ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ- ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ - ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ – ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΉΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

Κατεύθυνση: Α' ηλικιακός κύκλος

Διπλωματική Εργασία

«Νοερή επιχειρηματολογία και αναλογική σκέψη στην επίλυση προβλήματος- Mental argumentation and proportional thinking in problem solving»

της **Παπαδοπούλου Μαρία** (Α.Ε.Μ.: 1067)

Επιβλέπων καθηγητής: Παπαδόπουλος Ιωάννης, Π.Τ.Δ.Ε., Α.Π.Θ.

Εξεταστές: Λεμονίδης Χαράλαμπος, Π.Τ.Δ.Ε., Π.Δ.Μ

Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Π.Τ.Δ.Ε., Π.Δ.Μ.

Φλώρινα, Ιούλιος 2024

Περιεχόμενα

Περίληψη..4
1. Εισαγωγή...6
1.1 Σκοπός της έρευνας..6
1.2 Ερευνητικό ερώτημα...6
1.3 Σημασία του θέματος..6
1.4 Γενική επισκόπηση...7
2. Βιβλιογραφική επισκόπηση...9
2.1 Αναλογικός συλλογισμός..9
2.1.1 Έρευνες στην ανάπτυξη της αναλογικής σκέψης....................................10
2.1.2 Σχέσεις μεταξύ αναλογιών..12
2.1.3 Παράγοντες που επηρεάζουν τον αναλογικό συλλογισμό.......................14
2.1.4 Κατηγορίες αναλογικών προβλημάτων...15
2.1.5 Στρατηγικές επίλυσης...17
2.1.6 Λάθη στις αναλογίες...21
2.1.7 Σύνδεση μοτίβων και αναλογιών...22
2.1.8 Διδασκαλία αναλογικού συλλογισμού...23
2.2 Νοερή επιχειρηματολογία..24
2.2.1 Μέθοδοι επίλυσης μαθηματικών έργων...24
2.2.2 Εξεικόνιση- Οπτικοποίηση..25
2.2.3 Νοερές εικόνες (Mental- visual images)...28
2.2.4 Τύποι νοερών εικόνων..30
2.2.5 Οπτική αντίληψη..31
2.2.6 Χωρική σκέψη (Spatial thinking)..32
2.2.7 Εξεικόνιση και διδασκαλία των μαθηματικών..33
2.3 Διαισθητικός αναλογικός συλλογισμός και νοερή επίλυση..........................35
3. Περιγραφή Ερευνητικής Διαδικασίας...39
3.1 Περιγραφή του δείγματος...39
3.2 Παρουσίαση φύλλου εργασίας..40
3.4 Συλλογή και ανάλυση δεδομένων...46
4. Παρουσίαση αποτελεσμάτων..50

5. Συζήτηση..75
6. Συμπεράσματα..80
Βιβλιογραφία...82
Παράρτημα..90

Περίληψη

Ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός αποτελεί βασική έννοια στην εκπαίδευση των Μαθηματικών και αφορά ποικίλες καταστάσεις της καθημερινότητας. Αν και η έννοια της αναλογίας διδάσκεται από το δημοτικό μέχρι το πανεπιστήμιο, αρκετοί ενήλικες παρουσιάζουν δυσκολίες. Καθώς η βιβλιογραφία γύρω από τη νοερή επιχειρηματολογία κατά την επίλυση αναλογικών προβλημάτων είναι περιορισμένη, η παρούσα μελέτη έχει ως στόχο τη διερεύνηση των στρατηγικών που επιλέγουν οι λύτες, φοιτητές και απόφοιτοι της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, όταν καλούνται να λύσουν ένα αναλογικό μαθηματικό έργο νοερά, χωρίς γραπτή ή άλλου είδους υποστήριξη. Για τη διεξαγωγή της έρευνας, πραγματοποιήθηκαν ατομικές συνεντεύξεις, στις οποίες οι συμμετέχοντες περιέγραφαν τον συλλογισμό τους καθ' όλη τη διάρκεια επίλυσης. Τα δεδομένα των συνεντεύξεων απομαγνητοφωνήθηκαν και αναλύθηκαν με βάση τη θεματική ανάλυση περιεχομένου (content analysis). Οι στρατηγικές που εντοπίστηκαν ταξινομήθηκαν σε έναν πίνακα όπου καταγράφεται ποσοτικά και η συχνότητα εμφάνισης της κάθε μεθόδου επίλυσης. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν, μεταξύ άλλων, πως οι λύτες εφαρμόζουν κατά κύριο λόγο πιο τυπικές στρατηγικές, ακόμη κι αν υπάρχουν πιο πρόσφοροι και άμεσοι νοεροί τρόποι, ενώ συχνά οδηγούνται σε λάθος ή και καμία απάντηση.

Λέξεις-κλειδιά: Μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός, Νοερή επιχειρηματολογία, Επίλυση προβλήματος, Στρατηγικές επίλυσης, Αναλογίες

Abstract

Proportional thinking comprises a fundamental concept in the education of Mathematics and pertains to a plethora of everyday scenarios and situations. Despite the fact that the notion of rations is being consistently taught from elementary school up until higher education, certain adults still face difficulties. Provided the limited amount of academic literature with regard to mental argumentation in solving proportions tasks, this study seeks to investigate the solving strategies that undergraduate students and graduates opt for, when asked to solve a proportional reasoning task mentally; without access to written or any other tools. For the purposes of the research, individual interviews, where participants would describe their reasoning throughout the entire solving process, were conducted. All empirical data collected from the interviews was transcribed and analysed, using the content analysis method. Identified strategies were classified within a table, stating the frequency of each solving strategy quantitatively. The results suggest, among other things, that solvers predominantly prefer more formal strategies, even if more appropriate and direct mental methods are applicable; whilst they oftentimes answer incorrectly, or do not answer at all.

Key-words: Proportional thinking, Mental reasoning, Problem solving, Solving strategies, Proportions

1. Εισαγωγή

1.1 Σκοπός της έρευνας

Κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος, ο κάθε λύτης σκέφτεται και επιχειρηματολογεί με διάφορους τρόπους. Στην παρούσα μελέτη το ενδιαφέρον εστιάζεται στη νοερή επιχειρηματολογία και την αναλογική σκέψη. Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να αναδείξει τις στρατηγικές που εφαρμόζουν οι λύτες κατά τη νοερή επίλυση αναλογικών μαθηματικών προβλημάτων.

1.2 Ερευνητικό ερώτημα

Με βάση τον σκοπό της έρευνας, το ερευνητικό ερώτημα που εξετάζεται είναι το εξής:

- Τι στρατηγικές εφαρμόζουν φοιτητές και απόφοιτοι της Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης κατά την επίλυση προβλημάτων αναλογίας που αφορούν οικείες και καθημερινές καταστάσεις, χωρίς γραπτή υποστήριξη;

1.3 Σημασία του θέματος

Προηγούμενες μελέτες έχουν ερευνήσει μεμονωμένα τη νοερή επιχειρηματολογία και τον αναλογικό συλλογισμό σε διάφορα πλαίσια, αλλά ελάχιστες έρευνες έχουν εστιάσει στη νοερή επίλυση αναλογικών έργων. Η νοερή επιχειρηματολογία είναι η διαδικασία επίλυσης μιας μαθηματικής κατάστασης με τον νου, χωρίς τη χρήση γραπτών υπολογισμών ή άλλων μέσων. Η μαθηματική αναλογική σκέψη αναφέρεται στην επίλυση αναλογικών καταστάσεων, όπως για παράδειγμα, η προσαρμογή μιας συνταγής για διαφορετική ποσότητα, η μεγέθυνση ενός σχήματος κλπ. Η έννοια της αναλογίας υπάρχει στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια και Δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Πρόκειται για μια ικανότητα σημαντική για την καθημερινότητα ενός ατόμου. Παρ' όλ' αυτά, οι φοιτητές και απόφοιτοι της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με τους γραπτούς υπολογισμούς και την εφαρμογή πιο περίπλοκων στρατηγικών επίλυσης. Για αυτόν τον λόγο, η παρούσα εργασία μπορεί να αποτελέσει κίνητρο για αυτούς, στο να αντιλαμβάνονται, να δημιουργούν και να επεξεργάζονται στον νου τους οπτικές αναπαραστάσεις και τις πληροφορίες οποιασδήποτε μαθηματικής κατάστασης.

Για τον εκπαιδευτικό μπορεί να γίνει ένα ακόμα εργαλείο ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης των μαθητών του, εστιάζοντας στη νοερή προσέγγιση σε καθημερινές αναλογικές καταστάσεις, επιδιώκοντας να γίνει και πιο κατανοητή η έννοια της αναλογίας. Ταυτόχρονα, μπορεί να παρακινηθεί να συμπεριλάβει περισσότερα οπτικά στοιχεία κατά τη διδασκαλία, ώστε να συμβάλλουν στον σχηματισμό νοερών εικόνων και την ανάπτυξη της ικανότητας της εξεικόνισης.

Για τους ερευνητές στο πεδίο των Μαθηματικών μπορεί να αποδειχθεί χρήσιμο μέσο κατανόησης του τρόπου σκέψης των λυτών και τον δυσκολιών που παρουσιάζονται στη διαδικασία επίλυσης. Τέλος, τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη διεκπεραίωση της έρευνας μπορεί να αποτελέσουν αφορμή για μελλοντικές έρευνες.

1.4 Γενική επισκόπηση

Στο επόμενο κεφάλαιο ακολουθεί εκτεταμένα το θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας με βάση την επισκόπηση της βιβλιογραφίας. Πιο συγκεκριμένα, αρχικά αναλύεται ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός, όπου περιλαμβάνονται μεταξύ άλλων οι ορισμοί της έννοιας της αναλογίας, οι στρατηγικές και οι δυσκολίες που έχουν εντοπιστεί κατά την επίλυση αναλογικών έργων και η διδασκαλία της αναλογίας. Στη συνέχεια, επιδιώκεται η σύνδεση των δύο αξόνων της εργασίας, της νοερής επιχειρηματολογίας και του αναλογικού συλλογισμού, και γίνεται αναφορά σε έρευνες σχετικές με την αναλογικότητα, κατά τις οποίες παρατηρήθηκε η ύπαρξη νοερών στρατηγικών και χαρακτηριστικών. Τέλος, αναλύεται η νοερή επιχειρηματολογία και οι έννοιες που περιλαμβάνονται σε αυτή, όπως η εξεικόνιση/ οπτικοποίηση, οι νοερές εικόνες, η χωρική σκέψη, η σύνδεσή τους με τη διδασκαλία των μαθηματικών, διαπιστώσεις και παραδείγματα από προηγούμενες έρευνες.

Στο τρίτο κεφάλαιο, περιγράφεται η ερευνητική διαδικασία, το δείγμα, η μέθοδος, το εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα και η πορεία ανάλυσης των δεδομένων. Όσον αφορά το εργαλείο, παρουσιάζονται τα έξι μαθηματικά έργα που επιλέχθηκαν και δόθηκαν στους συμμετέχοντες, καθώς και η νοερή λύση που θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε κάθε περίπτωση.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα, τα οποία προέκυψαν από την απομαγνητοφώνηση των συνεντεύξεων της έρευνας και σε επόμενο κεφάλαιο γίνεται συζήτηση με βάση τα αποτελέσματα που αναλύθηκαν προηγουμένως.

Στο τελευταίο κεφάλαιο, γίνεται ανάλυση των συμπερασμάτων και προτείνονται ερωτήματα, τα οποία μπορεί να τεθούν για περαιτέρω έρευνα.

2. Βιβλιογραφική επισκόπηση

2.1 Αναλογικός συλλογισμός

Ο αναλογικός συλλογισμός (analogical reasoning) ως επαγωγικός μηχανισμός αποτελεί σημαντικό παράγοντα στη γνωστική ανάπτυξη του ατόμου και στην καλλιέργεια της κριτικής του σκέψης, ενώ η μαθηματική αναλογική σκέψη αναφέρεται στην ικανότητα επίλυσης μαθηματικών αναλογικών έργων, τον χειρισμό αναλογικών καταστάσεων, καθώς και τη διάκριση τους από τις μη αναλογικές (Μοδέστου, 2007). Σύμφωνα με τους Lesh et. al. (1988, στο Μοδέστου, 2007), ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός (proportional reasoning) αποτελεί «μια μορφή μαθηματικού συλλογισμού η οποία περιλαμβάνει την ικανότητα ταυτόχρονης επεξεργασίας διάφορων πληροφοριών μέσα από πολλαπλές συγκρίσεις και συμμεταβολές».

Ο αναλογικός συλλογισμός έχει ιδιαίτερη σημασία στη μαθηματική ανάπτυξη (Vanluydt, Wijns, Torbeyns & Van Dooren, 2021) και κατανόηση, ενώ έχει χαρακτηριστεί ως βασική έννοια των ανώτερων μαθηματικών και των στοιχειωδών εννοιών (Lesh, Post & Behr, στο Lamon, 1994). Αναφέρεται στην κατανόηση της πολλαπλασιαστικής σχέσης που υπάρχει μεταξύ των ποσοτήτων που αποτελούν την αναλογική κατάσταση, στην ικανότητα επίλυσης ποικίλων προβλημάτων, καθώς και στην ικανότητα διαχωρισμού των αναλογικών από τις μη αναλογικές καταστάσεις (Fernández, Ciscar & González, 2008). Η αναλογικότητα (proportionality) αποτελεί βασική έννοια στην εκπαίδευση στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες από το δημοτικό σχολείο μέχρι το πανεπιστήμιο (De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel, 2002).

Ο λόγος και η αναλογία είναι σημαντικές έννοιες στα τρέχοντα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών. Όσον αφορά το αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών, η αναλογία ως έννοια συναντάται αρχικά στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού, σε λεκτικά προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, τα οποία πολύ συχνά παρουσιάζονται με τη μορφή αναγωγής στη μονάδα (unit-rate). Αποτελεί τη βάση σε αρκετά μαθηματικά θέματα που προβληματίζουν τους μαθητές, όπως η έννοια των λόγων, η ισοδυναμία κλασμάτων, οι μεγάλες διαιρέσεις, η αξία θέσης, ο υπολογισμός ποσοστών και οι μετατροπές μετρήσεων (Boyer & Levine, 2012). Στη συνέχεια, στις μεγάλες τάξεις του δημοτικού καθώς και στο γυμνάσιο, τα προβλήματα ισοδυναμίας ή σύγκρισης κλασμάτων μπορούν να θεωρηθούν ως καταστάσεις που αναπτύσσουν την έννοια του λόγου και της αναλογίας (Lo &

Watanabe, 1997, Pelen & Artut, 2015). Με τον αναλογικό συλλογισμό οι μαθητές του δημοτικού αποκτούν τις βάσεις για τα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Pelen & Artut, 2015). Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η αναλογία αποτελεί βασική γνώση για την κατανόηση και την ανάπτυξη αλγεβρικών σχέσεων, τριγωνομετρίας και θεωρίας πιθανοτήτων (Ηροδότου κ.ά., 2006).

Για τους Philippou, & Christou, (2002), ο λόγος αναφέρεται σε μια κλασματική σχέση α / β μεγεθών, ενώ οι Livy & Vale (2011) αναφέρουν ότι είναι η σύγκριση μεταξύ δύο ποσοτήτων. Στα Μαθηματικά, ως αναλογία ορίζεται η ισότητα μεταξύ δύο λόγων (Schwartz & Moore, 1998). Επιπρόσθετα, ο Vergnaud (1988, στο Vanluydt et.al., 2021) ως αναλογία ορίζει την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ ποσοτήτων σε δύο χώρους μέτρησης. Για το σχολικό εγχειρίδιο της Α' Γυμνασίου: «δύο ποσά λέγονται ανάλογα αν μεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο, ώστε όταν οι τιμές του ενός πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό, τότε πολλαπλασιάζονται και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου με τον ίδιο αριθμό» (Βανδουλάκης, Καλλιγάς, Μαρκάκης, Φερεντίνος, 2013).

Οι έννοιες του λόγου και της αναλογίας αποτελούν μέρος του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου (multiplicative conceptual field), όπως έχει οριστεί από τον Vergnaud (1988, στο Lo & Watanabe, 1997), το οποίο περιλαμβάνει και άλλες έννοιες, όπως ο πολλαπλασιασμός, η διαίρεση και οι ρητοί αριθμοί. Οι ποσότητες που περιλαμβάνονται σε κάθε μαθηματική αναλογική σχέση μεταβάλλονται πολλαπλασιαστικά, δηλαδή, πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο παράγοντα (Μοδέστου, 2007).

Αν και οι περισσότεροι άνθρωποι δε γνωρίζουν τον ορισμό των αναλογιών, χρησιμοποιούν τις αναλογίες σε οικείες, καθημερινές καταστάσεις. Βέβαια, παρά τη σημασία των αναλογιών σε καθημερινές καταστάσεις, στις επιστήμες και στο εκπαιδευτικό σύστημα η έννοια των αναλογιών είναι δύσκολη και δυσνόητη. Μάλιστα, πολλοί ενήλικες δεν γνωρίζουν επαρκώς την έννοια (Tourniaire & Pulos, 1985). Για να επιλυθούν αναλογικά μαθηματικά έργα απαιτείται η κατανόηση ότι διαφορετικές αναλογίες μπορούν να έχουν την ίδια τιμή (Möhring et al., 2015).΄

2.1.1 Έρευνες στην ανάπτυξη της αναλογικής σκέψης

Η ανάπτυξη της αναλογικής σκέψης αρχίζει ήδη από την πρώιμη παιδική ηλικία, προτού οι μαθητές διδαχθούν τον αναλογικό συλλογισμό στις μεγαλύτερες τάξεις του δημοτικού (Vanluydt et al., 2021). Μελέτες έχουν δείξει ότι τα μικρά παιδιά χρησιμοποιούν αναλογικό συλλογισμό υπό τις κατάλληλες συνθήκες (English & Sharry, 1996; Wheatley, 1997). Οι Piaget & Inhelder (1975, στο Möhring, Newcombe, Levine & Frick, 2016) υποστήριξαν ότι ο αναλογικός συλλογισμός εμφανίζεται περίπου στην ηλικία των 11 ετών. Οι Resnick & Singer (1993, στο Vanluydt et al., 2021) παρατήρησαν ότι τα παιδιά ηλικίας 5 έως 7 ετών είναι σε θέση να σκεφτούν αναλογικά, καθώς σε ένα αναλογικό έργο σκέφτηκαν και έδωσαν αναλογικά μεγαλύτερη ποσότητα τροφής σε μεγαλύτερα ψάρια. Οι Boyer & Levine (2012) διαπίστωσαν ότι τα παιδιά ηλικίας 6 έως 9 ετών μπορούν να αντιστοιχίσουν ίσα αναλογικά μείγματα. Ωστόσο, σύμφωνα με τον Piaget, ο αναλογικός συλλογισμός απαιτεί κατανόηση των τυπικών πράξεων και η επιτυχία σε αναλογικά έργα κατά την πρώιμη παιδική ηλικία δεν φανερώνει την κατανόηση των αναλογικών σχέσεων, αλλά πιθανώς να είναι αποτέλεσμα άτυπων διαισθητικών και ιδιοσυγκρασιακών στρατηγικών (Boyer & Levine, 2012). Σύμφωνα με τον Piaget, πριν από την ηλικία των 11-12 ετών το παιδί δεν είναι σε θέση για αναλογικό συλλογισμό αφού δεν μπορεί να εντοπίσει σχέσεις δευτέρου επιπέδου μεταξύ των όρων ενός αναλογικού έργου (Μοδέστου, 2007). Όπως αναφέρεται στο Δημητρίου (1993, στο Παπαγεωργίου & Χρίστου, 1999), η πλήρης κατανόηση της πολλαπλασιαστικής δομής της αναλογίας δεν ολοκληρώνεται πριν από την ηλικία των 14-15 χρόνων, γιατί μόνο σε αυτήν την ηλικία οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν πολύπλοκες αριθμητικές σχέσεις.

Από την ανάλυση των δεδομένων της έρευνας των Ηροδότου κ.ά. (2006) φαίνεται ότι οι μαθητές της Στ' τάξης είχαν καλύτερες επιδόσεις στην επίλυση αριθμητικών και λεκτικών προβλημάτων αναλογίας, γεγονός που οφείλεται στις αυξημένες εμπειρίες τους με σχετικά προβλήματα σε σύγκριση με τους μαθητές της Ε' τάξης. Στην έρευνά των Möhring et al. (2016) συμμετείχαν μαθητές ηλικίας 8 έως 10 ετών, οι οποίοι κλήθηκαν να παρατηρήσουν συνεχείς αναλογικές ποσότητες εστιάζοντας σε σχέσεις μέρους-όλου. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ακόμη και παιδιά μόλις 8 ετών ήταν σε θέση να εξετάσουν και τους δύο όρους που αποτελούν μια αναλογία και να σκεφτούν αναλογικά με επιτυχία, λαμβάνοντας υπόψη τους τις γνώσεις τους για τα κλάσματα.

Ο αναλογικός συλλογισμός θεωρείται ότι είναι δύσκολο να κατανοηθεί από τα παιδιά (Vanluydt et.al., 2021), ενώ οι μαθητές δημοτικού που δεν καταφέρνουν να αναπτύξουν σε ικανοποιητικό βαθμό τον αναλογικό συλλογισμό ενδεχομένως να συναντήσουν εμπόδια στην κατανόηση μαθηματικών υψηλότερου επιπέδου (Langrall & Swafford, 2000, στο Pelen & Artut, 2015). Αν και οι μαθητές διδάσκονται τις αναλογίες από τις μεγάλες τάξεις του δημοτικού, ο αναλογικός συλλογισμός παραμένει προβληματικός για αρκετούς φοιτητές (Lawton, 1993). Ο Hoffer (1988, στο Ηροδότου, Ιωάννου, Κοντογιάννη & Γαγάτσης, 2006) αναφέρει ότι ένα μεγάλο ποσοστό δεν κατακτά επαρκώς την αναλογική σκέψη.

Η αναλογική σκέψη αποτέλεσε αντικείμενο πολλών ερευνητικών μελετών τα τελευταία χρόνια, λόγω τόσο της χρησιμότητάς της, όσο και της δυσκολίας που παρουσιάζεται κατά την εκμάθησή της. Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου, η έρευνα εξελίσσεται ολοένα και περισσότερο, μεταβαίνοντας από την οπτική της αναλογικής συλλογιστικής ως μιας ικανότητας ή ως ένδειξη μιας γενικής γνωστικής δομής (cognitive structure), σε μια πιο διαφοροποιημένη οπτική με επίκεντρο την περιγραφή των διαδικασιών που εφαρμόζονται και τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζονται από διάφορους παράγοντες σχετικούς με το έργο και το άτομο (Tourniaire & Pulos, 1985). Επομένως, αρκετές έρευνες για τη μαθηματική εκπαίδευση έχουν επικεντρωθεί στις έννοιες του λόγου και της αναλογίας και ιδιαίτερα στα λάθη και τις δυσκολίες των μαθητών κατά την επίλυση προβλημάτων αναλογίας, καθώς και στις διάφορες μεταβλητές των μαθηματικών έργων που επηρεάζουν τις επιλογές στρατηγικών από τους μαθητές και τις επιδόσεις τους (Lo & Watanabe, 1997).

2.1.2 Σχέσεις μεταξύ αναλογιών

Όπως αναφέρεται στο Möhring et al. (2016), οι αναλογίες μπορούν να αναπαρασταθούν είτε ως σχέσεις μέρους-όλου είτε ως σχέσεις μέρους-μέρους. Για παράδειγμα, η ποσότητα ενός συστατικού σε σχέση με τη συνολική ποσότητα του μείγματος και η σχέση των ποσοτήτων δύο επιμέρους συστατικών αντίστοιχα. Ορισμένες έρευνες έχουν δείξει ότι οι σχέσεις μέρους-μέρους αντιμετωπίζονται πιο εύκολα από τα παιδιά ηλικίας 6 έως 8 ετών. Αντιθέτως, στην μελέτη των Sophian & Wood (1997, στο Möhring et al., 2016) τα παιδιά είχαν καλύτερες επιδόσεις σε συλλογισμούς που αφορούσαν σχέσεις μέρους-όλου.

Ένας λόγος είναι μία σχέση ανάμεσα σε δύο ποσότητες. Επομένως, η κατανόηση της αναλογίας αναφέρεται στην κατανόηση της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα σε δύο σχέσεις (Δημητρίου, 1993, στο Μοδέστου, 2007). Η σχέση μεταξύ των στοιχείων μιας αναλογίας διακρίνεται σε δύο κατηγορίες. Αρχικά, οι σχέσεις «εντός» (within), αφορούν τις σχέσεις ομοειδών ποσοτήτων (π.χ. κιλά με κιλά), ενώ οι σχέσεις «εκτός» (between) αφορούν τις σχέσεις αντίστοιχων ποσοτήτων διαφορετικού είδους (π.χ. κιλά με χρήματα) (Ηροδότου κ.ά., 2006). Πρόκειται για τον «εσωτερικό» και «εξωτερικό λόγο» αντίστοιχα (Tourniaire & Pulos, 1985).

Σε κάθε λόγο οι σχέσεις μεταξύ του αριθμητή και του παρονομαστή αντιπροσωπεύουν σχέσεις πρώτης τάξης, ενώ η σύγκριση των σχέσεων μεταξύ αναλογιών αφορούν τις σχέσεις δεύτερης τάξης (Spinillo & Bryant, 1991). Σύμφωνα με τους Piaget & Inhelder (1975, στο Lo & Watanabe, 1997), «ο αναλογικός συλλογισμός είναι μια σχέση δεύτερης τάξης, η οποία περιλαμβάνει μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ δύο λόγων». Μάλιστα, χρησιμοποιούν τον όρο «σχέσεις μεταξύ σχέσεων» («rapports de rapports»). Πιο συγκεκριμένα, σε έρευνα των Bruner & Kenney (1966, στο Spinillo & Bryant, 1991), οι σχέσεις πρώτης τάξης αφορούσαν τον υπολογισμό της ποσότητας που περιείχαν δύο ποτήρια μεμονωμένα και στη συνέχεια η σύγκριση αυτών των δύο σχέσεων.

Με βάση ορισμένα πειράματα, αναφέρεται ότι ένας από τους βασικούς λόγους που οι μαθητές δυσκολεύονται σε αναλογικά έργα είναι το γεγονός ότι τα παιδιά δεν μπορούν να επεξεργαστούν σχέσεις δεύτερης τάξης και να συγκρίνουν δύο αναλογίες, ενώ ακόμη και οι σχέσεις πρώτης τάξης μερικές φορές είναι περίπλοκες για αυτούς (Spinillo & Bryant, 1991). Οι δυσκολίες των μαθητών σχετικά με τις σχέσεις δεύτερης τάξης οφείλονται στις πιο περίπλοκες νοητικές δομές που απαιτούνται συγκριτικά με τον απλό πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση (Pelen & Artut, 2015).

Οι He et al. (2018) υποστηρίζουν ότι τα παιδιά πρέπει πρωτίστως να κατανοήσουν τις αναλογικές σχέσεις πρώτης τάξης. Μάλιστα, θεώρησαν ότι ένας από τους λόγους που τα παιδιά δυσκολεύονται στις αναλογίες είναι το γεγονός ότι καλούνται να εξετάσουν και να συγκρίνουν δυο αναλογίες χωρίς πρωτίστως να έχουν μελετήσει την κάθε αναλογία ξεχωριστά. Βέβαια, κατά την έρευνά τους, στην περίπτωση που τα παιδιά ηλικίας 5 και 6 ετών εστίασαν αρχικά στις σχέσεις πρώτης τάξης και στη συνέχεια στη σύγκριση των δύο λόγων, δεν σημειώθηκε βελτίωση στις επιδόσεις τους όπως αναμενόταν.

Η δυσκολία στις αναλογίες λοιπόν, εν μέρει έγκειται στο γεγονός ότι απαιτείται να εξεταστούν ταυτόχρονα διάφορες σχέσεις στην εργασιακή μνήμη (working memory). Επιπλέον, όταν οι αναλογίες εντάσσονται σε ένα εμπειρικό πλαίσιο, ο λύτης όχι μόνο πρέπει να εξετάσει τουλάχιστον τέσσερα διαφορετικά μεγέθη και τις πιθανές σχέσεις τους, αλλά να αναλογιστεί και ποιες ποσοτικές σχέσεις είναι σχετικές (Schwartz & Moore, 1998).

2.1.3 Παράγοντες που επηρεάζουν τον αναλογικό συλλογισμό

Οι επιδόσεις στα προβλήματα αναλογίας εξαρτώνται από ορισμένες μεταβλητές οι οποίες αφορούν είτε το μαθηματικό έργο είτε τον λύτη. Οι μεταβλητές που σχετίζονται με το έργο μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε δομικές μεταβλητές, οι οποίες σχετίζονται με την αριθμητική δομή των προβλημάτων, και σε μεταβλητές πλαισίου που αφορούν το αντικείμενο των προβλημάτων (Tourniaire & Pulos, 1985).

Έρευνες έχουν δείξει ότι το πλαίσιο του προβλήματος και η φύση των αριθμητικών σχέσεων επηρεάζουν τον βαθμό δυσκολίας, αλλά και τη στρατηγική που εφαρμόζει ο λύτης. Αρχικά, όσον αφορά το πλαίσιο, έχει σημασία αν το περιεχόμενο είναι διακριτό ή συνεχές, ενώ σημαντική μεταβλητή είναι και η εξοικείωση του λύτη με το περιεχόμενο του έργου (Fernández et al., 2008), καθώς έρευνες δείχνουν ότι το πιο οικείο πλαίσιο οδηγεί σε ευκολότερα προβλήματα (Tourniaire & Pulos, 1985). Κάποιοι από τους παράγοντες που σχετίζονται με τις αριθμητικές σχέσεις του προβλήματος είναι η παρουσία ή η απουσία ακέραιων αναλογιών, το μέγεθος των αναλογιών ή των αριθμών που περιλαμβάνονται και η ύπαρξη ενός αγνώστου αριθμού (Fernández et al., 2008).

Ο Rupley (1981, στο Tourniaire & Pulos, 1985) έχει ορίσει τρεις κύριους παράγοντες δυσκολίας. Αρχικά, όπως προαναφέρθηκε, η ύπαρξη μη ακέραιων αριθμών περιπλέκει το πρόβλημα. Επίσης, σημασία έχει η «σειρά» (order), δηλαδή η θέση του αριθμού που πρέπει να βρεθεί σε σχέση με τους άλλους τρεις αριθμούς της αναλογίας, καθώς και η αριθμητική πολυπλοκότητα, δηλαδή το μέγεθος των αριθμών του έργου και το μέγεθος των αναλογιών. Βέβαια, οι περισσότερες μελέτες λαμβάνουν υπόψη τους μόνο την ύπαρξη ακέραιων ή όχι ως παράγοντα, καθώς, αναφορικά με τους άλλους δύο παράγοντες, συνήθως χρησιμοποιούνται μικροί αριθμοί και ο αριθμός που πρέπει να βρεθεί είναι ο μεγαλύτερος αριθμός στην αναλογία.

Σε έρευνα των Steffe & Parr (1968, στο Noelting, 1980) επισήμαναν ότι οι μαθητές δημοτικού παρουσιάζουν δυσκολία στη συσχέτιση των γραφικών και συμβολικών αναπαραστάσεων της έννοιας της αναλογίας. Επομένως, σημασία έχει η αριθμητική δομή των προβλημάτων που επιλύονται (Tourniaire & Pulos, 1985). Όπως αναφέρεται στο Lawton (1993), η κατανόηση των αναλογιών από τους μαθητές είναι μία γνώση εύθραυστη και επηρεάζεται εύκολα από τις παραλλαγές της δομής ενός προβλήματος.

Προηγούμενες μελέτες αναφέρουν ότι οι επιδόσεις των παιδιών σε μαθηματικά αναλογικά έργα επηρεάζονται από τη φύση των ποσοτήτων που περιλαμβάνονται στα έργα (Vanluydt et.al., 2021, Tourniaire & Pulos, 1985). Οι ποσότητες στους δύο χώρους μέτρησης μιας αναλογικής κατάστασης μπορεί να είναι και οι δύο διακριτές, ή και οι δύο συνεχείς, ή η μία μπορεί να είναι διακριτή και η άλλη συνεχής (Vanluydt et.al., 2021).

Μια σημαντική μεταβλητή είναι η παρουσία μείγματος. Έχει διαπιστωθεί ότι τα προβλήματα μείγματος είναι πιο δύσκολα από άλλα προβλήματα αναλογίας. Ο Van den Brink (1978, στο Tourniaire & Pulos, 1985) υποστηρίζει ότι οι καταστάσεις στις οποίες τα αντικείμενα είναι διακριτά είναι ψυχολογικά πιο εύκολα διαχειρίσιμες. Έρευνα της Lawton (1993) έδειξε ότι οι φοιτητές επιλύουν με μεγαλύτερη ευκολία προβλήματα αναλογίας εάν το περιεχόμενο των στοιχείων του προβλήματος είναι σχετικά διακριτό το ένα από το άλλο. Αντιθέτως, οι Boyer & Levine (2012) διαπίστωσαν ότι οι επιδόσεις των μαθητών δημοτικού ήταν καλύτερες όταν το μαθηματικό έργο περιλάμβανε κάποια συνεχή συνθήκη, συγκριτικά με τη διακριτή.

2.1.4 Κατηγορίες αναλογικών προβλημάτων

Οι Cramer, Post & Currier (1993, στο Pelen & Artut, 2015, Ben-Chaim, Fey, Fitzgerald, Benedetto & Miller, 1998) κατηγοριοποίησαν τα αναλογικά μαθηματικά έργα σε: α) προβλήματα άγνωστης-ελλιπής τιμής (missing-value problems), β) προβλήματα αριθμητικής σύγκρισης (numerical comparison problems) και γ) προβλήματα σύγκρισης και ποιοτικής πρόβλεψης (qualitative prediction and comparison problems). Τα προβλήματα άγνωστης τιμής αποτελούνται από τρία στοιχεία α, β και γ, και το ζητούμενο είναι η εύρεση του τρίτου στοιχείου, του αγνώστου x ώστε να ισχύει: $α/β=γ/x$. Στα προβλήματα σύγκρισης δίνονται τέσσερις τιμές α, β, γ και δ που σχηματίζουν λόγους και ζητείται να προσδιοριστεί η ύπαρξη ή όχι αναλογίας (Tourniaire & Pulos, 1985). Τέλος, τα προβλήματα σύγκρισης και ποιοτικής πρόβλεψης, δεν στηρίζονται σε συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές (Ben-Chaim et al., 1998).

Όπως αναφέρουν οι Tourniaire & Pulos (1985), στις έρευνες σχετικά με την αναλογική σκέψη, χρησιμοποιούνται κυρίως λεκτικά προβλήματα, τα οποία δίνονται με ή χωρίς εικόνες και παρουσιάζονται είτε γραπτώς είτε προφορικά. Τα λεκτικά προβλήματα διακρίνονται σε προβλήματα ποσοστού και σε προβλήματα μείγματος. Όσον αφορά τα προβλήματα ποσοστού, συγκρίνονται οι λόγοι ανόμοιων στοιχείων, ενώ στη δεύτερη κατηγορία προβλημάτων συγκρίνονται οι ποσότητες δύο ή περισσότερων μειγμάτων. Στα προβλήματα μείγματος, αρχικά, προκύπτει ένα νέο, τρίτο αντικείμενο από τη μείξη των δύο στοιχείων, ο λύτης πρέπει να κατανοήσει τι συμβαίνει όταν δύο στοιχεία αναμειγνύονται, και τέλος, οι ποσότητες εκφράζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης.

Με βάση τις ιδέες του Freudenthal (1983, στο Ben-Chaim et al., 1998), τα προβλήματα αναλογικής συλλογιστικής μπορούν να διακριθούν σε τρεις γενικές κατηγορίες. Συγκεκριμένα, στη σύγκριση δύο τμημάτων ενός ενιαίου συνόλου, στη σύγκριση διαφορετικών μεγεθών μεταξύ των οποίων υπάρχει σύνδεση και τέλος, στη σύγκριση δύο ποσοτήτων που σχετίζονται εννοιολογικά αλλά δεν θεωρούνται ως μέρη ενός κοινού συνόλου, όπως για παράδειγμα ο λόγος των πλευρών δύο τριγώνων. Αναφορικά με την τελευταία κατηγορία, η σύγκριση αναφέρεται και ως κλιμάκωση (scaling) και περιλαμβάνει ζητήματα αυξομείωσης μεγεθών σε μετασχηματισμούς ομοιότητας.

Για τους He et al. (2018), προϋπόθεση για τον αναλογικό συλλογισμό είναι η κατανόηση των ισοδύναμων αναλογιών για διαφορετικές ποσότητες μετά από κλιμάκωση. Η κλιμάκωση περιλαμβάνει τον πολλαπλασιασμό του αριθμητή και του παρονομαστή με τον ίδιο τελεστή, ενώ η σχέση μεταξύ των δύο όρων παραμένει η ίδια με προηγουμένως. Μια από τις βασικές αριθμητικές σχέσεις σε μια αναλογία είναι ότι «ο κλιμακωτός τελεστής που συνδέει τα μέτρα στον πρώτο χώρο μέτρων είναι ο ίδιος τελεστής που συνδέει τα μέτρα στον δεύτερο χώρο μέτρων» (Lamon, 1994). Ακόμη, η χωρική σχέση μεταξύ των δύο ποσοτήτων παραμένει αναλλοίωτη, ενώ το συνολικό μέγεθος της αναπαράστασης αλλάζει (Moore & Schwartz, 1994).

Οι ερευνητές θεωρούν ότι οι καταστάσεις μεγέθυνσης και σμίκρυνσης σε προβλήματα αναλογίας έχουν αυξημένο βαθμό δυσκολίας για τους μαθητές και ως εκ τούτου συμβάλλουν στη διερεύνηση των νοερών κατασκευών των μαθητών (Singh, 2000). Οι Boyer & Levine (2012) εξέτασαν, μέσω ηλεκτρονικών έργων, την ικανότητα των παιδιών να αντιστοιχίζουν αναλογίες που διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τον συντελεστή κλίμακας. Καθώς αυξανόταν η σχέση κλίμακας μεταξύ των συνεχών ή διακριτών αναλογιών, εντοπίστηκαν περισσότερα λάθη από τους συμμετέχοντες.

Η σημασία της κλιμάκωσης για τον αναλογικό συλλογισμό είναι εμφανής στην καθημερινή ζωή με χαρακτηριστικό παράδειγμα την προσαρμογή μιας συνταγής σε μεγαλύτερη ή μικρότερη ποσότητα. Σε αυτή την περίπτωση, απαραίτητη είναι η σχέση μέρος-όλου, καθώς συνυπολογίζεται στον συλλογισμό η συνολική ποσότητα και όχι μόνο τα επιμέρους συστατικά (Möhring et al., 2016).

2.1.5 Στρατηγικές επίλυσης

Οι στρατηγικές που εφαρμόζονται από τους μαθητές για την επίλυση ενός προβλήματος, καθώς και οι εξηγήσεις που δίνονται, εξαρτώνται από τις πληροφορίες του προβλήματος και τη δομή των αντικειμένων. Για τη Lamon (στο Ηροδότου κ.ά., 2006), η αναλογία περιλαμβάνει τέσσερα στοιχεία, όπου το είδος της σχέσης ανάμεσα τους καθορίζει τον τύπο της στρατηγικής που θα ακολουθηθεί για την επίλυση του αναλογικού έργου.

Με βάση τα στάδια ανάπτυξης του Piaget, αρχικά, οι στρατηγικές σύγκρισης μεταξύ όρων ανήκουν στο προλειτουργικό ή διαισθητικό επίπεδο (preoperational or intuitive level), ενώ οι στρατηγικές που περιλαμβάνουν πολλαπλασιασμό ή διαίρεση των όρων καταλήγοντας σε κλάσεις ισοδυναμίας, θεωρούνται ως συγκεκριμένες πράξεις (concrete operations). Οι στρατηγικές σύγκρισης, οι οποίες εφαρμόζονται αφού προηγουμένως κατασκευαστούν νοερά οι ισοδυναμίες, αναφέρονται ως πράξη επί πράξης και χαρακτηρίζονται ως επίσημες-τυπικές πράξεις (formal operations) (Noelting, 1980).

Οι Ercole, Frantz, & Ashline (2011) επιχείρησαν επίσης τον διαχωρισμό των στρατηγικών που εντοπίζονται κατά την επίλυση αναλογικών προβλημάτων και θα αναλυθούν παρακάτω, σε διαισθητικές στρατηγικές (intuitive strategies) και σε δομημένες μεθόδους (structured methods). Ειδικότερα, στις διαισθητικές στρατηγικές περιλαμβάνεται η αναγωγή στη μονάδα (unit-rate), η εύρεση του παράγοντα αλλαγής (factor of change), η μέθοδος ισοδύναμων κλασμάτων και η στρατηγική οικοδόμησης (building up strategy ή breaking down). Στις δομημένες μεθόδους αναφέρουν τον πίνακα τιμών (ratio table), τα γραφήματα (graph), τους στάνταρ αλγόριθμους και τον χιαστί πολλαπλασιασμό.

Παρομοίως, οι Ben-Chaim, Keret & Illany (2012) διακρίνουν δύο βασικά είδη στρατηγικών επίλυσης: τις προ-τυπικές (pre-formal strategies) και τις τυπικές στρατηγικές. Οι προ-τυπικές στρατηγικές εντοπίζονται κυρίως στο δημοτικό και περιλαμβάνονται οι εξής στρατηγικές:

1) Διαισθητική στρατηγική: είναι κατάλληλη για απλά αναλογικά προβλήματα, όπου τα παιδιά φτάνουν στη λύση με πειραματισμό, χωρίς να έχουν επίγνωση της ισότητας που υπάρχει μεταξύ των δύο λόγων.

2) Προσθετική στρατηγική: εντοπίζεται στις μικρότερες τάξεις του δημοτικού. Βασίζεται στην προσθετική συλλογιστική και δίνεται έμφαση στις ποσοτικές διαφορές μεταξύ των ποσοτήτων και όχι στους λόγους τους.

3) Διαίρεση με λόγο: προϋποθέτει ότι οι μαθητές έχουν επίγνωση του δεδομένου λόγου και υπολογίζουν την πολλαπλασιαστική σχέση που υπάρχει μεταξύ των τιμών.

4) Εύρεση της μονάδας: ο μαθητής ορίζει τον λόγο ως μονάδα ή ως μέρος ενός όλου, ώστε να υπολογίσει ολόκληρη την ποσότητα.

5) Προσδιορίζοντας το μέρος-όλου: παρόμοια με την προηγούμενη στρατηγική

6) Προβλήματα με άγνωστη τιμή: αποτελεί επέκταση της μεθόδου των πινάκων.

Ως επίσημη-τυπική στρατηγική οι Ben-Chaim et al. (2012) επισημαίνουν μόνο την αναλογική μέθοδο που απαιτεί τη χρήση του τύπου $α/β = γ/δ$ ($α, β, γ, δ \neq 0$) και εφαρμόζεται από μεγαλύτερους μαθητές που έχουν αναπτύξει αναλογική συλλογιστική και αφηρημένη σκέψη. Οι λύτες είναι σε θέση να χρησιμοποιούν αλγεβρικά σύμβολα για την αναπαράσταση της αναλογίας, να εφαρμόζουν κανόνες και ιδιότητες της άλγεβρας, ώστε τελικά να οδηγούνται στη σωστή ποσοτική απάντηση. Παρομοίως, οι Ercole, Frantz, & Ashline (2011) ως δομημένη μέθοδο επίλυσης επισημαίνουν τη μέθοδο πολλαπλασιασμού χιαστί (cross-multiplication method), καθώς πρόκειται για την εφαρμογή ενός συγκεκριμένου αλγόριθμου πολλαπλασιάζοντας τους όρους των λόγων χιαστί.

Στη βιβλιογραφία έχουν επισημανθεί δύο βασικοί τύποι ορθών στρατηγικών: η πολλαπλασιαστική και η εποικοδομητική (building up). Κατά την πολλαπλασιαστική στρατηγική, οι όροι μέσα σε μια αναλογία συνδέονται πολλαπλασιαστικά και στη συνέχεια η σχέση αυτή επεκτείνεται στη δεύτερη αναλογία. Σύμφωνα με τους Ercole, Frantz, & Ashline (2011), πρόκειται για την εύρεση του παράγοντα αλλαγής (factor-of-change), αναφερόμενη αλλιώς ως μέθοδος συντελεστή κλίμακας (scale factor method) και μέθοδος αλλαγής μεγέθους (size-change-method). Στις περισσότερες περιπτώσεις, οι σχέσεις αφορούν τον αριθμητή και τον παρονομαστή εντός των λόγων ή μεταξύ όλων των λόγων στο πρόβλημα (Tourniaire & Pulos, 1985). Οι Ercole, Frantz, &

Ashline (2011) προσθέτουν ότι όταν οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις είναι εύκολο να αναγνωριστούν, δηλαδή όταν το ένα στοιχείο είναι πολλαπλάσιο ενός αντίστοιχου στοιχείου, η μέθοδος του παράγοντα αλλαγής είναι μια διαισθητική στρατηγική. Στην συγκεκριμένη στρατηγική οι μαθητές χρησιμοποιούν ουσιαστικά τον συλλογισμό «τόσες φορές περισσότερες» («times as many» thinking).

Στις «στρατηγικές οικοδόμησης» (building-up strategies) (Hart, 1981 στο Tourniaire & Pulos, 1985) εντοπίζεται η σχέση σε έναν λόγο και επεκτείνεται βήμα-βήμα στον δεύτερο λόγο προσθετικά. Χρησιμοποιείται δηλαδή η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση για να φτάσουν στο ζητούμενο αποτέλεσμα, και όχι ο πολλαπλασιασμός (Ercole, Frantz, & Ashline, 2011). Βασικό χαρακτηριστικό της πολλαπλασιαστικής μεθόδου που παρατηρήθηκε και κατά την επίλυση ορισμένων προβλημάτων της έρευνας του Singh (2000), είναι η δημιουργία ενός λόγου, ο οποίος επαναλαμβάνεται και περιλαμβάνεται σε κάθε επόμενο λόγο. Κατ' αυτόν τον τρόπο, ο λόγος θεωρείται ότι αποτελείται από ένα σύνολο μονάδων. Βέβαια, οι προκείμενες στρατηγικές αν και συμβάλλουν στην επιτυχή λύση απλών προβλημάτων, γίνονται πολύπλοκες όταν στο πρόβλημα εμπλέκονται άρρητοι αριθμοί.

Σχετική έρευνα του Singh (2000) τόνισε τη σημασία της πολλαπλασιαστικής σκέψης κατά τον αναλογικό συλλογισμό. Κατά τη χρήση της πολλαπλασιαστικής σκέψης των μαθηματικών σε μαθηματικά έργα αναλογίας, ιδιαίτερη σημασία έχουν δύο νοερές πράξεις, η δημιουργία μονάδων (unitizing) και η επανάληψη (iterating). Ένας λόγος θεωρείται αποτέλεσμα πολλαπλής σύνθεσης σύνθετων μονάδων. Η «μοναδοποίηση» μιας σύνθετης μονάδας και η επανάληψή της επιτρέπει τη διατήρηση της αναλλοίωτης κατάστασης μιας αναλογίας.

Οι Ercole, Frantz, & Ashline (2011) χαρακτηρίζουν τη στρατηγική οικοδόμησης καθώς και τη στρατηγική ισοδύναμων κλασμάτων ως μεταβατικές στρατηγικές (transitional strategies). Αναφορικά με τη μέθοδο σχηματισμού ισοδύναμων κλασμάτων, επισημαίνουν ότι συνδέεται ο συλλογισμός των κλασμάτων με την έννοια των λόγων. Κατ' αυτόν τον τρόπο μεταβαίνουν από τη γνώση των κλασμάτων στην κατανόηση των αναλογιών. Πιο ειδικά, σε αυτήν τη μέθοδο, οι λύτες δημιουργούν ισοδύναμα κλάσματα, των οποίων οι παρονομαστές είναι ομώνυμοι και συγκρίνουν τις τιμές των αριθμητών.

Οι Ηροδότου κ.ά. (2006) ερεύνησαν τη σχέση ανάμεσα στα αριθμητικά και τα λεκτικά προβλήματα αναλογίας, ενώ κατέγραψαν και τις στρατηγικές που εφαρμόζουν οι μαθητές της Ε' και Στ' Δημοτικού. Τα αριθμητικά προβλήματα που δόθηκαν περιλάμβαναν όρους, οι σχέσεις μεταξύ των οποίων ήταν πολλαπλασιαστικές σχέσεις «εντός» και «εκτός» και ακέραιες πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Παρατήρησαν ότι για την επιτυχή επίλυση των αριθμητικών προβλημάτων οι στρατηγικές που επέλεξαν οι περισσότεροι μαθητές ήταν κυρίως η μέθοδος των τριών, η εύρεση του παράγοντα αλλαγής, η αναγωγή στην μονάδα και η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, ενώ η πιο συχνή λανθασμένη στρατηγική που εφάρμοσαν ήταν η προσθετική. Η μέθοδος των τριών εφαρμόστηκε κυρίως από μαθητές της Στ' τάξης, καθώς η συγκεκριμένη στρατηγική διδάσκεται στη Στ' Δημοτικού. Σύμφωνα με τους Christou & Philippou (2002, Ηροδότου κ.ά., 2006) η πιο συνηθισμένη προσέγγιση για την επίλυση αναλογικών προβλημάτων άγνωστης ποσότητας που συναντά κανείς στα μαθηματικά εγχειρίδια της Κύπρου είναι η μέθοδος των τριών και πρόκειται για έναν μνημονικό κανόνα.

Η στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα αποτελεί μια αρκετά διαδεδομένη στρατηγική επίλυσης αναλογικών προβλημάτων και βασίζεται στον καθορισμό του μοναδιαίου παράγοντα, αφού πρωτίστως οριστεί η γνωστή και η άγνωστη ποσότητα ως διαιρέτης και διαιρετέος (Μοδέστου, 2007). Ο Singh (2000) αναφέρει ότι η μέθοδος της αναγωγής στη μονάδα πρόκειται για μια απομνημονευμένη διαδικαστική μαθηματική λειτουργία και όχι εννοιολογική διαδικασία. Στην έρευνά του, στην περίπτωση μιας μαθήτριας η οποία βασίστηκε στην αναγωγή στη μονάδα ώστε να επιλύσει κάθε είδους μαθηματικού έργου αναλογίας, παρατηρήθηκε ότι δεν ήταν σε θέση να περιγράψει το συλλογισμό της ώστε να έχει νόημα, αλλά περιέγραφε τη μέθοδο που ακολούθησε. Η διδασκαλία της στρατηγικής της αναγωγής στη μονάδα σε ανάλογα ποσά ως τυπική προσέγγιση σε αναλογικά προβλήματα, δηλαδή η εύρεση του ποσού για «ένα» και ο πολλαπλασιασμός αυτού ώστε να προκύψει το ποσό για «πολλά», ενδεχομένως να μη συμβάλλει στην ανάπτυξη του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού των μαθητών. «Για να αντιμετωπιστούν οι μοναδιαίοι λόγοι ουσιαστικά, πρέπει να κατανοηθεί η μοναδιαία δομή της κατάστασης» (Singh, 2000).

Η έρευνα των Spinillo & Bryant (1991) έδειξε ότι παιδιά ηλικίας περίπου 6 ετών είναι σε θέση να σκεφτούν αναλογικά και να συγκρίνουν δύο ποσότητες με σημείο αναφοράς το μισό. Συγκεκριμένα, διακρίνουν τις ποσότητες σε «λιγότερο από το μισό» και «περισσότερο από το μισό». Τα παιδιά ηλικίας 4-5 ετών αν και λαμβάνουν υπόψη τους τη σχέση «μεγαλύτερο από» («greater than»), δεν εφαρμόζουν το μέτρο του μισού όπως τα παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας. Επομένως, παρατηρείται ένα αναπτυξιακό χάσμα μεταξύ της ηλικίας που τα παιδιά κατανοούν τις απλές σχέσεις πρώτης τάξης και της ηλικίας που είναι σε θέση να τις ενσωματώσουν στην αναλογική τους σκέψη.

Ακόμη, από ανασκόπηση της βιβλιογραφίας η Κολέζα (2000) συνοψίζει ότι σε προβλήματα αναλογιών τύπου σύγκρισης έχουν καταγραφεί έξι βασικές στρατηγικές: α) με αναφορά στη διαφορά μεταξύ των ποσοτήτων, β) με αναφορά στο υπόλοιπο, εκλαμβάνοντας τον λόγο ως πηλίκο διαίρεσης, γ) με χρήση διπλάσιου ή μισού, δ) μέσω εξωτερικού ή εσωτερικού λόγου σε περίπτωση που ο λόγος των συγκρινόμενων μεγεθών είναι μικρός ακέραιος, ε) μέσω κλασμάτων, και στ) μέσω δεκαδικών.

2.1.6 Λάθη στις αναλογίες

Έρευνες έχουν επικεντρωθεί στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την επίλυση αναλογικών προβλημάτων. Σύμφωνα με τους Tourniaire & Pulos (1985), τα λάθη κατά την επίλυση αναλογικών εργασιών μπορεί να είναι συνέπεια της χρήσης μιας ακατάλληλης στρατηγικής (στρατηγική λάθους) ή της κακής χρήσης μιας σωστής στρατηγικής.

Με βάση τη βιβλιογραφία, η πιο συνηθισμένη λανθασμένη στρατηγική είναι η στρατηγική σταθερής διαφοράς ή προσθετική στρατηγική, σύμφωνα με την οποία η σχέση εντός των λόγων βασίζεται δηλαδή στη διαφορά των δύο όρων. Συγκεκριμένα, αφαιρείται ο ένας όρος από τον άλλον καταλήγοντας στη διαφορά τους και στη συνέχεια η διαφορά εφαρμόζεται στη δεύτερη αναλογία για την εύρεση του αγνώστου (Tourniaire & Pulos, 1985, Fernández et al., 2008, Vanluydt et.al., 2021). Μια επίσης συχνή στρατηγική λάθους είναι η αγνόηση μέρους των δεδομένων του προβλήματος. Για παράδειγμα, ένας λύτης μπορεί να επιχειρήσει να λύσει ένα αναλογικό πρόβλημα συγκρίνοντας απλώς τους αριθμητές των δύο λόγων και αγνοώντας τους παρονομαστές. Επίσης, αρκετά λάθη προέρχονται από τη λανθασμένη εφαρμογή μιας «σωστής» στρατηγικής (Tourniaire & Pulos, 1985).

Στην έρευνα των Pelen & Artut (2015) σε μαθητές γυμνασίου δόθηκαν αναλογικά προβλήματα άγνωστης τιμής, προβλήματα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά και προσθετικά/ μη αναλογικά προβλήματα όπου η εφαρμογή αναλογικής σκέψης και στρατηγικής οδηγεί σε σφάλμα. Παρατηρήθηκε ότι στα αντιστρόφως ανάλογα και μη αναλογικά προβλήματα δόθηκαν περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις λόγω της τάσης των μαθητών να απαντούν αναλογικά και σε καταστάσεις που δεν είναι αναλογικές. Οι μαθητές, ανεξαρτήτως ηλικίας, αν και επιτυγχάνουν στην επίλυση τυπικών αναλογικών προβλημάτων, αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη διάκριση των αναλογικών από τις μη αναλογικές καταστάσεις (De Bock et al., 2002, Modestou & Gagatsis, 2007). Εξαιτίας της απλότητας της αναλογικής σκέψης και του μεγάλου εύρους εφαρμογών της, δημιουργείται στους μαθητές η τάση να προσφεύγουν σε αναλογικές στρατηγικές, ακόμη και αν δεν είναι σε θέση να αναγνωρίσουν αν η συγκεκριμένη στρατηγική είναι η κατάλληλη (Modestou & Gagatsis, 2007).

Σε γεωμετρικά προβλήματα, όπως αναφέρουν οι De Bock et al. (2002), Modestou & Gagatsis (2007) και Theodoulou et al. (2005), ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα λάθους, είναι αυτό που σχετίζεται με την κλιμάκωση, τη μεταβολή του μήκους ενός γεωμετρικού σχήματος και τη μεταβολή του εμβαδού του ή του όγκου του. Οι μαθητές παρασυρόμενοι από τον αναλογικό συλλογισμό, θεωρούν ότι αν πολλαπλασιαστεί το μήκος του με έναν αριθμό, τότε θα πολλαπλασιαστεί και το εμβαδόν του ή ο όγκος του με τον ίδιο αριθμό. Ως εκ τούτου, εξετάζουν τις σχέσεις μεταξύ μήκους και εμβαδού ή μεταξύ μήκους και όγκου ως γραμμικές, αντί για τετραγωνικές ή κυβικές αντίστοιχα (De Bock, Verschaffel & Janssens, 2002, Modestou & Gagatsis, 2007).

2.1.7 Σύνδεση μοτίβων και αναλογιών

Τα μαθηματικά, όπως αναφέρουν οι Vanluydt et al. (2021), είναι κάτι πολύ περισσότερο από αριθμητικές ικανότητες. Έχουν περιγραφεί ως η επιστήμη των μοτίβων και των σχέσεων. Για να γίνει πλήρως κατανοητός ο αναλογικός συλλογισμός, πρέπει όχι μόνο να γίνει αντιληπτό ότι οι δύο πλευρές μιας εξίσωσης (α/β=γ/δ) είναι ίσες, αλλά ακόμη περισσότερο, πρέπει να γίνει κατανοητό ότι οι δύο πλευρές της εξίσωσης πρέπει να είναι δομικά παρόμοιες και επομένως να περιλαμβάνουν το ίδιο μοτίβο σχέσεων ή πράξεων (Lesh et al., 1988, στο Vanluydt et.al., 2021).

Ορισμένες μελέτες σχετικά με τις ψυχολογικές διεργασίες που εμπλέκονται σε ένα μαθηματικό έργο, έχουν δείξει ότι υπάρχουν ομοιότητες στις νοερές δραστηριότητες κατά τη συλλογιστική σχετικά με τα μοτίβο και στην αναλογική συλλογιστική. Έχει αναφερθεί ότι η επαναλαμβανόμενη μονάδα αποτελεί βασική έννοια σε διάφορες πολλαπλασιαστικές δομές, όπως είναι τα μοτίβα, αλλά και οι λόγοι και οι αναλογίες (Mulligan & Mitchelmore, 2009, στο Vanluydt et al., 2021). Η ανάλυση των αποτελεσμάτων δύο παρεμβάσεων σε μαθητές ηλικίας 9 ετών έδειξε ότι τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εισαγωγή στον αναλογικό συλλογισμό και την κατανόηση της έννοιας του λόγου και της αναλογίας.

2.1.8 Διδασκαλία αναλογικού συλλογισμού

Ελάχιστες είναι οι έρευνες για τη διδασκαλία της αναλογικής σκέψης. Οι μελέτες αυτές είναι σημαντικές για τον εντοπισμό μεταβλητών που είναι απαραίτητες για την απόκτηση μιας δεξιότητας ή για την υπόδειξη μεθόδων διδασκαλίας που μπορούν να εφαρμοστούν σε αναλογικό συλλογισμό (Tourniaire & Pulos, 1985).

Στην αναπτυξιακή βιβλιογραφία, οι Inhelder & Piaget (1958, στο Schwartz & Moore, 1998) υποστήριξαν ότι τα παιδιά κατανοούν τις αναλογίες ποιοτικά και όχι μέσω μαθηματικών. Παρατήρησαν δηλαδή ότι το άτομο θέλει να επικεντρωθεί αρχικά στην εμπειρία, και όχι στις λειτουργικές μαθηματικές σχέσεις και τις αναλογίες τους. Η διδασκαλία της έννοιας της αναλογίας δηλαδή, θα πρέπει να πραγματοποιείται μέσα από καταστάσεις που έχουν νόημα για τους μαθητές (Lo & Watanabe, 1997). Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι η γνώση προέρχεται από τη νοερή δραστηριότητα του μαθητή που σχετίζεται άμεσα με τη δράση και την εμπειρία του (Wheatley, 1991, στο Lo & Watanabe, 1997), ενώ η μάθηση συμβαίνει όταν ένα άτομο προσαρμόζει τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιεί για να αντιμετωπίσει μια προβληματική κατάσταση (Steffe, 1990, στο Lo & Watanabe, 1997). Ένας μαθητής που μπορεί να σκεφτεί και να δράσει αναλογικά θα πρέπει να επιστρατεύσει την κοινή λογική και την εμπειρία, ώστε να αναγνωρίζει περιπτώσεις της καθημερινής ζωής κατά τις οποίες η χρήση αναλογιών είναι χρήσιμη ή όχι, και όχι να γνωρίζει απλώς πώς να εφαρμόζει έναν αλγόριθμο.

Σε έρευνά τους οι Cloutier & Goldschmid (1978, στο Tourniaire & Pulos, 1985) διαπίστωσαν ότι κατά τη διδασκαλία, η συζήτηση σχετικά με τον τρόπο επίλυσης αναλογικών προβλημάτων οδήγησε σε σημαντική βελτίωση των επιδόσεων των παιδιών σε προβλήματα απλών αναλογιών 1:2. Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνάς τους, οι He et al. (2018) προτείνουν οι εκπαιδευτικοί να αξιοποιούν περισσότερο τις μαθησιακές διαδικασίες, ώστε να βοηθήσουν τα παιδιά να αναπτύξουν και να διεξάγουν αναλογικό συλλογισμό με πιο στρατηγικό και δομικό τρόπο. Ειδικότερα, τα παιδιά μπορούν να διδαχθούν να σχεδιάζουν τον συλλογισμό τους και να επεξεργάζονται αρχικά κάθε αναλογική-κλασματική σχέση προτού συνεχίσουν σε πιο σύνθετες αριθμητικές πράξεις.

Οι Lo & Watanabe (1997) τονίζουν τη σημασία ενασχόλησης των μαθητών με μαθηματικά έργα σχετικά με τη γεωμετρία και τη μέτρηση, καθώς συμβάλλουν στην ανάπτυξη των εννοιών των αριθμών και των πράξεων σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης. Ακόμη, όπως επισημαίνουν οι He et al. (2018), ο εντοπισμός οπτικοχωρικών χαρακτηριστικών κατά την κλιμάκωση που συμβάλλουν στην ανάπτυξη διαισθητικών διαδικασιών αναλογικού συλλογισμού, μπορεί να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να αναπτύξουν πιο αξιόλογους τρόπους διδασκαλίας των αναλογικών εννοιών στα παιδιά.

Οι Möhring et al. (2016) προτείνουν την ενθάρρυνση της ικανότητας των παιδιών να οπτικοποιούν τις αναλογίες, καθώς κατ' αυτόν τον τρόπο ενδεχομένως να αντιληφθούν ότι οι σχέσεις μέρους-όλου παραμένουν ίδιες ακόμη κι αν οι αριθμοί των μερών και το μέγεθος των μονάδων διαφέρουν και κατ' επέκταση να κατανοήσουν την κλασματική ισοδυναμία. Επίσης, η οπτικοποίηση των αναλογιών μπορεί να συμβάλλει στην ανάπτυξη των οπτικοχωρικών ικανοτήτων των παιδιών.

Ωστόσο, στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών, «η μαθηματική αναλογική σκέψη ορίζεται ως ταυτόσημη της ικανότητας επίλυσης τυπικών λεκτικών προβλημάτων» (Μοδέστου, 2007), καθώς αρχικά ορίζεται η έννοια της αναλογίας και στη συνέχεια ζητείται από τους μαθητές να επιλύσουν λεκτικά προβλήματα χρησιμοποιώντας αναλογίες (Lamon, 1999, στο Μοδέστου, 2007), χωρίς προηγουμένως οι μαθητές να καθοδηγούνται μέσα από συγκεκριμένες δραστηριότητες ώστε να αντιληφθούν πότε δύο ποσότητες σχετίζονται αναλογικά (Cramer et al., 1993, στο Μοδέστου, 2007). Οι μαθητές για να μπορέσουν να προχωρήσουν σε μια επιτυχημένη επίλυση θα πρέπει να είναι σε θέση να αναγνωρίσουν και να καθορίσουν τα βασικά στοιχεία της προβληματικής κατάστασης, ενώ σημαντικές είναι και οι διαδικασίες νοερής αναπαράστασης του προβλήματος.

2.2 Νοερή επιχειρηματολογία

2.2.1 Μέθοδοι επίλυσης μαθηματικών έργων

Για την επίλυση μαθηματικών έργων υπάρχουν αρκετοί τρόποι και στρατηγικές που μπορεί να ακολουθήσει ο καθένας ώστε να φτάσει στη λύση. Συνηθισμένη είναι η μέθοδος με χαρτί και μολύβι, κατά την οποία το πρόβλημα λύνεται γραπτώς, με σύμβολα και λέξεις. Ωστόσο, αρκετοί έχουν διερευνήσει τη χρήση νοερών, οπτικών στρατηγικών κατά τη διαδικασία της επίλυσης (Borromeo, 2012). Ως νοερή επιχειρηματολογία ορίζεται η ανάπτυξη επιχειρημάτων αποκλειστικά με τον νου, χωρίς τη χρήση κάποιου μέσου γραφής (Μαμωνά-Downs & Παπαδόπουλος, 2018). Όπως επισημαίνει ο Krutetskii, ένα από τα χαρακτηριστικά των μαθηματικά ικανών μαθητών είναι να είναι σε θέση να αναζητήσουν μια σαφή, απλή και σύντομη λύση σε ένα πρόβλημα (Vale & Barbosa, 2018).

Οι λύτες μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις κατηγορίες με βάση τον τρόπο που επεξεργάζονται τις μαθηματικές πληροφορίες. Οι οπτικοί τύποι (visualizers), που χρησιμοποιούν οπτικές-νοερές αναπαραστάσεις όταν επιλύουν ένα πρόβλημα, οι λεκτικοί τύποι (verbalizers/ nonvisualisers) που χρησιμοποιούν λεκτικούς τρόπους όταν προσπαθούν να λύσουν μαθηματικά προβλήματα, ακόμη και σε εκείνα που είναι πιο απλό να λυθούν με οπτική προσέγγιση (Presmeg, 1986), και τέλος, οι «μεικτοί» (mixers), οι οποίοι επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν και τις δύο μεθόδους (Clements, 1982, Borromeo, 2012). Τα αποτελέσματα της μελέτης της Presmeg (1986) σε εκπαιδευτικούς δείχνουν ότι η επιθυμητή διδασκαλία περιλαμβάνει οπτικές και μη οπτικές πτυχές. Η ισορροπία μεταξύ οπτικών και λεκτικών μεθόδων χαρακτηρίζεται από τον McKim (1972, στο Presmeg, 1986) ως «αμφίπλευρη σκέψη» (ambidextrous thinking).

Οι ψυχολόγοι και οι ερευνητές της εκπαίδευσης εστίασαν στις στρατηγικές επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, ώστε να ταξινομήσουν τους επιλυτές σε μία από τις τρεις παραπάνω κατηγορίες (Lowrie & Clements, 2001). Οι Lowrie & Kay (2001, στο Carden & Cline, 2015) σε έρευνα που έκαναν σε παιδιά 11 έως 13 ετών, παρατήρησαν ότι οι περισσότεροι συμμετέχοντες χρησιμοποιούσαν λεκτικές μεθόδους για τις ευκολότερες ερωτήσεις και οπτικές για τις δύσκολες, ενώ σύμφωνα και με τον Walter (1963, στο Clements, 1982) οι περισσότεροι ανήκουν στην τελευταία ομάδα. Ο Krutetskii (1976, στο Presmeg, 1986) θεωρεί την ευελιξία της σκέψης απαραίτητο χαρακτηριστικό της μαθηματικής χαρισματικότητας. Όπως φαίνεται και στη μελέτη της Presmeg (1986), ως πλεονέκτημα χαρακτηρίζεται η ύπαρξη και η εναλλαγή οπτικών και μη οπτικών μεθόδων κατά την αντιμετώπιση προβλημάτων, όπου η μία ή η άλλη μέθοδος κρίνεται πιο κατάλληλη. Η παρουσία ή η απουσία οπτικών αναπαραστάσεων καθορίζει αν η μέθοδος είναι οπτική (visual method) ή όχι (nonvisual method).

2.2.2 Εξεικόνιση- Οπτικοποίηση

Η «οπτικοποίηση» ή «εξεικόνιση» είναι μια γνωστική ικανότητα (Carden & Cline, 2015) που αναφέρεται στη διαδικασία κατασκευής, ερμηνείας, χρήσης και μετατροπής νοερών εικόνων (Gal & Linchevski, 2010). Για τον Arcavi (2003): «η οπτικοποίηση προσφέρει μια μέθοδο θέασης του αθέατου». Ουσιαστικά, μπορείς να «δεις» με το νου αυτό που δεν μπορείς να δεις (McCormick et. al., 1987, στο Arcavi, 2003), είτε πρόκειται για συγκεκριμένο αντικείμενο είτε για αφηρημένες έννοιες, όπως μια μαθηματική συνάρτηση (Mariotti & Pesci, 1991). Σύμφωνα με τον Gutiérrez (1996), η «εξεικόνιση» στα μαθηματικά είναι το είδος της συλλογιστικής δραστηριότητας που βασίζεται στη χρήση οπτικών ή χωρικών στοιχείων και πληροφοριών, είτε νοερών είτε φυσικών, για την επίλυση προβλημάτων ή την απόδειξη ιδιοτήτων. Αποτελείται από νοερές διαδικασίες που κάνουν χρήση, ή χαρακτηρίζονται από οπτικές εικόνες, οπτική μνήμη, οπτική επεξεργασία, οπτικές σχέσεις, οπτική προσοχή και οπτική φαντασία (Hershkowitz, 1989, στο Owens, 1994)

Σύμφωνα με τον Jonassen (2003, στο Csíkos, Szitányi & Kelemen, 2012) «η επιτυχής επίλυση προβλημάτων απαιτεί την κατανόηση των γραπτών πληροφοριών και την ικανότητα οπτικοποίησης των δεδομένων». Η ικανότητα οπτικοποίησης των δεδομένων και των σχέσεων μεταξύ αυτών σε ένα πρόβλημα, δηλαδή, μπορεί να διευκολύνει την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος. Όπως αναφέρουν οι Csíkos, et al. (2012), οι μαθηματικές έννοιες και σχέσεις βασίζονται σε οπτικές νοερές αναπαραστάσεις που συνδέονται με λεκτικές πληροφορίες και επομένως η ικανότητα δημιουργίας, διατήρησης και χειρισμού αφηρημένων εικόνων είναι σημαντική για την επίλυση προβλημάτων.

Σύμφωνα με την Presmeg (1986), η οπτική μέθοδος επίλυσης βασίζεται κατά κύριο λόγο στις οπτικές αναπαραστάσεις, με ή χωρίς την παρουσία διαγραμμάτων, ακόμη κι αν χρησιμοποιούνται επίσης λογικές ή αλγεβρικές μέθοδοι. Το κάθε άτομο παρουσιάζει, κατανοεί και σκέφτεται μαθηματικά θέματα μέσω ορισμένων οπτικών μεθόδων που περιλαμβάνουν κατασκευές, σχέδια, διαγράμματα, πίνακες και γραφικές παραστάσεις, είτε απεικονισμένες γραπτώς είτε νοερά, στο μυαλό του ατόμου (Borromeo, 2012, Presmeg, 1986). Πιο αναλυτικά, οι οπτικές αναπαραστάσεις διαχωρίζονται σε: εσωτερικές (internal visual representations), όπως είναι οι νοερές εικόνες, και εξωτερικές (external visual representations), λόγου χάρη γραφήματα, διαγράμματα και εικόνες (Borromeo, 2012, Corter & Zahner, 2007). Μάλιστα, ο Gutiérrez (1996) αναφέρει ότι εξωτερικές αναπαραστάσεις είναι κάθε είδος λεκτικής ή γραφικής αναπαράστασης εννοιών ή ιδιοτήτων που συμβάλλει στη δημιουργία και τη μετατροπή νοερών εικόνων, και συνεπώς στην ανάπτυξη της νοερής επιχειρηματολογίας. Σχετικές έρευνες έχουν δείξει ότι οι εσωτερικές, αλλά και οι εξωτερικές οπτικές αναπαραστάσεις τείνουν να χρησιμοποιούνται ως επί το πλείστον σε άγνωστα, μη οικεία ή πιο δύσκολα προβλήματα (Corter & Zahner, 2007). Σε έρευνα του Borromeo (2012) ένας μαθητής ηλικίας 10 ετών σχολίασε ότι κατανοεί καλύτερα τα μαθηματικά όταν η δασκάλα του ζωγραφίζει εικόνες, διότι χρειάζεται να έχει μια εικόνα στο μυαλό του.

Με βάση τη Γνωστική Ψυχολογία, η δημιουργία και η επεξεργασία νοερών εικόνων πραγματοποιείται μέσα σε μια πολύπλοκη διαδικασία απόκτησης και χρήσης γνωστικών ικανοτήτων, συμπεριλαμβάνοντας και οπτικό-χωρικές ικανότητες (Miragliotta & Baccaglini-Frank, 2017). Κατά την εξεικόνιση, ο Bishop (1983, στο Gutiérrez, 1996, Gal & Linchevski, 2010) επισημαίνει δύο ικανότητες του ατόμου: την οπτική επεξεργασία (visual processing, VP) και την ερμηνεία των εικονιστικών πληροφοριών (interpretation of figural information, IFI). Η οπτική επεξεργασία αναφέρεται στη μετάφραση αφηρημένων σχέσεων και μη-εικονιστικών δεδομένων σε οπτικούς όρους, καθώς και στη δημιουργία, τον χειρισμό και τον μετασχηματισμό οπτικών αναπαραστάσεων. Η ερμηνεία των εικονιστικών πληροφοριών αφορά την παρατήρηση και την ερμηνεία του χωρικού λεξιλογίου και των οπτικών εικόνων, είτε νοερών είτε φυσικών, για την άντληση πληροφοριών που θα διευκολύνουν την επίλυση ενός προβλήματος.

Ο Kosslyn (1980, στο Gutiérrez, 1996) περιέγραψε πιο λεπτομερώς τη διαδικασία της εξεικόνισης διακρίνοντας τέσσερις ενέργειες. Αρχικά, δημιουργείται η νοερή αναπαράσταση από ορισμένες δεδομένες πληροφορίες και στη συνέχεια εξετάζεται η νοερή εικόνα, ώστε να παρατηρηθεί η θέση της ή η παρουσία τμημάτων και στοιχείων. Ακολουθεί ο μετασχηματισμός της νοερής εικόνας, περιστρέφοντας, μεταφράζοντας ή αποσυνθέτοντάς την, και τέλος, η νοερή αναπαράσταση αξιοποιείται για την απάντηση ερωτήσεων.

Σύμφωνα με τον Krutetskii (1976, στο Presmeg, 1986) ορισμένα σημαντικά χαρακτηριστικά, αν και δεν περιλαμβάνονται στη δομή της μαθηματικής χαρισματικότητας, είναι η ταχύτητα νοερής επεξεργασίας, οι υπολογιστικές ικανότητες, η απομνημόνευση συμβόλων, αριθμών και τύπων, η ικανότητα χωρικής σκέψης και τέλος, η ικανότητα οπτικοποίησης αφηρημένων μαθηματικών σχέσεων. Βέβαια, στη σχετική έρευνά του, εντοπίστηκαν δυσκολίες στις τρεις πρώτες κατηγορίες, καθώς οι οπτικές μέθοδοι απαιτούν περισσότερο χρόνο, στον υπολογισμό και στο να θυμηθούν τους τύπους.

Όπως αναφέρουν οι Lowrie, Logan & Ramful (2017), προκειμένου οι μαθητές να επιτύχουν ένα υψηλότερο επίπεδο μαθηματικών επιδόσεων, πρέπει να είναι σε θέση να φαντάζονται και να οπτικοποιούν. Βέβαια, οι Hegarty & Kozhevnikov (1999) διαπίστωσαν την ύπαρξη ατομικών διαφορών κατά την εξεικόνιση. Οι εικόνες ενός ατόμου μπορούν να αντληθούν από πολλές πηγές και επομένως οι εικόνες του κάθε υποκειμένου είναι ιδιαίτερα ιδιοσυγκρασιακές (Thompson, 1996). Ακόμη, τα άτομα πιθανώς να διαφέρουν ως προς τον βαθμό στον οποίο χρησιμοποιούν και επωφελούνται από τις οπτικές αναπαραστάσεις (Corter & Zahner, 2007, Gal & Linchevski, 2010). Σύμφωνα με τον Krutetskii (1976, στο Presmeg & Balderas-Cañas, 2001), η ικανότητα οπτικοποίησης δεν συνεπάγεται ότι το άτομο θα χρησιμοποιήσει οπτικές μεθόδους για την επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος, καθώς ένας σημαντικός παράγοντας είναι και η προσωπική προτίμηση. Η μαθηματική οπτικοποίηση (mathematical visuality) του ατόμου εξαρτάται από τον βαθμό στον οποίο το άτομο επιλέγει να χρησιμοποιεί οπτικές μεθόδους σε μαθηματικά προβλήματα, τα οποία μπορούν να αντιμετωπιστούν με ή χωρίς τη χρήση οπτικών μεθόδων (Presmeg, 1986).

2.2.3 Νοερές εικόνες (Mental- visual images)

Ο Thompson (1996) υποστηρίζει ότι ο μαθηματικός συλλογισμός σε όλα τα επίπεδα βασίζεται στις εικόνες, εστιάζοντας περισσότερο στις νοερές εικόνες. Στη γνωστική ψυχολογία, οι Denis, Kosslyn, Paivio, Shepard και άλλοι, υποστηρίζουν ότι η «νοερή εικόνα», είναι μια εικόνα που δημιουργήθηκε στο μυαλό από τη μνήμη, χωρίς φυσική υποστήριξη (Gutiérrez, 1996). Είναι αναπαράσταση που πραγματώνεται σε νοερό χώρο και αποτελεί προέκταση της αντίληψης, αυτό που βλέπει «το μάτι του νου» (Κωσταρίδου-Ευκλείδη, 2011). Ως εκ τούτου, ο νους έχει βασικό και ενεργό ρόλο (Solano & Presmeg, 1995). Οι νοερές εικόνες θεωρούνται αναλογικές αναπαραστάσεις, καθώς μιμούνται ή προσομοιάζουν τη δομή του αναπαριστώμενου στοιχείου και τη διεργασία που θα εφαρμοζόταν σε αντιληπτικό επίπεδο (Metzler & Shepard, 1974, στο Κωσταρίδου-Ευκλείδη, 2011).

Για τον Gutiérrez (1996), οι νοερές εικόνες είναι κάθε είδος γνωστικής αναπαράστασης μιας μαθηματικής έννοιας ή ιδιότητας με οπτικά ή χωρικά στοιχεία. Παρομοίως, η Presmeg (1986) και οι Gal & Linchevski (2010) ορίζουν ως οπτική εικόνα (visual image) ένα νοερό σχήμα που απεικονίζει οπτικές ή χωρικές πληροφορίες, με ή χωρίς να απαιτείται η παρουσία ενός αντικειμένου ή άλλης εξωτερικής αναπαράστασης (Csíkos et al., 2012). Η νοερή αναπαράσταση των πληροφοριών μπορεί να παρέχει μια οπτική εικόνα για αφηρημένες έννοιες, επιτρέποντας την ταυτόχρονη αναπαράσταση διάφορων στοιχείων μιας κατάστασης και διευκολύνοντας τον εντοπισμό των σχέσεων μεταξύ των στοιχείων. Επιπλέον, είναι ιδιαίτερα ευέλικτες, εύκολα μετατρέψιμες και χρήσιμες για τον συνδυασμό πολλαπλών στοιχείων μιας νέας έννοιας (Antonietti & Colombo, 2011).

Ο μαθητής προσπαθεί να κατανοήσει και να ερμηνεύσει μια κατάσταση μέσα από τον σχηματισμό νοερών μοντέλων. Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις αφορούν νοερούς σχηματισμούς, με τους οποίους οι μαθητές οικοδομούν τη γνώση και αναπαριστούν την πραγματικότητα (Παπανδρέου, 2022). Επομένως, οι νοερές εικόνες αποτελούν μέρος της εννοιολογικής εικόνας του ατόμου (Tall & Vinner, 1981, στο Gal & Linchevski, 2010). Πιο αναλυτικά, οι Vinner & Hershkowitz (1980) περιγράφουν τις νοερές εικόνες ως ένα σύνολο εικόνων που έχει συσχετίσει το άτομο με μία έννοια, ενώ στη σκέψη του ατόμου μπορεί να περιλαμβάνεται και ένα σύνολο ιδιοτήτων σχετικές με την έννοια. Αυτό το σύνολο ιδιοτήτων, σε συνδυασμό με τις νοερές εικόνες, ορίζεται ως «εννοιολογική εικόνα» (concept image).

Βέβαια, οι μαθητές καλούνται να δώσουν και επίσημους λεκτικούς «ορισμούς της έννοιας» (concept definition) στην τριτοβάθμια εκπαίδευση και άτυπους ή φαινομενικούς ορισμούς στην πρωτοβάθμια ή δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Οι ορισμοί συμβάλλουν στον μετέπειτα σχηματισμό της εννοιολογικής εικόνας, καθώς και στην εκτέλεση ορισμένων γνωστικών έργων. Ωστόσο, κάποιοι ορισμοί είναι αρκετά περίπλοκοι με αποτέλεσμα να μη συμβάλλουν στη δημιουργία νοερών εικόνων στη σκέψη των μαθητών (Vinner & Hershkowitz, 1980).

Οι νοερές εικόνες ως μέσο προσομοίωσης και συμβολισμού διευκολύνουν τη διαδικασία σκέψης (Kosslyn, 1983, στο Antonietti & Colombo, 2011). Πιο συγκεκριμένα, με την προσομοίωση, οι εικόνες επιτρέπουν τη νοερή πρόβλεψη των λειτουργιών και των φυσικών αλλαγών παρέχοντας μια εσωτερική αναπαράσταση ανάλογη με την εξωτερική πραγματικότητα. Με τον συμβολισμό, οι νοερές εικόνες αντιπροσωπεύουν αντικείμενα ή συγκεκριμένες καταστάσεις μέσω συμβόλων. Μάλιστα, η δημιουργία νοερών εικόνων είναι σημαντική στη δημιουργικότητα των παιδιών. Η δημιουργία ζωντανών εικόνων, καθώς και η σύνθεση, ο συνδυασμός των εικόνων, συνδέονται με την ικανότητα των παιδιών να σκέφτονται δημιουργικά (Antonietti & Colombo, 2011).

Η έρευνα και η ανάπτυξη στη μαθηματική εκπαίδευση ενδιαφέρεται για το πώς οι μαθητές δομούν νοερά τις μαθηματικές εμπειρίες και πώς σκέφτονται με βάση αυτές κατά τη μάθηση και την επίλυση προβλημάτων (Davis, 1992, στο Wheatley, 1997). Σε έρευνα της Presmeg (1985, στο Presmeg & Balderas-Cañas, 2001) σχετική με τη δημιουργία και τη χρήση νοερών εικόνων κατά την επίλυση προβλημάτων πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις. Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, ένα μεγάλο μέρος των συμμετεχόντων δεν αναφέρθηκαν στην κατασκευή και τη χρήση νοερών εικόνων, παρά μόνο όταν ερωτήθηκαν αν έχουν κάποια εικόνα στη σκέψη τους. Σε τέτοιου είδους έρευνες, η υποβολή ερωτήσεων κρίνεται απαραίτητη όταν το επίκεντρο της μελέτης είναι οι νοερές αναπαραστάσεις. Ωστόσο, ένα πιθανό μειονέκτημα είναι ο βαθμός επιρροής της κάθε ερώτησης στη νοερή εικόνα που είχε ήδη σχηματίσει το υποκείμενο (Presmeg & Balderas-Cañas, 2001).

2.2.4 Τύποι νοερών εικόνων

Οι Hegarty & Kozhevnikov (1999, στο Antonietti & Colombo, 2011) μελέτησαν τις επιδράσεις δύο τύπων αναπαραστάσεων κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων: του εικονογραφικού (pictorial) και του σχηματικού (schematic). Ο πρώτος τύπος περιλαμβάνει λεπτομερείς, συγκεκριμένες και ρεαλιστικές αναπαραστάσεις του έργου, ενώ ο δεύτερος πιο αφηρημένες και σχηματικές αναπαραστάσεις που αντιπροσωπεύουν και τις χωρικές σχέσεις μεταξύ αντικειμένων. Αναφέρουν ότι σημαντικός παράγοντας για την επιτυχία σε μαθηματικά έργα είναι ο τύπος εικόνων που χρησιμοποιείται, ενώ στην έρευνά τους σε μαθητές της Στ’ δημοτικού διαπίστωσαν τη θετική επίδραση των σχηματικών εικόνων για την επιτυχή επίλυση προβλημάτων. Οι σχηματικές αναπαραστάσεις έχουν νόημα στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων, καθώς περιέχουν σχετικά δεδομένα και σχέσεις (Csíkos, et al., 2012).

Σε έρευνά της η Presmeg (1986) κάνει διάκριση πέντε τύπων νοερών εικόνων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τον λύτη:

1. Συγκεκριμένες οπτικές εικόνες (concrete images)
2. Εικόνες μοτίβου (pattern images)
3. Εικόνες τύπων (images of formulae)
4. Κιναισθητικές εικόνες (kinaesthetic images)
5. Δυναμικές εικόνες (dynamic images)

Η Presmeg επισήμανε ότι όλοι οι τύποι εικόνων έχουν κάποιον ρόλο και είναι χρήσιμοι στη διαδικασία της επίλυσης προβλημάτων (Van Garderen, 2006). Όσον αφορά τις συγκεκριμένες οπτικές εικόνες, είναι η πιο βασική μορφή απεικόνισης. Πρόκειται για την εικόνα που έχει ένα άτομο στον νου. Μπορεί να είναι σημαντική ως βάση για την αρχή των προβλημάτων, για την ανάπτυξη τακτικών για την επίλυση προβλήματος και για την απεικόνιση σχημάτων. Οι εικόνες μοτίβου αναπαριστούν τις αφηρημένες μαθηματικές σχέσεις οπτικά και συμβάλλουν στην κατανόησή τους, ενώ αγνοούνται συγκεκριμένες λεπτομέρειες. Οι εικόνες τύπων είναι ο τύπος νοερής εικόνας κατά την οποία το άτομο μπορεί να «δει» στο νου έναν μαθηματικό τύπο, όπως ήταν γραμμένος σε ένα τετράδιο ή στον πίνακα. Οι κιναισθητικές εικόνες δημιουργούνται, μετατρέπονται και εκφράζονται με τη βοήθεια φυσικών κινήσεων. Οι Wickens & Prevett (1995, στο Owens, 2015) προσθέτουν ότι ο κιναισθητικός τύπος εικόνας, πρόκειται για χωρική απεικόνιση και όχι οπτική. Τέλος, οι δυναμικές εικόνες σχετίζονται με την κίνηση και την μετατροπή των σχημάτων στον νου.

Όπως φαίνεται σε έρευνα του Gutiérrez (1996), οι μαθητές χρησιμοποίησαν μόνο συγκεκριμένες, κιναισθητικές και δυναμικές εικόνες. Παρ' όλ' αυτά, η Presmeg (1986) προσθέτει ότι οι συγκεκριμένες εικόνες έχουν μνημονικά πλεονεκτήματα, είναι χρήσιμες στην ενίσχυση της μνήμης. Αν και στην εν λόγω έρευνα δεν χρησιμοποιήθηκε αρκετά η δυναμική απεικόνιση, φαίνεται να είναι δυνητικά αποτελεσματική. Ένας τύπος νοερών εικόνων που αποδείχθηκε ιδιαίτερα αποτελεσματική είναι η αναπαράσταση τύπων, οι οποίες συνήθως απεικονίζονταν στη σκέψη των ατόμων σαν μια σελίδα σημειώσεων ή γραμμένες στον πίνακα. Η Presmeg (1986, στο Csíkos et al., 2012) επισήμανε ότι οι εικόνες μοτίβου είναι πιο παραγωγικές στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων από τις συγκεκριμένες εικόνες.

2.2.5 Οπτική αντίληψη

Ο Hoffer (1977, στο Gal & Linchevski, 2010) αναφέρεται στην οπτική αντίληψη ως «την ικανότητα να βλέπεις και να ερμηνεύεις». Επομένως, η αντίληψη και η επεξεργασία των οπτικών πληροφοριών μέσω αισθητηριακών και νοερών διεργασιών αναφέρονται ως διεργασίες οπτικής αντίληψης (visual perception) (Gal & Linchevski, 2010).

Σύμφωνα με τον Anderson (1995, στο Gal & Linchevski, 2010), οι διαδικασίες οπτικής αντίληψης διακρίνονται σε τρεις διαδοχικές φάσεις. Η πρώτη είναι η οργάνωση (organization) και σχετίζεται με την πρώιμη φάση στην οποία εξάγονται σχήματα και αντικείμενα από την «οπτική σκηνή». Ακολουθεί η αναγνώριση (recognition), μια μεταγενέστερη φάση στην οποία αναγνωρίζονται τα σχήματα και τα αντικείμενα και τέλος, η αναπαράσταση των αντικειμένων στο νου (representation). Δηλαδή, μόλις οι πληροφορίες γίνουν αντιληπτές και εισαχθούν στο γνωστικό σύστημα, ο τρόπος επεξεργασίας τους εξαρτάται από τον τρόπο που αναπαρίστανται στο σύστημα.

Για την αναπαράσταση της γνώσης με βάση την αντίληψη υπάρχουν ξεχωριστές παραστάσεις για λεκτικές και οπτικές πληροφορίες. Ορισμένες οπτικές πληροφορίες, όπως το σχήμα των γεωμετρικών αντικειμένων, αποθηκεύονται σύμφωνα με τη χωρική τους θέση, σε αντίθεση με τις λέξεις, οι οποίες αποθηκεύονται σε γραμμική σειρά (Santa, 1977, στο Gal & Linchevski, 2010). Οι αντιθέσεις μεταξύ αυτών των δύο μορφών πληροφοριών, μπορεί να προκαλέσουν δυσκολίες στην επεξεργασία των δεδομένων.

2.2.6 Χωρική σκέψη (Spatial thinking)

Στο πεδίο της χωρικής σκέψης (spatial thinking), η Liben (1981, στο Clements, 1982) συμπεριλαμβάνει τις συνειδητά προκαλούμενες νοερές εικόνες. Κατά τους Demetriou, Christou, Spanoudis & Platsidou (2002), το σύστημα της χωρικής σκέψης βασίζεται στη νοερή απεικόνιση και επεξεργασία καταστάσεων, καθώς και στην αντίληψη του μεγέθους, του προσανατολισμού, του βάθους ενός αντικειμένου και της κίνησης του στον χώρο. Η χωρική ικανότητα συμβάλλει στην κατανόηση και την ερμηνεία του γεωμετρικού κόσμου (National Council of the Teacher of Mathematics, 2000, στο Lowrie et al., 2017). Γενικότερα, ορίζεται ως η ικανότητα κατανόησης και επίλυσης περιγραφικών γεωμετρικών προβλημάτων, ανάγνωσης και δημιουργίας σχεδίων και τέλος, ως η ικανότητα παραγωγής, διατήρησης και μετασχηματισμού οπτικών εικόνων (Lowrie et al., 2017). Επομένως, οτιδήποτε μπορεί να γίνει αντιληπτό και στη συνέχεια να διατηρηθεί ως νοερή εικόνα μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο αυτού του συστήματος (Demetriou et al., 2002).

Η χωρική σκέψη (spatial thought), όπως αναφέρεται στο Clements (1982), πρόκειται για γνώση στην οποία τα άτομα έχουν πρόσβαση, μπορούν να σκεφτούν ή να τη χειριστούν, όπως για παράδειγμα ο χειρισμός των εικόνων κατά την επίλυση προβλημάτων. Η Yakimanskaya (στο Gutiérrez, 1996), περιγράφει τη χωρική σκέψη (spatial thinking) ως ένα είδος νοερής δραστηριότητας που καθιστά δυνατή τη δημιουργία χωρικών εικόνων και τη χρήση τους στην επίλυση διάφορων προβλημάτων. Συμπεριλαμβάνει λεκτικές και νοερές διαδικασίες και αντιληπτικές καταστάσεις που είναι απαραίτητες για τη διαμόρφωση νοερών εικόνων. Μια «χωρική εικόνα» δημιουργείται από την αισθητηριακή γνώση των χωρικών σχέσεων και μπορεί να εκφραστεί σε μια ποικιλία λεκτικών ή γραφικών μορφών. Επομένως, παρατηρείται αλληλεπίδραση μεταξύ χωρικών εικόνων και εξωτερικών αναπαραστάσεων.

Όπως αναφέρουν οι Lohman et al. (1987, στο Owens, 2015), ο οπτικοχωρικός συλλογισμός εξαρτάται από τις χωρικές ικανότητες, την οπτικοχωρική μνήμη και την ενσωμάτωση και τον χειρισμό εικόνων. Αντίστοιχα με τον Bishop, όπως αναλύθηκε πρωτύτερα, η Yakimanskaya (1999, στο Gutiérrez, 1996) διαχωρίζει τη χωρική σκέψη σε δύο επίπεδα διαδικασιών και ικανοτήτων: τη δημιουργία των νοερών εικόνων και τον χειρισμό αυτών κατά τη χρήση τους.

Αρκετές μελέτες έχουν τονίσει τη θετική σχέση μεταξύ των επιδόσεων στα μαθηματικά και της χωρικής ικανότητας (Lowrie, et al. 2017). Οι Hegarty & Kozhevnikov (1999, στο Csíkos et al., 2012) σε έρευνα σε μαθητές έκτης δημοτικού, διαπίστωσαν ότι «ορισμένες οπτικοχωρικές αναπαραστάσεις προάγουν την επιτυχή επίλυση προβλημάτων. Η μελέτη των Kozhevnikov et al. (2002, στο Carden & Cline, 2015) έδειξε ότι όσοι προτιμούν τις νοερές-οπτικές μεθόδους αναπαράστασης, αλλά έχουν αδύναμες χωρικές ικανότητες, ενδεχομένως να είναι «ευάλωτοι» σε αυτό το πλαίσιο. Μάλιστα, όταν εφαρμόζουν μεθόδους εξεικόνισης στην επίλυση προβλημάτων, χρησιμοποιούν εικονογραφικές και όχι σχηματικές εικόνες, και ως εκ τούτου μπορεί να έχουν μειωμένες επιδόσεις (Carden & Cline, 2015).

Οι He, Yang & Gao (2018) παρατήρησαν ότι από την ηλικία των 6 ετών τα παιδιά είναι σε θέση να χρησιμοποιούν οπτικοχωρικά χαρακτηριστικά όταν σκέφτονται αναλογικά. Ο Wersan (1981, στο Tourniaire & Pulos, 1985) επισήμανε τη σχέση μεταξύ του τρόπου διδασκαλίας και της χωρικής ικανότητας των μαθητών. Παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές με καλή χωρική ικανότητα μαθαίνουν καλύτερα όταν δίνονται χωρικές δραστηριότητες, σε αντίθεση με τους μαθητές με χαμηλή χωρική ικανότητα.

2.2.7 Εξεικόνιση και διδασκαλία των μαθηματικών

Με βάση τη βιβλιογραφία, η οπτικοποίηση είναι ένα σημαντικό εργαλείο κατά την επίλυση προβλημάτων, το οποίο μάλλον δεν χρησιμοποιείται επαρκώς. Τα τελευταία χρόνια αρκετοί μαθηματικοί υπογραμμίζουν την ανάγκη αύξησης της χρήσης οπτικών στοιχείων κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, ιδιαίτερα στη δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση (Gutiérrez, 1996). Η σημασία που δίνεται στην εξεικόνιση κατά την εκμάθηση των μαθηματικών βασίζεται στο γεγονός ότι δεν περιορίζεται στην απλή απεικόνιση ιδεών, αλλά αναγνωρίζεται και ως συστατικό της επιχειρηματολογίας (Barbosa & Vale, 2015). Αν και δεν είναι εύκολο έργο, προτείνεται η ενσωμάτωση των οπτικών προσεγγίσεων στις μαθηματικές εμπειρίες που παρέχονται στους μαθητές (NCTM, 2000, στο Barbosa & Vale, 2015) και η καλλιέργεια της από τα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης (Mariotti & Pesci, 1991). Η National Numeracy Strategy επίσης εστιάζει στους νοερούς υπολογισμούς στα πρώτα χρόνια, χωρίς να δίνεται έμφαση στους γραπτούς υπολογισμούς (Munn, 2001), ενώ επισημαίνει ότι η εργασία με μεγαλύτερους αριθμούς θα απαιτήσει «άτυπες σημειώσεις με μολύβι και χαρτί» που είναι «μέρος της νοερής στρατηγικής» (DfEE, 1998, στο Anghileri, Beishuizen & Van Putten, 2002).

Αρκετές θεωρητικές και εμπειρικές έρευνες αναφέρουν ότι η χρήση διάφορων εξωτερικών διαγραμματικών και εικονογραφικών αναπαραστάσεων, μπορούν να ενισχύσουν την ικανότητα των μαθητών να επιλύουν προβλήματα. Κατ' αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές μπορούν να αναλύσουν την κατάσταση του προβλήματος, να σχεδιάσουν τη λύση και να ελέγξουν την απάντησή τους (Larkin & Simon, 1987, στο Theodoulou et al., 2005). Οι εκπαιδευτικοί των μαθηματικών επίσης υποστηρίζουν ότι η απεικόνιση διαγραμμάτων, γραφημάτων και σχεδίων στα σχολικά εγχειρίδια, καθώς και η χρήση εξωτερικών αναπαραστάσεων κατά τη διδασκαλία μπορεί να συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση και τη μάθηση των μαθηματικών ιδεών (Ainsworth et al., 1997, στο Theodoulou et al., 2005). Σε μια μελέτη, κατά την οποία οι μαθητές κλήθηκαν να περιγράψουν «τι είχαν στο μυαλό τους» όταν έκαναν νοερούς μαθηματικούς υπολογισμούς, παρατηρήθηκε ότι οι νοερές τους αναπαραστάσεις ήταν επηρεασμένες από τις εξωτερικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούσαν οι δάσκαλοί τους κατά τη διδασκαλία (Bills, 1999, στο Thompson, 2001).

Διάφορες έρευνες έχουν επικεντρωθεί στις γνώσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τα λεκτικά προβλήματα και στον ρόλο των οπτικών αναπαραστάσεων (Csíkos et al., 2012). Ο T. Dreyfus επισημαίνει ότι δεν δίνεται αρκετή σημασία στην οπτική πλευρά των μαθηματικών από τους εκπαιδευτικούς μέσα στην τάξη (Bernat & Morinet-Lambert, 1996). Στη μελέτη της Presmeg (1986) σε εκπαιδευτικούς, παρατηρήθηκε ότι πολύ λίγοι εκπαιδευτικοί είχαν επίγνωση της δυνητικής αποτελεσματικότητας των νοερών εικόνων.

Η Presmeg (1986) επισημαίνει τη σημασία που δίνεται στις οπτικές αναπαραστάσεις στο πρόγραμμα σπουδών και στις σχολικές τάξεις. Τα σχολικά εγχειρίδια δίνουν έμφαση στις τυπικές, μη οπτικές αποδείξεις και παραδείγματα, ενώ η διδασκαλία επικεντρώνεται στις μη οπτικές μεθόδους, ενώ ακόμη και στην περίπτωση εμφάνισης οπτικών μεθόδων, δεν εκτιμώνται από τους εκπαιδευτικούς. Συνεπώς, οι μαθητές ενδεχομένως να αποφεύγουν τις οπτικές σκέψεις λόγω του ρόλου που αποδίδεται στην εξεικόνιση στο εκπαιδευτικό σύστημα (Presmeg, 1986). Μάλιστα, σε έρευνά της η Stylianou (2001, στο Pitta-Pantazi & Christou, 2008) τονίζει ότι αν και ορισμένοι μαθητές μπορεί να είναι πρόθυμοι, δεν είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν οπτικές αναπαραστάσεις, επειδή δεν έχουν εκπαιδευτεί αρκετά ώστε να αναπτύξουν αυτή την ικανότητα.

Οι Goldin & Kaput (1996, στο Csíkos et al., 2012) ανέλυσαν τη δομή των εσωτερικών μαθηματικών αναπαραστάσεων και παρατήρησαν ότι οι εκπαιδευτικοί σε σχέση με άλλα συστήματα μαθηματικών αναπαραστάσεων, δεν εστιάζουν στο νοερό σύστημα, το οποίο περιλαμβάνει τις μη λεκτικές παραστάσεις αντικειμένων, σχέσεων και μετασχηματισμών, όπως είναι οι οπτικές εικόνες και η χωρική αναπαράσταση. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να εφαρμόσουν πιο αποτελεσματικές μεθόδους διδασκαλίας που βοηθούν τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν τις νοερές τους διεργασίες και τη σημασία της χρήσης κατάλληλων μεθόδων οπτικοποίησης κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων (Csíkos et al., 2012). Είναι σημαντικό μάλιστα, οι εκπαιδευτικοί να δέχονται και τις ανεπίσημες αποδείξεις των μαθητών (Bernat & Morinet-Lambert, 1996).

Για τους μαθητές που δυσκολεύονται στην επίλυση προβλημάτων, θα ήταν σκόπιμο να εξεταστεί αν είναι σε θέση να δημιουργήσουν χρήσιμες οπτικές εικόνες στην επίλυση, και πώς θα μπορούσαν να διδαχθούν να το κάνουν. Αρκετοί υποστηρίζουν ότι τα περισσότερα παιδιά πρέπει να διδάσκονται μια σειρά από νοερές μεθόδους (Thompson, 2001) ενώ σύμφωνα με τους Hegarty & Kozhevnikov (1999), είναι δυνατόν οι μαθητές να διδαχθούν πώς να παράγουν κατάλληλες οπτικές αναπαραστάσεις.

2.3 Διαισθητικός αναλογικός συλλογισμός και νοερή επίλυση

Ο διαισθητικός αναλογικός συλλογισμός αναφέρεται ως η διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων για σχέσεις ανάμεσα σε μη συμβολικές αναλογικές αναπαραστάσεις που απεικονίζονται οπτικά-αντιληπτικά, δηλαδή χωρίς να απαιτείται η κατανόηση των μαθηματικών συμβόλων, ενώ δεν είναι απαραίτητη η επίσημη γνώση των αναλογιών (Matthews & Chesney, 2015, στο He et al., 2018). Ωστόσο, η διαισθητική αναλογική σκέψη των παιδιών μπορεί να είναι αρκετά περιορισμένη διότι εξαρτάται από ορισμένους παράγοντες.

Στόχος της έρευνας των He et al. (2018) μεταξύ άλλων ήταν η διερεύνηση του διαισθητικού αναλογικού συλλογισμού 30 παιδιών ηλικίας 5 και 6 ετών, καθώς τα παιδιά αυτής της ηλικίας έχουν λάβει ελάχιστη επίσημη μαθηματική εκπαίδευση, μόνο στοιχειώδεις μαθηματικές έννοιες, όπως η μέτρηση και οι απλές μαθηματικές πράξεις. Επομένως, στην προκειμένη ηλικιακή ομάδα μπορεί να μελετηθεί και να περιγραφεί η πρώιμη διαισθητική κατανόηση της αναλογικότητας. Η κατανόηση των αναλογιών και των λόγων έχει μια αντιληπτική βάση στα αρχικά στάδια ανάπτυξης και συνδέεται με τον τρόπο με τον οποίο οι αριθμητές και οι παρονομαστές παρουσιάζονται οπτικά-χωρικά. Κατά τη διαδικασία των πειραμάτων παρουσιάστηκαν μείγματα σε μια οθόνη ηλεκτρονικού υπολογιστή, των οποίων οι ποσότητες ξεχώριζαν χρωματικά. Κάθε φορά απεικονίζονταν δύο μείγματα με ίσες και άνισες αναλογίες σε διαφορετικές κλίμακες. Οι συμμετέχοντες ενθαρρύνονταν να επεξεργαστούν τις αναλογικές σχέσεις σε κάθε μείγμα και όχι να συγκρίνουν τα ίδια μέρη μεταξύ δύο αναλογιών. Η εστίαση στην επεξεργασία των αναλογιών πρώτης τάξης συνέβαλε αποτελεσματικά στην ανάπτυξη της αναλογικής σκέψης.

Επίσης, η μελέτη των He et al. (2018) έδειξε ότι τα παιδιά μπορούν να επωφεληθούν από οπτικοχωρικά χαρακτηριστικά και τροποποιήσεις, διεξάγοντας αναλογικό συλλογισμό πιο συστηματικά και στρατηγικά, ενώ ακόμη και τα παιδιά ηλικίας 5 έως 6 ετών ήταν σε θέση να τα αξιοποιήσουν. Επομένως, τα οπτικοχωρικά χαρακτηριστικά και η εστίαση σε συγκεκριμένα οπτικά χαρακτηριστικά κατά την κλιμάκωση έχουν ιδιαίτερη σημασία στον διαισθητικό αναλογικό συλλογισμό.

Ο Noelting (1980) πραγματοποίησε έρευνα σχετικά με τη σύγκριση συνεχών ποσοτήτων, σε 321 μαθητές της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ηλικίας 6 έως 16 ετών, με καλό μαθηματικό υπόβαθρο. Κατά τη διάρκεια του πειράματος, δόθηκαν 23 ποσότητες από χυμό πορτοκαλιού με ορισμένη ποσότητα πορτοκαλιού και νερού η καθεμία, τοποθετημένες σε ποτήρια. Δόθηκαν επίσης και φύλλα εργασίας με απεικονισμένες τις ποσότητες, τοποθετημένες με τέτοια σειρά έτσι ώστε ο βαθμός δυσκολίας να αυξάνεται. Συγκεκριμένα, για να είναι διακριτή η ποσότητα του πορτοκαλιού και του νερού που χρησιμοποιούνται σε κάθε περίπτωση, τοποθετήθηκαν σε διαφορετικά ποτήρια τα δύο στοιχεία. Το ζητούμενο ήταν να συγκριθεί νοερά η γεύση πορτοκαλιού μεταξύ δύο ποσοτήτων κάθε φορά, εξηγώντας τον τρόπο σκέψης τους. Σε ορισμένες περιπτώσεις παρατηρήθηκε ότι το παιδί έδινε έμφαση μόνο στα ποτήρια του πορτοκαλιού, αγνοώντας την ποσότητα και τη σημασία του νερού. Σχετικά λίγοι ήταν οι μαθητές ηλικίας 6 ετών (3 από τους 14), οι οποίοι έλυσαν σωστά τα προβλήματα όταν οι λόγοι από τα δύο μείγματα ήταν ισοδύναμοι αλλά διαφορετικές οι ποσότητες, λόγου χάρη δύο ποτήρια χυμού και δύο νερού, συγκριτικά με τρία ποτήρια χυμού και τρία νερού.

Στην έρευνα του Singh (2000), για την επίλυση ενός προβλήματος αναλογίας με στόχο την προσαρμογή μιας συνταγής για μικρότερη ποσότητα, μια μαθήτρια υπολόγισε νοερά τη ζητούμενη ποσότητα αλευριού, χωρίς τη χρήση οπτικών αναπαραστάσεων. Όπως παρατηρήθηκε, ιδιαίτερη σημασία είχαν οι νοερές κιναισθητικές εικόνες και συγκεκριμένα η κίνηση των δακτύλων της (κιναισθητικές εικόνες) για τον συντονισμό των δύο ακολουθιών αριθμών, εκλαμβάνοντας τη σχέση των δύο ποσοτήτων ως λόγους.

Οι Greeno, Smith & Moore (1993, στο Schwartz & Moore, 1998) επισημαίνουν ότι «σε προβλήματα κατά τα οποία απαιτείται η χρήση ενός τύπου, η νοερή αναπαράστασή του περιλαμβάνει ένα συμβολικό, ποιοτικό σχήμα που αναπαριστά το μοτίβο των ποσοτικών πληροφοριών σε αρχικά μαθησιακά προβλήματα, σε συνδυασμό με μια αναπαράσταση του τύπου». Η παραπάνω νοερή αναπαράσταση θα πραγματοποιηθεί εάν το μοτίβο των ποσοτήτων του προβλήματος αναγνωρίζεται με βάση την εικόνα, το σχήμα που χρησιμοποιήθηκε στην αρχική μάθηση. Σε αυτήν την περίπτωση το ποιοτικό σχήμα συμβάλλει στην κατανόηση της νέας μαθηματικής κατάστασης και όχι του μαθηματικού τύπου.

Όσον αφορά τον συντελεστή κλίμακας, σε έρευνά των Boyer & Levine (2012) παρατηρείται ότι τα παιδιά ενδεχομένως να επιλύουν τέτοιου είδους έργα μεγεθύνοντας ή συρρικνώνοντας νοερά τη δεδομένη αναλογία-στόχο. Σε μεγαλύτερους μετασχηματισμούς οι απαντήσεις χαρακτηρίζονται από μειωμένη ακρίβεια και είναι γνωστικά πιο απαιτητικοί, ανάλογα και με τα χωρικά έργα, όπως η νοερή περιστροφή και η νοερή διάσχιση μιας απόστασης. Βέβαια, η χρήση αναλογικού νοερού μετασχηματισμού για τη συσχέτιση αναλογιών με διαφορετικό συντελεστή κλίμακας από τους μαθητές, συμβάλλει θετικά σε μεγέθη μικρότερης κλίμακας.

Οι Lo & Watanabe (1997), σε μια μελέτη περίπτωσης ενός μαθητή ηλικίας 10 ετών, εστίασαν στις άτυπες στρατηγικές που εφάρμοζε ο συμμετέχων σε προβλήματα αναλογίας και πώς αυτές επηρεάζουν ή επηρεάζονται από άλλες έννοιες του «πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου». Αρχικά, δινόταν η δυνατότητα χρήσης φυσικών αντικειμένων ή σχεδίων στο χαρτί, ενώ σε επόμενες φάσεις η διαδικασία της επίλυσης έγινε χωρίς τις παραπάνω αναπαραστάσεις εστιάζοντας στις νοερές εικόνες. Παρατηρήθηκε ότι εφάρμοσε κυρίως στρατηγικές πολλαπλασιασμού και αναγωγή στη μονάδα, αποφεύγοντας τις διαιρέσεις και τα κλάσματα. Ακόμη και σε προβλήματα άγνωστης τιμής που δόθηκαν με σκοπό να εξετάσουν την αντίληψη του μαθητή σχετικά με τα κλάσματα, δεν εστίασε στις κλασματικές σχέσεις μεταξύ των αριθμών, αλλά πραγματοποίησε δοκιμές και λάθη (trial-and-error) για να οδηγηθεί στη λύση των προβλημάτων. Οι παράγοντες που επηρέασαν την επιλογή της μεθόδου επίλυσης κάθε φορά ήταν το μέγεθος των αριθμών, ο τύπος των λόγων και το πλαίσιο του έργου. Η έρευνα έδειξε ότι οι δυσκολίες στην κατανόηση των εννοιών του λόγου και της αναλογίας οφείλονται στην ελλιπή κατανόηση του πολλαπλασιασμού, της διαίρεσης, των κλασματικών και των δεκαδικών αριθμών.

3. Περιγραφή Ερευνητικής Διαδικασίας

3.1 Περιγραφή του δείγματος

Το δείγμα της παρούσας έρευνας αποτελείται συνολικά από 33 φοιτητές και απόφοιτους της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Συγκεκριμένα, πρόκειται για 22 φοιτητές και 11 απόφοιτους του Τμήματος Μαθηματικών (1), Χημείας (1), Βιολογίας (1), Ιατρικής (1), Οδοντιατρικής (1), Πληροφορικής (1), Οικονομικών Επιστημών (1), Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων (3), Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής (1), Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών (6), Μηχανικών Χωροταξίας και Ανάπτυξης (2), Πολιτικών Μηχανικών (2), Μηχανικών Περιβάλλοντος (1), Μηχανικών Τεχνολογίας Πετρελαίου και Φυσικού Αερίου (1), Θεάτρου (1), Μουσικής Τεχνολογίας (1), Νομικής (2), Βαλκανικών, Σλαβικών και Ανατολικών Σπουδών (1), Επιστήμης Φυσικής Αγωγής και Αθλητισμού (3), καθώς και του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης (2). Το δείγμα δεν είναι τυχαίο, πρόκειται για δειγματοληψία ευκολίας λόγω άμεσης πρόσβασης σε αυτό. Το μαθηματικό υπόβαθρο των συμμετεχόντων δεν αποτέλεσε κριτήριο για την επιλογή της συμμετοχής τους στην έρευνα, καθώς τα μαθηματικά έργα που δόθηκαν για επίλυση αφορούν οικείες και καθημερινές καταστάσεις για τις οποίες επαρκούν οι μαθηματικές γνώσεις που έχουν αποκτηθεί από τη φοίτησή τους στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Σύμφωνα με την επισκόπηση της βιβλιογραφίας, αν και η αναλογικότητα αποτελεί βασική έννοια από το δημοτικό και συναντάται σε καθημερινές και οικείες καταστάσεις, πρόκειται για μια έννοια δυσνόητη, καθώς αρκετοί ενήλικες και φοιτητές παρουσιάζουν δυσκολίες και δεν γνωρίζουν επαρκώς την έννοια (Lawton, 1993, Tourniaire & Pulos, 1985). Επίσης, όπως αναφέρουν οι Presmeg & Balderas-Cañas (2001), με βάση τη βιβλιογραφία, υπάρχουν ισχυρισμοί ότι οι φοιτητές, ιδιαίτερα όσοι βρίσκονται σε ανώτερο επίπεδο σπουδών, δεν είναι πρόθυμοι να οπτικοποιούν όταν επιλύουν μαθηματικά έργα. Επομένως, έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η μελέτη της νοερής επίλυσης αναλογικών μαθηματικών έργων από τη συγκεκριμένη ηλικιακή ομάδα.

3.2 Παρουσίαση φύλλου εργασίας

Πρόβλημα 1

Ένα ιστιοπλοϊκό χρειάζεται 6 ώρες για να πλεύσει γύρω από ένα κυκλικό νησί με διάμετρο 36 χιλιομέτρων. Πόσες ώρες θα χρειαστεί για ένα δρομολόγιο γύρω από ένα νησί με διάμετρο 72 χιλιόμετρα αν κινείται με την ίδια ταχύτητα;

Στο παραπάνω αναλογικό πρόβλημα μέτρησης, η πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ των δύο τιμών είναι προφανής, καθώς η διάμετρος του δεύτερου κυκλικού νησιού (72 χλμ.) είναι διπλάσια του αρχικού νησιού (36×2=72 χιλιόμετρα). Όπως αναφέρει στην έρευνά της η Μοδέστου (2007) για το παρόν μαθηματικό έργο, υπάρχει έμμεση αναφορά στην έννοια της περιμέτρου, καθώς συνδέεται έμμεσα η διάμετρος του κύκλου με την περίμετρο του σχήματος. Ωστόσο, ο λύτης αρκεί να παρατηρήσει την «εντός» σχέση στις αναλογίες ανάμεσα σε ομοειδείς όρους (Ηροδότου κ.ά., 2006), δηλαδή τη σχέση ανάμεσα στις διαμέτρους των δύο κυκλικών νησιών. Ο διπλασιασμός της διαμέτρου του κυκλικού νησιού συνεπάγεται και τον διπλασιασμό της περιμέτρου του. Εφόσον το μήκος του κύκλου αυξήθηκε, θα αυξηθεί αναλογικά και ο χρόνος που χρειάζεται να πλεύσει το ιστιοπλοϊκό. Ο παράγοντας αλλαγής μεταξύ των τιμών είναι το 2 και επομένως το δρομολόγιο γύρω από το νησί θα διαρκέσει 6×2=12 ώρες. Η σχέση μεταξύ των αριθμών του προβλήματος είναι εύκολο να αναγνωριστεί και επομένως, σύμφωνα με τους Ercole, Frantz, & Ashline (2011), η παρούσα στρατηγική μπορεί να χαρακτηριστεί ως διαισθητική. Στόχος είναι να παρατηρηθεί εάν οι λύτες εφαρμόζουν απευθείας αναλογικό συλλογισμό, νοερά, κάνοντας χρήση του διπλάσιου (Κολέζα, 2000), όταν οι τιμές συνδέονται άμεσα μεταξύ τους ή καταφεύγουν σε πιο τυπικές και πολύπλοκες στρατηγικές επίλυσης, όπως για παράδειγμα η χρήση του γεωμετρικού τύπου εύρεσης του μήκους κύκλου.

Πρόβλημα 2

Δίνεται η παρακάτω συνταγή για 12 κρέπες:

1 φλυτζάνι αλεύρι

2 αυγά

1 φλυτζάνι γάλα

2 κουταλιές της σούπας ζάχαρη

1 φακελάκι βανίλια

Αν θέλουμε να φτιάξουμε 54 κρέπες, πόσα αυγά θα χρειαστούμε;

Το συγκεκριμένο μαθηματικό έργο αναφέρεται σε μια πραγματική, καθημερινή κατάσταση που απαιτεί την προσαρμογή μιας συνταγής για 12 κρέπες, για παραγωγή περισσότερης ποσότητας, για 54 κρέπες (Ηροδότου, Ιωάννου, Κοντογιάννη & Γαγάτσης, 2006). Επιδιώκεται η διερεύνηση της ικανότητας των λυτών να υπολογίζουν τιμές ανάλογων ποσών σε οικείες περιπτώσεις χωρίς γραπτή υποστήριξη, με μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό. Οι τιμές των ποσοτήτων σε αυτή την περίπτωση δεν σχετίζονται μεταξύ τους με κάποια προφανή πολλαπλασιαστική σχέση όπως προηγουμένως. Ωστόσο, εφόσον για τις 12 κρέπες χρειάζονται 2 αυγά, μπορεί να υπολογιστεί ότι για τις 6 κρέπες θα χρησιμοποιηθεί 1 αυγό και κατ' αυτόν τον τρόπο να γίνει πιο εμφανής η πολλαπλασιαστική σχέση ανάμεσά τους. Ειδικότερα, το 54 είναι πολλαπλάσιο του 6 ($6\times9=54$) και επομένως θα χρειαστούν και τα ενneaπλάσια αυγά ($1\times9=9$ αυγά).

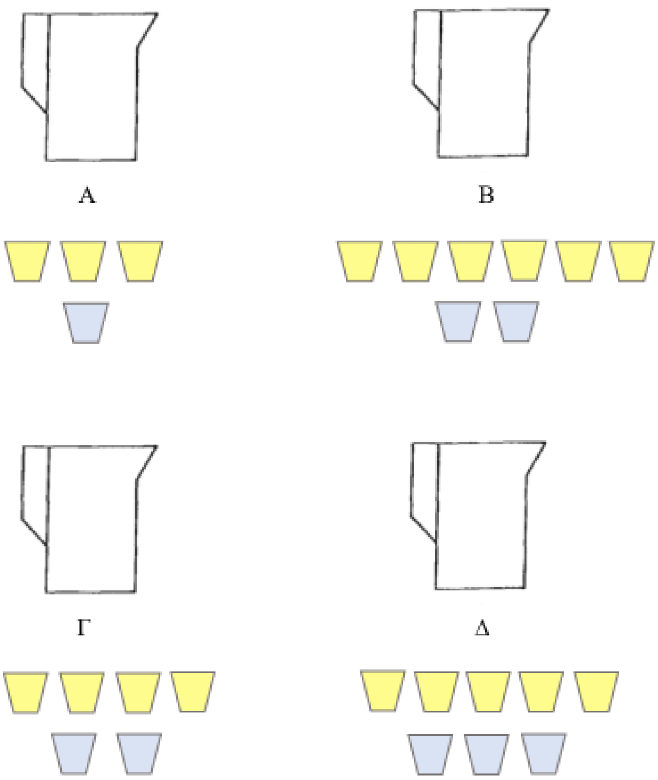
Πρόβλημα 3

Η κλίμακα ενός χάρτη είναι 3 προς 8.000. Στον χάρτη υπάρχει ένα γεφύρι με μήκος 24 εκατοστά. Πόσο είναι το μήκος του στην πραγματικότητα;

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα (Ηροδότου κ.ά., 2006), δίνεται η κλίμακα ενός χάρτη η οποία εκφράζει το μήκος μιας απόστασης στο σχέδιο προς το πραγματικό μήκος της (3:8.000). Στην περίπτωση αυτή, ο λύτης αφού κατανοήσει την έννοια της κλίμακας και εξετάσει τη σχέση μεταξύ των αριθμών, αρκεί να βρει τον συναρτησιακό τελεστή μεταξύ των δύο λόγων. Στην προκειμένη περίπτωση αρκεί να γίνει αντιληπτό ότι το μήκος στον χάρτη οχταπλασιάζεται, αφού $8\times3=24$εκ. Παράλληλα, εφόσον συνδέονται αναλογικά οι «εντός» σχέσεις των λόγων, δηλαδή οι σχέσεις μεταξύ των ομοειδών ποσοτήτων (Ηροδότου κ.ά., 2006), θα οχταπλασιαστεί αντίστοιχα και η πραγματική απόσταση της κλίμακας. Επομένως, η πραγματική απόσταση του μήκους του γεφυριού είναι $8\times8.000=64.000$ εκ.=640 μ.

Πρόβλημα 4

Παρακάτω αναπαριστάνονται οι ποσότητες νερού και στυμμένου χυμού λεμονιού που αναμείχθηκαν για να φτιάξουμε την κάθε λεμονάδα. Να συγκρίνεις την οξύτητα των δύο κανατών λεμονάδας σε κάθε περίπτωση.



Στο προκείμενο μαθηματικό έργο αριθμητικής σύγκρισης, ζητείται από τους συμμετέχοντες να συγκρίνουν τις δύο διακριτές ποσότητες που περιέχονται στις κανάτες και επομένως να εξετάσουν εάν υπάρχει αναλογία σε κάθε περίπτωση (Noelting, 1980). Η ποσότητα του νερού και του χυμού λεμονιού που χρησιμοποιήθηκε είναι διακριτή, χωρισμένη σε ποτήρια. Σε έρευνα της Lawton (1993) παρατηρήθηκε ότι οι φοιτητές επιλύουν με μεγαλύτερη ευκολία προβλήματα αναλογίας εάν το περιεχόμενο των στοιχείων του προβλήματος είναι σχετικά διακριτό το ένα από το άλλο. Στόχος στο παραπάνω πρόβλημα είναι η διερεύνηση των στρατηγικών που εφαρμόζουν οι λύτες και συγκεκριμένα αν αξιοποιούν τις οπτικές αναπαραστάσεις επιλύοντας νοερά ή αν εφαρμόζουν πιο τυπικές στρατηγικές. Ειδικότερα, ο λύτης αρκεί απλά να παρατηρήσει τις αναπαραστάσεις των ποτηριών ώστε να διακρίνει νοερά την ύπαρξη αναλογίας, χωρίς τη χρήση αριθμητικών πράξεων.

Αρχικά, δίνονται δύο κανάτες (Α - Β) των οποίων η γεύση είναι ίδια λόγω της αναλογικής σχέσης ανάμεσα στις ποσότητες νερού και στυμμένου χυμού λεμονιού (1:3). Πιο συγκεκριμένα, με βάση τη δεδομένη εικόνα, εύκολα μπορεί να γίνει αντιληπτό ότι σε κάθε 3 ποτήρια χυμού λεμονιού, αντιστοιχεί 1 ποτήρι νερό. Στη Β κανάτα διπλασιάζεται ο αριθμός των ποτηριών και των δύο ποσοτήτων (νερού-λεμονιού) και συνεπώς, η Β λεμονάδα αποτελείται από 2×1=2 ποτήρια νερού και 2×3=6 ποτήρια στυμμένου λεμονιού, με την αναλογία να παραμένει σταθερή (1:3). Συμπερασματικά, η οξύτητα των δύο κανατών λεμονάδας είναι ίδια, καθώς οι ποσότητες αυξήθηκαν πολλαπλασιαστικά, με χρήση του διπλάσιου (Κολέζα, 2000).

Στη δεύτερη περίπτωση, η σχέση μεταξύ των περιεχομένων των κανατών Γ-Δ δεν είναι εμφανής όπως προηγουμένως, όπου οι ποσότητες διπλασιάζονταν και ο παράγοντας αλλαγής ήταν ακέραιος αριθμός (το 2). Η σύγκριση της οξύτητας αριθμητικά, με πιο τυποποιημένες στρατηγικές, είναι πιο απαιτητική. Ωστόσο, σύμφωνα και με τον στόχο του προβλήματος, ο λύτης μπορεί να εξετάσει άμεσα τους λόγους των ποσοτήτων και να αντιστοιχίσει και πάλι οπτικά και νοερά τα ποτήρια νερού-χυμού λεμονιού. Η Γ κανάτα αποτελείται από 4 ποτήρια χυμού λεμονιού και 2 ποτήρια με νερό. Ισχύει δηλαδή ότι για κάθε ένα ποτήρι νερό, αντιστοιχούν δύο ποτήρια στυμμένου χυμού λεμονιού (1:2). Εφαρμόζοντας την αντιστοιχία ενός ποτηριού νερού με δύο λεμονιού και στη Δ κανάτα, παρατηρείται ότι για να έχουν την ίδια αναλογία και ταυτόχρονα την ίδια οξύτητα, θα έπρεπε να υπάρχει ένα επιπλέον ποτήρι χυμού λεμονιού. Στο αναφερόμενο ζευγάρι κανατών λεμονάδας, η Δ κανάτα υστερεί ως προς την ποσότητα λεμονιού και άρα η οξύτητα είναι πιο έντονη στη Γ κανάτα. Εναλλακτικά, ο λύτης μπορεί να διακρίνει τον λόγο και την αναλογία στη κανάτα Δ χωρίς να λάβει υπόψη του και να ακολουθήσει την αναλογία της Γ. Έτσι, φαίνεται ότι για κάθε ένα ποτήρι με νερό αναλογεί 1 ολόκληρο ποτήρι χυμού λεμονιού και ένα μέρος από το δεύτερο ποτήρι λεμονιού. Άρα, οδηγείται στο συμπέρασμα ότι η Γ κανάτα είναι πιο ξινή, καθώς για κάθε ένα ποτήρι νερού, περιέχει περισσότερη ποσότητα λεμονιού.

Πρόβλημα 5

Θέλω να φτιάξω ένα κουκλόσπιτο. Για να καλύψω την επιφάνεια ενός τετράγωνου δωματίου με πλευρά μήκους 12 εκ. χρειάζομαι 4 τετράγωνες πλάκες. Πόσες τετράγωνες πλάκες ίδιου μεγέθους θα χρειαστώ για να καλύψω την επιφάνεια ενός τετράγωνου δωματίου με πλευρά 36 εκ.;

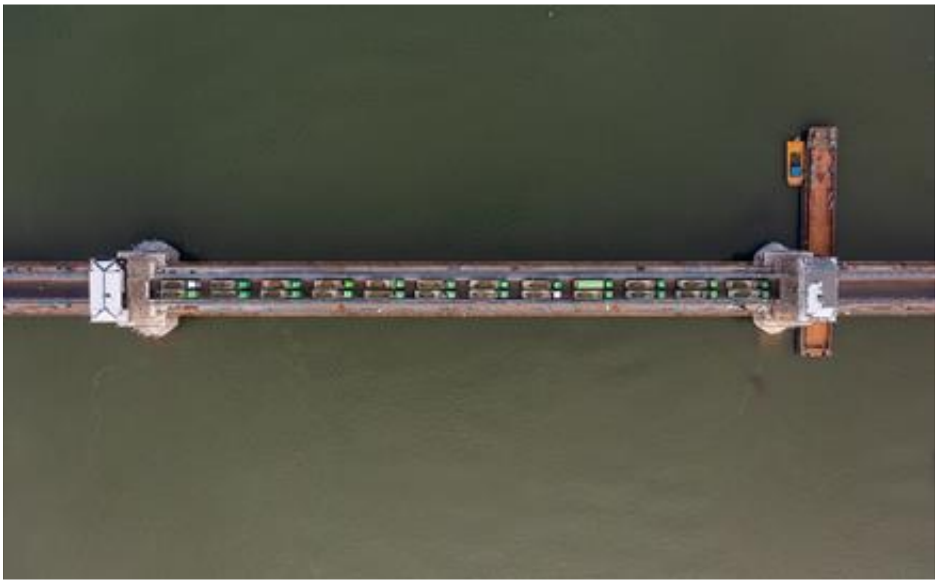
Το συγκεκριμένο πρόβλημα μέτρησης αφορά τη μεγέθυνση ενός γεωμετρικού σχήματος, και συγκεκριμένα τη μεταβολή του εμβαδού του (Van Dooren, De Bock, Janssens & Verschaffel, 2007). Σκοπός είναι να εξεταστεί κατά πόσο οι μαθητές θα σκεφτούν αναλογικά και θα υπολογίσουν με πολλαπλασιαστική σύγκριση τις διαστάσεις του δεύτερου σχήματος, αντί να εφαρμόσουν αυθόρμητα αναλογική σχέση ανάμεσα στο μήκος και το εμβαδόν τριπλασιάζοντας τις τιμές, λόγω του παράγοντα αλλαγής ανάμεσα στο μήκος των πλευρών των δωματίων (12×3=36εκ.). Σύμφωνα με τους De Bock et al. (2002), Modestou & Gagatsis (2007) και Theodoulou et al. (2005), παρατηρείται ότι οι λύτες έχουν την τάση να εξετάζουν τις σχέσεις μεταξύ μήκους και εμβαδού ή μεταξύ μήκους και όγκου ως γραμμικές, αντί για τετραγωνικές ή κυβικές αντίστοιχα. Στη βιβλιογραφία, το φαινόμενο αυτό αναφέρεται ως «ψευδαίσθηση της αναλογίας» ή «ψευδαίσθηση της γραμμικότητας».

Για την επίλυση του προβλήματος, αρχικά δίνεται το μήκος των πλευρών του τετράγωνου δωματίου (12εκ.) και ο αριθμός των τετράγωνων πλακών που απαιτούνται για την κάλυψη της επιφάνειας του δεδομένου σχήματος (4 πλάκες). Άρα, κάθε πλευρά αποτελείται από 2 τετραγωνικές πλάκες. Στη συνέχεια, το μήκος της πλευράς του νέου τετράγωνου δωματίου είναι το τριπλάσιο του αρχικού, δηλαδή 3×12=36εκ. Ωστόσο, ο λύτης μπορεί πιο άμεσα να εστιάσει μόνο στον αριθμό των πλακών σε κάθε πλευρά και να οδηγηθεί στο συμπέρασμα ότι εφόσον τριπλασιάζεται η πλευρά, ο αριθμός των πλακών σε κάθε πλευρά επίσης τριπλασιάζεται. Δηλαδή, η κάθε πλευρά θα αποτελείται από 3×2=6 τετράγωνες πλάκες πλέον και κάνοντας χρήση του τύπου εύρεσης του εμβαδού, προκύπτει ότι συνολικά θα χρειαστούν 6×6=36 πλάκες. Πιο λεπτομερώς, αν *α* ο αριθμός των πλακών του αρχικού δωματίου, τότε για την κάλυψη της επιφάνειας του νέου δωματίου με πλευρά *3α* ισχύει ότι $Ε=3α×3α=9α^2=9×2^2=9×4=36$ πλάκες.

Στη νοερή επίλυση, μπορεί να συμβάλλει και η δημιουργία κιναισθητικών εικόνων για την οπτικοποίηση και κατανόηση του χώρου και των μεταβολών που πραγματοποιούνται σε αυτόν και ταυτόχρονα, για την ανάπτυξη της οπτικοχωρικής αντίληψης των ατόμων. Οι He et al. (2018) αναφέρουν ότι ο εντοπισμός οπτικοχωρικών χαρακτηριστικών κατά την κλιμάκωση, συμβάλλουν στην ανάπτυξη των διαισθητικών διαδικασιών αναλογικού συλλογισμού. Ο λύτης μπορεί να αναπαραστήσει το δωμάτιο με τις 4 πλάκες με το χέρι του και να το «τοποθετήσει» νοερά στον μεγεθυμένο χώρο, έτσι ώστε σε κάθε πλευρά να επαναλάβει τρεις φορές τη δεδομένη μονάδα αναφοράς. Κατ' αυτόν τον τρόπο, προκύπτει ότι έχει τοποθετήσει συνολικά 9 φορές τη μονάδα αναφοράς και επομένως οι πλάκες που τοποθετήθηκαν είναι 9×4=36.

Πρόβλημα 6

Η γέφυρα της πρώτης φωτογραφίας έχει συνολικό μήκος από τη μια όχθη στην άλλη 408 μ. Ανάμεσα στους δύο πυλώνες της γέφυρας αυτής είναι στοιχισμένα σε δύο γραμμές 24 φορτηγά (δεύτερη φωτογραφία). Η απόσταση ανάμεσα στους δύο πυλώνες είναι 204 μ. Αν έμπαιναν τα φορτηγά σε μια σειρά το ένα πίσω από το άλλο, θα κάλυπταν όλη τη γέφυρα από το ένα άκρο μέχρι το άλλο;



Το τελευταίο μαθηματικό έργο είναι ένα πρόβλημα εύρεσης άγνωστης-ελλιπής τιμής, στο οποίο δίνεται και η οπτική αναπαράσταση των δεδομένων με δύο φωτογραφίες. Επιμέρους στόχος είναι να εξεταστεί σε τι βαθμό οι λύτες λαμβάνουν υπόψη τους τη δεδομένη οπτική εικόνα σε ένα πρόβλημα. Στην πρώτη εικόνα, παρουσιάζεται από απόσταση η γέφυρα με τους πυλώνες και στη δεύτερη, φαίνεται η κάτοψη της γέφυρας με τα στοιχισμένα φορτηγά. Η ερμηνεία των «φυσικών» οπτικών εικόνων για την άντληση πληροφοριών μπορεί να συμβάλλει στη διαδικασία της επίλυσης (Bishop 1983, στο Gutiérrez, 1996, Gal & Linchevski, 2010) και να βοηθήσει στη μετέπειτα δημιουργία της νοερής εικόνας. Παρατηρώντας οπτικά τις γραμμές φορτηγών μπορεί γίνει πιο κατανοητή η ταξινόμηση των φορτηγών σε σειρά και να αποφευχθούν παρανοήσεις σχετικά με το εάν σε κάθε σειρά υπάρχουν 24 φορτηγά ή αν ο δεδομένος αριθμός αφορά το σύνολο των φορτηγών. Επίσης, μέσω της οπτικής εικόνας μπορεί να εκτιμηθεί και η σχέση του μεγέθους του μέρους της γέφυρας ανάμεσα στους δύο πυλώνες, με το συνολικό μήκος της.

Για τη νοερή επίλυση του προβλήματος, οι λύτες χρειάζεται να αντιληφθούν ότι το μέρος της γέφυρας που καλύπτεται με τα 24 φορτηγά είναι 204μ., αποτελεί το μισό μήκος της γέφυρας αφού $2\times204=408$μ. Από τη στιγμή που τα φορτηγά είναι στοιχισμένα σε δύο σειρές των 12 φορτηγών, εάν επεκταθούν σε όλο το μήκος της γέφυρας θα καλύψουν ακριβώς και τα υπόλοιπα 204μ., εφαρμόζοντας άμεσα και νοερά τη στρατηγική χρήσης του διπλάσιου/μισού (Κολέζα, 2000).

3.4 Συλλογή και ανάλυση δεδομένων

Για τη συλλογή των δεδομένων της έρευνας, σχεδιάστηκαν και δόθηκαν τα φύλλα εργασίας, όπως παρατίθενται στο Παράρτημα, τα οποία περιλάμβαναν αναλογικά μαθηματικά έργα ανοικτού τύπου που επιδέχονται διαφορετικές μεθόδους λύσης. Το εργαλείο της έρευνας βασίστηκε σε πανομοιότυπα ή παρόμοια εργαλεία και ευρήματα προηγούμενων σχετικών ερευνών (Ηροδότου κ.ά., 2006, Μοδέστου, 2007, Noelting, 1980, Van Dooren et al., 2007), τα οποία έχουν προσδιοριστεί με εγκυρότητα και επιβεβαιώνουν ότι τα εν λόγω αναλογικά μαθηματικά έργα μετρούν τη μαθηματική αναλογική σκέψη.

Συγκεκριμένα, το πρόβλημα 1 ακολούθησε τη δομή και το περιεχόμενο αντίστοιχου έργου που περιέλαβε στα δοκίμια της έρευνάς της η Μοδέστου (2007). Για τον έλεγχο της εγκυρότητα των δοκιμίων της, χρησιμοποίησε το μοντέλο στατιστικής μέτρησης Rasch με τη χρήση του λογισμικού προγράμματος QUEST. Επίσης, η φαινομενική εγκυρότητα του έργου ελέγχθηκε και συμφωνήθηκε από εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με μετεκπαίδευση και αρκετά χρόνια υπηρεσίας στην εκπαίδευση (Μοδέστου, 2007). Τα προβλήματα 2 και 3 πάρθηκαν από την έρευνα των Ηροδότου κ.ά. (2006), όπου σκοπός της έρευνας ήταν η εξέταση του εύρους των στρατηγικών των μαθητών σε προβλήματα αναλογίας και ο δείκτης αξιοπιστίας του δοκιμίου που χορηγήθηκε κρίθηκε ικανοποιητικός (a=0.656). Το πρόβλημα 4, σχετικά με την οπτική σύγκριση των ποσοτήτων λεμονάδας, προέκυψε από αντίστοιχο πρόβλημα στην έρευνα του Noelting (1980), σχετικά με την ανάπτυξη του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, κατά την οποία οι συμμετέχοντες επιχείρησαν και τη νοερή σύγκριση των ποσοτήτων. Το πρόβλημα 5 αξιοποιήθηκε από την έρευνα των Van Dooren et al. (2007) για τη μελέτη της κατάχρησης της γραμμικότητας με τεστ προελέγχου, ατομική συνέντευξη και τεστ μετά τη συνέντευξη. Στη φάση των ατομικών συνεντεύξεων τους, δόθηκε στους συμμετέχοντες το συγκεκριμένο μαθηματικό έργο με διαφορετική συνθήκη κάθε φορά, δηλαδή ως λεκτικό μαθηματικό πρόβλημα, με δυνατότητα χρήσης οπτικής αναπαράστασης του σχήματος και με χρήση πραγματικών υλικών. Τέλος, πρόβλημα 6 πάρθηκε από ένα σεμινάριο στην επίλυση προβλήματος που έκανε ο καθηγητής του University of Debrecen της Ουγγαρίας για τους φοιτητές του επιλεγόμενου μαθήματος «Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών: Επίλυση Προβλήματος», του ΠΤΔΕ του ΑΠΘ.

Σε διάστημα τριών μηνών, πραγματοποιήθηκαν και ηχογραφήθηκαν ατομικές συνεντεύξεις, κατά τις οποίες οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να επιλύσουν τα προβλήματα νοερά, χωρίς γραπτή υποστήριξη. Αρχικά, διεκπεραιώθηκε πιλοτική έρευνα με δείγμα τους 6 από τους συνολικά 33 συμμετέχοντες, ώστε να εξεταστεί εάν οι εκφωνήσεις των μαθηματικών έργων που επιλέχθηκαν είναι κατανοητές και να διορθωθούν πιθανές λεκτικές παρανοήσεις. Οι συνεντεύξεις ήταν ατομικές συνεδρίες, κατά τις οποίες ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να «σκέφτονται φωναχτά» (think aloud), δηλαδή να περιγράφουν τη σκέψη και τις στρατηγικές που εφάρμοζαν καθ' όλη τη διάρκεια επίλυσης των μαθηματικών έργων. Βέβαια, όπως επισήμαναν οι Presmeg & Balderas-Cañas (2001), σε τέτοιου είδους έρευνες κρίνεται απαραίτητο να τίθενται ερωτήσεις, ώστε οι συμμετέχοντες να περιγράψουν τη νοερή εικόνα που έχουν σχηματίσει. Για παράδειγμα, σε αρκετές περιπτώσεις οι λύτες έκαναν νοερές εικόνες και υπολογισμούς, τους οποίους δεν εξωτερίκευαν, με αποτέλεσμα να χρειάζεται να τίθενται ανάλογα ερωτήματα, υπενθυμίζοντάς τους και το ζητούμενο της έρευνας. Τα ερωτήματα δεν ήταν προκαθορισμένα, αλλά προέκυπταν αναλόγως με το στάδιο επίλυσης που βρίσκονταν εκείνη τη στιγμή, προκειμένου να οδηγήσουν σε περαιτέρω έκφραση και περιγραφή των σκέψεων τους. Λόγου χάρη, συχνές γενικές ερωτήσεις που τέθηκαν ήταν οι εξής: «τι σκέφτεσαι;», «τι υπολογίζεις;», ενώ όταν παρατηρούνταν κιναισθητικές εικόνες με τη βοήθεια των χεριών τους, οι ερωτήσεις αποσκοπούσαν στον προσδιορισμό του τι αναπαριστά η κάθε κίνησή τους.

Για την επίλυση και των έξι μαθηματικών έργων, οι συμμετέχοντες είχαν στη διάθεσή τους όσο χρόνο χρειαζόταν ο καθένας, χωρίς κάποιον περιορισμό. Ενδεικτικά, ο ελάχιστος χρόνος που χρειάστηκε ένας συμμετέχων ήταν 7 λεπτά του χρόνου, ενώ άλλος λύτης ολοκλήρωσε την επίλυση σε διάρκεια 26 λεπτών. Ακόμη, αν παρουσίαζαν δυσκολία σε κάποια από τις δραστηριότητες είχαν τη δυνατότητα να την παραλείψουν και να συνεχίσουν στην επόμενη ή να επιστρέψουν σε αυτήν αργότερα.

Η ανάλυση των δεδομένων της έρευνας διακρίθηκε σε δύο επίπεδα, καθώς, αφού πρωτίστως απομαγνητοφωνήθηκαν οι συνεντεύξεις, τα δεδομένα επεξεργάστηκαν στη βάση της ποιοτικής, αλλά και ποσοτικής ανάλυσης περιεχομένου. Σε ένα πρώτο επίπεδο, ακολουθώντας ως μέθοδο ανάλυσης τη θεματική ανάλυση περιεχομένου (content analysis), κατηγοριοποιήθηκαν και κωδικοποιήθηκαν οι στρατηγικές που εφάρμοσαν οι λύτες σε κάθε μαθηματικό έργο, σε έναν ή περισσότερους πίνακες για κάθε πρόβλημα. Για κάθε νέα στρατηγική που παρουσιαζόταν, ακολουθούσε η προσθήκη της στον πίνακα, ενώ υπήρχε και κατηγορία για τις περιπτώσεις που οι λύτες έδωσαν λανθασμένη ή καμία απάντηση. Η ταξινόμηση των στρατηγικών που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων, ακολούθησε τις κατηγοριοποιήσεις που σημειώθηκαν σε προηγούμενες σχετικές έρευνες, όπως αυτές αναλύθηκαν και στη βιβλιογραφική επισκόπηση της παρούσας εργασίας. Συγκεκριμένα, σημείο αναφοράς αποτέλεσε η σύνοψη των μεθόδων επίλυσης αναλογικών προβλημάτων από τη μελέτη άλλων ερευνών στο βιβλίο της Κολέζας (2000) και η κατηγοριοποίηση των Ercole, Frantz, & Ashline (2011). Ακόμη, η αναγνώριση και ο χαρακτηρισμός των νοερών εικόνων που χρησιμοποίησαν οι λύτες κατά τη νοερή επίλυση, στηρίχθηκε στους τύπους νοερών εικόνων όπως αναλύθηκαν από την Presmeg (1986).

Σε δεύτερο επίπεδο, η ποσοτική ανάλυση περιορίστηκε στις συχνότητες εμφάνισης της κάθε κατηγορίας. Πιο αναλυτικά, στον κάθε πίνακα ταξινόμησης ανά δραστηριότητα, καταμετρήθηκε και σημειώθηκε η συχνότητα εμφάνισης της κάθε στρατηγικής, δηλαδή ο αριθμός των ατόμων που έδωσε τη συγκεκριμένη απάντηση. Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι λύτες αν και είχαν ως αφετηρία την εφαρμογή μιας μεθόδου, στη συνέχεια άλλαξαν τον τρόπο σκέψης τους ακολουθώντας μία εναλλακτική στρατηγική. Σε αυτή την περίπτωση, οι λύτες συμπεριλήφθηκαν στην κατηγορία της μεθόδου που τελικά ακολούθησαν, ενώ η εναλλαγή του τρόπου σκέψης τους περιγράφεται στην περιγραφική ανάλυση των αποτελεσμάτων.

4. Παρουσίαση αποτελεσμάτων

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την απομαγνητοφώνηση των ατομικών συνεντεύξεων που πραγματοποιήθηκαν. Για το κάθε μαθηματικό πρόβλημα παρατίθεται ένας πίνακας με την κατηγοριοποίηση των στρατηγικών που εντοπίστηκαν κατά την επίλυση, σε αντιστοιχία με τη συχνότητα εμφάνισής τους. Στη συνέχεια, τα δεδομένα που συλλέχθηκαν αναλύονται περιγραφικά.

Η κατηγοριοποίηση των στρατηγικών επίλυσης βασίστηκε στην ήδη υπάρχουσα ταξινόμηση προηγούμενων ερευνών σχετικών με τις στρατηγικές που ακολουθούν οι λύτες σε αναλογικά μαθηματικά έργα. Αρχικά, χαρακτηριστική είναι η χρήση της κατηγοριοποίησης των Ercole, Frantz, & Ashline (2011), καθώς πρόκειται για συγκεντρωτική αναφορά σε στρατηγικές που έχουν σημειωθεί σε αρκετές σχετικές έρευνες κατά την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας (Singh, 2000, Ηροδότου κ.ά., 2006, Μοδέστου, 2007, Ben-Chaim et al. 2012). Πιο αναλυτικά, γίνεται αναφορά στις παρακάτω στρατηγικές:

1. Αναγωγή στη μονάδα (unit-rate)
2. Εύρεση του παράγοντα αλλαγής (factor of change)
3. Μέθοδος ισοδύναμων κλασμάτων
4. Στρατηγική οικοδόμησης (building up strategy ή breaking down)/ Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση
5. Στάνταρ αλγόριθμοι: Μέθοδος πολλαπλασιασμού χιαστί (cross-multiplication method)

Επιπλέον, παρόμοια με την έρευνα των Ηροδότου κ.ά. (2006), εντοπίστηκε και καταγράφηκε και η μέθοδος των τριών. Ακόμη, ιδιαίτερη σημασία έχει η σύνοψη των μεθόδων επίλυσης που υιοθετούν οι λύτες σε προβλήματα αναλογιών τύπου «σύγκρισης» από την Κολέζα (2000), σύμφωνα με τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών των: Noelting (1980), Koleza (1987) και Mellar (1991). Ειδικότερα, οι στρατηγικές που εντοπίστηκαν και αναλύονται στην παρούσα έρευνα είναι:

1. Με χρήση διπλάσιου ή μισού, πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας αρχικά τα στοιχεία και τις ποσότητες με το 2
2. Μέσω κλασμάτων

3. Μέσω δεκαδικών, ως αποτέλεσμα της διαίρεσης των δεδομένων αριθμών

Βασικό άξονα στην ανάλυση αποτέλεσε και η διάκριση των πέντε τύπων νερών εικόνων από την Presmeg (1986) για την αναγνώριση των νοερών εικόνων που χρησιμοποιήθηκαν σε κάθε περίπτωση. Συγκεκριμένα, οι δύο τύποι εικόνων που εντοπίστηκαν στο σύνολο των συνεντεύξεων ήταν οι εξής:

1. Εικόνες τύπων, όπου ο λύτης μπορεί να «δει» στο νου του, δηλαδή να απεικονίσει νοερά, έναν μαθηματικό τύπο.
2. Κιναισθητικές εικόνες, οι οποίες δημιουργούνται, μετατρέπονται και εκφράζονται με τη βοήθεια φυσικών κινήσεων στον χώρο, όπως για παράδειγμα με την κίνηση των χεριών του ατόμου.

Σε κάθε πίνακα, οι πρώτες στη σειρά κατηγορίες αφορούν τις νοερές και άμεσες απαντήσεις που αναμένονταν για το κάθε μαθηματικό έργο, όπως αναλύθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, και αναγράφονται με τον κωδικό «Ν». Τέλος, στην τελευταία κατηγορία του κάθε πίνακα, καταγράφεται συνολικά ο αριθμός των περιπτώσεων που οι λύτες έδωσαν λάθος ή καμία απάντηση, ενώ στη συνέχεια περιγράφεται λεπτομερώς ο τρόπος επίλυσης που ακολούθησαν και το σημείο λάθους τους.

Πρόβλημα 1

Ν. Χρήση διπλάσιου	22
Μέθοδος των τριών	2
Τύπος μήκους κύκλου	7
Αναγωγή στη μονάδα	1
Λάθος/Καμία απάντηση	1

Πίνακας 1

Στις απαντήσεις που δόθηκαν για το παραπάνω αναλογικό πρόβλημα διακρίθηκαν τέσσερις στρατηγικές (Πίνακας 1), ενώ οι περισσότεροι συμμετέχοντες (22 άτομα) ακολούθησαν τη νοερή στρατηγική εφαρμόζοντας άμεσα αναλογικό συλλογισμό και διπλασιάζοντας τον χρόνο. Όπως αναφέρει η Μοδέστου (2007), οι ποσότητες που περιλαμβάνονται σε κάθε μαθηματική αναλογική σχέση μεταβάλλονται πολλαπλασιαστικά, δηλαδή πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο παράγοντα (factor-of-change). Το μεγαλύτερο μέρος των συμμετεχόντων βρήκε την «εντός» σχέση ανάμεσα στα χιλιόμετρα της διαμέτρου του νησιού και τη μετέφερε στον χρόνο που χρειάζεται για να πλεύσει το ιστιοπλοϊκό γύρω από το νησί ώστε να λύσει το πρόβλημα. Έγινε αντιληπτό δηλαδή ότι η διάμετρος διπλασιάζεται, καθώς 36×2=72 χιλιόμετρα και επομένως, έμμεσα διπλασιάζεται και η περίμετρος του νησιού. Θα χρειαστεί λοιπόν και ο διπλάσιος χρόνος για να διανύσει το ιστιοπλοϊκό τον γύρο του νησιού, άρα απαιτούνται 6×2=12 ώρες. Οι απαντήσεις των συμμετεχόντων που αντιλήφθηκαν τον διπλασιασμό ήταν λεξιλογικά παρόμοιες μεταξύ τους, και έμοιαζαν με την άμεση εξήγηση που έδωσε ένας λύτης:

> «Η διάμετρος του δεύτερου νησιού είναι η διπλάσια, η περίμετρος διπλασιάζεται, άρα διπλασιάζεται και ο χρόνος. Θα χρειαστούν 12 ώρες.»

Σύμφωνα με τους Ercole, Frantz, & Ashline (2011), η προκειμένη στρατηγική σε σχέση και με τα δεδομένα του προβλήματος, μπορεί να χαρακτηριστεί ως διαισθητική, καθώς η πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ των αριθμών είναι εύκολο να αναγνωριστεί, εφόσον το 72 είναι πολλαπλάσιο του 36 και επομένως ο παράγοντας αλλαγής είναι το 2. Επίσης, οι 3 από τους συμμετέχοντες βρήκαν τη διαφορά μεταξύ του 72 και του 36 (72-36=36) και συμπέραναν ότι απομένει η ίδια απόσταση να διανύσει το ιστιοπλοϊκό, καταλήγοντας ότι θα χρειαστεί άλλες 6 ώρες, άρα συνολικά 12 ώρες. Ένας λύτης περιέγραψε ότι:

> «Είναι σαν να διανύει δύο φορές την ίδια απόσταση, γύρω από το αρχικό νησί διαμέτρου 36 χιλιομέτρων.»

Ένας από τους λύτες που σκέφτηκε άμεσα τον διπλασιασμό της διαμέτρου και του χρόνου είπε ότι:

> «Δεν θυμάμαι κάποιον τύπο, αλλά με βάση τη λογική θα χρειαστεί 12 ώρες γιατί είναι η διπλάσια απόσταση.»

Ακόμη, σε ορισμένες περιπτώσεις, οι λύτες σκέφτηκαν να βρουν το μήκος κύκλου ή να εφαρμόσουν τη μέθοδο των τριών, όπως θα αναλυθεί παρακάτω, αλλά έπειτα εντόπισαν την αναλογική σχέση και κατέφυγαν στην άμεση λύση, με χρήση του διπλάσιου.

Όσον αφορά τη μέθοδο των τριών, αν και σύμφωνα με τους Philippou & Christou (2001) είναι η πιο συνηθισμένη προσέγγιση για την επίλυση προβλημάτων αναλογίας, μόνο δύο άτομα ακολούθησαν αυτήν τη στρατηγική. Ειδικότερα, οι λύτες ανέφεραν ότι το ιστιοπλοϊκό θα χρειαστεί 6 ώρες για να διανύσει 36 χιλιόμετρα, και x ώρες για 72 χιλιόμετρα. Ο ένας από τους δύο λύτες παρατήρησε άμεσα, όπως συνέβη και στην προηγούμενη μέθοδο επίλυσης, ότι η απόσταση διπλασιάζεται και διπλασίασε και τον χρόνο ώστε να βρει τη μεταβλητή x. Στη δεύτερη περίπτωση, μία φοιτήτρια Πολυτεχνείου συνέχισε πολλαπλασιάζοντας «χιαστί» τους όρους. Κατά τη διάρκεια επίλυσης, παρουσίασε μεγάλη αδυναμία στην πράξη της διαίρεσης και του πολλαπλασιασμού νοερά, σχολιάζοντας ότι «είναι δύσκολο χωρίς στυλό». Συγκεκριμένα, ανέφερε:

> «Μπορώ να κάνω με το χέρι μου τις πράξεις; 72×6=…, 2×6=12, 6×6=36, 36+7=43 (μπερδεύει την προπαίδεια), 43+1=44 από το κρατούμενο του 12, άρα 442. Όχι, 422. Τώρα θα κάνω 422:36. Το 36 χωράει μία φορά στο 42, άρα 36 μείον 42 (λεκτικό λάθος) κάνει 6. Α! Βγαίνει ακριβώς. 422:36… Είναι δύσκολο χωρίς στυλό, δεν μπορώ να το θυμάμαι. 422:36=8 ώρες και κάτι. Θα προσπαθήσω να το βρω ακριβώς. Τι λέω; Πώς κάνω διαίρεση; Μήπως παίρνω τους δύο πίσω αριθμούς; Όχι, τους δύο μπροστά πρώτα. Άρα 1 φορά και περισσεύουν 8. Κατεβάζω το 2. Το 36 στο 82. 36+36=72, άρα περισσεύουν 10. Βάζω κι ένα μηδενικό. Το 36 στο 100 χωράει 3 φορές. Θα κάνει 12,3 ώρες.»

Η συμμετέχουσα δημιούργησε κιναισθητικές εικόνες εξ αρχής και καθ' όλη τη διάρκεια υπολογισμού των απαιτούμενων πράξεων. Υπολογίζοντας το γινόμενο 6×72 προσπάθησε κιναισθητικά, με το χέρι της, να φανταστεί κάθετα τη διαδικασία του πολλαπλασιασμού βρίσκοντας δύο φορές λάθος αποτέλεσμα, 442 και τελικά 422 αντί για 432. Αναφορικά με τις κιναισθητικές εικόνες, όπως ορίζει η Presmeg (1986), δημιουργούνται, μετατρέπονται και εκφράζονται με τη βοήθεια φυσικών κινήσεων. Βέβαια, πρωτύτερα, στην προσπάθεια να υπολογίσει τον πολλαπλασιασμό 6×7 υπολόγισε πρώτα ότι 6×6=36 και συνέχισε προσθέτοντας 7 μονάδες, αντί για 6. Στη συνέχεια, διαίρεσε 422:36 και πάλι κιναισθητικά, εκτιμώντας αρχικά ότι θα χρειαστούν «8 ώρες και κάτι» και τελικά υπολόγισε ότι θα χρειαστούν ακριβώς 12,3 ώρες, χωρίς να εξετάζει αν το αποτέλεσμα είναι λογικό. Σύμφωνα με τους Vlahović-Štetić, Pavlin-Bernardic & Rajter (2010), οι μαθητές ακόμη κι αν επαληθεύουν τη λύση τους, ελέγχουν μόνο την ορθότητα της μαθηματικής πράξης, χωρίς να ελέγχουν τη λογική του προβλήματος και της απάντησής τους.

Όπως αναφέρει στην έρευνά της η Μοδέστου (2007) για το ίδιο μαθηματικό έργο, υπάρχει έμμεση σύνδεση της διαμέτρου του κύκλου με την περίμετρο του σχήματος. Έτσι, οι 7 από τους συμμετέχοντες φαίνεται να εστίασαν στην περίμετρο του κυκλικού νησιού και κατέφυγαν σε πιο επίσημη-τυπική στρατηγική, δημιουργώντας «νοερές εικόνες τύπων» (images of formulae). Οι εικόνες τύπων είναι ο τύπος νοερής εικόνας κατά την οποία το άτομο μπορεί να «δει» στο νου έναν μαθηματικό τύπο, όπως ήταν γραμμένος για παράδειγμα σε ένα τετράδιο ή στον πίνακα (Presmeg, 1986). Οι λύτες έκαναν χρήση του γεωμετρικού τύπου του μήκους κύκλου L, σύμφωνα με τον οποίο L=2πρ.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι οι περισσότεροι που εφάρμοσαν τον τύπο, διαίρεσαν τη διάμετρο για να βρουν την ακτίνα, υπολογίζοντας ότι $ρ_1$=36:2=18 χιλιόμετρα και $ρ_2$=72:2=36 χιλιόμετρα αντίστοιχα. Έπειτα, σύγκριναν το μήκος της ακτίνας του κάθε νησιού, συμπεραίνοντας ότι πρόκειται για το διπλάσιο μήκος και συνεπώς είναι διπλάσια και η περίμετρος και ο χρόνος *t* που απαιτείται. Ορισμένοι λύτες συνέχισαν τον τύπο πολλαπλασιάζοντας την ακτίνα ξανά με το 2. Κατ' αυτόν τον τρόπο, οδηγήθηκαν και πάλι στο μήκος της διαμέτρου, καθώς αγνόησαν εξ αρχής το γεγονός ότι η διάμετρος είναι διπλάσια της ακτίνας (δ=2ρ). Συγκεκριμένα σκέφτηκαν:

> «Το μήκος κύκλου είναι 2πρ. Η ακτίνα είναι 18 χλμ. Και το μήκος του είναι 2π18=36π. Το δεύτερο νησί έχει διάμετρο 72 χλμ. με ακτίνα 36 χλμ., άρα 2π36=72π. Είναι ακριβώς το διπλάσιο μήκος, άρα και οι διπλάσιες ώρες. Θα χρειαστεί 12 ώρες.»

Δύο άτομα σκέφτηκαν και τον παράγοντα της ταχύτητας *υ* με τον τύπο $t=\frac{2\pi\rho}{\upsilon}$, όπου η ταχύτητα παραμένει σταθερή και συνεπώς εστίασαν και πάλι στον διπλασιασμό της διαμέτρου. Ακόμη, δύο από τους συμμετέχοντες που επέλεξαν την προκειμένη μέθοδο, στην προσπάθεια να θυμηθούν τον τύπο επιχείρησαν να εφαρμόσουν αρχικά τον τύπο του εμβαδού της επιφάνειας του κύκλου ($Ε=πρ^2$). Ανέφεραν μάλιστα ότι ο λόγος που σκέφτηκαν να υψώσουν την ακτίνα σε δύναμη στο τετράγωνο είναι το σχήμα του νησιού, καθώς πρόκειται για κύκλο. Παρατηρείται ότι έχουν συνδέσει στη σκέψη τους το σχήμα του νησιού, και γενικότερα τον κύκλο, με την ύψωση της ακτίνας σε δύναμη με εκθέτη το 2:

> «Η πρώτη μου σκέψη είναι ότι είναι το διπλάσιο, αλλά δεν ξέρω αν θα χρειαστεί να υψώσω στο τετράγωνο επειδή είναι κύκλος. Θα σκεφτώ την περίμετρο του κύκλου 2πρ. Η περίμετρος διπλασιάζεται άρα θα διπλασιαστεί και ο χρόνος. Ήθελα να σιγουρευτώ ότι δεν θα χρειαστεί τετράγωνο.»

> «Δεν θυμάμαι τον τύπο της περιμέτρου του κύκλου αν είναι με δύναμη στο τετράγωνο ή όχι. Θα υποθέσω ότι είναι 2πρ ή πρ, άρα 2×18π=36π και 72π. Ε! Είναι το διπλάσιο γιατί είναι με την ίδια ταχύτητα. 12 ώρες. Αν είχα δει ότι είναι το διπλάσιο, δεν θα έψαχνα τύπο.»

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι σε ορισμένες συνεντεύξεις, υπήρξε σύγχυση μεταξύ των όρων «διάμετρος» και «περίμετρος» και αρκετές φορές οι συμμετέχοντες χρησιμοποίησαν έναν από τους δύο όρους λανθασμένα, αναφερόμενοι στον άλλο όρο.

Στην τελευταία στρατηγική που σημειώθηκε, ο μοναδικός λύτης έφτασε στη λύση με αναγωγή στη μονάδα:

> «Τα 36 χιλιόμετρα τα κάνει σε 6 ώρες. Εφόσον προχωράει με σταθερή ταχύτητα, σε μία ώρα κάνει 6 χιλιόμετρα. Τα 72 χιλιόμετρα θα τα κάνει σε 12 ώρες.»

Επεξηγηματικά, έχοντας ως δεδομένο ότι το ιστιοπλοϊκό χρειάστηκε 6 ώρες όταν το κυκλικό νησί είχε διάμετρο 36 χιλιόμετρα, υπολόγισε ότι για ένα νησί διαμέτρου 6 χιλιομέτρων (36:6=6) θα χρειαζόταν 1 ώρα (6:6=1). Επομένως, στην περίπτωση των 72 χιλιομέτρων θα χρειαστούν 72:6=12 ώρες.

Λάθος απάντησε μόνο ένα άτομο, μια φοιτήτρια Πολυτεχνείου, η οποία εφάρμοσε απευθείας τη μέθοδο των τριών και στην πορεία έκανε λάθος στις πράξεις. Σκέφτηκε:

> «Α! Μέθοδος των τριών. Αν θέλει 6 ώρες για να πλεύσει γύρω από ένα νησί 36 χιλιομέτρων, για 72 χλμ. θα θέλει χ ώρες. Άρα 72×6, 2×6=12, 7×6=43 και 12+43=55… Όχι, ο πολλαπλασιασμός είναι 72×6=54 και 54:36 $= \frac{54}{36} = \frac{9}{6}$ ώρες.»

Για να πολλαπλασιάσει 72×6, χώρισε των αριθμό 72 και υπολόγισε πρώτα 2×6=12 και ύστερα, λανθασμένα 7×6=43 αντί για 42 και αγνοώντας την αξία θέσης του ψηφίου 7 που πρόκειται για δεκάδα και άρα θα έπρεπε να υπολογίσει την αριθμητική πράξη 70×6. Στη συνέχεια, άθροισε 12+43=55 και κατέληξε ότι 72×6=55 χωρίς να εξετάσει ότι το αποτέλεσμα εμφανώς δεν είναι λογικό. Διόρθωσε το αποτέλεσμα σε 54 και συνέχισε τον συλλογισμό της ως εξής: 54:36= $\frac{54}{36} = \frac{9}{6}$ ώρες.

Επίσης, μία φοιτήτρια επιχείρησε να ακολουθήσει με λάθος τρόπο τη μέθοδο των τριών σκεπτόμενη ότι «το ιστιοπλοϊκό θα χρειαστεί 6 ώρες για να διανύσει 36 χιλιόμετρα, και 72 χιλιόμετρα για *x* ώρες» και πολλαπλασίασε «χιαστί» λανθασμένα 72×36, αντί για 72×6. Βέβαια, έπειτα από αρκετές αποτυχημένες προσπάθειες να υπολογίσει νοερά τον πολλαπλασιασμό 72×36, εντόπισε τελικά τη νοερή λύση και συνέχισε διπλασιάζοντας τον χρόνο (Ν1).

Αξίζει να επισημανθεί ότι λόγω της έλλειψης κάποιας οπτικής εικόνας στο πρόβλημα και της δυνατότητας χρήσης γραπτών μέσων, ένας λύτης κατέφυγε στη δημιουργία κιναισθητικών εικόνων, ώστε να φανταστεί το σχήμα του κυκλικού νησιού και τη μεγέθυνσή του με τη βοήθεια των χεριών τους. Σε άλλη περίπτωση, ο συμμετέχων προσπάθησε να εντοπίσει στον χώρο γύρω του δύο κυκλικά αντικείμενα ώστε να αποδώσει σε μια οπτική φυσική εικόνα τα δεδομένα του προβλήματος και να διευκολύνει τον συλλογισμό του, επιλέγοντας τελικά να παρατηρεί ένα ρολό χαρτί κατά τη διαδικασία επίλυσης.

Πρόβλημα 2

Ν. Χρήση μισού/ Αναγωγή στη μονάδα	8
Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση/ building-up	11
Εύρεση παράγοντα αλλαγής	8
Λάθος/ Καμία απάντηση	6

Πίνακας 2

Το δεύτερο πρόβλημα αφορά μια πραγματική κατάσταση, την προσαρμογή μιας συνταγής ώστε να είναι κατάλληλη για περισσότερη ποσότητα. Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 2, οι 8 από τους λύτες έλυσαν άμεσα το πρόβλημα κάνοντας χρήση του μισού, σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση της Κολέζας (2000), ενώ στην παρούσα περίπτωση η συγκεκριμένη στρατηγική ταυτίζεται και με τη μέθοδο αναγωγής στη μονάδα. Όπως επισημαίνουν οι Ηροδότου κ.ά (2006), η χρήση της στρατηγικής της αναγωγής στη μονάδα, συνεπάγεται την ορθή λύση του προβλήματος. Οι 8 συμμετέχοντες υπολόγισαν ότι για τις 6 κρέπες χρειάζεται 1 αυγό. Αφού γίνει η αναγωγή στη μονάδα (1 αυγό/6 κρέπες), η πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ των αριθμών είναι εύκολο να αναγνωριστεί πια, καθώς το 54 είναι πολλαπλάσιο του 6 (9×6=54). Η συνταγή εκτελέστηκε ουσιαστικά εννεαπλάσιες φορές και για αυτό χρειάστηκαν 1×9=9 αυγά. Όπως σκέφτηκε άμεσα ένας λύτης:

> «Θέλω 2 αυγά για τις 12 κρέπες, 1 για τις 6 και 6×9=54. Άρα 1×9=9 αυγά.»

Άλλος λύτης προσπάθησε να υπολογίσει τα πολλαπλάσια του 12 αλλά τελικά εφάρμοσε τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα:

> «Προσπαθώ να φτάσω το 12 στο 54. 12, 24, 36, 48, … Δε μου βγαίνει. Θα το κάνω αλλιώς. Για 6 θέλω 1 αυγό και 6×9=54, άρα θέλουμε 9 αυγά.»

Οι περισσότεροι συμμετέχοντες (11 άτομα) προσπάθησαν να βρουν τη σχέση ανάμεσα στο 12 και το 54. Συγκεκριμένα, αναγνωρίζοντας και διακρίνοντας αρχικά τους δύο μετρικούς χώρους (Ηροδότου κ.ά, 2006) εφάρμοσαν τη στρατηγική της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης. Δηλαδή, με βάση τα πολλαπλάσια του 12 (12, 24, 36, 48), υπολόγισαν σταδιακά, με οικοδόμηση (building-up), ότι για τις 12 κρέπες θα χρειαστούν 2 αυγά, για 24 κρέπες 4 αυγά, για 36 κρέπες 6 αυγά και για 48 κρέπες 8 αυγά, ενώ για τις 6 κρέπες που υπολείπονται (54-48=6 κρέπες) θα χρειαστεί 1 ακόμη αυγό. Όταν έφταναν σε αυτό το σημείο έκαναν και πάλι χρήση του μισού, όπως προηγουμένως, ώστε να οδηγηθούν από τις 12 κρέπες στις 6 που υπολείπονταν (2:2=1 αυγό). Ορισμένοι από τους λύτες που επέλεξαν αυτήν τη στρατηγική, πρωτύτερα είχαν επιχειρήσει ορισμένες αριθμητικές πράξεις ανεπιτυχώς (54:12=6, 12×5=54) με αποτέλεσμα να στραφούν στον υπολογισμό των πολλαπλάσιων του 12 προσθετικά.

Επίσης, επειδή το 54 δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 12, ένας συμμετέχων κατέφυγε στο πολλαπλάσιο του αριθμού 12 που είναι πλησιέστερο στο 54, δηλαδή το 60, και βρήκε κατά προσέγγιση ότι θα χρειαστούν 10 αυγά ώστε να φτιαχτούν 60 κρέπες και να είναι επαρκείς οι δόσεις. Βέβαια, ο λύτης τελικά εφάρμοσε προσθετικό συλλογισμό όπως προηγουμένως και μέτρησε ξανά τα πολλαπλάσια του 12 σταδιακά, επιλύοντας το πρόβλημα επιτυχώς:

> «12+12=24, 24+12=36, 36+12=48, 48+12=60. Άρα 10 αυγά γιατί 2×5=10 και τα 48 δεν φτάνουν για τις 54 κρέπες. Α! 48+6=54 άρα θέλω ένα ακόμη αυγό 8+1=9 αυγά.»

Η προαναφερόμενη λανθασμένη στρατηγική σημειώθηκε σε μεγάλο ποσοστό στο ίδιο πρόβλημα και στην έρευνα των Ηροδότου κ.ά. (2006). Εαν αγνοηθεί το γεγονός ότι η απάντηση δεν είναι σωστή, η στρατηγική βασίζεται στην εύρεση του παράγοντα αλλαγής εντός των όρων καθώς η ποσότητα των κρεπών πενταπλασιάζεται και ταυτόχρονα πενταπλασιάζεται και η ποσότητα των αυγών που απαιτούνται (12×5=60 κρέπες και 2×5=10 αυγά).

Παρόμοια στρατηγική ακολούθησαν οι 8 από τους λύτες, εντοπίζοντας πιο άμεσα την αναλογική σχέση μεταξύ των ποσοτήτων και επιχειρώντας να βρουν τον παράγοντα αλλαγής. Στην έρευνα των Ηροδότου κ.ά. (2006), όπου χορηγήθηκε μεταξύ άλλων και το παρόν μαθηματικό έργο, η εύρεση του παράγοντα αλλαγής αποτέλεσε την πιο δημοφιλή στρατηγική για τους μαθητές της Ε' και Στ' τάξης. Σε σχετικές έρευνες, η εν λόγω στρατηγική αναφέρεται αλλιώς και ως μέθοδος συντελεστή κλίμακας (scale factor method) και μέθοδος αλλαγής μεγέθους (size-change-method) (Ercole, Frantz, & Ashline, 2011). Οι συμμετέχοντες αρχικά υπολόγισαν πόσες φορές θα χρειαστεί να επαναληφθούν οι δόσεις της δεδομένης συνταγής, με διαίρεση (54:12=4,5). Ένας λύτης περιέγραψε λεπτομερώς:

> «Αυτή η συνταγή είναι για 12 κρέπες. Εμείς θέλουμε να φτιάξουμε 54 κρέπες. Θα διαιρέσουμε το 54 με το 12 για να βρω πόσες δόσεις της συνταγής πρέπει να κάνουμε ώστε να πολλαπλασιάσω τον αριθμό και να βρω πόσα αυγά χρειάζονται. 54:12=4,5 δόσεις, άρα 4,5×2=9 αυγά.»

Σε αντίθεση με προηγούμενες περιπτώσεις υπολογισμού, οι λύτες που επέλεξαν τη διαίρεση παρουσίασαν μεγάλη ευχέρεια στην αριθμητική πράξη της διαίρεσης. Κατ' αυτόν τον τρόπο, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η ίδια συνταγή πρέπει να εκτελεστεί 4,5 φορές και επομένως απαιτούνται 4,5×2=9 αυγά. Όπως αναφέρουν οι He et al. (2018), στη συγκεκριμένη στρατηγική οι λύτες χρησιμοποιούν ουσιαστικά τον συλλογισμό «τόσες φορές περισσότερες» («times as many» thinking). Μάλιστα, ιδιαίτερη σημασία έχει η κατανόηση των ισοδύναμων αναλογιών για διαφορετικές ποσότητες, έπειτα από την κλιμάκωση σε μεγαλύτερη ή μικρότερη ποσότητα. Η κλιμάκωση στις αναλογίες περιλαμβάνει τον πολλαπλασιασμό του αριθμητή και του παρονομαστή με τον ίδιο τελεστή, στην προκειμένη περίπτωση το 4,5, ενώ η σχέση μεταξύ των δύο όρων παραμένει η ίδια με προηγουμένως.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι 6 συμμετέχοντες είτε έδωσαν λανθασμένη απάντηση είτε δεν απάντησαν καθόλου. Η συμμετέχουσα που δεν έδωσε κάποια απάντηση σχολίασε ότι:

> «Δεν ξέρω. Θα πω στην τύχη 6 αυγά. Θα έκανα στην τύχη τη συνταγή.»

Από τις λανθασμένες απαντήσεις, οι τρεις έκαναν λάθος στις αριθμητικές πράξεις, ο ένας εκ των οποίων μέτρησε λανθασμένα τα πολλαπλάσια του 12, με επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, ως εξής: «12, 24, 36, 48, 54, άρα 5×2=10 αυγά». Τα παραπάνω έρχονται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα της έρευνας των Ηροδότου κ.ά. (2006), όπου μια από τις συχνές λανθασμένες στρατηγικές που εφάρμοσαν σε αναλογικά αριθμητικά προβλήματα ήταν η προσθετική.

Οι άλλοι δύο λύτες που απάντησαν λάθος, υπολόγισαν ότι 54:12=4 και άρα θα χρειαστούν «περίπου» 4×2=8 αυγά. Παρόμοια, ένας από τους λύτες που δεν έδωσαν κάποια απάντηση σκέφτηκε με τον ίδιο τρόπο, αλλά στην πορεία αντιλήφθηκε το λάθος του και κατέφυγε στη μέθοδο των τριών. Ειδικότερα, εξήγησε ότι για τις 12 κρέπες χρειάζεται 2 αυγά και για τις 54 θα χρειαστεί x αυγά. Δημιούργησε νοερές εικόνες τύπου (Presmeg, 1986) πολλαπλασιάζοντας «χιαστί» τους όρους και κατέληξε ότι $12\cdot x=54\cdot 2=108$ και $x=\frac{108}{12}$. Σε αυτό το σημείο, προσπάθησε να διαιρέσει 108:12 με βάση τα πολλαπλάσια του 12. Ωστόσο, δεν έφτασε στο αποτέλεσμα σχολιάζοντας ότι δε γνωρίζει πόσο κάνει.

Μια μεταπτυχιακή φοιτήτρια και εν ενεργεία εκπαιδευτικός σε δημοτικό σχολείο σκέφτηκε ως ακολούθως:

> «Θα βρω πόσα αυγά χρειάζομαι για τη 1 κρέπα για να βρω μετά τις πολλές, 12:2=6. Τι είναι αυτό το 6; Δεν γίνεται για τη μία κρέπα να θέλω περισσότερα αυγά. 54-12=42;… Έχω 2 αυγά για 12 κρέπες… Για παράδειγμα, έστω ότι είναι σε 12 κουτάκια. Αν θέλω να διδάξω ένα πρόβλημα που μου δίνει τα πολλά, βρίσκω πρώτα το 1 και μετά ξανά τα πολλά. Δεν βγαίνει… δεν μπορώ.»

Αν και ο Singh (2000) αναφέρει ότι η μέθοδος της αναγωγής στη μονάδα πρόκειται για μια απομνημονευμένη διαδικαστική μαθηματική λειτουργία, στο παρόν μαθηματικό έργο είναι μια διαδικασία απαραίτητη και με νόημα για την πιο άμεση και νοερή εύρεση του ζητούμενου. Βέβαια, παρόμοια με τη μαθήτρια στην έρευνα του

Singh (2000), η περίπτωση της προαναφερόμενης αποφοίτου και εκπαιδευτικού δείχνει ότι δεν είναι σε θέση να εφαρμόσει τη μέθοδο της αναγωγής και να περιγράψει τον συλλογισμό της ώστε να έχει νόημα. Επιχειρεί την εφαρμογή μιας τυπικής και μνημονικής μεθόδου, με στόχο την εύρεση του ποσού για «ένα» και ο πολλαπλασιασμός αυτού ώστε να προκύψει το ποσό για «πολλά», δίχως να εξετάζει ποιο στοιχείο των δεδομένων θα κλιμακωθεί στη μονάδα και συνεπώς δεν κατανοεί τη μοναδιαία δομή της κατάστασης.

Πρόβλημα 3

Ν. Εύρεση παράγοντα αλλαγής	13
Ανεπαρκής γνώση, σωστή επίλυση	5
Μέθοδος πολλαπλασιασμού χιαστί	2
Λάθος/Καμία απάντηση	13

Πίνακας 3

Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 3, η στρατηγική που συγκέντρωσε τις περισσότερες απαντήσεις (13 άτομα) είναι η νοερή, κατά την οποία οι λύτες μπόρεσαν να εντοπίσουν τον παράγοντα αλλαγής διαισθητικά λόγω της ευκολίας σύνδεσης των αριθμών, όπως περιγράφουν οι Ercole, Frantz, & Ashline (2011). Σύμφωνα με τους Ηροδότου κ.ά. (2006), στο προκείμενο αναλογικό έργο, η σωστή χρήση της στρατηγικής του παράγοντα αλλαγής έχει ως επακόλουθο και την ορθή επίλυση του προβλήματος.

Οι λύτες παρατήρησαν ότι η απόσταση στον χάρτη οχταπλασιάζεται και ακολούθως θα οχταπλασιαστεί και η πραγματική απόσταση. Ειδικότερα, δύο λύτες απάντησαν άμεσα ότι η απόσταση οχταπλασιάζεται και επομένως η πραγματική απόσταση του ποταμιού είναι 8×8.000=64.000 εκ. Οι 9 συμμετέχοντες υπολόγισαν αρχικά ότι 24:3=8 ή παρομοίως, 3×8=24 και έπειτα συνέχισαν με τον ίδιο τρόπο, 8×8.000=64.000 εκ.

> «Αν τα 3 εκατοστά στον χάρτη είναι 8.000 στην πραγματικότητα, πρέπει να βρω τα 24 εκατοστά πόσα είναι στην πραγματικότητα. Θα σκεφτώ 24:3=8, άρα 8×8.000=64.000 εκ το πραγματικό μήκος.»
>
> «3×8=24, 8×8=64. Άρα 64.000 εκ.=640 μ.»

Οι άλλοι δύο λύτες σχημάτισαν νοερά την εξής αριθμητική παράσταση με τις προηγούμενες πράξεις: 24:3×8.000. Η ύπαρξη πολλαπλασιασμού και διαίρεσης εκ πρώτης όψεως προβλημάτισε έναν από τους δύο φοιτητές, σχολιάζοντας ότι «δεν μπορεί να υπολογίσει με τον νου τις πράξεις», χωρίς ωστόσο να τον εμποδίσει να λύσει τελικά το πρόβλημα.

Δύο από τους συμμετέχοντες, μετέτρεψαν εξ αρχής τα 8.000 εκ. σε 80 μ. Στη συνέχεια, εφάρμοσαν τη μέθοδο πολλαπλασιασμού χιαστί, η οποία χαρακτηρίζεται από τους Ercole, Frantz, & Ashline (2011) ως δομημένη μέθοδος επίλυσης, διότι πρόκειται για έναν συγκεκριμένο αλγόριθμο κατά τον οποίο πολλαπλασιάζονται οι όροι των λόγων χιαστί. Συγκεκριμένα, πολλαπλασίασαν χιαστί τους όρους και απλοποίησαν ως εξής: $\frac{24\times80}{3}$ = 8×80 = 640 μ. Μάλιστα, ο ένας φοιτητής δημιούργησε κιναισθητικές εικόνες, καθώς χρησιμοποίησε τα χέρια του για τη νοερή απεικόνιση του κλάσματος, σχολιάζοντας ότι η χρήση των δαχτύλων του συνέβαλε στο να μην κάνει λάθος.

Οι πέντε συμμετέχοντες αν και δήλωσαν ότι δεν γνωρίζουν πώς να σκεφτούν την αναλογία και ότι δεν μπορούν να λύσουν το πρόβλημα, προσπάθησαν να βρουν κάποιον πιθανό τρόπο επίλυσης κάνοντας εικασίες και δοκιμές. Ορισμένοι υπέθεσαν ότι ο λόγος 3 προς 8.000 πιθανώς αφορά την απόσταση στον χάρτη προς την πραγματική απόσταση του ποταμιού. Εφάρμοσαν τη νοερή στρατηγική (Ν1), με παράγοντα αλλαγής το 8, και παρά την ελλιπή γνώση της κλίμακας αντιμετώπισαν τελικά με επιτυχία το πρόβλημα, με αναλογικό συλλογισμό. Βέβαια, παρουσιάστηκαν δυσκολίες, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση μιας φοιτήτριας, η οποία υπολόγισε 24:3=8 και έπειτα δυσκολεύτηκε να αντιληφθεί τι είναι το 8 που προέκυψε στο αποτέλεσμα. Μια απόφοιτη ανέφερε:

> «Δεν ξέρω τι σημαίνει κλίμακα. Ξέρω ότι ο χάρτης έχει κλίμακα αλλά δεν ξέρω πως το σκεφτόμαστε. Μήπως όταν κάτι είναι 3 εκ. είναι ουσιαστικά 8.000 εκ.; Δεν μπορώ χωρίς χαρτί και μολύβι… Το πραγματικό μήκος είναι 8×8.000=64.000 εκ. γιατί 3×8=24.»

Ένα επίσης μεγάλο μέρος των συμμετεχόντων (13 άτομα) είτε απάντησαν λάθος είτε δεν έδωσαν κάποια απάντηση λόγω ανεπαρκούς γνώσης. Όσοι δεν μπόρεσαν να σκεφτούν κάποιον τρόπο επίλυσης (6 άτομα), δήλωσαν ότι δε γνωρίζουν τι είναι η κλίμακα ή ότι δεν έχουν ξανασυναντήσει αυτήν την έννοια, ενώ ένας λύτης ανέφερε ότι γνωρίζει ότι ο χάρτης έχει κλίμακα, αλλά δεν γνωρίζει τι σημαίνει και πώς να την υπολογίσει. Ένας συμμετέχων προσπαθώντας να κατανοήσει την κλίμακα αναρωτήθηκε:

> «Τι είναι το 3 προς 8; Δεν καταλαβαίνω. Το εμβαδόν του χάρτη είναι 8.000 τ.εκ.; Το εσωτερικό του;»

Άλλοι λύτες δήλωσαν:

> «Δε θυμάμαι τι σημαίνει κλίμακα. Υποψιάζομαι ότι θα πρέπει να πολλαπλασιάσω 8.000×24, όμως δεν ξέρω πώς να το κάνω.»
>
> «Δεν ξέρω πώς δουλεύουν οι κλίμακες.»

Όσον αφορά τις λανθασμένες απαντήσεις (7 άτομα), οι συμμετέχοντες είτε δεν κατάφεραν να κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ των δεδομένων αριθμών είτε έκαναν λάθος στις αριθμητικές πράξεις. Συγκεκριμένα, μία φοιτήτρια σκέφτηκε να διαιρέσει ώστε να βρει τον παράγοντα αλλαγής, αλλά υπολόγισε λάθος ότι 24:3=7 και συνέχισε πολλαπλασιάζοντας 7×8.000=35.000 εκ. Αντιλήφθηκε και διόρθωσε μόνο το λάθος του πολλαπλασιασμού, μετρώντας ότι 7×8= 70-14 = 56 και κατέληξε ότι το ποτάμι έχει μήκος 56.000 εκ.:

> «24:3 μας κάνει… δε θυμάμαι την προπαίδεια. Α! Ακριβώς βγαίνει… 6, 9, 12, 15, 18, 21. Χωράει 7 φορές και 7×8.000=35.000. Όχι! 7×8=70-14=56, άρα 56.000 εκατοστά.»

Ένας συμμετέχων αγνόησε μέρους των δεδομένων του προβλήματος ενώ ταυτόχρονα εφάρμοσε και λανθασμένα τη μέθοδο πολλαπλασιασμού χιαστή. Ειδικότερα, πολλαπλασίασε απλώς χιαστί 24×8.000=192.000 εκ., μη λαμβάνοντας υπόψη του τον όρο 3 που αναφερόταν στα δεδομένα της εκφώνησης.

Από τους λύτες που δεν μπόρεσαν να κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ των αριθμών, οι δύο πολλαπλασίασαν 24×3=72εκ.. Συγκεκριμένα, στην πρώτη περίπτωση ο λύτης σκέφτηκε:

> «24×3=62, 62:8… Δεν μπορώ να το κάνω. Α! 31:4… Δεν βγαίνει έτσι. Όχι, 24×3=72 και 72:8=9. Το πραγματικό μήκος είναι 9.000; 9… και τώρα πρέπει να κάνω επί χίλια ή διά χίλια; Ποιο είναι το πραγματικό μήκος… 24 εκατοστά… (ξαναδιαβάζει) Αν ο χάρτης είναι για παράδειγμα 1 προς 10.000, αν βλέπω κάτι 1 εκατοστό είναι στην πραγματικότητα 10.000. Άρα επί χίλια. 9.000 είναι.»

Στη δεύτερη περίπτωση, ο συμμετέχων συνέχισε πολλαπλασιάζοντας 8.000×3=24.000, δίνοντας ως τελική απάντηση ότι η πραγματική απόσταση είναι $\frac{72}{24.000}$, χωρίς να εξετάζει αν το αποτέλεσμα είναι λογικό:

> «Αυτό είναι δύσκολο. Τι εννοεί κλίμακα; Το έχουμε κάνει στο σχολείο, αλλά δεν θυμάμαι. Μπορώ να χρησιμοποιήσω το κινητό μου για τις πράξεις; Σκέφτομαι 24×3=72, αλλά νομίζω είναι λάθος σκεπτικό. Είναι 72 προς… 8+8=16, 16+8=24. Άρα 72 εκατοστά προς 24.000.»

Τέλος, ένας λύτης προσπάθησε να υπολογίσει τη διαίρεση 8.000:3 με τη βοήθεια των χεριών του (κιναισθητικές εικόνες), χωρίς να καταλήξει σε κάποιο αποτέλεσμα.

Πρόβλημα 4

Για το τέταρτο πρόβλημα, οι στρατηγικές που εντοπίστηκαν κατηγοριοποιήθηκαν σε δύο διαφορετικούς πίνακες, καθώς σημειώθηκαν διαφορές στον τρόπο σκέψης των λυτών κατά τη σύγκριση των Α-Β ποσοτήτων και των Γ-Δ. Η νοερή και πιο άμεση λύση που αναμενόταν είναι κοινή και βασίζεται στην αξιοποίηση των οπτικών αναπαραστάσεων που δίνονται, σύμφωνα και με τον στόχο που τέθηκε πρωτύτερα για το συγκεκριμένο μαθηματικό έργο. Αρχικά, θα αναλυθούν οι απαντήσεις που δόθηκαν για το ζευγάρι λεμονάδων Α-Β (Πίνακας 4) και έπειτα οι απαντήσεις για τις λεμονάδες Γ-Δ (Πίνακας 5).

Σε αυτό το μαθηματικό έργο, οι συμμετέχοντες είχαν στη διάθεσή τους εξωτερικές οπτικές αναπαραστάσεις (external visual representations) (Borromeo, 2012, Corter & Zahner, 2007), δηλαδή την εικόνα των περιεχομένων των κανατών λεμονάδας. Ακόμη, η ποσότητα νερού και χυμού λεμονιού κάθε κανάτας είναι διακριτή, χωρισμένη σε ποτήρια ίδιου μεγέθους, διευκολύνοντας την οπτική επεξεργασία και σύγκριση μεταξύ των μειγμάτων και συμβάλλοντας στην ανάπτυξη της νοερής επιχειρηματολογίας (Gutiérrez, 1996).

Ν1. Οπτική αναπαράσταση	7
Μέσω κλασμάτων	19
Μέσω δεκαδικών	2
Λάθος απάντηση	5

Πίνακας 4

Για τη σύγκριση των ποσοτήτων, οι 7 λύτες (Πίνακας 4) αξιοποίησαν την οπτική αναπαράσταση των δύο κανατών λεμονάδας, εντοπίζοντας τον λόγο σε κάθε περίπτωση νοερά ή και κιναισθητικά, χωρίζοντας δηλαδή την εικόνα με το χέρι τους. Όσον αφορά τη δεδομένη οπτική αναπαράσταση, αν και το περιεχόμενο της λεμονάδας αποτελεί μίξη νερού και στυμμένου χυμού λεμονιού, οι ποσότητες στους δύο χώρους μέτρησης της αναλογικής κατάστασης είναι διακριτές (Vanluydt et.al., 2021). Οι συμμετέχοντες συμπέραναν ότι η περιεκτικότητα λεμονιού και νερού είναι η ίδια, εφόσον σε κάθε τρία ποτήρια στυμμένου λεμονιού αντιστοιχεί ένα ποτήρι νερό (3:1):

> «Για το 1 ποτήρι έχουμε 3, για τα 2 έχουμε 6. Είναι ίδια αναλογία.»
>
> «Οι αναλογίες τους είναι ίδιες, γιατί η πρώτη είναι 3:1 και η δεύτερη 6:2 που ουσιαστικά είναι και πάλι 3:1. Είναι το ίδιο ξινές.»
>
> «3 και 3 (κιναισθητικά). Είναι το διπλάσιο, είναι το ίδιο ξινές.»

Το μεγαλύτερο μέρος των συμμετεχόντων (19 άτομα) ανέφερε ότι οι ποσότητες είναι ανάλογες και σκέφτηκε τον λόγο των ποσοτήτων στυμμένου χυμού λεμονιού και νερού μέσω κλασμάτων. Σε κάθε λόγο οι σχέσεις μεταξύ του αριθμητή και του παρονομαστή αντιπροσωπεύουν σχέσεις πρώτης τάξης, ενώ η σύγκριση των σχέσεων μεταξύ αναλογιών αφορούν τις σχέσεις δεύτερης τάξης (Spinillo & Bryant, 1991). Συγκεκριμένα, οι λύτες επεσήμαναν ότι ο λόγος στην κανάτα Α είναι $\frac{3}{1}$ και στη Β είναι $\frac{6}{2}$. Επομένως, τα κλάσματα είναι ισοδύναμα αφού πρόκειται για τη διπλάσια ποσότητα $\frac{3}{1} = \frac{6}{2}$ και άρα και οι δύο λεμονάδες έχουν την ίδια αραίωση λεμονιού στο νερό.

Μία τρίτη μέθοδος που παρατηρήθηκε από δύο άτομα ήταν μέσω της χρήσης δεκαδικών αριθμών που εκφράζουν εκατοστά, όπως αναφέρεται και στο Κολέζα (2000). Πιο ειδικά, η οξύτητα των λεμονιών σε σχέση με το σύνολο των ποτηριών που περιέχονται στη λεμονάδα είναι και στις δύο κανάτες 0,75, καθώς $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = 0{,}75$.

Όσον αφορά της λανθασμένες απαντήσεις, πέντε από τους συμμετέχοντες δεν ακολούθησαν αναλογικό συλλογισμό. Συγκεκριμένα, δύο άτομα απάντησαν ότι η Β λεμονάδα είναι πιο ξινή, διότι οπτικά έχει περισσότερα ποτήρια λεμονιού, τα οποία δεν αντιστοιχούν σε ποτήρια με νερό:

> «Η Β λεμονάδα γιατί έχει 1, 2, 3 πιο πολλά λεμόνια που δεν αντιστοιχούν σε νερό.»

Μία απόφοιτος και εν ενεργεία εκπαιδευτικός απάντησε ότι:

> «Η οξύτητα διαλύεται όταν υπάρχει πιο πολύ νερό και για αυτό στο Β, παρ' όλο που περιέχεται διπλάσια ποσότητα λεμονιού, το όξινο στοιχείο δεν θα επικρατήσει τόσο έναντι του νερού. Έχει ένα ποτήρι με νερό περισσότερο και άρα διαλύεται η οξύτητα».

Στην έρευνα του Noelting (1980) σχετικά με τη σύγκριση συνεχών ποσοτήτων σε παρόμοιο πρόβλημα με διακριτή την ποσότητα των δύο στοιχείων, παρατηρήθηκε ότι ο συμμετέχων έδινε έμφαση μόνο στα ποτήρια του πορτοκαλιού, αγνοώντας την ποσότητα και τη σημασία του νερού. Παρομοίως, στην περίπτωση της παρούσας έρευνας, η συμμετέχουσα εστίασε στην κλιμάκωση της ποσότητας νερού και συγκεκριμένα στην επίδραση της αύξησης της ποσότητας νερού χωρίς να παρατηρεί την ταυτόχρονη αναλογική αύξηση, τον διπλασιασμό των ποτηριών στυμμένου χυμού λεμονιού.

Η τέταρτη λανθασμένη απάντηση οφείλεται στο γεγονός ότι ο λύτης σύγκρινε πρώτα το δεύτερο ζευγάρι λεμονάδων Γ-Δ, όπου η αναλογία, όπως θα αναλυθεί και παρακάτω, ήταν 2 προς 1. Εκλαμβάνοντας ως σταθερό τον λόγο 2 προς 1, παρατήρησε ότι για να ισχύει η ίδια αναλογία και στο ζευγάρι Α-Β, στην κανάτα Α περισσεύει ένα ποτήρι λεμόνι και στη Β δύο ποτήρια λεμόνια. Έτσι, κατέληξε στο λανθασμένο συμπέρασμα ότι η Β λεμονάδα είναι πιο ξινή επειδή περισσεύουν περισσότερα ποτήρια λεμονιού.

Για το δεύτερο ζευγάρι κανατών (Γ-Δ) σημειώθηκαν οι εξής στρατηγικές επίλυσης:

Ν1. Οπτική αναπαράσταση	3
Μέσω ισοδύναμων κλασμάτων	8
Μέσω δεκαδικών	13
Εκατοστιαίο ποσοστό	2
Λάθος/ Καμία απάντηση	7

Πίνακας 5

Οι δύο συμμετέχοντες παρατηρώντας τις εικόνες και με τη βοήθεια των χεριών τους, χώρισαν τα ποτήρια στυμμένου λεμονιού σε ζευγάρια και διέκριναν τον λόγο 2 προς 1 νοερά-οπτικά. Σκεπτόμενοι αναλογικά, επεσήμαναν ότι θα έπρεπε για τα τρία ποτήρια νερού να έχουν αναμειχθεί 6 ποτήρια λεμονάδας, δηλαδή, η Δ κανάτα λεμονάδας υστερεί κατά ένα ποτήρι λεμονάδας από τη Γ. Επομένως, η Γ λεμονάδα είναι πιο ξινή.

> «Για το 1 έχουμε 2, για τα 3 θα έπρεπε να έχουμε 6, άρα η Γ είναι πιο ξινή.»

> «3 ποτήρια νερό, 5 λεμονιού και πρέπει να είναι 1 ποτήρι νερό για 2 λεμονιού. Θα χρειαζόταν ένα ακόμη ποτήρι λεμονιού η Δ, αν θέλαμε να είναι ίσα. Λείπει το ένα ποτήρι λεμονιού, άρα δεν είναι ίσα. Η Γ είναι πιο ξινή.»

Ο άλλος λύτης, χωρίζοντας επίσης τα ποτήρια της εικόνας κιναισθητικά, παρατήρησε ότι στη Δ εικόνα η αναλογία είναι «περίπου 1 και μισό ποτήρι λεμονιού προς 1 νερού» και άρα η Γ έχει περισσότερη ποσότητα λεμονιού.

Στη δεύτερη κατά σειρά στρατηγική που σημειώθηκε, συνδέεται ο συλλογισμός των κλασμάτων με την έννοια των λόγων. Συγκεκριμένα, οι 6 λύτες σκέφτηκαν τον λόγο λεμονιού προς νερό μέσω ισοδύναμων κλασμάτων, όπου η Γ έχει οξύτητα $\frac{4}{2}$, δηλαδή $\frac{2}{1}$, ενώ η Δ έχει $\frac{5}{3}$. Ανέφεραν ότι για να είναι το ίδιο ξινές οι δύο λεμονάδες, θα έπρεπε στη δεύτερη περίπτωση να έχουμε τη διπλάσια ποσότητα λεμονιού, δηλαδή 6 ποτήρια στυμμένου λεμονιού έναντι των 3 νερού ($\frac{6}{3}$) καθώς $\frac{2\times3}{1\times3}=\frac{6}{3}$. Βέβαια, προέκυψαν δυσκολίες κατά την επίλυση, όπως για παράδειγμα η περίπτωση μιας φοιτήτριας, η οποία ακολούθησε τον εξής συλλογισμό:

> «Η Γ είναι $\frac{4}{2}$, δηλαδή $\frac{2}{1}$, και η Δ $\frac{5}{3}$. Η Γ αναλογία είναι μεγαλύτερη, αλλά δεν ξέρω. Πιο ξινή είναι αυτή που έχει η μεγαλύτερη αναλογία; Όχι. Η δεύτερη δεν έχει παρόμοια αναλογία νερού-λεμονιού με το Γ, να είναι δηλαδή η μισή ποσότητα. Υστερεί σε ποσότητα λεμονάδας. Για να μην ήταν η Δ τόσο αραιωμένη και να ήταν το ίδιο ξινές οι δύο λεμονάδες, θα έπρεπε να έχει αναλογία $\frac{6}{3}$.»

Κάνοντας και πάλι χρήση κλασμάτων, δύο λύτες μετέτρεψαν και τους δύο λόγους σε ισοδύναμα ομώνυμα κλάσματα. Οι λύτες δημιούργησαν ισοδύναμα κλάσματα, των οποίων οι παρονομαστές είναι ομώνυμοι και σύγκριναν τις τιμές των αριθμητών (Ercole, Frantz, & Ashline, 2011). Ειδικότερα, σκέφτηκαν τον λόγο των ποτηριών νερού προς τα ποτήρια στυμμένου λεμονιού ως εξής: $\frac{1}{2}$ για τη Γ και $\frac{3}{5}$ για τη Δ. Έπειτα, ο ένας επέλεξε να τα κάνει ομώνυμα με παρονομαστή το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των δύο αριθμών, το 10, και ο άλλος με παρονομαστή το 20. Για παράδειγμα, ο συμμετέχων που μετέτρεψε τα κλάσματα σε ομώνυμα με παρονομαστή το 10, αν και χρησιμοποίησε τον όρο «ανάγωγα» αντί για «ομώνυμα» σκέφτηκε ότι:

> «$\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{5}$. Τα κάνω 'ανάγωγα' στο 10 και γίνονται $\frac{5}{10}$ και $\frac{6}{10}$. Η Γ είναι πιο ξινή.»

Συμπερασματικά, για τη Γ λεμονάδα ο λόγος μετατράπηκε σε $\frac{5}{10}$ και $\frac{10}{20}$ αντίστοιχα, ενώ για τη Δ σε $\frac{6}{10}$ και $\frac{12}{20}$. Συγκρίνοντας τα κλάσματα κατέληξαν ότι η Δ λεμονάδα είναι πιο αραιωμένη γιατί υπάρχουν περισσότερα ποτήρια νερού και συνεπώς, η Γ είναι πιο ξινή ($\frac{5}{10} < \frac{6}{10}$ και $\frac{10}{20} < \frac{12}{20}$).

Η πιο συνηθισμένη στρατηγική που εντοπίστηκε (13 άτομα) ήταν η χρήση δεκαδικών μέσω της διαίρεσης. Συγκεκριμένα, οι 3 λύτες διαίρεσαν τον λόγο του νερού προς το στυμμένο λεμόνι. Για τη Γ κανάτα προέκυψε ότι $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ = 0,5, ενώ για τη Δ ότι $\frac{3}{5} = 3{:}5 = 0{,}6$. Επομένως, η αναλογία του νερού είναι μεγαλύτερη στη Δ και άρα η Γ λεμονάδα είναι πιο ξινή (0,5<0,6).

Αντιστρόφως, οι υπόλοιποι 10 λύτες, εκλαμβάνοντας και πάλι τον λόγο ως πηλίκο διαίρεσης, διαίρεσαν τον λόγο του στυμμένου λεμονιού προς το νερό και υπολόγισαν για τη Γ λεμονάδα ότι $\frac{4}{2}$ = 2 και για τη Δ ότι $\frac{5}{3}$ = 1,66. Η οξύτητα της Δ λεμονάδας είναι μικρότερη συγκριτικά με τη Γ κανάτα, καθώς η αναλογία είναι μικρότερη (2>1,66). Ένας από τους λύτες που επέλεξε την προκειμένη στρατηγική, υπολόγισε κατά προσέγγιση ότι:

> «4:2=2 και 5:3< 2 σίγουρα. Η Γ είναι πιο ξινή».

Άλλος λύτης παρουσίασε δυσκολίες στο να αντιληφθεί εάν υπερτερεί η ποσότητα νερού ή λεμονιού μετά τον υπολογισμό της διαίρεσης, καταλήγοντας τελικά στη σωστή απάντηση:

> «4 σε 2 και 5 σε 3… 4:2=2 και 5:3=1,333. Όχι. Τι λέω! Πόσο κάνει 5:3;… Θα πω το Δ γιατί αναλογικά έχει λιγότερο νερό στο πλήθος των

> λεμονιών. Η διαίρεση βγαίνει μικρότερη. Όχι, 4:2=2, είναι μεγαλύτερο
> Άρα, η Γ είναι πιο ξινή.»

Δύο συμμετέχοντες σκέφτηκαν τους λόγους ως εκατοστιαία ποσοστά (Boyer & Levine, 2012). Ο ένας λύτης υπολόγισε το ποσοστό των ποτηριών στυμμένου χυμού λεμονιού σε σχέση με το σύνολο των ποτηριών της λεμονάδας. Εξήγησε ότι: για τη Γ κανάτα το ποσοστό των 4 ποτηριών λεμονιού προς τα συνολικά 6 ποτήρια περιεχομένου είναι $\frac{4}{6} = 66\%$ και για τη Δ είναι $\frac{5}{8} = 62{,}5\%$. Ακόμη, ένας άλλος λύτης, ο οποίος δεν συμπεριλαμβάνεται στην προκειμένη κατηγορία, επιχείρησε να εφαρμόσει την προκειμένη μέθοδο, παρουσιάζοντας δυσκολία στον υπολογισμό του ποσοστού της Δ, βασισμένος στον λόγο $\frac{5}{8}$. Προσπάθησε να φανταστεί τους αριθμούς κιναισθητικά, με τα δάχτυλά του, αλλά σχολίασε ότι «δεν μπορεί χωρίς χαρτί και ότι σίγουρα θα κάνει λάθος», αλλάζοντας τελικά στρατηγική.

Ο δεύτερος από τους δύο λύτες που ακολούθησαν τη μέθοδο των ποσοστών, υπολόγισε το ποσοστό των ποτηριών νερού σε σχέση με τα ποτήρια στυμμένου λεμονιού με σημείο αναφοράς το μισό. Διέκρινε τις ποσότητες σε «λιγότερο από το μισό» και «ίσο με το μισό» (Spinillo & Bryant, 1991). Ειδικότερα, για τη Γ το ποσοστό οξύτητας είναι $\frac{2}{4} = 50\%$ και για τη Δ είναι $\frac{3}{5} > 50\%$, άρα στην κανάτα Δ η ποσότητα νερού υπερτερεί.

Τέλος, λάθος απάντησαν 5 άτομα, εκ των οποίων οι δύο απάντησαν ότι η Γ κανάτα έχει λιγότερο νερό από τη Δ, χωρίς να είναι σε θέση να δώσουν κάποια σαφέστερη και μαθηματικά τεκμηριωμένη απάντηση. Ο ένας συμμετέχων επεξεργάζοντας οπτικά τις δεδομένες αναπαραστάσεις των ποσοτήτων, εξήγησε ότι και οι δύο λεμονάδες είναι το ίδιο ξινές, γιατί αν αντιστοιχίσεις κάθε ποτήρι στυμμένου λεμονιού με ένα ποτήρι νερού και στις δύο περιπτώσεις θα περισσέψουν δύο ποτήρια λεμονιού:

> «Είναι ίσες γιατί και στη Γ και στη Δ έχει δύο ποτηράκια λεμονιού που
> δεν αντιστοιχούν σε ποτήρι νερού.»

Επίσης, ένα άτομο έδωσε σημασία στο μέγεθος των αριθμών των δύο όρων των κλασμάτων υποστηρίζοντας ότι η Δ λεμονάδα είναι πιο ξινή γιατί το $\frac{5}{3}$ έχει μεγαλύτερους αριθμούς από τα $\frac{4}{2}$.

Πρόβλημα 5

Ν1. Κιναισθητικές εικόνες	1
Ν2. Λόγος εμβαδών τετραγώνων	1
Ν3. Αναγωγή/Εύρεση μήκους τετραγωνικής πλάκας	7
Χρήση τύπου	1
Λάθος/ Καμία απάντηση	23

Πίνακας 6

Στο συγκεκριμένο γεωμετρικό πρόβλημα φαίνεται να δυσκολεύτηκαν οι περισσότεροι, καθώς μόνο 10 άτομα κατάφεραν και απάντησαν σωστά, Σε συμφωνία με τα αποτελέσματα της έρευνας των Van Dooren et.al. (2007), όπου χορηγήθηκε το παρόν μαθηματικό έργο, οι περισσότεροι (23 άτομα) έδωσαν λάθος ή καμία απάντηση (Πίνακας 6).

Αρχικά, ένας από τους λύτες που απάντησαν νοερά και σωστά, αντιλήφθηκε την πολλαπλασιαστική σχέση και τριπλασίασε σταδιακά τις δύο πλευρές του τετραγώνου, χρησιμοποιώντας τα χέρια του ώστε να φανταστεί και να «τοποθετήσει» νοερά τις πλάκες, δημιουργώντας κιναισθητικές εικόνες (Ν1) (Presmeg, 1986). Ο συμμετέχων προσπάθησε να κατανοήσει και να ερμηνεύσει την κατάσταση μέσα από τον σχηματισμό νοερών μοντέλων (Παπανδρέου, 2022) που στην προκειμένη περίπτωση αφορούν τη χωρική απεικόνιση των δεδομένων (Wickens & Prevett 1995, στο Owens, 2015). Πιο λεπτομερώς, ξεκινώντας με το τετράγωνο πλευράς 12μ., τοποθέτησε δύο πλάκες σε κάθε πλευρά. Το χέρι του αναπαρίστανε οπτικά την επαναλαμβανόμενη μονάδα, δηλαδή το αρχικό τετράγωνο δωμάτιο με τις δύο πλάκες σε κάθε πλευρά. Όπως αναφέρεται στο Singh (2000), ο λύτης όρισε τη μονάδα (unitizing) και επανέλαβε τη σύνθετη μονάδα νοερά (iterating). Η «μοναδοποίηση» μιας σύνθετης μονάδας και η επανάληψή της επιτρέπει τη διατήρηση της αναλλοίωτης κατάστασης της αναλογίας (Singh, 2000). Εν συνεχεία, για τον διπλασιασμό των πλευρών στα 24μ., «τοποθέτησε» δύο φορές σε κάθε πλευρά την επαναλαμβανόμενη μονάδα υπολογίζοντας ότι συνολικά περιλαμβάνει 2×2=4 φορές το αρχικό δωμάτιο. Τέλος, ολοκλήρωσε τη σκέψη του τριπλασιάζοντας την κάθε πλευρά σε 36μ. και τοποθετώντας σε κάθε πλευρά τρεις φορές την επαναλαμβανόμενη μονάδα. Παρατήρησε ότι η επιφάνεια του ζητούμενου τετραγώνου ισούται με 3×3=9 φορές το αρχικό δωμάτιο, και συνεπώς αποτελείται από 9×4=36 τετραγωνικές πλάκες. Όπως περιέγραψε ο ίδιος κατά τη διαδικασία επίλυσης:

> «Στα 12 μέτρα είναι 4 πλάκες, άρα 2 και 2 πλάκες στην κάθε πλευρά (θέτει τον χώρο με το χέρι του). Αν ήταν 24 μέτρα, θα ήταν 4 και 4 πλάκες άρα 4×4=16. Αν ήταν 36 μέτρα, θα χρειαζόμουν 3×3=9 τετράγωνα από 4 πλάκες το κάθε τετράγωνο. 4×9=36 πλάκες.»

Ένα άτομο σκέφτηκε με νοερά και άμεσα, με εικόνες τύπου (Presmeg, 1986), τον λόγο των εμβαδών των τετραγωνικών δωματίων ως εξής: $\frac{36^2}{12^2}=3^2=9$, συμπεραίνοντας ότι θα χρειαστεί τις εννεαπλάσιες τετραγωνικές πλάκες από το αρχικό δωμάτιο, δηλαδή 9×4=36 πλάκες.

Οι περισσότεροι από τους λύτες που έλυσαν επιτυχώς το πρόβλημα (7 άτομα), σκέφτηκαν ότι όταν η πλευρά του τετράγωνου δωματίου ήταν 12 μ. χρειάζονταν 4 πλάκες, και επομένως η κάθε πλευρά αποτελείται από δύο πλάκες, εκ των οποίων η κάθε πλάκα έχει πλευρά μήκους 12:2=6 μ. Όταν η πλευρά του τετράγωνου δωματίου γίνει 36 μ., η κάθε πλευρά θα αποτελείται από 36:6=6 πλάκες και άρα, με βάση τον τύπο του εμβαδού του τετραγώνου, θα χρειαστούν 6×6=36 πλάκες. Όπως προσδιορίζουν οι Vinner & Hershkowitz (1980), οι νοερές εικόνες του ατόμου περιλαμβάνουν συνδυαστικά και ένα σύνολο ιδιοτήτων σχετικά με την έννοια, την έννοια του εμβαδού στην παρούσα κατάσταση. Ένας συμμετέχων ανέφερε για την προκειμένη μέθοδο επίλυσης:

> «Για 12 μέτρα χρειάζομαι 4 τετραγωνικές πλάκες. Οι πλάκες είναι 6×6. Πόσες τετραγωνικές πλάκες ίδιου μεγέθους; Άμα βάλω λοιπόν μία εδώ (τοποθετεί κιναισθητικά μια νοερή πλάκα στον χώρο), 6 μέτρα και 6 μέτρα… θα βάλω 6 πλάκες στη μία πλευρά και 6 πλάκες στην άλλη. Άρα, 6×6=36 πλάκες.»

Τέλος, ένας άλλος λύτης ακολούθησε πιο επίσημη στρατηγική, δημιουργώντας τυπικές εικόνες στο νου, σύμφωνα με τη διάκριση της Presmeg (1986). Θεώρησε ότι η πλευρά του τετραγώνου μήκους 12 μ. είναι α και το εμβαδόν του δωματίου Ε=$\alpha\times\alpha=\alpha^2$. Η πλευρά του δεύτερου τετράγωνου δωματίου είναι β=36 μ., δηλαδή τριπλάσια από την πλευρά α και επομένως θα ισχύει ότι $\beta=3\alpha$. Για το εμβαδόν της επιφάνειας του τετραγώνου με πλευρά β ισχύει ότι Ε=$\beta\times\beta=\beta^2=(3\alpha)^2=9\alpha^2$, δηλαδή θα χρειαστεί εννεαπλάσιες τετραγωνικές πλάκες από το αρχικό δωμάτιο, άρα 9×4=36 πλάκες.

Όσον αφορά τις λανθασμένες απαντήσεις, οι 19 λύτες υπέπεσαν σε γραμμικό σφάλμα (Van Dooren et.al., 2007). Αγνόησαν το γεγονός ότι η μαθηματική σχέση μεταξύ των δεδομένων δεν είναι γραμμική και σκέφτηκαν ότι εφόσον τριπλασιάζεται η πλευρά από 12μ. σε 36μ., θα τριπλασιαστούν και οι πλάκες και άρα θα χρειαστούν 3×4=12 τετραγωνικές πλάκες. Όπως έχει παρατηρηθεί και σε έρευνες των De Bock et al. (2002), Modestou & Gagatsis (2007) και Theodoulou et al. (2005), οι μαθητές βασισμένοι στον αναλογικό συλλογισμό, θεωρούν ότι αν πολλαπλασιαστεί το μήκος του σχήματος με έναν αριθμό, τότε θα πολλαπλασιαστεί και το εμβαδόν του με τον ίδιο αριθμό.

Ορισμένες από τις λανθασμένες απαντήσεις των συμμετεχόντων που ακολούθησαν τον συγκεκριμένο συλλογισμό:

> «Βλέπω ότι το 36 έχει κάποια σχέση με το 12, γιατί 3×12=36. Αφού το 36 είναι τρεις φορές μεγαλύτερο, θα χρειαστώ και 3×4=12 πλάκες.»
>
> «12 πλάκες, γιατί το 36 είναι τριπλάσιο του 12.»
>
> «Για 12 μέτρα έχουμε 4 πλάκες, για 24 μέτρα 8 πλάκες και για 36 μέτρα 12 πλάκες.»

Μάλιστα, ένας λύτης καταλήγοντας στις 12 τετραγωνικές πλάκες, ανέφερε ότι το αποτέλεσμα που βρήκε πρόκειται για τις πλάκες της μιας πλευράς του τετραγώνου και συνεπώς οι διαστάσεις του τετραγώνου θα είναι 12×12.

Σε άλλη περίπτωση, οι 3 συμμετέχοντες δεν έλαβαν υπόψη το σχήμα του δωματίου και τον τρόπο που είναι τοποθετημένες οι πλάκες και υπολόγισαν ότι το μήκος της πλευράς της κάθε πλάκας είναι 12:4=3μ. και άρα απαιτούνται 36:3=12 τετραγωνικές πλάκες. Τέλος, ένας λύτης προσπαθώντας να βρει το εμβαδόν του αρχικού τετραγώνου (12^2) με κιναισθητικές εικόνες χωρίς επιτυχία. Τελικά, δεν έδωσε κάποια απάντηση, σχολιάζοντας μάλιστα ότι δεν μπορεί να λύσει το πρόβλημα χωρίς τη χρήση χαρτιού-μολυβιού και χωρίς τη γραπτή απεικόνιση του σχήματος.

Πρόβλημα 6

Ν1. Χρήση μισού/διπλάσιου	29
Αναγωγή στη μονάδα	3
Λάθος απάντηση	1

Πίνακας 7

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 7, στο τελευταίο πρόβλημα εμφανώς υπερτερούν οι σωστές απαντήσεις (32 άτομα) έναντι των λάθος (1 άτομο). Μάλιστα, σχεδόν όλοι οι συμμετέχοντες (29 άτομα) αντιλήφθηκαν την αναλογική σχέση και απάντησαν διαισθητικά και άμεσα ότι τα 24 φορτηγά μπορούν να καλύψουν ακριβώς όλο το μήκος της γέφυρας, από το ένα άκρο ως το άλλο, καθώς πρόκειται για το διπλάσιο μήκος (Ν1). Πιο αναλυτικά, παρατήρησαν ότι τα 24 φορτηγά είναι παρατεταγμένα ανάμεσα στους δύο πυλώνες της γέφυρας, στοιχισμένα σε δύο σειρές των 12 φορτηγών και καλύπτουν το μισό μήκος της γέφυρας, τα 204μ. Εάν τα φορτηγά απλωθούν κατά μήκος όλης της γέφυρας, το ένα πίσω από το άλλο, θα καλύψουν ακόμη 204μ., δηλαδή το διπλάσιο μήκος του ήδη καλυπτόμενου τμήματος. Στα 204μ. χωρούσαν 12 δυάδες φορτηγών και συνεπώς, όταν τα φορτηγά γίνουν μονάδες θα καλύψουν τη διπλάσια απόσταση (408μ.). Πιο συγκεκριμένα:

> «Οι σειρές των αυτοκινήτων είναι δύο και η κάθε σειρά καλύπτει 204 μέτρα. Άρα αν η μία σειρά μπει πίσω από την άλλη, θα καλύψουν 408 μέτρα.»

> «Είναι το διπλάσιο μήκος. Αν απλώσω τη μία σειρά των 12 φορτηγών, θα μπουν 6 από τη μία μεριά της γέφυρας και 6 από την άλλη. Θα την κάλυπταν.»

> «Έχω 24 φορτηγά σε δυάδες στη μισή γέφυρα. Όταν γίνουν μονάδες, μία γραμμή, θα χωρέσουν γιατί καλύπτουν δύο ίσες γραμμές 204 μέτρα κι άλλα 204 μέτρα.»

> «Δύο λωρίδες φορτηγών μπορούν να καλύψουν τη γέφυρα, γιατί είναι 12 φορτηγά σε 204 μέτρα και τα άλλα 12 φορτηγά θα μοιραστούν στα υπόλοιπα 204 μέτρα, αφού 408-204=204 μέτρα.»

Η στρατηγική αναγωγής στη μονάδα εντοπίστηκε σε τρεις περιπτώσεις. Οι 3 λύτες αρχικά επιχείρησαν να βρουν το μήκος του ενός φορτηγού υπολογίζοντας ότι είναι 204:12=17μ. Στη συνέχεια, υπολόγισαν 408:17=24 φορτηγά ή 17×24=408μ., ώστε να αποδείξουν ότι τα 24 φορτηγά χωράνε ακριβώς στη γέφυρα μήκους 408μ. Αξίζει να σημειωθεί ότι παρουσιάστηκαν δυσκολίες κατά τον υπολογισμό της αριθμητικής πράξης 204:12, με χαρακτηριστικό το παράδειγμα ενός φοιτητή Πολυτεχνικής σχολής, ο οποίος επεδίωξε να υπολογίσει σταδιακά τα πολλαπλάσια του αριθμού 12 έχοντας ως αφετηρία τον πολλαπλασιασμό 10×12=120 και έπειτα, προσθέτοντας 12 μονάδες κάθε φορά, μέτρησε: 132, 144, 156, 168, 180, 192, 204. Μάλιστα, όταν έφτασε στο 180, δυσκολεύτηκε να συνεχίσει και επανέλαβε από την αρχή τους υπολογισμούς. Εν τέλει, οδηγήθηκε στο αποτέλεσμα ότι το κάθε φορτηγό έχει μήκος 17μ. Ωστόσο, δυσκολία εντοπίστηκε και στη συνέχεια, στη διαίρεση 408:17, όπου και πάλι ακολούθησε την ίδια μέθοδο με προηγουμένως. Παρατήρησε το μέγεθος των αριθμών και έθεσε ως αφετηρία τον πολλαπλασιασμό 20×17=340. Όταν έφτασε στο 23×17 σκέφτηκε ότι 20×17=340 και 17×3=51, χωρίς να καταφέρει να φτάσει σε κάποιο τελικό αποτέλεσμα, ώσπου αντιλήφθηκε ότι θα μπορούσε κατευθείαν να δοκιμάσει τον πολλαπλασιασμό 24×17 για να δει εάν θα οδηγηθεί στα 408μ. Ο συλλογισμός του επακριβώς ήταν ως εξής:

> «Κάνουμε 204:12 για να βρούμε πόση απόσταση καλύπτει το κάθε φορτηγό και μετά αυτό που θα βρούμε θα το κάνουμε διαίρεση με το 408, όχι… πρόσθεση. Θα το οργανώσω. Το 204:12 θα έχει ακριβές αποτέλεσμα λογικά. 10×12=120. 20×12=240, όχι. Ωραία, 120, 132, 144, 156, 168, 180… έχασα το μέτρημα. 120, 132, 144, 156, 168, 180, 192, 204 (μετράει με τα δάχτυλα). Το φορτηγό είναι 17 μέτρα. Άρα 408:17… 20×17 δεν μας κάνει 408… Ψάχνω κάτι στρόγγυλο για να μην ξεκινήσω από το 1×17=17… 2×17=34, 20×17=340, 357, 357+17=… 7+7=14, 4+1=… χάνομαι. 17×3=51 και 340+57=397… δε βγαίνει. Α! Μήπως να το κάνω με το 24; Έπρεπε να κάνω κατευθείαν με το 24 και αν έβγαινε πάνω από το 408 σημαίνει ότι δεν θα χωρούσαν. 17×4=… 4×7=28,… 2 κρατούμενα… Θέλω ένα στυλό. (Υπολογίζει) Ναι, χωράνε ακριβώς 408.»

Η μοναδική λανθασμένη απάντηση που σημειώθηκε αφορά την κατανόηση της εκφώνησης του προβλήματος, καθώς ο συμμετέχων θεώρησε ότι στις δύο σειρές είναι συνολικά 24+24=48 φορτηγά. Ειδάλλως, θα μπορούσε να έχει επιλύσει επιτυχώς το πρόβλημα, διότι ο τρόπος σκέψης ήταν σωστός και εντόπισε τον διπλασιασμό του μήκους της γέφυρας:

> «Είναι το διπλάσιο, άρα από τις δύο μεριές της γέφυρας, έξω από τους πυλώνες, θα μπουν 12 και 12 φορτηγά επειδή στη σειρά είναι 24. Όχι, λάθος. Θα είναι 24-24-24. Όχι, 24 ανάμεσα στους πυλώνες και 24 δεξιά και αριστερά. Χωράνε 48 φορτηγά στη γέφυρα, 12-24-12.»

5. Συζήτηση

Η παρούσα εργασία έχει ως στόχο να μελετήσει τη νοερή επιχειρηματολογία και συγκεκριμένα τις στρατηγικές που εφαρμόζουν φοιτητές και απόφοιτοι της Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων αναλογίας που αφορούν οικείες και καθημερινές καταστάσεις, χωρίς γραπτή υποστήριξη, νοερά. Κατά την ανάλυση των δεδομένων που προέκυψαν από την απομαγνητοφώνηση των συνεντεύξεων, σημειώθηκε ένα εύρος στρατηγικών που επιλέγουν οι λύτες όταν έρχονται αντιμέτωποι με αναλογικά έργα.

Με βάση όσα αναλύθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι φανερό ότι οι λύτες όταν τους δίνεται ένα μαθηματικό πρόβλημα αναλογίας καταφεύγουν κατά κύριο λόγο σε πιο περίπλοκους υπολογισμούς και αλγορίθμους, ακόμη και αν είναι πιο απλό να λυθεί νοερά ή και με οπτική προσέγγιση. Όπως φαίνεται και στον πίνακα του κάθε μαθηματικού έργου που δόθηκε στους συμμετέχοντες, στον οποίο κατηγοριοποιήθηκαν οι στρατηγικές και ο αριθμός απαντήσεων ανά στρατηγική, η συχνότητα εμφάνισης των νοερών προσεγγίσεων υστερεί έναντι των μεθόδων που εμπεριέχουν στάνταρ αλγόριθμους, όπως η μέθοδος των τριών και η αναγωγή στη μονάδα, εύρεση του παράγοντα αλλαγής, τύπους, κλάσματα, δεκαδικούς και ποσοστά. Τα αποτελέσματα έρχονται σε συμφωνία και με τα αποτελέσματα της έρευνας των Ηροδότου κ.ά. (2006) σχετικά με τις στρατηγικές που εφαρμόζουν οι μαθητές της Ε' και Στ' Δημοτικού, όπου παρατήρησαν ότι για την επιτυχή επίλυση των αριθμητικών προβλημάτων οι περισσότεροι μαθητές επέλεξαν κυρίως τη μέθοδο των τριών, την εύρεση του παράγοντα αλλαγής, την αναγωγή στη μονάδα και την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση.

Τα προβλήματα 1 και 6 αποτελούν τις μοναδικές περιπτώσεις όπου η άμεση και νοερή απάντηση που αναμενόταν ήταν η πιο συχνή σε σύγκριση με το σύνολο των υπόλοιπων μεθόδων επίλυσης. Στο πρώτο πρόβλημα, οι περισσότεροι λύτες (22 άτομα) εντόπισαν τη σχέση μεταξύ των αριθμών και ακολούθησαν άμεσα αναλογικό συλλογισμό, διπλασιάζοντας τον απαιτούμενο χρόνο. Παρομοίως, στο έκτο και τελευταίο πρόβλημα, σχεδόν όλοι οι συμμετέχοντες (29 άτομα) αντιλήφθηκαν την αναλογική σχέση και απάντησαν ότι το συνολικό μήκος της γέφυρας είναι διπλάσιο από το διάστημα μεταξύ των πυλώνων που καλύπτεται με τις δυάδες των 24 φορτηγών και επομένως εάν τα φορτηγά παραταχθούν σε μονάδες θα καλύψουν τη γέφυρα. Έρευνα των Spinillo & Bryant (1991) έδειξε ότι ακόμη και παιδιά ηλικίας περίπου 6 ετών είναι σε θέση να σκεφτούν αναλογικά και να συγκρίνουν δύο ποσότητες με σημείο αναφοράς το μισό. Συγκεκριμένα, διακρίνουν τις ποσότητες σε «λιγότερο από το μισό» και «περισσότερο από το μισό». Και στα δύο προαναφερόμενα προβλήματα της παρούσας έρευνας, σύμφωνα και με την κατηγοριοποίηση της Κολέζας (2000), οι λύτες έκαναν χρήση του διπλάσιου και του μισού.

Αναφορικά με τη συμβολή και την αξιοποίηση των οπτικών αναπαραστάσεων που δίνονται σε ένα μαθηματικό πρόβλημα, στο πρόβλημα 4 δίνονταν οι οπτικές αναπαραστάσεις των λεμονάδων με διακριτές τις ποσότητες λεμονιού και νερού, χωρισμένες σε ποτήρια. Ένας από τους στόχος στο προκείμενο πρόβλημα ήταν να παρατηρηθεί εάν οι λύτες δίνουν έμφαση και βασίζονται εξ ολοκλήρου στις οπτικές αναπαραστάσεις επιλύοντας νοερά ή αν εφαρμόζουν πιο τυπικές στρατηγικές. Παρ' όλο που η χρήση οπτικών και νοερών εικόνων μπορεί να διευκολύνει την επίλυση των προβλημάτων, δεν είναι πάντα αυτό μέσα στις δυνατότητες ή τις επιλογές των λυτών. Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 4, από τους 33 συμμετέχοντες, μόνο 3 άτομα σύγκριναν την οξύτητα των λεμονάδων επεξεργάζοντας νοερά και κιναισθητικά τις δεδομένες απεικονίσεις. Όπως αναφέρεται και σε έρευνα των De Bock, Verschaffel & Janssens (1998), παρατηρείται ότι παρά την ύπαρξη οπτικής υποστήριξης, οι μαθητές βασίζονται και πάλι σε επίσημες στρατηγικές, εφαρμόζοντας συγκεκριμένους τύπους.

Ακόμη, λαμβάνοντας υπόψη τη δυνατότητα των λυτών να προσπεράσουν κάποιο μαθηματικό έργο και να επιστρέψουν σε αυτό αργότερα, αξίζει να σημειωθεί ότι αφετηρία όλων των συνεντεύξεων υπήρξε η επίλυση του πρώτου προβλήματος, καθώς ο βαθμός δυσκολίας ήταν χαμηλός και σχεδόν όλοι, εκτός από ένα άτομο, υπολόγισαν σωστά ότι θα χρειαστούν 12 ώρες για να πλεύσει το ιστιοπλοϊκό γύρω από το δεύτερο κυκλικό νησί. Αντιθέτως, σε αρκετές περιπτώσεις ο συμμετέχων διαβάζοντας την εκφώνηση του προβλήματος 3, με την απόσταση ενός ποταμιού στον χάρτη και στην πραγματικότητα, επέλεξε να το προσπεράσει και να το αφήσει για το τέλος δηλώνοντας ότι είναι δύσκολο.

Ως συνέχεια της παραπάνω παρατήρησης και με βάση τον πίνακα συχνότητας του συγκεκριμένου προβλήματος (Πίνακας 3), διαπιστώθηκε ότι ένα σημαντικό μέρος των λυτών δεν γνωρίζει επαρκώς ή και καθόλου την έννοια της κλίμακας και τις ιδιότητές της. Πρόκειται για έναν όρο που διδάσκεται στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Συγκεκριμένα γίνεται αναφορά και εισαγωγή στην κλίμακα στο μάθημα της

Γεωγραφίας στην Ε’ Δημοτικού, ενώ παράλληλα, οι μαθητές εμβαθύνουν περισσότερο σε ένα κεφάλαιο στο μάθημα των Μαθηματικών (Κεφάλαιο 36), καθώς διδάσκονται πώς να μετρούν και να σχεδιάζουν σε κλίμακες. Πιο ειδικά, επιλύουν προβλήματα που εστιάζουν στη σμίκρυνση και τη μεγέθυνση ενός σχεδίου ή μιας εικόνας. Παρομοίως, στο Κεφάλαιο 59 των Μαθηματικών της Στ’ τάξης, οι μαθητές διδάσκονται και πάλι πώς να μικραίνουν και να μεγαλώνουν σχήματα με βάση την κλίμακα. Μάλιστα, οι μαθητές είναι σε θέση να κατανοήσουν καλύτερα την πολλαπλασιαστική-αναλογική σχέση μεταξύ της αρχικής και τελικής απόστασης-σχεδίου για τον λόγο ότι έχει προηγηθεί η διδασκαλία των κεφαλαίων των ανάλογων ποσών. Ωστόσο, είναι εμφανές ότι παραμένει έννοια δυσνόητη για αρκετούς ενήλικες φοιτητές και αποφοίτους.

Ακόμη, καθ’ όλη τη διάρκεια των συνεντεύξεων οι συμμετέχοντες συχνά τόνιζαν την ανάγκη γραπτής υποστήριξης ή τη χρήση αριθμομηχανής. Μερικοί δημιούργησαν κιναισθητικές εικόνες με τα χέρια τους αναπαριστάνοντας οπτικά τις αριθμητικές πράξεις όπως θα ήταν γραμμένες στο χαρτί, ενώ άλλοι προσπάθησαν να υπολογίσουν σταδιακά τα πολλαπλάσια του ενός παράγοντα ώσπου να φτάσουν στο ζητούμενο, χωρίς να τα καταφέρνουν πάντοτε επιτυχώς. Μάλιστα, σε ορισμένες περιπτώσεις, παρά τη χρήση των χεριών τους, αλλά και παρά τη φοίτηση τους σε πολυτεχνικές σχολές ή σε σχολές θετικών επιστημών, όπου το αντικείμενο τους απαιτεί συχνούς υπολογισμούς και μετρήσεις, παρουσίασαν δυσκολίες και λάθος αποτελέσματα. Ειδικότερα, στις περισσότερες περιπτώσεις λάθους, το λάθος εντοπίστηκε κατά τον υπολογισμό της προπαίδειας, η οποία διδάσκεται από το δημοτικό. Όπως έδειξε και η έρευνα των Lo & Watanabe (1997), οι δυσκολίες στην κατανόηση των εννοιών του λόγου και της αναλογίας οφείλονται στην ελλιπή κατανόηση του πολλαπλασιασμού, της διαίρεσης, των κλασματικών και των δεκαδικών αριθμών.

Ταυτόχρονα, διαπιστώθηκε ότι πολλοί από τους συμμετέχοντες με καλό μαθηματικό υπόβαθρο, δεν επιλέγουν την πιο άμεση προσέγγιση, αλλά εφαρμόζουν πιο περίπλοκες και τυποποιημένες μεθόδους. Πρόκειται για σχολές στις οποίες οι φοιτητές ασχολούνται συστηματικά και άμεσα με το συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο, αντιμετωπίζοντας αναλογικές καταστάσεις που ορισμένες φορές περιλαμβάνουν και την έννοια της κλίμακας. Βέβαια, παρά την οικειότητα με τις δεδομένες καταστάσεις, δεν κατέληξαν στο σωστό αποτέλεσμα.

Όπως περιγράφεται και στη βιβλιογραφία, μια συχνή στρατηγική λάθους στην επίλυση των αναλογικών προβλημάτων είναι η αγνόηση μέρους των δεδομένων του προβλήματος (Tourniaire & Pulos, 1985). Για παράδειγμα, ένας λύτης μπορεί να οδηγηθεί σε ένα λάθος συμπέρασμα, συγκρίνοντας απλώς τους αριθμητές των δύο λόγων και αγνοώντας τους παρονομαστές και αντιστρόφως. Σε έρευνα του Noelting (1980) σχετικά με τη νοερή σύγκριση συνεχών ποσοτήτων, ο συμμετέχων έδινε έμφαση μόνο στα ποτήρια του πορτοκαλιού, αγνοώντας την ποσότητα και τη σημασία του νερού. Αντίστοιχα, εντοπίστηκε παρόμοιο λάθος κατά την επίλυση του προβλήματος 4, καθώς ορισμένοι λύτες εστίασαν μόνο στον έναν όρο του λόγου. Σύγκριναν δηλαδή μόνο την ποσότητα στυμμένου λεμονιού ή νερού, μετρώντας τον αριθμό ποτηριών σε κάθε περίπτωση, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τους τη συνολική ποσότητα λεμονάδας και την αναλογική σχέση μεταξύ των δύο διακριτών ποσοτήτων. Έτσι, ανέφεραν είτε ότι η Δ λεμονάδα είναι πιο ξινή γιατί η Γ κανάτα έχει λιγότερο νερό, είτε ότι η Β λεμονάδα είναι πιο ξινή γιατί οπτικά έχει περισσότερα ποτήρια λεμονιού.

Σε συμφωνία με τα ευρήματα πλήθους ερευνών σχετικά με την «ψευδαίσθηση της γραμμικότητας» (illusion of linearity) (De Bock et al., 2002, Modestou & Gagatsis, 2007, Theodoulou et al., 2005), στο τέταρτο μαθηματικό έργο, ένα μεγάλο μέρος των συμμετεχόντων (23 άτομα) παρασύρθηκε από τη γραμμικότητα των προηγούμενων μαθηματικών έργων και απάντησε αυθόρμητα ότι εφόσον τριπλασιάζεται το μήκος της κάθε πλευράς του τετράγωνου δωματίου, θα τριπλασιαστεί και ο αριθμός των τετραγωνικών πλακών που θα χρειαστούν. Όπως έχει προαναφερθεί, οι μαθητές επηρεασμένοι από τον αναλογικό συλλογισμό, θεωρούν ότι αν πολλαπλασιαστεί το μήκος του σχήματος με έναν αριθμό, τότε θα πολλαπλασιαστεί και το εμβαδόν του ή ο όγκος του με τον ίδιο αριθμό. Ως εκ τούτου, δεν εκλαμβάνονται και δεν εξετάζουν τις σχέσεις μεταξύ μήκους και εμβαδού ή μεταξύ μήκους και όγκου ως τετραγωνικές ή κυβικές αντίστοιχα (De Bock et al., 2002, Modestou & Gagatsis, 2007).

Η αυθόρμητη εφαρμογή τυπικών στρατηγικών επίλυσης αναλογικών προβλημάτων έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση υψηλών ποσοστών επιτυχίας που όμως δεν αντιπροσωπεύουν την πραγματική ικανότητα των ατόμων να επιλύουν και να κατανοούν τα προβλήματα. Για παράδειγμα, η μέθοδος αναγωγής στη μονάδα και η μέθοδος των τριών αφορούν μνημονικές διαδικασίες, οι οποίες διδάσκονται από το δημοτικό και χρησιμοποιούνται σε κάθε πρόβλημα άγνωστης τιμής. Όπως αναφέρει και ο Singh (2000), η μέθοδος της αναγωγής στη μονάδα πρόκειται για μια απομνημονευμένη διαδικαστική μαθηματική λειτουργία και όχι εννοιολογική διαδικασία.

Στην έρευνα των Λεμονίδης & Καϊάφα (2014), ο στρατηγικές επίλυσης διακρίνονται σε εννοιολογικές και εργαλειακές ή διαδικαστικές. Συγκεκριμένα, οι εννοιολογικές στρατηγικές «χαρακτηρίζονται από την κατανόηση των πράξεων και των αριθμών που χρησιμοποιούνται σε αυτές και προκύπτουν από την ικανότητα των μαθητών να αντιμετωπίζουν τους ρητούς αριθμούς ολιστικά, στηριζόμενοι στα εννοιολογικά χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού». Συμπερασματικά, όσον αφορά την παρούσα έρευνα, οι στρατηγικές που εφάρμοσαν συνολικά οι λύτες θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως διαδικαστικές, καθώς στηρίχθηκαν κυρίως σε «απομνημονευμένους κανόνες, οι οποίοι δεν συνδέονται απαραίτητα με βαθιά εννοιολογική κατανόηση» (Λεμονίδης & Καϊάφα, 2014).

6. Συμπεράσματα

Μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα και σημαντική πτυχή των Μαθηματικών είναι η νοερή επίλυση και επιχειρηματολογία, όπου ο λύτης καλείται να αντιμετωπίσει μια μαθηματική κατάσταση χωρίς χαρτί-μολύβι ή αριθμομηχανή. Στην εν λόγω έρευνα, πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις κατά τις οποίες συμμετείχαν φοιτητές και φοιτήτριες της Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης και τους ζητήθηκε να λύσουν νοερά συνολικά έξι μαθηματικά αναλογικά έργα, εκφράζοντας δυνατά τον συλλογισμό τους. Τα μαθηματικά έργα αφορούσαν οικείες και καθημερινές καταστάσεις σύγκρισης ποσοτήτων, κλιμάκωσης (scaling) και εύρεσης άγνωστης τιμής με διαφορετικό βαθμό δυσκολίας. Το ενδιαφέρον εστιάστηκε στις στρατηγικές που επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν οι λύτες όταν καλούνται να λύσουν νοερά ένα αναλογικό πρόβλημα. Φαίνεται λοιπόν, πως οι φοιτητές και οι φοιτήτριες κατά κύριο λόγο εφαρμόζουν πιο τυπικές μεθόδους, παρ' όλο που θα μπορούσαν να έχουν φτάσει πιο εύκολα και γρήγορα στη λύση. Μάλιστα, αρκετά συχνά παρατηρήθηκαν λάθη στη μέθοδο που ακολούθησαν οι συμμετέχοντες και στον υπολογισμό αριθμητικών πράξεων, ενώ υπήρξαν και περιπτώσεις που ο λύτης δεν κατάφερε να σκεφτεί κάποιον τρόπο επίλυσης.

Η αυξημένη συχνότητα εμφάνισης οποιασδήποτε λανθασμένης στρατηγικής φανερώνει ότι φοιτητές και απόφοιτοι της Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης δεν έχουν ολοκληρωμένη αντίληψη των σχέσεων που διέπουν μια αναλογία. Παράλληλα, φαίνεται ότι οι λύτες δεν είναι εξοικειωμένοι με τη χρήση οπτικών και νοερών προσεγγίσεων όταν τους δίνεται ένα μαθηματικό πρόβλημα. Συνεπώς, η νοερή επίλυση και επιχειρηματολογία μπορεί να ενισχυθεί με τη χρήση οπτικών αναπαραστάσεων κατά τη διδασκαλία και τον υπολογισμό αριθμητικών πράξεων και διαδικασιών νοερά, σε κάθε έννοια που διδάσκεται στο μάθημα των Μαθηματικών από τις πρώτες κιόλας τάξεις του δημοτικού.

Όσον αφορά τη μεθοδολογία της συγκεκριμένης έρευνας, τα δεδομένα αντλήθηκαν από ένα σχετικά περιορισμένο δείγμα συμμετεχόντων (33 άτομα) και πιθανόν η έρευνα να οδηγούσε σε διαφορετικά και πιο γενικευμένα πορίσματα εάν συμμετείχε μεγαλύτερος αριθμός ατόμων. Ακόμη, το δείγμα δεν είναι αντιπροσωπευτικό και τυχαίο, καθώς πρόκειται για δειγματοληψία ευκολίας λόγω άμεσης πρόσβασης σε αυτό. Ωστόσο, το τμήμα φοίτησης και το μαθηματικό υπόβαθρο των λυτών ποικίλει και συνεπώς το ερευνητικό ερώτημα απαντήθηκε εν μέρει σφαιρικά.

Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας μπορούν να αποτελέσουν έναυσμα σε ερευνητές στο πεδίο των Μαθηματικών για περαιτέρω ερευνητική δραστηριότητα σχετικά με τη νοερή επιχειρηματολογία στην επίλυση αναλογικών έργων. Αρχικά, με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν και τις δηλώσεις που έκαναν οι συμμετέχοντες κατά τη διαδικασία επίλυσης, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ενδεχομένως τα αποτελέσματα να διέφεραν εάν το κάθε πρόβλημα δινόταν μεμονωμένα, χωρίς να έχει προηγηθεί η επίλυση άλλου μαθηματικού έργου. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι, έχοντας λύσει το πρώτο πρόβλημα με τον διπλασιασμό της διαμέτρου του νησιού και του χρόνου που απαιτείται για να κάνει ένα ιστιοπλοϊκό τον γύρο του νησιού, ορισμένοι λύτες ήταν επηρεασμένοι και υποψιασμένοι για τη μέθοδο επίλυσης των επόμενων προβλημάτων. Προσπάθησαν να βρουν την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ των αριθμητικών δεδομένων του κάθε προβλήματος και να την επεκτείνουν και στα υπόλοιπα δεδομένα. Για παράδειγμα, στο τρίτο πρόβλημα, οι 5 λύτες που εξέφρασαν την ανεπαρκή γνώση σχετικά με τον όρο της κλίμακας ενός χάρτη όμως τελικά κατάφεραν και έλυσαν το πρόβλημα, ίσως να εντόπισαν την αναλογικότητα λόγω της αναλογικής συλλογιστικής που αναπτύχθηκε και εφαρμόστηκε πρωτύτερα. Επομένως, μία πιθανή πρόταση θα ήταν η πραγματοποίηση μιας παρόμοιας έρευνας με ατομικές συνεντεύξεις κατά τις οποίες ο κάθε λύτης θα πρέπει να λύσει νοερά μόνο ένα από τα μαθηματικά έργα.

Βασισμένοι στις περιπτώσεις που οι λύτες έδωσαν λάθος ή καμία απάντηση, τίθεται το ερώτημα εάν το γεγονός ότι ένας αριθμός ενήλικων ατόμων και συγκεκριμένα φοιτητών και αποφοίτων δεν έχει πλήρη κατανόηση και δεν είναι σε θέση να διαχειριστεί απόλυτα επιτυχώς μαθηματικές αναλογικές καταστάσεις νοερά, οφείλεται σε διδακτικό πρόβλημα. Ακόμη, λαμβάνοντας υπόψη τις πιο επίσημες και περίπλοκες απαντήσεις των συμμετεχόντων προτείνεται η διερεύνηση των επιδόσεων μαθητών πριν και μετά από διδακτική παρέμβαση εστιασμένη αποκλειστικά στη νοερή επίλυση αναλογιών σε συνδυασμό και με τη χρήση οπτικών αναπαραστάσεων. Προηγουμένως, κρίνεται σημαντικό να ερευνηθεί το πώς μπορεί ένας εκπαιδευτικός να εντάξει τη νοερή επιχειρηματολογία στη διδασκαλία του.

Βιβλιογραφία

Anghileri, J., Beishuizen, M., & Van Putten, K. (2002). From Informal Strategies to Structured Procedures: Mind the Gap! *Educational Studies in Mathematics*, 49(2), 149–170.

Antonietti, A. & Colombo, B. (2011). Mental imagery as a strategy to enhance creativity in children. *Imagination Cognition and Personality*, 31(1-2) 63-77.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241.

Barbosa, A., & Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and Challenges. *Journal of the European Teacher Education Network*, 10, 57-70.

Ben-Chaim, D., Keret, Y., Illany, B-S. (2012). *Ratio and Proportion*. Sense Publishers

Ben-Chaim, D., Fey, J.T., Fitzgerald, W.M., Benedetto C. & Miller J. (1998). Proportional Reasoning among 7th Grade Students with Different Curricular Experiences. *Educational Studies in Mathematics*, 36, 247–273.

Bernat P. & Morinet-Lambert J. (1996). A new way for visual reasoning in geometry education. In: Frasson C., Gauthier G., Lesgold A. (eds) *Intelligent Tutoring Systems. ITS 1996.* Lecture Notes in Computer Science, vol 1086. Springer, Berlin, Heidelberg.

Borromeo Ferri, R. (2012). Mathematical thinking styles and their influence on teaching and learning mathematics. *Paper presented at the 12th International Congress on Mathematical Education*. Seoul, Korea.

Boyer, W. T. & Levine, S. C. (2012). Child proportional scaling: Is 1/3 = 2/6 = 3/9 = 4/12?. *Journal of Experimental Child Psychology*, 111, 516-533.

Carden, J. & Cline, T. (2015). Problem solving in mathematics: the significance of visualisation and related working memory. *Educational Psychology in Practice*, 31(3): 1-12.

Clements, K. (1982). Visual imagery and school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 2(3), 33– 39.

Corter, J. & Zahner, D. (2007). Use of external visual representations in probability problem solving. Statistics Education Research Journal, 6(1), 22-506.

Csíkos, C., Szitányi, J., & Kelemen, R. (2012). The effects of using drawings in developing young children's mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics*, 81(1), 47–65.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational studies in mathematics,* 50 (3), 311-334.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 65–83.

De Bock, D., Verschaffel, L. & Janssens, D. (2002). The Effects of Different Problem Presentations and Formulations on the Illusion of Linearity in Secondary School Students. *Mathematical Thinking and Learning,* 4(1): 65-89.

Demetriou, A., Christou, C., Spanoudis, G., & Platsidou, M. (2002). The development of mental processing: Efficiency, working memory, and thinking. *Monographs of the Society of Research in Child Development* (Serial Number 267).

English, L. D. & Sharry, P. V. (1996). Analogical reasoning and the development of algebraic abstraction. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 135–157.

Ercole, L.K., Frantz, M., & Ashline, G. (2011). Multiple Ways to Solve Proportions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 16, 482-490.

Fernández, C., Ciscar, S. & González, J. (2008). *Implicative analysis of strategies in solving proportional and nonproportional problems*. Department of Innovation and Didactic Training, University of Alicante. Spain

Gal, H. & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, 74, 163–183.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework. In L. Puig, & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, 3-19.

He, W., Yang Y. & Gao D. (2018). Proportional Reasoning in 5- to 6-Year-Olds, *Journal of Cognition and Development*, 19:4, 389-412.

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, 89-119. Albany, NY:State University of New York Press.

Lawton, C. (1993). Contextual factors affecting errors in proportional reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 244(5), 460-466.

Livy, S., & Vale, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: methods of solution to a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development,* 13(2), 22-43.

Lo, J.J., & Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: a story of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 216-236.

Lowrie, T. , Logan, T. & Ramful, A. (2017), Visuospatial training improves elementary students' mathematics performance. *British Journal of Educational Psychology*, 87: 170-186.

Mariotti, M. A. & Pesci, A. (1991). Visualization in problem solving and learning. *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 44-47. Assisi, Italy.

Miragliotta, E. & Baccaglini-Frank, A. (2017). Visuo-spatial abilities and geometry: A first proposal of a theoretical framework for interpreting processes of visualization. *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 3952-3959.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology*, 27 (1), 75-92.

Möhring, W., Newcombe, N. S., & Frick, A. (2015). The relation between spatial thinking and proportional reasoning in preschoolers. *Journal of Experimental Child Psychology*, 132, 213-220.

Möhring, W., Newcombe, S. N., Levine C. S. & Frick A. (2016). Spatial Proportional Reasoning Is Associated with Formal Knowledge About Fractions, *Journal of Cognition and Development*, 17:1, 67-84.

Moore, J. L., & Schwartz, D. L. (1994). Visual Manipulatives for Proportional Reasoning. *Annual Meeting of the American Educational Research Association*, New Orleans, LA.

Munn, P. (2001). British research on teaching and learning numeracy in the early years. *Teaching and learning primary numeracy: Policy, Practice and Effectiveness. (A review of British research for the British Educational Research Association)*, 34-38.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept I: Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 217-253.

Owens, K. (1994). Visual imagery employed by young students in spatial problem solving. Paper presented at the *Australian Association for Research in Education Annual Conference,* Newcastle.

Owens, K. (2015). *Visuospatial Reasoning. An Ecocultural Perspective for Space, Geometry and Measurement Education*. New York: Springer.

Pelen, M. S. & Artut, P. D. (2015). Seventh Grade Students' Problem Solving Success Rates on Proportional Reasoning Problems. *International Journal of Research in Education and Science*, 2(1):30.

Presmeg, N. C. & Balderas-Cañas, P. E. (2001). Visualization and Affect in Nonroutine Problem Solving, *Mathematical Thinking and Learning*, 3 (4), 289-313.

Presmeg, N. C. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 297-311.

Schwartz, D. L. & Moore, J. L. (1998). On the Role of Mathematics in Explaining the Material World: Mental Models for Proportional Reasoning. *Cognitive Science*, 22 (4), 471-516.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics,* 43, 271–292.

Spinillo, A. G., & Bryant, P. (1991). Children's Proportional Judgments: The Importance of "Half." *Child Development*, *62*(3), 427–440.

Theodoulou, A., Gagatsis, A., & Theodoulou, R. (2005). The illusion of proportionality in solving verbal geometrical problems by sixth grade students and the role of diagrams. *Proceedings of the 4 th Mediterranean Conference on Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 187-200).

Thompson, I. (2001). British research on mental and written calculation methods for addition and subtraction. *Teaching and learning primary numeracy: Policy, Practice and Effectiveness. (A review of British research for the British Educational Research Association)*: 15-21.

Thompson, P. W. (1996). Imagery and the development of mathematical reasoning. In Steffe, L. P., Greer. B., Nesher, P., Cobb, P. & Goldin G. (Ed.), *Theories of learning mathematics,* 267-283. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional Reasoning: A Review of the Literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*(2), 181–204.

Van Garderen, D. (2006). Spatial Visualization, Visual Imagery, and Mathematical Problem Solving of Students with Varying Abilities. *Journal of Learning Disabilities,* 39(6), 496-506.

Vanluydt, E., Wijns, N., Torbeyns, J. & Van Dooren, W. (2021). Early childhood mathematical development: the association between patterning and proportional reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 107, 93–110.

Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. *Proceedings of the 4th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education*, 177–184. Berkeley, California, USA.

Vlahović-Štetić, V., Pavlin-Bernardic, N. & Rajter, M. (2010). Illusion of Linearity in Geometry: Effect in Multiple-Choice Problems. *Mathematical Thinking and Learning*. 12. 54-67.

Wheatley, G. H. (1997). Reasoning with images in mathematical activity. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν. & Φερεντίνος, Σ. (2013). *Μαθηματικά Α’ Γυμνασίου.* Πάτρα: ΙΤΥΕ Διόφαντος

Ηροδότου, Μ., Ιωάννου, Π., Κοντογιάννη, Κ. & Γαγάτσης, Α., (2006). Επίλυση Προβλημάτων Αναλογίας: Επίλυση των αριθμητικών και λεκτικών προβλημάτων αναλογίας. *9ο Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου*, 55-72.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών*. Leader Books

Κωσταρίδου-Ευκλείδη, Α. (2011*). Γνωστική Ψυχολογία: Από την αναπαράσταση της γνώσης στο θυμικό και στη δράση*. Αθήνα: Πεδίο.

Λεμονίδης, Χ. & Καϊάφα, Ι. (2014). Κατανόηση και ευελιξία των μαθητών Ε' και Στ' τάξης στους υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς. Πρακτικά *5ου Συνεδρίου Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ)*. ΕΝΕΔΙΜ, Φλώρινα.

Μαμωνά-Downs, Γ. & Παπαδόπουλος, Ι. (2018). *Επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά: Η πορεία της σκέψης κατά την αναζήτηση της λύσης*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Μοδέστου, Μ. Σ. (2007). *Μαθηματική αναλογική σκέψη: Ένα πολυδιάστατο γνωστικό και μεταγνωστικό μοντέλο*. Πανεπιστήμιο Κύπρου: Τμήμα Επιστημών της Αγωγής.

Παπαγεωργίου, Ε. & Χρίστου, Κ. (1999). *Στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων αναλογίας*. Πανεπιστήμιο Κύπρου, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής: Λευκωσία.

Παπανδρέου, Μ. (2022). *Σημειωτική/συμβολική δραστηριότητα & μαθηματική σκέψη και μάθηση* [Powerpoint slides]. Διιδρυματικό ΠΜΣ. Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών: Μαθηματικά για Διδασκαλία.

Παράρτημα

Πρόβλημα 1

Ένα ιστιοπλοϊκό χρειάζεται 6 ώρες για να πλεύσει γύρω από ένα κυκλικό νησί με διάμετρο 36 χιλιομέτρων. Πόσες ώρες θα χρειαστεί για ένα δρομολόγιο γύρω από ένα νησί με διάμετρο 72 χιλιόμετρα αν κινείται με την ίδια ταχύτητα;

Πρόβλημα 2

Δίνεται η παρακάτω συνταγή για 12 κρέπες:

1 φλυτζάνι αλεύρι

2 αυγά

1 φλυτζάνι γάλα

2 κουταλιές της σούπας ζάχαρη

1 φακελάκι βανίλια

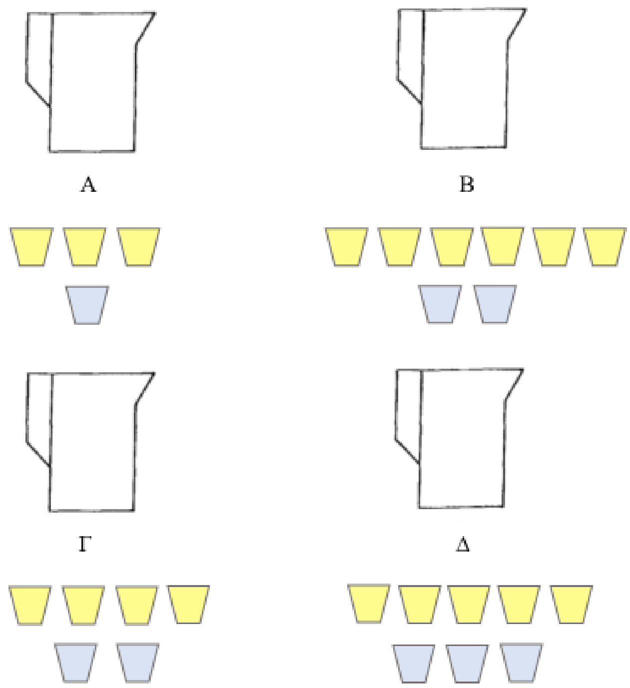
Αν θέλουμε να φτιάξουμε 54 κρέπες, πόσα αυγά θα χρειαστούμε;

Πρόβλημα 3

Η κλίμακα ενός χάρτη είναι 3 προς 8.000. Στον χάρτη υπάρχει ένα ποτάμι με μήκος 24 εκατοστά. Πόσο είναι το πραγματικό μήκος του;

Πρόβλημα 4

Παρακάτω αναπαριστάνονται οι ποσότητες νερού και στυμμένου χυμού λεμονιού που αναμείχθηκαν για να φτιάξουμε την κάθε λεμονάδα. Ποια είναι πιο ξινή ανάμεσα στις Α και Β, και ανάμεσα στις Γ και Δ;



Πρόβλημα 5

Για να καλύψω το δάπεδο ενός τετραγωνικού δωματίου με πλευρά μήκους 12μ. χρειάζομαι 4 τετραγωνικές πλάκες. Πόσες τετραγωνικές πλάκες ίδιου μεγέθους θα χρειαστώ για να καλύψω την επιφάνεια ενός τετραγωνικού δαπέδου με μήκος πλευράς 36 μ;

Πρόβλημα 6

Η γέφυρα της πρώτης φωτογραφίας έχει συνολικό μήκος από τη μια όχθη στην άλλη 408 μ. Ανάμεσα στους δύο πυλώνες της γέφυρας αυτής είναι στοιχισμένα σε δύο γραμμές 24 φορτηγά (δεύτερη φωτογραφία). Η απόσταση ανάμεσα στους δύο πυλώνες είναι 204 μ. Αν έμπαιναν τα φορτηγά σε μια σειρά το ένα πίσω από το άλλο, θα κάλυπταν όλη τη γέφυρα από το ένα άκρο μέχρι το άλλο;