**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ**
**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ**
ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

**ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ**
**ΤΜ. ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ**
**ΤΜ.ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ**

**ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ**
**ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**

**ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
**«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»**

**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Μαθηματική Εκπαίδευση Β΄ Ηλικιακού Κύκλου (13-18 χρόνων)**

Διπλωματική εργασία

# Αξιολόγηση στα Μαθηματικά του Γυμνασίου με τη Μέθοδο της Γενικευμένης μη Παραμετρικής Κατηγοριοποίησης

του

**Γρηγοριάδη Ιωάννη**
**ΑΕΜ: 1007**

Επιβλέπων Καθηγητής: Άγγελος Μάρκος, Καθηγητής Δ.Π.Θ.

Εξεταστές: Άγγελος Μάρκος, Καθηγητής Δ.Π.Θ.
Σακονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής Δ.Π.Θ.
Τζεκάκη Μαριάννα, Καθηγήτρια Α.Π.Θ.

Φλώρινα, Ιούλιος 2024

…………………………………………..
Γρηγοριάδης Α. Ιωάννης
Πτυχιούχος Μαθηματικός Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

# Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

- ✓ τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Μάρκο Άγγελο, για τη υποστήριξη, τη βοήθεια, τις συμβουλές και τον πολύτιμο χρόνο που αφιέρωσε, παρόλο το βεβαρημένο πρόγραμμά τους, καθ΄ όλη τη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας αυτής, ώστε να ξεπεραστούν οι όποιες δυσκολίες παρουσιάστηκαν, που χωρίς τη συμβολή του δε θα ήταν δυνατή ολοκλήρωση της εργασίας αυτής,
- ✓ τον υπ. διδάκτορα κ. Ευριπίδη Θεμελή, για την παραχώρηση του τεστ της Α' Γυμνασίου και τη βοήθειά του και τις συζητήσεις που είχαμε σε θέματα τεχνικά σχετικά με τη δημιουργία των τεστ,
- ✓ τους φίλους και συμφοιτητές μου Αιμίλιο Κοζάρτση και Παντελή Πετρίδη για τη συνεργασία και τις χρήσιμες συζητήσεις που είχαμε, τόσο κατά τη διάρκεια των μαθημάτων των δύο εξαμήνων, όσο και μετά από αυτά,
- ✓ τη γυναίκα μου και τη μητέρα μου, που ήταν πάντα δίπλα μου, όχι μόνο σε αυτήν την εργασία, αλλά και σε οποιαδήποτε απόφαση πήρα στη ζωή μου και αφετέρου τον αδελφό μου, που με βοήθησε επιπρόσθετα και στην επιμέλεια της εργασίας αυτής μέχρι και την τελική μορφή της.

Η παρούσα διπλωματική εργασία, αφιερώνεται στην μνήμη του πατέρα μου που έφυγε νωρίς.

Ιωάννης Α. Γρηγοριάδης

Περίληψη

Η Γνωστική Διαγνωστική Αξιολόγηση (ΓΔΑ) είναι μια σύγχρονη προσέγγιση στην εκπαιδευτική αξιολόγηση που στοχεύει στη λεπτομερή ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών. Η ΓΔΑ επιτρέπει την αναγνώριση των συγκεκριμένων χαρακτηριστικών γνωρισμάτων που έχουν ή δεν έχουν κατακτήσει οι μαθητές, παρέχοντας έτσι στοχευμένη ανατροφοδότηση και υποστήριξη. Η κατηγοριοποίηση των μαθητών σε διαφορετικά προφίλ με βάση τις απαντήσεις τους στις ερωτήσεις μιας διαγνωστικής δοκιμασίας, προϋποθέτει την εφαρμογή κατάλληλων στατιστικών μοντέλων, τα οποία είναι γνωστά ως μοντέλα γνωστικής διαγνωστικής αξιολόγησης. Η εργασία εστιάζει στα μη παραμετρικά μοντέλα, τα οποία μπορούν να εφαρμοστούν σε μεγέθη δείγματος όπως αυτά που συναντάμε σε μια σχολική τάξη. Στο εμπειρικό μέρος της εργασίας, ένα μη παραμετρικό μοντέλο εφαρμόστηκε σε δεδομένα μαθηματικών επιδόσεων μαθητών γυμνασίου. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η ΓΔΑ μπορεί να αποτελέσει ένα αποτελεσματικό εργαλείο για τους εκπαιδευτικούς, επιτρέποντας την καλύτερη κατανόηση των αναγκών των μαθητών και το σχεδιασμό πιο αποτελεσματικών διδακτικών στρατηγικών. Η έρευνα καταλήγει σε συγκεκριμένα συμπεράσματα και προτάσεις για τη βελτίωση της εκπαιδευτικής διαδικασίας μέσω της εφαρμογής της ΓΔΑ.

**Λέξεις – κλειδιά:** γνωστική διαγνωστική αξιολόγηση, εκπαιδευτική αξιολόγηση, μαθηματική επίδοση, ψυχομετρικά μοντέλα

# Abstract

This thesis focuses on Cognitive Diagnostic Assessment (CDA), a modern approach in educational assessment aimed at fine-grained analysis of student responses. CDA allows the identification of specific cognitive attributes that students have or have not mastered, thus providing targeted feedback and support. Classifying students into different profiles based on their responses to the questions of a diagnostic test requires the application of appropriate statistical models, known as cognitive diagnostic models. This thesis focuses on non-parametric models, which can be applied to sample sizes such as those found in a classroom. In the empirical part of the paper, a nonparametric model was applied to mathematics achievement data of middle school students. The results showed that CDA can be an effective tool for teachers, allowing for a better understanding of students' needs and the design of more effective instructional strategies. The research comes to concrete conclusions and recommendations for improving the educational process through the implementation of CDA.

**Keywords:** cognitive diagnostic assessment, educational assessment, mathematics performance, psychometric models

# Περιεχόμενα

# Εισαγωγή

Στις παραδοσιακές μορφές εκπαιδευτικής αξιολόγησης, οι μαθητές αξιολογούνται με βάση την επίδοσή τους σε συγκεκριμένες δοκιμασίες, οι οποίες συνήθως καταλήγουν σε μια συνολική αριθμητική βαθμολογία (12 στα 20 ή 5,5 στα 10). Αυτή η συνολική βαθμολογία περιέχει περιορισμένη πληροφορία για τα επιμέρους χαρακτηριστικά γνωρίσματα που έχει ή δεν έχει κατακτήσει κάθε εξεταζόμενος μέσω της αξιολόγησης. Η Γνωστική Διαγνωστική Αξιολόγηση (ΓΔΑ) είναι μια σχετικά νέα προσέγγιση στην εκπαιδευτική αξιολόγηση, η οποία επικεντρώνεται στη λεπτομερή ανάλυση των απαντήσεων των εξεταζόμενων και επιτρέπει την αναγνώριση των συγκεκριμένων γνωστικών χαρακτηριστικών που έχουν ή δεν έχουν κατακτήσει (Leighton & Gierl, 2007). Στο πλαίσιο αυτό, οι εξεταζόμενοι μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε προφίλ βάσει των γνωστικών χαρακτηριστικών τους και στη συνέχεια να λάβουν στοχευμένη ανατροφοδότηση και υποστήριξη από τους εκπαιδευτικούς (Mislevy, 1994).

Οι ρίζες της ΓΔΑ εντοπίζονται στη συνεργασία μεταξύ ειδικών της γνωστικής ψυχολογίας και της εκπαιδευτικής αξιολόγησης, η οποία ξεκίνησε στα τέλη της δεκαετίας του '80 (Tatsuoka, 1985). Αυτή η συνεργασία οδήγησε σε αρκετές περιπτώσεις στη βελτίωση της εγκυρότητας των εκπαιδευτικών δοκιμασιών και στην καλύτερη κατανόηση των γνωστικών διεργασιών των μαθητών (Embretson, 1994· Messick, 1994). Τα αποτελέσματα της εφαρμογής της ΓΔΑ ήταν ιδιαίτερα ενθαρρυντικά σε διαφορετικά πεδία, όπως τα μαθηματικά (Bradshaw, Izsak, Templin, & Jacobson 2014· Bradshaw & Templin, 2014· Chen, Ferron, Thompson, Gorin, & Tatsuoka, 2010) και η κατανόηση κειμένου (Alderson, Haapakangas, Huhta, Nieminen, & Ullakonoja, 2014· Lee & Sawaki, 2009), συμβάλλοντας στον καλύτερο σχεδιασμό της διδακτικής διαδικασίας και των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών.

Η κατηγοριοποίηση των εξεταζόμενων σε διαφορετικά προφίλ με βάση τις απαντήσεις τους στις ερωτήσεις μιας δοκιμασίας, προϋποθέτει την εφαρμογή κατάλληλων στατιστικών μοντέλων, τα οποία είναι γνωστά στη βιβλιογραφία ως μοντέλα γνωστικής διαγνωστικής αξιολόγησης (cognitive diagnostic models). Τα μοντέλα αυτά διακρίνονται σε παραμετρικά και σε μη παραμετρικά (Ma, de la Torre, & Xu, 2023). Τα πρώτα έχουν πιθανοθεωρητικό υπόβαθρο και η εφαρμογή τους απαιτεί μεγάλο μέγεθος δείγματος (τουλάχιστον 500 υποκείμενα), ενώ τα δεύτερα έχουν καθαρά αλγοριθμικό υπόβαθρο και μπορούν να εφαρμοστούν και σε μικρότερα μεγέθη δείγματος, όπως αυτά που συναντάμε σε μια σχολική τάξη (τουλάχιστον 20 υποκείμενα). Ωστόσο, στα μη παραμετρικά μοντέλα δεν υπάρχει η δυνατότητα υπολογισμού δεικτών καλής προσαρμογής και ποσοτικοποίησης της αβεβαιότητας κατά την κατηγοριοποίηση. Τα τελευταία χρόνια, αρκετές μελέτες έχουν εστιάσει στην ανάδειξη των πλεονεκτημάτων των μη παραμετρικών μοντέλων και στη βελτίωση της ακρίβειας κατά την εφαρμογή τους (βλ. Ma et al., 2023 για μια σχετική ανασκόπηση). Ωστόσο, παρά τη χρησιμότητά τους σε επίπεδο σχολικής τάξης οι εφαρμογές τους σε πραγματικά δεδομένα παραμένουν περιορισμένες. Έτσι τίθεται το ερώτημα εάν η αναλυτική ανατροφοδότηση που προκύπτει από τα αποτελέσματα ενός μη παραμετρικού μοντέλου μπορεί να αποτελέσει χρήσιμο εργαλείο για τους εκπαιδευτικούς ώστε να κατανοήσουν καλύτερα τις ανάγκες των μαθητών τους και να σχεδιάσουν πιο αποτελεσματικές διδακτικές στρατηγικές σε επίπεδο σχολικής τάξης (Leighton, 2007). Με βάση τα παραπάνω, η παρούσα εργασία αποσκοπεί στην εφαρμογή μιας μη παραμετρικής μεθόδου γνωστικής διαγνωστικής αξιολόγησης στα δεδομένα επιδόσεων μαθητών γυμνασίου σε μαθηματικές δοκιμασίες.

Σε ό,τι αφορά τη δομή της εργασίας, στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζεται η Γνωστική Διαγνωστική Αξιολόγηση, η διαδικασία κατασκευής γνωστικών διαγνωστικών δοκιμασιών και τα μοντέλα γνωστικής διαγνωστικής αξιολόγησης, με λεπτομερή αναφορά στα είδη και τα χαρακτηριστικά τους. Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται μια βιβλιογραφική επισκόπηση ερευνών που εφαρμόζουν μοντέλα γνωστικής διαγνωστικής αξιολόγησης σε δεδομένα από μαθηματικές δοκιμασίες. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται η μεθοδολογία της έρευνας, η οποία περιλαμβάνει τα ερευνητικά εργαλεία (τεστ) που δόθηκαν σε μαθητές/τριες τριών τάξεων σε δύο Γυμνάσια της Βέροιας, καθώς και την ερευνητική διαδικασία που ακολουθήθηκε. Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εφαρμογής της Γενικευμένης Μη Παραμετρικής Κατηγοριοποίησης στα δεδομένα που συλλέχθηκαν στο εμπειρικό μέρος. Τέλος, στο Κεφάλαιο 5 ακολουθούν η συζήτηση των αποτελεσμάτων της έρευνας και τα συμπεράσματα που προκύπτουν.

# Κεφάλαιο 1. Η Γνωστική Διαγνωστική Αξιολόγηση

## 1.1 Τι είναι η ΓΔΑ

Η Γνωστική Διαγνωστική Αξιολόγηση (ΓΔΑ) είναι ένα είδος εκπαιδευτικής αξιολόγησης που εξετάζει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά γνωρίσματα των εκπαιδευόμενων, για να αναδειχθούν οι δυνατότητες και οι αδυναμίες τους σε ένα διδακτικό/μαθησιακό πεδίο (Leighton & Gierl, 2007). Στο πλαίσιο της ΓΔΑ, οι εκπαιδευόμενοι κατατάσσονται σε ομάδες ή προφίλ βάσει της κατάκτησης αυτών των γνωρισμάτων, κάτι που αξιολογείται μέσω κατάλληλα σχεδιασμένων τεστ/δοκιμασιών (Mislevy, 1994). Τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα (cognitive attributes) είναι κεντρική έννοια στο πλαίσιο της ΓΔΑ και έχουν οριστεί ως οι ικανότητες επεξεργασίας που απαιτούνται για την επιτυχή ολοκλήρωση μιας εργασίας (Leighton & Gierl, 2007), οι υποτιθέμενες γνώσεις και νοητικές διεργασίες ή οι περιγραφές των διαδικασιών, ικανοτήτων και στρατηγικών που χρειάζεται ένας εξεταζόμενος για να λύσει ένα πρόβλημα (Tatsuoka, 2009). Επομένως, η ΓΔΑ διαφέρει από την παραδοσιακή αξιολόγηση, διότι επιχειρεί να συνδέσει τις γνώσεις, τις διαδικασίες και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές στην επίλυση προβλημάτων με τη βαθμολόγηση των δοκιμασιών (Leighton & Gierl, 2007). Με άλλα λόγια, οι απαντήσεις εξαρτώνται από τις νοητικές δομές και τις στρατηγικές των μαθητών.

Τα αποτελέσματα της ΓΔΑ δίνουν τη δυνατότητα λεπτομερούς ανατροφοδότησης για το επίπεδο κατανόησης των εκπαιδευόμενων, σε αντίθεση με την παραδοσιακή εκπαιδευτική αξιολόγηση, η οποία καταλήγει σε μια αθροιστική βαθμολογία (Leighton & Gierl, 2007). Η αξιοποίηση αυτής της ανατροφοδότησης μπορεί να συμβάλει στο σχεδιασμό της διδακτικής διαδικασίας και των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών.

Η αποτελεσματικότητα της ΓΔΑ έχει αναδειχθεί μέσα από έρευνες κυρίως στα μαθηματικά (Bradshaw et al., 2014· Bradshaw & Templin, 2014· Chen et al., 2010· Choi et al., 2015) και την κατανόηση κειμένου (Alderson et al., 2014· Lee & Sawaki, 2009), αλλά και σε άλλα πεδία όπως η μέτρηση ψυχικών διαταραχών (Templin & Henson, 2006).

Οι ρίζες της ΓΔΑ εντοπίζονται στα τέλη της δεκαετίας του '80, όταν Αμερικανοί ψυχολόγοι επιχείρησαν να συνδέσουν την εκπαιδευτική μέτρηση με τη γνωστική ψυχολογία. Αυτή η συνέργεια αποσκοπούσε στη βελτίωση της εγκυρότητας των δοκιμασιών και στην κατανόηση των γνωστικών διεργασιών των μαθητών. Η Embretson (1994) τόνισε τη σημασία της γνωστικής ψυχολογίας στη διερεύνηση της εγκυρότητας των δοκιμασιών. Η εργασία της στο πεδίο αυτό ενέπνευσε περαιτέρω έρευνες για τον καλύτερο σχεδιασμό των δοκιμασιών (Mislevy, 1994). Ο Messick (1994) τόνισε την ανάγκη για αλλαγή του παραδοσιακού μοντέλου, με τη δοκιμασία να βρίσκεται στο επίκεντρο, ενώ η Leighton (2007) υποστηρίζει ότι οι εκπαιδευτικές αξιολογήσεις πρέπει να επανασχεδιαστούν, λαμβάνοντας υπόψη τα γνωστικά μοντέλα.

Ωστόσο, η εξαγωγή έγκυρων συμπερασμάτων από τη ΓΔΑ απαιτεί αυστηρό έλεγχο της εγκυρότητας (Leighton, 2007). Οι κατασκευαστές διαγνωστικών δοκιμασιών πρέπει να ξεκινούν από ένα καλά θεμελιωμένο θεωρητικό πλαίσιο, να προβλέπουν τις πιθανές σχέσεις των αποτελεσμάτων και να διατυπώνουν εναλλακτικές υποθέσεις για την ερμηνεία στους (Messick, 1994). Αυτό, όμως, απαιτεί αφοσίωση, χρόνο και πόρους, συνιστώντας μια ριζική αλλαγή στην ανάπτυξη των δοκιμασιών.

## 1.2 Διαδικασία ανάπτυξης γνωστικών διαγνωστικών δοκιμασιών

Οι εκπαιδευτικές δοκιμασίες της ΓΔΑ βασίζονται σε θεωρίες μάθησης, συλλογιστικής και επίλυσης προβλήματος. Ο Nichols (1994) περιέγραψε πέντε βήματα για την ανάπτυξή τους:

1. **Καθορισμός του θεωρητικού πλαισίου**: Ανάπτυξη μοντέλου ή θεωρίας για τις νοητικές δομές και διεργασίες.
2. **Επιλογή/δημιουργία των ερωτημάτων**: Δημιουργία ερωτημάτων με βάση το μοντέλο ή τη θεωρία.
3. **Χορήγηση της δοκιμασίας**: Λεπτομέρειες για το περιβάλλον και το πλαίσιο διεξαγωγής της δοκιμασίας.
4. **Καθορισμός του τρόπου βαθμολόγησης**: Βαθμολόγηση των ερωτημάτων και απόδοση βαθμών.
5. **Αναθεώρηση της δοκιμασίας**: Επανεξέταση της δοκιμασίας για την αξιολόγηση και αναθεώρηση του μοντέλου ή της θεωρίας.

Επομένως, η ΓΔΑ απαιτεί μια αυστηρή διαδικασία ανάπτυξης και διασφάλισης της δομικής της εγκυρότητας για την παροχή αξιόπιστης ανατροφοδότησης και βελτίωσης της εκπαιδευτικής διαδικασίας.

## 1.3 Μοντέλα Γνωστικής Διαγνωστικής Αξιολόγησης

Τα περισσότερα ψυχομετρικά μοντέλα εκτιμούν τη θέση ενός ατόμου σε μια συνεχή λανθάνουσα μεταβλητή, όπως η μαθηματική ικανότητα. Ωστόσο, αυτά τα μοντέλα δεν διαφοροποιούν τα άτομα σε επιμέρους ικανότητες ούτε δίνουν πληροφορίες για πιθανές παρανοήσεις. Τα ψυχομετρικά μοντέλα της ΓΔΑ, γνωστά και ως Μοντέλα Γνωστικής Διαγνωστικής Αξιολόγησης (ΜΓΔ), μπορούν να ξεπεράσουν τους περιορισμούς των παραδοσιακών μοντέλων (Ma, de la Torre & Xu, 2023).

Τα Μοντέλα Γνωστικής Διαγνωστικής Αξιολόγησης (ΜΓΔ) είναι στην ουσία ψυχομετρικά μοντέλα, τα οποία σχεδιάστηκαν και αναπτύχθηκαν με σκοπό να δίνουν πληροφορίες σε αυτόν που τα δημιουργεί σχετικά με την κατάκτηση ή μη κάποιων συγκεκριμένων χαρακτηριστικών – δεξιοτήτων από τους εξεταζόμενους. Έτσι σημασία δεν έχει πόσες ερωτήσεις έχει απαντήσει σωστά ένας εξεταζόμενος, αλλά το ποιες από τις δεξιότητες έχει κατακτήσει μέσα από τις απαντήσεις που δίνει σε ένα κλειστού τύπου τεστ, παρέχοντας έτσι και ανατροφοδότηση στο δημιουργό του τεστ (von Davier & Lee, 2019).

Η διαδικασία με την οποία λειτουργούν τα ΜΓΔ μπορεί να περιγραφεί μέσα από τέσσερα διαδοχικά βήματα (Lee & Sawaki, 2009):

1) προσδιορισμό του συνόλου των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων που θα αξιολογηθούν σε μια δοκιμασία

2) προσδιορισμό των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων που εξεταστούν από κάθε μία ερώτηση της δοκιμασίας

3) καθορισμός του πίνακα **Q** (που θα αναλυθεί παρακάτω) και ο οποίος είναι αυτός που θα χρησιμοποιηθεί στην εφαρμογή του κατάλληλου ΜΓΔ για την κατηγοριοποίηση των εξεταζόμενων σε διάφορα προφίλ, ανάλογα με τις απαντήσεις που έχουν δώσει για να εξακριβωθεί ποιο/ποια από το/τα χαρακτηριστικό/ά γνώρισμα/σματα έχουν κατακτήσει

4) ανάλυση των δεδομένων που προκύπτουν από την εφαρμογή του ΜΓΔ για να διασαφηνιστεί ποιο/ποια χαρακτηριστικό/α γνώρισμα/σματα έχουν κατακτήσει και να επιπλέον να υπάρξει παροχή διαγνωστικής ανατροφοδότησης, τόσο στους εξεταζόμενους, όσο και στο δημιουργό της δοκιμασίας.

### 1.3.1 Βασικά Στοιχεία των Μοντέλων Γνωστικής Διαγνωστικής Αξιολόγησης

Τα βασικά στοιχεία των ΜΓΔ είναι ο πίνακας **Q** (Tatsuoka, 1985· Barnes, 2003) και ο πίνακας **Y** (Culpepper, 2019). Ο πίνακας **Q** μεγέθους $J \times K$, στις $J$ γραμμές του περιέχει το πλήθος των ερωτήσεων που περιλαμβάνει το τεστ – δοκιμασία και στις $K$ στήλες του το πλήθος των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων τα οποία μελετάει το τεστ – δοκιμασία στους εξεταζόμενους. Τα στοιχεία του πίνακα **Q** είναι τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα εξετάζει η κάθε ερώτηση του τεστ – δοκιμασίας. Για τα στοιχεία του πίνακα αυτού ισχύει ότι:

$$q_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{αν για την ερώτηση } j \text{ απαιτείται το χαρακτηριστικό γνώρισμα } k \\ 0, & \text{αν για την ερώτηση } j \text{ δεν απαιτείται το χαρακτηριστικό γνώρισμα } k \end{cases}$$

Η γενική μορφή που παίρνει ο πίνακας **Q** είναι η εξής:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{J1} & q_{J2} & \cdots & q_{JK} \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας **Y** μεγέθους $I \times J$ στις $I$ γραμμές του είναι το πλήθος των εξεταζόμενων του τεστ – δοκιμασίας και στις $J$ στήλες του το πλήθος των ερωτήσεων του τεστ – δοκιμασίας, όπως είδαμε και στον πίνακα **Q**. Τα στοιχεία του πίνακα **Y** είναι οι απαντήσεις που έδωσαν οι εξεταζόμενοι στις ερωτήσεις του τεστ – δοκιμασίας. Για τα στοιχεία του πίνακα αυτού ισχύει ότι:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν ο εξεταζόμενος } i \text{ έχει απαντήσει σωστά στην ερώτηση } j \\ 0, & \text{αν ο εξεταζόμενος } i \text{ δεν έχει απαντήσει σωστά στην ερώτηση } j \end{cases}$$

Η γενική μορφή που παίρνει ο πίνακας **Y** είναι η εξής:

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{J1} & y_{J2} & \cdots & y_{IJ} \end{bmatrix}.$$

Αφού οριστούν οι πίνακες **Q** και **Y**, έπειτα πρέπει να οριστούν και τα ιδανικά προφίλ στα οποία θα κατηγοριοποιηθούν οι εξεταζόμενοι με βάση τις απαντήσεις που έδωσαν. Έτσι σε κάθε ένα από *K* χαρακτηριστικά γνωρίσματα υπάρχουν δύο επιλογές (είτε να το εξετάζει μια ερώτηση, είτε να μην το εξετάζει, τότε τα συνολικά προφίλ είναι: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{\mathrm{K}}$. Αυτά λοιπόν τα συμβολίζονται με $\alpha_1, \cdot \alpha_2, \cdot \ldots \cdot \alpha_{\mathrm{M}}$, όπου $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{m}} = \left(\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, ..., \alpha_{mK}\right)$, ενώ το μέγεθος του $\alpha_m$ είναι *K*, όσο δηλαδή και το πλήθος των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων που εξετάζονται. Τα στοιχεία $\alpha_{mk}$ του κάθε ιδανικού προφίλ $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{m}}$ είναι δίτιμες μεταβλητές $\left(0,1\right)$ και ορίζονται ως εξής:

$$a_{mk} = \begin{cases} 1, & \text{αν το ιδανικό προφίλ } m \text{ απαιτεί το χαρακτηριστικό γνώρισμα } k \\ 0, & \text{αν το ιδανικό προφίλ } m \text{ δεν απαιτεί το χαρακτηριστικό γνώρισμα } k \end{cases}.$$

Η γενική μορφή που παίρνουν τα ιδανικά προφίλ $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{m}}$ είναι η εξής:

$\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1}} = \left(0,0,...,0\right)$, $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{2}} = \left(1,0,...,0\right)$, $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{3}} = \left(0,1,...,0\right)$, …, $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{M}} = \left(1,1,...,1\right)$.

**Ο πίνακας Q**

Ο πίνακας **Q** είναι το πιο σημαντικό στοιχείο, προκειμένου να λειτουργήσει ένα ΜΓΔ. Έτσι ενώ ο πίνακας **Y** διαμορφώνεται από τους εξεταζόμενους και το τι έχουν απαντήσει στα ερωτήματα του τεστ, ο πίνακας **Q** είναι αυτός που διαμορφώνεται από τους δημιουργούς του τεστ. Αυτό οδηγεί τη δημιουργία των πινάκων **Q** να ανατίθεται σε ομάδες ειδικών πάνω στο συγκεκριμένο αντικείμενο. Όσον αφορά τις προδιαγραφές ενός πίνακα **Q**, τα λάθη που γίνονται οδηγούν είτε υπό-προσδιορισμό του πίνακα **Q**, είτε σε υπέρ-προσδιορισμό του. Στην πρώτη περίπτωση, του υπό-προσδιορισμού, στα διανύσματα κάθε γραμμής του πίνακα **Q**, αρκετές εγγραφές με '1' καταχωρούνται ως '0', κάτι το οποίο οδηγεί στο να εκτιμώνται λιγότερες παράμετροι του μοντέλου για το υπό εξέταση αντικείμενο. Στη δεύτερη περίπτωση, του υπέρ-προσδιορισμού, στα διανύσματα κάθε γραμμής του πίνακα **Q**, αρκετές εγγραφές με '0' καταχωρούνται ως '1', κάτι το οποίο οδηγεί στο να προσμετρώνται αδικαιολόγητα κάποιοι παράμετροι στο μοντέλο που αντιπροσωπεύουν καθαρά θόρυβο. Έτσι ένας μη οριοθετημένος σωστά πίνακας **Q** θα μειώσει δραματικά την καταχώρηση των εξεταζόμενων στα ιδανικά προφίλ $\alpha_m$ (Kunina-Habenicht, Rupp & Wilhelm., 2012).

Το σχεδιασμό και την μορφή ενός πίνακα **Q** την όρισε ο Tatsuoka (1985), και επίσης αναφέρθηκε στο ότι ο πίνακας αυτός πρέπει να είναι πλήρης για να δουλέψουν τα ΜΓΔ. Στην πληρότητα του πίνακα **Q** αναφέρθηκε και οι Chiu, Douglas & Li (2009), όπου έδωσαν τον ορισμό αυτής. Σύμφωνα με αυτούς, πλήρης είναι ένας πίνακας **Q** αν μέσω αυτού μπορεί να αναγνωριστούν όλα τα πιθανά μοτίβα ιδανικών απαντήσεων σε μορφή διανυσματική. Χαρακτηριστικά αναφέρει ότι η πληρότητα αναφέρεται στην ικανότητα μιας εξέτασης να μπορεί να προσδιορίσει και να διαχωρίσει τα πιθανά μοτίβα ιδανικών απαντήσεων μεταξύ με την αλγεβρική έννοια του όρου. Προκειμένου να μπορεί ένας πίνακας **Q** θα πρέπει να ικανοποιεί τους παρακάτω δύο κανόνες πληρότητας (Köhn & Chiu, 2018):

**Κανόνας 1:** Ένας πίνακας **Q** μεγέθους $J \times K$ είναι σίγουρα πλήρης για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε ένα ΜΓΔ αν περιέχει μεταξύ των $J$ γραμμών του τον μοναδιαίο πίνακα τουλάχιστον μία φορά.

Ο κανόνας 1 στην ουσία επισημαίνει ότι θα πρέπει να υπάρχει μέσα στον πίνακα **Q** τουλάχιστον μία ερώτηση η οποία θα εξετάζει ένα και μόνο ένα από τα $K$ χαρακτηριστικά γνωρίσματα που εξετάζονται ξεχωριστά από τα άλλα. Έτσι η μορφή που πρέπει να παίρνει ένα πίνακας **Q** είναι η παρακάτω:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1K} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{J1} & q_{J2} & \cdots & q_{JK} \end{bmatrix}$$

**Κανόνας 2:** Αν ένας πίνακας **Q** μεγέθους $J \times K$ ενός τεστ δεν είναι πλήρους βαθμού $K$, δηλαδή αν ο πίνακας **Q** δεν περιέχει $K$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα **q**, τότε ο **Q** δεν είναι πλήρης.

Ο βαθμός ενός πίνακα ορίζεται από το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ή στηλών που διαθέτει, καθώς ισχύει η σχέση $rank(Q) \leq \min\left(J, K\right)$. Από τις δύο όμως μεταβλητές πάντα μικρότερη είναι αυτή των στηλών *K* των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων, καθώς οι γραμμές *J* των ερωτήσεων είναι πάντα περισσότερες (υπάρχουν ερωτήσεις που περιλαμβάνουν μόνο ένα από τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα *K* και υπάρχουν και ερωτήσεις που περιλαμβάνουν και συνδυασμούς αυτών, για την πληρότητα του πίνακα **Q**).

Η πληρότητα του πίνακα **Q** είναι αποκλειστική ευθύνη του δημιουργού του τεστ και είναι και η βασική προϋπόθεση προκειμένου να δουλέψουν, τα διάφορα ΜΓΔ. Στη βιβλιογραφία υπάρχουν παραδείγματα δημιουργίας ενός πλήρους πίνακα **Q**, αλλά η πλειοψηφία αφορά την εφαρμογή τους στο μοντέλο DINA (Deterministic Input Noisy Output “AND” gate) και σε αξιολογήσεις μεγάλης κλίμακας με μεγάλο αριθμό συμμετεχόντων και με ερωτήσεις που καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα περιεχομένου και έτσι δεν είναι εύκολο εφαρμόσιμο. Αυτές οι εφαρμογές είναι καλές για τη διαμόρφωση ενός προγράμματος σπουδών μέσω των αποτελεσμάτων, αλλά όχι για την εξαγωγή συμπερασμάτων για ένα συγκεκριμένο μέρος της ύλης ενός σχολικού εγχειριδίου. Η δημιουργία και εφαρμογή επίσης του πίνακα **Q** στηρίζεται στην Άλγεβρα Boole και όχι στη Γραμμική Άλγεβρα, κάτι που αυξάνει επίσης το βαθμό δυσκολίας δημιουργίας ενός πλήρους πίνακα **Q** υπό κάποιους κανόνες (Xu & Shang, 2018· Chen, Culpepper, Chen & Douglas, 2018· Ren, Xu, Lin, Zhang & Yang, 2021).

**Τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα**

Στον πίνακα **Q** οι *K* στήλες του αναφέρονται στα χαρακτηριστικά γνωρίσματα τα οποία εξετάζει μια δοκιμασία – τεστ. Τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα αυτά υπόκεινται σε μια ιεραρχία. Όταν γίνεται αναφορά σε ιεραρχία χαρακτηριστικών γνωρισμάτων τότε αναφερόμαστε σε καταστάσεις στις οποίες εξετάζεται η κυριαρχία ενός χαρακτηριστικού ως αναγκαία προϋπόθεση για την κυριαρχία ενός άλλου. Κάτι τέτοιο είναι συνηθισμένο στην εκπαιδευτική διαδικασία, καθώς όσο προχωρά η διαδικασία της διδασκαλίας οι μαθητές γνωρίζουν νέες έννοιες και δεξιότητες, οποίες συχνά βασίζονται η μία στην άλλη και σχετίζονται μεταξύ τους (Sternberg & Ben-Zeev, 1996). Έτσι, οι περιπτώσεις ιεραρχίας των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων είναι οι εξής (Tu, Wang, Cai, Douglas & Chang, 2019):

• Ανεξάρτητη σχέση, στην οποία όλα τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα δεν έχουν κάποια σχέση μεταξύ τους και το καθένα υπάρχει αυτόνομα. Η ανεξαρτησία εδώ σαν έννοια δεν έχει κάποια σχέση με τη στατιστική ανεξαρτησία.

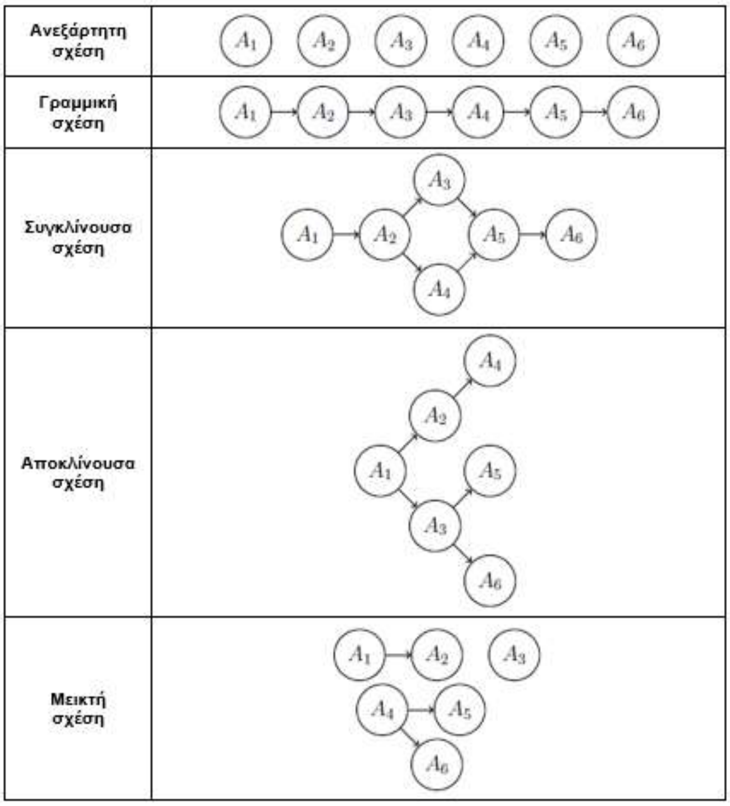
• Γραμμική σχέση, στην οποία τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα διατάσσονται ξεκινώντας από ένα και μετά όλα τα υπόλοιπα ακολουθούν σε σειρά, έτσι ώστε το πρώτο να είναι το απαραίτητο ώστε να υπάρχει η σχέση μεταξύ τους και από εκεί και πέρα κάθε επόμενο εξαρτάται από το προηγούμενο.

• Συγκλίνουσα σχέση, στην οποία ξεκινώντας από ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα ως βασικό, δημιουργούνται δύο διαφορετικές διαδρομές τις οποίες κατατάσσονται τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά γνωρίσματα από το πρώτο μέχρι το τελευταίο. Έτσι εδώ ένα χαρακτηριστικό θα μπορούσε να έχει πολλούς διαφορετικούς προδρόμους.

• Αποκλίνουσα σχέση, στην οποία υπάρχει πάλι ένα βασικό χαρακτηριστικό γνώρισμα και συναντούμε πολλά διαφορετικά διακριτά κομμάτια, τα οποία όμως όλα βασίζονται στο αρχικό, αλλά δημιουργούνται διαφορετικές διαδρομές σύνδεσης μεταξύ τους.

• Μεικτή σχέση, στην οποία υπάρχουν δύο διαφορετικά σύνολα στα οποία τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα έχουν στο κάθε σύνολο τη δική τους ξεχωριστή σχέση, αλλά τα δύο σύνολα χαρακτηριστικών γνωρισμάτων είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Στις τρεις σχέσεις μεταξύ των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων (γραμμική, συγκλίνουσα και αποκλίνουσα) αναφέρθηκαν οι Leighton, Gierl & Hunka (2004) και Rupp, Templin & Henson (2010).Παρακάτω ακολουθεί ένα σχήμα στο οποίο φαίνονται όλες οι παραπάνω σχέσεις στην περίπτωση που υπάρχουν έξι χαρακτηριστικά γνωρίσματα.




***Εικόνα 1.*** *Σχέσεις μεταξύ των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων*

# Κεφάλαιο 2. Μοντέλα Γνωστικής Διαγνωστικής Αξιολόγησης

## 2.1 Παραμετρικά Μοντέλα

Τα ΜΓΔ χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, τα παραμετρικά και τα μη παραμετρικά. Παρόλο που η συγκεκριμένη εργασία αφορά μη παραμετρικά μοντέλα, εντούτοις θα γίνει μια αναφορά και στα παραμετρικά, επειδή αφενός είναι τα περισσότερα, αφετέρου για λόγους πληρότητας της εργασίας αυτής. Ανάμεσα στις δύο οικογένειες μοντέλων υπάρχει ευρύ χάσμα και η σχέση μεταξύ τους δεν έχει συζητηθεί γενικά στη βιβλιογραφία. Οι παραμετρικές μέθοδοι γνωστικής διάγνωσης μοντελοποιούν άμεσα τις συναρτήσεις απόκρισης στοιχείων, υπό ορισμένες παραδοχές, ανάλογα με το μοντέλο. Στα περισσότερα ΜΓΔ οι πιθανότητες απόκρισης στοιχείων οι πιθανότητες απόκρισης στοιχείων μοντελοποιούνται ως συναρτήσεις των παραμέτρων αντικειμένων και των λανθάνουσας ιδιότητας των υποκειμένων. Ειδικότερα σε ένα ΜΓΔ με $J$ αντικείμενα και $K$ χαρακτηριστικά γνωρίσματα, δύο μεταβλητές ενδιαφέρουν. Η μία είναι οι παρατηρούμενες απαντήσεις των $J$ αντικειμένων $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_J)$ και η άλλη είναι των προφίλ των $K$ λανθανουσών χαρακτηριστικών ιδιοτήτων $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_K)$. Έτσι δημιουργούνται $2^K$ πιθανά διαφορετικά προφίλ. Τα κυριότερα παραμετρικά μοντέλα που συναντούμε στη βιβλιογραφία είναι το DINA (Deterministic Input Noisy “AND” gate) των Junker & Sijtsma (2001), το DINO (Deterministic Input Noisy “OR” gate) των Templin & Henson (2006), το RRUM (Reduced Reparameterized Unified Model) του Hartz (2002), to GDM (General Diagnostic Model) του von Davier (2005), το LCDM (Log–Linear Cognitive Diagnostic Model) των Henson, Templin & Willse (2009) και το GDINA (Generalized Deterministic Input Noisy “AND” gate) του de la Torre (2011).

Τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα παραμετρικά ΜΓΔ, όπως είναι το DINA (Junker και Sijtsma, 2001), το DINO (Templin & Henson, 2006) και το GDINA (de la Torre, 2011) έχουν χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση δεδομένων από διάφορους τομείς, όπως είναι τα μαθηματικά, για να διαπιστωθεί η κατοχή γνώσεων, δεξιοτήτων και ικανοτήτων σε αυτά από τους μαθητές σε αμερικάνικα σχολεία (Rupp et al., 2010), ικανότητες στη γλώσσα, όπως είναι η κατανόηση κειμένου, η κριτική ικανότητα και το λεξιλόγιο (Bradshaw & Templin, 2014) και τις φυσικές επιστήμες, συγκεκριμένα στη φυσική στον τομέα του ηλεκτρισμού και στα χαρακτηριστικά αυτού (Anamezie & Nnadi 2019), με σκοπό να εντοπιστούν οι αδυναμίες και τα δυνατά σημεία των μαθητών.

Στα παραμετρικά μοντέλα η πιθανότητα $p$ να βρει ο εξεταζόμενος τη σωστή απάντηση, επηρεάζεται και από δύο παραμέτρους:

• την παράμετρο guessing ($g$), κατά την οποία ο εξεταζόμενος βρίσκει (μαντεύει) τη σωστή απάντηση τυχαία, δηλαδή χωρίς να τη γνωρίζει

• την παράμετρο slipping ($s$), κατά την οποία ο εξεταζόμενος επιλέγει μια λανθασμένη απάντηση, ενώ γνωρίζει τη σωστή απάντηση αλλά αυτή του διαφεύγει (von Davier και Lee, 2019).

Στα παραμετρικά μοντέλα που θα δούμε παρακάτω είναι μοντέλα τα οποία απευθύνονται σε δεδομένα και δείγματα μεγάλης κλίμακος, τα οποία δεν μπορούν να εφαρμοστούν πρακτικά σε ένα δείγμα μεγέθους μιας σχολικής τάξης (DiBello et al., 2007).

Οι παραμετρικές μέθοδοι μοντελοποιούν άμεσα τις συναρτήσεις απόκρισης στοιχείων υπό ορισμένες παραδοχές του μοντέλου. Στα παραμετρικά ΜΓΔ οι πιθανότητες απόκρισης στοιχείων μοντελοποιούνται ως συναρτήσεις των παραμέτρων αντικείμενων και των λανθάνουσας ιδιότητας των υποκειμένων. Δύο είναι οι μεταβλητές που παρουσιάζουν ενδιαφέρον: η μία είναι οι παρατηρούμενες απαντήσεις των $J$ αντικειμένων $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_J) \in [0,1]^J$ και η άλλη είναι τα ιδανικά προφίλ των Κ λανθανουσών ιδιοτήτων $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_K) \in [0,1]^K$. Έτσι δημιουργούνται $2^K$ ιδανικά προφίλ (Ma et al., 2023).

Ακολουθεί μια αναφορά στα τρία σημαντικότερα παραμετρικά μοντέλα, τα οποία όπως είχαμε αναφέρει χρησιμοποιήθηκαν στην εκπαίδευση.

### 2.1.1 Το Μοντέλο DINA

Το παραμετρικό μοντέλο DINA (Deterministic Input Noisy Output “AND” gate) δημιουργήθηκε από τους Junker & Sijtsma (2001). Ανήκει στην κατηγορία των μη αντισταθμιστικών (noncompensatory) ή συνδετικών (conjunctive) μοντέλων, που σημαίνει ότι η έλλειψη του ενός χαρακτηριστικού δεν μπορεί να αντισταθμιστεί από την κυριαρχία των άλλων χαρακτηριστικών, άρα είναι απαραίτητα όλα τα χαρακτηριστικά για την κυριαρχία του αντικειμένου (Chiu & Douglas, 2013· Arican & Kuzu, 2020). Η συνάρτηση του μοντέλου δίνεται από τον τύπο:

$$P\left(Y_{ij}=1|\alpha_{\iota}\right)=\left(1-s_{j}\right)^{n_{ij}}\cdot g_{j}^{\left(1-n_{ij}\right)},$$

όπου για κάθε $i$ υποκείμενο, $s_j = P\left(Y_{ij}=0|n_{ij}=1\right)$ και $g_j = P\left(Y_{ij}=1|n_{ij}=0\right)$ είναι οι πιθανότητες να χάσει κάποιος τη σωστή απάντηση ενώ τη γνωρίζει και να μαντέψει τη σωστή απάντηση, ενώ δεν τη γνωρίζει αντίστοιχα για το $j$ αντικείμενο. Η παράμετρος $n_{ij}$ είναι η ιδανική απάντηση η οποία συσχετίζει το μοτίβο χαρακτηριστικών που τοποθετείται στο $i$ υποκείμενο και τα στοιχεία του πίνακα **Q** είναι σύμφωνα με τον τύπο:

$$n_{ij}=\prod_{k=1}^{K}\alpha_{ik}^{q_{jk}}.$$

Το ιδανικό μοτίβο απόκρισης $n_{ij}$ δείχνει αν το $i$ υποκείμενο κατέχει όλα τα χαρακτηριστικά που χρειάζονται για να απαντηθεί ένα ιδιαίτερο αντικείμενο (Chiu & Douglas, 2013). Οπότε στο μοντέλο αυτό για να κατηγοριοποιηθεί κάποιος σε ένα προφίλ πρέπει να κατέχει περισσότερα του ενός χαρακτηριστικά γνωρίσματα.

### 2.1.2 Το Μοντέλο DINO

Το παραμετρικό μοντέλο DINO (Deterministic Input Noisy Output “OR” gate) δημιουργήθηκε από τους Templin & Henson (2006). Ανήκει στην κατηγορία των αντισταθμιστικών (compensatory) ή διαζευκτικών (disjunctive) μοντέλων, που σημαίνει ότι η κυριαρχία ενός χαρακτηριστικού είναι απαραίτητη για να επιτευχθεί η σωστή απάντηση, άρα αρκεί ένα χαρακτηριστικό και μόνο για την κυριαρχία του αντικειμένου (Chiu & Douglas, 2013· Arican & Kuzu, 2020). Η συνάρτηση του μοντέλου δίνεται από τον τύπο:

$$P\left(Y_{ij}=1|\alpha_{\iota}\right)=g_{j}^{\left(1-\omega_{ij}\right)}\cdot\left(1-s_{j}\right)^{\omega_{ij}},$$

όπου για κάθε $i$ υποκείμενο, $s_j = P\left(Y_{ij}=0|\omega_{ij}=1\right)$ και $g_j = P\left(Y_{ij}=1|\omega_{ij}=0\right)$ είναι οι πιθανότητες να χάσει κάποιος τη σωστή απάντηση ενώ τη γνωρίζει και να μαντέψει τη σωστή απάντηση, ενώ δεν τη γνωρίζει αντίστοιχα για το j αντικείμενο. Η παράμετρος $\omega_{ij}$ είναι η ιδανική απάντηση η οποία συσχετίζει το μοτίβο χαρακτηριστικών που τοποθετείται στο *i* υποκείμενο και τα στοιχεία του πίνακα **Q** είναι σύμφωνα με τον τύπο:

$$\omega_{ij} = 1 - \prod_{k=1}^{K} \left(1 - \alpha_{ik}^{q_{jk}}\right).$$

Το ιδανικό μοτίβο απόκρισης $\omega_{ij}$ δείχνει αν το *i* υποκείμενο κατέχει όλα τα χαρακτηριστικά που χρειάζονται για να απαντηθεί ένα ιδιαίτερο αντικείμενο (Chiu & Douglas, 2013). Οπότε στο μοντέλο αυτό για να κατηγοριοποιηθεί κάποιος σε ένα προφίλ αρκεί να κατέχει ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα και όχι όλα τα απαιτούμενα χαρακτηριστικά γνωρίσματα.

### 2.1.3 Το Μοντέλο GDINA

Το παραμετρικό μοντέλο GDINA (Generalized Deterministic Input Noisy Output “AND” gate) δημιουργήθηκε από τον de la Torre (2011). Αποτελεί μια γενίκευση του παραμετρικού μοντέλου DINA και συνδυάζει στοιχεία τόσο από την κατηγορία των μη αντισταθμιστικών (noncompensatory) ή συνδετικών (conjunctive) μοντέλων, όσο και από αυτήν των αντισταθμιστικών (compensatory) ή διαζευκτικών (disjunctive) μοντέλων (Chiu & Douglas, 2013· Arican & Kuzu, 2020).

Το παραμετρικό μοντέλο GDINA απαιτεί και αυτό έναν πίνακα Q όπως και τα προηγούμενα μοντέλα DINO και DINA και δημιουργεί $2^{K_j^*}$ κλάσεις, όπου το $2^{K_j^*}$ υπολογίζεται από τη σχέση

$$2^{K_j^*} = \sum_{k=1}^{K} q_{jk}$$

και αυτό αναπαριστά τον αριθμό των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων που απαιτούνται για το ερώτημα *j* που μελετάμε. Για ευκολία συμβολισμού και χωρίς βλάβη της γενικότητας, ορίζουμε ως τα πρώτα $2^{K_j^*}$ χαρακτηριστικά γνωρίσματα ως τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα που απαιτούνται για το ερώτημα *j* και $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{ij}}^{*}$ το διάνυσμα με τα μειωμένα χαρακτηριστικά γνωρίσματα, του οποίου τα στοιχεία είναι τα απαιτούμενα χαρακτηριστικά γνωρίσματα που απαιτούνται για το ερώτημα *j*. Για παράδειγμα, αν απαιτούνται μόνο δύο χαρακτηριστικά γνωρίσματα για το ερώτημα *j*, το διάνυσμα των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων $\boldsymbol{\alpha}_{ij}$ μειώνεται στο $\boldsymbol{\alpha}^{*}_{\mathbf{ij}} = \left(\alpha_{ij1}, \alpha_{ij2}\right)'$. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το διάνυσμα των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων να μειωθεί στο $\boldsymbol{\alpha}^{*}_{\mathbf{ij}} = \left(\alpha_{ij1}, \alpha_{ij2}, \ldots, \alpha_{ijK_j^*}\right)'$ αντί για πλήρες διάνυσμα των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{ij}} = \left(\alpha_{ij1}, \alpha_{ij2}, \ldots, \alpha_{ijK}\right)'$. Η μείωση αυτή στο διάνυσμα των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων επιφέρει και την μείωση του αρχικού αριθμού των κλάσεων από $2^K$ σε $2^{K_j^*}$. Τέλος, η πιθανότητα ένας εξεταζόμενος που ανήκει στο προφίλ χαρακτηριστικών γνωρισμάτων $\boldsymbol{\alpha}^{*}_{\mathbf{ij}}$ να απαντήσει σωστά στην ερώτηση *j* είναι

$$P\left(X_j = 1 \mid \alpha^*_{ij}\right) = P\left(\alpha^*_{ij}\right).$$

Η παραπάνω πιθανότητα υπολογίζεται με τη βοήθεια των επιδράσεων που έχουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά γνωρίσματα και οι αλληλεπιδράσεων αυτών μεταξύ τους από τη σχέση

$$P\left(\alpha^*_{ij}\right) = \delta_{j0} + \sum_{k=1}^{K_j^*} \delta_{jk}\alpha_{ik} + \sum_{k'=k+1}^{K_j^*} \sum_{k=1}^{K_j^*-1} \delta_{jkk'}\alpha_{ik}\alpha_{ik'} + \delta_{j12\ldots K_j^*} \prod_{k=1}^{K_j^*} \alpha_{ik} \ ,$$

όπου

$\delta_{j0}$ είναι η σταθερά του ερωτήματος *j*

$\delta_{jk}$ είναι η κύρια επίδραση από το χαρακτηριστικό γνώρισμα $\alpha_k$

$\delta_{jkk'}$ είναι η αλληλεπίδραση μεταξύ των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων $\alpha_k$

και $\alpha_{k'}$

$\delta_{j12\ldots K_j^*}$ είναι η αλληλεπίδραση μεταξύ των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων

$\alpha_1, \ldots, \alpha_{K_j^*}$

Για τις παραπάνω παραμέτρους μπορούμε να πούμε ότι: η παράμετρος $\delta_0$ αναπαριστά τη βασική πιθανότητα (για παράδειγμα την πιθανότητα μιας σωστής απάντησης, όταν ο εξεταζόμενος δεν κατέχει κανένα από τα απαραίτητα χαρακτηριστικά γνωρίσματα που απαιτούνται), $\delta_k$ είναι η μεταβολή στην πιθανότητα εύρεσης της σωστής απάντησης, όταν ο εξεταζόμενος γνωρίζει ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα (π.χ. στο $\alpha_k$), $\delta_{kk'}$ είναι μια αλληλεπίδραση πρώτης τάξης, η οποία είναι συνέπεια της αλλαγής στην πιθανότητα εύρεσης της σωστής απάντησης που προκύπτει από τη γνώση από μεριάς του εξεταζόμενου των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων $\alpha_k$ και $\alpha_{k'}$, το οποίο υπερισχύει της κυριαρχίας των δύο αυτών χαρακτηριστικών γνωρισμάτων και $\delta_{j12\ldots K_j^*}$ αναπαριστά την αλλαγή στην πιθανότητα εύρεσης της σωστής απάντησης από τον εξεταζόμενο ως συνέπεια της γνώσης όλων των απαιτούμενων χαρακτηριστικών γνωρισμάτων και φυσικά υπερισχύει της κυριαρχίας όλων αυτών των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων καθώς και των οποιονδήποτε αλληλεπιδράσεων έχουν αυτά μεταξύ τους, είτε είναι ψηλής ή χαμηλής τάξης (de la Torre, 2011).

## 2.2 Μη Παραμετρικά Μοντέλα

Οι πιο διαδεδομένες μη παραμετρικές προσεγγίσεις είναι τέσσερις: η μέθοδος του Πίνακα Ικανοτήτων (Capability Matrix – CM, Ayers, Nugent & Dean, 2008), η μέθοδος του Πίνακα Αθροιστικών Σκορ (Sum score Matrix – SsM, Chiu et al., 2009), η μέθοδος Μη Παραμετρικής Κατηγοριοποίησης (Non-Parametric Classification – NPC, Chiu & Douglas, 2013) και η μέθοδος Γενικευμένης Μη Παραμετρικής Κατηγοριοποίησης (General Non–Parametric Classification – GNPC, Chiu et al., 2018). Τα μη παραμετρικά μοντέλα, σε αντίθεση με τα παραμετρικά, δεν μοντελοποιούν τις συναρτήσεις απόκρισης των υποκειμένων σε κάθε ερώτημα, αλλά ομαδοποιούν τα υποκείμενα με βάση κάποιο κριτήριο απόστασης των απαντήσεων μεταξύ των υποκειμένων (Ma et al., 2023). Επιπλέον, οι μη παραμετρικές μέθοδοι μπορούν να εφαρμοστούν ακόμη κι όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό, όπως το πλήθος των μαθητών που συναντάμε σε μια σχολική τάξη. Αντίθετα, τα παραμετρικά μοντέλα είναι αποτελεσματικά μόνο σε μεγάλα δείγματα (άνω του 500) διότι οι τεχνικές εκτίμησης των παραμέτρων αυτών των μοντέλων δεν δίνουν αξιόπιστα αποτελέσματα για μικρά μεγέθη δείγματος (Chiu et al., 2018).

### 2.2.1 Η μέθοδος του Πίνακα Ικανοτήτων

Η μέθοδος του Πίνακα Ικανοτήτων (CM) των Ayers et al. (2008) ήταν ο πρώτος αλγόριθμος κατηγοριοποίησης που εμφανίστηκε στη βιβλιογραφία. Είναι μια μέθοδος που λαμβάνει υπόψη το ενδεχόμενο ένας μαθητής – εξεταζόμενος να μην έχει απαντήσει σε μια ερώτηση είτε από δική του αμέλεια, είτε από σκοπιμότητα.

Σε αυτήν την μέθοδο εισάγεται ένας πίνακας ικανοτήτων που δείχνει για κάθε μαθητή – εξεταζόμενο τι έχει επιτύχει σε όλες τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα στα οποία εξετάστηκε εξάγοντας ένα τελικό σκορ. Στα χαρακτηριστικά αυτής της μεθόδου είναι ότι εφαρμόζονται μέθοδοι που χωρίζουν τους μαθητές σε συστάδες με παρόμοια προφίλ, λαμβάνοντας υπόψη τη συνολική τους βαθμολογία. Για το τρόπο που δουλεύει η συγκεκριμένη μέθοδος έχουμε:

Έστω ότι έχουμε τον πίνακα **Q** μεγέθους $J \times K$, με $q_{jk} = 1$, αν η ερώτηση $j$ εξετάζει το χαρακτηριστικό γνώρισμα $k$ και 0 αν δεν την εξετάζει, με $J$ να είναι ο συνολικός αριθμός των ερωτήσεων και $K$ να είναι το σύνολο των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων. Επίσης έχουμε τον πίνακα **Y** μεγέθους $I \times J$, στα στοιχεία του οποίου φαίνεται αν ο μαθητής – εξεταζόμενος $i$ έχει απαντήσει σωστά στην ερώτηση $j$, με $I$ να είναι το σύνολο των μαθητών – εξεταζόμενων. Αν ο μαθητής δεν έχει απαντήσει την ερώτηση $j$, τότε η τιμή $y_{ij} = NA$, δηλαδή ελλείπουσα τιμή. Ο δείκτης $I_{y_{ij} \neq NA} = 0$ εκφράζει την τιμή που λείπει. Αν ο μαθητής $i$ απαντήσει σωστά στην ερώτηση $j$ $\left(I_{y_{ij} \neq NA} = 1\right)$, τότε $y_{ij} = 1$, αν απαντήσει σωστά ή 0 αν απαντήσει λανθασμένα.

Για να ομαδοποιήσουμε τους μαθητές σε ομάδες προφίλ, ανάλογα με τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα που έχουν κατακτήσει, ορίζουμε έναν νέο πίνακα, τον Πίνακα Ικανοτήτων B μεγέθους $I \times K$, όπου τα στοιχεία του $b_{ik}$ είναι το κλάσμα των σωστών απαντημένων ερωτήσεων που περιέχουν το χαρακτηριστικό γνώρισμα $k$ στον μαθητή $i$. Εάν ένας μαθητής $i$ δεν έχει απαντήσει καμία ερώτηση με το χαρακτηριστικό γνώρισμα $k$, τότε καταχωρείται η τιμή 0,5, η οποία είναι μια τυπική πιθανότητα κατάκτησης του συγκεκριμένου χαρακτηριστικού γνωρίσματος. Έτσι, αν $\sum_{j=1}^{J} I_{y_{ij} \neq NA} \cdot q_{jk} = 0$, $b_{ik} = 0,5$, αλλιώς,

$$b_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^{J} I_{y_{ij} \neq NA} \cdot y_{ij} \cdot q_{jk}}{\sum_{j=1}^{J} I_{y_{ij} \neq NA} \cdot q_{jk}}$$, όπου $i = 1, 2, ..., I$ και $k = 1, 2, ..., K$, με $y_{ij}$ και $q_{jk}$ είναι τα στοιχεία των πινάκων **Y** και **Q** αντίστοιχα.

Η ομαδοποίηση των προφίλ σε συστάδες μπορεί να γίνει με δύο τρόπους: με την μέθοδο k-means και με μία μέθοδο που βασίζεται στη θεωρία πιθανοτήτων (model-based clustering). Η μέθοδος k-means ελαχιστοποιεί την Ευκλείδεια απόσταση των υποκειμένων εντός κάθε συστάδας και μεγιστοποιεί την απόσταση μεταξύ των συστάδων. Η δεύτερη μέθοδος ομαδοποιεί τα υποκείμενα με την υπόθεση ότι έχουν παραχθεί από ένα μείγμα κατανομών Gauss (Ayers et al., 2008).

### 2.2.2 Η μέθοδος του Πίνακα Αθροιστικού Σκορ

Η επόμενη μέθοδος που εμφανίστηκε είναι αυτή του Πίνακα των Αθροιστικών Σκορ (SsM) των Chiu et al. (2009). Στη μέθοδο αυτή κατασκευάζεται ένα διάνυσμα αθροιστικών σκορ (sum-scores) με τον εξής τρόπο:

Έστω για το *i* υποκείμενο το διάνυσμα $w_i = \left(w_{i1}, w_{i2}, ..., w_{ik}\right)$ ορίζεται ως το διάνυσμα των αθροιστικών σκορ για το *k* στοιχείο, οπότε $w_{ik} = \sum_{j=1}^{J} y_{ij} q_{jk}$ .

Επομένως τα στοιχεία του πίνακα **W** είναι τα αθροιστικά σκορ για τα αντικείμενα που απαντούνε στο κάθε χαρακτηριστικό γνώρισμα. Επειδή πολλά αντικείμενα θα απαιτούν περισσότερα από ένα χαρακτηριστικά γνωρίσματα, κάποια αντικείμενα θα συνεισφέρουν σε περισσότερα από ένα στοιχεία του πίνακα **W**.

Ο πίνακας **W** θα χρησιμοποιηθεί για να γίνει η ανάλυση κατά συστάδες των προφίλ για την κατάταξή τους, λαμβάνοντας υπόψη τα $2^K$ προφίλ που δημιουργούνται θεωρητικά, όπως και στα παραμετρικά ΜΓΔ. Οι μέθοδοι για την ανάλυση των προφίλ σε συστάδες που επιλέχθηκαν είναι των K – μέσων τιμών (k-means) του MacQueen (1967) και η ιεραρχική συγκεντρωτική ανάλυση κατά συστάδες του Hartigan (1975). Η πρώτη μέθοδος έχει ως κεντρική ιδέα να εκτιμήσει τα κέντρα των συστάδων με βάση τον αριθμό των συστάδων που είναι προκαθορισμένα. Χρησιμοποιείται μια μέτρηση για να τοποθετηθούν τα δεδομένα σε κάθε συστάδα και αυτή συνήθως είναι η Ευκλείδεια απόσταση. Η δεύτερη μέθοδος της ιεραρχικής κατάταξης των συστάδων δεν λαμβάνει υπόψη μόνο τις αποστάσεις μεταξύ των δεδομένων, αλλά και τις αποστάσεις μεταξύ των συστάδων. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται ένα δεντροδιάγραμμα στο οποίο δομούνται οι συστάδες (Chiu et al., 2009).

Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε δύο μη παραμετρικά ΜΓΔ, που θεωρούνται αποτελεσματικά σύμφωνα με τη βιβλιογραφία: τη μέθοδο της μη παραμετρικής κατηγοριοποίησης και τη μέθοδο της γενικευμένης μη παραμετρικής κατηγοριοποίησης.

Έστω $\boldsymbol{n} = \left(n_1, ..., n_J\right)$ είναι το ιδανικό προφίλ απαντήσεων, όπου $n_j$ είναι το ιδανικό προφίλ απαντήσεων του εξεταζόμενου *j*. Το διάνυσμα **n** εξαρτάται μόνο από τον πίνακα **Q** και είναι μια συνάρτηση του προφίλ απαντήσεων **α**. Αν μελετάμε *K* χαρακτηριστικά γνωρίσματα τότε δημιουργούνται $2^K$ ιδανικά προφίλ. Τα $2^K$ ιδανικά προφίλ $n_1, ..., n_{2^K}$ που δημιουργούνται αντιστοιχούν σε $2^K$ κλάσεις εξεταζόμενων, τα οποία ορίζουν τα προφίλ χαρακτηριστικών γνωρισμάτων **α**. Το εκτιμώμενο προφίλ χαρακτηριστικών γνωρισμάτων $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{i}$ για τον εξεταζόμενο *i* συνδέεται με το προφίλ απαντήσεων **n** ανάμεσα στα $n_1, ..., n_{2^K}$ και είναι αυτό το οποίο ελαχιστοποιεί την απόσταση προς το παρατηρούμενο προφίλ απαντήσεων, έστω $d\left(y_i, \alpha_m\right)$, για $m = 1, 2, ..., M = 2^K$. Η πιο συνηθισμένη απόσταση που χρησιμοποιείται για διχοτομικά δεδομένα (0 ή 1) είναι η απόσταση Hamming, η οποία με απλά λόγια μετρά τον αριθμό τον φορών που οι τιμές των δύο διανυσμάτων του προφίλ του εξεταζόμενου και του ιδανικού προφίλ είναι διαφορετικές, και ορίζεται ως

$d_H\left(y_i, n_m\right) = \sum_{j=1}^{J} \left|y_{ij} - n_{mj}\right|$ (Chiu, Sun, & Bian, 2018).

### 2.2.3 Η μέθοδος της Μη Παραμετρικής Κατηγοριοποίησης

Η μέθοδος της Μη Παραμετρικής Κατηγοριοποίησης (NPC) δημιουργήθηκε από τους Chiu & Douglas το 2013 και διαφέρει στο σκεπτικό της από τις δύο προηγούμενες μεθόδους, του Πίνακα Ικανοτήτων (CM) και του Πίνακα Αθροιστικού Σκορ (SsM). Εδώ δεν γίνεται υπολογισμός του εκτιμώμενου προφίλ του κάθε εξεταζόμενου και η κατηγοριοποίηση αυτού στο κατά πόσο πλησιάζει το ιδανικό προφίλ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_M$, αλλά στο κατά πόσο πλησιάζει το ιδανικό προφίλ απαντήσεων, που είναι μια καινούργια έννοια που εισάγεται εδώ.

Για τα ιδανικά προφίλ των απαντήσεων έχει σημασία από τις απαιτήσεις που έχουν οι ερωτήσεις του τεστ, δηλαδή σε ερωτήσεις που απαιτούνται περισσότερα του ενός χαρακτηριστικά γνωρίσματα αν ο εξεταζόμενος πρέπει να κατέχει το σύνολο αυτών ή μόνο ένα από αυτά που κυριαρχεί. Έτσι επιλέγεται το δεδομένο, στο οποίο τα δεδομένα του τεστ από τις ερωτήσεις προσαρμόζονται καλύτερα, είτε είναι ένα μη αντισταθμιστικό (noncompensatory) ή συνδετικό (conjunctive) μοντέλο, όπως είναι το DINA, που απαιτούνται το σύνολο των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων, είτε είναι ένα αντισταθμιστικό (compensatory) ή διαζευκτικό (disjunctive) μοντέλο, στο οποίο υπάρχει ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα που κυριαρχεί έναντι τον υπολοίπων, όπως είναι το DINO.

Για τη διαδικασία λειτουργίας του μοντέλου αυτού έχουμε: Έστω $n_{ij}=\prod_{k=1}^{K}\alpha_{ik}^{q_{jk}}$ να είναι το *j* στοιχείο του ιδανικού προφίλ απαντήσεων για το *i* υποκείμενο και έστω $n_i$ το πρότυπο για αυτό το υποκείμενο. Τα πρότυπα αυτά $n_i$ εξαρτώνται μόνο από τον πίνακα **Q**. Μπορούμε να κατασκευάσουμε όλα τα ιδανικά προφίλ απαντήσεων $n^{(1)},n^{(2)},\ldots,n^{(2^K)}$ για όλες τις πιθανές τιμές του διανύσματος $\alpha_i$ των ιδανικών προφίλ για το *i* υποκείμενο.

Για να δούμε πόσο κοντά είναι ένα προφίλ απαντήσεων ενός εξεταζόμενου και του ιδανικού προφίλ απαντήσεων είναι σημαντικό να οριστεί μια μέτρηση για την απόσταση των δύο διανυσμάτων και συνήθως προτιμάται η απόσταση Hamming, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$d_h(y,n)=\sum_{j=1}^{J}\left|y_j-n_j\right|.$$

Σε ορισμένες περιπτώσεις που κάποιες από τις ερωτήσεις εμφανίζουν μεγάλη μεταβλητότητα, προτιμάται η σταθμισμένη απόσταση Hamming (Weighted Hamming), στην οποία εκτιμώνται τα βάρη $\overline{p_j}$ για τις ερωτήσεις που έχουν μικρότερη διασπορά στις απαντήσεις τους και η παραπάνω απόσταση παίρνει την μορφή:

$$d_{wh}\left(y,n\right)=\sum_{j=1}^{J}\frac{1}{\overline{p_j}\left(1-\overline{p_j}\right)}\left|y_j-n_j\right|$$ (Chiu & Douglas, 2013).

### 2.2.4 Η μέθοδος της Γενικευμένης Μη Παραμετρικής Κατηγοριοποίησης

Οι Chiu et al. (2018) πρότειναν μια νέα μέθοδο μη παραμετρικής μοντελοποίησης, η οποία είχε ως σκοπό να διορθώσει το μειονέκτημα της μεθόδου της Μη Παραμετρικής Κατηγοριοποίησης NPC). Έτσι, η καινούργια μέθοδος της Γενικευμένης Μη Παραμετρικής Κατηγοριοποίησης (GNPC) τοποθετεί τους εξεταζόμενους στο κατάλληλο προφίλ και είναι ιδανική για εφαρμογή σε δείγματα μικρής κλίμακας, όπως είναι αυτά μιας σχολικής τάξης.

Το μειονέκτημα της μεθόδου NPC είναι ότι ανάλογα με το τεστ έπαιρνε υπόψη τα προφίλ που έδινε είτε η μέθοδος DINA, είτε η μέθοδος DINO. Η νέα μέθοδος GNPC παίρνει υπόψη τα προφίλ που δίνει τόσο η μέθοδος DINA, όσο και η μέθοδος DINO.

Τα προφίλ των ιδανικών απαντήσεων υπολογίζονται από τη σχέση:

$$n_{ij}^{(w)}=w_{ij}n_{ij}^{(c)}+\left(1-w_{ij}\right)n_{ij}^{(d)}=n_{ij}^{(d)}+w_{ij}\left(n_{ij}^{(c)}-n_{ij}^{(d)}\right),$$

όπου $0\leq w_{ij}\leq 1$ είναι η σταθμισμένη μέτρηση της ομοιότητας μεταξύ $n_{ij}^{(w)}$ και $n_{ij}^{(c)}$. Επίσης στην παραπάνω σχέση με $n_{ij}^{(c)}$ συμβολίζεται το ιδανικό προφίλ απαντήσεων ενός συνδετικού (conjunctive) μοντέλου, σαν το DINA και με $n_{ij}^{(d)}$ το ιδανικό προφίλ απαντήσεων ενός διαζευκτικού (disjunctive) μοντέλου, όπως το DINO.

Για τα σταθμισμένα $w_{ij}$, χρησιμοποιείται ένας τύπος που δίνει μια εκτίμηση αυτών που είναι:

$$w_{ij}=\frac{\sum_{i\in C_I}\left(y_{ij}-n_{ij}^{(d)}\right)}{\left\|C_I\right\|\left(n_{ij}^{(c)}-n_{ij}^{(d)}\right)},$$

όπου $\left\|C_I\right\|$ είναι το πλήθος των εξεταζόμενων που ανήκουν στην κλάση ιδανικών προφίλ $C_I$ (Chiu et al., 2018).

Η μέθοδος GNPC είναι μια μεγάλη βελτίωση σε σχέση με τη μέθοδο NPC. Έχει το πλεονέκτημα σε σχέση με όλες τις άλλες μη παραμετρικές μεθόδους στο ότι λαμβάνει υπόψη τόσο στις πιθανότητες απάντησης των στοιχείων που μοντελοποιούνται, όσο και τον αριθμό των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων που απαιτούνται για να απαντήσει ένας εξεταζόμενος μια ερώτηση. Επίσης η μέθοδος GNPC σε σχέση με τη μέθοδο NPC έχει την ευελιξία να λάβει υπόψη και τις δύο κατηγορίες μοντέλων, μη αντισταθμιστικά – συνδετικά και αντισταθμιστικά – διαζευκτικά. Το μειονέκτημα είναι ότι οι στατιστικές ιδιότητες του εκτιμητή κλάσης επάρκειας παραμένουν άγνωστες (Chiu & Köhn, 2019).

## 2.3 Εφαρμογές των ΜΓΔ στην Αξιολόγηση στα Μαθηματικά

Η ενότητα αυτή περιλαμβάνει μια βιβλιογραφική ανασκόπηση εφαρμογών των παραμετρικών και μη παραμετρικών μοντέλων γνωστικής διαγνωστικής αξιολόγησης στο πεδίο των μαθηματικών.

Σε αρκετές εμπειρικές έρευνες, τα ΜΓΔ εφαρμόστηκαν σε δεδομένα τα οποία είχαν προηγουμένως αναλυθεί με παραδοσιακές ψυχομετρικές μεθόδους, όπως η Θεωρία Απόκρισης Στοιχείου (IRT). Αυτή η πρακτική είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως *retrofitting*. Για παράδειγμα, οι Chen et al. (2009) διερεύνησαν τη σχέση ανάμεσα στις στάσεις για τα μαθηματικά και τη μαθηματική επίδοση χρησιμοποιώντας δεδομένα από την έρευνα TIMSS-1999 στην Ταϊβάν. Οι μαθητές κατανεμήθηκαν σε διαφορετικά προφίλ μέσω της μεθόδου RSM (rule space method). Κατά τον ίδιο τρόπο, οι Yamaguchi & Okada (2018) εφάρμοσαν παραμετρικά ΜΓΔ σε δεδομένα από την έρευνα TIMSS-2007 για επτά χώρες, καταδεικνύοντας ότι τα ΜΓΔ παρείχαν καλύτερα αποτελέσματα από τις παραδοσιακές ψυχομετρικές μεθόδους.

Σε άλλες έρευνες, οι δοκιμασίες σχεδιάστηκαν εξ αρχής για να είναι συμβατές με τα μοντέλα ΓΔΑ. Οι Bradshaw et al (2014) ανέπτυξαν και επικύρωσαν μια δοκιμασία αξιολόγησης της κατανόησης της αριθμητικής των κλασμάτων από εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η δοκιμασία περιλαμβάνει 29 έργα (20 σωστού – λάθους και 9 δομημένης απάντησης) που εξετάζουν τέσσερα χαρακτηριστικά γνωρίσματα. Η δοκιμασία απαντήθηκε από 990 υπηρετούντες εκπαιδευτικούς και η τοποθέτησή τους στα $2^4$ διαφορετικά προφίλ έγινε με το παραμετρικό μοντέλο Log–linear CDM.

Παρόμοια, η Wu (2019) εφάρμοσε παραμετρικά μοντέλα για την αξιολόγηση της ικανότητας εκτέλεσης πράξεων με κλάσματα από 84 μαθητές της 4ης τάξης δημοτικού σε σχολικές μονάδες μιας πολιτείας των ΗΠΑ. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η ανατροφοδότηση των εκπαιδευτικών που βασίστηκε στη ΓΔΑ ήταν πιο αποτελεσματική από την παραδοσιακή αξιολόγηση, ενώ ήταν πιο επωφελής για μαθητές με χαμηλές ή μέτριες επιδόσεις (Wu, 2019).

Οι Li, Zhou, Huang, Tu, Gao, Yang et al. (2020) κατασκεύασαν μια δοκιμασία επίλυσης προβλήματος στα μαθηματικά για μαθητές προσχολικής ηλικίας (5 έως 6 ετών). Η δοκιμασία περιλάμβανε 38 έργα και 11 χαρακτηριστικά γνωρίσματα και χορηγήθηκε σε 747 μαθητές στην περιοχή της Σαγκάης. Η ανάλυση των δεδομένων πραγματοποιήθηκε με μια μικτή προσέγγιση, όπου για κάθε έργο επιλέχθηκε το πιο κατάλληλο παραμετρικό μοντέλο. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα γνωστικά διαγνωστικά μοντέλα όχι μόνο παρείχαν πιο λεπτομερή ανατροφοδότηση μέσω της τοποθέτησης των μαθητών σε διαφορετικά προφίλ, αλλά έδωσαν και χρήσιμες πληροφορίες για την αξιολόγηση της ποιότητας της δοκιμασίας.

Σε έρευνα των Ma et al. (2020), οι δυνατότητες επίλυσης προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού αξιολογήθηκαν σε δείγμα 837 μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στις ΗΠΑ. Η δοκιμασία περιλάμβανε 78 ερωτήσεις και 6 χαρακτηριστικά γνωρίσματα. Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε με το παραμετρικό μοντέλο GDINA. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το μοντέλο προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα από το μοντέλο 3PL, το οποίο ανήκει στα παραδοσιακά μοντέλα της σύγχρονης θεωρίας μέτρησης (IRT).

Πιο πρόσφατα, οι Zhang, Jin, Xiong, Leung, Chen, Li et al. (2022) εφάρμοσαν μια παραλλαγή του μοντέλου G–DINA σε δεδομένα επιδόσεων 391 μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην επαρχία Henan (Κίνα). Το περιεχόμενο της δοκιμασίας αφορούσε στις συναρτήσεις και την παραγώγιση με 13 ερωτήσεις σωστού – λάθους και τέσσερα χαρακτηριστικά γνωρίσματα. Τα αποτελέσματα ανέδειξαν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά γνωρίσματα που οι μαθητές έχουν ή δεν έχουν κατακτήσει, τόσο σε επίπεδο τάξης όσο και σε ατομικό επίπεδο, επιτρέποντας την παροχή εξατομικευμένης ανατροφοδότησης από τους εκπαιδευτικούς.

# Κεφάλαιο 3. Μεθοδολογία

## 3.1 Ερευνητικά Εργαλεία

Η πρώτη δοκιμασία απευθύνεται σε μαθητές της Α’ Γυμνασίου και αποτελείται από $J$ = 20 ερωτήματα που εξετάζουν $K$ = 3 χαρακτηριστικά γνωρίσματα ανεξάρτητα μεταξύ τους, σχετικά με την πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων. Η πλήρης δοκιμασία με τα $J$ = 20 ερωτήματα καθώς και τις απαντήσεις βρίσκεται στο Παράρτημα Α.

Η συγκεκριμένη δοκιμασία δημιουργήθηκε με βάση τέσσερις άξονες:

- τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προσομοιώσεις που προηγήθηκαν
- τους μαθησιακούς στόχους που θέτει το πρόγραμμα σπουδών για τα μαθηματικά της Α’ Γυμνασίου (ΦΕΚ 4362/Δ2/20-01-2023)
- το χρονικό περιορισμό της διδακτικής ώρας
- το αντίκτυπο του πλήθους των ερωτημάτων στους/στις μαθητές/τριες

Η Α’ Γυμνασίου επιλέχθηκε διότι αποτελεί την πρώτη τάξη εισαγωγής των μαθητών/τριών στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Επιλέχθηκαν οι ενότητες Α2.1 έως Α2.4 των κλασμάτων από το κεφάλαιο 2 του σχολικού βιβλίου των μαθηματικών της Α’ Γυμνασίου. Με βάση τις ενότητες αυτές αλλά και τους στόχους των ενοτήτων, όπως αυτοί ορίζονται από το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, σύμφωνα με την απόφαση του Υ.ΠΑΙ.Θ. (4362/Δ2/20-01-2023), ορίστηκαν 3 χαρακτηριστικά γνωρίσματα, ανεξάρτητα μεταξύ τους, ως εξής:

**Α1:** *Απλοποίηση κλάσματος (Μετατροπή κλάσματος σε ανάγωγο)*
Η απλοποίηση κλάσματος λαμβάνει χώρα συνήθως στο τέλος της διαδικασίας πρόσθεσης ή αφαίρεσης κλασμάτων.

$\frac{30}{18}=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$ ή $\frac{30}{18}=\frac{5}{3}$

**Α2:** *Πρόσθεση ή αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων*
Η πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων αφορά μόνο στην πρόσθεση ή αφαίρεση των αριθμητών

του κλάσματος.

$\frac{5}{8}+\frac{6}{8}=\frac{5+6}{8}=\frac{11}{8}$ ή $\frac{7}{5}-\frac{4}{5}=\frac{7-4}{5}=\frac{3}{5}$

**Α3:** *Εύρεση ισοδύναμου κλάσματος με δοσμένο παρονομαστή*
Η εύρεση ισοδύναμου κλάσματος σχετίζεται με τη διαδικασία που είναι γνωστή ως «καπελάκια», όπου για να προστεθούν ή να αφαιρεθούν δύο ετερώνυμα κλάσματα πρέπει να βρει το ΕΚΠ των παρονομαστών και στη συνέχεια να πολλαπλασιαστεί ο αριθμητής και ο παρονομαστής με τον κατάλληλο αριθμό, ώστε να προκύψουν ισοδύναμα – ομώνυμα πλέον κλάσματα – τα οποία και μπορούν να προστεθούν ή να αφαιρεθούν. Ισοδύναμο του $\frac{5}{2}$ με παρονομαστή το 6 είναι το $\frac{5}{2}=\frac{15}{6}$.

Για τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά γνωρίσματα (Α1, Α2, Α3) οι προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών/τριών είναι:

- Πρόσθεση και αφαίρεση φυσικών αριθμών
- Πολλαπλασιασμός και διαίρεση φυσικών αριθμών
- Εύρεση ΕΚΠ δύο ή περισσοτέρων αριθμών

Για να δημιουργηθούν τα ερωτήματα τις δοκιμασίας, σχεδιάστηκε προηγουμένως ο πίνακας **Q** μεγέθους 20x3 (βλέπε Παράρτημα Α) και από αυτόν δημιουργήθηκαν:

- 3 ερωτήματα που εξετάζουν μόνο 1 χαρακτηριστικό γνώρισμα, για κάθε χαρακτηριστικό γνώρισμα, δηλαδή συνολικά 3x3=9 ερωτήματα
- 3 ερωτήματα που εξετάζουν μόνο 2 χαρακτηριστικά γνωρίσματα, για κάθε ζεύγος χαρακτηριστικών γνωρισμάτων (Α1,Α2), (Α1,Α3), (Α3,Α2), δηλαδή συνολικά 3x3=9 ερωτήματα
- 2 ερωτήματα που εξετάζουν και τα 3 χαρακτηριστικά γνωρίσματα μαζί, δηλαδή συνολικά 2x1=2 ερωτήματα

Σε ότι αφορά τη δοκιμασία, ακολουθούν υποδειγματικά ερωτήματα για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις, έτσι ώστε σε μία πιθανή μελλοντική χρήση της συγκεκριμένης δοκιμασίας να μπορεί ο/η εκάστοτε εκπαιδευτικός να παρέμβει με νέες ασκήσεις, χωρίς όμως να διαταράσσεται η δομή της δοκιμασίας.

- Ερώτηση που απαιτεί μόνο το χαρακτηριστικό γνώρισμα Α1 (απλή απλοποίηση κλάσματος):
    - Να μετατρέψετε σε ανάγωγο το κλάσμα $\frac{26}{12}$.
    - Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{26}{12}$.
- Ερώτηση που απαιτεί μόνο το χαρακτηριστικό γνώρισμα Α2 (άθροισμα ή διαφορά ομώνυμων κλασμάτων χωρίς απλοποίηση):
    - Να υπολογίσετε το άθροισμα $\frac{5}{3}+\frac{2}{3}$.
    - Να υπολογίσετε τη διαφορά $\frac{5}{4}-\frac{3}{4}$.
- Ερώτηση που απαιτεί μόνο το χαρακτηριστικό γνώρισμα Α3 (εύρεση ισοδύναμου κλάσματος χωρίς απλοποίηση):
    - Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{9}{2}$ στο ισοδύναμο του με παρονομαστή το 8.
- Ερώτηση που απαιτεί τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα Α1 και Α2 (άθροισμα ή διαφορά ομώνυμων κλασμάτων με απλοποίηση στο τελικό αποτέλεσμα):
    - Να υπολογίσετε το άθροισμα $\frac{5}{8}+\frac{7}{8}$.
    - Να υπολογίσετε τη διαφορά $\frac{7}{12}-\frac{5}{12}$.
- Ερώτηση που απαιτεί τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα Α1 και Α3 (εύρεση ισοδύναμου κλάσματος με απλοποίηση):
    - Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{25}{15}$ στο ισοδύναμο του με παρονομαστή το 9.
- Ερώτηση που απαιτεί τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα Α2 και Α3 (άθροισμα ή διαφορά ετερώνυμων κλασμάτων χωρίς απλοποίηση):
    - Να υπολογίσετε το άθροισμα $\frac{8}{3}+\frac{5}{6}$.

- Να υπολογίσετε τη διαφορά $\frac{7}{2}-\frac{4}{5}$.

- Ερώτηση που απαιτεί και τα τρία χαρακτηριστικά γνωρίσματα Α1, Α2 και Α3 (άθροισμα ή διαφορά ετερώνυμων κλασμάτων με απλοποίηση στο τελικό αποτέλεσμα):
  - Να υπολογίσετε το άθροισμα $\frac{5}{3}+\frac{8}{6}$.
  - Να υπολογίσετε τη διαφορά $\frac{5}{3}-\frac{8}{6}$.

Η δεύτερη δοκιμασία απευθύνεται σε μαθητές της Β' Γυμνασίου και αποτελείται από J = 10 ερωτήματα που εξετάζουν K = 2 χαρακτηριστικά γνωρίσματα ανεξάρτητα μεταξύ τους, σχετικά με την εύρεση των παραμέτρων α και β της συνάρτησης της ευθείας $y=\alpha x+\beta$. Η πλήρης δοκιμασία με τα J = 10 ερωτήματα καθώς και τις απαντήσεις βρίσκεται στο Παράρτημα Α.

Η συγκεκριμένη δοκιμασία δημιουργήθηκε με βάση τέσσερις άξονες:

- τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προσομοιώσεις που προηγήθηκαν
- τους μαθησιακούς στόχους που θέτει το πρόγραμμα σπουδών για τα μαθηματικά της Β' Γυμνασίου (ΦΕΚ 4362/Δ2/20–01–2023)
- το χρονικό περιορισμό της διδακτικής ώρας
- το αντίκτυπο του πλήθους των ερωτημάτων στους/στις μαθητές/τριες

Η Β' Γυμνασίου επιλέχθηκε, διότι είναι η τάξη στην οποία οι μαθητές/τριες γνωρίζουν νέες μαθηματικές έννοιες, όπως είναι αυτή των συναρτήσεων, οι οποίες θα τους ακολουθήσουν μέχρι και την Γ' Λυκείου και τις Πανελλήνιες Εξετάσεις, στα Μαθηματικά Προσανατολισμού, όσοι ακολουθήσουν τις ομάδες προσανατολισμού, πλην των Ανθρωπιστικών Σπουδών. Επιλέχθηκε η ενότητα Α3.4 από το κεφάλαιο 3 του σχολικού βιβλίου των μαθηματικών της Β' Γυμνασίου. Με βάση την ενότητα αυτή αλλά και τους στόχους των ενοτήτων, όπως αυτοί ορίζονται από το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, σύμφωνα με την απόφαση του Υ.ΠΑΙ.Θ. (4362/Δ2/20–01–2023), ορίστηκαν 2 χαρακτηριστικά γνωρίσματα, ανεξάρτητα μεταξύ τους, ως εξής:

**Α1:** *Υπολογισμός της παραμέτρου α.*

Η παράμετρος α καθορίζει τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $y = \alpha x + \beta$ ή αλλιώς την κλίση που έχει αυτή με τον άξονα $x'x$.

**Α2:** *Υπολογισμός της παραμέτρου β.*

Η παράμετρος β καθορίζει το σημείο τομής της ευθείας $y = \alpha x + \beta$ με τον άξονα $y'y$, δηλαδή το σημείο $(0, \beta)$.

Για τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά γνωρίσματα (Α1, Α2) οι προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών/τριών είναι:

- Πράξεις πραγματικών αριθμών
- Επίλυση εξισώσεων $1^{ου}$ βαθμού με έναν άγνωστο
- Γνώση και χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων

Για να δημιουργηθούν τα ερωτήματα τις δοκιμασίας, σχεδιάστηκε προηγουμένως ο πίνακας **Q** μεγέθους 10x2 (βλέπε Παράρτημα Α) και από αυτόν δημιουργήθηκαν:

- 3 ερωτήματα που εξετάζουν μόνο 1 χαρακτηριστικό γνώρισμα, για κάθε χαρακτηριστικό γνώρισμα, δηλαδή συνολικά 3x2=6 ερωτήματα
- 2 ερωτήματα που εξετάζουν και τα 2 χαρακτηριστικά γνωρίσματα μαζί, δηλαδή συνολικά 2x2=4 ερωτήματα

Σε ότι αφορά τη δοκιμασία, ακολουθούν υποδειγματικά ερωτήματα για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις, έτσι ώστε σε μία πιθανή μελλοντική χρήση της συγκεκριμένης δοκιμασίας να μπορεί ο/η εκάστοτε εκπαιδευτικός να παρέμβει με νέες ασκήσεις, χωρίς όμως να διαταράσσεται η δομή της δοκιμασίας.

- Ερώτηση που απαιτεί μόνο το χαρακτηριστικό γνωστικό Α1 (εύρεση της παραμέτρου α)
    - Να υπολογίσετε το α στην ευθεία $y = \alpha x + 1$, αν αυτή διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,2)$.
- Ερώτηση που απαιτεί μόνο το χαρακτηριστικό γνώρισμα Α2 (εύρεση της παραμέτρου β):

- Να υπολογίσετε το β στην ευθεία $y = 2x + \beta$, αν αυτή διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(2,3)$.

- Ερώτηση που απαιτεί και τα δύο χαρακτηριστικά γνωρίσματα A1 και A2 (εύρεση και των δύο παραμέτρων α και β της συνάρτησης, δηλαδή στην ουσία τον τύπο της):
  - Να βρείτε την ευθεία $y = \alpha x + \beta$, αν αυτή διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(-1,2)$ και $\Delta(2,-1)$.

Η τρίτη δοκιμασία απευθύνεται σε μαθητές της Γ’ Γυμνασίου και αποτελείται από J = 20 ερωτήματα που εξετάζουν K = 3 χαρακτηριστικά γνωρίσματα ανεξάρτητα μεταξύ τους, σχετικά με τρεις βασικές ταυτότητες.. Η πλήρης δοκιμασία με τα J = 20 ερωτήματα καθώς και τις απαντήσεις βρίσκεται στο Παράρτημα Α.

Η συγκεκριμένη δοκιμασία δημιουργήθηκε με βάση τέσσερις άξονες:

- τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προσομοιώσεις που προηγήθηκαν
- τους μαθησιακούς στόχους που θέτει το πρόγραμμα σπουδών για τα μαθηματικά της Γ’ Γυμνασίου (ΦΕΚ 4362/Δ2/20–01–2023)
- το χρονικό περιορισμό της διδακτικής ώρας
- το αντίκτυπο του πλήθους των ερωτημάτων στους μαθητές/τριες

Η Γ’ Γυμνασίου επιλέχθηκε διότι η ύλη της τόσο στην Άλγεβρα, όσο και στη Γεωμετρία είναι προαπαιτούμενη για τα μαθηματικά της Α’ Λυκείου, οπότε είναι βασική η κατανόησή της. Επιλέχθηκε η ενότητα Α1.5 των αξιοσημείωτων ταυτοτήτων από το κεφάλαιο 1 του σχολικού βιβλίου των μαθηματικών της Γ’ Γυμνασίου. Με βάση την ενότητα αυτή αλλά και τους στόχους των ενοτήτων, όπως αυτοί ορίζονται από το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, σύμφωνα με την απόφαση του Υ.ΠΑΙ.Θ. (4362/Δ2/20–01–2023), ορίστηκαν 3 χαρακτηριστικά γνωρίσματα, ανεξάρτητα μεταξύ τους, ως εξής:

**Α1:** *Η χρήση της ταυτότητας* $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.

Η παραπάνω ταυτότητα εξετάζεται στη χρήση της για τις διάφορες τιμές των μεταβλητών α και β.

**Α2:** *Η χρήση της ταυτότητας* $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$.

Η παραπάνω ταυτότητα εξετάζεται και αυτή στη χρήση της για τις διάφορες τιμές των μεταβλητών α και β.

**Α3:** *Η χρήση της ταυτότητας* $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$.

Η παραπάνω ταυτότητα εξετάζεται και αυτή στη χρήση της για τις διάφορες τιμές των μεταβλητών α και β.

Στις τρεις παραπάνω ταυτότητες που επιλέχθηκαν μεταξύ άλλων από αυτές που υπάρχουν στο σχολικό, οι μεταβλητές α και β μπορεί να είναι είτε μεταβλητές, είτε αριθμοί, είτε συνδυασμών των δύο κατά την εφαρμογή τους από τους/τις μαθητές/τριες.

Για τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά γνωρίσματα (Α1, Α2, Α3) οι προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών/τριών είναι:

- Πράξεις μεταξύ πραγματικών αριθμών (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση)
- Δυνάμεις πραγματικών αριθμών με εκθέτη φυσικό αριθμό

Για να δημιουργηθούν τα ερωτήματα τις δοκιμασίας, σχεδιάστηκε προηγουμένως ο πίνακας **Q** μεγέθους 20x3 (βλέπε Παράρτημα Α) και από αυτόν δημιουργήθηκαν:

- 4 ερωτήματα που εξετάζουν μόνο 1 χαρακτηριστικό γνώρισμα, για κάθε χαρακτηριστικό γνώρισμα, δηλαδή συνολικά 4x3=12 ερωτήματα
- 6 ερωτήματα που εξετάζουν μόνο 2 χαρακτηριστικά γνωρίσματα, για κάθε ζεύγος χαρακτηριστικών γνωρισμάτων (Α1,Α2), (Α1,Α3), (Α3,Α2), δηλαδή συνολικά 6x1=6 ερωτήματα
- 2 ερωτήματα που εξετάζουν και τα 3 χαρακτηριστικά γνωρίσματα μαζί, δηλαδή συνολικά 2x1=2 ερωτήματα

Σε ότι αφορά τη δοκιμασία, ακολουθούν υποδειγματικά ερωτήματα για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις, έτσι ώστε σε μία πιθανή μελλοντική χρήση της συγκεκριμένης δοκιμασίας να μπορεί ο/η εκάστοτε εκπαιδευτικός να παρέμβει με νέες ασκήσεις, χωρίς όμως να διαταράσσεται η δομή της δοκιμασίας.

- Ερώτηση που απαιτεί μόνο το χαρακτηριστικό γνώρισμα Α1 (εφαρμογή της πρώτης ταυτότητας):
  - Να βρείτε το ανάπτυγμα $(x+2)^2$.
  - Να βρείτε το ανάπτυγμα $(2x+3y)^2$.
- Ερώτηση που απαιτεί μόνο το χαρακτηριστικό γνώρισμα Α2 (εφαρμογή της δεύτερης ταυτότητας):
  - Να βρείτε το ανάπτυγμα $(x-3)^2$.
  - Να βρείτε το ανάπτυγμα $(4-y^2)^2$.
- Ερώτηση που απαιτεί μόνο το χαρακτηριστικό γνώρισμα Α3 (εφαρμογή της τρίτης ταυτότητας):
  - Να βρείτε το ανάπτυγμα $(5-x)\cdot(5+x)$.
  - Να βρείτε το ανάπτυγμα $(3\varphi^2-4\omega^3)\cdot(3\varphi^2+4\omega^3)$.
- Ερώτηση που απαιτεί τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα Α1 και Α2 (εφαρμογή των πρώτων δύο ταυτοτήτων):
  - Να κάνετε τις πράξεις $(x+5)^2+(x-5)^2$.
  - Να κάνετε τις πράξεις $(y^2-2)^2-(y^2+2)^2$.
- Ερώτηση που απαιτεί τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα Α1 και Α3 (εφαρμογή της πρώτης και της τρίτης ταυτότητας):
  - Να κάνετε τις πράξεις $(x^2+y^2)^2-(x^2+y^2)\cdot(x^2-y^2)$.
  - Να κάνετε τις πράξεις $(2x+3y)^2-(2x+3y)\cdot(2x-3y)$.
- Ερώτηση που απαιτεί τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα Α2 και Α3 (εφαρμογή της δεύτερης και της τρίτης ταυτότητας):
  - Να κάνετε τις πράξεις $(x-y)^2-(x-y)\cdot(x+y)$.
  - Να κάνετε τις πράξεις $(x^2-y^2)\cdot(x^2+y^2)-(x^2-y^2)^2$.
- Ερώτηση που απαιτεί και τα τρία χαρακτηριστικά γνωρίσματα Α1, Α2 και Α3 (εφαρμογή και των τριών ταυτοτήτων):
  - Να κάνετε τις πράξεις $(x+6)^2-(x-6)\cdot(x+6)+(x-6)^2$.

- Να κάνετε τις πράξεις $(7-y)^2-(7+y)\cdot(7-y)+(7+y)^2$.

## 3.2 Ερευνητική Διαδικασία

Η πρώτη δοκιμασία δόθηκε σε ένα τμήμα της Α' τάξης (Α4), του 5$^{ου}$ Γυμνασίου Βέροιας στις 23/05/2023 μέσα στα πλαίσια μίας διδακτικής ώρας, διάρκειας 45 λεπτών. Συνολικά απάντησαν 21 μαθητές και μαθήτριες. Οι απαντήσεις των μαθητών αφού κωδικοποιήθηκαν με 0 για κάθε λάθος απάντηση και 1 για κάθε σωστή, δημιούργησαν τον πίνακα απαντήσεων, 21x20.

Η δεύτερη δοκιμασία δόθηκε σε ένα τμήμα της Β' τάξης (Β3), του 5$^{ου}$ Γυμνασίου Βέροιας στις 23/05/2023 μέσα στα πλαίσια μίας διδακτικής ώρας, διάρκειας 45 λεπτών. Συνολικά απάντησαν 24 μαθητές και μαθήτριες. Οι απαντήσεις των μαθητών αφού κωδικοποιήθηκαν με 0 για κάθε λάθος απάντηση και 1 για κάθε σωστή, δημιούργησαν τον πίνακα απαντήσεων, 24x10.

Η τρίτη δοκιμασία δόθηκε σε ένα τμήμα της Γ' τάξης (Γ2), του 1$^{ου}$ Γυμνασίου Βέροιας στις 25/05/2023 μέσα στα πλαίσια μίας διδακτικής ώρας, διάρκειας 45 λεπτών. Συνολικά απάντησαν 22 μαθητές και μαθήτριες. Οι απαντήσεις των μαθητών αφού κωδικοποιήθηκαν με 0 για κάθε λάθος απάντηση και 1 για κάθε σωστή, δημιούργησαν τον πίνακα απαντήσεων, 22x20.

Η περίοδος που δόθηκαν οι τρεις δοκιμασίες τοποθετείται χρονολογικά την προτελευταία εβδομάδα των μαθημάτων των γυμνασίων, πριν τη λήξη των μαθημάτων για τη διενέργεια των Ενδοσχολικών Προαγωγικών και Απολυτήριων Εξετάσεων Περιόδου Ιουνίου 2023. Προηγήθηκε επανάληψη της ύλης πάνω στις ενότητες των προς εξέταση χαρακτηριστικών γνωρισμάτων.

# Κεφάλαιο 4. Αποτελέσματα

Αρχικά, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της εφαρμογής της μεθόδου GNPC στα δεδομένα της δοκιμασίας πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων. Από τον πίνακα 1, διαπιστώνουμε ότι το 67% των μαθητών/τριών τοποθετούνται στο προφίλ 111, το 19% στο προφίλ 100, το 4,5% στο προφίλ 101, το 4,5% στο προφίλ 010, και το 4,5% στο προφίλ 001. Σε γενικές γραμμές μπορούμε να πούμε ότι ήταν ένα σχετικά εύκολο τεστ, αν κρίνουμε από το σημαντικό μέρος των μαθητών έχει κατακτήσει και τα τρία χαρακτηριστικά γνωρίσματα.

**Πίνακας 1.** Προφίλ τοποθέτησης μαθητών σύμφωνα με τη μέθοδο GNPC και συνολική βαθμολογία στη δοκιμασία πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων

| Μαθητής/τρια | A1 | A2 | A3 | Σύνολο |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 20 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 19 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 18 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 18 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 17 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 19 |
| 7 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 20 |
| 9 | 0 | 1 | 0 | 7 |
| 10 | 0 | 0 | 1 | 7 |
| 11 | 1 | 0 | 0 | 8 |
| 12 | 1 | 0 | 0 | 8 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 19 |
| 14 | 1 | 0 | 1 | 10 |
| 15 | 1 | 0 | 0 | 8 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 20 |
| 17 | 1 | 1 | 1 | 20 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 19 |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 19 |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 19 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 19 |

Η τελευταία στήλη του Πίνακα 1 αντιστοιχεί στο συνολικό σκορ κάθε μαθητή στη δοκιμασία, όπως θα κάναμε στο πλαίσιο μιας αθροιστικής αξιολόγησης. Το πλεονέκτημα της γνωστικής διαγνωστικής αξιολόγησης μας δίνει περισσότερη πληροφορία για τα δυνατά σημεία και τις αδυναμίες κάθε μαθητή, ανεξάρτητα από το συνολικό του σκορ. Για παράδειγμα, παρατηρούμε ότι οι μαθητές/τριες 9 και 10 ενώ έχουν την ίδια συνολική βαθμολογία, δηλαδή 7 στα 20, εντούτοις φαίνεται ότι έχουν κατακτήσει διαφορετικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα, το Α2 ο/η μαθητής/τρια 9, δηλαδή την εκτέλεση πρόσθεσης και αφαίρεσης ομώνυμων κλασμάτων και το Α3 ο/η μαθητής/τρια 10, δηλαδή την εύρεση ισοδύναμου κλάσματος με δοσμένο παρονομαστή. Αυτό μας οδηγεί στο να δώσουμε διαφορετική ανατροφοδότηση σε κάθε μαθητή, είτε μέσω ασκήσεων είτε με εξατομικευμένη διδασκαλία.

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της εφαρμογής της μεθόδου GNPC στα δεδομένα της δεύτερης δοκιμασίας. Από τον παρακάτω πίνακα διαπιστώνουμε ότι το 82% των μαθητών/τριών τοποθετούνται στο προφίλ 00, το 14% στο προφίλ 01, το 5% στο προφίλ 10 και το 0% στο προφίλ 11. Όπως είναι εμφανές, σε αυτήν περίπτωση πρόκειται για μια ιδιαίτερα δύσκολη δοκιμασία.

**Πίνακας 2.** Προφίλ τοποθέτησης μαθητών σύμφωνα με τη μέθοδο GNPC και συνολική βαθμολογία στη δοκιμασία εύρεσης των παραμέτρων α και β της συνάρτησης της ευθείας $y = \alpha x + \beta$.

| Μαθητής/τρια | Α1 | Α2 | Σύνολο |
|---:|---:|---:|---:|
| 1 | 0 | 0 | 2 |
| 2 | 0 | 1 | 3 |
| 3 | 1 | 0 | 4 |
| 4 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 1 | 3 |
| 6 | 0 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 0 | 5 |
| 8 | 0 | 0 | 1 |
| 9 | 0 | 0 | 2 |
| 10 | 0 | 0 | 2 |
| 11 | 0 | 0 | 2 |
| 12 | 0 | 0 | 1 |
| 13 | 0 | 0 | 2 |
| 14 | 0 | 0 | 0 |
| 15 | 0 | 0 | 0 |
| 16 | 0 | 0 | 2 |
| 17 | 0 | 0 | 2 |
| 18 | 0 | 0 | 2 |
| 19 | 0 | 0 | 2 |
| 20 | 0 | 0 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 21 | 0 | 0 | 1 |
| 22 | 0 | 0 | 2 |

Σε ό,τι αφορά τα πλεονεκτήματα έναντι της αθροιστικής αξιολόγησης, και σε αυτήν τη δοκιμασία παρατηρούμε κάτι ανάλογο με την προηγούμενη, ανάμεσα στους/στις μαθητές/τριες 2, 3, 5 και 7. Παρά το ότι οι συνολικές βαθμολογίες τους είναι παραπλήσιες, δηλαδή από 3 έως 5, εντούτοις κάποιοι έχουν κατακτήσει μόνο το πρώτο χαρακτηριστικό γνώρισμα (Α1), δηλαδή την εύρεση της παραμέτρου $\alpha$ στην συνάρτηση $y=\alpha x+\beta$. Πρόκειται για τους/τις μαθητές/τριες 3 και 7. Αντίθετα, ο/η 5 έχει κατακτήσει μόνο το δεύτερο χαρακτηριστικό γνώρισμα (Α2), δηλαδή την εύρεση της παραμέτρου $\beta$ στην συνάρτηση $y=\alpha x+\beta$. Εδώ, παρόλο που οι συναρτήσεις είναι εισαγωγική έννοια στα μαθηματικά της Β’ Γυμνασίου, παρατηρούμε ότι ο βαθμός κατανόησης είναι χαμηλός, οπότε κρίνεται απαραίτητο να διδαχθεί ξανά η συγκεκριμένη έννοια, μιας οι μαθητές/τριες θα τη συναντούν σε όλη την μετέπειτα σχολική τους ζωή.

Τέλος, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της εφαρμογής της μεθόδου GNPC στα δεδομένα της τρίτης δοκιμασίας. Από τον πίνακα 3, διαπιστώνουμε ότι το 44% των μαθητών/τριών τοποθετούνται στο προφίλ 111, το 16% στο προφίλ 110, το 12% στο προφίλ 001, το 8% στο προφίλ 101, το 8% στο προφίλ 000 και το 4% στο προφίλ 100, το 4% στο προφίλ 010 και το 4% στο προφίλ 011. Εδώ πρόκειται για μια μέτριας δυσκολίας δοκιμασία.

**Πίνακας 3.** Προφίλ τοποθέτησης μαθητών σύμφωνα με τη μέθοδο GNPC και συνολική βαθμολογία στη δοκιμασία σχετικά με τρεις βασικές ταυτότητες

| Μαθητής/τρια | Α1 | Α2 | Α3 | Σύνολο |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 16 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 19 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 17 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 15 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 7 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 16 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 18 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 17 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 15 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 17 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 18 |
| 13 | 1 | 0 | 1 | 8 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 14 | 1 | 1 | 1 | 19 |
| 15 | 1 | 1 | 0 | 14 |
| 16 | 1 | 1 | 0 | 8 |
| 17 | 0 | 0 | 1 | 9 |
| 18 | 0 | 0 | 1 | 7 |
| 19 | 0 | 1 | 1 | 8 |
| 20 | 1 | 0 | 1 | 11 |
| 21 | 1 | 1 | 0 | 10 |
| 22 | 1 | 1 | 0 | 11 |
| 23 | 0 | 0 | 0 | 7 |
| 24 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| 25 | 0 | 0 | 0 | 3 |

Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι η συνολική βαθμολογία έχει μεγάλη διασπορά σε όλο το εύρος της εικοσάβαθμης κλίμακας. Και εδώ όμως μπορούμε να δούμε περιπτώσεις παραπλήσιων βαθμολογιών στις οποίες, όμως, υπάρχει κατάκτηση από τον/την μαθήτρια διαφορετικού χαρακτηριστικού γνωρίσματος. Στο εύρος βαθμολογίας από 5 έως και 11 οι μαθητές/τριες τοποθετούνται σε διαφορετικά προφίλ. Ειδικότερα, οι 3, 17 και 18 παρά το ότι βαθμολογήθηκαν με 5, 9 και 7 αντίστοιχα, έχουν κατακτήσει μόνο το τρίτο χαρακτηριστικό (Α3), δηλαδή την ταυτότητα που αναφέρεται στη διαφορά τετραγώνων. Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει με τους/τις μαθητές/τριες 16, 21 και 22 που ενώ έχουν βαθμολογηθεί με 8, 10 και 11, αντίστοιχα, έχουν κατακτήσει τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα Α1 και Α2, δηλαδή τις ταυτότητες των τετραγώνου αθροίσματος και διαφοράς. Τέλος, οι μαθητές/τριες 13 και 19, έχουν βαθμολογηθεί με 8. Ο πρώτος έχει κατακτήσει τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα Α1 και Α3 και ο δεύτερος τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα Α2 και Α3.

# Κεφάλαιο 5. Συζήτηση – Συμπεράσματα

Η εφαρμογή της Γενικευμένης Μη Παραμετρικής Κατηγοριοποίησης (GNPC) στα δεδομένα των μαθητών/τριών υποστηρίζει την υπόθεση ότι τα μοντέλα γνωστικής διαγνωστικής αξιολόγησης μπορούν να προσφέρουν λεπτομερή ανατροφοδότηση που είναι χρήσιμη για τους εκπαιδευτικούς. Οι μαθητές/τριες που τοποθετούνται στα προφίλ με χαμηλότερες επιδόσεις χρειάζονται στοχευμένη υποστήριξη στα χαρακτηριστικά γνωρίσματα που δεν έχουν κατακτήσει. Αυτή η λεπτομερής ανατροφοδότηση μπορεί να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να κατανοήσουν καλύτερα τις ανάγκες των μαθητών τους και να σχεδιάσουν πιο αποτελεσματικές διδακτικές στρατηγικές.

Σε σύγκριση με τις παραδοσιακές μορφές αξιολόγησης, τα μοντέλα γνωστικής διαγνωστικής αξιολόγησης παρέχουν λεπτομερέστερη ανατροφοδότηση και καλύτερη κατανόηση των δυνατοτήτων και των αδυναμιών των μαθητών/τριών. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό για την ανάπτυξη εξατομικευμένων δραστηριοτήτων. Τα μοντέλα γνωστικής διαγνωστικής αξιολόγησης φαίνεται ότι υπερτερούν των παραδοσιακών μορφών αξιολόγησης στην παροχή λεπτομερούς και χρήσιμης ανατροφοδότησης, κάτι που είναι κρίσιμο για τον σχεδιασμό πιο αποτελεσματικών διδακτικών στρατηγικών.

Κατά την εφαρμογή των ΜΓΔ συναντάμε, ωστόσο, σημαντικούς περιορισμούς. Πρώτον, η κατασκευή μιας γνωστικής διαγνωστικής δοκιμασίας είναι μια ιδιαίτερα απαιτητική και χρονοβόρα διαδικασία, ακόμη κι αν πρόκειται για την αξιολόγηση μίας και μόνο ενότητας. Όσο μάλιστα αλλάζει η βαθμίδα εκπαίδευσης, από το Δημοτικό προς το Γυμνάσιο και το Λύκειο, γίνεται ολοένα και πιο δύσκολος ο εντοπισμός κατάλληλων ενοτήτων, αλλά και ο ορισμός ενός ή περισσοτέρων χαρακτηριστικών γνωρισμάτων. Ειδικότερα στην περίπτωση του Λυκείου, όπου τα διδασκόμενα μαθήματα (Άλγεβρα, Γεωμετρία, Μαθηματικά Γενικής Παιδείας και Προσανατολισμού) συνοδεύονται από γραπτή εξέταση με τη χρήση της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας σε Ενδοσχολικές Προαγωγικές και Απολυτήριες Εξετάσεις, αλλά και από Πανελλαδικές Εξετάσεις για τα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ’ Λυκείου, η πίεση της έγκαιρης ολοκλήρωσης της εξεταζόμενης ύλης δεν αφήνει περιθώρια εφαρμογής τέτοιου είδους μοντέλων.

Δεύτερον, η ίδια η κατασκευή του πίνακα **Q** είναι ένα ζήτημα που χρήζει ιδιαίτερης προσοχής, διότι περιλαμβάνει αποφάσεις όπως η επιλογή του πλήθους των ερωτήσεων της δοκιμασίας, των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων που θα εξεταστούν, και την κατανομή των υπό εξέταση χαρακτηριστικών γνωρισμάτων στις ερωτήσεις αυτές. Εμείς, για παράδειγμα, θεωρήσαμε τις 20 ερωτήσεις ως επαρκή αριθμό για την εξέταση τριών χαρακτηριστικών γνωρισμάτων και τις 10 ερωτήσεις, αντίστοιχα, για την εξέταση δύο χαρακτηριστικών γνωρισμάτων. Αυτή η επιλογή, ωστόσο, είναι σε κάποιο βαθμό υποκειμενική. Επιπλέον, η κατανομή των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων στις ερωτήσεις έγινε ώστε να είναι περίπου ομοιόμορφη, δηλαδή να υπάρχουν ερωτήσεις που να εξετάζουν μεμονωμένα χαρακτηριστικά γνωρίσματα, και άλλες που εξετάζουν συνδυασμό αυτών, είτε ανά δύο είτε ανά τρία. Όλα αυτά με τον περιορισμό ότι θέλουμε η δοκιμασία να μπορεί να χορηγηθεί μέσα στο χρόνο μιας διδακτικής ώρας, ήτοι 40 με 45 λεπτά. Ένας ακόμη περιορισμός, είναι ότι η εφαρμογή αυτών των μοντέλων στην πράξη απαιτεί το χειρισμό εξειδικευμένου λογισμικού από τους εκπαιδευτικούς, όπως είναι η στατιστική γλώσσα προγραμματισμού R.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι για να εφαρμοστεί η μέθοδος της γενικευμένης μη παραμετρικής κατηγοριοποίησης, τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα πρέπει να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, δηλαδή να μην προϋποθέτει το ένα το άλλο. Αυτό, ωστόσο, είναι δύσκολο να ικανοποιηθεί στην πράξη. Αυτό το ζήτημα έχει λυθεί στο πλαίσιο των παραμετρικών μοντέλων. Επομένως, η πρόταση νέων μη παραμετρικών μοντέλων που να λαμβάνουν υπόψη τις σχέσεις μεταξύ των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων πρέπει να αποτελέσουν αντικείμενο μελλοντικής έρευνας. Άλλωστε, η συγκεκριμένη μελέτη είναι ανάμεσα στις ελάχιστες εμπειρικές έρευνες που εφαρμόζουν μη παραμετρικά μοντέλα διαγνωστικής αξιολόγησης. Παρά τα θετικά αποτελέσματα, απαιτείται περαιτέρω έρευνα για τη βελτίωση των μεθόδων και την εφαρμογή τους σε διάφορα εκπαιδευτικά πλαίσια και γνωστικά αντικείμενα.

Για τη βελτίωση της εκπαιδευτικής διαδικασίας μέσω της εφαρμογής της ΓΔΑ, προτείνουμε ενδεικτικά ενότητες της διδακτέας ύλης των μαθηματικών που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για τη δημιουργία τεστ, όχι για το γυμνάσιο που ασχολείται η συγκεκριμένη εργασία, αλλά και για το λύκειο. Όσον αφορά τις ενότητες που προτείνονται έχουν ληφθεί υπόψη οι οδηγίες του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (ΙΕΠ) του Υπουργείου Παιδείας για την διδακτέα ύλη και τη διαχείρισή της κατά το σχολικό έτος 2022 – 2023.

Στην Α' Γυμνασίου, οι εφαρμογές της ΓΔΑ είναι μόνο στην Άλγεβρα και στη Γεωμετρία δεν υπάρχει κάτι άξιο αναφοράς για την κατασκευή ενός τεστ. Στην Άλγεβρα θα μπορούσαν να δημιουργηθούν τεστ που να αφορούν στο 1ο κεφάλαιο την προτεραιότητα των πράξεων (παρενθέσεις, δυνάμεις, πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις και τέλος προσθέσεις και αφαιρέσεις), διαλέγοντας κάθε φορά μέχρι τρεις από τις πράξεις. Στο ίδιο κεφάλαιο είναι τα κριτήρια διαιρετότητας (αριθμοί που διαιρούνται με το 2, 3, 5, 10, 9, 4 και 25), διαλέγοντας ανεξάρτητους αριθμούς, όπως είναι 2, 3 και 25, αλλά και αριθμούς που σχετίζονται μεταξύ τους, όπως είναι το 2, 5 και 10. Στο 2ο κεφάλαιο, θα μπορούσαν να δημιουργηθούν τεστ που να εξετάζονται οι τέσσερις πράξεις μεταξύ κλασμάτων και κλασμάτων (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση). Στο 3ο κεφάλαιο δημιουργείται σύγχυση ανάμεσα στις μονάδες μέτρησης που αφορούν το μήκος, το εμβαδόν και τον όγκο, όπου και θα μπορούσαν να κατασκευαστούν ανάλογα τεστ που να περιλαμβάνουν μονάδες μέτρησης και από τρία φυσικά μεγέθη. Στο 5ο κεφάλαιο που είναι τα ποσοστά, στην ουσία τα προβλήματα είναι τριών κατηγοριών, πρώτον, αυτά που είναι γνωστά η αρχική τιμή και το ποσοστό και ζητείται η τελική τιμή, δεύτερον, αυτά που είναι γνωστά η αρχική και η τελική τιμή και ζητείται το ποσοστό και τρίτον, αυτά που είναι γνωστά η τελική τιμή και το ποσοστό και ζητείται η αρχική τιμή. Στο 7ο κεφάλαιο είναι οι ρητοί αριθμοί, που και εδώ θα μπορούσαν να εξεταστούν οι τέσσερις πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση) σε ομόσημους και ετερόσημους αριθμούς. Στο κεφάλαιο αυτό υπάρχουν επίσης και οι δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο, εξέλιξη αυτών που έχουν εκθέτη φυσικό που σε συνδυασμό με τους άρτιους και περιττούς εκθέτες και τις βάσεις που μπορεί να είναι άρτιοι και περιττοί αριθμοί, δίνουν πληθώρα τεστ που μπορούν να κατασκευαστούν. Στη Γεωμετρία δεν είναι εύκολο να βρεθεί μια ενότητα εφαρμογής της ΓΔΑ, οπότε και δεν προτείνουμε κάτι.

Στη Β' Γυμνασίου, η ΓΔΑ μπορεί μα βρει εφαρμογή, τόσο στην Άλγεβρα, όσο και στη Γεωμετρία. Στην Άλγεβρα, στο 1ο κεφάλαιο μπορούν να κατασκευαστούν εξισώσεις στις οποίες να ζητείται να αναγνωριστεί αν μια εξίσωση έχει μοναδική λύση, είναι αδύνατη ή έχει άπειρες λύσεις. Στο 3ο κεφάλαιο των συναρτήσεων θα μπορούσαν να κατασκευαστούν τεστ που το ζητούμενο είναι η εύρεση της ανεξάρτητης μεταβλητής x και της εξαρτημένης μεταβλητής y (στην ουσία η συμπλήρωση του πίνακα τιμών μιας συνάρτησης). Επίσης θα μπορούσε να γίνει ένα τεστ που να αφορά σημεία στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων που είτε να βρίσκονται πάνω στους άξονες x΄x και y΄y, είτε μέσα στα τέσσερα τεταρτημόρια.

Στο $4^{ο}$ κεφάλαιο μπορεί να κατασκευαστεί ένα τεστ με τη μέση τιμή και τη διάμεσο για δείγματα είτε άρτιου, είτε περιττού πλήθους. Στη Γεωμετρία στο $1^{ο}$ κεφάλαιο δίνοντας στους μαθητές ένα ή περισσότερα ορθογώνια τρίγωνα στα οποία έχουμε φέρει ύψη και κάθετες να εξετάσουμε την αναγνώριση και τον υπολογισμό κάθετων πλευρών και υποτείνουσας. Στο $2^{ο}$ κεφάλαιο γίνεται η εισαγωγή στους τριγωνομετρικούς αριθμούς (ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη) και θα μπορούσε να δημιουργηθούν τεστ που να ζητούνται τα παραπάνω σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Στο $3^{ο}$ κεφάλαιο τα τεστ μπορούν να χωριστούν σε τρεις κατηγορίες: πρώτον, με εγγεγραμμένες και επίκεντρες γωνίες με τα αντίστοιχα τόξα στα οποία βαίνουν, δεύτερον, με πλήθος πλευρών, γωνία και κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου και τρίτον, με ακτίνα, διάμετρο, μήκος και εμβαδόν κύκλου και κυκλικού δίσκου αντίστοιχα.

Στη Γ’ Γυμνασίου, η ΓΔΑ μπορεί μα βρει εφαρμογή, τόσο στην Άλγεβρα, όσο και στη Γεωμετρία. Στην Άλγεβρα, στο $1^{ο}$ κεφάλαιο υπάρχει πληθώρα συνδυασμών στις γνωστές ταυτότητες (αυτές που είναι εντός διδακτέας ύλης, όχι δηλαδή το άθροισμα και διαφορά κύβων που θα μελετηθεί στην αμέσως επόμενη τάξη) και στην παραγοντοποίηση μιας αλγεβρικής παράστασης. Βέβαια, μιας και υπάρχουν πράξεις και στα πολυώνυμα, μπορούμε να εξετάσουμε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων και τις πράξεις των ρητών παραστάσεων (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση). Στο $2^{ο}$ μπορούν να κατασκευαστούν εξισώσεις δευτέρου βαθμού για τις διάφορες τιμές της διακρίνουσας $\Delta$ ($\Delta>0$, $\Delta=0$, $\Delta<0$) και ανισώσεις πρώτου βαθμού στις οποίες το ζητούμενο θα είναι η εύρεση των κοινών λύσεων δύο ανισώσεων (καθόλου κοινές λύσεις, κοινές λύσεις που βρίσκονται σε ένα διάστημα και κοινές λύσεις που βρίσκονται σε ένωση διαστημάτων. Στη Γεωμετρία στο $1^{ο}$ κεφάλαιο δεσπόζουν τα τρία κριτήρια ισότητας τυχαίων τριγώνων και τα δύο κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων. Στο $2^{ο}$ κεφάλαιο ξανασυναντούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας (ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη), τόσο για οξεία, όσο και αμβλεία γωνία όπως και τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες που βοηθούν στο υπολογισμό των δύο τριγωνομετρικών αριθμών, εφόσον γνωρίζουμε τον έναν.

Στη Α’ Λυκείου, η ΓΔΑ μπορεί μα βρει εφαρμογή, κυρίως στην Άλγεβρα και όχι τόσο στη Γεωμετρία. Στην Άλγεβρα, στο $2^{ο}$ κεφάλαιο υπάρχει μια επανάληψη σε γνωστά πράγματα. Έτσι στην αρχή υπάρχουν τα σύνολα των αριθμών (φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί, άρρητοι και πραγματικοί), οι ταυτότητες που εμπλουτίζονται σε σχέση με τη Γ’ Γυμνασίου, όπως το ίδιο συμβαίνει και με την παραγοντοποίηση. Θα ήταν δυνατό και ένα τεστ επανάληψης στις ιδιότητες των δυνάμεων. Στις ρίζες (όχι μόνο τετραγωνικές, αλλά και νιοστές) δίνεται η δυνατότητα δημιουργίας τεστ που να αφορά σε δύο από τις ιδιότητές τους, την απλοποίηση μιας ρίζας μεταξύ της τάξης της και του εκθέτη της υπόριζης ποσότητας $\left(\sqrt[\lambda\cdot\nu]{\alpha^{\lambda\cdot\mu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}\right)$ και τη συγχώνευση δύο ριζών με τον πολλαπλασιασμό των τάξεών τους $\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha}\right)$. Στις ρίζες υπάρχει και η μετατροπή μιας παράστασης με ρητό παρονομαστή μέσω συζυγής παράστασης, είτε όταν υπάρχει στον παρονομαστή ένα ριζικό, είτε όταν υπάρχει άθροισμα ή διαφορά ποσοτήτων, όπου η μία τουλάχιστον είναι ριζικό. Στο 3$^{\text{ο}}$ κεφάλαιο των εξισώσεων, οι εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού είναι κάτι που έχουν εξεταστεί σε παλαιότερες τάξεις και θα μπορούσαν να εξεταστούν με την η εξίσωση $x^{\nu}=\alpha$ για τις διάφορες τιμές του ν (άρτιος ή περιττός) και του α (θετικός ή αρνητικός). Στις απόλυτες τιμές θα μπορούσε να γίνει ένας συνδυασμός από όσα αναφέρονται στο 2$^{\text{ο}}$ (ορισμός), 3$^{\text{ο}}$ (εξισώσεις, όπως $|x|=\alpha$) και 4$^{\text{ο}}$ κεφάλαιο (ανισώσεις, όπως $|x|<\alpha$ και $|x|>\alpha$), σε όλα για τις διάφορες τιμές του α. Στο 4$^{\text{ο}}$ κεφάλαιο εμφανίζονται οι ανισώσεις δευτέρου βαθμού που μπορούν να εξεταστούν για τις διάφορες τιμές της διακρίνουσας Δ και του συντελεστή του $x^2$ που είναι το α. Στο 5$^{\text{ο}}$ κεφάλαιο είναι οι καινούριες έννοιες της αριθμητικής και της γεωμετρικής προόδου, οπότε στην μεν αριθμητική είναι ο πρώτος όρος της $\alpha_1$, ο νιοστός όρος της $\alpha_{\nu}$, η διαφορά ω και το άθροισμα των ν πρώτων όρων της προόδου $S_{\nu}$, στη δε γεωμετρική πρόοδο είναι ο πρώτος όρος της $\alpha_1$, ο νιοστός όρος της $\alpha_{\nu}$, ο λόγος λ και το άθροισμα των ν πρώτων όρων της $S_{\nu}$. Στο 6$^{\text{ο}}$ κεφάλαιο των συναρτήσεων διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις πιθανόν τεστ: τον υπολογισμό της αριθμητικής συνάρτησης σε περίπτωση που ύπαρξης συνάρτησης είτε με έναν, είτε με δύο, είτε με τρεις κλάδους, την εύρεση του πεδίου ορισμού των συναρτήσεων, είτε χωρίς περιορισμό, είτε με ύπαρξη ριζικού, είτε με ύπαρξη κλάσματος ή συνδυασμός αυτών και τέλος, την εύρεση του συμμετρικού ενός σημείου ως προς τον άξονα x′x, τον άξονα y′y, την αρχή των αξόνων O(0,0) και τη διχοτόμο του 1$^{\text{ου}}$ και του 3$^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου y=x. Στη Γεωμετρία στο 3$^{\text{ο}}$ κεφάλαιο συναντούμε τα τρία κριτήρια ισότητας των τυχαίων τριγώνων, όπως και τα αντίστοιχα δύο των ορθογωνίων τριγώνων, όπως τα είδαμε και στη Γ’ Γυμνασίου. Στο 5$^{\text{ο}}$ κεφάλαιο βρίσκονται τα παραλληλόγραμμα και τα είδη τους (γενικά παραλληλόγραμμα, ορθογώνια, ρόμβοι και τετράγωνα), τα οποία μπορούμε να εξετάσουμε ως προς τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά τους.

Στη Β’ Λυκείου, η ΓΔΑ μπορεί μα βρει εφαρμογή, στην Άλγεβρα, λιγότερο στη Γεωμετρία και ακόμα λιγότερο στα Μαθηματικά Προσανατολισμού. Στην Άλγεβρα, στο $2^{ο}$ κεφάλαιο γίνεται αναφορά στις συναρτήσεις και στα χαρακτηριστικά τους. Έτσι μέσω των γραφικών παραστάσεων μπορούν να κατασκευαστούν τεστ που θα αφορούν την μονοτονία (γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού των δοθέντων συναρτήσεων ή κατά διαστήματα αυτών) και τα ακρότατα (ολικά ελάχιστα ή ελάχιστα και ολικά μέγιστα ή μέγιστα, εφόσον υπάρχουν). Στο ίδιο κεφάλαιο υπάρχουν και οι μετατοπίσεις που μπορούν να γίνουν σε μια συνάρτηση (κατακόρυφη, οριζόντια και συνδυασμός αυτών). Τέλος, στο κομμάτι της συμμετρίας οι συναρτήσεις διακρίνονται σε τέσσερις κατηγορίες: οι άρτιες, οι περιττές, αυτές που δεν έχουν καμία συμμετρία και αυτές που δεν έχει νόημα να εξετάσουμε, γιατί δεν ικανοποιούν τη βασική προϋπόθεση του συμμετρικού πεδίου ορισμού. Στο $3^{ο}$ κεφάλαιο έχουμε πληθώρα επιλογών με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς (ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη και συνεφαπτομένη πλέον), όχι μόνο σε οξεία ($1^{ο}$ τεταρτημόριο) και αμβλεία γωνία ($2^{ο}$ τεταρτημόριο), αλλά και στα άλλα δύο τεταρτημόρια ($3^{ο}$ και $4^{ο}$), καθώς επίσης και τη μελέτη γωνιών μεγαλύτερων των 360°, όπως και τις αντίστοιχες αρνητικές γωνίες. Στην τριγωνομετρία επίσης συναντούμε την εύρεση μεγίστου – ελαχίστου, καθώς και της περιόδου των συναρτήσεων της μορφής $\rho\eta\mu(\omega x)$ και $\rho\sigma\upsilon\nu(\omega x)$. Τέλος, το τελευταίο είναι οι εύρεση λύσεων των τριγωνομετρικών εξισώσεων και στους τέσσερις τριγωνομετρικούς αριθμούς που προαναφέρθηκαν. Στο $5^{ο}$ κεφάλαιο που κλείνει την Άλγεβρα υπάρχουν οι ιδιότητες των λογαρίθμων που δίνουν τη δυνατότητα για την κατασκευή ενός τεστ. Στη Γεωμετρία οι επιλογές είναι περιορισμένες. Στο $8^{ο}$ κεφάλαιο υπάρχουν τα τρία κριτήρια όμοιων τριγώνων. Στο $9^{ο}$ κεφάλαιο συναντούμε τις μετρικές σχέσεις σε ορθογώνιο τρίγωνο (είτε για υπολογισμό κύριων στοιχείων όπως οι τρεις πλευρές, είτε με δευτερεύουσα στοιχεία όπως είναι το ύψος στην υποτείνουσα και οι προβολές των καθέτων πλευρών σε αυτήν). Στο $10^{ο}$ κεφάλαιο είναι οι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου, ενώ σε συνδυασμό του $10^{ου}$ και $11^{ου}$ κεφαλαίου μπορούν να δημιουργηθούν τεστ για την γνώση του εμβαδού επίπεδων (τετράγωνο, ορθογώνιο και τρίγωνο κυρίως) και κυκλικών σχημάτων. Στα Μαθηματικά Προσανατολισμού οι επιλογές είναι πολύ λίγες και περιορίζονται στη εύρεση των χαρακτηριστικών των κωνικών τομών από τις εξισώσεις της καμπύλης τους. Έτσι για τον κύκλο αναζητούμε την ακτίνα και το κέντρο του, για την παραβολή την εστία και τη διευθετούσα, για την έλλειψη τις εστίες, τις κορυφές, τον μικρό και μεγάλο άξονα και την εκκεντρότητα και για την υπερβολή τα εστίες, τις κορυφές, την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες.

Στη Γ' Λυκείου, η ΓΔΑ μπορεί μα βρει εφαρμογή και στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας και στα Μαθηματικά Προσανατολισμού. Ξεκινώντας από τα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας, στο 1$^{ο}$ κεφάλαιο βρίσκουμε τις πράξεις των ενδεχομένων (ένωση, τομή, συμπληρωματικό και διαφορά), τις πιθανότητες και πράξεις με ενδεχόμενα και τη συνδυαστική (διατάξεις, μεταθέσεις με και χωρίς επαναλήψεις και συνδυασμοί). Στο 2$^{ο}$ κεφάλαιο στις μεταβλητές προς μελέτη ενός προβλήματος υπάρχει η κατηγοριοποίησή τους (ποιοτικές και ποσοτικές και στις ποσοτικές ο διαχωρισμός τους ανάμεσα σε διακριτές και συνεχείς). Στις συχνότητες είναι οι κατηγορίες τους στην απλή συχνότητα και στις σχετική συχνότητα και σχετική συχνότητα επί τοις εκατό (%). Τέλος, στα χαρακτηριστικά ενός δείγματος ή πληθυσμού υπάρχουν τα μέτρα θέσης (μέση τιμή, διάμεσος, επικρατούσα τιμή) και τα μέτρα διασποράς (εύρος, διακύμανση και τυπική απόκλιση). Αναφέρουμε αυτά τα οποία κατά τη γνώμη μας είναι πιο εύκολο να αξιοποιηθούν για τη δημιουργία ενός τεστ και όχι όλα όσα αναφέρει σε κάθε κατηγορία το σχολικό βιβλίο. Μπορεί να γίνει και ένα τεστ ανάμεσα σε μέση τιμή, τυπική απόκλιση και συντελεστή μεταβλητότητας, μιας και ο τελευταίος συνδέει τα δύο πρώτα. Στα Μαθηματικά Προσανατολισμού, στο 1$^{ο}$ κεφάλαιο βρίσκουμε αρχικά την σύνθεση δύο συναρτήσεων ( $f \circ g$ και $g \circ f$ ) και όλα τα υπόλοιπα έχουν ως βάση αναφοράς τα όρια. Στα όρια σε πραγματικό σημείο, στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ έχουμε την παραγοντοποίηση, τη συζυγή παράσταση και τον συνδυασμό των παραπάνω. Στα όρια σε πραγματικό σημείο, στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{\alpha}{0}$ έχουμε τα όρια που είναι $+\infty$ ή $-\infty$ ή δεν υπάρχουν. Άλλη μια κατηγοριοποίηση είναι τα όρια στο $+\infty$ ή $-\infty$. Το κεφάλαιο το κλείνει η συνέχεια συνάρτησης, όπου μια συνάρτηση είτε θα είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, είτε δε θα είναι συνεχής, επειδή είτε δε θα υπάρχει το όριο το σημείο αυτό, είτε γιατί θα υπάρχει αλλά θα είναι διαφορετικό από την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό του πεδίου ορισμού της. Μεταβαίνοντας στο 2$^{ο}$ κεφάλαιο, συναντούμε αρχικά τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων και έπειτα τους κανόνες παραγώγισης (άθροισμα, γινόμενο, πηλίκο και σύνθεση). Στη συνέχεια μπορούμε να κατασκευάσουμε τεστ σε κρίσιμα τμήματα της μελέτης μια συνάρτησης, όπως είναι η μονοτονία (γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα ή συνδυασμό τους), ακρότατα (ολικά και τοπικά ελάχιστα και μέγιστα) και καμπυλότητα (κυρτή, κοίλη συνάρτηση και συνδυασμό τους που δημιουργεί τα σημεία καμπής). Τέλος, το κεφάλαιο κλείνουν οι ασύμπτωτες, όπου μια συνάρτηση μπορεί να μην έχει καμία, μπορεί να έχει κατακόρυφη, οριζόντια ή πλάγια ή συνδυασμό αυτών. Στο $3^o$ κεφάλαιο υπάρχουν από την μία το αόριστο ολοκλήρωμα των βασικών συναρτήσεων και το ορισμένο ολοκλήρωμα μια συνάρτησης που μπορεί να είναι θετικό, αρνητικό ή συνδυασμό αυτών.

Για την όσο καλύτερη λειτουργία της ΓΔΑ συστήνεται κατά τη δημιουργία ενός τεστ να χρησιμοποιούνται προς εξέταση δύο ή το πολύ τρία χαρακτηριστικά, τα οποία να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και να διατηρηθούν οι προδιαγραφές των τεστ στα πρότυπα που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία, όσον αφορά το πλήθος των ερωτήσεων και τον συνδυασμό των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων μεταξύ τους που χρησιμοποιούνται σε κάθε ερώτηση, πάντα βέβαια δημιουργώντας ένα τεστ που ο απαιτούμενος χρόνος για την εκτέλεσή του δε θα ξεπερνά αυτόν μίας τυπικής σχολικής διδακτικής ώρας 40 – 45 λεπτών.

# Βιβλιογραφία


Alderson, J. C., Haapakangas, E. L., Huhta, A., Nieminen, L., & Ullakonoja, R. (2014). *The diagnosis of reading in a second or foreign language*. Routledge.

Anamezie, R. C., & Nnadi, F. O. (2019). Application of cognitive diagnostic model in assessment of basic electricity practical skills proficiency among physics education undergraduates in Enugu State University of Science and Technology. *British Journal of Education, 7*(3), 47-57.

Arican, M., & Kuzu, O. (2020). Diagnosing preservice teachers' understanding of statistics and probability: Developing a test for cognitive assessment. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(4), 771-790.

Ayers, E., Nugent, R., & Dean, N. (2008). Skill set profile clustering based on student capability vectors computed from online tutoring data. In *EDM2008: 1st International Conference on Educational Data Mining, Montreal, Canada*.

Barnes, T. (2003). The Q-matrix method of fault-tolerant teaching in knowledge assessment and data mining. *Ph.D. dissertation, Department of Computer Science, North Carolina State University*.

Bradshaw, L. P., & Templin, J. L. (2014). The use of cognitive diagnosis models for evaluating postsecondary STEM course exams. *Educational and Psychological Measurement, 74*(4), 629-653.

Bradshaw, L., Izsak, A., Templin, J., & Jacobson, E. (2014). Diagnosing teachers' understandings of rational numbers: Building a multidimensional test within the diagnostic classification framework. Educational measurement: Issues and practice, 33(1), 2-14.

Chen, Y., Culpepper, S. A., Chen, Y., & Douglas, J. (2018). Bayesian estimation of the DINA Q matrix. *Psychometrika, 83*(1), 89-108.

Chen, Y. H., Ferron, J. M., Thompson, M. S., Gorin, J. S., & Tatsuoka, K. K. (2010). Group comparisons of mathematics performance from a cognitive diagnostic perspective. *Educational Research and Evaluation*, *16*(4), 325-343.

Chiu, C. Y., & Douglas, J. (2013). A nonparametric approach to cognitive diagnosis by proximity to ideal response patterns. *Journal of Classification, 30*, 225-250.

Chiu, C. Y., Douglas, J. A., & Li, X. (2009). Cluster analysis for cognitive diagnosis: Theory and applications. *Psychometrika, 74*, 633-665.

Chiu, C.-Y., & Köhn, H.-F. (2019). Consistency theory for the general nonparametric classification method. *Psychometrika, 84,* 830-845.

Chiu, C. Y., Sun, Y., & Bian, Y. (2018). Cognitive diagnosis for small educational programs: The general nonparametric classification method. *Psychometrika, 83*, 355-375.

Choi, K. M., Lee, Y. S., & Park, Y. S. (2015). What CDM can tell about what students have learned: An analysis of TIMSS eighth grade mathematics. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *11*(6), 1563-1577.

Culpepper, S. A. (2019). Estimating the cognitive diagnosis Q matrix with expert knowledge: Application to the fraction-subtraction dataset. *Psychometrika*, *84*(2), 333-357.

de la Torre, J. (2011). The generalized DINA model framework. *Psychometrika, 76*, 179-199.

DiBello, L. V., Roussos, L. A., & Stout, W. F. (2007). Review of cognitively diagnostic assessment and a summary of psychometric models. *Psychometrics, 26*, 979-1030.

Embretson, S. (1994). Applications of cognitive design systems to test development. In *Cognitive assessment: A multidisciplinary perspective* (pp. 107-135). Boston, MA: Springer US.

Hartz, S. M. (2002). A Bayesian framework for the unified model for assessing cognitive abilities: Blending theory with practicality. *University of Illinois*.

Hartigan, J. A. (1975). *Clustering algorithms*. New York: Wiley.

Henson, J., Templin, R., & Willse, J. (2009). Defining a family of cognitive diagnosis models using log linear models with latent variables. *Psychometrika, 74*, 191-210.

Junker, B. W., & Sijtsma, K. (2001). Cognitive assessment models with few assumptions, and connections with nonparametric item response theory. *Applied Psychological Measurement, 25*, 258-272.

Köhn, H.-F., & Chiu, C.-Y. (2018). How to build a complete Q-matrix for a cognitively diagnostic test. *Journal of Classification, 35*, 273-299.

Kunina-Habenicht, O., Rupp, A., & Wilhelm, O. (2012). The impact of model misspecification on parameter estimation and item-fit assessment in log-linear diagnostic classification models. *Journal of Educational Measurement, 49*(1), 59-81.

Lee, Y. W., & Sawaki, Y. (2009). Cognitive diagnosis approaches to language assessment: An overview. *Language Assessment Quarterly, 6*(3), 172-189.

Leighton, J., & Gierl, M. (Eds.). (2007). *Cognitive diagnostic assessment for education: Theory and applications*. Cambridge University Press.

Leighton, J. P., Gierl, M. J., & Hunka, S. (2004). The attribute hierarchy model: An approach for integrating cognitive theory with assessment practice. *Journal of Educational Measurement, 41*, 205-236.

Li, L., Zhou, X., Huang, J., Tu, D., Gao, X., Yang, Z., & Li, M. (2020). Assessing kindergarteners' mathematics problem solving: The development of a cognitive diagnostic test. *Studies in Educational Evaluation, 66*, 100879.

Ma, C., de la Torre, J., & Xu, G. (2023). Bridging parametric and nonparametric methods in cognitive diagnosis. *Psychometrika, 88*(1), 51-75.

MacQueen, J. (1967). Some methods of classification and analysis of multivariate observations. In L. M. Le Cam & J. Neyman (Eds.), *Proceedings of the fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (pp. 281–207). Berkeley: University of California Press.

Messick, S. (1994). Validity of psychological assessment: validation of inferences from persons' responses and performances as scientific inquiry into score meaning. *ETS Research Report Series, 1994*(2), i-28.

Mislevy, R. J. (1994). Probability-based inference in cognitive diagnosis. *ETS Research Report Series, 1994*(1), i-31.

Nichols, P. D. (1994). A framework for developing cognitively diagnostic assessments. *Review of Educational Research*, *64*(4), 575-603.

Ren, H., Xu, N., Lin, Y., Zhang, S., & Yang, T. (2021). Remedial teaching and learning from a cognitive diagnostic model perspective: Taking the data distribution characteristics as an example. *Frontiers in Psychology*, *12*, 628607.

Rupp, A. A., Templin, J. L., & Henson, R. A. (2010). *Diagnostic assessment: Theory, methods, and applications*. New York, NY: Guilford Press.

Sternberg, R. J. & Ben-Zeev, T. (Eds.) (1996): *The nature of mathematical thinking.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Tatsuoka, K. (1985). A probabilistic model for diagnosing misconceptions in the pattern classification approach. *Journal of Educational Statistics*, *12*, 55-73.

Tatsuoka, K. K. (2009). *Cognitive assessment: An introduction to the rule space method.* Routledge.

Templin, J. L., & Henson, R. A. (2006). Measurement of psychological disorders using cognitive diagnosis models. *Psychological Methods, 11*, 287-305.

Tu, D., Wang, S., Cai, Y., Douglas, J., & Chang, H. H. (2019). Cognitive diagnostic models with attribute hierarchies: Model estimation with a restricted Q-matrix design. *Applied Psychological Measurement, 43*(4), 255-271.

von Davier, M. (2005). A general diagnostic model applied to language testing data. *ETS Research Report Series*, *2005*(2), i-35.

von Davier, M., & Lee, Y. S. (2019). Introduction: From latent classes to cognitive diagnostic models. In M. von Davier & Y. S. Lee (Eds.), *Handbook of Diagnostic Classification Models* (pp. 1-17). Cham: Springer.

Wu H.-M. (2019). Online individualised tutor for improving mathematics learning: A cognitive diagnostic model approach. *Educational Psychology*, 39(10), 1218–1232.

Xu, G., & Shang, Z. (2018). Identifying latent structures in restricted latent class models. *Journal of the American Statistical Association*, *113*(523), 1284-1295.

Yamaguchi, K., & Okada, K. (2018). Comparison among cognitive diagnostic models for the TIMSS 2007 fourth grade mathematics assessment. *PloS One*, *13*(2), e0188691.

Zhang, Y., Jin, Y., Xiong, Z., Leung, S. O., Chen, G., Li, N., & Li, B. (2022). Personalized assessment: Applying higher-order cognitive diagnosis models in secondary mathematics. *Asian Journal for Mathematics Education*, *1*(4), 455-474.

# Παράρτημα Α: Δοκιμασίες

**Μαθηματικά Α' Γυμνασίου**

**Κεφάλαιο 2$^{ο}$: Κλάσματα**

**Χρόνος Τεστ: 1 διδακτική ώρα**

Χαρακτηριστικά γνωρίσματα υπό εξέταση:

Α1: Απλοποίηση κλάσματος (Μετατροπή κλάσματος σε ανάγωγο)

Η απλοποίηση κλάσματος λαμβάνει χώρα συνήθως στο τέλος της διαδικασία πρόσθεσης ή αφαίρεσης κλασμάτων.

$$\frac{30}{18} \overset{:2}{\underset{:2}{=}} \frac{15}{9} \overset{:3}{\underset{:3}{=}} \frac{5}{3} \text{ ή } \frac{30}{18} \overset{:6}{\underset{:6}{=}} \frac{5}{3}$$

Α2: Πρόσθεση ή αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων

Η πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων αφορά μόνο με την πρόσθεση ή αφαίρεση των αριθμητών του κλάσματος.

$$\frac{5}{8}+\frac{6}{8}=\frac{5+6}{8}=\frac{11}{8} \text{ και } \frac{7}{5}-\frac{4}{5}=\frac{7-4}{5}=\frac{3}{5}$$

Α3: Εύρεση ισοδύναμου κλάσματος με δοσμένο παρονομαστή

Η εύρεση ισοδύναμου κλάσματος σχετίζεται με την διαδικασία «καπελάκια», όπου για να προσθέσει ή να αφαιρέσει ο μαθητής δύο ετερώνυμα κλάσματα πρέπει να βρει το ΕΚΠ των παρονομαστών και στη συνέχεια να πολλαπλασιάσει με τον κατάλληλο αριθμό το κάθε κλάσμα ώστε να προκύψουν ισοδύναμα ομώνυμα πλέον κλάσματα τα οποία και προσθέτει ή αφαιρεί.

Ισοδύναμο του $\frac{5}{2}$ με παρονομαστή το 6 είναι το $\frac{5}{2} \overset{\times 3}{\underset{\times 3}{=}} = \frac{15}{6}$

*Προαπαιτούμενες γνώσεις*

Ο/η μαθητής/τρια πρέπει να γνωρίζει:

- Πρόσθεση και αφαίρεση φυσικών αριθμών
- Πολλαπλασιασμό και διαίρεση φυσικών αριθμών
- Εύρεση ΕΚΠ δύο ή περισσοτέρων αριθμών

ΤΕΣΤ

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις.

**1)** Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{10}{14}$.

Α. $\frac{20}{28}$ Β. $\frac{5}{7}$ Γ. $\frac{6}{7}$ Δ. $\frac{1}{4}$ Ε. $\frac{2}{3}$

**2)** Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{9}{2}$ στο ισοδύναμο του με παρονομαστή το 8.

Α. $\frac{9}{8}$ Β. $\frac{18}{8}$ Γ. $\frac{27}{8}$ Δ. $\frac{36}{8}$ Ε. $\frac{45}{8}$

**3)** Να υπολογίσετε το άθροισμα $\frac{4}{9}+\frac{1}{9}$.

Α. $\frac{5}{9}$ Β. $\frac{3}{9}$ Γ. $\frac{6}{9}$ Δ. $\frac{5}{18}$ Ε. $\frac{3}{18}$

**4)** Να υπολογίσετε τη διαφορά $\frac{7}{12}-\frac{1}{4}$.

Α. $\frac{1}{6}$ Β. $\frac{6}{8}$ Γ. $\frac{1}{3}$ Δ. $\frac{6}{12}$ Ε. $\frac{3}{2}$

**5)** Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{26}{12}$.

Α. $\frac{6}{3}$ Β. $\frac{52}{24}$ Γ. $\frac{13}{12}$ Δ. $\frac{6}{1}$ Ε. $\frac{13}{6}$

**6)** Να υπολογίσετε το άθροισμα $\frac{8}{10}+\frac{4}{10}$.

Α. $\frac{6}{5}$ Β. $\frac{12}{20}$ Γ. $\frac{6}{10}$ Δ. $\frac{12}{5}$ Ε. $\frac{2}{5}$

**7)** Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{14}{21}$ στο ισοδύναμό του με παρονομαστή το 15.

Α. $\frac{8}{15}$ Β. $\frac{14}{15}$ Γ. $\frac{21}{15}$ Δ. $\frac{7}{15}$ Ε. $\frac{10}{15}$

**8)** Να υπολογίσετε τη διαφορά $\frac{7}{2}-\frac{4}{5}$.

Α. $\frac{12}{7}$ Β. $\frac{27}{10}$ Γ. $\frac{43}{10}$ Δ. $\frac{3}{2}$ Ε. $\frac{3}{5}$

**9)** Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{8}{5}$ στο ισοδύναμό του με παρονομαστή το 15.

Α. $\frac{8}{15}$ Β. $\frac{23}{15}$ Γ. $\frac{5}{15}$ Δ. $\frac{24}{15}$ Ε. $\frac{7}{15}$

**10)** Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{18}{27}$.

Α. $\frac{1}{2}$ Β. $\frac{2}{9}$ Γ. $\frac{2}{3}$ Δ. $\frac{9}{13}$ Ε. $\frac{7}{9}$

**11)** Να υπολογίσετε το άθροισμα $\frac{5}{3}+\frac{2}{3}$.

Α. $\frac{7}{6}$ Β. $\frac{3}{6}$ Γ. $\frac{3}{3}$ Δ. $\frac{7}{3}$ Ε. $\frac{8}{3}$

**12)** Να υπολογίσετε το άθροισμα $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$.

Α. $\frac{11}{12}$ Β. $\frac{4}{10}$ Γ. $\frac{4}{12}$ Δ. $\frac{11}{6}$ Ε. $\frac{22}{12}$

**13)** Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{25}{15}$ στο ισοδύναμό του με παρονομαστή το 9.

Α. $\frac{25}{9}$ Β. $\frac{10}{9}$ Γ. $\frac{15}{9}$ Δ. $\frac{5}{9}$ Ε. $\frac{40}{9}$

**14)** Να υπολογίσετε τη διαφορά $\frac{7}{4}-\frac{6}{4}$.

Α. $\frac{13}{4}$ Β. $\frac{1}{4}$ Γ. $\frac{13}{8}$ Δ. $\frac{1}{8}$ Ε. $\frac{3}{4}$

**15)** Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{5}{2}$ στο ισοδύναμό του με παρονομαστή το 30.

Α. $\frac{25}{30}$ Β. $\frac{85}{30}$ Γ. $\frac{15}{30}$ Δ. $\frac{65}{30}$ Ε. $\frac{75}{30}$

**16)** Να υπολογίσετε το άθροισμα $\frac{5}{8}+\frac{7}{8}$.

Α. $\frac{3}{4}$ Β. $\frac{5}{2}$ Γ. $\frac{3}{2}$ Δ. $\frac{7}{4}$ Ε. $\frac{5}{3}$

**17)** Να υπολογίσετε το άθροισμα $\frac{5}{3}+\frac{8}{6}$.

Α. $\frac{1}{3}$ Β. $\frac{13}{9}$ Γ. $\frac{13}{6}$ Δ. $\frac{3}{1}$ Ε. $\frac{13}{18}$

**18)** Να υπολογίσετε τη διαφορά $\frac{7}{4}-\frac{6}{4}$.

Α. $\frac{2}{5}$ Β. $\frac{2}{7}$ Γ. $\frac{1}{12}$ Δ. $\frac{1}{3}$ Ε. $\frac{1}{6}$

**19)** Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{21}{18}$ στο ισοδύναμό του με παρονομαστή το 12.

Α. $\frac{11}{12}$ Β. $\frac{14}{12}$ Γ. $\frac{4}{12}$ Δ. $\frac{21}{12}$ Ε. $\frac{1}{12}$

**20)** Να υπολογίσετε το άθροισμα $\frac{8}{3}+\frac{1}{6}$.

Α. $\frac{17}{6}$ Β. $\frac{9}{9}$ Γ. $\frac{7}{3}$ Δ. $\frac{9}{6}$ Ε. $\frac{9}{3}$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Πίνακας **Q**

Απαιτούμενα χαρακτηριστικά γνωρίσματα ανά ερώτηση

Απαντήσεις

$$
\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \mathrm{A1} & - & - \\ - & - & \mathrm{A3} \\ - & \mathrm{A2} & - \\ \mathrm{A1} & \mathrm{A2} & \mathrm{A3} \\ \mathrm{A1} & - & - \\ \mathrm{A1} & \mathrm{A2} & - \\ \mathrm{A1} & - & \mathrm{A3} \\ - & \mathrm{A2} & \mathrm{A3} \\ - & - & \mathrm{A3} \\ \mathrm{A1} & - & - \\ - & \mathrm{A2} & - \\ - & \mathrm{A2} & \mathrm{A3} \\ \mathrm{A1} & - & \mathrm{A3} \\ - & \mathrm{A2} & - \\ - & - & \mathrm{A3} \\ \mathrm{A1} & \mathrm{A2} & - \\ \mathrm{A1} & \mathrm{A2} & \mathrm{A3} \\ \mathrm{A1} & \mathrm{A2} & - \\ \mathrm{A1} & - & \mathrm{A3} \\ - & \mathrm{A2} & \mathrm{A3} \end{bmatrix}
$$

1 – Β
2 – Δ
3 – Α
4 – Γ
5 – Ε
6 – Α
7 – Ε
8 – Β
9 – Δ
10 – Γ
11 – Δ
12 – Α
13 – Γ
14 – Β
15 – Ε
16 – Γ
17 – Δ
18 – Ε
19 – Β
20 – Α

**Μαθηματικά Β' Γυμνασίου**

**Κεφάλαιο 3ο: Συναρτήσεις**

**Ενότητα: Η συνάρτηση $y = \alpha x + \beta$.**

**Χρόνος Τεστ: 1 διδακτική ώρα**

Χαρακτηριστικά γνωρίσματα υπό εξέταση:

Α1: Υπολογισμός της παραμέτρου α.

Η παράμετρος α καθορίζει τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $y = \alpha x + \beta$ ή αλλιώς την κλίση που έχει αυτή με τον άξονα $x'x$.

Α2: Υπολογισμός της παραμέτρου β.

Η παράμετρος β καθορίζει το σημείο τομής της ευθείας $y = \alpha x + \beta$ με τον άξονα $y'y$, δηλαδή το σημείο $(0, \beta)$.

Προαπαιτούμενες γνώσεις

Ο/η μαθητής/τρια πρέπει να γνωρίζει:

- Πράξεις πραγματικών αριθμών.
- Επίλυση εξισώσεων 1ου βαθμού με έναν άγνωστο.
- Γνώση και χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων.

Υποδειγματικές ερωτήσεις:

- Ερώτηση που απαιτεί μόνο το γνωστικό χαρακτηριστικό Α1:
  - Να υπολογίσετε το α στην ευθεία $y = \alpha x + 1$, αν αυτή διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,2)$.

- Ερώτηση που απαιτεί μόνο το γνωστικό χαρακτηριστικό Α2:
  - Να υπολογίσετε το β στην ευθεία $y = 2x + \beta$, αν αυτή διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(2,3)$.

- Ερώτηση που απαιτεί τα γνωστικά χαρακτηριστικά Α1 και Α2:

  - Να βρείτε την ευθεία $y=\alpha x+\beta$, αν αυτή διέρχεται από τα σημεία $\Gamma\left(-1,2\right)$ και $\Delta\left(2,-1\right)$.

ΤΕΣΤ

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις.

**1)** Να υπολογίσετε το α στην ευθεία $y=\alpha x-1$, αν αυτή διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,1)$.

Α. 1 Β. –1 Γ. 2 Δ. –2 Ε. 0

**2)** Να υπολογίσετε το β στην ευθεία $y=x+\beta$, αν αυτή διέρχεται από σημείο $\mathrm{E}(3,2)$.

Α. 1 Β. –1 Γ. 2 Δ. 3 Ε. –2

**3)** Να βρείτε την ευθεία $y=\alpha x+\beta$, αν αυτή διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{M}(2,-2)$ και $\mathrm{N}(-2,2)$.

Α. $y=x$ Β. $y=x-2$ Γ. $y=-x$ Δ. $y=-x-2$ Ε. $y=-2x+2$

**4)** Να υπολογίσετε το β στην ευθεία $y=\alpha x+2$, αν αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Delta(0,-3)$.

Α. 2 Β. –2 Γ. 0 Δ. 3 Ε. –3

**5)** Να υπολογίσετε το α στην ευθεία $y=\alpha x+2$, αν αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\mathrm{B}(1,0)$.

Α. 1 Β. –1 Γ. 2 Δ. –2 Ε. 0

**6)** Να βρείτε την ευθεία $y=\alpha x+\beta$, αν έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με αυτόν της ευθείας που είναι διχοτόμος του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη όσος ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που είναι διχοτόμος του $2^{ου}$ και $4^{ου}$ τεταρτημορίου.

Α. $y=x$  Β. $y=-x$  Γ. $y=-x+1$  Δ. $y=x-1$  Ε. $y=x+2$

**7)** Να βρείτε την ευθεία $y=\alpha x+\beta$, αν αυτή έχει συντελεστή διεύθυνσης όσος είναι ο αντίθετος αριθμός του λόγου δύο ανάλογων ποσών με σταθερό λόγο 2 και διέρχεται από τον άξονα $y'y$ από το σημείο με τεταγμένη όσος είναι ο αντίστροφος αριθμός δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών με σταθερό γινόμενο 3.

Α. $y=2x+3$  Β. $y=-2x+3$  Γ. $y=2x+\frac{1}{3}$  Δ. $y=-2x-\frac{1}{3}$  Ε. $y=-2x+\frac{1}{3}$

**8)** Να υπολογίσετε το β στην ευθεία $y=2x+\beta$, αν αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη ίση με το σταθερό γινόμενο που έχουν τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά του παρακάτω πίνακα:

| x | 3 | 4 |
|---|---|---|
| y | 4 | 3 |

Α. 3  Β. 4  Γ. 12  Δ. $\frac{4}{3}$  Ε. $\frac{3}{4}$

**9)** Να υπολογίσετε το α στην ευθεία $y=\alpha x+1$, αν αυτή έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με τον σταθερό λόγο που έχουν τα ανάλογα ποσά του παρακάτω πίνακα:

| x | 1 | 2 |
|---|---|---|
| y | 3 | 6 |

Α. 3  Β. –3  Γ. 2  Δ. –2  Ε. 12

**10)** Να βρείτε την ευθεία $y=\alpha x+\beta$, αν αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\mathrm{K}(-1,0)$ και τον $y'y$ στο σημείο $\Lambda(0,-1)$.

Α. $y=x+1$  Β. $y=x-1$  Γ. $y=-x+1$  Δ. $y=-x-1$  Ε. $y=x-2$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

| Πίνακας **Q** | Απαιτούμενα χαρακτηριστικά γνωρίσματα ανά ερώτηση | Απαντήσεις |
|---|---|---|
| $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A1} & - \\ - & \mathrm{A2} \\ \mathrm{A1} & \mathrm{A2} \\ - & \mathrm{A2} \\ \mathrm{A1} & - \\ \mathrm{A1} & \mathrm{A2} \\ \mathrm{A1} & \mathrm{A2} \\ - & \mathrm{A2} \\ \mathrm{A1} & - \\ \mathrm{A1} & \mathrm{A2} \end{bmatrix}$ | $1-\Gamma$<br>$2-\mathrm{B}$<br>$3-\Gamma$<br>$4-\mathrm{E}$<br>$5-\Delta$<br>$6-\Delta$<br>$7-\mathrm{E}$<br>$8-\Gamma$<br>$9-\mathrm{A}$<br>$10-\Delta$ |

**Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου**

**Κεφάλαιο 1$^{ο}$: Αλγεβρικές Παραστάσεις**

**Ενότητα: Αξιοσημείωτες Ταυτότητες**

**Χρόνος Τεστ: 1 διδακτική ώρα**

Χαρακτηριστικά γνωρίσματα υπό εξέταση:

Α1: Η χρήση της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

Α2: Η χρήση της ταυτότητας $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$.

Α3: Η χρήση της ταυτότητας $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2$.

Προαπαιτούμενες γνώσεις

Ο/η μαθητής/τρια πρέπει να γνωρίζει:

- Πράξεις μεταξύ πραγματικών αριθμών (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση)
- Δυνάμεις πραγματικών αριθμών με εκθέτη φυσικό αριθμό.

Υποδειγματικές ερωτήσεις:

- Ερώτηση που απαιτεί μόνο το γνωστικό χαρακτηριστικό Α1:
  - Να βρείτε το ανάπτυγμα $(\omega+10)^2$.
- Ερώτηση που απαιτεί μόνο το γνωστικό χαρακτηριστικό Α2:
  - Να βρείτε το ανάπτυγμα $(z-15)^2$.
- Ερώτηση που απαιτεί μόνο το γνωστικό χαρακτηριστικό Α3:
  - Να βρείτε το ανάπτυγμα $(y-9)\cdot(y+9)$.

- Ερώτηση που απαιτεί τα γνωστικά χαρακτηριστικά Α1 και Α2:
  - Να γίνουν οι πράξεις $(x+1)^2+(2-x)^2$.

- Ερώτηση που απαιτεί τα γνωστικά χαρακτηριστικά Α1 και Α3:
  - Να γίνουν οι πράξεις $(x+4)^2+(4-x)\cdot(4+x)$.

- Ερώτηση που απαιτεί τα γνωστικά χαρακτηριστικά Α2 και Α3:
  - Να γίνουν οι πράξεις $(3-x)^2+(7-x)\cdot(7+x)$.

- Ερώτηση που απαιτεί και τα τρία γνωστικά χαρακτηριστικά Α1, Α2 και Α3:
  - Να γίνουν οι πράξεις $(\omega+z)^2-(z-\omega)^2+(z-\omega)\cdot(z+\omega)$.

ΤΕΣΤ

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις.

**1)** Να βρείτε το ανάπτυγμα $(x+2)^2$.

Α. $x^2+2x+4$

Β. $x^2+4x+4$

Γ. $x^2+4$

Δ. $x^2+2$

Ε. $x^2+x+4$

**2)** Να βρείτε το ανάπτυγμα $(x-3)^2$.

Α. $x^2+9$

Β. $x^2-9$

Γ. $x^2-3x+9$

Δ. $x^2-6x+9$

Ε. $x^2-6x+3$

**3)** Να βρείτε το ανάπτυγμα $(5-x)\cdot(5+x)$.

Α. $25-x^2$

Β. $x^2-25$

Γ. $25-5x+x^2$

Δ. $25-10x+x^2$

Ε. $25-25x+x^2$

**4)** Να κάνετε τις πράξεις $(x+5)^2+(x-5)^2$.

Α. $2x^2+10$

Β. $2x^2+25$

Γ. $4x^2+50$

Δ. $2x^2+50$

Ε. $2x^2-20x+50$

**5)** Να κάνετε τις πράξεις $\left(x^2+y^2\right)^2+\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(x^2-y^2\right)$.

Α. $2x^2+2x^2y^2$

Β. $2x^4+2x^2y^2$

Γ. $2y^4+2x^2y^2$

Δ. $2y^2+2x^2y^2$

Ε. $x^4+x^2y^2$

**6)** Να κάνετε τις πράξεις $(x+6)^2-(x-6)\cdot(x+6)+(x-6)^2$.

Α. $2x^2+72$

Β. $x^2+36$

Γ. $x^2+72$

Δ. $x^2+108$

Ε. $3x^2+108$

**7)** Να κάνετε τις πράξεις $(2x+3y)^2-(2x+3y)\cdot(2x-3y)$.

Α. $8x^2$

Β. $8x^2+6xy$

Γ. $18y^2+6xy$

Δ. $8x^2+12xy$

Ε. $18y^2+12xy$

**8)** Να βρείτε το ανάπτυγμα $\left(y+z^2\right)\cdot\left(y-z^2\right)$.

Α. $y^2-z^2$

Β. $y^2-z^4$

Γ. $z^2-y^2$

Δ. $z^4-y^2$

Ε. $z^4-2z^2y+y^2$

**9)** Να βρείτε το ανάπτυγμα $\left(4-y^2\right)^2$.

Α. $16-4y^2+y^2$

Β. $16-8y^2+y^4$

Γ. $16+y^4$

Δ. $16-y^4$

Ε. $16-y^2+y^4$

**10)** Να βρείτε το ανάπτυγμα $(5+y)^2$.

Α. $5+y^2$

Β. $25+y^2$

Γ. $25+5y+y^2$

Δ. $25+10y+y^2$

Ε. $25+y+y^2$

**11)** Να βρείτε το ανάπτυγμα $\left(3\varphi^2-4\omega^3\right)\cdot\left(3\varphi^2+4\omega^3\right)$.

Α. $9\varphi^2-16\omega^3$

Β. $16\omega^3-9\varphi^2$

Γ. $9\varphi^4-16\omega^6$

Δ. $16\omega^6-9\varphi^4$

Ε. $9\varphi^4-24\varphi^2\omega^3+16\omega^6$

**12)** Να κάνετε τις πράξεις $(x-y)^2-(x-y)\cdot(x+y)$.

Α. $x^2-xy$

Β. $2y^2-xy$

Γ. $2y^2-2xy$

Δ. $2x^2-2xy$

Ε. $x^2-2xy$

**13)** Να βρείτε το ανάπτυγμα $(-y-x)\cdot(-y+x)$.

Α. $x^2+y^2$

Β. $x^2-y^2$

Γ. $y^2-x^2$

Δ. $x^2-2xy+y^2$

Ε. $x^2-xy+y^2$

**14)** Να βρείτε το ανάπτυγμα $(-y-x)^2$.

Α. $-x^2-y^2$

Β. $x^2+y^2$

Γ. $-x^2-2xy-y^2$

Δ. $x^2-2xy+y^2$

Ε. $x^2+2xy+y^2$

**15)** Να βρείτε το ανάπτυγμα $(5x-2y)^2$.

Α. $25x^2+4y^2$

Β. $25x^2-4y^2$

Γ. $25x^2+10xy+4y^2$

Δ. $25x^2-10xy+4y^2$

Ε. $25x^2-20xy+4y^2$

**16)** Να κάνετε τις πράξεις $(x^2-y^2)\cdot(x^2+y^2)-(x^2-y^2)^2$.

Α. $-2y^4+2x^2y^2$

Β. $2y^4+2x^2y^2$

Γ. $-2x^4+2x^2y^2$

Δ. $2x^4+2x^2y^2$

Ε. $2x^2y^2$

**17)** Να κάνετε τις πράξεις $\left(y^2-2\right)^2-\left(y^2+2\right)^2$.

Α. $-8y^2$

Β. $8y^2$

Γ. –8

Δ. $-8y^4$

Ε. $8y^4$

**18)** Να βρείτε το ανάπτυγμα $\left(2x+3y\right)^2$.

Α. $x^2+6xy+y^2$

Β. $2x^2+6xy+3y^2$

Γ. $2x^2+12xy+3y^2$

Δ. $4x^2+12xy+9y^2$

Ε. $4x^2+9y^2$

**19)** Να βρείτε το ανάπτυγμα $\left(-\varphi+\omega\right)^2$.

Α. $-\varphi^2+\omega^2$

Β. $\varphi^2-\omega^2$

Γ. $\varphi^2-2\varphi\omega+\omega^2$

Δ. $\varphi^2-\varphi\omega+\omega^2$

Ε. $\varphi^2-\omega^2+\varphi\omega$

**20)** Να κάνετε τις πράξεις $\left(7-y\right)^2-\left(7+y\right)\cdot\left(7-y\right)+\left(7+y\right)^2$.

Α. $28y$

Β. $2y^2+98$

Γ. $y^2+49$

Δ. $3y^2+49$

Ε. $-28y$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Πίνακας **Q** — Απαιτούμενα χαρακτηριστικά γνωρίσματα ανά ερώτηση — Απαντήσεις

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A1 & - & - \\ - & A2 & - \\ - & - & A3 \\ A1 & A2 & - \\ A1 & - & A3 \\ A1 & A2 & A3 \\ A1 & - & A3 \\ - & - & A3 \\ - & A2 & - \\ A1 & - & - \\ - & - & A3 \\ - & A2 & A3 \\ - & - & A3 \\ A1 & - & - \\ - & A2 & - \\ - & A2 & A3 \\ A1 & A2 & - \\ A1 & - & - \\ - & A2 & - \\ A1 & A2 & A3 \end{bmatrix}$$

1 – Β
2 – Δ
3 – Α
4 – Δ
5 – Β
6 – Δ
7 – Ε
8 – Β
9 – Β
10 – Δ
11 – Γ
12 – Γ
13 – Γ
14 – Ε
15 – Ε
16 – Α
17 – Α
18 – Δ
19 – Γ
20 – Δ