ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ- ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ - ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ – ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Μαθηματική εκπαίδευση Β΄ Ηλικιακού Κύκλου (13-18 χρονών)

Διπλωματική Εργασία

«Διερεύνηση της επίλυσης ιστορικών μαθηματικών προβλημάτων από μαθητές Λυκείου»

της

Τσιμπούκα Κωνσταντίνα

Α.Μ. 1115

Επιβλέπων καθηγητής: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής

Εξεταστές: Βαμβακούση Ξανθή, Καθηγήτρια

Παπαδόπουλος Ιωάννης, Αναπληρωτής Καθηγητής

Φλώρινα, Ιούλιος 2024

Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα εργασία δεν αποτελεί προϊόν λογοκλοπής, είναι προϊόν αυστηρά προσωπικής εργασίας, η βιβλιογραφία και οι πηγές που έχω χρησιμοποιήσει, έχουν δηλωθεί κατάλληλα με παραπομπές και αναφορές. Τα σημεία όπου έχω χρησιμοποιήσει ιδέες, κείμενο ή/και πηγές άλλων συγγραφέων, αναφέρονται ευδιάκριτα στο κείμενο με την κατάλληλη παραπομπή και η σχετική αναφορά περιλαμβάνεται στο τμήμα των βιβλιογραφικών αναφορών με πλήρη περιγραφή. Επισημαίνεται πως η συγκεκριμένη επιλογή βοηθά στον περιορισμό της λογοκλοπής διασφαλίζοντας έτσι το/τη συγγραφέα.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Εικόνων

Κατάλογος Γραφημάτων

Κατάλογος Πινάκων

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα προβλήματα αποτελούν κεντρικό στοιχείο στη μαθηματική εκπαίδευση και συμβάλλουν καθοριστικά στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Μάλιστα, η χρήση ιστορικών μαθηματικών προβλημάτων στην τάξη μπορεί να συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση εννοιών και διαδικασιών, αλλά και στη βελτίωση των πεποιθήσεων των μαθητών για τα μαθηματικά και το ρόλο τους στη ζωή των ανθρώπων. Παρόλα αυτά, έχει παρατηρηθεί μέσα από διάφορες έρευνες, ότι οι μαθητές εμφανίζουν πολλές δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων. Η παρούσα έρευνα έχει ως σκοπό να διερευνήσει την επίδοση των μαθητών Λυκείου στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων ιστορικής προέλευσης και την ύπαρξη διαφοροποιήσεων στις επιδόσεις αυτές μεταξύ των τριών τάξεων. Επίσης, θα μελετηθεί η προτίμηση των μαθητών μεταξύ του αριθμητικού και του αλγεβρικού τρόπου επίλυσης. Στην έρευνα συμμετείχαν 21 μαθητές, 7 από κάθε τάξη Λυκείου, στους οποίους δόθηκε ένα αυτοσχέδιο φύλλο εργασίας με τέσσερα προβλήματα προς επίλυση. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν πως οι επιδόσεις των μαθητών ήταν μέτριες. Εντοπίστηκε σημαντική βελτίωση στις απαντήσεις των μαθητών από την Α στη Β λυκείου, ενώ οι επιδόσεις των μαθητών της Γ λυκείου ήταν χαμηλότερη από αυτές των μαθητών της Β. Τέλος, οι μαθητές, στη συντριπτική πλειοψηφία τους, επέλεξαν αλγεβρικούς τρόπους επίλυσης.

Λέξεις κλειδιά: Επίλυση προβλήματος, Ιστορία των Μαθηματικών

ABSTRACT

Problems are a central element in mathematics education and play a crucial role in the development of students' mathematical thinking. In fact, using historical mathematical problems in the classroom can contribute to a better understanding of concepts and procedures, as well as improve students' beliefs about mathematics and its role in people's lives. However, various studies have observed that students encounter many difficulties in problem-solving. This study aims to investigate the performance of high school students in solving historical mathematical problems and to identify any differences in these performances across the three grades. Additionally, it will examine students' preferences between arithmetic and algebraic methods of solving problems. The study involved 21 students, 7 from each high school grade, who were given a self-made worksheet with four problems to solve. The results showed that students' performances were moderate. Significant improvement was observed in the answers from 10th to 11th grade, while the performance of 12th-grade students was lower than that of 11th-grade students. Finally, the vast majority of students chose algebraic methods of solving problems.

Keywords: Problem-solving, History of mathematics

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μαθηματική εκπαίδευση παίζει θεμελιώδη ρόλο στη διαμόρφωση των γνωστικών ικανοτήτων και των δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων των μαθητών. Ένας τρόπος ενίσχυσης της μαθηματικής μάθησης είναι η ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία, ειδικά μέσω της επίλυσης προβλημάτων με ιστορικό υπόβαθρο. Αυτή η προσέγγιση όχι μόνο εμβαθύνει την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, αλλά και ενισχύει την εκτίμηση των μαθητών για την εξέλιξη των μαθηματικών ιδεών στο πέρασμα του χρόνου (Swetz F. , 1995).

Η επίλυση προβλήματος αποτελεί βασικό στόχο των ελληνικών προγραμμάτων σπουδών, αλλά και της μαθηματικής εκπαίδευσης γενικότερα. Παρόλα αυτά, πολλές έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί τα τελευταία χρόνια δείχνουν μια αρκετά χαμηλή επίδοση των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων (Lester, Garofalo, & Kroll, 1989; Verschaffel, et al., 1999).

Η σημασία της παρούσας μελέτης έγκειται στο να εξεταστεί το πρόβλημα αυτό. Ο σκοπός της έρευνας είναι να διερευνηθούν οι επιδόσεις των μαθητών Λυκείου στην επίλυση ιστορικών μαθηματικών προβλημάτων. Πιο συγκεκριμένα, θα μελετηθεί αν υπάρχουν διαφοροποιήσεις στις επιδόσεις των μαθητών συγκριτικά με την τάξη Λυκείου στην οποία φοιτούν. Η έρευνα αποσκοπεί, ακόμη, στην ανάδειξη του τρόπου επίλυσης που προτιμούν οι μαθητές, αριθμητικό ή άλγεβρικό, αλλά και εαν οι πρωτότυπες λύσεις του εκάστοτε συγγραφέα του κάθε προβλήματος μπορούν να ανιχνευθούν στις απαντήσεις των μαθητών.

Στην ερευνητική προσέγγιση θεωρήθηκε καταλληλότερη η ποιοτική μεθοδολογία. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε 21 μαθητές Λυκείου, 7 μαθητές από κάθε τάξη, με τη χρήση ενός αυτοσχέδιου φύλλου εργασίας. Το φύλλο εργασίας περιείχε τέσσερα ιστορικά προβλήματα μαθηματικών, τα οποία επιλέχθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε αφενός να ανταποκρίνονται στο επίπεδο γνώσεων των μαθητών Λυκείου και αφετέρου να προέρχονται από διαφορετικούς πολιτισμούς και χρονικές περιόδους κατά την εξελικτική πορεία της άλγεβρας ιστορικά.

Η παρούσα διπλωματική εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη, το θεωρητικό και το ερευνητικό.

Στο θεωρητικό μέρος περιλαμβάνονται τρία κεφάλαια ($1^{ο}$, $2^{ο}$ και $3^{ο}$). Στο 1ο κεφάλαιο παρουσιάζεται ο ρόλος της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση. Πιο συγκεκριμένα, αναλύονται τα επιχειρήματα υπέρ και κατά της αξιοποίησης της ιστορίας, όπως και τρόποι ενσωμάτωσής της στη διδασκαλία των μαθηματικών. Στο $2^{ο}$ κεφάλαιο γίνεται αναφορά στην έννοια του προβλήματος και περιγράφονται τα στάδια στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος, όπως τα έχουν αναλύσει διάφοροι ερευνητές, ενώ παρουσιάζονται και κάποιες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη διαδικασία αυτή. Τέλος, επισημαίνεται ο ρόλος του προβλήματος στη μαθηματική εκπαίδευση. Στο $3^{ο}$ κεφάλαιο, πραγματοποιείται μια ιστορική αναδρομή στην εξελικτική πορεία της άλγεβρας, μέσα από ιστορικά μαθηματικά προβλήματα.

Το ερευνητικό μέρος της εργασίας αποτελείται από τρία κεφάλαια ($4^{ο}$, $5^{ο}$ και $6^{ο}$). Στο $4^{ο}$ κεφάλαιο παρουσιάζεται ο στόχος και τα ερευνητικά ερωτήματα της μελέτης. Επίσης, γίνεται ανάλυση της μεθοδολογίας και περιγράφεται το ερευνητικό εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε, αλλά και η διαδικασία εκτέλεσης της έρευνας. Στο 4ο κεφάλαιο παρατίθενται τα ευρήματα της παρούσας μελέτης, ενώ το 5ο κεφάλαιο περιλαμβάνει τα συμπεράσματα που προκύπτουν, έπειτα από την ανάλυση και την ερμηνεία των αποτελεσμάτων, καθώς και προτάσεις για μελλοντικές έρευνες. Τέλος, η εργασία ολοκληρώνεται με τη βιβλιογραφία και το παράρτημα, το οποίο περιλαμβάνει το φύλλο εργασίας που δημιουργήθηκε για την έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση

1.1. Παιδαγωγική-Μαθηματικά

Η Παιδαγωγική κάνει την εμφάνισή της από την αρχαία Ελλάδα, αλλά εξελίσσεται σταδιακά από ανθρώπινη ενέργεια σε επιστήμη. Ο όρος «παιδαγωγική» παράγεται από τη λέξη «παιδαγωγός», η ετυμολογία της οποίας προέρχεται από τις αρχαίες ελληνικές λέξεις «παις» και «άγω», που σημαίνει «οδηγώ το παιδί». Ξεκίνησε, στην αρχαία Ελλάδα, ως ένα υποβαθμισμένο επάγγελμα που αναλάμβανε κάποιος δούλος, ο οποίος μάλιστα κρινόταν ανεπαρκής για άλλες εργασίες και ήταν υπεύθυνος να συνοδεύει το παιδί από το σπίτι στο σχολείο, ενώ στους ρωμαϊκούς χρόνους, το επάγγελμα αυτό αναλάμβανε μόνο κάποιος με υψηλή μόρφωση (Πυργιωτάκης, 2011). Από την Αθήνα των κλασικών χρόνων, λοιπόν, άρχισε να εμφανίζεται η ανάγκη για αγωγή ως καθοδήγηση των νεότερων από τους παλαιότερους. Η προσπάθεια συστηματοποίησης του τρόπου μετάδοσης της πείρας και των γνώσεων οδήγησε στην σταδιακή εξέλιξη της παιδαγωγικής από «τέχνη» της αγωγής, την οποία μπορούσε να εξασκήσει οποιοσδήποτε χωρίς κριτήρια, σε «επιστήμη» της αγωγής κατά τον 17^{ο} αιώνα.

Ο Πλάτων υπήρξε ο πρώτος που δημιούργησε τη φιλοσοφία της αγωγής και πίστευε ότι η παιδεία είναι το «εν μέγα». Πριν την εποχή του Πλάτωνα, παρουσιάστηκαν άνθρωποι, οι οποίοι είχαν ως μόνο επάγγελμα το να διδάσκουν, οι λεγόμενοι «σοφιστές», δηλαδή ειδικοί της γνώσης. Η διδασκαλία τους, πρώτη φορά, ξεφεύγει από τη μάθηση κάποιας συγκεκριμένης τέχνης και παίρνει τη μορφή μιας «γενικής αγωγής», η οποία περιλαμβάνει θεωρητικές γνώσεις για όλες τις επιστήμες και τις τέχνες. Κύριος αντιπρόσωπος αυτής της αγωγής αποτέλεσε ο Ιππίας ο Ηλείος, ο οποίος θεωρείται και θεμελιωτής της μαθηματικής αγωγής, καθώς υποστήριζε ότι τα μαθηματικά αποτελούν την επιστήμη, που βρίσκει εφαρμογή σε κάθε πεδίο της σκέψης και της εργασίας και η μελέτη τους καλλιεργεί τη μόρφωση του πνεύματος (Chateau, 1958).

Κατά την εποχή των σοφιστών, εμφανίστηκαν δύο μορφές αγωγής, η μια θεμελιωνόταν στη ρητορική και τη διαλεκτική και αποσκοπούσε στη μόρφωση του δικηγόρου ή του πολιτικού και η άλλη αφορούσε τη μαθηματική αγωγή και προετοίμαζε τους μηχανικούς. Όμως, καμία από τις δύο δεν αποτελούσε μια ολοκληρωμένη αγωγή και δεν ήταν αρκετή για τη διάπλαση ενός καλού πολίτη. Έτσι, μια τρίτη μορφή παιδείας, που ξεκίνησε με έναν σοφιστή, τον Πρωταγόρα από τα Άβδηρα, άρχισε να ασχολείται με την ηθική αγωγή και προσπάθησε να απαντήσει στα ερωτήματα «πως θα διδάσκωμε την αρετή;» και το βασικό ερώτημα, το οποίο αποτελεί αφετηρία για ολόκληρη την πλατωνική φιλοσοφία, «η αρετή μπορεί να διδαχθεί;» (Chateau, 1958).

Τα ερωτήματα αυτά άρχισαν να δίνουν μια πιο ανθρωπιστική διάσταση στην παιδεία. Η αγωγή, σύμφωνα με τον Πλάτωνα, αποτελεί την προσπάθεια να ξυπνήσει η ψυχή από το λήθαργο και να φτάσει στον κόσμο των ιδεών (Φράγκος, 1998). Ο ίδιος υποστήριξε πως τα μαθηματικά έχουν μεγάλη παιδευτική αξία και έκρινε απαραίτητη τη μελέτη τους ειδικά από αυτούς που διοικούν. Η αξία που προσέδιδε στην επιστήμη των Μαθηματικών φαίνεται και από την περίφημη επιγραφή που υπήρχε στην είσοδο της Ακαδημίας του Πλάτωνα «Ουδείς αγεωμέτρητος εισίτω μοι την στέγην», δηλαδή «Κανείς να μην εισέρχεται εδώ αν δεν γνωρίζει γεωμετρία» και σύμφωνα με τον Badiou (Badiou, 2018), το «εδώ» δεν αναφέρεται μόνο στην Ακαδημία, αλλά γενικότερα στη φιλοσοφία. Τα μαθηματικά, για τον Πλάτωνα, θα πρέπει να διδάσκονται όχι επί τέχνη, δηλαδή για τις πρακτικές εφαρμογές τους, αλλά επί παιδεία, δηλαδή για την πνευματική καλλιέργεια των ανθρώπων και τη μόρφωσή τους. Έτσι, τα Μαθηματικά, που για τον Ιππία αποτελούσαν τη βάση της πολυτεχνικής μόρφωσης, αποκτούν έναν ανώτερο προορισμό για τον Πλάτωνα, καθώς θεωρούνται η βάση για τη μόρφωση του πνεύματος (Chateau, 1958).

1.2. Ο ρόλος της ιστορίας στη Μαθηματική εκπαίδευση

Στις μέρες μας, τα Μαθηματικά που διδάσκονται στα σχολεία έχουν καταλήξει να αποτελούνται από στείρα απομνημόνευση κανόνων και τύπων, με αποτέλεσμα να έχει δημιουργηθεί μια αρνητική στάση των περισσότερων μαθητών απέναντι τους (Πολυχρονόπουλος, 1980). Αυτό οφείλεται κυρίως στις μεθόδους διδασκαλίας που χρησιμοποιούνται στο σημερινό σχολείο για τη διδασκαλία των μαθηματικών, οι οποίες περιορίζουν σε μεγάλο βαθμό την ανθρωπιστική διάσταση του μαθήματος (Καλογεράκης, 1995), με αποτέλεσμα να χάνεται η μορφωτική αξία των Μαθηματικών, η οποία έχει αναγνωριστεί από την εποχή του Πλάτωνα, και αφορά στην ανάπτυξη της ορθολογικής σκέψης και τη γενικότερη μόρφωση του πνεύματος. Είναι, λοιπόν, σημαντικό να στραφεί η προσοχή στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών και όχι στη διδασκαλία θεωρημάτων και αφηρημένων σχέσεων που απωθούν τους μαθητές. Η ανθρωπιστική διάσταση του μαθήματος θα κινήσει το ενδιαφέρον των μαθητών και θα αλλάξει την προσωπική στάση τους για τα μαθηματικά. Πρέπει ο μαθητής να πεισθεί ότι έχει σημαντικούς λόγους να ενδιαφερθεί για τα ίδια τα μαθηματικά και αυτό που μας επιτρέπουν να σκεφτούμε (Badiou, 2018).

Κάθε μαθηματική ενότητα έχει την ιστορία της, τους ήρωες και τις ηρωίδες της (Καλογεράκης, 1995). Αποτελείται από προσπάθειες πολλών αιώνων και πολλών ανθρώπων να κατανοήσουν τον κόσμο γύρω τους και να βελτιώσουν τη ζωή τους. Η ιστορία των Μαθηματικών είναι γεμάτη περιπέτειες με πρωταγωνιστές ανθρώπους, των οποίων η συμβολή στην ανάπτυξή της επιστήμης ήταν καθοριστική. Ο εμπλουτισμός του μαθήματος, λοιπόν, με την Ιστορία των Μαθηματικών θα φέρει τους μαθητές κοντά στα μαθηματικά και θα τους βοηθήσει να κατανοήσουν καλύτερα τις μαθηματικές αλήθειες, οι οποίες στηρίζονται στην ανθρώπινη λογική. Ο Guedji αναφέρει χαρακτηριστικά στο βιβλίο του «Το θεώρημα του παπαγάλου» σχετικά με την έλλειψη του ιστορικού πλαισίου από τη διδασκαλία των μαθηματικών: «Κάθε φορά όμως ο καθηγητής του μιλούσε για το θεώρημα, ποτέ για τον άνθρωπο. Άλλωστε στο μάθημα των μαθηματικών δεν συζητούσαν ποτέ για τους ανθρώπους. Που και που κάποιο όνομα έβγαινε στην επιφάνεια: Θαλής, Πυθαγόρας, Pascal, Descartes ήταν όμως ένα σκέτο όνομα. Σαν όνομα τυριού ή σταθμό του μετρό…Οι μαθηματικοί τύποι και οι αποδείξεις απλώς προσγειωνόντουσαν στον πίνακα. Σαν να μην τους είχε ποτέ κανείς δημιουργήσει, σαν να ήταν εκεί πάντα, όπως τα βουνά και τα ποτάμια. Αλλά και τα βουνά έχουν κάποια ιστορία, κάποια αρχή.» (Guedji, 1999, σ. 35).

Η ιστορία μπορεί, ακόμη, να απαντήσει στα «γιατί», που δημιουργούνται στο μυαλό των μαθητών, μετά τη διδασκαλία κάθε θεωρήματος και έννοιας, αλλά και να οδηγήσει στην αναγνώριση των μαθηματικών ως «μια κοινωνικά κατασκευασμένη γνώση και όχι μια αυθαίρετη επιστήμη» (Καλογεράκης, 1995, σ. 121). Θα πρέπει, σύμφωνα με τον Badiou, να αφηγείται με ζωντανό τρόπο και όχι με απλή παράθεση των σταθμών της εξέλιξης μιας έννοιας. Ο δάσκαλος δεν πρέπει να αρκεστεί μόνο σε μια πληκτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων ενός θεωρήματος, αλλά θα πρέπει να κατευθύνει τους μαθητές στην κατανόηση της χρησιμότητάς του και στην αναζήτηση πληροφοριών σχετικά με το πότε ανακαλύφθηκε, από ποιόν, σε ποιες συνθήκες και αν δημιούργησε αντιπαραθέσεις στον επιστημονικό κόσμο (Badiou, 2018).

Είναι, λοιπόν, σημαντικό αυτός που διδάσκει μαθηματικά, εκτός από τη γνώση του αντικειμένου, να έχει μελετήσει σε βάθος την ιστορική του πορεία και εξέλιξη, ώστε να δημιουργήσει, μέσω της ιστορίας, καλύτερες συνθήκες μάθησης για τους μαθητές και μια πιο θετική στάση απέναντί τους. Τα μαθηματικά και η διδακτική τους έχουν απασχολήσει πολύ τους φιλοσόφους και τους παιδαγωγούς, καθώς από τα αρχαία χρόνια αναγνωρίστηκε η μορφωτική τους αξία. Τα τελευταία χρόνια, έχει αρχίσει να συζητιέται η αξιοποίηση της ιστορίας τους στη διδακτική πράξη, η οποία φαίνεται μέσα από έρευνες που έχουν γίνει, ότι συμβάλλει θετικά στον τρόπο, με τον οποίο αντιμετωπίζουν οι μαθητές τα μαθηματικά και στη βελτίωση της διδασκαλίας.

1.3. Επιχειρήματα υπέρ της διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας

Τα επιχειρήματα που υποστηρίζουν την αξιοποίηση της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών συνοψίζονται σε δύο κατηγορίες, οι οποίες σχετίζονται με το σκοπό για τον οποίο πραγματοποιείται η χρήση της ιστορίας στη διδακτική πράξη. Οι χρήσεις της ιστορίας μπορεί να είναι:

- Η ιστορία ως εργαλείο, και
- Η ιστορία ως στόχος.

Στην πρώτη κατηγορία εντάσσονται τα επιχειρήματα που σχετίζονται με το πώς οι μαθητές μαθαίνουν μαθηματικά. Η χρήση της ιστορίας ως εργαλείο θα οδηγήσει σε μια αποδοτικότερη διδασκαλία των μαθηματικών και θα βελτιώσει την ποιότητα της μάθησης. Με τον τρόπο αυτό, τα μαθήματα θα γίνουν πολύ πιο διαδραστικά και ενδιαφέροντα για τους μαθητές, με αποτέλεσμα να συμμετέχουν πιο ενεργά στην εκπαιδευτική διαδικασία (Gulikers & Blom, 2001). Μέσα από την ιστορία των μαθηματικών τα παιδιά θα δουν μια πρόκληση, θα γοητευτούν και αυτό θα τους εμπνεύσει να εξερευνήσουν τα μαθηματικά λόγω του ενδιαφέροντος που θα τους προκαλέσει και όχι λόγω υποχρέωσης (Τρέσσου Φατούρου, 2002). Έτσι, τα παιδιά θα κατανοήσουν σε βάθος τις μαθηματικές έννοιες μέσα από την εξέλιξή τους ιστορικά. Αυτό θα τους ενθαρρύνει να δουν την ανθρώπινη πλευρά των μαθηματικών και να αρχίσουν να τα θεωρούν λιγότερο τρομακτικά, καθώς θα συνειδητοποιήσουν ότι δεν είναι κάτι που εμφανίστηκε έτοιμο αλλά αναπτύχθηκε από ανθρώπους σε στάδια. Είναι σημαντικό τα παιδιά να αναγνωρίσουν τις προσπάθειες εκατοντάδων χρόνων και τα προβλήματα που αντιμετώπισαν οι μαθηματικοί μέχρι να φτάσουν στην τεκμηρίωση όλων αυτών των εννοιών και θεωρημάτων, ώστε να μην απογοητεύονται όταν κάνουν λάθη (Jankvist, 2009). Έτσι, θα αποκτήσουν αυτοπεποίθηση και θα συνειδητοποιήσουν ότι τα λάθη, οι αμφιβολίες και οι εναλλακτικές προσεγγίσεις αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της διαδικασίας επίλυσης προβλημάτων (Farmaki & Paschos, 2007).

Επίσης, η αναζήτηση εργαλείων και ιστορικών θεμάτων θα διεγείρει τον ενθουσιασμό και των καθηγητών (Gulikers & Blom, 2001), ενώ θα τους διευκολύνει και στην αναγνώριση λαθών και παρανοήσεων από τους μαθητές (Jankvist, 2009). Οι περισσότερες δυσκολίες των μαθητών μπορούν να ταυτοποιηθούν με δυσκολίες που αντιμετωπίστηκαν κατά την εξέλιξη κάθε μαθηματικής έννοιας, γεγονός που βοηθά τους καθηγητές αρχικά να είναι προετοιμασμένοι για αυτές τις δυσκολίες, αλλά και, μέσα από τη χρήση της ιστορίας, να μπορέσουν να τις ξεπεράσουν (Jankvist, 2009). Οι δυσκολίες αυτές αποτελούν τα επιστημολογικά εμπόδια, τα οποία, σύμφωνα με το Brousseau (Brousseau, 1997), είναι αυτά από τα οποία δεν μπορεί κανείς να ξεφύγει και δεν πρέπει να ξεφύγει, λόγω της καταλυτικής τους επίδρασης στη διαμόρφωση της γνώσης.

Ένα ακόμη σημαντικό επιχείρημα υπέρ της χρήσης της ιστορίας των μαθηματικών ως εργαλείο στην εκπαιδευτική διαδικασία αναφέρεται στο βιογενετικό νόμο του Haeckel, σύμφωνα με τον οποίο, «η οντογένεση ανακεφαλαιώνει τη φυλογένεση». Ο νόμος αυτός αναφέρεται για να τονίσει ότι η ανάπτυξη της κατανόησης μαθηματικών εννοιών από έναν μαθητή θα πρέπει να ακολουθήσει την εξελικτική πορεία ανάπτυξης αυτών των εννοιών ιστορικά, καθώς αυτός φαίνεται να είναι ο πιο φυσικός τρόπος μάθησης (Jankvist, 2009). Βέβαια, θα αποτελούσε υπεραπλούστευση να θεωρήσουμε ότι μπορούμε να ορίσουμε τον τρόπο μάθησης των παιδιών με βάση την ιστορική εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης, καθώς παίζει σημαντικό ρόλο το πολιτισμικό, κοινωνικό, ψυχολογικό και διδακτικό περιβάλλον (Farmaki & Paschos, 2007). Ο Brousseau (Brousseau, 1997), λοιπόν, επισημαίνει ότι η ιστορία χρειάζεται πάντα προσαρμογές προτού χρησιμοποιηθεί. Οι καθηγητές θα πρέπει να σχεδιάσουν την παρουσίαση της ιστορικής εξέλιξης κατάλληλα, ώστε αυτή να οδηγήσει τους μαθητές στη γένεση της μαθηματικής έννοιας (Jankvist, 2009).

Η δεύτερη κατηγορία αφορά τη χρήση της ιστορίας ως στόχο. Σε αυτή εντάσσονται τα επιχειρήματα που υποστηρίζουν ότι τα μαθησιακά αποτελέσματα της ιστορίας αποτελούν από μόνα τους ένα σκοπό (Jankvist, 2009). Μέσα από την ιστορία, τα παιδιά θα κατανοήσουν το ρόλο των μαθηματικών στην κοινωνία γενικότερα. Έτσι, θα αντιληφθούν την ύπαρξη και την εξέλιξη των μαθηματικών μέσα στον χρόνο, καθώς και τον ενεργό ρόλο που οι άνθρωποι έχουν στην πορεία αυτής της εξέλιξης (Tzanakis & Thomaidis, 2000). Μπορούμε να φέρουμε στην τάξη βιογραφίες σπουδαίων μαθηματικών, καθώς μέσα από τη ζωή και τη δουλειά τους θα τονίσουμε το ανθρώπινο πρόσωπο των μαθηματικών, ενώ πολλές φορές η ζωή τους περιλαμβάνει σημεία που μπορούν να προκαλέσουν το ενδιαφέρον των παιδιών, όπως η δολοφονία, στη ζωή της Υπατίας ή ο διωγμός, στη ζωή του Γαλιλαίου (Lingard, 2002). Επίσης, είναι ιδιαίτερα σημαντικό να αναφερθούμε και σε γυναίκες μαθηματικούς, για να κινήσουμε το ενδιαφέρον και των κοριτσιών συγκεκριμένα, ώστε να αποκτήσουν περισσότερη αυτοπεποίθηση και να πάψουν να θεωρούν τον εαυτό τους κατώτερο στα μαθηματικά (Gulikers & Blom, 2001).

Η ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία θα οδηγήσει τους μαθητές να αναλογιστούν τη σχέση μεταξύ των μαθηματικών και της κοινωνίας. Με τον τρόπο αυτό, θα συνειδητοποιήσουν ότι τα μαθηματικά δεν είναι ένα δημιούργημα μόνο των δυτικών πολιτισμών, αλλά ότι πολλοί διαφορετικοί πολιτισμοί έχουν ασκήσει σημαντική επιρροή στην δημιουργία και την εξέλιξή τους. Αυτό μπορεί να φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο για τους καθηγητές πολυπολιτισμικών τάξεων, καθώς η αναφορά στην ιστορία διαφορετικών πολιτισμών και η συμμετοχή τους στην ανάπτυξη των μαθηματικών, θα βοηθήσει να δημιουργηθεί ένα κλίμα συνεργασίας και σεβασμού μεταξύ των παιδιών διαφορετικών εθνικοτήτων (Gulikers & Blom, 2001).

Τέλος η χρήση της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να αναδείξει συνδέσεις με άλλες επιστήμες, όπως η φυσική ή η αστρονομία. Τα μαθηματικά δεν θα πρέπει να απομονώνονται από τα υπόλοιπα μαθήματα του σχολείου, καθώς, όπως φαίνεται και από την ιστορική ανάλυση, αποτελούν τη βάση για τα περισσότερα από αυτά. Είναι σημαντικό να δημιουργηθούν από τους καθηγητές ευκαιρίες, ώστε οι μαθητές να δουν την άμεση αλληλεπίδραση και τη σύνδεσή τους, γεγονός που θα τους οδηγήσει σε μια πιο βαθιά κατανόηση (Gulikers & Blom, 2001).

1.4. Αντιρρήσεις για τη διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας

Ωστόσο, εκτός των επιχειρημάτων υπέρ της χρήσης της ιστορίας, έχουν διατυπωθεί και κάποιες αντιρρήσεις και δυσκολίες ενσωμάτωσης της στο μάθημα. Σύμφωνα με τον Τζανάκη (Τζανάκης, 2009) και Tzanakis, Arcavi et al (Tzanakis, Arcavi, & et al, 2000), οι ενστάσεις μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε 2 κατηγορίες: ενστάσεις επιστημολογικού-φιλοσοφικού χαρακτήρα και ενστάσεις πρακτικού-διδακτικού χαρακτήρα.

Στην πρώτη κατηγορία εντάσσονται τα επιχειρήματα που αφορούν τη φύση των μαθηματικών. Σύμφωνα με τους Tzanakis, Arcavi et al (Tzanakis, Arcavi, & et al, 2000), Siu (Siu, 2006) και Τζανάκης (Τζανάκης, 2009), η ιστορία των μαθηματικών δεν είναι μαθηματικά και αν θέλει κάποιος να τη διδάξει, θα πρέπει να το κάνει αφού διδάξει πρώτα τα ίδια τα μαθηματικά. Το επιχείρημα αυτό τονίζει ότι τα μαθηματικά ταυτίζονται με τα αποτελέσματα, χωρίς να υπάρχει καμία αναφορά στους λόγους, στις συνθήκες και στους ανθρώπους που οδηγήθηκαν στα αποτελέσματα αυτά. Ακόμη, η χρήση της ιστορίας μπορεί να κάνει το μάθημα πιο περίπλοκο προκαλώντας σύγχυση στους μαθητές, ενώ επισημαίνεται πως η πρόοδος στα μαθηματικά έχει ως στόχο να κάνει τα δύσκολα προβλήματα εύκολα, οπότε δεν έχει νόημα να ασχοληθούμε με τα προβλήματα που υπήρχαν στο παρελθόν. Τέλος, οι περισσότεροι μαθητές έχουν μια αρνητική στάση απέναντι στην ιστορία, συνεπώς θα βρουν βαρετή και την ιστορία των μαθηματικών.

Στις ενστάσεις πρακτικού χαρακτήρα συμπεριλαμβάνονται η έλλειψη διδακτικού χρόνου, αλλά και η έλλειψη σε κατάλληλες πηγές και υλικά που θα βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς στην ένταξη της ιστορίας στην εκπαιδευτική διαδικασία (Tzanakis, Arcavi, & et al 2000, Τζανάκης 2009). Επίσης, οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί δεν έχουν τις απαραίτητες ιστορικές γνώσεις, πράγμα που οφείλεται, στην έλλειψη προγραμμάτων επιμόρφωσής τους σχετικά με την ενσωμάτωσης της ιστορίας στο μάθημα των μαθηματικών (Gulikers & Blom, 2001). Είναι, συνεπώς, απαραίτητη η επιμόρφωσή τους τόσο κατά τις προπτυχιακές σπουδές τους όσο και κατά την επαγγελματική τους πορεία. Η έλλειψη ιστορικών γνώσεων οδηγεί και σε έλλειψη αυτοπεποίθησης για να συμπεριλάβουν ιστορικά θέματα στη διδασκαλία τους, με αποτέλεσμα να τα αποφεύγουν.

Ακόμη, η χρήση της ιστορίας φαίνεται να δημιουργεί προβλήματα και στις διαδικασίες αξιολόγησης (Tzanakis, Arcavi, & et al 2000, Τζανάκης 2009). Δεν υπάρχει κάποιος τρόπος να αξιολογηθούν οι μαθητές στην ιστορία των μαθηματικών, καθώς η φύση της είναι περισσότερο ποιοτική, με αποτέλεσμα, αφού δεν συμπεριλαμβάνεται στην αξιολόγηση τους, οι μαθητές να μην της δίνουν την ανάλογη προσοχή. Τέλος, υπάρχει το σημαντικό ερώτημα που απασχολεί πολλούς εκπαιδευτικούς «Μπορεί πράγματι η ενσωμάτωση της ιστορία των μαθηματικών στη διδασκαλία να βελτιώσει τη μάθηση των μαθηματικών;» (Τζανάκης 2009, Siu 2006). Σύμφωνα με τον Τζανάκη (Τζανάκης, 2009), έχουν γίνει αρκετές έρευνες τα τελευταία χρόνια, οι οποίες οδηγούνται στο συμπέρασμα αυτό, όμως για να τεκμηριωθεί επαρκώς θα χρειαστεί ακόμη πολλή προσπάθεια.

1.5. Τρόποι ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών

Φαίνεται, λοιπόν, ότι υπάρχουν κάποιες δυσκολίες αναφορικά με την πρακτικό τρόπο ένταξης της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία. Ωστόσο, το τελευταίο διάστημα έχουν διεξαχθεί πολλές έρευνες με στόχο να αναζητήσουν χρήσιμους και πρακτικούς τρόπους αξιοποίησης της ιστορίας, ώστε να προσφέρει σημαντικά οφέλη στην εκμάθηση των μαθηματικών.

Ο Jankvist (Jankvist, 2009) αναλύει τους τρόπους προσέγγισης σε τρεις κατηγορίες: τις διαφωτιστικές προσεγγίσεις, τις προσεγγίσεις βασισμένες σε ενότητες και τις προσεγγίσεις βασισμένες στην ιστορία. Αυτές διαφέρουν ως προς τη βαρύτητα που δίνεται στην ιστορία κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Όσον αφορά τις διαφωτιστικές προσεγγίσεις, σε αυτές η διδασκαλία συμπληρώνεται με πληροφορίες από την ιστορία, ενώ αυτές μπορεί να αποτελούν και τον πρόλογο ή επίλογο του κάθε κεφαλαίου. Οι δάσκαλοι μπορούν να εισάγουν μια καινούρια μαθηματική έννοια προσεγγίζοντας την αρχικά από την ιστορική πλευρά (Gulikers & Blom, 2001).

Η Κολέζα (Κολέζα, 2006) αναφέρεται σε αυτές τις προσεγγίσεις ως στρατηγική προσθήκης, χωρίζοντας την σε δύο μορφές. Η πρώτη αφορά την παρουσίαση ιστορικών σημειωμάτων στο τέλος του κεφαλαίου και η δεύτερη την ένταξη ιστορικών προβλημάτων στο σύνολο των προβλημάτων προς επίλυση. Οι στρατηγικές αυτές δεν αλλάζουν το πρόγραμμα σπουδών, απλώς το διευρύνουν. Στη χρήση ιστορικών προβλημάτων κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών αναφέρεται και ο Swetz (Swetz F. , 1995) επισημαίνοντας ότι αυτά είναι πιο αποτελεσματικά όταν δίνονται ως εργασίες στους μαθητές διασκορπισμένα κατά τη διάρκεια όλης της χρονιάς. Τα προβλήματα αυτά ενθαρρύνουν τους μαθητές και δημιουργούν ένα πιο ευχάριστο κλίμα στα σχολικά θέματα. Επίσης, κάποια ιστορικά προβλήματα δεν εμπλουτίζουν απλώς το μάθημα, αλλά προσφέρουν καλύτερες μεθόδους επίλυσης από τις σύγχρονες (Fried, 2001).

Οι προσεγγίσεις βασισμένες σε ενότητες αφορούν εκπαιδευτικές ενότητες αφιερωμένες στην ιστορία. Αυτές μπορεί να επικεντρώνονται σε ένα μικρό θέμα 2-3 διδακτικών ωρών άμεσα συνδεδεμένο με την διδακτέα ύλη, οι οποίες αναφέρονται ως «διδακτικά πακέτα» (Tzanakis, Arcavi, & et al, 2000) και αποτελούν έτοιμες συλλογές υλικού που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς απευθείας στην τάξη. Μπορούν, επίσης, να χρησιμοποιηθούν μεγαλύτερες ενότητες περισσότερων διδακτικών ωρών, οι οποίες θα αναφέρονται και σε κλάδους των μαθηματικών που δεν περιλαμβάνονται στη διδακτέα ύλη. Οι Tzanakis, Arcavi et al (Tzanakis, Arcavi, & et al, 2000) περιγράφουν κάποιους τρόπους χρήσης αυτών των ενοτήτων, όπως τα project, οι θεατρικές παραστάσεις, το διάβασμα πρωτότυπων ιστορικών πηγών. Τέλος, οι ενότητες αυτές μπορεί να αποτελούν ολόκληρα μαθήματα προγραμμάτων σπουδών σε πανεπιστημιακό επίπεδο, όπου η μελέτη της ιστορίας μπορεί να γίνει και με ερευνητικές εργασίες (Jankvist, 2009).

Τέλος, οι προσεγγίσεις βασισμένες στην ιστορία, σε αντίθεση με τις προσεγγίσεις βασισμένες σε ενότητες, δεν επικεντρώνονται στη μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών, αλλά την προσεγγίζουν έμμεσα. (Jankvist, 2009). Η προσέγγιση αυτή καθορίζει το πότε και το πώς θα παρουσιασθούν τα θέματα των μαθηματικών. Σύμφωνα με την Κολέζα (Κολέζα, 2006), η προσέγγιση αυτή χαρακτηρίζεται ως στρατηγική προσαρμογής και αφορά τη χρήση της ιστορικής εξέλιξης μιας έννοιας ως κατευθυντήρια γραμμή για το σχεδιασμό της διδασκαλίας της έννοιας. Με τον τρόπο αυτό, μπορεί να ξεπερασθεί και η δυσκολία που αφορά την έλλειψη διδακτικού χρόνου για την ενσωμάτωση της ιστορίας στο μάθημα, καθώς δεν απαιτεί κάποια επιπρόσθετα μαθήματα, αλλά οδηγεί στη διδασκαλία της έννοιας με έναν διαφορετικό τρόπο από τον παραδοσιακό (Fried, 2001)

1.6. Οφέλη από τη χρήση ιστορικών μαθηματικών προβλημάτων

Μια μέθοδος για να ενσωματωθεί η ιστορία των μαθηματικών στη διδασκαλία είναι μέσω της επίλυσης ιστορικών μαθηματικών προβλημάτων. Αυτά μπορούν να δοθούν στους μαθητές είτε αυτούσια όπως εντοπίζονται από ιστορικές πηγές, είτε με μικρές τροποποιήσεις, ώστε να γίνονται πιο κατανοητά στους μαθητές. Η χρήση αυτών των προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να συμβάλλει τόσο στην ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων όσο και στη βαθύτερη κατανόηση μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών.

Αρχικά, τα πρωτότυπα προβλήματα από την ιστορία των μαθηματικών αποτελούν, σύμφωνα με τον Swetz (Swetz F. , 1989, σ.376), "πνευματικά και παιδαγωγικά έργα τέχνης που μαρτυρούν μια έκφραση της ανθρώπινης ιδιοφυΐας". Ο ρόλος τους μοιάζει με το ρόλο ενός παλιού πίνακα ζωγραφικής ή ενός αγάλματος, που μαρτυρά στοιχεία για τον πολιτισμό και τη μαθηματική γνώση της εποχής. Σε ομιλία του Swetz (Swetz F. , 2007) σε συνέδριο της ένωσης Ιστορίας και Επιστημολογίας για τη Μαθηματική Εκπαίδευση, επισήμανε ότι η χρήση ιστορικών μαθηματικών προβλημάτων μπορεί να αναδείξει την αίσθηση της συνέχειας των μαθηματικών ανησυχιών ανά τους αιώνες και ανά τους λαούς, αφού έχει παρατηρηθεί ότι το ίδιο πρόβλημα ή είδος προβλήματος επιλύεται με διαφορετικούς τρόπους από κάθε λαό σε διαφορετικές χρονικές περιόδους. Οι μαθητές μπορούν να συγκρίνουν τους τρόπους επίλυσης τόσο μεταξύ των διαφορετικών εποχών όσο και με τις δικές τους λύσεις, για να κατανοήσουν την εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης.

Επίσης, τα προβλήματα από την ιστορία των μαθηματικών αποτελούν έμπρακτα παραδείγματα των ερωτημάτων που οδήγησαν στην ανάπτυξη της κάθε μαθηματικής έννοιας και διαδικασίας, γεγονός που δείχνει στους μαθητές τη χρησιμότητα κάθε έννοιας στην προσπάθεια του ανθρώπου να οργανώσει τον κόσμο γύρω του (Tzanakis, Arcavi, & et al, 2000). Αυτό θα συμβάλλει στη βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά, ώστε να πάψουν να τα θεωρούν αφηρημένους κανόνες και έννοιες χωρίς πρακτική σημασία.

Τα ιστορικά προβλήματα, σε αντίθεση με τα τυπικά προβλήματα των σχολικών εγχειριδίων, θα δώσουν κίνητρα στους μαθητές, λόγω του ασυνήθιστου πλαισίου που έχουν πολλά από αυτά τα προβλήματα, τα οποία χρησιμοποιούνταν στο παρελθόν για αναψυχή (Schunk, Pintrich, & Meece, 2008). Μάλιστα, λόγω του πλούσιου και ασυνήθιστου πλαισίου, πολλά από αυτά τα προβλήματα χρειάζονται συλλογικές συζητήσεις μέσα στην τάξη και ομαδική προσπάθεια, καθώς δεν μπορούν να επιλυθούν γρήγορα με μηχανική εφαρμογή τύπων και χωρίς κατανόηση.

Τέλος, ιδιαίτερα σημαντικό όφελος από τη χρήση των ιστορικών μαθηματικών προβλημάτων μπορεί να θεωρηθεί η σύνδεση των μαθηματικών με τα υπόλοιπα μαθήματα. Αρκετά προβλήματα από την ιστορία των μαθηματικών περιλαμβάνουν πληροφορίες για μυθολογικά και ιστορικά πρόσωπα, για τόπους αλλά και πολιτισμούς. Με αυτό τον τρόπο, παρέχουν ευκαιρίες για διαθεματικές δραστηριότητες με άλλα μαθήματα, όπως η γεωγραφία, η ιστορία, αλλά και η λογοτεχνία, αναδεικνύοντας πώς τα μαθηματικά σχετίζονται με την καθημερινή ζωή και τον πολιτισμό κάθε εποχής (Gulikers & Blom, 2001).

Συμπερασματικά, η αξιοποίηση των προβλημάτων ιστορικής προέλευσης στην τάξη μπορεί να συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση εννοιών και διαδικασιών, αλλά και στη δημιουργία κινήτρων και τη βελτίωση των πεποιθήσεων των μαθητών για τα μαθηματικά και το ρόλο τους στη ζωή των ανθρώπων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η επίλυση προβλημάτων στη μαθηματική εκπαίδευση

2.1. Ορισμός μαθηματικού προβλήματος

Πολλοί ερευνητές έχουν προσεγγίσει την έννοια του προβλήματος, προσπαθώντας να δώσουν τον κατάλληλο ορισμό, χωρίς όμως να έχουν καταλήξει σε έναν ενιαίο ορισμό για τον όρο που να θεωρείται ευρέως αποδεκτός και να δίνει το ακριβές νόημα της έννοιας.

Ο όρος «πρόβλημα», στη γενικότερη σημασία του, ορίζεται ως μια κατάσταση την οποία κάποιος προσπαθεί να αντιμετωπίσει χωρίς να γνωρίζει από πριν την ακριβή διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσει (Newell & Simon, 1972). Κατά τον Schoenfeld (1985), πρόβλημα θεωρείται μια αβέβαιη ερώτηση, ένα θέμα που πρέπει να διερευνηθεί. Στο βιβλίο των μαθηματικών της Α΄ γυμνασίου (Βανδουλάκης, Καλλιγάς, Μαρκάκης, & Φερεντίνος, 2022, σ.75) το πρόβλημα ορίζεται ως η «κατάσταση, που δημιουργείται, όταν αντιμετωπίζουμε εμπόδια και δυσκολίες στην προσπάθειά μας να φτάσουμε σε ένα συγκεκριμένο στόχο».

Στο εγχειρίδιο του PISA (OECD, 2014, σ.26), τα προβλήματα αποτελούν καταστάσεις όπου η λύση δεν είναι προφανής και η αντιμετώπισή τους απαιτεί σκέψη και ενεργή διαδικασία μάθησης (learning in action).

Ειδικότερα, μαθηματικό πρόβλημα θεωρείται το πρόβλημα, στο οποίο απαιτείται η χρήση μαθηματικών εννοιών και μεθόδων για την επίλυσή του (Μαμωνά-Downs & Παπαδόπουλος, 2017).

2.2. Διαδικασία επίλυσης προβλήματος

Η διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων αποτελεί έναν ουσιαστικό πυλώνα των μαθηματικών και αποτελεί τον βασικό τρόπο για την ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης. Στα μαθηματικά, η έννοια της "επίλυσης προβλήματος" αναφέρεται στη διαδικασία της εύρεσης λύσεων σε μαθηματικά προβλήματα. Σύμφωνα με το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM, 2000, σ.51), η επίλυση προβλήματος αναφέρεται στη συμμετοχή σε εργασίες όπου ο τρόπος επίλυσης δεν είναι προκαθορισμένος. Οι μαθητές πρέπει να εφαρμόσουν τις γνώσεις που ήδη έχουν αποκτήσει, με στόχο να αναπτύξουν νέα κατανόηση στα μαθηματικά και να βρουν τη λύση σε ένα πρόβλημα. Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων δεν είναι απλώς ένας στόχος εκμάθησης μαθηματικών, αλλά αποτελεί επίσης ένα κρίσιμο μέσο για την επίτευξη αυτού του στόχου.

Βασικό σημείο αναφοράς στην επίλυση προβλημάτων αποτέλεσε το έργο του Polya. Ο George Pólya ήταν ένας ουγγρο-αμερικανός μαθηματικός, ο οποίος έγινε ευρέως γνωστός για το έργο του στην επίλυση προβλημάτων και την εκπαίδευση των μαθητών στη μαθηματική σκέψη. Η συμβολή του στην επίλυση προβλημάτων ήταν εξαιρετικά σημαντική, καθώς παρουσίασε μια σειρά από μεθόδους και στρατηγικές για την αντιμετώπιση και την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Το έργο του «How to Solve It» (1945) αποτέλεσε μια σημαντική συμβολή στη μαθηματική εκπαίδευση, καθώς παρουσίασε μια γενικευμένη μεθοδολογία για την ανάλυση και την επίλυση προβλημάτων. Οι αρχές που προτείνει εξακολουθούν να είναι ευρέως αποδεκτές και να εφαρμόζονται σε διάφορα πεδία της εκπαίδευσης και της επιστήμης.

Για τον Polya, η επίλυση ενός προβλήματος είναι μια σύνθετη διαδικασία κατά την οποία κάποιος χρησιμοποιεί τις προϋπάρχουσες γνώσεις του, τις προηγούμενες εμπειρίες του, τη διαίσθησή του και τις πεποιθήσεις του για να βρει μια λύση. Ο Polya θεωρεί την ικανότητα επίλυσης προβλήματος ιδιαίτερα ουσιώδη για τον άνθρωπο, καθώς έρχεται συχνά αντιμέτωπος με προβλήματα σε όλους τους τομείς της καθημερινής του ζωής.

Στο βιβλίο του «How to solve it» (1945) προτείνει ένα μοντέλο επίλυσης προβλήματος που αποτελείται από τέσσερα στάδια.

Το πρώτο στάδιο περιλαμβάνει την «κατανόηση του προβλήματος». Αυτό το στάδιο θεωρείται το πιο κρίσιμο όλης της διαδικασίας, καθώς δεν είναι εφικτό κάποιος να δώσει απάντηση σε μια ερώτηση, την οποία δεν έχει κατανοήσει. Είναι σημαντικό σε αυτό το σημείο ο λύτης να χωρίσει τα δεδομένα από τα ζητούμενα και να εντοπίσει τη συνθήκη.

Το δεύτερο στάδιο αποτελείται από την «επινόηση ενός σχεδίου». Αφού το πρόβλημα γίνει πλήρως κατανοητό, θα ακολουθήσει η αναζήτηση στρατηγικών και μεθόδων για την επίλυσή του. Ο Polya προτείνει να εξεταστούν άλλα παρόμοια προβλήματα, τα οποία ο λύτης έχει ενδεχομένως λύσει στο παρελθόν, ώστε να αντληθούν ιδέες και γνώσεις που θα βοηθήσουν στη λύση του τρέχοντος προβλήματος. Συμπληρωματικά, συνιστά στον λύτη να βεβαιωθεί ότι έχει χρησιμοποιήσει όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες και δεδομένα που παρέχονται από το πρόβλημα. Το δεύτερο στάδιο είναι κρίσιμο για την επιτυχή επίλυση του προβλήματος, καθώς η στρατηγική που θα επιλεχθεί εδώ θα καθορίσει την πορεία προς τη λύση.

Στο τρίτο στάδιο πραγματοποιείται η «εκτέλεση του σχεδίου», όπου ο λύτης θα εφαρμόσει τη στρατηγική που επέλεξε στο προηγούμενο στάδιο για να οδηγηθεί στη λύση του προβλήματος. Στο σημείο αυτό, σύμφωνα με τον Polya, θα πρέπει να ελέγχεται προσεκτικά η ορθότητα κάθε βήματος που εκτελεί ο λύτης.

Τέλος, το τέταρτο στάδιο αφορά την «ανασκόπηση». Ο Polya τονίζει τη σημασία του στοχασμού της λύσης, στην οποία έχει καταλήξει ο λύτης, ώστε να εντοπιστούν τυχόν λάθη, καθώς και να αναζητηθούν εναλλακτικές βέλτιστες στρατηγικές επίλυσης. Ο συγγραφέας επισημαίνει την αξία αυτού του σταδίου, καθώς συντελεί στην ανάπτυξη της ικανότητας αντιμετώπισης προβλημάτων.

Τα στάδια αυτά, όπως διατυπώθηκα από τον Polya, αποτέλεσαν τη βάση για τον επιστημονικό κόσμο και προσεγγίστηκαν, στη συνέχεια, και από άλλους μελετητές, οι οποίοι έδωσαν τη δική τους οπτική.

Παρόμοια κατηγοριοποίηση των σταδίων προτείνει και ο Alan Schoenfeld στο βιβλίο του «Mathematical Problem Solving» (1985). Παρουσιάζει ένα διάγραμμα ροής το οποίο ξεκινά με την «ανάλυση», δηλαδή την κατανόηση και απλοποίηση του προβλήματος. Ακολουθεί ο «σχεδιασμός», ο οποίος περιλαμβάνει την περιγραφή ενός πρόχειρου σχεδίου δράσης. Στο σημείο αυτό, μπορεί να χρειαστεί να μεταβεί ο λύτης στο στάδιο της «εξερεύνησης», εάν προκύψουν δυσκολίες κατά την εύρεση σχεδίου λύσης, στο οποίο θα ανακαλέσει όμοια προβλήματα με αυτό που αντιμετωπίζει, ώστε να ανακαλύψει το κατάλληλο σχέδιο δράσης. Έτσι, αφού ξεπεραστούν οι δυσκολίες, ο λύτης θα πραγματοποιήσει την «εφαρμογή» του σχεδίου και, τέλος, την «επαλήθευση». Αυτή η διαδικασία απαιτεί την ανάπτυξη δεξιοτήτων για την επίλυση προβλημάτων, όπως η δημιουργικότητα και η κριτική σκέψη.

Η επίλυση ενός προβλήματος αποτελεί, λοιπόν, μια διαρκώς εξελισσόμενη και κυκλική διαδικασία (Wilson, Fernandez, & Hadaway, 1994), η οποία απαιτεί τη συνεχή αλληλεπίδραση με το περιβάλλον για τη διερεύνηση της φύσης του προβλήματος και των δυνητικών λύσεων, καθώς και για την αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας των χρησιμοποιούμενων στρατηγικών (OECD, 2014).

2.3. Δυσκολίες των μαθητών κατά την επίλυση προβλήματος και ο ρόλος του εκπαιδευτικού

Η ικανότητα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων είναι ιδιαίτερα σύνθετη και δεν αφορά την απλή εφαρμογή μαθηματικών γνώσεων (Lester F. , 1988). Τα αποτελέσματα πολλών ερευνών που έχουν πραγματοποιηθεί τα τελευταία χρόνια δείχνουν μια αρκετά χαμηλή επίδοση των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων (Lester, Garofalo, & Kroll, 1989; Verschaffel, et al., 1999).

Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1992) τα ακόλουθα τέσσερα κριτήρια μπορούν να κρίνουν την επιτυχία ή την αποτυχία του μαθητή στην επίλυση προβλημάτων:

1. Οι μαθηματικές γνώσεις του μαθητή
2. Η χρήση στρατηγικών επίλυσης προβλήματος
3. Η αυτορρύθμιση και
4. Οι πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με τις ικανότητές του και τα μαθηματικά

Ο Polya (1957) ανέλυσε τη συμπεριφορά και τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές σε κάθε στάδιο επίλυσης. Αρχικά, παρατηρήθηκε μια δυσκολία κατανόησης του προβλήματος, η οποία θεωρείται και ως η πιο συνηθισμένη δυσκολία ανάμεσα στους μαθητές. Η γλωσσική κατανόηση αποτελεί βασική προϋπόθεση για την αναπαράσταση των σχέσεων μεταξύ των δεδομένων και του ζητούμενου που εντοπίζονται στο πρόβλημα. Ο Mayer (1985) αναφέρει πως η ικανότητα κατανόησης και επίλυσης ενός προβλήματος εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από το αν ο λύτης διαθέτει την αντίστοιχη δομή ή γνωστικό πλαίσιο στη μνήμη του. Πολύ συχνά, κατά τη διδασκαλία επίλυσης κάποιου προβλήματος στη σχολική τάξη, δίνεται μεγαλύτερη έμφαση στην εύρεση της λύσης και του τελικού αποτελέσματος και ο δάσκαλος φαίνεται να προσπερνά γρήγορα το στάδιο της κατανόησης του προβλήματος, χωρίς να επικεντρώνεται σε αυτό.

Ο δάσκαλος παίζει ουσιώδη ρόλο στην κατανόηση του προβλήματος. Έτσι, πριν από την επίλυση, θα πρέπει να δώσει έμφαση στην κατανόηση του προβλήματος. Σύμφωνα με τις διδακτικές ενέργειες που προτείνουν οι Lester, Garofalo, & Kroll (1989) ο εκπαιδευτικός μπορεί να διαβάσει δυνατά το πρόβλημα στην τάξη ή να ζητήσει από έναν μαθητή να το διαβάσει, να εξετάσει τις λέξεις που μπορεί να προκαλούν προβλήματα κατανόησης και να ξεκινήσει μια συζήτηση σχετικά με τα βασικά στοιχεία του προβλήματος. Σκοπός αυτών των δράσεων είναι όχι μόνο να διευκολύνουν την κατανόηση του προβλήματος από τους μαθητές, αλλά και να υπογραμμίσουν τη σημασία της προσεκτικής ανάγνωσης και κατανόησης πριν από την αναζήτηση λύσης. Άλλωστε, το πιο δύσκολο στοίχημα τόσο για τους μαθητές όσο και για τους εκπαιδευτικούς αποτελεί το να καταφέρουν οι πρώτοι να αναπτύξουν τη σκέψη τους, και όχι την ικανότητα αποστήθισης.

Στο δεύτερο στάδιο του Polya, που αφορά την επινόηση ενός σχεδίου λύσης, οι περισσότεροι μαθητές ξεκινούν αμέσως τους υπολογισμούς για την επίλυση του προβλήματος, χωρίς να καταστρώσουν ένα συγκεκριμένο πλάνο επίλυσης και να αναλύσουν τις συνθήκες του προβλήματος. Μια βασική ικανότητα που απαιτείται στο στάδιο αυτό αποτελεί η επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής. Η επιλογή λανθασμένων στρατηγικών από τους μαθητές οφείλεται περισσότερο στη χαμηλή εξάσκηση με προβλήματα και όχι στις δυνατότητες των μαθητών. Η επιλογή μιας στρατηγικής είναι ευκολότερη όταν το πρόβλημα είναι οικείο με προηγούμενα προβλήματα που έχουν αντιμετωπίσει οι μαθητές (Lerch, 2004).

Σε αυτό το στάδιο, ο εκπαιδευτικός μπορεί να οδηγήσει με διακριτικότητα και στοχευμένες ερωτήσεις στη σύλληψη της κατάλληλης στρατηγικής επίλυσης και να βοηθήσει τους μαθητές να ανακαλέσουν στη μνήμη τους προγενέστερες μαθηματικές γνώσεις και παρόμοια προβλήματα που έχουν αντιμετωπίσει στο παρελθόν (Polya, 1957). Ο ρόλος του καθηγητή στην τάξη, σύμφωνα με τον Schoenfeld (2013), θα πρέπει να είναι αυτός του «άπιστου», θέτοντας ερωτήσεις όπως «Είναι αλήθεια;», «Πως το ξέρουμε;», ώστε οι μαθητές να είναι σε θέση να προβληματιστούν και να ελέγξουν την ορθότητα των βημάτων που εκτελούν.

Κατά την εκτέλεση του σχεδίου, όπως αναφέρει ο Polya (1957), οι μαθητές εκτελούν κάθε βήμα χωρίς υπομονή και συγκέντρωση, με αποτέλεσμα να γίνονται αρκετά λάθη. Στο σημείο αυτό μπορεί να προκύψουν αριθμητικά σφάλματα λόγω βιασύνης, αλλά και αλγεβρικά σφάλματα, όπως αδυναμία επίλυσης μιας εξίσωσης (Wijaya, van den Heuvel-Panhuizen, Doorman, & Robitzsch, 2014).

Τέλος, το τελευταίο στάδιο της ανασκόπησης είναι το στάδιο που παραλείπεται τις περισσότερες φορές από τους μαθητές (Polya, 1957). Στο στάδιο αυτό, όπως και στο πρώτο στάδιο της κατανόησης του προβλήματος, συχνά δε δίνεται μεγάλη έμφαση από το διδάσκοντα στην τάξη, με αποτέλεσμα οι μαθητές να μη το θεωρούν σημαντικό και να το προσπερνούν.

Γι' αυτό είναι απαραίτητο ο εκπαιδευτικός να δίνει βαρύτητα στην αξιολόγηση της λύσης μετά την επίλυση του προβλήματος. Μπορεί να ξεκινήσει μια συζήτηση για εναλλακτικές στρατηγικές, που ίσως αποδειχθούν πιο εύκολες και να συνδέσει το πρόβλημα με άλλα προβλήματα της ίδιας κατηγορίας, ώστε να γενικεύσει τις στρατηγικές που επιλέχθηκαν (Lester, Garofalo, & Kroll, 1989). Για να το πετύχει αυτό, θα πρέπει να επιλέγει προβλήματα που δέχονται πολλαπλές λύσεις, έτσι ώστε να γίνει κατανοητό στους μαθητές ότι δεν υπάρχει μόνο ένας τρόπος προσέγγισης κάθε προβλήματος.

Επίσης, ένας άλλος λόγος για τον οποίο οι μαθητές δεν αξιολογούν τη λύση τους είναι η βιασύνη τους να ολοκληρώσουν την επίλυση, καθώς έχει εδραιωθεί η λανθασμένη πεποίθηση ότι η επιτυχία εξαρτάται από την ταχύτητα του λύτη.

Αυτές οι λανθασμένες πεποιθήσεις που έχουν υιοθετήσει οι μαθητές, επιδρούν καταλυτικά στην ικανότητά τους να επιλύσουν προβλήματα. Όπως αναφέρει ο Schoenfeld (1992), οι πιο κοινές πεποιθήσεις των μαθητών είναι:

- Υπάρχει ένας και μοναδικός τρόπος για να λυθεί κάποιο πρόβλημα, συνήθως αυτός που παρουσίασε ο δάσκαλος στην τάξη.
- Τα μαθηματικά προβλήματα έχουν μόνο μία σωστή απάντηση.
- Τα μαθηματικά του σχολείου δεν έχουν σχέση με τον πραγματικό κόσμο.
- Δεν περιμένουν ότι θα κατανοήσουν τα μαθηματικά. Το μόνο που χρειάζεται είναι να εφαρμόζουν τυποποιημένα κανόνες.

Αυτές οι εσφαλμένες πεποιθήσεις των μαθητών δημιουργούνται κυρίως μέσα στη σχολική τάξη από τον τρόπο διδασκαλίας των ίδιων των δασκάλων. Γι' αυτό το λόγο, ο εκπαιδευτικός επιδρά σε μεγάλο βαθμό στην ανάπτυξη των ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων των μαθητών, ενώ η θετική στάση του ως προς τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων θεωρείται ιδιαίτερα κρίσιμη για την επιτυχία των μαθητών (Krulik & Rudnick, 1988).

2.4. Ο ρόλος του προβλήματος στη μαθηματική εκπαίδευση

«Από τι αποτελούνται πράγματι τα μαθηματικά; Από αξιώματα, θεωρήματα, ορισμούς, τύπους και μεθόδους; … Είναι, ωστόσο, μια άποψη ότι κανένα από αυτά δεν είναι η καρδιά του αντικειμένου, ότι η κύρια αιτία ύπαρξης του μαθηματικού είναι να επιλύει προβλήματα και κατά συνέπεια το πραγματικό περιεχόμενο των μαθηματικών είναι τα προβλήματα και η επίλυσή τους (Schoenfeld, 1992, p. 5).

Τα προβλήματα αποτελούν κεντρικό στοιχείο στη μαθηματική εκπαίδευση και συμβάλλουν καθοριστικά στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1992), η διδασκαλία των Μαθηματικών θα πρέπει να παρέχει στους μαθητές την ευκαιρία να κατανοήσουν τη φύση της επιστήμης των Μαθηματικών. Ο κύριος στόχος θα πρέπει να είναι η εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και όχι η στείρα διδασκαλία κανόνων και τύπων.

Η επίλυση προβλημάτων παρέχει ευκαιρίες στους μαθητές να εξασκήσουν τις μαθηματικές γνώσεις τους, αλλά κυρίως τους παρέχει κίνητρα, αναδεικνύοντας τη σύνδεση των μαθηματικών με την καθημερινή ζωή (Stanic & Kilpatrick, 1989, όπως αναφέρεται στο Schoenfeld, 1992). Όπως αναφέρει ο Polya (1957), ο εκπαιδευτικός που ασχολείται με την εξάσκηση σε στερεότυπες εφαρμογές και ασκήσεις και όχι σε πρωτότυπα ή ρεαλιστικά προβλήματα αποτυγχάνει να κινητοποιήσει το ενδιαφέρον των μαθητών και αναπτύσσει μόνο τη διαδικαστική τους γνώση.

Κατά τον Davis (1992), η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων αποτελεί έναν από τους βασικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης. Υποστηρίζει ότι ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ξεκινά τη διδασκαλία του με τα προβλήματα και, μέσω αυτών, να καταλήγει σε μαθηματικές έννοιες και θεωρήματα και όχι να παρουσιάζει τις μαθηματικές ιδέες και στη συνέχεια να ζητά από τους μαθητές την απλή εφαρμογή τους. Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές θα αναγνωρίσουν τα μαθηματικά ως το αποτέλεσμα πολλών προσπαθειών για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων. Ακόμη, επισημαίνει πως τα μαθηματικά δεν αφορούν μόνο τις λύσεις που προκύπτουν στα προβλήματα, αλλά κυρίως την ανακάλυψη μεθόδων και στρατηγικών για την επίλυσή τους.

Οι Stanic και Kilpatrick (1988) στη μελέτη τους διατύπωσαν τους διάφορους ρόλους που παίζει η επίλυση προβλημάτων στη μαθηματική εκπαίδευση:

1. *Αιτιολόγηση της σημασίας των μαθηματικών.* Τα προβλήματα που συνήθως περιλαμβάνονται στα εκπαιδευτικά προγράμματα έχουν κάποια σχέση με τις καθημερινές εμπειρίες και τις πρακτικές καταστάσεις του πραγματικού κόσμου. Μέσω αυτών των προβλημάτων, τόσο οι εκπαιδευτικοί όσο και οι μαθητές πείθονται για τη σημασία και την αναγκαιότητα της μαθηματικής γνώσης.
2. *Κίνητρο για την εξέταση συγκεκριμένων θεματικών πεδίων*. Αποτελούν μια εισαγωγή σε θέματα που σχετίζονται με τη θεωρία που μόλις έχει κατανοηθεί, και με την κατανόηση αυτής της θεωρίας, οι μαθητές είναι σε θέση να προχωρήσουν και να λύσουν τα προβλήματα που συνδέονται με αυτήν.

3. *Ψυχαγωγικούς λόγους*. Τα ψυχαγωγικά προβλήματα μαθηματικών παρέχουν μια ευκαιρία να δείξουμε ότι οι μαθηματικές δραστηριότητες μπορούν να είναι διασκεδαστικές και ενδιαφέρουσες.
4. *Μέσο για την απόκτηση νέων δεξιοτήτων*. Η επίλυση προβλημάτων καλλιεργεί δεξιότητες, όπως η δημιουργικότητα, η αναλυτική και κριτική σκέψη.
5. *Εξάσκηση στην εφαρμογή μαθηματικών γνώσεων.* Οι περισσότερες από τις μαθηματικές εργασίες που δίνονται στα σχολεία ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία. Οι μαθητές εκπαιδεύονται σε συγκεκριμένες τεχνικές και στη συνέχεια ασχολούνται με προβλήματα που απαιτούν την εφαρμογή αυτών των τεχνικών, με στόχο την κατανόηση και την εξοικείωση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η εξέλιξη της αλγεβρικής σκέψης μέσα από ιστορικά μαθηματικά προβλήματα

3.1. Βαβυλώνιοι-Αιγύπτιοι

Η μετάβαση από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη ακολουθεί μια συναρπαστική πορεία που εκτείνεται πάνω από χιλιετίες και σηματοδοτεί ένα σημαντικό ορόσημο στην εξέλιξη των μαθηματικών και στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης.

Από την αρχή, οι άνθρωποι προσπάθησαν να κατανοήσουν τον κόσμο γύρω τους με τη χρήση αριθμών, μετρήσεων και σχημάτων. Η πρώτη μαθηματική σκέψη εμφανίζεται στις πρώτες αρχαίες πολιτισμένες κοινωνίες, στους λαούς της Μεσοποταμίας και στην αρχαία Αίγυπτο. Η ανάγκη για μαθηματικές γνώσεις προέκυψε επίσης από την επιθυμία να λυθούν πρακτικά προβλήματα, όπως η διαχείριση των καλλιεργήσιμων εκτάσεων, η μέτρηση της γης και η διαχείριση των πόρων.

Μέσα από αρχαία μαθηματικά κείμενα που έχουν διασωθεί μέχρι σήμερα, αναδεικνύονται οι μαθηματικές γνώσεις που χρησιμοποιούσαν και ανέπτυξαν δύο κυρίως λαοί, οι Βαβυλώνιοι και οι Αιγύπτιοι, ρίχνοντας φως στα πρώτα στάδια της μαθηματικής επιστήμης, ενώ επιβεβαιώνεται πως η διδασκαλία των μαθηματικών από τα αρχαία χρόνια συνδεόταν άρρηκτα με την επίλυση προβλημάτων.

Οι Βαβυλώνιοι είναι οι πρώτοι που θα ασχοληθούν με την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων. Όλα τα προβλήματα που περιέχονται στις πήλινες πλάκες που αποκρυπτογραφήθηκαν αποτελούν προβλήματα υπολογισμών. Το περιεχόμενο των προβλημάτων οδηγεί στη διαπίστωση ότι τα μαθηματικά που χρησιμοποίησαν οι Βαβυλώνιοι είχαν σκοπό να επιλύσουν πρακτικά προβλήματα της καθημερινής ζωής, της οικονομίας, της γεωργίας και του εμπορίου.

Οι λύσεις που δίνονται στις πλάκες αποτελούν ένα σύνολο οδηγιών για τα βήματα που πρέπει να ακολουθήσει ο λύτης ώστε να λυθεί το πρόβλημα, χωρίς όμως να δίνεται καμία αιτιολόγηση και επεξήγηση σχετικά με τη διαδικασία. Σε όλα τα μαθηματικά κείμενα οι οδηγίες περιέχουν προστακτικές και αποτελέσματα: π.χ. «πρόσθεσε αυτό.. θα βρεις τόσο..» (Εξαρχάκος, 1997). Ακολουθούν όμοια διαδικασία στην επίλυση των περισσότερων προβλημάτων, αλλά χωρίς να έχουν την ικανότητα να διατυπώσουν ένα γενικό κανόνα.

Στη σημερινή εποχή, όλα τα Βαβυλωνιακά προβλήματα μπορούν να επιλυθούν πολύ εύκολα με την κατασκευή και επίλυση εξισώσεων και συστημάτων. Οι Βαβυλώνιοι, όμως, όπως φαίνεται από τον τρόπο επίλυσης που ακολουθούν, δε γνώριζαν αλγεβρικές μεθόδους και δε χρησιμοποιούσαν κανένα αλγεβρικό συμβολισμό. Επίσης, όλα τα προβλήματα περιλαμβάνουν συγκεκριμένους αριθμούς και η διαδικασία επίλυσης ακολουθεί τη μέθοδο δοκιμής και λάθους.

Όμοιες διαδικασίες επίλυσης παρουσιάζονται και στα μαθηματικά προβλήματα των Αιγυπτίων. Σε όλους τους πάπυρους που έχουν διασωθεί, περιέχονται προβλήματα, των οποίων η λύση θα οδηγούσε στη σύγχρονη εποχή σε εξισώσεις και συστήματα, ενώ οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν στην επίλυσή τους τη μέθοδο δοκιμής και λάθους με αριθμητικά δεδομένα, χωρίς κανένα αλγεβρικό συμβολισμό.

Μια από τις σημαντικότερες πηγές για τα αιγυπτιακά μαθηματικά αποτελεί ο πάπυρος Rhind, ο οποίος βρέθηκε στα ερείπια ενός βασιλικού κτιρίου της αρχαίας πόλης των Θηβών περί το 1855 π.Χ. και περιλαμβάνει 84 προβλήματα μαζί με τις λύσεις τους.

<u>Πρόβλημα 26 από τον Πάπυρο Rhind</u>

Μια ποσότητα και το 1/4 της αν προστεθούν κάνουν 15. Ποια είναι η ποσότητα;

Στο αιγυπτιακό κείμενο, η διαδικασία που ακολουθείται είναι η εξής: Υπολόγισε με το 4. Το ¼ του 4 είναι το 1. 4 + 1 = 5. Όσες φορές το 5 πρέπει να πολλαπλασιαστεί για να δώσει το 15, τόσες φορές το 4 πρέπει να πολλαπλασιαστεί για να δώσει το ζητούμενο αριθμό. Η απάντηση είναι 3. Πολλαπλασίασε το 3 με το 4. Η απάντηση είναι 12.

Η περίοδος αυτή αποτελεί το πρώτο στάδιο στην εξέλιξη της αλγεβρικής σκέψης, το στάδιο της «ρητορικής άλγεβρας», στο οποίο έλλειπε η ύπαρξη συμβόλων για την αναπαράσταση των αγνώστων και η δυνατότητα γενίκευσης.

3.2. Διόφαντος

Έτσι, φτάνουμε στο 3ο μ.Χ. αιώνα, στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, όπου ένας Έλληνας μαθηματικός, ο Διόφαντος, θα αλλάξει την ιστορία των μαθηματικών, αφού θα εισάγει για πρώτη φορά την έννοια του «αγνώστου», με τη χρήση συμβολισμών. Τα Αριθμητικά του Διόφαντου αποτελούν μια συλλογή αριθμητικών προβλημάτων. Τα προβλήματα αυτά, όμως, διαφέρουν αρκετά από τα προβλήματα των Βαβυλώνιων και των Αιγυπτίων, καθώς έχουν πιο αφηρημένο περιεχόμενο και δεν αναφέρονται σε μετρήσεις σιταριού ή διαστάσεις καλλιεργήσιμης γης.

Αυτό που τον διακρίνει είναι η χρήση συντομογραφιών για τον άγνωστο και τις δυνάμεις του. Στην επίλυση των προβλημάτων χρησιμοποιεί μόνο έναν άγνωστο και τον συμβολίζει πάντοτε με το σύμβολο ς, το οποίο θεωρείται ότι προκύπτει από το τελικό ς της λέξης «αριθμός». Η εισαγωγή από το πρώτο βιβλίο των Αριθμητικών έχει χαρακτηρισθεί ως το αρχαιότερο εγχειρίδιο άλγεβρας (Χριστιανίδης, 2012).

Πρόβλημα Ι1 από τα Αριθμητικά

Δοσμένος αριθμός να διασπασθεί σε δύο αριθμούς, οι οποίοι να έχουν δοσμένη διαφορά.

Κατά την επίλυσή του, ο Διόφαντος επιλέγει ως δοσμένο αριθμό το 100 και ως δοσμένη διαφορά το 40. Παίρνει ως άγνωστο 1χ (με σύγχρονο συμβολισμό) το μικρότερο αριθμό, και 1χ+40 το μεγαλύτερο. Το άθροισμα τους είναι 2χ+40, το οποίο είναι ίσο με 100 κι, έτσι δημιουργεί την εξίσωση 2χ+40=100 και τη λύνει. Καταλήγει ότι ο μικρότερος αριθμός είναι 30 και ο μεγαλύτερος 70.

Αυτό που δίνει τον αλγεβρικό χαρακτήρα στο έργο του είναι η εκτέλεση υπολογισμών με τον άγνωστο κατά τη διαδικασία της επίλυσης. Με τον τρόπο αυτό, είναι σε θέση να γράψει την πρώτη εξίσωση στην ιστορία των μαθηματικών, πραγματοποιώντας ένα σημαντικό βήμα προς την ανάπτυξη της άλγεβρας και γι’ αυτό θα θεωρηθεί από πολλούς «Ο πατέρας της Άλγεβρας».

Το έργο του Διόφαντου αντιπροσωπεύει το δεύτερο στάδιο στην εξέλιξη της αλγεβρικής σκέψης, που ονομάστηκε «συγκεκομμένη άλγεβρα», και χαρακτηρίζεται από τη χρήση γραμμάτων για την αναπαράσταση της άγνωστης ποσότητας. Το στάδιο αυτό περιλαμβάνει την περίοδο από το Διόφαντο (περίπου 3ος αιώνας μ.Χ.) μέχρι το τέλος του 16ου αιώνα. Βασικός σκοπός στην επίλυση προβλημάτων ήταν η εύρεση συγκεκριμένης αριθμητικής τιμής του αγνώστου, κι έτσι έλλειπε ακόμη η έννοια της γενίκευσης (Harper, 1987).

3.3. Ινδία

Μεταφερόμαστε τώρα στην Ινδία, μετά τον 6ο μ.Χ. αιώνα, όπου τα περισσότερα μαθηματικά έργα που έχουν διασωθεί, είναι κυρίως συλλογές προβλημάτων. Τα ινδικά μαθηματικά κείμενα είναι επηρεασμένα σε μεγάλο βαθμό από τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά, καθώς οι αυτοκράτορες του Βυζαντίου έκλεισαν αρκετές σχολές, οι οποίες θεωρήθηκαν ειδωλολατρικές, με αποτέλεσμα σημαντικοί Έλληνες μαθηματικοί, δάσκαλοι, αλλά και οι μαθητές των σχολών αυτών να μεταναστεύσουν σε διάφορα μέρη της Ασίας μεταφέροντας τις γνώσεις τους εκεί (Εξαρχάκος, 1999).

Στα περισσότερα προβλήματα, η λύση που δίνεται είναι ένας κανόνας διατυπωμένος λεκτικά και όχι με σύμβολα, ενώ δεν υπάρχει καμία αιτιολόγηση για τη διαδικασία επίλυσης που ακολουθείται.

Οι Ινδοί φαίνεται ότι γνώριζαν να λύνουν εξισώσεις πρώτου και δεύτερου βαθμού, αλλά και γραμμικά συστήματα. Κατά την επίλυση των προβλημάτων που περιλαμβάνονται στα έργα τους, προσθέτουν και αφαιρούν πολυώνυμα, παρουσιάζοντας κανόνες περιγραφικά.

Στο έργο Lilavati του Bhaskara II (12ος μ.Χ. αιώνας), υπάρχει ο παρακάτω κανόνας με το παράδειγμα που ακολουθεί (Εξαρχάκος, 1999):

«Μεταξύ ποσοτήτων ξεχωριστών, το άθροισμα ή τη διαφορά όμοιων ποσοτήτων πρέπει να τα παίρνουμε, αλλά τις ανόμοιες πρέπει να τις θεωρούμε χωριστά»

Παράδειγμα:

Πες γρήγορα φίλε, πόσο κάνει μια θετική άγνωστη ποσότητα με συντελεστή 1 αυξημένη κατά 1 και μια όμοια θετική ποσότητα με συντελεστή 2 ελαττωμένη κατά 8, αν πάρουμε το άθροισμά τους και πόσο κάνει αν πάρουμε τη διαφορά τους, οπότε αλλάζουμε τα θετικά και τα αρνητικά σημεία.

Απάντηση:

Το άθροισμα είναι το τριπλάσιο της ποσότητας ελαττωμένο κατά 7. Η διαφορά είναι το 9 ελαττωμένο κατά την ποσότητα.

Με σύγχρονο συμβολισμό, θα γράφαμε:

$(x+1) + (2x-8) = 3x-7$

$(x+1) – (2x-8) = -x+9$

Κάποια ενδεικτικά προβλήματα από ινδικά μαθηματικά κείμενα είναι τα εξής:

<u>3ο πρόβλημα (από το χειρόγραφο Bakhshali)</u>

Ο Β έχει διπλάσιο από τον Α. Ο Γ έχει τριπλάσιο από όσο έχουν ο Α και ο Β μαζί. Ο Δ έχει τετραπλάσιο από όσα έχουν μαζί οι τρεις προηγούμενοι. Όλοι μαζί έχουν 300. Πόσα έχει ο Α;

Λύση

Αν ο Α έχει 1, τότε οι Β, Γ, Δ θα έχουν αντίστοιχα 2, 9, 48. Τα συνολικά ποσά είναι 1+2+9+48= 60. Ο Α έχει 300:60=5, ο Β 2·5=10, ο Γ έχει 3·(5+10)=45 και ο Δ έχει 4·(5+10+45)=240. Σύνολο 5+10+45+240=300.

<u>Πρόβλημα (από το Lilavati του Bhaskara II)</u>

Από ένα μπουκέτο με άνθη λωτού, το ένα τρίτο, το ένα πέμπτο και το ένα έκτο, προσφέρθηκαν αντίστοιχα στους θεούς Σίβα, Βισνού και Ήλιο και το ένα τέταρτο στην Ινδή Θεά. Οι υπόλοιποι έξι λωτοί που απέμειναν, δόθηκαν στο σεβάσμιο άρχοντα γκουρού. Να βρείτε το συνολικό αριθμό των λωτών που είχε το μπουκέτο.

Λύση

Αν ο συνολικός αριθμός των λωτών είναι 1, τότε

1- (1/3 + 1/5 + 1/6 + 1/4) = 1/20

Άρα ο συνολικός αριθμός των λωτών είναι (6·1) / (1/20) = 120 λωτοί.

3.4. Αλ Χουαρίζμι

Κατά τον 9ο μ.Χ. αιώνα, στην Αραβία θα εμφανιστεί για πρώτη φορά ο όρος «άλγεβρα», ο οποίος προέρχεται από την αραβική λέξη *al-jabr*, που μπορεί να μεταφραστεί ως «αποκατάσταση» και αναφερόταν στη μεταφορά ενός όρου από το ένα μέλος της εξίσωσης στο άλλο. Ο όρος αυτός χρησιμοποιήθηκε από τον Άραβα μαθηματικό, Αλ Χουαρίζμι, στο έργο του «Συνοπτικό Βιβλίο για τον Υπολογισμό με Μεταφορά και Απλοποίηση», το οποίο γράφτηκε περίπου το 820 μ.Χ. Ο ίδιος έχει θεωρηθεί από πολλούς «ο πατέρας της άλγεβρας», καθώς παρουσίασε για πρώτη φορά στην ιστορία των μαθηματικών συστηματική λύση της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Το βιβλίο του αποτελείται από 3 μέρη. Στο πρώτο περιγράφει έξι μορφές εξισώσεων και τις διαδικασίες επίλυσής τους, στο δεύτερο ασχολείται με τη μετρητική γεωμετρία, ενώ το τρίτο μέρος, το οποίο είναι αρκετά μεγαλύτερο από τα δύο προηγούμενα, περιλαμβάνει μια συλλογή προβλημάτων περί κληρονομιών.

Ο Αλ Χουαρίζμι, αν και μεταγενέστερος του Διόφαντου, χρησιμοποιεί αμιγώς ρητορική διατύπωση και επίλυση σε όλα τα προβλήματα. Οτιδήποτε γράφει είναι με λέξεις και δεν χρησιμοποιεί πουθενά αλγεβρικό συμβολισμό.

Για να επιλύσει ένα πρόβλημα ακολουθεί μια συγκεκριμένη διαδικασία, η οποία αποτελείται από τρία στάδια. Αρχικά, το μετατρέπει σε εξίσωση. Το πρώτο βήμα είναι η ονοματοδοσία. Ονομάζει τον άγνωστο shay (που σημαίνει «πράγμα») ή jidhr (που σημαίνει «ρίζα»), το τετράγωνο του αγνώστου mal και τον απλό αριθμό dirham. Το «πράγμα» αποτελεί τον άγνωστο της εξίσωσης, αυτό που θα συμβολίζαμε στη σημερινή εποχή ως x. Στο δεύτερο στάδιο, απλοποιεί την εξίσωση, ώστε αυτή να λάβει μια από τις έξι μορφές, τις οποίες έχει αναλύσει στο πρώτο μέρος του βιβλίου του. Έτσι, στο τελευταίο στάδιο, εφαρμόζει την κατάλληλη διαδικασία για την επίλυση της εξίσωσης και βρίσκει την τιμή του αγνώστου (Mehri, 2017).

Πρόβλημα (από το Συνοπτικό Βιβλίο για τον Υπολογισμό με Μεταφορά και Απλοποίηση)

Αν κάποιος πει «Χώρισε το 10 σε δύο μέρη: πολλαπλασίασε το ένα με τον εαυτό του, θα είναι ίσο με 81 φορές το άλλο»

Επίλυση:

Λες: δέκα πλην το «πράγμα» (ο άγνωστος), πολλαπλασιασμένο με τον εαυτό του, είναι εκατό συν το τετράγωνο του πράγματος πλην είκοσι πράγματα και αυτό είναι ίσο με ογδόντα ένα πράγματα. Ξεχώρισε τα είκοσι πράγματα και πρόσθεσέ τα στα ογδόντα ένα. Τότε θα είναι εκατό συν το τετράγωνο ίσο με εκατόν ένα ρίζες. Μείωσε κατά το ήμισυ τις ρίζες. Το μισό είναι πενήντα κι ένα δεύτερο. Πολλαπλασίασέ το αυτό με τον εαυτό του, είναι δύο χιλιάδες πεντακόσια και πενήντα και ένα τέταρτο. Αφαίρεσε από αυτό εκατό. Αυτό που μένει είναι δύο χιλιάδες τετρακόσια και πενήντα και ένα τέταρτο. Βγάλε τη ρίζα από αυτό: είναι σαράντα εννιά και ένα δεύτερο. Αφαίρεσε αυτό από το μισό των ριζών, το οποίο είναι πενήντα και ένα δεύτερο. Τότε μένει ένα, και αυτό είναι το ένα από τα δύο μέρη.

3.5. Ευρώπη

Σε μια σκοτεινή περίοδο για τις επιστήμες στην Ευρώπη, αυτή του Μεσαίωνα, ένας Ιταλός μαθηματικός, ο Λεονάρντο της Πίζας ή Fibonacci, έχοντας μελετήσει μέσα από τα ταξίδια του τα αραβικά μαθηματικά, έγραψε ένα βιβλίο, το Liber Abaci (1202 μ.Χ.) γεμάτο με τις μαθηματικές γνώσεις που απέκτησε στα ταξίδια του. Το βιβλίο αυτό οδήγησε και στην αποδοχή του αραβικού συστήματος αρίθμησης στην Ευρώπη. Περιλαμβάνει προβλήματα, τα οποία επιλύονται αλγοριθμικά ή αλγεβρικά, ενώ το περιεχόμενό τους αφορά κυρίως το εμπόριο και τις χρηματικές συναλλαγές . Οι λύσεις του είναι περιγραφικές και δεν χρησιμοποιεί αλγεβρικό συμβολισμό. Στα περισσότερα προβλήματα, τα οποία επιλύονται με απλές γραμμικές εξισώσεις, χρησιμοποιεί τη μέθοδο της ψευδούς ή της διπλής ψευδούς παραδοχής.

Ένα ενδεικτικό παράδειγμα είναι το εξής:

Πρόβλημα (Liber Abaci)

Ένας άντρας πήγε στη Lucca για δουλειές, διπλασίασε τα χρήματά του και ξόδεψε εκεί 12 δηνάρια. Στη συνέχεια πήγε στη Φλωρεντία όπου και πάλι διπλασίασε τα χρήματά του και ξόδεψε 12 δηνάρια. Τέλος έφτασε στην Πίζα όπου και εκεί διπλασίασε τα χρήματά του και ξόδεψε 12 δηνάρια. Στο τέλος δεν του περίσσεψαν καθόλου χρήματα. Πόσα χρήματα είχε αρχικά;

Ξεκινάει την επίλυσή του με την παραδοχή ότι αρχικά είχε 12 δηνάρια. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία σε κάθε πόλη, κατά την οποία διπλασιάζει το ποσό του και ξοδεύει 12 δηνάρια, καταλήγει ότι στον άντρα θα περίσσευαν 12 δηνάρια και όχι 0 (αυτό είναι το λάθος). Έτσι, στη συνέχεια υποθέτει ότι είχε αρχικά 11 δηνάρια. Με την ίδια διαδικασία καταλήγει ότι θα του περίσσευαν στο τέλος 4 δηνάρια. Η δεύτερη υπόθεση έχει μειώσει την ποσότητα που περισσεύει κατά 8 δηνάρια (12-4=8). Άρα, θα πρέπει να μειώσουμε την ποσότητα που περισσεύει κατά το μισό από αυτό που μειώθηκε από την πρώτη (12) στη δεύτερη υπόθεση (11). Άρα η σωστή απάντηση είναι 10 ½.

Στα τέλη του $16^{ου}$ αιώνα, ξεκινά το τρίτο στάδιο στην εξέλιξη της αλγεβρικής σκέψης, η «συμβολική» άλγεβρα, με την εισαγωγή ενός γράμματος και για τις γνωστές ποσότητες από τον Φρανσουά Βιέτ. Ο Βιέτ πραγματοποίησε ένα ριζικό βήμα στην ανάπτυξη του αλγεβρικού λογισμού, διαχωρίζοντας την έννοια της παραμέτρου από την έννοια του αγνώστου. Χρησιμοποιούσε φωνήεντα για να συμβολίσει τις άγνωστες ποσότητες και σύμφωνα για τις ποσότητες που ήταν γνωστές. Έτσι, κατάφερε να απελευθερώσει την άλγεβρα από τη γεωμετρία και την αριθμητική και της έδωσε την ονομασία «Αναλυτική τέχνη». Επίσης, με την έννοια της παραμέτρου, έδωσε γενικευμένες λύσεις σε προβλήματα, καθώς μέχρι τότε η χρήση της άλγεβρας αφορούσε αποκλειστικά στην εύρεση μιας συγκεκριμένης αριθμητικής τιμής για τον άγνωστο.

Ο ίδιος επέλεξε να λύσει ένα πρόβλημα από τα «Αριθμητικά» του Διόφαντου, για να δείξει την υπεροχή του δικού του αλγεβρικού συστήματος (Harper, 1987).

Πρόβλημα Ι1 (Αριθμητικά Διόφαντου)

Δοσμένος αριθμός να διασπασθεί σε δύο αριθμούς, οι οποίοι να έχουν δοσμένη διαφορά.

Επίλυση του Βιέτ

Υποθέτω ότι ο αριθμός είναι a και η διαφορά b. Έστω ο μικρότερος αριθμός x. Τότε ο μεγαλύτερος θα είναι x+b. Έτσι, 2x+b=a. Άρα, x=(a-b)/2. Οι δύο αριθμοί είναι (a-b)/2 και (a+b)/2.

Αν συγκρίνουμε τη λύση αυτή με τη λύση που πρότεινε ο Διόφαντος (όπως αναλύθηκε στο κεφάλαιο 3.2.), φαίνεται εύκολα ότι η λύση του Βιέτ παρέχει μια γενικευμένη μορφή της λύσης, η οποία αληθεύει για οποιεσδήποτε τιμές χρησιμοποιηθούν για το δοσμένο αριθμό και τη δοσμένη διαφορά.

Τέλος, φτάνουμε στον 18^{o} αιώνα με την καθιέρωση του αλγεβρικού συμβολισμού, που χρησιμοποιούμε μέχρι και σήμερα, χάρη στη συμβολή του Leonard Euler. O Euler θεωρήθηκε ο πιο παραγωγικός μαθηματικός στην ιστορία, ενώ έχει εκτιμηθεί ότι η έκταση του έργου του θα απαιτούσε εξήντα με ογδόντα τόμους (Bell, 2006).

Ένα από τα έργα του με αλγεβρικό περιεχόμενο είναι το Elements of Algebra (1770), στο οποίο υπάρχουν αρκετά παραδείγματα προβλημάτων της καθημερινής ζωής λυμένα με αλγεβρικές μεθόδους. Με αυτό τον τρόπο, αναδεικνύεται η πρακτική χρησιμότητα και αξία της άλγεβρας. Η διατύπωση και η διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων αυτών συνάδει σχεδόν απόλυτα με τη διαδικασία που ακολουθείται στα σύγχρονα εκπαιδευτικά εγχειρίδια για το μάθημα της Άλγεβρας.

Πρόβλημα (Elements of Algebra)

Ένας πατέρας αφήνει 1600 λίρες για να μοιραστούν στους τρεις γιους του με τον ακόλουθο τρόπο: ο μεγαλύτερος είναι να πάρει 200 λίρες παραπάνω από το δεύτερο και ο δεύτερος 100 λίρες παραπάνω από το νεότερο. Αναζητείται το μερίδιο του καθενός.

Λύση

Έστω x το μερίδιο του τρίτου γιού. Τότε, ο δεύτερος θα πάρει x+100 και ο τρίτος x+100+200 = x+300. Το άθροισμα των μεριδίων των τριών γιων είναι 1600 λίρες.

Άρα x + x + 100 + x + 300 = 1600 ή 3x =1200 ή x = 400

Άρα, ο νεότερος θα πάρει 400 λίρες, ο δεύτερος θα πάρει 500 λίρες και ο τρίτος θα πάρει 700 λίρες.

Ολοκληρώνοντας αυτή τη σύντομη ανασκόπηση στον τρόπο επίλυσης αλγεβρικών προβλημάτων ανά τους αιώνες, μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι κάθε λαός και κάθε επιστήμονας συνέβαλε στην πορεία προς την άλγεβρα, όπως την γνωρίζουμε σήμερα, και η οποία, αποτέλεσε τελικά ένα ισχυρό εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Μεθοδολογία έρευνας

4.1. Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών, η επίλυση προβλημάτων αποτελεί βασικό στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Στις τάξεις του δημοτικού σχολείου, το μάθημα επικεντρώνεται σε προβλήματα που ενισχύουν τις αριθμητικές δεξιότητες των μαθητών και την εκτέλεση των βασικών πράξεων. Στο γυμνάσιο, οι μαθητές διδάσκονται την άλγεβρα και καλούνται να λύσουν προβλήματα με την κατασκευή και επίλυση εξισώσεων $1^{ου}$ και $2^{ου}$ βαθμού, καθώς και συστήματα γραμμικών εξισώσεων. Έτσι, φτάνοντας στο Λύκειο, οι μαθητές είναι σε θέση να επιλύσουν προβλήματα είτε με αριθμητικές μεθόδους είτε με αλγεβρικές. Παρόλο που θα περιμέναμε, λοιπόν, να έχουν εξοικειωθεί με την επίλυση προβλημάτων έπειτα από την ενασχόλησή τους με αυτά σε όλες τις προηγούμενες τάξεις, έχουν παρατηρηθεί αρκετές δυσκολίες στην επίλυση και ιδιαίτερα χαμηλές επιδόσεις στην πλειοψηφία των μαθητών.

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η μελέτη των επιδόσεων των μαθητών Λυκείου στην επίλυση προβλημάτων, τα οποία λύνονται τόσο με αριθμητικές μεθόδους όσο και με την κατασκευή εξισώσεων $1^{ου}$ βαθμού. Οι μαθητές λυκείου έχουν διδαχθεί αυτές τις μεθόδους σε προηγούμενες τάξεις, οπότε έχουν τις γνώσεις που απαιτούνται για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων. Επίσης, θα διερευνηθεί αν οι μαθητές επιλέγουν τον αλγεβρικό ή τον αριθμητικό τρόπο επίλυσης. Τα προβλήματα που θα χρησιμοποιηθούν για την παρούσα έρευνα αποτελούν ιστορικά μαθηματικά προβλήματα από διάφορους πολιτισμούς και χρονολογικές περιόδους, γι’ αυτό κρίνεται σκόπιμο να εξεταστεί και αν οι μαθητές ακολουθούν τις πρωτότυπες μεθόδους των συγγραφέων ή επιλέγουν σύγχρονες μεθόδους επίλυσης.

Πιο συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας έρευνας είναι τα εξής:

1. Ποιες είναι οι επιδόσεις των μαθητών Λυκείου στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων ιστορικής προέλευσης;
2. Υπάρχουν διαφορές στις επιδόσεις των μαθητών συγκριτικά με την τάξη Λυκείου στην οποία φοιτούν;

3. Οι μαθητές προτιμούν τον αριθμητικό ή τον αλγεβρικό τρόπο επίλυσης;
4. Οι τρόποι επίλυσης που μπορούν να ταυτοποιηθούν στην ιστορία των μαθηματικών ανιχνεύονται στον τρόπο επίλυσης που ακολουθούν οι μαθητές;

4.2.Μεθοδολογία

Στη μαθηματική εκπαίδευση, η ποιοτική μέθοδος εφαρμόζεται για την εις βάθος κατανόηση της μαθησιακής διαδικασίας των μαθητών. Συνεπώς, η ποιοτική μεθοδολογία είναι ιδανική για την παρούσα έρευνα, καθώς στοχεύει στη διερεύνηση της επίλυσης προβλημάτων από μαθητές. Η μέθοδος αυτή προτιμάται, ώστε να ερμηνευθούν οι δυνατότητες των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων και να εξεταστούν οι τρόποι επίλυσης που ακολουθούν και οι στρατηγικές που εφαρμόζουν.

Επίσης, λαμβάνοντας υπόψη ότι το δείγμα της παρούσας έρευνας ήταν μικρό, η ποιοτική μεθοδολογία θεωρήθηκε η καταλληλότερη, καθώς σκοπό της έρευνας δεν αποτελούσε η μελέτη των τάσεων, αλλά η διερεύνηση του βαθμού που οι μαθητές μπορούν να επιλύσουν προβλήματα και η ανάλυση του τρόπου επίλυσης που χρησιμοποιούν.

4.3.Δείγμα

Η παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε τον Απρίλιο του 2024. Στην έρευνα συμμετείχαν 21 μαθητές Λυκείου, που φοιτούν σε Λύκεια της Π.Ε. Σερρών και, πιο συγκεκριμένα, 7 μαθητές από κάθε τάξη του Λυκείου (Α΄, Β΄ και Γ΄). Από τους μαθητές της Β Λυκείου, 6 ήταν από τη θετική κατεύθυνση και 1 από τη θεωρητική, ενώ από τους μαθητές της Γ Λυκείου, 5 ήταν από τη θετική κατεύθυνση και 2 από την τεχνολογική.

4.4.Ερευνητική διαδικασία και εργαλείο

Για την αξιολόγηση των επιδόσεων των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων, δημιουργήθηκε ένα αυτοσχέδιο φύλλο εργασίας από την ερευνήτρια, καθώς δεν υπάρχει κάποιο σταθμισμένο εργαλείο αξιολόγησης στη βιβλιογραφία. Το φύλλο εργασίας (βλ. Παράρτημα, σ. 75-79) περιλάμβανε τέσσερα προβλήματα μαθηματικών, τα οποία μπορούσαν να επιλυθούν είτε με αριθμητική είτε με την κατασκευή εξίσωσης 1^{ου} βαθμού. Στους μαθητές δόθηκε ένα χρονικό περιθώριο 90 λεπτών για την επίλυση όλων των προβλημάτων, ενώ η ερευνήτρια ήταν παρούσα σε όλη τη διαδικασία, ώστε να δώσει τις κατάλληλες επεξηγήσεις και να λύσει οποιαδήποτε απορία δημιουργηθεί.

Τα προβλήματα επιλέχθηκαν έτσι ώστε να προέρχονται από διαφορετικούς πολιτισμούς και διαφορετικές χρονικές περιόδους κατά την εξέλιξη της αλγεβρικής σκέψης. Επίσης, παρατέθηκαν με σειρά διαβαθμισμένης δυσκολίας. Τα προβλήματα που περιλαμβάνει το φύλλο εργασίας είναι τα ακόλουθα:

Πρόβλημα 1: Να βρεθεί μια ποσότητα ώστε αν σε αυτήν προσθέσουμε το ¼ του εαυτού της το άθροισμα να είναι 15.

Το πρόβλημα αυτό προέρχεται από τον πάπυρο του Rhind, ο οποίος αποτελεί τη σημαντικότερη πηγή για τα αιγυπτιακά μαθηματικά, και χρονολογείται περίπου το 1844-1797 π.Χ. Μπορεί να λυθεί με σχηματισμό εξίσωσης πρώτου βαθμού και είναι όμοιο με προβλήματα που έχουν αντιμετωπίσει οι μαθητές στη Β΄ γυμνασίου στο 1^{ο} κεφάλαιο των εξισώσεων. Επίσης μπορεί να λυθεί και με τη «μέθοδο της ψευδούς παραδοχής (αφετηρίας)», όπως παρουσιάζεται και η λύση του στον Πάπυρο του Rhind από τους Αιγύπτιους.

<u>Αλγεβρική λύση:</u>

Κατασκευή και επίλυση της εξίσωσης πρώτου βαθμού:

$x + \frac{1}{4}x = 15$ ή $4x + x = 60$ ή $5x = 60$ ή $x = 12$

<u>Αριθμητική λύση – Πρωτότυπη λύση συγγραφέα:</u>

Έστω η ποσότητα είναι 4.

Το ¼ του 4 είναι 1.

4+1=5 και όχι 15.

Πολλαπλασίασε το 5 ώστε να βρεις 15.

Η απάντηση είναι 3.

Πολλαπλασίασε 3 επί 4.

Η απάντηση είναι 12.

Πρόβλημα 2: Από ένα μπουκέτο με άνθη λωτού, το ένα τρίτο, το ένα πέμπτο και το ένα έκτο, προσφέρθηκαν αντίστοιχα στους θεούς Σίβα, Βισνού και Ήλιο και το ένα τέταρτο στην Ινδή Θεά. Οι υπόλοιποι έξι λωτοί που απέμειναν, δόθηκαν στον σεβάσμιο άρχοντα γκουρού. Να βρείτε τον συνολικό αριθμό των λωτών που είχε το μπουκέτο.

Το πρόβλημα αυτό προέρχεται από το βιβλίο *Lilavati* του Ινδού μαθηματικού Bhaskara II, που γράφτηκε το 1150 μ.Χ. Μπορεί να επιλυθεί τόσο με αλγεβρικό τρόπο με το σχηματισμό μιας πρωτοβάθμιας εξίσωσης, όσο και αριθμητικά, όπως το λύνει ο Bhaskara II στο βιβλίο του. Η δομή του είναι όμοια με προβλήματα που έχουν αντιμετωπίσει οι μαθητές στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού στα κεφάλαια που περιλάμβαναν τα κλάσματα σε πιο απλή μορφή, όπως και στην Α΄ γυμνασίου, όπου χρησιμοποιούσαν πράξεις μεταξύ κλασμάτων για την επίλυσή του, ενώ στη Β΄ γυμνασίου κλήθηκαν να λύσουν παρόμοια προβλήματα αλγεβρικά, θέτοντας ως x τον άγνωστο και κατασκευάζοντας μια εξίσωση πρώτου βαθμού.

<u>Αλγεβρική λύση:</u>

Έστω x ο συνολικός αριθμός των λωτών. Τότε σχηματίζουμε την εξίσωση:

$1/3\ x + 1/5\ x + 1/6\ x + 1/4\ x + 6 = x$, η οποία έχει λύση την $x = 120$.

<u>Αριθμητική λύση- Πρωτότυπη λύση συγγραφέα:</u>

Αν ο συνολικός αριθμός των λωτών είναι 1, τότε

1- $(1/3 + 1/5 + 1/6 + 1/4) = 1/20$

Άρα ο συνολικός αριθμός των λωτών είναι $(6\cdot 1) / (1/20) = 120$ λωτοί.

Πρόβλημα 3: Ένας πατέρας αφήνει 1600 λίρες για να μοιραστούν στους τρεις γιους του με τον ακόλουθο τρόπο: ο μεγαλύτερος είναι να πάρει 200 λίρες παραπάνω από το δεύτερο και ο δεύτερος 100 λίρες παραπάνω από το νεότερο. Αναζητείται το μερίδιο του καθενός.

Το πρόβλημα αυτό προέρχεται από το βιβλίο του Euler *Elements of Algebra* (πρώτη έκδοση- 1770 μ.Χ.). Μπορεί να επιλυθεί με το σχηματισμό εξίσωσης πρώτου βαθμού και είναι όμοιο με προβλήματα που έχουν αντιμετωπίσει οι μαθητές στο κεφάλαιο των εξισώσεων της Β΄ γυμνασίου. Η επίλυση με σχηματισμό εξίσωσης αποτελεί και την πρωτότυπη λύση του συγγραφέα. Επίσης, μπορεί να λυθεί και αριθμητικά χωρίς τη χρήση άλγεβρας.

<u>Αλγεβρική λύση – Πρωτότυπη λύση συγγραφέα:</u>

Έστω x το μερίδιο του τρίτου γιού. Τότε, ο δεύτερος θα πάρει x+100 και ο τρίτος x+100+200 = x+300. Το άθροισμα των μεριδίων των τριών γιων είναι 1600 λίρες.

Άρα $x + x + 100 + x + 300 = 1600$ ή $3x = 1200$ ή $x = 400$

Άρα, ο νεότερος θα πάρει 400 λίρες, ο δεύτερος θα πάρει 500 λίρες και ο τρίτος θα πάρει 700 λίρες.

<u>Αριθμητική λύση:</u>

Αν αφαιρέσουμε τις διαφορές μεταξύ των μεριδίων, δηλαδή 1600 – 400 = 1200 λίρες. Οι 1200 λίρες θα μοιραστούν ισόποσα μεταξύ των τριών γιών, δηλαδή 1200 : 3 = 400 λίρες. Άρα, ο νεότερος θα πάρεις 400 λίρες, ο δεύτερος θα πάρει 400 + 100 = 500 λίρες και ο τρίτος 500 + 200 = 700 λίρες.

Πρόβλημα 4: Ένας άντρας πήγε στη Lucca για δουλειές, διπλασίασε τα χρήματά του και ξόδεψε εκεί 12 δηνάρια. Στη συνέχεια πήγε στη Φλωρεντία όπου και πάλι διπλασίασε τα χρήματά του και ξόδεψε 12 δηνάρια. Τέλος έφτασε στην Πίζα όπου και εκεί διπλασίασε τα χρήματά του και ξόδεψε 12 δηνάρια. Στο τέλος δεν του περίσσεψαν καθόλου χρήματα. Πόσα χρήματα είχε αρχικά;

Το πρόβλημα αυτό προέρχεται από το βιβλίο *Liber Abaci* του Fibonacci (πρώτη δημοσίευση – 1202 μ.Χ.). Μπορεί να χαρακτηριστεί το δυσκολότερο από τα τέσσερα προβλήματα, καθώς οι μαθητές δεν έχουν αντιμετωπίσει όμοιό του στα σχολικά εγχειρίδια των προηγούμενων τάξεων. Η επίλυσή του μπορεί να γίνει είτε με την κατασκευή εξίσωσης είτε αριθμητικά με απλή συλλογιστική. Η επίλυση που περιλαμβάνεται στο βιβλίο του Fibonacci χρησιμοποιεί τη «μέθοδο της Διπλής Ψευδούς Παραδοχής», όπως περιγράφεται παρακάτω.

<u>Αλγεβρική λύση:</u>

Έστω x τα χρήματα που είχε αρχικά. Τότε:

Στη Lucca: $2x-12$

Στη Φλωρεντία: $2(2x-12) - 12$

Στην Πίζα: $2\ [\ 2\ (2x\text{-}12)\ \text{-}12] - 12$

Και αφού στο τέλος δεν του έμειναν καθόλου χρήματα θα έχουμε:

$2\ [\ 2\ (2x\text{-}12) - 12] - 12 = 0$

Και λύνοντας την εξίσωση προκύπτει $x = 10\ \frac{1}{2}$

Αριθμητική λύση- Πρωτότυπη λύση συγγραφέα:

Αν υποθέσουμε ότι αρχικά είχε 12 δηνάρια. Τότε έχουμε

Στη Lucca: $12\times2=24$, $24\text{-}12=12$

και κάνοντας το ίδιο και για τις τρείς πόλεις, βρίσκουμε ότι στον άντρα θα περίσσευαν **12** δηνάρια και όχι 0.

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι είχε αρχικά 11 δηνάρια. Τότε έχουμε:

Στη Lucca: $11\times2=22$, $22\text{-}12=10$

Στη Φλωρεντία: $10\times2=20$, $20\text{-}12=8$

Στη Πίζα: $8\times2=16$, $16\text{-}12=4$

Άρα θα του περίσσευαν **4**.

Η δεύτερη υπόθεση έχει μειώσει την ποσότητα που περισσεύει κατά 8 δηνάρια (12-4=8). Άρα, θα πρέπει να μειώσουμε την ποσότητα που περισσεύει κατά το μισό από αυτό που μειώθηκε από την πρώτη (12) στη δεύτερη υπόθεση (11). Άρα η σωστή απάντηση είναι 10 ½.

Εναλλακτική αριθμητική λύση:

Αφού στο τέλος δεν του περίσσεψε τίποτα και στην Πίζα ξόδεψε 12 δηνάρια, σημαίνει ότι είχε 12 δηνάρια. Όμως, όταν έφτασε στην Πίζα είχε διπλασιάσει τα χρήματά του, άρα είχε 12:2=6 δηνάρια. Στη Φλωρεντία όμως είχε ξοδέψει 12 δηνάρια, άρα είχε 6 + 12 = 18 δηνάρια κι, επειδή είχε διπλασιάσει τα χρήματά του, όταν έφτασε στη Φλωρεντία είχε 18:2=9 δηνάρια. Στη Lucca, ξόδεψε 12 δηνάρια, άρα είχε 9+12=21 δηνάρια, οπότε στην αρχή που έφτασε στη Lucca, αφού εκεί τα διπλασίασε, θα είχε 21:2= 10,5 δηνάρια.

4.5.Αξιοπιστία-Εγκυρότητα

Η εγκυρότητα μιας έρευνας δείχνει αν το εργαλείο μέτρησης καταγράφει ακριβώς αυτό για το οποίο έχει σχεδιαστεί (Παρασκευόπουλος, 1993). Για να εξασφαλιστεί η εγκυρότητα της παρούσας έρευνας, πραγματοποιήθηκε συστηματική μελέτη της βιβλιογραφίας και των συναφών ερευνών. Επίσης, η ερευνήτρια ήταν παρούσα σε όλη την ερευνητική διαδικασία, ώστε να δώσει τις κατάλληλες επεξηγήσεις στους μαθητές και να επιλυθεί οποιαδήποτε απορία, για να επιτευχθεί μεγαλύτερη εγκυρότητα των απαντήσεων.

Η αξιοπιστία αναφέρεται στη σταθερότητα της μέτρησης, δηλαδή την έλλειψη διακυμάνσεων στα αποτελέσματα της έρευνας σε οποιαδήποτε μέτρηση κάτω από τις ίδιες συνθήκες (Παρασκευόπουλος, 1993). Για τη διασφάλιση της αξιοπιστίας της παρούσας έρευνας, πραγματοποιήθηκε μια πιλοτική εφαρμογή του ερευνητικού εργαλείου πριν την τελική διανομή του. Το φύλλο εργασίας με οχτώ συνολικά προβλήματα δόθηκε σε τρεις μαθητές της Α Λυκείου, οι οποίοι δε συμμετείχαν στην τελική έρευνα, ώστε να αξιολογηθεί το επίπεδο δυσκολίας των προβλημάτων και αν αυτό ανταποκρίνεται στις γνώσεις των μαθητών Λυκείου. Οι παρατηρήσεις και οι ερωτήσεις των μαθητών κατά τη διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων λήφθηκαν υπόψη στην τελική μορφή του φύλλου εργασίας, ώστε να επιλεγούν τα τέσσερα προβλήματα τα οποία θα περιείχε. Η επιλογή των προβλημάτων έγινε με τέτοιο τρόπο, ώστε αφενός να ανταποκρίνονται στο επίπεδο γνώσεων των μαθητών Λυκείου και αφετέρου να προέρχονται από διαφορετικούς πολιτισμούς και χρονικές περιόδους κατά την εξελικτική πορεία της άλγεβρας ιστορικά.

4.6.Περιορισμοί της έρευνας

Κατά την εκτέλεση αυτής της έρευνας, υπήρξαν ορισμένοι περιορισμοί. Αρχικά, το δείγμα δεν επιλέχθηκε με τυχαία δειγματοληψία. Οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα προέρχονται από το οικείο περιβάλλον της ερευνήτριας και φοιτούν σε Λύκεια της Π.Ε. Σερρών, ενώ δεν πραγματοποιήθηκε κάποια αξιολόγηση του επιπέδου των μαθητών πριν την έρευνα. Έτσι, το δείγμα δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύει πλήρως τον μαθητικό πληθυσμό και τα ευρήματα δεν μπορούν να γενικευτούν. Παρόλα αυτά φαίνεται να συμφωνούν σε σημαντικό βαθμό με τα αποτελέσματα άλλων ανεξάρτητων ερευνών, γεγονός που τα καθιστά ενδεικτικά των χαμηλών επιδόσεων των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Αποτελέσματα

Αρχικά, κρίθηκε σκόπιμη για την ανάλυση των αποτελεσμάτων η κωδικοποίηση των φύλλων εργασίας με τους κωδικούς Α1,Α2,….,Α7 για τους μαθητές της Α Λυκείου, Β1,Β2,…,Β7 για τους μαθητές της Β Λυκείου και Γ1,Γ2,…,Γ7 για τους μαθητές της Γ Λυκείου. Η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών θα γίνει πρώτα για το κάθε πρόβλημα ξεχωριστά και, στη συνέχεια, θα αναλυθεί η γενικότερη εικόνα των επιδόσεων των μαθητών. Για να αξιολογηθεί η επίδοση των μαθητών σε κάθε πρόβλημα δημιουργήθηκε από την ερευνήτρια μια αυτοσχέδια κλίμακα μέτρησης, με βαθμούς από το 0, για τις περιπτώσεις όπου δεν δόθηκε καμία απάντηση στο πρόβλημα έως και το 3 για τις σωστές απαντήσεις. Ο βαθμός 1 δόθηκε στις περιπτώσεις όπου υπήρχε κάποια προσπάθεια επίλυσης, η οποία ήταν λανθασμένη, όπως για παράδειγμα κατασκευή λανθασμένης εξίσωσης, ενώ ο βαθμός 2 δόθηκε στις απαντήσεις, οι οποίες περιλάμβαναν σωστή μεθοδολογία μέχρι ένα σημείο, αλλά κατέληγαν σε λάθος αποτέλεσμα. Επίσης, διερευνήθηκε και ο τρόπος επίλυσης που επέλεξαν οι μαθητές, κατηγοριοποιώντας τον σε αριθμητικό ή αλγεβρικό, ενώ επιχειρήθηκε και μια κατηγοριοποίηση των λαθών που εντοπίστηκαν στις απαντήσεις των μαθητών.

5.1. Ανάλυση των απαντήσεων στο Πρόβλημα 1

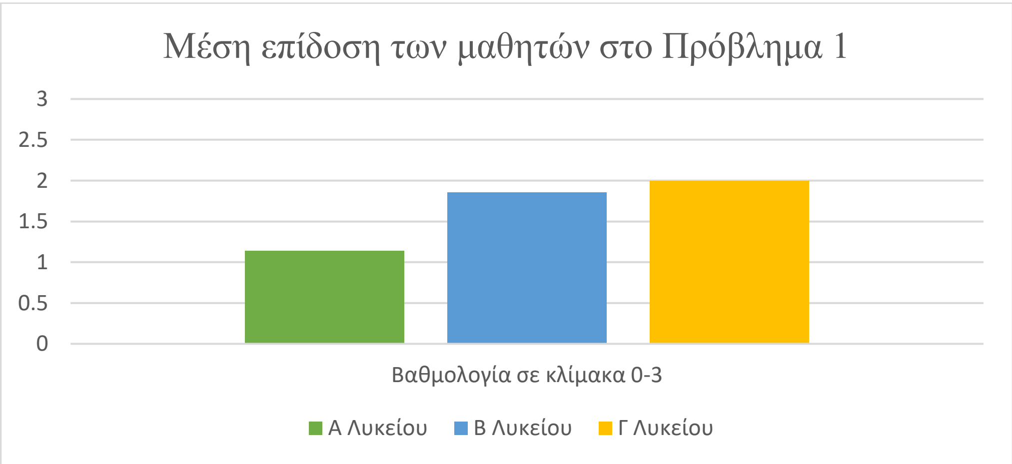
Στον πίνακα 1, παρουσιάζεται η βαθμολογία των μαθητών της κάθε τάξης Λυκείου ξεχωριστά, αλλά και του συνόλου των μαθητών στο πρόβλημα 1. Βλέπουμε ότι περίπου οι μισοί μαθητές (47,6%) κατάφεραν να επιλύσουν σωστά το πρόβλημα. Οι μαθητές της Β και της Γ Λυκείου τα πήγαν αρκετά καλά, σε αντίθεση με τους μαθητές της Α.

Πίνακας 1: Βαθμολογία μαθητών στο Πρόβλημα 1

Απαντήσεις μαθητών	Α Λυκείου		Β Λυκείου		Γ Λυκείου		Σύνολο	
	Συχν.	%	Συχν.	%	Συχν.	%	Συχν.	%
Καμία απάντηση (0)	3	42,8%	2	28,6%	2	28,6%	7	33,3%
Λανθασμένη απάντηση (1)	2	28,6%	1	14,3%	0	0,0%	3	14,3%
Μερικώς σωστή απάντηση (2)	0	0,0%	0	0,0%	1	14,3%	1	4,8%
Σωστή απάντηση (3)	2	28,6%	4	57,1%	4	57,1%	10	47,6%
Σύνολο	7	100%	7	100%	7	100%	21	100%

Η μέση επίδοση των μαθητών της Α Λυκείου στο Πρόβλημα 1 ήταν 1,14 με άριστα το 3, των μαθητών της Β Λυκείου ήταν 1,86 και της Γ Λυκείου ήταν 2. Η επίδοση των μαθητών συγκριτικά με την τάξη φοίτησης φαίνεται στο διάγραμμα 1. Παρατηρούμε ότι η μέση επίδοση των μαθητών γίνεται μεγαλύτερη όσο μεγαλώνει η τάξη Λυκείου στην οποία φοιτούν.

Γράφημα 1: Μέση επίδοση των μαθητών στο Πρόβλημα 1



Στον πίνακα 2, αναλύεται ο τρόπος επίλυσης (αριθμητικός ή αλγεβρικός) που επέλεξαν οι μαθητές στο πρόβλημα 1, ανεξάρτητα με την επιτυχία ή αποτυχία επίλυσης. Παρατηρείται μια αρκετά μεγαλύτερη προτίμηση στην αλγεβρική μέθοδο επίλυσης, καθώς όπως φαίνεται στον πίνακα 2, μόνο 2 από τους 14 μαθητές που προσπάθησαν να επιλύσουν το πρόβλημα ακολούθησαν αριθμητική επίλυση.

Πίνακας 2: Κατηγοριοποίηση του τρόπου επίλυσης στο Πρόβλημα 1

Τρόπος επίλυσης	Α Λυκείου	Β Λυκείου	Γ Λυκείου	Σύνολο
Αριθμητική επίλυση	1	1	0	2
Αλγεβρική επίλυση	3	4	5	12
Καμία απάντηση	3	2	2	7
Σύνολο	7	7	7	21

Στον πίνακα 3, επιχειρήθηκε μια ποιοτική ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών, αναφορικά με την επιτυχία ή την αποτυχία τους με τον τρόπο επίλυσης που επέλεξαν, καθώς και μια κατηγοριοποίηση των λαθών που εντοπίστηκαν στις αποτυχημένες προσπάθειες επίλυσης. Το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών κατάφερε να επιλύσει αλγεβρικά το πρόβλημα 1.

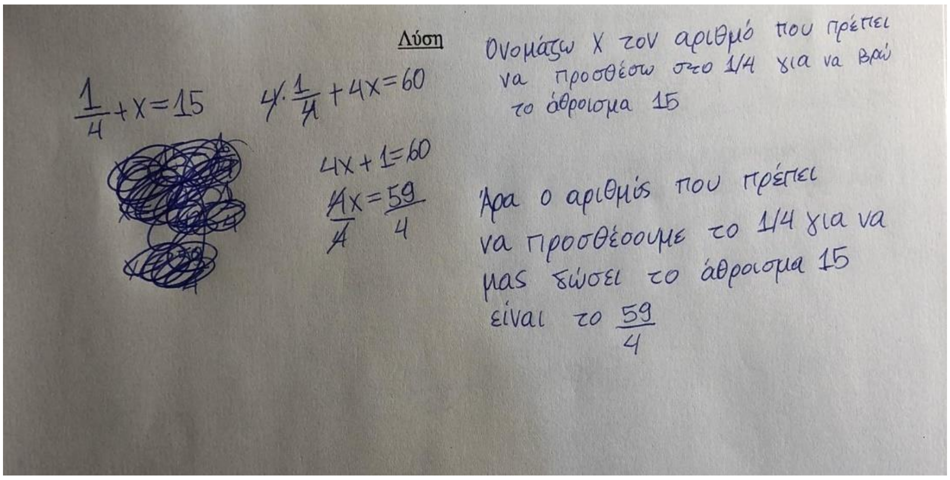
Πίνακας 3: Κατηγοριοποίηση των απαντήσεων των μαθητών στο Πρόβλημα 1

Τρόπος επίλυσης	Συχνότητα	Ποσοστό
Επιτυχία με αριθμητική επίλυση	1	4,8%
Αποτυχία με αριθμητική επίλυση	1	4,8%
Επιτυχία με αλγεβρική επίλυση	9	42,9%
Κατασκευή σωστής εξίσωσης αλλά λάθος αποτέλεσμα	1	4,8%
Κατασκευή λανθασμένης εξίσωσης	2	9,4%

Καμία απάντηση	7	33,3%
Σύνολο	21	100%

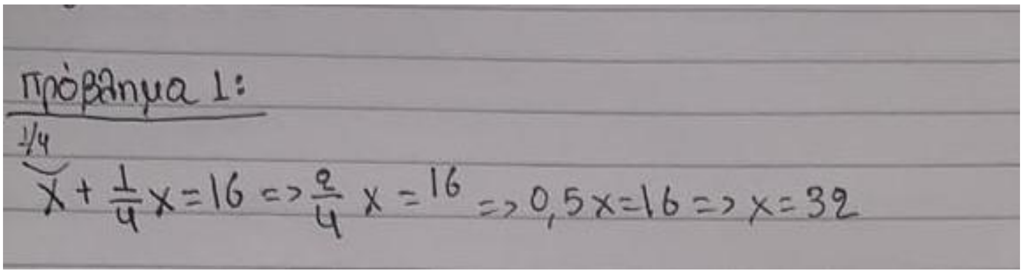
Στη συνέχεια, παρατίθενται κάποιες εικόνες από λανθασμένες απαντήσεις μαθητών, ώστε να προσδιορισθούν πιο αναλυτικά τα λάθη που εντοπίστηκαν.

Όπως φαίνεται από τη λύση της μαθήτριας Α1, η επίλυση που ακολούθησε ήταν αλγεβρική, αλλά σχημάτισε λάθος εξίσωση, καθώς θεώρησε ότι πρέπει να προσθέσει τον αριθμό ¼ σε μια ποσότητα x, και όχι το ¼ της ποσότητας, δηλαδή το ¼ του x.



Εικόνα 1: Λανθασμένη λύση μαθήτριας Α1 στο Πρόβλημα 1

Μια ακόμη λανθασμένη απάντηση είναι αυτή της μαθήτριας Γ5, η οποία πήγε να σχηματίσει τη σωστή εξίσωση, όμως λόγω απροσεξίας, έγραψε το άθροισμα ίσο με 16 και όχι 15 που ζητούσε η εκφώνηση του προβλήματος. Βέβαια, στη συνέχεια, μπορεί να παρατηρηθεί μια αδυναμία επίλυσης εξίσωσης, γι’ αυτό και καταλήγει σε λάθος αποτέλεσμα. Μάλιστα, αξίζει να σημειωθεί ότι η συγκεκριμένη μαθήτρια είναι στη θετική κατεύθυνση και προετοιμάζεται να δώσει πανελλήνιες εξετάσεις στα Μαθηματικά.



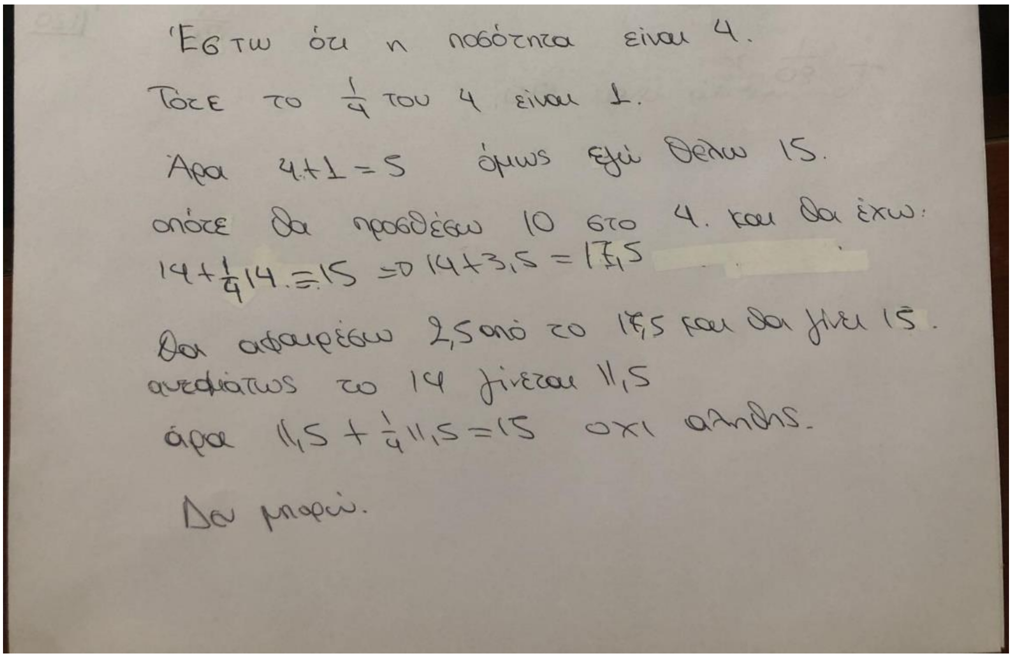
πρόβλημα 1:

1/4

$x + \frac{1}{4}x = 16 \Rightarrow \frac{2}{4}x = 16 \Rightarrow 0,5x = 16 \Rightarrow x = 32$

Εικόνα 2: Λανθασμένη λύση μαθήτριας Γ5 στο Πρόβλημα 1

Τέλος, μια αξιοσημείωτη προσπάθεια επίλυσης αποτελεί η απάντηση της μαθήτριας Β2, η οποία επιχείρησε μια αριθμητική επίλυση. Η επίλυσή της θυμίζει σε μεγάλο βαθμό τη μέθοδο που περιγράφεται πάνω στον πάπυρο του Rhind, δηλαδή τη «μέθοδο της ψευδούς παραδοχής (αφετηρίας)», που χρησιμοποιούσαν οι Αιγύπτιοι. Δεν κατάφερε, όμως, να καταλήξει σε αποτέλεσμα, καθώς όταν βρήκε το λάθος στην αρχική της υπόθεση, δεν μπόρεσε να το διορθώσει σωστά. Να σημειωθεί, μάλιστα, ότι η μαθήτρια Β2 είναι στη θεωρητική κατεύθυνση.



Έστω ότι η ποσότητα είναι 4.

Τότε το $\frac{1}{4}$ του 4 είναι 1.

Άρα 4+1=5 όμως εγώ θέλω 15.

οπότε θα προσθέσω 10 στο 4. και θα έχω:

$14 + \frac{1}{4}14 = 15 \Rightarrow 14 + 3,5 = 17,5$

Θα αφαιρέσω 2,5 από το 17,5 και θα γίνει 15.

αντιστοίχως το 14 γίνεται 11,5

άρα $11,5 + \frac{1}{4}11,5 = 15$ όχι αληθής.

Δεν μπορώ.

Εικόνα 3: Λανθασμένη λύση μαθήτριας Β2 στο πρόβλημα 1

5.2. Ανάλυση των απαντήσεων στο Πρόβλημα 2

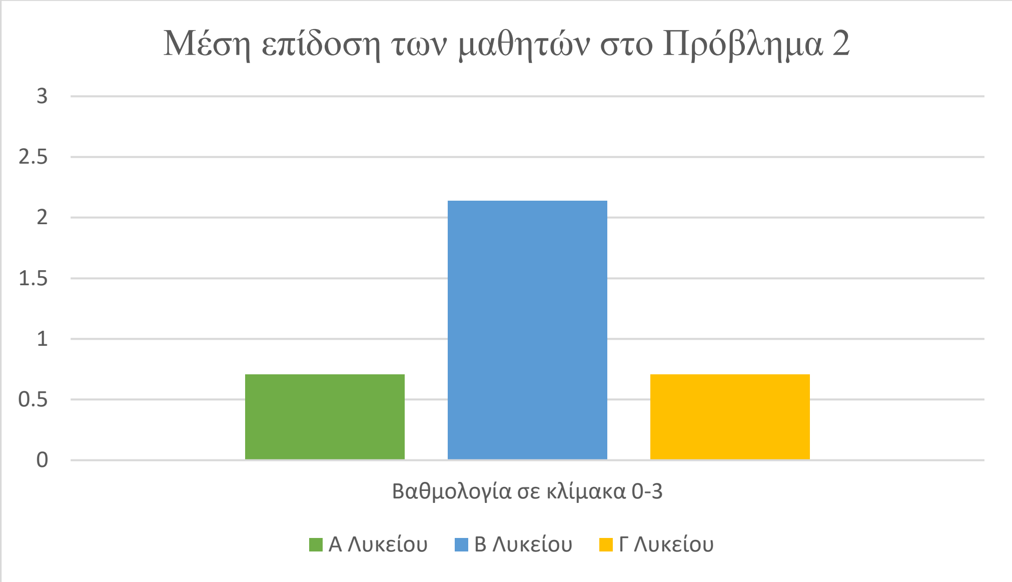
Στον πίνακα 4, παρουσιάζεται η επίδοση των μαθητών στο πρόβλημα 2, το οποίο, όπως φαίνεται, δυσκόλεψε περισσότερο τους μαθητές από το πρόβλημα 1. Αξίζει να παρατηρηθεί ότι οι μαθητές της Β Λυκείου τα πήγαν πολύ καλύτερα από τους μαθητές των υπόλοιπων τάξεων. Και οι 5 μαθητές της Β Λυκείου που προσπάθησαν να επιλύσουν το πρόβλημα, κατάφεραν να το λύσουν σωστά. Από τους μαθητές των υπόλοιπων τάξεων, μόνο 1 μαθητής της Α και 1 μαθητής της Γ Λυκείου έλυσαν σωστά το πρόβλημα. Παρατηρούμε, επίσης, ότι ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό μαθητών (42,9%) δεν μπόρεσε να δώσει καμία απάντηση στο Πρόβλημα 2.

Πίνακας 4: Βαθμολογία μαθητών στο Πρόβλημα 2

Απαντήσεις μαθητών	Α Λυκείου		Β Λυκείου		Γ Λυκείου		Σύνολο	
	Συχν.	%	Συχν.	%	Συχν.	%	Συχν.	%
Καμία απάντηση (0)	4	57,1%	2	28,6%	3	42,8%	9	42,9%
Λανθασμένη απάντηση (1)	2	28,6%	0	0,0%	1	14,3%	3	14,3%
Μερικώς σωστή απάντηση (2)	0	0,0%	0	0,0%	2	28,6%	2	9,5%
Σωστή απάντηση (3)	1	14,3%	5	71,4%	1	14,3%	7	33,3%
Σύνολο	7	100%	7	100%	7	100%	21	100%

Η μέση επίδοση στο πρόβλημα 2 των μαθητών της Α Λυκείου ήταν αρκετά χαμηλή (0,71 με άριστα το 3), ενώ των μαθητών της Β Λυκείου μπορεί να θεωρηθεί αρκετά βελτιωμένη (2,14 με άριστα το 3). Τέλος, και οι μαθητές της Γ Λυκείου δεν τα πήγαν καλά σε αυτό το πρόβλημα. Η μέση επίδοσή τους ήταν ίδια με την μέση επίδοση των μαθητών της Α Λυκείου (0,71 με άριστα το 3).

Γράφημα 2: Μέση επίδοση των μαθητών στο Πρόβλημα 2



Στον πίνακα 5 που ακολουθεί, πραγματοποιείται μια κατηγοριοποίηση του τρόπου επίλυσης που επέλεξαν οι μαθητές κάθε τάξης, είτε κατάφεραν να επιλύσουν σωστά το πρόβλημα είτε όχι. Παρατηρείται και στο πρόβλημα 2 ότι η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών και των τριών τάξεων επιλέγει την αλγεβρική μέθοδο επίλυσης. Μόνο 1 μαθητής της Β Λυκείου επιχείρησε αριθμητικό τρόπο επίλυσης.

Πίνακας 5: Κατηγοριοποίηση του τρόπου επίλυσης στο Πρόβλημα 2

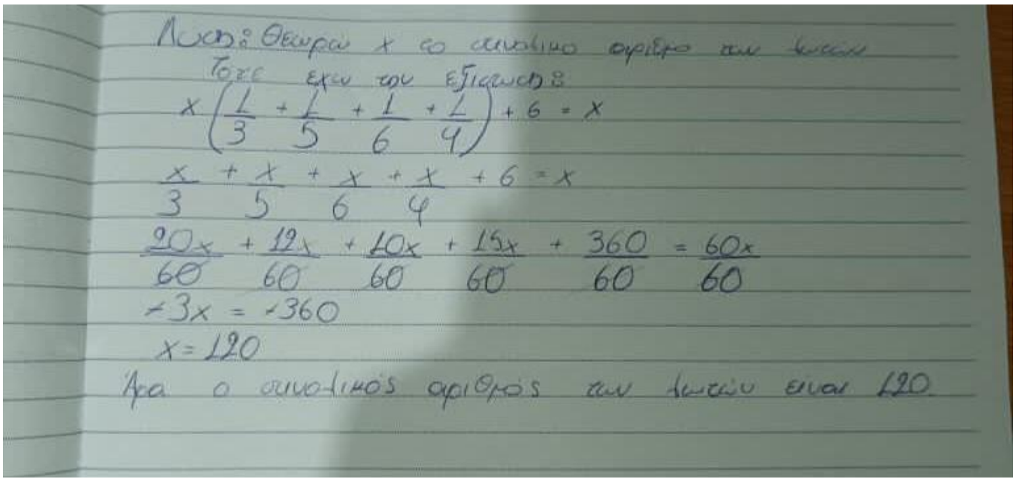
Τρόπος επίλυσης	Α Λυκείου	Β Λυκείου	Γ Λυκείου	Σύνολο
Αριθμητική επίλυση	0	1	0	1
Αλγεβρική επίλυση	3	4	4	11
Καμία απάντηση	4	2	3	9
Σύνολο	7	7	7	21

Προχωρώντας στον πίνακα 6, βλέπουμε μια ποιοτική ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών. Οι μαθητές φαίνεται να δυσκολεύτηκαν στην αλγεβρική επίλυση του Προβλήματος 2. Ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών που επιχείρησε αλγεβρική επίλυση δεν κατάφερε να κατασκευάσει τη σωστή εξίσωση σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος. Τέλος, 1 μαθητής επέλεξε να επιλύσει το Πρόβλημα 2 αριθμητικά με επιτυχία.

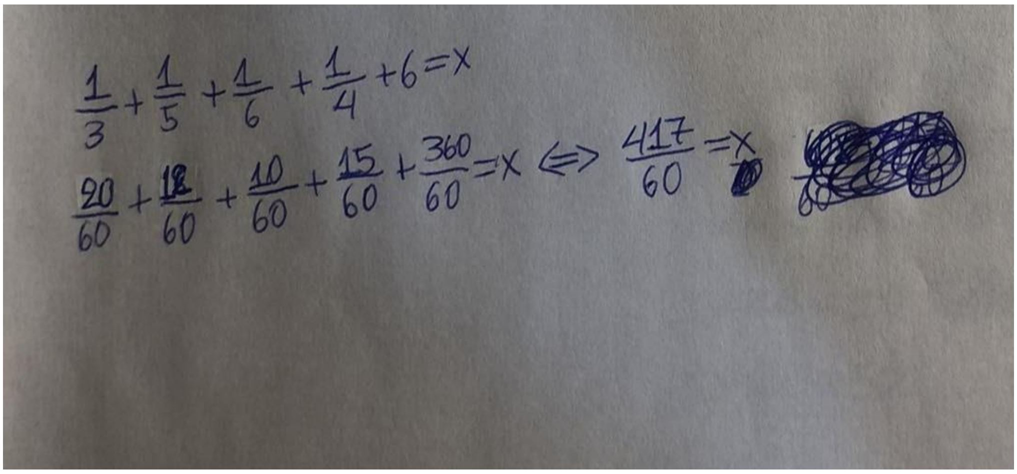
Πίνακας 6: Κατηγοριοποίηση των απαντήσεων των μαθητών στο Πρόβλημα 2

Τρόπος επίλυσης	Συχνότητα	Ποσοστό
Επιτυχία με αριθμητική επίλυση	1	4,8%
Αποτυχία με αριθμητική επίλυση	0	0%
Επιτυχία με αλγεβρική επίλυση	6	28,6%
Κατασκευή σωστής εξίσωσης αλλά λάθος αποτέλεσμα	1	4,8%
Κατασκευή λανθασμένης εξίσωσης	4	19%
Καμία απάντηση	9	42,8%
Σύνολο	21	100%

Από τους μαθητές της Α Λυκείου, μόνο η μαθήτρια Α2 κατάφερε να επιλύσει σωστά το πρόβλημα, κατασκευάζοντας τη σωστή εξίσωση και επιλύοντάς τη σωστά (εικόνα 4). Δύο μαθητές της Α Λυκείου, προσπάθησαν να επιλύσουν το πρόβλημα αλγεβρικά αλλά δεν σχημάτισαν τη σωστή εξίσωση (όπως η μαθήτρια Α1, εικόνα 5), ενώ οι υπόλοιποι μαθητές δεν μπόρεσαν να δώσουν καμία απάντηση στο πρόβλημα 2.



Εικόνα 4: Σωστή λύση μαθήτριας Α2 στο Πρόβλημα 2

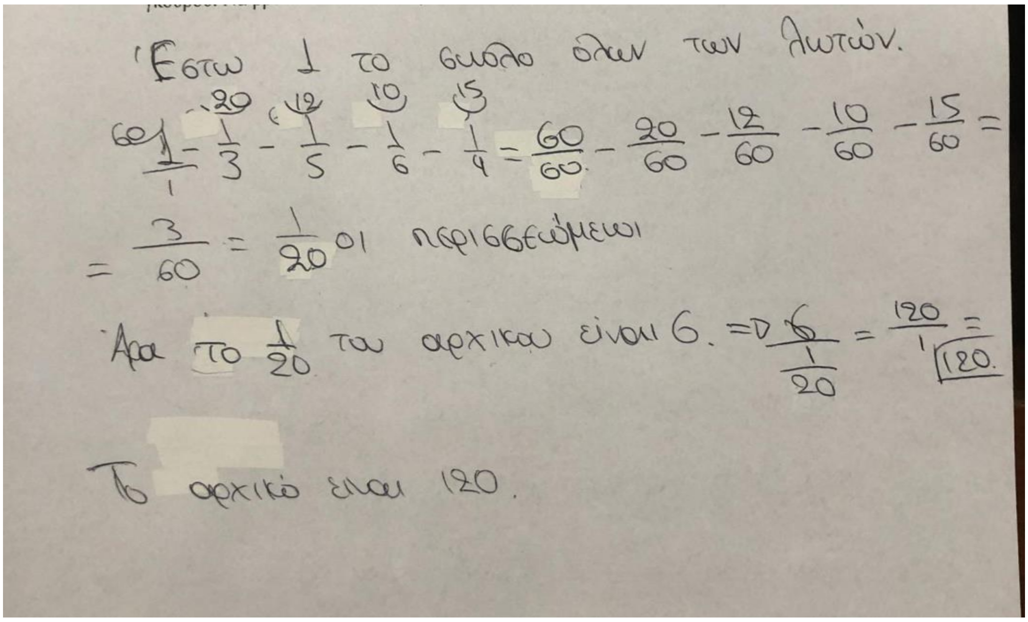


$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+6=x$

$\frac{20}{60}+\frac{12}{60}+\frac{10}{60}+\frac{15}{60}+\frac{360}{60}=x \Leftrightarrow \frac{417}{60}=x$

Εικόνα 5: Λανθασμένη λύση μαθήτριας Α1 στο Πρόβλημα 2

Οι μαθητές της Β Λυκείου είχαν πολύ καλές επιδόσεις σε αυτό το πρόβλημα. Τέσσερις από τους επτά μαθητές κατάφεραν να επιλύσουν σωστά το πρόβλημα με αλγεβρικό τρόπο κατασκευάζοντας τη σωστή εξίσωση και μια μαθήτρια (Β2) κατάφερε να το επιλύσει σωστά με αριθμητικό τρόπο (εικόνα 6), ακολουθώντας μάλιστα, εν αγνοία της, την πρωτότυπη λύση του Ινδού μαθηματικού Bhaskara II, όπως περιγράφεται στο έργο του.



Έστω 1 το σύνολο όλων των λωτών.

$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{4}=\frac{60}{60}-\frac{20}{60}-\frac{12}{60}-\frac{10}{60}-\frac{15}{60}=$

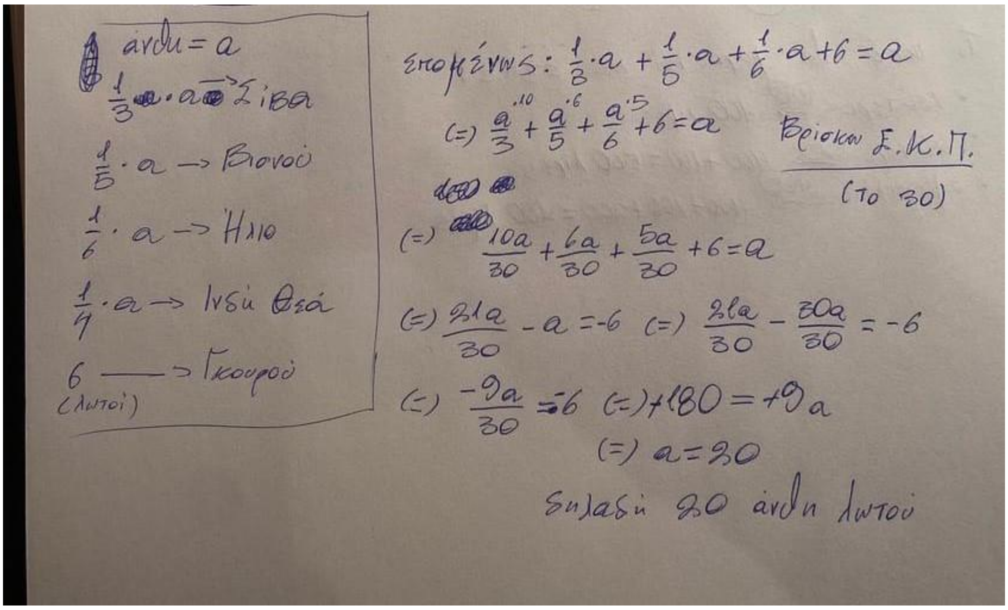
$=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$ οι περισσευόμενοι

Άρα το $\frac{1}{20}$ του αρχικού είναι 6. $\Rightarrow \frac{6}{\frac{1}{20}}=\frac{120}{1}=\boxed{120.}$

Το αρχικό είναι 120.

Εικόνα 6: Σωστή λύση μαθήτριας Β2 στο Πρόβλημα 2

Τέλος, όσον αφορά τους μαθητές της Γ Λυκείου, μόνο ένας κατάφερε να επιλύσει σωστά το Πρόβλημα 2 με αλγεβρική μέθοδο επίλυσης. Οι υπόλοιποι τρεις μαθητές, οι οποίοι έκαναν μια προσπάθεια αλγεβρικής επίλυσης, δεν κατάφεραν να βρουν το σωστό αποτέλεσμα. Ο μαθητής Γ4, όπως φαίνεται στην εικόνα 7, δεν κατάφερε να σχηματίσει τη σωστή εξίσωση, καθώς, μάλλον λόγω απροσεξίας, αγνόησε το 1/4 των λωτών που δόθηκαν στην Ινδή Θεά.



άνθη = a

$\frac{1}{3} \cdot a \rightarrow$ Σίβα

$\frac{1}{5} \cdot a \rightarrow$ Βισνού

$\frac{1}{6} \cdot a \rightarrow$ Ήλιο

$\frac{1}{4} \cdot a \rightarrow$ Ινδή Θεά

$6 \rightarrow$ Γκουρού (λωτοί)

Επομένως: $\frac{1}{3} \cdot a + \frac{1}{5} \cdot a + \frac{1}{6} \cdot a + 6 = a$

$(=) \frac{a}{3} + \frac{a}{5} + \frac{a}{6} + 6 = a$

Βρίσκω Ε.Κ.Π. (το 30)

$(=) \frac{10a}{30} + \frac{6a}{30} + \frac{5a}{30} + 6 = a$

$(=) \frac{21a}{30} - a = -6 \; (=) \frac{21a}{30} - \frac{30a}{30} = -6$

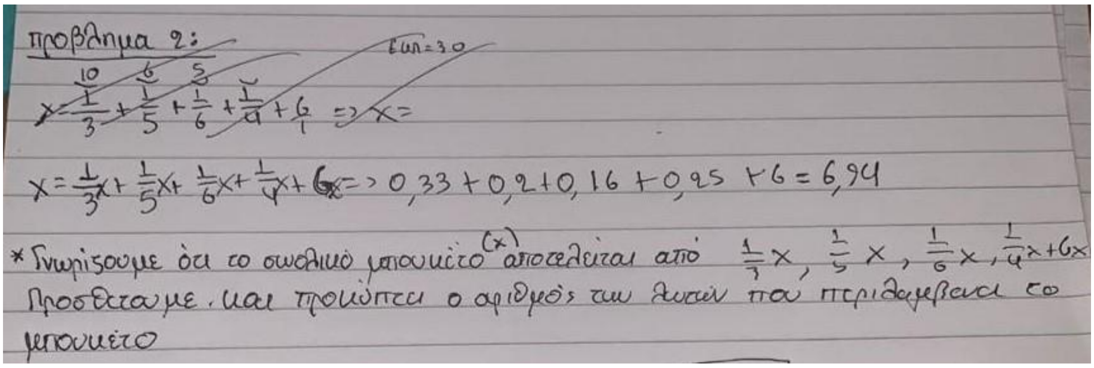
$(=) \frac{-9a}{30} = -6 \; (=) +180 = +9a$

$(=) a = 20$

δηλαδή 20 άνθη λωτού

Εικόνα 7: Λανθασμένη λύση μαθητή Γ4 στο Πρόβλημα 2

Η μαθήτρια Γ5 φαίνεται να κάνει διάφορες προσπάθειες να κατασκευάσει την εξίσωση, αλλά τελικά δεν καταφέρνει να τη σχηματίσει σωστά, ενώ μπορεί να παρατηρηθεί και μια αδυναμία επίλυσης της εξίσωσης στη συνέχεια (εικόνα 8).



πρόβλημα 2:

ΕΚΠ=30

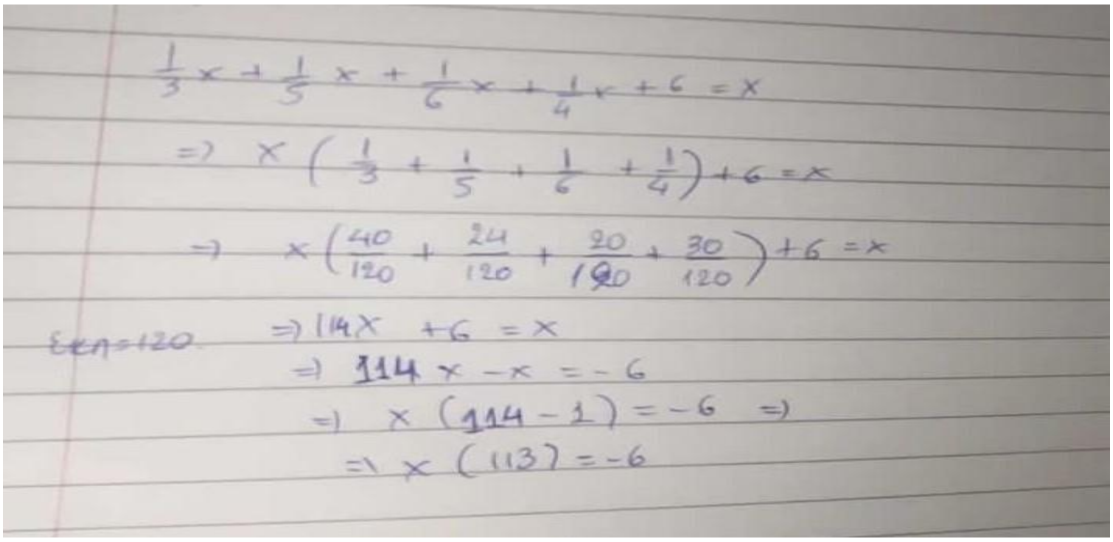
$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{6}{1} \Rightarrow x =$

$x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}x + 6 \Rightarrow 0,33 + 0,2 + 0,16 + 0,25 + 6 = 6,94$

* Γνωρίζουμε ότι το συνολικό μπουκέτο (x) αποτελείται από $\frac{1}{3}x$, $\frac{1}{5}x$, $\frac{1}{6}x$, $\frac{1}{4}x + 6x$ Προσθέτουμε και προκύπτει ο αριθμός των λωτών που περιλαμβάνει το μπουκέτο

Εικόνα 8: Λανθασμένη λύση μαθήτριας Γ5 στο Πρόβλημα 2

Τέλος, η μαθήτρια Γ6, ενώ σχηματίζει σωστά την εξίσωση φαίνεται να δυσκολεύεται με τη μέθοδο επίλυσης εξισώσεων και, πιο συγκεκριμένα, με το στάδιο της απαλοιφής παρονομαστών, κι έτσι δεν καταφέρνει να καταλήξει σε σωστό αποτέλεσμα. Μάλιστα, όπως φαίνεται στην εικόνα 9, στο τέλος καταλαβαίνει και η ίδια ότι έχει κάνει κάποιο λάθος, ίσως επειδή καταλήγει σε αρνητικό αριθμό, αλλά δεν είναι σε θέση να βρει το λάθος της και να το διορθώσει, οπότε σταματάει την επίλυση.



Εικόνα 9: Λανθασμένη λύση μαθήτριας Γ6 στο Πρόβλημα 2

5.3. Ανάλυση των απαντήσεων στο Πρόβλημα 3

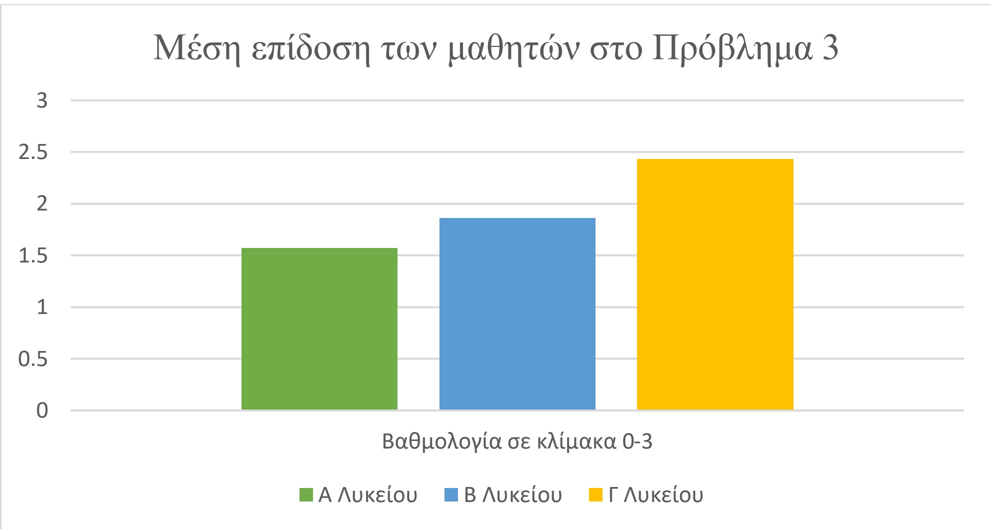
Στον πίνακα 7, παρουσιάζεται η αναλυτική βαθμολογία των μαθητών στο 3ο πρόβλημα του φύλλου εργασίας. Το πρόβλημα αυτό κατάφεραν να το λύσουν οι 12 από τους 21 μαθητές, αριθμός αρκετά μεγαλύτερος σε σχέση με τα δύο προηγούμενα προβλήματα, ενώ και οι μαθητές που δεν κατάφεραν να δώσουν καμία απάντηση είναι πολύ λιγότεροι. Αυτό ίσως οφείλεται στο γεγονός ότι το Πρόβλημα 3 έχει μια αρκετά πιο οικεία εκφώνηση στους μαθητές, η οποία βρίσκεται σε ένα πιο ρεαλιστικό πλαίσιο. Το γεγονός αυτό βοηθά τους μαθητές στην κατάκτηση του πρώτου σταδίου επίλυσης προβλήματος, που αφορά την κατανόηση του προβλήματος (βλ. Κεφάλαιο 2.2.), με αποτέλεσμα να μπορέσουν να συνεχίσουν στο δεύτερο στάδιο και την προσπάθεια εύρεσης ενός σχεδίου λύσης.

Πίνακας 7: Βαθμολογία μαθητών στο Πρόβλημα 3

Απαντήσεις μαθητών	Α Λυκείου		Β Λυκείου		Γ Λυκείου		Σύνολο	
	Συχν.	%	Συχν.	%	Συχν.	%	Συχν.	%
Καμία απάντηση (0)	2	28,6%	2	28,6%	0	0%	4	19%
Λανθασμένη απάντηση (1)	2	28,6%	1	14,2%	2	28,6%	5	23,8%
Μερικώς σωστή απάντηση (2)	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%
Σωστή απάντηση (3)	3	42,8%	4	57,2%	5	71,4%	12	57,2%
Σύνολο	7	100%	7	100%	7	100%	21	100%

Η μέση επίδοση των μαθητών της Γ Λυκείου στο πρόβλημα 3 είναι 2,43 με άριστα το 3, η οποία είναι αρκετά καλύτερη από την επίδοση των μαθητών των άλλων τάξεων. Οι μαθητές της Α Λυκείου είχαν μέση επίδοση 1,57 / 3 ενώ οι μαθητές της Β Λυκείου 1,86 / 3.

Γράφημα 3: Μέση επίδοση των μαθητών στο Πρόβλημα 3



Στον πίνακα 8, παρουσιάζεται η κατηγοριοποίηση του τρόπου επίλυσης που επέλεξαν οι μαθητές σε αριθμητικό και αλγεβρικό. Βλέπουμε και πάλι μια προτίμηση στην αλγεβρική μέθοδο επίλυσης, αλλά υπάρχει και ένας πιο αυξημένος αριθμός μαθητών σε σχέση με τα δύο προηγούμενα προβλήματα, που επιχείρησε έναν αριθμητικό τρόπο επίλυσης. Αυτό ίσως οφείλεται στο ρεαλιστικό πλαίσιο του προβλήματος, το οποίο οδήγησε τους μαθητές να θεωρήσουν ότι επιλύεται με απλές αριθμητικές πράξεις.

Πίνακας 8: Κατηγοριοποίηση του τρόπου επίλυσης στο Πρόβλημα 3

Τρόπος επίλυσης	Α Λυκείου	Β Λυκείου	Γ Λυκείου	Σύνολο
Αριθμητική επίλυση	3	2	2	7
Αλγεβρική επίλυση	2	3	5	10
Καμία απάντηση	2	2	0	4
Σύνολο	7	7	7	21

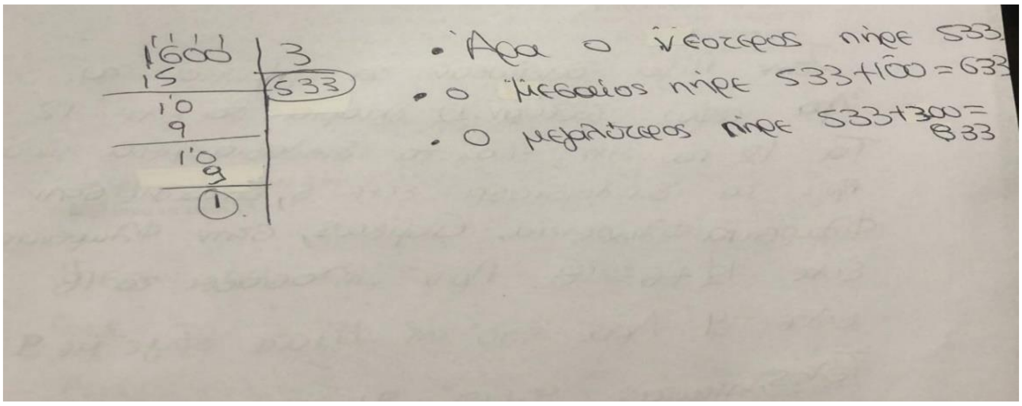
Τέλος, στον πίνακα 9, περιγράφεται μια ποιοτική κατηγοριοποίηση των απαντήσεων, ανάλογα με την επιτυχία ή την αποτυχία επίλυσης και τον τρόπο που επιλέχθηκε από τους μαθητές της κάθε τάξης.

Πίνακας 9: Κατηγοριοποίηση των απαντήσεων των μαθητών στο Πρόβλημα 3

Τρόπος επίλυσης	Συχνότητα	Ποσοστό
Επιτυχία με αριθμητική επίλυση	3	14,4%
Αποτυχία με αριθμητική επίλυση	4	19%
Επιτυχία με αλγεβρική επίλυση	9	42,8%
Κατασκευή σωστής εξίσωσης αλλά λάθος αποτέλεσμα	0	0%
Κατασκευή λανθασμένης εξίσωσης	1	4,8%

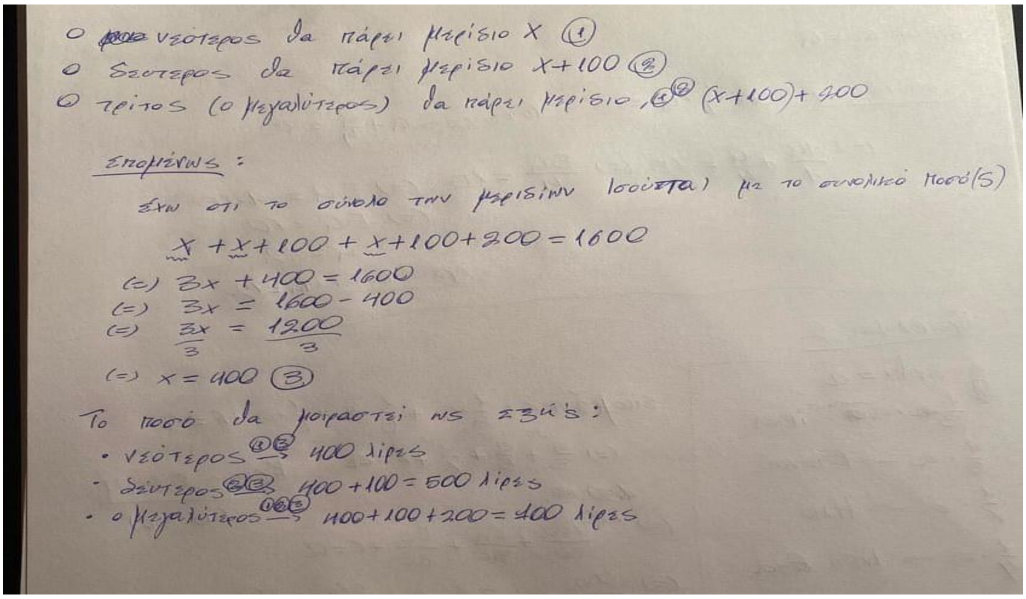
Καμία απάντηση	4	19%
Σύνολο	21	100%

Οι περισσότεροι μαθητές που προσπάθησαν να επιλύσουν το πρόβλημα με αριθμητικό τρόπο δεν τα κατάφεραν. Είναι σημαντικό να παρατηρηθεί ότι κανείς τους δεν πραγματοποίησε κάποια επαλήθευση, με την οποία θα αναγνώριζε ότι το άθροισμα των τριών μεριδίων που βρήκε δεν δίνει 1600 λίρες, όπως φαίνεται στην εικόνα 10.



Εικόνα 10: Λανθασμένη λύση μαθήτριας Β2 στο Πρόβλημα 3

Οι περισσότεροι, όμως, μαθητές κατάφεραν να επιλύσουν σωστά το Πρόβλημα 3 σχηματίζοντας τη σωστή εξίσωση, ακολουθώντας την πρωτότυπη λύση του Euler, η οποία ταυτίζεται και με τις σύγχρονες μεθόδους επίλυσης.



Εικόνα 11: Σωστή λύση μαθητή Γ4 στο Πρόβλημα 3

5.4. Ανάλυση των απαντήσεων στο Πρόβλημα 4

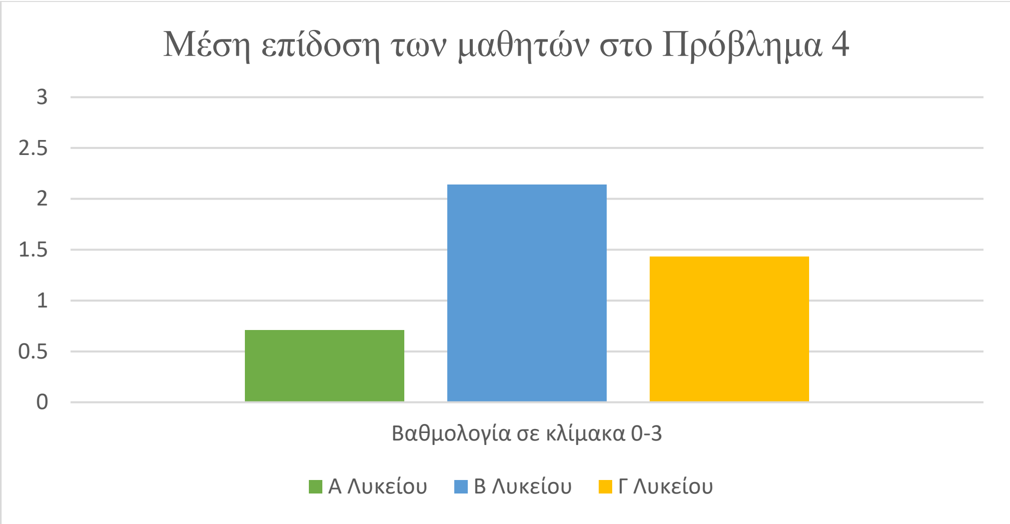
Οι βαθμολογίες των μαθητών κάθε τάξης του Λυκείου στο Πρόβλημα 4, φαίνονται αναλυτικά στον πίνακα 10. Παρατηρούμε και πάλι ότι οι μαθητές της Β Λυκείου τα πήγαν πολύ καλύτερα από τους μαθητές των υπόλοιπων τάξεων.

Πίνακας 10: Βαθμολογία μαθητών στο Πρόβλημα 4

Απαντήσεις μαθητών	Α Λυκείου		Β Λυκείου		Γ Λυκείου		Σύνολο	
	Συχν.	%	Συχν.	%	Συχν.	%	Συχν.	%
Καμία απάντηση (0)	4	57,1%	2	28,6%	1	14,3%	7	33,3%
Λανθασμένη απάντηση (1)	2	28,6%	0	0%	4	57,1%	6	28,6%
Μερικώς σωστή απάντηση (2)	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%
Σωστή απάντηση (3)	1	14,3%	5	71,4%	2	28,6%	8	38,1%
Σύνολο	7	100%	7	100%	7	100%	21	100%

Στο πρόβλημα 4, την καλύτερη μέση επίδοση είχαν οι μαθητές της Β Λυκείου (2,14 με άριστα το 3). Η μέση επίδοση των μαθητών της Γ Λυκείου ήταν 1,43 με άριστα το 3, ενώ των μαθητών της Α Λυκείου ήταν μόλις 0,71.

Γράφημα 4: Μέση επίδοση των μαθητών στο Πρόβλημα 4



Όσον αφορά τους τρόπους επίλυσης που επέλεξαν οι μαθητές κάθε τάξης, αλλά και συνολικά, τα αποτελέσματα δίνονται στον πίνακα 11. Η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών επιλέγει και στο Πρόβλημα 4 τον αλγεβρικό τρόπο επίλυσης.

Πίνακας 11: Κατηγοριοποίηση του τρόπου επίλυσης στο Πρόβλημα 4

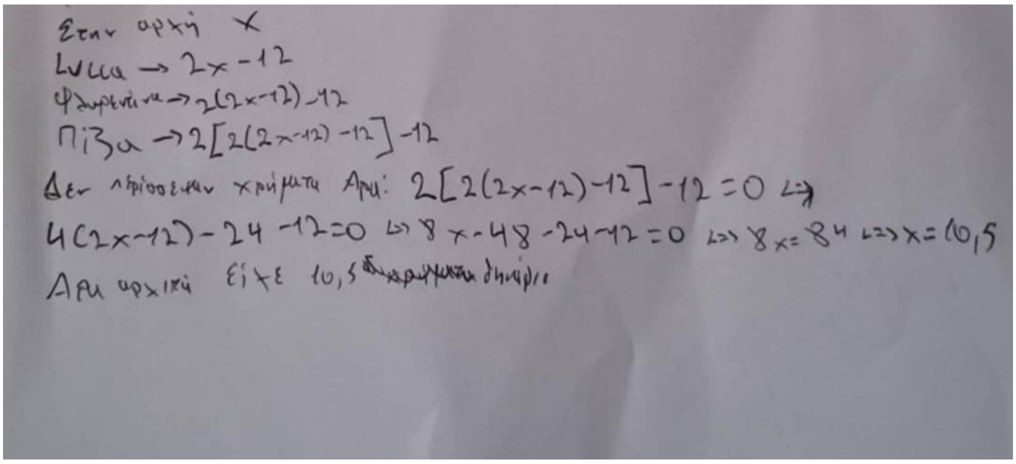
Τρόπος επίλυσης	Α Λυκείου	Β Λυκείου	Γ Λυκείου	Σύνολο
Αριθμητική επίλυση	1	2	0	3
Αλγεβρική επίλυση	2	3	6	11
Καμία απάντηση	4	2	1	7
Σύνολο	7	7	7	21

Για να παρουσιαστούν πιο αναλυτικά οι απαντήσεις των μαθητών, δημιουργήθηκε μια κατηγοριοποίησή τους, όπως φαίνεται στον πίνακα 12. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών που επιχείρησε αλγεβρική επίλυση δεν κατάφερε να σχηματίσει τη σωστή εξίσωση από τα δεδομένα του προβλήματος, το οποίο σημαίνει ότι δυσκολεύτηκε στην κατανόηση του προβλήματος.

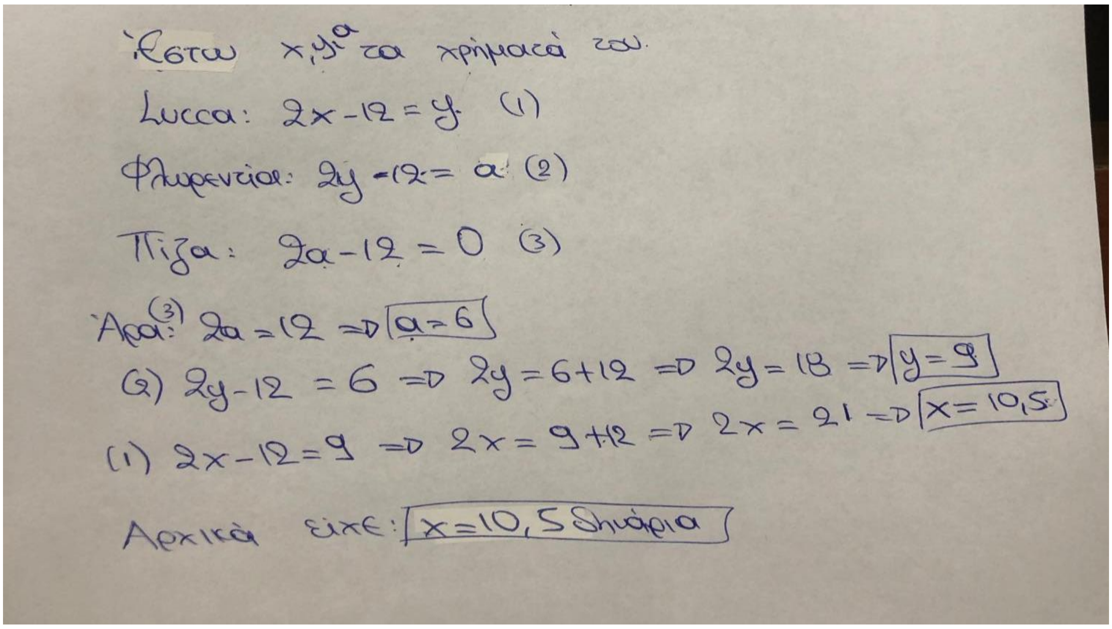
Πίνακας 12: Κατηγοριοποίηση των απαντήσεων των μαθητών στο Πρόβλημα 4

Τρόπος επίλυσης	Συχνότητα	Ποσοστό
Επιτυχία με αριθμητική επίλυση	2	9,5%
Αποτυχία με αριθμητική επίλυση	1	4,8%
Επιτυχία με αλγεβρική επίλυση	6	28,6%
Κατασκευή σωστής εξίσωσης αλλά λάθος αποτέλεσμα	0	0%
Κατασκευή λανθασμένης εξίσωσης	5	23,8%
Καμία απάντηση	7	33,3%
Σύνολο	21	100%

Αρκετοί μαθητές κατάφεραν να επιλύσουν σωστά το πρόβλημα αλγεβρικά σχηματίζοντας τη σωστή εξίσωση, είτε με έναν άγνωστο, είτε θεωρώντας τρεις αγνώστους για τα χρήματα κάθε πόλης που επισκέφθηκε (βλ. εικόνα 12 & 13).

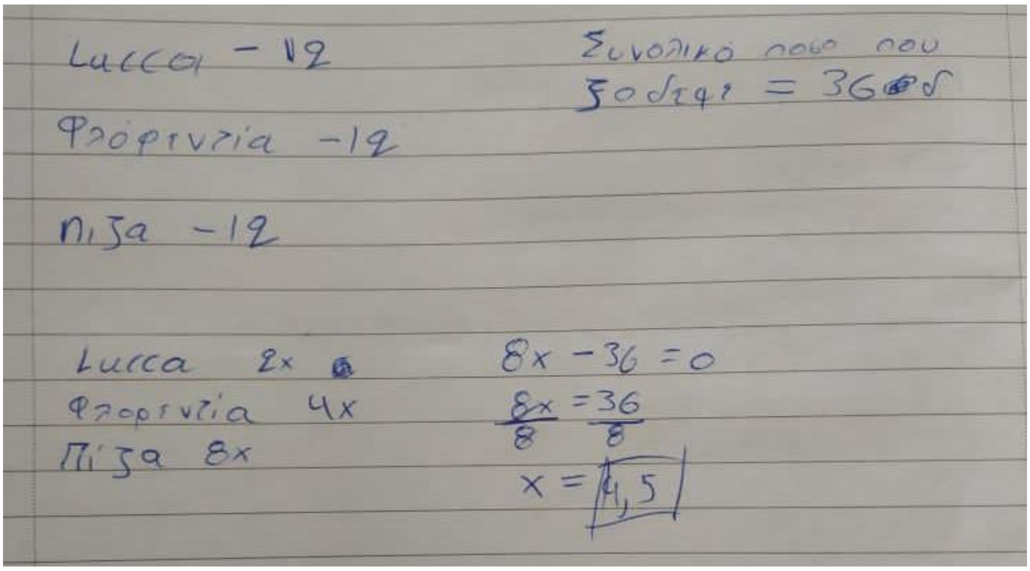


Εικόνα 12: Σωστή λύση μαθητή Β3 στο Πρόβλημα 4



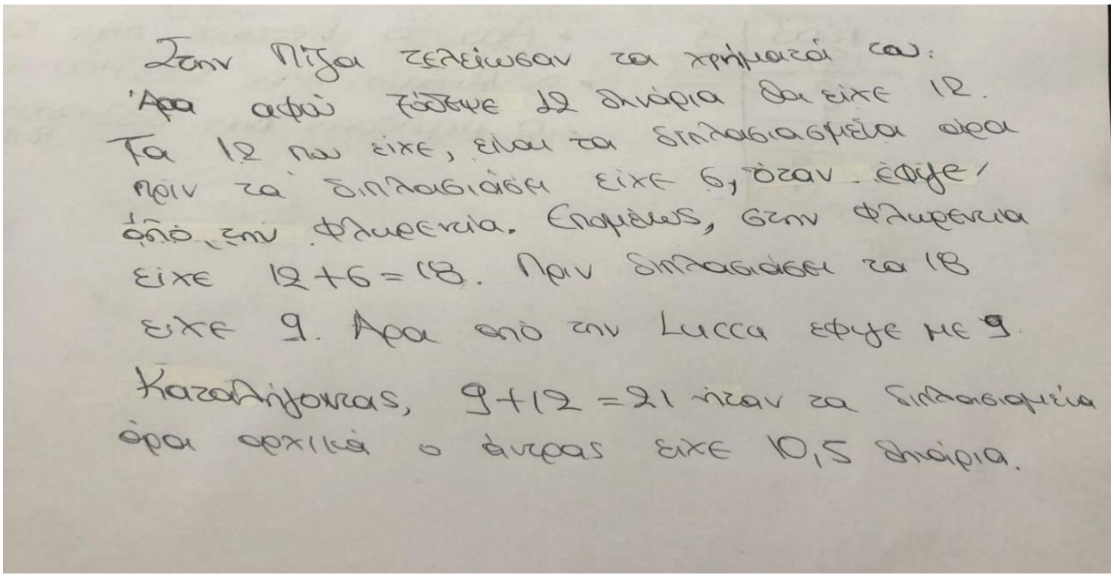
Εικόνα 13: Σωστή λύση μαθήτριας Β1 στο Πρόβλημα 4

Υπήρξαν και κάποιοι μαθητές, οι οποίοι δεν κατάφεραν να σχηματίσουν τη σωστή εξίσωση για να επιλύσουν το πρόβλημα, όπως ο μαθητής Α3 (εικόνα 14), ο οποίος δεν κατανόησε ότι σε κάθε πόλη διπλασιαζόταν τα χρήματα που περίσσευαν από την προηγούμενη και όχι τα αρχικά.

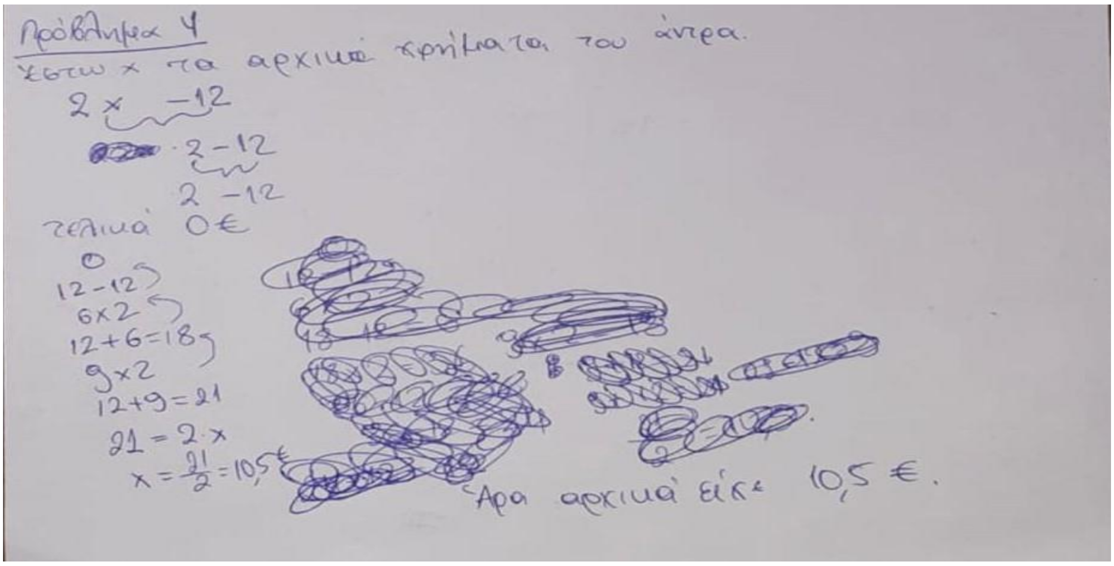


Εικόνα 14: Λανθασμένη λύση μαθητή Α3 στο Πρόβλημα 4

Επίσης, 2 μαθήτριες κατάφεραν να επιλύσουν σωστά το πρόβλημα με αριθμητικό τρόπο, όπως η μαθήτρια Β2, ακολουθώντας απλή συλλογιστική (εικόνα 15). Μάλιστα, όπως φαίνεται από την εικόνα 16, η μαθήτρια Β4 επιχείρησε στην αρχή να λύσει αλγεβρικά το πρόβλημα, το οποίο μάλλον τη δυσκόλεψε κι έτσι, στράφηκε στην αριθμητική επίλυση.

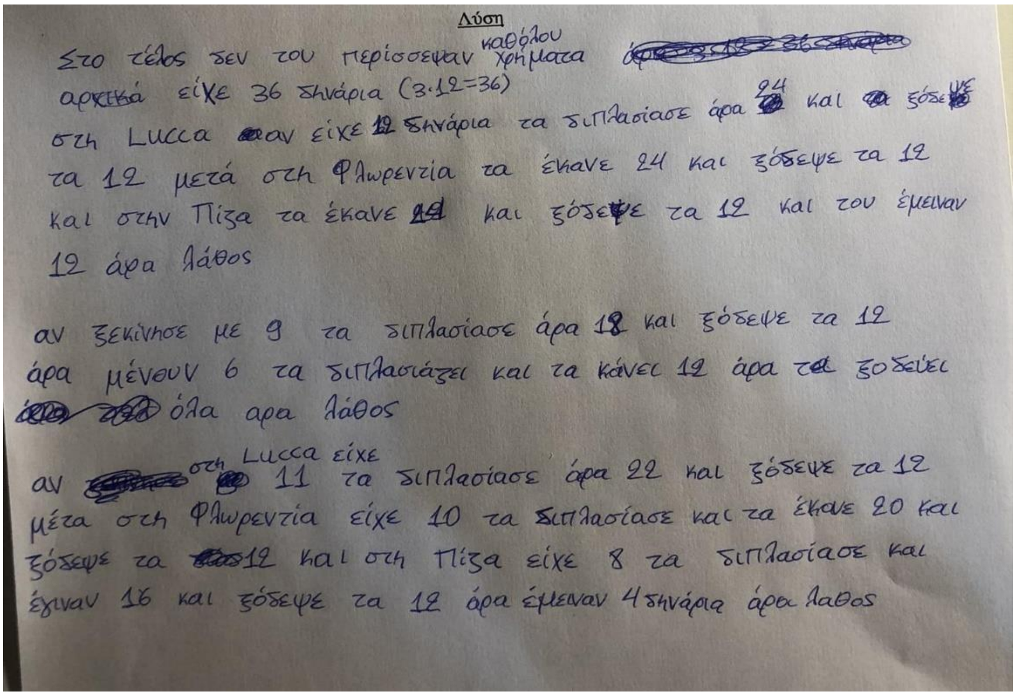

Στην Πίζα τελείωσαν τα χρήματά του:
Άρα αφού ξόδεψε 12 δηνάρια θα είχε 12.
Τα 12 που είχε, είναι τα διπλασιασμένα άρα
πριν τα διπλασιάσει είχε 6, όταν έφυγε
από την Φλωρεντία. Επομένως, στην Φλωρεντία
είχε 12+6=18. Πριν διπλασιάσει τα 18
είχε 9. Άρα από την Lucca έφυγε με 9.
Καταλήγοντας, 9+12=21 ήταν τα διπλασιασμένα
άρα αρχικά ο άντρας είχε 10,5 δηνάρια.

Εικόνα 15: Σωστή λύση μαθήτριας Β2 στο Πρόβλημα 4


Πρόβλημα 4
Έστω x τα αρχικά χρήματα του άντρα.
2x −12
·2 −12
2 −12
τελικά 0€
0
12−12
6x2
12+6=18
9x2
12+9=21
21 = 2·x
x = 21/2 = 10,5€
Άρα αρχικά είχε 10,5 €.

Εικόνα 16: Σωστή λύση μαθήτριας Β4 στο Πρόβλημα 4

Μια μαθήτρια της Α Λυκείου (Α1) φαίνεται πως κάνει μια προσπάθεια να επιλύσει το πρόβλημα με τη «μέθοδο της Διπλής Ψευδούς Παραδοχής», η οποία αποτελεί και την πρωτότυπη λύση του συγγραφέα, αδυνατώντας όμως να βρει τη σύνδεση μεταξύ της υπόθεσης και του αποτελέσματος, στο οποίο κατέληγε, ώστε να ανακαλύψει τη σωστή απάντηση (εικόνα 17).



Λύση

Στο τέλος δεν του περίσσεψαν καθόλου χρήματα
αρχικά είχε 36 δηνάρια (3·12=36)
στη Lucca αν είχε 12 δηνάρια τα διπλασίασε άρα 24 και ξόδεψε
τα 12 μετά στη Φλωρεντία τα έκανε 24 και ξόδεψε τα 12
και στην Πίζα τα έκανε 24 και ξόδεψε τα 12 και του έμειναν
12 άρα λάθος

αν ξεκίνησε με 9 τα διπλασίασε άρα 18 και ξόδεψε τα 12
άρα μένουν 6 τα διπλασιάζει και τα κάνει 12 άρα τα ξοδεύει
όλα άρα λάθος

αν στη Lucca είχε 11 τα διπλασίασε άρα 22 και ξόδεψε τα 12
μέτα στη Φλωρεντία είχε 10 τα διπλασίασε και τα έκανε 20 και
ξόδεψε τα 12 και στη Πίζα είχε 8 τα διπλασίασε και
έγιναν 16 και ξόδεψε τα 12 όρα έμειναν 4 δηνάρια άρα λάθος

Εικόνα 17: Λανθασμένη λύση μαθήτριας Α1 στο Πρόβλημα 4

5.5. Ανάλυση των συνολικών επιδόσεων

Στον πίνακα 13, παρουσιάζεται η μέση επίδοση των μαθητών της κάθε τάξης Λυκείου, αλλά και του συνόλου των μαθητών συγκριτικά σε κάθε πρόβλημα του φύλλου εργασίας στην κλίμακα αξιολόγησης 0-3, που προαναφέρθηκε. Η υψηλότερη μέση επίδοση των μαθητών εντοπίζεται στο Πρόβλημα 3, ενώ η χαμηλότερη επίδοση στο Πρόβλημα 2. Όπως προαναφέρθηκε, η υψηλή επίδοση στο Πρόβλημα 3 οφείλεται μάλλον στο ρεαλιστικό πλαίσιο του προβλήματος, το οποίο οδήγησε στην καλύτερη κατανόηση, κι έτσι στην προσπάθεια επίλυσης, ενώ το Πρόβλημα 2 μπορεί να θεωρηθεί πιο δύσκολο στην κατανόηση.

Πίνακας 13: Μέση επίδοση των μαθητών σε κάθε πρόβλημα του φύλλου εργασίας

	Α Λυκείου	Β Λυκείου	Γ Λυκείου	Σύνολο μαθητών
Πρόβλημα 1	1,14	1,86	2	1,67
Πρόβλημα 2	0,71	2,14	0,71	1,33

Πρόβλημα 3	1,57	1,86	2,43	1,95
Πρόβλημα 4	0,71	2,14	1,43	1,43

Στη συνέχεια, στους πίνακες 14, 15 και 16, παρουσιάζονται αναλυτικά οι βαθμολογίες των μαθητών ανά τάξη φοίτησης, αλλά και η συνολική μέση επίδοση της τάξης.

Πίνακας 14: Βαθμολογίες μαθητών Α Λυκείου

Μαθητές	Πρόβλημα 1	Πρόβλημα 2	Πρόβλημα 3	Πρόβλημα 4	Σύνολο (0-12)
Α1	1	1	3	1	6
Α2	3	3	3	3	12
Α3	1	1	1	1	4
Α4	3	0	3	0	6
Α5	0	0	0	0	0
Α6	0	0	1	0	1
Α7	0	0	0	0	0
Μέση επίδοση	1,14	0,71	1,57	0,71	4,14

Πίνακας 15: Βαθμολογίες μαθητών Β Λυκείου

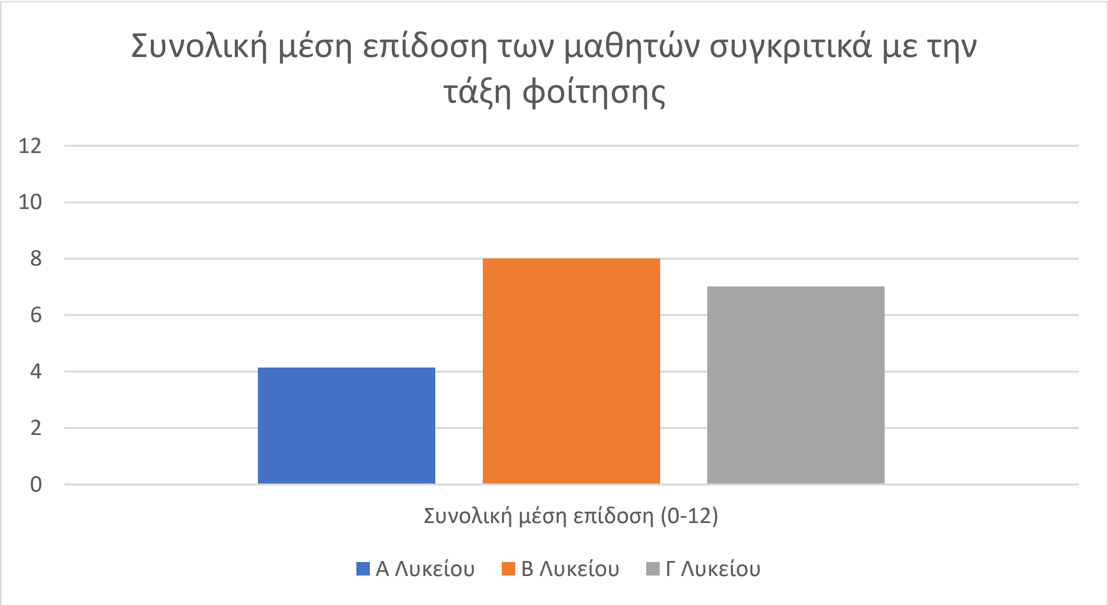
Μαθητές	Πρόβλημα 1	Πρόβλημα 2	Πρόβλημα 3	Πρόβλημα 4	Σύνολο (0-12)
Β1	3	3	3	3	12
Β2	1	3	1	3	8
Β3	3	3	3	3	12
Β4	3	3	3	3	12
Β5	3	3	3	3	12
Β6	0	0	0	0	0
Β7	0	0	0	0	0
Μέση επίδοση	1,86	2,14	1,86	2,14	8

Πίνακας 16: Βαθμολογίες μαθητών Γ Λυκείου

Μαθητές	Πρόβλημα 1	Πρόβλημα 2	Πρόβλημα 3	Πρόβλημα 4	Σύνολο (0-12)
Γ1	0	0	3	3	6
Γ2	3	3	3	1	10
Γ3	0	0	1	1	2
Γ4	3	2	3	3	11
Γ5	2	1	3	1	7
Γ6	3	2	3	1	9
Γ7	3	0	1	0	4
Μέση επίδοση	2	0,71	2,43	1,43	7

Στο γράφημα 5, απεικονίζεται η συνολική μέση επίδοση των μαθητών συγκριτικά με την τάξη του Λυκείου, στην οποία φοιτούν. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η επίδοση των μαθητών της Β Λυκείου είναι μεγαλύτερη σε σύγκριση με τους μαθητές της Γ Λυκείου, το οποίο προκύπτει κυρίως από τις απαντήσεις των μαθητών της Β Λυκείου στο Πρόβλημα 2 και στο Πρόβλημα 4.

Γράφημα 5: Συνολική μέση επίδοση των μαθητών συγκριτικά με την τάξη φοίτησης



Σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι εμφανές ότι οι μαθητές της Α Λυκείου είχαν πολύ χαμηλές επιδόσεις στο σύνολο των προβλημάτων, ενώ οι επιδόσεις των μαθητών της Β και της Γ Λυκείου είναι σίγουρα βελτιωμένες, αλλά όχι πολύ υψηλές.

Όσον αφορά τον τρόπο επίλυσης που επέλεξαν οι μαθητές, σύμφωνα με τον πίνακα 17, γίνεται φανερό ότι η αλγεβρική επίλυση έχει επιλεχθεί από τη συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών και στα τέσσερα προβλήματα.

Πίνακας 17: Συχνότητα και ποσοστά του τρόπου επίλυσης των μαθητών σε κάθε πρόβλημα

Τρόπος επίλυσης	Πρόβλημα 1		Πρόβλημα 2		Πρόβλημα 3		Πρόβλημα 4	
Αριθμητική επίλυση	2	9,6%	1	4,8%	6	28,6%	3	14,3%
Αλγεβρική επίλυση	12	57,1%	11	52,4%	10	47,6%	11	52,4%
Καμία απάντηση	7	33,3%	9	42,8%	5	23,8%	7	33,3%
Σύνολο	21	100%	21	100%	21	100%	21	100%

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Συμπεράσματα – Προτάσεις

6.1. Συμπεράσματα

Σκοπό της παρούσας έρευνας αποτέλεσε η διερεύνηση των επιδόσεων των μαθητών Λυκείου στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων ιστορικής προέλευσης. Για την επίτευξη αυτού του σκοπού, δημιουργήθηκε ένα φύλλο εργασίας με τέσσερα προβλήματα μαθηματικών, τα οποία προερχόταν από διαφορετικούς πολιτισμούς και διαφορετικές χρονικές περιόδους στην ιστορία των μαθηματικών. Το φύλλο εργασίας απαντήθηκε από μαθητές και των τριών τάξεων του Λυκείου, καθώς κύρια πρόθεση αποτελούσε και η σύγκριση των επιδόσεων μεταξύ των μαθητών της κάθε τάξης.

Έπειτα από τη βιβλιογραφική επισκόπηση και τη διεξαγωγή της έρευνας, θα παρουσιαστούν τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών στο φύλλο εργασίας με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στην αρχή της έρευνας.

Σχετικά με το $1^{ο}$ ερευνητικό ερώτημα, που αφορούσε τις επιδόσεις των μαθητών Λυκείου στην επίλυση προβλημάτων, τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν πως οι μαθητές εμφανίζουν αρκετές δυσκολίες. Οι επιδόσεις τους ήταν αρκετά χαμηλές, παρόλο που έχουν διδαχθεί ήδη σε προηγούμενες τάξεις τις μαθηματικές γνώσεις που απαιτούνταν για την επίλυση των συγκεκριμένων προβλημάτων. Η μέση επίδοση του συνόλου των μαθητών στο φύλλο εργασίας μπορούν να χαρακτηριστούν μέτριες (6,4 / 12). Το εύρημα αυτό συμφωνεί και με τα ευρήματα άλλων ερευνών (Verschaffel et al,1999 ; Schoenfeld, 1992; Lester, Garofalo, & Kroll, 1989) και φανερώνει τη δυσκολία των μαθητών και, κατ' επέκταση, την έλλειψη εξάσκησής τους με το σημαντικότερο, ίσως, κομμάτι των μαθηματικών, που αφορά την επίλυση προβλημάτων.

Όσον αφορά το $2^{ο}$ ερευνητικό ερώτημα για τη διαφοροποίηση μεταξύ των επιδόσεων των μαθητών συγκριτικά με την τάξη Λυκείου, στην οποία φοιτούν, τα ευρήματα της έρευνας δείχνουν πως οι μαθητές της Α Λυκείου δυσκολεύονται πολύ περισσότερο από ότι οι μαθητές της Β και της Γ. Η μέση επίδοση των μαθητών της Α Λυκείου κρίνεται ιδιαίτερα ανεπαρκής (4,14 / 12), ενώ οι επιδόσεις των μαθητών της

Β (8 / 12) και της Γ (7 / 12) είναι σαφώς πιο βελτιωμένες, αλλά όχι ικανοποιητικές. Μάλιστα, αξίζει να παρατηρηθεί ότι η επίδοση των μαθητών της Β Λυκείου είναι καλύτερη από αυτή των μαθητών της Γ Λυκείου. Το φαινόμενο αυτό χρήζει περισσότερης διερεύνησης σε μελλοντική έρευνα για να διαπιστωθεί αν είναι τυχαίο ή προέρχεται πιθανόν από το άγχος των μαθητών στην τελευταία τάξη του Λυκείου, εν όψει της συμμετοχής τους στις πανελλαδικές εξετάσεις.

Σχετικά με το 3^{ο} ερευνητικό ερώτημα και τον τρόπο επίλυσης που επιλέγουν οι μαθητές, γίνεται φανερό πως οι μαθητές και των τριών τάξεων Λυκείου χρησιμοποιούν κυρίως αλγεβρικούς τρόπους. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, οι μαθητές που επέλεξαν αριθμητικό τρόπο επίλυσης ήταν ελάχιστοι και οι περισσότεροι χωρίς επιτυχία. Φαίνεται, λοιπόν, πως οι μαθητές έχουν κατανοήσει πλέον στο Λύκειο τη χρησιμότητα της άλγεβρας σαν κύριο εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων. Παρατηρήθηκαν, βέβαια, αρκετές δυσκολίες των μαθητών στην κατασκευή της σωστής εξίσωσης για την επίλυση του προβλήματος, ενώ εντοπίστηκαν και αδυναμίες στη διαδικασία επίλυσης εξισώσεων.

Το 4^{ο} ερευνητικό ερώτημα αφορά την ανίχνευση των πρωτότυπων λύσεων των εκάστοτε συγγραφέων του κάθε προβλήματος στις απαντήσεις των μαθητών. Όσον αφορά το πρόβλημα 1, αν δούμε προσεκτικά τις απαντήσεις των μαθητών, θα παρατηρήσουμε ότι μια μαθήτρια της Β Λυκείου (Β2) επιχειρεί μια επίλυση που μοιάζει αρκετά με τη διαδικασία που περιγράφεται στον πάπυρο του Rhind από τους Αιγυπτίους και αφορά τη «μέθοδο της ψευδούς παραδοχής (αφετηρίας)», χωρίς όμως να καταφέρει να λύσει σωστά το πρόβλημα. Στο πρόβλημα 2, η ίδια μαθήτρια επιχειρεί εν αγνοία της την αριθμητική μέθοδο επίλυσης του Bhaskara II, όπως αυτή περιγράφεται στο βιβλίο του, αλλά αυτή τη φορά καταφέρνει με επιτυχία να λύσει το πρόβλημα. Στο πρόβλημα 3, οι περισσότεροι μαθητές έλυσαν το πρόβλημα όμοια με τον τρόπο επίλυσης του Euler, εύρημα που αναμέναμε, καθώς ο τρόπος επίλυσης που περιγράφει στο βιβλίο του περιλαμβάνει σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό. Τέλος, στο πρόβλημα 4, μια μαθήτρια της Α Λυκείου χρησιμοποιεί τη «μέθοδο της Διπλής Ψευδούς Παραδοχής», η οποία χρησιμοποιείται και από τον Fibonacci στο βιβλίο του. Ωστόσο, δεν καταφέρνει να εντοπίσει το λάθος στην υπόθεσή της, κι έτσι δεν καταφέρνει να επιλύσει σωστά το πρόβλημα.

Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε ότι υπήρξαν αρκετοί μαθητές, οι οποίοι, ενώ αρχικά συμφώνησαν να συμμετέχουν στην έρευνα, μόλις ενημερώθηκαν ότι αφορά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, δίστασαν και τελικά αρνήθηκαν αποδίδοντας το δισταγμό τους στο φόβο και την ανασφάλεια που νιώθουν όταν αντιμετωπίζουν μαθηματικά προβλήματα. Επίσης, οι περισσότεροι από τους μαθητές που δεν κατάφεραν να επιλύσουν κανένα πρόβλημα, όταν ρωτήθηκαν από την ερευνήτρια για τη δυσκολία που αντιμετώπισαν, απάντησαν πως τα προβλήματα αυτά «δεν είναι στην ύλη» και πως δεν έχουν κάνει κάτι παρόμοιο στο σχολείο. Το γεγονός αυτό προκαλεί ιδιαίτερο προβληματισμό, καθώς η επίλυση προβλημάτων αποτελεί στόχο των ελληνικών προγραμμάτων σπουδών, αλλά και βασικό στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης γενικότερα.

6.2. Προτάσεις για μελλοντικές έρευνες

Ολοκληρώνοντας την παρούσα έρευνα, κρίνεται σημαντικό να επισημανθεί ότι τα συμπεράσματά της δεν μπορούν να γενικευτούν, καθώς η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε έναν περιορισμένο αριθμό 21 μαθητών. Ωστόσο, τα ευρήματά της δημιουργούν προβληματισμό σχετικά με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην επίλυση προβλημάτων και μπορούν να αποτελέσουν το έναυσμα για περαιτέρω έρευνα σε μεγαλύτερο δείγμα μαθητών, ώστε να αποσαφηνιστούν τα στάδια επίλυσης που δυσκολεύουν περισσότερο τους μαθητές και τα αίτια αυτών των δυσκολιών.

Μια μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να περιλαμβάνει και μια διδακτική παρέμβαση σε μαθητές Λυκείου, κατά την οποία θα παρουσιαστεί στους μαθητές η ιστορική πορεία της άλγεβρας μέσα από τον τρόπο επίλυσης ιστορικών μαθηματικών προβλημάτων διαφορετικών πολιτισμών και χρονικών περιόδων, ώστε να κατανοήσουν τη χρησιμότητά της, αλλά και να έρθουν σε επαφή με διαφορετικούς τρόπους επίλυσης του ίδιου προβλήματος. Μάλιστα, η αξιοποίηση ιστορικών μαθηματικών προβλημάτων θα προκαλούσε το ενδιαφέρον των μαθητών, ενώ η ενασχόληση με αυτά θα τους βοηθούσε να αναπτύξουν τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων και να μάθουν να προσεγγίζουν σύνθετα ζητήματα μεθοδικά, καθώς τα περισσότερα ιστορικά προβλήματα απαιτούν δημιουργική και κριτική σκέψη για να επιλυθούν.

Βιβλιογραφία

Badiou, A. (2018). *Εγκώμιο για τα μαθηματικά.* Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.

Bell, E. (2006). *Οι μαθηματικοί (από τον Ζήνωνα έως τον Cauchy)* (4η εκδ., Τόμ. I). (Μ. Μαγειρόπουλος, Μεταφρ.) Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* New York: Kluwer Academic Publishers.

Chateau, J. (1958). *Οι μεγάλοι παιδαγωγοί.* Αθήνα: Εκδόσεις Κένταυρος.

Farmaki, V., & Paschos, T. (2007). Employing genetic "moments" in the history of mathematics in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), σσ. 83-106.

Fried, M. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science & Education, 10*, σσ. 391-408.

Guedji, D. (1999). *Το θεώρημα του παπαγάλου.* (Τ. Μιχαηλίδης, Μεταφρ.) Εκδόσεις ΠΟΛΙΣ.

Gulikers, I., & Blom, K. (2001). "A Historical Angle", A survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics, 47*, σσ. 223-258.

Harper, E. (1987). Ghosts of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics, 18*(1), σσ. 75-90.

Jankvist, U. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*, σσ. 235-261.

Krulik, S., & Rudnick, J. (1988). *Problem solving: A handbook for Elementary School Teachers.* Boston: Allyn and Bacon.

Lerch, C. (2004). Control decisions and personal beliefs: their effect on solving mathematical problems. *Journal of Mathematical Behaviour*(23), σσ. 21-36.

Lester, F. (1988). Teaching mathematical problem solving. *Nämnaren Swedish journal of mathematics education, 15*(3).

Lester, F., Garofalo, J., & Kroll, D. (1989). *The Role of Metacognition in Mathematical Problem Solving: A Study of Two Grade Seven Classes. Final Report.* Washington, DC: National Science Foundation.

Lingard, D. (2002). Η ιστορία των μαθηματικών: Ένα απαραίτητο στοιχείο του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών του σχολείου. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.), *Η ιστορία των μαθηματικών ως μέσο διδασκαλίας των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο και στο γυμνάσιο*, (σσ. 17-26). Θεσσαλονίκη.

Mayer, R. (1985). Implications of Cognitive Psychology for Instruction in Mathematical Problem Solving. Στο E. Silver, *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving* (σσ. 123-145). Lawrence Erlbaum.

Mehri, B. (2017). From Al-Khwarizmi to Algorithm. *Olympiads in Informatics*(11), σσ. 71-74.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Newell, A., & Simon, H. (1972). *Human problem solving.* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.

OECD. (2014). *PISA 2012 results: Creative problem solving: Students' skills in tackling (Volume V).* OECD Publishing.

Polya, G. (1957). *How to solve it?* (2η εκδ.). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving.* New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. Στο D. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (σσ. 334-370). New York: Macmillan.

Schoenfeld, A. (2013). Reflections on Problem Solving Theory and Practice. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1), σσ. 9-34.

Schunk, D., Pintrich, P., & Meece, J. (2008). *Motivation in education : theory, research, and applications* (3η εκδ.). Upper Saddle River, N.J. : Pearson/Merrill Prentice Hall.

Siu, M. (2006). No, I don't use history of mathematics in my class. Why? Στο F. Furinghetti, S. Kaisjer, & C. Tzanakis (Επιμ.), *Proceedings HPM 2004 & ESU 4*, (σσ. 268-277). University of Crete, Greece.

Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1988). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. Στο R. Charles, & E. Silver, *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (σσ. 1-22). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Swetz, F. (1989). Using Problems from the History of Mathematics in Classroom Instruction. *The Mathematics Teacher, 82*(5), σσ. 370-377.

Swetz, F. (1995). Using Problems from the History of Mathematics in Classroom Instruction. (F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, & V. Katz, Επιμ.) *Learn from the Masters*, σσ. 25-38.

Swetz, F. (2007). Historical Problems: A Valuable Resource for Mathematics. *History and Epistemology in Mathematics Education Proceedings of the 5th European Summer University.* Prague: Vydavatelsky servis, Plzeň.

Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks. *For the Learning of Mathematics, 20*(1), σσ. 44-55.

Tzanakis, C., Arcavi, A., & et al. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. Στο J. Fauvel, & J. van Maanen (Επιμ.), *History* *in Mathematics Education. The ICMI study.* (σσ. 201-240). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Van Vaerenbergh, G., Bogaerts, H., & Ratinckx, E. (1999). Learning to Solve Mathematical Application Problems: A Design Experiment with Fifth Graders. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(3), σσ. 195-229.

Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., Doorman, M., & Robitzsch, A. (2014). Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: An analysis of students' errors. *The Mathematics Enthusiast, 11*(3), σσ. 555-584.

Wilson, J., Fernandez, M., & Hadaway, N. (1994). Problem Solving: Managing it all. *The Mathematics Teacher, 87*(3), σσ. 195-199.

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., & Φερεντίνος, Σ. (2022). *Μαθηματικά: Α΄ Γυμνασίου.* Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων "Διόφαντος".

Εξαρχάκος, Θ. (1997). *Ιστορία των Μαθηματικών Τόμος Α΄: Τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αρχαίων Αιγυπτίων.* Αθήνα.

Εξαρχάκος, Θ. (1999). *Ιστορία των Μαθηματικών Τόμος Β΄: Τα μαθηματικά των Ινδών και των Κινέζων.* Αθήνα.

Καλογεράκης, Γ. (1995). Τα μαθηματικά και η ιστορία τους, διδακτικές προσεγγίσεις. *12ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας* (σσ. 115-128). Ηράκλειο: Εκδόσεις ΕΜΕ.

Κολέζα, Ε. (2006). Εναλλακτικές προσεγγίσεις της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.), *Πρακτικά 5ου Διήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, (σσ. 27-46). Θεσσαλονίκη.

Μαμωνά-Downs, Γ., & Παπαδόπουλος, Ι. (2017). *Επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά. Η πορεία της σκέψης κατά την αναζήτηση της λύσης.* Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Πολυχρονόπουλος, Π. (1980). Η μορφωτική αξία των μαθηματικών στη μέση εκπαίδευση. Στο ΕΜΕ, *Εκπαίδευση & Επιστήμη* (Τόμ. 3, σσ. 77-92). Έκδοση Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

Πυργιωτάκης, Ι. (2011). *Εισαγωγή στην Παιδαγωγική Επιστήμη.* Εκδόσεις ΠΕΔΙΟ.

Τζανάκης, Κ. (2009). Η αξιοποίηση των σχέσεων μεταξύ Ιστορίας των Μαθηματικών και Μαθηματικής Εκπαίδευσης: Συζήτηση σχετικά με τα υπέρ και τα κατά, βάσει της διεθνούς εμπειρίας. Στο Ξ. Βαμβακούση, Γ. Θωμαΐδης, & Θ. Πάσχος (Επιμ.), *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών.* (σσ. 17-39). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Τρέσσου Φατούρου, Ε. (2002). Σκέψεις για τη χρήση της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.), *Η Ιστορία των μαθηματικών ως μέσο διδασκαλίας των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο και στο γυμνάσιο*, (σσ. 9-16). Θεσσαλονίκη.

Φράγκος, Χ. (1998). *Ψυχοπαιδαγωγική*. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Χριστιανίδης, Γ. (2012). *Θέματα από την ιστορία των μαθηματικών* (3η εκδ.). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Φύλλο εργασίας

Φύλλο εργασίας

«Έρευνα για τη δυνατότητα επίλυσης ιστορικών μαθηματικών προβλημάτων από μαθητές Λυκείου στα πλαίσια μεταπτυχιακής εργασίας»

Παρακάτω δίνονται τέσσερα προβλήματα μαθηματικών που έχουν αντληθεί από ιστορικές πηγές διαφορετικών πολιτισμών και χρονικών περιόδων. Να λύσετε τα προβλήματα αυτά με όποιον τρόπο επιθυμείτε (αριθμητικά, αλγεβρικά, σχηματικά, περιγραφικά κλπ). Παρακαλείσθε να αναλύσετε το σκεπτικό σας κατά τη διαδικασία επίλυσης, ακόμη κι αν δεν ολοκληρώσετε τη λύση.

Στοιχεία συμμετέχοντα μαθητή

Αρχικά Ονόματος: ………………

Τάξη: ………………….

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1:</u>

Αίγυπτος (1650 π.Χ.) – Πάπυρος του Rhind

Να βρεθεί μια ποσότητα ώστε αν σε αυτήν προσθέσουμε το ¼ του εαυτού της το άθροισμα να είναι 15.

<u>Λύση</u>

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2:</u>

Ινδία (1150 μ.Χ.)- Lilavati του Bhaskara II

Από ένα μπουκέτο με άνθη λωτού, το ένα τρίτο, το ένα πέμπτο και το ένα έκτο, προσφέρθηκαν αντίστοιχα στους θεούς Σίβα, Βισνού και Ήλιο και το ένα τέταρτο στην Ινδή Θεά. Οι υπόλοιποι έξι λωτοί που απέμειναν, δόθηκαν στο σεβάσμιο άρχοντα γκουρού. Να βρείτε το συνολικό αριθμό των λωτών που είχε το μπουκέτο.

<u>Λύση</u>

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3:</u>

Euler (1770 μ.Χ.)

Ένας πατέρας αφήνει 1600 λίρες για να μοιραστούν στους τρεις γιους του με τον ακόλουθο τρόπο: ο μεγαλύτερος είναι να πάρει 200 λίρες παραπάνω από το δεύτερο και ο δεύτερος 100 λίρες παραπάνω από το νεότερο. Αναζητείται το μερίδιο του καθενός.

<u>Λύση</u>

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4:</u>

Fibonacci (1202 μ.Χ.)

Ένας άντρας πήγε στη Lucca για δουλειές, διπλασίασε τα χρήματά του και ξόδεψε εκεί 12 δηνάρια. Στη συνέχεια πήγε στη Φλωρεντία όπου και πάλι διπλασίασε τα χρήματά του και ξόδεψε 12 δηνάρια. Τέλος έφτασε στην Πίζα όπου και εκεί διπλασίασε τα χρήματά του και ξόδεψε 12 δηνάρια. Στο τέλος δεν του περίσσεψαν καθόλου χρήματα. Πόσα χρήματα είχε αρχικά;

<u>Λύση</u>