ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ*
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

Διπλωματική εργασία

"Η έννοια και ο υπολογισμός του όγκου σε μαθητές της ΣΤ΄τάξης"

Μάνος Κωνσταντίνος

Αρ. Μητρώου: 702

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Τζεκάκη Μαριάννα, Καθηγήτρια

Εξεταστές: Σακονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής

Παπαδόπουλος Ιωάννης, Επίκουρος Καθηγητής

Φλώρινα, 2021

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών στις Επιστήμες Αγωγής στο Τμήμα Επιστημών Προσχολικής Αγωγής & Εκπαίδευσης. Ως την ελάχιστη δυνατή μνεία, με την παρούσα παράγραφο οφείλω να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν στην εκπόνησή της και ιδιαίτερα, την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου Τζεκάκη Μαριάννα, για την πολύτιμη υποστήριξή της, τις παραγωγικές υποδείξεις της και το πολύ καλό κλίμα συνεργασίας που διαμόρφωσε συμβάλλοντας τα μέγιστα για την κατάρτιση της διπλωματικής μου εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές κ. Σακονίδη Χαράλαμπο και Παπαδόπουλο Ιωάννη, για τη συμμετοχή τους στην επιτροπή επίβλεψης της παρούσας εργασίας.

Παράλληλα, κρίνεται επιτακτική ανάγκη να ευχαριστήσω τους συναδέλφους μου που στάθηκαν σημαντικοί αρωγοί στην προσπάθεια συγγραφής της διπλωματικής μου εργασίας. Συγκεκριμένα, αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Σταμάτη Βούλγαρη, Σχολικό σύμβουλο Δ.Ε. Β’ Εκπαιδευτικής περιφέρειας Χίου του οποίου η συνεισφορά ήταν καταλυτική, τους διευθυντές και τους εκπαιδευτικούς του 3ου και 8ου δημοτικών σχολείων της Χίου για την υποστήριξη τους. Εν συνεχεία, οφείλω να ευχαριστήσω την οικογένεια μου Στέλλα και Παναγιώτη. Τέλος, θερμές ευχαριστίες οφείλω σε όλα τα παιδιά που συμμετείχαν στην ερευνητική διαδικασία και δίχως αυτούς δε θα ολοκληρωνόταν η εργασία.

Περίληψη

Ο βασικός σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η διερεύνηση της αντίληψης των μαθητών της ΣΤ΄τάξης του δημοτικού αναφορικά με τις έννοιες του όγκου, καθώς επίσης και ο προσδιορισμός της ικανότητας υπολογισμού του, στο κύβο και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Στην έρευνα συμμετείχαν 34 μαθητές, το δείγμα έχει επιλεγεί από δύο Δημοτικά σχολεία της Χίου και ειδικότερα από τους μαθητές της ΣΤ΄ τάξης του 3ου Δημοτικού σχολείου και τους μαθητές της ΣΤ' τάξης του 8ου Δημοτικού. Για τη συλλογή των δεδομένων της εργασίας χορηγήθηκε ένα τεστ, όπου σκοπό είχε να διερευνήσει την ικανότητα αντίληψης και υπολογισμού του όγκου στο κύβο και στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Τα αποτελέσματα της εργασίας, έδειξαν ότι στη πρώτη δραστηριότητα οι κύβοι που δόθηκαν ως κυβικά εκατοστά έπρεπε να χρησιμοποιηθούν από πλευράς των παιδιών για να δοθούν περιγραφές των διαστάσεων που αφορούσαν τον όγκο μεγαλύτερων στερεών. Τα παιδιά φάνηκαν να μην έχουν κάποιο ιδιαίτερο πρόβλημα ή δυσκολία στον υπολογισμό των τρισδιάστατων στερεών και στη συνέχεια μάλιστα χρησιμοποίησαν την ίδια μέθοδο για τον υπολογισμό του αριθμού των κύβων στα μπλοκ που παρουσιάζονται είτε σε εικόνα είτε σε φυσική μορφή. Στην περίπτωση σχημάτων που παρουσιάζονται σε φυσική μορφή τα παιδιά χρησιμοποίησαν την κυβική μονάδα για τον υπολογισμό του όγκου τους και στην περίπτωση σχημάτων που δίνονταν με τη μορφή εικόνας τα παιδιά είτε επιχείρησαν να χωρίσουν μόνα τους την επιφάνεια του σχήματος σε κυβικές μονάδες και να υπολογίσουν με αυτόν τον τρόπο τον όγκο είτε να πολλαπλασιάσουν τις τρεις διαστάσεις του σχήματος για να καταλήξουν στο αποτέλεσμα χωρίς να δίνουν πολλές φορές επεξηγηματική απάντηση. Επιπλέον υπήρξαν και οι περιπτώσεις αριθμητικών λαθών κατά τον πολλαπλασιασμό των τριών διαστάσεων.

Abstract

The main purpose of this thesis is to investigate the perception of the students of the 6th grade of primary school regarding the concepts of volume, as well as the determination of their ability to calculate it, in the cube and the rectangular parallelepiped. 34 students participated in the research, the sample has been selected from two primary schools of Chios and in particular from the students of the 6th grade of the 3rd primary school and the students of the 6th grade of the 8th primary school. A test was administered to collect the data of the study, where the purpose was to measure the ability to perceive and calculate the volume in the cube and rectangular parallelogram.

The results of the task, showed that in the first study the cubes given as cubic centimeters had to be used on the part of the children to give descriptions of the dimensions related to the volume of larger solids. The children seemed to have no particular problem or difficulty in calculating three-dimensional solids and then even used the same method to calculate the number of cubes in the blocks presented either in picture or physical form. In the case of shapes presented in physical form the children used the cubic unit to calculate their volume and in the case of shapes given in picture form the children either attempted to divide the surface of the shape into cubic units by themselves and calculate the volume in this way or to multiply the three dimensions of the shape to arrive at the result without often giving an explanatory answer. In addition, there were also cases of arithmetical errors when multiplying the three dimensions.

Πίνακας περιεχομένων

Κεφάλαιο πρώτο: Εισαγωγή

Η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης και της τρισδιάστατης γεωμετρικής αντίληψης των μαθητών αποτελεί αναπόσπαστο στοιχείο των αναλυτικών προγραμμάτων των μαθηματικών και συνδέεται με πληθώρα καταστάσεων της καθημερινής ζωής (Clements & Sarama, 2007· Jones & Mooney, 2003). Για αυτό, σύμφωνα με τον οργανισμό National Council of Teachers of Mathematics (2000), το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών πρέπει να περιλαμβάνει τη μελέτη των τρισδιάστατων αντικειμένων και να στοχεύει στην ανάπτυξη της ικανότητας οπτικοποίησης και αντίληψης των εννοιών του όγκου. Ερευνητές της μαθηματικής παιδείας υποστηρίζουν ότι η ικανότητα οπτικοποίησης των εννοιών του όγκου αποτελεί θεμελιώδη στοιχείο του γεωμετρικού συλλογισμού και της μαθηματικής σκέψης ευρύτερα (Bishop, 1980, 1989· Goldenberg, Cuoco, & Mark, 1998). Σύμφωνα με τους Lehrer, Jenkins και Osana (1998) η ανάπτυξη του συλλογισμού των μαθητών στις έννοιες του όγκου αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα πεδία έρευνας για τους ερευνητές και τους εκπαιδευτικούς.

Τις τελευταίες δεκαετίες παρατηρήθηκαν πολλές προσπάθειες και εισηγήσεις για την αναβάθμιση της διδασκαλίας της γεωμετρίας (Burger & Shaughnessy, 1986· Hoffer, 1981· Lehrer & Chazan, 1998· NCTM, 2000). Η θεωρία που περιγράφει την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης και αποτέλεσε τον πυρήνα των περισσότερων εισηγήσεων για τη διδασκαλία της γεωμετρίας είναι η θεωρία των Van Hiele. Η θεωρία αυτή αποτελεί ένα χρήσιμο και ευρέως αποδεκτό εργαλείο για τη διδασκαλία της γεωμετρίας που επεξηγεί τον τρόπο ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών (Fuys, Geddes & Tischler, 1988· Van Hiele, 1999). Ερευνητικές προσπάθειες έχουν εστιαστεί στη μελέτη της θεωρίας των Van Hiele με στόχο να περιγράψουν και να προσδιορίσουν τα χαρακτηριστικά του κάθε επιπέδου για σημαντικές γεωμετρικές έννοιες (Battista, 1999· Gutierrez, Jaine, & Fortuny, 1991). Επιπρόσθετα, ο Gutierrez και οι συνεργάτες του προσπάθησαν να μεταφέρουν το μοντέλο των van Hiele στη γεωμετρία του χώρου με έμφαση στην ανάπτυξη της ικανότητας οπτικοποίησης (Gutierrez, 1992).

Η ερευνητική εργασία στον τομέα της γεωμετρίας είναι περιορισμένη και ειδικότερα η κατανόηση της γεωμετρίας του όγκου (Battista, 1999), ενώ οι περισσότερες έρευνες έχουν γίνει εδώ και αρκετές δεκαετίες (Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1989· Chiappini & Lemut, 1992· Clements & Battista 1992). Για αυτό δεν έχει αναπτυχθεί το κατάλληλο θεωρητικό υπόβαθρο για τη μάθηση και διδασκαλία της έννοιας του όγκου και ειδικότερα στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Battista & Clements, 1996· Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1985). Θεωρείται από τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές ως μια ιδιαίτερα δύσκολη και σύνθετη ενότητα και έτσι αντιμετωπίζεται ως αντικείμενο δευτερεύουσας σημασίας (Clements & Sarama, 2007). Δεδομένου λοιπόν των συνθηκών και της έλλειψης ανάλογων ερευνητικών κειμένων η παρούσα εργασία αποσκοπεί στην διερεύνηση της αντίληψης των μαθητών δημοτικού στην έννοια του όγκου. Ταυτόχρονα η παρούσα μελέτη προσδοκά να εξάγει συμπεράσματα που αφορούν στον τρόπο διδασκαλίας αναφορικά με την έννοια του όγκου και τον υπολογισμό του στον κύβο και το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

1.1 Σκοπός της εργασίας

Ο βασικός σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η διερεύνηση της αντίληψης των μαθητών της ΣΤ΄τάξης του δημοτικού αναφορικά με τις έννοιες του όγκου, καθώς επίσης και ο προσδιορισμός της ικανότητας υπολογισμού του, στο κύβο και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Ειδικότερα, μέσα από τα μαθήματα που διδάσκονται στο δημοτικό σχολείο για την κατανόηση της έννοιας του όγκου, έχουμε λάβει τις απαντήσεις μαθητών ΣΤ’ τάξης σε κάποια τεστ που υποβλήθηκαν σε αυτούς. Στόχος μας είναι να εξετάσουμε αν και σε ποιο βαθμό έχει κατανοηθεί η έννοια του όγκου από μεριάς τους, με ποιον τρόπο καλούνται να υπολογίσουν τον όγκο σε διαφορετικά προβλήματα που τους ανατίθενται και εν τέλει ποιες είναι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν ως προς τη μέτρηση αλλά και την κατανόηση της έννοιας αυτής.

Κατ’ αυτόν τον τρόπο θα προκύψουν συμπεράσματα που αφορούν τις επιδόσεις και την αντίληψη των παιδιών ότι αφορά θεμελιώδεις και βασικές έννοιες δεδομένης της διδασκαλίας που τους παρέχεται. Αυτό μπορεί να συμβάλλει θετικά τόσο στην αλλαγή κάποιων μεθόδων διδασκαλίας σε περίπτωση μη επαρκούς κατανόησης από την πλευρά των παιδιών όσο και στον εμπλουτισμό του υλικού που τους δίνεται ώστε πέραν του θεωρητικού υπόβαθρου να δίνονται περισσότερες πρακτικές εφαρμογές που θα καθιστούν τα μαθήματα πιο κατανοητά και διασκεδαστικά από τους μαθητές.

1.2 Ερευνητικοί στόχοι

Οι ερευνητικοί στόχοι της εργασίας παρουσιάζονται στον πίνακα 1.

Πίνακας 1 Ερευνητικοί στόχοι

Ερευνητικοί στόχοι
Διερεύνηση της κατανόησης των μαθητών της ΣΤ΄τάξης του δημοτικού αναφορικά με την έννοια του όγκου.
Διερεύνηση του τρόπου σκέψης των μαθητών της έκτης τάξης του δημοτικού για τη κατανόηση των εννοιών του όγκου.
Διερεύνηση της ικανότητας υπολογισμού του όγκου στο κύβο και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.
Προσδιορισμός της στρατηγικής που ακολουθούν οι μαθητές της έκτης τάξης του δημοτικού για τον υπολογισμό του όγκου.

1.3 Διατύπωση ερευνητικών ερωτημάτων

Τα βασικά ερευνητικά ερωτήματα είναι τρία και παρουσιάζονται στον πίνακα 2.

Πίνακας 2 Ερευνητικά ερωτήματα

Ερευνητικό ερώτημα 1	Πώς κατανοούν οι μαθητές της Στ΄ τάξης δημοτικού την έννοια του όγκου;
Ερευνητικό ερώτημα 2	Με ποιους τρόπους οι μαθητές υπολογίζουν τον όγκο του κύβου και του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου;
Ερευνητικό ερώτημα 3	Ποιες δυσκολίες αντιμετωπίζουν στη κατανόηση και τη μέτρηση του όγκου του κύβου και του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου;

Κεφάλαιο δεύτερο: Θεωρίες ανάπτυξης της Γεωμετρικής σκέψης

2.1 Η Θεωρία των van Hiele

Ένα χρήσιμο και ευρέως αποδεκτό μοντέλο για τη διδασκαλία της γεωμετρίας που επεξηγεί τον τρόπο ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών είναι το μοντέλο των Van Hiele (Van Hiele, 1999). Στα τέλη της δεκαετίας του ’50, οι Pierre και Dina van Hiele, ζεύγος μαθηματικών από την Ολλανδία, ανέπτυξαν μια θεωρία για την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης η οποία προσπαθεί να περιγράψει την πορεία ανάπτυξης της σκέψης των μαθητών μέσα από «επίπεδα γεωμετρικής σκέψης» και εισηγείται με ποιο τρόπο θα πρέπει να δομείται ένα μάθημα στη γεωμετρία με βάση «φάσεις διδασκαλίας». Η εργασία τους έχει χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα σε πολλές χώρες όπως στην Ολλανδία, στην πρώην Σοβιετική Ένωση και στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής (Usiskin, 1982). Το μοντέλο αυτό αποτελείται από δύο μέρη: το πρώτο μέρος αναφέρεται σε «επίπεδα γεωμετρικής σκέψης» και το δεύτερο σε «φάσεις διδασκαλίας».

2.1.1. Η ταξινόμηση των επιπέδων στη θεωρία των van Hiele

Σύμφωνα με το μοντέλο van Hiele, υπάρχουν πέντε επίπεδα ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης (Clements & Battista, 1992):

Επίπεδο 1: **Οπτικοποίηση ή Αναγνώριση** (recognition-visualisation). Οι μαθητές αναγνωρίζουν και αντιλαμβάνονται τις γεωμετρικές μορφές ως ενιαίες οντότητες. Αναγνωρίζουν τα σχήματα ως οπτικές οντότητες και έτσι μπορούν να τα αναπαραστήσουν νοητικά ως οπτικές εικόνες. Για την αναγνώριση των σχημάτων χρησιμοποιούν οπτικά πρότυπα, για παράδειγμα ένας μαθητής μπορεί να υποστηρίξει ότι ένα σχήμα είναι ορθογώνιο λέγοντας ότι «μοιάζει με πόρτα». Οι μαθητές στο επίπεδο αυτό δεν έχουν συναίσθηση των γεωμετρικών ιδιοτήτων ή των χαρακτηριστικών των κλάσεων των σχημάτων. Ο συλλογισμός των μαθητών σε αυτό το επίπεδο στηρίζεται αποκλειστικά στην οπτική αντίληψη. Για παράδειγμα, διαχωρίζουν ένα σχήμα από κάποιο άλλο χωρίς να μπορούν να ονομάσουν έστω μια ιδιότητα των σχημάτων ή να κρίνουν ότι δύο σχήματα είναι ίσα γιατί «το ένα φαίνεται όπως το άλλο» (van Hiele, 1986). Οι μαθητές αναγνωρίζουν κλάσεις σχημάτων οπτικά που έχουν το «ίδιο σχήμα». Για παράδειγμα, με τη δήλωση «αυτό το σχήμα είναι ρόμβος», ο μαθητής εννοεί ότι το σχήμα αυτό έχει τη μορφή που έχει μάθει ότι ονομάζεται ρόμβος.

Επίπεδο 2: **Ανάλυση** (analysis). Οι μαθητές στο επίπεδο αυτό αναγνωρίζουν και διακρίνουν τα σχήματα με βάση τις ιδιότητές του. Οι μαθητές βλέπουν τα σχήματα ως ολότητες, ως ένα σύνολο ιδιοτήτων. Οι ιδιότητες κατακτώνται με πειραματικό τρόπο μέσω της παρατήρησης, μέτρησης και σχεδιασμού των σχημάτων. Οι μαθητές ανακαλύπτουν ότι κάποιοι συνδυασμοί ιδιοτήτων σχηματίζουν κλάσεις σχημάτων ενώ το ίδιο δεν ισχύει για κάποιους άλλους συνδυασμούς. Παρόλα αυτά οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο δεν βλέπουν σχέσεις μεταξύ κλάσεων σχημάτων.

Επίπεδο 3: **Θεωρητικό επίπεδο-Άτυπος παραγωγικός συλλογισμός.** Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο αντιλαμβάνονται πλήρως τις σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στο ίδιο το σχήμα και τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των σχημάτων. Διακρίνουν τις κρίσιμες και μη ιδιότητες ενός σχήματος. Ταξινομούν σχήματα ιεραρχικά και αιτιολογούν τον τρόπο εργασίας τους. Για παράδειγμα, ένα τετράγωνο αναγνωρίζεται και ως ρόμβος γιατί μπορεί να θεωρηθεί «ως ρόμβος με επιπλέον ιδιότητες». Οι μαθητές μελετούν τις ιδιότητες κλάσεων σχημάτων και οργανώνουν τις ιδιότητες. Παρόλα αυτά οι μαθητές ακόμη δεν αντιλαμβάνονται ότι ο παραγωγικός συλλογισμός είναι η μέθοδος απόδειξης των γεωμετρικών εννοιών.

Επίπεδο 4: Τυπικός - Παραγωγικός συλλογισμός (deduction-formal logic ή abstraction). Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη σημασία της παραγωγικής σκέψης και είναι σε θέση να αποδεικνύουν θεωρήματα σε ένα αξιωματικό σύστημα. Αντιλαμβάνονται τη διαφορά μεταξύ των ορισμών, των αξιωμάτων και των θεωρημάτων.

Επίπεδο 5: Αυστηρό επίπεδο. Οι μαθητές κατανοούν διάφορα αξιωματικά συστήματα. Ο συλλογισμός των μαθητών στηρίζεται στην τυπική διαχείριση αξιωμάτων, ορισμών και θεωρημάτων και το αντικείμενο του συλλογισμού είναι η σχέση μεταξύ τυπικών εννοιών.

Οι Clements & Battista (1992) υποστηρίζουν την ύπαρξη ενός πιο βασικού επιπέδου, του προ-αναγνωριστικού επιπέδου με βάση τα αποτελέσματα ερευνών που έδειξαν ότι ποσοστό 9-34% μαθητών γυμνασίου δεν κατέχουν καν το οπτικό επίπεδο. Οι μαθητές που βρίσκονται στο προ-αναγνωριστικό επίπεδο αδυνατούν να αναγνωρίσουν ακόμη και βασικά σχήματα. Διαχωρίζουν τα καμπυλόγραμμα από τα ευθύγραμμα τμήματα αλλά δεν μπορούν να διαχωρίσουν σχήματα της ίδιας κλάσης. Πιθανή αιτία της αδυναμίας τους να αναγνωρίσουν κοινά σχήματα είναι η δυσκολία να σχηματίσουν τις απαραίτητες οπτικές εικόνες.

Σύμφωνα με τη θεωρία ένας μαθητής μεταβαίνει ιεραρχικά από το ένα επίπεδο γεωμετρικής σκέψης στο επόμενο κατά τη διάρκεια της μάθησης (Gutierrez, Jaine, & Fortury, 1991). Κατά τη διαδικασία της μάθησης παρατηρούνται διακριτά άλματα που υποδεικνύουν την ύπαρξη διαφορετικών ποιοτικά επιπέδων. Ένας μαθητής για να μεταβεί σε ένα ανώτερο ιεραρχικά επίπεδο πρέπει πρώτα να έχει κατακτήσει σε υψηλό ποσοστό τα προηγούμενα επίπεδα (Hoffer, 1981). Η μετάβαση από το ένα επίπεδο στο άλλο εξαρτάται κυρίως από τις μαθησιακές του εμπειρίες και όχι από την ηλικία ή την ωρίμανση (Mason, 2005). Σημαντικό, επίσης, χαρακτηριστικό της θεωρίας είναι ότι έννοιες οι οποίες γίνονται κατανοητές σε ένα άτυπο βαθμό σε ένα επίπεδο, γίνονται πλήρως κατανοητές στο επόμενο επίπεδο. Το κάθε επίπεδο έχει τη δική του γλώσσα επικοινωνίας, τους δικούς του λεκτικούς συμβολισμούς και το δικό του σύστημα συσχέτισης των συμβόλων αυτών. Μια σχέση που θεωρείται «σωστή» σε ένα επίπεδο μπορεί να μην θεωρείται αποδεκτή στο επόμενο. Για παράδειγμα, ένας μαθητής που βρίσκεται στο επίπεδο 1 έχει διαφορετική αντίληψη για τη σχέση μεταξύ τετραγώνου και ορθογωνίου από ένα μαθητή του επιπέδου 2, και συνεπώς έχουν πρόβλημα στο να αντιληφθούν ο ένας τον άλλο.

Η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου αποτελεί σημαντικό παράγοντα ανάπτυξης σε όλα τα στάδια ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης των van Hiele. Ο Battista (1990) υποστηρίζει ότι η ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου έχει ιδιαίτερη βαρύτητα στην ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού ιδιαίτερα για τους μαθητές που βρίσκονται στο πρώτο/οπτικό στάδιο του μοντέλου. Σε έρευνα της Ahuja (1996) φάνηκε ότι ο λόγος της μη ανάπτυξης φοιτητών παιδαγωγικού τμήματος σε ανώτερα στάδια του μοντέλου των van Hiele ήταν η έλλειψη εμπειριών σε γεωμετρικές καταστάσεις που να δίνουν έμφαση στην ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου. Οι Battista και Clements (1991) βρήκαν ότι μαθητές που βρίσκονταν στο δεύτερο/αναλυτικό στάδιο του μοντέλου είχαν ιδιαίτερες δυσκολίες στη λύση προβλήματος και στην αιτιολόγηση λόγω της αδυναμίας συντονισμού της αντίληψης τους για τις έννοιες του χώρου και της γνώσης τους για τις ιδιότητες των αντικειμένων. Για παράδειγμα, ένας μαθητής ο οποίος γνωρίζει τις ιδιότητες του ορθογωνίου αλλά χρησιμοποιεί μια συγκεκριμένη εικόνα για αυτό σε ένα συγκεκριμένο προσανατολισμό, μπορεί να οδηγηθεί σε λανθασμένα συμπεράσματα. Η περιορισμένη εμπειρία με σχήματα σε διαφορετικό προσανατολισμό, όπως παρουσιάζονται στα πλείστα σχολικά εγχειρίδια αποτελεί ανασταλτικό παράγοντα στη διαδικασία συντονισμού αντίληψης των εννοιών του χώρου και γεωμετρικών ιδιοτήτων.

3.2 Μοντέλο van Hiele στην Τρισδιάστατη Γεωμετρία

Μεμονωμένες ερευνητικές προσπάθειες επιχείρησαν να μεταφέρουν το μοντέλο των van Hiele στην τρισδιάστατη γεωμετρία (Guillen, 1996· Gutierrez, 1992· Lawrie et al., 2000, 2002· Saads & Davis, 1997β). Η πρώτη ερευνητική προσπάθεια από τον Hoffer (1981) προσπάθησε να περιγράψει αναλυτικά τα αντίστοιχα επίπεδα του μοντέλου στην τρισδιάστατη γεωμετρία με αναφορά σε αρκετές γεωμετρικές δεξιότητες σε κάθε επίπεδο όπως οπτική αντίληψη, αναπαράσταση αντικειμένων, εφαρμογή δεξιοτήτων. Αν και ο Hoffer (1981) προσπάθησε να δώσει γενική θεωρητική περιγραφή του κάθε επιπέδου, δύσκολα μπορεί να πει κάποιος ότι κατάφερε να περιγράψει την ανάπτυξη του συλλογισμού των μαθητών στην τρισδιάστατη γεωμετρία με βάση το μοντέλο των van Hiele.

Ο Gutierrez (1992) διαχώρισε δύο πεδία έρευνας όσον αφορά τη μεταφορά του μοντέλου van Hiele στη γεωμετρία του χώρου: (α) τη χρήση του μοντέλου για την κατανόηση της ανάπτυξης της ικανότητας οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου των μαθητών και (β) τη χρήση του μοντέλου για τη μελέτη και κατανόηση της μάθησης των μαθητών στις έννοιες της τρισδιάστατης γεωμετρίας. Ο Gutierrez (1992) θεωρεί ότι η μελέτη της ανάπτυξης της ικανότητας οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου είναι πολύ σημαντικότερη από τη μελέτη των εννοιών της τρισδιάστατης γεωμετρίας γιατί είναι αδύνατη η μελέτη της μάθησης στην τρισδιάστατη γεωμετρία χωρίς να ληφθεί υπόψη η επίδραση της ικανότητας οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου. Στη δική του έρευνα μελέτησε την ανάπτυξη της ικανότητας μαθητών Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου στην οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου κατά την επίλυση δραστηριοτήτων σύγκρισης ή μετακίνησης στερεών με πραγματικά αντικείμενα και με ψηφιακά αντικείμενα στον ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Κεφάλαιο τρίτο: Έννοια του όγκου στη Γεωμετρία

3.1 Η έννοια του όγκου

Ο όγκος «εκφράζεται με τον αριθμό που προκύπτει από τη σύγκριση του στερεού με ένα άλλο το οποίο θεωρούμε μονάδα μέτρησης» (Βιβλίο μαθητή Ε’ Δημοτικού για τα μαθηματικά, 2007). Ο όγκος, σύμφωνα με το λεξικό της Οξφόρδης, είναι το μέγεθος του χώρου που καταλαμβάνει μια ρευστή ή αέρια ουσία ή ένα τρισδιάστατο αντικείμενο (¨Volume¨, Oxford Dictionary, n.d.). «Η διεθνής βασική μονάδα μέτρησης του όγκου είναι το κυβικό μέτρο (m3), δηλαδή ο όγκος ενός κύβου με πλευρά ένα μέτρο» (Μπαμπινιώτης, 2012). Στη μέτρηση του όγκου των ρευστών, η συνηθέστερη μονάδα που χρησιμοποιείται είναι το λίτρο (1L =1dm3). Για να προσδιορίσουμε τον όγκο ενός αερίου, διοχετεύουμε το αέριο αυτό σε ένα ογκομετρικό δοχείο γεμάτο με κάποιο υγρό, συνήθως νερό, και μετράμε τον όγκο του υγρού που εκτοπίζεται από το αέριο. Τα στερεά και τα υγρά είναι ασυμπίεστα, δηλαδή διατηρούν αμετάβλητο τον όγκο τους, ενώ τα αέρια όταν συμπιέζονται μεταβάλλεται ο όγκος τους.

3.2 Κατανόηση της έννοιας του όγκου

Οι δυσκολίες κατανόησης εμφανίζονται όταν υπάρχει γνωστική σύγκρουση ανάμεσα στην προσωπική εικόνα που έχει δημιουργήσει ο μαθητής για μία μαθηματική έννοια και στην εικόνα που πηγάζει από τους ορισμούς, τις αποδείξεις και τα θεωρήματα (Seah & Horne, 2018). Για παράδειγμα, τα παιδιά αντιλαμβάνονται αρχικά τον όγκο σε σχέση με τον χώρο που καταλαμβάνεται από ένα αντικείμενο, παρόλο που μπορεί να αναφέρεται και στην ποσότητα που περιέχεται μέσα σε ένα εμβαδόν ή στο χώρο που δημιουργείται από την εκτόπιση του νερού σε ένα ογκομετρικό δοχείο (Saiz & Figueras, 2009). Τα παιδιά νοηματοδοτούν διάφορες ερμηνείες για τον όγκο μέσα από την προσωπική τους εμπειρία και από τις δραστηριότητες που τα ίδια πραγματοποιούν (Potari & Spiliotopoulou, 1996). Νεότερες έρευνες έδειξαν μεγάλες δυσκολίες στον υπολογισμό του όγκου. Για παράδειγμα, οι Tan Sisman και Aksu (2016) μελέτησαν μαθητές έκτης δημοτικού στην Τουρκία με σκοπό να αναδείξουν τα λάθη και τις παρανοήσεις των μαθητών σε δραστηριότητες μέτρησης όγκου και χωρητικότητας. Στους συμμετέχοντες υπέβαλαν 16 ερωτήσεις, οι μισές από τις οποίες εξέταζαν την εννοιολογική γνώση των μαθητών, ενώ οι άλλες μισές τη διαδικαστική γνώση αυτών. Για παράδειγμα, σχετικά με τη διαδικαστική γνώση, παρουσιαζόταν ένα σχήμα με ορατές τις μονάδες όγκου και οι μαθητές έπρεπε να βρουν τον όγκο του, ενώ για την εννοιολογική γνώση δινόταν ένα πρίσμα και έπρεπε να αιτιολογήσουν πως μπορεί να βρεθεί ο όγκος του. Τα ευρήματα έδειξαν πως οι μαθητές αντιμετωπίζουν μεγάλη δυσκολία στην κατανόηση του αλγόριθμου του όγκου (μήκος επί πλάτος επί ύψος). Το 26% αυτών εκτέλεσε σωστά τον αλγόριθμο, ενώ αρκετοί μαθητές πολλαπλασίαζαν μόνο δύο από τις διαστάσεις ή πρόσθεταν και τις τρεις. Η επιφανειακή εννοιολογική κατανόηση του όγκου φάνηκε από τη δυσκολία στην επίλυση και αιτιολόγηση των δοκιμασιών εννοιολογικής γνώσης αναφορικά με τον όγκο, με 93,5% των συμμετεχόντων να μην μπορεί να εξηγήσει τον τρόπο εύρεσης του όγκου του πρίσματος. Η Saiz (2003) μελέτησε την κατανόηση της έννοιας του όγκου σε εν ενεργεία εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στο Μεξικό. Οι συμμετέχοντες συμπλήρωσαν ερωτηματολόγια και συμμετείχαν σε συζητήσεις με θεματολογία που αφορούσε τα αντικείμενα που θεωρούν οι εκπαιδευτικοί ότι μπορούν να μετρήσουν τον όγκο τους, τη διαδικασία που ακολουθούν όταν μετρούν ή συγκρίνουν όγκους καθώς και τις πεποιθήσεις τους για την έννοια του όγκου (π.χ.: «Τι σημαίνει όγκος για εσάς;»). Ανάμεσα στα κυριότερα ευρήματα ήταν πως οι εκπαιδευτικοί λανθασμένα θεωρούν ότι, όταν δύο σώματα έχουν ίδιο εμβαδόν, τότε έχουν και ίδιο όγκο. Επιπρόσθετα, οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να υπολογίσουν τον όγκο αντικειμένων που έχουν διαφορετικό σχήμα από τα συνηθισμένα (πρίσμα, πυραμίδα, κύλινδρος, κύβος), ενώ παράλληλα θεωρούν ότι μερικά αντικείμενα, επειδή είναι λεπτά (π.χ.: ένα μαντίλι ή ένα φύλλο χαρτί), δεν έχουν όγκο παρά μόνο εμβαδόν. Η χαμηλή επίδοση στην κατανόηση του όγκου αντικατοπτρίζεται και στα αποτελέσματα των Δανίλη και Χρήστου (2011), οι οποίοι εξέτασαν το επίπεδο κατανόησης Ελλήνων μαθητών γυμνασίου (Β’ και Γ’) και λυκείου (Α’ και Β’) σχετικά με τη μάζα, τον όγκο και την πυκνότητα). Στους συμμετέχοντες δόθηκαν ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με παραπάνω από μία σωστή απάντηση (π.χ.: «Διάλεξε τα τετράγωνα του πλέγματος που δείχνουν αντικείμενα με όγκο 8 cm3 » ή «Ποια αντικείμενα που υπάρχουν στα τετράγωνα Α, Γ και Θ έχουν την ίδια μάζα;»). Βρέθηκε ότι οι μαθητές δυσκολεύονται με την έννοια του όγκου καθώς και με τη διατήρησή του. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι το 60% των μαθητών όλων των ηλικιών δεν απάντησε καθόλου στην ερώτηση για τον υπολογισμό του όγκου, ενώ όσοι έδωσαν απάντηση φάνηκε ότι βασίστηκαν κυρίως στον αλγόριθμο (μήκος x πλάτος x ύψος).

Επιπροσθέτως, ερευνητικές εργασίες για την αντίληψη της έννοιας του όγκου έχουν δείξει ότι οι μαθητές παραμένουν στη γνώση των αριθμητικών πράξεων υπολογισμού του όγκου ενώ αδυνατούν να αντιληφθούν τη δομή των μονάδων μέτρησης του όγκου και να οπτικοποιήσουν τη διάταξη των μονάδων σε ένα στερεό (Owens & Outhred, 2006). Οι Collis και Campbell (1986) αξιολόγησαν την ικανότητα μαθητών να υπολογίζουν τον όγκο στερεών με βάση τους τρόπους που υπολόγιζαν τους μοναδιαίους κύβους που χωρούν σε ένα στερεό υποθέτοντας ότι οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μετρούν τους κύβους αντιστοιχούν σε διαφορετικά επίπεδα στην ικανότητα αντίληψης των τριών διαστάσεων. Σε ένα πρώτο επίπεδο (το μονοδομικό με βάση το μοντέλο SOLO) οι μαθητές μετρούν τους ορατούς κύβους και δεν μπορούν να χρησιμοποιήσουν μια οργανωμένη στρατηγική για τους μη ορατούς κύβους. Σε ένα δεύτερο επίπεδο (το πολυδομικό με βάση το μοντέλο SOLO) οι μαθητές οργανώνουν τον τρόπο που μετρούν τους κύβους ομαδοποιώντας τους κύβους σε γραμμές, στήλες ή στρώματα. Με βάση τα επίπεδα αυτά, οι ερευνητές διαχώρισαν δύο απαραίτητες δεξιότητες στον υπολογισμό του όγκου ενός στερεού, την κατανόηση των απαραίτητων αριθμητικών πράξεων και την κατανόηση της εσωτερικής δομής του στερεού. Γι’ αυτό και η εύρεση του αριθμού των μοναδιαίων κύβων που μπορούν να χωρέσουν σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο αποτελεί το γνωστικό πλαίσιο που μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τη χωρητικότητα του στερεού και τον τρόπο υπολογισμού του όγκου του (Battista & Clements, 1998α).

Συμπερασματικά, η έννοια του όγκου αποτελείται από διαφορετικές ιδιότητες και σχέσεις όπως για παράδειγμα η σύγκριση της χωρητικότητας κιβωτίων ή η μέτρηση με τη χρήση μονάδων μέτρησης (Vergnaud, 1990) και σχετίζεται με αριθμό άλλων παραγόντων όπως το σχήμα και τις γεωμετρικές ιδιότητες των αντικειμένων, τη φύση του αντικειμένου, τη μάζα και το βάρος ή το πόσο ανοικτό ή κλειστό είναι το αντικείμενο (Braine, Schauble, Kugelmass, & Winter, 1993.· Potari & Spiliotopoulou, 1996). Σημαντική επίσης παράμετρος στα προβλήματα υπολογισμού όγκου είναι ο ακριβής καθορισμός του αντικειμένου που πρέπει να μετρηθεί ο όγκος του, κάτι που συνήθως παραλείπεται στη διδασκαλία με αποτέλεσμα τη δημιουργία παρανοήσεων λόγω και του διαφορετικού ορισμού του όγκου στα διάφορα αντικείμενα του αναλυτικού. Γι’ αυτό και οι μαθητές πρέπει να εμπλακούν σε ποικιλία καταστάσεων όπου γίνεται διαφορετική χρήση της έννοιας του όγκου ώστε να αναπτύξουν μια ολοκληρωμένη αντίληψη για την έννοια του όγκου και να μπορούν να την χειριστούν κατάλληλα στις διάφορες καταστάσεις.

3.3 Δυσκολίες μαθητών στην κατανόηση της έννοιας του όγκου

Συνήθης τρόπος αξιολόγησης της ικανότητας των μαθητών στην τρισδιάστατη γεωμετρία είναι να σχεδιάσουν τη γραφική αναπαράσταση ενός αντικειμένου (Wolf, 1988). Η χρήση και η αντίληψη διαφορετικών προοπτικών ενός αντικειμένου είναι μια διαδικασία που εξελίσσεται σταδιακά. Στην ηλικία των τριών ετών, τα παιδιά είτε σχεδιάζουν είτε κατασκευάζουν με κύβους ένα τρισδιάστατο αντικείμενο, αδυνατούν να αναπαραστήσουν στο σχέδιο ή στην κατασκευή τους την τρίτη διάσταση ή την έννοια του όγκου. Τα παιδιά στην ηλικία των πέντε χρόνων μπορούν να διαχωρίσουν τα δύο συστήματα αναπαράστασης (σχέδιο/μοντέλο με κύβους) και εφαρμόζουν διαφορετικές στρατηγικές. Ένα παιδί πέντε χρόνων επιλεκτικά χρησιμοποιεί δισδιάστατες ή εικονικές στρατηγικές για να δείξει τον όγκο ενός σπιτιού. Χρησιμοποιεί, για παράδειγμα, ένα χοντρό περίγραμμα ή διαφορετικό χρώμα για να διαχωρίσει το σπίτι από το υπόλοιπο περιβάλλον. Κατά την κατασκευή ενός μοντέλου με κύβους ενός σπιτιού, τοποθετεί τους κύβους κατά μήκος τριών αξόνων. Οι στρατηγικές αυτές είναι πολύ σημαντικές γιατί καταδεικνύουν τη συνειδητοποίηση από μέρους των παιδιών ότι προσπαθούν να βρουν δισδιάστατους τρόπους για να αναπαραστήσουν τρισδιάστατα αντικείμενα (Wolf, 1988). Για παράδειγμα, ένα παιδί έξι χρόνων προσπαθεί να διαφοροποιήσει ένα κύκλο από μια σφαίρα με το κατάλληλο χρωμάτισμα.

Οι επίπεδες αναπαραστάσεις αποτελούν την πιο συχνή μορφή αναπαράστασης γεωμετρικών αντικειμένων οι οποίες προσφέρουν στον αναγνώστη τις περισσότερο δυνατές πληροφορίες για τα χαρακτηριστικά των στερεών, αλλά είναι πολύ δύσκολο οι αναγνώστες να τις επεξεργαστούν νοητικά (Gaulin, 1985· Gutierrez, 1992). Σύμφωνα με τον Mitchelmore (1980) οι μαθητές αλλά και οι ενήλικες αντιμετωπίζουν σοβαρά προβλήματα στην αναπαράσταση τρισδιάστατων σχημάτων όπως η δυσκολία αναπαράστασης σε ένα σχέδιο παράλληλων ευθειών στο χώρο ή ευθειών στο χώρο που τέμνονται κάθετα στο χώρο. Οι Bishop (1983) και Parzysz (1988) τονίζουν ότι η αναπαράσταση ενός τρισδιάστατου αντικειμένου σε ένα δισδιάστατο σχέδιο απαιτεί την ικανότητα να προσδίδει κάποιος συμβατικότητα στο σχέδιο, διαδικασία στην οποία δεν δίνεται η απαραίτητη σημασία στη διδασκαλία. Η ικανότητα αναπαράστασης ενός αντικειμένου σχετίζεται άμεσα με τις ιδιαίτερες δυσκολίες που προκύπτουν από τις μορφές αναπαράστασης των εννοιών της γεωμετρίας στο χώρο, τόσο για τις νοητικές αναπαραστάσεις που απαιτούν όσο και για τις συγκεκριμένες μορφές αναπαράστασής τους (Gaulin, 1985· Parzysz, 1988).

3.4 Εισαγωγή στην έννοια του όγκου

Οι διατάξεις κύβων και συγκεκριμένα οι ορθογώνιες διατάξεις κύβων παρουσιάζονται σε μεγάλο βαθμό στα σχολικά εγχειρίδια. Για παράδειγμα, εικόνες ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων κατασκευασμένων από μοναδιαίους κύβους χρησιμοποιούνται για την εισαγωγή των μαθητών στην έννοια του όγκου (Ben-Chaim et al. 1985). Η εύρεση του αριθμού των μοναδιαίων κύβων που μπορούν να χωρέσουν σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο αποτελεί το γνωστικό πλαίσιο που μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τη χωρητικότητα του στερεού και τον τρόπο υπολογισμού του όγκου του (Battista & Clements, 1998α· Geddes & Fortunato, 1993). Η ανάπτυξη της ικανότητας αυτής, όμως, είναι μια δύσκολη διαδικασία και για αυτό οι μαθητές δεν έχουν ικανοποιητικά αποτελέσματα σε τέτοιου είδους προβλήματα (Battista & Clements, 1996· Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1985).

Ερευνητικά αποτελέσματα των Olkun (2003) και Battista και Clements (1996) έδειξαν τρεις διαφορετικούς τρόπους που χρησιμοποιούν οι μαθητές στην κατασκευή ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων από μοναδιαίους κύβους: (α) οι μαθητές λαμβάνουν υπόψη μόνο τις έδρες των κύβων που φαίνονται και αγνοούν τους κύβους ή τις έδρες που δεν φαίνονται, (β) οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις τρισδιάστατες ιδιότητες των κύβων και τη διαδικασία «γεμίσματος» του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου αλλά έχουν πρόβλημα στην οργάνωση των κύβων και στη σφαιρική αντίληψη της δόμησης των κύβων και (γ) οι μαθητές αντιλαμβάνονται τους κύβους ως οργανωμένες δομές και μπορούν να υπολογίσουν τον αριθμό των κύβων που χρειάζονται με βάση στρώματα ή στήλες κύβων.

Τα ερευνητικά αποτελέσματα των Battista και Clements (1996) υποστηρίζουν ότι η δυσκολία των μαθητών στον υπολογισμό των κύβων που χρειάζονται για να γεμίσει ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο δεν οφείλονται ούτε στη σύγχυση των μαθητών για τις έννοιες του όγκου και του εμβαδού αλλά ούτε και στην αδυναμία κατανόησης των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται για απεικόνιση των διατάξεων των κύβων. Αντίθετα, οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι το σημαντικότερο πρόβλημα είναι η μη σωστή διάταξη/δόμηση των κύβων στο χώρο. Οι Battista και Clements (1996) ορίζουν την ικανότητα «δόμησης αντικειμένων στο χώρο» (spatial structuring) ως τη νοητική διεργασία κατασκευής μιας διάταξης για ένα αντικείμενο ή σύνολο αντικειμένων. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει την ομαδοποίηση αντικειμένων για την κατασκευή μιας νέας μονάδας, και την κατανόηση σχέσεων μεταξύ των νέων μονάδων. Για παράδειγμα οι μαθητές κατανοούν ότι σε έναν κύβο με πλευρά 5 μονάδες, οι 25 μοναδιαίοι κύβοι που χρειάζονται για να καλυφθεί η βάση του κύβου αποτελούν μια νέα μονάδα, ένα στρώμα κύβων και ότι ο κύβος μπορεί να χωρέσει 5 τέτοια στρώματα. Οι Battista και Clements (1998β) υποστηρίζουν ότι η πηγή της αδυναμίας των μαθητών να «δομήσουν» αντικείμενα στο χώρο είναι η ανικανότητά τους να συντονίσουν και να ενσωματώσουν σε ένα ενιαίο νοητικό μοντέλο τις διαφορετικές όψεις της διάταξης. Οι Battista και Clements (1998α) και Ben-Chaim, Lappan και Houang (1985) βρήκαν τέτοια προβλήματα στο συλλογισμό μαθητών Γ΄ και Ε΄ τάξης δημοτικού και σε μαθητές λυκείου.

Η «δόμηση αντικειμένων στο χώρο» είναι μια μορφή στοχαστικής αφαίρεσης κατά την οποία το μυαλό επιλέγει, συντονίζει, ενοποιεί και καταγράφει στην εργαζόμενη μνήμη ένα σύνολο νοητικών στοιχείων ή ενεργειών. Υπάρχουν διαφορετικά επίπεδα στοχαστικής αφαίρεσης ενός στοιχείου ή ενέργειας: (α) απομόνωση του στοιχείου/ενέργειας από το περιβάλλον στο οποίο ανήκει ή πραγματοποιείται, (β) καταγραφή του στοιχείου/ενέργειας στην εργαζόμενη μνήμη ώστε να μπορεί να γίνει αναπαραγωγή χωρίς την παρουσία του αρχικού ερεθίσματος και (γ) εσωτερίκευση ώστε να μπορεί να γίνει εφαρμογή σε μια νέα προβληματική κατάσταση (Steffe & Cobb, 1988· von Glasersfeld, 1995). Η «δόμηση αντικειμένων στο χώρο» ως μια μορφή στοχαστικής αφαίρεσης εκμεταλλεύεται δομές από προηγούμενες εμπειρίες για να τις ενσωματώσει σε νέες δομές. Οι Battista και Clements (1998β) ανέπτυξαν διδακτικό υλικό για να βοηθήσουν μαθητές Γ΄, Δ΄ και Ε΄ τάξης δημοτικού σχολείου να κατανοήσουν τις διατάξεις κύβων στο χώρο και να αναπτύξουν στρατηγικές για την επίλυση σχετικών προβλημάτων. Στις δραστηριότητες που ανέπτυξαν ζητούνταν από τους μαθητές να προβλέψουν τον αριθμό των μοναδιαίων κύβων σε μια διάταξη και στη συνέχεια να ελέγξουν την εγκυρότητα της πρόβλεψής τους χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα αντικείμενα, όπως κύβους και κουτιά. Η πρόβλεψη του αριθμού των κύβων που περιέχονται σε μια διάταξη και ιδιαίτερα η ασυμφωνία μεταξύ πρόβλεψης και πραγματικού αριθμού οδηγεί σε μια γνωστική σύγκρουση που ενθαρρύνει τους μαθητές να προβούν σε αναστοχασμό του τρόπου σκέψης τους με αποτέλεσμα να μπορούν να βελτιώσουν τα υφιστάμενα νοητικά τους μοντέλα (Battista, 1994) και να δομήσουν πιο σύνθετες γνωστικές δομές. Παραδείγματα τέτοιων δραστηριοτήτων είναι: (α) η πρόβλεψη του αριθμών των κύβων που μπορούν να χωρέσουν σε ένα κουτί όταν δίνεται στους μαθητές το ανάπτυγμα του κουτιού, (β) η πρόβλεψη του αριθμού διαφορετικών διατάξεων κύβων που μπορούν να χωρέσουν σε ένα συγκεκριμένο κουτί και (γ) η πρόβλεψη του αριθμού των κύβων που μπορούν να χωρέσουν σε ένα κουτί που δίνεται σε εικονική μορφή.

Κεφάλαιο τέταρτο: Μεθοδολογία έρευνας

4.1 Διαδικασία δειγματοληψίας

Το δείγμα έχει επιλεγεί από δύο Δημοτικά σχολεία της Χίου και ειδικότερα από τους μαθητές της ΣΤ΄ τάξης του 3ου Δημοτικού σχολείου και τους μαθητές της ΣΤ’ τάξης του 8ου Δημοτικού. Το συνολικό δείγμα αντιστοιχεί σε 34 άτομα, αγόρια και κορίτσια. Για τη συλλογή των δεδομένων της εργασίας χορηγήθηκε ένα τεστ (Παράρτημα Ι), όπου σκοπό είχε να μετρήσει την ικανότητα αντίληψης και υπολογισμού του όγκου στο κύβο και στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Είναι σημαντικό να ληφθεί υπόψιν ότι τα παιδιά είχαν διδαχθεί μόνο το υλικό σε σχέση με τον όγκο και τη χωρητικότητα που περιλαμβάνεται στο πρόγραμμα σπουδών.

4.2 Διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε στην κύρια μελέτη

Μέσα από το ερωτηματολόγιο, σε ορισμένες από τις δραστηριότητες όπως το β’ ερώτημα της δεύτερης και αλλά και την τρίτη, ζητήθηκε από τα παιδιά να δώσουν μία επεξηγηματική απάντηση ή ερμηνεία προκειμένου να υποστηρίξουν το αριθμητικό τους αποτέλεσμα και τις απαντήσεις τους. Ο τρόπος επιλογής των μεθόδων υπολογισμού στηρίζεται στους Stamatis Voulgaris & Anastasia Evangelidou (2004) και αναλόγως με την περίπτωσή μας διαμορφώνεται ως ακολούθως:

(1) ***<u>Γεμίσματα με κύβους</u>***: Κάθε παιδί καλούνταν να υπολογίσει τον όγκο ορθογώνιων σχημάτων Β,Γ με τη βοήθεια του κύβου σημειώνοντας ποιο είναι το πλήθος των κύβων που περιλαμβάνονται στο κάθε ένα από αυτά.

(2) ***<u>Γεμίσματα με κυβικά εκατοστά:</u>*** Έχοντας ως υπόθεση ένα στερεό Α κυβικό εκατοστό ζητείται να γίνει ο υπολογισμός του πλήθους των κυβικών εκατοστών των σχημάτων Β, Γ. Στη συνέχεια δίνοντας ένα στέρεο Δ διαστάσεων 3x4x5 σε φυσική μορφή, χωρίς να υπάρχει εμφανής διαχωρισμός των επιπέδων του, να βρεθούν τα γεμίσματα σε κυβικά εκατοστά.

(3) ***<u>Πλήθος των κύβων που γεμίζει τα άδεια κουτιά:</u>*** Στη συνέχεια στο πρώτο σκέλος δίνεται η εικόνα κουτιών σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με εμφανή εξωτερικό διαχωρισμό των διαστάσεων με τη διαφορά ότι το πάνω μέρος φαίνεται κενό και ζητείται από τα

παιδιά να υπολογίσουν το πλήθος των κύβων που χωρούν μέσα τους. Στο δεύτερο σκέλος δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο κενό έχοντας συμπληρωμένη μόνο την πρώτη σειρά και ζητείται επίσης να υπολογιστεί ο τρόπος βάσει του οποίου δομείται και ως εκ τούτου να τεκμηριωθεί ο αριθμός των κύβων που χωρούν μέσα σε αυτό.

(4) ***Υπολογισμός όγκου με κυβικά εκατοστά:*** Ακολούθως δίνεται ένα σχήμα σε φυσική μορφή, το οποίο μπορεί να περιγραφεί βάσει των Stamatis Voulgaris & Anastasia Evangelidou (2004), χωρίς εμφανή διαχωρισμό επιπέδων αλλά δίνοντας μόνο το μήκος, πλάτος και ύψος αριθμητικά. Τα παιδιά εδώ καλούνται να δώσουν μία τεκμηριωμένη απάντηση σχετικά με τον όγκο σε κυβικά εκατοστά που προκύπτει και να αιτιολογήσουν το συλλογισμό τους.

(5) ***Σύγκριση όγκων:*** Τέλος δίνονται δύο στερεά Α και Β με την ίδια χωρητικότητα κύβων. Τα παιδιά καλούνται να απαντήσουν σε ερωτήσεις σωστού λάθους σχετικά με το αν τα δύο σχήματα έχουν την ίδια χωρητικότητα και έπειτα από αυτό να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Οι τρόποι υπολογισμού αναλύονται εκτενέστερα παρακάτω ακολουθώντας το πρότυπο μεθοδολογίας των Stamatis Voulgaris & Anastasia Evangelidou (2004).

4.3 Κωδικοποίηση των απαντήσεων στα ερωτήματα μέτρησης όγκου

Η κωδικοποίηση των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν από τα παιδιά για τη μέτρηση του όγκου ακολουθούν το μοτίβο που έχει δοθεί από τους Voulgaris & Evangelidou (2004) στη σχετική δημοσίευσή τους που αφορά τον υπολογισμό και την κατανόηση του όγκου, λαμβάνοντας πρότυπα μετρήσεων που αφορούν τις διαστάσεις των υπολογιζόμενων σχημάτων. Οι απαντήσεις κυμαίνονται από απλές όπου αρκεί απλά και μόνο η δήλωση του αποτελέσματος ως και πολύπλοκες όπου απαιτούνται επιπλέον επεξηγήσεις και διευκρινήσεις που αφορούν τη μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του όγκου προκειμένου να εξεταστεί αν έχει κατανοηθεί πρακτικά η έννοια του όγκου και όχι μόνο υπολογιστικά ως μαθηματική πράξη. Ότι αφορά την κωδικοποίηση των απαντήσεων είναι εμφανές ότι η πρώτη επιλογή απάντησης σε κάθε δραστηριότητα εμφανίζει μεγαλύτερη πολυπλοκότητα καθότι αντιστοιχεί και στη ***σωστή απάντηση***. Στις υπόλοιπες επιλογές δίνεται όπως θα δούμε παρακάτω ο χαρακτηρισμός «*άλλη μέθοδος*» που αναφέρεται σε διαφορετικές προσπάθειες υπολογισμού του όγκου (δηλώνονται παρακάτω) οι οποίες μαθηματικά δεν είναι ορθές και κατά συνέπεια οδηγούν είτε σε ***λανθασμένο αποτέλεσμα*** είτε σε ***μη ολοκλήρωση της πράξης*** προκειμένου να προκύψει κάποιο αποδεκτό αποτέλεσμα. Σε κάθε περίπτωση καθότι η προσέγγιση αυτής της «άλλης μεθόδου» ***δεν είναι ορθή*** αλλά λανθασμένη δε δίνονται περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με αυτήν καθότι θα υπήρχε επιπρόσθετη δυσκολία κατανόησης του πειράματός μας χωρίς να οδηγεί και σε ευνοϊκά αποτελέσματα.

Κατ΄αυτόν τον τρόπο οι μέθοδοι υπολογισμού του όγκου σε κάθε μία από τις δραστηριότητες είναι οι ακόλουθες:

- **<u>Δραστηριότητα 1 - Γεμίσματα με κυβάκια:</u>** Έχοντας ως δοθέν ένα στερεό Α που περιλαμβάνει 8 κύβους, τα παιδιά κλήθηκαν να δώσουν (απλή αριθμητική απάντηση) τον αριθμό των κύβων που περιλαμβάνουν τα στερεά Β,Γ (ζητώντας από αυτά να δώσουν ***δύο αριθμητικές απαντήσεις***). Κάνοντας χρήση της μεθόδου υπολογισμού του όγκου V=LxBxH, η οποία αντιπροσωπεύει και τις δύο απαντήσεις, τέτοια ώστε ο όγκος ισούται με τον πολλαπλασιασμό του μήκους επί του πλάτους επί του ύψους, έχουμε σημειώσει ως πρώτη και ορθή επιλογή τη «Μέθοδο 3x4x3, Μέθοδο 2x3x4» που αποδίδει την απάντηση βάσει ***πολλαπλασιαστικού τρόπου*** αντίστοιχα για τα δύο σχήματα. Ειδικότερα, η «Μέθοδος 3x4x3» βάσει ***πολλαπλασιαστικού τρόπου*** αποδίδει την ορθή απάντηση υπολογίζοντας απευθείας 3x4 και έπειτα το αποτέλεσμα που προκύπτει πολλαπλασιάζεται επί 3 τέτοιο ώστε 12x3=36, με τον ίδιο τρόπο κινείται και η «Μέθοδος 2x3x4» βάσει ***πολλαπλασιαστικού τρόπου*** αποδίδει την ορθή απάντηση υπολογίζοντας απευθείας 2x3x4=24. Ο αριθμός των ορθών απαντήσεων για τις «Μέθοδος 3x4x3, Μέθοδος 2x3x4» δηλαδή για τα ερωτήματα Β,Γ αντίστοιχα είναι συνολικά Ν=27. Ο αριθμός των λανθασμένων απαντήσεων είναι Ν=7. Εναλλακτικές απαντήσεις είναι οι «Άλλη Μέθοδος, Μέθοδος 2x3x4», «Μέθοδος 3x4x3, Άλλη Μέθοδος», «Άλλη Μέθοδος, Άλλη Μέθοδος». Όπως προαναφέρθηκε, ο όρος «Άλλη μέθοδος» αναφέρεται σε απαντήσεις στις οποίες δόθηκε λάθος αποτέλεσμα μην αιτιολογώντας τη μέθοδο υπολογισμού προκειμένου να αποφανθούμε για τη χρήση του τρόπου υπολογισμού, είτε δεν έχουν καταλήξει σε κάποιο αριθμητικό αποτέλεσμα

- **<u>Δραστηριότητα 2α - Γεμίσματα με κυβικά εκατοστά:</u>** Έχοντας ως δοθέν ένα στερεό Α αντίστοιχο με ένα κυβικό εκατοστό, τα παιδιά κλήθηκαν να απαντήσουν (απλά αριθμητικά) πόσα κυβικά εκατοστά είναι τα στερεά Β, Γ. Στο δεύτερο ερώτημα δίνεται η εικόνα ενός στερεού Δ χωρίς να είναι διαχωρισμένο σε επίπεδα αλλά δίνοντας αριθμητικά την κάθε μία τις διαστάσεις του. Τα παιδιά κλήθηκαν να δώσουν απλή αριθμητική απάντηση σχετικά με τα κυβικά εκατοστά του στερεού Δ. Για να αποφύγουμε την πολυπλοκότητα στην κωδικοποίηση της απάντησης καθότι πρόκειται για την ίδια μέθοδο σε ένα μόλις ερώτημα αναφέρουμε ως ορθή απάντηση τη «Μέθοδο LxBxH, Μέθοδο 3x4x5» που αναφέρεται αντιστοίχως στα σχήματα Β, Γ καθώς και στις διαστάσεις του Δ. Η «Μέθοδος LxBxH» αναφέρεται στον υπολογισμό των διαστάσεων στα σχήματα Β,Γ αποδίδοντας ορθό αριθμητικό αποτέλεσμα με χρήση πολλαπλασιαστικού τρόπου, δηλαδή πολλαπλασιάζοντας το μήκος επί το πλάτος επί το ύψος και σημειώνοντας τον αντίστοιχο αριθμό. Ειδικότερα, για το στερεό Β αποδίδεται η ορθή απάντηση με τον υπολογισμό 1x3=3 και έπειτα το αποτέλεσμα που προκύπτει για το στερεό Γ με πολλαπλασιαστικό τρόπο 2x2 και το αποτέλεσμα που προκύπτει 4x3=12, ενώ το στερεό Δ στο οποίο αναφέρεται η «Μέθοδος 3x4x5» υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο 3x4x5=60. Ο αριθμός των ορθών απαντήσεων για τη «Μέθοδο LxBxH, Μέθοδο 3x4x5» δηλαδή για τα σχήματα Β,Γ,Δ είναι Ν=21 ενώ οι αντίστοιχες λανθασμένες Ν=13 και αναφέρονται στις ακόλουθες κατηγορίες και ειδικότερα στην κωδικοποίηση «***Άλλη Μέθοδος***». Εναλλακτικές απαντήσεις είναι οι «Μέθοδος LxBxH, Άλλη Μέθοδος», «Άλλη Μέθοδος, Μέθοδος 3x4x5», «Άλλη Μέθοδος, Άλλη Μέθοδος», «Άλλη Μέθοδος, Δεν απάντησε». Όπως και στην προηγούμενη δραστηριότητα, ο όρος «Άλλη μέθοδος» αναφέρεται σε απαντήσεις στις οποίες δόθηκε λάθος αποτέλεσμα ***μην αιτιολογώντας τη μέθοδο υπολογισμού*** προκειμένου να αποφανθούμε για τη ***χρήση του τρόπου***

υπολογισμού, είτε δεν έχουν καταλήξει σε κάποιο αριθμητικό αποτέλεσμα

- **<u>Δραστηριότητα 2β – Πόσοι κύβοι γεμίζουν τα κουτιά:</u>** Στο δεύτερο σκέλος της δραστηριότητας, δίνονται στο πρώτο ερώτημα δύο κουτιά με εμφανή εξωτερικό διαχωρισμό των επιπέδων πλην του πάνω μέρους του δίνοντας την εντύπωση ότι πρόκειται για κενά κουτιά. Τα παιδιά κλήθηκαν να δώσουν απάντηση σχετικά με τον ***αριθμό των κύβων*** που απαιτούνται για το ***γέμισμα*** αυτών των κουτιών. Στο δεύτερο ερώτημα δίνεται ένα άδειο κιβώτιο στο οποίο είναι εμφανώς γεμισμένη η πρώτη σειρά του μήκους και του πλάτους και η πρώτη στήλη δίνοντας δυνατότητα στα παιδιά να απαριθμήσουν τους κύβους που περιέχονται τόσο οριζοντίως όσο και καθέτως. Η μέθοδος που αναφέρουμε ως πρώτη και ορθή απάντηση είναι η «Μέθοδος LxBxH, Μέθοδος 8x4x3». Η «Μέθοδος LxBxH» αναφέρεται στον υπολογισμό των διαστάσεων αποδίδοντας ορθό αριθμητικό αποτέλεσμα ***με χρήση πολλαπλασιαστικού τρόπου***, δηλαδή πολλαπλασιάζοντας το μήκος επί το πλάτος επί το ύψος και σημειώνοντας τον αντίστοιχο αριθμό. Όπως είναι εμφανές η πρώτη αναφέρεται στο α' ερώτημα όπου η μέθοδος υπολογισμού είναι η ίδια στα δύο κουτιά και δίνεται όπως και στις προηγούμενες δραστηριότητες ο διαχωρισμός των επιπέδων και η δεύτερη αναφέρεται στο β' ερώτημα ως η ορθή μέθοδος που χρησιμοποίησαν τα παιδιά και αντιστοιχεί στον αριθμό των κύβων που μπορούν να χωρέσουν μέσα στο άδειο κιβώτιο. Ειδικότερα, ότι αφορά το α' ερώτημα και τις ορθές απαντήσεις που προκύπτουν με πολλαπλασιαστικό τρόπο ως 2x4 και έπειτα το αποτέλεσμα 8x2=16, καθώς και για το επόμενο στερεό διαστάσεων 4x4x3, πολλαπλασιάζοντας τις δύο πρώτες 4x4=16 και έπειτα το αποτέλεσμα 16x3=48. Η «Μέθοδος 8x4x3» που προορίζεται για το β' ερώτημα αποδίδει αριθμητικό αποτέλεσμα βάσει πολλαπλασιαστικού τρόπου ως 8x4=32 και έπειτα το αποτέλεσμα 32x3=96. Ο αριθμός των ορθών απαντήσεων επομένως για τη «Μέθοδο LxBxH, Μέθοδο 8x4x3» είναι συνολικά N=21, ως εκ τούτου ο αντίστοιχος αριθμός λανθασμένων απαντήσεων N=13 που αντιστοιχούν και στην κατηγορία «Άλλη Μέθοδος» που αναφέρεται παρακάτω. Ο όρος «Άλλη Μέθοδος» και σε αυτήν την περίπτωση αναφέρεται σε απαντήσεις στις οποίες δόθηκε λάθος αποτέλεσμα ***μην αιτιολογώντας τη μέθοδο υπολογισμού*** προκειμένου να αποφανθούμε για τη ***χρήση του τρόπου υπολογισμού***, είτε δεν έχουν καταλήξει σε κάποιο αριθμητικό αποτέλεσμα. Εναλλακτικές απαντήσεις είναι οι «Μέθοδος LxBxH, Άλλη Μέθοδος», «Άλλη Μέθοδος, Δεν απάντησε» «Δεν απάντησε, Άλλη Μέθοδος» και «Άλλη Μέθοδος, Άλλη Μέθοδος».

- **<u>Δραστηριότητα 3 – Υπολογισμός όγκου με κυβικά εκατοστά:</u>** Στο ακόλουθο ερώτημα δίνεται ένα άδειο κιβώτιο μέσα στο οποίο βρίσκεται ένας μόνο κύβος και του οποίου οι διαστάσεις είναι αριθμητικά γνωστές. Ζητείται από τα παιδιά να δώσουν τεκμηριωμένη απάντηση σχετικά με τη μέθοδο που χρησιμοποιούν για να υπολογίσουν τα κυβικά εκατοστά που χωράνε μέσα στο κουτί. Η μέθοδος που αναφέρουμε ως ορθή είναι η «Μέθοδος 7x3x5» που αναφέρεται στις διαστάσεις του κουτιού και τον ορθό τρόπο υπολογισμού του όγκου βάσει πολλαπλασιαστικού τρόπου και ειδικότερα πολλαπλασιάζοντας το μήκος και το πλάτος 7x3=21 και έπειτα το αποτέλεσμα με το ύψος δηλαδή 21x5=105. Ο αριθμός των ορθών απαντήσεων για τη «Μέθοδο 7x3x5» είναι N=26 και ως εκ τούτου ο αντίστοιχος αριθμός λανθασμένων N=8. Εναλλακτικές απαντήσεις είναι οι «Άλλη Μέθοδος» και «Δεν απάντησε». Ο όρος «Άλλη Μέθοδος» και σε αυτήν την περίπτωση αναφέρεται σε απαντήσεις στις οποίες δόθηκε λάθος αποτέλεσμα ***μην αιτιολογώντας τη μέθοδο υπολογισμού*** προκειμένου να αποφανθούμε για τη ***χρήση του τρόπου υπολογισμού***, είτε δεν έχουν καταλήξει σε κάποιο αριθμητικό αποτέλεσμα.

- **<u>Δραστηριότητα 4 –Σύγκριση Όγκων:</u>** Στην τελευταία άσκηση δίνονται δύο στερεά Α,Β με διαφορετική κατανομή του όγκου αλλά με δεδομένο ότι διαθέτουν ίδιο αριθμό κύβων. Ειδικότερα το στερεό Α έχει διαστάσεις 4x3x2=24 και το στερεό Β διαστάσεις 2x6x2=24. Τα παιδιά κλήθηκαν να απαντήσουν σε ερώτημα σωστού λάθους σχετικά με την ομοιότητα των όγκων των δύο στερεών και να τεκμηριώσουν την απάντησή τους. Στην προκειμένη περίπτωση λάβαμε ως πρώτη μέθοδο υπολογισμού τη σωστή απάντηση, δηλαδή ότι τ***α στερεά Α,Β έχουν τον***

ίδιο όγκο με τεκμηρίωση και εναλλακτικές ***τη λανθασμένη απάντηση*** (δεν υπήρχε), τη ***σωστή απάντηση χωρίς τεκμηρίωση*** και την ***έλλειψη απάντησης***, δηλαδή ότι δεν απάντησαν καθόλου στο συγκεκριμένο ερώτημα.

Κεφάλαιο πέμπτο: Αποτελέσματα έρευνας

5.1 Απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα

Προκειμένου να δοθεί μία όσο το δυνατόν πλησιέστερη και επεξηγηματική εικόνα των αποτελεσμάτων που αφορούν τον ***τρόπο που κατανοούν τα παιδιά την έννοια του όγκου*** αλλά και ταυτόχρονα να μην παραληφθούν σημαντικές συνιστώσες της μελέτης οι οποίες παίζουν καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση του αποτελέσματος, αναφέρονται οι μέθοδοι υπολογισμού του όγκου για κάθε δραστηριότητα όπως έχουν επεξηγηθεί παραπάνω και έχουν χρησιμοποιηθεί από το μεγαλύτερο ποσοστό του δείγματος. Έτσι μπορούμε να διακρίνουμε αναλυτικά το πλήθος των ατόμων που έκαναν χρήση της ορθής μεθόδου υπολογισμού του όγκου σε κάθε δραστηριότητα:

5.1.1 Πως κατανοούν οι μαθητές της ΣΤ' τάξης δημοτικού, είναι σε θέση να αντιληφθούν την έννοια του όγκου;

Μέθοδος Υπολογισμού Όγκου	Αγόρια	Κορίτσια	Σύνολο
Μέθοδος 3x4x3, 2x3x4 (Γεμίσματα με Κυβάκια- Δραστηριότητα 1) Αριθμητικό αποτέλεσμα(Β=36, Γ=24)	29,4% (N=10)	50% (N=17)	79,4% (N=27)
Μέθοδος LxBxH, 3x4x5 (Γεμίσματα Κυβικά Εκατοστά- Δραστηριότητα 2α) Αριθμητικό αποτέλεσμα (Β=3, Γ=12, Δ=60)	23,5% (N=8)	38,2% (N=13)	61,8% (N=21)
Μέθοδος LxBxH, 8x4x3 (Πόσοι κύβοι γεμίζουν τα κουτιά- Δραστηριότητα 2β) Αριθμητικό αποτέλεσμα (K1=16, K2=48, K3=96)	20,6% (N=7)	44,1% (N=15)	64,7% (N=22)
Μέθοδος 7x3x5 (Υπολογισμός Όγκου με Κυβικά Εκατοστά- Δραστηριότητα 3) Αριθμητικό αποτέλεσμα (K4=105)	29,4% (N=10)	47,1% (N=16)	76,5% (N=26)

Σύγκριση Όγκων (Δραστηριότητα 4)	26,5% (N=9)	47,1% (N=16)	73,5% (N=25)

Πίνακας 3 Μέθοδος Υπολογισμού Όγκου

Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 3 είναι εμφανές ότι ό,τι αφορά τον ***υπολογισμό του όγκου*** στη ***Δραστηριότητα 1***, και ειδικότερα για τις απαντήσεις που αντιστοιχούν στα Β=36 και Γ=24, το ***79,4% των παιδιών*** ή αλλιώς τα ***27 από τα 34 παιδιά*** που έχουν κληθεί να διαγωνιστούν ***έχουν κατανοήσει πλήρως*** την έννοια του διαδικαστικού τμήματος υπολογισμού του όγκου που σχετίζεται αποκλειστικά με τη μαθηματική προσέγγιση και όχι απαραιτήτως και ταυτόχρονα με την ευρύτερη έννοια κατανόησης του όγκου. Η μέθοδος που έχει χρησιμοποιηθεί από αυτά είναι η «**Μέθοδος 3x4x3, 2x3x4**» που αντιστοιχεί στην ορθή μέθοδο υπολογισμού των σχημάτων. Εν συνεχεία ό,τι αφορά τον ***υπολογισμό του όγκου*** στη ***Δραστηριότητα 2α,*** και ειδικότερα για τις απαντήσεις που αντιστοιχούν στα Β=3,Γ=12 και Δ=60 ,παρατηρείται ότι το ***61,8% των παιδιών*** ή αλλιώς ***τα 21 από τα 34 παιδιά*** έχουν κατανοήσει τον τρόπο υπολογισμού, από μαθηματικής άποψης, του όγκου σε αυτήν την δοκιμασία. Παρατηρήθηκε μικρή μείωση στα επιτυχή αποτελέσματα καθώς ορισμένα παιδιά δυσκολεύτηκαν να υπολογίσουν τον όγκο του σχήματος που δεν έχει εμφανή διαχωρισμό των επιπέδων του. Καλύτερα ποσοστά κατανόησης της μέτρησης του όγκου παρατηρούνται στην ***Δραστηριότητα 2β με ποσοστό 64,7%,*** και ειδικότερα για τις απαντήσεις που αντιστοιχούν στα Κ1=16, Κ2=48 και Κ3=96, που αφορούσε το «γέμισμα» των άδειων κουτιών. Η συγκεκριμένη άσκηση παρουσιάζει μεγαλύτερη δυσκολία που εν μέρει δικαιολογεί τα ποσοστά ανεπιτυχούς μαθηματικής κατανόησης υπολογισμού. Στη συγκεκριμένη, μεγάλο ποσοστό των παιδιών που υπερβαίνει το μισό δείγμα ερωτηθέντων ανταποκρίθηκε επιτυχώς, πράγμα που αποδεικνύει ότι από υπολογιστικής άποψης και μαθηματικής προσέγγισης τα παιδιά έδωσαν ορθά αποτελέσματα. Ακόμη υψηλότερα αποτελέσματα λαμβάνουμε στην κατανόηση της μαθηματικής προσέγγισης σχετικά με τον ***υπολογισμό του όγκου*** στη ***Δραστηριότητα 3*** με τον υπολογισμό του άδειου κουτιού και την ταυτόχρονη τεκμηρίωση, και ειδικότερα για την απάντηση που αντιστοιχεί στο Κ4=105, το ***76,5% των παιδιών*** έχουν ανταποκριθεί ***επιτυχώς*** ή αλλιώς τα 26 από τα 34 άτομα. Και τέλος η

Δραστηριότητα 4 και η σύγκριση των όγκων με ***τεκμηριωμένη απάντηση*** αντιστοιχεί στο ***73,5% των παιδιών*** τα οποία μέσα από τη σωστή απάντηση έχουν αποδείξει ότι έχουν κατανοήσει από μαθηματικής άποψης ότι τα δύο στερεά διαθέτουν ίδιο όγκο. Αυτό ταυτόχρονα δεν αποδεικνύει την κατανόηση του όγκου ως ευρύτερη έννοια του χώρου που καταλαμβάνεται από τα δύο στερεά και ως εκ τούτου τη ***διαφορετικότητα του σχήματος δύο στερεών με ίδιο όγκο***.

5.1.2 Με ποιους τρόπους οι μαθητές υπολογίζουν τον όγκο του κύβου και του ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου;

Στο σημείο αυτό θα δοθούν αναλυτικά οι τρόποι βάσει των οποίων έχουν κινηθεί τα παιδιά προκειμένου να υπολογίσουν τον όγκο των κύβων και των ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων μέσα από τις δραστηριότητες που κλήθηκαν να απαντήσουν. Για το λόγο ότι η ***Δραστηριότητα 1*** περιλαμβάνει ***γεμίσματα με κύβους***, στην πιο απλή τους μορφή με εμφανή διαχωρισμό των επιπέδων, και η μέθοδος υπολογισμού τους αντιστοιχεί στη βασική μέθοδο V=LxBxH ίδιας φύσης με το α΄ ερώτημα της ***Δραστηριότητας 2*** για χάριν ευκολίας αλλά και συντομίας δίνεται η ανάλυση μέσα από τα ***γεμίσματα με κυβικά εκατοστά*** παρακάτω. Στην άσκηση αυτή ζητήθηκε από τα παιδιά ο τρόπος υπολογισμού δύο ***μικρών διαστάσεων*** αλλά διαφορετικών μορφών ***ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων***, εκ των οποίων το πρώτο σετ έχει εμφανή διαχωρισμό των επιπέδων ενώ το δεύτερο όχι, παρά μόνο την αναφορά των διαστάσεων του αριθμητικά.

Έτσι όπως μπορούμε να διακρίνουμε και μέσα από τον παρακάτω πίνακα, το ποσοστό των παιδιών που απάντησε ορθά και στους δύο διαφορετικούς υπολογισμούς αντιστοιχεί στο **61,8%** κάνοντας χρήση της **Μεθόδου LxBxH, Μεθόδου 3x4x5** αντίστοιχα και δίνοντας τις απαντήσεις που αντιστοιχούν στα Β=3,Γ=12 και Δ=60. Ακολουθεί ποσοστό **11,8%** των παιδιών που έκανε ***διαφορετική χρήση μεθόδου*** στην πρώτη περίπτωση αλλά οδηγήθηκε σε ***λανθασμένο αποτέλεσμα.*** Αυτή η μέθοδος περιλάμβανε την ***μέτρηση των κυβικών εκατοστών ένα προς ένα*** με αποτέλεσμα να μπερδευτούν για να οδηγηθούν σε λάθος. Όπως γίνεται κατανοητό δε μπορούν να αναλυθούν ή να αναγραφούν αριθμητικά όλοι οι συνδυασμοί των λανθασμένων αποτελεσμάτων των παιδιών, καθώς οι περισσότεροι εξ αυτών αποδίδουν απλά ένα αριθμητικό αποτέλεσμα και μία απλή αριθμητική αναφορά χωρίς να συνοδεύεται από κάποια υπολογιστική μέθοδο, καθότι δε θα ήταν χρηστική. Στη συνέχεια το **8,8%** των παιδιών έκανε χρήση ***διαφορετικής μεθόδου*** στη δεύτερη περίπτωση του σχήματος όπου δεν υπήρχε εμφανής διαχωρισμός επιπέδων. Τα παιδιά επιχείρησαν να ***διαχωρίσουν από μόνα τους τα επίπεδα*** στο σχήμα κάνοντας μέτρηση των κυβικών εκατοστών ένα προς ένα με αποτέλεσμα αυτό να οδηγηθούν σε λάθος αποτελέσματα. Τέλος το **8,8%** των παιδιών χρησιμοποίησε και **στις δύο περιπτώσεις άλλη μέθοδο**.

Μέθοδοι Υπολογισμού (Δραστηριότητα 2α)	**Αγόρια**	**Κορίτσια**	**Σύνολο**
Μέθοδος LxBxH, Μέθοδος 3x4x5 Αριθμητικό αποτέλεσμα (Β=3, Γ=12, Δ=60)	23,5%(N=8)	38,2%(N=13)	61,8%(N=21)
Άλλη Μέθοδος στα Β,Γ, Μέθοδος 3x4x5 στο Δ	5,9%(N=2)	5,9%(N=2)	11,8%(N=4)
Μέθοδος LxBxH στα Β,Γ, Άλλη Μέθοδος στο Δ	5,9%(N=2)	2,9%(N=1)	8,8%(N=3)
Άλλη Μέθοδος στα Β,Γ, Άλλη Μέθοδος στο Δ	5,9%(N=2)	2,9%(N=1)	8,8%(N=3)

Πίνακας 4 Μέθοδοι Υπολογισμού Δραστηριότητα 2α

Στη ***Δραστηριότητα 2β,*** δηλαδή στο δεύτερο τμήμα των α,β της δραστηριότητας 2, δόθηκαν στα παιδιά δύο ***μεγαλύτερων διαστάσεων*** αλλά διαφορετικών μορφών ***ορθογώνια παραλληλεπίπεδα*** σε μορφή άδειων κουτιών**,** όπου στο α’ ερώτημα ζητείται να υπολογίσουν το πλήθος των κύβων με τους οποίους αυτά μπορούν να γεμίσουν (υπάρχει εξωτερικός διαχωρισμός επιπέδων) και στο β΄ ερώτημα ακριβώς το ίδιο μόνο που δεν υπάρχει διαχωρισμός επιπέδων αλλά σημείωση διαστάσεων. Έτσι μέσα από τον ακόλουθο πίνακα μπορούμε να διακρίνουμε ότι το **64,7%** των παιδιών απάντησε ορθώς και στα δύο ερωτήματα κάνοντας χρήση της **Μεθόδου LxBxH, Μεθόδου 8x4x3** και ειδικότερα τα αριθμητικά αποτελέσματα για Κ1=16, Κ2=48, Κ3=96, υπολογίζοντας τον όγκο βάσει των τριών διαστάσεων. Τα υπόλοιπα αποτελέσματα αναλύονται μέσα από τους δοθέντες πίνακες. Έπειτα το **23,5%** έκανε χρήση ***άλλων μεθόδων*** και στις δύο περιπτώσεις σύμφωνα με τις οποίες στην πρώτη έγινε ***μέτρηση μόνο των εξωτερικών επιπέδων*** θεωρώντας ότι τα κουτιά είναι άδεια και οδηγώντας τα σε λάθος αποτέλεσμα και στη δεύτερη περίπτωση επιχείρησαν να σχεδιάσουν μόνα τους τα επίπεδα κάνοντας λάθος υπολογισμούς καθότι έγινε μέτρηση ένα προς ένα. Τέλος ένα μικρό ποσοστό **2,9%** απάντησε ορθώς στην πρώτη περίπτωση, έκανε χρήση όμως διαφορετική μεθόδου στη δεύτερη. Όπως γίνεται κατανοητό δε μπορούν να αναλυθούν ή να αναγραφούν αριθμητικά όλοι οι συνδυασμοί των λανθασμένων αποτελεσμάτων των παιδιών, καθώς οι περισσότεροι εξ αυτών αποδίδουν απλά ένα αριθμητικό αποτέλεσμα και μία απλή αριθμητική αναφορά χωρίς να συνοδεύεται από κάποια υπολογιστική μέθοδο, καθότι δε θα ήταν χρηστική.

Μέθοδοι Υπολογισμού (Δραστηριότητα 2β)	**Αγόρια**	**Κορίτσια**	**Σύνολο**
Μέθοδος LxBxH, Μέθοδος 8x4x3 Αριθμητικό αποτέλεσμα (K1=16, K2=48, K3=96)	20,6%(N=7)	44,1%(N=15)	64,7%(N=22)
Μέθοδος LxBxH στα K1,K2, Άλλη Μέθοδος στο K3	2,9%(N=1)	2,9%(N=1)	2,9%(N=1)
Άλλη Μέθοδος στα K1,K2, Άλλη Μέθοδος στο K3	20,6%(N=7)	2,9%(N=1)	23,5%(N=8)

Πίνακας 5 Μέθοδοι Υπολογισμού Δραστηριότητα 2β

Στη ***Δραστηριότητα 3***, καλούνται να δώσουν τον όγκο ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με δοθείσες διαστάσεις. Έτσι παρατηρείται το **76,5%** των παιδιών να έχει κάνει χρήση της **Μεθόδου 7x3x5** υπολογίζοντας τον όγκο ορθώς με πολλαπλασιασμό των τριών διαστάσεων για το αριθμητικό αποτέλεσμα K4=105, και έπειτα το **23,5%** όπου επιχείρησε να σχεδιάσει τα επίπεδα ανά γραμμές και στήλες χωρίς να ολοκληρώσει επιτυχώς τους υπολογισμούς του (N=8). Τα υπόλοιπα αποτελέσματα αναλύονται μέσα από τους δοθέντες πίνακες. Όπως γίνεται κατανοητό δεν είναι εφικτή η ανάλυση αριθμητικά όλων των συνδυασμών των λανθασμένων αποτελεσμάτων των παιδιών, καθώς οι περισσότεροι εξ αυτών αποδίδουν απλά ένα αριθμητικό αποτέλεσμα και μία απλή αριθμητική αναφορά χωρίς να συνοδεύεται από κάποια υπολογιστική μέθοδο, καθότι δε θα ήταν χρηστική.

5.1.3 Ποιες δυσκολίες αντιμετωπίζουν στην κατανόηση και τη μέτρηση του όγκου του κύβου και του ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου;

Στην παρούσα φάση θα πραγματοποιηθεί μία παρουσίαση της διαφορετικής απόδοσης των παιδιών από την ***έναρξη του τεστ*** με την ***Δραστηριότητα 1*** όπου τους δίνονται έτοιμα τα σχήματα με ***εμφανή διαχωρισμό των επιπέδων***, έπειτα η απόδοσή τους στη ***Δραστηριότητα 2α*** όπου δίνεται για πρώτη φορά ***υπολογισμός σχήματος στη φυσική του μορφή,*** έπειτα με τη ***Δραστηριότητα 2β*** όπου δίνονται άδεια κουτιά με μερικό διαχωρισμό των επιπέδων και εν τέλει με τη ***Δραστηριότητα 3*** όπου δίνεται ξανά ένα ***σχήμα στη φυσική του μορφή***. Τα παιδιά κλήθηκαν να υπολογίσουν τον όγκο σε όλες τις δραστηριότητες και μέσα από τον ακόλουθο πίνακα μπορούμε να δούμε τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν κατά τη διάρκεια της εξέτασης βήμα προς βήμα:

Μέθοδοι Υπολογισμού Όγκου	**Δραστηριότητα1 (Κύβοι με διαχωρισμό επιπέδων)**	**Δραστηριότητα 2α (Εισαγωγή κύβου σε φυσική μορφή)**	**Δραστηριότητα 2β (Κύβοι με μερικό διαχωρισμό επιπέδων)**	**Δραστηριότητα3 (Κύβος χωρίς διαχωρισμό επιπέδων- Φυσική μορφή)**
Μέθοδος LxBxH (Επιτυχής)	79,4% (N=27) X^2 (3,34)=5,516 p=0,138>0,05	61,8% (N=21) X^2 (4,34)=2,080 p=0,721>0,05	64,7%(N=22) X^2 (4,34)=9,324 p=0,053>0,05	76,5% (N=26) X^2 (2,34)=3,9 p=0,139>0,05
Άλλη Μέθοδος (Ανεπιτυχής)	20,5% (N=7)	38,2% (N=13)	35,2% (N=12)	23,5% (N=8)

Πίνακας 6 Μέθοδοι Υπολογισμού Συνόλου Δραστηριοτήτων

	Σύνολο (N)	Βαθμοί Ελευθερίας (df)	X^2 Pearson	P-value
Δραστηριότητα 1	34	3	5,516	0,138
Δραστηριότητα 2α	34	4	2,080	0,721
Δραστηριότητα 2β	34	4	9,324	0,053
Δραστηριότητα 3	34	2	3,947	0,139
Δραστηριότητα 4	34	2	5,146	0,076

Πίνακας 7 Έλεγχος X^2 Pearson

Παρατηρείται ότι στη ***Δραστηριότητα 1*** κατά την οποία δόθηκαν ***σχήματα με εμφανή διαχωρισμό επιπέδων*** τα παιδιά κατάφεραν να υπολογίσουν τη μέτρηση του όγκου των σχημάτων μη αντιμετωπίζοντας κάποια ιδιαίτερη δυσκολία αφού σημειώθηκε ποσοστό επιτυχίας **79,4%.** Στη ***Δραστηριότητα 2α,*** όταν για πρώτη φορά ζητήθηκε η μέτρηση του όγκου σχήματος στη ***φυσική του μορφή***, δηλαδή χωρίς διαχωρισμό επιπέδων, τα παιδιά αντιμετώπισαν μία δυσκολία πάνω σε αυτό, πράγμα το οποίο είναι εμφανές και από το ποσοστό επιτυχίας που σημειώθηκε στη δοκιμασία αυτή (**61,8%**). Το **38,2%** των παιδιών επιχείρησαν να χρησιμοποιήσουν άλλη μέθοδο για τον υπολογισμό του όγκου χωρίς όμως να οδηγηθούν σε ορθή μέτρηση και αποτελέσματα. Ειδικότερα τα παιδιά επιχείρησαν να σχεδιάσουν από μόνα τους τα επίπεδα και στη συνέχεια να προβούν στη μέτρηση των κυβικών εκατοστών ένα προς ένα, πράγμα το οποίο δηλώνει ότι δεν έχουν κατανοήσει επαρκώς τη δομή του σχήματος και ειδικότερα ότι αφορά την πραγματική προσέγγιση για τον υπολογισμό του όγκου δεδομένης της πληροφορίας των διαστάσεων του σχήματος που αναγράφονταν αριθμητικά.

Στη ***Δραστηριότητα 2β,*** όταν δόθηκαν τα άδεια κουτιά προς υπολογισμό του όγκου, τα οποία όμως είχαν ***εμφανή εξωτερικό διαχωρισμό επιπέδων*** στην πρώτη περίπτωση και ***εμφανή ορισμένο πλήθος κύβων*** στη δεύτερη, τα παιδιά σημείωσαν μικρή άνοδο (**64,7%**) και καλύτερη κατανόηση της έννοιας και της δομής των σχημάτων. Εξακολουθεί παρ' όλα αυτά να σημειώνεται μεγάλο ποσοστό παιδιών (**35,2%**) που έχει χρησιμοποιήσει άλλη μέθοδο υπολογισμού χωρίς να πραγματοποιήσει ορθούς υπολογισμούς. Αυτό μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι τα άδεια κουτιά αφενός είχαν εξωτερικό διαχωρισμό επιπέδων αφετέρου η επάνω πλευρά τους δεν έδινε περαιτέρω πληροφορίες και παρουσιαζόταν ως κενή με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί προβληματισμός σχετικά με την κατανόηση της δομής. Επιπλέον στη β΄ περίπτωση το άδειο κουτί που δινόταν περιείχε μονάχα τη μία σειρά και τη μία στήλη συμπληρωμένη με κύβους γεγονός το οποίο οδήγησε τα παιδιά σε λανθασμένη αντίληψη της κατασκευής.

Εν τέλει στη ***Δραστηριότητα 3*** όπου δίνεται για δεύτερη φορά μέσα στο τεστ σχήμα στη ***φυσική του μορφή χωρίς διαχωρισμό γραμμών και στηλών*** τα παιδιά ανταποκρίθηκαν καλύτερα από τη ***Δραστηριότητα 2*** σε ότι αφορά τον υπολογισμό όγκου σε φυσική μορφή αφού σημείωσαν ποσοστό επιτυχίας **76,5% και άνοδο 14,7%.** Συμπερασματικά παρατηρείται μικρή βελτίωση στην επίδοση των παιδιών όταν έχουν αντιμετωπίσει παρόμοιο πρόβλημα στην αρχή του τεστ και καλούνται να το επανεξετάσουν στο τέλος.

Επιπλέον έπειτα από διεξαγωγή ελέγχου X^2 του Pearson παραθέτουμε τις αντίστοιχες τιμές των επιπέδων σημαντικότητας p-value που προκύπτουν ώστε να οδηγηθούμε στην αποδοχή ή απόρριψη της μηδενικής μας υπόθεσης προκειμένου να εξεταστεί αν οι απαντήσεις που έχουν δοθεί στο σύνολο των δραστηριοτήτων εξαρτώνται ή όχι από το φύλο των μαθητών. Με άλλα λόγια τίθεται το ερώτημα αν το φύλο σχετίζεται με την ορθότητα των απαντήσεων.

Στην ουσία παρατηρούμε ότι γενικά η τιμή των X^2, p-value κυμαίνεται σε υψηλότερα επίπεδα από το επίπεδο σημαντικότητας 0,05 με αποτέλεσμα να μην είμαστε σε θέση να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση και να αποδεχθούμε ότι ***δεν παρατηρείται στατιστικά σημαντική διαφορά*** στον τρόπο που υπολογίζουν τον όγκο του κύβου και του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου τα αγόρια συγκριτικά με αυτήν των κοριτσιών. Παρ’ όλα αυτά παρατηρείται οριακά σημαντική διαφορά ότι αφορά τον τρόπο υπολογισμού όγκου των σχημάτων με μερικό διαχωρισμό στηλών και γραμμών στη ***Δραστηριότητα 2β,*** καθώς η τιμή του X^2 (4,34)=9,324, p-value-0,053. Πράγματι αν ανατρέξουμε σε έναν από τους παραπάνω πίνακες που έχουμε παραθέσει αναλυτικά τα αποτελέσματα κάθε δραστηριότητας βάσει φύλου θα παρατηρήσουμε ότι η Δραστηριότητα 3 είναι αυτή που παρουσιάζει συγκριτικά με τις άλλες τη μεγαλύτερη διαφορά στα ποσοστά ορθών απαντήσεων ανάμεσα στα δύο φύλα και ειδικότερα κυμαίνεται στο **20,6% επιτυχών απαντήσεων για τα αγόρια και αντίστοιχα 44,1% ορθών απαντήσεων που έχουν δοθεί από τα κορίτσια.**

Σε γενικές γραμμές όμως ***δεν υπάρχει σημαντική διαφορά*** στατιστικά στις ορθές απαντήσεις που έχουν δοθεί από τα αγόρια συγκριτικά με αυτή των κοριτσιών, πράγμα το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει διαφορά στις επιδόσεις τους ως προς την αντίληψη και τον υπολογισμό του όγκου.

Κεφάλαιο έκτο: Συζήτηση

Οι απαντήσεις των παιδιών στις εργασίες μέτρησης όγκου και η κωδικοποίηση αυτών βασίζεται στα δεδομένα που έχουν ληφθεί από το 3^{ο} και 8^{ο} Δημοτικό Σχολείο Χίου. Λαμβάνοντας υπόψιν τις βασικές μεθόδους που έχουν χρησιμοποιηθεί από τα παιδιά κατά το 1^{ο} και 2^{ο} ερευνητικό ερώτημα που αφορά τον τρόπο κατανόησης της έννοιας του όγκου και τον τρόπο υπολογισμού του και ειδικότερα στη ***Δραστηριότητα 1***, **Μέθοδος 3x4x3, 2x3x4** παρατηρούμε ότι αυτά δεσμεύονται από τις ορατές πτυχές του αντικειμένου καθώς υπάρχει εμφανής εξωτερικός διαχωρισμός των επιπέδων και γίνεται αντιληπτό περισσότερο ως δισδιάστατη κατασκευή και λιγότερο ως κατασκευή που καταλαμβάνει κάποιο χώρο. Παρατηρείται μία σύνδεση με το 1^{ο} επίπεδο ***οπτικοποίησης ή αναγνώρισης*** της θεωρίας Van Hiele κατά την οποία οι μαθητές αντιλαμβάνονται περισσότερο τα σχήματα ως οπτικές οντότητες. Το σύνολο των παιδιών που έδωσαν ορθή απάντηση ήταν Ν=27 από τα 34 που αποτελούσαν το συνολικό δείγμα, πράγμα το οποίο αποδεικνύει ότι η κατανόηση από πλευράς τους τουλάχιστον ότι αφορά το κομμάτι της μαθηματικής προσέγγισης ήταν αρκετά ικανοποιητικό.

Εν συνεχεία ότι αφορά τις βασικές μεθόδους που έχουν χρησιμοποιηθεί από τα παιδιά κατά το 1^{ο}, 2^{ο}, 3^{ο} ερευνητικό ερώτημα που αφορά τον τρόπο κατανόησης της έννοιας του όγκου και τον τρόπο υπολογισμού του αλλά και τις δυσκολίες ου αντιμετωπίζουν μέσα από τη ***Δραστηριότητα 2α***, παρατηρείται ότι τα παιδιά εξακολουθούν να κάνουν προσπάθεια καταμέτρησης των κυβικών εκατοστών ξεχωριστά από το να επιχειρήσουν να αντιληφθούν τον όγκο στο σύνολό του, πράγμα το οποίο γίνεται εμφανές και από την πρώτη περίπτωση υπολογισμού όγκου σε φυσική μορφή στην οποία σημειώνονται μόνο οι διαστάσεις αριθμητικά. Ειδικότερα τα παιδιά αντιμετωπίζουν μία δυσκολία στην κατανόηση του σχήματος και τον όγκο που αυτό καταλαμβάνει στο χώρο. Παρατηρείται επίσης μία σύνδεση με το 1ο επίπεδο οπτικοποίησης ή αναγνώρισης της θεωρίας Van Hiele κατά την οποία οι μαθητές αντιλαμβάνονται περισσότερο τα σχήματα ως οπτικές οντότητες συνδυαστικά εν μέρει με το 2^{ο} επίπεδο της θεωρίας που σχετίζεται με την ανάλυση και ειδικότερα την αναγνώριση των σχημάτων βάσει των ιδιοτήτων τους. Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη ενότητα, οι επίπεδες αναπαραστάσεις αποτελούν την πιο συχνή μορφή αναπαράστασης γεωμετρικών αντικειμένων οι οποίες προσφέρουν στον αναγνώστη τις περισσότερο δυνατές πληροφορίες για τα χαρακτηριστικά των στερεών, αλλά είναι πολύ δύσκολο οι αναγνώστες να τις επεξεργαστούν νοητικά (Gaulin, 1985· Gutierrez, 1992). Σύμφωνα με τον Mitchelmore (1980) οι μαθητές αλλά και οι ενήλικες αντιμετωπίζουν σοβαρά προβλήματα στην αναπαράσταση τρισδιάστατων σχημάτων όπως η δυσκολία αναπαράστασης σε ένα σχέδιο παράλληλων ευθειών στο χώρο. Κατ' αυτόν τον τρόπο οι αντίστοιχες ορθές απαντήσεις που δόθηκαν από 21 παιδιά σε σύνολο 34 που αποτελούσαν το δείγμα, επιβεβαιώνουν τις παραπάνω τοποθετήσεις καθώς και ότι η ίδια η μαθηματική κατανόηση παρουσίασε μία φθίνουσα μικρή πορεία.

Λαμβάνοντας υπόψιν τις βασικές μεθόδους που έχουν χρησιμοποιηθεί από τα παιδιά κατά το 1^{ο}, 2^{ο}, 3^{ο} ερευνητικό ερώτημα που αφορά τον τρόπο κατανόησης της έννοιας του όγκου, τον τρόπο υπολογισμού του αλλά και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν μέσα από τη ***Δραστηριότητα 2β***, όπου δίνονται άδεια κουτιά με μερικό εξωτερικό διαχωρισμό επιπέδων, παρατηρείται μία μικρή δυσκολία των παιδιών σε ότι αφορά την αντίληψη του όγκου ενός άδειου κουτιού ενώ στη δεύτερη περίπτωση όπου δίνεται η πρώτη σειρά κύβων που εμπεριέχεται στο κουτί παρατηρήθηκε η τάση των παιδιών να προσπαθούν να καταμετρήσουν και τις κενές θέσεις όπου δεν εμπεριέχονται κύβοι, μία προς μία. Με άλλα λόγια, τα παιδιά που δίνουν τέτοιες απαντήσεις δείχνουν προσπάθεια να αντιληφθούν το χώρο πέρα από τις ορατές οριακές επιφάνειες της κατασκευής αλλά εξακολουθούν να υστερούν στην κατανόηση της δομικής πολυπλοκότητάς της και έτσι αποτυγχάνουν να δώσουν μία ορθή απάντηση ότι αφορά τη μέτρηση του όγκου. Παρατηρείται μία σύνδεση με το 2^{ο} επίπεδο ανάλυσης της θεωρίας Van Hiele κατά την οποία οι μαθητές επιχειρούν να καταμετρήσουν, να σχεδιάσουν και να παρατηρούν εκτενέστερα τα σχήματα. Αυτό επιβεβαιώνεται μέσα από τοποθέτηση που προαναφέρθηκε νωρίτερα, η εύρεση του αριθμού των μοναδιαίων κύβων που μπορούν να χωρέσουν σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο αποτελεί το γνωστικό πλαίσιο που μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τη χωρητικότητα του στερεού και τον τρόπο υπολογισμού του όγκου του (Battista & Clements, 1998α· Geddes & Fortunato, 1993), όμως πρακτικά η ανάπτυξη της ικανότητας αυτής είναι μια δύσκολη διαδικασία και για αυτό οι μαθητές δεν έχουν ικανοποιητικά αποτελέσματα σε τέτοιου είδους προβλήματα (Battista & Clements, 1996· Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1985). Οι αντίστοιχες ορθές απαντήσεις δόθηκαν από N=22 παιδιά από τα 34 που αποτελούσαν το συνολικό δείγμα, πράγμα το οποίο αποδεικνύει ότι η έννοια του όγκου από υπολογιστικής μαθηματικής άποψης εξακολουθεί να δυσκολεύει αρκετά τα παιδιά και σε αυτήν την άσκηση.

Έπειτα έχοντας υπόψιν τις βασικές μεθόδους που έχουν χρησιμοποιηθεί από τα παιδιά κατά το 1ο, 2ο, 3ο ερευνητικό ερώτημα που αφορά τον τρόπο κατανόησης της έννοιας του όγκου, τον τρόπο υπολογισμού του αλλά και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν μέσα από τη ***Δραστηριότητα 3***, με ανάλογο τρόπο παρατηρήθηκε ότι αρχικά υπολογίζεται ο αριθμός των κύβων σε μία σειρά ή μία στήλη και στη συνέχεια πραγματοποιείται διαδοχική προσθήκη ή πολλαπλασιασμός με τον αριθμό των σειρών που οδηγεί στο συνολικό αριθμό των κύβων στην κατασκευή. Η απάντηση που δόθηκε ορθώς από ένα σύνολο παιδιών είναι ότι οι τρεις διαστάσεις της κατασκευής συντονίζονται και επεξεργάζονται ταυτόχρονα και όχι διαδοχικά και ως εκ τούτου ο αριθμός των κύβων προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των τριών διαστάσεων. Παρατηρείται μία σύνδεση με το 1ο επίπεδο ανάλυσης της θεωρίας Van Hiele κατά την οποία οι μαθητές επιχειρούν να καταμετρήσουν, να σχεδιάσουν και να παρατηρούν εκτενέστερα τα σχήματα. Ο μεγαλύτερος αριθμός των παιδιών έδειξαν ικανότητα στον υπολογισμό συγκεκριμένων ποσοτικών αποτελεσμάτων (N=26) και όχι τόσο ποιοτικών ή διαισθητικών όπως θα συνέβαινε στην περίπτωση των σχημάτων όπου δίνεται εκ των προτέρων ο διαχωρισμός των επιπέδων.

Τέλος, αναφορικά με τις βασικές μεθόδους που έχουν χρησιμοποιηθεί από τα παιδιά κατά το 1ο, 2ο, 3ο ερευνητικό ερώτημα που αφορά τον τρόπο κατανόησης της έννοιας του όγκου, τον τρόπο υπολογισμού του αλλά και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν μέσα από τη ***Δραστηριότητα 4***, και τη σύγκριση των όγκων ανάμεσα στα δύο στερεά σχήματα δεν παρατηρήθηκε ιδιαίτερα δυσκολία από πλευράς των παιδιών τα οποία φαίνεται να κατανόησαν την κατανομή του χώρου που καταλαμβάνεται από την κάθε κατασκευή παρά το γεγονός ότι διαθέτουν διαφορετική κατανομή του όγκου. Παρατηρείται μία σύνδεση με το 3ο επίπεδο και 4ο επίπεδο ***άτυπου παραγωγικού συλλογισμού*** και ***παραγωγικού συλλογισμού*** αντίστοιχα της θεωρίας Van Hiele κατά την οποία οι μαθητές αντιλαμβάνονται πλήρως τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τωνβ σχημάτων και είναι σε θέση να το αποδείξουν. Καθώς τα 25 από τα 34 άτομα έδωσαν πέραν της ορθής επιπλέον και τεκμηριωμένη απάντηση υποδηλώνεται ότι υπάρχει σε ικανοποιητικό βαθμό μαθηματική κατανόηση του υπολογισμού του όγκου.

Καθώς προχωράει ασφαλώς ο αριθμός των δραστηριοτήτων αυξάνεται και ο βαθμός δυσκολίας του υπολογισμού των κατασκευών όπως για παράδειγμα τα σχήματα που παρουσιάζονται σε φυσική μορφή. Ο τρόπος υπολογισμού του όγκου από τους μαθητές, σε όλες τις δραστηριότητες, συμβαδίζει με τα ερευνητικά αποτελέσματα των

Olkun (2003) και Battista και Clements (1996) που αναφέρθηκαν και νωρίτερα, και αναφέρουν τρεις διαφορετικούς τρόπους που χρησιμοποιούν οι μαθητές στην κατασκευή ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων από μοναδιαίους κύβους: (α) όταν λαμβάνουν υπόψη μόνο τις έδρες των κύβων που φαίνονται και αγνοούν τους κύβους ή τις έδρες που δεν φαίνονται, (β) όταν αντιλαμβάνονται τις τρισδιάστατες ιδιότητες των κύβων και τη διαδικασία «γεμίσματος» του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου αλλά έχουν πρόβλημα στην οργάνωση των κύβων και στη σφαιρική αντίληψη της δόμησης των κύβων και (γ) όταν αντιλαμβάνονται τους κύβους ως οργανωμένες δομές και μπορούν να υπολογίσουν τον αριθμό των κύβων που χρειάζονται με βάση στρώματα ή στήλες κύβων.

Η μείωση των σωστών απαντήσεων δηλώνει το βαθμό επίγνωσης των παιδιών για τη δομική πολυπλοκότητα της εργασίας. Σε αντίθεση με το ποσοστό των λιγότερων σωστών απαντήσεων όσο προχωράμε στις επόμενες δραστηριότητες, ο αριθμός των μαθητών που χρησιμοποιούν τον τύπο του πολλαπλασιασμού **αυξάνεται σταθερά**, πράγμα το οποίο δηλώνει ότι μερικοί μαθητές απέκτησαν μεγαλύτερη συνειδητοποίηση της δομικής οργάνωσης της κατασκευής και αποφεύγοντας παράλληλα την αφηρημένη μέθοδο υπολογισμού του όγκου.

Κεφάλαιο έβδομο: Συμπεράσματα

Μέσα από την παρούσα μελέτη γίνεται κατανοητό ότι τα παιδιά διαθέτουν συγκεκριμένες δεξιότητες τις οποίες μπορούν να αναπτύξουν ώστε να οδηγηθούν στο σωστό υπολογισμό και την αντίληψη της έννοιας του όγκου. Ενώ στα πρώτα βήματα του τεστ παρατηρήθηκε μία πιο διαισθητική ή λιγότερη πρακτική προσέγγιση όσον αφορά τον όγκο που καταλαμβάνουν οι κατασκευές στο χώρο καθότι αρχικά τα παιδιά φαίνεται να αντιλαμβάνονται περισσότερο την κατασκευή ως σχήμα και λιγότερο ως στερεό που διαθέτει ένα συγκεκριμένο όγκο που θα πρέπει να συνυπολογίζονται ταυτόχρονα οι διαστάσεις του. Το συγκεκριμένο θέμα φαίνεται ότι επιβεβαιώνεται μέσα από τα ευρήματά μας και από τις προσεγγίσεις που έχουν αναφερθεί νωρίτερα. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρθηκε το μονοδομικό με βάση το μοντέλο SOLO, σύμφωνα με τη θεωρητική προσέγγιση που διατυπώθηκε στις πρώτες ενότητες που συνδέονται τόσο με το $1^{ο}$ ερευνητικό ερώτημα και την ευρύτερη έννοια κατανόησης του όγκου όσο και με το $2^{ο}$ ερώτημα αναφορικά με τους τρόπους υπολογισμού του, όπου οι μαθητές μετρούν τους ορατούς κύβους και δεν μπορούν να χρησιμοποιήσουν μια οργανωμένη στρατηγική για τους μη ορατούς κύβους και έπειτα έγινε αναφορά στο πολυδομικό με βάση το μοντέλο SOLO όπου οι μαθητές οργανώνουν τον τρόπο που μετρούν τους κύβους ομαδοποιώντας τους κύβους σε γραμμές, στήλες ή στρώματα (Collis & CampbellM 1986, Battista & Clements, 1998α). Σύμφωνα με το πρώτο μοντέλο SOLO κινήθηκε η πλειοψηφία των μαθητών στο $2^{ο}$ και $3^{ο}$ ερευνητικό ερώτημα που δίνουν βάση στον τρόπο υπολογισμού του όγκου αλλά και στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές μέσα από τη Δραστηριότητα 1, όπου υπήρχε εμφανής διαχωρισμός επιπέδων, το οποία συνεχίστηκε και μέσα από τη Δραστηριότητα 2α όπου στις πρώτες μορφές των δοθέντων κύβων υπήρχε εμφανής διαχωρισμός επιπέδων και στη συνέχεια μέσα από τη Δραστηριότητα 2β παρουσιάστηκαν δυσκολίες αντίληψης ότι αφορά το πλήθος των κύβων που μπορούσαν να περιέχονται στα άδεια κουτιά ενώ ταυτόχρονα γινόταν καταμέτρηση μόνο των ορατών πλευρών των ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων. Βάσει του δεύτερου μοντέλου SOLO οι μαθητές κινήθηκαν τόσο στο δεύτερο τμήμα της Δραστηριότητας 2β όπου κλήθηκαν να μετρήσουν το πλήθος των κύβων έχοντας ως δεδομένη την ύπαρξη κάποιων από αυτούς κατά μήκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου όσο και στη Δραστηριότητα 3 όπου δινόταν ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο στη φυσική του μορφή έχοντας ως δεδομένο μόνο τον αριθμό των διαστάσεων. Οι περιορισμοί οι οποίοι ενδεχομένως υπάρχουν υπολογίζονται εν γένει στις λανθασμένες απαντήσεις οι οποίες δεν ήταν εφικτό να αναφερθούν και να ταξινομηθούν ως μέθοδοι υπολογισμού καθώς δεν υπήρχε μία συνοχή ή ένα συγκεκριμένο αριθμητικό αποτέλεσμα. Στις περισσότερες περιπτώσεις τα παιδιά επιχείρησαν να καταμετρήσουν τους κύβους υπολογίζοντας μόνο τις ορατές δοθείσες πλευρές ή να υπολογίσουν τον όγκο σχεδιάζοντας γραμμές ή στήλες μην ακολουθώντας το πρότυπο κατανομής των δοθέντων κύβων. Επίσης μέσα από τις απαντήσεις γίνονται αντιληπτά τα σημεία που διαθέτουν περιθώρια βελτίωσης τόσο από την πλευρά των μαθητών όσο και από τη διδασκαλία μέσα από την οποία θα πρέπει να δίνονται οι κατάλληλες κατευθυντήριες γραμμές για την επαρκή ανάπτυξη των δεξιοτήτων των παιδιών.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Battista, M. and Borrow, C. (1997). Shape Makers: A computer microworld for promoting dynamic imagery in support of geometric reasoning. *Proceedings of the Nineteenth Annual Meeting, North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Volume 2, October 18–21, 1997, pp. 571–578.

Battista, M. T. (2007).The development of geometric and spatial thinking.In Lester, F. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). NCTM. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Battista, M. T. (2008). Representations and cognitive objects in modern school geometry. In G.W.Blume & M.K.Heid (Eds.). *Research on Technology and the teaching and learning of mathematics: Vol.2.Cases and Perspectives*.Charlotte, NC: Information Age.

Battista, M.T. (1999). The mathematical miseducation of America's youth: Ignoring research and scientific study in education. *Phi Delta Kappan*, 80 (6), 425-433.

Battista, M.T. (2004). Applying cognition-based assessment to elementary school students' development of understanding of area and volume measurement. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 185-204.

Bauersfeld, H. (1995). The structuring of the structures: development and function of mathematizing as a social practice. In L. Steffe and J. Gale (Ed.), *Constructivism in Education*, pp. 137-158. LEA.

Belfort, E. & Guimaraes, L. C. 2004. Teacher‟s Practices and Dynamic Geometry. *Proceeding of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen-Norway 2: 503-510.

Bell, A.W.: (1976a) *The Learning of General Mathematical Strategies* (Doctoral Dissertation), Shell Center for Mathematical Education, Nottingham (U.K)

Bell, A.W.: (1976b) A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7(1), 23-40.*

Ben-Haim, D., Lappan, G. & Houang, R.: (1985), ‘Visualising rectangular solids made out of small cubes: Analysing and effecting student's performance’, Educational Studies in Mathematics, 16, 389–409.

Biggs, J. & Collis, K. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligent behaviour.In H. Rowe (Ed.), *Intelligence, Reconceptualization and Measurement*. New Jersey.Laurence Erlbaum Assoc, 37, 468–475.

Biggs, J., & Collis, K. (1982). *Evaluating the Quality of Learning: the SOLO Taxonomy*.New York: Academic Press.

Blaxter, L. Hughes, C. & Tight, M. (Eds.). (2001). *How to research* (2nd ed.). Buckingham, UK: Open University Press.

Bowers & Stephens, (2011). Using technology to explore mathematical relationships: a framework for orienting mathematics courses for prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education* , 14(4), 285-304

Brown, A.L. .(2002). Design Experiments: Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Intervention in Classroom Settings. *The Journal of the Learning Science,* 2(2), 141- 178.

Brown, M., Hart, K. and Kuchemann, D.: (1984), *Chelsea Diagnostic Mathematics Tests, Measurement*. NFER-NELSON.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17,* 31-48.

Carr, W. & Kemmis, S. (1986) *Becoming Critical: education, knowledge and action research*. Lewes, Falmer.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. (2004b). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *The 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp 215-222). Bergen, Norway.

Christou, C., Pittalis, M., Mousoulides, N., & Jones, K. (2005). Developing 3D dynamic geometry software: Theoretical perspectives on design. In F. Olivero & R.

Sutherland (Eds.), *Proceedings of the 7th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (Vol.1, pp. 69-77). Bristol, UK: University of Bristol.

Clements, D. & Sarama, J. (2002) *Effects of a Preschool Mathematics Curriculum*. Research on the NSF-funded Building Blocks Project.

Clements, D. & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6(2),* 81-89.

Clements, D. & Sarama, J. (2007). *Building Blocks- SRA Real Math, Grade PreK. Colombus,* OH: SRA/McGraw-Hill.

Clements, D. H. (2002b). Linking research and curriculum development. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 599-630). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial Reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Clements, D. H., Battista, M. T. (1990) "Constructivist Learning and Teaching." *Arithmetic Teacher* 38 (September 1990), 34-35.

Clements, D. H., Battista, M. T., & Sarama, J. (Eds.). (2001). *Logo and geometry*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Clements, D., Wilson, D., & Sarama, J. (2004). Young children's composition of geometric figures: A learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6(2),* 163-184.

Dubinsky, E. & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton (Ed). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*. New ICMI Study Series, Vol. 7 (pp. 273-280). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (1994). A theory and practice of learning college mathematics. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp.221-243), Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 233-261.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education*: Monograph Number 3.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (Eds). (1984). *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele.* Brooklyn: Brooklyn College. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 287 697).

Gutierrez, A. & Jaime, A. (1987). Study of the characteristics of the Van Hiele Levels. In J.Bergeron, R. Hershkowitz & C. Kieran (Eds.) *Proceedings of the 11th InternationalConference of PME* (Vol. 3, pp. 131-137), Montreal, Canada: Authors.

Mason, J. & Pimm, D. (1984); Generic examples: seeing the general in the particular; in Educational Studies in Mathematics 15, p.277-289, D. Reidel Publishing Company: Dordrecht, the Netherlands.

Moritz, J. B. (1998). Observing students learning from students. In S. Groves, B. Jane, I. Robottom, & R. Tytler (Eds.), *Contemporary Approaches to Research in Mathematics, Science, Health and Environmental Education 1997* (pp. 160-165). Geelong, VIC: Deakin University.

Pratt, D & Ainley, J. (1997): The Design of Activities for the Abstraction of Geometric Construction. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 1(3).

Saenz-Ludlow, A., & Athanasopoulou, A. (2008). The GSP, as a technical-symbolic tool mediating both geometric conceptualizations and communication. In L. Radford, G. Schubring, and F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture*, 195-214. Rottendam: Sense Publishers.

Voulgaris, S., & Evangelidou, A. (2004). Volume Conception in late primary school children in Cyprus.

White, P., & Mitchelmore, M. C. (2010) Teaching for abstraction: A model. *Mathematical Thinking and Learning*. 12(3), 205-226.

Αποστολάκης Ε., Παναγοπούλου, Ε., Σάββας, Σ., Τσαγλιώτης, Ν., Μακρή, Β., Πανταζής, Γ., Πετρέα, Κ., Σωτηρίου, Σ., Τόλιας, Β., Τσαγκογέωργα, Α., & Καλκάνης, Γ. (2009). Φυσικά Δημοτικού: Ερευνώ και Ανακαλύπτω (Τετράδιο Εργασιών). Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Απόστολος Δ. Μπατσίδης 2014, Διδακτικές Σημειώσεις-Στατιστική Ανάλυση Δεδομένων με το SPSS.

Δανίλη, Ε., & Χρήστου, Γ. (2011). Ελέγχοντας την κατανόηση των εννοιών μάζας, όγκου και πυκνότητας μέσω ερωτήσεων πλέγματος σε μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου. Διδασκαλία των Φυσικών Επιστημών: Έρευνα και Πράξη, Τομ. 2011, (σελ. 18-27).

Μπαμπινιώτης Γ., Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας. Όγκος. Κέντρο Λεξικολογίας, (σελ. 1.233). Αθήνα 2012 (τέταρτη έκδοση).

Παράρτημα Ι

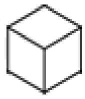
ΔΟΚΙΜΙΟ 1

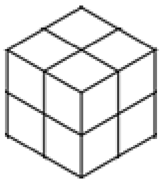
Όνομα: .... Τάξη: ....

Αρ. στον κατάλογο: .... Σχολείο: ....

Φύλο (βάλε √): Αγόρι □ Κορίτσι: □

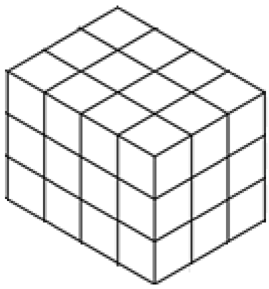
Δραστηριότητα 1: Γεμίσματα με κυβάκια

Το στερεό Α περιλαμβάνει 8 κύβους (χωρίς κενά), όπως αυτόν: 



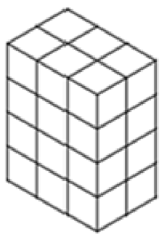
στερεό Α

α) Μπορείς να γράψεις πόσους κύβους (χωρίς να μείνουν κενά) περιλαμβάνουν τα στερεά Β και Γ;



στερεό Β

Το στερεό **Β**, περιλαμβάνει .... μικρούς κύβους.



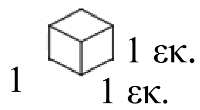
στερεό Γ

Το στερεό **Γ**, περιλαμβάνει .... μικρούς κύβους.

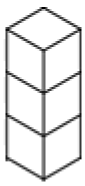
Δραστηριότητα 2: Γεμίσματα κυβικά εκατοστά

Το στερεό Α είναι ένα κυβικό εκατοστό (κάθε ακμή του είναι 1 εκατοστό).

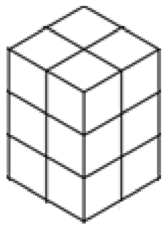
στερεό Α



α) Μπορείς να βρεις πόσα κυβικά εκατοστά είναι τα στερεά Β και Γ;



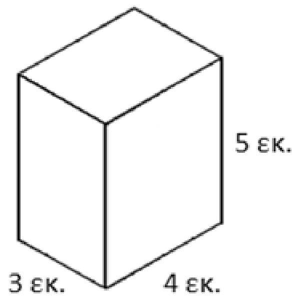
στερεό Β



στερεό Γ

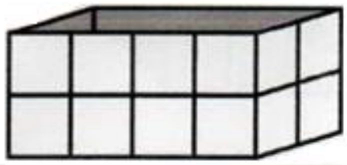
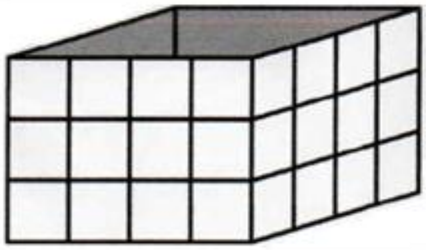
Στερεό **Β**: .... κυβικά εκατοστά Στερεό **Γ**: .... κυβικά εκατοστά

β) Πόσα κυβικά εκατοστά είναι το στερεό Δ;



στερεό Δ

Στερεό **Δ**: .... κυβικά εκατοστά α) Μπορείς να συμπληρώσεις στη δεύτερη στήλη πόσοι κύβοι γεμίζουν τα παρακάτω κουτιά.

κιβώτια	**Αριθμός κύβων**
	
	

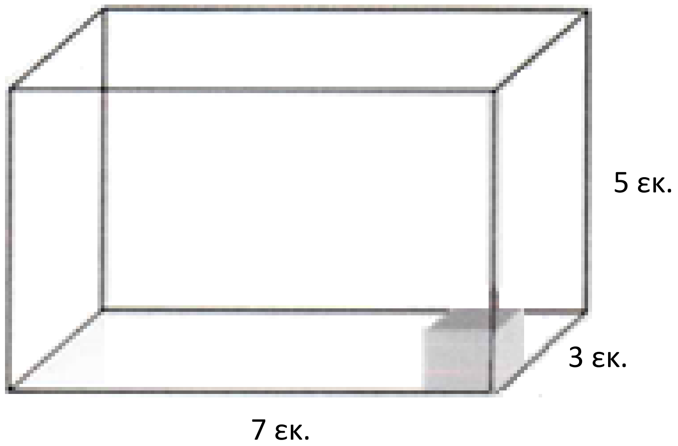
β) Μπορείς να βρεις πόσοι κύβοι συνολικά χωρούν μέσα στο πιο κάτω κιβώτιο; (χωρίς να μείνουν κενά ενδιάμεσα).

Δοκίμασε να εξηγήσεις πώς το βρήκες:

Δραστηριότητα 3: Υπολογισμός όγκου με κυβικά εκατοστά

Στο σχήμα που ακολουθεί ο μικρός κύβος είναι 1 κυβικό εκατοστό.

Πόσα κυβικά εκατοστά χωράνε στο κιβώτιο;



Εξήγησε πώς το βρήκες.

____

____

____

____

____

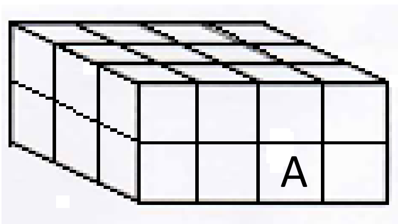
Χωράνε .... κυβικά εκατοστά

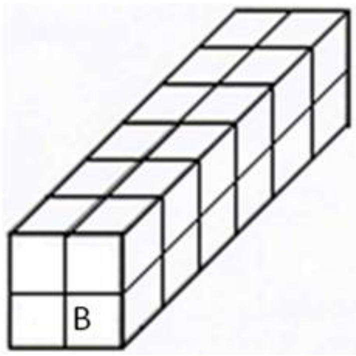
Δραστηριότητα 4: Σύγκριση όγκων

Έχεις 24 κύβους που χωράνε **ακριβώς** (χωρίς κενά) στο στερεό Α.

Οι ίδιοι 24 κύβοι χωράνε **ακριβώς** και στο στερεό Β.

Τι συμπέρασμα βγάζεις (κάνε μία επιλογή);





α) Το στερεό Α έχει περισσότερο όγκο. ....

β) Το στερεό Β έχει περισσότερο όγκο. ....

γ) Τα στερεά Α και Β έχουν τον ίδιο όγκο. ....

δ) Δεν μπορείς να πεις εάν κάποιο έχει περισσότερο όγκο ή όχι. ....

Δοκίμασε να εξηγήσεις την απάντηση:

____

____