ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ -
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ -
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ - ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β΄ Ηλικιακού Κύκλου (13-18 χρονών)

Διπλωματική εργασία

Η μαιευτική μέθοδος του Σωκράτη και η συνάφειά της με σύγχρονες αντιλήψεις για τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών.

του

Νικολαΐδη Μιχαήλ ΑΕΜ 1066

Επιβλέπων Καθηγητής: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής

Εξεταστές: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής
Δεσλή Δέσποινα, Καθηγήτρια
Τζανάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής

Φλώρινα, Ιούλιος 2024

Ευχαριστίες

Κατ' αρχάς ευχαριστώ τον καθηγητή κ. Νικολαντωνάκη που δέχτηκε να γίνει επιβλέπων στη διπλωματική μου εργασία.

Ευχαριστώ την καθηγήτρια κα Δεσλή και τον καθηγητή κ. Τζανάκη για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Στον δρ. Ιωάννη Θωμαΐδη οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ για όλη τη συμβολή του στην εκπόνηση της εργασίας.

Η καθηγήτρια κα Καλδρυμίδου, κατά την «ενδιάμεση παρουσίαση» της εργασίας μου, μου υπέδειξε και προσέφερε την έρευνα του Χ. Φράγκου (1973) για τη μαιευτική μέθοδο. Την ευχαριστώ.

Επιμένω στη θέση που πρέπει να διατηρήσει η εποπτεία στη διδασκαλία των μαθηματικών επιστημών. Χωρίς αυτήν, τα νέα πνεύματα δεν θα μπορούσαν να μυηθούν στην κατανόηση των μαθηματικών, δεν θα μάθαιναν να τα αγαπούν και δεν θα έβλεπαν σ' αυτά παρά μια μάταιη λογομαχία.

Henri Poincaré

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία σκιαγραφείται η σωκρατική διδασκαλία και ιδιαίτερα – κυρίως μέσα από τους πλατωνικούς διαλόγους *Μένων, Λάχης* και *Θεαίτητος* – η μαιευτική μέθοδος του Σωκράτη.

Διερευνώνται οι εκφάνσεις της μαιευτικής μεθόδου στην προτεινόμενη από την Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση μέθοδο διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών αλλά και στη Θεωρία των Διδακτικών καταστάσεων. Επίσης γίνεται μία επισκόπηση διδακτικών προτάσεων ερευνητών που αξιοποιούν τη μαιευτική μέθοδο για τη διδασκαλία μαθηματικών θεμάτων.

Τελικός σκοπός της εργασίας είναι να επιχειρηθεί να δοθεί μία απάντηση στο ερώτημα της εφαρμοσιμότητας της μαιευτικής μεθόδου του Σωκράτη, ή έστω πτυχών της, στη σύγχρονη Τάξη των Μαθηματικών.

Λέξεις κλειδιά

Σωκράτης, Μένων, μαιευτική μέθοδος, σωκρατική μέθοδος, εκ νέου επινόηση.

Abstract

In this thesis the Socratic teaching is outlined and especially - mainly through the Platonic dialogues of Meno, Laches and Theaetetus - the maieutic method of Socrates.

The manifestations of the maieutic method are investigated in the method of teaching and learning Mathematics proposed by the Realistic Mathematical Education and also in the Theory of Teaching Situations. There is also an overview of didactic proposals of researchers who use the maieutic method for teaching mathematical subjects.

The final purpose of the paper is to attempt to give an answer to the question of the applicability of Socrates' maieutic method, or at least aspects of it, in the modern Mathematics Classroom.

Keywords:

Socrates, Meno, maieutic method, socratic method, reinvention.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή - Ερευνητικά Ερωτήματα

Στα τελευταία δέκα περίπου χρόνια συνέβη (σταδιακά) μία αλλαγή στους βασικούς στόχους της διδασκαλίας της Θεωρητικής Γεωμετρίας στο ελληνικό Γενικό Λύκειο. Ενδεικτικά, στο Πρόγραμμα Σπουδών του 2011 δίνεται η γνωστή μέχρι τότε έμφαση-προτεραιότητα στη δομή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας «*η οποία είναι το κατ' εξοχήν πεδίο που μπορεί να μεταφέρει στους μαθητές την ενιαία δομή και τη συνοχή των Μαθηματικών. Μέσα από την αξιωματική της θεμελίωση, τις προτάσεις και τα θεωρήματα που αποδεικνύονται με χρήση προηγούμενων αποτελεσμάτων, η Θεωρητική Γεωμετρία μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν μία αίσθηση της οικοδόμησης μιας μαθηματικής θεωρίας καθώς και της έννοιας της απόδειξης στα Μαθηματικά*». Στο Πρόγραμμα Σπουδών του 2015, παραμένουν οι ίδιοι στόχοι, αντιστρέφεται όμως η προτεραιότητα και δίνεται έτσι έμφαση στην αποδεικτική διαδικασία: «*. . . , οι στόχοι για την διδασκαλία είναι οι δύο επόμενοι. α) Η ανάδειξη της μαθηματικής απόδειξης ως συστοίχου ανθρωπίνων διαδικασιών ... β) Η παρουσίαση της αξιωματικής θεμελίωσης ως τρόπου οργάνωσης της ανθρώπινης γνώσης ...*». Ενώ σύμφωνα με τις οδηγίες διδασκαλίας του σχολικού έτους 2021-2022 «*η διδασκαλία της Γεωμετρίας στην Α΄ Λυκείου εστιάζει στο πέρασμα από τον εμπειρικό στον θεωρητικό τρόπο σκέψης, με ιδιαίτερη έμφαση στον μαθηματικό συλλογισμό, την αιτιολόγηση και τη μαθηματική απόδειξη*» χωρίς καμία αναφορά στην αξιωματική δομή πράγμα εκ πρώτης όψεως ακατανόητο ή τουλάχιστον δυσεξήγητο.

Η διερεύνηση της αλλαγής αυτής στην ελληνική μαθηματική εκπαίδευση οδηγεί στην εξέταση των αλλαγών στη διδακτική της Γεωμετρίας που έλαβαν χώρα διεθνώς και των εξελίξεων στην αντίστοιχη διδακτική έρευνα. Μία από τις πρώτες εξελίξεις σε αυτόν τον τομέα ήταν η κριτική που άσκησε ο Hans Freudenthal (1905-1990), εδώ και πάνω από μισό αιώνα, στην παραδοσιακή διδασκαλία της ευκλείδειας γεωμετρίας υποστηρίζοντας ότι η αξιωματική οργάνωσή της επιβάλλεται στους μαθητές με δογματικό τρόπο (Freudenthal, 1963·1971·1973). Η κριτική του Freudenthal παρουσιάστηκε πιο συστηματικά στο πλαίσιο της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης που ο ίδιος δημιούργησε και επιγραμματικά διατυπώνεται με τον ισχυρισμό του ότι «η αξιωματική θεμελίωση δεν έχει θέση στο σχολείο, η αξιωματικοποίηση έχει» (Freudenthal, 1963 B). Όπως ο ίδιος δηλώνει, εμπνεύστηκε τη διδακτική θεωρία του, με κεντρικό σημείο την αρχή της εκ νέου επινόησης, από το περίφημο μάθημα του πλατωνικού διαλόγου *Μένων* όπου ο Σωκράτης διδάσκει σε έναν νεαρό δούλο τον διπλασιασμό του τετραγώνου. Το εν λόγω όμως μάθημα του διπλασιασμού του τετραγώνου, που θεωρείται υπόδειγμα που έχει όλα τα βασικά χαρακτηριστικά της *μαιευτικής μεθόδου,* της διδακτικής μεθόδου του Σωκράτη, έχει όχι μόνον κεντρική θέση στη Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση αλλά έχει τους τελευταίους αιώνες προταθεί από πολλούς παιδαγωγούς ως η λύση στο πρόβλημα της διδασκαλίας γενικώς και ιδιαίτερα της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο σχολείο.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο η *μαιευτική μέθοδος* επηρέασε τις σύγχρονες θεωρίες μάθησης και διδασκαλίας των Μαθηματικών και της δυνατότητας προβολής των επιμέρους πτυχών της μαιευτικής μεθόδου στη διδασκαλία των Μαθηματικών στο σύγχρονο σχολείο. Συμπεριλαμβάνει μία ανασκόπηση ερευνών, σχετικών με τη *μαιευτική μέθοδο* του Σωκράτη, που το κοινό τους χαρακτηριστικό είναι ότι έχουν ως αντικείμενο το μάθημα του διπλασιασμού του τετραγώνου του πλατωνικού διαλόγου *Μένων*.

Στην εργασία αυτή, υιοθετείται η διαπίστωση, κοινός τόπος στη βιβλιογραφία, ότι ο τρόπος που δίδασκε ο Σωκράτης και εν γένει η σωκρατική διδασκαλία είναι συνυφασμένη με τη φιλοσοφία του, με τον προσωπικό του βίο, με τη στάση ζωής του.

Με τον Σωκράτη (Αλωπεκή, Αρχαία Αθήνα, 470/469 π.Χ. – Αρχαία Αθήνα, 399 π.Χ.) το αντικείμενο της φιλοσοφίας από τη φύση του υλικού κόσμου, χαρακτηριστικό των προσωκρατικών φιλοσόφων, μετατοπίζεται στα προβλήματα της ανθρώπινης ζωής, στην ηθική και την πολιτική[1] (Guthrie, 1990). Βέβαια με πολιτικά προβλήματα ασχολήθηκαν και οι προσωκρατικοί φιλόσοφοι ενώ ηθικές απόψεις διατυπώθηκαν και από τους σοφιστές (Κοπιδάκης κ.ά., 2020), αλλά ήταν ο Σωκράτης αυτός που προσέδωσε στη φιλοσοφία ως αποκλειστικό αντικείμενο την ηθική και τη βαθύτερη ουσία του ανθρώπου (Τατάκης, 1970). Χαρακτηριστικό της σωκρατικής φιλοσοφικής θεώρησης ήταν η *ειρωνεία*, που επιγραμματικά αποδίδεται με το *έν οίδα, ότι ουδέν οίδα*, ως μέσο για την φιλοσοφική έρευνα. Η διαρκής αμφισβήτηση ήταν φαινομενικά το κοινό στοιχείο του με τους σοφιστές αλλά η μεγάλη διαφορά του με αυτούς ήταν ότι δεν αρνούνταν την ύπαρξη της αντικειμενικής αλήθειας, του όντως όντος, την οποία και αναζητούσε (Κοπιδάκης κ.ά, 2020). Στην αναζήτηση και ανακάλυψη της αλήθειας είχε ως όπλο τη διαλεκτική του (Λαλιώτης, 2020).

[1] Ο Τατάκης παραθέτει πληροφορία του Αριστοτέλη ότι «επί Σωκράτους δε τούτο μεν (το ορίζεσθαι) ηυξήθει - προηγήθηκαν οι πυθαγόρειοι και ο Δημόκριτος - το δε ζητείν τα περί φύσεως έληξε, προς δε την χρήσιμον αρετήν και την πολιτικήν απέκλιναν οι φιλοσοφούντες» (Τατάκης, 1970, σ.32).

Ο Αναπολιτάνος (2009) σημειώνει ότι είναι δύσκολο να δοθεί ακριβής ορισμός της διαλεκτικής μεθόδου όμως βασικό της στοιχείο αποτελεί η προσπάθεια να βρεθεί η αλήθεια μέσα από διαδοχικές προσεγγίσεις της. Κατά τους Κοπιδάκη κ.ά. (2020) η σωκρατική διαλεκτική είναι η σταδιακή αναίρεση των θέσεων του συνομιλητή και, στη συνέχεια, η επίσης σταδιακή προσπάθεια να εξαχθεί ένα νέο συμπέρασμα, μια νέα προσέγγιση της αλήθειας. Σ’ αυτή τη διαδικασία ο Σωκράτης δεν διατυπώνει τα επιμέρους και τα τελικά συμπεράσματα, που αποτελούν γνώσεις οι οποίες ως αιώνιες και αμετάβλητες *ιδέες* προϋπάρχουν στην ψυχή του συνομιλητή, αλλά βοηθά τον συνομιλητή να τις ανακαλέσει από τη μνήμη του, να τις ξαναθυμηθεί. Ο Σωκράτης αυτή του την τακτική την ονομάζει «τέχνη της μητέρας του»[2], μεταγενέστεροι μελετητές του έργου του την ονόμασαν *μαιευτική*.

Περιγράφοντας σε αδρές γραμμές τη διαλεκτική μέθοδο, πρόκειται για διάλογο του Σωκράτη με έναν ή περισσότερους συνομιλητές όπου ο δάσκαλος δεν παρουσιάζει την δική του θέση αλλά επιδιώκει να την «εκμαιεύσει» από τον συνομιλητή του.

Όμως υπάρχει και μία άλλη ενδιαφέρουσα εκδοχή της διαλεκτικής μεθόδου: Ο Δάσκαλος δίδασκε την αναζήτηση της αλήθειας χωρίς να θεωρεί εκ προοιμίου ούτε την αρχική δική του θέση ως σωστή ούτε και ως αναγκαστικά δυνατή την εύρεση της αλήθειας. Δύο ενδεικτικά παραδείγματα[3]:

- Ο διάλογος *Μένων*, που θα είναι στο επίκεντρο της εργασίας αυτής και έχει ως θέμα το διδακτόν της αρετής, δεν καταλήγει σε έναν - σύμφωνα με την σωκρατική απαίτηση - ορισμό της αρετής ούτε και σε απάντηση του ερωτήματος αν είναι διδακτή η αρετή.

- Ο διάλογος *Πρωταγόρας* καταλήγει με τον Σωκράτη, που στην αρχή του διαλόγου υποστήριζε πως δεν είναι διδακτή η πολιτική αρετή, να υποστηρίζει ότι η παρανόηση της αρετής οφείλεται σε άγνοια και ότι με διδασκαλία μπορεί να αναιρεθεί αυτή η άγνοια δηλαδή υιοθετεί την αρχική θέση του Πρωταγόρα. Λίγο πριν, ο Πρωταγόρας, αλλάζοντας την αρχική του θέση, είχε δεχτεί τη σωκρατική θέση ότι η σοφία, η σωφροσύνη, η ανδρεία, η δικαιοσύνη, η οσιότητα δεν είναι διαφορετικά πράγματα αλλά διαφορετικά ονόματα του ίδιου πράγματος· της αρετής. Δηλαδή ο ένας προσχωρεί στην θέση του άλλου ενώ το ζητούμενο παραμένει ανοιχτό. Φυσικά το

[2] Πλάτωνος Θεαίτητος 151c

[3] Ο διάλογος *Λάχης* που αποτελεί αντικείμενο διαπραγμάτευσης στο Κεφάλαιο 3 είναι επίσης ένα τέτοιο παράδειγμα.

πνεύμα και των δύο είναι να ξανασυναντηθούν και να συνεχίσουν την αναζήτηση της αλήθειας (Κοπιδάκης κ.ά., 2020).

Στη βιβλιογραφία είναι κοινός τόπος (Τατάκης, 1970)·(Guthrie, 1990) ότι η διδασκαλία του είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τον προσωπικό του βίο, με τη στάση ζωής του[4].

Η δελφική προτροπή «*γνώθι σαυτόν*», γνώρισε τον εαυτό σου, που ερμηνεύεται ως να μάθεις τον σκοπό της ύπαρξής σου και τελικά ως η ανάγκη για την ενότητα λόγων και πράξης (Τατάκης, 1970), ήταν ο σκοπός της αμφισβήτησης και του ελέγχου των

---

[4] Παντρεύτηκε την Ξανθίππη κι απόκτησε τρεις γιους. Πήρε μέρος ως οπλίτης στις μάχες της Ποτίδαιας, του Δηλίου και της Αμφίπολης. Η ζωή του ήταν λιτή και δίδασκε χωρίς αμοιβή γιατί θεωρούσε την διδασκαλία ιερό χρέος (Τατάκης, 1970, σ. 42).
Την περίοδο της κυριαρχίας των δημοκρατικών ήταν πρύτανης (ίσως και επιστάτης των πρυτάνεων) και προήδρευε στη συνέλευση του Δήμου με θέμα την καταδίκη των στρατηγών της - καταστροφικής - ναυμαχίας των Αργινουσών γιατί λόγω θαλασσοταραχής δεν περισυνέλεξαν τους νεκρούς και τους ναυαγούς. Αντιτάχθηκε στην καταδίκη των στρατηγών γιατί την θεωρούσε άδικη και παράνομη. Καταφέρθηκε κατά της εκλογής των αρχόντων με κλήρο υποστηρίζοντας ότι δεν μπορεί ο οποιοσδήποτε να ασκήσει τέτοια καθήκοντα, οι άρχοντες πρέπει να διαθέτουν ιδιαίτερη γνώση και ικανότητες (Τατάκης, 1970, σ. 46).
Την περίοδο της κυριαρχίας των ολιγαρχικών (τριάκοντα τύραννοι) διατάχθηκε, μαζί με άλλους τέσσερις, να βρει και να συλλάβει κάποιον πολίτη για να τον εκτελέσουνε, αδίκως και ανοσίως κατά την κρίση του. Αρνήθηκε να συμμετάσχει στην επιχείρηση (Κοπιδάκης κά, 2020).
Η αμφισβήτηση και ο έλεγχος προσώπων με στόχο να τους πείσει να κάνουν έλλογη τη ζωή τους και κατ' ανάγκη ο έλεγχος των ιδεών τους τον έκανε αντιπαθή (και τη διδασκαλία του) στους ελεγχόμενους.
Κατηγορήθηκε για προσβολή των Θεών και διαφθορά της νεολαίας και καταδικάστηκε σε θάνατο. Στη δίκη του, στο λαϊκό δικαστήριο της Ηλιαίας με δικαστές 500 εκλεγμένους ηλικιωμένους πολίτες, υπερασπίσθηκε το έργο του και τις ιδέες του. Σύμφωνα με τη διαδικασία, μετά την πρώτη ψηφοφορία που τον κήρυσσε ένοχο με μικρή πλειοψηφία 281 υπέρ - 220 κατά, έπρεπε ο ίδιος να προτείνει στο Σώμα μία ποινή για τον εαυτό του και αυτός πρότεινε, αντί για μια πιο ήπια ποινή από την ποινή του θανάτου, να τιμηθεί για την προσφορά του στον Δήμο με το δικαίωμα να σιτίζεται στο Πρυτανείο. Αν όμως επιμένουν να τον θεωρούν ένοχο, να του επιβάλουν πρόστιμο μία μνα, ποσό ασήμαντο. Μετά από αυτό, στη δεύτερη και οριστική ψηφοφορία του επιβλήθηκε η θανατική ποινή με μεγαλύτερη πλειοψηφία 300 - 201 (Κοπιδάκης κά, 2020, σ. 33).
Σύμφωνα με τον Τατάκη, στο κώνειο τον έφερε όχι η ασέβεια και η διαφθορά των νέων αλλά «*η θεωρία του για τον λόγο κριτή, και ο έλεγχος των προσώπων*» (Τατάκης, 1970, σ.108).
Δύο μέρες πριν την εκτέλεση της ποινής, αρνήθηκε να δραπετεύσει από την φυλακή και να αυτοεξορισθεί, όπως του πρότεινε ο μαθητής του Κρίτων. Ο Σωκράτης, στον πλατωνικό διάλογο *Κρίτων* συζητά με τον μαθητή του, επικαλούμενος τις κοινές τους αρχές, την πρόταση να δραπετεύσει και με την *σωκρατική διαλεκτική* (και με μία *μαιευτική μέθοδο*), όπου δεν επικρατούν μονολεκτικές απαντήσεις, όπου ο μαθητής Κρίτων κάνει ερωτήσεις στον Δάσκαλο, όπου δηλώνει ότι δεν καταλαβαίνει κάτι που λέει ο Δάσκαλος κι όπου ακόμη εκφράζει κι αντιρρήσεις σ΄αυτά που λέει Δάσκαλος, τον οδηγεί να παραδεχτεί ότι η ορθή απόφαση είναι να μην δραπετεύσει. Βλέπε Σαμαράς, (2007).
Ο K. T. Weierstrass, αναφερόμενος στους παιδαγωγούς ένθερμους εισηγητές της εφαρμογής - άκριτα - της μαιευτικής μεθόδου, οι οποίοι συνήθως όταν υπερτονίζουν τη μέθοδο αυτή παραβλέπουν το όλο περιεχόμενο της λόγω και έργω σωκρατικής διδασκαλίας, γράφει χαρακτηριστικά ότι «όποιος θέλει να διδάξει με τον τρόπο του Σωκράτη οφείλει να φέρει μέσα του και κάτι από το πνεύμα του Σωκράτη» (Weierstrass, 2013, σ. 327).
Κατά τον Guthrie «έναν σωκρατικό πρέπει να τον χαρακτηρίζει η πνευματική ταπεινότητα του Σωκράτη, που εκφράζεται ως δήλωση άγνοιας, κι ας διατρέχει τον κίνδυνο να θεωρηθεί υπερόπτης ή και προσβλητικός αφού η βεβαιότητα για τη δική του άγνοια προβάλλεται και ως βεβαιότητα για την άγνοια και όλων των άλλων» (Guthrie, 1990, σ.179).

προσώπων με άλλα λόγια ο σκοπός της σωκρατικής διδασκαλίας, το περίφημο «*εν οίδα ότι ουδέν οίδα*», που προαναφέρθηκε και είναι η αρχή για την αναζήτηση της αλήθειας (η περίφημη *σωκρατική ειρωνεία*), ο ισχυρισμός «*ουδείς εκών κακός*» ή ισοδύναμα «η αρετή είναι γνώση», είναι ρητά που συχνά τα αναφέρουμε στην καθομιλούμενη σύγχρονη νεοελληνική γλώσσα.

Δεν άφησε γραπτά[5] γιατί θεωρούσε ότι ο διάλογος, οι ερωταποκρίσεις, η προσωπική επαφή είναι ο καλύτερος τρόπος διάδοσης της γνώσης (Guthrie, 1993) ενώ ο γραπτός λόγος παρουσιάζει τη γνώση σαν ένα κλειστό σύστημα και κατά κάποιον τρόπο την καθηλώνει, την παρουσιάζει σαν ένα κλειστό και οριστικό σύστημα (Veggeti, 2000). Έτσι οι βασικές πηγές για την φιλοσοφία και το έργο του, δηλαδή οι βασικές πηγές για τον ιστορικό Σωκράτη, είναι τέσσερις· κύρια πηγή ο μαθητής του Πλάτων αλλά και ο επίσης μαθητής του Ξενοφών, ο Αριστοτέλης που ήταν μαθητής του Πλάτωνα και από τους ποιητές του καιρού του κυρίως ο Αριστοφάνης και ιδιαίτερα η κωμωδία του *Νεφέλες* (Guthrie, 1990).

Ο Πλάτων διέσωσε τις θεωρίες του δασκάλου του, τις επέκτεινε και τις εμβάθυνε ολοκληρώνοντας έτσι το δικό του φιλοσοφικό σύστημα (Πελεγρίνης, 1999), την περίφημη *Θεωρία των Ιδεών*. Αντικείμενο του στοχασμού του αποτέλεσαν και τα ηθικά προβλήματα που απασχόλησαν τον Σωκράτη δηλαδή η ανθρώπινη συμπεριφορά, αλλά και το πρόβλημα της γνώσης (Κάλφας, 2016) και τα προβλήματα τα σχετικά με την φύση της πραγματικότητας (Guthrie, 1993). Όσον αφορά στο οντολογικό πρόβλημα, επηρεάστηκε από δύο προηγούμενούς του, τους προσωκρατικούς φιλοσόφους Ηράκλειτο και Παρμενίδη (Guthrie, 1993) και επεδίωξε να δώσει απάντηση συνθέτοντας την ηρακλείτεια αρχή «τα πάντα ρει» και τον ισχυρισμό του Παρμενίδη ότι ναι μεν ο αισθητός κόσμος αενάως μεταβάλλεται, το *ον* όμως μένει αναλλοίωτο (Πελεγρίνης, 1999). Σύμφωνα με την *Θεωρία των Ιδεών* υπάρχει η πραγματικότητα μέσα στην οποία ζούμε, αυτή που γίνεται αντιληπτή μέσω των αισθήσεων (ο κόσμος των αισθητών πραγμάτων) και σε ένα δεύτερο επίπεδο υπάρχουν οντότητες που μόνο με τον νου μπορεί να γίνουν αντιληπτές (ο κόσμος των *Ιδεών*). Τα αισθητά πράγματα είναι ενταγμένα στον χρόνο και συνεχώς αλλάζουν,

[5] Το ότι δεν άφησε γραπτά και επειδή επιπλέον στις πηγές, που είναι κείμενα συγχρόνων του, κάτι σαν λογοτεχνικά ή θεατρικά έργα όπως πχ οι πλατωνικοί διάλογοι, δεν αναγράφεται ρητά «ο Σωκράτης έλεγε αυτό κι αυτό για το τάδε θέμα» οδήγησε στο λεγόμενο σωκρατικό πρόβλημα, στην αδυναμία ή έστω στη δυσκολία να αποφανθούν οι μελετητές αν ο Σωκράτης των πηγών είναι ο πραγματικός Σωκράτης ή ο συγγραφέας του εκάστοτε κειμένου (Κάλφας, 2016, σ. 103).

φθείρονται κλπ[6] ενώ οι *Ιδέες*[7] είναι άχρονες και αναλλοίωτες. Ο Πλάτων δέχτηκε ότι υπάρχουν δύο οικογένειες *ιδεών*, η μία οικογένεια που περιλαμβάνει τις *Ιδέες*-αξίες (αγαθό, δίκαιο, όσιο, ωραίο κλπ) και τις μαθηματικές *Ιδέες* (μεγάλο, ίσο, ένα, πέντε, σημείο, τρίγωνο, κλπ) και η δεύτερη οικογένεια που περιλαμβάνει *Ιδέες* που έχουν σχέση με τα αντικείμενα κάθε επιστήμης (άλογο, τετράποδο κλπ) (Veggeti, 2000). Στις τελευταίες προφανώς εντάσσονται και η *Ιδέα*-τραπέζι, η *Ιδέα*-πέτρα κλπ. Οι μαθηματικές *ιδέες* έχουν υψηλό status μεταξύ των *ιδεών*, μάλιστα κατά τον Αναπολιτάνο οι μαθηματικές οντότητες «που ακούνε στο όνομα «ένα», «δύο», «τρίγωνο», «κύκλος», «σημείο», «γραμμή», «επιφάνεια» κτλ» αποτελούν «μοντέλο πλατωνικών *ιδεών*» (Αναπολιτάνος, 2009, σ.32).

Τα αντικείμενα της γνώσης κατά τον Πλάτωνα δεν μπορεί παρά να είναι σταθερά και αναλλοίωτα και τέτοια είναι μόνον οι *ιδέες*[8], ακριβείς, άχρονες και αναλλοίωτες νοητικές οντότητες, που υπάρχουν ανεξάρτητα από το αν υπάρχει κάποιος που τις γνωρίζει και οι οποίες μπορούν να γίνουν αντιληπτές άμεσα, μόνο με τον *νου*. Η γνώση των *ιδεών* (*επιστήμη*) προϋπάρχει στην *ψυχή* του καθενός, η οποία γνωρίζει όλη την *αλήθεια* από τη στιγμή που μπαίνει στο σώμα, και παραμένει σε λανθάνουσα κατάσταση (υπνώτουσα). Η μάθηση, κατά τον Πλάτωνα, δεν είναι τίποτα άλλο παρά η ανάκληση στην μνήμη της προϋπάρχουσας υπνώτουσας γνώσης, διαδικασία την οποία ορίζει ως *ανάμνηση*[9]. Η αισθητηριακή αντίληψη (με την οποία γίνεται αντιληπτός ο αισθητός κόσμος, ο κόσμος των φαινομένων) μπορεί να παίξει και παίζει υποβοηθητικό ρόλο στην *ανάμνηση*, στη σύλληψη μιας *ιδέας* από τον *νου*, δηλαδή στη μάθηση, αλλά διάμεσο ρόλο στην *ανάμνηση* παίζει συνήθως και η *σωκρατική διαλεκτική* με την οποία εκμαιεύεται η γνώση της *ιδέας* από τον συνομιλητή (Αναπολιτάνος, 2009).

[6] Στον κόσμο των αισθητών πραγμάτων ισχύουν η διαρκής μεταβολή, ο *πόλεμος*, το *πυρ*, η *έρις*, η *δικαιοσύνη* του Ηράκλειτου.

[7] Οι *Ιδέες* έχουν, η καθεμία, τα χαρακτηριστικά του *Όντος* του Παρμενίδη (Κάλφας, 2016, σ. 117)

[8] Βέβαια και τα υλικά-εμπειρικά αντικείμενα, που είναι υπαρκτά αλλά κατώτερα από τις *Ιδέες*, μπορούν να είναι (και είναι) αντικείμενα «γνώσης» κατωτέρου επιπέδου, αυτής που σηματοδοτείται ως *γνώμη* (*δόξα*) (Veggeti, 2000, σ. 164).

[9] *Επειδή λοιπόν η ψυχή είναι αθάνατη και έχει γεννηθεί πολλές φορές και έχει δει τα πράγματα εδώ και αυτά στον Άδη και καθετί άλλο, δεν υπάρχει τίποτα που δεν το έχει μάθει. Έτσι καθόλου δεν είναι αξιοθαύμαστο - για την αρετή και για τα άλλα πράγματα - που η ψυχή μπορεί να ξαναθυμηθεί εκείνα που πρωτύτερα είχε γνωρίσει. Καθώς όλα μέσα στη φύση είναι συγγενή και η ψυχή έχει μάθει τα πάντα, τίποτα δεν εμποδίζει αυτόν που θα ξαναθυμηθεί ένα από αυτά - οι άνθρωποι το ονομάζουν μάθηση - να ανακαλύψει εκ νέου και όλα τα άλλα, αρκεί να είναι ανδρείος άνθρωπος και να μην αποκάμει πάνω στην έρευνα. Διότι η έρευνα και η μάθηση είναι ανάμνηση.* (Πλάτωνος *Μένων* 81c,d. Μετάφραση Ι. Πετράκης.)

Στο 1ο κεφάλαιο της εργασίας αυτής παρουσιάζεται η *μαιευτική μέθοδος*. Στη συνέχεια παρατίθεται το απόσπασμα από τον *διάλογο Μένων* με τον διάλογο του Σωκράτη με τον δούλο για τον διπλασιασμό του τετραγώνου και πάνω σ' αυτό γίνονται παρατηρήσεις με σκοπό την διατύπωση υποθέσεων για την μαθηματική γνώση και την διδακτική πρακτική την εποχή του Πλάτωνα.

Στο 2ο κεφάλαιο παρουσιάζονται προτάσεις σύγχρονων ερευνητών για την διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών οι οποίες αξιοποιούν ή αποκλείουν τη μαιευτική μέθοδο του Σωκράτη· η αρχή της εκ νέου επινόησης του Hans Freudenthal και η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων του G. Brousseau. Παρουσιάζονται επίσης προσεγγίσεις στο μάθημα του διπλασιασμού του τετραγώνου – απορριπτικές ή όχι – και ορισμένων παιδαγωγών και ερευνητών της διδακτικής των μαθηματικών (της E. Fernandez και του R. Nola). Οι προσεγγίσεις των ερευνητών αυτών στο μάθημα του Σωκράτη με τον δούλο συμβάλλουν στην ανάδειξη πτυχών της σωκρατικής μεθόδου διδασκαλίας και των επιπτώσεων τους στην αξιολόγηση της εφαρμοσιμότητας της μεθόδου στις σύγχρονες τάξεις των Μαθηματικών.

Στο 3ο κεφάλαιο, αναπτύσσεται η εμπειρική εφαρμογή της *σωκρατικής στρατηγικής διδασκαλίας-μάθησης* των μαθηματικών σε παιδιά του Δημοτικού και μία – προγενέστερη – διερεύνηση της δυνατότητας να αξιοποιηθεί η μέθοδος του Σωκράτη για να διδαχθεί ο διπλασιασμός του τετραγώνου σε παιδιά μικρότερης ηλικίας από αυτήν που είναι συμβατή με τη θεωρία των γνωστικών σταδίων του Πιαζέ και το Πρόγραμμα Σπουδών. Επίσης η αξιοποίηση της μαιευτικής μεθόδου στην πρωτότυπη πρόταση διδασκαλίας «*παιχνίδι φωνές* και *αντίλαλοι*» (*voices and echoes game*) και ένα παράδειγμα εφαρμογής αυτού του *παιχνιδιού* σε μαθητές ιταλικών σχολείων πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Γυμνασίου).

Στο 4ο κεφάλαιο με τα συμπεράσματα της έρευνας, περιλαμβάνεται και μία εκδοχή της μαιευτικής μεθόδου ως πρόταση για την επαγγελματική ανάπτυξη των δασκάλων μαθηματικών.

Στόχος της διαπραγμάτευσης των προηγούμενων θεμάτων είναι να απαντηθούν τα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

1. Πώς συνδέεται η μαιευτική μέθοδος που εφαρμόζει ο Σωκράτης στον διάλογο *Μένων* με τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών τον 4ο π.Χ. αιώνα.

2. Ποιες όψεις της μαιευτικής μεθόδου του Σωκράτη είναι συμβατές με τις σύγχρονες αντιλήψεις για την διδασκαλία και την μάθηση των μαθηματικών.
3. Πώς μπορεί να οργανωθεί η διδασκαλία σε μία σύγχρονη τάξη των μαθηματικών κατά το πρότυπο της μαιευτικής μεθόδου.

Κεφάλαιο 1 Η ΜΑΙΕΥΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΣΩΚΡΑΤΗ

Δύσκολο να διακριθεί διαδικαστικά η *διαλεκτική* από τη *μαιευτική μέθοδο* του Σωκράτη αφού κατά την εφαρμογή τους η μία πραγματώνεται μέσα στην άλλη. Ίσως η ειδοποιός διαφορά είναι ότι όταν πρόκειται για τη *μαιευτική μέθοδο* ο Σωκράτης γνωρίζει την απάντηση-αλήθεια και βοηθά τον συνομιλητή-μαθητή να φτάσει κι αυτός στην αλήθεια με βάση τις προηγούμενες γνώσεις του ενώ όταν πρόκειται για τη *διαλεκτική μέθοδο* την αναζητεί και ο ίδιος μαζί με τον συνομιλητή του, αν και το τελευταίο δεν είναι απόλυτο.

Είναι στον διάλογο *Θεαίτητος*, με θέμα τον ορισμό της *γνώσης*, που ο Σωκράτης με σκοπό να βάλει ομαλά τον Θεαίτητο στο παιχνίδι της αναζήτησης-μάθησης του τι είναι η *γνώση* παρομοιάζει την αρχική δυσκολία και την αγωνία του Θεαίτητου να απαντήσει σωστά με ωδίνες τοκετού και, θέλοντας να τον προετοιμάσει για την διαδικασία της διδασκαλίας, παρομοιάζει την τέχνη του (του δασκάλου) με την τέχνη της μητέρας του. Μέσα από τις ομοιότητες και τις διαφορές της τέχνης του δασκάλου και της μαίας σκιαγραφεί εν πολλοίς, ο ίδιος ο Σωκράτης, τη *μαιευτική* του *μέθοδο*.

Αναφέρει δύο διαφορές της τέχνης του απ’ αυτή της μαίας: Ο Σωκράτης ξεγεννά άνδρες όχι γυναίκες (τω καιρώ εκείνω ο Σωκράτης είχε μόνον άνδρες μαθητές) και έχει να κάνει με ψυχές όχι με σώματα (*Θεαίτητος,* 150c).

Όσο για τις ομοιότητες της τέχνης του με αυτή των μαιών: Μπορεί να ελέγχει αν αυτό που γεννάει η διάνοια του νέου είναι είδωλο και ψευδές ή γόνιμο και αληθές, που όμως είναι έργο δυσκολότερο από το αντίστοιχο των μαιών (*Θεαίτητος,* 150c). Ο ίδιος είναι το ίδιο άγονος σοφίας όπως οι μαίες, γι αυτό ρωτάει και δεν δίνει απαντήσεις (τον καιρό του Σωκράτη μαίες γίνονταν γυναίκες μεγάλες σε ηλικία, μετά την περίοδο της γονιμότητας, όχι όμως στείρες). Αν ο Σωκράτης δει ότι κάποιος μαθητής δεν μπορεί να ωφεληθεί από αυτόν, θα μπορούσε όμως να τα καταφέρει, τον στέλνει στον κατάλληλο δάσκαλο ως καλός προξενητής, ιδιότητα που είχαν και οι μαίες οι οποίες ήταν καλές προξενήτρες (*Θεαίτητος*, 151b). Κατά τη διάρκεια των «ωδίνων» εμψυχώνει-παρηγορεί τον μαθητή (*Θεαίτητος*, 151d) .

Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στον διάλογο *Μένων* και πιο συγκεκριμένα στο διάσημο απόσπασμα του διαλόγου όπου ο Σωκράτης διδάσκει[10] στον δούλο τον διπλασιασμό του τετραγώνου, όχι μόνο επειδή είναι διάσημο, όχι μόνο γιατί έχει

[10] Όπως θα αναπτυχθεί παρακάτω, κυρίως πρόκειται για επίδειξη στον Μένωνα της διαδικασίας μάθησης που ο Πλάτων ονομάζει *ανάμνηση*.

μαθηματικό (γεωμετρικό) θέμα ούτε επειδή αποτελεί ένα σχετικά σύντομο, ολοκληρωμένο και τέλειο παράδειγμα εφαρμογής της *μαιευτικής μεθόδου* που απασχόλησε και απασχολεί τους παιδαγωγούς και τους ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών, αλλά και γιατί με το παράδειγμα αυτό ο Πλάτων δημιούργησε το μοντέλο διδασκαλίας με βάση τον διάλογο δάσκαλου μαθητή όπου ο δάσκαλος ρωτά και ο μαθητής δραστηριοποιείται για την ανακάλυψη - μόνος του - των απαντήσεων (Πετράκης, 2016). Συνεπώς έχει ιστορικό ενδιαφέρον και, σύμφωνα με την εμπειρία του καθένα που ασχολείται με την διδασκαλία ή του καθένα που απλώς υπήρξε μαθητής, η κληρονομιά του Σωκράτη είναι διάχυτη στις σύγχρονες σχολικές αίθουσες και είναι ίσως το κύριο μέσο για απάντηση στην ταλαιπωρία του μυαλού και της ψυχής των μαθητών από την «*ασκησεολογία*», την παπαγαλία, το κυνήγι του βαθμού και της εισαγωγής σε ΑΕΙ αλλά βέβαια και από τη καθηγητική αυθεντία.

1.1: Ο πλατωνικός διάλογος *Μένων*[11]

Ο διάλογος *Μένων* του Πλάτωνος, ένα από τα έργα της ωριμότητάς του (Κοπιδάκης κ.ά, 2020), θεωρείται ως ο καλύτερος τρόπος εισαγωγής και μύησης στην πλατωνική φιλοσοφία γιατί στον διάλογο αυτό αναπτύσσονται καίρια θέματα της πλατωνικής φιλοσοφίας: Η αθανασία της *ψυχής*, η θεωρία της *ανάμνησης*, η *υπόθεσις*, ο *αιτίας λογισμός,* η *διαλεκτική μέθοδος,* η απαίτηση του *ορισμού* μιας έννοιας πριν από κάθε προσπάθεια διαπραγμάτευσής της, *η απορία*. (Πετράκης, 2016).

Ο Σωκράτης, περίπου το 403-402 π.Χ., κάπου στην Αθήνα, συνομιλεί με τον Μένωνα, ένα νέο από την Θεσσαλία, αρχοντικής καταγωγής, που είναι μαθητής του σοφιστή Γοργία. Ο Μένων, περίπου 18 με 19 χρονών, είχε πάει στην Αθήνα για να ζητήσει βοήθεια εναντίον του τυράννου Φερών Λυκόφρονα, που είχε κατακτήσει αρκετές θεσσαλικές πόλεις. Το 401 π.Χ. ήταν αρχηγός μισθοφορικού τμήματος στο πλευρό του Κύρου κατά του αδελφού του Αρταξέρξη και σύμφωνα με τον Ξενοφώντα (*Κύρου Ανάβασις*) ήταν «ωραίος» και «μοιράκιον» άρα 20 με 21 χρονών (Πετράκης, 2016, σ.91). Μετά την ήττα του Κύρου, συνελήφθη, όπως και οι άλλοι τέσσερεις έλληνες μισθοφόροι στρατηγοί, και μετά από φυλάκιση και βασανισμούς θανατώθηκε. Ο Ξενοφώντας περιγράφοντας την προσωπικότητα του Μένωνα αριθμεί στοιχεία αβάστακτης ανηθικότητας του ανδρός[12]. Βέβαια στον πλατωνικό διάλογο

[11] Ο πλήρης τίτλος του διαλόγου είναι «*Μένων ή περί αρετής πειραστικός*». Πειραστικός σημαίνει ότι αναλαμβάνεται προσπάθεια (απόπειρα) να ορισθεί μία ηθική έννοια που όμως δεν τελεσφορεί, το ερώτημα μένει αναπάντητο.
[12] βλ Ζευγώλης (1980).

Μένων ο πρωταγωνιστής παρουσιάζεται ουδέτερα, ούτε αξιοσημείωτα ενάρετος ούτε ιδιαίτερα επιλήψιμου χαρακτήρα[13].

Έχει ενδιαφέρον γι αυτή την εργασία, να δούμε τα βασικά σημεία της εξέλιξης του διαλόγου, για τον επιπρόσθετο λόγο ότι ολόκληρος ο διάλογος αποτελεί υπόδειγμα εφαρμογής της διαλεκτικής μεθόδου από τον Σωκράτη. Το απόσπασμα με τον δούλο είναι, όσον αφορά στη *διαλεκτική-μαιευτική μέθοδο,* μια μικρογραφία του όλου διαλόγου (Πετράκης, 2016, σ. 54). Στους πρώτους στίχους του διαλόγου *Μένων*[14] θέτει ο Μένων με τη μορφή ερώτησης προς τον Σωκράτη ως θέμα του διαλόγου το πώς μπορεί να αποκτηθεί η αρετή, αν διδάσκεται, αν αποκτιέται με εξάσκηση, αν αποκτιέται με μάθηση, αν την κατέχουν οι άνθρωποι εκ φύσεως ή αν υπάρχει κάποιος άλλος τρόπος[15]. Ο Σωκράτης, προτείνει να συζητηθεί κατ' αρχάς ο ορισμός της αρετής - «τι είναι αρετή», γιατί δεν έχει νόημα να συζητηθεί ένα χαρακτηριστικό μίας έννοιας χωρίς να είναι γνωστή η ουσία της[16]. Καλείται λοιπόν ο Μένων και δίνει έναν «ορισμό» απαριθμώντας εκδοχές της: Ορίζει τι είναι η αρετή του άνδρα, η αρετή της γυναίκας, η αρετή του παιδιού, του αγοριού, του κοριτσιού, του ενήλικου, του ελεύθερου, του δούλου κ.λπ. (Πλάτων, *Μένων,* 71e-72a). Ο Σωκράτης τον οδηγεί με τις ερωτήσεις του να παραδεχτεί ότι αυτό δεν είναι ο ορισμός της αρετής. Αρετή είναι αυτό που είναι κοινό και διαπερνά όλες τις περιπτώσεις που ανέφερε ο Μένων. Ο Μένων επιχειρεί δεύτερη φορά να πει τι είναι αρετή και την ορίζει ως την ικανότητα του ενός να εξουσιάζει τους ανθρώπους (*Μένων,* 73d). Ο ορισμός αυτός είναι πράγματι πιο γενικός, δεν διακρίνει περιπτώσεις, όμως με την αναφορά του Σωκράτη σε ενάρετα παιδιά και δούλους, διαπιστώνει ο Μένων ότι δεν ενυπάρχει σε όλες τις περιπτώσεις ενάρετων ανθρώπων. Ο Σωκράτης, προκειμένου να έχει ο Μένων ένα υπόδειγμα ορισμού, δίνει τον - πρώτο - ορισμό του σχήματος («σχήμα είναι το μόνο από τα πράγματα που πάντοτε διαθέτει χρώμα») (*Μένων,* 75c), στη συνέχεια τον ορισμό του χρώματος γιατί του το ζήτησε ο Μένων, και μετά έναν δεύτερο ορισμό του σχήματος. Κατόπιν ο Μένων επιχειρεί και τρίτο ορισμό της αρετής· αρετή είναι να επιθυμεί κανείς το καλό και να μπορεί να το αποκτήσει (Πλάτων, *Μένων,* 77b).

---

[13] Όπως σημειώνει ο Πετράκης, το εισαγωγικό ερώτημα του Μένωνα προς τον Σωκράτη, πώς αποκτιέται η αρετή, μπορεί μεν να ερμηνευτεί και ως έκφραση διάθεσης να γίνει ενάρετος, όμως ο σκοπός του είναι να καταστεί ο ίδιος δάσκαλος της αρετής και να ικανοποιήσει μια φιλοδοξία του (Πετράκης, 2016, σ.28).

[14] Ολόκληρος ο πλατωνικός διάλογος *Μένων* είναι υποδειγματική εφαρμογή από τον Σωκράτη της *διαλεκτικής* του *μεθόδου* στην συζήτηση-έρευνα από κοινού με τον Μένωνα.

[15] «*διδακτόν*», «*ασκητόν*», «*μαθητόν*», «*φύσει*», «*άλλω τινί τρόπω*». Πλάτωνος *Μένων,* 70a.

[16] «η ουσία μπορεί να ερμηνεύσει τις ιδιότητες, όχι το αντίστροφο». (Πετράκης, 2016, σ.30)

Ακόμη πιο γενικός αυτός ο τρίτος ορισμός αλλά ο Μένων οδηγείται να παραδεχτεί ότι ο ορισμός πάσχει αφού κανείς δεν επιθυμεί το κακό. Ο ίδιος ο Σωκράτης προτείνει συμπλήρωση-βελτίωση του ορισμού, την οποία αποδέχεται ο Μένων, ως εξής: «αρετή είναι η ικανότητα απόκτησης του καλού με δίκαιο και ευσεβή τρόπο» (Πλάτων, *Μένων,* 78e). Όμως αμέσως μετά, το σωκρατικό *δαιμόνιο* δίνει το αντιπαράδειγμα ενάρετου ανθρώπου που είναι ενάρετος γιατί αποποιείται το καλό επειδή δεν θέλει να το αποκτήσει με άδικο και ασεβή τρόπο. Ο Μένων περιέρχεται σε κατάσταση *απορίας* και αντιδρώντας «επιθετικά»[17] διατυπώνει το λεγόμενο *παράδοξο του Μένωνα*, (*παράδοξο της γνώσης)*: Με ποιον τρόπο θα ερευνήσεις κάτι το οποίο δεν ξέρεις καν τι είναι, τι θα βάλεις στο μυαλό σου να το ερευνήσεις από αυτά που δεν ξέρεις; Και αν το βρεις, πώς θα ξέρεις ότι είναι αυτό που δεν ήξερες; Δηλαδή η έρευνα και η μάθηση είναι αδύνατη αφού, με την αναδιατύπωση του Σωκράτη «*κανείς δεν μπορεί να ερευνήσει ούτε αυτό που ξέρει ούτε αυτό που δεν ξέρει. Διότι κανείς δεν θα ερευνούσε αυτό που ξέρει, αφού το ξέρει και δεν υπάρχει καμία ανάγκη διερεύνησής του, ούτε αυτό που δεν ξέρει, αφού δεν ξέρει τι ακριβώς να ερευνήσει.»* (Πλάτων, *Μένων,* 80d)

Η συζήτηση λοιπόν περνάει στο πώς μαθαίνει κανείς κάτι που δεν γνωρίζει, και ο Σωκράτης αναφέρει ότι επειδή η ψυχή είναι αθάνατη και έχει μάθει τα πάντα, μπορεί να ξαναθυμηθεί εκείνα που είχε γνωρίσει και να τα ανακαλύψει εκ νέου, αυτό (η *ανάμνηση*) είναι που οι άνθρωποι ονομάζουν μάθηση. Ο Μένων ζητάει από τον Σωκράτη να του διδάξει ότι πράγματι η μάθηση είναι ανάμνηση ή καλύτερα να του δείξει, να του παρουσιάσει μία περίπτωση *ανάμνησης* (Πλάτων, *Μένων,* 82a). Ο Σωκράτης ανταποκρίνεται· και βέβαια η επίδειξη της *ανάμνησης,* είναι η διάσημη εκμαίευση, από την *ψυχή* του δούλου, της λύσης του προβλήματος διπλασιασμού του τετραγώνου[18].

---

[17] Ο Πετράκης παραθέτει τον J. Moline που υποστηρίζει ότι ο Μένων αντιδρά συναισθηματικά γιατί νομίζει ότι ο Σωκράτης γνωρίζει την απάντηση και δεν του την λέει (Πετράκης, 2016, σ. 263).

[18] Η συνέχεια του διαλόγου *Μένων*: Μετά την επίδειξη της *ανάμνησης* και λόγω της επιμονής του Μένωνα, ο Σωκράτης δέχεται να εξεταστεί το αν μπορεί να διδαχθεί η αρετή παρόλο που οι δύο συνομιλητές δεν έχουν καταλήξει σε έναν χωρίς αντιφάσεις ορισμό της αρετής και εισάγει την *υπόθεσιν* ότι αν η αρετή είναι γνώση, τότε μπορεί να διδαχτεί (διδακτόν) και επομένως είναι δυνατή η μάθησή της (μαθητόν). Εξετάζουν μαζί το καινούριο προς διερεύνηση και καταλήγουν ότι πράγματι η αρετή είναι γνώση. Άρα μπορεί να διδαχθεί. Και πάλι το σωκρατικό *δαιμόνιον* ισχυρίζεται ότι για να διδαχθεί κάτι πρέπει να υπάρχουν οι κατάλληλοι δάσκαλοι. Αυτή η προϋπόθεση όμως δεν συμβαίνει, λείπουν οι κατάλληλοι δάσκαλοι αφού ούτε οι σοφιστές ούτε οι επιφανείς αθηναίοι, οι πολιτικοί κλπ, ούτε οι ποιητές ακόμη κι αν οι ίδιοι κατέχουν την αρετή δεν είναι σε θέση να την διδάξουν· άρα δεν είναι *διδακτόν* η αρετή. Πράγμα που σημαίνει ότι η αρετή δεν είναι γνώση. Στο τέλος του διαλόγου συμφωνούν οι δύο συνομιλητές ότι έμεινε αναπάντητο το αρχικό ερώτημα - πώς αποκτιέται η αρετή -

«*Η ανάμνηση είναι μία επίδειξη μάθησης και όχι η παραδοσιακή διδασκαλία. Ο Μένων επαναδιατυπώνει το αίτημά του προς τον Σωκράτη (82a5-6) και ζητά να του δείξει (ἔνδειξαι) αυτή τη μέθοδο μάθησης. Ο τελευταίος του υπόσχεται να κάνει την επίδειξή της (ἐπιδείξωμαι).*» (Πετράκης, 2016, σ.54.)

1.2: Απόσπασμα[19] του διαλόγου *Μένων* με την διδασκαλία, του διπλασιασμού του τετραγώνου, στον δούλο.

Παρατίθεται κατ' αρχάς ακέραιο το απόσπασμα προκειμένου να διευκολυνθεί ο λεπτομερής σχολιασμός του που ακολουθεί στις αμέσως επόμενες παραγράφους.

ΜΕΝ. Εντάξει Σωκράτη. Όμως τι εννοείς με αυτό, ότι δεν μαθαίνουμε αλλά αυτό που ονομάζουμε μάθηση είναι ανάμνηση; Μπορείς να με διδάξεις και να μου δείξεις ότι έτσι έχει το πράγμα;

ΣΩ. Και πριν από λίγο είπα, Μένωνα, ότι είσαι πανούργος άνθρωπος· έρχεσαι και με ρωτάς αν μπορώ να σε διδάξω, εγώ που υποστηρίζω ότι δεν υπάρχει διδασκαλία αλλά ανάμνηση, για να παρουσιασθώ ως ένας που αντιφάσκει με τον εαυτό του.

ΜΕΝ. Όχι, μα τον Δία, Σωκράτη, δεν το είπα αυτό με τέτοια πρόθεση, αλλά από συνήθεια. Όμως αν μπορείς με κάποιον τρόπο να μου δείξεις ότι έτσι έχει το πράγμα, όπως το λες, δείξε τό μου.

ΣΩ. Δεν είναι εύκολο, όμως για χάρη σου θέλω να μπω στον κόπο. Φώναξέ μου μόνον έναν από αυτούς εδώ τους ακόλουθούς σου, όποιον θέλεις, για να σου το δείξω με την βοήθειά του.

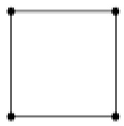
ΜΕΝ. Πολύ ευχαρίστως. Εσύ εκεί, έλα κοντά μου.

ΣΩ. Είναι Έλληνας και μιλά ελληνικά;

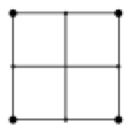
ΜΕΝ. Πολύ καλά. Μεγάλωσε άλλωστε στο σπίτι μας.

ΣΩ. Πρόσεξε τώρα τι από τα δύο συμβαίνει, αν από μόνος του ξαναθυμάται ή μαθαίνει από μένα.

ΜΕΝ. Είμαι όλος προσοχή.



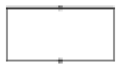
ΣΩ. Πες μου τώρα, παλληκάρι, βλέπεις ότι αυτό είναι μία τετράγωνη επιφάνεια; ΠΑΙ. Ναι. ΣΩ. Είναι μία τετράγωνη επιφάνεια που έχει ίσες όλες αυτές τις γραμμές και όλες είναι τέσσερεις; ΠΑΙ. Ακριβώς. ΣΩ. Και αυτές εδώ οι γραμμές στο μέσον[20] της δεν είναι ίσες; ΠΑΙ. Βέβαια. ΣΩ. Μια τέτοια επιφάνεια δεν θα μπορούσε να είναι και



και ότι όμως για να μπορέσει να απαντηθεί είναι αναγκαίο κατ΄ αρχάς να ορισθεί τι είναι *αρετή* και ο Σωκράτης αποχωρεί.

[19] Πλάτωνος *Μένων*, στίχοι 81e-86c. Μετάφραση Ι. Πετράκης. Συμπεριελήφθη στο παράθεμα και το χωρίο 86c, γιατί σ' αυτό ο Σωκράτης μιλάει, χωρίς να τον κατονομάζει, για τον *αιτίας λογισμόν,* που είναι στοιχείο της *διαλεκτικής* και της *μαιευτικής μεθόδου* και μέσω αυτού η *ορθή δόξα* γίνεται *επιστήμη*. Προστέθηκαν και τα σχήματα που ο Σωκράτης κατά πάσα πιθανότητα θα σχεδίασε, κατά την εξέλιξη της επίδειξης, στην άμμο.

μεγαλύτερη και μικρότερη; ΠΑΙ. Οπωσδήποτε. ΣΩ. Εάν τώρα πάρουμε αυτήν την πλευρά με μήκος δύο πόδια και την άλλη επίσης δύο πόδια, πόσα πόδια θα ήταν όλη η επιφάνεια; Σκέψου ως εξής· αν το μήκος αυτής της πλευράς ήταν δύο πόδια, της άλλης όμως μόνο ένα, ολόκληρη η επιφάνεια δεν ήταν μία φορά τα δύο πόδια; ΠΑΙ. Ναι. ΣΩ. Επειδή όμως και αυτή είναι δύο ποδών, δεν είναι όλη δύο φορές τα δύο πόδια; ΠΑΙ. Ναι. ΣΩ. Και πόσο κάνουν δύο επί δύο πόδια; Σκέψου και απάντησε. ΠΑΙ. Τέσσερα πόδια, Σωκράτη. ΣΩ. Μπορούμε τότε να σχηματίσουμε και μία δεύτερη, διπλάσια και όμοια επιφάνεια, που θα έχει ίσες όλες τις πλευρές, όπως η πρώτη; ΠΑΙ. Ναι. ΣΩ. Πόσων ποδών θα είναι αυτή; ΠΑΙ. Οκτώ ποδών. ΣΩ. Ωραία, προσπάθησε τώρα να μου πεις πόσου μήκους θα είναι η κάθε πλευρά της δεύτερης επιφάνειας. Αυτή εδώ, της πρώτης έχει μήκος δύο πόδια· τι συμβαίνει με την πλευρά της διπλάσιας; ΠΑΙ. Είναι φανερό, Σωκράτη, ότι θα είναι διπλάσια.



ΣΩ. Βλέπεις, Μένωνα, ότι εγώ τίποτα δεν τον διδάσκω, αλλά υποβάλλω μόνον ερωτήσεις; Αυτός νομίζει ότι ξέρει το μέγεθος της πλευράς από την οποία θα προκύψει η επιφάνεια των οκτώ ποδών. Ή μήπως έχεις άλλη γνώμη;

ΜΕΝ. Έχω την ίδια γνώμη.

ΣΩ. Λοιπόν μήπως ξέρει;

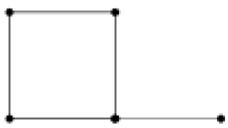
ΜΕΝ. Όχι ασφαλώς.

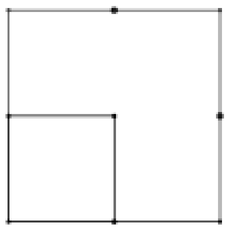
ΣΩ. Νομίζει δηλαδή ότι προκύπτει από το μήκος μιας διπλάσιας πλευράς;

ΜΕΝ. Ναι.

ΣΩ. Παρακολούθησέ τον τώρα να ξαναθυμάται σύμφωνα με τη σειρά που επιβάλλει η ανάμνηση.

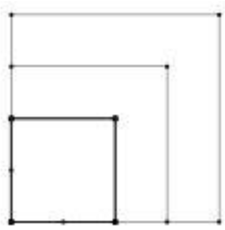
Εσύ, πες μου τώρα· νομίζεις ότι η διπλάσια επιφάνεια θα γίνει από τη διπλάσια πλευρά; Το εξής εννοώ· η επιφάνεια δεν πρέπει να έχει τη μία πλευρά μακριά και την άλλη κοντή αλλά πρέπει όλες να είναι ίσες, όπως σε αυτό εδώ το σχήμα· θα είναι όμως διπλάσια από αυτό, οκτώ πόδια. Κοίταξε τώρα αν θα νομίζεις πάντοτε το ίδιο, ότι η επιφάνεια σχηματίζεται από τη διπλάσια πλευρά. ΠΑΙ. Εντάξει. ΣΩ. Διπλάσια δεν θα γίνει αυτή η γραμμή, αν προσθέσουμε σε αυτό το σημείο μία δεύτερη γραμμή με το ίδιο μήκος; ΠΑΙ. Βέβαια. ΣΩ. Από αυτήν λοιπόν δεν θα γίνει η επιφάνεια των οκτώ ποδών, όταν πάρουμε τέσσερεις τέτοιες; ΠΑΙ. Ναι. ΣΩ. Ας σχεδιάσουμε τότε, με βάση αυτή τη διπλάσια, τέσσερεις ίσες πλευρές. Αυτή είναι η επιφάνεια των οκτώ ποδών που μας λες ή όχι; ΠΑΙ. Ακριβώς αυτή είναι. ΣΩ. Σε αυτό το σχήμα δεν περιέχονται τέσσερεις επιφάνειες σαν την πρώτη και η καθεμιά τους δεν είναι ίση με εκείνη των τεσσάρων ποδών; ΠΑΙ. Ναι. ΣΩ. Πόσο μεγάλο είναι; Δεν είναι τέσσερεις φορές πιο μεγάλο; ΠΑΙ. Βέβαια και είναι. ΣΩ.





[20] Ο Πετράκης παραθέτει και μελετητές που ισχυρίζονται ότι πρόκειται για τις διαγωνίους. (Πετράκης, 2016, σ.281)

Μπορεί επομένως, αυτό που είναι τέσσερεις φορές πιο μεγάλο, να είναι διπλάσιο; ΠΑΙ. Όχι, μα τον Δία. ΣΩ. Αλλά πόσες φορές είναι μεγαλύτερο; ΠΑΙ. Τέσσερεις φορές μεγαλύτερο. ΣΩ. Επομένως παλληκάρι μου, από τη διπλάσια πλευρά σχηματίζεται επιφάνεια όχι διπλάσια αλλά τετραπλάσια; ΠΑΙ. Ναι, πράγματι. ΣΩ. Τέσσερεις φορές το τέσσερα μας κάνει ή δεν μας κάνει δεκάξι; ΠΑΙ. Ναι. ΣΩ. Ναι, αλλά από τι μήκους πλευρά θα σχηματιστεί η επιφάνεια των οκτώ ποδών; Από αυτήν εδώ δεν γίνεται τετραπλάσια; ΠΑΙ. Τόση γίνεται. ΣΩ. Και τεσσάρων ποδών δεν γίνεται με βάση αυτήν εδώ την πλευρά που είναι το μισό της προηγούμενης; ΠΑΙ. Ναι. ΣΩ. Ωραία· η επιφάνεια λοιπόν των οκτώ ποδών δεν είναι διπλάσια από αυτήν των τεσσάρων, όμως το μισό της μεγάλης; ΠΑΙ. Ναι. ΣΩ. Σχηματίζεται λοιπόν από πλευρά μεγαλύτερη από αυτήν εδώ αλλά μικρότερη από εκείνη τη μεγάλη ή όχι; ΠΑΙ. Ναι, αυτή είναι η γνώμη μου. ΣΩ. Ωραία· ό,τι είναι γνώμη σου, αυτό να μου απαντάς. Πες μου τώρα· αυτή η πλευρά δεν είναι μήκους δύο ποδών και η άλλη τεσσάρων; ΠΑΙ. Ναι. ΣΩ. Πρέπει επομένως η πλευρά της επιφάνειας των οκτώ ποδών να είναι μεγαλύτερη από την πλευρά των δύο ποδών και μικρότερη από εκείνη των τεσσάρων. ΠΑΙ. Ναι, αυτό πρέπει. ΣΩ. Προσπάθησε τώρα να μου πεις πόσο μεγάλη



είναι αυτή. ΠΑΙ. Τρία πόδια. ΣΩ. Τότε, εφ' όσον είναι τριών ποδών, δεν θα προσθέσουμε το μισό μήκος αυτής της πλευράς, ώστε να γίνει τριών ποδών; Δύο πόδια της πρώτης πλευράς και ένα από εδώ· το ίδιο και με την άλλη πλευρά, δύο πόδια έως εδώ συν ένα· σχηματίζεται έτσι η επιφάνεια που μας λες. ΠΑΙ. Πράγματι. ΣΩ. Εφ' όσον όμως αυτή η πλευρά είναι τρία πόδια και η άλλη τρία πόδια, η όλη επιφάνεια δεν είναι τρία επί τρία πόδια; ΠΑΙ. Είναι φανερό. ΣΩ. Και πόσο κάνουν τρία επί τρία πόδια; ΠΑΙ. Εννέα. ΣΩ. Πόσων όμως έπρεπε να είναι η διπλάσια επιφάνεια; ΠΑΙ. Οκτώ. ΣΩ. Σχηματίζεται τότε η επιφάνεια των οκτώ ποδών από πλευρά μήκους τριών ποδών; ΠΑΙ. Σε καμία περίπτωση. ΣΩ. Από ποια τέλος πάντων; Προσπάθησε να μας πεις ακριβώς· αν δεν θέλεις να το πεις με αριθμούς, δείξε μας από ποια πλευρά. ΠΑΙ. Μα τον Δία, Σωκράτη, εγώ δεν ξέρω καθόλου.

ΣΩ. Βλέπεις, Μένωνα, πόσο αυτός εδώ έχει προοδεύσει κατά τη διαδικασία της ανάμνησης; Στην αρχή δεν ήξερε τίποτα, ποια είναι η πλευρά της επιφάνειας με τα οκτώ πόδια, ακριβώς όπως δεν ξέρει και τώρα. Τότε όμως είχε τη γνώμη ότι την ήξερε και με θάρρος απαντούσε λες και ήξερε, χωρίς να του περνά από το μυαλό ότι βρισκόταν σε δύσκολη θέση. Τώρα όμως αντιλαμβάνεται τη δύσκολη θέση του το ίδιο, πραγματικά δεν ξέρει, ούτε νομίζει ότι ξέρει.

ΜΕΝ. Έχεις δίκαιο.

ΣΩ. Όμως αυτός δεν βρίσκεται τώρα σε καλύτερη θέση σχετικά με το ζήτημα που δεν ήξερε;

ΜΕΝ. Αυτή τη γνώμη έχω κι εγώ.

ΣΩ. Αφού λοιπόν τον κάναμε να απορήσει και να μουδιάσει - ό,τι κάνει εκείνη η θαλασσινή μουδιάστρα - μήπως προξενήσαμε κάποιο κακό;

ΜΕΝ. Δεν το νομίζω.

ΣΩ. Εμείς λοιπόν τον έχουμε σπρώξει, καθώς φαίνεται, να ανακαλύψει πώς ακριβώς έχει το ζήτημα. Γιατί αυτός τώρα με προθυμία, νομίζω, θα το διερευνήσει, επειδή δεν ξέρει· τότε όμως χωρίς δισταγμό και μπροστά σε πολλούς και πολλές φορές είχε την ιδέα ότι απαντούσε ορθά για τη διπλάσια επιφάνεια, ότι η πλευρά της πρέπει να είναι διπλάσια.

ΜΕΝ. Έτσι φαίνεται.

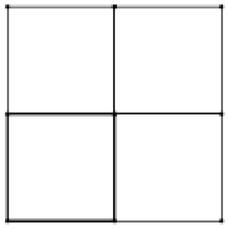
ΣΩ. Και νομίζεις ότι αυτός εκ των προτέρων θα επιχειρούσε να ερευνήσει ή να μάθει αυτό που νόμιζε ότι ήξερε παρ' όλο που δεν το ήξερε, προτού να βρεθεί σε απορία και πριν αντιληφθεί ότι δεν ήξερε και έτσι να επιθυμήσει τη γνώση;

ΜΕΝ. Δεν το νομίζω Σωκράτη.

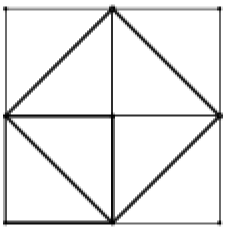
ΣΩ. Επομένως το μούδιασμα τον ωφέλησε.

ΜΕΝ. Ναι, αυτό νομίζω.

ΣΩ. Κοίταξε τώρα τι θα ανακαλύψει μέσα από αυτήν την απορία του· μαζί μου θα ερευνήσει, εγώ όμως μόνο θα ρωτώ και δεν θα τον διδάσκω. Πρόσεξε μάλιστα μήπως με πιάσεις να τον διδάσκω και να τον καθοδηγώ και όχι να αναζητώ τις γνώμες του.



Πες μου εσύ· αυτή εδώ δεν είναι μία επιφάνεια τεσσάρων ποδών; Το καταλαβαίνεις; ΠΑΙ. Ναι. ΣΩ. Μπορούμε να της προσθέσουμε μια δεύτερη ίση επιφάνεια; ΠΑΙ. Ναι. ΣΩ. Και αυτήν εδώ, ίση με καθεμιά από τις προηγούμενες; ΠΑΙ. Ναι. ΣΩ. Να συμπληρώσουμε και αυτήν την επιφάνεια και εδώ στη γωνία; ΠΑΙ. Βέβαια. ΣΩ. Δεν σχηματίζονται αυτές οι τέσσερεις επιφάνειες; ΠΑΙ. Ναι. ΣΩ. Λοιπόν; Ολόκληρη αυτή η επιφάνεια πόσες φορές είναι μεγαλύτερη από την πρώτη; ΠΑΙ. Είναι τετραπλάσια. ΣΩ. Έπρεπε όμως να έχουμε διπλάσια· ή δεν το θυμάσαι; ΠΑΙ. Βέβαια το θυμάμαι. ΣΩ. Είναι κι αυτή μία γραμμή που τη φέρουμε από τη μία γωνία στην άλλη και



τέμνει στα δύο καθεμιά από αυτές τις επιφάνειες; ΠΑΙ. Ναι. ΣΩ. Αυτές όλες δεν είναι τέσσερεις ίσες γραμμές, οι οποίες περιέχουν αυτήν την επιφάνεια; ΠΑΙ. Ναι, πράγματι. ΣΩ. Πρόσεξε τώρα· πόσο μεγάλη είναι αυτή η επιφάνεια; ΠΑΙ. Δεν ξέρω. ΣΩ. Είναι αυτά τέσσερα τετράγωνα και καθεμία εσωτερική γραμμή τέμνει το καθένα σε ίσα ημίση ή όχι; ΠΑΙ. Ναι. ΣΩ. Πόσα τέτοια σχήματα περιέχει το τετράγωνό; ΠΑΙ. Τέσσερα. ΣΩ. Και πόσα αυτό; ΠΑΙ. Δύο. ΣΩ. Και ποια η αναλογία του τέσσερα προς δύο; ΠΑΙ. Είναι διπλάσιο. ΣΩ. Πόσων λοιπόν ποδών είναι αυτή η επιφάνεια; ΠΑΙ. Οκτώ πόδια. ΣΩ. Από ποια πλευρά; ΠΑΙ. Από αυτή. ΣΩ. Από αυτή δηλαδή που στο τετράγωνο των τεσσάρων ποδών εκτείνεται από τη μία γωνία προς την άλλη. ΠΑΙ. Ναι. ΣΩ. Οι δάσκαλοι ονομάζουν αυτήν τη γραμμή διαγώνιο. Εφ' όσον λοιπόν ονομάζεται διαγώνιος, φαίνεται ότι από τη διαγώνιο - το λές εσύ, ακόλουθε του Μένωνα -κατασκευάζεται η διπλάσια επιφάνεια. ΠΑΙ. Έτσι ακριβώς είναι Σωκράτη.

ΣΩ. Λοιπόν, Μένωνα, τι πιστεύεις τώρα; Στις απαντήσεις του υπήρξε κάποια γνώμη που δεν ήταν δική του;

ΜΕΝ. Όχι, μόνο δικές του.

ΣΩ. Ούτε βέβαια και ήξερε τίποτα· το είπαμε λίγο πριν.

ΜΕΝ. Ναι, είναι αλήθεια.

ΣΩ. Τις είχε λοιπόν μέσα του αυτές τις γνώμες· ή μήπως όχι;

ΜΕΝ. Βέβαια.

ΣΩ. Είναι λοιπόν δυνατόν ένας που δεν ξέρει, να έχει μέσα του αληθινές γνώμες για πράγματα που δεν ξέρει;

ΜΕΝ. Αυτό φαίνεται

ΣΩ. Να που και τώρα - συμβαίνει αυτό και στα όνειρα - ταρακουνήθηκαν αυτές οι γνώμες του. Εάν μάλιστα κάποιος τον ξαναρωτήσει για πολλές περιπτώσεις του ίδιου πράγματος και με πολλούς τρόπους, να είσαι βέβαιος ότι θα τα ξέρει το ίδιο καλά όσο και οποιοσδήποτε άλλος, όταν ολοκληρώσει την απάντησή του.

ΜΕΝ. Αυτό φαίνεται.

1.3: Οι φάσεις του δρώμενου - Τα στάδια της μαιευτικής μεθόδου

Είναι φανερό ότι πρόκειται για επίδειξη *ανάμνησης* στον Μένωνα. Ο Σωκράτης κατά την εξέλιξη της διδασκαλίας, ενδιάμεσα δύο φορές, απευθύνεται και στον Μένωνα για να βεβαιωθεί ότι αντιλαμβάνεται τα διάφορα στάδια της *ανάμνησης*, τη σταδιακή βελτίωση των απαντήσεων και της κριτικής ικανότητας του Δούλου και για να του επιστήσει την προσοχή ότι μόνον ρωτάει και δεν δίνει έτοιμες απαντήσεις στον Δούλο. Σκοπός του είναι να βελτιωθεί ο Μένων στη διαλεκτική (Πετράκης, 2016, σ. 55) αλλά και να κάνει κτήμα του τα μέσα του δάσκαλου - η διέγερση των αισθήσεων (αισθητηριακή αντίληψη) μέσω των σχημάτων και οι κατάλληλες ερωτήσεις - για να θέσει σε κίνηση την *ανάμνηση*.

Αν αφεθούν κατά μέρος οι δύο εμβόλιμες στιχομυθίες όταν ο Σωκράτης απευθύνεται στον Μένωνα, παίρνοντας υπ’ όψη και ότι σε κάθε βήμα της *διαλεκτικής* πρέπει να συμφωνούνε και οι δύο συνομιλητές[21], μπορεί να γίνει φανερό ότι η διδασκαλία-μάθηση του διπλασιασμού του τετραγώνου με μαθητή τον δούλο επισυμβαίνει μέσα από τις εξής φάσεις:

i) Ο Σωκράτης θέτει το πρόβλημα και εξασφαλίζει ότι ο Δούλος κατανόησε το ζητούμενο.

[21]«όταν λέει ναι ή όχι ο ένας, αυτό να γίνεται αμέσως αντιληπτό από τον άλλον». (Πετράκης 2016, σ. 12)

ii) Ο Δούλος αυθόρμητα δίνει την πρώτη «λύση»[22].

iii) Ο Σωκράτης, με την γραφική αναπαράσταση της απάντησης του δούλου και τις ερωτήσεις του, οδηγεί τον δούλο να την απορρίψει ως εσφαλμένη.

iv) Ο Δούλος δίνει τη δεύτερη «λύση»[23].

v) Ο Σωκράτης, με την γραφική αναπαράσταση της απάντησης του δούλου και τις ερωτήσεις του, οδηγεί τον δούλο να την απορρίψει ως εσφαλμένη.

vi) Ο Δούλος διαπιστώνει και δηλώνει ότι δεν μπορεί να δώσει τη λύση, περιέρχεται σε κατάσταση *απορίας*[24].

vii) Βήμα-βήμα, με τη βοήθεια του Σωκράτη, ο Δούλος δίνει (*αναμιμνήσκεται*) τη λύση του προβλήματος. Για την ορθότητα της οποίας συμφωνούν και οι δύο.

viii) Ο Σωκράτης εισάγει τον όρο «διαγώνιος» και εντέλει εκφράζει την ορθή λύση με τη διατύπωση της Γεωμετρίας: «Από τη διαγώνιο κατασκευάζεται το διπλάσιο τετράγωνο.»[25]

Στην παραπάνω δομή, επισημαίνουμε τα τρία βασικά στάδια της μαιευτικής μεθόδου: Στη φάση (ii) ο Δούλος δεν ξέρει αλλά νομίζει ότι ξέρει, στη φάση (vi) *απορία,* ο Δούλος αναγνωρίζει ότι δεν ξέρει (και του έχει δημιουργηθεί το πάθος για να μάθει) και στη φάση (vii) ο Δούλος καταχτά την επίδικη γνώση.

Ο Σωκράτης απευθύνεται στον Μένωνα μετά τη φάση (ii) και μετά τη φάση (vi) αφού αυτές οι στιγμές είναι κρίσιμες για την *μαιευτική*: αμέσως μετά που ο Δούλος δίνει με την αρχική βεβαιότητά του την πρώτη λάθος λύση (*ΣΩ. Βλέπεις, Μένωνα, ότι εγώ τίποτα δεν τον διδάσκω, αλλά υποβάλλω μόνον ερωτήσεις; Αυτός νομίζει ότι ξέρει το μέγεθος της πλευράς από την οποία θα προκύψει η επιφάνεια των οκτώ ποδών.*) και

---

[22] Διπλάσια πλευρά.

[23] Τρία πόδια.

[24] Για τον *νου* του δεν υπάρχει διέξοδος (στα αρχαία *πόρος*), α-πορία, *απορία*.

[25] Στη βιβλιογραφία υπάρχει περίπου ομοφωνία με την παραπάνω δομή. Ενδεικτικά παρατίθεται η δομή κατά Φράγκο:

> Η ανάλυση αυτής της μεθόδου μας δείχνει ότι ο Σωκράτης βασικά ακολουθεί την παρακάτω πορεία: α) Προσφορά ορισμένων συγκεκριμένων πληροφοριών, μέσω ερωτήσεων· β) θέση του προβλήματος (ο διπλασιασμός του τετραγώνου)· γ) πρώτη λανθασμένη απάντηση· δ) ανεύρεση του λάθους· ε) δεύτερη λανθασμένη απάντηση· στ) ανεύρεση του λάθους· ζ) δημιουργία έντονης απορίας και μεγάλη διάθεση για εξεύρεση λύσης· η) πορεία προς τη λύση και αποκάλυψη της λύσης.» (Φράγκος, 1993, σ.74)

Ο Πετράκης, αφού σημειώσει ότι στην αρχή της διαδικασίας ό Σωκράτης θέτει το πρόβλημα, στο υπόλοιπο της διαδικασίας διακρίνει τρία στάδια. Το πρώτο στάδιο περιλαμβάνει τις φάσεις (ii) και (iii), το δεύτερο τις φάσεις (iv), (v) και (vi) και το τρίτο στάδιο τις φάσεις (vii) και (viii) (Πετράκης, 2016, σ.54).

πάλι αμέσως μετά την ανάδυση της απορίας στον Δούλο (*ΠΑΙ. Μα τον Δία, Σωκράτη, εγώ δεν ξέρω καθόλου. ΣΩ. Βλέπεις, Μένωνα,…*).

Στην επίδειξη αυτή της *ανάμνησης*, που είναι μια μικρογραφία του όλου διαλόγου *Μένων*, ο Σωκράτης, λόγω του θέματος που πραγματεύεται, δε χρειάζεται να παράσχει άλλη βοήθεια στον Δούλο για να κατανοήσει το ζητούμενο πέρα από μερικές ερωτήσεις. Ενώ στον όλο διάλογο *Μένων*, για να κατανοήσει ο Μένων τι σημαίνει ορισμός της αρετής παρέχει βοήθεια δίνοντας παραδείγματα ορισμών (του σχήματος αλλά και του χρώματος). Επίσης για να στοχασθεί ο Μένων πάνω στον πρώτο του λάθος ορισμό της αρετής (που ήταν απαρίθμηση αρετών) του δίνει κατ' αναλογία αντιπαραδείγματα με τη μέλισσα, την υγεία και τη σωματική δύναμη.

Στην επίδειξη της *ανάμνησης*, επίσης, δε χρειάζεται να εκφράσει με ισοδύναμο τρόπο το ζητούμενο, δηλαδή δεν χρειάζεται να εισαγάγει *υπόθεσιν*. Στον διάλογο με τον Μένωνα, ο Σωκράτης, το αρχικό προς διερεύνηση θέμα, δηλαδή το αν η αρετή μπορεί να διδαχθεί, το μετασχηματίζει στο αν η αρετή είναι γνώση. Αφού, αν η αρετή είναι γνώση, τότε μπορεί να διδαχθεί. Το αντίστροφο είναι αυτονόητο αφού ό,τι διδάσκεται δεν μπορεί παρά να είναι γνώση. Είναι ολοφάνερο ότι η εισαχθείσα *υπόθεσις* είναι πιο προσιτή για διερεύνηση από ό,τι το αρχικά ζητούμενο.

Αλλά και η βοήθεια του Δασκάλου στον μαθητή κατά την διάρκεια των «*ωδίνων*» με την μορφή της εμψύχωσής του δεν φαίνεται στο απόσπασμα που συζητάμε. Στον όλο διάλογο *Μένων* είναι βέβαια, παρ' όλη την ειρωνεία, και εμψυχωτικός ο τρόπος, η διάθεση του Δασκάλου απέναντι στον Μένωνα αλλά στον διάλογο *Θεαίτητος* είναι πολύ χαρακτηριστικές και ξεκάθαρες οι παροτρύνσεις του Δάσκαλου προς τον μαθητή, όπως φαίνεται στα δύο παρακάτω ενδεικτικά αποσπάσματα: «ΘΕΑΙΤ. Μα τον Δία, εγώ, βέβαια, θεωρώ πως είναι από τα πολύ δύσκολα. ΣΩ. Έχε αυτοπεποίθηση, όμως, και …». Επίσης «ΣΩ. Προσπάθησε, λοιπόν, Θεαίτητε, πάλι από την αρχή να πεις τι είναι η γνώση. Και ποτέ να μην πεις ότι τάχα δεν μπορείς. Διότι, αν ο θεός θέλει και συ φέρεσαι σαν άνδρας, θα μπορέσεις.» (Πλάτων, *Θεαίτητος*, 148d &151d, μετάφραση Κ.Παπαλεξίου).

1.4: Παρατηρήσεις στο μαθηματικό περιεχόμενο

Αναφορικά με τον Μένωνα, η επίδειξη της ανάμνησης είναι και απόδειξη του σωκρατικού ισχυρισμού ότι η γνώση είναι *ανάμνηση*. Όπως μία γεωμετρική απόδειξη που γίνεται πάνω σε ένα συγκεκριμένο σχήμα ισχύει για όλα τα σχήματα της ίδιας κατηγορίας, έτσι και η επιλογή του δούλου είναι τυχαία[26], ο δούλος είναι ένας τυχαίος άνθρωπος που δεν έχει διδαχτεί Γεωμετρία, άρα ότι ισχύει μ' αυτόν ισχύει και με τον καθένα που δεν έχει διδαχθεί γεωμετρία[27].

Ο Σωκράτης αρχίζει τη διδασκαλία (την παρουσίαση της *ανάμνησης*) σχεδιάζοντας ένα τετράγωνο που δείχνοντάς το στον δούλο τον ρωτάει αν αναγνωρίζει ότι είναι τετράγωνο και ότι οι πλευρές του είναι ίσες και είναι τέσσερις. Καθόλου δεν αναφέρεται σε ορθές γωνίες του. Ενώ στον όλο διάλογο *Μένων* για να συζητήσει για το πώς αποκτιέται η αρετή έπρεπε κατ' αρχάς να απαντηθεί το ερώτημα *τι είναι*, δηλαδή να δοθεί ένας ορθός ορισμός της αρετής, στη συζήτηση με τον δούλο αρκείται στο σχήμα και στη συμφωνία του δούλου ότι πρόκειται για τετράγωνο. Σε μια πρώτη ανάγνωση, πράγματι δημιουργείται η εντύπωση ότι πρόκειται για περίπτωση όπου δεν εφαρμόζεται η σωκρατική μεθοδολογική αρχή για την αναζήτηση της αλήθειας, πρώτα να ορίζεται μία έννοια και κατόπιν να ερευνούνται οι όποιες ιδιότητές της. Και βέβαια ένας σύγχρονος δάσκαλος των μαθηματικών, που διδάσκει Γεωμετρία με την παραδοσιακή παραγωγική μέθοδο, δεν συμβιβάζεται με την ιδέα να πραγματεύεται με τους μαθητές του ιδιότητες του τετραγώνου χωρίς να έχει προηγηθεί ο ορισμός του τετραγώνου[28]. Όμως πώς θα εξελισσόταν η επίδειξη αν ο Σωκράτης τον εντελώς απαίδευτο δούλο τον οδηγούσε πρώτα να *αναμνησθεί* τον ορισμό του τετραγώνου; Το πιο πιθανό να βάλτωνε. Άλλωστε και όταν ο Σωκράτης δίνει τον (πρώτο) ορισμό του σχήματος[29], ο Μένων αντιλέγει ότι ο ορισμός είναι απλοϊκός γιατί μπορεί κάποιος να πει ότι δεν ξέρει τι είναι χρώμα. Τότε ο Σωκράτης απαντά, μεταξύ άλλων, ότι οι κανόνες της διαλεκτικής συζήτησης «περιλαμβάνουν

[26] ΣΩ. Φώναξέ μου μόνον έναν από αυτούς εδώ τους ακόλουθούς σου, όποιον θέλεις . . .
[27] πρβλ. (Αναπολιτάνος, 2009, σ. 180).
[28] Ο Freudenthal βέβαια έχει άλλη άποψη: Ο δημιουργικός μαθηματικός συλλογίζεται και εξετάζει κάτι προτού κανείς να το έχει ορίσει και αυτό πρέπει να επιτρέπεται και στα τα παιδιά (Freudenthal, 1973, σ.389). Ενώ αλλού σημειώνει ότι «οι μαθητές αναγνωρίζουν τι είναι καρέκλα, μπουκάλι, κούκλα παρ' όλο που αυτά ποτέ δεν ορίστηκαν.» (Freudenthal, 1971, σ.424). Αυτό που εκφράζει ο Freudenthal, ταιριάζει και με τους σωκρατικούς κανόνες της διαλεκτικής περί κατανοητών εννοιών που ακολουθούν.
Περί της διδασκαλίας του ορισμού έννοιας αλλά και της έννοιας του ορισμού βλέπε και παρακάτω στη σ. 43, την αναφορά στην La Bastide (2015).
[29] Βλ σ.18.

και κατανοητές έννοιες, ώστε αυτός που ρωτήθηκε να τις δεχθεί και να συμφωνήσει ότι τις καταλαβαίνει» (Πετράκης, 2016, σ. 119). Μάλιστα για να συνεννοηθούνε, όπως απαιτεί η διαλεκτική, του δίνει άμεσα κατ' αναλογία παράδειγμα, ρωτώντας τον αν ξέρει τι είναι αυτό που ονομάζει «πέρας», «άκρο», «τέρμα» και το χρησιμοποιεί σε φράσεις όπως «ένα πράγμα έχει πέρας», «ένα πράγμα έχει άκρο». Επίσης αν ξέρει ότι υπάρχει κάτι που το ονομάζει «επίπεδο» και κάτι άλλο που το ονομάζει «στερεό». Οπότε θα πρέπει να συμφωνήσει, χωρίς προσκόμματα, ότι καταλαβαίνει τον (δεύτερο) ορισμό του σχήματος ότι «σχήμα είναι το πέρας του στερεού» (Πετράκης, 2016, σ. 119-121). Είναι κάτι που επίσης απαιτούν οι κανόνες της διαλεκτικής συζήτησης.

Σε σχέση πάλι με την έννοια του ορισμού, ίσως αξίζει να επισημανθεί ότι δεν ορίζονται οι μονάδες μήκους και εμβαδού και χρησιμοποιείται ο ίδιος όρος (*πους*) και για τις δύο, ενώ δεν ορίζεται και η έννοια «διπλάσιο τετράγωνο» [30] πράγματα για τα οποία ο σύγχρονος αναγνώστης θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι προκαλούν σύγχυση στον Δούλο[31].

Είναι φανερό ότι είναι σε γνώση του Σωκράτη ότι δεν έχουν κοινό μέτρο η διαγώνιος και η πλευρά τετραγώνου και άρα ότι η διαδικασία ρητών προσεγγίσεων της λύσης θα είναι ατέρμονη, ίσως γι αυτό μετά τη δεύτερη αποτυχημένη «λύση» του Δούλου, δεν ζητάει πια από τον Δούλο να πει πόσων ποδών (*πηλίκη ἔσται*) είναι η πλευρά-λύση του προβλήματος αλλά να δείξει ποια είναι η πλευρά-λύση (*δεῖξον ἀπό ποίας*). Και έτσι ενώ αρχικά ο Δούλος είχε να αναζητήσει μία αριθμητική λύση του προβλήματος βρέθηκε να αναζητά, ή κάποιος μπορεί να πει, χωρίς αναζήτηση βρήκε τη γεωμετρική λύση. Πράγματι δίνεται η εντύπωση ότι το τετράγωνο-τελική λύση το εισάγει ο Σωκράτης δείχνοντας τη διαγώνιο-λύση: «*ΣΩ. Είναι κι αυτή μία γραμμή που τη φέρουμε από τη μία γωνία στην άλλη και τέμνει στα δύο καθεμιά από αυτές τις επιφάνειες; ΠΑΙ. Ναι.*» Ακούγεται ίδιο με το «*βλέπεις ότι αυτό είναι μία τετράγωνη επιφάνεια;*» αλλά τότε ήταν η φάση του καθορισμού του προβλήματος.

Δέχονται και οι δύο με βάση το σχήμα (την αισθητηριακή αντίληψη), χωρίς απόδειξη (χωρίς *αιτίας λογισμόν*), ότι η διαγώνιος διαιρεί το τετράγωνο σε δύο ίσα τρίγωνα. Με τον ίδιο τρόπο επίσης δέχονται, όταν ο Δούλος δίνει την ορθή λύση, ότι είναι

[30] Με διπλάσια πλευρά ή διπλάσιο εμβαδόν (;!)

[31] Τα μαστόρια δεν έχουν πρόβλημα, λένε: Η πρόσοψη του οικοπέδου είναι 15 μέτρα και το οικόπεδο είναι διακόσια μέτρα. Ξέρουν ότι το μεν είναι μέτρα, το δε τετραγωνικά μέτρα.

ορθή, δηλαδή ότι πρόκειται για τετράγωνο οκτώ τετραγωνικών ποδών[32]. Κι αυτές οι από ιστορική σκοπιά ιδιαιτερότητες, στα μάτια του σύγχρονου ανθρώπου δύσκολο να αξιολογηθούν διαφορετικά, παρά μόνο ως ελλείψεις ή έστω ως παραλείψεις, που βέβαια μαζί με τα λάθη που έκανε ό Δούλος, μπορούν να αξιοποιηθούν στην Τάξη ως αφορμή «*για μια βαθιά ανάλυση των μεθόδων ελέγχου, εγκυρότητας, και απόδειξης ενός μαθηματικού αποτελέσματος*» (Καλδρυμίδου & Τζεκάκη, 1995). Όμως για να μην αδικηθεί η θεωρία της *ανάμνησης*, αυτή η ιστορικά σπουδαία, ανεξάρτητα από το μεταφυσικό της θεμελίωσής της, σωκρατική-πλατωνική επινόηση, αξίζει να αναφέρουμε ότι τα παραπάνω δύο περιστατικά δεν μπορούν να αποτελέσουν επιχείρημα ότι η «υποδειγματική» διδασκαλία του διπλασιασμού του τετραγώνου ή ακόμη ότι και η *μαιευτική* μέθοδος πάσχει. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο Πλάτων εντάσσει τη διδασκαλία του διπλασιασμού του τετραγώνου στα πλαίσια του διαλόγου *Μένων,* ως επίδειξη *ανάμνησης* και σύμφωνα με την πλατωνική θεωρία αντικείμενο της ανάμνησης είναι η *ορθή γνώμη* (*δόξα*) που κατόπιν, με τον *αιτίας λογισμόν,* αναβαθμίζεται σε *γνώση* (*επιστήμη*). Ο Πλάτων σταματάει την επίδειξη όταν ο Δούλος *αναμιμνήσκεται* την *ορθή γνώμη*. Αν συνεχιστεί η ανάμνηση με τον *αιτίας λογισμόν* η *ορθή γνώμη* του Δούλου θα μετατραπεί (αναβαθμιστεί) σε *γνώση*[33]. Αυτό ακριβώς το νόημα έχουν τα λόγια του Σωκράτη στους τελευταίους στίχους του παραθέματος «*αν μάλιστα κάποιος τον ξαναρωτήσει για πολλές περιπτώσεις του ίδιου πράγματος και με πολλούς τρόπους, να είσαι βέβαιος ότι θα τα ξέρει το ίδιο καλά όσο και οποιοδήποτε άλλος, όταν ολοκληρώσει την απάντησή του*». Είναι προφανές ότι ο Σωκράτης εννοεί ότι την στιγμή της λύσης του προβλήματος ο Δούλος δεν ξέρει ότι το τετράγωνο-λύση του προβλήματος είναι όντως τετράγωνο πράγμα που ξέρει οποιοσδήποτε άλλος γνώστης της Γεωμετρίας, αλλά θα το ξέρει μέσω του *αιτίας λογισμού*.

Δεν επικαλείται το *πυθαγόρειο θεώρημα* που γνώριζε ο Πλάτων, το οποίο βέβαια γνώριζε και ο Σωκράτης, και που θα μπορούσε ίσως να δώσει λύση, αφού το τετράγωνο της διαγωνίου (υποτείνουσας του τριγώνου = μισό του τετραγώνου) είναι ίσο με τα τετράγωνα των καθέτων πλευρών (που είναι ίσα με το αρχικό τετράγωνο) άρα είναι ίσο με δύο φορές το αρχικό τετράγωνο. Όπως προφανώς θα ξέρει και ότι το

[32] Όσον αφορά τη διαδικασία, ισχύει ο σχολιασμός που μόλις παραπάνω έγινε για τους ορισμούς.
[33] Βλ Πλάτωνος *Μένων* 97e-98a και (Πετράκης, 2016, σ.359, σχόλια 289, 290, 291). Βλέπε και (Λαλιώτης, 2020, σ. 91). Το απόσπασμα του διαλόγου *Μένων* 97e-98a παρατίθεται παρακάτω, στη σελίδα 32.

άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι δύο ορθές και η οξεία γωνία του ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου είναι μισή ορθή και ότι το διπλάσιο τετράγωνο της κατασκευής, η λύση του προβλήματος έχει ορθές γωνίες.

1.5: Διδακτικές παρατηρήσεις

Οι παρατηρήσεις πάνω στο μάθημα του διπλασιασμού του τετραγώνου θα γίνουν υπό την εξής παραδοχή:

> «*Με το γεωμετρικό παράδειγμα ο Σωκράτης δημιούργησε ένα μοντέλο διδασκαλίας. Το μοντέλο έχει ως βάση το ζεύγος δάσκαλος - μαθητής υπό τη διάσταση και την προοπτική του διαλόγου*[34]. *Πρόκειται γι αυτόν που υποβάλλει τις κατάλληλες ερωτήσεις και εκείνον που αναλαμβάνει να ανακαλύψει μόνος του τις απαντήσεις.*» (Πετράκης, 2016, σ.96)

Η σπουδαιότητα του μοντέλου έγκειται στο γεγονός ότι, όπως φαίνεται και στον όλο διάλογο Μένων, ο Σωκράτης δεν ακολουθεί το διδακτικό μοντέλο των σοφιστών να ανακοινώνουν ένα αληθές συμπέρασμα που προέκυψε από την έρευνά τους και μετά με συνεχή, χωρίς διακοπές λόγο να αναπτύσσουν τους λόγους για τους οποίους είναι αληθές. Με τις κατάλληλες ερωτήσεις (αλλά και με άλλα μέσα) προσπαθεί ξανά και ξανά ώστε να προκύψει η γνώση στην ψυχή του μαθητή με τρόπο που να φαίνεται σαν να είναι δημιούργημα της δικής του πνευματικής δύναμης (Weierstraß, 2013, σ.321).

Φυσικά, όσο περισσότερο εντρυφά κανείς στο όλο πλατωνικό έργο, τόσο περισσότερο εκτιμά ένα τόσο σύντομο και απέριττο απόσπασμα πλατωνικού διαλόγου ως μοντέλο διδασκαλίας. Διακρίνει σε αυτό εκφάνσεις της σωκρατικής διδασκαλίας και, γιατί όχι, μπορεί να συμπληρώσει φαινομενικά κενά του μοντέλου με στοιχεία από την όλη σωκρατική διδασκαλία. Αντίστροφα, αυτό το μοντέλο διδασκαλίας σχετίζεται άμεσα με τη *διαλεκτική* και έτσι είναι εύκολο να «διαγνωσθεί» σε όλους τους πλατωνικούς διαλόγους γιατί τους διαπερνά όλους· και τον διάλογο *Μένων*.

Ο Μένων ήταν μαθητής του σοφιστή Γοργία. Οι σοφιστές, με αμοιβή, δίδασκαν στους μαθητές τους έτοιμη γνώση. Ο Μένων ήταν φορέας τέτοιας εμπειρίας. Μετά

[34] Ίδια γνώμη έχει και ο Φράγκος· ήδη το 1973, (βλ. υποσημείωση 72, στη σ.59), έγραφε ότι ο Σωκράτης «εθέσπισε μια σπουδαία διδακτική μέθοδο, τη διαλογική διδασκαλία» (Φράγκος, 1993, σ.67).

τον δεύτερο αποτυχημένο ορισμό της αρετής ο Σωκράτης τον καλεί να προσπαθήσει να βρει το κοινό στοιχείο του στρογγυλού, του ευθέως και όλων των άλλων σχημάτων και του εξηγεί ότι η προσπάθειά του να απαντήσει θα είναι μία καλή εξάσκηση για να βρει το κοινό στοιχείο των επιμέρους αρετών και να δώσει έτσι τον ορισμό της αρετής. Η αντίδραση του Μένωνα χαρακτηριστική: «*ΜΕΝ. Όχι εγώ, αλλά εσύ Σωκράτη να απαντήσεις.*» (*Μένων*,75b). Ο Σωκράτης τελικά λέει τον ορισμό του σχήματος γιατί ως Δάσκαλος εκτιμά ότι, στην περίσταση αυτή, έτσι θα προωθήσει τον στόχο του που είναι να προσπαθήσει ο Μένων να εντοπίσει το κοινό που έχουν όλες οι επιμέρους αρετές. Ο διάλογος συνεχίζεται έτσι: «*ΣΩ. Να σου κάνω το χατίρι; ΜΕΝ: Ω, ναι. ΣΩ. Θα μου δώσεις κι εσύ με τη σειρά σου απάντηση για την αρετή; ΜΕΝ. Ναι, θα απαντήσω. ΣΩ. Πρέπει να μπω τότε στον κόπο· γιατί αξίζει.*» (Πλάτων *Μένων*, 75b, μετάφραση Ι. Πετράκης).

Η διδασκαλία του γεωμετρικού προβλήματος εκτυλίσσεται βέβαια με μικρή λεκτική συμμετοχή του Δούλου σε σχέση με τον Σωκράτη και είναι αυστηρά υπό τον έλεγχο του Σωκράτη. Το είδος των ερωτήσεων του Σωκράτη δίνει την δυνατότητα στον Δούλο ή τον υποχρεώνει να απαντά μονολεκτικά ή σχεδόν μονολεκτικά. Ίσως οφείλεται στο γεγονός ότι ο δούλος είναι νέος και εντελώς απαίδευτος στη Γεωμετρία. Ίσως οφείλεται στο ότι πρόθεση του Σωκράτη είναι να διδάξει όχι τον δούλο αλλά τον Μένωνα, να του δείξει ότι η μάθηση είναι *ανάμνηση*. Βέβαια θα μπορούσε ένας σύγχρονος άνθρωπος που έχει σχέση με την εκπαίδευση να μεμφθεί το σωκρατικό μοντέλο για δασκαλοκεντρισμό, αυταρχισμό, διδασκαλική αυθεντία κ.ο.κ. Έτοιμη γνώση όμως δεν δίνει ο Σωκράτης στον Δούλο. Η θεωρία της *ανάμνησης* δείχνει ότι τον ουσιαστικότερο ρόλο στη μάθηση παίζει το ίδιο το εκπαιδευόμενο άτομο, που πρέπει να δράσει (Πετράκης, 2016, σ.263)[35]. Ο Σωκράτης υιοθετεί την *ανάμνηση* στο διδακτικό του μοντέλο στο πνεύμα της *διαλεκτικής* και όχι της παραδοσιακής διδασκαλίας, η ανάμνηση δεν είναι μία μέθοδος που επιβάλλει παγιωμένες θέσεις (Πετράκης, 2016, σ.51). Το παράδειγμα, παρόλη τη συντομία, τη λιτότητα που το χαρακτηρίζει, έχει τα χαρακτηριστικά του αξιόλογου διδακτικού μοντέλου. Ιδιαίτερα για τη διδασκαλία των μαθηματικών, που πρέπει να επιδιώκει μια ισορροπία μεταξύ *αλγοριθμικών* και *εννοιολογικών* (Τζουβάρας, 1993)

[35] Αντίθετη άποψη εκφράζει ο Weierstrass. Απορρίπτει την πρακτική εφαρμογή της *ανάμνησης* στη σύγχρονη εκπαίδευση γιατί προτεραιότητα και καθήκον της είναι να οδηγήσει τον μαθητή στην αυτόνομη χρήση των δυνατοτήτων του και αυτό δεν έχει την ανάγκη καμιάς *ανάμνησης*. (Weierstrass, 2013, σ.328).

μαθηματικών (με προβάδισμα στα δεύτερα). Γιατί η διάκριση *αλγοριθμικά* μαθηματικά - *εννοιολογικά* μαθηματικά βρίσκει την αναλογία της στη διάκριση *ορθή δόξα* - *επιστήμη* όπως την παρουσιάζει ο Σωκράτης στον διάλογο *Μένων*. Ο Σωκράτης αφού έχει παρομοιάσει τις *γνώσεις* (*επιστήμες*) με τα λεγόμενα «αγάλματα του Δαίδαλου» που τα είχαν αλυσοδεμένα για να μη φύγουν, λέει:

> ΣΩ. Δεν έχει πραγματική αξία να αποκτήσει κάποιος ένα έργο του λυμένο·[36] είναι σαν τον δραπέτη - δεν πρόκειται να παραμείνει - μεγάλη όμως αξία έχει το δεμένο έργο· είναι πολύ όμορφα αυτά τα έργα. Γιατί τα λέω αυτά; Διότι έχουν σχέση με τις ορθές γνώμες. Γιατί οι ορθές γνώμες όσο χρόνο κάποιος τις διατηρεί, είναι καλό πράγμα και σε όλα τα πράγματα φέρνουν την επιτυχία. Όμως δεν θέλουν να μείνουν στη θέση τους για πολύ και δραπετεύουν από την ανθρώπινη ψυχή· η αξία τους λοιπόν είναι μικρή, εκτός και αν κανείς τις δέσει με τον *συλλογισμό*[37]. Και αυτός φίλε μου Μένωνα, είναι η ανάμνηση, όπως πιο πριν την περιγράψαμε. Όταν τις δέσουμε, πρώτα γίνονται γνώσεις και έπειτα παραμένουν παντοτινά. Για αυτόν τον λόγο η γνώση έχει μεγαλύτερη αξία από την ορθή γνώμη, και ως προς το σταθερό δέσιμο διαφέρουν η γνώση από την ορθή γνώμη. (Πλάτωνος, *Μένων*, 97e-98a. Μετάφραση Ι. Πετράκης)

Ο σύγχρονος δάσκαλος των μαθηματικών βλέπει με συγκατάβαση το αρχικό λάθος (παρανόηση) του δούλου ότι για να διπλασιαστεί το εμβαδόν του τετραγώνου πρέπει να διπλασιαστεί η πλευρά του. Εμπειρικά ξέρει ότι ακόμη κι αν στο μάθημα της Γεωμετρίας συζητηθεί και αποδειχθεί το θεώρημα ότι «ο λόγος των εμβαδών όμοιων σχημάτων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους», οι περισσότεροι μαθητές δεν θα εσωτερικεύσουν την αλήθεια του. Στο μάθημα του Σωκράτη αναδεικνύεται λοιπόν η εσφαλμένη αντίληψη των μαθητών ότι κάθε ζεύγος συμμεταβαλόμενων ποσών είναι ανάλογα (linear reasoning). Οι De Bock, Van Dooren και Janssens (2002) χαρακτηρίζουν το αρχικό λάθος του δούλου στο παράδειγμα του διπλασιασμού του τετραγώνου ως το πλέον φημισμένο παράδειγμα ακατάλληλης χρήσης αναλογικού λογισμού και ως το πλέον αναφερόμενο στη σχετική με αυτό το θέμα ερευνητική βιβλιογραφία.

Σε μια σύγχρονη διδασκαλία, ο δάσκαλος, δεν αρκείται, όπως ο Σωκράτης, να οδηγήσει τον μαθητή να διαπιστώσει το λάθος του, αλλά τον απασχολεί και η αιτία που παράγει το λάθος του μαθητή με σκοπό να την ακυρώσει. Για να συμβεί αυτό

[36] Ένα έργο του Δαίδαλου που να μην είναι αλυσοδεμένο.

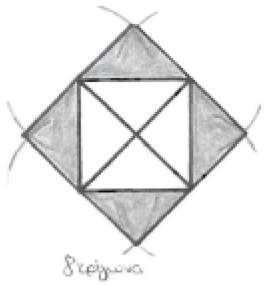
[37] *αἰτίας λογισμῷ* στο αρχαίο κείμενο. Ο Λαλιώτης αναφέρει ότι το «*αιτίας λογισμός*» αποδίδεται από τον Βλαστό ως «υπολογισμός του λόγου» και κατόπιν ερμηνεύει το «αιτία» ως «ο λόγος για τον οποίο». (Λαλιώτης, 2020, σ. 91)

όμως πρέπει ο δάσκαλος να γνωρίζει την αιτία ή να υποθέτει τις πιθανές αιτίες εξ αιτίας των οποίων κάνει λάθος ο μαθητής.

Στην εργασία τους οι De Bock et al (2002) ερευνούν τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών ηλικίας 12-16 ετών που είναι υπεύθυνες για αυτή την τόσο διαδεδομένη παρανόηση ότι είναι πάντα αναλογική η μεταβολή δύο συμμεταβαλλόμενων μεγεθών. Κατ' αρχάς παραθέτουν τη διαπίστωση του Rouch ότι η αναλογική σκέψη είναι η πρώτη που έρχεται στο ανθρώπινο μυαλό επειδή οι αναλογικές συσχετίσεις είναι οι πιο απλές. Στα συμπεράσματα της έρευνάς τους κατατάσσουν τις αιτίες για την λανθασμένη εφαρμογή γραμμικής σκέψης από τους μαθητές σε τέσσερις κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει την διαπίστωση του Rouch ότι οι μαθητές διαισθητικά επιλέγουν την αναλογικότητα σε οποιαδήποτε περίσταση (*intuitiveness of linear ralationsships*). Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει μαθητές που συνειδητά επιλέγουν την αναλογικότητα γιατί είναι σίγουροι ότι στην εκάστοτε περίσταση είναι σωστή η εφαρμογή της (*illusion of linearity*). Στην τρίτη κατηγορία, οι μαθητές που έχουν ελλείψεις στην Γεωμετρία, πχ πιστεύουν ότι όταν μεγεθύνεται ένα επίπεδο σχήμα, αυξάνεται μόνο η μία διάστασή του ή ότι μόνο τα κανονικά σχήματα έχουν εμβαδόν και στην τέταρτη κατηγορία οι μαθητές που δεν έχουν εξοικειωθεί με λεκτικά διατυπωμένα προβλήματα. Είναι μάλλον αμφίβολο σε ποια από τις δύο πρώτες κατηγορίες θα κατατάσσονταν ο Δούλος αν συμμετείχε στην έρευνα. Πάντως ο Σωκράτης προσπάθησε στην αρχή της διδασκαλίας να εξοικειώσει τον Δούλο με το πρόβλημα (Πετράκης, 2016, σ.116) φέρνοντας τα τμήματα με άκρα τα μέσα των απέναντι πλευρών του τετραγώνου και δείχνοντάς του έτσι, και άλλα τετράγωνα που έχουν ίσα εμβαδά αλλά και σχήματα που το ένα έχει διπλάσιο εμβαδόν από το άλλο (το μικρό τετραγωνάκι και το ορθογώνιο από δύο τετραγωνάκια).

Το πρόβλημα του διπλασιασμού του τετραγώνου πλευράς 2, ως αριθμητική επίλυση, δεδομένου ότι οδηγεί στην πλευρά $\sqrt{8}$, είναι απαγορευτικό για μαθητές Δημοτικού ως Α΄ Γυμνασίου γιατί δεν έχουν διδαχθεί άρρητους αριθμούς, ενώ, αυτονόητα, ως γεωμετρική κατασκευή είναι ένα δύσκολο πρόβλημα ακόμη και για μαθητές Λυκείου. Σύμφωνα με τις Καλδρυμίδου & Τζεκάκη (1995), σε έρευνα της Καλδρυμίδου (1993), η συντριπτική πλειονότητα των φοιτητών των Μαθηματικών τμημάτων και των καθηγητών των Μαθηματικών πρώτα υπολογίζουν το μήκος της πλευράς του ζητούμενου τετραγώνου $2\sqrt{2}$ και με βάση αυτό το αποτέλεσμα επιλέγουν τη διαγώνιο του τετραγώνου ως λύση. Με βάση την εμπειρία, αυτό θα κάνουν και όσοι μαθητές Λυκείου (καταφέρουν να) λύσουν το πρόβλημα.

Ο Κόσσυβας (2018) ζήτησε από 21 ελληνικής καταγωγής μαθητές Α΄ Γυμνασίου του Ευρωπαϊκού Σχολείου Βρυξελλών να λύσουν το πρόβλημα του διπλασιασμού του τετραγώνου με σκοπό να αναδειχθεί ότι η αριθμητική λύση είναι προσεγγιστική ενώ με κανόνα και διαβήτη η λύση είναι ακριβής και χάρη σε αυτό το συμπέρασμα, ενδεχομένως, να αποκτήσουν οι μαθητές πρωταρχική εμπειρία ασυμμετρίας που θα τους βοηθήσει να κατανοήσουν και να αποδεχθούν πιο εύκολα τους άρρητους αριθμούς που ακολουθούν στο πρόγραμμα της Δευτέρας Τάξης. Το πρόβλημα τέθηκε ως ανοικτό πρόβλημα με την εξής διατύπωση: *Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο με πλευρά ίση με 2 εκατοστά και έπειτα ένα δεύτερο με διπλάσιο εμβαδόν. Ποιο είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου που έχει διπλάσιο εμβαδόν από το εμβαδόν του δεδομένου τετραγώνου με πλευρά 2 εκατοστών*. Το σενάριο της έρευνας χωρίστηκε σε τρεις φάσεις, ατομική έρευνα, συνεργασία σε ομάδες, συζήτηση στην τάξη. Αρχικά η πλειονότητα των μαθητών, όπως αναμενόταν, έδωσε την αναλογική λύση αλλά σταδιακά μειώθηκε ο αριθμός τους. Όλοι περίμεναν ότι η λύση θα είναι ακέραιος αριθμός. Είχαν στη διάθεσή τους αριθμομηχανές και έκαναν δοκιμές. Οι τέσσερις από τις πέντε ομάδες έδωσαν τουλάχιστον μία προσεγγιστική λύση αλλά δεν δεχόταν ούτε ότι ήταν προσεγγιστική ούτε ότι η ακριβής λύση δεν ήταν ο αριθμός στην οθόνη της αριθμομηχανής. Δόθηκε όμως και η παρακάτω ωραία λύση, μάλιστα με κανόνα και διαβήτη. Ο μαθητής που την κατασκεύασε ήταν πεισμένος για την ακρίβειά της και για την απόκλιση της αριθμητικής του λύσης και άρα διαισθητικά άγγιξε την αρρητότητα. Τις κορυφές του τετραγώνου-λύση τις κατασκεύασε ως τομές κύκλων με κέντρα τις κορυφές και ακτίνα ίση με τη μισή διαγώνιο του αρχικού τετραγώνου.



(Κόσσυβας, 2018).

Ο ερευνητής διαπίστωσε ότι οι μαθητές σχεδόν αποκλειστικά προσπαθούν να βρούνε αριθμητική λύση αλλά αποκόμισαν το όφελος της διάκρισης ακριβούς και προσεγγιστικής λύσης ως γνωστικό υπόβαθρο για την κατάκτηση της έννοιας του άρρητου αριθμού. Επίσης, ο ερευνητής αναφέρεται και σε έρευνες άλλων ερευνητών, στις οποίες δόθηκε στα παιδιά τετραγωνισμένο χαρτί, με περισσότερες γεωμετρικές λύσεις, είτε δόθηκε τετραγωνισμένο χαρτί με χαραγμένες τις διαγωνίους (πλέγμα με ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα, το καθένα ίσο με το 1/4 του αρχικού τετραγώνου) ή τις μισές διαγωνίους (ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα, το καθένα ίσο με το 1/2 του αρχικού τετραγώνου) με ακόμη περισσότερες σωστές λύσεις. Στις περιπτώσεις αυτές, στις οποίες και μόνη η εποπτεία αρκεί, πολλές λύσεις δόθηκαν ακόμη και από μαθητές με χαμηλή επίδοση στο μάθημα. Φυσικά δεν μπορεί να γίνει λόγος για προσέγγιση της αρρητότητας αφού πάνω στο πλέγμα εποπτικά διέκριναν το τετράγωνο με το διπλάσιο εμβαδόν.

Κεφάλαιο 2 Η ΜΑΙΕΥΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΣΩΚΡΑΤΗ ΚΑΙ ΟΙ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ο κατάλογος των παιδαγωγών, μελετητών, ερευνητών της μαιευτικής μεθόδου στους νεότερους χρόνους είναι πολύ μεγάλος και περιλαμβάνει και πολλούς ερευνητές της διδακτικής ειδικά των Μαθηματικών. Βέβαια ιδιαίτερη είναι η περίπτωση του Hans Freudenthal, του ιδρυτή της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης, γιατί συνδυάζει τις ιδιότητες του σπουδαίου μαθηματικού-ερευνητή και του παιδαγωγού.

Έναν και πλέον αιώνα πριν από τον Freudenthal ένας άλλος σπουδαίος μαθηματικός, ο K. Weierstrass, εκφράστηκε, στην αρχή της σταδιοδρομίας του, για την μαιευτική μέθοδο.

2.1 Ο K.T. Weierstrass για την εφαρμοσιμότητα της μαιευτικής μεθόδου.

Μία εργασία που σηματοδοτεί το μεγάλο ενδιαφέρον για τη μαιευτική μέθοδο στη σύγχρονη εποχή είναι αυτή του «μεγαλύτερου μαθηματικού δάσκαλου στην Ευρώπη»[38], του Karl Theodor Weierstrass, «Περί της Σωκρατικής Μεθόδου και της Εφαρμοσιμότητάς της στη Σχολική Διδασκαλία» (Weierstrass, 2013) την οποία παρουσίασε το 1841, σε ηλικία 26 ετών, στην εξεταστική επιτροπή για την πρόσληψη καθηγητών μέσης εκπαίδευσης, στο Münster, τότε της Πρωσίας[39].

Ο Weierstrass κατ' αρχάς ισχυρίζεται ότι αν θέλει κανείς να συλλάβει το νόημα, την ουσία της μαιευτικής μεθόδου διδασκαλίας, θα πρέπει να έχει διαρκώς κατά νου τον σκοπό γενικά της σωκρατικής διδασκαλίας: Αυτό που κατάκτησε ο ίδιος να το κατακτήσουν και οι άλλοι. Παρά την ταπεινότητά του ότι τίποτε δεν γνωρίζει, έφτασε ως τη θέαση του υψηλού και του όσιου (Weierstrass, 2013, σ. 316).

Σκοπός του ήταν δηλαδή, να καταφέρει να αποτραβήξει τους άλλους από τη φιλάρεσκη και καταστροφική επιδίωξη του πλούτου, της δύναμης, της καλοπέρασης και να προσπαθήσουν πραγματικά για το αιωνίως αληθινό, καλό και δίκαιο. Αυτός ήταν ο σκοπός του και όταν κατεδείκνυε την ανοησία που με θράσος παρουσίαζαν

[38] E.T. Bell, 1991, Οι Μαθηματικοί, τόμος ΙΙ, Π.Ε.Κ., σ.207.

[39] Ο πρωτότυπος τίτλος της εργασίας είναι «Über die Sokratische Methode und deren Anwendbarkeit beim Schulunterrichte». (Weierstrass, 2013).Ο Weierstrass δούλεψε δεκαπέντε χρόνια σε πρωσικά σχολεία Μέσης Εκπαίδευσης και το 1856 έγινε καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου. (Struik, D., χ.χ., *Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών*, εκδ. Ζαχαρόπουλος, σ. 259).

σαν σοφία οι σοφιστές. Όταν εφιστούσε την προσοχή του νέου πολιτικού, που λαχταρούσε τις τιμές και διακρίσεις της *πόλης*, σε αυτό που θα ήταν πραγματικό κέρδος για αυτόν. Όταν έδειχνε τα βήματα της έρευνας στον νεαρό που ήθελε να ανακαλύψει την αλήθεια. Όταν στους κύκλους των φίλων του νοστίμιζε τα εδέσματα με ουσιαστικές συζητήσεις έτσι που ξεχνιόντουσαν αυλητές, χορεύτριες και γελωτοποιοί (Weierstrass, 2013, σ. 316).

Δεν παρέκκλινε από τις αρχές του στις περιπτώσεις που έρχονταν νέοι σ' αυτόν, από τους σοφιστές, για τους μάθει όσα δίδασκαν οι σοφιστές (γιατί τον θεωρούσαν ανώτερο από εκείνους, πολύ σοφότερο). Το πρώτο που έκανε με αυτούς ήταν να πεισθούν ότι ό,τι είχε αξία να το μάθουν, δεν το είχανε μάθει. Γιατί το μεγαλύτερο εμπόδιο για την απόκτηση της σοφίας ήταν το να θεωρούν ότι γνωρίζουν πολλά πράγματα και το μεγαλύτερο εμπόδιο για τη γνώση σημαντικών πραγμάτων είναι το να θεωρούν ότι τους είναι εντελώς καθαρά. Ενώ, αντίθετα, η αναγνώριση της άγνοιας είναι η αρχή της γνώσης (Weierstrass, 2013, σ. 318)..

Ο Weierstrass θεωρεί ότι η ανάλυση των διαλόγων *Μένων* και *Θεαίτητος* ενδείκνυται για να βγουν συμπεράσματα για την εφαρμοσιμότητα της μεθόδου στη διδασκαλία των νέων (του καιρού του). Ιδιαίτερα για το γεωμετρικό παράδειγμα με τον δούλο εκτιμά ότι το προς μάθηση θέμα είναι σε υπερθετικό βαθμό απλό και γι αυτό δεν είναι και τόσο σωστό να θεωρείται ότι είναι ένα καλό παράδειγμα σωκρατικής διδασκαλίας (Weierstrass, 2013, σ. 321). Στον *Θεαίτητο ε*ίναι που ο Σωκράτης λέει ότι η τέχνη του είναι όπως αυτή της μητέρας του, και μιλάει ο ίδιος για την τέχνη του[40] όμως ο Weierstrass ξεχωρίζει και τονίζει άλλη δήλωση του Σωκράτη, την δήλωση ότι «η μέγιστη των τεχνών του είναι η δυνατότητά του να εξετάζει αν ο νους του νέου γεννάει κάτι το παραμορφωμένο και ψευδές ή κάτι το γόνιμο και αληθές»[41] (Weierstrass, 2013, σ. 322).

Κατά τον Weierstrass, στους πλατωνικούς διάλογους φαίνεται ότι ο Σωκράτης δεν ακολουθούσε τον τρόπο των περισσότερων φιλοσόφων πριν και μετά από αυτόν να ανακοινώνουν ένα ορθό συμπέρασμα, στο οποίο με την έρευνά τους έχουν καταλήξει, και μετά με συνεχή χωρίς διακοπές λόγο να αναπτύσσουν τους λόγους για τους οποίους είναι ορθό. Προσπαθούσε ξανά και ξανά να αναδυθεί η γνώση στη ψυχή του

[40] Βλ. την εισαγωγή στο Κεφάλαιο 1, στη σ.16.

[41] Στο αρχαίο κείμενο «. . . μέγιστον δὲ τοῦτ' ἔνι τῇ ἡμετέρᾳ τέχνῃ, βασανίζειν δυνατὸν εἶναι παντὶ τρόπῳ πότερον εἴδωλον καὶ ψεῦδος ἀποτίκτει τοῦ νέου ἡ διάνοια ἢ γόνιμόν τε καὶ ἀληθές.» (*Θεαίτητος* , 150c).

μαθητή με τρόπο ώστε να του φανεί ότι είναι προϊόν της δικής του πνευματικής δύναμης. Η διδασκαλία του Σωκράτη δεν ήταν ανακοίνωση γνώσεων, περισσότερο ήταν παρακίνηση και ζωντάνεμα της δραστηριότητας του νου στον οποίο υπάρχουν φύτρα των γνώσεων. Ο Σωκράτης το λέει αυτό *ανάμνηση*.

Ο Weierstrass, μέσα από την σύγκριση της σωκρατικής μεθόδου και της λεγόμενης ερωτηματικής μεθόδου (katechetische Lehrart) του καιρού του, δίνει τα εξωτερικά χαρακτηριστικά της σωκρατικής μεθόδου:

«Η ειρωνεία. Αυτή είναι μόνο για τον Σωκράτη, σε όποιον άλλο, δεν ταιριάζει» (Weierstrass, 2013, σ. 322).

«Ο δάσκαλος κατ' αρχάς τεμαχίζει δεόντως την έννοια που θέλει να διδάξει, ανάλογα με το πώς μπορεί να δημιουργηθεί η έννοια στη ψυχή του μαθητή. Μετά απευθύνει τις ερωτήσεις, ξέροντας για τον καθένα τι μπορεί, έτσι ώστε μόνο με τις δικές του δυνάμεις να μπορεί να απαντήσει» (Weierstrass, 2013, σ. 323).

«Όταν δίνεται μία όχι σωστή απάντηση, ο δάσκαλος δεν τη διορθώνει αμέσως αλλά με τις ερωτήσεις του κατευθύνει τον μαθητή μόνος του να τη διορθώσει» (Weierstrass, 2013, σ. 323).

«Η τέχνη του δάσκαλου είναι να παρακολουθεί την ακολουθία των σκέψεων του μαθητή και να ξέρει να κάνει τις ερωτήσεις του στην κατάλληλη στιγμή. Δεν χάνει από τα μάτια του τον τελικό του στόχο, όταν διορθώνει λάθος απαντήσεις, αλλά υποχωρεί ανάλογα με την περίσταση» (Weierstrass, 2013, σ. 323).

«Ο Σωκράτης ήταν μάστορας στις ερωτήσεις που σκοπό έχουν να παράγουν συγκεκριμένες απαντήσεις» (Weierstrass, 2013, σ. 323).

Ο τρόπος του είναι τέτοιος, ώστε οι μαθητές να παραμένουν ψύχραιμοι και ήρεμοι.

Ο Weierstrass πιστεύει ότι είναι λάθος ο περιορισμός του στόχου της σωκρατικής μεθόδου, στην διδασκαλία του σκέπτεσθαι, παρόλο που με εξαιρετικό τρόπο ασκεί τη σκέψη. Αφού σε κάθε μάθημα φθάνει ο μαθητής σε ένα συμπέρασμα που παραμένει[42] ως κτήμα του νου του μαθητή (Weierstrass, 2013, σ. 324).

[42]Πρβλ. το απόσπασμα Πλάτωνος, *Μένων*, 97e-98a., στη σ.32.

Απέναντι, όχι αντίθετη, στη σωκρατική μέθοδο θεωρεί την *ακροαματική διάλεξη*[43] που όχι μόνον δεν την απορρίπτει αλλά παραθέτει και το μεγάλο πλεονέκτημά της: Ο δάσκαλος μπορεί να δώσει στον μαθητή, ιδιαίτερα στον μεγαλύτερο μαθητή, υπόδειγμα επιστημονικής αντιμετώπισης και έρευνας:

> Τίποτα δεν είναι πιο παιδευτικό για το επίδοξο πνεύμα, από την θεώρηση του τρόπου με τον οποίο ένας ήδη περισσότερο πεπαιδευμένος πορεύεται κατά την διάρκεια των αναζητήσεών του. Όταν λοιπόν ο δάσκαλος κατανοεί την τέχνη, όχι απλώς να κοινοποιεί συμπεράσματα και εκ των υστέρων να τα αιτιολογεί, αλλά να κάνει ξεκάθαρη όλη την σειρά των σκέψεων που τον οδήγησε σ' αυτά, τότε δικαιούται, ιδιαίτερα αν έχει μαθητές μεγαλύτερων τάξεων, να είναι σίγουρος για την επιτυχία του έργου του. (Weierstrass, 2013, σ. 325-326)

Δέχεται ότι, με προτεραιότητα στους μεγαλύτερους μαθητές, η *μαιευτική μέθοδος* μπορεί - κατά περίπτωση - να εφαρμοστεί για την διδασκαλία των μαθηματικών αλλά με απόλυτη επιτυχία μόνον αν ο μαθητής είναι ένας ή έστω λίγοι. Αφού και τα θέματα που πραγματεύθηκε ο Σωκράτης δεν είναι για μικρά παιδιά. Και οι διάλογοι είναι με μορφωμένους νέους ή μεγαλύτερους. Άρα για να εφαρμοστεί η σωκρατική μέθοδος στην τάξη απαιτείται ένα καλό επίπεδο γνώσεων από μέρους των μαθητών και φυσικά άρτια κατάρτιση του δάσκαλου. Για τις γεμάτες αίθουσες, λέει ότι παραβλέπει όλα τα υπόλοιπα προβλήματα και τονίζει μόνον το εξής: Όταν ο δάσκαλος συνδιαλέγεται με έναν μαθητή για να υπερβεί ένα λάθος, το μάθημα για ένα μεγάλο μέρος των μαθητών χάνεται γιατί είναι δύσκολο να παρακολουθήσουν την ακολουθία των σκέψεων (Weierstrass, 2013, σ. 327).

Η σωκρατική μέθοδος μπορεί κατά Weirerstrass να εφαρμοστεί, λόγω της φύσης των μαθημάτων, μόνο στη Φιλοσοφία και στα Μαθηματικά.

Αλλά

> «η κατανόηση σε βάθος θα μπορούσε να επιτευχθεί ακόμη κι αν δεν επιτρέπαμε στον μαθητή να ακολουθήσει ακριβώς το μονοπάτι της ανακάλυψης ο ίδιος. Ο δάσκαλος πρέπει να αφήσει την επιστήμη να δημιουργηθεί μπροστά στα μάτια των μαθητών. Όπως αυτή αναπτύχθηκε και εξελίχθηκε στο νου του ώριμου στοχαστή από τις βασικές ιδέες που ενυπάρχουν σε αυτόν, έτσι πρέπει να παρουσιαστεί, αφού προετοιμαστεί για την αντιληπτική ικανότητα των εφήβων, και να κοινοποιηθεί σαν οργανικά διαμορφωμένο προϊόν.» (Weierstrass, 2013, σ. 326)

[43] Στο κείμενο «akroamatischer Vortrag». Με ευκολία μπορεί ο σύγχρονος εκπαιδευτικός να την εντάξει στην κατηγορία «μετωπική διδασκαλία».

Άρα, υποστηρίζει ο Weierstrass, και σε αυτά ακόμη τα Μαθηματικά η *σωκρατική μέθοδος* δεν μπορεί να είναι ούτε η αποκλειστική ούτε η επικρατούσα μέθοδος διδασκαλίας. Και για τον επιπλέον λόγο, ότι η σωκρατική μέθοδος βασίζεται στην *ανάμνηση* που δεν έχει θέση στο σχολείο, αφού «το να έχει το σχολείο ως καθήκον να δείξει στον μαθητή την αυτόνομη χρήση των δυνάμεών του, δεν χρειάζεται *ανάμνηση*» (Weierstrass, 2013, σ. 328). Θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε περιπτώσεις όπως «*συνέπειες μιας κύριας πρότασης»* ή για «*την επίλυση ποικίλων ασκήσεων*».

Την εκτίμησή του στη *σωκρατική μέθοδο*, την εκφράζει λέγοντας ότι δεν πρέπει να υποβαθμιστεί επειδή δεν μπορεί να εφαρμοστεί στο σχολείο σαν επικρατούσα μέθοδος γιατί ο Σωκράτης την κατασκεύασε για τους συγκεκριμένους σκοπούς της παρέμβασής του.

Στην κατακλείδα της εργασίας του όμως, όπου φαίνεται και πάλι η εξήγηση της εκτενούς αναφοράς του στο όλο πρόσωπο Σωκράτης αλλά προπαντός ο σεβασμός, η εκτίμηση, ο θαυμασμός του για τον Δάσκαλο Σωκράτη, κάνει την ευχή: «*Θα ήταν ωραία, αν η ψυχή της σύγχρονης αγωγής και της διδασκαλίας, ήταν το πνεύμα του Σωκράτη, ο ενθουσιασμός του για το αληθινό, το ωραίο και το καλό.*»

2.2 Η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση

Η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (ΡΜΕ) είναι μία θεωρία διδασκαλίας των Μαθηματικών που αναπτύχθηκε στην Ολλανδία. Διαμορφώθηκε στις αρχές της δεκαετίας του 1970. Βασικός στόχος της είναι η σύνδεση των μαθηματικών με την πραγματικότητα και την κοινωνική εμπειρία του παιδιού και μία βασική αρχή της είναι ότι τα μαθηματικά είναι ανθρώπινη δραστηριότητα. (Λεμονίδης, 2021). Καίρια θέση στις διαδικασίες μάθησης, σύμφωνα με αυτήν θεωρία, κατέχουν οι πραγματικές καταστάσεις ίσως καλύτερα οι ρεαλιστικές καταστάσεις γιατί όπως εξηγούν οι Van den Heuvel-Panhuizen και Drijvers (2014) ο όρος «realistic» στην ονομασία της μεθόδου (Realistic Mathematics Education) προέρχεται από την ολλανδική έκφραση «zich realisieren» που έχει το νόημα «φαντάζομαι». Για αυτό μπορεί βέβαια να δίνονται στους μαθητές προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο, δίνονται όμως και προβλήματα από τον κόσμο της φαντασίας ή και από τον τυπικό κόσμο των Μαθηματικών, στο μέτρο που, στο μυαλό του, τα βιώνει ο μαθητής ως πραγματικά.

Ο Hans Freudenthal έθεσε τα θεμέλια της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης με τα βιβλία του *Mathematics as an Educational Task* (1973) [44] και *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* (1983) (Θωμαΐδης, 2021). Το έργο *Mathematics as an Educational Task* χαρακτηρίζεται από τον ίδιο τον συγγραφέα του «*Φιλοσοφία της Μαθηματικής Εκπαίδευσης*» (Freudenthal, 1973, σ.10)·(Freudenthal, 1978, σ.47). Στον πρώτο τόμο του πρώτου βιβλίου αφιερώνει το πέμπτο κεφάλαιο στη *σωκρατική μέθοδο (The Socratic Method)* και το έκτο κεφάλαιο στην *εκ νέου επινόηση (Re-Invention).*

2.2.1 Η *σωκρατική μέθοδος* με τη ματιά του Freudenthal

Ο Freudenthal εκτιμά τη διδασκαλία του διπλασιασμού του τετραγώνου στον δούλο σαν ένα καλό υπόδειγμα της *σωκρατικής μεθόδου*. Είναι διδασκαλία που εκπονήθηκε όπως ακριβώς την είχε προετοιμάσει και είχε εξ αρχής στο μυαλό του ο Σωκράτης. Ο Σωκράτης κάνει ερωτήσεις και ο δούλος για να δώσει σήμα ότι έπιασε το νόημα, δίνει απαντήσεις, σχεδόν μονολεκτικές, τις οποίες εκ των προτέρων είχε προβλέψει ο Σωκράτης. Ο Freudenthal (1971) σημειώνει ένα ακόμη χαρακτηριστικό αυτής της διδασκαλίας· ο Σωκράτης δεν διδάσκει στον δούλο ούτε τη λύση ούτε την επίλυση του προβλήματος αλλά την εύρεση της λύσης μέσω δοκιμής και σφάλματος. Κατά τον Freudenthal μία μέθοδος διδασκαλίας κατά την οποία ο μαθητής (φυσικά καλά προετοιμασμένος) αφήνεται να λέει πράγματα είναι παραλλαγή της *σωκρατικής μεθόδου* και πάντοτε λειτουργεί, αρκεί ο δάσκαλος να είναι καλά εξασκημένος και να έχει προετοιμαστεί και ο μαθητής «δεν κοιμάται»[45]. Οι προϋποθέσεις που θέτει ο Freudenthal είναι προϋποθέσεις γενικά της *διαλεκτικής μεθόδου* και είναι ουσιαστικές για κάθε διαλογική προσέγγιση οποιουδήποτε ζητήματος, σε οποιαδήποτε πλαίσια - όχι μόνο στα πλαίσια της διδασκαλίας, με την έννοια ότι για να μην εκχυδαϊστεί ο διάλογος πρέπει οι συζητητές να είναι καταρτισμένοι και πνευματικά άξιοι για τον διάλογο (Vegetti, 2000, σ. 158).

Κατά τον Freudenthal η *σωκρατική μέθοδος* είναι το θεμέλιο της διδακτικής ή τουλάχιστον θα έπρεπε να είναι. Απορρίπτει κάθε άλλη διδακτική μέθοδο για την εφαρμογή της οποίας, ο δάσκαλος δεν έχει σχεδιάσει τη διδασκαλία κάνοντας

[44] Το βιβλίο αυτό (δίτομο), το εξέδωσε ταυτόχρονα και στα γερμανικά, που ήταν μητρική του γλώσσα, γραμμένο από τον ίδιο, με τον τίτλο *Mathematik als Pädagogische Aufgabe* (Freudenthal, 1973).
Ο Βαϊνάς (1988) αποδίδει τον γερμανικό τίτλο στα ελληνικά ως «*Η Παιδαγωγική Αποστολή των Μαθηματικών*».

[45] Χωρίς κανένα μεταφυσικό υπονοούμενο, η προϋπόθεση «να μην κοιμάται» ο μαθητής είναι προϋπόθεση της *ανάμνησης*. Βλ υποσημείωση 9, «να μην αποκάμει».

προβλέψεις για την συμμετοχή του μαθητή και κατά την εφαρμογή της οποίας, δεν «αφήνεται ο μαθητής να λέει πράγματα». Για τον Freudenthal, οι σύγχρονοι παιδαγωγοί που προτείνουν τέτοιου είδους απορριπτέες μεθόδους «εξακολουθούν και είναι προσωκρατικοί». Άλλωστε το χιούμορ, η ειρωνεία, η σκωπτική διάθεση, ο σαρκασμός, συχνά με χρήση λαϊκών εκφράσεων, είναι διάχυτα στο έργο του, ειδικά στο *Mathematik als Pädagogische Aufgabe*, για να μη μιλήσουμε για τις θαρραλέες διατυπώσεις με τις οποίες συχνά εκφράζει την αυστηρότατη κριτική του.

Ο σχεδιασμός της διδασκαλίας, πράγμα που έκανε και ο Σωκράτης, για τον δάσκαλο που ακολουθεί τη *σωκρατική μέθοδο,* βρίσκει την αναλογία του στα νοητικά πειράματα της Φυσικής και για αυτό ο Freudenthal τη *σωκρατική μέθοδο* την ονομάζει *διδακτική του νοητικού πειράματος*. Ο δάσκαλος κατά την προετοιμασία-σχεδιασμό μιας διδασκαλίας σκέφτεται κατ' αρχάς πώς μπορεί να καταλάβει και να κάνει κτήμα του ένας μαθητής ή μία ομάδα μαθητών το προς εκμάθηση θέμα. Θα πρέπει ο μαθητής κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας να ξαναανακαλύψει ή να επανεφεύρει το αντικείμενο της διδασκαλίας. Φέρνει στη σκέψη του τον μαθητή ή την ομάδα μαθητών και φαντάζεται πώς θα σκεφθούν αυτοί και ποια θα είναι η δική του αντίδραση. Με αυτόν τον τρόπο, κατά τον σχεδιασμό της διδασκαλίας οι μαθητές είναι ενεργοί και με βάση αυτό κανονίζει ο δάσκαλος την πορεία διδασκαλίας. Η διδακτική ύλη δεν παραδίδεται δογματικά, αλλά οι μαθητές βλέπουν να δημιουργείται μπροστά τους[46] και παρ' όλο που η δραστηριότητά τους είναι μυθοπλασία, τους δημιουργείται η αίσθηση ότι πράγματι η διδακτική ύλη αναδύθηκε μπροστά τους και ο δάσκαλος ήταν απλώς η μαία.

Με την ίδια λογική πρέπει κατά τον Freudenthal να γράφονται και τα σχολικά βιβλία και τότε θα μπορούμε να πούμε ότι είναι γραμμένα με τη *σωκρατική μέθοδο*. Με τον ίδιο τρόπο, εν τέλει με *σωκρατική μέθοδο*, μπορεί να γραφτεί και η ομιλία για μια διάλεξη: Ο ομιλητής στο σπίτι του να φέρει στο μυαλό του τον υποθετικό ακροατή του και να γράφει την ομιλία έχοντας τη σκέψη στο πώς μπορεί να κατανοήσει ο ακροατής αυτά που πραγματεύεται η ομιλία, τις αντιδράσεις (επιχειρήματα ή αντεπιχειρήματα) του ακροατή σε αυτά που θα ακούει αλλά και τις δικές του αντιδράσεις στις αντιδράσεις του ακροατή[47]. Μετά, στην πραγματική διάλεξη οι

[46] Πρβλ παραθέματα του Weierstrass στη σ.39.

[47] Επομένως, με τη *διδακτική του νοητικού πειράματος* γεφυρώνεται, κατά κάποιον τρόπο, η αντίθεση του Freudenthal με τον Weierstrass όσον αφορά την εφαρμοσιμότητα της *μαιευτικής μεθόδου*. Οι προϋποθέσεις που θέτει ο Weierstrass για μια αποδοτική *ακροαματική μέθοδο* αποτελούν περιεχόμενο

ακροατές θα αισθάνονται να συμμετέχουν σε διάλογο και κατά κάποιο τρόπο ο ομιλητής να συνομιλεί μαζί τους. Στο τέλος της διάλεξης, όσοι συμφωνούσαν με τον ομιλητή θα ξέρουν τον λόγο και αυτοί που διαφωνούσαν θα ξέρουν επίσης τον λόγο. Αφού ο ομιλητής θα είχε αναφερθεί στις σκέψεις που είχαν στον νου οι ακροατές.

Το αντίθετο της *μαιευτικής μεθόδου* είναι, η νέα γνώση να πέσει σαν αλεξίπτωτο από τον ουρανό· η *δογματική μέθοδος*. Από τον δάσκαλο να δοθεί ο ορισμός (επιβάλλεται να γίνει αποδεκτός), τον ορισμό να ακολουθήσει ένα θεώρημα (δεν επιβάλλεται να γίνει αποδεκτό, αυτό θα γίνει μετά την απόδειξή του), ακολουθεί η απόδειξη του θεωρήματος που επιβάλλεται να γίνει στα πλαίσια ενός αξιωματικού συστήματος, στη συγκρότηση του οποίου δεν είχε καμία συμμετοχή ο μαθητής[48]. Ο μαθητής δεν εμπλέκεται ούτε με το πώς επινοήθηκε το θεώρημα ούτε καν με το πώς προέκυψε η ιδέα της απόδειξης. Αφού είναι σωστή, είναι εντάξει. Πρόκειται για την κατά Freudenthal *αντιδιδακτική αντιστροφή*[49], να διδάσκεται μία ιδέα με το να θεωρείται ορθή ως δεδομένο και κατόπιν να επιχειρείται η δικαιολόγηση ότι είναι ορθή. Ή να επιβάλλεται στον μαθητή ένας ορισμός χωρίς ο μαθητής να έχει εμπειρίες με το αντικείμενο που ορίζεται και χωρίς να του δημιουργηθεί η ανάγκη για ορισμό (La Bastide, 2015, σ.194). Αντίθετα αν μέσα από την δραστηριότητά του προκύψει η ανάγκη για ορισμό, τότε θα έχει κάνει κτήμα του όχι μόνον τον συγκεκριμένο ορισμό αλλά και την έννοια *ορισμός*.

Ίσως είναι χρήσιμο για την κατανόηση της έννοιας της *αντιδιδακτικής αντιστροφής* ένα (όχι και τόσο υποθετικό) παράδειγμα από την καθημερινότητα της σχολικής τάξης, πχ μία διδασκαλία της αρχής της μαθηματικής επαγωγής στον θετικό προσανατολισμό της Β΄ Λυκείου· πώς έγινε η διδασκαλία και πώς θα μπορούσε να είχε γίνει. Ο καθηγητής δίνει την διατύπωση της τέλειας επαγωγής, ενδεχομένως προσπαθεί να παρουσιάσει μία αναπαράστασή της, την εφαρμόζει σε ένα-δύο παραδείγματα και μετά καλεί τους μαθητές να την εφαρμόσουν κι αυτοί λύνοντας ασκήσεις. Ενώ θα έπρεπε σύμφωνα με τον Freudenthal (1963Α, σ.32) «κατ' αρχάς να

του *νοητικού πειράματος* του Freudenthal και όπως θα φανεί παρακάτω σχετίζονται απόλυτα με την *αρχή της εκ νέου επινόησης*· ο Freudenthal προτείνει να ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις για μια καλή *ακροαματική διδασκαλία* αλλά με την ενεργή συμμετοχή των μαθητών.

[48]«Η αξιωματική θεμελίωση δεν έχει θέση στο σχολείο, η αξιωματικοποίηση έχει.»(Freudenthal, 1963β) Η αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας, ως μάθημα του Σχολείου, «είναι μία άλλη δυνατότητα να σκοτώσεις τη Γεωμετρία». Η πρακτική της αξιωματικοποίησης, της – τοπικά - οργάνωσης της θεωρίας, θα μπορούσε να αποτελέσει εφόδιο για τον μαθητή, αργότερα να αντιληφθεί τη δομή ενός αξιωματικού συστήματος. (Freudenthal, 1971, σ. 426)

[49] Είναι φανερό ότι η *αντιδιδακτική αντιστροφή* είναι η άρνηση της *εκ νέου επινόησης*.

δώσει ευκαιρίες στους μαθητές να ανακαλύψουν με το ένστικτό τους την αρχή της τέλειας επαγωγής, μετά να τους οδηγήσει να βρούνε το κοινό στοιχείο στις προηγούμενες εφαρμογές, στη συνέχεια να τους οδηγήσει να κάνουν επιβεβαίωση σε καινούρια παραδείγματα και τέλος να τους οδηγήσει να βρούνε μία λεκτική διατύπωση της αρχής της τέλειας επαγωγής»[50].

Κατά τον Freudenthal, η μάθηση επιτελείται όταν οι ιδέες διδάσκονται σύμφωνα με τον τρόπο που επινοήθηκαν. Ώστε ο μαθητής να αισθάνεται σαν να τις ανακαλύπτει ή επινοεί ο ίδιος. Αυτό δεν σημαίνει ότι ο μαθητής πρέπει να περάσει από τα ίδια νοητικά μονοπάτια που πέρασαν αυτοί που τα επινόησαν, γιατί τότε εκείνοι δεν ξέρανε όσα ξέρουμε εμείς τώρα και φτάσανε στην ιδέα μέσα από παρακάμψεις, συνάντησαν αδιέξοδα, είχαν πισωγυρίσματα.

Βέβαια ο Freudenthal παραδέχεται ότι όσα γράφει δεν είναι πιστή απόδοση της σωκρατικής διδασκαλίας αφού ο Σωκράτης δεν πίστευε ότι η γνώση επινοείται από τον άνθρωπο αλλά ότι η γνώση είναι *ανάμνηση*. Με άλλα λόγια προϋπάρχει στην ψυχή του, που είναι αθάνατη και τα έχει μάθει όλα πριν να μπει, με το που γεννηθεί, στο σώμα του ανθρώπου, και το μόνο που χρειάζεται είναι, ίσως με τη βοήθεια κάποιου δασκάλου, να την ανακαλέσει στη μνήμη του με την διαδικασία της *ανάμνησης*. Ο Freudenthal, προτείνει μία δική του προσέγγιση στην μάθηση ως *ανάμνηση* που είναι συμβατή με τις πεποιθήσεις όσων δεν συμμερίζονται τα περί μετεμψύχωσης και αθανασίας της ψυχής της σωκρατικής πίστης, όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα:

> Ο Σωκράτης δεν πίστευε ότι η αληθινή γνώση πράγματι επινοείται. … Η ψυχή λόγω της προϋπαρξής της κατέχει όλη την αληθινή γνώση· ο μαθητής το μόνο που έχει να κάνει είναι να την ανακαλέσει, και το καθήκον του δασκάλου είναι να τον βοηθήσει. Η διδασκαλία συνίσταται στην καθοδήγηση του μαθητή να θυμηθεί αυτό που έχει ξεχάσει. Απόκτηση γνώσεων είναι η εκ νέου ανακάλυψη όχι εκείνων που γνώριζαν οι άλλοι πριν από μένα αλλά μάλλον εκείνων που γνώρισα ο ίδιος όταν η ψυχή μου κατοικούσε στο βασίλειο των ιδεών. Δεν είναι ανάγκη να αντιγράψουμε τα πάντα από τον Σωκράτη, ούτε να συμμεριστούμε την πίστη του στην προϋπαρξη. Αυτό που μένει τότε, είναι η μάθηση με την εκ νέου ανακάλυψη, όπου τώρα το «εκ νέου» δεν σημαίνει την

[50] Προφανής είναι η αναλογία με την περίπτωση του ορισμού της αρετής: Σύμφωνα με τον Σωκράτη αρετή είναι το κοινό που διαπερνάει όλες τις επιμέρους αρετές που απαρίθμησε ο Μένων. Προφανές είναι επίσης ότι η πρόταση του Freudenthal είναι να ξαναπερπατήσει ο μαθητής τον δρόμο που περπάτησαν εκείνοι που ανακάλυψαν την αρχή της τέλειας επαγωγής, να την επινοήσει εκ νέου.

προϊστορία του ανθρώπου που μαθαίνει αλλά την ιστορία της ανθρωπότητας. (Freudenthal, 1973, σ.102) [51]

2.2.2 Η αρχή της εκ νέου επινόησης

Κατά τον Freudenthal υπάρχουν τα έτοιμα Μαθηματικά (fertige Mathematik) δίπλα-δίπλα με τα Μαθηματικά ως δραστηριότητα (Mathematik als Tätigkeit). Δίνει το νόημα του ισχυρισμού με δύο παραδείγματα· την τέχνη και τη γλώσσα. Με τη λέξη τέχνη εννοούμε την έτοιμη τέχνη, αυτή που μελετάει ο ιστορικός της τέχνης αλλά και την τέχνη με την οποία καταγίνεται ο καλλιτέχνης. Με τη λέξη γλώσσα τα πράγματα είναι (αν και όχι τόσο σαφή) ανάλογα (Freudenthal, 1973, σ.110).

Καταθέτει την προσωπική του εμπειρία ότι για να καταλάβει μία ξένη εργασία την μελετάει με τρόπο που είναι σαν να κάνει ο ίδιος πρωτότυπη έρευνα, δηλαδή κάθε φορά προσπαθεί να καταλάβει όχι απλώς τι γράφει αλλά πώς σκέφθηκε ο ερευνητής, από πού συνήγαγε αυτό που γράφει. Με άλλα λόγια έχει μπροστά του *έτοιμα μαθηματικά* και για να τα καταλάβει χρειάζεται να τα μετατρέψει σε *ενεργά μαθηματικά* (*active Mathematik*).

Ο Freudenthal θεμελιώνει την πρότασή του για την διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών, στην ερμηνεία των Μαθηματικών ως δραστηριότητα. Οπότε για τη διδασκαλία τους, πρέπει τα Μαθηματικά να αναλυθούν ως *ενεργά Μαθηματικά* και να διδαχθούν με τον τρόπο που δημιουργήθηκαν[52]. Πρόκειται για την *αρχή της εκ νέου επινόησης*.

Ο Freudenthal εκφράζει την πεποίθηση ότι «η γνώση και η ικανότητα που αποκτάται με την εκ νέου επινόηση είναι καλύτερα κατανοητές και συντηρούνται ευκολότερα παρά εάν αποκτηθούν με λιγότερο ενεργό τρόπο» (La Bastide, 2015, σ.194).

Όμως το να διδαχτούν με τον τρόπο που δημιουργήθηκαν δεν σημαίνει να διδαχτούν όπως ακριβώς δημιουργήθηκαν. Ο μαθητής πρέπει να οδηγείται από τον δάσκαλο στην εκ νέου επινόηση της συγκεκριμένης μαθηματικής ιδέας όπως θα την επινοούσε ο αρχικός επινοητής της αν τον καθοδηγούσε δάσκαλος που ήξερε για την ιδέα αυτά που εμείς τώρα ξέρουμε για αυτήν (Freudenthal, 1973, σ.7). Αυτός ο ρόλος του δάσκαλου είναι ο λόγος που προστέθηκε και το «καθοδηγούμενη» στην *αρχή της καθοδηγούμενης εκ νέου επινόησης* (La Bastide, 2015, σ.195).

[51] Το παραθέτει ο Θωμαΐδης (2021).

[52] Μαθηματικά εν τω γεννάσθαι. «Το αντίθετο των έτοιμων Μαθηματικών είναι τα Μαθηματικά in statu naschendi (ἐν τῷ γεννᾶσθαι). Αυτά δίδασκε ο Σωκράτης.» (Freudenthal, 1973, σ. 113)

Κατά συνέπεια η εφαρμογή της *αρχής της καθοδηγούμενης εκ νέου επινόησης* μπορεί να γίνει με δύο διαφορετικές μορφές, συμβατές με την κατά Freudenthal *σωκρατική μέθοδο*. Η πρώτη είναι η εφαρμογή της διδακτικής αρχής του Κομένιου «ο καλύτερος τρόπος για να διδάξει κανείς μία δραστηριότητα είναι να την επιδείξει» (Freudenthal, 1973, σ.107). Σε αυτήν την περίπτωση ο δάσκαλος πρέπει κάνοντας ένα νοητικό πείραμα να προετοιμάσει διδασκαλία που να έχει τις προϋποθέσεις της αποδοτικής ακροαματικής διάλεξης του Weierstrass[53]. Η δεύτερη είναι η εφαρμογή της ίδιας αρχής όπως την τροποποίησε ο Freudenthal· «ο καλύτερος τρόπος για να μάθει κανείς μία δραστηριότητα είναι να την πραγματοποιήσει» (Freudenthal, 1973, σ.107). Δηλαδή σε ένα νοητικό πείραμα να ετοιμάσει ο δάσκαλος ένα πρόβλημα, όσο γίνεται πιο εύκολο, που θα κληθεί να λύσει ο μαθητής, ώστε λύνοντάς το να αποκτήσει εμπειρία της προς διδασκαλία ιδέας που είναι το κύριο χαρακτηριστικό της πρακτικής της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης.

2.2.3 Ένα παράδειγμα διδασκαλίας σύμφωνα με την ΡΜΕ.

Στη διπλωματική εργασία του ο Τραπεζανλίδης (2020) διερευνά τις παρανοήσεις των μαθητών, τις σχετικές με την έννοια της εφαπτομένης ευθείας, που έχουν την αιτία τους στις γνώσεις για την εφαπτομένη κύκλου από το μάθημα της Γεωμετρίας· είναι κάθετη στην ακτίνα, απέχει από τον κύκλο όσο και η ακτίνα, έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, αφήνει τον κύκλο προς το ίδιο μέρος. Με αφορμή τον ορισμό της εφαπτομένης της παραβολής στο μάθημα των Μαθηματικών του θετικού προσανατολισμού της Β΄ Λυκείου προτείνει μία δραστηριότητα τριών διδακτικών ωρών με στόχο την ομαλή μετάβαση των μαθητών, στην επόμενη Γ΄ Τάξη, στην αναλυτική έννοια της εφαπτομένης.

Η διδακτική πρόταση είναι σύμφωνα με την αρχή της «καθοδηγούμενης εκ νέου επανεφεύρεσης» (Τραπεζανλίδης, 2020. σ.75). Οι μαθητές δουλεύουν σε ομάδες των τριών μαθητών, στο εργαστήριο πληροφορικής, όπου έχουν διαθέσιμο το λογισμικό geogebra, με φύλλο εργασίας, που να καθοδηγεί αλλά να μη δίνει έτοιμη στον μαθητή την μαθηματική γνώση. Ο σχεδιασμός του Τραπεζανλίδη προβλέπει επίσης να υπάρχει καθοδήγηση και από μέρους του καθηγητή χωρίς όμως να περιορίζεται στους μαθητές η δυνατότητα να ανακαλύψουν από μόνοι τους τις νέες γνώσεις

[53] Βλ τα εξωτερικά χαρακτηριστικά της σωκρατικής διδασκαλίας, στη σ.38.

(Τραπεζανλίδης, 2020. σ.75). Προβλέπει επίσης και συζήτηση μεταξύ καθηγητή και μαθητών και μαθητών μεταξύ τους.

Τα φύλλα εργασίας των τριών διδακτικών ωρών (Τραπεζανλίδης, 2020, σ.89-95) δίνουν σαφή εικόνα της ανάπτυξης της δραστηριότητας.

Την πρώτη διδακτική ώρα, γίνεται ανασκόπηση των γνώσεων των μαθητών για την εφαπτομένη κύκλου από τη Γεωμετρία αλλά και τη Φυσική (διεύθυνση γραμμικής ταχύτητας στην ομαλή κυκλική κίνηση).

Τη δεύτερη διδακτική ώρα, καλούνται οι ομάδες να σχεδιάσουν την παραβολή $y = x^2$ και την εφαπτομένη της στο σημείο Α(1, 1). Και τη διεύθυνση της κίνησης ενός αυτοκίνητου, που κινείται πάνω στην παραβολή, τη στιγμή που περνάει από το Α.

Δίνεται επίσης στις ομάδες ένας υποθετικός διάλογος μεταξύ δύο μαθητών όπου ο ένας υποστηρίζει ότι η εφαπτομένη είναι αυτή που ξέρουμε με επιχείρημα-παρανόηση ότι έχει ένα μόνο κοινό σημείο και αφήνει την παραβολή προς το ίδιο μέρος και ο άλλος ότι η εφαπτομένη είναι η κατακόρυφη ευθεία γιατί κι αυτή έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την παραβολή και είναι πιο εύκολη στη σχεδίαση. Οι μαθητές στο τέλος του υποθετικού διαλόγου αναρωτιούνται μήπως μπορεί να είναι και οι δύο ευθείες εφαπτόμενες[54].

Καλούνται οι ομάδες να σημειώσουν με ποιον συμφωνούν, κι αν δεν συμφωνούν με κανένα, να δικαιολογήσουν.

Την Τρίτη διδακτική ώρα, το φύλλο εργασίας τους οδηγεί να κατασκευάσουν την εφαπτομένη και στο τέλος να την ορίσουν.

Ανεξάρτητα από την πρόθεση του Τραπεζανλίδη, στη δραστηριότητά του διακρίνονται, σαφώς κατά τη γνώμη μου, τα βήματα της μαιευτικής μεθόδου και μάλιστα όπως αδρά εντοπίζονται στο μάθημα με τον δούλο: (α) Ελέγχονται οι γνώσεις του μαθητή - ο Σωκράτης προετοιμάζει τον δούλο. (β) Τίθεται το πρόβλημα. (γ) Λάθη των μαθητών που αλληλοαναιρούνται. (δ) Να ρωτήσουμε τον καθηγητή μας – *απορία*. (ε) Ο καθηγητής (και μέσω του φύλλου εργασίας που με νοητικό πείραμα είχε προετοιμάσει) οδηγεί τους μαθητές στη έννοια. (δ) Οι μαθητές ανακαλύπτουν μόνοι τους τον ορισμό της έννοιας.

[54] «Μαθητής Β: Λες να μπορεί να έχει δύο εφαπτόμενες στο ίδιο σημείο; Δεν ξέρω. Ας ρωτήσουμε καλύτερα τον μαθηματικό μας.» (Τραπεζανλίδης, 2021, σ.92)

Είναι προφανές ότι απαιτήθηκε πολύς κόπος για την προετοιμασία της δραστηριότητας-μαθήματος και καλή κατάρτιση του καθηγητή· η καλή κατάρτιση του καθηγητή απαιτεί κι αυτή με τη σειρά της πολύ κόπο (και ίσως και κατάλληλες ικανότητες). Επίσης θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι η διδασκαλία της εφαπτομένης της παραβολής μέσω της συγκεκριμένης δραστηριότητας είναι χρονοβόρα[55], αλλά, για αντιστάθμισμα, οι μαθητές αποκόμισαν σημαντικό όφελος αφού έμαθαν την εφαπτομένη, όχι απλώς την εφαπτομένη της παραβολής.

2.3 Η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων

Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών, στο σχολείο δεν διδάσκονται ακριβώς οι μαθηματικές γνώσεις όπως τις παρουσιάζει, σβήνοντας εντελώς την ιστορία τους, ο μαθηματικός που τις επινόησε (Brousseau, 1991) [56], δηλαδή χωρίς την αφορμή και τη διαδρομή, τα λάθη, τις άχρηστες σκέψεις που έκανε μέχρι να καταλήξει στη νέα γνώση (Μαρκέτος, 1990). Από τις μαθηματικές γνώσεις, έτσι όπως τις παρουσιάζει ο μαθηματικός που τις επινόησε, διαλέγει ο καθηγητής αυτές που είναι να διδαχθούν, τις τροποποιεί, τις προσαρμόζει στα σχολικά πλαίσια και τις μετατρέπει σε αντικείμενα διδασκαλίας, μια διαδικασία που ο Yves Chevallard ονόμασε *διδακτικό μετασχηματισμό* (Γαγάτσης, 1991, σ.22).

Για τη διδασκαλία ο καθηγητής προσπαθεί να δημιουργήσει στην τάξη συνθήκες γένεσης της νέας μαθηματικής γνώσης προτείνοντας στον μαθητή μία *α-διδακτική κατάσταση* (Brousseau, 1991)· ένα ή και περισσότερα προβλήματα για τα οποία η προς κατάκτηση γνώση αποτελεί την βέλτιστη λύση (Μαρκέτος, 1990). Ο καθηγητής έχει διαλέξει τα προβλήματα με κριτήριο να μπορεί να τα δεχτεί ο μαθητής και να μπει στο παιχνίδι, να μπορεί να μιλά, να διαλογίζεται πάνω σε αυτά και βέβαια να είναι στις δυνατότητές του να τα λύσει. Ο μαθητής ξέρει – σύμφωνα με τους κανόνες του παιχνιδιού, δηλαδή το *διδακτικό συμβόλαιο* – ότι με τη λύση του προβλήματος θα έχει αγγίξει την κατάκτηση μιας καινούριας γνώσης, λύνει τα προβλήματα χωρίς καμία ένδειξη από μέρους του καθηγητή για τις γνώσεις που θέλει να εμφανιστούν, αντλώντας τη λύση από την εσωτερική λογική της κατάστασης και βέβαια χωρίς να

[55] Ενδεικτικά, η απόδειξη του τύπου της εφαπτομένης της παραβολής δεν περιλαμβάνεται στη διδακτέα ύλη (ΦΕΚ τ.Β΄4450/22-8-2022) ενώ, στις οδηγίες του ΙΕΠ για την διδασκαλία των Μαθηματικών Θετικού Προσανατολισμού Β΄ Γενικού Λυκείου για το σχολικό έτος 2022-2023, προτείνεται να διατεθούν έξι διδακτικές ώρες για ολόκληρη την παράγραφο της παραβολής.
[56] Βλ. Βιβλιογραφία στην ελληνική γλώσσα.

επικαλείται διδακτικούς στόχους. Ο καθηγητής κατά τη διάρκεια της προσπάθειας του μαθητή μπορεί να δώσει ή να μη δώσει (ανάλογα με την περίπτωση) πληροφορίες, να κάνει ερωτήσεις, να κάνει υποδείξεις για ευρετικές μεθόδους κλπ (Brousseau, 1991). Όταν στο τέλος με την βοήθεια του καθηγητή γίνει «αποπλαισίωση» της λύσης του προβλήματος ή των προβλημάτων ενδεχομένως θα έχει κατακτηθεί από τον μαθητή η νέα μαθηματική γνώση. Αυτό θα κριθεί από τον αν θα μπορεί να την εφαρμόσει σε ένα καινούριο πλαίσιο φαινομενικά διαφορετικό από αυτό της α-διδακτικής κατάστασης που του είχε εκχωρηθεί.

Διδακτική κατάσταση, είναι όλη αυτή η ευρύτερη κατάσταση, το σύστημα των αλληλεπιδράσεων του μαθητή με τις *α-διδακτικές καταστάσεις*- προβλήματα, με τον καθηγητή και με το περιβάλλον της τάξης (Brousseau, 1991) στο οποίο συμπεριλαμβάνεται και αυτό ακόμη το εκπαιδευτικό σύστημα (Brousseau, 1997, σ. 2).

Η πορεία που ακολουθεί ο καθηγητής για να δημιουργήσει μια *διδακτική κατάσταση* περιγράφεται από τον Γαγάτση ως εξής:

– Καταρχήν ο καθηγητής επιλέγει μία μαθηματική έννοια και μια «κατάλληλη» σειρά μαθηματικών δραστηριοτήτων σε σχέση με αυτήν την μαθηματική έννοια και κάνει προβλέψεις για τη «συμπεριφορά» των μαθητών του.

– Στη συνέχεια ο καθηγητής πειραματίζεται πάνω στη σειρά δραστηριοτήτων και κάνει μία «λεπτή παρατήρηση των φαινομένων της τάξης του. Η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών θα δείξει αν τα αποτελέσματα και οι συμπεριφορές των μαθητών είναι σύμφωνα με τις προβλέψεις του. (Γαγάτσης, 1991, σ.24)

Σύμφωνα με τον εισηγητή της θεωρίας των διδακτικών καταστάσεων (Brousseau, 1991, σ.77) «*στη σύγχρονη διδακτική, η διδασκαλία είναι η εκχώρηση στον μαθητή μιας σωστής α-διδακτικής κατάστασης, η μάθηση είναι μια προσαρμογή σε αυτή την κατάσταση.*»

2.3.1 Επιπλέον πτυχές της θεωρίας των διδακτικών καταστάσεων

Διδακτική μηχανική. Είναι ο σχεδιασμός διδακτικών καταστάσεων δηλαδή ο σχεδιασμός των ολοκληρωμένων προγραμμάτων που απαιτούνται για την προσέγγιση κάθε μιας μαθηματικής έννοιας. Περιλαμβάνει τις πιθανές διδακτικές επιλογές πάνω στο διαρκές ερώτημα˙ τι θα κάνει και γιατί θα λειτουργήσει έτσι ο μαθητής; (Τζεκάκη, 2021, δ.91)

Γνωστικά εμπόδια. Ο Brousseau θεωρούσε ότι «*η μάθηση με προσαρμογή στο περιβάλλον προκαλείται μέσα από γνωστικές ρήξεις*» και ότι τα λάθη που συστηματικά επαναλαμβάνονται κατά τη διαδικασία της μάθησης «*δεν οφείλονται σε έλλειψη γνώσης αλλά στην ύπαρξη μιας γνώσης που δυσλειτουργεί και συνιστά επομένως ένα γνωστικό εμπόδιο*». Ο Brousseau διακρίνει τα γνωστικά εμπόδια σε *οντογενετικά*, σε *διδακτικά*, σε *επιστημολογικά* και *πολιτιστικά* (Θωμαΐδης, 2021, σ.8).

Διδακτικό συμβόλαιο. Σε όλες τις διδακτικές καταστάσεις μεταξύ του καθηγητή και του μαθητή χτίζεται μία σχέση και ένα σιωπηρό και περιοριστικό είδος συμφωνίας ανάμεσα στο διδάσκοντα, το μαθητή και το γνωστικό αντικείμενο, πρόβλημα, άσκηση ή μαθηματική έννοια, που διακανονίζει τις μεταξύ τους σχέσεις (Γαγάτσης κά, 2006). Πρόκειται για το *διδακτικό συμβόλαιο*, μία έννοια για την οποία ο εισηγητής της Guy Brousseau γράφει, όπως παραθέτει ο (Γαγάτσης, 1991, σ.26):

> …Μέσα από τις επαναλαμβανόμενες διαπραγματεύσεις ανάμεσα στο δάσκαλο και τους μαθητές καθορίζονται οι ρόλοι του καθενός, οι υποχρεώσεις και οι σχέσεις δύναμης. Ο καθηγητής σέβεται το συμβόλαιο κάνοντας μάθημα και δίνοντας ασκήσεις. Προσπαθεί να κάνει τους μαθητές να μάθουν αυτό που θέλει, αυτό που πρέπει. Είναι αυτός που τα ξέρει όλα και οδηγεί τους μαθητές στο να παράγουν την απάντησή τους χρησιμοποιώντας τις γνώσεις τους. Ο μαθητής σέβεται το συμβόλαιο αν κάνει τις ασκήσεις, αν κάνει το μάθημά του. Προσπαθεί να καταλάβει αυτό που θέλει ο καθηγητής, να δώσει τις αναμενόμενες απαντήσεις.
>
> Όμως αυτό δεν σημαίνει ότι υπάρχει μάθηση της αναφερόμενης έννοιας. Μία τέτοια μάθηση δεν μπορεί να επιτευχθεί μέσα στις συνθήκες των διαπραγματεύσεων που αναφέραμε πιο πάνω. Η μάθηση στηρίζεται όχι πάνω στη σωστή λειτουργία του συμβολαίου αλλά πάνω στις ρήξεις του διδακτικού συμβολαίου[57].

Η έννοια του διδακτικού συμβολαίου προέκυψε κατά την αναζήτηση της εξήγησης της παράδοξης απάντησης των μαθητών στο παρακάτω ερώτημα: «Σε ένα πλοίο φορτώνουν 26 πρόβατα και 18 κατσίκες, ποια είναι η ηλικία του καπετάνιου;»· πάνω από το 60% των μαθητών απάντησε «44 χρονών» (Brousseau, 1997[58], σ.33). Το ίδιο συνέβη και στο ανάλογο ερώτημα «σε μία τάξη υπάρχουν 4 σειρές των 7 μαθητών, ποια είναι η ηλικία της δασκάλας;»· οι μαθητές απαντούν «28 χρονών» (Brousseau, 1997, σ.33). Το *διδακτικό συμβόλαιο* προβλέπει ότι όταν δίνεται ένα πρόβλημα, το

[57] Αν κάθε τριώνυμο που εισηγείται ο καθηγητής στην τάξη έχει ρητές ρίζες, η σιωπηρή σύμβαση για ορισμένους μαθητές είναι ότι τα τριώνυμα, τουλάχιστον αυτά που εισηγείται ο καθηγητής, έχουν ρητές ρίζες. Πρέπει να σπάσει αυτή η σιωπηρή σύμβαση, το *διδακτικό συμβόλαιο*, για να κατακτήσει ο μαθητής τη γνώση, ότι οι ρίζες μπορεί να είναι και άρρητες.

[58] Ξενόγλωσση βιβλιογραφία.

πρόβλημα έχει πάντοτε λύση και η λύση προκύπτει ως αποτέλεσμα των κατάλληλων πράξεων μεταξύ των δεδομένων.

Το *αποτέλεσμα «Topaze»*[59]. Θεωρείται ότι οφείλεται στο *διδακτικό συμβόλαιο*. Είναι η κατάσταση που εμφανίζεται όταν ο καθηγητής, ο οποίος για λόγους αρχής δεν δίνει έτοιμη γνώση στον μαθητή, κάνει ερωτήσεις για να οδηγήσει τον μαθητή να κατακτήσει μία γνώση και ο μαθητής δυσκολεύεται να απαντήσει. Ο καθηγητής, για να δώσει απάντηση μόνος του ο μαθητής, του κάνει «όλο και πιο εύκολες» ερωτήσεις στις οποίες η απάντηση είναι ίδια με την απάντηση στην αρχική του την ερώτηση· έτσι όμως χάνεται η προς κατάκτηση γνώση (Brousseau, 1991, σ.68).

Το *αποτέλεσμα «Jourdain»*[60]. Θεωρείται ότι οφείλεται στο *διδακτικό συμβόλαιο*. Είναι η κατάσταση που εμφανίζεται όταν ο καθηγητής αναγνωρίζει ως ένδειξη σοβαρής γνώσης συμπεριφορές ή απαντήσεις του μαθητή που οφείλονται σε κοινότοπες αιτίες ή σημασίες (Brousseau, 1991, σ.69). Για παράδειγμα ο μαθητής που σημείωσε στο χαρτί μερικά σημεία που ισαπέχουν από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος και διαπίστωσε ότι όλα τα σημεία βρίσκονται στη μεσοκάθετο, δεν σημαίνει ότι «έπιασε» την έννοια του γεωμετρικού τόπου.

Η *υπερβολική χρήση της αναλογίας*. Η χρήση της αναλογίας είναι συνηθισμένη στη διδακτική πρακτική[61] και είναι «*ένα έξοχο ευρετικό μέσο*».

> Αν κάποιοι μαθητές αποτύχουν στη μάθησή τους, πρέπει να τους δοθεί μία καινούρια δυνατότητα για το ίδιο θέμα. Το γνωρίζουν[62]. Επίσης αν ο καθηγητής κρύβει το γεγονός πως το νέο πρόβλημα μοιάζει με το παλιό, οι μαθητές αναζητούν – αυτό είναι νόμιμο – τις ομοιότητες, για να μεταφέρουν – πανομοιότυπα – τη λύση που τους έχει ήδη δοθεί. Αυτή η

---

[59] Στην κωμωδία *Topaze* ο πρωταγωνιστής είναι δάσκαλος και σε μια σκηνή κάνει μάθημα ορθογραφίας σε έναν μαθητή. Του υπαγορεύει μία φράση που περιέχει τη λέξη «moutons» (πληθυντικός) και ο μαθητής γράφει «mouton» (ενικός). Το πρόβλημα που δημιουργείται είναι να καταλάβει ο μαθητής και να διορθώσει το λάθος. Ο δάσκαλος κάνει διαδοχικές – κωμικές – προσπάθειες, δήθεν απλοποιώντας το πρόβλημα, ώστε να διορθώσει ο μαθητής μόνος του το λάθος και μετά τις επαναλαμβανόμενες αποτυχίες του, στο τέλος του λέει: Βάλε ένα s στο «moutons». (Brousseau, 1991, σ.68)

[60] «Στον «Αρχοντοχωριάτη» του Μολιέρου ο καθηγητής αποκαλύπτει στον αρχοντοχωριάτη Jourdain τι είναι πρόζα. Το κωμικό της σκηνής βασίζεται στη γελοιότητα της απόδοσης ενός ιερού χαρακτήρα στις επαναλαμβανόμενες καθημερινές δραστηριότητες ως στοιχεία ενός σοβαρού λόγου.» (Brousseau, 1991, σ.69)

[61] Όχι μόνο στη διδακτική πρακτική αλλά και στην καθημερινή επικοινωνία, ώστε όχι μόνον ο κάθε δάσκαλος αλλά και ο κάθε άνθρωπος έχει σχετική εμπειρία. Αν ο συνομιλητής μας αποτύχει να καταλάβει αυτό που του λέμε, χαρακτηριστική περίπτωση όταν του λέμε ότι κάτι που έκανε δεν είναι ηθικό, τότε επιχειρούμε με ένα ανάλογο παράδειγμα να τον βοηθήσουμε να το καταλάβει. Ο καθένας ξέρει ότι είναι αμφίβολο ότι ο συνομιλητής μας, ακόμη και αν καταλάβει το παράδειγμα, θα μπορέσει να διακρίνει την αναλογία και να μεταφέρει την αλήθεια του παραδείγματος στο αρχικό μας επιχείρημα.

[62] Εδώ υπονοείται το *διδακτικό συμβόλαιο*.

απάντηση δεν σημαίνει πως τη βρίσκουν κατάλληλη για το ζήτημα που τους δόθηκε αλλά μόνο πως έχουν αναγνωρίσει δείκτες, ίσως εντελώς εξωτερικούς και μη ελεγμένους, που ήθελε ο καθηγητής για να την παράγουν. (Brousseau, 1991, σ.71)

Σύμφωνα με τον Brousseau, εξαρτάται από τον δάσκαλο να χρησιμοποιήσει με ευθύνη την αναλογία και να επικρατεί τέτοιο κλίμα στην τάξη ώστε οι μαθητές να μην έχουν οπωσδήποτε την ανάγκη να δείξουν τη λύση και εξ αυτού να τη δείχνουν οδηγούμενοι απλώς από διδακτικές ενδείξεις μέσα στο παράδειγμα, χωρίς να την έχουν συλλάβει.

2.3.2 Η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων και η μαιευτική μέθοδος του Σωκράτη

Η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων είναι συγκροτημένη με βάση την αρχή ότι η μάθηση είναι η προσαρμογή του μαθητή σε μία σωστή *α-διδακτική κατάσταση* ενώ η μαιευτική μέθοδος θεμελιώνεται πάνω στην παραδοχή ότι η γνώση είναι *ανάμνηση*· πρόκειται για θεμελιώδη διαφορά. Άμεση συνέπεια των διαφορετικών ορισμών της *μάθησης* είναι η διαφορά στην οργάνωση και διεξαγωγή της διδασκαλίας. Από τη μια μεριά εκχώρηση μιας α-διδακτικής κατάστασης και ο μαθητής χωρίς καμία ένδειξη από τον καθηγητή βρίσκει τη βέλτιστη λύση. Από την άλλη μεριά ένα πρόβλημα και, με τις προσχεδιασμένες παρεμβάσεις του, ο καθηγητής οδηγεί τον μαθητή να βρει τη λύση.

Ο Brousseau εκφράζει τη γενική αντίληψη για την εκπαίδευση· ότι είναι μία σύνδεση ανάμεσα στις καλές ερωτήσεις και τις καλές απαντήσεις και κάνει τη διαπίστωση ότι η *μαιευτική μέθοδος* σύμφωνα με αυτή τη γενική αντίληψη για τη διδασκαλία και μάθηση περιορίζει τις συνδέσεις σε αυτές που ο μαθητής μπορεί να δημιουργήσει μόνος του, γιατί θέλει να εξασφαλίσει ότι ο μαθητής κατανοεί τη γνώση τη στιγμή που τη δημιουργεί (Brousseau, 1991, σ. 74). Στο μάθημα με τον δούλο, σύμφωνα με την παραπάνω γενική αντίληψη για τη εκπαίδευση, ο Σωκράτης δέχεται ότι ο δούλος κατέκτησε τη νέα γνώση με μόνο στοιχείο τη δήλωσή του με την οποία αναγνώριζε τη λύση (Brousseau, 1997, σ.51) ενώ θα έπρεπε η διαπίστωση ότι ο δούλος κατέκτησε τη νέα γνώση να γίνει αφού πρώτα τη χρησιμοποιήσει και σε άλλο περιβάλλον, διαφορετικό από αυτό που στήθηκε για να παραχθεί η νέα γνώση ή έστω για να αναθυμηθεί ο δούλος τη νέα γνώση.

Βέβαια ο ίδιος ο Brousseau αναγνωρίζει ότι για την εκμάθηση των στοιχειωδών μαθηματικών, πχ των αριθμών, μπορεί να εφαρμοστούν και άλλες διδακτικές μέθοδοι από την *θεωρία των διδακτικών καταστάσεων* ή συνδυασμός διαφόρων διδακτικών μεθόδων συμπεριλαμβανομένης της *μαιευτικής*, που την χαρακτηρίζουν διδασκαλίες που ακολουθούνται από ασκήσεις και οι απαντήσεις σε προβλήματα βάσει γνώσεων που ο μαθητής έχει ήδη διδαχτεί[63] (Brousseau, 1997, σ.12).

Με αφετηρία το μάθημα του διπλασιασμού του τετραγώνου διατυπώνει ο Brousseau μερικές επιπλέον ενστάσεις για τη *μαιευτική μέθοδο·* ότι οι ερωτήσεις του δασκάλου δεν μπορούν να υπόκεινται σε κανένα συμβόλαιο αφού μπορεί να είναι από πολύ ανοικτές ως πολύ κλειστές και ότι οι ορθές απαντήσεις τού μαθητή μπορεί να είναι απλώς αναπαραγωγή από τη ρητορική του δασκάλου (από τις αναλογίες του, τις μεταφορές κλπ). Ο δάσκαλος περνάει από τις διαταγές στις ερωτήσεις· σημάδι ότι τα πάντα εξαρτώνται από την ιδέα που σχηματίζει ο δάσκαλος για τις γνώσεις που έχει ο μαθητής (Brousseau, 1997, σ.51).

Κρίνοντας την *μαιευτική μέθοδο* από μία άλλη σκοπιά κάνει τη διαπίστωση ότι η *μαιευτική μέθοδος* ταιριάζει για ιδιωτικό μάθημα[64] με έναν μαθητή ενώ δεν ταιριάζει για μαθήματα με έναν καθηγητή σε μία τάξη. Αντίστροφα και η α-διδακτική κατάσταση δεν ταιριάζει με την *μαιευτική μέθοδο* λόγω της διασποράς των απαντήσεων και των συνακόλουθων προβλημάτων (Brousseau, 1997, σ.51).

Τέλος κατά τον Brousseau «*όλες οι διαδικασίες όπου ο καθηγητής δεν δίνει ο ίδιος την απάντηση είναι αποδεκτές για να γεννήσει ο μαθητής την προς απόκτηση γνώση*» και «το σωκρατικό σχήμα μπορεί να τελειοποιηθεί», αν θεωρηθεί ότι ο μαθητής είναι ικανός να κατακτήσει την νέα γνώση από τις εμπειρίες του και από την αλληλεπίδραση με το περιβάλλον του που δεν έχει υποχρεωτικά διδακτική πρόθεση (Brousseau, 1991, σ.74). Κατά τη γνώμη μου, αυτό ισοδυναμεί με το ότι η *σωκρατική μέθοδος* μπορεί να τελειοποιηθεί αν αποκτήσει τα χαρακτηριστικά της *θεωρίας των διδακτικών καταστάσεων*.

2.4 Άλλες προσεγγίσεις σύγχρονων ερευνητών στη μαιευτική μέθοδο.

Η Fernandez (1994) μελετά το απόσπασμα με το μάθημα του διπλασιασμού του τετραγώνου σε δύο φάσεις: Αρχικά το απόσπασμα καθ' εαυτό, απομονωμένο από τον όλο διάλογο *Μένων* όπου επισημαίνει εκ πρώτης όψεως αρνητικές πτυχές της διδακτικής μεθόδου και του ίδιου του Σωκράτη ως δάσκαλου και κατόπιν το

[63] Καμία σχέση με ανοικτό πρόβλημα, α-διδακτική κατάσταση.
[64] Preceptorat στο κείμενο, μάθημα που δίνονταν σε παιδί ευγενών-πλουσίων που δεν πήγαινε σε δημόσιο σχολείο· προφανώς με δόση ειρωνείας.

απόσπασμα ενταγμένο στο πλαίσιο του όλου διαλόγου *Μένων* όπου παρουσιάζει έναν «πιο οικείο» και «πιο ήπιο» δάσκαλο Σωκράτη[65].

Ο Σωκράτης ξεκινάει τις ερωτήσεις στον νεαρό δούλο αφού έχει σχεδιάσει ένα τετράγωνο στην άμμο και, αποκλειστικά με το να το δείξει στον δούλο, εξασφαλίζει ότι ο δούλος κατανόησε τον ορισμό του τετραγώνου. Αμέσως κατόπιν ρωτάει τον δούλο αν διπλασιαστεί το εμβαδόν του δεδομένου τετραγώνου τι θα συμβεί με την πλευρά του και ο δούλος αυθόρμητα αλλά με σιγουριά απαντάει ότι θα διπλασιαστεί. Ο Σωκράτης, συμπληρώνοντας κατάλληλα το αρχικό σχήμα, δείχνει ότι ο διπλασιασμός της πλευράς δίνει τετράγωνο με τετραπλάσιο εμβαδόν. Και ακολουθεί η εξής ερώτηση: «*ΣΩ. Επομένως παλληκάρι μου, από τη διπλάσια πλευρά σχηματίζεται επιφάνεια όχι διπλάσια αλλά τετραπλάσια; ΠΑΙ. Ναι, πράγματι.*» Σχηματικά η Fernandez αναπαριστά το επίμαχο τμήμα του διαλόγου με τον νεαρό δούλο ως εξής:

Socrates and slave boy:	**If the side length is *s*, the area is *A*.**
Socrates:	**If $A' = 2A$, what is s'?**
Slave boy:	**If $A' = 2A$, then $s' = 2s$.**
Socrates:	**If $s' = 2s$, then $A' = 4A$ (with the help of a diagram).**

Σωκράτης και Παις:	**Αν το μήκος της πλευράς είναι *s*, το εμβαδόν είναι *A*.**
Σωκράτης:	**Αν $A' = 2A$, πόσο είναι το s'?**
Παις:	**Αν $A' = 2A$, τότε $s' = 2s$.**
Σωκράτης:	**Αν $s' = 2s$, τότε $A' = 4A$ (με τη βοήθεια ενός σχήματος)**

Ο Σωκράτης διατυπώνει την τελευταία πρόταση που έρχεται σε αντίθεση με την πρόταση του δούλου με την έννοια ότι η αντιστροφοαντίθετη της πρότασής του («αν $A' \neq 4A,\ \textit{τότε}\ s' \neq 2s$ ») έρχεται σε αντίθεση με την πρόταση του δούλου. Δεδομένου ότι μια σειρά από πειράματα φέρνουν στο φως ότι οι ερωτώμενοι δυσκολεύονται να δουν ότι δύο αντιστροφοαντίθετες προτάσεις είναι ισοδύναμες (Fernandez, 1994, σ.44)[66] και ο Σωκράτης δεν κάνει καμία διευκρίνιση, ο δούλος μπορεί απλά να καταλαβαίνει ότι ο Σωκράτης διατυπώνει μία ευκολοκατανόητη

[65] Ενδεικτικός της στόχευσης της εργασίας της Fernandez (1994) είναι ο τίτλος της: «A Kinder, Gentler Socrates: Conveying New Images of Mathematics Dialogue».
[66] Η Fernandez (1994) στη σ.44 παραπέμπει σε έρευνα των P.N. Johnson-Laird and P.C. Wason.

αληθή πρόταση και η συγκατάβασή του να αφορά αυτή την ευκολοκατανόητη πρόταση και να μην είναι αναγνώριση του λάθους του (Fernandez, 1994).

Μετά την παραδοχή του πρώτου λάθους από τον δούλο, ο Σωκράτης περιορίζει το εύρος των τιμών της λύσης (μεταξύ 2 και 4), οπότε το ζητούμενο παίρνει τη μορφή «να βρεθεί ένας αριθμός μεταξύ 2 και 4 που . . .». Μετά την παραδοχή του δεύτερου λάθους αλλάζει για δεύτερη φορά τη μορφή του ζητούμενου· «*ΣΩ. Από ποια τέλος πάντων; Προσπάθησε να μας πεις ακριβώς· αν δεν θέλεις να το πεις με αριθμούς, δείξε μας από ποια πλευρά.*» Και στο τέλος σχεδιάζει το τετράγωνο-λύση χωρίς να μιλήσει στον Δούλο για αυτές τις αλλαγές μορφής της ζητούμενης λύσης. Με βάση τις παραπάνω διαπιστώσεις αναφορικά με τις αλλαγές της μορφής του ζητούμενου, η Fernandez ισχυρίζεται ότι αυτές μόνο σύγχυση μπορούν να φέρουν στον Δούλο. Οπότε κατά την Fernandez η *απορία* του Δούλου, που είναι κρίσιμο σημείο της *ανάμνησης* και της μαιευτικής μεθόδου, μπορεί να ερμηνευτεί όχι μόνο ως γνήσια *άγνοια* αλλά και ως σύγχυση που του προκάλεσε ο Σωκράτης.

Επίσης η αρχική ερώτηση στον Δούλο «πόσου μήκους θα είναι η πλευρά του διπλάσιου τετραγώνου» δεν ταιριάζει με σύγχρονη διδασκαλία αφού ο Δάσκαλος ξέρει εκ των προτέρων ότι είναι αδύνατο να απαντήσει ο δούλος. Πρόκειται για το μήκος $2\sqrt{2}$ και ο δούλος αποκλείεται να είχε μάθει άρρητους και γιατί δεν διδάχτηκε γεωμετρία, αλλά και γιατί την εποχή που εκτυλίσσεται ο διάλογος *Μένων* είχε μεν ανακαλυφθεί η ασυμμετρία αλλά τότε, ακόμη και οι μαθηματικοί εξακολουθούσαν να «παλεύουν» με την έννοια του άρρητου (Fernandez, 1994).

Η φύση, λοιπόν, και ο τρόπος ερωτήσεων[67] καθώς και η επιχειρηματολογία του Σωκράτη είναι που, κατά την Fernandez, προκαλούν μπέρδεμα στον δούλο· ο δούλος στο τέλος φέρεται να απαντάει σωστά αλλά είναι αμφίβολο αν καταλαβαίνει τι γίνεται.

Σύμφωνα με την Fernandez, αρνητικά στοιχεία του διαλόγου ως υπόδειγμα διδασκαλίας είναι ακόμη οι πολλές ερωτήσεις με μονολεκτικές απαντήσεις και το ότι ο Δούλος δεν κάνει καμία ερώτηση. Ενώ έντονη είναι η εντύπωση ότι αναπαράγονται πάγιες παρανοήσεις για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους· τα μαθηματικά είναι

[67] Έχει ήδη αναφερθεί ότι ο Brousseau γράφει ότι ο Σωκράτης περνάει «από τις διαταγές στις ερωτήσεις».

υπολογισμοί, ο δάσκαλος κατέχει την γνώση (αυθεντία), μόνον οι δάσκαλοι μπορούν να σκέφτονται μαθηματικά.

Η Fernandez αναγνωρίζει και δύο θετικά στοιχεία που φαίνονται στο μάθημα με τον δούλο· η ιδέα που συνάγεται ότι ο καθένας μπορεί να μάθει μαθηματικά και ο δάσκαλος που ρωτάει τον μαθητή και δεν του δίνει έτοιμη την απάντηση.

Μετά τις τόσες αρνητικές διαπιστώσεις της πάνω στο μάθημα με τον δούλο ως υπόδειγμα διδασκαλίας μαθηματικών, η Fernandez ολοκληρώνει το πρώτο μέρος της εργασίας της με την προτροπή να αποφεύγεται η *σωκρατική μέθοδος* διδασκαλίας, όπως τουλάχιστον την προσλαμβάνει κανείς αν περιοριστεί στη μελέτη αποκλειστικά του μαθήματος αυτού, ξεκομμένα από τον όλο διάλογο *Μένων*[68].

Στη συνέχεια της μελέτης της, προσπαθώντας να δει το μάθημα του διπλασιασμού του τετραγώνου ως μέρος του όλου διαλόγου *Μένων*, κατ' αρχάς διαπιστώνει ότι ο όλος διάλογος *Μένων* είναι υπόδειγμα *σωκρατικής μεθόδου*. Ερμηνεύει και αυτή το μάθημα ως μία επίδειξη *ανάμνησης*, από τον Σωκράτη στον Μένωνα, για τις ανάγκες της από κοινού αναζήτησής τους του τρόπου που αποκτιέται η αρετή. Ο Σωκράτης κάνει την επιλογή ενός γεωμετρικού θέματος που δεν το κατέχει ο Δούλος, το κατέχει όμως ο Μένων, είναι απλό, λιτό και μπορεί καθαρά ο Σωκράτης να δείξει πάνω σε αυτό την εξέλιξη της *ανάμνησης*· δεν ενδιαφέρεται ο Σωκράτης να διδάξει Γεωμετρία. Έτσι μπορούν, κατά τη Fernandez, να δικαιολογηθούν τα όποια αρνητικά επισήμανε στην πρώτη της ανάγνωση του αποσπάσματος με τον Δούλο.

Κατά την Fernandez, το μάθημα του διπλασιασμού του τετραγώνου μπορεί να διατηρήσει το κύρος του υποδειγματικού μαθήματος μαθηματικών με την *μαιευτική μέθοδο*· αρκεί ο σημερινός δάσκαλος, και οι φοιτητές-μελλοντικοί δάσκαλοι, να συμπεριλάβουν σε αυτό και τα πολλά ενδιαφέροντα, αξιοποιήσιμα και συμβατά με τις σύγχρονες προσεγγίσεις της διδακτικής χαρακτηριστικά του όλου διαλόγου *Μένων*, όπως για παράδειγμα:

· Ο Μένων (ο μαθητής) επιλέγει το θέμα, όχι ο δάσκαλος.

· Ούτε ο Σωκράτης ούτε ο Μένων έχουν υπό τον έλεγχό τους τον διάλογο αφού και οι δύο παραδέχονται ότι δεν έχουν οριστική απάντηση στο θέμα..

· Ερωτήσεις θέτουν και ο δάσκαλος και ο μαθητής, ο ένας στον άλλον.

[68] Και ο Κανάκης (1990, σ.11), θεωρεί ότι η διδασκαλία με τον δούλο είναι ειδική περίπτωση της σωκρατικής μεθόδου.

· Υπάρχει κάτι το «παιγνιώδες»[69] μεταξύ του δάσκαλου και του μαθητή.

Ο Nola (1997) ενδιαφέρεται για την κονστρουκτιβιστική διδασκαλία των θετικών επιστημών στην οποία διαπιστώνει ότι δεν υπάρχει επαρκής θεώρηση της έννοιας της γνώσης. Στην εργασία του μελετά το μάθημα του διπλασιασμού του τετραγώνου στον διάλογο *Μένων* γιατί το θεωρεί υπόδειγμα διδακτικής μεθόδου που είναι *μη-διδακτική*[70] και επομένως «*σημαντική τόσο για τους κονστρουκτιβιστές όσο και για τους μη κονστρουκτιβιστές*» (Nola, 1997, σ. 58) αλλά και γιατί εκεί μιλώντας ο Σωκράτης με τον Μένωνα, δίνει έναν ορισμό της γνώσης και τη διακρίνει από τη γνώμη.

Όσον αφορά στην προσέγγιση του Nola στη διδακτική μέθοδο. Ο Nola εστιάζει στις δύο φορές που ο Πλάτων-Σωκράτης απευθύνθηκε στον Μένωνα μετά τα λάθη του δούλου λέγοντάς ότι δεν διδάσκει τίποτα στον δούλο και ότι αυτός μόνος του βρήκε τα λάθη του. Το ίδιο μετά το τέλος του μαθήματος. Ο Πλάτων-Σωκράτης λέει στον Μένωνα ότι ο δούλος βρήκε μόνος του τη λύση και διαπίστωσε μόνος του ότι είναι σωστή. Ο Δούλος κάθε φορά αποκτά (ή κατασκευάζει) μόνος του τους λόγους για τους οποίους απαντά λάθος (και σωστά την τρίτη φορά). Ο Πλάτων-Σωκράτης λοιπόν δεν δίνει ούτε έτοιμη την λύση ούτε έτοιμους τους λόγους για τους οποίους είναι λάθος (ή σωστός) ένας ισχυρισμός· τελικά ο Nola διατυπώνει τον «παράδοξο» ισχυρισμό ότι «ο Πλάτων και ο Σωκράτης είναι οι πρώτοι κονστρουκτιβιστές στην εκπαίδευση».

Ο Nola εντοπίζει τον (έμμεσο) ορισμό της γνώσης στα λόγια του Σωκράτη προς τον Μένωνα μετά την εύρεση της λύσης από τον Δούλο: «ΣΩ. Να που και τώρα - συμβαίνει αυτό και στα όνειρα - ταρακουνήθηκαν αυτές οι γνώμες του. Εάν μάλιστα κάποιος τον ξαναρωτήσει για πολλές περιπτώσεις του ίδιου πράγματος και με πολλούς τρόπους, να είσαι βέβαιος ότι θα τα ξέρει το ίδιο καλά όσο και οποιοσδήποτε άλλος, όταν ολοκληρώσει την απάντησή του.» Η ερμηνεία του Nola είναι ότι οι μαθητές δεν αποκτούν γνώση μέσω πληροφοριών που τους μεταδίδει ο δάσκαλος, ούτε και με τη μέθοδο των ερωτοαπαντήσεων αποκτούν γνώση· στην καλύτερη περίπτωση αποκτούνε ορθή γνώμη. Οι μαθητές αποκτούνε γνώση μόνο όταν

[69] a certain “playfulness” στο πρωτότυπο.
[70] non-didaktic

μπορέσουν με συλλογισμό να καταστήσουν σαφείς στον εαυτό τους τους λόγους για τους οποίους είναι σωστή μία ορθή γνώμη τους[71].

[71] Δηλαδή, τελικά, με τον *αιτίας λογισμόν*.

Κεφάλαιο 3 ΤΡΙΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΕΜΠΕΙΡΙΚΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΑΙΕΥΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Τρεις εμπειρικές έρευνες παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό στις οποίες οι ερευνητές διερευνούν τα αποτελέσματα και εν τέλει τη δυνατότητα εφαρμογής της μαιευτικής μεθόδου· οι δύο σε μαθητές Δημοτικού και η τρίτη σε μαθητές Δημοτικού και Γυμνασίου. Κοινό τους στοιχείο είναι το μάθημα του διπλασιασμού του τετραγώνου από τον πλατωνικό διάλογο *Μένων* ως ερευνητικό εργαλείο. Και οι τρεις καταλήγουν σε πρόταση διδασκαλίας.

3.1 Το μοντέλο διδασκαλίας. Βάσεις διαλεκτικής διδασκαλίας. Εφαρμογή της μαιευτικής μεθόδου του Σωκράτη σε παιδιά[72].

Ο Φράγκος (1993) διερεύνησε τη χρησιμότητα – για τα παιδιά του ελληνικού σχολείου – της μαιευτικής μεθόδου του Σωκράτη γιατί μελετώντας το μάθημα του διπλασιασμού του τετραγώνου, στον διάλογο *Μένων,* διαπίστωσε ότι η διδασκαλία του Σωκράτη έχει πολλά θετικά στοιχεία που υπάρχουν και σε οποιαδήποτε σύγχρονη προσέγγιση της διδασκαλίας:

– Ο Σωκράτης δίνει πολύ μεγάλη αυτενέργεια στον δούλο.

– Εκθέτει το θέμα χωρίζοντάς το σε επιμέρους μικρά προβλήματα.

– Ακολουθεί τον βηματισμό των δυνατοτήτων του δούλου.

– Όταν ο δούλος κάνει κάποιο λάθος, ο Σ. δεν απορρίπτει την προτεινόμενη λύση, αλλά δίνει συμπληρωματικές πληροφορίες, ώστε ο δούλος να βρει μόνος του τη σωστή απάντηση.

– Ζητεί από τον δούλο να δουλεύει με δημιουργικό κι όχι μηχανικό τρόπο. Δεν τον ενδιαφέρουν οι γνώσεις αλλά η χρησιμοποίησή τους.

– Το λάθος θεωρείται ως μέσο της όλης πορείας της μαθήσεως κι όχι στοιχείο που πρέπει να απορριφθεί.

– Όλη η πορεία του διαλόγου διαμορφώνει μια δυνατή μορφή ανάγκης να «απαλλαχτεί» ο δούλος από τις δυσκολίες και να «γεννήσει» την ποθούμενη λύση.(Φράγκος, 1993, σ. 75)

Σκοπός του ήταν να ελέγξει αν με την μαιευτική μέθοδο μπορούν οι μαθητές σε μικρότερη από την προβλεπόμενη από την εξελικτική ψυχολογία του Piaget ηλικία (11-12 χρόνια) να κατανοήσουν τον διπλασιασμό του τετραγώνου, δεδομένου ότι ο Σωκράτης εφάρμοζε τη μέθοδο σε νέους και σε ενήλικες. Υπέθεσε ότι η ηλικία αυτή μπορεί να επηρεάζονταν έντονα από την διδασκαλία στο σχολείο. Βέβαια

[72] Με τον τίτλο της παραγράφου ο Χρίστος Φράγκος εξέδωσε, πρώτη φορά το έτος 1973, εργασία που συμπεριλαμβάνεται και στο (Φράγκος, 1993, σ.63-115).

συμπεριέλαβε στην έρευνά του και παιδιά μεγαλύτερα από την ηλικία αυτή, για να διαπιστώσει τι γίνεται και σε μεγαλύτερες ηλικίες. Στη συνέντευξη συμπεριέλαβε και τον υποδιπλασιασμό του τετραγώνου οδηγημένος από τα παιδιά, αφού κατά τις προκαταρκτικές συνεντεύξεις διαπίστωσε ότι τα παιδιά του Δημοτικού πήγαιναν προς τον υποδιπλασιασμό και όχι προς τον διπλασιασμό· θέλησε να διερευνήσει αν ο υποδιπλασιασμός είναι ευκολότερος για τα παιδιά (Φράγκος,1993, σ. 77). Επίσης θέλησε να χρησιμοποιήσει τον υποδιπλασιασμό για να ελέγξει αν κατανόησαν τον διπλασιασμό, αν μπορούν να χρησιμοποιήσουν την γνώση του διπλασιασμού σε άλλη κατάσταση (Φράγκος,1993, σ. 96).

3.1.1 Η έρευνα

Η έρευνα έγινε τον Οκτώβριο και τον Νοέμβριο του 1972 σε 434 μαθητές και μαθήτριες από την Β΄ Δημοτικού ως την Γ΄ Γυμνασίου, στα Ιωάννινα, στη Θεσσαλονίκη και στην Αθήνα (Φράγκος,1993, σ. 80) [73] .

Τα ζητήματα που απασχόλησαν την έρευνα ήταν (Φράγκος, 1993, σ. 78):

«(α) Η εξέλιξη της κατανόησης της έννοιας του διπλασιασμού του τετραγώνου. (β) Η εξέλιξη της κατανοήσεως του υποδιπλασιασμού του τετραγώνου. (γ) Η σύγκριση των αποτελεσμάτων της έρευνας με τα συμπεράσματα των ερευνών και τις θέσεις του Piaget. (δ) Η δυνατότητα εφαρμογής της μαιευτικής μεθόδου του Σωκράτη σε μικρά παιδιά.»

Το μάθημα του διπλασιασμού του τετραγώνου που έκανε ο Σωκράτης επαναλήφθηκε με τον κάθε ένα μαθητή ξεχωριστά. Με μερικούς μαθητές επαναλήφθηκε το ίδιο ακριβώς μάθημα αλλά με αρχικό ζητούμενο το τετράγωνο που έχει το μισό εμβαδόν του αρχικού.

Όταν ο ερευνητής βεβαιώνονταν ότι ο μαθητής κατάλαβε τον διπλασιασμό του τετραγώνου, του ζητούσε να κάνει τον υποδιπλασιασμό. Χρησιμοποιήθηκαν χαρτί και μολύβι, και για ένα μέρος των μικρών παιδιών πλαστικά καλαμάκια και έγχρωμα πλαστικά τρίγωνα και τετράγωνα.

Τα αποτελέσματα ήταν ευνοϊκά για την μαιευτική μέθοδο: Κατάλαβαν τον διπλασιασμό του τετραγώνου το 24% των μαθητών της Β΄ Δημοτικού, το 46% των μαθητών της Γ΄, το 46% των μαθητών της Δ΄, το 64% των μαθητών της Ε΄, το 79%

[73] Η έρευνα συνεχίστηκε ως «πρόσθετη διερεύνηση» και τον Φεβρουάριο του 1973 με επιπλέον 472 μαθητές της Θεσσαλονίκης, στις τάξεις τους (Φράγκος,1993, σ.105). Για αυτό ο Φράγκος, σε άλλη θέση, αναφέρεται σε 900 μαθητές (Φράγκος, 1993, σ.442)

των μαθητών της ΣΤ΄Δημοτικού, το 67% των μαθητών της Α΄, το 85% των μαθητών της Β΄ και το 100% των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου (Φράγκος, 1993, σ.88)[74].

Το σφάλμα (τα σφάλματα) του δούλου το έκαναν (τα έκαναν) οι περισσότεροι μαθητές. Πχ από τους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου (το 100% κατάλαβε τη λύση) το 84% των μαθητών έφτασε στη λύση μετά από μία αρχική απάντηση 4μ[75] (Φράγκος, 1993, σ.94).

Ο υποδιπλασιασμός του τετραγώνου είναι πιο εύκολος, αφού τα παιδιά που τον είχαν ως αρχικό πρόβλημα είχαν μεγαλύτερες επιδόσεις (Φράγκος,1993, σ. 103).

Η έρευνα συνεχίστηκε ως «πρόσθετη διερεύνηση» και τον Φεβρουάριο του 1973 με επιπλέον 472 μαθητές, από Β΄ Δημοτικού ως Α΄ Λυκείου, της Θεσσαλονίκης, ομαδικά, στις τάξεις τους (Φράγκος,1993, σ.105). Ο σκοπός ήταν να δει την επίδοση των μαθητών χωρίς τη σωκρατική μέθοδο.

> «*Για τον διπλασιασμό του τετραγώνου αφού έκαμνα στον πίνακα ένα τετράγωνο και τους έλεγα ότι η πλευρά είναι 2 μ., ζητούσα να μου γράψει κάθε μαθητής ή μαθήτρια σε χαρτί που εντωμεταξύ τους είχα μοιράσει, τις απαντήσεις τους. Τους έλεγα: "Έχω ένα τετράγωνο που έχει πλευρά 2μ. Θέλω να κάνω ένα τετράγωνο διπλάσιο (δυο φορές σαν κι αυτό το τετράγωνο). α) Πόσα μέτρα θα έχει η πλευρά του διπλασίου τετραγώνου; β) Αν μπορείτε, κατασκευάστε το ακριβώς· αν όχι, κατασκευάστε το στο περίπου"*». (Φράγκος,1993, σ. 105)

Στο (α) κανένας μαθητής μέχρι και την Β΄ Γυμνασίου, όπως ήταν αναμενόμενο, δεν έδωσε τη σωστή απάντηση. Μόνο το 9% των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου και το 19% των μαθητών της Α΄ Λυκείου έδωσαν σωστή απάντηση $2\sqrt{2}$. Τα αποτελέσματα έδειξαν επίσης ότι το ίδιο, όπως και στην αρχική φάση της έρευνας με την εξέταση καθενός μαθητή ξεχωριστά, μεγάλο ποσοστό των μαθητών σκέφτεται αναλογικά· χαρακτηριστικά από τους μαθητές της Α΄ Λυκείου το 72% απάντησε 4μ. και το 9% έδωσε άσχετη απάντηση. Στο (β) μόνον ένας μαθητής της Β΄ Γυμνασίου και το 70% των μαθητών της Α΄ Λυκείου έδωσαν σωστή γεωμετρική απάντηση (Φράγκος,1993, σ. 105).

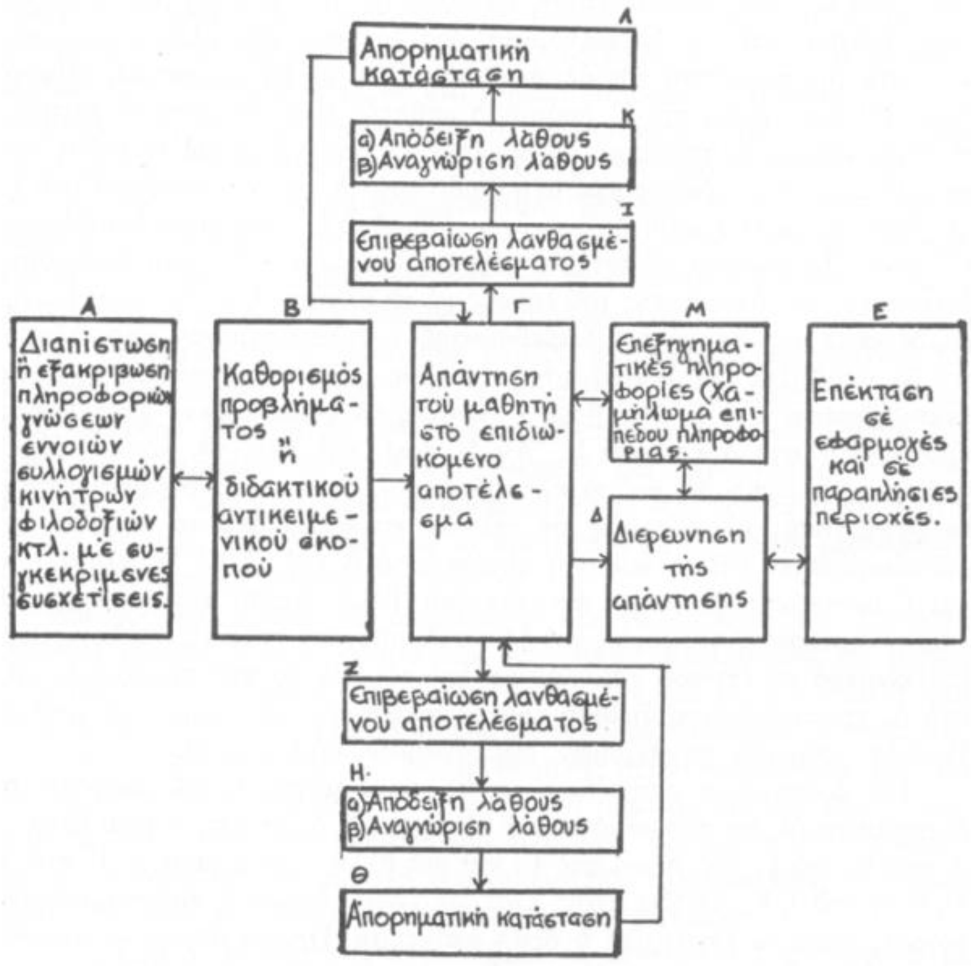
.[74] Ο Φράγκος δίνει τα ποσοστά ανά διαστήματα ηλικιών. Έχει αντικατασταθεί κάθε διάστημα με την αντίστοιχη Τάξη, σύμφωνα με αντιστοίχιση του ίδιου του ερευνητή (Φράγκος, 1993, σ.88), και τα ποσοστά έχουν στρογγυλοποιηθεί στη μονάδα.

[75] Εσφαλμένη αναλογική σκέψη.

3.1.2 Το «μοντέλο του Σωκράτη»

Από την ανάλυση του μαθήματος του διπλασιασμού του τετραγώνου ο Φράγκος διαπίστωσε ότι ο Σωκράτης βασικά ακολουθεί την παρακάτω πορεία: α*) Προσφορά ορισμένων συγκεκριμένων πληροφοριών, μέσω ερωτήσεων· β) θέση του προβλήματος (ο διπλασιασμός του τετραγώνου)· γ) πρώτη λανθασμένη απάντηση· δ) ανεύρεση του λάθους· ε) δεύτερη λανθασμένη απάντηση· στ) ανεύρεση του λάθους· ζ) δημιουργία έντονης απορίας και μεγάλη διάθεση για εξεύρεση λύσης· η) πορεία προς τη λύση και αποκάλυψη της λύσης.»* (Φράγκος, 1993, σ.74)

Μετά από την εξέταση (μεμονωμένα) των μαθητών και τις τόσες επαναλήψεις, εντόπισε τις διακυμάνσεις στην εξέλιξη του μαθήματος του Σωκράτη στον Δούλο και τις αναπαριστά συμβολικά με το παρακάτω διδακτικό μοντέλο που το ονομάζει «μοντέλο του Σωκράτη»· ο ίδιος διευκρινίζει ότι δεν πρόκειται για «*απεικόνιση μιας διδακτικής μεθόδου*» αλλά για «*παρουσίαση των διακυμάνσεων που παρατηρήθηκαν κατά την εξέταση των μαθητών*». (Φράγκος, 1993, σ.121-122) :



Σχ. 3. Τὸ διδακτικὸ μοντέλο τοῦ Σωκράτη.

Το μοντέλο ως μοντέλο είναι πετυχημένο και αποκωδικοποιείται εύκολα, το ζητούμενο όμως παραμένει· να βρεθεί ο τρόπος (μία μέθοδος διδασκαλίας) για να προβληθεί αυτό το μοντέλο – από τον μεμονωμένο μαθητή – στην αίθουσα διδασκαλίας. Σύμφωνα με τον Φράγκο, το κύριο θέμα σε σχέση με την προοπτική εφαρμογής της μαιευτικής μεθόδου στην Τάξη είναι να βρεθούν οι μηχανισμοί που θα διευκολύνουν την εκμαίευση συλλογισμών, απαραίτητων για την κατάκτηση των νέων εννοιών από τους μαθητές (Φράγκος, 1993, σ.113). Κατά τον Φράγκο, το θέμα δεν είναι οι ερωτήσεις, ο διάλογος, αλλά η παροχή των διευκολύνσεων που προαναφέρθηκαν.

3.2 Η σωκρατική στρατηγική διδασκαλίας μάθησης[76]

Ο Κανάκης από την αρχή της διατριβής του σημειώνει ότι ο Πλάτων «*διαφύλαξε αριστοτεχνικά, στους ακόμα και σήμερα γοητευτικούς διαλόγους του, τον τρόπο με τον οποίο ο Σωκράτης διηύθυνε τη συζήτηση. Οι πλατωνικοί διάλογοι είναι "σωκρατικές συζητήσεις"*» (Κανάκης, 1990, σ.9). Αυτή η τελευταία παραδοχή αποτελεί, κατά τη γνώμη μου, τη νομιμοποιητική βάση της διδακτικής πρότασής του, της «σωκρατικής στρατηγικής διδασκαλίας μάθησης».

Ο Κανάκης (1990) καταλήγει στην πρότασή του αφού πρώτα αναλύσει συγκριτικά τους πλατωνικούς διαλόγους *Μένων*[77] και *Λάχης*. Κατόπιν βέβαια διερευνά εμπειρικά την πρότασή του στην Τάξη στην οποία τότε ήταν Δάσκαλος. Και φυσικά στο τέλος εξάγει συμπεράσματα από την εφαρμογή της.

3.2.1 Ο πλατωνικός διάλογος *Λάχης*

Ο πλήρης τίτλος του διαλόγου είναι *Λάχης, ή περί ανδρείας μαιευτικός*. Μαιευτικός σημαίνει ότι ο διάλογος καταλήγει στον ορισμό μιας ηθικής έννοιας, εν προκειμένω, της ανδρείας. Όπως θα δούμε δεν καταλήγει σε τελικό ορισμό. Ο Τατάκης (1990) εκτιμά ότι σωστά τον χαρακτήρισαν μαιευτικό γιατί σε όλο τον διάλογο με τους στρατηγούς, ο Σωκράτης επιδιώκει οι ίδιοι οι στρατηγοί με τις δικές τους δυνάμεις να δώσουν τη λύση στο πρόβλημα που τους τέθηκε, εκμαιεύει τις απαντήσεις τους.

---

[76] Με τον τίτλο *Η Σωκρατική Στρατηγική Διδασκαλίας Μάθησης. Θεωρητική Θεμελίωση-Εμπειρική Διερεύνηση*, ο Ι. Κανάκης εξέδωσε το 1990 στα ελληνικά (Κανάκης, 1990), αναθεωρημένη, τη διδακτορική του διατριβή στο Πανεπιστήμιο της Χαϊδελβέργης. Ο τίτλος της διατριβής είναι *Theoretische und empirische Untersuchungen zur Wirksamkeit der sokratischen Lehrstrategie* (1984). (Θεωρητικές και εμπειρικές έρευνες για την αποτελεσματικότητα της σωκρατικής στρατηγικής διδασκαλίας).

[77] Τον όλο διάλογο *Μένων*, όχι μόνο το μάθημα του διπλασιασμού του τετραγώνου.

Ο διάλογος ανήκει στα νεανικά έργα του Πλάτωνα (Κοπιδάκης κ.ά., 2020). Η σκηνή του διαλόγου εκτυλίσσεται αμέσως μετά τη μάχη του Δηλίου (424 π.Χ.), σε ένα γυμναστήριο της Αθήνας (Τατάκης, 1990, σ.5).

Ο Λυσίμαχος και ο Μελησίας, πατέρες δύο *παίδων*, έχουν προσκαλέσει τους στρατηγούς Λάχητα και Νικία σε μια επίδειξη οπλομαχητικής για να τους ζητήσουν, μετά την επίδειξη, τη γνώμη τους για την αναγκαιότητα μαθημάτων οπλομαχίας για την αγωγή των αγοριών τους. Και οι δύο στρατηγοί λένε ότι, αφού πρόκειται για την αγωγή των αγοριών, καλύτερα να ρωτήσουν τον Σωκράτη (που τυχαία περνούσε από εκεί). Οπότε η ερώτηση αν τα μαθήματα οπλομαχητικής είναι ωφέλιμα για τα *μειράκια* απευθύνεται στον Σωκράτη. Ο Σωκράτης λέει ότι θα πρέπει να πάρουν τη γνώμη των ειδικών, δηλαδή των στρατηγών. Ο Νικίας υποστηρίζει τα μαθήματα οπλομαχητικής για τους νέους με μια σειρά - πειστικών - επιχειρημάτων. Ο Λάχης είναι αντίθετος και το υποστηρίζει κι αυτός με μια σειρά - πειστικών - επιχειρημάτων. Οπότε και οι πέντε αποφασίζουν η απάντηση να αναζητηθεί από τους τρεις - από τους στρατηγούς και τον Σωκράτη - από κοινού. Ο Σωκράτης πείθει τους συνομιλητές ότι το ερώτημα πρέπει να μετατραπεί στο αν η οπλομαχητική κάνει τους νέους ανδρείους και εν τέλει στο τι είναι η ανδρεία· μετά μπορούν να συζητήσουν αν τα μαθήματα οπλομαχητικής οδηγούν στην απόκτησή της.

Ο Σωκράτης ζητάει από τον Λάχητα να πει τι είναι ανδρεία.

Ο Λάχης δίνει τον (πρώτο) ορισμό της ανδρείας· αν κανείς θέλει μένοντας στη θέση του να αποκρούσει τον εχθρό και δεν το βάζει στα πόδια. Ο Σωκράτης αντιτείνει μπορεί κι ένας οπισθοχωρώντας να είναι ανδρείος και παραθέτει και άλλες περιπτώσεις ανδρείας, άσχετες με τον πόλεμο. Συμφωνούν και οι δύο ότι ο ορισμός που έδωσε ο Λάχης είναι λάθος και ότι ανδρεία είναι το κοινό στοιχείο που διαπερνά όλες τις περιπτώσεις που παρέθεσε ο Σωκράτης. Για να βοηθήσει τον Λάχητα, ο Σωκράτης ως παράδειγμα ορισμού δίνει τον ορισμό της ταχύτητας· η ικανότητα που εκτελεί πολλά σε λίγο χρόνο.

Ο Λάχης δίνει τον (δεύτερο) ορισμό της ανδρείας· κάποια καρτερία της ψυχής. Ο Σωκράτης προτείνει και συμπληρώνεται ο ορισμός· ανδρεία είναι η φρόνιμη καρτερία. Και αμέσως επιχειρηματολογεί ότι και η φρόνιμη καρτερία δεν είναι πάντοτε ανδρεία. Συμφωνούν και οι δύο ότι και ο δεύτερος ορισμός είναι λάθος. Με τη σύμφωνη γνώμη του Λάχητος, καλείται ο Νικίας.

Ο Νικίας ορίζει την ανδρεία ως σοφία (γνώση, επιστήμη). Αντιδρά ο Λάχης· η ανδρεία είναι χωριστό πράγμα από τη σοφία. Μετά από συζήτηση μεταξύ των τριών, Νικία, Λάχητος και Σωκράτη, καταλήγουν στο ορισμό της ανδρείας ως *η επιστήμη των δεινών και θαρραλέων* αλλά και αυτός ο ορισμός, όπως δείχνει ο Σωκράτης, είναι πολύ ευρύς, εξισώνει την ανδρεία με την όλη αρετή· σταματάνε τη συζήτηση έχοντας επίγνωση ότι ο ορισμός θέλει περαιτέρω βελτίωση[78].

3.2.2 Θεωρητική θεμελίωση της σωκρατικής στρατηγικής διδασκαλίας - μάθησης

Από τη μελέτη των δύο διαλόγων ο Κανάκης καταλήγει στις παρακάτω διαπιστώσεις που είναι και προϋποθέσεις που πρέπει να πληροί ο δάσκαλος κατά την εφαρμογή της σωκρατικής στρατηγικής διδασκαλίας - μάθησης:

– Ο πρωταρχικός σκοπός του Σωκράτη δεν είναι να δώσει σωστή απάντηση ο συνομιλητής αλλά να συνειδητοποιήσει τις λογικές συνέπειες των ισχυρισμών του, για αυτό και τον οδηγεί σε απορία, στην διαπίστωση ενδεχόμενης αντίφασης των λεγομένων του με κοινές αλήθειες (Κανάκης, 1990, σ.26).

– Ο Σωκράτης δεν δίνει κατευθείαν απαντήσεις αλλά βοηθάει τον συνομιλητή του να τις βρει έχοντας όλη την καλή διάθεση να βοηθήσει στην κοινή έρευνα και ανακάλυψη (Κανάκης, 1990, σ.21).

– Απευθύνει την ερώτηση τι είναι η αρετή σε συνομιλητές που έχουν κάποια ιδέα, κατέχουν πληροφορίες, γνώσεις για την αρετή (Κανάκης, 1990, σ.26) .

– Η σωκρατική *ειρωνεία* είναι το μέσο για να δώσει θάρρος στον συνομιλητή να εκφραστεί (Κανάκης, 1990, σ.27).

– Δεν απορρίπτει αμέσως τις ανεπαρκείς ή εσφαλμένες απαντήσεις (Κανάκης, 1990, σ.27), υποβάλλει σε κριτική τις θέσεις του συνομιλητή του και τον οδηγεί σε *απορία*. Η *απορία* είναι στάδιο κατά την αναζήτηση της γνώσης.

– Η *απορία* βοηθά τον συνομιλητή να αναπτύξει αυτοκριτική στάση κι αυτό είναι κίνητρο για συνέχιση της προσπάθειας (Κανάκης, 1990, σ.27;30).

– Η στάση του Σωκράτη απέναντι στο λάθος των συνομιλητών είναι παράδειγμα για αυτούς (τους συνομιλητές) ανοχής της διαφορετικής γνώμης, του διαφορετικού ισχυρισμού ακόμη και εσφαλμένου ή έστω ανεπαρκούς (Κανάκης, 1990, σ.31).

---

[78] Η περίληψη του διαλόγου *Λάχης* έγινε με βάση τη μετάφραση του Τατάκη (1990).

– Με αναλογίες, με συγκεκριμένα παραδείγματα, επεξηγήσεις, ορισμούς βοηθά τους συνομιλητές να συνεχίσουν τον διάλογο ή προσκαλεί νέο συνομιλητή (Κανάκης, 1990, σ.31).

– Στο τέλος του χωρίς κατάληξη διαλόγου ο Σωκράτης αφήνει ανοιχτή την συνέχιση και έτσι δίνει στους συνομιλητές το κίνητρο να σκεφτούν, να ψάξουν μόνοι τους (Κανάκης, 1990, σ.31).

Από την συγκριτική ανάλυση του Κανάκη των δύο διαλόγων προέκυψε ότι και στους δύο διαλόγους τα αρχικά ερωτήματα «πώς αποκτιέται η αρετή;»[79], «η οπλομαχητική οδηγεί τους νέους στην ανδρεία;»[80] μετατρέπονται στα ερωτήματα «τι είναι αρετή» και «τι είναι ανδρεία». Και στους δύο διαλόγους αρχικά έχουμε την σωκρατική άγνοια και δίνεται ένας πρώτος ορισμός από τον συνομιλητή του Σωκράτη που ο Σωκράτης τον οδηγεί σε - από κοινού με τον συνομιλητή του - απόρριψη. Παρέχει βοήθεια ο Σωκράτης δίνοντας κατ' αναλογία παράδειγμα ορισμού· στον Μένωνα δίνει τον ορισμό του σχήματος και του χρώματος, στον Λάχητα δίνει τον ορισμό της ταχύτητας. Ακολουθεί η δεύτερη προσπάθεια ορισμού που καταλήγει σε αποτυχία. Οι συνομιλητές του Σωκράτη έρχονται σε *απορία*, οπότε στον μεν Μένωνα δίδει βοήθεια ο Σωκράτης για να συνεχίσει την προσπάθεια, στην περίπτωση του Λάχητος όμως καλεί στη συζήτηση, τον Νικία για να τον «βοηθήσει στην απορία του» (Κανάκης, 1990, σ.23) οπότε ο διάλογος συνεχίζει κι εξελίσσετε μεταξύ των τριών· του Σωκράτη, του Λάχητος και του Νικία [81]. Τα ίδια προκύπτουν και από την ανάλυση του μαθήματος του Σωκράτη στον δούλο με μία όμως προσθήκη: Αρχικά ο Σωκράτης ερευνά τις δυνατότητες του συνομιλητή-μαθητή του.

Καρπός των παραπάνω παρατηρήσεων είναι η θέση ότι είναι έξι τα στάδια της σωκρατικής στρατηγικής διδασκαλίας μάθησης, τα παρακάτω (Κανάκης, 1990, σ.43):

---

[79] Το ερώτημα το θέτει ο ίδιος ο Μένων, ο συνομιλητής του Σωκράτη.

[80] Το θέτουν οι δύο γονείς ή ο Σωκράτης, πάντως όχι οι στρατηγοί-συνομιλητές του Σωκράτη.

[81] Εξαιρετικό ενδιαφέρον για τη διδασκαλία των μαθηματικών, παρουσιάζει η προσέγγιση του Loska (1995) σ' αυτόν τον διάλογο μεταξύ των τριών. Ο Loska παρατηρεί ότι κατά τον διάλογο μεταξύ των τριών στον *Λάχητα*, αρχικά οι δύο στρατηγοί δεν συνομιλούν μεταξύ τους παρά μόνον μέσω του Σωκράτη. Ο Σωκράτης τους απευθύνει ερωτήσεις που διαφέρουν από τις γνωστές ερωτήσεις της μαιευτικής μεθόδου που απαντιούνται με ναι/όχι ή με έναν αριθμό. Επίσης τους απευθύνει ερωτήσεις που δεν έχουν καμία αναφορά στο αντικείμενο του διαλόγου· «άκουσες Λάχη; (τι είπε ο Νικίας)», «που αποβλέποντας το είπες αυτό Λάχη;», «Νικία τι σκέφτεσαι για αυτό που είπε ο Λάχης;». Οι ερωτήσεις του δεν αποτελούν συνδρομή του Σωκράτη για να έλθουν οι στρατηγοί σε απευθείας διάλογο μεταξύ τους αλλά για να προχωρήσει η αναζήτηση (Loska, 1995, σ.147).
Το τμήμα του διαλόγου *Λάχης* με τον διάλογο των τριών είναι υπόδειγμα διεύθυνσης διαλόγου του δασκάλου με μαθητές όταν ο δάσκαλος θέλει μεν να αφήσει την εξέλιξη του διαλόγου στους μαθητές, τους δίνει δε μαιευτική βοήθεια που δεν αφορά μόνον απλώς τη δημιουργία συνθηκών επικοινωνίας (Loska, 1995, σ.146).

1. Εξακρίβωση των προϋποθέσεων.

2. Διατύπωση του προβλήματος. Το πρόβλημα διατυπώνεται από τον συνομιλητή (μαθητή) ή από τον Σωκράτη (διδάσκοντα).

3. Απάντηση του συνομιλητή. Ο Σωκράτης υποκρίνεται άγνοια.

4. Διασάφηση ενδεχόμενης ανεπαρκούς ή εσφαλμένης απάντησης. Δεν απορρίπτεται αμέσως.

5. Απορία. Παραδοχή άγνοιας.

6. Υποβοήθηση λύσης[82].

Από τα παραπάνω μπορεί να βγάλει κανείς το συμπέρασμα ότι για την διδασκαλία με τον τρόπο του Σωκράτη πρέπει να διαθέτει (τουλάχιστον) τις ποιότητες που παρατέθηκαν παραπάνω και να ακολουθήσει τα έξι στάδια της σωκρατικής στρατηγικής.

3.2.3 Παράδειγμα εφαρμογής της σωκρατικής στρατηγικής διδασκαλίας – μάθησης: Ο διπλασιασμός του τετραγώνου.

Η διδακτορική διατριβή του Κανάκη περιλαμβάνει και εμπειρική διερεύνηση. Πραγματοποίησε δώδεκα διδασκαλίες, σε δώδεκα εβδομάδες, με δώδεκα διαφορετικά θέματα, μία διδακτική ώρα το κάθε θέμα, στους 40 μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού των προτύπων της Ραλλείου Π.Α. Πειραιά (φυσικά υπήρχε κι άλλη, ομάδα ελέγχου), στο χρονικό διάστημα Σεπτέμβριος - Δεκέμβριος 1983. Την πρώτη και την ένατη διδακτική ώρα το θέμα ήταν *Μαθηματικά προβλήματα*, την τρίτη διδακτική ώρα το θέμα ήταν *Διπλασιασμός τετραγώνου*, την ενδέκατη διδακτική ώρα το θέμα ήταν *Ισόπλευρο τρίγωνο*. Τις υπόλοιπες διδακτικές ώρες τα θέματα δεν είχαν άμεση σχέση με Μαθηματικά.

Ο ερευνητής στα συμπεράσματα της εμπειρικής έρευνας διαπιστώνει ότι η μαιευτική μέθοδος έχει θετική επίδραση στα παιδιά με μέτρια αυτοπεποίθηση και αποθαρρύνει τα παιδιά με χαμηλή αυτοπεποίθηση (Κανάκης, 1990, σ.77). Όμως, όσον αφορά στα Μαθηματικά, αξιοπρόσεκτο είναι το συμπέρασμά του ότι τα προβλήματα που θα προταθούν θα πρέπει να είναι εύκολα, με απλή διατύπωση (Κανάκης, 1990, σ.83).

Ενδεικτικά, την 3η διδακτική ώρα, ο ερευνητής αναβιώνει το σωκρατικό μάθημα του διπλασιασμού του τετραγώνου με διάλογο που δεν περιορίζεται με έναν μαθητή,

[82] Το βήμα (6) θα μπορούσε να συμπληρωθεί· *υποβοήθηση λύσης ή κάποιος άλλος παίρνει μέρος στη συζήτηση* (Κανάκης, 1990, σ.23) όπως συμβαίνει στον διάλογο *Λάχης*.

όπως στον διάλογο *Μένων*, αλλά κρατώντας ο δάσκαλος-ερευνητής τον ρόλο του Σωκράτη διατυπώνει βασικά τις ίδιες ερωτήσεις και στον διάλογο συμμετέχει κάθε φορά ο εκάστοτε μαθητής που απαντάει.

Στο Παράρτημα παρατίθεται το πρωτόκολλο της 3ης διδακτικής ώρας, ως δείγμα του τρόπου εφαρμογής, από τον ερευνητή, της σωκρατικής στρατηγικής διδασκαλίας–μάθησης στη σχολική αίθουσα.

3.3 Το *Παιχνίδι Φωνές-Αντίλαλοι* (*Voices - Echoes Game*)[83]

Το *παιχνίδι φωνές κι αντίλαλοι* (*ΠΦΑ*) είναι μία διδακτική μέθοδος που επινοήθηκε, ερευνήθηκε και προτάθηκε από τον καθηγητή του Πανεπιστήμιου της Γένοβας Paolo Boero και τους συνεργάτες του. Στην αρχική του μορφή αναπτύχθηκε μεθοδολογία και διδακτικό υλικό για την διδασκαλία των ιστορικών αλμάτων στην εξέλιξη των θετικών επιστημών με χαρακτηριστικό παράδειγμα τη θεωρία της ελεύθερης πτώσης των σωμάτων με την οποία ο Γαλιλαίος (και η ανθρωπότητα) απέρριψε τις από την αρχαιότητα επικρατούσες αριστοτελικές θέσεις (Boero et all, 1997).

3.3.1 Θεωρητική τεκμηρίωση της διδακτικής πρότασης

Οι ερευνητές, διαπιστώνουν ένα χάσμα ανάμεσα στον τρόπο που εκφράζονται οι μαθητές και τις «επίσημες» διατυπώσεις των θεωρητικών γνώσεων δηλαδή, προκειμένου για τα μαθηματικά, την αλγεβρική γλώσσα, τα θεωρήματα, και τα μοντέλα των πραγματικών και των κοινωνικών φαινομένων (Boero et al, 1997). Ανάλογο χάσμα υπάρχει μεταξύ του αυθόρμητου τρόπου που οι μαθητές προσλαμβάνουν καινούριες γνώσεις και της ανάπτυξης μιας θεωρίας με την παραγωγική μέθοδο καθώς και μεταξύ της διαίσθησης-ενόρασης των μαθητών και του μη ενορατικού περιεχόμενου των θεωριών. Ισχυρίζονται οι ερευνητές ότι ούτε με τις παραδοσιακές ούτε με κονστρουκτιβιστικές μεθόδους διδασκαλίας είναι δυνατόν να γεφυρωθούν αυτά τα χάσματα (Boero et al, 1997).

Το *ΠΦΑ* βασίζεται στην διάκριση του Vygotskij μεταξύ κοινής (καθημερινής) γνώσης και επιστημονικής γνώσης καθώς και στην «*φωνή*», με το νόημα το οποίο ο Bachtin[84] προσέδωσε στον όρο αυτό.

[83] Το *echoes* στην ονομασία της διδακτικής πρότασης είναι μάλλον πληθυντικός. Επειδή το ουσιαστικό *ηχώ* δεν έχει πληθυντικό, προτιμήθηκε το συνώνυμό του στον πληθυντικό. Αλλά όπου δεν απαιτείται πληθυντικός διατηρήθηκε το *ηχώ*, για να παραμείνει καλύτερη επαφή με την πρωτότυπη ιδέα της διδακτικής πρότασης.

[84] Ο Μιχαήλ Μπαχτίν, Ρώσος θεωρητικός της λογοτεχνίας και φιλόσοφος, γεννήθηκε το 1895 στο Οριόλ. Τα πρώτα έργα του ήταν φιλοσοφικές μελέτες που δημοσιεύτηκαν κατά τη δεκαετία του 1920.

Μερικές λεκτικές ή μη λεκτικές εκφράσεις (ιδιαίτερα εκείνες που παρήχθησαν από επιστήμονες του παρελθόντος) αντιπροσωπεύουν με πυκνό και επικοινωνιακό τρόπο σημαντικά βήματα στην εξέλιξη των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών. Με αναφορά στον Bachtin και στον Wertsch[85], καλούμε αυτές τις εκφράσεις «φωνές». (Boero et al, 1998)

Η πρωτότυπη ιδέα των ερευνητών είναι, προτείνοντας κατάλληλα έργα, να οδηγήσουν τους μαθητές να βρουν συνδέσεις μεταξύ της «*φωνής*» και των δικών τους αντιλήψεων, ερμηνειών και εμπειριών μέσω των αισθήσεων, δηλαδή να παραγάγουν μία «*ηχώ*» στις διατυπώσεις, τους ισχυρισμούς και τα επιχειρήματα της «*φωνής»* (Boero et all, 1997).

3.3.2 Ο Σωκράτης ως *φωνή*

Αργότερα το *ΠΦΑ* εξελίχθηκε ως διδακτική πρόταση ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί με σκοπό το ξεπέρασμα των *διδακτικών εμποδίων*, ιδιαίτερα στα Μαθηματικά (Boero et all, 1999). Το κλασικό παράδειγμα εσφαλμένης αναλογικής σκέψης, το μάθημα του διπλασιασμού του τετραγώνου από τον πλατωνικό διάλογο *Μένων*, χρησιμοποίησαν οι ερευνητές ως ερευνητικό εργαλείο στο διδακτικό τους πείραμα για τη διερεύνηση της νέας εξελιγμένης διδακτικής τους πρότασης.

Αποφάσισαν να αγνοήσουν τη *θεωρία της ανάμνησης*, παραδεχόμενοι ότι μ’ αυτόν τον τρόπο τραυματίζουν την ιστορική πηγή, ως έναν αναπόφευκτο συμβιβασμό για να μπορέσουν να τη χρησιμοποιήσουν στη διδακτική τους προσέγγιση (Boero et al, 1999, σ.809).

Στο διδακτικό πείραμα συμμετείχαν 5 τμήματα της πέμπτης Τάξης και 2 τμήματα της έβδομης Τάξης, σύνολο 114 μαθητές. Οι μαθητές είχαν διδαχτεί την έννοια του εμβαδού και μπορούσαν να υπολογίσουν το εμβαδό τετραγώνου.

Διαβάσανε το κείμενο του επίμαχου αποσπάσματος του διαλόγου *Μένων* και με τη βοήθεια του δασκάλου επισημάνανε τρεις φάσεις στην εξέλιξη του διαλόγου με τον δούλο: (α) Ο Σωκράτης θέτει το πρόβλημα, ο δούλος απαντάει και ο Σωκράτης αντικρούει την απάντηση, με βάση το σχήμα. (β) Ο δούλος παρακινείται για δεύτερη απάντηση, αντικρούεται από τον Σωκράτη, ο δούλος καταλαβαίνει μεν ότι η λύση είναι μικρότερη από 3 μέτρα αλλά δεν μπορεί να συνεχίσει. Το σχόλιο του Σωκράτη

Το 1929 δημοσιεύτηκε το βιβλίο του *Ζητήματα της ποιητικής του Ντοστογιέφσκι*, το πρώτο μείζον έργο του, που είλκυσε αμέσως την προσοχή. Την ίδια χρονιά όμως συλλαμβάνεται και καταδικάζεται σε δεκαετή απομάκρυνση από τη Μόσχα.
Ο Μπαχτίν θεωρείται σήμερα ένας από τους κορυφαίους στοχαστές του 20ού αιώνα.
Πληροφορίες ανακτημένες από https://www.cup.gr/people/mpachtin-michail/

[85] Wertsch, J. V, 1991. *Voices of the Mind.* Wheatsheaf, Harvester.

είναι ότι από αυτήν τη στιγμή ο δούλος μπορεί να μάθει. (γ) Ο Σωκράτης οδηγεί τον δούλο στη λύση. Παράλληλα συζητήσανε ποιο είναι το λάθος του δούλου και γιατί το διαπράττει (εσφαλμένη γραμμική σκέψη).

Στη συνέχεια ο δάσκαλος δίνει στους μαθητές, ως παραδείγματα, μερικά λάθη που κάνουν μαθητές και θα μπορούσαν να είναι αντικείμενα ενός παρόμοιου διαλόγου και τους καλεί να προτείνουν κι αυτοί, κατά την εμπειρία τους, συνηθισμένα λάθη που κάνουν οι μαθητές.

Έτσι, προτείνονται από τους μαθητές μια σειρά από συνηθισμένα λάθη όπως π.χ. ότι το αποτέλεσμα της διαίρεσης είναι μικρότερο από τον διαιρετέο. Καλούνται οι μαθητές, με την καθοδήγηση του δασκάλου να βρούνε επιχειρήματα για να δικαιολογήσουν γιατί είναι λάθος ο ισχυρισμός, βρίσκουνε επιμέρους λύσεις και καταλήγουν σε γενίκευση. Έτσι δημιουργείται το υπόβαθρο πάνω στο οποίο θα βασιστεί η δημιουργία της *ηχούς*: Οι μαθητές πρέπει να παραγάγουν έναν σωκρατικό διάλογο (όπως του Σωκράτη με τον δούλο, με βάση τις τρεις φάσεις που παραπάνω εκτέθηκαν) με θέμα το εν προκειμένω λάθος, μεταξύ του Σωκράτη και του μαθητή, που να οδηγεί τον μαθητή στην οριστικά υπέρβασή του με επιστέγασμα μάλιστα τη διατύπωση ενός γενικευμένου συμπεράσματος πότε το πηλίκο είναι μικρότερο, πότε είναι ίσο και πότε είναι μεγαλύτερο από τον διαιρετέο. Στο τέλος συζητούν – συγκρίνουν τα διάφορα έργα των μαθητών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Η *μαιευτική μέθοδος* του Σωκράτη είναι «πεπλεγμένη» με τη *σωκρατική διαλεκτική*. Για το θέμα της δυσκολίας διάκρισης *διαλεκτικής* και *μαιευτικής μεθόδου* αναφέρθηκε στην Εισαγωγή ότι η *διαλεκτική μέθοδος* περιλαμβάνει τη σταδιακή αναίρεση των θέσεων του συνομιλητή και κατόπιν την επίσης σταδιακή εξαγωγή συμπερασμάτων, με βασικό χαρακτηριστικό όλης αυτής της διαδικασίας ότι ο Σωκράτης δεν διατυπώνει τα επιμέρους και τα τελικά συμπεράσματα αλλά οδηγεί τον συνομιλητή ώστε ο ίδιος, με βάση τις προϋπάρχουσες γνώσεις του, να καταλήξει σε αυτά ως μία νέα προσέγγιση της αλήθειας. Είναι προφανές ότι αυτό το βασικό χαρακτηριστικό της *διαλεκτικής μεθόδου* που μόλις προαναφέρθηκε είναι μία περιγραφή της *μαιευτικής μεθόδου*.

Από τα ευρήματα της έρευνας που έχουν παρουσιαστεί στα προηγούμενα κεφάλαια της εργασίας αυτής έγινε φανερό ότι όσο πιο ευρεία εποπτεία έχει κανείς στο έργο του Πλάτωνα τόσο καλύτερα κατανοεί ότι το απόσπασμα του διαλόγου *Μένων* με τη διδασκαλία του Σωκράτη στον Δούλο αποτελεί μοντέλο διδασκαλίας που βασίζεται στον διάλογο δάσκαλου – μαθητή όπου ο μαθητής αναλαμβάνει να βρει μόνος του τις απαντήσεις στα ερωτήματα του δασκάλου. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα της εργασίας της Fernandez η οποία από τη μελέτη – μεμονωμένα – του αποσπάσματος, το απορρίπτει ως διδακτική πρόταση· ενώ όταν το εντάσσει στον όλο διάλογο *Μένων*, διαπιστώνει ότι μπορεί να αποτελέσει διδακτικό μοντέλο, αρκεί να συμπεριληφθούν και διδακτικά στοιχεία από τον διάλογο του Σωκράτη με τον Μένωνα.

Στη βιβλιογραφία είναι κοινός τόπος ότι η διδασκαλία του Σωκράτη, άρα και η εφαρμογή της μαιευτικής μεθόδου του και τα θετικά αποτελέσματά της, είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με τον προσωπικό του βίο, με τη στάση ζωής του. Μάλιστα, ο Weierstrass θεωρεί ότι «όποιος θέλει να διδάξει με τον τρόπο του Σωκράτη οφείλει να φέρει μέσα του και κάτι από το πνεύμα του Σωκράτη».

Το μάθημα, λοιπόν, του διπλασιασμού του τετραγώνου το έχουμε ως παράδειγμα της διδακτικής μεθόδου του Σωκράτη ενώ οι πλατωνικοί διάλογοι, με τη σωκρατική διδασκαλία, είναι γεμάτοι από αξιοποιήσιμα στοιχεία στη σύγχρονη διδασκαλία των μαθηματικών.

Η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση αναπαράγει τη διδακτική μέθοδο του Σωκράτη στις σύγχρονες διδακτικές συνθήκες. Ενδεικτική είναι η αφιέρωση ολόκληρου του 5ου κεφαλαίου του βασικού έργου του Freudenthal *Mathematics as an Educational Task* στη *σωκρατική μέθοδο (The Socratic Method).* Αντίθετα, η ασυμβατότητα της Θεωρίας των Διδακτικών Καταστάσεων με τη *μαιευτική μέθοδο* φέρεται να εδράζεται στη θεωρούμενη ως θεμελιώδη επιστημολογική διαφορά μεταξύ της γνώσης ως προσαρμογή σε α-διδακτική κατάσταση και της γνώσης ως *ανάμνηση*.

Οι εμπειρικές έρευνες που αποτέλεσαν αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας έδειξαν τα θετικά αποτελέσματα της εφαρμογής της μαιευτικής μεθόδου όμως στα περιορισμένα πλαίσια μέσα στα οποία κάθε φορά διενεργήθηκαν.

Τα ερωτήματα που τέθηκαν στην εισαγωγή αυτής της έρευνας είναι τα εξής:

1. Πώς συνδέεται η μαιευτική μέθοδος που εφαρμόζει ο Σωκράτης στον διάλογο Μένων με τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών τον 4ο π.Χ. αιώνα.

2. Ποιες όψεις της μαιευτικής μεθόδου του Σωκράτη είναι συμβατές με τις σύγχρονες αντιλήψεις για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών.

3. Πώς μπορεί να οργανωθεί η διδασκαλία σε μία σύγχρονη τάξη των μαθηματικών κατά το πρότυπο της μαιευτικής μεθόδου.

Όσον αφορά στο 1^{ο} ερευνητικό ερώτημα, από την βιβλιογραφική έρευνα προκύπτουν στοιχεία που επιτρέπουν τη σύνδεση της μαιευτικής μεθόδου που εφαρμόζει ο Σωκράτης με τις μαθηματικές γνώσεις, τη διδασκαλία και τη μάθησή τους τον 4^{ο} π.Χ. αιώνα: Ο Σωκράτης γνωρίζει ότι η πλευρά και η διαγώνιος τετραγώνου δεν έχουν κοινό μέτρο, αφού δεν αφήνει τον δούλο μετά τη δεύτερη εσφαλμένη «λύση» να συνεχίσει με προσεγγίσεις της λύσης αλλά αλλάζει τη μορφή του ζητούμενου· από ποια πλευρά κατασκευάζεται το διπλάσιο τετράγωνο. Γνωρίζει φυσικά και τις άλλες ιδιότητες του τετραγώνου, τον ορισμό, το ότι η διαγώνιος το χωρίζει σε δύο ίσα τρίγωνα. Γνωρίζει το άθροισμα των γωνιών τριγώνου και βέβαια την ισότητα των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου. Είναι σε θέση να αποδείξει ότι οι γωνίες του τελικού τετραπλεύρου με διπλάσιο εμβαδόν είναι ορθές, ως άθροισμα δύο μισών ορθών γωνιών. Για αυτό απευθυνόμενος στον Μένωνα λέει ότι αν συνεχίσει κανείς να κάνει κατάλληλες ερωτήσεις στον δούλο, αυτός θα αποκτήσει γνώση όλης της σχετικής με το πρόβλημα Γεωμετρίας, θα μετατρέψει δηλαδή την *ορθή δόξα* που απέκτησε με την *ανάμνηση* σε *επιστήμη*.

Δεν είναι γνωστό αν ο Σωκράτης δίδασκε και μαθηματικά, μάλλον όχι. Η διδασκαλία του Σωκράτη δεν ήταν μετάδοση έτοιμων δικών του γνώσεων που ο μαθητής τις οικειοποιείται απομνημονεύοντάς τες. Ο Σωκράτης, έστω με τον τρόπο των ερωτήσεων, αλλά και με άλλα μέσα, όμως – όπως επισημαίνει ο Πετράκης – με απαραίτητη προϋπόθεση την προσωπική προσπάθεια του μαθητή, οδηγούσε τον μαθητή στην κατάκτηση της γνώσης. Χωρίς αμοιβή.

Στον διάλογο *Μένων* (75b), ο Μένων ζητάει από τον Σωκράτη έτοιμη γνώση: «*ΜΕΝ. Όχι εγώ, αλλά εσύ Σωκράτη να απαντήσεις.*» Προφανώς είναι συνηθισμένος από τη διδακτική μέθοδο των άλλων, εκτός του Σωκράτη, δασκάλων του. Το συμπέρασμα που μπορεί να καταλήξει κανείς είναι ότι εκείνοι που δίδασκαν μαθηματικά, δεν τα δίδασκαν με τον τρόπο του Σωκράτη.

Σχετικά με το 2ο ερευνητικό ερώτημα, όπως σημειώθηκε στην Εισαγωγή η *μαιευτική μέθοδος* θεμελιώνεται στην *ανάμνηση* και αυτή με τη σειρά της στην πλατωνική *θεωρία των ιδεών*. Η *ανάμνηση*, η σωκρατική-πλατωνική θεωρία για τον τρόπο απόκτησης της γνώσης, μπορεί απλά να αγνοηθεί. Αυτό δηλώνουν ότι έπραξαν οι Boero et al (1999) και σε τίποτα δεν τους εμπόδισε να πειραματισθούν με το *Παιχνίδι Φωνές κι Αντίλαλοι*. Μπορεί επίσης να απορριφθεί η *ανάμνηση* και με την επιχειρηματολογία του Weierstrass ότι αφού το Σχολείο έχει ως καθήκον να δείξει στον μαθητή την αυτόνομη χρήση των δυνάμεών του, δεν χρειάζεται καμία *ανάμνηση* ή πάλι μπορεί να γίνει αποδεκτή η εκδοχή του Freudenthal για την *ανάμνηση*· όχι ανάκληση στη μνήμη γνώσεων που η ψυχή κατέχει λόγω της προϋπαρξής της αλλά εκ νέου ανακάλυψη των γνώσεων που η ανθρωπότητα ιστορικά έχει ανακαλύψει.

Η οντολογία των μαθηματικών εννοιών δεν είναι προϋπόθεση για τη διδακτική πρακτική, παρόλο που βολεύει στο μυαλό όλων όσοι ασχολούνται με τα Μαθηματικά, τα μαθηματικά αντικείμενα, όπως οι πλατωνικές *ιδέες*, να υπάρχουν ανεξάρτητα από το αν υπάρχει κάποιος που τις γνωρίζει. Στα πλαίσια της διδασκαλίας – μάθησης είναι πιο βολικό για το μυαλό των ασχολούμενων με τα Μαθηματικά να ανακαλύπτονται τα μαθηματικά αντικείμενα, οι μαθηματικές έννοιες· που προϋπάρχουν.

Εκτός από τα παραπάνω δύο καθαρά φιλοσοφικά θέματα, πολλά άλλα χαρακτηριστικά της μαιευτικής μεθόδου είναι συμβατά με τις σύγχρονες αντιλήψεις για την διδασκαλία και την μάθηση των μαθηματικών:

– Όλα τα, σύμφωνα με τον Weierstrass, εξωτερικά χαρακτηριστικά της σωκρατικής μεθόδου (με εξαίρεση τη *σωκρατική ειρωνεία*· αυτή όπως υποδεικνύει ο Weierstrass ταιριάζει μόνο στον Σωκράτη):

Ο δάσκαλος κατ' αρχάς τεμαχίζει δεόντως την έννοια που θέλει να διδάξει, ανάλογα με το πώς μπορεί να δημιουργηθεί η έννοια στη ψυχή του μαθητή. Μετά απευθύνει τις ερωτήσεις, ξέροντας για τον καθένα τι μπορεί, έτσι ώστε μόνο με τις δικές του δυνάμεις να μπορεί να απαντήσει.

Όταν δίνεται μία όχι σωστή απάντηση, ο δάσκαλος δεν τη διορθώνει αμέσως αλλά με τις ερωτήσεις του κατευθύνει τον μαθητή μόνος του να τη διορθώσει[86].

Η τέχνη του δάσκαλου είναι να παρακολουθεί την ακολουθία των σκέψεων του μαθητή και να ξέρει να κάνει τις ερωτήσεις του στην κατάλληλη στιγμή. Δεν χάνει από τα μάτια του τον τελικό του στόχο, όταν διορθώνει λάθος απαντήσεις, αλλά υποχωρεί ανάλογα με την περίσταση.

Ο Σωκράτης ήταν μάστορας στις ερωτήσεις που σκοπό έχουν να παράγουν συγκεκριμένες απαντήσεις.

Ο τρόπος του Σωκράτη είναι τέτοιος, ώστε οι μαθητές να παραμένουν ψύχραιμοι και ήρεμοι.

– Η συμπεριφορά του Σωκράτη που επιτρέπει στον μαθητή να μη διστάζει και να εκφραστεί, όπως παρατηρεί ο Κανάκης ο οποίος, σε αντίθεση με τον Weierstrass, θεωρεί τη *σωκρατική ειρωνεία* ως μέσο για να δώσει θάρρος ο Σωκράτης στον μαθητή να εκφραστεί.

– Σε περίπτωση διχογνωμίας, και μεταξύ μαθητών, όπως με την πράξη του δίδαξε ο Σωκράτης, δεν έχει ως στόχο την επικράτησή του αλλά την αλήθεια· κατά την από κοινού αναζήτηση της αλήθειας οδηγός είναι ο *νους,* ο *λόγος*. Που σημαίνει ότι αν ο Α πει στον Β ότι έχει κάνει λάθος και οι δύο πρέπει να αναζητήσουν το σωστό άσχετα με το τι αρχικά υποστήριζε ο καθένας. Αυτό, που συμβαίνει χαρακτηριστικά στον διάλογο *Πρωταγόρας*.

– Ο Σωκράτης συζητούσε για την αρετή με ανθρώπους που είχαν ιδέα για την αρετή. Ακόμη και τον δούλο τον προετοιμάζει για τις ερωτήσεις που θα του κάνει

[86] Μία σύγχρονη εκδοχή αυτής της πτυχής της σωκρατικής μεθόδου είναι η οδήγηση του μαθητή σε γνωστική σύγκρουση για να ξεπεράσει ένα γνωστικό εμπόδιο.

εξασφαλίζοντας ότι ξέρει τα προκαταρκτικά· τι είναι τετράγωνο τι είναι μισό εμβαδό, τι είναι διπλάσιο εμβαδό κλπ. Δηλαδή να ερωτώνται οι μαθητές όταν εκτιμάται ότι θα μπορούσαν να απαντήσουν.

– Η στάση του Σωκράτη απέναντι στο λάθος των συνομιλητών είναι παράδειγμα για αυτούς (τους συνομιλητές) ανοχής της διαφορετικής γνώμης, του διαφορετικού ισχυρισμού ακόμη και εσφαλμένου ή έστω ανεπαρκούς.

– Η παροχή βοήθειας στον μαθητή να απαντήσει με τη μορφή παραδειγμάτων κατ' αναλογίαν, όπως ο Σωκράτης[87]. Ενδεχομένως με απλούστευση της ερώτησης[88], σύμφωνα και με το «μοντέλο του Σωκράτη» του Φράγκου που παρατίθεται στην παράγραφο 3.1.2 και προβλέπει «*χαμήλωμα επιπέδου πληροφορίας*».

– Στο τέλος των χωρίς κατάληξη διαλόγων (των *απορητικών* διαλόγων) ο Σωκράτης αφήνει ανοιχτή την συνέχιση και έτσι δίνει στους συνομιλητές το κίνητρο να σκεφτούν, να ψάξουν μόνοι τους.

Τα παραπάνω στοιχεία της σωκρατικής μεθόδου όχι απλώς είναι συμβατά με τις σύγχρονες μεθόδους διδασκαλίας αλλά είναι και απαραίτητα γιατί όσο πιο αναγνωρίσιμα είναι στο μάθημα, τόσο πιο θετική θα είναι η στάση των μαθητών απέναντι στο μάθημα και τόσο πιο διατεθειμένοι θα είναι οι μαθητές να μην λυπηθούν τον κόπο και να αγωνιστούν να κατακτήσουν μαθηματικές γνώσεις και ικανότητες, που είναι και ο βασικός σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Ως ενισχυτικό των θετικών αποτελεσμάτων θα επενεργούσε, βέβαια, και η ύπαρξη στοιχείων από το πνεύμα του Σωκράτη στην προσωπικότητα του δασκάλου των Μαθηματικών· αυτό συνάδει με τον ισχυρισμό του Weierstrass ότι «όποιος θέλει να διδάξει με τον τρόπο του Σωκράτη οφείλει να φέρει μέσα του και κάτι από το πνεύμα του Σωκράτη».

Σε σχέση με το 3ο ερευνητικό ερώτημα, όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 2.1, ο Weierstrass περιορίζει την εφαρμοσιμότητα της μαιευτικής μεθόδου σε περιπτώσεις όπως «*συνέπειες μιας κύριας πρότασης*» ή για «*την επίλυση ποικίλων ασκήσεων*». Είναι λογικό να προστεθεί, σε συμφωνία με το πνεύμα του Weierstrass, και σε παραγωγή μιας πρότασης από άλλες όταν μας ενδιαφέρει η *αξιωματικοποίηση*, η τοπικά οργάνωση της θεωρίας.

---

[87] Ο Brousseau επισημαίνει ως διδακτικό ολίσθημα την *υπερβολική χρήση της αναλογίας*.
[88] Με κίνδυνο να παραχθεί το λεγόμενο *αποτέλεσμα «Topaze»* της Θεωρίας Διδακτικών Καταστάσεων.

Ο Φράγκος εφάρμοσε, με επιτυχία για τον σκοπό της έρευνάς του, τη μαιευτική μέθοδο με έναν μόνον μαθητή κάθε φορά και έθεσε, αφήνοντάς το ανοικτό, το ερώτημα· πώς θα μεταφερθεί η εφαρμογή της μαιευτικής μεθόδου στην αίθουσα. Το προς διερεύνηση ζητούμενο είναι κατά τον Φράγκο, να βρεθούν οι μηχανισμοί που θα διευκολύνουν την εκμαίευση συλλογισμών, απαραίτητων για την κατάκτηση των νέων εννοιών από τους μαθητές.

Ο Κανάκης εφάρμοσε τη μαιευτική μέθοδο σε τάξη ΣΤ΄ Δημοτικού και από τα πρωτόκολλα των διδασκαλιών του έχουμε παραστάσεις εφαρμογής της μεθόδου του σε αίθουσα. Ιδιαίτερα, όσον αφορά στα μαθηματικά, κατέληξε, εκτός των άλλων, στο συμπέρασμα ότι τα προβλήματα πρέπει να είναι εύκολα.

Η δραστηριότητα του Τραπεζανλίδη την οποία διαμόρφωσε σύμφωνα με την αρχή της καθοδηγούμενης εκ νέου επινόησης διαθέτει τα χαρακτηριστικά της μαιευτικής μεθόδου, όπως έχει επισημανθεί. Παράλληλα όμως μπορεί να αποτελέσει και μία απάντηση στις παραπάνω – βάσιμες – αιτιάσεις για την εφαρμοσιμότητα της μαιευτικής μεθόδου στις σύγχρονες Τάξεις αφού:

- Το θέμα της, ο ορισμός της εφαπτομένης παραβολής, είναι σύνθετο και απαιτητικό και έτσι υπερβαίνει το συμπέρασμα του Κανάκη ότι τα μαθηματικά θέματα πρέπει να είναι απλά. Όπως επίσης υπερβαίνει και την υπόδειξη του Weierstrass για το περιορισμένο του πεδίου εφαρμογής της μαιευτικής μεθόδου.
- Απευθύνεται στην Τάξη (η Τάξη οργανώνεται για να δουλέψουν οι μαθητές σε ομάδες) και ο μηχανισμός παροχής βοήθειας στους μαθητές που διευκολύνει την εκμαίευση των συλλογισμών, το θέμα που θέτει ο Φράγκος δηλαδή, είναι τα σε νοητικό πείραμα κατάλληλα προετοιμασμένα φύλλα εργασίας. Βέβαια με την παρουσία και συνδρομή του καλά καταρτισμένου και κατάλληλα προετοιμασμένου καθηγητή.

Από τα παραπάνω συνάγεται ότι η διδακτική πρόταση του Τραπεζανλίδη μπορεί βέβαια να αποτελέσει ένα παράδειγμα οργάνωσης της διδασκαλίας σε μία σύγχρονη Τάξη των Μαθηματικών κατά το πρότυπο της μαιευτικής μεθόδου.

Όμως αναφύονται νέα ερωτήματα προς διερεύνηση: Μπορούν δραστηριότητες όπως η παραπάνω να καταστούν η κυρίαρχη πρακτική στην σύγχρονη Τάξη των μαθηματικών; Είναι δυνατόν, χωρίς τη διδακτική μηχανική των φύλλων εργασίας, να οργανωθεί διδασκαλία κατά το πρότυπο του Σωκράτη και να παρασχεθεί βοήθεια στο σύνολο των μαθητών μιας Τάξης προς εκμαίευση συλλογισμών; Εναλλακτικά, πώς μπορεί να οργανωθεί η διδασκαλία;

Συμβολή στην απάντηση των παραπάνω ερωτημάτων θα ήταν δύο πιθανές μελλοντικές ερευνητικές εργασίες: Μία κριτική μετάφραση της εργασίας του Weierstrass (2013), η οποία εκτός των άλλων θα διερευνούσε και την ενδεχόμενη συνάφεια των ιδεών του Weierstrass για τον χαρακτήρα μιας αποτελεσματικής διδασκαλίας με τις ιδέες του Freudenthal για την διδακτική του νοητικού πειράματος και την αρχή της εκ νέου επινόησης. Και μία εργασία για τη (νεο)σωκρατική διεύθυνση συζήτησης (υπαινιγμός της οποίας είναι το σχόλιο του Loska στην συζήτηση μεταξύ του Σωκράτη και των δύο Στρατηγών στον διάλογο *Λάχης* ότι πρόκειται για υπόδειγμα σωκρατικού διαλόγου με περισσότερους από έναν συνομιλητές)· ίσως μία χρήσιμη δεξιότητα για τον καθηγητή Μαθηματικών.-

Βιβλιογραφία στην ελληνική γλώσσα

Αναπολιτάνος, Δ. (2009). *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Νεφέλη.

Βαϊνάς, Κ. (1988). Η Μαιευτική Μέθοδος Διδασκαλίας στη Μαθηματική Εκπαίδευση των Παιδιών. *Διάσταση, 1988* (3-4). Θεσσαλονίκη: ΕΜΕ Κεντρικής Μακεδονίας.

Γαγάτσης, Α. (1991). *Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Εκδοτικός Οίκος Αδελφών Κυριακίδη.

Γαγάτσης,Α., Λοΐζου, Α., Στυλιανού Μ. & Τόφαρου Σ. (2006). *Διδακτικό Συμβόλαιο και Μάθηση των Μαθηματικών.* Ανακοίνωση στο IX Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου. Λεμεσός. Ανακτήθηκε από https://opencourses.uoa.gr/modules/document/file.php/MATH119/Διδακτικό%20Πακέτο/Μάθημα%208/Didaktiko%20symbolaio%20Gagatsis%20et%20al..pdf

Ζευγώλης, Γ.Δ. (1980). *Ξενοφώντα, Κύρου Ανάβαση - Η Κάθοδος των Μυρίων*, Α΄ Γυμνασίου. Αθήνα: ΟΕΔΒ. Ανακτήθηκε από http://e-library.iep.edu.gr/iep/collection/browse/item.html?code=01-19817&tab=01

Θωμαΐδης, Ι. (2021). *Θεωρητικό Πλαίσιο του Μαθήματος «Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους»*. ΠΔΜ, ΔΠΜΣ «Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών». Θεσσαλονίκη.

Καλδρυμίδου, Μ. & Τζεκάκη, Μ. (1995). *Ιστορία, Επιστημολογία και Διδασκαλία των Μαθηματικών: Μία Εναλλακτική Προσέγγιση του Νοήματος των Μαθηματικών* στο Πρακτικά 12[ου] Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, 409-416. Ηράκλειο: ΕΜΕ.

Κάλφας, Β. (2016). *Αρχαία Ελληνική Φιλοσοφία: από τον Θαλή στον Αριστοτέλη*. Απομαγνητοφωνημένα μαθήματα που βιντεοσκοπήθηκαν στο στούντιο Mathesis. Ανακτήθηκε από https://mathesis.cup.gr/assets/courseware/v1/3c833602b3bae766428fb9765437ffb8/c4x/Philosophy/PHL1/asset/GRPHL_WT3.pdf

Κανάκης, Ι. (1990). *Η Σωκρατική Στρατηγική Διδασκαλίας – Μάθησης*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη.

Κοπιδάκης, Μ., Πατρικίου, Ε., Λυπουρλής, Δ., και Μωραΐτου, Δ. (2020). *Αρχαία Ελληνικά - Φιλοσοφικός Λόγος*, Γ΄ Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Ανθρωπιστικών Σπουδών. Αθήνα: ΙΤΥΕ ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ

Κόσυβας, Γ., (2018). Αριθμητική Προσέγγιση ή Γεωμετρική Ακρίβεια; Αυθόρμητες Αντιλήψεις Δωδεκάχρωνων που Αγγίζουν την Αρρητότητα. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, 2018 (7), 9-48. ΕΝΕΔΙΜ.

Λαλιώτης, Σ. (2020). *Το ον της Γνώσης και η Γνώση του όντος στον Πλάτωνα*. Διδακτορική Διατριβή. Ανακτήθηκε από https://freader.ekt.gr/eadd/index.php?doc=49395&lang=el

Λεμονίδης, Χ., (2021). *Ρεαλιστικά Μαθηματικά*. Διαφάνειες του μαθήματος Θεωρητικά και Ερευνητικά Δεδομένα Διδακτικής των Μαθηματικών. ΠΔΜ, ΔΠΜΣ «Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών». Θεσσαλονίκη.

Μαρκέτος, Α. (1990). Για μια θεωρία της διδασκαλίας που τείνει να γίνει επιστήμη. *Διάσταση, 1990* (1-2). 44-56.

Παπαλεξίου, Κ. (2015). *Πλάτων Θεαίτητος*. Θεσσαλονίκη: Ζήτρος. Ανακτήθηκε από https://philpapers.org/archive/PAPPTI.pdf

Πετράκης, Ι. (2016). *Πλάτων Μένων*. Αθήνα: Βιβλιοπωλείον της ΕΣΤΙΑΣ.

Πελεγρίνης, Θ. (1999). *Αρχές Φιλοσοφίας*. Γ΄ Ενιαίου Λυκείου Θεωρητικής Κατεύθυνσης. Αθήνα: ΟΕΔΒ

Σαμαράς, Θ. (2007). *Πλάτων Κρίτων*. Θεσσαλονίκη: Ζήτρος. Ανακτήθηκε από http://repository.edulll.gr/edulll/retrieve/6983/1739_crito.pdf

Τατάκης, Β. (1970). *Ο Σωκράτης*. Αθήνα: Αστήρ.

Τατάκης, Β. (1990). *Λάχης, Μένων, Παρμενίδης*. Αθήνα: Ζαχαρόπουλος.

Τετενές, Ν. (χ.χ.). *Χαρμίδης, Εισαγωγή Μετάφραση Σχόλια*. Αθήνα: Ζαχαρόπουλος. Ανακτήθηκε από http://repository.edulll.gr/edulll/retrieve/6981/1732_charmides.pdf

Τζεκάκη, Μ. (2021). *Διδακτικές προσεγγίσεις στη Μαθηματική Εκπαίδευση*. Διαφάνειες του μαθήματος Θεωρητικά και Ερευνητικά Δεδομένα Διδακτικής των Μαθηματικών. ΠΔΜ, ΔΠΜΣ «Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών». Θεσσαλονίκη.

Τζουβάρας, Θ. (1993). Αλγοριθμικά Μαθηματικά-Εννοιολογικά Μαθηματικά. Μια κρίσιμη διάκριση. *Διάσταση, 1993* (1-2). 5-38. Θεσσαλονίκη: ΕΜΕ Κεντρικής Μακεδονίας.

Τραπεζανλίδης, Θ. (2020). *Διδασκαλία και μάθηση της έννοιας της εφαπτομένης: Μετάβαση από τη γεωμετρική στην αναλυτική αντίληψη*. Διπλωματική Εργασία. Ανακτήθηκε από https://dspace.uowm.gr/xmlui/handle/123456789/1818

Φράγκος, Χ. (1993). *Παιδαγωγικές Έρευνες και Εφαρμογές*. Θεσσαλονίκη: Univercity Studio Press.

Brousseau, G. (1991). Θεμέλια και Μέθοδοι της Διδακτικής των Μαθηματικών. Στο Αθ. Γαγάτσης, *Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών* (σ.61-134). Θεσσαλονίκη: Εκδοτικός Οίκος Αδελφών Κυριακίδη.

Guthrie, W.K.C (1990). *Σωκράτης* (Τ. Νικολαΐδης, μετ.). Αθήνα: ΜΙΕΤ

Guthrie, W.K.C. (1993). *Οι Έλληνες Φιλόσοφοι, Από τον Θαλή ως τον Αριστοτέλη* (Αντ. Σακελαρίου, Μετ.). Αθήνα: Εκδόσεις Δημ. Ν. Παπαδήμα.

Veggeti, M. (2000). *Ιστορία της Αρχαίας Φιλοσοφίας* (Γ.Α. Δημητρακόπουλος, Μετ.). Αθήνα: Εκδοτικός Οίκος Τραυλός.

Ξενόγλωσση

Boero, P., & Pedemonte, B. (1997). *Approaching Theoretical Knowledge Through Voices and Echoes: A Vygotskian Perspective.* Ανακτήθηκε από https://www.researchgate.net/publication/239864337_APPROACHING_THEORETICAL_KNOWLEDGE_THROUGH_VOICES_AND_ECHOES_A_VYGOTSKIAN_PERSPECTIVE

Boero, P., Pedemonte, B., Robotti, E. & Chiappini, G. (1998). The" Voices and Echoes Game" and the interiorization of crucial aspects of theoretical knowledge in a Vygotskian perspective: Ongoing research. Στο Olivier,A., Newstead,K., (ed), *Proceedings of the International Group for the PME* (22nd, Stellenbosch). Volume 2, p2-120. Ανακτήθηκε από https://www.researchgate.net/publication/233986644_The_Voices_and_Echoes_Game_and_the_interiorization_of_crucial_aspects_of_theoretical_knowledge_in_a_Vygotskian_perspective_Ongoing_research

Boero, P., Garuti, R. & Chiappini, G. (1999). Bringing the voice of Plato in the classroom to detect and overcome conceptual mistakes. PME CONFERENCE. 3. 3-9. Ανακτήθηκε από https://www.researchgate.net/publication/233986646_Bringing_the_voice_of_Plato_in_the_classroom_to_detect_and_overcome_conceptual_mistakes

Brousseau, G. (1997). *La Théorie des Situations Didactiques.* Σημειώσεις μαθήματος με την ευκαιρία της απονομής του τίτλου του επίτιμου διδάκτορα στον συγγραφέα από το πανεπιστήμιο του Montréal. Ανακτήθηκε από http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/06/MONTREAL-archives-GB1.pdf

De Bock, D., Van Dooren, W. & Janssens, D. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics* (50). 311–334. https://doi.org/10.1023/A:1021205413749

Garuti, R., Boero, P., & Chiappini, G. (1999). Bringing the voice of Plato in the classroom to detect and overcome conceptual mistakes. Στο Zaslavsky, Orit, (ed), *Proceedings of the International Group for the PME* (23nd, Haifa). Volume 3 p.3-9.

Ανακτήθηκε από http://didmat.dima.unige.it/progetti/COFIN/biblio/art_boero/GARUTI&C_PME_XXIII.pdf

Fernandez, E. (1994). A Kinder, Gentler Socrates: Conveying New Images of Mathematics. *For the Learning of Mathematics,* Vol. 14, No. 3 (Nov., 1994), pp. 43-47. Ανακτήθηκε από http://www.jstor.org/stable/40248123 .

Freudenthal, H. (1963 A). Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques. *L'Enseignement Mathématique,* 1963 (9), 28-44. Ανακτήθηκε από https://www.e-periodica.ch/digbib/view?pid=ens-001%3A1963%3A9#122

Freudenthal, H. (1963 B). Was ist axiomatic und welchem Bildungswert kann sie haben. *Der Mathematikunterricht,* 1963 (4), 5-29. Αποσπάσματα του άρθρου, ανακτημένα από https://www.math.uni-frankfurt.de/~fuehrer/Schriften/1997_PdMU.pdf

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics,* 1973 (3), 413–435 https://doi.org/10.1007/BF00302305

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Klett.

Freudenthal, H. (1978). *Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht*. München: R. Oldenbourg Verlag.

Freudenthal, H. (1986). Book reviews: Yves Chevallard, La Transposition Didactique du Savoir Savant au Savoir Enseigné, Editions Pensée Sauvage, Grenoble 1985, 127 pp. *Educational Studies in Mathematics,* 17, 323-327. http://www.jstor.org/stable/3482232

La Bastide-van Gemert, S. (2015). *All Positive Action Starts with Criticism. Hans Freudenthal and the Didactics of Mathematics*. Springer.

Loska, R. (1995). *Lehren ohne Belehrung. Leonard Nelsons neosokratische Methode der Gesprächsführung.* Bad Heilbrunn. Κεφάλαιο 5. Vergleich der sokratischen Methode bei Sokrates und Nelson. Ανακτήθηκε από

http://www3.math.uni-paderborn.de/~hartmut/Sokratik/Loska_Kapitel5.pdf

Nola, R. (1997). Constructivism in Science and Science Education: A Philosophical Critique. *Science & Education*, 1997 (6), 55–83. https://doi.org/10.1023/A:1008670030605

Van den Heuvel-Panhuizen, M., Drijvers, P. (2020). Realistic Mathematics Education. In: Lerman, S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_170

Weierstrass, K. (2013). Über die Sokratische Lehrmethode und deren Anwendbarkeit beim Schulunterrichte. In J. Knoblauch (Ed.), *Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission* (Cambridge Library Collection - Mathematics, pp. 315-330). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781139567886.023

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Το πρωτόκολλο της 3ης διδακτικής ώρας, της εμπειρικής διερεύνησης του Κανάκη (1990).

3. Τρίτη διδακτική ώρα

Τετάρτη, 5-10-1983 Θέμα: Διπλασιασμός του τετραγώνου

Ο Δάσκαλος δείχνει στους μαθητές ένα τετράγωνο από χαρτόνι και ρωτά:

Ποιος ξέρει να μου πει πώς ονομάζεται αυτό εδώ το γεωμετρικό σχήμα;

ΜΙΑ ΜΑΘ.: Τετράγωνο.

ΔΑΣΚ.: Ωραία! Μήπως ξέρει κανένας να μας πει ποιο γεωμετρικό σχήμα λέμε τετράγωνο;

ΜΙΑ ΜΑΘ.: Το σχήμα που έχει 4 ίσες γωνίες και 4 ίσες πλευρές.

ΕΝΑΣ ΜΑΘ.: (διορθώνει): 4 πλευρές ίσες και 4 γωνίες ορθές.

Όλοι οι μαθητές επιδοκιμάζουν.

Ένας μαθητής επαναλαμβάνει τον ορισμό του τετραγώνου.

ΔΑΣΚ.: Τι είναι μία ορθή γωνία;

ΕΝΑΣ ΜΑΘ.: Η γωνία που έχει άνοιγμα 90°.

ΔΑΣΚ.: Πολύ σωστά! Όταν λέμε πλευρά τι εννοούμε;

Ένας μαθητής σηκώνεται και τη δείχνει στο τετράγωνο.

ΔΑΣΚ.: (κατασκευάζει το τετράγωνο στον πίνακα και τραβά τις διαγωνίους του): Πώς ονομάζονται αυτές εδώ οι γραμμές;

ΜΙΑ ΜΑΘ.: Διαγώνιοι.

ΔΑΣΚ.: Τι είναι μεταξύ τους;

ΜΑΘ.: Ίσες σε μήκος.

ΔΑΣΚ.: Και κάθε διαγώνιος το χωρίζει το τετράγωνο σε …

ΜΑΘ.: Δύο ίσα τρίγωνα.

ΔΑΣΚ.: Σωστά! Λοιπόν έχουμε ένα τετράγωνο με μήκος πλευράς 2μ. Ποιος Μπορεί να μας πει, πόσο θα είναι το εμβαδόν του;

ΕΝΑΣ ΜΑΘ. (στον πίνακα): $Ε = α^2 = 2{\cdot}2 = 4$ τ.μ.

ΔΑΣΚ.: Ωραία! Έχομε, λοιπόν, αυτό εδώ το τετράγωνο με πλευρά 2 μ. και εμβαδόν 4 τ.μ. Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα άλλο τετράγωνο πιο μικρό ή πιο μεγάλο από αυτό;

ΜΑΘΗΤΕΣ: Ναι!

ΔΑΣΚ.: Μπορούμε να κατασκευάσουμε κι ένα άλλο που να έχει διπλάσιο εμβαδόν;

ΜΑΘΗΤΕΣ: Μάλιστα!

ΔΑΣΚ.: Πόσο θα είναι το εμβαδόν του;

ΕΝΑΣ ΜΑΘ.: Διπλάσιο, δηλαδή $2{\cdot}4 = 8$ τ.μ.

ΔΑΣΚ.: Σωστά! Τώρα. Αυτό το τετράγωνο έχει μήκος πλευράς 2μ. Μπορεί κανένας να μας πει, πόσο θα είναι το μήκος της πλευράς του διπλάσιου τετραγώνου; Σκεφτείτε όλοι!

ΜΑΘ. (σκέπτεται λίγο): Η πλευρά του θα είναι 4μ.

ΠΟΛΛΟΙ ΜΑΘ.: Ναι, σωστά!

ΔΑΣΚ.: Λες ότι η πλευρά του διπλάσιου τετραγώνου θα είναι 4μ.

ΜΑΘ.: Ναι.

ΔΑΣΚ.: Ας προεκτείνουμε, λοιπόν, την αριστερή πλευρά του αρχικού τετραγώνου κατά 2μ. προς τα πάνω και την κάτω πλευρά κατά 2μ. προς τα δεξιά. Τώρα τραβάμε παράλληλες προς αυτές. Έτσι σχηματίστηκε ένα νέο τετράγωνο με μήκος πλευράς 4μ.

(Προς τους μαθητές): Εσείς λέτε ότι αυτό το τετράγωνο είναι διπλάσιο του αρχικού.

ΕΝΑΣ ΜΑΘ.: Όχι. Είναι τετραπλάσιο.

ΔΑΣΚ.: (Προεκτείνει τις δύο άλλες πλευρές του αρχικού τετραγώνου. Έτσι σχηματίζονται 4 ίσα τετράγωνα με εμβαδόν 4τ.μ. το καθένα.): Όπως βλέπετε έχουμε 4 τετράγωνα x 4 τ.μ. = 16 τ.μ.

(Προς τον μαθ.): Βλέπεις; Δεν είναι, λοιπόν, το διπλάσιο, αλλά το ποσαπλάσιο;

ΜΑΘ.: Το τετραπλάσιο.

Οι μαθητές μορφάζουν, σιωπούν.

ΜΑΘ.: Το μήκος της πλευράς θα είναι 2μ.

ΔΑΣΚ.: Θα μπορούσε να είναι η πλευρά 2μ.;

ΕΝΑΣ ΜΑΘ.: Όχι. Γιατί 2·2 =4 τ.μ., δηλαδή ίσο με το αρχικό.

ΔΑΣΚ.: Λοιπόν. Το μήκος της πλευράς δεν μπορεί να είναι ούτε 2μ ούτε 4μ. Πόσο πρέπει τότε να είναι;

ΜΑΘ.: 3μ.

ΕΝΑΣ ΜΑΘ.: Όχι. Δεν γίνεται. 3·3 = 9 τ.μ.

ΑΛΛΟΣ ΜΑΘ.: Θα είναι 2,5 μ.

ΔΑΣΚ.: 2,5·2,5 = 6,25 τ.μ. Το εμβαδόν του διπλάσιου τετραγώνου, όμως, είναι 8τ.μ.

Οι μαθητές σιωπούν, συλλογίζονται, διστάζουν να μιλήσουν, απορούν.

ΕΝΑΣ ΜΑΘ.: Δε γίνεται.

Πολλοί μαθητές παρακαλούν τον δάσκαλο να τους βοηθήσει.

ΔΑΣΚ.: Κατασκευάζει στον πίνακα το αρχικό τετράγωνο με πλευρά 2μ., έπειτα το τετραπλάσιο και το χωρίζει σε 4 ίσα τετράγωνα.

(Στους μαθητές): Πόσες φορές μεγαλύτερο, από το αρχικό τετράγωνο είναι αυτό εδώ το μεγάλο;

ΜΑΘ.: Το τετραπλάσιο.

ΔΑΣΚ.: (Σύρει τη διαγώνιο του κάτω αριστερού τετραγώνου): Δε μοιράζει αυτή εδώ η διαγώνιος αυτό το τετράγωνο σε δύο ίσα τρίγωνα;

ΜΑΘ.: Ναι.

ΔΑΣΚ.: Πόσο είναι το εμβαδόν κάθε τριγώνου;

ΜΑΘ.: 4:2 = 2 τ.μ.

ΔΑΣΚ.: (Σύρει τις διαγωνίους και των υπόλοιπων τριών τετραγώνων. Έτσι προκύπτει ένα νέο τετράγωνο): Από πόσα τρίγωνα αποτελείται;

ΜΑΘ.: Από τέσσερα.

ΔΑΣΚ.: Πόσο θα είναι το εμβαδόν του;

ΜΑΘ: 8τ.μ.

ΔΑΣΚ.: Πόσες φορές είναι μεγαλύτερο από το αρχικό τετράγωνο είναι αυτό εδώ;

ΜΑΘ.: Διπλάσιο.

ΔΑΣΚ.: Και ποια είναι η πλευρά του;

ΜΑΘ.: Η διαγώνιος του αρχικού τετραγώνου.

ΔΑΣΚ.: Η διαγώνιος του αρχικού τετραγώνου είναι, όπως βλέπουμε, η πλευρά του διπλασίου του. Πώς μπορούμε, λοιπόν, να κατασκευάσουμε το διπλάσιο ενός τετραγώνου;

ΜΑΘ.: Κατασκευάζουμε ένα νέο τετράγωνο με μήκος πλευράς τη διαγώνιο του αρχικού.

ΔΑΣΚ.: Ωραία παιδιά! Τελειώσαμε για σήμερα. Γεια σας μέχρι την άλλη εβδομάδα. (Κανάκης, 1990, σ.98-100)