ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

Διπλωματική εργασία

Τσιόλα Ελευθερία

ΑΕΜ: 725

ΘΕΜΑ:

Δυσκολίες και στρατηγικές των μαθητών γυμνασίου σε προβλήματα ποσοστών

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια:

Βαμβακούση Ξένια

Θεσσαλονίκη, Νοέμβριος 2021

Ευχαριστίες:

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την επιβλέπουσα καθηγήτρια της διπλωματικής μου εργασίας κα. Βαμβακούση Ξένια για την πολύτιμη καθοδήγηση, τις συμβουλές, την υπομονή και την κατανόηση κατά την διάρκεια εκπόνησης αυτής της εργασίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω και την καθηγήτρια κα. Καλδρυμίδου Μαρία και τον καθηγητή κ. Χρήστου Κων/νο για την τιμή που μου έκαναν να συμμετάσχουν στην τριμελή επιτροπή.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, τον άντρα μου και τον γιο μου για την στήριξη, την υπομονή και την βοήθεια τους κατά τη διάρκεια συγγραφής της εργασίας μου.

Περίληψη

Τα ποσοστά είναι χρήσιμα για την αποκωδικοποίηση πληροφοριών στην καθημερινή ζωή, αλλά και σε πολλές επιστήμες. Ωστόσο, η ερμηνεία των ποσοστών και η επίλυση προβλημάτων με ποσοστά είναι πολύ απαιτητική, για μαθητές, αλλά και για ενήλικες. Υπάρχουν πολλοί λόγοι για τη δυσκολία που παρουσιάζουν τα ποσοστά: Είναι μια σύνθετη έννοια που συνδέεται στενά με τους ρητούς αριθμούς και τις αναλογίες, συνδέσεις που δε φαίνεται να υποστηρίζονται αρκετά από την εκπαίδευση. Επιπλέον, η εκπαίδευση φαίνεται να δίνει μεγαλύτερη έμφαση στη διαδικαστική ευχέρεια για την επίλυση προβλημάτων με ποσοστά με τυπικές μεθόδους, παρά στην εννοιολογική τους κατανόηση και την ανάπτυξη εναλλακτικών στρατηγικών. Στην παρούσα μελέτη διερευνήσαμε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές Γυμνασίου στην επίλυση προβλημάτων με ποσοστά και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν για να τα προσεγγίσουν. Η μελέτη μας ήταν ποιοτική, με ένα δείγμα εννιά μαθητών. Σύμφωνα με τα αποτελέσματά μας, βασικές εννοιολογικές δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές ήταν η έλλειψη κατανόησης της μονάδας αναφοράς των ποσοστών, καθώς και των ποσοστών μεγαλύτερων του 100%. Η μελέτη των στρατηγικών έδειξε ότι οι μαθητές συχνά απομνημονεύουν κανόνες για να λύσουν τα προβλήματα ποσοστών χωρίς να έχουν κατανοήσει τους κανόνες αυτούς, ενώ υπήρχαν μαθητές που δεν γνώριζαν κανένα αλγεβρικό τρόπο υπολογισμού ποσοστών. Κάποιοι μαθητές προσέγγιζαν συστηματικά τα προβλήματα με εκτίμηση, αλλά δυσκολεύτηκαν να υπολογίσουν το ακριβές αποτέλεσμα. Συχνά χρησιμοποιήθηκαν λανθασμένες προσθετικές στρατηγικές. Επιπλέον, η αδυναμία επίλυσης ενός προβλήματος με εναλλακτικούς τρόπους ήταν εμφανής για όλους τους μαθητές, με μία εξαίρεση. Τα ευρήματα της έρευνας είναι συμβατά με αυτά που αναφέρονται στη διεθνή βιβλιογραφία και αναδεικνύουν ένα ζητούμενο για την εκπαίδευση.

Λέξεις κλειδιά: προβλήματα ποσοστών, δυσκολίες μαθητών στα ποσοστά, στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων με ποσοστά, υπολογισμός ποσοστού.

Abstract

In spite of the strong presence of percentages in various fields in daily and academic life, many students as well as adults face difficulties to interpret percentages and solve related problems. There are many reasons underlying these difficulties. Percentages are a complex content, interrelated with other challenging concepts such as rational numbers, and proportions. Instruction does not appear to support students adequately to make these connections. Moreover, it emphasizes procedural fluency in problem solving with standard methods, rather than fostering conceptual understanding of percentages and the development of strategies. In the present qualitative study we explored nine middle school students' conceptual difficulties and strategies in problems with percentages. Our results indicated that the students' main conceptual difficulties were related to the role of the unit of reference pertaining to the percentages, and also the interpretation of percentages greater than 100%, .As far as strategies are concerned, our study indicated that students often attempted to apply memorized rules, without a meaningful understanding of these procedures. Some students had no method available. Few students approached the problems via estimation, but were unable to calculate the result. Erroneous additive strategies were often employed. Moreover, with only one exception, students were not able to give an alternative method for the problems they had solved correctly. These findings agree with the ones reported in the literature and pose a challenge for education.

Keywords: percentage problems, misconceptions in percentages, solving strategies of percentage problems, calculating the percentage

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα ποσοστά εμφανίζονται συχνά στην καθημερινή μας ζωή (Baratta, Price, Stacey, Steinle & Gvozdenko, 2010; Pöhler, Prediger, & Weinert, 2015; Cincinatus & Sheffet, 2016). Για παράδειγμα, μια διαφήμιση που αναφέρει 30% έκπτωση σ’ ένα προϊόν, μια συσκευασία δημητριακών που αναγράφει τα θρεπτικά συστατικά που περιέχει με τη μορφή ποσοστών, τα επιτόκια των καταθέσεων και των δανείων που δίνονται από τις τράπεζες με ποσοστά, ή τα αποτελέσματα μιας δημοσκόπησης που εκφράζονται με ποσοστά. Τα ποσοστά, δηλαδή, είναι ιδιαίτερα χρήσιμα για να είναι δυνατή η αποκωδικοποίηση πληροφοριών σε πολλούς τομείς της καθημερινότητας. Επιπλέον, πολλές επιστήμες χρησιμοποιούν τα ποσοστά. Στη χημεία, ποσοστά χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν την περιεκτικότητα διαλυμάτων. Στα οικονομικά, η ανεργία, ο πληθωρισμός, ο ΦΠΑ είναι μόνο μερικές από τις έννοιες που εκφράζονται με ποσοστά.

Η έννοια των ποσοστών διδάσκεται στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού και ολοκληρώνεται στην πρώτη τάξη του γυμνασίου. Είναι, όμως, τα ποσοστά κατανοητά από τους μαθητές; Μπορούν οι μαθητές να λύσουν προβλήματα με ποσοστά; Και, ποιες στρατηγικές εφαρμόζουν;

Τα ποσοστά μπορούν να θεωρηθούν εναλλακτικές αναπαραστάσεις κλασμάτων, καθώς εκφράζουν πολλαπλασιαστικά σχέσεις μέρους-όλου, και εμπλέκονται σε καταστάσεις στις οποίες ενυπάρχουν αναλογικές σχέσεις. Τόσο τα κλάσματα, όσο και οι αναλογίες παρουσιάζουν σημαντικές εννοιολογικές δυσκολίες για τους μαθητές (Lamon, 2007). Δεν προκαλεί, λοιπόν, έκπληξη ότι η επίλυση προβλημάτων με ποσοστά είναι ένα θέμα που δυσκολεύει τους μαθητές (Ngu, Yeung & Tobias, 2014; Jitendra & Star, 2012; White & Mitchelmore, 2005). Ανάλογες δυσκολίες φαίνεται να παρουσιάζουν και οι ενήλικες, ακόμα και οι φοιτητές Μαθηματικών (Jacobs, Danan, & Gelman, 2018; Cincinatus & Sheffet, 2016). Μια σημαντική πηγή λαθών, ιδιαίτερα για τους μαθητές της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, είναι η χρήση ακατάλληλων στρατηγικών και, ειδικότερα, προσθετικών στρατηγικών, σε προβλήματα με ποσοστά (White, Wilson, Faragher & Mitchelmore, 2007).

Γενικότερα, οι στρατηγικές που διαθέτουν οι μαθητές, καθώς και η επιλογή στρατηγικής έχουν απασχολήσει την έρευνα.

Η επίλυση προβλημάτων με ποσοστά μπορεί να γίνει με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Φαίνεται ότι οι μαθητές που έχουν μεγαλύτερη κατανόηση των ποσοστών, παρουσιάζουν διαφορές στις στρατηγικές που επιλέγουν για την επίλυση προβλημάτων, σε σχέση με εκείνους που έχουν χαμηλή κατανόηση των ποσοστών (Jitendra & Star, 2012). Από την άλλη μεριά, η χρήση πολλαπλών μεθόδων για την επίλυση ενός προβλήματος με ποσοστά συμβάλλει στη καλύτερη κατανόηση της έννοιας των ποσοστών (De Corte, Depaepe, Op't Eynde & Verschaffel, 2005).

Στην εργασία αυτή εστιάζουμε στους τρόπους με τους οποίους προσεγγίζουν μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης προβλήματα με ποσοστά. Διερευνούμε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν, τις στρατηγικές που επιλέγουν και τι αποκαλύπτουν αυτές για τον τρόπο με τον οποίο έχουν κατανοήσει τα ποσοστά.

Στο πρώτο κεφάλαιο, εξετάζουμε τα χαρακτηριστικά των ποσοστών που καθιστούν την κατανόησή τους απαιτητική. Ανασκοπούμε τη βιβλιογραφία σχετικά με τις δυσκολίες και τις στρατηγικές των μαθητών σε προβλήματα με ποσοστά. Αναδεικνύουμε τις δυσκολίες αυτές και περιγράφουμε τις μεθόδους και τις στρατηγικές με τις οποίες μπορεί να λυθεί ένα πρόβλημα ποσοστών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, περιγράφουμε τον σκοπό της έρευνας μας, τους συμμετέχοντες και παρουσιάζουμε αναλυτικά τα έργα του ερευνητικού μας εργαλείου.

Στο τρίτο κεφάλαιο, αναλύουμε τις απαντήσεις των μαθητών ανά έργο, ώστε να αναγνωρίσουμε τις δυσκολίες τους ανάλογα με τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων. Επιπλέον, διερευνούμε και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν για την επίλυση των προβλημάτων. Εξετάζουμε ατομικά τον κάθε μαθητή και σκιαγραφούμε το προφίλ της κατανόησής του, σύμφωνα με τις αποκρίσεις του συνολικά στα έργα. Στη συνέχεια, χωρίζουμε τους μαθητές σε ομάδες ανάλογα με τη βαθμολογία που συγκέντρωσαν, τα προβλήματα που έλυσαν και τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, συζητάμε τα αποτελέσματα και αναδεικνύουμε τη σημασία τους για την εκπαίδευση.

1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1.1 Ποσοστά και προβλήματα ποσοστών

Η παρουσία των ποσοστών σε πολλά προβλήματα της καθημερινής ζωής είναι αδιαμφισβήτητη. Αποτελούν, επίσης, αντικείμενο διδασκαλίας στα σχολικά μαθηματικά και είναι απαραίτητα και για άλλα σχολικά μαθήματα, όπως η χημεία.

Η διδασκαλία των ποσοστών έχει (ή θα έπρεπε να έχει) τρείς στόχους: οι μαθητές να γνωρίζουν καλά μία (ή περισσότερες) διαδικασίες για να υπολογίζουν ποσοστά, να αποκτήσουν βαθιά κατανόηση της έννοιας των ποσοστών και να είναι σε θέση να εφαρμόσουν τα ποσοστά σε διάφορες καταστάσεις (De Corte, Depaepe, Op't Eynde & Verschaffel, 2005).

Ξεκινώντας από το τελευταίο, η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων είναι μείζονος σημασίας για τα μαθηματικά (National Council of Teachers of Mathematics, 2000 όπως αναφ. στο Dennis et al., 2016). Οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με προβλήματα ποσοστών στην καθημερινή τους ζωή και πριν διδαχθούν επίσημα τα ποσοστά. Τα τυπικά προβλήματα ποσοστών, που είναι και αυτά στα οποία δίνεται έμφαση στη διδασκαλία, χωρίζονται σε τρεις βασικές κατηγορίες: α) «εύρεση μέρους» (δίνεται το ποσοστό και η αρχική ποσότητα και ζητείται το μέρος της), β) «εύρεση όλου» (δίνεται το ποσοστό, ένα μέρος της αρχικής ποσότητας και ζητείται η αρχική ποσότητα), γ) «εύρεση ποσοστού» (δίνεται η αρχική ποσότητα και ένα μέρος της και ζητείται το ποσοστό) (Cincinatus, & Sheffet, 2016; Pöhler, Prediger & Weinert, 2015). Συχνό σενάριο σε τέτοιου είδους προβλήματα είναι αυτό που αφορά την έκπτωση σε κάποιο προϊόν. Στην κατάσταση αυτή εμπλέκονται 3 απόλυτες ποσότητες (η αρχική τιμή του προϊόντος, το ποσό της έκπτωσης και η τελική τιμή του προϊόντος) και μια σχετική ποσότητα (το ποσό της έκπτωσης προς την αρχική τιμή), που εκφράζεται με ποσοστό. Ανάλογα με τα δεδομένα και το ζητούμενο, από την κατάσταση αυτή προκύπτουν διαφορετικά προβλήματα. Παρά το γεγονός ότι πρόκειται για προβλήματα που αφορούν την ίδια κατάσταση, υπάρχουν διαφορές ως προς τη δυσκολία τους για τους μαθητές. Πράγματι, όταν ζητείται η αρχική ποσότητα, ή όταν το ποσοστό εκφράζει σχετική μείωση, φαίνεται ότι τα προβλήματα είναι πιο απαιτητικά για τους μαθητές. Για παράδειγμα, ένα πρόβλημα στο οποίο δίνονται η ποσοστιαία έκπτωση και η μειωμένη τιμή και ζητείται η αρχική τιμή φαίνεται να δημιουργεί μεγάλες δυσκολίες στους μαθητές (Pöhler, Prediger, & Weinert, 2015).

Πέρα από τα τυπικά αυτά προβλήματα, στα οποία το ποσοστό εκφράζει άμεσα το μέρος μιας ποσότητας, υπάρχουν προβλήματα στα οποία το ποσοστό χρησιμοποιείται για να περιγράψει μια μεταβολή, ή μια σύγκριση, όπως, για παράδειγμα, στις προτάσεις «η τιμή του ψωμιού αυξήθηκε κατά 10%» ή στην πρόταση «ο αριθμός α είναι κατά 10% μεγαλύτερος από τον αριθμό β». Από το γεγονός ότι το ποσοστό μπορεί να έχει διαφορετικά νοήματα, καθώς και ότι διαφορετικές μορφές της ίδιας κατάστασης μπορεί να ενέχουν διαφορετικές προκλήσεις για τους μαθητές, διαφαίνεται ήδη ότι τα ποσοστά παρουσιάζουν δυσκολίες για τους μαθητές και πράγματι, υπάρχει πληθώρα ερευνητικών δεδομένων που δείχνει ότι η εννοιολογική κατανόηση των ποσοστών φαίνεται να είναι απαιτητική για τους μαθητές.

Οι Parker και Leinhardt (1995, όπως αναφ. στο Prediger & Pöhler, 2015) επεσήμαναν τέσσερις λόγους στους οποίους μπορεί να αποδοθεί η δυσκολία αυτή: α) η πολυπλοκότητα του μαθηματικού αντικειμένου β) η ποικιλία των σχέσεων που μπορούν να περιγράψουν τα ποσοστά (μέρος όλου, συγκρίσεις, αλλαγές γ) το γεγονός ότι οι σχέσεις αυτές, εκτός ίσως από τη σχέση μέρος όλου, δεν μελετώνται αρκετά στα προγράμματα σπουδών δ) γλωσσικές δυσκολίες στην κατανόηση των προβλημάτων με ποσοστά. Φαίνεται, δηλαδή, να υπάρχουν εννοιολογικοί, γλωσσικοί, αλλά και διδακτικοί παράγοντες που συμβάλλουν στις δυσκολίες των μαθητών (Flores, Inan, Han, & Koontz, 2019).

Εστιάζοντας στους εννοιολογικούς παράγοντες, τα ποσοστά εκφράζουν μια σχέση και, μάλιστα, πολλαπλασιαστική, και όχι μια απόλυτη ποσότητα. (Parker & Leinhardt, 1995 όπως αναφ. στο White, Wilson, Faragher, & Mitchelmore, 2007). Πράγματι, ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των ποσοστών είναι ότι πάντα αναφέρονται σε «κάτι» και δεν έχουν νόημα αν δεν λάβουμε υπόψη σε τι αναφέρονται (Van Den Heuvel-Panhuizen, 1994 όπως αναφ. στο De Corte et al., 2005). Για παράδειγμα, ας σκεφτούμε το ακόλουθο πρόβλημα: «Για να επιτύχει ένας μαθητής στις εξετάσεις πρέπει το 50% των ερωτήσεων να είναι σωστές. Ο Γιάννης απάντησε σωστά σε 30 ερωτήσεις. Πέρασε τις εξετάσεις ο Γιάννης;» Το πρόβλημα αυτό δεν μπορεί να απαντηθεί, καθώς δεν αναφέρεται πόσες είναι όλες οι ερωτήσεις του τεστ.

Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό των ποσοστών είναι ότι οι ποσοστιαίες αυξήσεις ή μειώσεις δεν έχουν γραμμικό χαρακτήρα (De Corte et al., 2005). Μια αύξηση 10% και στη συνέχεια άλλη μία αύξηση 10% δεν είναι το ίδιο με μία αύξηση 20%. Αυτό συμβαίνει γιατί η ποσότητα στην οποία αναφέρεται η δεύτερη αύξηση 10% δεν είναι η ίδια με την αρχική. Η πρόσθεση ή αφαίρεση ποσοστών είναι επιτρεπτή μόνο όταν αναφέρονται στην ίδια ποσότητα (Cincinatus & Sheffet, 2016).

Το χαρακτηριστικό των ποσοστών, ωστόσο, που συμβάλλει κατά πολύ στην πολυπλοκότητά τους είναι το γεγονός ότι συνδέονται στενά με ορισμένες από τις πιο απαιτητικές, για τους μαθητές, περιοχές των σχολικών μαθηματικών και συγκεκριμένα, με τους ρητούς αριθμούς (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003) και την αναλογία (Dole, 2000).

Πράγματι, τα ποσοστά όταν περιγράφουν το μέρος μιας ποσότητας μπορούν να αντικατασταθούν από κλάσματα (Cincinatus, & Sheffet, 2016). Η καλή γνώση των κλασμάτων, αλλά και των δεκαδικών, αποτελεί απαραίτητη βάση για τη μάθηση των ποσοστών (Rosenthal, Ilany, & Almog, 2009). Συχνά, ωστόσο, η έρευνα δείχνει ότι οι μαθητές έχουν μια πολύ περιορισμένη κατανόηση της σύνδεσης μεταξύ των ποσοστών από τη μια, και των κλασμάτων και των δεκαδικών από την άλλη. Για παράδειγμα, οι μαθητές αξιοποιούν αυτή τη σύνδεση μόνο σε πολύ συγκεκριμένες, οικείες περιπτώσεις ποσοστών. Οι Rosenthal, και συνεργάτες (2009) σ' ένα δείγμα 99 μαθητών στο Ισραήλ βρήκαν ότι οι περισσότεροι μαθητές αντιλαμβανόντουσαν το ποσοστό σαν μέρος μιας ποσότητας και ότι όλη η ποσότητα αντιστοιχεί στο 100% . Στην έρευνα της Van Den Heuvel-Panhuizen (2003) και των Rosenthal, Ilany, & Almog (2009), οι μαθητές αυτόματα χρησιμοποιούσαν τα κλάσματα για να εξηγήσουν τα ποσοστά (π.χ. το 50% αντιστοιχεί στο ½ ή το 25% μιας ποσότητας είναι το ¼ της ποσότητας). Οι van Galen & van Eerde (2013) και αυτοί στην έρευνα τους βρήκαν ότι οι μαθητές μπορούσαν να λύσουν προβλήματα όπου εμπλέκονταν ποσοστά όπως το 25%, το 50% και το 75% καθώς τα συγκεκριμένα ποσοστά μπορούν εύκολα να μετατραπούν σε απλά κλάσματα. Ωστόσο, αυτή η ευχέρεια στη μετατροπή από τη μια μορφή στην άλλη δεν παρατηρείται σε λιγότερο οικείες περιπτώσεις αριθμών. Ταυτόχρονα, υπάρχει το ζήτημα της μεταφοράς εννοιολογικών δυσκολιών και παρανοήσεων για τους ρητούς και τις πράξεις τους στο πεδίο των ποσοστών, κάτι με το οποίο θα ασχοληθούμε στην επόμενη ενότητα.

Οι Parker και Leinhardt (1995, όπως αναφ. στο Dole, 2000) υποστήριξαν ότι η ουσία του ποσοστού είναι η αναλογικότητα και θα πρέπει να δοθεί έμφαση στην κατανόηση των αναλογικών σχέσεων που ενυπάρχουν στις καταστάσεις που εμφανίζονται τα ποσοστά. Όπως και οι ρητοί αριθμοί, οι αναλογίες είναι ένα θέμα των μαθηματικών στο οποίο οι μαθητές δυσκολεύονται σημαντικά (Jitendra, Star, Starosta, Leh, Sood, Caskie & Mack, 2009; Lamon, 2007).

Σημαντικός είναι και ο γλωσσικός παράγοντας, που δυσχεραίνει την κατανόηση των ποσοστών (Parker και Leinhardt, 1995, όπως αναφ. στο Prediger & Pöhler, 2015). Πράγματι, σε πάρα πολλές περιπτώσεις η μονάδα αναφοράς των ποσοστών δεν αναφέρεται ρητά. Επιπλέον, οι διατυπώσεις παραπέμπουν σε προσθετικές σχέσεις, ιδιαίτερα όταν τα ποσοστά χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν μεταβολή ή σύγκριση. Για παράδειγμα, οι προτάσεις «η τιμή του ψωμιού αυξήθηκε κατά 10%» και «η τιμή του ψωμιού αυξήθηκε κατά 10 λεπτά», είναι γλωσσικά πολύ παρόμοιες και είναι πιθανόν να ερμηνευθούν με τον ίδιο τρόπο, ωσάν να αναφέρονταν και οι δύο σε μια προσθετική αύξηση. Επιπλέον, στην πρώτη πρόταση, η μονάδα αναφοράς του ποσοστού (αρχική τιμή του ψωμιού) υπονοείται και πρέπει να εξαχθεί από τα συμφραζόμενα.

Από την πλευρά της διδασκαλίας, ένα σημαντικό πρόβλημα φαίνεται να είναι το γεγονός ότι, συχνά, η διδασκαλία των ποσοστών είναι αποκομμένη από τη διδασκαλία των ρητών αριθμών και οι μαθητές δεν υποστηρίζονται αρκετά ώστε να δημιουργήσουν τις απαραίτητες συνδέσεις (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003). Παρόμοια, ζητούμενο παραμένει ακόμα η καλύτερη σύνδεση των ποσοστών με τις αναλογίες (De Corte, et al., 2005).

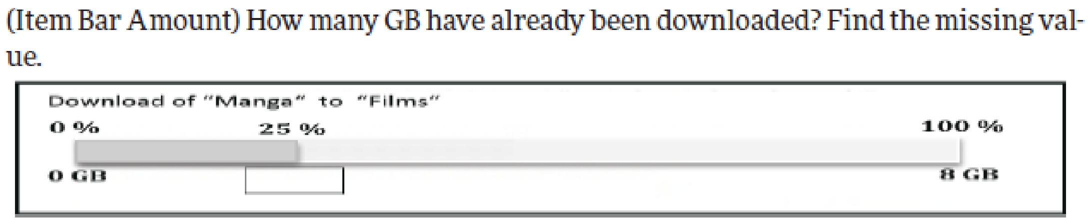
1.2 Δυσκολίες και λάθη των μαθητών στα ποσοστά και στα προβλήματα ποσοστών

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα ποσοστά είναι ένα κεφάλαιο των Μαθηματικών που είναι αλληλένδετο με άλλα κεφάλαια (κλάσματα, δεκαδικοί, ρητοί, αναλογίες) και δημιουργεί δυσκολίες και παρανοήσεις στους μαθητές. Έρευνες που έχουν εστιάσει στα τρία είδη τυπικών προβλημάτων με ποσοστά («εύρεση μέρους», «εύρεση όλου», «εύρεση ποσοστού») και έχουν διαπιστώσει ότι οι δυσκολίες παραμένουν και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Στην έρευνα των Jacobs, Danan & Gelman, (2018) που έγινε σε φοιτητές (όχι θετικών επιστημών), ένας μεγάλος αριθμός φοιτητών δε μπορούσαν να λύσουν κανένα από τα προβλήματα με ποσοστά που υπήρχαν στο τεστ. Τα δε πιο απαιτητικά από τα προβλήματα αυτά παραμένουν δύσκολα ακόμα και σε φοιτητές των θετικών επιστημών. Πράγματι, έχει επανειλημμένα τεκμηριωθεί ότι τα προβλήματα «εύρεσης όλου» δημιουργούν τις μεγαλύτερες δυσκολίες στους μαθητές, ενώ στα προβλήματα «εύρεσης μέρους» οι μαθητές παρουσιάζουν καλύτερη επίδοση (Rosenthal et al, 2009; Baratta et al, 2010; Dole, Cooper, Baturo & Conoplia, 1997; Koay, 1998 όπως αναφ. στο Baratta et al, 2010). Το εύρημα αυτό είχαν και οι Cincinatus και Sheffet (2016) στην έρευνα τους σε φοιτητές Μαθηματικών, όπου διαπίστωσαν ότι στα προβλήματα εύρεσης μέρους οι φοιτητές είχαν τα υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας.

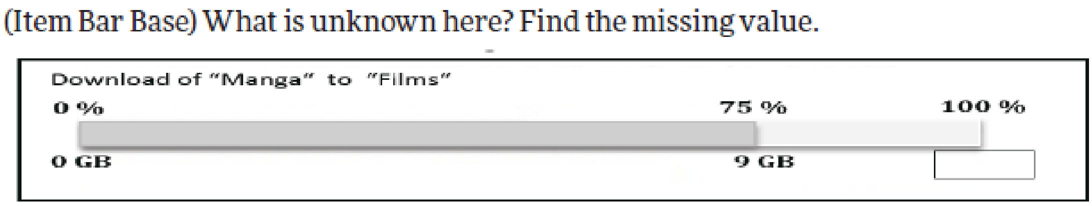
Πέραν της δυσκολίας που φαίνεται να προκαλεί το ποιο είναι το ζητούμενο στα τυπικά προβλήματα ποσοστών, υπάρχουν κι άλλοι παράγοντες που επηρεάζουν τους μαθητές.

Οι Pöhler, Prediger & Weinert (2015) σ’ ένα δείγμα 250 μαθητών ηλικίας 13-15 βρήκαν ότι τα δύο τυπικά προβλήματα ποσοστών (εύρεση μέρους και εύρεση όλου) είναι πιο δύσκολα όταν δίνονται σαν λεκτικό πρόβλημα (κείμενο) απ’ ότι σε πιο απλή μορφή (π.χ. να βρεθεί το 5% του 400, π.χ. το 30% είναι 60€, να βρεθεί όλο το ποσό). Στην ίδια μελέτη διαπίστωσαν ακόμη ότι όταν δίνεται γραφικά το πρόβλημα (Εικόνα 1, 2) οι μαθητές λύνουν πιο συχνά το πρόβλημα σε σχέση με ένα λεκτικό πρόβλημα (κείμενο) και στα δύο είδη προβλημάτων. Το εύρημα αυτό είναι συμβατό με τον ισχυρισμό των Parker και Leinhardt (1995, όπως αναφ. στο Prediger & Pöhler, 2015), ότι μία από τις υποκείμενες δυσκολίες των μαθητών με τα ποσοστά οφείλεται σε γλωσσικούς παράγοντες.

Εικόνα 1: Πρόβλημα ποσοστών (εύρεση μέρους) με γραφική αναπαράσταση από την έρευνα των Pöhler, Prediger & Weinert (2015)



Εικόνα 2: Πρόβλημα ποσοστών (εύρεση όλου) με γραφική αναπαράσταση από την έρευνα των Pöhler, Prediger & Weinert (2015)



Σε άλλες περιπτώσεις, φαίνεται ότι οι δυσκολίες των μαθητών προέρχονται από ελλειμματική κατανόηση της πράξης της διαίρεσης και της σύνδεσής της με τα ποσοστά. Οι Baratta et al (2010) στην έρευνα τους, στην οποία συμμετείχαν 677 μαθητές γυμνασίου (342 μαθητές 8ης τάξης και 335 9ης τάξης), διαπίστωσαν ότι οι περισσότεροι μαθητές μπορούσαν να κάνουν μία εκτίμηση της απάντησης σε προβλήματα με ποσοστά, όμως αδυνατούσαν να υπολογίσουν ακριβώς το αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, στη συγκεκριμένη έρευνα, οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν με ποιον από δοσμένους υπολογισμούς μπορούν να υπολογίσουν όλη την ποσότητα, όταν γνωρίζουν ότι το 11% είναι 145 (Εικόνα 3). Οι μαθητές εκτίμησαν ότι το αριθμητικό αποτέλεσμα θα έπρεπε να είναι μεγαλύτερο από το 145. Ωστόσο, δεν αναγνώρισαν τον υπολογισμό 145 : 0.11 ως σωστό. Οι Baratta και συνεργάτες (2010) επεσήμαναν ότι πηγή της συγκεκριμένη δυσκολίας είναι η πολύ διαδεδομένη παρανόηση στους ρητούς ότι η διαίρεση πάντα «μικραίνει τον αριθμό». Στην ίδια διαπίστωση κατέληξαν και οι Rosenthal και συνεργάτες (2009). Οι Baratta και συνεργάτες διαπίστωσαν επίσης ότι πολλοί μαθητές διατηρούν την αντίληψη ότι «το ποσοστό σημαίνει διαίρεση», θεωρώντας ταυτόχρονα ότι ο μικρότερος αριθμός έχει τη απαραίτητα τη θέση του διαιρέτη. Για παράδειγμα για να υπολογίσουν σε ποσοστό τι μέρος του 500 είναι το 24, υπολογίζουν καταρχήν το πηλίκο 500:24, (Baratta et al, 2010). Ενδεχομένως, το σφάλμα αυτό να οφείλεται στη διαισθητική πεποίθηση ότι ο διαιρέτης πρέπει να είναι μικρότερος από το διαιρετέο, που ισχύει στο διαισθητικό μοντέλο της διαίρεσης μερισμού (Fischbein et al., 1983)

Εικόνα 3: Πρόβλημα από την έρευνα των Baratta et al (2010)

a) Tom's class won 145 lollies at the quiz. This was 11% of the lollies. The total number of lollies at the quiz is: (a) Less than 145 (b) About 145 (c) About 300 (d) More than 1000	b) Which of these calculations will find how many lollies at the quiz? i) 145×0.11 ii) $145 \div 0.11$ iii) $(145 \div 11) \times 100$ iv) ${}^{11}/_{100} \times {}^{145}/_{1}$ v) $145 - 11$ vi) ${}^{145}/_{11} \times {}^{100}/_{1}$

Πολλοί ερευνητές έχουν διαπιστώσει ότι ένας ακόμα παράγοντας που επηρεάζει την ικανότητα επίλυσης των τριών τυπικών προβλημάτων είναι η «πολυπλοκότητα» των αριθμών. Στην έρευνα των Baratta και συνεργατών (2010) οι μαθητές είχαν καλύτερα ποσοστά επιτυχίας και στα τρία είδα προβλημάτων όταν οι αριθμοί ήταν απλοί (π.χ. να βρεθεί το 25% του 40, π.χ. να βρεθεί τι ποσοστό είναι το 15 στο 30, π.χ. να βρεθεί όλη ποσότητα όταν γνωρίζουμε ότι το 10% αντιστοιχεί σε 4) σε σχέση με προβλήματα όπου οι αριθμοί ήταν μέτριας ή μεγάλης πολυπλοκότητας (π.χ. να βρεθεί το 30% του 60 ή το 13.5% του 1294 , π.χ. να βρεθεί όλη η ποσότητα όταν γνωρίζουμε ότι το 80% αυτής είναι 12). Παρόμοια, στην έρευνα των Rosenthal και συνεργατών (2009) οι μαθητές μπορούσαν να λύσουν προβλήματα ποσοστών όπου εμφανίζονταν οικεία ποσοστά όπως 50% και 25%, όμως όταν δίνονταν το μέρος μιας ποσότητας και έπρεπε να βρεθεί όλη η ποσότητα οι μαθητές αντιμετώπιζαν δυσκολίες ακόμα και όταν τα ποσοστά ήταν οικεία. Οι van Galen & van Eerde (2013) διαπίστωσαν και αυτοί ότι οι μαθητές μπορούσαν να λύσουν προβλήματα με οικεία ποσοστά (25%, 50%, 75%) καθώς μπορούσαν να τα μετατρέψουν σε απλά κλάσματα, δεν συνέβαινε όμως το ίδιο με ποσοστά όπως το 15%. Επιπλέον, όταν το ποσοστό δεν εκφράζεται με ακέραιο αριθμό, για παράδειγμα, όταν ένας δεκαδικός εμφανιστεί μαζί με το σύμβολο των ποσοστών(π.χ. 0.5%) πολλοί μαθητές μπερδεύονται (Ngu et al., 2014).

Επιπλέον, οι μαθητές δυσκολεύονται αρκετά όταν στα προβλήματα ποσοστών υπάρχουν ποσοστά μεγαλύτερα του 100% (Rosenthal et al., 2009; Price et al., 2014; Ngu et al., 2014). Ένα τυπικό παράδειγμα είναι ότι το 120% το γράφουν ως 0.12 και δυσκολεύονται να συνδέσουν κοινά κλάσματα με ποσοστά (π.χ. το 150% αντιστοιχεί στο 1 και ½) (Ngu et al., 2014). Ενδεχομένως, η δυσκολία αυτή συνδέεται με τη γνωστή δυσκολία που έχουν οι μαθητές να εννοιολογικοποιήσουν τα κλάσματα που είναι μεγαλύτερα της μονάδας και συνδέεται με τη (στενή) ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος όλου» που απαιτεί το «μέρος» να είναι μικρότερο από το «όλο» (Moss, 2005). Φαίνεται ότι οι υπολογισμοί με ποσοστά μεγαλύτερα του 100% δυσκολεύουν περισσότερο τους μαθητές σε σύγκριση με υπολογισμούς όπου τα ποσοστά είναι μικρότερα του 100% (Price et al., 2014). Επιπλέον στην ίδια μελέτη φαίνεται ότι και οι ποσοστιαίες μεταβολές που είναι πάνω από 100% δυσκολεύουν πολύ τους μαθητές στον υπολογισμό σε σχέση με τις ποσοστιαίες μεταβολές που είναι μικρότερες του 100%. Ανάλογες δυσκολίες υπάρχουν και σε προβλήματα (στα οποία υπάρχει εικονική αναπαράσταση) όπου οι μαθητές έπρεπε να εκφράσουν το ύψος ενός ψηλότερου δένδρου ως ποσοστό ενός χαμηλότερου σε ύψος δένδρου (το ζητούμενο ποσοστό ήταν μεγαλύτερο του 100%) (Price et al., 2014). Οι Rosenthal et al (2009) είχαν παρόμοια ευρήματα στην έρευνα τους.

Σημαντική πηγή λαθών αποτελεί και η αγνόηση της μονάδας αναφοράς, με άλλα λόγια ότι τα ποσοστά αναφέρονται πάντα σε «κάτι» (De Corte et al., 2005). Στην έρευνα των White και Mitchelmore (2005) που πραγματοποιήθηκε σε δύο σχολεία του Σίδνεϋ, στη διάρκεια διδασκαλίας των ποσοστών τέθηκε στου μαθητές η ερώτηση: Ο Γιάννης έχασε το 50% των χρημάτων του και έπρεπε να διαλέξουν τι θα ήταν χειρότερο για τον Γιάννη, αν είχε αρχικά: 1$, 10$, 50$, 100$, δεν έχει σημασία το αρχικό ποσό. Από τις απαντήσεις των μαθητών φάνηκε ότι δεν κατανοούσαν όλοι ότι το αρχικό ποσό έχει σημασία για να αποφασίσουμε τί είναι καλύτερο

Ένα συναφές πρόβλημα είναι ότι αρκετοί μαθητές αντιμετωπίζουν το ποσοστό σαν αριθμό και όχι σαν τελεστή (Rosenthal, Ilany, & Almog, 2009), θεωρώντας δηλαδή ότι το ποσοστό εκφράζει μια απόλυτη ποσότητα. Σε τέτοιες περιπτώσεις, οι μαθητές αγνοούν το σύμβολο %, και επικεντρώνουν στους αριθμούς του προβλήματος. Έτσι, οι μαθητές αφαιρούν ή διαιρούν τους δύο αριθμούς (ποσοστό και την αρχική ποσότητα) που εμπλέκονται σε προβλήματα εύρεσης μέρους (Rosenthal et al., 2009).

Οι μαθητές επίσης φαίνεται να δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι τα ποσοστά περιγράφουν μια σταθερή σχέση ανάμεσα σε δυο ποσότητες, ανεξάρτητα από το απόλυτο μέγεθός τους (De Corte et al., 2005). Για παράδειγμα, ένα γιαούρτι με φρούτα που πωλείται σε δύο συσκευασίες των 450γρ. και των 225 γρ. και η μεγάλη συσκευασία αναφέρει ότι περιέχει 60% φρούτα, τότε το ποσοστό φρούτων που περιέχει η μικρότερη συσκευασία θα είναι σταθερό (αυτό που θα αλλάξει είναι η ποσότητα σε γραμμάρια των φρούτων που θα περιέχει). Προβλήματα αυτού του τύπου προκαλούν απαντήσεις που αποκαλύπτουν ότι μία παρανόηση των μαθητών είναι ότι το ποσοστό μεταβάλλεται γραμμικά σε σχέση με το μέγεθος της αρχικής ποσότητας (De Corte et al., 2005). Γενικότερα, η «ψευδαίσθηση της γραμμικότητας» ("illusion of linearity") είναι ένα σημαντικό πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε προβλήματα που εμπλέκονται ανάλογα ποσά (Modestou & Gagatsis, 2009; Ayan & Isiksal-Bostan, 2019), το οποίο μεταφέρεται και στα ποσοστά.

Το πρόβλημα της μονάδας αναφοράς, σε συνδυασμό με την «ψευδαίσθηση της γραμμικότητας εμφανίζεται και στην περίπτωση των ποσοστιαίων αυξήσεων ή μειώσεων (De Corte et al., 2005). Οι μαθητές τείνουν να λύνουν τα παρακάτω δύο προβλήματα με τον ίδιο τρόπο: α) βρες την τιμή όταν αυξηθεί κατά 5$ και στη συνέχεια μειωθεί κατά 5$ και β) βρες την τιμή όταν αυξηθεί 5% και στη συνέχεια μειωθεί κατά 5% (Ngu et al., 2014). Μία αύξηση 20% και στη συνέχεια μία ακόμα 30% δεν είναι το ίδιο με μια αύξηση 50%, ενώ μια αύξηση 20$ και στη συνέχεια μία ακόμα αύξηση 30$ ισοδυναμεί με μία συνολική αύξηση 50$. Η δεύτερη ποσοστιαία αύξηση αναφέρεται σε άλλο ποσό (μεγαλύτερο από το αρχικό). Οι μαθητές και σε αυτή την περίπτωση αγνοούν την αλλαγή στη μονάδα αναφοράς και υπολογίζουν τη συνολική μεταβολή προσθετικά, αντιμετωπίζοντας τα ποσοστά ως απόλυτες ποσότητες. Κατ' αυτόν τον τρόπο, φαίνεται ότι μεταφέρουν τις στρατηγικές από τα αριθμητικά προβλήματα στα προβλήματα που εμπλέκονται ποσοστά. Η χρήση λανθασμένων προσθετικών στρατηγικών στα προβλήματα με ποσοστά είναι μια κυρίαρχη τάση των μαθητών (Ayan & Isiksal-Bostan, 2019; Jacobs, Danan, & Gelman, 2018; Missailidou & Williams, 2003 όπως αναφ. στο White et al., 2007). Ορισμένοι ερευνητές αποδίδουν εν μέρει τη δυσκολία αυτή στην περιεκτική και αφηρημένη γλώσσα των ποσοστών (Parker & Leinhardt, 1995 όπως αναφ. στο White & Mitchelmore, 2005), όπου συχνά η μονάδα αναφοράς δεν αναφέρεται ρητά. Αυτό δημιουργεί σύγχυση στους μαθητές, οι οποίες αντιμετωπίζουν τα ποσοστά ως απόλυτους αριθμούς και συγχέουν προσθετικέ και πολλαπλασιαστικές στρατηγικές. Ένα συναφές λάθος, που οφείλεται σε μεταφορά μιας προσθετικής σχέσης στην περίπτωση των ποσοστών είναι το εξής: Οι μαθητές θεωρούν ότι αν ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος κατά 32% από έναν μικρότερο, τότε ο μικρότερος αριθμός είναι μικρότερος κατά 32% από τον μεγαλύτερο (Cincinatus & Sheffet, 2016). Πρόκειται για λανθασμένη ερμηνεία της πολλαπλασιαστικής σχέσης «μεγαλύτερος κατά 32%» ως προσθετική σχέση, συγκεκριμένα ως «μεγαλύτερος κατά 32».

1.3 Μέθοδοι και στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων με ποσοστά

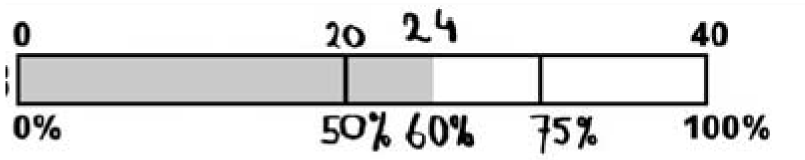
Κάνοντας βιβλιογραφική ανασκόπηση για τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να λύσουμε ένα πρόβλημα που περιέχει ποσοστά βρήκαμε ποικιλία από μεθόδους και στρατηγικές. Ως «μέθοδο» χαρακτηρίζουμε έναν τρόπο επίλυσης που είναι γενικός, ενώ ως «στρατηγική» έναν τρόπο επίλυσης ο οποίος βασίζεται στα χαρακτηριστικά του δεδομένου προβλήματος Οι μέθοδοι που εντοπίστηκαν βασίζονται στην έκφραση της αναλογίας, ωστόσο οι τρόποι αναπαράστασης ή/και τα βήματα επίλυσης διαφέρουν.

Πριν παρουσιάσουμε αναλυτικά τις κύριες μεθόδους και τις στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων με ποσοστά, επισημαίνουμε ότι η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τα ποσοστά έχει προκαλέσει διεθνώς την προσπάθεια να προταθούν και να αξιολογηθούν υποστηρικτικά μοντέλα για τα ποσοστά, κάτι που αντανακλάται και στην εκπαιδευτική πράξη, παρά το γεγονός ότι οι χώρες διαφέρουν στη σειρά και τον τρόπο που εισάγουν τις βασικές έννοιες των ποσοστών (Price, Steinle, Stacey & Gvozdenko, 2014).

Ένα μοντέλο που χρησιμοποιείται για τη διδασκαλία των ποσοστών στο πλαίσιο της ολλανδικής προσέγγισης στη μαθηματική εκπαίδευσης, γνωστή ως Ρεαλιστικά Μαθηματικά (Realistic Mathematics Education, RME) είναι το μοντέλο της ράβδου (bar model) (Εικόνα 4). Το μοντέλο αρχικά χρησιμοποιείται για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα και στη συνέχεια γενικεύεται και γίνεται μοντέλο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πολλά προβλήματα (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003; Prediger & Pöhler, 2015).

Εκτός από το μοντέλο της ράβδου, με το οποίο θα ασχοληθούμε εκτενέστερα στη συνέχεια, υπάρχουν και άλλα μοντέλα για τη διδασκαλία των ποσοστών όπως η διπλή γραμμή ή ο πίνακας διπλής εισόδου.

Εικόνα 4: Μοντέλο της ράβδου (bar model) από την έρευνα της Van Den Heuvel-Panhuizen (2003)



Στη συνέχεια επικεντρώνουμε στις μεθόδους και στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων με ποσοστά, χωρίς ή με τη χρήση μοντέλων και εξετάζουμε τα χαρακτηριστικά τους.

1.3.1 Με εξίσωση

Οι μέθοδοι αυτές βασίζονται κατ' ουσίαν στο σχηματισμό εξίσωσης, η οποία στη συνέχεια επιλύεται με αλγοριθμικό τρόπο.

Στις πιο απλές μορφές προβλημάτων, η εξίσωση αφορά μια αναλογία. Η άγνωστη ποσότητα συμβολίζεται με x και στη συνέχεια κατασκευάζονται οι δύο λόγοι που ενυπάρχουν στην κατάσταση και εξισώνονται. Οι μαθητές οφείλουν να αναγνωρίσουν τον τύπο του προβλήματος ανάλογα με το ποια είναι η άγνωστη στο πρόβλημα (μέρος, ποσοστό ή όλη η ποσότητα), σχηματίζουν την αναλογία που αναπαριστά το συγκεκριμένο πρόβλημα και λύνουν κάνοντας χιαστί πολλαπλασιασμό (Πίνακας 1) (Flores et al.,2019; Cincinatus & Sheffet, 2016).

Για παράδειγμα, σ' ένα πρόβλημα εύρεσης μέρους, σε μία τάξη που έχει 40 μαθητές, το 35% από αυτούς μαθαίνουν Γαλλικά, πόσοι μαθητές μαθαίνουν Γαλλικά; Το x αναπαριστά τους μαθητές που μαθαίνουν Γαλλικά και η αναλογία που εκφράζει το πρόβλημα είναι : $\frac{35}{100} = \frac{x}{40}$

Στη συνέχεια κάνουμε χιαστί πολλαπλασιασμό και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.

Πίνακας 1: Τύπος προβλήματος, παράδειγμα, κατάλληλη αναλογία

Τύπος προβλήματος	Παράδειγμα	Αναλογία
Βρες το μέρος, όταν δίνονται όλη η ποσότητα και το ποσοστό	20% του 150 = x	$\frac{20}{100}=\frac{x}{150}$
Βρες το ποσοστό, όταν δίνονται όλη η ποσότητα και ένα μέρος	x% του 150 = 30	$\frac{x}{100}=\frac{30}{150}$
Βρες την αρχική ποσότητα, όταν δίνονται το ποσοστό και ένα μέρος	20% του x =30	$\frac{20}{100}=\frac{30}{x}$

Με εξίσωση μπορούν να αντιμετωπιστούν οι μορφές των τυπικών προβλημάτων που απαιτούν παραπάνω από ένα βήματα, αλλά και πιο σύνθετα προβλήματα που περιέχουν ποσοστά, για κάποια από τα οποία η επίλυση χωρίς εξίσωση θα ήταν δυσχερής (Dole et al., 1997).

Ένα παράδειγμα επίλυσης τυπικού προβλήματος με εξίσωση είναι το εξής: «Για ένα είδος με συντελεστή ΦΠΑ 23% πληρώνουμε 30€. Ποια είναι η αξία αυτού του είδους χωρίς ΦΠΑ;» Για την επίλυση αυτού του προβλήματος θέτουμε:
ως x την αξία του είδους χωρίς Φ.Π.Α και εκφράζουμε το πρόβλημα με εξίσωση:

$$x+\frac{23}{100}\cdot x=30$$

$$x+0.23x=30$$
$$1.23x=30$$
$$x=30:1,23$$
$$x\simeq 24,39$$

Ένα δεύτερο παράδειγμα είναι το εξής « Ο Γιάννης παίρνει χαρτζιλίκι 20€ την εβδομάδα και ο πατέρας του θέλει να αυξήσει το εβδομαδιαίο χαρτζιλίκι στο Γιάννη κατά 5%. Ποιό θα είναι το νέο εβδομαδιαίο χαρτζιλίκι;» (Ngu et al., 2014)
Με τη βοήθεια εξίσωσης το πρόβλημα λύνεται ως εξής:

x : το νέο χαρτζιλίκι

$$x=20+\frac{5}{100}\cdot 20$$

$$x = 20 + \frac{100}{100}$$

$$x = 20 + 1$$

$$x = 21€$$

Στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, τα προβλήματα μπορούν να επιλυθούν και χωρίς τη χρήση εξισώσεων. Στην περίπτωση πιο σύνθετων προβλημάτων, όμως, η χρήση εξισώσεων μπορεί να είναι καθοριστική, όπως για παράδειγμα στο εξής πρόβλημα: «Το άθροισμα δύο αριθμών είναι 464, ο ένας αριθμός είναι 32% μεγαλύτερος από τον άλλον, να βρεθούν οι αριθμοί» (Cincinatus & Sheffet ,2016)

Παρά το γεγονός ότι οι εξισώσεις είναι ένα ισχυρό εργαλείο που μπορεί να αντιμετωπίσει προβλήματα διαφόρων τύπων με μεγάλη αποτελεσματικότητα, η κατασκευή της εξίσωσης είναι μια απαιτητική διαδικασία, που προϋποθέτει ότι οι μαθητές έχουν αναγνωρίσει τις κατάλληλες ποσότητες και τις σχέσεις που τις συνδέουν και, επιπλέον, μπορούν να τις εκφράσουν συμβολικά (Dole et al, 1997)

1.3.2 Με απλή μέθοδο των τριών

Η απλή μέθοδος των τριών είναι μία διαδεδομένη μέθοδος για την επίλυση προβλημάτων με ποσοστά στην Ελλάδα και στην Κύπρο (Modestou & Gagatsis, 2009). Από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση δεν αναφέρεται η μέθοδος αυτή σε άλλες χώρες για την επίλυση προβλημάτων με ποσοστά. Στη μέθοδο αυτή, οργανώνονται οι πληροφορίες με ίδιο ή παρεμφερή τρόπο, όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις. Για παράδειγμα, ένα παντελόνι είχε αρχική τιμή 60€ και μας έκαναν έκπτωση 20%, ποια είναι η τελική τιμή;

Αρχική τιμή:100 $\longrightarrow$ Έκπτωση: 20
Αρχική τιμή:60 $\longrightarrow$ Έκπτωση: x

Στη συνέχεια, εφαρμόζεται μια συγκεκριμένη σειρά βημάτων, ως εξής: πολλαπλασιάζω τον αριθμό που είναι πάνω από το x με το αντεστραμμένο κλάσμα των άλλων δύο αριθμών (αυτός ο τρόπος αναφέρεται στο βιβλίο της ΣΤ΄ τάξης του

Δημοτικού). Η μέθοδος αυτή, δηλαδή, καταλήγει με έναν αλγοριθμικό τρόπο απευθείας στη λύση της εξίσωσης που προκύπτει από την αναλογία.

1.3.3 Με χρήση πίνακα διπλής εισόδου

Αυτή η μέθοδος διαφέρει από την προηγούμενη μόνο ως προς τον τρόπο αναπαράστασης, που βασίζεται στη χρήση πίνακα διπλής εισόδου, στον οποίο αναφέρονται ρητά οι εμπλεκόμενες ποσότητες. Από την άποψη αυτή, υποστηρίζει τους μαθητές στο να αναγνωρίσουν τις διαφορετικές ποσότητες και να οργανώσουν τις πληροφορίες και θεωρείται κατάλληλη και για μαθητές στο Δημοτικό, ενώ μπορεί να εφαρμοστεί για την επίλυση των τριών τυπικών προβλημάτων ποσοστών, αλλά και για πιο σύνθετα προβλήματα (Kachapova & Kachapov, 2012). Οι μαθητές κατασκευάζουν έναν πίνακα διπλής εισόδου, συμπληρώνουν τις δοσμένες πληροφορίες ,φτιάχνουν την αναλογία και λύνουν την εξίσωση που προκύπτει (Kachapova & Kachapov, 2012). Για παράδειγμα, η Ελένη είχε 80€ και ξόδεψε το 40% των χρημάτων της, πόσα χρήματα της έμειναν; Σχηματίζουμε τον διπλό πίνακα:

Ποσά	€	%
Χρήματα που είχε	80	100
Χρήματα που ξόδεψε	x	40

Σχηματίζουμε την αναλογία $\frac{80}{x} = \frac{100}{40}$, παίρνουμε τα χιαστί γινόμενα και λύνουμε την εξίσωση. Έτσι βρίσκουμε ότι η Ελένη ξόδεψε 32€, οπότε της έμειναν 80-32=48€. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να σχηματίσουμε τον εξής διπλό πίνακα και να λύσουμε με όμοιο τρόπο:

Ποσά	€	%
Χρήματα που είχε	80	100
Χρήματα που της έμειναν	x	100-40=60

1.3.4 Αναγωγή στη μονάδα, με υπολογισμό του 1%

Η μέθοδος αυτή εξυπηρετεί κατά κύριο λόγο όταν ζητείται το μέρος, επομένως θα τη χαρακτηρίζαμε στρατηγική. Συνίσταται στον υπολογισμό του 1% της δοσμένης ποσότητας και για ένα τυπικό πρόβλημα ποσοστών εύρεσης μέρους όπως, για παράδειγμα, να βρεθεί το 20% του 150, θα ακολουθούσαμε τα εξής βήματα: διαιρώ το δοσμένο αριθμό (150) με το 100 για να υπολογίσουμε το 1% του ποσού και πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με το 20 (De Corte et al., 2005).

Βήμα 1: υπολογίζω το 1%, 150:100=1.5

Βήμα 2: υπολογίζω το 20%, 1.5·20 =30

Εναλλακτικά, η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί και με το εξής σκεπτικό: Στα 100, το μέρος είναι 20. Στο 1, το μέρος είναι 20:100, δηλαδή 0,2. Επομένως, στα 150 το μέρος είναι 150x0,2 =30.

Η αναγωγή στη μονάδα είναι μια στρατηγική που επιτρέπει το «βαθμωτό» συλλογισμό (scalar reasoning), δηλ. την επεξεργασία απλών πολλαπλασιαστικών σχέσεων στο πλαίσιο μιας εκ των δύο εμπλεκόμενων ποσοτήτων και είναι προσβάσιμος στους μαθητές, ιδιαίτερα όταν οι αριθμοί είναι «βολικοί», οπότε και μπορούν να προσεγγίσουν το πρόβλημα προσθετικά (Van Dooren, Vamvakoussi, & Verschaffel, 2019).

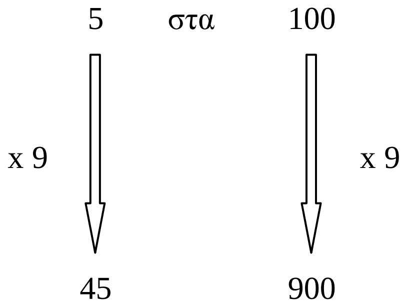
1.3.5 Στρατηγικές με βάση οικεία ποσοστά

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, όταν τα ποσοστά που εμφανίζονται σε ένα πρόβλημα είναι «οικεία» (25%, 50%, 75%), οι μαθητές διευκολύνονται σε μεγάλο βαθμό να επεξεργαστούν τις πληροφορίες που δίνονται στο πρόβλημα, να εκτιμήσουν, ή και να κάνουν ακριβείς υπολογισμούς. Κάτι που φαίνεται να διευκολύνει τους μαθητές είναι η άμεση μετατροπή των οικείων ποσοστών στα αντίστοιχα οικεία κλάσματα (1/4/, 1/2, 2/3). Οι μαθητές εφευρίσκουν τέτοιου είδους στρατηγικές, οι οποίες, σε ορισμένες χώρες, αποτελούν και αντικείμενο διδασκαλίας (De Corte et al., 2005). Για παράδειγμα, ι μαθητές στην Αγγλία μαθαίνουν να υπολογίζουν ποσοστά μετατρέποντας εύκολα ποσοστά (όπως το 10%, 20%, 25%, 50%) σε ισοδύναμα κλάσματα με αριθμητή το 1 (De Corte et al., 2005). Δηλαδή 10% $= \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$, 20% $= \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$, 25% $= \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$, 50% $= \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$. Έτσι αποκαλύπτεται με ποιον αριθμό πρέπει να διαιρέσεις για να βρεις το ποσοστό που ψάχνεις. Για παράδειγμα, αν ψάχνουμε το 20% του 50, κάνουμε 20% $= \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ οπότε τελικά θέλουμε να βρούμε το 1/5 του 50 και κάνουμε τη διαίρεση 50:5=10. Αυτή η στρατηγική είναι αποτελεσματική όταν τα ποσοστά που αναφέρονται στο πρόβλημα είναι οικεία και μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σαν τρόπος για να εκτιμήσουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα (Dole et al., 1997).

Μια άλλη στρατηγική που διδάσκονται οι μαθητές στην Αγγλία αναφέρεται ως «δίκτυο ποσοστών» (“percentage-web”) και βασίζεται στην ιδέα όλα τα ποσοστά σχετίζονται με το 10% και, άρα, μπορούν να εκφραστούν με βάση το 10% (De Corte et al., 2005). Για παράδειγμα το 20% είναι το διπλάσιο του 10%, οπότε διαιρούμε το ποσό με 10 και πολλαπλασιάζουμε με 2 για να βρούμε το 20%. Η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε πιο σύνθετους υπολογισμούς όπως 17.5% = 20% - 2.5% = (10% ·2) – (10% : 4).

1.3.6 Το σχήμα με βέλη (arrow scheme)

Η στρατηγική αυτή επίσης βασίζεται σε «βαθμωτές» σχέσεις, για κάθε μία από τις εμπλεκόμενες ποσότητες ξεχωριστά. Θα δώσουμε ένα παράδειγμα για τη μέθοδο αυτή στην περίπτωση που ψάχνουμε το 5% του 900 (De Corte et al., 2005). Η διαδικασία με την οποία σκεφτόμαστε φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Γίνεται φανερό ότι η στρατηγική αυτή βασίζεται στην αναγνώριση της σχέσης μεταξύ δύο διαφορετικών τιμών της μιας ποσότητας, και τη μεταφορά αυτής της σχέσης στην άλλη ποσότητα. Με άλλα λόγια, στο συγκεκριμένο παράδειγμα, πρέπει να αναγνωρίσει κανείς ότι το 900 είναι εννιαπλάσιο από το 100 και να συμπεράνει ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι το εννιαπλάσιο του 5.

Η στρατηγική αυτή μπορεί να εφαρμοστεί και σε προβλήματα όπου ψάχνουμε την αρχική ποσότητα και γνωρίζουμε ένα μέρος της. Για παράδειγμα, το 20% αντιστοιχεί σε 30 μαθητές, πόσοι είναι όλοι οι μαθητές;

	20%	είναι	30	
x 5	⇓		⇓	x 5
	100%		150	

Όπως είναι φανερό, οι αριθμοί που εμπλέκονται στην κατάσταση και οι σχέσεις μεταξύ τους είναι καθοριστικές για το αν μπορεί να εφαρμοστεί η συγκεκριμένη στρατηγική με ευκολία. Όταν ο τελεστής δεν είναι ακέραιος, για παράδειγμα, καθίσταται δυσχερής για τους μαθητές η εφαρμογή της στρατηγικής αυτής.

1.3.7 <u>Το μοντέλου της ράβδου</u>

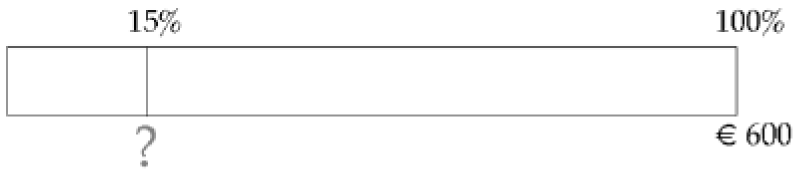
Πολλές μελέτες υποστηρίζουν ότι το μοντέλο της ράβδου μπορεί να υποστηρίξει μαθητές (και ειδικά εκείνους που παρουσιάζουν μεγάλες δυσκολίες) να αναπτύξουν μια βαθιά εννοιολογική κατανόηση των ποσοστών (Dennis et al., 2016; Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003; van Galen & van Eerde, 2013). Φαίνεται ότι το συγκεκριμένο μοντέλο διευκολύνει τους μαθητές να αναπαραστήσουν κατάλληλα τις σχέσεις μεταξύ των εμπλεκόμενων ποσοτήτων, ενώ δημιουργεί και δυνατότητες εκτίμησης, που λειτουργούν υποστηρικτικά και ως μέσο ελέγχου.

Η μελέτη των van Galen & van Eerde (2013) αναφέρει πως μπορούμε να λύσουμε το παρακάτω παράδειγμα με το συγκεκριμένο μοντέλο: Ένα ποδήλατο έχει αρχική τιμή 600$ και μας κάνουν έκπτωση 15%, ποια θα είναι η τελική τιμή του ποδηλάτου;

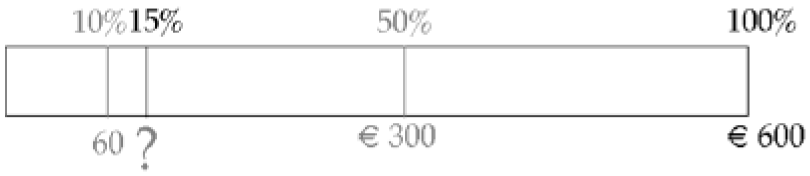
Αρχικά σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο και τοποθετούμε τις πληροφορίες του προβλήματος (Εικόνα 6). Στη συνέχεια οι μαθητές μπορούν να υπολογίσουν το 50%

ότι είναι 300$ και στη συνέχεια να βρουν ότι το 10% είναι 60%. Το πρώτο βήμα δεν οδηγεί κατευθείαν στην εύρεση του 15%, όμως με τη βοήθεια του 10% που είναι 60$, το 5% θα είναι 30$, οπότε η έκπτωση 15%=10%+5% αντιστοιχεί σε 60$+30$= 90$ (Εικόνα 7).

Εικόνα 6: Το μοντέλο της ράβδου με τις πληροφορίες που υπάρχουν στην εκφώνηση (Εικόνα από την μελέτη των van Galen & van Eerde, 2013)

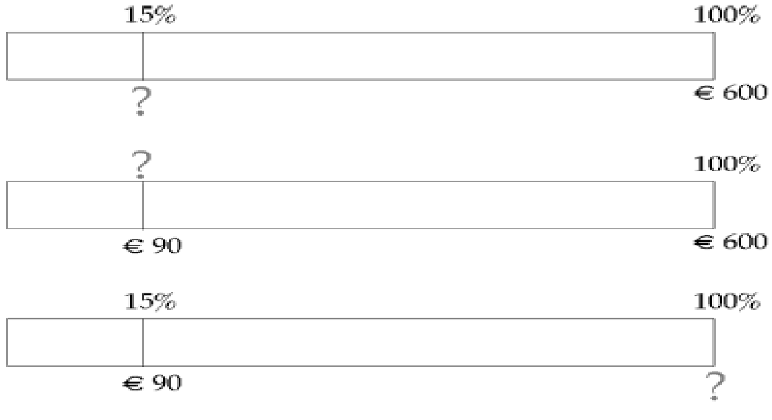


Εικόνα 7: Επίλυση προβλήματος με το μοντέλου της ράβδου (Εικόνα από την μελέτη των van Galen & van Eerde, 2013)



Με τη μέθοδο αυτή οι μαθητές μπορούν να λύσουν το πρόβλημα υπολογίζοντας το 1% (μια διαδικασία που περιγράψαμε πιο πάνω) (Εικόνα 8) (van Galen & van Eerde, 2013). Με το μοντέλου της ράβδου μπορούμε να λύσουμε και τα τρία τυπικά προβλήματα ποσοστών όπως φαίνεται στην Εικόνα 8.

Εικόνα 8: Το μοντέλο της ράβδου σε τρεις πιθανές διαφορετικές ερωτήσεις σε ένα πρόβλημα (Εικόνα από την μελέτη των van Galen & van Eerde, 2013)



1.3.8 <u>Αναγνώριση προβλήματος και κανόνας</u>

Έχει παρατηρηθεί ότι συχνά οι μαθητές δεν υιοθετούν (γενικές) μεθόδους αντιμετώπισης των τυπικών προβλημάτων με ποσοστά, αλλά φαίνεται να εφαρμόζουν να διαφορετικούς κανόνες, ανάλογα με τον τύπο του προβλήματος (Dole et al., 1997).

Στα προβλήματα όπου ζητείται το ποσοστό ενός αριθμού μπορούμε να κάνουμε πολλαπλασιασμό του ποσοστού με τον αριθμό (Cincinatus & Sheffet, 2016). Τα ποσοστά είναι πολλαπλασιαστική σχέση όπως έχουμε αναφέρει. Για παράδειγμα, μια βιβλιοθήκη έχει 2500 βιβλία και το 30% των βιβλίων είναι ξενόγλωσσα, πόσα είναι τα ξενόγλωσσα βιβλία;

Για να βρούμε τα ξενόγλωσσα βιβλία θα κάνουμε:

$$\frac{30}{100} \cdot 2500 = 750$$

Η μέθοδος αυτή είναι μέθοδος με την οποία βρίσκουμε την απάντηση σ' ένα βήμα, με απευθείας πολλαπλασιασμό.

Οι μαθητές φαίνεται αρχικά να αναγνωρίζουν ποιο είναι το ζητούμενο του προβλήματος («εύρεσης μέρους», «εύρεσης όλου», «εύρεσης ποσοστού»). Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουν τον αριθμό με το κλάσμα που αντιστοιχεί στο ποσοστό για προβλήματα «εύρεσης μέρους», διαιρούν τον αριθμό με το ποσοστό για προβλήματα «εύρεσης όλου», διαιρούν τους αριθμούς και εκφράζουν τον δεκαδικό σαν ποσοστό για προβλήματα «εύρεσης ποσοστού». Παρακάτω δίνονται παραδείγματα για κάθε τύπο προβλήματος.

Παράδειγμα 1: Μια τηλεόραση έχει αρχική τιμή 300€ και πωλείται με έκπτωση 15%, ποια είναι η τελική τιμή της τηλεόρασης;

Λύση: (πρόβλημα «εύρεσης μέρους) Η έκπτωση θα είναι:

$$300 \cdot \frac{15}{100} = 45$$

Η τελική τιμή 300 – 45= 255€

Παράδειγμα 2: Μια τηλεόραση είχε 15% και την αγοράσαμε τελικά 255€. Ποια ήταν η αρχική τιμή της τηλεόρασης;

Λύση: (πρόβλημα «εύρεσης όλου») Η έκπτωση θα είναι:

$$255 : \frac{15}{100} = 45$$

Η αρχική τιμή 255 + 45= 300€

Παράδειγμα 3: Μια τηλεόραση είχε αρχική τιμή 300€ και τελικά την αγοράσαμε 255€. Ποιο είναι το ποσοστό της έκπτωσης που μας έκαναν;

Λύση: (πρόβλημα «εύρεσης ποσοστού»)

Βρίσκω την έκπτωση:

300 – 255= 45€

Σχηματίζω το κλάσμα:

$$\frac{45}{300} = 45 : 300 = 0.15 = 15\%$$

Το ποσοστό της έκπτωσης ήταν 15%.

Η στρατηγική αυτή στηρίζεται στην απομνημόνευση κανόνων. Η απομνημόνευση τέτοιων κανόνων οδηγεί σε υψηλά σκορ επίλυσης προβλημάτων με ποσοστά, όμως δεν αντανακλά την πραγματική ικανότητα των μαθητών να επιλύουν προβλήματα ποσοστών (Modestou & Gagatsis, 2009). Έκθεση του National Research Councill (2001) αναφέρει ότι οι μαθητές απομνημονεύουν κανόνες για να χειριστούν σύμβολα χωρίς να συνδέουν τους κανόνες αυτούς με την εννοιολογική κατανόηση (Flores et al., 2019).

1.4 Οφέλη χρήσης πολλαπλών στρατηγικών

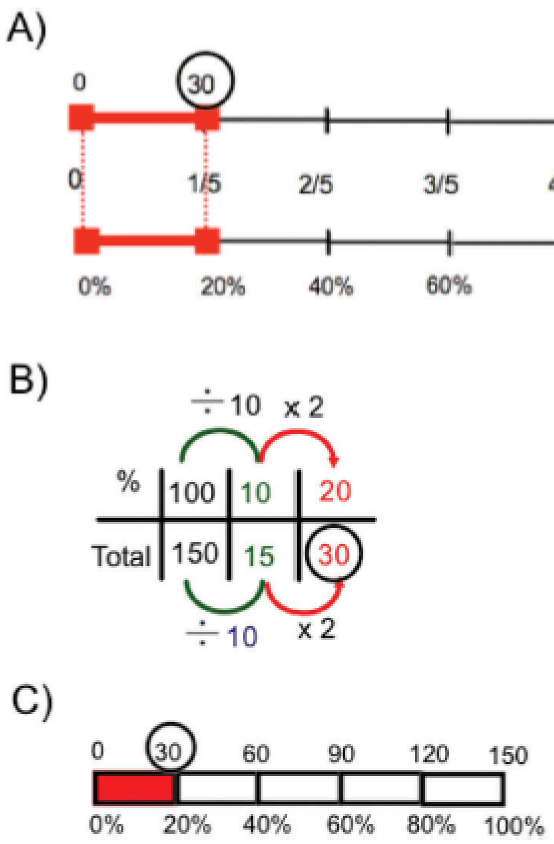
Από την βιβλιογραφική ανασκόπηση, φαίνεται ξεκάθαρα ότι υπάρχουν πολλοί τρόποι και διαδικασίες για να λύσουμε ένα πρόβλημα ποσοστών, καθώς και διαφορετικά μοντέλα. Εν γένει, η ταυτόχρονη χρήση διαφορετικών προσεγγίσεων και μοντέλων θεωρείται ότι βοηθά τους μαθητές να αναπτύξουν βαθιά εννοιολογική κατανόηση (De Corte, et al., 2005).

Πολλές μελέτες έχουν γίνει για να δούμε τα οφέλη κάθε μεθόδου για τους μαθητές ώστε να καταφέρουν να αναπτύξουν και εννοιολογική και διαδικαστική γνώση στα ποσοστά ώστε να μπορούν να λύνουν προβλήματα ποσοστών. Τα αποτελέσματα είναι, συχνά, αντικρουόμενα.

Για παράδειγμα, η έρευνα των Dennis, Knight και Jerman, (2016) έδειξε ότι ένα σχηματικό μοντέλο (όπως το μοντέλο της ράβδου) προάγει τη βελτίωση των μαθητών γυμνασίου με μαθησιακές δυσκολίες στα προβλήματα ποσοστών αν και χρειάστηκε αρκετός χρόνος για να φανεί βελτίωση. Παρόμοια, οι Van Den Heuvel-Panhuizen (2003) και van Galen & van Eerde (2013) αναφέρουν οφέλη από τη χρήση του μοντέλου της ράβδου, όπως και οι Kachapova & Kachapov (2012) για τη χρήση πίνακα διπλής εισόδου.

Αντίθετα, οι Flores, Inan, Han & Koontz (2019) σύγκριναν δύο τρόπους διδασκαλίας ποσοστών, με πολλαπλές αναπαραστάσεις (Εικόνα 9) και με πιο συμβολικές αναπαραστάσεις και βρήκαν ότι οι μαθητές που είχαν διδαχθεί τα ποσοστά με πιο συμβολικές αναπαραστάσεις και παραδοσιακούς κανόνες παρουσίασαν καλύτερη επίδοση. Παρόμοια, οι Ngu et al. (2014) στη μελέτη τους σύγκριναν τρεις μεθόδους επίλυσης προβλημάτων ποσοστών (αναγωγή στη μονάδα, με μοντέλο της ράβδου και με εξισώσεις) και κατέληξαν ότι οι μαθητές κάνουν λιγότερα λάθη όταν η μέθοδος επίλυσης είναι με τη βοήθεια εξίσωσης σε σχέση με τις άλλες δύο μεθόδους.

Εικόνα 9: Πολλαπλές αναπαραστάσεις του 20% του 150 από την έρευνα των Flores et al (2019).



Σ΄ αυτό που συμφωνούν όλες οι μελετητές είναι ότι η επίλυση προβλημάτων με πολλές εναλλακτικές στρατηγικές βοηθά τους μαθητές να αναπτύξουν και τις εννοιολογικές και τις διαδικαστικές τους γνώσεις (De Corte et al., 2005; Flores et al., 2019 Jacobs, 2010; Jitendra & Star, 2012; Modestou & Gagatsis, 2009; Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003). Η χρήση μιας μόνο στρατηγικής (π.χ. αναγωγή στη μονάδα στο Δημοτικό και απευθείας πολλαπλασιασμός στο Γυμνάσιο) χωρίς την κατανόηση της πολλαπλασιαστικής σχέσης των ποσοστών εμποδίζει τους μαθητές να αναπτύξουν βαθιά κατανόηση (Modestou & Gagatsis, 2009). Η γνώση των ποσοστών είναι συχνά άκαμπτη και στηρίζεται σε κανόνες (Koay ,1998, όπως αναφ στο Baratta et al, 2010). Οι μαθητές χρησιμοποιούν κανόνες χωρίς να συνδέσουν τους κανόνες αυτούς με την εννοιολογική κατανόηση (Jitendra, Harwell, Dupuis, Lein, Simonson & Slater, 2015). Η μηχανική χρήση διαδικασιών κάνει τους μαθητές πιο επιρρεπείς σε λάθη (Modestou & Gagatsis, 2009). Είναι σημαντικό να χρησιμοποιούνται πολλαπλές αναπαραστάσεις και οι μαθητές να λύνουν ποικίλα προβλήματα ποσοστών ώστε να καταλάβουν πώς συνδέονται οι αναπαραστάσεις και να συνδέσουν τα ποσοστά με άλλα κεφάλαια των Μαθηματικών (Flores et al., 2019).

Οι Jitendra et al. (2009), Jitendra & Star (2012), Jitendra, Harwell, Dupuis, Karl, Lein, Simonson, & Slater (2015) και Jitendra, Harwell, Dupuis & Karl, (2017) έχουν δείξει στις έρευνες τους ότι το schema-based instruction (SBI) βελτιώνει την ικανότητα των μαθητών να λύνουν προβλήματα ποσοστών και προβλήματα αναλογικής σκέψης (proportion problems). Το SBI δίνει έμφαση στη δομή των προβλημάτων, χρησιμοποιεί σχηματικά διαγράμματα για να αναπαραστήσει πληροφορίες του προβλήματος, παρέχει ρητή διδασκαλία επίλυσης προβλημάτων και επικεντρώνεται στην ευέλικτη χρήση πολλαπλών στρατηγικών για τη λύση των προβλημάτων (Jitendra & Star; 2012; Jitendra et al., 2015).

Οι μαθητές που έχουν κατανοήσει την έννοια των ποσοστών δεν στηρίζονται σε έναν κανόνα (φόρμουλα) για να λύσουν ένα πρόβλημα ποσοστών, χρησιμοποιούν πολλές στρατηγικές, κάνουν εκτιμήσεις του αποτελέσματος (χρησιμοποιώντας οικεία ποσοστά 50%, 25%, 10%) (Dole et al. 1997). Αντίθετα, οι μαθητές που παρουσιάζουν έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης των ποσοστών προσπαθούν να λύσουν το πρόβλημα με κάποιον κανόνα (φόρμουλα) και στρατηγικές τους είναι περιορισμένες (Dole et al. 1997). Στην έρευνα των Baratta et al. (2010) στην οποία έδιναν διάφορους τρόπους για να λύσουν τα προβλήματα ποσοστών, οι μαθητές καλούνταν να αποφασίσουν ποιοι τρόποι είναι σωστοί και ποιοι λάθος. Πολλοί μαθητές αναγνώριζαν έναν σωστό τρόπο, όμως αδυνατούσαν να βρουν ποιοι άλλοι τρόποι από τους δοσμένους καταλήγουν στο σωστό αποτέλεσμα. Ακόμα και οι φοιτητές Μαθηματικών δεν μπορούσαν να αναγνωρίσουν τις σωστές στρατηγικές για την επίλυση ενός προβλήματος με ποσοστά στην έρευνα των Cincinatus & Sheffet (2016).

2. ΜΕΘΟΔΟΣ

2.1 Σκοπός της έρευνας

Στόχος της έρευνας αυτής είναι να διερευνηθούν οι εννοιολογικές δυσκολίες και οι στρατηγικές μαθητών γυμνασίου σε προβλήματα ποσοστών. Τα ερευνητικά ερωτήματα που διερευνώνται είναι: α) Με ποιους τρόπους προσεγγίζουν οι μαθητές τυπικά και μη τυπικά προβλήματα ποσοστών; β) Κατά πόσο είναι σε θέση να επιλύσουν προβλήματα με ποσοστά με εναλλακτικές μεθόδους ή στρατηγικές; γ) Τι επίδραση έχουν στις αποκρίσεις τους διαφορετικοί τύποι προβλήματος; δ) Ποιες εννοιολογικές δυσκολίες αποκαλύπτονται από τα λάθη των μαθητών;

2.2 Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 9 μαθητές γυμνασίου, Α΄ και Β΄ τάξης και διαφορετικής σχολικής επίδοσης. Το δείγμα μας αποτελείται από 6 κορίτσια και 3 αγόρια. Οι μαθητές φοιτούν σε διαφορετικά γυμνάσια του Νομού Καστοριάς και είχαν διαφορετικούς καθηγητές στο σχολείο. Σύμφωνα με το τρέχον αναλυτικό πρόγραμμα, στην Α΄ Γυμνασίου ολοκληρώνεται η διδασκαλία των ποσοστών, επομένως οι μαθητές αυτοί είχαν, κατ' αρχήν, τις απαραίτητες γνώσεις για την επίλυση προβλημάτων με ποσοστά.

2.3 Ερευνητικό Εργαλείο

Για τις ανάγκες της έρευνας σχεδιάστηκε ένα εργαλείο αποτελούμενο από 14 προβλήματα. Τα προβλήματα του τεστ βασίζονται σε τεστ άλλων ερευνών που βρήκαμε από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση. Τα προβλήματα του τεστ χωρίστηκαν σε 4 βασικές κατηγορίες. Ο διαχωρισμός των ερωτήσεων σε αυτές τις κατηγορίες έγινε με βάσει τις τέσσερις κατηγορίες που προσδιόρισαν οι Stacey, Steinle, Price & Gvozdenko στα "smart test" (Specific Mathematics Assessments that Reveal Thinking), όπως περιγράφονται στο άρθρο των Baratta et al (2010). Πρόκειται για ένα online διαγνωστικό εργαλείο (www.smartvic.com) που αξιολογεί την κατανόηση των μαθητών σε διάφορα κεφάλαια των Μαθηματικών. Οι τέσσερις κατηγορίες είναι:

Α) προβλήματα περιγραφής μεγέθους και ισοδυναμίας ποσοστών με κλάσματα, Β) τυπικά προβλήματα ποσοστών («εύρεση μέρους», «εύρεση όλου», «εύρεση ποσοστού»), Γ) προβλήματα όπου η μονάδα αναφοράς διαφέρει, Δ) ποσοστιαίες αυξήσεις ή μειώσεις.

Στην κατηγορία Α΄, περιλαμβάνονται δύο προβλήματα (Ε1 και Ε2, βλέπε Εικόνα 9 και Εικόνα 10, αντίστοιχα) με τρία και δύο υποερωτήματα το καθένα (Ε1α , Ε1β, Ε1γ και Ε2α, Ε2β αντίστοιχα). Το Ε1 προέρχεται από το άρθρο των Van Den Heuvel-Panhuizen, (2003). Στο Ε1, οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν τα οικεία ποσοστά 50%, 25% και 100% επί του πλήθους ενός πεπερασμένου διακριτού συνόλου (8 λουλούδια) που αναπαρίστανται εικονικά. Μια καλή στρατηγική για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού είναι η χρήση των αντίστοιχων κλασμάτων. Αναμένεται οι μαθητές να μετατρέψουν τα ποσοστά σε κλάσματα, (π.χ. 50%=1/2), ώστε να δούμε αν οι μαθητές έχουν κάνει σύνδεση κάποιων βασικών ποσοστών με κλάσματα. Το πρόβλημα Ε2 είναι ένα πρόβλημα εμπεριέχεται στα smart tests από την έρευνα των Price et al. (2014).

Εικόνα 10: Πρόβλημα Ε1

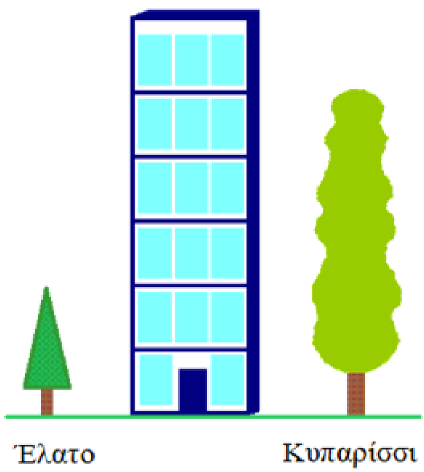
Στο Ε2, οι μαθητές καλούνται να εκφράσουν ένα μήκος Α ως ποσοστό ενός μήκους Β, και το αντίστροφο. Τα δύο μήκη αναπαρίστανται εικονικά, ενώ ένα ενδιάμεσο διακριτοποιημένο μήκος χρησιμεύει ως «μέτρο». Πιο συγκεκριμένα, δίνονται δύο δένδρα διαφορετικού ύψους (έλατο και κυπαρίσσι) και ένα κτίριο στη μέση το οποίο είναι χωρισμένο σε έξι ίσα μέρη. Στο υποερώτημα Ε2α οι μαθητές καλούνται να εκφράσουν το ύψος του ελάτου ως ποσοστό του ύψους του κυπαρισσιού, σκοπός της ερώτησης αυτής είναι να ελέγξουμε αν οι μαθητές μπορούν να εκτιμήσουν και να υπολογίσουν μία ποσότητα ως ποσοστό μιας μεγαλύτερης ποσότητας. Στο Ε2β, οι μαθητές καλούνται να κάνουν το αντίστροφο, να βρουν τι ποσοστό είναι το ύψος του κυπαρισσιού σε σχέση με το ύψος του ελάτου, σκοπός της ερώτησης αυτή είναι να δούμε αν μπορούν να εκτιμήσουν και να υπολογίσουν μία ποσότητα ως ποσοστό μιας μικρότερης ποσότητας. Μια στρατηγική για να λύσουν το Ε2 είναι με χρήση κλασμάτων, δηλαδή να εκφράσουν τα μήκη ως κλάσματα και στη συνέχεια να τα μετατρέψουν σε ισοδύναμα ποσοστά. Για το Ε2α ,από το σχήμα παρατηρούμε ότι το έλατο είναι το 2/5 του κυπαρισσιού, οπότε $\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 20}{5\cdot 20}=\frac{40}{100}=40\%$, εναλλακτικά 2/5=2:5=0,4=40%. Για το Ε2β, όπου ζητείται το αντίστροφο, μπορούμε να σκεφτούμε το αντίστροφο κλάσμα 5/2 και στη συνέχεια να το μετατρέψουμε σε ποσοστό $\frac{5}{2}=\frac{5\cdot 50}{2\cdot 50}=\frac{250}{100}=250\%$ ή 5/2=5:2 =2.5=250% Διαφορετικά θα μπορούσαμε παρατηρώντας το σχήμα να δούμε ότι το κυπαρίσσι είναι υπερδιπλάσιο από το έλατο και να καταλήξουμε στο 250%.

Εικόνα 11: Πρόβλημα Ε2

2. Δύο δένδρα μεγαλώνουν δίπλα σ΄ ένα ψηλό κτίριο.

α) Το ύψος του έλατου είναι περίπου το …% του ύψους του κυπαρισσιού.

β)Το ύψος του κυπαρισσιού είναι περίπου το ….% του ύψους του έλατου



Η κατηγορία Β΄ αφορά τα τρία είδη τυπικών προβλημάτων με ποσοστά: «εύρεση μέρους», «εύρεση ποσοστού», «εύρεση όλου». Αυτή η κατηγορία περιλαμβάνει τα προβλήματα Ε3, Ε4 και Ε5 (Πίνακας 1). Σ' όλα τα προβλήματα επιλέξαμε να βάλουμε «εύκολα» νούμερα και ποσοστά ώστε να φανεί ξεκάθαρα ποιο/α είδη προβλημάτων είναι αυτά που οι μαθητές παρουσιάζουν μεγαλύτερη δυσκολία. Επίσης προσπαθήσαμε τα προβλήματα να είναι οικεία στους μαθητές και να μην περιέχουν έννοιες (όπως ο Φ.Π.Α) που μπορεί να μην καταλαβαίνουν. Στην ερώτηση 3 οι μαθητές πρέπει να υπολογίσουν το 30% του 80 σ' ένα λεκτικό πρόβλημα. Στο έργο 4 δίνεται ότι το 10% αντιστοιχεί σε 40 κρούσματα και πρέπει να βρούμε πόσα είναι τα συνολικά κρούσματα (δηλαδή το 100%). Στο έργο 5 οι μαθητές καλούνται να βρουν τι ποσοστό είναι οι 8 μαθητές στους 40. Τα προβλήματα αυτά μπορούν να λυθούν με ποικίλους τρόπους όπως αναφέραμε στο θεωρητικό πλαίσιο. Στόχος των προβλημάτων είναι να δούμε αν οι μαθητές γνωρίζουν μία τουλάχιστον ή/και περισσότερες διαδικασίες/στρατηγικές για να λύσουν κάθε τύπο προβλήματος.

Πίνακας 1: Προβλήματα Ε3, Ε4, Ε5 του τεστ

Προβλήματα Β΄ κατηγορίας	
Ε3	Σ' ένα σχολείο με 80 μαθητές, το 30% των μαθητών παίζουν τέννις. Πόσοι μαθητές παίζουν τέννις;
Ε4	Χθες τα κρούσματα κορονοϊού στην Καστοριά ήταν 40, τα οποία αποτελούν το 10% των συνολικών κρουσμάτων σ' όλη την Ελλάδα. Πόσα ήταν τα συνολικά κρούσματα κορονοϊού που καταγράφηκαν χθες σ' όλη τη χώρα;
Ε5	.Ένα σχολείο έχει 40 μαθητές, οι 8 από αυτούς παίζουν μπάσκετ. Τι ποσοστό των μαθητών παίζουν μπάσκετ;

Στην κατηγορία Γ΄ περιλαμβάνονται προβλήματα όπου η μονάδα αναφοράς διαφέρει. Τα προβλήματα Ε6, Ε7, Ε8, Ε9, Ε10 του περιλαμβάνονται στην κατηγορία αυτή, έχουν στόχο να ερευνήσουν τις εννοιολογικές γνώσεις των μαθητών στα ποσοστά. Με το Ε6 (Πίνακας 2) θέλουμε να εξετάσουμε αν είναι αντιληπτό από τους μαθητές ότι τα ποσοστά αναφέρονται πάντα σε «κάτι», αλλιώς δεν έχουν νόημα. Το πρόβλημα αυτό έχει βασιστεί από την παρακάτω ερώτηση που βρήκαμε στην πρόταση διδασκαλίας (Teaching for Abstraction) των White & Mitchelmore (2005): Ο Άλφρεντ έχασε το 50% των χρημάτων του. Κυκλώστε τι πιστεύετε ότι θα ήταν χειρότερο για τον Άλφρεντ, να είχε αρχικά: α) 1$, β) 10$, γ) 50$, δ) 100$, ε) το αρχικό ποσό δεν παίζει ρόλο. Στο Ε6 , οι μαθητές καλούνται να αποφασίσουν αν με τα δεδομένα της άσκησης μπορούν να βρουν ποιό από τα δύο κορίτσια ξόδεψε περισσότερα χρήματα. Στο πρόβλημα δεν δίνονται τα χρήματα που είχε το κάθε κορίτσι στη διάθεση του και συνεπώς δεν μπορούμε να αποφανθούμε ποιο κορίτσι ξόδεψε τα περισσότερα χρήματα.

Στο Ε7 (Πίνακας 2), οι μαθητές πρέπει να επιλέξουν ποια είναι η πιο συμφέρουσα έκπτωση (μια έκπτωση 20%, οι διαδοχικές εκπτώσεις της τάξης του 10% , δεν έχει διαφορά). Η ερώτηση αύτη (με μικρές διαφοροποιήσεις) υπήρχε στο τεστ της έρευνας των Ngu et al. (2014) και μάλιστα ήταν η ερώτηση με την χειρότερη επίδοση των μαθητών. Οι ποσοστιαίες αυξήσεις/μειώσεις δεν έχουν γραμμικό χαρακτήρα και στόχος του Ε7 είναι να ελέγξουμε αν οι μαθητές το κατανοούν αυτό. Δηλαδή, μια έκπτωση 20% και οι διαδοχικές εκπτώσεις 10% διαφέρουν, ενώ στα αριθμητικά προβλήματα μια έκπτωση 20€ είναι το ίδιο με δύο διαδοχικές εκπτώσεις των 10€. Η δεύτερη έκπτωση 10% δεν αναφέρεται στην αρχική τιμή (210€) της κάμερας αλλά στην μειωμένη τιμή που προκύπτει από την πρώτη έκπτωση 10%, οπότε η έκπτωση 20% είναι πιο συμφέρουσα διότι αναφέρεται στην αρχική τιμή και θα προκύψει μεγαλύτερη έκπτωση σε € . Οι μαθητές αναμένεται είτε να σκεφτούν με την παραπάνω λογική είτε να υπολογίσουν αναλυτικά τι θα συμβεί σε κάθε περίπτωση και να διαπιστώσουν ότι η πιο συμφέρουσα είναι η έκπτωση 20%.

Το πρόβλημα Ε8 (Πίνακας 2) είναι παρόμοιας λογικής με το Ε7. Η ερώτηση αυτή υπήρχε στο τεστ της έρευνας των Jitendra & Star (2012) (με τη διαφορά ότι οι επιλογές που έδινε ήταν συγκεκριμένες τιμές για το μισθό). Στόχος και αυτής της ερώτησης είναι να δούμε κατά πόσο οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι οι ποσοστιαίες αυξήσεις/μειώσεις δεν είναι όπως οι αριθμητικές. Η σωστή απάντηση στο Ε8 είναι η β διότι η αύξηση 10% αναφέρεται στον μειωμένο κατά 10% μισθό, δηλαδή στο 900. Με άλλα λόγια η μονάδα αναφοράς της μείωσης και της μεταγενέστερης αύξησης δεν είναι ίδια. Στο πρόβλημα αυτό, ο μισθός είναι 1000€ που αρκετά εύκολος για υπολογισμούς , (σε σχέση με το 210 του Ε7) και ίσως οι μαθητές να αντιληφθούν πιο εύκολα τη διαφορά στη μονάδα αναφοράς.

Το πρόβλημα Ε9 (Πίνακας 2) είναι βασισμένο σε μία από τις ερωτήσεις της έρευνας των White et al. (2007). Με το Ε9 θέλουμε να εξετάσουμε αν οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη διαφορά σε μια ποσοστιαία έκπτωση και σε μια ποσοτική μείωση της αρχικής τιμής. Θέλουμε να ελέγξουμε αν οι μαθητές θα συγκρίνουν (λανθασμένα) τις δύο μειώσεις σαν απόλυτους αριθμούς (δηλαδή 8<10) ή θα δώσουν σημασία στο σύμβολο %. Η αρχική τιμή επιλέξαμε να είναι εύκολος αριθμός, το ίδιο και το ποσοστό άστε να μπορούν με εύκολους υπολογισμούς (ακόμα και νοερούς) να βρουν το 8% του 150.

Το Ε10 (Πίνακας 2) είναι ένα πρόβλημα που βρήκαμε στο άρθρο των De Corte et al. (2005) και στόχο έχει να εντοπίσει αν οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι τα ποσοστά δεν μεταβάλλονται γραμμικά σε σχέση με το μέγεθος της ποσότητας. Συγκεκριμένα, όταν διπλασιάσουμε την ποσότητα (σε γραμμάρια) του γιαουρτιού θα διπλασιαστεί η ποσότητα των φρούτων σε γραμμάρια, όμως το ποσοστό των φρούτων θα παραμείνει 11% και στη μεγάλη συσκευασία. Η εκφώνηση ζητάει το ποσοστό των φρούτων στη μεγάλη συσκευασία και όχι την ποσότητα των φρούτων σε γραμμάρια.

Πίνακας 2: Προβλήματα Ε6, Ε7, Ε8, Ε9, Ε10 του τεστ

Προβλήματα Γ΄ κατηγορίας	
Ε6	Η Μαρία και η Στέλλα πήγαν για ψώνια. Η Μαρία ξόδεψε το 50% των χρημάτων της, ενώ η Στέλλα ξόδεψε το 90% των χρημάτων της. Μπορούμε να βρούμε ποια ξόδεψε περισσότερα χρήματα; Αιτιολογείστε.
Ε7	Μια ψηφιακή κάμερα κοστίζει 210€. Διαλέξτε τι είναι σωστό από τα παρακάτω: α. συμφέρει καλύτερη μια έκπτωση 20% β. είναι καλύτερη μια έκπτωση 10% και μετά μια ακόμα 10% γ. είναι το ίδιο είτε το α είτε το β Αιτιολογείστε.
Ε8	Ο Κώστας είχε μισθό 1000€. Όμως ο μισθός του μειώθηκε κατά 10%.Μετά από δύο μήνες αυξήθηκε κατά 10%. Ποιος είναι ο μισθός του Κώστα? α) είναι 1000 β) λιγότερο από 1000 γ) περισσότερο από 1000
Ε9	Ο Μάρκος θέλει να αγοράσει καινούργιο κινητό. Η αρχική τιμή του είναι 150€. Του έδωσαν δύο επιλογές, να του κάνουν έκπτωση 8% ή να του μειώσουν την τιμή κατά 10€. Τι να επιλέξει; Αιτιολογείστε.
Ε10	Σ΄ ένα γιαούρτι με φρούτα των 150γρ. βλέπουμε στα συστατικά του ότι περιέχει 11% φρούτα. Το ίδιο γιαούρτι στη μεγαλύτερη συσκευασία των 300γρ., τι ποσοστό φρούτων θα περιέχει;

Στην κατηγορία Δ΄ περιλαμβάνονται τα προβλήματα Ε11, Ε12, Ε13, Ε14 και αναφέρονται σε ποσοστιαίες αυξήσεις/μειώσεις μικρότερες, μεγαλύτερες ή ίσες του 100%. Σε όλα τα προβλήματα επιλέξαμε εύκολους αριθμούς και ποσοστά, καθώς δεν θέλαμε οι μαθητές να αναλωθούν σε δύσκολους αριθμητικούς υπολογισμούς και αυτό να τους αποπροσανατολίσει από την επίλυση των προβλημάτων.

Το Ε11 (Πίνακας 3) είναι ένα κλασικό πρόβλημα όπου δίνεται η αρχική τιμή και το ποσοστό της έκπτωσης και ψάχνουμε την τελική τιμή του προϊόντος. Για την επίλυση του μπορούμε να βρούμε αρχικά την έκπτωση και στη συνέχεια να την αφαιρέσουμε από την αρχική τιμή, δηλαδή $20/100 \cdot 40 = 8$€ (την έκπτωση μπορούμε να την υπολογίσουμε και με διάφορες άλλες στρατηγικές), οπότε η τελική τιμή θα είναι $40-8 = 32$€. Μια άλλη στρατηγική είναι να σκεφτούμε ότι η τελική τιμή είναι το $100\%-20\% = 80\%$ της αρχικής τιμής και να υπολογίσουμε το 80% του 40 που είναι 32€.

Το Ε12 (Πίνακας 3) είναι ένα επίκαιρο πρόβλημα στο οποίο η ποσοστιαία αύξηση είναι μεγαλύτερη του 100%. Επιλέξαμε το πρόβλημα αυτό να έχει ιδιαίτερα εύκολα νούμερα (όπως το 200) για να εστιάσουμε αν οι μαθητές θα καταφέρουν να επιλύσουν ένα πρόβλημα όπου εμφανίζεται ποσοστό μεγαλύτερο του 100%. Οι μαθητές είτε μπορούν να υπολογίσουν αρχικά την αύξηση (με διάφορους τρόπους που έχουμε αναλύσει στο θεωρητικό πλαίσιο) και στη συνέχεια να την προσθέσουν στο 200: $120/100 \cdot 200 = 240$, $200+240=440$ τα συνολικά κρούσματα, είτε απευθείας να βρουν ότι τα συνολικά κρούσματα είναι το $120\%+100\%=220\%$ του 200 οπότε $220/100 \cdot 200 = 440$. Εναλλακτικά θα μπορούσαν να εργαστούν και με δεκαδικούς, δηλαδή $120\%=1{,}2$ και έπειτα $1{,}2 \cdot 200=240$, $200+240=440$ τα συνολικά κρούσματα κορονοϊού.

Στα τελευταία δύο προβλήματα Ε13 και Ε14 (Πίνακας 3) του τεστ οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν το ποσοστό έκπτωσης και αύξησης, αντίστοιχα. Στο Ε13 το ζητούμενο ποσοστό είναι μικρότερο από 100% (και συγκεκριμένα 10%), ενώ στο Ε14 το ζητούμενο ποσοστό είναι 100%. Για τον υπολογισμό των ζητούμενων ποσοστών οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν πολλούς διαφορετικούς τρόπους όπως έχουμε περιγράψει αναλυτικά. Τα νούμερα και σε αυτά τα προβλήματα είναι απλά για να διευκολύνονται οι υπολογισμοί.

Πίνακας 3: Προβλήματα Ε11, Ε12, Ε13, Ε14

Προβλήματα Δ΄ κατηγορίας	
Ε11	Ένα ζευγάρι αθλητικά παπούτσια είχε αρχική τιμή 40€ και μας έκαναν έκπτωση 20%.Πόσο θα πληρώσουμε τελικά;
Ε12	Χθες τα κρούσματα κορονοϊού στην Ελλάδα ήταν 200. Σήμερα αυξήθηκαν κατά 120% σε σχέση με χθες. Πόσα είναι τα κρούσματα κορονοϊού σήμερα;
Ε13	Ένα είδος με αρχική αξία 300 € , το αγοράσαμε τελικά 270 €. Ποιο είναι το ποσοστό της έκπτωσης που μας έγινε;
Ε14	Η τιμή ενός αντισηπτικού χεριών πριν την πανδημία ήταν 2€. Στην πανδημία η τιμή του ίδιου αντισηπτικού αυξήθηκε και πωλούνταν 4€. Ποιο είναι το ποσοστό της αύξησης της τιμής του αντισηπτικού;

2.4 Διαδικασία

Οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν σ' ένα τεστ και στη συνέχεια να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους για τις απαντήσεις στον ερευνητή. Στην συνέχεια, οι μαθητές ρωτήθηκαν αν μπορούν να λύσουν τα προβλήματα και με εναλλακτικούς τρόπους. Οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν μέσω Skype λόγω της πανδημίας του κορονοϊού. Κάθε συνέντευξη διήρκησε περίπου μία ώρα. Οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν το καλοκαίρι του 2021. Οι μαθητές δεν είχαν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν κομπιουτεράκι. Οι απαντήσεις των μαθητών θεωρήθηκαν σωστές όταν έβρισκαν την σωστή απάντηση και μπορούσαν να την αιτιολογήσουν και να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους.

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Αρχικά μελετήσαμε τις απαντήσεις των παιδιών ανά έργο ως προς την ορθότητά τους, εξετάζοντας τις διαφορές ανάλογα με τον τύπο και τα χαρακτηριστικά του προβλήματος. Επιπλέον, καταγράφτηκαν οι στρατηγικές με τις οποίες τα παιδιά προσέγγισαν τα προβλήματα ανά έργο, αναδεικνύοντας ομοιότητες και διαφορές μεταξύ των παιδιών. Στην συνέχεια, εξετάστηκαν οι απαντήσεις κάθε παιδιού ατομικά σε όλα τα έργα, με στόχο να χαρτογραφηθούν οι παρανοήσεις και οι εννοιολογικές δυσκολίες του κάθε παιδιού ξεχωριστά. Τέλος, χωρίσαμε τους μαθητές σε ομάδες σύμφωνα με τις βαθμολογίες που σημείωσαν, τα προβλήματα που έλυσαν και τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν.

3.1 Α΄ κατηγορία προβλημάτων

Στον Πίνακα 4 φαίνονται πόσοι και ποιοι μαθητές απάντησαν σωστά στις ερωτήσεις της κατηγορίας Α΄ (προβλήματα ισοδυναμίας ποσοστών με κλάσματα και περιγραφής σχετικού μεγέθους) . Υπενθυμίζεται ότι σωστές θεωρήθηκαν οι απαντήσεις που βασίζονται σε ορθό σκεπτικό και σε ορθή μέθοδο για τον υπολογισμό του αριθμητικού αποτελέσματος.

Πίνακα; 4: Απαντήσεις μαθητών (Σωστή =1/ Λανθασμένη =0) για τα έργα της Α΄ κατηγορίας

Μαθητής	Ε1α	Ε1β	Ε1γ	Ε2α	Ε2β
1(Ελπίδα)	1	1	1	1	0
2 (Χάρης)	1	1	1	1	0
3(Δαμιανός)	1	1	1	1	0
4(Ειρήνη)	1	1	1	1	0
5(Δήμητρα)	1	1	1	0	0
6(Κατερίνα)	1	1	1	0	0
7(Αλέξης)	1	1	1	0	0
8(Σοφία)	1	1	1	0	0
9 (Παυλίνα)	1	0	1	0	0

Όπως φαίνεται από τα στοιχεία του Πίνακα 4, το Ε1.1 και το Ε1.3 αντιμετωπίστηκε με επιτυχία από όλους τους μαθητές. Όλοι οι μαθητές για να υπολογίσουν το 50% των λουλουδιών σκέφτηκαν ότι το 50% αντιστοιχεί στο μισό των λουλουδιών, δηλαδή έκαναν αυτόματα τη μετατροπή 50%=1/2. Για το 25% των λουλουδιών, οι έξι μαθητές σκέφτηκαν ότι το 25% είναι το μισό του 50% και αφού είχαν βρει προηγουμένως σε πόσα λουλούδια αντιστοιχεί το 50% βρήκαν και το 25%. Για το ίδιο ερώτημα δύο μαθητές σκέφτηκαν ότι το 25%=1/4 έτσι διαίρεσαν το πλήθος των λουλουδιών με το 4 και βρήκαν το 25%. Μία μαθήτρια (Παυλίνα) δεν έδωσε καμία απάντηση για το Ε1β. Για το έργο Ε1γ όλοι οι μαθητές εξήγησαν ότι το 100% είναι όλη η ποσότητα.

Στο Ε2 οι μαθητές καλούνται να εκφράσουν με ποσοστό το ύψος ενός δένδρου σε σχέση με το ύψος ενός άλλου δένδρου. Στο Ε2α η ζητούμενη σχέση αφορά το μικρότερο μήκος ως ποσοστό του μεγαλύτερου. Από τους όλους τους μαθητές, τέσσερις έδωσαν σωστή απάντηση, δηλαδή να εντοπίσουν τη σχέση μεταξύ των δύο υψών και να την εκφράσουν ως ποσοστό. Η στρατηγική τριών από τους μαθητές που έδωσαν τη σωστή απάντηση ήταν να εκφράσουν το ύψος του έλατου σαν κλάσμα σε σχέση με το ύψος του κυπαρισσιού (2/5=40/100=40%). Ο μαθητής 4 (Ειρήνη) σκέφτηκε ότι το 100% αντιστοιχεί σε 5 ορθογώνια(όσα τα ορθογώνια που αποτελείται το κυπαρίσσι) και έκανε 100%:5=20% για βρει το ένα ορθογώνιο τι ποσοστό εκφράζει, οπότε κατέληξε ότι το έλατο(που αποτελείται από δύο ορθογώνια) είναι το 40% του κυπαρισσιού.

Μια διαφορετική στρατηγική χρησιμοποίησε ο μαθητής 7. Ο Αλέξης δεν έδωσε ακριβή απάντηση, είπε ότι περίπου θα είναι 30% με 40%, εξηγώντας ότι το έλατο είναι κάτω από το μισό του ύψους του κυπαρισσιού άρα το ποσοστό που ψάχνουμε θα είναι κάτω από 50% και με το μάτι έδωσε μια εκτίμηση. Η σκέψη του μαθητή ήταν σωστή και έδωσε μια σωστή εκτίμηση, όμως δεν κατάφερε να δώσει ακριβώς την απάντηση οπότε δεν υπολογίζεται σαν σωστή η απάντηση του

Από τους υπόλοιπους μαθητές , οι δύο (Σοφία και Κατερίνα) κατάφεραν να εκφράσουν το ύψος του έλατου σαν κλάσμα σε σχέση με το ύψος του κυπαρισσιού (δηλαδή τα 2/5) αλλά αδυνατούσαν να το εκφράσουν σε μορφή ποσοστού γί αυτό η απάντηση τους κωδικοποιήθηκε ως λάθος. Ένας μαθητής(Δήμητρα) απάντησε ότι το έλατο είναι το 1/3 το κυπαρισσιού, χωρίς να μπορεί να το υπολογίσει ακριβώς το ποσοστό. Η Δήμητρα δεν παρατήρησε ότι το κυπαρίσσι αποτελείται από πέντε ίσα μέρη και έδωσε λάθος απάντηση, ενώ στη συνέχεια επίσης δυσκολευόταν να μετατρέψει το κλάσμα σε ποσοστό. Γίνεται φανερό ότι τρεις μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες στο να μετατρέψουν το κλάσμα σε ποσοστό. Τέλος, ο μαθητής 9 (Παυλίνα) δεν έδωσε καμία απάντηση

Στο Ε2β, ζητήθηκε η έκφραση της αντίστροφης σχέσης (το μεγαλύτερο μήκος ως ποσοστό του μικρότερου). Αξιοσημείωτο είναι ότι κανένας μαθητής δεν έδωσε σωστή απάντηση σ΄ αυτή την ερώτηση που το ζητούμενο ποσοστό είναι μεγαλύτερο από 100%, με τρεις μαθητές (5, 6, 9) να μη δίνουν καμία απάντηση. Επίσης, κανείς από τους μαθητές που είχαν εκφράσει την πρώτη σχέση ως κλάσμα δε σκέφτηκε να αντιστρέψει το κλάσμα αυτό.

Οι 4 μαθητές που είχαν απαντήσει σωστά στο Ε2α, στην περίπτωση αυτή χρησιμοποίησαν ακατάλληλες προσθετικές στρατηγικές. Συγκεκριμένα, οι μαθητές 1,2 και 4 (Ελπίδα, Χάρης, Ειρήνη) αφαίρεσαν το πρώτο ποσοστό (40%), με το οποίο είχαν εκφράσει τη σχέση του μικρότερου προς το μεγαλύτερο μήκος, από το 100%. (δηλαδή σκέφτηκαν 100%-40%= 60%). Ο μαθητής 3 (Δαμιανός) έδωσε ως απάντηση το 140%, την οποία βρήκε προσθέτοντας το 40% στο 100% . Εξήγησε την απάντησή του λέγοντας ότι ότι το κυπαρίσσι είναι πιο ψηλό από το έλατο, άρα το ποσοστό θα είναι μεγαλύτερο από 100% -και αφού το έλατο είναι το 40% του κυπαρισσιού κατέληξε στο 140%.

Ο μαθητής 8 (Σοφία) επίσης χρησιμοποίησε μια ακατάλληλη προσθετική στρατηγική, αλλά στο πλαίσιο των κλασμάτων, καθώς δεν είχε καταφέρει να μετατρέψει το κλάσμα (2/5) σε ποσοστό στην Ε2α. Παρόμοια με τους μαθητές 1, 2 και 4, η Σοφία αφαίρεσε από τη μονάδα το 2/5 και έδωσε ως αριθμητικό αποτέλεσμα το 3/5.

Τέλος, ο μαθητής 7 (Αλέξης) εκτίμησε το ποσοστό γύρω στο 130% με 140%, πολύ μακριά από το πραγματικό αποτέλεσμα (250%). Δεδομένου ότι η εκτίμησή του για το αρχικό αποτέλεσμα ήταν 30%-40%, είναι πολύ πιθανόν ότι και αυτός εφάρμοσε μια ακατάλληλη προσθετική στρατηγική, προσθέτοντας στο 100% τα αρχικά ποσοστά.

Συνοψίζοντας, στα προβλήματα της κατηγορίας Α΄, οι μαθητές φάνηκε να είναι εξοικειωμένοι με χαρακτηριστικά ποσοστά (50%, 25%), τα οποία είχαν την ευχέρεια να μετατρέψουν άμεσα σε κλάσματα (Ε1). Στο Ε2α φάνηκε ότι κάποιοι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες στη μετατροπή του 2/5 σε ποσοστό. Ιδιαίτερη δυσκολία προκάλεσε στους μαθητές το Ε2β, όπου το ζητούμενο ποσοστό υπερέβαινε το 100%. Κανείς από τους μαθητές δεν αναγνώρισε ότι η ζητούμενη σχέση ήταν η αντίστροφη της προηγούμενης, είτε στο πλαίσιο των κλασμάτων, είτε στο πλαίσιο των ποσοστών. Οι 6 μαθητές που έδωσαν απάντηση κατέφυγαν σε ακατάλληλες προσθετικές στρατηγικές, Επιπλέον, μόνο 2 από αυτούς προέβλεψαν ότι το ζητούμενο ποσοστό έπρεπε να είναι μεγαλύτερο του 100% και ήταν αυτοί που πρόσθεσαν το ποσοστό που είχαν βρει στο Ε2α με το 100%, ενδεχομένως προσαρμόζοντας τη στρατηγική τους ώστε να καταλήξουν σε ποσοστό μεγαλύτερο του 100%. Αντίθετα, οι υπόλοιποι 4 μαθητές αφαίρεσαν το αρχικό ποσοστό ή κλάσμα από το 100% ή το 1, αντίστοιχα, ενδεχομένως προσαρμόζοντας τη στρατηγική τους ώστε να καταλήξουν σε ένα «αποδεκτό» αριθμητικό αποτέλεσμα.

3.2 Β΄ κατηγορία προβλημάτων

Στον Πίνακα 5 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στα έργα της κατηγορίας Β΄ (τυπικά προβλήματα ποσοστών: εύρεση μέρους εύρεση όλου, εύρεση ποσοστού). Ως σωστές θεωρήθηκαν οι απαντήσεις οι οποίες βασίστηκαν σε ένα ορθό σκεπτικό (που εκφράστηκα ρητά) και στις οποίες εφαρμόστηκε μια ορθή μέθοδος για τον υπολογισμό του ζητούμενου.

Πίνακας 5: Απαντήσεις μαθητών (Σωστή =1/ Λανθασμένη =0) για τα έργα της Β΄ κατηγορίας

Μαθητής	Ε3	Ε4	Ε5
1(Ελπίδα)	1	0	0
2(Χάρης)	1	1	0
3(Δαμιανός)	1	1	1
4(Ειρήνη)	1	1	0
5(Δήμητρα)	0	0	0
6(Κατερίνα)	1	0	1
7(Αλέξης)	0	1	0
8(Σοφία)	1	1	0
9(Παυλίνα)	0	0	0

Το Ε3 είναι ένα τυπικό πρόβλημα εύρεσης του «μέρους», ενός αριθμού, όπου το μέρος εκφράζεται ως ποσοστό Οι έξι από τους εννιά μαθητές υπολόγισαν σωστά το 30% των 80 μαθητών. Οι τέσσερις από τους έξι μαθητές που βρήκαν ότι το 30% του 80 είναι 24 πολλαπλασίασαν το 30% επί 80. Ο Χάρης κατέληξε στην απάντηση με την απλή μέθοδο των τριών. Στη συνέχεια οι μαθητές ρωτήθηκαν αν μπορούν να λύσουν το πρόβλημα με κάποιον άλλο τρόπο και μόνο ο Δαμιανός που είχε λύσει το πρόβλημα με πολ/σμό 30% επί 80 έδωσε εναλλακτικούς τρόπους για να λυθεί το πρόβλημα. . Συγκεκριμένα έλυσε το πρόβλημα με την απλή μέθοδο των τριών και με πίνακα διπλής εισόδου. Οι υπόλοιποι δεν μπόρεσαν να υπολογίσουν με διαφορετικούς τρόπους το αποτέλεσμα. Ωστόσο, όλοι οι μαθητές που έδωσαν σωστή απάντηση εκτός από την Ελπίδα μπορούσαν να εκτιμήσουν το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας χαρακτηριστικά ποσοστά (50% και 25%).

Από τους μαθητές που δεν βρήκαν τη σωστή απάντηση, η σκέψη της Δήμητρας ήταν να κάνει τη διαίρεση 80:100=0,8 , όμως την προβλημάτισε ότι το αποτέλεσμα ήταν δεκαδικός καθώς το πρόβλημα μιλούσε για μαθητές (όπως ανέφερε) και δεν συνέχισε. Πιθανόν να προσπάθησε να λύσει το πρόβλημα με αναγωγή στη μονάδα (υπολογίζοντας το 1%), αλλά το γεγονός ότι βγήκε δεκαδικός αριθμός τη δυσκόλεψε.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η στρατηγική του Αλέξη που έφτασε κοντά στο αποτέλεσμα αλλά δεν κατάφερε να βρει ακριβώς την απάντηση. Ο Αλέξης απάντησε 23 μαθητές σύμφωνα με την παρακάτω λογική: το 50% του 80 είναι 40μαθητές , το 25%=50%2 είναι 20 μαθητές, οπότε το 30% θα είναι λίγο πιο πάνω από 20 μαθητές. Ο Αλέξης προσπάθησε να βρει την απάντηση με εκτίμηση χρησιμοποιώντας χαρακτηριστικά ποσοστά(όπως το 50% και 25%) και έφτασε κοντά στη σωστή απάντηση. Αξιοσημείωτο είναι ότι ο συγκεκριμένος μαθητής δεν σημείωσε τίποτα στο χαρτί και όταν του ζητήθηκε να υπολογίσει στο χαρτί το αποτέλεσμα με κάποιον άλλον τρόπο δεν γνώριζε άλλο τρόπο

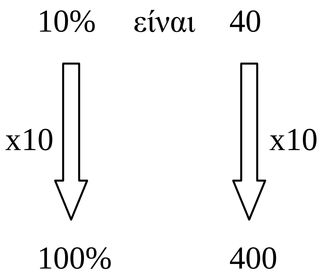
Η Παυλίνα δεν έδωσε κάποια συγκεκριμένη απάντηση, πρότεινε αρχικά να κάνει αφαίρεση ή πολλαπλασιασμό χωρίς να εξηγήσει και δυσκολευόταν να δώσει μια εκτίμηση του αποτελέσματος.

Το Ε4 αφορούσε μια από τις αντίστροφες της προηγούμενης κατάστασης, όπου το ζητούμενο είναι το «όλο». Πέντε μαθητές αντιμετώπισαν σωστά το πρόβλημα της εύρεσης του συνόλου των κρουσμάτων, με δεδομένο ότι το 10% των κρουσμάτων αντιστοιχεί σε 40 κρούσματα.

Οι μαθητές αυτοί εφάρμοσαν παρόμοιες στρατηγικές, «χτίζοντας» το ζητούμενο ποσοστό «βαθμωτά», είτε με πολλαπλασιασμό (Ειρήνη, Δαμιανός), είτε με πρόσθεση (Αλέξης), είτε με συνδυασμό των δύο (Σοφία). Πιο συγκεκριμένα, η Ειρήνη και ο Δαμιανός σκέφτηκαν ότι το 10% αντιστοιχεί σε 40 κρούσματα, το 100%=10%·10 άρα το 100% αντιστοιχεί σε 40·10=400 κρούσματα. Δηλαδή χρησιμοποίησαν το σχήμα με βέλη (arrow scheme) (Εικόνα 9). Ο Αλέξης σκέφτηκε ότι το 10% αντιστοιχεί σε 40, το 20% σε 80, το 30% σε 120, το 40% σε 160, το 50% σε 200 οπότε το 100%=50%+50% αντιστοιχεί σε 200+200=400 κρούσματα. Η Σοφία σκέφτηκε ότι το 10% αντιστοιχεί σε 40 άρα το 90% (90%=10%·9) αντιστοιχεί σε

40·9=360, οπότε τα συνολικά κρούσματα είναι 40+360=400. Ο Χάρης ακολούθησε την απλή μέθοδο των τριών, αλλά κατέληξε σε λάθος αποτέλεσμα (4.000) , όμως η απάντησή του κωδικοποιήθηκε ως σωστή καθώς είχε ορθό σκεπτικό.

Εικόνα 9: Σχήμα με βέλη για την επίλυση του Ε4



Στη συνέχεια οι μαθητές ρωτήθηκαν αν μπορούν να λύσουν το πρόβλημα με άλλον τρόπο και μόνο ο Δαμιανός έδωσε έναν εναλλακτικό τρόπο. Ο Δαμιανός το έλυσε με απλή μέθοδο των τριών και κάνοντας διαίρεση 40:10/100=400 αιτιολογώντας ότι ξέρω το μέρος και ψάχνω το όλο.

Οι υπόλοιποι μαθητές είτε έδωσαν λάθος απάντηση είτε δεν αιτιολόγησαν πως σκέφτηκαν. Η Ελπίδα και η Κατερίνα πολλαπλασίασαν το 10% με το 40 και βρήκαν 4, το οποίο δεν τους φάνηκε λογικό αλλά δεν μπορούσαν να σκεφτούν κάτι άλλο. Η Παυλίνα απάντησε 400 κάνοντας πολ/σμό το 40 με το 10 αλλά η απάντηση της χαρακτηρίστηκε λάθος καθώς δεν μπόρεσε να αιτιολογήσει τον συλλογισμό της και φάνηκε ότι τυχαία βρήκε το σωστό αποτέλεσμα. Όμοια ανταποκρίθηκε και η Δήμητρα.

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι οι μαθητές που απάντησαν σωστά στο πρόβλημα βασίστηκαν κατά κύριο λόγο σε στρατηγικές που τους ήταν διαθέσιμες δεδομένου ότι οι εμπλεκόμενοι αριθμοί ήταν απλοί. Δύο μαθητές είχαν στη διάθεσή τους μια γενικότερη μέθοδο (Χάρης, Δαμιανός). Οι υπόλοιποι πέντε μαθητές φάνηκαν απλώς να κάνουν μια πράξη (πολλαπλασιασμό) με τους διαθέσιμους αριθμούς, που ήταν μάλλον τυχαία, καθώς και αυτοί που κατέληξαν σε σωστό αποτέλεσμα δεν μπορούσαν να αιτιολογήσουν την επιλογή τους.

Στο Ε5 οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν τι ποσοστό είναι οι 8 από τους 40 μαθητές. Η ερώτηση αυτή δυσκόλεψε ιδιαίτερα τους μαθητές και μόνο δύο κατάφεραν να βρουν τη σωστή απάντηση (Δαμιανός, Κατερίνα). Ο Δαμιανός βρήκε τη σωστή απάντηση κάνοντας 8/40=0,2 δηλαδή 20%. Ο Δαμιανός φαίνεται να έχει κάνει τη σύνδεση μεταξύ ποσοστών και δεκαδικών. Η Κατερίνα βρήκε 20% κάνοντας (8/40)·100%.

Οι υπόλοιποι επτά μαθητές δεν κατάφεραν να φτάσουν στη ζητούμενη απάντηση. Η Σοφία ακολούθησε ένα σωστό σκεπτικό και βρήκε ότι οι 8 μαθητές είναι το 1/5 των 40 μαθητών κάνοντας 40:8=5, δηλαδή ότι το 8 χωράει 5 φορές στο 40. Όμως δεν κατάφερε να το μετατρέψει σε ποσοστό, όποτε η απάντηση της θεωρήθηκε λάθος.

Ο Αλέξης αρχικά παρατήρησε ότι 8·2=16, 8·3=24, 8·4=32, 8·5=40 και θεώρησε ότι το 8 στο 40 χωράει 4 φορές γιατί μέτρησε 4 γινόμενα και έδωσε σαν απάντησε 40%. Βλέποντας τα νούμερα του φάνηκε μεγάλο 40% και τελικά απάντησε 30% χωρίς να μπορεί να το εξηγήσει. Η Ειρήνη και ο Χάρης σκέφτηκε ότι το ποσοστό που ψάχνουμε είναι αρκετά μικρό διότι το 100% αντιστοιχεί σε 40 μαθητές ,το 50% είναι 20 μαθητές, το 25% είναι 10 μαθητές οπότε οι 8 μαθητές αντιστοιχούν σε ποσοστό μικρότερο από 25%. Η τελική τους απάντηση ήταν 20% με 25% και πλησίασαν στην σωστή απάντηση κάνοντας σωστή εκτίμηση αλλά δεν μπόρεσαν να υπολογίσει ακριβώς το ποσοστό. Η Ελπίδα και η Δήμητρα απάντησαν 5%, καθώς έκαναν 40:8=5 και είπαν ότι το 8 στο 40 χωράει 5 φορές οπότε 5%. Η Παυλίνα δεν έδωσε καμία απάντηση στο πρόβλημα αυτό.

Από τις τρεις κατηγορίες τυπικών προβλημάτων με ποσοστά οι μαθητές είχαν καλύτερη επίδοση στο πρόβλημα εύρεσης «μέρους». Οι άλλες δύο κατηγορίες προβλημάτων φαίνεται να δυσκόλεψαν τους μαθητές και ιδιαίτερα το πρόβλημα εύρεσης ποσοστού.

Οι στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές για να λύσουν τα προβλήματα παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Στο Ε3 όπου έπρεπε να βρεθεί το 30% του 80 οι πέντε μαθητές πολλαπλασίασαν το 30/100 με το 80, δηλαδή χρησιμοποίησαν το ποσοστό σαν τελεστή και με μία πράξη βρήκαν το σωστό αποτέλεσμα. Ένας μαθητής χρησιμοποίησε την απλή μέθοδο των τριών και βρήκε τη σωστή απάντηση. Μία μαθήτρια προσπάθησε να υπολογίσει το αποτέλεσμα με αναγωγή στη μονάδα, δηλαδή βρίσκοντας αρχικά το 1% αλλά δεν ολοκλήρωσε τον τρόπο γιατί βρήκε δεκαδικό αριθμό και θεώρησε ότι δεν ήταν λογικό. Ένας μαθητής έφτασε κοντά στη σωστή απάντηση υπολογίζοντας οικεία ποσοστά όπως το 50% και 25% και εκτίμησε με μεγάλη ακρίβεια το αποτέλεσμα. Ο μαθητής αυτός δεν γνώριζε άλλον τρόπο όπου θα μπορούσε να υπολογίσει ακριβώς το ζητούμενο. Τέλος, μία μαθήτρια (Παυλίνα) χρησιμοποίησε προσθετικές στρατηγικές. Αξιοσημείωτο είναι ότι μόνο ένας μαθητής (Δαμιανός) κατάφερε να δώσει εναλλακτικούς τρόπους επίλυσης.

Στο Ε4 όλοι οι μαθητές (συνολικά 4 μαθητές) που απάντησαν σωστά χρησιμοποίησαν την ίδια στρατηγική με μικρές παραλλαγές ο καθένας. Το πρόβλημα έδινε ότι το 10% αντιστοιχεί σε 40 κρούσματα και ζητούσε τα συνολικά κρούσματα. Το 10% είναι ένα εύκολο ποσοστό και με κατάλληλους πολλαπλασιασμούς φτάνουμε στο 100%, δηλαδή 10·10%= 100% οπότε τα συνολικά κρούσματα είναι 10·40=400. Ένας μαθητής χρησιμοποίησε απλή μέθοδο των τριών αλλά έκανε αριθμητικό λάθος. Δύο μαθήτριες (Ελπίδα και Κατερίνα) πολλαπλασίασαν 10/100·40 και δεν βρήκαν τη σωστή απάντηση. Μια μαθήτρια βρήκε 400 κάνοντας 40·10 άλλα δεν μπορούσε να αιτιολογήσει τον τρόπο σκέψης και πιθανόν αγνόησε το σύμβολο του ποσοστού. Ο μοναδικός μαθητής που μπορούσε να λύσει το πρόβλημα και με άλλους τρόπους ήταν ο Δαμιανός που πρότεινε την απλή μέθοδο των τριών και την διαίρεση 40:10/100 αφού ξέρουμε ένα μέρος και ψάχνουμε το σύνολο.

Στο Ε5 το ζητούμενο ήταν να βρεθεί το ποσοστό που αποτελούν οι οχτώ μαθητές στους 40. Δυο μαθητές βρήκαν την απάντηση ο ένας (Δαμιανός) έκανε8/40=0,2=20% και ο άλλος μαθητής (Κατερίνα) 8/40·100%=20%. Μια μαθήτρια (Σοφία) έκανε 8/40 =1/5 και βρήκε ότι οι 8 μαθητές αποτελούν το 1/5 των 40 μαθητών όμως δεν μπόρεσε να το εκφράσει σε ποσοστό. Φαίνεται μια δυσκολία μετατροπής του κλάσματος σε ποσοστό. Τρεις μαθητές (Χάρης, Αλέξης και Ειρήνη) κατάφεραν να εκτιμήσουν ότι το ποσοστό που ψάχνουμε θα είναι 20% με 25% χρησιμοποιώντας οικεία ποσοστά (50% και 25%). Δύο μαθητές (Ελπίδα και Δήμητρα) έκαναν 40:8=5 και έδωσαν σαν απάντηση 5%, το οποίο φανερώνει ότι δεν έχουν ουσιαστική γνώση του συμβόλου %. Η Παυλίνα δεν έδωσε καμία απάντηση.

Συνοψίζοντας τις απαντήσεις των μαθητών στα τυπικά προβλήματα ποσοστών από τους εννιά μαθητές δύο μαθητές δεν έλυσαν κανένα από τα τρία τυπικά προβλήματα. Από αυτούς, μία μαθήτρια (Παυλίνα) δεν γνώριζε κανένα τρόπο για να υπολογίσει ποσοστά και δυσκολευόταν να κάνει και εκτίμηση, ενώ η άλλη μαθήτρια (Δήμητρα) προσπαθούσε να υπολογίσει με αναγωγή στη μονάδα χωρίς να φαίνεται να έχει μεγάλη ευχέρεια. Ένας μαθητής (Αλέξης) δεν γνώριζε τρόπους υπολογισμού για τα ποσοστά όμως μπορούσε να εκτιμήσει το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας οικεία ποσοστά και όταν τα ποσοστά ήταν εύκολα μπορούσε να υπολογίσει ακριβώς το αποτέλεσμα. Μόνο ένας μαθητής κατάφερε να απαντήσει σωστά σε όλα τα τυπικά προβλήματα και ήταν ο μοναδικός που μπορούσε να δώσει εναλλακτικούς τρόπους επίλυσης. Από τους υπόλοιπους μαθητές ότι δύο μαθήτριες πολλαπλασίαζαν το ποσοστό με τον αριθμό που έδινε η άσκηση είτε το πρόβλημα ζητούσε να βρεθεί το «μέρος» είτε να βρεθεί το «όλο», που δείχνει ότι οι μαθητές ίσως απομνημονεύουν κανόνες χωρίς πλήρη κατανόηση.

3.3 Γ΄ κατηγορία προβλημάτων

Στον Πίνακα 6 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στα έργα της κατηγορίας Γ (προβλήματα όπου η μονάδα αναφοράς διαφέρει) .

Πίνακας 6: Απαντήσεις μαθητών (Σωστή =0/ Λανθασμένη =1) για τα έργα της Γ΄ κατηγορίας

Μαθητής	Ε6	Ε7	Ε8	Ε9	Ε10
1(Ελπίδα)	0	0	0	0	0
2(Χάρης)	0	0	0	1	0
3(Δαμιανός)	1	1	1	1	0
4(Ειρήνη)	0	1	1	1	0
5(Δήμητρα)	0	0	0	0	0
6(Κατερίνα)	0	0	0	1	0
7(Αλέξης)	1	0	1	1	0
8(Σοφία)	0	0	0	1	0
9(Παυλίνα)	0	0	0	0	0

Στο Ε6 οι μαθητές κλήθηκαν να αποφασίσουν αν μπορούν να βρουν ποιο κορίτσι ξόδεψε τα περισσότερα χρήματα, εκείνο που ξόδεψε το 50% των χρημάτων της ή εκείνο που ξόδεψε το 90% των χρημάτων της., χωρίς να γνωρίζουν τις αντίστοιχες μονάδες αναφοράς. Οι επτά από τους εννέα μαθητές απάντησαν ότι ξόδεψε περισσότερα το κορίτσι που ξόδεψε το 90% των χρημάτων της. Η αιτιολόγηση και των επτά μαθητών ήταν ότι το 90% είναι μεγαλύτερο από το 50%.Επιπλέον κάποιοι εξήγησαν ότι το 90% είναι κοντά στο 100% που σημαίνει ότι το ένα κορίτσι ξόδεψε σχεδόν όλα τα χρήματα, ενώ το 50% είναι τα μισά χρήματα.

Και οι επτά αυτοί μαθητές απάντησαν λάθος καθώς παρέβλεψαν ότι δεν αναφέρει η άσκηση αν τα κορίτσια είχαν τα ίδια χρήματα. Οι υπόλοιποι δύο μαθητές (Δαμιανός και Αλέξης) απάντησαν ότι δεν μπορούμε να βρούμε ποιο κορίτσι ξόδεψε περισσότερα γιατί εξαρτάται από το πόσα χρήματα έχουν. Ο Αλέξης μάλιστα έδωσε και παράδειγμα: «αν η Μαρία είχε 1000 ευρώ και ξόδεψε το 50% και η Στέλλα είχε 100 ευρώ και ξόδεψε το 90% των χρημάτων της, τότε η Μαρία ξόδεψε πιο πολλά χρήματα».

Στο Ε7 οι μαθητές έπρεπε να αποφασίσουν τι μας συμφέρει περισσότερο : α) μια έκπτωση 20% β) μια έκπτωση 10% και στη συνέχεια άλλη μία 10% γ) είναι το ίδιο. Οι επτά μαθητές απάντησαν ότι είναι το ίδιο καθώς σκέφτηκαν ότι 10%+10%= 20%. Αυτοί οι μαθητές παράβλεψαν το γεγονός ότι η αρχική έκπτωση 20% αναφέρεται στα 210 ευρώ ενώ οι διαδοχικές εκπτώσεις 10% και στη συνέχεια 10% δεν αναφέρονται στο ίδιο ποσό αφού η δεύτερη έκπτωση 10% είναι για τη μειωμένη τιμή που προκύπτει από την πρώτη έκπτωση 10%. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ποσοστιαίες αυξομειώσεις δεν έχουν γραμμικό χαρακτήρα όπως συμβαίνει στις αριθμητικές αυξομειώσεις. Για παράδειγμα, μια μείωση 10% και στη συνέχεια μια ακόμα μείωση 10% δεν είναι το ίδιο με μια μείωση 20%, αντίθετα μια μείωση κατά 10€ και στη συνέχεια μία ακόμα μείωση 10€ ισοδυναμεί με μία μείωση 20€.

Η Ειρήνη και ο Δαμιανός κατάφεραν να φτάσουν στη σωστή απάντηση. Η Ειρήνη αρχικά είχε σκεφτεί ότι 10%+10%= 20% όμως στη συνέχεια έκανε πράξεις για να δει αν αυτό που σκέφτηκε αρχικά είναι σωστό. Υπολόγισε την τελική τιμή με έκπτωση 20% ως εξής: 20/100 ·210 =42€ οπότε 210-42= 168€ και την τελική τιμή της κάμερας με τις διαδοχικές εκπτώσεις ως εξής: 210 ·10/100=21€, 210-21=189€ και 189·10/100=18,9€ συνεπώς η τελική τιμή 189-18,9= 170,1€. Έτσι, η Ειρήνη απάντησε ότι η έκπτωση 20% είναι πιο συμφέρουσα. Ο Δαμιανός κατέληξε και αυτός ότι η σωστή απάντηση είναι το α) με τον εξής συλλογισμό: 80/100 ·210=168€ η τελική τιμή με έκπτωση 20% και 90/100 ·210=189, 90/100 ·189=170,1€ η τελική τιμή με τις διαδοχικές εκπτώσεις των 10%. Ο Δαμιανός βρήκε κατευθείαν την τελική τιμή σε κάθε περίπτωση υπολογίζοντας το 80% και το 90% αντίστοιχα.

Στο Ε8 δίνεται ότι ο μισθός ενός υπαλλήλου είναι 1000€, αρχικά μειώνεται 10% και στη συνέχεια αυξάνεται 10%. Οι μαθητές πρέπει να αποφασίσουν αν ο μισθός α) είναι 1000 €, β) λιγότερο από 1000€, γ) περισσότερο από 1000€. Σ΄ αυτήν την ερώτηση τρεις μαθητές κατάφεραν να βρουν τη σωστή απάντηση, ενώ οι υπόλοιποι απάντησαν ότι ο μισθός θα παραμείνει 1000€. Οι έξι μαθητές που απάντησαν λάθος σκέφτηκαν αύξηση 10% μείωση 10% οπότε τελικά θα είναι ίδιος ο μισθός. Όπως και στην ερώτηση 7, οι μαθητές χρησιμοποίησαν στρατηγικές που ταιριάζουν σε αριθμητικές αυξομειώσεις και φάνηκε να αγνοούν την αλλαγή στη μονάδα αναφοράς και το σύμβολο % .

Οι μαθητές που έδωσαν σωστή απάντηση ήταν η Ειρήνη, ο Δαμιανός (που είχαν απαντήσει σωστά και στην προηγούμενη ερώτηση) και ο Αλέξης. Υπολόγισαν το μισθό μετά τη μείωση, κάνοντας 10/100·1000=100€, 1000-100=900€ και στη συνέχεια υπολόγισαν το μισθό μετά την αύξηση 10/100·900=90€, 900+90=990€ και κατέληξαν ότι ο μισθός θα είναι λιγότερο από 1000€.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει ότι ο Αλέξης που απάντησε σωστά στην ερώτηση αυτή γιατί στην προηγούμενη ερώτηση είχε απαντήσει λάθος. Ο Αλέξης βρήκε ότι ο μισθός μετά τη μείωση θα είναι 900 ως εξής: 10% μείωση σημαίνει ότι αν ήταν 100€ ο μισθός η μείωση θα ήταν 10 € , τώρα που είναι 1000€ η μείωση είναι 100€, οπότε ο μειωμένος μισθός είναι 900€. Έπειτα σκέφτηκε ότι για την αύξηση 10%, θα πρέπει να βρει το 10% του 900 και εξήγησε ότι θα είναι λιγότερο από 100 €, αφού 10% των 1000 € είναι 100€ οπότε το 10% των 900€ είναι λιγότερο από 100€. Έτσι κατέληξε ότι ο μισθός θα είναι λιγότερο από 1000€. Στο έργο αυτό ο Αλέξης διέκρινε ότι οι αυξομειώσεις αναφέρονται σε διαφορετικό ποσό, σε αντίθεση με το έργο 7 που δεν το διέκρινε. Ενδεχομένως, το γεγονός ότι στην ερώτηση αυτή τα νούμερα ήταν πιο απλά, τον βοήθησε ερμηνεύσει σωστά την κατάσταση και να βρει τη σωστή απάντηση.

Στο Ε9 δίνεται ότι η αρχική τιμή ενός κινητού τηλεφώνου που είναι 150 ευρώ. Οι μαθητές πρέπει να επιλέξουν τι είναι καλύτερο: μια έκπτωση 8% ή μια έκπτωση 10€. Τρεις μαθητές απάντησαν λάθος, επιλέγοντας την έκπτωση των 10€ αιτιολογώντας ότι το 10 είναι μεγαλύτερο του 8. Αυτοί οι μαθητές αγνόησαν το σύμβολο του ποσοστού και σύγκριναν τους απόλυτους αριθμούς. Οι υπόλοιποι μαθητές υπολόγισαν το 8% του 150 με ποικίλους τρόπους και βρήκαν ότι είναι 12€ και επέλεξαν την έκπτωση 8% σαν πιο συμφέρουσα. Ο Χάρης χρησιμοποίησε την απλή μέθοδο των τριών, ο Αλέξης χώρισε τα 150€ σε 100€ και 50€ και υπολόγισε ότι το 8% του 100 είναι 100 και το 8% του 50 είναι 4 οπότε το 8% των 150 είναι 8+4= 12€, οι υπόλοιποι πολλαπλασίασαν 8/100 · 150 = 12.

Στην ερώτηση 10, δίνεται ότι ένα γιαούρτι με φρούτα των 150γρ περιέχει 11% φρούτα και οι μαθητές κλήθηκαν να βρούνε το ίδιο γιαούρτι σε συσκευασία 300γρ τι ποσοστό φρούτων περιέχει. Όλοι οι μαθητές απάντησαν λάθος στην ερώτηση αυτή, λέγοντας ότι θα περιέχει 22% φρούτα. Η αιτιολόγηση των μαθητών ήταν ότι αφού διπλασιάστηκε η ποσότητα του γιαουρτιού και το ποσοστό των φρούτων θα διπλασιαστεί.

Τα προβλήματα της κατηγορίας Γ΄ φαίνεται να δυσκόλεψαν αρκετά τους μαθητές. Τρεις μαθητές απάντησαν λάθος σ' όλες τις ερωτήσεις αυτής της κατηγορίας, ενώ μόνο ένας μαθητής απάντησε σωστά σε όλες. Από τις απαντήσει ς των μαθητών φάνηκε να μην έχουν κατανοήσει ότι τα ποσοστά αναφέρονται πάντα σε «κάτι». Η πλειοψηφία των μαθητών χρησιμοποίησε λανθασμένες προσθετικές στρατηγικές και αντιμετώπισαν τις ποσοστιαίες αυξομειώσεις σαν αριθμητικές αυξομειώσεις αγνοώντας τη μονάδα αναφοράς.

3.4 Δ΄ κατηγορία προβλημάτων

Στον Πίνακα 7, φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στα έργα της Δ κατηγορίας (Ποσοστιαίες μεταβολές (<100% και >100%) και μεταβολή αρχικού μεγέθους).

Πίνακας 7: Απαντήσεις μαθητών (Σωστή =1/ Λανθασμένη =0) στα έργα της Δ΄ κατηγορίας.

Μαθητής	E11	E12	E13	E14
1 (Ελπίδα)	0	0	0	0
2(Χάρης)	1	0	0	0
3(Δαμιανός)	1	1	1	0
4(Ειρήνη)	1	0	0	0
5(Δήμητρα)	1	0	0	0
6(Κατερίνα)	0	0	1	0
7(Αλέξης)	0	1	1	1
8(Σοφία)	1	0	1	0
9(Παυλίνα)	0	0	0	0

Στο Ε11 δίνεται ότι ένα ζευγάρι αθλητικά παπούτσια έχει αρχική τιμή 40€ και έχει έκπτωση 20%. Οι μαθητές πρέπει να υπολογίσουν την τελική τιμή. Πέντε μαθητές βρήκαν ότι η τελική τιμή από τα παπούτσια είναι 32€. Τέσσερις από αυτούς υπολόγισαν πρώτα το ποσό της έκπτωσης, και στη συνέχεια την τελική τιμή, αφαιρώντας το ποσό της έκπτωσης από την αρχική τιμή. Ο Χάρης υπολόγισε την έκπτωση με απλή μέθοδο των τριών, ενώ η Ειρήνη και η Σοφία πολλαπλασιάζοντας απευθείας 20/100 · 40. Τέλος, η Δήμητρα υπολόγισε την έκπτωση με αναγωγή στη μονάδα, αναλυτικά έκανε 40:100=0,4 και 20·0,4=8€.

Ο Δαμιανός ήταν ο μόνος που υπολόγισε την τελική τιμή ως ποσοστό της αρχικής, αφαιρώντας αρχικά το ποσοστό της έκπτωσης από το 100% (100% - 20%= 80% και στη συνέχεια 80/100 · 40 = 32€.

Από τους υπόλοιπου μαθητές, η Ελπίδα και η Κατερίνα πολλαπλασίασαν 20/100·40 και βρήκαν 8 και έδωσαν σαν απάντηση 8€, που δεν είναι η τελική τιμή αλλά η έκπτωση. Τέλος, η Παυλίνα δεν μπορούσε να λύσει το Ε10 και χαρακτηριστικά απάντησε ότι θα ρωτούσε την πωλήτρια.

Ο Αλέξης, όπως και σε προηγούμενα έργα, προσέγγισε το πρόβλημα με εκτίμηση, χρησιμοποιώντας οικεία ποσοστά όπως το 50% και το 25%. Βρήκε νοερά ότι το 50% του 40 είναι 20 και στη συνέχεια το 25% του 40 ότι είναι 10 και κατάφερε να δώσει μια εκτίμηση της τελικής τιμής. Απάντησε ότι η έκπτωση θα είναι λίγο κάτω από 10€, οπότε η τελική τιμή θα είναι λίγο πάνω από 30€. Η απάντηση του θεωρήθηκε λανθασμένη παρότι η σκέψη του ήταν σωστή, καθώς το ζητούμενο ήταν να βρει το ακριβές αποτέλεσμα.

Από τους υπόλοιπου μαθητές, η Ελπίδα και η Κατερίνα πολλαπλασίασαν 20/100·40 και βρήκαν 8 και έδωσαν σαν απάντηση 8€, που δεν είναι η τελική τιμή αλλά η έκπτωση. Τέλος, η Παυλίνα δεν μπορούσε να λύσει το Ε11 και χαρακτηριστικά απάντησε ότι θα ρωτούσε την πωλήτρια.

Στο Ε12, δίνεται ότι τα κρούσματα κορονοϊού χθες ήταν 200 και σήμερα αυξήθηκαν κατά 120% και οι μαθητές πρέπει να υπολογίσουν πόσα είναι τα κρούσματα κορονοϊού σήμερα. Μόνο δύο (Αλέξης, Δαμιανός) από τους εννέα μαθητές κατάφεραν να απαντήσουν σωστά. Ο Δαμιανός πολλαπλασίασε 120/100 · 200= 240 και στη συνέχεια πρόσθεσε 200 + 240 = 440 κρούσματα. Ο Αλέξης σκέφτηκε ως εξής: μια αύξηση 100% αντιστοιχεί σε 200 κρούσματα αφού το 100% του 200 είναι 200, το 20% του 200 είναι 40 γιατί 200=100+100 και το 20% του 100 είναι 20 οπότε 20 + 20 = 40. Ο Αλέξης στη συνέχεια πρόσθεσε 200 + 40 = 240 και έτσι υπολόγισε ότι η αύξηση 120% αντιστοιχεί σε 240 κρούσματα και τα συνολικά κρούσματα θα είναι 200 + 240 = 440. Αξίζει να σημειωθεί ότι και σ' αυτό το έργο ο Αλέξης δεν σημείωσε κάτι στο χαρτί, όλα τα σκεφτόταν νοερά.

Από τους υπόλοιπους μαθητές, ο Χάρης, η Ειρήνη και η Κατερίνα δεν έδωσαν καμία απάντηση. Ο Χάρης αυτή τη φορά δοκίμασε, αλλά δεν κατάφερε να χρησιμοποιήσει την απλή μέθοδο των τριών, και φάνηκε να προβληματίζεται με το γεγονός ότι το 120 είναι μεγαλύτερο από το 100. Η Ειρήνη εξέφρασε ρητά τον προβληματισμό ρωτώντας αν υπάρχει λάθος στην εκφώνηση και ανέφερε «Πώς γίνεται να είναι 120%; Δεν γίνεται αυτό». Από την άλλη μεριά, η Κατερίνα έκανε πράξεις στο χαρτί χωρίς να αναφέρει τι ακριβώς πράξεις.

Η Σοφία προσέγγισε το πρόβλημα με εκτίμηση. Η απάντησή της θεωρήθηκε λανθασμένη γιατί δεν αποπειράθηκε τα υπολογίσει το ακριβές αποτέλεσμα. Ωστόσο, το σκεπτικό της ήταν σωστό, καθώς φάνηκε να κάνει μια σωστή εκτίμηση για την αύξηση 120% .Συγκεκριμένα, η Σοφία σκέφτηκε ότι αφού το 100% είναι 200 κρούσματα, η αύξηση 120% αντιστοιχεί σε πάνω από 200 κρούσματα και έδωσε σαν απάντηση ότι τα κρούσματα θα είναι γύρω στα 400 χωρίς να προσδιορίσει ακριβώς πόσα θα είναι.

Η Ελπίδα πολλαπλασίασε 120/100·200=240 κρούσματα και έδωσε σαν απάντηση ότι τα κρούσματα θα είναι 240. Το αποτέλεσμα της φάνηκε σωστό γιατί, όπως είπε, η εκφώνηση αναφέρει ότι τα κρούσματα αυξήθηκαν και το αποτέλεσμα που βρήκε, δηλαδή 240 κρούσματα, είναι μεγαλύτερο του 200. Τέλος, η Παυλίνα πρόσθεσε 200 + 120 = 320 κρούσματα, δηλαδή αγνόησε το σύμβολο των % και απλά πρόσθεσε τα νούμερα.

Στο Ε13, δίνεται ότι ένα είδος έχει αρχική τιμή 300€ και πουλήθηκε 270€ και οι μαθητές καλούνται να βρούνε το ποσοστό της έκπτωσης που έγινε. Συνολικά τέσσερις μαθητές βρήκαν τη σωστή ποσοστιαία έκπτωση. Ο Δαμιανός και η Κατερίνα βρήκαν την έκπτωση σε ευρώ 300-270=30€ και στη συνέχεια ο Δαμιανός έκανε 30/300 =0.1=10%, ενώ η Κατερίνα έκανε 30/300 ·100%= 10%. Η Σοφία αφού βρήκε ότι η έκπτωση είναι 30€ (με αφαίρεση) σκέφτηκε ότι η έκπτωση είναι 30€ στα 300€, στη συνέχεια μετά από λίγη σκέψη απάντησε 10% και επαλήθευσε την απάντηση της λέγοντας ότι το 10% του 300 είναι 30. Ο Αλέξης βρήκε και αυτός ότι η έκπτωση είναι 30€ και χρησιμοποιώντας οικεία ποσοστά (50%, 25%) εκτίμησε ότι το ποσοστό που ψάχνουμε είναι αρκετά μικρότερο του 25% και στη συνέχεια με δοκιμές βρήκε ότι το ζητούμενο ποσοστό είναι 10% (υπολόγισε το 20% του 300 και το 10% του 300).

Από την άλλη μεριά, η Παυλίνα και η Δήμητρα απάντησαν ότι η έκπτωση είναι 30€, χωρίς να μπορούν να δώσουν ούτε εκτίμηση για το ζητούμενο ποσοστό. Ο Χάρης και η Ειρήνη εκτίμησαν ότι το ποσοστό θα είναι αρκετά μικρότερο του 25% χρησιμοποιώντας οικεία ποσοστά, χωρίς να είναι σε θέση να υπολογίσουν το ακριβές ποσοστό. Η Ελπίδα βρήκε την έκπτωση σε ευρώ και στη συνέχεια έκανε πράξεις στο χαρτί (πολλαπλασιασμούς) χωρίς να δώσει μια απάντηση για το ποσοστό της έκπτωσης.

Στο Ε14, δόθηκε ότι η τιμή ενός αντισηπτικού πριν την πανδημία ήταν 2€, στη συνέχεια αυξήθηκε και έγινε 4€ και ζητείται και ζητήθηκε η ποσοστιαία αύξηση της τιμής του αντισηπτικού. Μόνο ένας μαθητής, ο Αλέξης, απάντησε σωστά ότι η αύξηση είναι 100%. Το σκεπτικό του ήταν ότι η αύξηση είναι 2 € και η αρχική τιμή είναι 2€ οπότε έδωσε σαν απάντηση 100% αφού το 100% των 2€ είναι 2€.

Με εξαίρεση την Παυλίνα, που δεν έδωσε καμία απάντηση, όλοι οι υπόλοιποι μαθητές απάντησαν ότι η αύξηση είναι 50% αιτιολογώντας ότι η αύξηση είναι 2€ και τα 2€ είναι το μισό των 4€.

3.5 Ανάλυση απαντήσεων και στρατηγικών για κάθε μαθητή

Στην ενότητα αυτή θα αναλύσουμε τις απαντήσεις κάθε μαθητή χωριστά στις ερωτήσεις του τεστ ώστε να δούμε τις γνώσεις κάθε μαθητή, τις δυσκολίες του και τις στρατηγικές που χρησιμοποιεί στα προβλήματα ποσοστών. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τις απαντήσεις ανά κατηγορία ερωτήσεων για να αναδείξουμε τι είναι αυτό που δυσκολεύει περισσότερο τους μαθητές στα προβλήματα με ποσοστά. Γνωρίζοντας τις δυσκολίες των μαθητών για τα ποσοστά μπορούμε να βοηθήσουμε τους μαθητές να τις ξεπεράσουν σχεδιάζοντας κατάλληλες δραστηριότητες στην τάξη. Στον Πίνακα 5 φαίνονται οι απαντήσεις όλων των μαθητών στις ερωτήσεις του τεστ, στην τελευταία στήλη φαίνεται πόσες ερωτήσεις απάντησε κάθε μαθητής από τα συνολικά 17 ερωτήματα και υποερωτήματα ενώ στην τελευταία γραμμή φαίνονται πόσοι μαθητές απάντησαν σωστά την κάθε ερώτηση, Πίνακας 5: Απαντήσεις των μαθητών (Σωστές =1, Λανθασμένες =0) στα έργα του τεστ

	1α	1β	1γ	2α	2β	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Συν.
1(Ελπ)	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**5**
2(Χάρ)	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	**8**
3(Δαμ)	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	**14**
4(Ειρ)	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	**10**
5(Δήμ)	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	**4**
6(Κατ)	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	**7**
7(Αλέξ)	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	**10**
8(Σοφ)	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	**8**
9(Παυλ)	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**2**
Συν.	**9**	**9**	**8**	**4**	**0**	**6**	**4**	**2**	**2**	**2**	**3**	**6**	**0**	**5**	**2**	**4**	**1**	

Παρατηρώντας την τελευταία στήλη του Πίνακα 5 βλέπουμε ότι η μαθήτρια με τη χαμηλότερη βαθμολογία είναι η Παυλίνα που συγκέντρωσε βαθμολογία 2. Η Παυλίνα δεν κατάφερε να απαντήσει σε καμία ερώτηση από τις κατηγορίες Β, Γ, Δ και απάντησε σωστά μόνο τα δύο υποερωτήματα του έργου 1 όπου έπρεπε να βρει το 50% και το 100% οκτώ λουλουδιών. Η Παυλίνα ήξερε ότι το 50% αντιστοιχεί στο μισό μιας ποσότητας και το 100% σε όλη την ποσότητα. Σε όλα τα υπόλοιπα έργα του τεστ οι στρατηγικές που χρησιμοποιούσε ήταν προσθετικές, αγνοούσε το σύμβολο των ποσοστών (%) και προσπαθούσε να τα λύσει όπως θα έλυνε ένα αριθμητικό πρόβλημα χωρίς ποσοστά. Είχε δυσκολίες και στο να εκτιμήσει το αποτέλεσμα.

Η Δήμητρα είναι η μαθήτρια με την αμέσως υψηλότερη βαθμολογία, με 4 σωστές απαντήσεις από τα συνολικά 17 έργα. Απάντησε σωστά στην ερώτηση 1 και στην ερώτηση 12 που έπρεπε να υπολογίσει την τελική τιμή από ένα ζευγάρι παπουτσιών με αρχική τιμή 40€ και έκπτωση 20%. Από την ερώτηση 1 φαίνεται ότι η Δήμητρα ότι έχει κάνει τη σύνδεση των οικείων ποσοστών (50%, 25%) με τα αντίστοιχα κλάσματα (50%=1/2 και 25%=1/4). Η μοναδική στρατηγική που χρησιμοποιούσε η Δήμητρα για να λύσει τα προβλήματα ποσοστών ήταν η αναγωγή στη μονάδα, ενώ σε κάποια έργα χρησιμοποιούσε προσθετικές στρατηγικές που δεν ταιριάζουν στα προβλήματα με ποσοστά. Η αναγωγή στη μονάδα είναι μια στρατηγική με δύο βήματα: πρώτα υπολογίζουμε το 1% και μετά το ζητούμενο ποσοστό. Η Δήμητρα με την αναγωγή στη μονάδα μπορούσε να λύσει μόνο τα προβλήματα όπου γνωρίζουμε όλη την ποσότητα και ψάχνουμε ένα μέρος της. Δεν απάντησε σε κανένα από τυπικά προβλήματα και τα προβλήματα όπου η μονάδα αναφοράς διαφέρει.

Η Ελπίδα συγκέντρωσε βαθμολογία 5, απαντώντας σωστά στα τέσσερα από τα πέντε υποερωτήματα της κατηγορίας Α και σ 'ένα τυπικό πρόβλημα ποσοστών (ξέρω το όλο, ψάχνω το μέρος) της Β κατηγορίας. Η Ελπίδα έκανε και αυτή άμεσα αυτόματα την μετατροπή των οικείων ποσοστών 50% και 25% σε κλάσματα. Ακόμα απάντησε σωστά στο έργο 2α όπου κατάφερε να εκφράσει το ύψος του έλατο αρχικά σαν κλάσμα σε σχέση με το ύψους του κυπαρισσιού και στη συνέχεια το μετέτρεψε σε ποσοστό. Η στρατηγική που χρησιμοποιούσε η Ελπίδα ήταν να πολλαπλασιάζει το ποσοστό με τον αριθμό και δεν γνώριζε εναλλακτική στρατηγική για να λύσει τα προβλήματα. Από τις απαντήσεις της φαίνεται ότι σε οποιοδήποτε πρόβλημα πολλαπλασίαζε το ποσοστό με τον αριθμό, πράγμα που δείχνει απομνημόνευση κανόνων για να λύσει προβλήματα ποσοστών και όχι κατανόηση της πολλαπλασιαστικής σχέσης των ποσοστών. Η Ελπίδα δεν έλυσε κανένα από τα έργα της Γ και Δ κατηγορίας.

Ο Χάρης συγκέντρωσε βαθμολογία 8 καθώς απάντησε σε τέσσερα ερωτήματα της Α κατηγορίας, σε δύο από τα προβλήματα της Β΄ κατηγορίας και από μία ερώτηση σε καθεμιά από τις υπόλοιπες κατηγορίες ασκήσεων. Ο Χάρης, όπως και οι περισσότεροι μαθητές, μετέτρεψε αυτόματα τα οικεία ποσοστά σε κλάσματα και επιπλέον μπορούσε να μετατρέψει τα κλάσματα σε ποσοστά. Αυτό δείχνει ότι έχει κάνει σύνδεση ποσοστών και κλασμάτων. Η μοναδική στρατηγική που χρησιμοποιούσε ήταν η απλή μέθοδος των τριών. Απάντησε σε δύο τυπικά προβλήματα ποσοστών (εύρεση μέρους, εύρεση όλου) και στις ερωτήσεις 9 και 12 χρησιμοποιώντας την απλή μέθοδο των τριών για να βρει τις απαντήσεις. Στις ερωτήσεις οπού η μονάδα αναφοράς διαφέρει φάνηκε να έχει δυσκολίες καθώς και στα προβλήματα όπου τα ποσοστά ήταν μεγαλύτερα του 100%. Ο Χάρης μπορούσε να εκτιμήσει το αποτέλεσμα στα περισσότερα έργα.

Η Κατερίνα συγκέντρωσε βαθμολογία ίση με 7 μονάδες. Απάντησε σωστά στην ερώτηση 1 της κατηγορίας Α΄, έλυσε σωστά δύο από τα τρία τυπικά προβλήματα ποσοστών (εύρεση μέρους, εύρεση ποσοστού), την ερώτηση 9 από την Γ΄ κατηγορία και την 13 από τη Δ΄ κατηγορία. Η Κατερίνα μετέτρεψε τα ποσοστά 50% και 25% σε κλάσματα στην ερώτηση 1, όμως δυσκολευόταν να μετατρέψει στην ερώτηση 2α το κλάσμα 2/5 σε ποσοστό. Η στρατηγική που χρησιμοποίησε η

Κατερίνα για να λύσει τα έργα ήταν να πολλαπλασιάζει το ποσοστό με τον αριθμό. Στα τυπικά προβλήματα ποσοστών δεν έλυσε το πρόβλημα εύρεσης όλου, ο τρόπος που προσπαθούσε να το λύσει ήταν με πολλαπλασιασμό του ποσοστού με τον αριθμό όμως ανέφερε ότι το αποτέλεσμα που έβγαινε δεν ήταν λογικό σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης. Φαίνεται ότι η Κατερίνα στα προβλήματα ποσοστών πολλαπλασιάζει το ποσοστό με τον αριθμό ανεξάρτητα από το ζητούμενο, γεγονός που υποδηλώνει απομνημόνευση ενός κανόνα χωρίς να κατανόηση για τις συνθήκες υπό τις οποίες είναι εφαρμόσιμος. Η έλλειψη βαθιάς κατανόησης των ποσοστών φαίνεται και από τις λανθασμένες απαντήσεις στις ερωτήσεις της Γ και Δ κατηγορίας.

Η Σοφία είναι η μαθήτρια με την αμέσως μεγαλύτερη βαθμολογία, 8 στα 17. Απάντησε στην ερώτηση 1, έλυσε δύο από τα τρία τυπικά προβλήματα της Β΄ κατηγορίας (εύρεση μέρους, εύρεση όλου), την ερώτηση 9 της Γ΄ κατηγορίας και τις ερωτήσεις 12, 13, που αφορούσαν ποσοστιαίες μεταβολές. Η Σοφία είχε δυσκολία στο να μετατρέψει ένα κλάσμα σε ποσοστό (ερ.2α, ερ.5). Οι ερωτήσεις της Γ΄ κατηγορίας που αφορούσαν προβλήματα όπου η μονάδα αναφοράς διαφέρει δυσκόλεψαν περισσότερο τη Σοφία και απάντησε σωστά σε μόνο μία ερώτηση. Επίσης από τις απαντήσεις στα έργα της Δ΄ κατηγορίας φαίνεται ότι όταν τα ποσοστά είναι ≥100% δεν κατάφερε να απαντήσει σωστά. Η στρατηγική με την οποία έλυνε τα προβλήματα ποσοστών ήταν ο πολλαπλασιασμός του ποσοστού με το κλάσμα, στις περιπτώσεις που τα ποσοστά ήταν «βολικά» (ερ.4, ερ.13) έλυνε τα προβλήματα με εναλλακτικούς τρόπους (π.χ. στην ερ.4 το 10% είναι 40 και για υπολογίσει το 100% σκέφτηκε ότι 10 φορές το 10% μας δίνει το 100%, οπότε $10 \cdot 40=400$ είναι το 100%). Τέλος παρατηρούμε ότι κατάφερε να λύσει το πρόβλημα 13 (εύρεση ποσοστού) όμως δεν έλυσε το πρόβλημα 5 (εύρεση ποσοστού). Μία πιθανή εξήγηση είναι ότι στην ερώτηση 13 το ποσοστό είναι πιο «βολικό», ενώ στην ερώτηση 5 είναι πιο δύσκολο σαν νούμερο.

Η Ειρήνη συγκέντρωσε βαθμολογία 10. Έλυσε δύο από τρία τυπικά προβλήματα (εύρεση μέρους, εύρεση όλου) και είχε πολύ καλή απόδοση στα έργα όπου η μονάδα αναφοράς διαφέρει, γεγονός που δείχνει μια καλή κατανόηση της φύσης των ποσοστών. Όμως, η κατανόηση αυτή δε φάνηκε να επεκτείνεται στην περίπτωση των ποσοστιαίων αυξομειώσεων, όπου η μονάδα αναφοράς μεταβάλλεται. Πράγματι, τα σχετικά προβλήματα ήταν το αδύναμο σημείο της και σημείωσε το χαμηλότερο σκορ. Ειδικότερα παρατηρούμε ότι όταν τα ποσοστά ήταν μεγαλύτερα ή ίσα του 100% δεν μπορούσε να τα διαχειριστεί. Αυτό ενισχύεται και από την απάντηση της στο έργο 2β όπου η σωστή απάντηση είναι ένα ποσοστό μεγαλύτερο του 100% όμως η Ειρήνη είπε ένα ποσοστό μικρότερο του 100%. Η στρατηγική που χρησιμοποιούσε ήταν ο πολλαπλασιασμός του ποσοστού με το κλάσμα, όταν όμως το ποσοστό ήταν «βολικό» έλυνε τα προβλήματα χρησιμοποιώντας οικεία ποσοστά (50%, 25%, 10%) και, μάλιστα, ποσοστά που εκφράζουν ένα «μέρος» (μικρότερο) της μονάδας αναφοράς.

Ο Αλέξης σημείωσε και αυτός βαθμολογία 10. Από τα έργα της Α΄ κατηγορίας, απάντησε σωστά στην ερώτηση 1, στην ερώτηση 2α έδωσε μία εκτίμηση «με το μάτι» όπως είπε, η οποία ήταν σωστή αλλά δεν έδωσε ακριβή απάντηση. Ενδιαφέρον έχει η απάντηση του στο 2β (απάντησε 130% με 140%) γιατί αναγνώρισε ότι το ποσοστό που ψάχνουμε θα είναι μεγαλύτερο από 100% ωστόσο δεν ήταν η σωστή απάντηση. Στα τυπικά προβλήματα της Β κατηγορίας δεν τα πήγε τόσο καλά, κατάφερε να απαντήσει μόνο το έργο 4 (εύρεση όλου) και στα υπόλοιπα έδωσε μόνο εκτιμήσεις. Στα προβλήματα της Γ κατηγορίας απάντησε σωστά σε όλες εκτός από την ερώτηση 7 και 10. Από τη κατηγορία Δ, απάντησε σωστά σε 3 προβλήματα. Αξιοσημείωτο είναι ότι απάντησε σωστά στο Ε12, που αφορά ποσοστιαία αύξηση >100% και δεν απάντησε σωστά στο Ε11, που αφορά ποσοστιαία μείωση <100%). Ο Αλέξης για να λύσει όλα τα προβλήματα χρησιμοποιούσε οικεία ποσοστά (50%, 25%, 10%) , δεν γνώριζε κανέναν αλγεβρικό τρόπο για να λύσει τα προβλήματα ποσοστών και δεν σημείωνε τίποτα στο χαρτί. Από τις απαντήσεις του φαίνεται να έχει κατανοήσει αρκετά τα ποσοστά και ήταν σε θέση να λύσει ακόμα και προβλήματα όπου τα ποσοστά ξεπερνούσαν το 100%, τα οποία φαίνεται να δυσκόλεψαν τους περισσότερους μαθητές. Επίσης, ήταν ο μόνος μαθητής που απάντησε σωστά στο Ε14, στο οποίο απέτυχαν όλοι οι υπόλοιποι. Σχεδόν σε όλα τα προβλήματα ήταν σε θέση να δώσει μια σωστή εκτίμηση και όταν τα νούμερα ήταν εύκολα μπορούσε να υπολογίσει με ακρίβεια το αποτέλεσμα.

Τέλος, ο Δαμιανός είναι ο μαθητής που συγκέντρωσε την υψηλότερη βαθμολογία και συγκεκριμένα 14 στα 17. Ο Δαμιανός είναι ο μοναδικός μαθητής που απάντησε σωστά σε όλα τα τυπικά προβλήματα ποσοστών της Β΄ κατηγορίας και μπορούσε να δώσει και εναλλακτικούς τρόπους επίλυσης. Ο Δαμιανός φαίνεται να έχει κάνει τη σύνδεση των ποσοστών με τα κλάσματα και τους δεκαδικούς και παρουσιάζει ποικιλία και ευελιξία στις στρατηγικές που χρησιμοποιεί. Ωστόσο, δεν κατάφερε να βρει τις σωστές απαντήσεις στα Ε2β, Ε12 και Ε14. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι και ο Δαμιανός αντιμετωπίζει εννοιολογικές δυσκολίες με τα ποσοστά.

3.6 Προφίλ μαθητών ανά ομάδες

Σύμφωνα με τις απαντήσεις των μαθητών στα έργα του τεστ, μπορούμε να χωρίσουμε τους μαθητές σε τρεις ομάδες (Πίνακας 6).

Πίνακας 6: Απαντήσεις των μαθητών (Σωστές =1, Λανθασμένες =0) στα έργα του τεστ κατά φθίνουσα σειρά βαθμολογίας

	1α	1β	1γ	2α	2β	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Συν.
3(Δαμ)	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	**14**
4(Ειρ)	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	**10**
7(Αλέξ)	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	**10**
2(Χάρ)	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	**8**
8(Σοφ)	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	**8**
6(Κατ)	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	**7**
1(Ελπ)	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**5**
5(Δήμ)	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	**4**
9(Παυλ)	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**2**
Συν.	**9**	**9**	**8**	**4**	**0**	**6**	**4**	**2**	**2**	**2**	**3**	**6**	**0**	**5**	**2**	**4**	**1**	

Στην Α ομάδα, που αποτελείται από τρεις μαθητές (Ελπίδα, Δήμητρα, Παυλίνα) οι οποίοι σημείωσαν τις χαμηλότερες βαθμολογίες. Οι μαθητές της ομάδας Α έλυσαν πολύ λίγα από τα προβλήματα (κυρίως με οικεία ποσοστά όπως 50%, 25%), δεν είχαν καμία μέθοδο ή στρατηγική και δεν μπορούσαν να εξηγήσουν τις απαντήσεις τους.

Η Β ομάδα αποτελείται από τρεις μαθητές (Χάρης, Σοφία, Κατερίνα) οι οποίοι έλυσαν τα «εύκολα» προβλήματα, δηλαδή τα προβλήματα «εύρεσης μέρους» και τα προβλήματα όπου τα ποσοστά ήταν μικρότερα του 100% ή περιείχαν οικεία ποσοστά. Στα προβλήματα όπου η μονάδα αναφοράς μεταβάλλεται δυσκολεύτηκαν αρκετά και κατάφεραν να λύσουν μόνο το πρόβλημα 9. Οι μαθητές αυτοί σε πολλά προβλήματα χρησιμοποιούσαν λανθασμένες στρατηγικές και φάνηκε να στηρίζονται στην απομνημόνευση κανόνων για υπολογισμούς (π.χ. πολλαπλασιάζω τον αριθμό με το ποσοστό ανεξάρτητα από τον τύπο προβλήματος).

Στην Γ ομάδα μαθητών, που περιλαμβάνει τρεις μαθητές (Δαμιανός, Ειρήνη, Αλέξης), είναι οι μαθητές που σημείωσαν τις υψηλότερες βαθμολογίες. Οι μαθητές της ομάδας αυτής έλυσαν αρκετά από τα προβλήματα και εφάρμοσαν διάφορες μεθόδους. Μόνο ένας μαθητής (Δαμιανός) μπορούσε να προτείνει εναλλακτικούς τρόπους προσέγγισης, που ήταν και ο μαθητής που σημείωσε την μεγαλύτερη βαθμολογία. Ωστόσο, οι τρεις μαθητές της ομάδας αυτής παρουσιάζουν διαφορές τόσο στον τρόπο που επίλυαν τα προβλήματα όσο και στις δυσκολίες που αντιμετώπισαν (Πίνακας 7).

Προφίλ των μαθητών της Γ ομάδας	
Μαθητής 3 (Δαμιανός)	• Είχε μία γενική μέθοδο για να λύσει τα προβλήματα (απευθείας πολλαπλασιασμός) • Ο μοναδικός που μπορούσε να λύσει με εναλλακτικούς τρόπους τα προβλήματα • Παρότι σημείωσε την υψηλότερη βαθμολογία, έχει εννοιολογικές δυσκολίες
Μαθητής 4 (Ελπίδα)	• Κατανόηση του ρόλου της μονάδας αναφοράς • Δεν έλυσε κανένα πρόβλημα όπου εμπλέκονταν ποσοστά >100% • Δεν μπορούσε να λύσει με εναλλακτικούς τρόπους τα προβλήματα
Μαθητής 7 (Αλέξης)	• Έλυσε κάποια από τα πιο απαιτητικά προβλήματα • Προσέγγιζε συστηματικά τα προβλήματα με εκτίμηση • Είχε την πιο επαρκή εννοιολογική κατανόηση των ποσοστών • Περιορισμένη διαδικαστική ευχέρεια

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η βιβλιογραφική ανασκόπηση έδειξε ότι τα ποσοστά δυσκολεύουν αρκετά τους μαθητές. Οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες τόσο στην εννοιολογική κατανόηση των ποσοστών, όσο και στην επίλυση προβλημάτων στα οποία εμπλέκονται ποσοστά.

Αναλύοντας τις απαντήσεις των μαθητών στα ερωτήματα του τεστ διαπιστώσαμε ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη σχέση μεταξύ βασικών ποσοστών (50%, 25%) και των αντίστοιχων ισοδύναμων κλασμάτων (50%=1/2, 25% =1/4). Τα ευρήματα αυτά συμφωνούν με τις προγενέστερες έρευνες των Van Den Heuvel-Panhuizen (2003), των Rosenthal et al. (2009) και των van Galen & van Eerde (2013). Όλοι οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα έκαναν αυτόματα τη μετατροπή 50% =1/2. Διαπιστώσαμε όμως ότι υπήρχαν μαθητές που είχαν δυσκολία στη μετατροπή κλασμάτων σε ποσοστά στις περιπτώσεις που τα κλάσματα ξέφευγαν από τις οικείες περιπτώσεις (π.χ. για το κλάσμα 2/5).

Από τις απαντήσεις των μαθητών στα τυπικά προβλήματα ποσοστών («εύρεση μέρους», «εύρεση όλου», «εύρεση ποσοστού»), το πρόβλημα «εύρεσης μέρους» ήταν το πρόβλημα με τις περισσότερες σωστές απαντήσεις και φάνηκε να μην δυσκολεύει τους μαθητές σε σχέση με τις άλλες δύο κατηγορίες τυπικών προβλημάτων, το οποίο συμφωνεί με παλαιότερες έρευνες των Rosenthal et al. (2009), Baratta et al. (2010). Σε αντίθεση με τις παραπάνω έρευνες, το πρόβλημα που δυσκόλεψε περισσότερο τους μαθητές ήταν το πρόβλημα «εύρεσης ποσοστού» και όχι το πρόβλημα «εύρεσης όλου». Μια πιθανή εξήγηση είναι ότι στο πρόβλημα εύρεσης όλου του τεστ το ποσοστό που υπήρχε στο πρόβλημα ήταν εύκολο για υπολογισμούς (10%). Αξιοσημείωτο είναι ότι δύο μαθητές δεν κατάφεραν να λύσουν κανένα τυπικό πρόβλημα ποσοστών.

Στα προβλήματα όπου υπάρχουν διαφορετικές μονάδες αναφοράς, ή η μονάδα αναφοράς μεταβάλλεται, οι μαθητές δυσκολεύτηκαν αρκετά. Η δυσκολία τους φαίνεται να οφείλεται στο γεγονός ότι δεν αντιλαμβάνονται το ρόλο της μονάδας αναφοράς των ποσοστών. Πράγματι, οι διαδοχικές ποσοστιαίες αυξήσεις ή/ και μειώσεις δημιούργησαν μεγάλες δυσκολίες στους μαθητές, οι οποίοι αντιμετώπισαν τις μεταβολές αυτές σαν αριθμητικές. Για παράδειγμα, μια μείωση 10% και στη συνέχεια μια αύξηση 10% ενός ποσού θεωρούσαν ότι θα αφήσει αμετάβλητο το ποσό. Ακόμη και σε περιπτώσεις όπου τα νούμερα ήταν πολύ εύκολα δεν κατάφεραν να βρουν ότι το ποσό θα μεταβληθεί. Μετέφεραν λανθασμένα τις προσθετικές στρατηγικές που θα χρησιμοποιούσαν σε αριθμητικές μεταβολές και στις ποσοστιαίες μεταβολές. Παρόμοια ευρήματα είχαν στις έρευνες τους και οι Jacobs et al. (2018) και οι Rosenthal et al. (2009). Επιπλέον, κάποιοι μαθητές αγνοούσαν το σύμβολο % και αντιμετώπιζαν τα ποσοστά σαν αριθμούς και όχι σαν τελεστές, όπως είχαν παρατηρήσει και οι Rosenthal et al. (2009) στην έρευνα τους

Κανένας μαθητής δεν έδωσε σωστή απάντηση στο πρόβλημα: «Σ΄ένα γιαούρτι με φρούτα των 150γρ. βλέπουμε στα συστατικά του ότι περιέχει 11% φρούτα. Το ίδιο γιαούρτι στη μεγαλύτερη συσκευασία των 300γρ., τι ποσοστό φρούτων θα περιέχει;». Οι μαθητές δεν αντιλήφθηκαν ότι η ποσοστιαία σύσταση των φρούτων δεν επηρεάζεται από την ποσότητα του γιαουρτιού και θεώρησαν ότι θα διπλασιαστεί. Και σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποίησαν λανθασμένες προσθετικές στρατηγικές.

Ένα ακόμα εύρημα ήταν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται πολύ όταν στα προβλήματα υπάρχουν ποσοστά μεγαλύτερα του 100%. Ανάλογες δυσκολίες είχαν εντοπίσει στις έρευνες τους και οι Rosenthal et al. (2009) Price et al. (2014) Ngu et al. (2014). Οι δυσκολίες αυτές ήταν εμφανείς είτε ήταν λεκτικά προβλήματα είτε προβλήματα όπου υπήρχαν γραφικές αναπαραστάσεις.

Αναφορικά με τις στρατηγικές των μαθητών στα προβλήματα ποσοστών, διαπιστώσαμε ότι το 1/3 των μαθητών δεν διέθετε καμία μέθοδο ή στρατηγική για να αντιμετωπίσει τα προβλήματα ποσοστών. Οι στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές της έρευνά μας ήταν: απευθείας πολλαπλασιασμός (ποσοστό σαν τελεστής), η απλή μέθοδος των τριών, πίνακας διπλής εισόδου, σχήμα με βέλη, υπολογισμός με οικεία ποσοστά, αναγωγή στη μονάδα.

Η κυρίαρχη στρατηγική των μαθητών ήταν ο απευθείας πολλαπλασιασμός. Κάποιοι μαθητές κατάφεραν να λύσουν σωστά μερικά προβλήματα του τεστ με την παραπάνω στρατηγική, χωρίς όμως να μπορούν να την αιτιολογήσουν, ενώ σε άλλα προβλήματα η ίδια στρατηγική τους οδηγούσε σε λάθη. Φάνηκε λοιπόν ότι κάποιοι μαθητές χρησιμοποιούν απομνημόνευση κανόνων για να λύσουν προβλήματα ποσοστών , κάτι το οποίο είχαν αναδείξει και οι Dole et al. (1997). Η στρατηγική αυτή, όμως, συχνά οδηγεί σε λανθασμένες απαντήσεις, καθώς οι μαθητές δεν αναγνωρίζουν πάντα τις καταστάσεις στις οποίες είναι κατάλληλη ή όχι η εφαρμογή των κανόνων. Επιπλέον, πολλοί μαθητές χρησιμοποιούσαν ακατάλληλες προσθετικές στρατηγικές.

Ο μαθητής που συγκέντρωσε την υψηλότερη βαθμολογία (Δαμιανός) είχε στη διάθεσή του γενικές μεθόδους για να λύνει τα προβλήματα και ήταν ο μοναδικός που μπορούσε να λύσει με εναλλακτικούς τρόπους τα προβλήματα. Και αυτός ο μαθητής, όμως, είχε σημαντικά ελλείμματα στην εννοιολογική κατανόηση των ποσοστών.

Οι δύο επόμενοι μαθητές με όρους επίδοσης (Ελπίδα και Αλέξης), επίσης παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Η πρώτη φάνηκε να έχει κατανόηση του ρόλου της μονάδας αναφοράς, όταν οι μονάδες ήταν διαφορετικές, αλλά σταθερές. Ωστόσο, η κατανόηση αυτή δεν φάνηκε να επεκτείνεται στην περίπτωση που η μονάδα αναφοράς μεταβάλλεται. Ο δεύτερος φάνηκε να έχει την πιο επαρκή εννοιολογική κατανόηση των ποσοστών, σε σχέση με τους υπόλοιπους μαθητές, επιλύοντας μερικά από τα πιο απαιτητικά προβλήματα. Επιπλέον, προσέγγισε συστηματικά τα προβλήματα με εκτίμηση, δείχνοντας ότι κατανοεί τις ποσότητες και τις σχέσεις που εμπλέκονταν στην κατάσταση. Ωστόσο, ο μαθητής αυτός είχε περιορισμένη διαδικαστική ευχέρεια.

Αξίζει να σημειωθεί, ότι κανένας μαθητής δεν χρησιμοποίησε σαν στρατηγική επίλυσης των προβλημάτων τις εξισώσεις. Γεγονός που να υποδηλώνει την έλλειψη σύνδεσης ποσοστών με εξισώσεις. Επιπλέον και η στρατηγική με αναλογίες δεν αναφέρθηκε από κανέναν μαθητή αν και η επίλυση με πίνακα στηρίζεται στις αναλογίες.

Συνοψίζοντας, από την έρευνα φάνηκε ότι οι μαθητές παρουσιάζουν ελλείψεις τόσο στην εννοιολογική κατανόηση των ποσοστών, όσο και στις διαδικασίες υπολογισμού των ποσοστών. Επιπλέον, οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν για να λύνουν προβλήματα ποσοστών είναι περιορισμένες και στηρίζονται σε κανόνες που δεν κατανοούν, ενώ συχνά εφαρμόζουν λανθασμένες προσθετικές στρατηγικές. Η αδυναμία επίλυσης των προβλημάτων με εναλλακτικούς τρόπους ίσως φανερώνει την έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης των ποσοστών, καθώς και έλλειψη σύνδεσης των ποσοστών με άλλες μαθηματικές έννοιες που συνδέονται με τα ποσοστά. Η ποικιλία στρατηγικών επίλυσης βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα την έννοια των ποσοστών (De Corte et al., 2005; Flores et al., 2019 Jacobs, 2010; Jitendra & Star, 2012; Modestou & Gagatsis, 2009; Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Τα αποτελέσματα αυτά δεν μπορούν, φυσικά, να γενικευθούν, καθώς προέρχονται από ένα πολύ μικρό δείγμα (9 μαθητές) και, μάλιστα, όλοι οι συμμετέχοντες φοιτούν σε σχολεία του νομού Καστοριάς. Ωστόσο, το γεγονός ότι τα ευρήματα συμφωνούν με αυτά που αναφέρονται στη διεθνή βιβλιογραφία μας επιτρέπει να αντλήσουμε από αυτά ορισμένες προτάσεις για την εκπαίδευση.

Ένα σημαντικό ζήτημα είναι η ποικιλία των προβλημάτων με ποσοστά, στα οποία εκτίθενται τα παιδιά κατά τη διδασκαλία (De Corte et al., 2005). Τα πολλά και διαφορετικά προβλήματα ποσοστών μπορούν να αναδείξουν τα διαφορετικά νοήματα των ποσοστών, να φέρουν στο προσκήνιο τις εννοιολογικές δυσκολίες που πρέπει να αντιμετωπιστούν στην εκπαίδευση και να ενισχύσουν, τόσο την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών για τα ποσοστά, όσο και την ικανότητά τους για την επίλυση.

Πιο συγκεκριμένα, παρατηρήσαμε ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να διαχειριστούν ποσοστά μεγαλύτερα του 100%. Αξίζει να σημειωθεί ότι η συντριπτική πλειοψηφία των προβλημάτων με ποσοστά που καλούνται να λύσουν οι μαθητές περιέχουν ποσοστά μικρότερα του 100%. Μάλιστα στο τρέχον σχολικό βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου δεν υπάρχει ούτε ένα λεκτικό πρόβλημα με ποσοστό μεγαλύτερο από 100%. Γίνεται αντιληπτό ότι οι μαθητές θα πρέπει να επιλύουν προβλήματα όπου εμφανίζονται ποσοστά μεγαλύτερα του 100%.σχετικών προβλημάτων.

Παρατηρήσαμε επίσης ότι τα παιδιά δυσκολεύονται με τη μονάδα αναφοράς των ποσοστών. Προβλήματα όπως αυτά που χρησιμοποιήσαμε στο ερευνητικό μας εργαλείο (π..χ. «Η Μαρία και η Στέλλα πήγαν για ψώνια. Η Μαρία ξόδεψε το 50% των χρημάτων της, ενώ η Στέλλα ξόδεψε το 90% των χρημάτων της. Μπορούμε να βρούμε ποια ξόδεψε περισσότερα χρήματα; Αιτιολογείστε») θα πρέπει να γίνονται θέμα συζήτησης στην τάξη, ώστε να γίνει κατανοητό ότι τα ποσοστά αναφέρονται πάντα σε «κάτι», αλλιώς δεν έχουν νόημα.

Ένα συναφές θέμα που διαπιστώσαμε ότι δημιούργησε δυσκολίες στους μαθητές ήταν οι διαδοχικές ποσοστιαίες αυξήσεις ή/και μειώσεις. Σχετικά προβλήματα (π.χ. «Ο Κώστας είχε μισθό 1000€. Όμως ο μισθός του μειώθηκε κατά 10%.Μετά από δύο μήνες αυξήθηκε κατά 10%. Ποιος είναι ο μισθός του Κώστα;») θα πρέπει να εντάσσονται στη διδασκαλία, σε ένα πλαίσιο που να επιτρέπει τη συζήτηση, ώστε οι μαθητές να καθίστανται ενήμεροι για τις δυσκολίες που ενυπάρχουν και να αναγνωρίζουν τις δικές τους λανθασμένες ερμηνείες.

Τα προγράμματα σπουδών των περισσότερων χωρών επικεντρώνονται στη διαδικαστικές γνώσεις για τα ποσοστά (De Corte et al., 2005). Αυτό δεν σημαίνει ότι η διαδικαστική γνώση στα ποσοστά δεν είναι σημαντική, όμως θα πρέπει να συνδυάζεται και με εννοιολογική κατανόηση. Με αυτό το δεδομένο, θα ήταν σημαντικό να μην δίνεται έμφαση στη διδασκαλία στην απομνημόνευση «κανόνων» που επιλύουν συγκεκριμένα προβλήματα. Για την επίλυση προβλημάτων με ποσοστών δεν υπάρχει μια σταθερή μέθοδος επίλυσης. Οι μαθητές θα πρέπει να λύνουν ποικίλα προβλήματα ποσοστών και να ενθαρρύνονται να χρησιμοποιούν πολλές διαφορετικές στρατηγικές. Η ποικιλία στρατηγικών επίλυσης βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα την έννοια των ποσοστών (De Corte et al., 2005; Flores et al., 2019 Jacobs, 2010; Jitendra & Star, 2012; Modestou & Gagatsis, 2009; Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003). Στην ίδια κατεύθυνση φαίνεται να βοηθούν και οι πολλαπλές αναπαραστάσεις, ιδιαίτερα οι εικονικές, όπως το μοντέλο της ράβδου.

Θα πρέπει να επισημανθεί ότι η ποικιλία προβλημάτων, στρατηγικών και αναπαραστάσεων, απαιτεί και μια μακροπρόθεσμη και συνεπή προσέγγιση, προκειμένου οι μαθητές να έχουν τον απαραίτητο χρόνο να τα οικειοποιηθούν, και ενδεχομένως, να υπάρχει αρχικά ένας κόστος στη διαδικαστική ευχέρεια των μαθητών, όπως φαίνεται από έρευνες για τη χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων των ποσοστών στη διδασκαλία (Ngu et al., 2014)). Μακροχρόνιες έρευνες είναι απαραίτητες για να αξιολογήσουν επωφελή εκπαιδευτικά προγράμματα σχετικά με τα ποσοστά. Επιπλέον, απαραίτητη είναι η σύγχρονη μέριμνα την ανάδειξη των συνδέσεων ανάμεσα στα ποσοστά, τους ρητούς αριθμούς και τις αναλογίες, τόσο σε εννοιολογικό, όσο και σε διαδικαστικό επίπεδο (De Corte et al., 2005).

5. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ayan, R., & Isiksal-Bostan, M. (2019). Middle school students’ proportional reasoning in real life contexts in the domain of geometry and measurement. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50(1), 65-81.

Baratta, W., Price, B., Stacey, K., Steinle, V., & Gvozdenko, E. (2010). Percentages: The effect of problem structure, number complexity and calculation format. Mathematics Education Research Group of Australasia.

Cincinatus, R. B., & Sheffet, M. (2016). “With Percentages the 100 is Always in the Denominator”: From the Field to Pre-service Teachers. International Journal of Research in Education and Science, 2(1), 143-155.

Dennis, M. S., Knight, J., & Jerman, O. (2016). Teaching high school students with learning disabilities to use model drawing strategy to solve fraction and percentage word problems. Preventing School Failure: Alternative Education for Children and Youth, 60(1), 10-21.

De Corte, E., Depaepe, F., Op’t Eynde, P., & Verschaffel, L. (2005, January). Comparing mathematics education traditions in four European countries: The case of the teaching of percentages in the primary school. In A paper presented in the conference „The Mathematics Education into the 21st Century Project Universiti Teknologi Malaysia.

Dole, S., Cooper, T. J., Baturo, A. R., & Conoplia, Z. (1997). Year 8, 9 and 10 students’ understanding and access of percent knowledge. In The 20th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia: People in Mathematics Education

Dole, S. (2000). Promoting Percent as a Proportion in Eighth-Grade Mathematics. School Science and Mathematics, 100(7), 380-389.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. Journal for research in mathematics education, 16(1), 3-17.

Flores, R., Inan, F. A., Han, S., & Koontz, E. (2019). Comparison of algorithmic and multiple-representation integrated instruction for teaching fractions, decimals, and percent. Investigations in Mathematics Learning, 11(4), 231-244.

Jacobs Danan, J. A., & Gelman, R. (2018). The problem with percentages. Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences, 373(1740), 20160519.

Jacobs, J. A. (2010). Undergraduates'(mis) understanding of percentages. Rutgers The State University of New Jersey-New Brunswick.

Jitendra, A. K., Harwell, M. R., Dupuis, D. N., & Karl, S. R. (2017). A randomized trial of the effects of schema-based instruction on proportional problem-solving for students with mathematics problem-solving difficulties. Journal of learning disabilities, 50(3), 322-336.

Jitendra, A. K., Harwell, M. R., Dupuis, D. N., Karl, S. R., Lein, A. E., Simonson, G., & Slater, S. C. (2015). Effects of a research-based intervention to improve seventh-grade students’ proportional problem solving: A cluster randomized trial. Journal of Educational Psychology, 107(4), 1019.

Jitendra, A. K., Star, J. R., Starosta, K., Leh, J. M., Sood, S., Caskie, G., ... & Mack, T. R. (2009). Improving seventh grade students’ learning of ratio and proportion: The role of schema-based instruction. Contemporary Educational Psychology, 34(3), 250-264.

Jitendra, A. K., & Star, J. R. (2012). An exploratory study contrasting high-and low-achieving students' percent word problem solving. Learning and Individual Differences, 22(1), 151-158.

Kachapova, F., & Kachapov, I. (2012). Percentage problems in bridging courses. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43(5), 654-663.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematic teaching and learning* (pp. 629–667). New York: Macmillan.

Modestou, M. O. D. E. S. T. I. N. A., & Gagatsis, A. T. H. A. N. A. S. I. O. S. (2009). Proportional reasoning: the strategies behind the percentages. Acta Didactica Universitatis Comenianae, 9, 25-40.

Ngu, B. H., Yeung, A. S., & Tobias, S. (2014). Cognitive load in percentage change problems: unitary, pictorial, and equation approaches to instruction. Instructional Science, 42(5), 685-713.

Pöhler, B., Prediger, S., & Weinert, H. (2015, February). Cracking percent problems in different formats: The role of texts and visual models for students with low and high language proficiency. In CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 331-338).

Pöhler, B., & Prediger, S. (2015). Intertwining lexical and conceptual learning trajectories-A design research study on dual macro-scaffolding towards percentages. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 11(6), 1697-1722.

Prediger, S., & Pöhler, B. (2015). The interplay of micro-and macro-scaffolding: an empirical reconstruction for the case of an intervention on percentages. ZDM, 47(7), 1179-1194.

Price, B., Steinle, V., Stacey, K., & Gvozdenko, E. (2014). Using Percentages to Describe and Calculate Change. Mathematics Education Research Group of Australasia.

Rosenthal, I., Ilany, B. S., & Almog, N. (2009). Intuitive knowledge of percentages prior to learning. Research in Mathematical Education, 13(4), 297-307

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. Educational studies in Mathematics, 54(1), 9-35.

van Galen, F., & van Eerde, D. (2013). Solving problems with the percentage bar. Journal on Mathematics Education, 4(1), 1-8.

White, P., & Mitchelmore, M. (2005). Teaching percentage as a multiplicative relationship. In In.

White, P., Wilson, S., Faragher, R., & Mitchelmore, M. (2007). Percentages as part whole relationships.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

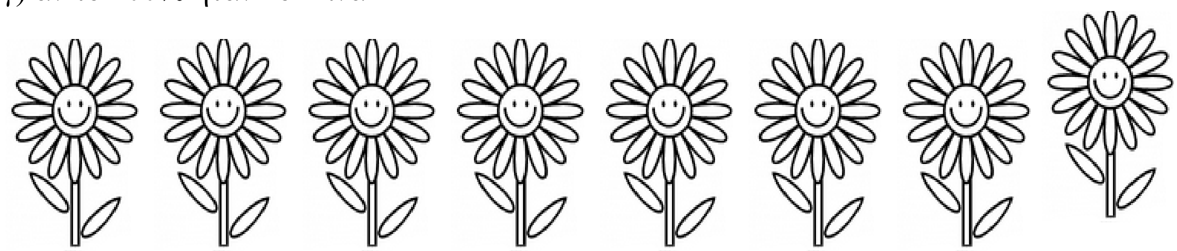
Δοκιμασία σε προβλήματα ποσοστών

1. Πόσα λουλούδια θα χρωματίσετε κόκκινα:

α) αν το 50% ήταν κόκκινα

β) αν το 25% ήταν κόκκινα

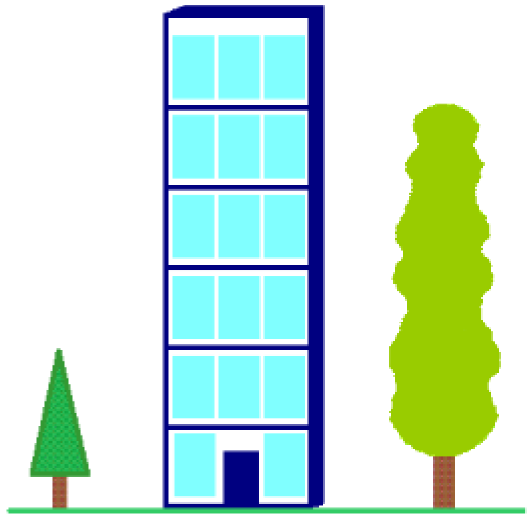
γ) αν το 100% ήταν κόκκινα



2. Δύο δένδρα μεγαλώνουν δίπλα σ΄ ένα ψηλό κτίριο.

α) Το ύψος του έλατου είναι περίπου το …% του ύψους του κυπαρισσιού.

β)Το ύψος του κυπαρισσιού είναι περίπου το ….% του ύψους του έλατου



3. Σ΄ ένα σχολείο με 80 μαθητές, το 30% των μαθητών παίζουν τέννις. Πόσοι μαθητές παίζουν τέννις;

4. Χθες τα κρούσματα κορονοϊού στην Καστοριά ήταν 40, τα οποία αποτελούσαν το 10% των συνολικών κρουσμάτων σ' όλη την Ελλάδα. Πόσα ήταν τα συνολικά κρούσματα που καταγράφηκαν χθες σ' όλη τη χώρα;

5. Ένα σχολείο έχει 40 μαθητές, οι 8 από αυτούς παίζουν μπάσκετ. Τι ποσοστό των μαθητών παίζει μπάσκετ;

6. Η Μαρία και η Στέλλα πήγαν για ψώνια. Η Μαρία ξόδεψε το 50% των χρημάτων της, ενώ η Στέλλα ξόδεψε το 90% των χρημάτων της. Μπορούμε να βρούμε ποια ξόδεψε περισσότερα χρήματα; Αιτιολογείστε.

7. Μια ψηφιακή κάμερα κοστίζει 210€. Διαλέξτε τι είναι σωστό από τα παρακάτω

α. συμφέρει καλύτερη μια έκπτωση 20%

β. είναι καλύτερη μια έκπτωση 10% και μετά μια ακόμα 10%

γ. είναι το ίδιο είτε το α είτε το β

Αιτιολογείστε.

8. Ο Κώστας είχε μισθό 1000€. Όμως ο μισθός του μειώθηκε κατά 10%.Μετά από δύο μήνες αυξήθηκε κατά 10%. Ποιος είναι ο μισθός του Κώστα?

α) είναι 1000

β) λιγότερο από 1000

γ) περισσότερο από 1000

9. Ο Μάρκος θέλει να αγοράσει καινούργιο κινητό. Η αρχική τιμή του είναι 150€. Του έδωσαν δύο επιλογές, να του κάνουν έκπτωση 8% ή να του μειώσουν την τιμή κατά 10€. Τι να επιλέξει; Αιτιολογείστε.

10. Σ' ένα γιαούρτι με φρούτα των 150γρ. βλέπουμε στα συστατικά του ότι περιέχει 11% φρούτα. Το ίδιο γιαούρτι στη μεγαλύτερη συσκευασία των 300γρ., τι ποσοστό φρούτων θα περιέχει;

11. Ένα ζευγάρι αθλητικά παπούτσια είχε αρχική τιμή 40€ και μας έκαναν έκπτωση 20%.Πόσο θα πληρώσουμε τελικά;

12. Χθες τα κρούσματα κορονοϊού στην Ελλάδα ήταν 200. Σήμερα αυξήθηκαν κατά 120% σε σχέση με χθες. Πόσα είναι τα κρούσματα κορονοϊού σήμερα;

13. Ένα είδος με αρχική αξία 300 € , το αγοράσαμε τελικά 270 €. Ποιο είναι το ποσοστό της έκπτωσης που μας έγινε;

14. Η τιμή ενός αντισηπτικού χεριών πριν την πανδημία ήταν 2€. Στην πανδημία η τιμή του ίδιου αντισηπτικού αυξήθηκε και πωλούνταν 4€. Ποιο είναι το ποσοστό της αύξησης της τιμής του αντισηπτικού;