθεί. Στην καθημερινή ζωή ποικίλες καταστάσεις απαιτούν τη δημιουργία προβλημάτων, πολλά εκ των οποίων έχουν μαθηματική βάση (Ellerton, 2013· Singer, Ellerton, et al., 2011). Η διαδικασία αυτή έχει πια αυτοματοποιηθεί σε τέτοιο βαθμό που πλέον γίνεται ασυναίσθητα (Singer, Ellerton, et al., 2011).

Έχουν διατυπωθεί ποικίλοι ορισμοί για την ΚΜΠ οι οποίοι διαφέρουν ως προς το είδος των καταστάσεων που αναγνωρίζουν. Σε γενικές γραμμές, ως ΚΜΠ νοείται η διαδικασία κατασκευής και έκφρασης ενός προβλήματος στα μαθηματικά (Cai & Hwang, 2020). Με άλλα λόγια, πρόκειται για τη δημιουργία μιας δήλωσης από την οποία προκύπτουν ερωτήσεις που απαντώνται μέσα από τον χειρισμό συγκεκριμένων δεδομένων (Ayllón Blanco, Gallego Ortega, et al., 2016). Υπάρχει η άποψη ότι η ΚΜΠ αφορά μόνο τη δημιουργία-παραγωγή νέων προβλημάτων από μια δοσμένη κατάσταση ή πλαίσιο (Arikan & Ünal, 2015· Stickles, 2011). Ένας τέτοιος ορισμός, που την τοποθετεί στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών, είναι της Stoyanova (1997, σ. 5): «Η ΚΜΠ ορίζεται ως η διαδικασία με την οποία, με βάση τη μαθηματική τους εμπειρία, οι μαθητές κατασκευάζουν προσωπικές ερμηνείες συγκεκριμένων καταστάσεων και τις διατυπώνουν ως καλά δομημένα μαθηματικά προβλήματα με νόημα». Από την άλλη, υποστηρίζεται και η άποψη ότι η ΚΜΠ αφορά μόνο την τροποποίηση ήδη δοσμένων προβλημάτων. Για παράδειγμα, η Mamona-Downs (1993) ορίζει την ΚΜΠ ως τη δραστηριότητα που προκύπτει όταν ένα ανοιχτό πρόβλημα ευνοεί την δημιουργία άλλων προβλημάτων.

Οι περισσότεροι ερευνητές, ωστόσο, ασπάζονται την άποψη του Silver (1994), ο οποίος με τον ίδιο όρο αναφέρεται τόσο στη δημιουργία νέων προβλημάτων όσο και στην επαναδιατύπωση δοσμένων. Ενδεικτικά, ο Malaspina (2013, 2021) ορίζει την ΚΜΠ ως μια διαδικασία μέσω της οποίας προκύπτει ένα νέο πρόβλημα τροποποιώντας ένα γνωστό ή κατασκευάζοντας ένα από μια δοσμένη κατάσταση. Παρομοίως, οι Cai και Hwang (2020) με τον όρο ΚΜΠ αναφέρονται σε διάφορες δραστηριότητες που υποστηρίζουν τους δασκάλους και τους μαθητές να (ανά)διατυπώνουν και να εκφράζουν ένα πρόβλημα ή έργο με βάση ένα συγκεκριμένο πλαίσιο (δοσμένες καταστάσεις ή υπάρχοντα προβλήματα). Οι όροι «πρόβλημα» και «έργο» χρησιμοποιούνται με την ευρύτερη σημασία τους, ώστε να περιλαμβάνουν κάθε μαθηματική ερώτηση που μπορεί να τεθεί και κάθε έργο που μπορεί να εκτελεστεί από μια προβληματική κατάσταση. Ο όρος «πλαίσιο» ορίζεται και πάλι ευρέως, ώστε να περιλαμβάνει τόσο ενδό-μαθηματικές καταστάσεις, όσο και καταστάσεις από εξωτερικές πηγές, όπως φαινόμενα της πραγματικής ζωής και ερωτήσεις που προέρχονται από άλλες επιστήμες (Cai & Hwang, 2020).

Οι Papadopoulos κ.ά. (2022) τονίζουν πως δεν υπάρχει ομοφωνία ως προς την εννοιολογική θεμελίωση της ΚΜΠ και εντοπίζουν στη βιβλιογραφία κι άλλες κατηγορίες ορισμών, ανάλογα με το τι θεωρείται ΚΜΠ. Έτσι λοιπόν, οι ορισμοί που κατά καιρούς διατυπώνονται μπορούν να ενταχθούν σε μια (ή παραπάνω) από τις παρακάτω κατηγορίες: Η ΚΜΠ ως (α) μόνο δημιουργία νέων προβλημάτων, (β) μόνο τροποποίηση δοσμένων προβλημάτων, (γ) δημιουργία ή/και τροποποίηση προβλημάτων, (δ) διατύπωση ερωτημάτων και (ε) μοντελοποίηση. Οι Baumanns και Rott (2020) εκφράζουν την άποψη ότι ο όρος πλέον χρησιμοποιείται για ένα πλήθος καταστάσεων που, όμως, έχουν διαφορετικά χαρακτηριστικά και τονίζουν την ανάγκη οι καταστάσεις ΚΜΠ να αναλύονται σε βάθος, ώστε να διαπιστώνεται αν πράγματι αποτελούν τέτοιου είδους έργα. Λόγω αυτού, ο Ruthven (2020) προειδοποιεί για τον κίνδυνο ο όρος να γίνει ασαφής και αόριστος και να ερμηνεύεται επιφανειακά.

1.2.1. Καταστάσεις ΚΜΠ

Ως έργα ΚΜΠ θεωρούνται αυτά που απαιτούν από τους δασκάλους ή τους μαθητές τη δημιουργία νέων προβλημάτων και ερωτήσεων, βασισμένα σε δοσμένες καταστάσεις (μαθηματικές ή πραγματικές), σε μαθηματικές εκφράσεις ή σε διαγράμματα (Cai et al., 2020). Κάθε έργο περιλαμβάνει: (α) μια προβληματική κατάσταση, όπου δίνεται το πλαίσιο και τα δεδομένα στα οποία μπορούν να βασιστούν οι μαθητές, συμπληρωματικά με τις εμπειρίες και τις γνώσεις τους και (β) μια υπόδειξη-προτροπή για το τι αναμένεται από αυτούς (Cai, 2022· Cai & Hwang, 2023). Ένα ποιοτικό έργο ΚΜΠ χαρακτηρίζεται από το πόσο ανοιχτό είναι, τις μαθηματικές του απαιτήσεις, την ευκαιρία για πολλαπλές απαντήσεις και το αν οδηγεί σε ανάπτυξη της δημιουργικότητας και της ευελιξίας (English, 2020). Τα έργα ΚΜΠ μπορούν να προκύψουν από μια ποικιλία καταστάσεων (Cai & Hwang, 2023).

Ως καταστάσεις ΚΜΠ ορίζονται οι μαθηματικές καταστάσεις που περιλαμβάνουν την κατασκευή προβλημάτων (Stoyanova, 1998). Πρέπει να αντιστοιχούν και να προκύπτουν φυσικά από τις δραστηριότητες της καθημερινής ζωής, αλλά μπορούν και να προκύπτουν τροποποιώντας προβλήματα του σχολικού εγχειριδίου (Stoyanova & Ellerton, 1996). Οι Cai και Hwang (2023) διακρίνουν καταστάσεις ΚΜΠ που βασίζονται σε πραγματικά πλαίσια και καταστάσεις που είναι καθαρά μαθηματικές ή αφηρημένες. Σύμφωνα με τις Stoyanova (1997, 1998) και Stoyanova και Ellerton (1996) οι μαθηματικές καταστάσεις από τις οποίες προκύπτει η ΚΜΠ μπορεί να είναι ελεύθερες, δομημένες και ημι-δομημένες. Πιο αναλυτικά:

Οι ελεύθερες καταστάσεις αφορούν τις καταστάσεις εκείνες όπου οι μαθητές δημιουργούν προβλήματα για μια δοσμένη, τεχνητή ή ρεαλιστική κατάσταση, χωρίς κανέναν περιορισμό και χωρίς περαιτέρω οδηγίες ή πληροφορίες. Σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να παρέχονται επιπλέον οδηγίες, ώστε να τους κατευθύνουν σε συγκεκριμένες δράσεις. Έτσι, μπορεί να χρησιμοποιηθούν προτροπές, όπως «Φτιάξε ένα δύσκολο πρόβλημα», «Φτιάξε ένα πρόβλημα που θα ήθελες να δεις σε έναν μαθηματικό διαγωνισμό ή διαγώνισμα», «Φτιάξε ένα πρόβλημα για να λύσει η δασκάλα σου», «Φτιάξε ένα πρόβλημα που να σου αρέσει», ή να τους ζητηθεί να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα σχετικό με το θέμα που διδάσκονται τη δεδομένη στιγμή, με σκοπό να μαθηματικοποιήσουν προηγούμενες εμπειρίες τους. Οι ελεύθερες καταστάσεις απευθύνονται απευθείας σε αυτόν που κατασκευάζει το πρόβλημα, ωθώντας τον να λάβει υπόψη τους λύτες-αποδέκτες του (Stoyanova, 1998). Πρέπει να λάβει υπόψη τη μαθηματική τους ικανότητα και να αναλογιστεί αν το πρόβλημα θα είναι κατανοητό, πράγμα που απαιτεί προσεκτικό σχεδιασμό (Lowrie, 2002). Οι καταστάσεις αυτές προσφέρουν περισσότερες ευκαιρίες στους μαθητές να συνδέσουν τις εμπειρίες και τις μαθηματικές τους γνώσεις με πραγματικές καταστάσεις, συγκριτικά με τις ημι-δομημένες (Guo et al., 2020· Possamai & Allevato, 2023) και γι’ αυτό οι μαθητές αισθάνονται περισσότερη αυτοπεποίθηση κατά την ενασχόληση με αυτές (Chua & Toh, 2022). Λόγω της μεγάλης ελευθερίας που προσφέρουν, οι Chua και Toh (2022) προτείνουν η εισαγωγή στην ΚΜΠ να γίνεται με τέτοιου είδους έργα. Από την άλλη, υποστηρίζεται πως οι καταστάσεις αυτές λόγω της δομής τους, έχουν αυξημένες γνωστικές απαιτήσεις και απαιτούν από τους μαθητές να εργαστούν ανεξάρτητα παρέχοντας μόνο ορισμένες κατευθυντήριες γραμμές, γεγονός που τις καθιστά φαινομενικά τις δυσκολότερες, ειδικά για μαθητές χωρίς εμπειρία στην ΚΜΠ (Ngah et al., 2016· Wang et al., 2022).

Οι ημι-δομημένες καταστάσεις αναφέρονται σε καταστάσεις στις οποίες παρέχεται στους μαθητές μια ανοιχτή κατάσταση, της οποίας τη δομή καλούνται να εξερευνήσουν, να επιλέξουν στοιχεία και να καθορίσουν σχέσεις ανάμεσα τους. Έπειτα, καλούνται να την ολοκληρώσουν χρησιμοποιώντας γνώσεις, δεξιότητες, έννοιες και σχέσεις από την προηγούμενη μαθηματική εμπειρία τους και να την παρουσιάσουν με τη μορφή ενός σωστά δομημένου μαθηματικού προβλήματος. Συνήθως περιλαμβάνουν καταστάσεις με ελλιπείς ή επιπλέον πληροφορίες στη δομή τους (Stoyanova & Ellerton, 1996). Υπάρχουν υποκατηγορίες ανάλογα με το αν οι πληροφορίες παρουσιάζονται λεκτικά, με εικόνα, με γράφημα, με πίνακα ή με μαθηματική έκφραση (Cai & Hwang, 2023). Ενδεικτικά, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές (Stoyanova, 1997, 1998· Stoyanova & Ellerton, 1996):

- σε καταστάσεις με ημιτελή δομή να δημιουργήσουν προβλήματα με βάση τις δοσμένες πληροφορίες (ή χρησιμοποιώντας ορισμένες από αυτές),
- να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα με μια συγκεκριμένη απάντηση ή λύση,
- να συμπληρώσουν στοιχεία που λείπουν στη δομή των προβλημάτων (δεδομένα, εμπόδια/περιορισμούς, ή/και ζητούμενα/ερωτήσεις),
- σε καταστάσεις όπου δίνεται μόνο ένα μέρος του προβλήματος να επιλέξουν ανάμεσα από πιθανές απαντήσεις την κατάλληλη,
- να δημιουργήσουν μια σειρά από διασυνδεδεμένα προβλήματα κ.ά.

Μέσα από την εξερεύνηση καταστάσεων οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη δομή ενός προβλήματος και τη σχέση μεταξύ των δεδομένων, των ζητουμένων και της λύσης (Stoyanova, 1997, 1998). Μάλιστα, όσο πιο ατελής παρουσιάζεται μια προβληματική κατάσταση τόσο πιθανότερο είναι να αντιληφθούν τις σχέσεις που υπάρχουν και να βελτιώσουν την παρατηρητικότητα, την κριτική σκέψη και την αυτονομία τους (Fernández-Bravo & Barbarán, 2016). Επιπλέον, οι ημι-δομημένες καταστάσεις παρέχουν την απαραίτητη υποστήριξη για να συνδέσουν τις τρέχουσες με τις προηγούμενες μαθηματικές τους εμπειρίες (Stoyanova, 1997). Παράλληλα, ενθαρρύνουν την ευελιξία και τη χρήση πληροφοριών και υλικών σχετικών με τη ζωή και τα ενδιαφέροντά τους (Kopparla et al., 2019). Η Bonotto (2013) επιβεβαιώνει ότι τα λιγότερο δομημένα και πιο ανοιχτά έργα προάγουν την ευέλικτη σκέψη, βελτιώνουν την ικανότητα επίλυσης προβλήματος και προετοιμάζουν τους μαθητές να αντιμετωπίζουν πραγματικές καταστάσεις που θα συναντήσουν εκτός σχολικού πλαισίου. Τέλος, επιτρέπουν την ενσωμάτωση οπτικών αναπαραστάσεων, οι οποίες είναι βασικά εργαλεία των μαθηματικών (Kopparla et al., 2019).

Οι δομημένες καταστάσεις αφορούν δραστηριότητες ΚΜΠ με βάση ένα δοσμένο, συγκεκριμένο πρόβλημα ή μια συγκεκριμένη λύση. Αναφέρονται σε καταστάσεις όπου οι μαθητές δημιουργούν προβλήματα αναδιατυπώνοντας ήδη λυμένα προβλήματα ή αλλάζοντας τις συνθήκες ή την ερώτηση δοσμένων προβλημάτων. Αποσκοπούν στο να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν τη δομή συγκεκριμένων προβλημάτων και να εξερευνήσουν αλληλοσυνδέσεις μεταξύ της δήλωσης και της λύσης τους (Stoyanova, 1998). Οι καταστάσεις αυτές καλούν τα άτομα να εντοπίσουν και να λάβουν υπόψη τις μαθηματικές σχέσεις που υπάρχουν στα προβλήματα, προκειμένου να ικανοποιηθούν οι συνθήκες κάθε έργου (Silber & Cai, 2017). Ενδεικτικά, στο πλαίσιο δομημένων καταστάσεων μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές (Stoyanova, 1997, 1998· Stoyanova & Ellerton, 1996):

- να διατυπώσουν πιθανές εναλλακτικές ερωτήσεις για το δοσμένο πρόβλημα,
- να προσθέσουν επιπλέον δεδομένα και έπειτα να προτείνουν νέες ερωτήσεις,
- να βελτιώσουν τη δομή του εντοπίζοντας περιττές πληροφορίες,
- να προτείνουν αλλαγές που να επηρεάζουν ή όχι τη λύση,
- να διατυπώσουν ένα πρόβλημα του οποίου η λύση αντιστοιχεί ή διαφέρει από τη λύση του δοσμένου,
- να κατασκευάσουν το αντίστροφο πρόβλημα

– να αναδιατυπώσουν ένα πρόβλημα με βάση τη λύση του,
– να διατυπώσουν ένα πρόβλημα με διαφορετικές μορφές (π.χ. ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών) κ.ά.

Η ΚΜΠ από δοσμένο πρόβλημα είναι η πιο συνηθισμένη δραστηριότητα ΚΜΠ και μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση ποικίλων στρατηγικών (Θεοδούλου & Φιλίππου, 2003). Οι καταστάσεις αυτές πράγματι ευνοούν την εισαγωγή διδακτικών στρατηγικών που προάγουν την ενσωμάτωση της ΚΜΠ στην τάξη (Silber & Cai, 2017). Όταν έχουν ως βάση κατηγορίες προβλημάτων με τις οποίες οι μαθητές είναι ήδη εξοικειωμένοι, παρέχουν ένα πλούσιο περιβάλλον για τη δημιουργία νέων προβλημάτων (Stoyanova, 1997). Ταυτόχρονα, είναι καταλληλότερες για την αξιολόγηση της κατανόησης συγκεκριμένων εννοιών και θεμάτων, καθώς φανερώνουν τη μαθηματική σκέψη των μαθητών (Possamai & Allevato, 2023· Silber & Cai, 2017). Υποστηρίζεται ότι οι δομημένες καταστάσεις αποτελούν τον ευκολότερο και γρηγορότερο τρόπο να αποκτήσει κανείς εξοικείωση με την ΚΜΠ (Dickerson, 1999, όπ. αναφ. στο Wang et al., 2022) και αποτελούν πιο προσιτές δραστηριότητες συγκριτικά με τις ελεύθερες (Silber & Cai, 2017). Οι Ngah κ.ά. (2016) και οι Wang κ.ά. (2022) συμφωνούν ότι τόσο οι δομημένες όσο και οι ημι-δομημένες καταστάσεις είναι οι ευκολότερες, αφού παρέχουν την απαραίτητη γνωστική υποστήριξη που χρειάζονται οι μαθητές. Τέλος, επιτρέπουν μια ομαλότερη μετάβαση από τις δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος στην ΚΜΠ (Lavy, 2015).

Η Stoyanova (1997) επισημαίνει ότι τα όρια μεταξύ των κατηγοριών δεν είναι ευδιάκριτα. Μάλιστα, οι Baumanns και Rott (2020) αμφισβητούν την ύπαρξη δυο διακριτών κατηγοριών για τις ημι-δομημένες και ελεύθερες καταστάσεις. Προτείνουν μια ενιαία κατηγορία που ονομάζουν «μη δομημένες καταστάσεις», η οποία ουσιαστικά είναι ένα φάσμα που περιλαμβάνει καταστάσεις με διαφορετικό βαθμό προκαθορισμένων πληροφοριών, από ελεύθερες, χωρίς περιορισμούς καταστάσεις, έως καταστάσεις με πιο λεπτομερείς πληροφορίες.

Ο Silver (1994) διαχωρίζει την ΚΜΠ ανάλογα με το αν λαμβάνει χώρα (α) πριν την επίλυση, (β) κατά τη διάρκεια της επίλυσης και (γ) μετά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος. Σε αδρές γραμμές μπορεί να υποστηριχθεί ότι η ΚΜΠ πριν την επίλυση παραπέμπει στις ελεύθερες και ημι-δομημένες καταστάσεις που προτάθηκαν από τη Stoyanova (1997, 1998), καθώς δεν υπάρχει ένα δοσμένο πρόβλημα προς επίλυση. Η ΚΜΠ αυτής της κατηγορίας συνήθως αναφέρεται ως «δημιουργία» προβλήματος (generation). Στόχος δεν είναι η επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος, αλλά η δημιουργία ενός νέου, από μια εμπειρία ή κατάσταση (τεχνητή ή ρεαλιστική) (Silver, 1994), η οποία βασίζεται σε ένα σύνολο δοσμένων πληροφοριών. Μπορεί να προστεθούν επιπλέον πληροφορίες ή περιορισμοί ή να γίνουν υποθέσεις, αλλά οι αρχικές πληροφορίες πρέπει να διατηρηθούν ως έχουν (Grundmeier, 2015· Stickles, 2011). Ο Malaspina (2021) χρησιμοποιεί τον όρο «ανάπτυξη» προβλημάτων (elaboration), όταν η ΚΜΠ έχει ως αφόρμηση την παρουσίαση ή περιγραφή μιας τεχνητής ή πραγματικής κατάστασης, από την οποία καθορίζονται τα στοιχεία του νέου προβλήματος, επιλέγοντας ή τροποποιώντας τις παρεχόμενες πληροφορίες. Οι άλλες δυο κατηγορίες, η ΚΜΠ κατά τη διάρκεια και η ΚΜΠ μετά την επίλυση, συνδέονται με τις δομημένες καταστάσεις της Stoyanova, όπου υπάρχει ως βάση ένα δοσμένο πρόβλημα στο οποίο εστίαζε αρχικά η διαδικασία επίλυσης. Για αυτές τις καταστάσεις χρησιμοποιείται κυρίως ο όρος «διαμόρφωση» ή «αναδιαμόρφωση» προβλήματος (formulation- reformulation) (Silver, 1994) ή «παραλλαγή» (variation) (Malaspina, 2021).

Συχνά, κατά την επίλυση ενός σύνθετου προβλήματος, ο λύτης χρειάζεται να αναδιαμορφώσει το πρόβλημα, ώστε με κάποιο τρόπο να το καταστήσει πιο προσιτό. Έτσι, δημιουργείται μια νέα εκδοχή του, στην οποία πλέον εστιάζει η επίλυση. Η ερώτηση που χαρακτηρίζει αυτή τη μορφή ΚΜΠ είναι «Πώς μπορώ να διατυπώσω το πρόβλημα ώστε να μπορεί να λυθεί;» (Silver, 1994). Η μορφή αυτή σχετίζεται με το δεύτερο στάδιο επίλυσης προβλήματος που εισηγείται ο Polya (1957), το οποίο αφορά την επινόηση και οργάνωση ενός σχεδίου με τις απαραίτητες ενέργειες για την προσέγγιση της λύσης. Αν ο λύτης αδυνατεί να επιλύσει το πρόβλημα με το οποίο βρίσκεται αντιμέτωπος, ο Polya (1957) ενθαρρύνει την δημιουργία ενός κατάλληλου βοηθητικού προβλήματος που να διευκολύνει την επίλυση του αρχικού, προτείνοντας τις εξής ευρετικές: «Μπορείς να το αναδιατυπώσεις;», «Μπορείς να σκεφτείς ένα πιο προσιτό σχετικό πρόβλημα;», «Ένα πιο γενικό ή ειδικό πρόβλημα;», «Ένα γνωστό πρόβλημα με ίδια ή παρόμοια άγνωστα στοιχεία;». Μάλιστα αναδεικνύει τη σημασία της διδασκαλίας και εκμάθησης της ικανότητας δημιουργίας βοηθητικών προβλημάτων και θεωρεί ότι η ικανότητα εύρεσης εναλλακτικών, ώστε να παρακαμφθεί ένα εμπόδιο που δεν μπορεί να ξεπεραστεί απευθείας, αποτελεί δείγμα της ανθρώπινης ανωτερότητας και ευφυΐας (Polya, 1957).

Η τελευταία κατηγορία που περιγράφει ο Silver (1994) είναι η ΚΜΠ που λαμβάνει χώρα μετά την επίλυση. Αφού ολοκληρωθεί η επίλυση, ο λύτης, αναζητώντας τρόπους να συνεχίσει από το σημείο που βρίσκεται, εξετάζει και τροποποιεί τις αρχικές συνθήκες (Kwek, 2015). Η ερώτηση που χαρακτηρίζει αυτού του είδους την ΚΜΠ είναι «Ποια νέα προβλήματα προκύπτουν από αυτή την κατάσταση/ εμπειρία/πρόβλημα;» (Silver, 1994). Η κατηγορία αυτή παραπέμπει στο τελευταίο στάδιο επίλυσης προβλήματος του Polya (1957), τον έλεγχο της λύσης, όπου ο λύτης επανεξετάζει τη λύση και τη μέθοδο που ακολούθησε και αναλογίζεται αν «μπορεί να χρησιμοποιήσει το αποτέλεσμα ή τη μέθοδο για κάποιο άλλο πρόβλημα». Επισημαίνεται ότι οι μαθητές πρέπει να ενθαρρύνονται να σκεφτούν άλλες περιπτώσεις προβλημάτων όπου θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν και πάλι την ίδια μέθοδο ή να αξιοποιήσουν το αποτέλεσμα που βρήκαν (Polya, 1957).

1.3. Σχέση Κατασκευής και Επίλυσης Προβλήματος

Η κατασκευή και η επίλυση ενός προβλήματος είναι δυο βασικές γνωστικές διεργασίες στη διδασκαλία των μαθηματικών που συμβάλλουν στη θεμελίωση των γνώσεων των μαθητών (Ayllón Blanco, Gómez Pérez, et al., 2016· Voica et al., 2020). Ωστόσο, μέχρι πρόσφατα η ΕΜΠ θεωρούνταν η ουσία των μαθηματικών και βρισκόταν στο επίκεντρο των ερευνών. Σταδιακά άρχισε να αναγνωρίζεται ότι η ανάπτυξη της ικανότητας ΚΜΠ είναι εξίσου σημαντική (Bonotto, 2013· Stoyanova, 1998· Stoyanova & Ellerton, 1996). Αν μείνει στο περιθώριο και ο τελικός στόχος της διδασκαλίας είναι η ΕΜΠ, οι μαθηματικές εμπειρίες των μαθητών δεν ολοκληρώνονται και διακόπτονται απότομα (Ellerton, 2013). Μόνο αν εμπλακούν στη δημιουργία προβλημάτων θα γίνουν επιτυχημένοι λύτες, θα αντιληφθούν τις πραγματικές τους δυνατότητες και θα βιώσουν τον ενθουσιασμό των μαθηματικών εξερευνήσεων και ανακαλύψεων (Kwek, 2015). Πρόκειται για δυο διαδικασίες που μοιάζουν σε μεγάλο βαθμό και τα όρια μεταξύ τους είναι δυσδιάκριτα (Ruthven, 2020). Αντί να θεωρούνται ως εντελώς διαφορετικές και αντίθετες ή ως δυο διαδικασίες που αναπτύσσονται παράλληλα, οι περισσότεροι ερευνητές πλέον συμφωνούν πως είναι συνυφασμένες και αλληλοσυμπληρώνονται (Brown & Walter, 2005· Crespo, 2015· English, 1997α· Espinoza et al., 2014· Kojima et al., 2015· Kónya, 2022· Ruthven, 2020).

Ο Dillon (1982) υποστήριξε ότι η ΚΜΠ προηγείται της ΕΜΠ, ενώ άλλοι ερευνητές θεωρούν πως την προϋποθέτει και αποτελεί την φυσική της συνέχεια, καθώς έχει συνήθως ως αφορμή υπάρχοντα προβλήματα ή σημαντικές μαθηματικές αναζητήσεις (Crespo, 2015· Kónya, 2022). Επί της ουσίας όμως, η ΚΜΠ είναι αναπόσπαστο κομμάτι της ΕΜΠ και λαμβάνει χώρα καθ' όλη τη διάρκεια αυτής (Cifarelli & Sevim, 2015· Cifarelli & Sheets, 2009· Silver, 1994). Πολύ συχνά, η διαδικασία επίλυσης περίπλοκων προβλημάτων περιλαμβάνει τη δημιουργία και επίλυση επιμέρους, βοηθητικών προβλημάτων ή την τροποποίηση και «αναδόμηση» του αρχικού, προκειμένου αυτό να «ξεκλειδωθεί» (Brown & Walter, 2005· Cifarelli & Sheets, 2009· Crespo, 2015· Polya, 1957). Επιπλέον, το αποτέλεσμα και η λύση του προβλήματος μπορεί να οδηγήσουν σε νέα ερωτήματα (Cifarelli & Sheets, 2009). Πολύ συχνά, δεν γίνεται αντιληπτή ή δεν εκτιμάται πλήρως η σημασία της λύσης, αν ο λύτης δεν θέσει νέα ερωτήματα και προβλήματα (Brown & Walter, 2005, 2013). Η ΚΜΠ οδηγεί τους μαθητές να συλλογιστούν πέρα από τη λύση, να αναρωτηθούν για την προέλευση των ιδεών που περιέχει ή να σκεφτούν προβλήματα που μπορούν να προκύψουν αν τα δεδομένα τροποποιηθούν ή επεκταθούν (English, 1997α,β).

Τόσο η ΚΜΠ όσο και η ΕΜΠ απαιτούν την αναγνώριση των βασικών στοιχείων ενός προβλήματος και των σχέσεων μεταξύ τους, αλλά και με τη λύση του (English, 1997α,β). Προφανώς, όμως, διαφέρουν ως προς τα χαρακτηριστικά και τη μορφή των έργων που περιλαμβάνουν. Η ΕΜΠ βασίζεται στην κατανόηση μιας κατάστασης, όπου ο λύτης πρέπει να εντοπίσει μια μαθηματική δομή από δοσμένες πληροφορίες και να φτάσει σε μια σωστή λύση, χωρίς να γνωρίζει μια στρατηγική εκ των προτέρων (Geteregechi, 2023· Kojima et al., 2015). Αντιθέτως, η ΚΜΠ είναι μια παραγωγική διαδικασία που απαιτεί τη δημιουργία και σύνθεση πληροφοριών (Kojima et al., 2015). Στόχος είναι ο συνδυασμός διαφορετικών στοιχείων σε ένα πρόβλημα με συνοχή που να επιλύεται με μια στρατηγική ή ένα μαθηματικό μοντέλο (Geteregechi, 2023). Στην ΚΜΠ υιοθετείται μια διαφορετική οπτική, καθώς οι μαθητές αντί να απαντούν ερωτήσεις, καλούνται να τις θέτουν και αντί να ερμηνεύουν πληροφορίες, να τις παρέχουν οι ίδιοι (van Bommel & Palmér, 2021). Επιπρόσθετα, τα έργα ΚΜΠ είναι ανοιχτά, δηλαδή επιδέχονται ποικίλες σωστές απαντήσεις (Puspitasari et al., 2019· Silver & Cai, 2005). Σε σχέση με την ΕΜΠ, η ΚΜΠ αποτελεί πιο δύσκολο και απαιτητικό έργο γνωστικά (Kojima et al., 2015· Mestre, 2002· Wang et al., 2022), διότι απαιτεί δημιουργική σκέψη και βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (Bevan & Capraro, 2021). Τέλος, ενώ στην

ΕΜΠ εύκολα γίνεται αντιληπτό πότε ένα πρόβλημα έχει λυθεί, κατά την ΚΜΠ συχνά δεν είναι σαφές πότε έχει ολοκληρωθεί η κατασκευή του (Cai et al., 2022).

Η συσχέτιση της ΚΜΠ με την ΕΜΠ έχει μελετηθεί αρκετά και επιβεβαιώνεται από πολλές έρευνες (Arikan & Ünal, 2015· Cai & Hwang, 2002· Cai et al., 2013· Chen et al., 2007, 2013, 2015· Kovács et al., 2023· Silver & Cai, 1996· Yang & Xin 2022· Zhang, Cai, et al., 2022). Η επίδοση των μαθητών στην ΕΜΠ παρουσιάζει υψηλή συσχέτιση με την επίδοση στην ΚΜΠ, καθώς οι καλοί λύτες κατασκευάζουν περισσότερα επιλύσιμα και πιο περίπλοκα προβλήματα και επιδεικνύουν καλύτερη κατανόηση των έργων ΚΜΠ, συγκριτικά με τους λιγότερο καλούς (Silver & Cai, 1996· Zhang, Cai, et al., 2022). Οι Cai και Hwang (2002) αναφέρουν πως όσοι δεν δημιούργησαν κανένα πρόβλημα ή δημιούργησαν προβλήματα χωρίς νόημα, είχαν και το χαμηλότερο ποσοστό σωστών απαντήσεων στην ΕΜΠ. Εκτός από την ισχυρή συσχέτιση, οι Kovács κ.ά. (2023) και οι Μουσουλίδης κ.ά. (2003) υποστήριξαν ότι η ικανότητα ΕΜΠ μπορεί πιθανώς να προβλέψει την ικανότητα ΚΜΠ και το αντίστροφο.

Από την άλλη, η Crespo (2003) υποστηρίζει ότι η σχέση μεταξύ ΕΜΠ και ΚΜΠ δεν είναι ξεκάθαρη. Εν αντιθέσει με τις προηγούμενες έρευνες, αναφέρει ότι οι καλοί λύτες δεν είναι πιο πιθανό να κατασκευάσουν καλύτερα προβλήματα από τους αδύναμους. Την ίδια άποψη εκφράζουν και οι Kojima κ.ά. (2015) και Van Harpen και Sriraman (2013), τονίζοντας ότι ακόμα κι αν κανείς μπορεί να επιλύσει προβλήματα εύκολα, μπορεί να μην είναι το ίδιο καλός στην ΚΜΠ. Αντίστροφα, οι Zhang, Cai, κ.ά. (2022) διαπίστωσαν πως ακόμα κι όσοι δεν ήταν καλοί λύτες, ήταν σε θέση να δημιουργήσουν περίπλοκα και επιλύσιμα μαθηματικά προβλήματα. Ταυτόχρονα, η δημιουργία επιλύσιμων προβλημάτων δεν εγγυάται πάντα κατανόηση της διαδικασίας ΚΜΠ ή της ΕΜΠ ή του μαθηματικού περιεχομένου (Cankoy, 2014). Οι Özgen κ.ά. (2019) αποδίδουν την αποτυχία στην δημιουργία επιλύσιμων προβλημάτων σε ανεπαρκείς δεξιότητες ΕΜΠ, όμως, υπογραμμίζουν πως ακόμα και αν κανείς μπορεί να δημιουργήσει ένα πρόβλημα, δε σημαίνει ότι μπορεί και να το λύσει.

1.4. Εφαρμογές και οφέλη ΚΜΠ

Σχετικά πρόσφατα ξεκίνησε να εκδηλώνεται εντονότερο ερευνητικό ενδιαφέρον για την ΚΜΠ και τις εφαρμογές της. Πλέον, αποτελεί στόχο, αλλά και εργαλείο, τόσο στην ερευνητική όσο και τη διδακτική πράξη (Cai & Leikin, 2020). Ως ερευνητικός στόχος αποσκοπεί στη μελέτη και αξιολόγηση των τύπων, της ποικιλίας και της ποιότητας των προβλημάτων, των στρατηγικών που χρησιμοποιούνται και της ικανότητας ΚΜΠ, καθώς και των συναισθηματικών παραγόντων που την διευκολύνουν ή την εμποδίζουν. Ως ερευνητικό εργαλείο αξιοποιείται για τη μελέτη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών και άλλων φαινομένων. Ως στόχος της διδασκαλίας αποσκοπεί στη δημιουργία ικανών «κατασκευαστών» προβλημάτων, που να μπορούν να κατασκευάζουν και να επιλύουν μαθηματικά προβλήματα. Ως εργαλείο στη διδασκαλία των μαθηματικών αποσκοπεί στην ανάπτυξη θετικών συναισθημάτων, αλλά και της μαθηματικής σκέψης (Cai & Leikin, 2020). Συνδέεται με πολλαπλά οφέλη και θετικά αποτελέσματα, τόσο γνωστικά όσο και κοινωνικό-συναισθηματικά, τα οποία αφορούν τους μαθητές, αλλά και τους εκπαιδευτικούς (Barlow & Cates, 2006· Cai & Leikin, 2020· Kul & Çelik, 2020· Rosli et al., 2014· Wang et al., 2022).

1.4.1. Γνωστικά οφέλη

Αδιαμφισβήτητα, η ΚΜΠ παρέχει περισσότερες μαθησιακές ευκαιρίες για μαθηματική ανάπτυξη (Cai et al., 2013· Cai et al., 2020· Zhang, Cai, et al., 2022). Ένα βασικό πλεονέκτημα είναι ότι δύναται να βελτιώσει την κατανόηση (Barlow & Cates, 2006· Bevan & Capraro, 2021· Cai, 2022· Malaspina, 2013). Μέσα από τα γνωστικά απαιτητικά της έργα, οι μαθητές εκτός από διαδικαστική, αποκτούν και βαθιά εννοιολογική κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου και βασικών εννοιών και αρχών (Ayllón Blanco, Gómez Pérez, et al., 2016· Bicer et al., 2020· Chen & Cai, 2020· Kwek, 2015· Kwon & Capraro, 2021· Malaspina, 2013· Stoyanova, 1998· Zhang & Cai, 2021). Ακόμα, μειώνεται το γνωστικό φορτίο (Stoyanova, 1997) και απελευθερώνεται η εργαζόμενη μνήμη (Kapur, 2015).

Κατά συνέπεια, οδηγεί σε βελτίωση της γενικότερης μαθηματικής επίδοσης, όπως αναδεικνύει πλήθος ερευνών (Bevan et al., 2019· Chen et al., 2013· Guvercin et al., 2014· Irvine, 2017· Kaur & Rosli, 2021· Kul & Çelik, 2020· Kwon & Capraro 2021· Lowrie, 2002· Rosli et al., 2014· Stoyanova, 1997· Wang et al., 2022). Η ΚΜΠ ενθαρρύνει τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις τους και να τις ενισχύσουν, δημιουργώντας νέα γνώση (Puspitasari et al., 2019· Yang & Xin, 2022). Είναι ένας φυσικός τρόπος να εφαρμοστούν οι νεοαποκτηθείσες γνώσεις και δεξιότητες, αλλά και το τελικό στάδιο κατά την εκμάθηση μιας έννοιας (Ellerton, 2015). Μπορεί να οδηγήσει σε γνωστική σύγκρουση (Chen & Cai, 2020) και κατ’ επέκταση σε αναγνώριση των λαθών και αποφυγή τους κατά τη δημιουργία νέων γνώσεων (Fernández-Bravo & Barbarán, 2016). Η αύξηση των γνώσεων αποδίδεται και στο ότι η ΚΜΠ ευνοεί τις συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών ικανοτήτων που έχουν αποκτηθεί ξεχωριστά (Ayllón Blanco & Gómez Pérez, 2014). Συχνά οι μαθητές δημιουργούν προβλήματα τα οποία για να επιλυθούν απαιτούν γνώσεις που ακόμη δεν κατέχουν, μαθαίνουν να εντοπίζουν τα μαθηματικά στο περιβάλλον τους και τα συνδέουν και με άλλα πεδία γνώσεων (Malaspina, 2013), με αποτέλεσμα να διευρύνεται η αντίληψή τους για το αντικείμενο αυτό (Kwek, 2015). Φυσικά, επιδρά θετικά και στη διατήρηση των γνώσεων (Guvercin et al., 2014).

Σημαντική είναι η επίδραση και στον λογικό συλλογισμό (Arikan & Ünal, 2014· Chen & Cai, 2020· Cunningham, 2004· Kónya, 2022). Η ΚΜΠ ενισχύει την κριτική σκέψη και την διερευνητική διάθεση των μαθητών, βοηθώντας τους να σταθούν κριτικά απέναντι στις γνώσεις που αποκτούν (Arikan & Ünal, 2014· Cunningham, 2004· Ellerton, 2013· Kaur & Rosli, 2021· Malaspina, 2013). Ταυτόχρονα, συμβάλλει στην ανάπτυξη μεταγνωστικών ικανοτήτων και δεξιοτήτων αναστοχασμού (Chua & Toh, 2022· Cunningham, 2004· Fernández-Bravo & Barbarán, 2016· Kónya, 2022· Singer & Voica, 2015), καθώς τους παροτρύνει να αναγνωρίσουν τα δυνατά τους σημεία, να παρακολουθούν τον συλλογισμό τους και τα συναισθήματά τους και να αντιλαμβάνονται τις γνωστικές διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα (Fernández-Bravo & Barbarán, 2016· Voica et al., 2020).

Οι Calabrese κ.ά. (2022) αναφέρουν πως το 75% των ερευνών που μελέτησαν συσχετίζουν τη διδασκαλία στην ΚΜΠ με θετική επίδραση στην ικανότητα ΕΜΠ. Πράγματι, το γεγονός ότι οι μαθητές αναστοχάζονται σχετικά με τα μαθηματικά για να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα, συμβάλλει στη βελτίωση των δεξιοτήτων ΕΜΠ (Chen et al., 2013, 2015· Cifarelli & Sheets, 2009· Kopparla et al., 2019· Kul & Çelik, 2020· Malaspina, 2013· Rosli et al., 2014· Wang et al., 2022) και ενθαρρύνει τη χρήση προχωρημένων ευρετικών και στρατηγικών ΕΜΠ (Cai et al., 2013· Cai et al., 2015· Cai et al., 2020· Kónya, 2022· Zhang & Cai, 2021). Ακόμα, ενισχύεται η βαθύτερη κατανόηση των προβληματικών καταστάσεων (Cai et al., 2013· Cai et al., 2015· Cai et al., 2020· Singer, Ellerton, et al., 2011· Yang & Xin, 2022), της μαθηματικής δομής ενός προβλήματος, των σχέσεων μεταξύ των βασικών στοιχείων που εμφανίζονται και της σχέσης του προβλήματος με τη λύση του (English, 2020· Espinoza et al., 2014· Kopparla et al., 2019· Singer, Ellerton, et al., 2011). Η ΚΜΠ μετά την επίλυση διευρύνει την αντίληψη του λύτη για το πρόβλημα και ενθαρρύνει τη γενίκευση (Cifarelli & Sevim, 2015). Ακόμα και αν οι μαθητές δεν διδαχθούν ρητά και συστηματικά στρατηγικές ΕΜΠ, αλλά μόνο ΚΜΠ, παρουσιάζουν μεγάλη πρόοδο στην ΕΜΠ (Chen et al., 2015). Ακόμα και όσοι δεν μπορούν να επιλύσουν μόνοι τους προβλήματα, μέσω της ΚΜΠ εκτίθενται σε ποικίλες μαθηματικές καταστάσεις και βελτιώνονται στην ΕΜΠ (Lowrie, 2002). Αντιστρόφως, μαθητές που διδάχθηκαν στρατηγικές ΕΜΠ βελτίωσαν στατιστικά σημαντικά την επίδοσή τους και στην ΚΜΠ, κάτι που ομολογουμένως υποδεικνύει μια συσχέτιση μεταξύ των δυο δραστηριοτήτων (Kopparla et al., 2019).

Πολλοί ερευνητές τονίζουν ότι η ΚΜΠ προωθεί και συμβάλλει στην ανάπτυξη της δημιουργικής σκέψης (Arikan & Ünal, 2014· Ayllón Blanco & Gómez Pérez, 2014· Bairac, 2005· Bicer et al., 2020· Bonotto & Dal Santo, 2015· Chen & Cai, 2020· Grundmeier, 2015· Kaur & Rosli, 2021· Kónya, 2022· Lowrie, 2002· Malaspina, 2013· Silver, 1994). Εξ ορισμού απαιτεί δημιουργικότητα, αποδεικνύοντας ότι τα μαθηματικά μπορούν να είναι δημιουργικά, ενώ ταυτόχρονα επιτρέπει την έκφραση της δημιουργικότητας των μαθητών (Bevan & Capraro, 2021· Bevan et al., 2019· Bicer et al., 2020). Έτσι, τους απομακρύνει από την εμμονή με την ΕΜΠ, όπου ακολουθούν συγκεκριμένους τρόπους σκέψης και δράσης (Chua & Toh, 2022). Τους ενθαρρύνει να εξερευνήσουν ένα θέμα από μια νέα οπτική, να αναζητήσουν νέα προβλήματα και ιδέες, εναλλακτικές μεθόδους και καινοτόμες λύσεις και να έρθουν σε επαφή με νέους τρόπους σκέψης σχετικά με τα μαθηματικά (Brown & Walter, 2005· Silber & Cai, 2017· Singer, Ellerton, et al., 2011). Ο Silver (1997) υποστηρίζει ότι η δημιουργικότητα φανερώνεται τόσο κατά τη δημιουργία ενός προβλήματος όσο και στο τελικό αποτέλεσμα, μέσα από το πόσο πρωτότυπο είναι, τον αριθμό των τροποποιήσεων που έλαβαν χώρα ή τον αριθμό των διαφορετικών προσεγγίσεων προς τη λύση.

1.4.2. Συναισθηματικά οφέλη

Η θετική επίδραση της ΚΜΠ στα συναισθήματα, τις στάσεις και τις πεποιθήσεις των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά αναδεικνύεται από πολλές έρευνες και σύγχρονες μετά-αναλύσεις (Bevan & Capraro, 2021· Bevan et al., 2019· Cai et al., 2015· Chen et al., 2013, 2015· Ellerton et al., 2015· Grundmeier, 2003· Guvercin et al., 2014· Irvine, 2017· Kul & Çelik, 2020· Rosli et al., 2014). Η απόκτηση θετικότερης στάσης οδηγεί με τη σειρά της σε μείωση του άγχους και του φόβου που αισθάνονται πολλοί για τα μαθηματικά (Ayllón Blanco & Gómez Pérez, 2014), συμπεριλαμβανομένων και όσων αντιμετωπίζουν δυσκολίες στα μαθηματικά και έχουν μειωμένη αυτοπεποίθηση (Ellerton, 1986· Silver, 1994). Αυτό ίσως οφείλεται στο ότι έχουν διδαχθεί ότι η επιτυχία συνδέεται αποκλειστικά με την εύρεση μιας σωστής απάντησης (Brown & Walter, 2005· Moses et al., 2013). Η ΚΜΠ παρέχει σε μαθητές με αρνητικές εμπειρίες με την τυπική διδασκαλία των μαθηματικών την ευκαιρία να εμπλακούν ξανά με τα μαθηματικά σε ένα διαφορετικό πλαίσιο (Silber & Cai, 2021).

Αναμφίβολα, η διατύπωση προβλημάτων είναι λιγότερο απειλητική συγκριτικά με την επίλυσή τους (Brown & Walter, 2005). Αυτό συμβαίνει διότι ένα πρόβλημα μπορεί να προσεγγιστεί με πολλούς τρόπους, πέρα από την εύρεση της σωστής απάντησης (Ellerton et al., 2015· Jonassen, 2004). Δεν υπάρχουν σωστές απαντήσεις και οι μαθητές ενθαρρύνονται να πάρουν ρίσκα, αντί να ανησυχούν για την ορθότητα των απαντήσεών τους (Brown & Walter, 2005· Moses et al., 2013· van Bommel & Palmér, 2021· Yang & Xin, 2022). Όταν ανακαλύπτουν ότι ο καθένας προσεγγίζει διαφορετικά ένα έργο και μπορούν να προτείνουν ιδέες χωρίς να φοβούνται την αποτυχία, κυριαρχεί μια ατμόσφαιρα ασφάλειας και δεκτικότητας να δοκιμάσουν νέα πράγματα (Schindler & Bakker, 2020). Έτσι, τα μαθηματικά δεν μοιάζουν τόσο απειλητικά (Yang & Xin, 2022) και η διδασκαλία γίνεται πιο «φιλική» (Winograd, 1993). Όπως είναι λογικό, η ενασχόληση με την ΚΜΠ συνοδεύεται από θετικά συναισθήματα, όπως ενθουσιασμός, χαρά, ανακούφιση, ευχαρίστηση και ικανοποίηση (Schindler & Bakker, 2020· Voica et al., 2020).

Πράγματι, πολλοί ερευνητές επιβεβαιώνουν ότι αυξάνει την κινητοποίηση και το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά γενικότερα (Ayllón Blanco & Gómez Pérez, 2014· Ayllón Blanco, Gallego Ortega et al., 2016· Bevan et al., 2019· Bonotto, 2013· Christidamayani & Kristanto, 2020· Irvine, 2017· Kaur & Rosli, 2021· Malaspina, 2013· Silver, 1994). Οι μαθητές κινητοποιούνται εξ αρχής, καθώς έρχονται σε επαφή με ένα νέο έργο με το οποίο δεν είναι εξοικειωμένοι, αισθάνονται έκπληξη και παρακινούνται από την ελευθερία που προσφέρει (Voica et al., 2020). Έχουν την ελευθερία να εκφραστούν γύρω από μαθηματικές καταστάσεις και ιδέες και να αξιοποιήσουν ποικίλα πλαίσια για τα προβλήματά τους (Bevan & Capraro, 2021), καθιστώντας τα πιο ενδιαφέροντα από αυτά των εγχειριδίων (Winograd, 1992). Συνεπώς, κινητοποιούνται περισσότερο να ασχοληθούν με τα δικά τους προβλήματα και ταυτόχρονα να τα καταστήσουν ενδιαφέροντα και για τους υπολοίπους (Silver, 1994· Silver et al., 1996).

Το βασικότερο είναι ότι τα μαθηματικά γίνονται πιο δελεαστικά, αφού συσχετίζονται με τον κόσμο τους, τις εμπειρίες τους και τα προσωπικά τους ενδιαφέροντα (Cai & Leikin, 2020· Chua & Toh, 2022· Cunningham, 2004· Ellerton et al., 2015· English, 2020· Possamai & Allevato, 2023· Silber & Cai, 2021· Silver, 1994· Stoyanova, 1998). Με τη σύνδεση αυτή γίνεται φανερή η αξία και οι εφαρμογές τους στην αληθινή ζωή, πέρα από το σχολικό πλαίσιο (Bevan & Capraro, 2021· Cai, 2022· Kovács et al., 2023). Οι μαθητές νοηματοδοτούν τη γνώση που αποκτούν, εφαρμόζοντας την σε ένα εύρος καταστάσεων (Kopparla et al., 2019). Αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά σαν κάτι που τους ανήκει, καθώς τα προβλήματά τους αφορούν ρεαλιστικές καταστάσεις της δικής τους καθημερινότητας (Ayllón Blanco & Gómez Pérez, 2014· Chen & Cai, 2020) και αντικατοπτρίζουν τις εμπειρίες τους και τις προσωπικές τους αξίες (Silver, 1994· Silver & Cai, 1996). Έτσι, δημιουργείται μια προσωπική σχέση με τα μαθηματικά, τα οποία προσωποποιούνται, γίνονται πιο ανθρώπινα και αυθεντικά (Winograd, 1993).

Αδιαμφισβήτητα, η πρωτότυπη και ενδιαφέρουσα μορφή του μαθήματος οδηγεί σε πιο παραγωγική και διασκεδαστική μάθηση (English 1997β), σε αυξημένη εμπλοκή και ενεργότερη συμμετοχή (Ayllón Blanco & Gómez Pérez, 2014· Brown & Walter, 2013· Chen & Cai, 2020· Chua & Toh, 2022· Cunningham, 2004· Guvercin et al., 2014· Irvine, 2017). Αντίθετα με την παραδοσιακή διδασκαλία, όπου ο έλεγχος που έχουν οι μαθητές είναι ελάχιστος, στο πλαίσιο της ΚΜΠ το δομημένο πλαίσιο που κυριαρχεί στις περισσότερες τάξεις και τους θέτει σε παθητικό ρόλο περιορίζεται (Ellerton, 1986, 2013), αφού αποκτούν ενεργό ρόλο και κατασκευάζουν από κοινού τη γνώση (Brown & Walter, 2005· Crespo 2015). Συμμετέχουν ενεργά στο σχεδιασμό της και αποκτούν έναν βαθμό ελέγχου ως προς το περιεχόμενο και τις δραστηριότητες που παρουσιάζονται στην τάξη (Cankoy, 2014· Crespo, 2015· Lowrie & Whitland, 2000· Voica et al., 2020). Συνεπώς, δημιουργείται ένας νέος προσανατολισμός αναφορικά με το ποιος έχει την ευθύνη της μάθησης (Brown & Walter, 2005). Όταν εξερευνούν προβλήματα της επιλογής τους, αναγνωρίζουν τις ιδέες τους μέσα σε αυτά και συλλογίζονται πάνω στις εκπαιδευτικές τους επιπτώσεις, αποκτούν μεγαλύτερη ευθύνη και κυριότητα της μάθησής τους (Bevan & Capraro, 2021· Bevan et al., 2019· Brown & Walter, 2013· Grundmeier, 2003· Guvercin et al., 2014· Irvine, 2017· Kovács et al., 2023· Stoyanova, 1998· Van den Heuvel-Panhuizen et al., 1995· Wang et al., 2022). Κατ' αυτόν τον τρόπο, όταν τους επιτρέπεται να πάρουν αποφάσεις για τα προβλήματα που δημιουργούν, να επιλέξουν τη δυσκολία τους και ακόμα και να τα απορρίψουν, αποκτούν περισσότερη αυτονομία (Voica et al., 2020). Φυσικά, υπάρχουν και μαθητές που προσλαμβάνουν αρνητικά αυτή την αυτονομία και αντιδρούν στην εισαγωγή ανοιχτών προσεγγίσεων, όπως η ΚΜΠ, οι οποίες αλλάζουν τη δυναμική της τάξης και μετατοπίζουν μέρος της ευθύνης σε αυτούς (Silver, 1994· van Bommel & Palmér, 2021).

Εύλογα προκύπτει το συμπέρασμα ότι η ΚΜΠ διευκολύνει την επιτυχία. Καθώς η επιτυχία στην ΚΜΠ γίνεται αντιληπτή διαφορετικά από τον καθένα, ανάλογα με τα επιλεγόμενα κριτήρια, όλοι αισθάνονται ότι μπορούν να ανταπεξέλθουν αποτελεσματικά και ενισχύεται η αυτοπεποίθηση και η εμπιστοσύνη στις ικανότητές τους (Voica et al., 2020). Ακόμα, η αυτοπεποίθησή τους αυξάνεται επειδή αποκτούν τον έλεγχο των προβλημάτων (Kwek, 2015), νοιώθουν άνετα να κάνουν ερωτήσεις και λάθη (Bevan & Capraro, 2021) και συζητούν ελεύθερα με τους εκπαιδευτικούς (Guvercin et al., 2014). Έτσι, όσο οι ερωτήσεις και οι παρατηρήσεις τους λαμβάνονται υπόψη, αυξάνεται η αυτοεκτίμηση και η αυτοαποτελεσματικότητά τους (Guvercin et al., 2014· Irvine 2017· Malaspina, 2013· Voica et al., 2020).

1.4.3. Κοινωνικά οφέλη

Κατά την εφαρμογή της ΚΜΠ, η φύση της επικοινωνίας στην τάξη αλλάζει (Stoyanova, 1998) και ευνοείται η δημιουργία μιας συνεργατικής ατμόσφαιρας και η ομαδικότητα (Chen & Cai, 2020· Moses et al., 2013). Παράλληλα βελτιώνονται ποικίλες κοινωνικές δεξιότητες (Cai & Leikin, 2020· Guvercin et al., 2014), όπως η ικανότητα συζήτησης, η επιχειρηματολογία και η έκφραση ιδεών (Kónya, 2022).

Ένα από τα σπουδαιότερα οφέλη της, όμως, είναι ότι μπορεί να αξιοποιηθεί ως στρατηγική στο πλαίσιο της διαφοροποιημένης διδασκαλίας, με σκοπό την εμπλοκή όλων των μαθητών (Chua & Toh, 2022). Παρ' όλο που τα έργα ΚΜΠ είναι γνωστικά απαιτητικά, χαρακτηρίζονται από ευελιξία και μπορούν εύκολα να προσαρμοστούν για μαθητές διαφορετικών ικανοτήτων και να διευκολύνουν την πρόσβαση και την ισάξια συμμετοχή, χωρίς να αποκλείεται κανένας (Cai, 2022· Cai & Hwang, 2023· English, 2020· Silber & Cai, 2021). Όπως επισημαίνουν οι Cai και Hwang (2023) και Zhang και Cai (2021), το «κατώφλι» της ΚΜΠ είναι χαμηλό, καθώς όλοι, ανεξαρτήτως ικανοτήτων, έχουν πρόσβαση σε αυτήν και ταυτόχρονα το «ταβάνι» της υψηλό, αφού όλοι έχουν ευκαιρίες να εμπλακούν σε απαιτητικά έργα αξιοποιώντας το μέγιστο των δυνατοτήτων τους. Σύμφωνα με τους Cai και Hwang (2023), μπορεί τα προβλήματα που δημιουργούνται από μαθητές διαφορετικών ικανοτήτων να διαφέρουν ως προς τη δυσκολία και την πολυπλοκότητα και οι μαθητές με λιγότερο καλή κατανόηση των μαθηματικών να κατασκευάζουν απλούστερα προβλήματα, εντούτοις, δεν παύουν να έχουν έρθει αντιμέτωποι με μια πρόκληση που αντιστοιχεί στο επίπεδο και τις γνώσεις τους. Όλοι ενδυναμώνονται να εξερευνήσουν προβληματικές καταστάσεις και θέματα που άπτονται των ενδιαφερόντων τους (English, 1997α), αξιοποιώντας ο καθένας τις γνώσεις και την κατανόησή του σχετικά με αυτές (Silber & Cai, 2021). Αν η ΚΜΠ εφαρμοστεί σωστά, προάγει τις διαφορετικές δυνατότητες όλων, εξαλείφοντας τα όρια μεταξύ μαθητών με διαφορετικά επίπεδα ικανοτήτων (Bonotto, 2013· Chen & Cai, 2020). Φυσικά, η υποστήριξη όσων έχουν χαμηλότερη επίδοση και λιγότερη εμπειρία κατά την εφαρμογή της ΚΜΠ κρίνεται αναγκαία (Christidamayani & Kristanto, 2020).

Οι Brown και Walter (2005) τονίζουν ότι οι επιπτώσεις της ενσωμάτωσης της ΚΜΠ στην εκπαίδευση είναι ακόμα βαθύτερες. Θεωρούν ότι προετοιμάζει τους μαθητές να αμφισβητήσουν και να ελέγξουν πολλές από τις υποθέσεις και τα συμπεράσματα που είναι αποδεκτά στην κοινωνία εδώ και χρόνια. Αυτό συμβαίνει διότι αποτελεί μια ευκαιρία για ερμηνεία και κριτική ανάλυση της πραγματικότητας (Bonotto, 2013· Bonotto & Dal Santo, 2015). Μέσα από την ενασχόληση με την ΚΜΠ οι μαθητές παροτρύνονται να θέτουν και να απαντούν ερωτήματα που έχουν πραγματική προσωπική ή κοινωνική αξία (Crespo, 2015). Επιπλέον, η δημιουργία ενός προβλήματος από μια μαθηματική ή μη κατάσταση μπορεί να οδηγήσει στην επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής, τα οποία είναι πιο περίπλοκα από αυτά που περιγράφονται στα εγχειρίδια (Milinković, 2015). Οι Silverman κ.ά. (1992) και η Stoyanova (1998) θεωρούν ότι η ΚΜΠ αποσκοπεί στο να προετοιμάσει τους μαθητές να εστιάζουν συνειδητά στα μαθηματικά στην καθημερινή τους ζωή, να συλλογίζονται πάνω σε αυτά και να τα χρησιμοποιούν με έξυπνο τρόπο, δεδομένου ότι στη ζωή τους απαιτείται να είναι ικανοί να θέτουν ερωτήσεις και να επιλύουν προβλήματα που απορρέουν από τις εμπειρίες τους. Η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να δημιουργούν προβλήματα και να τα μαθηματικοποιούν μπορεί να τους ενδυναμώσει και να τους βοηθήσει να ελέγχουν την καθημερινότητά τους πιο αποτελεσματικά (Stoyanova, 1998). Άλλωστε, όπως σχολιάζουν οι Singer κ.ά. (2013), η ικανότητα ΚΜΠ συμβάλλει στη λήψη καλών αποφάσεων.

1.4.4. Η ΚΜΠ ως μέσο αξιολόγησης

Η ΚΜΠ αποτελεί έναν «καθρέφτη» ο οποίος αντανακλά το περιεχόμενο και τον χαρακτήρα της μαθηματικής εκπαίδευσης που έχουν λάβει οι μαθητές (Silver, 1994). Έτσι, αξιοποιείται και ως μέσο αξιολόγησης για την απόκτηση άλλων μαθηματικών γνώσεων (Arikan & Ünal, 2014· Ayllón Blanco & Gómez Pérez, 2014· Kwek, 2015· Kwek & Leng, 2008· Lin, 2004· Mestre, 2002· Papadopoulos et al., 2022· Silver & Cai, 2005· Stoyanova, 1998). Προσφέρει πολύτιμες πληροφορίες για τον βαθμό στον οποίο οι γνώσεις τους έχουν αναπτυχθεί και έχουν συνοχή, πως εφαρμόζονται και μεταφέρονται σε διάφορα πλαίσια, αλλά και πως δημιουργείται νέα γνώση (Bevan & Capraro, 2021· Cai et al., 2015· Lin, 2004· Lowrie & Whitland, 2000· Mestre, 2002· Silver, 1994), κάτι που ενδεχομένως να μην φανερωνόταν διαφορετικά (Espinoza et al., 2022). Τα προβλήματα των μαθητών αποτελούν ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα για την κατανόηση τους σε μια δεδομένη στιγμή (Barlow & Cates, 2006· Chua & Toh, 2022· Espinoza et al., 2014· Van den Heuvel-Panhuizen et al., 1995). Ο εκπαιδευτικός μπορεί να καταλάβει τι θεωρούν δύσκολο ή εύκολο και να εντοπίσει τις δυνατότητες και αδυναμίες τους (Ellerton, 1986· Stoyanova, 1998· Van den Heuvel-Panhuizen et al., 1995). Ταυτόχρονα, φανερώνεται η συλλογιστική τους πορεία (Ayllón Blanco & Gómez Pérez, 2014· Cai, 2022· Cai & Hwang, 2020· English, 2020· Mestre, 2002· Silver, 1994). Εντοπίζονται συστηματικοί τρόποι σκέψης και πιθανές παρανοήσεις, καθώς και η πηγή των κενών στη σκέψη τους (απουσία γνώσεων, ελλιπείς γνώσεις ή μη συστηματική εφαρμογή τους) (Bevan & Capraro, 2021· Kwek & Leng, 2008· Mestre, 2002· Puspitasari et al., 2019). Γίνεται κατανοητό ότι είναι ένα ισχυρότατο εργαλείο που μπορεί να καθοδηγήσει και να οργανώσει τη διδασκαλία (Mestre, 2002· Puspitasari et al., 2019). Ωστόσο, το να ζητηθεί απλώς από τους μαθητές να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα, δεν αρκεί για να φανερώσει την κατανόηση και τη συλλογιστική τους, αν δεν συνοδεύεται από την κατάλληλη επεξεργασία των προβλημάτων στην τάξη (Kwek, 2015).

1.5. Η ΚΜΠ στη μαθηματική εκπαίδευση και το πρόγραμμα σπουδών

Η απουσία της ΚΜΠ από τη μαθηματική εκπαίδευση όλων των βαθμίδων έχει επισημανθεί εκτενώς. Μόλις τις τελευταίες δεκαετίες έχει αρχίσει να αναγνωρίζεται ως μια εξαιρετικά σημαντική δραστηριότητα (Kojima et al., 2015· Silver, 1994· Singer et al., 2013· Stoyanova, 1998). Η σύγχρονη έρευνα τη θεωρεί βασικό στοιχείο της διδασκαλίας για ένα ισορροπημένο πρόγραμμα σπουδών (Bevan & Capraro, 2021· Kaur & Rosli, 2021· Kwon & Capraro, 2021) και καλεί να ενσωματωθούν δραστηριότητες που να την προάγουν στα προγράμματα σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια (Nicolaou & Philippou, 2007). Πρέπει να ενσωματωθεί στο εκπαιδευτικό σύστημα, τόσο σαν μέσο διδασκαλίας, ως μια εναλλακτική προσέγγιση που ενισχύει τη βαθύτερη κατανόηση μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, όσο και σαν αντικείμενο της διδασκαλίας, ώστε να ενισχύσει τη συνειδητή χρήση στρατηγικών και να βελτιώσει την ικανότητα ΚΜΠ των μαθητών (Papadopoulos & Patsiala, 2023α· Singer et al., 2013). Οι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνονται να συμπεριλαμβάνουν ολοένα και περισσότερο την ΚΜΠ στα έργα που παρουσιάζουν στους μαθητές και να τους ζητούν συστηματικά να δημιουργούν προβλήματα βασισμένα σε μια πληθώρα καταστάσεων εντός και εκτός των μαθηματικών (Ayllón Blanco & Gómez Pérez, 2014· Bicer et al., 2020· Kul & Çelik, 2020· National Council of Teachers of Mathematics-NCTM, 2000). Επιπλέον, προτείνεται οι μαθητές να κάνουν υποθέσεις με βάση τα προβλήματα που επιλύουν και να μάθουν πως να τα γενικεύουν και να τα επεκτείνουν θέτοντας επιπλέον ερωτήσεις (NCTM, 2000). Κρίνεται απαραίτητο να αναλάβουν την ευθύνη και να δημιουργήσουν προβλήματα που οι ίδιοι θεωρούν σημαντικά (Ellerton, 2015· English, 1997α). Οι στρατηγικές που χρησιμοποιούνται και ο τρόπος που εφαρμόζεται η ΚΜΠ ενδέχεται να διαφέρει από τάξη σε τάξη, αλλά ο τελικός σκοπός παραμένει ο ίδιος: οι μαθητές να εμπλακούν στη δημιουργία των δικών τους προβλημάτων (Bevan & Capraro, 2021).

Η ΚΜΠ μπορεί να ενσωματωθεί στα προγράμματα σπουδών και στη διδασκαλία μέσα από προσεκτικό και στοχευμένο σχεδιασμό (Ellerton et al., 2015). Οι Μουσουλίδης κ.ά. (2003) τη θεωρούν ως μια αυτόνομη ικανότητα, όμως άλλοι ερευνητές επισημαίνουν ότι δεν πρέπει να αποτελεί ξεχωριστή και αποκομμένη δραστηριότητα, ούτε να μετατρέπεται σε αυτοσκοπό της διδασκαλίας (Ayllón Blanco & Gómez Pérez, 2014· English, 2020). Δεδομένου ότι σε όλες τις μαθηματικές δραστηριότητες προκύπτουν ευκαιρίες για δημιουργία προβλημάτων, μπορούν να ενσωματωθούν στρατηγικές ΚΜΠ σε όλες τις μαθηματικές περιοχές (Brown & Walter, 2013· English, 1997α).

Σύμφωνα με τον Grundmeier (2015), οι εμπειρίες στην ΚΜΠ και η εξάσκηση αρκούν για την ανάπτυξη της ικανότητας ΚΜΠ, χωρίς να είναι απαραίτητο να προηγηθεί ρητή διδασκαλία. Πιο πρόσφατες έρευνες, βέβαια, υποστηρίζουν ότι η ρητή διδασκαλία της ΚΜΠ στο δημοτικό είναι ένα ιδιαίτερα σημαντικό εγχείρημα, προκειμένου οι μαθητές να ανταποκριθούν σε τέτοια έργα (Chua & Toh, 2022· Kopparla et al., 2019). Η ικανότητα αυτή θα πρέπει να καλλιεργηθεί συστηματικά, ήδη από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού, αλλά και κατά τη μετάβαση στο γυμνάσιο, με μια μεγάλη ποικιλία δραστηριοτήτων ΚΜΠ σε διαφορετικά περιβάλλοντα (Lavy, 2015· Moses et al., 2013· Μουσουλίδης et al., 2003· van Bommel & Palmér, 2021).

Στο ισχύον ελληνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών για τα μαθηματικά στο δημοτικό σχολείο (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2003) εντοπίζονται στόχοι που αφορούν την ΚΜΠ. Στους γενικούς στόχους για την επίλυση προβλημάτων σε όλες τις τάξεις αναφέρεται: «Οι μαθητές εξερευνούν μία κατάσταση, κατασκευάζουν ερωτήσεις και προβλήματα με βάση συγκεκριμένα δεδομένα, διατυπώνουν διαφορετικά το ίδιο πρόβλημα, αναγνωρίζουν και περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις, ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις [...]» (σ. 250). Ειδικότερα για τη Δ', Ε' και ΣΤ' τάξη ορίζεται ως στόχος οι μαθητές να είναι σε θέση να βρίσκουν ενδιάμεσα ερωτήματα που υποβοηθούν την πορεία προς τη λύση ενός προβλήματος, ενώ στη Δ' και ΣΤ' ορίζεται επιπλέον να μπορούν να θέτουν δικά τους ερωτήματα και παρόμοια προβλήματα. Στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών (Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής, 2022) αναφέρονται Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα σχετικά με ΚΜΠ για όλες σχεδόν τις τάξεις. Στην Α' τάξη αναμένεται οι μαθητές να διερευνούν και να δημιουργούν καταστάσεις πρόσθεσης και αφαίρεσης μέσα στην πρώτη εκατοντάδα. Στην Α', αλλά και τη Β' αναμένεται να αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης και κατασκευής προβλημάτων και να χρησιμοποιούν μοντέλα και αναπαραστάσεις για να τις τεκμηριώσουν και να τις κοινοποιήσουν σε άλλους. Στις Γ' και Δ' αναμένεται να αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης και κατασκευής προβλημάτων με τετραψήφιους και πενταψήφιους αριθμούς αντίστοιχα, ενώ στην ΣΤ' αναμένεται να διατυπώνουν και να επιλύουν προβλήματα με αριθμούς μεγαλύτερους του 1.000.000 και με περισσότερες από μία πράξεις, ελέγχοντας τη λογικότητα του αποτελέσματος και να κοινοποιούν τις προσεγγίσεις τους σε άλλους.

Γίνεται αντιληπτό ότι στο ελληνικό σχολείο αναγνωρίζεται η σημασία της ΚΜΠ, η οποία συμπεριλαμβάνεται στο πρόγραμμα σπουδών για όλες τις τάξεις του δημοτικού και εκφράζονται ρητά σχετικοί στόχοι, πάντα σε συνδυασμό με την ΕΜΠ. Πράγματι, στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών όλων των τάξεων εντοπίζονται ορισμένα έργα ΚΜΠ, αλλά ομολογουμένως είναι λίγα και εμφανίζονται αποσπασματικά. Για να είναι αποτελεσματική η ΚΜΠ, πρέπει να εφαρμόζεται στην τάξη με συστηματικό τρόπο (Singer, Ellerton, et al., 2011). Ένα ακόμα ζήτημα είναι αν και με ποιόν τρόπο τα έργα αυτά προσεγγίζονται κατά τη διδασκαλία και αν καλύπτουν όλο το φάσμα καταστάσεων ΚΜΠ. Για μια αποτελεσματική παρέμβαση στην ΚΜΠ είναι απαραίτητος ο συνδυασμός ελεύθερων, δομημένων και ημι-δομημένων καταστάσεων (Wang et al., 2022). Ακόμα, τονίζεται ότι η απλή δημιουργία προβλημάτων δεν σημαίνει αυτομάτως ότι οι μαθητές θα έρθουν σε επαφή με τις μαθηματικές ιδέες που επιδιώκει ο εκπαιδευτικός (Silber & Cai, 2021). Διευκρινίζεται ότι δεν είναι όλα τα έργα κατάλληλα, γνωστικά απαιτητικά ή δημιουργικά, ούτε δημιουργούν απαραίτητα ένα κατάλληλο περιβάλλον για μαθηματική εξερεύνηση (Bicer et al., 2020· Ruthven, 2020). Οι γνωστικές απαιτήσεις και οι δυνατότητες ενός έργου δεν είναι έμφυτες σε αυτό, αλλά εξαρτώνται από το ευρύτερο περιβάλλον, την κουλτούρα της τάξης και τον εκπαιδευτικό (Ruthven, 2020). Χωρίς την καθοδήγησή του, η ΚΜΠ ενδέχεται να μην αποτελέσει αποτελεσματικό εργαλείο (Van Harpen & Presmeg, 2015).

1.6. Κριτήρια αξιολόγησης προβλημάτων

Όταν η ΚΜΠ αποτελεί από μόνη της διδακτικό αντικείμενο, στόχος της διδασκαλίας είναι η ανάπτυξη της ικανότητας ΚΜΠ των μαθητών. Επομένως, είναι προφανές ότι ο εκπαιδευτικός οφείλει να αξιολογήσει την ποιότητα της διδασκαλίας ως προς τον στόχο αυτόν και κατ' επέκταση τα παραγόμενα προβλήματα των μαθητών (Kaba & ¸Sengül, 2016· Silver & Cai, 2005). Ωστόσο, λόγω της ανοιχτής φύσης των έργων, οι απαντήσεις των μαθητών σε τέτοιου είδους έργα παρουσιάζουν μεγάλη ποικιλομορφία. Αυτό είναι φυσικά θεμιτό από εκπαιδευτικής πλευράς, αλλά από πλευράς αξιολόγησης αναμφίβολα καθιστά τη διαδικασία περίπλοκη και απαιτητική (Silver & Cai, 2005). Όπως εξηγούν οι Cai κ.ά. (2022), συνήθως δεν είναι σαφές πότε ένα κατασκευασμένο πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί «καλό».

Γι' αυτόν τον λόγο έχουν προταθεί και έχουν αξιοποιηθεί ερευνητικά διάφοροι τρόποι για την ανάλυση, κατηγοριοποίηση και αξιολόγηση των προβλημάτων των μαθητών. Ένας από τους γνωστότερους είναι αυτός που πρότειναν οι Silver και Cai (1996, 2005), οι οποίοι εστίασαν στην επιλυσιμότητα και στη μαθηματική και γλωσσική πολυπλοκότητα των προβλημάτων. Αρχικά, όλες οι απαντήσεις κατηγοριοποιούνται ως (α) μαθηματικά προβλήματα, αν η απάντηση προκύπτει από μαθηματικό συλλογισμό, (β) δηλώσεις, αν υπάρχουν ενδείξεις μαθηματικού συλλογισμού, αλλά δεν υπάρχει ερώτηση και (γ) μη μαθηματικές ερωτήσεις, αν δεν εμπίπτουν στις παραπάνω κατηγορίες. Αφού συγκεντρωθούν τα μαθηματικά προβλήματα και αποκλειστούν οι υπόλοιπες κατηγορίες, εντοπίζονται αυτά που μπορούν να λυθούν και αυτά που είναι μεν μαθηματικά, αλλά δεν περιλαμβάνουν τις απαραίτητες πληροφορίες για τη λύση ή θέτουν ένα ερώτημα το οποίο δεν είναι συμβατό με τις παρεχόμενες πληροφορίες. Αφού ολοκληρωθεί και αυτή η διάκριση, τα εναπομείναντα προβλήματα αξιολογούνται ως προς τη γλωσσική και μαθηματική τους πολυπλοκότητα. Όσον αφορά τη γλωσσική πολυπλοκότητα, ελέγχεται το είδος και η δομή των προτάσεων και κυρίως η ύπαρξη υποθετικών και συγκριτικών προτάσεων (Silver & Cai, 1996, 2005). Αναφορικά με τη μαθηματική πολυπλοκότητα, ένας τρόπος να αξιολογηθεί είναι μέσα από την ανάλυση των σημασιολογικών σχέσεων που υπάρχουν στο πρόβλημα. Για τον σκοπό αυτό αξιοποιείται ένα σχήμα κατηγοριοποίησης που προτάθηκε από την Marshall (1995), κατά το οποίο τα προβλήματα οργανώνονται σε πέντε κατηγορίες, με βάση τις σημασιολογικές σχέσεις. Αυτά που περιέχουν μεγαλύτερο αριθμό σημασιολογικών σχέσεων θεωρούνται περισσότερο πολύπλοκα συγκριτικά με όσα περιέχουν λιγότερες σχέσεις (Chen et al., 2007· Silver & Cai, 1996, 2005). Οι κατηγορίες είναι:

(α) Αλλαγή (Change): μεταβολή μιας αρχικής ποσότητας κατά ένα ποσό.

(β) Ομαδοποίηση (Group): συνδυασμός μικρότερων ποσοτήτων σε μια μεγαλύτερη.

(γ) Σύγκριση (Compare): σύγκριση μεταξύ δυο ποσοτήτων που φανερώνεται με εκφράσεις όπως περισσότερο, λιγότερο κ.λπ.

(δ) Επαναδιατύπωση (Restate): σχέση μεταξύ δυο μεταβλητών, η οποία εφαρμόζεται μόνο σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο και δεν μπορεί να γενικευτεί. Η σύνδεση ανάμεσα στις δυο μεταβλητές γίνεται με εκφράσεις όπως διπλάσιος, τριπλάσιος, μισός κ.λπ.

(ε) Μεταβολή (Vary): σταθερή σχέση ανάμεσα σε δυο μεταβλητές που μένει ίδια ανεξάρτητα από το πλαίσιο.

Οι Silver και Cai (2005) πρότειναν τρία κριτήρια αξιολόγησης προβλημάτων: (α) Ποσότητα (Quantity), (β) Πρωτοτυπία (Originality) και (γ) Πολυπλοκότητα (Complexity). Το πρώτο προφανώς αναφέρεται στον αριθμό των προβλημάτων που έχουν διατυπωθεί, όταν ένα έργο ΚΜΠ επιτρέπει τη διατύπωση πολλαπλών απαντήσεων. Φυσικά, το κριτήριο αυτό δεν αρκεί από μόνο του. Η πρωτοτυπία αφορά τον βαθμό που ένα πρόβλημα μοιάζει με τις απαντήσεις άλλων μαθητών, όμως αν δεν υπάρχει μέτρο σύγκρισης είναι δύσκολο να αξιολογηθεί. Το τελευταίο και σημαντικότερο κριτήριο είναι η πολυπλοκότητα, η οποία, όπως προαναφέρθηκε, διακρίνεται σε μαθηματική και γλωσσική.

Οι Chen κ.ά. (2013, 2015) πρόσθεσαν μια τέταρτη διάσταση, την ποικιλία (Diversity), η οποία εξετάζει τη σχέση μεταξύ δυο προβλημάτων που δημιουργήθηκαν για το ίδιο έργο. Επιπλέον, θεωρούν ένα πρόβλημα σωστό/κατάλληλο, όταν (α) περιλαμβάνει μια ποσότητα που δεν δίνεται εξ αρχής, αλλά μπορεί να υπολογιστεί μέσω πράξεων με τους δοσμένους αριθμούς, (β) ικανοποιεί τις απαιτήσεις του έργου ή σχετίζεται με το δοσμένο πρόβλημα, (γ) είναι επιλύσιμο (παρέχει επαρκείς πληροφορίες για επίλυση ή το ζητούμενο είναι συμβατό με τις παρεχόμενες πληροφορίες), (δ) είναι ρεαλιστικό και συμφωνεί με την πραγματικότητα. Οι Guo κ.ά. (2020) προτείνουν ένα επιπλέον κριτήριο, την ακρίβεια (Accuracy), η οποία αφορά το ποσοστό των επιλύσιμων προβλημάτων, υπολογίζοντας και όσα δεν ήταν επιλύσιμα.

Ο Leung (1993) συμπεριέλαβε τέσσερις διαστάσεις στο εργαλείο που ανέπτυξε για την ΚΜΠ: (α) Τύπος (ελέγχεται αν το περιεχόμενο είναι μαθηματικό, αν το πρόβλημα είναι λογικό και αν περιέχει επαρκείς πληροφορίες), (β) Γλωσσική δομή της δήλωσης και της ερώτησης (ελέγχεται αν περιέχονται συγκριτικές και υποθετικές προτάσεις), (γ) Χαρακτηριστικά λύσης (ελέγχεται ο αριθμός των βημάτων και οι πράξεις που απαιτούνται) και (δ) Σημασιολογική δομή (ελέγχεται με βάση τις κατηγορίες της Marshall, 1995). Αργότερα, οι Leung και Silver (1997) συγκέντρωσαν τα παραπάνω σε δυο διαστάσεις, (α) την Ποιότητα και (β) την Πολυπλοκότητα. Όσον αφορά την ποιότητα, οι ερωτήσεις κατηγοριοποιούνται ως μαθηματικές ή μη μαθηματικές, ως λογικές ή μη λογικές και ελέγχεται αν περιέχουν επαρκείς πληροφορίες. Λογικό θεωρείται ένα πρόβλημα όταν περιγράφεται μια εφικτή κατάσταση και δεν υπάρχουν αντιφατικές πληροφορίες. Αναφορικά με την πολυπλοκότητα, εξετάζεται η αριθμητική πολυπλοκότητα της λύσης. Οι Leung και Silver (1997) για την πολυπλοκότητα αξιοποιούν εκτός από την ανάλυση των σημασιολογικών σχέσεων και τον αριθμό των πράξεων/ βημάτων που απαιτούνται για την επίλυση. Απεναντίας, οι Silver κ.ά. (1996) υπογραμμίζουν ότι η καταμέτρηση των βημάτων για τη λύση, ενώ είναι ένας άμεσος και σαφής τρόπος να αξιολογηθεί η πολυπλοκότητα, μπορεί να κάνει ένα απλό πρόβλημα να φαίνεται πολύπλοκο, ενώ δεν είναι. Η πρώτη κατηγοριοποίηση των Silver και Cai (1996, 2005) χρησιμοποιείται κυρίως για την αξιολόγηση λεκτικών προβλημάτων, ενώ των Leung και Silver (1997) μπορεί να εφαρμοστεί για διάφορους τύπους μαθηματικών προβλημάτων, τόσο αριθμητικών όσο και γεωμετρικών (Guo et al., 2020).

Η μαθηματική πολυπλοκότητα είναι ένα εξαιρετικά σημαντικό στοιχείο, καθώς φανερώνει την κατανόηση και τις γνωστικές διαδικασίες που ακολούθησαν οι μαθητές κατά τη δημιουργία του προβλήματος (Kwek, 2015) και αξιολογείται με διάφορους τρόπους. Η English (1997β), λόγου χάρη, λαμβάνει υπόψη τη σημασιολογική δομή και τον τύπο των προβλημάτων, αλλά και τον αριθμό των βημάτων για την επίλυση (English, 1998). Απλά θεωρεί τα προβλήματα που περιγράφουν βασικές καταστάσεις αλλαγής στην πρόσθεση και αφαίρεση, ένωσης στην πρόσθεση και προβλήματα ισοδύναμων ομάδων στον πολλαπλασιασμό. Πολύπλοκα θεωρεί τα προβλήματα σύγκρισης και εξομοίωσης πρόσθεσης και αφαίρεσης, σύγκρισης πολλαπλασιασμού, τα προβλήματα συνδυασμών (καρτεσιανό γινόμενο), τα προβλήματα διαίρεσης μέτρησης και μερισμού και τα προβλήματα με αναλογίες (English, 1997β). Οι Espinoza κ.ά. (2016) αξιολογούν τη μαθηματική πολυπλοκότητα με βάση τον αριθμό των βημάτων, το είδος των πράξεων και τη δομή (προσθετική/πολλαπλασιαστική). Οι Espinoza κ.ά. (2022) ελέγχουν επιπλέον (α) την ύπαρξη περίπλοκων ιδεών (μια ιδέα θεωρείται περίπλοκη όταν είναι κατανοητή μόνο από μαθητές μεγαλύτερων τάξεων από αυτόν που δημιούργησε το πρόβλημα) και (β) τις γνωστικές απαιτήσεις, δηλαδή το επίπεδο σκέψης που απαιτείται από τους μαθητές προκειμένου να επιλύσουν το πρόβλημα.

Όπως είναι αναμενόμενο, τα προβλήματα από δομημένες καταστάσεις και τα προβλήματα από ελεύθερες ή ημι-δομημένες αξιολογούνται διαφορετικά. Όσα προέρχονται από δομημένες καταστάσεις και βασίζονται σε άλλα προβλήματα αναλύονται κυρίως με βάση τη σχέση τους και την ομοιότητα τους με τη δομή του αρχικού (English, 1997β, 1998· Grundmeier, 2003· Stickles, 2011). Μπορεί ακόμα να αξιολογούνται οι στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν για τη δημιουργία τους, η ύπαρξη επιπλέον πληροφοριών που δεν αναφέρονται στο αρχικό πρόβλημα, αν είναι ανοιχτά (Grundmeier, 2003), καθώς και αν έστω ένα από τα στοιχεία του αρχικού προβλήματος είναι αναγνωρίσιμο (Voica & Singer, 2013).

Η Stoyanova (1997) προτείνει τα εξής κριτήρια:

(α) Ακρίβεια: Καταλληλότητα της μαθηματικής γλώσσας.
(β) Ορθότητα: Δομή του προβλήματος.
(γ) Πρωτοτυπία: Σχέση της δομής του προβλήματος με την εμπειρία του μαθητή στην ΕΜΠ. Πρωτότυπο θεωρείται αν η δομή του ανακαλύπτεται από τον μαθητή, μερικώς πρωτότυπο όταν πρόκειται για γνωστό πρόβλημα, αλλά ανακαλύπτεται από τον μαθητή και μη πρωτότυπο αν συνδέεται απευθείας με τις μαθηματικές του εμπειρίες.
(δ) Επίπεδο δυσκολίας: Δεν αναφέρεται τόσο στον αριθμό των βημάτων για την επίλυση, αλλά στην πολυπλοκότητα της λύσης και των ιδεών που εμπλέκονται και τον βαθμό που αυτή είναι οικεία στους μαθητές.
(ε) Τύπος: Ανάλογα με το είδος της γνώσης που απαιτείται, τα προβλήματα κατηγοριοποιούνται σε αλγοριθμικά (αν η λύση περιέχει έναν γνωστό αλγεβρικό, αριθμητικό ή γεωμετρικό αλγόριθμο), λογικής (αν απαιτούν επαγωγικό ή απαγωγικό συλλογισμό) ή γενικευμένα (αν απαιτούν γενίκευση ενός προτύπου).
(στ) Ευχέρεια: Αριθμός σωστών προβλημάτων.
(ζ) Ευελιξία: Αριθμός των διαφορετικών τύπων προβλημάτων που δημιουργήθηκαν.

Άλλοι ερευνητές διαμόρφωσαν ρουμπρίκες για την αξιολόγηση και βαθμολογία των προβλημάτων, συμπεριλαμβάνοντας ορισμένα από τα κριτήρια που αναλύθηκαν παραπάνω (Bicer et al., 2020· Kaba & Sengül, 2016· Kopparla et al., 2019· Kwon & Capraro 2021· Özgen, et al., 2019· Rosli, et al., 2015· Yildiz, 2022), ενώ η Gonzales (1994) διαμόρφωσε μια λίστα ελέγχου των προβλημάτων (Guidelines for Assessment). Οι Baumanns και Rott (2023) προτείνουν την αξιολόγηση της ποιότητας της διαδικασίας ΚΜΠ μέσα από την αξιολόγηση της μεταγνωστικής συμπεριφοράς των μαθητών. Τέλος, οι Crespo και Sinclair (2008) αξιοποιούν και κριτήρια που αναφέρονται στην «αισθητική αξία» ενός προβλήματος, τα οποία είναι (α) Καινοτομία (Novelty), (β) Έκπληξη (Surprise) και (γ) Παραγωγικότητα (Fruitfulness) (αν το πρόβλημα δύναται να οδηγήσει σε νέα προβλήματα/νέα γνώση).

1.7. Στάδια ΚΜΠ

Η διαδικασία της ΚΜΠ, όπως ακριβώς και η ΕΜΠ, διέρχεται από ορισμένα στάδια, διαμέσου των οποίων κατασκευάζεται βαθμιαία ένα νέο πρόβλημα. Εντούτοις, υπάρχει συζήτηση για το αν πράγματι υπάρχει ανάγκη διακριτών φάσεων-σταδίων, αν διέρχεται από τα ίδια στάδια με την ΕΜΠ ή αν απλά αποτελεί η ίδια η ΚΜΠ ένα στάδιο της ΕΜΠ. Ορισμένοι ερευνητές θεωρούν ότι οι φάσεις της ΚΜΠ βρίσκονται σε αντιστοιχία με τις τέσσερις φάσεις επίλυσης προβλήματος του Polya (1957) και επισημαίνουν ότι η ΚΜΠ είναι μια ειδική περίπτωση ΕΜΠ (Bevan et al., 2019· Kontorovich et al., 2011). Έτσι, το πρώτο στάδιο, της «Κατανόησης», μετατρέπεται σε «Κατασκευή προβλήματος», διαμορφώνοντας τα στάδια ως εξής: Κατασκευή προβλήματος→ Επινόηση Σχεδίου→ Υλοποίηση Σχεδίου→ Έλεγχος Λύσης (Bevan et al., 2019). Η Gonzales (1994, 1998), ωστόσο, την αντιλαμβάνεται ως ένα επιπλέον, πέμπτο στάδιο, το οποίο ακολουθεί το τελευταίο στάδιο του Polya και αφορά τη δημιουργία ενός σχετικού προβλήματος με αυτό που έχει μόλις λυθεί, τροποποιώντας το ή επεκτείνοντας το.

Άλλοι ερευνητές θεωρούν ότι οι δυο διαδικασίες διαφέρουν και τονίζουν την ανάγκη να διαμορφωθεί ένα μοντέλο αποκλειστικά για την ΚΜΠ. Τα περισσότερα μοντέλα που έχουν προταθεί μοιάζουν σε μεγάλο βαθμό μεταξύ τους. Ξεκινούν από την κατανόηση της δοσμένης κατάστασης και καταλήγουν στον έλεγχο του κατασκευασμένου προβλήματος. Οι Pelczer και Gamboa (2009) ανέπτυξαν ένα αναλυτικό μοντέλο πέντε φάσεων:

(1) Οργάνωση (Setup): Συλλογισμός σχετικά με τη δοσμένη κατάσταση και αναζήτηση των απαιτούμενων γνώσεων για την κατανόησή της. Απαιτεί κατανόηση των περιορισμών του έργου, τον ορισμό του περιεχομένου και του θέματος, την ανάκληση άλλων προβλημάτων, τη θεμελίωση της βασικής ιδέας, τον ορισμό ενός σημείου εκκίνησης (μια γνώση, μια κατάσταση, ένα θεώρημα) και μερικών αρχικών κριτηρίων αξιολόγησης και τον σχηματισμό μιας αρχικής μαθηματικής έκφρασης.

(2) Μετασχηματισμός (Transformation): Οι συνθήκες και τα χαρακτηριστικά της δοσμένης κατάστασης αναλύονται και τροποποιούνται. Εντοπίζονται οι διαθέσιμες τεχνικές και αξιολογείται η καταλληλότητα και οι επιπτώσεις αυτής που επιλέχθηκε.

(3) Σχηματισμός (Formulation): Εντοπισμός πιθανών ερωτήσεων και εξέταση διαφορετικών πλαισίων για το πρόβλημα εκ των οποίων επιλέγεται ένα.

(4) Αποτίμηση (Evaluation): Το προτεινόμενο πρόβλημα αξιολογείται με βάση τα αρχικά κριτήρια και αποφασίζεται αν χρειάζονται περαιτέρω αλλαγές.

(5) Τελική Αξιολόγηση (Final assessment): Αναστοχασμός πάνω σε όλη τη διαδικασία, τη στρατηγική και τις τεχνικές που ακολουθήθηκαν και το συνολικό αποτέλεσμα, δηλαδή τη δυσκολία και το πόσο ενδιαφέρον είναι το πρόβλημα. Συμπεριλαμβάνεται και ο προσωπικός αναστοχασμός του δημιουργού του προβλήματος αναφορικά με το πόσο ικανοποιημένος είναι με τη διαδικασία και το αποτέλεσμα και σχετικά με την αυτοπεποίθησή του κατά την ενασχόληση με το έργο.

Κατ' αντιστοιχία με τα παραπάνω στάδια, οι Örnek και Soylu (2021) περιγράφουν ένα εκτενέστερο μοντέλο έξι ιεραρχικών βημάτων:

(1) Κατανόηση κατάστασης: Αξιολόγηση της δοσμένης κατάστασης, αναγνώριση των μαθηματικών δομών και των σχέσεων που ενυπάρχουν σε αυτήν και εντοπισμός των αξιοποιήσιμων πληροφοριών. Σκοπός αυτής της φάσης είναι να αποτρέψει τα άτομα από το να δημιουργήσουν απευθείας ένα πρόβλημα και να τα ενθαρρύνει να προχωρήσουν σε εννοιολογική ανάλυση της κατάστασης.

(2) Σχεδιασμός της ιστορίας: Καθορισμός ή σχεδιασμός μιας κατάστασης από την καθημερινή ζωή που να σχετίζεται με τη δοσμένη και διασφάλιση ότι είναι ρεαλιστική και κατανοητή.

(3) Διατύπωση της λεκτικής δήλωσης: Διασφάλιση ότι η διατύπωση είναι σαφής και κατανοητή, ότι περιέχει μια ερώτηση και διασφάλιση της ορθής χρήσης της μαθηματικής γλώσσας, αλλά και των γραμματικών κανόνων.

(4) Επίλυση προβλήματος: Το πρόβλημα επιλύεται ώστε να εξεταστεί η επιλυσιμότητά του και να διασφαλιστεί ότι η λύση είναι συμβατή με την κατάσταση.

(5) Αξιολόγηση: Ελέγχονται οι αναμενόμενες συμπεριφορές από όλες τις προηγούμενες φάσεις.

(6) Ολοκλήρωση: Σε συνέχεια της προηγούμενης φάσης επανεξετάζεται το πρόβλημα και εφαρμόζονται τυχόν απαραίτητες τροποποιήσεις ή αν κριθεί απαραίτητο, διατυπώνεται ακόμα και ένα εξ ολοκλήρου νέο πρόβλημα.

Αξίζει να αναφερθούν ακόμα δυο μοντέλα, στα οποία, εν αντιθέσει με τα προηγούμενα, λαμβάνεται υπόψη η κατάσταση ΚΜΠ. Οι Chen κ.ά. (2015) προτείνουν τέσσερα στάδια: (1) Κατανόηση του έργου ΚΜΠ, (2) Εντοπισμός της κατηγορίας που ανήκει (ΚΜΠ από τροποποίηση άλλου προβλήματος ή από δοσμένη κατάσταση), (3) Εφαρμογή κατάλληλων στρατηγικών και (4) Αξιολόγηση των προβλημάτων (ως προς την επιλυσιμότητα, σαφήνεια, ενδιαφέρον, πολυπλοκότητα, ρεαλιστικότητα, πρωτοτυπία). Παρομοίως, οι Baumanns και Rott (2022) προτείνουν ένα μοντέλο πέντε σταδίων που μοιάζει σε μεγάλο βαθμό με το προηγούμενο. Αν και η ΚΜΠ συνήθως διέρχεται από τα στάδια αυτά με μια ορισμένη σειρά, αυτή δεν είναι αυστηρά προκαθορισμένη και κατά τη διάρκειά της παρατηρούνται εναλλαγές και επιστροφές σε προηγούμενα στάδια.

(1) Ανάλυση κατάστασης: Αναγνώριση των συνθηκών της αρχικής κατάστασης και επιλογή των κατάλληλων για τη δημιουργία ενός νέου προβλήματος. Σε αυτό το

στάδιο ολοκληρώνεται και η λύση του αρχικού προβλήματος. Στα επόμενα δυο διαμορφώνεται και διατυπώνεται γραπτά το πρόβλημα με έναν από τους δυο τρόπους:
(2) Παραλλαγή (Variation): Μια ή περισσότερες συνθήκες του αρχικού έργου αλλάζουν ή παραλείπονται και δεν κατασκευάζονται νέες συνθήκες.
(3) Δημιουργία (Generation): Κατασκευάζονται εξ αρχής νέες συνθήκες.
(4) Λύση
(5) Αξιολόγηση: Το πρόβλημα αξιολογείται από τον δημιουργό του με υποκειμενικά κριτήρια (επιλυσιμότητα, ορθή διατύπωση, ομοιότητα με το αρχικό, κατάλληλο για συγκεκριμένους αποδέκτες ή ενδιαφέρον) και απορρίπτεται ή γίνεται αποδεκτό.

Τέλος, ένα αντίστοιχο μοντέλο τεσσάρων σταδίων είναι των Koichu και Kontorovich (2013), το οποίο διαφέρει από τα προηγούμενα διότι περιγράφει μια συμπεριφορά που δεν έχει καταγραφεί ξανά. Ούτε σε αυτό τα στάδια δεν ακολουθούν γραμμική εξέλιξη, δηλαδή ένα ερέθισμα ή μια κατάσταση ΚΜΠ δεν καταλήγει απευθείας σε ένα πρόβλημα, αλλά αλληλοκαλύπτονται (Koichu & Kontorovich, 2013). Αναλυτικότερα:
(1) Προετοιμασία (Warming-up): Εμφάνιση αυθόρμητων ιδεών και ανάκληση τυπικών προβλημάτων που σχετίζονται με το έργο.
(2) Αναζήτηση ενός ενδιαφέροντος μαθηματικού φαινόμενου: Τα προβλήματα που προέκυψαν αναλύονται και τροποποιούνται. Οι μαθητές επικεντρώνονται σε επιλεγμένες διαστάσεις τους προκειμένου να εντοπίσουν ενδιαφέροντα στοιχεία που θα μπορούσαν να αποτελέσουν το μαθηματικό θεμέλιο των επόμενων προβλημάτων.
(3) Απόκρυψη της διαδικασίας ΚΜΠ: Οι μαθητές προσπαθούν να «κρύψουν» μέσα στο πρόβλημα τις διαδικασίες που ακολούθησαν για την κατασκευή του, προκειμένου να μην είναι εμφανείς στους πιθανούς λύτες Πρόκειται για μια συμπεριφορά που δεν έχει καταγραφεί σε άλλα μοντέλα ΚΜΠ.
(4) Ανασκόπηση: Όπως και στα προηγούμενα μοντέλα, τα προβλήματα αξιολογούνται με βάση υποκειμενικά κριτήρια (π.χ. βαθμός δυσκολίας ή καταλληλότητα για συγκεκριμένη ομάδα αποδεκτών) και δοκιμάζονται στην πράξη.

Από την ανάλυση των μοντέλων διαφαίνεται ότι όλα έχουν ως σημείο εκκίνησης την κατανόηση της κατάστασης που παρουσιάζεται. Οι μαθητές αρχικά αναλύουν τις πληροφορίες που παρέχονται, εντοπίζουν τους περιορισμούς του έργου και διαμορφώνουν ένα πρώτο σχέδιο. Έπειτα προβαίνουν στη σύνθεση του προβλήματος με τη χρήση κατάλληλων στρατηγικών. Μάλιστα στα μοντέλα των

Baumanns και Rott (2022) και των Chen κ.ά. (2015) φαίνεται καθαρά η διαφοροποίηση μεταξύ προβλημάτων που δημιουργούνται από άλλα προβλήματα ή από δοσμένες καταστάσεις και πληροφορίες, ενώ στα υπόλοιπα μοντέλα αυτό δεν διευκρινίζεται. Ορισμένα μοντέλα, όπως αυτά των Baumanns και Rott (2022) και των Örnek και Soylu (2021), εντάσσουν και την επίλυση του προβλήματος που κατασκευάστηκε ως ξεχωριστό στάδιο, ενώ στα υπόλοιπα μοντέλα δεν γίνεται αναφορά σε αυτήν. Τέλος, όλα τα μοντέλα ολοκληρώνονται με την αξιολόγηση των παραγόμενων προβλημάτων από τους δημιουργούς τους και τον αναστοχασμό πάνω στη διαδικασία. Αυτά που δίνουν περισσότερο έμφαση στην αξιολόγηση είναι τα μοντέλα των Pelczer και Gamboa (2009) και Örnek και Soylu (2021), καθένα από τα οποία περιλαμβάνει δυο στάδια που αφορούν τον έλεγχο του προβλήματος με βάση τα κριτήρια που έχουν επιλεχθεί. Σύμφωνα με τον Dillon (1982), το τελευταίο αυτό βήμα της ΚΜΠ μπορεί να θεωρηθεί ως το πρώτο βήμα της διαδικασίας ΕΜΠ.

1.8. Στρατηγικές ΚΜΠ

Ως στρατηγική ΚΜΠ νοείται η ακολουθία των βημάτων που χρησιμοποιεί ένας μαθητής για να κατασκευάσει ένα πρόβλημα (Stoyanova, 1997). Οι Koichu και Kontorovich (2013) θεωρούν ως στρατηγική μια συστηματική προσέγγιση για την ανάλυση και τροποποίηση των συνθηκών ενός δοσμένου έργου ΚΜΠ και τη δημιουργία ερωτήσεων. Στη βιβλιογραφία εντοπίζεται ένα πλήθος στρατηγικών που μπορεί να αξιοποιηθεί όταν υπάρχει ως βάση ένα δοσμένο πρόβλημα. Ο Contreras (2007) σχολιάζει ότι ένα πρόβλημα μπορεί να τροποποιηθεί μέσα από θεμελιώδεις μαθηματικές διαδικασίες, μέσω των οποίων δημιουργείται η μαθηματική γνώση. Οι Lavy και Bershadsky (2003) διαχωρίζουν τις στρατηγικές σε αλλαγές στα στοιχεία του προβλήματος και αλλαγές στην ερώτηση (π.χ. αντικατάσταση με άλλη ή μετατροπή σε πρόβλημα απόδειξης). Ο Grundmeier (2015) τις διαχωρίζει σε επιφανειακές και δομικές. Οι επιφανειακές τεχνικές δεν απαιτούν αλλαγή της δομής του προβλήματος, αλλά επηρεάζουν μόνο επιφανειακά στοιχεία (π.χ. προσθήκη πληροφοριών, αλλαγή των δεδομένων ή/και των ζητουμένων και αναδιατύπωση του προβλήματος). Αντίθετα, οι δομικές απαιτούν περισσότερη δημιουργικότητα και βαθύτερη κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου (π.χ. αντιστροφή δεδομένων και ζητουμένων, αλλαγή πλαισίου και επέκταση του αρχικού προβλήματος).

Οι γνωστότερες στρατηγικές που προτείνονται συνοψίζονται ως εξής:

(α) Αντιστροφή γνωστών και άγνωστων στοιχείων με διατήρηση του πλαισίου (Chen et al., 2015· Contreras, 2007· English, 1997β· Gonzales, 1998· Grundmeier, 2003, 2015· Stickles, 2011). Πρόκειται για μια πολύτιμη μαθηματική δραστηριότητα που οδηγεί στην αναγνώριση νέων μαθηματικών σχέσεων και στη διεύρυνση της μαθηματικής γνώσης (Contreras, 2007).

(β) Τροποποίηση του πλαισίου με διατήρηση της ίδιας δομής και ίδιων μαθηματικών σχέσεων (Gonzales, 1998· Grundmeier, 2003, 2015· Milinković, 2015· Stickles, 2011). Το αρχικό πρόβλημα χρησιμεύει ως παράδειγμα για να το μιμηθούν οι μαθητές (Cai & Hwang, 2023). Η διαδικασία αυτή αποδεικνύεται ιδιαίτερα απαιτητική (Ellerton, 2013).

(γ) Τροποποίηση των ζητουμένων ή δημιουργία νέων ερωτήσεων, με διατήρηση ίδιας δομής και πλαισίου, περιορισμών και δεδομένων (Grundmeier, 2003, 2015· Polya, 1957· Silver et al., 1996).

(δ) Τροποποίηση των δεδομένων και των περιορισμών (Bairac, 2005· Gonzales, 1998· Grundmeier, 2003, 2015· Polya, 1957· Silver et al., 1996).

(δ1) Προσθήκη δεδομένων ή/και περιορισμών και επέκταση του προβλήματος με διατήρηση ίδιου πλαισίου και δομής (Bairac, 2005· Chen et al., 2015· English, 1997β· Gonzales, 1998· Grundmeier, 2003, 2015· Milinković, 2015· Stickles, 2011).

(δ2) Αναίρεση περιορισμών για γενίκευση του προβλήματος (English, 1997β· Milinković, 2015).

(δ3) Αλλαγή των αριθμών ή αντικατάσταση τους από παραμέτρους για γενίκευση του προβλήματος (Bairac, 2005· Lavy & Bershadsky, 2003· Milinković, 2015).

(δ4) Αντικατάσταση ενός στοιχείου/έννοιας με ένα παρόμοιο (Bairac, 2005· Contreras, 2007), είτε με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα της έννοιας και δημιουργία περισσότερων περιορισμών (ειδίκευση) είτε με μια άλλη, της οποίας η αρχική έννοια αποτελεί παράδειγμα με ταυτόχρονη αναίρεση ορισμένων περιορισμών, για πιο πλήρη κατανόηση των ιδιοτήτων των μαθηματικών εννοιών (γενίκευση) (Contreras, 2007).

(ε) Συμμετρία: Τα δεδομένα ενός προβλήματος αντικαθιστούν τα ζητούμενα ενός άλλου και το αντίστροφο (Silver et al., 1996).

(στ) Επέκταση ενός προβλήματος, με τρόπο που η λύση του νέου προβλήματος να απαιτεί πρώτα την επίλυση του αρχικού (Silver et al., 1996).

(ζ) Αναδιατύπωση/ Παράφραση: Διαφορετική λεκτική αποτύπωση ή διαμόρφωση του προβλήματος σε άλλη μαθηματική περιοχή (Bairac, 2005· Grundmeier, 2003, 2015).

(η) Απόδειξη: Αλλαγή στη συντακτική δομή και αναδιατύπωση του προβλήματος ως πρόβλημα απόδειξης (Contreras, 2007).

(θ) Αλλαγή του τρόπου αναπαράστασης (Milinković, 2015).

(ι) Στόχευση μιας συγκεκριμένης λύσης: Η επίλυση του νέου προβλήματος απαιτεί τη χρήση μιας συγκεκριμένης μαθηματικής προσέγγισης ή θεωρήματος (Koichu, 2008, όπ. αναφ. στο Kontorovich et al., 2011).

(κ) Αναλογία (Bairac, 2005).

(λ) Αμφισβήτηση στοιχείων (π.χ. What if not) (Brown & Walter, 2005· Chen et al., 2015· English, 1997α· Gonzales, 1998).

Οι Brown και Walter (2005) ανέπτυξαν τη στρατηγική «What-if-not» για την ΚΜΠ μετά την επίλυση ενός προβλήματος. Πρόκειται για μια από τις πιο γνωστές και ευρέως διαδεδομένες στρατηγικές, κατά την οποία οι συνθήκες και οι περιορισμοί του αρχικού προβλήματος εξετάζονται και τροποποιούνται συστηματικά, ώστε να προκύψουν νέα και πρωτότυπα προβλήματα. Ουσιαστικά κάθε στοιχείο μπορεί να «αμφισβητηθεί» και να αντικατασταθεί από ένα εναλλακτικό. Για να μπορέσουν οι μαθητές να προτείνουν εναλλακτικές, πρέπει να κατανοούν τις πιθανές συνέπειες κάθε αλλαγής (Lavy, 2015). Οι Brown και Walter (2005) σχολιάζουν ότι οι μαθητές κατανοούν βαθύτερα μια κατάσταση, μόνο όταν καταφέρουν να τη δουν από μια διαφορετική οπτική. Είναι μια δομημένη στρατηγική που μπορεί να διδαχθεί και απαρτίζεται από πέντε επίπεδα:

0: Επιλογή ενός σημείου εκκίνησης.

1: Καταγραφή σε λίστα όλων των στοιχείων-δεδομένων του προβλήματος.

2: Αμφισβήτηση των δεδομένων. Για κάθε ένα οι μαθητές ρωτούν «Τι θα γινόταν αν δεν ήταν έτσι; Τι θα ήταν;» και προτείνουν εναλλακτικές.

3: Με βάση τις εναλλακτικές, δημιουργούν νέες ερωτήσεις και οδηγούνται σε γενικεύσεις. Κάθε μια από τις εναλλακτικές αποτελεί δυνητικά ένα νέο πρόβλημα.

4: Επιλογή ορισμένων από τις νέες ερωτήσεις και ανάλυση ή απάντηση τους.

Η πορεία που περιγράφεται δεν είναι απαραίτητα γραμμική. Κάθε επίπεδο επηρεάζει τα υπόλοιπα, αφού μια νέα ερώτηση μπορεί να οδηγήσει σε ένα νέο δεδομένο και αντίστροφα. Είναι μια ατέρμονη διαδικασία, καθώς κάθε πρόβλημα που δημιουργείται μπορεί να αποτελέσει τη βάση για τη δημιουργία νέων (Contreras, 2007). Αναμφισβήτητα, η στρατηγική αυτή επιτρέπει την εξερεύνηση ποικίλων ιδεών και την εμβάθυνση στη δομή των προβλημάτων (Patsiala & Papadopoulos, 2022).

Παράλληλα, ωθεί τους μαθητές να λάβουν υπόψη τη σχέση μεταξύ αρχικού και νέου προβλήματος, οδηγώντας σε βαθύτερη κατανόηση της ΚΜΠ (Lavy, 2015). Επιπλέον, τους απομακρύνει από τον αυστηρό τρόπο διδασκαλίας της ΕΜΠ και την αντίληψη ότι υπάρχει μόνο ένας σωστός τρόπος προσέγγισης ενός προβλήματος (Lavy, 2015).

Η Stoyanova (1997, 2005) εντόπισε τέσσερις κατηγορίες στρατηγικών:
(α) Αναδιατύπωση: Αναδιάταξη των στοιχείων της δομής ενός προβλήματος ή προσθήκη στοιχείων που δε σχετίζονται με αυτό, χωρίς να αλλάζει η φύση του. Το νέο πρόβλημα είναι ίδιο ή παρόμοιο με το αρχικό, διαφέροντας μόνο στον τρόπο παρουσίασης των πληροφοριών στη δήλωσή του.
(β) Ανακατασκευή: Τροποποιήσεις του αρχικού προβλήματος, αλλάζοντας τη φύση του. Το νέο πρόβλημα σχετίζεται με το αρχικό, αλλά το περιεχόμενο διαφέρει.
(γ) Μίμηση: Το αρχικό πρόβλημα επεκτείνεται με την προσθήκη μιας δομής που σχετίζεται με αυτό και δημιουργείται ένα νέο που προσομοιάζει με ένα πρόβλημα που ο μαθητής έχει συναντήσει στο παρελθόν. Αυτό συμβαίνει αλλάζοντας το ζητούμενο ή προσεγγίζοντας τις πληροφορίες εναλλακτικά (π.χ. λόγος αντί για διαίρεση).
(δ) Επινόηση: Δημιουργία προβλημάτων που διαφέρουν από όσα οι μαθητές έχουν λύσει και δεν σχετίζονται με τις προηγούμενες μαθηματικές εμπειρίες τους.

Οι Chua και Toh (2022) αναφέρουν πως στην έρευνά τους οι μαθητές χρησιμοποίησαν ποικίλες στρατηγικές, ειδικά στις ελεύθερες καταστάσεις. Αντίθετα, οι Van Harpen και Presmeg (2015) σχολιάζουν ότι στη δική τους έρευνα, πολλοί από τους μαθητές δεν χρησιμοποιούσαν συγκεκριμένες στρατηγικές και αδυνατούσαν να εξηγήσουν τον τρόπο που λειτούργησαν κατά την ΚΜΠ. Στο γεγονός αυτό αποδίδουν τον μεγάλο αριθμό μη λογικών και χωρίς νόημα προβλημάτων που δημιουργήθηκαν. Ο Contreras (2007) επιβεβαιώνει ότι οι στρατηγικές ΚΜΠ μπορούν να χρησιμοποιηθούν συστηματικά σε μια ποικιλία καταστάσεων, όμως χωρίς επαρκή εξάσκηση, οι μαθητές σπάνια τις χρησιμοποιούν. Επίσης, είναι σημαντικό να τις χρησιμοποιήσουν για να δημιουργήσουν ένα πιο απαιτητικό πρόβλημα και όχι απλούστερες εκδοχές του αρχικού (Gonzales, 1998).

Η Stoyanova (1997) υποστηρίζει πως διαφορετικές στρατηγικές απαιτούν διαφορετικές γνωστικές διεργασίες. Προσθέτει πως το είδος των στρατηγικών που χρησιμοποιεί ένας μαθητής εξαρτάται από το μαθηματικό του υπόβαθρο, το είδος του έργου ΚΜΠ, την προηγούμενη εμπειρία του, αλλά και από τα χαρακτηριστικά του ίδιου, όπως η δημιουργικότητά του. Επιπλέον, δύναται να επηρεαστεί μέσα από κατάλληλες παρεμβάσεις. Οι Grundmeier (2015) και Papadopoulos και Patsiala (2023β) παρατήρησαν μια σταδιακή μετατόπιση από απλοϊκές και επιφανειακές στρατηγικές στη χρήση πιο εξελιγμένων και περίπλοκων στρατηγικών. Ενώ αρχικά οι μαθητές προσπαθούσαν να μιμηθούν το αρχικό πρόβλημα, αλλάζοντας απλώς τους αριθμούς ή αντιστρέφοντας τα δεδομένα και τα ζητούμενα, με εξάσκηση άρχισαν να χρησιμοποιούν πιο προχωρημένες στρατηγικές βασιζόμενοι στη δομή των προβλημάτων (Papadopoulos & Patsiala, 2023β).

Όταν παρουσιάζονται καταστάσεις χωρίς ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, πρέπει πρώτα να κατασκευαστεί ένα μαθηματικό πρόβλημα με τις παρεχόμενες πληροφορίες (Contreras, 2007). Έτσι, για τα προβλήματα από ημι-δομημένες καταστάσεις, οι Chen κ.ά. (2015) προτείνουν τις εξής στρατηγικές: (α) Σκέψου μια ερώτηση που θα έκανες στον εαυτό σου αν βρισκόσουν σε αυτή την κατάσταση ή (β) Σκέψου διάφορα προβλήματα προσθετικής ή πολλαπλασιαστικής δομής που έχεις μάθει.

1.9. Ικανότητα ΚΜΠ

Η δημιουργία ενός προβλήματος περιλαμβάνει πολλά περισσότερα από την απλή γραπτή διατύπωση του (Bevan & Capraro, 2021) και απαιτεί πολυσύνθετο συλλογισμό (Wang et al., 2022). Οι μαθητές χρειάζεται να δώσουν προσοχή σε πολλά στοιχεία κατά το σχεδιασμό του προβλήματος, από την επιλογή του περιεχομένου, στην εύρεση του κατάλληλου πλαισίου και τέλος στη διατύπωση (Milinković, 2015). Πρόκειται για ένα σύνθετο έργο που περιλαμβάνει ποικίλες διαδικασίες και έχει αυξημένες γνωστικές απαιτήσεις (Cai et al., 2020· Mestre, 2002· Ngah, et al., 2016· Wang et al., 2022). Η σαφής διατύπωση επιλύσιμων προβλημάτων, μέσα στο κατάλληλο πλαίσιο που να ενσωματώνουν συγκεκριμένες έννοιες αποδεικνύεται ιδιαίτερα απαιτητική γνωστικά (Kwek & Leng, 2008).

Οι Brown και Walter (2013) υποστηρίζουν ότι για να δημιουργήσουν τα δικά τους προβλήματα, οι μαθητές πρέπει αρχικά να κατανοούν τι είναι ένα πρόβλημα. Για να συμβεί αυτό, πρέπει να εκτίθενται σε ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις, ώστε η αντίληψή τους να μην περιοριστεί στα απλά λεκτικά προβλήματα, ενώ πρέπει να κατανοούν και βασικά στοιχεία της διαδικασίας ΕΜΠ (Lowrie, 2002). Η English (1997β) και οι Patsiala και Papadopoulos (2022) συμπληρώνουν ότι είναι βασικό να μπορούν να αναγνωρίζουν τη δομή ενός μαθηματικού προβλήματος και να την εντοπίζουν σε παρόμοια προβλήματα. Αυτό απαιτεί να διαχωρίζουν τη δομή από το πλαίσιο και να επικεντρώνονται στα δομικά του στοιχεία (English, 1997β). Ενδείξεις ότι είναι σε θέση να το κάνουν αυτό αποτελούν η αναγνώριση των πληροφοριών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ένα νέο πρόβλημα, καθώς και η δημιουργία ερωτήσεων που να ταιριάζουν σε μια κατάσταση (Patsiala & Papadopoulos, 2022). Επιπρόσθετα, πριν από οποιαδήποτε προσπάθεια ΚΜΠ απαιτείται βαθιά κατανόηση των εμπλεκόμενων μαθηματικών εννοιών (Cai & Hwang, 2023· Ellerton, 2013) και ικανότητα συσχέτισής τους (Ayllón Blanco, Gómez Pérez, et al., 2016· Chua & Toh, 2022). Το άτομο πρέπει να συνδυάσει μια λογική ιστορία-πλαίσιο με κατάλληλα αντικείμενα και γεγονότα με τρόπο που να αντιπροσωπεύει συγκεκριμένες έννοιες (Mestre, 2002). Προϋπόθεση για αυτό είναι η γνώση του πως εμφανίζονται οι διάφορες έννοιες σε ένα εύρος προβληματικών καταστάσεων (Mestre, 2002). Η κατανόηση των διαφορετικών αναπαραστάσεων των εννοιών είναι σημαντική για τη μετάφραση πληροφοριών από μια μορφή σε άλλη (Christou et al., 2005).

Αναλυτικότερα, η δημιουργία ενός προβλήματος απαιτεί σκέψη υψηλότερου επιπέδου και ευελιξία από τους μαθητές (Bevan & Capraro, 2021· Kopparla et al., 2019). Αρχικά, απαιτεί την κριτική ανάλυση του έργου, την εξέταση όλων των δεδομένων και τη διαχείριση διαφορετικών στρατηγικών επίλυσης (Ayllón Blanco, Gómez Pérez, et al., 2016). Οι μαθητές πρέπει να διακρίνουν τις σημαντικές από τις ασήμαντες πληροφορίες, να ανακαλύψουν τις σχέσεις μεταξύ των δεδομένων, να αποφανθούν για το αν οι πληροφορίες επαρκούν για την επίλυση και να ελέγξουν τη συνοχή των αριθμητικών δεδομένων (Bonotto, 2013· Bonotto & Dal Santo, 2015). Μόνο όταν είναι σε θέση να αναγνωρίσουν τις βασικές ιδέες και τις σχέσεις μεταξύ αυτών σε μια κατάσταση ή πρόβλημα, θα μπορέσουν να συλλογιστούν νέες καταστάσεις ή προβλήματα που να προκύπτουν από την τροποποίηση ή την επέκταση των ιδεών αυτών (English, 1997α). Οι Leung και Silver (1997) συνοψίζουν ότι προκειμένου ένα άτομο να δημιουργήσει μαθηματικά προβλήματα με νόημα σχετικά με μια κατάσταση πρέπει (α) να αναγνωρίσει τα δεδομένα και τις σχέσεις που ενυπάρχουν σε αυτήν, (β) να τη «μαθηματικοποιήσει» και (γ) να την παρουσιάσει με μορφή προβλήματος. Παρομοίως, οι Zhang, Cai, κ.ά. (2022) καταλήγουν ότι οι γνωστικές διαδικασίες που αναμένονται κατά την ενασχόληση με έργα ΚΜΠ είναι: (α) η κατανόηση του πλαισίου του έργου, (β) η κατασκευή του προβλήματος (επιλογή και καθορισμός των στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν και αναγνώριση των σχέσεων μεταξύ τους) και (γ) η έκφραση του προβλήματος (περιλαμβάνει την οργάνωση της γλώσσας και τη χρήση της σύνταξης, της γραμματικής κ.λπ.).

Εκτός των άλλων, είναι απαραίτητη και η δημιουργική σκέψη (Gonzales, 1998). Απαιτείται μια προσωπική, δημιουργική συνεισφορά του ατόμου, το οποίο καλείται να αντλήσει ιδέες και στοιχεία από τις εμπειρίες του προκειμένου να δημιουργήσει μια προβληματική κατάσταση (Ayllón Blanco, Gómez Pérez, et al., 2016). Χρειάζεται να ανακαλέσει και να χρησιμοποιήσει προηγούμενες μαθηματικές γνώσεις και να γνωρίζει πως εφαρμόζονται στην πραγματική ζωή (Ayllón Blanco, Gómez Pérez, et al., 2016· Bevan & Capraro, 2021). Πρέπει να τις νοηματοδοτήσει, ώστε να δημιουργήσει πρωτότυπες ιδέες που να κατανοεί (Ngah et al., 2016). Τέλος, οι Özgen κ.ά. (2019) θεωρούν βασική δεξιότητα για την ΚΜΠ τη σωστή χρήση της μαθηματικής γλώσσας. Η επάρκεια των μαθητών στην αποτύπωση της σκέψης τους με μαθηματικό τρόπο επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό την επιτυχία στην ΚΜΠ.

Φυσικά, η ΚΜΠ περιλαμβάνει και μεταγνωστικές διεργασίες, οι οποίες διαφέρουν από αυτές που εμπλέκονται στην ΕΜΠ (Baumanns & Rott, 2023). Καθ' όλη τη διαδικασία απαιτείται αυτοπαρακολούθηση και αυτορρύθμιση των γνωστικών διαδικασιών από τους ίδιους τους μαθητές (Wang et al., 2022). Αρχικά, πρέπει να κατανοήσουν τι ζητείται από το εκάστοτε έργο ΚΜΠ (Cai, 2022) και να αντιληφθούν τους περιορισμούς που υπάρχουν (Ellerton, 2013), ενώ στο τέλος πρέπει να αξιολογήσουν και τη λογικότητα των προβλημάτων (Lavy, 2015· Ngah et al., 2016). Πρέπει να μπορούν να αξιολογήσουν τη σαφήνεια, τη δυσκολία και την επιλυσιμότητά του προβλήματος, καθώς και την καταλληλότητά του για συγκεκριμένους αποδέκτες (Baumanns & Rott, 2023). Οι Kontorovich κ.ά. (2011) αναφέρουν ότι η καταλληλότητα διακρίνεται σε καταλληλότητα ως προς τον ίδιο τον μαθητή που δημιουργεί το πρόβλημα και το βαθμό στον οποίο είναι ικανοποιημένος, ως προς τους πιθανούς αξιολογητές και ως προς τους πιθανούς λύτες.

Ορισμένοι ερευνητές υποστηρίζουν πως η ΚΜΠ απαιτεί και την επίλυση των προβλημάτων που δημιουργούνται (Baumanns & Rott, 2020· Cai, 2022· Kónya, 2022· van Bommel & Palmér, 2021) ή έστω την πρόβλεψη πιθανών λύσεων (Milinković, 2015). Αν οι μαθητές δεν ελέγξουν την επιλυσιμότητα των προβλημάτων, εγκυμονεί ο κίνδυνος να δημιουργηθούν μη λογικά προβλήματα χωρίς νόημα (Papadopoulos & Patsiala, 2023α). Η γνώση του τρόπου επίλυσης του προβλήματος συμβάλλει αναμφίβολα στη δημιουργία καλύτερων προβλημάτων

(Geteregechi, 2023). Η διασφάλιση ότι ένα πρόβλημα είναι επιλύσιμο και ρεαλιστικό απαιτεί ιδιαίτερες γνώσεις και συσχέτιση των αριθμητικών δεδομένων και του πλαισίου (Bevan & Capraro, 2021). Άλλοι, απεναντίας, θεωρούν πως δεν είναι απαραίτητο οι μαθητές να είναι σε θέση να επιλύσουν τα προβλήματα που δημιουργούν (Lowrie, 2002), ούτε να μπορούν να επιλύσουν τα προβλήματα που τους δίνονται ως βάση για τη δημιουργία νέων (Cai et al., 2020). Μάλιστα, οι Papadopoulos και Patsiala (2023α) εκφράζουν την ανησυχία ότι αν οι μαθητές γνωρίζουν εκ των προτέρων ότι πρέπει να επιλύσουν τα προβλήματα που δημιουργούν είναι πιθανό να αγχωθούν και να επιλέξουν να δημιουργήσουν γνωστά και εύκολα προβλήματα, θυσιάζοντας την πρωτοτυπία και τη δημιουργικότητα.

1.9.1. Έρευνες για την ικανότητα ΚΜΠ

Οι περισσότερες έρευνες που αξιολόγησαν την ικανότητα ΚΜΠ σε μαθητές καταλήγουν πως κατέχουν τις απαραίτητες γνώσεις και δεξιότητες για να κατασκευάσουν κατάλληλα μαθηματικά προβλήματα (Cázares Solórzano et al., 1998· Silverman et al., 1992· Van den Heuvel-Panhuizen et al., 1995). Οι Silver και Cai (1996) αναφέρουν ότι οι μαθητές δημιούργησαν μεγάλο αριθμό επιλύσιμων προβλημάτων που ήταν σημασιολογικά και συντακτικά πολύπλοκα. Οι Zhang, Cai, κ.ά. (2022) κατέληξαν πως μαθητές ΣΤ’ τάξης ήταν σε θέση να δημιουργήσουν λογικά μαθηματικά προβλήματα με επαρκείς πληροφορίες και ποικίλες σχέσεις και στοιχεία, που όχι μόνο ανταποκρίνονταν στις απαιτήσεις των έργων, αλλά ήταν επιλύσιμα και περίπλοκα. Η Bonotto (2013) και οι Silverman κ.ά. (1992) διαπιστώνουν πως οι μαθητές μπορούν να δημιουργήσουν προβλήματα που να ξεπερνούν σε δυσκολία, πρωτοτυπία και ενδιαφέρον τα συνήθη προβλήματα που συναντώνται στα εγχειρίδια, ενώ είναι και πολύ πιο ρεαλιστικά.

Στην Ελλάδα, οι Papadopoulos και Patsiala (2019) μελέτησαν μαθητές Δ’ τάξης και σχολίασαν πως υπό τις κατάλληλες συνθήκες μπορούν να δημιουργήσουν ενδιαφέροντα μαθηματικά προβλήματα, με τη μαθηματική και γλωσσική πολυπλοκότητά τους να αυξάνεται με την πάροδο των μαθημάτων. Λίγο αργότερα, μελετώντας μαθητές Δ’ και Ε’ τάξης, διαπίστωσαν ότι όλοι οι συμμετέχοντες μπόρεσαν να διατυπώσουν μαθηματικά προβλήματα και κατανόησαν το ζητούμενο κάθε δραστηριότητας (Πατσιαλά & Παπαδόπουλος, 2022). Αναφέρουν ότι σε ελάχιστες περιπτώσεις μόνο δεν υπήρχε ερώτημα ή το ερώτημα ήταν μη μαθηματικού περιεχομένου, γεγονός που αποδίδεται στην απουσία εμπειριών στην ΚΜΠ.

Όσον αφορά το μαθηματικό περιεχόμενο των προβλημάτων, έχει παρατηρηθεί ότι συνήθως περιλαμβάνει έννοιες και ιδέες που οι μαθητές διδάσκονται την εκάστοτε στιγμή και αντανακλά την μαθηματική περιοχή που εστιάζει η διδασκαλία στην τάξη (Silverman et al., 1992). Από την άλλη, οι Singer και Voica (2015) αναφέρουν πως οι μαθητές δημιουργούσαν προβλήματα που σχετίζονταν με τις μαθηματικές περιοχές της προτίμησής τους, οι οποίες ήταν αυτές στις οποίες είχαν και καλύτερη επίδοση. Αυτό υποδηλώνει ότι ένοιωθαν ότι πρέπει να έχουν μια πολύ καλή κατανόηση της εκάστοτε περιοχής, προκειμένου να διατηρήσουν τον έλεγχο και να διασφαλίσουν την ποιότητα των προβλημάτων. Ίσως αυτό εξηγεί το συμπέρασμα των Θεοδούλου και Φιλίππου (2003), οι οποίοι ανέφεραν ότι η πλειοψηφία κατασκεύασε προβλήματα με ακέραιους αριθμούς, ενώ σε ελάχιστες περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκαν κλάσματα. Αντίστοιχα, οι Bevan και Capraro (2021) παρατήρησαν πως, ενώ οι μαθητές χρησιμοποιούσαν τη σωστή ορολογία για κάθε πράξη, τα περισσότερα προβλήματα απαιτούσαν πρόσθεση και οι μαθητές ζητούσαν να υπολογιστεί μια συνολική ποσότητα αντικειμένων, χρησιμοποιώντας τις λέξεις «συνολικά» ή «όλα μαζί», καταστάσεις με τις οποίες ήταν πιο εξοικειωμένοι.

Αναφορικά με το πλαίσιο, οι Bevan και Capraro (2021) αναφέρουν ότι οι μαθητές δημιούργησαν επιλύσιμα και ρεαλιστικά προβλήματα σε ποικίλα πλαίσια. Μάλιστα ήταν πιθανότερο να δημιουργήσουν επιλύσιμα και πιο ενδιαφέροντα προβλήματα όταν είχαν την ελευθερία να χρησιμοποιήσουν οικεία πλαίσια. Χαρακτηριστικό ήταν ότι χρησιμοποιούσαν στα προβλήματα ονόματα που τους ήταν οικεία, όπως των δασκάλων ή των συμμαθητών τους. Ο Winograd (1992) σημειώνει πως οι μαθητές είναι ιδιαίτερα επινοητικοί κατά την ΚΜΠ και αντλούν έμπνευση από τις εμπειρίες τους, τη φαντασία τους, τις αγαπημένες τους δραστηριότητες και το περιβάλλον της τάξης. Αυτό υποδηλώνει ότι έχουν την ικανότητα να τοποθετήσουν τα προβλήματα σε πλαίσια που έχουν νόημα για τους ίδιους (English, 1997β).

Οι Christou κ.ά. (2005) διακρίνουν τρεις κατηγορίες μαθητών, οι οποίες διαφέρουν ως προς την ικανότητα ΚΜΠ. Οι μαθητές της πρώτης κατηγορίας μπορούν να απαντήσουν μόνο σε έργα που απαιτούν κατανόηση ποσοτικών πληροφοριών. Τείνουν να δημιουργούν λεκτικά προβλήματα που αντικατοπτρίζουν τις σχολικές τους εμπειρίες ή αποτελούν παραλλαγές όσων βρίσκονται στα σχολικά εγχειρίδια. Οι μαθητές της δεύτερης κατηγορίας είναι σε θέση να διαχειριστούν επιπλέον έργα μετάφρασης ποσοτικών πληροφοριών που παρέχονται σε πίνακες ή γραφήματα από τη μια μορφή στην άλλη, να κατανοήσουν τις σχέσεις μεταξύ των αυτών και να τις μετατρέψουν σε επιλύσιμα προβλήματα με νόημα. Οι μαθητές της τρίτης κατηγορίας είναι σε θέση να απαντήσουν σε όλα τα έργα (κατανόηση, επιλογή, μετάφραση και επεξεργασία ποσοτικών πληροφοριών).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι οι μαθητές είναι ικανοί να τροποποιούν τη δυσκολία των προβλημάτων τους. Η έρευνα δείχνει ότι τείνουν να δημιουργούν πιο περίπλοκα προβλήματα, σημασιολογικά και γλωσσικά, όταν τους ζητείται να δημιουργήσουν ένα «δύσκολο» πρόβλημα, ενώ όταν τους ζητείται να δημιουργήσουν ένα «εύκολο» πρόβλημα κατασκευάζουν προβλήματα με πιο απλή δομή και ευκολότερες ερωτήσεις (Chen et al., 2007). Οι Van den Heuvel-Panhuizen κ.ά. (1995) παρατήρησαν ότι για τα δύσκολα προβλήματα δημιουργούσαν αποκλειστικά λεκτικά προβλήματα, ενώ στα εύκολα συμπεριλάμβαναν και εικόνες. Οι Kar κ.ά. (2021) αναφέρουν ότι όταν καλούνταν να δημιουργήσουν προβλήματα για συμμαθητές, τα προσάρμοζαν λαμβάνοντας υπόψη το μέγεθος των αριθμών, το είδος και τον αριθμό των πράξεων, καθώς και τα ενδιαφέροντα των μαθητών στους οποίους απευθύνονται. Αναλυτικότερα, για συμμαθητές που θεωρούσαν καλύτερους στα μαθηματικά κατασκεύαζαν πιο πολύπλοκα σημασιολογικά προβλήματα, με περισσότερες πράξεις ή μεγαλύτερους αριθμούς, θεωρώντας ότι αυτά θα τους βοηθούσαν να βελτιωθούν κι άλλο. Αντιθέτως, για όσους θεωρούσαν λιγότερο καλούς, επέλεγαν απλούστερα προβλήματα ώστε να μην νοιώσουν αισθήματα αποτυχίας όταν τα λύνουν. Ακόμα, χρησιμοποιούσαν τις πράξεις που τους δυσκόλευαν για να τους βοηθήσουν να εξασκηθούν. Φάνηκε, λοιπόν, να συνδέουν τη δυσκολία ενός προβλήματος με τον αριθμό και το είδος των πράξεων που περιέχει. Οι Θεοδούλου και Φιλίππου (2003) παρατήρησαν ότι οι μαθητές θεωρούσαν δύσκολα τα προβλήματα που έχουν μεγάλους και δύσκολους αριθμούς και όχι αυτά που χρειάζονται πολλά στάδια για να επιλυθούν. Οι Lowrie και Whitland (2000) ζήτησαν από μαθητές Γ’ τάξης να δημιουργήσουν προβλήματα για μαθητές Β’ και Δ’ τάξης. Βρήκαν ότι οι μαθητές λάμβαναν υπόψη το μέγεθος των αριθμών, την καταλληλότητα του περιεχομένου για κάθε τάξη, την ικανότητα ΕΜΠ των μαθητών, τα ενδιαφέροντα και τις εμπειρίες τους και το αν ήταν ανοιχτά προβλήματα. Αναφορικά με το μέγεθος των αριθμών, προκειμένου να αλλάξουν τη δυσκολία των προβλημάτων, χρησιμοποιούσαν μικρότερους αριθμούς για τη Β’ τάξη και μεγαλύτερους για τη Δ’, που ούτε οι ίδιοι δεν ήταν ακόμη σε θέση να χειριστούν με άνεση. Ως προς το περιεχόμενο, ορισμένοι δημιουργούσαν προβλήματα για τη Β' τάξη, χρησιμοποιώντας μαθηματικά της Γ' τάξης, στοχεύοντας να βοηθήσουν τους μικρότερους μαθητές να βελτιωθούν. Ο Winograd (1992, 1993) σχολιάζει πως οι μαθητές προσπαθούσαν να αυξήσουν τη δυσκολία των προβλημάτων τους με τους ακόλουθους τρόπους: (α) χρησιμοποιώντας μεγάλους αριθμούς ή αριθμούς που θεωρούσαν δύσκολους, (β) προσθέτοντας επιπλέον, μαθηματικές ή μη, πληροφορίες, (γ) αποφεύγοντας μια ερώτηση «ρουτίνας», (δ) δημιουργώντας ένα μικρότερο πρόβλημα μέσα στο αρχικό (π.χ. αντί για «Μια σχολική μέρα διαρκεί 6 ώρες και 40 λεπτά», γράφουν «Μια σχολική μέρα ξεκινά στις 8:40 και τελειώνει στις 3:20»).

Τέλος, ορισμένοι μαθητές επιδεικνύουν υψηλή μεταγνωστική ικανότητα κατά την ενασχόληση με έργα ΚΜΠ. Είναι σε θέση να περιγράψουν τον τρόπο που προσέγγισαν τα έργα, να χειριστούν τα δεδομένα και να αντιληφθούν τους περιορισμούς και να ακολουθήσουν συστηματικά και σκόπιμα συγκεκριμένες στρατηγικές για να φτάσουν σε ένα επιθυμητό αποτέλεσμα (Singer & Voica 2015). Οι Baumanns και Rott (2023) επιβεβαιώνουν την εμφάνιση μεταγνωστικών συμπεριφορών σε φοιτητές, που αφορούσαν την οργάνωση και την παρακολούθηση της διαδικασίας ΚΜΠ και την αξιολόγηση των τελικών προβλημάτων.

Από την άλλη μεριά, υπάρχουν ερευνητές που αναφέρουν αντικρουόμενα αποτελέσματα. Οι Cai κ.ά. (2013) αναφέρουν σχετικά χαμηλά ποσοστά επιτυχίας στα έργα ΚΜΠ και τονίζουν πως αρκετοί μαθητές δεν ενεπλάκησαν στη διαδικασία. Αυτό υποδηλώνει ότι δεν είναι ακόμα έτοιμοι για τέτοιου είδους έργα και ότι αυτά μπορούν να αξιοποιηθούν και να δώσουν χρήσιμα αποτελέσματα αφού αποκτήσουν εμπειρίες στην ΚΜΠ. Οι Van Harpen και Sriraman (2013) αναφέρουν ότι οι μαθητές δεν μπόρεσαν να δημιουργήσουν απαιτητικά προβλήματα, ενώ πολλά δεν ήταν επιλύσιμα, καθώς περιείχαν ελλιπείς πληροφορίες. Το ίδιο παρατήρησαν και οι Chen κ.ά. (2013), οι οποίοι αναφέρουν ότι οι μαθητές είχαν χαμηλή εμπιστοσύνη στις ικανότητές τους κι ενώ δημιούργησαν σωστά μαθηματικά προβλήματα, αυτά υστερούσαν στην πολυπλοκότητα, την ποικιλία και την πρωτοτυπία. Παρομοίως, οι Özgen κ.ά. (2019) καταλήγουν πως η ικανότητα ΚΜΠ των μαθητών ήταν χαμηλή. Τα προβλήματά τους δεν είχαν επαρκή δεδομένα, ενώ ένα στα δυο προβλήματα δεν μπορούσε να επιλυθεί. Ακόμα, δεν ήταν σε θέση να χρησιμοποιήσουν επαρκώς τη μαθηματική γλώσσα. Σχετικά με αυτό, οι Kaba και Sengül (2016) περιγράφουν ορισμένες αδυναμίες στα προβλήματα των μαθητών. Μεταξύ αυτών είναι η απουσία κατανοητού κειμένου, καθώς οι μαθητές θεωρούσαν ότι το πρόβλημα τους είναι κατανοητό, όμως όταν το διάβαζαν οι συμμαθητές τους δεν το κατανοούσαν. Επίσης, μερικά προβλήματα ήταν μακροσκελή με λεπτομερείς εξηγήσεις που δυσχέραιναν την κατανόηση, ήταν πολύ περίπλοκα ή πολύ απλά ή δεν ήταν ολοκληρωμένα. Ακόμα, αναφέρουν την απουσία σύνδεσης με την καθημερινή ζωή (π.χ. «Έχω 1000 σπίτια») και την απουσία ερώτησης. Τέλος, παρατήρησαν ότι ακόμα και στα προβλήματα που η δήλωση ήταν κατανοητή, έλειπαν μαθηματικές εκφράσεις, εμπεριέχονταν διφορούμενες εκφράσεις και οι πληροφορίες ήταν ελλιπείς.

Οι Crespo και Sinclair (2008) συμπεραίνουν ότι όταν ζητηθεί σε μαθητές να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα, θα δημιουργήσουν προβλήματα που αντιστοιχούν με την αντίληψή τους για το πως πρέπει να μοιάζει και να είναι διατυπωμένο ένα τυπικό μαθηματικό πρόβλημα. Παρ' όλα αυτά, οι Chen κ.ά. (2007) και οι Özgen κ.ά. (2019) σχολιάζουν ότι ένα μεγάλο μέρος των προβλημάτων δεν ήταν πρωτότυπα, με τους Özgen κ.ά. (2019) να κάνουν λόγο για ποσοστό άνω του 80%. Πράγματι, οι μαθητές συχνά τείνουν να δημιουργούν απλά, προβλέψιμα και τυποποιημένα λεκτικά προβλήματα, παρόμοια με αυτά που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια ή με αυτά που διδάχθηκαν στην τάξη (Bonotto & Dal Santo, 2015· Chen et al., 2013· Θεοδούλου & Φιλίππου, 2003· Lowrie, 2002· Papadopoulos & Patsiala, 2019· Winograd, 1993). Φαίνεται πως χρησιμοποιούν ως βάση ήδη γνωστά και οικεία προβλήματα που έχουν συναντήσει στο παρελθόν, δυσκολεύονται να απομακρυνθούν από αυτά και απλώς προτείνουν τροποποιήσεις τους (Chen et al., 2007· Özgen et al., 2019· Singer, Pelczer, et al., 2011· Singer & Voica, 2015). Στην έρευνα της Stoyanova (1997) αρκετοί μαθητές παραδέχτηκαν ότι δημιούργησαν προβλήματα που ανακάλεσαν από το βιβλίο ή είχαν διαβάσει «κάπου». Το ίδιο παρατηρήθηκε και σε φοιτητές, οι οποίοι ενώ δημιουργούσαν προβλήματα με νόημα και ορθή σημασιολογική και συντακτική δομή, τα περισσότερα έμοιαζαν σε μεγάλο βαθμό με προβλήματα που είχαν ήδη συναντήσει (Geteregechi, 2023· Koichu & Kontorovich, 2013). Χρησιμοποιώντας τα ως μοντέλα έκαναν μικρές αλλαγές στα δεδομένα ή το πλαίσιο, διατηρώντας ίδια τη δομή και τον τρόπο επίλυσης. Ακόμα και όταν έκαναν σημαντικές τροποποιήσεις, φάνηκε να μην κατανοούν τις συνέπειες αυτών (Geteregechi, 2023).

Όπως συνοψίζουν οι Norman κ.ά. (2011), ορισμένοι παράγοντες που οδηγούν σε δυσκολίες σε δραστηριότητες ΚΜΠ είναι η έλλειψη εξοικείωσης με το θέμα, η έλλειψη των απαραίτητων γνώσεων ώστε να μπορούν να προσθέσουν ή να αφαιρέσουν στοιχεία από ένα πρόβλημα και η έλλειψη γνώσεων για το πως να συσχετίσουν μια κατάσταση με την πραγματική ζωή. Οι Silver και Cai (1996) αποδίδουν το γεγονός ότι ένα μέρος των μαθητών δημιούργησε απλές δηλώσεις ή μη μαθηματικές ερωτήσεις, οι οποίες βέβαια σχετίζονταν με τις δοσμένες πληροφορίες, στη μη εξοικείωση και την έλλειψη εμπειρίας τους με την ΚΜΠ. Οι Kwek και Leng (2008) αποδίδουν τη δυσκολία των μαθητών να εφαρμόσουν συγκεκριμένες έννοιες σε μια ποικιλία πλαισίων στην περιορισμένη αντίληψη που είχαν για αυτές και στην περιορισμένη έκθεση στα ποικίλα πλαίσια που μπορεί να εμφανιστεί μια συγκεκριμένη έννοια, με αποτέλεσμα να προσπαθούν ανεπιτυχώς να συνδέσουν συγκεκριμένες έννοιες με συγκεκριμένα πλαίσια, χωρίς να είναι ευέλικτοι. Τέλος, οι Özgen κ.ά. (2019) αποδίδουν τη χαμηλή ικανότητα ΚΜΠ στα μη ρεαλιστικά προβλήματα των σχολικών εγχειριδίων που χρησιμοποιούνται στην τάξη.

1.9.2. Παράγοντες που επηρεάζουν την ικανότητα ΚΜΠ

(α) Συναισθηματικοί παράγοντες

Οι Brown και Walter (2005) σχολιάζουν ότι ένα πλήθος συναισθηματικών παραγόντων, όπως ο έπαινος, ο φόβος ή η απειλή από κάποιον, μπορούν να ενισχύσουν ή να εμποδίσουν την ΚΜΠ. Οι Guo κ.ά. (2020) μελέτησαν διάφορους συναισθηματικούς παράγοντες και τον τρόπο που σχετίζονται με την επίδοση στην ΚΜΠ. Η αυτοεικόνα και οι προσδοκίες των μαθητών για την επίδοσή τους, αλλά και η αξία που απέδιδαν στα έργα ΚΜΠ, σχετίζονταν θετικά με την επίδοσή τους. Μάλιστα η αξία που απέδιδαν στην ΚΜΠ βρέθηκε να προβλέπει την περιπλοκότητα και την ποσότητα των προβλημάτων. Φάνηκε ότι οι μαθητές που εκδήλωναν ενδιαφέρον για την ΚΜΠ κατασκεύαζαν επιλύσιμα και δυσκολότερα προβλήματα, εμπλέκονταν περισσότερο γνωστικά, αυτορρυθμίζονταν και επιδείκνυαν μεγαλύτερη επιμονή, προσπαθώντας να δημιουργήσουν όσο περισσότερα προβλήματα μπορούσαν, θυσιάζοντας όμως την ακρίβεια (Guo et al., 2020). Οι Nicolaou και Philippou (2007) επιβεβαιώνουν τη συσχέτιση της αυτοαποτελεσματικότητας των μαθητών στην ΚΜΠ με την ικανότητα ΚΜΠ, με την αυτοαποτελεσματικότητα να αποτελεί ισχυρό προβλεπτικό παράγοντα της ικανότητας αυτής. Οι μαθητές με υψηλότερη αυτοαποτελεσματικότητα μπορούσαν να δημιουργήσουν προβλήματα χωρίς υποστήριξη και καθοδήγηση, ενώ αυτοί με χαμηλή, δεν ήταν σε θέση να κατασκευάσουν προβλήματα χωρίς παροχή βοήθειας (Nicolaou & Philippou, 2007). Παρομοίως, έχει βρεθεί στατιστικά σημαντική θετική συσχέτιση μεταξύ της επίδοσης στην ΚΜΠ και των θετικών στάσεων των μαθητών απέναντι σε αυτή (Bevan et al., 2019· Chen et al., 2013), αλλά και απέναντι στην ΕΜΠ (Kwek & Leng, 2008). Οι Kwek και Leng (2008) σχολιάζουν ότι οι μαθητές που δημιούργησαν περισσότερο πολύπλοκα προβλήματα, που ξεπερνούσαν σε δυσκολία και πρωτοτυπία τα συνήθη προβλήματα και απαιτούσαν αφαιρετικό συλλογισμό, κριτική και αναλυτική σκέψη, ήταν όσοι είχαν όχι μόνο καλή εννοιολογική γνώση των μαθηματικών εννοιών, αλλά και πολύ θετική στάση απέναντι στην ΕΜΠ.

Επιπροσθέτως, οι Guo κ.ά. (2020) σχολιάζουν ότι το άγχος των μαθητών απέναντι στην ΚΜΠ επηρέαζε αρνητικά την πολυπλοκότητα των προβλημάτων, διαπιστώνοντας ότι όσοι ένοιωθαν μεγαλύτερο άγχος και πίεση στις δοκιμασίες ΚΜΠ, έτειναν να δημιουργούν ευκολότερα και απλούστερα προβλήματα και τα παρατούσαν γρήγορα στα δύσκολα έργα. Οι ερευνητές εξηγούν ότι οι μαθητές αυτοί αφιερώνουν μεγάλο μέρος της προσοχής τους στη διαχείριση των σκέψεών τους σχετικά με μια πιθανή αποτυχία, παρά σε μαθηματικό συλλογισμό, με αποτέλεσμα την αδυναμία δημιουργίας περίπλοκων προβλημάτων και την επιλογή απλούστερων ερωτημάτων. Αυτό ίσως οφείλεται και στο ότι επιθυμούν να ολοκληρώσουν όσο το δυνατόν γρηγορότερα τις δοκιμασίες ΚΜΠ για να απελευθερωθούν από το άγχος που αισθάνονται κατά την ενασχόληση με αυτές (Guo et al., 2020).

(β) Εμπειρία και τάξη μαθητών

Ορισμένοι ερευνητές υποστηρίζουν πως υπάρχει κάποιου είδους σχέση ανάμεσα στην ικανότητα ΚΜΠ και την εμπειρία (Stickles, 2011). Με άλλα λόγια, η τάξη ή η βαθμίδα στην οποία φοιτούν οι συμμετέχοντες ή ο ρόλος τους, δηλαδή αν πρόκειται για μαθητές ή εκπαιδευτικούς, ενδεχομένως να επηρεάζει την επίδοση σε έργα ΚΜΠ. Η Stickles (2011) συγκρίνοντας φοιτητές και εν ενεργεία εκπαιδευτικούς αναφέρει ότι όλοι δυσκολεύτηκαν, όμως οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί είχαν ελαφρώς καλύτερη επίδοση. Οι Voica και Pelczer (2009) συνέκριναν τα προβλήματα που κατασκεύασαν καθηγητές και φοιτητές και εντόπισαν διαφορές ως προς τον τύπο, το είδος της ερώτησης, την επιλυσιμότητα και την επάρκεια των δεδομένων, οι οποίες αποδίδονταν στην εμπειρία και τη μαθηματική γνώση των καθηγητών. Οι εκπαιδευτικοί κατασκευάζουν προβλήματα έχοντας στο μυαλό τους ως αποδέκτες τους μαθητές τους, όμως αυτά ήταν τυπικά προβλήματα που βασίζονταν σε μεγάλο βαθμό στο αναλυτικό πρόγραμμα και τα εγχειρίδια. Αντιθέτως, οι μαθητές χρησιμοποιούσαν πιο εμπλουτισμένα πλαίσια, αλλά δεν μπορούσαν να διατυπώσουν κατάλληλες και σαφείς ερωτήσεις. Οι Pelczer και Gamboa (2009) μελέτησαν μαθητές λυκείου και εκπαιδευτικούς και βρήκαν πως υπάρχουν διαφορές στη διαδικασία ΚΜΠ που ακολουθούν, λόγω διαφορών στη στρατηγική γνώση. Οι «αρχάριοι» ακολουθούν γραμμική πορεία, κατασκευάζουν προβλήματα με πιο απλοϊκό τρόπο χωρίς να τα αξιολογούν και βασίζονται σε μεγάλο βαθμό στην ανάκληση άλλων προβλημάτων που έχουν συναντήσει. Από την άλλη, οι πιο έμπειροι, κατασκευάζουν προβλήματα με πιο περίπλοκο τρόπο, θέτουν κριτήρια για να τα αξιολογήσουν, προχωρούν σε τροποποιήσεις και προσπαθούν να τα κάνουν ενδιαφέροντα.

Ωστόσο, οι Zhang, Stylanides, κ.ά. (2022) δεν συμφωνούν με τον προκαθορισμό μιας ομάδας ως «έμπειρων», απλά και μόνο λόγω των μαθηματικών τους γνώσεων, της εμπειρίας ή του υποβάθρου τους. Στην έρευνα τους συνέκριναν μεταπτυχιακούς φοιτητές μαθηματικών και μαθητές ΣΤ’ δημοτικού, χωρίς να υποθέσουν ότι οι πρώτοι είναι απαραίτητα και πιο έμπειροι. Πράγματι, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι φοιτητές δεν είχαν καλύτερη επίδοση από τους μαθητές στην ΚΜΠ, αφού οι δεύτεροι υπερείχαν όσον αφορά τον αριθμό των προβλημάτων, τον αριθμό των επιλύσιμων προβλημάτων και την πολυπλοκότητά τους. Συμπεραίνουν ότι η ικανότητα ΚΜΠ επηρεάζεται από ποικίλους παράγοντες και πρέπει να καθορίζεται από την επίδοση σε έργα ΚΜΠ και όχι να κρίνεται εκ των προτέρων λόγω μαθηματικής εμπειρίας ή γνώσεων. Οι Van Harpen και Presmeg (2015) και Van Harpen και Sriraman (2013) επιβεβαιώνουν πως ακόμα και οι πιο «προχωρημένοι» μαθητές στα Μαθηματικά, δεν είναι απαραίτητο ότι μπορούν να δημιουργήσουν ποιοτικά ή/και πρωτότυπα προβλήματα. Σύμφωνα με τη Mamona-Downs (1993), μπορεί το υπόβαθρο όντως να επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό την ΚΜΠ, όμως η συνήθης τυπική διδασκαλία ενδέχεται να περιορίσει τη δημιουργικότητα, υπονομεύοντας τη δημιουργική ΚΜΠ, αντί να την ενισχύσει.

Όσον αφορά τον ρόλο που παίζει η τάξη των μαθητών, η συσχέτιση μεταξύ της τάξης και της επίδοσης στην ΚΜΠ δεν είναι σαφής (Silber & Cai, 2021). Οι Wang κ.ά. (2022) υπογραμμίζουν ότι η τάξη των μαθητών δεν επηρεάζει την αποτελεσματικότητα μιας παρέμβασης στην ΚΜΠ, καθώς μαθητές διαφορετικών τάξεων χειρίζονται τα έργα ΚΜΠ με διαφορετικό τρόπο και κάνουν πρόοδο αντίστοιχη με το επίπεδό τους. Οι Moses κ.ά. (2013) σημειώνουν ότι ακόμα και πολύ μικροί μαθητές μπορούν να προτείνουν τροποποιήσεις και αλλαγές σε προβλήματα σε οικεία πλαίσια. Ο Lowrie (2002) αναφέρει ότι μαθητές στις πρώτες τάξεις του δημοτικού ήταν ικανοί να δημιουργήσουν απλά λεκτικά μαθηματικά προβλήματα, όπως αυτά που είχαν συνηθίσει να επιλύουν στην τάξη, ενώ μετά από παρέμβαση δημιούργησαν και ανοιχτά και περίπλοκα προβλήματα. Παρομοίως, οι Ayllón Blanco, Gallego Ortega κ.ά. (2016) συνέκριναν μαθητές όλων των τάξεων του δημοτικού στην ΚΜΠ σε ελεύθερη κατάσταση και κατέληξαν ότι ήδη από την Α' τάξη μπορούν να δημιουργήσουν μαθηματικά προβλήματα με συνοχή και γνωρίζουν τα στοιχεία τα οποία απαρτίζουν ένα πρόβλημα. Από την άλλη όμως, τονίζουν ότι, καθώς μεγαλώνει η τάξη, σταδιακά αυξάνεται και η πολυπλοκότητα των παραγόμενων προβλημάτων, τα οποία κινούνται από προσθετικές προς πολλαπλασιαστικές δομές και περιλαμβάνουν περισσότερες πράξεις. Στα ίδια αποτελέσματα καταλήγουν και οι Xu κ.ά. (2020), οι οποίοι συνέκριναν μαθητές Ε', ΣΤ' δημοτικού και Α', Γ' γυμνασίου ζητώντας τους να δημιουργήσουν προβλήματα από μία δοσμένη κατάσταση και παρατήρησαν ότι το ποσοστό των προβλημάτων με πιο απλή δομή, που περιλάμβαναν απλώς τον υπολογισμό αθροισμάτων και διαφορών, μειώθηκε με την ηλικία. Οι ερευνητές εξηγούν ότι οι μαθητές καθώς μεγαλώνουν, παρατηρούν και ολοένα και περισσότερο πιο περίπλοκες δομές σε προβληματικές καταστάσεις, τις οποίες μπορούν να αξιοποιήσουν κατά την ΚΜΠ. Οι Bonotto και Dal Santo (2015) επισημαίνουν ότι στο τέλος του δημοτικού, οι μαθητές όχι μόνο αναγνωρίζουν τι είναι ένα μαθηματικό πρόβλημα, αλλά είναι ικανοί να δημιουργήσουν κατάλληλα μαθηματικά προβλήματα. Μια απόπειρα καθορισμού των αναπτυξιακών σταδίων από τα οποία διέρχεται η ικανότητα ΚΜΠ είναι αυτή των Cázares Solórzano κ.ά. (1998), οι οποίοι μελέτησαν μαθητές 6-13 ετών και εντόπισαν τέσσερα εξελικτικά επίπεδα που καλύπτουν το φάσμα των ηλικιών αυτών:

(1) Απουσία δήλωσης προβλήματος:

(i) Γραφική αναπαράσταση των αντικειμένων: Τα παιδιά σε αυτό το στάδιο δεν μπορούν να γράψουν ούτε να εκφράσουν ένα πρόβλημα, να κάνουν υπολογισμούς ή να αιτιολογήσουν τις επιλογές τους, παρά μόνο αναπαράγουν στοιχεία που τους παρουσιάζονται.

(ii) Γραφή αριθμών και ερωτήσεις σχετικά με αντικείμενα: Μπορούν να εκφράσουν γραπτά ή προφορικά μια ερώτηση (μαθηματική ή μη) σχετικά με τα χαρακτηριστικά αντικειμένων που τους δίνονται. Δεν κάνουν υπολογισμούς, αφού η ερώτησή τους έχει προφανή απάντηση.

(2) Απλή δήλωση προβλημάτων προσθετικής δομής:

(i) Αρχική δήλωση: Απλή διατύπωση μιας δήλωσης που παραπέμπει σε προσθετική δομή, χωρίς όμως διατύπωση ερώτησης.
(ii) Πλήρης δήλωση: Εμφανίζεται η ικανότητα δημιουργίας ενός προβλήματος το οποίο περιλαμβάνει τόσο τα δεδομένα όσο και την ερώτηση.
(iii) Δηλώσεις δύο ή παραπάνω βημάτων: Δημιουργία προβλήματος που περιλαμβάνει δύο ή περισσότερες ερωτήσεις και κατ' επέκταση απαιτεί δύο ή περισσότερες πράξεις για την επίλυσή του.

(3) Δήλωση προβλημάτων πολλαπλασιαστικής δομής:
(i) Δηλώσεις μιας φάσης: Δημιουργία προβλήματος πολλαπλασιαστικής δομής, το οποίο απαιτεί πολλαπλασιασμό ή διαίρεση για την επίλυσή του.
(ii) Δηλώσεις δύο ή παραπάνω βημάτων: Στο στάδιο αυτό συνδυάζουν την προσθετική και πολλαπλασιαστική δομή και μέσα στο ίδιο πρόβλημα και δημιουργούν προβλήματα που απαιτούν πάνω από μια πράξη για να επιλυθούν. Χαρακτηριστικό είναι ότι χρησιμοποιούν δεκαδικούς αριθμούς.

(4) Αποτελεσματικότητα των αριθμητικών προβλημάτων:
Σε αυτό το επίπεδο μπορούν να δημιουργήσουν επαρκώς προβλήματα προσθετικής και πολλαπλασιαστικής δομής, να τις συνδυάσουν σε ένα πρόβλημα και να δημιουργήσουν «αλυσίδες» προβλημάτων, όπου η λύση του ενός προβλήματος αποτελεί δεδομένο για το επόμενο.

Τα επίπεδα ανάπτυξης της ικανότητας αυτής επιτρέπουν να καθοριστεί πότε ακριβώς οι μαθητές είναι σε θέση να προσεγγίσουν προβλήματα συγκεκριμένων τύπων. Καθώς αυξάνεται η ηλικία τους και προχωρά η σχολική τους εκπαίδευση, αυξάνεται και η ικανότητα ΚΜΠ (Cázares Solórzano et al., 1998). Πρόκειται για μια ικανότητα που αναπτύσσεται φυσικά, όσο εξερευνούν μαθηματικές καταστάσεις, θέτουν ερωτήσεις, μαθαίνουν να συλλογίζονται και αποκτούν εμπειρία στην γραπτή ή προφορική επικοινωνία των μαθηματικών ιδεών (Gonzales, 1998). Συνεπώς, γίνεται αντιληπτό ότι η ικανότητα ΚΜΠ μπορεί να αναπτυχθεί και να διδαχθεί (Norman et al., 2011· Stoyanova, 1997, 2005). Άλλωστε, οι περισσότερες παρεμβάσεις που έχουν πραγματοποιηθεί σε μαθητές αποδεικνύουν ότι η ικανότητα ΚΜΠ πράγματι βελτιώνεται και αναπτύσσεται με τις κατάλληλες δραστηριότητες και την κατάλληλη διδασκαλία (Bevan & Capraro, 2021· Bonotto, 2013· Bonotto & Dal Santo, 2015· Cankoy, 2014· Chen et al., 2015· English, 1997β, 1998· Irvine, 2017· Kwek, 2015· Kwon & Capraro, 2021· Lowrie, 2002).

(γ) Είδος καταστάσεων και μορφή έργων

Η επιλογή των έργων έχει μεγάλη σημασία, καθώς μπορεί να επηρεάσει την περιοχή των μαθηματικών στην οποία θα επικεντρωθούν οι μαθητές, το επίπεδο δυσκολίας της δραστηριότητας, ενώ καθορίζει και το επίπεδο συναισθηματικής εμπλοκής (Cai et al., 2022). Παρομοίως, ενδέχεται να υπάρχει συσχέτιση μεταξύ της καταλληλότητας μιας κατάστασης ΚΜΠ και της επίδοσης των μαθητών (Stoyanova, 1997). Δεδομένου ότι το είδος των έργων και των καταστάσεων που χρησιμοποιούνται επηρεάζει την ικανότητα ΚΜΠ, αποτελεί ακόμα έναν παράγοντα που πρέπει να λαμβάνεται υπόψη κατά την αξιολόγησή της (Kar et al., 2021).

Οι περισσότερες έρευνες συμφωνούν πως οι δομημένες καταστάσεις τείνουν να διευκολύνουν την ΚΜΠ. Οι Μουσουλίδης κ.ά. (2003) επιβεβαιώνουν πως οι μαθητές είχαν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας στα έργα σε δομημένο παρά σε ημι-δομημένο πλαίσιο. Παρομοίως, η Stickles (2011) βρήκε πως οι εκπαιδευτικοί είχαν καλύτερη επίδοση στις δομημένες καταστάσεις, αφού το δοσμένο πρόβλημα χρησίμευε σαν «οδηγός», ενώ δυσκολεύτηκαν περισσότερο στις ημι-δομημένες, όπου δημιούργησαν περισσότερα προβλήματα, όμως αυτά δεν ήταν απαραίτητα μαθηματικά. Οι Silber και Cai (2017) επιβεβαιώνουν πως στις δομημένες καταστάσεις οι συμμετέχοντες ενσωματώνουν συχνότερα τις μαθηματικές έννοιες που βρίσκονται πίσω από κάθε έργο στα προβλήματα που δημιουργούν, χωρίς, όμως, αυτά να είναι απαραίτητα πιο περίπλοκα. Οι Özgen κ.ά. (2019) ανέφεραν αντίθετα συμπεράσματα, καθώς βρήκαν πως οι μαθητές είχαν καλύτερη επίδοση στις ημι-δομημένες καταστάσεις, ενώ ακολουθούσαν οι ελεύθερες. Αυτό αποδίδεται στην έλλειψη περιορισμών στις καταστάσεις αυτές, που τους επέτρεψαν να χρησιμοποιήσουν τη φαντασία και τις γνώσεις τους πιο αποτελεσματικά. Όσον αφορά την επιλυσιμότητα, υπερίσχυαν τα προβλήματα από ημι-δομημένες καταστάσεις, ενώ όσον αφορά την ποιότητα και την ποσότητα των δεδομένων, και πάλι σε αυτές τις δυο καταστάσεις είχαν καλύτερη επίδοση. Από την άλλη, αναφορικά με τη χρήση μαθηματικής γλώσσας, προφανώς ήταν πιο επιτυχημένοι στις δομημένες καταστάσεις, όπου ήδη υπήρχε ένα δοσμένο πρόβλημα και όχι στις ελεύθερες. Αναφορικά με την πρωτοτυπία, τα περισσότερα πρωτότυπα προβλήματα κατασκευάστηκαν στις ελεύθερες καταστάσεις (Özgen et al., 2019).

Οι Πατσιαλά και Παπαδόπουλος (2022) καταλήγουν πως το είδος της κατάστασης ΚΜΠ επηρεάζει την πολυπλοκότητα των παραγόμενων προβλημάτων.

Εξηγούν πως οι δομημένες καταστάσεις ευνοούν τη δημιουργία προβλημάτων με αυξημένη τη μαθηματική, παρά τη γλωσσική πολυπλοκότητα. Αντιθέτως, οι ημι-δομημένες ευνοούν τη δημιουργία προβλημάτων που υπερτερούν ως προς τη γλωσσική πολυπλοκότητα. Αυτό ίσως αποδίδεται στον μεγάλο βαθμό ελευθερίας που χαρακτηρίζει τις καταστάσεις αυτές, που οδηγεί τους μαθητές να δημιουργούν ερωτήματα διαφορετικά από αυτά που συναντούν στη σχολική καθημερινότητά τους (Πατσιαλά & Παπαδόπουλος, 2022). Οι Θεοδούλου και Φιλίππου (2003) επιβεβαιώνουν ότι στις δομημένες καταστάσεις, όπου έλειπε η ερώτηση από δοσμένο πρόβλημα, δημιουργήθηκε ο μεγαλύτερος αριθμός προβλημάτων πολλών πράξεων. Αναφέρουν ότι ακολουθούν οι ημι-δομημένες, ενώ στις ελεύθερες, όπου έπρεπε να δημιουργηθεί ένα δύσκολο πρόβλημα, αν και δημιουργήθηκαν λογικά και επιλύσιμα προβλήματα, η πλειοψηφία ήταν χαμηλής πολυπλοκότητας. Από την άλλη, οι Ngah κ.ά. (2016) διαπίστωσαν ότι σε όλες τις καταστάσεις η πλειοψηφία των προβλημάτων ήταν χαμηλής πολυπλοκότητας.

Ακόμα και η μορφή του έργου στις ημι-δομημένες καταστάσεις έχει σημασία. Η English (1998) συνέκρινε την ικανότητα ΚΜΠ σε έργα με επίσημο πλαίσιο, όπου ζητούνταν η δημιουργία ενός προβλήματος από μια μαθηματική έκφραση (π.χ. 12-8=4) και σε ανεπίσημο πλαίσιο, όπου δεν υπήρχε συμβολική αναπαράσταση και παρουσιαζόταν μόνο μια φωτογραφία με αντικείμενα ή μια δήλωση χωρίς ερώτηση (π.χ. «Η Σάρα έχει 5 κούκλες στο ένα ράφι και 4 αυτοκινητάκια στο άλλο»). Παρατήρησε ότι στα επίσημα πλαίσια οι μαθητές οδηγούνταν στη δημιουργία προβλημάτων αλλαγής, ενώ αντίθετα, στα ανεπίσημα κινούνταν σε πιο περίπλοκα προβλήματα σύγκρισης και εξομοίωσης. Επιπλέον, και στα δυο πλαίσια το εύρος των προβλημάτων ήταν περιορισμένο, όμως στα έργα με ανεπίσημο πλαίσιο κατασκευάστηκαν περισσότερα προβλήματα. Οι Nicolaou και Philippou (2007) επιβεβαίωσαν πως οι μαθητές δυσκολεύτηκαν περισσότερο στην ΚΜΠ σε επίσημα-δομημένα πλαίσια, παρά σε πιο ανεπίσημα, κάτι το οποίο αποδίδουν στην απόσταση μεταξύ των άτυπων μαθηματικών τους γνώσεων και των επίσημων μαθηματικών του σχολείου. Ο Lowrie (2002) σχολιάζει πως οι μικρότεροι μαθητές ήταν πιθανότερο να κατασκευάσουν σωστά προβλήματα μέσα σε ένα πλαίσιο με νόημα για τους ίδιους. Με τα παραπάνω ευρήματα συμφωνούν και οι Zhang, Cai, κ.ά. (2022). Η επίδοση ήταν σημαντικά υψηλότερη στα έργα με πλαίσιο (τα οποία η English ονομάζει ανεπίσημα) από ότι στα έργα χωρίς (τα οποία ονομάζει επίσημα). Όταν υπήρχε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο, οι μαθητές είχαν καλύτερη κατανόηση των έργων και διατύπωναν περισσότερα μαθηματικά προβλήματα, τα οποία ήταν επιλύσιμα και είχαν περισσότερα στοιχεία και σχέσεις (Zhang, Cai, et al., 2022). Ακόμα, στα έργα με πλαίσιο η επίδοση των μαθητών ήταν καλύτερη όταν το έργο περιείχε συγκεκριμένες αριθμητικές πληροφορίες από όταν δεν περιείχε, εύρημα με το οποίο συμφωνούν και οι Leung (1993) και Leung και Silver (1997).

Οι Nicolaou και Philippou (2007) βρήκαν πως μεταξύ των ημι-δομημένων καταστάσεων, η ΚΜΠ από δοσμένη εικόνα ήταν η ευκολότερη και ευνοούσε τη δημιουργία πιο πολύπλοκων προβλημάτων. Οι Arikan και Ünal (2014) συμφωνούν και συμπληρώνουν πως η ΚΜΠ με βάση μια μαθηματική έκφραση είναι η δυσκολότερη. Οι Θεοδούλου και Φιλίππου (2003) βρήκαν πως οι μαθητές κατασκεύασαν προβλήματα υψηλής ποιότητας με βάση τις ημι-δομημένες καταστάσεις όπου δίνονταν μια εικόνα και μια γραφική παράσταση, όμως δυσκολεύτηκαν στην κατασκευή λογικών προβλημάτων από δοσμένες πράξεις. Μάλιστα, στην περίπτωση της εικόνας κατασκευάστηκε ο μεγαλύτερος αριθμός πολύπλοκων προβλημάτων, όμως στην περίπτωση της γραφικής παράστασης, παρά την υψηλή ποιότητα των προβλημάτων, η μαθηματική πολυπλοκότητα ήταν χαμηλή. Από την άλλη, οι Μουσουλίδης κ.ά. (2003) αναφέρουν ότι στα έργα με βάση εικόνα, πίνακα και ιστορία, η επίδοση των μαθητών ήταν χαμηλότερη συγκριτικά με την επίδοση στα έργα με βάση μαθηματική πράξη και εξίσωση.

Τέλος, αναφορικά με τις δομημένες καταστάσεις, φαίνεται πως οι μαθητές δημιουργούν περισσότερα προβλήματα όταν καλούνται να αλλάξουν τα δεδομένα του προβλήματος, παρά την ερώτηση. Αυτό οφείλεται στο ότι η διατύπωση μιας νέας ερώτησης είναι πιο περίπλοκη γνωστικά διαδικασία και απαιτεί να λάβουν υπόψη όλα τα δεδομένα και να σκεφτούν δημιουργικά (Lavy & Bershadsky, 2003).

(δ) Επίδοση

Έχει υποστηριχθεί ότι η μαθηματική επίδοση των μαθητών και οι προηγούμενες γνώσεις τους επηρεάζουν την ικανότητα ΚΜΠ (Kovács et al., 2023· Leung, 1993· Leung & Silver, 1997· Van Harpen & Sriraman, 2013). Οι μαθητές με καλή ή ανώτερη μαθηματική ικανότητα αναμένεται να δημιουργήσουν περισσότερα και πιο ποιοτικά προβλήματα συγκριτικά με τους μαθητές χαμηλότερων ικανοτήτων, με την ποιότητα να επηρεάζεται από τον βαθμό που χειρίζονται τις εμπλεκόμενες έννοιες σε κάθε έργο (Puspitasari et al., 2019). Μια χαρακτηριστική έρευνα είναι της Ellerton (1986), η οποία συνέκρινε μαθητές με υψηλή και χαμηλή επίδοση ζητώντας τους να κατασκευάσουν ένα δύσκολο πρόβλημα. Φάνηκε πως όσοι είχαν υψηλή επίδοση κατασκεύαζαν δυσκολότερα προβλήματα με πιο περίπλοκους αριθμούς (π.χ. κλάσματα και δεκαδικούς) και περισσότερες πράξεις, ενώ ήταν σε θέση να χρησιμοποιήσουν επαρκώς τη μαθηματική γλώσσα προφορικά και γραπτά και να παρουσιάσουν τις ιδέες τους με αυτοπεποίθηση. Ακόμα, σχεδίαζαν τα προβλήματά τους και μπορούσαν να τα επιλύσουν, ενώ οι μαθητές με χαμηλότερη επίδοση δυσκολεύονταν τόσο στον σχεδιασμό όσο και στην επίλυση τους (Ellerton, 1986).

Με τα παραπάνω ευρήματα συμφωνούν και οι Θεοδούλου και Φιλίππου (2003) και Silver και Cai (1996), οι οποίοι ανέφεραν στατιστικά σημαντική συσχέτιση ανάμεσα στη μαθηματική επίδοση και την ικανότητα ΚΜΠ, καθώς όσοι είχαν υψηλότερη επίδοση κατασκεύασαν προβλήματα υψηλότερης ποιότητας και μαθηματικής πολυπλοκότητας. Αντίθετα, όσοι είχαν χαμηλότερη επίδοση κατασκεύασαν υψηλότερο ποσοστό απλών δηλώσεων, οι οποίες δεν θεωρήθηκαν μαθηματικά προβλήματα (Silver & Cai, 1996). Η συσχέτιση αυτή επιβεβαιώνεται από μια σύγχρονη έρευνα σε μαθητές ΣΤ’ τάξης, όπου φάνηκε πως οι γνώσεις των μαθητών, όπως φανερώνονται από τους βαθμούς τους, προβλέπουν και επηρεάζουν την επιτυχία στην ΚΜΠ (Kovács et al., 2023). Παρομοίως, η English (1997β) διαπίστωσε ότι όσοι υστερούσαν στην κατανόηση της έννοιας του αριθμού δυσκολεύονταν να δημιουργήσουν περίπλοκα προβλήματα, καθώς η κατάκτηση της έννοιας αυτής παίζει σημαντικό ρόλο στην ΚΜΠ. Επίσης, αργότερα σχολίασε ότι μαθητές διαφορετικών επιδόσεων έδιναν απαντήσεις που διέφεραν ως προς την δομή και την αριθμητική πολυπλοκότητα (English, 1998). Οι Kar κ.ά. (2021) σχολίασαν πως οι μαθητές δεν μπορούσαν να δημιουργήσουν προβλήματα με σημασιολογικές σχέσεις σύγκρισης και μεταβολής, λόγω του περιορισμένου μαθηματικού τους υποβάθρου. Αντίστοιχα ευρήματα αναφέρουν και οι Espinoza κ.ά. (2016, 2022) συγκρίνοντας χαρισματικούς και μη μαθητές, καθώς τα προβλήματα των χαρισματικών μαθητών ήταν πιο περίπλοκα και απαιτούσαν σημαντική γνωστική προσπάθεια σε σχέση με των υπολοίπων.

Ο Winograd (1993) παρατήρησε πως οι μαθητές με υψηλότερη επίδοση στην ΕΜΠ, πριν ξεκινήσουν να κατασκευάζουν το πρόβλημα, ορίζουν μια ερώτηση για να τους καθοδηγεί. Προσπαθούν να νοηματοδοτήσουν μια ελεύθερη κατάσταση συλλογιζόμενοι «Ποια θα είναι η ερώτησή μου; Τι προσπαθώ να ανακαλύψω;». Αντιθέτως, όσοι είχαν χαμηλότερη επίδοση και είχαν χαρακτηριστεί «ανεπιτυχείς» στα μαθηματικά από τους δασκάλους τους, πρώτα κατέληγαν σε ένα πλαίσιο για το πρόβλημα και έγραφαν διάφορα στοιχεία που δεν συνδέονταν απαραίτητα άμεσα με αυτό. Δεν είχαν μια αρχική ιδέα ή ερώτηση για να τους καθοδηγεί και κατέληγαν σε μια ερώτηση μόνο αφού η δήλωση του προβλήματος είχε ολοκληρωθεί. Επιπλέον, τα προβλήματά τους δεν σχετίζονταν με εμπειρίες τους ή με τα ενδιαφέροντά τους, αλλά ήταν πιο «απρόσωπα» (Winograd, 1993).

Σχετικά με το είδος των καταστάσεων, η Stoyanova (1997) παρατήρησε ότι οι μαθητές με χαμηλή επίδοση προτιμούν τις δομημένες καταστάσεις και σπάνια αξιοποιούν την «ελευθερία» που παρέχουν οι ημι-δομημένες και οι ελεύθερες. Στις ελεύθερες τείνουν να αναπαράγουν προβλήματα που είχαν επιλύσει παλιότερα ή προβλήματα με πολύ απλή δομή. Από την άλλη, οι μαθητές με υψηλότερη επίδοση προτιμούν τις καταστάσεις με πιο ανοιχτή δομή που τους επιτρέπουν να συλλογιστούν πέρα από τα μαθηματικά του σχολείου. Στις ελεύθερες καταστάσεις χρησιμοποιούν τις δικές τους ιδέες και δημιουργούν προβλήματα που ξεπερνούν τις ικανότητές τους, χωρίς να μπορούν απαραίτητα να τα επιλύσουν (Stoyanova, 1997). Πάνω σε αυτό, η ερευνήτρια σχολίασε ότι οι δομημένες καταστάσεις μπορούν να αποδειχθούν ιδιαίτερα χρήσιμες για μαθητές με φτωχές μαθηματικές ικανότητες, ενώ οι ημι-δομημένες και ελεύθερες είναι πιθανότερο να ωφελήσουν μαθητές υψηλότερων ικανοτήτων. Απεναντίας, οι Θεοδούλου και Φιλίππου (2003) επισήμαναν ότι οι μαθητές υψηλότερων επιδόσεων είχαν καλύτερη επίδοση στις δομημένες καταστάσεις, ενώ οι μαθητές χαμηλότερων ικανοτήτων στις ημι-δομημένες, ειδικά όταν οι πληροφορίες παρουσιάζονταν με εικόνα.

Ωστόσο, είναι απαραίτητο να αναφερθεί και η αντίθετη άποψη. Οι Voica και Singer (2013) μελέτησαν μαθητές υψηλών επιδόσεων και παρατήρησαν ότι, ενώ μπορούσαν να χειριστούν με άνεση μαθηματικές έννοιες, δεν ήταν σε θέση να τις εκφράσουν με σαφήνεια στα προβλήματα. Επίσης, προχωρούσαν σε δημιουργικές τροποποιήσεις οι οποίες, όμως, δεν είχαν μαθηματικές προεκτάσεις (π.χ. άλλαζαν λεπτομέρειες, όπως το χρώμα των αντικειμένων), ενώ ακόμα και όταν προχωρούσαν σε σημαντικότερες μαθηματικές αλλαγές, το πρόβλημα υστερούσε στη σύνδεση των στοιχείων μεταξύ τους. Συμπεραίνουν ότι όσο πιο δημιουργικές οι αλλαγές που προτείνονται, τόσο χαμηλότερη η ποιότητα των προβλημάτων. Αντίστοιχα, οι Kwek και Leng (2008) βρήκαν πως αρκετά από τα προβλήματα που κατασκεύαζαν μαθητές υψηλών ικανοτήτων ήταν εύκολα, χαμηλής πολυπλοκότητας και χαμηλών γνωστικών απαιτήσεων, ενώ ήταν όμοια με προβλήματα ρουτίνας που συναντώνται στα σχολικά εγχειρίδια. Επίσης, πολλά ήταν μη επιλύσιμα λόγω ασαφειών στη διατύπωση, χρήσης υπερβολικά περίπλοκων αλγεβρικών εκφράσεων και παράλειψης σημαντικών υποθέσεων. Παρομοίως, ο Mestre (2002) συμπεραίνει πως σχεδόν τα μισά προβλήματα που κατασκεύασαν φοιτητές υψηλών επιδόσεων δεν ήταν επιλύσιμα, ενώ μπορούσαν να εξηγήσουν επαρκώς τον τρόπο επίλυσης για λιγότερο από το ένα τρίτο των προβλημάτων. Ακόμα, χαρακτηρίζονταν από αποσπασματική εννοιολογική κατανόηση, την οποία αδυνατούσαν να εφαρμόσουν. Τέλος, στην πρόσφατη έρευνα του Yildiz (2022) σε χαρισματικούς μαθητές Ε’ τάξης, φάνηκε ότι δεν μπορούσαν να δημιουργήσουν δύσκολα προβλήματα, ενώ πολλοί άφησαν κενές απαντήσεις.

Αντίστοιχα, αρκετοί ερευνητές αναδεικνύουν την ικανότητα στην ΚΜΠ μαθητών με χαμηλότερη επίδοση και παρουσιάζουν ενθαρρυντικά ευρήματα. Στην έρευνα των Μουσουλίδη κ.ά. (2003) όσοι είχαν χαρακτηριστεί από τους δασκάλους τους ως πολύ αδύναμοι κατάφεραν να κατασκευάσουν αρκετά προβλήματα, ενώ ο Lowrie (2002) σχολίασε ότι μαθητές χαμηλότερων επιδόσεων κατασκεύασαν ακόμα και ανοιχτά προβλήματα. Μία από τις πιο πρόσφατες έρευνες είναι αυτή των Silber και Cai (2021), οι οποίοι συνέκριναν την επίδοση στην ΚΜΠ φοιτητών χαμηλών και υψηλότερων επιδόσεων. Το βασικότερο εύρημα είναι ότι όλοι, ανεξαρτήτως επίδοσης, ήταν σε θέση να κατασκευάσουν επιλύσιμα προβλήματα, ενσωματώνοντας βασικές μαθηματικές ιδέες. Ακόμα και αυτοί με τη χαμηλότερη επίδοση σημείωσαν επιτυχία στην ΚΜΠ, δημιουργώντας προβλήματα που απαιτούσαν μαθηματικό συλλογισμό και ήταν σε θέση να ασχοληθούν με τις κρίσιμες μαθηματικές ιδέες κάθε έργου. Οι ερευνητές καταλήγουν ότι η ΚΜΠ αποτελεί μια καινοτόμα και ιδιαίτερα προσβάσιμη προσέγγιση και γι’ αυτόν ακριβώς τον λόγο, θα μπορούσαν να επωφεληθούν από αυτήν και μαθητές άλλων ομάδων, που δυσκολεύονται ιδιαίτερα με τα μαθηματικά και δεν επιδεικνύουν ενδιαφέρον για αυτά.

1.9.3. ΚΜΠ και μαθητές με δυσκολίες στα Μαθηματικά

Η χαμηλή επίδοση στην ΚΜΠ μπορεί να εξηγηθεί από ένα πλήθος παραγόντων, μεταξύ των οποίων είναι οι προηγούμενες μαθηματικές γνώσεις των μαθητών και η μαθηματική τους επίδοση. Όπως έγινε φανερό, όμως, μέσα από την ερευνητική ανασκόπηση, δεν φαίνεται να υπάρχει ένας συγκεκριμένος πληθυσμός που αποτυγχάνει σταθερά και συστηματικά σε έργα ΚΜΠ. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι η αποτυχία στην ΚΜΠ μπορεί να εμφανιστεί τόσο σε μαθητές με χαμηλή επίδοση και με δυσκολίες στα μαθηματικά, όσο και σε μαθητές με υψηλή επίδοση χωρίς δυσκολίες. Αυτό ενδεχομένως αποδίδεται στο γεγονός ότι, εν αντιθέσει με την ΕΜΠ, όπου η επιτυχία ή η αποτυχία στην επίλυση ενός προβλήματος είναι προφανής, στην ΚΜΠ αξιοποιείται μια πληθώρα κριτηρίων για την αξιολόγηση της ορθότητας και της ποιότητας των κατασκευασμένων προβλημάτων. Αυτό αναπόφευκτα οδηγεί σε διαφορές στον ορισμό της «αποτυχίας» στην ΚΜΠ μεταξύ των ερευνητών και κατ' επέκταση σε αντικρουόμενα αποτελέσματα.

Εκτός αυτού, η έλλειψη ερευνών στην ικανότητα ΚΜΠ μαθητών με δυσκολίες στα μαθηματικά και η ασαφής ορολογία που χρησιμοποιείται, δεν συμβάλλει στη δημιουργία μιας ολοκληρωμένης εικόνας για την επίδοση του πληθυσμού αυτού στην ΚΜΠ. Παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον ότι σε ορισμένες έρευνες οι μαθητές με δυσκολίες στα μαθηματικά δεν συμπεριλαμβάνονται στους συμμετέχοντες. Ενδεικτικά, στην έρευνα της English (1998), όσοι λάμβαναν υπηρεσίες ειδικής αγωγής και σημείωσαν χαμηλή επίδοση σε δοκιμασίες για την έννοια του αριθμού και την ΕΜΠ αποκλείστηκαν από τη συμμετοχή, καθώς θεωρήθηκε ότι δε θα μπορούσαν να ανταποκριθούν σε μια παρέμβαση για την ΚΜΠ.

Άλλες έρευνες, ενώ ανάμεσα στους συμμετέχοντες συμπεριλαμβάνουν μαθητές με δυσκολίες γενικότερα, δεν εστιάζουν σε αυτούς και απλώς προβαίνουν σε μια γενική ή και ασαφή αναφορά (π.χ. Bonotto, 2013· Li et al., 2020). Ενδεικτικά, η Bonotto (2013) υποστήριξε πως ακόμα και μαθητές με χαμηλότερες ικανότητες και μαθησιακές δυσκολίες που σχετίζονταν με γλωσσικά ελλείμματα βοηθήθηκαν από τις δραστηριότητες ΚΜΠ και συμμετείχαν ενεργά σε αυτές. Αντίθετα, στην έρευνα των Li κ.ά. (2020) οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες δεν μπορούσαν να δημιουργήσουν προβλήματα, δεν ήξεραν από που να ξεκινήσουν και δεν μπορούσαν να τα συσχετίσουν με την εμπειρία ή τις προηγούμενες γνώσεις τους, ειδικά όταν δινόταν μια μαθηματική έκφραση χωρίς πλαίσιο. Επίσης, δεν έδειχναν αυτοπεποίθηση, ούτε ενδιαφέρον για τις δραστηριότητες αυτές.

Ακόμα, εντοπίστηκαν έρευνες οι οποίες εστιάζουν σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, χωρίς όμως να τις προσδιορίζουν ή να διευκρινίζουν αν πρόκειται για Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες (Yamamoto et al., 2015). Οι Yamamoto κ.ά. (2015) δήλωσαν ότι η ΚΜΠ είναι πολύ δύσκολη για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες γενικά και ότι δεν είναι σε θέση να ανταποκριθούν σε έργα ΚΜΠ και να δημιουργήσουν προβλήματα μόνοι. Παρ’ όλα αυτά, πρότειναν τη χρήση μιας ψηφιακής εφαρμογής που δημιούργησαν για την ενίσχυση της ΚΜΠ, όπου οι χρήστες επιλέγουν και τοποθετούν προτάσεις σε σειρά, ώστε να δομηθεί ένα μαθηματικό πρόβλημα. Εστίασαν σε 2 μαθητές Ε’ και ΣΤ’ τάξης με μαθησιακές δυσκολίες και γλωσσική καθυστέρηση, οι οποίοι μπορούσαν να επιλύσουν απλά αριθμητικά προβλήματα μιας πράξης, αλλά αδυνατούσαν να κατανοήσουν σύνθετα προβλήματα. Μετά την εξάσκηση στη χρήση της εφαρμογής, οι μαθητές βελτίωσαν την επίδοσή τους τόσο στην ΚΜΠ, όσο και στην ΕΜΠ, καθώς βελτιώθηκε η κατανόηση της δομής των προβλημάτων. Οι ερευνητές κατέληξαν ότι η εφαρμογή αυτή ενδείκνυται και είναι αποτελεσματική για τη διδασκαλία κατασκευής απλών προβλημάτων σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες.

1.10. Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες

Μεταξύ των μαθητών με δυσκολίες βρίσκονται και οι μαθητές με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες (ΕΜΔ), οι οποίοι αποτελούν τη μεγαλύτερη κατηγορία ειδικών εκπαιδευτικών αναγκών στο πεδίο της ειδικής αγωγής (Pullen et al., 2017). Στην Ελλάδα, σύμφωνα με τα μόνα διαθέσιμα δεδομένα, αποτελούν το 56,2% του συνόλου των μαθητών με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες (ΕΕΑ) (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2004, όπ. αναφ. στο Agaliotis, 2016). Οι ΕΜΔ κατά κύριο λόγο αναφέρονται σε μια διακριτή ομάδα απρόσμενων δυσκολιών που επηρεάζουν την ικανότητα πρόσληψης και επεξεργασίας λεκτικών και μη λεκτικών πληροφοριών με αποτελεσματικότητα και ακρίβεια και, συνεπώς, παρεμποδίζουν σημαντικά τη σχολική επίδοση ή τις καθημερινές δραστηριότητες (American Psychiatric Association-APA, 2013). Ο όρος περιγράφει τις δυσκολίες ατόμων με τουλάχιστον μέσο νοητικό δυναμικό στην κατάκτηση βασικών ακαδημαϊκών και λειτουργικών δεξιοτήτων, όπως η κατανόηση και χρήση γραπτής ή προφορικής γλώσσας, η εκτέλεση μαθηματικών υπολογισμών, ο συντονισμός των κινήσεων και ο έλεγχος της προσοχής (Pullen et al., 2017). Πρέπει να σημειωθεί ότι οι μαθητές με ΕΜΔ συχνά έχουν ένα ανομοιόμορφο προφίλ ικανοτήτων, καθώς μπορεί να έχουν π.χ. υψηλή επίδοση σε έργα που βασίζονται σε οπτικό-χωρικές ικανότητες (π.χ. σχέδιο) και χαμηλή επίδοση σε ακαδημαϊκά έργα (APA, 2013). Γίνεται αντιληπτό ότι οι αδυναμίες συνήθως εμφανίζονται σε έναν συγκεκριμένο τομέα ή σε μια ορισμένη γνωστική περιοχή και δεν επηρεάζουν κατ’ ανάγκη τις επιδόσεις του μαθητή σε άλλους τομείς (Μαριδάκη-Κασσωτάκη, 2011).

Ο πληθυσμός των μαθητών με ΕΜΔ δεν είναι σε καμία περίπτωση ομοιογενής. Οι μαθητές αυτοί εμφανίζουν μια πληθώρα χαρακτηριστικών και διαφορετικές αδυναμίες ανά περίπτωση, οι οποίες είναι δύσκολο να κατηγοριοποιηθούν. Ακόμα και μέσα στην ίδια υπο-ομάδα ΕΜΔ, παρατηρείται ανομοιογένεια, με το εύρος των συμπεριφορών και τον τρόπο εκδήλωσης των δυσκολιών να διαφέρει σημαντικά από άτομο σε άτομο (Pullen et al., 2017). Επιπλέον, η εικόνα των δυσκολιών εξαρτάται από την ηλικία και την ανάπτυξη του παιδιού, την ύπαρξη άλλων διαταραχών και τη διδασκαλία που έχει δεχθεί (Soares et al. 2018). Τα χαρακτηριστικά που αναφέρονται αποτελούν απλώς τάσεις του συγκεκριμένου πληθυσμού και όχι σταθερές συμπεριφορές όλων των μαθητών (Αγαλιώτης, 2011). Αυτό που χαρακτηρίζει, όμως, όλους τους μαθητές με ΕΜΔ, είναι η επίμονη φύση των δυσκολιών, οι οποίες συνεχίζουν να επηρεάζουν τη μάθηση και την καθημερινή λειτουργία σε όλες τις ηλικίες, επιμένοντας και στην ενήλικη ζωή (APA, 2013· Pullen et al., 2017· World Health Organization-WHO, 2019).

1.10.1. ΕΜΔ στα Μαθηματικά

Οι ΕΜΔ στα Μαθηματικά (ΕΜΔΜ) αναφέρονται σε μια ομάδα ΕΜΔ η οποία χαρακτηρίζεται από απρόσμενες και σημαντικές δυσκολίες στην κατάκτηση και χρήση των μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων (Αγαλιώτης, 2023). Οι δυσκολίες αυτές σχετίζονται με ελλείμματα στην ικανότητα αναπαράστασης ή επεξεργασίας πληροφοριών σε μία ή περισσότερες μαθηματικές περιοχές (Geary, 2004). Μεταξύ άλλων, μπορούν να επηρεάσουν την έννοια του αριθμού, την απομνημόνευση των αριθμητικών συνδυασμών, την εκτέλεση υπολογισμών με ευχέρεια και τη μαθηματική λογική (WHO, 2019).

Η μαθηματική επίδοση των μαθητών με ΕΜΔΜ είναι περισσότερο από δυο τάξεις πίσω συγκριτικά με τους συμμαθητές τους χωρίς ΕΕΑ (Cawley & Miller, 1989), ενώ σε μεμονωμένα μαθηματικά αντικείμενα η διαφορά τους μπορεί να ξεπεράσει τα τέσσερα έτη (Αγαλιώτης, 2023). Μάλιστα, η μαθηματική τους γνώση τείνει να αυξάνεται κατά έναν περίπου χρόνο για κάθε δυο χρόνια σχολικής εκπαίδευσης (Cawley & Miller, 1989). Ως προς τη συχνότητα εμφάνισης, τα ποσοστά κυμαίνονται μεταξύ 5% και 8% του μαθητικού πληθυσμού (Geary, 2004). Πρέπει να τονιστεί ότι οι μαθητές με ΕΜΔΜ αντιμετωπίζουν δυσκολίες με τη χρήση του γλωσσικού κώδικα, οι οποίες αφορούν τόσο τον προσληπτικό όσο και τον εκφραστικό λόγο (Αγαλιώτης, 2023). Έτσι, οι ΕΜΔΜ μπορεί να εμφανίζονται αυτόνομα, αλλά και να συνυπάρχουν με δυσκολίες στην ανάγνωση και τη γραφή (Αγαλιώτης, 2023· Μαριδάκη-Κασσωτάκη, 2011· Miller & Mercer, 1997). Ενδεικτικά, οι Soares κ.ά. (2018) υπολογίζουν ότι συνυπάρχουν με τις ΕΜΔ στην ανάγνωση σε ποσοστό έως 70%.

Οι μαθητές με ΕΜΔΜ παρουσιάζουν ένα ευρύ φάσμα αναποτελεσματικών μαθηματικών συμπεριφορών (Αγαλιώτης, 2011). Χαρακτηρίζονται από χαμηλή ταχύτητα επεξεργασίας πληροφοριών και αδυναμίες στην οργάνωση και σύνθεση πληροφοριών για εξαγωγή συμπερασμάτων (Αγαλιώτης, 2023· Geary, 2004). Επιπλέον, εμφανίζουν αδυναμίες στην κατάκτηση και χρήση διαδικασιών και στρατηγικών, στη δόμηση εννοιών και στη σύνδεση των εννοιών με το περιεχόμενό τους, οι οποίες έχουν καταγραφεί εκτενώς (Αγαλιώτης, 2011, 2023· Geary, 2004). Παρομοίως, η χαμηλή ικανότητα επίλυσης προβλήματος των μαθητών αυτών έχει επισημανθεί από πολλούς ερευνητές (Αγαλιώτης, 2011, 2023· Hanich et al., 2001· Miller & Mercer, 1997· Woodward & Montague, 2002). Φαίνεται να δυσκολεύονται στη συνολική αντίληψη μιας προβληματικής κατάστασης, στην κατανόηση της σχέσης μεταξύ δεδομένων και ζητουμένων και στον προσδιορισμό του γνωστικού σχήματος και των κατάλληλων ενεργειών για την επίλυση (Αγαλιώτης, 2011). Η επίδοσή τους είναι ακόμα χαμηλότερη όταν συνυπάρχουν ΕΜΔ στην ανάγνωση (Fuchs & Fuchs, 2002· Hanich et al., 2001). Ακόμα, χαρακτηρίζονται από ελλιπείς μεταγνωστικές στρατηγικές, καθώς τείνουν να επιλύουν προβλήματα παρορμητικά, χωρίς να ελέγχουν τη διαδικασία και το αποτέλεσμα (Woodward & Montague, 2002).

Καθώς τα μαθηματικά γίνονται περισσότερο πολύπλοκα, οι δυσκολίες των μαθητών με ΕΜΔΜ εντείνονται. Λόγω επανειλημμένων αποτυχιών και χαμηλών επιδόσεων, πολλοί καταλήγουν να έχουν χαμηλό κίνητρο, χαμηλή αυτοεκτίμηση και αυτοαντίληψη (Pullen et al., 2017). Επίσης, τείνουν να αποκτούν αρνητική στάση απέναντι στην ενασχόληση με μαθηματικά έργα (Αγαλιώτης, 2011), τα οποία συνδέουν με το συναίσθημα του άγχους (Soares et al., 2018). Μάλιστα είναι δυο φορές πιθανότερο να εμφανίσουν υψηλά επίπεδα άγχους σχετικά με τα μαθηματικά, συγκριτικά με μαθητές χωρίς δυσκολίες στα μαθηματικά (Devine et al., 2018).

1.10.2. Ικανότητα ΚΜΠ και μαθητές με ΕΜΔ

Ως προς την ικανότητα ΚΜΠ των μαθητών αποκλειστικά με ΕΜΔ, η σύγχρονη ερευνά αναφέρει λίγα σε έκταση, αλλά ενδιαφέροντα στοιχειά. Μια πολύ πρόσφατη μελέτη που αξίζει να αναλυθεί είναι αυτή των Yang και Xin (2022), η οποία περιγράφει μια παρέμβαση στην ΚΜΠ και εστιάζει αποκλειστικά σε μαθητές με ΕΜΔ. Οι Yang και Xin (2022) εστίασαν στη διδασκαλία ΚΜΠ σε 3 μαθητές Α' γυμνασίου με ΕΜΔ με απώτερο σκοπό τη βελτίωση της ΕΜΠ. Πριν την παρέμβαση οι συμμετέχοντες δημιουργούσαν ανεπαρκή, λανθασμένα και μη μαθηματικά προβλήματα. Η αποτυχία αυτή αποδίδεται στην ελάχιστη ή καθόλου εμπειρία στην ΚΜΠ, αλλά και στη δυσκολία να κατανοήσουν τη μαθηματική γλώσσα, τη μαθηματική λογική και τις σχέσεις που περιγράφονταν στις καταστάσεις. Η παρέμβαση βασίστηκε σε ένα μοντέλο εννοιολογικής κατανόησης (Conceptual Model-based Problem-Solving program), το οποίο εστίαζε στην εκμάθηση της δομής πολλαπλασιαστικών προβλημάτων, μέσα από κατασκευή τέτοιων προβλημάτων σε δομημένες καταστάσεις. Η παρέμβαση βοήθησε τους μαθητές να αναπτύξουν εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών σχέσεων που παρουσιάζονταν, ενώ η απόκτηση ευχέρειας με τη στρατηγική αυτή, ενίσχυσε ταυτόχρονα και την ικανότητα ΕΜΠ. Αυτό αποδίδεται στο γεγονός πως η ενασχόληση με την ΚΜΠ προσέφερε ευκαιρίες για ρητή διδασκαλία της δομής των προβλημάτων. Διευκρινίζουν, βέβαια, ότι η τόσο μεγάλη και γρήγορη βελτίωση μπορεί να αποδοθεί και στην εξατομικευμένη, ένας προς έναν διδασκαλία, που έλαβαν οι μαθητές. Οι ερευνήτριες καταλήγουν πως η ΚΜΠ μπορεί να αποτελέσει μια αποτελεσματική στρατηγική στην μαθηματική εκπαίδευση μαθητών με ΕΜΔ και καλούν για περαιτέρω μελέτη της ΚΜΠ στο πλαίσιο της ειδικής αγωγής.

Μολαταύτα, πέρα από αυτήν την ερευνητική προσπάθεια, δεν υπάρχουν άλλες μελέτες στην ΚΜΠ που να επικεντρώνονται αποκλειστικά σε μαθητές με ΕΜΔ, τόσο σε διεθνές αλλά και σε εθνικό επίπεδο. Ειδικότερα έρευνες που να μελετούν την ικανότητα ΚΜΠ σε μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με ΕΜΔ δεν έχουν εντοπιστεί. Η παρούσα έρευνα επιχειρεί να συμβάλλει στην κάλυψη του κενού αυτού.

1.11. Σημασία Έρευνας

Προηγούμενες έρευνες ανέδειξαν τα οφέλη της ΚΜΠ κυρίως για προχωρημένους μαθητές στα μαθηματικά (Bicer et al., 2020). Πολλοί ερευνητές, παρ' όλα αυτά, επιβεβαιώνουν τη σημασία της και για μαθητές με χαμηλή επίδοση και υποστηρίζουν πως είναι προσιτή σε ένα μεγάλο μέρος του μαθητικού πληθυσμού και όχι μόνο σε όσους θεωρούνται εξαιρετικά ταλαντούχοι, χαρισματικοί ή δημιουργικοί (Leung & Silver, 1997).

Όπως αναλύθηκε παραπάνω, οι μαθητές με ΕΜΔ αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην επεξεργασία πληροφοριών σε διάφορες μαθηματικές περιοχές, όπως για παράδειγμα στην επίλυση προβλήματος (Αγαλιώτης, 2011, 2023· Geary, 2004· Hanich et al., 2001· Miller & Mercer, 1997· Woodward & Montague, 2002). Η ΚΜΠ μπορεί να συμβάλλει σε βελτίωση της μαθηματικής τους επίδοσης και ειδικότερα της ικανότητας ΕΜΠ (Yang & Xin, 2022). Για παράδειγμα, μεταξύ των ευρετικών που έχουν προταθεί για τη διδασκαλία ΕΜΠ σε μαθητές με ΕΜΔ, ήδη εδώ και δυο δεκαετίες, είναι και η αναδιατύπωση και δημιουργία μιας απλούστερης εκδοχής των προβλημάτων, το οποίο ουσιαστικά αποτελεί έργο ΚΜΠ (Woodward & Montague, 2002). Παράλληλα, οι μαθητές αυτοί, που συνήθως έχουν αρνητική στάση και βιώνουν αυξημένο άγχος και φόβο σχετικά με τα μαθηματικά, μπορούν να επωφεληθούν από δραστηριότητες ΚΜΠ, οι οποίες μπορούν να περιορίσουν τα συναισθήματα αυτά (Yang & Xin, 2022). Επιπλέον, όπως είναι αναμενόμενο, οι μαθητές που δεν έχουν θετική εικόνα για τις ικανότητές τους και τα μαθηματικά γενικά, συνήθως χάνουν το ενδιαφέρον τους (Bevan et al., 2019). Η ΚΜΠ θα μπορούσε να τους εμπλέξει στη διδασκαλία των μαθηματικών, καθώς δύναται να συμβάλλει, μεταξύ άλλων, σε αυξημένη κινητοποίηση και θετικότερη στάση (π.χ. Irvine, 2017· Kul & Çelik, 2020· Rosli et al., 2014). Γενικά, πρόκειται για μια προσέγγιση που, δεδομένων των πλεονεκτημάτων της, θα μπορούσε να ενσωματωθεί στη διδασκαλία των μαθητών με ΕΜΔ. Όπως προαναφέρθηκε, όμως, είναι ιδιαίτερα απαιτητική, επομένως κρίνεται ουσιαστικής σημασίας να μελετηθεί ο βαθμός στον οποίο οι μαθητές με ΕΜΔ είναι σε θέση να ανταποκριθούν σε τέτοιου είδους έργα.

1.12. Στόχος και Ερευνητικά Ερωτήματα

Οι έρευνες που εστιάζουν στην ικανότητα ΚΜΠ μαθητών σε ελληνικό πληθυσμό είναι λιγοστές και περιορίζονται κατά κύριο λόγο στο έργο συγκεκριμένων ερευνητών (βλ. Papadopoulos & Patsiala, 2019, 2023β· Πατσιαλά & Παπαδόπουλος, 2022). Εντούτοις, σε καμία από αυτές δεν συμπεριλαμβάνονται μεταξύ των συμμετεχόντων μαθητές με ΕΜΔ, με αποτέλεσμα να μην υπάρχουν διαθέσιμα ερευνητικά στοιχεία για την ικανότητά τους να κατασκευάζουν μαθηματικά προβλήματα. Συνεπώς, στόχος της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση της ικανότητας ΚΜΠ των μαθητών με ΕΜΔ και η σύγκρισή της επίδοσής τους με αυτή των μαθητών χωρίς ΕΕΑ σε τρία διαφορετικά είδη μαθηματικών καταστάσεων. Τα ερευνητικά ερωτήματα που διατυπώθηκαν είναι:

(1) Ποια είναι τα συνηθέστερα λάθη των μαθητών με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες ή χωρίς ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες στην κατασκευή μαθηματικού προβλήματος σε δομημένη, ημι-δομημένη και ελεύθερη κατάσταση;

(2) Υπάρχει διαφορά στην επίδοση μαθητών χωρίς ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες ως προς την κατασκευή μαθηματικού προβλήματος σε δομημένη, ημι-δομημένη και ελεύθερη κατάσταση;

(3) Υπάρχει διαφορά στην επίδοση μαθητών με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες ως προς την κατασκευή μαθηματικού προβλήματος σε δομημένη, ημι-δομημένη και ελεύθερη κατάσταση;

(4) Υπάρχει διαφορά στην επίδοση μαθητών με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες και μαθητών χωρίς ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες ως προς την κατασκευή μαθηματικού προβλήματος σε δομημένη, ημι-δομημένη και ελεύθερη κατάσταση;

Για τις καταστάσεις ΚΜΠ η παρούσα εργασία αποδέχεται την κατηγοριοποίηση των Stoyanova (1997, 1998) και Stoyanova και Ellerton (1996), περί δομημένων, ημι-δομημένων και ελεύθερων καταστάσεων. Επίσης, ως επίδοση στην ΚΜΠ ορίζεται ο τρόπος με τον οποίο ο μαθητής χρησιμοποιεί την προηγούμενη εμπειρία του για (α) να αναγνωρίσει την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση που χρειάζεται για μια συγκεκριμένη κατάσταση ΚΜΠ, (β) να χρησιμοποιήσει ένα σύνολο από κατάλληλες ενέργειες και (γ) να διατυπώσει ή να γράψει καλά δομημένα μαθηματικά προβλήματα που σχετίζονται με κάποιο τρόπο με τη δοσμένη κατάσταση ΚΜΠ (Stoyanova, 1997).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

2.1. Ερευνητική Στρατηγική

Η παρούσα έρευνα είναι μια περιγραφική ποσοτική μελέτη. Αυτού του είδους οι έρευνες εστιάζουν στη συλλογή δεδομένων σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή με σκοπό την περιγραφή μιας δεδομένης κατάστασης (Cohen et al., 2007) ή των χαρακτηριστικών μιας ομάδας (de Vaus, 2002). Οι ομάδες δημιουργούνται με βάση ήδη υπάρχουσες διαφορές και συγκρίνονται μεταξύ τους ως προς μια μεταβλητή. Τυχόν διαφορές μπορούν να αποδοθούν στις αρχικές διαφορές τους (de Vaus, 2002). Για τη συλλογή και ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν ποσοτικές μέθοδοι (γραπτή δοκιμασία), καθώς ερευνάται η ικανότητα των μαθητών. Οι ποσοτικές μέθοδοι περιλαμβάνουν εργαλεία και τεχνικές για την περιγραφή και ερμηνεία ποσοτικών, μετρήσιμων δεδομένων (Lewin, 2005). Η επιλογή αυτή βασίστηκε στις μεθοδολογικές επιλογές προηγούμενων ερευνών που μελέτησαν την ικανότητα ΚΜΠ σε μαθητές αντίστοιχων ηλικιών (π.χ. Chen et al., 2007, 2013, 2015· Christou et al., 2005· Θεοδούλου & Φιλίππου, 2003· Μουσουλίδης et al., 2003· Nicolaou & Philippou, 2007· Πατσιαλά & Παπαδόπουλος, 2022· Van Harpen & Presmeg, 2015· Xu et al., 2020· Yildiz, 2022· Zhang, Cai, et al 2022). Επιπλέον, αξιοποιήθηκαν και ποιοτικές μέθοδοι (σύντομη συνέντευξη) για την αποτίμηση της διαδικασίας από τους μαθητές. Οι ποιοτικές μέθοδοι περιλαμβάνουν την οργάνωση και ερμηνεία των δεδομένων με σκοπό την ανάδειξη θεμάτων, κατηγοριών, κανονικοτήτων και δύνανται να προσφέρουν πλούσια και λεπτομερή δεδομένα (Cohen et al., 2007). Σε αρκετές από τις έρευνες (π.χ. Ellerton, 1986· Kar et al., 2021· Nicolaou & Philippou, 2007) ακολουθούσαν σύντομες συνεντεύξεις προκειμένου να μελετηθεί σε βάθος ο τρόπος που οι συμμετέχοντες εργάστηκαν για να κατασκευάσουν τα προβλήματα.

2.2. Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες της έρευνας ήταν 70 μαθητές Ε’ και ΣΤ’ δημοτικού από δημόσια δημοτικά σχολεία των νομών Θεσσαλονίκης, Αθήνας, Κιλκίς, Εύβοιας και Κέρκυρας. Από αυτούς, οι 35 ήταν μαθητές χωρίς ΕΕΑ, ενώ οι υπόλοιποι είχαν διάγνωση ΕΜΔ από Κέντρα Διεπιστημονικής Αξιολόγησης, Συμβουλευτικής και Υποστήριξης (ΚΕΔΑΣΥ) ή Ιατροπαιδαγωγικά Κέντρα. Οι μαθητές αυτοί είτε είχαν διαγνωστεί συγκεκριμένα με ΕΜΔΜ, είτε είχαν διαγνωστεί με ΕΜΔ, χωρίς να διευκρινίζεται η υποκατηγορία στην οποία ανήκουν. Στην περίπτωση αυτή, οι δυσκολίες τους στα μαθηματικά επιβεβαιώθηκαν από τους εκπαιδευτικούς της τάξης τους. Οι μαθητές με ΕΜΔ φοιτούσαν σε γενικές τάξεις, με ένα μέρος τους να φοιτά μερικές ώρες την εβδομάδα και σε Τμήμα Ένταξης. Όσον αφορά την τάξη, οι 31 (44,2%) φοιτούσαν στην Ε' τάξη και οι 39 (55,7%) στην ΣΤ'. Ως προς το φύλο, οι 32 (45,7%) είναι αγόρια και οι 38 (54,2%) κορίτσια. Έγινε προσπάθεια οι συμμετέχοντες να είναι ισόποσα κατανεμημένοι, τόσο ως προς την ύπαρξη ΕΜΔ ή μη, όσο και ως προς την τάξη και το φύλο. Πρέπει να διευκρινιστεί ότι το δείγμα προέκυψε από δειγματοληψία ευκολίας, καθώς προέρχεται από συγκεκριμένες περιοχές στις οποίες υπήρχε πρόσβαση.

Πίνακας 1.

Κατανομή συμμετεχόντων

	Ε' τάξη	**ΣΤ' τάξη**	**Σύνολο**
Αγόρια	14	18	32
Κορίτσια	17	21	38
Σύνολο	**31**	**39**	**70**

Επιλέχθηκαν μαθητές Ε' και ΣΤ' τάξης για τους ακόλουθους λόγους. Δεδομένου ότι η ΚΜΠ θεωρείται ένα αρκετά απαιτητικό έργο (Cai et al., 2020· Kojima et al., 2015· Mestre, 2002· Ngah, et al., 2016) και η έρευνα επικεντρώνεται σε μαθητές με ΕΜΔ, επιλέχθηκαν οι δυο τελευταίες τάξεις του δημοτικού, θεωρώντας ότι οι μαθητές με ΕΜΔ των τάξεων αυτών κατέχουν ένα ικανοποιητικό επίπεδο γνώσεων που θα επιτρέψει την ανεμπόδιστη συμμετοχή τους και την εξαγωγή ασφαλέστερων συμπερασμάτων. Είναι γνωστό ότι η επίδοση των μαθητών αυτών βρίσκεται τουλάχιστον δύο χρόνια πιο πίσω σε σχέση με τους συμμαθητές τους (Cawley & Miller, 1989), επομένως, ίσως μαθητές μικρότερων τάξεων με ΕΜΔ να μην ήταν σε θέση να ανταποκριθούν σε έργα ΚΜΠ. Τέλος, είναι πιθανό σε μικρότερες τάξεις οι μαθητές γενικά να μην είχαν έρθει σε επαφή με τέτοιου είδους έργα, ενώ μέχρι το τέλος του δημοτικού ενδεχομένως να έχουν συναντήσει ορισμένες καταστάσεις ΚΜΠ.

2.3. Ερευνητικό Εργαλείο

Χρησιμοποιήθηκε μια μη σταθμισμένη γραπτή δοκιμασία που διαμορφώθηκε για τις ανάγκες της έρευνας (Βλ. Παράρτημα Α). Η δοκιμασία περιλαμβάνει συνολικά 9 έργα ΚΜΠ και χωρίζεται σε 3 άξονες, ακολουθώντας τη διάκριση για τα είδη έργων ΚΜΠ των Stoyanova (1997, 1998) και Stoyanova και Ellerton (1996).

Ο πρώτος άξονας περιλαμβάνει 3 έργα ΚΜΠ από δομημένες καταστάσεις. Στο πρώτο έργο ζητείται οι μαθητές να προτείνουν μια εναλλακτική ερώτηση που θα ταίριαζε στο δοσμένο πρόβλημα. Στο δεύτερο ζητείται να δημιουργήσουν το αντίστροφο πρόβλημα αλλάζοντας θέση στα δεδομένα και τα ζητούμενα του δοσμένου προβλήματος. Στο τρίτο ζητείται να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα που να λύνεται με τον ίδιο τρόπο με το αρχικό.

Ο δεύτερος άξονας περιλαμβάνει 3 έργα ΚΜΠ από ημι-δομημένες καταστάσεις. Στο πρώτο έργο παρουσιάζεται μια εικόνα με αριθμητικές πληροφορίες και ζητείται να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα, επιλέγοντας από τις πληροφορίες όσες χρειάζονται. Στο δεύτερο δίνεται η μαθηματική έκφραση 76+28 και ζητείται να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα που να λύνεται με την πράξη αυτή. Στο τρίτο παρουσιάζεται ένας πίνακας με αριθμητικά δεδομένα και πάλι ζητείται να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα ενσωματώνοντας όλα ή ορισμένα από αυτά.

Ο τρίτος άξονας περιλαμβάνει 3 έργα ΚΜΠ από ελεύθερες καταστάσεις. Στο πρώτο έργο ζητείται από τους μαθητές να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα για έναν συμμαθητή τους. Στο δεύτερο ζητείται να δημιουργήσουν ένα δύσκολο πρόβλημα και τέλος, στο τρίτο ζητείται να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα που θα φαινόταν στους ίδιους ενδιαφέρον να λύσουν. Όλα τα έργα αντλήθηκαν από αντίστοιχες έρευνες σε μαθητές (Cankoy, 2014· Chen et al., 2013, 2015· Christou et al., 2005· Ellerton, 1986· English, 1998· Patsiala & Papadopoulos, 2022· Πατσιαλά & Παπαδόπουλος, 2022· Stoyanova, 1997) και διατηρήθηκαν αυτούσια ή τροποποιήθηκαν για να αντιστοιχούν στο επίπεδο των τάξεων που επιλέχθηκαν για τη συγκεκριμένη έρευνα.

Συμπληρωματικά, πραγματοποιήθηκε μια σύντομη δομημένη συνέντευξη, κατά την οποία οι μαθητές ερωτήθηκαν (α) πως τους φάνηκε η διαδικασία ΚΜΠ και γιατί, (β) τι τους φάνηκε πιο δύσκολο και πιο εύκολο και γιατί και (γ) αν έχουν προηγούμενη εμπειρία με την κατασκευή προβλήματος.

2.4. Πιλοτική Έρευνα

Η πιλοτική έρευνα αποτελεί βασικό στοιχείο κατά την διεξαγωγή μιας έρευνας και αποσκοπεί στην ανάδειξη τυχόν αδυναμιών ή σημείων που χρήζουν τροποποίησης στην ερευνητική διαδικασία (Lewin, 2005). Έτσι, πριν την διεξαγωγή της κυρίως έρευνας, κρίθηκε απαραίτητο να προηγηθεί μια πιλοτική εφαρμογή του εργαλείου αξιολόγησης σε 4 μαθητές. Οι 2 από αυτούς φοιτούσαν στην Ε’ και οι άλλοι 2 στη ΣΤ’ τάξη. Από κάθε τάξη, ο ένας μαθητής είχε διάγνωση ΕΜΔ. Οι μαθητές αυτοί δεν συμπεριλήφθηκαν στους συμμετέχοντες της έρευνας. Κατά την πιλοτική εφαρμογή ελέγχθηκαν σημαντικά στοιχεία της ερευνητικής διαδικασίας, όπως ο χρόνος χορήγησης του φύλλου αξιολόγησης, το επίπεδο δυσκολίας των έργων και ο βαθμός ανταπόκρισης των μαθητών με ΕΜΔ. Από τα αποτελέσματα της πιλοτικής εφαρμογής, διαπιστώθηκε ότι ο χρόνος της μια διδακτικής ώρας που δόθηκε στους μαθητές ήταν επαρκής για την ολοκλήρωση όλων των έργων, καθώς για τη συμπλήρωση κάθε έργου χρειάστηκαν κατά μέσο όρο περίπου 4’. Επιπλέον, οι μαθητές με ΕΜΔ ήταν σε θέση να ανταποκριθούν σε όλα τα έργα ικανοποιητικά. Παρ’ όλα αυτά, δυο έργα από τις δομημένες καταστάσεις αποδείχθηκαν αρκετά απλά για μαθητές Ε’ και ΣΤ’, τόσο για αυτούς με ΕΜΔ όσο και για τους μαθητές χωρίς ΕΕΑ. Γι’ αυτόν τον λόγο τροποποιήθηκαν ώστε να γίνουν πιο απαιτητικά. Στο ένα πρόβλημα οι αριθμοί αντικαταστάθηκαν από δεκαδικούς αριθμούς, ενώ το άλλο, από πρόβλημα σύγκρισης πρόσθεσης μετατράπηκε σε πρόβλημα σύγκρισης πολλαπλασιασμού, καθώς τα προβλήματα που εμπεριέχουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις θεωρούνται γενικά πιο περίπλοκα (Chen et al., 2007· English, 1997β). Μετά από αυτές τις τροποποιήσεις, η γραπτή δοκιμασία χορηγήθηκε στους υπόλοιπους συμμετέχοντες.

2.5. Διαδικασία διεξαγωγής της κύριας έρευνας

Η κυρίως έρευνα διενεργήθηκε το διάστημα Ιανουαρίου-Απριλίου του 2023. Αρχικά, ζητήθηκε άδεια από τη διεύθυνση κάθε σχολείου και έπειτα χορηγήθηκαν οι γραπτές δοκιμασίες στους μαθητές. Τηρήθηκαν όλοι οι κανόνες δεοντολογίας, περί ανωνυμίας και προστασίας των προσωπικών δεδομένων. Για τη συμπλήρωση της γραπτής δοκιμασίας οι μαθητές είχαν στην διάθεση τους μια διδακτική ώρα (40–45’). Η συμπλήρωση του φύλλου αξιολόγησης έγινε στην τάξη των μαθητών, παρουσία της ερευνήτριας, ενώ στην περίπτωση ορισμένων μαθητών με ΕΜΔ έγινε είτε στο Τμήμα Ένταξης του σχολείου είτε σε άλλες διαθέσιμες αίθουσες, παρουσία της ερευνήτριας ή συναδέλφων. Δόθηκαν λεπτομερείς οδηγίες για κάθε έργο ΚΜΠ, ενώ τονίστηκε πως δεν χρειάζεται να λυθεί κανένα από τα προβλήματα. Επίσης, διευκρινίστηκε ότι μπορούσαν να απαντήσουν στα έργα με όποια σειρά επιθυμούν.

Είναι σημαντικό να διευκρινιστεί ότι ειδικά για τους μαθητές με ΕΜΔ δόθηκε η επιλογή σε όσους το χρειάζονταν, τα προβλήματα και οι εκφωνήσεις να διαβάζονται από την ερευνήτρια. Επιπροσθέτως, τους δόθηκε η επιλογή να κατασκευάζουν προφορικά τα προβλήματα και να τα υπαγορεύουν ώστε αυτά να καταγράφονται από την ερευνήτρια. Οι προσαρμογές αυτές κρίθηκαν απαραίτητες, δεδομένων των δυσκολιών που ορισμένοι από τους μαθητές με ΕΜΔ αντιμετωπίζουν με την ανάγνωση και τη γραφή (Αγαλιώτης, 2023· Μαριδάκη-Κασσωτάκη, 2011· Miller & Mercer, 1997· Soares et al., 2018). Αντίστοιχες προσαρμογές έχουν αναφερθεί και σε άλλες έρευνες σε μαθητές με ΕΜΔ (Fuchs & Fuchs, 2002) ή σε μαθητές που λόγω του νεαρού της ηλικίας τους δεν είχαν κατακτήσει την ανάγνωση και τη γραφή (Cázares Solórzano et al., 1998· English, 1998).

Τέλος, σε 14 μαθητές (4 με ΕΜΔ και 10 χωρίς ΕΕΑ), οι οποίοι επιλέχθηκαν τυχαία, πραγματοποιήθηκε μια σύντομη συνέντευξη αμέσως μετά την ολοκλήρωση των έργων. Έπειτα, τα δεδομένα συλλέχθηκαν, οι απαντήσεις κατηγοριοποιήθηκαν και βαθμολογήθηκαν και ακολούθησε η επεξεργασία τους.

2.6. Ανάλυση Δεδομένων

Τα αποτελέσματα της έρευνας αναλύθηκαν ποσοτικά και ποιοτικά. Η ποσοτική ανάλυση των δεδομένων έγινε με το Στατιστικό Πακέτο IBM S.P.S.S. Statistics 21.0. Αρχικά, όλα τα προβλήματα που κατασκευάστηκαν κατηγοριοποιήθηκαν σύμφωνα με τα κριτήρια που προτάθηκε από τους Leung και Silver (1997) και Silver και Cai (1996, 2005). Πρώτα απορρίφθηκαν οι κενές απαντήσεις και έπειτα οι υπόλοιπες κατηγοριοποιήθηκαν σε Μαθηματικά προβλήματα, Μη μαθηματικά προβλήματα (αν δεν απαιτούσαν μαθηματικό συλλογισμό) και Δηλώσεις (αν δεν περιείχαν ερώτηση). Από τα Μαθηματικά προβλήματα απορρίφθηκαν όσα περιλάμβαναν ερωτήματα που θεωρήθηκαν ασκήσεις, όσα δεν ανταποκρίνονταν στις απαιτήσεις των έργων και όσα αποτελούσαν αναδιατύπωση των ήδη δοσμένων προβλημάτων. Τα εναπομείναντα μαθηματικά προβλήματα αξιολογήθηκαν ως προς τη λογικότητά τους και έπειτα τα λογικά μαθηματικά προβλήματα αξιολογήθηκαν ως προς την επιλυσιμότητά τους. Τέλος, τα λογικά και επιλύσιμα προβλήματα αναλύθηκαν ως προς τη γλωσσική και μαθηματική τους πολυπλοκότητα. Για τη γλωσσική πολυπλοκότητα εξετάστηκε η ύπαρξη υποθετικών ή συγκριτικών προτάσεων. Ένα πρόβλημα θεωρήθηκε γλωσσικά πολύπλοκο αν στην ερώτησή του περιείχε υποθετικούς συνδέσμους (π.χ. αν, άμα, αν δεν) ή λέξεις που δηλώνουν σύγκριση (π.χ. παραπάνω, περισσότερα/λιγότερα από). Για τη μαθηματική, ελέγχθηκε ο αριθμός των σημασιολογικών σχέσεων που εντοπίζονται στο πρόβλημα, όπως προτάθηκαν από τη Marshall (1995). Εν συνεχεία, πραγματοποιήθηκε ανάλυση και καταγραφή των λαθών που εντοπίστηκαν και ακολούθως τα σωστά προβλήματα (όσα δηλαδή θεωρήθηκαν λογικά και επιλύσιμα) βαθμολογήθηκαν με 1 και τα λανθασμένα με 0.

Χρησιμοποιήθηκαν μέθοδοι περιγραφικής στατιστικής για τη διαμόρφωση μιας γενικής εικόνας των δεδομένων. Πραγματοποιήθηκε σύγκριση των επιδόσεων των μαθητών σε κάθε ομάδα ξεχωριστά, στα τρία είδη καταστάσεων και συγκριτικά για τις δυο ομάδες. Στη συνέχεια, χρησιμοποιήθηκαν μέθοδοι επαγωγικής στατιστικής για τον έλεγχο της στατιστικής σημαντικότητας των διαφορών στην επίδοση μεταξύ των καταστάσεων ΚΜΠ για κάθε ομάδα (Friedman Test), αλλά και μεταξύ των ομάδων (Mann-Whitney Test). Ο έλεγχος Shapiro-Wilk φανέρωσε ότι τα δεδομένα δεν ακολουθούσαν κανονική κατανομή σε καμία από τις δυο ομάδες και γι' αυτόν τον λόγο χρησιμοποιήθηκαν μη παραμετρικά εργαλεία, τα οποία δεν απαιτούν κανονική κατανομή.

2.7. Εγκυρότητα και Αξιοπιστία

Η εγκυρότητα περιεχομένου της γραπτής δοκιμασίας διασφαλίζεται με τη σύνδεση των ερευνητικών ερωτημάτων με τους τρεις άξονες της δοκιμασίας, οι οποίοι αφορούν τα τρία είδη καταστάσεων ΚΜΠ. Τα ερευνητικά ερωτήματα, καθώς και οι άξονες προέκυψαν από τους ορισμούς, όπως εντοπίστηκαν βιβλιογραφικά. Οι καταστάσεις που επιλέχθηκαν καλύπτουν όλο το φάσμα των καταστάσεων που έχουν μελετηθεί και μπορούν να δώσουν έγκυρα αποτελέσματα. Επίσης, η ικανότητα στην ΚΜΠ συνήθως μελετάται με τέτοιου είδους εργαλεία και μέσα από τέτοιου είδους προβληματικές καταστάσεις. Επιπλέον, πραγματοποιήθηκε πιλοτική έρευνα ώστε να διαπιστωθεί η καταλληλότητα των έργων. Η αξιοπιστία της έρευνας διασφαλίζεται από τον τρόπο χορήγησης της δοκιμασίας, ο οποίος ήταν ίδιος για όλους τους μαθητές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

3.1. Ποσοτική Ανάλυση Αποτελεσμάτων

3.1.1. Περιγραφική Στατιστική Ανάλυση

Συνολικά, τα 9 έργα της γραπτής δοκιμασίας απαντήθηκαν από 70 μαθητές, με αποτέλεσμα τη συγκέντρωση 630 απαντήσεων, οι οποίες κατανέμονται από 210 σε κάθε μια από τις τρεις καταστάσεις ΚΜΠ. Δεδομένου ότι οι δυο ομάδες μαθητών ήταν ισόποσες, δόθηκαν 315 απαντήσεις από κάθε μια. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2, αρχικά οι 630 απαντήσεις κατηγοριοποιήθηκαν ως προς τον τύπο των προβλημάτων που δημιουργήθηκαν. Στο τέλος συγκεντρώθηκαν 443 λογικά και επιλύσιμα μαθηματικά προβλήματα, που αντιστοιχούσαν στο 70,3% των συνολικών απαντήσεων (ενδεικτικά βλ. Παράρτημα Β).

Πίνακας 2.

Αρχική κατηγοριοποίηση προβλημάτων

<table>
<tr><td colspan="9">Συνολικός αριθμός απαντήσεων
630</td></tr>
<tr><td colspan="6">Μαθηματικά Προβλήματα
580</td><td>Μη Μαθημ.
8</td><td>Δηλώσεις
20</td><td>Κενές Απαντήσεις
22</td></tr>
<tr><td colspan="2">Λογικά
469</td><td>Μη λογικά
25</td><td>Ασκήσεις
38</td><td>Ανά-διατύπωση
3</td><td>Δεν ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις των έργων
45</td><td colspan="3" rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Επιλύσιμα
443</td><td>Μη Επιλύσιμα
26</td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

Από τις 443 σωστές απαντήσεις που τηρούσαν τις προδιαγραφές, οι 144 (32,5%) ανήκαν στις δομημένες, οι 168 (37,9%) στις ημι-δομημένες και οι 131 (29,5%) στις ελεύθερες καταστάσεις. Αν εξεταστεί το ποσοστό των σωστών απαντήσεων μέσα στις 210 συνολικές απαντήσεις σε κάθε κατάσταση, στις δομημένες ήταν σωστό το 68,5%, στις ημι-δομημένες το 80% και στις ελεύθερες το 62,3%. Από τις 443 σωστές απαντήσεις, οι 254 (57,3%) δημιουργήθηκαν από μαθητές χωρίς ΕΕΑ, ενώ οι 189 (42,6%) από μαθητές με ΕΜΔ. Ως προς το ποσοστό των σωστών απαντήσεων στις συνολικές απαντήσεις κάθε ομάδας, ήταν σωστό το 80,6% των απαντήσεων των μαθητών χωρίς ΕΕΑ και το 60% των απαντήσεων των μαθητών με ΕΜΔ.

Τα λογικά και επιλύσιμα προβλήματα ελέγχθηκαν περαιτέρω ως προς τη γλωσσική και μαθηματική τους πολυπλοκότητα. Ως προς τη γλωσσική πολυπλοκότητα, μόνο σε ένα μικρό ποσοστό των σωστών προβλημάτων (11%) εντοπίστηκαν στοιχεία γλωσσικής πολυπλοκότητας. Σύμφωνα με τον Πίνακα 3, οι μαθητές χωρίς ΕΕΑ δημιούργησαν περισσότερα γλωσσικά πολύπλοκα προβλήματα, ενώ και για τις δυο ομάδες τα περισσότερα γλωσσικά πολύπλοκα προβλήματα δημιουργήθηκαν στις ελεύθερες καταστάσεις και τα λιγότερα στις δομημένες.

Πίνακας 3.

Γλωσσική Πολυπλοκότητα των προβλημάτων ανά ομάδα και κατάσταση

Κατάσταση ΚΜΠ	**Σύνολο**	**χωρίς ΕΕΑ**	**ΕΜΔ**
Δομημένες	13	8	5
Ημι-Δομημένες	15	9	6
Ελεύθερες	21	13	8
Σύνολο	**49**	**30**	**19**

Ως προς τη μαθηματική πολυπλοκότητα, αυτή αναλύθηκε ανά ομάδα και ανά κατάσταση. Όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 4, ένα πολύ μεγάλο μέρος των προβλημάτων (92,5% των μαθητών χωρίς ΕΕΑ και 90,3% των μαθητών με ΕΜΔ) δεν ήταν πολύπλοκα, αφού συγκέντρωναν έως 2 σημασιολογικές σχέσεις. Μόνο σε 2 προβλήματα σε κάθε ομάδα εντοπίστηκαν πάνω από 4 σημασιολογικές σχέσεις.

Πίνακας 4.

Μαθηματική Πολυπλοκότητα των προβλημάτων ανά ομάδα

Ομάδα	**Σημασιολογικές Σχέσεις**	**Συχνότητα**	**Ποσοστό %**	**Αθροιστικό Ποσοστό**
	1	178	70,0	70,0

χωρίς ΕΕΑ	2	57	22,4	92,5
	3	17	6,6	99,2
	4	1	0,3	99,5
	5	1	0,3	100,0
	Σύνολο	254	100,0	
ΕΜΔ	1	137	72,4	72,4
	2	34	17,9	90,3
	3	16	8,4	98,7
	4	1	0,5	99,2
	5	1	0,5	100,0
	Σύνολο	189	100,0	

Στον Πίνακα 5 παρουσιάζεται αναλυτικότερα η μαθηματική πολυπλοκότητα και ανά κατάσταση. Στα προβλήματα των μαθητών χωρίς ΕΕΑ η μαθηματική πολυπλοκότητα αυξάνεται από τις δομημένες προς τις ελεύθερες καταστάσεις, καθώς μειώνεται ο αριθμός των προβλημάτων με 1 σχέση και αυξάνονται τα προβλήματα με 2 σχέσεις. Ο αριθμός των προβλημάτων με 3 ή και παραπάνω σχέσεις αυξάνεται επίσης ελαφρώς, από 5 στις δομημένες, 6 στις ημι-δομημένες και 8 στις ελεύθερες. Αναφορικά με τα προβλήματα των μαθητών με ΕΜΔ, η πολυπλοκότητα αυξάνεται από τις δομημένες στις ημι-δομημένες καταστάσεις. Ωστόσο, στις ελεύθερες καταστάσεις τα προβλήματα ήταν χαμηλότερης πολυπλοκότητας, αφού το μέγιστο των σημασιολογικών σχέσεων που εντοπίστηκε ήταν 2.

Πίνακας 5.

Μαθηματική Πολυπλοκότητα των προβλημάτων ανά ομάδα και κατάσταση

Ομάδα	Κατάσταση ΚΜΠ	Σημασιολογικές Σχέσεις	Συχνότητα	%	Αθροιστικό Ποσοστό
χωρίς ΕΕΑ	**Δομημένες**	1	72	84,7	84,7
		2	8	9,4	94,1
		3	5	5,8	100,0
		Σύνολο	85	100,0	
	Ημι-Δομημένες	1	62	71,2	71,2
		2	19	21,8	93
		3	6	6,8	100,0
		Σύνολο	87	100,0	
	Ελεύθερες	1	44	53,6	53,6

		2	30	36,5	90,1
		3	6	7,3	97,4
		4	1	1,2	98,6
		5	1	1,2	100,0
		Σύνολο	82	100,0	
ΕΜΔ	**Δομημένες**	1	46	77,9	77,9
		2	9	15,2	93,1
		3	3	5,0	98,1
		5	1	1,6	100,0
		Σύνολο	59	100,0	
	Ημι-Δομημένες	1	53	65,4	65,4
		2	14	17,2	82,6
		3	13	16,0	98,6
		4	1	1,2	100,0
		Σύνολο	81	100,0	
	Ελεύθερες	1	38	77,5	77,5
		2	11	22,4	100,0
		Σύνολο	49	100,0	

Από τις 630 απαντήσεις, οι 187 (29,6%) θεωρήθηκαν λανθασμένες. Από αυτές, οι 66 (35,2%) δόθηκαν στις δομημένες καταστάσεις, οι 42 (22,4%) στις ημι-δομημένες και οι 79 στις ελεύθερες (42,2%). Αν εξεταστεί το ποσοστό των λανθασμένων απαντήσεων μέσα στις 210 απαντήσεις σε κάθε κατάσταση, ήταν λάθος το 31,4% των απαντήσεων στις δομημένες καταστάσεις, το 20% στις ημι-δομημένες και το 37,6% στις ελεύθερες. Από τις λάθος απαντήσεις, οι 61 (32,6%) δόθηκαν από μαθητές χωρίς ΕΕΑ και οι 126 (67,3%) από μαθητές με ΕΜΔ. Ως προς το ποσοστό των λανθασμένων απαντήσεων στις συνολικές απαντήσεις κάθε ομάδας, ήταν λάθος το 19,3% των απαντήσεων των μαθητών χωρίς ΕΕΑ και το 40% των απαντήσεων των μαθητών με ΕΜΔ. Ακολούθησε ανάλυση και καταγραφή των λαθών των μαθητών, τα οποία ταξινομήθηκαν στις εξής 11 κατηγορίες:

(1) Απουσία Απάντησης

(2) Διατύπωση ερώτησης για το αποτέλεσμα μαθηματικής πράξης με παρεχόμενα δεδομένα αντί για κατασκευή προβλήματος (π.χ. «Πόσο κάνει η διαίρεση 4.874:31;»)

(3) Απλή σύγκριση δεδομένων που παρέχονται στην εικόνα/πίνακα/πρόβλημα (π.χ. «Η ομάδα της Άννας έβαλε 76 πόντους και η ομάδα του Παναγιώτη έβαλε 36 πόντους. Ποια ομάδα έβαλε τους περισσότερους;»)

(4) Διατύπωση ερώτησης με προφανή απάντηση από τα δεδομένα που παρέχονται έτοιμα στην εικόνα/πίνακα/πρόβλημα (π.χ. «Πόσους πόντους έβαλε κάθε παιδί;»)

(5) Διατύπωση της ερώτησης «τι πράξη θα κάνω;» (π.χ. «Ο παππούς έχει 50 μήλα και θέλει να τα μοιράσει σε 8 παιδιά. Τι πράξη θα κάνει;»)

(6) Δήλωση-πρόταση με ποσοτικά δεδομένα χωρίς τη συνοδεία κατάλληλης ερώτησης (π.χ. «Ο Θάνος αγόρασε ένα μικρό κινητό που κόστιζε 78€ και έναν χάρτη για να τον βοηθάει στη Γεωγραφία»)

(7) Μη μαθηματικό πρόβλημα που δεν απαιτεί μαθηματικό συλλογισμό (π.χ. «Η κυβέρνηση έχει 100 ψήφους για ένα νομοσχέδιο και οι πολίτες έχουν 10 ψήφους. Το νομοσχέδιο λέει να αυξηθούν οι μισθοί των πολιτικών. Τι ψηφίζεις;»)

(8) Αναδιατύπωση του δοσμένου προβλήματος

(9) Σωστό πρόβλημα που δεν ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις του έργου (π.χ. δεν αξιοποίησαν καμία από τις δοσμένες πληροφορίες ή δεν δημιούργησαν το αντίστροφο πρόβλημα)

(10) Μη λογικό πρόβλημα που περιγράφει μια ανέφικτη κατάσταση ή έχει αντιφατικά δεδομένα (π.χ. «Ο Νίκος σε έναν αγώνα ποδοσφαίρου έβαλε 4 γκολ. Οι συμπαίκτες του που ήταν όλοι 10 έβαλαν συνολικά και άλλα 5 γκολ. Πόσα γκολ έβαλε ο καθένας;»)

(11) Μη επιλύσιμο πρόβλημα που περιλαμβάνει ανεπαρκή δεδομένα ή ερώτηση που δεν απαντιέται από τα δεδομένα (π.χ. «Η Δανάη έχει στη συλλογή της 133 κάρτες με ζώα και η Στέλλα έχει 4 φορές περισσότερες. Πόσες κάρτες έχει η Ζωή;»)

Στον Πίνακα 6 παρουσιάζονται οι συχνότητες των λαθών που εμφανίστηκαν στο σύνολο των απαντήσεων, αλλά και σε κάθε ομάδα ξεχωριστά. Πρέπει να διευκρινιστεί ότι για τις δυο ομάδες οι συχνότητες υπολογίστηκαν στο σύνολο των λανθασμένων απαντήσεων που έδωσε κάθε μία και όχι για τις λανθασμένες απαντήσεις που δόθηκαν συνολικά. Όπως φαίνεται, για τους μαθητές χωρίς ΕΕΑ, τα συχνότερα λάθη ήταν η δημιουργία προβλημάτων, που ήταν μαθηματικά σωστά, όμως δεν ανταποκρίνονταν στις απαιτήσεις του εκάστοτε έργου, καθώς και η δημιουργία μη λογικών προβλημάτων, που εμφανίστηκαν σε 12 και 13 προβλήματα αντίστοιχα. Τα λιγότερα συχνά λάθη που εμφανίστηκαν σε 1 ή κανένα πρόβλημα ήταν η απουσία απάντησης, τα μη μαθηματικά προβλήματα και η διατύπωση προβλημάτων που είχαν ως ερώτηση «τι πράξη θα κάνω;». Αντίστοιχα, στα προβλήματα των μαθητών με ΕΜΔ, το συχνότερο λάθος ήταν η δημιουργία προβλημάτων που δεν ανταποκρίνονταν στις απαιτήσεις των έργων (26,1%) και η απουσία απάντησης (17,4%). Αξίζει να σχολιαστεί ότι όλες οι κενές απαντήσεις ανήκαν σε μαθητές με ΕΜΔ. Τα λιγότερο συχνά λάθη που εμφανίστηκαν αφορούσαν την αναδιατύπωση των ήδη δοσμένων προβλημάτων στις δομημένες καταστάσεις, που εμφανίστηκε σε 1 μόνο πρόβλημα, τη δημιουργία προβλημάτων με ερώτηση «τι πράξη θα κάνω;», καθώς και τη διατύπωση μαθηματικών πράξεων αντί για πρόβλημα, που εμφανίστηκαν σε 2 προβλήματα το καθένα.

Πίνακας 6.

Είδη και συχνότητες λαθών ανά ομάδα (στο σύνολο των απαντήσεων)

Είδος Λάθους	Σύνολο	%	χωρίς ΕΕΑ	%	ΕΜΔ	%
1) Απουσία Απάντησης	22	11,7	0	0	22	17,4
2) Ερώτηση για αποτέλεσμα μαθηματικής πράξης	8	4,2	6	9,8	2	1,5
3) Σύγκριση δεδομένων που παρέχονται	14	7,4	7	11,4	7	5,5
4) Ερώτηση με προφανή απάντηση από τα δεδομένα	13	6,9	4	6,5	9	7,1
5) Ερώτηση «τι πράξη θα κάνω;»	3	1,6	1	1,6	2	1,5
6) Δήλωση	20	10,6	5	8,1	15	11,9
7) Μη μαθηματικό πρόβλημα	8	4,2	0	0	8	6,3
8) Αναδιατύπωση δοσμένου προβλήματος	3	1,6	2	3,2	1	0,7
9) Σωστό πρόβλημα που δεν ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις του έργου	45	24,0	12	19,6	33	26,1
10) Μη λογικό	25	13,3	13	21,3	12	9,5
11) Μη επιλύσιμο	26	13,9	11	18,0	15	11,9
Σύνολο	**187**	**100,0**	**61**	**100,0**	**126**	**100,0**

Στον Πίνακα 7 παρουσιάζονται λεπτομερώς οι συχνότητες των λαθών ανά ομάδα και ανά κατάσταση ΚΜΠ. Οι σχετικές συχνότητες ως ποσοστά δεν παρουσιάζονται, καθώς δε θα ήταν αντιπροσωπευτικές για τόσο μικρούς αριθμούς. Απευθείας παρατηρείται ότι σε όλες τις καταστάσεις οι μαθητές με ΕΜΔ υπερτερούσαν όσον αφορά τον αριθμό των λανθασμένων προβλημάτων. Ως προς το είδος της κατάστασης, τα περισσότερα λάθη και για τις δυο ομάδες εντοπίστηκαν στις ελεύθερες καταστάσεις και ακολουθούσαν οι δομημένες. Για τους μαθητές χωρίς ΕΕΑ, το συχνότερο λάθος στις δομημένες καταστάσεις ήταν η δημιουργία προβλημάτων που δεν ανταποκρίνονταν στις προδιαγραφές του έργου, στις ημι-δομημένες ήταν η δημιουργία προβλημάτων με ερωτήσεις που απαιτούσαν απλώς τη σύγκριση δεδομένων που παρέχονταν και θεωρήθηκαν ασκήσεις και στις ελεύθερες η δημιουργία μη λογικών προβλημάτων. Για τους μαθητές με ΕΜΔ, το συχνότερο λάθος σε όλες τις καταστάσεις ήταν η δημιουργία προβλημάτων που δεν ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις του εκάστοτε έργου.

Πίνακας 7.

Είδη και συχνότητες λαθών ανά ομάδα και κατάσταση (στο σύνολο των απαντήσεων)

Είδος Λάθους	**χωρίς ΕΕΑ**			**ΕΜΔ**		
	Δομ	**Ημι**	**Ελε**	**Δομ**	**Ημι**	**Ελε**
1) Απουσία Απάντησης	0	0	0	9	2	11
2) Ερώτηση για αποτέλεσμα μαθηματικής πράξης	1	2	3	0	1	1
3) Σύγκριση δεδομένων που παρέχονται	0	6	1	1	3	3
4) Ερώτηση με προφανή απάντηση από τα δεδομένα	1	3	0	3	3	3
5) Ερώτηση «τι πράξη θα κάνω;»	0	1	0	0	1	1
6) Δήλωση	3	2	0	10	4	1
7) Μη μαθηματικό πρόβλημα	0	0	0	0	1	7
8) Αναδιατύπωση δοσμένου προβλήματος	2	0	0	1	0	0
9) Σωστό πρόβλημα που δεν ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις του έργου	9	2	6	14	8	14
10) Μη λογικό	1	1	7	2	0	9

11) Μη επιλύσιμο	3	1	6	6	1	6
Σύνολο	**20**	**18**	**23**	**46**	**24**	**56**

Ο Πίνακας 8 παρουσιάζει τη συχνότητα των λαθών συνολικά και για κάθε ομάδα, όμως αναφέρεται στον αριθμό των μαθητών που εμφάνισαν έστω και ένα λάθος τέτοιου είδους. Είναι ανάγκη να επισημανθεί ότι υπήρχαν μαθητές που εμφάνισαν ποικιλία λαθών που εμπίπτουν σε παραπάνω από μία κατηγορίες. Γι' αυτόν τον λόγο τα αποτελέσματα σε αυτόν τον πίνακα δεν είναι αθροιστικά. Ακόμη, τα ποσοστά σε κάθε ομάδα έχουν υπολογιστεί για τους 35 μαθητές που ανήκουν σε αυτή, όχι συνολικά για τους 70 συμμετέχοντες. Επιβεβαιώνεται ότι το συχνότερο λάθος που εμφανίστηκε σχεδόν από τους μισούς μαθητές (44,2%) ήταν η δημιουργία ενός σωστού προβλήματος που δεν ανταποκρίνεται στο ζητούμενο του έργου. Από τους μαθητές χωρίς ΕΕΑ το εμφάνισαν έστω μια φορά 9 μαθητές, ενώ από αυτούς με ΕΜΔ το εμφάνισαν 22. Ακολουθούσε η δημιουργία μη λογικού και μη επιλύσιμου προβλήματος, που εντοπίστηκε στο 28,5% και το 31,4% των μαθητών αντίστοιχα και εμφανίστηκε από 8 και 9 μαθητές χωρίς ΕΕΑ και από 12 και 13 με ΕΜΔ αντίστοιχα. Τα λάθη που εμφανίστηκαν λιγότερο ήταν η διατύπωση της ερώτησης «Τι πράξη θα κάνω;» που εμφανίστηκε μόνο από 2 μαθητές (1 από κάθε ομάδα) και η αναδιατύπωση του προβλήματος που εμφανίστηκε από 3 μαθητές (2 χωρίς ΕΕΑ και 1 με ΕΜΔ). Όπως προαναφέρθηκε, κανένας μαθητής χωρίς ΕΕΑ δεν έδωσε κενές απαντήσεις ή δεν δημιούργησε μη μαθηματικά προβλήματα. Αντιθέτως, υπήρχαν 12 μαθητές με ΕΜΔ που είχαν έστω από μια κενή απάντηση και 6 που έστω και ένα από τα προβλήματά τους κρίθηκε ως μη μαθηματικό.

Πίνακας 8.

Είδη και συχνότητες λαθών ανά ομάδα (στο σύνολο των μαθητών)

Είδος Λάθους	Συχνότητα Σύνολο	%	Συχνότητα χωρίς ΕΕΑ	%	Συχνότητα ΕΜΔ	%
1) Απουσία Απάντησης	12	17,1%	0	0	12	34,2%
2) Ερώτηση για αποτέλεσμα μαθηματικής πράξης	6	8,5%	4	11,4%	2	5,7%
3) Σύγκριση δεδομένων που παρέχονται	12	17,1%	6	17,1%	6	17,1%

4) Ερώτηση με προφανή απάντηση από τα δεδομένα	12	17,1%	4	11,4%	8	22,8%
5) Ερώτηση «τι πράξη θα κάνω;»	2	5,7%	1	2,8%	1	2,8%
6) Δήλωση	14	20%	5	14,2%	9	25,7%
7) Μη μαθηματικό πρόβλημα	6	8,5%	0	0	6	17,1%
8) Αναδιατύπωση δοσμένου προβλήματος	3	4,2%	2	5,7%	1	2,8%
9) Σωστό πρόβλημα που δεν ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις του έργου	31	44,2%	9	25,7%	22	62,8%
10) Μη λογικό	20	28,5%	8	22,8%	12	34,2%
11) Μη επιλύσιμο	22	31,4%	9	25,7%	13	37,1%

Στον Πίνακα 9 παρουσιάζονται ο αριθμός των λαθών και οι συχνότητες των μαθητών που τα εμφάνισαν συνολικά. Το μέγιστο των λανθασμένων απαντήσεων που μπορούσε να δώσει κάθε μαθητής ήταν 9, όμως κανένας δεν έδωσε λάθος απαντήσεις σε όλα τα έργα. Σχεδόν οι μισοί (47,1%) είχαν έως και 2 λάθη, ενώ το 82,9% έκανε λιγότερα από τα μισά έργα λάθος.

Πίνακας 9.

Συχνότητες λαθών συνολικά

Αριθμός Λαθών	Συχνότητα	Ποσοστό %	Αθροιστικό Ποσοστό
0	12	17,1	17,1
1	10	14,3	31,4
2	11	15,7	47,1
3	15	21,4	68,6
4	10	14,3	82,9
5	7	10,0	92,9
6	2	2,9	95,7
7	1	1,4	97,1
8	2	2,9	100,0
Σύνολο	**70**	**100,0**	

Η συχνότητα των λαθών παρουσιάζεται πιο αναλυτικά ανά ομάδα στον Πίνακα 10. Παρατηρείται ότι το μέγιστο των λαθών στην ομάδα των μαθητών χωρίς ΕΕΑ είναι 5, ενώ στην ομάδα των μαθητών με ΕΜΔ είναι 8. Ακόμα, μεταξύ των μαθητών χωρίς ΕΕΑ υπήρχαν 10 μαθητές που δεν είχαν κανένα λάθος, ενώ μεταξύ των μαθητών με ΕΜΔ υπήρχαν μόνο 2. Σχεδόν οι μισοί μαθητές χωρίς ΕΕΑ (48,6%) είχαν 0 ή 1 λάθος, ενώ στην ομάδα των μαθητών με ΕΜΔ το ποσοστό αυτό πέφτει στο 14,3%.

Πίνακας 10.

Συχνότητες λαθών ανά ομάδα

Ομάδα	**Λάθη**	**Συχνότητα**	**Ποσοστό %**	**Αθροιστικό Ποσοστό**
χωρίς ΕΕΑ	0	10	28,6	28,6
	1	7	20,0	48,6
	2	6	17,1	65,7
	3	7	20,0	85,7
	4	4	11,4	97,1
	5	1	2,9	100,0
	Σύνολο	35	100,0	
ΕΜΔ	0	2	5,7	5,7
	1	3	8,6	14,3
	2	5	14,3	28,6
	3	8	22,9	51,4
	4	6	17,1	68,6
	5	6	17,1	85,7
	6	2	5,7	91,4
	7	1	2,9	94,3
	8	2	5,7	100,0
	Σύνολο	35	100,0	

Ο Πίνακας 11 παρουσιάζει τις συχνότητες των λαθών ανά κατάσταση και ανά ομάδα μαθητών. Με μια πρώτη ματιά διαφαίνεται πως το μέγιστο των λαθών των μαθητών χωρίς ΕΕΑ σε κάθε κατάσταση είναι 2, κάτι που σημαίνει ότι κανένας δεν έκανε λάθος και τα 3 έργα σε μια κατάσταση. Αντίθετα, το μέγιστο των λαθών των μαθητών με ΕΜΔ είναι 3. Σε όλες τις καταστάσεις, ήταν λιγοστοί οι μαθητές χωρίς ΕΕΑ που είχαν 2 λάθη (20% στις δομημένες και από 11,4% στις ημι-δομημένες και ελεύθερες). Στις δομημένες και ημι-δομημένες καταστάσεις, το 62,9% και το 60% αντίστοιχα των μαθητών χωρίς ΕΕΑ δεν είχε κανένα λάθος, ενώ στις ελεύθερες το ποσοστό ήταν χαμηλότερο (45,7%). Αναφορικά με τους μαθητές με ΕΜΔ, στις δομημένες και ημι-δομημένες καταστάσεις πάνω από τους μισούς είχαν 0 ή 1 λάθη

(57,1% και 82,9% αντίστοιχα), ενώ στις ελεύθερες το ποσοστό αυτό πέφτει στο 42,9%. Αντίστοιχα, 2 και παραπάνω λάθη εμφάνισαν 15 μαθητές στις δομημένες καταστάσεις, 6 στις ημι-δομημένες και 20 στις ελεύθερες.

Πίνακας 11.

Συχνότητες λαθών ανά ομάδα και κατάσταση

Ομάδα	**Κατάσταση ΚΜΠ**	**Αριθμός Λαθών**	**Συχνότητα**	**%**	**Αθροιστικό Ποσοστό**
χωρίς ΕΕΑ	**Δομημένες**	0	22	62,9	62,9
		1	6	17,1	80,0
		2	7	20,0	100,0
		Σύνολο	35	100,0	
	Ημι-Δομημένες	0	21	60,0	60,0
		1	10	28,6	88,6
		2	4	11,4	100,0
		Σύνολο	35	100,0	
	Ελεύθερες	0	16	45,7	45,7
		1	15	42,9	88,6
		2	4	11,4	100,0
		Σύνολο	35	100,0	
ΕΜΔ	**Δομημένες**	0	9	25,7	25,7
		1	11	31,4	57,1
		2	10	28,6	85,7
		3	5	14,3	100,0
		Σύνολο	35	100,0	
	Ημι-Δομημένες	0	19	54,3	54,3
		1	10	28,6	82,9
		2	4	11,4	94,3
		3	2	5,7	100,0
		Σύνολο	35	100,0	
	Ελεύθερες	0	5	14,3	14,3
		1	10	28,6	42,9
		2	14	40,0	82,9

	3	6	17,1	100,0
	Σύνολο	35	100,0	

Στον Πίνακα 12 αναγράφονται ο μέσος όρος (ΜΟ), το εύρος και η τυπική απόκλιση (ΤΑ) των λαθών για όλους τους μαθητές σε όλες τις καταστάσεις. Συνολικά, ο ΜΟ των λαθών σε όλες τις καταστάσεις ήταν 2,67 στα 9, με ΤΑ 1,991. Φαίνεται ότι ο ΜΟ των λαθών ήταν υψηλότερος στις ελεύθερες καταστάσεις (ΜΟ=1,13 στα 3), ακολουθούσαν οι δομημένες (ΜΟ=0,94) και τέλος οι ημι-δομημένες με τον χαμηλότερο ΜΟ λαθών (ΜΟ=0,60). Το εύρος των λαθών σε όλες τις καταστάσεις ήταν 3, καθώς τόσα ήταν τα έργα σε κάθε κατάσταση, ενώ συνολικά ήταν 8, καθώς δεν υπήρχε κανένας μαθητής που να έκανε λάθος και τα 9 έργα που περιλάμβανε συνολικά η γραπτή δοκιμασία.

Πίνακας 12.

Μέσος όρος, εύρος και τυπική απόκλιση λαθών ανά κατάσταση

Κατάσταση ΚΜΠ	N	Range	Mean	Std. Deviation
Δομημένες	70	3	,94	,991
Ημι-Δομημένες	70	3	,60	,806
Ελεύθερες	70	3	1,13	,947
Σύνολο	70	8	2,67	1,991

Ο ΜΟ, το εύρος και η ΤΑ των λαθών ανά κατάσταση, ξεχωριστά για τις δυο ομάδες παρουσιάζεται στον Πίνακα 13. Ο ΜΟ των λαθών και των δυο ομάδων ήταν υψηλότερος στις ελεύθερες καταστάσεις (ΜΟ=0,66 για τους μαθητές χωρίς ΕΕΑ και ΜΟ=1,60 για τους μαθητές με ΕΜΔ) και χαμηλότερος στις ημι-δομημένες (ΜΟ=0,51 για τους μαθητές χωρίς ΕΕΑ και ΜΟ=0,69 για τους μαθητές με ΕΜΔ). Παρατηρώντας τους ΜΟ διαφαίνεται διαφορά στις επιδόσεις των δυο ομάδων. Ο ΜΟ των λαθών ήταν μεγαλύτερος για τους μαθητές με ΕΜΔ σε όλα τα είδη καταστάσεων (ΜΟ= 1,74 για τους μαθητές χωρίς ΕΕΑ και ΜΟ=3,60 για τους μαθητές με ΕΜΔ, με ΤΑ 1,502 και 2,003 αντίστοιχα). Η μικρότερη διαφορά μεταξύ των ομάδων εντοπίζεται στις ημι-δομημένες καταστάσεις και η μεγαλύτερη στις ελεύθερες. Ακόμα, παρατηρείται ότι το εύρος για τους μαθητές χωρίς ΕΕΑ είναι χαμηλότερο από αυτό των μαθητών με ΕΜΔ, καθώς κανένας μαθητής χωρίς ΕΕΑ δεν έκανε όλα τα έργα λάθος σε κάθε κατάσταση ή πάνω από 5 λάθη συνολικά.

Πίνακας 13.

Μέσος όρος, εύρος και τυπική απόκλιση λαθών ανά ομάδα και κατάσταση

Ομάδα	Κατάσταση	N	Range	Mean	Std. Deviation
χωρίς ΕΕΑ	Δομημένες	35	2	,57	,815
	Ημι-Δομημένες	35	2	,51	,702
	Ελεύθερες	35	2	,66	,684
	Σύνολο	35	5	**1,74**	1,502
ΕΜΔ	Δομημένες	35	3	1,31	1,022
	Ημι-Δομημένες	35	3	,69	,900
	Ελεύθερες	35	3	1,60	,946
	Σύνολο	35	8	**3,60**	2,003

Οι ΜΟ της επίδοσης υπολογίστηκαν και για κάθε έργο ξεχωριστά. Όπως διαφαίνεται από τον Πίνακα 14, για το σύνολο των μαθητών, μεταξύ των δομημένων καταστάσεων, ο υψηλότερος ΜΟ (0,79) ήταν στο 1ο έργο (δημιουργία εναλλακτικής ερώτησης για το πρόβλημα), ενώ ο χαμηλότερος (ΜΟ=0,54) στο 2ο έργο (δημιουργία προβλήματος με αντιστροφή των δεδομένων και των ζητουμένων). Στις ημι-δομημένες, ο υψηλότερος ΜΟ (0,87) ήταν στο 1ο έργο όπου οι πληροφορίες παρουσιάζονταν με εικόνα και ο χαμηλότερος (ΜΟ=0,76) στο 2ο, όπου δινόταν μόνο μια μαθηματική έκφραση. Στις ελεύθερες, ο υψηλότερος ΜΟ ήταν στο 1ο έργο (0,76) (δημιουργία προβλήματος που θα λύσει ένας συμμαθητής) και ο χαμηλότερος (0,41) στο 2ο (δημιουργία δύσκολου προβλήματος). Αναλυτικότερα, για τους μαθητές χωρίς ΕΕΑ, ο υψηλότερος ΜΟ (0,89) ήταν στο 1ο έργο των δομημένων καταστάσεων (δημιουργία εναλλακτικής ερώτησης για το πρόβλημα), ενώ ο χαμηλότερος ήταν στο 2ο έργο των ελεύθερων καταστάσεων (0,63) (δημιουργία δύσκολου προβλήματος). Για τους μαθητές με ΕΜΔ ο υψηλότερος ΜΟ ήταν στο 1ο έργο των ημι-δομημένων καταστάσεων (0,89) (δημιουργία προβλήματος από εικόνα), ενώ ο χαμηλότερος στο 2ο έργο των ελεύθερων καταστάσεων (0,20), όπως και για τους μαθητές χωρίς ΕΕΑ. Σχεδόν σε όλα τα έργα, ο ΜΟ των μαθητών χωρίς ΕΕΑ ήταν υψηλότερος συγκριτικά με τους μαθητές με ΕΜΔ, εκτός από το 1ο έργο των ημι-δομημένων καταστάσεων. Η μεγαλύτερη διαφορά εντοπίστηκε στο 2ο έργο των ελεύθερων καταστάσεων με τη δημιουργία ενός δύσκολου προβλήματος.

Πίνακας 14.

Μέσος όρος και τυπική απόκλιση επίδοσης ανά έργο και ομάδα

Ομάδα	Σύνολο		χωρίς ΕΕΑ		ΕΜΔ	
	Mean	Std. Deviation	Mean	Std. Deviation	Mean	Std. Deviation
Δομ1	,79	,413	,89	,323	,69	,471
Δομ2	,54	,502	,71	,458	,37	,490
Δομ3	,73	,448	,83	,382	,63	,490
Ημι1	,87	,337	,86	,355	,89	,323
Ημι2	,76	,432	,83	,382	,69	,471
Ημι3	,77	,423	,80	,406	,74	,443
Ελε1	,76	,432	,86	,355	,66	,482
Ελε2	,41	,496	,63	,490	,20	,406
Ελε3	,70	,462	,86	,355	,54	,505

3.1.2. Επαγωγική Στατιστική Ανάλυση

Αρχικά ελέγχθηκε αν σε κάθε ομάδα υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στην επίδοση των μαθητών στα τρία είδη καταστάσεων ΚΜΠ. Χρησιμοποιήθηκε ο έλεγχος Friedman (Πίνακας 15). Ξεκινώντας από την ομάδα των μαθητών χωρίς ΕΕΑ, ο έλεγχος φανέρωσε ότι δεν υπήρχε στατιστικά σημαντική διαφορά στην επίδοση των μαθητών μεταξύ των δομημένων, ημι-δομημένων και ελεύθερων καταστάσεων ($p=0,685>0,05$). Αντιθέτως, στους μαθητές με ΕΜΔ αναδεικνύεται μια στατιστικά σημαντική διαφορά στην επίδοση στις τρεις καταστάσεις ΚΜΠ ($p=0,001<0,05$).

Πίνακας 15.

Αποτελέσματα ελέγχου Friedman

Friedman Test		
χωρίς ΕΕΑ	N	35
	Chi-Square	,757
	df	2
	Asymp. Sig.	,685
ΕΜΔ	N	35
	Chi-Square	14,942
	df	2
	Asymp. Sig.	,001

Για να εντοπιστεί ακριβέστερα μεταξύ ποιών καταστάσεων εντοπίστηκε η στατιστικά σημαντική διαφορά, πραγματοποιήθηκε επιπλέον ο έλεγχος Wilcoxon, τα αποτελέσματα του οποίου παρουσιάζονται στον Πίνακα 16. Ο έλεγχος αυτός έδειξε ότι στην ομάδα των μαθητών με ΕΜΔ η στατιστικά σημαντική διαφορά εντοπίζεται μεταξύ των δομημένων και των ημι-δομημένων καταστάσεων ($p=0{,}001<0{,}05$) και μεταξύ των ελεύθερων και ημι-δομημένων καταστάσεων ($p=0{,}000<0{,}05$), αλλά όχι μεταξύ των δομημένων και των ελεύθερων καταστάσεων ($p=0{,}296>0{,}05$). Ταυτόχρονα επιβεβαίωσε ότι στους μαθητές χωρίς ΕΕΑ δεν υπήρχε στατιστική διαφορά μεταξύ των καταστάσεων ΚΜΠ.

Πίνακας 16.

Αποτελέσματα ελέγχου Wilcoxon Signed-Ranks

Wilcoxon Signed Ranks Test				
Ομάδα		**Λάθη Δομ-Λάθη Ημι**	**Λάθη Ελε-Λάθη Ημι**	**Λάθη Δομ-Λάθη Ελε**
χωρίς ΕΕΑ	Z	-,423	-,892	-,440
	Asymp. Sig. (2-tailed)	,672	,373	,660
ΕΜΔ	Z	-3,420	-3,618	-1,046
	Asymp. Sig. (2-tailed)	,001	,000	,296

Για τον έλεγχο της στατιστικής σημαντικότητας της διαφοράς των επιδόσεων μεταξύ των δυο ομάδων πραγματοποιήθηκε ο έλεγχος Mann-Whitney. Όπως φαίνεται και από τον Πίνακα 17, οι επιδόσεις των δυο ομάδων συνολικά είχαν στατιστικά σημαντική διαφορά ($p=0{,}000<0{,}05$). Αναλυτικότερα, τόσο στις δομημένες ($p=0{,}002<0{,}05$), όσο και στις ελεύθερες καταστάσεις ($p=0{,}000<0{,}05$) η διαφορά ήταν στατιστικά σημαντική, ενώ στις ημι-δομημένες η διαφορά που εντοπίστηκε δεν ήταν στατιστικά σημαντική ($p=0{,}517>0{,}05$).

Πίνακας 17.

Αποτελέσματα ελέγχου Mann-Whitney

Mann-Whitney Test				
	Λάθη Σύνολο	**Λάθη Δομημένες**	**Λάθη Ημι-Δομημένες**	**Λάθη Ελεύθερες**
Mann-Whitney U	288,500	361,000	563,500	278,000

Wilcoxon W	918,500	991,000	1193,500	908,500
Z	-3,855	-3,141	-,648	-4,119
Asymp. Sig. (2-tailed)	,000	,002	,517	,000

Ο έλεγχος αυτός έγινε και για κάθε έργο ξεχωριστά, επιβεβαιώνοντας πως στα τρία έργα των ημι-δομημένων καταστάσεων δεν υπήρχε στατιστικά σημαντική διαφορά, όπως και στο $3^{ο}$ έργο των δομημένων και το $1^{ο}$ των ελεύθερων καταστάσεων (Πίνακας 18). Στατιστικά σημαντική διαφορά παρατηρήθηκε μόνο στα έργα 1 και 2 των δομημένων καταστάσεων ($p=0,43<0,05$ και $p=0,04<0,05$ αντίστοιχα) και 2 και 3 των ελεύθερων καταστάσεων ($p=000<0,05$ και $p=0,004<0,005$ αντίστοιχα).

Πίνακας 18.

Αποτελέσματα ελέγχου Mann-Whitney ανά έργο

Mann-Whitney Test									
	Δομ1	**Δομ2**	**Δομ3**	**Ημι1**	**Ημι2**	**Ημι3**	**Ελε1**	**Ελε2**	**Ελε3**
Mann-Whitney U	490,000	402,500	490,000	595,000	525,000	577,500	490,000	350,000	420,000
Wilcoxon W	1120,000	1032,500	1120,000	1225,000	1155,000	1207,500	1120,000	980,000	1050,000
Z	-2,024	-2,859	-1,868	-,355	-1,384	-,565	-1,937	-3,613	-2,848
Asymp. Sig. (2-tailed)	,043	,004	,062	,723	,166	,572	,053	,000	,004

3.2. Ποιοτική Ανάλυση Αποτελεσμάτων

Στο σημείο αυτό παρουσιάζονται ορισμένα στοιχεία, όπως προέκυψαν από τις συνεντεύξεις που διενεργήθηκαν, αλλά και από την ποιοτική ανάλυση των προβλημάτων, για την ανάδειξη μιας πιο ολοκληρωμένης εικόνας των αποτελεσμάτων. Εξαρχής φάνηκε ότι οι μαθητές δεν ήταν εξοικειωμένοι με την ΚΜΠ και σχεδόν όλοι ανέφεραν ότι δεν είχαν την ευκαιρία να δημιουργήσουν δικά τους προβλήματα στο παρελθόν. Έτσι, αρχικά προσέγγιζαν τα έργα διστακτικά και δυσκολεύονταν να δεχθούν ότι δεν χρειαζόταν να λύσουν τα προβλήματα, αλλά αντίθετα, να δημιουργήσουν δικά τους. Ωστόσο, δεδομένου ότι δεν είχαν συνηθίσει σε τέτοιου είδους έργα, όλοι έδειξαν ενδιαφέρον. Όταν ερωτήθηκαν για τις εντυπώσεις τους από την ΚΜΠ μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας, οι περισσότεροι (12 από τους 14) εξέφρασαν θετικά σχόλια και κατέληξαν ότι τελικά ήταν εύκολη, δυο τη χαρακτήρισαν «μέτρια», ενώ κανένας δεν εξέφρασε αρνητικά σχόλια. Ενδεικτικά ανέφεραν:

«Ήταν πολύ διασκεδαστικό επειδή μπορούσα να γράψω ελεύθερα για ότι ήθελα, για τα ενδιαφέροντά μου» (μαθήτρια χωρίς ΕΕΑ)

«Μου άρεσε επειδή είδα πως σκέφτονται οι εκπαιδευτικοί όταν φτιάχνουν προβλήματα και πρέπει να δυσκολέψουν τα παιδιά» (μαθήτρια χωρίς ΕΕΑ)

«Μου άρεσε, ήταν όλα εύκολα» (μαθήτρια χωρίς ΕΕΑ)

«Μου άρεσε πάρα πολύ γιατί μου αρέσει να δημιουργώ πράγματα, ήταν πολύ εύκολα» (μαθητής με ΕΜΔ)

«Ήταν πολύ ωραίο, θέλω να μου φέρετε κι άλλα προβλήματα» (μαθήτρια με ΕΜΔ)

«Μου φάνηκε μέτριο, ούτε χάλια, ούτε τέλειο» (μαθητής χωρίς ΕΕΑ)

«Ήταν μέτριο, γιατί δεν είχα ιδέες» (μαθητής χωρίς ΕΕΑ)

Όσον αφορά το είδος του έργου που τους φάνηκε ευκολότερο και δυσκολότερο οι απόψεις ήταν διφορούμενες. Οι περισσότεροι μαθητές υπέδειξαν ως ευκολότερα τα έργα που αφορούσαν την ΚΜΠ από ημι-δομημένες καταστάσεις και συγκεκριμένα, αυτό που οι πληροφορίες παρουσιάζονταν με εικόνα. Άλλοι, βέβαια, επέλεξαν το πρόβλημα με τα δεδομένα σε πίνακα ως το δυσκολότερο, καθώς προσπαθούσαν να ενσωματώσουν όλα τα δεδομένα στο πρόβλημά τους. Ως δυσκολότερα θεωρήθηκαν τα έργα από ελεύθερες καταστάσεις, τα οποία συνολικά είχαν και τον μεγαλύτερο αριθμό κενών απαντήσεων. Ειδικά σε αυτό που απαιτούσε τη δημιουργία ενός δύσκολου προβλήματος, υπήρχαν ορισμένοι που σχολίαζαν ότι δεν μπορούν να σκεφτούν ένα δύσκολο πρόβλημα, ενώ στο έργο που ζητούσε να δημιουργήσουν ένα ενδιαφέρον πρόβλημα για τους ίδιους, απαντούσαν ότι κανένα πρόβλημα δεν θα τους φαινόταν ενδιαφέρον να το λύσουν και ότι δεν τους αρέσουν τα προβλήματα έτσι κι αλλιώς. Λίγοι μαθητές βρήκαν πολύ δύσκολο το πρόβλημα που απαιτούσε αντιστροφή των δεδομένων και των ζητουμένων στις δομημένες καταστάσεις και υποστήριξαν πως δεν ξέρουν τι είναι τα δεδομένα και τα ζητούμενα και πως μπορούν να αλλάξουν θέση. Το πρόβλημα αυτό συγκέντρωσε και τον μεγαλύτερο αριθμό κενών απαντήσεων.

Σε γενικές γραμμές, η συχνότερη δυσκολία που εξέφρασαν ήταν η έλλειψη ιδεών, ειδικά στις ελεύθερες καταστάσεις, όπου δεν παρέχονταν δεδομένα και έπρεπε να χρησιμοποιηθούν εξ ολοκλήρου δικές τους ιδέες. Ακόμα, υπήρχαν μαθητές που είχαν αποφασίσει ότι θέλουν να ενσωματώσουν μια συγκεκριμένη μαθηματική έννοια στο πρόβλημά τους, αλλά δεν μπορούσαν να σκεφτούν μια προβληματική κατάσταση ή ένα πλαίσιο που να ταιριάζει. Ενδεικτικά:

«Στα προβλήματα αυτά δεν είχα ιδέες» (μαθήτρια χωρίς ΕΕΑ)

«Δεν μπορώ να σκεφτώ τίποτα» (μαθήτρια με ΕΜΔ)

«Θέλω να κάνω ένα πρόβλημα με λόγους, αλλά δεν μπορώ να το βάλω σε πρόβλημα. Προσπαθώ να θυμηθώ ένα πρόβλημα από το βιβλίο για να το γράψω, δεν μπορώ να σκεφτώ κάποιο άλλο» (μαθήτρια χωρίς ΕΕΑ).

Πέρα από τις συνεντεύξεις, κατά την συμπλήρωση των έργων και κατά την ανάλυση των προβλημάτων όλων των μαθητών, παρατηρήθηκαν ορισμένες συμπεριφορές που αξίζει να αναφερθούν. Η πλειοψηφία δεν έλεγχε την λογικότητα των προβλημάτων, ούτε κατά τη δημιουργία τους, ούτε αφού τα ολοκλήρωναν. Γι' αυτόν τον λόγο κατέληγαν σε μη λογικά προβλήματα. Φάνηκε πως επέλεγαν τυχαία τους αριθμούς στο πρόβλημα και δεν έλεγχαν το αποτέλεσμα που προκύπτει, με αποτέλεσμα να υπάρχουν προβλήματα με όχι τόσο «βολικές» απαντήσεις ή απαντήσεις που δεν ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα. Για παράδειγμα, υπήρχαν προβλήματα που είχαν ως απάντηση 21,8 τάπες, 1,75 καραμέλες ή 0,5 γκολ. Μόνο ελάχιστοι μαθητές (3 από τους μαθητές χωρίς ΕΕΑ και 6 από τους μαθητές με ΕΜΔ) έλεγχαν αν ορισμένα από τα προβλήματα που δημιούργησαν είναι επιλύσιμα. Αφού τα κατέγραφαν, δοκίμαζαν να τα επιλύσουν, ώστε να επιβεβαιώσουν ότι είναι σωστά. Αυτό παρατηρήθηκε κυρίως στις δομημένες και ημι-δομημένες καταστάσεις. Επίσης, αρκετοί μαθητές και από τις δυο ομάδες επιχειρούσαν να επιλύσουν και τα αρχικά προβλήματα που δίνονταν στις δομημένες καταστάσεις, παρόλο που είχε επισημανθεί ότι δεν χρειάζεται. Μάλιστα, σημείωναν και εξηγούσαν γραπτά τον τρόπο που τα έλυσαν (π.χ. «Θα προσθέσω πρώτα τα 3 20λεπτα, μετά τα 5 50λεπτα και θα τα προσθέσω όλα μαζί =3,10»).

Ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο των προβλημάτων, παρατηρήθηκε μια τάση των μαθητών να δημιουργούν προβλήματα τα οποία συμβάδιζαν με το εκάστοτε θέμα που διδάσκονταν στην τάξη τη χρονική περίοδο κατά την οποία διεξήχθη η έρευνα. Για παράδειγμα, όταν δόθηκε η γραπτή δοκιμασία στους μαθητές της Ε’ τάξης, είχαν μόλις ολοκληρώσει το κεφάλαιο του βιβλίου που αφορούσε τα κλάσματα και την αναγωγή στην κλασματική μονάδα. Επιπλέον, μόλις είχαν διδαχθεί τον μέσο όρο δεδομένων. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα ένα μέρος από τα προβλήματα των μαθητών να σχετίζεται με την αναγωγή στην κλασματική μονάδα, ενώ αρκετά σχετίζονταν με τον μέσο όρο. Το ίδιο παρατηρήθηκε και στους μαθητές της ΣΤ’, οι οποίοι είχαν μόλις διδαχθεί την επίλυση προβλημάτων με ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά και εξασκούνταν σε τέτοια προβλήματα. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα πολλοί να επιλέξουν να δημιουργήσουν τέτοιου είδους προβλήματα στις ελεύθερες καταστάσεις, τα οποία φυσικά προσομοίαζαν σε μεγάλο βαθμό με αυτά του εγχειριδίου και δεν θεωρήθηκαν πρωτότυπα. Όπως ήταν αναμενόμενο, τα περισσότερα προβλήματα σε όλες τις καταστάσεις ήταν όμοια με προβλήματα με τα οποία οι μαθητές είχαν έρθει σε επαφή στη σχολική τους ζωή. Μόνο ένας μικρός αριθμός προβλημάτων ήταν πραγματικά πρωτότυπα και ενδιαφέροντα.

Η συντριπτική πλειοψηφία των προβλημάτων ήταν προβλήματα αριθμητικής, ακολουθούσαν τα προβλήματα στατιστικής, που αφορούσαν κυρίως υπολογισμό μέσου όρου και τέλος υπήρχαν ελάχιστα γεωμετρικά προβλήματα, που αφορούσαν υπολογισμό περιμέτρου και εμβαδού. Αξίζει να αναφερθεί ότι εντοπίστηκαν και 7 προβλήματα (4 από μαθητές χωρίς ΕΕΑ και 3 από μαθητές με ΕΜΔ) που ήταν ανοιχτά, δηλαδή επιδέχονταν πάνω από μια σωστές απαντήσεις και σχεδόν όλα αφορούσαν την ημι-δομημένη κατάσταση όπου τα δεδομένα παρέχονταν με εικόνα. Ως προς το είδος των αριθμών, οι περισσότεροι επέλεξαν φυσικούς αριθμούς, με εξαίρεση ένα μέρος των μαθητών της Ε’ οι οποίοι συμπεριέλαβαν κλάσματα στα προβλήματά τους. Επιπλέον, φυσικούς αριθμούς επέλεξαν σχεδόν όλοι οι μαθητές με ΕΜΔ πλην τριών. Επίσης, δημιουργήθηκαν προβλήματα όλων των πράξεων, ενώ υπήρχαν αρκετά προβλήματα με δυο υπο-ερωτήματα. Αναφορικά με τα πλαίσια που επιλέχθηκαν στα προβλήματα, πολλοί από τους μαθητές επέλεξαν να χρησιμοποιήσουν τα ονόματα των συμμαθητών και των δασκάλων τους στα προβλήματά τους, καθώς και οικεία πλαίσια που σχετίζονταν με τα ενδιαφέροντα τους και τις δικές τους καθημερινές ασχολίες.

Αναφορικά με το έργο που απαιτούσε τη δημιουργία ενός δύσκολου προβλήματος παρατηρήθηκε ότι δεν έλαβαν όλοι οι μαθητές υπόψη την παράμετρο της δυσκολίας. Υπήρχαν 19 μαθητές που δημιούργησαν πολύ απλά και εύκολα προβλήματα στο έργο αυτό, δεδομένης της τάξης τους, τα οποία θεωρήθηκε ότι δεν ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις του έργου. Τα προβλήματά αυτά λύνονταν με μια πράξη, περιλάμβαναν μικρούς αριθμούς και πολύ απλές σχέσεις μεταξύ των δεδομένων. Ορισμένοι, στην προσπάθειά τους να κάνουν τα προβλήματα δυσκολότερα, πρόσθεταν όλο και περισσότερα δεδομένα και προτάσεις, με αποτέλεσμα στο τέλος να καταλήγουν σε μη λογικά προβλήματα με αντιφατικά δεδομένα. Σε γενικές γραμμές, όσοι δημιούργησαν δύσκολα προβλήματα, εστίαζαν στην πολυπλοκότητά τους, αφού λύνονταν με πάνω από 2 πράξεις, συμπεριλάμβαναν κλάσματα και είχαν περισσότερες σημασιολογικές σχέσεις μεταξύ των δεδομένων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

4.1. Συζήτηση

Η παρούσα έρευνα αποσκοπούσε στη μελέτη της ικανότητας Κατασκευής Μαθηματικού Προβλήματος μαθητών Ε' και ΣΤ' τάξης με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες συγκριτικά με συνομηλίκους τους χωρίς ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες σε τρία διαφορετικά είδη καταστάσεων (δομημένες, ημι-δομημένες και ελεύθερες). Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τους συνολικά 70 συμμετέχοντες έδειξαν ότι όλοι οι μαθητές, ανεξαρτήτως της ύπαρξης ΕΜΔ, μπόρεσαν να κατασκευάσουν λογικά και επιλύσιμα προβλήματα, όμως οι μαθητές με ΕΜΔ είχαν χαμηλότερη επίδοση σε σχέση με τους μαθητές χωρίς ΕΕΑ. Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα που διατυπώθηκε διερευνούσε τα συνηθέστερα λάθη των μαθητών κάθε ομάδας στις τρεις καταστάσεις ΚΜΠ. Το δεύτερο και τρίτο αφορούσαν την ύπαρξη διαφοράς στις επιδόσεις των μαθητών στις τρεις καταστάσεις ΚΜΠ, για κάθε ομάδα ξεχωριστά. Το τελευταίο ερώτημα αφορούσε και πάλι την ύπαρξη διαφοράς στις επιδόσεις στις τρεις καταστάσεις, συγκριτικά για τις δυο ομάδες.

Αναλυτικότερα, ως προς το **πρώτο ερευνητικό ερώτημα** αναφορικά με τα συνηθέστερα λάθη, το λάθος που εμφανίστηκε στα περισσότερα προβλήματα συνολικά, έστω μια φορά από τους μισούς σχεδόν συμμετέχοντες, ήταν η δημιουργία προβλημάτων που ήταν μαθηματικά σωστά, όμως δεν ανταποκρίνονταν στις απαιτήσεις του εκάστοτε έργου. Αυτό υποδηλώνει ότι αρκετοί μαθητές και από τις δυο ομάδες δεν κατανόησαν ή δεν έδωσαν σημασία στο ζητούμενο κάθε έργου και δεν έλεγξαν αν το πρόβλημα που κατασκεύασαν ανταποκρίνεται σε αυτό, ειδικά στις δομημένες και ελεύθερες καταστάσεις. Παρομοίως, οι Kovács κ.ά. (2023) απέδωσαν πολλές λανθασμένες απαντήσεις μαθητών υψηλών και χαμηλότερων επιδόσεων στην παρερμηνεία ή μη κατανόηση του ζητουμένου των έργων.

(α) Για τους μαθητές με ΕΜΔ το λάθος που περιγράφηκε ήταν το συχνότερο σε όλες τις καταστάσεις ΚΜΠ. Αυτό ενδεχομένως να συνδέεται με τις δυσκολίες προσληπτικού λόγου και ειδικότερα της μαθηματικής γλώσσας που χαρακτηρίζουν αρκετούς από αυτούς (Αγαλιώτης, 2023· Yang & Xin, 2022) και πιθανώς να τους εμπόδισαν να κατανοήσουν πλήρως τα ζητούμενα. Η δημιουργία προβλημάτων που δεν αντιστοιχούσαν στις απαιτήσεις των έργων παρατηρήθηκε εντονότερα στις ελεύθερες καταστάσεις, στη δημιουργία ενός δύσκολου προβλήματος, αλλά και στις δομημένες καταστάσεις, στη δημιουργία του αντίστροφου προβλήματος.

Στις δομημένες καταστάσεις συχνό λάθος ήταν και η δημιουργία προβλημάτων-δηλώσεων που, όμως, δεν συνοδεύονταν από ερώτηση στο τέλος, ενώ ήταν το δεύτερο συχνότερο και στις ημι-δομημένες. Το λάθος αυτό έχει παρατηρηθεί και από τους Kaba και Sengül (2016) σε μαθητές χωρίς ΕΕΑ και από τους Silver και Cai (1996) σε μαθητές χαμηλών επιδόσεων άγνωστης αιτιολογίας. Η αδυναμία δημιουργίας ερώτησης που να ταιριάζει στην κατάσταση αποτελεί ένδειξη ότι οι μαθητές δεν είναι ακόμα σε θέση να αναγνωρίσουν τη δομή ενός μαθηματικού προβλήματος (Patsiala & Papadopoulos, 2022). Στις δομημένες, αλλά και τις ελεύθερες καταστάσεις, σύνηθες λάθος για τους μαθητές με ΕΜΔ ήταν και η απουσία απάντησης, καθώς όλες οι κενές απαντήσεις δόθηκαν από αυτήν την ομάδα. Το γεγονός ότι ένα μέρος των μαθητών δεν ενεπλάκη στη διαδικασία και άφησε αναπάντητα προβλήματα παρατηρήθηκε και από τους Cai κ.ά. (2013), οι οποίοι, βέβαια, μελέτησαν μαθητές χωρίς ΕΕΑ και το απέδωσαν στο γεγονός ότι δεν ήταν έτοιμοι να ασχοληθούν με έργα ΚΜΠ, ίσως λόγω ελλείψεων σε προϋποτιθέμενες γνώσεις. Υπάρχει περίπτωση η δημιουργία απλών δηλώσεων, αλλά και ο μεγάλος αριθμός κενών απαντήσεων, να υποδηλώνουν ότι οι συμμετέχοντες με ΕΜΔ δεν κατανοούν πλήρως τι ακριβώς είναι και από τι αποτελείται ένα μαθηματικό πρόβλημα, το οποίο, όμως, είναι βασική γνώση για την ΚΜΠ (Brown & Walter, 2013). Ενδεχομένως, λοιπόν, τα λάθη τους να μπορούν να αποδοθούν στο ότι τείνουν να δυσκολεύονται στη συνολική αντίληψη μιας προβληματικής κατάστασης και στην κατανόηση των σχέσεων που περιγράφονται, αλλά και στην οργάνωση και σύνθεση πληροφοριών (Αγαλιώτης, 2011, 2023· Yang & Xin, 2022), ικανότητες οι οποίες προϋποτίθενται για τη δημιουργία ενός προβλήματος. Οι Yang και Xin (2022) επισημαίνουν μια γενικότερη δυσκολία κατανόησης της μαθηματικής λογικής, η οποία εμποδίζει τους μαθητές με ΕΜΔ να διαχειριστούν έργα ΚΜΠ αποτελεσματικά. Επιπρόσθετα, στην περίπτωση των μαθητών αυτών, ίσως το γεγονός ότι ήρθαν σε επαφή με μια νέα δραστηριότητα με την οποία δεν ήταν εξοικειωμένοι να λειτούργησε αποτρεπτικά και να τους δημιούργησε άγχος (Soares et al., 2018). Άλλωστε, και στις έρευνες των Li κ.ά. (2020) και Yamamoto κ.ά. (2015) αναφέρεται ότι γενικότερα μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες άγνωστης αιτιολογίας, δεν είχαν αυτοπεποίθηση στην ΚΜΠ και δεν μπορούσαν να δημιουργήσουν προβλήματα μόνοι, καθώς δεν ήξεραν από που να ξεκινήσουν.

(β) Για τους μαθητές χωρίς ΕΕΑ στις δομημένες καταστάσεις το συχνότερο λάθος ήταν η δημιουργία προβλημάτων που δεν ανταποκρίνονταν στις προδιαγραφές των έργων, φανερώνοντας ελλείμματα σε αυτή την πολύ βασική δεξιότητα που προϋποτίθεται της ΚΜΠ (Cai, 2022). Το εύρημα αυτό έρχεται σε αντίθεση με τους Πατσιαλά και Παπαδόπουλο (2022), οι οποίοι ανέφεραν ότι, στην έρευνά τους, οι μαθητές έδειξαν να κατανοούν το ζητούμενο των έργων σε δομημένη και ημι-δομημένη κατάσταση. Στις ημι-δομημένες καταστάσεις στην παρούσα έρευνα συχνό λάθος ήταν και η δημιουργία προβλημάτων με ερωτήσεις που απαιτούσαν απλώς τη σύγκριση δεδομένων που παρέχονταν έτοιμα, κάτι το οποίο δεν έχει καταγραφεί σε προηγούμενες έρευνες. Στην προκειμένη περίπτωση όμως, αυτά τα προβλήματα θεωρήθηκαν ασκήσεις και κατ' επέκταση λανθασμένα, διότι η πορεία προς τη λύση είναι προφανής και άμεση, χωρίς να απαιτείται ο σχεδιασμός ενός σχεδίου επίλυσης και η εφαρμογή στρατηγικών (Schoenfeld, 1985). Επισημαίνεται ότι τυχόν διαφορές μεταξύ ερευνών μπορεί να οφείλονται σε διαφορετική κωδικοποίηση των λαθών και στα διαφορετικά κριτήρια που τίθενται κατά την αξιολόγηση των προβλημάτων.

Στις ελεύθερες καταστάσεις συχνότερο λάθος ήταν η δημιουργία μη λογικών και μη επιλύσιμων προβλημάτων. Μετά την ολοκλήρωση ενός προβλήματος οι μαθητές οφείλουν να αξιολογήσουν τη λογικότητά του (Lavy, 2015· Ngah et al., 2016). Παρατηρήθηκε, όμως, ότι οι περισσότεροι δεν μπήκαν στη διαδικασία αυτή, υποδηλώνοντας ότι δεν έχουν μάθει ή δεν είναι σε θέση να σταθούν κριτικά απέναντι στα προβλήματα που καλούνται να δημιουργήσουν ή και να επιλύσουν και να τα αξιολογήσουν. Αυτού του είδους τα λάθη έχουν αναφερθεί και από άλλους ερευνητές, οι οποίοι ανέδειξαν την αδυναμία δημιουργίας επιλύσιμων προβλημάτων με επαρκείς πληροφορίες και λογικών προβλημάτων που να περιγράφουν εφικτές καταστάσεις (Kaba & Sengül, 2016· Özgen et al., 2019· Van Harpen & Sriraman, 2013). Μια πιθανή ερμηνεία, όπως εξηγούν οι Norman κ.ά. (2011), είναι η αδυναμία να συσχετίσουν μια μαθηματική κατάσταση με την πραγματικότητα, με αποτέλεσμα προβλήματα που δεν περιγράφουν ρεαλιστικές και λογικές καταστάσεις. Επίσης, μπορεί να συνδεθεί με την έλλειψη εξοικείωσης των μαθητών με την ΚΜΠ (Norman et al., 2011). Όπως έχει επισημανθεί από πολλούς ερευνητές, οι μαθητές σπανίως έχουν την ευκαιρία να ασχοληθούν με την ΚΜΠ κατά τη διδασκαλία και η έμφαση δίνεται σχεδόν αποκλειστικά στην ΕΜΠ (Ellerton 2013· Lavy & Bershadsky, 2003· Silver, 1994). Ως εκ τούτου, όταν έρχονται αντιμέτωποι με έργα ΚΜΠ, δεν γνωρίζουν πως να τα προσεγγίσουν και να τα χειριστούν, καθώς δεν έχουν εξασκηθεί σε αυτά και δεν έχουν διδαχθεί συγκεκριμένες στρατηγικές (Van Harpen & Presmeg, 2015).

Όσον αφορά το **δεύτερο ερευνητικό ερώτημα**, που αφορούσε την επίδοση των μαθητών χωρίς ΕΕΑ, αυτή ως επί το πλείστον κρίθηκε υψηλή, καθώς ανταποκρίθηκαν επιτυχώς σε όλα τα έργα της δοκιμασίας και δημιούργησαν λογικά και επιλύσιμα προβλήματα σε ποσοστό 80,6%. Το εύρημα αυτό συμφωνεί με τα ευρήματα σχετικών ερευνών σε μαθητές χωρίς ΕΕΑ, οι οποίες αναφέρουν ότι είναι σε θέση να δημιουργήσουν κατάλληλα, λογικά και πολύπλοκα μαθηματικά προβλήματα (π.χ. Πατσιαλά & Παπαδόπουλος, 2022· Van den Heuvel-Panhuizen et al., 1995· Zhang, Cai, et al., 2022). Σύμφωνα με τους Πατσιαλά και Παπαδόπουλο (2022), η πολυπλοκότητα των προβλημάτων επηρεάζεται από το είδος της κατάστασης. Ως προς τη μαθηματική πολυπλοκότητα, αναφέρουν ότι τείνει να είναι αυξημένη στις δομημένες καταστάσεις, όμως στην παρούσα έρευνα παρατηρήθηκε το αντίθετο. Ήταν χαμηλή στις δομημένες, αλλά αυξήθηκε ελαφρώς στις ημι-δομημένες και κατά πολύ στις ελεύθερες. Το ίδιο ισχύει και για τη γλωσσική πολυπλοκότητα, αφού τα πιο περίπλοκα γλωσσικά προβλήματα κατασκευάστηκαν στις ελεύθερες καταστάσεις. Φυσικά αυτό οφείλεται στην ανοιχτή δομή των καταστάσεων αυτών και τον μεγάλο βαθμό ελευθερίας που προσφέρουν, καθώς οι μαθητές μπορούσαν να εργαστούν χωρίς περιορισμούς και να χρησιμοποιήσουν τη φαντασία τους (Özgen et al., 2019· Πατσιαλά & Παπαδόπουλος, 2022· Stoyanova, 1997).

Από την άλλη, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι ένα μέρος τους δημιούργησε προβλήματα που θεωρήθηκαν λανθασμένα, αφού 25 από τους 35 είχαν έστω 1 (ή και παραπάνω) λάθη στη γραπτή δοκιμασία. Ως προς την κατάσταση, τα λιγότερα λάθη εντοπίστηκαν στις ημι-δομημένες καταστάσεις, αυξήθηκαν ελαφρώς στις δομημένες και κατά πολύ στις ελεύθερες, αν και η διαφορά μεταξύ των τριών καταστάσεων δεν βρέθηκε να είναι στατιστικά σημαντική. Αναλυτικότερα, ως προς το είδος των έργων μέσα σε κάθε κατάσταση, στις δομημένες καταστάσεις φάνηκε να δυσκολεύονται περισσότερο στο έργο που απαιτούσε τη δημιουργία ενός αντίστροφου προβλήματος, δηλώνοντας, μάλιστα, ότι δεν γνωρίζουν τι είναι τα δεδομένα και τα ζητούμενα και πως να τα αντιστρέψουν. Αυτό υποδηλώνει πιθανές δυσκολίες στην αντίληψη της δομής του αρχικού προβλήματος, οι οποίες έπειτα τους εμπόδισαν να προχωρήσουν σε τροποποιήσεις, καθώς, σύμφωνα με τους Patsiala και Papadopoulos (2022), η αναγνώριση της δομής του προβλήματος είναι βασική για την επιτυχή ΚΜΠ. Στις ημι-δομημένες καταστάσεις βρήκαν δυσκολότερο το έργο που τα δεδομένα παρέχονταν σε μορφή πίνακα, καθώς προσπαθούσαν να ενσωματώσουν όλα τα παρεχόμενα δεδομένα στα προβλήματά τους. Το εύρημα αυτό, μεταξύ άλλων, αναφέρουν και οι Μουσουλίδης κ.ά. (2003). Τέλος, στις ελεύθερες έδειξαν να δυσκολεύονται στο έργο που απαιτούσε τη δημιουργία ενός δύσκολου προβλήματος. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τους Van Harpen και Sriraman (2013), που ανέφεραν ότι οι μαθητές αδυνατούσαν να δημιουργήσουν απαιτητικά προβλήματα. Ταυτόχρονα, επιβεβαιώνεται και από την ποιοτική ανάλυση των προβλημάτων, όπου οι περισσότεροι δήλωσαν ότι δεν μπορούσαν να σκεφτούν δύσκολα προβλήματα και τελικά δεν έλαβαν υπόψη την παράμετρο της δυσκολίας. Εν αντιθέσει, άλλοι ερευνητές έχουν υποστηρίξει ότι οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν πιο δύσκολα προβλήματα με διάφορους τρόπους, όταν τους ζητηθεί (Chen et al., 2007· Kar et al., 2021· Winograd, 1992, 1993). Τα φαινομενικά αντιφατικά αποτελέσματα μπορούν να αποδοθούν στο γεγονός ότι ήρθαν αντιμέτωποι με μια νέα δραστηριότητα με την οποία δεν ήταν εξοικειωμένοι και προκειμένου να διατηρήσουν τον έλεγχο προτίμησαν να δημιουργήσουν απλούστερα προβλήματα (Singer & Voica, 2015).

Ως προς το **τρίτο ερευνητικό ερώτημα** και την επίδοση των μαθητών με ΕΜΔ, θεωρήθηκε σωστό το 60% των απαντήσεών τους. Σε γενικές γραμμές, ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό των απαντήσεων αξιολογήθηκε ως λανθασμένο και δεν ανταποκρινόταν στα κριτήρια που είχαν τεθεί, εύρημα που αναφέρεται και από τις Yang και Xin (2022). Όπως και οι μαθητές χωρίς ΕΕΑ, έτσι και αυτοί με ΕΜΔ δείχνουν στην πλειονότητά τους να διευκολύνονται όταν υπάρχουν κατευθυντήριες γραμμές στα έργα ΚΜΠ και να δυσκολεύονται όταν καλούνται να δημιουργήσουν προβλήματα ελεύθερα. Έτσι, τα λιγότερα λάθη εντοπίστηκαν στις ημι-δομημένες καταστάσεις, αυξήθηκαν αρκετά στις δομημένες και ακόμα περισσότερο στις ελεύθερες. Τα ευρήματα αυτά συμφωνούν, εν μέρει, με τους Θεοδούλου και Φιλίππου (2003), οι οποίοι, αν και δεν μελέτησαν μαθητές με ΕΜΔ, παρατήρησαν ότι οι μαθητές χαμηλότερων ικανοτήτων έχουν καλύτερη επίδοση στις ημι-δομημένες καταστάσεις, ειδικά όταν οι πληροφορίες παρουσιάζονται μέσα σε εικόνα. Πράγματι, και οι μαθητές με ΕΜΔ στην παρούσα έρευνα βρήκαν ευκολότερο το έργο που περιλάμβανε εικόνα. Αντιθέτως, ο μεγάλος αριθμός λαθών στις δομημένες καταστάσεις, έρχεται σε αντίθεση με τη Stoyanova (1997), η οποία, αναφερόμενη και πάλι σε μαθητές χαμηλών επιδόσεων και όχι ΕΜΔ, σχολίασε ότι συνήθως διευκολύνονται από τις δομημένες καταστάσεις. Η διαφορά μεταξύ των τριών καταστάσεων ήταν στατιστικά σημαντική. Ειδικότερα, η στατιστικά σημαντική διαφορά εντοπίστηκε μεταξύ των δομημένων και των ημι-δομημένων καταστάσεων και μεταξύ των ελεύθερων και ημι-δομημένων καταστάσεων. Μολαταύτα, λόγω της έλλειψης ερευνών στον πληθυσμό των μαθητών με ΕΜΔ, τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας δεν μπορούν να συγκριθούν με προηγούμενες έρευνες, ώστε να σχηματιστεί μια ολοκληρωμένη εικόνα για την ικανότητα τους στην ΚΜΠ.

Ως προς το είδος των έργων αναλυτικότερα ανά κατάσταση, οι μαθητές με ΕΜΔ στις δομημένες καταστάσεις φάνηκε να δυσκολεύονται περισσότερο στο έργο που απαιτούσε τη δημιουργία ενός αντίστροφου προβλήματος. Αυτό φυσικά σχετίζεται με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στον χειρισμό των δεδομένων και των ζητουμένων ενός προβλήματος και στην κατανόηση του τρόπου που σχετίζονται (Αγαλιώτης, 2011). Στις ημι-δομημένες βρήκαν δυσκολότερο το έργο με τη δημιουργία προβλήματος από μια μαθηματική έκφραση. Ορισμένοι από τους συμμετέχοντες δυσκολεύτηκαν να δημιουργήσουν μια ιστορία που να αντιστοιχεί με μια απλή προσθετική κατάσταση και να συσχετίσουν τη μαθηματική έκφραση με αυτήν, πιθανώς λόγω δυσκολιών με τον προσδιορισμό του γνωστικού σχήματος των πράξεων (Αγαλιώτης, 2011). Οι δυσκολίες αυτές μπορεί να φανερώνουν ότι οι μαθητές αυτοί, παρά το γεγονός ότι φοιτούσαν στην Ε’ και ΣΤ’ τάξη, δεν είχαν κατακτήσει ακόμα πλήρως την έννοια της πρόσθεσης, ώστε να μπορούν να τη χειριστούν με άνεση. Η ποιοτική ανάλυση επιβεβαίωσε ότι γενικότερα αδυνατούσαν να ενσωματώσουν τις μαθηματικές έννοιες που επιθυμούσαν στα προβλήματά τους και να τις ταιριάξουν με μια κατάλληλη προβληματική κατάσταση. Αυτό ίσως να συνδέεται με βαθύτερα ελλείμματα στην κατανόηση των εμπλεκόμενων εννοιών και του τρόπου που αυτές μπορεί να εμφανιστούν σε διάφορες καταστάσεις (Cai & Hwang, 2023· Ellerton, 2013· Kwek & Leng, 2008· Mestre, 2002). Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνεται από πολλές έρευνες που αναφέρουν χαμηλότερες επιδόσεις σε έργα με βάση μια μαθηματική πράξη, χωρίς πλαίσιο (Arikan & Ünal, 2014· English, 1998· Θεοδούλου & Φιλίππου, 2003· Nicolaou & Philippou, 2007· Zhang, Cai, et al., 2022), ενώ αντίθετα, οι Μουσουλίδης κ.ά. (2003) παρατήρησαν υψηλότερες επιδόσεις. Ωστόσο, τονίζεται ότι οι παραπάνω έρευνες δεν μελέτησαν συγκεκριμένα μαθητές με

ΕΜΔ. Τέλος, στις ελεύθερες καταστάσεις, έδειξαν να δυσκολεύονται περισσότερο στη δημιουργία ενός δύσκολου προβλήματος, όπως ακριβώς και οι μαθητές χωρίς ΕΕΑ, καταφεύγοντας σε πιο απλά προβλήματα ή αφήνοντας κενές απαντήσεις.

Ως προς την πολυπλοκότητα, ελάχιστα προβλήματα των μαθητών με ΕΜΔ θεωρήθηκαν γλωσσικά πολύπλοκα, ενώ η μαθηματική πολυπλοκότητα αυξήθηκε από τις δομημένες στις ημι-δομημένες καταστάσεις, όμως στις ελεύθερες ήταν μειωμένη. Σύμφωνα με τη Stoyanova (1997) οι μαθητές με χαμηλές επιδόσεις γενικότερα καταλήγουν να δημιουργούν απλούστερα προβλήματα σε καταστάσεις με ανοιχτή δομή και δεν τις διαχειρίζονται εύκολα. Αυτό ίσως συνδέεται με την περιορισμένη γλωσσική-εκφραστική ικανότητα πολλών μαθητών με ΕΜΔ (Αγαλιώτης, 2023), καθώς η γραπτή έκφραση του προβλήματος και η αποτύπωση της σκέψης των μαθητών με μαθηματικό τρόπο και σωστή μαθηματική γλώσσα θεωρείται βασική δεξιότητα για την ΚΜΠ (Özgen et al., 2019· Zhang, Cai, et al., 2022).

Αναφορικά με το **τέταρτο ερευνητικό ερώτημα**, από την ανάλυση των δεδομένων φάνηκε ότι όλοι οι συμμετέχοντες ήταν σε θέση να δημιουργήσουν λογικά και επιλύσιμα προβλήματα, ανεξάρτητα από την ύπαρξη ΕΜΔ, καθώς το 70,3% των συνολικών απαντήσεων θεωρήθηκε σωστό. Αντίστοιχα ευρήματα αναφέρουν και οι Silber και Cai (2021), οι οποίοι κατέληξαν ότι τόσο αυτοί με υψηλή όσο και αυτοί με χαμηλή επίδοση σημείωσαν επιτυχία στην ΚΜΠ. Οι επιδόσεις των δυο ομάδων κινήθηκαν με παρόμοιο τρόπο στις τρεις καταστάσεις ΚΜΠ. Οι ημι-δομημένες καταστάσεις φάνηκε να είναι οι πιο εύκολες, έχοντας τον μεγαλύτερο αριθμό σωστών απαντήσεων. Αυτό αντανακλάται και στις απαντήσεις στις συνεντεύξεις, καθώς οι μαθητές και των δυο ομάδων υπέδειξαν ως ευκολότερα τα έργα στις καταστάσεις αυτές, ενώ το ίδιο έχει παρατηρηθεί και από τους Özgen κ.ά. (2019). Μια πιθανή εξήγηση είναι ότι υπήρχαν ορισμένες κατευθυντήριες γραμμές που τους καθοδηγούσαν και παρείχαν την υποστήριξη που χρειάζονταν, χωρίς να είναι αυστηρές, όπως στις δομημένες καταστάσεις. Οι περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις και για τις δυο ομάδες δόθηκαν στις ελεύθερες καταστάσεις και ακολουθούσαν οι δομημένες. Αυτό επιβεβαιώνεται και πάλι από τις συνεντεύξεις, όπου οι μαθητές υπέδειξαν ως δυσκολότερα κυρίως τα έργα από ελεύθερες καταστάσεις, όπου απαιτούνταν εξ ολοκλήρου δικές τους ιδέες. Ενώ στην έρευνα των Chua και Toh (2022) βρέθηκε ότι στις ελεύθερες καταστάσεις οι μαθητές αισθάνονται περισσότερη αυτοπεποίθηση, στην παρούσα έρευνα αρκετοί δυσκολεύτηκαν ιδιαίτερα και υποστήριζαν πως δεν μπορούσαν να σκεφτούν ιδέες. Τα χαμηλά ποσοστά επιτυχίας στις καταστάσεις αυτές μπορούν να αποδοθούν στην ανοιχτή δομή και τις αυξημένες γνωστικές απαιτήσεις τους, ειδικά για όσους δεν έχουν προηγούμενη εμπειρία στην ΚΜΠ (Ngah et al., 2016· Wang et al., 2022), συμπεριλαμβανομένων και των συμμετεχόντων της έρευνας. Ωστόσο, τα ευρήματα αυτά έρχονται σε αντίθεση με τους Μουσουλίδη κ.ά. (2003) και Silber και Cai (2017), οι οποίοι υποστήριξαν πως οι δομημένες καταστάσεις συνδέονται με τα μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας.

Ομοιότητες μεταξύ των ομάδων παρατηρήθηκαν και ως προς το περιεχόμενο των προβλημάτων. Στα προβλήματα και των δυο ομάδων, σε όλες τις καταστάσεις, αξιοποιήθηκαν οικεία πλαίσια που σχετίζονταν με τα ενδιαφέροντα και τις εμπειρίες των μαθητών αυτής της ηλικίας, όπως άλλωστε έχει επισημανθεί και βιβλιογραφικά (Bevan & Capraro, 2021· Winograd, 1992). Ταυτόχρονα, παρατηρήθηκε ότι χρησιμοποιούσαν κυρίως φυσικούς αριθμούς, ενσωματώνοντάς τους σε μαθηματικές περιοχές στις οποίες είχαν καλή επίδοση. Όπως προαναφέρθηκε, οι μαθητές με αυτόν τον τρόπο αισθάνονται μεγαλύτερη σιγουριά και προσπαθούν να διατηρήσουν τον έλεγχο κατά τη διαδικασία (Singer & Voica, 2015). Επιπλέον, ένα μεγάλο μέρος των προβλημάτων σχετίζονταν με έννοιες και μαθηματικά αντικείμενα που οι μαθητές διδάσκονταν στην τάξη το διάστημα διεξαγωγής της έρευνας, κάτι που έρχεται σε συμφωνία με ευρήματα παλαιότερων ερευνών (Silverman et al., 1992). Ως αποτέλεσμα, πολλά από τα προβλήματα σε όλες τις καταστάσεις ήταν παρόμοια με προβλήματα των σχολικών εγχειριδίων. Οι συμμετέχοντες φάνηκε να επιλέγουν να αναπαράγουν προβλήματα με τα οποία είχαν ήδη έρθει σε επαφή στη σχολική τους ζωή γενικότερα, πιθανώς λόγω της ελάχιστης ή καθόλου εμπειρίας τους στην ΚΜΠ. Αυτή η δυσκολία των μαθητών να απομακρυνθούν από ήδη γνωστά προβλήματα έχει καταγραφεί πολλάκις (π.χ. Chen et al., 2007, 2013· Özgen et al., 2019· Papadopoulos & Patsiala, 2019· Singer, Pelczer, et al., 2011· Singer & Voica, 2015).

Σε κάθε περίπτωση, η διαφορά στην επίδοση μεταξύ των μαθητών χωρίς ΕΕΑ και των μαθητών με ΕΜΔ δεν μπορεί να αγνοηθεί. Όπως αναφέρεται και στη βιβλιογραφία, οι μαθητές με υψηλότερη επίδοση τείνουν να δημιουργούν προβλήματα υψηλότερης ποιότητας και μαθηματικής πολυπλοκότητας (Θεοδούλου & Φιλίππου, 2003· Puspitasari et al., 2019· Silver & Cai, 1996). Έτσι και στην παρούσα έρευνα, τα προβλήματα των μαθητών με ΕΜΔ υστερούσαν ως προς τη μαθηματική, αλλά και τη γλωσσική πολυπλοκότητα σε όλες τις καταστάσεις ΚΜΠ. Γενικότερα οι μαθητές με ΕΜΔ υστερούσαν στην ΚΜΠ σε όλα τα είδη καταστάσεων, συγκριτικά με τους συνομηλίκων τους χωρίς ΕΕΑ, έχοντας περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις. Μάλιστα στις δομημένες και στις ελεύθερες καταστάσεις η διαφορά βρέθηκε να είναι στατιστικά σημαντική. Αναλυτικότερα ως προς τα έργα σε κάθε μια από αυτές, στατιστικά σημαντική διαφορά εντοπίστηκε στα έργα των δομημένων καταστάσεων που απαιτούνταν η δημιουργία μιας εναλλακτικής ερώτησης και η δημιουργία ενός αντίστροφου προβλήματος και στα έργα των ελεύθερων καταστάσεων όπου απαιτούνταν η δημιουργία ενός δύσκολού προβλήματος και η δημιουργία ενός ενδιαφέροντος προβλήματος. Είναι σημαντικό να σχολιαστεί ότι τα ευρήματα αυτά δεν μπορούν να συγκριθούν με αντίστοιχα ευρήματα προηγούμενων ερευνών, λόγω έλλειψης αντίστοιχων ερευνών που να συγκρίνουν μαθητές με ΕΜΔ με μαθητές χωρίς ΕΕΑ ως προς την ικανότητα ΚΜΠ. Συμφωνούν, όμως, με τα αποτελέσματα ερευνών που έχουν αναδείξει τη διαφορά στην ΚΜΠ μαθητών υψηλότερης και χαμηλότερης επίδοσης σε όλες τις καταστάσεις ΚΜΠ (π.χ. Ellerton, 1986· English, 1998· Kovács et al., 2023· Silver & Cai, 1996).

Η διαφορά που παρατηρήθηκε μεταξύ των ομάδων μπορεί να αποδοθεί σε διάφορους παράγοντες. Αρχικά, είναι γνωστό ότι οι μαθητές με ΕΜΔ βρίσκονται στα Μαθηματικά από δυο έως τέσσερα έτη πίσω από τους συμμαθητές τους χωρίς ΕΕΑ (Αγαλιώτης, 2023· Cawley & Miller, 1989). Επιπλέον, όπως προαναφέρθηκε, αντιμετωπίζουν ελλείψεις και αδυναμίες σε αρκετές από τις ικανότητες που προϋποτίθενται για την κατασκευή κατάλληλων μαθηματικών προβλημάτων, οι οποίες ίσως εξηγούν το πλήθος των λαθών των μαθητών με ΕΜΔ. Παρ' όλο που φοιτούσαν στις δυο τελευταίες τάξεις του δημοτικού, ενδεχομένως να υπήρχαν ελλείμματα σε βασικές μαθηματικές γνώσεις προηγούμενων τάξεων ή σε μεταγνωστικές δεξιότητες, που να τους εμπόδισαν να δημιουργήσουν περισσότερα ορθά και πιο πολύπλοκα προβλήματα. Για παράδειγμα, οι Kovács κ.ά. (2023) αποδίδουν τη διαφορά στην ΚΜΠ μεταξύ μαθητών με χαμηλή και υψηλή επίδοση στην πιο συνειδητή χρήση στρατηγικών και ευρετικών που χαρακτηρίζει τους μαθητές υψηλότερων επιδόσεων. Από την άλλη, υπάρχουν ενδείξεις ότι οι μαθητές με ΕΜΔ ανταποκρίνονται ικανοποιητικά σε ένα τόσο απαιτητικό έργο, όπως η ΚΜΠ και είναι σε θέση να δημιουργήσουν τα δικά τους μαθηματικά προβλήματα. Πάνω από τα μισά προβλήματα που κατασκεύασαν ήταν λογικά και επιλύσιμα και αρκετά από αυτά περιείχαν στοιχεία μαθηματικής πολυπλοκότητας.

4.2. Συμπεράσματα

Εν κατακλείδι, το συνηθέστερο λάθος που παρατηρήθηκε και στις δυο ομάδες ήταν η δημιουργία προβλημάτων που ήταν μαθηματικά σωστά, όμως δεν ανταποκρίνονταν στις απαιτήσεις των έργων. Γενικά, ένα μεγάλο μέρος των απαντήσεων θεωρήθηκε σωστό, καθώς τόσο μαθητές χωρίς ΕΕΑ όσο και μαθητές με ΕΜΔ ανταποκρίθηκαν στην ΚΜΠ, την οποία σε μεγάλο βαθμό βρήκαν ενδιαφέρουσα και ευχάριστη ως δραστηριότητα. Φάνηκε ότι η επίδοση των δυο ομάδων κινήθηκε με παρόμοιο τρόπο, αφού οι μαθητές, ανεξαρτήτως ομάδας, είχαν μεγαλύτερο αριθμό σωστών απαντήσεων στις ημι-δομημένες καταστάσεις και μεγαλύτερο αριθμό λαθών στις ελεύθερες. Επίσης, φάνηκε πως η επίδοση επηρεάζεται όχι μόνο από το είδος των καταστάσεων, αλλά και από το είδος των έργων μέσα σε κάθε κατάσταση. Ειδικότερα, μέσα από τα αποτελέσματα αναδείχθηκε η ικανότητα ΚΜΠ των μαθητών με ΕΜΔ, οι οποίοι ήταν σε θέση να διαχειριστούν ικανοποιητικά έργα ΚΜΠ, δημιουργώντας λογικά και επιλύσιμα μαθηματικά προβλήματα σε όλες τις καταστάσεις ΚΜΠ. Παρ' όλα αυτά, η επίδοσή τους διέφερε στατιστικά σημαντικά στις δομημένες και ελεύθερες καταστάσεις συγκριτικά με τους συμμαθητές τους χωρίς ΕΕΑ, οι οποίοι υπερείχαν σε όλα σχεδόν τα έργα.

4.3. Περιορισμοί

Στην παρούσα έρευνα εντοπίζονται ορισμένοι περιορισμοί, οι οποίοι είναι απαραίτητο να αναφερθούν, καθώς ενδέχεται να επηρεάζουν τα αποτελέσματά της. Αρχικά, οι συμμετέχοντες δεν προήλθαν από τυχαία δειγματοληψία, αλλά από σχολεία στα οποία έγινε δεκτή η ερευνήτρια. Επίσης, ο αριθμός των μαθητών σε κάθε ομάδα δεν επέτρεψε να γίνουν αναλύσεις ανά τάξη και ανά φύλο. Επιπλέον, ίσως προκύπτουν περιορισμοί και από το εργαλείο της έρευνας, το οποίο ήταν αυτοσχέδιο. Επιπρόσθετα, ενδέχεται η επίδοση να επηρεάστηκε και από το γεγονός ότι σε όσους μαθητές δυσκολεύονταν δόθηκε η επιλογή να διαβάζονται τα έργα από την ερευνήτρια. Ενδεχομένως να υπήρχαν κι άλλοι μαθητές που είχαν ανάγκη από αυτή την προσαρμογή, όμως δεν το ζήτησαν. Τέλος, η διεξαγωγή της συνέντευξης ήταν δυνατή μόνο σε ένα πολύ μικρό μέρος των συμμετεχόντων. Η αξιοποίηση ποιοτικών μεθόδων με περισσότερους μαθητές θα επέτρεπε τη βαθύτερη διερεύνηση της ικανότητας ΚΜΠ. Λόγω των παραπάνω περιορισμών, τα αποτελέσματα της έρευνας σε καμία περίπτωση δεν μπορούν να γενικευτούν.

4.4. Εκπαιδευτικές προεκτάσεις και πρακτικές εφαρμογές

Παρά τους παραπάνω περιορισμούς, η παρούσα έρευνα απέδωσε ορισμένα ενδιαφέροντα ευρήματα. Η ΚΜΠ φάνηκε να είναι προσιτή σε όλους, ανεξαρτήτως επίδοσης, αφού τόσο οι μαθητές χωρίς ΕΕΑ όσο και αυτοί με ΕΜΔ έδειξαν να χειρίζονται ικανοποιητικά έργα ΚΜΠ, ακόμα και χωρίς να έχουν δεχθεί συστηματική και ρητή διδασκαλία σε αυτήν. Στο πλαίσιο αυτό, είναι ουσιαστικής σημασίας να δοθεί έμφαση στην ανάπτυξη της ικανότητας αυτής, παράλληλα με την ικανότητα ΕΜΠ. Προς την κατεύθυνση αυτή, ενθαρρύνεται η περαιτέρω ανάπτυξη της ικανότητας ΚΜΠ, ειδικά των μαθητών με ΕΜΔ, και κατ’ επέκταση η αξιοποίησή έργων ΚΜΠ στη διδακτική πράξη. Μέσα από κατάλληλες τροποποιήσεις και προσαρμογές, κατ’ αντιστοιχία με το επίπεδο των μαθητών, η ΚΜΠ δύναται να διευκολύνει την εμπλοκή όλων στη διδασκαλία των μαθηματικών και να συμβάλλει στην υποστήριξη πολλών μαθητών με ΕΜΔ.

4.5. Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Δεδομένων των ενθαρρυντικών αποτελεσμάτων της έρευνας και λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς που αναφέρθηκαν, κρίνεται σκόπιμο να μελετηθεί περαιτέρω η ικανότητα ΚΜΠ των μαθητών στην Ελλάδα. Η βαθύτερη διερεύνηση της ικανότητας αυτής κρίνεται ιδιαίτερα σημαντική, ειδικότερα σε μαθητές με ΕΕΑ, όπως είναι οι μαθητές με ΕΜΔ, καθώς πρόκειται για έναν πληθυσμό που έχει ερευνηθεί ελάχιστα όσον αφορά την ΚΜΠ, όμως φάνηκε να ανταποκρίνεται σε αυτήν σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό. Επιπλέον, είναι ωφέλιμο να αξιοποιηθούν πιο συστηματικά ποιοτικές μέθοδοι, για βαθύτερη κατανόηση της διαδικασίας ΚΜΠ που ακολουθούν οι μαθητές με ΕΜΔ. Επιπρόσθετα, θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθεί η ικανότητα ΚΜΠ και σε μαθητές άλλων τάξεων και να εξεταστεί η επίδραση της τάξης των μαθητών. Ενδεχομένως, θα ήταν χρήσιμο να συμπεριληφθούν περισσότερα έργα σε κάθε κατάσταση ΚΜΠ, για να αποκτηθεί μια πιο αντιπροσωπευτική εικόνα και να ελεγχθεί πιο αναλυτικά η επίδραση του είδους των έργων. Τέλος, μελλοντικές έρευνες θα μπορούσαν να αναδείξουν και να επιβεβαιώσουν τα οφέλη της στον πληθυσμό αυτό, οργανώνοντας παρεμβάσεις στην ΚΜΠ σε μαθητές με ΕΜΔ και ενσωματώνοντάς την ως εργαλείο στη διδασκαλία των μαθηματικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Αγαλιώτης, Ι. (2011). *Διδασκαλία μαθηματικών στην ειδική αγωγή και εκπαίδευση: Φύση και εκπαιδευτική διαχείριση των μαθηματικών δυσκολιών*. Εκδόσεις Γρηγόρη.

Agaliotis, I. (2016). Historical and contemporary perspectives of learning disabilities in Greece. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal, 14*(1), 63-70.

Αγαλιώτης, Ι. (2023). *Αποτελεσματική διδασκαλία μαθηματικών σε μαθητές με δυσκολίες σχολικής μάθησης και προσαρμογής: Αξιολόγηση και παρέμβαση στη γενική τάξη και σε μονάδες ειδικής αγωγής.* Εκδόσεις Γρηγόρη.

American Psychiatric Association. (2013). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders* (5th ed.). American Psychiatric Publishing. https://doi.org/10.1176/appi.books.9780890425596

Arıkan, E. E., & Ünal, H. (2014). Development of the structured problem posing skills and using metaphoric perceptions. *European Journal of Science and Mathematics Education, 2*(3), 155-166. https://doi.org/10.30935/scimath/9408

Arıkan, E. E., & Ünal, H. (2015). Investigation of problem-solving and problem-posing abilities of seventh-grade students. *Educational Sciences: Theory & Practice, 15*(5), 1403- 1416. https://doi.org/10.12738/estp.2015.5.2678

Ayllón Blanco, M. F., & Gómez Pérez, I. A. (2014). La invención de problemas como tarea escolar. *Escuela Abierta: Revista de Investigación Educativa, 17*, 29-40. https://doi.org/10.29257/EA17.2014.03

Ayllón Blanco, M. F., Gallego Ortega, J. L., & Gómez Pérez, I. A. (2016). La actuación de estudiantes de educación primaria en un proceso de invención de problemas. *Perfiles Educativos, 38*(152), 51-67. http://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2016.152.57588

Ayllón Blanco, M. F., Gómez Pérez, I. A., & Ballesta-Claver, J. (2016). Pensamiento matemático y creatividad a través de la invención y resolución de problemas matemáticos. *Propósitos y Representaciones, 4*(1), 169-218. http://doi.org/10.20511/pyr2016.v4n1.89

Bairac, R. (2005). Some methods for composing problems in mathematics. *Creative Math, 14*, 101-108.

Barlow, A. T., & Cates, J. M. (2006). The impact of problem posing on elementary teachers' beliefs about mathematics and mathematics teaching. *School Science and Mathematics, 106*(2), 64-74.

Baumanns, L., & Rott, B. (2020). Rethinking problem-posing situations: A review. *Investigations in Mathematics Learning, 13*(2), 59-76. https://doi.org/10.1080/19477503.2020.1841501

Baumanns, L., & Rott, B. (2022). The process of problem posing: development of a descriptive phase model of problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 110*, 251–269. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10136-y

Baumanns, L., & Rott, B. (2023). Identifying metacognitive behavior in problem-posing processes. *International Journal of Science and Mathematics Education, 21*, 1381-1406. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10297-z

Bevan, D., & Capraro, M. M. (2021). Posing creative problems: A study of elementary students’ mathematics understanding. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 16*(3). https://doi.org/10.29333/iejme/11109

Bevan, D., Williams, A. M., & Capraro, M. M. (2019). Strike a pose: The impact of problem-posing on elementary students’ mathematical attitudes and achievement. Στο J. Novotná, & H. Moraová (Επιμ.), *Proceedings of the 2019 International Symposium on Elementary Mathematics Teaching* (σ. 80-87). Charles University, Faculty of Education.

Bicer, A., Lee, Y., Perihan, C., Capraro, M. M., & Capraro, R. M. (2020). Considering mathematical creative self-efficacy with problem posing as a measure of mathematical creativity. *Educational Studies in Mathematics, 105*(3), 457-485. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09995-8

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 37–55. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9441-7

Bonotto, C., & Dal Santo, L. (2015). On the relationship between problem posing, problem solving, and creativity in the primary school. Στο F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Επιμ.), *Problem posing: From research to effective practice* (σ. 103-123). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_5

Brown, S. I., & Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing* (3rd ed.). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (2013). Problem posing in mathematics education. Στο S. I. Brown & M. I. Walter (Επιμ.), *Problem posing: Reflections and applications* (σ. 16-27). Psychology Press. https://doi.org/10.4324/9781315785394

Cai, J. (2022). What research says about teaching mathematics through problem posing. *Éducation et didactique, 16*(3), 31-50. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.10642

Cai, J., Chen, T., Li, X., Xu, R., Zhang, S., Hu, Y., Zhang, L., & Song, N. (2020). Exploring the impact of a problem-posing workshop on elementary school mathematics teachers' conceptions on problem posing and lesson design. *International Journal of Educational Research, 102*, 101404. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.02.004

Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *Journal of Mathematical Behavior, 21*(4) 401-421. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00142-6

Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research, 102*, 101391. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001

Cai, J., & Hwang, S. (2023). Making mathematics challenging through problem posing in the classroom. Στο R. Leikin (Επιμ.), *Mathematical challenges for all.*

Research in Mathematics Education. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18868-8_7

Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., & Silber, S. (2015). Problem posing research in mathematics: Some answered and unanswered questions. Στο F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Επιμ.), *Problem posing: From research to effective practice* (σ. 3-34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_1

Cai, J., & Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: Conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics, 105*, 287–301. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10008-x

Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R., & Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: task variables, processes, and products. Στο C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Επιμ.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. 1, σ. 119-145). PME.

Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N., Hwang, S., Nie, B., & Garber, T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 57–69. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9429-3

Calabrese, J. E., Capraro, M. M., & Thompson, C. G. (2022). The relationship between problem posing and problem solving: A systematic review. *International Education Studies, 15*(4), 1-8. https://doi.org/10.5539/ies.v15n4p1

Cankoy, O. (2014). Interlocked problem posing and children's problem posing performance in free structured situations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 12*, 219–238. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9433-9

Cawley, J. F., & Miller, J. H. (1989). Cross-sectional comparisons of the mathematical performance of children with learning disabilities: Are we on the right track toward comprehensive programming? *Journal of Learning Disabilities, 22*(4), 250-254. https://doi.org/10.1177/002221948902200409

Cázares Solórzano, J., Castro Martínez, E., & Rico Romero, L. (1998). La invención de problemas en escolares de primaria: Un estudio evolutivo. *Aula: Revista De Pedagogía De La Universidad De Salamanca, 10*, 19-39.

Chen, L., Van Dooren, W., &Verschaffel, L. (2007). The relationship between posing and solving arithmetic word problems among Chinese elementary school children. *Research in Mathematics Education, 11*(1), 1-31.

Chen, L., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2013). The relationship between students' problem posing and problem solving abilities and beliefs: A small-scale study with Chinese elementary school children. *Frontiers of Education in China, 8*(1), 147–161. https://doi.org/10.1007/BF03396966

Chen, L., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2015). Enhancing the development of Chinese fifth-graders' problem-posing and problem-solving abilities, beliefs, and attitudes: A design experiment. Στο F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Επιμ.), *Problem posing: From research to effective practice* (σ. 309-329). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_15

Chen, T., & Cai, J. (2020). An elementary mathematics teacher learning to teach using problem posing: A case of the distributive property of multiplication over addition. *International Journal of Educational Research, 102*, 101420. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.03.004

Christidamayani, A. P., & Kristanto, Y. D. (2020). The effects of problem posing learning model on students' learning achievement and motivation. Indonesian *Journal on Learning and Advanced Education, 2*(2), 100-108. https://doi.org/10.23917/ijolae.v2i2.9981

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM Mathematics Education*, *37*, 149-158. https://doi.org/10.1007/s11858-005-0004-6

Chua, P.H., & Toh, T. L. (2022). Developing problem posing in a mathematics classroom. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 15*(1), 99-112. https://doi.org/10.24529/hjme.1508

Cifarelli, V. V., & Sevim, V. (2015). Problem posing as reformulation and sense-making within problem solving. Στο F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Επιμ.), *Problem posing: From research to effective practice* (σ. 177-194). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_8

Cifarelli, V. V., & Sheets, C. (2009). Problem posing and problem solving: A dynamic connection. *School Science and Mathematics, 109*(5), 245-246. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2009.tb18089.x

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (6th ed.). Routledge/Taylor & Francis Group.

Contreras, J. (2007). Unraveling the mystery of the origin of mathematical problems: Using a problem-posing framework with prospective mathematics teachers. *The Mathematics Educator, 17*(2), 15-23.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 243–270. https://doi.org/10.1023/A:1024364304664

Crespo, S. (2015). A collection of problem-posing experiences for prospective mathematics teachers that make a difference. Στο F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Επιμ.), *Problem posing: From research to effective practice* (σ. 493-511). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_24

Crespo, S., & Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(5), 395–415. https://doi.org/10.1007/s10857-008-9081-0

Cunningham, R. F. (2004). Problem posing: An opportunity for increasing student responsibility. *Mathematics and Computer Education, 38*(1), 83-89.

de Vaus, D. A. (2002). *Surveys in social research.* (5th ed.). Allen & Unwin.

Devine, A., Hill, F., Carey, E., & Szűcs, D. (2018). Cognitive and emotional math problems largely dissociate: Prevalence of developmental dyscalculia and mathematics anxiety. *Journal of Educational Psychology, 110*(3), 431–444. https://doi.org/10.1037/edu0000222

Dillon, J. T. (1982). Problem finding and solving. *The Journal of Creative Behaviour, 16*(2), 97–111. https://doi.org/10.1002/j.2162-6057.1982.tb00326.x

Einstein, A., & Infeld, L. (1938). *The evolution of physics.* Cambridge University Press.

Ellerton, N. F. (1986). Children's made-up mathematics problems - a new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics, 17*, 261–271. https://doi.org/10.1007/BF00305073

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher- education students in mathematical problem posing: Development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 87–101. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9449-z

Ellerton, N. F. (2015). Problem posing as an integral component of the mathematics curriculum: A study with prospective and practicing middle-school teachers. Στο F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Επιμ.), *Problem posing: From research to effective practice* (σ. 513-543). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_25

Ellerton, N. F., Singer, F.M., & Cai, J. (2015). Problem posing in mathematics: Reflecting on the past, energizing the present, and foreshadowing the future. Στο F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Επιμ.), *Problem posing: From research to effective practice* (σ. 547-556). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_26

English, L. D. (1997α). Promoting a problem-posing classroom. *Teaching Children Mathematics, 4*(3), 172-179.

English, L. D. (1997β). The development of 5th- grade students' problem posing abilities. *Educational Studies in Mathematics, 34*, 183-217. https://doi.org/10.1023/A:1002963618035

English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 83-106. https://doi.org/10.2307/749719

English, L. D. (2020). Teaching and learning through mathematical problem posing: Commentary. *International Journal of Educational Research, 102*, 101451. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.06.014

Espinoza, J. G., Lupiáñez, J. L., & Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Matemática, Educación e Internet, 14*(2). https://doi.org/10.18845/rdmei.v14i2.1664

Espinoza, J. G., Segovia, J. I., & Lupiáñez, J. L. (2016). Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático: Un estudio exploratorio. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 14*(2), 368-392. http://doi.org/10.14204/ejrep.39.15067

Espinoza, J. G., Lupiáñez, J. L., & Segovia, I. (2022). A study of the complexity of problems posed by talented students in mathematics. *Mathematics, 10*(11), 1841. https://doi.org/10.3390/math10111841

Fernández-Bravo, J. A., & Barbarán, J. J. (2016). Impacto de la invención de problemas matemáticos en la metacognición. *Revista Intercontinental de Psicología y Educación, 18*(1-2), 157-177.

Fuchs, L. S., & Fuchs, D. (2002). Mathematical problem-solving profiles of students with mathematics disabilities with and without comorbid reading disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 35*(6), 564–574. https://doi.org/10.1177/00222194020350060701

Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 37*, 4–15. https://doi.org/10.1177/00222194040370010201

Geteregechi, J. M. (2023). Investigating undergraduate students' mathematical reasoning via problem posing. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2169646

Gonzales, N. A. (1994). Problem posing: A neglected component in mathematics courses for prospective elementary and middle school teachers. *School Science and Mathematics, 94*(2), 78-84. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1994.tb12295.x

Gonzales, N. A. (1998). A blueprint for problem posing. *School Science and Mathematics*, *98*(8), 448–456. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1998.tb17437.x

Grundmeier, T. A. (2003). *The effects of providing mathematical problem -posing experiences for K-8 pre-service teachers: Investigating teachers' beliefs and characteristics of posed problems.* [Doctoral Dissertation, University of New Hampshire].

Grundmeier, T. A. (2015). Developing the problem-posing abilities of prospective elementary and middle school teachers. Στο F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Επιμ.), *Problem posing: From research to effective practice* (σ. 411-431). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_20

Guo, M., Leung, F. K. S., & Hu, X. (2020). Affective determinants of mathematical problem posing: The case of Chinese Miao students. *Educational Studies in Mathematics*, *105*, 367-387. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09972-1

Guvercin, S., Cilavdaroglu, A. K., & Savas, A. C. (2014). The effect of problem posing instruction on 9th grade students' mathematics academic achievement and retention. *The Anthropologist*, *17*(1), 129–136. https://doi.org/10.1080/09720073.2014.11891422

Θεοδούλου, Ρ., & Φιλίππου, Γ. (2003, Απρίλιος 11-13). *Η ικανότητα κατασκευής μαθηματικού προβλήματος και η σχέση της με την επίδοση στα μαθηματικά* [Παρουσίαση σε Συνέδριο]. 2ο Συνέδριο για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση: Τα Μαθηματικά στο Γυμνάσιο. Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών - Πανεπιστήμιο Κύπρου, Αθήνα, Ελλάδα.

Hanich, L. B., Jordan, N. C., Kaplan, D., & Dick, J. (2001). Performance across different areas of mathematical cognition in children with learning difficulties. *Journal of Educational Psychology*, *93*(3), 615–626. https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.3.615

Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (2022). *Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο.* Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Irvine, J. (2017). Problem posing in consumer mathematics classes: Not just for future mathematicians. *The Mathematics Enthusiast*, *14*(1), 387–412. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1404

Jonassen, D. H. (2000). Toward a design theory of problem solving. *Educational Technology Research and Development, 48*(4), 63-85. https://doi.org/10.1007/BF02300500

Jonassen, D. H. (2004). *Learning to solve problems: An instructional design guide.* Pfeiffer.

Kaba, Y., & Şengül, S. (2016). Developing the rubric for evaluating problem posing (REPP). *International Online Journal of Educational Sciences*, *8*(1), 8–25.

Kapur, M. (2015). The preparatory effects of problem solving versus problem posing on learning from instruction. *Learning and Instruction, 39*, 23-31. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.05.004

Kar, T., Öçal, T., Öçal, M. F., & Demirci, Ö. (2021). Problem posing with third-grade children: Examining the complexity of problems. *International Journal of Contemporary Educational Research, 8*(1), 54-71. https://doi.org/10.33200/ijcer.820714

Kaur, A., & Rosli, R. (2021). Problem posing in mathematics education research: A systematic review. *International Journal of Academic Research in Progressive Education and Development*, *10*(1), 438- 456. http://dx.doi.org/10.6007/IJARPED/v10-i1/8641

Koichu, B., & Kontorovich, I. (2013). Dissecting success stories on mathematical problem posing: A case of the billiard task. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 71–86. https://doi.org/10. 1007/s10649-012- 9431-9

Kojima, K., Miwa, K., & Matsui, T. (2015). Experimental study of learning support through examples in mathematical problem posing. *Research and Practice in Technology Enhanced Learning*, *10*(1). https://doi.org/10.1007/s41039-015-0001-5

Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2011). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 149-161. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.11.002

Kónya, E. (2022). Report of the workshop on the skills related to problem solving and posing. Στο I. Papadopoulos, & N. Patsiala (Επιμ.), *Proceedings of the 22nd conference on Problem Solving in Mathematics Education - ProMath 2022* (σ. 185-186). Aristotle University of Thessaloniki, Faculty of Education.

Kopparla, M., Bicer, A., Vela, K., Lee, Y., Bevan, D., Kwon, H., Caldwell, C., Capraro, M. M., & Capraro, R. M. (2019). The effects of problem-posing intervention types on elementary students' problem-solving. *Educational Studies, 45*(6), 708-725. https://doi.org/10.1080/03055698.2018.1509785

Kovács, Z., Báró, E., Lócska O., & Kónya E. (2023). Incorporating problem-posing into sixth-grade mathematics classes. *Education Sciences*, *13*(2) 151. https://doi.org/10.3390/educsci13020151

Kul, Ü., & Çelik, S. (2020). A meta-analysis of the impact of problem posing strategies on students' learning of mathematics. *Revista Romaneasca Pentru Educatie Multidimensionala*, *12*(3), 341-368. https://doi.org/10.18662/rrem/12.3/325

Kwek, M. L. (2015). Using problem posing as a formative assessment tool. Στο F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Επιμ.), *Problem posing: From research to effective practice* (σ. 273-292). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_13

Kwek, M. L., & Leng, L. W. (2008, Ιούλιος 14-18). *Using problem-posing as an assessment tool*. [Παρουσίαση σε Συνέδριο]. 10° Asia Pacific Conference on Giftedness: Nurturing Talents for the Global Community. Asia-Pacific Federation on Giftedness (APFG), Singapore.

Kwon, H., & Capraro, M. M. (2021). Nurturing problem posing in young children: Using multiple representation within students' real- world interest. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 16*(3), em0648. https://doi.org/10.29333/iejme/11066

Lavy, I., (2015). Problem-posing activities in a dynamic geometry environment: When and how. Στο F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Επιμ.), *Problem posing:*

From research to effective practice (σ. 393-410). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_19

Lavy, l., & Bershadsky, I. (2003). Problem posing via "what if not?" strategy in solid geometry: A case study. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(4), 369–387. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.007

Leung, S. S. (1993). Mathematical problem posing: The influence of task formats, mathematics knowledge and creative thinking. Στο I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, & F. Lin (Επιμ.), *Proceedings of the 17th International conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, σ. 33-40).

Leung, S. S., & Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal, 9*(1), 5-24. https://doi.org/10.1007/BF03217299

Lewin, C. (2005). Elementary quantitative methods. Στο B. Somekh, & C. Lewin (Επιμ.), *Research Methods in the Social Sciences* (σ. 215-225). Sage Publications.

Li, X., Song, N., Hwang, S., & Cai, J. (2020). Learning to teach mathematics through problem posing: Teachers' beliefs and performance on problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 105*, 325-347. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2022.102038

Lin, P. J. (2004). Supporting teachers on designing problem-posing tasks as a tool of assessment to understand students' mathematical learning. Στο M. Hoines, & A. Fuglestad (Επιμ.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, σ. 257-264). Bergen University College.

Lowrie, T. (2002). Designing a framework for problem posing: Young children generating open-ended tasks. *Contemporary Issues in Early Childhood, 3*(3), 354–364. https://doi.org/10.2304/ciec.2002.3.3.4

Lowrie, T., & Whitland, J. (2000). Problem posing as a tool for learning, planning and assessment in the primary school. Στο T. Nakahara, & M. Koyama (Επιμ.), *Proceedings of the 24th Conference of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, σ. 247-254).

Malaspina, U. J. (2013). La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. Στο *Actas de VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática-CIBEM* (σ. 129-140). CIBEM.

Malaspina, U. J. (2021). Creación de problemas y juegos para el aprendizaje de las matemáticas. *Educación Matemática en la Infancia, 10*(1), 1-17. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2021.1-17

Mamona-Downs, J. (1993). On analyzing problem posing. Στο I. Hirabayashi, N. Nohada, K. Shigematsu, & F. L. Lin (Επιμ.), *Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, σ. 41-47).

Μαριδάκη-Κασσωτάκη, Α. (2011). *Δυσκολίες μάθησης: Ψυχοπαιδαγωγική προσέγγιση*. Διάδραση.

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving.* Cambridge University Press.

Mestre, P. J. (2002). Probing adults' conceptual understanding and transfer of learning via problem posing. *Applied Developmental Psychology, 23,* 9–50. https://doi.org/10.1016/S0193-3973(01)00101-0

Miller, S. P., & Mercer, C. D. (1997). Educational aspects of mathematics disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 30*(1), 47-56. https://doi.org/10.1177/002221949703000104

Milinković, J. (2015). Conceptualizing problem posing via transformation. Στο F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Επιμ.), *Problem posing: From research to effective practice* (σ. 47-70). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_3

Moses, B., Bjork, E., & Goldenberg, E. P. (2013). Beyond problem solving: Problem posing. Στο S. I. Brown, & M. I. Walter (Επιμ.), *Problem posing: Reflections and applications* (σ. 178-188). Psychology Press. https://doi.org/10.4324/9781315785394

Μουσουλίδης, Ν., Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (2003, Απρίλιος 11-13). *Ένα μοντέλο της ικανότητας κατασκευής μαθηματικού προβλήματος σε δομημένο και ημί-δομημένο περιβάλλον* [Παρουσίαση σε Συνέδριο]. 2ο Συνέδριο για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση: Τα Μαθηματικά στο Γυμνάσιο. Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών - Πανεπιστήμιο Κύπρου, Αθήνα, Ελλάδα.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics.

Ngah, N., Ismail. Z., Tasir, Z., & Mohamad Said, M. N. H. (2016). Students' ability in free, semi-structured and structured problem posing situations. *Advanced Science Letters, 22*(12), 4205-4209. https://doi.org/10.1166/asl.2016.8106

Nicolaou, A. A., & Philippou, G. N. (2007). Efficacy beliefs, problem posing and mathematics achievement. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 29*(4), 48–70.

Norman, I., Abidin, Z. Z., & Bakar, M. (2011). Secondary school students' abilities through problem posing activities. Στο *Proceedings of International Seminar and the 4th National Conference on Mathematics Education: Building the Nation Character through Humanistic Mathematics Education* (σ. 187-198). Department of Mathematics Education, Yogyakarta State University.

Örnek, T., & Soylu, Y. (2021). A model design to be used in teaching problem posing to develop problem-posing skills. *Thinking Skills and Creativity, 41*, 100905. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2021.100905

Özgen, K., Aydın, M., Geçici, M. E., & Bayram, B. (2019). An investigation of eighth grade students' skills in problem- posing. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 20*(1), 106-130.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών.* Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Papadopoulos, I., & Patsiala, N. (2019). Capturing problem posing landscape in a grade-4 classroom: A pilot study. Στο U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis, (Επιμ.), *Proceedings of the 11th Congress of the*

European Society for Research in Mathematics Education (σ. 4431-4438). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Papadopoulos, I., & Patsiala, N. (2023α). Pedagogical aspects of problem solving and problem posing in classroom. Στο I. Papadopoulos, & N. Patsiala (Επιμ.), *Proceedings of the 22nd conference on Problem Solving in Mathematics Education - ProMath 2022* (σ. 181-183). Aristotle University of Thessaloniki, Faculty of Education.

Papadopoulos, I., & Patsiala, N. (2023β). Seeking and using structure through problem posing. Στο I. Papadopoulos, & N. Patsiala (Επιμ.), *Proceedings of the 22nd conference on Problem Solving in Mathematics Education - ProMath 2022* (σ. 133–148). Aristotle University of Thessaloniki, Faculty of Education.

Papadopoulos, I., Patsiala, N., Baumanns, L., & Rott, B. (2022). Multiple approaches to problem posing: Theoretical considerations regarding its definition, conceptualisation, and implementation. *Center for Educational Policy Studies Journal, 12*(1), 13-34. https://doi.org/10.26529/cepsj.878

Patsiala, N., & Papadopoulos, I. (2022). Developing an instrument to connect problem-posing strategies and mathematical habits of mind. Στο J., Hodgen, E., Geraniou, G., Bolondi, & F. Ferretti, (Επιμ.), *12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (σ. 4181-4188), University of Bozen-Bolzano and ERME.

Πατσιαλά, Ν., & Παπαδόπουλος, Ι. (2022). Η επίδραση της κατάστασης δημιουργίας προβλήματος στα ποιοτικά χαρακτηριστικά των παραγομένων προβλημάτων. Στο Β. Χρυσικού, Χ. Σταθοπούλου, Τ. Τριανταφυλλίδης, Κ. Χατζηκυριάκου, Α. Χρονάκη, & Κ. Σδρόλιας (Επιμ.), *Πρακτικά του 9ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.: Η μαθηματική εκπαίδευση μπροστά σε νέες και παλιές προκλήσεις* (σ. 189-198). ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed). Princeton University Press.

Possamai, J. P., & Allevato, N. S. G. (2023). Problem posing: images as a trigger element of the activity. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, *13*(1), 1-16. https://doi.org/10.37001/ripem.v13i1.3274

Pelczer, I., & Gamboa, F. (2009). Problem posing: Comparison between experts and novices. Στο M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Επιμ.), *Proceedings of the 33th conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. 4, σ. 353–360). PME.

Pullen, P. C., Lane, H. B., Ashworth, K. A., & Lovelace, S. P. (2017). Learning disabilities. Στο J. M. Kauffman, & D. P. Hallahan (Επιμ.), *Handbook of special education* (2nd ed., σ. 286-299). Routledge.

Puspitasari, N., Suryadi, D., Sumarmo, U., & Margana, A. (2019). What is the problem with mathematical problems posing? Στο Proceedings of the 1st International Conference on Computer, Science, Engineering and Technology, *Journal of Physics: Conference Series, 1179*. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1179/1/012008

Rosli, R., Capraro, M. M., & Capraro, R. M. (2014). The effects of problem posing on student mathematical learning: A meta-analysis. *International Education Studies, 7*(13), 227-241. https://doi.org/10.5539/ies.v7n13p227

Ruthven, K. (2020). Problematising learning to teach through mathematical problem posing. *International Journal of Educational Research, 102*, 101455. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.07.004

Schindler, M., & Bakker, A. (2020). Affective field during collaborative problem posing and problem solving: A case study. *Educational Studies in Mathematics. 105*, 303–324. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09973-0

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press, Inc. https://doi.org/10.1016/C2013-0-05012-8

Schoenfeld, A. H. (1989). Teaching mathematical thinking and problem solving. Στο L. B. Resnick, & L. E. Klopfer (Επιμ.), *Toward the thinking curriculum: current cognitive research* (σ. 83–103). Association for Supervision and Curriculum Development.

Seel, N. M. (2012). Problems: definition, types, and evidence. Στο N. M. Seel (Επιμ.), *Encyclopedia of the Sciences of Learning* (σ. 2690–2693). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1428-6_914

Silber, S., & Cai, J. (2017). Pre-service teachers' free and structured mathematical problem posing. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48*(2), 163-184. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1232843

Silber, S., & Cai, J. (2021). Exploring underprepared undergraduate students' mathematical problem posing. *ZDM Mathematics Education, 53*(4), 877–889. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01272-z

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19-28.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM Mathematics Education, 29*(3), 75–80. https://doi.org/10.1007/s11858-997-0003-x

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 521-539.

Silver, E. A., & Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics, 12*(3), 129-135. http://doi.org/10.5951/TCM.12.3.0129

Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S., & Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(3), 293–309. https://doi.org/10.2307/749366

Silverman, F. L., Winograd, K., & Strohauer, D. (1992). Student-generated story problems. *The Arithmetic Teacher, 39*(8), 6-12.

Singer, F. M., Ellerton, N., Cai, J., & Leung, S. S. (2011). Problem posing in mathematics learning and teaching: A research agenda. Στο B. Ubuz (Επιμ.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME): Developing Mathematical Thinking* (Vol. 1, σ. 137-166). PME.

Singer, F. M., Pelczer, I., & Voica, C. (2011). Problem posing and modification as a criterion of mathematical creativity. Στο M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Επιμ.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (σ. 1133–1142). University of Rzeszów.

Singer, F. M., Ellerton, N., & Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 1-7.

Singer, F. M., & Voica, C. (2015). Is problem posing a tool for identifying and developing mathematical creativity? Στο F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Επιμ.), *Problem posing: From research to effective practice* (σ. 141-174). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_7

Soares, N., Evans, T., & Patel, D., R. (2018). Specific learning disability in mathematics: A comprehensive review. *Translational Pediatrics, 7*(1), 48-62. https://doi.org/10.21037/tp.2017.08.03

Stickles, P. R. (2011). An analysis of secondary and middle school teachers' mathematical problem posing. *Investigations in Mathematics Learning, 3*(2), 1-34. https://doi.org/10.1080/24727466.2011.11790301

Stoyanova, E. N. (1997). *Extending and exploring students' problem solving via problem posing.* [Doctoral Dissertation, Edith Cowan University].

Stoyanova, E. N. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. Στο A. McIntosh, & N. Ellerton (Επιμ.), *Research in mathematics education: A contemporary perspective* (σ. 164- 185). Edith Cowan University: MASTEC.

Stoyanova, E. N. (2005). Problem-problem strategies used by years 8 and 9 students. *Australian Mathematics Teacher, 61*(3), 6-11.

van Bommel, J., & Palmér, H. (2021). Young students' views on problem solving versus problem posing. *Journal of Childhood, Education & Society, 2*(1), 1-13. https://doi.org/10.37291/2717638X.20212165

Van den Heuvel-Panhuizen, M., Middleton, J. A., & Streefland, L. (1995). Student-generated problems: Easy and difficult problems on percentage. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 21–27.

Van Harpen, X. Y., & Presmeg, N. (2015). An investigation of high school students' mathematical problem posing in the United States and China. Στο F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Επιμ.), *Problem posing: From research to effective practice* (σ. 293-308). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_14

Van Harpen, X.Y., & Sriraman, B. (2013). Creativity and mathematical problem posing: An analysis of high school students' mathematical problem posing in China and the USA. *Educational Studies in Mathematics, 82*(2), 201–221. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9419-5

Verschaffel, L., Depaepe, F., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education. Στο S. Lerman (Επιμ.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2nd ed., σ. 908-911). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_163

Voica, C., & Singer, F. M. (2013). Problem modification as a tool for detecting cognitive flexibility in school children. *ZDM Mathematics Education, 45*(2), 267–279. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0492-8

Voica, C., Singer, F. M., & Stan, E. (2020). How are motivation and self-efficacy interacting in problem posing and problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 105*, 487-517. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10005-0

Wang, M., Walkington, C., & Rouse, A. (2022). A meta-analysis on the effects of problem-posing in mathematics education on performance and dispositions. *Investigations in Mathematics Learning, 14*(4), 265-287. https://doi.org/10.1080/19477503.2022.2105104

Winograd, K. (1992). What fifth graders learn when they write their own math problems. *Educational Leadership, 49*(7), 64-67.

Winograd, K. (1993). Selected writing behaviors of fifth graders as they composed original mathematics story problems. *Research in the Teaching of English, 27*(4), 369–394.

Woodward, J., & Montague, M. (2002). Meeting the challenge of mathematics reform for students with LD-Learning Disabilities. *Journal of Special Education, 36*(2), 89–101. https://doi.org/10.1177/00224669020360020401

World Health Organization. (2019). *International statistical classification of diseases and related health problems* (11th ed.). World Health Organization.

Xu, B., Cai, J., Liu, Q., & Hwang, S. (2020). Teachers' predictions of students' mathematical thinking related to problem posing. *International Journal of Educational Research*, *102*, 101427. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.04.005

Yamamoto, S., Hirashima, T., Ogihara, A. (2015). Experimental use of learning environment by posing problem for learning disability. Στο R. Lee, (Επιμ.), *Applied Computing & Information Technology. Studies in Computational Intelligence* (Vol 619, σ. 101- 112). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-26396-0_8

Yang, X., & Xin, Y. P. (2022). Teaching problem posing to students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly, 45*(4), 280-293. https://doi.org/10.1177/0731948721993117

Yildiz, A. (2022). Examining the problem posing skills of gifted students in mathematics teaching. *Research in Pedagogy, 12*(1), 1-14. https://doi.org/10.5937/IstrPed2201001Y

Zhang, H., & Cai, J. (2021). Teaching mathematics through problem posing: insights from an analysis of teaching cases. *ZDM Mathematics Education, 53*(4), 961–973. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01260-3

Zhang, L., Cai, J., Song, N., Zhang, H., Chen, T., Zhang, Z., & Guo, F. (2022). Mathematical problem posing of elementary school students: the impact of task format and its relationship to problem solving. *ZDM Mathematics Education, 54*(4), 497-512. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01324-4

Zhang, L., Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2022). Problematizing the notion of problem posing expertise. Στο J., Hodgen, E., Geraniou, G., Bolondi, & F. Ferretti, (Επιμ.), *12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (σ. 4058-4065). University of Bozen-Bolzano and ERME.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΔΟΜΗΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ

1) Έχω στο πορτοφόλι μου 3 κέρματα των 20 λεπτών και 5 κέρματα των 50 λεπτών.

Ο αδερφός μου έχει 2 κέρματα των 2 ευρώ και 4 κέρματα των 5 λεπτών.

Πόσα χρήματα έχει ο καθένας;

Τι άλλο θα μπορούσε να ρωτάει αυτό το πρόβλημα;

____

____

2) Κάθε μέρα αποταμιεύω 0,50 € για να αγοράσω ένα βιβλίο που κάνει 8,50 €. Πόσες μέρες θα χρειαστώ για να μαζέψω τα χρήματα;

Φτιάξε το αντίστροφο πρόβλημα αλλάζοντας θέση στα **δεδομένα** και τα **ζητούμενα**.

____

____

____

____

3) Ο Δημήτρης έχει στη συλλογή του 122 τάπες.

Ο Άγγελος έχει 3 φορές περισσότερες. Πόσες τάπες έχει ο Άγγελος;

Φτιάξε ένα παρόμοιο πρόβλημα που να λύνεται με τον **ίδιο** τρόπο.

____

____

____

____

1) Φτιάξε ένα πρόβλημα με τις πληροφορίες της εικόνας:

____
____
____
____

2) Φτιάξε ένα πρόβλημα που να λύνεται με την πράξη 76 **+** 28

____
____
____
____

3) 4 αγόρια και 4 κορίτσια έπαιξαν έναν αγώνα μπάσκετ. Στον πίνακα φαίνονται οι πόντοι που έβαλε κάθε παιδί. Φτιάξε ένα πρόβλημα με αυτές τις πληροφορίες.

Όνομα	**Πόντοι**
Άννα	21
Σοφία	19
Ιωάννα	13
Φωτεινή	17
Παναγιώτης	20
Νίκος	21
Βασίλης	18
Πέτρος	14

____
____
____
____
____
____
____

1) Φτιάξε ένα πρόβλημα για να το λύσει ένας συμμαθητής σου:

____

____

____

____

2) Φτιάξε ένα δύσκολο πρόβλημα:

____

____

____

____

3) Φτιάξε ένα πρόβλημα που θα σου φαινόταν ενδιαφέρον να λύσεις:

____

____

____

____

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΔΟΜΗΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ

1) Έχω στο πορτοφόλι μου 3 κέρματα των 20 λεπτών και 5 κέρματα των 50 λεπτών.

Ο αδερφός μου έχει 2 κέρματα των 2 ευρώ και 4 κέρματα των 5 λεπτών.

Πόσα χρήματα έχει ο καθένας;

Τι άλλο θα μπορούσε να ρωτάει αυτό το πρόβλημα;

Πόσα χρήματα έχουν και οι δύο μαζί;

Μαθητής Ε' τάξης χωρίς ΕΕΑ

Τι άλλο θα μπορούσε να ρωτάει αυτό το πρόβλημα;

Ποσα ειναι ολα μαζι;

Μαθητής ΣΤ' τάξης με ΕΜΔ

2) Κάθε μέρα αποταμιεύω 0,50 € για να αγοράσω ένα βιβλίο που κάνει 8,50 €. Πόσες μέρες θα χρειαστώ για να μαζέψω τα χρήματα; 17 ημ.

Φτιάξε το αντίστροφο πρόβλημα αλλάζοντας θέση στα **δεδομένα** και τα **ζητούμενα**.

Σε 17 ημέρες παίρνω ένα βιβλίο με 8,50. Πόσα αποταμιεύω την ημέρα;

Μαθήτρια ΣΤ' τάξης χωρίς ΕΕΑ

Φτιάξε το αντίστροφο πρόβλημα αλλάζοντας θέση στα **δεδομένα** και τα **ζητούμενα**.

Κάθε μέρα αποταμιευω 0,50 € για να αγοράσω ένα βιβλιο. Σε 17 μερες θα μπορω να το αγοράσω. Ποσο κοστίζει το βιβλιο

Μαθητής Ε' τάξης με ΕΜΔ

3) Ο Δημήτρης έχει στη συλλογή του 122 τάπες.

Ο Άγγελος έχει 3 φορές περισσότερες. Πόσες τάπες έχει ο Άγγελος;

Φτιάξε ένα παρόμοιο πρόβλημα που να λύνεται με τον **ίδιο** τρόπο.

Ο Γιώργος έχει 144 αυτοκινητάκια και ο Ορέστης 2 φορές περρισσότερα πόσα αυτοκινητάκια έχει ο Ορέστης;

Μαθητής Ε' τάξης χωρίς ΕΕΑ

Φτιάξε ένα παρόμοιο πρόβλημα που να λύνεται με τον **ίδιο** τρόπο.

Ο γιαννής έχει μαζεμένη 142 τάπες ο γιοργος έχει 2 φορές περισοτερες ποσες ταπες έχει ο γιοργος;

Μαθήτρια ΣΤ' τάξης με ΕΜΔ

Ο Μάνος στο πορτοφόλι του είχε 638€. Ήθελε να αγοράσει μία τηλεόραση 430€ και ακουστικά 79€. Πόσα χρήματα του περίσσεψαν στο πορτοφόλι;

Μαθητής Ε’ τάξης χωρίς ΕΕΑ

ο Χρίστος έχει 1000 ευρώ μπορεί να πάρει την φτηνή τηλεόραση και την κάμερα;

Μαθητής ΣΤ’ τάξης με ΕΜΔ

2) Φτιάξε ενα πρόβλημα που να λύνεται με την πράξη 76 + 28

Ο κύριος Κώστας έχει στην τράπεζα 76€ θέλει να βάλει άλλα 28. Πόσα θα έχει συνολικά.

Μαθήτρια ΣΤ’ τάξης χωρίς ΕΕΑ

2) Φτιάξε ένα πρόβλημα που να λύνεται με την πράξη 76 + 28

Μια κυρία πήγε να αγοράσει ένα κινητό και μία ηλεκτρική σκούπα που το κινητό είχε 76€ και η ηλεκτρική σκούπα είχε 28€ πόσο βγήκε συνολικά;

Μαθητής Ε’ τάξης με ΕΜΔ

1) 4 αγόρια και 4 κορίτσια έπαιξαν έναν αγώνα μπάσκετ. Στον πίνακα φαίνονται οι πόντοι που έβαλε κάθε παιδί. Φτιάξε ένα πρόβλημα με αυτές τις πληροφορίες.

Όνομα	Πόντοι
Άννα	21
Σοφία	19
Ιωάννα	13
Φωτεινή	[redacted]
Παναγιώτης	20
Νίκος	21
Βασίλης	18
Πέτρος	14

4 κορίτσια μάζεψαν 80 πόντους. Η Άννα, η Σοφία και η Ιωάννα μάζεψαν 53 πόντους. Πόσους πόντους μάζεψε η Φωτεινή; Επίσης το σκορ τους μαζί με 4 αγόρια ήταν 143. Πόσους πόντους μάζεψαν τα αγόρια;

Μαθήτρια Ε’ τάξης χωρίς ΕΕΑ

3) 4 αγόρια και 4 κορίτσια έπαιξαν έναν αγώνα μπάσκετ. Στον πίνακα φαίνονται οι πόντοι που έβαλε κάθε παιδί. Φτιάξε ένα πρόβλημα με αυτές τις πληροφορίες.

Όνομα	Πόντοι
Άννα	21
Σοφία	19
Ιωάννα	13
Φωτεινή	17
Παναγιώτης	20
Νίκος	21
Βασίλης	18
Πέτρος	14

Η Άννα έχει 21 πόντους. Η Σοφία έχει 19, η Ιωάννα 13, η Φωτεινή 17, ο Παναγιώτης 20 ο Νίκος 21, ο Βασίλης 18, ο Πέτρος 14. Πόσους πόντους έχουν τα κορίτσια μαζί; Πόσα έχουν τα αγόρια; Και πόσους έχουν όλοι μαζί;

Μαθήτρια Ε’ τάξης με ΕΜΔ

1) Φτιάξε ένα πρόβλημα για να το λύσει ένας συμμαθητής σου:

Ο κύριος Αντώνης τη Τρίτη πούλησε 3 κιλά λάδι και τη Πέμπτη 5 κιλά περισσότερα από τη Τρίτη. Πόσα κιλά λάδι πούλησε αυτές τις 2 μέρες;

Μαθήτρια Ε' τάξης χωρίς ΕΕΑ

1) Φτιάξε ένα πρόβλημα για να το λύσει ένας συμμαθητής σου:

12 βαρέλια με μπυρα χωρανε 256 κιλά μπύρα πόσα κιλά μυρα χωρανε τα 3 βαρέλια;

Μαθητής ΣΤ' τάξης με ΕΜΔ

Φτιάξε ένα δύσκολο πρόβλημα:*

Η Έλενα είναι τα $\frac{3}{5}$ της ηλικίας της μητέρας της, η μητέρα της είναι 42 ετών. Πόσο χρονών είναι η Έλενα;

Μαθήτρια Ε' τάξης χωρίς ΕΕΑ

2) Φτιάξε ένα δύσκολο πρόβλημα:

ενας αγρότης μαζένει 2586 κιλά πατάτες και τα πουλάει για 5806€ ποσα θα εβγαζε απο 1000 κιλα πατάτες;

Μαθητής ΣΤ' τάξης με ΕΜΔ

3) Φτιάξε ένα πρόβλημα που θα σου φαινόταν ενδιαφέρον να λύσεις:

ο Lionel Messí έχει 19 αγάλματα και ο cristiano ronaldo έχει 14 Πούλησε τα 3 και αγόρασε 6 πόσα αγάλματα έχει τώρα ο cristiano ronaldo και πόσα περισσότερα έχει ο ronaldo απο τον Messi;

Μαθητής Ε' τάξης χωρίς ΕΕΑ

3) Φτιάξε ένα πρόβλημα που θα σου φαινόταν ενδιαφέρον να λύσεις:

Ενα αμαξη τρακαρε και πηγε για επισκευη η μηχανη κοστιζη 700€ τα φρενα 200€ και το καροσερια 1000€ Η ζημια του αμαξιου ειταν τα φρενα και η μηχανη Ποσω κανη η ζημια του αμαξιου

Μαθήτρια ΣΤ' τάξης με ΕΜΔ