ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ- ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ - ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ – ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΉΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β΄ ΚΥΚΛΟΣ

Διπλωματική εργασία

Επαγγελματική γνώση των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για την διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών

του

Μήτρακα Νικόλαου
Α.Ε.Μ. 1099

Επιβλέπων: Σακονίδης Χαράλαμπος
Καθηγητής Δ.Π.Θ.

Εξεταστές: Πόταρη Δέσποινα
Καθηγήτρια Ε.Κ.Π.Α.
Ζωιτσάκος Σωτήριος
Δρ στη Διδακτική των Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α.

Φλώρινα, 5 Ιουνίου 2024

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες σε όλους εκείνους που συνέβαλαν καθοριστικά στην πραγματοποίηση αυτής της εργασίας.

Πρώτα απ' όλα, εκφράζω τις βαθύτατες ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή, κ. Σακονίδη Χαράλαμπο, για την αδιάλειπτη καθοδήγηση και την πολύτιμη υποστήριξή του σε όλη τη διάρκεια αυτής της ερευνητικής προσπάθειας. Οι εύστοχες παρατηρήσεις του και οι συνεχιζόμενες συμβουλές του αποτέλεσαν πηγή έμπνευσης και καθοδήγησης για την ολοκλήρωση αυτής της εργασίας.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, την κα. Ποτάρη Δέσποινα και τον κ. Ζωιτσάκο Σωτήριο, για την κριτική αξιολόγηση και τις πολύτιμες προτάσεις τους, που συνέβαλαν στη βελτίωση της ποιότητας της εργασίας αυτής.

Ευχαριστώ επίσης όλους τους εκπαιδευτικούς μαθηματικών που συμμετείχαν στην έρευνα, καθώς χωρίς τη συνεργασία και την πρόθυμη συνεισφορά τους, η υλοποίηση της μελέτης αυτής δεν θα ήταν δυνατή.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους διδάσκοντες του Διατμηματικού – Διαπανεπιστημιακού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών» για τις πολύτιμες γνώσεις και συμβουλές που προσέφεραν.

Περίληψη

Στο νέο πρόγραμμα σπουδών για το Δημοτικό, το Γυμνάσιο και το Λύκειο, η Στατιστική και οι Πιθανότητες κατέχουν σημαντική θέση. Με την κατανόηση των Στοχαστικών Μαθηματικών, οι μαθητές θα μπορούν να αναπτύσσουν στρατηγικές σκέψης που είναι απαραίτητες για τη λήψη τεκμηριωμένων αποφάσεων σε προσωπικό και επαγγελματικό επίπεδο. Έρευνες δείχνουν ότι η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά έχει θετική συσχέτιση στα αποτελέσματα των μαθητών.

Η παρούσα διπλωματική εργασία διερευνά τα χαρακτηριστικά της επαγγελματικής γνώσης των εκπαιδευτικών, με εστίαση στην παιδαγωγική τους γνώση που αφορά την διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών του νέου προγράμματος σπουδών του Λυκείου. Για τον σκοπό αυτό, αναπτύχθηκε ένα ερωτηματολόγιο με 12 έργα το οποίο απαντήθηκε από 94 εκπαιδευτικούς μαθηματικών. Οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να εντοπίσουν τις παρανοήσεις των μαθητών, να απαντήσουν κατάλληλα σε συγκεκριμένες απαντήσεις μαθητών, να συνεχίσουν τη διδασκαλία και να χρησιμοποιήσουν κατάλληλες αναπαραστάσεις.

Τα ευρήματα της έρευνας έδειξαν ότι η παιδαγωγική γνώση για τη διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών των συμμετεχόντων βρίσκεται σε μέτριο επίπεδο, με σχεδόν έναν στους δυο εκπαιδευτικούς να υπερεκτιμούν τις παιδαγωγικές τους γνώσεις. Θετική επίδραση στις αποδόσεις των συμμετεχόντων είχαν τα ακαδημαϊκά κριτήρια, η διδακτική εμπειρία 10 έως 20 ετών, καθώς και η εργασία σε δημόσιο ή ιδιωτικό σχολείο σε σχέση με φροντιστήριο, με πολύ μικρή διαφορά. Η έρευνα υπογραμμίζει την σημασία της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου των εκπαιδευτικών στα Στοχαστικά Μαθηματικά και αναδεικνύει την ανάγκη για συνεχή επαγγελματική ανάπτυξη και υποστήριξη για τη βελτίωση της διδακτικής πρακτικής.

Λέξεις-κλειδιά: στοχαστικά μαθηματικά, στατιστική, πιθανότητες, παιδαγωγική γνώση περιεχομένου, επαγγελματική ανάπτυξη εκπαιδευτικών, πρόγραμμα σπουδών.

Abstract

In the new curriculum for Primary, Middle, and High School, Statistics and Probability hold a significant position. By understanding Stochastic Mathematics, students will be able to develop strategic thinking skills necessary for making informed decisions at both personal and professional levels. Research indicates that teachers' pedagogical content knowledge in mathematics is positively correlated with students' outcomes.

This dissertation investigates the characteristics of teachers' professional knowledge, focusing on their pedagogical content knowledge, regarding the teaching of Stochastic Mathematics in the new High School curriculum. For this purpose, a questionnaire with 12 tasks was developed and answered by 94 mathematics teachers. The teachers were asked to identify students' misconceptions, respond appropriately to particular students' answers, continue the lesson and use suitable representations.

The findings of the research showed that the participants' pedagogical knowledge for teaching Stochastic Mathematics is at a moderate level, with almost one in two teachers overestimating their pedagogical knowledge. Positive impacts on the participants' performance were observed of academic criteria, 10 to 20 years of teaching experience, as well as working in public or private school compared to tutoring center, with a very small difference. The research underscores the importance of pedagogical content knowledge of teachers in Stochastic Mathematics and highlights the need for continuous professional development and support to improve teaching practice.

Keywords: stochastic mathematics, statistics, probability, pedagogical content knowledge, teachers' professional development, curriculum.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή **1**
Κεφάλαιο 1^{ο}: Επαγγελματική Γνώση του εκπαιδευτικού των μαθηματικών **3**
1.1 Επαγγελματική Γνώση του εκπαιδευτικού που διδάσκει μαθηματικά 3
1.2 Πλαίσια γνώσης εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των μαθηματικών 5
1.2.1 Η γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία κατά Shulman 5
1.2.2 Μαθηματική Γνώση για τη Διδασκαλία κατά Ball 6
1.2.3 Η γνώση των Μαθηματικών για τη διδασκαλία κατά Even 9
1.2.4 Η γνώση των Μαθηματικών για τη διδασκαλία κατά Liljedah κ.α. 10
1.3 Παιδαγωγική Γνώση για τη διδασκαλία των μαθηματικών 11
Κεφάλαιο 2^{ο}: Επαγγελματική Γνώση για τη διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών **14**
2. 1 Εισαγωγή 14
2.2 Στοχαστικά Μαθηματικά και Μαθηματικά 15
2.3 Στοχαστικά Μαθηματικά στο ΑΠΣ 17
2.4 Παρανοήσεις, δυσκολίες στα Στοχαστικά Μαθηματικά 23
2.5 Παιδαγωγική Γνώση Εκπαιδευτικών στα Στοχαστικά Μαθηματικά 32
Κεφάλαιο 3^{ο}: Μεθοδολογία **36**
3.1 Ερευνητικά ερωτήματα 36
3.2 Δειγματοληψία και συμμετέχοντες 37
3.3 Περιγραφή του ερωτηματολογίου 38
Κεφάλαιο 4^{ο}: Αποτελέσματα **54**
4.1 Συνολική Απόδοση 54
4.2 Απόδοση ανά ερώτημα 56
4.3 Απόδοση ανά ομάδα 76
4.4 Σύγκριση μέσων όρων 77
Κεφάλαιο 5^{ο}: Συζήτηση και Συμπεράσματα **81**
5.1 Απάντηση στο ερευνητικό πρόβλημα και στα ερευνητικά ερωτήματα 81
5.2 Προτάσεις για την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών 85
5.3 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα 86
5.4 Περιορισμοί της έρευνας 86
Βιβλιογραφία **88**
Παράρτημα Α: Πρόγραμμα Σπουδών **99**
Παράρτημα Β: Ερωτηματολόγιο **110**

Εισαγωγή

Η σύγχρονη εποχή χαρακτηρίζεται από τη συνεχή παρουσία στατιστικών διαγραμμάτων, δημοσκοπήσεων και αναφορών στον «μέσο άνθρωπο», ενώ πολλές αποφάσεις, ακόμη και σε θέματα υγείας, βασίζονται στη Στατιστική και τις Πιθανότητες. Σημαντικά πολιτικά, επιστημονικά και κοινωνικά ζητήματα αναλύονται συχνά μέσα από στατιστικά δεδομένα, με οργανισμούς όπως τα Ηνωμένα Έθνη και ο Παγκόσμιος Οργανισμός Υγείας να δημοσιοποιούν τακτικά στατιστικές έρευνες. Η Στατιστική, σε συνεργασία με άλλες επιστήμες όπως η Πληροφορική, η Οικονομία, η Βιολογία και η Ιατρική, διαδραματίζει κρίσιμο ρόλο στην κατανόηση και την αντιμετώπιση της αβεβαιότητας που ενυπάρχει σε πολλά επίπεδα της ζωής μας. Οι πολίτες πρέπει να αναπτύξουν δεξιότητες κριτικής σκέψης και στρατηγικές για να αντιμετωπίσουν την αβεβαιότητα, αποδεχόμενοι τη θεμελιώδη τυχαιότητα στη φύση.

Ο εμπλουτισμός των Στοχαστικών Μαθηματικών στο νέο πρόγραμμα σπουδών του Λυκείου και η σημαντική θέση που κατέχουν αποτελεί σημαντική εκπαιδευτική εξέλιξη. Αυτή η αλλαγή στοχεύει να προετοιμάσει τους μαθητές να αξιολογούν κριτικά τα στατιστικά αποτελέσματα και τις ερμηνείες τους, να κάνουν προβλέψεις, να λαμβάνουν αποφάσεις κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας και να αντιλαμβάνονται τη σημασία της Στατιστικής στην κοινωνική οργάνωση και εξέλιξη.

Η παρούσα έρευνα επικεντρώνεται στην επαγγελματική γνώση των εκπαιδευτικών σχετικά με τη διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών στο νέο πρόγραμμα σπουδών του Λυκείου. Διερευνά τις γνώσεις και τις δεξιότητες που απαιτούνται για την αποτελεσματική διδασκαλία και αξιολογεί το επίπεδο της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου που έχουν οι εκπαιδευτικοί για την διδασκαλία αυτού του τομέα.

Το βιβλιογραφικό πλαίσιο αποτελείται από δυο κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο διερευνώνται τα χαρακτηριστικά της επαγγελματικής γνώσης του εκπαιδευτικού των μαθηματικών. Παρουσιάζεται η περιπλοκότητα του επαγγέλματος και το διαφορετικό είδος γνώσης που χρειάζεται για την διδασκαλία των μαθηματικών. Στην συνέχεια περιγράφονται κυρίαρχες προσεγγίσεις στην γνώση του εκπαιδευτικού για την διδασκαλία των μαθηματικών.

Το δεύτερο κεφάλαιο επικεντρώνεται στη διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών. Αναφέρονται οι διαφορές των Μαθηματικών από τα Στοχαστικά Μαθηματικά, παρουσιάζεται το νέο αναλυτικό πρόγραμμα και αναλύονται οι προκλήσεις, οι παρανοήσεις και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Επιπλέον παρουσιάζονται έρευνες που αφορούν την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου των εκπαιδευτικών που απαιτείται για τη διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφεται η μεθοδολογία της έρευνας, συμπεριλαμβανομένων των ερευνητικών ερωτημάτων, της δειγματοληψίας και της περιγραφής του ερωτηματολογίου,

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας, με έμφαση στη συνολική απόδοση των συμμετεχόντων, την απόδοση ανά ερώτημα και ανά άξονα παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου των εκπαιδευτικών, που αφορά τον εντοπισμό των παρανοήσεων των μαθητών, την απάντηση σε μαθητή και τη συνέχιση της διδασκαλίας. Επιπλέον περιλαμβάνονται στο κεφάλαιο αυτό και συγκρίσεις μέσων όρων.

Το πέμπτο κεφάλαιο περιλαμβάνει την συζήτηση και τα συμπεράσματα της έρευνας, παρέχοντας απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα. Τέλος, προτείνονται μέτρα για τη βελτίωση της διδασκαλίας των Στοχαστικών Μαθηματικών και υποδεικνύονται κατευθύνσεις για περαιτέρω έρευνα, ενώ αναλύονται και οι περιορισμοί της παρούσας μελέτης.

Κεφάλαιο 1ο: Επαγγελματική Γνώση του εκπαιδευτικού των μαθηματικών

1.1 Επαγγελματική Γνώση του εκπαιδευτικού που διδάσκει μαθηματικά

Οι Kunter et al. (2013a) αναφέρουν ότι η διδασκαλία μπορεί να γίνει κατανοητή ως επάγγελμα, κάνοντας αναφορά στις μελέτες των Hoyle (2001) και Shulman (1998). Τα επαγγέλματα διαχειρίζονται κοινωνικά αγαθά όπως η σωματική υγεία, η ψυχική υγεία, η δικαιοσύνη, η εκπαίδευση (Kunter et al., 2013a).

Ο Shulman (1998) αναφέρεται στην επαγγελματική εκπαίδευση και εντοπίζει χαρακτηριστικά γνωρίσματα των επαγγελμάτων όπως την υποχρέωση να εξυπηρετούν άλλους, την κατανόηση επιστημονικού ή θεωρητικού τομέα, την άσκηση κρίσης κάτω από συνθήκες αναπόφευκτης βεβαιότητας, την αποτελεσματική αποδοτικότητα ή πρακτική, την ανάγκη για μάθηση από την εμπειρία καθώς θεωρία και πράξη αλληλεπιδρούν, την ανάγκη για συμμετοχή σε επαγγελματική κοινότητα για την επαγγελματική εξέλιξη.

Ο Neubrand (2018) για το επάγγελμα του εκπαιδευτικού και συγκεκριμένα του μαθηματικού, υποστηρίζει ότι η επαγγελματική γνώση που απαιτείται για τη διδασκαλία είναι περίπλοκη και αναλύει τα προαναφερθέντα χαρακτηριστικά των επαγγελμάτων στο επάγγελμα του εκπαιδευτικού μαθηματικών. Ο επιστημονικός τομέας απαιτεί εξειδικευμένη γνώση των μαθηματικών που θα διδαχθούν και των στόχων του αναλυτικού προγράμματος. Η υποχρέωση να εξυπηρετούν άλλους απαιτεί από τον εκπαιδευτικό γνώση της προσωπικής και πνευματικής ανάπτυξης των μαθητών, ξεχωριστά του καθενός αλλά και μέσα στο κοινωνικό τους πλαίσιο. Αυτή η εξυπηρέτηση των άλλων έχει την συνέπεια ότι ο εκπαιδευτικός αναλαμβάνει την ευθύνη της μάθησης των μαθητών. Πολλές φορές ο εκπαιδευτικός καλείται σε σύντομο χρονικό διάστημα να αποδώσει αποτελεσματικά τις διδακτικές πρακτικές και κατά την κρίση του να λάβει αποφάσεις σε ασαφή πλαίσια. Επομένως χρειάζεται η γνώση της διδασκαλίας της τάξης ως κοινωνικό σύστημα. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει συνεχώς να μαθαίνουν και επομένως μετά την αρχική τους κατάρτιση θα πρέπει να είναι έτοιμοι για την επαγγελματική τους εξέλιξη.

Στη χώρα μας τη διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αναλαμβάνουν οι απόφοιτοι των Μαθηματικών Τμημάτων της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Οι απόφοιτοι αυτών των τμημάτων έχουν παρακολουθήσει ανώτερα μαθήματα μαθηματικών. Σύμφωνα με τους Stockton και Wasserman (2017) αυτό έχει βάση μια γενική αίσθηση ότι ο εκπαιδευτικός πρέπει να έχει μια ισχυρή γνώση περιεχομένου.

Η γνώση όμως μαθηματικών σε υψηλό επίπεδο δεν σημαίνει απαραίτητα και υψηλά μαθησιακά αποτελέσματα για τους μαθητές. Το Conference Board of the Mathematical Sciences CBMS (2010) αναφέρει ότι το πλήθος και το είδος των μαθημάτων που έχουν παρακολουθήσει στο πανεπιστήμιο οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης έχει θετική επίδραση στις επιδόσεις των μαθητών, αλλά αυτή η επίδραση είναι μικρή και ασυνεπής. Καθηγητές με ειδίκευση σε συγκεκριμένα αντικείμενα διδασκαλίας δεν ήταν απαραίτητα πιο ικανοί από άλλους καθηγητές να εξηγήσουν θεμελιώδεις έννοιες στον κλάδο τους σύμφωνα με έρευνα του National Center for Research on Teacher Education (NCRTE, 1991, όπως αναφέρεται στο Zazkis & Leikin, 2010).

Αυτό μπορεί να οφείλεται στην έλλειψη σύνδεσης των μαθηματικών που διδάσκονται στο πανεπιστήμιο με τα μαθηματικά που διδάσκονται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Zazkis & Leikin, 2010).

Ενδεχομένως να οφείλεται και στο διαφορετικό είδος γνώσης που απαιτείται για τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Το CBMS (2010) αναφέρει ότι η επαγγελματική γνώση που χρειάζεται ο εκπαιδευτικός για τη διδασκαλία των μαθηματικών διαφέρει από τα άλλα επαγγέλματα, καθώς απαιτεί υψηλό επίπεδο ειδημοσύνης. Ο εκπαιδευτικός έχει να επιλέξει (ή να τροποποιήσει ή να δημιουργήσει) έργα, λαμβάνοντας υπόψη τις συνέπειες κάθε επιλογής.

Οι έννοιες των μαθηματικών μπορούν να οριστούν διαφορετικά και το παράδειγμα που αναφέρει το CBMS (2010) είναι το τραπέζιο, το οποίο μπορεί να οριστεί με ένα τουλάχιστον ζεύγος παράλληλων ευθειών ή με ακριβώς ένα ζεύγος παράλληλων ευθειών. Ο διαφορετικός ορισμός θα έχει και διαφορετικές συνέπειες και συγκεκριμένα στο παράδειγμα αυτό, τα παραλληλόγραμμα θα είναι τραπέζια ή δεν θα είναι.

Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να γνωρίζει όχι μόνο τα αντικείμενα που διδάσκει, αλλά και πως αυτά συνδέονται σε προηγούμενες τάξεις και σε επόμενες σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών (CBMS, 2010).

Ο εκπαιδευτικός δεν λύνει μαθηματικά προβλήματα και οι μαθητές απλά τα παρακολουθούν (Ball, Hill & Bass, 2005). Ο εκπαιδευτικός εξηγεί, ακούει και αξιολογεί τη μάθηση των μαθητών και επιλέγει κατάλληλα παραδείγματα, το οποίο απαιτεί βαθιά κατανόηση του αντικειμένου.

Οι γνώσεις του εκπαιδευτικού δεν περιορίζονται στους ορισμούς και τις ιδιότητες ή στην επίλυση προβλημάτων. Επιπλέον ο εκπαιδευτικός πρέπει να μπορεί να εντοπίζει τα λάθη των μαθητών και να τους βοηθάει να κατανοήσουν το περιεχόμενο (CBMS, 2010).

Οι Krauss et al. (2008) στις απαιτήσεις του επαγγέλματος του εκπαιδευτικού αναφέρουν τις δυσκολίες που υπάρχουν στις ερωτήσεις των μαθητών. Για να ανταποκριθεί κατάλληλα ο εκπαιδευτικός δεν απαιτείται μόνο η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών στις οποίες βασίζεται η ερώτηση, αλλά και η γνώση του πώς αυτές οι έννοιες μπορούν να εξηγηθούν με τον καλύτερο δυνατό τρόπο στους μαθητές. Αναφέρουν και ένα παράδειγμα μιας τέτοιας δύσκολης στην απάντηση ερώτηση μαθητή: «Γιατί ο πολλαπλασιασμός δυο αρνητικών αριθμούς δίνει αποτέλεσμα θετικό αριθμό;».

Επιπλέον χρειάζεται ικανότητα διαχείρισης της τάξης, και η ορθή κατανομή του διδακτικού χρόνου. Ο εκπαιδευτικός σχεδιάζει τη διδασκαλία του, αλλά έχει να πάρει και αποφάσεις κατά τη διάρκεια του μαθήματος, οι οποίες χρειάζονται ιδιαίτερη προσοχή για να μη καταλήξει η διδασκαλία σε «απρόβλεπτη περιοχή», όπως αναφέρει το National Council of Teachers of Mathematics NCTM (1998) (Skott, Mosvold, & Sakonidis, 2018).

Η διδασκαλία των μαθηματικών είναι σύνθετη. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γνωρίζουν το γνωστικό αντικείμενο που διδάσκουν (Ball et al., 2008) για αποτελεσματική διδασκαλία. Όμως αυτή η γνώση δεν είναι αρκετή.

Για την ανάπτυξη των επιτευγμάτων των μαθητών είναι απαραίτητη η ποιοτική διδασκαλία και αυτή η ποιότητα εξαρτάται μεταξύ άλλων και από την ικανότητα του εκπαιδευτικού και τη γνώση του για τη διδασκαλία (Neubrand, 2018).

Επομένως προκύπτει το ερώτημα τι πρέπει να γνωρίζει ο εκπαιδευτικός για τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Η έκθεση του National Council of Teachers of Mathematics NCTM (2000), όπως αναφέρει ο Cuoco (2001) προτείνει διαφορετικά είδη γνώσης που χρειάζεται ο εκπαιδευτικός για τη διδασκαλία:

- μαθηματική γνώση για το σύνολο των θεμάτων
- βαθιά ευέλικτη γνώση σχετικά με τους στόχους του προγράμματος σπουδών
- γνώση για τις σημαντικές ιδέες που είναι κεντρικής σημασίας στο επίπεδο που διδάσκουν
- γνώση σχετικά με το πώς μπορούν αυτές οι ιδέες να παρουσιαστούν για να διδαχθούν αποτελεσματικά
- γνώση για το πώς μπορεί να επιτευχθεί η κατανόηση από τους μαθητές

Οι Ball, Hill και Bass (2005) εκτός από την μαθηματική γνώση περιεχομένου, για την αποτελεσματική διδασκαλία του εκπαιδευτικού αναφέρουν:

- την αναγνώριση των λαθών των μαθητών και την πηγή προέλευσης αυτών των λαθών
- την κατανόηση συνδέσεων
- τη χρήση κατάλληλων αναπαραστάσεων
- την χρήση κατάλληλων παραδειγμάτων
- τη ορθή χρησιμοποίηση μαθηματικών όρων ανάλογα με το επίπεδο των μαθητών

Επομένως εκτός από την μαθηματική γνώση του περιεχομένου, ο εκπαιδευτικός χρειάζεται και αυτό που αποκαλεί ο Shulman (1986) Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου.

1.2 Πλαίσια γνώσης εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των μαθηματικών

1.2.1 Η γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία κατά Shulman

Ο Shulman (1986) στην έρευνα του για αποτελεσματική διδασκαλία πρότεινε τη διάκριση της γνώσης σε τρεις κατηγορίες: σε Γνώση Περιεχομένου, σε Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου και σε Γνώση Προγραμμάτων Σπουδών.

Η Γνώση Περιεχομένου αναφέρεται στην ποσότητα και στην οργάνωση της γνώσης που έχει ο δάσκαλος, δηλαδή την γνώση του αντικειμένου που θα διδάξει ενώ η Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου περιλαμβάνει τη γνώση του αντικειμένου για τη διδασκαλία, με χρήση κατάλληλων παραδειγμάτων και εξηγήσεων, αναπαραστάσεων, αναλογιών, γνώση των ορθών και λανθασμένων αντιλήψεων των μαθητών, τη γνώση να παρουσιαστεί το αντικείμενο όσο το δυνατόν πιο κατανοητά.

Αυτή η θεωρητική διαφοροποίηση των γνώσεων μοιάζει εύκολη και διακριτή, αλλά στην πράξη είναι δύσκολος ο διαχωρισμός της (Krauss et al., 2008).

Η εργασία του Shulman (1986) είχε τεράστια αποδοχή με πολλές έρευνες να βασίζονται σε αυτή τη θεωρητική προσέγγιση. Οι Ball, Thames και Phelps (2008) αναφέρουν την επίδραση της θεωρίας αυτής σε δυο τομείς:

- αναπλαισίωση της μελέτης της γνώσης του εκπαιδευτικού με τρόπους που δίνουν έμφαση στο ρόλο του περιεχομένου στη διδασκαλία
- την ανάδειξη της γνώσης περιεχομένου ως κεντρικής σημασίας για το επάγγελμα του εκπαιδευτικού

Ο Shulman (1987) αναδεικνύει τη γνώση της διδασκαλίας ως επαγγελματική γνώση του εκπαιδευτικού για τις ανάγκες της διδασκαλίας και την χωρίζει σε κατηγορίες:

- γνώση περιεχομένου,
- γενική παιδαγωγική γνώση
- γνώση προγραμμάτων σπουδών
- παιδαγωγική γνώση περιεχομένου
- γνώση μαθητών και των χαρακτηριστικών τους
- γνώση εκπαιδευτικών πλαισίων
- γνώση εκπαιδευτικών περιορισμών στόχων, σκοπών και αξιών και γνώση ιστορικών και φιλοσοφικών θεμελίων.

1.2.2 Μαθηματική Γνώση για τη Διδασκαλία κατά Ball

Πλήθος ερευνητών βασίστηκαν στην παιδαγωγική γνώση που πρότεινε ο Shulman, όσον αφορά την προσαρμογή της θεωρίας για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Η πιο επιδραστική για την επανεννοιολόγιση της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου του Shulman στα μαθηματικά, σύμφωνα με Depaepe, Verschaffel και Kelchtermans (2013) είναι η εργασία των Ball et al. (2008) που προσέγγισαν την Μαθηματική Γνώση για τη Διδασκαλία.

Οι Ball et al. (2008) με τον όρο μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία εννοούν «τη μαθηματική γνώση που χρειάζεται για την πραγματοποίηση της εργασίας διδασκαλία των μαθηματικών» (σ. 395). Οι ερευνητές δίνουν στον ορισμό τους έμφαση στη διδασκαλία, καθώς όπως αναφέρουν ο ορισμός τους ξεκινάει από τη διδασκαλία και όχι από τον εκπαιδευτικό.

Η Μαθηματική Γνώση για τη Διδασκαλία διαιρείται σε γνώση του αντικειμένου και σε παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου και στις διάφορες υποκατηγορίες (Πίνακας 1.1).

Πίνακας 1.1: Μαθηματική Γνώση για τη Διδασκαλία (Ball, Thames, & Phelps, 2008)

α) γνώση του αντικειμένου	*β) παιδαγωγική γνώση του* περιεχομένου
i) κοινή γνώση του περιεχομένου	i) γνώση του περιεχομένου και των μαθητών
ii) εξειδικευμένη γνώση του περιεχομένου	ii) γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας
iii) ορίζοντα της γνώσης του περιεχομένου	iii) γνώση του περιεχομένου και του προγράμματος σπουδών

Στη συνέχεια παρουσιάζονται αναλυτικά κάθε μια τέτοια κατηγορία, αναφέροντας και το αντίστοιχο παράδειγμα που παρουσιάζει η ερευνητική ομάδα της Ball.

Κοινή γνώση του περιεχομένου

Η κοινή γνώση του περιεχομένου ορίζεται ως «ως η μαθηματική γνώση και δεξιότητα που χρησιμοποιείται σε περιβάλλοντα εκτός από τη διδασκαλία» (σ. 401). Οι εκπαιδευτικοί είναι απαραίτητο να γνωρίζουν το αντικείμενο διδασκαλίας, να μπορούν να αναγνωρίζουν τις λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών και να αναγνωρίζουν στο διδακτικό υλικό τους ανακριβείς ορισμούς. Να αναθέτουν στους μαθητές εργασίες που και οι ίδιοι μπορούν να κάνουν και να είναι ακριβείς στη χρήση της σωστής ορολογίας και των συμβολισμών.

Στη συνέχεια οι Ball et al. (2008) αποσαφηνίζουν τη σημασία του όρου κοινή. Ο όρος κοινή δεν έχει τη σημασία ότι κατέχουν όλοι αυτή τη γνώση, αλλά ότι δεν είναι η μοναδική για τη διδασκαλία, με την έννοια ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτή η γνώση και σε διαφορετικά περιβάλλοντα.

Παράδειγμα

Το ερώτημα «ο αριθμός 8 μπορεί να γραφτεί και ως 008;» είναι κοινή γνώση του μαθηματικού περιεχομένου, αλλά πιθανότατα δεν είναι αποκλειστική-μοναδική γνώση στους εκπαιδευτικούς.

Εξειδικευμένη γνώση του περιεχομένου

Για την εξειδικευμένη γνώση οι Ball et al. (2008) ορίζουν τη «μαθηματική γνώση και δεξιότητα που χρησιμοποιείται αποκλειστικά για τη διδασκαλία» (σ. 401). Οι εκπαιδευτικοί στη καθημερινή τους ενασχόληση με τη διδασκαλία συναντούν δραστηριότητες-έργα τα οποία δεν συναντούν εκτός της διδασκαλίας. Κάποια από αυτές τις δραστηριότητες-έργα είναι η παρουσίαση μαθηματικών ιδεών, απαντήσεις στα «γιατί» των μαθητών, εύρεση κατάλληλου παραδείγματος και παραγωγικών ερωτήσεων, χρήση και αναγνώριση κατάλληλης αναπαράστασης, σύνδεση αναπαραστάσεων για τις βασικές ιδέες, επιλογή και ανάπτυξη χρήσιμων ορισμών. Για την επιτυχή αντιμετώπιση αυτών των δραστηριοτήτων της διδασκαλίας απαιτείται η μαθηματική κατανόηση και η αιτιολόγηση.

Παράδειγμα

Ένα παράδειγμα αφορά την διαίρεση 1 ¼ με το ½. Δεν ζητάνε την ορθή απάντηση, αλλά την εύρεση του κατάλληλου παραδείγματος για τη διδασκαλία του περιεχομένου.

Ορίζοντα της γνώσης του περιεχομένου

Ο ορίζοντας της γνώσης σύμφωνα με τους Ball et al. (2008) είναι «η επίγνωση του τρόπου με τον οποίο συνδέονται τα μαθηματικά θέματα στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών» (σ. 403). Οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να γνωρίζουν τι ακολουθεί στο πρόγραμμα σπουδών, ώστε με τη διδασκαλία να βάζουν τα θεμέλια και να προετοιμάζουν τους μαθητές για επόμενες τάξεις που θα συναντήσουν το ίδιο αντικείμενο, καθώς και την αναγνώριση συνδέσεων με προχωρημένες μαθηματικές ιδέες. Οι ερευνητές εκφράζουν τις επιφυλάξεις τους για το αν αυτή η κατηγορία είναι μέρος της γνώσης αντικειμένου ή ότι μπορεί να διατρέχει τις υπόλοιπες κατηγορίες.

Παράδειγμα

Ένα παράδειγμα είναι η αριθμογραμμή που αρχικά παρουσιάζεται με τους ακέραιους και η οποία σε επόμενες τάξεις «θα γεμίσει» με άλλους αριθμούς.

Γνώση του περιεχομένου και των μαθητών

Με τη γνώση περιεχομένου και των μαθητών οι Ball et al. (2008) αναφέρονται στη «γνώση που συνδυάζει τη γνώση για τους μαθητές και τη γνώση των μαθηματικών» (σ. 401). Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να μπορούν να προβλέψουν την ενδεχόμενη σκέψη των μαθητών, τις δυσκολίες που θα συναντήσουν και να μπορούν να επιλέξουν κατάλληλα παραδείγματα που προσελκύουν το ενδιαφέρον των μαθητών, καθώς και την δυσκολία που θα συναντήσουν οι μαθητές στα προβλήματα αυτά.

Η αναγνώριση της λανθασμένης απάντησης είναι κοινή γνώση περιεχομένου, ενώ η αναγνώριση του είδος του προβλήματος, ειδικά όταν το λάθος είναι άγνωστο στον εκπαιδευτικό, που συνήθως απαιτεί ευελιξία στη σκέψη για τα νοήματα απαιτεί εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου.

Παράδειγμα

Η εξοικείωση με τα πιθανά λάθη – αναμενόμενα των μαθητών και η απόφαση ποιο από αυτά τα λάθη είναι πιο πιθανό να κάνουν οι μαθητές αποτελεί παράδειγμα της γνώσης του περιεχομένου και των μαθητών.

Ερωτήσεις για την αξιολόγηση αυτής της γνώσης, όπως αναφέρουν οι Ball et al. (2008) είναι το πλήθος των τριγώνων που πιθανόν να αναγνωρίσουν οι μαθητές ή την πιθανότητα κάποιος μαθητής να γράψει 405 ενώ θέλει να γράψει 45.

Γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας

Η κατηγορία αυτή «συνδυάζει τη γνώση για τη διδασκαλία και τη γνώση για τα μαθηματικά» (σ. 401). Για τον σχεδιασμό της διδασκαλίας οι εκπαιδευτικοί έχουν να επιλέξουν κατάλληλα παραδείγματα για να εμβαθύνουν στο αντικείμενο διδασκαλίας, την σειρά με την οποία θα παρουσιάσουν αυτά τα παραδείγματα, να αξιολογήσουν τα θετικά ή αρνητικά σημεία των αναπαραστάσεων. Επιπλέον ο εκπαιδευτικός επιλέγει, κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, το χρονικό διάστημα που θα αφιερώσει για περισσότερες διευκρινήσεις, ποια από τις παρατηρήσεις των μαθητών θα αφήσει για αργότερα ή ποιες θα αγνοήσει. Αυτές οι επιλογές απαιτούν μια αλληλεπίδραση μεταξύ ιδιαίτερης μαθηματικής κατανόησης και κατανόησης παιδαγωγικών ζητημάτων.

Παράδειγμα

Στο παράδειγμα για αυτό το είδος της γνώσης οι ερευνητές αναφέρουν διαφορετικές προσεγγίσεις στην αναπαράσταση της αφαίρεσης αριθμών με πολλά ψηφία, με το κάθε παράδειγμα να αναδεικνύει διαφορετικές πτυχές. Διαφορετικό είναι το διδακτικό παράδειγμα αφαίρεσης με χρήματα και διαφορετικό με κύβους ή ξυλάκια και η γνώση αυτών των διαφόρων στην ανάπτυξη του θέματος αποτελεί μέρος της γνώσης του περιεχομένου και της διδασκαλίας.

Γνώση του περιεχομένου και του προγράμματος σπουδών

Για την γνώση του περιεχομένου και του προγράμματος σπουδών οι Ball et al. (2008) σε αντίθεση με τον Shulman, ο οποίος το έχει σε ξεχωριστή κατηγορία, το ταξινομούν ως υποκατηγορία της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου και αναφέρουν τις αμφιβολίες τους για την τοποθέτηση της κατηγορίας αυτής ξεχωριστά ή αν έπρεπε να την εντάσσουν σε κάποια άλλη κατηγορία.

Περιορισμοί της έρευνας των Ball

Στις αδυναμίες της θεωρίας, οι Ball et al. (2008) αναφέρουν τη διάκριση των γνώσεων. Σε ορισμένες περιπτώσεις θα μπορούσε κάποια γνώση να είναι για παράδειγμα κοινή γνώση περιεχομένου ή να είναι εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου. Το παράδειγμα το οποίο αναφέρουν είναι το 5/8 του 2, το οποίο ερώτημα το τοποθετούν στην εξειδικευμένη γνώση, καθώς απαιτείται γνώση των κλασμάτων και αντιστοίχιση με συγκεκριμένες αναπαραστάσεις. Όμως ίσως υπάρχουν άτομα που χρησιμοποιούν αυτή τη γνώση σε άλλη εργασία και επομένως μπορεί να χαρακτηριστεί κοινή γνώση περιεχομένου.

Διαφορετικές προσεγγίσεις της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία

Στην θεωρία των Ball et al. (2008) έγιναν κάποιες προεκτάσεις-βελτιώσεις της θεωρίας, όπως για παράδειγμα η αναλυτικότερη παρουσίαση του ορίζοντα της γνώσης από τους Ball και Bass (2009) ή η προσέγγιση των Zazkis και Mamolo (2011) για τον ορίζοντα της γνώσης.

1.2.3 Η γνώση των Μαθηματικών για τη διδασκαλία κατά Even

Η Even (1990) ανέπτυξε ένα πλαίσιο για τη διδασκαλία των μαθηματικών και προσέγγισε τα απαραίτητα στοιχεία γνώσης αντικειμένου που πρέπει να έχει ο εκπαιδευτικός για να διδάξει ένα μαθηματικό θέμα.

Ο εκπαιδευτικός να γνωρίζει:

- τα βασικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής έννοιας
- τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της μαθηματικής έννοιας, καθώς και να μπορεί να τις ερμηνεύει και να μπορεί να δημιουργεί συνδέσεις μεταξύ των αναπαραστάσεων
- εναλλακτικούς τρόπους προσέγγισης της μαθηματικής έννοιας και να μπορεί να επιλέγει την κατάλληλη προσέγγιση ανάλογα με την κατάσταση
- τις δυνατότητες (τη δυναμική) της έννοιας και τα μοναδικά ισχυρά χαρακτηριστικά που έχει
- το βασικό ρεπερτόριο της έννοιας (δηλαδή να μπορεί να δίνει κατάλληλα παραδείγματα ώστε να γίνονται κατανοητές οι ιδιότητες, τα θεωρήματα)
- την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας και έπειτα και τη διαδικαστική

Η Even (1990) μέτρησε σε αυτό το πλαίσιο τη γνώση των εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για την έννοια της συνάρτησης, σε διάφορα έργα. Κάποια ερωτήματα αφορούσαν γνώση περιεχομένου, άλλα ερώτημα ζητούσαν από τους εκπαιδευτικούς να αιτιολογήσουν αν ο μαθητής απάντησε ορθά, και σε κάποια άλλα ερωτήματα ζητούσαν τρόπους με τους οποίους οι εκπαιδευτικοί θα εξηγήσουν μια έννοια στους μαθητές, αξιολογώντας την εύρεση/επιλογή κατάλληλων παραδειγμάτων και διδακτικών προσεγγίσεων.

Σε αυτό το πλαίσιο η γνώση των μαθηματικών που απαιτείται για τη διδασκαλία σύμφωνα με την Even (1990) κυριαρχεί η γνώση του αντικειμένου, αλλά και ο εντοπισμός των λαθών των μαθητών και ο τρόπος που τα αντιμετωπίζει ο εκπαιδευτικός

1.2.4 Η γνώση των Μαθηματικών για τη διδασκαλία κατά Liljedah κ.α.

Οι Liljedahl et al. (2009) προτείνουν ένα πλαίσιο για τη διδασκαλία των μαθηματικών που περιλαμβάνει τρεις κατηγορίες: την γνώση περιεχομένου, την παιδαγωγική γνώση και τη διδακτική γνώση.

- (α) Γνώση περιεχομένου

  Η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει τις μαθηματικές έννοιες, τη χρήση μαθηματικών τεχνικών, το μαθηματικό συλλογισμό, τις αποδείξεις.
- (β) Παιδαγωγική Γνώση

  Η παιδαγωγική γνώση περιλαμβάνει τις γενικές αρχές της εκπαίδευσης, όπως τις θεωρίες μάθησης, τις κοινωνιολογικές, ψυχολογικές και ηθικές πτυχές της εκπαίδευσης και των λειτουργιών τους (Durand-Guerrier & Winsløw, 2005), καθώς και τη διαχείριση της τάξης και την αξιολόγηση.
- (γ) Διδακτική γνώση

  Η διδακτική γνώση αναφέρεται στη γνώση για τους τρόπους διδασκαλίας και τις συνθήκες μάθησης των μαθηματικών (Bloch, 2005; Brousseau, 1997; Durand-Guerrier & Winsløw, 2005) και συνδέει και διαχωρίζει τη γνώση που μπορεί να έχει κάποιος από το να είναι σε θέση να μεταδώσει αυτή τη γνώση (Rowland, Thwaites, & Huckstep, 2005).

Οι ερευνητές ουσιαστικά προσάρμοσαν για τα μαθηματικά τις κατηγορίες γνώση του αντικειμένου, παιδαγωγική γνώση και παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου που αναφέρει ο Shulman (1987).

Οι Liljedahl et al. (2009) παρουσιάζουν αυτές τις τρεις κατηγορίες και ως:

(α) γνωρίζοντας μαθηματικά, (β) γνωρίζοντας πώς να διδάξεις (γενικά) και (γ) γνωρίζοντας πώς να διδάξεις (ειδικά) μαθηματικά.

Σύνοψη των θεωριών για τη διδασκαλία των μαθηματικών

Οι θεωρίες των Ball et al. (2008) και των Liljedahl et al. (2009), αρχικά εφαρμόστηκαν για δασκάλους της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, ενώ της Even (1990) για εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας.

Στις τρεις αυτές προσεγγίσεις για τη διδασκαλία των μαθηματικών εκτός από την απαραίτητη γνώση του περιεχομένου, υπάρχουν και άλλα είδη γνώσης, όπως η γνώση για τις δυσκολίες των μαθητών, η εύρεση κατάλληλων παραδειγμάτων, η επιλογή κατάλληλων αναπαραστάσεων και γενικότερα η γνώση για τον τρόπο διδασκαλίας και τις συνθήκες μάθησης των μαθητών.

Επομένως στα πλαίσια αυτά προτείνεται και η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου.

1.3 Παιδαγωγική Γνώση για τη διδασκαλία των μαθηματικών

Η κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου, έχει καθοριστικό ρόλο για τη διδασκαλία. Οι Ball, Thames και Phelps (2008) αναφέρουν ότι η γνώση περιεχόμενου γεφυρώνει τη γνώση περιεχομένου και την πρακτική της διδασκαλίας. Η βαθιά κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, σύμφωνα με ποιοτικά δεδομένα, συμβάλλει θετικά στην διδασκαλία των εκπαιδευτικών, δίνοντας πρόσβαση σε εύρος στρατηγικών για την παρουσία, εξήγηση και αναπαράσταση του μαθηματικού περιεχομένου, όπως αναφέρουν οι Krauss et al. (2008) (με αναφορά στους Ball, Hill, & Bass (2005) και Ma (1999)).

Οι Cueto, León, Sorto και Miranda (2017) εκτός από την γνώση του περιεχομένου, αναφέρουν ότι οι έρευνες προτείνουν και άλλους τύπους γνώσεων για την προώθηση της μάθησης των μαθητών και σύμφωνα με τη βιβλιογραφία στα μαθησιακά κέρδη των μαθητών συμβάλλει και η γενική παιδαγωγική γνώση (Grossman & Schoenfeld, 2005; Hiebert, Morris, Berk, & Jansen, 2007).

Σύμφωνα με το μοντέλο των Ball et al. (2008) η παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου, όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο, περιλαμβάνει την γνώση των εκπαιδευτικών για τους προβληματισμούς και τις δυσκολίες των μαθητών, την επιλογή κατάλληλων παραδειγμάτων για να ξεπεραστούν αυτές οι δυσκολίες, την επιλογή παραδειγμάτων για εμβάθυνση της διδασκαλίας, αλλά και την παρουσίαση τους, την αξιολόγηση των αναπαραστάσεων.

Οι Cueto et al. (2017) στην βιβλιογραφική τους ανασκόπηση, διαπίστωσαν ότι η παιδαγωγική γνώση των καθηγητών και η επιρροή της στα επιτεύγματα των μαθητών δείχνει ότι έχουν θετική συσχέτιση και αναφέρουν πλήθος ερευνών που το υποστηρίζουν (Baumert et al., 2010; Carnoy & Arends, 2012; Hill, Rowan, & Ball, 2005; Kunter et al., 2013b; Marshall & Sorto, 2012; Marshall et al, 2009; Ngo, 2012; Rockoff, Jacob, Kane, & Staiger, 2008;).

Τα αποτελέσματα της έρευνας των Cueto et al. (2017) έδειξαν ότι οι μαθητές με υψηλότερα επιτεύγματα είναι πιο πιθανό να έχουν καθηγητή με υψηλότερη παιδαγωγική γνώση περιεχομένου.

Οι Suharta και Parwati (2020) στην έρευνα τους σε μαθητές γυμνασίου βρήκαν θετική συσχέτιση της γνώσης περιεχομένου και της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου με τα μαθησιακά επιτεύγματα των μαθητών, άμεσα ή έμμεσα.

Αξιολόγηση παιδαγωγικής γνώσης

Αρκετοί μελετητές έχουν προσπαθήσει να αξιολογήσουν διάφορες πτυχές της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου (Cueto et al., 2017).

Οι μέθοδοι αξιολόγησης της παιδαγωγικής γνώσης των εκπαιδευτικών που συνήθως χρησιμοποιούνται είναι:

- Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής
- Ανοικτού τύπου ερωτήσεις
- Συνδυασμός πολλαπλής επιλογής και ανοικτού τύπου ερωτήσεων
- Διδακτικά σενάρια
- Βιντεοσκόπηση ή άμεση παρατήρηση διδασκαλίας
- Συνέντευξη

Οι Hill, Ball και Schilling (2008) προτείνουν τον συνδυασμό πολλαπλής επιλογής έργων σε συνδυασμό με ανοικτού τύπου ερωτήσεις, όπως αναφέρουν οι Cueto et al. (2017).

Οι Hill et al. (2007) αναφέρουν μειονεκτήματα των παραπάνω μεθόδων για την αξιολόγησης της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία.

Για την βιντεοσκόπηση ή την άμεση παρατήρηση αναφέρουν οι ερευνητές ότι είναι χρονοβόρα διαδικασία η συλλογή δεδομένων, με αυξημένο κόστος.

Τα μαθηματικά έργα σε μορφή ερωτήσεων ή συνέντευξης (ή ο συνδυασμός ερωτήσεων και συνέντευξης) έχουν δυσκολία να κατασκευαστούν, αλλά αφού ολοκληρωθεί η κατασκευή τους έχουν μικρό κόστος και ευκολία στην εφαρμογή τους. Η αξιολόγηση τους όμως είναι δύσκολη και χρονοβόρα.

Τα έργα που περιλαμβάνουν ερωτήσεις ανοιχτού τύπου μπορούν να έχουν πρόβλημα αξιοπιστίας και να μην μπορεί να διακρίνει ο ερευνητής αξιόπιστα την υψηλού επιπέδου γνώση των εκπαιδευτικών με τη πιο χαμηλού επιπέδου γνώση.

Τα μαθηματικά έργα κατασκευάζονται συχνά με προσομοίωση πραγματικών καταστάσεων που θα μπορούσαν να συμβούν στην αίθουσα διδασκαλίας. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να αποδώσει στο έργο, αλλά να αδυνατεί κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας (Borko et al., 1992).

Σύμφωνα με τους Hoover, Mosvold, Ball και Lai (2016) στη βιβλιογραφία υπάρχει συμφωνία ότι η διδασκαλία των μαθηματικών απαιτεί ειδικά είδη μαθηματικών γνώσεων, ενώ δεν υπάρχει συμφωνία στους ορισμούς, στην ορολογία και στις βασικές έννοιες.

Οι Depaepe et al. (2013) επικεντρώνονται ειδικά στην παιδαγωγική γνώση περιεχομένου για τη διδασκαλία των μαθηματικών και με συστηματική ανασκόπηση της βιβλιογραφίας καταλήγουν ότι υπάρχουν διαφορετικές εννοιολογικές προσεγγίσεις της παιδαγωγικής γνώσης και επομένως και διαφορετικά στοιχεία στις διάφορες αυτές προσεγγίσεις. Τα κοινά χαρακτηριστικά της παιδαγωγικής γνώσης είναι: η γνώση των εκπαιδευτικών, η σύνδεση του περιεχομένου γνώσης με την παιδαγωγική γνώση, και η γνώση περιεχομένου είναι απαραίτητη προϋπόθεση. Οι περισσότεροι ερευνητές έχουν ως βασικά στοιχεία της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου τη γνώση των παρανοήσεων των μαθητών και των διαφορετικών διδακτικών στρατηγικών και αναπαραστάσεων.

Για την αξιολόγηση της παιδαγωγικής γνώσης του περιεχομένου τα ερωτήματα/έργα πρέπει να εστιάζουν στα παρακάτω:

- Κατανόηση του περιεχομένου με τρόπο που απαιτείται για τη διδασκαλία
- Εύρεση κατάλληλης αναπαράστασης περιεχομένου
- Αντιμετώπιση ασυνήθιστων λύσεων μαθητών
- Αναγνώριση λαθών μαθητών

- Αντιμετώπιση άλλων περιστατικών που μπορεί να συμβούν κατά τη διδασκαλία

(Hill et al., 2007)

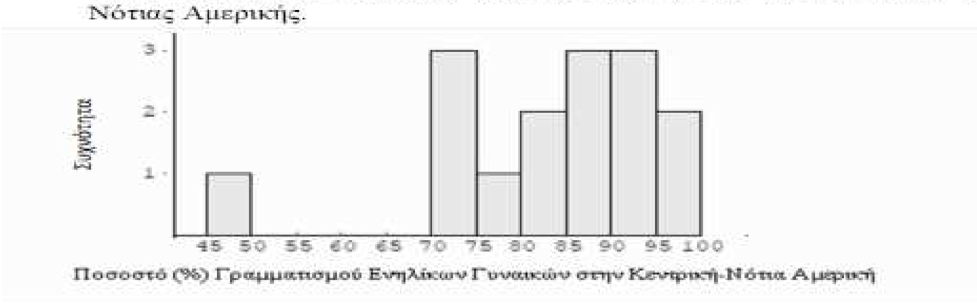
- Εύρεση κατάλληλου προβλήματος

(Ball et al., 2005)

Παράδειγμα δυσκολίας διάκρισης γνώσης περιεχομένου και παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου

Αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο ότι αυτή η διάκριση της γνώσης περιεχομένου και της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου θεωρητικά είναι εύκολη και διακριτή, αλλά στην πράξη είναι δύσκολος ο διαχωρισμός της, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα από τη διδακτορική διατριβή της Κοντογιάννη (2014).

1. Η παρακάτω γραφική αναπαράσταση παρέχει πληροφορίες για τα ποσοστό γραμματισμού των ενηλίκων γυναικών στις χώρες της Κεντρικής και της Νότιας Αμερικής.



a) Ας υποθέσουμε ότι ρωτάτε τους μαθητές σας πόσες χώρες αναπαριστώνται σε αυτή τη γραφική αναπαράσταση. Ένας μαθητής απαντά 7 χώρες.Είναι η απάντηση του μαθητή σωστή ή λανθασμένη; Ποιά πιστεύετε ότι ήταν η σκέψη του μαθητή για να καταλήξει σε αυτό το συμπέρασμα; **Δικαιολογήστε την απαντησή σας.**

b) Ας υποθέσουμε ότι ζητάτε από τους μαθητές σας να εξηγήσουν τι δηλώνει η τρίτη ράβδος από τα δεξιά. Ένας μαθητής απαντά «από 85% εώς 90% ποσοστό γραμματισμού». **Σχολιάστε την απαντησή του.**

Αυτές οι δυο ερωτήσεις ανήκουν στην κατηγορία παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου. Για να μπορέσει όμως ο εκπαιδευτικός να απαντήσει πρέπει να γνωρίζει και το περιεχόμενο. Οι Krauss et al. (2008) αξιολόγησαν τη γνώση περιεχομένου και την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου σε καθηγητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με τα ευρήματα να δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί με βαθύτερη μαθηματική κατάρτιση είχαν καλύτερα αποτελέσματα και στις δυο κατηγορίες γνώσεων.

Κεφάλαιο 2ο: Επαγγελματική Γνώση για τη διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών

2. 1 Εισαγωγή

Στις μέρες μας ολοένα και περισσότερο εμφανίζονται στατιστικά διαγράμματα, δημοσκοπήσεις, αναφορές στο «μέσο άνθρωπο», και αποφάσεις ακόμη και σε θέματα όπως η υγεία που βασίζονται στην Στατιστική και τις Πιθανότητες (Ζαχαριάδης, Πόταρη & Στουραΐτης, 2011)

Για πολιτικά, επιστημονικά και κοινωνικά θέματα γίνεται αναφορά σε στατιστικά ευρήματα. Οι εθνικοί στατιστικοί οργανισμοί και διεθνής οργανισμοί όπως τα Ηνωμένα Έθνη και ο Παγκόσμιος Οργανισμός Υγείας δημοσιοποιούν τις στατιστικές τους έρευνες (Batanero & Borovcnik, 2016). Η Στατιστική συνεργάζεται με τις άλλες επιστήμες (Πληροφορική, Οικονομία, Βιολογία, Ιατρική, Χημεία, Ψυχολογία, κλπ) (Τσάντας et al., 1999).

Υπάρχει αβεβαιότητα σε προσωπικό επίπεδο, βιολογικό, κοινωνικό, οικονομικό, και επομένως είναι αναγκαία η κατανόηση των τυχαίων γεγονότων για την λήψη αποφάσεων (Batanero & Borovcnik, 2016). Οι πολίτες οφείλουν να δεχτούν την ύπαρξη της θεμελιώδους τύχης στη φύση, και να αποκτήσουν συλλογιστική σκέψη και στρατηγικές ώστε να λαμβάνουν αποφάσεις, καθημερινές ή και επαγγελματικές, όπου είναι παρούσα η τύχη (Batanero et al., 2016). Η αβεβαιότητα είναι εγγενής στα πειράματα τύχης, σε αντίθεση με τα αιτιοκρατικά πειράματα (ΥΠ.Π.Ε.Θ., 2023ζ).

Η Στατιστική είναι η «επιστήμη που ασχολείται με τη συγκέντρωση, παρουσίαση, αξιολόγηση και εν συνεχεία επεξεργασία (εξαγωγή συμπερασμάτων) της πληροφορίας» (Τσάντας et al., 1999). Η Θεωρία των Πιθανοτήτων είναι ο κλάδος των Μαθηματικών που μελετάει τη συμπεριφορά των τυχαίων φαινομένων, εξετάζει τους νόμους της τύχης και εφαρμόζεται σε όλες σχεδόν τις επιστήμες (Κουνιάς & Μωυσιάδης, 1999).

Οι Jones, Langrall και Mooney (2007) περιγράφουν τη στενή σύνδεση της Στατιστικής με τις Πιθανότητες. Η Στατιστική χρησιμοποιεί τα χαρακτηριστικά της τυχαίας διαδικασίας και μοντέλα πιθανοτήτων αυτών των διαδικασιών για να βγάλει συμπεράσματα για προβλήματα που αφορούν δεδομένα, όπως για παράδειγμα το προτιμώμενο φάρμακο για την αντιμετώπιση του κοινού κρυολογήματος. Οι Πιθανότητες εστιάζουν απευθείας στην περιγραφή, ποσοτικοποίηση και στην μοντελοποίηση τυχαίων διαδικασιών. Γίνεται εκτίμηση για την πιθανότητα ενός ενδεχομένου όπως για παράδειγμα «η φαρμακευτική αγωγή Α θεραπεύει το κοινό κρυολόγημα εντός 5 ημερών ή λιγότερο».

Ιστορική αναδρομή

Στα αρχικά στάδια της Στατιστικής γινόταν συλλογή δεδομένων σχετικά με γεννήσεις και θανάτους, με φόρους, με τους άνδρες σε στρατεύσιμη ηλικία (Αδαμόπουλος, Δαμιανού & Σβέρκος, 2023). Αυτή η καταγραφή στοιχείων αποτελούσε μέρος της Στατιστικής και στο τέλος του 17ου αιώνα επαναπροσδιορίζεται το αντικείμενο της με την Πολιτική Αριθμητική («η τέχνη της εξαγωγής συμπερασμάτων από σχήματα για θέματα που ενδιαφέρουν το κράτος») (Τσάντας et al., 1999).

Στα τέλη του 18ου αιώνα εξαπλώνεται η Στατιστική σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους, όπως η αστρονομία, η ψυχολογία, η βιολογία, οι κοινωνικές επιστήμες και αναγνωρίζεται ο ρόλος της πιθανότητας που οδηγεί στα πιθανοθεωρητικά μοντέλα και στο ξεκίνημα της στατιστικής συμπερασματολογίας (Τσάντας et al., 1999). Αναπτύσσονται μέθοδοι για την εξαγωγή συμπερασμάτων από τα δεδομένα με τις εργασίες των Francis Galton (1892-1911) και Karl Pearson (1857-1936). Σε αυτήν την πρώτη περίοδο ανάπτυξης δημιουργούνται εργαλεία της τυπικής απόκλισης, του συντελεστή συσχέτισης και του x^2 test. Στην δεύτερη περίοδο, μετά το 1915, κυρίως από τον R.A. Fisher (1890-1962) και τους διαδόχους του, αναπτύσσονται οι δειγματικές κατανομές, αρχές έλεγχου υποθέσεων, η ανάλυση διασποράς, εκτιμητές παραμέτρων. Λίγο αργότερα με τις εργασίες των Jerzy Neyman και Egon Pearson, στην τρίτη περίοδο ανάπτυξης, εισάγονται στατιστικές έννοιες, όπως τα σφάλματα τύπου ΙΙ, τα διαστήματα εμπιστοσύνης και σε αυτήν την περίοδο οι βιομηχανίες ξεκινούν γενικευμένη εφαρμογή των στατιστικών τεχνικών κυρίως για ποιοτικό έλεγχο. Η εργασία του Abraham Wald το 1933 για την θεωρία αποφάσεων οριοθετεί την τέταρτη περίοδο. Στη συνέχεια με την αύξηση της υπολογιστικής δυνατότητας μετά το 1940 μπορούν να εφαρμοστούν τεχνικές σε τεράστιο όγκο δεδομένων.

Ο κλάδος των Πιθανοτήτων άρχισε να αναπτύσσεται κυρίως μετά τον 16ο αιώνα, με την μεγάλη ανάπτυξη να πραγματοποιείται τον 18ο αιώνα με τις εργασίας των Bernoulli, de Moivre, Laplace και Gauss (Σκούρας & Στράντζαλος, 2023).

Η ανάπτυξη του εμπορίου τον 17ο αιώνα, η ανάγκη πληρωμής ασφαλίστρων υπολογίζοντας τις απώλειας κατά την μεταφορά, η ανάγκη υπολογισμού του προσδοκώμενου ποσού από φόρους, η ανάπτυξη της αστρονομίας οδήγησαν στην ανάπτυξη της θεωρίας Πιθανοτήτων. Λόγο της συνθετότητας των προβλημάτων, οι αρχικοί υπολογισμοί των πιθανοτήτων δόθηκαν σε προβλήματα τυχερών παιχνιδιών (Σκούρας & Στράντζαλος, 2023).

Η κλασική θεωρία των Πιθανοτήτων θεμελιώθηκε από τον P.S. Laplace (1749-1827). Ο D. Hilbert το 1900 παρουσιάζει την ανάγκη για μια αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας των Πιθανοτήτων με μαθηματική αυστηρότητα. Η σημερινή αξιωματική θεμελίωση έγινε λίγο αργότερα το 1933 από τον A.N. Kolmogorov βάζοντας τα θεμέλια για εφαρμογές της θεωρίας Πιθανοτήτων (Κουνιάς & Μωυσιάδης, 1999).

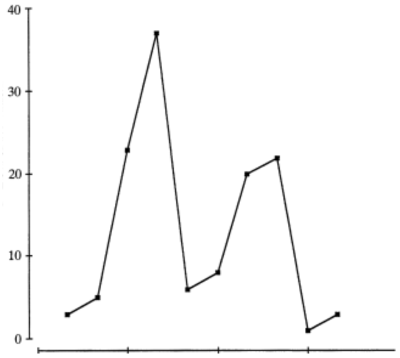
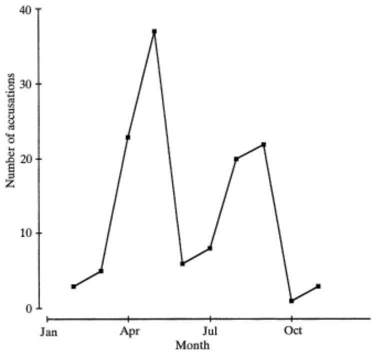
2.2 Στοχαστικά Μαθηματικά και Μαθηματικά

Η Στατιστική εστιάζει στην μεταβλητότητα και σε ορισμένες περιπτώσεις από ένα τεράστιο όγκο δεδομένων επιδιώκουμε να βρούμε ασυνήθιστα δεδομένα ή να μελετήσουμε τη διακύμανση ή να εντοπίσουμε συστηματικές επιδράσεις (Cobb & Moore, 1997). Η Στατιστική έχει τη δική της ουσία, τις δικές τις ξεχωριστές έννοιες και τρόπους συλλογισμού (Moore, 1992).

Κυρίαρχο ρόλο στην Στατιστική έχει το πλαίσιο, σε αντίθεση με τα Μαθηματικά. Η ανάπτυξη της Στατιστικής έγινε, σε μεγάλο βαθμό, για να εξυπηρετήσει πρακτικές ανάγκες των κρατών να κατανοήσουν δημογραφικά στοιχεία, τις συνθήκες των πολιτών και της οικονομίας τους (Gal, 2019).

Οι Cobb και Moore (1997) αναφέρουν ότι τα δεδομένα στη Στατιστική δεν είναι απλά αριθμοί, αλλά είναι αριθμοί μέσα σε πλαίσιο. Οι ερευνητές δίνουν και ένα παράδειγμα, χωρίς σχεδόν κανένα μαθηματικό περιεχόμενο, για να τονίσουν την αναγκαιότητα του πλαισίου στη Στατιστική. Στο γράφημα 2.1 στο σχήμα α δεν έχει κανένα ενδιαφέρον η αναπαράσταση των δεδομένων. Όταν όμως γνωρίζουμε το πλαίσιο[1] (σχήμα β) και λεπτομέρειες για αυτό, αποκτάει νόημα και ενδιαφέρον.

Γράφημα 2.1: Πλήθος ατόμων που κατηγορήθηκαν για μαγεία στο Essex, MA, 1692 *(*Cobb & Moore, 1997).

Σχήμα α	Σχήμα β
	 **Figure 1.** Numbers of people accused of witchcraft in Essex County, MA, 1692.

Στα Μαθηματικά το πλαίσιο μπορεί να έχει ή και όχι μεγάλο ρόλο (del Mas, 2004). Μπορεί στα Μαθηματικά να χρησιμοποιηθεί το πλαίσιο αρχικά για να δώσει ενδιαφέρον και να κάνει προσιτή την δομή των αφηρημένων εννοιών. Αργότερα μπορεί ο μαθητής να χειρίζεται τις μαθηματικές έννοιες σε ένα «καθαρά νοητικό κόσμο», που ενδεχομένως να μην έχει στοιχεία αναφοράς στον πραγματικό κόσμο, με το μαθηματικό συλλογισμό να γίνεται αρκετά δύσκολος.

Οι Gal και Garfield (1997) αναφέρουν διαφορές των Μαθηματικών από την Στατιστική, όπως για παράδειγμα:

- στη Στατιστική τα δεδομένα εμφανίζονται ως αριθμοί σε ένα πλαίσιο.
- στις στατιστικές έρευνες έχουμε την «ακαταστασία» (ή απροσδιοριστία) των δεδομένων, σε αντίθεση με την πιο ακριβή φύση στα μαθηματικά.
- η πλειοψηφία των στατιστικών προβλημάτων δεν έχουν μοναδική μαθηματική λύση. Η αξιολόγηση γίνεται ως προς την ποιότητα του συλλογισμού, την επάρκεια των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν, τη φύση των δεδομένων.

Σύμφωνα με τον Pereira-Mendoza (2002), ο στατιστικός συλλογισμός περιλαμβάνει συλλογισμό με αβεβαιότητα, με την έννοια ότι ακόμη και στην ορθή εφαρμογή των διαδικασιών, με τις σωστές παραδοχές, τα συμπεράσματα είναι «αβέβαια», με την ερμηνεία των δεδομένων να πραγματοποιείται σε ένα κόσμο με αβεβαιότητα. Αυτή η αβεβαιότητα αξιολογείται από την θεωρία των στατιστικών συμπερασμάτων και υπολογίζεται η πιθανότητα λάθους (Braham & Ben-Zvi, 2019). Σε αντίθεση με τα Μαθηματικά, όπου με

[1] Στο σχήμα β παρουσιάζεται ο αριθμός ατόμων που κατηγορήθηκαν για μαγεία στο Essex το 1692

λογικά επιχειρήματα εξάγονται συμπεράσματα και ο συλλογισμός χαρακτηρίζεται με βεβαιότητα (Pereira-Mendoza, 2002).

Οι Cobb και Moore (1997) αναφέρουν και στη διδασκαλία την δυσκολία της Στατιστικής, όπου δεν αρκεί η γνώση της θεωρίας της Στατιστικής. Χρειάζεται επιπλέον η εύρεση κατάλληλων παραδειγμάτων, όπου να έχει νόημα η μεταβλητότητα των δεδομένων στο πλαίσιο που παρουσιάζεται.

Η Στατιστική στο επίπεδο της θεωρίας είναι μαθηματικά, ενώ στο επίπεδο της εφαρμογής χρησιμοποιεί το πλαίσιο όλων των άλλων γνωστικών περιοχών (Τσάντας et al., 1999). Η Στατιστική είναι η επιστημονική εφαρμογή των βασικών μαθηματικών για συλλογή, ανάλυση και παρουσίαση αριθμητικών δεδομένων (Azar & Mahmoudi, 2014).

Οι Πιθανότητες έχουν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και οι Batanero et al. (2016) αναφέρουν την έλλειψη αναστρεψιμότητας των πειραμάτων τύχης.

2.3 Στοχαστικά Μαθηματικά στο ΑΠΣ

Υπάρχουν διαφορετικές προσεγγίσεις και διαφορετικοί ορισμοί για το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών. Η Μπούντα (2013) υποστηρίζει ότι το περιεχόμενο του ΑΠΣ εξαρτάται από την φιλοσοφία για την έννοια της μάθησης και της διδασκαλίας και την πολιτικοοικονομική ιδεολογία. Το ΑΠΣ κάθε χώρας αντικατοπτρίζει τις πεποιθήσεις, τις στάσεις και τις παραδοσιακές αξίες που είναι αποδεκτές από τις κοινωνικές ομάδες που κατέχουν την εξουσία. Αυτές οι ομάδες διαμορφώνουν την κυρίαρχη ιδεολογία και επηρεάζουν τον τρόπο οργάνωσης της κοινωνίας, συμπεριλαμβανομένου του επιπέδου οργάνωσης στον κοινωνικό και οικονομικό τομέα.

Ο ορισμός των Wiles και Bondi (2007) αναφέρει:

«το πρόγραμμα σπουδών αντιπροσωπεύει μια σειρά επιθυμητών στόχων και αξιών που ενεργοποιούνται μέσω μιας διαδικασίας ανάπτυξης και καταλήγουν σε επιτυχημένη μαθησιακή εμπειρία για τους μαθητές».

Η Μπούντα (2013) περιγράφει τον τρόπο που συντάσσεται το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών στην Ελλάδα. Από την μεταπολίτευση μέχρι και το 2003 επιστημονική επιτροπή (συνήθως στελέχη του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου) όριζε τους σκοπούς κάθε μαθήματος με λεπτομέρεια, καθώς και τη διδακτική μεθοδολογία και την αξιολόγηση. Με βάση τα αναλυτικά προγράμματα το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο με το ΥΠΕΠΘ ανάθετε σε συγγραφική ομάδα την συγγραφή του αντίστοιχου εγχειριδίου. Από το 2003 το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο κάνει προκηρύξεις για την συγγραφή των διδακτικών εγχειριδίων με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα και το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο εγκρίνει ή απορρίπτει το διδακτικό πακέτο. Με τον τρόπο αυτό συντάσσεται το μοναδικό εγχειρίδιο κάθε μαθήματος.

Στοχαστικά Μαθηματικά

Οι Batanero και Borovcnik (2016) αναφέρουν τρεις βασικούς λόγους για την εισαγωγή των Στοχαστικών Μαθηματικών στα αναλυτικά προγράμματα των σχολείων:

- ο ουσιαστικός ρόλος της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων στον κριτικό συλλογισμό
- ο καθοριστικός ρόλος σε άλλους κλάδους
- ο βασικός ρόλος για τον σχεδιασμό και την λήψη αποφάσεων σε πολλά επαγγέλματα.

Οι Ζαχαριάδης, Πόταρη και Στουραΐτης (2011) στους λόγους του εμπλουτισμού των προγραμμάτων σπουδών με περισσότερα Στοχαστικά Μαθηματικά αναφέρουν:

- την προετοιμασία των αυριανών πολιτών να κατανοούν και να ελέγχουν κριτικά τα αποτελέσματα, τις ερμηνείες των αποτελεσμάτων και τα συμπεράσματα από μια στατιστική μελέτη
- την ανάπτυξη μη ντετερμινιστικής σκέψης των μαθητών
- την γνώση και ανάπτυξη κατάλληλων εργαλείων για τους παραπάνω στόχους
- την ευκαιρία που δίνουν τα Στοχαστικά Μαθηματικά στους μαθητές μέσω των εφαρμογών να αντιληφθούν τη σημασία κι τον ρόλο στον τρόπο οργάνωσης και εξέλιξης της κοινωνίας.

Οι οδηγίες διδασκαλίας των Μαθηματικών Γενικής Παιδείας της Γ΄ τάξης (ΥΠ.Π.Ε.Θ., 2023ζ) επισημαίνουν:

> Η διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών έχει ως στόχους αφενός τη γνωριμία των μαθητών/μαθητριών με στοιχεία απαραίτητα για την κατανόηση και την ερμηνεία καταστάσεων που συναντά ο σύγχρονος πολίτης, και αφετέρου την εμπλοκή τους με μη αιτιοκρατικούς τρόπους σκέψης για προβλήματα και καταστάσεις που εμπεριέχουν κάποιο βαθμό αβεβαιότητας (σ. 1).

Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών που εφαρμόζεται σήμερα στην Ελλάδα

Το αναλυτικό πρόγραμμα που εφαρμόζεται σήμερα (σχολικό έτος 2023-2024) είναι του 2003. Η καινοτομία του ΑΠΣ του 2003, σύμφωνα με την Μπούντα (2013), έγκειται στο ότι είναι ενιαίο (για την υποχρεωτική εκπαίδευση), εισάγει θεμελιώδης έννοιες, περιλαμβάνει σχέδια εργασίας με μεθόδους έρευνας, περιλαμβάνει προτεινόμενες δραστηριότητες, και προωθεί την ενεργή συμμετοχή των μαθητών.

Στο ΑΠΣ του 2003 η παρουσία των Στοχαστικών Μαθηματικών είναι περιορισμένη. Στην Β΄ Γυμνασίου οι στόχοι είναι οι μαθητές να μπορούν να διαβάζουν και να ερμηνεύουν τις διάφορες στατιστικές αναπαραστάσεις και να μπορούν μέσω συλλογής δεδομένων, οργάνωσης και παρουσίασης να εξάγουν συμπεράσματα. Στην Γ΄ Γυμνασίου στόχος του ΑΠΣ αποτελεί η γνώση βασικών εννοιών της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα Στοχαστικά Μαθηματικά που διδάσκονται οι μαθητές σήμερα, στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Δημοτικό

Σύμφωνα με τις οδηγίες διδασκαλίας για τα μαθηματικά του Δημοτικού (ΙΕΠ, 2023) οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την Στατιστική (πίνακες, ραβδογράμματα, μέση τιμή) στην Ε΄ Δημοτικού και τα πειράματα τύχης και την έννοια της πιθανότητας.

Γυμνάσιο

Οι μαθητές στην Β΄ Γυμνασίου μαθαίνουν για τον πληθυσμό και το δείγμα, βασικές έννοιες τις Περιγραφικής Στατιστικής. Επιπλέον στην ύλη περιλαμβάνονται οι γραφικές παραστάσεις, η μέση τιμή και η διάμεσος. Στην ύλη της Γ΄ Γυμνασίου στις Πιθανότητες γίνεται αναφορά στα σύνολα, στον δειγματικό χώρο, στα ενδεχόμενα και στην έννοια της πιθανότητας (ΥΠ.Π.Ε.Θ., 2023α).

Γενικό Λύκειο

Τα Στοχαστικά Μαθηματικά απουσιάζουν από το Γενικό Λύκειο. Οι μόνοι μαθητές που διδάσκονται Στατιστική και Πιθανότητες είναι αυτοί της Γ΄ Λυκείου οι οποίοι έχουν επιλέξει Ομάδα Προσανατολισμού Ανθρωπιστικών Σπουδών. Στο πρόγραμμα αυτού του μαθήματος το κεφάλαιο Πιθανότητες περιλαμβάνει πειράματα τύχης, κλασικό και αξιωματικό ορισμό πιθανότητας, πράξεις με ενδεχόμενα, συνδυαστική. Στο κεφάλαιο Στατιστική περιλαμβάνονται η παρουσίαση στατιστικών δεδομένων, μέτρα θέσης και μεταβλητότητας, πίνακες συνάφειας, γραμμική συσχέτισης και διαγράμματα διασποράς (ΥΠ.Π.Ε.Θ., 2023β).

Επαγγελματικό Λύκειο

Οι μαθητές της Γ΄ τάξης των επαγγελματικών Λυκείων διδάσκονται το μάθημα γενικής παιδείας Άλγεβρα το οποίο εξετάζεται στις τελικές εξετάσεις και στις πανελλαδικές. Το μάθημα αυτό περιέχει στοιχεία στατιστικής παρόμοια με αυτά της Γ΄ Λυκείου του Γενικού Λυκείου (Ανθρωπιστικών Σπουδών) χωρίς όμως τα θηκογράμματα, τους πίνακες συνάφειας, τη γραμμική συσχέτιση και τα διαγράμματα διασποράς και δεν διδάσκεται το κεφάλαιο των Πιθανοτήτων (ΥΠ.Π.Ε.Θ., 2023γ).

Νέο Πρόγραμμα Σπουδών

Το νέο πρόγραμμα σπουδών για το Δημοτικό, το Γυμνάσιο και το Λύκειο αναφέρει για τον σκοπό των Στοχαστικών Μαθηματικών:

> Ο βασικός σκοπός της διδασκαλίας της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων είναι να αναπτύξει την ικανότητα του/ της μαθητή/-τριας -μελλοντικού πολίτη- να αξιολογεί κριτικά πληροφορίες, να εξάγει συμπεράσματα, να κάνει προβλέψεις και να λαμβάνει αποφάσεις κάτω από αβέβαιες συνθήκες. Η βασική διαφορά των Στοχαστικών Μαθηματικών από τις άλλες θεματικές περιοχές των Μαθηματικών είναι ότι η συγκεκριμένη περιοχή μελετά προβλήματα που σχετίζονται με τη μεταβλητότητα δεδομένων, δηλαδή με τη διαφορετικότητα που υπάρχει γύρω μας (π.χ. τα άτομα διαφέρουν, οι συνθήκες ενός πειράματος διαφέρουν) (ΥΠ.Π.Ε.Θ., 2023δ, σελ 11563-11564).

Ειδικότερα για την Στατιστική και τις Πιθανότητες το νέο ΠΣ επισημαίνει:

«Το περιεχόμενο της Στατιστικής εξελίσσεται από τη συλλογή και παρουσίαση δεδομένων από μικρές στατιστικές έρευνες στο Δημοτικό, στη μελέτη συνεχών ποσοτικών δεδομένων και μέτρων θέσης και μεταβλητότητας στο Γυμνάσιο, μέχρι τη μελέτη σχέσεων εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών στο Λύκειο» (ΥΠ.Π.Ε.Θ., 2023δ, σελ 11564).

«Το περιεχόμενο των Πιθανοτήτων αναπτύσσεται από την αβεβαιότητα διαφόρων γεγονότων και την έννοια της πιθανότητας στο Δημοτικό, στον υπολογισμό πιθανοτήτων με τον κλασικό ορισμό στο Γυμνάσιο και στις έννοιες της δεσμευμένης πιθανότητας στο Λύκειο» (ΥΠ.Π.Ε.Θ., 2023δ, σελ 11564).

Το γράφημα 2.2 περιλαμβάνει τον διαχωρισμό του ΠΣ των Στοχαστικών Μαθηματικών.

Γράφημα 2.2: Στοχαστικά Μαθηματικά (ΥΠ.Π.Ε.Θ., 2023δ))

Στοχαστικά Μαθηματικά

Στη συνέχεια παρουσιάζονται πολύ συνοπτικά τα νέα προγράμματα σπουδών στο Δημοτικό, το Γυμνάσιο και το Λύκειο, που αφορούν τα Στοχαστικά Μαθηματικά. Η αναλυτική τους περιγραφή, όπως αυτή ανακοινώθηκε από το ΥΠ.Π.Ε.Θ, παρατίθεται στο παράρτημα Α.

Δημοτικό

Σε όλες της τάξης της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης υπάρχουν ενότητες Στοχαστικών Μαθηματικών (ΥΠ.Π.Ε.Θ., 2023δ). Στην Α΄ Δημοτικού οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τη Στατιστική (συλλογή δεδομένων, εικονογράμματα ραβδογράμματα) και τις Πιθανότητες με τα απλά πειράματα τύχης. Στην Β΄ τάξη οργανώνουν σε πίνακες τα δεδομένα και μαθαίνουν τα παιδιά τα σημειογράμματα και εισάγουν την έννοια του συνδυασμού στις Πιθανότητες και της σύγκρισης πιθανοτήτων. Στην Γ΄ τάξη παρουσιάζονται διαγράμματα με εικόνες ή σύμβολα και γνωρίζουν την επικρατούσα τιμή και το εύρος. Στις Πιθανότητες πραγματοποιούν πολλές δοκιμές για την σύγκριση πιθανοτήτων. Στην Δ΄ τάξη εμπλουτίζεται η συλλογή δεδομένων για δυο ομάδες ίσου πλήθους και εισάγεται η διάμεσος. Στα πειράματα τύχης διερευνούν τη συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου με δοκιμές και εκτιμούν την πιθανότητα σε κλίμακα αδύνατο ενδεχόμενο ως βέβαιο ενδεχόμενο. Στην επόμενη τάξη οι μαθητές ομαδοποιούν τα δεδομένα, μαθαίνουν τα φυλλογράμματα, τον μέσο όρο, και εκφράζουν την πιθανότητα σε κλάσμα και σε δεκαδική αναπαράσταση, και συγκρίνουν πιθανότητες. Στην τελευταία τάξη χρησιμοποιούν πίνακες σχετικών συχνοτήτων, διαγράμματα με σχετικές συχνότητες και κυκλικά διαγράμματα και προσδιορίζουν την επικρατούσα τιμή, τον μέσο όρο, τη διάμεσο, το εύρος. Στην ενότητα των Πιθανοτήτων οι μαθητές της Στ΄ τάξης περιγράφουν τα δυνατά αποτελέσματα και συνδέουν το κλάσμα της πιθανότητας με τη σχετική συχνότητα.

Γυμνάσιο

Το νέο Πρόγραμμα Σπουδών (ΠΣ) στα Μαθηματικά του Γυμνασίου (ΥΠ.Π.Ε.Θ., 2023ε) περιέχει στοιχεία Στατιστικής και Πιθανοτήτων σε κάθε τάξη του Γυμνασίου. Στην Α΄ Γυμνασίου περιλαμβάνονται βασικές στατιστικές έννοιες, διαφορετικές μορφές αναπαραστάσεις δεδομένων (π.χ. κυκλικά διαγράμματα, ιστογράμματα) και μέτρα όπως το εύρος. Επιπλέον στις Πιθανότητες παρουσιάζεται ο κλασικός ορισμός των πιθανοτήτων και η σύνδεση της πιθανότητας με τη σχετική συχνότητα.

Στη Β΄ Γυμνασίου στη Στατιστική εμπλουτίζονται οι αναπαραστάσεις με χρονοδιαγράμματα, θηκόγραμματα και την μέση τιμή και τη διάμεσο. Στο κεφάλαιο των Πιθανοτήτων αυτής της τάξης εισάγονται η βασική αρχή απαρίθμησης και ο προσθετικός νόμος των πιθανοτήτων, καθώς κι ο έλεγχος ασυμβίβαστων ενδεχομένων.

Στην Γ΄ Γυμνασίου η Στατιστική περιλαμβάνει τις έννοιες του δείγματος και του πληθυσμού και εισάγονται η δυνατότητα επαγωγικής εξαγωγής συμπερασμάτων και η μεταβλητότητα στατιστικών δεικτών. Στις Πιθανότητες παρουσιάζεται ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών, με προσομοιώσεις με χρήση λογισμικού και επιπλέον η ανεξαρτησία ενδεχομένων.

Λύκειο

Το νέο Πρόγραμμα Σπουδών (ΠΣ) στα Μαθηματικά για τις τάξεις του Λυκείου (ΥΠ.Π.Ε.Θ., 2023στ) δίνει βαρύτητα στα Στοχαστικά Μαθηματικά. Στον πίνακα 2.1 παρουσιάζονται συνοπτικά οι έννοιες που περιλαμβάνει το νέο πρόγραμμα σπουδών, διατηρώντας την δομή του γραφήματος 2.2.

Πίνακας 2.1: Στοχαστικά Μαθηματικά στο Γενικό Λύκειο: συνοπτική παρουσίαση

Στοχαστικά Μαθηματικά					
Στατιστική			**Πιθανότητες**		
διαχείριση δεδομένων	*Α΄ Λυκείου*	Ποιοτικές ποσοτικές μεταβλητές		*Α΄ Λυκείου*	Κλασικός – αξιωματικός ορισμός πιθανοτήτων Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων
	Β΄ Λυκείου (Γενικής Παιδείας)	Πίνακες συνάφειας συχνοτήτων διπλής εισόδου ραβδογράμματα	**Πειράματα τύχης και πιθανότητες**	*Β΄ Λυκείου (Γενικής Παιδείας)*	Συνδυαστική Εφαρμογές κανονικής κατανομής
	Γ΄ Λυκείου (Γενικής Παιδείας)	Εξαρτημένες - ανεξάρτητες μεταβλητές		*Γ΄ Λυκείου (Γενικής Παιδείας)*	Δοκιμή Bernoulli
	Γ΄ Λυκείου (Προσανατολισμού)			*Γ΄ Λυκείου (Προσανατολισμού)*	
μέτρα θέσης - μεταβλητότητα	*Α΄ Λυκείου*	Μέτρα θέσης και διασποράς	**συσχέτιση**	*Α΄ Λυκείου*	
	Β΄ Λυκείου (Γενικής Παιδείας)			*Β΄ Λυκείου (Γενικής Παιδείας)*	Δεσμευμένη πιθανότητα
	Γ΄ Λυκείου (Γενικής Παιδείας)			*Γ΄ Λυκείου (Γενικής Παιδείας)*	Πολλαπλασιαστικό κανόνα πιθανοτήτων Δεσμευμένη η Πιθανότητα – ανεξάρτητα ενδεχόμενα (Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας – Bayes)
	Γ΄ Λυκείου (Προσανατολισμού)	Μέση τιμή διασπορά με χρήση του τύπου του αθροίσματος		***Γ΄ Λυκείου (Προσανατολισμού)***	
σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δυο μεταβλητών	*Α΄ Λυκείου*	Συγκρίσεις με θηκόγραμματα			
	Β΄ Λυκείου (Γενικής Παιδείας)	Σχέση εξάρτηση με χρήση ραβδογράμματος			
	Γ΄ Λυκείου (Γενικής Παιδείας)	Γραμμική συσχέτιση Γραμμική παλινδρόμηση (εποπτικά)			
	Γ΄ Λυκείου (Προσανατολισμού)	Γραμμική συσχέτιση Γραμμική παλινδρόμηση (ελαχίστων τετραγώνων)			

Σημείωση: Χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικές αποχρώσεις για να παρουσιαστούν οι έννοιες που περιλαμβάνονται σε κάθε τάξη του Λυκείου.

Με βάση τα στοιχεία του πίνακα 2.1, παρατηρείται εμπλουτισμός του ΠΣ με την Στατιστική και τις Πιθανότητες. Στο προηγούμενο πρόγραμμα του Λυκείου απουσίαζαν τα Στοχαστικά Μαθηματικά, ενώ σε αυτό κατέχουν σημαντική θέση.

2.4 Παρανοήσεις, δυσκολίες στα Στοχαστικά Μαθηματικά

Στατιστική

Οι Ben-Zvi και Garfield (2004) αναφέρουν δυσκολίες στην κατανόηση της Στατιστικής, με συνέπεια την δυσκολία και στην διδασκαλία της.

- Κάποιες από τις στατιστικές ιδέες είναι δύσκολες, πολύπλοκες και σε ορισμένες περιπτώσεις έρχονται σε αντίθεση με τις διαισθήσεις των μαθητών, με συνέπεια ο εκπαιδευτικός να δυσκολεύεται να παρακινήσει τους μαθητές στο μάθημα τις Στατιστικής.
- Κάποιοι μαθητές δυσκολεύονται σε άλλα μαθηματικά αντικείμενα που χρησιμοποιεί η Στατιστική, όπως για παράδειγμα σε έννοιες αναλογιών (κλάσματα, ποσοστά) ή στους αλγεβρικούς χειρισμούς, με αποτέλεσμα το μάθημα να γίνεται λιγότερο προσιτό.
- Το πλαίσιο σε πολλά στατιστικά προβλήματα μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές να βασιστούν σε λανθασμένη διαίσθηση ή σε εμπειρίες τους και να μην επιλέξουν την κατάλληλη στατιστική διαδικασία.
- Οι μαθητές έχουν τη λανθασμένη εντύπωση ότι η εστίαση στην Στατιστική θα είναι στους αριθμούς, στους υπολογισμούς, στους τύπους και σε μια ορθή απάντηση.

Ο Γκίνης (2024) αναφέρει την λεκτική αδυναμία ως παράγοντα που εμποδίζει τους μαθητές από την κατανόηση των εννοιών της Στατιστικής και στην περιγραφή καταστάσεων, με αναφορά στην έρευνα των Χατζηπαντελή και Γκάσταρη (1998).

Οι Batanero et al. (1994) ειδικά για τα προβλήματα στη διδασκαλία των στατιστικών εννοιών σε φοιτητές αναφέρουν τις δυσκολίες που περιγράφουν οι Garfield και Ahlgren (1988):

- Πολλές έννοιες των Στοχαστικών Μαθηματικών απαιτούν αναλογικό συλλογισμό, το οποίο έχει δυσκολίες στα μαθηματικά.
- Τις λανθασμένες προϋπάρχουσες γνώσεις που έχουν οι μαθητές για τα αντικείμενα αυτά.
- Την αρνητική προδιάθεση που έχουν αναπτύξει οι μαθητές, εξαιτίας της διδασκαλίας του μαθήματος με αφαιρετικό και επίσημο τρόπο.

Κατανομή συχνοτήτων και γραφικές παραστάσεις

Οι μαθητές σύμφωνα με τον Gal (1998) πρέπει να μπορούν να διαβάζουν, και να βγάζουν συμπεράσματα από τους πίνακες και της γραφικές αναπαραστάσεις των δεδομένων. Επιπλέον να μπορούν να συγκρίνουν και να αναγνωρίζουν διαφορές από διαφορετικές ομάδες δεδομένων.

Την κατανόηση των δεδομένων που παρουσιάζονται σε γραφικές αναπαραστάσεις οι Friel, Curcio και Bright (2001), με βάση την εργασία της Curcio (1987), τις ταξινομούν σε τρεις κατηγορίες:

- «διαβάζοντας τα δεδομένα» (περιλαμβάνει την ανάγνωση απλών πληροφοριών που προκύπτουν από το γράφημα).

- «διαβάζοντας μεταξύ των δεδομένων» (περιλαμβάνει την ερμηνεία των πληροφοριών και απαιτεί μια λογική εξαγωγή συμπερασμάτων).
- «διαβάζοντας πέρα από τα δεδομένα» (περιλαμβάνει επέκταση, πρόβλεψη, συμπέρασμα).

Στην πρώτη κατηγορία οι μαθητές δεν συναντούν ιδιαίτερες δυσκολίες, αλλά στην δεύτερη συναντούν που ενδεχομένως να οφείλεται σε μαθηματικές γνώσεις, σε εκφραστικά/γλωσσικά λάθη. Στην τελευταία κατηγορία εμφανίζονται και οι μεγαλύτερες προκλήσεις, καθώς περιλαμβάνει για παράδειγμα την σύγκριση δεδομένων, την πρόβλεψη για άγνωστη περίπτωση, την γενίκευση σε πληθυσμό, την εύρεση της τάσης.

Οι Batanero et al. (1994) αναφέρουν το παράδειγμα του γραφήματος διασποράς (scatter plot) για τις παραπάνω κατηγορίες. «Διαβάζοντας τα δεδομένα» αναφέρεται σε ερωτήσεις όπως την εύρεση των συντεταγμένων ενός δεδομένου σημείου. «Διαβάζοντας μεταξύ των δεδομένων» αναφέρεται για παράδειγμα σε ερωτήσεις σχετικά με την ένταση της συσχέτισης και η κατηγορία «διαβάζοντας πέρα από τα δεδομένα» περιέχει ερωτήσεις που ζητείται η πρόβλεψη της τιμής y για ένα x που δεν περιλαμβάνεται στο γράφημα.

Οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στη διάκριση των μεταβλητών σε ποιοτικές και ποσοτικές, σε συνεχείς και διακριτές, καθώς και στον τρόπο με τον οποία θα παρουσιάσουν τα δεδομένα σε πίνακες ή σε γραφικές αναπαραστάσεις (Maryati & Priatna, 2018). Επιπλέον παρατηρήθηκαν δυσκολίες στην κατανόηση και εύρεση αντιπροσωπευτικού δείγματος.

Ραβδογράμματα

Οι Pereira-Mendoza και Mellor (1991) αναφέρουν τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στα ραβδογράμματα στις κλίμακες (scales), στη διαχείριση των δεδομένων, στην εξαγωγή συμπερασμάτων και στη δυσκολία αναγνώρισης των δεδομένων που εμφανίζονται στο γράφημα.

Οι Li και Shen (1992) αναφέρουν για τη χρήση των γραφικών αναπαραστάσεων τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές.

- Αδυνατούν να κατανοήσουν ότι διαφορετικοί τύποι γραφημάτων θα πρέπει να χρησιμοποιούνται σε διαφορετικές καταστάσεις (για παράδειγμα επιλέγουν το χρονόγραμμα με ποιοτικές μεταβλητές).
- Παραλείπουν τις κλίμακες σε ένα ή και στους δυο άξονες του γραφήματος.
- Δεν βάζουν τίτλους στους άξονες.
- Δεν χωρίζουν κατάλληλα τις μονάδες στους άξονες.
- Τα δεδομένα στο γράφημα δεν μπορούν να διαβαστούν.
- Βάζουν στο ίδιο γράφημα μεταβλητές διαφορετικής φύσης που δεν συγκρίνονται (για παράδειγμα, ενώ γνωρίζουν ότι δεν μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει όρους όπως λιγότερα/περισσότερα ή μεγαλύτερο/μικρότερο για 30 καρέκλες και 50 kg κρέας, τα τοποθετούν στο ίδιο γράφημα).

Ο Γκίνης (2024) στα λάθη των μαθητών στα ραβδογράμματα, αναφέρει τη διαφοροποίηση του πλάτους και την απουσία του μηδέν στην αρχή των αξόνων.

Θηκόγραμματα

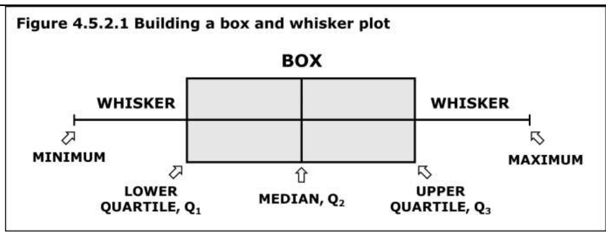
Οι Edwards, Özgün-Koca και Barr (2017) αναφέρουν ότι δεν υπάρχει δυσκολία στην κατασκευή του θηκογράμματος, αλλά υπάρχουν δυσκολίες κυρίως στην ερμηνεία των δεδομένων που εμφανίζονται σε ένα θηκόγραμμα, σύμφωνα με την έρευνα τους.

Άλλες παρανοήσεις που αναφέρονται για τα θηκογράμματα είναι:

- Εστιάζουν στο ορθογώνιο και δεν παρατηρούν το μέρος από το x min στο Q_1 και από το Q_3 στο max (whisker), με αποτέλεσμα να αγνοούν μεγάλο μέρος των πληροφοριών (Lem et al., 2013) όπως φαίνεται και στο γράφημα 2.3.

Γράφημα 2.3: Θηκόγραμμα (Statistics Canada, 2024)

Θηκόγραμμα (box plot)



- Δυσκολεύονται να «διαβάσουν μεταξύ των δεδομένων», όπως για παράδειγμα την εύρεση του ποσοστού που βρίσκεται πάνω από το πρώτο τεταρτημόριο Q_1
- Εστιάζουν στην ερμηνεία και στη σύγκριση θηκογραμάτων στους πέντε αριθμούς του θηκογράμματος (Pfannkuch, 2007).
- Δεν περιλαμβάνουν πληροφορίες για μεμονωμένες περιπτώσεις και απεικονίζονται συγκεντρωτικά χαρακτηριστικά με αποτέλεσμα την δυσκολία στην ερμηνεία (Bakker, Biehler & Konold, 2004).
- Έχουν μεγάλη διαφορά από τις άλλες αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα σε ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων το διπλάσιο ορθογώνιο σημαίνει και διπλάσια συχνότητα, σε αντίθεση με τα θηκόγραμματα, τα οποία και απαιτούν περισσότερο χρόνο στην εκμάθηση ερμηνείας τους (Bakker, Biehler & Konold, 2004).
- Δυσκολία στην κατανόηση της διαμέσου (Bakker, Biehler & Konold, 2004).
- Λίγοι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν τον χωρισμό των δεδομένων σε τεταρτημόρια (Bakker, Biehler & Konold, 2004).
- Δυσκολεύονται να εκτιμήσουν στο πως θα μπορούσαν να είναι τα δεδομένα, αν ήταν διαχωρισμένα.
- Οι μαθητές βασίζονται σε αυτοματοποιημένο και γρήγορο συλλογισμός στην ανάγνωση του θηκογράμματος (Lem et al., 2013).

Ιστογράμματα

Οι Kaplan et al. (2014) ερευνούν τις τέσσερις πιο δημοφιλείς στην βιβλιογραφία παρανοήσεις για τα ιστογράμματα.

- Συγχέουν κάποιοι μαθητές τα ραβδογράμματα με τα ιστογράμματα.
- Όταν θέλουν να βρουν το κέντρο της κατανομής ή την επικρατούσα τιμή αντί να χρησιμοποιήσουν τις τιμές δεδομένων που βρίσκονται στον άξονα των x, χρησιμοποιούν τη συχνότητα που βρίσκεται στον άξονα των y.

- Πιστεύουν ότι ένα πιο επίπεδο ιστόγραμμα ισοδυναμεί με λιγότερη μεταβλητότητα στα δεδομένα.
- Μπερδεύουν τον άξονα x με τα χρονογράμματα και τον αντιμετωπίζουν ως συνιστώσα χρόνου με αποτέλεσμα να θεωρούν ότι οι τιμές στην αριστερή πλευρά του γραφήματος έχουν πραγματοποιηθεί χρονικά νωρίτερα.

Ο Hawkins (1997) εντοπίζει και άλλες δυσκολίες.

- Συγχέουν το δείγμα με τον πληθυσμό.

Για παράδειγμα δυσκολεύονται οι μαθητές να διακρίνουν ότι ένα ιστόγραμμα αναπαριστά ένα δείγμα με ακρίβεια και πως ένα δείγμα με ακρίβεια προορίζεται να αντιπροσωπεύει έναν πληθυσμό πιθανολογικά. Δηλαδή δεν διακρίνουν τις διαφορές σε αυτούς του τύπους αναπαράστασης και αναμένουν ότι το δείγμα ταυτίζεται με τον πληθυσμό με αποτέλεσμα αυτή η παρανόηση να οδηγεί τους μαθητές να υποθέτουν ότι υπάρχει δειγματοληπτικό σφάλμα (χωρίς μεταβλητότητα) (Rubin et al., 1990).

- Συγχέουν την παρατήρηση με τη συχνότητα.

Μέτρα θέσης και διασποράς

Σύμφωνα με τον Hawkins (1997), οι μαθητές μαθαίνουν μηχανικά τη χρήση των τύπων υπολογισμού των μέτρων θέσης και διασποράς, με αποτέλεσμα να δυσκολεύονται για παράδειγμα σε περιπτώσεις που οι τιμές ενός συνόλου έχουν διαφορετική βαρύτητα (weighted).

Οι μαθητές δεν κατανοούν σε βάθος τις έννοιες μέση τιμή και διάμεσος και σύμφωνα με τους Bakker, Biehler και Konold (2004) έχουν την τάση να θεωρούν τα μέτρα αυτά ως χαρακτηριστικά ενός ατόμου στο κέντρο της ομάδας και όχι ως χαρακτηριστικά για ολόκληρη την ομάδα.

Στο νέο ΠΣ οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τις έννοιες της μέσης τιμής και της διαμέσου από το Δημοτικό (την διάμεσο από την Δ΄ τάξη και τη μέση τιμή από την Ε΄ τάξη). Στο Γυμνάσιο χρησιμοποιούν τα μέτρα αυτά και τα επαναλαμβάνουν και στο Λύκειο σε άλλο επίπεδο. Σύμφωνα με το Guidelines for Assessment and Instruction of Statistics Education (GAISE) (Franklin et al., 2007) υπάρχουν διαφορετικά επίπεδα στατιστικής εξέλιξης των μαθητών (Jacobbe, 2011). Στο πρώτο επίπεδο (Α) στο δημοτικό οι μαθητές αποκτούν την εμπειρία για να ετοιμάσουν την μελλοντική εξέλιξη στο Γυμνάσιο και το Λυκείου (επίπεδο Β και Γ). Στο πρώτο επίπεδο, σύμφωνα με το GAISE, οι μαθητές αντιλαμβάνονται την μέση τιμή ως «δίκαιο μερίδιο» και τη διάμεσο ως μεσαίο σημείο. Τα μέτρα κεντρική τάσης επεκτείνονται στα επόμενα επίπεδα στην κατανόηση των μαθητών ως «σημεία ισορροπίας».

Ο Jacobbe (2012) αναφέρει έρευνες για τα μέτρα θέσης, όπως των Leavy και O'Loughlin (2006) και των Groth και Bergner (2006) σε υποψήφιους καθηγητές. Οι Leavy και O'Loughlin (2006) εντόπισαν την παρανόηση ότι το μόνο κατάλληλο μέτρο για τη μέτρηση του κέντρου και για σύγκριση είναι η μέση τιμή. Επιπλέον διαπίστωσαν και περιορισμένη εννοιολογική κατανόηση για τη μέση τιμή και αδυναμία χρησιμοποίησης του μέσου όρου σε συνδυασμό με τα άλλα μέτρα.

Σύμφωνα με την έρευνα των Groth και Bergner (2006), οι φοιτητές αντιμετωπίζουν τα μέτρα αυτά περισσότερο ως αποτέλεσμα μιας διαδικασίας και όχι ως μαθηματικό αντικείμενο με σημασία και δυσκολεύονται να επιλέξουν πιο μέτρο είναι κατάλληλο σε κάθε περίπτωση.

Επικρατούσα τιμή

Ο Γκίνης (2024) αναφέρει διάφορες δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στην επικρατούσα τιμή:

- Δεν έχουν συνειδητοποιήσει ότι η επικρατούσα τιμή κυρίως χρησιμοποιείται για ποιοτικές μεταβλητές.
- Δυσκολεύονται στην εύρεση τους από τον πίνακα συχνοτήτων, καθώς τη συγχέουν με τη τιμή της μεγαλύτερης συχνότητας (Barr, 1980).
- Δυσκολεύονται στην εύρεση της από τα διαγράμματα συχνοτήτων, όταν αυτά είναι ομαδοποιημένα σε κλάσεις.

Μέση τιμή

Βρέθηκε ότι οι μαθητές αδυνατούν να συνδέσουν δυο μέσες τιμές σε μια (Pollatsek, Lima & Wel, 1981).

Ο Γκίνης (2024) με αναφορά στην έρευνα των Γκίνη και Χατζηπαντελή (2000) σημειώνει ότι οι μαθητές τείνουν να:

- Βρίσκουν το άθροισμα των συχνοτήτων και το διαιρούν με το πλήθος τους.
- Βρίσκουν το άθροισμα των τιμών των παρατηρήσεων και το διαιρούν με το άθροισμα των συχνοτήτων.

Οι Batanero et al. (1994) αναφέρουν επιπλέον δυσκολίες με την έννοια της μέσης τιμής:

- Στον υπολογισμό της μέσης τιμής ορισμένοι μαθητές δεν λαμβάνουν υπόψη τη συχνότητα της τιμής της μεταβλητής (Li & Shen, 1992).
- Όταν γνωρίζουν τον μέσο όρο δυσκολεύονται στην αναμενόμενη τιμή (expected value) μιας τυχαίας μεταβλητής (Pollatsek, Lima & Wel, 1981).

  Για παράδειγμα γνωρίζουμε ότι η βαθμολογία σε ένα σχολικό σύστημα έχει μέσο όρο 400. Επιλέγουμε ένα δείγμα 5 μαθητών και γνωρίζουμε για τις τέσσερεις βαθμολογίες ότι είναι 380, 400, 600, 400. Στην ερώτηση για την αναμενόμενη βαθμολογία του πέμπτου μαθητή, οι μαθητές αντί για τη σωστή απάντηση 400, απαντάνε 220 ώστε το μέσο όρο των πέντε αριθμών να βγει 400.
- Υπάρχουν μαθητές που πιστεύουν ότι αν προσθέσουμε την τιμή μηδέν σε ένα δείγμα δεν επηρεάζει τον μέσο όρο.

Διάμεσος

Βρέθηκε ότι οι μαθητές θεωρούν τη διάμεσο ως σημείο που διαχωρίζει τα δεδομένα και όχι ως μέτρο του κέντρου της ομάδας (Bakker, Biehler και Konold (2004), με αναφορά στους Cobb, McClain και Gravemeijer, (2003)).

Ο Γκίνης (2024) με αναφορά στην έρευνα του (Barr, 1980) επισημαίνει την αδυναμία των μαθητών να κατανοήσουν ότι σε ποιοτικά δεδομένα η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή είναι τα κατάλληλα μέτρα θέσης και στα λάθη των μαθητών αναφέρει:

- Δεν ταξινομούν τα δεδομένα με αύξουσα σειρά (ή φθίνουσα).
- Υπολογίζουν λανθασμένα τη διάμεσο ως το ημιάθροισμα της πρώτης και της τελευταίας παρατήρησης.
- Δεν συνειδητοποιούν ότι η διάμεσος μπορεί να είναι μια τιμή που να μην είναι από τις παρατηρήσεις του δείγματος.
- Δεν διακρίνουν το διαφορετικό τρόπο υπολογισμού της διαμέσου ανάλογα αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο ή περιττό.
- Συγχέουν τη διάμεσο με το πλήθος των παρατηρήσεων, με αποτέλεσμα στις απαντήσεις τους να εμφανίζεται ως διάμεσο το μισό του πλήθους των παρατηρήσεων.

Μέτρα διασποράς

Οι Batanero et al. (1994) αναφέρουν τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στα μέτρα διασποράς.

- Σε ένα δείγμα συχνά δεν λαμβάνουν υπόψη τη διασπορά (Lovie & Lovie, 1976).
- Για τη διασπορά δίνουν μεγαλύτερη έμφαση στην ετερογένεια των δεδομένων, συγκριτικά με την απόκλιση της από το «κέντρο» των παρατηρήσεων (Loosen, Lioen & Lacante, 1985).

  Για παράδειγμα σε δυο δείγματα Α: 10, 20, 30, 40, 50, 60 και Β: 10, 10, 10, 60, 60, 60 οι μαθητές απαντούν σε μεγάλο ποσοστό ότι το Α έχει μεγαλύτερη τυπική απόκλιση από το Β ή ότι έχουν την ίδια τυπική απόκλιση, ενώ στην πραγματικότητα το δείγμα Β έχει τη μεγαλύτερη τυπική απόκλιση.

Σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δυο μεταβλητών

Σύμφωνα με Batanero et al. (1994) υπάρχουν δυσκολίες και στην σχέση δυο μεταβλητών:

- Δυσκολεύονται να διακρίνουν τις μεταβλητές σε ανεξάρτητες και εξαρτημένες (Rubin, Bruce & Tenney, 1991).
- Δυσκολεύονται να διακρίνουν τις μεταβλητές που επηρεάζουν το πρόβλημα με αυτές που δεν μπορούν να το επηρεάσουν (Rubin, Bruce & Tenney, 1991).

Πίνακες συνάφειας (contingency table or cross-tabulation)

Αδυναμίες των μαθητών που έχουν αναγνωριστεί εδώ έχουν ως εξής:

- Δυσκολεύονται στην ερμηνεία των δεδομένων του πίνακα.
- Δυσκολεύονται στην εύρεση συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών.
- Οι μαθητές αντί να εστιάσουν στα δεδομένα επηρεάζονται από τις πεποιθήσεις τους.

- (Δυσκολεύονται να υπολογίσουν και να μετρήσουν την ισχύ της συσχέτισης) [2]

Ευθεία παλινδρόμησης

- Με πιο κριτήριο θα βρουν οι μαθητές την ευθεία παλινδρόμησης (απλό γραμμικό μοντέλο ή μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων).
- Λάθη στην ερμηνεία της γραμμικής παλινδρόμησης ή στη χρήση της για πρόβλεψη.

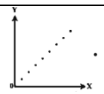
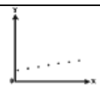
Συσχέτιση- γραμμική συσχέτιση -συντελεστής συσχέτισης

Στην έρευνα τους οι Liu, Lin και Tsai (2009) επιβεβαίωσαν παρανοήσεις για την συσχέτιση δυο μεταβλητών:

- Το διάγραμμα διασποράς (Scatter plot) με τέλεια θετική συσχέτιση r=1 (ή αρνητική r=-1) εμφανίζεται με μια «γραμμή» με την ίδια πάντοτε κλίση.

Οι μαθητές θεωρούν ότι μια θετική συσχέτιση r=1 έχει το σχήμα α πάντα και ότι το σχήμα β δεν αποτελεί θετική συσχέτιση r=1 στο γράφημα 2.4, καθώς η γωνία όπως αναφέρουν δεν είναι 45°.

Γράφημα 2.4: Γραμμική συσχέτιση

Σχήμα α	Σχήμα β
	

- Ο συντελεστής συσχέτισης σχετίζεται με την κλίση της ευθείας
- Η τιμή μηδέν του συντελεστή συσχέτισης υποδεικνύει απολύτως καμία συσχέτιση μεταξύ των δυο μεταβλητών.

Οι μαθητές συγχέουν την συσχέτιση με τη γραμμική συσχέτιση, καθώς το r=0 δηλώνει ότι δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση και θα μπορούσε να υπάρχει άλλη συσχέτιση όπως για παράδειγμα καμπυλόγραμμη.

- Μια θετική συσχέτιση είναι πιο ισχυρή από μια αρνητική συσχέτιση.
- Μια αρνητική συσχέτιση με μεγαλύτερη απόλυτη τιμή υποδεικνύει μια πιο αδύναμη σχέση.
- Η συσχέτιση συνεπάγεται αιτιώδη συνάφεια.

Κάποιοι μαθητές θεωρούν ότι δυο μεταβλητές αναγκαστικά διέπονται από μια σχέση αιτίας και αιτιατού. Οι μαθητές με αυτήν την παρανόηση υποστηρίζουν ότι επειδή συσχέτιση σημαίνει σχέση μεταξύ δυο πραγμάτων, θεωρούν ότι η ισχυρότερη συσχέτιση σημαίνει ότι μια μεταβλητή μπορεί να επηρεάσει την άλλη, με την μια μεταβλητή να έχει το ρόλο της αίτιας και η άλλη του αποτελέσματος.

Πιθανότητες

Οι Khazanov και Prado (2010) διαχωρίζουν την σωστή επίλυση μιας άσκησης πιθανοτήτων στο σχολείο με την εφαρμογή των πιθανοτήτων στην καθημερινή πρακτική, με αναφορά στον Garfield (2001, 2007). Οι μαθητές μπορεί να λύνουν ορθά και αποτελεσματικά ασκήσεις πιθανοτήτων σε τεστ στο σχολείο, αλλά η κρίση τους σε αβέβαια γεγονότα να μην

[2] Αυτές τις δυσκολίες τις βάζουμε σε παρένθεση, καθώς δεν υπάρχουν οι αντίστοιχες ενότητες στο νέο ΠΣ

είναι σωστή και να αδυνατούν να εφαρμόσουν τους κανόνες και τις έννοιες των πιθανοτήτων εξαιτίας των παρανοήσεων που έχουν.

Οι παρανοήσεις που έχουν οι μαθητές μπορεί να προέρχονται από αβέβαια γεγονότα που συναντούν στην καθημερινότητα τους, στο σπίτι, στον χώρο εργασίας ή και στα παιχνίδια τύχης. Ορισμένες από αυτές τις παρανοήσεις μπορεί να προέρχονται από τη διδασκαλία της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων στο σχολείο (Khazanov & Prado, 2010).

Παρουσιάζονται συχνές παρανοήσεις στις Πιθανότητες με βάση την βιβλιογραφία.

- **Μεροληψία ίσης πιθανότητας (equiprobability bias)**

Είναι η τάση των μαθητών να σκέφτονται τα αποτέλεσμα ενός πειράματος ως ισοπίθανα, ακόμα και όταν δεν είναι. Οι Park και Lee (2019) αναφέρουν και δυο παραδείγματα αυτής της παρανόησης. Στην έρευνα του ο Tarr (2002) ζήτησε από τους μαθητές του ποιο φύλο (αγόρι ή κορίτσι) ήταν πιο πιθανό να επιλεγεί από πέντε χαρτάκια που περιείχαν δυο ονόματα αγοριών και τριών κοριτσιών. Η αιτιολόγηση μαθητή, που απάντησε ότι τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα (50-50), ήταν ότι η απάντηση μπορεί να είναι ή αγόρι ή κορίτσι. Σε ένα άλλο παράδειγμα αυτής της παρανόησης ο Li (2000) στην έρευνα του βρήκε στις απαντήσεις των μαθητών την ίδια απάντηση (50-50) όταν το ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ήταν είτε να πραγματοποιηθεί είτε όχι.

- **Προσανατολισμός στο αποτέλεσμα (Outcome orientation)**

Είναι μια κατάσταση όπου η πιθανότητα ενός γεγονότος δεν έχει θεωρηθεί ως ενδεχόμενο ή ως πιθανότητα σύμφωνα με τους Hokor, Apawu, Owusu-Ansah και Agormor (2022), ή διαφορετικά η αντιμετώπιση ενός ενδεχομένου ως επιβεβαίωση της εμφάνισης του και όχι ως μέτρο πιθανότητας (Humphrey & Masel, 2016). Για παράδειγμα στην ερώτηση των Hokor et al. (2022) για ένα τυχαίο γεγονός με πιθανότητα 0,03 να πραγματοποιηθεί βρέθηκαν απαντήσεις σε πολύ υψηλό ποσοστό να περιλαμβάνουν ότι το γεγονός δεν θα πραγματοποιηθεί ή ότι θα πραγματοποιηθεί με βεβαιότητα τρεις στις 100 φορές.

- **Αντιπροσωπευτικότητα (representativeness)**

Είναι η τάση να πιστεύουν οι μαθητές ότι τα δείγματα που μοιάζουν με την κατανομή του πληθυσμού είναι πιο πιθανά από τα δείγματα που δεν μοιάζουν και αναμένουν ότι σε ένα μικρό δείγμα θα έχει την ίδια περίπου κατανομή με την κατανομή στον πληθυσμό (Anway & Bennett, 2004). Για παράδειγμα μαθητές με αυτή την παρανόηση είναι πιθανότερο να θεωρήσουν λανθασμένα ότι στην ρίψη ενός κέρματος 4 φορές είναι πιθανότερη να έρθει ΚΓΓΚ από ότι ΚΚΚΚ (Khazanov & Prado, 2010).

- **Επιρροή του πρόσφατου (recency effects)**

Είναι η πεποίθηση ότι το προηγούμενο αποτέλεσμα θα επηρεάσει το επόμενο αρνητικά ή θετικά. Οι Hokor et al. (2022) αναφέρουν το παράδειγμα της ρίψης ζαριού που σε τέσσερεις ρίψεις εμφανίζεται η ένδειξη 2 και η θετική επιρροή είναι ότι θα έρθει ξανά η ένδειξη 2, ενώ η αρνητική ότι αφού ήρθε τέσσερις φορές η ένδειξη 2 δεν θα έρθει ξανά στην επόμενη ρίψη. Η αρνητική επιρροή του πρόσφατου είναι γνωστή και ως πλάνη του τζογαδόρου (Fischbein & Schnarch, 1997).

- **Απλά και σύνθετα ενδεχόμενα (simple and compound event)**

Οι μαθητές θεωρούν ότι για παράδειγμα στην ρίψη δυο ζαριών ταυτόχρονα, τα ενδεχόμενα να έρθουν δυο εξάρια και να έρθει ένα πέντε και ένα έξι έχουν την ίδια πιθανότητα (Fischbein & Schnarch, 1997).

- **Πλάνη σύνδεσης (conjunction fallacy)**

Οι μαθητές έχουν την παρανόηση ότι η πραγματοποίηση της τομής δυο συνόλων είναι πιθανότερη από την πραγματοποίηση από οποιοδήποτε μεμονωμένο μέλος του ίδιου συνόλου [$P(A \cap B) \leq P(A)$]. Στο παράδειγμα όπου περιγράφονται κάποια χαρακτηριστικά ενός ατόμου (Dan) και ζητείται ποιο από τα δυο ενδεχόμενα είναι πιο πιθανό ο Dan να είναι σπουδαστής ή ο ο Dan να είναι σπουδαστής ιατρικής, οι μαθητές με αυτή την παρανόηση ενδεχομένως να απαντήσουν λανθασμένα την δεύτερη απάντηση (Fischbein & Schnarch, 1997).

- **Η επίδραση του μεγέθους του δείγματος (the effect of sample size)**

Τα άτομα με αυτή την παρανόηση παραμελούν την επίδραση του μεγέθους του δείγματος για τον υπολογισμό της πιθανότητας. Για παράδειγμα θεωρούν ότι η πιθανότητα να εμφανιστεί τουλάχιστον δυο φορές «κεφάλι» στις 3 ρίψεις ενός κέρματος είναι η ίδια με να εμφανιστεί τουλάχιστον 200 φορές «κεφάλι» στις 300 ρίψεις (Fischbein & Schnarch, 1997).

- **Διαθεσιμότητα (availability)**

Σε αυτήν την κατηγορία παρανόησης, οι μαθητές εκτιμούν την πιθανότητα με την ευκολία που μπορούν να φέρουν στο μυαλό τους τις περιπτώσεις. Για παράδειγμα, θεωρούν ότι η επιλογή επιτροπής 2 μελών από δέκα υποψήφιους (συνδυασμός) έχει διαφορετική πιθανότητα από την επιλογή 8 μελών από δέκα υποψηφίους (Fischbein & Schnarch, 1997).

- **Άξονας χρόνου (the time-axis fallacy ή Falk φαινόμενο)**

Η δυσκολία εδώ συνδέεται με το ότι ένα γεγονός δεν μπορεί να ενεργήσει αναδρομικά για την αιτία που το προκάλεσε. Για παράδειγμα σε ένα κουτί βρίσκονται δυο άσπρες και δυο μαύρες σφαίρες. Στην ερώτηση ποια είναι πιθανότητα αν κάποιος έχει διαλέξει στην πρώτη επιλογή μια σφαίρα άσπρη και χωρίς επανατοποθέτηση διαλέξει στη συνέχεια μια σφαίρα από τις υπόλοιπες τρεις, συνήθως δεν δημιουργείται κάποια παρανόηση και επιλέγεται η απάντηση 1/3 [$P(W_{11} / W_1)$]. Το πρόβλημα έρχεται στη δεύτερη ερώτηση του προβλήματος, του «αντίστροφου». Επιλέγει κάποιος μια σφαίρα την οποία όμως δεν γνωρίζει το χρώμα της και την αφήνει στην άκρη και στην συνέχεια από τις υπόλοιπες τρεις επιλέγει μια η οποία είναι άσπρη και ζητείται η πιθανότητα να είναι άσπρη η πρώτη σφαίρα [$P(W_1 / W_{11})$]. Οι δυο αυτές ερωτήσεις ουσιαστικά εκφράζουν το ίδιο πρόβλημα (Fischbein & Schnarch, 1997). Αυτή η έλλειψη της αιτιώδους επιρροής οδηγεί τους μαθητές να σκέφτονται τα ενδεχόμενα ανεξάρτητα (Borovcnik, 1987).

- **Άλλες παρανοήσεις**

Σε προβλήματα πιθανοτήτων χωρίς επανατοποθέτηση υπάρχουν μαθητές που δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι αλλάζει ο δειγματικός χώρος (Fischbein & Gazit, 1984).

2.5 Παιδαγωγική Γνώση Εκπαιδευτικών στα Στοχαστικά Μαθηματικά

Οι Callingham και Watson (2011) περιγράφουν την αξιολόγηση των εκπαιδευτικών ειδικά στη διδασκαλία στη Στατιστική και αναφέρουν ότι έχει μικρότερη ιστορία από την αξιολόγηση στη διδασκαλία των μαθηματικών. Το 1992 στο International Statistical Institute Roundtable, ο Begg (1993) πρότεινε μια ατζέντα που να εξετάζει αυτού του είδους τα θέματα στα σχολεία, με έμφαση στην επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών και την αποτελεσματικότητα της και την γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία της Στατιστικής. Επιπλέον ο Shaughnessy (1992) επισήμανε την απουσία ερευνών και έθεσε ως προτεραιότητα την έρευνα στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τις Πιθανότητες και τη Στατιστική.

Αναφέρουν την έρευνα του Watson (2001) που διερευνούσε τη γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία της Στατιστικής σε διάφορους τομείς. Αναπτύχθηκε ένα εργαλείο αξιολόγησης της διδασκαλίας των στατιστικών εννοιών που αφορούσε την αυτοπεποίθηση στη διδασκαλία, τις πεποιθήσεις για την αξία και τη χρήση της Στατιστικής, καθώς και την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου. Οι Callingham και Watson (2011) αναφέρουν επίσης και την έρευνα του Groth (2007) που παρείχε ένα πλαίσιο για τη διδασκαλία της Στατιστικής στο Γυμνάσιο που προσάρμοσε στη Στατιστική πολλές από τις ιδέες των Hill et al. (2004) για την κοινή γνώση περιεχομένου και την εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται διάφορες έρευνες που αφορούν την παιδαγωγική γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών.

Οι Watson, Callingham και Donne (2008) μελέτησαν τις απαντήσεις 1205 μαθητών και 44 εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Αυστραλία σε έργα πιθανότητας και δεδομένων σε πίνακα συνάφειας. Ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς πως θα συνέχιζαν διδακτικά μετά από συγκεκριμένες λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών. Οι εκπαιδευτικοί στη διδακτική τους παρέμβαση στα λάθη των μαθητών δυσκολεύτηκαν να βοηθήσουν τους μαθητές. Αδυνατούσαν να καθοδηγήσουν τους μαθητές στη σωστή απάντηση ή να δημιουργήσουν γνωστική σύγκρουση, με τις προτάσεις των διδακτικών τους παρεμβάσεων να είναι γενικές και ανεξάρτητες από τους συγκεκριμένους προβληματισμούς των μαθητών.

Οι Watson, Callingham και Nathan (2009) με συνέντευξη διερευνούν την παιδαγωγική γνώση περιεχόμενου 40 καθηγητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης της Αυστραλίας στα Στοχαστικά Μαθηματικά. Δίνεται ένα εικονόγραμμα όπου οι μαθητές απαντούν σε ερωτήσεις κατανόησης του γραφήματος των συχνοτήτων, αλλά και την εύρεση πιθανότητας πρόβλεψης. Σε αυτό το έργο αξιολογείται η παιδαγωγική γνώση των εκπαιδευτικών με ερωτήσεις που περιλαμβάνουν τις μεγάλες ιδέες της Στατιστικής, πιθανές απαντήσεις των μαθητών (σωστές ή λανθασμένες), διδακτικές προτάσεις, και συνέχιση της διδασκαλίας μετά από συγκεκριμένες λανθασμένες απαντήσεις μαθητών. Οι μεγάλες ιδέες και οι αναμενόμενες απαντήσεις των μαθητών συνδέουν τη γνώση του περιεχομένου με τη γνώση των μαθητών, σύμφωνα με τους ερευνητές. Λίγοι εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν συγκεκριμένα στις μεγάλες ιδέες. Οι εκπαιδευτικοί ταξινομήθηκαν με βάση την αξιολόγηση της παιδαγωγικής γνώσης σε τρεις κατηγορίες, με 9 στην υψηλή, 14 στην μεσαία και 17 στη χαμηλή. Μερικοί έκαναν βιαστικές κρίσεις για τις απαντήσεις των μαθητών, με τάση να δίνουν επεξηγηματικές απαντήσεις, αντί να ρωτούν τους μαθητές ή να προτείνουν εναλλακτικές προσεγγίσεις.

Οι Callingham και Watson (2011) συνέλεξαν δεδομένα από εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης της Αυστραλίας που συμμετείχαν σε πρόγραμμα επαγγελματικής ανάπτυξης για την στατιστική κατανόηση των μαθητών. Η πρώτη συλλογή δεδομένων έγινε από 42 εκπαιδευτικούς μετά από διήμερο συνέδριο επαγγελματικής ανάπτυξης στο τέλος του πρώτου έτους του προγράμματος και η δεύτερη στα μέσα του προγράμματος από 26 εκπαιδευτικούς, από τους οποίους οι 18 συμμετείχαν και στην πρώτη ομάδα. Η έρευνα αφορούσε την παιδαγωγική γνώση των εκπαιδευτικών στη Στατιστική και στις Πιθανότητες. Το ερωτηματολόγιο περιλάμβανε έργα χωρισμένα σε τρεις ομάδας. Στην πρώτη ζητούσε να προβλέψουν αναμενόμενες σωστές και λανθασμένες απαντήσεις μαθητών. Στη δεύτερη ομάδα έργων υπήρχαν οι επεκτάσεις των προηγούμενων ερωτήσεων όπου ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς να δείξουν τρόπους που θα μπορούσαν να αξιοποιήσουν στη διδασκαλία στην τάξη τις απαντήσεις των μαθητών. Στην τελευταία ομάδα ζητούσαν από τους εκπαιδευτικούς να απαντήσουν σε συγκεκριμένες απαντήσεις μαθητών. Κατηγοριοποίησαν την ποιότητα των απαντήσεων σε τέσσερεις κατηγορίες όπου στην χαμηλότερη κατηγορία Α βρέθηκαν στην πρώτη συλλογή δεδομένων 14%, στην λίγο υψηλότερη Β 28%, στην Γ 50% και στην υψηλότερη 7%, ενώ στη δεύτερη συλλογή δεδομένων τα ποσοστά ήταν 15% Α, 15% Β, 12% Γ, 23% Δ, με αξιοσημείωτη την αύξηση της κατηγορίας Δ.

Οι Watson και Callingham (2013) μελέτησαν την παιδαγωγική γνώση 26 εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας για τη μέση τιμή. Τους ζητήθηκε να διατυπώσουν απαντήσεις σε ερωτήματα σχεδιασμού μαθήματος, όπως για παράδειγμα πώς θα εισάγουν την έννοια της μέσης τιμής, και να απαντήσουν πως θα συνέχιζαν τη διδασκαλία σε συγκεκριμένες λανθασμένες απαντήσεις μαθητών. Με ρουμπρίκα αξιολόγησης κατηγοριοποίησαν τις απαντήσεις σε τέσσερεις κατηγορίες από 0 μέχρι 4, με τα αποτελέσματα να βρίσκονται σε όλο το εύρος. Ενδεικτικά στην ερώτηση που αφορά το σχέδιο μαθήματος, 0 είχε το 4% των εκπαιδευτικών, 1 το 12%, 2 το 50%, 3 το 15% 4 το 19%. Γενικότερα οι εκπαιδευτικοί του δείγματος χρησιμοποιούσαν δασκαλοκεντρική διδασκαλία χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τις απαντήσεις των μαθητών .

Οι Watson και Callingham (2014) μελέτησαν την γνώση 110 μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε δυο προβλήματα με πίνακες συνάφειας (contingency tables) και την παιδαγωγική γνώση των 45 καθηγητών τους. Με τη βοήθεια συνέντευξης ρωτηθήκαν οι εκπαιδευτικοί για τις μεγάλες στατιστικές ιδέες του προβλήματος, για αναμενόμενες λανθασμένες και ορθές απαντήσεις μαθητών, για το πώς θα απαντούσαν σε συγκεκριμένα λάθη μαθητών και πως θα συνέχιζαν τη διδασκαλία. Περισσότεροι από τους μισούς εκπαιδευτικούς μπόρεσαν να επικεντρωθούν σε κάποιο μαθηματικό περιεχόμενο (συνήθως που σχετίζεται με κάποιο κελί), άλλα πολύ λιγότεροι μπόρεσαν να αναπτύξουν στρατηγικές βασισμένες στις απόψεις των μαθητών. Το 15%-20% των εκπαιδευτικών αναγνώρισαν τις μεγάλες ιδέες και μπορούσαν να εξηγήσουν πως θα διαχειριζόταν το πρόβλημα μαζί με τους μαθητές τους. Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί αντιμετώπισαν το πρόβλημα ως μαθηματικό που περιλάμβανε αναλογίες και ποσοστά.

Με ποιοτική έρευνα οι Danä και Taniåžli (2018) μελέτησαν την παιδαγωγική γνώση για τις Πιθανότητες τριών εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Τουρκία με συνέντευξη. Τα ευρήματα της έρευνας έδειξαν ανεπάρκεια της παιδαγωγικής γνώσης των εκπαιδευτικών. Οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται με τις πιθανότητες, αλλά δεν απαντούσαν ποιες είναι συγκεκριμένα οι δυσκολίες. Οι διδακτικές μέθοδοι και στρατηγικές ήταν ανεπαρκείς, με τα ρεαλιστικά παραδείγματα τους να περιορίζονται στην ρίψη ενός κέρματος, με αναφορές όμως και σε παραδείγματα, όπως την πιθανότητα βροχής, την πρόβλεψη νικητή ενός αγώνα. Είχαν ένα διδακτικό πλάνο και το ακολουθούσαν, χωρίς να το προσαρμόζουν και χωρίς να εμπλέκουν τους μαθητές στην μάθηση, όπως για παράδειγμα να χρησιμοποιούν συνεργατική μάθηση. Στις απαντήσεις των μαθητών εστίαζαν μόνο στην ορθότητα των απαντήσεων, χωρίς να διερευνήσουν την προέλευση του λάθους, με αποτέλεσμα οι μαθητές να απομακρύνονται από την εννοιολογική κατανόηση. Επιπλέον, δεν είχαν επαρκή εικόνα για το πως εξελίσσεται το πρόγραμμα σπουδών στα προηγούμενα και επόμενα χρόνια.

Ο Batiibwe (2019) μελέτησε την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου και την σχέση της με τη διδασκαλία της Στατιστικής, με τα ευρήματα να δείχνουν ότι δεν υπάρχει συσχέτιση. Συνέλεξε δεδομένα από 60 εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Ουγκάντα με ερωτηματολόγιο σε πενταβάθμια κλίμακα Linkert, ανάλυση σχεδίων μαθήματος, παρατήρηση διδασκαλίας σε 20 εκπαιδευτικούς και συνεντεύξεις σε 10 εκπαιδευτικούς. Στα ευρήματα της έρευνας περιλαμβάνεται η έλλειψη αυτοπεποίθησης των εκπαιδευτικών για την παιδαγωγική τους γνώση, η χρήση πολλών παραδειγμάτων από το 50% του δείγματος, αλλά μόλις με το 5% των εκπαιδευτικών να τροποποιούν τα προβλήματα για να τα καταστήσουν ευκολότερα ή δυσκολότερα. Τα προβλήματα δεν αφορούσαν γενικά πραγματικές καταστάσεις, η διδασκαλία ήταν κυρίως θεωρητική με έμφαση σε στατιστικές τεχνικές, υπολογισμούς και διαδικασίες, αντί να επικεντρωθεί στη συζήτηση των αποτελεσμάτων και στην κατανόηση, με λίγες ερωτήσεις να απευθύνονται στους μαθητές. Οι εκπαιδευτικοί έδειξαν να μην γνωρίζουν να ερμηνεύουν τις εξηγήσεις των μαθητών και να μην γνωρίζουν αν οι αναπαραστάσεις και τα παραδείγματα που επιλέγουν είναι χρήσιμα στους μαθητές.

Σχέση παιδαγωγικής γνώσης εκπαιδευτικών στα Στοχαστικά Μαθηματικά και επιτεύγματα μαθητών

Στο 1^{o} κεφάλαιο αναφέρθηκε η σχέση παιδαγωγικής γνώσης των καθηγητών με τα επιτεύγματα των μαθητών. Παρόμοια αποτελέσματα εμφανίζονται και για την παιδαγωγική γνώση ειδικά των Στοχαστικών Μαθηματικών.

Στην έρευνα των Callingham, Carmichael και Watson (2016) συμμετείχαν 42 εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σχολειών της Αυστραλίας, καθώς και μαθητές τους. Στην έρευνα αυτή, που διήρκησε 3 χρόνια, διερεύνησαν την παιδαγωγική γνώση των εκπαιδευτικών στη Στατιστική και την επιρροή της στους μαθητές τους. Οι καθηγητές απάντησαν σε διδακτικά σενάρια που περιλάμβαναν πιθανά λάθη των μαθητών και πως θα συνέχιζαν διδακτικά. Στα σενάρια αυτά είχαν απαντήσει οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα. Τα αποτελέσματα των μαθητών επηρεάστηκαν θετικά από την παιδαγωγική γνώση των καθηγητών τους.

Οι Ajai και Mtomga (2023) βρήκαν θετική επιρροή της παιδαγωγικής γνώσης πέντε εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευση στην κατανόηση των Πιθανοτήτων από τους 492 μαθητές τους στη Νιγηρία.

Κεφάλαιο 3ο: Μεθοδολογία

3.1 Ερευνητικά ερωτήματα

Στο νέο πρόγραμμα σπουδών κατέχουν σημαντική θέση τα Στοχαστικά Μαθηματικά, σε αντίθεση με τα προηγούμενα προγράμματα. Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να διδάξουν τις έννοιες των Στοχαστικών Μαθηματικών με τρόπο ώστε το περιεχόμενο να γίνει κατανοητό στους μαθητές. Με βάση το βιβλιογραφικό πλαίσιο της παρούσας εργασίας διατυπώθηκε το παρακάτω ερευνητικό πρόβλημα:

Ποιο είναι το επίπεδο της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου που έχουν οι εκπαιδευτικοί για την διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα του Λυκείου;

Στο βιβλιογραφικό πλαίσιο περιγράφηκαν τα χαρακτηριστικά της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου και έγινε εστίαση στις δυσκολίες και τις παρανοήσεις που εμφανίζουν οι μαθητές στα Στοχαστικά Μαθηματικά. Οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να εντοπίζουν τις παρανοήσεις που εμφανίζουν οι μαθητές (π.χ. Ball et al., 2008) στα Στοχαστικά Μαθηματικά, να αντιμετωπίζουν λύσεις μαθητών (π.χ Hill, et al., 2007), να συνεχίζουν τη διδασκαλία και να επιλέγουν κατάλληλες αναπαραστάσεις (π.χ. Ball et al., 2008). Με βάση αυτά τα βιβλιογραφικά δεδομένα, το κεντρικό ερευνητικό πρόβλημα επιμερίστηκε στα ακόλουθα Ερευνητικά Ερωτήματα (ΕΕ):

1ο Ερευνητικό Ερώτημα: *Ποιο είναι το επίπεδο της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου που έχουν οι εκπαιδευτικοί για την διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα του Λυκείου στις υποκατηγορίες:*

- ***i)*** *Παρανοήσεις-δυσκολίες μαθητών*
- ***ii)*** *Απάντηση σε μαθητή*
- ***iii)*** *Συνέχιση διδασκαλίας*

Με αναφορά στους παράγοντες που επιδρούν στα αποτελέσματα του 1ου Ερευνητικού Ερωτήματος επιλέχθηκε το δεύτερο ΕΕ:

2ο Ερευνητικό Ερώτημα: *Διαφοροποιούνται οι παιδαγωγικές γνώσεις περιεχομένου που έχουν οι εκπαιδευτικοί για την διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα του Λυκείου σε σχέση με διαφορετικούς παράγοντες (ακαδημαϊκό υπόβαθρο, επαγγελματική εμπειρία, χώρο εργασίας);*

Τέλος, το τρίτο ΕΕ στοχεύει στην διερεύνηση της σχέση της εικόνας που έχουν οι εκπαιδευτικοί για την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου που κατέχουν με αυτήν που πραγματικά έχουν.

3ο Ερευνητικό Ερώτημα: *Πως συσχετίζεται η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου που έχουν οι εκπαιδευτικοί για την διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα του Λυκείου με την αυτοπεποίθηση τους;*

3.2 Δειγματοληψία και συμμετέχοντες

Χρησιμοποιήθηκε η ποσοτική ερευνητική προσέγγιση σε ένα δείγμα 94 εκπαιδευτικών μαθηματικών που εργάζονται σε δημόσια ή ιδιωτικά σχολεία και σε φροντιστήρια μέσης εκπαίδευσης.

Το δείγμα της έρευνας ήταν δείγμα ευκολίας και διανεμήθηκε σε κλειστές ή ανοιχτές ομάδες μαθηματικών ηλεκτρονικά, σε μορφή google forms.

Στα δημογραφικά στοιχεία των συμμετεχόντων περιλαμβάνονται εκτός από τον χώρο εργασίας, τα συνολικά έτη διδακτικής εμπειρίας, το ακαδημαϊκό υπόβαθρο (μεταπτυχιακές-διδακτορικές σπουδές). Αναλυτικά τα χαρακτηριστικά των συμμετεχόντων παρουσιάζονται στον πίνακα 3.1.

Πίνακας 3.1: Χαρακτηριστικά στοιχεία του δείγματος

	Συχνότητα
Φύλο	
Άνδρας	47
Γυναίκα	47
Συνολικά χρόνια διδακτικής εμπειρίας	
[0,5)	19
[5,10)	18
[10,15)	24
[15,20)	20
[20,25)	6
περισσότερα από 25	7
Εργασία	
Δημόσιο ή ιδιωτικό σχολείο	67
Φροντιστήριο	27
Μεταπτυχιακό	
Δεν έχω	20
Σε άλλο αντικείμενο	33
Στα μαθηματικά	23
Στα μαθηματικά, Σε άλλο αντικείμενο	5
Στα μαθηματικά, Στη διδακτική των μαθηματικών	3
Στη διδακτική των μαθηματικών	9
Στη διδακτική των μαθηματικών, Σε άλλο αντικείμενο	1
Διδακτορικό[3]	
Δεν έχω	90
Σε άλλο αντικείμενο	1
Στα μαθηματικά	2
Στη διδακτική των μαθηματικών	1

[3] Οι συμμετέχοντες που είχαν διδακτορικό, είχαν και μεταπτυχιακό και επομένως εμφανίζονται και στην λίστα με τα μεταπτυχιακά

3.3 Περιγραφή του ερωτηματολογίου

Το ερευνητικό εργαλείο ήταν ένα ερωτηματολόγιο[4] με 12 έργα τα οποία περιγράφονται αναλυτικά στη συνέχεια.

1ο πρόβλημα

Προέλευση προβλήματος/ ερώτησης παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου

Το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται στη διδακτορική διατριβή του Sorto (2004) με συνέντευξη και κλείδα αξιολόγησης. Στην απάντηση αυτή του μαθητή ζητούσε από τους εκπαιδευτικούς να προσδιορίσουν το λάθος. Η Estrella (2010) εμπλούτισε το ερώτημα με αυτό το ερώτημα πολλαπλής επιλογής που περιλαμβάνεται σε αυτό το ερωτηματολόγιο και διατηρήθηκε η ίδια κλείδα αξιολόγησης.

Δίνετε στους μαθητές σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων:

Ζώο	Συχνότητα ν_i
καναρίνι	2
γάτα	4
πρόβατο	2
σκυλί	7
πάπια	1
ψάρι	2
κατσίκα	1
άλογο	3
κουνέλι	3

Συζητάτε με τους μαθητές σας τα δεδομένα του πίνακα και ένας μαθητής υποστηρίζει:

«Η επικρατούσα τιμή είναι το σκυλί, η διάμεσος η πάπια και το εύρος είναι από 1 έως 7».

1] Σε ποιο από τα παρακάτω θα δίνατε μεγαλύτερη έμφαση στη συνέχιση της διδασκαλίας σας για να βοηθήσετε το μαθητή;

i) Ποιοτική μεταβλητή
ii) Πίνακα συχνοτήτων
iii) Μέτρα θέσης
iv) Μέτρα θέσης και εύρος

Μαθηματικό περιεχόμενο

Ποιοτικές μεταβλητές, μέτρα θέσης (επικρατούσα τιμή, διάμεσος), μέτρα διασποράς (εύρος) σε πίνακα συχνοτήτων.

Κλείδα αξιολόγησης

Η απάντηση i) που εστιάζει στην έννοια της ποιοτικής μεταβλητής βαθμολογείται με 2 μονάδες. Οι απαντήσεις iii) και iv) που αναφέρονται στα μέτρα θέσης και εύρος όπου θα μπορούσε να διευκρινιστεί η χρήση των κατάλληλων μέτρων ανάλογα με τον τύπο της μεταβλητής βαθμολογείται με 1 μονάδα. Η εστίαση της διδασκαλίας στον πίνακα συχνοτήτων 0 βαθμούς (πίνακας 3.2).

Πίνακας 3.2: Κλείδα αξιολόγησης 1ο πρόβλημα

Απαντήσεις	*Βαθμολογία*
Ποιοτική μεταβλητή	2
Πινάκα συχνοτήτων	0
Μέτρα θέσης	1
Μέτρα θέσης και εύρος	1

[4]Η έντυπη μορφή του ερωτηματολογίου υπάρχει στο παράρτημα Β

2^{ο} πρόβλημα

> Δίνετε στους μαθητές σας το παρακάτω πρόβλημα:
>
> Ο μέσος όρος παιδιών σε 10 οικογένειες είναι 2,3.
> Αν μια οικογένεια που έχει 5 παιδιά φύγει από τη γειτονιά, ποιος είναι ο νέος μέσος όρος παιδιών ανά οικογένεια;
>
> **2] Πως θα απαντούσατε σε ένα μαθητή που υποστήριζε για το παραπάνω πρόβλημα:**
> **ΜΑΘΗΤΗΣ**: *2,3χ10=23 και 23-5=18 και 18:10=1,8*
>
> **i)** Θα διόρθωνα το λάθος του.
> **ii)** Θα του έκανα ερωτήσεις που αφορούν τον αριθμό των οικογενειών.
> **iii)** Θα του ζητούσα να μου εξηγήσει τον τρόπο με τον οποίο έφτασε σε αυτό το συμπέρασμα.

Προέλευση προβλήματος/ ερώτησης παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου

Το πρόβλημα αυτό καθώς και η ερώτηση παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου κατασκευάστηκαν και χρησιμοποιήθηκαν στις έρευνες των Watson και Callingham (2013) και στις έρευνες των Callingham, Carmichael και Watson (2015). Στις έρευνες αυτές η συλλογή δεδομένων έγινε με συνέντευξη ή με συμπλήρωση απαντήσεων ανοικτού τύπου στους εκπαιδευτικούς στην ίδια ερώτηση που χρησιμοποιήθηκε και σε αυτό το ερωτηματολόγιο. Οι εκπαιδευτικοί δεν είχαν να επιλέξουν ανάμεσα σε προτεινόμενες απαντήσεις, σε αντίθεση με αυτό το ερωτηματολόγιο. Επιπλέον τροποποιήθηκε η απάντηση του μαθητή σε αυτό το ερωτηματολόγιο ώστε η εστίαση να αφορά αποκλειστικά τη μέση τιμή.

Μαθηματικό περιεχόμενο

Μέση τιμή

Κλείδα αξιολόγησης

Στο ερωτηματολόγιο της ομάδας των Watson et al. (2013, 2015)

Στην γενική απάντηση χωρίς μαθηματικό περιεχόμενο έδιναν 1 βαθμό, όπως στην απάντηση: «*θα ζητούσα από τον μαθητή να εξηγήσει το σκεπτικό του*». Στον σχολιασμό στον αριθμό των οικογενειών ή στην κατασκευή εξίσωσης λάμβαναν 2 βαθμούς. 3 βαθμούς σε απαντήσεις που περιείχαν ερωτήσεις προς το μαθητή που αφορούν τον αριθμό των οικογενειών ή στην κατασκευή εξίσωσης και 4 βαθμούς σε σειρά ερωτήσεων προς το μαθητή για να ολοκληρώσει το έργο.

Στο παρών ερωτηματολόγιο

Στην προσπάθεια μετατροπής της ανοιχτού τύπου ερώτησης σε πολλαπλής επιλογής διατηρώντας τη μέγιστη βαθμολογία σε 2 μονάδες (και όχι σε 4), επιλέχθηκαν οι συγκεκριμένες προτεινόμενες απαντήσεις.

Η απάντηση i) και iii) βαθμολογείται με 1 μονάδες, ενώ η απάντηση ii) με 2 μονάδες (πίνακας 3.3).

Πίνακας 3.3: Κλείδα αξιολόγησης 2^{ο} πρόβλημα

Απαντήσεις	*Βαθμολογία*
Θα διόρθωνα το λάθος του	1
Θα του έκανα ερωτήσεις που αφορούν τον αριθμό των οικογενειών	2
Θα του ζητούσα να μου εξηγήσει τον τρόπο με τον οποίο έφτασε σε αυτό το συμπέρασμα	1

3ο πρόβλημα

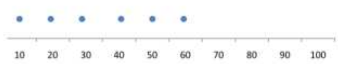
Προέλευση προβλήματος/ ερώτησης παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου

Αυτό το πρόβλημα είναι προσωπική κατασκευή και βασίζεται σε ένα πρόβλημα στην έρευνα των Loosen, Lioen και Lacante (1985)[5]. Μετατράπηκε σε σημειόγραμμα σε πλαίσιο παρόμοιο με αυτό που χρησιμοποιεί το σχολικό βιβλίο (Αδαμόπουλος, Δαμιανού & Σβέρκος, 1999) στην εισαγωγή για τα μέτρα θέσης και διασποράς. Αρκετοί φοιτητές στην έρευνα των Loosen, Lioen και Lacante (1985) απάντησαν ότι το αντίστοιχο σύνολο Α είχε μεγαλύτερη διασπορά με την διαισθητική αντίληψη ότι η μεταβλητότητα αναφέρεται στο πόσο απέχουν οι τιμές μεταξύ τους (και όχι πόσο απέχουν από τη μέση τιμή). Η ερώτηση παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου στοχεύει στην αναγνώριση της παρανόησης αυτής και είναι προσωπική κατασκευή, όπως επίσης και οι προτεινόμενες επιλογές.

Δίνετε στους μαθητές σας το παρακάτω πρόβλημα πολλαπλής επιλογής:

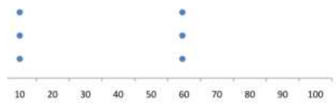
Δυο διαφορετικά τμήματα Α και Β των έξι ατόμων το καθένα βαθμολογήθηκαν σε ένα μάθημα με άριστα το 100.
Οι βαθμοί που πήραν οι μαθητές για κάθε τμήμα δίνονται στα παρακάτω σημειογράμματα.
Κάθε σημείο στο γράφημα αναπαριστά το πλήθος των μαθητών που έχουν τη συγκεκριμένη βαθμολογία. Για παράδειγμα τα τρία σημεία πάνω από το 60 δείχνουν ότι τρεις μαθητές του τμήματος Β είχαν βαθμολογία 60.

Τμήμα Α



βαθμολογίες

Τμήμα Β



βαθμολογίες

Ποιο από τα δυο τμήματα έχει μεγαλύτερη διασπορά παρατηρήσεων;
a) το δείγμα Α **b)** το δείγμα Β
c) τα δυο δείγματα έχουν ίση διασπορά **d)** δεν γνωρίζουμε με αυτά τα δεδομένα

3] Για ποιο λόγο κατά τη γνώμη σας επέλεξαν λανθασμένα το δείγμα Α οι μαθητές;

i) Υπολόγισαν λανθασμένα τη τυπική απόκλιση.
ii) Εκτίμησαν από το γράφημα πόσο απέχουν οι παρατηρήσεις μεταξύ τους και όχι πόσο απέχουν από τη μέση τιμή.
iii) Στη σύγκριση των δυο δειγμάτων χρησιμοποίησαν τη μέση τιμή ή τη διάμεσο.

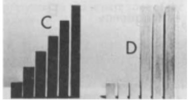
Μαθηματικό περιεχόμενο

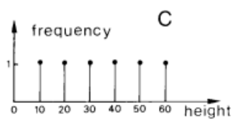
Διασπορά, τυπική απόκλιση, μέτρα θέσης και μέτρα διασποράς.

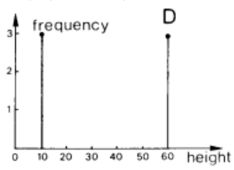
Κλείδα αξιολόγησης

Η επιλογή ii) αφορά το λάθος των μαθητών στην εκτίμηση της διασποράς από το σχήμα με την παρανόηση και βαθμολογείται με 2 μονάδες. Θα μπορούσε ο μαθητής να χρησιμοποιήσει και τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης (η μέση τιμή δεν είναι ακέραιος) και να κατέληγε σε λανθασμένη απάντηση. Επειδή αναφέρεται στο πρόβλημα συγκεκριμένα η λανθασμένη επιλογή Α, η επιλογή αυτή βαθμολογείται με 1 μονάδα. Και τα δυο δείγματα έχουν την ίδια μέση τιμή (35) και την ίδια διάμεσο (35), οπότε το λάθος να οφείλεται σε υπολογισμό αυτών των μέτρων θέσης αντί της τυπικής απόκλισης απομακρύνεται και βαθμολογείται με 0 μονάδες (πίνακας 3.4)

[5] Στο πρόβλημα Loosen, Lioen και Lacante (1985) δινόταν στο σχήμα με τα ύψη των ορθογωνίων σε εκατοστά







Πίνακας 3.4: Κλείδα αξιολόγησης 3^{o} πρόβλημα

Απαντήσεις	*Βαθμολογία*
Υπολόγισαν λανθασμένα τη τυπική απόκλιση	1
Εκτίμησαν από το γράφημα πόσο απέχουν οι παρατηρήσεις μεταξύ τους και όχι πόσο απέχουν από τη μέση τιμή	2
Στη σύγκριση των δυο δειγμάτων χρησιμοποίησαν τη μέση τιμή ή τη διάμεσο	0

4^{o} πρόβλημα

Προέλευση προβλήματος/ ερώτησης παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου

Δίνετε στους μαθητές σας το παρακάτω πρόβλημα:

	Ασθένεια των πνευμόνων	**Χωρίς ασθένεια των πνευμόνων**	**Σύνολο**
Καπνιστές	90	60	150
Μη καπνιστές	60	40	100
Σύνολο	150	100	250

Τους ζητάτε να χρησιμοποιήσουν τις παραπάνω πληροφορίες και να εξετάσουν αν στο δείγμα η ασθένεια των πνευμόνων εξαρτάται από το κάπνισμα.

4] Πως θα απαντούσατε σε ένα μαθητή που υποστήριζε για το παραπάνω πρόβλημα:

ΜΑΘΗΤΗΣ: *«Ναι, εξαρτάται, γιατί 90 καπνιστές έχουν ασθένεια των πνευμόνων».*

i) Θα του έκανα ερωτήσεις όπως: Από ποιο δείγμα; Ποιο είναι το ποσοστό των καπνιστών με ασθένεια; Ποιο είναι το ποσοστό των μη καπνιστών με ασθένεια;
ii) Θα έλεγα τη σωστή απάντηση ή/και θα εξηγούσα.
iii) Θα ζητούσα να εστιάσουν στο συνολικό αριθμό ατόμων που ερευνώνται σε καθεμία ενότητα και να χρησιμοποιήσουν ποσοστά και αναλογίες.

Το πρόβλημα αυτό (Batanero et al., 1996) το χρησιμοποίησαν στις έρευνες τους οι Watson, Callingham και Donne (2008), καθώς και οι Watson και Callingham (2014), με πρόσθεση ερωτήματος παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου που εμφανίζεται στην παρούσα έρευνα. Στις έρευνες αυτές η συλλογή δεδομένων έγινε με συνέντευξη ή με συμπλήρωση απαντήσεων ανοικτού τύπου από τους εκπαιδευτικούς στην ίδια ερώτηση που χρησιμοποιήθηκε σε αυτό το πρόβλημα. Οι εκπαιδευτικοί δεν είχαν να επιλέξουν ανάμεσα σε προτεινόμενες απαντήσεις, σε αντίθεση με αυτό το ερωτηματολόγιο. Στο πρόβλημα αυτό τα δεδομένα δεν έχουν συσχέτιση και οι μαθητές από προσωπική εμπειρία ή πεποιθήσεις επηρεάζονται από το πλαίσιο του προβλήματος και υποστηρίζουν ότι υπάρχει συσχέτιση (Watson & Callingham, 2014).

Μαθηματικό περιεχόμενο

Πίνακες συνάφειας, αναγνώριση συσχέτισης μεταξύ δυο κατηγορικών μεταβλητών.

Κλείδα αξιολόγησης

Στο ερωτηματολόγιο της ομάδας των Watson et al. (2008, 2014)

Στην γενική απάντηση χωρίς μαθηματικό περιεχόμενο έδιναν 0 βαθμό, **στην απάντηση που περιείχε θα εξηγούσα ή θα έλεγα την απάντηση 1 βαθμό**. Σε απάντηση που περιλάμβανε μια σειρά από ερωτήσεις με μαθηματικό περιεχόμενο που προωθούσε τη συζήτηση 2 βαθμούς. Σύνδεση μαθηματικών ιδεών ίσως και με άλλα παραδείγματα και στρατηγικές ανάπτυξης αναλογικού συλλογισμού έπαιρνε 3 βαθμούς.

Οι Watson και Callingham (2014) δίνουν παραδείγματα απαντήσεων για αυτήν την ερώτηση και σε ποια κατηγορία βαθμολόγησης τα συμπεριέλαβαν (πίνακας 3.5)

Πίνακας 3.5: Κλείδα αξιολόγησης συνέντευξης ή με συμπλήρωση απαντήσεων ανοικτού τύπου των Watson et al. (2008, 2014) στο πρόβλημα 4

Απαντήσεις	*Βαθμολογία*
«**Από ποιο δείγμα; Ποιο είναι το ποσοστό των καπνιστών με ασθένεια; Ποιο είναι το ποσοστό των μη καπνιστών με ασθένεια**; Το ίδιο! 90/150=3/5=60% (καπνιστές) και 60/100 (μη καπνιστές)» «Θα ενθάρρυνα τους μαθητές να διαβάσουν ολόκληρο τον πίνακα και να δουν όλα τα δεδομένα. Οι μεγαλύτεροι αριθμοί σημαίνουν και μεγαλύτερη πιθανότητα;» «Σωστά, αλλά σε ποιο ποσοστό οι καπνιστές έχουν ασθένεια των πνευμόνων και πως συμβαίνει αυτό σε σύγκριση με τους μη καπνιστές; Τα ποσοστά είναι πιο ουσιαστικός τρόπος να συγκρίνουμε δεδομένα σε πίνακα»	3
«Τι γίνεται όμως με τους 60 καπνιστές που δεν έπαθαν ασθένεια των πνευμόνων;» «Ενδεχομένως η απάντηση να είναι ορθή, θα εξετάσουμε την αναλογία % των καπνιστών με και χωρίς ασθένεια των πνευμόνων σε σύγκριση με τους μη καπνιστές» «Θα τους ζητούσα να κοιτάξουν το 90 από τα 150 και το 60 από τα 100- ν**α εστιάσουν στα ποσοστά και στις αναλογίες**» «**Θα κοιτάξετε το συνολικό αριθμό ατόμων που ερευνώνται σε κάθε ενότητα και θα προσπαθήσετε να κάνετε μετατροπή τα νούμερα για να μπορέσετε να συγκρίνεται τις απαντήσεις πιο εύκολα**»	2
«Σε ποιο σύνολο; Θα ρωτούσα ερωτήσεις που δίνουν νόημα στους αριθμούς»	1
«δεν είμαι σίγουρος»	0

Στο παρών ερωτηματολόγιο

Στην προσπάθεια μετατροπής της ανοιχτού τύπου ερώτησης σε πολλαπλής επιλογής επιλέχθηκαν οι συγκεκριμένες προτεινόμενες απαντήσεις.

Η απάντηση i) βαθμολογείται με 3 μονάδες, η απάντηση ii) με 1 μονάδα και η απάντηση iii) με 2 μονάδες (πίνακας 3.6).

Πίνακας 3.6: Κλείδα αξιολόγησης 4^{o} πρόβλημα

Απαντήσεις	*Βαθμολογία*
Θα του έκανα ερωτήσεις όπως: Από ποιο δείγμα; Ποιο είναι το ποσοστό των καπνιστών με ασθένεια; Ποιο είναι το ποσοστό των μη καπνιστών με ασθένεια	3
Θα έλεγα τη σωστή απάντηση ή/και θα εξηγούσα	1
Θα ζητούσα να εστιάσουν στο συνολικό αριθμό ατόμων που ερευνώνται σε καθεμία ενότητα και να χρησιμοποιήσουν ποσοστά και αναλογίες	2

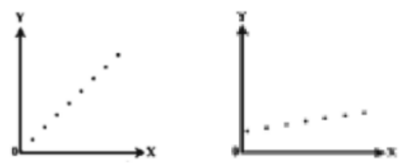
5ο πρόβλημα

Προέλευση προβλήματος/ ερώτησης παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου

Οι Liu, Lin και Tsai (2009) έδειξαν σε μαθητές Λυκείου διάφορα διαγράμματα διασποράς και αξιολόγησαν την κατανόηση των μαθητών για αυτά, και βρήκαν (ή επιβεβαίωσαν) παρανοήσεις για την συσχέτιση δυο μεταβλητών. Ανάμεσα στα διαγράμματα διασποράς που έδειξαν στους μαθητές ήταν και τα συγκεκριμένα δυο που υπάρχουν σε αυτό το πρόβλημα του ερωτηματολογίου. Στην αιτιολόγηση των μαθητών για το σχήμα Β ότι δεν μπορεί να έχει τέλεια θετική συσχέτιση, αναφέρθηκε ότι τα σχολικά εγχειρίδια έχουν στην τέλεια θετική συσχέτιση σχήματα σαν το Α, όπου η γωνία της ευθείας είναι 45^{o}. Η ερώτηση παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου είναι προσωπική κατασκευή, όπως επίσης και οι προτεινόμενες επιλογές.

Δίνετε στους μαθητές σας τα παρακάτω διαγράμματα διασποράς:

A B



Ποιο από τα διαγράμματα διασποράς έχει τέλεια γραμμική θετική συσχέτιση (r=1);

a) μόνο το Α **b)** μόνο το Β
c) το Α και το Β **d)** δεν γνωρίζουμε με αυτά τα δεδομένα

5] Για ποιο λόγο κατά τη γνώμη σας επέλεξαν λανθασμένα μόνο το Α οι μαθητές;

i) Στο διάγραμμα διασποράς του Α υπάρχουν περισσότερα σημεία.
ii) Θεωρούν ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας τόσο πιο ισχυρή είναι η γραμμική θετική συσχέτιση.
iii) Θεωρούν ότι σε μια τέλεια γραμμική θετική συσχέτιση (r=1) ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι 1 και επομένως η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x΄x είναι 45^{0}.
iv) Θεωρούν ότι η ισχυρότερη συσχέτιση σημαίνει ότι μια μεταβλητή μπορεί να επηρεάσει την άλλη, με την μια μεταβλητή να έχει το ρόλο της αιτίας και η άλλη του αποτελέσματος.

Μαθηματικό περιεχόμενο

Διάγραμμα διασποράς, συντελεστής συσχέτισης, ευθεία παλινδρόμισης.

Κλείδα αξιολόγησης

Η επιλογή iii) είναι η κύρια αιτία που προκαλεί το λάθος του μαθητή σύμφωνα με την παραπάνω έρευνα και βαθμολογείται με 2 μονάδες. Θα μπορούσε ένας μαθητής να επιλέξει λανθασμένα μόνο την απάντηση Α και εξαιτίας της διαφοράς της κλίσης της ευθείας, όπου η ευθεία στο Α έχει μεγαλύτερη κλίση από το Β και επομένως βαθμολογείται με 1 μονάδα. Η επιλογή iv) είναι μια παρανόηση που αναφέρεται στη βιβλιογραφία, αλλά δεν φαίνεται να μπορεί να επηρεάσει την επιλογή των μαθητών σε αυτήν την ερώτηση και βαθμολογείται με 0 μονάδες. Η επιλογή i) αναφέρεται ότι στο διάγραμμα Α έχει ένα περισσότερο δεδομένο (σημείο) το οποίο δεν θα μπορούσε να επηρεάσει με κάποιο τρόπο την ευθεία όποτε και αυτό βαθμολογείται με 0 μονάδες (πίνακας 3.7).

Πίνακας 3.7: Κλείδα αξιολόγησης 5^{ο} πρόβλημα

Απαντήσεις	*Βαθμολογία*
Στο διάγραμμα διασποράς του Α υπάρχουν περισσότερα σημεία	0
Θεωρούν ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας τόσο πιο ισχυρή είναι η θετική συσχέτιση	1
Θεωρούν ότι σε μια τέλεια θετική συσχέτιση (r=1) ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι 1 και επομένως η γωνία που σχηματίζει με τον x΄x είναι 45^0	2
Θεωρούν ότι η ισχυρότερη συσχέτιση σημαίνει ότι μια μεταβλητή μπορεί να επηρεάσει την άλλη, με την μια μεταβλητή να έχει το ρόλο της αίτιας και η άλλη του αποτελέσματος	0

6^{ο} πρόβλημα

> Ρωτάτε τους μαθητές σας:
>
> Ποιο από τα παρακάτω ενδεχόμενα είναι πιο πιθανό να πραγματοποιηθεί;
> Α={να φέρουμε τουλάχιστον **2** φορές γράμματα στις **3** ρίψεις ενός αμερόληπτου κέρματος}
> Β={να φέρουμε τουλάχιστον **200** φορές γράμματα στις **300** ρίψεις ενός αμερόληπτου κέρματος}
>
> **6] Για να εξηγήσετε το περιεχόμενο που σχετίζεται με αυτό το πρόβλημα θα εστιάζατε:**
>
> **i)** στο τρίγωνο του Pascal.
> **ii)** στον υπολογισμό των πιθανοτήτων (αναλογικό μοντέλο).
> **iii)** στο νόμο των μεγάλων αριθμών.
> **iv)** στην κατασκευή δενδροδιαγράμματος.

Προέλευση προβλήματος/ ερώτησης παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου

Το πρόβλημα αυτό απαντήθηκε από φοιτητές και μαθητές διάφορων τάξεων και ανέδειξε την παρανόηση ότι οι μαθητές τείνουν να παραμελούν την επίδραση του μεγέθους ενός δείγματος κατά την εκτίμηση των πιθανοτήτων (Fischbein & Schnarch, 1997). Η Estrella (2010) αναφέρει ότι η παρανόηση αυτή προκύπτει από την ελλιπή ερμηνεία του νόμου των μεγάλων αριθμών, όπου οι μαθητές πιστεύουν ότι τα μικρά δείγματα θα είναι αντιπροσωπευτικά σε όλα τα χαρακτηριστικά των πληθυσμών από τα οποία προέρχονται και κατασκεύασε την ερώτηση παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου που περιλαμβάνεται σε αυτό το ερωτηματολόγιο με την ίδια κλείδα αξιολόγησης.

Μαθηματικό περιεχόμενο

Η φύση του δείγματος, η μέθοδος επιλογής και το μέγεθος του δείγματος επηρεάζουν τη συλλογή δεδομένων και τα συμπεράσματα (Estrella, 2010). Ορισμός πιθανοτήτων, δοκιμή Bernoulli, νόμος μεγάλων αριθμών.

Κλείδα αξιολόγησης

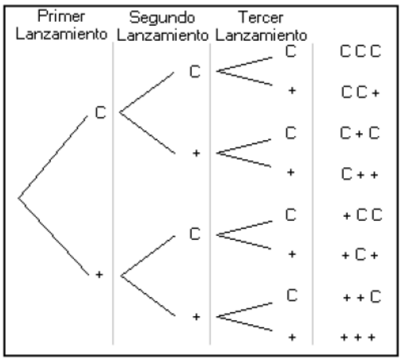
Η κατάλληλη απάντηση είναι το iii) ο νόμος των μεγάλων αριθμών και η αύξηση του μεγέθους του δείγματος (2 μονάδες). Οι απαντήσεις i) και iii) σύμφωνα και με τις παρακάτω εικόνες (σχήμα 3.1) εφαρμόζονται σε μια διαισθητική προσέγγιση για την κατανόησης της θεωρητικής συχνότητας, αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ρίψη 3 νομισμάτων για αυτό δεν είναι κατάλληλο (1 μονάδα). Το αναλογικό μοντέλο δεν εφαρμόζεται σε αυτό το πρόβλημα και σε αυτό οφείλεται το σφάλμα που δεν λαμβάνεται υπόψη το μέγεθος του δείγματος (0 μονάδες) (πίνακας 3.8).

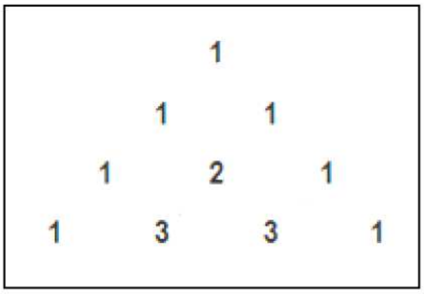
Πίνακας 3.8: Κλείδα αξιολόγησης 6ο πρόβλημα

Απαντήσεις	*Βαθμολογία*
Στο τρίγωνο του Pascal	1
Στον υπολογισμό των πιθανοτήτων (αναλογικό μοντέλο)	0
Στο νόμο των μεγάλων αριθμών	2
Στην κατασκευή δενδροδιαγράμματος	1

Σχήμα 3.1: Δενδροδιάγραμμα και τρίγωνο Pascal για τις ρίψεις τριών νομισμάτων (Estrella, 2010)

δενδροδιάγραμμα	*τρίγωνο Pascal*





7ο πρόβλημα

Προέλευση προβλήματος/ ερώτησης παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου

Δίνετε στους μαθητές σας το παρακάτω πρόβλημα:

Η πιθανότητα ένα νεογέννητο να είναι αγόρι είναι ίση με την πιθανότητα να είναι κορίτσι. Στο νοσοκομείο Α καταγράφονται κατά μέσο όρο 50 γεννήσεις την ημέρα και στο νοσοκομείο Β καταγράφονται κατά μέσο όρο 10 γεννήσεις την ημέρα.

Σε μια συγκεκριμένη μέρα, ποιο νοσοκομείο είναι πιθανότερο να έχει τουλάχιστον 80% γεννήσεις κοριτσιών;

7] Ποια κατά τη γνώμη σας είναι η πιο σημαντική γνώση που πρέπει να αποκτήσουν οι μαθητές για να αντιμετωπίσουν αυτό το πρόβλημα;

i) Την μεταβλητότητα σε μικρά δείγματα.
ii) Τα ισοπίθανα ενδεχόμενα.
iii) Τον νόμο των μεγάλων αριθμών.
iv) Δεν γνωρίζουμε.

Το πρόβλημα απαντήθηκε από φοιτητές στην έρευνα του Garfield (2003) για τη διερεύνηση της κατανόησης της μεταβλητότητας της δειγματοληψίας. Παρόμοιο πρόβλημα υπάρχει και στην εργασία των Fischbein και Schnarch (1997) και όπως αναφέρει η Estrella (2010) περιλαμβάνεται στην εργασία των Kahneman και Tversky (1972) και μετράει την επίδραση του μεγέθους του δείγματος ή αντιπροσωπευτικότητα που προκύπτει από λανθασμένη ερμηνεία για τα μικρά δείγματα. Η ερώτηση παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου και οι επιλογές υπάρχουν στην εργασία της Estrella (2010) και διατηρήθηκε η ίδια κλείδα αξιολόγησης.

Μαθηματικό περιεχόμενο

Η φύση του δείγματος, η μέθοδος επιλογής και το μέγεθος του δείγματος επηρεάζουν τη συλλογή δεδομένων και τα συμπεράσματα (Estrella, 2010). Ορισμός πιθανοτήτων, νόμος μεγάλων αριθμών.

Κλείδα αξιολόγησης

Η κατάλληλη απάντηση είναι το iii) ο νόμος των μεγάλων αριθμών και η αύξηση του μεγέθους του δείγματος (2 μονάδες). Οι απαντήσεις i) και ii) περιέχουν στοιχεία που σχετίζονται (1 μονάδα). Η απάντηση δεν γνωρίζουμε 0 μονάδες (πίνακας 3.9).

Πίνακας 3.9: Κλείδα αξιολόγησης 7^{ο} πρόβλημα

Απαντήσεις	*Βαθμολογία*
Τη μεταβλητότητα σε μικρά δείγματα	1
Τα ισοπίθανα ενδεχόμενα	1
Το νόμο των μεγάλων αριθμών	2
Δεν γνωρίζουμε	0

8^{ο} πρόβλημα

> Δίνετε στους μαθητές σας το παρακάτω πρόβλημα:
>
> Α: Επιλέγουμε μια επιτροπή με 2 μέλη από 10 υποψήφιους
> Β: Επιλέγουμε μια επιτροπή με 8 μέλη από 10 υποψήφιους.
> Ποιο από τα δυο γεγονότα έχει περισσοτέρους τρόπους να πραγματοποιηθεί;
>
> Οι περισσότεροι μαθητές απάντησαν λανθασμένα ότι το Α πραγματοποιείται με περισσότερους τρόπους από το Β.
>
> **8] Για ποιο λόγο κατά τη γνώμη σας οδηγήθηκαν σε αυτό το λάθος οι μαθητές;**
> **i)** Δεν γνωρίζουν τον τρόπο υπολογισμού των συνδυασμών.
> **ii)** Γνωρίζουν τον τρόπο υπολογισμού των συνδυασμών, αλλά κάνουν λάθος στο τελικό αποτέλεσμα.
> **iii)** Εκτιμούν τους τρόπους με την ευκολία που μπορούν να φέρουν στο μυαλό τους τις περιπτώσεις.
> **iv)** Δεν γνωρίζουμε.

Προέλευση προβλήματος/ ερώτησης παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου

Το πρόβλημα αυτό απαντήθηκε από φοιτητές και μαθητές διάφορων τάξεων και παρουσιάστηκε στην εργασία των Fischbein και Schnarch (1997). Η παρανόηση των μαθητών αφορά την ευκολία με την οποία μπορούν να φέρουν στο μυαλό τους τις περιπτώσεις και θεωρούν ότι η επιλογή επιτροπής 2 μελών από δέκα υποψήφιους έχει περισσότερους τρόπους να πραγματοποιηθεί από ότι η επιλογή 8 μελών από δέκα υποψήφιους. Αξιοσημείωτο είναι ότι αυτή η παρανόηση γίνεται εντονότερη, με μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης, με την αύξηση της ηλικίας του μαθητή, με πιθανή εξήγηση σύμφωνα με τους Fischbein και Schnarch (1997) ότι με την αύξηση της ηλικίας οι μαθητές αποκτούν μεγαλύτερη ικανότητα να αναγνωρίσουν πιθανούς συνδυασμούς. Όμως επειδή είναι ευκολότερο να παραχθούν διάφοροι συνδυασμοί δυο στοιχείων από το να παραχθούν συνδυασμοί οκτώ στοιχείων, επιλέγουν δυο στοιχεία ως απάντηση.

Η ερώτηση παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου στοχεύει στην αναγνώριση της παρανόησης αυτής και είναι προσωπική κατασκευή, όπως επίσης και οι προτεινόμενες επιλογές.

Μαθηματικό περιεχόμενο

συνδυασμοί

Κλείδα αξιολόγησης

Στην ερώτηση αυτή δεν αναφέρεται ότι απάντησαν λάθος οι μαθητές, αλλά ότι επέλεξαν λανθασμένα το Α. Η απάντηση iii) βαθμολογείται με 2 μονάδες καθώς αποτελεί τη βασική παρανόηση. Οι επιλογές i) και ii) αποτελούν πιθανούς λόγους για μια ενδεχόμενη λανθασμένη απάντηση. Επειδή όμως η πλειοψηφία των μαθητών απάντησε λανθασμένα το Α βαθμολογούνται με 1 μονάδα. Η απάντηση δεν γνωρίζουμε 0 μονάδες (πίνακας 3.10).

Πίνακας 3.10: Κλείδα αξιολόγησης 8^{o} πρόβλημα

Απαντήσεις	*Βαθμολογία*
Δεν γνωρίζουν τον τρόπο υπολογισμού των συνδυασμών	1
Γνωρίζουν τον τρόπο υπολογισμού των συνδυασμών, αλλά κάνουν λάθος στο τελικό αποτέλεσμα	1
Εκτιμάνε τους τρόπους με την ευκολία που μπορούν να φέρουν στο μυαλό τους τις περιπτώσεις	2
Δεν γνωρίζουμε	0

9^{o} πρόβλημα

Δίνετε στους μαθητές σας το παρακάτω πρόβλημα:

Ένα κουτί περιέχει δυο άσπρες και δυο μαύρες σφαίρες.
Επιλέγουμε τυχαία δυο σφαίρες τη μια μετά την άλλη χωρίς επανατοποθέτηση.

Α. Η πρώτη σφαίρα είναι άσπρη.
Ποια είναι η πιθανότητα και η δεύτερη σφαίρα να είναι άσπρη;

Β. Την πρώτη σφαίρα που επιλέγουμε την αφήνουμε στην άκρη χωρίς να δούμε το χρώμα της και επιλέγουμε την δεύτερη σφαίρα η οποία είναι άσπρη.
Ποια είναι η πιθανότητα και η πρώτη σφαίρα να είναι άσπρη;

Οι περισσότεροι μαθητές απάντησαν σωστά στο Α ερώτημα και λανθασμένα στο Β ερώτημα.

9] Για ποιο λόγο κατά τη γνώμη σας απάντησαν λανθασμένα στο Β ερώτημα οι περισσότεροι μαθητές;

- **i)** Το πρόβλημα Β οι μαθητές βρήκαν ότι δεν είναι ξεκάθαρα διατυπωμένο.
- **ii)** Θεώρησαν ότι η επιλογή της δεύτερης σφαίρας στο πρόβλημα Β δεν μπορεί να επηρεάσει την επιλογή της πρώτης σφαίρας.
- **iii)** Θεώρησαν ότι ο δειγματικός χώρος του προβλήματος Β έχει τα δυο απλά ενδεχόμενα να είναι η σφαίρα ή άσπρη ή μαύρη (Ω={Α,Μ}) .
- **iv)** Δεν γνωρίζουμε.

Προέλευση προβλήματος/ ερώτησης παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου

Το πρόβλημα αυτό απαντήθηκε από φοιτητές και μαθητές διαφόρων τάξεων και παρουσιάστηκε στην εργασία των Fischbein και Schnarch (1997). Οι λανθασμένες απαντήσεις στο δεύτερο πρόβλημα βασίζονται στην αρχή ότι ένα γεγονός δεν μπορεί να ενεργήσει αναδρομικά για την αιτία που το προκάλεσε (Fischbein & Schnarch, 1997) με την έλλειψη αιτιώδους επιρροής να οδηγεί στο πρόβλημα Β τους μαθητές να σκέφτονται τα ενδεχόμενα ανεξάρτητα (Borovcnik, 1987). Το Α και το Β εκφράζουν ουσιαστικά το ίδιο πρόβλημα (Fischbein & Schnarch, 1997). Η ερώτηση παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου στοχεύει στην αναγνώριση της παρανόησης αυτής και είναι προσωπική κατασκευή, όπως επίσης και οι προτεινόμενες επιλογές.

Μαθηματικό περιεχόμενο

Δεσμευμένη πιθανότητα, ανεξάρτητα ενδεχόμενα, θεώρημα Bayes

Κλείδα αξιολόγησης

Η επιλογή ii) εκφράζει την κύρια παρανόηση της άσκησης. Οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών, σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος, είναι στο Β μόνο ερώτημα, ενώ στο Α απάντησαν στην πλειοψηφία σωστά. Επομένως η επιλογή iii) που αποτελεί μια συνηθισμένη παρανόηση βαθμολογείται λιγότερο, με 1 μονάδα. Η επιλογή i) δεν προκύπτει από κάπου, αλλά θα μπορούσε να υποστηριχτεί από κάποιους συγκρίνοντας τα δυο προβλήματα, καθώς το Β περιέχει περισσότερες πληροφορίες (1 μονάδα). Η απάντηση δεν γνωρίζουμε 0 μονάδες (πίνακας 3.11).

Πίνακας 3.11: Κλείδα αξιολόγησης 9^{o} πρόβλημα

Απαντήσεις	*Βαθμολογία*
Το πρόβλημα Β οι μαθητές βρήκαν ότι δεν είναι ξεκάθαρα διατυπωμένο	1
Θεώρησαν ότι η επιλογή της δεύτερης σφαίρας στο πρόβλημα Β δεν μπορεί να επηρεάσει την επιλογή της πρώτης σφαίρας	2
Θεώρησαν ότι ο δειγματικός χώρος του προβλήματος Β έχει μόνο τα δυο ενδεχόμενα να είναι η μπάλα ή άσπρη ή μαύρη (Ω={Α,Μ})	1
Δεν γνωρίζουμε	0

10^{o} πρόβλημα

Προέλευση προβλήματος/ ερώτησης παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου

Το πρόβλημα αυτό υπάρχει (με αυτή την διατύπωση) στο σχολικό βιβλίο των Ανδρεαδάκης et al. (1994) στην σελίδα 246 στην Α΄ ομάδα και είναι η άσκηση 7 i. Επιπλέον βρίσκεται στη βιβλιογραφία όπως για παράδειγμα στο Chernoff και Sriraman (2014). Η ερώτηση παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου στοχεύει στον τρόπο με τον οποίο το περιεχόμενο μπορεί να γίνει πιο κατανοητό στους μαθητές και είναι προσωπική κατασκευή.

> Δίνετε στους μαθητές σας το παρακάτω πρόβλημα.
>
> Μια οικογένεια έχει δυο παιδιά. Γνωρίζουμε ότι το ένα παιδί τουλάχιστον είναι αγόρι. Ποια η πιθανότητα και το άλλο παιδί να είναι αγόρι;
>
> Οι περισσότεροι μαθητές έδωσαν λανθασμένη απάντηση.
>
> **10] Να αναφέρετε τρεις τρόπους αναπαράστασης για να βοηθήσετε τους μαθητές σε αυτό το πρόβλημα.**
>
> 1...
>
> 2...
>
> 3...

Μαθηματικό περιεχόμενο

Δεσμευμένη πιθανότητα, ανεξάρτητα ενδεχόμενα, θεώρημα Bayes

Κλείδα αξιολόγησης

Οι Batanero και Álvarez-Arroyo (2024) στη βιβλιογραφική τους ανασκόπηση των τελευταίων ετών 2018-2023 κατέγραψαν τρόπους αναπαράστασης/οπτικοποίησης για βελτίωση του συλλογισμού και κατανόησης στις ασκήσεις δεσμευμένης πιθανότητας και του θεωρήματος Bayes. Τα εργαλεία οπτικοποίησης που μελετήθηκαν από διάφορους ερευνητές είναι τα δενδροδιαγράμματα (και τα διπλά δενδροδιαγράμματα), τα τετράγωνα μονάδας (unit square), οι πίνακες διπλής εισόδου, οι πίνακες εικονιδίων (icon array), τα διαδραστικά ραβδογράμματα (interactive bar graph), τα πανκικογράμματα (panchinkogram), τα διαγράμματα Venn.

Επομένως, η βαθμολόγηση είναι: τρεις τρόποι - 3 μονάδες, δυο τρόποι - 2 μονάδες, ένας τρόπος - 1 μονάδα, καμία απάντηση ή κανένας τρόπος - 0 μονάδες (πίνακας 3.12).

Πίνακας 3.12: Κλείδα αξιολόγησης 10^{o} πρόβλημα

Απαντήσεις	*Βαθμολογία*
Τρεις τρόποι	3
Δυο τρόποι	2
Ένας τρόπος	1
Κανένας τρόπος	0

11^{η} και 12^{η} ερώτηση

(δεν βαθμολογούνται)

Οι ερωτήσεις αυτές αφορούν τις απόψεις των εκπαιδευτικών για το νέο ΠΣ και ποιους στόχους θεωρούν πιο σημαντικούς.

Στους προτεινόμενους στόχους του ερωτηματολογίου επιλέχθηκαν περισσότεροι από τις μεγαλύτερες τάξεις.

Επιπλέον σε στόχους του ΠΣ που περιείχαν αναγνώριση ή υπολογισμό επιλέχθηκαν στόχοι που αφορούσαν υπολογισμό. Για παράδειγμα Π.Π.112.Π.1. Αναγνωρίζουν μια δοκιμή Bernoulli. Π.Π.12.Π.2. Υπολογίζουν την πιθανότητα να έχουμε κ επιτυχίες σε μια σειρά από ν ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli.

11] Ποιους τρεις στόχους του νέου προγράμματος σπουδών θεωρείτε πιο σημαντικούς για τους μαθητές σας στη Στατιστική;

Οι μαθητές/-τριές:

1. Με τη βοήθεια των θηκογραμμάτων κάνουν συγκρίσεις και εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που έχουν οι τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού.
2. Από τον πίνακα συνάφειας συχνοτήτων διπλής εισόδου υπολογίζουν τις περιθώριες συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες.
3. Από δοσμένα στοιβαγμένα ραβδογράμματα συχνοτήτων και ομαδοποιημένα ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με την εξάρτηση των δυο κατηγορικών μεταβλητών.
4. Κατασκευάζουν το διάγραμμα διασποράς των τιμών δυο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού.
5. Με τη βοήθεια του διαγράμματος διασποράς διερευνούν την ύπαρξη γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών δυο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού και διακρίνουν τη θετική από την αρνητική γραμμική συσχέτιση.
6. Ανακαλύπτουν και εξηγούν με παραδείγματα ότι δυο ποσοτικά χαρακτηριστικά δεν διέπονται απαραίτητα από μια σχέση αιτίας-αιτιατού.
7. Χαράσσουν εποπτικά την ευθεία παλινδρόμησης για το απλό γραμμικό μοντέλο και σχολιάζουν την προσαρμογή της.
8. Εξοικειώνονται με την έννοια της πρόβλεψης της τιμής της μεταβλητής απόκρισης για δοσμένη τιμή της επεξηγηματικής μεταβλητής, με βάση το απλό γραμμικό μοντέλο, και αναγνωρίζουν τυχόν περιορισμούς.

Επιλέχθηκε από αυτούς τους δυο στόχους στις προτεινόμενες επιλογές μόνο ο δεύτερος (Π.Π.12.Π.2.) που αφορά τον υπολογισμό. Επιπλέον ζητήθηκε και σύντομη εξήγηση για τους λόγου επιλογής.

12] Ποιους τρεις στόχους του νέου προγράμματος σπουδών θεωρείτε πιο σημαντικούς για τους μαθητές σας στις Πιθανότητες;

Οι μαθητές/-τριές:

1. Υπολογίζουν το πλήθος των στοιχείων ενδεχομένων με χρήση αρχών απαρίθμησης.
2. Χρησιμοποιούν τις διατάξεις με και χωρίς επαναλήψεις, μεταθέσεις και συνδυασμούς στη μοντελοποίηση και την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.
3. Εφαρμόζουν τις ιδιότητες της κανονικής κατανομής για την επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου.
4. Υπολογίζουν την πιθανότητα να έχουμε κ επιτυχίες σε μια σειρά από ν ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli.
5. Χρησιμοποιούν τον πολλαπλασιαστικό κανόνα για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.
6. Αξιοποιούν τη δεσμευμένη πιθανότητα για να ορίσουν την ανεξαρτησία δυο ενδεχομένων.
7. Εφαρμόζουν το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.
8. Εφαρμόζουν το Θεώρημα του Bayes στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων.

Παρακάτω δίνονται συγκεντρωτικά η κλείδα αξιολόγησης (πίνακας 3.13), η γνωστική περιοχή του ΠΣ που αφορούν τα ερωτήματα (πίνακας 3.14) και η προέλευση των προβλημάτων, της παιδαγωγικής ερώτησης, τα στοιχεία παιδαγωγικής γνώσης που αξιολογούνται και η θεματική περιοχή (πίνακας 3.15).

Πίνακας 3.13: Συγκεντρωτική κλείδα αξιολόγησης

	Επιλογές	Βαθμοί		Επιλογές	Βαθμοί
1ο	**Ποιοτική μεταβλητή**	**2**	6ο	Στο τρίγωνο του Pascal	1
	Πινάκα συχνοτήτων	0		Στον υπολογισμό των πιθανοτήτων (αναλογικό μοντέλο)	0
	Μέτρα θέσης	1		**Στο νόμο των μεγάλων αριθμών**	**2**
	Μέτρα θέσης και εύρος	1		Στην κατασκευή δενδροδιαγράμματος	1
2ο	Θα διόρθωνα το λάθος του	1	7ο	Τη μεταβλητότητα σε μικρά δείγματα	1
	Θα του έκανα ερωτήσεις που αφορούν τον αριθμό των οικογενειών	**2**		Τα ισοπίθανα ενδεχόμενα	1
	Θα του ζητούσα να μου εξηγήσει τον τρόπο με τον οποίο έφτασε σε αυτό το συμπέρασμα	1		**Το νόμο των μεγάλων αριθμών**	**2**
				Δεν γνωρίζουμε	0
3ο	Υπολόγισαν λανθασμένα τη τυπική απόκλιση	1	8ο	Δεν γνωρίζουν τον τρόπο υπολογισμού των συνδυασμών	1
	Εκτίμησαν από το γράφημα πόσο απέχουν οι παρατηρήσεις μεταξύ τους και όχι πόσο απέχουν από τη μέση τιμή	**2**		Γνωρίζουν τον τρόπο υπολογισμού των συνδυασμών, αλλά κάνουν λάθος στο τελικό αποτέλεσμα	1
	Στη σύγκριση των δυο δειγμάτων χρησιμοποίησαν τη μέση τιμή ή τη διάμεσο	0		**Εκτιμάνε τους τρόπους με την ευκολία που μπορούν να φέρουν στο μυαλό τους τις περιπτώσεις**	**2**
				Δεν γνωρίζουμε	0
4ο	**Θα του έκανα ερωτήσεις όπως: Από ποιο δείγμα; Ποιο είναι το ποσοστό των καπνιστών με ασθένεια; Ποιο είναι το ποσοστό των μη καπνιστών με ασθένεια**	**3**	9ο	Το πρόβλημα Β οι μαθητές βρήκαν ότι δεν είναι ξεκάθαρα διατυπωμένο	1
	Θα έλεγα τη σωστή απάντηση ή/και θα εξηγούσα	1		**Θεώρησαν ότι η επιλογή της δεύτερης σφαίρας στο πρόβλημα Β δεν μπορεί να επηρεάσει την επιλογή της πρώτης σφαίρας**	**2**
	Θα ζητούσα να εστιάσουν στο συνολικό αριθμό ατόμων που ερευνώνται σε καθεμία ενότητα και να χρησιμοποιήσουν ποσοστά και αναλογίες	2		Θεώρησαν ότι ο δειγματικός χώρος του προβλήματος Β έχει μόνο τα δυο ενδεχόμενα να είναι η μπάλα ή άσπρη ή μαύρη (Ω={Α,Μ})	1
				Δεν γνωρίζουμε	0
5ο	Στο διάγραμμα διασποράς του Α υπάρχουν περισσότερα σημεία	0	10ο	**Τρεις τρόποι**	**3**
	Θεωρούν ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας τόσο πιο ισχυρή είναι η θετική συσχέτιση	1		Δυο τρόποι	2
	Θεωρούν ότι σε μια τέλεια θετική συσχέτιση (r=1) ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι 1 και επομένως η γωνία που σχηματίζει με τον x΄x είναι 45^0	**2**		Ένας τρόπος	1
	Θεωρούν ότι η ισχυρότερη συσχέτιση σημαίνει ότι μια μεταβλητή μπορεί να επηρεάσει την άλλη, με την μια μεταβλητή να έχει το ρόλο της αιτίας και η άλλη του αποτελέσματος	0		Κανένας τρόπος	0

Πίνακας 3.14: Συγκεντρωτικά η γνωστική περιοχή του ΠΣ που αφορούν οι ερωτήσεις του ερωτηματολογίου

Στοχαστικά Μαθηματικά					
Στατιστική			**Πιθανότητες**		
διαχείριση δεδομένων	*Α΄ Λυκείου*	Ποιοτικές ποσοτικές μεταβλητές **1**		*Α΄ Λυκείου*	Κλασικός – αξιωματικός ορισμός πιθανοτήτων Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων **6, 7**
	Β΄ Λυκείου (Γενικής Παιδείας)	Πίνακες συνάφειας συχνοτήτων διπλής εισόδου ραβδογράμματα **4**	**Πειράματα τύχης και πιθανότητες**	*Β΄ Λυκείου (Γενικής Παιδείας)*	Συνδυαστική Εφαρμογές κανονικής κατανομής **8**
	Γ΄ Λυκείου (Γενικής Παιδείας)	Εξαρτημένες - ανεξάρτητες μεταβλητές		*Γ΄ Λυκείου (Γενικής Παιδείας)*	Δοκιμή Bernoulli **6**
	Γ΄ Λυκείου (Προσανατολισμού)			*Γ΄ Λυκείου (Προσανατολισμού)*	
μέτρα θέσης – μεταβλητό-τητα	*Α΄ Λυκείου*	Μέτρα θέσης και διασποράς **1, 2, 3**	**συσχέτιση**	*Α΄ Λυκείου*	
	Β΄ Λυκείου (Γενικής Παιδείας)			*Β΄ Λυκείου (Γενικής Παιδείας)*	Δεσμευμένη πιθανότητα **9, 10**
	Γ΄ Λυκείου (Γενικής Παιδείας)			*Γ΄ Λυκείου (Γενικής Παιδείας)*	Πολλαπλασιαστικό κανόνα πιθανοτήτων Δεσμευμένη Πιθανότητα – ανεξάρτητα ενδεχόμενα (Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας – Bayes) **9, 10**
	Γ΄ Λυκείου (Προσανατολισμού)	Μέση τιμή διασπορά με χρήση του τύπου του αθροίσματος **(2)**		***Γ΄ Λυκείου (Προσανατολισμού)***	
σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δυο μεταβλητών	*Α΄ Λυκείου*	Συγκρίσεις με θηκογράμματα			
	Β΄ Λυκείου (Γενικής Παιδείας)	Σχέση εξάρτηση με χρήση ραβδογράμματος			
	Γ΄ Λυκείου (Γενικής Παιδείας)	Γραμμική συσχέτιση Γραμμική παλινδρόμηση (εποπτικά) **5**			
	Γ΄ Λυκείου (Προσανατολισμού)	Γραμμική συσχέτιση Γραμμική παλινδρόμηση (ελαχίστων τετραγώνων)			

Με (κόκκινους) αριθμούς τα προβλήματα του ερωτηματολογίου

Πίνακας 3.15: Προέλευση προβλημάτων, ερώτησης παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου, στοιχεία παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου που αξιολογούνται, θεματική περιοχή.

Πρόβλημα	**Άσκηση**		**Διδακτική ερώτηση**		**Παρανόηση/ δυσκολία**	**Απάντηση σε μαθητή**	**Συνέχιση διδασκαλίας**	**Θεματική περιοχή**
		Σχόλια		Σχόλια				
1ο	Sorto, 2004; Estrella, 2010		Estrella, 2010				✓	Ποιοτικές μεταβλητές, μέτρα θέσης, μέτρα διασποράς, πίνακας συχνοτήτων
2ο	Watson & Callingham, 2013; Callingham, Carmichael, & Watson, 2015		Watson & Callingham 2013; Callingham, Carmichael, & Watson 2015 (συνέντευξη)	Έγιναν αλλαγές στις παρεμβολές και στην κλείδα αξιολόγησης		✓		Μέση τιμή
3ο	Προσωπική κατασκευή	Βασισμένο σε έρευνα Loosen, Lioen & Lacante, 1985	Προσωπική κατασκευή		✓			Διασπορά, τυπική, απόκλιση, μέτρα θέσης, μέτρα διασποράς
4ο	Batanero et al., 1996; Watson & Callingham, 2014; Callingham, Carmichael, & Watson, 2015		Watson & Callingham, 2014; Callingham, Carmichael, & Watson, 2015 (συνέντευξη)	Έγιναν αλλαγές στις παρεμβολές και στην κλείδα αξιολόγησης		✓		Πίνακες συνάφειας, αναγνώριση συσχέτισης δυο κατηγοριακών μεταβλητών
5ο	Liu, Lin & Tsai, 2009	Τροποποιημένη	Προσωπική κατασκευή		✓			Διάγραμμα διασποράς, συντελεστής συσχέτισης, ευθεία παλινδρόμισης
6ο	Estrella , 2010; Fischbein & Schnarch, 1997		Estrella, 2010				✓	Ορισμός πιθανοτήτων, νόμο μεγάλων αριθμών, μέγεθος δείγματος Δοκιμές Bernoulli
7ο	Estrella , 2010; Fischbein & Schnarch, 1997; Garfield, 2003; Kahneman & Tversky ,1972		Estrella , 2010				✓	Ορισμός πιθανοτήτων, νόμο μεγάλων αριθμών, μέγεθος δείγματος
8ο	Fischbein & Schnarch, 1997		Προσωπική κατασκευή		✓			Συνδυασμοί
9ο	Fischbein & Schnarch, 1997		Προσωπική κατασκευή		✓			Δεσμευμένη πιθανότητα, ανεξάρτητα ενδεχόμενα, θεώρημα Bayes
10ο	Ανδρεαδάκης et al. 1994; Chernoff & Sriraman, 2014		Προσωπική κατασκευή				✓	Δεσμευμένη πιθανότητα, ανεξάρτητα ενδεχόμενα, θεώρημα Bayes

Κεφάλαιο 4ο: Αποτελέσματα

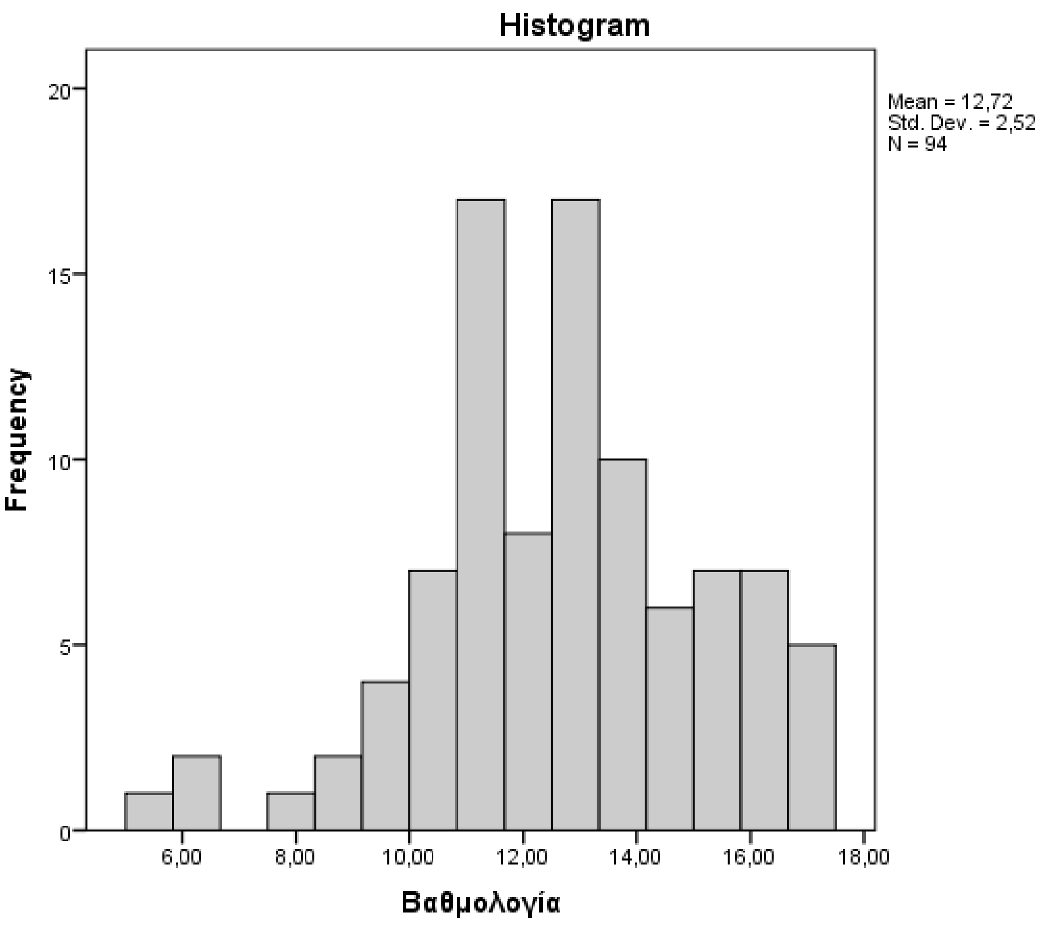
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας αρχικά συνολικά, στη συνέχεια παρουσιάζεται η απόδοση ανά ερώτημα και ανά ομάδα. Ακολουθούν συγκρίσεις μέσων όρων.

4.1 Συνολική Απόδοση

Στα προβλήματα 4 και 10, η βαθμολογία μετατράπηκε με μέγιστη το 2, ενώ αρχικά είχε μέγιστη το 3, για να έχουν τα προβλήματα αυτά μέγιστη βαθμολογία 2 όπως και τα υπόλοιπα. Επομένως, κάθε ερώτηση είχε μέγιστη βαθμολογία 2 μονάδες, και επομένως η μέγιστη συνολική βαθμολογία κάθε συμμετέχοντα ήταν 20.

Στον ιστόγραμμα (γράφημα 4.1) παρουσιάζεται η κατανομή των βαθμών με μέσο όρο 12,72 και τυπική απόκλιση 2,52. Η χαμηλότερη βαθμολογία ήταν 5,33 και η υψηλότερη 17,33.

Γράφημα 4.1: Κατανομή των συνολικών βαθμών



Η μετατροπή βαθμολογίας σε ποσοστό αντιστοιχεί σε **μέσο όρο 63,6%**

Δημογραφικά στοιχεία με βαθμολογία ≥1,65

Συγκεντρώθηκαν οι απαντήσεις που έχουν βαθμολογία μεγαλύτερη ή ίση από 1,65. Το κριτήριο βαθμολογίας μεγαλύτερης ή ίσης από 1,65 επιλέχθηκε ώστε να εντοπιστούν οι συμμετέχοντες που ανήκουν στο ανώτερο 8%-10% ποσοστό των εκπαιδευτικών με τις υψηλότερες επιδόσεις. Αυτό το κριτήριο βαθμολογίας συγκέντρωσαν 8 συμμετέχοντες της έρευνας και αποτελούσε το 8,5% των εκπαιδευτικών με την υψηλότερη βαθμολογία. Σε πίνακες περιγράφονται αναλυτικά τα χαρακτηριστικά αυτής της ομάδας.

Όλες οι ερωτήσεις>=1.65 * Μεταπτυχιακό
Count

		Μεταπτυχιακό				Σύνολο
		Δεν έχω	Σε άλλο αντικείμενο	Στα μαθηματικά	Στη διδακτική των μαθηματικών, Σε άλλο αντικείμενο	
όλες οι ερωτήσεις>=1.65	1,67	0	1	2	0	3
	1,70	0	0	1	0	1
	1,70	1	0	0	0	1
	1,73	0	2	0	1	3
Σύνολο		1	3	3	1	8

Όλες οι ερωτήσεις>=1.65 * Διδακτορικό
Count

		Διδακτορικό	Σύνολο
		Δεν έχω	
όλες οι ερωτήσεις >=1.65	1,67	3	3
	1,70	1	1
	1,70	1	1
	1,73	3	3
Σύνολο		8	8

Όλες οι ερωτήσεις >=1.65 * Συνολικά_χρόνια_διδακτικής_εμπειρίας
Count

		Συνολικά_χρόνια_διδακτικής_εμπειρίας			Σύνολο
		[5,10)	[10,15)	[15,20)	
όλες οι ερωτήσεις >=1.65	1,67	0	2	1	3
	1,70	0	1	0	1
	1,70	1	0	0	1
	1,73	0	0	3	3
Σύνολο		1	3	4	8

Όλες οι ερωτήσεις >=1.65 * Το_σχολικό_έτος_2023-2024_εργάζομαι_σε
Count

		Το_σχολικό_έτος_2023-2024_εργάζομαι_σε		Σύνολο
		Δημόσιο ή ιδιωτικό σχολείο	Φροντιστήριο	
όλες οι ερωτήσεις >=1.65	1,67	3	0	3
	1,70	0	1	1
	1,70	0	1	1
	1,73	3	0	3
Σύνολο		6	2	8

Πίνακας 4.1: Χαρακτηριστικά εκπαιδευτικών με βαθμολογία ≥1,65

ΑΑ	Ακαδημαϊκό υπόβαθρο		Χρόνια διδακτικής εμπειρίας	Χώρος εργασίας
	Μεταπτυχιακό	Διδακτορικό		
1.	Σε άλλο αντικείμενο	Δεν έχω	[15,20)	Δημόσιο ή ιδιωτικό σχολείο
2.	Στη διδακτική των μαθηματικών, Σε άλλο αντικείμενο	Δεν έχω	[15,20)	Δημόσιο ή ιδιωτικό σχολείο
3.	Σε άλλο αντικείμενο	Δεν έχω	[15,20)	Δημόσιο ή ιδιωτικό σχολείο
4.	Δεν έχω	Δεν έχω	[5,10)	Φροντιστήριο
5.	Στα μαθηματικά	Δεν έχω	[10,15)	Φροντιστήριο
6.	Στα μαθηματικά	Δεν έχω	[15,20)	Δημόσιο ή ιδιωτικό σχολείο
7.	Σε άλλο αντικείμενο	Δεν έχω	[10,15)	Δημόσιο ή ιδιωτικό σχολείο
8.	Στα μαθηματικά	Δεν έχω	[10,15)	Δημόσιο ή ιδιωτικό σχολείο

Τα χαρακτηριστικά των εκπαιδευτικών με αυτό το κριτήριο βαθμολογίας ποικίλουν.

4.2 Απόδοση ανά ερώτημα

Σε όλα τα προβλήματα η συχνότητα και η σχετική συχνότητα των απαντήσεων παρουσιάζονται σε πίνακα. Προστέθηκε και μια επιπλέον στήλη που δείχνει πως αξιολογείται καθεμία απάντηση, όπως περιγράφηκε αναλυτικά στο κεφάλαιο της μεθοδολογίας και συγκεκριμένα στην παράγραφο 3.3 Περιγραφή του ερωτηματολογίου.

Επιπλέον παρουσιάζεται και κυκλικό διάγραμμα όπου αναγράφονται τα ποσοστά κάθε απάντησης.

Στην συνέχεια, ακολουθεί πίνακας μέσου όρου της βαθμολογίας ανά ερώτηση, όπου κάθε ερώτηση είχε μέγιστη βαθμολογία 2 μονάδες και η τιμή της βαθμολογίας εκφρασμένη σε ποσοστό (%).

Στα προβλήματα 4 και 10, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η βαθμολογία μετατράπηκε με μέγιστη το 2, ενώ αρχικά είχε μέγιστη το 3, για να έχουν τα προβλήματα αυτά μέγιστη βαθμολογία 2 όπως και τα υπόλοιπα.

1^o πρόβλημα

Δίνετε στους μαθητές σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων:

Ζώο	Συχνότητα v_i
καναρίνι	2
γάτα	4
πρόβατο	2
σκυλί	7
πάπια	1
ψάρι	2
κατσίκα	1
άλογο	3
κουνέλι	3

Συζητάτε με τους μαθητές σας τα δεδομένα του πίνακα και ένας μαθητής υποστηρίζει:

«Η επικρατούσα τιμή είναι το σκυλί, η διάμεσος η πάπια και το εύρος είναι από 1 έως 7».

1] Σε ποιο από τα παρακάτω θα δίνατε μεγαλύτερη έμφαση στη συνέχιση της διδασκαλίας σας για να βοηθήσετε το μαθητή;

i) Ποιοτική μεταβλητή
ii) Πίνακα συχνοτήτων
iii) Μέτρα θέσης
iv) Μέτρα θέσης και εύρος

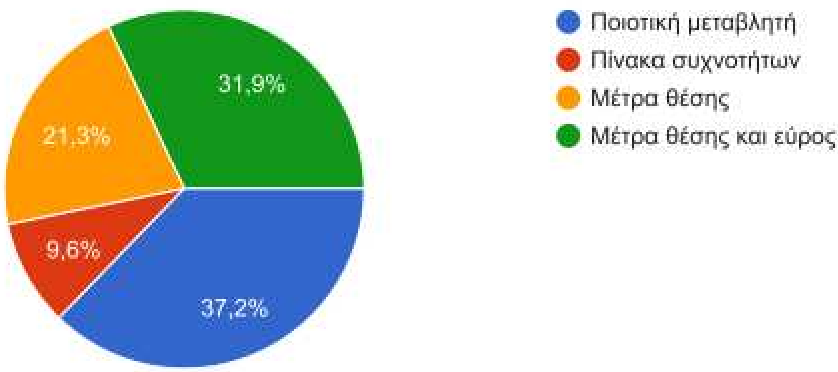
Το ερώτημα αυτό αφορούσε την συνέχιση της διδασκαλίας με μαθηματικό περιεχόμενο τις ποιοτικές μεταβλητές, τα μέτρα θέσης, το εύρος σε πίνακα συχνοτήτων. Την πιο κατάλληλη απάντηση (απάντηση i) επέλεξε το 37,2% του δείγματος. Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά οι απαντήσεις στον πίνακα σχετικών συχνοτήτων και στο κυκλικό διάγραμμα, όπως επίσης και η μέση βαθμολογία του προβλήματος.

Πίνακας 4.2: Πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, κλείδα αξιολόγησης 1^o πρόβλημα

1o_πρόβλημα

		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό	Βαθμολογία απάντησης
Valid	Ποιοτική μεταβλητή	35	37,2	37,2	2
	Πίνακα συχνοτήτων	9	9,6	9,6	0
	Μέτρα θέσης	20	21,3	21,3	1
	Μέτρα θέσης και εύρος	30	31,9	31,9	1
	Σύνολο	94	100,0	100,0	

Γράφημα 4.2: Κυκλικό διάγραμμα ποσοστών 1^o πρόβλημα



Πίνακας 4.3: Μέσος όρος βαθμολογίας 1^o πρόβλημα

1ο_πρόβλημα		
N	Έγκυρα	94
	Missing	0
Μέση τιμή		1,2766
Τυπική απόκλιση		,62912

Η μετατροπή βαθμολογίας σε ποσοστό αντιστοιχεί σε **μέσο όρο 63,83%**

2^o πρόβλημα

Δίνετε στους μαθητές σας το παρακάτω πρόβλημα:

Ο μέσος όρος παιδιών σε 10 οικογένειες είναι 2,3.
Αν μια οικογένεια που έχει 5 παιδιά φύγει από τη γειτονιά, ποιος είναι ο νέος μέσος όρος παιδιών ανά οικογένεια;

2] Πως θα απαντούσατε σε ένα μαθητή που υποστήριζε για το παραπάνω πρόβλημα:
ΜΑΘΗΤΗΣ: *2,3χ10=23 και 23-5=18 και 18:10=1,8*

i) Θα διόρθωνα το λάθος του.
ii) Θα του έκανα ερωτήσεις που αφορούν τον αριθμό των οικογενειών.
iii) Θα του ζητούσα να μου εξηγήσει τον τρόπο με τον οποίο έφτασε σε αυτό το συμπέρασμα.

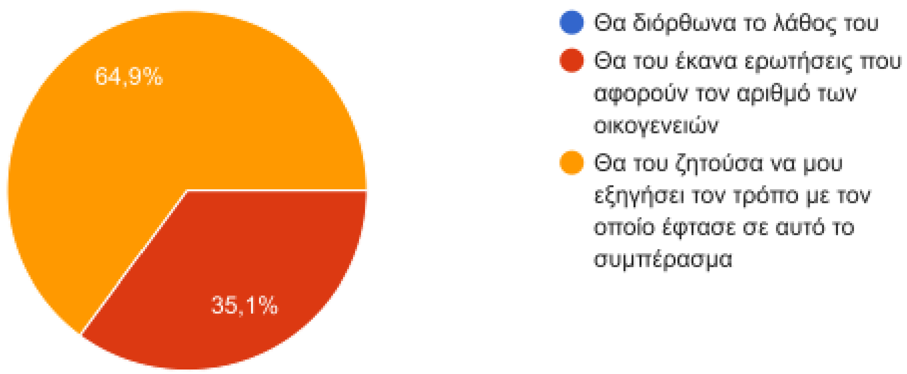
Στο πρόβλημα αυτό ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς πως θα απαντούσαν σε ένα μαθητή για ένα πρόβλημα μέσης τιμής. Η πιο κατάλληλη απάντηση (απάντηση ii) δόθηκε από το 64,9% του δείγματος. Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά οι απαντήσεις στον πίνακα σχετικών συχνοτήτων και στο κυκλικό διάγραμμα, όπως επίσης και η μέση βαθμολογία του προβλήματος.

Πίνακας 4.4: Πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, κλείδα αξιολόγησης $2^{ο}$ πρόβλημα

2ο _πρόβλημα

		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό	Βαθμολογία απάντησης
Valid	Θα διόρθωνα το λάθος του	0	0	0	1
	Θα του έκανα ερωτήσεις που αφορούν τον αριθμό των οικογενειών	33	35,1	35,1	2
	Θα του ζητούσα να μου εξηγήσει τον τρόπο με τον οποίο έφτασε σε αυτό το συμπέρασμα	61	64,9	64,9	1
	Σύνολο	94	100,0	100,0	

Γράφημα 4.3: Κυκλικό διάγραμμα ποσοστών $2^{ο}$ πρόβλημα



Πίνακας 4.5: Μέσος όρος βαθμολογίας $2^{ο}$ πρόβλημα

2ο_πρόβλημα

N	Έγκυρα	94
	Missing	0
Μέση τιμή		1,3511
Τυπική απόκλιση		,47986

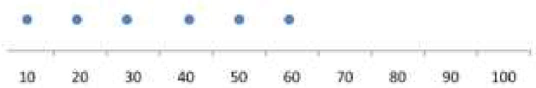
Η μετατροπή βαθμολογίας σε ποσοστό αντιστοιχεί σε **μέσο όρο 67,56%**

3ο πρόβλημα

Δίνετε στους μαθητές σας το παρακάτω πρόβλημα πολλαπλής επιλογής:

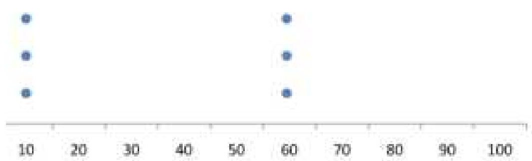
Δυο διαφορετικά τμήματα Α και Β των έξι ατόμων το καθένα βαθμολογήθηκαν σε ένα μάθημα με άριστα το 100.
Οι βαθμοί που πήραν οι μαθητές για κάθε τμήμα δίνονται στα παρακάτω σημειογράμματα.
Κάθε σημείο στο γράφημα αναπαριστά το πλήθος των μαθητών που έχουν τη συγκεκριμένη βαθμολογία. Για παράδειγμα τα τρία σημεία πάνω από το 60 δείχνουν ότι τρεις μαθητές του τμήματος Β είχαν βαθμολογία 60.

Τμήμα Α



βαθμολογίες

Τμήμα Β



βαθμολογίες

Ποιο από τα δυο τμήματα έχει μεγαλύτερη διασπορά παρατηρήσεων;

a) το δείγμα Α **b)** το δείγμα Β

c) τα δυο δείγματα έχουν ίση διασπορά **d)** δεν γνωρίζουμε με αυτά τα δεδομένα

3] Για ποιο λόγο κατά τη γνώμη σας επέλεξαν λανθασμένα το δείγμα Α οι μαθητές;

i) Υπολόγισαν λανθασμένα τη τυπική απόκλιση.
ii) Εκτίμησαν από το γράφημα πόσο απέχουν οι παρατηρήσεις μεταξύ τους και όχι πόσο απέχουν από τη μέση τιμή.
iii) Στη σύγκριση των δυο δειγμάτων χρησιμοποίησαν τη μέση τιμή ή τη διάμεσο.

Το ερώτημα αυτό διερευνούσε τον εντοπισμό μια παρανόησης των μαθητών για τη διασπορά των παρατηρήσεων. Οι μαθητές δίνουν μεγαλύτερη έμφαση στην ετερογένεια των δεδομένων, συγκριτικά με την απόκλιση της από το «κέντρο» των παρατηρήσεων (Loosen, Lioen & Lacante, 1985). Η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών (77,7%) εντόπισε αυτή την παρανόηση. Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά οι απαντήσεις στον πίνακα σχετικών συχνοτήτων και στο κυκλικό διάγραμμα, όπως επίσης και η μέση βαθμολογία του προβλήματος.

Πίνακας 4.6: Πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, κλείδα αξιολόγησης 3^{ο} πρόβλημα

3ο_πρόβλημα

		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό	Βαθμολογία απάντησης
Valid	Υπολόγισαν λανθασμένα την τυπική απόκλιση	4	4,3	4,3	1
	Εκτίμησαν από το γράφημα πόσο απέχουν οι παρατηρήσεις μεταξύ τους και όχι πόσο απέχουν από τη μέση τιμή	73	77,7	77,7	2
	Στη σύγκριση των δυο δειγμάτων χρησιμοποίησαν τη μέση τιμή ή τη διάμεσο	17	18,1	18,1	0
	Σύνολο	94	100,0	100,0	

Γράφημα 4.4: Κυκλικό διάγραμμα ποσοστών 3^{ο} πρόβλημα

Πίνακας 4.7: Μέσος όρος βαθμολογίας 3^{ο} πρόβλημα

3ο_πρόβλημα

N	Έγκυρα	94
	Missing	0
Μέση τιμή		1,5957
Τυπική απόκλιση		,78039

Η μετατροπή βαθμολογίας σε ποσοστό αντιστοιχεί σε **μέσο όρο 79,79%**

4ο πρόβλημα

Δίνετε στους μαθητές σας το παρακάτω πρόβλημα:

	Ασθένεια των πνευμόνων	**Χωρίς ασθένεια των πνευμόνων**	**Σύνολο**
Καπνιστές	90	60	150
Μη καπνιστές	60	40	100
Σύνολο	150	100	250

Τους ζητάτε να χρησιμοποιήσουν τις παραπάνω πληροφορίες και να εξετάσουν αν στο δείγμα η ασθένεια των πνευμόνων εξαρτάται από το κάπνισμα.

4] Πως θα απαντούσατε σε ένα μαθητή που υποστήριζε για το παραπάνω πρόβλημα:

ΜΑΘΗΤΗΣ: *«Ναι, εξαρτάται, γιατί 90 καπνιστές έχουν ασθένεια των πνευμόνων».*

i) Θα του έκανα ερωτήσεις όπως: Από ποιο δείγμα; Ποιο είναι το ποσοστό των καπνιστών με ασθένεια; Ποιο είναι το ποσοστό των μη καπνιστών με ασθένεια;
ii) Θα έλεγα τη σωστή απάντηση ή/και θα εξηγούσα.
iii) Θα ζητούσα να εστιάσουν στο συνολικό αριθμό ατόμων που ερευνώνται σε καθεμία ενότητα και να χρησιμοποιήσουν ποσοστά και αναλογίες.

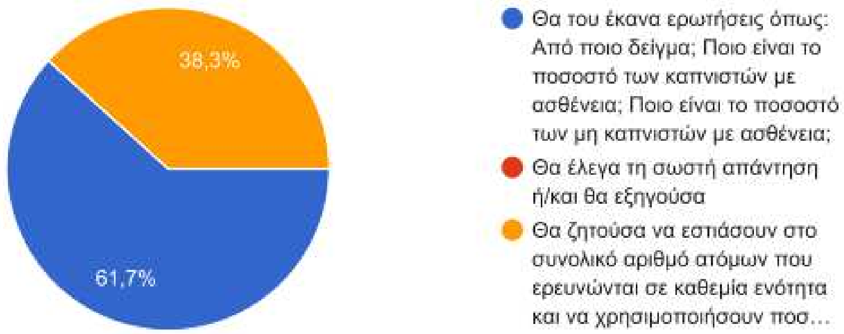
Στο πρόβλημα αυτό ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς πως θα απαντούσαν σε ένα μαθητή για ένα πρόβλημα με πίνακα συνάφειας. Η πιο κατάλληλη απάντηση (απάντηση i) δόθηκε από το 61,7% του δείγματος. Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά οι απαντήσεις στον πίνακα σχετικών συχνοτήτων και στο κυκλικό διάγραμμα, όπως επίσης και η μέση βαθμολογία του προβλήματος.

Πίνακας 4.8: Πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, κλείδα αξιολόγησης 4ο πρόβλημα

4ο_πρόβλημα

		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό	Βαθμολογία απάντησης
Valid	Θα του έκανα ερωτήσεις όπως: Από ποιο δείγμα; Ποιο είναι το ποσοστό των καπνιστών με ασθένεια; Ποιο είναι το ποσοστό των μη καπνιστών με ασθένεια;	58	61,7	61,7	2
	Θα έλεγα τη σωστή απάντηση ή/και θα εξηγούσα	0	0	0	0,66
	Θα ζητούσα να εστιάσουν στο συνολικό αριθμό ατόμων που ερευνώνται σε καθεμία ενότητα και να χρησιμοποιήσουν ποσοστά και αναλογίες	36	38,3	38,3	1,33
	Total	94	100,0	100,0	

Γράφημα 4.5: Κυκλικό διάγραμμα ποσοστών 4^{ο} πρόβλημα



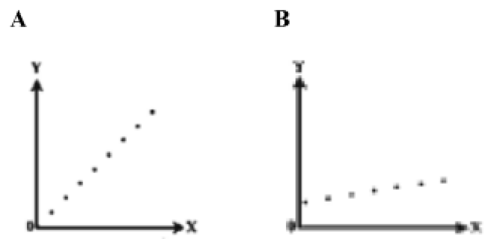
Πίνακας 4.9: Μέσος όρος βαθμολογίας 4^{ο} πρόβλημα

4ο_πρόβλημα		
N	Έγκυρα	94
	Missing	0
Μέση τιμή		1,7434
Τυπική απόκλιση		,32744

Η μετατροπή βαθμολογίας σε ποσοστό αντιστοιχεί σε **μέσο όρο 87,17%**

5^{ο} πρόβλημα

Δίνετε στους μαθητές σας τα παρακάτω διαγράμματα διασποράς:



Ποιο από τα διαγράμματα διασποράς έχει τέλεια γραμμική θετική συσχέτιση (r=1);

a) μόνο το Α
b) μόνο το Β
c) το Α και το Β
d) δεν γνωρίζουμε με αυτά τα δεδομένα

5] Για ποιο λόγο κατά τη γνώμη σας επέλεξαν λανθασμένα μόνο το Α οι μαθητές;

i) Στο διάγραμμα διασποράς του Α υπάρχουν περισσότερα σημεία.
ii) Θεωρούν ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας τόσο πιο ισχυρή είναι η γραμμική θετική συσχέτιση.
iii) Θεωρούν ότι σε μια τέλεια γραμμική θετική συσχέτιση (r=1) ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι 1 και επομένως η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x΄x είναι 45^0.
iv) Θεωρούν ότι η ισχυρότερη συσχέτιση σημαίνει ότι μια μεταβλητή μπορεί να επηρεάσει την άλλη, με την μια μεταβλητή να έχει το ρόλο της αιτίας και η άλλη του αποτελέσματος.

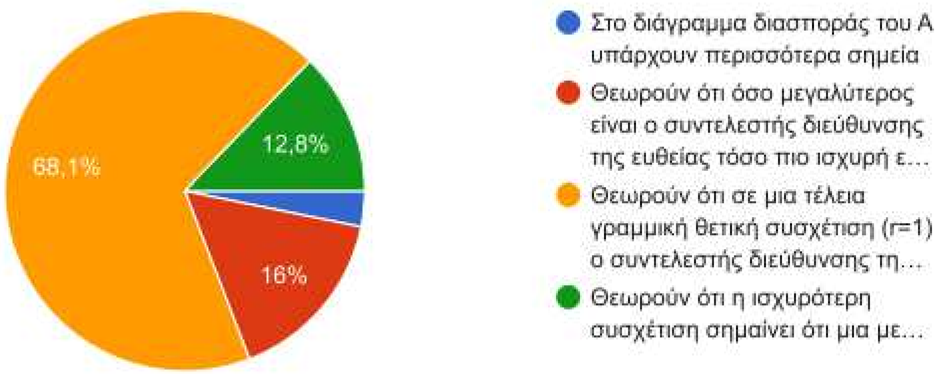
Η παρανόηση που εξετάζει το πρόβλημα αυτό αφορά την συσχέτιση δυο μεταβλητών, όπου οι μαθητές θεωρούν ότι σε μια τέλεια γραμμική θετική συσχέτιση ο συντελεστής διεύθυνσης είναι 1. Η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών (68,1%) εντόπισε αυτή την παρανόηση. Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά οι απαντήσεις στον πίνακα σχετικών συχνοτήτων και στο κυκλικό διάγραμμα, όπως επίσης και η μέση βαθμολογία του προβλήματος.

Πίνακας 4.10: Πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, κλείδα αξιολόγησης 5^{o} πρόβλημα

5ο_πρόβλημα

		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό	Βαθμολογία απάντησης
Valid	Στο διάγραμμα διασποράς του Α υπάρχουν περισσότερα σημεία	3	3,2	3,2	0
	Θεωρούν ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας τόσο πιο ισχυρή είναι η γραμμική θετική συσχέτιση	15	16,0	16,0	1
	Θεωρούν ότι σε μια τέλεια γραμμική θετική συσχέτιση (r=1) ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι 1 και επομένως η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x΄x είναι 45 μοίρες	64	68,1	68,1	2
	Θεωρούν ότι η ισχυρότερη συσχέτιση σημαίνει ότι μια μεταβλητή μπορεί να επηρεάσει την άλλη, με την μια μεταβλητή να έχει το ρόλο της αίτιας και η άλλη του αποτελέσματος	12	12,8	12,8	0
	Σύνολο	94	100,0	100,0	

Γράφημα 4.8: Κυκλικό διάγραμμα ποσοστών 5^{o} πρόβλημα



Πίνακας 4.11: Μέσος όρος βαθμολογίας 5^{o} πρόβλημα

5ο_πρόβλημα

N	Έγκυρα	94
	Missing	0
Μέση τιμή		1,5213
Τυπική απόκλιση		,75816

Η μετατροπή βαθμολογίας σε ποσοστό αντιστοιχεί σε **μέσο όρο 76,07%**

6ο πρόβλημα

Ρωτάτε τους μαθητές σας: Ποιο από τα παρακάτω ενδεχόμενα είναι πιο πιθανό να πραγματοποιηθεί; A={να φέρουμε τουλάχιστον **2** φορές γράμματα στις **3** ρίψεις ενός αμερόληπτου κέρματος} B={να φέρουμε τουλάχιστον **200** φορές γράμματα στις **300** ρίψεις ενός αμερόληπτου κέρματος} **6] Για να εξηγήσετε το περιεχόμενο που σχετίζεται με αυτό το πρόβλημα θα εστιάζατε:** **i)** στο τρίγωνο του Pascal. **ii)** στον υπολογισμό των πιθανοτήτων (αναλογικό μοντέλο). **iii)** στο νόμο των μεγάλων αριθμών. **iv)** στην κατασκευή δενδροδιαγράμματος.

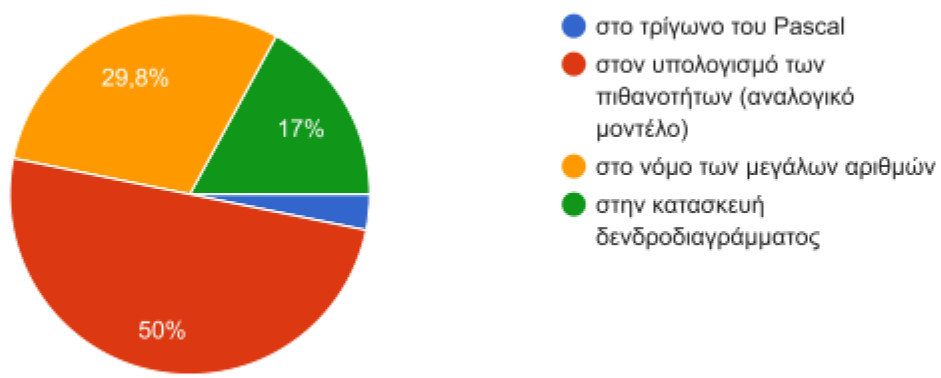
Το ερώτημα αυτό αφορούσε την συνέχιση της διδασκαλίας στην παρανόηση των μαθητών να τείνουν να παραμελούν την επίδραση του μεγέθους ενός δείγματος κατά την εκτίμηση των πιθανοτήτων (Fischbein & Schnarch, 1997). Η παρανόηση αυτή προκύπτει από την ελλιπή ερμηνεία του νόμου των μεγάλων αριθμών (Estrella, 2010) και την επιλογή αυτή (απάντηση iii) επέλεξε το 29,8% του δείγματος. Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά οι απαντήσεις στον πίνακα σχετικών συχνοτήτων και στο κυκλικό διάγραμμα, όπως επίσης και η μέση βαθμολογία του προβλήματος.

Πίνακας 4.12: Πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, κλείδα αξιολόγησης 6ο πρόβλημα

6ο_πρόβλημα

		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό	Βαθμολογία απάντησης
Valid	στο τρίγωνο του Pascal	3	3,2	3,2	1
	στον υπολογισμό των πιθανοτήτων (αναλογικό μοντέλο)	47	50,0	50,0	0
	στο νόμο των μεγάλων αριθμών	28	29,8	29,8	2
	στην κατασκευή δενδροδιαγράμματος	16	17,0	17,0	1
	Σύνολο	94	100,0	100,0	

Γράφημα 4.9: Κυκλικό διάγραμμα ποσοστών 6ο πρόβλημα



Πίνακας 4.13: Μέσος όρος βαθμολογίας 6^{ο} πρόβλημα

6ο_πρόβλημα		
N	Έγκυρα	94
	Missing	0
Μέση τιμή		,7979
Τυπική απόκλιση		,87473

Η μετατροπή βαθμολογίας σε ποσοστό αντιστοιχεί σε **μέσο όρο 39,9%**

7^{ο} πρόβλημα

Δίνετε στους μαθητές σας το παρακάτω πρόβλημα:

Η πιθανότητα ένα νεογέννητο να είναι αγόρι είναι ίση με την πιθανότητα να είναι κορίτσι. Στο νοσοκομείο Α καταγράφονται κατά μέσο όρο 50 γεννήσεις την ημέρα και στο νοσοκομείο Β καταγράφονται κατά μέσο όρο 10 γεννήσεις την ημέρα.

Σε μια συγκεκριμένη μέρα, ποιο νοσοκομείο είναι πιθανότερο να έχει τουλάχιστον 80% γεννήσεις κοριτσιών;

7] Ποια κατά τη γνώμη σας είναι η πιο σημαντική γνώση που πρέπει να αποκτήσουν οι μαθητές για να αντιμετωπίσουν αυτό το πρόβλημα;

i) Την μεταβλητότητα σε μικρά δείγματα.
ii) Τα ισοπίθανα ενδεχόμενα.
iii) Τον νόμο των μεγάλων αριθμών.
iv) Δεν γνωρίζουμε.

Η ερώτηση προς τους μαθητές χρησιμοποιήθηκε σε πολλές έρευνες (Kahneman & Tversky, 1972; Fischbein & Schnarch, 1997; Garfield, 2003) για τη διερεύνηση της κατανόησης της μεταβλητότητας της δειγματοληψίας και μετράει την επίδραση του μεγέθους του δείγματος ή αντιπροσωπευτικότητα που προκύπτει από λανθασμένη ερμηνεία για τα μικρά δείγματα (Estrella, 2010). Την πιο κατάλληλη απάντηση (iii) επέλεξε το 12,8% του δείγματος. Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά οι απαντήσεις στον πίνακα σχετικών συχνοτήτων και στο κυκλικό διάγραμμα, όπως επίσης και η μέση βαθμολογία του προβλήματος.

Πίνακας 4.14: Πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, κλείδα αξιολόγησης 7^{ο} πρόβλημα

7ο_πρόβλημα

		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό	Βαθμολογία απάντησης
Valid	Την μεταβλητότητα σε μικρά δείγματα	34	36,2	36,2	1
	Τα ισοπίθανα ενδεχόμενα	37	39,4	39,4	1
	Τον νόμο των μεγάλων αριθμών	12	12,8	12,8	2
	Δεν γνωρίζουμε	11	11,7	11,7	0
	Σύνολο	94	100,0	100,0	

Γράφημα 4.8: Κυκλικό διάγραμμα ποσοστών 7ο πρόβλημα

Πίνακας 4.15: Μέσος όρος βαθμολογίας 7ο πρόβλημα

7ο_πρόβλημα		
N	Έγκυρα	94
	Missing	0
Μέση τιμή		1,0106
Τυπική απόκλιση		,49719

Η μετατροπή βαθμολογίας σε ποσοστό αντιστοιχεί σε **μέσο όρο 50,53%**

8ο πρόβλημα

Δίνετε στους μαθητές σας το παρακάτω πρόβλημα:

Α: Επιλέγουμε μια επιτροπή με 2 μέλη από 10 υποψήφιους
Β: Επιλέγουμε μια επιτροπή με 8 μέλη από 10 υποψήφιους.
Ποιο από τα δυο γεγονότα έχει περισσοτέρους τρόπους να πραγματοποιηθεί;

Οι περισσότεροι μαθητές απάντησαν λανθασμένα ότι το Α πραγματοποιείται με περισσότερους τρόπους από το Β.

8] Για ποιο λόγο κατά τη γνώμη σας οδηγήθηκαν σε αυτό το λάθος οι μαθητές;

- **i)** Δεν γνωρίζουν τον τρόπο υπολογισμού των συνδυασμών.
- **ii)** Γνωρίζουν τον τρόπο υπολογισμού των συνδυασμών, αλλά κάνουν λάθος στο τελικό αποτέλεσμα.
- **iii)** Εκτιμούν τους τρόπους με την ευκολία που μπορούν να φέρουν στο μυαλό τους τις περιπτώσεις.
- **iv)** Δεν γνωρίζουμε.

Το πρόβλημα αυτό εξετάζει την παρανόηση που έχουν οι μαθητές να εκτιμάνε την πιθανότητα με την ευκολία που μπορούν να φέρουν στο μυαλό τους τις περιπτώσεις

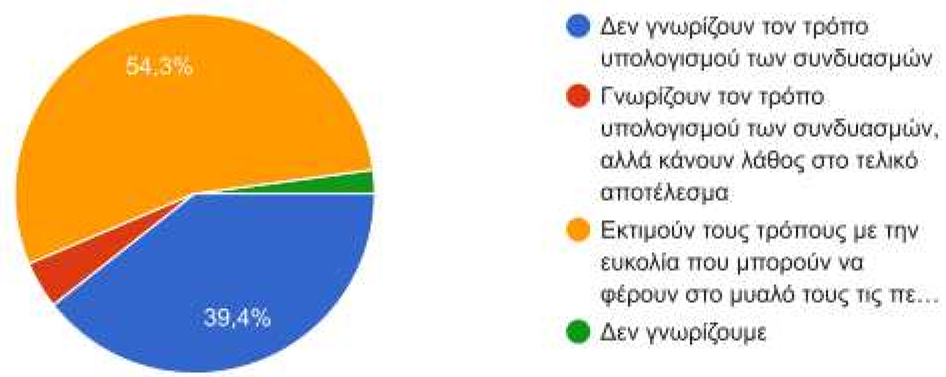
(Fischbein & Schnarch, 1997). Αυτή η παρανόηση εμφανίζεται σε μαθητές των τελευταίων τάξεων του Λυκείου με 85% και στους φοιτητές με 72% στην έρευνα των Fischbein και Schnarch (1997), όπου οι μαθητές απάντησαν στην άσκηση που περιλαμβάνει το πρόβλημα αυτό. Στο δείγμα της παρούσας έρευνας το 54,3% των εκπαιδευτικών κατάφερε να εντοπίσει την παρανόηση αυτή των μαθητών. Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά οι απαντήσεις στον πίνακα σχετικών συχνοτήτων και στο κυκλικό διάγραμμα, όπως επίσης και η μέση βαθμολογία του προβλήματος.

Πίνακας 4.16: Πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, κλείδα αξιολόγησης 8^{ο} πρόβλημα

8ο_πρόβλημα

		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό	Βαθμολογία απάντησης
Valid	Δεν γνωρίζουν τον τρόπο υπολογισμού των συνδυασμών	37	39,4	39,4	1
	Γνωρίζουν τον τρόπο υπολογισμού των συνδυασμών, αλλά κάνουν λάθος στο τελικό αποτέλεσμα	4	4,3	4,3	1
	Εκτιμούν τους τρόπους με την ευκολία που μπορούν να φέρουν στο μυαλό τους τις περιπτώσεις	51	54,3	54,3	2
	Δεν γνωρίζουμε	2	2,1	2,1	0
	Σύνολο	94	100,0	100,0	

Γράφημα 4.9: Κυκλικό διάγραμμα ποσοστών 8^{ο} πρόβλημα



Πίνακας 4.17: Μέσος όρος βαθμολογίας 8^{ο} πρόβλημα

8ο_πρόβλημα

N	Έγκυρα	94
	Missing	0
Μέση τιμή		1,5213
Τυπική απόκλιση		,54336

Η μετατροπή βαθμολογίας σε ποσοστό αντιστοιχεί σε **μέσο όρο 76,07%**

9ο πρόβλημα

Δίνετε στους μαθητές σας το παρακάτω πρόβλημα: Ένα κουτί περιέχει δυο άσπρες και δυο μαύρες σφαίρες. Επιλέγουμε τυχαία δυο σφαίρες τη μια μετά την άλλη χωρίς επανατοποθέτηση. Α. Η πρώτη σφαίρα είναι άσπρη. Ποια είναι η πιθανότητα και η δεύτερη σφαίρα να είναι άσπρη; Β. Την πρώτη σφαίρα που επιλέγουμε την αφήνουμε στην άκρη χωρίς να δούμε το χρώμα της και επιλέγουμε την δεύτερη σφαίρα η οποία είναι άσπρη. Ποια είναι η πιθανότητα και η πρώτη σφαίρα να είναι άσπρη; Οι περισσότεροι μαθητές απάντησαν σωστά στο Α ερώτημα και λανθασμένα στο Β ερώτημα. **9] Για ποιο λόγο κατά τη γνώμη σας απάντησαν λανθασμένα στο Β ερώτημα οι περισσότεροι μαθητές;** **i)** Το πρόβλημα Β οι μαθητές βρήκαν ότι δεν είναι ξεκάθαρα διατυπωμένο. **ii)** Θεώρησαν ότι η επιλογή της δεύτερης σφαίρας στο πρόβλημα Β δεν μπορεί να επηρεάσει την επιλογή της πρώτης σφαίρας. **iii)** Θεώρησαν ότι ο δειγματικός χώρος του προβλήματος Β έχει τα δυο απλά ενδεχόμενα να είναι η σφαίρα ή άσπρη ή μαύρη (Ω={Α,Μ}) . **iv)** Δεν γνωρίζουμε.

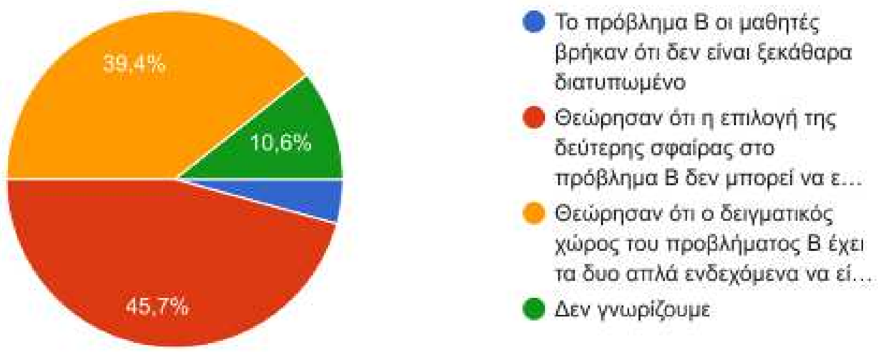
Η δυσκολία που εξετάζει το πρόβλημα είναι ότι ένα γεγονός δεν μπορεί να ενεργήσει αναδρομικά για την αιτία που το προκάλεσε (Fischbein & Schnarch, 1997). Λιγότεροι από τους μισούς εκπαιδευτικούς του δείγματος (45,7%) κατάφεραν να εντοπίσουν την παρανόηση αυτή. Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά οι απαντήσεις στον πίνακα σχετικών συχνοτήτων και στο κυκλικό διάγραμμα, όπως επίσης και η μέση βαθμολογία του προβλήματος.

Πίνακας 4.18: Πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, κλείδα αξιολόγησης 9ο πρόβλημα

9ο_πρόβλημα

		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό	Βαθμολογία απάντησης
Valid	Το πρόβλημα Β οι μαθητές βρήκαν ότι δεν είναι ξεκάθαρα διατυπωμένο	4	4,3	4,3	1
	Θεώρησαν ότι η επιλογή της δεύτερης σφαίρας στο πρόβλημα Β δεν μπορεί να επηρεάσει την επιλογή της πρώτης σφαίρας	43	45,7	45,7	2
	Θεώρησαν ότι ο δειγματικός χώρος του προβλήματος Β έχει τα δυο απλά ενδεχόμενα να είναι η σφαίρα ή άσπρη ή μαύρη (Ω={Α,Μ})	37	39,4	39,4	1
	Δεν γνωρίζουμε	10	10,6	10,6	0
	Σύνολο	94	100,0	100,0	

Γράφημα 4.10: Κυκλικό διάγραμμα ποσοστών 9^{o} πρόβλημα



Πίνακας 4.19: Μέσος όρος βαθμολογίας 9^{o} πρόβλημα

9ο_πρόβλημα		
N	Έγκυρα	94
	Missing	0
Μέση τιμή		1,3511
Τυπική απόκλιση		,66732

Η μετατροπή βαθμολογίας σε ποσοστό αντιστοιχεί σε **μέσο όρο 67,56%**

10^{o} πρόβλημα

> Δίνετε στους μαθητές σας το παρακάτω πρόβλημα.
>
> Μια οικογένεια έχει δυο παιδιά. Γνωρίζουμε ότι το ένα παιδί τουλάχιστον είναι αγόρι. Ποια η πιθανότητα και το άλλο παιδί να είναι αγόρι;
>
> Οι περισσότεροι μαθητές έδωσαν λανθασμένη απάντηση.
>
> **10] Να αναφέρετε τρεις τρόπους αναπαράστασης για να βοηθήσετε τους μαθητές σε αυτό το πρόβλημα.**
>
> **1.**..
>
> **2.**..
>
> **3.**...

Οι ορθές απαντήσεις σύμφωνα με την βιβλιογραφία περιγράφηκαν στο κεφάλαιο της μεθοδολογίας στην παράγραφο 3.3 Περιγραφή του ερωτηματολογίου και ήταν οι παρακάτω:

- δενδροδιαγράμματα
- πίνακες διπλής εισόδου
- διαγράμματα Venn
- τετράγωνα μονάδας (unit square)
- πίνακες εικονιδίων (icon array)

- διαδραστικά ραβδογράμματα
- πανκικογράμματα (panchinkogram)

Κάποιες από τις απαντήσεις των ερωτηθέντων πιθανόν να ήταν ορθές κατά την παρουσίαση τους στην αίθουσα διδασκαλίας, αλλά βαθμολογήθηκαν ως μη ορθές λόγο της ελλιπούς διατύπωσης τους. Στον πίνακα 4.20 αναφέρουμε απαντήσεις οι οποίες δεν βρίσκονται στην παραπάνω λίστα και βαθμολογηθήκαν κάποιες ως μη ορθές και άλλες ως ορθές.

Πίνακας 4.20.: Βαθμολόγηση απαντήσεων πρόβλημα 10

Βαθμολογήθηκαν ως ΜΗ ορθές	Βαθμολογήθηκαν ως ορθές
σύνολα	στατιστικό πίνακα
συμπλήρωμα	πινακάκι
σχηματική αναπαράσταση	Πίνακας ενδεχομένων
Δειγματικός χώρος με ζευγάρια	πίνακα
ζωγραφική	Αναπαράσταση με σχέδια των παιδιών
Παράσταση με σύνολο του δειγματικού χώρου	τετράγωνα άσπρο/μαύρο
Συμβολική, εικονική	
Σύνολο πιθανών ενδεχομένων	
Ανάλυση δειγματικού χώρου	
Αναπαράσταση ενδεχομένων	
Δειγματικός χώρος	
αναγραφή	
αναπαράσταση	
Καταγραφή ενδεχομένων	
Απλή περιγραφή	

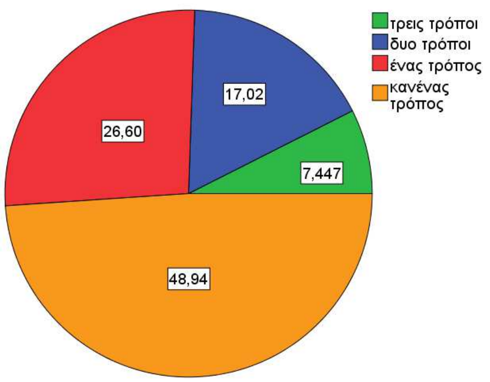
Τρεις τρόπους αναπαράστασης ώστε το περιεχόμενο του προβλήματος να γίνει πιο κατανοητό στους μαθητές, εντόπισε μόλις το 7,4%.

Πίνακας 4.21: Πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, κλείδα αξιολόγησης 10^{ο} πρόβλημα

10ο_πρόβλημα

		Συχνότητα	Ποσοστό	Έγκυρο ποσοστό	Βαθμολογία απάντησης
Valid	Τρεις τρόποι	7	7,4	7,4	2
	Δυο τρόποι	16	17,0	17,0	1,33
	Ένας τρόπος	25	26,6	26,6	0,66
	Κανένας τρόπος	46	48,9	48,9	0
	Σύνολο	94	100,0	100,0	

Γράφημα 4.11: Κυκλικό διάγραμμα ποσοστών 10^{ο} πρόβλημα



Πίνακας 4.22: Μέσος όρος βαθμολογίας 10^{ο} πρόβλημα

10ο_πρόβλημα		
N	Έγκυρα	94
	Missing	0
Μέση τιμή		,5509
Τυπική απόκλιση		,64482

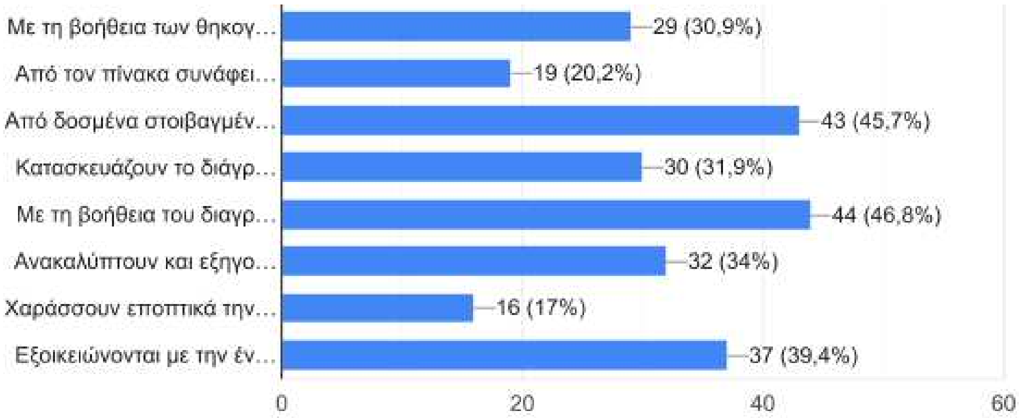
Η μετατροπή βαθμολογίας σε ποσοστό αντιστοιχεί σε **μέσο όρο 27,55%**

11^{η} ερώτηση

11] Ποιους τρεις στόχους του νέου προγράμματος σπουδών θεωρείτε πιο σημαντικούς για τους μαθητές σας στη Στατιστική;

Οι μαθητές/-τριές:

1. Με τη βοήθεια των θηκογραμμάτων κάνουν συγκρίσεις και εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που έχουν οι τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού.
2. Από τον πίνακα συνάφειας συχνοτήτων διπλής εισόδου υπολογίζουν τις περιθώριες συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες.
3. Από δοσμένα στοιβαγμένα ραβδογράμματα συχνοτήτων και ομαδοποιημένα ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με την εξάρτηση των δυο κατηγορικών μεταβλητών.
4. Κατασκευάζουν το διάγραμμα διασποράς των τιμών δυο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού.
5. Με τη βοήθεια του διαγράμματος διασποράς διερευνούν την ύπαρξη γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών δυο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού και διακρίνουν τη θετική από την αρνητική γραμμική συσχέτιση.
6. Ανακαλύπτουν και εξηγούν με παραδείγματα ότι δυο ποσοτικά χαρακτηριστικά δεν διέπονται απαραίτητα από μια σχέση αιτίας-αιτιατού.
7. Χαράσσουν εποπτικά την ευθεία παλινδρόμησης για το απλό γραμμικό μοντέλο και σχολιάζουν την προσαρμογή της.
8. Εξοικειώνονται με την έννοια της πρόβλεψης της τιμής της μεταβλητής απόκρισης για δοσμένη τιμή της επεξηγηματικής μεταβλητής, με βάση το απλό γραμμικό μοντέλο, και αναγνωρίζουν τυχόν περιορισμούς.



Οι συμμετέχοντες στην έρευνα προτίμησαν σε μεγαλύτερο ποσοστό τις παρακάτω τρεις επιλογές:

- **(3)** Από δοσμένα στοιβαγμένα ραβδογράμματα συχνοτήτων και ομαδοποιημένα ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με την εξάρτηση των δυο κατηγορικών μεταβλητών (**45,7%**)
- **(5)** Με τη βοήθεια του διαγράμματος διασποράς διερευνούν την ύπαρξη γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών δυο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού και διακρίνουν τη θετική από την αρνητική γραμμική συσχέτιση (**46,8%**)
- **(8)** Εξοικειώνονται με την έννοια της πρόβλεψης της τιμής της μεταβλητής απόκρισης για δοσμένη τιμή της επεξηγηματικής μεταβλητής, με βάση το απλό γραμμικό μοντέλο, και αναγνωρίζουν τυχόν περιορισμούς (**39,4%**)

Αναφέρονται παρακάτω και οι λόγοι που ορισμένοι συμμετέχοντες επέλεξαν κάποιους από αυτούς τους στόχους.

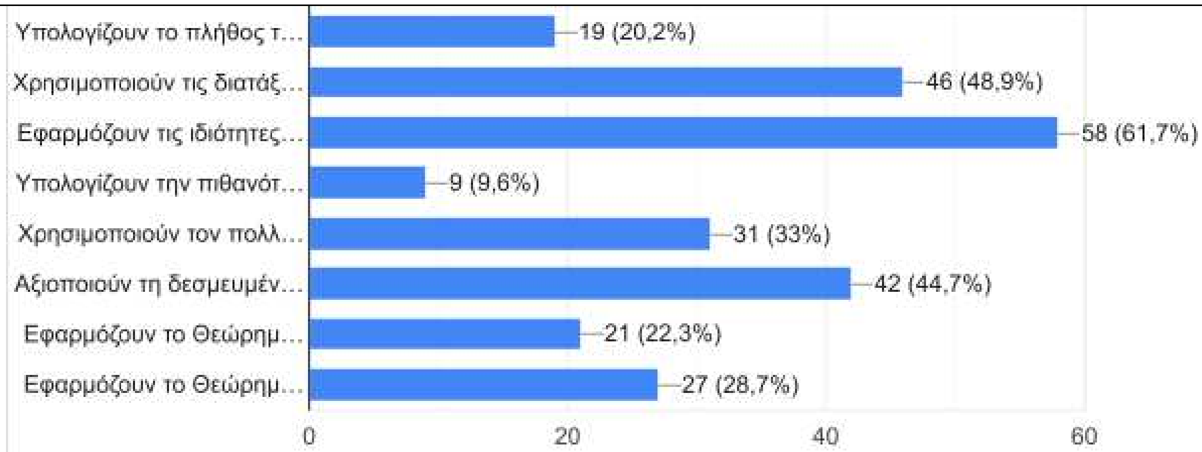
ΑΑ	Επιλογή στόχων	Σύντομη εξήγηση του λόγου επιλογής
1	2, 5, 6	Έμφαση στις έννοιες οι οποίες μπορούν να αξιοποιηθούν περισσότερο τόσο στην καθημερινότητα, όσο και στις περαιτέρω σπουδές.
2	3, 5, 7	Γιατί μπορούν να εξάγουν περισσότερα δεδομένα για τη μελέτη της μεταβλητής και των τιμών της
3	8	Οι μαθητές θα ενθουσιαστούν με την έννοια της πρόβλεψης
4	3, 4, 6	Η κατασκευή και μελέτη ράβδο γραμμάτων τη θεωρώ πολύ σημαντική για την εξαγωγή πολλαπλών συμπερασμάτων. Η επιχειρηματολογία με παραδείγματα τη θεωρώ εξίσου διαφωτιστική και πολύ ουσιαστική ως τεχνική και ανάπτυξης κριτικής σκέψης
5	3, 5, 6	Έχουν το πιο πρακτικό περιεχόμενο
6	5, 8	Γιατί θα μπορούν να ερμηνεύουν διαγράμματα ερευνών και να εξάγουν σωστά συμπεράσματα εξασκώντας την κριτική τους σκέψη καθώς θα προσαρμόζουν τις γνώσεις τους σε προβλήματα της καθημερινότητας τους.
7	1, 3, 8	Να εντάξουν την Στατιστική στη σκέψη τους σε μαθηματικά μοντέλα που προκύπτουν από καθημερινά προβλήματα
8	3, 8	Θα πρέπει να ξεκινήσουμε από τις πολύ απλές έννοιες.
9	3, 5, 6	Θεωρώ ότι αυτό που θα πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές είναι από τα δεδομένα και τα διαγράμματα να μπορούν να βγάζουν σωστά συμπεράσματα
10	1, 3, 6	Θεωρώ ότι η ερμηνεία διαγραμμάτων και η άντληση συμπερασμάτων είναι από τους σημαντικότερους στόχους. Ομοίως, η αντιμετώπιση της τάσης να "βλέπουμε" αιτιώδη χαρακτήρα μέσα σε κάθε συσχέτιση.

12η ερώτηση

12] Ποιους τρεις στόχους του νέου προγράμματος σπουδών θεωρείτε πιο σημαντικούς για τους μαθητές σας στις Πιθανότητες;

Οι μαθητές/-τριές:

1. Υπολογίζουν το πλήθος των στοιχείων ενδεχομένων με χρήση αρχών απαρίθμησης.
2. Χρησιμοποιούν τις διατάξεις με και χωρίς επαναλήψεις, μεταθέσεις και συνδυασμούς στη μοντελοποίηση και την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.
3. Εφαρμόζουν τις ιδιότητες της κανονικής κατανομής για την επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου.
4. Υπολογίζουν την πιθανότητα να έχουμε κ επιτυχίες σε μια σειρά από ν ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli.
5. Χρησιμοποιούν τον πολλαπλασιαστικό κανόνα για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.
6. Αξιοποιούν τη δεσμευμένη πιθανότητα για να ορίσουν την ανεξαρτησία δυο ενδεχομένων.
7. Εφαρμόζουν το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.
8. Εφαρμόζουν το Θεώρημα του Bayes στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων.



Οι συμμετέχοντες στην έρευνα προτίμησαν σε μεγαλύτερο ποσοστό τις παρακάτω τρεις επιλογές:

- **(2)** Χρησιμοποιούν τις διατάξεις με και χωρίς επαναλήψεις, μεταθέσεις και συνδυασμούς στη μοντελοποίηση και την επίλυση πραγματικών προβλημάτων **(48,9%)**
- **(3)** Εφαρμόζουν τις ιδιότητες της κανονικής κατανομής για την επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου **(61,7%)**
- **(6)** Αξιοποιούν τη δεσμευμένη πιθανότητα για να ορίσουν την ανεξαρτησία δυο ενδεχομένων **(44,7%)**

Αναφέρονται παρακάτω και οι λόγοι που ορισμένοι συμμετέχοντες επέλεξαν κάποιους από αυτούς τους στόχους.

ΑΑ	Επιλογή στόχων	Σύντομη εξήγηση του λόγου επιλογής
1	2, 3, 5	Ορισμένα από τα υπόλοιπα θεωρώ ότι είναι γνώσεις που θα πρέπει να τις διδαχθούν έχοντας ήδη γνώσεις από αυτά που διάλεξα οπότε να υπάρχει μια σταδιακή γνώση του τομέα της στατιστικής και των πιθανοτήτων
2	2, 3, 5	Σύνδεση με την καθημερινότητα
3	6, 7	Ενθουσιασμός για αυτό που υπολογίζουν και πως συνδέονται τα μαθηματικά (πιθανότητες) με άλλες επιστήμης (πχ εμβόλια και ιατρική)
4	2, 3, 7	Η χρήση της επιστήμης στην καθημερινότητα
5	2, 6, 8	Γιατί θα μπορούν να επιλύουν πολλά προβλήματα της καθημερινότητας τους καθώς τα περισσότερα εμπίπτουν στις επιλεγμένες κατηγορίες πχ apriori γνώση σε επιλογή επαγγέλματος δεδομένου του επαγγέλματος των γονιών.
6	1, 3, 6	Είναι σημαντικό να μάθουν με την χρήση πιθανοτήτων να ερμηνεύουν και να κάνουν προβλέψεις σε προβλήματα της καθημερινότητας
7	2, 3, 5	θα πρέπει να ξεκινήσουν από απλά θέματα.
8	3, 6, 8	Οι στόχοι αυτοί συνδέονται με την εφαρμογή των πιθανοτήτων στην καθημερινότητα και με την αντιμετώπιση συνηθισμένων παρανοήσεων.
9	2, 4, 7	Αποτελούν τη βάση για την προσέγγιση και την ερμηνεία της κανονικής κατανομής και της δεσμευμένης πιθανότητας αντίστοιχα.
10	2	Σημαντική η χρήση σε καθημερινά προβλήματα. Παρατήρησα ότι τους κεντρίζουν το ενδιαφέρον.

Συγκεντρωτική βαθμολογία ανά ερώτηση

Στον πίνακα 4.23 παρουσιάζεται συγκεντρωτικά η μέση βαθμολογία κάθε προβλήματος και η τυπική απόκλιση. Επιπλέον, αναγράφεται και το ποσοστό των εκπαιδευτικών που επέλεξαν την πιο κατάλληλη απάντηση.

Το πρόβλημα με την χαμηλότερη βαθμολογία ήταν το 10^{o} το οποίο ήταν ανοιχτού τύπου και το αμέσως επόμενο το 6^{o} πρόβλημα. Το πρόβλημα με την υψηλότερη βαθμολογία ήταν το 4^{o} πρόβλημα.

Πίνακας 4.23: Συγκεντρωτική βαθμολογία ανά ερώτηση

	N	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση	Ποσοστό επιλογής της πιο κατάλληλης απάντησης		
				Παρανόηση/ δυσκολία	Απάντηση σε μαθητή	Συνέχιση διδασκαλίας
1ο_πρόβλημα	94	1,2766	,62912			37,2%
2ο_πρόβλημα	94	1,3511	,47986		64,9%	
3ο_πρόβλημα	94	1,5957	,78039	77,7%		
4ο_πρόβλημα	94	1,7434	,32744		61,7%	
5ο_πρόβλημα	94	1,5213	,75816	68,1%		
6ο_πρόβλημα	94	,7979	,87473			29,8%
7ο_πρόβλημα	94	1,0106	,49719			12,8%
8ο_πρόβλημα	94	1,5213	,54336	54,3%		
9ο_πρόβλημα	94	1,3511	,66732	45,7%		
10ο_πρόβλημα	94	,5509	,64482			7,4%
Valid N (listwise)	94					

4.3 Απόδοση ανά ομάδα

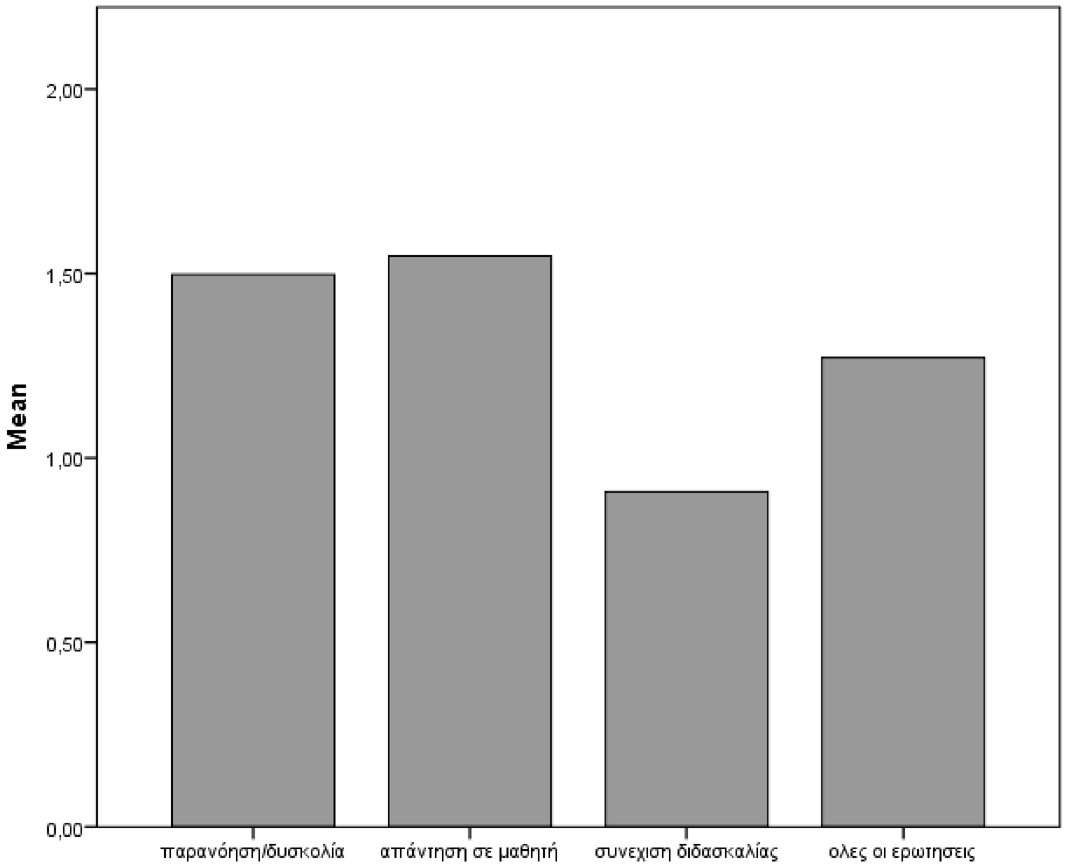
Απόδοση ανά άξονα παιδαγωγικής γνώσης

Οι ερωτήσεις ομαδοποιήθηκαν σε τρεις άξονες σύμφωνα με τα στοιχεία της παιδαγωγικής γνώσης που αξιολογεί κάθε ερώτηση:

- **Παρανόηση/δυσκολία**
  Ερωτήσεις στα προβλήματα: 3^{o}, 5^{o}, 8^{o}, 9^{o}
- **Απάντηση σε μαθητή**
  Ερωτήσεις στα προβλήματα: 2^{o}, 4^{o}
- **Συνέχιση της διδασκαλίας**
  Ερωτήσεις στα προβλήματα: 1^{o}, 6^{o}, 7^{o}, 10^{o}

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο γράφημα 4.12 και στον πίνακα 4.24 Είναι εμφανής η αδυναμία στην συνέχιση της διδασκαλίας (μέση τιμή 0,91, τυπική απόκλιση 0,4) σε σχέση με τις άλλες δυο υποκατηγορίες.

Γράφημα 4.12: Βαθμολογία στους τρεις άξονες



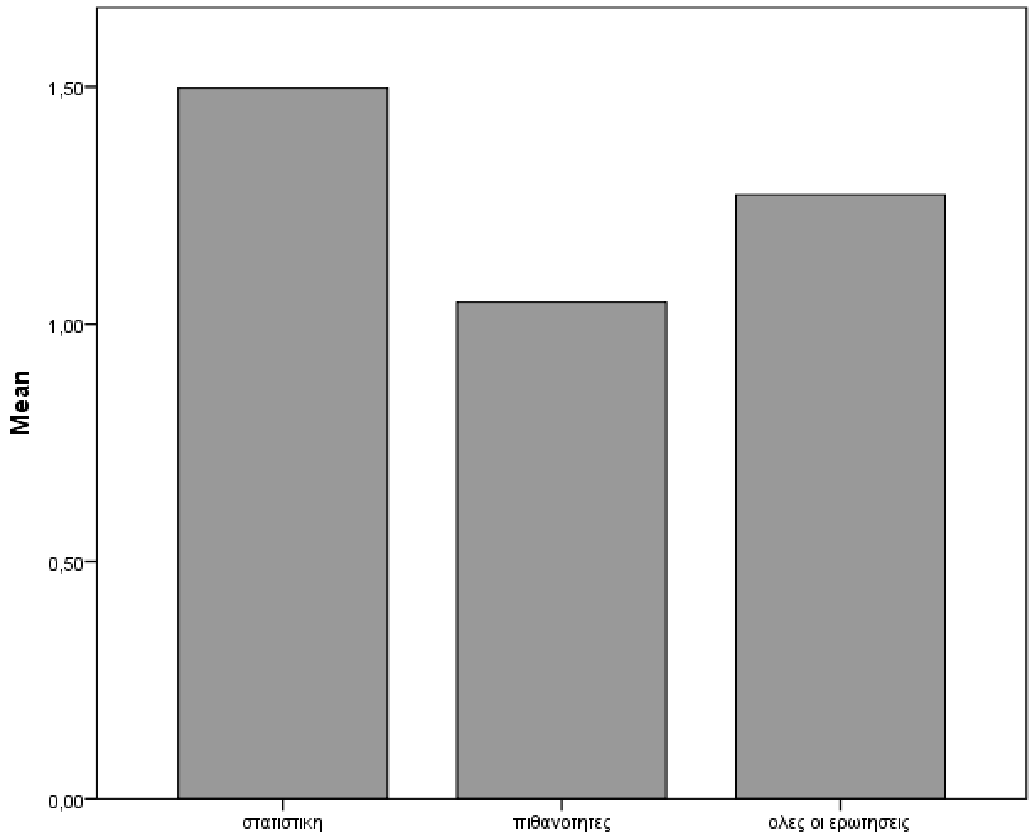
Πίνακας 4.24: Βαθμολογία στους τρεις άξονες

	N	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση
παρανόηση/δυσκολία	94	1,4973	,38712
απάντηση σε μαθητή	94	1,5472	,30045
συνέχιση διδασκαλίας	94	,9090	,40023
όλες οι ερωτήσεις	94	1,2720	,25203
Valid N (listwise)	94		

Απόδοση Στατιστικής-Πιθανοτήτων

Στο γράφημα 4.12 και στον πίνακα 4.25 παρουσιάζεται η μέση βαθμολογία για την Στατιστική και τις Πιθανότητες ξεχωριστά, όπου φαίνεται η δυσκολία που συνάντησαν οι εκπαιδευτικοί στις Πιθανότητες (μέση τιμή 1,05, τυπική απόκλιση 0,35)

Γράφημα 4.12: Απόδοση Στατιστικής-Πιθανοτήτων



Πίνακας 4.25: Απόδοση Στατιστικής-Πιθανοτήτων

	N	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση
στατιστική	94	1,4976	,31109
πιθανότητες	94	1,0463	,34921
όλες οι ερωτήσεις	94	1,2720	,25203
Valid N (listwise)	94		

4.4 Σύγκριση μέσων όρων[6]

Στον πίνακα 4.26 παρουσιάζεται η μέση βαθμολογία σε σχέση με τον βαθμό αυτοπεποίθησης, στον πίνακα 4.27 η μέση βαθμολογία σε σχέση με το χώρο εργασίας των εκπαιδευτικών, στον πίνακα 4.28 η μέση βαθμολογία σε σχέση με την εμπειρία, στον πίνακα 4.29 η μέση βαθμολογία σε σχέση με τις μεταπτυχιακές σπουδές και στον πίνακα 4.30 η μέση βαθμολογία σε σχέση με τις διδακτορικές σπουδές.

[6] Σε όλες τι συγκρίσεις μέσων όρων πραγματοποιήθηκε έλεγχος της στατιστικής σημαντικότητας. και καμία σύγκριση δεν ήταν στατιστικά σημαντική

Αυτοπεποίθηση

Η μέση βαθμολογία παραμένει σχεδόν σταθερή ανεξάρτητα από το επίπεδο αυτοπεποίθησης. Η στατιστική ανάλυση με συντελεστή συσχέτισης (Correlations) μεταξύ των μεταβλητών μέση βαθμολογία και αυτοπεποίθηση όπως φαίνονται στον πίνακα 4.26α επιβεβαιώνει την παρατήρηση. Δεν υπάρχει συσχέτιση (r=0.13) μεταξύ αυτών των μεταβλητών και δεν είναι στατιστικά σημαντική (p=0.902>0.05).

Πίνακας 4.26: Βαθμολογία κα αυτοπεποίθηση

Είμαι_βέβαιος_πως_μπορώ_να_διδάξω_με_ευχέρεια_στοχαστικά_μαθηματ	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση	N
1,00	12,3275	1,61269	4
2,00	12,4692	1,85448	12
3,00	12,8737	2,78937	35
4,00	12,7696	2,63013	28
5,00	12,5727	2,55192	15
Σύνολο	12,7198	2,52027	94

Πίνακα 4.26α: Correlations Βαθμολογία κα αυτοπεποίθηση

		Βαθμολογία	Είμαι_βέβαιος_πως_μπορώ_να_διδάξω_με_ευχέρεια_στοχαστικά_μαθηματ
Βαθμολογία	Pearson Correlation	1	,013
	Sig. (2-tailed)		,902
	N	94	94
Είμαι_βέβαιος_πως_μπορώ_να_διδάξω_με_ευχέρεια_στοχαστικά_μαθηματ	Pearson Correlation	,013	1
	Sig. (2-tailed)	,902	
	N	94	94

Σχολείο και φροντιστήριο

Οι εκπαιδευτικοί που εργάζονται σε σχολείο έχουν κατά μέσο όρο καλύτερα αποτελέσματα από αυτούς που εργάζονται σε φροντιστήριο με μικρή όμως διαφορά (0,79).

Πίνακας 4.27: Βαθμολογία κα χώρος εργασίας

	Το_σχολικό_έτος_20232024_εργάζομαι_σε	N	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση	Std. Error Mean
Βαθμολογία	Δημόσιο ή ιδιωτικό σχολείο	67	12,9464	2,56528	,31340
	Φροντιστήριο	27	12,1574	2,35674	,45355

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
Βαθμολογία	Equal variances assumed	,023	,880	1,380	92	,171	,78901	,57173	-,34649	1,92451
	Equal variances not assumed			1,431	52,078	,158	,78901	,55130	-,31721	1,89523

Χρόνια εμπειρίας

Η διδακτική εμπειρία στο διάστημα [15,20) συγκέντρωσε τη μεγαλύτερη βαθμολογία (μέση τιμή 14,06, τυπική απόκλιση 2,64), σε αντίθεση με το διάστημα [20,25) που συγκέντρωσε την χαμηλότερη (μέση τιμή 10,83, τυπική απόκλιση 3,22).

Πίνακας 4.28: Βαθμολογία και συνολικά χρόνια διδακτική εμπειρίας

Συνολικά_χρόνια_διδακτικής _εμπειρίας_Χρόνια	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση	N
[0,5)	12,1726	1,40239	19
[5,10)	12,0344	2,53208	18
[10,15)	12,9404	2,63343	24
[15,20)	14,0625	2,63758	20
[20,25)	10,8300	3,21552	6
περισσότερα από 25	12,9943	2,22153	7
Σύνολο	12,7198	2,52027	94

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: Βαθμολογία

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	73,324[a]	5	14,665	2,494	,037
Intercept	11052,985	1	11052,985	1879,946	,000
Συνολικά_χρόνια_διδακτικής_εμπειρίας_Χρόνια	73,324	5	14,665	2,494	,037
Σφάλμα	517,389	88	5,879		
Σύνολο	15799,253	94			
Corrected Total	590,712	93			

a. R Squared = ,124 (Adjusted R Squared = ,074)

Multiple Comparisons

Dependent Variable: Βαθμολογία
Bonferroni

(I) Συνολικά_χρόνια_διδακτική ς_εμπειρίας_Χρόνια	(J) Συνολικά_χρόνια_διδακτι κής_εμπειρίας_Χρόνια	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
[0,5)	[5,10)	,1382	,79754	1,000	-2,2684	2,5447
	[10,15)	-,7678	,74459	1,000	-3,0145	1,4790
	[15,20)	-1,8899	,77680	,255	-4,2338	,4541
	[20,25)	1,3426	1,13549	1,000	-2,0837	4,7689
	περισσότερα από 25	-,8217	1,07208	1,000	-4,0566	2,4133
[5,10)	[0,5)	-,1382	,79754	1,000	-2,5447	2,2684
	[10,15)	-,9060	,75605	1,000	-3,1873	1,3754
	[15,20)	-2,0281	,78778	,176	-4,4051	,3490
	[20,25)	1,2044	1,14304	1,000	-2,2446	4,6535
	περισσότερα από 25	-,9598	1,08007	1,000	-4,2189	2,2992
[10,15)	[0,5)	,7678	,74459	1,000	-1,4790	3,0145
	[5,10)	,9060	,75605	1,000	-1,3754	3,1873
	[15,20)	-1,1221	,73413	1,000	-3,3373	1,0931
	[20,25)	2,1104	1,10674	,897	-1,2291	5,4499
	περισσότερα από 25	-,0539	1,04158	1,000	-3,1968	3,0890
[15,20)	[0,5)	1,8899	,77680	,255	-,4541	4,2338
	[5,10)	2,0281	,78778	,176	-,3490	4,4051
	[10,15)	1,1221	,73413	1,000	-1,0931	3,3373
	[20,25)	3,2325	1,12866	,078	-,1732	6,6382
	περισσότερα από 25	1,0682	1,06484	1,000	-2,1449	4,2813
[20,25)	[0,5)	-1,3426	1,13549	1,000	-4,7689	2,0837
	[5,10)	-1,2044	1,14304	1,000	-4,6535	2,2446
	[10,15)	-2,1104	1,10674	,897	-5,4499	1,2291
	[15,20)	-3,2325	1,12866	,078	-6,6382	,1732
	περισσότερα από 25	-2,1643	1,34901	1,000	-6,2348	1,9063
περισσότερα από 25	[0,5)	,8217	1,07208	1,000	-2,4133	4,0566
	[5,10)	,9598	1,08007	1,000	-2,2992	4,2189
	[10,15)	,0539	1,04158	1,000	-3,0890	3,1968
	[15,20)	-1,0682	1,06484	1,000	-4,2813	2,1449
	[20,25)	2,1643	1,34901	1,000	-1,9063	6,2348

Based on observed means.
The error term is Mean Square(Error) = 5,879.

Ακαδημαϊκό υπόβαθρο

Οι εκπαιδευτικοί με διδακτορικό είχαν εμφανώς καλυτέρα αποτελέσματα κατά μέσο όρο (14,83). Οι κάτοχοι μεταπτυχιακού τίτλου σπουδών στα μαθηματικά (μέση τιμή 13,24, τυπική απόκλιση 2,49) και οι εκπαιδευτικοί που είχαν δυο μεταπτυχιακά στα μαθηματικά και τη διδακτική των μαθηματικών (μέση τιμή 13,44, τυπική απόκλιση 3,21) είχαν την υψηλότερη επίδοση. Επιπλέον ένας εκπαιδευτικός με μεταπτυχιακό στη διδακτική των μαθηματικών και σε άλλο αντικείμενο είχε τη μεγαλύτερη βαθμολογία (17,33).

Μεταπτυχιακό

Πίνακας 4.29: Βαθμολογία και μεταπτυχιακές σπουδές

Μεταπτυχιακό	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση	N
Δεν έχω	12,5135	2,04453	20
Σε άλλο αντικείμενο	12,7548	2,49101	33
Στα μαθηματικά	13,2413	2,24867	23
Στα μαθηματικά, Σε άλλο αντικείμενο	12,2620	1,81485	5
Στα μαθηματικά, Στη διδακτική των μαθηματικών	13,4400	3,20688	3
Στη διδακτική των μαθηματικών	11,2189	3,81543	9
Στη διδακτική των μαθηματικών, Σε άλλο αντικείμενο	17,3300	.	1
Σύνολο	12,7198	2,52027	94

Διδακτορικό[7]

Πίνακας 4.30 Βαθμολογία και διδακτορικές σπουδές

Διδακτορικό	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση	N
Δεν έχω	12,6261	2,50742	90
Σε άλλο αντικείμενο	14,6600	.	1
Στα μαθηματικά	14,1600	3,06884	2
Στη διδακτική των μαθηματικών	16,3300	.	1
Σύνολο	12,7198	2,52027	94

[7] Οι συμμετέχοντες που είχαν διδακτορικό, είχαν και μεταπτυχιακό και επομένως εμφανίζονται και στην λίστα με τα μεταπτυχιακά

Κεφάλαιο 5^{ο}: Συζήτηση και Συμπεράσματα

Στο βιβλιογραφικό μέρος παρουσιάστηκαν τα χαρακτηριστικά της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου. Η μαθηματική γνώση που χρειάζεται για τη διδασκαλία των μαθηματικών σύμφωνα με τους Ball et al. (2008), Even (1990), Liljedahl et al. (2009), περιλαμβάνει εκτός από την γνώση του περιεχομένου, και άλλα είδη γνώσης, όπως η γνώση για τις δυσκολίες των μαθητών, η εύρεση κατάλληλων παραδειγμάτων, η επιλογή κατάλληλων αναπαραστάσεων.

Στη συνέχεια αναφέρθηκε η σπουδαιότητα των Στοχαστικών Μαθηματικών και οι βασικοί λόγοι για την εισαγωγή τους στα αναλυτικά προγράμματα των σχολείων (π.χ Batanero & Borovcnik, 2016). Παρουσιάστηκε το νέο αναλυτικό πρόγραμμα του Λυκείου και αναλύθηκαν οι παρανοήσεις και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές.

Κατασκευάστηκε ένα εργαλείο αξιολόγησης της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου των εκπαιδευτικών που διδάσκουν Στοχαστικά Μαθηματικά, με εστίαση στον εντοπισμό των δυσκολιών και των παρανοήσεων που εμφανίζουν οι μαθητές (π.χ. Ball et al., 2008) στα Στοχαστικά Μαθηματικά, στην συνέχιση της διδασκαλίας και στην επιλογή κατάλληλων αναπαραστάσεων (π.χ. Ball et al., 2008), καθώς και στην αντιμετώπιση λύσεων μαθητών (π.χ Hill et al., 2007). Χρησιμοποιήθηκε η ποσοτική προσέγγιση (περιγραφική μέθοδος) σε ένα δείγμα από 94 εκπαιδευτικούς με διαφορετικά χαρακτηριστικά (ακαδημαϊκό υπόβαθρο, χρόνια εμπειρίας, χώρο εργασίας).

Παρουσιάστηκαν αναλυτικά τα αποτελέσματα της έρευνας για τις βαθμολογικές επιδόσεις των συμμετεχόντων και την επίδραση διαφόρων παραγόντων. Η κατανομή των βαθμών έδειξε μια μέση βαθμολογία 12,72 με τυπική απόκλιση 2,52. Οι βαθμολογίες κυμάνθηκαν από 5,33 έως 17,33, με πολύ μεγάλο εύρος βαθμολογιών (R=12). Η μετατροπή των βαθμολογιών σε ποσοστό αντιστοιχεί σε μέσο όρο 63,6%.

Στις προηγούμενες έρευνες που αφορούσαν την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου των εκπαιδευτικών στα Στοχαστικά Μαθηματικά τα αποτελέσματα είναι παρόμοια (Watson, Callingham & Donne, 2008; Watson, Callingham & Nathan, 2009; Watson & Callingham , 2013; Watson & Callingham, 2014; Danä & Taniåžli, 2018), καθώς βρέθηκε πως η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου που διέθεταν στα Στοχαστικά Μαθηματικά ήταν μέτρια έως περιορισμένη.

5.1 Απάντηση στο ερευνητικό πρόβλημα και στα ερευνητικά ερωτήματα

Για την απάντηση στο ερευνητικό πρόβλημα χρησιμοποιήθηκαν αρχικά τα αποτελέσματα από τη συνολική βαθμολογία. Από την ανάλυση προκύπτει ότι η συνολική μέση βαθμολογία για όλες τις ερωτήσεις είναι 1,272 (με ανώτατη βαθμολογία το 2). Η παιδαγωγική γνώση για τη διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών βρίσκεται, λοιπόν, για τους συμμετέχοντες στην έρευνα, σε μέτριο επίπεδο. Οι υψηλότερες βαθμολογίες παρατηρούνται στις ερωτήσεις που αξιολογούν την ικανότητά των εκπαιδευτικών να απαντούν σε μαθητές (μέσος όρος 1,547, τυπική απόκλιση 0,3), ενώ χαμηλότερες επιδόσεις παρατηρούνται στις ερωτήσεις που αφορούν τη συνέχιση της διδασκαλίας (μέσος όρος 0,909, τυπική απόκλιση 0,4).

Το πρόβλημα που δυσκόλεψε περισσότερο τους εκπαιδευτικούς ήταν το $10^{ο}$ (μέση τιμή 0,551, τυπική απόκλιση 0,645) και το $6^{ο}$ (μέση τιμή 0,798, τυπική απόκλιση 0,874), ενώ δεν συνάντησαν ιδιαίτερες δυσκολίες στο $4^{ο}$ πρόβλημα (μέση τιμή 1,743, τυπική απόκλιση 0,327).

Οι μέτριες επιδόσεις ενδεχομένως να οφείλονται στην απουσία των Στοχαστικών Μαθηματικών από το υφιστάμενο πρόγραμμα σπουδών και επομένως στην έλλειψη εμπειρίας, καθώς και την απουσία διδακτικής επιμόρφωσης. Με δεδομένο ότι η παιδαγωγική γνώση των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά δείχνει ότι έχει θετική συσχέτιση στα αποτελέσματα των μαθητών (Baumert et al.,2010; Carnoy & Arends, 2012; Hill, Rowan, & Ball, 2005; Kunter et al., 2013b; Marshall & Sorto, 2012; Marshall et al, 2009; Ngo, 2012; Rockoff, Jacob, Kane, & Staiger, 2008;), όπως και ειδικά στην διδασκαλία της Στατιστικής (π.χ. Callingham, Carmichael & Watson, 2016), τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας φέρνουν στο επίκεντρο της προσοχής την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου των εκπαιδευτικών στα Στοχαστικά Μαθηματικά.

Απάντηση στο $1^{ο}$ Ερευνητικό Ερώτημα

Παρανοήσεις-δυσκολίες μαθητών

Οι εκπαιδευτικοί εμφανίζουν μια σχετικά καλή κατανόηση των παρανοήσεων και δυσκολιών των μαθητών, με μέσο όρο βαθμολογίας 1,497. Εντόπισαν σε αρκετά μεγάλο ποσοστό τις παρανοήσεις στη Στατιστική (77,7% και 68,1%), ενώ είχαν χαμηλότερα ποσοστά στον εντοπισμό των παρανοήσεων στις Πιθανότητες (54,3% και 45,7%).

Αυτό υποδηλώνει ότι μπορούν να εντοπίζουν και να κατανοούν τα σημεία όπου οι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα σχετικά ικανοποιητικά, κυρίως στην Στατιστική**.**

Απάντηση σε μαθητή

Η ικανότητα των εκπαιδευτικών να απαντούν σε μαθητές καταγράφεται με τον υψηλότερο μέσο όρο (1,547). Αυτό δείχνει ότι οι εκπαιδευτικοί είναι περισσότερο αποτελεσματικοί σε σχέση με τις άλλες κατηγορίες, στην παροχή κατάλληλων και χρήσιμων απαντήσεων στις ερωτήσεις των μαθητών τους.

$2^{ο}$ πρόβλημα

Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο της μεθοδολογίας στην παράγραφο 3.3, το πρόβλημα αυτό χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα Watson και Callingham (2013), με σημαντικότερη διαφορά από την παρούσα έρευνα την συλλογή δεδομένων με συνέντευξη χωρίς την επιλογή πιθανών απαντήσεων. Επομένως οι έρευνες δεν είναι συγκρίσιμες. Τα αποτελέσματα της έρευνας τους παρουσιάζονται παρακάτω:

Frequency of response levels for questions on average

Code	0	1	2	3	4
Section 5.2a n (%)	1 (4%)	3 (12%)	9 (35%)	10 (38%)	3 (12%)

Η μέση βαθμολογία του παραπάνω πίνακα είναι 60,58% ενώ στην παρούσα εργασία 67,56%.

4^{o} πρόβλημα

Το πρόβλημα αυτό χρησιμοποιήθηκε σε έρευνες των Watson et al. (2008, 2014), με σημαντικότερη διαφορά από την παρούσα έρευνα, όπως και στο πρόβλημα 2, την συλλογή δεδομένων με συνέντευξη χωρίς την επιλογή πιθανών απαντήσεων. Τα αποτελέσματα της έρευνας των Watson και Callingham (2014) παρουσιάζονται παρακάτω:

PCK Level	*Lung90*
3 Accomplished	(20%) "That's true, but what percentage of smokers got lung disease and how does this compare to non-smokers? Percentages are a more meaningful way of comparing tabulated data."
2 Competent	(57%) "But what about the 60 smokers who did not get lung cancer?" "Possibly right, would look at ratio/% of smokers with and without lung cancer compared to nonsmokers."
1 Emerging	(14%) "Of what number in total? Ask questions which give meaning to the numbers."
0 Aware	(9%) "Unsure."

Η μέση βαθμολογία του παραπάνω πίνακα είναι 62,68% ενώ στην παρούσα εργασία 87,17%. Αν και οι δυο έρευνες δεν είναι εύκολα συγκρίσιμες, θα μπορούσε να υποστηρίξει κανείς πως υπάρχει μια σύγκλιση της τάσης.

Συνέχιση διδασκαλίας

Η χαμηλότερη επίδοση με μέσο όρο 0,909 παρουσιάζεται στην συνέχιση της διδασκαλίας. Τα ευρήματα αυτά δείχνουν αδυναμία στην προσαρμογή της διδασκαλίας ή την αποτελεσματική συνέχιση της και την εύρεση κατάλληλων αναπαραστάσεων.

Εμφανή τα προβλήματα που συνάντησαν οι εκπαιδευτικοί από την χαμηλή μέση επίδοση σε αυτήν την κατηγορία, αλλά και από το γεγονός ότι μικρό ποσοστό των συμμετεχόντων επέλεξε την βέλτιστη απάντηση. Πιο συγκεκριμένα η βέλτιστη απάντηση στο πρόβλημα 1 επιλέχθηκε από το 37,2% του δείγματος, στο πρόβλημα 6 από το 29,8% και στο πρόβλημα 7 από το 12,8%. Το 10^{o} πρόβλημα (ανοιχτού τύπου) ζητούσε τρεις τρόπους αναπαράστασης, τους οποίους έγραψε μόλις το 7,4% του δείγματος. Σχεδόν οι μισοί ερωτηθέντες (48,94%) δεν πρότειναν κανένα ορθό τρόπο αναπαράστασης.

Απάντηση στο 2^{o} Ερευνητικό Ερώτημα

Εργασία σε σχολείο ή φροντιστήριο

Οι εκπαιδευτικοί που εργάζονται σε δημόσια ή ιδιωτικά σχολεία έχουν ελαφρώς υψηλότερες βαθμολογίες (μέσος όρος 12,95) σε σύγκριση με αυτούς που εργάζονται σε φροντιστήρια (μέσος όρος 12,16). Η διαφορά ανάμεσα σε αυτές τις δυο ομάδες είναι μικρή και θα μπορούσε να οφείλεται σε διάφορους λόγους. Οι εκπαιδευτικοί που εργάζονται σε δημόσια ή ιδιωτικά σχολεία μπορεί να έχουν πρόσβαση σε πιο συστηματική και εκτενή επιμόρφωση και επαγγελματική ανάπτυξη, ενδεχομένως να έχουν περισσότερο χρόνο για προετοιμασία, συνεργασία με συναδέλφους, και αναστοχασμό πάνω στη διδακτική τους πρακτική. Η λειτουργία των φροντιστηρίων ίσως είναι πιο προσανατολισμένη στις εξετάσεις και στην αποδοτικότητα, στα άμεσα αποτελέσματα, με συνέπεια να περιορίζει τις ευκαιρίες για ανάπτυξη παιδαγωγικών δεξιοτήτων.

Ακαδημαϊκό υπόβαθρο

Οι εκπαιδευτικοί χωρίς μεταπτυχιακό τίτλο είχαν ελαφρώς μικρότερη μέση βαθμολογία (12,51) από την μέση βαθμολογία του συνολικού δείγματος (12,72). Οι εκπαιδευτικοί με διδακτορικό είχαν εμφανώς καλυτέρα αποτελέσματα κατά μέσο όρο (14,83).

Από τους κάτοχους μεταπτυχιακού αυτοί που είχαν την υψηλότερη επίδοση είναι οι εκπαιδευτικοί που είχαν στα μαθηματικά (13,24), αυτοί που είχαν δυο μεταπτυχιακά στα μαθηματικά και τη διδακτική των μαθηματικών (13,44), καθώς και ένας εκπαιδευτικός με μεταπτυχιακό στη διδακτική των μαθηματικών και σε άλλο αντικείμενο (17,33). Η χαμηλή επίδοση των κατόχων μεταπτυχιακού τίτλου μόνο στη διδακτική (11,22) έχει την υψηλότερη τυπική απόκλιση (3,82).

Η εκπαιδευτική εξέλιξη σε υψηλότερα επίπεδα με διδακτορικό ή μεταπτυχιακό στα μαθηματικά (ή συνδυασμό στα μαθηματικά και τη διδακτική των μαθηματικών) έδωσε καλύτερα αποτελέσματα στην παιδαγωγική γνώση περιεχομένου.

Επαγγελματική εμπειρία

Οι εκπαιδευτικοί με εμπειρία 15-20 ετών έχουν την υψηλότερη μέση βαθμολογία (14,06), όπως και αυτοί με εμπειρία 10-15 ετών με την δεύτερη υψηλότερη βαθμολογία (12,94). Όμως οι εκπαιδευτικοί με εμπειρία 20-25 έτη παρουσίασαν την χειρότερη μέση βαθμολογία (10,88) υποδεικνύοντας ότι ίσως η μακροχρόνια διδασκαλία χωρίς συνεχή επαγγελματική ανάπτυξη μπορεί να επηρεάσει αρνητικά την απόδοση στην παιδαγωγική γνώση περιεχομένου που αφορά τη γνώση των παρανοήσεων των μαθητών και των διαφορετικών διδακτικών στρατηγικών και αναπαραστάσεων.

Απάντηση στο 3^{ο} Ερευνητικό Ερώτημα

Αυτοπεποίθηση

Δεν βρέθηκε κάποια ιδιαίτερη σύνδεση του βαθμού ετοιμότητας που αναγνωρίζουν οι εκπαιδευτικοί με την παιδαγωγική τους γνώση περιεχομένου. Η μέση βαθμολογία παραμένει σχεδόν σταθερή ανεξάρτητα από το επίπεδο αυτοπεποίθησης. Το 45% του δείγματος απάντησε ότι είναι βέβαιοι ότι μπορούν να διδάξουν με ευχέρεια Στοχαστικά Μαθηματικά και στην πενταβάθμια κλίμακα Likert επέλεξαν το 4 (ή 5) με βαθμολογία 12,77 (ή 12,572), ενώ είχαν μέτρια μέση βαθμολογία. Αυτό δείχνει ότι ένα μεγάλο ποσοστό του συγκεκριμένου δείγματος υπερεκτιμά τις παιδαγωγικές του γνώσεις, κατά μέσο όρο.

Συμπεράσματα

Με βάση τα παραπάνω, τα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

- Η παιδαγωγική γνώση για τη διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών των συμμετεχόντων στην παρούσα έρευνα βρίσκεται σε μέτριο επίπεδο, με την καλύτερη απόδοση στις απαντήσεις των μαθητών και τη χειρότερη στη συνέχιση της διδασκαλίας και την εύρεση κατάλληλων αναπαραστάσεων
- Ένα μεγάλο ποσοστό εκπαιδευτικών υπερεκτιμά κατά μέσο όρο τις παιδαγωγικές του γνώσεις.
- Στους παράγοντες που επιδρούν θετικά στην καλύτερη απόδοση στην παιδαγωγική γνώση περιεχομένου είναι οι διδακτορικές σπουδές, καθώς και οι μεταπτυχιακές σπουδές στα μαθηματικά, είτε σε συνδυασμό με τη διδακτική των μαθηματικών είτε μόνο στα μαθηματικά. Η διδακτική εμπειρία με 10-20 χρόνια έδειξε θετικότερα αποτελέσματα, σε αντίθεση με την εμπειρία στο διάστημα 20-25. Καλύτερες ευκαιρίες για ανάπτυξη της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου δείχνουν να έχουν οι εργαζόμενοι σε δημόσια ή ιδιωτικά σχολεία σε σχέση με τους εκπαιδευτικούς που εργάζονται σε φροντιστήρια με πολύ μικρή διαφορά.

Τα ανωτέρω υπογραμμίζουν την ανάγκη βελτίωσης της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου των εκπαιδευτικών που διδάσκουν ή θα διδάξουν Στοχαστικά Μαθηματικά και αναδεικνύουν την ανάγκη για συνεχή επαγγελματική ανάπτυξη και υποστήριξή τους σε αυτόν τον τομέα, για τη βελτίωση της διδακτικής τους πρακτικής.

5.2 Προτάσεις για την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών

Σύμφωνα με τους Zazkis και Leikin (2010) υπάρχει σημαντική διαφορά ανάμεσα στα μαθηματικά που διδάσκονται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και στην τριτοβάθμια, όπως συμβαίνει και στα ελληνικά πανεπιστήμια. Θα μπορούσε ο σχεδιασμός του προγράμματος των πανεπιστημίων να συμπεριλάβει μάθημα που να αφορά την διδασκαλία των Μαθηματικών και ειδικότερα των Στοχαστικών Μαθηματικών.

Το Conference Board of Mathematical Sciences (2010) αναφέρει για την σύνθετη μορφή της εκπαίδευσης καθηγητών των μαθηματικών, που απαιτεί γνώσεις διδασκαλίας και γνώσεις μαθηματικών και διατυπώνει συστάσεις για τα μαθηματικά που οφείλουν να γνωρίζουν οι εκπαιδευτικοί, αλλά και τον τρόπο που πρέπει να τα μάθουν. Σε αυτήν την προοπτική θα μπορούσε να βοηθήσει μια οργανωμένη δράση του Υπουργείου Παιδείας και στα ελληνικά δεδομένα.

Οι μαθηματικές γνώσεις για τη διδασκαλία θα μπορούσαν να ενισχυθούν και μέσα από σεμινάρια που εξετάζουν παιδαγωγικά θέματα, τη συζήτηση των μαθημάτων σε συνεργασία. Στην έρευνα τους οι Silver, Clark, Ghousseini, Charalambous και Sealy (2007) υποστηρίζουν ότι με τη συμμετοχή σε τέτοιου είδος προγράμματα οι εκπαιδευτικοί είχαν ευκαιρίες για ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης. Ευκαιρίες να δημιουργήσουν ή να ενισχύσουν συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών ιδεών, και να λάβουν υπόψη τον τρόπο που σκέφτονται οι μαθητές για αυτές τις ιδέες και να σχεδιάσουν τις κατάλληλες παιδαγωγικές δράσεις.

Ειδικά για την στατιστική κατανόηση των μαθητών οι έρευνες δείχνουν την θετική επίδραση της συμμετοχής των εκπαιδευτικών σε προγράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης. Στην έρευνα των Callingham και Watson (2011), οι ερευνητές αξιολόγησαν την παιδαγωγική γνώση στη Στατιστική και στις Πιθανότητες των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν σε τέτοιου είδους πρόγραμμα. Συλλέξαν δεδομένα στο τέλους του πρώτου έτους μετά από διήμερο συνέδριο και πραγματοποιήθηκε δεύτερη συλλογή στα μέσα του προγράμματος. Η μέση τιμή της βαθμολογίας από την πρώτη αξιολόγηση (μέση τιμή 0,47, τυπική απόκλιση 0,78) αυξήθηκε σε πολύ μεγάλο βαθμό στην δεύτερη αξιολόγηση (μέση τιμή 1,15, τυπική απόκλιση 1,44).

Μια συγκεκριμένη πρόταση που θα μπορούσε να συμπεριληφθεί σε αυτά τα σεμινάρια ή στο πρόγραμμα των πανεπιστήμιων είναι αυτή που παρουσιάζεται στην έρευνα των Chernoff και Zazkis (2011). Στην έρευνα αυτή δόθηκε ένα πρόβλημα πιθανοτήτων σε φοιτητές-μελλοντικούς καθηγητές μαθηματικών και μια λανθασμένη απάντηση μαθητή και τους ζητήθηκε να παρέμβουν, όπου οι φοιτητές συνάντησαν δυσκολία να εντοπίσουν την περιορισμένη κατανόηση του μαθητή. Στη συνέχεια δόθηκε στους φοιτητές ένα δυσκολότερο πρόβλημα που δεν είχαν προηγούμενη εμπειρία και τους δόθηκε μια λύση της μορφής «κάνε αυτό» και οι φοιτητές δεν μπόρεσαν να ανταποκριθούν. Ακολούθησε μια παιδαγωγικά κατάλληλη προσέγγιση, ξεκινώντας από τις δικές τους λύσεις με αποτέλεσμα οι φοιτητές να συνειδητοποιήσουν τη σημασία της έναρξης της διορθωτικής διδασκαλίας στο επίπεδο του μαθητή.

5.3 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως βάση για έρευνες μεγαλύτερης κλίμακας στην παιδαγωγική γνώση περιεχομένου στα Στοχαστικά Μαθηματικά. Ένα πολύ μεγαλύτερο δείγμα θα μπορούσε να παρέχει αποτελέσματα που ενδεχομένως να μπορούσαν να γενικευτούν.

Ενδιαφέρον θα είχε η διερεύνηση της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου στα Στοχαστικά Μαθηματικά εκπαιδευτικών που συμμετέχουν σε σεμινάρια επιμόρφωσης και σύγκρισης των αποτελεσμάτων πριν την παρακολούθηση και μετά, όπως για παράδειγμα στην έρευνα των Callingham και Watson (2011).

Μια επιπλέον προέκταση της έρευνας θα ήταν η διεξαγωγή παρόμοιας έρευνας μεγάλης κλίμακας στους εκπαιδευτικούς της Ελλάδας και σε εκπαιδευτικούς άλλης χώρας που διδάσκουν Στοχαστικά Μαθηματικά, όπως για παράδειγμα στην Κύπρο και σύγκριση των αποτελεσμάτων.

5.4 Περιορισμοί της έρευνας

Το εργαλείο αξιολόγησης που κατασκευάστηκε για αυτήν την έρευνα, βασίστηκε στα βιβλιογραφικά δεδομένα που αφορούν την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου για την διδασκαλία των μαθηματικών, τις δυσκολίες και τις παρανοήσεις που συναντούν οι μαθητές στα Στοχαστικά Μαθηματικά και το νέο πρόγραμμα σπουδών για το Λύκειο. Από το πλήθος των δυσκολιών και παρανοήσεων που περιγράφηκαν στο βιβλιογραφικό μέρος, ελάχιστα συμπεριλήφθηκαν στο εργαλείο αξιολόγησης. Έγινε μια προσπάθεια να αφορούν όλο το εύρος της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων και των τριών τάξεων του Λυκείου, αλλά υπήρχαν σημαντικά ζητήματα της ύλης τα οποία δεν συμπεριλήφθηκαν, όπως για παράδειγμα τα θηκόγραμματα.

Η συλλογή των δεδομένων με ερωτηματολόγιο που περιείχε επιλογές έχει αρκετά μειονεκτήματα. Αρχικά οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών δίνονται θεωρητικά και όχι μέσα στην πραγματική τάξη. Οι Borko et al. (1992) αναφέρουν ότι ο εκπαιδευτικός μπορεί να υποστηρίζει ένα έργο, αλλά να αδυνατεί να το διαχειριστεί αποτελεσματικά κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Στην αίθουσα διδασκαλίας επηρεάζουν άλλοι παράγοντες, όπως για παράδειγμα η διαχείριση διάφορων παρανοήσεων από αρκετούς μαθητές ή η πίεση χρόνου. Οπότε πιθανά να υπάρχει μια απόκλιση των θεωρητικών απαντήσεων από αυτό που συμβαίνει στην πραγματική τάξη.

Επιπλέον με ανοιχτού τύπου ερωτήσεις πιθανόν τα αποτελέσματα να ήταν διαφορετικά. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το πρόβλημα 4 που περιείχε πίνακα συνάφειας και ζητούσε απάντηση σε μαθητή. Η επιλογή «Θα έλεγα τη σωστή απάντηση ή/και θα εξηγούσα» δεν επιλέχθηκε από κανέναν εκπαιδευτικό. Αντίθετα στην έρευνα των Watson και Callingham (2014), που πραγματοποιήθηκε με ερώτηση ανοιχτού τύπου, η κατηγορία που περιείχε αυτήν την απάντηση επιλέχθηκε από το 14% των συμμετεχόντων.

Βιβλιογραφία

Ajai, J. T., & Mtomga , F. (2023). *Effect of Teacher Pedagogical Content Knowledge on Students' Understanding of Probability Concepts.* Journal of Advances in Educational Enquiry, 1(1), 183-198.

Anway, D., & Bennett, E. (2004). Common misperceptions in probability among students in an Elementary Statistics class. In *ARTIST Roundtable Conference on Assessment in Statistics held at Lawrence University* (pp. 1-4).

Azar, F. S., & Mahmoudi, L. (2014). Relationship between Mathematics, self-efficacy and students' performance in statistics: the meditational role of attitude toward Mathematics and Mathematics anxiety. *Journal of Educational Sciences and Psychology*, *4*(1).

Bakker, A., Biehler, R., & Konold, C. (2004). Should young students learn about box plots. *Curricular development in statistics education: International Association for Statistical Education*, 163-173.

Ball, D. L., & Bass, H. (2009). *With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures*. Universitätsbibliothek Dortmund.

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), 14–46.

Ball Loewenberg, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407.

Barr, G. V. (1980). Some student ideas on the median and the mode. *Teaching Statistics*, *2*(2), 38-41.

Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Springer.

Batanero, C., & Álvarez-Arroyo, R. (2024). Teaching and learning of probability. *ZDM Mathematics Education,* 56, 5–17 https://doi.org/10.1007/s11858-023-01511-5

Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., & Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability* (p. 33). Springer Nature.

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. D., & Green, D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 151-169.

Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R., & Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *25*(4), 527-547.

Batiibwe, M. S. (2019). Teachers' Pedagogical Content Knowledge and the Teaching of Statistics in Secondary Schools in Wakiso District in Uganda. *Journal of Education and Practice*, *10*(25), 93-101.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., ... & Tsai, Y. M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American educational research journal*, *47*(1), 133-180.

Begg, A. (1993). Establishing a research agenda for statistics education. In L. Pereira-Mendoza (Ed.), *Introducing data analysis in the schools: Who should teach it and how?* (pp. 212–218). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*, *66*, 3-15.

Bloch, I. (2005). *Learning new ways of teaching from mathematical research: Situations for mathematics teachers' education*. Paper presented at the conference of the 15th ICMI study on the Professional Education and Development of Teachers of Mathematics, Aguas de Lind ´ oia, ´ Brazil.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C. A., Underhill, R. G., Jones, D., & Agard, P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily?. *Journal for research in mathematics education*, *23*(3), 194-222.

Borovcnik, M. (1987). Revising probabilities according to new information–A fundamental stochastic intuition. In *Proceedings of the second international conference on teaching statistics* (pp. 298-302).

Braham, H. M., & Ben-Zvi, D. (2019). Design for Reasoning with Uncertainty. *Topics and Trends in Current Statistics Education Research: International Perspectives*, 97-121.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Callingham, R., Carmichael, C., & Watson, J. M. (2016). Explaining student achievement: The influence of teachers' pedagogical content knowledge in statistics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*, 1339-1357.

Callingham, R., & Watson, J. (2011). Measuring levels of statistical pedagogical content knowledge. *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study: The 18th ICMI Study*, 283-293.

Carnoy, M., & Arends, F. (2012). Explaining mathematics achievement gains in Botswana and South Africa. *Prospects*, *42*, 453-468.

Chernoff, E., & Sriraman, B. (2014). Probabilistic thinking. *AMC*, *10*, 12.

Chernoff, E. J., & Zazkis, R. (2011). From personal to conventional probabilities: from sample set to sample space. *Educational Studies in Mathematics*, *77*, 15-33.

Cobb, G. W., & Moore, D. S. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American mathematical monthly*, *104*(9), 801-823.

Cobb, P., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2003). Learning about statistical covariation. *Cognition and instruction*, *21*(1), 1-78.

Conference Board of the Mathematical Sciences. (2010). *The mathematical education of teachers* (Vol. 17). American Mathematical Soc.

Cueto, S., León, J., Sorto, M. A., & Miranda, A. (2017). Teachers' pedagogical content knowledge and mathematics achievement of students in Peru. *Educational Studies in Mathematics*, *94*, 329-345.

Cuoco, A. (2001). Mathematics for teaching. *Notices of the American Mathematical Society*, 48(2), 168–174.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for research in mathematics education*, *18*(5), 382-393.

Danä, Å., & Taniåžli, D. (2018). Examination of mathematics teachers' pedagogical content knowledge of probability. *MOJES: Malaysian Online Journal of Educational Sciences*, *5*(2), 16-34.

del Mas, R. C. (2004). A comparison of mathematical and statistical reasoning. In *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 79-95). Dordrecht: Springer Netherlands.

Depaepe, F., Verschaffel, L., & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and teacher education*, *34*, 12-25.

Durand-Guerrier, V., & Winsløw, C. (2005). *Education of lower secondary mathematics teachers in Denmark and France: A comparative study of characteristics of the systems and their products*. Paper presented at the conference of the 15th ICMI study on the Professional Education and Development of Teachers of Mathematics, Aguas de Lind ´ oia, Brazil.

Edwards, T. G., Özgün-Koca, A., & Barr, J. (2017). Interpretations of boxplots: Helping middle school students to think outside the box. *Journal of Statistics Education*, *25*(1), 21-28.

Estrella, S. (2010). *Instrumento para la evaluación del Conocimiento Pedagógico del Contenido de Estadística en profesores de Educación Básica* (Doctoral dissertation, Tesis de magíster inédita) Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile).

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational studies in mathematics*, *21*(6), 521-544.

Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? An exploratory research study. *Educational studies in mathematics*, *15*(1), 1-24.

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 96–105. https://doi.org/10.2307/749665

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association.

Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education*, *32*(2), 124-158.

Gal, I. (1998). Assessing statistical knowledge as it relates to students' interpretation of data. *Reflections on statistics: Learning, teaching, and assessment in grades K-12*, 275-295.

Gal, I. (2019). Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. In *Actas del Tercer Congreso International Virtual de Educación Estadística*; Contreras, J.M., Gea, M.M., López-Martín, M.M., Molina-Portillo, E., Eds.; 2019; Available online: www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Gal, I., & Garfield, J. (1997). *The assessment challenge in statistics education*. IOS press.

Garfield, J. (2001). Probability, overview. In L. S. Grinstein, & S. I. Lipsey (Eds.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Routledge Falmer, 560-562.

Garfield, J., & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for research in Mathematics Education*, *19*(1), 44-63.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2007). How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. *International statistical review*, *75*(3), 372-396.

Gorham Blanco, T., & Chamberlin, S. A. (2019). Pre-service teacher statistical misconceptions during teacher preparation program. *The Mathematics Enthusiast*, *16*(1), 461-484.

Grossman, P., Schoenfeld, A., & Lee, C. (2005). Teaching subject matter. *Preparing teachers for a changing world: What teachers should learn and be able to do*, 201-231.

Groth, R. E. (2007). Toward a conceptualisation of statistical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 38,* 427–437.

Groth, R. E., & Bergner, J. A. (2006). Preservice elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of mean, median, and mode. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(1), 37-63.

Hawkins, A. (1997). Myth-conceptions. *Research on the role of technology in teaching and learning statistics*, 1-14.

Hiebert, J., Morris, A. K., Berk, D., & Jansen, A. (2007). Preparing teachers to learn from teaching. *Journal of teacher education*, *58*(1), 47-61.

Hill, H., Sleep, L., Lewis, J., Ball., D. L. (2007) Assessing Teachers' Mathematical Knowledge: What Knowledge Matters and What Evidence Counts? In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111–155). Charlotte, NC: Information Age.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, *39*(4), 372-400.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American educational research journal*, *42*(2), 371-406.

Hill, H. C., Schilling, S. G., & Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The elementary school journal*, *105*(1), 11-30.

Hokor, E. K., Apawu, J., Owusu-Ansah, N. A., & Agormor, S. (2022). Preservice Teachers' Misconceptions in Solving Probabilistic Problems. *Pedagogical Research*, *7*(1).

Hoover, M., Mosvold, R., Ball, D. L., & Lai, Y. (2016). Making progress on mathematical knowledge for teaching. *The Mathematics Enthusiast*, *13*(1), 3-34.

Hoyle E (2001) Teaching as a profession. In: Smelser NJ, Baltes PB (eds) International encyclopedia of the social and behavioral sciences. Elsevier, Amsterdam, pp 15472–15476.

Humphrey, P. T., & Masel, J. (2016). Outcome orientation: A misconception of probability that harms medical research and practice. *Perspectives in Biology and Medicine*, *59*(2), 147-155.

Jacobbe, T. (2012). Elementary School Teachers' Understanding of the Mean and Median. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(5), 1143-1161.

Jones, G., Langrall, C., & Mooney, E. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. In F. Lester (Ed.), *The second handbook of research on mathematic*s, 909–956. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), Reston, VA.

Kaplan, J. J., Gabrosek, J. G., Curtiss, P., & Malone, C. (2014). Investigating student understanding of histograms. *Journal of Statistics Education*, *22*(2).

Khazanov, L., & Prado, L. (2010). Correcting Students' Misconceptions about Probability in an Introductory College Statistics Course. *Adults Learning Mathematics*, *5*(1), 23-35.

Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., & Jordan, A. (2008). Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers. *Journal of educational psychology*, *100*(3), 716.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S., & Neubrand, M. (Eds.). (2013a). *Cognitive activation in the mathematics classroom and professional* *competence of teachers: Results from the COACTIV project*. Springer Science & Business Media.

Kunter, M., Klusmann, U., Baumert, J., Richter, D., Voss, T., & Hachfeld, A. (2013b). Professional competence of teachers: Effects on instructional quality and student development. *Journal of educational psychology*, *105*(3), 805.

Leavy, A., & O'Loughlin, N. (2006). Preservice teachers understanding of the mean: Moving beyond the arithmetic average. *Journal of mathematics teacher education*, *9*, 53-90.

Lem, S., Onghena, P., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2013). The heuristic interpretation of box plots. *Learning and Instruction*, *26*, 22-35.

Li, J. (2000). *Chinese students' understanding of probability.* (Unpublished doctoral dissertation). National Institute of Education, Nanyang Technological University, Singapure.

Li, K. Y., & Shen, S. M. (1992). Students' weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics*, *14*(1), 2-8.

Liljedahl, P., Durand-Guerrier, V., Winsløw, C., Bloch, I., Huckstep, P., Rowland, T., ... & Chapman, O. (2009). Components of mathematics teacher training. *The professional education and development of teachers of mathematics: The 15th ICMI study*, 25-33.

Liu, T. C., Lin, Y. C., & Tsai, C. C. (2009). Identifying senior high school students' misconceptions about statistical correlation, and their possible causes: An exploratory study using concept mapping with interviews. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(4), 791-820.

Loosen, F., Lioen, M., & Lacante, M. (1985). The standard deviation. Some drawbacks of an intuitive approach. *Teaching Statistics*, *7*(1), 2-5.

Lovie, P., & Lovie, A. D. (1976). Teaching intuitive statistics I: Estimating means and variances. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology*, *7*(1), 29-39.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States* (Studies in Mathematical Thinking and Learning Series).

Marshall, J. H., Chinna, U., Nessay, P., Hok, U. N., Savoeun, V., Tinon, S., & Veasna, M. (2009). Student achievement and education policy in a period of rapid expansion: Assessment data evidence from Cambodia. *International Review of Education*, *55*, 393-413.

Marshall, J. H., & Sorto, M. A. (2012). The effects of teacher mathematics knowledge and pedagogy on student achievement in rural Guatemala. *International Review of Education*, *58*, 173-197.

Maryati, I., & Priatna, N. (2018). Analysis of statistical misconception in terms of statistical reasoning. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1013, No. 1, p. 012206). IOP Publishing.

Moore, D. S. (1992). Teaching statistics as a respectable subject. *Statistics for the twenty-first century*, 14-25.

National Center for Research on Teacher Education . (1991). *Final Report*. East Lansing, MI: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (1998). *Principles and standards for school mathematics: Discussion draft*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, NCTM, Reston, VA, 2000.

Neubrand, M. (2018). Conceptualizations of professional knowledge for teachers of mathematics. *ZDM*, *50*(4), 601-612.

Ngo, F. J. (2013). The distribution of pedagogical content knowledge in Cambodia: Gaps and thresholds in math achievement. *Educational Research for Policy and Practice*, *12*, 81-100.

Park, M., & Lee, E. J. (2019). Korean Preservice Elementary Teachers' Abilities to Identify Equiprobability Bias and Teaching Strategies. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*, 1585-1603.

Pereira-Mendoza, L. (2002). Would you allow your accountant to perform surgery? Implications for the education of primary teachers. In *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics. Hawthorn, VIC: International Statistical Institute*.

Pereira-Mendoza, L., & Mellor, J. (1991). Students' concepts of bar graphs: Some preliminary findings. In *Proceedings of the third international conference on teaching statistics* (Vol. 1, pp. 150-157). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Pfannkuch, M. (2007). Year 11 students' informal inferential reasoning: A case study about the interpretation of box plots. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(3), 149-167.

Pollatsek, A., Lima, S., & Well, A. D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 191-204.

Rockoff, J. E., Jacob, B., Kane, T. J., & Staiger, D. (2008). Can You Recognize an Effective Teacher When You Recruit One?. *NBER Working Paper*, (w14485).

Rowland, T., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2005). *The knowledge quartet: A framework for reflection, discussion and professional development*. A demonstration session presented at the conference of the 15th ICMI study on the Professional Education and Development of Teachers of Mathematics, Aguas de Lind ´ oia, Brazil.

Rubin, A., et al. (1990). *ELASTIC: Environments for searning abstract statistical thinking* (BBN Annual Rep. No.7282). Cambridge, MA: BBN Laboratories.

Rubin, A., Bruce, B., & Tenney, Y. (1991). Learning about sampling: Trouble at the core of statistics. In *Proceedings of the third international conference on teaching statistics* (Vol. 1, pp. 314-319).

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, edited by Douglas A. Grouws*, 465-494.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, *57*(1), 1-23.

Shulman, L. S. (1998). Theory, practice, and the education of professionals. *The elementary school journal*, *98*(5), 511-526.

Silver, E. A., Clark, L. M., Ghousseini, H. N., Charalambous, C. Y., & Sealy, J. T. (2007). Where is the mathematics? Examining teachers' mathematical learning opportunities in practice-based professional learning tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*, 261-277

Skott, J., Mosvold, R., & Sakonidis, C. (2018). Classroom practice and teachers' knowledge, beliefs, and identity. *Developing research in mathematics education. Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe*, 162-180.

Statistics Canada. (2024, January 3). *Statistics: Power from Data! Box and whisker plots*. Statcan.gc.ca. https://www150.statcan.gc.ca/n1/edu/power-pouvoir/ch12/5214889-eng.htm

Stockton, J. C., & Wasserman, N. H. (2017). Forms of knowledge of advanced mathematics for teaching. *The Mathematics Enthusiast*, *14*(1), 575-606.

Suharta, I. G. P., & Parwati, N. N. (2020). Relationship Between Teacher's Content Knowledge, Pedagogical Content Knowledge, and Self-Efficacy and Its Impact on Student's Mathematics Learning Achievement. In *4th Asian Education Symposium (AES 2019)* (pp. 293-296). Atlantis Press.

Tarr, J. E. (2002). Confounding effects of the phrase ''50-50 chance ' in making conditional probability judgments. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 24(4), 35 – 53.

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *4*(4), 305-337.

Watson, J., & Callingham, R. (2013). PCK and Average. *Mathematics Education Research Group of Australasia*.

Watson, J., & Callingham, R. (2014). Two-way tables: Issues at the heart of statistics and probability for students and teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, *16*(4), 254-284.

Watson, J., Callingham, R., & Donne, J. (2008). Proportional reasoning: Student knowledge and teachers' pedagogical content knowledge. *Navigating currents and charting directions*, 563-571.

Watson, J., Callingham, R., & Nathan, E. (2009). Probing teachers' pedagogical content knowledge in statistics:"How will Tom get to school tomorrow?". *Crossing divides*, *2*, 563-570.

Wiles, J., & Bondi, J. (2007). *Curriculum development: A guide to practice*. (7th ed.).

Zazkis, R., & Mamolo, A. (2011). Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning of Mathematics*, *31*(2), 8-13.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical thinking and learning*, *12*(4), 263-281.

Αδαμόπουλος, Λ., Δαμιανού, Χ., & Σβέρκος, Α. (2023, Δεκέμβριος 23). *Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής. Γ΄ Ενιαίου Λυκείου*. Διόφαντος. http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/4704/Mathimatika-kai-Stoicheia-Statistikis_G-EPAL_html-apli/index.html

Ανδρεαδάκης, Σ., Κουσεράς, Ν., Μέτης, Σ., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., & Σβέρκος, Α. (1994). Μαθηματικά *Γ΄ Λυκείου (Άλγεβρα - Αναλυτική Γεωμετρία – Πιθανότητες).* Ο.Ε.Δ.Β.

Γκίνης, Δ. (2024, Ιανουάριος 6). Οι δυσκολίες κατανόησης εννοιών της Στατιστικής, [παρουσίαση]. http://www.unipi.gr/faculty/dghinis/ts/diaf18.pdf

Ζαχαριάδης, Θ., Πόταρη, Δ., & Στουραΐτης, Κ. (2011). *Επιμορφωτικό υλικό για τους καθηγητές μαθηματικών Γυμνασίου.* http://ebooks.edu.gr/info/newps/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC/%CE%95%CF%80%CE%B9%CE%BC%CE%BF%CF%81%CF%86%CF%89%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8C%20%CE%A5%CE%BB%CE%B9%CE%BA%CF%8C%20%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8E%CE%BD.pdf

ΙΕΠ. (2023). Πράξη 53/25-08-2023 του Δ.Σ.. Οδηγίες διδασκαλίας των μαθημάτων του Δημοτικού σχολείου για το σχολικό έτος 2023-2024. https://www.esos.gr/sites/default/files/articles-2023/glossa_0.pdf

Κοντογιάννη, Α. (2014). *Ο στατιστικός γραμματισμός στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου* (Doctoral dissertation, Πανεπιστήμιο Πατρών. Σχολή Ανθρωπιστικών και Κοινωνικών Επιστημών. Τμήμα Παιδαγωγικό Δημοτικής Εκπαίδευσης).

Κουνιάς, Σ., & Μωυσιάδης, Χ. (1999). *Θεωρία Πιθανοτήτων Ι: Κλασική Πιθανότητα-Μονοδιάστατες Κατανομές*. Εκδόσεις: Ζήτη.

Μπούντα, Ε. (2013). Προγράμματα Σπουδών και Εκπαιδευτικό Υλικό: θεωρητικές προσεγγίσεις υφιστάμενα προγράμματα-θεσμικό πλαίσιο-ωρολογίου προγράμματος-αναλυτικό πρόγραμμα και εκπαιδευτικό υλικό-σχολικά εγχειρίδια. https://blogs.sch.gr/gmamakis/files/2014/12/bounta_kauth_eparkeia.pdf

Σκούρας, Α., & Στράντζαλος, Α. (2023, Δεκέμβριος 23). *Στοιχεία Πιθανοτήτων και Στατιστικής*. Γ΄ Γενικού Λυκείου. Ομάδας Προσανατολισμού Ανθρωπιστικών Σπουδών. Διόφαντος. http://ebooks.edu.gr/ebooks/d/8547/5311/22-0269-01_Stoicheia-Pithanotiton-kai-Statistikis_G-Lykeiou-AnthrSp_Vivlio-Mathiti.pdf

Τσάντας, Ν., Μωυσιάδης, Χ., Μπαγιάτης, Κ., & Χατζηπαντελής, Θ. (1999). *Ανάλυση δεδομένων με τη βοήθεια στατιστικών πακέτων*. Εκδόσεις: Ζήτη.

ΥΠ.Π.Ε.Θ. (2023α). Υ.ΠΑΙ.Θ.Α. 102767/ΓΔ4/18-09-2023. *Οδηγίες διδασκαλίας των Μαθηματικών Ημερήσιου και Εσπερινού Γυμνασίου για το σχολικό έτος 2023-2024*. https://dide.ira.sch.gr/wp-content/uploads/2023/10/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8E%CE%BD-3.zip

ΥΠ.Π.Ε.Θ. (2023β). Υ.ΠΑΙ.Θ.Α. 102767/ΓΔ4/18-09-2023. *Καθορισμός εξεταστέας ύλης για τα μαθήματα Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων Γενικού Λυκείου για το σχολικό έτος 2023-2024*. https://www.esos.gr/sites/default/files/articles-2023/fek-2023-tefxos_b-05162-downloaded_-22_08_2023.pdf

ΥΠ.Π.Ε.Θ. (2023γ). *Καθορισμός διδακτέας-εξεταστέας ύλης των Πανελλαδικώς εξεταζόμενων μαθημάτων της Γ' τάξης των Ημερήσιων και Εσπερινών ΕΠΑ.Λ. και των Π.ΕΠΑ.Λ. για το σχολικό έτος 2023-2024. https://www.minedu.gov.gr/publications/docs2020/2023_09_06_%CE%95%CE%9E%CE%95_97381_%CE%A5%CE%91_%CE%8E%CE%BB%CE%B7_%CE%A0%CE%B1%CE%BD_%CE%95%CE%BE%CE%B5%CF%84_%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC_%CE%93_%CF%84%CE%AC%CE%BE%CE%B7%CF%82_%CE%95%CE%A0%CE%91%CE%9B-%CE%A0.%CE%95%CE%A0%CE%91%CE%9B_2023-24_%CE%A6%CE%95%CE%9A_5371%CE%92_07.09.2023.pdf*

ΥΠ.Π.Ε.Θ. (2023δ). *Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο*. https://www.alfavita.gr/sites/default/files/2023-02/%CE%91%CE%92001.pdf

ΥΠ.Π.Ε.Θ. (2023ε). *Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων Γυμνασίου*. https://www.esos.gr/sites/default/files/articles-legacy/fek-2023-tefxos_b-00235-downloaded_-23_01_2023.pdf

ΥΠ.Π.Ε.Θ. (2023στ). *Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων Γενικού Λυκείου. https://www.alfavita.gr/sites/default/files/2023-03/%CE%A6%CE%95%CE%9A-%CE%92-1326_%CE%A5%CE%91-*

23523_%CE%942_2_3_23_%CE%A0%CE%A3-%CE%9C%CE%91%CE%98%CE%97%CE%9C%CE%91%CE%A4%CE%99%CE%9A%CE%91-%CE%93%CE%95%CE%9B.pdf

ΥΠ.Π.Ε.Θ. (2023ζ). Οδηγίες για τη διδασκαλία των μαθημάτων των Μαθηματικών Γενικής Παιδείας. https://dide-new.flo.sch.gr/wp-content/uploads/2023/10/%CE%95%CE%9E%CE%95-113445-2023-%CE%9F%CE%B4%CE%B7%CE%B3%CE%AF%CE%B5%CF%82-%CE%B3%CE%B9%CE%B1-%CF%84%CE%B7-%CE%B4%CE%B9%CE%B4%CE%B1%CF%83%CE%BA%CE%B1%CE%BB%CE%AF%CE%B1-%CF%84%CF%89%CE%BD-%CE%BC%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%AC%CF%84%CF%89%CE%BD-%CF%84%CF%89%CE%BD-%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8E%CE%BD-%CE%93%CE%B5%CE%BD%CE%B9%CE%BA%CE%AE%CF%82-%CE%A0%CE%B1%CE%B9%CE%B4%CE%B5%CE%AF%CE%B1%CF%82.pdf

Παράρτημα Α: Πρόγραμμα Σπουδών

ΠΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΆ – Α΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ		
Θεματικά Πεδία	Θεματικές Ενότητες	Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα
		Οι μαθητές/-τριες είναι σε θέση να:
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΉ	Διαχείριση δεδομένων.	Σ.Δ.1.1. Διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με κατηγορικά δεδομένα.
		Σ.Δ.1.2. Συλλέγουν κατηγορικά δεδομένα μέσω μικρών ερευνών στο οικείο περιβάλλον τους και τα οργανώνουν χρησιμοποιώντας χειραπτικό υλικό και καταμέτρηση με γραμμές.
		Σ.Δ.1.3. Κατασκευάζουν απλά εικονογράμματα και ραβδογράμματα.
		Σ.Δ.1.4. Διερευνούν πληροφορίες από εικονογράμματα, ραβδογράμματα και εξάγουν συμπεράσματα.
ΠΙΘΑΝΌΤΗΤΕΣ	Πειράματα τύχης και Πιθανότητες.	Π.Π.1.1. Περιγράφουν όλα τα δυνατά αποτελέσματα σε απλά πειράματα τύχης ενός σταδίου.
		Π.Π.1.2. Περιγράφουν ένα ενδεχόμενο ως βέβαιο, πιθανό, αδύνατο.
		Π.Π.1.3. Χαρακτηρίζουν ένα παιχνίδι τύχης δύο ή περισσότερων πιθανών αποτελεσμάτων ως δίκαιο-άδικο.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΆ – Β΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ		
Θεματικά Πεδία	Θεματικές Ενότητες	Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα
		Οι μαθητές/-τριες είναι σε θέση να:
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΉ	Διαχείριση δεδομένων.	Σ.Δ.2.1. Διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με διακριτά ποσοτικά δεδομένα.
		Σ.Δ.2.2. Συλλέγουν διακριτά ποσοτικά δεδομένα μέσω μικρών ερευνών και τα οργανώνουν σε πίνακες.
		Σ.Δ.2.3. Κατασκευάζουν σημειογράμματα.
		Σ.Δ.2.4. Διερευνούν πληροφορίες από σημειογράμματα και εξάγουν συμπεράσματα.
ΠΙΘΑΝΌΤΗΤΕΣ	Πειράματα τύχης και Πιθανότητες.	Π.Π.2.1. Διερευνούν δυνατούς συνδυασμούς και δυνατές διατάξεις ενός μικρού αριθμού αντικειμένων.
		Π.Π.2.2. Συγκρίνουν ενδεχόμενα ως προς την πιθανότητα εμφάνισής τους (λιγότερο πιθανό, περισσότερο πιθανό, ισοπίθανο).

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΆ – Γ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ		
Θεματικά Πεδία	Θεματικές Ενότητες	Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΉ	Διαχείριση δεδομένων.	Σ.Δ.3.1. Διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με κατηγορικά ή διακριτά ποσοτικά δεδομένα.
		Σ.Δ.3.2. Συλλέγουν κατηγορικά ή διακριτά ποσοτικά δεδομένα μέσω μικρών ερευνών ή πειραμάτων και τα οργανώνουν.
		Σ.Δ.3.3. Κατασκευάζουν διαγράμματα, στα οποία η εικόνα ή το σύμβολο αντιπροσωπεύει πολλαπλάσια του ενός (της μονάδας).
		Σ.Δ.3.4. Διερευνούν πληροφορίες από διαγράμματα, στα οποία η εικόνα ή το σύμβολο αντιπροσωπεύει πολλαπλάσια του ενός (της μονάδας) και εξάγουν συμπεράσματα.
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΉ	Μέτρα θέσης και Μεταβλητότητας.	Σ.Μ.3.1. Περιγράφουν και προσδιορίζουν την επικρατούσα τιμή και το εύρος δεδομένων.
ΠΙΘΑΝΌΤΗΤΕΣ	Πειράματα τύχης και Πιθανότητες.	Π.Π.3.1. Συγκρίνουν τις πιθανότητες εμφάνισης ενδεχομένων πραγματοποιώντας πολλές δοκιμές.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΆ – Δ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ		
Θεματικά Πεδία	Θεματικές Ενότητες	Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα
		Οι μαθητές/-τριες είναι σε θέση να:
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΉ	Διαχείριση δεδομένων.	Σ.Δ.4.1. Διατυπώνουν ερωτήματα που αφορούν συγκρίσεις κατηγορικών ή διακριτών ποσοτικών δεδομένων σε δύο μικρές ομάδες ίσου πλήθους.
		Σ.Δ.4.2. Συλλέγουν κατηγορικά ή διακριτά ποσοτικά δεδομένα από δύο μικρές ομάδες ίσου πλήθους μέσω ερευνών ή πειραμάτων μικρής κλίμακας και τα οργανώνουν.
		Σ.Δ.4.3. Κατασκευάζουν διαγράμματα των δεδομένων για δύο μικρές ομάδες ίσου πλήθους.
		Σ.Δ.4.4. Διερευνούν πληροφορίες από αναπαραστάσεις δεδομένων σε ομάδες ίσου πλήθους και εξάγουν συμπεράσματα.
	Μέτρα θέσης και Μεταβλητότητας.	Σ.Μ.4.1. Περιγράφουν και προσδιορίζουν τη διάμεσο των δεδομένων.
ΠΙΘΑΝΌΤΗΤΕΣ	Πειράματα τύχης και πιθανότητες.	Π.Π.4.1. Διερευνούν τη συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου κατά την επανάληψη ενός πειράματος τύχης πραγματοποιώντας διαφορετικούς αριθμούς δοκιμών.
		Π.Π.4.2. Εκτιμούν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου σε κλίμακα με εύρος από αδύνατο ενδεχόμενο έως βέβαιο ενδεχόμενο.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – Ε΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ		
Θεματικά Πεδία	Θεματικές Ενότητες	Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα
		Οι μαθητές/-τριες είναι σε θέση να:
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΉ	Διαχείριση δεδομένων.	Σ.Δ.5.1. Διατυπώνουν ερωτήματα που αφορούν ποσοτικά δεδομένα, τα οποία ομαδοποιούνται.
		Σ.Δ.5.2. Συλλέγουν ποσοτικά δεδομένα που ομαδοποιούνται μέσω ερευνών, μετρήσεων ή πειραμάτων και τα οργανώνουν σε πίνακες συχνοτήτων.
		Σ.Δ.5.3. Κατασκευάζουν φυλλογράμματα για να αναπαραστήσουν δεδομένα.
		Σ.Δ.5.4. Διερευνούν πληροφορίες από φυλλογράμματα και εξάγουν συμπεράσματα.
	Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας.	Σ.Μ.5.1. Περιγράφουν και προσδιορίζουν τον μέσο όρο δεδομένων.
ΠΙΘΑΝΌΤΗΤΕΣ	Πειράματα τύχης και πιθανότητες.	Π.Π.5.1. Υπολογίζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου ως κλάσμα και την αναπαριστούν σε κλίμακα από 0 έως 1.
		Π.Π.5.2. Συγκρίνουν τις πιθανότητες εμφάνισης ενδεχομένων σε διαφορετικές

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΆ – ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ		
Θεματικά Πεδία	Θεματικές Ενότητες	Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΉ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΉ	Διαχείριση δεδομένων.	Σ.Δ.6.1. Διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με συνδυασμό διακριτών ποσοτικών και κατηγορικών δεδομένων.
		Σ.Δ.6.2. Συλλέγουν δεδομένα μέσω ερευνών, μετρήσεων ή πειραμάτων και τα οργανώνουν σε πίνακες σχετικών συχνοτήτων.
		Σ.Δ.6.3. Κατασκευάζουν διαγράμματα με σχετικές συχνότητες και απλά κυκλικά διαγράμματα.
		Σ.Δ.6.4. Διερευνούν πληροφορίες από κυκλικά διαγράμματα και εξάγουν συμπεράσματα.
	Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας.	Σ.Μ.6.1. Περιγράφουν και προσδιορίζουν την επικρατούσα τιμή, τον μέσο όρο, τη διάμεσο και το εύρος δεδομένων.
ΠΙΘΑΝΌΤΗΤΕΣ	Πειράματα τύχης και πιθανότητες.	Π.Π.6.1. Περιγράφουν όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης δύο σταδίων.
		Π.Π.6.2. Υπολογίζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου ως κλάσμα και τη συγκρίνουν με τη σχετική συχνότητα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την πραγματοποίηση ενός πειράματος τύχης.

ΠΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ		
Θεματικό Πεδίο	Θεματικές Ενότητες	Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα
		Οι μαθητές/-τριες είναι σε θέση:
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΆ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΆ – ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΉ	Διαχείριση δεδομένων.	Σ.Δ.7.1. Να διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με συνεχή ποσοτικά δεδομένα από το οικείο περιβάλλον τους.
		Σ.Δ.7.2. Να χαρακτηρίζουν δεδομένα που έχουν προκύψει από απογραφή σε έναν πληθυσμό ως κατηγορικά, διακριτά ή συνεχή ποσοτικά.
		Σ.Δ.7.3. Να κατασκευάζουν κυκλικά διαγράμματα για κατηγορικά δεδομένα.
		Σ.Δ.7.4. Να κατασκευάζουν ιστογράμματα συχνοτήτων ίσου πλάτους, με δεδομένο πλήθος κλάσεων για συνεχή ποσοτικά δεδομένα.
		Σ.Δ.7.5. Να επιλέγουν πληροφορίες από διαφορετικές αναπαραστάσεις ποσοτικών δεδομένων και να καταλήγουν σε συμπεράσματα.
		Σ.Δ.7.6. Να επιλέγουν κατάλληλες μορφές αναπαράστασης και να επιχειρηματολογούν για τις επιλογές τους.
	Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας.	Σ.Μ.7.1. Να χρησιμοποιούν τα μέτρα θέσης για να περιγράψουν δεδομένα, να κάνουν συγκρίσεις και να εξαγάγουν συμπεράσματα.
		Σ.Μ.7.2. Να περιγράφουν χαρακτηριστικά των δεδομένων όπως το εύρος, η ύπαρξη πολλαπλών κορυφών και οι απόμακρες τιμές από ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων.
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΆ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΆ – ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΉ		Σ.Μ.7.3. Να διερευνούν πιθανές ερμηνείες για χαρακτηριστικά των δεδομένων, όπως λόγοι ύπαρξης απόμακρων τιμών ή πιθανούς λόγους για τη μεταβλητότητα των δεδομένων.
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΆ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΆ – ΠΙΘΑΝΌΤΗΤΕΣ	Πειράματα τύχης και πιθανότητες.	Π.Π.7.1. Να προσδιορίζουν και να περιγράφουν τον δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης που πραγματοποιείται σε ένα ή περισσότερα στάδια χρησιμοποιώντας αναπαραστάσεις του δειγματικού χώρου σε πίνακες ή δεντροδιαγράμματα.
		Π.Π.7.2. Να μεταφράζουν τα ενδεχόμενα από τη φυσική γλώσσα σε στοιχεία του δειγματικού χώρου.
		Π.Π.7.3. Να χρησιμοποιούν τον κλασικό ορισμό των Πιθανοτήτων για να υπολογίσουν την πιθανότητα ενός σύνθετου ενδεχόμενου.
		Π.Π.7.4. Να συγκρίνουν την πιθανότητα ενδεχομένου με τη σχετική συχνότητα του ενδεχομένου η οποία προκύπτει από αυξανόμενο αριθμό επαναλήψεων του πειράματος ή από προσομοίωση.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΆ – Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ		
Θεματικό Πεδίο	Θεματικές Ενότητες	Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα
		Οι μαθητές/-τριες είναι σε θέση:
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΆ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΆ – ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΉ	Διαχείριση δεδομένων.	Σ.Δ.8.1. Να διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με απογραφικά χρονικά δεδομένα.
		Σ.Δ.8.2. Να συλλέγουν χρονικά δεδομένα που προκύπτουν από επαναλαμβανόμενες μετρήσεις κάποιου χαρακτηριστικού.
		Σ.Δ.8.3. Να κατασκευάζουν χρονοδιαγράμματα για χρονικά δεδομένα.
		Σ.Δ.8.4. Να κατασκευάζουν απλά θηκογράμματα, χρησιμοποιώντας την «περίληψη πέντε αριθμών» (ελάχιστη τιμή, τεταρτημόρια και μέγιστη τιμή), για συνεχή ποσοτικά δεδομένα.
		Σ.Δ.8.5. Να επιλέγουν πληροφορίες από διαφορετικές αναπαραστάσεις συνεχών ποσοτικών και χρονικών δεδομένων και να καταλήγουν σε συμπεράσματα.
		Σ.Δ.8.6. Να εντοπίζουν παραδείγματα χρήσης στατιστικών διαγραμμάτων που μπορούν να οδηγήσουν σε εσφαλμένα συμπεράσματα και να παραπλανήσουν.
	Μέτρα θέσης και Μεταβλητότητας.	Σ.Μ.8.1. Να περιγράφουν και προσδιορίζουν τα τεταρτημόρια και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος ενός συνόλου δεδομένων.
		Σ.Μ.8.2. Να διερευνούν ιδιότητες της μέσης τιμής, όπως τη μεταβολή της όταν προστίθενται ή πολλαπλασιάζονται όλα τα δεδομένα με τον ίδιο αριθμό.
		Σ.Μ.8.3. Να διερευνούν πώς επηρεάζονται η μέση τιμή και η διάμεσος από την ύπαρξη απόμακρων τιμών.
		Σ.Μ.8.4. Να διερευνούν την έννοια της μεταβλητότητας χρησιμοποιώντας το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.
		Σ.Μ.8.5. Να περιγράφουν τα δεδομένα με βάση την περίληψη των πέντε αριθμών: ελάχιστη τιμή, τεταρτημόρια και μέγιστη τιμή.
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΆ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΆ – ΠΙΘΑΝΌΤΗΤΕΣ	Πειράματα τύχης και πιθανότητες.	Π.Π.8.1. Να ελέγχουν αν δύο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα.
		Π.Π.8.2. Να απαριθμούν το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου με χρήση της Βασικής Αρχής Απαρίθμησης (ΒΑΑ) και να υπολογίζουν την αντίστοιχη πιθανότητα.
		Π.Π.8.3. Να χρησιμοποιούν τον απλό προσθετικό νόμο για να υπολογίσουν την πιθανότητα σύνθετων ενδεχόμενων.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΆ – Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΊΟΥ		
Θεματικό Πεδίο	Θεματικές Ενότητες	Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα
		Οι μαθητές/-τριες είναι σε θέση:
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΆ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΆ – ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΉ	Διαχείριση δεδομένων.	Σ.Δ.9.1. Να διατυπώνουν ερωτήματα που αφορούν το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον και απαντώνται με δεδομένα εκτός του οικείου περιβάλλοντός τους.
		Σ.Δ.9.2. Να αναγνωρίζουν την αναγκαιότητα της χρήσης δείγματος και τη διαφορά του από τον πληθυσμό.
		Σ.Δ.9.3. Να χρησιμοποιούν απλή τυχαία δειγματοληψία για την επιλογή ενός αντιπροσωπευτικού δείγματος.
		Σ.Δ.9.4. Να αναγνωρίζουν τη δυνατότητα επαγωγικής εξαγωγής συμπερασμάτων για έναν πληθυσμό από ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα.
		Σ.Δ.9.5. Να αναγνωρίζουν τη μεταβλητότητα στατιστικών δεικτών μεταξύ δειγμάτων.
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΆ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΆ – ΠΙΘΑΝΌΤΗΤΕΣ	Πειράματα τύχης και πιθανότητες.	Π.Π.9.1. Να αναγνωρίζουν μέσα από προσομοιώσεις με χρήση λογισμικού και εκτελώντας πειράματα τύχης, ότι η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου πλησιάζει την τιμή της πιθανότητας, όταν έχουμε μεγάλο αριθμό εκτελέσεων του ίδιου πειράματος (Νόμος των Μεγάλων Αριθμών).
	Συσχέτιση.	Π.Σ.9.1. Να διερευνούν την ανεξαρτησία ενδεχομένων μέσα από την εκτέλεση πειραμάτων τύχης και προσομοιώσεων.

ΠΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ		
Θεματικά Πεδία	Θεματικές Ενότητες	Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ		
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ	Διαχείριση δεδομένων.	Σ.Δ.10.1. Διατυπώνουν ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ ενός ποσοτικού και ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του πληθυσμού.
		Σ.Δ.10.2. Κατασκευάζουν πολλαπλά θηκογράμματα, υπολογίζοντας και οριακές τιμές, για να περιγράψουν τις τιμές ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού.
	Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας.	Σ.Μ.10.1. Περιγράφουν και προσδιορίζουν τη διασπορά και την τυπική απόκλιση ποσοτικών δεδομένων χρησιμοποιώντας τετραγωνικές και απόλυτες αποκλίσεις.
		Σ.Μ.10.2. Διερευνούν πώς επηρεάζεται η διασπορά και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος από την ύπαρξη απόμακρων τιμών.
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ		Σ.Μ.10.3. Περιγράφουν και προσδιορίζουν τη μέση τιμή και τη διάμεσο, καθώς και τη διασπορά, την τυπική απόκλιση και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού.
		Σ.Μ.10.4. Περιγράφουν και προσδιορίζουν τον συντελεστή μεταβλητότητας των τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού.
		Σ.Μ.10.5. Αναγνωρίζουν τη χρησιμότητα του συντελεστή μεταβλητότητας στη σύγκριση μεταβλητότητας ποσοτικών δεδομένων διαφορετικών μονάδων μέτρησης.
		Σ.Μ.10.6. Επιλέγουν κατάλληλα μέτρα θέσης και μέτρα μεταβλητότητας ποσοτικών δεδομένων ανάλογα με την ύπαρξη απόμακρων τιμών.
	Σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών.	Σ.Ε.10.1. Με τη βοήθεια των θηκογραμμάτων κάνουν συγκρίσεις και εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που έχουν οι τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού.
		Σ.Ε.10.2. Ανακαλύπτουν και εξηγούν με παραδείγματα ότι ένα ποσοτικό και ένα κατηγορικό χαρακτηριστικό δε διέπονται απαραίτητα από μια σχέση αιτίας-αιτιατού.

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ	Πειράματα τύχης και Πιθανότητες.	Π.Π.11.1. Εξηγούν τους τρόπους υπολογισμού διατάξεων με και χωρίς επαναλήψεις, μεταθέσεων και συνδυασμών.
		Π.Π.11.2. Υπολογίζουν το πλήθος των στοιχείων ενδεχομένων με χρήση αρχών απαρίθμησης.
		Π.Π.11.3. Επιλέγουν το κατάλληλο πλαίσιο συνδυαστικών μεθόδων σε κάθε πρόβλημα.
		Π.Π.11.4. Χρησιμοποιούν τις διατάξεις με και χωρίς επαναλήψεις, μεταθέσεις και συνδυασμούς στη μοντελοποίηση και την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.
		Π.Π.11.5. Αναγνωρίζουν ότι πολλές διαδικασίες της καθημερινότητας περιγράφονται από την κανονική κατανομή.
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ		Π.Π.11.6. Εφαρμόζουν τις ιδιότητες της κανονικής κατανομής για την επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου.
	Συσχέτιση.	Π.Σ.11.1. Ορίζουν τη δεσμευμένη πιθανότητα ενός ενδεχομένου, δεδομένου ενός άλλου.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ		
Θεματικά Πεδία	Θεματικές Ενότητες	Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα
		Οι μαθητές/-τριες:
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ	Διαχείριση δεδομένων.	Σ.Δ.12.1. Διατυπώνουν ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού.
		Σ.Δ.12.2. Με βάση το ερευνητικό ερώτημα που διαθέτουν, χαρακτηρίζουν ένα ποσοτικό χαρακτηριστικό ως μεταβλητή απόκρισης και το άλλο ως επεξηγηματική μεταβλητή.
		Σ.Δ.12.3. Κατασκευάζουν το διάγραμμα διασποράς των τιμών δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού.
	Σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών.	Σ.Ε.12.1. Με τη βοήθεια του διαγράμματος διασποράς διερευνούν την ύπαρξη γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού και διακρίνουν τη θετική από την αρνητική γραμμική συσχέτιση.
		Σ.Ε.12.2. Με τη βοήθεια της τιμής του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης του Pearson σχολιάζουν την ύπαρξη και το είδος της γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού.

		Σ.Ε.12.3. Ανακαλύπτουν και εξηγούν με παραδείγματα ότι δύο ποσοτικά χαρακτηριστικά δε διέπονται απαραίτητα από μια σχέση αιτίας- αιτιατού.
		Σ.Ε.12.4. Χαράσσουν εποπτικά την ευθεία παλινδρόμησης για το απλό γραμμικό μοντέλο και σχολιάζουν την προσαρμογή της.
		Σ.Ε.12.5. Ερμηνεύουν τις τιμές των συντελεστών της ευθείας παλινδρόμησης στο πλαίσιο του ερευνητικού ερωτήματος.
		Σ.Ε.12.6. Εξοικειώνονται με την έννοια της πρόβλεψης της τιμής της μεταβλητής απόκρισης για δοσμένη τιμή της επεξηγηματικής μεταβλητής, με βάση το απλό γραμμικό μοντέλο, και αναγνωρίζουν τυχόν περιορισμούς.
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ	Συσχέτιση.	Π.Σ.12.1. Χρησιμοποιούν τον πολλαπλασιαστικό κανόνα για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.
		Π.Σ.12.2. Αξιοποιούν τη δεσμευμένη πιθανότητα για να ορίσουν την ανεξαρτησία δύο ενδεχομένων.
		Π.Σ.12.3. Εφαρμόζουν το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.
		Π.Σ.12.4. Εφαρμόζουν το Θεώρημα του Bayes στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ		
Θεματικό Πεδίο	Θεματικές Ενότητες	Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα
		Οι μαθητές/-τριες:
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ	Διαχείριση δεδομένων.	Σ.Δ.12.Π.1. Διατυπώνουν ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού.
		Σ.Δ.12.Π.2. Με βάση το ερευνητικό ερώτημα που διαθέτουν, χαρακτηρίζουν ένα ποσοτικό χαρακτηριστικό ως μεταβλητή απόκρισης και το άλλο ως επεξηγηματική μεταβλητή.
		Σ.Δ.12.Π.3. Κατασκευάζουν το διάγραμμα διασποράς των τιμών δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού.
	Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας.	Σ.Μ.12.Π.1. Χρησιμοποιούν πιο σύντομες μορφές, με χρήση του συμβόλου του αθροίσματος, για να αναπαραστήσουν τη μέση τιμή και διασπορά των τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού του πληθυσμού.
	Σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών.	Σ.Ε.12.Π.1. Με τη βοήθεια του διαγράμματος διασποράς διερευνούν την ύπαρξη γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού και διακρίνουν τη θετική από την αρνητική γραμμική συσχέτιση.
		Σ.Ε.12.Π.2. Με τη βοήθεια της τιμής του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης του Pearson σχολιάζουν την ύπαρξη και το είδος της γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού.
		Σ.Ε.12.Π.3. Ανακαλύπτουν και εξηγούν με παραδείγματα ότι δύο ποσοτικά χαρακτηριστικά δε διέπονται απαραίτητα από μια σχέση αιτίας- αιτιατού.
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ		Σ.Ε.12.Π.4. Προσδιορίζουν την ευθεία παλινδρόμησης για το απλό γραμμικό μοντέλο, με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων και σχολιάζουν εποπτικά την προσαρμογή της.
		Σ.Ε.12.Π.5. Ερμηνεύουν τις τιμές των συντελεστών της ευθείας παλινδρόμησης στο πλαίσιο του ερευνητικού ερωτήματος.
		Σ.Ε.12.Π.6. Εξοικειώνονται με την έννοια της πρόβλεψης της τιμής της μεταβλητής απόκρισης για δοσμένη τιμή της επεξηγηματικής μεταβλητής, με βάση το

		απλό γραμμικό μοντέλο, και αναγνωρίζουν τυχόν περιορισμούς.
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ	Πειράματα τύχης και Πιθανότητες.	Π.Π.12.Π.1. Αναγνωρίζουν μια δοκιμή Bernoulli.
		Π.Π.12.Π.2. Υπολογίζουν την πιθανότητα να έχουμε κ επιτυχίες σε μια σειρά από ν ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli.
		Π.Π.12.Π.3. Αναγνωρίζουν ότι η δεσμευμένη πιθανότητα ικανοποιεί τον αξιωματικό ορισμό πιθανότητας και επικαιροποιεί το αρχικό μοντέλο, αν γνωρίζουμε ότι συνέβη κάποιο ενδεχόμενο.
	Συσχέτιση.	Π.Σ.12.Π.1. Χρησιμοποιούν τον πολλαπλασιαστικό κανόνα για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.
		Π.Σ.12.Π.2. Αξιοποιούν τη δεσμευμένη πιθανότητα για να ορίσουν την ανεξαρτησία δύο ενδεχομένων.
		Π.Σ.12.Π.3. Λύνουν προβλήματα με χρήση του Θεωρήματος Ολικής Πιθανότητας.
		Π.Σ.12.Π.4. Εφαρμόζουν το Θεώρημα του Bayes στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων.

Παράρτημα Β: Ερωτηματολόγιο

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Επιλέξτε μια απάντηση

1ο πρόβλημα

Δίνετε στους μαθητές σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων:

Ζώο	Συχνότητα ν_i
καναρίνι	2
γάτα	4
πρόβατο	2
σκυλί	7
πάπια	1
ψάρι	2
κατσίκα	1
άλογο	3
κουνέλι	3

Συζητάτε με τους μαθητές σας τα δεδομένα του πίνακα και ένας μαθητής υποστηρίζει:
«Η επικρατούσα τιμή είναι το σκυλί, η διάμεσος η πάπια και το εύρος είναι από 1 έως 7».

1] Σε ποιο από τα παρακάτω θα δίνατε μεγαλύτερη έμφαση στη συνέχιση της διδασκαλίας σας για να βοηθήσετε το μαθητή;

i) Ποιοτική μεταβλητή
ii) Πίνακα συχνοτήτων
iii) Μέτρα θέσης
iv) Μέτρα θέσης και εύρος

2^o πρόβλημα

Δίνετε στους μαθητές σας το παρακάτω πρόβλημα:

Ο μέσος όρος παιδιών σε 10 οικογένειες είναι 2,3.
Αν μια οικογένεια που έχει 5 παιδιά φύγει από τη γειτονιά, ποιος είναι ο νέος μέσος όρος παιδιών ανά οικογένεια;

2] Πως θα απαντούσατε σε ένα μαθητή που υποστήριζε για το παραπάνω πρόβλημα:
ΜΑΘΗΤΗΣ: *2,3χ10=23 και 23-5=18 και 18:10=1,8*

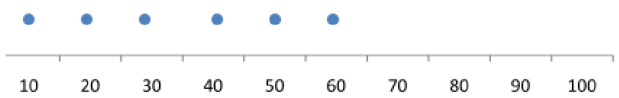
- **i)** Θα διόρθωνα το λάθος του.
- **ii)** Θα του έκανα ερωτήσεις που αφορούν τον αριθμό των οικογενειών.
- **iii)** Θα του ζητούσα να μου εξηγήσει τον τρόπο με τον οποίο έφτασε σε αυτό το συμπέρασμα.

3^0 πρόβλημα

Δίνετε στους μαθητές σας το παρακάτω πρόβλημα πολλαπλής επιλογής:

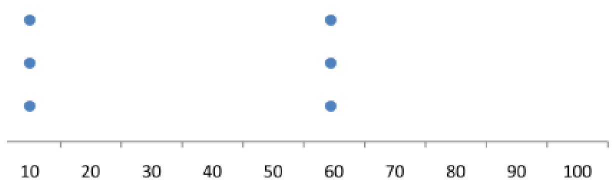
Δυο διαφορετικά τμήματα Α και Β των έξι ατόμων το καθένα βαθμολογήθηκαν σε ένα μάθημα με άριστα το 100.
Οι βαθμοί που πήραν οι μαθητές για κάθε τμήμα δίνονται στα παρακάτω σημειογράμματα.
Κάθε σημείο στο γράφημα αναπαριστά το πλήθος των μαθητών που έχουν τη συγκεκριμένη βαθμολογία. Για παράδειγμα τα τρία σημεία πάνω από το 60 δείχνουν ότι τρεις μαθητές του τμήματος Β είχαν βαθμολογία 60.

Τμήμα Α



βαθμολογίες

Τμήμα Β



βαθμολογίες

Ποιο από τα δυο τμήματα έχει μεγαλύτερη διασπορά παρατηρήσεων;

a) το δείγμα Α **b)** το δείγμα Β
c) τα δυο δείγματα έχουν ίση διασπορά **d)** δεν γνωρίζουμε με αυτά τα δεδομένα

3] Για ποιο λόγο κατά τη γνώμη σας επέλεξαν λανθασμένα το δείγμα Α οι μαθητές;

- **i)** Υπολόγισαν λανθασμένα τη τυπική απόκλιση.
- **ii)** Εκτίμησαν από το γράφημα πόσο απέχουν οι παρατηρήσεις μεταξύ τους και όχι πόσο απέχουν από τη μέση τιμή.
- **iii)** Στη σύγκριση των δυο δειγμάτων χρησιμοποίησαν τη μέση τιμή ή τη διάμεσο.

4^0 πρόβλημα

Δίνετε στους μαθητές σας το παρακάτω πρόβλημα:

	Ασθένεια των πνευμόνων	**Χωρίς ασθένεια των πνευμόνων**	**Σύνολο**
Καπνιστές	90	60	150
Μη καπνιστές	60	40	100
Σύνολο	150	100	250

Τους ζητάτε να χρησιμοποιήσουν τις παραπάνω πληροφορίες και να εξετάσουν αν στο δείγμα η ασθένεια των πνευμόνων εξαρτάται από το κάπνισμα.

4] Πως θα απαντούσατε σε ένα μαθητή που υποστήριζε για το παραπάνω πρόβλημα:

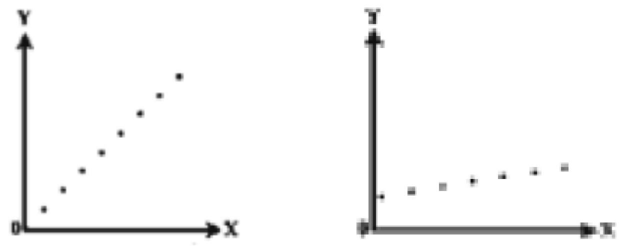
ΜΑΘΗΤΗΣ: «*Ναι, εξαρτάται, γιατί 90 καπνιστές έχουν ασθένεια των πνευμόνων*».

- **i)** Θα του έκανα ερωτήσεις όπως: Από ποιο δείγμα; Ποιο είναι το ποσοστό των καπνιστών με ασθένεια; Ποιο είναι το ποσοστό των μη καπνιστών με ασθένεια;
- **ii)** Θα έλεγα τη σωστή απάντηση ή/και θα εξηγούσα.
- **iii)** Θα ζητούσα να εστιάσουν στο συνολικό αριθμό ατόμων που ερευνώνται σε καθεμία ενότητα και να χρησιμοποιήσουν ποσοστά και αναλογίες.

5^0 πρόβλημα

Δίνετε στους μαθητές σας τα παρακάτω διαγράμματα διασποράς:

A **B**



Ποιο από τα διαγράμματα διασποράς έχει τέλεια γραμμική θετική συσχέτιση (r=1);

a) μόνο το A **b)** μόνο το B

c) το A και το B **d)** δεν γνωρίζουμε με αυτά τα δεδομένα

5] Για ποιο λόγο κατά τη γνώμη σας επέλεξαν λανθασμένα μόνο το A οι μαθητές;

i) Στο διάγραμμα διασποράς του A υπάρχουν περισσότερα σημεία.

ii) Θεωρούν ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας τόσο πιο ισχυρή είναι η γραμμική θετική συσχέτιση.

iii) Θεωρούν ότι σε μια τέλεια γραμμική θετική συσχέτιση (r=1) ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι 1 και επομένως η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x΄x είναι 45^0.

iv) Θεωρούν ότι η ισχυρότερη συσχέτιση σημαίνει ότι μια μεταβλητή μπορεί να επηρεάσει την άλλη, με την μια μεταβλητή να έχει το ρόλο της αιτίας και η άλλη του αποτελέσματος.

6^0 πρόβλημα

Ρωτάτε τους μαθητές σας:

Ποιο από τα παρακάτω ενδεχόμενα είναι πιο πιθανό να πραγματοποιηθεί;
Α={να φέρουμε τουλάχιστον **2** φορές γράμματα στις **3** ρίψεις ενός αμερόληπτου κέρματος}
Β={να φέρουμε τουλάχιστον **200** φορές γράμματα στις **300** ρίψεις ενός αμερόληπτου κέρματος}

6] Για να εξηγήσετε το περιεχόμενο που σχετίζεται με αυτό το πρόβλημα θα εστιάζατε:

i) στο τρίγωνο του Pascal.
ii) στον υπολογισμό των πιθανοτήτων (αναλογικό μοντέλο).
iii) στο νόμο των μεγάλων αριθμών.
iv) στην κατασκευή δενδροδιαγράμματος.

7^0 πρόβλημα

Δίνετε στους μαθητές σας το παρακάτω πρόβλημα:

Η πιθανότητα ένα νεογέννητο να είναι αγόρι είναι ίση με την πιθανότητα να είναι κορίτσι. Στο νοσοκομείο Α καταγράφονται κατά μέσο όρο 50 γεννήσεις την ημέρα και στο νοσοκομείο Β καταγράφονται κατά μέσο όρο 10 γεννήσεις την ημέρα.

Σε μια συγκεκριμένη μέρα, ποιο νοσοκομείο είναι πιθανότερο να έχει τουλάχιστον 80% γεννήσεις κοριτσιών;

7] Ποια κατά τη γνώμη σας είναι η πιο σημαντική γνώση που πρέπει να αποκτήσουν οι μαθητές για να αντιμετωπίσουν αυτό το πρόβλημα;

- **i)** Την μεταβλητότητα σε μικρά δείγματα.
- **ii)** Τα ισοπίθανα ενδεχόμενα.
- **iii)** Τον νόμο των μεγάλων αριθμών.
- **iv)** Δεν γνωρίζουμε.

8^0 πρόβλημα

Δίνετε στους μαθητές σας το παρακάτω πρόβλημα:

Α: Επιλέγουμε μια επιτροπή με 2 μέλη από 10 υποψήφιους
Β: Επιλέγουμε μια επιτροπή με 8 μέλη από 10 υποψήφιους.
Ποιο από τα δυο γεγονότα έχει περισσοτέρους τρόπους να πραγματοποιηθεί;

Οι περισσότεροι μαθητές απάντησαν λανθασμένα ότι το Α πραγματοποιείται με περισσότερους τρόπους από το Β.

8] Για ποιο λόγο κατά τη γνώμη σας οδηγήθηκαν σε αυτό το λάθος οι μαθητές;

i) Δεν γνωρίζουν τον τρόπο υπολογισμού των συνδυασμών.

ii) Γνωρίζουν τον τρόπο υπολογισμού των συνδυασμών, αλλά κάνουν λάθος στο τελικό αποτέλεσμα.

iii) Εκτιμούν τους τρόπους με την ευκολία που μπορούν να φέρουν στο μυαλό τους τις περιπτώσεις.

iv) Δεν γνωρίζουμε.

9^0 πρόβλημα

Δίνετε στους μαθητές σας το παρακάτω πρόβλημα:

Ένα κουτί περιέχει δυο άσπρες και δυο μαύρες σφαίρες.
Επιλέγουμε τυχαία δυο σφαίρες τη μια μετά την άλλη χωρίς επανατοποθέτηση.

Α. Η πρώτη σφαίρα είναι άσπρη.
Ποια είναι η πιθανότητα και η δεύτερη σφαίρα να είναι άσπρη;

Β. Την πρώτη σφαίρα που επιλέγουμε την αφήνουμε στην άκρη χωρίς να δούμε το χρώμα της και επιλέγουμε την δεύτερη σφαίρα η οποία είναι άσπρη.
Ποια είναι η πιθανότητα και η πρώτη σφαίρα να είναι άσπρη;

Οι περισσότεροι μαθητές απάντησαν σωστά στο Α ερώτημα και λανθασμένα στο Β ερώτημα.

9] Για ποιο λόγο κατά τη γνώμη σας απάντησαν λανθασμένα στο Β ερώτημα οι περισσότεροι μαθητές;

i) Το πρόβλημα Β οι μαθητές βρήκαν ότι δεν είναι ξεκάθαρα διατυπωμένο.

ii) Θεώρησαν ότι η επιλογή της δεύτερης σφαίρας στο πρόβλημα Β δεν μπορεί να επηρεάσει την επιλογή της πρώτης σφαίρας.

iii) Θεώρησαν ότι ο δειγματικός χώρος του προβλήματος Β έχει τα δυο απλά ενδεχόμενα να είναι η σφαίρα ή άσπρη ή μαύρη (Ω={Α,Μ}) .

iv) Δεν γνωρίζουμε.

10^0 πρόβλημα

Δίνετε στους μαθητές σας το παρακάτω πρόβλημα.

Μια οικογένεια έχει δυο παιδιά. Γνωρίζουμε ότι το ένα παιδί τουλάχιστον είναι αγόρι. Ποια η πιθανότητα και το άλλο παιδί να είναι αγόρι;

Οι περισσότεροι μαθητές έδωσαν λανθασμένη απάντηση.

10] Να αναφέρετε τρεις τρόπους αναπαράστασης για να βοηθήσετε τους μαθητές σε αυτό το πρόβλημα.

1……………………………………………………………………………………………

2.……………………………………………………………………………………………

3.…………………………………………………………………………………………

Επιλέξτε έως τρεις απαντήσεις

11η ερώτηση

11] Ποιους τρεις στόχους του νέου προγράμματος σπουδών θεωρείτε πιο σημαντικούς για τους μαθητές σας στη Στατιστική;

Οι μαθητές/-τριές:

1. Με τη βοήθεια των θηκογραμμάτων κάνουν συγκρίσεις και εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που έχουν οι τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού.
2. Από τον πίνακα συνάφειας συχνοτήτων διπλής εισόδου υπολογίζουν τις περιθώριες συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες.
3. Από δοσμένα στοιβαγμένα ραβδογράμματα συχνοτήτων και ομαδοποιημένα ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με την εξάρτηση των δυο κατηγορικών μεταβλητών.
4. Κατασκευάζουν το διάγραμμα διασποράς των τιμών δυο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού.
5. Με τη βοήθεια του διαγράμματος διασποράς διερευνούν την ύπαρξη γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών δυο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού και διακρίνουν τη θετική από την αρνητική γραμμική συσχέτιση.
6. Ανακαλύπτουν και εξηγούν με παραδείγματα ότι δυο ποσοτικά χαρακτηριστικά δεν διέπονται απαραίτητα από μια σχέση αιτίας-αιτιατού.
7. Χαράσσουν εποπτικά την ευθεία παλινδρόμησης για το απλό γραμμικό μοντέλο και σχολιάζουν την προσαρμογή της.
8. Εξοικειώνονται με την έννοια της πρόβλεψης της τιμής της μεταβλητής απόκρισης για δοσμένη τιμή της επεξηγηματικής μεταβλητής, με βάση το απλό γραμμικό μοντέλο, και αναγνωρίζουν τυχόν περιορισμούς.

Να εξηγήσετε με συντομία τον λόγο της επιλογής σας.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

12η ερώτηση

12] Ποιους τρεις στόχους του νέου προγράμματος σπουδών θεωρείτε πιο σημαντικούς για τους μαθητές σας στις Πιθανότητες;

Οι μαθητές/-τριές:

1. Υπολογίζουν το πλήθος των στοιχείων ενδεχομένων με χρήση αρχών απαρίθμησης.
2. Χρησιμοποιούν τις διατάξεις με και χωρίς επαναλήψεις, μεταθέσεις και συνδυασμούς στη μοντελοποίηση και την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.
3. Εφαρμόζουν τις ιδιότητες της κανονικής κατανομής για την επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου.
4. Υπολογίζουν την πιθανότητα να έχουμε κ επιτυχίες σε μια σειρά από ν ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli.
5. Χρησιμοποιούν τον πολλαπλασιαστικό κανόνα για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.
6. Αξιοποιούν τη δεσμευμένη πιθανότητα για να ορίσουν την ανεξαρτησία δυο ενδεχομένων.
7. Εφαρμόζουν το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.
8. Εφαρμόζουν το Θεώρημα του Bayes στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων.

Να εξηγήσετε με συντομία τον λόγο της επιλογής σας.
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………